Dos ejercicios de cálculo

26 de septiembre de 2016

1. *Comenzamos con el semicírculo de radio uno y centro el origen. Elegimos un ángulo* $0<\theta<\pi/2$ *y representamos las rectas* $x=sen(\theta)$ *y* $x=-cos(\theta)$ *de forma que junto con el eje* $y=0$ *y la circunferencia encierran una región que llamamos* A.

   Llamamos B *al complemento de* A *en el semicírculo.* DETERMINAR *el valor máximo, cuando* θ *varía, del cociente* $F(\theta):=Area(A)/Area(B)$.

   a) Calculamos el área de A: la región es la unión de un sector circular y dos triángulos rectángulos. Los triángulos son iguales, y, por tanto, el ángulo del sector circular es $\pi/2$. Ahora es fácil ver que
   $$Area(A)=\frac{\pi}{4}+sen(\theta)cos(\theta),$$
   y, por tanto,
   $$Area(B)=\frac{\pi}{4}-sen(\theta)cos(\theta),$$
   $$F(\theta)=\frac{\frac{\pi}{4}+sen(\theta)cos(\theta)}{\frac{\pi}{4}-sen(\theta)cos(\theta)}.$$
   b) Ahora el problema es que la derivada de $F(\theta)$ es complicada y, por tanto, tampoco va a ser fácil resolver la ecuación $F'(\theta)=0$.
   c) Si representamos gráficamente $F(\theta)$ *vemos* que debe tener un único máximo en $\pi/4$, y además la gráfica es simétrica respecto a la recta $x=\pi/4$. Para comprobar la simetría basta ver que $F(\theta)=F(\frac{\pi}{2}-\theta)$ para todo $0<\theta<\pi/2$.
   d) La función $F(\theta)$ es la composición de
   $$t=sen(\theta)cos(\theta) \text{ y } g(t)=\frac{\frac{\pi}{4}+t}{\frac{\pi}{4}-t}.$$
   Para terminar el ejercicio debes usar el estudio por separado de las dos funciones y, quizá, la regla de la cadena para concluir que $F(\theta)$ tiene un único máximo en el intervalo $(0,\pi/2)$ en el punto $\pi/4$.

   ¿Cómo se podría hacer el primer apartado usando Sage en lugar del argumento elemental dado?

2. *Consideramos la parábola de ecuación* $y=x^2$ *y una circunferencia de centro* $(0,a)$ *y tal que es tangente*[1] *a la parábola en dos puntos distintos.* DETERMINAR *los valores de* a *para los que tal circunferencia existe.*

   a) No nos dan el radio de la circunferencia, pero la condición de tangencia debería determinar el radio.
   b) SOLUCIÓN GEOMÉTRICA: Para que las dos curvas sean tangentes en un punto (x,x^2) debe ocurrir que la recta tangente a la parábola en ese punto debe ser perpendicular a la recta que une el centro $(0,a)$ con el punto (x,x^2). Esta condición permite determinar x en función de a, y, finalmente, obtenemos que la condición buscada es simplemente $a>1/2$.
   c) SOLUCIÓN ALGEBRAICA: Consideramos una circunferencia arbitraria de centro $(0,a)$ y radio R, e imponemos la condición de que el sistema de ecuaciones
   $$y-x^2=0;\ x^2+(y-a)^2-R^2=0,$$
   tenga dos raíces reales dobles (¿por qué es esta la condición que hay que imponer?). La resolución del sistema, lleva al sustituir y por x^2 en la segunda ecuación, a una ecuación bicuadrada en x que es fácil de resolver. Una vez resuelte podemos discutir los casos que aparecen para llegar a la misma solución que usando geometría.

   Para las dos soluciones propuestas todavía HAY ALGO DE TRABAJO QUE HACER.

En la hoja de Sage `27-Cavan-tangencias.sws` puede verse una animación de la solución.

[1]Dos curvas son tangentes en un punto en que se cortan si tienen la misma recta tangente en ese punto.