

5

Circuitos de corriente alterna

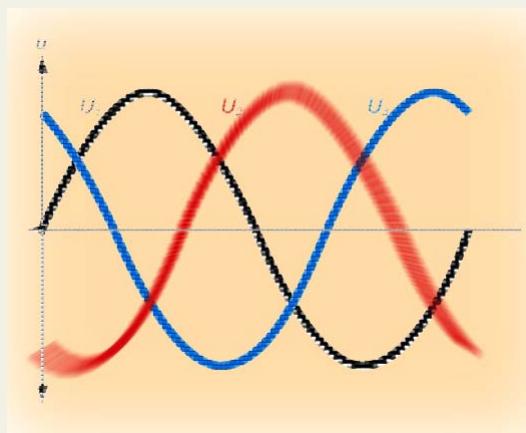
Hasta ahora hemos estudiado circuitos con fuentes de corriente continua, en los que la tensión no cambia con el tiempo. En esta unidad estudiaremos circuitos en los que la tensión sí cambia siguiendo una función sinusoidal. Estas tensiones son usadas de forma mayoritaria tanto en el ámbito doméstico como el industrial.

Comenzamos la unidad con el estudio detallado de los valores que definen a una fuente de tensión alterna sinusoidal. Continuamos con el estudio del comportamiento de resistencias, bobinas y condensadores frente a una señal sinusoidal. Ampliaremos el concepto de resistencia al de impedancia, mucho más general. Ampliaremos los conceptos de potencia con la incorporación de dos nuevas potencias: la aparente y la reactiva. Utilizaremos métodos gráficos para resolver los circuitos basados en el triángulo de impedancias y potencias. Aprenderemos cómo compensar la potencia reactiva utilizando condensadores. Conoceremos cuáles son las condiciones que hay que aplicar a un circuito para que alcance la condición de resonancia.

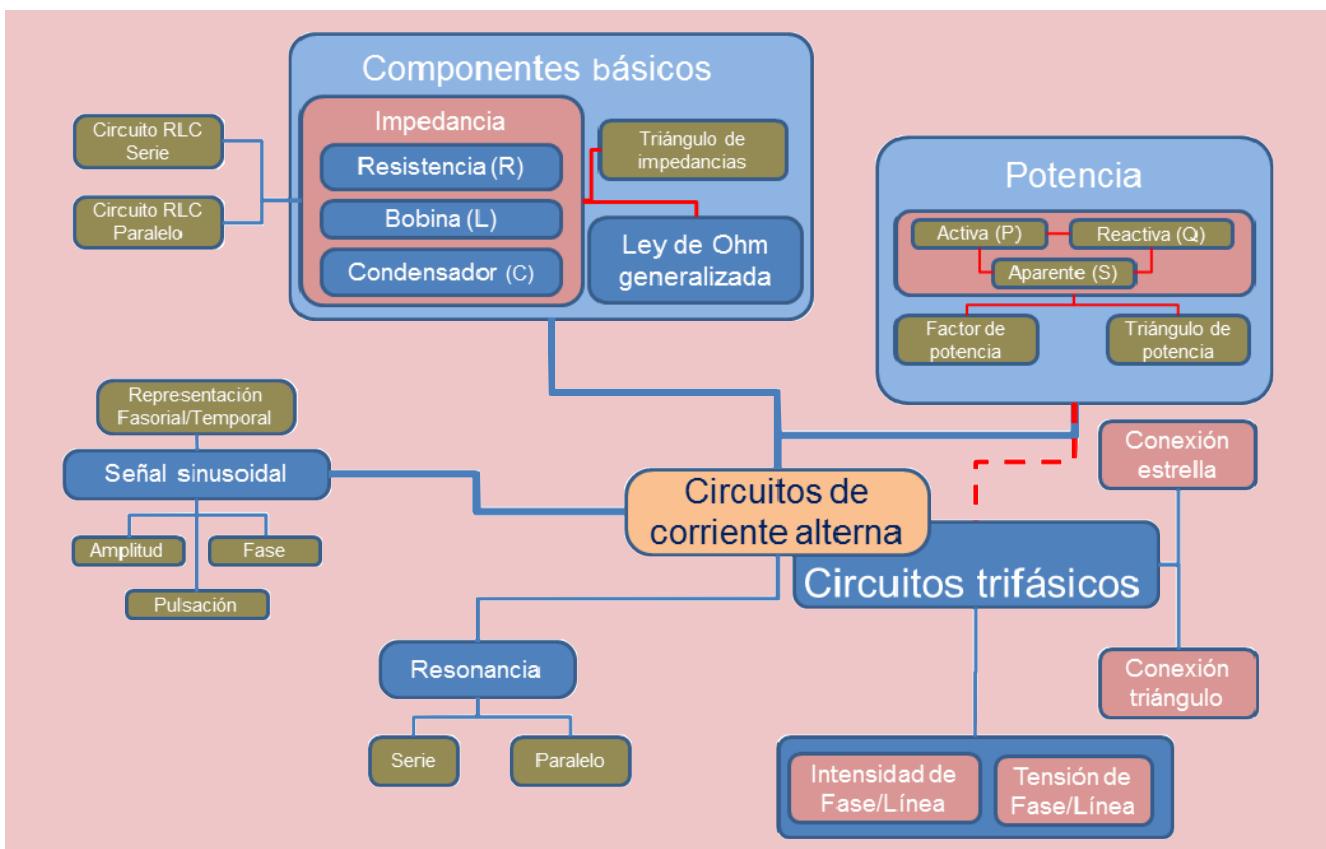
Por último, estudiaremos los sistemas trifásicos, los constituidos por tres tensiones monofásicas de igual amplitud y frecuencia desfasadas entre sí 120° que alimentan a cargas conectadas en estrella o en triángulo. Aplicaremos los conceptos de potencia activa, reactiva y aparente a los sistemas trifásicos y veremos cómo medir la potencia en los sistemas trifásicos y cómo corregir el factor de potencia.

Los **objetivos** que pretendemos alcanzar con el estudio de esta unidad son los siguientes:

1. Identificar los parámetros que definen una señal sinusoidal.
2. Manejar la representación temporal y fasorial de una señal sinusoidal.
3. Comprender el comportamiento de una resistencia, una bobina y un condensador ante una señal sinusoidal.
4. Entender y aplicar el concepto de impedancia.
5. Conocer y aplicar el triángulo de impedancia en sistemas monofásicos y trifásicos.
6. Calcular la potencia activa, reactiva y aparente en un circuito monofásico y trifásico.
7. Determinar y corregir el factor de potencia en un circuito monofásico y trifásico.
8. Identificar las condiciones de resonancia en circuitos monofásicos.
9. Conocer la constitución de un sistema trifásico.
10. Identificar las tensiones e intensidades de línea y fase en un sistema trifásico.
11. Conocer los tipos de conexiónados en los circuitos trifásicos.
12. Aplicar las técnicas de resolución de circuitos monofásicos a circuitos trifásicos sencillos.
13. Conocer las técnicas de medición de la potencia en los circuitos trifásicos.



Señales de corriente alterna. (M.C.M.)



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. ONDA ALTERNA SINUSOIDAL	116
2. REPRESENTACIÓN DE UNA SEÑAL SINUSOIDAL	116
2.1. Descripción de una señal sinusoidal	117
2.2. Valores significativos de una señal sinusoidal	118
2.3. Representación vectorial y compleja de una señal sinusoidal	119
2.4. Representación gráfica. Desfase	120
3. RESPUESTA DE LOS ELEMENTOS BÁSICOS ANTE UNA SEÑAL SINUSOIDAL	122
3.1. Respuesta de una resistencia	122
3.2. Respuesta de una bobina	123
3.3. Respuesta de un condensador	124
4. IMPEDANCIA	126
4.1. Representación compleja de una impedancia	127
4.2. Asociación de impedancias	128
4.3. Triángulo de impedancias	129
5. LEY DE OHM GENERALIZADA	131
6. CIRCUITO RLC EN SERIE	132
7. CIRCUITO RLC EN PARALELO	135
8. POTENCIA EN LOS ELEMENTOS BÁSICOS	138
8.1. Potencia en una resistencia. Potencia activa	138
8.2. Potencia en bobinas y condensadores. Potencia reactiva	139
9. POTENCIA EN UNA IMPEDANCIA	143
9.1. Triángulo de potencias	144
9.2. Factor de potencia	145
10. CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA EN SISTEMAS MONOFÁSICOS	147
11. RESONANCIA	148
11.1. Resonancia en serie	148
11.2. Resonancia en paralelo	149
12. SISTEMAS TRIFÁSICOS	151
12.1. Tensión simple y compuesta	153
12.2. Intensidad simple y compuesta	153
12.3. Conexión de cargas en estrella y triángulo	154
12.4. Resolución de circuitos trifásicos	155
13. POTENCIAS EN SISTEMAS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS	159
14. MEDICIÓN DE LA POTENCIA. MÉTODO DE LOS DOS VATÍMETROS	161
15. CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA EN SISTEMAS TRIFÁSICOS	162

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

1. Onda alterna sinusoidal

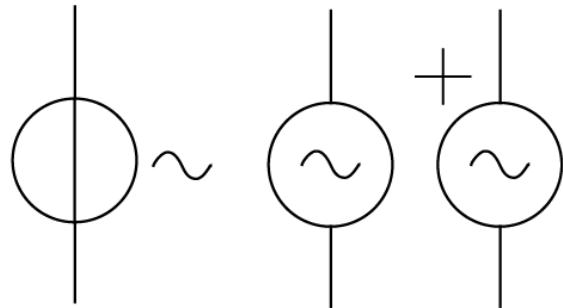
Los sistemas basados en **corriente alterna** no fueron los primeros en ser utilizados. Inicialmente, tanto la producción como el consumo se realizaban en **corriente continua**. La necesidad de transportar la energía eléctrica a largas distancias con las mínimas pérdidas fue lo que favoreció el desarrollo de la corriente alterna frente a la continua. El transformador y el motor de inducción fueron claves en este proceso.

2. Representación de una señal sinusoidal

Una señal sinusoidal es aquella que sigue una variación dada por alguna de las siguientes expresiones:

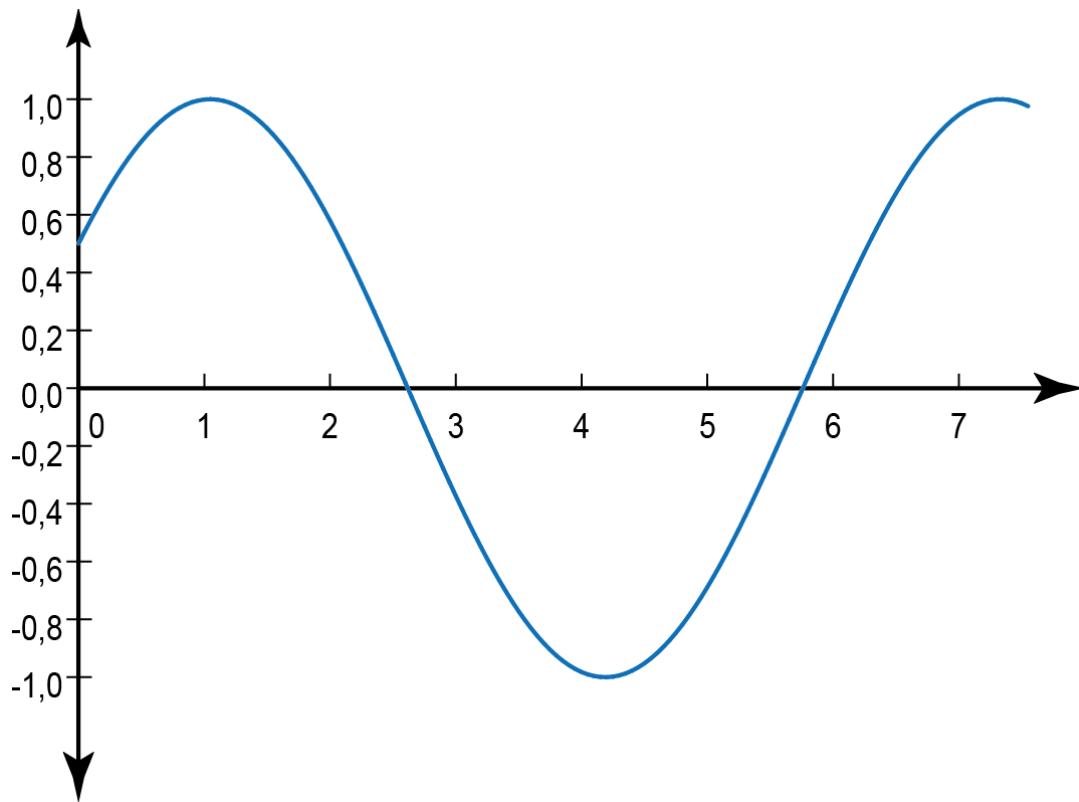
$$f(t) = A_p \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{o} \quad f(t) = A_p \cdot \cos(\omega \cdot t + \delta)$$

En la siguiente imagen puedes ver la representación de la función seno con un desfase de 30° ($\pi/6$ radianes) respecto al origen.



Símbolo normalizado de una fuente de tensión sinusoidal. (M.C.M.)

Símbolos no normalizados de una fuente de tensión sinusoidal. (M.C.M.)



La representación del coseno sería la misma onda desfasada $\pi/2$ radianes respecto a la anterior. En esta unidad utilizaremos la ley de variación basada en la *función seno*.

2.1. Descripción de una señal sinusoidal

Una función sinusoidal es una **función periódica** porque se repite a intervalos regulares de tiempo. El tiempo que tarda en repetirse se llama **periodo (T)** y se mide en **segundos**.

Se denomina **frecuencia** al número de veces que se repite la señal en **un segundo**, su unidad es el **hercio (Hz)**. La relación entre frecuencia y periodo es inversa:

$$f = \frac{1}{T}$$

Para una señal sinusoidal de la forma:

$$f(t) = A_p \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

A_p es la **amplitud**, es decir, el máximo valor que alcanza la señal.

ω es la **frecuencia angular o pulsación** expresada en rad/s, tiene unidades de velocidad angular. El valor de la pulsación está dado por la expresión:

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

t es el tiempo medido en segundos (s).

φ es el ángulo de fase inicial medido en radianes (rad).

Se llama **ciclo** al conjunto de valores que toma la función en un periodo.

La representación en el tiempo es la utilizada cuando se estudian señales con un **osciloscopio**.



Ejemplo

1. Dada la señal sinusoidal de la figura, debemos obtener sus parámetros identificativos.

Solución:

Valor máximo, $A_p = 5$.

Periodo, $T = 20$ ms; observa que la función se repite cada 20 ms.

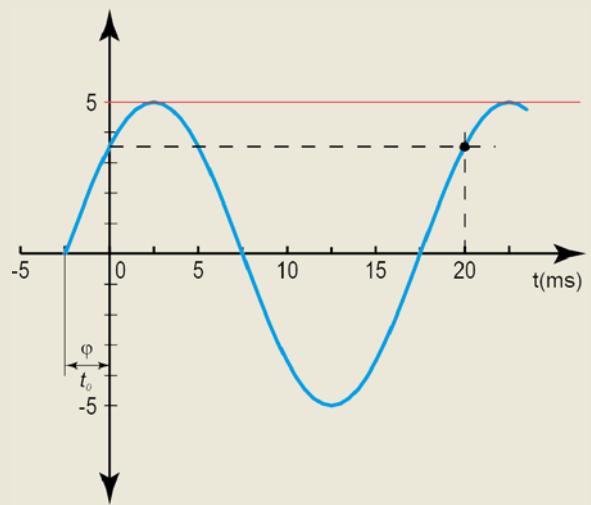
Frecuencia, $f = 1/T = 1/20 \cdot 10^{-3} = 50$ Hz.

Fase inicial, φ . La fase inicial está señalada en la figura; es necesario expresarla en radianes, no en tiempo. Para relacionar ambos sabemos que el periodo T se corresponde con un ángulo de 2π radianes; según esto se puede establecer que:

$$T = 20 \text{ ms} \Rightarrow 2\pi \text{ rad}$$

así $\varphi = \frac{2\pi \cdot 2,5}{20} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

$$t_0 = 2,5 \text{ ms} \Rightarrow \varphi$$



Ejemplo de una señal sinusoidal. (M.C.M.)

La expresión que define la señal del ejemplo es:

$$f(t) = 5 \cdot \sin \left(2\pi \cdot 50 \cdot t + \frac{\pi}{4} \right) = 5 \cdot \sin \left(100\pi \cdot t + \frac{\pi}{4} \right)$$

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

2.2. Valores significativos de una señal sinusoidal

Los valores significativos de una señal sinusoidal son los siguientes:

- **Valor eficaz** o valor RMS de una señal de corriente alterna es aquel que a efectos de disipación de energía en un resistor produce el mismo efecto que el que causaría el mismo valor de una corriente continua. Se calcula como el valor cuadrático medio de la señal (en inglés Root Mean Square) y se corresponde con el resultado de la siguiente expresión:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt}$$

El valor eficaz es el que se obtiene al medir con los aparatos de medida como voltímetros o amperímetros.

- **Valor medio** de una señal periódica, está definido como:

$$U_m = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Si aplicamos la ecuación anterior a la función seno, el resultado es cero por tratarse de una función simétrica, por lo que el valor medio se toma para un semiperíodo ($T/2$), es decir:

$$U_m = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} u(t) dt$$

- **Valor de pico** (U_p) o **valor de cresta** (U_c), está definido como el valor máximo que toma la señal:

$$U_p = U_{\max} \quad \text{o} \quad U_c = U_{\max}$$

- **Valor de pico a pico** o **valor de cresta a cresta**, está definido como:

$$U_{PP} = U_{\max} - U_{\min}$$

$$U_{CC} = U_{\max} - U_{\min}$$

- **Factor de forma**, está definido como el cociente entre el valor eficaz y el valor medio de una señal:

$$F_f = \frac{\text{Valor eficaz}}{\text{Valor medio}} = \frac{U}{U_m}$$

- **Factor de cresta**, queda definido como el cociente entre el valor de cresta y el valor eficaz de una señal:

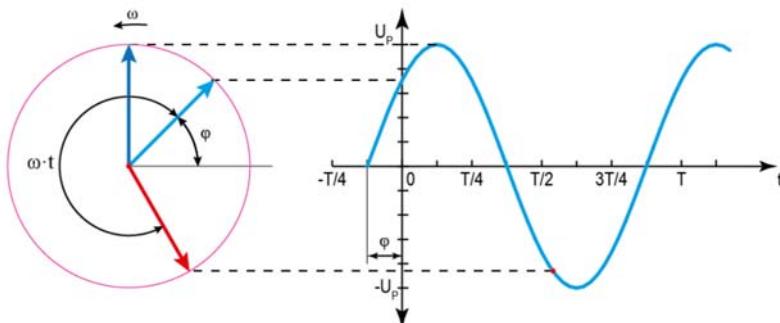
$$F_c = \frac{\text{Valor de cresta}}{\text{Valor eficaz}} = \frac{U_c}{U}$$

En la tabla siguiente se muestran resumidos los valores anteriores para la señal sinusoidal:

Valor eficaz (U)	$\frac{U_p}{\sqrt{2}}$
Valor medio (U_m)	$\frac{2 \cdot U_p}{\pi}$
Valor de pico (U_p) Valor de cresta (U_c)	U_p
Valor de pico a pico (U_{PP}) Valor de cresta a cresta (U_{CC})	$2 \cdot U_p$
Factor de forma (F_f)	$\frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \approx 1,11$
Factor de cresta (F_c)	$\sqrt{2}$

2.3. Representación vectorial y compleja de una señal sinusoidal

Una magnitud sinusoidal se puede representar como la proyección vertical de un **vector rotativo**, denominado **fasor**, que gira a una velocidad angular (ω) igual a la pulsación de la señal, en sentido contrario al de las agujas del reloj. El módulo de este fasor es igual al valor de cresta y la posición inicial del fasor está dada por la fase inicial. En la figura siguiente se muestra gráficamente el concepto de fasor:



Fasor asociado a una señal sinusoidal. (M.C.M.)

Un fasor expresado en **coordenadas polares** toma la siguiente forma:

$$U = U_p \angle \varphi$$

Donde tenemos que:

U_p es el **módulo del vector**.

φ es la **fase inicial** expresada en radianes o grados sexagesimales.

Un fasor se puede expresar como un **número complejo**, siendo en este caso una *representación binómica*:

$$U = U_p \cdot \cos \varphi + j \cdot U_p \cdot \sin \varphi$$

$j = i = \sqrt{-1}$, i es la **unidad imaginaria** de los números complejos, pero como puede confundirse con la i de intensidad instantánea, en Electrotecnia se utiliza el símbolo j . La unidad imaginaria geométricamente representa un giro de $+90^\circ$.

Te recomendamos el repaso de las Matemáticas de Primero de Bachillerato, de manera especial lo referente a las funciones trigonométricas y los números complejos.

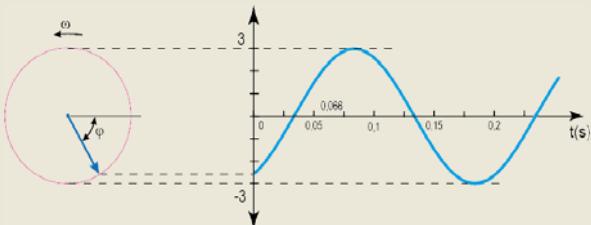


Ejemplo

2. Representa gráficamente la siguiente señal correspondiente a una corriente:

$$i(t) = 3 \cdot \sin\left(10 \pi \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Solución: Debemos representar un vector de módulo 3, con un desfase inicial $\varphi = -\pi/3$ rad o $\varphi = -60^\circ$. Este vector giraría a una velocidad $\omega = 10\pi$ rad/s.



La representación polar es la siguiente: $I = I_p \angle \varphi \Rightarrow I = 3 \angle -60^\circ$ A ; o expresando el ángulo en radianes:

$$I = 3 \angle -\pi/3$$

La representación en forma de número complejo es:

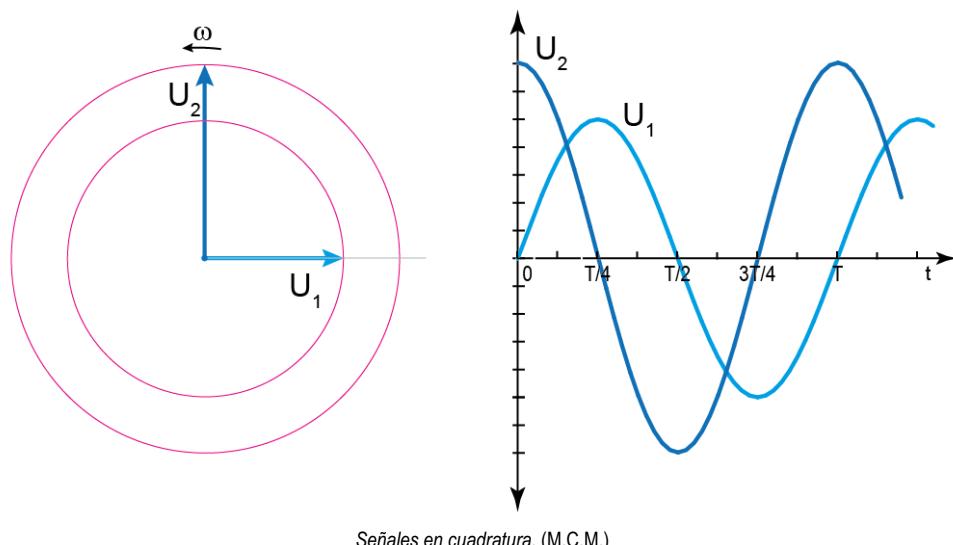
$$I = I_p \cdot \cos \varphi + I_p \cdot \sin \varphi \cdot j \Rightarrow I = 3 \cdot \cos(-60^\circ) + 3 \cdot \sin(-60^\circ) \cdot j = 1,5 - 1,5 \cdot \sqrt{3} \cdot j$$

UNIDAD 5

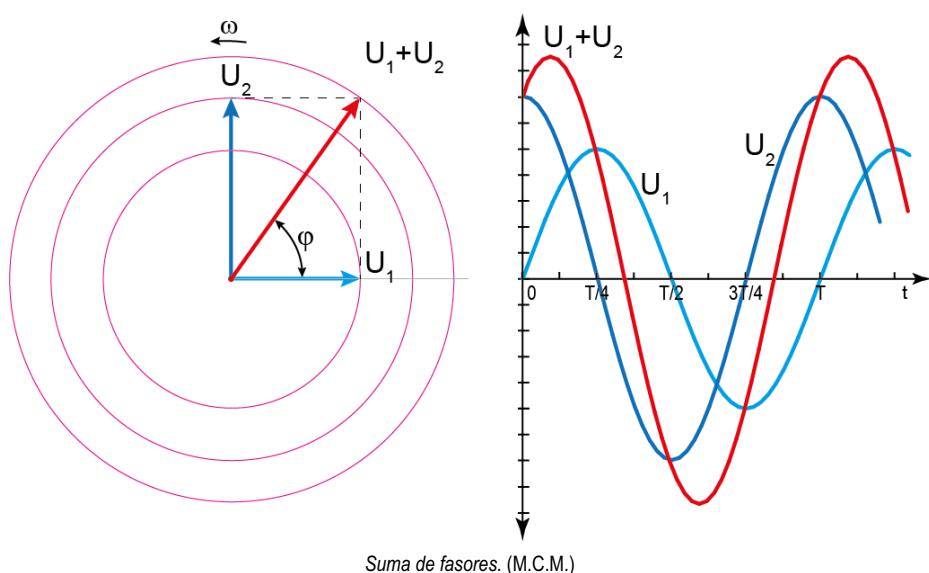
CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

2.4. Representación gráfica. Desfase

En el apartado anterior hemos estudiado la función sinusoidal con sus parámetros característicos. Hay situaciones donde es necesario sumar o restar funciones sinusoidales de la misma frecuencia y desfasadas entre sí un cierto ángulo. El **desfase** entre dos señales es la diferencia de fase entre ellas. Cuando dos señales están desfasadas 0° están **en fase**; si están desfasadas en $\pm 90^\circ$ se dice que están en **cuadratura** y si están desfasadas en 180° están en **oposición o contrafase**. En la siguiente figura se muestran dos señales en cuadratura. En este caso la señal U_2 está adelantada 90° ($\pi/2$ rad) con respecto a U_1 . Observa que es más intuitivo obtener el desfase en una representación fasorial que en una temporal.



Para obtener la suma de las señales anteriores U_1 y U_2 debemos sumar vectorialmente los fasores U_1 y U_2 , obteniendo así la magnitud y el desfase inicial resultantes.





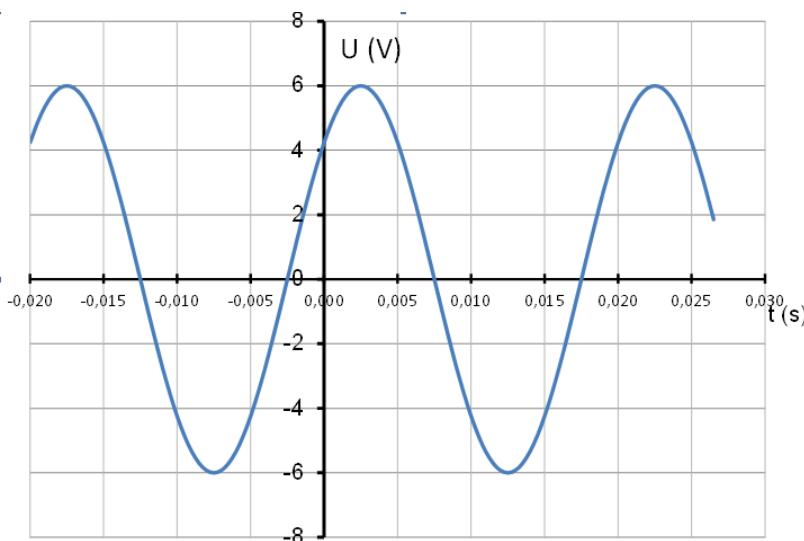
Actividades

1. Tenemos la señal senoidal de tensión:

$$u(t) = 380 \cdot \sin\left(100 \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

A partir de la cual debemos:

- Calcular la amplitud, la frecuencia, el periodo, la pulsación y la fase inicial.
 - Realizar la representación temporal de la función.
 - Realizar la representación fasorial de la función.
 - Calcular su valor eficaz, su valor medio, el factor de pico y el factor de forma.
2. Representar temporalmente y fasorialmente dos señales sinusoidales de frecuencia 10 Hz desfasadas 90°. La amplitud de una de ellas es la mitad de la otra.
3. Dos señales sinusoidales de la misma frecuencia, una de ellas con $U_{pp} = 30$ V y la otra de 13 voltios eficaces, están desfasadas 60°. ¿Cuál es gráficamente la señal resultante de su suma?
- Indicación: Debemos tomar como referencia de ángulos la señal de 30 V.
4. Determina el valor de la tensión alterna mostrada en la figura. Completa los huecos $u(t) = \underline{\quad} \sqrt{2} \cos(\underline{\quad} t + \underline{\quad})$



Recuerda

- ✓ Una **señal sinusoidal** es una señal periódica definida por su amplitud, pulsación y fase inicial.
- ✓ Dada una señal sinusoidal con valor de pico A_p , su **valor eficaz** es $A_p/\sqrt{2}$.
- ✓ Una señal sinusoidal se puede representar en función del tiempo, como un **fasor** o como un **número complejo**.
- ✓ La forma más cómoda de sumar señales sinusoidales de la misma frecuencia o de determinar su desfase es utilizando la **representación fasorial**.

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

3. Respuesta de los elementos básicos ante una señal sinusoidal

Vamos a estudiar brevemente cómo se comportan de forma aislada una resistencia, una bobina y un condensador ante una señal sinusoidal.

3.1. Respuesta de una resistencia

Si a una resistencia de valor R ohmios (Ω) se la somete a una tensión sinusoidal de valor eficaz U y pulsación ω , la tensión instantánea aplicada a la resistencia es:

$$u(t) = (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

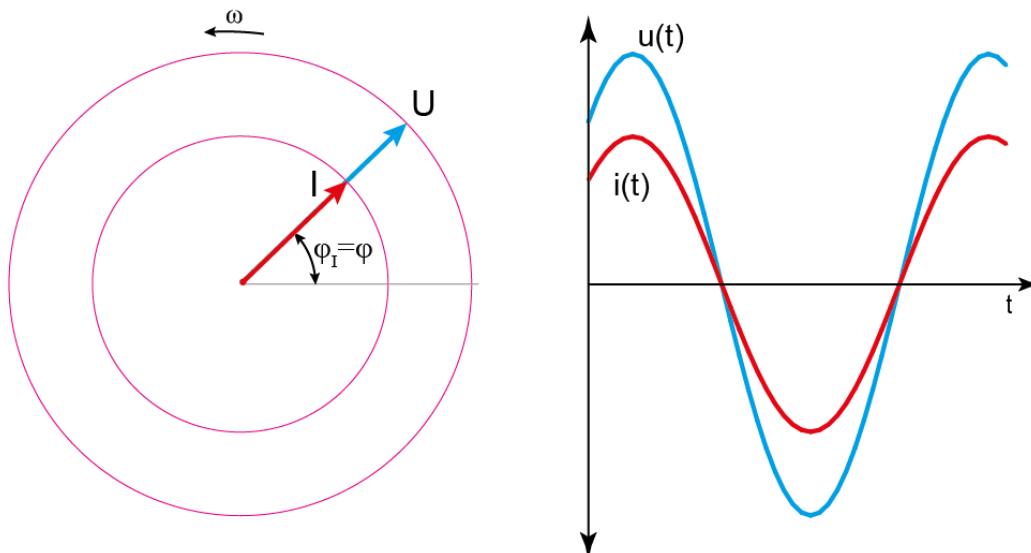
Según la ley de Ohm, tenemos que $i(t) = u(t) / R$, y por tanto, la intensidad instantánea que circula por la resistencia es:

$$i(t) = \frac{U \cdot \sqrt{2}}{R} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

Analicemos este resultado; la intensidad obtenida tiene la misma pulsación que la tensión y además tiene:

- Un valor de pico $I_p = \frac{U \cdot \sqrt{2}}{R}$. La intensidad eficaz es $I = \frac{U}{R}$. La misma expresión que en corriente continua.
- El desfase entre la tensión e intensidad es nulo, es decir, están *en fase*. La fase inicial de la intensidad es $\varphi_I = \varphi$.

Su representación gráfica es la mostrada en la siguiente figura:



Tensión-intensidad en una resistencia. (M.C.M.)

3.2. Respuesta de una bobina

Si a una bobina de valor L henrios (H) se la somete a una intensidad sinusoidal de valor eficaz I y pulsación ω , la intensidad instantánea que circula por la bobina es:

$$i(t) = (I \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Aplicando la ley que rige para una bobina, $u(t) = L \cdot di(t)/dt$, la tensión instantánea en la bobina es:

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \cdot (I \cdot \sqrt{2}) \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Te recomendamos que repases el apartado 5. Inducción magnética de la **Unidad 2**

Obtenemos una tensión con la misma pulsación que la intensidad y con las características siguientes:

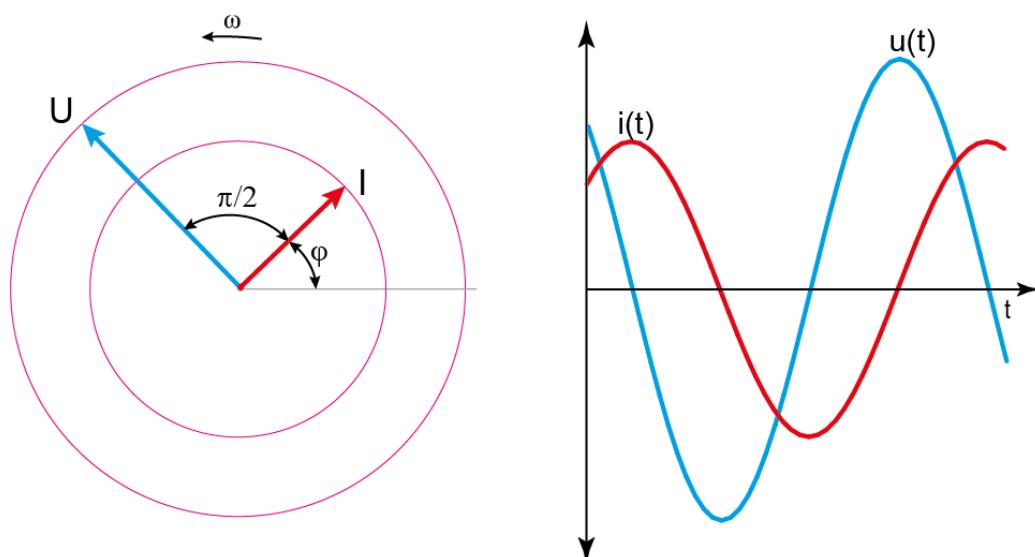
- Un valor de pico $U_p = \omega \cdot L \cdot (I \cdot \sqrt{2})$. La tensión eficaz es $U = \omega \cdot L \cdot I$.
- La tensión se encuentra adelantada 90° ($\pi/2$ rad) con respecto a la intensidad; la fase inicial de la tensión es $\varphi_U = \varphi + \pi/2$.

Al producto $\omega \cdot L$ se le llama **reactancia inductiva** y se representa por X_L , es decir:

$$X_L = \omega \cdot L$$

La unidad de la reactancia inductiva en el SI es el **ohmio** (Ω).

Su representación gráfica es la mostrada en la figura:



Tensión-intensidad en una bobina. (M.C.M.)

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

3.3. Respuesta de un condensador

Si a un condensador de valor C faradios (F) se le somete a una tensión sinusoidal de valor eficaz U y pulsación ω , la tensión instantánea aplicada al condensador es:

$$u(t) = (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Te recomendamos repasar los conceptos de **carga y descarga de un condensador** expuestos en la **Unidad 3**

Aplicando la ley que rige un condensador, $i(t) = C \cdot du(t)/dt$, la intensidad instantánea que circula por el condensador es:

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} = C \cdot \omega \cdot (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Obtenemos una intensidad con la misma pulsación que la tensión aplicada y con las características siguientes:

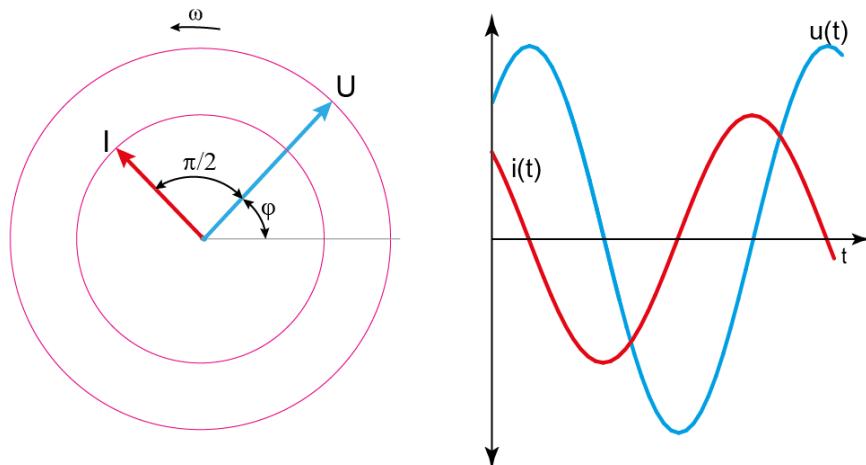
- Un **valor de pico** $I_p = \omega \cdot C \cdot (U \cdot \sqrt{2})$. La **tensión eficaz** es $I = \omega \cdot C \cdot U$.
- La intensidad se encuentra adelantada 90° ($\pi/2$ rad) con respecto a la tensión, la fase inicial de la intensidad es $\varphi_i = \varphi + \pi/2$.

Al cociente $1/\omega \cdot C$ se le llama **reactancia capacitiva** y se representa por X_C , es decir:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

La unidad de la reactancia capacitiva en el SI es el **ohmio** (Ω).

Su representación gráfica es la mostrada en la figura:



Tensión-intensidad en un condensador (M.C.M.)



Ejemplo

3. ¿Cuánto vale la reactancia en los siguientes casos?:

- a) Un condensador de $100\mu F$ para una frecuencia de 1000 Hz.
- b) Una inductancia de 10 mH para una frecuencia de 1000 Hz

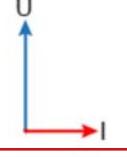
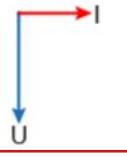
Solución:

- a) Para un condensador la reactancia, en este caso capacitiva, está dada por:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot 100 \times 10^{-6}} = 15,92 \Omega$$

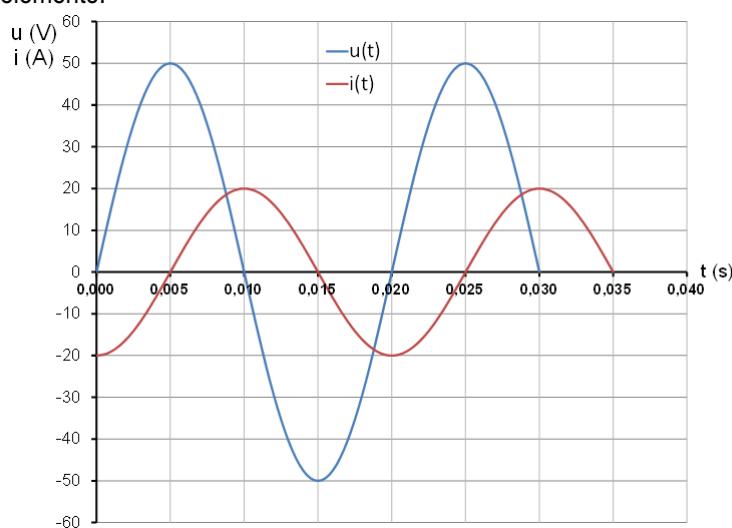
- b) Para una inductancia la reactancia inductiva está dada por:

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot 10 \times 10^{-3} = 62,83 \Omega$$

Cuadro resumen del comportamiento de R , L y C ante una señal sinusoidal			
Elemento	Representación gráfica	Relación tensión/intensidad	Desfase rad ($^{\circ}$) tensión/intensidad
R		R	0°
L		$X_L = \omega \cdot L$	$+\pi/2 (+90^{\circ})$
C		$X_C = 1/\omega \cdot C$	$-\pi/2 (-90^{\circ})$

Actividades

5. La figura representa las formas de tensión y de corriente en una carga monofásica. Se pide:
- El valor eficaz y la frecuencia de la tensión y de la corriente.
 - La representación fasorial de ambas señales.
 - El tipo de elemento que se corresponde con las señales representadas.
 - El valor de dicho elemento.



Recuerda

El comportamiento ante una señal sinusoidal de los elementos básicos (R , L y C) es el siguiente:

- ✓ Una **resistencia** no introduce desfase entre tensión e intensidad: $U = R \cdot I$
- ✓ X_L es la **reactancia inductiva** y $X_L = \omega \cdot L$
- ✓ Una **bobina** introduce un adelanto de 90° entre tensión e intensidad: $U_L = X_L \cdot I$
- ✓ X_C es la **reactancia capacitiva** y $X_C = 1/\omega \cdot C$
- ✓ Un **condensador** introduce un retraso de 90° entre la tensión y la intensidad: $U_C = X_C \cdot I$

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

4. Impedancia

El concepto de impedancia es una generalización del concepto de resistencia.

La resistencia eléctrica de un conductor se define como la oposición que ofrece al paso de una corriente eléctrica. Cuando la corriente que atraviesa a un conductor es una corriente sinusoidal, el concepto de resistencia se generaliza a **impedancia**.

La **impedancia** de un conductor se define como la oposición que ofrece al paso de una corriente eléctrica sinusoidal.

El concepto de impedancia también se define como el **elemento equivalente** resultante de la asociación de resistencias, bobinas o condensadores. La impedancia se representa con la letra **Z**.

Consideremos una impedancia **Z** alimentada por una señal sinusoidal de valor eficaz **U**, fase inicial φ_U y pulsación ω , tal como se muestra en la figura.

La tensión en la impedancia, la de la fuente, representada en forma de fasor es:

$$U = U \cdot \sqrt{2} \angle \varphi_U$$

La intensidad que circula por la impedancia tiene un valor eficaz **I** y un desfase φ_I . Representada en forma de fasor la intensidad es:

$$I = I \cdot \sqrt{2} \angle \varphi_I$$

El cociente entre el fasor tensión y el fasor intensidad representa la impedancia. Expresado matemáticamente es:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U \cdot \sqrt{2} \angle \varphi_U}{I \cdot \sqrt{2} \angle \varphi_I} = \frac{U}{I} \angle \varphi_U - \varphi_I \Rightarrow Z = Z \angle \varphi$$

Observación: Una impedancia **no** es un **fasor**. Una impedancia se puede representar por un vector, en este caso expresado en forma **polar** que contiene dos términos:

- El **módulo**, que representa el cociente entre la tensión e intensidad que soporta la impedancia. Las tensiones/intensidades deben darse en *valores eficaces* o en *valores de pico*.

$$Z = \frac{U}{I}$$

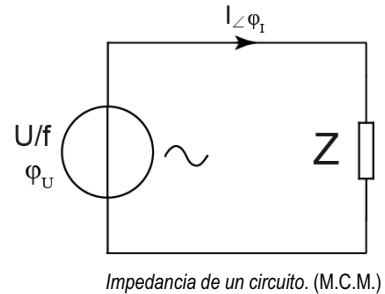
- El **argumento**, que representa el desfase entre el fasor tensión y el fasor intensidad.

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I$$

La unidad de la **impedancia** en el SI es el **ohmio** (Ω).

Si aplicamos el concepto de impedancia a resistencias, bobinas y condensadores, tenemos:

- **Impedancia resistiva:** $Z_R = R \angle 0$
- **Impedancia reactiva inductiva:** $Z_L = X_L \angle \pi / 2 = \omega \cdot L \angle \pi / 2$
- **Impedancia reactiva capacitiva:** $Z_C = X_C \angle -\pi / 2 = \frac{1}{\omega \cdot C} \angle -\pi / 2$



Impedancia de un circuito. (M.C.M.)

4.1. Representación compleja de una impedancia

La expresión $Z = Z \angle \varphi$, se trata de un vector expresado en coordenadas polares que se puede transformar en un número complejo de la forma:

$$Z = R + j \cdot X$$

Donde:

$$R = Z \cdot \cos \varphi$$

$$X = Z \cdot \sin \varphi$$

R representa el componente resistivo de la impedancia y se expresa en ohmios (Ω)

X es la **reactancia** de la impedancia, representa la componente reactiva de la impedancia. Su origen está en la presencia de bobinas y/o condensadores en la impedancia. Según el valor que tome la reactancia la impedancia puede ser:

- **Impedancia inductiva:** cuando $X > 0$ y por lo tanto $\varphi > 0$, la tensión está en avance con respecto a la intensidad.
- **Impedancia capacitiva:** cuando $X < 0$ y por lo tanto $\varphi < 0$, la tensión está en retraso con respecto a la intensidad, o lo que lo mismo, la intensidad va por delante de la tensión.

Es importante que aprendamos a utilizar con fluidez la conversión de coordenadas polares a binómicas, y viceversa, que incluyen las calculadoras científicas. Para ello te recomendamos la atenta lectura del manual de tu calculadora.



Ejemplo

4. Determina el valor de la resistencia y reactancia de una impedancia que está sometida a una tensión de 220 V y por la que circula una intensidad de 10 A. Se sabe que la tensión está adelantada 30° con respecto a la intensidad.

Solución:

Aplicando la definición de impedancia, tenemos:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{10} = 22 \Omega$$

Tenemos una parte de la impedancia, pero falta saber qué desfase existe. Este dato nos lo dan con el desfase entre la tensión e intensidad, $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$, así $\varphi = 30^\circ$. La impedancia expresada en forma polar es:

$$Z = 22 \angle 30^\circ \Omega$$

Para obtener R y X hacemos:

$$\begin{aligned} R &= Z \cdot \cos \varphi = 22 \cdot \cos(30^\circ) = 11\sqrt{3} \Omega \\ X &= Z \cdot \sin \varphi = 22 \cdot \sin(30^\circ) = 11 \Omega \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} R = 11\sqrt{3} \Omega \\ X = 11 \Omega \end{array}}$$

Se trata de una reactancia **inductiva**.

La **representación compleja** de la impedancia resistiva, inductiva y capacitiva es la siguiente:

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j \cdot X_L = j \cdot \omega \cdot L$$

$$Z_C = -j \cdot X_C = \frac{-j}{\omega \cdot C}$$

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

4.2. Asociación de impedancias

Las impedancias se pueden asociar de la misma forma en que se asociaban las resistencias: asociación en serie, en paralelo y mixta.

- **Asociación en serie:** la impedancia equivalente es la suma de las impedancias parciales.

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \dots$$

- **Asociación en paralelo:** la inversa de la impedancia equivalente es la suma de las inversas de las impedancias parciales, es decir:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_T} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} + \dots$$

Se llama **admitancia (Y)** a la inversa de la impedancia (\mathbf{Z}):

$$Y = \frac{1}{Z}$$

La unidad de la admitancia en el SI es el **siemens (S)**. Por ser la inversa de la impedancia, la admitancia también se mide en $1/\Omega$.

Consecuencia de lo anterior es que la expresión $\frac{1}{\mathbf{Z}_T} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} + \dots$ se convierte en:

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots$$

En una asociación en paralelo la admitancia equivalente es la suma de las admitancias parciales.

- **Asociación mixta:** es una combinación de serie y paralelo.



Ejemplo

5. Dada una resistencia de 5 ohmios y una inductancia de 50 mH que están trabajando a 50 Hz, calcula la impedancia equivalente en los siguientes casos:

- a) Cuando están conectadas en serie. b) Cuando están conectadas en paralelo.

Soluciones:

Lo primero es calcular el valor de X_L : $X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 50 \times 10^{-3} = 15,71 \Omega$

- a) Con la conexión en serie, la impedancia asociada a la resistencia es $\mathbf{Z}_1 = R$ y la asociada a la bobina (inductancia) es $\mathbf{Z}_2 = j \cdot X_L$. La impedancia equivalente es la suma de ambas:

$$\mathbf{Z}_T = Z_1 + Z_2 = R + j \cdot X_L = 5 + j \cdot 15,71 \Omega$$

$$\mathbf{Z}_T = 5 + j \cdot 15,71 \Omega$$

- b) Con la conexión en paralelo, la impedancia equivalente es:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot X_L} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j \cdot 15,71}$$

Teniendo en cuenta que, por las propiedades de los números complejos $1/j = -j$, la expresión anterior se convierte en:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_T} = \frac{1}{5} - \frac{j}{15,71} = 0,2 - j \cdot 63,65 \times 10^{-3} \Rightarrow \mathbf{Z}_T = \frac{1}{0,2 - j \cdot 63,65 \times 10^{-3}} = 4,54 + 1,44 \cdot j \Omega \Rightarrow \mathbf{Z}_T = 4,54 + 1,44 \cdot j \Omega$$

Apliquemos el concepto de admitancia:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{5} = 200 \text{ mS}; \quad Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{j \cdot 15,71} = -j \cdot 63,65 \text{ mS}$$

$$Y_T = Y_1 + Y_2 = 200 \cdot 10^{-3} - j \cdot 63,65 \cdot 10^{-3} \text{ S} \Rightarrow Y_T = 0,2098852 \angle -17,65^\circ \text{ S}$$

$$\mathbf{Z}_T = 1/Y_T = 1/0,2098852 \angle -17,65^\circ \Rightarrow \mathbf{Z}_T = 4,76 \angle 17,65^\circ \Omega$$

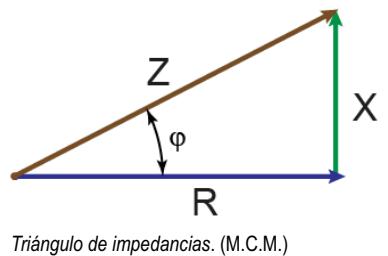
Como puedes observar, trabajar en paralelo es más difícil que hacerlo en serie.

4.3. Triángulo de impedancias

Si representamos la impedancia $Z = R + j \cdot X$ en el plano complejo obtenemos un triángulo rectángulo, que es el **triángulo de impedancias**, tal como se muestra en la figura:

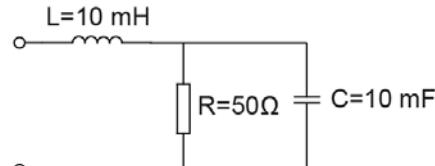
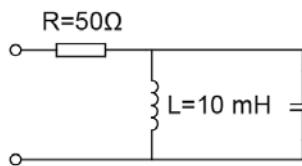
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{X}{R}\right)$$



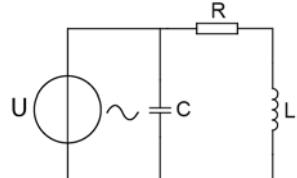
Actividades

6. Calcular la impedancia total de los siguientes circuitos. Indicar también el carácter inductivo o capacitivo de los mismos. Tomar como frecuencia 400Hz.



7. Dibujar el diagrama fasorial correspondiente al circuito de la figura y calcular la tensión en la bobina.

Datos: $R = 2\Omega$, $L = 1/50\pi$ H, $C = 1/300\pi$ F, $U = 10$ V y $f = 50$ Hz



8. En un circuito RL serie hay un desfase de 30° entre la tensión de alimentación y la tensión de la resistencia. Calcular el valor de la inductancia que consigue dicho desfase. Dibujar el triángulo de impedancias.

Datos: $f = 50$ Hz, $U = 30$ V, $R = 5 \Omega$

9. En un circuito la tensión en una resistencia vale 15 V y la intensidad que circula por un condensador colocado en serie con ella es de 0,5 A. Si la tensión de la fuente es de 20 V y la frecuencia de 30 Hz, debemos calcular:

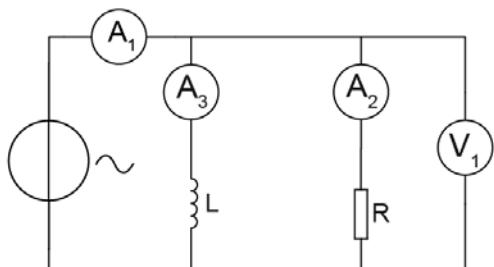
- a) El valor de la resistencia.
- b) La reactancia capacitativa.
- c) El triángulo de impedancia.

10. Para el circuito de la figura, determinar:

- a) La representación vectorial de las corrientes del circuito y la medida del amperímetro A_3
- b) El valor de R
- c) El valor de L

Datos:

$f = 50$ Hz	$A_1 = 13$ A
$V_1 = 220$ V	$A_2 = 11$ A



UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA



Recuerda

- ✓ La **impedancia** se define como la oposición que ofrece un elemento de un circuito al paso de una corriente alterna. También representa el resultado de la asociación de resistencias, bobinas o condensadores en un circuito de corriente alterna sinusoidal.
- ✓ El **módulo de la impedancia** de un elemento es el cociente entre la tensión y la intensidad que soporta dicho elemento. La unidad de la impedancia es el **ohmio**.
- ✓ El **argumento de una impedancia** indica el desfase entre la tensión y la intensidad asociada al elemento.
- ✓ Una impedancia se puede representar como un **número complejo** expresado en coordenadas polares o de forma binómica: $Z = Z\angle\varphi$ o bien $Z = R + j \cdot X$.
- ✓ Las impedancias se pueden **asociar** de igual forma que las resistencias.
- ✓ La **admitancia** de una impedancia es su inversa $Y = \frac{1}{Z}$.
- ✓ La impedancia se puede representar en el plano complejo obteniendo su **triángulo de impedancias**.

5. Ley de Ohm generalizada

De la expresión:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U}{I} \angle \varphi_U - \varphi_I = Z \angle \varphi$$

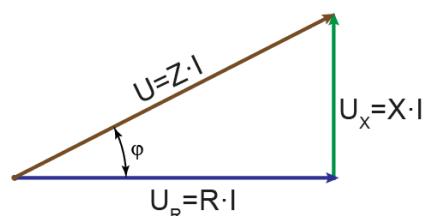
Donde U e I son los fasores que representan la tensión e intensidad a los que está sometido la impedancia Z , despejamos U :

$$U = Z \cdot I \Rightarrow U \angle \varphi_U = Z \angle \varphi \cdot I \angle \varphi_I \Rightarrow \begin{cases} U = Z \cdot I \\ \varphi_U = \varphi + \varphi_I \end{cases}$$

La expresión $U = Z \cdot I$ se la conoce como la **ley de Ohm generalizada** y se aplica a circuitos de corriente alterna sinusoidal.

Tomando el triángulo de impedancias asociado a la impedancia Z y multiplicando sus catetos por I obtenemos el **triángulo de tensiones** dado en la figura siguiente.

- El triángulo de tensiones es un triángulo semejante al triángulo de impedancias.
- El cateto U_R es la caída de tensión en la resistencia de la impedancia y el cateto U_x es la caída en la reactancia de la impedancia.
- La hipotenusa U es la caída total de tensión en la impedancia.

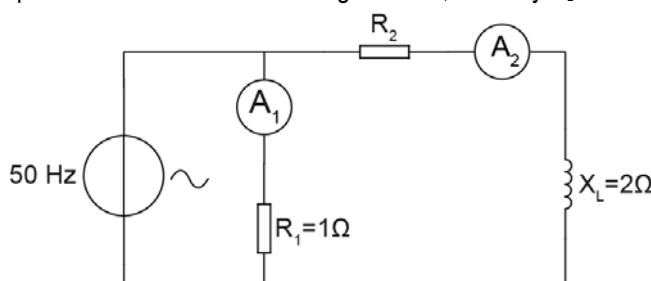


Triángulo de tensiones. (M.C.M.)

Los **triángulos de impedancia y de tensión** son muy útiles para resolver de forma gráfica circuitos de corriente alterna.

Actividades

11. La lectura de los amperímetros del circuito de la figura es $A_1 = 10 \text{ A}$ y $A_2 = 4 \text{ A}$. Determina el valor de resistencia R_2 .



Recuerda

- ✓ La **ley de Ohm generalizada** relaciona la tensión y la intensidad en una impedancia: $U = Z \cdot I$
- ✓ La representación en el plano complejo de las tensiones de una impedancia permite obtener el **triángulo de tensiones**.

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

6. Circuito RLC en serie

Uno de los circuitos típicos en corriente alterna es el circuito RLC serie que se muestra en la siguiente figura.

Tomando como referencia de ángulos la intensidad ($\varphi_i = 0^\circ$, $I = I \angle 0^\circ$) la tensión en cada elemento es:

$$\begin{aligned} U_R &= R \cdot I \\ U_L &= j \cdot X_L \cdot I \\ U_C &= -j \cdot X_C \cdot I \end{aligned}$$

La tensión total U es la suma vectorial de las tensiones parciales; así tenemos:

$$U = U_R + U_L + U_C = R \cdot I + j \cdot X_L \cdot I - j \cdot X_C \cdot I = (R + j \cdot (X_L - X_C)) \cdot I$$

La expresión anterior se puede poner como:

$$U = (R + j \cdot X) \cdot I = Z \cdot I$$

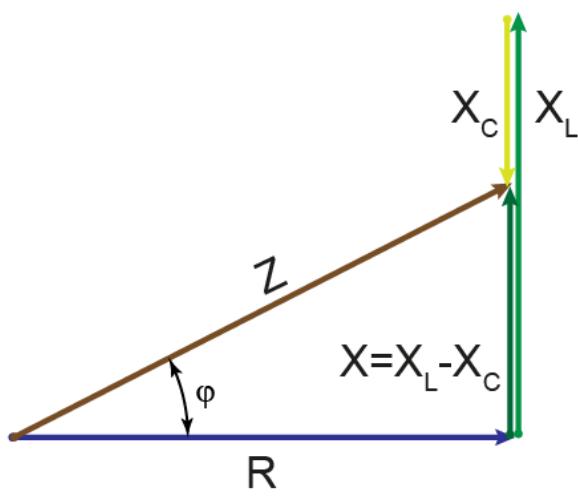
La impedancia del circuito es:

$$Z = R + j \cdot (X_L - X_C) = R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)$$

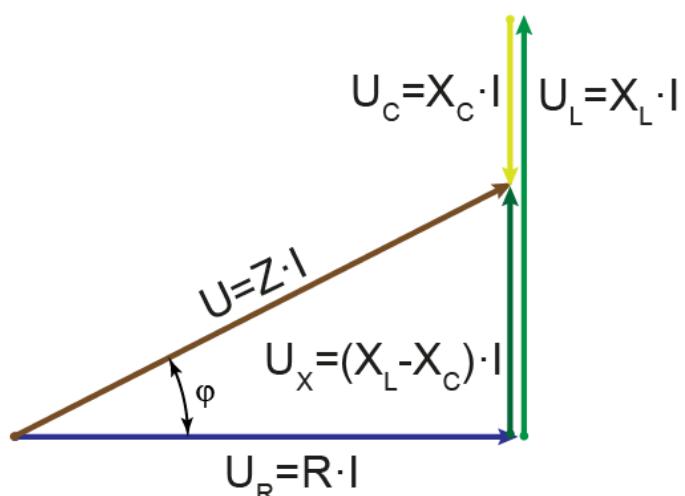
Expresado en coordenadas polares resulta:

$$Z = Z \angle \varphi \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2} \\ \varphi = \arctg \left(\frac{X}{R} \right) = \arctg \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right) = \arctg \left(\frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \right) \end{cases}$$

Representamos el triángulo de impedancias y tensiones en las figuras siguientes:



Triángulo de impedancias. Circuito RLC serie. (M.C.M.)



Triángulo de tensiones. Circuito RLC serie. (M.C.M.)



Ejemplo

6. En un circuito RLC serie, $R = 20 \Omega$, $L = 100/\pi \text{ mH}$ y $C = 1/2\pi \text{ mF}$, funcionando a una frecuencia de 50 Hz, debemos calcular:

- La impedancia total (módulo y argumento).
- La intensidad que circula por la impedancia si la tensión es de 230 V.
- Representa la tensión e intensidad con fasores tomando como referencia de ángulos, la tensión.

Soluciones:

Primero calculamos:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \times 10^{-3}} = 20 \Omega$$

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \frac{100}{\pi} \times 10^{-3} = 10 \Omega$$

- Para calcular la impedancia:

$$\mathbf{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) = 20 + j \cdot (10 - 20) = 20 - 10 \cdot j \Omega \Rightarrow \mathbf{Z} = 20 - 10 \cdot j \Omega$$

La impedancia ya está determinada, pero nos piden módulo y argumento, por lo que debemos expresar el resultado en coordenadas polares:

$$\mathbf{Z} = Z \angle \varphi \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{20^2 + (10 - 20)^2} = 22,36 \Omega \\ \varphi = \arctg \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right) = \arctg \left(\frac{10 - 20}{20} \right) = -26,56^\circ \end{cases}$$

Con lo que la impedancia vale:

$$\mathbf{Z} = Z \angle \varphi = 22,36 \angle -26,56^\circ \Omega$$

Observa que $\varphi < 0$, eso quiere decir que se trata de una impedancia capacitiva y la tensión está atrasada con respecto a la intensidad. El triángulo de impedancias es el de la derecha.

- Para calcular la intensidad, de la ley de Ohm generalizada se deduce que:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230}{22,36} = 10,29 \text{ A}$$

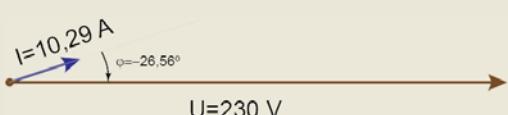
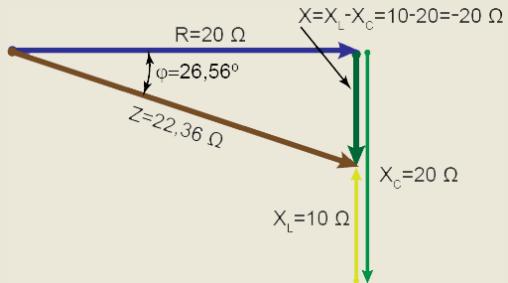
- Al tomar como referencia de ángulos el de la tensión, significa que $\varphi_U = 0^\circ$, así $\mathbf{U} = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$ y $\mathbf{Z} = 22,36 \angle -26,56^\circ \Omega$, con lo que aplicando la ley de Ohm generalizada se obtiene que:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} = \frac{230 \angle 0^\circ}{22,36 \angle -26,56^\circ} = 10,29 \angle 26,56^\circ \text{ A}$$

Se trata de representar gráficamente los fasores \mathbf{U} e \mathbf{I} , esta representación es la siguiente:

Para determinar el signo del ángulo φ , aplicamos el siguiente criterio:

- El signo es positivo si el camino tomado desde el fasor de intensidad al fasor de tensión, por el recorrido más corto, sigue el sentido contrario a las agujas del reloj.
- En nuestro ejemplo el ángulo resulta negativo en coincidencia con el calculado analíticamente.



UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA



Actividades

12. Determina la intensidad proporcionada por la fuente en el circuito de la figura. Dibuja el diagrama fasorial de tensiones.



13. Un circuito está formado por una impedancia, $Z=14,4 + j \cdot 50 \Omega$, en serie con un condensador de capacidad, $C = 51,7 \mu\text{F}$. El circuito se conecta a una tensión eficaz de 24 V a la frecuencia de 100 Hz. A partir de estos datos, calcula:

- La impedancia del circuito.
- La intensidad del circuito.



Recuerda

- ✓ En un circuito RLC serie la **impedancia** vale:

$$Z = R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)$$

- ✓ El **módulo de la impedancia** se obtiene aplicando:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}$$

- ✓ El **desfase entre tensión e intensidad** se calcula con:

$$\varphi = \arctg \left(\frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \right)$$

7. Circuito RLC en paralelo

Uno de los circuitos típicos en corriente alterna es el circuito RLC paralelo que se muestra en la siguiente figura:

Tomando como referencia de ángulos el de la tensión ($\varphi_U = 0^\circ$, $\mathbf{U} = U \angle 0^\circ$) la intensidad en cada elemento es:

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{U}}{R} \therefore \mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{U}}{j \cdot X_L} = -j \frac{\mathbf{U}}{X_L} \therefore \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{U}}{-j \cdot X_C} = j \frac{\mathbf{U}}{X_C}$$

La intensidad total \mathbf{I} es la suma vectorial de las intensidades parciales, así tenemos:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_R + \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{U}}{R} - j \frac{\mathbf{U}}{X_L} + j \frac{\mathbf{U}}{X_C} = \left[\frac{1}{R} + j \cdot \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \right] \cdot \mathbf{U}$$

La expresión situada entre los corchetes es la **admitancia equivalente** del circuito, inversa de la **impedancia equivalente**, es decir:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)$$

Los siguientes términos tienen nombre propio:

$$G = \frac{1}{R}, \text{ llamado } \mathbf{conductancia}.$$

$$B_L = \frac{1}{X_L}, \text{ llamado } \mathbf{susceptancia inductiva}.$$

$$B_C = \frac{1}{X_C}, \text{ llamado } \mathbf{susceptancia capacitiva}.$$

En función de los términos anteriores la admitancia queda expresada como:

$$Y = G + j \cdot (B_C - B_L) = G + j \cdot B$$

$B = B_C - B_L$, donde B es la **susceptancia de la admitancia**.

La admitancia en coordenadas polares vale:

$$Y = Y \angle \theta \Rightarrow \begin{cases} Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R^2}\right) + \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{B}{G}\right) = \arctg\left(\frac{B_C - B_L}{G}\right) = \arctg\left(\frac{\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}}{\frac{1}{R}}\right) \end{cases}$$

La ley de Ohm generalizada puesta en función de la admitancia se convierte en:

$$\mathbf{I} = Y \cdot \mathbf{U}$$

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA



Ejemplo

7. En un circuito RLC paralelo $R = 20 \Omega$, $L = 100/\pi \text{ mH}$ y $C = 1/2\pi \text{ mF}$, funcionando a una frecuencia de 50 Hz, calcula:

- La admitancia e impedancia equivalente (módulo y argumento).
- La intensidad que circula por cada elemento si la tensión es de 230 V.
- Representa la tensión total y la intensidad de cada elemento con fasores, tomando como referencia de ángulos la tensión.

Soluciones:

Primero calculamos:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ S}$$

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \frac{100}{\pi} \times 10^{-3} = 10 \Omega \Rightarrow B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ S}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \frac{1}{2\pi} \times 10^{-3}} = 20 \Omega \Rightarrow B_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ S}$$

- La admitancia equivalente es:

$$Y = G + j \cdot (B_C - B_L) = \frac{1}{20} + j \cdot \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{20} - j \cdot \frac{1}{20} \text{ S} = 0,05 - j \cdot 0,05 \text{ S}$$

Para el cálculo en polares tenemos:

$$Y = Y \angle \theta \Rightarrow \begin{cases} Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = \sqrt{(1/20)^2 + (1/20 - 1/10)^2} = \sqrt{2}/20 \text{ S} \\ \varphi = \arctg \left(\frac{B_C - B_L}{G} \right) = \arctg \left(\frac{1/20 - 1/10}{1/20} \right) = -45^\circ \end{cases}$$

Con lo que la admitancia en polares es:

$$Y = Y \angle \theta = \sqrt{2}/20 \angle -45^\circ \text{ S}$$

Para calcular la impedancia equivalente, considerando que la impedancia es la inversa de la admitancia, la impedancia equivalente es:

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{20} \angle -45^\circ \right)} = \frac{20}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ \Omega$$

Expresado en forma binómica obtenemos:

$$Z = 10 + j \cdot 10 \Omega$$

b) Tomando como referencia de ángulos los de la tensión $\mathbf{U} = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_R &= \frac{\mathbf{U}}{R} = G \cdot \mathbf{U} & \Rightarrow \mathbf{I}_R &= \frac{1}{20} \cdot 230 \angle 0^\circ = 11,5 \angle 0^\circ \text{ A} \\ \mathbf{I}_L &= \frac{\mathbf{U}}{j \cdot X_L} = -j \frac{\mathbf{U}}{X_L} = -j \cdot B_L \cdot \mathbf{U} = B_L \angle -90^\circ \cdot \mathbf{U} & \Rightarrow \mathbf{I}_L &= \frac{1}{10} \angle -90^\circ \cdot 230 \angle 0^\circ = 23 \angle -90^\circ \text{ A} \\ \mathbf{I}_C &= \frac{\mathbf{U}}{-j \cdot X_C} = j \frac{\mathbf{U}}{X_C} = j \cdot B_C \cdot \mathbf{U} = B_C \angle 90^\circ \cdot \mathbf{U} & \Rightarrow \mathbf{I}_C &= \frac{1}{20} \angle -90^\circ \cdot 230 \angle 0^\circ = 11,5 \angle 90^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

La intensidad total I se puede calcular sumando vectorialmente las intensidades de cada elemento o bien empleando la admitancia equivalente del circuito; emplearemos esta segunda opción porque ya la hemos calculado previamente:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{I} = \frac{\sqrt{2}}{20} \angle -45^\circ \cdot 230 \angle 0^\circ = \sqrt{2} \cdot 11,5 \angle -45^\circ \text{ A}$$

Representada en forma binómica tenemos:

$$\mathbf{I} = 11,5 - j \cdot 11,5 \text{ A}$$

c) Todos los ángulos de las intensidades están calculados tomando como referencia el ángulo de la tensión de la fuente, la representación gráfica de las intensidades y la tensión es:



Recuerda

- ✓ $G = 1/R$ es la **conductancia**.
- ✓ $B_L = 1/\omega \cdot L$ es la **susceptancia inductiva**.
- ✓ $B_C = \omega \cdot C$ es la **susceptancia capacitiva**.
- ✓ En un circuito RLC paralelo la **admitancia** vale: $\mathbf{Y} = G + j \cdot (B_C - B_L)$
- ✓ El **módulo de la admitancia** se obtiene aplicando: $Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R^2}\right) + \left(\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}\right)^2}$
- ✓ El **desfase entre tensión e intensidad** se calcula con: $\theta = \arctg \left(\frac{\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}}{\frac{1}{R}} \right)$

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

8. Potencia en los elementos básicos

Sabemos que la potencia de un componente se calcula como el producto de la tensión entre sus terminales por la intensidad de corriente que la atraviesa:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

8.1. Potencia en una resistencia. Potencia activa

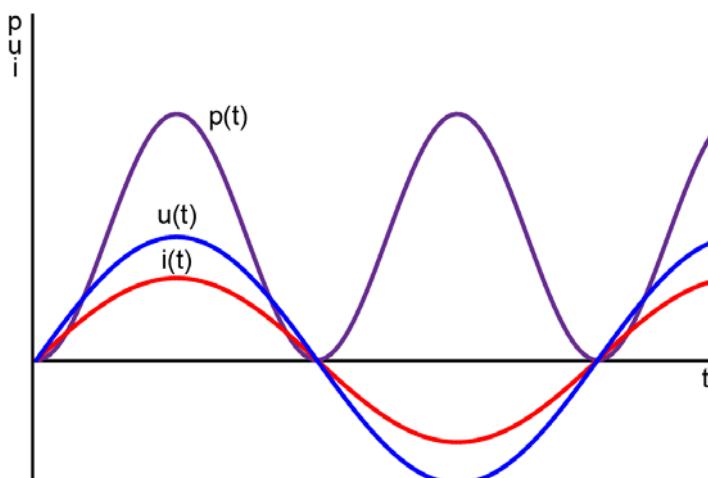
Cuando a una resistencia de valor R ohmios (Ω) se le aplica una tensión sinusoidal de valor eficaz U , de valor instantáneo $u(t) = (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t)$, la intensidad que circula por la resistencia es:

$$i(t) = I \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \frac{U \cdot \sqrt{2}}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

La potencia instantánea en la resistencia es:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t) \times I \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t) = U \cdot I \cdot 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2\omega \cdot t)) \right] \\ p(t) &= U \cdot I \cdot (1 - \cos(2\omega \cdot t)) \end{aligned}$$

En la figura observamos el valor de la potencia instantánea.



Potencia instantánea en una resistencia. (M.C.M.)

La potencia media consumida por la resistencia a lo largo de un periodo se llama **potencia activa**, P , y su valor es:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T U \cdot I \cdot [1 - \cos^2(2\omega \cdot t)] \cdot dt = U \cdot I \\ P &= U \cdot I = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2 \end{aligned}$$

La **unidad de potencia activa** en el SI es el **vatio (W)**.

Las expresiones anteriores son idénticas a las de corriente continua, de lo que deducimos que una resistencia eléctrica de valor R sometida a una tensión sinusoidal de valor eficaz U disipa la misma potencia que si está sometida a una tensión de U voltios de corriente continua.

8.2. Potencia en bobinas y condensadores. Potencia reactiva

- **Potencia en una bobina**

Tenemos una bobina de inductancia L henrios (H) alimentada por una tensión senoidal de valor eficaz U , de valor instantáneo $u(t) = (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

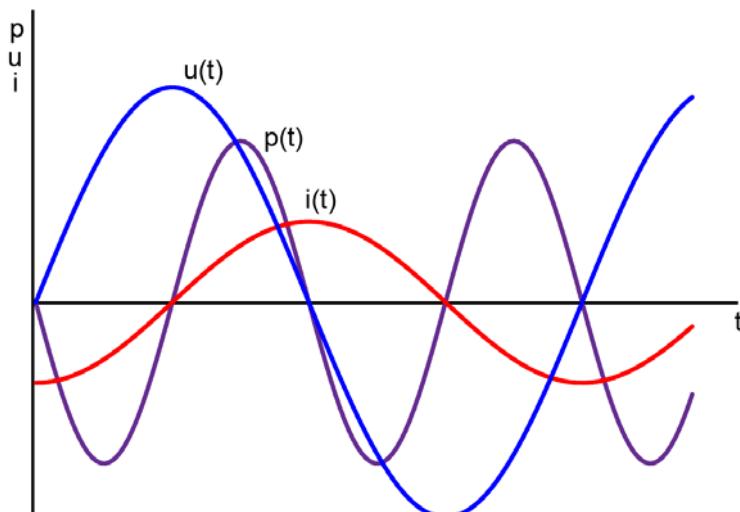
La intensidad instantánea que recorre la bobina es:

$$i(t) = (I \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{U}{\omega \cdot L} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Calculamos la potencia instantánea en la bobina que es:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot I \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ p(t) &= U \cdot I \cdot \sin(2\omega \cdot t) = \omega \cdot L \cdot I^2 \cdot \sin(2\omega \cdot t) = \frac{U^2}{\omega \cdot L} \cdot \sin(2\omega \cdot t) \end{aligned}$$

En la figura observamos el valor de la potencia instantánea.



Potencia instantánea en una bobina. (M.C.M.)

La potencia media en una bobina es nula, $P = 0$. Al máximo valor de $p(t)$, se le llama **potencia reactiva inductiva** (Q_L):

$$Q_L = \omega \cdot L \cdot I^2 = \frac{U^2}{\omega \cdot L} = X_L \cdot I^2 = \frac{U^2}{X_L}$$

La **unidad de potencia reactiva inductiva** en el SI es el **voltio·amperio reactivo (VAr)**.

La potencia reactiva en una bobina **no** produce trabajo útil; representa un intercambio de energía entre la fuente y la bobina. En la parte positiva de la onda de la potencia instantánea la fuente crea un campo magnético en el interior de la bobina y en la parte negativa la energía almacenada por la bobina es devuelta a la fuente.

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

● Potencia en un condensador

Tenemos un condensador de **capacidad C faradios (F)** alimentado por una tensión senoidal de valor eficaz U , de valor instantáneo $u(t) = (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t)$

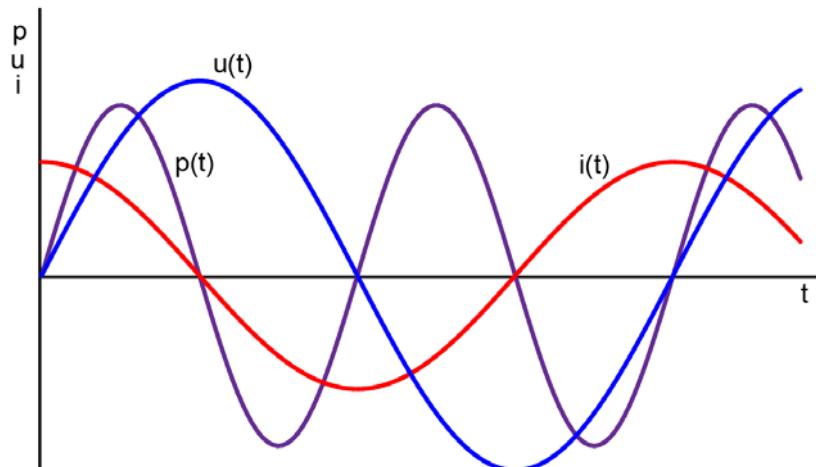
La intensidad que circula por el condensador es:

$$i(t) = (I \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = (\omega \cdot C \cdot U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La **potencia instantánea** en el condensador es:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t) \times I \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \\ p(t) &= U \cdot I \cdot \sin(2\omega \cdot t) = \omega \cdot C \cdot U^2 \cdot \sin(2\omega \cdot t) = \frac{I^2}{\omega \cdot C} \cdot \sin(2\omega \cdot t) \end{aligned}$$

En la figura observamos el valor de la potencia instantánea.



Potencia instantánea en un condensador. (M.C.M.)

La potencia media en un condensador es nula, $P = 0$. Al máximo valor de $p(t)$, se le llama **potencia reactiva capacitiva (Q_c)**.

$$Q_c = \omega \cdot C \cdot U^2 = \frac{I^2}{\omega \cdot C} = X_c \cdot I^2 = \frac{U^2}{X_c}$$

La **unidad de potencia reactiva capacitiva** en el SI es el **voltio·amperio reactivo (VAr)**.

La potencia reactiva en un condensador **no** produce trabajo útil, representa un intercambio de energía entre la fuente y el condensador. En la parte positiva de la onda de la potencia instantánea, la fuente crea un campo eléctrico en el interior del condensador; y en la parte negativa, la energía almacenada por el condensador es devuelta a la fuente.

La **potencia reactiva** en un **condensador** es negativa mientras que la potencia reactiva en una **bobina** es positiva.



Ejemplo

8. Para una resistencia de 5 ohmios y una inductancia de 50 mH trabajando a 50 Hz, debemos calcular:
- La potencia activa en la resistencia cuando por ella circula una intensidad eficaz de 5 A.
 - La potencia activa y reactiva en la bobina cuando está sometida a una tensión eficaz de 15 V.

Soluciones:

Lo primero es calcular el valor de X_L :

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 50 \times 10^{-3} = 15,71 \Omega$$

- La potencia activa P en una resistencia está dada por:

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2$$

En este ejemplo nos proporcionan el valor de $I = 5$ A, por tanto tenemos:

$$P = R \cdot I^2 = 5 \cdot 5^2 = 125 \text{ W}$$

- La potencia activa P en una bobina es nula, $P = 0$. La potencia reactiva está dada por:

$$Q_L = \omega \cdot L \cdot I^2 = \frac{U^2}{\omega \cdot L} = X_L \cdot I^2 = \frac{U^2}{X_L}$$

En este ejemplo tenemos el valor de $U = 15$ V, así es que:

$$Q_L = \frac{U^2}{X_L} = \frac{15^2}{15,71} = 14,32 \text{ VAr}$$

Actividades

14. Un circuito RLC paralelo está formado por una resistencia $R = 100 \Omega$, una bobina $L = 0,1 \text{ H}$ y un condensador de $C = 20 \mu\text{F}$, conectados a una línea de 110 V/60 Hz. A partir de estos datos, calcula:
- La intensidad en cada rama.
 - La impedancia equivalente y el desfase entre tensión total y la intensidad total.
 - La potencia activa y/o reactiva en cada componente.
15. Un generador de 40 V a 50 Hz alimenta un circuito RLC serie, con los siguientes datos: $R = 5 \Omega$; $L = 1 \text{ mH}$; $C = 1 \text{ mF}$.
- Se pide:
- Decir si el circuito RLC es inductivo o capacitivo, justificando la respuesta.
 - Calcular la potencia activa o reactiva que consume cada elemento pasivo.
 - Si la frecuencia del generador fuese de 2000 Hz, el circuito RLC ¿sería inductivo o capacitivo? Justifica la respuesta.

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA



Recuerda

- ✓ La **potencia activa** en una resistencia es $P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2$.
- ✓ La **potencia activa** en una bobina o en un **condensador** es nula, $P = 0$.
- ✓ La **unidad de potencia activa** es el **vatio (W)**.
- ✓ La **potencia reactiva** en una bobina es $Q_L = X_L \cdot I^2 = U^2 / X_L$.
- ✓ La **potencia reactiva** en un condensador es $Q_C = X_C \cdot I^2 = U^2 / X_C$.
- ✓ La **unidad de potencia reactiva** es el **voltio·amperio reactivo (VAr)**

9. Potencia en una impedancia

A una impedancia de valor $Z = R + j \cdot X$ (siendo $Z = Z\angle\varphi$) ohmios se le aplica una tensión sinusoidal de valor eficaz U , de valor instantáneo $u(t) = (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Recuerda que los valores de Z y φ son:

$$Z = Z\angle\varphi \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \arctg\left(\frac{X}{R}\right) \end{cases}$$

La intensidad instantánea que circula por la impedancia es:

$$i(t) = (I \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi) = \left(\frac{U}{Z} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

La potencia instantánea $p(t)$ en la impedancia es:

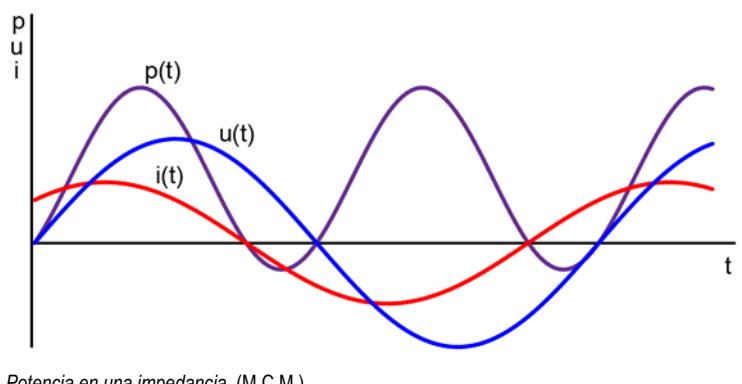
$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = (U \cdot \sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t) \times I \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi) \\ p(t) &= U \cdot I \cdot [\cos\varphi - \cos(2\omega \cdot t - \varphi)] = \frac{U^2}{Z} \cdot [\cos\varphi - \cos(2\omega \cdot t - \varphi)] = I^2 \cdot Z \cdot [\cos\varphi - \cos(2\omega \cdot t - \varphi)] \end{aligned}$$

Nos interesa conocer el valor de la potencia media consumida por la impedancia a lo largo de un periodo. El valor de la potencia activa, P , es:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T U \cdot I [\cos\varphi - \cos(2\omega \cdot t - \varphi)] \cdot dt = U \cdot I \cdot \cos\varphi = R \cdot I^2$$

En los **circuitos pasivos**, P siempre es positiva y se debe a la presencia de elementos resistivos.

En la figura puede verse cómo varía la potencia instantánea en una impedancia cualquiera; en ella se observa que hay un tránsito de energía entre la fuente y la impedancia, y al revés. La transferencia de energía entre la fuente y la impedancia se debe a la presencia de bobinas y/o condensadores en la impedancia, es decir, a la presencia de componentes reactivos.



UNIDAD 5

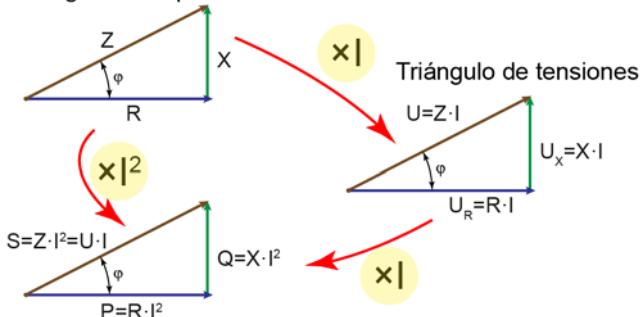
CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

9.1. Triángulo de potencias

El triángulo de potencias se puede construir a partir del triángulo de impedancias multiplicando cada lado del triángulo de impedancias por la intensidad que circula por la impedancia al cuadrado ($\times I^2$).

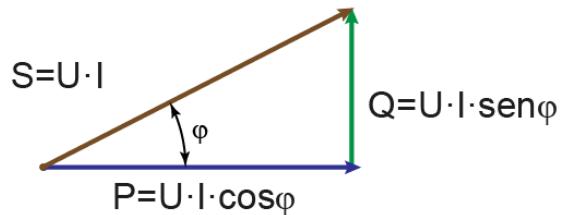
Partiendo del triángulo de tensiones, también se puede obtener el triángulo de potencias multiplicando cada lado del triángulo de tensiones por la intensidad que circula por la impedancia ($\times I$). En las figuras se muestra cómo conseguirlo:

Triángulo de impedancias



Triángulo de potencias

Triángulo de potencias a partir del triángulo de impedancias. (M.C.M.)



Triángulo de potencias. (M.C.M.)

Cada lado del triángulo de potencias representa a una potencia como puedes ver en la figura de la derecha. Las potencias son:

- **Potencia aparente**, S , representa la hipotenusa del triángulo de potencias, su valor es el producto de los valores eficaces de U e I :

$$S = U \cdot I$$

La unidad de potencia aparente en el SI es el **voltio·amperio** (VA)

- **Potencia activa**, P , representa el cateto contiguo del triángulo. Únicamente existe cuando en el circuito hay resistencias, su valor está dado por:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

La unidad de potencia activa es el SI es el **vatio** (W). La potencia activa se mide empleando un **vatímetro**.

- **Potencia reactiva**, Q , representa el cateto opuesto del triángulo. Solo existe cuando el circuito contiene bobinas o condensadores; su valor está dado por:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = X \cdot I^2 = \frac{U^2}{X}$$

La unidad de potencia reactiva es el SI es el **voltio·amperio reactivo** (VAr). La potencia reactiva se mide con el **varímetro**.

Existe una relación entre la potencia activa, reactiva y aparente dada por las siguientes expresiones:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} \quad P = S \cdot \cos \varphi \quad Q = S \cdot \sin \varphi$$

Existe una forma compacta de escribir las expresiones anteriores empleando coordenadas binómicas y considerando a S como un número complejo: $S = P + j \cdot Q$.

Siendo $U = U \angle \varphi_U$ la tensión que soporta una impedancia $Z = Z \angle \varphi$, atravesada por una intensidad $I = I \angle \varphi_I$. La potencia aparente S , se obtiene como:

$$S = U \cdot I^* = U \angle \varphi_U \cdot I \angle -\varphi_I = U \cdot I \angle \varphi_U - \varphi_I = U \cdot I \angle \varphi$$

En la expresión anterior I^* indica el número conjugado de I . Si expresamos S en binómicas, obtenemos:

$$S = U \cdot I \angle \varphi \Rightarrow \begin{cases} P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \\ Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

Que coinciden exactamente con los valores de P y Q obtenidos anteriormente.

9.2. Factor de potencia

En el triángulo de potencias de un circuito al coseno del ángulo φ se le llama **factor de potencia** ($\cos\varphi$). El factor de potencia indica el desfase existente entre la tensión y la intensidad en un circuito. El factor de potencia se mide con un **fasímetro**.

El factor de potencia de una instalación que consume una potencia activa P conectado a una tensión U cuando es recorrida por una intensidad I se obtiene como:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{U \cdot I}$$

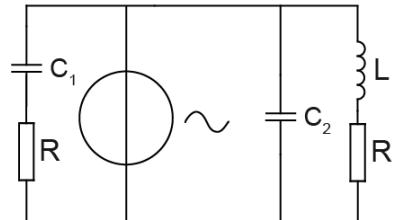


Actividades

16. En el circuito de la figura, calcular:

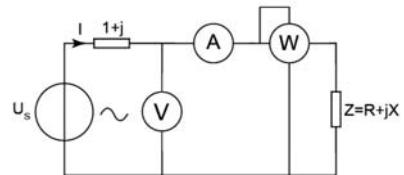
- a) La intensidad que circula por cada rama.
- b) La impedancia equivalente vista desde el generador.
- c) Las potencias activa y reactiva totales.

Datos: $X_{C_2} = 10 \Omega$; $X_{C_1} = X_L = R = 5 \Omega$; $E = 50 \text{ V}$



17. En el circuito de la figura se muestra un circuito de corriente alterna en el que las indicaciones de los aparatos de medida, supuestos ideales, son las siguientes:

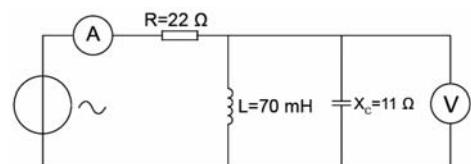
- Voltímetro, 100 V (valor eficaz).
- Amperímetro, 20 A (valor eficaz).
- Vatímetro, 1200 W.



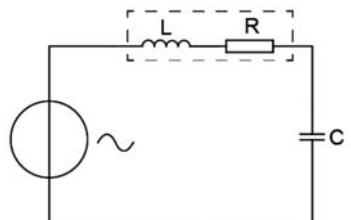
Hallar $|Z|$, R , X y U_s , tomando I como origen de fases.

18. El circuito de la figura se alimenta con una fuente de tensión de valor eficaz 220V/50 Hz. Se pide:

- a) Calcular el valor de la lectura del amperímetro A .
- b) Determinar la lectura del voltímetro V .
- c) Calcular las potencias totales consumidas en el circuito y representar el triángulo de potencias.



19. En el circuito de la figura se sabe que los elementos $R-L$ constituyen una carga que absorbe 200 W con el factor de potencia 0,5 si se cortocircuita el condensador C . Si la tensión de la fuente es de 200 V/50 Hz, calcula el valor que debe tener el condensador para que el factor de potencia del conjunto $R-L-C$ sea unitario.



UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA



Recuerda

- ✓ La **potencia activa**, P , en una impedancia $Z = R + j \cdot X$ ($Z = Z\angle\varphi$) sometida a una tensión eficaz, U , y a una intensidad eficaz, I , es $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$.
- ✓ La **unidad de potencia activa** es el **vatio** (W) y se mide con un **vatímetro**.
- ✓ La **potencia reactiva**, Q , en una impedancia $Z = R + j \cdot X$ ($Z = Z\angle\varphi$), sometida a una tensión eficaz, U , y a una intensidad eficaz, I , es $Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi$.
- ✓ La **unidad de potencia reactiva** es el **voltio·amperios reactivo** (VAr) y se mide con un **varímetro**.
- ✓ La **potencia aparente**, S , en una impedancia $Z = R + j \cdot X$ ($Z = Z\angle\varphi$) sometida a una tensión eficaz, U , y a una intensidad eficaz, I , es $S = U \cdot I$.
- ✓ La **potencia aparente** se mide en **voltio·amperios** (VA).
- ✓ En el **triángulo de potencias** se representan las potencias aparente (S), activa (P) y reactiva (Q).
- ✓ El **factor de potencia** es el coseno del ángulo que forman el fasor tensión y el fasor intensidad en una impedancia. El aparato para medir el factor de potencia es el **fasímetro**.

10. Corrección del factor de potencia en sistemas monofásicos

El factor de potencia en cualquier instalación debe ser siempre lo más próximo a la unidad porque ello mejora la eficiencia de las instalaciones de distribución de energía eléctrica. En instalaciones industriales se instalan contadores de energía activa y reactiva y se factura por ambas. Además, las compañías suministradoras de energía eléctrica pueden penalizar a aquellos consumidores con factores de potencia bajos según la siguiente fórmula:

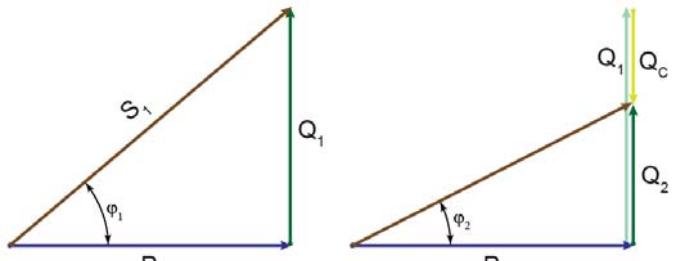
$$(\% \text{ Recargo}) = \frac{17}{\cos^2 \varphi} - 21$$

En la fórmula se observa que cuando el $\cos \varphi = 1$ se realiza una bonificación del 4%. Las instalaciones que tienen motores, gran número de lámparas de descarga o receptores que contengan bobinas van a tener un **factor de potencia** alejado de la unidad.

La corrección del factor de potencia se realiza utilizando **condensadores**, que se conectan en paralelo con la carga o cargas a compensar.

El cálculo del condensador necesario para compensar un $\cos \varphi_1$ hasta un valor $\cos \varphi_2$ en una instalación con una potencia activa P viene dado por la siguiente ecuación:

$$C = \frac{P}{\omega \cdot U^2} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2) \text{ con } C \text{ en faradios (F)}$$



Corrección del factor de potencia. (M.C.M.)



Actividades

20. Se conecta a una línea de 220 V un receptor monofásico inductivo (motor eléctrico) que consume una potencia activa de 5 kW con un factor de potencia de 0,7. Se pide:
- Calcular las potencias reactiva y aparente.
 - Calcular la capacidad equivalente del condensador que se ha de conectar si se desea mejorar el factor de potencia a 0,95.
 - Calcular la reducción de corriente por la línea al conectar el condensador.
 - ¿Ha cambiado la potencia activa al mejorar el factor de potencia? Justifica la respuesta.
21. Una carga de corriente alterna monofásica de 50 Hz es alimentada a una tensión de 220 V (valor eficaz). Sabiendo que la potencia aparente absorbida por dicha carga es de 20 kVA, con $\cos \varphi = 0,8$ inductivo, se pide:
- Las potencias activa y reactiva consumidas por la carga.
 - La impedancia compleja de la carga.
 - El condensador que conectado en paralelo con la carga hace que el factor de potencia de la instalación sea 0,95 inductivo.



Recuerda

- ✓ La **potencia reactiva** se corrige con **condensadores** conectados en paralelo.
- ✓ Para pasar de un factor de potencia $\cos \varphi_1$, a otro de valor $\cos \varphi_2$ se utiliza un condensador de capacidad:
$$C = P(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2) / \omega \cdot U^2$$

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

11. Resonancia

La resonancia es la condición de funcionamiento de un circuito RLC de corriente alterna para la que se cumple que la reactancia inductiva (X_L) y la capacitiva (X_C) son iguales.

11.1. Resonancia en serie

Un circuito RLC serie está en resonancia cuando se cumple que $X_C = X_L$

La condición de resonancia se puede lograr de dos formas:

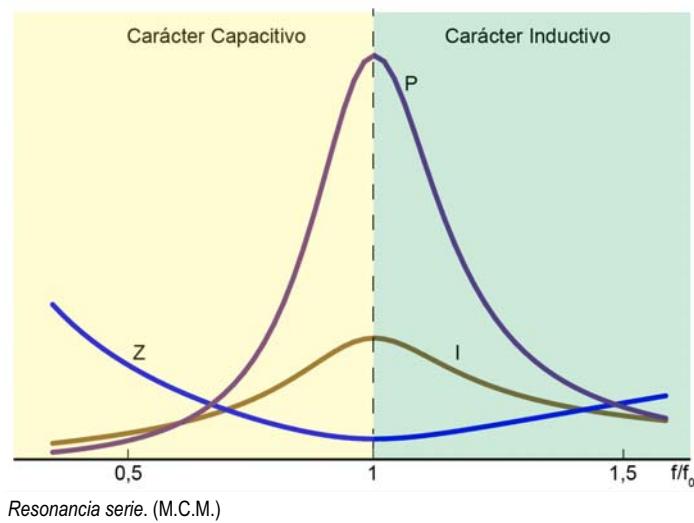
- Variando la frecuencia de la fuente hasta hacerla igual a la de resonancia:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

- Cambiando el valor de la bobina o el condensador hasta que se cumpla que $X_C = X_L$.

Cuando un circuito RLC serie entra en resonancia, tenemos que:

- La impedancia es mínima y su valor es igual a la resistencia de la impedancia.
- La potencia absorbida es máxima.
- La intensidad que circula por el circuito es máxima.
- La tensión que soporta la bobina y el condensador tienen sentidos opuestos.



Para frecuencias superiores a la frecuencia de resonancia ($f/f_0 > 1$) la impedancia pasa de tener un carácter resistivo puro a un carácter inductivo. Para frecuencias por debajo de la frecuencia de resonancia ($f/f_0 < 1$) la impedancia adquiere un carácter capacitivo.

Se define el **factor de calidad**, Q , como:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} \Rightarrow Q = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R}$$

Donde:

U_L es la **tensión en la bobina** cuando el circuito está en **resonancia**.

U_C es la **tensión en el condensador** cuando el circuito está en **resonancia**.

U es la **tensión en la impedancia**.

11.2. Resonancia en paralelo

Un circuito RLC paralelo está en resonancia cuando se cumple:

$$B_L = B_C \Rightarrow X_L = X_C$$

La condición de resonancia se puede lograr:

- Variando la frecuencia de la fuente de señal hasta hacerla igual a la de resonancia:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

Cambiando el valor de la bobina o el condensador hasta que se cumpla que $B_C = B_L$

Cuando un circuito RLC paralelo entra en resonancia ocurre que:

- Su **admitancia** es mínima y su valor es igual al de la **conductancia** del circuito, pero esto equivale a decir que la **impedancia** del circuito es **máxima**.
- La **potencia** absorbida es mínima.
- La **intensidad** que circula por la bobina y el condensador tienen sentidos opuestos.
- La **intensidad** que circula por el circuito es mínima.

Cuando la frecuencia de la señal que alimenta al circuito es superior a la frecuencia de resonancia, el circuito adquiere un carácter capacitivo; cuando es igual se comporta como una resistencia; y cuando es menor pasa a tomar un carácter inductivo, justo al contrario de la resonancia en serie.



Ejemplo

9. En un circuito RLC serie $R = 20 \Omega$, $L = 100/\pi \text{ mH}$ y $C = 25/\pi \text{ mF}$. Debemos calcular:

- a) La frecuencia a la que se alcanza la impedancia mínima.
- b) La intensidad que circula por la impedancia a la frecuencia de resonancia si la tensión es de 230 V.
- c) La tensión en la resistencia y en la bobina

Soluciones:

- a) La frecuencia que hace mínima la impedancia es la frecuencia de resonancia, su valor se determina usando la expresión:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} \Rightarrow f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{100}{\pi} \times 10^{-3} \cdot \frac{25}{\pi} \times 10^{-3}}} = 10 \text{ Hz}$$

A la frecuencia de resonancia la reactancia inductiva es igual a la reactancia capacitativa, $X_L = X_C$, con lo que la impedancia vale: $Z = R = 20 \Omega$

- b) De la ley de Ohm generalizada se deduce que: $I = \frac{U}{Z} = \frac{230}{20} = 11,5 \text{ A}$

- c) La tensión en la resistencia es: $U_R = R \cdot I \Rightarrow U_R = 20 \cdot 11,5 = 230 \text{ V}$

La tensión en la bobina es $U_L = j \cdot X_L \cdot I$, previamente calculemos X_L :

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot \frac{100}{\pi} \times 10^{-3} = 2 \Omega$$

Con lo que tenemos que: $U_L = j \cdot X_L \cdot I = j \cdot 2 \cdot 11,5 = 23 \text{ V}$

UNIDAD 5

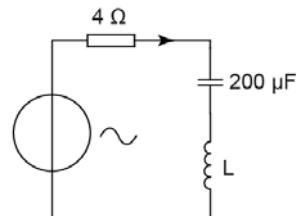
CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA



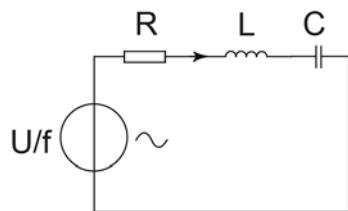
Actividades

22. Sabiendo que el circuito RLC de la figura se encuentra en resonancia y que la fuente cede 2014 W, determina:

- a) El valor eficaz de la tensión de la fuente.
- b) El valor de la inductancia si la tensión del condensador es de 20 V.
- c) El diagrama vectorial de tensiones y corrientes.



23. En el circuito de la figura se sabe que $R = 10 \Omega$, $C = 400 \mu\text{F}$ y $L = 10 \text{ mH}$. Si la tensión de la fuente es de 300 V, y su frecuencia es $f = \pi \cdot f_0$ (f_0 es la frecuencia de resonancia de ese circuito) calcula las potencias absorbidas en cada uno de los elementos.



Recuerda

- ✓ Un circuito está **en resonancia** cuando la impedancia $X_L = X_C$
- ✓ En un circuito RLC la **frecuencia de resonancia** es $f_0 = 1/2\pi\sqrt{L \cdot C}$.
 - En un **circuito RLC serie** en resonancia la **impedancia** es mínima y la **intensidad** que circula es máxima.
 - En un **circuito RLC paralelo** en resonancia la **impedancia** es máxima y la **intensidad** que circula es mínima.

12. Sistemas trifásicos

Los sistemas trifásicos se han impuesto a la hora de transportar energía, por sus ventajas frente a los sistemas monofásicos. Permiten transportar el triple de energía y ello con solo un conductor más que un sistema monofásico, además de proporcionar una potencia más estable a las máquinas que alimentan.

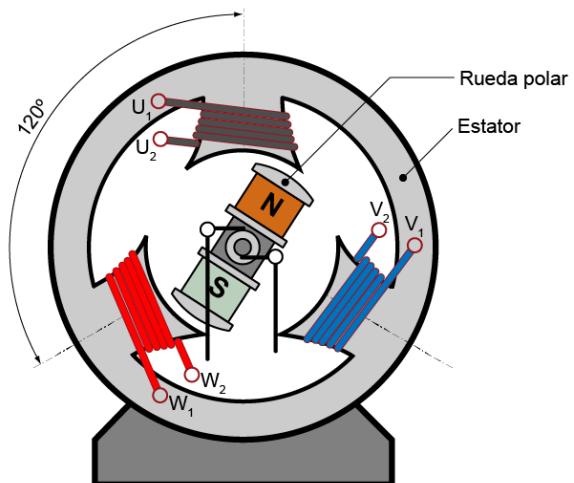
Trataremos los sistemas trifásicos totalmente equilibrados, es decir, aquellos cuyas tensiones son iguales y están desfasadas entre sí 120° y las cargas tienen las impedancias iguales en todas sus fases. También estudiaremos los sistemas trifásicos con cargas no equilibradas, pero alimentados por tensiones equilibradas.

Un sistema trifásico equilibrado de tensiones consta de tres tensiones sinusoidales de igual valor eficaz y desfasadas entre sí 120° . Cada una de estas tensiones se llama fase:

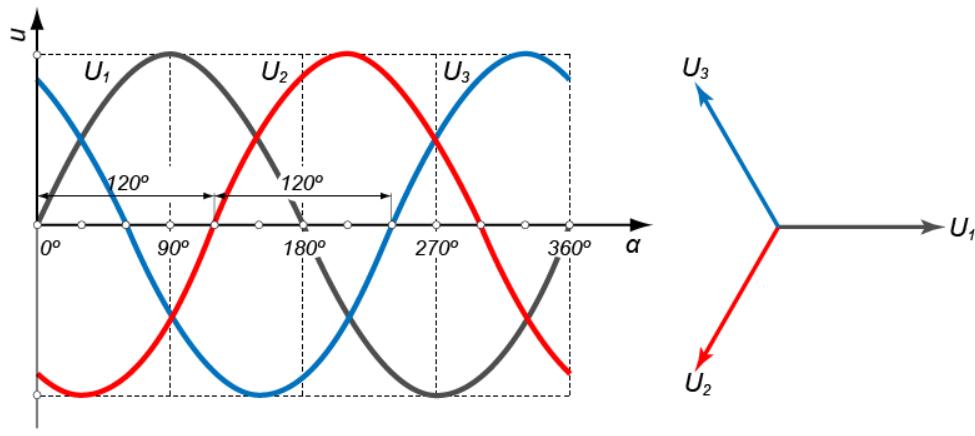
$$\begin{aligned} e_1(t) &= E \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ e_2(t) &= E \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t - 120^\circ) \\ e_3(t) &= E \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + 120^\circ) \end{aligned}$$

Estas tensiones se pueden conseguir en los extremos de las bobinas de un alternador como el que se muestra en la figura de al lado.

La representación temporal y fasorial de tales tensiones se muestra en la gráfica siguiente.



Esquema de un generador trifásico de tensiones. (C.A.L.)



Sistema trifásico de tensiones. (C.A.L.)

La secuencia de fases indica el orden en que se suceden las fases en un sistema trifásico al tomar una de ellas como referencia. La secuencia de fases es importante porque define el sentido de giro de un motor en una red trifásica. En la gráfica anterior, la secuencia de fases es 1-2-3.

Los conductores de fase y neutro se identifican como L1, L2, L3 y N respectivamente y también se utiliza su antigua denominación con las letras R, S, T y N.

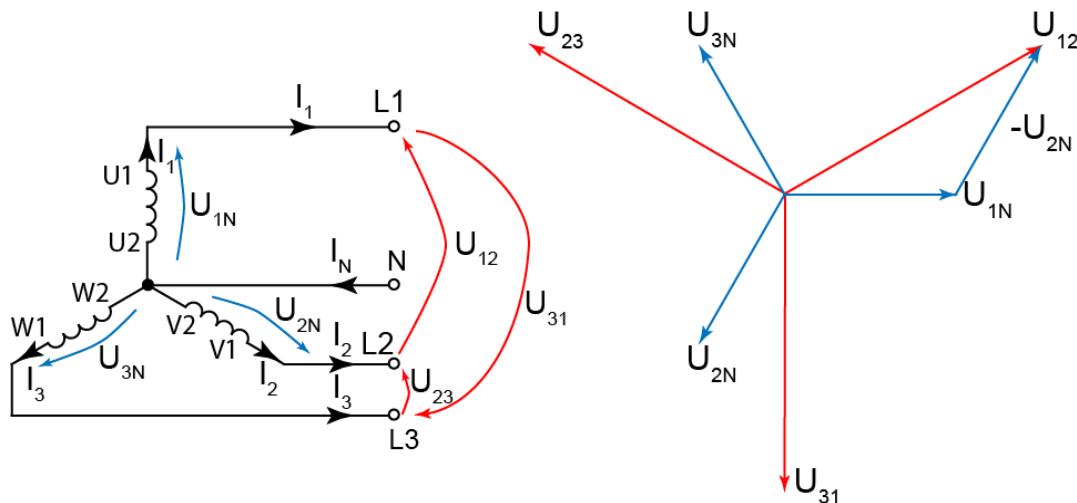
Dependiendo de cómo se conecten las bobinas en trifásico podemos obtener:

- Conexión en **estrella** (Y)
- Conexión en **triángulo** (Δ)

UNIDAD 5

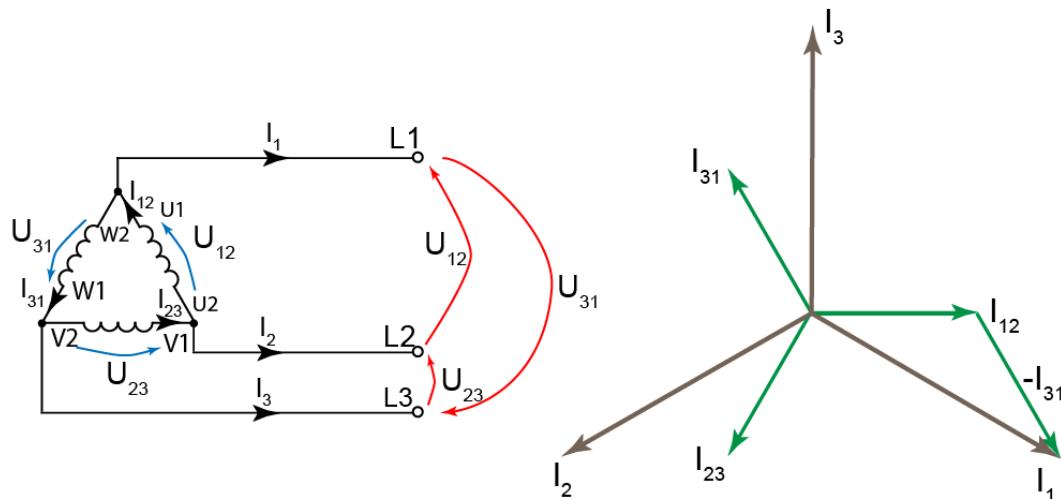
CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

En la **conexión en estrella** los extremos finales de las bobinas se conectan entre sí en un punto común, llamado **neutro del generador**, N. Véase la siguiente figura.



Conexión en estrella. (M.C.M.)

En la **conexión en triángulo** el final de una bobina se conecta con el principio de la siguiente. **No** existe neutro, tal como se muestra en la figura siguiente:



Conexión en triángulo. (M.C.M.)

12.1. Tensión simple y compuesta

Se llama *tensión de fase* o *tensión simple* a la tensión que existe entre los extremos de cada una de las bobinas y equivale a la tensión existente entre una fase y el neutro. En la gráfica anterior de conexión en estrella son las señaladas con U_{1N} , U_{2N} y U_{3N} . En los sistemas conectados en triángulo no hay neutro y las tensiones de fase son U_{12} , U_{23} y U_{31} .

Se llama *tensión de línea* o *tensión compuesta* a la tensión que existe entre dos fases. En la figura de conexión en estrella son U_{12} , U_{23} y U_{31} . Para los elementos conectados en triángulo las tensiones de línea son las marcadas con U_{12} , U_{23} y U_{31} . Fíjate en que la tensión de fase y la tensión de línea coinciden en los elementos conectados en triángulo: $U_{\text{Línea}} = U_{\text{Fase}}$ ($U_F = U_L$).

En un sistema conectado en estrella (Y) la relación entre la tensión de línea y de fase es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{12} &= \mathbf{U}_{1N} - \mathbf{U}_{2N} \Rightarrow \mathbf{U}_{12} = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U}_{1N} \angle 30^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{U}_{23} = \mathbf{U}_{2N} - \mathbf{U}_{3N} \Rightarrow \mathbf{U}_{23} = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U}_{2N} \angle 30^\circ \\ \mathbf{U}_{31} &= \mathbf{U}_{3N} - \mathbf{U}_{1N} \Rightarrow \mathbf{U}_{31} = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U}_{3N} \angle 30^\circ \end{aligned}$$

La tensión de línea está adelantada 30° con respecto a la tensión de fase y su valor es $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión de fase.

Para un sistema equilibrado de tensiones trifásico la relación entre la tensión de fase y su correspondiente tensión de línea es: $\mathbf{U}_L = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U}_F \angle 30^\circ$

Cuando decimos que una red trifásica es de 230/400 V queremos decir que la tensión de fase es de 230 V y la de línea de 400 V. Las líneas trifásicas quedan definidas por la **tensión de línea**.

12.2. Intensidad simple y compuesta

Se llama *intensidad de fase* o *intensidad simple* a la que circula por cada una de las bobinas, en la figura de la conexión en estrella es la señalada con I_1 , I_2 e I_3 . En la figura de la conexión en triángulo las intensidades de fase son las marcadas como I_{21} , I_{23} e I_{31} .

Se llama *intensidad de línea* o *intensidad compuesta*, a la que circula por los conductores que unen el generador y la carga. En la figura de la conexión en estrella son las señaladas con I_1 , I_2 e I_3 . En la figura de la conexión en triángulo las intensidades de línea son las señaladas con I_1 , I_2 e I_3 .

Fíjate en que la intensidad de línea y la intensidad de fase coinciden en los elementos conectados en estrella: $I_{\text{Línea}} = I_{\text{Fase}}$ ($I_L = I_F$).

La relación que existe entre la intensidad de fase y la intensidad de línea en los sistemas conectados en triángulo está dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}_{12} - \mathbf{I}_{31} \Rightarrow \mathbf{I}_1 = \sqrt{3} \cdot \mathbf{I}_{12} \angle -30^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{23} - \mathbf{I}_{12} \Rightarrow \mathbf{I}_2 = \sqrt{3} \cdot \mathbf{I}_{23} \angle -30^\circ \\ \mathbf{I}_3 &= \mathbf{I}_{31} - \mathbf{I}_{23} \Rightarrow \mathbf{I}_3 = \sqrt{3} \cdot \mathbf{I}_{31} \angle -30^\circ \end{aligned}$$

La intensidad de línea está retrasada 30° con respecto a la intensidad de fase y su valor es $\sqrt{3}$ veces mayor que la intensidad de fase.

Para un sistema equilibrado de tensiones trifásico la relación entre la intensidad de fase y su correspondiente intensidad de línea es: $\mathbf{I}_L = \sqrt{3} \cdot \mathbf{I}_F \angle -30^\circ$

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

12.3. Conexión de cargas en estrella y triángulo

Las cargas en los sistemas trifásicos se pueden conectar de dos formas:

- Conexión en estrella (Y).
- Conexión en triángulo (Δ).

Si las impedancias son todas iguales se habla de un **sistema trifásico equilibrado**; si alguna es diferente se dice que el sistema trifásico es **no equilibrado o desequilibrado**.

Conexión en estrella (Y)

La conexión en estrella es la mostrada en la figura siguiente. Las impedancias están unidas en un punto común, que es el *punto neutro*. En este tipo de conexiones siempre se cumple que la corriente de fase, I_F , es igual a la corriente de línea, I_L ($I_L = I_F$). Además se cumple que la corriente en el neutro, I_N , vale:

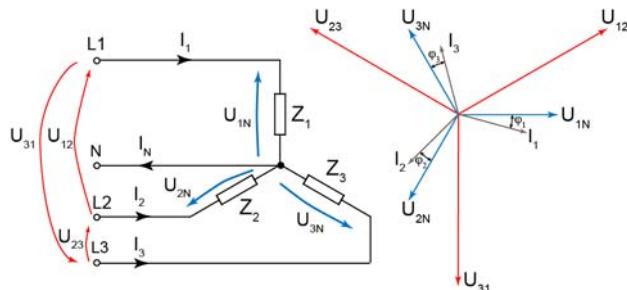
$$I_N = I_1 + I_2 + I_3$$

Puede haber casos de receptores trifásicos en estrella donde no exista el conductor neutro, en este caso se cumple: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Cuando la carga es **equilibrada** ($Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$), la relación entre la tensión de fase, U_F , y la tensión de línea, U_L , es: $U_L = \sqrt{3} \cdot U_F \angle 30^\circ$

La tensión de línea siempre está adelantada 30° con respecto a la tensión de fase y además su valor es $\sqrt{3}$ mayor que el de la tensión de fase.

Si la carga es **no equilibrada** y **no existe conductor de neutro**, las tensiones de fase y de línea no están relacionadas por la fórmula anterior.



Conexión en estrella de una carga. (M.C.M.)

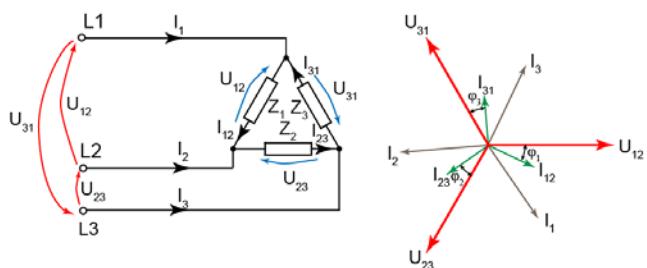
Conexión en triángulo (Δ)

La conexión en triángulo es la mostrada en la figura al lado. En este tipo de conexiones siempre se cumple que la tensión de fase, U_F , es igual a la tensión de línea, U_L ($U_L = U_F$).

Cuando la carga es **equilibrada** ($Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$) la relación entre la intensidad de fase, I_F , y la intensidad de línea, I_L , es: $I_L = \sqrt{3} \cdot I_F \angle -30^\circ$

La intensidad de línea siempre está retrasada 30° con respecto a la intensidad de fase y además su valor es $\sqrt{3}$ mayor que el de la intensidad de fase.

Si la carga es **no equilibrada**, la relación anterior no se puede aplicar y hay que recurrir a la primera ley de Kirchhoff en cada nudo de la impedancia.



Conexión en triángulo de una carga. (M.C.M.)

12.4. Resolución de circuitos trifásicos

En los sistemas con **tensiones y cargas equilibrados** es muy sencillo obtener las intensidades o tensiones de cualquier fase a partir de los valores de una de ellas; basta con introducir un desfase de 120° en las tensiones o intensidades con respecto a las tomadas como referencia.

a) Receptor en estrella con neutro

Si partimos de una tensión de línea U_L , podemos obtener la correspondiente tensión de fase, U_F , aplicando la relación:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot U_F \angle 30^\circ$$

Dada una carga trifásica en estrella de impedancia $\mathbf{Z} = R + j \cdot X$, la intensidad de fase, en este caso la fase 1, es:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}_{1N}}{\mathbf{Z}} = I_1 \angle \theta$$

Para las otras intensidades de fase su cálculo no es necesario, se obtienen así:

$$\mathbf{I}_2 = I_1 \angle \theta - 120^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_3 = I_1 \angle \theta + 120^\circ$$

Basta con desfasar el valor de I_1 en -120° o $+120^\circ$ para obtener las otras intensidades; lo mismo se podría aplicar a las tensiones si fuera necesario.

La **intensidad de neutro**, I_N , en un sistema equilibrado siempre es **nula** porque las tres intensidades están desfasadas entre sí 120° y al sumarlas su resultante es nula, así:

$$I_N = 0$$

Si las impedancias no fueran iguales entre sí, estaríamos ante un sistema desequilibrado; las intensidades de fase se calculan como sigue:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}_{1N}}{\mathbf{Z}_1} = I_1 \angle \theta_1 \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{U}_{2N}}{\mathbf{Z}_2} = I_2 \angle \theta_2 \quad \mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{U}_{3N}}{\mathbf{Z}_3} = I_3 \angle \theta_3$$

La intensidad de neutro ahora no tiene por qué ser nula, su valor se calcula así:

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$$

b) Receptor en estrella sin neutro

Si el receptor es equilibrado y sin neutro, las intensidades se obtienen como en el caso anterior.

Si la carga es **desequilibrada y sin conductor de neutro**, las tensiones en las impedancias, U_F , no se pueden obtener utilizando la relación $U_L = \sqrt{3} \cdot U_F \angle 30^\circ$; en este caso, para hallar la intensidad de fase de cada impedancia es necesario transformar la carga en estrella en su equivalente en triángulo y aplicar lo que se indica en el apartado siguiente.

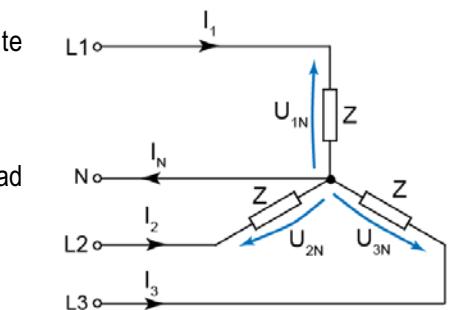
c) Receptor en triángulo

La conexión en triángulo es como se muestra en la figura de al lado.

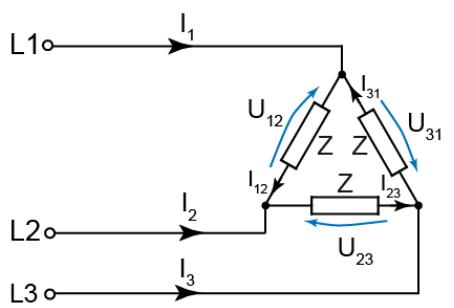
En este tipo de conexiones se cumple que $\mathbf{U}_{Línea} = \mathbf{U}_{Fase}$

Dada una carga trifásica en triángulo de impedancia $\mathbf{Z} = R + j \cdot X$, la corriente que circula por ella, su intensidad de fase, en este caso en la fase 1, es:

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{\mathbf{U}_{12}}{\mathbf{Z}} = I_{12} \angle \theta$$



Carga conectada en estrella con neutro. (M.C.M.)



Carga conectada en triángulo. (M.C.M.)

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Podríamos repetir lo anterior para las otras fases, pero no es necesario; se pueden obtener a partir de la anterior de la siguiente forma:

$$\mathbf{I}_{23} = \mathbf{I}_{12} \angle \theta - 120^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_{31} = \mathbf{I}_{12} \angle \theta + 120^\circ$$

Por último, para obtener la intensidad de línea utilizamos la relación $\mathbf{I}_L = \sqrt{3} \cdot \mathbf{I}_F \angle -30^\circ$ obteniendo:

$$\mathbf{I}_1 = \sqrt{3} \cdot \mathbf{I}_{12} \angle -30^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_2 = \sqrt{3} \cdot \mathbf{I}_{23} \angle -30^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_3 = \sqrt{3} \cdot \mathbf{I}_{31} \angle -30^\circ$$

Si la carga no fuera equilibrada, no podríamos aplicar las expresiones anteriores; tendríamos que aplicar la primera ley de Kirchhoff en cada nudo de la carga, se obtendrían así:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{12} - \mathbf{I}_{31} \quad \therefore \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{23} - \mathbf{I}_{12} \quad \therefore \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_{31} - \mathbf{I}_{23}$$

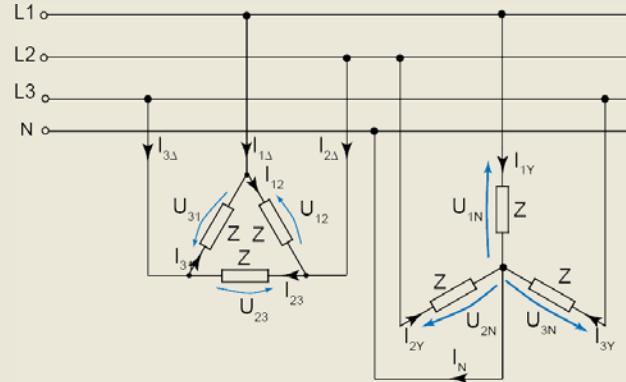


Ejemplo

10. A un sistema trifásico de tensiones de valor eficaz 400 V y 50 Hz están conectadas dos cargas, una en triángulo y otra en estrella con neutro. Las impedancias constituyentes de las dos cargas son todas iguales y de valor $Z = 20 + j30 \Omega$. Utilizando la siguiente figura como referencia, se nos pide:

- a) Calcular la intensidad de línea y fase en la carga conectada en estrella y la intensidad de neutro.
- b) Calcular la intensidad de línea y fase en la carga conectada en triángulo.
- c) Dibujar los fasores asociados a la carga en estrella.
- d) Dibujar los fasores asociados a la carga en triángulo.

Soluciones:



Ante todo, hay que destacar que se trata de un sistema equilibrado de tensiones con una tensión de línea de 400 V; las tensiones de línea que definimos para este sistema son:

$$\mathbf{U}_{12} = 400 \angle 0^\circ \text{ V} \quad \therefore \quad \mathbf{U}_{23} = 400 \angle -120^\circ \text{ V} \quad \therefore \quad \mathbf{U}_{31} = 400 \angle +120^\circ \text{ V}$$

A partir de las tensiones de línea, podemos obtener las tensiones de fase aplicando $\mathbf{U}_L = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U}_F \angle 30^\circ$, porque se trata de un sistema equilibrado y además con conductor de neutro. Despejamos \mathbf{U}_F y obtenemos que

$$\mathbf{U}_F = \frac{\mathbf{U}_L}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ, \text{ con lo que: } \mathbf{U}_{1N} = \frac{\mathbf{U}_{21}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - 30^\circ \Rightarrow \mathbf{U}_{1N} = 230 \angle -30^\circ \text{ V} .$$

De la misma forma obtenemos el resto de las tensiones de fase.

$$\mathbf{U}_{1N} = 230 \angle -30^\circ \text{ V} \quad \therefore \quad \mathbf{U}_{2N} = 230 \angle -150^\circ \text{ V} \quad \therefore \quad \mathbf{U}_{3N} = 230 \angle 90^\circ \text{ V}$$

Antes de continuar, vamos a pasar a polares el valor de Z :

$$Z = Z \angle \varphi \Rightarrow \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{20^2 + 30^2} = 36 \Omega \\ \varphi = \arctg\left(\frac{X}{R}\right) = \arctg\left(\frac{30}{20}\right) = 56,31^\circ \end{cases} \Rightarrow Z = 36 \angle 56,31^\circ$$

- a) La intensidad de fase que circula por la carga es la misma que la de línea por estar conectada en estrella ($I_L = I_F$). Vamos a calcular la intensidad que circula por la fase 1, I_{1Y} :

$$I_{1Y} = \frac{U_{1N}}{Z} = \frac{230\angle -30^\circ}{36\angle 56,31^\circ} = 6,39\angle -86,31^\circ \text{ A}$$

Para calcular la intensidad de fase de las otras fases aplicamos que:

$$I_{2Y} = I_{1Y}\angle \theta - 120^\circ = 6,39\angle -86,31^\circ - 120^\circ \Rightarrow I_{2Y} = 6,39\angle -206,31^\circ = 6,39\angle 153,69^\circ \text{ A}$$

$$I_{3Y} = I_{1Y}\angle \theta + 120^\circ = 6,39\angle -86,31^\circ + 120^\circ \Rightarrow I_{3Y} = 6,39\angle 33,69^\circ \text{ A}$$

La intensidad que circula por el conductor de neutro, I_N , es $I_N = I_1 + I_2 + I_3$. Al tratarse de un sistema equilibrado se comprueba que $I_N = 0 \text{ A}$

- b) Para la carga conectada en triángulo se cumple que la tensión de fase y la de línea coinciden: ($U_L = U_F$).

Para calcular la intensidad de fase en la fase 1 hacemos:

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{Z} = \frac{400\angle 0^\circ}{36\angle 56,31^\circ} = 11,11\angle -56,31^\circ \text{ A}$$

Por ser un sistema equilibrado, para calcular el resto de las intensidades de fase nos valemos de:

$$I_{23} = I_{12}\angle \theta - 120^\circ = 11,11\angle -56,31^\circ - 120^\circ \Rightarrow I_{23} = 11,11\angle -176,31^\circ \text{ A}$$

$$I_{31} = I_{12}\angle \theta + 120^\circ = 11,11\angle -56,31^\circ + 120^\circ \Rightarrow I_{31} = 11,11\angle 63,69^\circ \text{ A}$$

Para calcular las intensidades de línea usamos la relación $I_L = \sqrt{3} \cdot I_F \angle -30^\circ$, válida por ser un sistema equilibrado.

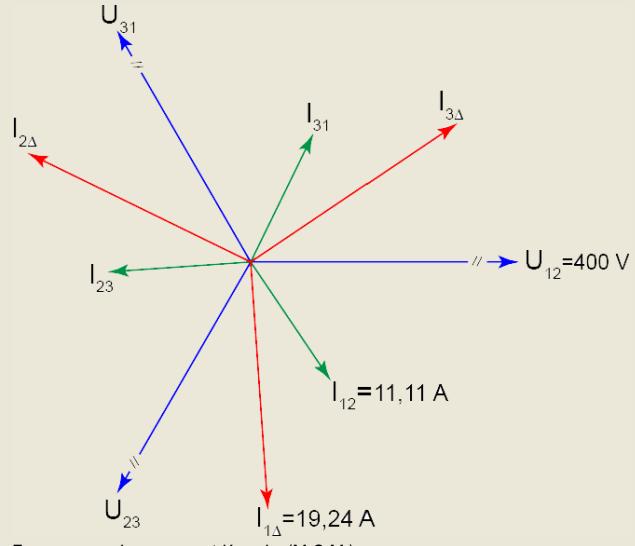
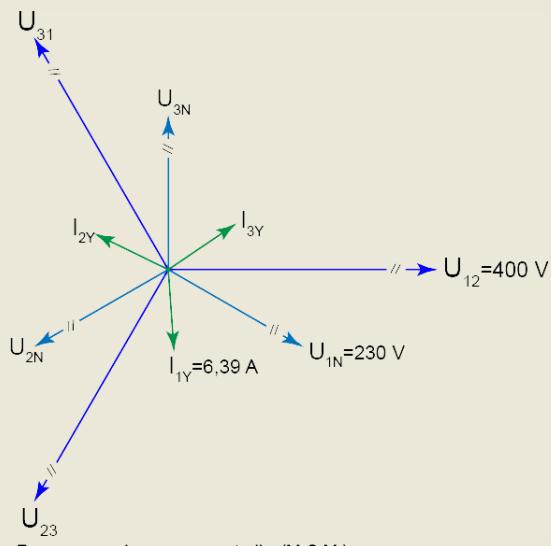
$$I_{1\Delta} = \sqrt{3} \cdot I_{12} \angle -30^\circ = \sqrt{3} \cdot 11,11\angle -56,31^\circ - 30^\circ \Rightarrow I_{1\Delta} = 19,24\angle -86,31^\circ \text{ A}$$

$$I_{2\Delta} = \sqrt{3} \cdot I_{23} \angle -30^\circ = \sqrt{3} \cdot 11,11\angle -176,31^\circ - 30^\circ \Rightarrow I_{2\Delta} = 19,24\angle -206,31^\circ = 19,24\angle 153,69^\circ \text{ A}$$

$$I_{3\Delta} = \sqrt{3} \cdot I_{31} \angle -30^\circ = \sqrt{3} \cdot 11,11\angle 63,69^\circ - 30^\circ \Rightarrow I_{3\Delta} = 19,24\angle 33,69^\circ \text{ A}$$

- c) y d) Ahora haremos las representaciones gráficas de los fasores asociados a la carga en estrella y a la carga en triángulo que se nos pedían.

Para dibujar los fasores solo tenemos que dibujar las tensiones e intensidades implicadas. Los fasores se muestran en las figuras siguientes:



UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA



Actividades

24. Un sistema trifásico con neutro alimenta con 380 V una carga desequilibrada en estrella de impedancias $Z_1 = 20 \Omega$, $Z_2 = j 10 \Omega$ y $Z_3 = j 40 \Omega$. Determina:
- Las intensidades de línea.
 - La intensidad en el conductor neutro.
 - Dibuja el diagrama vectorial de tensiones e intensidades.
25. Un sistema trifásico alimenta con 400 V una carga desequilibrada en triángulo de impedancias $Z_1 = 10 \Omega$; $Z_2 = 20 + 20j \Omega$; $Z_3 = -20j \Omega$. Determina:
- Las intensidades de fase.
 - Las intensidades de línea.
 - Dibuja el diagrama vectorial de tensiones e intensidades.
26. Un sistema trifásico sin neutro alimenta con 380 V una carga desequilibrada en estrella de impedancias $Z_1 = 20 \Omega$, $Z_2 = j 10 \Omega$ y $Z_3 = j 40 \Omega$. Determina:
- Las intensidades de línea.
 - Las tensiones de fase.
 - Dibuja el diagrama vectorial de tensiones e intensidades.



Recuerda

- ✓ Un **sistema trifásico equilibrado** está formado por tres tensiones sinusoidales de igual amplitud y frecuencia, desfasadas entre sí 120° .
- ✓ Las cargas trifásicas se pueden conectar en **estrella** o en **triángulo**.
- ✓ Las **tensiones de fase y de línea** están relacionadas por $\mathbf{U}_L = \sqrt{3} \cdot \mathbf{U}_F \angle 30^\circ$ en las cargas conectadas en **estrella**.
- ✓ Las **intensidades de fase y de línea** están relacionadas por $\mathbf{I}_L = \sqrt{3} \cdot \mathbf{I}_F \angle -30^\circ$ en las cargas conectadas en **triángulo**.
- ✓ En un sistema trifásico equilibrado se cumple que $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = 0$.

13. Potencias en sistemas trifásicos equilibrados

La potencia en un sistema trifásico es la suma de la potencia de cada una de sus fases, tanto para la potencia activa (P) como para la potencia reactiva (Q), pero no así para la potencia aparente (S). Así, aplicando lo anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + P_3 = U_{F1} \cdot I_{F1} \cdot \cos(\varphi_1) + U_{F2} \cdot I_{F2} \cdot \cos(\varphi_2) + U_{F3} \cdot I_{F3} \cdot \cos(\varphi_3) \\ Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = U_{F1} \cdot I_{F1} \cdot \operatorname{sen}(\varphi_1) + U_{F2} \cdot I_{F2} \cdot \operatorname{sen}(\varphi_2) + U_{F3} \cdot I_{F3} \cdot \operatorname{sen}(\varphi_3) \\ S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \end{aligned}$$

U_{F1} , U_{F2} y U_{F3} son las **tensiones de fase** en cada fase e I_{F1} , I_{F2} e I_{F3} son las **intensidades de fase** para cada una de ellas.

φ_1 , φ_2 y φ_3 , son los **desfases** entre cada **tensión de fase** y su correspondiente **intensidad de fase**.

Las expresiones anteriores sirven tanto para sistemas equilibrados como para sistemas no equilibrados.

Cuando los sistemas son **equilibrados**, las tensiones de fase, las intensidades de fase y los ángulos de desfase son iguales entre sí y, por tanto, todas las potencias de fase son iguales. Las expresiones anteriores se convierten en:

$$P = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi \quad \therefore \quad Q = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \operatorname{sen}\varphi \quad \therefore \quad S = 3 \cdot U_F \cdot I_F$$

Si en las expresiones anteriores tanto las tensiones de fase como las intensidades de fase se ponen en función de las tensiones de línea e intensidades de línea respectivamente, obtenemos:

- Para los **sistemas conectados en estrella**:

Poniendo la tensión de fase en función de la tensión de línea tenemos $U_L = \sqrt{3} \cdot U_F$ y las intensidades de línea y fase son iguales, $I_F = I_L$. Las ecuaciones anteriores se simplifican y se convierten en:

$$P = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi \quad \therefore \quad Q = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi \quad \therefore \quad S = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L$$

φ es el ángulo que forman la **tensión de fase** y la **intensidad de fase**, no el ángulo entre la tensión de línea y la intensidad de línea.

- Para los **sistemas conectados en triángulo**:

Poniendo la intensidad de fase en función de la intensidad de línea tenemos $I_F = \sqrt{3} \cdot I_L$ y las tensiones de línea y de fase son iguales $U_F = U_L$. Las ecuaciones anteriores se simplifican y se convierten en:

$$P = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi \quad \therefore \quad Q = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi \quad \therefore \quad S = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L$$

Las expresiones obtenidas son iguales a las de estrella. Tenemos **dos formas** de expresar la potencia en un sistema trifásico equilibrado tanto si están en estrella como en triángulo.

UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA



Ejemplo

11. Utilizando las mismas cargas del ejemplo 10 (dos cargas trifásicas, una conectada en triángulo y otra en estrella con neutro, cada una con tres impedancias iguales de valor $Z = 20 + j30 \Omega$, conectadas a un sistema trifásico 400 V – 50 Hz), debemos calcular ahora:

- a) La potencia activa, reactiva y aparente de la carga conectada en estrella.
- b) La potencia activa, reactiva y aparente de la carga conectada en triángulo.
- c) La potencia activa, reactiva y aparente total consumida por el conjunto de las cargas.

Soluciones:

- a) Al tratarse de un sistema equilibrado aplicaremos las siguientes expresiones:

$$P = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi \quad \therefore \quad Q = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \sin\varphi \quad \therefore \quad S = 3 \cdot U_F \cdot I_F$$

Tomemos una de las fases, por ejemplo la fase 1. La tensión de fase es $U_{IN} = 230 \angle -30^\circ$ V y la intensidad de fase vale $I_{1Y} = 6,39 \angle -86,31^\circ$ A. El ángulo que forman entre ellos es el ángulo que indica la impedancia, $Z = 36 \angle 56,31^\circ$, $\varphi = 56,31^\circ$

Aplicamos las expresiones anteriores y tenemos:

$$P_Y = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi = 3 \cdot 230 \cdot 6,39 \cdot \cos(56,31^\circ) = 2445,72 \text{ W} \Rightarrow P_Y = 2445,72 \text{ W}$$

$$Q_Y = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \sin\varphi = 3 \cdot 230 \cdot 6,39 \cdot \sin(56,31^\circ) = 3668,60 \text{ VAr} \Rightarrow Q_Y = 3668,60 \text{ VAr}$$

$$S_Y = 3 \cdot U_F \cdot I_F = 3 \cdot 230 \cdot 6,39 \text{ VA} \Rightarrow S_Y = 4409,1 \text{ VA}$$

- b) Al tratarse de un sistema equilibrado aplicaremos las siguientes expresiones:

$$P = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi \quad \therefore \quad Q = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi \quad \therefore \quad S = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L$$

Tomemos una de las fases, por ejemplo la fase 1. La tensión de línea es $U_{12} = 400 \angle 0^\circ$ V y la intensidad de línea es $I_{1A} = 19,24 \angle -86,31^\circ$ A; y φ es el ángulo que forman la tensión de fase con la intensidad de fase en la impedancia, su valor es $\varphi = 56,31^\circ$.

Aplicamos las expresiones anteriores y tenemos:

$$P_\Delta = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 19,24 \cdot \cos(56,31^\circ) = 7394 \text{ W} \Rightarrow P_\Delta = 7394 \text{ W}$$

$$Q_\Delta = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 19,24 \cdot \sin(56,31^\circ) = 11091,13 \text{ VAr} \Rightarrow Q_\Delta = 11091,13 \text{ VAr}$$

$$S_\Delta = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 19,24 \text{ VA} \Rightarrow S_\Delta = 13329,86 \text{ VA}$$

Observación: Los valores de las potencias no son iguales, aunque se trate de la misma impedancia. La forma de conectar las impedancias influye en dichos valores.

- c) En los sistemas trifásicos se cumple que $P_{Total} = P_Y + P_\Delta$ y $Q_{Total} = Q_Y + Q_\Delta$ y $S_{Total} \neq S_Y + S_\Delta$.

Para calcular la S_{Total} aplicamos $S_{Total} = \sqrt{P_{Total}^2 + Q_{Total}^2}$; sustituyendo obtenemos:

$$P_{Total} = P_Y + P_\Delta = 2445,72 + 7394 = 9839,72 \text{ W} \Rightarrow P_{Total} = 9839,72 \text{ W}$$

$$Q_{Total} = Q_Y + Q_\Delta = 3668,60 + 11091,13 = 14759,73 \text{ VAr} \Rightarrow Q_{Total} = 14759,73 \text{ VAr}$$

$$S_{Total} = \sqrt{P_{Total}^2 + Q_{Total}^2} = \sqrt{9839,72^2 + 14759,73^2} = 17738,93 \text{ VA} \Rightarrow S_{Total} = 17738,93 \text{ VA}$$

En los sistemas trifásicos también se puede aplicar el concepto de **triángulo de potencia**. Los lados del triángulo son la **potencia activa**, la **potencia reactiva** y la **potencia aparente** totales del sistema trifásico.

El concepto de **factor de potencia** en los sistemas trifásicos es el mismo que en los sistemas monofásicos.

La expresión que debemos utilizar es $\cos\varphi = \frac{P}{S}$

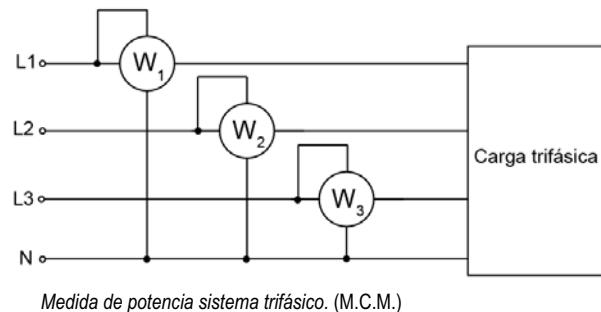
14. Medición de la potencia. Método de los dos vatímetros

Para medir la **potencia activa** se utiliza un **vatímetro** y para medir la **potencia reactiva** un **varímetro**.

- **Sistema trifásico a 4 hilos (sistema con neutro)**

Se mide la potencia que consume cada una de las fases con un vatímetro conectando las bobinas de tensión entre fase y neutro; el montaje es como el mostrado en la figura.

La **potencia consumida** por la carga es la suma de las lecturas obtenidas en cada uno de los vatímetros:
 $P_T = W_1 + W_2 + W_3$



Medida de potencia sistema trifásico. (M.C.M.)

En el caso de **sistemas trifásicos equilibrados** basta

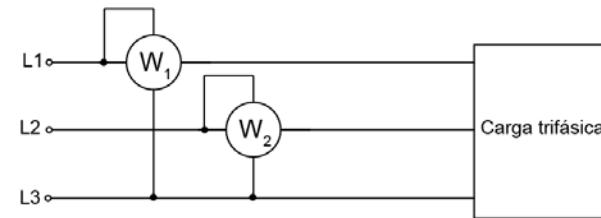
con un único vatímetro, la potencia consumida por la carga se obtiene multiplicando por 3 el valor leído en el vatímetro. Si solo utilizáramos el vatímetro 1, tendríamos que $P_T = 3 \cdot W_1$.

Si queremos medir la **potencia reactiva** sustituimos los vatímetros por **varímetros** y procedemos de la misma manera.

- **Sistema trifásico a 3 hilos (sistema sin neutro)**

El método de los dos vatímetros o **conexión Aron** es utilizado para medir la potencia activa tanto en sistemas trifásicos equilibrados como en los no equilibrados. En este método la conexión de los vatímetros es la indicada en la figura.

La **potencia activa** consumida por la carga es $P_T = W_1 + W_2$. La expresión anterior es válida tanto para sistemas trifásicos equilibrados como para sistemas no equilibrados. Puede ocurrir que alguno de los vatímetros pueda tender a dar lecturas negativas; en este caso, es necesario intercambiar los terminales para obtener una lectura positiva.

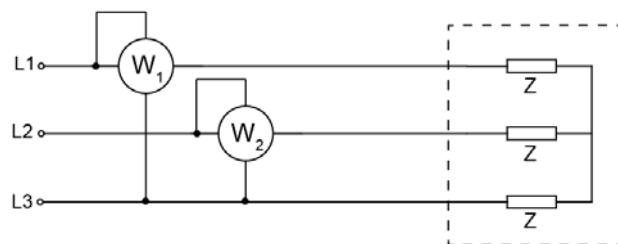


Conexión (o método de) Aron o de los dos vatímetros. (M.C.M.)

La **potencia reactiva** en sistemas equilibrados se obtiene como $Q = \sqrt{3} \cdot (W_1 - W_2)$.

Actividades

27. El receptor trifásico equilibrado de la figura tiene sus fases conectadas en estrella. La tensión de línea es de 400 V y 50 Hz. Las lecturas de los vatímetros son $W_1 = 2866$ W y $W_2 = 1134$ W. Debemos determinar:
- Las potencias activa y reactiva absorbidas por el receptor.
 - El factor de potencia del receptor.
 - Las intensidades de línea y de fase.
 - El valor de la impedancia Z y sus componentes R y L .
28. Un motor trifásico tiene sus tres bobinas iguales conectadas en triángulo. Cada una de esas bobinas tiene 15 ohmios de resistencia y 20 ohmios de reactancia inductiva. El motor se conecta a una red trifásica de 230 V / 50 Hz. Se pide:
- Calcular la intensidad de línea.
 - Considerando separadas la resistencia y la autoinducción de cada bobina, calcular la tensión en bornes de la resistencia R , en bornes de la reactancia X_L y en el conjunto de ambas.
 - Calcular las potencias y dibujar el triángulo de potencias.
 - Calcular el factor de potencia de la instalación.



UNIDAD 5

CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA



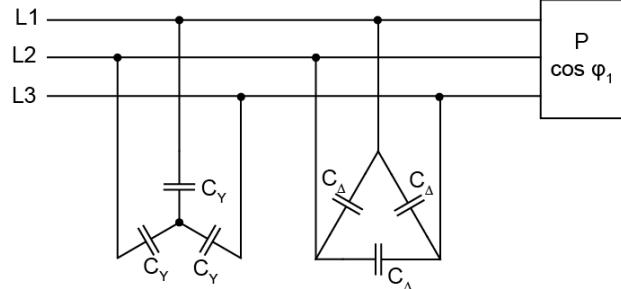
Recuerda

- ✓ La potencia activa en un sistema trifásico es la suma de las potencias activas de cada fase: $P = P_1 + P_2 + P_3$.
- ✓ La potencia reactiva en un sistema trifásico es la suma de las potencias reactivas de cada fase: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$.
- ✓ En los sistemas trifásicos equilibrados se cumple que $P = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi$ ó $P = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi$ y $Q = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \sin\varphi$ ó $Q = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi$.
- ✓ La potencia activa se mide con un **vatímetro** y la reactiva con un **varímetro**.
- ✓ En los **sistemas trifásicos equilibrados con neutro accesible** (4 hilos) basta con utilizar un **único aparato** de medida. El valor de la potencia total es el triple del valor obtenido en la lectura del aparato.
- ✓ En los **sistemas trifásicos sin neutro accesible** (3 hilos) se emplea la **conexión Aron** que emplea dos vatímetros.

15. Corrección del factor de potencia en sistemas trifásicos

Para corregir el factor de potencia se utilizan baterías de condensadores configurados en estrella o en triángulo colocados en paralelo con la carga que queremos compensar; el procedimiento es similar al empleado en los sistemas monofásicos.

En una instalación trifásica equilibrada cuya potencia activa sea P , con un factor de potencia, $\cos\varphi_1$, que sea necesario corregirlo a un nuevo valor, $\cos\varphi_2$, el **condensador en triángulo** necesario para ello viene dado por:



Compensación del factor de potencia. (M.C.M.)

$$C_{\Delta} = \frac{P/3}{\omega \cdot U_L^2} (\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2)$$

Si utilizamos una batería de **condensadores en estrella** para corregir el factor de potencia, el valor de la capacidad en estrella es:

$$C_Y = \frac{P}{\omega \cdot U_L^2} (\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2)$$

De lo anterior podemos deducir que $C_Y = 3 \cdot C_{\Delta}$.



Ejemplo

12. A partir de los datos del ejemplo 11 ($P_{total} = 9839,72 \text{ W}$; $S_{total} = 17738,93 \text{ VAr}$; $U_L = 400 \text{ V}$), calcula:
- El factor de potencia conjunto de las cargas.
 - El condensador, conectado en estrella, necesario para que el factor de potencia total sea igual a 1.

Soluciones:

- a) El factor de potencia se obtiene como cociente entre P_{total} y S_{total} :

$$\cos\varphi = \frac{P_{total}}{S_{total}} = \frac{9839,72}{17738,93} = 0,55 \Rightarrow \varphi = 56,63^\circ$$

- b) El nuevo factor de potencia $\cos\varphi_2$ es unitario ($\cos\varphi_2 = 1$). Usando la expresión, tenemos:

$$C_Y = \frac{P}{\omega \cdot U_L^2} (\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2)$$

Tomando los valores de P_{total} y U_L y sustituyendo en la fórmula anterior, tenemos:

$$C_Y = \frac{P_{total}}{\omega \cdot U_L^2} (\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2) = \frac{9839,72}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 400^2} (\operatorname{tg}(56,63^\circ) - \operatorname{tg}(0^\circ)) = 297 \mu\text{F}$$



Actividades

29. Una red trifásica de 380 V de tensión eficaz de línea alimenta un motor asincrónico trifásico que absorbe una potencia $P = 3 \text{ kW}$ con un $\cos \varphi = 0,75$ (inductivo) y un grupo de lámparas de incandescencia que consumen 2500 W. Determinar:
- El factor de potencia de la instalación.
 - La corriente de línea.
 - La potencia reactiva que se deba compensar para que el factor de potencia de la red sea de 0,95.
30. El alumbrado de una nave industrial está formado por 120 lámparas fluorescentes de 40 W / 230 V cada una, con un $\cos \varphi = 0,6$, conectadas de forma equilibrada entre fase y neutro, y a una línea trifásica de 400 V, 50 Hz. Determina las características de la batería de condensadores conectados en estrella para elevar el factor de potencia de la instalación a 0,95.



Recuerda

- ✓ Para **compensar el factor de potencia** en un **sistema trifásico** se utilizan baterías de condensadores configurados en estrella o en triángulo, conectados en paralelo con la carga que se deba compensar.
- ✓ Para **compensar el factor de potencia $\cos\varphi$** de una carga trifásica equilibrada de potencia activa P a un nuevo factor de potencia $\cos\varphi_2$, el valor del **condensador en estrella** es $C_Y = \frac{P}{\omega \cdot U_L^2} (\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2)$ y en **triángulo** es $C_\Delta = \frac{P/3}{\omega \cdot U_L^2} (\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2)$