Statistik – Methoden zum Vergleich von zwei Gruppen

Nonparametrische Verfahren

Einleitung

Parametrische Tests

- Nutzen eine zugrundeliegende Verteilungsform (vielfach die Normalverteilung) zur Analyse der Daten

Nichtparametrische Tests

- Basieren auf keiner Verteilungsform

- Deshalb anwendbar, wenn parametrische Bedingungen nicht erfüllt sind

Einleitung

Nichtparametrische Tests kommen immer dann zum Einsatz, wenn die Voraussetzungen für parametrische Tests nicht erfüllt sind:

- Daten nicht metrisch skaliert
- Keine Normalverteilung
- Kleine Stichproben (Grenzwertsatz)

Einleitung

Vergleich mit parametrischen Tests

+ Auch für ordinale Daten geeignet
+ Für kleine Stichproben geeignet
+ Setzen keine Verteilung voraus
+ Nichtparametrische Test gelten als robuster
+ Mehr Anwendungssituationen

– Weniger Power
– Geringer Aussagekraft (nur einfache Analysen)
– Für gleiche Aussagekraft werden deutlich mehr Daten benötigt
– Symmetrieanforderung

Wo möglich: Nutzen Sie parametrische Tests!

Einleitung

- Nicht-parametrische Methoden arbeiten mit den Rängen der Daten und nicht mit den Merkmalsausprägungen

- Rangbildung:

  - Ordnung der Daten nach Größe

  - Anschließende Durchnummerierung

  - Bei Bindungen (mehrere gleiche Werte) erfolgt Mittelwertbildung (Siehe: Spearman)

Einleitung

Parametrisch	Nicht-Parametrische Alternative
t-Test für eine Stichprobe	Wilcoxon-Test für eine Stichprobe
t-Test für unabhängige Stichproben	Mann-Whitney-U-Test /Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
t-Test für gepaarte Stichproben	Wilcoxon-Test für gepaarte Stichproben
Pearson-Korrelation	Spearman-Korrelation

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

- **Vorzeichenrangtest nach Wilcoxon**
- Nicht-parametrische Alternative zum t-Test für eine Stichprobe
- Prüfung, ob der Median einer Stichprobe sich von einem Vorgabewert unterscheidet
- Gerichtete und ungerichtete Hypothesen möglich (einseitig/zweiseitig)
- Annahme, dass Daten aus einer symmetrischen Verteilung stammen

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

- Prüfung von Annahmen über das Symmetriezentrum der Grundgesamtheit
- Rangzahlbildung für die Daten x_i der Stichprobe mit Größe n
- Unabhängigkeit der Daten innerhalb der Stichprobe

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

Vorgehen

- Bildung von transformierten Beobachtungen

$x_i' = x_i - m_0$ mit m_0 Vorgabewert, gegen den geprüft wird

- Punkte mit $x_i' = 0$ werden nicht weiter berücksichtigt
- Vergabe von Rangzahlen R_i(von klein nach groß) für die Beträge $|x_i'|$
- Bei Bindung werden die Rangzahlen gemittelt

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

Vorgehen

- Den Rangzahlen R_i wird das Vorzeichen ihres x_i' zugewiesen: $\tilde{R}_i$

Teststatistik

$$\boldsymbol{T^+ = \sum \left(positive\ Rangzahlen\ \widetilde{R}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \widetilde{R}_i}$$

mit $\boldsymbol{c_i} = \begin{cases} \boldsymbol{0, falls\ \widetilde{R}_i < 0} \\ \boldsymbol{1, falls\ \widetilde{R}_i > 0} \end{cases}$

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

Kritische Werte $w_{n,\gamma}$

n	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99
4	0	0	0	1	8	9	10	10
5	0	0	1	3	11	13	14	14
6	0	1	3	4	16	17	19	20
7	1	3	4	6	21	23	24	26
8	2	4	6	9	26	29	31	33
9	4	6	9	11	33	35	38	40
10	6	9	11	15	39	43	45	48
11	8	11	14	18	47	51	54	57
12	10	14	18	22	55	59	62	66
13	13	18	22	27	63	68	72	77
14	16	22	26	32	72	78	82	88
15	20	26	31	37	82	88	93	99
16	24	30	36	43	92	99	105	111
17	28	35	42	49	103	110	117	124
18	33	41	48	56	114	122	129	137
19	38	47	54	63	126	135	142	151
20	44	53	61	70	139	148	156	165

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

Hypothesen und deren Auswertung

Fall 1, einseitig

$\boldsymbol{H_0\!: \tilde{x} \leq m_0}$

$\boldsymbol{H_1\!: \tilde{x} > m_0}$

Für $\boldsymbol{T^+ > w_{n;1-\alpha}}$ Verwerfen der Nullhypothese

Fall 2, einseitig

$\boldsymbol{H_0\!: \tilde{x} \geq m_0}$

$\boldsymbol{H_1\!: \tilde{x} < m_0}$

Für $\boldsymbol{T^+ < w_{n;\alpha}}$ Verwerfen der Nullhypothese

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

Hypothesen und deren Auswertung

Fall 3, zweiseitig

$\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{\widetilde{x} = m_0}$

$\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{\widetilde{x} \neq m_0}$

Für $\boldsymbol{T^+ > w_{n;1-\alpha/2}}$ oder $\boldsymbol{T^+ < w_{n;\alpha/2}}$

Verwerfen der Nullhypothese

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

Große Stichprobenumfänge

Für große Stichprobenumfänge kann der Vorzeichenrangtest nach Wilcoxon durch einen Gaußtest (z-Test) approximiert werden

$$\boldsymbol{T}^{*} = \frac{\boldsymbol{T}^{+} - \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})}{\boldsymbol{4}}}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})(\boldsymbol{2n}+\boldsymbol{1})}{\boldsymbol{24}}}}$$

Die kritischen Werte des Tests erhält man dann aus der Z-Verteilung

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

Beispiel

Wir wollen Prüfen, ob die Ergebnisse einer Klausur aus einer Grundgesamtheit mit $m_0 = 63$ stammt (Fall 3)

Die Ergebnisse finden Sie in *Beispiel_Klausur.xlsx*

i	xi
1	73
2	54
3	65
4	53
5	57
6	70
7	55
8	62
9	69
10	71

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

Beispiel

i	x_i	x'_i	$\lvert x'_i \rvert$	$\lvert R_i \rvert$	$\widetilde{R}_i$		T^+
1	73	10	10	9,5	9,5		9,5
2	54	-9	9	8	-8		
3	65	2	2	2	2		2
4	53	-10	10	9,5	-9,5		
5	58	-5	5	3	-3		
6	70	7	7	5	5		5
7	55	-8	8	6,5	-6,5		
8	62	-1	1	1	-1		
9	69	6	6	4	4		4
10	71	8	8	6,5	6,5		6,5

$$\boldsymbol{T^+ = 27}$$

Wilcoxon-Test, eine Stichprobe

Beispiel

Für n = 10 und 1-α=0,95 ergibt sich:

$$\boldsymbol{w_{10;0,975} = 45}$$

$$\boldsymbol{w_{10;0,025} = 9}$$

$$\boldsymbol{9 < T^{+} = 27 < 45}$$

Wir bleiben bei der Nullhypothese, das mittlere Klausurergebnis entspricht der Erwartung

Wilcoxon-Test, gepaarte Stichproben

- Test für gepaarte Stichproben nach Wilcoxon
- Nicht-parametrische Alternative zum 2t-Test für abhängige Stichproben
- Prüfung, ob sich die Paardifferenzen von 0 unterscheiden
- Annahme, dass Daten aus einer symmetrischen Verteilung stammen

Wilcoxon-Test, gepaarte Stichproben

Vorgehen

- Hypothesen aufstellen

$\boldsymbol{H_0}$: $\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ Die untersuchten Gruppen unterscheiden sich **nicht** in ihrem Zentralmaß

$\boldsymbol{H_1}$: $\widetilde{\boldsymbol{X}} \neq \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ Die untersuchten Gruppen unterscheiden sich in ihrem Zentralmaß

- Bildung der Differenzen

$$\boldsymbol{d_i = x_i - y_i}$$

Wilcoxon-Test, gepaarte Stichproben

Vorgehen

- Vergabe von Rangzahlen R_i(von klein nach groß) für die Beträge $|d_i|$
- Aufsummieren der Ränge nach Vorzeichen getrennt $\boldsymbol{R^+}, \boldsymbol{R^-}$

Teststatistik

$$\boldsymbol{w = min(R^+, R^-)}$$

Die weitere Auswertung erfolgt analog zum Vorzeichen-rangtest nach Wilcoxon (Einstichprobenfall)

Wilcoxon-Test, gepaarte Stichproben

Beispiel

Unsere Kandidaten haben eine weitere Prüfung geschrieben. Stimmen die Ergebnisse überein? (Fall 3)

Die Ergebnisse finden Sie in *Beispiel_Klausur.xlsx*

i	xi	yi
2	54	49
5	58	53
7	55	50
8	62	59
4	53	51
1	73	72
10	71	72
3	65	68
9	69	72
6	70	75

Wilcoxon-Test, gepaarte Stichproben

Beispiel

$\boldsymbol{H_0}$: $\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ Die untersuchten Gruppen unterscheiden sich **nicht** in ihrem Zentralmaß

$\boldsymbol{H_1}$: $\widetilde{\boldsymbol{X}} \neq \widetilde{\boldsymbol{Y}}$ Die untersuchten Gruppen unterscheiden sich in ihrem Zentralmaß

Wilcoxon-Test, gepaarte Stichproben

Beispiel

i	x_i	y_i	d_i	$\lvert d_i \rvert$	R_i	R^+	R^-
1	73	72	1	1	1,5	1,5	
2	54	49	5	5	8,5	8,5	
3	65	68	-3	3	5		5
4	53	51	2	2	3	3	
5	58	53	5	5	8,5	8,5	
6	70	75	-5	5	8,5		8,5
7	55	50	5	5	8,5	8,5	
8	62	59	3	3	5	5	
9	69	72	-3	3	5		5
10	71	72	-1	1	1,5		1,5

$$R^+ = 35; R^- = 20; w = min(35; 20) = 20$$

Wilcoxon-Test, gepaarte Stichproben

Beispiel

Für n = 10 und 1-α=0,95 ergibt sich:

$$\boldsymbol{w_{10;0,975} = 45}$$

$$\boldsymbol{w_{10;0,025} = 9}$$

$$\boldsymbol{9 < w = 20 < 45}$$

Wir bleiben bei der Nullhypothese, die zweite Prüfung hat einen vergleichbaren Ausgang

Mann-Whitney-Test

- Test für unabhängige Stichproben
- Nicht-parametrische Alternative zum 2t-Test für unabhängige Stichproben
- Prüfung, ob sich die die Zentrallage der Gruppen verändert
- Test lässt sich gerichtet und ungerichtet ausführen
- Annahme, dass Daten aus einer symmetrischen Verteilung stammen

Mann-Whitney-Test

Hypothesen und deren Auswertung
(n; m: Stichprobengrößen)

Fall 1, einseitig
$\boldsymbol{H_0}$: $\widetilde{\boldsymbol{x}} \leq \widetilde{\boldsymbol{y}}$
$\boldsymbol{H_1}$: $\widetilde{\boldsymbol{x}} > \widetilde{\boldsymbol{y}}$

Für $\mathbf{U} > \boldsymbol{U_{n;m;1-\alpha}}$ Verwerfen der Nullhypothese

Fall 2, einseitig
$\boldsymbol{H_0}$: $\widetilde{\boldsymbol{x}} \geq \widetilde{\boldsymbol{y}}$
$\boldsymbol{H_1}$: $\widetilde{\boldsymbol{x}} < \widetilde{\boldsymbol{y}}$

Für $\boldsymbol{U} < \boldsymbol{U_{n;m;\alpha}}$ Verwerfen der Nullhypothese

Mann-Whitney-Test

Hypothesen und deren Auswertung

Fall 3, zweiseitig

$\boldsymbol{H_0}$: $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \widetilde{\boldsymbol{y}}$

$\boldsymbol{H_1}$: $\widetilde{\boldsymbol{x}} \neq \widetilde{\boldsymbol{y}}$

Für $\boldsymbol{U} > \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{n;m;1-\alpha/2}}$ oder $\boldsymbol{U} < \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{n;m;\alpha/2}}$

Verwerfen der Nullhypothese

Mann-Whitney-Test

Vorgehen

- Zusammenfassung der beiden Gruppen
- Größenordnung der Werte
- Vergabe der Ränge
- Gruppenweise Bildung der Rangsummen R_x, R_y

Mann-Whitney-Test

Vorgehen

$$U_x = mn + \frac{m(m+1)}{2} - R_x$$

$$U_y = mn + \frac{n(n+1)}{2} - R_y$$

Teststatistik

$$U := \min\{U_x, U_y\}$$

Mann-Whitney-Test

Eine Tabelle mit kritischen U_{krit} findet sich z.B. bei wikipedia

Auf eine weitere Auswertung des Mann-Whitney-Tests wird hier verzichtet, da der Test im RCommander nicht hinterlegt ist.

Stattdessen gibt es die Möglichkeit für einen Test unabhängiger Stichproben einen weiteren Wilcoxon-Test zu nutzen.

Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben

Beispiel

Die Klausurergebnisse stammen nun von zwei unabhängigen Gruppen (Fall 3). Unterscheiden sich die Ergebnisse?

Die Ergebnisse finden Sie in *Beispiel_Klausur.xlsx*

i	xi	yi
2	54	49
5	58	53
7	55	50
8	62	59
4	53	51
1	73	72
10	71	72
3	65	68
9	69	72
6	70	75