Statistik – Grundlagen der induktiven Inferenzstatistik

Einführung Induktive Statistik

In der deskriptive Statistik haben wir vorhandene Daten komprimiert, Kennwerte berechnet und die Daten grafisch dargestellt

Würden wir immer die vollständige Grundgesamtheit vermessen, wären wir damit schon am Ziel

Im Allgemeinen werden wir aber mit Daten aus Stichproben konfrontiert

Die induktive Statistik wird uns nun die Frage beantworten, inwieweit die Stichprobe tatsächlich die Grundgesamtheit abbildet

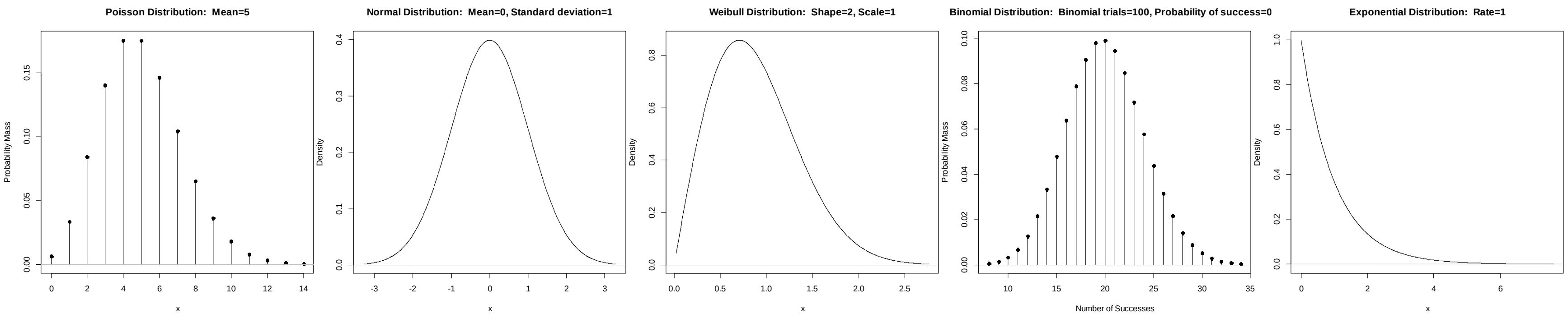
Einführung Induktive Statistik

Typische Fragestellungen

- Ich kenne Lage und Streuung einer Stichprobe: Wo genau liegen diese Werte für die Grundgesamtheit? (z.B. Konfidenzintervall)
- Ich kann die Verteilungsform einer Stichprobe identifizieren: Folgt die Grundgesamtheit tatsächlich auch dieser Form? (z.B. Anderson-Darling-Test)
- Ich habe zwei Stichproben: Stammen sie aus der selben Grundgesamtheit? (z.B. t-Test)

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wir werden bei der Untersuchung von Daten auf verschiedene Verteilungsformen der Daten stoßen



Die beiden wichtigsten Verteilungen (Binomialverteilung für diskrete Daten und die Normalverteilung für kontinuierliche Daten) wollen wir uns genauer anschauen

Binomialverteilung

- Anzahl der Erfolge in einer Serie von gleichartigen und unabhängigen Versuchen mit genau zwei Versuchsausgängen (Erfolg oder Misserfolg)

Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\boldsymbol{B(k|p,n)} = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{falls } k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\boldsymbol{E(X) = np}$ **Erwartungswert**

$\boldsymbol{Var(X) = np(1-p)}$ **Varianz**

Normalverteilung

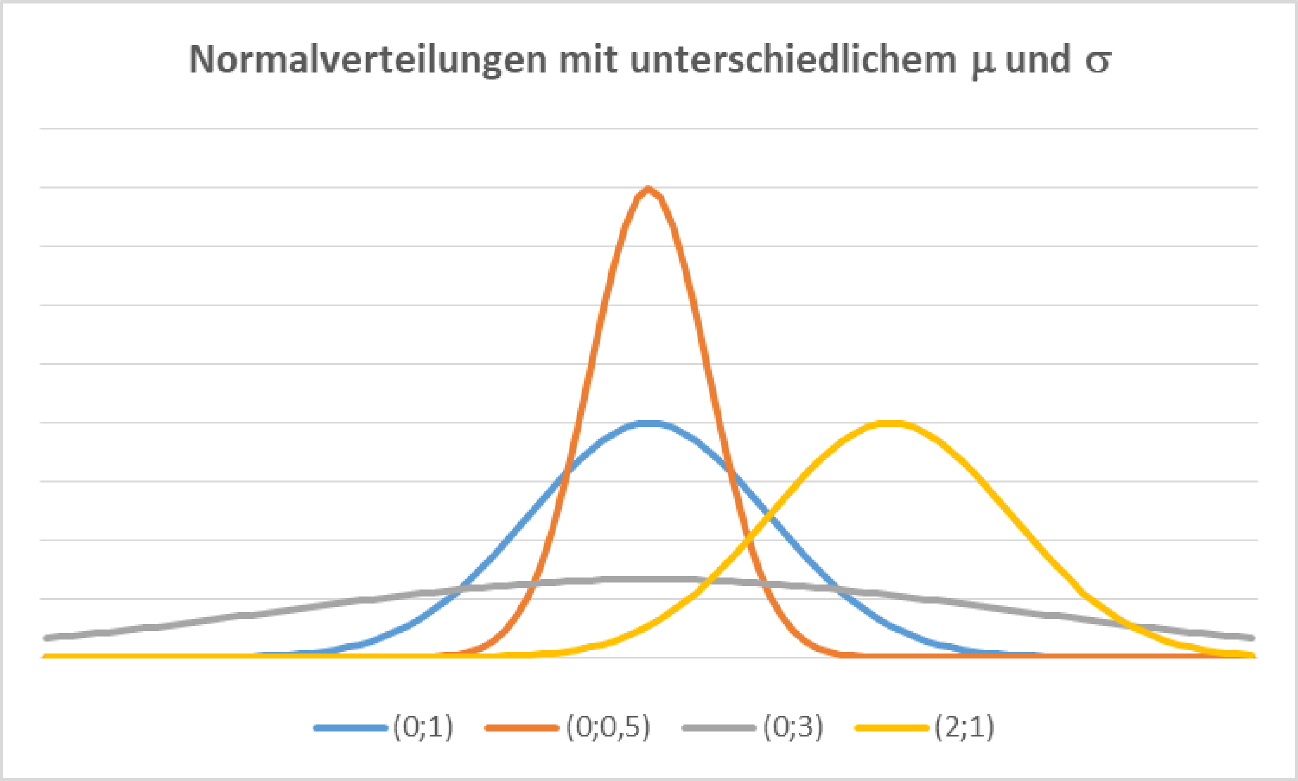
- Gauß- oder Normalverteilung als bekannteste Verteilungsform
- Die zugehörige Dichtefunktion: Gauß'sche Glockenkurve
- Viele statistische Verfahren setzen Normalverteilung der Daten voraus

Normalverteilung

Eigenschaften der Normalverteilung

- **Symmetrisch** mit der Symmetrieachse $x = \mu$
- **Gleichheit** von arithmetischem Mittel, Median und Modus
- **Unimodal** (sie hat nur einen Gipfel).
- **Maximum** bei $x = \mu$.
- **Zwei Wendestellen bei** $x_1 = \mu - \sigma$ und $x_2 = \mu + \sigma$.
- **Differenzierbar** für jedes x
- **Unendliche** Spannweite

Normalverteilung



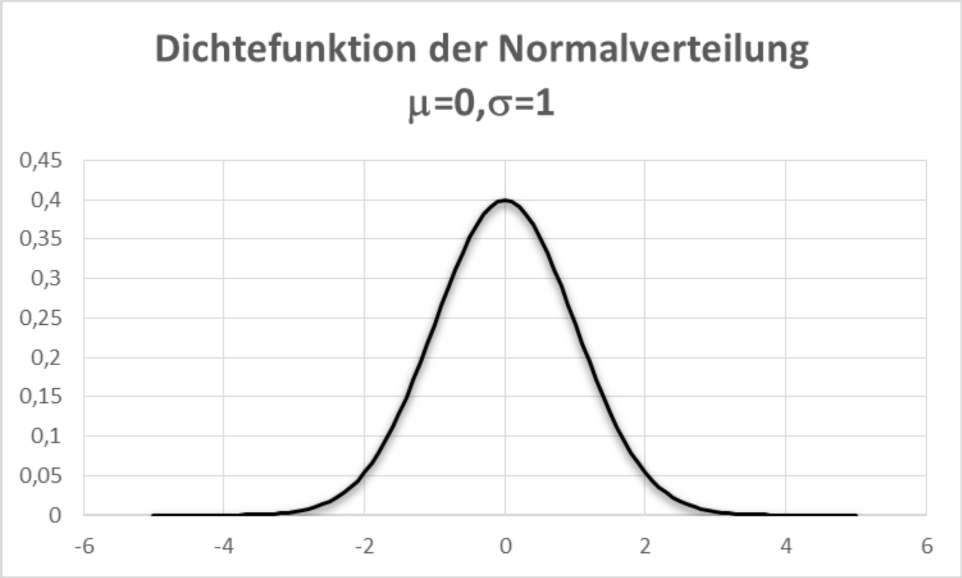
Normalverteilung

Mathematik der Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Dichtefunktion,

Glockenkurve



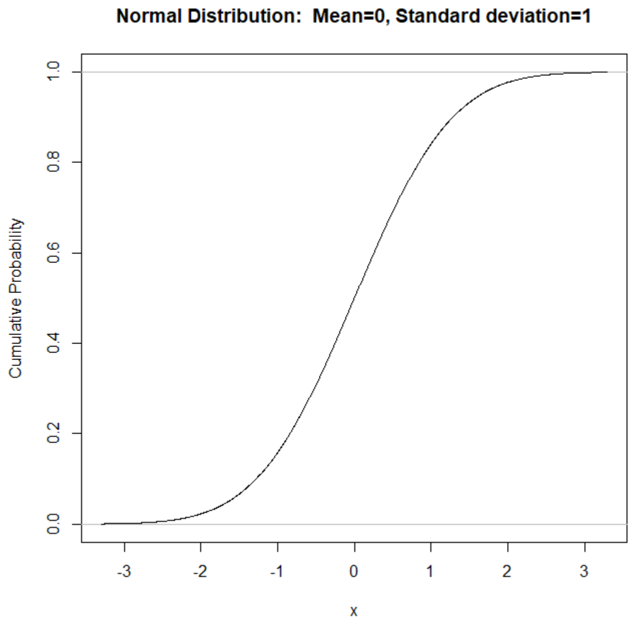
Spezialfall: μ=0; σ=1
Die Standardnormalverteilung

Normalverteilung

Mathematik der Normalverteilung

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Verteilungsfunktion



Normalverteilung

Mathematik der Normalverteilung

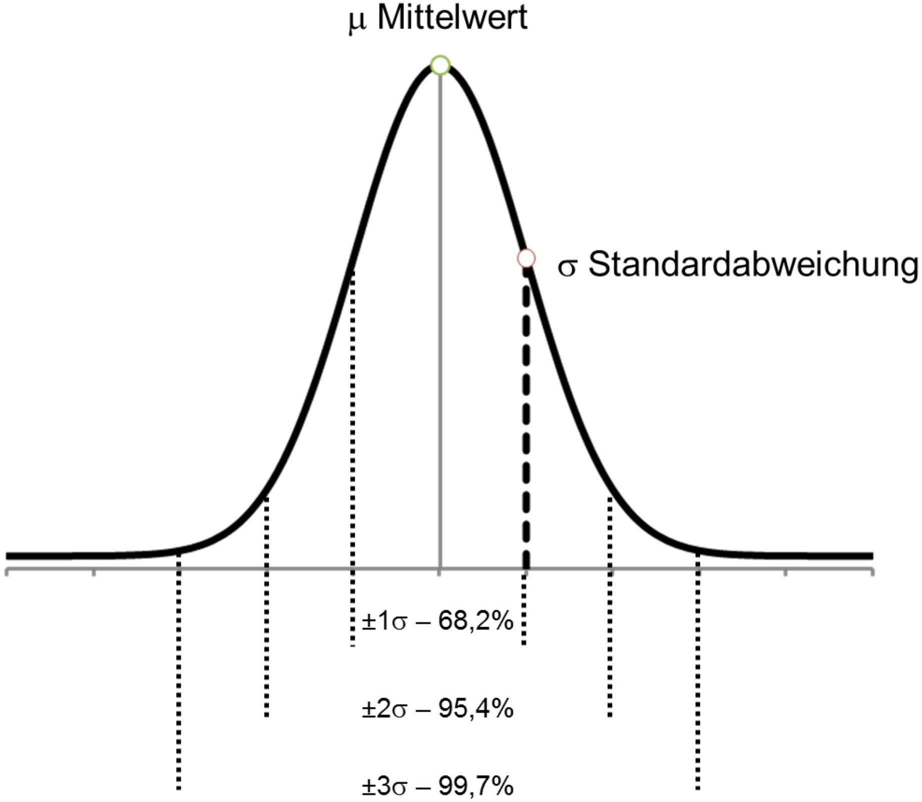
$\boldsymbol{E(X) = \mu}$ **Erwartungswert**

$\boldsymbol{Var(X) = \sigma^2}$ **Varianz**

Normalverteilung

68 – 95 – 99-Regel

Die Datenmenge einer Normalverteilung liegt überwiegend in dem Bereich zwischen -3σ und $+3\sigma$ um den Erwartungswert (μ)

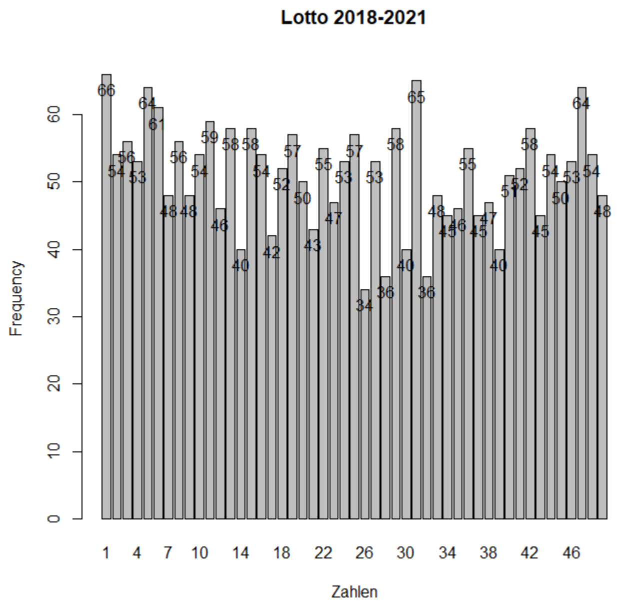


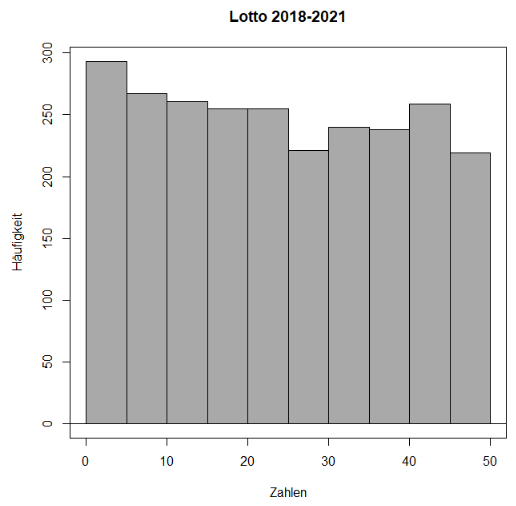
Normalverteilung

- Annahme der Normalverteilung hilft bei der statistischen Auswertung von Daten
- Viele Werkzeuge setzten die Normalverteilung voraus
- Sie werden entsprechende Testverfahren kennenlernen
- Was tun, wenn Daten nicht normalverteilt sind?
  - Prozessstabilisierung (*Stable Operations)*
  - Datentransformation (z.B. Johnson)
  - Kurvenanpassung
  - Nicht-parametrische Werkzeuge (folgt)

Mittelwerteverteilung

- Population: Alle in 2021 gezogenen Lottozahlen (6 aus 49)
- Das Balkendiagramm der Zahlen deutet an, dass es sich nicht um eine Normalverteilung handelt
- Wir erwarten wohl eher eine Gleichverteilung





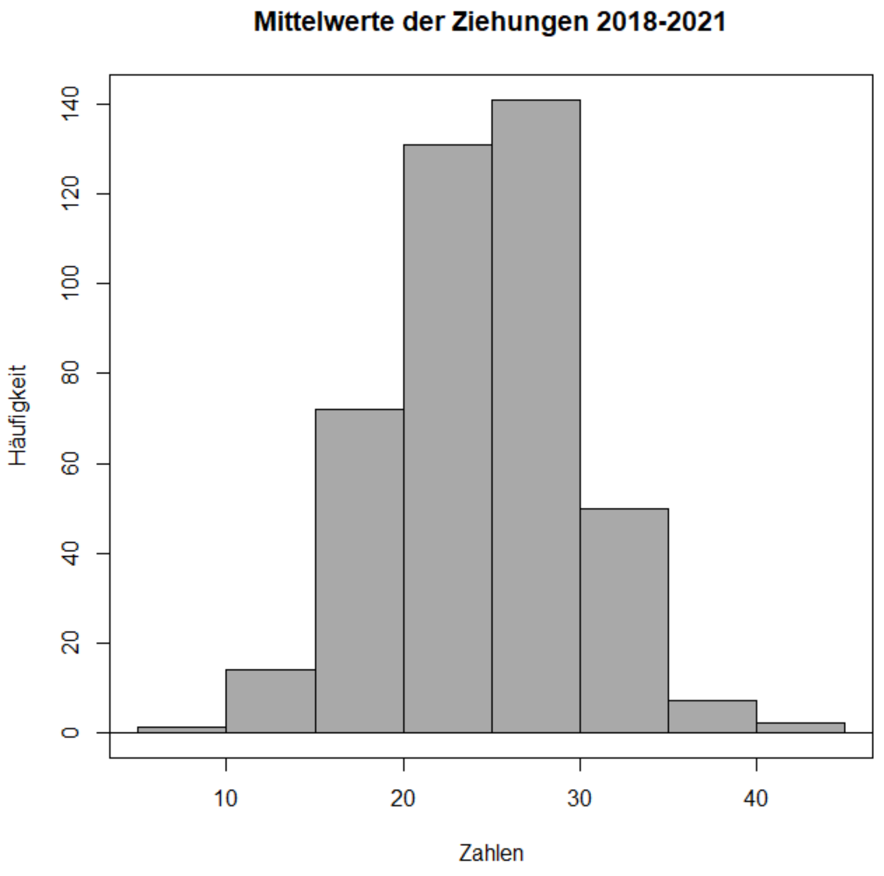
Mittelwerteverteilung

Was passiert, wenn wir jede Ziehung als Stichprobe betrachten und uns einmal die Stichprobenmittelwerte anschauen?

Das hat viel Ähnlichkeit mit einer Normalverteilung!

Probieren Sie es, nehmen Sie sich weitere Jahre dazu.

Je mehr Daten Sie zusammenführen, um so mehr nähert sich die Verteilung der Mittelwerte einer Normalverteilung!



Zentraler Grenzwertsatz

Die beschriebene Eigenschaft von Daten nennt sich

Zentraler Grenzwertsatz

Werden viele Mittelwerte von Stichproben, die einer Grundgesamtheit entstammen, überlagert, so nähern sie sich approximativ einer Normalverteilung.

Die untersuchte Grundgesamtheit kann dabei einer beliebigen Verteilung folgen!

Zentraler Grenzwertsatz

Den Effekt des Zentrale Grenzwertsatzes kann man sich zunutze machen:

Sammelt man viele Stichproben, kann die Verteilung der Stichprobenmittelwerte mit statistischen Werkzeugen für die Normalverteilung untersucht werden!

Dabei ist „viele Stichproben“ sehr unterschiedlich zu werten, je nachdem wie weit die Verteilungsform der Grundgesamtheit von der Normalverteilung entfernt ist. Teilweise kann man Effekte schon ab 20 Stichproben erkennen.

Parameterschätzung

Gedankenexperiment

- Uns liegt eine Grundgesamtheit in Form einer $N(\mu,\sigma)$-Verteilung vor, d.h. die Daten folgen einer Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ (Daten finden sich in der Datei *GG1000.xlsx*)
- Dabei gilt N = 1000, μ = 4,972 und σ = 0,988
- Diese Parameter der Grundgesamtheit seien uns unbekannt
- Aus der Grundgesamtheit ziehen wir nun Stichproben mit n Merkmalsausprägungen und untersuchen diese

Parameterschätzung

Gedankenexperiment: Einzelne Stichproben mit jeweils n = 10

- Einzelne Stichproben mit einer niedrigen Stichprobengröße können die Parameter der Grundgesamtheit nur unbefriedigend abbilden

Stichprobe	$\overline{x}$	δ_{rel}	s	δ_{rel}
1	5,055	1,67%	1,392	40,89%
2	4,474	- 10,02%	1,239	25,40%
3	4,861	- 2,23%	1,213	22,77%
4	4,593	- 7,62%	0,626	- 36,64%
5	4,883	- 1,79%	0,632	- 36,03%
(GG)	4,972		0,988	

Parameterschätzung

Gedankenexperiment: Wachsende Stichproben

- Mit steigender Stichprobengröße erfolgt eine immer bessere Approximation an die wahren Werte der Grundgesamtheit

n	$\bar{x}$	δ_{rel}	s	δ_{rel}
10	5,055	1,67%	1,392	40,89%
25	4,687	- 5,73%	1,269	28,44%
50	4,773	- 4,00%	1,048	6,07%
100	4,791	- 3,64%	1,030	4,25%
150	4,809	- 3,28%	1,014	2,63%
250	5,057	1,71%	0,967	2,13%
500	5,008	0,72%	0,957	3,14%
(GG)	(4,972)		(0,988)	

Konfidenzintervalle

- Vollerhebungen bieten eindeutige Parameter für Lage und Streuung, kommen aber selten zur Anwendung
- Wir können Parameter stattdessen aus Stichproben schätzen
- Dabei wissen wir aber nicht, wie gut diese Schätzung ist
- Alternativ besteht die Möglichkeit einen Bereich zu bestimmen, in dem der gesuchte Parameter mit einer bekannten Sicherheit liegt: Ein **Konfidenzintervall**
- „Mit 95% Sicherheit liegt der gesuchte Mittelwert im Bereich von 4,499 bis 5,047“

Konfidenzintervalle

- Irrtumswahrscheinlichkeit α: Wahrscheinlichkeit, dass der gesuchte Parameter **nicht** im gewählten Bereich liegt
- 1-α: Wahrscheinlichkeit, dass der gesuchte Wert im gewählten Bereich liegt
- Konfidenzintervall zum Niveau 1-α: Bereich, in dem der der gesuchte Wert mit einer bekannten Wahrscheinlichkeit liegen wird

Konfidenzintervalle

Wie bestimmt sich ein Konfidenzintervall?

- Ausgangslage:
  - Das Merkmal ist normalverteilt
  - Die Standardabweichung ist unbekannt
  - Es liegt eine repräsentative Stichprobe vor

- Aus der Stichprobe wird nun der Erwartungswert (hier: das arithmetische Mittel) bestimmt

Konfidenzintervalle

Aus dem *Gesetz der großen Zahlen* und dem *Grenzwertsatz* kann man ableiten, dass sich für den Schätzer $\bar{x}$ der mittlere quadratische Fehler bestimmt zu:

$$MSE = \frac{s^2}{n}$$

Konfidenzintervalle

Führt man an dieser Stelle zusätzlich die Irrtumswahrscheinlichkeit ein, so ergeben sich für den zu erwartend Bereich, in dem der Mittelwert der Grundgesamtheit mit einer bekannten Wahrscheinlichkeit liegen wird, zu:

$$\bar{x} - z * \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Damit können wir aus einer Stichprobe den Bereich (**Konfidenzintervall**) bestimmen, in dem mit einer bekannten Wahrscheinlichkeit der Mittelwert der Grundgesamtheit liegen wird

Konfidenzintervalle

Der z-Wert ist dabei das entsprechende Quantil aus der Standardnormalverteilung

Für ein gegebenes α gilt $\boldsymbol{z}_{\left(\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}\right)}$

Für die Berechnung eines zweiseitig begrenzten Bereichs müssen wir die Irrtumswahrscheinlichkeit auf beide Seiten verteilen

Konfidenzintervalle

Typische z-Werte für zweiseitig begrenzte Merkmale

$1-\alpha$	z	$1-\alpha$	z
80 %	1,28	95 %	1,96
85 %	1,44	98 %	2,33
90 %	1,64	99 %	2,58

Die Größe des Konfidenzintervalls hängt somit von folgenden Faktoren ab:

- Qualität der Stichprobe (wie groß ist die Streuung)
- Stichprobengröße (n)
- Gewünschte Sicherheit (α)

Typische Konfidenzintervalle

Normalverteilte Grundgesamtheit, bekannte Standardabweichung

$$\boldsymbol{\overline{x} - z * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Normalverteilte Grundgesamtheit, unbekannte Standardabweichung

$$\boldsymbol{\overline{x} - z * \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z * \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$\boldsymbol{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\propto}{2}\right)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\propto}{2}\right)}}$$

$(\boldsymbol{\chi^2_{n-1}}{:}\, \chi^2 - \boldsymbol{Verteilung\ mit\ n-1\ Freiheitsgraden})$

Typische Konfidenzintervalle

Anteilswert P der Grundgesamtheit (Bsp: Fehleranteil einer Warenlieferung)

$$\boldsymbol{\hat{p} - z * \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}} \leq P \leq \hat{p} + z * \sqrt{\frac{\hat{p} * (1 - \hat{p})}{n}}}$$

$\hat{p}$: Anteilswert in der Stichprobe

Voraussetzungen für die Gültigkeit der Ungleichungen:

$n\hat{p} \geq 10$

$n(1 - \hat{p}) \geq 10$

Konfidenzintervalle

Beispiel

Uns liegt eine Stichprobe mit n = 50 aus dem Datensatz GG1000 vor, berechnen Sie das Konfidenzintervall zum Niveau 95% für den Mittelwert

Bekannt:

$n = 50$

$1 - \alpha = 95\%$

$z = 1{,}96$

$\bar{x} = 4{,}773$

$s = 1{,}048$

Konfidenzintervalle

Beispiel

$$\mathbf{4,773 - 1,96 * \frac{1,048}{\sqrt{50}} \leq \mu \leq 4,773 + 1,96 * \frac{1,048}{\sqrt{50}}}$$

$$\mathbf{4,483 \leq \mu \leq 5,063}$$

Mit 95% Wahrscheinlichkeit liegt der Mittelwert der Grundgesamtheit in diesem Bereich
(tatsächlicher Wert: 4,972)

Signifikanztest

- Da wir Untersuchungen in vielen Fällen nur auf Basis von Stichproben durchführen, benötigen wir Verfahren, die uns die Aussagen zur **Statistischen Signifikanz** von Ergebnissen liefert

- Wie wahrscheinlich ist es, dass der Schluss von Stichprobe zur Grundgesamtheit richtig ist

- Signifikanztests liefern eine Prozedur zur Entscheidung zwischen zwei Alternativen, sich gegenseitig ausschließenden Annahmen über eine unbekannte Grundgesamtheit auf der Basis von Informationen, die mit Stichprobenfehlern behaftet sind

Signifikanztest

- Wir stellen eine mögliche Realität mit den vorliegenden Daten einer Stichprobe gegenüber

- Die Größe der Abweichungen der tatsächlichen Daten von der möglichen Realität entscheidet über Annahme oder Ablehnung einer der Alternativen

- Es gibt eine Vielzahl von Signifikanztests, von denen wir einige kennenlernen werden

- Beispiele: t-Test, Test auf Normalverteilung, Regression

Nullhypothesen nach Fisher

- Die Untersuchung einer Grundgesamtheit ist nicht immer wünschenswert / zum Teil unmöglich (Kosten, zerstörende Prüfung)
- Statistische Aussagen basieren deshalb im allgemeinen auf der Untersuchung von Stichproben
- Eine Stichprobe muss repräsentativ sein, um von Eigenschaften der Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließen zu können
- Zufällige Stichprobeauswahl zur Vermeidung systematischer Fehler

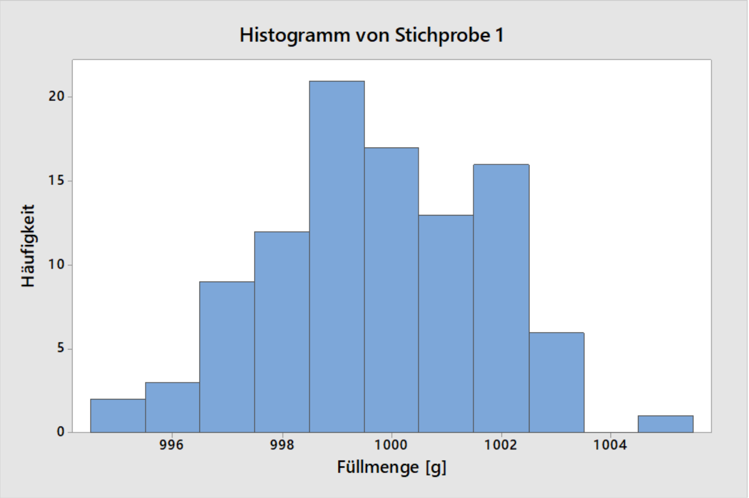
Nullhypothesen nach Fisher

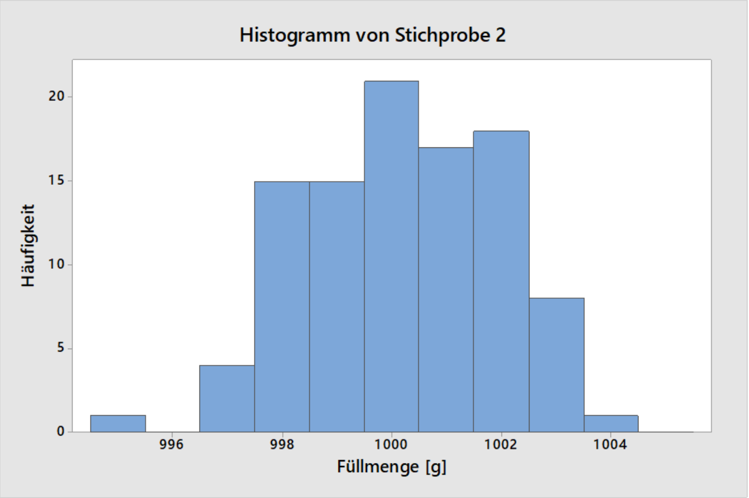
- Gibt es einen Unterschied zwischen zwei Stichproben?

- Ist der Unterschied zwischen den Proben rein zufällig oder gibt es systematische Ursachen?

- Untersuchung von Abfüllmaschinen

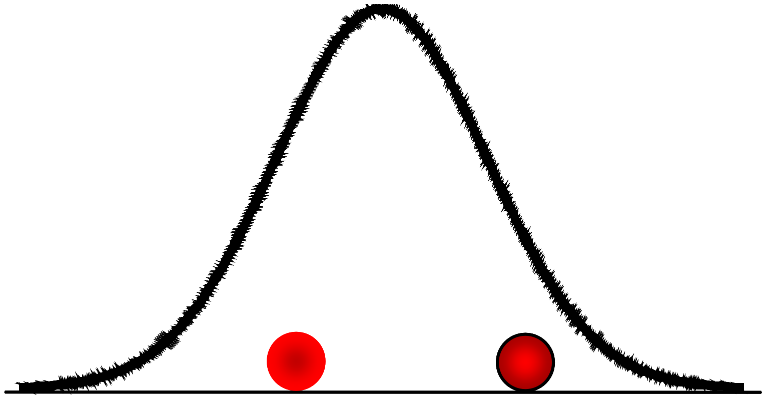
$\bar{x}_1 = 999{,}69\ g$
$\bar{x}_2 = 1000{,}20\ g$
$s_1 = 2{,}04\ g$
$s_2 = 1{,}70\ g$



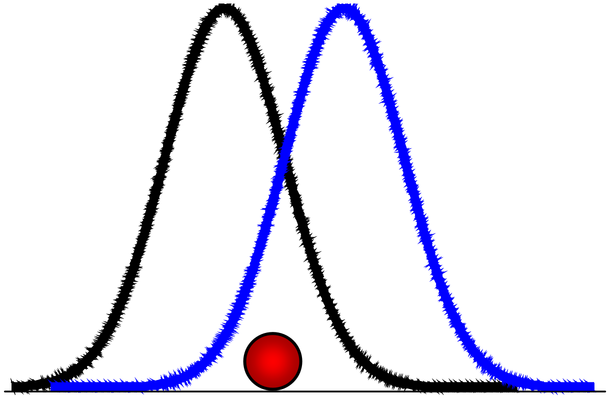


Nullhypothesen nach Fisher

- Variation zwischen zwei Stichproben einer Grundgesamtheit ist durchaus normal



- Wie kann man belegen, dass hier eine oder zwei Grundgesamtheiten vorliegen?



Nullhypothesen nach Fisher

- Einsatz eines Hypothesentests
- Prozedur zur Entscheidung zwischen zwei Alternativen, sich gegenseitig ausschließenden Annahmen über eine unbekannte Grundgesamtheit auf der Basis von Informationen, die mit Stichprobenfehlern behaftet sind
- Gegenüberstellung einer möglichen Realität mit den vorliegenden Daten einer Stichprobe
- Die Größe der Abweichungen der tatsächlichen Daten von der möglichen Realität entscheidet über Annahme oder Ablehnung einer der Alternativen

Nullhypothesen nach Fisher

- Behauptung oder Annahme über einen oder mehrere Parameter einer Population
- Um herauszufinden, ob die Behauptung oder Vermutung wahr oder falsch ist, müsste die gesamte Population untersucht werden – was vielfach nicht funktioniert
- Wir versuchen über zufällige Stichproben einen Beleg zu finden, der die Hypothesen bestätigt oder widerlegt
- Die notwendigen Schlussfolgerungen beruhen auf statistischer Signifikanz

Nullhypothesen nach Fisher

Ablauf eines Hypothesentests

1. Formuliere Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_1
2. Lege das Signifikanzniveau fest
3. Bestimme den Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese
4. Ziehe eine Stichprobe

Nullhypothesen nach Fisher

Ablauf eines Hypothesentests (f)

5. Wähle den erforderlichen Test, führe ihn durch und interpretiere die Ergebnisse: Liegt das Ergebnis der Stichprobe innerhalb des Annahmebereichs, wird H_0 angenommen, anderenfalls abgelehnt

Hinweise:

- Null-Hypothese und Alternativhypothese schließen sich gegenseitig aus, d.h. es kann nur eine gelten

- Verbleib oder Wechsel ist immer mit Unsicherheit verbunden

Nullhypothesen nach Fisher

Nullhypothese H_0

- Beschreibt i.a. den Status Quo (Alles bleibt beim Alten)
- Gilt solange ich nicht genügend Anhaltspunkte habe die Alternativhypothese anzunehmen
- $=, \leq, \geq$

Alternativhypothese H_1 bzw. H_a

- Beschreibt i.a. die Veränderung
- Die Alternativhypothese nehme ich an oder lehne sie ab
- $\neq, <, >$

Nullhypothesen nach Fisher

- **Wir beweisen nicht, ob eine Hypothese richtig oder falsch ist**

- **Wir stellen nur fest, ob es genügend Hinweise gibt, eine Hypothese anzunehmen oder zu verwerfen**

- **Wir gehen damit immer das Risiko ein, dass wir eine falsche Entscheidung treffen**

Nullhypothesen nach Fisher

Ein Hypothesentest hat gewisse Ähnlichkeit mit einem Gerichtsverfahren

Die Unschuldsvermutung ist eines der Grundprinzipien eines rechtstaatlichen Strafverfahrens. Sie besagt, dass jeder einer Straftat Verdächtigte oder Beschuldigte als unschuldig zu gelten hat bis seine Schuld bewiesen ist

Dabei ist das *Unschuldig* die Nullhypothese

Es bedarf nun ausreichender Beweise, die die Täterschaft belegen, um von der Nullhypothese *Unschuldig* abgehen und die Alternativhypothese *Schuldig* annehmen zu können

Nullhypothesen nach Fisher

Ein Urteil über Schuld oder Unschuld kann grundsätzlich vier Ausgänge haben

Zwei Möglichkeiten für Fehler:

1. Freispruch des Schuldigen

2. Verurteilung des Unschuldigen

Wahrheit

Urteil	H_0	H_1
H_0	Unschuldig Freispruch	Schuldig Freispruch
H_1	Unschuldig Verurteilung	Schuldig Verurteilung

Nullhypothesen nach Fisher

Fehler 1.Art: Annahme Alternativhypothese obwohl Nullhypothese richtig ist

α : Wahrscheinlichkeit Fehler 1.Art zu machen (Irrtumswahrscheinlichkeit)
Üblicher Wert für α: 0,05 bzw. 5%, d.h. wir wollen eine Sicherheit von 95% (1-α) zur Annahme der Alternativhypothese

Fehler 2.Art: Rückweisung Alternativhypothese obwohl sie richtig ist

β : Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2.Art
Typischer Wert für β: 0,1 bzw. 10%

		Wahrheit	
		H_0	H_1
Annahme	H_0	Korrekte Entscheidung	Fehler 2. Art β-Fehler
	H_1	Fehler 1. Art α-Fehler	Korrekte Entscheidung

Effektgröße

- Ein Signifikanztest gibt uns darüber Auskunft, ob wir zur definierten Alternativhypothese wechseln oder bei der Nullhypothese verbleiben (Irrtumswahrscheinlichkeit)
- Wie groß der wirkliche empirische Effekt ist, den die Daten darstellen, und ob dieser überhaupt praktische Relevanz hat, lässt sich damit aber nicht beantworten
- Dafür kann die **Effektstärke** herangezogen werden
- Dabei handelt es sich um eine quantifizierbare Aussage über das Ausmaß eines Effekts
  (Unterschied, Einfluss, Zusammenhang)

Effektgröße

Wohl der bekannteste Faktor für die Effektgröße: Cohen‘s d

$$\boldsymbol{d = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s_{pooled}}} \qquad \boldsymbol{s_{pooled} = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}}$$ (mittlere Standardabweichung)

$$\boldsymbol{d = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s_{pooled}} * \left(\frac{n-3}{n-2{,}25}\right) * \sqrt{\frac{n-2}{n}}}$$ Korrektur für kleine n (n < 50)

d gibt an, wie weit die beiden Werte voneinander entfernt sind
d = 1 – 1 Standardabweichung; d = 2 – 2 Standardabweichungen usw.

Stärke des Effekts:	$0{,}2 \le d \le 0{,}5$	schwacher Effekt
	$0{,}5 < d \le 0{,}8$	mittlerer Effekt
	$d > 0{,}8$	starker Effekt

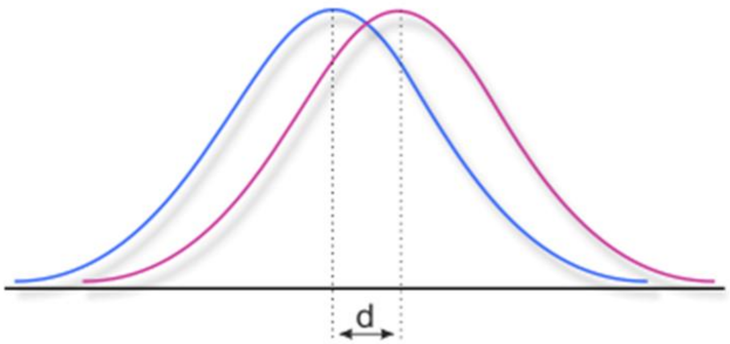
Effektgröße

Beispiel

$\bar{x}_1 = 50;\ s_1 = 2{,}5;\ \bar{x}_2 = 51{,}5;\ s_2 = 2{,}1; n = 70$

$$\boldsymbol{s_{pooled} = \sqrt{\frac{2,5^2 + 2,1^2}{2}} = 2,309}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{51,5 - 50}{2,309} = 0,65}$$



Es handelt sich um einen mittleren Effekt

Poweranalysen

Bisher gehen wir immer von einer gegebenen Stichprobengröße aus und versuchen daraufhin unsere Daten zu analysieren

Stehe im am Anfang einer Untersuchung (a priori), möchte ich aber wissen, wie groß die erforderliche Stichprobe sein muss, um signifikante Ergebnisse zu erhalte

Auch kann es Sinn machen im Nachhinein (a posteriori) zu bestimmen, welchen Einfluss die gewählte Stichprobengröße auf die Ergebnisse hat

Poweranalysen

Für diese Art von Untersuchung wird die sogenannte Poweranalyse (Fallzahlanalyse, Fallzahlschätzung)

Bestimmung der notwendigen Stichprobengröße, die den Nachweis einer gewünschten Effektgröße mit einer bekannten statistischen Sicherheit zulässt

Poweranalysen

Prinzipiell werden für die Poweranalyse gebraucht:

- α-Risiko (Irrtumswahrscheinlichkeit) (Unterschied erkennen, der nicht vorhanden ist)
- Power (1-β) (Unterschied erkennen, der vorhanden ist)
- Effektstärke (Welcher Unterschied soll erkannt werden)
- Verteilungsfunktion (wir nehmen hier eine Normalverteilung an)

Poweranalysen

$$\bar{x}_1 + z_{1-\alpha} * s_{pooled} = \bar{x}_2 - z_{1-\beta} * s_{pooled}$$

$$s_{pooled} = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}$$

Die Bestimmung der Stichprobengröße ist eine einseitige Betrachtung, das ist bei der Wahl des z-Wertes zu berücksichtigen

Poweranalysen

Für die Normalverteilung kann damit die erforderliche Stichprobengröße berechnet werden aus:

$$\boldsymbol{n = \frac{\left(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}\right)^2}{d^2}}$$

Poweranalysen

Beispiel:

- Wir wollen untersuchen, ob die Bevölkerung in Region A größer ist als in Region B
- Wir wählen $\alpha = 0{,}05$; $\beta = 0{,}1$
- Wir wollen einen Größenunterschied von 2 cm identifizieren können
- Wir gehen davon aus, dass die Größe in den untersuchten Grundgesamtheiten normalverteilt ist, und dass gleiche Streuung vorliegt (s=3)

Poweranalysen

Beispiel:

- $z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,6449$
- $z_{1-\beta} = z_{0,90} = 1,2816$

- Excel : STANDNORMINV (0,90) = 1,2816
  STANDNORMINV (0,95) = 1,6449

$$\boldsymbol{s_{pooled} = \sqrt{\frac{3^2+3^2}{2}} = 3} \qquad \boldsymbol{d = \frac{2}{3} = 0,6667}$$

Poweranalysen

Beispiel:

$$\boldsymbol{n} = \frac{(\mathbf{1,6449} + \mathbf{1,2816})^{\mathbf{2}}}{\mathbf{0,6667}^{\mathbf{2}}} = \mathbf{19,2780}$$

d.h.: eine Stichprobe n=20 aus jeder Gruppe reicht zur Untersuchung des genannten Sachverhalts