Теорема 2. *Множество всех бесконечных наборов, состоящих из цифр $0, 1, \ldots, 9$, не является счетным.*

Доказательство. Если бы это множество было счетным, то и его подмножество H было бы счетным, а это не так. $\square$

Приведем без доказательства еще одну теорему.

Теорема 3. *Совокупность $\Omega(X)$ всех подмножеств любого множества X сама образует множество, не эквивалентное X.*

Замечание 1. *Множество I всех точек отрезка $[0, 1]$ эквивалентно множеству всех бесконечных наборов, состоящих из цифр $0, 1, \ldots, 9$ (ниже будет показано, что любая точка x множества I может быть записана в виде $x = 0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots$, где $x_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $k = 1, 2, \ldots$).*

Определение 14. *Любое множество, эквивалентное множеству I, называется множеством* **мощности континуума**.

Упражнение 2. *Доказать, что множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.*

Вещественные числа и правила их сравнения.

Определение 15. **Рациональным** *называется число, представимое в виде дроби $\dfrac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное.*

Свойства рациональных чисел:

1) для любых чисел $a, b \in \mathbb{Q}$: $a < b$ или $a > b$ или $a = b$ (правило упорядочения);

2) для любых чисел $a, b \in \mathbb{Q}$ существует единственное число $c \in \mathbb{Q}$: $c = a + b$ (корректность определения суммы);

3) для любых чисел $a, b \in \mathbb{Q}$ существует единственное число $c \in \mathbb{Q}$: $c = a \cdot b$ (корректность определения произведения);

4) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$; если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (транзитивность);

5) для любых чисел $a, b \in \mathbb{Q}$: $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

6) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);

7) существует единственное число $0 \in \mathbb{Q}$: $a + 0 = 0 + a = a$ для любого $a \in \mathbb{Q}$ (существование нейтрального элемента по сложению);

8) для любого числа $a \in \mathbb{Q}$ существует единственное число $a' \in \mathbb{Q}$: $a + a' = 0$ (существование обратного элемента по сложению);

9) для любых чисел $a, b \in \mathbb{Q}$: $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);

10) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения);

11) существует единственное число $1 \in \mathbb{Q}$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для любого $a \in \mathbb{Q}$ (существование нейтрального элемента по умножению);

12) для любого числа $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, существует единственное число $a' \in \mathbb{Q}$: $a \cdot a' = 1$ (существование обратного элемента по умножению);

13) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность);

14) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: если $a > b$, то $a + c > b + c$;

15) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: если $a > b$, $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$;

16) Каково бы ни было число $a \in \mathbb{Q}$, можно число 1 повторить столько раз, что сумма превзойдет a (аксиома Архимеда).

Введем понятие вещественного числа. Нам будет удобно использовать следующую геометрическую иллюстрацию: рассмотрим прямую, выберем на ней точку O (начало отсчета) и масштабный отрезок OM (его длина $|OM| = 1$). Пусть A — произвольная точка на этой прямой. Рассмотрим сначала случай, когда A лежит правее, чем O. Выясним, сколько раз отрезок OM укладывается в отрезок OA.

1) Целое число a_0 раз без остатка. Тогда поставим точке A в соответствие бесконечную десятичную дробь $a_0 = a_0, 000\ldots$.

2) Целое число a_0 раз с остатком O_1A, $|O_1A| < |OM|$. Тогда выясним, сколько раз одна десятая часть отрезка OM укладывается в отрезок O_1A.

2.1) Целое число a_1 раз без остатка. Тогда поставим точке A в соответствие бесконечную десятичную дробь $a_0, a_1 = a_0, a_1 00\ldots$.

2.2) Целое число a_1 раз с остатком O_2A, $|O_2A| < \dfrac{1}{10}|OM|$. Тогда выясним, сколько раз одна сотая часть отрезка OM укладывается в отрезок O_2A и т.д.

Таким образом, каждой точке A, лежащей на прямой (правее O), ставится в соответствие либо конечная десятичная дробь $(+)a_0, a_1a_2\ldots a_n = (+)a_0, a_1a_2\ldots a_n000\ldots$, либо бесконечная $(+)a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Если точка A лежит левее точки O, то проводим ту же процедуру, но отрезки откладываем влево и перед соответствующей дробью ставим знак «$-$». Точке O ставим в соответствие дробь $0 = 0, 000\ldots$.

Замечание 2. *Можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех несократимых дробей вида $\dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}$, и множеством десятичных дробей вида $\pm a_0, a_1\ldots a_n000\ldots$ (**конечные** десятичные дроби) или вида $\pm a_0, a_1\ldots a_{k-1}(a_k\ldots a_n)$ (**бесконечные периодические** десятичные дроби). При этом будем отождествлять дроби вида $a_0, a_1\ldots a_n000\ldots$ и $a_0, a_1\ldots(a_n - 1)999\ldots$ и всюду в дальнейшем использовать запись $a_0, a_1\ldots a_n000\ldots$. Дроби, являющиеся либо конечными, либо бесконечными периодическими, будем также называть **рациональными числами.***

Определение 16. ***Вещественными (действительными)** числами будем называть бесконечные десятичные дроби. Число (не равное нулю) будем называть **положительным (отрицательным)**, если перед ним стоит знак « + » (« $-$ »). Числа, не являющиеся положительными (отрицательными) будем называть **неположительными (неотрицательными)**.*

Правила сравнения вещественных чисел.

Два вещественных числа $a = \pm a_0, a_1\ldots a_n\ldots$ и $b = \pm b_0, b_1\ldots b_n\ldots$ назывем равными, если они имеют один и тот же знак и $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... , $a_n = b_n$, ...

Пусть $a \neq b$. Будем считать, что

1) Любое положительное число больше нуля, отрицательное — меньше нуля.

2) Пусть $a > 0$, $b > 0$. Обозначим $k = \min\{n \,|\, a_n \neq b_n\}$, то есть $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... , $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k \neq b_k$. Тогда будем считать, что $a > b$, если $a_k > b_k$, и $a < b$, если $a_k < b_k$.

3) Пусть $a > 0$, $b < 0$. Тогда $a > b$.

4) Пусть $a < 0$, $b < 0$.

Определение 17. ***Модулем (абсолютной величиной)*** *числа $a \in \mathbb{R}$ называется неотрицательное число $|a|$, которое представляется той же десятичной дробью, что и a, но взятой всегда со знаком «$+$».*

Для отрицательных чисел a и b будем считать, что $a > b$, если $|a| < |b|$, и $a < b$, если $|a| > |b|$.

Утверждение 5. (Транзитивность знака $>$). *Пусть $a = a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$, $b = b_0, b_1 \ldots b_n \ldots$, $c = c_0, c_1 \ldots c_n \ldots$ — вещественные числа. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.*

Доказательство. 1) Пусть сначала $c \geqslant 0$. Так как $b > c$, то по правилам сравнения получаем, что $b > 0$. Так как $a > b$, то и $a > 0$. Далее, поскольку $a > b$, то существует такой натуральный номер m, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... , $a_{m-1} = b_{m-1}$, $a_m > b_m$. Аналогично, поскольку $b > c$, то существует такой натуральный номер l, что $b_0 = c_0$, $b_1 = c_1$, ... , $b_{l-1} = c_{l-1}$, $b_l > c_l$. Обозначим $k = \min(m, l)$. Тогда $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, ... , $a_{k-1} = c_{k-1}$, $a_k > c_k$. Значит, $a > c$.

2) Пусть $c < 0$, $a \geqslant 0$. Тогда $a > c$.

3) Пусть $c < 0$, $a < 0$. Так как $a > b$, то по правилам сравнения $b < 0$. Тогда $|a| < |b|$, $|b| < |c|$, следовательно, $|a| < |c|$ (по доказанному в пункте 1). Значит, $a > c$. □

Ограниченные множества вещественных чисел.

Определение 18. *Пусть A — некоторое непустое множество вещественных чисел. Множество A называется* ***ограниченным сверху (снизу)****, если существует такое вещественное число M (m), что для всех элементов $a \in A$ выполнено неравенство: $a \leqslant M$ ($a \geqslant m$). Числа M и m называются соответственно* ***верхней и нижней гранями*** *множества M.*

Определение 19. *Число $M^* \in \mathbb{R}$ ($m^* \in \mathbb{R}$) называется* ***точной верхней (точной нижней) гранью*** *множества M, если: 1) неравенство $a \leqslant M^*$ ($a \geqslant m^*$) имеет место для всех элементов $a \in A$; 2) для любого вещественного числа x такого, что $x < M^*$ ($x > m^*$) найдется такой элемент $a' \in A$, что $a' > x$ ($a' < x$).*

Другими словами, точной верхней гранью множества называется наименьшая из его верхних граней; точной нижней гранью — наибольшая из нижних.

Обозначения: $M^* = \sup A$, $m^* = \inf A$ (от латинского supremum — наивысшее; infimum — наинизшее).

Теорема 4. *Если непустое множество A вещественных чисел ограничено сверху (снизу), то у него существует точная верхняя (нижняя) грань.*

Доказательство. Пусть множество A ограничено сверху (случай ограниченного снизу множества рассматривается аналогично). Обозначим через M какую-либо из верхних граней A. Возможны два случая.

1. Среди элементов множества A есть неотрицательные числа. В этом случае обозначим $A_0 = \{a \in A \,|\, a \geqslant 0\}$ и заметим, что $A_0 \neq \emptyset$. Любой элемент $a \in A$ имеет вид $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$. Поскольку $a \leqslant M$ для всех $a \in A_0$, то $a_0 \leqslant M$. Пусть тогда $\overline{a_0} = \max\{a_0 \,|\, a = a_0, a_1 \ldots a_n \cdots \in A_0\}$, то есть $\overline{a_0}$ — максимальная из целых частей элементов множества A_0.

Обозначим теперь $A_1 = \{a \in A_0 \,|\, a = \overline{a_0}, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots\}$ и положим $\overline{a_1} = \max\{a_1 \,|\, a = \overline{a_0}, a_1 \ldots a_n \cdots \in A_1\}$ (то есть $\overline{a_1}$ — наибольший из первых знаков после запятой элементов множества A_1). Пусть $A_2 = \{a \in A_1 \,|\, a = \overline{a_0}, \overline{a_1} a_2 \ldots a_n \ldots\}$; $\overline{a_2} = \max\{a_2 \,|\, a = \overline{a_0}, \overline{a_1} \ldots a_n \cdots \in A_2\}$ и так далее.

В результате получим бесконечную дробь $M^* = \overline{a_0}, \overline{a_1}\,\overline{a_2} \ldots \overline{a_n} \ldots$. Покажем, что $M^* = \sup A$.

1) Так как $M^* \geqslant 0$, то очевидно, что $a \leqslant M^*$, если $a < 0$. Пусть $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \cdots \in A$, $a \geqslant 0$. Предположим, что $a > M^*$. Тогда существует такое натуральное число k, что $a_0 = \overline{a_0}, a_1 = \overline{a_1}, \ldots, a_{k-1} = \overline{a_{k-1}}$, $a_k > \overline{a_k}$. Но последнее неравенство противоречит построению числа M^*. Значит, $a \leqslant M^*$ для любого элемента $a \in A$.

2) Пусть $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ — произвольное вещественное число, меньшее, чем M^*. Очевидно, что если $x < 0$, то любой неотрицательный элемент $a \in A$ будет превосходить x. Предположим, что $x \geqslant 0$. Так как $x < M^*$, то найдется такой натуральный номер k, что $x_0 = \overline{a_0}$, $x_1 = \overline{a_1}, \ldots, x_{k-1} = \overline{a_{k-1}}$, $x_k < \overline{a_k}$. Поскольку (по построению числа M^*) $\overline{a_k} = \max\{a_k \,|\, a = \overline{a_0}, \overline{a_1} \ldots \overline{a_{k-1}} a_k \cdots \in A_k\}$, то существует такой элемент $a' \in A_k$, что $a' = \overline{a_0}, \overline{a_1} \ldots \overline{a_k} a_{k+1} \ldots$. Значит, $a' > x$.

Из пунктов 1), 2) следует, что число M^* действительно является точной верхней гранью множества A.

2. Осталось рассмотреть случай, когда множество A содержит только отрицательные элементы. Тогда будем производить аналогичные построения, только обозначим через $\overline{a_0}$ минимальную из целых частей элементов A (рассматриваемых без знака «$-$»), через $\overline{a_1}$ — минимальный из первых знаков после запятой и так далее. Перед получившейся дробью ставим знак « $-$ ». □

Упражнение 3. *Пусть $A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$. Доказать, что множество A не имеет точной верхней грани среди рациональных чисел.*

Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.

Лемма 1. *Пусть $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ — произвольное вещественное число. Тогда для любого рационального положительного числа ε найдутся такие рациональные числа α_1, α_2, что $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $a \geqslant 0$. В силу аксиомы Архимеда для произвольного рационального положительного числа ε найдется такое натуральное n, что $10^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Положим $\alpha_1 = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 000\ldots$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{10^n}$. Тогда получим, что $\alpha_1 \leqslant a$, $\alpha_2 \geqslant a$, $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$.

Если $a < 0$, то проведем аналогичную процедуру для числа $|a|$, затем перед получившимися дробями поставим знак «$-$». □

Лемма 2. *Пусть $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, $b = \pm b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ — произвольные вещественные числа, $a > b$. Тогда найдется такое рациональное число α, что $a > \alpha > b$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Так как $a > b$, то существует такое натуральное k, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 \ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k > b_k$. Поскольку мы не рассматриваем десятичные дроби с цифрой «9» в периоде, то найдется такой номер $p > k$, что $b = b_0, b_1 \ldots b_k 99\ldots 9 b_p \ldots$, где $b_p \neq 9$ (возможно, $p = k + 1$). Положим $\alpha = b_0, b_1 \ldots b_k 99 \ldots 9(b_p + 1)000\ldots$. Тогда $\alpha > b$ (поскольку $b_p + 1 > b_p$) и $\alpha < a$ (поскольку $b_k < a_k$).

В случае, если $a > 0$, $b < 0$ можно взять $\alpha = 0$; если a и b — неположительные числа, то проделываем те же самые построения для их абсолютных величин. □

Лемма 3. *Пусть a, b — вещественные числа и пусть для любого рационального положительного числа ε найдутся такие два рациональных числа γ_1, γ_2, что $\gamma_1 \leqslant a \leqslant \gamma_2$, $\gamma_1 \leqslant b \leqslant \gamma_2$, причем $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$. Тогда $a = b$.*

Доказательство. Предположим, что $a \neq b$. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $a < b$. Тогда, согдасно лемме 2, найдутся два таких рациональных числа α_1, α_2, что $a < \alpha_1 < \alpha_2 < b$. Пусть ε — произвольное рациональное положительное число; γ_1, γ_2 — такие рациональные числа, что $\gamma_1 \leqslant a \leqslant \gamma_2$, $\gamma_1 \leqslant b \leqslant \gamma_2$ и $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$. Тогда $\gamma_1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \gamma_2$, следовательно, $0 < \alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$. В силу произвольности выбора ε заключаем, что $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$. Это противоречит выбору чисел α_1 и α_2. Значит, наше предположение неверно, и $a = b$. □

Определение 20. ***Суммой*** *вещественных чисел a и b называется такое вещественное число x, что для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих условиям $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, выполняется двойное неравенство: $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2 + \beta_2$.*

Обозначение: $x = a + b$.

Определение 21. *Пусть a и b — положительные вещественные числа. Их* ***произведением*** *будем называть такое вещественное число x, что для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих условиям $0 < \alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $0 < \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, выполняется двойное неравенство: $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2$.*

Для любого вещественного a по определению положим $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Пусть a, b — произвольные вещественные числа. Будем считать, что

$$a \cdot b = \begin{cases} |a| \cdot |b|, & a \text{ и } b \text{ одного знака}, \\ -|a| \cdot |b|, & a \text{ и } b \text{ разных знаков}. \end{cases}$$

Обозначение $x = a \cdot b$.

Теорема 5. *Для любых вещественных чисел a, b существует единственное вещественное число x такое, что $x = a + b$.*

Доказательство. 1) (существование). Рассмотирм множество

$$A = \{(\alpha_1 + \beta_1) \,|\, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Q}, \alpha_1 \leqslant a, \beta_1 \leqslant b\}.$$

Заметим, что A не пусто и ограничено сверху (например, числом $(\alpha_2 + \beta_2)$, где $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_2 \geqslant a$, $\beta_2 \geqslant b$). Значит, существует $\sup A = x$. Покажем, что число x удовлетворяет определению суммы. Действительно, поскольку x — верхняя грань A, то $x \geqslant \alpha_1 + \beta_1$, если $\alpha_1 \leqslant a$, $\beta_1 \leqslant b$. С другой стороны, поскольку x — точная грань, то $x \leqslant \alpha_2 + \beta_2$, если $\alpha_2 \geqslant a$, $\beta_2 \geqslant b$ (так как число $(\alpha_2 + \beta_2)$ — одна из верхних граней A). Значит, $x = a + b$.

2) (единственность). Пусть x_1, x_2 — такие вещественные числа, что $x_1 = a+b$, $x_2 = a+b$. Покажем, что $x_1 = x_2$. Возьмем произвольное рациональное число $\varepsilon > 0$. По определению для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих условиям $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, $\alpha_2 - \alpha_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\beta_2 - \beta_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_2 + \beta_2, \\ \alpha_1 + \beta_1 \leqslant x_2 \leqslant \alpha_2 + \beta_2 \end{cases}$$

(можем выбрать такие α_1, α_2, β_1, β_2 в силу леммы 1). Тогда

$$(\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Но это означает, в силу произвольности выбора ε, что $x_1 = x_2$ (лемма 3). Теорема доказана. $\square$

Теорема 6. *Для любых вещественных чисел a, b существует единственное вещественное число x такое, что $x = a \cdot b$.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать теорему для случая $a > 0$, $b > 0$.

1) (существование). Рассмотирм множество

$$A = \{(\alpha_1 \cdot \beta_1) \,|\, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Q}, 0 < \alpha_1 \leqslant a, 0 < \beta_1 \leqslant b\}.$$

Заметим, что A не пусто и ограничено сверху (например, числом $(\alpha_2 \cdot \beta_2)$, где $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_2 \geqslant a$, $\beta_2 \geqslant b$). Значит, существует $\sup A = x$. Покажем, что число x удовлетворяет определению произведения. Действительно, поскольку x — верхняя грань A, то $x \geqslant \alpha_1 \cdot \beta_1$, если $0 < \alpha_1 \leqslant a$, $0 < \beta_1 \leqslant b$. С другой стороны, поскольку x — точная грань, то $x \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2$, если $\alpha_2 \geqslant a$, $\beta_2 \geqslant b$ (так как число $(\alpha_2 \cdot \beta_2)$ — одна из верхних граней A). Значит, $x = a \cdot b$.

2) (единственность). Пусть x_1, x_2 — такие вещественные числа, что $x_1 = a \cdot b$, $x_2 = a \cdot b$. Покажем, что $x_1 = x_2$. Возьмем произвольное рациональное число $\varepsilon > 0$. По определению для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих условиям $0 < \alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$,

$0 < \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, $\alpha_2 - \alpha_1 < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $\beta_2 - \beta_1 < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $M = \max\{[a],[b]\} + 1$, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 0 < \alpha_1 \cdot \beta_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2, \\ 0 < \alpha_1 \cdot \beta_1 \leqslant x_2 \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2 \end{cases}$$

(можем выбрать такие α_1, α_2, β_1, β_2 в силу леммы 1). Тогда

$$(\alpha_2 \cdot \beta_2) - (\alpha_1 \cdot \beta_1) = \alpha_2(\beta_2 - \beta_1) + \beta_2(\alpha_2 - \alpha_1) < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Но это означает, в силу произвольности выбора ε, что $x_1 = x_2$ (лемма 3). Теорема доказана полностью. $\square$

Свойства вещественных чисел.

1) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ или $a > b$ или $a = b$ (следует из правил сравнения);

2) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ существует единственное число $c \in \mathbb{R}$: $c = a + b$ (следует из теоремы 5);

3) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ существует единственное число $c \in \mathbb{R}$: $c = a \cdot b$ (следует из теоремы 6);

4) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (следует из утверждения о транзитивности знака «$>$»); если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (очевидно).

Свойства 5)—13) вытекают из определений суммы и произведения вещественных чисел и из соответствующих свойств рациональных чисел:

5) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$;

6) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

7) существует единственное число $0 \in \mathbb{R}$: $a + 0 = 0 + a = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$;

8) для любого числа $a \in \mathbb{R}$ существует единственное число $a' \in \mathbb{R}$: $a + a' = 0$;

9) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$: $a \cdot b = b \cdot a$;

10) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

11) существует единственное число $1 \in \mathbb{R}$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$;

12) для любого числа $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, существует единственное число $a' \in \mathbb{R}$: $a \cdot a' = 1$;

13) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Определение 22. *Разностью вещественных чисел a и b называется такое вещественное число c, что $a = c + b$.*

Проверим, что разностью чисел a и b является число $a + b'$, где b' — обратный к b по сложению. Действительно, $(a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$.

Докажем теперь единственность. Пусть d — такое вещественное число, что $a = d + b$. Тогда $c = a + b' = (d + b) + b' = d + (b + b') = d + 0 = d$.

Обозначение: $c = a - b$. Из определения следует, что если b' — обратный к b по сложению, то $b' = 0 - b$. Обозначение: $b' = -b$.

Определение 23. *Частным вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) называется такое вещественное число c, что $a = c \cdot b$.*

Обозначение: $c = \dfrac{a}{b}$. Можно показать, что частное определено единственным образом и что если $b \neq 0$, то $\dfrac{a}{b} = a \cdot b'$, где b' — обратный к b по умножению. При этом из определения следует, что $b' = \dfrac{1}{b}$.

14) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Докажем это свойство. Согласно лемме 1, найдутся такие два рациональных числа α_1, β_2, что $a > \alpha_1 > \beta_2 > b$. Обозначим $\varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$. Тогда ε — положительное рациональное число. Значит, существуют такие рациональные γ_1, γ_2, что $\gamma_1 \leqslant c \leqslant \gamma_2$, $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$. Выберем еще произвольные рациональные числа α_2, β_1, для которых выполнено: $\alpha_2 > a$, $\beta_1 < b$. Тогда по определению суммы получим: $\alpha_1 + \gamma_1 \leqslant a + c \leqslant \alpha_2 + \gamma_2$, $\beta_1 + \gamma_1 \leqslant b + c \leqslant \beta_2 + \gamma_2$. Заметим теперь, что $(\alpha_1 + \gamma_1) - (\beta_2 + \gamma_2) = (\alpha_1 - \beta_2) - (\gamma_2 - \gamma_1) = \varepsilon - (\gamma_2 - \gamma_1) > 0$, то есть $\alpha_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2$. Отсюда и из транзитивности знаков неравенства следует, что $a + c > b + c$.

15) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: если $a > b$, $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$;

Упражнение 4. *Доказать.*

16) Каково бы ни было число $a \in \mathbb{R}$, можно число 1 повторить столько раз, что сумма превзойдет a.

Действительно, если $a \leqslant 0$, то можно взять $n = 1$; если же $a = a_0, a_1 \ldots a_n \cdots > 0$, то положим $n = a_0 + 1$.