05/08/2019

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM FAKÜLTESİ BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

1. $y''-y'=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2. $(2x+1)y''-(4x+4)y'+4y=0$ denklemi için önce $y=e^{ax}$ şeklinde bir özel çözüm araştırınız. Daha sonra ise bu özel çözüm yardımıyla genel çözümünü bulunuz.

3. $y''+x^2y'-4xy=0$ denkleminin $x=0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

4. $f(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ 2, & x\geq 3\end{cases}$ olmak üzere $\begin{array}{l} y''+y=f(x)\\ y(0)=0,\ y'(0)=0\end{array}$ probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

SÜRE: 80 DAKİKADIR

BAŞARILAR DİLERİZ

$L\{f(x)\}=F(s)$ olmak üzere $g(x)=\begin{cases}0, & x<c\\ f(x-c), & x\geq c\end{cases}$ için $L\{g(x)\}=e^{-cs}F(s)$

$L\{y^{(n)}\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$

1) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$

$r^2 - r = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \quad r_2 = 1$ $\boxed{y_h = c_1 + c_2 e^x}$ 10

$y_p = c_1(x).1 + c_2(x)e^x$

$c_1'.1 + c_2'e^x = 0$ $c_1' = -e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$

$c_1'.0 + c_2'e^x = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ $c_2' = e^x\sqrt{1-e^{2x}}$

$\boxed{c_1 = \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}}$ 5 $\boxed{c_2 = \frac{1}{2}\left[\arcsin e^x + e^x\sqrt{1-e^{2x}}\right]}$ 5

$y_p = \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + \frac{1}{2}e^x\left[\arcsin e^x + e^x\sqrt{1-e^{2x}}\right]$ 5

$y_g = y_h + y_p$

---

2) $(2x+1)y'' - (4x+4)y' + 4y = 0$ $y = e^{ax} \Rightarrow a = 2$

$\boxed{y_1 = e^{2x}}$ 5

$y = e^{2x}.u$ ile 5

$(2x+1)u'' + 4xu' = 0$ $u' = v \quad u'' = v'$ ile

$(2x+1)v' + 4xv = 0$ 5 $\Rightarrow$ $v = c_1(2x+1)e^{-2x}$ 5

$\boxed{u = c_1\int(2x+1)e^{-2x}\,dx + c_2}$

$\boxed{y = e^{2x}.u}$ 5

---

3) $y'' + x^2 y' - 4xy = 0$ $x=0$ adi nokta

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$ 5

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots$$

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots) + (a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 3a_3 x^4 + 4a_4 x^5 + \cdots)$$ 10

$$-(4a_0 x + 4a_1 x^2 + 4a_2 x^3 + \cdots) = 0$$

$$2a_2 + (6a_3 - 4a_0)x + (12a_4 - 3a_1)x^2 + (20a_5 - 2a_2)x^3 + \cdots = 0$$

$$a_2 = 0 \qquad a_3 = \frac{2}{3}a_0 \qquad a_4 = \frac{1}{4}a_1 \qquad a_5 = \frac{1}{10}a_2 = 0 \cdots$$ 5

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{2}{3}a_0 x^3 + \frac{1}{4}a_1 x^4 + \cdots$$

$$= a_0\left(1 + \frac{2}{3}x^3 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4}\right)$$ 5

---

4) $y'' + y = f(x)$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 2, & x \geq 3 \end{cases}$

$$L[y'' + y] = L[f(x)]$$

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s}e^{-3s} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{2}{s(s^2+1)}e^{-3s}}$$ 10

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+1)}e^{-3s}\right\} = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ f(x-3), & x \geq 3 \end{cases}$$ 5

$$f(x) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+1)}\right\} \Rightarrow f(x) = 2 - 2\cos x$$ 5

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 2 - 2\cos(x-3), & x \geq 3 \end{cases}$$ 5

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^{n+1} = 0$$

$n \to n+2 \qquad n \to n-1 \qquad n \to n-1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x - 4a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n-5)a_{n-1}\right]x^n = 0$$

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \qquad 6a_3 - 4a_0 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{2}{3}a_0$$

$$a_{n+2} = -\frac{(n-5)}{(n+1)(n+2)}a_{n-1} \qquad n \geq 2$$

$n=2 \quad a_4 = \frac{3}{12}a_1 = \frac{1}{4}a_1$

$n=3 \quad a_5 = \frac{2}{20}a_2 = \frac{1}{10}a_2 = 0$

$n=4 \quad a_6 = \frac{1}{30}a_3 = \frac{1}{45}a_0$

$n=5 \quad a_7 = 0 \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

$n=6 \quad a_8 = 0 \quad \ldots$

$$y = a_0\left(1 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4}\right)$$

16/05/2018

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM BİLİMLERİ FAKÜLTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

<u>İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.</u>

<u>HER GRUPTAN SADECE 1 (BİR) ADET SORUYU CEVAPLAYINIZ</u>

---

1. $y = xp^2 + p^3$ denkleminin çözümlerini bulunuz. $\left(p = \dfrac{dy}{dx}\right)$

2. $xy' = 2\left(y - \sqrt{xy}\right)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

---

3. $y'' + 4y = \cos ec 2x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. Karakteristik denkleminin kökleri $1, 1, 0, 0, 2 \mp 3i$ olan homojen olmayan sabit katsayılı denkleme ilişkin $f(x)$ fonksiyonu $f(x) = x^2 e^{2x} \cos 3x$ olarak veriliyor. y_p özel çözümünün nasıl seçilmesi gerektiğini belirtiniz. (<u>Katsayıları bulmaya çalışmayınız.</u>)

---

5. $y'' + y' + xy = 0$ denkleminin $x = 0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

6. $$\begin{aligned} &y'' + 2y' + y = 3xe^{-x} \\ &y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{aligned}$$ probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

---

7. $$\begin{aligned} x' &= x - 4y \\ y' &= x + y \end{aligned}$$ sistemini yok etme yöntemi yardımıyla çözünüz.

8. $$\begin{aligned} &x' + y = e^{2t} \\ &y' + x = 0 \\ &x(0) = 0, y(0) = 0 \end{aligned}$$ sisteminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$

SÜRE: 80 DAKİKADIR.

Başarılar Dileriz
İyi Tatiller.

1) $y = xp^2 + p^3$ (Lagrange)

x'e göre türev alalım

$$p = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}$$ 5

$$p - p^2 = (2px + 3p^2)\frac{dp}{dx}$$ $p - p^2 \neq 0$ ol. ur

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}x = \frac{3p}{1-p}$$ (lineer) 5

$$\begin{cases} x = \dfrac{\frac{3}{2}p^2 - p^3 + c}{(1-p)^2} \\ y = xp^2 + p^3 \end{cases}$$

Parametrik gösterim 10

$p - p^2 = 0 \Rightarrow p = 0,\ p = 1$ olup sırasıyla $y = 0$ ve $y = x + 1$ Aykırı çözümlerdir 5

---

2) $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{2\sqrt{x}}{x}y^{\frac{1}{2}}$$ (Bernoulli) $y^{\frac{1}{2}} = u$ ile

10

$$u' - \frac{1}{x}u = -\frac{\sqrt{x}}{x}$$ (lineer) $\lambda = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

$$u = 2\sqrt{x} + cx$$ 10 $\Rightarrow$ $\boxed{y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + cx}$ 5

3) $y'' + 4y = \operatorname{cosec} 2x$ $\qquad r^2 + 4 = 0 \qquad r = \mp 2i$ 5

$$\boxed{y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x}$$ 5

$$y_p = c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \sin 2x$$

$$c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x = 0$$ 5

$$-2c_1' \sin 2x + 2c_2' \cos 2x = \operatorname{cosec} 2x$$

$$c_1' = -\frac{1}{2}$$

$$c_2' = \frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} x \qquad c_2 = \frac{1}{4} \ln \sin 2x$$

$$y_p = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln \sin 2x$$ 5

$$y_g = y_h + y_p$$ 5

4) $1, 1, 0, 0, 2 \mp 3i$ $\qquad f(x) = x^2 e^{2x} \cos 3x$

$$y_h = \underbrace{c_1 e^x + c_2 x e^x}_{5} + \underbrace{c_3 + c_4 x}_{5} + \underbrace{e^{2x} [c_5 \cos 3x + c_6 \sin 3x]}_{5}$$

$$y_p = \underbrace{x(Ax^2 + Bx + C) e^{2x} \cos 3x}_{5} + \underbrace{x(Dx^2 + Ex + F) e^{2x} \sin 3x}_{5}$$

5) $y'' + y' + xy = 0$ $x=0$ adi noktası.

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 5 $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

10

$2a_2 + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2) a_{n+2} + (n+1) a_{n+1} + a_{n-1} \right\} x^n = 0$

$a_2 = -\frac{1}{2} a_1$ $a_{n+2} = - \frac{(n+1) a_{n+1} + a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ 5

$a_3 = \frac{a_1 - a_0}{6}$ $a_4 = \frac{a_0 - 3a_1}{24}$ ---

$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{a_1 - a_0}{6} x^3 + \frac{a_0 - 3a_1}{24} x^4 + \cdots$ 5

$= a_0\left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{3}{24} x^4 + \cdots\right)$

---

6) $y'' + 2y' + y = 3xe^{-x}$ $y(0) = y'(0) = 0$

5 $s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + 2\left[sY(s) - \cancel{y(0)} \right] + Y(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$

$(s^2 + 2s + 1) Y(s) = \frac{3}{(s+1)^2} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{3}{(s+1)^4}}$ 10

$y(x) = L^{-1}\left\{ \frac{3}{(s+1)^4} \right\}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{2} x^3 e^{-x}}$ 10

7) $(D-1)x + 4y = 0$

$(D-1) \,/\, (D-1)y - x = 0$

$4y + (D-1)^2 y = 0 \Rightarrow y'' - 2y' + 5y = 0$ 5

$r^2 - 2r + 5 = 0 \quad (r-1)^2 = -4$ 5 $\quad r - 1 = \mp 2i$, $r = 1 \mp 2i$ 5

$$\boxed{y = e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)}$$

$$\boxed{x = y' - y = e^t[-2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t]}$$ 10

8) $x' + y = e^{2t}$ $\quad x(0) = y(0) = 0$

$y' + x = 0$

$sX(s) - x(0) + Y(s) = \frac{1}{s-2}$ 5

$sY(s) - y(0) + X(s) = 0$

$sX(s) + Y(s) = \frac{1}{s-2}$

$X(s) + sY(s) = 0$

$$\boxed{X(s) = \frac{s}{(s-1)(s+1)(s-2)}}$$ 5

$= -\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{6}\frac{1}{s+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-2}$

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}}$$ 5

$y = e^{2t} - x' = e^{2t} - \left[-\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t}\right]$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t}}$$ 10

31/07/2018

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM BİLİMLERİ FAKÜLTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

1. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2. $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $y''+x^2y'-4xy=0$ denkleminin $x=0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

4. $\begin{array}{l} y''-y'=e^x\cos x \\ y(0)=0,\ y'(0)=0 \end{array}$ başlangıç değer probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$$L\{e^{ax}f(x)\}=F(s-a)$$
$$L\{y^{(n)}\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$$

SÜRE: 80 DAKİKADIR.

Başarılar Dileriz
İyi Tatiller.

1) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ linear

$\lambda = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$ (5)

$e^{x^2} y = \int e^{x^2} 2x e^{-x^2} dx + C$ (5) (5)

$e^{x^2} y = x^2 + C \Rightarrow \boxed{y = x^2 e^{-x^2} + Ce^{-x^2}}$

(10)

2) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$ $\quad r^2 - 4r + 5 = 0$ (5) $r_{1,2} = 2 \mp i$

$\boxed{y_h = e^{2x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x]}$ (5)

$y_p = c_1(x) e^{2x} \cos x + c_2(x) e^{2x} \sin x$ (5)

$c_1' (e^{2x} \cos x) + c_2' (e^{2x} \sin x) = 0$

$c_1' (2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x) + c_2' (2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x) = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

$c_1' = -\dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow c_1 = \ln \cos x$ (5)

$c_2' = 1 \Rightarrow c_2 = x$

$\boxed{y_p = e^{2x} \cos x (\ln \cos x) + e^{2x} \sin x\,(x)}$ (5)

$\boxed{y_g = y_h + y_p}$

3) $y'' + x^2 y' - 4xy = 0 \qquad x = 0$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad 5 \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad 5$

5

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{n-5}{(n+1)(n+2)} a_{n-1}} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$n=0 \qquad a_2 = 0$

$n=1 \qquad a_3 = \frac{2}{3} a_0$

$a_4 = \frac{1}{4} a_1$

$a_5 = 0$

$a_6 = \frac{1}{30} a_3 = \frac{1}{45} a_0 \quad 5$

$a_7 = 0$

$a_8 = 0$

$a_{10} = 0$

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

$= a_0 + a_1 x + \frac{2}{3} a_0 x^3 + \frac{1}{4} a_1 x^4 + \frac{1}{45} a_0 x^6 + \cdots \quad 5$

$$\boxed{y = a_0\left(1 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{45} x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{4}\right)}$$

4) $y'' - y' = e^x \cos x \qquad y(0) = y'(0) = 0$

$$L\{y'' - y'\} = L\{e^x \cos x\}$$

$$s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} - sY(s) + \cancel{y(0)} = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+2)}}$$

$$\frac{1}{s(s^2-2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+2} \qquad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2} \quad C = 1$$

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1/2}{s} + \frac{-1/2\, s + 1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right\} + \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x}$$

15/05/2018

SAÜ BİLGİSAYAR VE BİLİŞİM BİLİMLERİ FAKÜLTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR.

AŞAĞIDAKİ SORULARDAN SADECE BİR (1) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ.

1. $y'+e^x-3y+e^{-x}y^2=0$ Riccati denkleminin bir özel çözümü $y_1=e^x$ olduğuna göre genel çözümünü bulunuz.

2. $p^2x=2yp-3$ denkleminin genel çözümünü ve varsa aykırı çözümünü bulunuz.

AŞAĞIDAKİ SORULARDAN SADECE BİR (1) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ.

3. $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. $x^2y''+xy'+4y=2x\ln x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

---

5. $y''+2xy'+xy=0$ denkleminin $x=0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.

---

6. $f(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ 3, & x\geq 2\end{cases}$ olmak üzere $\begin{array}{c} y''+4y=f(x) \\ y(0)=0, y'(0)=0\end{array}$ probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$L\{f(x)\}=F(s)$ olmak üzere $g(x)=\begin{cases}0, & x<c\\ f(x-c), & x\geq c\end{cases}$ için $L\{g(x)\}=e^{-cs}F(s)$

$L\{y^{(n)}\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$

SÜRE: 80 DAKİKADIR.

Başarılar Dileriz
İyi Tatiller.

1) $y' + e^x - 3y + e^{-x}y^2 = 0$ $\quad y_1 = e^x$

$y = e^x + \frac{1}{u}$ $\quad y' = e^x - \frac{u'}{u^2}$ 5 ile denklem

$u' + u = e^{-x}$ 5 (lineer) denklemine dönüşür.

$\lambda = e^x$ olup $(e^x u)' = 1$ 5 $\Rightarrow$ $\boxed{u = e^{-x}(x+c)}$ 5

$$\boxed{y = e^x + \frac{e^x}{x+c}}$$ 5 Genel Çözüm

---

2) $p^2 x = 2yp - 3$ $\quad y = x\frac{p}{2} + \frac{3}{2p}$ (Lagrange) $(p \neq 0)$

x'e göre türev alalım.

$$p = \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{3}{p^2}\right)$$ 5 $\quad p = 0$ için aykırı çözüm yok 5

$$\frac{dx}{dp} - \frac{1}{p}x = -\frac{3}{p^3}$$ (lineer) 5

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2} + cp \\ y = \frac{x}{2}p + \frac{3}{2p} \end{cases}$$ Genel çözümün parametrik gösterimi 10

3) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^{x}+1}$

$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 2$ 5

$\boxed{y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}}$ 5 $\quad y_p = c_1(x) e^{x} + c_2(x) e^{2x}$

$$\left.\begin{array}{l} c_1' e^{x} + c_2' e^{2x} = 0 \\ c_1' e^{x} + c_2'(2e^{2x}) = \dfrac{e^{2x}}{e^{x}+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1' = -\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1} \\ c_2' = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \end{array}$$ 5 5

$\Rightarrow \boxed{c_1 = -\ln(1+e^{x})} \quad \boxed{c_2 = -\ln(1+e^{-x})}$ 5

$\boxed{y_p = -\ln(1+e^{x})\, e^{x} - \ln(1+e^{-x})\, e^{2x}}$ 5

$\boxed{y_g = y_h + y_p}$

---

4) $x^2 y'' + xy' + 4y = 2x\ln x$ Cauchy-Euler denklem

$x = e^{t}$ ile denklem dönüşür $\quad \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 2te^{t}$ 5

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \mp 2i \quad \boxed{y_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t}$ 5

$y_p = (At+B)e^{t}$ 5 olup $A = \dfrac{2}{5}$ $B = -\dfrac{4}{25}$ olarak bulunur.

$\boxed{y_p = \left(\dfrac{2}{5}t - \dfrac{4}{25}\right)e^{t}}$ 5

$\boxed{y_g = c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x) + \dfrac{2}{5}x\ln x - \dfrac{4}{25}x}$ 5

5) $y'' + 2xy' + xy = 0$ $\qquad x=0$ adi nokta

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$

5

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots$$

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots) + (2a_1 x + 4a_2 x^2 + 6a_3 x^3 + \cdots) +$$
$$+ (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots) = 0$$

$$2a_2 + (6a_3 + 2a_1 + a_0)x + (12a_4 + 4a_2 + a_1)x^2 + (20a_5 + 6a_3 + a_2)x^3 + \cdots = 0$$

5

$$\boxed{a_2 = 0}$$

$$6a_3 + 2a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{6}a_0 - \frac{1}{3}a_1}$$

5

$$12a_4 + 4a_2 + a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_4 = -\frac{1}{12}a_1}$$

$$20a_5 + 6a_3 + a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_5 = \frac{1}{20}a_0 + \frac{1}{10}a_1}$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

5

$$= a_0 + a_1 x + \left(-\frac{1}{6}a_0 - \frac{1}{3}a_1\right)x^3 - \frac{1}{12}a_1 x^4 + \left(\frac{1}{20}a_0 + \frac{1}{10}a_1\right)x^5 + \cdots$$

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \cdots\right)$$

5

3

6) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$ $\quad y'' + 4y = f(x)$

$y(0) = y'(0) = 0$

$$L\{y'' + 4y\} = L\{f(x)\}$$

$$s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + 4Y(s) = \frac{3}{s} e^{-2s}$$

$$(s^2 + 4) Y(s) = \frac{3}{s} e^{-2s} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{3}{s(s^2+4)} e^{-2s}}$$ 10

$$y(x) = L^{-1}\left\{ \frac{3}{s(s^2+4)} e^{-2s} \right\} = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ f(x-2), & x \geq 2 \end{cases}$$ 5

$$f(x) = L^{-1}\left\{ \frac{3}{s(s^2+4)} \right\}$$

$$\frac{3}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}$$ $A = \frac{3}{4}$ $B = \frac{-3}{4}$ $C = 0$ 5

$$f(x) = \frac{1}{4} L^{-1}\left\{ \frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2+4} \right\} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos 2x$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos(2x-4), & x \geq 2 \end{cases}$$ 5

Tarih: 02/01/2020
Süre: 80 dakika.

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

SAÜ Mühendislik Fakültesi Metalurji ve Malzeme Mühendisliği Bölümü
Diferensiyel Denklemler – Yıl Sonu Sınavı

İşlem yapılmadan verilen cevaplar dikkate alınmayacaktır. Başarılar Dileriz.

1. $xy'+y=x^2y^2$ Bernoulli denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y'+\frac{1}{x}y=xy^2$$

$$\boxed{\begin{gathered} y^{-1}=z \\ -y^{-2}y'=z' \end{gathered}}$$ 5

$$y^{-2}y'+\frac{1}{x}y^{-1}=x$$

$$-z'+\frac{1}{x}z=x$$ 5

$$\lambda=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=\frac{1}{x}$$

$$\boxed{z'-\frac{1}{x}z=-x \quad (\text{lineer})}$$

$$\frac{1}{x}z'-\frac{1}{x^2}z=-1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{x}z\right)'=-1}$$ 5

$$\Rightarrow \frac{1}{x}z=-x+C \Rightarrow \boxed{z=-x^2+cx}$$ 5

$z=y^{-1}$ ile

$$\boxed{y^{-1}=cx-x^2}$$ 5

AŞAĞIDAKİ SORULARDAN SADECE BİR (1) TANESİNİ CEVAPLAYINIZ.

2. $x^2y''-3xy'+4y=6x^2\ln x+\frac{6}{x}$ Cauchy-Euler denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2) $x=e^t$ $\quad y'=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$ $\quad y''=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$ ile

denklem $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=6te^{2t}+6e^{-t}}$ 10 ye dönüşür

$r^2-4r+4=0 \Rightarrow r_{1,2}=2$ $\quad \boxed{y_h=(c_1+c_2t)e^{2t}}$ 5

$y_p=t^2(At+B)e^{2t}+ce^{-t}$ ile $\quad \boxed{y_p=t^3e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}}$ 5

$\boxed{y_g=(c_1+c_2t)e^{2t}+t^3e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}}$ 2 $\quad t=\ln x$ ile

$\boxed{y_g=(c_1+c_2\ln x)x^2+x^2(\ln x)^3+\frac{2}{3x}}$ 3

3) $r^2-2r+1=0$ $\quad r_1=r_2=1$ $\quad \boxed{y_h=c_1e^x+c_2xe^x}$ 5

$\boxed{y_p=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x}$ 3

$$\boxed{\begin{aligned} c_1'e^x+c_2'xe^x&=0\\ c_1'e^x+c_2'(e^x+xe^x)&=\frac{e^x}{x^2}\end{aligned}}$$ 5

$\boxed{c_2=-\frac{1}{x}}$ 5

$\boxed{c_1=-\ln x}$

$\boxed{y_p=-e^x-e^x\ln x}$ 2

$\boxed{y_g=c_1e^x+c_2xe^x-e^x-e^x\ln x}$ 5

4. $y'' + y = x^2 + 2$
$y(0) = 1, y'(0) = -1$ probleminin genel çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$\left(L\{y^{(n)}\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0) \right)$

$$L\{y'' + y\} = L\{x^2 + 2\}$$

$$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{-1} + Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{s^4 - s^3 + 2s^2 + 2}{s^3(s^2+1)}}$$ 10

$$\frac{s^4 - s^3 + 2s^2 + 2}{s^3(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+1}$$ 5

$A = B = 0 \quad C = 2 \quad D = 1 \quad E = -1$

$$y(x) = L^{-1}\left\{ \frac{s^4 - s^3 + 2s^2 + 2}{s^3(s^2+1)} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$ 5

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = x^2 + \cos x - \sin x}$$ 5

5. $y''-xy'+2y=0$ denkleminin $x=0$ noktası civarında $\left(y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)$ seri çözümünü bulunuz.

$x=0$ adi nokta olup

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$
$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \cdots$$
$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots$$

5

denklemde yerlerine yazılırsa

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots) - (a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots) +$$
$$+ (2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + \cdots) = 0$$

5

$$(2a_2 + 2a_0) + (6a_3 - a_1 + 2a_1)x + (12a_4 - 2a_2 + 2a_2)x^2 +$$
$$+ (20a_5 - 3a_3 + 2a_3)x^3 + \cdots = 0$$

5

$$a_2 = -a_0$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}a_1$$
$$a_4 = 0$$
$$a_5 = -\frac{1}{120}a_1$$

5

$$y = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{6}a_1 x^3 - \frac{1}{120}a_1 x^5 + \cdots$$

$$\boxed{y = a_0(1-x^2) + a_1\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)}$$

5