NURŞEN Hocayla Matematik

5. ÜNİTE

SAYILAR VE CEBİR

Logaritma; üstel olarak artan ya da azalan çokluklarda sürekli büyüyen ya da azalan sayılarla işlem yapma zorluğundan kurtulmak için ortaya çıkmıştır. Kimyadaki pil ölçeğinde, ses şiddetinde, denizcilik alanında deprem şiddetini ölçen Richter ölçeğinde, nüfus artışı ve faiz birikimini hesapları gibi pek çok alanda kullanılmaktadır.

5.1 ÜSTEL FONKSİYON

Üstlü İfadeler ve Özellikleri

$a^m \longrightarrow$ üs veya kuvvet

a → taban

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{m \text{ tane}} \qquad (a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^+)$$

$a, b \in \mathbb{R}$ için $a \neq 0$ ve $m, n \in \mathbb{N}^+$

i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad a^3 \cdot a^2 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ tane}} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ tane}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ tane}} = a^5$

ii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad \dfrac{a^5}{a^3} = \dfrac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{5-3} = a^2$

iii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\qquad (a^4)^3 = \underbrace{a^4 \cdot a^4 \cdot a^4}_{3 \text{ tane}} = a^{4+4+4} = a^{12}$

iv) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $\qquad (ab)^3 = \underbrace{ab \cdot ab \cdot a^b}_{3 \text{ tane}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ tane}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b}_{3 \text{ tane}} = a^3 \cdot b^3$

v) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

vi) $a^\circ = 1$ $\qquad \dfrac{a^3}{a^3} = \dfrac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{3-3} = a^\circ = 1$

vii) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\qquad \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{a^\circ}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$

viii) $a^m = b^m = \begin{cases} a = b & , \quad m \text{ tek} \\ a = b & , \quad m \text{ çift} \end{cases}$

ix) $a^n = a^m \Rightarrow n = m$

x) $a \in \mathbb{R}^+$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

✔ **Örnek:** Aşağıdaki ifadelerin en sade şeklini bulalım.

a. $\dfrac{(-3^{-4}) \cdot 9 \cdot (-3^{-2})^2}{(81)^{-2}}$ **b.** $\dfrac{2^n + 2^{n-1}}{2^{n+1} - 2^n}$ **c.** $\dfrac{4^{-2} + 4^{-1}}{2^6 + 2^8}$ **ç.** $\sqrt[6]{(0,5)^8} \cdot \sqrt[3]{(0,4)^8} \cdot 10^{\frac{2}{3}}$

Çözüm

a. $\dfrac{(-3^{-4}) \cdot 3^2 \cdot (-3^{-2}) \cdot (-3^{-2})}{(3^4)^{-2}} = \dfrac{-3^{-4} \cdot 3^2 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot}{3^{-8}} = \dfrac{3^{-4+2-2-2}}{3^{-8}} = \dfrac{3^{-6}}{3^{-8}} = -3^{-6-(-8)} = -3^2 = -9$ bulunur.

Çözüm

b. $\dfrac{2^n+2^{n-1}}{2^{n+1}-2^n}=\dfrac{2^n+2^n\cdot 2^{-1}}{2^n\cdot 2-2^n}=\dfrac{\cancel{2^n}(1+2^{-1})}{\cancel{2^n}(2-1)}=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{3}{2}$

c. $\dfrac{4^{-2}+4^{-1}}{2^6+2^8}=\dfrac{\frac{1}{4^2}+\underset{(4)}{\frac{1}{4}}}{2^6(1+2^2)}=\dfrac{\frac{5}{16}}{5\cdot 2^6}=\dfrac{\cancel{5}}{16}\cdot\dfrac{1}{\cancel{5}\cdot 2^6}=\dfrac{1}{2^4\cdot 2^6}=\dfrac{1}{2^{10}}=2^{-10}$

ç. $\sqrt[6]{(0,5)^8}\cdot\sqrt[3]{(0,4)^8}\cdot 10^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{5}{10}\right)^{\frac{8}{16}}\cdot\left(\dfrac{4}{10}\right)^{\frac{8}{3}}\cdot(2\cdot 5)^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{8}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}$

$=(2^{-1})^{\frac{4}{3}}\cdot\dfrac{2^{\frac{8}{3}}}{5^{\frac{8}{3}}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}-\frac{8}{3}}=2^{\frac{6}{3}}\cdot 5^{\frac{-6}{3}}=2^2\cdot 5^{-2}=\dfrac{4}{25}$

Örnek: $27=9^x-3^{x+1}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$27=9^x-3^{x+1}\Rightarrow(3^x)^2-3^x\cdot 3-27=0$ denkleminde $3^x=t$ dersek

$t^2-3t-27=0\Rightarrow(t-9)\cdot(t+3)=0\ \Rightarrow\ t=9$ veya $t=-3$

$t=9$ için $\quad 3^x=9\Rightarrow 3^x=3^2\Rightarrow\ x=2$

$t=-3$ için $3^x=-3$ denkleminden çözüm elde edilemez. Buradan Ç = {2} bulunur.

Örnek: $5^x+5^x+5^x+5^x=35^x+35^x$ eşitliği veriliyor. Buna göre 49^{x+1} ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$\underbrace{5^x+5^x+5^x+5^x}_{4\text{ tane}}=\underbrace{35^x+35^x}_{2\text{ tane}}\Rightarrow 4\cdot 5^x=2\cdot 35^x\Rightarrow 4\cdot 5^x=2\cdot(7\cdot 5)^x\Rightarrow$

$4\cdot\cancel{5^x}=2\cdot 7^x\cdot\cancel{5^x}\Rightarrow 2=7^x$

$49^{x+1}=(7^2)^{x+1}=7^{2x+2}=(\underbrace{7^x}_{2})^2\cdot 7^2=2^2\cdot 7^2=(2\cdot 7)^2=14^2=196$ bulunur.

Örnek: $3^x=2$ ve $27^y=\dfrac{1}{16}$ ise $\dfrac{2x+y}{x-y}$ nin eşitini bulalım.

Çözüm

$3^x=2$ ve $27^y=\dfrac{1}{2^4}$

$(3^3)^y=2^{-4}\qquad(2=3^x)$

$3^{3y}=(3^x)^{-4}\Rightarrow 3^{3y}=3^{-4x}\Rightarrow 3y=-4x\Rightarrow y=\dfrac{-4x}{3}$

$\dfrac{2x+y}{x-y}=\dfrac{2x-\frac{4x}{3}}{x-\left(\frac{-4x}{3}\right)}=\dfrac{\frac{6x-4x}{\cancel{3}}}{\frac{3x+4x}{\cancel{3}}}=\dfrac{2\cancel{x}}{7\cancel{x}}=\dfrac{2}{7}$ bulunur.

5.1.1 Üstel Fonksiyon

ETKİNLİK

$f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $h(x) = 1^x$ ve $k(x) = (-3)^x$

$x \in \mathbb{R}$ için aşağıda oluşturulan tablo ve grafikler incelendiğinde

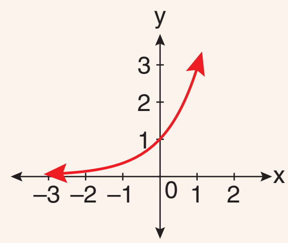
a. Hangileri $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ye fonksiyon olur?

b. Fonksiyon olanlardan $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ mıdır? (bire bir midir?)

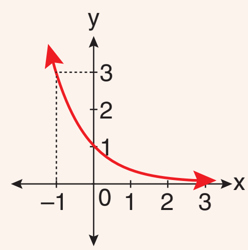
c. Fonksiyon olanlardan, fonksiyonun örten olması için değer kümelerini nasıl belirlenir?

ç. a nın hangi gerçek sayı değeri için $y = a^x$, $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ye birebir ve örten fonksiyon olur? Tartışınız.

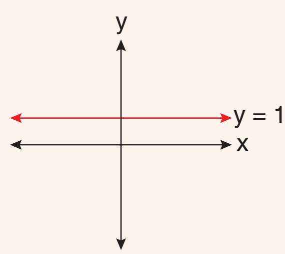
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	....	$+\infty$
$f(x) = 3^x$	....	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	3	....	



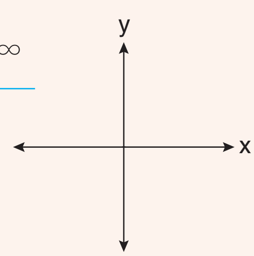
x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	....	$+\infty$
$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$		3	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$		



x	$-\infty$	....	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	....	$+\infty$
$h(x) = 1^x$	....	1	1	1	1	1	1	....	



x	$-\infty$	....	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	....	$+\infty$
$k(x) = (-3)^x$	....	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{R}$	1	3	$\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$	-3	....	



$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, f(x) = a^x fonksiyonuna, tabanı “a” olan **üstel fonksiyon** denir.

f(x) = a^x üstel fonksiyonunda bağımsız değişken bir sayının kuvveti şeklindedir. Tanım kümesi reel sayılar kümesi, değer kümesi pozitif reel sayılar kümesidir.

Örnek: Aşağıdakilerden hangilerinin üstel fonksiyon olduğunu belirleyelim.

a. $f(x) = 5^x$ **b.** $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **c.** $h(x) = (\sqrt{3})^x$

ç. $k(x) = 1^x$ **d.** $m(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^x$ **e.** $n(x) = x^3$

Çözüm

a. $f(x) = 5^x$, a = 5 $>$0 olduğundan f(x), üstel fonksiyondur.

b. $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $a = \frac{1}{4} > 0$ olduğundan g(x), üstel fonksiyondur.

c. $h(x) = (\sqrt{3})^x$, $a = \sqrt{3} > 0$ olduğundan h(x), üstel fonksiyondur.

ç. $k(x) = 1^x$, a = 1 tanım gereği taban 1 den farklı olmalıdır. Bu durumda k(x), üstel fonksiyon belirtmez.

d. $m(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^x$, $a = -\frac{1}{2} < 0$ olduğundan üstel fonksiyon belirtmez.

e. $n(x) = x^3$ fonksiyonunun tabanı sabit sayı olmadığından üstel fonksiyon belirtmez.

Örnek: Bir bankaya % 20 bileşik faizle (anaparanın belli bir süre faize yatırılıp süre sonunda faizi ile birlikte tekrar faize yatırılması) A lira para yatıran bir kişinin ₺ yıl sonunda olacağı para miktarını veren formülü bulalım.

Çözüm

1. yılın sonunda $A + A\frac{20}{100} = \frac{120}{100} \cdot A = A\left(\frac{120}{100}\right)^1$

2. yılın sonunda $B + B\frac{20}{100} = \frac{120}{100} \cdot B^C = \frac{120}{100}\left(\frac{120}{100}A\right) = A \cdot \left(\frac{120}{100}\right)^2$

3. yılın sonunda $C + C\dfrac{20}{100} = \dfrac{120}{100}\underset{\overset{\downarrow}{\frac{120}{100}B}}{C} = \dfrac{120}{100}\left(\dfrac{120}{100}\underset{\overset{\downarrow}{\frac{120}{100}A}}{B}\right) = \dfrac{120}{100}\,\dfrac{120}{100}\,\dfrac{120}{100}A = A\left(\dfrac{120}{100}\right)^3$

⋮

t. yılın sonunda alacağı para miktarı $A\left(\dfrac{120}{100}\right)^t$ olur. Buradan para miktarına y dersek t zamana bağlı fonksiyonu

$y = A \cdot (1,2)^t$ bulunur.

Bileşik faiz, nüfus artması gibi problemler üstel fonksiyonlarla ifade edilir.

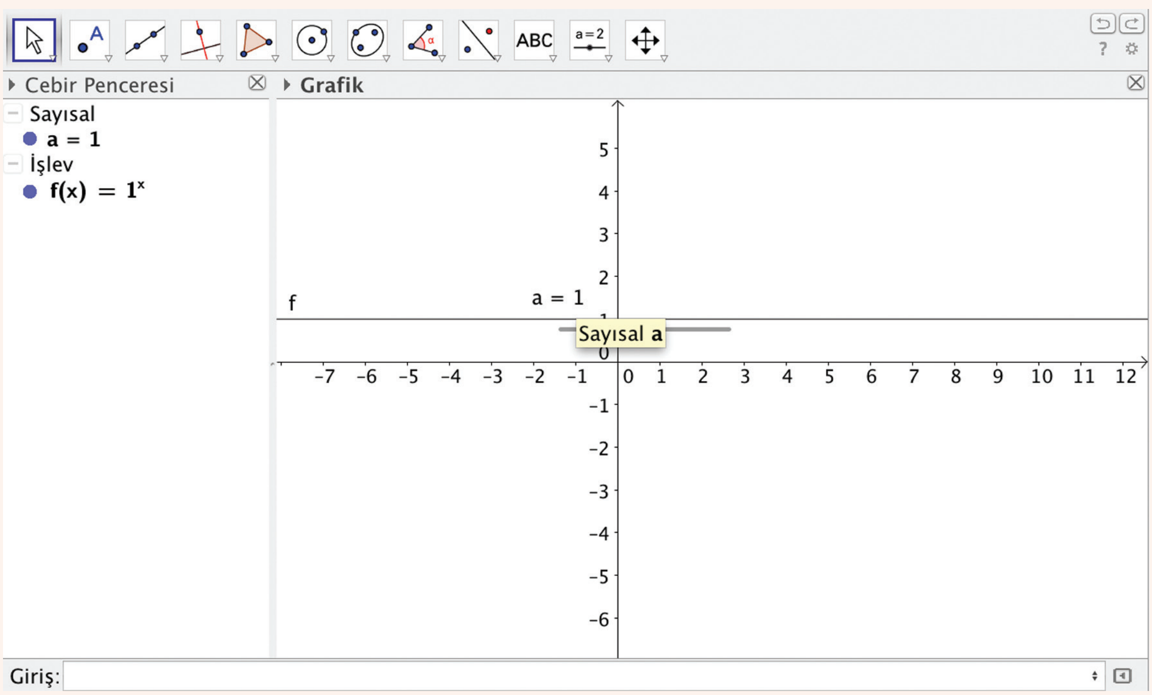
ETKİNLİK

Geogebra programını açalım.

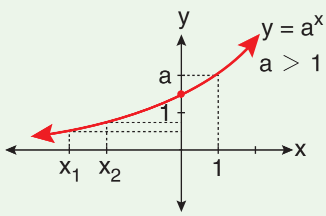
i. Araç çubuğunda bulunan sürgü düğmesini tıklayarak a sürgüsünü minimum 0 · 1, maksimum 5 olarak oluşturalım.

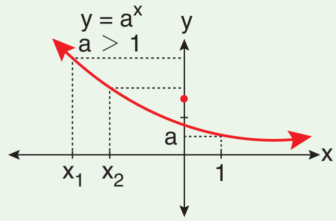
ii. Giriş alanına a^x yazarak enter tuşuna basalım.

iii. Araç çubuğunda taşı düğmesini tıklayalım. Bu durumda aşağıdaki şekil elde edilir.



Buna göre a sürgüsünü hareket ettirdiğinizde $f(x) = a^x$ fonksiyon grafiğinin hangi a değerlerinde artan, hangi a değerlerinde azalan olduğunu tartışınız.





$a > 1$ iken

$y = a^x$ iken üstel fonksiyonu artan fonksiyondur.

$(x_1 < x_2$ iken $a^{x_1} < a^{x_2}$ dir.$)$

$0 < a < 1$ iken

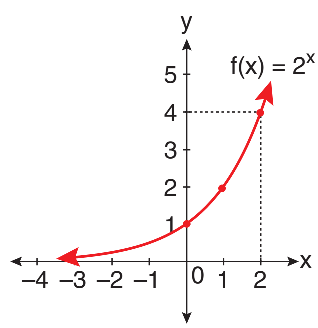
$y = a^x$ üstel fonksiyonu azalan fonksiyondur.

$(x_1 < x_2$ iken $a^{x_1} > a^{x_2}$ dir.$)$

Örnek: $f(x) = 2^x$ ve $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ üstel fonksiyonlarının değişim tablosu yaparak grafiklerini karşılaştıralım.

Çözüm

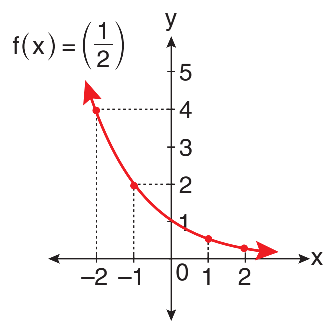
x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x) = 2^x$	.... ↗	$\frac{1}{4}$ ↗	$\frac{1}{2}$ ↗	1 ↗	2 ↗	4 ↗	....



$f(x) = 2^x$ fonksiyonunda taban 2 olup 1 den büyüktür.

$x_1 < x_2$ iken $2^{x_1} < 2^{x_2}$ alacağından $f(x) = 2^x$ artan fonksiyondur.

x	$-\infty$	....	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x) = 2^x$	.... ↘		4 ↘	2 ↘	1 ↘	$\frac{1}{2}$ ↘	$\frac{1}{4}$ ↘	....



$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunda taban $\frac{1}{2}$ olup 1 den küçükdür.

$x_1 < x_2$ iken $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$ olacağından $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ azalan fonksiyon olur.

$y = a^x$ ile $y = a^{-x}$ eğrileri y eksenine göre simetriktir.

Örnek:

a. $f(x) = 2^x$ ve $g(x) = 3^x$

b. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ve $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

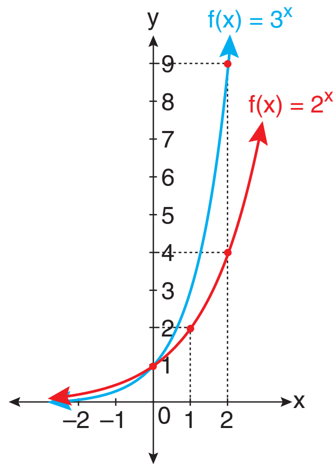
Yukarıda verilen üstel fonksiyonların grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

Çözüm

a.

x	....	–2	–1	0	1	2	....
$f(x) = 2^x$	....	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	....

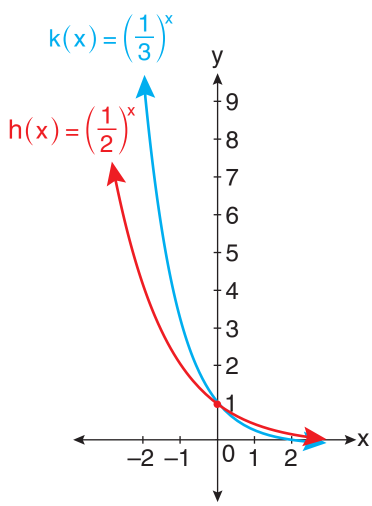
x	....	–2	–1	0	1	2	....
$g(x) = 3^x$	....	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	....



b.

x	....	–2	–1	0	1	2	....
$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	....	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	....

x	....	–2	–1	0	1	2	....
$k(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	....	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	....



$a > 1$ iken $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiği a nın değeri büyüdükçe y eksenine yaklaşmaktadır.

$0 < a < 1$ iken $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonun grafiği a nın değeri küçüldükçe y eksenine yaklaşmaktadır.

5.1.2 Üstel Fonksiyonların Bire Bir ve Örtenliği

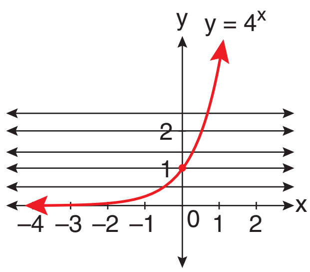
x eksenine (tanım kümesine) paralel çizilen her doğru, grafiği en fazla bir noktada kesiyorsa grafik, **birebir fonksiyon** grafiğidir. Bu yönteme **yatay doğru testi** denir.

Fonksiyonun örten olup olmadığını anlamak için yatay doğru testi kullanılabilir. Değer kümesinin her elemanından çizilen yatay doğru, fonksiyonun grafiği yani en az bir noktada kesiyorsa bu fonksiyon **örten fonksiyon**dur.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$x \to f(x) = 4^x$

üstel fonksiyonun birebir ve örten olup olmadığını araştıralım.



Çözüm

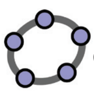
I. yol

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 \neq x_2$ iken $4^{x_1} \neq 4^{x_2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan $f(x) = 4^x$ üstel fonksiyonu bire birdir.

$\forall y \in \mathbb{R}^+$ için $y = 4^x$ olacak biçimde $\exists x \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan $f(x) = 4^x$ üstel fonksiyonu örtendir.

Şekilde yatay doğru testine göre de birebir ve örten olduğu görülür.

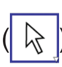
II. yol


Geogebra programını çalıştırıp

i) Giriş bölümüne 4^x yazarak enter tuşuna basalım.

ii) Araç çubuğundan sürgüyü seçelim Alt sınırı 0, üst sınırı 5 yapalım.

iii) Giriş bölümüne y = a yazarak enter tuşuna basalım.

iv) Araç çubuğundan taşı ()tıklayalım. Sürgüyü hareket ettirerek x eksenine paralel doğruların $y = 4^x$ fonksiyon grafiğini yalnız bir noktada kestiği görülür.

Buradan $f(x) = 4^x$ üstel fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyon olduğu anlaşılır.

Sonuç: $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$x \to f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu bire bir ve örten fonksiyondur.

5.1. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazınız.

a. $\dfrac{(7a)\cdot(2a^4)}{-28\cdot a^9}$ **b.** $\dfrac{(-3a^2)^4\cdot(b^{-1})^3}{-2a^{-2}\cdot(a\cdot b^{-1})^5}$ **c.** $\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}\cdot\dfrac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}$

2. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\dfrac{(-3)^2\cdot(-3^2)\cdot 3^{-8}}{9^{-2}}$ **b.** $\dfrac{-2^2-(-2)^3}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}-3^{-1}}$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a. $4^{x+3}=8^x$ **b.** $32^{2x-3}=2$ **c.** $81^{x-1}=27^{2x}$

4. Bir bankaya % 30 bileşik faizle 20 000 lira para yatıran bir kişinin 5 yıl sonunda olacağı para miktarını bulunuz.

5. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri üstel fonksiyondur?

I. $f(x) = (-3)^x$ **II.** $g(x)=\dfrac{4}{x}$ **III.** $h(x) = x + 1$

IV. $k(x)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^x$ **V.** $m(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}$ **VI.** $n(x)=(2x)^2$

6. $f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$

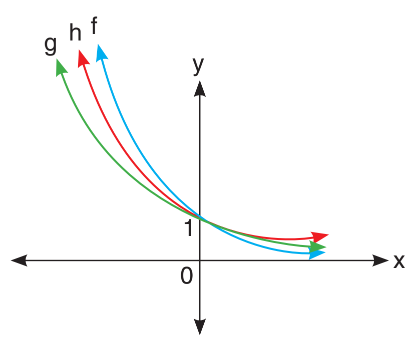
$x \rightarrow f(x) = (n-3)^x$ fonksiyonu için $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=2$ olduğuna göre n nin değerini bulunuz.

7. $f(x)=2^{3x-1}+16$ olduğuna göre $f^{-1}(272)$ nin değerini bulunuz.

8. Aşağıda verilen fonksiyonun grafiğini çiziniz.

a. $f(x)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$ **b.** $g(x)=3^{x+1}$

9. Yandaki şekilde $f(x) = a^x$, $g(x) = b^x$, $h(x) = c^x$ üstel fonksiyonları aynı analitik düzlemde verilmiştir. f, g ve h fonksiyonlarının tabanlarını küçükten büyüğe sıralayınız.



10. $f(x)=\left(\dfrac{2a-1}{3}\right)^{x-1}$ üstel fonksiyon olması için a nın alabileceği birbirinden farklı iki tamsayının toplamı en az kaç olduğunu bulunuz.

5.2 LOGARİTMA FONKSİYONU

Örnek: A anapara yıllık yüzde n bileşik faiz üzerinden bankaya yatırılırsa t yıl sonra bu paranın ulaşacağı miktar $y = A\left(1+\frac{n}{100}\right)^t$ formülü ile hesaplanır. Buna göre 50 000 TL, yıllık yüzde 40 bileşik faizle bankaya yatırılırsa

a. 2 yıl sonra ulaşacağı miktarı

b. Kaç yıl sonra 100 000 TL alacağını bulalım.

Çözüm

a. A = 50 000, n = 40 ve t = 2 formülde yerine yazarsak

$$y = 50\,000\left(1+\frac{40}{100}\right)^2$$

$$y = 50\,000\,(1,4)^2$$

y = 98 000 TL bulunur

b. y = 100 000 istenen t dir.

$$100\,000 = 50\,000\left(1+\frac{40}{100}\right)^t \Rightarrow 2 = (1,4)^t \text{ elde edilir.}$$

Bu işlemde bağımsız değişken y (para miktarı), buna bağlı olarak değişen t (süre) olduğu görülür. Buda üstel fonksiyonun ters fonksiyonu olarak karşımıza çıkar. Kuvvetin bulunması işlemi logaritma ile tanımlanır.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

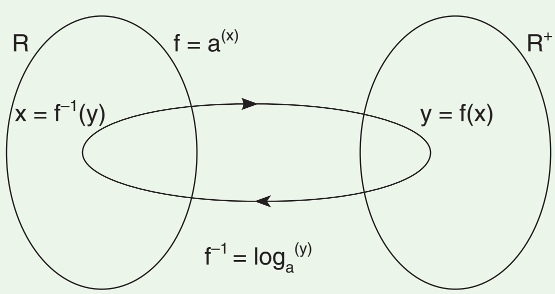
$x \to f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu bire bir ve örtendir. Dolayısıyla tersi vardır.

$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ters fonksiyonuna **logaritma fonksiyonu** denir ve $\mathbf{f^{-1}(x) = \log_a x}$ şeklinde gösterilir.

Buna göre,

$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$ olacaktır. $\log_a x$ ifadesi **a tabanına göre logaritma x** biçiminde okunur.

Üstel Fonksiyon



Logaritma Fonksiyonu

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a^{\,y}$$

Üstel fonksiyon, verilen bir tabana üs koyma, ters fonksiyonu olan logaritma fonksiyonu ise verilen belli bir tabana göre üs indirme olarak düşünülebilir Bu taban logaritma fonksiyonun yanına indis olarak yazılır.

$2^x = 8$	$\Leftrightarrow$	$x = \log_2 8$
2 nin kaçıncı kuvveti 8 dir?		2 sayısının hangi üssü 8 dir?

ETKİNLİK

$3^{2} = 9$	$\Leftrightarrow$	$2 = \log_3 9$	$5^{\cdots} = 1$	$\Leftrightarrow$	$\ldots = \log_5 1$
$(\sqrt{3})^{4} = 9$	$\Leftrightarrow$	$4 = \log_{\sqrt{3}} 9$	$8^{\cdots} = 8$	$\Leftrightarrow$	$\ldots = \log_8 8$
$(4)^{\cdots} = \frac{1}{16}$	$\Leftrightarrow$	$\ldots = \log_4 \frac{1}{16}$	$16^{\cdots} = 256$	$\Leftrightarrow$	$\ldots = \log_{16} 256$
$10^{\cdots} = 1000$	$\Leftrightarrow$	$\ldots = \log_{10} 1000$	$4^{\cdots} = 2$	$\Leftrightarrow$	$\ldots = \log_4 2$

Örnek: Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $\log_{25} x = \frac{1}{2}$ **b.** $\log_{27} x = -\frac{4}{3}$ **c.** $\log_{\sqrt{5}}(1-x) = 4$

ç. $\log_2(\log_3(1+x)) = 2$ **d.** $\log_4[14 + \log_5(x-2)] = 2$

Çözüm

a. $\log_{25} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 25^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = (5^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 5$ dir.

b. $\log_{27} x = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = (27)^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow x = (3^{\cancel{3}})^{-\frac{4}{\cancel{3}}} \Rightarrow x = 3^{-4} \Rightarrow x = \frac{1}{81}$ dir.

c. $\log_{\sqrt{5}}(1-x) = 4 \Rightarrow 1 - x = (\sqrt{5})^4 \Rightarrow 1 - x = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 \Rightarrow 1 - x = 5^2 \Rightarrow x = -24$ dir.

ç. $\log_2(\log_3(1+x)) = 2 \Rightarrow \log_3(1+x) = 2^2 \Rightarrow 1 + x = 3^4 \Rightarrow x = 80$ dir.

d. $\log_4[14 + \log_5(x-2)] = 2 \Rightarrow 14 + \log_5(x-2) = 4^2$

$\Rightarrow \quad \log_5(x-2) = 16 - 14$

$\Rightarrow \quad \log_5(x-2) = 2$

$\Rightarrow \quad x - 2 = 5^2$

$\Rightarrow \quad x = 27$ dir.

Örnek: **a.** $\log_a 1$ **b.** $\log_a 0$ **c.** $\log_a(-b)$, $(b \in \mathbb{R}^+)$ bulalım.

Çözüm

a. $\log_a 1 = x \Leftrightarrow 1 = a^x \Rightarrow x = 0$

b. $\log_a 0 = x \Leftrightarrow 0 = a^x$ fakat 0 ı veren kuvvet yoktur. $\log_a{}^0$ tanımlı değildir.

c. $\log_a{}^{(-b)} = x \Leftrightarrow -b = a^x$ $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ sayısının hiç bir kuvveti negatif olamaz. Bu durumda negatif sayıların logaritması tanımlı değildir.

> 0 ve negatif sayıların logaritması tanımlı değildir.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulalım.

a. $f(x) = \log_3(x^2 - 4)$

b. $g(x) = \log_{(a-1)}(3 - a)$

c. $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{g - x^2}{x + 2}$

ç. $k(x) = \log_5(4 - x^2) + \log_2(-x)$

Çözüm

a. $f(x) = \log_3(x^2 - 4)$

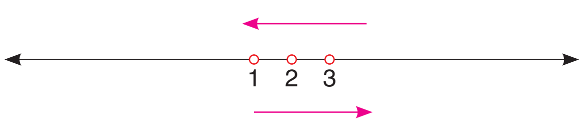
x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x^2 - 4 > 0$	+		−		+

f(x) fonksiyonunun tanım kümesi $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ dir.

b. $g(x) = \log_{(a-1)}(3 - a)$

$3 - a > 0 \Rightarrow 3 > a$ ve

$a - 1 > a \Rightarrow 0 > 1$ ve $a - 1 \neq 1 \Rightarrow a \neq 2$



g(x) fonksiyonunun tanım kümesi $(1, 3) - \{2\}$ bulunur.

c. $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{g - x^2}{x + 2}$

x	$-\infty$	-3		-2		3	$+\infty$
$\dfrac{9 - x^2}{x + 2} > 0$	+		−		+		−

h(x) fonksiyonunun tanım kümesi $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ dir.

ç. $k(x)=\log_5(4-x^2)+\log_2(-x)$

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
$4-x^2>0$	$-$	o	$+$		$+$	o	$-$	
$-x>0$	$+$		$+$	o	$-$		$-$	

k(x) fonksiyonun tanım kümesi (–2, 0) bulunur.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulalım.

a. $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$

$x\to f(x)=5^{x-2}$

b. $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$

$x\to g(x)=(0,25)^x+1$

c. $h: (-4,\infty)\to\mathbb{R}^+$

$x\to h(x)=2\log_5(x+4)-3$

ç. $k: \left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\to\mathbb{R}$

$x\to k(x)=1-\log_2(2-3x)$

Çözüm

$f(x)=y \quad f^{-1}(y)=x$

a. $f(x)=5^{x-2}\Rightarrow y=5^{x-2}\Rightarrow \log_5 y=x-2$

$2+\log_5 y=x\Rightarrow f^{-1}(x)=2+\log_5 x$ olur.

b. $g(x)=(0,25)^x+1\Rightarrow y=\left(\frac{25}{100}\right)^x+1\Rightarrow y=\left(\frac{1}{4}\right)^x+1\Rightarrow y-1=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}(y-1)=x\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$ olur.

c. $h(x)=2\log_5(x+4)-3\Rightarrow y=2\log_5(x+4)-3\Rightarrow y+3=2\log_5(x+4)$

$\Rightarrow \frac{y+3}{2}=\log_5(x+4)\Rightarrow (5)^{\frac{y+3}{2}}=x+4$

$\Rightarrow (5)^{\frac{y+3}{2}}-4=x\Rightarrow f^{-1}(x)=5^{\frac{x+3}{2}}-4$ olur.

ç. $k(x)=1-\log_2(2-3x)\Rightarrow y=1-\log_2(2-3x)\Rightarrow \log_2(2-3x)=1-y$

$\Rightarrow 2-3x=2^{1-y}\Rightarrow 2-2^{1-y}=3x$

$\Rightarrow \frac{2-2^{1-y}}{3}=x\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2-2^{1-x}}{3}$ olur.

John Napier (Con Napyer 1550-1617)

İskoçyalı bir matematikçi olan Napier, logaritmanın bulucusu olarak bilinir.

Napier, Saint Andrews Üniversitesinde (1410-1413 yıllarında kurulmuş İskoçyanın en eski üniversitesi) eğitim görmüş ve metematiği de içinden gelen bir merak olarak izlemiştir. Kendisi, amatör bir matematikçidir. Sayısal hesaplamaları kolaylaştıracak bir yol ararken, önce **Napier'in kemikleri** diye bilinen, üzerinde rakamlar yazılmış küçük değnekler yardımıyla yapılan bir çarpma veya bölme yöntemi buldu. 1, 2, 3, ..., şeklindeki aritmetik dizi ile buna karşılık gelen 10, 100, 1000, ... biçimindeki geometrik dizi arasındaki ilişkiyi gördü. 1614 yılında yazdığı "Logaritma Kurallarının Tanımı" adlı eseri ile matematiğe logaritma kavramını getirdi.

Napier, 1618 ve 1624 yılları aasında kusursuz iki logaritma cetveli yayınladı. Bazı hesap makinelerinin temellerini veren ilk kitabı, 1617 yılında yayınladı.

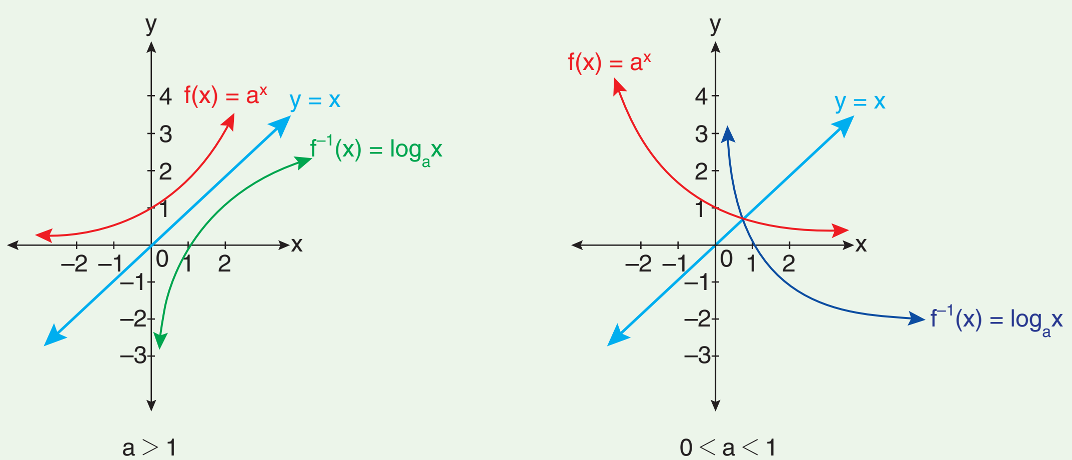
(Kaynakça: https://tr.wikipedia.org)

Logaritma Fonksiyonun Grafiği

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere

$f(x) = a^x$ üstel fonksiyonun tersi $f^{-1}(x) = \log_a{}^x$ dir.

$f–1(x) = \log_a{}^x$ fonksiyonun grafiğini çizmek için önce $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiği çizilir. Sonra $y = x$ doğrusuna göre simetriği alınır.

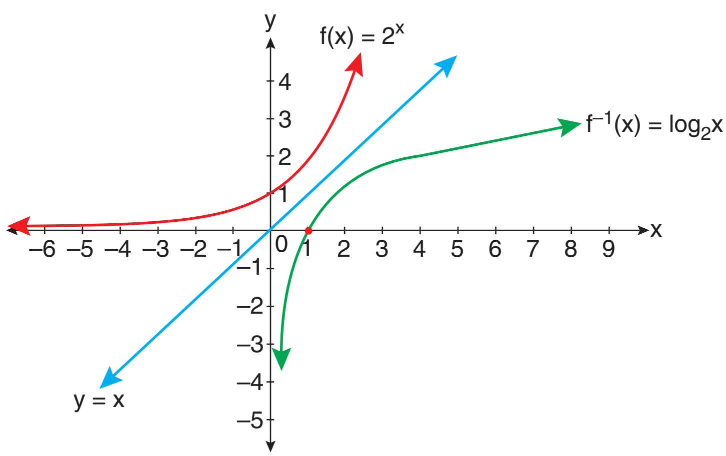


Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ ve $f^{-1}(x): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $(x) = \log_2 x$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

Çözüm

x	$y = (x) = 2^x$
⋮	⋮
–3	$\frac{1}{8}$
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
⋮	⋮

x	$y = f^{-1}(x) = \log_2 x$
⋮	⋮
$\frac{1}{8}$	–3
$\frac{1}{4}$	–2
$\frac{1}{2}$	–1
1	0
2	1
4	2
8	3
⋮	⋮

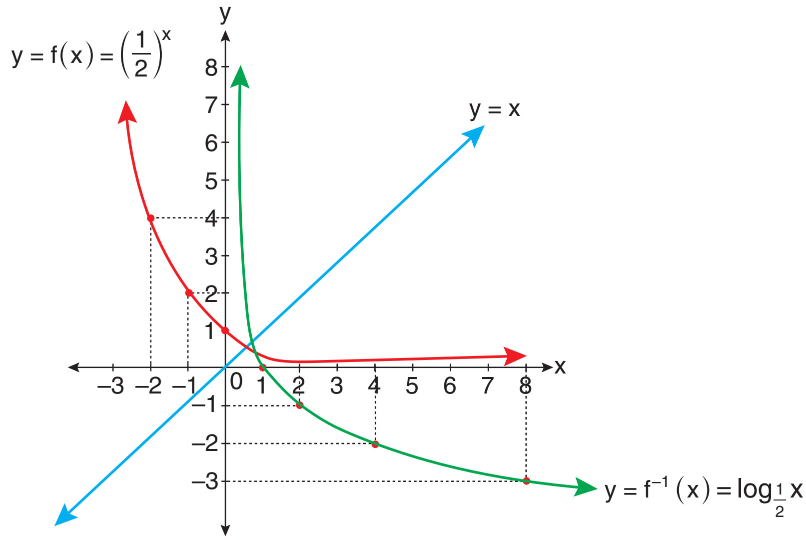


Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonu ile $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde çizelim.

Çözüm

x	$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
⋮	⋮
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮

x	$y = f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
⋮	⋮
8	–3
4	–2
2	–1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
⋮	⋮



Örnek: $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = 2^x + 1$ üstel fonksiyonun tersinin grafiğini çizelim.

Çözüm

$$f(x) = y = 2^x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2^x \Rightarrow \underset{\downarrow}{x} = \log_2 (y - 1)$$

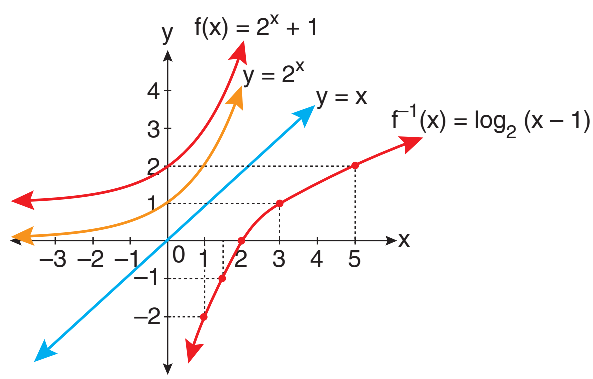
$$f^{-1}(x) = \log_2 (x - 1) \text{ olur.}$$

$f^{-1}(x)$ logaritma fonksiyonunun grafiği için f(x) üstel fonksiyonunun grafiği çizilerek y = x doğrusuna göre simetriği alınır.

f(x) fonksiyonunun grafiği için 2^X fonksiyonunun grafiği çizilerek y ekseni boyunca +1 birim ötelenir.

x	$y = 2^x$	$f(x) = 2^x + 1$
⋮	⋮	⋮
–2	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	1	2
1	2	3
2	4	5
⋮	⋮	⋮

x	$y = f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
⋮	⋮
$\frac{5}{4}$	–2
$\frac{3}{2}$	–1
2	0
3	1
5	2
⋮	⋮



Örnek: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm

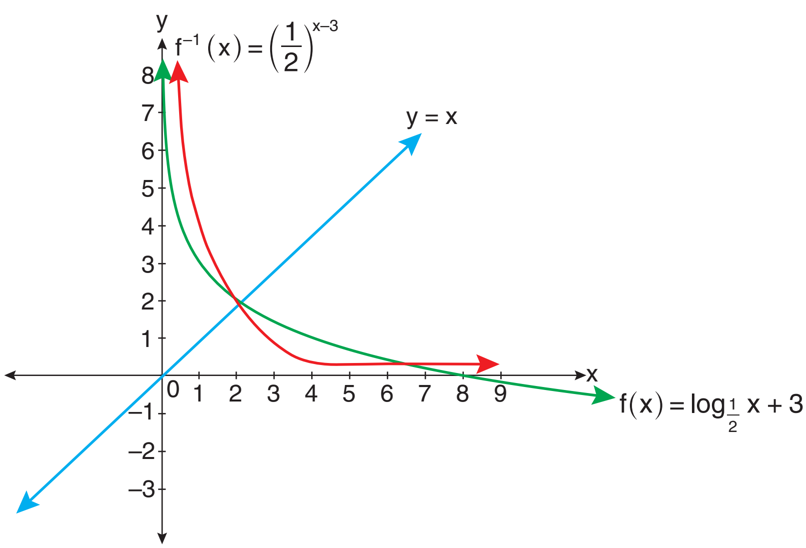
f(x) logaritma fonksiyonunun grafiğini çizmek için önce $f^{-1}(x)$ üstel fonksiyonunun grafiği çizilir ve y = x doğrusuna göre simetriği alınır.

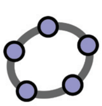
$$f(x) = y = \log_{\frac{1}{2}} x + 3 \Rightarrow y - 3 = \log_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{y-3} = \underset{\downarrow}{x}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = f^{-1}(x)$$

x	$y = f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$
⋮	⋮
0	8
1	4
2	2
3	1
4	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{4}$
⋮	⋮

x	$y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 3$
⋮	⋮
8	0
4	1
2	2
1	3
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	5
⋮	⋮





Geogebra programında giriş bölümüne log yazıldığında altta açılan pencereden log(<b>, <x>) seçilir.

Burada <b> logaritmanın tabanını, <x>, ise hesaplayacağımız sayıyı gösterir.

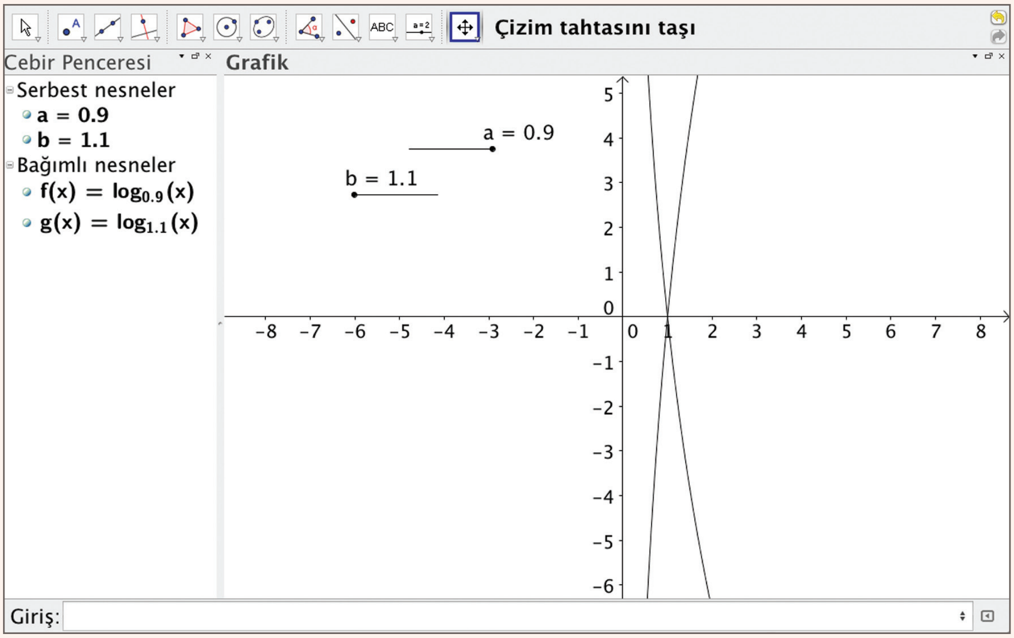
Örneğimizdeki grafiği geogebra yardımıyla çizmek için giriş bölümüne log(1/2, x) + 3 yazmamız yeterli olacaktır.

ETKİNLİK

i. Geogebra programını açarak araç çubuğunda bulunan sürgü düğmesini tıklayarak a sürgüsünü oluşturalım. a sürgüsünde minimum 0.1, maksimum 0.9 yapalım. Aynı şekilde b sürgüsünü oluşturalım. b sürgüsünde minimum 1.1, maksimum 10 yapalım.

ii. Giriş alanına önce log(a, x) yazarak enter tuşuna, sonra log(b, x) yazarak enter tuşuna basalım.

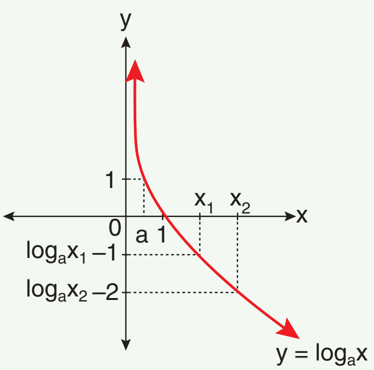
iii. Araç çubuğunda  taşı düğmesini tıklayalım.

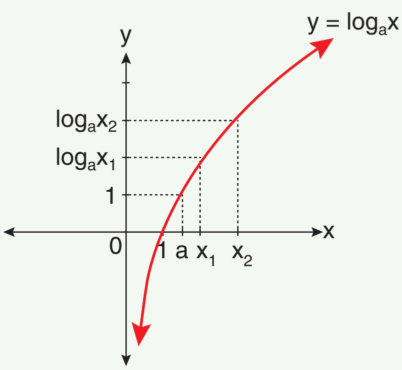


Burada a sürgüsünü değiştirdikçe $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun ve b sürgüsünü değiştirdikçe $g(x) = \log_b x$ fonksiyonunun artan mı, azalan mı olduğunu tartışınız.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonu için $\log_a x$





$0 < a < 1$ ise $y = \log_a x$ azalan fonksiyondur.

($x_1 < x_2$ iken $\log_a x_1 > \log_a x_2$ dir.)

$a > 1$ ise $y = \log_a x$ artan fonksiyondur.

($x_1 < x_2$ iken $\log_a x_1 < \log_a x_2$ dir.)

Örnek: $f(x)=\log_{\frac{3x-5}{4}}(x-7)$ fonksiyonu artan fonksiyon olması için x in alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

Logaritma artan fonksiyon ise $\frac{3x-5}{4}>1$ dir.

$\cancel{4}\cdot\frac{3x-5}{\cancel{4}}>4\cdot 1\Rightarrow 3x-5>4\Rightarrow 3x>9\Rightarrow x>3\,(1)$

$x-7>0$ (logaritma fonksiyonun tanımı)

(1) ve (2) den $x>7$ bulunur.

Örnek: $f(x)=\log_{\frac{5x-1}{4}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ fonksiyonunun azalan bir fonksiyon olması için x in alabileceği değer aralığını bulalım.

Çözüm

$x-\frac{1}{2}>0$ (logaritma tanımı)

$x>\frac{1}{2}\,(1)$

$0<\frac{5x-1}{4}<1$ (Logaritma fonksiyonu azalan fonksiyon olduğundan taban 0 ile 1 arasındadır.

$0\cdot 4<\frac{5x-1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}<1\cdot 4\Rightarrow 0+1<5x-1+1<4+1\Rightarrow\frac{1}{5}1<\frac{1}{\cancel{5}}\cancel{5}x<\frac{1}{5}5$

$\frac{1}{5}<x<1\,(2)$

(1) ve (2) den $\frac{1}{2}<x<1$ bulunur.

5.2. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\log_{\frac{1}{2}}x=4$

b. $\log_{\sqrt{3}}x=-2$

c. $\log_2 x=\frac{1}{2}$

ç. $\log_{\sqrt{2}}x=0$

d. $\log_4 x=-2$

e. $\log_8 x=\frac{1}{3}$

f. $\log_5(7x-2)=1$

g. $\log_4\left[(\log_3(\log_2 x))\right]=0$

h. $\log_2\left[5+\log_5(2^x-3)\right]=3$

2. Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

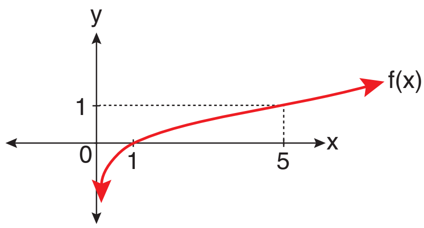
a. $f(x)=\log_{\frac{3}{2}}(-x^2+3x+18)$

b. $g(x)=\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{4-x^2}{x+3}\right)$

c. $h(x)=\log_{(a+2)}(5-a)$

ç. $k(x)=\log_3(1-x^2)+\log_8(x^2-2x)$

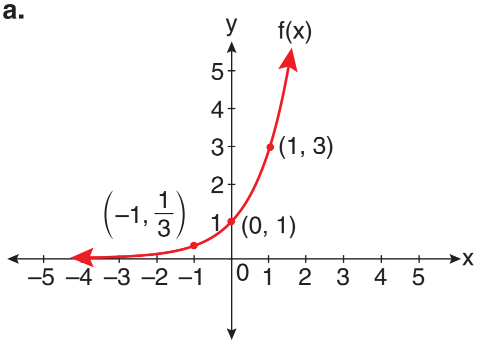
3.



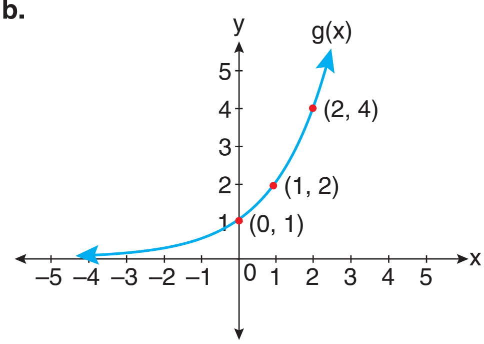
$f(x) = 2\log_a x$ fonksiyonunun grafiği yukarıda çizilmiştir. Şekilde verilenlere göre a yı bulunuz.

4. Aşağıda verilen üstel fonksiyonların grafiklerini yandaki sütundaki kurallarıyla eşleştirerek ters fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

a.



b.



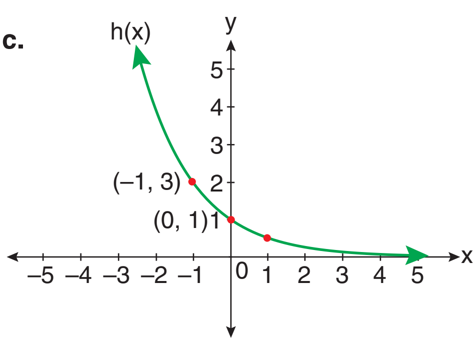
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x$

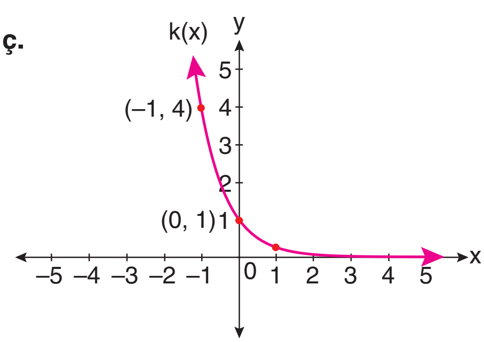
2^x

3^x

c.



ç.



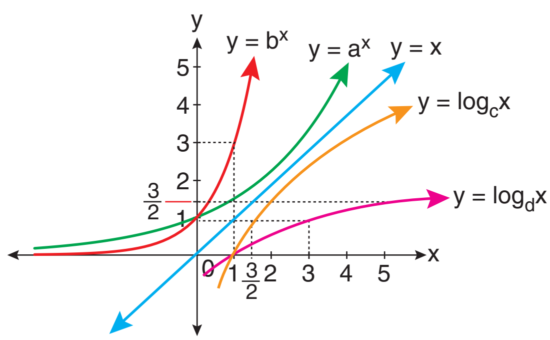
5. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. Üstel fonksiyonun tersi .... fonksiyonudur.

b. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ fonksiyonu için .... ise azalan fonksiyonu, ... ise artan fonksiyonudur.

c. Logaritma fonksiyonunun grafiği, üstel fonksiyonunun grafiğinin .... doğrusuna göre simetriğidir.

6.



Şekilde verilenlere göre a, b, c ve d yi bulunuz.

7. Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz.

a. $f: \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}, f(x) = 5 - \log_3(2x-1)$

b. $g: \mathbb{R} \to (4, \infty), g(x) = 6^{2x} + 4$

8. $f(x) = \log_{\frac{2x-1}{4}}(x-1)$ fonksiyonu azalan bir fonksiyon ise x in alabileceği değer aralığını bulunuz.

5.2.2 Onluk Logaritma Fonksiyonu ve Doğal Logaritma Fonksiyonu

Bu bölümde çok kullanılan iki taban 10 ve e üzerinde durulacaktır.

Onluk Logaritma Fonksiyonu

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna **onluk logaritma fonksiyonu** veya **bayağı logaritma fonksiyonu** denir. Bu fonksiyon,

$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{10} x$ veya $f(x) = \log x$ biçiminde gösterilir. Kullandığımız sayı sisteminin 10 luk sistem olması nedeniyle 10 tabanına göre logaritma kullanması yapılan işlemleri kolaylaştırır.

Onluk logaritmanın fen ve mühendislikte pek çok kullanım alanı vardır.

Örnek: Aşağıda verilen logaritmaların değerlerini bulalım.

a. $y = \log 10$ **b.** $y = \log 100$ **c.** $y = \log 10^{-1}$ **ç.** $y = \log\sqrt{10}$

Çözüm

a. $y = \log 10 = \log_{10}{}^{10} \Rightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \boxed{\log 10 = 1}$

b. $y = \log 100 = \log_{10}{}^{100} \Rightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{\log 100 = 2}$

c. $y = \log 10^{-1} = \log_{10} 10^{-1} \Rightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \boxed{\log 10^{-1} = -1}$

ç. $y = \log\sqrt{10} = \log_{10}\sqrt{10} \Rightarrow 10^y = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\log\sqrt{10} = \frac{1}{2}}$

Sonuç $\log 10^x = x$ dir.

ETKİNLİK

$n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıdaki tabloları hesap makinası yardımıyla doldurunuz.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	
10	
100	
10 000	
10 000 000	
100 000 000	

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
–1	
–10	
–100	
–10 000	
–10 000 000	
–100 000 000	

$n, \in \mathbb{R}$ çok büyük pozitif ve çok küçük negatif değerler için $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifadesi hangi iki tam sayı arasında değer alır? Tartışalım.

(Hesap makinesinde $n = -10$ için $\left(1+\frac{1}{(-10)}\right)\hat{}\,(-10)$ şeklinde yazılır.)

e sayısı

Napier, 1618 de logaritmalar üzerinde yayınladığı bir kitabın içinde e sabitini kullanmış fakat üzerinde durmamıştır.

e sayısını gerçek anlamda ilk bulan İsviçreli Jakob Bernoulli olmuştur. Bernoulli 1683 de matematiksel bir sabit olan e sayısını bileşik faiz ile ilgili problemi incelerken keşfetmiş ve bu sayının yaklaşık değerini hesaplamıştır.

Bu sayıya e ismini veren İsviçreli matematikçi Leonard Euler dir. Aynı zamanda bugünde kullandığımız matematiksel simgelerin isim babasıdır.

Euler, $n \in \mathbb{R}$ nin alacağı çok büyük pozitif ve çok küçük negatif değerler için $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ değeri **2, 7182818284590452... irrasyonel sayısına** yaklaştığını bulmuş ve bu sayıya **e sayısı** adını vermiştir. Euler sayısı olarak da bilinen e sayısı **matematik, doğal bilimler ve mühendislikte** sıkça kullanılmaktadır.

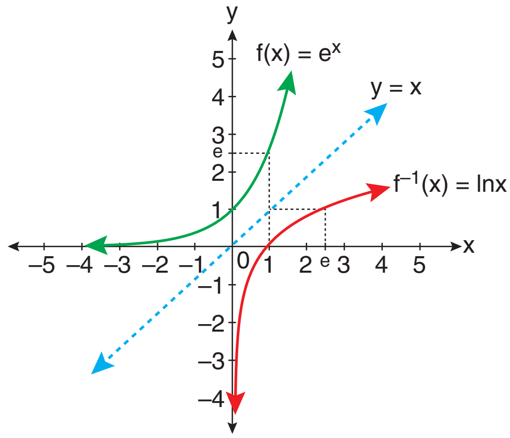
https://tr.mwikipedia.org

e = 2,718281... olmak üzere, tabanı **e** olan logaritma fonksiyonuna **doğal logaritma fonksiyonu** denir.

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_e x$ veya $f(x) = \ln x$ biçiminde gösterilir. ln gösterimindeki "l" harfi logarithm (logaritma), "n" harfi ise natural (doğal) kelimelerinin baş harflerinden gelmektedir.

$f(x) = e^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_e x = \ln x$ tir.

x	....	–1	0	1	....
$f(x) = 3^x$	....	$\frac{1}{e}$ →	1 →	e →	....
		(0,367...)		(2,7182...)	



✔ **Örnek:** Aşağıdaki eşitliklerde x in değerini bulalım.

a. $\ln x = 1$ **b.** $\ln x = -1$ **c.** $\ln x = 5$ **ç.** $\ln(x-1) = \sqrt{3}$

Çözüm

a. $\ln x = \log_e{}^x = 1 \Rightarrow x = e^1 \Rightarrow x = e$ $\boxed{\ln e = 1}$

b. $\ln x = \log_e{}^x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ $\boxed{\ln\frac{1}{e} = -1}$

c. $\ln x = \log_e{}^x = 5 \Rightarrow x = e^5 \Rightarrow$ $\boxed{\ln e^5 = 5}$

ç. $\ln(x-1) = \log_e(x-1) = \sqrt{3} \Rightarrow x-1 = e^{\sqrt{3}} \Rightarrow x = e^{\sqrt{3}} + 1^5$

$\boxed{\text{Sonuç } \ln e^x = x}$ dir.

e Sayısının Bileşik Faiz İle ilişkisi

17. yüzyılın başlarında coğrafi keşiflerinde etkisiyle uluslararası ticarette ve finansal işlerde büyük bir artış olmuş, bileşik faiz fikri daha çok ilgi çekmeye başlamıştır. Örneğin 100 lira bir yıllığına bankaya yıllık % 6 bileşik faiz ile yatırılırsa 1 yıl sonunda $100\left(1+\frac{6}{100}\right) = 106$ lira; 6 aylık olarak 1 yıllğına bileşik faiz yıtırılırsa $100\cdot\left(1+\frac{6}{100}\cdot\frac{6}{12}\right)^2 = 106\cdot 09$ lira yani 9 kuruş daha fazla kazanır.

e sayısının bileşik faiz ile ilişkisi için örneğimizi 1 lira üzerinden verelim. 1 lira yıllık % 100 faiz oranı ile 1 yıl için bileşik faize yatırılırsa birikimli miktar 1 · (1 + 1) = 2 lira olur. Eğer bir yılda n faiz dönemi varsa birikimli miktar $1\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ olur. Bu şekilde bir yıldaki devre sayısını artırarak büyütürsek anlık birikimi e sayısına yaklaşır. Bunu genellersek;

A liralık ana para yıllık olarak r faiz oranı ile n devre için bileşik faize yatırıldığında t yıl sonra ulaşacağı birikimli miktar:

$A(t) = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot t}$ dir. Burada $\frac{r}{n} = \frac{1}{k}$ ile gösterirsek $n = r\cdot k$ olur.

$$A(t) = A\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^{r\cdot k\cdot t} = A\cdot\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}_{e}\right]^{r\cdot c}$$

Devre sayısı sürekli olursa $\mathbf{A(t) = A \cdot e^{r \cdot t}}$ formülüne ulaşılır. Buna **sürekli bileşik faiz** denir.

Örnek: 10 000 lira 4 yıl için bileşik faize

a. % 9 yıllık faiz oranı ile aylık

b. % 8 yıllık faiz oranı ile sürekli

olarak yatırılırsa 4 yıl sonundaki birikimli miktarı bulalım.

Çözüm

a. r = 0,09, n = 12 ve t = 4

$$S = A \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12 \cdot 4}$$

$$= 14\,314 \cdot 05 \text{ bulunur.}$$

b. r = 0,08, t = 4

$S = A \cdot e^{r \cdot t} = 10\,000 \cdot e^{0,08 \cdot 4} = 137\,71 \cdot 27$ bulunur.

(Hesap makinesinde 10 000x e^(0 · 08 x 4) şeklinde yazılır.)

5.3. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

a. $\log_x 100 = 2$

b. $\log 0,001 = x$

c. $\log x = -1$

ç. $\ln x = -1$

d. $\ln x = \frac{1}{2}$

e. $\ln(x+1) = 4$

2. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a. $f(x) = \ln(1 + 2x)$

b. $g(x) = 5 + \log\left(\frac{1-x}{x^2-1}\right)$

3. $f:\mathbb{R} \to (3, \infty)$, $f(x) = e^{1+x} + 3$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

4. 50 000 lira 10 yıl için bileşik faize

a. % 7 yıllık faiz oranı ile sürekli

b. % 5 yıllık faiz oranı ile aylık

olarak yatırılırsa 10 yıl sonundaki birikimli miktarı bulunuz. (Hesap makinesi kullanınız.)

5.2.3 Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri ve Uygulamaları

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

ETKİNLİK

Geogebra programında giriş bölümüne log yazıldığında altta açılan pencereden log(<b>, <x>) seçilir. Burada <b> logaritmanın tabanını, <x> ise hesaplayacağımız sayıyı gösterir. Mesela $\log_5 3$ ün değerini hesaplamak için giriş bölümüne log(5, 3) yazılarak enter tuşuna basılır. $\log_5 3$ ün değerini 0,68 olarak bulunur.

Geogebra (veya hesap makinesi) kullanarak aşağıdaki tablolarda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

$\log_3 1 =$	$\log_3 3 =$	$3^{\log_3 5} = 5$
$\log 1 =$	$\log 10 =$	$10^{\log 2} =$
$\ln 1 =$	$\ln e =$	$e^{\ln 10} =$

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ ve $a^{\log_a b} = b$ olduğunu söyleyebilir miyiz?

$\log_3 3 + \log_2 7 =$	$\log_2(3.\ 7) = \log 21 =$	$\log_2 3 - \log_2 7 =$	$\log_2\left(\frac{3}{7}\right) =$
$\log 2 + \log 5 =$	$\log(3 \cdot 5) = \log 10 =$	$\log 2 - \log 5 =$	$\log\left(\frac{2}{5}\right) =$
$\ln 2 + \ln 5 =$	$\ln(2 \cdot 5) = \ln 10 =$	$\ln 2 - \ln 5 =$	$\ln\left(\frac{2}{5}\right) =$

Tablodan $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ ve $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ eşitliklerinin yazılıp yazılamıyacağını tartışınız.

$\log_2 9 = \log_2 3^2 =$	$2 \cdot \neq \log_2 3 =$	$\log_4 27 = \log_{2^2} 3^3 =$	$\frac{3}{2} \cdot \log_2 3 =$
$\log 32 = \log 2^5 =$	$5 \cdot \log 2 =$	$\log^{25}_{1000} = \log_{10^3} 5^2 =$	$\frac{2}{3} \cdot \log_{10} 5 =$
$\ln 25 = \ln 5^2 =$	$2 \cdot \ln 5 =$	$\log_{e^4} 8 = \log_{e^4} 2^3 =$	$\frac{3}{4} \ln 2 =$

Tablodan $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ ve $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$ eşitliklerinin yazılıp yazılamayacağını tartışınız.

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

$a, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $m, n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

i. $\log_a 1 = 0$

ii. $\log_a a = 1$

iii. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ ve $\log_a a^n = n$

iv. $a^{\log_a x} = x$ ve $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

v. $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \cdot \log_a b$

vi. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

vii. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Bu özellikler üstel fonksiyonuna döndürülerek kolayca ispat edilebilir. Mesela vi, iii ve iv. özellikleri ispat edelim.

$\log_a x = M$ ve $\log_a y = N$ dersek

$\log_a x = M \Rightarrow x = a^m$ $\qquad$ $\log_a y = N \Rightarrow y = a^N$

$x \cdot y = a^m \cdot a^N \Rightarrow x \cdot y = a^{M+N}$ logaritmanın tanımı gereği $\qquad$ $\log_a (x \cdot y) = M + N$

$\boxed{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$ olur.

$\log_a x^n = \log_a (\underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}_{n \text{ tane}}) = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x}_{n \text{ tane}}$ (vi. özellik)

$= n \cdot \log_a x$ bulunur.

$y = \log_a x$ dersek $x = a^y$ olur. (logaritma tanımı)

$y = \log_a x$ yerine yazarsak $\boxed{x = a^{\log_a x}}$ bulunur.

$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ eşitliğin her iki tarafını c tabanında logaritmasını alırsak

$\log_c a^{\log_c b} = \log_c b^{\log_c a} \Rightarrow \log_c b \log_c a = \log_c a \log_c b$ eşitliği görülür. $\boxed{a^{\log_c b} = b^{\log_c a}}$

Örnek: Aşağıdaki logaritmalı ifadelerin eşitlerini bulalım.

a. $\log_4 64$ $\qquad$ **b.** $\log_{25} \sqrt[4]{5^3}$ $\qquad$ **c.** $\log_6 3 + \log_6 12$

ç. $\log_3 (x + 2) + \log_3 x$ $\qquad$ **d.** $\log 250 - \log 25$ $\qquad$ **e.** $\log_3 8 - \log_3 (x - 1)$

Çözüm

a. $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$ (iii. eşitlik)

b. $\log_{25} \sqrt[4]{5^3} = \log_{5^2} 5^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\log_5 5}_{1} = \frac{3}{8}$ (v. ve ıı. eşitlik)

c. $\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 (3 \cdot 12) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$ (vi ve iii. eşitlik)

ç. $\log_4 (x + 2) + \log_3 x = \log_3 (x + 2) \cdot x = \log_3 (x^2 + 2x)$ (vi. eşitlik) (Dikkat $\log_3 (x + 2) \neq \log_3 x + \log_3 2$)

d. $\log 250 - \log 25 = \log \frac{250}{25} = \log 10 = 1$ (vii. ve ii. eşitlik)

e. $\log_3 8 - \log_3 (x - 1) = \log_3 \left(\frac{8}{x-1}\right)$ (vii. eşitlik)

Örnek: $2^{1+\log_8 27}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$1 = \log_8 8$ (ii özellik) $\quad 1 + \log_8 27 = \log_8 8 + \log_8 27 = \log_8 (8 \cdot 27)$ (vi. özellik)

$2^{1+\log_8 27} = 2^{\log_8 (8 \cdot 27)} = 2^{\log_{2^3} 6^3} = 2^{\frac{3}{3}\log_2 6} = 2^{\log_2 6} = 6$ bulunur. (iv. özellik)

Örnek: $\log_2 7! = m$ olduğuna göre $\log_4 8!$ in eşitini m türünden bulalım.

Çözüm

$$\log_4 8! = \log_{2^2} 8! = \frac{1}{2} \log_2 8! = \frac{1}{2} [\log_2 (7! \cdot 8)]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\log_2 7!}_{m} + \underbrace{\log_2 2^3}_{3}\right] = \frac{1}{2}(m + 3) \text{ bulunur.}$$

Örnek: $a^{\ln b} + b^{\ln a} + 35 = a^{\ln b} \cdot b^{\ln a}$ ise $a^{\ln b}$ nin değerini bulalım.

Çözüm

$a^{\ln b} + \underbrace{b^{\ln a}} + 35 = a^{\ln b} \cdot \underbrace{b^{\ln a}}$

$a^{\ln b} + a^{\ln b} + 35 = a^{\ln b} \cdot a^{\ln b}$ (iv. özellik)

$2a^{\ln b} + 35 = a^{2\ln b} \Rightarrow a^{2\ln b} - 2a^{\ln b} - 35 = 0$

$a^{\ln b} = t$ dersek $t^2 - 2t - 35 = 0 \Rightarrow (t - 7) \cdot (t + 5) = 0$

$t = 7$ veya $t = -5$

$t = 7$ için $a^{\ln b} = 7$ dir. $t = -5$ için $a^{\ln b}$ tanımlı değildir. Bu durumda $a^{\ln b}$ nin değeri 7 bulunur.

ETKİNLİK

Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

I. sütün	II. sütun
$\log_3 2 =$	$\dfrac{\log_4 2}{\log_4 3} =$
$\log_5 4 =$	$\dfrac{\log_4}{\log_5} =$
$\log_2 7 =$	$\dfrac{\ln 7}{\ln 2} =$

I. ve II. sütun sonuçlarını karşılaştırınız.

$a, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ dır. (Taban değiştirme özelliği)

Taban değiştirme özelliğini ispat edelim.

iv. özellikten $b = a^{\log_a b}$ yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafını c tabanında logaritmasını alırsak

$\log_c b = \log_c a^{\log_a b} \Rightarrow \log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$

$\Rightarrow \dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$ bulunur.

Bu özellikte c = b yazarsak

$\dfrac{\overbrace{\log_b b}^{1}}{\log_b a} = \log_a b \Rightarrow \boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}} \Rightarrow \boxed{\log_a b \cdot \log_b a = 1}$ elde edilir.

Örnek: $\log_{12} 8 + \dfrac{1}{\log_{18} 12}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$\log_{12} 8 + \dfrac{1}{\underbrace{\log_{18} 12}_{\log_{12} 18}} = \log_{12} 8 + \log_{12} 18 = \log_{12}(8 \cdot 18) = \log_{12} 12^2 = 2 \cdot \underbrace{\log_{12} 12}_{1} = 2$ bulunur.

Örnek: $\log_c(a^3 \cdot c) = 9$ ise $\log_{a \cdot c} c$ nin değerini bulalım.

Çözüm

$$\log_c(a^3 \cdot c) = 9 \Rightarrow \log_c a^3 + \underbrace{\log_c c}_{1} = 9 \Rightarrow \log_c a^3 = 8 \Rightarrow 3\log_c a = 8 \Rightarrow \log_c a = \frac{8}{3}$$

$$\log_{ac} c = \frac{\log_c c}{\log_c ac} = \frac{1}{\log_c a + \log_c c} = \frac{1}{\frac{8}{3} + 11} = \frac{3}{11} \text{ bulunur.}$$

Örnek: $\sqrt{\log_2 32 - \log_{\frac{1}{5}} 625}$ değerini bulalım.

Çözüm

$$\sqrt{\underbrace{\log_2 2^5}_{5} - \log_{5^{-1}} 5^4} = \sqrt{5 - \left(\frac{4}{-1}\right)\underbrace{\log_5 5}_{1}} = \sqrt{5 + 4} = 3 \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$\ln x = a$

$\ln y = b$

$\ln z = c$ olmak üzere $\dfrac{\ln^3 \sqrt{x} \cdot y^3 \cdot e}{z}$ ifadesinin a, b ve c cinsinden eşitini bulunuz.

Çözüm

$$\ln \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot y^3 \cdot e}{z} = \ln\left(x^{\frac{1}{3}} \cdot y^3 \cdot e\right) - \ln z = \ln x^{\frac{1}{3}} + \ln y^3 + \ln e - \ln z$$

$$= \frac{1}{3} \cdot {}^{1}\underbrace{\ln x}_{a} + 3 \cdot \underbrace{\ln y}_{b} + 1 - \underbrace{\ln z}_{c}$$

$$= \frac{a}{3} + 3b + 1 - c \text{ bulunur.}$$

Örnek: $\log_5 2 = x$ olmak üzere

$\log_5 \dfrac{2}{3} + \log_5 \dfrac{3}{4} + \log_5 \dfrac{4}{5} + \ldots + \log_5 \dfrac{99}{100}$ işleminin sonucunu x türünden bulalım.

Çözüm

$$\log_5 \frac{2}{3} + \log_5 \frac{3}{4} + \ldots + \log_5 \frac{99}{100} = \log_5\left(\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \ldots \frac{\cancel{99}}{100}\right) = \log_5\left(\frac{1}{50}\right)$$

$$= \underbrace{\log_5 1}_{0} - \log_5 \overbrace{50}^{5^2 \cdot 2} = -\left(\underbrace{\log_5 5^2}_{2} + \underbrace{\log_5 2}_{x}\right)$$

$$= -(2 + x) = -2 - x \text{ bulunur.}$$

10 un tam sayı kuvveti olmayan bir sayının onluk logaritması, ardışık iki tam sayı arasındadır.

Örnek: Aşağıdaki sayıların onluk logaritmalarının hangi ardışık iki tam sayı arasında olduğunu bulalım.

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{5}{2}$ **c.** 33 **ç.** 107 **d.** $\frac{1}{105}$

Çözüm

a. $10^{-1} < \frac{1}{2} < 10^{0} \Rightarrow \log 10^{-1} < \log\frac{1}{2} < \log 10^{\circ} \Rightarrow -1 < \log\frac{1}{2} < 0$

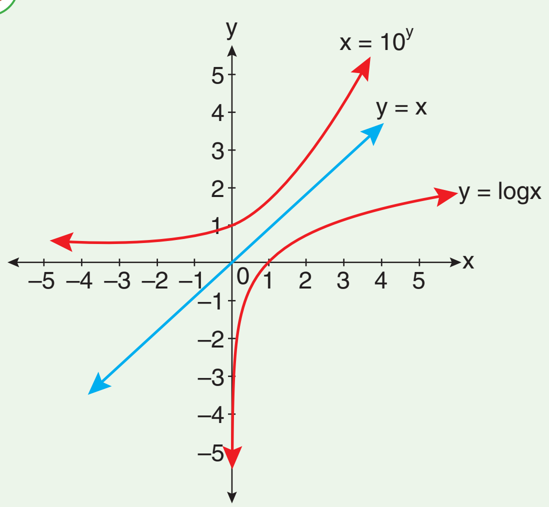
b. $10^{\circ} < \frac{5}{2} < 10^{1} \Rightarrow \log 10^{\circ} < \log\frac{5}{2} < \log 10 \Rightarrow 0 < \log\frac{5}{2} < 1$

c. $10^{'} < 33 < 10^{2} \Rightarrow \log 10 \Rightarrow \log 10 < \log 33 < \log 10^{2} \Rightarrow 1 < \log 33 < 12$

ç. $10^{2} < 107 < 10^{3} \Rightarrow \log 10^{2} < \log 107 < \log 10^{3} \Rightarrow 2 < \log 107 < 3$

d. $\frac{1}{1000} < \frac{1}{105} < \frac{1}{100} \Rightarrow \log 10^{-3} < \log\frac{1}{105} < \log 10^{-2} \Rightarrow -3 < \log\frac{1}{105} < -2$

a ve d şıklarında logaritması alınan sayılar 0 ile 1 arasında ve bu sayıların onluk logaritmaları negatif olduğu; b, c ve ç şıklarında ise logaritması alınan sayılar 1 den büyük sayıların onluk logaritmaları pozitif olduğu görülmektedir.



i. $x > 1$ den büyük ise $y = \log x$ pozitiftir.

ii. $0 < x < 1$ ise den büyük ise $y = \log x$ negatiftir.

Örnek: log1204, log347800, log0,002 ve log0,0000107 değerlerinin hangi iki ardışık tam sayı arasında olduğunu bulalım.

Çözüm

log1000 < log1204 < log10000 $\Rightarrow 3 < \log \underbrace{1204}_{4 \text{ basamaklı}} < 4$

$\Rightarrow$ log1204 = 3,...

(Hesap makinesinde log1204 = 3,080)

log10000 < log347800 < log1000000 $\Rightarrow 5 < \log \underbrace{347\,800}_{6 \text{ basamaklı}} < 6$

$\Rightarrow$ log347800 = 5,...

(Hesap makinesinde log347800 = 5 · 541)

log0,001 < log0,002 < log0,01 $\Rightarrow -3 < \log \underbrace{0,002}_{3 \text{ tanesi sıfır}} < -2$

$\Rightarrow$ log0,002 = –2,...

(Hesap makinesinde log0,002 = –2 · 698)

log0,00001 < log0,0000107 < log0,0001 $\Rightarrow -5 < \log \underbrace{0,0000}_{5 \text{ tane sıfır}}107 < -4$

$\Rightarrow$ log0,0000107 = –4,...

(Hesap makinesinde log0,0000107 = –4 · 970)

Sonuç:

i. 1 den büyük bir sayının kaç basamaklı olduğunu bulmak için sayının logaritması alınır ve çıkan sayının tam kısmına 1 eklenir.

ii. 0 ile 1 arasındaki bir sayının ondalık gösterimindeki sıfırdan farklı ilk rakamının solunda kaç sıfır olduğunu bulmak için sayının logaritması alınır ve çıkan sayının mutlak değerinin tam kısmına 1 eklenir.

Örnek: log5 = 0,6989 ise 250^{30} sayısının kaç basamaklı olduğunu bulalım.

Çözüm

$$\log 250^{30} = \log(5^2 \cdot 10)^{30} = 30 \cdot \log(5^2 \cdot 10)$$

$$= 30\left(\underbrace{\log 5^2}_{2\log 5} + \underbrace{\log 10}_{1}\right)$$

$$= 30\,(2 \cdot (0,6989) + 1)$$

$$= \underset{\downarrow}{71},934$$

$71 + 1 = 72$ basamaklıdır.

✔ **Örnek:** log2,75 ≅ 0,4393 ise log27500 ve log0,00275 değerlerini bulalım.

Çözüm

$$\log 275000 = \log 2,75 10^5 = \log 2,75 + \log 10^5$$
$$= 0,4393 + 5$$
$$= 5,4393$$
$$\log 0,00275 = \log 2,75 \cdot 10^{-3} = \log 2,75 + \log 10^{-3}$$
$$= 0,4393 + (-3)$$
$$= -2,5607$$

5.4. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

$\log_3 27 =$	$\log_2 \frac{1}{4} + \log_2 4 =$	$2^{\log_2 5} =$	$\frac{\log_2 5}{\log_2 3}$
$\log 0,001 =$	$\log_{36} 9 + \log_6 12 =$	$10^{1+\log 9} =$	$\frac{\ln 25}{\ln 4}$
$\ln e^5 =$	$\log_5 10 - \log_5 2 =$	$\log_3 2 \cdot \log_4 3 =$	$\frac{\log 5}{\log 2} =$
$\log_4 \sqrt[3]{16} =$	$\ln e^4 - 3\ln e =$	$\frac{1}{\log_{24} 6} - \log_6 4 =$	$\frac{\log 625}{\log 5} =$

2. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a. $\sqrt{\log_4 64 + \log_{\frac{1}{4}} 2}$

b. $3^{\frac{1}{\log_2 3} + 1}$

c. $\frac{\log_2 25}{\log_2 35} + \frac{\log_3 49}{\log_3 35}$

ç. $\frac{3}{\log_5 250} + \frac{1}{\log_2 250}$

d. $\log_{16} 9 \cdot \log_3 8$

3. a = log6 + 2

b = 2log2 + 1

olduğuna göre, log15 ifadesinin a ve b cinsinden eşitini bulunuz.

4. log(tan1) + log(tan2) + log(tan3) + … + log(tan89) ifadesinin eşitini bulunuz.

5. $x = \log 2$, $y = \log 3$, $z = \log 5$ olduğuna göre, $\log 1200$ ifadesinin x, y ve z cinsinden eşitini bulunuz.

6. $\log_3 81! = x$ olduğuna göre, $\log_3 80!$ ifadesinin x cinsinden eşitini bulunuz.

7. $\log_2 10 = x$ ise $\log_5 10$ un x türünden eşitini bulunuz.

8. $\log_a a^3 b = 5$ olduğuna göre, $\log_{ab} b$ nin değerini bulunuz.

9. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini doğru ise (D), yanlış ise (Y) yazınız.

a. $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ negatif bir sayıdır. ( )

b. log2016 pozitif bir sayıdır. ( )

c. $\log\left(\frac{2}{3}\right)$ negatif bir sayıdır. ( )

10. Aşağıda verilen ifadelerin hangi iki ardışık tam sayı arasında olduklarını bulunuz.

a. log300 **b.** log1453 **c.** $\log\frac{1}{2}$ **ç.** log0,08

11. $\log^3 = 0{,}4771$ olmak üzere (8100)10 sayısının kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

12. $\log^2 = 0{,}3010$ ise 800^{80} kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

13. log(5,25) = 0,7201 ise

a. log52500 **b.** log0,525

değerlerini bulunuz.

5.3 ÜSTEL VE LOGARİTMİK DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Üstel ve Logaritmik Denklemler

Tabanı 1 den farklı pozitif gerçek sayı olan ve bilinmeyenin üst olarak bulunduğu denklemlere **üstel denklemler** denir.

Üstel denklem,

i. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ biçiminde ise $f(x) = g(x)$ denklemi çözülerek çözüm kümesi bulunur.

ii. $a^{f(x)} = b$ biçiminde ise $f(x) = \log_a b$ denklemi çözülerek çözüm kümesi bulunur.

Örnek: Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $4^{2x+4} = 64$ **b.** $2 \cdot 3^{x-1} = 3^{x+1} - 21$ **c.** $5^{\frac{2}{x}+x-3} = 1$

Çözüm

a. $4^{2x+4} = 4^3 \Rightarrow 2x + 4 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow Ç = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ bulunur.

b. $2 \cdot 3^{x-1} = 3^{x+1} - 21 \Rightarrow 2 \cdot \frac{3^x}{3} = 3^x \cdot 3 - 21 \Rightarrow 2 \cdot 3^x = 9 \cdot 3^x - 63 \Rightarrow 63 = 7 \cdot 3^x \Rightarrow 9 = 3^x$

$\Rightarrow 3^2 = 3^x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow Ç = \{2\}$ bulunur.

c. $5^{\frac{2}{x}+x-3} = 5^0 \Rightarrow \frac{2}{x} + x - 3 = 0 \Rightarrow \frac{2 + x^2 - 3x}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \wedge x \neq 0$

$x = 2$ veya $x = 1$

Buradan $Ç = \{2, 1\}$ bulunur.

Örnek: Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $3^x = 2$ **b.** $e^x - 3 \cdot e^{-x} - 2 = 0$ **c.** $4^x - 11 \cdot 2^x + 28 = 0$

Çözüm

a. $3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2 \Rightarrow Ç = \{\log_3 2\}$ bulunur.

b. $e^x - 3 \cdot e^{-x} - 2 = 0 \Rightarrow \underset{(e^x)}{\frac{e^x}{1}} - \frac{3}{e^x} - \underset{(e^x)}{\frac{2}{1}} = 0 \Rightarrow \frac{e^{2x} - 3 - 2e^x}{e^x} = 0 \Rightarrow e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$ ve $e^x \neq 0$ dır.

$(e^x)^2 - 2e^x - 3 = 0$ denkleminde $e^x = t$ dersek

$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t-3) \cdot (t+1) = 0 \Rightarrow t = 3$ veya $t = -1$ dir.

$t = 3$ için $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$ olur. $Ç_1 = \{\ln 3\}$ dir.

$t = -1$ için ex $= -1$ $Ç_2 = \varnothing$ dir.

Buradan $Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \{\ln 3\}$ bulunur.

c. $4^x - 11 \cdot 2^x + 28 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 11 \cdot 2^x + 28 = 0 \Rightarrow 2^x = t$ dersek

$$t^2 - 11 \cdot t + 28 = 0 \Rightarrow (t - 7) \cdot (t - 4) = 0 \Rightarrow t = 7 \text{ veya } t = 4$$

$t = 7$ için $2^x = 7 \Rightarrow x = \log_2 7$ olur. $Ç_1 = \{\log_2 7\}$

$t = 4$ için $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$ dir. $Ç_2 = \{2\}$

Buradan $Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \{\log_2 7, 2\}$ bulunur.

İçinde bilinmeyen olarak logaritmalı ifade bulunduran denklemlere **logaritmalı denklem** denir.

Logaritmalı denklem, $(f(x) > 0,\ g(x) > 0)$

i. $\log_a f(x) = b$ biçiminde ise $f(x) = a^b$ denklemi çözülerek çözüm kümesi bulunur.

ii. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ biçiminde ise $f(x) = g(x)$ denklemi çözülerek çözüm kümesi bulunur.

Örnek: Aşağıdaki logaritmalı denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $\log_2(3^x - 1) = 3$

b. $\log_4(4^{2x} - 12) = x + 1$

c. $\log(x^2 - 2x + 5) = \log(x + 9)$

ç. $\log_3(2x + 1) + \log_3(x - 1) = 2$

Çözüm

a. $\log_2(3^x - 1) = 3 \Rightarrow 3^x - 1 = 2^3 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow Ç = \{2\}$ bulunur.

b. $\log_4(4^{2x} - 12) = x + 1 \Rightarrow 4^{2x} - 12 = 4^{x+1} \Rightarrow 4^{2x} - 12 = 4^x \cdot 4$

$4^{2x} - 4 \cdot 4^x - 12 = 0$ ($4^x = t$ dersek)

$t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t - 6)(t + 2) = 0$

$t = 6$ veya $t = -2$

$\downarrow$ $\downarrow$

$4^x = 6 \Rightarrow x = \log_4 6$ $\quad$ $4^x = -2 \Rightarrow Ç = \varnothing$

Buradan $Ç = \{\log_4 6\}$ bulunur.

c. $\log(x^2 - 2x + 5) = \log(x + 9) \Rightarrow x^{2x} - 2x + 5 = x + 9$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 4$ veya $x = -1$

$Ç = \{4, -1\}$ bulunur.

ç. $\log_3(2x+1) + \log_3(x-1)$ $\Rightarrow \log_3[(2x+1)\cdot(x-1)] = 2$

$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 3^2 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$

$\Rightarrow (2x-5)\cdot(x+2) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$ veya $x = -2$

$x = -2$ denklemi sağlamaz. Çünkü $2x + 1 > 0$ ve $x - 1 > 0$ olmalıdır.

Buradan $Ç = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$ bulunur.

✔ **Örnek:** Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $3^{\log_4 x} = 5^{\log_4 3}$ **b.** $2^{(\log_x 2)} = 8\cdot x^4$ **c.** $e^6 x = x^{\ln x}$

ç. $5^{\ln x} + x^{\ln 5} = 250$ **d.** $\log_x 3 - 4\log_3 x^2 = 2$ **e.** $\log_3(x^2+1) - \log_3(x-3) = 1$

Çözüm

a. Verilen eşitliğin her iki tarafının 3 tabanında logaritmasını alalım.

$3^{\log_4 x} = 5^{\log_4 3} \Rightarrow \log_3 3^{\log_4 x} = \log_3 5^{\log_4 3}$

$\Rightarrow \log_4 x \underbrace{\log_3 3}_{1} = \log_4 3 \log_3 5$ $\left(\log_4 3 \cdot \log_3 5 = \dfrac{\cancel{\log 3}}{\log 4}\cdot\dfrac{\log 5}{\cancel{\log 3}} = \log_4 5\right)$

$\Rightarrow \log_4 x = \log_4 5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow Ç = \{5\}$ bulunur.

b. Verilen eşitliğin her iki tarafının 2 tabanında logaritmasını alalım.

$2^{\log_x 2} = 8\cdot x^4 \Rightarrow \log_2(2^{\log_x 2}) = \log_2(8\cdot x^4) \Rightarrow \log_x 2\cdot\underbrace{\log_2 2}_{1} = \underbrace{\log_2 2^3}_{3} + \log_2 x^4$

$\Rightarrow \log_x 2 = 3 + 4\cdot\log_2 x$ $\log_x 2 = t$ dersek

$\Rightarrow t = 3 + 4\cdot\dfrac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+1) = 0 \Rightarrow t = 4$ veya $t = -1$

$t = 4$ için $\log_x 2 = 4 \Rightarrow 2 = x^4 \Rightarrow x = \sqrt[4]{2}$

$t = -1$ için $\log_x 2 = -1 \Rightarrow 2 = x^{-1} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$Ç = \left\{\sqrt[2]{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$ bulunur.

c. Verilen eşitliğin her iki tarafının e tabanında logaritmasını alalım.

$e^6\cdot x = x^{\ln x} \Rightarrow \ln(e^6\cdot x) = \ln(x^{\ln x})$

$\ln e^6 + \ln x = \underbrace{\ln x\cdot\ln x} \Rightarrow 6 + \ln x = \ln^2 x$

$\ln x = t$ dersek

$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \Rightarrow t = 3$ veya $t = -2$

$t = 3$ için $\ln x = 3 \Rightarrow \log_e x = 3 \Rightarrow x = e^3$

$t = -2$ için $\ln x = -2 \Rightarrow \log_e x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$

$Ç = \left\{e^3, \dfrac{1}{e^2}\right\}$ bulunur.

ç. $\ln x = t$ dersek $x = e^t$ olur.

$$5^{\ln x} + x^{\ln 5} = 250 \Rightarrow 5^t + (e^t)^{\ln 5} = 250 \Rightarrow 5^t + e^{\ln 5^t} = 250$$

$$5^t + 5^t = 250 \Rightarrow 2 \cdot 5^t = 250 \Rightarrow 5^t = 125 \Rightarrow 5^t = 5^3 \Rightarrow t = 3 \quad \left(e^{\ln 5^t} = 5^t\right)$$

$t = 3$ için $\ln x = 3 \Rightarrow \log_e x = 3 \Rightarrow x = e^3 \Rightarrow Ç = \{e^3\}$ bulunur.

d. $\log_x 3 - 4\log_3 x^2 = 2 \;\Rightarrow\; \log_x 3 - 8\log_3 x = 2 \Rightarrow \log_x 3 = t$ dersek $\log_3 x = \frac{1}{t}$ olur.

$$\Rightarrow\; t - \frac{8}{t} = 2 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \;\Rightarrow\; (t-4)\cdot(t+2) = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ veya } t = -2$$

$t = 4$ için $\log_x 3 = 4 \Rightarrow x^4 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[4]{3}$

$t = -2$ için $\log_x 3 = -2 \Rightarrow 3 = x^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

$Ç = \left\{\sqrt[4]{3}, \frac{1}{9}\right\}$ bulunur.

e. $\log_3 (x^2+1) - \log_3 (x-3) = 1 \Rightarrow \log_3 \frac{x^2-1}{x-3} = \log_3 3 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x-3} = 3$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 3x + 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 5$ veya $x = -2$

$Ç = \{5\}$ olur. ($x = -2$ logaritmanın içini negatif yaptığından denklemin kökü olmaz.)

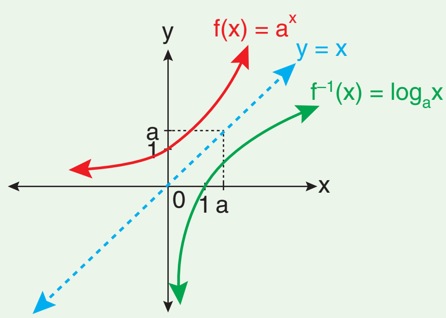
Üstel ve Logaritmalı Eşitsizlikler

İçinde bilinmeyenin üs olarak bulunduğu eşitsizliklere **üstel eşitsizlikler**, bilinmeyeni logaritma içinde bulunan eşitsizliklere **logaritmalı eşitsizlikler** denir.

$a > 1$ iken $f(x) = a^x$ ve $f^{-1}(x) = \log_a x$ artan fonksiyondur.

$f(x) < g(x) \Leftrightarrow a^{f(x)} < a^{g(x)}$ tir.

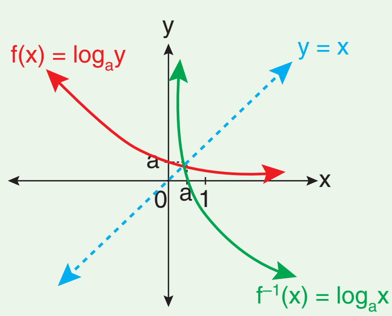
$o < h(x) < k(x) \Leftrightarrow \log_a h(x) < \log_a k(x)$ dir.



$0 < a < 1$ için $f(x) = a^x$ ve $f^{-1}(x) = \log_a x$ azalan fonksiyondur.

$f(x) < g(x) \Rightarrow a^{f(x)} > a^{g(x)}$ tir.

$0 < h(x) < k(x) \Leftrightarrow \log_a h(x) > \log_a k(x)$ tir.



Örnek: Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulalım.

a. $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x+2} \leqslant \left(\frac{4}{25}\right)^{-x+1}$ **b.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$ **c.** $\log_4(x-4) > -1$

ç. $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \leqslant 2$ **d.** $\log_2\left[1-\log_{\frac{1}{3}}(4-x)\right] \leqslant 2$ **e.** $\log(2x-1) + \log x < 1$

Çözüm

a. $\left(\frac{4}{25}\right)^{-x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2(-x+1)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2x-2}$

$\left(\frac{5}{2}\right)^{3x+2} \leqslant \left(\frac{5}{2}\right)^{2x-2}$ $\frac{5}{2} > 1$ olduğundan $3x+2 \leqslant 2x-2 \Rightarrow x \leqslant -4 \Rightarrow Ç = (-\infty, -4]$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$ $0 < \frac{1}{2} < 1$ olduğundan $x^2 - x > 6$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 > 0$

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3$ veya $x = -2$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6 > 0$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	

$Ç = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ bulunur.

c. $n = \log_a a^n$ olduğundan $-1 = \log_4 4^{-1}$ dir.

$\log_4(x-4) > -1 \quad \Rightarrow \log_4(x-4) > \log_4 4^{-1}$

$\Rightarrow x - 4 > \frac{1}{4}$ $\quad$ ($4 > 1$ olduğundan)

$\Rightarrow x > \frac{17}{4} \Rightarrow Ç = \left(\frac{17}{4}, \infty\right)$ bulunur.

ç. $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) \leqslant 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \leqslant \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(0 < \frac{1}{3} < 1 \text{ olduğundan}\right)$

$\Rightarrow x - 2 \geqslant \frac{1}{9} \Rightarrow x \geqslant \frac{19}{9}\ (1)$

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2\ (2)$ (1) ve (2) den $Ç = \left[\frac{10}{9}, \infty\right]$

d. $\log_2\left[1-\log_{\frac{1}{3}}(4-x)\right] \leqslant 2 \Rightarrow \log_2\left[1-\log_{\frac{1}{3}}(4-x)\right] \leqslant \log_2 2^2$ $2 > 1$ olduğundan $1-\log_{\frac{1}{3}}(4-x) \leqslant 4$

$-3 \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(4-x) \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(4-x)$ $0 < \frac{1}{3} < 1$ olduğundan $27 \geqslant 4 - x \Rightarrow x \geqslant -23\ (1)$

$1-\log_{\frac{1}{3}}(4-x)>0 \Rightarrow 1>\log_{\frac{1}{3}}(4-x) \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{3}}(4-x) \Rightarrow \frac{1}{3}<4-x \Rightarrow x<\frac{11}{3}\ (2)$

$4-x > 0 \Rightarrow 4 > x$ (3)

(1), (2) ve (3) den $Ç=\left[-23, \frac{11}{3}\right)$ bulunur.

e. $\log(2x-1)+\log x <1 \quad \Rightarrow \quad \log[(2x-1)\cdot x]<1$

$\Rightarrow \quad \log(2x^2-x)<\log 10$ ($10 > 1$ olduğundan) $\Rightarrow 2x^2-x < 10$

$\Rightarrow \quad 2x^2-x-10 < 0$

$2x^2-x-10=0 \Rightarrow (2x-5)\cdot(x+2)=0 \Rightarrow \ x=\frac{5}{2}$ veya $x=-2$

x		-2		$\frac{5}{2}$	
$x^2-x-6 < 0$	$+$	o	$-$	o	$+$

$Ç=\left(-2, \frac{5}{2}\right)(1)$

$2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ (2) ve $x > 0$ (3)

(1), (2) ve (3) den $Ç=\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ bulunur.

5.5. ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki üstel denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $2^x-16^{x+1}=0$ **b.** $15\cdot 2^x=4^{x-1}+125$ **c.** $7^{\frac{1}{x}+x-2}=1$

ç. $5^x=3$ **d.** $e^x-5\cdot e^{-x}=4$ **e.** $9^x-60=17\cdot 3^x$

2. Aşağıdaki logaritmik denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\log_5(x-1)=2$ **b.** $\log_4(x+1)-\log_4(x-3)=2$

c. $\ln(x+2)+\ln x=\ln 3$ **ç.** $\log[7+\ln(x+1)]=1$

d. $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\log_3\sqrt[3]{9}$ **e.** $x^{\ln x}=e^2\cdot x$

f. $2^{\log_5 x}=3^{\log_5 4}$ **g.** $x^{\ln 3}+3^{\ln x}=54$

h. $5\log_4 x-3\log_x 4=-2$ **ı.** $\log(x^2+11)-\log(x-1)=1$

3. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x+1} > \left(\frac{25}{9}\right)^{x+2}$

b. $5^{x^2-x} - 25 < 0$

c. $\log_3(x+1) \leqslant -2$

ç. $\log_{\frac{1}{2}}[-2+\log_3 x] \leqslant -1$

d. $\log_{\frac{1}{4}} 5 - 2 > \log_{\frac{1}{4}}(3-x)$

e. $2 \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < 4$

5.3.2 Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar İle Modellenen Problemler

Cumhuriyetin ilanından sonra ilk nüfus sayımı 28 Ekim 1927 tarihinde yapılmış ve bu yıldan itibaren genellikle 5 yıllık aralıklarla devam edilmiştir. Bu uygulama esnasında ülke çapında sokağa çıkma yasağı uygulanmıştır. ilk kez sokağa çıkma yasağı olmaksızın adrese dayalı nüfus sayımı 2007 yılında yapılmıştır.

Türkiyede genel nüfus sayımı https://tr.m.wikipedia.org

✔ **Örnek:** 2007 ve 2012 yıllarında yapılan genel nüfus sayımlarına göre Türkiye'nin nüfusu aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Sayım tarihi	Nüfus
2007	70 586 256
2012	75 627 384

Bu verilere göre Türkiye'nin yıllık nüfus artış hızı yaklaşık % 1,39 dır. Aynı artış hızının süreceği kabul edilerek Türkiye'nin 2012 den sonra gelen bir t yılındaki P nüfusu

$p(t) = 75{,}6\, e^{0{,}0139 \cdot t}$ (milyon kişi) biçiminde modellenmektedir. Buna göre

a. Türkiye'nin 2019 yılındaki nüfusunu,

b. Türkiye'nin nüfusunun 100 000 000 kişiye ulaşacağı yılı bulalım.

Çözüm

a. $t = 2019 - 20012 = 7$

$p(7) = 75{,}6e^{(0{,}0139 \cdot 7)} = 83{,}3$

Türkiye'nin nüfusu 2019 yılında yaklaşık 83 milyon kişi olacaktır.

b. $100 = 75{,}6 \cdot e^{0{,}0139 \cdot t} \Rightarrow \frac{100}{75{,}6} = e^{0{,}0139 \cdot t} \Rightarrow \ln\left(\frac{100}{75{,}6}\right) = \ln e^{0{,}0139 \cdot t}$

$$0{,}2797139 = 0{,}0139 \cdot t \Rightarrow 20 \cong t$$

$2012 + 20 = 2032$

Türkiye'nin nüfusu 2032 yılı için 100 000 000 kişiye ulaşacaktır.

Örnek: Yandaki tabloda 1935 ve 1950 yıllarında yapılan nüfus sayımları verilmiştir. Türkiye'nin yıllık nüfus artış hızının yaklaşık değerini bulalım.

Sayım tarihi	Nüfus
1935	16 158 018
1950	20 947 188

Çözüm

Nüfus sürekli arttığından artış miktarı sürekli bileşik faiz gibi düşünebilir.

$A(t) = A \cdot e^{r \cdot t}$

t: 1950 – 1935 = 15 yıl, A(t) = 20 947 188, A = 16 158 018

$$20\,947\,188 = 16\,158\,018 \cdot e^{r \cdot 15} \Rightarrow \frac{20\,947\,188}{16\,158\,018} = e^{r \cdot 15}$$

$$\ln\left(\frac{20\,947\,188}{16\,158\,018}\right) = \ln\left(e^{r \cdot 15}\right) \Rightarrow 0,25958802 = r \cdot 15$$

$$\Rightarrow r = 0,01730587 \text{ olur.}$$

Buradan yıllık nüfus artış hızı % 1,7 bulunur.

Örnek: Richter ölçeği depremlerin şiddetini ölçmekte kullanılır. Richter ölçeği R ve depremde ortaya çıkan enerji miktarı E olmak üzere;

$R = 0,67 \cdot \log(0,37 \cdot E) + 1,46$

formülü ile depremin büyüklüğü bulunur. Buna göre;

a. 5 büyüklükte çıkan enerji

b. 7 büyüklükte çıkan enerji

bulalım.

Çözüm

a. $5 = 0,67 \cdot \log(0,37 \cdot E) + 1,46$

$$\frac{5 - 1,46}{0,67} = \log(0,37 \cdot E) \Rightarrow 10^{\left(\frac{5-1,46}{0,67}\right)} = 0,37 \cdot E$$

$$5175,17687 = 0,37 \cdot E$$

$$13\,986,9645 = E$$

b. $7 = 0,67 \cdot \log(0,37 \cdot E) + 1,46$

$$\frac{7 - 1,46}{0,67} = \log(0,37 \cdot E) \Rightarrow 10^{\left(\frac{7-1,46}{0,67}\right)} = 0,37 \cdot E$$

$$517517 \cdot 687 = 0,37 \cdot E$$

$$13\,98696,45 = E$$

Şiddet hesaplama formülü 10 tabanlı logaritma içerdiği için depremin şiddetini Richter ölçeğine göre 1 birim artması gerçek şiddetinin 10 katına çıkması anlamına gelir.

Bir ses kaynağının sesin yayılma doğrultusuna dik 1 m^2 yüzeyden 1 saniyede yaydığı enerjiye ses şiddeti denir. Ses şiddetinin ölçüsüne ses düzeyi denir ve ses düzeyi birimi desibel (db) dir.

İnsan kulağının duyarlı olduğu en düşük ses şiddeti 10^{-12} watt/m^2 ile insan kulağının zarar görmeden duyabileceği en yüksek ses şiddeti 1 watt/m^2 dir. Bu değerler arası çok geniş bir aralıktır. Bu nedenle logaritmik bir ölçeğe ihtiyaç duyulur.

Uluslararası referans ses şiddeti $I_o = 10^{-12}$ watt/m^2 kabul edilmiştir. Ses şiddeti I olan bir ses kaynağının ses gücü düzeyi,

$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_o} (\text{db})$ olarak tanımlanmıştır.

Çeşitli ses kaynaklarının ürettiği ses düzeyleri tablo ile verilmiştir.

Ses Düzeyi (dB)	Bilinen Sesler
30	Fısıltılı konuşma
50	Yağmur düşüşü - alçak sesli konuşma
70	Yoğun trafik – normal konuşma
90	Çim biçme makinesi – sesli konuşma
115	Rock konseri
140	Av tüfeği (yakın mesafe)

Örnek: Kulaklıkla dinlenen müziğin ses düzeyi 100 dB olarak ölçülmüştür. Kulaklıkla dinlenen ses şiddetinin normal konuşmanınkinin kaç katı olduğunu bulalım.

Çözüm

100 dB ve 70 dB e karşılık gelen ses şiddetleri sırasıyla I_1, ve I_2 olsun.

$$10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} = 100 \Rightarrow \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \Rightarrow \log \frac{I_1}{I_0} = 10^{10} \Rightarrow I_1 = 10^{10} \cdot I_0$$

$$10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0} = 70 \Rightarrow \log \frac{I_2}{I_0} = 7 \Rightarrow \log \frac{I_2}{I_0} = 10^{7} \Rightarrow I_2 = 10^{7} \cdot I_0$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{10} \cdot I^{0}}{10^{7} \cdot I_0} = 10^3 = 1000 \text{ kat bulunur.}$$

Örnek: Kimyasal çözeltinin pH ı aşağıdaki formül ile verilmektedir.

$pH = -\log[H^+]$

$[H^+]$ litrede mol olarak, hidrojen iyonlarının kontsantrasyonudur. pH aralığının değerleri (0, 14) dir. Burada pH $<$ 7 ise çözelti asidik, pH = 7 ise çözelti nötr ve pH $>$ 7 ise çözelti baziktir. Buna göre;

a. Bir litrelik kaptaki suyun 0,000 000 01 mol hidrojen iyonunun pH ını,

b. 5 pH değerine sahip bir hafif asidik çözeltinin hidrojen iyonu konsantrasyonunu bulalım.

Çözüm

a. $[H^+] = 0{,}000\ 000\ 01 = 10^{-8} \Rightarrow pH = -\log 10^{-8} = 8$

b. $pH = 5 \Rightarrow 5 = -\log[H^+] \Rightarrow -5 = \log[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-5}$

Örnek: Bir elementin yarılanma ömrü 4 gündür. Başlangıç kütlesi 56 gr olan bu elementin 40 gün sonra kalan kısmının kütlesi kaç gram olacağını bulalım.

Çözüm

Her 4 günde kalan cisim yarılanacaktır.

O zamandan da $\quad 56 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0}{4}}$

4. gün $\quad 56 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{4}}$

8. gün $\quad 56 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{4}}$

40 gün $\quad 56 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{4}} = 56 \cdot \frac{1}{2^{10}}$ bulunur.

5.6. ALIŞTIRMALAR

1. Bir ortamın pH değeri ile hidrojen iyon yoğunluğu $[H^+]$ arasındaki ilişki $pH = -\log[H^+]$ dır. Bir ortamın pH değeri, mikroorganizmaların üremesini etkiler. Genelde bakteriler pH değeri 6–8 arasında olan ortamda iyi ürerler. Bakteriler için en iyi üreme ise pH değeri 7,2 – 7,4 olan ortamlarda gerçekleşir.

İyi üredikleri ortamın hidrojen iyon yoğunluğunu hangi değerler arasında olduğunu bulunuz.

2. Bir kimyasal çözeltinin hidrojen iyonu konbontrasyonu $H^+ = 0{,}000005$ dir. $\log 5 = 0{,}6990$ ise pH değerini bulunuz.

3. Yandaki tabloda 2000 ve 2015 yıllarında yapılan nüfus sayımları verilmiştir. Türkiye'nin yıllık nüfus artış hızı yaklaşık % 1 dir. Aynı artış hızının süreceği kabul edilerek Türkiye'nin 2015'ten sonra gelen bir t yılındaki P nüfusu

Sayım tarihi	Nüfus
2000	67 803 927
2015	78 741 053

$p(t) = 78{,}7 \cdot e^{0{,}01 \cdot t}$ (milyon kişi)

biçiminde modellenmektedir. Buna göre;

a. Türkiye'nin 2021 yılındaki nüfusunu,

b. Türkiye'nin nüfusunun 90 000 000 kişiye ulaşacağı yılı

yaklaşık olarak bulunuz. (Hesap makinesi yardımıyla bulunuz.)

4. Çalar saatin ses düzeyi 80 dB, rock konserinin 115 dB olarak ölçülmüştür. Rock konserinin ses şiddetinin, çalar saatin ses şiddetinin kaç katı olduğunu bulunuz. $\left(\text{Formül: } L = 10 \cdot \log\frac{I}{I_0}\,\text{dB}\right)$

5. Richter ölçeğine göre 16 704 · 8681 çıkan enerjinin kaç büyüklükte olduğunu hesap makinesi yardımıyla bulunuz.

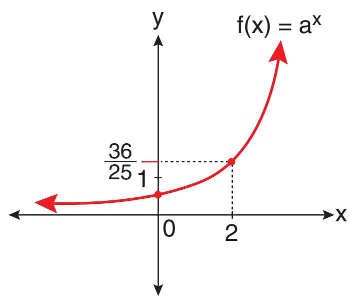
(Formül: $R = 0{,}67 \cdot \log(0{,}37 \cdot E) + 1{,}46$)

6. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri $A(t) = A \cdot e^{r \cdot t}$ sürekli bileşik faize göre hesaplayarak doldurunuz. (Hesap makinesi yardımıyla bulunuz.)

Ana para (TL)	Yıllık Faiz (%)	Süre (n)	Eşitlik	Elde Edilen Para
10 000	12	3	$A(3) = 10\,000\, e^{0{,}12 \cdot 3}$	(a)
30 000	15	5	(b)	(c)
(d)	10	4	(e)	223 773 705

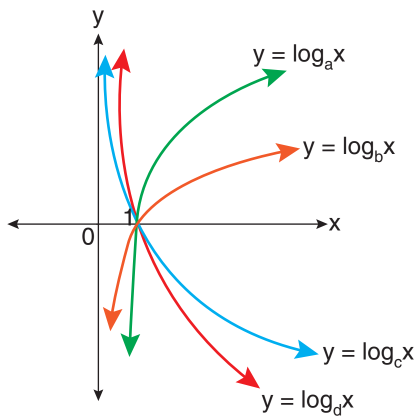
5. ÜNİTE DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Yandaki şekilde f(x) = ax üstel fonksiyonun grafiği verilmiştir. Buna göre, $f^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)\cdot f(1)$ kaçtır?



A) –1 B) 1 C) $\frac{-6}{5}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{36}{25}$

2. Şekilde verilen fonksiyonların grafiklerine göre a · b, c ve d nin sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $a<b<c<d$ B) $d<c<b<a$
C) $d<c<a<b$ D) $c<d<b<a$
E) $c<d<a<b$

3. $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=3\log_2(-x+1)-2$ ise $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2-3^{\frac{x+2}{2}}$ B) $2+2^{\frac{x+2}{3}}$ C) $2+3^{\frac{x+2}{3}}$ D) $1+2^{\frac{x+2}{3}}$ E) $1-2^{\frac{x+2}{3}}$

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\ f(x)=\left(\frac{2}{1-a}\right)^{x+1}$ üstel fonksiyon ise a nın alabileceği değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–∞, 1) – {–1} B) (–∞, 0) – {–1} C) (–∞, –1) D) (–∞, 1) E) (1, ∞)

5. $f(x)=\log_{(a-3)}(7x+1)$ fonksiyonu için f(3) < f(2) olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $\frac{16}{5}$ B) $\frac{17}{3}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{22}{7}$ E) $\frac{15}{4}$

6. $f(x)=\log_{(x-5)}\left(\dfrac{x^2-9}{x+4}\right)$ fonksiyonun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(3, \infty)-\{6\}$
B) $(-4, -3) \cup (3, \infty)$
C) $(6, \infty)$
D) $(-4, \infty)-\{6\}$
E) $(5, \infty)-\{6\}$

7. $f(x)=\log_{\frac{m}{3}}(x^2+(m-2)x+4)$ fonksiyonu gerçek sayılarda tanımlı olması için m nin alabileceği tam sayı değerler toplamı kaçtır?

A) 14
B) 12
C) 10
D) 8
E) 6

8. $f:\left(\dfrac{4}{b},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a(4-bx)$ fonksiyonu x eksenini –1 noktasında kesmektedir. $f^{-1}(4)=4$ olduğuna göre $f^{-1}(3)$ ün değeri kaçtır?

A) 3
B) $\dfrac{4}{3}$
C) $\dfrac{5}{3}$
D) 9
E) $\dfrac{7}{3}$

9. $\log_5\left(\dfrac{-4}{5}+\log_{12}(x+1)\right)=-1$ olduğuna göre, $\log_2(x+5)$ in değeri kaçtır?

A) 11
B) 8
C) 4
D) 3
E) 2

10. $\log(x-2)-2\log 5<-2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2, \infty)$
B) $\left(\dfrac{9}{4},\infty\right)$
C) $(2, 6)$
D) $\left(\dfrac{7}{2},\infty\right)$
E) $\left(2,\dfrac{9}{4}\right)$

11. $(\log_2 a)\log_{\frac{5}{\sqrt{5}}}5=9$ olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) $\dfrac{65}{8}$
B) $\dfrac{70}{3}$
C) $\dfrac{5}{2}$
D) 8
E) $\dfrac{1}{8}$

12. log4 = x, log3 = y olduğuna göre, $\log_{12}25$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x+2}{x+y}$ B) $\frac{x+y}{x-2}$ C) $\frac{2-x}{x+y}$ D) $\frac{2x}{x+y}$ E) $\frac{x+y}{x-y}$

13. $\frac{1}{1+\log_2 18}+\frac{1}{1+\log_3 12}+\frac{1}{1+\log_4 9}=x$ ise $\log_6 24$ ün x türünden eşiti kaçtır?

A) $\frac{x}{2}$ B) 2x C) $\sqrt{x}$ D) 4x E) 8x

14. $\log_a b = 2$ olmak üzere $\log_{a^2} b^4 - \log_{b^4} a^2$ nin değeri kaçtır?

A) 3 B) $\frac{15}{4}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{7}{2}$ E) 4

15. $\frac{1}{\log_3 5}+\frac{1}{\log_{(x+2)} 5}=\log_5(x^2-3x-10)$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {–2} B) {0} C) {2} D) {4} E) {8}

16. $f(x)=\sqrt{\ln(\log(x-4))}$ fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x > 4$ B) $x \geqslant 5$ C) $x \geqslant 14$ D) $x \geqslant 15$ E) $x > 20$

17. $\log_6 5! = x$ ise $\log_{5!} 6!$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1+x}{x-1}$ B) $\frac{1-x}{x}$ C) $\frac{x}{x+1}$ D) $\frac{x}{x-1}$ E) $\frac{1+x}{x}$

18. $\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_{27}(x^2-3)\right]<1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\mathbb{R}-[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$ B) (–6, 6) C) (–6, 3) D) $(3, \infty)$ E) $\mathbb{R}-[-3,3]$

19. $2^a = 3^b$ olduğuna göre, $\log_{12}6$ ifadesinin a ve b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{a-b}{a-2b}$ B) $\frac{a+b}{2b}$ C) $\frac{a+b}{2b+a}$ D) $\frac{2a}{a+b}$ E) $\frac{2b}{a+b}$

20. $3^{2-\log_3(3x+3)} = \frac{1}{4}$ olduğuna göre, x kaçtır?

A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) 7

21. log2 = 0,30103 olduğuna göre, log(0,00005) ifadesinin değeri kaçtır?

A) –2,30103 B) –3,30103 C) –4,30103 D) –5,30103 E) –6,30103

22. $4^{\log\sqrt{x}} = 3^{\log 4}$ ise $\log_x 3$ ün değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 9 E) 2

23. $(3^{x+1} - 81)\cdot(x^2 - 4) \geqslant 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-2, 2] \cup [3, \infty)$ B) $(-\infty, 2] \cup [2, 3]$ C) $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$
D) $[-2, 2] \cup \{3\}$ E) $[2, 3] \cup \{-2\}$

24. $e^x = 16e^{-x} + 6$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) {ln2} B) {ln4} C) {ln6} D) {ln8} E) {ln16}

25. $x^{\ln x} - e^{12}x = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{e^3\}$ B) $\{e^{-4}\}$ C) $\{e^3, e^4\}$ D) $\{e^{12}\}$ E) $\{e^4, e^{-3}\}$

26. $\sqrt{5\log_2(-x)} = \log_2|x|$ denkleminin kökleri toplamı kaçtır?

A) –33 B) –32 C) 0 D) 4 E) 16

27. $\log_{\sqrt{2}}(\cos 15°) + \log_{\sqrt{2}}(\sin 15°)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) –4 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

28. $a^{\log(1000\cdot a)} = 10\,000$ denkleminin kökler toplamı kaçtır?

A) $\dfrac{10}{10001}$ B) $\dfrac{1000}{100001}$ C) $\dfrac{100001}{10000}$ D) $\dfrac{1000}{101}$ E) $\dfrac{10000}{10001}$

29. Bir elementin yarılanma ömrü 5 gündür. Başlangıçta kütlesi 90 gr olan bu elementin x gün sonra kalan kısmının kütlesini veren denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $90\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ B) $90\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x}$ C) $90\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}$ D) 45^{x} E) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x}$

30. Yandaki tabloda 1975 ve 1990 yıllarında yapılan nüfus sayımları verilmiştir. Türkiye'nin yıllık nüfus artış hızının yaklaşık değeri aşağıdakilerden hangisidir?

Yıl	Nüfus Sayımı
1975	40 347 719
1990	56 473 035

A) % 1 B) % 2 C) % 3 D) % 4 E) % 5

31. $x = \log_2 10$, $y = \log_4 63$ ve $z = \log_5 23$ tür. Buna göre, x, y ve z nin küçükten büyüğe sıralanmış şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $z < y < x$ B) $x < y < z$ C) $x < z < y$ D) $z < x < y$ E) $y < z < x$