Statistik – Methoden zum Mittelwertvergleich von mehreren Gruppen

Einfaktorielle Varianzanalyse

Einfaktorielle Varianzanalyse

- Wir haben bereits ein Werkzeug kennengelernt, mit dem man Stichproben auf ihren Mittelwert untersuchen kann: **t-Test** für unabhängige Stichproben

- Der t-Test kann nur Mittelwerte von zwei Gruppen vergleichen

- Würden wir mit dem t-Test größere Gruppen sukzessiv paarweise untersuchen, würde es auch noch zu einem Fehler kommen, den das folgende Verfahren nicht macht

Einfaktorielle Varianzanalyse

- Die Varianzanalyse (**AN**alysis **O**f **VA**riance: ANOVA) kann dies für 3 und mehr Gruppen gleichzeitig

- Bei der einfaktoriellen Varianzanalyse liegen uns Daten in Gruppen vor

- Bei der Analyse werden wir das nutzen, wir werden aber nur einen Faktor kennen, der für einen möglichen Mittelwertsunterschied verantwortlich ist (Produktion auf unterschiedlichen Maschinen, gibt es Mittelwerts-unterschiede, ist die Wahl der Maschine wichtig)

Einfaktorielle Varianzanalyse

Beispielhafte Fragestellungen

- Unterschiede der Fehleranzahl für 4 verschiedene/gleiche Automobilmodelle
- Unterschiedliche/Gleiche Versetzungsraten aller Schulen der Stadt
- Unterschiedliche/Gleiche Zahlungsmoral 5 verschiedener Kundengruppen

Einfaktorielle Varianzanalyse

Hypothesen der einfachen ANOVA

$\boldsymbol{H_0}$ Es gibt keinen Unterschied zwischen den einzelnen Gruppen für die untersuchte Variable

$\boldsymbol{H_1}$ Es gibt mindestens einen Unterschied zwischen den einzelnen Gruppen für die untersuchte Variable

Wir können also identifizieren, dass es einen Mittelwertunterschied gibt, wo dieser Unterschied genau auftritt sehen wir nicht, d.h. bei welcher Gruppe.
Dies muss durch weitere Tests geklärt werden.

Einfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel

- **Fehleranzahl Automobilmodelle**

$\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{\mu_{Mod\,A} = \mu_{Mod\,B} = \mu_{Mod\,C} = \mu_{Mod\,D}}$

$\boldsymbol{H_1}$: Es gibt mindestens einen Unterschied bei den Mittelwerten

Einfaktorielle Varianzanalyse

Voraussetzungen

- Mindestens intervallskalierte abhängige Variable
- Merkmalsausprägungen müssen unabhängig voneinander sein (falls nicht: ANOVA mit Messwiederholung…)
- Normalverteilung der abhängigen Variable in allen Gruppen
- Gleiche Varianz in allen Gruppen

Einfaktorielle Varianzanalyse

Funktionsprinzip

- Vergleich des Gesamtmittelwertes über alle Gruppen mit den einzelnen Gruppenmittelwerten
- Welcher Mittelwert stellt die vorliegenden Daten besser dar?
- Stellen die Gruppenmittelwerte eine bessere Vorhersage dar und nicht der Gesamtmittelwert, so muss es Unterschiede bei den Gruppenmittelwerten geben
- Ist der Gesamtmittelwert die bessere Vorhersage, so sind die Gruppenmittelwerte gleich

Einfaktorielle Varianzanalyse

Funktionsprinzip

- Betrachtung drei verschiedener Varianzen und Berechnung ihrer Quadratsummen

Gesamtvarianz: Streuung aller Datenpunkte um einen gemeinsamen Mittelwert (Systematischer Einfluss)

Vorhersagevarianz (Modellvarianz): Streuung der Gruppenmittelwerte um den gemeinsamen Mittelwert (Systematische Einflüsse)

Fehlervarianz: Streuung in den einzelnen Gruppen um den jeweiligen Gruppenmittelwert (Unsystematische Einflüsse)

Einfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel

Unter *Beispiel_BK.xlsx* liegen Daten vor, mit denen wir nun durch eine ANOVA gehen

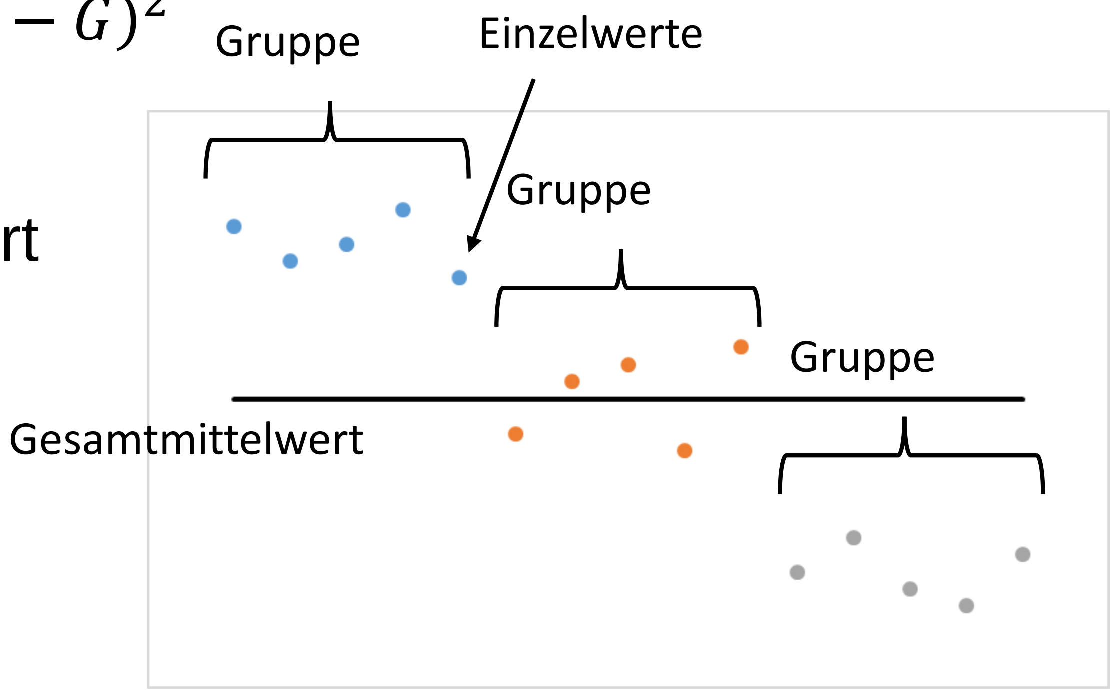
Einfaktorielle Varianzanalyse

Gesamtvarianz SS_{Gesamt} (Streuung der einzelnen Werte um das Gesamtmittel)

$$SS_{gesamt} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{m=1}^{n} (x_{mi} - \bar{G})^2$$

$\bar{G}$ Gesamtmittelwert

x_{mi} Alle Einzelwerte



Einfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel Gesamtvarianz SS_{Gesamt}

$$SS_{gesamt} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{m=1}^{n} (x_{mi} - \bar{G})^2 = 6{,}3579$$

$\bar{G}$ 14,3529

x_{mi} alle Einzelwerte

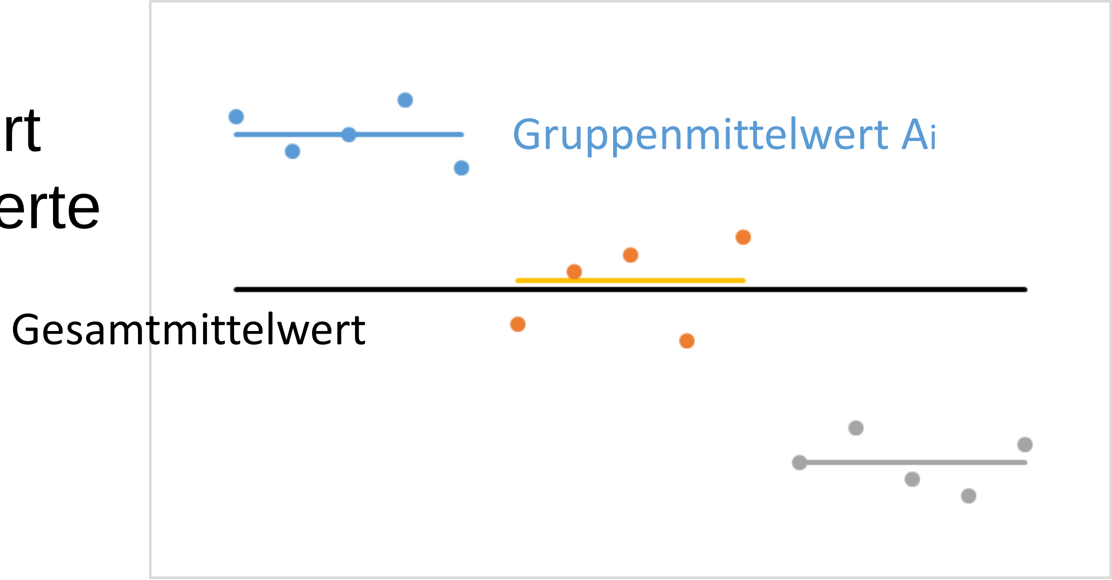
Einfaktorielle Varianzanalyse

Vorhersagevarianz $SS_{zwischen}$ (Streuung der Gruppen-mittelwerte um das Gesamtmittel)

$$SS_{zwischen} = \sum_{i=1}^{p} n_i(\bar{A}_i - \bar{G})^2$$

$\bar{G}$ Gesamtmittelwert

$\bar{A}_i$ Gruppenmittelwerte



Einfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel Vorhersagevarianz $\boldsymbol{SS_{zwischen}}$

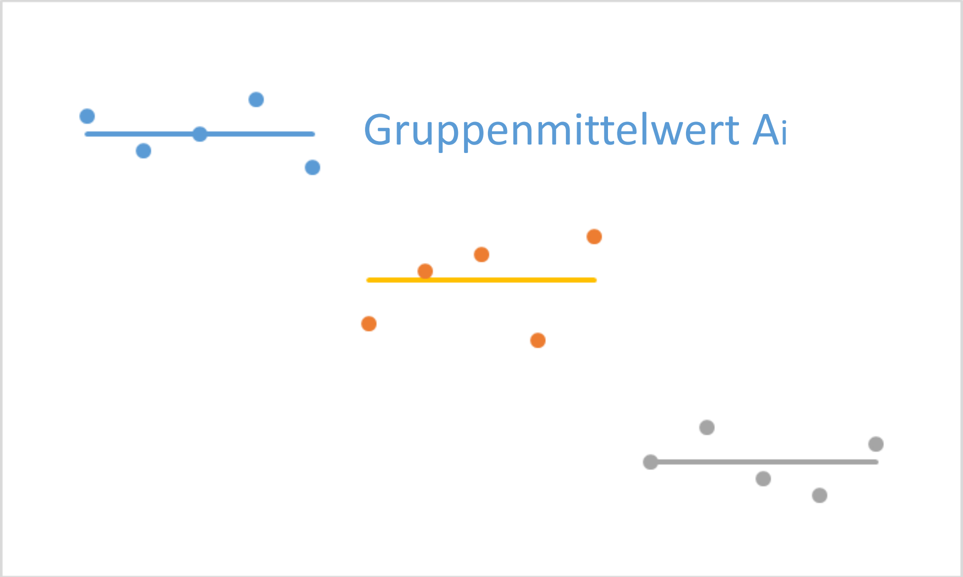
$$SS_{zwischen} = \sum_{i=1}^{p} n_i(\bar{A}_i - \bar{G})^2 = 0{,}5857$$

Einfaktorielle Varianzanalyse

Fehlervarianz $SS_{innerhalb}$ (Streuung der einzelnen Werte um ihren jeweiligen Gruppen-mittelwert)

$$SS_{innerhalb} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{m=1}^{n} (x_{mi} - \bar{A}_i)^2$$

$\bar{A}_i$ Gruppenmittelwerte



Einfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel Fehlervarianz $SS_{innerhalb}$

$$SS_{innerhalb} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{m=1}^{n} (x_{mi} - \bar{A}_i)^2 = 5{,}772$$

Einfaktorielle Varianzanalyse

Es gilt:

$$\boldsymbol{SS_{Gesamt} = SS_{zwischen} + SS_{innerhalb}}$$

$$\boldsymbol{SS_{Gesamt} = 0{,}5857 + 5{,}7722 = 6{,}3579}$$

Einfaktorielle Varianzanalyse

Korrektur einzelner Quadratsummen

Normierung der Quadratsummen, Einfluss von Gruppenanzahl und Gesamtzahl der Werte wird verringert

$$\boldsymbol{MS_{zwischen} = \frac{SS_{zwischen}}{df_{zwischen}} = \frac{SS_{zwischen}}{p-1}}$$ **;** $\boldsymbol{p}$ **:** Anzahl der Gruppen

$$\boldsymbol{MS_{innerhalb} = \frac{SS_{innerhalb}}{df_{innerhalb}} = \frac{SS_{innerhalb}}{N-p}}$$ **;** $\boldsymbol{N}$ **:** Anzahl aller Werte

Einfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel Korrektur einzelner Quadratsummen

$$MS_{zwischen} = \frac{SS_{zwischen}}{df_{zwischen}} = \frac{SS_{zwischen}}{p-1} = \frac{0,5857}{3-1} = 0,2929$$

p Anzahl der Gruppen

$$MS_{innerhalb} = \frac{SS_{innerhalb}}{df_{innerhalb}} = \frac{SS_{innerhalb}}{N-p} = \frac{5,7722}{90-3} = 0,0663$$

N Anzahl aller Werte

Einfaktorielle Varianzanalyse

Prüfstatistik

- Verhältnis von Vorhersagevarianz und Fehlervarianz

$$\boldsymbol{F = \frac{MS_{zwischen}}{MS_{innerhalb}}} \qquad \boldsymbol{\frac{Streuung\ der\ Gruppenmittelwerte}{Streuung\ innerhalb\ der\ Gruppen}}$$

- Je größer der F-Wert, desto größer ist die Streuung zwischen den einzelnen Gruppen im Vergleich zur Fehlervarianz

- Je höher die Streuung zwischen den Gruppen, desto wahrscheinlicher wird die Alternativhypothese

Einfaktorielle Varianzanalyse

- Den kritischen Wert der F-Funktion kann man Tabellenwerken entnehmen, bzw. berechnet ihn R bei der ANOVA

- Der Vergleich von gerechnetem und kritischem Wert führt dann zur Hypothesenwahl

$F > F_{kritisch}$ Wechsel von Nullhypothese zur Alternativhypothese, es gibt mindestens einen Unterschied zwischen den einzelnen Gruppen für die untersuchte Variable

Einfaktorielle Varianzanalyse

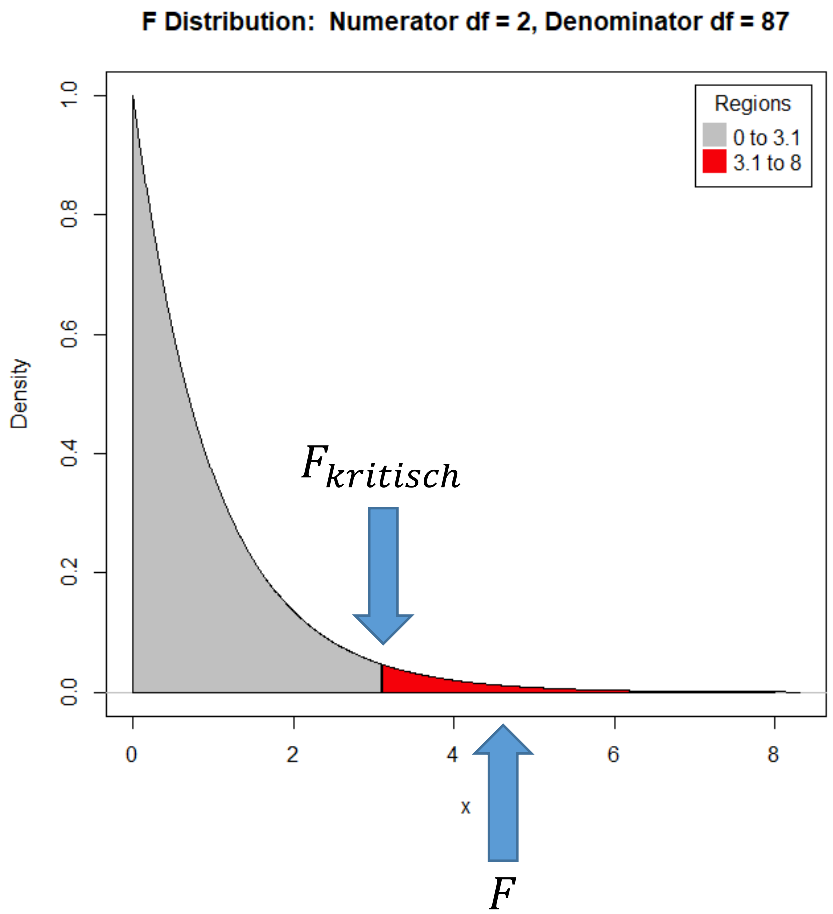
- Die F-Funktion ist tabelliert, auf eine Darstellung wird hier aber verzichtet, da diese Tabellen umfangreicher sind

- Eine Möglichkeit zur Bestimmung des kritischen Wertes bietet Excel

- F.INV.RE

- In der F-Funktion interessiert hier nur eine Seite, α wird also nicht aufgeteilt, des weiteren wird die Anzahl der Freiheitsgrade benötigt

Einfaktorielle Varianzanalyse



Die F-Verteilung für die Beispieldaten

Einfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel Teststatistik

$$\boldsymbol{F = \frac{MS_{zwischen}}{MS_{innerhalb}} = \frac{0,2929}{0,0663} = 4,4178}$$

$$\boldsymbol{F_{kritisch} = 3,1013}$$

$$\boldsymbol{df_{Zähler} = 2}$$
$$\boldsymbol{df_{Nenner} = 87}$$

$\boldsymbol{F > F_{kritisch}}$ Wechsel zur Alternativhypothese, mindestens ein Mittelwert unterscheidet sich signifikant von den andern

Einfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel Rechnung in R

```
Rcmdr>  summary(AnovaModel.1)
            Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
factor       2  0.586 0.29286   4.414 0.0149
Residuals   87  5.772 0.06635
```

Auf der Folgeseite finden Sie die handgerechneten Werte zum Vergleich

Einfaktorielle Varianzanalyse

Beispiel Rechnung in R

$SS_{zwischen} = 0{,}5857$
$MS_{zwischen} = 0{,}2929$
$F = 4{,}4178$
$SS_{innerhalb} = 5{,}772$
$MS_{innerhalb} = 0{,}0663$

Balancierte Varianzanalyse

- Bisher gehen wir von der Annahme aus, dass die Stichprobengröße der einzelnen Gruppen unterschiedlich sein kann
- Bei der Berechnung der MS-Werte (Mean Square) haben wir schon gesehen, dass dort die Stichprobengrößen einfließen
- Unterschiedliche Stichprobengrößen:
  Unbalanciertes Design
- Diese Anordnung hat Nachteile

Balancierte Varianzanalyse

Balanciertes Design

- Die Stichprobengröße ist über alle Gruppen gleich
- Vorteile dieses Herangehens
  - Die Power der ANOVA ist für ein balanciertes Design höher, wir haben bessere Chancen Unterschiede in den Gruppen zu finden
  - Die F-Statistik reagiert weniger empfindlich bei einer Verletzung der Annahme gleicher Varianzen

Balancierte Varianzanalyse

Was macht man bei einem unbalancierten Design?

- Sollten keine einheitlichen Stichprobengrößen vorliegen, die Forderung nach gleichen Varianzen aber erfüllt sein, können wir fortfahren mit der ANOVA; in diesem Fall gilt die ANOVA als sehr robust

- Fehlen nur wenige Werte bis zum balancierten Design, kann man diese Lücken durch Mittelwerte bzw. Medianwerte der jeweiligen Gruppe ersetzen
(Nicht unkritisch)

Balancierte Varianzanalyse

Was macht man bei einem unbalancierten Design?

- Wechsel zu nicht-parametrischen Verfahren (z.B. Kruskal-Wallis)