① $C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+m}^k$, $m, k \in \mathbb{N}$

$\exists\, k = 1$, тогда $C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^0 + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+m}^k$

равенство верно, т.к. все $C_m^0 = 1 \Rightarrow C_n^k + C_m^k = C_n^k + C_m^k = C_{n+m}^k$;

Для k – верно, тогда проверим для $k+1$

$C_m^{k+1} + C_n^1 \cdot C_m^{k+1-1} + \ldots + C_n^{k+1} + C_m^0 = C_{n+m}^{k+1}$

$C_m^{k+1} + C_n \cdot C_m^k + \ldots + C_n^{k+1} = C_{n+m}^{k+1}$

$C_m^{k+1} + C_n^{k+1} = C_{n+m}^{k+1}$ ч.т.д

② $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$

$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - 2x_k y_k + y_k^2)} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$

$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k^2)} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (2x_k y_k)} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k^2)} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$

$-\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 2x_k y_k} \le 0$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(256-\frac{5}{n^3}\right)^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$

По определению $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n: |n|>N \Rightarrow |f(n)-A| < \varepsilon$

$\left|\left(256-\frac{5}{n^3}\right)^{-\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{1}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}-\frac{1}{\sqrt[4]{256}}\right| = \left|\frac{\sqrt[4]{256}-\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}\cdot\sqrt[4]{256}}\right| = \left|\frac{4-\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}{4\cdot\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}\right|$

$=\frac{1}{4}\left|\frac{4-\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{4}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}-1\right|<4\varepsilon$

при $n<-N$

$-\frac{4}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}+1<4\varepsilon$

$\frac{4}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}>-4\varepsilon+1$

$\left(\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}\right)^4>\left(\frac{4}{-4\varepsilon+1}\right)^4$

$256-\frac{5}{n^3}>\left(\frac{4}{-4\varepsilon+1}\right)^4$

$-\frac{5}{n^3}>\left(\frac{4}{-4\varepsilon+1}\right)^4-256 \quad /\cdot(-1)$

$n<\sqrt[3]{\frac{5}{256-\left(\frac{4}{-4\varepsilon+1}\right)^4}}=-N(\varepsilon)$

$\Rightarrow N(\varepsilon)=\sqrt[3]{\frac{5}{256-\left(\frac{4}{-4\varepsilon+1}\right)^4}}$

при $n>N$

$\frac{4}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}-1<4\varepsilon$

$\frac{4}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}<4\varepsilon+1$

$\left(\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}\right)<\left(\frac{4}{4\varepsilon+1}\right)$

$\frac{5}{n^3}<\left(\frac{4}{4\varepsilon+1}\right)^4-256$

$n^3<\frac{5}{\left(\frac{4}{4\varepsilon+1}\right)^4-256}$

$n<\sqrt[3]{\frac{5}{\left(\frac{4}{4\varepsilon+1}\right)^4-256}}$

ч.т.д.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}=\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4-\sqrt[4]{\frac{5}{n^3}}}=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4-\sqrt[4]{\frac{5}{\infty}}}=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

④ $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n+p}} = 1,\ a>0,\ p>0$

$a^{\frac{1}{\infty}} = 1$

$a^{0} = 1$

$1 = 1$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n+p}} = 1$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a^m} - 1}{\sqrt[n]{a^k}},\ a>1,\ k,m\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{m}{n}} - 1}{a^{\frac{k}{n}}}$

$\frac{a^{\frac{m}{\infty}} - 1}{a^{\frac{k}{\infty}}} = \frac{a^0 - 1}{a^0} = \frac{1-1}{1} = 0$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a^m} - 1}{\sqrt[n]{a^k}} = 0$

⑥ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot\sin n!}{n\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n\cdot\sin n!}{n\sqrt{n}}}{\frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{n}{(n\sqrt{n})^2}+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin n!}{\sqrt{n}}}{1+\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} = \frac{0}{1+1}$

$= \frac{0}{2} = 0$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot\sin n!}{n\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$

⑦ $\{x_n\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$\{x_n\} = \frac{\sin\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{6} + \ldots + \frac{\sin \alpha}{n(n+1)}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon), \forall p > 0: |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left| \frac{\sin\alpha}{2} + \ldots + \frac{\sin(n+p)\alpha}{(n+p)(n+p+1)} - \left(\frac{\sin\alpha}{2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)} \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left| \frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\sin(n+p)\alpha}{(n+p)(n+p+1)} \right| < \varepsilon$

$\sin\alpha \leq 1$

$\left| \frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\sin(n+p)\alpha}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq \left| \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \right| < \varepsilon$

модуль всегда больше 0

$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} < \varepsilon$

применим след св-во: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ в нер-во

$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} < \varepsilon$

$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \varepsilon$

Усилим нер-во

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Усилим нер-во до n

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

по формуле $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ какое бы $n > N$ не взяли,

$$n \geq N(\varepsilon) + 1 > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

А раз произвольное n

$$N > \frac{1}{\varepsilon}$$

то для произвольного p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ послед-ть x_n явл-ся фундаментальной, значит сходится.

⑧ $\{x_n\} = \left\{1; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \ldots; \frac{9}{10}; \frac{1}{10^2}; \frac{2}{10^2}; \frac{99}{10^2}; \ldots; \frac{1}{10^n}; \frac{2}{10^n}; \ldots; \frac{10^n - 1}{10^n}; \ldots\right\}$

$$y_1 = \frac{1}{10^n}$$

$$y_2 = \frac{10^n - 1}{10^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_1 = \lim \frac{1}{10^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} y_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n - 1}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{10^n} - \lim \frac{1}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^\infty} = 1$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$$

(9) $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-n\cdot a^{n-1}\cdot(x-a)}{(x-a)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$, применим п° Лопиталя.

$\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^n-a^n-n\cdot a^{n-1}\cdot(x-a))'}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\frac{nx^{n-1}-0-n\cdot a^{n-1}}{2(x-\cancel{2a})}=$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{(nx^{n-1}-n\cdot a^{n-1})'}{(2x-2a)'}=\lim\limits_{x\to a}\frac{((n\cdot\frac{x^2}{x}-n\cdot a^{n-1})'}{(2x-2a)'}=$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ в числителе

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{n^2x^{n-1}\cdot x-nx^n\cdot 1}{x^2}\Big/2=\lim\limits_{x\to a}\frac{n^2x^n-nx^n}{x^2}=\frac{n^2\cdot a^n-n\cdot a^n}{a^2}$

Ответ: $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-n\cdot a^{n-1}\cdot(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{n^2\cdot a^n-n\cdot a^n}{a^2}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+5x}}{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[5]{1+2x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1+1-\sqrt[3]{1+5x}}{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[5]{1+2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[5]{1+2x}}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+5x}}{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[5]{1+2x}}$

Применим формулы: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\ldots+\sqrt[5]{(1+2x)^4})}{(\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{1+2x})(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\ldots+\sqrt[5]{(1+2x)^4})(\sqrt{1+2x}+1)}+$

$+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt[3]{1+5x})(1+\sqrt[3]{1+5x}+\sqrt[3]{(1+5x)^2})(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\ldots+\sqrt[5]{(1+2x)^4})}{(\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{1+2x})(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\ldots+\sqrt[5]{(1+2x)^4})(1+\sqrt[3]{1+5x}+\sqrt{(1+5x)^2})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x-1)(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\ldots+\sqrt[5]{(1+2x)^4})}{(1+x-1-2x)(\sqrt{1+2x}+1)}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-1-5x)}{(1+x-1-2x)}$

$\dfrac{(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\ldots+\sqrt[5]{(1+2x)^4})}{(1+\sqrt[3]{1+5x}+\sqrt[3]{(1+5x)^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\ldots+\sqrt[5]{(1+2x)^4})}{-x(\sqrt{1+2x}+1)}+$

$+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5x(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\ldots+\sqrt[5]{(1+2x)^4})}{-x(1+\sqrt[3]{1+5x}+\sqrt[3]{1+5x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\ldots+\sqrt[5]{(1+2x)^4})}{-(\sqrt{1+2x}+1)}$

$+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5(\sqrt[5]{(1+x)^4}+\ldots+\sqrt[5]{(1+2x)^4})}{(1+\sqrt[3]{1+5x}+\sqrt{(1+5x)^2})}=-\dfrac{10}{2}+\dfrac{25}{3}=\dfrac{-30+50}{6}=$

$=\dfrac{20}{6}=\dfrac{10}{3}$ Ответ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+5x}}{\sqrt[5]{1+5x}-\sqrt[5]{1+2x}}=\dfrac{10}{3}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{1-\cos\pi x}\right)=\left[\dfrac{0}{0}\right]\Rightarrow$ используем мет. Лопиталя

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1-2x})'}{(1-\cos\pi x)'}$

1) $(\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1-2x})'-[(u-v)'=(u'-v')]$

$\sqrt[3]{1-3x}'-\sqrt{1-2x}'=[u(x)'=n\cdot u^{n-1}(x)\cdot u'(x)]\Rightarrow\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\cdot$

$\cdot(1-3x)'-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}\cdot(1-2x)'\Rightarrow[(au-bu)'=au'-bu']=$

$=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\cdot(-3(x)'+(1)')-\dfrac{1}{2\sqrt{1-2x}}\cdot(-2(x)'+(1)')=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}-$

$-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$

2) $(1-\cos\pi x)' = [(u-v)' = u' - v'] = 0 + \sin\pi x \cdot (\pi x)' =$
$= \pi \sin \pi x$

$\lim \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-2x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}}{\pi \sin\pi x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\right)'}{(\pi \sin\pi x)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{(1-2x)^{3/2}} - \frac{2}{(1-3x)^{5/3}}}{\pi^2 \cos(\pi x)} = [\cos\pi x = 1] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{(1-2x)^{3/2}} - \frac{2}{(1-3x)^{5/3}}}{\pi^2} = -\dfrac{1}{\pi^2}$

Ответ: $-\dfrac{1}{\pi^2}$

(17) x_n - огр. посл-ть

Д-ть: $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot(x_{n+1}-x_n)) \neq +\infty$

$\overline{x_n}$ - огранич. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists M : |x_n| \leq M$

Д-во: Пусть $\lim(n(x_{n+1} + x_n)) = +\infty$

Тогда $\forall M\ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow (n\cdot(x_{n+1} - x_n)) > M$

$\forall n\ |x_{(n+1)} - x_n| = |x_n - x_{n+1}| \leq |x_n| + |x_{n+1}| \leq M + M \leq 2M$

$n\cdot|x+1 - x_n| \leq n|x_{n+1} - x_n| \leq 2Mn$

$\Rightarrow$! ■

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(4^x-\sqrt{x+8}\right)^{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(4^x-\sqrt{x+8}\right)^{\frac{\sin\pi x}{\frac{\cos\pi x}{2}}}=\left(4-\sqrt{9}\right)^{\frac{\sin\pi}{\frac{\cos\pi}{2}}}=(4-3)=1$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\left(4^x-\sqrt{x+8}\right)^{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=1$

(14) $\lim\limits_{x\to 0} ctg^2 x\cdot\left(e^{-x}+\sin x-1\right)=[0\cdot\infty]$

$\lim\limits_{x\to 0} ctg^2 x\cdot\frac{e^x\sin^x-e^x-1}{e^x}=\lim\frac{1}{e^x}\overset{1}{\shortparallel}\cdot\lim ctg^2 x\left(e^x\cdot\sin^x-e^x+1\right)=\left[ctg\,x=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]=\lim\frac{\cos^2 x\left(e^x\sin^x-e^x+1\right)}{\sin^2 x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\cos^2 x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1^x\cdot\sin^x-e^x+1}{\sin^2 x}=\lim\frac{1^x\cdot\sin^x-e^x+1}{\sin^2 x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot x\cdot\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\frac{\sin x}{x}}}-e^x+1}{x^2\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot x-1^x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$

$\left[\lim\frac{\sin x}{x}=1\right]$

Метод Лопиталя!

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1^x(x-1)+1\right)'}{\left(x^2\right)'}$

$\left[\begin{array}{l} f'(x)=\left(1^x(x-1)+1\right)'=e^x(x-1)+e^x \\ g'(x)=\left(x^2\right)'=2x \end{array}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(x+1)+1^x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot x-1^x+1^x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1^x}{2}$

$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}e^x=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}1^0=\frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

(16) Выделите глав. часть $C\left(1-x^2\right)$ при $x\to 1$ у ф-ии

$f(x)=\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}$

Решение:

по Th1 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{C(1-x)^{\alpha}} = 1 \iff \lim\limits_{x\to 1} \frac{tg\,\frac{\pi x}{2}}{C(1-x)^{\alpha}\left(\sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}}\right)} = 1$

по Th2 $\left[tg\,\frac{\pi x}{2} \sim \frac{\pi x}{2},\ \sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}} \sim 1-\sqrt[7]{x} \sim 7x,\ (1-x)^{\alpha} \sim x\right] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{2}}{C \cdot 7x} = \left[7x^2 \sim 17x\right] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\pi/2}{C \cdot 7x^2}$

$\left[7x^2 \sim 7\right] = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\pi/2}{7 \cdot C} \Rightarrow C = \frac{7\pi}{2}$

Ответ: $C = \frac{7\pi}{2}$