

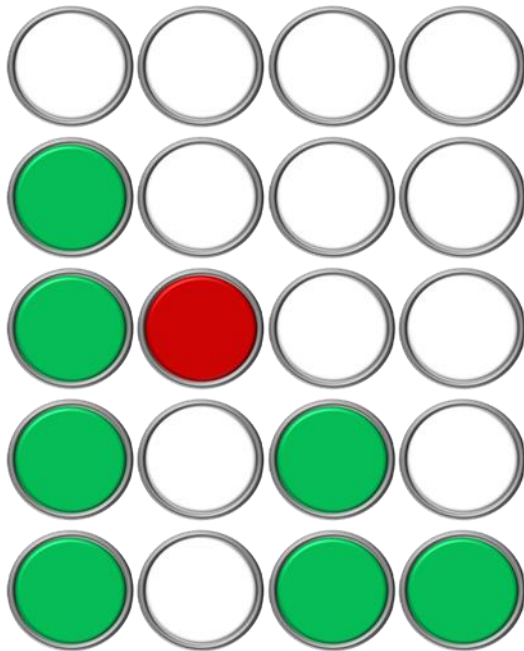
Statistik – Einführung in die Versuchsplanung

Typische Versuchsstrategien – Halte am Sieger fest

- Schrittweise Veränderung aller wichtigen Faktoren
- Hat ein Faktor einen positiven Einfluss auf das Ergebnis, wird die Änderung beibehalten, ansonsten wird sie wieder rückgängig gemacht
- Vorteil: Einfache Versuchsplanung
- Nachteil: Keine Garantie die optimale Lösung zu finden – Lösung hängt möglicherweise von der Reihenfolge der Änderungen ab

DoE

Typische Versuchsstrategien – Halte am Sieger fest



**Positive Veränderung wird
beibehalten**

**Negative Veränderung wird
fallengelassen**

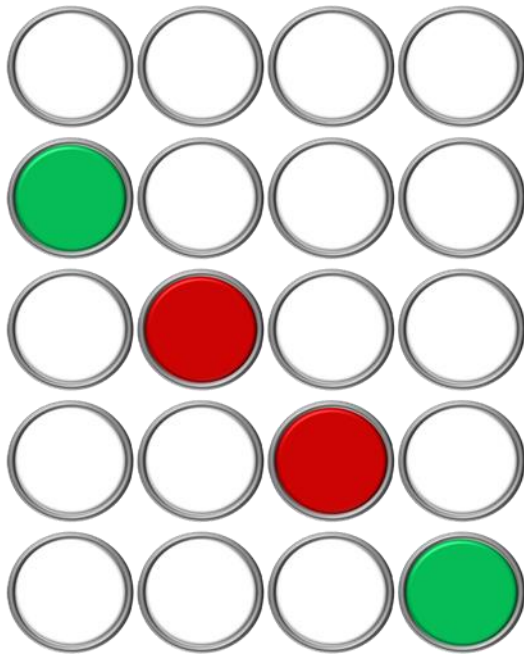
DoE

Typische Versuchsstrategien – Jeder Faktor für sich

- Jeder Faktor wird in einem Versuch für sich getestet
- Hat ein Faktor einen positiven Einfluss auf das Ergebnis, so wird er in einer Gesamtlösung umgesetzt
- Vorteil: Einfache Versuchsplanung
- Nachteil: Keine Garantie eine optimale Lösung zu finden; Faktorinteraktionen bleiben vollständig unberücksichtigt

DoE

Typische Versuchsstrategien – Jeder Faktor für sich



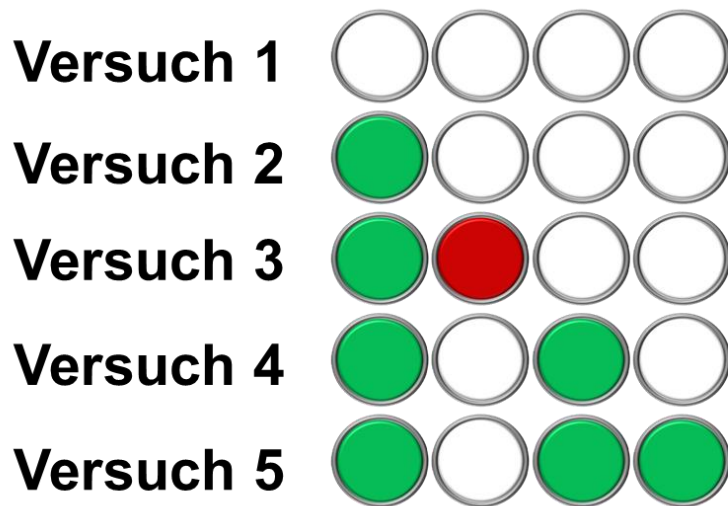
Einzeltestung jedes Faktor

**Kombination der erfolgreichen
Faktoren zur Gesamtlösung**

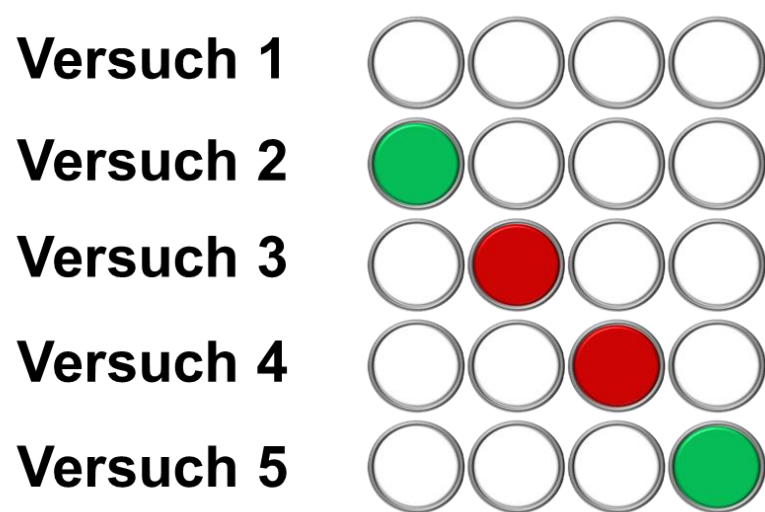
DoE

Typische Versuchsstrategien

Halte am Sieger fest...



Jeder Faktor für sich...



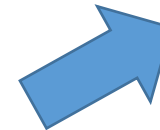
Fehlern Kombinationen?

DoE

- Natürlich fehlten Kombinationen!
- Hier sehen sie einen Versuchsplan für 4 Faktoren, die jeweils zwei Level einnehmen können – so stellen sie sicher, dass auch eine mögliche gegenseitige Beeinflussung von Faktoren berücksichtigt wird
- Für 4 Faktoren auf 2 Leveln benötigen sie

Versuche = Anzahl Faktorstufen^(Anzahl Faktoren)

$$2^4 = 2 * 2 * 2 * 2 = 16$$

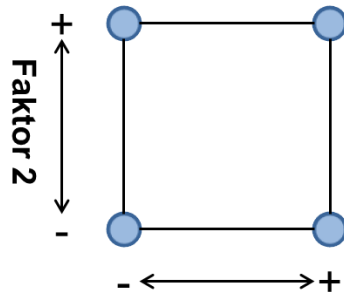


(Standardversuchsplan – man beachte die Struktur des Versuchsplans)

| | Faktor | | | |
|---------|--------|---|---|---|
| Versuch | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | | | | |
| 2 | * | | | |
| 3 | | * | | |
| 4 | * | * | | |
| 5 | | | * | |
| 6 | * | | * | |
| 7 | | * | * | |
| 8 | * | * | * | |
| 9 | | | | * |
| 10 | * | | | * |
| 11 | | * | | * |
| 12 | * | * | | * |
| 13 | | | * | * |
| 14 | * | | * | * |
| 15 | | * | * | * |
| 16 | * | * | * | * |

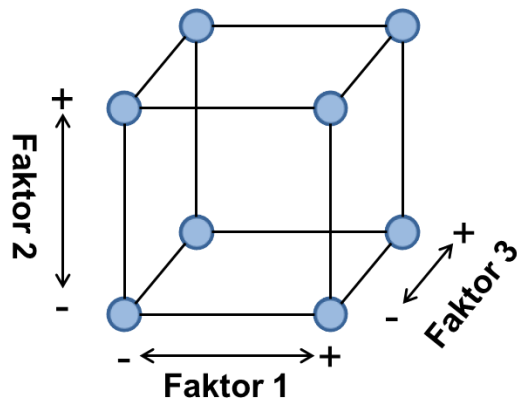
DoE

2 Faktoren – 2 Level

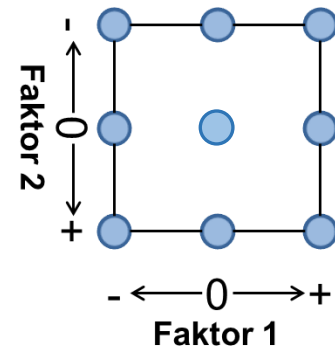


Schrittweiser
Aufbau des
Versuchsraumes

3 Faktoren – 2 Level

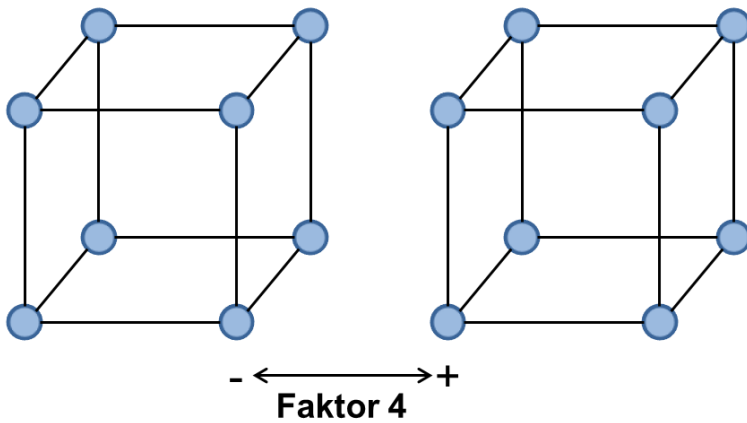


2 Faktoren – 3 Level

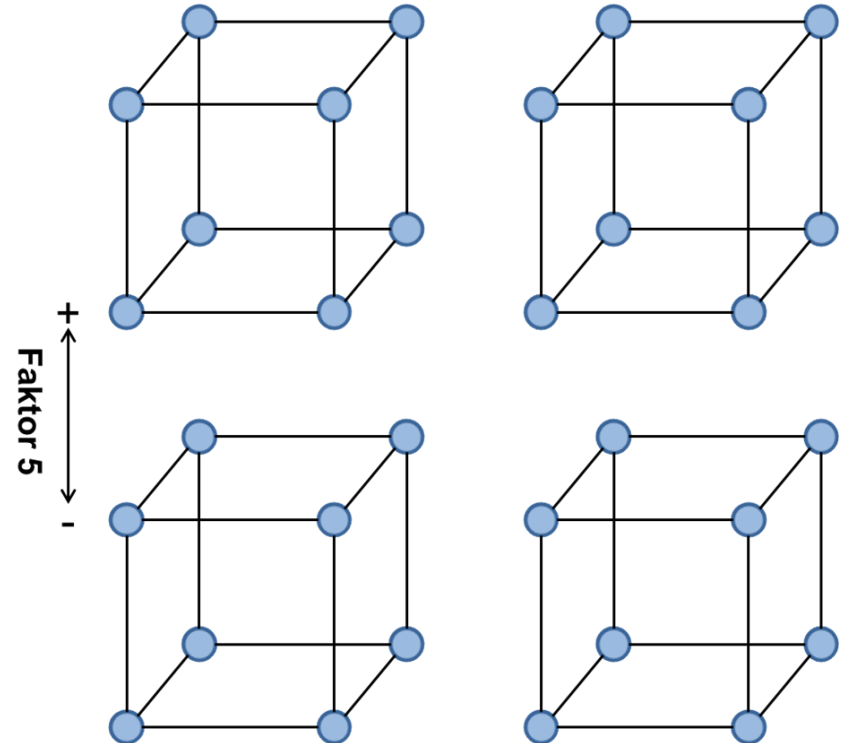


DoE

4 Faktoren – 2 Level



5 Faktoren – 2 Level



DoE

| Faktoren | Standard- Ordnung | x ₁ | x ₂ | x ₃ | x ₄ | x ₅ |
|----------|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | 1 | - | - | - | - | - |
| | 2 | + | - | - | - | - |
| 2 | 3 | - | + | - | - | - |
| | 4 | + | + | - | - | - |
| 3 | 5 | - | - | + | - | - |
| | 6 | + | - | + | - | - |
| | 7 | - | + | + | - | - |
| | 8 | + | + | + | - | - |
| 4 | 9 | - | - | - | + | - |
| | 10 | + | - | - | + | - |
| | 11 | - | + | - | + | - |
| | 12 | + | + | - | + | - |
| | 13 | - | - | + | + | - |
| | 14 | + | - | + | + | - |
| | 15 | - | + | + | + | - |
| | 16 | + | + | + | + | - |
| 5 | 17 | - | - | - | - | + |
| | 18 | + | - | - | - | + |
| | 19 | - | + | - | - | + |
| | 20 | + | + | - | - | + |
| | 21 | - | - | + | - | + |
| | 22 | + | - | + | - | + |
| | 23 | - | + | + | - | + |
| | 24 | + | + | + | - | + |
| | 25 | - | - | - | + | + |
| | 26 | + | - | - | + | + |
| | 27 | - | + | - | + | + |
| | 28 | + | + | - | + | + |
| | 29 | - | - | + | + | + |
| | 30 | + | - | + | + | + |
| | 31 | - | + | + | + | + |
| | 32 | + | + | + | + | + |

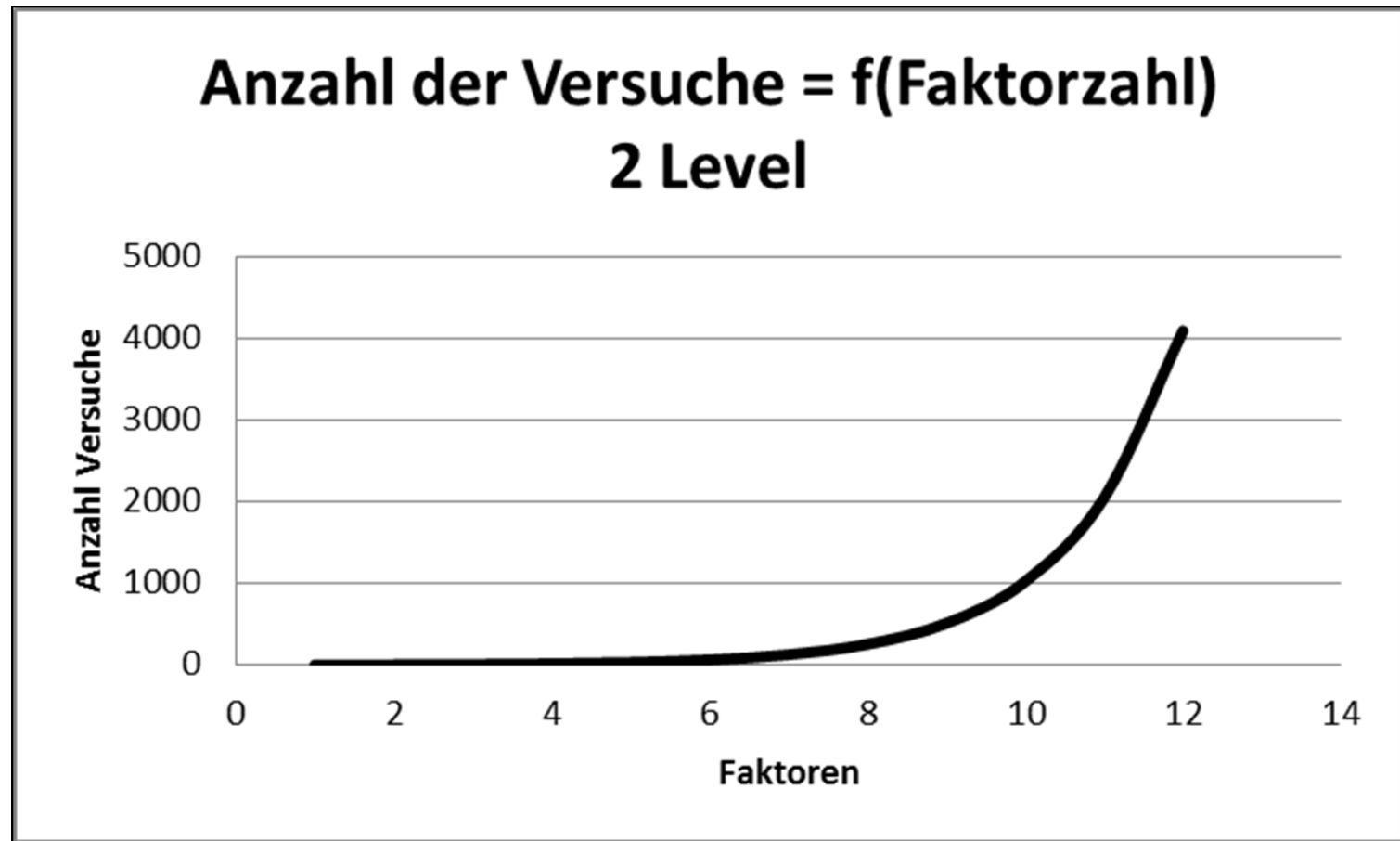
Aufbau der Versuche in Standardordnung

Versuchszahl: 2^k

k Faktoren in 2 Faktorstufen

Für 3 und mehr Faktorstufen wächst die Versuchszahl noch schneller

DoE



Typischer Ablauf des Experimentierens

1. Definition des Projektes
 - Identifizieren der Prozessergebnisse (y)
2. Feststellen der aktuellen Situation

Typischer Ablauf des Experimentierens

3. Analyse

- Faktoren (x) identifizieren
- Faktor-Level wählen
- Versuchsdesign wählen
- Abfolge randomisieren
- Daten sammeln
- Daten analysieren
- Schlussfolgerungen
- Verifizieren der Ergebnisse

Typischer Ablauf des Experimentierens

4. Bestimmen der Lösung
5. Dokumentation der Ergebnisse
6. Standardisierung
7. Planen des weiteren Vorgehens

Beispiel: Definition des Projektes

Ihr Unternehmen bezieht Büroklammern von zwei verschiedenen Lieferanten.

Seit einiger Zeit mehren sich die Beschwerden Ihrer Kollegen über sinkende Haltbarkeit der Büroklammern.

Sie bekommen die Aufgabe, die Problematik zu untersuchen und eine Handlungsempfehlung hinsichtlich dem besten Lieferanten abzugeben.

In Ihrem Unternehmen wird die Haltbarkeit von Büroklammern übrigens über die Anzahl der möglichen Biegevorgänge vor dem Bruch der Klammer definiert.

DoE

Beispiel: Definition des Projektes

Uns liegen historische Daten über die Qualität der Büroklammern zweier Zulieferer vor.

Die Zulieferer bieten aber zukünftig auch neuartige Büroklammern mit höherer Qualität an (Wärmebehandlung).

Das sollten wir prüfen...



DoE

Beispiel: Faktoren identifizieren, Level festlegen

- Die Faktoren: Hersteller, Größe, Wärmebehandlung

| Faktoren | - | + |
|-----------------|------------|------------|
| Hersteller | Anbieter 1 | Anbieter 2 |
| Größe | 26 mm | 32 mm |
| Wärmebehandlung | Nein | Ja |

DoE

Beispiel: Design wählen

Die Wahl fällt auf ein voll-faktorielles Design mit Replikationen und Randomisierung

| Standard-Ordnung | Hersteller | Größe | Wärme-behandlung |
|------------------|------------|-------|------------------|
| 1 | - | - | - |
| 2 | + | - | - |
| 3 | - | + | - |
| 4 | + | + | - |
| 5 | - | - | + |
| 6 | + | - | + |
| 7 | - | + | + |
| 8 | + | + | + |

Faktorielle Versuchspläne

- Versuchspläne zur Untersuchung der Einflüsse von Faktoren auf die abhängige Variable (Antwort)
- In faktoriellen Versuchsplänen werden mehrere Faktoren gleichzeitig verändert und lassen so den Rückschluss auf mögliche Wechselwirkungen zu
- Voll-faktoriell: Alle möglichen Faktorkombinationen werden untersucht

DoE

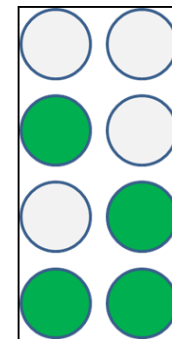
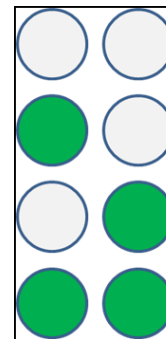
Replikation

- Mehrfache Durchführung eines Versuchs bei den gleichen Faktoreinstellungen
- Kein mehrfaches Vermessen einer Versuchsdurchführung!
- Messung der Variation im Versuchsprozess (Feststellen möglicher Messfehler, Glättung von Rauscheffekten,...)

DoE

Replikation

- Jeder Versuch sollte pro Versuchseinstellung mindestens zweimal durchgeführt werden
- Für unser Beispiel heißt das 16 statt 8 Versuche
- Die Verbesserung der Versuchsergebnisse lohnen diesen zusätzlichen Aufwand



Randomisierung

- Technik, um zu vermeiden, dass Störvariablen (bekannte und unbekannte) das Ergebnis systematisch beeinflussen
- Einfachste Form: Durchführung der erforderlichen Versuche in einer zufälligen Reihenfolge
- Es schwächt die Wirkung systematischer Fehler (versteckte Variablen) ab und verbessert damit die Qualität der Schlussfolgerungen aus den Versuchen
- Randomisierung macht die Versuchsdurchführung aufwändiger, verbessert aber die Ergebnisse

DoE

Beispiel Die Daten

- Versuchsplan voll-faktoriell, repliziert, randomisiert, kodiert
- Kodiert: Die Faktorstufen werden auf -1 und +1 eingestellt, dadurch erhöht sich die Lesbarkeit von Plänen

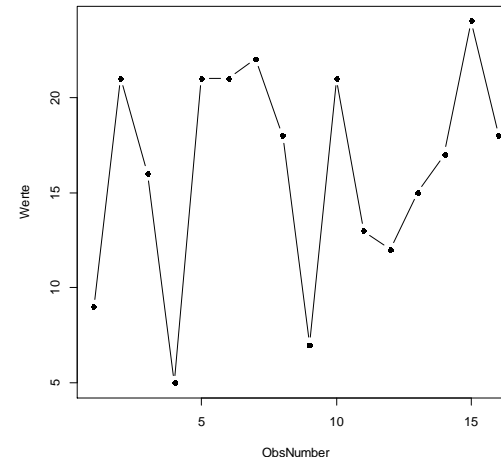
| StdRF | DRF | Hersteller | Größe | Wärme | Biegung |
|-------|-----|------------|-------|-------|---------|
| 10 | 1 | 1 | -1 | -1 | 21 |
| 14 | 2 | 1 | -1 | 1 | 21 |
| 3 | 3 | -1 | 1 | -1 | 16 |
| 16 | 4 | 1 | 1 | 1 | 18 |
| 7 | 5 | -1 | 1 | 1 | 22 |
| 6 | 6 | 1 | -1 | 1 | 17 |
| 15 | 7 | -1 | 1 | 1 | 24 |
| 12 | 8 | 1 | 1 | -1 | 5 |
| 9 | 9 | -1 | -1 | -1 | 9 |
| 4 | 10 | 1 | 1 | -1 | 12 |
| 11 | 11 | -1 | 1 | -1 | 13 |
| 1 | 12 | -1 | -1 | -1 | 7 |
| 8 | 13 | 1 | 1 | 1 | 18 |
| 5 | 14 | -1 | -1 | 1 | 21 |
| 2 | 15 | 1 | -1 | -1 | 21 |
| 13 | 16 | -1 | -1 | 1 | 15 |

Beispiel Datenanalyse

- Wie üblich beginnt die Datenanalyse mit einer grafische Darstellung der Messdaten
- Gibt es Auffälligkeiten in den Daten, Schreibfehler, fehlende Werte,...
- Die grafische Darstellung verschafft einen ersten Eindruck
- Passende Werkzeuge: Zeitreihen, Boxplots

Beispiel Datenanalyse

- Zeitreihendiagramme
- Darstellung der Messwerte in zeitlicher Abfolge (Experimentabfolge, Reihenfolge der Messwertaufnahme)
- Ergebnis: Gibt es Ausreißer, Trends, auffällige Muster, offensichtliche Faktoreinflüsse?

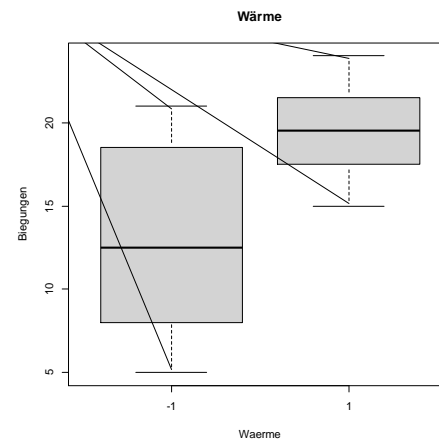
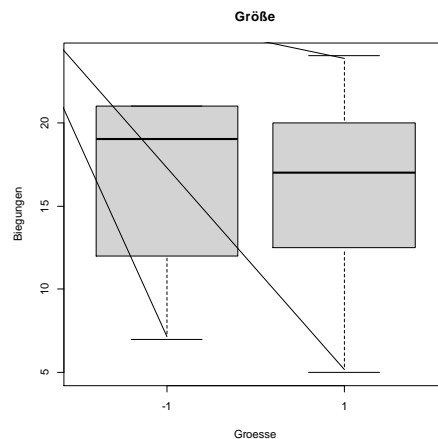
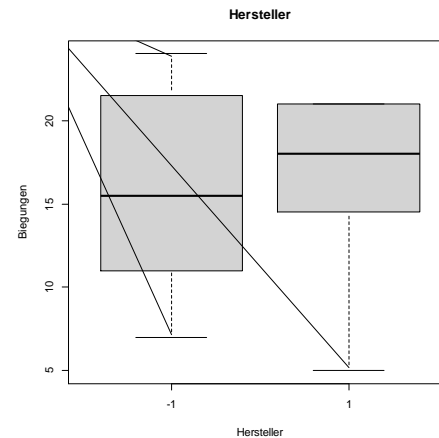
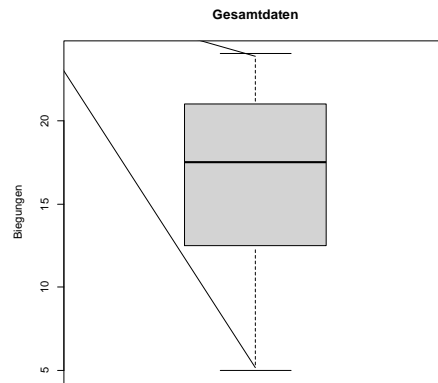


Beispiel Datenanalyse

- Boxplots
- Zusammenfassende Darstellung von Messwerten (Aufteilung nach Faktoren, Faktorlevel, Versuchsbedingungen, ...)
- Ergebnis: Gibt es Ausreißer, Verschiebungen bei den Mittelwerten oder in der Varianz?

DoE

Beispiel Datenanalyse



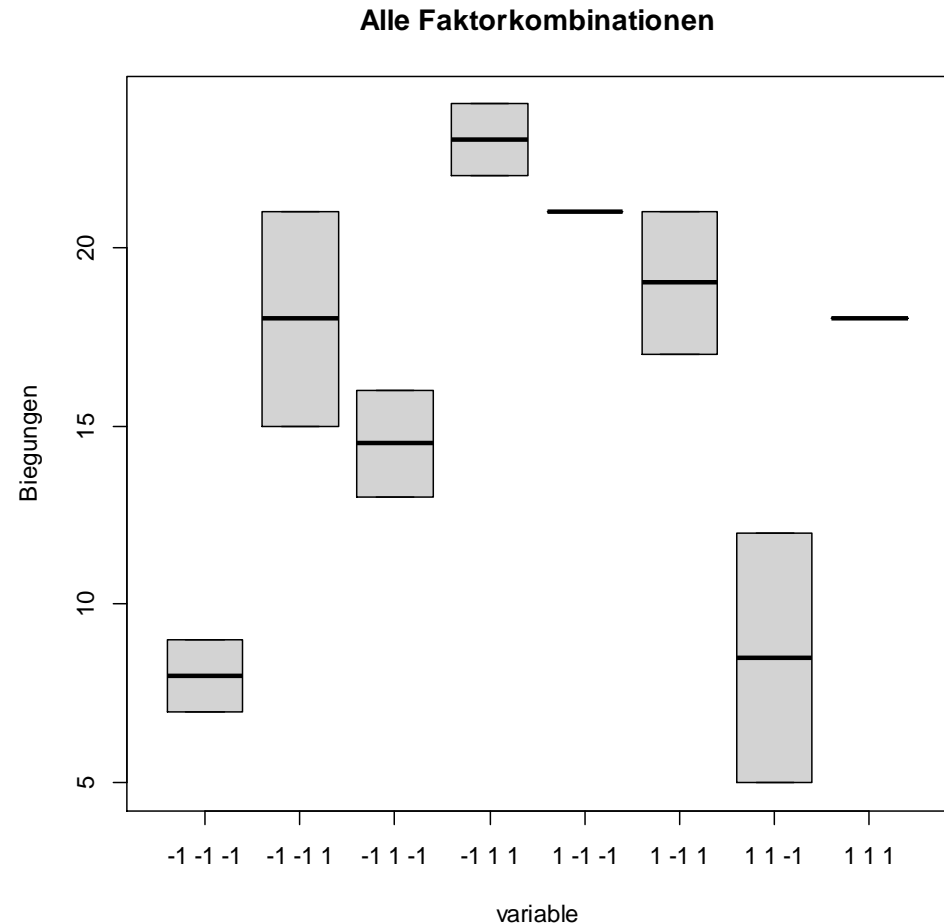
Darstellung der
Gesamtdaten und
Aufteilung nach
Faktoren

DoE

Beispiel Datenanalyse

**Darstellung aller möglichen Faktorkombinationen
(hier: jeweils nur 2 Werte)**

Streuen die jeweiligen Faktorkombinationen mehr oder weniger?



DoE

Beispiel Handrechnung

| Hersteller | Größe | Wärme | Daten | | MW | Residuen | | Var | Std.Abw. |
|------------|-------|-------|-------|--------|------|----------|--------|------|----------|
| | | | Rep.1 | Rep 2. | | Rep.1 | Rep 2. | | |
| - | - | - | 7 | 9 | 8,0 | -1,0 | 1,0 | 2,0 | 1,4 |
| + | - | - | 21 | 21 | 21,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| - | + | - | 16 | 13 | 14,5 | 1,5 | -1,5 | 4,5 | 2,1 |
| + | + | - | 12 | 5 | 8,5 | 3,5 | -3,5 | 24,5 | 4,9 |
| - | - | + | 21 | 15 | 18,0 | 3,0 | -3,0 | 18,0 | 4,2 |
| + | - | + | 17 | 21 | 19,0 | -2,0 | 2,0 | 8,0 | 2,8 |
| - | + | + | 22 | 24 | 23,0 | -1,0 | 1,0 | 2,0 | 1,4 |
| + | + | + | 18 | 18 | 18,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,0 |

Summe

130,0

57,0

Beispiel Handrechnung

- Gesamt-Mittelwert

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum MW}{n} = \frac{130,0}{8} = 16,25$$

- Experimentelle Standardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{\sum Var}{n}} = \sqrt{\frac{57,0}{8}} = 2,67$$

Residuen

- Residuen sind der Teil der Variation, der nicht durch die unterschiedlichen Versuchsbedingungen erklärt werden kann
- Residuen sollten nicht durch spezielle Ursachen beeinflusst sein, sondern nur allgemeine Ursachen für Streuung beinhalten
- Residuen sollten zufällig verteilt sein und einer Normalverteilung folgen, tun sie dies nicht, so gibt es möglicherweise noch wichtige Faktoren, die in den Experimenten nicht berücksichtigt sind

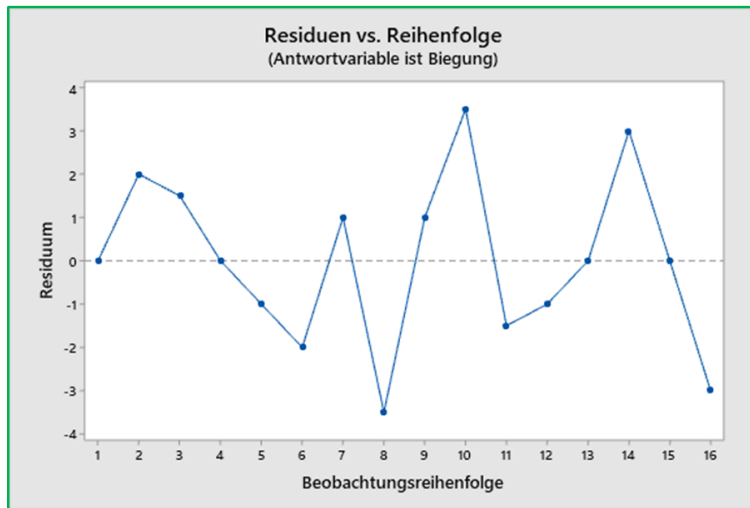
Residuenanalyse

Schritt 1

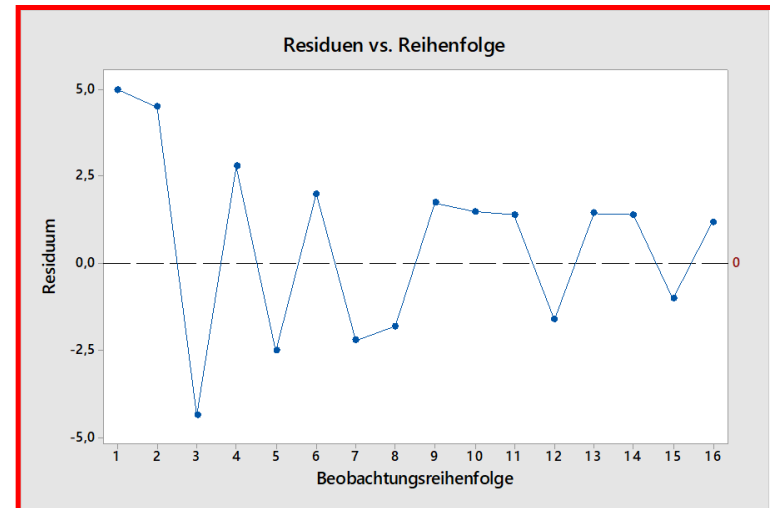
- Darstellung der Residuen in zeitlicher Abfolge (Zeitreihendiagramm)
- Sicherstellen, dass Streuung nur allgemeine Ursachen hat
- Gibt es Muster in der zeitlichen Abfolge der Daten (Trends, Ausreißer)?
- Ursachen für Abweichung von der zufälligen Verteilung sind möglicherweise nicht berücksichtigte Faktoren

DoE

Residuenanalyse



Keine Auffälligkeiten



Versteckter Faktor: z.B. Lernkurve?

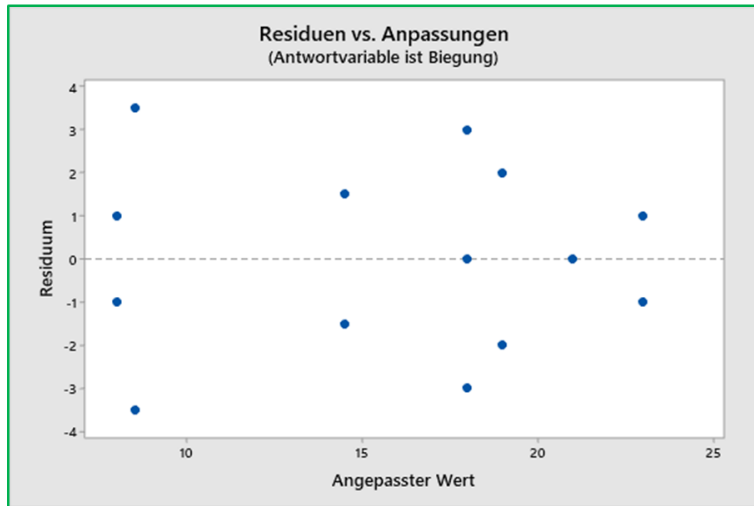
Residuenanalyse

Schritt 2

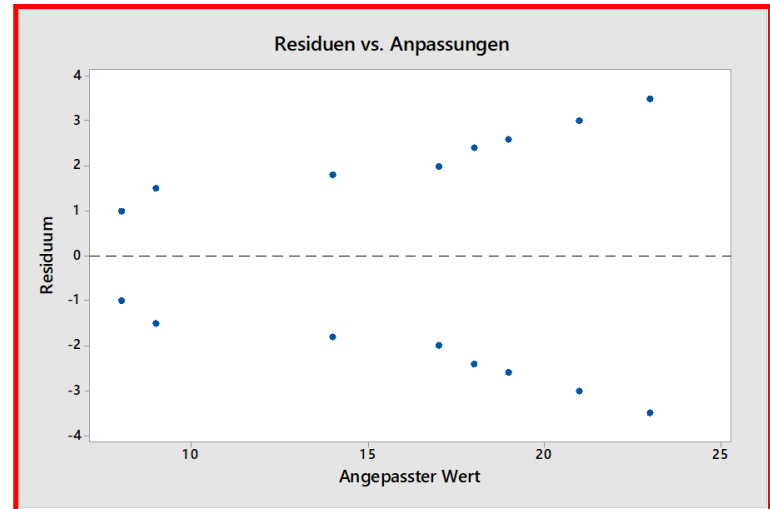
- Darstellung der Residuen als Funktion der Mittelwerte
- Suche nach nicht-zufälligen Mustern (Bsp. Megaphon – wachsende Streuung mit zunehmendem Mittelwert)
- Die Symmetrie um die x-Achse spielt keine Rolle (Ursache: Replikationen)

DoE

Residuenanalyse



Keine Auffälligkeiten



Wachsende Streuung (Residuum)

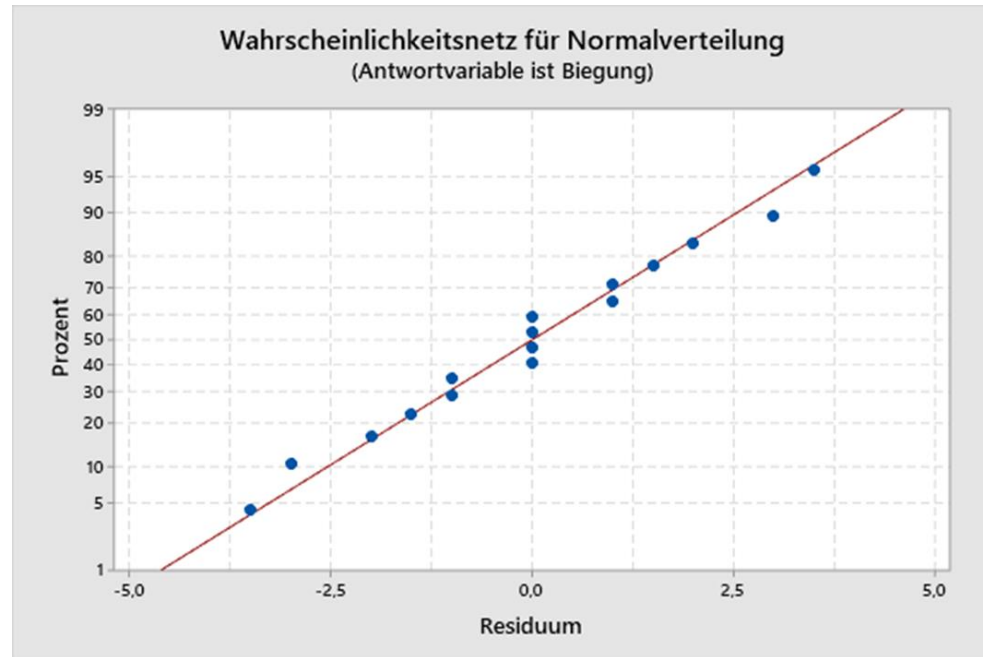
Residuenanalyse

Schritt 3

- Darstellung der Residuen im QQ-Diagramm oder Wahrscheinlichkeitsnetz
- Daten sollen normal verteilt sein
- Falls nicht: Es liegen spezielle Ursachen vor

DoE

Residuenanalyse



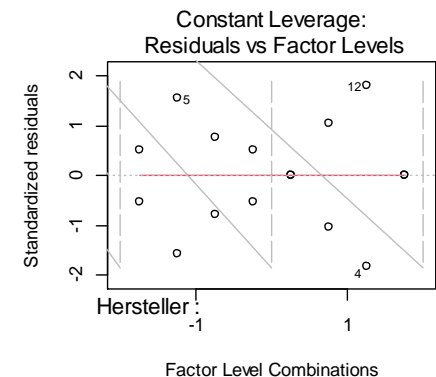
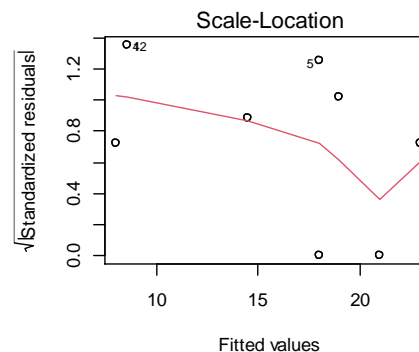
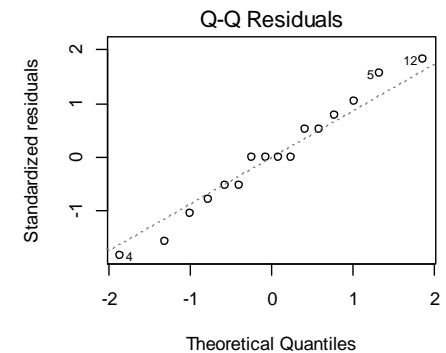
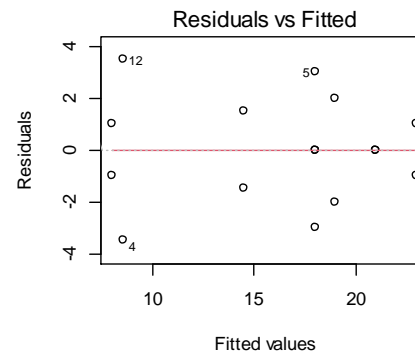
Keine Auffälligkeiten

Residuenanalyse – Darstellung in R

lm.default(Werte ~ (Hersteller + Groesse + Waerme)^3)

Residuals vs Fitted \triangleq Schritt 2

Q-Q Residuals \triangleq Schritt 3



Residuenanalyse – Darstellung in R

Scale-Location-Plot (aka Spread-Location-Plot): Dieses Diagramm zeigt, ob die Residuen gleichmäßig über die Bereiche der Prädiktoren verteilt sind. Überprüfung der Annahme gleicher Varianz (Homoskedastizität). Es sollte eine horizontale Linie mit gleichmäßig, d.h. zufällig verteilten Punkten zu sehen sein.

Constant Leverage zeigt die Residuen im Vergleich zu den Faktoren. Residuen sollten gleichmäßig um die Nulllinie verteilt sein und keine Muster enthalten.

Residuenanalyse

Was tun,

- wenn Ausreißer vorhanden sind?
Gibt es eine Erklärung für die Ausreißer? Wenn ja, kann man die Daten korrigieren, ansonsten arbeitet man mit den vorhandenen Daten weiter
- wenn es einen Trend gibt?
Möglicherweise hat man eine wichtige Variable übersehen

Residuenanalyse

Was tun,

- wenn Residuen und Mittelwerte korrelieren?
Wie kommt die Korrelation zustande? Ist die Ursache kontrollierbar? Spielt sie überhaupt eine Rolle?
- wenn die Residuen nicht normal verteilt sind?
Möglicherweise hat man eine wichtige Variable übersehen

DoE

Beispiel Aufstellen der Bestimmungsgleichung

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y Anzahl der Biegungen

x_i Hersteller, Größe, Wärmebehandlung

Welchen Einfluss haben die Faktoren x_i auf das Ergebnis y ?

Biegung = Konstante
 + Herstellereinfluss + Größeneinfluss + Wärmeeinfluss
 + Hersteller/Größe-Einfluss + Hersteller/Wärme-Einfluss +
 Größe/Wärme-Einfluss
 + Hersteller/Größe/Wärme-Einfluss

DoE

Beispiel Aufstellen der Bestimmungsgleichung

- Wie haltbar ist eine durchschnittliche Büroklammer?

| Hersteller | Größe | Wärme | Daten | | MW |
|------------|-------|-------|-------|--------|------|
| | | | Rep.1 | Rep 2. | |
| - | - | - | 7 | 9 | 8,0 |
| + | - | - | 21 | 21 | 21,0 |
| - | + | - | 16 | 13 | 14,5 |
| + | + | - | 12 | 5 | 8,5 |
| - | - | + | 21 | 15 | 18,0 |
| + | - | + | 17 | 21 | 19,0 |
| - | + | + | 22 | 24 | 23,0 |
| + | + | + | 18 | 18 | 18,0 |

| | |
|------------|--------|
| Summe | 130,0 |
| Mittelwert | 16,250 |

Die Konstante bestimmt sich aus der mittleren Biegungsanzahl aller Versuchspunkte

Biegung = 16,25 + ...

DoE

Beispiel Aufstellen der Bestimmungsgleichung

| Hersteller | Größe | Wärme | Daten | | MW |
|------------|-------|-------|-------|--------|------|
| | | | Rep.1 | Rep 2. | |
| - | - | - | 7 | 9 | 8,0 |
| + | - | - | 21 | 21 | 21,0 |
| - | + | - | 16 | 13 | 14,5 |
| + | + | - | 12 | 5 | 8,5 |
| - | - | + | 21 | 15 | 18,0 |
| + | - | + | 17 | 21 | 19,0 |
| - | + | + | 22 | 24 | 23,0 |
| + | + | + | 18 | 18 | 18,0 |

| Wärme | |
|------------|---------------|
| - | + |
| 8,0 | |
| 21,0 | |
| 14,5 | |
| 8,5 | |
| | 18,0 |
| | 19,0 |
| | 23,0 |
| | 18,0 |
| | |
| | |
| Summe | 52,000 78,000 |
| Mittelwert | 13,000 19,500 |

- Wie unterscheidet sich die mittlere Anzahl der Biegungen für Klammern mit bzw. ohne Wärmebehandlung?

DoE

Beispiel Aufstellen der Bestimmungsgleichung

$$\text{Wärmeeinfluss} = \text{MW „+“} - \text{MW „-“} = 19,5 - 13,0 = 6,5$$

Verändert man den Wärmeeinfluss von der Einstellung „-“ auf „+“ steigt die Anzahl der Biegungen um 6,5

Beispiel Aufstellen der Bestimmungsgleichung

| Hersteller | Größe | Wärme | Daten | | MW |
|------------|-------|-------|--------|--------|------|
| | | | Rep. 1 | Rep 2. | |
| - | - | - | 7 | 9 | 8,0 |
| + | - | - | 21 | 21 | 21,0 |
| - | + | - | 16 | 13 | 14,5 |
| + | + | - | 12 | 5 | 8,5 |
| - | - | + | 21 | 15 | 18,0 |
| + | - | + | 17 | 21 | 19,0 |
| - | + | + | 22 | 24 | 23,0 |
| + | + | + | 18 | 18 | 18,0 |

| Hersteller | | Größe | | Wärme | |
|------------|------|--------|--------|--------|--------|
| - | + | - | + | - | + |
| 8,0 | | 8,0 | | 8,0 | |
| | 21,0 | 21,0 | | 21,0 | |
| 14,5 | | | 14,5 | 14,5 | |
| | 8,5 | | 8,5 | 8,5 | |
| 18,0 | | 18,0 | | | 18,0 |
| | 19,0 | 19,0 | | | 19,0 |
| 23,0 | | | 23,0 | | 23,0 |
| | 18,0 | | 18,0 | | 18,0 |
| Summe | | 63,500 | 66,500 | 66,000 | 64,000 |
| Mittelwert | | 15,875 | 16,625 | 16,500 | 16,000 |

Herstellereinfluss = $16,625 - 15,875 = 0,750$

Größeneinfluss = $16,000 - 16,500 = -0,500$

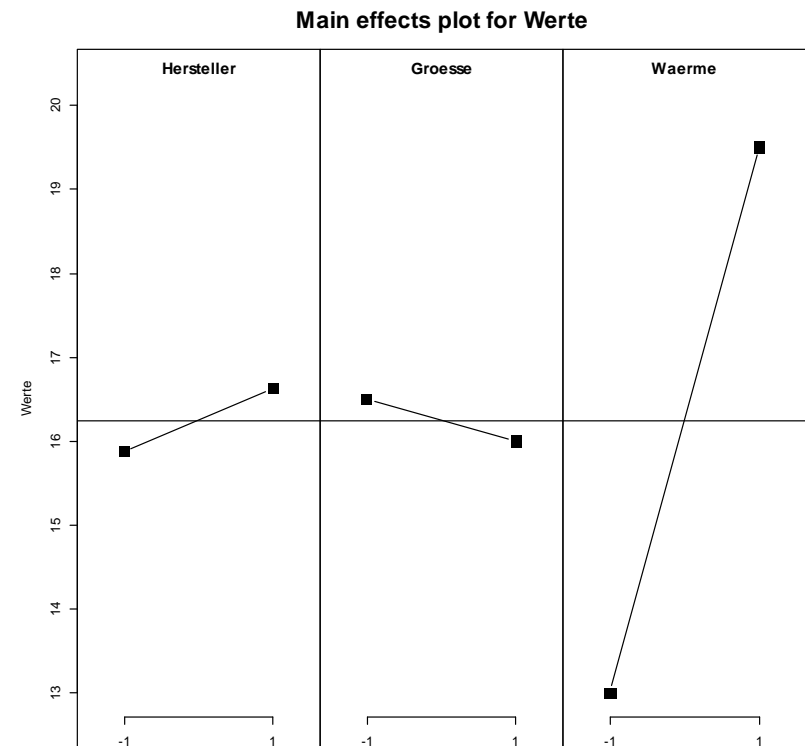
Wärmeeinfluss = $19,500 - 13,000 = 6,500$

DoE

Beispiel Aufstellen der Bestimmungsgleichung

Grafische Darstellung der Haupteffekte:

Stärke und Richtung der Haupteffekte wird erkennbar



Beispiel Aufstellen der Bestimmungsgleichung

Berechnung der Faktorkoeffizienten

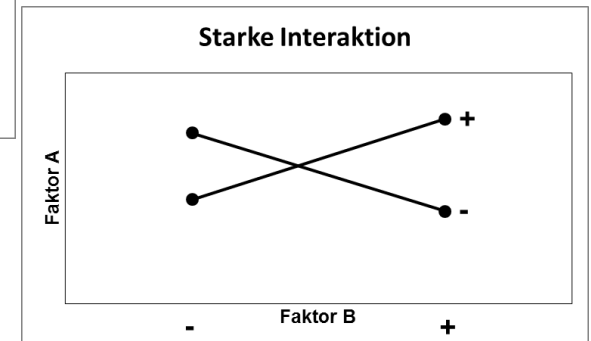
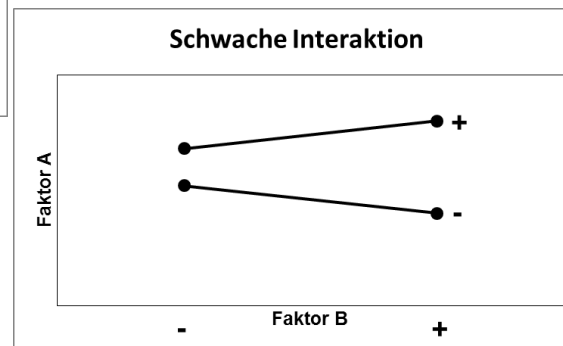
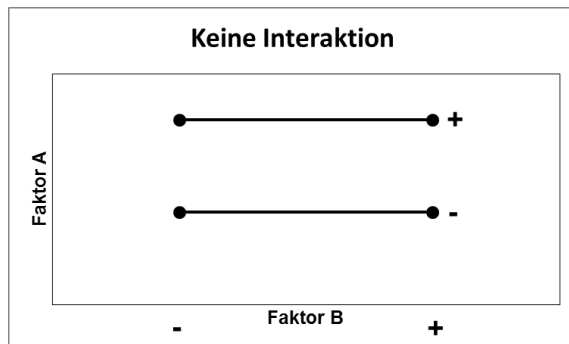
- Verändert man den Hersteller von der Einstellung „-“ auf „+“ steigt die Anzahl der Biegungen um 0,750
- Änderung bezieht sich auf zwei Einheiten (-1 bis +1)

$$\text{Herstellerkoeffizient} = \frac{\text{Faktoreinfluss}}{2} = \frac{0,750}{2} = 0,375$$

Biegung = 16,25
 + 0,375 * Hersteller – 0,250 * Größen + 3,250* Wärme
 + ...

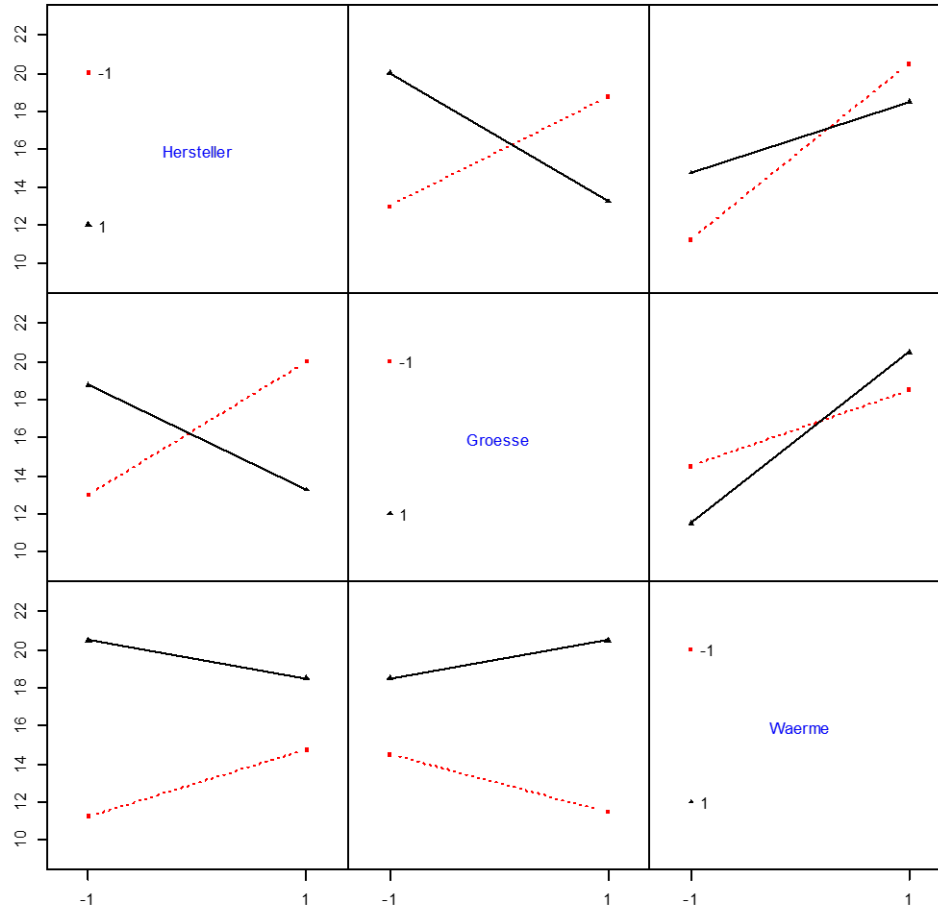
DoE

- Zwei Faktoren interagieren (Wechselwirkung), wenn der Effekt eines Faktors von der Größe des anderen Faktors abhängt



DoE

Interaction plot matrix for Werte



Darstellung aller Zweifach-Wechselwirkungen im Matrixformat

Vorsicht: Diagonale als Spiegellinie führt zu unterschiedlichen Grafiken!

DoE

Beispiel Berechnung der Wechselwirkungen

| Wärme | Daten | | MW |
|-------|-------|-------|------|
| | Rep.1 | Rep.2 | |
| - | 7 | 9 | 8,0 |
| - | 21 | 21 | 21,0 |
| - | 16 | 13 | 14,5 |
| - | 12 | 5 | 8,5 |
| + | 21 | 15 | 18,0 |
| + | 17 | 21 | 19,0 |
| + | 22 | 24 | 23,0 |
| + | 18 | 18 | 18,0 |

| Hersteller*Größe | | Hersteller*Wärme | | Größe*Wärme | | Herst.*Größe*Wärme | |
|------------------|------|------------------|------|-------------|------|--------------------|------|
| - | + | - | + | - | + | - | + |
| | 8,0 | | 8,0 | | 8,0 | 8,0 | |
| 21,0 | | 21,0 | | | 21,0 | | 21,0 |
| 14,5 | | | 14,5 | 14,5 | | | 14,5 |
| | 8,5 | 8,5 | | 8,5 | | 8,5 | |
| | 18,0 | 18,0 | | 18,0 | | | 18,0 |
| 19,0 | | | 19,0 | 19,0 | | 19,0 | |
| 23,0 | | 23,0 | | | 23,0 | 23,0 | |
| | 18,0 | | 18,0 | | 18,0 | | 18,0 |

| | | | | | | | | |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Summe | 77,500 | 52,500 | 70,500 | 59,500 | 60,000 | 70,000 | 58,500 | 71,500 |
| Mittelwert | 19,375 | 13,125 | 17,625 | 14,875 | 15,000 | 17,500 | 14,625 | 17,875 |
| Faktor | -6,250 | | -2,750 | | 2,500 | | 3,250 | |
| Koeffizient | -3,125 | | -1,375 | | 1,250 | | 1,625 | |

DoE

Beispiel Berechnung der Wechselwirkungen

$$\begin{aligned}\text{Biegung} = & 16,25 \\ & + 0,375 * \text{Hersteller} - 0,250 * \text{Größen} + 3,250 * \text{Wärme} \\ & - 3,125 * \text{Hersteller} * \text{Größe} - 1,375 * \text{Hersteller} * \text{Wärme} \\ & + 1,250 * \text{Größe} * \text{Wärme} \\ & + 1,625 * \text{Hersteller} * \text{Größe} * \text{Wärme}\end{aligned}$$

Für Hersteller, Größe und Wärme sind die Werte (-1) bzw. (+1) einzusetzen

Beispiel Berechnung der Wechselwirkungen

- Es handelt sich um eine vereinfachte Rechnung
- Sie hätten mit der Varianzanalyse das Werkzeug, dass Sie auch bestimmen könnten, welche Faktoren und Wechselwirkungen wichtig bzw. unwichtig sind
- Da der Rechenaufwand aber selbst für das Modell mit drei Faktoren erheblich ist, nutzen Sie entsprechende Software

DoE

- Kurzer, eingeschränkter Überblick über die Funktionsweise des Design of Experiments
- Nächste Schritte (aber nicht in diesem Training):
 - Von linearen DoE zu komplexeren mathematischen Funktionen
 - Komplexere Räume
 - Reduktionsverfahren für kleinere Versuchszahlen

Reduzierung der Versuchszahl

- Viele Faktoren haben einen möglichen Einfluss auf die Qualität eines Prozesses oder Produktes
- Die faktorielle Strategie ist ein sinnvoller Ansatz für die Durchführung von Experimenten
- Bei Untersuchungen mit k Faktoren, die zwei Niveaus einnehmen können, bestimmt sich die Anzahl der Experimente zu: 2^k

Reduzierung der Versuchszahl

- Dies kann schnell zu einer sehr großen Anzahl von erforderlichen Experimenten führen
- Experimente verursachen Kosten und binden Ressourcen

Reduzierung der Versuchszahl

- Welche Informationen enthält ein voll-faktorielles Design auf zwei Niveaus? (Haupteffekte und Wechselwirkungen)
- Das voll-faktorielle Design ermöglicht die Bestimmung aller Haupteffekte und aller Wechselwirkungen
- Wechselwirkung von mehr als drei Faktoren sind sehr selten bis hin zu unwahrscheinlich

| Faktoren | Anzahl Versuche (voll-faktoriell) | Haupt-effekte | 2-Fach-Inter-aktionen | Höhere Inter-aktionen |
|----------|-----------------------------------|---------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 3 | 8 | 3 | 3 | 1 |
| 4 | 16 | 4 | 6 | 5 |
| 5 | 32 | 5 | 10 | 16 |
| 6 | 64 | 6 | 15 | 42 |
| 7 | 128 | 7 | 21 | 99 |
| 8 | 256 | 8 | 28 | 219 |
| 9 | 512 | 9 | 36 | 466 |
| 10 | 1024 | 10 | 45 | 968 |
| | | | | |
| 15 | 32768 | 15 | 105 | 32647 |
| | | | | |
| 20 | 1048576 | 20 | 190 | 1048365 |

Reduzierung der Versuchszahl

Aufbau von teilfaktoriellen Versuchsplänen

- Es werden nur ausgesuchte Teile des voll-faktoriellen Versuchsplans experimentiert
- Reduktion der Versuchszahl
- Technik: Haupteffekte und niedrige Wechselwirkungen werden mit Wechselwirkungen höherer Ordnung überlagert
- Man geht davon aus, dass der beobachtete Effekt durch Hauptfaktoren und Wechselwirkungen mit niedriger Ordnung hervorgerufen wird

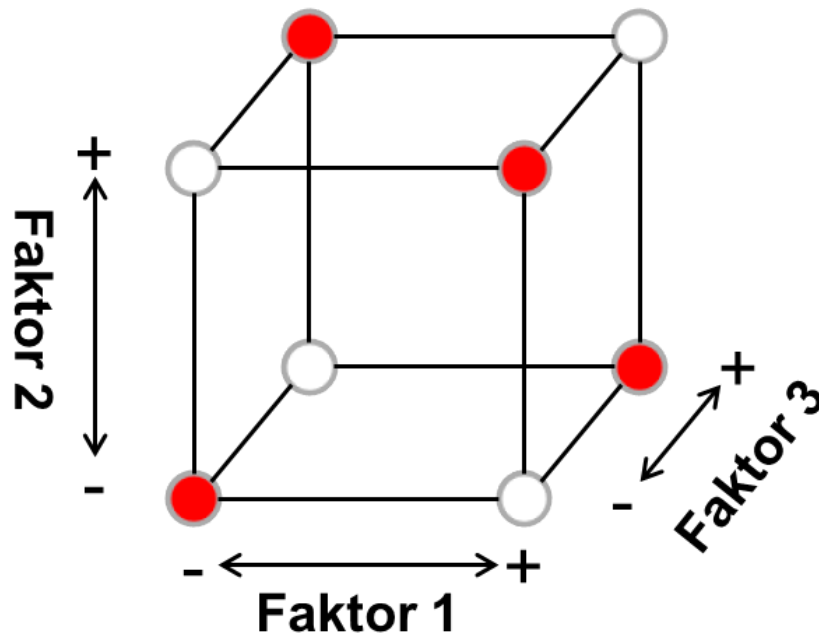
Reduzierung der Versuchszahl

Aufbau von teilfaktoriellen Versuchsplänen

- Informationsverlust
- Gefahr, dass höhere Wechselwirkungen sehr wohl wichtig sein können und einen stärkeren Effekt hervorrufen

Reduzierung der Versuchszahl

Teilfaktorielle Versuchspläne



Die halbe Fraktion:
Nur für diese Versuchseinstellungen werden auch Versuche gefahren

4 statt 8 Versuche!

Reduzierung der Versuchszahl

Teilfaktorielle Versuchspläne

- Ein halb-faktorielles Design halbiert die Anzahl der Versuche
- Dies geschieht auf Kosten des Informationsgehaltes der Experimente
- Die Versuchspunkte werden so gewählt, dass der Informationsgehalt möglichst hoch ist
- Man verliert in erster Linie Informationen über höher-gradige Interaktionen

Reduzierung der Versuchszahl

- Weitere Reduktion ist möglich
- Es gibt auch spezielle Pläne, die speziell auf Reduktion der Versuchszahlen zielen (z.B. Plackett-Burman)
- Im Extremen kommen sogenannte Screening-Design zum Einsatz, die in einer ersten Versuchsrunde auf die Identifikation der wichtigen Haupteffekte abzielen

DoE im RCommander

Für die Berechnung von DoEs im Rcommander muss ein DoE-Paket installiert werden

```
install.packages(„RcmdrPlugin.DoE“)
```

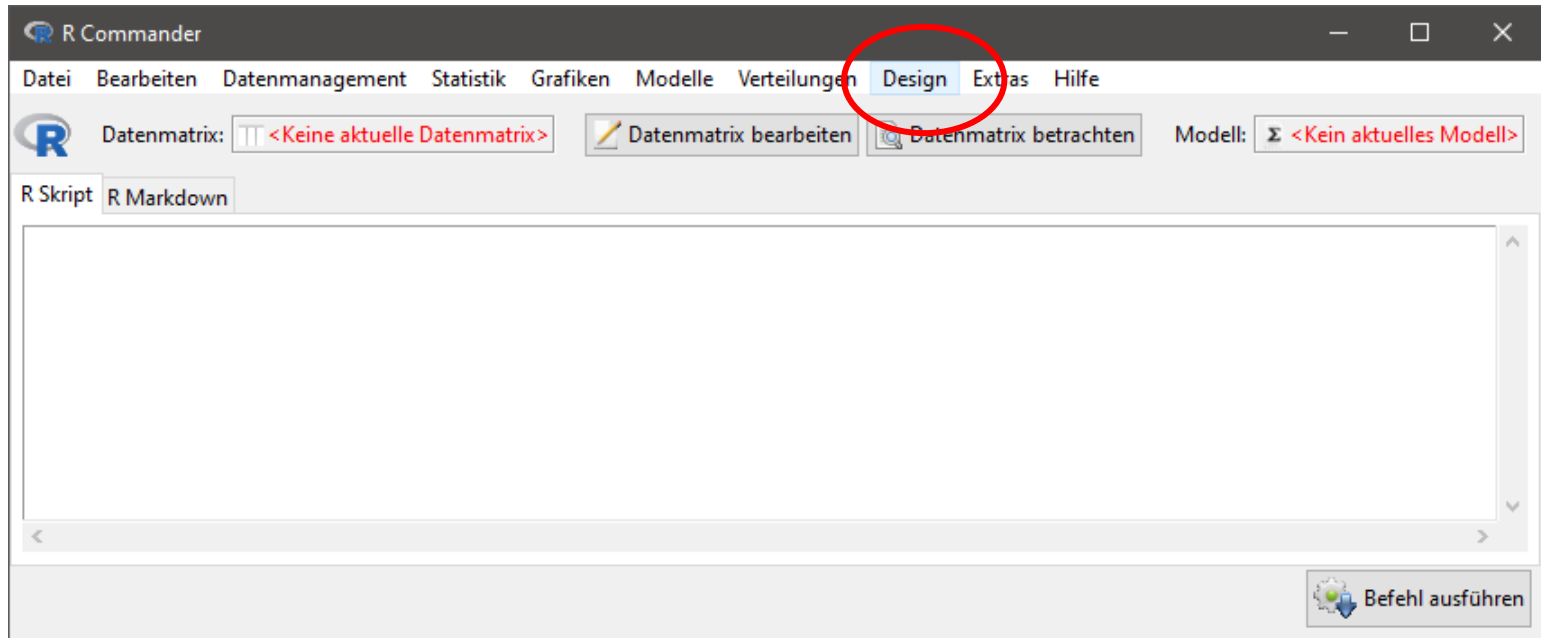
und anschließend in Rstudio geladen werden

```
library(RcmdrPlugin.DoE)
```

Danach haben Sie die Möglichkeit das DoE-Modul unter Packages *RcmdrPlugin.DoE* anzuwählen

DoE im RCommander

- Das DoE finden Sie im Rcommander-Menü unter *Design*



DoE im RCommander

Ein DoE erzeugen

- Unter *Design > Create design* finden Sie verschiedene DoE-Typen, die Sie mit Rcommander erzeugen können
- Für unser Beispiel mit 3 Faktoren wählen wir *General Full Factorial Experiments...*

DoE im RCommander

Ein DoE erzeugen

- *3 Faktoren*
- *2 Replikationen*
- *Randomisierung*
(hier nicht angewählt)

Create full factorial design ...

Base Settings Factor Details Export

Name of new design

Size and randomization

Number of runs (product of all numbers of factor levels)

Number of factors

Number of blocks

Replications ☐ Repeat only

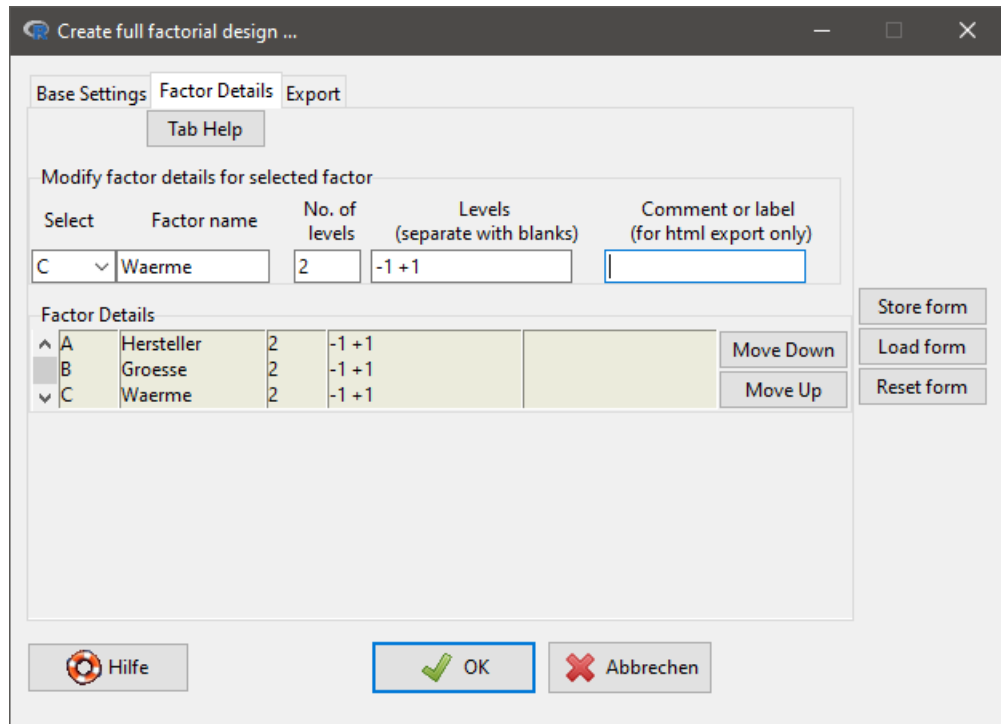
You normally do not need to change randomization settings

Seed for randomization ☐ Randomization

DoE im RCommander

Ein DoE erzeugen

- Unter *Factor Details* können wir das Beispiel eingeben
- Das DoE ist damit aufgestellt, jetzt können wir es uns anschauen



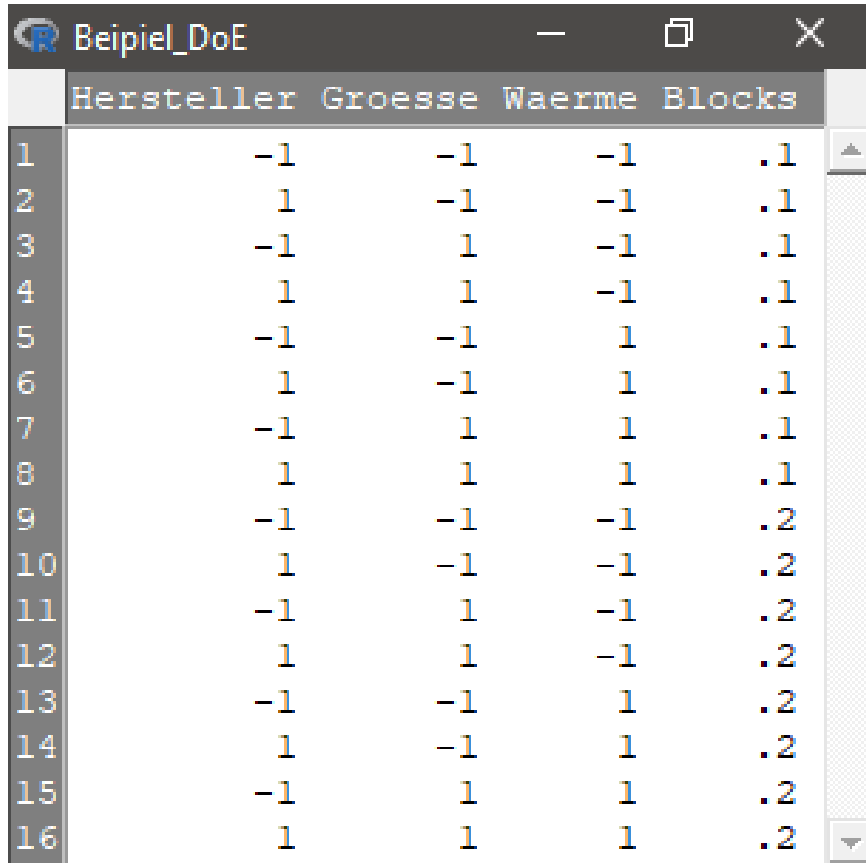
The screenshot shows the 'Create full factorial design' dialog box with the 'Factor Details' tab selected. The 'Modify factor details for selected factor' section shows factor 'C' (Waerme) with 2 levels and levels '-1 +1'. Below this is a table of factor details:

| | Factor name | No. of levels | Levels (separate with blanks) | Comment or label (for html export only) |
|-----|-------------|---------------|-------------------------------|---|
| ^ A | Hersteller | 2 | -1 +1 | |
| ■ B | Groesse | 2 | -1 +1 | |
| ▼ C | Waerme | 2 | -1 +1 | |

Buttons for 'Move Down' and 'Move Up' are next to the table. On the right, there are buttons for 'Store form', 'Load form', and 'Reset form'. At the bottom, there are buttons for 'Hilfe', 'OK', and 'Abbrechen'.

DoE im RCommander

Ein DoE erzeugen



The screenshot shows an RStudio window titled "Beispiel_DoE". Inside the window is a table with 16 rows and 5 columns. The columns are labeled "Hersteller", "Groesse", "Waerme", and "Blocks". The rows are numbered 1 to 16. The data in the table is as follows:

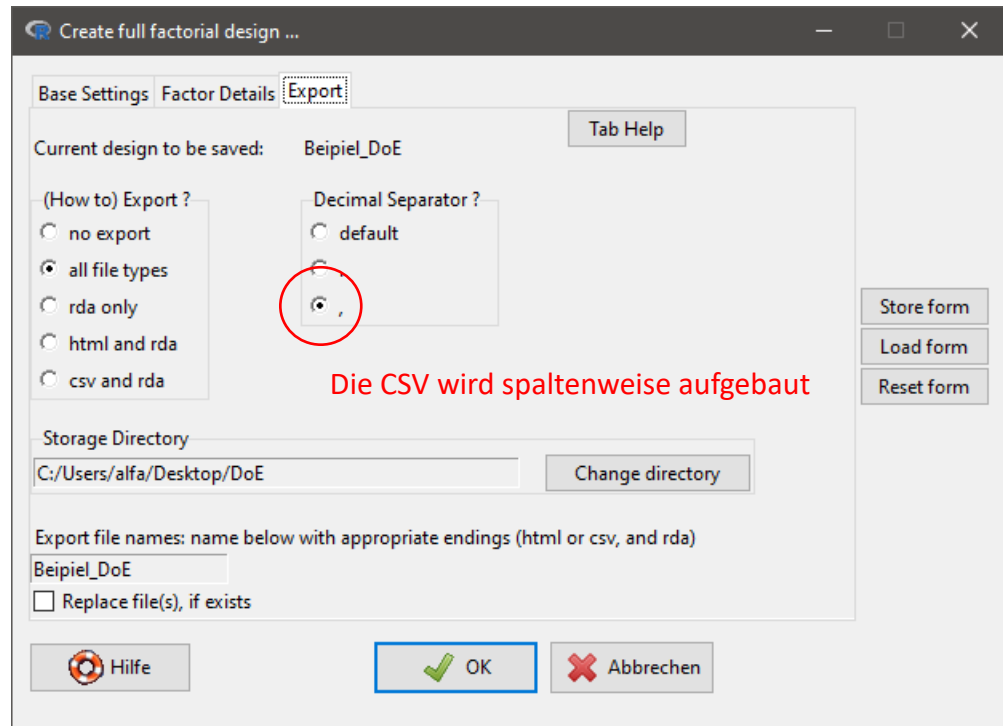
| | Hersteller | Groesse | Waerme | Blocks |
|----|------------|---------|--------|--------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | .1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 | .1 |
| 3 | -1 | 1 | -1 | .1 |
| 4 | 1 | 1 | -1 | .1 |
| 5 | -1 | -1 | 1 | .1 |
| 6 | 1 | -1 | 1 | .1 |
| 7 | -1 | 1 | 1 | .1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | .1 |
| 9 | -1 | -1 | -1 | .2 |
| 10 | 1 | -1 | -1 | .2 |
| 11 | -1 | 1 | -1 | .2 |
| 12 | 1 | 1 | -1 | .2 |
| 13 | -1 | -1 | 1 | .2 |
| 14 | 1 | -1 | 1 | .2 |
| 15 | -1 | 1 | 1 | .2 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | .2 |

Dies ist nur ein Beispiel,
sollte Randomisierung angewählt sein,
kann Ihre Tabelle kann anders geordnet
sein

DoE im RCommander

Ein DoE abspeichern

- Unter *Export* können wir das Beispiel speichern
- In der csv-Datei können wir nun eine Spalte einfügen, die unsere Messwerte enthält

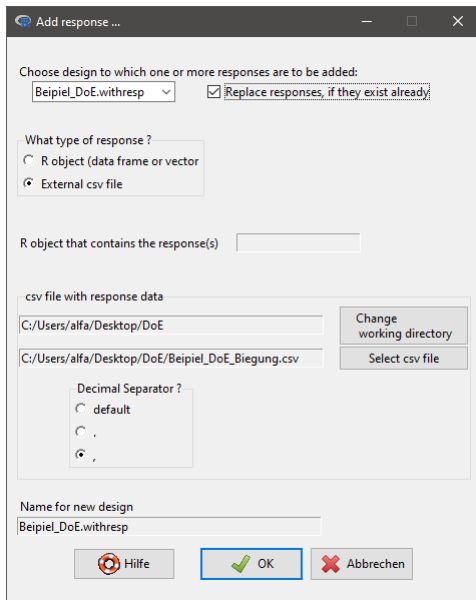


DoE im RCommander

Messwerte hochladen

- Wir geben die Daten in der csv-Datei ein und laden diese wieder hoch

Design > Modify design > Add response variable(s)...

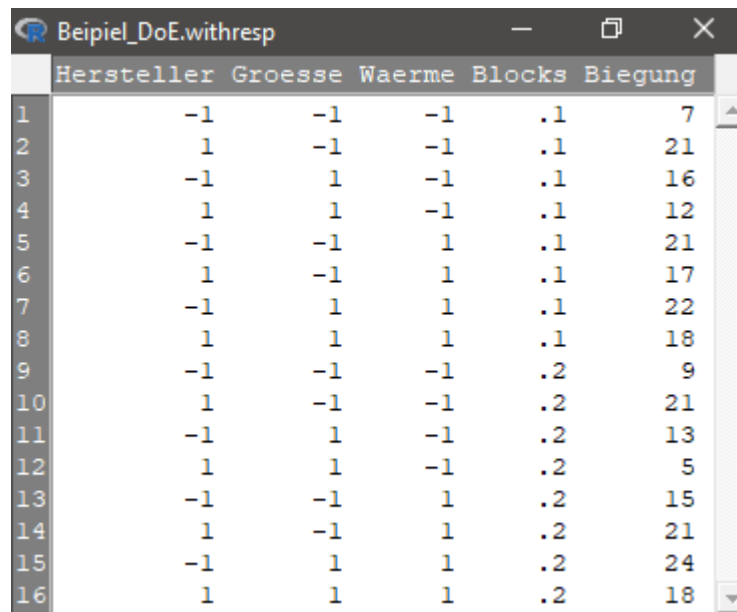


Es ist wichtig, dass die Datenreihenfolge der geladenen Daten mit dem Model übereinstimmt

DoE im RCommander

Messwerte hochladen

Der Datensatz *Beispiel_DoE_Biegung* geordnet, als csv-Datei gespeichert und inklusive Response hochgeladen

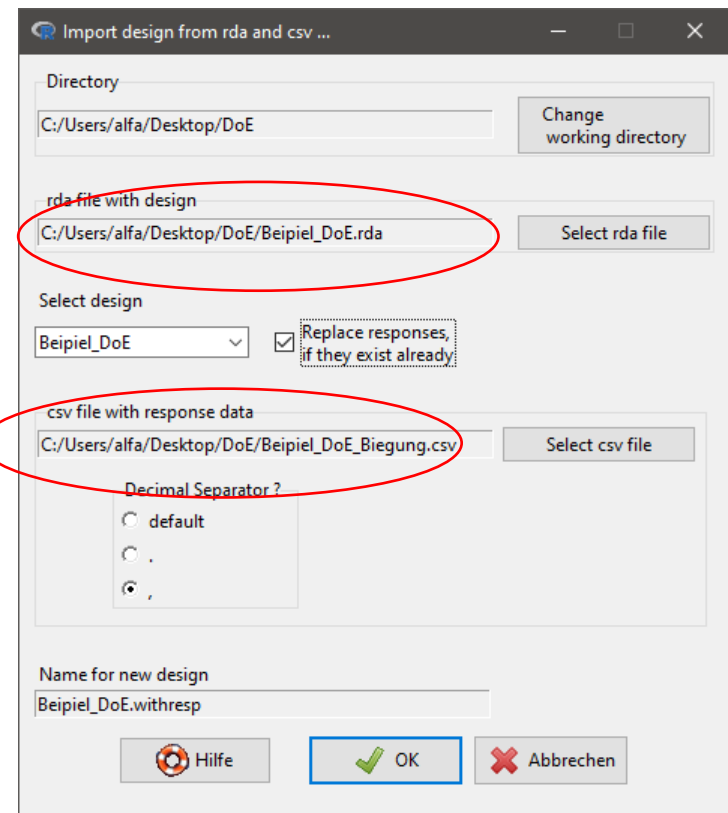


| | Hersteller | Groesse | Waerme | Blocks | Biegung |
|----|------------|---------|--------|--------|---------|
| 1 | -1 | -1 | -1 | .1 | 7 |
| 2 | 1 | -1 | -1 | .1 | 21 |
| 3 | -1 | 1 | -1 | .1 | 16 |
| 4 | 1 | 1 | -1 | .1 | 12 |
| 5 | -1 | -1 | 1 | .1 | 21 |
| 6 | 1 | -1 | 1 | .1 | 17 |
| 7 | -1 | 1 | 1 | .1 | 22 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | .1 | 18 |
| 9 | -1 | -1 | -1 | .2 | 9 |
| 10 | 1 | -1 | -1 | .2 | 21 |
| 11 | -1 | 1 | -1 | .2 | 13 |
| 12 | 1 | 1 | -1 | .2 | 5 |
| 13 | -1 | -1 | 1 | .2 | 15 |
| 14 | 1 | -1 | 1 | .2 | 21 |
| 15 | -1 | 1 | 1 | .2 | 24 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | .2 | 18 |

DoE im RCommander

Modell und Messwerte hochladen

Sollte im Rcommander aktuell kein Modell definiert sein, müssen Sie gegebenenfalls zwei Dateien (csv- und rda-Datei) hochladen



DoE im RCommander

Ein DoE überprüfen (*inspect design...*)

Verschiedene Möglichkeiten, das aktuelle Design zu überprüfen...

| | run.no | run.no.std.rp | Hersteller | Groesse | Waerme | Blocks | Biegung |
|----|--------|---------------|------------|---------|--------|--------|---------|
| 1 | 1 | 1.1 | -1 | -1 | -1 | .1 | 7 |
| 2 | 2 | 2.1 | 1 | -1 | -1 | .1 | 21 |
| 3 | 3 | 3.1 | -1 | 1 | -1 | .1 | 16 |
| 4 | 4 | 4.1 | 1 | 1 | -1 | .1 | 12 |
| 5 | 5 | 5.1 | -1 | -1 | 1 | .1 | 21 |
| 6 | 6 | 6.1 | 1 | -1 | 1 | .1 | 17 |
| 7 | 7 | 7.1 | -1 | 1 | 1 | .1 | 22 |
| 8 | 8 | 8.1 | 1 | 1 | 1 | .1 | 18 |
| 9 | 9 | 1.2 | -1 | -1 | -1 | .2 | 9 |
| 10 | 10 | 2.2 | 1 | -1 | -1 | .2 | 21 |
| 11 | 11 | 3.2 | -1 | 1 | -1 | .2 | 13 |
| 12 | 12 | 4.2 | 1 | 1 | -1 | .2 | 5 |
| 13 | 13 | 5.2 | -1 | -1 | 1 | .2 | 15 |
| 14 | 14 | 6.2 | 1 | -1 | 1 | .2 | 21 |
| 15 | 15 | 7.2 | -1 | 1 | 1 | .2 | 24 |
| 16 | 16 | 8.2 | 1 | 1 | 1 | .2 | 18 |

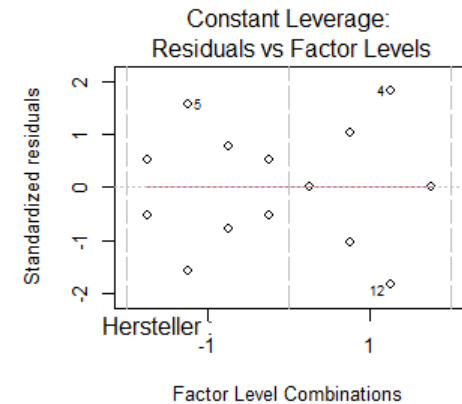
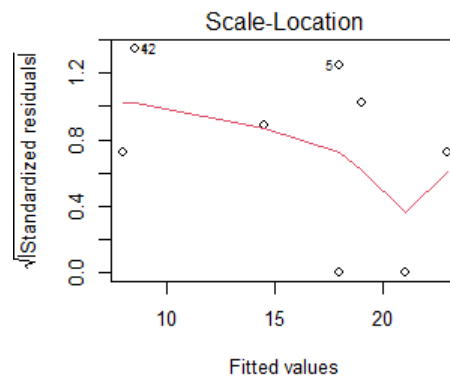
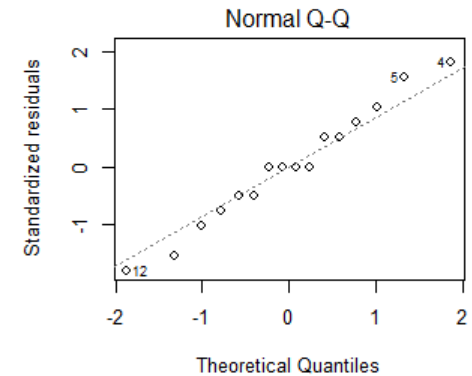
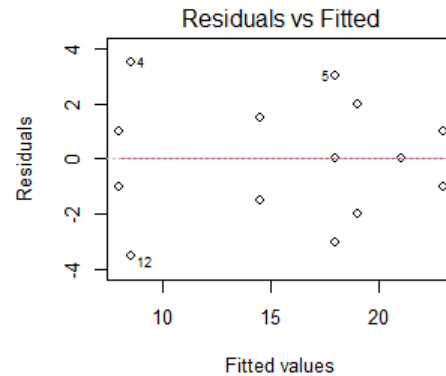
DoE im RCommander

Ein DoE auswerten...

Residuenanalyse

(zu finden unter *Modelle > Grafiken*
> *Grundlegende diagnostische Grafiken*)

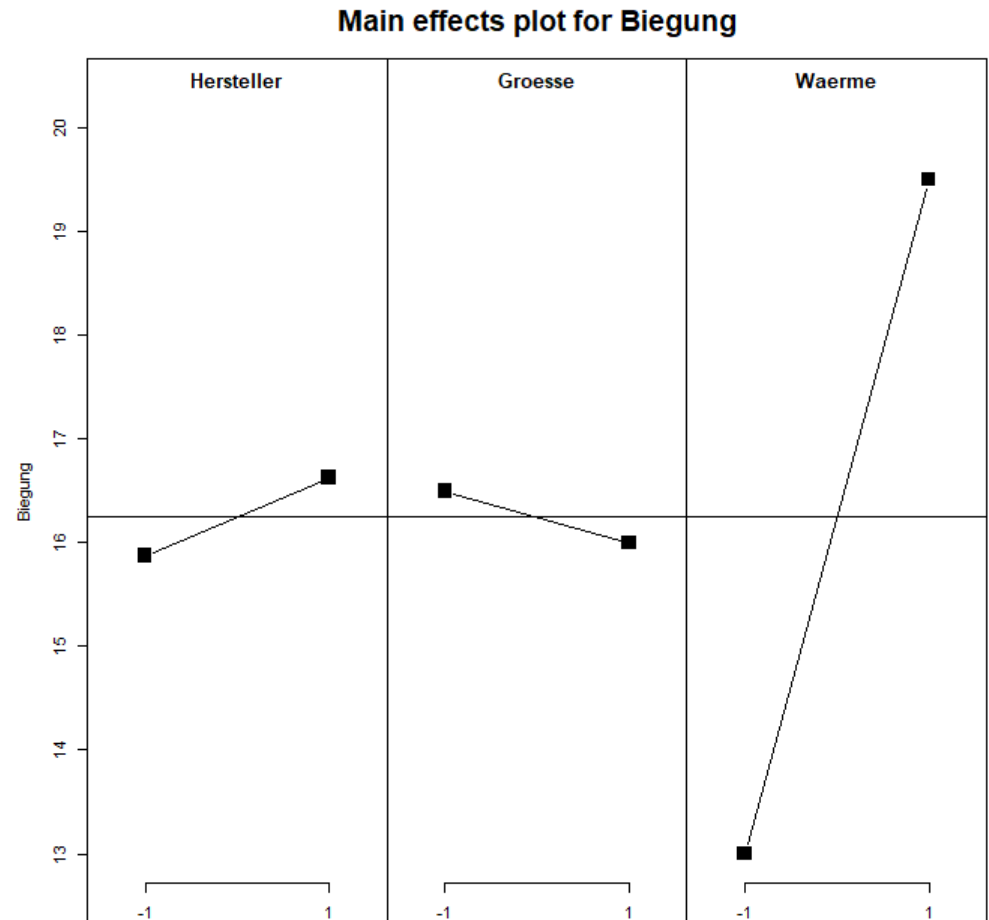
lm.default(Biegung ~ (Hersteller + Groesse + Waerme)^3)



DoE im RCommander

Ein DoE auswerten...

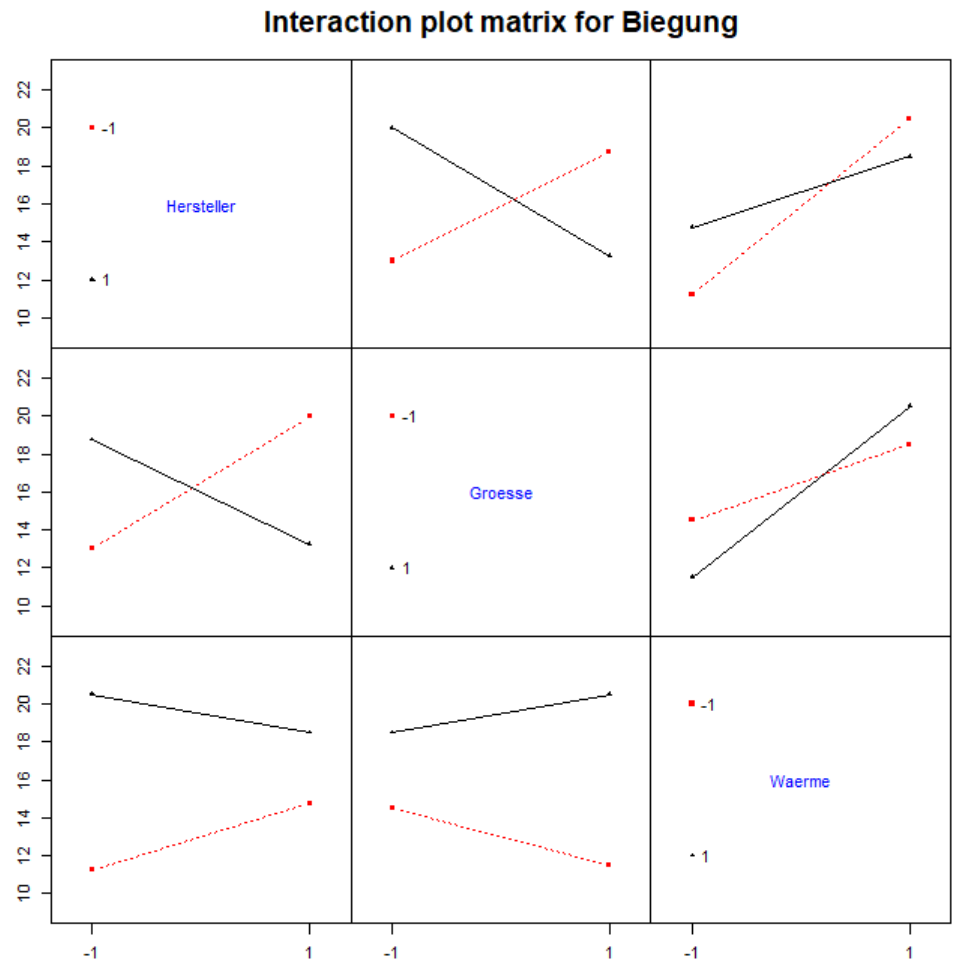
Haupteffekte



DoE im RCommander

Ein DoE auswerten...

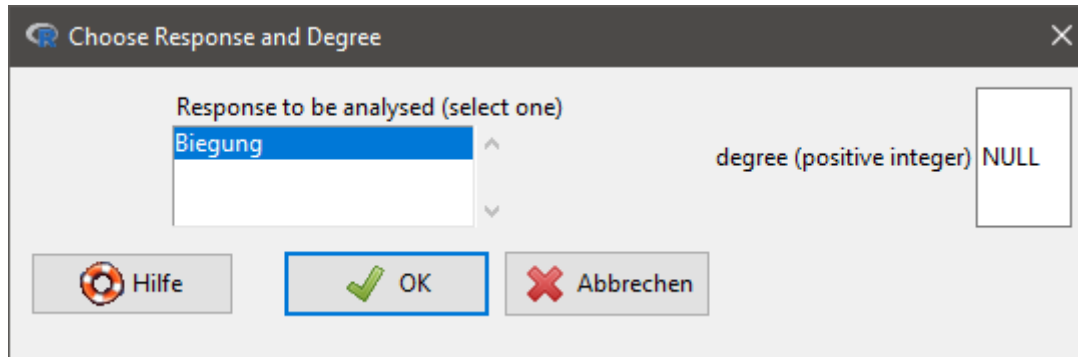
Wechselwirkungen



DoE im RCommander

Ein DoE auswerten

Design > Analyze design > Default linear model...



DoE im RCommander

Ein DoE auswerten

Linear model for experimental designs

Name für Modell: LinearModel.2

Variablen (Doppelklick fügt in Gleichung ein)

- Biegung
- Blocks [Faktor]
- Groesse [Faktor]
- Hersteller [Faktor]
- Waerme [Faktor]

Modellgleichung

Operatoren (zum Einfügen klicken): + * : / %in% - ^ ()

Splines/Polynome: (wähle Variable und klicke)

- B-spline
- natürlicher Spline
- orthog. Polynom
- normales Polynom

Freiheitsgrade für Splines: 5

Grad für Polynome: 2

Biegung ~ (Hersteller + Groesse + Waerme)^3

Hilfe

OK

Abbrechen

DoE im RCommander

Ein DoE auswerten

Call:

```
lm.default(formula = Biegung ~ (Hersteller + Groesse + Waerme)^3,  
            data = Beispiel_DoE.withresp)
```

Residuals:

| Min | 1Q | Median | 3Q | Max |
|--------|--------|--------|-------|-------|
| -3.500 | -1.125 | 0.000 | 1.125 | 3.500 |

Coefficients:

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t) | |
|------------------------------|----------|------------|---------|---------------|-----|
| (Intercept) | 16.2500 | 0.6789 | 23.935 | 0.00000000989 | *** |
| Hersteller1 | 0.3750 | 0.6789 | 0.552 | 0.59580 | |
| Groessel | -0.2500 | 0.6789 | -0.368 | 0.72225 | |
| Waerme1 | 3.2500 | 0.6789 | 4.787 | 0.00138 | ** |
| Hersteller1:Groessel | -3.1250 | 0.6789 | -4.603 | 0.00175 | ** |
| Hersteller1:Waerme1 | -1.3750 | 0.6789 | -2.025 | 0.07742 | . |
| Groessel:Waerme1 | 1.2500 | 0.6789 | 1.841 | 0.10286 | |
| Hersteller1:Groessel:Waerme1 | 1.6250 | 0.6789 | 2.393 | 0.04362 | * |

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.716 on 8 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8784, Adjusted R-squared: 0.7719

F-statistic: 8.252 on 7 and 8 DF, p-value: 0.003981

DoE im RCommander

Ein DoE auswerten

Residual standard error: 2.716 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.8784, Adjusted R-squared: 0.7719
F-statistic: 8.252 on 7 and 8 DF, p-value: 0.003981

$p < \alpha$

Das Modell ist signifikant

F-statistics > 1

geeignetes Model, der Wert ist aber nur
im Vergleich mit anderen Modellen
interessant

Multiple R-squared bzw. Adjusted r-squared:
Güte des Modells

DoE im RCommander

Ein DoE auswerten

Coefficients:

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t) | |
|------------------------------|----------|------------|---------|---------------|-----|
| (Intercept) | 16.2500 | 0.6789 | 23.935 | 0.00000000989 | *** |
| Hersteller1 | 0.3750 | 0.6789 | 0.552 | 0.59580 | |
| Groesse1 | -0.2500 | 0.6789 | -0.368 | 0.72225 | |
| Waerme1 | 3.2500 | 0.6789 | 4.787 | 0.00138 | ** |
| Hersteller1:Groesse1 | -3.1250 | 0.6789 | -4.603 | 0.00175 | ** |
| Hersteller1:Waerme1 | -1.3750 | 0.6789 | -2.025 | 0.07742 | . |
| Groesse1:Waerme1 | 1.2500 | 0.6789 | 1.841 | 0.10286 | |
| Hersteller1:Groesse1:Waerme1 | 1.6250 | 0.6789 | 2.393 | 0.04362 | * |

$p < \alpha$ Wichtige Komponente im Modell

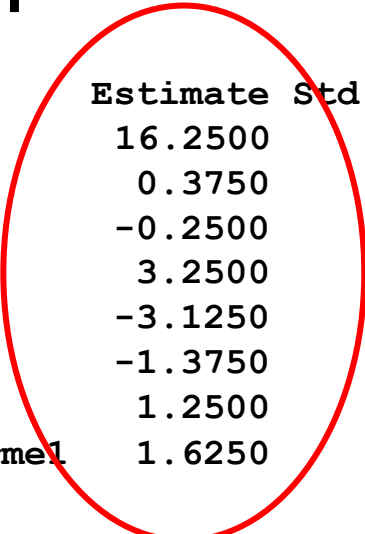
Hier sind die Konstante, der Hauptfaktor Wärme und die Wechselwirkungen Hersteller/Größe und Hersteller/Größe/Wärme wichtig

Im Allgemeinen ist es üblich auch unwichtige Hauptfaktoren im Modell zu belassen, wenn sie mit wichtigen Wechselwirkungen verbunden sind

DoE im RCommander

Ein DoE auswerten

Coefficients:



| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t) | |
|------------------------------|----------|------------|---------|---------------|-----|
| (Intercept) | 16.2500 | 0.6789 | 23.935 | 0.00000000989 | *** |
| Hersteller1 | 0.3750 | 0.6789 | 0.552 | 0.59580 | |
| Groessel | -0.2500 | 0.6789 | -0.368 | 0.72225 | |
| Waermel | 3.2500 | 0.6789 | 4.787 | 0.00138 | ** |
| Hersteller1:Groessel | -3.1250 | 0.6789 | -4.603 | 0.00175 | ** |
| Hersteller1:Waermel | -1.3750 | 0.6789 | -2.025 | 0.07742 | . |
| Groessel:Waermel | 1.2500 | 0.6789 | 1.841 | 0.10286 | |
| Hersteller1:Groessel:Waermel | 1.6250 | 0.6789 | 2.393 | 0.04362 | * |

Die Komponenten der Gleichung

DoE im RCommander

Ein DoE auswerten

$$\text{Biegung} = 16,2500 + 0,3750 * \text{Hersteller} - 0,2500 * \text{Größe} + 3,2500 * \text{Wärme} - 3,125 * \text{Hersteller} * \text{Größe} + 1,625 * \text{Hersteller} * \text{Größe} * \text{Wärme}$$

- Für Hersteller, Größe und Wärme können nun -1 und +1 eingesetzt werden