

SAÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ ARASINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. $y = c_1x^2 + c_2e^{-x}$ eğrisini çözüm kabul eden en düşük basamaktan diferensiyel denklemi elde ediniz. Elde ettiğiniz denklemi mertebe, derece ve lineerlik yönünden inceleyiniz.
2. $x(1-xy^2)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.
3. $y' = p$ olmak üzere $p^3 + 3xp - 3y = 0$ denkleminin çözümlerini bulunuz.
4. Karakteristik denkleminin kökleri $0, 0, -2 \mp i, 2 \mp i, \sqrt{2}, \mp 2i, 3, 3, 3$ olan sabit katsayılı homojen diferensiyel denklemin genel çözümünü yazınız.

SÜRE: 70 DAKİKADIR.

BAŞARILAR DİLERİZ

İnsaat

$$1) y = C_1 x^2 + C_2 e^{-x} \quad (1) \quad C_1 = \frac{y' + y''}{2(x+1)}$$

$$y' = 2C_1 x - C_2 e^{-x} \quad (2)$$

$$y'' = 2C_1 + C_2 e^{-x} \quad (3) \quad C_2 e^{-x} = \frac{xy'' - y'}{x+1}$$

C_1 ve $C_2 e^{-x}$ değerleri (1) de yerine yazılırsa

denklemi elde edilir.

Bu denklem 2. mrt, 1. derece ve lineer bir denklemdir.

$$2) x(1-xy^2) \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{2y} x = \frac{1}{2} y x^2 \quad (\text{Bernoulli})$$

$$z = x^{1-2} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dy} \quad \text{ile denklem}$$

lineer denkleme dönüşür.

$$\frac{dz}{dy} - \frac{1}{2y} z = -\frac{1}{2} y$$

$$\lambda = e^{\int -\frac{1}{2y} dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$z = -\frac{1}{3} y^2 + C y^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{x} = -\frac{1}{3} y^2 + C y^{\frac{1}{2}}}$$

$$3) \quad p^3 + 3xp - 3y = 0 \quad y = xp + \frac{1}{3}p^3 \text{ (Clairaut)}$$

x 'e göre türev alalım

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + p^2 \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} [x + p^2] = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{c^3 + 3cx - 3y = 0} \quad \text{Genel Çözüm}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + p^2 = 0 \\ p^3 + 3xp - 3y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}y\right)^{\frac{1}{3}}x = 0} \quad \text{Aykırı Çözüm}$$

$$4) \quad 0, 0, -2 \mp i, -2 \mp i, \sqrt{2}, \mp 2i, 3, 3, 3$$

Temel Çözümler Kümesi

$$\left\{ 1, x, e^{-2x} \cos x, e^{-2x} \sin x, x e^{-2x} \cos x, x e^{-2x} \sin x, e^{\sqrt{2}x}, \cos 2x, \sin 2x, e^{3x}, x e^{3x}, x^2 e^{3x} \right\}$$

$$y_h = C_1 + C_2 x + e^{-2x} \left[(C_3 + C_4 x) \cos x + (C_5 + C_6 x) \sin x \right] + C_7 e^{\sqrt{2}x} + C_8 \cos 2x + C_9 \sin 2x + e^{3x} (C_{10} + C_{11} x + C_{12} x^2)$$