Un entero $N := 10x + y$, con $-9 \leq y \leq 9$, es múltiplo de 7 si y sólo si $F(N) := x - 2y$ también lo es.

1. Supongamos que $N = 10x + y$, con $-9 \leq y \leq 9$, es un múltiplo de 7. Queremos ver que entonces $F(N) := x - 2y$ es también múltiplo de 7.

   Tenemos $10x + y = 7k$, de forma que $y = 7k - 10x$, y

   $$F(N) = x - 2(7k - 10x) = 21x - 14k = 7(3x - 2k).$$

2. Ahora $F(N)$ es múltiplo de 7 y queremos ver que N debe ser también múltiplo de 7.

   Tenemos $x - 2y = 7k'$, es decir $x = 7k' + 2y$. Sustituimos en $10x + y$:

   $$10x + y = 10(7k' + 2y) + y = 70k' + 21y = 7(10k' + 3y).$$

En segundo lugar, queremos ver que *la órbita de cualquier entero N positivo mediante la función F pasa en algún momento por un entero del intervalo $[-9, 9]$.*

1. Primero vemos que $F(N) \leq N/10$, es decir,

   $$10(F(N)) = 10(x - 2y) = 10x - 20y \leq 10x + y = N.$$

2. La cota demuestra que cuando iteramos F siempre obtenemos $F^j(N) \leq N/10^j$.

3. Mientras los $F^j(N)$ son positivos es claro, de acuerdo al apartado anterior, que van decreciendo y, por tanto, acercándose a lo que queremos. Debemos entonces aclarar cuáles son los N tales que $F(N)$ es negativo: $F(10x+y) = x - 2y < 0$ implica $x < 2y$, y como $y \leq 9$, vemos que $x < 18$ y, por tanto $N < 189$. Para $N = 189$ tenemos $F(189) = 0$.

   Además, el primer valor negativo más pequeño que se puede alcanzar es $-18 = F(9)$.

   En resumen, basta estudiar las órbitas de los enteros del intervalo $[-20, 200]$, para saber lo que ocurre con todas las órbitas de enteros positivos.

4. Ejecutando en la hoja de sage que contiene este PDF la celda

   ```
   [orbita1(n,F) for n in srange(-20,201)]
   ```

   comprobamos que todas las órbitas de enteros N positivos llegan a un punto del intervalo $[-9, 9]$.

5. El argumento utilizado es típico de la forma en que se utilizan los ordenadores en Matemáticas: Cuando $N \geq 200$, infinitos valores de N, utilizamos un argumento teórico que reduce el problema a valores de N en el intervalo $[-20, 200]$, y para estos N, un número finito, comprobamos lo que queremos mediante el ordenador.