Un ejercicio de cálculo

September 26, 2016

Se trata de estudiar el número de raíces reales, contadas con multiplicidad de la ecuación
$$p(x,a,b)=x^4-6x^2+ax+b=0,$$
en función de los coeficientes reales a y b.

1 Caso $a=0$

Podemos escribir $p(x,0,b)=x^4-6x^2+b=(x^2-3)^2+b-9$, lo que nos permite resolver el problema.

1. Cuando $b-9>0$ no puede haber raíces reales, ya que tendríamos un cuadrado igual a un real negativo. ¿Cómo sabemos que al ser $\sqrt{9-b}$ imaginario puro no puede haber raíces reales de x^4-6x^2+b?
2. En el caso $b=9$, obtenemos dos soluciones reales $x=\pm\sqrt{3}$ dobles.
3. Si $b-9<0$ obtenemos $x^2=\pm\sqrt{9-b}+3$, de forma que con el valor positivo $+\sqrt{9-b}+3$ no hay problema y produce dos raíces distintas, una positiva y otra negativa, de la ecuación $p(x,0,b)=0$.
4. Para el valor negativo $-\sqrt{9-b}+3$ habrá dos raíces reales nuevas si $-\sqrt{9-b}+3>0$, y en caso contrario obtenemos dos raíces complejas junto con las dos reales que teníamos.

En resumen:
$$rr(0,b)=\#\{\text{raíces reales de } p(x,0,b)\}=\begin{cases}\text{Si } -\sqrt{9-b}+3<0 \text{ hay 2 raíces reales}\\ \text{Si } -\sqrt{9-b}+3>0 \text{ y } b\leq 9 \text{ hay 4 raíces reales}\\ \text{Si } b>9 \text{ no hay raíces reales}\end{cases}$$

2 Caso $a=8$

Comenzamos considerando la gráfica de $p(x,8,0)=x^4-6x^2+8x$:

Observamos que tiene un mínimo alrededor de $x=-2$ y cerca de $x=1$ la gráfica casi es horizontal. Aparentemente no tiene otros máximos o mínimos.

Comprobemos eso:

1. La derivada de $p(x,8,0)=x^4-6x^2+8x$ es $4x^3-12x+8$ que se factoriza como $4*(x-1)^2*(x+2)$.
2. En el punto $x=-2$ tenemos un mínimo porque la derivada segunda es $12x^2-12$, que en $x=-2$ es negativa.
3. En el punto $x=1$ se anulan la derivada primera y la segunda, y podemos comprobar que no es máximo ni mínimo viendo qiue la función es creciente para $x>-2$. En la hoja de SAGE comprobamos, mediante la gráfica de la derivada, que esta última afirmación es razonable.
4. Debemos comprobar que la derivada de $p(x,8,0)$ es no negativa para todo $x>-2$, pero es consecuencia inmediata de la factorización de la derivada.
5. Como la función $p(x,8,0)$ es de grado cuatro, toma valores positivos para $x<<0$ y, en consecuencia tiene una raíz real negativa para $x<-2$ y otra en 0 y ninguna para $x>0$. ¿Puede tener otras, es decir, puede tener 4 raíces reales?
6. Únicamente hay que fijarse en el intervalo $-2<x<0$, ya que para $x<-2$ la derivada es siempre negativa, y por tanto la función es decreciente.
7. En el intervalo $[-2,0]$ la derivada de $p(x,8,0)$ es, debido a su factorización, siempre positiva, de forma que crece desde el valor $p(-2,8,0)$ hasta cero.

El número de raíces reales de $p(x,8,0)$ es igual a 2.

Por otra parte, cuando damos valores crecientes a b, empezando por b muy negativo, la gráfica sube, pero siempre conserva la misma forma. Entonces, el número de raíces reales es 2 ó 4 para todo $b\leq C$, para una cierta constante C que debemos calcular, y 0 para $b>C$.

El valor de C es el que hace que la gráfica de $p(x,8,C)$ sea tangente al eje $y=0$, y como se muestra en la hoja de SAGE, $C=-p(-2,8,0)=24$.

¿Puede haber cuatro raíces reales? De nuestro estudio parece deducirse que sólo puede haber 2 raices reales, contadas SIN MULTIPLICIDAD, una negativa y otra positiva. Sin embargo, quizá podría ser posible que tuviéramos una raíz simple negativa y una triple positiva.

Al final de la hoja de SAGE se comprueba que esto es posible para $b=-3$, en cuyo caso $p(x,8,-3)$ factoriza como $(x+3)(x-1)^3$. ?Cómo encaja ésto en nuestro argumento usando la gráfica de $p(x,8,0)$ que se deplaza hacia arriba o hacia abajo? En el punto $x=1$ la gráfica de $p(x,8,0)$ tiene tangente horizontal, se anula la primera derivada de la función, pero también se anula la segunda derivada. Entonces, cuando tomamos un b tal que la gráfica de $p(x,8,b)$ se anula para $x=1$ $(b=-3)$, la raíz que obtenemos es triple.

En resumen:
$$rr(0,b)=\#\{\text{raíces reales de } p(x,8,b)\}=\begin{cases}\text{Si } b\leq 24 \text{ y } b\neq -3 \text{ hay 2 raíces reales}\\ \text{Si } b=-3 \text{ hay 4 raíces reales, una simple negativa y una triple positiva}\\ \text{Si } b>24 \text{ no hay raíces reales}\end{cases}$$

3 Caso general

El estudio del caso general es interesante, pero quizá difícil. Las representaciones gráficas que hemos hecho con SAGE nos dan una idea del comportamiento de la función $rr(a,b)$ que puede ser muy útil.

¿Qué podemos decir?

1. En primer lugar vemos una simetría con respecto al eje $b=0$, es decir, parece que si cambiamos a por $-a$ el número de raíces reales no cambia.
2. También vemos que la zona con 0 raíces parece delimitada por dos rectas simétricas respecto a $b=0$. ¿Cuál sería, si existen, la ecuación de esas rectas?
3. Hay un resultado, conocido como teorema de Sturm, que puede ayudar a resolver completamente este problema.

4 Teorema de Sturm

Consideramos polinomios con coeficientes reales.

1. Decimos que un polinomio $p(x)$ está *libre de cuadrados* si todos sus factores primos tienen exponente igual a 1. En particular, si el máximo común divisor (MCD) del polinomio y su derivada es 1, todas sus raíces complejas son simples y el polinomio está libre de cuadrados.
2. Las raíces complejas múltiples de $p(x)$ son raíces simultáneas de $p(x)$ y de su derivada $p'(x)$. Si $d(x)$ es el MCD de $p(x)$ y de su derivada $p'(x)$, entonces el polinomio $q(x):=p(x)/d(x)$ no tiene raíces múltiples.
3. Si $p(x)$ está libre de cuadrados, definimos la *sucesión de Sturm de* $p(x)$ en la forma
   $p_0(x):=p(x)$, $p_1(x)=p'(x)$, $p_2(x):=-rem(p(x),p'(x))$, $p_3(x):=-rem(p_1(x),p_2(x))$,..., $p_k(x):=-rem(p_{k_2}(x),p_{k-1}(x))$,...
   con $rem(p(x),q(x))$ el resto de la división de $p(x)$ entre $q(x)$. La sucesión de Sturm viene directamente del *algoritmo de Euclides para el MCD,* y por tanto la sucesión es finita y termina con un último resto $p_m(x)$ nulo, y el penúltimo resto $p_{m-1}(x)$ es el MCD del polinomio y su derivada, que como no tienen raíces complejas comunes debe ser una constante no nula.
4. Dado un real ξ definimos $\sigma(\xi)$ como el número de cambios de signo en la sucesión
   $$p_0(\xi),p_1(\xi),p_2(\xi),...,p_{m-1}(\xi)$$
   dond se supone que si uno de los términos es nulo no produce cambios de signo, es decir, suprimimos en la sucesión los ceros, si los hubiera, para contar los cambios de signo.
5. (STURM) El número de raíces reales de $p(x)$ en el intervalo $(a,b]$ es exactamente igual a $\sigma(a)-\sigma(b)$.
6. (CAUCHY) Si $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ entonces todas las raíces reales de $p(x)$ están en el intervalo $[-M,M]$ con
   $$M:=1+\frac{max_{0\leq i\leq n-1}|a_i|}{|a_n|}$$

4.1 En Sage

Podemos calcular el número total de raíces reales, para polinomios libres de cuadrados, usando

```
R.<x> = PolynomialRing(ZZ) ##Define el anillo de polinomios con coeficientes enteros
p = .... ## polinomio en la variable x
p.number_of_real_roots()
```

Para calcular el número de raíces en el intervalo $[a,b]$ usamos

```
p.number_of_roots_in_interval(a,b)
```

Con la ayuda de estos resultados debe ser fácil terminar el ejercicio. Puedes leer sobre el teorema de Sturm en la página de la *Wikipedia* `https://en.wikipedia.org/wiki/Sturm%27s_theorem`