Tarih: 01/09/2022
Saat : 10:30-11:40

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

İŞLEM YAPILMADAN VERİLEN CEVAPLAR DİKKATE ALINMAYACAKTIR

1) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{1+x}$ denkleminin genel çözümünü elde ediniz.

$r^2+2r+1=0 \qquad r_{1,2}=-1 \qquad y_h=(c_1+c_2x)e^{-x}$

$y_p = c_1(x)e^{-x}+c_2(x)\,xe^{-x}$

$c_1'e^{-x}+c_2'xe^{-x}=0$

$-c_1'e^{-x}+c_2'(e^{-x}-xe^{-x})=3e^{-x}\sqrt{1+x}$

$c_2'=3\sqrt{1+x} \Rightarrow c_2=2(1+x)^{\frac{3}{2}}$

$c_1'=-3x\sqrt{1+x} \Rightarrow c_1=2(1+x)^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}$

$y_p=e^{-x}\left(2(1+x)^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+2x(1+x)^{\frac{3}{2}}\right)$

$y_g=y_h+y_p$

2) $(x^2+1)y''-2xy'+2y=6(x^2+1)^2$ denkleminin genel çözümünü basamağın indirilmesi metodu yardımıyla elde ediniz.

Denklemde $xy'-y$ kalıbı var $y_1=x$ özel çözüm

$y=ux$ ile denklem

$$u''+\frac{2}{x(x^2+1)}u'=\frac{6(x^2+1)}{x}$$

denklemine indirgenir. $u'=v$ ile

$$v'+\frac{2}{x(x^2+1)}v=\frac{6(x^2+1)}{x} \quad \text{lineer}$$

$$\lambda=e^{\int\frac{2}{x(x^2+1)}dx}$$

$$v=3(x^2+1)+\frac{c_1(x^2+1)}{x^2}$$

$$u=\int\left(3(x^2+1)+\frac{c_1(x^2+1)}{x^2}\right)dx+c$$

$$u=x^3+3x+c_1x-\frac{c_1}{x}+c_2$$

$y=ux$ ile

$$\boxed{y=x^4+3x^2+c_1(x^2-1)+c_2x}$$

elde edilir.

3) $y''+x^2y'-4xy=0$ denkleminin genel çözümünü $x=0$ noktası civarında kuvvet serileri yardımıyla elde ediniz.

$x=0$ adi nokta olup $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ ile

$$2a_2+6a_3x-4a_0x+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{(n+1)(n+2)a_{n+2}+(n-5)a_{n-1}\right\}x^n=0$$

elde edilir.

$2a_2=0$ $\quad$ $6a_3-4a_0=0$ $\quad$ $a_3=\frac{2}{3}a_0$

$$\boxed{a_{n+2}=-\frac{(n-5)}{(n+1)(n+2)}a_{n-1}}$$

$n=2 \Rightarrow a_4=\frac{1}{4}a_1$ $\qquad$ $n=4 \Rightarrow a_6=\frac{1}{45}a_0$

$n=3 \Rightarrow a_5=0$ $\qquad$ $n=5 \Rightarrow a_7=0$

$$\boxed{y=a_0\left(1+\frac{2}{3}x^3+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{x^4}{4}\right)}$$

VEYA $\quad y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots$ ile

$$2a_2+(6a_3-4a_0)x+(12a_4-3a_1)x^2+(20a_5-2a_2)x^3+\cdots=0$$

$a_2=0$ $\quad$ $a_3=\frac{2}{3}a_0$ $\quad$ $a_4=\frac{1}{4}a_1$ $\quad$ $a_5=0$

$$\boxed{y=a_0\left(1+\frac{2}{3}x^3+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{x^4}{4}\right)}$$

4) $\begin{aligned} & y''+2y'+y=3xe^{-x} \\ & y(0)=4,\ y'(0)=2 \end{aligned}$ **Probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.**

$$L\{y^{(n)}\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$$

$$L\{e^{ax}f(x)\}=F(s-a)$$

$L\{y''+2y'+y\}=L\{3xe^{-x}\}$ ile

$$(s^2+2s+1)Y(s)-4s-10=\frac{3}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{4s+10}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}=\frac{4}{s+1}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

$$\Rightarrow y(x)=L^{-1}\left\{\frac{4}{s+1}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x)=4e^{-x}+6xe^{-x}+\frac{1}{2}x^3e^{-x}}$$