Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Домашняя контрольная работа по теме: вычисление пределов

ФИО ______________________________

Группа __________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Σ

Вариант 57

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Применяя метод математической индукции, докажите следующие утверждения:

(1) $C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+m}^k, \qquad m, k \in \mathbb{N};$

(2) $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2};$

Докажите, что:

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(256 - \dfrac{5}{n^3}\right)^{-1/4} = \dfrac{1}{4};$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n+p}} = 1, \quad a > 0, \ p > 0;$

В задаче (3) требуется провести доказательство ***по определению.***

Найдите пределы следующих числовых последовательностей:

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{a^m} - 1}{\sqrt[n]{a^k}}, \quad a > 1, \ k, \ m \in \mathbb{N};$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \cdot \sin n!}{n\sqrt{n} + \sqrt{n+1}};$

(7) Пользуясь критерием Коши, исследуйте сходимость последовательности:

$$\{x_n\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}, \ \ \alpha \in \mathbb{R};$$

(8) Определите множество частичных пределов, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, если

$$\{x_n\} = \left\{1; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \ldots; \frac{9}{10}; \frac{1}{10^2}; \frac{2}{10^2}; \frac{99}{10^2}; \ldots; \frac{1}{10^n}; \frac{2}{10^n}; \ldots; \frac{10^n - 1}{10^n}; \ldots\right\};$$

Найдите следующие пределы:

(9)

$$\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-n\cdot a^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2},\quad n\in\mathbb{N};$$

(10)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+5x}}{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{1+2x}};$$

(11)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{1-\cos(\pi x)};$$

(12)

$$\lim_{x\to \pi}\frac{e^{\sin x}-e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2}-\pi};$$

(13)

$$\lim_{x\to 1}\left(4^x-\sqrt{x+8}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)};$$

(14)

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x\cdot\left(e^{-x}+\sin x-1\right);$$

(15) Найдите все числа α, β и γ такие, что выполняется равенство:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2+3x+4}-\alpha x^2-\beta x-\gamma\right)=0;$$

(16) Выделите главную часть вида $C(1-x)^\alpha$ при $x\to 1$ у функции

$$f(x)=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}}};$$

(17) Последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Докажите, что последовательность

$$\{n\cdot(x_{n+1}-x_n)\}$$

не может иметь пределом $+\infty$.

(18) Пусть $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ - непрерывная периодическая функция и $d\in\mathbb{R}$. Докажите существование такого $x\in\mathbb{R}$, что

$$f(x+d)=f(x).$$

① $C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+m}^k$, $m, k \in \mathbb{N}$

$\exists\, k=1$, тогда $C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^0 + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+m}^k$

равенство верно, т.к. все $C_m^0 = 1 \Rightarrow C_n^k + C_m^k = C_n^k + C_m^k = C_{n+m}^k$;

Для k — верно, тогда проверим для $k+1$

$$C_m^{k+1} + C_n^1 \cdot C_m^{k+1-1} + \ldots + C_n^{k+1} + C_m^0 = C_{n+m}^{k+1}$$

$$C_m^{k+1} + C_n \cdot C_m^k + \ldots + C_n^{k+1} = C_{n+m}^{k+1}$$

$$C_m^{k+1} + C_n^{k+1} = C_{n+m}^{k+1}$$ ч.т.д.

② $$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - 2x_k y_k + y_k^2)} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k^2)} - \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (2x_k y_k)} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k^2)} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

$$-\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 2x_k y_k} \le 0$$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(256-\frac{5}{n^3}\right)^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$

По определению $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n: |n|>N \Rightarrow |f(n)-A| < \varepsilon$

$$\left|\left(256-\frac{5}{n^3}\right)^{-\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}-\frac{1}{\sqrt[4]{256}}\right|=\left|\frac{\sqrt[4]{256}-\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}\cdot\sqrt[4]{256}}\right|=\left|\frac{4-\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}{4\cdot\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}\right|$$

$$=\frac{1}{4}\left|\frac{4-\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{4}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}-1\right|<4\varepsilon$$

при $n<-N$

$$-\frac{4}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}+1<4\varepsilon$$

$$\frac{4}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}>-4\varepsilon+1$$

$$\left(\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}\right)^4>\left(\frac{4}{-4\varepsilon+1}\right)^4$$

$$256-\frac{5}{n^3}>\left(\frac{4}{-4\varepsilon+1}\right)^4$$

$$-\frac{5}{n^3}>\left(\frac{4}{-4\varepsilon+1}\right)^4-256 \quad /\cdot(-1)$$

$$n<\sqrt[3]{\frac{5}{256-\left(\frac{4}{-4\varepsilon+1}\right)^4}}=-N(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow N(\varepsilon)=\sqrt[3]{\frac{5}{256-\left(\frac{4}{-4\varepsilon+1}\right)^4}}$$

при $n>N$

$$\frac{4}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}-1<4\varepsilon$$

$$\frac{4}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}<4\varepsilon+1$$

$$\left(\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}\right)<\left(\frac{4}{4\varepsilon+1}\right)$$

$$\frac{5}{n^3}<\left(\frac{4}{4\varepsilon+1}\right)^4-256$$

$$n^3<\frac{5}{\left(\frac{4}{4\varepsilon+1}\right)^4-256}$$

$$n<\sqrt[3]{\frac{5}{\left(\frac{4}{4\varepsilon+1}\right)^4-256}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{256-\frac{5}{n^3}}}=\frac{1}{4}$$

ч.т.д.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-\sqrt[4]{\frac{5}{n^3}}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4-\sqrt[4]{\frac{5}{\infty}}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

④ $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n+p}} = 1,\ a>0,\ p>0$

$a^{\frac{1}{\infty}} = 1$

$a^{0} = 1$

$1 = 1$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n+p}} = 1$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a^m} - 1}{\sqrt[n]{a^k}},\ a>1,\ k,m \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{m}{n}} - 1}{a^{\frac{k}{n}}}$

$\frac{a^{\frac{m}{\infty}} - 1}{a^{\frac{k}{\infty}}} = \frac{a^0 - 1}{a^0} = \frac{1-1}{1} = 0$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a^m} - 1}{\sqrt[n]{a^k}} = 0$

⑥ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \cdot \sin n!}{n\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n \cdot \sin n!}{n\sqrt{n}}}{\frac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{n}{(n\sqrt{n})^2} + 1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin n!}{\sqrt{n}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}} = \frac{0}{1+1}$

$= \frac{0}{2} = 0$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \cdot \sin n!}{n\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 0$

⑦ $\{x_n\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$\{x_n\} = \frac{\sin\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{6} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n > N(\varepsilon), \forall p > 0: |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left| \frac{\sin\alpha}{2} + \ldots + \frac{\sin(n+p)\alpha}{(n+p)(n+p+1)} - \left(\frac{\sin\alpha}{2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)} \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left| \frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\sin(n+p)\alpha}{(n+p)(n+p+1)} \right| < \varepsilon$

$\sin\alpha \le 1$

$\left| \frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\sin(n+p)\alpha}{(n+p)(n+p+1)} \right| \le \left| \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \right| < \varepsilon$

модуль всегда больше 0

$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} < \varepsilon$

применим след св-во: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ в нер-во

$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} < \varepsilon$

$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \varepsilon$

Усилим нер-во

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Усилим нер-во до n

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

по формуле $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ какое бы $n > N$ не взяли,

$$n \geq N(\varepsilon) + 1 > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

А раз произвольное n

$$N > \frac{1}{\varepsilon}$$

то для произвольного p

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ послед-ть x_n явл-ся фундаментальной, значит сходится.

⑧ $\{x_n\} = \{1; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \dots; \frac{9}{10}; \frac{1}{10^2}; \frac{2}{10^2}; \frac{99}{10^2}; \dots; \frac{1}{10^n}; \frac{2}{10^n}; \dots; \frac{10^n - 1}{10^n}; \dots\}$

$$y_1 = \frac{1}{10^n}$$

$$y_2 = \frac{10^n - 1}{10^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_1 = \lim \frac{1}{10^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} y_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n - 1}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{10^n} - \lim \frac{1}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^\infty} = 1$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 0$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1$$

9) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x^n - a^n) - n \cdot a^{n-1} \cdot (x-a)}{(x-a)^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$, применим п° Лопиталя.

$$\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n - n \cdot a^{n-1} \cdot (x-a))'}{(x-a)^2} = \lim_{x \to a} \frac{n x^{n-1} - 0 - n \cdot a^{n-1}}{2(x - \cancel{2a})} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{(n x^{n-1} - n \cdot a^{n-1})'}{(2x - 2a)'} = \lim_{x \to a} \frac{((n \cdot \frac{x^2}{x} - n \cdot a^{n-1})'}{(2x - 2a)'} =$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$ в числителе

$$= \lim_{x \to a} \frac{n^2 x^{n-1} \cdot x - n x^{n-1}}{x^2} \Big/ 2 = \lim_{x \to a} \frac{n^2 x^n - n x^n}{x^2} = \frac{n^2 \cdot a^n - n \cdot a^n}{a^2}$$

Ответ: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x^n - a^n) - n \cdot a^{n-1} \cdot (x-a)}{(x-a)^2} = \dfrac{n^2 \cdot a^n - n \cdot a^n}{a^2}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+5x}}{\sqrt[5]{1+5x} - \sqrt[5]{1+2x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 1 + 1 - \sqrt[3]{1+5x}}{\sqrt[5]{1+5x} - \sqrt[5]{1+2x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{\sqrt[5]{1+5x} - \sqrt[5]{1+2x}} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt[3]{1+5x}}{\sqrt[5]{1+5x} - \sqrt[5]{1+2x}}$

Применим формулы: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+2x} - 1)(\sqrt{1+2x} + 1)(\sqrt[5]{(1+x)^4} + \ldots + \sqrt[5]{(1+2x)^4})}{(\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[5]{1+2x})(\sqrt[5]{(1+x)^4} + \ldots + \sqrt[5]{(1+2x)^4})(\sqrt{1+2x} + 1)} +$

$+ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 - \sqrt[3]{1+5x})(1 + \sqrt[3]{1+5x} + \sqrt[3]{(1+5x)^2})(\sqrt[5]{(1+x)^4} + \ldots + \sqrt[5]{(1+2x)^4})}{(\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[5]{1+2x})(\sqrt[5]{(1+x)^4} + \ldots + \sqrt[5]{(1+2x)^4})(1 + \sqrt[3]{1+5x} + \sqrt[3]{(1+5x)^2})}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+2x-1)(\sqrt[5]{(1+x)^4} + \ldots + \sqrt[5]{(1+2x)^4})}{(1+x-1-2x)(\sqrt{1+2x}+1)} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-1-5x)}{(1+x-1-2x)} \cdot$

$\cdot \dfrac{(\sqrt[5]{(1+x)^4} + \ldots + \sqrt[5]{(1+2x)^4})}{(1 + \sqrt[3]{1+5x} + \sqrt[3]{(1+5x)^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x(\sqrt[5]{(1+x)^4} + \ldots + \sqrt[5]{(1+2x)^4})}{-x(\sqrt{1+2x}+1)} +$

$+ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-5x(\sqrt[5]{(1+x)^4} + \ldots + \sqrt[5]{(1+2x)^4})}{-x(1 + \sqrt[3]{1+5x} + \sqrt[3]{(1+5x)^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sqrt[5]{(1+x)^4} + \ldots + \sqrt[5]{(1+2x)^4})}{-(\sqrt{1+2x}+1)}$

$+ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5(\sqrt[5]{(1+x)^4} + \ldots + \sqrt[5]{(1+2x)^4})}{(1 + \sqrt[3]{1+5x} + \sqrt{(1+5x)^2})} = -\dfrac{10}{2} + \dfrac{25}{3} = \dfrac{-30+50}{6} =$

$= \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3}$ Ответ: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+5x}}{\sqrt[5]{1+5x} - \sqrt[5]{1+2x}} = \dfrac{10}{3}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-2x}}{1 - \cos \pi x} \right) = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ => используем мет. Лопиталя

$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-2x})'}{(1 - \cos \pi x)'}$

1) $(\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-2x})' - [(u - v)' = (u' - v')]$

$\sqrt[3]{1-3x}' - \sqrt{1-2x}' = [u^n(x)' = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x)] \Rightarrow \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}} \cdot$

$\cdot (1-3x)' - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot (1-2x)' \Rightarrow [(au - bu)' = au' - bu'] =$

$= \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-3x)^2}} \cdot (-3(x)' + (1)') - \dfrac{1}{2\sqrt{1-2x}} \cdot (-2(x)' + (1)') = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}} -$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$$

2) $(1-\cos\pi x)' = [(u-v)' = u' - v'] = 0 + \sin\pi x \cdot (\pi x)' = \pi \sin \pi x$

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{1-2x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}}{\pi \sin \pi x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\right)'}{(\pi \sin \pi x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1-2x)^{3/2}} - \frac{2}{(1-3x)^{5/3}}}{\pi^2 \cos(\pi x)} = [\cos \pi x = 1] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1-2x)^{3/2}} - \frac{2}{(1-3x)^{5/3}}}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi^2}$$

Ответ: $-\frac{1}{\pi^2}$

(17) x_n - огр. пос-ть

Д-ть: $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot(x_{n+1} - x_n)) \neq +\infty$

x_n - огранич. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists M : |x_n| \leq M$

Д-во: Пусть $\lim(n(x_{n+1} + x_n)) = +\infty$

Тогда $\forall M\ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow (n\cdot(x_{n+1} - x_n)) > M$

$\forall n\ |x_{(n+1)} - x_n| = |x_n - x_{n+1}| \leq |x_n| + |x_{n+1}| \leq M + M \leq 2M$

$n\cdot|x_{n+1} - x_n| \leq n|x_{n+1} - x_n| \leq 2Mn$

$\Rightarrow$ (!) ■

(12) $$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi} = \frac{e^0 - e^{\sin 2\pi}}{\sqrt[3]{\pi\cdot\pi^2} - \pi} = 0$$

Ответ: 0

(15) $$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3x + 4} - \alpha x^2 - \beta x - \varphi\right) = 0$$

$$\alpha = \frac{-\sqrt{x^4+2x^2+3x+4} + \beta x + \varphi}{x^2}$$

$$\beta = \frac{-\sqrt{x^4+2x^2+3x+4} + \alpha x^2 + \varphi}{x}$$

$$\varphi = \frac{-\sqrt{x^4+2x^2+3x+4} + \alpha x^2 + \beta x}{1}$$

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(4^x-\sqrt{x+8}\right)^{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\left(4^x-\sqrt{x+8}\right)^{\frac{\sin \pi x}{\frac{\cos \pi x}{2}}} = \left(4-\sqrt{9}\right)^{\frac{\sin\pi}{\frac{\cos\pi}{2}}} = (4-3) = 1$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\left(4^x-\sqrt{x+8}\right)^{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = 1$

(14) $\lim\limits_{x\to 0} ctg^2 x\cdot\left(e^{-x}+\sin x-1\right) = [0\cdot\infty]$

$\lim\limits_{x\to 0} ctg^2 x\cdot\frac{e^x\sin^x - e^x - 1}{e^x} = \lim \underset{1}{\frac{1}{e^x}}\cdot\lim ctg^2 x\left(e^x\cdot\sin^x - e^x+1\right) = \left[ctg\,x = \frac{\cos d}{\sin d}\right] = \lim\frac{\cos^2 x\left(e^x\sin^x - e^x+1\right)}{\sin^2 x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\underset{1}{\cos^2 x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1^x\cdot\sin^x - e^x+1}{\sin^2 x} = \lim\frac{1^x\cdot\sin^x-e^x+1}{\sin^2 x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot x\cdot\overset{1}{\frac{\sin x}{x}} - e^x+1}{x^2\underset{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot x - 1^x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$

$\left[\lim\frac{\sin x}{x} = 1\right]$

Метод Лопиталя:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1^x(x-1)+1\right)'}{(x^2)'}$

$\left[\begin{array}{l} f'(x) = \left(1^x(x-1)+1\right)' = e^x(x-1)+e^x \\ g'(x) = (x^2)' = 2x \end{array}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(x+1)+1^x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cdot x - 1^x+1^x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1^x}{2}$

$\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} e^x = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} 1^0 = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

(16) Выделите главн. часть $C(1-x^2)$ при $x\to 1$ у ф-ии

$f(x) = \frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}$

Решение:

по Th1 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{C(1-x)^{\alpha}} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{tg\frac{\pi x}{2}}{C(1-x)^{\alpha}(\sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}})} = 1$

по Th2 $[tg\frac{\pi x}{2} \sim \frac{\pi x}{2}, \sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}} \sim 1-\sqrt[7]{x} \sim 7x, (1-x)^{\alpha} \sim x] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{2}}{C \times 7x} = [7x^2 \sim 17x] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\pi/2}{C \cdot 7x^2}$

$[7x^2 \sim 7] = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\pi/2}{7 \cdot C} \Rightarrow C = \frac{7\pi}{2}$

Ответ: $C = \frac{7\pi}{2}$