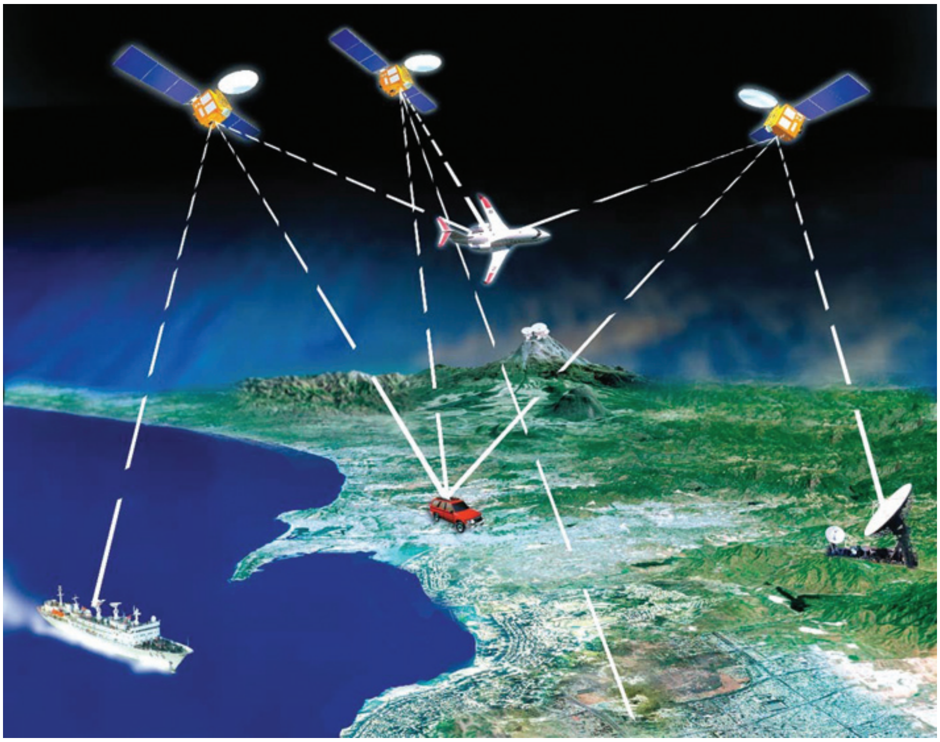
TRİGONOMETRİ



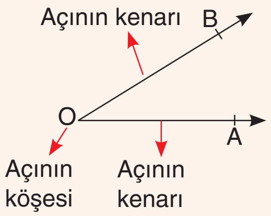
Trigonometri (Yunanca trigönon “Üçgen” + metron “ölçmek”) üçgenlerin açıları ile kenarları arasındaki bağıntıları konu edinen matematik dalıdır.

Tarih boyunca, insanlar birçok alanda trigonometriden yararlanmıştır. Mısırlılar ve Bahilliler trigonometriyi arazi ölçümlerinde, piramitlerin yapımında astronomide, güneş saatinde ve harita çizimi gibi lanlarda kullanmışlardır. Günümüzde ise trigonometri ekonomi, mimarlık, konum belirleme (navigasyon) sismoloji (deprem bilimi), karayolları yapımı, havacılık ve uzak teknolojisinin geliştirilmesi gibi pek çok alanda kullanılmaktadır.

4.1 TRİGONOMETRİ

4.1.1 Yönlü Açılar

ETKİNLİK



Başlangıç noktası ortak olan iki ışının birleşimine açı denildiğini biliyoruz.

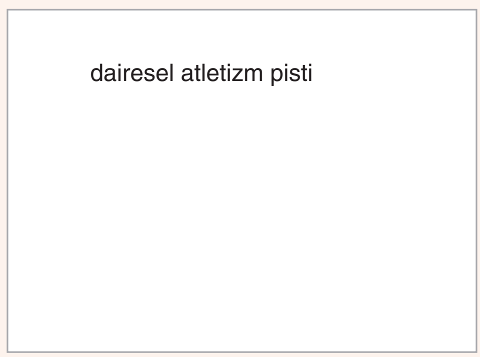
$\widehat{AOB} = [OA \cup [OB$

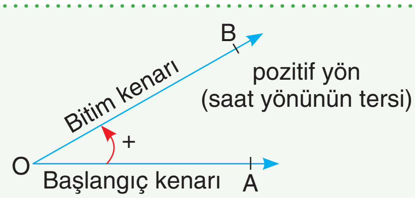
Açının kenarlarını ([OA ve [OB ışınlarını) üst üste çakıştırırsak açı  şekline gelir. Bu şekilde iken açının kenarlarından birini sabit, diğer kenarı dönebilen bir ışın olarak düşünürsek:

1) Kaç farklı dönüş yönü olur? Dönüş yönünü saat yönüne göre inceleyiniz.

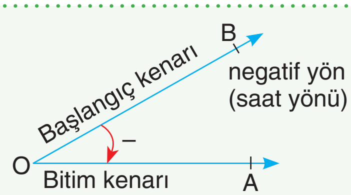
2) Bir su şişesi bularak kapağının saat yönüne mi, yoksa saat yönünün tersine mi açıldığını gözlemleyiniz.

3) Doğada yön kavramı var mıdır? Yandaki dairesel pistte koşu yapan atletler saat yönünde mi yoksa saat yönünün tersine mi koşarlar? Açıklayınız.





$[OA \cup [OB = \widehat{AOB}$

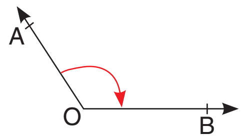
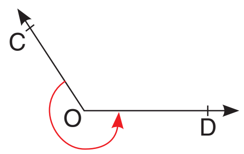
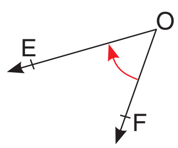
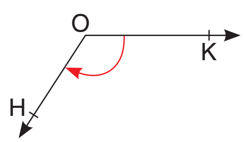
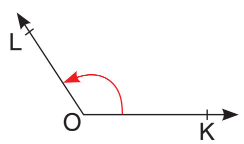


$[OB \cup [OA = \widehat{BOA}$

Açıyı oluşturan iki ışından birinin başlangıç kenarı, diğerinin de bitim kenarı olarak alınması durumunda elde edilen açıya **yönlü açı** denir. Yukarıdaki şekillerden de görüldüğü gibi saat yönünün tersi **pozitif yön**, saat yönü de **negatif yön** olarak tanımlanır.

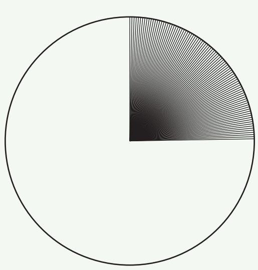
ETKİNLİK

Aşağıdaki tabloyu örneklere uygun olarak doldurunuz.

Açı	Başlangıç kenarı	Bitim kenarı	Sembolle gösterimi	Yönü
	[OA	[OB	$\widehat{AOB}$	Negatif
	[OC	[OD	$\widehat{COD}$	Pozitif
				
				
				

4.1.2 Açı ölçü Birimleri

Bir açının ölçüsünü tanımlamak için genellikle derece ve radyan açı ölçü birimleri kullanılır.



Derece: Bir çemberin çevresi 360 eş parçaya bölündüğünde 360 eş yay parçası elde edilir. Bu eş yay parçasından herhangi birini gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** denir ve "**1°**" ile gösterilir.

Dakika: 1 derecelik çember yayı 60 eş parçaya bölündüğünde, bu eş yayları gören merkez açısına **1 dakikalık** açı denir ve "**1'**" ile gösterilir.

$\boxed{1^\circ = 60'}$ veya $\boxed{1 = \frac{1^\circ}{60}}$ dir.

Örnek: 2560' lık açıyı derece ve dakika türünden bulalım.

Çözüm

1° = 60' dır. Buna göre

$$\begin{array}{r|l} 2560 & 60 \\ \cline{2-2} -240 & 42 \longrightarrow \text{Derece} \\ \hline 160 & \\ -\ 120 & \\ \hline 40 \longrightarrow \text{Dakika} & \end{array}$$

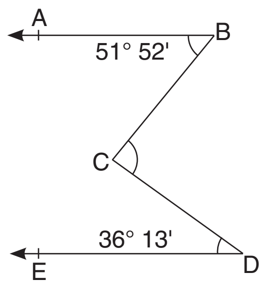
Buradan 2560’ = 42° 40’ bulunur.

Örnek: $[BA \mathbin{/\!/} [DE$ ve

$m(\widehat{ABC}) = 51°\,52'$

$m(\widehat{CDE}) = 36°\,13'$

olduğuna göre $m(\widehat{BCD})$ açısının ölçüsü kaç derece kaç dakika olduğunu bulalım.



Çözüm

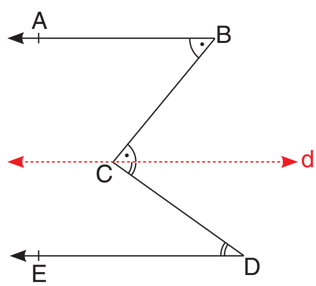
c noktasından geçen [BA ve [DE ye paralel olacak şekilde d doğrusu çizersek

$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CDE})$ olur.

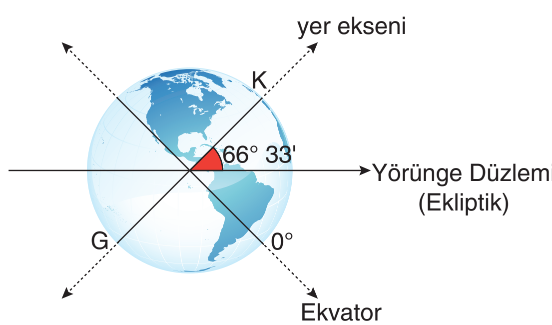
$$\begin{array}{r} 51°\ 52' \\ +\ 36°\ 13' \\ \hline 87°\ 65' \end{array} = 88°\ 5' \text{ bulunur.}$$

$87°\ (60' + 5')$

1°



Örnek: yer ekseni ile izlediği yörünge düzlemi arasındaki açı 66° 33' dır. Buna bağlı olarak yörünge düzlemi ile ekvator düzlemi arasındaki açının ölçüsünü bulalım.



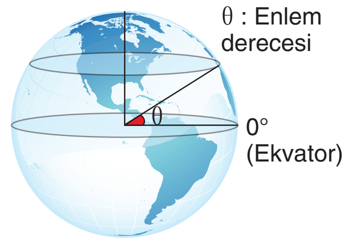
Çözüm

yer ekseni (bir kutuptan diğerine uzanan) ekvator düzlemine dik olduğu için yörünge düzlemi ile ekvator arasındaki açının ölçüsü 90° – (66° 33') dır.

1° = 60'

$$90°\ 00' = \begin{array}{r} 89°\ 60' \\ -\ 66°\ 33' \\ \hline 23°\ 27' \end{array} \text{ bulunur.}$$

Örnek: Dünya üzerinde herhangi bir noktanın ekvatora açı cinsinden olan uzaklığına O noktanın enlemi denir. Derece, dakika cinsinden gösterilir. Ankara 39° 59', İstanbul 41° 00' kuzey enlemlerinde bulunuyorsa Ankara ve İstanbul enlemleri arasındaki açı değerini bulalım.



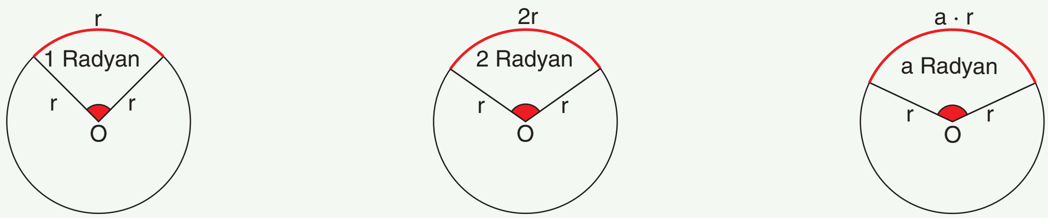
Çözüm

Aralarındaki açı değeri enlemlerin farkı olacağından $1° = 60'$

$$
\begin{array}{rrr}
41°\ 00' = & 40° & 60' \\
- & 39° & 59' \\
\hline
 & 1° & 1'
\end{array}
$$

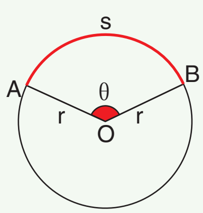
bulunur.

Radyan: Yarıçap uzunluğundaki yay parçasını gören merkez açıya **1 radyan** denir.



Radyan değeri yay uzunluğunun yarıçapına oranıdır.

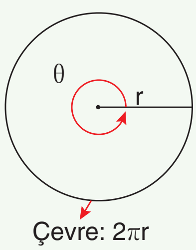
Radyan, merkez açının gördüğü yay uzunluğunun yarıçap uzunluğuna oranına denir.



O merkezli r yarıçaplı çemberde

$|\overset{\frown}{AB}| = s, m(\widehat{AOB}) = \theta$ ile gösterirsek

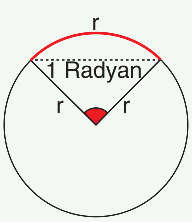
$\theta = \dfrac{s}{r}$ veya $s = \theta \cdot r$ olur.



$\theta = 360°$ nin radyan cinsinden değeri

$\theta = \dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$ dir.

2π radyan = 360 derece



(1 Radyan < 60°)

2π Radyan	360°
1 Radyan	x°

$x° = \dfrac{360}{2\pi} \cong 57,2958 \Rightarrow$ 1 Radyan $\cong 57,3°$ dir.

Örnek: Ölçüsü 150° olan bir açının kaç radyan olacağını bulalım.

Çözüm

360°	2π radyan
150°	x radyan

$360 \cdot x = 150° \cdot 2\pi \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6}$ radyan bulunur.

Bir açının ölçüsü "D" derece ve "R" radyan olmak üzere

$\boxed{\dfrac{D}{360°} = \dfrac{R}{2\pi}}$ veya $\boxed{\dfrac{D}{180°} = \dfrac{R}{\pi}}$ orantısı vardır.

Örnek: 240° lik bir açının radyan cinsinden değerini bulalım.

Çözüm

$\dfrac{D}{180°} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow \dfrac{240°}{180°} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow R = \dfrac{4\pi}{3}$ radyan bulunur.

Örnek: Ölçüsü $\dfrac{\pi}{6}$ radyan olan açıyı derece cinsinden bulalım.

Çözüm

I. yol $\dfrac{D}{180} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow \dfrac{D}{180} = \dfrac{\frac{\pi}{6}}{\pi} \Rightarrow D = 30°$ bulunur.

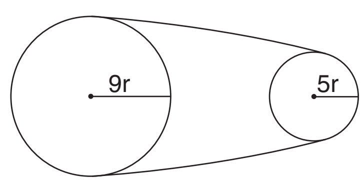
II. yol π yi 180° olarak yazarsak $\dfrac{180°}{6} = 30°$ bulunur.

ETKİNLİK

Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

Derece	0°	30°		60°		120°		150°	
Radyan	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
Derece	210°		240°	270°			330°	360°	
Radyan		$\frac{5\pi}{4}$			$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$			

Örnek: Yarıçap uzunlukları oranı $\dfrac{9}{5}$ olan iki kasnak aynı kayışa bağlı olarak dönmektedir. Büyük kasnak pozitif yönde 150° lik açı kadar dönerse küçük kasnağın kaç radyanlık açı ile döneceğini bulalım.



Çözüm

$\dfrac{D}{180°} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow \dfrac{150°}{180°} = \dfrac{R}{\pi} \Rightarrow R = \dfrac{5\pi}{6}$ dır.

9r ile $\leftrightarrow \dfrac{5\pi}{6}$ radyan dönerse (Yarıçap ile dönme açısı ters orantılıdır.)

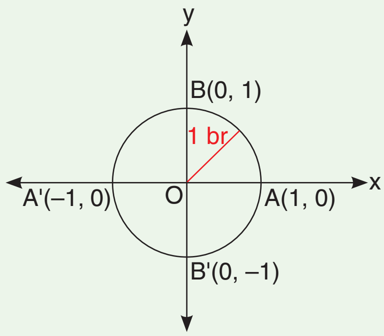
5r ile $\leftrightarrow$ x radyan döner

$9r \cdot \dfrac{5\pi}{6} = 5r \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$ radyan bulunur.

Birim Çember

Yarıçap 1 birim olan çembere **birim çember** denir.

Merkezi başlangıç noktası (orjin) olan birim çembere **trigonometrik çember** denir.



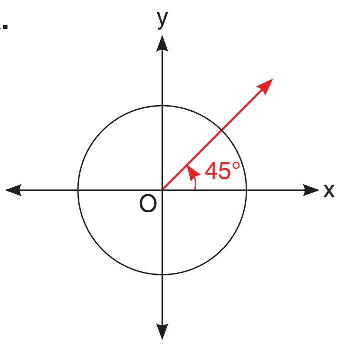
Örnek: Aşağıda verilen açıları birim çemberde gösterelim.

a. 45° **b.** –90° **c.** 135° **ç.** 225° **d.** 315°

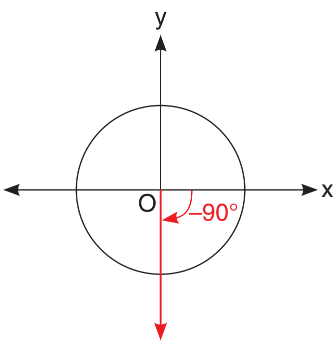
Çözüm

Birim çember üzerinde tanımlanan yönlü açıların köşesi orjin başlangıç kenarı da Ox ekseninin pozitif kısmı ile çakışık alınır. O halde bitim kenarını çizmemiz yeterli olacaktır.

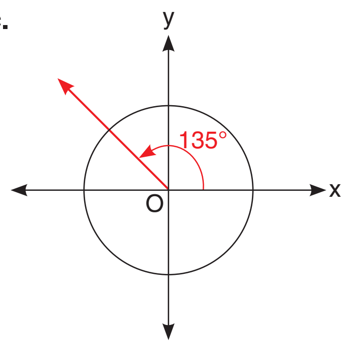
a.



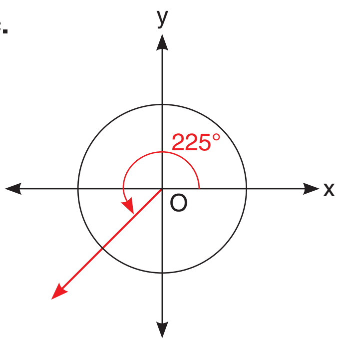
b.



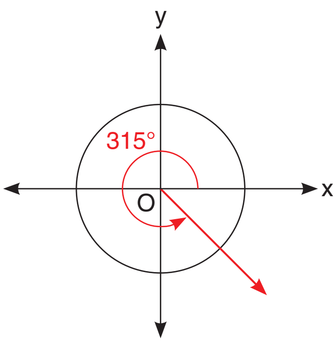
c.



ç.



d.



4.1.3 Esas Ölçü

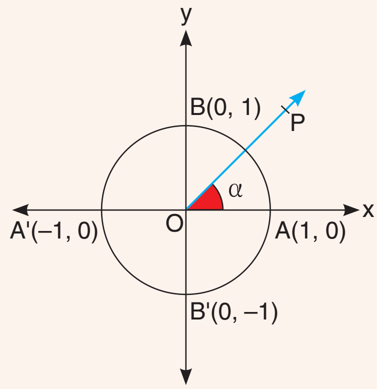
ETKİNLİK

Aşağıda verilen açılara göre [OP bitim kenarının birim çemberi kestiği noktalar için ne söylenebilir?

a) $\alpha = 90°$ **b)** $\alpha = 450°$

c) $\alpha = 810°$ **d)** $\alpha = -270°$

Buradaki açıları $90 + k \cdot 360°$ $(k \in \mathbb{Z})$ şeklinde yazabilir miyiz? $(k \in \mathbb{Z})$ burada neyi ifade eder? Tartışınız.



Birim çember üzerinde bitim kenarları aynı olan açılardan ölçüsü [0, 360) veya [0, 2π) aralığında olan açıya bu açının **esas ölçüsü** denir.

$0° \leq \theta < 360°$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, ölçüsü $\theta + k\,360°$ olan açının **esas ölçüsü** θ **derece**,

$0 \leq \theta < 2\pi$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, ölçüsü $\theta + k \cdot 2\pi$ radyan olan açının **esas ölçüsü** θ **radyan** olarak bulunur.

Örnek: Aşağıda verilen açıların esas ölçülerini bulalım.

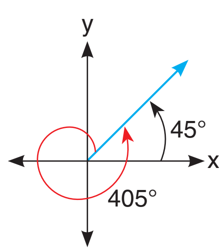
a. 405° **b.** 2017° **c.** –270° **ç.** –900° **d.** $\dfrac{27\pi}{4}$ **e.** $\dfrac{-37\pi}{3}$

Çözüm

Derece olarak verilen bir açının esas ölçüsü $\theta + k \cdot 360°$ dir. Buna göre;

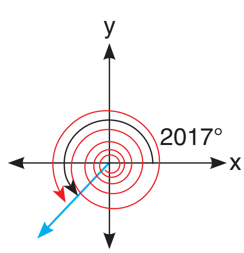
a.
$$\begin{array}{r|l} 405 & 360° \\ \hline -360 & 1\ k \\ \hline 45\ \theta & \end{array}$$

$((+)$ yönde bir tur$) \Rightarrow 405° = \underbrace{45°}_{\text{Esas ölçü}} + 1 \cdot 360°$ dir.

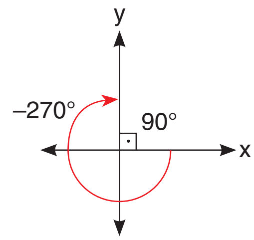


b.
$$\begin{array}{r|l} 2017 & 360 \\ \hline -1800 & 5\ k \\ \hline 217\ \theta & \end{array}$$

$((+)$ yönde 5 tur$) \Rightarrow 2017° = \underbrace{217°}_{\text{Esas ölçü}} + 5 \cdot 360°$ dir.



c. $\begin{array}{r|l} -270^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} -/\ -360 & -1\ k \\ \cline{1-1} 90^\circ\ \theta & \end{array}$ $\big((-)\text{ yönde 1 tur}\big) \Rightarrow -270^\circ = \underbrace{90^\circ}_{\text{Esas ölçü}} + (-1)\cdot 360^\circ$



ç. $\begin{array}{r|l} -900 & 360 \\ \cline{2-2} -/\ -1080 & -3\ k \\ \cline{1-1} 180\ \theta & \end{array}$ $\big((-)\text{ yönde 3 tur}\big) \Rightarrow -900^\circ = \underbrace{180^\circ}_{\text{Esas ölçü}} + (-3)\cdot 360^\circ$

Radyan olarak verilen bir açının esas ölçüsü $\theta + k\cdot 2\pi$ dir. Buna göre;

d. $\dfrac{27\pi}{4} = \dfrac{3\pi + 24\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 6\pi = \underbrace{\dfrac{3\pi}{4}}_{\theta} + \underbrace{3}_{k}\cdot 2\pi$

Buradan esas ölçü: $\dfrac{3\pi}{4}$, k = 3 (pozitif yönde 3 tur)

e. $\dfrac{-37\pi}{3} = \dfrac{-42\pi + 5\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} - 14\pi = \underbrace{\dfrac{53\pi}{3}}_{\theta} + \underbrace{(-7)}_{k}\cdot 2\pi$

Buradan esas ölçü: $\dfrac{5\pi}{3}$, k = –7 (negatif yönde 7 tur)

d ve e şıkları için pratik yol:

$\dfrac{27\pi}{4}$ radyanın esas ölçüsü bulunurken 2π nin tam katları atılır 2π nin tam katlarını bulabilmek için, paydanın iki katına böleriz.

d. $\begin{array}{r|l} 27\pi & 8 \\ \cline{2-2} -\ 24\pi & 3\pi \\ \cline{1-1} 3\pi & \end{array}$ $\qquad \dfrac{27\pi}{4} = \underbrace{\dfrac{3\pi}{4}}_{\text{Esas ölçü}} + 3\cdot 2\pi$

$3 \to$ k

$3\pi \to$ Esas ölçünün payı (paydayı aynı alıyoruz)

e. $\begin{array}{r|l} -37\pi & 6 \\ \cline{2-2} -/\ -42\pi & -7\pi \\ \cline{1-1} 5\pi & \end{array}$ $\qquad \dfrac{-37\pi}{3} = \underbrace{\dfrac{5\pi}{3}}_{\text{Esas ölçü}} + (-7)\cdot 2\pi$

$-7 \to$ k

$5\pi \to$ Esas ölçünün payı (paydayı aynı alıyoruz)

4.1. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. Saat yönüne .... denir.

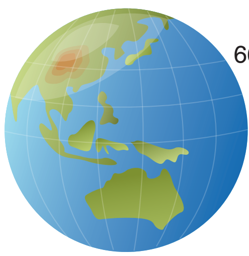
b. Merkezi orjin yarıçapı 1 br olan noktaların geometrik yerine .... denir.

c. $1°$ nin $\frac{1}{60}$ ine .... denir.

ç. (+) yön .... denir.

d. Yarıçap uzunluğundaki yay parçasını gören merkez açıya .... denir.

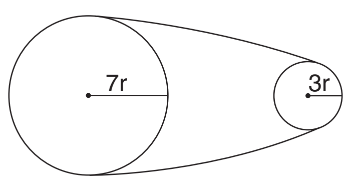
2.



Şekilde verilen bazı özel paralellerin (Kuzey Kutup Dairesi ve Yengeç Dönencesi) enlemleri verilmiştir. Bu iki enlem arasındaki farkı bulunuz.

3. 1007' lık açıyı derece ve dakika türünden bulunuz.

4. Yarıçap uzunluklarının oranı $\frac{7}{3}$ olan iki kasnak aynı kayışa bağlı olarak dönmektedir. Küçük kasnak pozitif yönde 280° lik açı kadar dönerse büyük kasnağın kaç radyanlık açı ile döneceğini bulunuz.

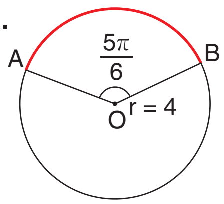


5. Aşağıda ölçüleri verilen açıların birim çember üzerindeki noktaların koordinatlarını bulunuz.

a. 0 radyan **b.** $\frac{\pi}{2}$ radyan **c.** π radyan ç. $\frac{3\pi}{2}$ radyan

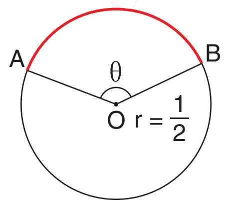
6. Aşağıda verilen çemberlere göre

a.



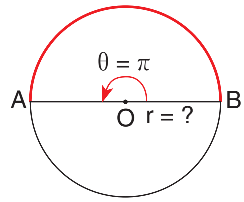
$\left|\overset{\frown}{AB}\right|$ bulunuz.

b.



$\left|\overset{\frown}{AB}\right| = \frac{\pi}{12}$ ise θ açısını bulunuz.

c.



$\left|\overset{\frown}{AB}\right| = 2\pi$, $\theta = \pi$ ise r yarıçap uzunluğunu bulunuz.

7. Aşağıda verilen saatler için akrep ile yelkovan arasındaki küçük açının radyan cinsinden değerini bulunuz.

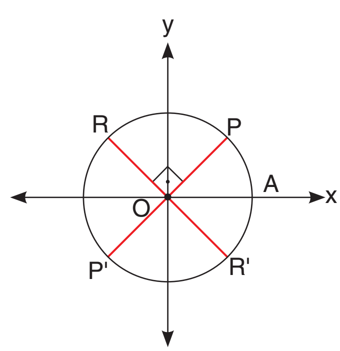
a. 16.00

b. 11:00

8. Aşağıdaki boşlukları derece olarak verilenleri derece, radyan olarak verilenleri radyan olarak doldurunuz.

Açının Ölçüsü	7650°	–1525°	$\frac{-25\pi}{3}$	$\frac{-40\pi}{7}$	$\frac{36\pi}{5}$	2023°	$\frac{69\pi}{5}$
Açının Esas Ölçüsü				$\frac{2\pi}{7}$			

9. $[PP'] \perp [RR']$ $\widehat{AOP}$ nin ölçüsü $\frac{\pi}{6}$ radyandır. Aşağıda verilen açıların bitim kenarının birim çemberi kestiği noktaları şekilde verilen noktalarla eşleştiriniz.



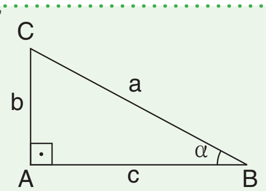
a. $\frac{31\pi}{6}$

b. $\frac{11\pi}{3}$

c. $\frac{-11\pi}{6}$

ç. $\frac{-23\pi}{6}$

d. $\frac{20\pi}{3}$



$\sin\alpha = \frac{b}{a}$ $\tan\alpha = \frac{b}{c}$

$\cos\alpha = \frac{c}{a}$ $\cot\alpha = \frac{c}{b}$

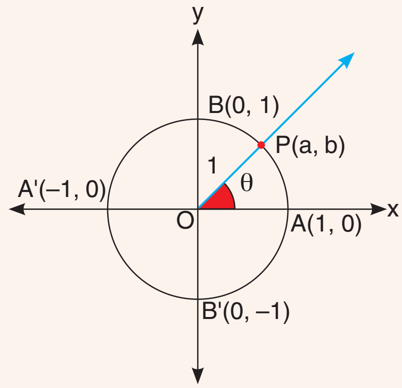
4.2 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

4.2.1. Trigonometrik Fonkisyonlar ve Grafikleri

ETKİNLİK

1. θ açısının bitim kenarının birim çemberi kestiği nokta P(a, b) ise P nin koordinatlarını θ açısının sinüsü ve kosinüsü cinsinden yazınız.

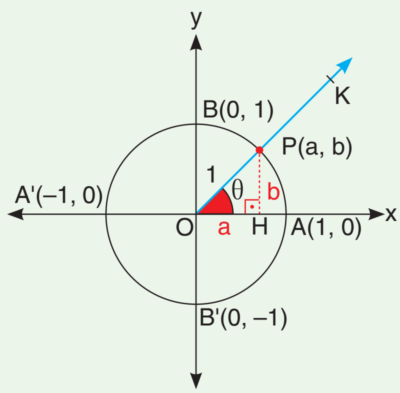
2. θ açısı değiştikçe a nın ve b nın alabileceği değer aralığını bulmaya çalışınız.



Kosinüs ve Sinüs Fonksiyonları

Birim çemberde θ açısının bitim kenarı [OK ve birim çemberi kestiği nokta P(a, b) olmak üzere P noktasının apsisine θ gerçek sayının **kosinüsü** denir ve **cos**θ ile gösterilir.

P noktasının ordinatına ise θ gerçek sayısının **sinüsü** denir ve **sin**θ ile gösterilir.



$\widehat{POH}$ dik üçgeninde

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{1} \Rightarrow a = \cos\theta \\ \sin\theta &= \frac{b}{1} \Rightarrow b = \sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(a, b) = P(\cos\theta, \sin\theta)$$

P noktasının koordinatları sırasıyla kosinüs ve sinüs değerlerini gösterdiğinden x eksenine **kosinüs ekseni**, y eksenine **sinüs ekseni** denir.

A(1, 0) = A(cos0°, sin0°) $\Rightarrow$ cos0° = 1, sin0° = 0 dır.

B(0, 1) = B(cos90°, sin90°) $\Rightarrow$ cos90° = 0, sin90° = 1 dır.

A'(–1, 0) = A'(cos180°, sin180°) $\Rightarrow$ cos180° = –1, sin180° = 0 dır.

B'(0, –1) = B'(cos270°, sin270°) $\Rightarrow$ cos270° = 0, sin270° = –1 dır.

θ	P	cosθ	sinθ
0°	(1, 0)	1	0
90°	(0, 1)	0	1
180°	(–1, 0)	–1	0
270°	(0, –1)	0	–1

Bir x gerçek sayısını cosx e dönüştüren fonksiyona, **kosinüs fonksiyonu** denir.

cos: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, f(x) = cosx biçiminde gösterilir.

$x \to \cos x$

Bir x gerçek sayısını sinx e dönüştüren fonksiyona, **sinüs fonksiyonu** denir.

sin: $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, f(x) = sinx biçiminde gösterilir.

$x \to \sin x$

Sonuçlar

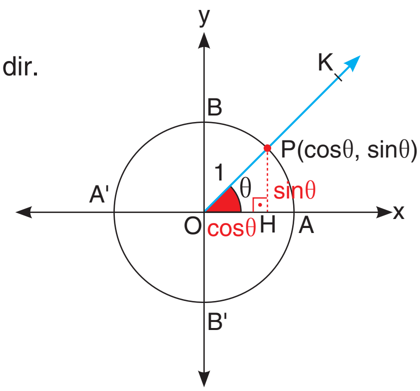
1. OHP dik üçgeninde; $|OH| = \cos\theta, |HP| = \sin\theta$ ve $|OP| = 1$ dir.

$|OP|^2 = |OH|^2 + |HP|^2$ (Pisagor teoremi)

$\boxed{1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta}$ elde edilir.

Buradan $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ dir.



2. $k \in \mathbb{Z}, \theta$ ve $\theta + k\,2\pi$ olan açıların birim çember üzerinde bitim kenarları aynıdır. O halde

$\cos(\theta + k \cdot 2\pi) = \cos\theta$

$\sin(\theta + k \cdot 2\pi) = \sin\theta$ dır.

3. p(x, y) birim çember üzerinde bir nokta ise $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ye $-1 \leqslant y \leqslant 1$ dir.

Buradan, $\forall\,\theta \in \mathbb{R}$ için $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ ve $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$ dir.

4. Kosinüs ve sinüs fonksiyonların tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir. Görüntü kümeleri [–1, 1] dir.

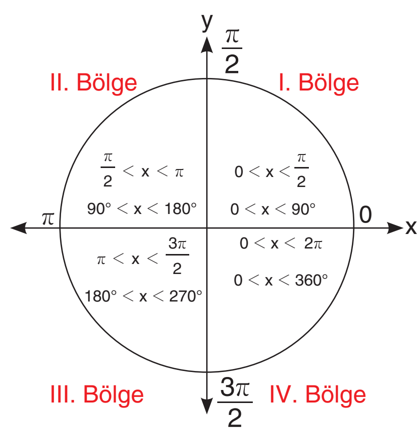
5. Analitik düzlemde, birim çemberdeki bölgelere göre sinüs ve kosinüs fonksiyonların işaretleri

I. Bölge: $\cos x > 0, \sin x > 0$

II. Bölge: $\cos x < 0, \sin x > 0$

III. Bölge: $\cos x < 0, \sin x < 0$

IV. Bölge: $\cos x > 0, \sin x < 0$



Örnek: Aşağıda verilen noktaların değerlerini bulalım.

a. A(cos 810°, sin810°)

b. B(cos(–720°), sin(–720°))

c. C(cos (–90°), sin(–90°))

d. D(cos(–3π), sin(–3π))

Çözüm

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\cos(\theta + k \cdot 2\pi) = \cos\theta$, $\sin(\theta + k \cdot 2\pi) = \sin\theta$ dır.

a. $\left.\begin{array}{l} \cos 810° = \cos(90° + 2 \cdot 360°) = \cos(90°) = 0 \\ \sin 810° = \sin(90° + 2 \cdot 360°) = \sin(90°) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 1)$ dir.

b. $\left.\begin{aligned}\cos(-720°) &= \cos(0+(-2)\cdot 360) = \cos 0 = 1\\ \sin(-720°) &= \sin(0+(-2)\cdot 360) = \sin 0 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow B(1,0)$ dır.

c. $\left.\begin{aligned}\cos(-90°) &= \cos(270+(-1)\cdot 360) = \cos 270 = 0\\ \sin(-90°) &= \sin(270+(-1)\cdot 360) = \sin 270 = -1\end{aligned}\right\} \Rightarrow C(0,-1)$dır.

ç. $\left.\begin{aligned}\cos(-3\pi) &= \cos(\pi+(-2)\cdot 2\pi) = \cos\pi = -1\\ \sin(-3\pi) &= \sin(\pi+(-2)\cdot 2\pi) = \sin\pi = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow D(-1,0)$ dır.

Örnek: cos98°, sin280°, cos300°, sin(–220°) ifadalerinin işaretlerini bulalım.

Çözüm

$90° < 98° < 180°$ II. bölgededir. Buradan cos98° pozitiftir.

$270° < 280° < 360°$ IV. bölgededir. Buradan sin280° negatiftir.

$270° < 300° < 360°$ IV. bölgededir. Buradan cos300° pozitiftir.

$-220° = 140° + (-1)\cdot 360$ ve $90° < 140° < 180°$ II. bölgededir. Buradan $\sin(-220°) = \sin 140°$ pozitiftir.

Örnek: $5\cdot \sin x = 2a - 1$ ve $b = 3\cdot\cos x - 1$ ise a + b nin alabileceği değer aralığını bulalım.

Çözüm

$5\sin x = 2a - 1 \Rightarrow \sin x = \dfrac{2a-1}{5}$ dir.

$b = 3\cdot\cos x - 1 \Rightarrow \cos x = \dfrac{b+1}{3}$ dir.

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
$\downarrow$

$-1 \leqslant \dfrac{2a-1}{5} \leqslant 1 \Rightarrow -1\cdot 5 \leqslant \dfrac{2a-1}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5} \leqslant 1\cdot 5$

$-5+1 \leqslant 2a-1+1 \leqslant 5+1$

$\dfrac{1}{2}(-4) \leqslant \dfrac{1}{2}2a \leqslant \dfrac{1}{2}6$

$-2 \leqslant a \leqslant 3$ olur.

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
$\downarrow$

$-1 \leqslant \dfrac{b+1}{2} \leqslant 1 \Rightarrow$

$-1\cdot 3 \leqslant \dfrac{b+1}{3}\cdot 3 \leqslant 1\cdot 3$

$-3-1 \leqslant b+1-1 \leqslant 3-1$

$-4 \leqslant b \leqslant 2$ olur.

$$\begin{array}{rl} & -2 \leqslant a \leqslant 3\\ + & -4 \leqslant b \leqslant 2\\ \hline & -6 \leqslant a+b \leqslant 5\end{array}$$ bulunur.

“Hiç kimse başarı merdivenine elleri cebinde tırmanmamıştır.”

J.Keth Moorhead

Örnek: $|1+\cos x|+|\cos x+\sin y-4|$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ olduğundan $1+\cos x \geqslant 0$, $|1+\cos x| = 1+\cos x$ olur.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için cosx + siny nin alabileceği en büyük değer 2 olduğundan $\cos x + \sin y - 4 < 0$,

$|\cos x+\sin y-4| = -(\cos x+\sin y-4)$ olur.

$$|1+\cos x| + |\cos x+\sin y-4| = 1+\cancel{\cos x}-\cancel{\cos x}-\sin y+4$$
$$= 5-\sin y \text{ bulunur.}$$

Örnek:

a. $a=\cos 10$, $b=\cos 35$, $c=\cos 80$

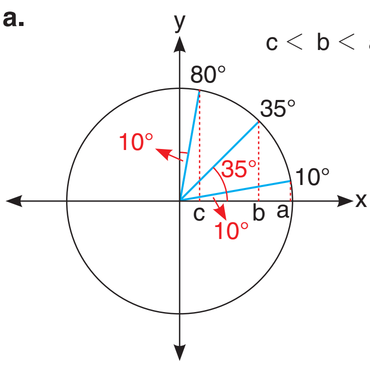
b. $x=\sin 10$, $y=\sin 35$, $z=\sin 80$

c. $k=\cos 94$, $l=\cos 170$, $m=\sin 140$, $n=\sin 200$

Yukarıda verilen trigonometrik değerleri küçükten büyüğe sıralayalım.

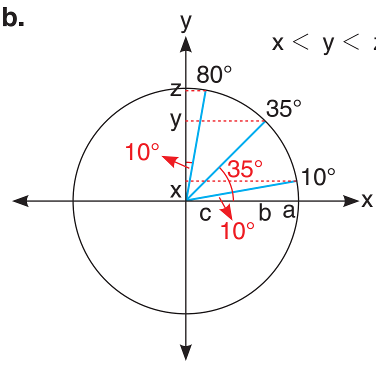
Çözüm

a.



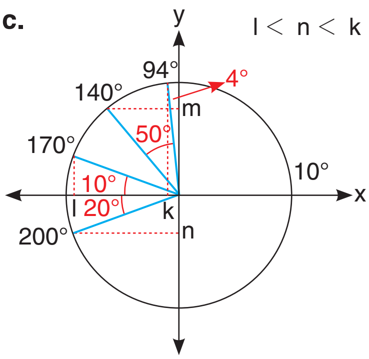
$c < b < a$ bulunur.

b.



$x < y < z$ bulunur.

c.



$l < n < k < m$ bulunur.

Analitik düzlemin I. bölgesinde açı değerleri arttıkça sinüs fonksiyonu artan değer, kosinüs fonksiyonu azalan değer alır.

Örnek: $f(x) = 3 - \cos^2 x$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

Çözüm

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow \quad 0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1 \text{ dir.}$$

$$0 \geqslant -\cos^2 x \geqslant -1$$

$$0 + 3 \geqslant -\cos^2 x + 3 \geqslant -1 + 3$$

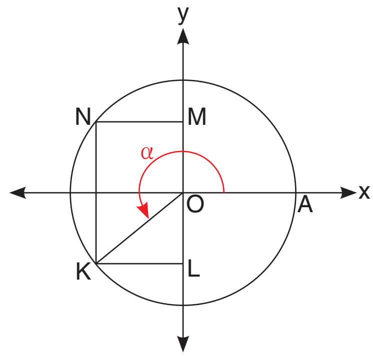
$$3 \geqslant \underbrace{3 - \cos^2 x}_{f(x)} \geqslant 2$$

Buradan görüntü kümesi [2, 3] bulunur.

Örnek: Birim çemberde

$|OM| = |OL|$ ve $m(\widehat{AOK}) = \alpha$ dır.

KLMN dikdörtgenin alanını α cinsinden bulalım.



Çözüm

K(cosα, sinα) (Kosinüs ve sinüs tanımı) K noktası III. bölgede olduğundan cosα < 0, sinα < 0 dır. Bu durumda

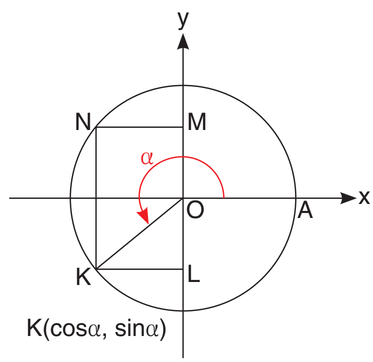
$|OL| = -\sin\alpha$

$|KL| = -\cos\alpha$ olur.

$|OM| = |OL|$ olduğundan

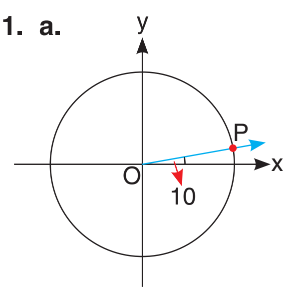
$|ML| = -2\sin\alpha$ dır.

$$A(KLMN) = |ML| \cdot |KL|$$
$$= (-2\sin\alpha)\cdot(-\cos\alpha)$$
$$= 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \text{ bulunur.}$$

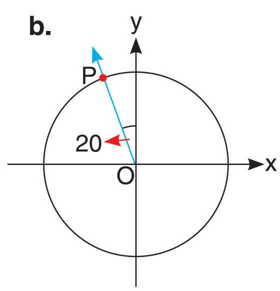


4.2. ALIŞTIRMALAR

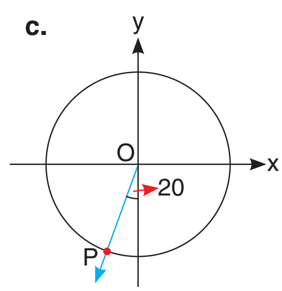
1. a.



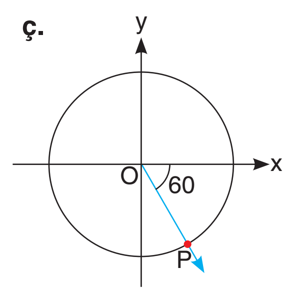
b.



c.



ç.



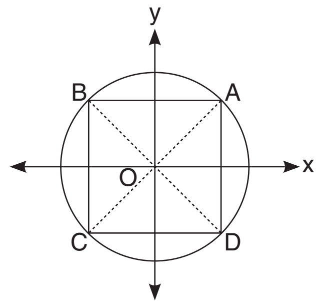
Yukarıda verilen birim çemberlerde P noktalarının koordinatlarını kosinüs ve sinüs cinsinden yazınız.

2. Ölçüleri 170°, 210°, 300° ve 540° olan açıların sinüs ve kosinüslerinin işaretlerini bulunuz.

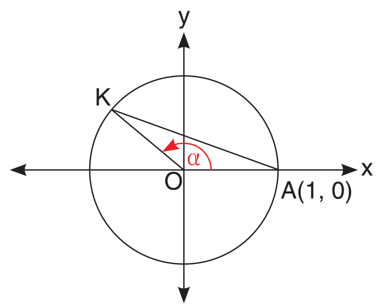
3. $f(x) = 3 - 2\sin x$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

4. $A = |2\sin x - 3| + |2\sin x + 3|$ A nın değerini bulunuz.

5. Birim çember içine çizilen ABCD karesinin koordinatlarını sinüs ve kosinüs cinsinden yazınız.



6. Birim çember üzerinde $m(\widehat{AOK}) = \alpha$ ise AOK üçgeninin alanını α cinsinden bulunuz.



7. Aşağıda verilen trigonometrik değerleri küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

a. $x = \sin 110$
$y = \sin 170$
$z = \sin 145$

b. $k = \cos 110$
$l = \cos 170$
$m = \cos 145$

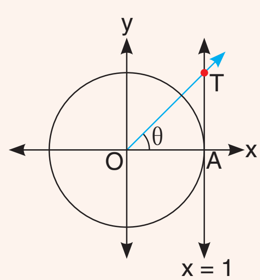
c. $n = \cos 80$
$o = \sin 80$
$p = \cos 220$
$r = \sin 250$

Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonları

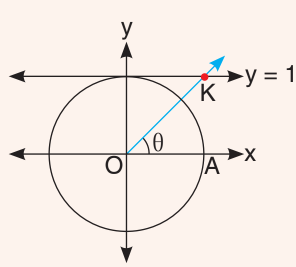
ETKİNLİK

Şekildeki birim çemberde $m(\widehat{AOT}) = \theta$ olmak üzere,

θ açısının bitim kenarının x = 1 doğrusunu kestiği nokta T noktası ise T noktasının koordinatlarını θ açısının trigonometrik oranları cinsinden yazınız.



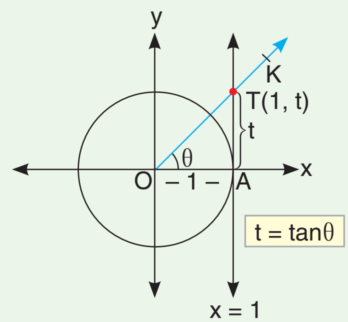
θ açısının bitim kenarı y = 1 doğrusunu K noktasında kesiyor ise K noktasının koordinatlarını θ açısının trigonometrik oranları cinsinden yazınız.



θ açısı değiştikçe K ve T noktaları için nasıl bir değişim söz konusu olur? Tartışınız.

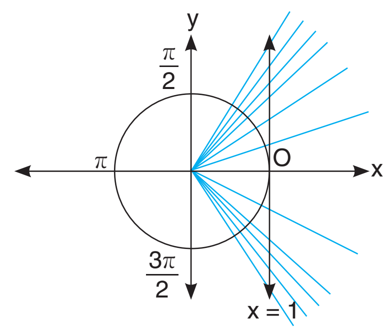
Birim çemberde θ açısının bitim kenarı [OK nın x = 1 doğrusunu kestiği noktanın ordinatına θ açısının **tanjantı** denir ve **tan**θ ile gösterilir.

x = 1 doğrusuna **tanjant ekseni** denir.



θ; $\frac{\pi}{2}$ veya $\frac{3\pi}{2}$ olduğunda, açının bitim kenarı x = 1 doğrusunu kesmediğinden tan $\frac{\pi}{2}$ ve tan $\frac{3\pi}{2}$ tanımsız olur.

θ; $\frac{\pi}{2}$ ye yaklaşırken tanθ artı sonsuza, $\frac{3\pi}{2}$ ye yaklaşırken tanθ eksi sonsuza doğru değer alır.

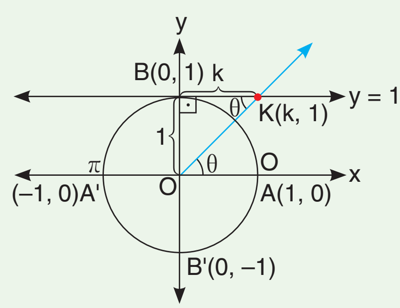


Tanım kümesi, $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ olan ve tanım kümesindeki her bir x gerçek sayısını tanx e eşleyen fonksiyona **tanjant fonksiyonu** denir ve **tan** ile gösterilir.

$$\tan\colon \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}, f(x)=\tan x$$
$$x\to\tan x$$

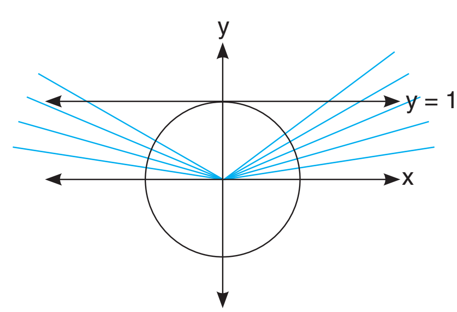
Birim çemberde θ açısının bitim kenarı [OK nın y = 1 doğrusunu kestiği noktanın apsisine θ açısının **kotanjantı** denir ve **cot**θ ile gösterilir.

y = 1 doğrusuna **kotanjant ekseni** denir.



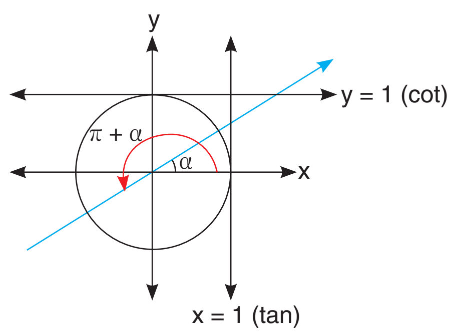
θ; 0 veya π olduğunda, açının bitim kenarı y = 1 doğrusu ile paralel olduğundan cot0 ve cotπ tanımsız olur.

θ; 0 a yaklaştıkça cotθ artı sonsuza, π ye yaklaşırken cotθ eksi sonsuza doğru değer alır.



Tanım kümesi, $\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ olan ve tanım kümesindeki her bir x elemanını cotx e dönüştüren fonksiyona **kotanjant fonksiyonu** denir ve **cot** ile gösterilir.

$$\cot: \mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\cot x$$
$$x\rightarrow\cot x$$

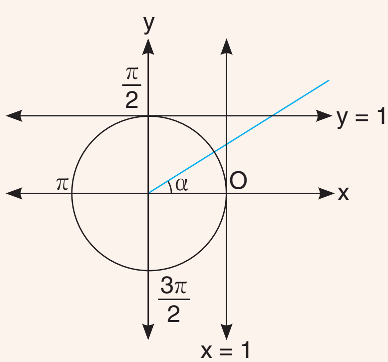


$k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere; α ve $\alpha+k\pi$ olan açıların

$\tan(\alpha+k\cdot\pi)=\tan\alpha$
$\cot(\alpha+k\cdot\pi)=\cot\alpha$ dir.

ETKİNLİK

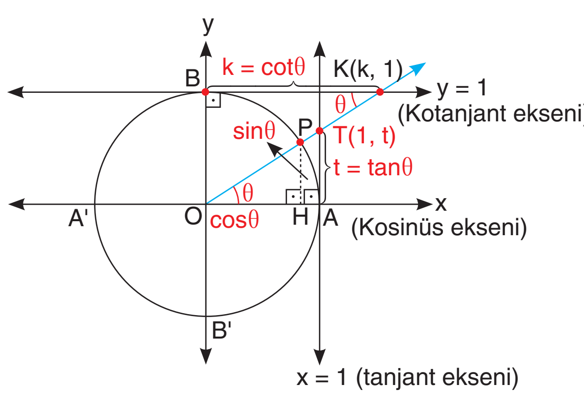
Aşağıda verilen tablodaki boşlukları doldurunuz.



θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\tan\theta$			0		tanımsız
$\cot\theta$	tanımsız				

sinx, cosx, tanx ve cotx Fonksiyonları Arasındaki İlişkiler

Şekildeki birim çemberde $m(\widehat{AOK})=\theta$ olmak üzere; $|OH|=\cos\theta$, $|HP|=\sin\theta$, $|AT|=\tan\theta$ ve $|BK|=\cot\theta$ dır.



1. $\widehat{OHP} \sim \widehat{OAT}$ (AA)

$$\frac{|OH|}{|OA|} = \frac{|HP|}{|AT|} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\tan\theta} \Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \; (\cos\theta \neq 0)$$

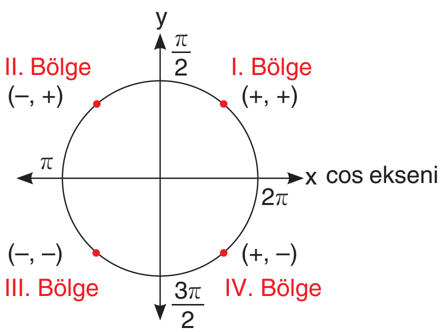
2. $\widehat{OBK} \sim \widehat{PHO}$ (AA)

$$\frac{|OB|}{|PH|} = \frac{|BK|}{|HO|} \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\cot\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \boxed{\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}} \; (\sin\theta \neq 0)$$

3. $\tan\theta \cdot \cot\theta = \frac{\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\cos\theta}} \cdot \frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\sin\theta}} = 1 \Rightarrow \boxed{\tan\theta \cdot \cot\theta = 1}$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}} \quad \boxed{\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}}$$

4. Aşağıdaki analitik düzlemdeki birim çemberin ayırdığı dört bölgeye göre trigonometrik fonksiyonların işaretleri tabloda verilmiştir.



	I. bölge	II. bölge	III. bölge	IV. bölge
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

Örnek: Aşağıdaki trigonometrik ifadelerin en sade şekillerini bulalım.

a. $\frac{\sin^2 x}{\cos x + 1}$ **b.** $(1+\tan^2 x)\cdot\cos^2 x$ **c.** $\tan x + \cot x$ **ç.** $\frac{1+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$

Çözüm

a. $\frac{\sin^2 x}{\cos x + 1} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x + 1} = \frac{(1-\cos x)\cancel{(1+\cos x)}}{\cancel{\cos x + 1}} = 1 - \cos x$

b. $(1+\tan^2 x)\cdot\cos^2 x = \left(1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\right)\cdot\cos^2 x = \left(\frac{1}{\underset{(\cos^2 x)}{1}} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cdot\cos^2 x$

$= \left(\frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x}\right)\cdot\cos^2 x$

$= \frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}\cdot\cancel{\cos^2 x} = 1$

c. $\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\underset{(\sin x)}{\cos x}} + \frac{\cos x}{\underset{(\cos x)}{\sin x}} = \frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}}{\sin x\cdot\cos x} = \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$

ç. $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}=\dfrac{\overbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}^{1}+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\underbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1}}=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^{\cancel{2}}}{(\cancel{\sin\alpha+\cos\alpha})(\sin\alpha-\cos\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

✔ **Örnek:** $x\in\mathbb{R}$ nın tanjant ve kotanjant değerlerinin toplamı $3\cdot\sqrt{3}$ ise tanjant ve kotanjant değerlerinin farkını bulalım.

Çözüm

tanx + cotx = $3\sqrt{3}$ (verilen) istenen tanx – cotx dir. tanx – cotx in değerine A dersek,

$$A=\tan x-\cot x\Rightarrow A^2=(\tan x-\cot x)^2=\tan^2x-\underbrace{2\tan x\cot x}_{1}+\cot^2x$$

$$=\tan^2x+\cot^2x-2\ \ (1)$$

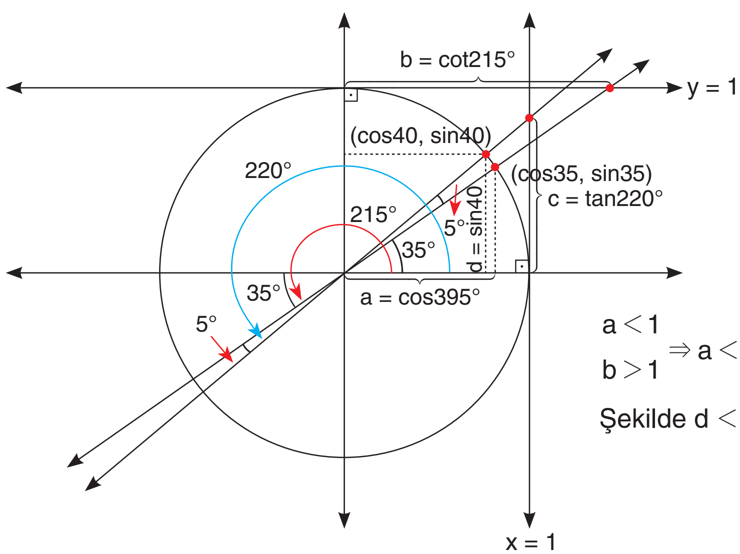
$$(\tan x+\cot x)^2=(3\sqrt{3})^2\Rightarrow\tan^2x+2\underbrace{\tan x\cot x}_{1}+\cot^2x=27$$

$$\tan^2x+\cot^2x=25\ \ (2)$$

(2) yi (1) de yazarsak $A^2=25-2$ den $A^2=23\Rightarrow\ A=\sqrt{23}$ bulunur.

✔ **Örnek:** a = cos 35°, b = cot 215°, c = tan 220°, d = sin40° a ile b ve c ile d arasındaki ilişkiyi bularak a, b, c, d yi küçükten büyüğe sıralayalım.

Çözüm



$\left.\begin{array}{l}a<1\\ b>1\end{array}\right\}\Rightarrow a<b$ dir.

Şekilde d < c dir.

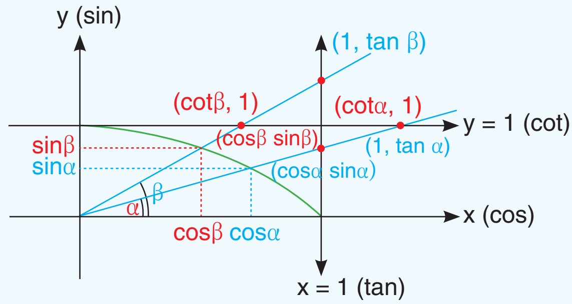
Trigonometrik cetvelden (veya hesap makinesinden) cos35 = 0,8192, sin40 = 0,6428, dir. Bu durumda d < a < c < b bulunur.

Analitik düzlemin I. bölgesinde açı değerleri arttıkça sinüs ve tanjant fonksiyonları artan değerler, kosinüs ve kotanjant fonksiyonları azalan değerler alır.

$\alpha < \beta$ iken

$\sin\alpha < \sin\beta$, $\tan\alpha < \tan\beta$

$\cos\alpha > \cos\beta$, $\cot\alpha > \cot\beta$



Örnek: $a = \cos80° - \sin80°$

$b = \tan185° - \cot35°$

$c = \dfrac{\cos2800°}{\sin(-40°)}$

a, b ve c nin işaretlerini bulalım.

Çözüm

$\cos80° < \sin80° \Rightarrow \cos80° - \sin80° < 0$

$\Rightarrow \boxed{a < 0}$ olur.

$\tan185° < \cot35° \Rightarrow \tan185° - \cot35° < 0$

$\Rightarrow \boxed{b < 0}$ olur.

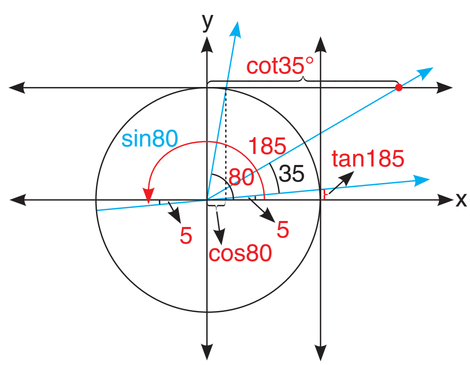
$2800° = 280° + 7 \cdot 360°$

$\cos2800° = \cos280°$ dir.

280°, IV. bölgede olduğundan cos 280° pozitiftir.

–40°, IV. bölgede olduğundan sin(–40°) negatiftir.

$c = \dfrac{\cos280°}{\sin(-40°)} < 0 \Rightarrow \boxed{c < 0}$ olur.

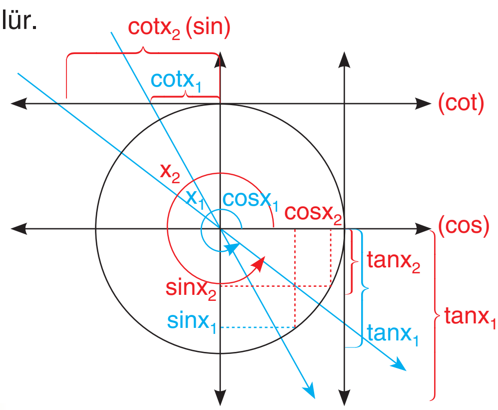


Örnek: $\dfrac{3\pi}{2} < x_1 < x_2 < 2\pi$ olmak üzere aşağıda verilen eşitsizliklerin doğruluğunu gösterelim.

$\sin x_1 < \sin x_2$ $\quad$ $\cos x_1 < \cos x_2$ $\quad$ $\tan x_1 < \tan x_2$ $\quad$ $\cot x_2 < \cot x_1$

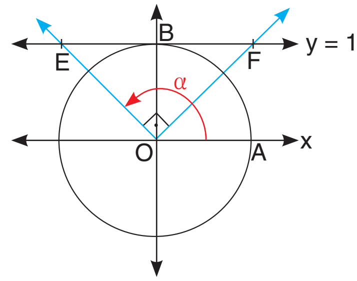
Çözüm

Yukarıdaki eşitsizliklerin doğruluğu yandaki grafikten görülür.



Örnek: Dik koordinat düzleminde O merkezli birim çember ile y = 1 doğrusu verilmiştir.

$[OE \perp [OF, |BF| = \frac{3}{2}$ ve $m(\widehat{AOE}) = \alpha$ ise cotα ve tanα değerlerini bulalım.



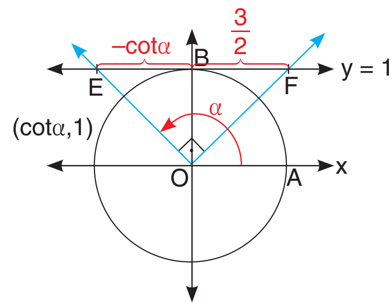
Çözüm

$|OB| = 1$ (Birim çember), E(cotα, 1) (Kotanjant tanımı)

EOF dik üçgeninde $|OB|^2 = |EB| \cdot |BF|$ (öklid)

$1 = |EB| \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow |EB| = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\cot\alpha = \frac{-2}{3}}$

$\Rightarrow \tan\alpha \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{-3}{2}}$ $\tan\alpha \cot\alpha = 1$ bulunur.



4.3. ALIŞTIRMALAR

1. a = tan40, b = cos130, c = cot40, d = sin250 a, b, c, d, yi küçükten büyüğe sıralayınız.

2. $x = \frac{\sin 1700°}{\cos 950°}$

$y = \sin 220° \cdot \cos 130°$

$z = \tan 220° \cdot \cot 285°$

x, y ve z nin işaretlerini bulunuz.

3. Aşağıdaki noktalı yerleri doldurunuz.

a. $\cos^2\theta + \sin^2\theta =$ ....

b. $|\cos\theta| = \sqrt{\text{...................}}$

c. $1 - \sin^2\theta =$ ....

ç. $\tan\theta \cdot \cot\theta =$ ....

d. $\frac{1}{\tan\theta} =$ ....

e. $\frac{1}{\cot\theta} =$ ....

f. $\tan 1200° \cdot \cot 1200° =$ ....

g. $\tan\theta = \frac{\text{............}}{\cos\theta}$

ğ. $\cot\theta = \frac{\text{............}}{\text{............}}$

h. $\sqrt{1 + 2\sin x \cdot \cos x} = |\text{....} + \text{....}|$

4. Aşağıdaki trigonometrik ifadelerin en sade şekillerini bulunuz.

a. $\frac{1 + \cot\theta}{1 + \tan\theta}$

b. $\frac{\cos^4\theta - \sin^4\theta}{2\sin\theta \cdot \cos\theta + 1}$

c. $\frac{\sin\theta - \sin^3\theta}{\cos^3\theta}$

5. $(\tan\theta - 2)\cdot(\cot\theta + 2) = 5$ ise $\tan^2\theta + \cot^2\theta$ nın değerini bulunuz.

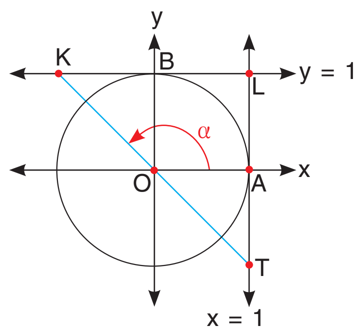
6. $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ise $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}} \cdot \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

7. $\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x - \cos x$ in eşitini bulunuz.

8. $\frac{4\cos^2 x + 3\sin^2 x - 4}{\sin^2 x} = -1$ olduğunu gösteriniz.

9. $\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} + \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

10. Şekilde K, y = 1; T, x = 1 doğrularını kesen noktalar ve L de x = 1 ile y = 1 doğrularının kesim noktası olmak üzere KLT üçgeninin alanını $M(\widehat{AOK}) = \alpha$ cinsinden bulunuz.



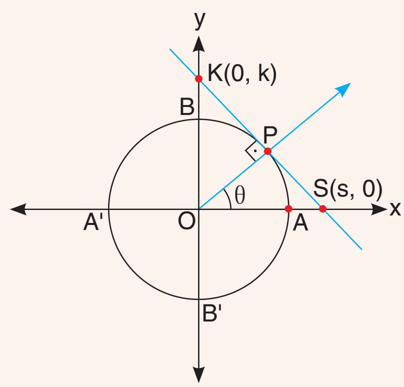
Sekant ve Kosekant Fonksiyonları

ETKİNLİK

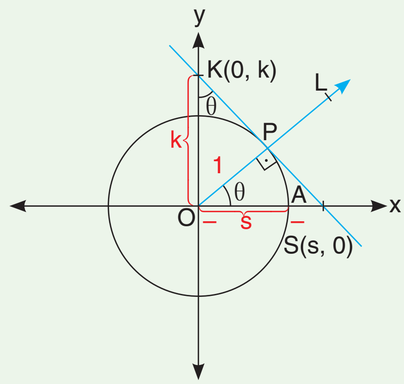
θ açısının bitim kenarının birim çemberi kestiği noktaya P ve P den çizilen teğetin x ve y eksenlerini kestiği noktalara da sırasıyla S ve K dersek;

i. S ve K noktalarının koordinatlarını θ açısının trigonometrik oranları cinsinden yazınız.

ii. θ açısı değiştikçe S ve K noktalarının koordinatları nasıl değiştiğini tartışınız.



Şekilde $m(\widehat{AOL}) = \theta$ nın bitim kenarının birim çember üzerinde kestiği nokta P, noktasından çizilen teğetin eksenleri kestiği noktalar S ve K dır.



S noktasının apsisine θ reel sayısının **sekantı** denir ve **sec**θ ile gösterilir. K noktasının ordinatına, θ reel sayısının **kosekantı** denir ve **csc**θ ile gösterilir.

OPS dik üçgeninde $\cos\theta = \frac{1}{s} \Rightarrow s = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \boxed{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}$

OPK dik üçgeninde $\sin\theta = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \boxed{\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}}$

0° ve 180° için kosekant, 90° ve 270° içinde sekant değerleri tanımsızdır.

$$\sec: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \quad \csc: \mathbb{R} - \left\{k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

$$x \to \sec x \qquad x \to \csc x$$

sekant ve kosekant fonksiyonlarının görüntü kümeleri R – (–1, 1) dir.

Örnek: $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

eşitliklerin doğruluğunu gösterelim.

Çözüm

$$1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \underset{(\cos^2\alpha)}{\frac{1}{1}} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\overbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}^{1}}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \sec^2\alpha$$

$$1 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = \underset{(\sin^2\alpha)}{\frac{1}{1}} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\overbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}^{1}}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 = \csc^2\alpha$$

Örnek: $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$A = \sqrt{1 - \sin\theta} \cdot \sqrt{1 + \sin\theta} + \sec\theta$ ise A nın değerini en sade şekilde bulalım.

Çözüm

$$A = \sqrt{\underbrace{(1 - \sin\theta)\cdot(1 + \sin\theta)}_{1\ -\ \sin\theta\ =\ \cos^2\theta}} + \sec\theta = \sqrt{\cos^2\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= |\cos\theta| + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \underset{(\cos\theta)}{\frac{-\cos\theta}{1}} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{-\cos^2\theta + 1}{\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \text{ bulunur.}$$

Örnek: Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazalım.

a. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}+\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ **b.** $\sec x-\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ **c.** $\sqrt{\sec^2 x-\tan^2 x}-\sqrt{\csc^2 x-\cot^2 x}$

Çözüm

a. $$\underset{(\cos x)}{\frac{\cos x}{1-\sin x}}+\underset{(1-\sin x)}{\frac{1-\sin x}{\cos x}}=\frac{\cos^2 x+(1-\sin x)^2}{\cos x(1-\sin x)}=\frac{\overbrace{\cos^2 x+1-2\sin x+\sin^2 x}^{1}}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$=\frac{2-2\sin x}{\cos x(1-\sin x)}=\frac{2(\cancel{1-\sin x})}{\cos x(\cancel{1-\sin x})}=2\sec x$$

b. $$\sec x-\frac{\cos x}{1-\sin x}=\underset{(1-\sin x)}{\frac{1}{\cos x}}-\underset{(\cos x)}{\frac{\cos x}{1-\sin x}}=\frac{\overbrace{1-\sin x-\cos^2 x}^{\sin^2 x}}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$=\frac{\sin^2 x-\sin x}{\cos x(1-\sin x)}=\frac{\sin x(\cancel{\sin x-1})}{\cos x(\cancel{1-\sin x})}=-\tan x$$

c. $$\sqrt{\sec^2 x-\tan^2 x}-\sqrt{\csc^2 x-\cot^2 x}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}-\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}$$

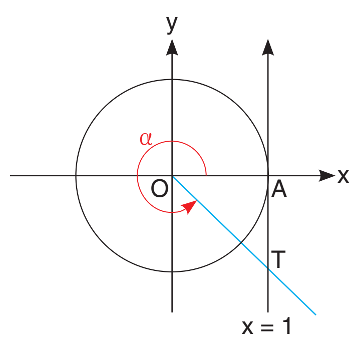
$$=\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}}-\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}-\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$=1-1=0$$

Örnek: Şekilde dik koordinat düzleminde O merkezli birim çember ile x = 1 doğrusu verilmiştir.

$m(\widehat{AOT})=\alpha$ ise $|OT|$ nu α cinsinden bulalım.



Çözüm

T(0, tanα) olduğundan $|AT|=-\tan\alpha$ olur. AOT dik üçgeninde

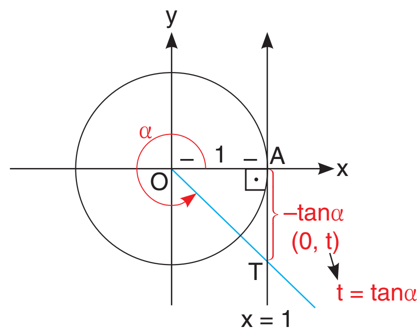
$1^2+(-\tan\alpha)^2=|OT|^2$ (Pisagor teoremi)

$\underbrace{1+\tan^2\alpha}_{\sec^2 x}=|OT|^2 \Rightarrow \sqrt{|OT|^2}=\sqrt{\sec^2\alpha}$

$|OT|=|\sec\alpha|$

IV. bölgede olduğundan $\cos\alpha>0$ dır.

Bu durumda $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}>0$ olur. $|OT|=\sec\alpha$ bulunur.



4.4. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki trigonometrik ifadeleri en sade şekilde yazınız.

a. $\dfrac{(1+\cot^2 x)}{\sec^2 x}$ **b.** $\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$ **c.** $\dfrac{1}{\cot^2 x}-\sec^2 x$ **ç.** $\dfrac{\cos x}{\sec x-\tan x}$

2. $x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\dfrac{\sqrt{1-\ \sin x}\ \sqrt{1+\sin x}}{\sec x}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

3. $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

$(\sqrt{1-2\sin x \cdot \cos x}) \cdot \sec x$ ifadesinin eşitini bulunuz.

4. $\dfrac{\pi}{2} < x < y < \pi$ olduğuna göre aşağıdaki eşitsizliklerin doğru ya da yanlış olduğunu belirtiniz.

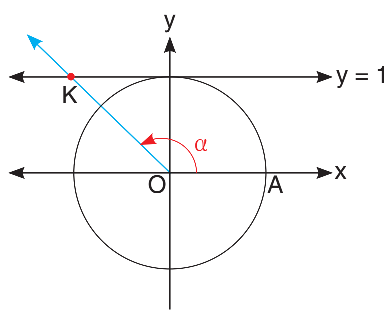
I. cscx < cscy

II. tanx < tany

III. secx < secy

IV. cotx < coty

5. Şekildeki dik koordinat düzleminde birim çember ve y = 1 doğrusu verilmiştir. $m(\widehat{AOK}) = \alpha$ olmak üzere $|OK| = \csc^2\alpha$ olduğunu gösteriniz.



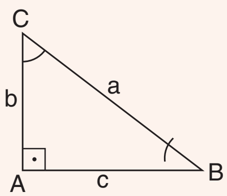
6. $\left.\begin{aligned} \sec x-\cos x &= a \\ \sec^2 x+\cos c^2 x &= b \\ \sin x \sec x \cdot \cos cx &= c \end{aligned}\right\}$ olmak üzere a, b ve c arasındaki ilişkiyi bulunuz.

7. $\sin x \cdot \sec x + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimini bulunuz.

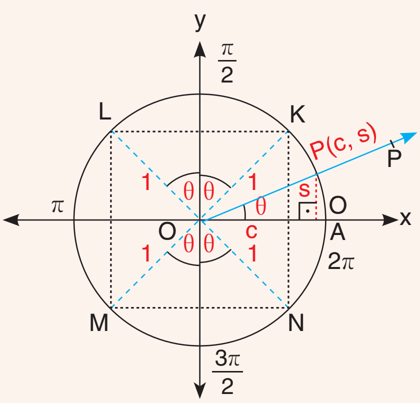
$\frac{k\pi}{2} \pm \theta \; (k \in \mathbb{Z})$ Sayılarının θ Dar Açısı Türünden Trigonometki Oranları

ETKİNLİK

9. sınıfta öğrendiğimiz dik üçgende dar açıların trigonometrik oranları ile ilgili özellikleri kullanarak aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.



$\sin\widehat{B} = \frac{b}{a}$	$\cos\widehat{C} =$
$\cos\widehat{B} =$	$\sin\widehat{C} =$
$\tan\widehat{B} =$	$\cot\widehat{C} =$
$\cot\widehat{B} =$	$\tan\widehat{C} = \frac{c}{b}$

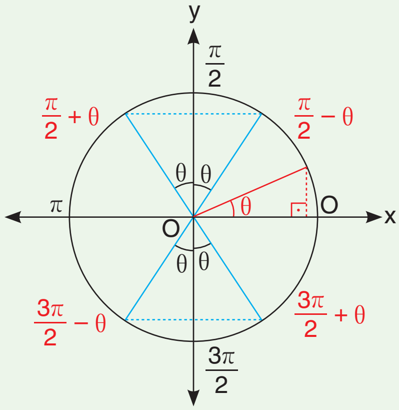


Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıdan birinin sinüsü ile diğerinin kosinüsü, birinin tanjantı ile diğerinin kotanjantı arasındaki ilişkiyi inceleyiniz. Ulaştığınız sonucu yazınız.

Şekildeki KLMN karesinin köşeleri birim çember üzerinde ve $m(\widehat{AOP}) = \theta$ açısının bitim kenarının birim çemberi kestiği nokta P(cosθ, sinθ) noktasıdır. Burada cosθ = c, sinθ = s ile göstererek eş üçgen yardımıyla aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Açı	Açının bitim kenarının birim çemberi kestiği nokta
θ	P(c, s)
$\frac{\pi}{2} - \theta$	K(,)
	L(–s, c)
	M(,)
$\frac{3\pi}{2} + \theta$	N(,)

$\frac{k\pi}{2} \pm \theta$ ifadesinde k = 1 için $\frac{\pi}{2} \pm \theta$, k = 3 için $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$ elde edilir. Buradan $\frac{\pi}{2} \pm \theta$ ve $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$ biçimindeki açıların θ dar açısı cinsinden eşitlikleri aşağıdaki gibi olur.



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=+\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=+\sin\theta$$

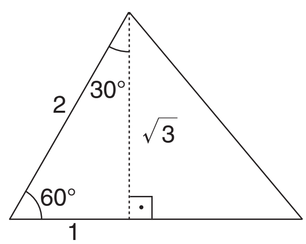
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=+\cot\theta \qquad \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=+\tan\theta \qquad \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

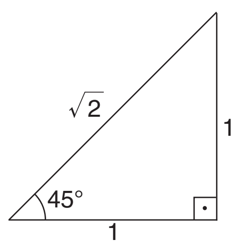
Yukarıdaki eşitliklerde; eşitliğin sol tarafında ölçüsü verilen açının bölgesi bulunup işareti belirledikten sonra sinüs kosinüse, tanjant da kotanjanta dönüşmektedir.

Özel Açılar

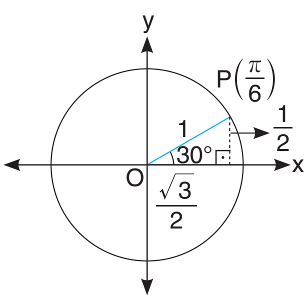
Aşağıdaki üçgenler 30°, 45° ve 60° nin trigonometrik oranlarını bulmak için kullanılır.

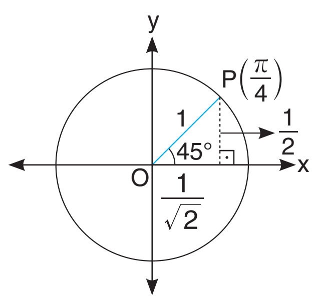


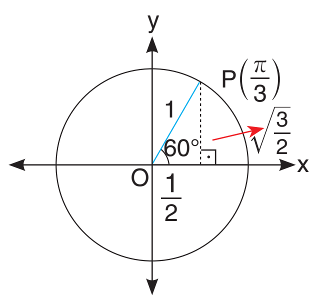
Eşkenar üçgen



İkizkenar dik üçgen







$$30° = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30° = \sqrt{3}$$

$$45° = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = 1$$

$$\cot 45° = 1$$

$$60° = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Aşağıdaki tabloda özel açıların trigonometrik oranları verilmiştir.

θ (Derece)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
θ (Radyan)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tanθ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tanımsız	0	Tanımsız	0
cotθ	Tanımsız	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Tanımsız	0	Tanımsız

Örnek: Aşağıda verilen trigonometrik fonksiyonların değerlerini bulalım.

a. sin300° **b.** $\cos\frac{5\pi}{4}$ **c.** $\tan\frac{5\pi}{6}$

Çözüm

a. 300°, IV. bölgededir.

IV. bölge

$$\sin 300° = \sin(270° + \theta)$$

$\theta = 30°$

$$= -\cos 30°$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

b. $\frac{5\pi}{4}$, III. bölgededir.

III. bölge

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$$= -\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

c. $\frac{5\pi}{6}$, II. bölgededir.

II. bölge

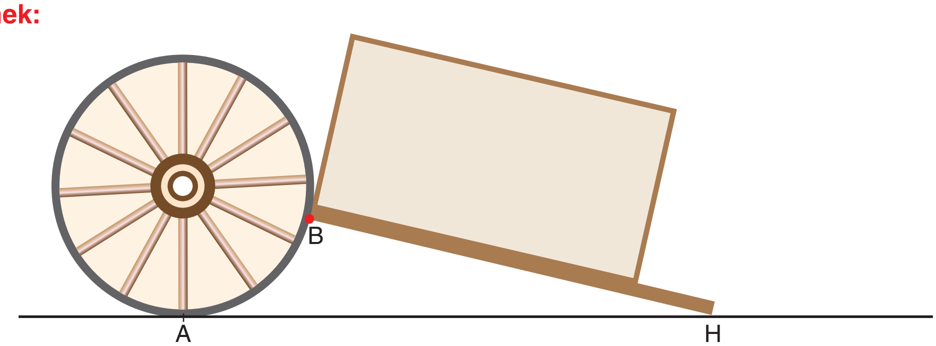
$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$$= -\cot\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Örnek:



Şekilde tekerleğin çapı 60 cm olan bir iş arabası görülmektedir. Tekerleğin üzerinde A ve B noktaları arasındaki yay uzunluğu $\frac{35\pi}{6}$ ve cot55° = b ise A ile H noktaları arasındaki mesafeyi b cinsinden bulalım.

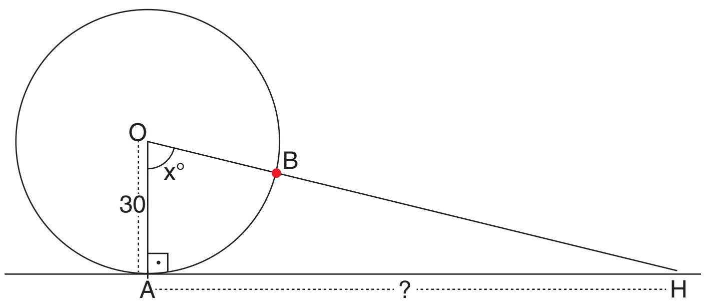
Çözüm

Çapı 60 cm ise yarıçapı r = 30 cm dir. Çevre $2\pi r = 60\pi$ dir.

$$\begin{array}{ll} 360^\circ & 60\pi \\ x^\circ & \dfrac{35\pi}{6} \\ \hline \end{array}$$

$$\cancel{60}\,\cancel{\pi}\cdot x^\circ = \cancel{360^\circ}^{6}\cdot\frac{35\cancel{\pi}}{\cancel{6}}$$

$x = 35^\circ$



$55^\circ + 35^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cot 55^\circ = \tan 35^\circ$

$b = \tan 35^\circ$ dir.

OAH dik üçgeninden

$$\tan 35^\circ = \frac{|AH|}{30} \Rightarrow |AH| = 30\cdot\underbrace{\tan 35^\circ}_{b}$$

$= 30b$ bulunur.

Örnek: $\overset{\frown}{ABC}$ de $\tan\left(\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)\cdot\tan\left(\dfrac{\hat{C}}{2}\right)$ nin değerini bulalım.

Çözüm

$\overset{\frown}{ABC}$ de $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^\circ$

$$\hat{A}+\hat{B} = 180 - \hat{C}$$

$$\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$$

Bulduğumuz eşitliğin her iki tarafın tanjantını alırsak

$$\tan\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \tan\left(\underbrace{90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}}_{\text{I. bölge}}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) = \cot\frac{\hat{C}}{2} \text{ olur.}$$

$$\tan\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\hat{C}}{2}\right) = \cot\frac{\hat{C}}{2}\cdot\tan\frac{\hat{C}}{2} = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek: $5x = \dfrac{\pi}{2}$ olduğuna göre,

$\dfrac{\cos 4x + \cos 3x}{\sin 2x + \sin x}$ ifadesinin değerini bulalım.

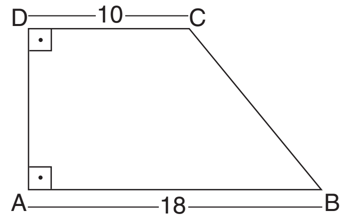
Çözüm

$4x + x = 5x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 4x = \sin x$ olur.

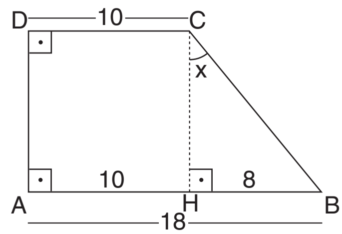
$3x + 2x = 5x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 3x = \sin 2x$ olur.

$$\frac{\cos 4x + \cos 3x}{\sin 2x + \sin x} = \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 2x + \sin x} = 1 \text{ bulunur.}$$

Örnek: ABCD dik yamuğunda $|AB| = 18$, $|CD| = 10$ ve ABCD dik yamuğun alanı 84 br^2 dir. Buna göre $\cot\widehat{C}$ nın değerini bulalım.



Çözüm



$$A(ABCD) = \frac{(|AB| + |CD|)}{2} \cdot |AD|$$

$$84 = \frac{(18+10)\cdot|AD|}{2} \Rightarrow |AD| = 6$$

$|CH| = |AD| = 6$ olur.

CHB dik üçgeninde

$m(\widehat{BCH}) = x$ dersek;

$$\left.\begin{array}{l} \cot\widehat{C} = \cot\underbrace{(90° + x)}_{\text{II. bölge}} = -\tan x \\ \tan x = \dfrac{|BH|}{|HC|} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \cot\widehat{C} = \frac{-4}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek: tan91 + tan92 + ... + tan180 + ... + tan269 işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

tan(90 + 1) + tan(90 + 2) + ... + tan(90 + 89) + tan180 + tan(270 – 89) + ... + tan(270 – 1)
= –cot1 – cot2 – ... – cot89 + 0 + cot89 + ... + cot1 = 0 bulunur.

4.5 ALIŞTIRMALAR

1. sin10° = b ise cos100° – sin260° nin değerini b cinsinden bulunuz.

2. $\cos^2 110° + \cos^2 20° - \tan 280° \cdot \cot 100°$ nin değerini bulunuz.

3. $\widehat{ABC}$ de $\cos\left(\dfrac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\widehat{C}}{2}\right)$ değerini bulunuz.

4. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\tan x = \dfrac{24}{7}$ ise

a. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$ **b.** $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ **c.** $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$ **ç.** $\cot\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$

5. Aşağıda verilen eşitliklerden doğru ve yanlış olanları belirtip yanlış olanları doğru değerlerini yazınız.

a. $\cos 150° = \cos(90° + 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

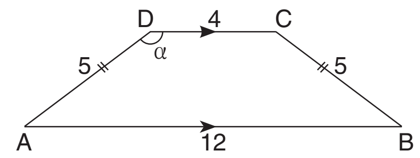
b. tan225° = tan(270 – 45°) = –cot45° = –1

c. $\sin 315° = \sin(270 + 45°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ç. $\cot 120° = \cot(90° + 30°) = -\tan 30° = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

6. $[AB] /\!/ [DC]$

ABCD ikizkenar yamuğunda $|AB| = 12$, $|DC| = 4$ ve $|BC| = 5$ dir. $m(\widehat{ADC}) = \alpha$ ise $\tan\alpha$ yı bulunuz.



7. $7x = \dfrac{3\pi}{2}$ olduğuna göre,

$\dfrac{2 \cdot \sin 5x + \cos x}{\sin 6x + 2\cos 2x}$ ifadesinin değerini bulunuz.

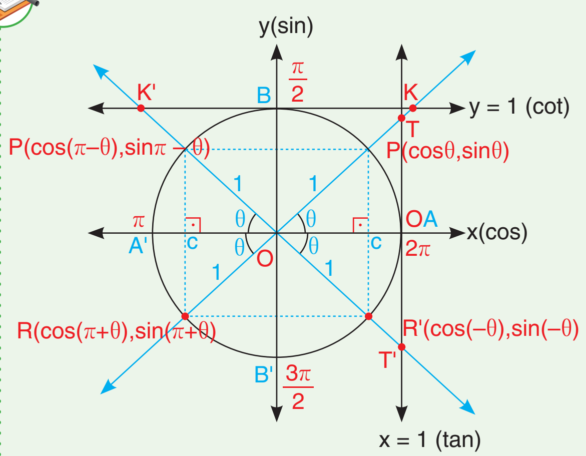
8. Bir ABC üçgeninde $M(\widehat{A}) = 90°$ ise

a. cos(B + 2C) **b.** sin(B + 2C) **c.** tan(B + 2C) **ç.** cot(B + 2C)

eşitlerini bulunuz.

$\dfrac{k\pi}{2} \pm \theta$ ifadesinde k = 2 yazılırsa $\pi \pm \theta$; k = 4 yazılırsa $2\pi \pm \theta$ elde edilir.

Buradan $\pi \pm \theta$, $2\pi \pm \theta$ biçimindeki açıların dar açısı cinsinden eşitleri aşağıdaki gibi olur.



Şekilde açısının bitim kenarının birim çemberi kestiği nokta p(cosθ, sinθ) dır.

P noktasının y eksenine göre simetriği P' noktasıdır. Buna göre

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$

P noktasının orijine göre simetriği R noktasıdır. Buna göre

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$

$\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$

P noktasının x eksenine göre simetriği R' noktasıdır. Burada $2\pi - \theta$ ve $-\theta$ aynı noktayı gösterir. Bu durumda

$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$

$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$

$\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$

$\cot(2\pi - \theta) = -\cot\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

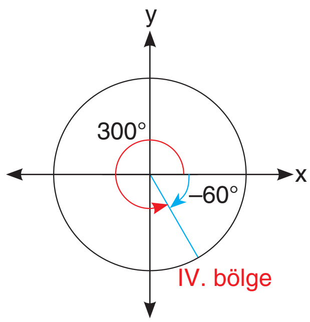
$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

Örnek: $\cot 1740° + \sin\dfrac{29\pi}{4}$ toplamının sonucunu bulalım.

Çözüm



$$\cot 1740° = \cot[300° + 4\cdot 360°] = \cot 300° = \underset{\text{IV. bölge}}{\cot(-60)} = -\cot 60° = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\frac{29\pi}{4} = \sin\left[\frac{5\pi}{4} + 3\cdot 2\pi\right] = \sin\frac{5\pi}{4} = \underset{\text{III. bölge}}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot 1740° + \sin\frac{29\pi}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6} \text{ bulunur.}$$

Örnek: $\dfrac{\cos(\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha)}{\cos(-\alpha) + \sin(\pi - \alpha)}$ ifadesinin eşitini bulalım.

Çözüm

$$\frac{\overset{\text{II. bölge}}{\cos(\pi - \alpha)} + \overset{\text{III. bölge}}{\sin(\pi + \alpha)}}{\underset{\text{IV. bölge}}{\cos(-\alpha)} + \underset{\text{II. bölge}}{\sin(\pi - \alpha)}} = \frac{-\cos\alpha - \sin\alpha}{+\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{-(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha + \sin\alpha} = -1$$

(Önce bölgeye göre işaret belirlenir, sonra isim değiştirmeden dar açı şeklinde yazılır.)

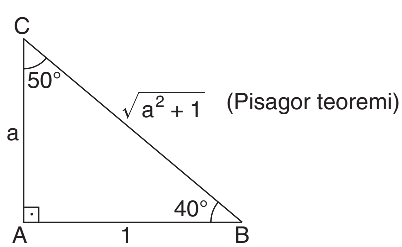
Örnek: tan40° = a ise cos220° nin a cinsinden eşitini bulalım.

Çözüm

220°, III. bölgededir. $220° = 180° + \theta \Rightarrow \theta = 40°$ dir.

$$\cos 220° = \cos\overbrace{(180° + 40°)}^{\text{III. bölge}} = -\cos 40°$$

tan40° = a ise



$$\overset{\frown}{ABC} \text{ de } \cos 40° = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\cos 220° = -\cos 40° = -\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \text{ bulunur.}$$

Örnek: $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+\cot(3\pi-\theta)$ ifadesinin eşitini bulalım.

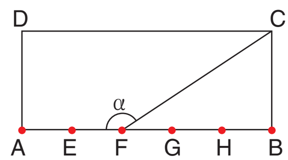
Çözüm

$$\tan\underbrace{\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}_{\text{III. bölge}}=+\cot\theta$$

$$\cot(3\pi-\theta)=\cot[2\pi+(\pi-\theta)]=\cot\underbrace{(\pi-\theta)}_{\text{II. bölge}}=-\cot\theta$$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+\cot(3\pi-\theta)=\cot\theta+(-\cot\theta)=0$ bulunur.

Örnek: ABCD dikdörtgeninde $2|AB|=5|BC|$ ve $|AE|=|EF|=|FG|=|GH|=|HB|$ dir. $m(\widehat{AFC})=\alpha$ ise $\tan\alpha$ yı bulalım.

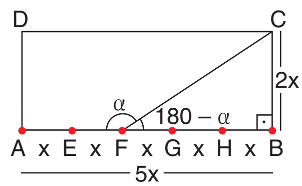


Çözüm

$$2\underbrace{|AB|}_{5x}=5\underbrace{|BC|}_{2x}$$

BCF dik üçgeninde $\tan\underbrace{(180-\alpha)}_{\text{II. bölge}}=\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}$

$$-\tan\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{2}{3}\text{ bulunur.}$$



Örnek: $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ olmak üzere, $\frac{\cos\theta+2\sin\theta}{3\cos\theta-\sin\theta}=\frac{1}{2}$ ise $\sec(\pi+\theta)$ nın değerini bulalım.

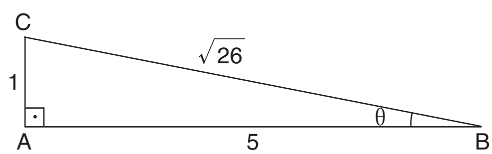
Çözüm

$\frac{\cos\theta+2\sin\theta}{3\cos\theta-\sin\theta}=\frac{1}{2}$ ise $2\cos\theta+4\sin\theta=3\cos\theta-\sin\theta$

$$5\sin\theta=\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{5}$$

$\tan\theta=\frac{1}{5}$ bulunur.



ABC dik üçgeninden $\cos\theta=\frac{-5}{\sqrt{26}}$ bulunur. $\left(\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}\right.$ olduğundan $\cos\theta<0$ tir.$)$

$\sec(\pi+\theta)=\frac{1}{\underbrace{\cos(\pi+\theta)}_{\text{III. bölge}}}=\frac{1}{-\cos\theta}=\frac{1}{-\left(\frac{-5}{\sqrt{26}}\right)}=\frac{\sqrt{26}}{5}$ bulunur.

Örnek: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ve cosx = –a olmak üzere,

$\tan(-17\pi - x) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ ifadesinin değerini a cinsinden bulalım.

Çözüm

$$\underset{\text{IV. bölge}}{\underset{\downarrow}{\tan(-(17\pi + x))}} = -\tan(17\pi + x) = -\tan(8 \cdot 2\pi + \pi + x)$$

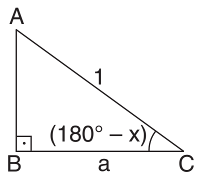
$$= -\underbrace{\tan(\pi + x)}_{\text{III. bölge}} = -(+\tan x) = -\tan x$$

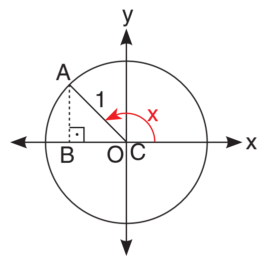
$$\underset{\text{IV. bölge}}{\underset{\downarrow}{\cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}} = -\tan x$$

$$\tan(-17\pi - x) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\tan x - \tan x = -2\tan x$$

$\cos x = -a \Rightarrow$

$\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0 \text{ dir.}\right)$





ABC dik üçgeninde $m(\widehat{ACB}) = 180° - x$ $|BC| = a$, $|AC| = 1$ pisagor teoreminden $|AB| = \sqrt{1 - a^2}$ olur.

$$\tan(180° - x) = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \Rightarrow -\tan x = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \Rightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

Bulduğumuz tanx değerini yerine yazarsak

$$\tan(-17\pi - x) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{1-a^2}}{a}\right) = 2\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \text{ bulunur.}$$

4.6 ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki boşlukları örneğe uygun biçimde doldurunuz.

Derece/Radyan	Açının Bölgesi	Dar Açısı	Sinüs Değeri	Kosinüs Değeri	Tanjant Değeri	Kotanjant Değeri
$\frac{5\pi}{6}$						
240°						
$\frac{7\pi}{4}$	4. bölge	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	–1
330°						

2. Bir $\widehat{ABC}$de aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\cos(\widehat{A} + \widehat{B}) = -\cos\widehat{C}$

b. $\tan(\widehat{A} + \widehat{B}) = -\tan\widehat{C}$

c. $\sin(\widehat{A} + \widehat{B}) = \sin\widehat{C}$

ç. $\cot(\widehat{A} + \widehat{B}) = -\cot\widehat{C}$

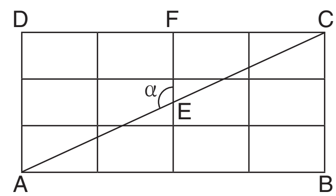
3. $17x = \pi$ olmak üzere, $\dfrac{\cot 5x}{\cot 12x} - \sin 10x + \sin 7x$ ifadesinin eşitini bulunuz.

4. sin20° = k ise sin200° · tan340° nin k cinsinden değerini bulunuz.

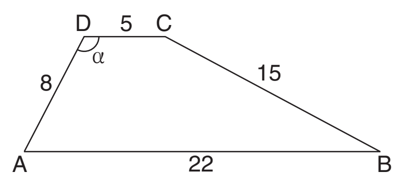
5. $\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ve $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ olmak üzere

a. $\sin(\pi + \theta)$ **b.** $\tan(-\theta)$ **c.** $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \theta\right)$ **ç.** $\cot\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right)$

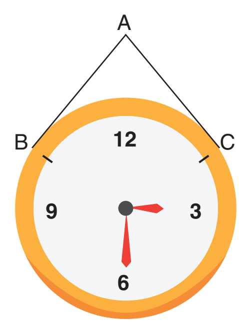
6. Yandaki şekil 12 eş kareden oluşmaktadır. $\tan(\widehat{AEF}) = \tan\alpha$ nın değerini bulunuz.



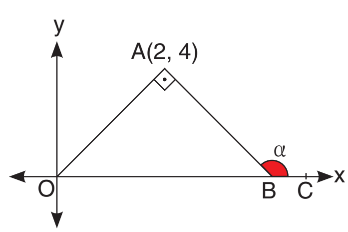
7. $[AB] \parallel [CD]$ ABCD yamuğunda $m(\widehat{ADC}) = \alpha$, $|AB| = 22$ br, $|BC| = 15$ br, $|CD| = 5$ br ve $|DA| = 8$ br ise cosα nın değerini bulunuz.



8. Çapı 20 cm olan dairesel bir saat B ve C noktalarından saate teğet olacak şekilde A noktasından bir çiviye asılmıştır. B ve C noktaları arasındaki yay uzunluğu $\dfrac{20\pi}{6}$ cm ise ipin uzunluğunu bulunuz.



9. Yandaki koordinat düzleminde OAB dik üçgen ve A noktasının koordinatları A(2, 4)dir. $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ ise cotα nın değerini bulunuz.



10. $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, tanx = –b olmak üzere

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(-21\pi + x)$ ifadesinin değerini b cinsinden bulunuz.

Periyodik Fonksiyonlar ve Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Bir hareket, birbirinin aynı olan ve eşit zamanlarda yapılan başka hareketlerden oluştuğunda hareketlerin her biri veya bunların yapılması için geçen her zaman aralığına **periyod** denir.

Örneğin Şubat ayının 4 yılda bir 29 gün çekmesindeki periyod, tekrarlayan zaman aralığı, 4 yıldır.

ETKİNLİK

Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π
$\sin\theta$	0				0				0		
$\cos\theta$	1				1				1		

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$
$\tan\theta$	0				0				0			
$\cot\theta$	tanımsız				tanımsız				tanımsız			

Kosinüs, sinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarında tekrarlayan belirli bir aralık (periyod) var mıdır?

$f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunda, $\forall x \in A$ için

$$f(x + T) = f(x)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir T gerçek sayısı varsa f ye **periyodik fonksiyon**, T nin en küçük pozitif değerine bu fonksiyonun **periyodu** denir.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $\quad \sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$

$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$

olduğundan **sinüs** ve **kosinüs** fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır ve periyodları k = 1 için **T = 2π** dir.

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ için $\tan(x + k \cdot \pi) = \tan x$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ için $\cot(x + k \cdot \pi) = \cot x$

olduğundan **tanjant** ve **kotanjant** fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır ve periyodları k = 1 için $T = \pi$ dir.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \neq 0$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$x \to f(x) = c \cdot \sin(ax + b)$$

f fonksiyonunun periyodunu bulalım.

Çözüm

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x + T) = f(x)$ olacak şekilde T pozitif gerçek sayısı olmalıdır.

$$f(x) = c \cdot \sin(ax + b)$$

$$f(x + T) = c \cdot \sin(a(x + T) + b)$$

$$f(x) = f(x + T) \Rightarrow \cancel{c} \sin(ax + b) = \cancel{c} \sin(a(x + T) + b)$$

$$\sin(ax + b) = \sin(ax + aT + b)$$

$$ax + b + k2\pi = ax + aT + b \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$k \cdot 2\pi = a \cdot T$$

$$\frac{k \cdot 2\pi}{a} = T$$

Burada $k \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ olduğundan $T = \dfrac{k \cdot 2\pi}{a} \in \mathbb{R}$ dır.

$f(x) = c \cdot \sin(ax + b)$ nin periyodu $k = 1$ için $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$ bulunur.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	4π
sinx	0	1 2π	0	–1	0	1 2π	0	–1	0
$\sin^2 x$	0 π	1	0 π	1	0 π	1	0 π	1	0

Tablodan da görüleceği gibi sinx in periyodu 2π iken $\sin^2 x$ in periyodu π dir. O halde kuvvetin çift veya tek olmasına göre periyod değişir.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
tanx	0	1 π	tanımsız	–1	0	1 π	tanımsız	–1	0
$\tan x^2$	0	1 π	tanımsız	1	0	1 π	tanımsız	1	0

tanx ve $\tan^2 x$ fonksiyonlarının periyotları π dir. Tanjant fonksiyonunda kuvvetin çift veya tek olması periyodu değiştirmemektedir.

$a, b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$f(x) = \sin^m(ax + b)$ ve $g(x) = \cos^m(ax + b)$ fonksiyonlarının periyodu

$$T = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{|a|}, & m \text{ tek ise} \\[2mm] \dfrac{\pi}{|a|}, & m \text{ çift ise} \end{cases}$$

$f(x) = \tan^m(ax + b)$ ve $g(x) = \cot^m(ax + b)$ fonksiyonlarının periyodu

$T = \dfrac{\pi}{|a|}$ dır.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulalım.

a. $f(x) = -4\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

b. $g(x) = 3 + 2\cos^2\left(\dfrac{5x + \pi}{2}\right)$

c. $h(x) = \tan^4(20° - x)$

ç. $k(x) = \cot^3\left(\dfrac{3x + \frac{\pi}{4}}{5}\right)$

Çözüm

a. $m = 1$ ve $a = 2 \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{|a|} = 2\dfrac{\pi}{2} = \pi$

b. $m = 2$ ve $a = \dfrac{5}{2} \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{|a|} = \dfrac{\pi}{\frac{5}{2}} = \dfrac{2\pi}{5}$

c. $m = 4$ ve $a = -1 \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{|a|} = \dfrac{\pi}{|-1|} = \pi$

ç. $m = 3$ ve $a = \dfrac{3}{5} \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{|a|} = \dfrac{\pi}{\frac{3}{5}} = \dfrac{5\pi}{3}$

Toplam veya fark durumundaki trigonometrik fonksiyonların periyodları ayrı ayrı bulunup, bu periyodların EKOK'u alınarak fonksiyonun periyodu bulunur.

Örnek: $f(x) = -\tan^2(3x + 10°) + \sin^5\left(\dfrac{1}{2}x + 30°\right)$ fonksiyonun periyodunu bulalım.

Çözüm

$$\underset{\text{periyoduna } T}{f(x)} = \underbrace{-\tan^2(3x + 10°)}_{\text{periyoduna } T_1} + \underbrace{\sin^5\left(\frac{1}{2}x + 30°\right)}_{\text{periyoduna } T_2}$$

$T = (T_1, T_2)_{EKOK}$

$m = 2$ ve $a = 3 \Rightarrow T_1 = \dfrac{\pi}{|a|} = \dfrac{\pi}{3}$

$m = 5$ ve $a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow T_2 = \dfrac{2\pi}{|a|} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

$T = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{1}\right)_{EKOK} = \dfrac{(\pi, 4\pi)_{EKOK}}{(3, 1)_{EBOB}} = \dfrac{4\pi}{1} = 4\pi$ bulunur.

$\left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}\right)_{EKOK} = \dfrac{(a, c)_{EKOK}}{(b, d)_{EBOB}}$ dir.

4.7. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

a. $f(x) = -\cos(1° - x)$

b. $f(x) = -\sin^2\left(-\dfrac{1}{2}x + 10°\right)$

c. $f(x) = -\tan^5(-5x + 5°)$

ç. $f(x) = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

d. $f(x) = \sin^2\left(-\dfrac{1}{2}x + 30°\right) + \cos^4(5x + 40°)$

Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri çizilirken:

i) Periyod bulunur.

ii) Bulunan periyoda uygun bir aralık seçilir.

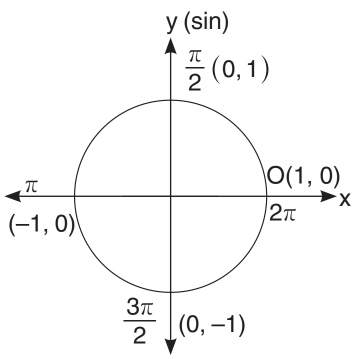
iii) Seçilen aralıkta fonksiyonun değişimi incelenir. Bunun için fonksiyonun bazı özel noktalarda $\left(0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \ldots\right)$ aldığı değerler bulunur. Bu değerlere göre fonksiyonun arttığı ve azaldığı aralıklar belirlenir.

iv) Bir periyod aralığında grafik çizilir. Periyod uzunluğundaki aralıklarda çizim tekrarlanır.

a. Sinüs Fonksiyonunun Grafiği

Sinüs fonksiyonunun grafiği $\{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanlarını analitik düzlemde karşılık gelen noktalar kümesidir.

y = sinx fonksiyonunun periyodu T = 2π dir. 2π uzunluğundaki bir aralıkta çizim yapmak yeterlidir. Çizimi [0, 2π] aralığında yapalım.

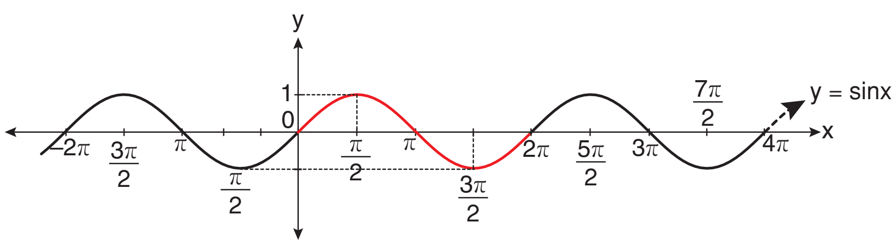


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y = sinx	0	1	0	–1	0

I. bölgede artan fonksiyon

II. ve III. bölgede azalan fonksiyon

IV. bölgede artan fonksiyon



[0, 2π] aralığındaki eğrinin aynısını [–2π, 0], [2π, 4π] ... aralıklarında tekrar edilir.

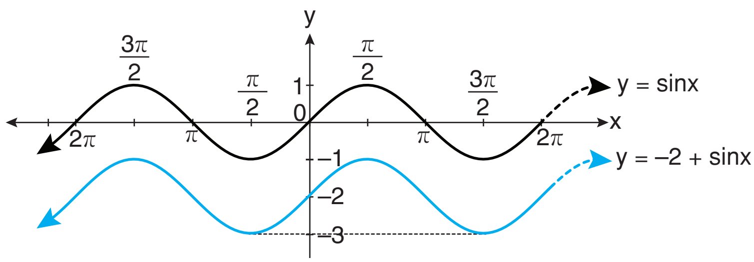
$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ f fonksiyonu tek fonksiyondur. Grafiğide orjine göre simetriktir.

Burada $\sin(-x) = -\sin x$ ve grafiği orjine göre simetrik olduğundan sinüs fonksiyonu tek fonksiyondur.

Örnek: $y = -2 + \sin x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

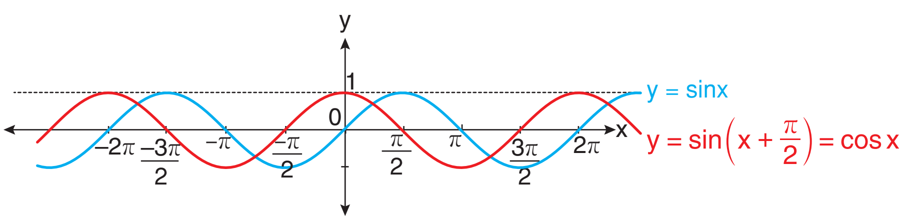
$y = \sin x$ fonksiyonunun y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim ötelenmiş hali olacaktır.



Örnek: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ dir. O halde kosinüs fonksiyonunun grafiği, sinüs fonksiyonunun grafiğinin $\frac{\pi}{2}$ sola kaydırılmış şekli olacaktır.

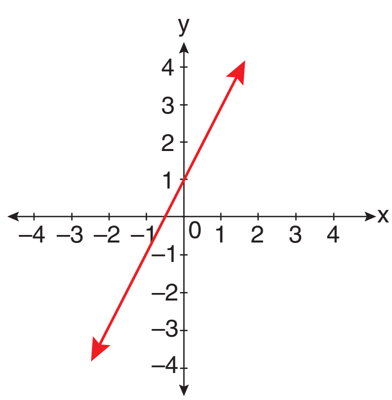


Örnek: $y = 3\sin 2x + 1$ fonksiyonunun grafiğini bir periyod uzunluğunda çizelim.

Çözüm

Periyod: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ dir. O halde $[0, \pi]$ aralığında çizelim.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
sin2x	0	1	0	–1	0
y = 3sin2x + 1	1	4	1	–2	1



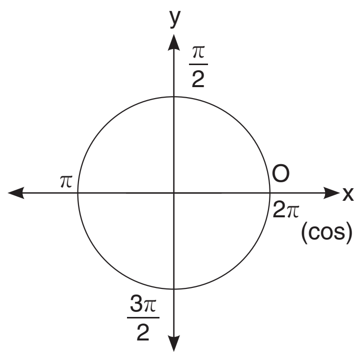
b. Kosinüs Fonksiyonun Grafiği;

$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

$x \to f(x) = \cos x$

Kosinüs fonksiyonunun grafiği $\{(x, \cos x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ sıralı ikililerinin analitik düzlemde karşılık gelen noktalar kümesidir.

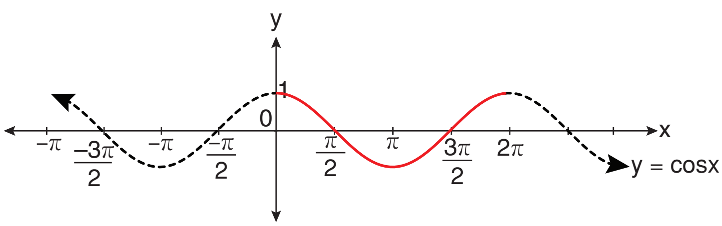
y = cosx fonksiyonunun periyodu T = 2π dir.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y = cosx	1 →	0 →	–1 →	0 →	1

I ve II. bölgede azalıyor.

III ve IV. bölgede artıyor.



f: A → $\mathbb{R}$ $\forall$ x $\in$ A için

f(–x) = f(x) ise f çift fonksiyondur. Çift fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetriktir.

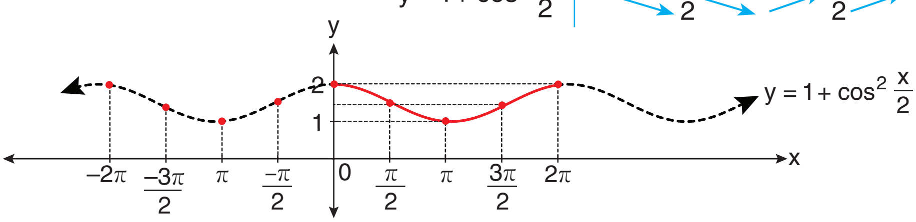
Burada da cos(–x) = cosx ve grafiği y eksenine göre simetrik olduğundan y = cosx fonksiyonu çift fonksiyondur.

Örnek: $f(x) = 1 + \cos^2 \frac{x}{2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$f(x) = 1 + \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$dir.

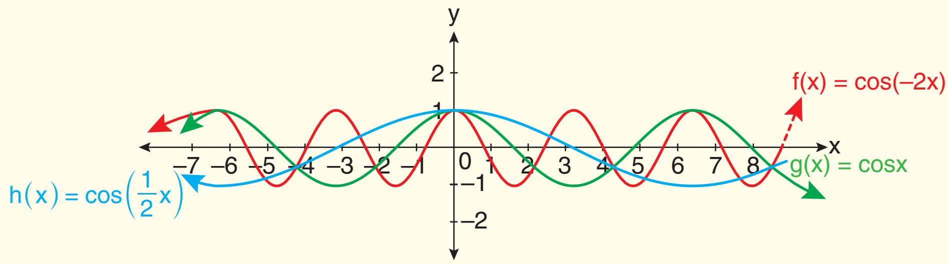
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos\frac{x}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1
$\cos^2\frac{x}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = 1 + \cos^2\frac{x}{2}$	2 →	$\frac{3}{2}$ →	1 →	$\frac{3}{2}$ →	2



Geogebra programını kullanarak

$f(x) = \cos(-2x)$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

Giriş alanına yukarıdaki fonksiyonları ayrı ayrı yazıp enter tuşuna bastığımızda aşağıdaki grafikler elde edilir.

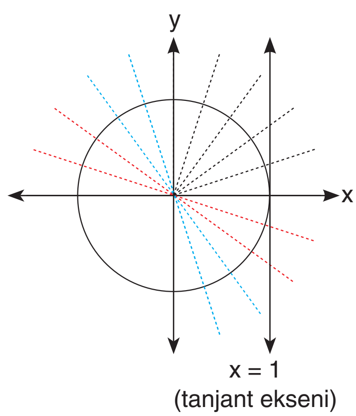


$f(x) = \cos(bx)$ fonksiyonunda b değeri mutlak değerce büyüdükçe grafik x ekseni boyunca daralmaktadır.

c. Tanjant Fonksiyonunun Grafiği

$$f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \tan x$$

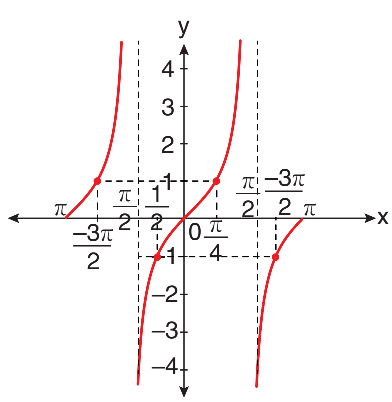
Tanjant; fonksiyonunun grafiği $\left\{(x, \tan x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesinin elemanları olan ikililere analitik düzlemde karşılık gelen noktalar kümesidir.



$y = \tan x$ fonksiyonunun periyodu $T = \pi$ dir.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \tan x$	$0 \to$	$1 \to$	$+\infty$ | $-\infty$	$\to -1 \to$	0

Tanjant fonksiyonu artan fonksiyondur.

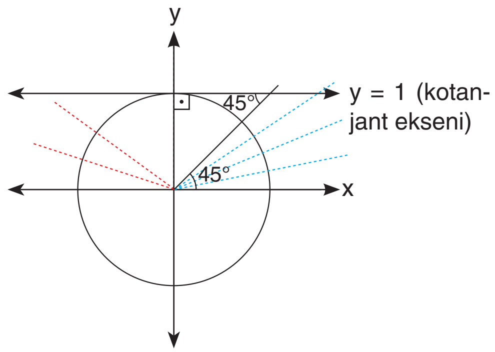


$\tan(-x) = -\tan x$ ve grafiği orjine göre simetrik olduğundan tanjant fonksiyonu tek fonksiyondur.

ç. Kotanjant Fonksiyonunun Grafiği

$$f: \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$
$$x \quad \to f(x) = \cot x$$

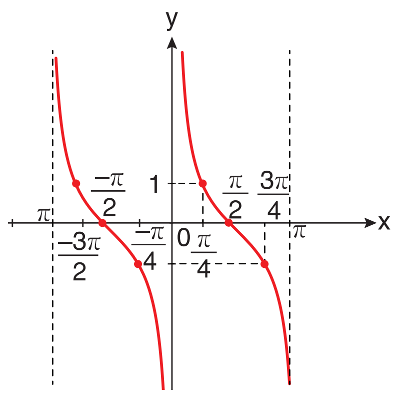
Kotanjant; fonksiyonunun grafiği $\{(x, \cot x) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin analitik düzlemde karşılık gelen noktaların kümesidir.



y = cotx fonksiyonunun periyodu T = π dir.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y = cotx	$+\infty$	→ 1	→ 0	→ –1	→ $-\infty$

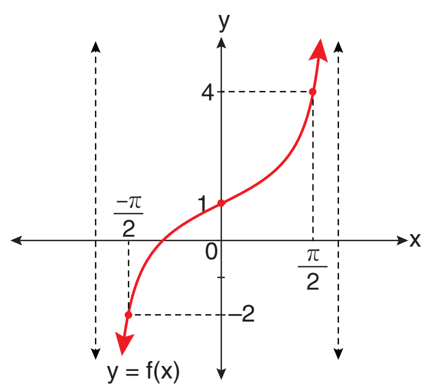
Kotanjant fonksiyonu azalan fonksiyondur.



cot(–x) = –cotx ve kotanjant fonksiyonunun grafiği orjine göre simetrik olduğundan tek fonksiyondur.

Örnek: Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f: (-c, c) \to \mathbb{R}, f(x) = a \cdot \tan\frac{x}{2} + b$ olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ nin değerini bulalım.



Çözüm

$$\left(\frac{-\pi}{2}, -2\right) \in f \Rightarrow f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -2 \Rightarrow a \cdot \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) + b = -2$$

$$\Rightarrow a \cdot \underbrace{\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)}_{-1} + b = -2 \Rightarrow \boxed{-a + b = -2} \ (1)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 4\right) \in f \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \Rightarrow a \cdot \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) + b = 4$$

$$\Rightarrow a \cdot \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{1} + b = 4 \Rightarrow \boxed{a + b = 4} \ (2)$$

(1) ve (2) den

$$\begin{array}{r} -\cancel{a}+b=-2 \\ +\ \ \cancel{a}+b=4 \\ \hline \boxed{b=1} \end{array}$$

(2) de b = 1 yazarsak

$a+1=4 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$f(x)=3\tan\frac{x}{2}+1$ dir.

$x=\pi$ için $f(\pi)=3\cdot\tan\frac{\pi}{2}+1$

$\tan\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{0}$ tanımsız $\Rightarrow c=\pi$ dir.

Burada f(x) fonksiyonunun periyodu $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$ dir.

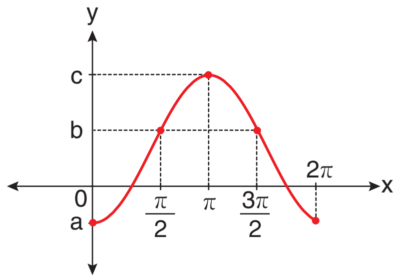
$a\cdot b\cdot c=3\cdot 1\cdot \pi=3\pi$ bulunur.

4.8. ALIŞTIRMALAR

1. $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$

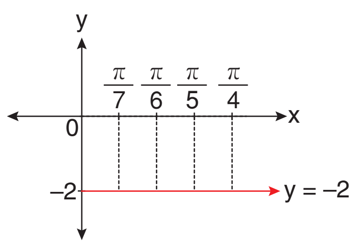
$x\to f(x)=-2\cos x+1$

Şekilde y = –2cosx + 1 grafiği verilmiştir. Buna göre a + b + c toplamını bulunuz.



2. Yandaki şekilde y = f(x) fonksiyonunun [0, ∞) aralığında grafiği çizilmiştir.

Buna göre y = f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

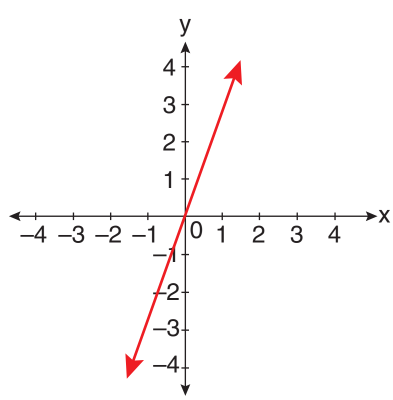


A) $f(x)=\sin^2 5x$ B) $f(x)=\cos^2 5x$

C) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ D) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x-3$

E) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x-2$

3. Şekilde y = f(x) fonksiyonunun [0, π] aralığında grafiği çizilmiştir. Buna göre y = f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?



A) f(x) = 3sinx B) f(x) = sinx + 3

C) f(x) = cos2x + 3 D) f(x) = 3cos2x

E) f(x) = sin2x – 3

4. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f:[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 2 \cdot \cos x$

b. $f:[0, \pi] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 2 - \sin^2 x$

c. $f:[0, 2\pi] - \{\pi\} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \tan\dfrac{x}{2}$

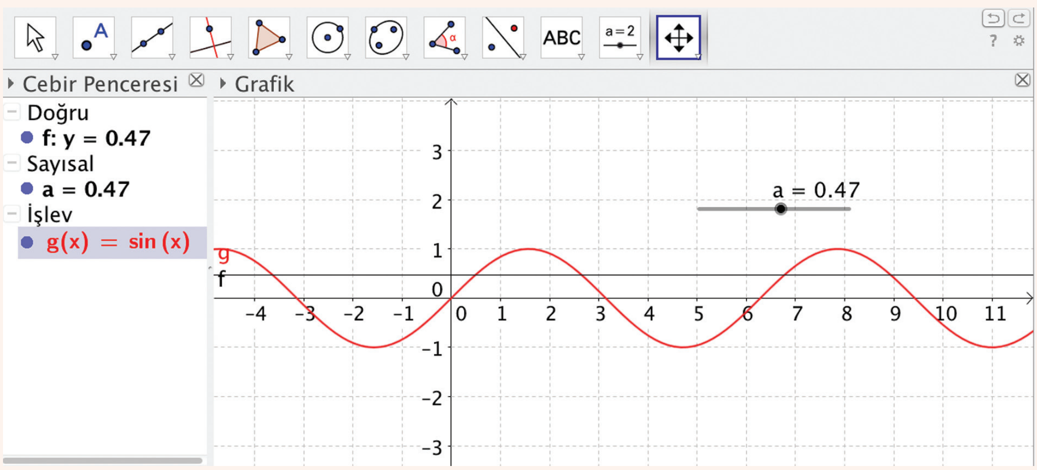
ç. $f:[-\pi, \pi] - \{0\} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \cot\dfrac{x}{2}$

d. $f:(\pi, 3\pi) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 4 \cdot \tan\dfrac{x}{2}$

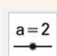
4.2.2. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

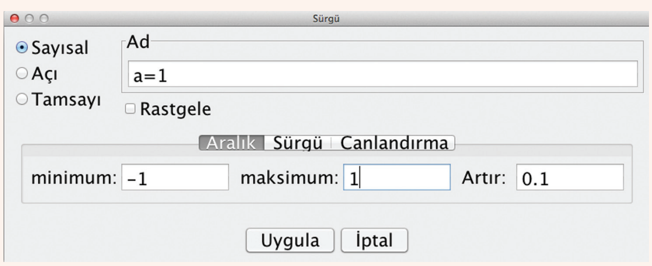
a. Sinüs Fonksiyonun Tersi (Arksinüs Fonksiyonu)

ETKİNLİK



Geogebra programını açalım

1. Araç çubuğunda bulunan sürgü düğmesine  tıklanarak a sürgüsü aşağıdaki girdilerle oluşturalım.



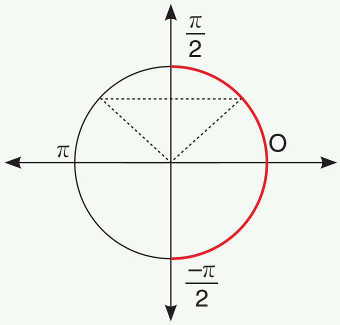
2. Giriş alanına y = a yazarak enter tuşuna basalım.

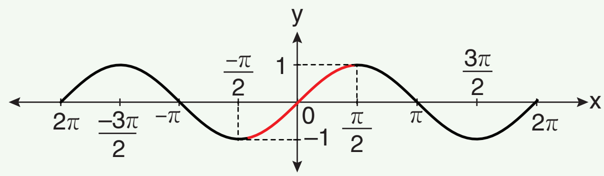
3. Giriş alanına sinx yazarak enter tuşuna basalım.

4. Araç çubuğunda bulunan  düğmesine tıklayalım.

5. Sürgü değerini farenin sol tuşunu kullanarak değiştirelim.

y = a doğrusu sürgü değeri değiştikçe sinx fonksiyonunun grafiğini kaç noktada keser? Sinüs fonksiyonu birebir fonksiyon mudur? Ters fonksiyonu var mıdır?





$f:\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ $f(x) = \sin x$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır.

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu, $f^{-1}(x) = \sin^{-1}x$ ile tanımlanır. **y = arcsinx** biçiminde gösterilir.

$f:\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ ise $f^{-1}:[-1,1]\to\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$x\to f(x)=\sin x$ $\qquad$ $x\to f^{-1}(x)=\arcsin x$

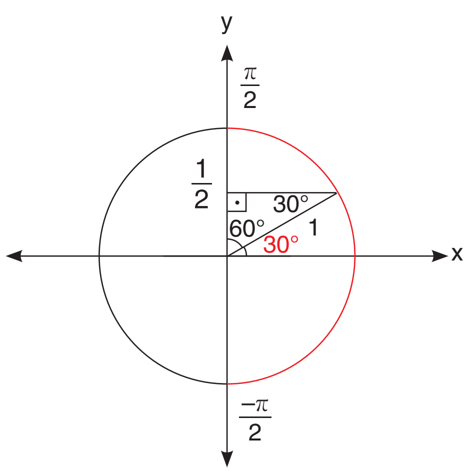
Burada arcsinx in anlamı sinüsi x olan açı demektir.

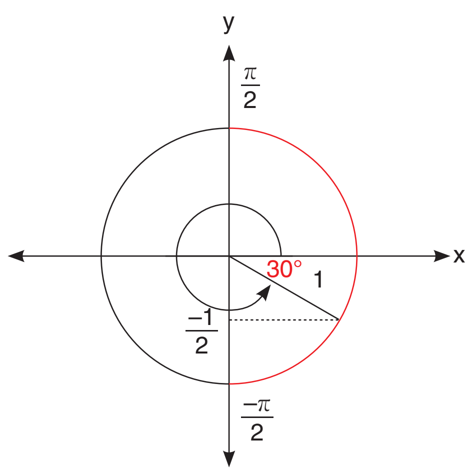
$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$ dir.

Sinüs fonksiyonunun tersinin tanım kümesi [–1, 1] ve değer kümesi $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dır. Buna göre,

a. $\arcsin\frac{1}{2}=y \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\sin y$ dir. $y\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y=\frac{\pi}{6}$ dır.

b. $\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)=y \Leftrightarrow \frac{-1}{2}=\sin y$ dir. $y\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $y=\frac{-\pi}{6}$ dır.





ETKİNLİK

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$\sin 0 =$	$\arcsin 0 =$
$\sin\frac{\pi}{6} =$	$\arcsin\frac{1}{2} =$
$\sin\frac{\pi}{4} =$	$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} =$
$\sin\frac{\pi}{3} =$	$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} =$
$\sin\frac{\pi}{2} =$	$\arcsin 1 =$

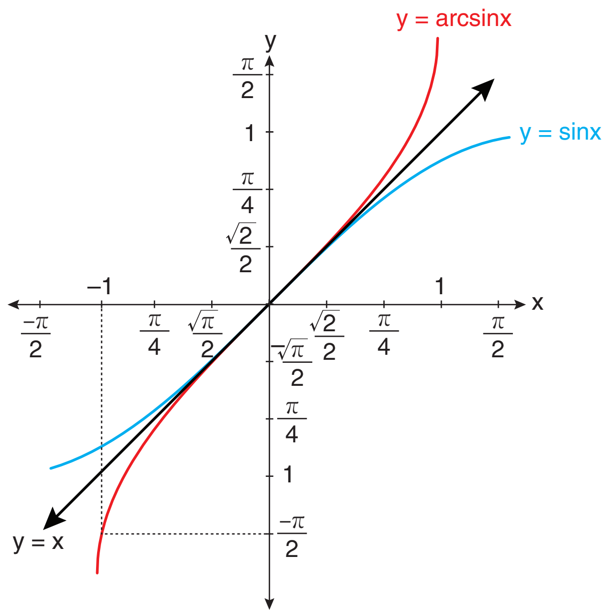
$\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) =$	$\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) =$
$\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) =$	$\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right) =$
$\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) =$	$\arcsin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) =$
$\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) =$	$\arcsin(-1) =$
$\sin(2\pi) =$	$\arcsin(0) =$

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y = arcsinx	–1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ artandır.

x	–1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
y = arcsinx	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

$f^{-1}(x) = \arcsin x$ fonksiyonu $[-1, 1]$ artandır.



y = sinx fonksiyonun grafiği ile y = arcsinx fonksiyonunun grafiği, y = x doğrusuna göre simetriktir.

Örnek: **a.** $\tan\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c. $\cot\left(\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$ **ç.** $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Yukarıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

Çözüm

a. $\tan\left(\underbrace{\arcsin\frac{1}{2}}_{\theta}\right) = \tan\theta$

$\arcsin\frac{1}{2} = \theta \Rightarrow \sin\underset{\downarrow}{\theta} = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$

$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b. $\cos\left(\underbrace{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\theta}\right) = \cos\theta$

$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \theta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\underset{\downarrow}{\theta}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

c. $\cot\left(\underbrace{\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\theta}\right) = \cot\theta$

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta \Rightarrow \sin\underset{\downarrow}{\theta} = -\frac{1}{2}$

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \theta = -\frac{\pi}{6}$

$\cot\theta = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

ç. $\sin\left(\underbrace{\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\theta}\right) = \sin\theta$

$f \circ f^{-1} = I$

$\sin(\arcsin x) = x$

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \theta \Rightarrow = \sin\underset{\downarrow}{\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Q = \frac{\pi}{4}$

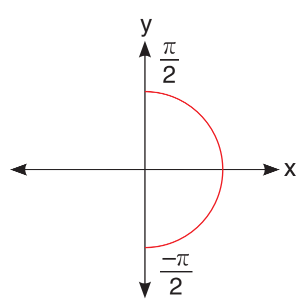
$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Örnek: $\cos\left(\arcsin\left(\frac{-4}{5}\right)\right)$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\cos\left(\underbrace{\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)}_{\theta}\right) = \cos\theta$

$\arcsin\left(\frac{-4}{5}\right) = \theta \Rightarrow \sin\underset{\downarrow}{\theta} = \frac{-4}{5}$



$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta < 0 \Rightarrow \theta$, IV. bölgededir. Bu bölgede $\cos\theta > 0$ olur.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$ bulunur.

Örnek: Demir bir topun havaya atılırken yatayla yapmış olduğu açı, atışın yapıldığı yükseklik ve atılan hızla ilişkilidir.

$\theta = \arcsin\sqrt{\dfrac{V^2}{2V^2 + 64h}}$ olmak üzere

yükseklik 2 metre, atılan hız $8m/sn$ ise θ nın değerini bulalım.

Çözüm

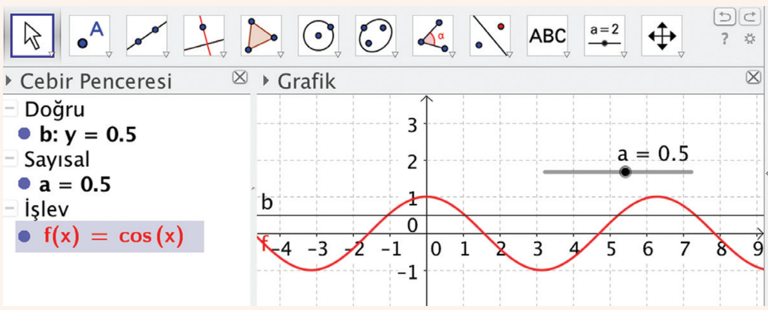
$\theta = \arcsin\sqrt{\dfrac{V^2}{2V^2 + 64h}}$ formülünde h = 2; V = 8 yazarsak

$$\theta = \arcsin\sqrt{\frac{8^2}{2 \cdot 8^2 + 64 \cdot 2}}$$

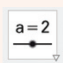
$$\theta = \arcsin\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ bulunur.}$$

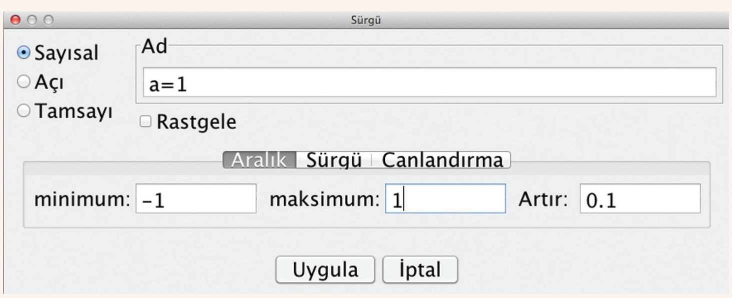
b. Kosinüs Fonksiyonunun Tersi (Arkkosinüs Fonksiyonu)

ETKİNLİK



Geogebra programını açalım

1. Araç çubuğunda bulunan sürgü düğmesine  tıklanarak a sürgüsü aşağıdaki girdilerle oluşturalım.



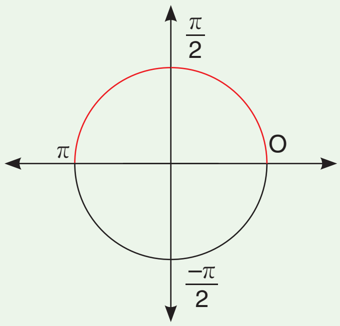
2. Giriş alanına y = a yazarak enter tuşuna basalım.

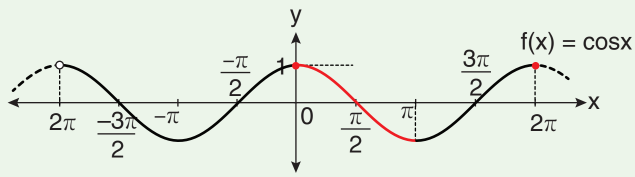
3. Giriş alanına cosx yazarak enter tuşuna basalım.

4. Araç çubuğunda bulunan (nesneleri taşı veya seç)  düğmesine tıklayalım.

5. Sürgü değerini farenin sol tuşunu kullanarak değiştirelim.

y = a doğrusu sürgü değeri değiştikçe cosx fonksiyonunun grafiğini kaç noktada keser? Kosinüs fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyon mudur? Kosinüs fonksiyonunun tersinden bahsedilebilir mi?





f: [0, π] → [–1, 1]

x → f(x) = cosx

kosinüs fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır.

f(x) = cosx fonksiyonunun ters fonksiyonu, $f^{-1}(x) = \cos^{-1}x$ ile tanımlanır. **y = arccosx** biçiminde gösterilir.

f^{-1}: [–1, 1] → [0, π]

x → $f^{-1}(x)$ = arccosx

Burada arccosx in anlamı kosinüsü x olan açı demektir.

y = arccosx ⇔ x = cosy dir.

Kosinüs fonksiyonunun tersinin tanım kümesi [–1, 1] ve değer kümesi [0, π] dir. Buna göre;

a. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = y \leftrightarrow \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dır. $y \in [0, \pi]$, $y = \frac{\pi}{6}$ dır.

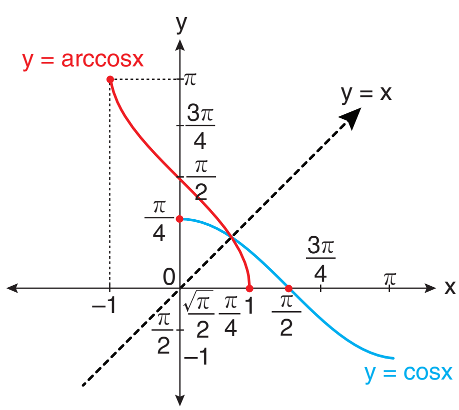
b. $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = y \leftrightarrow \cos y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ dır. $y \in [0, \pi]$, $y = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ dır.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y = cosx	–1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	–1

y = cosx fonksiyonu [0, π] azalandır.

x	–1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
y = arccosx	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0

y = arccosx fonksiyonu [–1, 1] azalandır.



y = cosx fonksiyonunun grafiği ile y = arccosx fonksiyonunun grafiği y = x doğrusuna göre simetriktir.

Örnek: Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

a. arccos1

b. arccos(–1)

c. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

ç. $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

Çözüm

a. $\arccos 1 = \theta \Rightarrow \cos\theta = 1$ dir.

$\downarrow$

$\theta \in [0, \pi]$, $\theta = 0°$ olur.

b. $\arccos(-1) = \theta \Rightarrow \cos\theta = -1$ dir.

$\downarrow$

$\theta \in [0, \pi]$, $\theta = \pi$ olur.

c. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$ dir.

$\downarrow$

$\theta \in [0, \pi]$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ olur.

ç. $\sin\left(\underbrace{\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\theta}\right) = \sin\theta$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

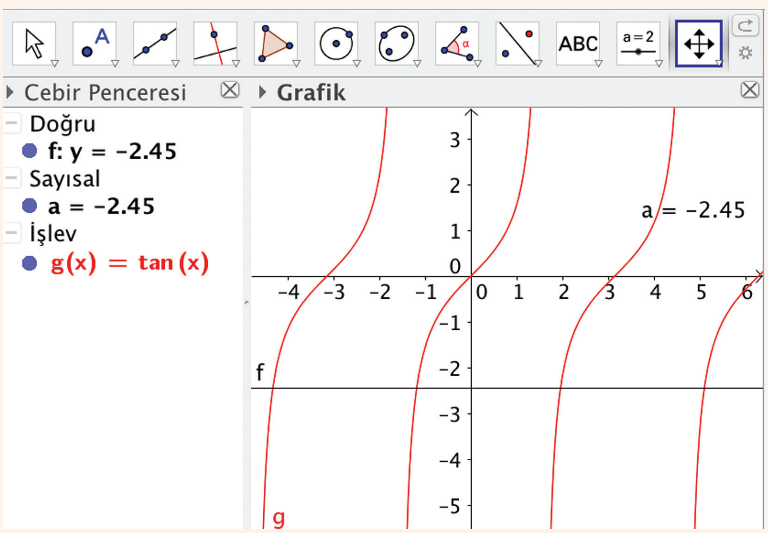
$\downarrow$

$\theta \in [0, \pi]$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$ olur.

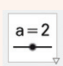
Buradan $\sin\theta = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ bulunur.

c. Tanjant Fonksiyonun Tersi (Arctanjant Fonksiyonu)

ETKİNLİK



Geogebra programını açalım

1. Araç çubuğunda bulunan sürgü düğmesine  seçerek grafik ekranına tıklayalım. Açılan pencerede tamamı tıklayalım.

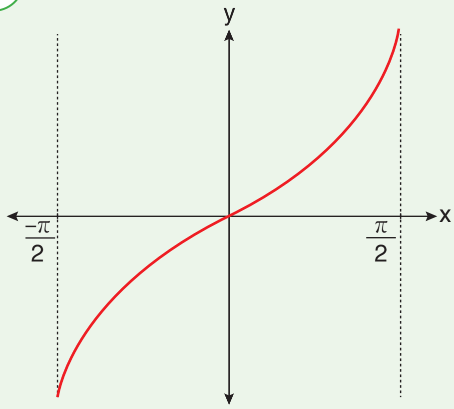
2. Giriş alanına y = a yazarak enter tuşuna basalım.

3. Giriş alanına tanx yazarak enter tuşuna basalım.

4. Araç çubuğunda bulunan  (nesneleri taşı veya seç) düğmesine tıklayalım.

5. Sürgü değerini farenin sol tuşunu kullanarak değiştirelim.

y = a doğrusu sürgü değeri değiştikçe tanx fonksiyonunun grafiğini kaç noktada keser? Tanjant fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyon mudur? Tanjant fonksiyonuna tersinden bahsedilebilir mi?



$f:\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ tanx fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır. f(x) = tanx fonksiyonunun ters fonksiyonu, $f^{-1}(x) = \tan^{-1}x$ ile tanımlanır.

y = **arctanx** biçiminde gösterilir.

$f:\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ise $f^{-1}(x): \mathbb{R} \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x \to f(x) = \tan x \quad x \to f^{-1}(x) = \arctan x$

Burada arctanx in anlamı tanjantı x olan açı demektir.

y = arctanx ⇔ x = tany dir.

Tanjant fonksiyonunun tersinin tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve değer kümesi $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dır. Buna göre;

a. arctan1 = θ ⇔ tanθ = 1 dir. $\quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta = \frac{\pi}{4}$ dir.

b. $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \theta \Leftrightarrow \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ dir. $\quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta = -\frac{\pi}{6}$ dir.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y = tanx	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$

y = tanx fonksiyonu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ artandır.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y = arctanx	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

y = arctanx fonksiyonu $\mathbb{R}$ de artandır.

y = tanx fonksiyonunun grafiği ile y = arctanx fonksiyonunun grafiği y = x doğrusuna göre simetriktir.

Örnek: Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.

a. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \arctan(\sqrt{3})\right)$

b. $\sin\left(\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

c. $\cot(\arctan(-1))$

ç. $\cos(\arctan(-\sqrt{3}))$

Çözüm

a. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \underbrace{\arctan\sqrt{3}}_{\theta}\right) = -\sin\theta$

$\arctan\sqrt{3} = \theta$

$\sqrt{3} = \tan\theta$

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$-\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

b. $\sin\left(\underbrace{\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}_{\theta}\right) = \sin\theta$

$\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \theta \Rightarrow \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \ \theta = -\frac{\pi}{6}$

$\sin\theta = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ olur.

c. $\cot\big(\underbrace{\arctan(-1)}_{\theta}\big) = \cot\theta$

$\arctan(-1) = \theta \Rightarrow \tan\theta = -1$

$\downarrow$

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta = -\frac{\pi}{4}$

$\cot\theta = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = -1$ olur.

ç. $\cos\big(\underbrace{\arctan(-\sqrt{3})}_{\theta}\big) = \cos\theta$

$\arctan\left(-\sqrt{\sqrt{3}}\right) = \theta \Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{3}$

$\downarrow$

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta = -\frac{\pi}{3}$

$\cos\theta = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ olur.

4.9. ALIŞTIRMALAR

1. $f(x) = \arccos\left(\frac{3x-2}{4}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesi nı bulunuz.

2. Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

a. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

b. $\sin\left(\pi + \arctan\frac{3}{4}\right)$

c. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2}$

3. $\arcsin(\cos\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$ olduğunu gösteriniz.

4. $\arctan 5 = x$ ise $\sin x \cdot \cos x$ in değerini bulunuz.

5. $\cos(\arctan(-2))$ nin değerini bulunuz.

6. $f(x) = \cos x$ fonksiyonu olmak üzere $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ toplamını bulunuz.

7. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına D, yanlış olanların başına Y yazınız.

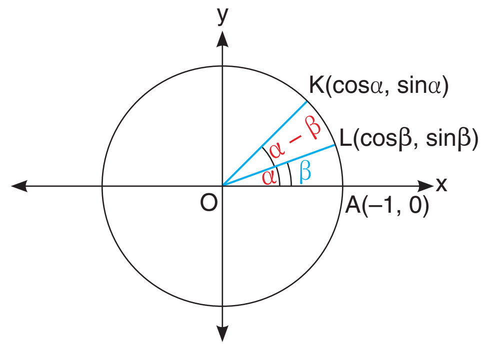
☐ **a.** $\arcsin x < \arcsin y \Rightarrow x > y$ dir.

☐ **b.** $\arccos x < \arccos y \Rightarrow x < y$ dir.

☐ **c.** $\arctan x < \arctan y \Rightarrow x < y$ dir.

4.3 İki Açının Ölçüleri Toplamının Ve Farkının Trigonometrik Değeri

4.3.1 Toplam ve Fark Formülleri



Şekilde O merkezli birim çember, $m(\widehat{AOK}) = \alpha$, $m(\widehat{AOL}) = \beta$

ve birim çemberi kestiği noktalar sırasıyla K ve L noktaları olsun.

$\widehat{OKL}$ de $|OK| = |OL| = 1$ (Birim çember)

K ve L noktaları arasındaki uzaklık

$|KL| = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$ (1)

$\widehat{OKL}$ de $|KL|^2 = |OK|^2 + |OL|^2 - 2 \cdot |OK| \cdot |OL| \cdot \cos(\alpha - \pi)$ (2) (Kosinüs teoremi)

(1,), (2) de yerine yazarsak

$$\left(\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}\right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 11 \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

1 1

$\cancel{2} - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \cancel{2} - 2\cos(\alpha - \beta)$

$-\cancel{2}(2\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = -\cancel{2}\cos(\alpha - \beta) \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ bulunur.

I. $\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$

$\cos(\alpha + \beta)$ yı bulabilmek için I de β yerine $-\beta$ yazalım.

$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \overbrace{\cos(-\beta)}^{\cos\beta} + \sin\alpha \cdot \overbrace{\sin(-\beta)}^{-\sin\beta} \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ bulunur.

II. $\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$

$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right)$ dır.

$= \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}^{\sin\alpha} \cdot \cos\beta - \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}^{\cos\alpha} \cdot \sin\beta \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ bulunur.

III. $\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}$

$\sin(\alpha + \beta)$ için III de βyerine $-\beta$ yazalım.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - (-\beta) = \sin\alpha\overbrace{\cos(-\beta)}^{\cos\beta} - \overbrace{\sin(-\beta)}^{-\sin\beta}\cos\alpha \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ bulunur.

IV. $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$(\cos\alpha \cdot \cos\beta \neq 0$ olmak üzere pay ve paydayı $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ ile bölelim).

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha \cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha \cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\sin\beta \cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha} \cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha} \cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha} \cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} \text{ bulunur.}$$

V. $\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}}$

$\tan(\alpha - \beta)$ için V de β yerine $-\beta$ yazalım.

$$\tan(\alpha + (-\beta)) = \frac{\tan\alpha + \overbrace{\tan(-\beta)}^{-\tan\beta}}{1 - \tan\alpha \cdot \underbrace{\tan(-\beta)}_{-\tan\beta}} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

VI. $\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}}$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$$

($\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq 0$ olmak üzere pay ve paydayı $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ ile bölelim.)

$$= \frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - \dfrac{\cancel{\sin\alpha}\cancel{\sin\beta}}{\cancel{\sin\alpha}\cancel{\sin\beta}}}{\dfrac{\cancel{\sin\alpha}\cos\beta}{\cancel{\sin\alpha}\sin\beta} + \dfrac{\cancel{\sin\beta}\cos\alpha}{\sin\alpha\cancel{\sin\beta}}} = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

VII. $\boxed{\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}}$

$\cot(\alpha - \beta)$ için VII de β yerine $-\beta$ yazalım.

$$\cot(\alpha + (-\beta)) = \frac{\cot\alpha\,\overbrace{\cot(-\beta)}^{-\cot\beta} - 1}{\cot\alpha + \underbrace{\cot(-\beta)}_{-\cot\beta}} = \frac{-\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha - \cot\beta} = \frac{\cancel{-}(\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1)}{\cancel{-}(-\cot\alpha + \cot\beta)}$$

VIII. $\boxed{\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}}$

İki sayının toplam ve fark formülleri

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

$\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha + \cot\beta + 1}{\cot\alpha - \cot\beta}$

$\cot(\alpha + \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$

✔ **Örnek:** **a.** cos75° **b.** sin15° **c.** tan105° değerlerini bulalım.

Çözüm

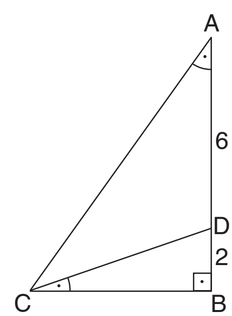
a. $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \underbrace{\cos 45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underbrace{\cos 30°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \underbrace{\sin 45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underbrace{\sin 30°}_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b. $\sin 15° = \sin(60° - 45°) = \underbrace{\sin 60°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \underbrace{\cos 45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \underbrace{\sin 45°}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

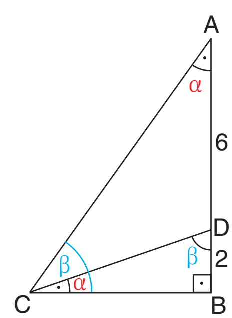
c. $\tan 105° = \tan(60° + 45°) = \dfrac{\tan 60° + \tan 45°}{1 - \tan 60° \tan 45°} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\underset{(1+\sqrt{3})}{1 - \sqrt{3}}}$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{(1)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

✔ **Örnek:** ABC dik üçgeninde $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{BCD})$, $|BD| = 2$br, $|AD| = 6$ br ise $\tan(\widehat{ACD})$ nın değerini bulalım.



Çözüm



$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{BCD}) = \alpha \quad m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{ACB}) = \beta$ dersek

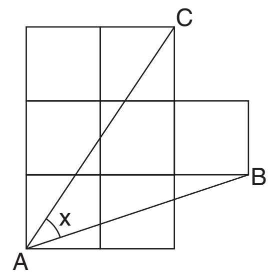
istenen $\tan(\widehat{ACD}) = \tan(\beta - \alpha)$ olur.

$\widehat{ACB} \backsim \widehat{CDB}$ (A. A Benzerlik)

$\dfrac{|CB|}{|DB|} = \dfrac{|AB|}{|CB|} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{8}{x} \Rightarrow \boxed{x = 4}$

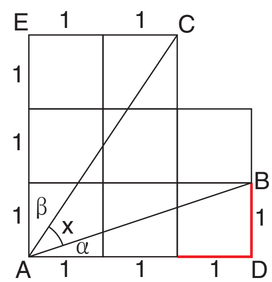
$\widehat{BCD}$ de $\tan\beta = 2 \quad \tan\alpha = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \cdot \tan\alpha} = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{1 + \cancel{2} \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$ bulunur.

Örnek: Şekilde 7 tane eş birim kareden oluşmuştur. $m(\widehat{BAC}) = x$ ise sinx in değerini bulalım.



Çözüm

Uzunluğun sorulmadığı durumlarda trigonometrik oran bulunacağından eşit uzunluklara 1 br verilebilir.



ABD dik üçgeninde $|AB| = \sqrt{10}$ (pisagor)

$$\cos\alpha = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin\alpha = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

AEC dik üçgeninde $|AC| = \sqrt{13}$ (Pisagor)

$$\cos\beta = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \sin\beta = \frac{|EC|}{|AC|} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$x + \alpha + \beta = 90°$

$x = 90 - (\alpha + \beta)$

$\sin x = \sin(90 - (\alpha + \beta)$

$= \cos(\alpha + \beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \frac{3}{\sqrt{10}}\frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{130}} - \frac{2}{\sqrt{130}} = \frac{7}{\sqrt{130}} = \frac{7\sqrt{130}}{130}$$ bulunur.

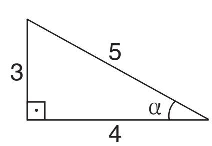
Örnek: $\cot\left(\arctan\frac{1}{2} + \arcsin\frac{3}{5}\right)$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\cot\left(\underbrace{\arctan\frac{1}{2}}_{\alpha} + \underbrace{\arcsin\frac{3}{5}}_{\beta}\right) = \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

$\alpha = \arctan\frac{1}{2} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2}$ dir. $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ olduğundan $\cot\alpha = 2$ olur.

$\beta = \arcsin\frac{3}{5} \Rightarrow \sin\beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \cot\beta = \frac{4}{5}$ olur.



$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{2 \cdot \frac{4}{3} - 1}{2 + \frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$ bulunur.

4.3.2 Yarım Açı Formülleri

Toplam formüllerinde açılar eşit alınarak yarım açı formülleri elde edilir.

i. Sin $(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ eşitliğinde $\alpha = \beta$ yazarsak $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$ don $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ bulunur.

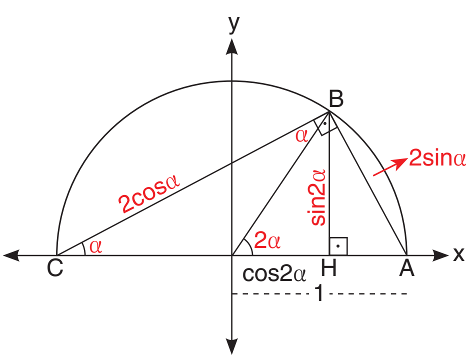
ii. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ eşitliğinde $\alpha = \beta$ yazarsak $\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$ don $\boxed{\cos^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ bulunur.

Ayrıca bu eşitlikte $\sin^2\alpha$ yerine $1 - \cos^2\alpha$ yazılırsa $\cos^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ $\cos^2\alpha$ yerine $1 - \sin^2\alpha$ yazılırsa $\cos2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin2 = 1 - 2\sin^2\alpha$ eşitlikleri elde edilir.

iii. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$ eşitliğinde $\alpha = \beta$ yazarsak

$\tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\alpha}$ ton $\boxed{\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$ bulunur.

iv. $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$ don $\boxed{\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}}$ bulunur.



Yarım Açı Formülleri

$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

i. ABC üçgeninin alanı

$$\frac{|AC|\cdot|BH|}{2} = \frac{|AB|\cdot|BC|}{2}$$

$$\frac{2\cdot\sin 2\alpha}{2} = \frac{2\sin\alpha 2\cos\alpha}{2}$$

$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

ii. $\widehat{ABC}$ öklitten

$|AB|^2 = |AH|\cdot|AC|$

$(2\sin\alpha)^2 = (1-\cos2\alpha)\cdot 2 \Rightarrow {}^2\cancel{4}\sin^2\alpha = (1-\cos2\alpha)\cancel{2}$

$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

Örnek: $\cos x - \cos y = \frac{1}{3}$ ve $\sin x - \sin y = \frac{1}{2}$ olduğuna göre cos(x – y) değerini bulalım.

Çözüm

$$(\cos x - \cos y)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \overset{1}{\cos^2 x} - 2\cos x\cos y + \overset{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{9}$$

$$(\sin x - \sin y)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x\sin y + \sin^2 y = \frac{1}{4}$$

$$+$$

$$2 - 2(\cos x\cos y + \sin x\sin y) = \frac{13}{36}$$

$$2 - \frac{13}{36} = 2\underbrace{(\cos x\cos y + \sin x\sin y)}_{\cos(x-y)} \Rightarrow \cos(x-y) = \frac{59}{72} \text{ bulunur.}$$

Yarım Açı Formülleri

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ eşitliğinde $\alpha = \beta$ ise

$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$ elde edilir.

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ eşitliğinde $\alpha = \beta$ ise

$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \sin\alpha$ $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ elde edilir.

Bu eşitlikte $\cos^2\alpha$ yerine $1 - \sin^2\alpha$ yazarsak

$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \Rightarrow$ $\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$ elde edilir.

Yine bu eşitlikte $\sin^2\alpha$ yerine $1 - \cos^2\alpha$ yazarsak

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \Rightarrow$ $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$ elde edilir.

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha + \tan\beta}$ eşitliğinde $\alpha = \beta$ ise $\tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$ elde edilir.

$\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha + \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$ eşitliğinde $\alpha = \beta$ ise $\Rightarrow$ $\cot(\alpha+\alpha) = \dfrac{\cot\alpha\cot\alpha - 1}{\cot\alpha + \cot\alpha}$

$\boxed{\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}}$ elde edilir.

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \\ \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \end{aligned}}$$

Elde edilen bu formüllere yarımaçı formülleri denir.

Örnek: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ olduğunu $\sin(2x + x)$ kullanarak gösterelim.

Çözüm

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \underbrace{\sin 2x}_{2\sin x\cos x}\cos x + \sin x\,\underbrace{\cos 2x}_{1-2\sin^2 x}$$

$$= 2\cdot\sin x\cos x\cdot\cos x + \sin x\,(1 - 2\sin^2 x) = 2\sin x\,\underbrace{\cos^2 x}_{(1-\sin^2 x)} + \sin x - 2\sin^3 x$$

$$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

Örnek: $\dfrac{\cos 3x}{\sin x} + \dfrac{\sin 3x}{\cos x}$ ifadesinin en sade biçimde bulalım.

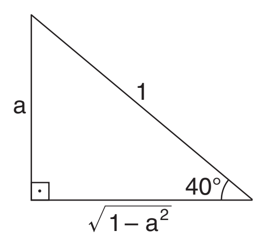
Çözüm

$$\frac{\cos 3x}{\underset{(\cos x)}{\sin x}} + \frac{\sin 3x}{\underset{(\sin x)}{\cos x}} = \frac{\overbrace{\cos 3x\cdot\cos x + \sin 3x\cdot\sin x}^{\cos(3x - x)}}{\underbrace{\sin x\cdot\cos x}_{\frac{\sin 2x}{2}}} = \frac{\cos 2x}{\frac{\sin 2x}{2}} = 2\cdot\cot 2x \text{ bulunur.}$$

Örnek: $\sin 40° = a$ ise $\cos 10°$ nin a cinsinden değerini bulalım.

Çözüm

$\cos 10° = \sin 80°$ dir. Şekilden $\cos 40° = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{1}$



$\sin 80° = 2\cdot\sin 40°\cdot\cos 40°$

$= 2\cdot a\cdot(\sqrt{1-a^2})$

Buradan $\cos 10° = 2a\sqrt{1-a^2}$ bulunur.

Örnek: $\cos 16\cdot\cos 8\cdot\cos 4\cdot\cos 2 = k\cdot\dfrac{\sin 32}{\sin 2}$ ise k değerini bulalım.

Çözüm

$$\cos 16\cdot\cos 8\cdot\cos 4\cdot\underbrace{\cos 2\cdot\sin 2}_{\frac{\sin 4}{2}} = k\cdot\sin 32 \qquad \left(\sin x\cdot\cos x = \frac{\sin 2x}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cos 16\cdot\cos 8\cdot\underbrace{\cos 4\cdot\sin 4}_{\frac{\sin 8}{2}} = k\cdot\sin 32 \Rightarrow \frac{1}{4}\cos 16\cdot\underbrace{\cos 8\cdot\sin 8}_{\frac{\sin 16}{2}} = k\cdot\sin 32$$

$$\frac{1}{8}\underbrace{\cos 16\cdot\sin 16}_{\frac{\sin 32}{2}} = k\cdot\sin 32 \Rightarrow \frac{1}{16}\cdot\sin 32 = k\cdot\sin 32 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{16}} \text{ bulunur.}$$

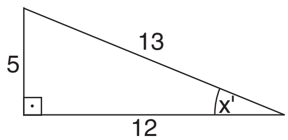
Örnek: $\sin x = \frac{5}{13}$ ve $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ olmak üzere

a. cosx **b.** cos2x **c.** $\sin\frac{x}{2}$ değerlerini bulalım.

Çözüm

a. Alternatif olarak birinci bölgede x' açısını alalım.

$\sin x = \sin x = \frac{5}{13}$ olur. Buradan



$\cos x' = \frac{12}{13}$ ve x, 2. bölgede olduğundan $\cos x = -\frac{12}{13}$ olur.

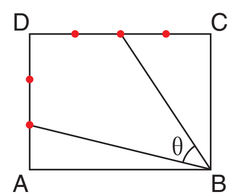
b. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$

c. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow -\frac{12}{13} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$

$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 + \frac{12}{13} \Rightarrow \sin^2\frac{x}{2} = \frac{25}{26} \Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \mp\frac{5}{\sqrt{26}}$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\sin\frac{x}{2} = +\frac{5\sqrt{26}}{26}$ bulunur.

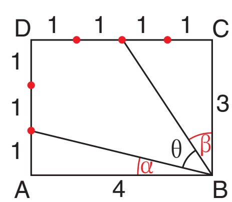
Örnek: Şekilde ABCD dikdörtgeninde $3|DC| = 4|AD|$ dir.



a. cotθ **b.** sin2θ

değerlerini bulalım.

Çözüm



a. Şekilden $\tan\alpha = \frac{1}{4}$, $\tan\beta = \frac{2}{3}$ olur.

$\theta + \alpha + \beta = 90° \Rightarrow \theta = 90° - (\alpha + \beta)$

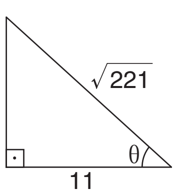
$\cot\theta = \cot(90° - (\alpha + \beta))$

$= \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{11}{10}$

Buradan $\cot\theta = \frac{11}{10}$ bulunur.

b.

$\cot\theta = \frac{11}{10} \Rightarrow 10$

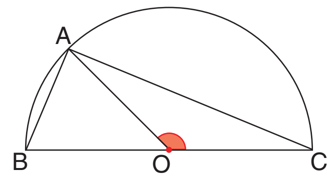


$\sin\theta = \frac{10}{\sqrt{221}}$

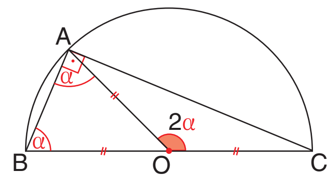
$\cos\theta = \frac{11}{\sqrt{221}}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta = 2 \cdot \frac{10}{\sqrt{221}} \cdot \frac{11}{\sqrt{221}} = \frac{220}{221}$ bulunur.

Örnek: O merkezli yarım çemberde $|AC| = 2|AB|$ ise $\cos(\widehat{AOC})$ nın değerini bulalım.



Çözüm

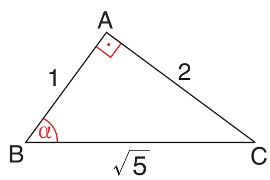


$m(\widehat{BAC}) = 90°$ dir. (Çapı gören çevre açı)

$m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{OAB}) = \alpha$ dersek $m(\widehat{AOC}) = 2\alpha$ olur.

$|AB| = 1$ dersek $|AC| = 2$ olur. Bu durumda

ABC dik üçgeninde $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ dir.



$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$= 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1$$
$$= \frac{-3}{5} \text{ bulunur.}$$

4.10. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki trigonometrik oranların eşitini bulunuz.

a. $\cos 15°$ **b.** $\sin 75°$ **c.** $\tan 75°$ **ç.** $\cot 105°$

2. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a. $\cos 58 \cdot \cos 2 - \sin 58 \cdot \sin 2$

b. $\sin 80 \cdot \cos 40 + \sin 40 \cdot \cos 80$

c. $\dfrac{\tan 57 - \tan 12}{1 + \tan 57 \cdot \tan 12}$

ç. $\dfrac{\cot 25 \cdot \cot 35 - 1}{\cot 25 + \cot 35}$

d. $\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

e. $\cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}$

f. $\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}$

g. $1 - 2\sin^2 4x$

h. $\cos^4\theta - \sin^4\theta$

ı. $\dfrac{2\tan 2x}{1 - \tan^2 2x}$

3. $\sin A = \dfrac{5}{13}$, $0 < A < \dfrac{\pi}{2}$ ve $\cos B = -\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < B < \pi$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a. $\cos A$ **b.** $\sin B$ **c.** $\sin(A - B)$ **ç.** $\cos(A + B)$

d. $\sin 2A$ **e.** $\cos 2A$ **f.** $\cos 2B$ **g.** $\cos\dfrac{B}{2}$

4. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\cos 2\theta + 2\sin^2\theta = 1$

b. $\dfrac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot\theta$

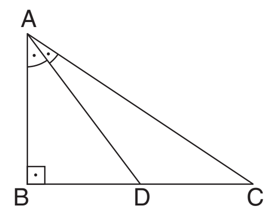
c. $\dfrac{1-\sin 2\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

ç. $\dfrac{1+\sin 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \cdot \dfrac{1}{\sec\theta + \cos\theta} = \dfrac{1}{2}\sin\theta$

5. Bir $\widehat{ABC}$ de $-\cos\widehat{A} - \sin\widehat{B} \cdot \sin\widehat{C} + \cos\widehat{B} \cdot \cos\widehat{C} = 1$ ise A açısının ölçüsünü bulunuz.

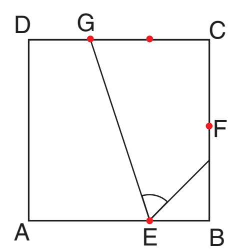
6. $\cos\dfrac{\pi}{9} \cdot \cos\dfrac{2\pi}{9} \cdot \cos\dfrac{4\pi}{9}$ çarpımının değerini bulunuz.

7. ABC dik üçgeninde [AD] açıortay ve $|AC| = 2|DC|$ ise $\tan\left(\widehat{BAC}\right)$ değerini bulunuz.



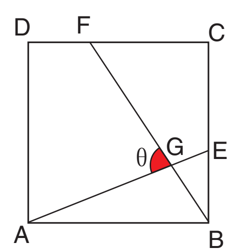
8. ABCD karesinde $[DC]$, 3; $[BC]$ 2 eşit parçaya ayrılmıştır.

$|AE| = 2|EB|$ ise $\tan\left(\widehat{GEF}\right)$ nin değerini bulunuz.



9. ABCD karesinde E, orta nokta; $3|DF| = |FC|$ ve [AE] ile [BF] nin kesişimi G noktasıdır.

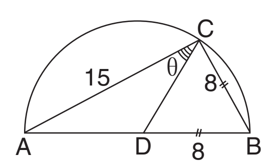
$m\left(\widehat{AGF}\right) = \theta$ ise $\cot\theta$ nın değerini bulunuz.



10. [AB] çap, $|AC| = 15$ birim $|BD| = |BC| = 8$ br

$m\left(\widehat{ACB}\right) = \theta$ ise

$\sin\theta$ nın değerini bulunuz.



11. Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

a. $\sin\left(2\arccos\dfrac{5}{13}\right)$

b. $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5} + \arctan\dfrac{1}{2}\right)$

c. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \arcsin\dfrac{4}{5}\right)$

4.3.3. Dönüşüm Formülleri

Toplam veya fark durumunda verilen iki trigonometrik fonksiyonun çarpım durumunda yazmak için dönüşüm formülleri kullanılır.

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

I. $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

II. $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

III. $\cos a - \cos b = 2\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

IV. $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

İspat

$$\begin{array}{rl} & \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cancel{\sin y\cos x} \\ + & \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cancel{\sin y\cos x} \\ \hline & \sin(\underbrace{x+y}_{a}) + (\underbrace{x-y}_{b}) = 2\cdot\sin x\cos y\,(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \sin(x+y) = \cancel{\sin y\cos x} + \sin y\cos x \\ \mp & \sin(x-y) = {}^{-}\cancel{\sin x\cos y} \pm \sin x\cos y \\ \hline & \sin(\underbrace{x+y}_{a}) - \sin(\underbrace{x-y}_{b}) = 2\sin y\cos x\,(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & x + \cancel{y} = a \\ + & x - \cancel{y} = b \\ \hline & x = \dfrac{a+b}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \cancel{x} + y = a \\ +^{-} & \cancel{x}^{+} - y = {}^{-}b \\ \hline & y = \dfrac{a-b}{2} \end{array}$$

x ve y değerleri (1) ve (2) de yerine yazarsak

$\sin a + \sin b = 2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin a - \sin b = 2\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ elde edilir.

$$\begin{array}{rl} & \cos(x+y) = \cos x\cos y - \cancel{\sin y\sin y} \\ + & \cos(x-y) = \cos x\cos y + \cancel{\sin x\sin y} \\ \hline & \cos(\underbrace{x+y}_{a}) + \cos(\underbrace{x-y}_{b}) = 2\cdot\cos x\cos y\,(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \cos(x+y) = \cancel{\cos x\cos y} - \sin x\sin y \\ +^{-} & \cos(x-y) = {}^{-}\cancel{\cos x\cos y} +^{-} \sin x\sin y \\ \hline & \cos(\underbrace{x+y}_{a}) - \cos(\underbrace{x-y}_{b}) = -2\sin x\sin y\,(4) \end{array}$$

$x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$ değerlerini (3) ve (4) de yerine yazarsak

$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki ifadeleri çarpım şeklinde yazalım.

a. sin10° + sin80° **b.** 1 + cosx **c.** cos20° – sin10°

Çözüm

a. $\sin 10° + \sin 80° = 2 \cdot \sin\left(\frac{10° + 80°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{10° - 80°}{2}\right)$

$= 2 \cdot \sin 45° \cdot \cos(-35°)$

$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 35° \qquad (\cos(-35°) = \cos 35°)$

$= \sqrt{2} \cdot \cos 35°$

b. $1 + \cos x = \cos 0° + \cos x = 2 \cdot \cos\left(\frac{0 + x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{0 - x}{2}\right)$

$= 2 \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \underbrace{\cos\left(-\frac{x}{2}\right)}_{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

$= 2 \cdot \cos^2\frac{x}{2}$

c. $\cos 20° - \sin 10° = \cos 20° - \cos 80° \qquad (\sin 10° = \cos 80°)$

$= -2 \cdot \sin\left(\frac{20° + 80°}{2}\right) \sin\left(\frac{20° - 80°}{2}\right)$

$= -2 \cdot \sin 50° \cdot \underbrace{\sin(-30°)}_{\frac{-1}{2}}$

$= \sin 50°$

Örnek: $\frac{1}{\cos 75°} + \frac{1}{\cos 15°}$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\frac{1}{\underset{(\cos 15°)}{\cos 75°}} + \frac{1}{\underset{(\cos 75°)}{\cos 15°}} = \frac{\cos 15° + \cos 75°}{\cos 15° \cdot \cos 75°}$

$= \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{15° + 75°}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{15° - 75°}{2}\right)}{\cos 15° \cdot \sin 15°}$

$= \frac{2 \cdot \cos 45 \cdot \cos(-30°)}{\frac{\sin 30°}{2}} \quad (\cos(-30°) = \cos 30°)$

$= \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\frac{1}{2}}{2}}$

$= 2\sqrt{6}$ bulunur.

Örnek: $x = \frac{\pi}{7}$ ise $\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\cos 4x + \cos 2x} \cdot \cot x$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

a.

$$\frac{\overbrace{\sin 5x - \sin 3x}^{2 \cdot \cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right) \sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}}{\underbrace{\cos 4x + \cos 2x}_{2 \cdot \cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right) \cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}} \cdot \cot x = \frac{\cancel{2} \cdot \cos 4x \cdot \cancel{\sin x}}{\cancel{2} \cdot \cos 3x \cdot \cancel{\cos x}} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}}$$

$$= \frac{\cos 4x}{\cos 3x} \qquad \left(x = \frac{\pi}{7} \Rightarrow 7x = \pi \Rightarrow 4x + 3x = \pi \text{ den } 4x = \pi - 3x \text{ olur.}\right)$$

$$= \frac{\cos(\pi - 3x)}{\cos 3x} \qquad (\cos(\pi - 3x) = -\cos 3x)$$

$$= \frac{-\cos 3x}{\cos 3x}$$

$= -1$ bulunur.

Örnek: $\frac{\sin 5x + \sin 3x + \sin x}{\cos 5x + \cos 3x + \cos x} = \tan 3x$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$\frac{\sin 5x + \sin 3x + \sin x}{\cos 5x + \cos 3x + \cos x} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{5x + x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x - x}{2}\right) + \sin 3x}{2 \cdot \cos\left(\frac{5x + x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x - x}{2}\right) + \cos 3x}$$

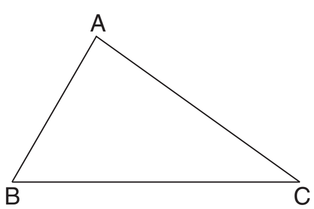
$$= \frac{2 \cdot \sin 3x \cos 2x + \sin 3x}{2 \cdot \cos 3x \cos 2x + \cos 3x}$$

$$= \frac{\sin 3x[\cancel{2\cos 2x + 1}]}{\cos 3x[\cancel{2\cos 2x + 1}]}$$

$= \tan 3x$ bulunur.

Örnek: Bir üçgenin iç açıları arasında $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} + 1$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



$$\underbrace{\cos A + \cos B}_{2\cos\frac{(A+B)}{2} \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} + \cos C = 2 \cdot \underbrace{\cos\left(90 - \frac{C}{2}\right)}_{\sin\frac{C}{2}} \cdot \cos\frac{A - B}{2} + \underbrace{\cos C}_{1 - 2\sin^2\frac{C}{2}}$$

$$\frac{(A+B)}{2} \to 90° - \frac{C}{2}$$

$$= 2 \cdot \sin\frac{C}{2} \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \underset{\downarrow \atop 90-\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}\right] + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\underbrace{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}_{-2\cdot\sin\left(\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}\right)}\right] + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\cdot\underbrace{\sin\left(-\frac{B}{2}\right)}_{-\sin\frac{B}{2}}\right] + 1$$

$$= 4\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 1 \text{ bulunur.}$$

4.11. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki toplam durumundaki trigonometrik ifadeleri çarpım durumunda yazınız,

a. cos50° + cos40° **b.** cos3x – cosx **c.** sin10° – sin50° **ç.** cos10° + sin20°

2. $\dfrac{\cos 6x + \cos 5x + \cos 4x}{\sin 6x + \sin 5x + \sin 4x}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

3. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$ olduğunu gösteriniz.

4. cos40 – cos20 + sin10 ifadesinin eşitini bulunuz.

5. $x = \frac{\pi}{10}$ ise $\dfrac{\cos 5x + \cos 3x}{\cos 5x - \cos 3x}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

4.4 Trigonometrik Denklemler

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\tan x = \cot x = 1$

eşitlikleri her $x \in \mathbb{R}$ için doğrudur. Bu tip eşitliklere **trigonometrik özdeşlik** denir.

İçinde bilinmeyenin trigonometrik fonksiyonlarını bulunduran ve bilinmeyen bazı değerleri için doğru olan eşitliklere **trigonometrik denklem** denir. Denklemi sağlayan değerlere **denklemin kökleri**, köklerin kümesine de denklemin **çözüm kümesi** denir. Çözüm kümesini bulmak için yapılan işlemlere **denklemin çözümü** denir.

I. cosx = a Biçimindeki Denklemin Çözümü

i) $|a| > 1$ ise çözüm kümesi $\varnothing$dir.

ii) $|a| \leqslant 1$ ise $\cos x = a$ denklemini sağlayan $0 \leqslant \theta < 2\pi$ vardır. $\cos\theta = a$ iken $\cos(\pi - \theta) = a$ dır.

Buradan

$$\cos x = \cos\theta = \cos(-\theta) = \begin{cases} x = \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\cos x = a$ denkleminin çözüm kümesi

$Ç = \{\theta + k2\pi \text{ veya } -\theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olur.

$\cos f(x) = \cos g(x)$ denkleminin çözüm kümesi $f(x) = g(x) + k \cdot 2\pi$ veya $f(x) = -g(x) + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ dir.

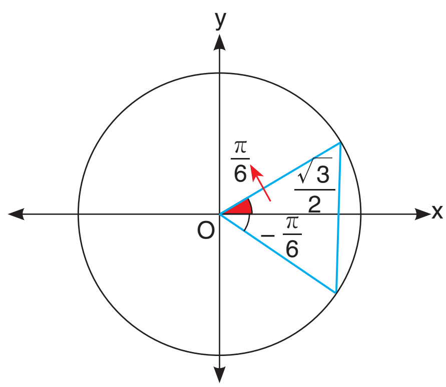
Örnek: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

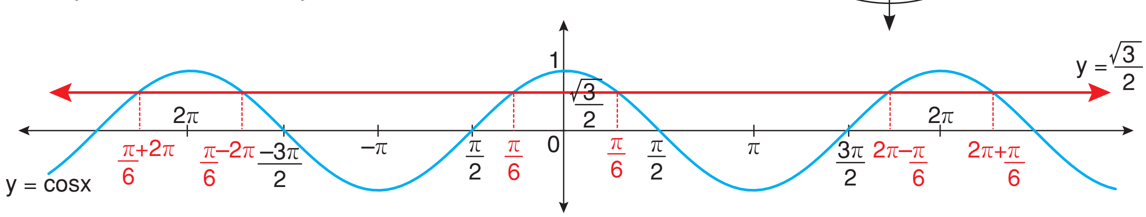
Çözüm

Kosinüsü $\frac{\sqrt{3}}{2}$ olan açının ölçüsü $\frac{\pi}{6}$ dir.

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$Ç = \left\{\mp\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$





$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesi $y = \cos x$ eğrisi ile $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ doğrusunun kesim noktalarının apsislerinin kümesidir.

✔ **Örnek:** $2 \cdot \cos^2 3x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\underbrace{2\cos^2 3x - 1} = 0$ $\qquad\qquad (2\cos^2 x - 1 = \cos 2x)$

$\cos 6x = 0$ kosinüsü 0 olan açının ölçüsü $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

$$\cos 6x = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 6x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \\ 6x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$ç = \left\{\pm\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

✔ **Örnek:** $1 - \sin^2 x + \cos x = 0$ denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığındaki köklerini bulalım.

Çözüm

$\underbrace{1 - 2\sin^2 x} + \cos x = 0$ denkleminin $(1 - 2\sin^2 x = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1)$

$2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ denkleminde

$\cos x = t$ dersek $2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow (2t - 1) \cdot (t + 1) = 0$

$$\begin{array}{ccc} t = \frac{1}{2} & \text{veya} & t = -1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cos x = \frac{1}{2} & \text{veya} & \cos x = -1 \end{array}$$

osx $= \frac{1}{2}$ ise kosinüsü $\frac{1}{2}$ olan açının ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ dir. Buradan $x = \mp\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ olur.

$\cos x = -1$ ise kosinüsü -1 olan açının ölçüsü π dir. $x = \pi + k \cdot 2\pi$ olur.

$[0, 2\pi)$ aralığındaki kökleri $\left\{-\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}, \pi\right\}$ bulunur.

✔ **Örnek:** $\cos 3x + \cos x + \cos 2x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\cos 3x + \cos x = 2\cos\left(\frac{3x + x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - x}{2}\right)$

$\underbrace{\cos 3x + \cos x} + \cos 2x = 0$

$2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0 \;\Rightarrow\; \cos 2x\,(2\cos x + 1) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \cos 2x = 0$ veya $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\cos 2x = 0$ ise kosinüsü 0 olan açının ölçüsü $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir.

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$Ç_1 = \left\{\mp\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ ise kosinüsü $-\frac{1}{2}$ olan açının ölçüsü $\theta = \frac{2\pi}{3}$ dir.

$$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \left\{\mp\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ veya } \pm\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Örnek: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos(2x + \pi)$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$3x + \frac{\pi}{5} = 2x + \pi + k \cdot 2\pi$ veya $3x + \frac{\pi}{5} = -(2x + \pi) + k \cdot 2\pi$

$x = 4\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi$ veya $5x = -\frac{6\pi}{5} + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{6\pi}{25} + \frac{k \cdot 2\pi}{5}$

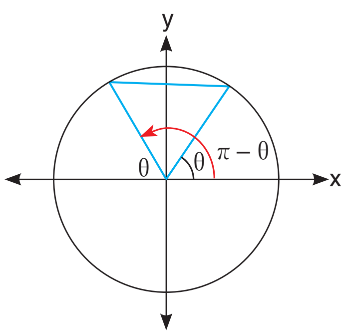
$Ç = \left\{\frac{4\pi}{5} + k \cdot 2\pi \text{ veya } -\frac{6\pi}{25} + \frac{k \cdot 2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

II. sinx = a Biçimindeki Denklemin Çözümü

i) $|a| > 1$ ise çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

ii) $|a| \leqslant 1$ ise $\sin x = a$ denklemini sağlayan $0 \leqslant \theta < 2\pi$ vardır. $\sin\theta = a$ iken $\sin(\pi - \theta) = a$ dir.

Buradan



$$\sin x = \sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \begin{cases} x = \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\sin x = a$ denkleminin çözüm kümesi

$Ç = \{\theta + k2\pi \text{ veya } \pi - \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ olur.

$\sin f(x) = \sin g(x)$ denkleminin çözüm kümesi $f(x) = g(x) + k2\pi$ veya $f(x) = \pi - g(x) + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ dir.

Örnek: $\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Sinüsü $\frac{1}{2}$ olan açının ölçsüü $\theta = \frac{\pi}{6}$ dır.

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$Ç = \left\{..., \frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}, ...\right\} \cup \left\{..., \frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}, ...\right\}$$ bulunur.

Örnek: $\cos 4x - \sin 2x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\underbrace{\cos 4x}_{1-2\sin^2 2x} - \sin 2x = 0 \Rightarrow {}^{-}/1 - 2\sin^2 2x - \sin 2x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$$

$\sin 2x = t$ dersek $\qquad 2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow (2t-1)\cdot(t+1) = 20$

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad t = -1$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \qquad\qquad \sin 2x = -1$$

Sinüsü $\frac{1}{2}$ olan açının ölçsü $\theta = \frac{\pi}{6}$ dır.

$$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

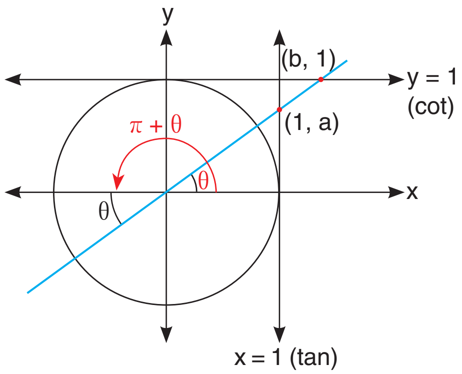
$$Ç_1 = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi \text{ veya } \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z\right\}$$

$$\sin 2x = -1 = \sin\frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$Ç_2 = \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ veya } \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$ bulunur.

III. tanx = a ve cotx = b (a, b ∈ R) Denklemlerinin Çözümü



tanx = a ve cotx = b denklemini sağlayan $[0, 2\pi)$ aralığındaki bir kökü θ ise

tanx = tanθ $\Rightarrow$ x = θ + kπ (k$\in\mathbb{Z}$)

cotx = cotθ $\Rightarrow$ x = θ + kπ

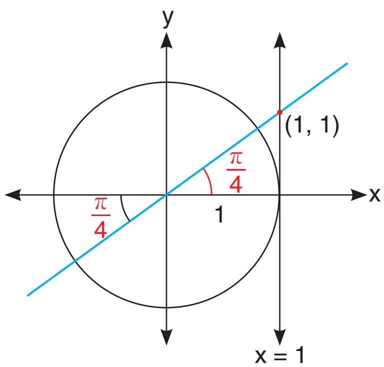
Buradan Ç $= \{\theta + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ bulunur.

tanf(x) = tang(x) veya cotf(x) = cotg(x) denklemlerin çözüm kümeleri

f(x) = g(x) + k · π, k$\in\mathbb{Z}$ dır.

Örnek: tanx = 1 denkleminin çözüm kümesini bulalım.

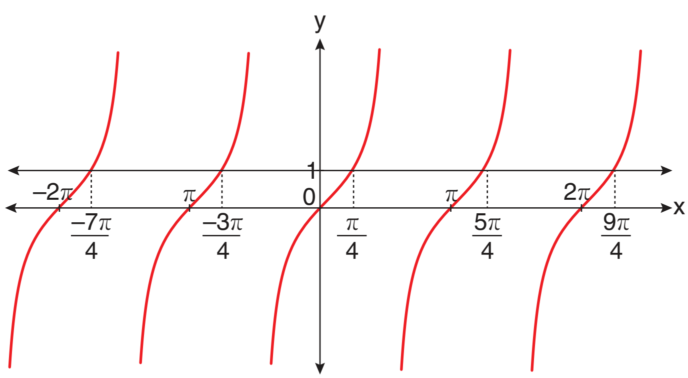
Çözüm



tanjantı 1 olan açının ölçüsü $\theta = \frac{\pi}{4}$ dır.

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$Ç = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{..., \frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, ...\right\}$



tanx = 1 denkleminin çözüm kümesi y = tanx eğrisi ile y = 1 doğrusunun kesim noktalarının apsislerinin kümesidir.

Örnek: $\cot x = -\sqrt{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Kotanjantı $-\sqrt{3}$ olan açının ölçüsü $\theta = \frac{5\pi}{6}$

$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$Ç = \left\{5\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{..., -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, ...\right\}$ bulunur.

Örnek: $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2x$ denklemi için aşağıdaki değerlerden hangisinin denklemin bir kökü olmadığını bulalım.

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{7\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $-\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{11\pi}{3}$

Çözüm

$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2x$ (Eşitliğin her iki tarafını sin2x e bölelim)

$\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sin 2x}{\sin 2x} \Rightarrow \cot 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ olur.

Kotanjantı $\frac{\sqrt{3}}{3}$ olan açının ölçüsü $\theta = \frac{\pi}{3}$ dir.

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$Ç = \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\} \left\{..., \frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}, ...\right\}$

$\frac{11\pi}{3} \notin Ç$ olduğundan denklemin kökü değildir.

Örnek: $\tan(x-5) \cdot \tan(75+3x) = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\tan(x-5) \cdot \tan(75+3x) = 1 \Rightarrow \tan(x-5) = \frac{1}{\tan(75+3x)}$

$\downarrow$

$\left(\cot(75+3x) = \tan\left(\underbrace{90-(75+3x)}_{15\,-\,3x}\right)\right)$

$\tan(x-5) = \cot(75+3x)$

$\tan(x-5) = \tan(15-3x)$

$x - 5 = 15 - 3x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$4x = 20 + k\pi$

$x = 5 + \frac{k\pi}{4}$

$Ç = \left\{5 + k \cdot \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Kosinüs ve Sinüse Göre Lineer Denkleminin Çözümü

a, b, c $\in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere

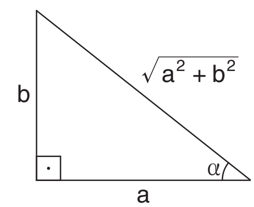
asinx + b · cosx = c biçimindeki denklemlere **sinx ve cosx e göre lineer denklem** denir.

$a \cdot \sin x + b\cos x = c$ (eşitliğin her iki tarafını a ile bölelim.)

$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$ bulunur.

$\frac{b}{a} = \tan\alpha$ dersek $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$$\sin x + \underbrace{\tan\alpha}_{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sin x\,+}{\underset{(\cos\alpha)}{1}} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\sin x\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos x}{\cos\alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{c}{a} \Rightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cdot\cos\alpha$$

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ yerine yazarsak $\sin(x+\alpha) = \frac{c}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b}}$

Bu denklemin köklerinin olması için

$-1 \leqslant \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{c^2}{a^2+b^2} \leqslant 1 \Rightarrow c^2 \leqslant a^2+b^2$ bağıntısı sağlanmalıdır.

Örnek: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$a = 1,\ b = \sqrt{3},\ \ c = 1$

$c^2 \leqslant a^2 + b^2$

$1 \leqslant 1 + (\sqrt{3})^2$ olduğundan denklemin çözümü vardır.

$$\sin x + \underbrace{\sqrt{3}}_{\tan\frac{\pi}{3}} \cos x = 1 \Rightarrow \sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos x} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$Ç = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ veya } \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Örnek: sinx – cosx = 1 denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

a = 1, b = –1, c = 1

$c^2 \leqslant a^2 + b^2 \Rightarrow 1^2 \leqslant 1^2 + (-1)^2$ olduğundan denklemin çözümü vardır.

$$\sin x - \underbrace{1}_{\tan\frac{\pi}{4}} \cos x = 1 \Rightarrow \frac{\sin x}{\underset{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)}{1}} - \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

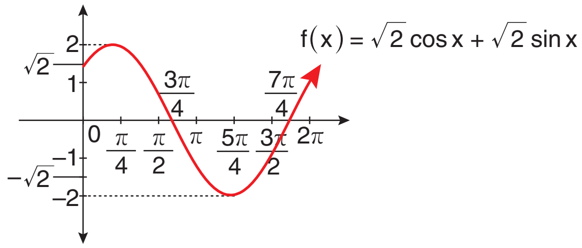
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow x = \pi + k \cdot 2\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$Ç = \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ veya } \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Örnek: $f(x) = \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x$ fonkisyonunun $[0, 2\pi)$ aralığında grafiğini çizerek alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulalım.

Çözüm

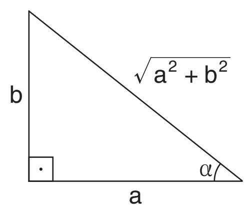
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	–2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$



f(x) fonksiyonunun grafiğinden en büyük değerin 2, en küçük değerin –2 olduğu görülür.

> f(x) = asinx + b · cosx fonksiyonun alabileceği en büyük değer $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}$, en küçük değer $f(x)=-\sqrt{a^2+b^2}$ dir.

$\tan\alpha=\dfrac{b}{a} \Rightarrow$



İspat f(x) = asinx + b · cosx ⇒

$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$f(x)=a\cdot\Big(\sin x+\underbrace{\frac{b}{a}}_{\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\cos x\Big)$$

$$=a\left(\sin x+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x\right)$$

$$=a\left(\frac{\sin x\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos x}{\cos\alpha}\right)$$

$$=a\left(\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha}\right)$$

$$=a\left(\frac{\sin(x+\alpha)}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\right)$$

$$=\cancel{a}\sin(x+\alpha)\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cancel{a}}$$

$-1\leqslant\sin(x+\alpha)\leqslant 1$ olduğundan

f(x) in en büyük değeri için $\sin(x+\alpha)=1$ olur. Buradan $f(x)_{max}=\sqrt{a^2+b^2}$ bulunur.

f(x) in en küçük değeri için $\sin(x+\alpha)=-1$ olur. Buradan $f(x)_{min}=-\sqrt{a^2+b^2}$ bulunur.

✔ **Örnek:** f(x) = 3 · cosx + sinx fonksiyonunun alabileceği doğal sayıların toplamını bulalım.

Çözüm

$f(x)=\underbrace{3}_{a}\cos x+\underbrace{1}_{b}\sin x$

a = 3, b = 1 dir. $f(x)_{max}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$f(x)_{min}=-\sqrt{3^2+1^2}=-\sqrt{10}$

$-\sqrt{10}<f(x)<\sqrt{10}$ f(x) in bu aralıkta alabileceği doğal sayılar 0, 1, 2, 3 olduğundan bu değerlerin toplamı 0 + 1 + 2 + 3 = 6 bulunur.

Kosinüs ve Sinüse Göre Birinci Dereceden Homojen Denklemlerin Çözümü

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ ab \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$a \cdot \sin x + b\cos x = 0$ biçimindeki denkleme **birinci dereceden homojen trigonometrik denklem** denir.

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$ birinci dereceden homojen denklemi $\cos x \neq 0$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafını böldüğümüzde

$$\frac{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \Rightarrow \frac{a \cdot \sin x}{\cos x} + \frac{b \cdot \cos x}{\cos x} = 0$$

$$\Rightarrow a \tan x + b = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{-b}{a}$$

denklemine dönüşerek çözüm yapılır.

Örnek: $\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 0$ denklemin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\frac{\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \Rightarrow 1 + \sqrt{3} \cdot \tan x = 0$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tanjant $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ olan açının ölçüsü $\frac{5\pi}{6}$ olduğundan $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ olur.

$Ç = \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Örnek: $\cos x - \sin x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \Rightarrow 1 - \tan x = 0 \Rightarrow \tan x = 1$$

Tanjant 1 olan açının ölçüsü $\frac{\pi}{4}$ olduğundan $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \ \ k \in \mathbb{Z}$ olur.

$Ç = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

Kosinüs ve Sinüse Göre İkinci Dereceden Homojen Denklemlerin Çözümü

a, b, c den en az ikisi sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere,

$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \cos x \sin x + c \cdot \sin^2 x = 0$

biçimindeki denkleme **ikinci dereceden homojen trigonometrik denklem** denir.

$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \cos x \cdot \sin x + c \cdot \sin^2 x = 0$ ikinci dereceden homojen denklemi $\cos x \neq 0$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafını $\cos^2 x$ e böldüğümüzde

$$\frac{a\cos^2 x + b \cdot \cos x \sin x + c\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$\frac{a\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\cos x \sin x}{\cos^2 x} + \frac{c\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$a + b\tan x + c\tan^2 x = 0$ denklemine dönüşerek çözüm yapılır.

Örnek: $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\frac{2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} \Rightarrow 2\tan^2 x - 5\tan x + 3 = 0$$

$\tan x = t$ dersek $\quad 2t^2 - 5t + 3 = 0 \Rightarrow (2t - 3)(t - 1) = 0$

$t = \frac{3}{2}$ veya $t = 1$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$\tan x = \frac{3}{2} \qquad \tan x = 1$

tanjantı $\frac{3}{2}$ olan açının ölçüsüne θ dersek

$x = \theta + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$ olur.

tanjantı 1 olan açının ölçüsü $\frac{\pi}{4}$ olduğundan $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Buradan çözüm kümesi, $Ç = \left\{\theta + k\pi \text{ veya } \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

4.12 ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki trigonometrik denklemin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $2 \cdot \sin x + 1 = 0$ **c.** $\cos x + 1 = 0$

ç. $2\cos 0 = 1$ **d.** $\sqrt{3} \cdot \tan x = -1$ **e.** $\cot x = \sqrt{3}$

2. Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\sin 7x = 0$ **c.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

3. $\tan(3x-\pi)\cdot\tan(2\pi-x)=1$ denklemini $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ aralığındandaki köklerini bulunuz.

4. $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin(\pi+x)$ denklemini $(0,\ 2\pi)$ aralığındaki köklerini bulunuz.

5. $\cos6x-\cos2x=\sin2x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

6. $\cos2x-4\cos x-5=0$ denkleminin $[0,2\pi)$ aralığındaki köklerini bulunuz.

7. $\cos^4x-\sin^4x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

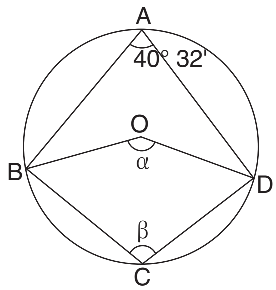
8. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

9. $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10. $\sin^2x+(1+\sqrt{3})\cdot\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2x=0$ denklemini $[0,2\pi)$ aralığındaki çözüm kümesini bulunuz.

11. $\sin6x+\sin2x-2\cos^2x=-1$ denklemini sağlayan köklerin $[0,\pi]$ aralığındaki değerlerinin toplamını bulunuz.

4. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI - 1

1. 

Şekilde A, B, C, D noktaları o merkezli çemberin üzerindedir.

$(\widehat{BAD}) = 40° \, 32'$ dır.

$m(\widehat{BOD}) = \alpha$ ve $m(\widehat{BCD}) = \beta$ ise $\alpha + \beta$ nın ölçüsü kaçtır?

A) 180° B) 220° C) 220° 32' D) 180° 32' E) 180° 4'

2. Esas ölçüsü 70° ve $450° < \theta < 2450°$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı θ açısı vardır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

3. $\dfrac{3 + \sin^2 20}{4 - \cos^2 20}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

4. $\operatorname{cosec} x - \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) sinx B) cosx C) tanx D) –cotx E) cosx

5. $\dfrac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = a$ ise $\dfrac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$ nın a cinsinden değeri nedir?

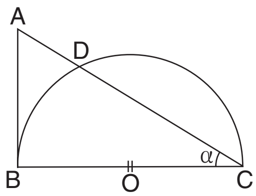
A) a B) 2a C) $\dfrac{1}{a}$ D) $-\dfrac{1}{a}$ E) –2a

6. $5 \cdot \sin 17x + \dfrac{M}{2} = 6$ ise m reel sayısının alabileceği değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) [2, 22] B) [6, 20] C) [0, 22] D) [–2, 20] E) [6, 22]

7. a = cos1200°, b = sin(–1200°), c = tan4000°, ç = cot(–100°) a, b, c ve d nin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) $- - + -$ B) $- - + +$ C) $- - - +$ D) $- + - -$ E) $+ - + +$

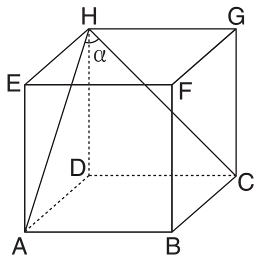
8. 

Şekilde $\widehat{ABC}$ nın [AB] kenarı [BC] çaplı çembere B noktasında teğettir.

$m\left(\widehat{ACB}\right) = \alpha$ ve $|AD| = 2br$

$|DC| = 8$ br ise secα nın değeri kaçtır?

A) 2 B) 4 C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ E) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

9. 

Yandaki şekilde ABCDEFGH küptür. $m\left(\widehat{AHC}\right) = \alpha$ ise cosecα nın değerini bulunuz.

A) 2 B) 4 C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

10. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) Ölçüsü $-\frac{43\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsü $\frac{7\pi}{5}$ dir.

B) $\cos\left(-\frac{13\pi}{2} + x\right) = \sin x$

C) $\cos(-1600°) = -\cos 20$

D) $\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

E) $-\frac{37\pi}{5}$ radyan olan açının esas ölçüsü 108° dir.

11. $-\cos\frac{\pi}{17}\cdot\cos\frac{2\pi}{17}\cdot\cos\frac{4\pi}{17}\cdot\cos\frac{8\pi}{17}$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $-\frac{1}{8}$ E) $-\frac{1}{16}$

12. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ olmak üzere, $\sqrt{1 - \sin 2\theta}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\cos\theta - \sin\theta$ B) $\sin\theta - \cos\theta$ C) $\cos\theta$ D) $\sin\theta$ E) $\sin 2\theta$

13. $\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cos^2 3 + ... + \cos^2 89$ toplamının eşiti kaçtır?

A) 44 B) 45 C) $45 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $44 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $43 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

14. $a = \tan 10°$

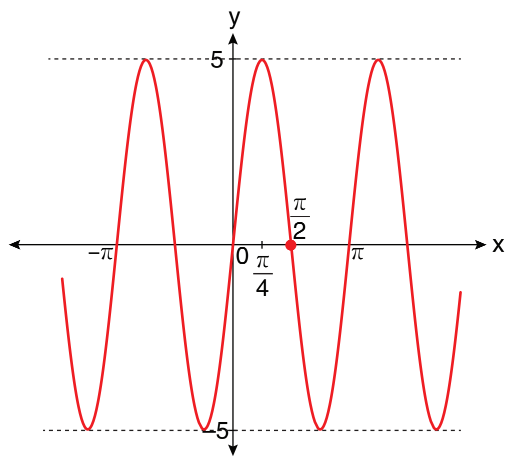
$b = \sin 10°$

$c = \sin 175°$

olduğuna göre a, b ve c nin küçükten büyüğe sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

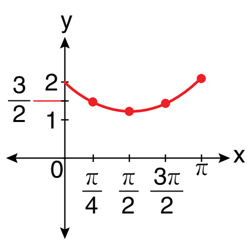
A) $b < c < a$ B) $b < a < c$ C) $c < b < a$ D) $c < a < b$ E) $a < b < c$

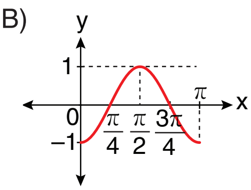
15. a ve b sabitler olmak üzere, yanda grafiği verilen $y = a \cdot \sin(bx)$ fonksiyonuna göre a + b nin değeri kaçtır?

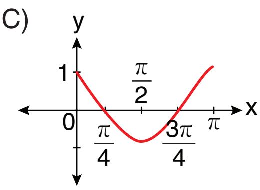


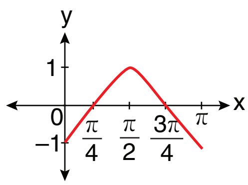
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

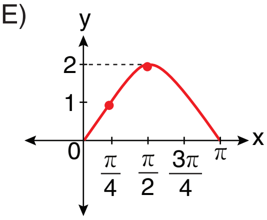
16. $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2\cos^2 x$ fonksiyonun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A)


B)


C)


D)


E)


17. $\sin\left(2\arccos\dfrac{5}{13}\right)$ ifadesinin eşiti kaçtır?

A) $\dfrac{13}{13}$ B) $\dfrac{60}{129}$ C) $\dfrac{13}{60}$ D) $\dfrac{10}{169}$ E) $\dfrac{120}{169}$

18. $y = \arcsin\left(\dfrac{2x+1}{4}\right)$ fonksiyonun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left[-1, \dfrac{5}{2}\right]$ B) $\left[\dfrac{-5}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$ C) $[-4, 4]$ D) $\left[\dfrac{-1}{2}, 2\right]$ E) $[-1, 4]$

19. $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ ve $\sin x = \dfrac{12}{13}$ ise $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi + x)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\dfrac{17}{13}$ B) $-\dfrac{7}{3}$ C) $\dfrac{7}{3}$ D) $\dfrac{17}{13}$ E) $\dfrac{12}{5}$

20. f(X) fonksiyonunun periyodu 9 olan periyodki bir fonksiyondur.

f(2) = 15, f(3) = 18 ise 2 · f(29) – f(48) işleminin sonucu kaçtır?

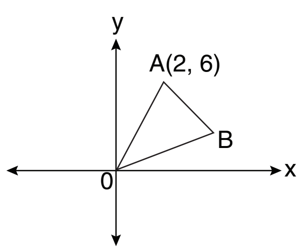
A) 30 B) 27 C) 12 D) 15 E) 21

21. $f\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, f(x) = sinx fonksiyonu tanımlanıyor.

$f^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + f^{-1}(-1)$ değeri kaçtır?

A) $-\dfrac{\pi}{6}$ B) $\dfrac{7\pi}{6}$ C) $\dfrac{5\pi}{6}$ D) $\dfrac{\pi}{6}$ E) $-\dfrac{5\pi}{6}$

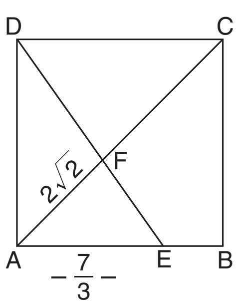
22.



Analitik düzlemde $\widehat{AOB}$ de A(2, 6) dir. $m(\widehat{BOX}) = m(\widehat{AOY})$ ise $\tan(\widehat{AOB})$ değeri kaçtır?

A) $\dfrac{4}{3}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) 3 D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

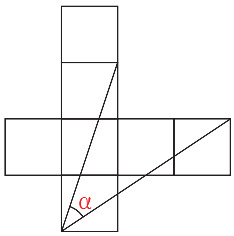
23.



ABCD karesinde [AC] köşegen $|AF| = 2\sqrt{2}$ birim $|AE| = \dfrac{7}{3}$ birim ise $\tan(\widehat{CFE})$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

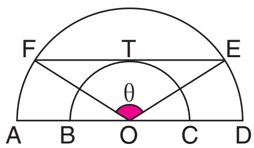
A) $-\dfrac{3}{5}$ B) $\dfrac{12}{5}$ C) $-\dfrac{7}{5}$ D) $\dfrac{5}{7}$ E) $-\dfrac{5}{7}$

24. Yandaki şekil bir küpün açılımıdır. Buna göre cotα nın değeri kaçtır?



A) $\frac{4}{7}$ B) $\frac{9}{7}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

25. O noktası her iki çemberin merkezi olmak üzere, $|AB| = 2|BO|$ dır. [EF] kirişi küçük çembere T noktasında teğet ise cosθ kaçtır?



A) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{3}{4\sqrt{2}}$ D) $\frac{-7}{9}$ E) $-\frac{3}{4\sqrt{2}}$

26. $\frac{1}{1-\cos x} - \frac{1}{1+\cos x} = \frac{4}{3}$ denkleminin bir kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{3\pi}{6}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{5\pi}{3}$

27. $2\cos x + 1 \leqslant 0$ eşitsizliği aşağıdaki aralıklardan hangisinde sağlanır?

A) $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$ B) $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ C) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ D) $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right]$ E) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right]$

28. $\cot 2x + \tan x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ denkleminin $[0, 2\pi]$ aralığındaki kökler toplamı kaçtır?

A) 4π B) 3π C) 6π D) $\frac{8\pi}{3}$ E) $\frac{11\pi}{3}$

29. $\sin\frac{x}{12} + \cos\frac{x}{12} = \frac{4}{5}$ ise $\cos\frac{x}{3}$ ifadesinin değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{404}{625}$ B) $\frac{164}{325}$ C) $\frac{562}{625}$ D) $\frac{463}{625}$ E) $\frac{504}{352}$

4. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI - 2

1. $\sqrt{2}\sin x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \geqslant 0$ eşitsizliğinin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{3}$ B) $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$ C) $\dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$ D) $x \geqslant \dfrac{\pi}{6}$ E) $0 \leqslant x \leqslant \pi$

2. $\left.\begin{array}{l} \sin 2017° \\ \cos(-3617°) \\ \tan(-1000°) \\ \cot 480° \end{array}\right\}$ Trigonometrik değerlerin işaret sıralaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) $- - - -$ B) $- + + -$ C) $- - + -$ D) $+ - - -$ E) $- + - +$

3. Aşağıdakilerden hangisi cos10° ye eşit değildir?

A) sin(–280°) B) cos(–170°) C) cos350° D) –cos190° E) sin80°

4. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$\tan x + \cot x = \dfrac{26}{5}$ ise sin4x in değeri kaçtır?

A) $\dfrac{120}{169}$ B) $\dfrac{119}{169}$ C) $\dfrac{25}{169}$ D) $\dfrac{17}{169}$ E) $\dfrac{16}{169}$

5. sin2x = cosx denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığındaki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {30°, 150°, 270°} B) {30°, 150°, 300°} C) {30°, 90°, 150°, 270°}

D) {30°, 120°, 270°} E) {30°, 270°}

6. $\sin 65 \cdot \cos 25 - \dfrac{1}{2} \cdot \cos 50$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 0 B) –1 C) 1 D) $-\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}$

7. $\arcsin\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) + \arctan(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ ifadesinin değeri nedir?

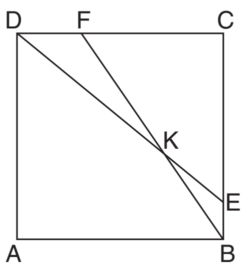
A) $\dfrac{5\pi}{6}$ B) π C) $\dfrac{13\pi}{12}$ D) $\dfrac{\pi}{12}$ E) $\dfrac{\pi}{6}$

8. $\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$ ifadesinin sonucu kaçtır?

A) $\dfrac{63}{35}$ B) $\dfrac{33}{65}$ C) $\dfrac{37}{65}$ D) $-\dfrac{61}{65}$ E) $-\dfrac{21}{65}$

9. $\sin\left(\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ C) $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ D) $-\dfrac{2}{5}$ E) $-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

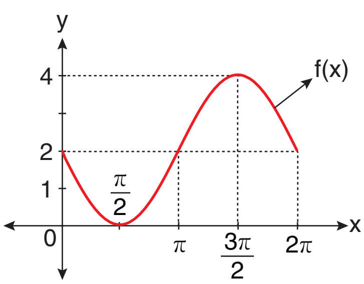
10. 

Yandaki şekilde ABCD kare, $2|BE|=|CE|$, $|BF|=\sqrt{61}$ birim ve $|DF|=1$ birim dir. $m(\widehat{DKF})=\alpha$ ise $\cot\alpha$ nın değeri kaçtır?

A) $\dfrac{6}{\sqrt{61}}$ B) $\dfrac{3}{20}$ C) $\dfrac{4}{9}$ D) $\dfrac{9}{4}$ E) $\dfrac{27}{8}$

11. $12x=\pi$ ise $\dfrac{\sin 4x+\sin x}{\cos 2x+\cos 5x}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) -1 C) 1 D) $\dfrac{1}{2}$ E) 2

12. 

Yandaki şekilde $[0, 2\pi]$ aralığında f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 3 - \sin x$ B) $y = 2 + \cos x$ C) $y = 2 - 2\sin x$ D) $y = 2\sin x + 1$ E) $y = 2 - \sin x$

13. $f(x)=\cos^3\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun periyodu nedir?

A) π B) $\dfrac{\pi}{2}$ C) $\dfrac{2\pi}{5}$ D) $\dfrac{5\pi}{2}$ E) $\dfrac{2\pi}{3}$

14. $\tan a = 3$ ise $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) - \sin(2\pi - a) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)$ nın değeri kaçtır?

A) $\frac{6+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$ B) $\frac{18+\sqrt{10}}{3\sqrt{10}}$ C) $\frac{18-\sqrt{10}}{3\sqrt{10}}$ D) $\frac{1}{3}$ E) -3

15. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\tan\alpha$ B) $2\tan\alpha$ C) -2 D) $\cot\alpha$ E) $2\cot\alpha$

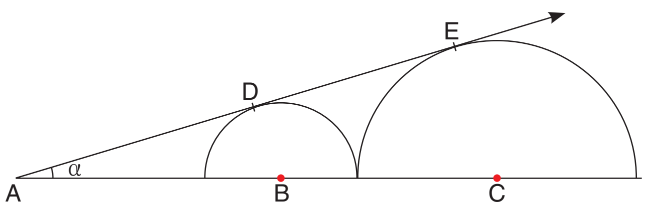
16. $-2\sin^2 x + 3\sin x = 1$ denkleminin negatif en büyük iki kökünün toplamı kaçtır?

A) $-480°$ B) $-360°$ C) $-250°$ D) $-580°$ E) $-330°$

17. $\sin 2x + \sqrt{3} \cdot \sin x - \cos x \cdot = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin $[0, \pi]$ aralığındaki köklerin toplamı kaçtır?

A) $\frac{5\pi}{3}$ B) π C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{3}$

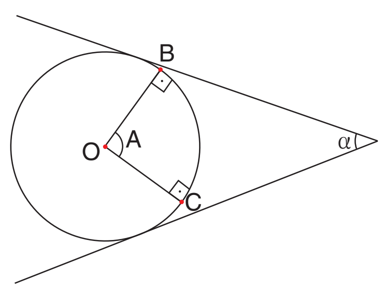
18.



B ve C yarım çemberlerin merkezleri, DE doğrusu ortak teğet, A, B, C doğrusaldır. B merkezli çemberin yarıçapı 2 birim, C merkezli çemberin yarıçapı 4 birim ve $m(\widehat{EAC}) = \alpha$ ise $\sec\alpha$ nın değeri kaçtır?

A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{4\sqrt{3}}{2}$

19. Yandaki şekilde O merkezli çemberde $\cos\beta = -\frac{2}{3}$ ise $\cos\frac{\alpha}{2}$ nın değeri kaçtır?



A) $\frac{\sqrt{30}}{6}$ B) $\frac{-1}{9}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{6}}{9}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

20. $\sin x = \frac{3}{5}$ ise cos3x in değeri kaçtır?

A) $\frac{-16}{27}$ B) $\frac{-18}{27}$ C) $\frac{-22}{27}$ D) $\frac{-24}{27}$ E) $\frac{-26}{27}$

21. sin15° + cos15° nin değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

22. cos35° · sin145° – sin30° cos20° + 1 işleminin sonucu kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

23. $\cos x - \sin x = \frac{2}{3}$ ise sin2x in değeri kaçtır?

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{13}{9}$ C) $\frac{7}{9}$ D) $\frac{4}{18}$ E) $\frac{5}{18}$

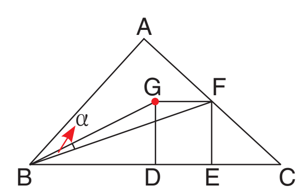
24. sin9° = x ise sin72° nin x cinsinden değeri nedir?

A) x B) 2x C) $1-2x^2$ D) $2x^2-1$ E) $\frac{1}{x}$

25. $\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}$ denkleminin $[0, \pi)$ aralığındaki değerlerin toplamı kaçtır?

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{5\pi}{8}$ C) $\frac{5\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

26. $\widehat{ABC}$ de G ağırlık merkezidir. $|AB| = |AC|$ ve GDEF karedir. $m(\widehat{GBF}) = \alpha$ ise $\cot\alpha$ kaçtır?



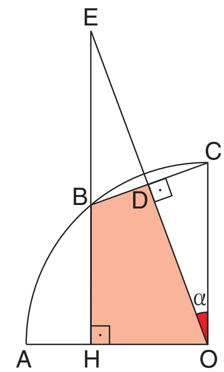
A) $\frac{14}{9}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{3}{16}$ D) $\frac{4}{19}$ E) $\frac{1}{8}$

27. Şekilde O merkezli 2 birim yarıçaplı çeyrek çember verilmiştir.

$[EH] \perp [OA]$

$[BC] \perp [OE]$

$m(\widehat{COE}) = \alpha$ olduğuna göre boyalı alan $A(OHBD)$ kaç birim karedir?



A) $\cos 4\alpha + \cos 2\alpha$

B) $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$

C) $2\sin\alpha + \sin 2\alpha$

D) $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$

E) $\sin 2\alpha + \cos 4\alpha$

28. $\arcsin\left(3x - \frac{2}{5}\right) + \arccos\left(4x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ise x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $\frac{1}{10}$ C) 5 D) $\frac{4}{19}$ E) $\frac{1}{8}$

29. $\sin 5x - \cos 50° = \cos 70°$ denklemi veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi, bu denklemin bir kökü değildir?

A) 34° B) 70° C) 110° D) 142° E) 182°

30. $\sqrt{6} \cdot \cos x + \sqrt{2} \cdot \sin x = 0$ denkleminin pozitif köklerinin en küçüğü, aşağıdakilerden hangisidir?

A) 30° B) 45° C) 60° D) 120° E) 150°

31. $f(x) = 5\cos x - 12\sin x$ ifadesinin alabileceği kaç farklı doğal sayı vardır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17