

В.А.Смирнов, Е.А.Туяқов

ГЕОМЕТРИЯ

11

Умумтаълим мактабларининг
ижтимоий-гуманитар йўналишдаги
11-синфи учун дарслик

*Қозогистон Республикаси Таълим ва фан
министрлиги тасдиқлаган*



Алмати “Мектеп” 2020

УДК 373.167.1

ББК 22.15я72

С53

Таржимон А. Н. Исаилов

Шартли белгилар:



— танқидий фикрлашни ривожлантириш бүйича топшириқлар



— назарий материалларни мустақил ўрганиш учун керак бўладиган топшириқлар



— теорема исботланишининг якуnlаниши

A

— барча ўқувчилар учун мажбурий топшириқлар

B

— ўртача даражали топшириқлар

C

— юқори даражали масалалар

Смирнов В.А., Туяқов Е.А.

С53 **Геометрия. Умумтаълим мактабларининг ижтимоий-гуманитар йўналишдаги 11-синфи учун дарслик.** — Алмати: Мектеп, 2020. — 128 б., расм.

ISBN 978—601—07—1516—5

С **4306020502—143**
404(05)—20

63(1)—20

УДК 373.167.1
ББК 22.15я72

ISBN 978—601—07—1516—5

© Смирнов В.А., Туяқов Е.А., 2020
© Таржимон Исаилов А.Н., 2020
© «Мектеп» нашриёти,
бадиий безак берган, 2020
Барча ҳуқуқлари ҳимояланган
Нашрга оид мулкий ҳуқуқлар
«Мектеп» нашриётига тегишли

*Книга представлена исключительно в образовательных целях

согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

КИРИШ

Дарслик 10-синф “Геометрия” дарслигининг давоми бўлиб ҳисобланади ва ижтимоий-гуманитар йўналиш бўйича ўқийдиган 11-синф ўқувчиларига оид.

Дарсликда асосий кўпёклар билан ва уларнинг хоссалари билан танишиш, айланиш жисмлари билан (цилиндр, конус, шар) ва уларнинг хоссалари билан танишиш, фазовий фигуralарнинг сиртлари юзаси билан ҳажмларини топишни ўргатиш назарда тутилган.

Дарсликдаги барча материаллар бўлимлар ва параграфларга бўлинган. Улар назарий материалларни, мустақил бажариш учун берилган топшириқларни, мустаҳкамлашга оид саволларни, мураккаблик даржаси ҳар хил бўлган масалаларни ўз ичига олади.

Теорема исботининг якуни (□) белги орқали белгиланган.

Дарсликда мураккаблик даржаси ҳар хил бўлган топшириқлар:

А — мажбурий даража, В — ўртача мураккаб даража, С — мураккаблиги юқори даражали топшириқлар берилган.

(*) юлдузча орқали белгиланган параграфлар ўқув дастурига киритилмаган илмий — тадқиқот ва тадбиқий йўналишдаги қўшимча материалларни ўз ичига олади.

Ҳар бир бўлим охирида бўлим бўйича ўқув материалларини ўзлаштириш сифатини текширишга доир тест топшириқлари берилган.

Дарслик охирида масалаларнинг жавоблари берилган.

Геометрия фанини ўзлаштиришда муваффақият тилаймиз!

10-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

Стереометрия аксиомалари

- 1.** Фазода ҳар бир уттаси бир түғри чизикда ётмайдиган ҳар хил: уч; 2) түрт; 3) беш; 4)* n нұқталарнинг жуфти орқали нечта түғри чизик үтказиш мүмкін?
- 2.** Фазодаги уч нұқта орқали нечта текислик үтказиш мүмкін?
- 3.** Фазода ҳар бир түрттаси бир текислика ётмайдиган ҳар хил: 1) уч; 2) беш; 3)* n нұқталар орқали нечта текислик үтказиш мүмкін?
- 4.** 1) Икки текислик; 2) уч текислик; 3)* түрт текислик фазони әнг күп деганда нечта бўлакка бўлади?
- 5.** Агар түғри чизикнинг текислик билан умумий икки нұктаси бўлса, унда у түғри чизик шу текислика ётишини исботланг.
- 6.** Түғри чизик ва унда ётмайдиган нұқта орқали фақат битта текислик үтказиш мүмкинлигини исботланг.
- 7.** Кесишувчи икки түғри чизик орқали фақат битта текислик үтказиш мүмкинлигини исботланг.
- 8.** Кубнинг нечта: 1) учи; 2) ён қирраси; 3) томони бўлади?
- 9.** Параллелепипеднинг нечта: 1) учи; 2) ён қирраси; 3) томони бўлади?
- 10.** 1) Учбурчакли; 2) түртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n -бурчакли призманинг нечта учи бўлади?
- 11.** Призманинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та учи бўлиши мүмкинми?
- 12.** 1) Учбурчакли; 2) түртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n -бурчакли призманинг нечта ён қирраси бўлади?
- 13.** Призманинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та ён қирраси бўлиши мүмкинми?
- 14.** 1) Учбурчакли; 2) түртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n -бурчакли призманинг нечта томони бўлади?
- 15.** Призманинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та томони бўлиши мүмкинми?
- 16.** 1) 12; 2) 15; 3) 18 та қирраси бор призма асосида қандай кўпбурчак ётади?
- 17.** 1) Учбурчакли; 2) түртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n -бурчакли пирамиданинг нечта учи бўлади?
- 18.** Пирамиданинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та учи бўлиши мүмкинми?
- 19.** 1) Учбурчакли; 2) түртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n -бурчакли пирамиданинг нечта ён қирраси бўлади?
- 20.** Пирамиданинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та ён қирраси бўлиши мүмкинми?
- 21.** 1) Учбурчакли; 2) түртбурчакли; 3) бешбурчакли; 4) олтибурчакли; 5) n -бурчакли пирамиданинг нечта томони бўлади?

- 22.** Пирамиданинг 1) 9; 2) 10; 3) 12; 4) 15 та томони бўлиши мумкинми?
- 23.** 1) 8; 2) 10; 3) 12 қирраси бор пирамиданинг асосида қандай кўпбурчак ётади?

Фазодаги параллеллик

- 24.** 1) Кубнинг; 2) параллелепипеднинг; 3) учбурчакли призманинг; 4) олтибурчакли призманинг параллел ён қирраларининг неча жуфти бўлади?
- 25.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедида қуйидаги тўғри чизиклар параллел бўлишини исботланг: 1) AB ва D_1C_1 ; 2) AD_1 ва BC_1
- 26.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ муентазам олтибурчакли призмада қуйидаги тўғри чизиклар параллель бўлишини исботланг: 1) AB ва E_1D_1 ; 2) AA_1 ва DD_1 ; 3) AC_1 ва FD_1 .
- 27.** 1) Кубнинг; 2) параллелепипеднинг; 3) учбурчакли пирамиданинг; олтибурчакли пирамиданинг айқаш ён қирраларининг неча жуфти бўлади?
- 28.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубининг учлари орқали ўтувчи: 1) AB_1 ва BC_1 ; AA_1 ва BD_1 ; 3) AC_1 ва BD_1 тўғри чизиклари қандай жойлашган?
- 29.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ муентазам олтибурчакли призманинг учлари орқали ўтувчи: 1) AB_1 ва CD_1 ; 2) AA_1 ва BD_1 ; 3) AC_1 ва BF_1 тўғри чизиклари қандай жойлашган?
- 30.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедида: 1) AA_1 ва BD ; 2) AC_1 ва BB_1 тўғри чизиклари айқаш бўлишини исботланг.
- 31.** $SABCDEF$ пирамидасида SA тўғри чизиги билан: 1) BC ; 2) CD тўғри чизиги айқаш бўлишини исботланг.
- 32.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ муентазам олтибурчакли призмасида: 1) AA_1 ва BC ; 2) AC_1 ва BD ; 3) AB ва B_1C_1 тўғри чизиклари айқаш бўлишини исботланг.
- 33.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ муентазам олтибурчакли призмасида: 1) AD ; 2) AB_1 тўғри чизикларига параллель ёқларини кўрсатинг.
- 34.** $SABCDEF$ муентазам олтибурчакли пирамидасида AB қирраси SDE ёғига параллель бўлишини исботланг.
- 35.** 1) Кубнинг; 2) параллелепипеднинг; 3) учбурчакли призманинг; олтибурчакли призманинг параллель ёқларининг неча жуфти бўлади?
- 36.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ муентазам олтибурчакли призмасида: 1) ABB_1 ва EDD_1 ; 2) ACC_1 ва FDD_1 текисликлари параллель бўлишини исботланг.

Фазодаги перпендикулярлик

- 37.** 1) Мунтазам тетраэдрнинг; 2) кубнинг перпендикуляр қирраларининг нечта жуфти бўлади?
- 38.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида: 1) AB_1 ва BC_1 ; 2) AC ва BD_1 ; 3) AB_1 ва CD_1 тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакни топинг.
- 39.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. Унинг: 1) AA_1 ва CD_1 ; 2) AA_1 ва BD_1 ; 3) AC ва BE_1 тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакни топинг.
- 40.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B нуқтасидан: 1) A_1D_1 ; 2) A_1C_1 тўғри чизигигача бўлган масофани топинг.
- 41.** $ABC A_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. Унинг B нуқтасидан: 1) AC_1 ; 2) A_1C_1 тўғри чизигигача бўлган масофани топинг.
- 42.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B нуқтасидан: 1) ACC_1 ; 2) ACB_1 текислигигача бўлган масофани топинг.
- 43.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. Унинг B учидан: 1) ACC_1 ; 2) CDD_1 ; 3) DEE_1 ; 4) DFF_1 текислигигача бўлган масофани топинг.
- 44.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. Унинг: 1) ABB_1 ва DEE_1 ; 2) ACC_1 ва FDD_1 текисликларининг орасидаги масофани топинг.
- 45.** $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамидасининг барча қирралари 1 га тенг. SB тўғри чизиги билан ABC текислиги орасидаги бурчакни топинг.
- 46.** $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари эса 2 га тенг. SB тўғри чизиги билан ABC текислиги орасидаги бурчакни топинг.
- 47.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. 1) ABB_1 ва BCC_1 ; 2) ABB_1 ва ACC_1 ; 3) ACC_1 ва CDD_1 ; 4) ACC_1 ва BEE_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.
- 48.** Мунтазам тетраэдр ёқларининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг косинусини топинг.
- 49.** Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг қўшни бўлган ён ёқларининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг косинусини топинг.

Векторлар ва уларнинг хоссалари

- 50.** Параллелепипеднинг қирралари ҳар хил нечта векторларни ташкил этади?

- 51.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. 1) $\overrightarrow{AC_1}$; 2) $\overrightarrow{AD_1}$ векторининг узунлигини топинг.
- 52.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида: 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; 2) $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1}$ векторининг узунлигини топинг.
- 53.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида $\overrightarrow{AC_1}$ векторини \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} ва $\overrightarrow{AA_1}$ векторлари орқали ифодаланг.
- 54.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 га тенг. $\overrightarrow{AD_1}$ векторини \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} ва $\overrightarrow{AA_1}$ векторлари орқали ифодаланг.
- 55.** $SABCD$ мунтазам түртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. \overrightarrow{SA} вектори билан: 1) \overrightarrow{BC} ; 2) \overrightarrow{BD} векторининг орасидаги бурчакни топинг.
- 56.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик куби берилган. $\overrightarrow{AB_1}$ вектори билан: 1) $\overrightarrow{CC_1}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$; 3) $\overrightarrow{BC_1}$; 4) $\overrightarrow{BD_1}$ векторининг скаляр кўпайтмасини топинг.
- 57.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида жисмни C учидан C_1 учига $\vec{F} = \overrightarrow{BD_1}$ кучининг тасири билан ўрин алмаштирганда бажариладиган ишни топинг.

Координаталар

- 58.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик куби тўғри бурчакли координаталар системасида жойлашган. Унинг D учи координаталар бошида, DC , DA , DD_1 қирралари мос равишда абсцисса, ордината, аппликата ўқларида ётади. Кубнинг барча учларининг координаталарини топинг.
- 59.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1-га тенг, A учи эса — тўғри бурчакли координата системасининг координаталар бошида, AB , AE , AA_1 кесмалари эса мос равишда абсцисса, ордината, аппликата ўқларида ётади. Призма учларининг координаталарини топинг.
- 60.** $A(1; 2; 3)$ нуқтасидан: 1) Ox ; 2) Oy ; 3) Oz координаталар тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
- 61.** Маркази $A(1; 2; 2)$ нуқтасида бўлган ва координаталар боши орқали ўтувчи сфера тенгламасини топинг.
- 62.** $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 4 = 0$ тенгламаси фазодаги сферани аниқлашини исботланг. Унинг радиуси билан марказининг координаталарини топинг.
- 63.** $a_1(1; 2; 3)$ және $a_2(3; -1; 2)$ векторларининг скаляр кўпайтмасини топинг.
- 64.** $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ нуқталари орқали ўтувчи текисликнинг тенгламасини топинг.

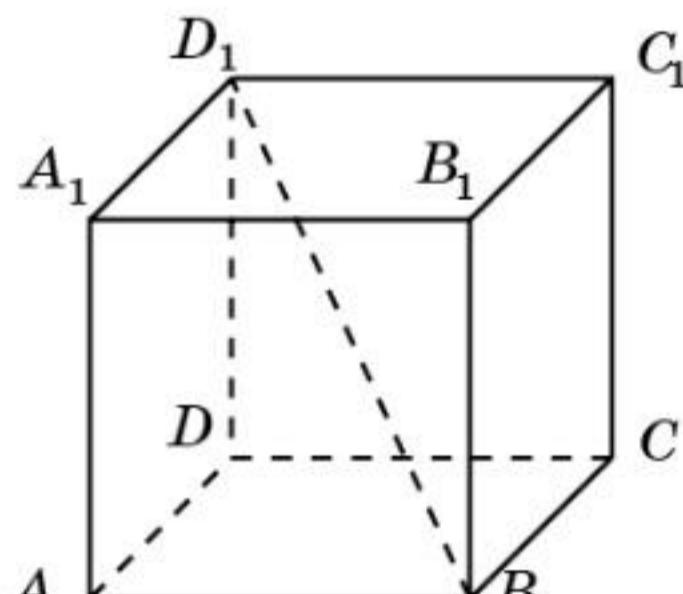
I боб

КҮПЁҚЛАР

**1-§. Күпёқ таърифи. Призма ва параллелепипед.
Призманинг ёйилмаси, ён ва тўла сиртининг юзалари**

Күпёқ деб унинг сирти чекли сондаги кўпбурчакларнинг бирлашмасидан иборат бўлган жисмга айтилади. Мана шу кўпбурчаклар кўпёқнинг ёқлари, ёқларининг умумий томонлари қирралари, қирраларининг умумий нуқталари эса кўпёқнинг учлари деб аталишини эсга туширамиз.

10-синф геометрия курсида қавариқ кўпёқлар (куб, параллелепипед, призма, пирамида ва ҳ.к.) кўриб чиқилади.



1.1-расм

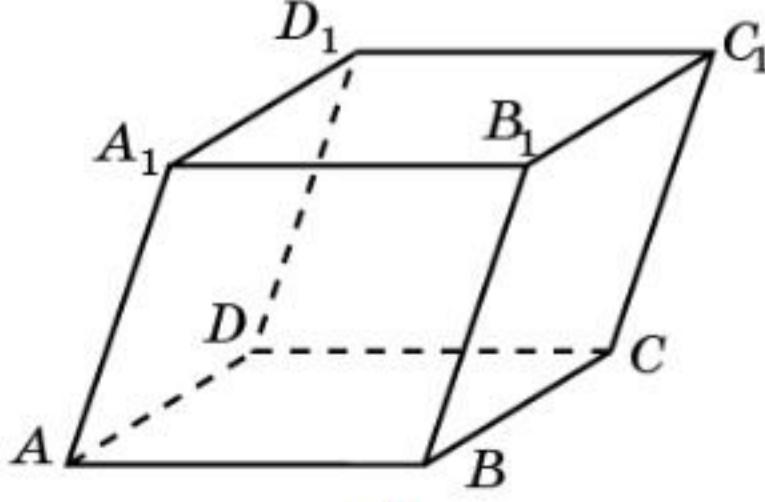
Куб деб олтита ёғи ҳам квадрат бўлган кўпёқка айтилади (1.1-расм). Одатта куб унинг учларига қўйилган ҳарфлар билан белгиланади, масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Қирраси 1 га teng куб бирлик куб деб аталади.

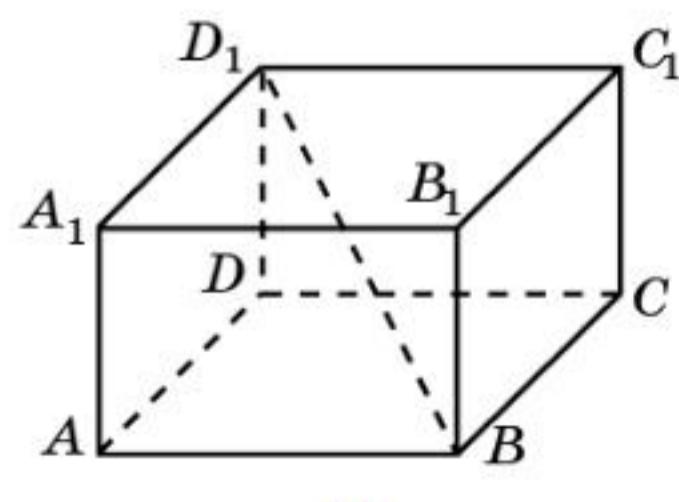
Кубнинг бир ёғида ётмайдиган икки учни туташтирувчи кесма кубнинг диагонали деб аталади. 1.1-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BD_1 диагонали тасвиранган.

Параллелепипед деб қарама-қарши ёқлари жуфт-жуфти билан ўзаро параллел бўладиган кўпёқа (олтиёқа) айтилади (1.2, а-расм). Параллелепипеднинг олтита ёғи ҳам параллелограмлар бўлади. Параллелепипед унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади, масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Агар параллелепипеднинг ён қирралари асос текислигига перпендикуляр бўлса, унда у тўғри параллелепипед деб аталади. Асослари тўғри тўртбурчак бўладиган тўғри параллелепипедни тўғри бурчакли параллелепипед деб атайди (1.2, б-расм). Агар параллелепипеднинг



a)



б)

1.2-расм

ён қирралари асос текислигига перпендикуляр бўлмаса, унда у огма параллелепипед деб аталади (1.2, а-расм).

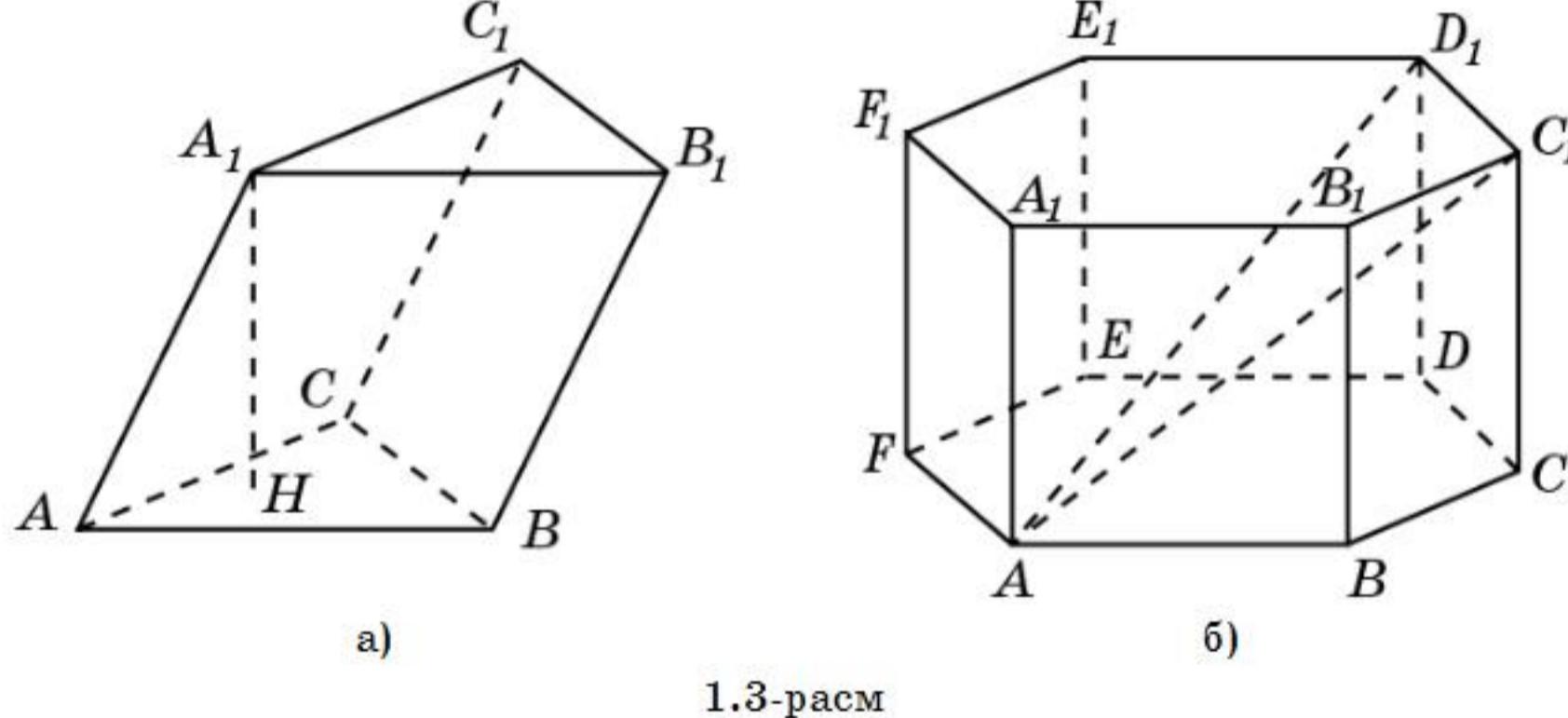
Параллелепипеднинг бир ёғида ётмайдиган икки учини туташтирувчи кесма *параллелепипеднинг диагонали* деб аталади. 1.2, б-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипеднинг BD_1 диагонали тасвириланган.

Призма деб икки ёги параллел текисликларда ётувчи ўзаро тенг кўпбурчаклар, ёқлари эса параллелограммлар бўладиган кўпёқа айтилади. Кўпбурчаклар призманинг *асослари*, параллелограммлар эса призманинг ён ёқлари деб аталади. Ён ёқларидан тузилган сирт *призманинг ён сирти* деб аталади. Призманинг ён ёқларининг умумий қирралари унинг ён қирралари деб аталади.

Призмалар асосларида ётувчи кўпбурчакларга (учбурчаклар, тўртбурчаклар, бешбурчаклар ва ҳ.к.) боғлиқ мос равища учбурчакли, тўртбурчакли, бешбурчакли ва ҳ.к. бўлиб бўлинади.

Агар призманинг асослари n бурчаклар бўлса, унда у n бурчакли *призма* деб аталади.

Призма унинг учлари билан белгиланади, масалан: $ABCDA_1B_1C_1$ — учбурчакли призма (1.3, а-расм), $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ — олтибурчакли призма (1.3, б-расм).



1.3-расм

Призманинг таърифларидан унинг қуидаги хоссалари келиб чиқади:

- 1) Ён қирралари тенг;
- 2) Асослари тенг ва параллел бўлади.



Бу хоссаларни мустақил исботланг.

Ён қирралари асосларига перпендикуляр бўладиган призма *тўғри призма* деб аталади. Тўғри бўлмаган призма *огма призма* деб аталади. 1.3, а-расмда учбурчакли оғма призма тасвириланган. 1.3, б-расмда тўғри олтибурчакли призма тасвириланган.



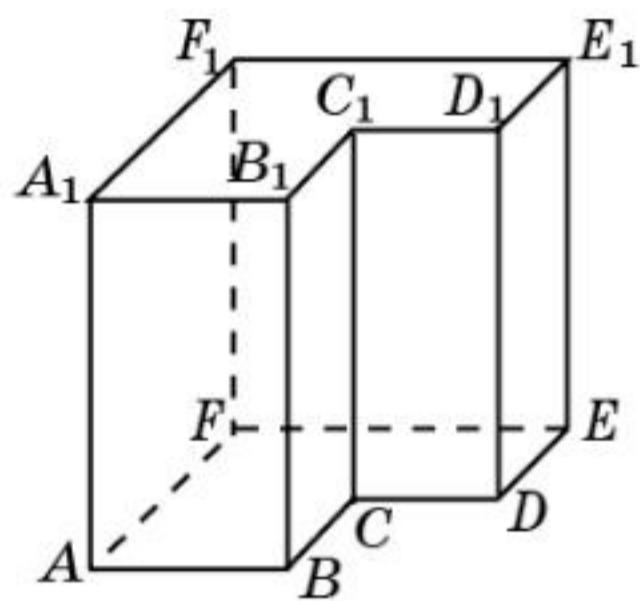
Қандай үйләсизлар, параллелепипед түртбұрчакли призма бўла оладими?

Асослари мунтазам кўпбурчаклар бўладиган тўғри призма *мунтазам* призма деб аталади. 1.3, б-расмда мунтазам олтибурчакли призма тасвирланган.

Призманинг асос текисликларининг орасидаги масофани *призманинг баландлиги* деб аталади, яъни призманинг бир асос нуқтасидан иккинчи асос текислигига ўтказилган перпендикуляр унинг баландлиги бўлиб ҳисобланади. 1.3, а-расмда $ABCA_1B_1C_1$ призмасининг A_1H баландлиги тасвирланган.



Тўғри призманинг баландлиги унинг ён қиррасининг узунлигига тенг бўлишини исботланг.



1.4-расм

Призманинг битта ёғига тегишли бўлмаган икки учини туташтирувч кесма *призманинг диагонали* деб аталади. 1.3, б-расмда $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмасининг AC_1 ва AD_1 диагоналлари тасвирланган.

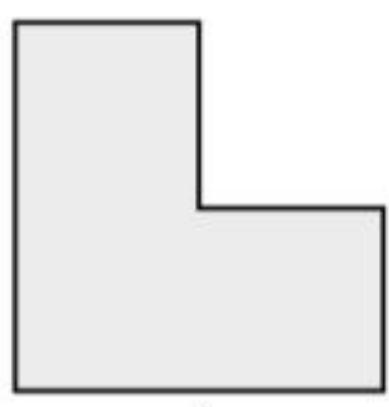
Агар кўпёқнинг ўзи унинг сиртидаги ҳар бир кўпбурчак текислигининг бир томонида ётса, бундай кўпёқ қавариқ кўпёқ деб аталади.

1.3-расмда қавариқ кўпёқ тасвирланган.

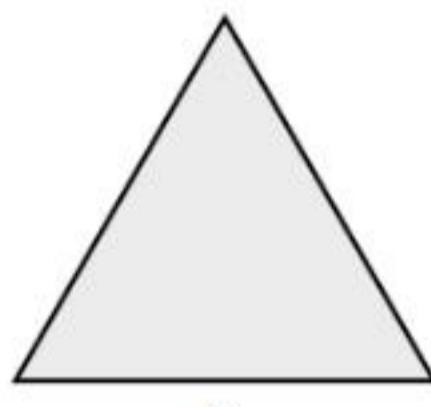
1.4-расмда қавариқ бўлмаган олтибурчакли призма тасвирланган.

“Қавариқлик” тушунча ихтиёрий фигура учун аниқланади. Агар фигурада унинг ихтиёрий икки нуқтаси билан бирга уларни туташтирувчи кесма ётадиган бўлса, унда у қавариқ фигура деб аталади.

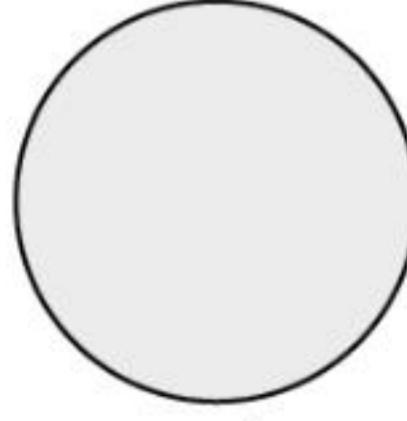
1.5-расмда қавариқ (б, в) ва қавариқ бўлмаган (а, г) ясси фигуralар тасвирланган.



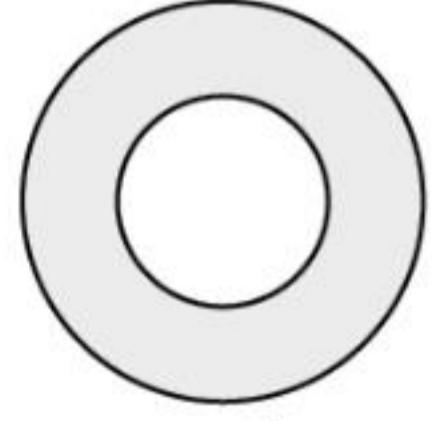
а)



б)



в)



г)

1.5-расм



Икки қавариқ фигуранинг кесишмаси (умумий бўлаги) қавариқ фигура бўлишини исботланг.

Агар кўпёқнинг сиртини қандайдир қирралари бўйлаб кесиб, уни текисликка, яъни сиртни ташкил этувчи барча кўпбурчаклар берилган

текисликда ётадигандай қилиб ёйилса, унда күпёкнинг ёйилмаси деб аталади-
ган фигура пайдо бўлади.

Масалан, 1.6-расмда кубнинг ёйил-
маси тасвириланган.

Кўпёк моделларини қаттиқ қоғоздан, картон қоғоздан ёки бошқа материалдан ясаш учун аввал унинг ёйилмасини тайёрлаб, мос равишда қирраларини елимлаш керак.

Қулай бўлиши учун кўпёк ёйилма-
сини қопқоқчалари билан бирга ясаган яхши ва улар орқали елимлаб ёпиши-
тирилади. 1.7-расмда кубнинг ёйил-
маси қопқоқчалари билан кўрсатил-
ган.

Кўпёкларни унинг ёйилмалари ор-
қали ясаш хақида тўлароқ танишиш
учун қуйидаги китобни тавсия қиласиз:
Венниндже М. Модели многогранни-
ков. — М.: Мир, 2004.

Таъриф бўйича, кўпёк сиртнинг юзи мана шу сиртнинг ён ёқлари юзла-
рининг йиғиндиси бўлиб ҳисобланади.

Кўпёк сиртнинг юзи унинг ёйилмасининг юзига teng бўлиши аниқ.

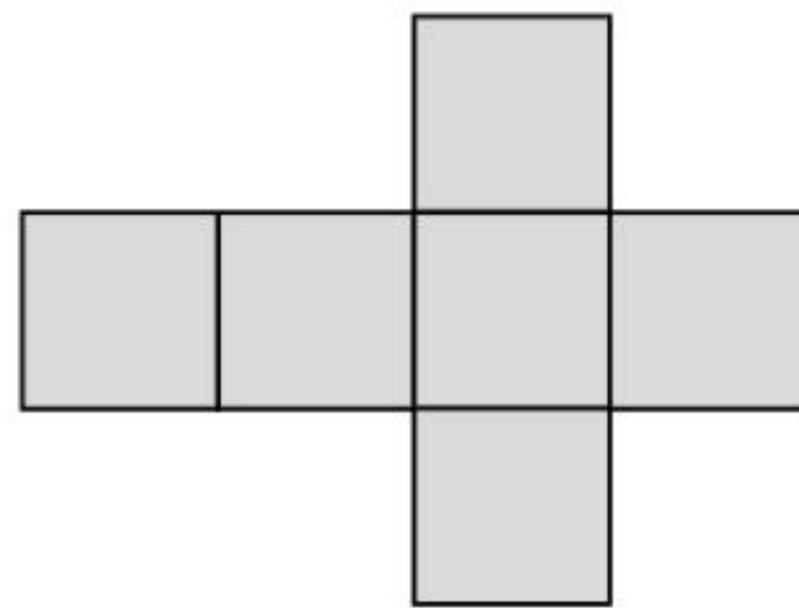
Призманинг ён сиртнинг юзи деб мана шу призманинг барча ён ёқларидан ташкил топган сиртга айтилади. Шу сабабли призманинг ён сиртнинг юзи унинг барча ён ёқлари юзларининг йиғиндисига teng бўлади.

Теорема. Тўғри призманинг ён сирти юзи асосининг периметри билан баландлигининг кўпайтмасига teng бўлади.

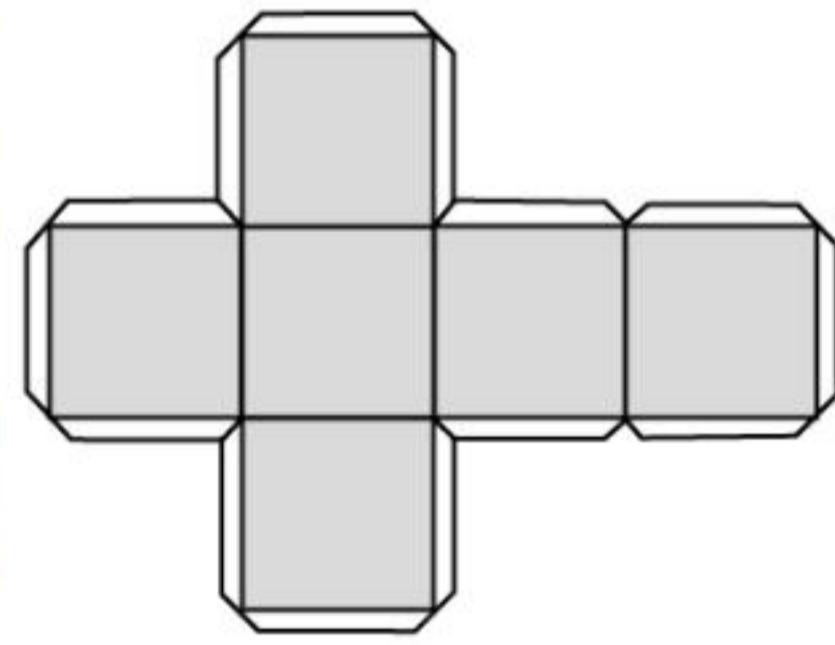
Исботи. Таъриф бўйича $S_{\text{пр.ён с.}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n$, бу ерда S_1, S_2, \dots, S_n — ён ёқларининг юзлари. Тўғри призманинг ён ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат, унинг асослари призма асосининг томонла-
ри, ён қирраси эса призманинг h баландликка teng ва $S_1 = a_1 h, S_2 = a_2 h, \dots, S_n = a_n h$, бу ерда a_1, a_2, \dots, a_n — асос томонларининг узунли-
клири. Бундан призманинг ён сиртнинг юзи қуйидаги формула билан ҳисобланиши келиб чиқади:

$$S_{\text{пр.ён с.}} = a_1 h + a_2 h + \dots + a_n h = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)h = Ph,$$

бу ерда P — призма асосининг периметри. 



1.6-расм



1.7-расм

Призманинг тұла сирти юзи унинг ён сиртининг юзи билан иккисіншінде ассоциацияның түрлілігін анықтады, яғни қуйидаги формула билан анықланады:

$$S_{\text{призма т.с.}} = S_{\text{пр. ён.с}} + 2S_{\text{асос.}}$$



Кирираси a га тенг бўладиган кубнинг тұла сиртининг юзини топиш формуласини ёзинг.



Бир учидан чиқувчи қирралари a, b, c бўладиган түғри бурчакли параллелепипеднинг тұла сиртининг юзини топиш формуласини ёзинг.

Кўпёқларни моделлаш учун <http://geogebra.org> сайтидан юклаб олишга мумкин бўладиган бепул тарқатмани GeoGebra компьютерлик программасини кўлланишга бўлади.

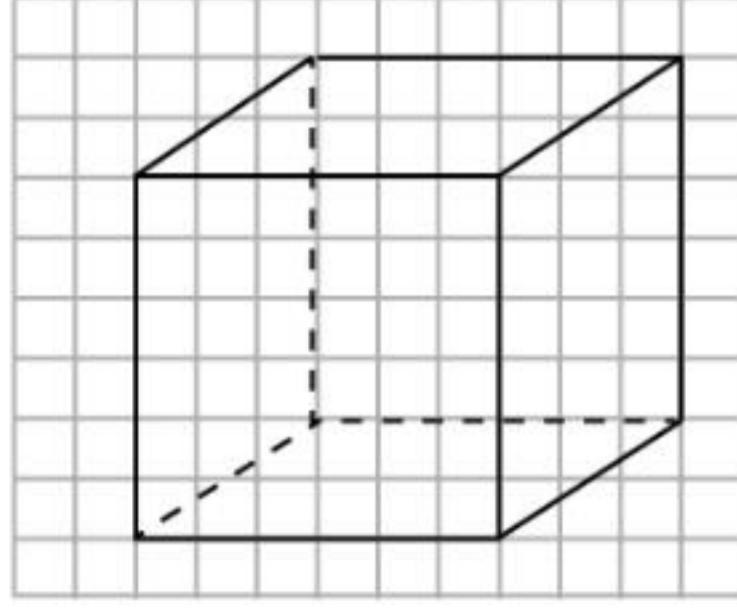
Саволлар

1. Кўпёқ деганимиз нима?
2. Қандай кўпёқ куб деб аталади?
3. Кубнинг диагонали деганимиз нима?
4. Қандай кўпёқ параллелепипед деб аталади?
5. Параллелепипеднинг диагонали деганимиз нима?
6. Қандай кўпёқ призма деб аталади?
7. Қандай призма түғри призма деб аталади?
8. Призманинг баландлиги деганимиз нима?
9. Призманинг диагонали деганимиз нима?
10. Қандай кўпёқ қавариқ кўпёқ деб аталади?
11. Кўпёқнинг ёйилмаси деганимиз нима?
12. Кўпёқ сиртининг юзаси деганимиз нима?
13. Призманинг ён ва тұла сиртларининг юзалари қандай ҳисобланади?

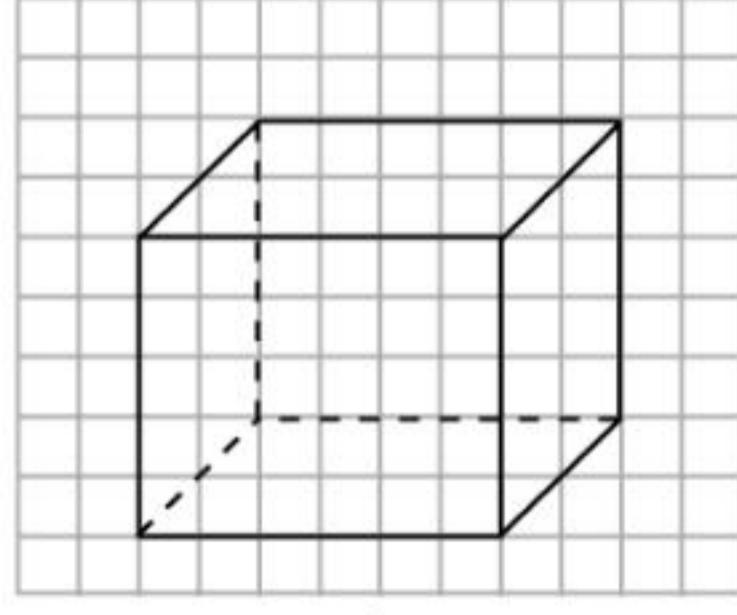
Машқлар

A

- 1.1.** Катақ қофозга 1.8-расмдагига үхашш кубни ва параллелепипедни чизинг.



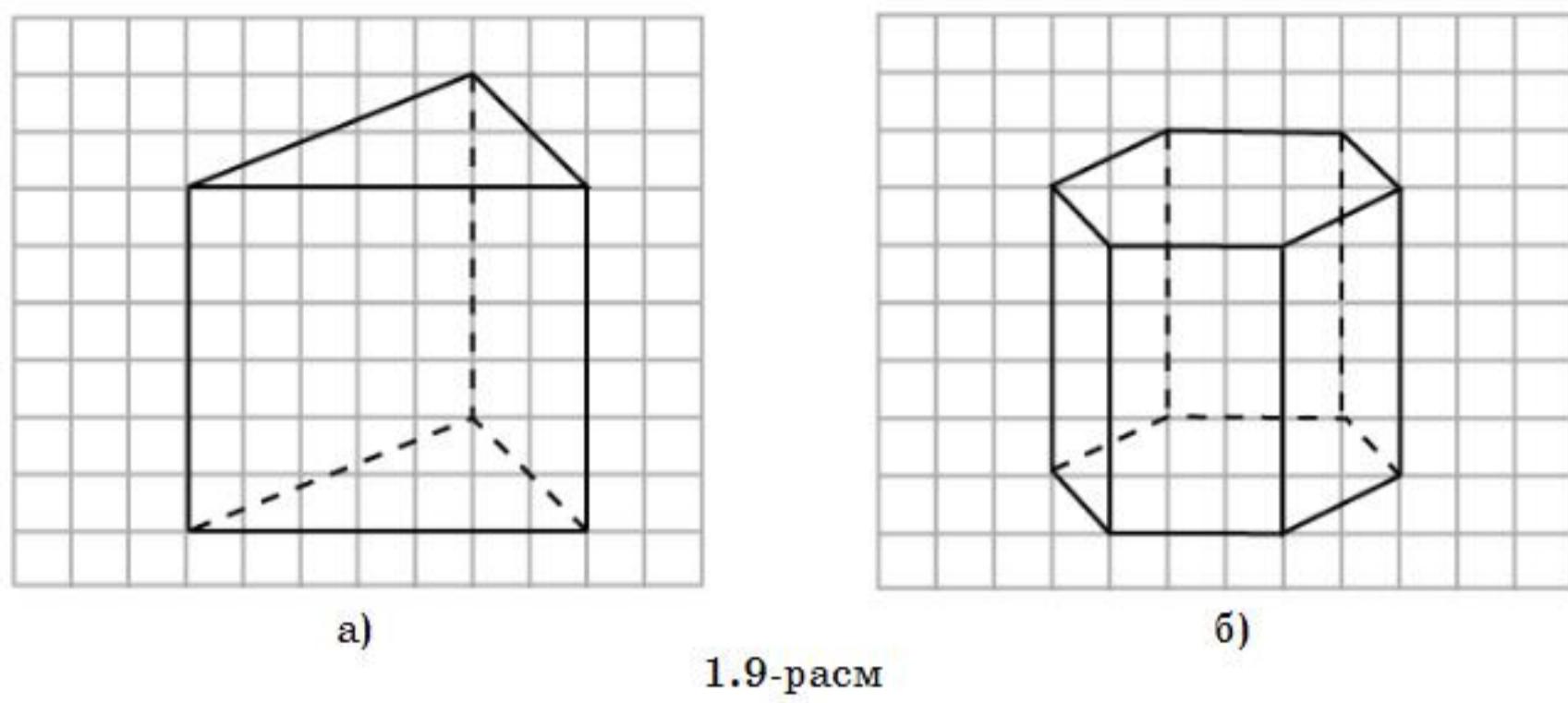
a)



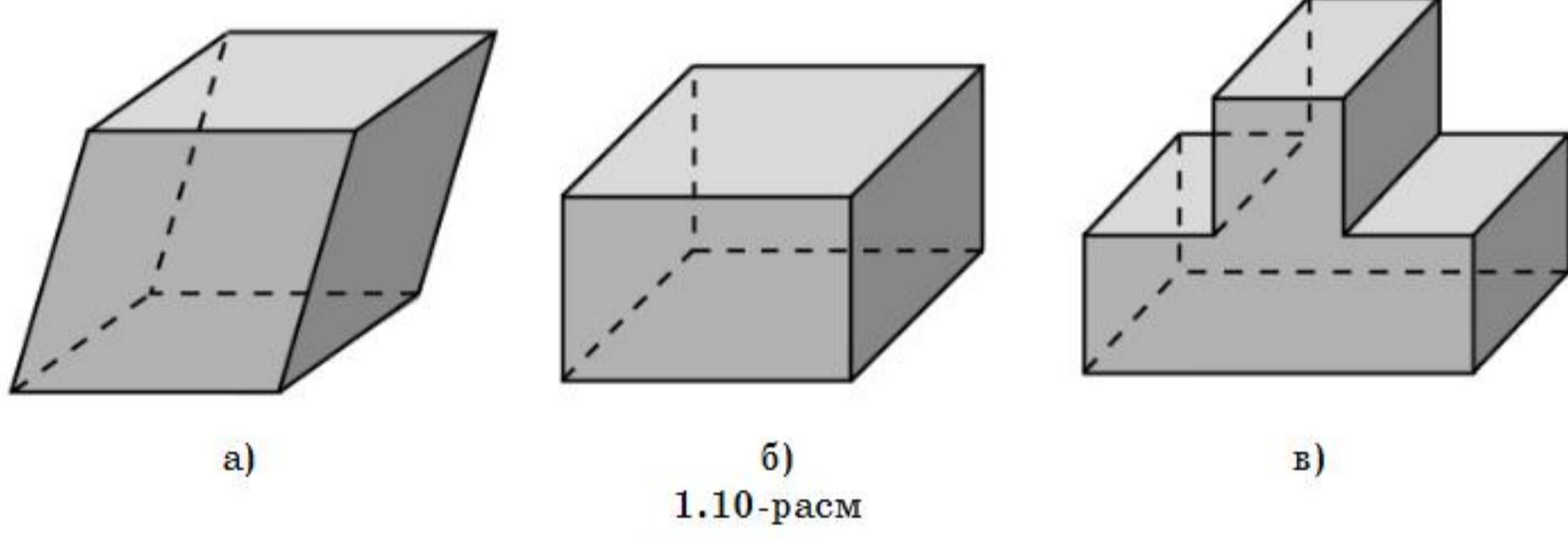
б)

1.8-расм

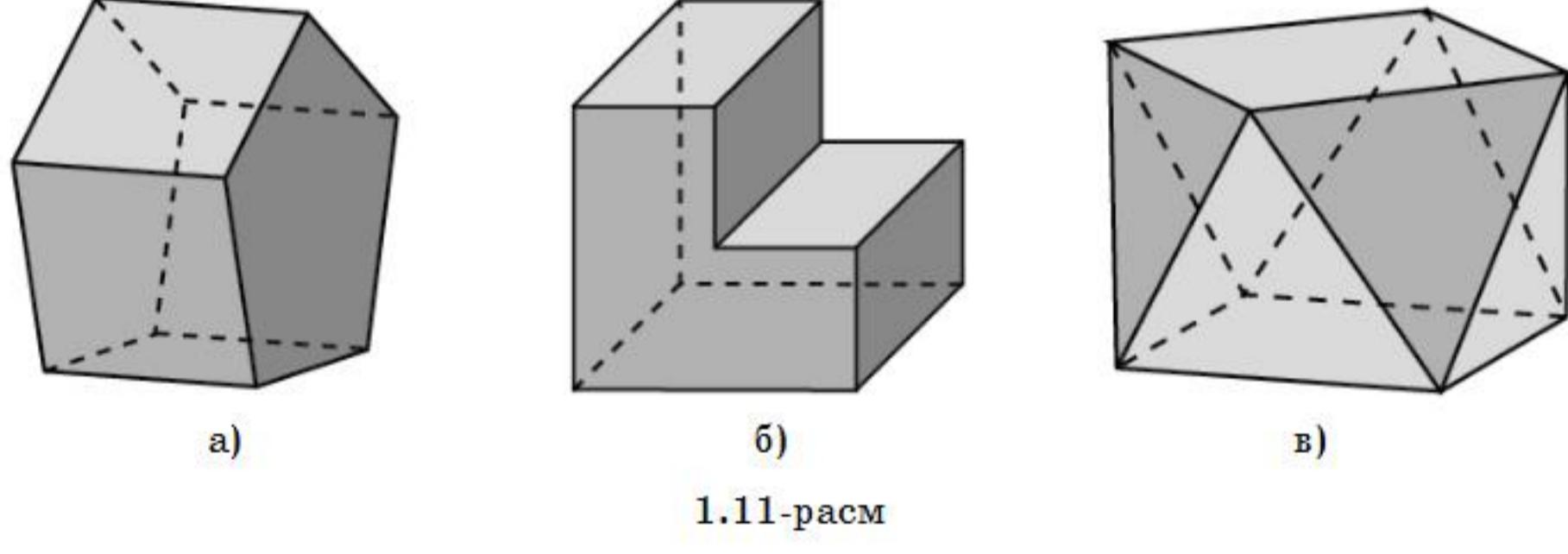
1.2. Катак қоғозга 1.9-расмдагига үхшаш приzmани чизинг.



1.3. 1.10-расмда тасвиirlанган фигуralарнинг қайси бири параллелепипед бўлади?



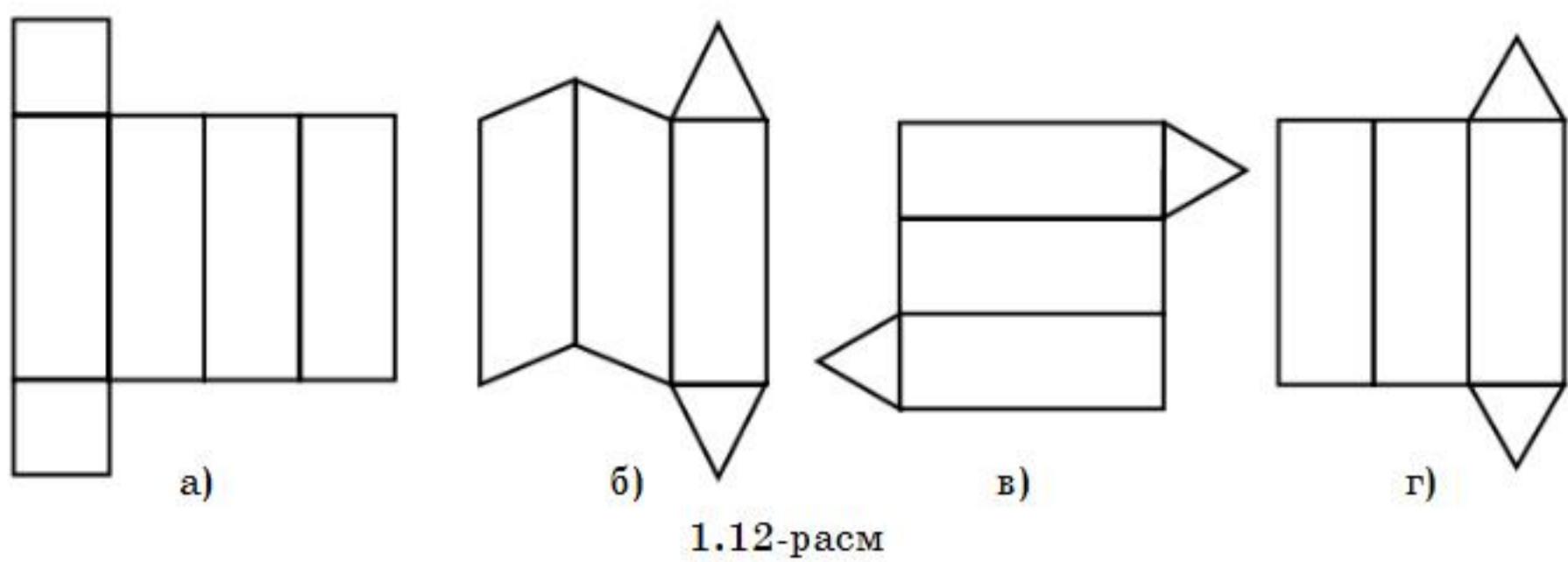
1.4. 1.11-расмда тасвиirlанган фигуralарнинг қайси бири призма бўлади?



1.5. 1.12-расмда тасвиirlанган фигуralарнинг қайси бири приzmанинг ёйилмаси бўлади? Мана шу приzmанинг турини аникланг.

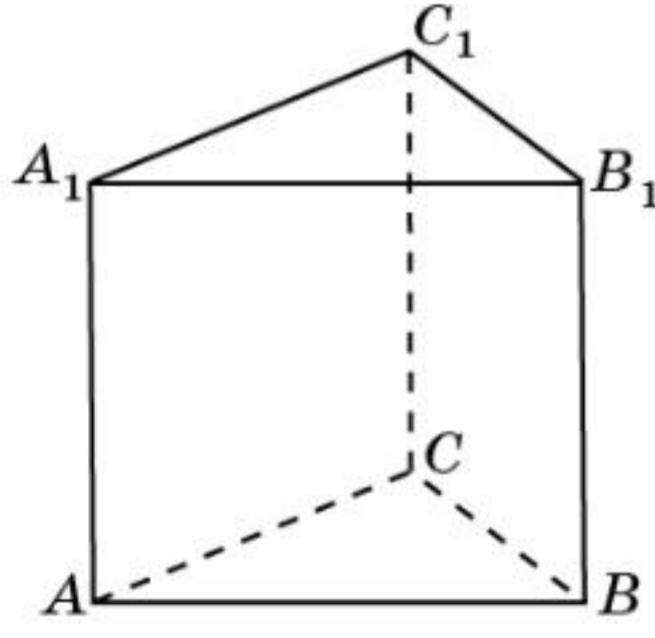
1.6. Қирраси 1 см га teng бўладиган кубнинг диагоналини топинг.

1.7. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи қирралари 2 см, 3 см ва 4 см га teng. Параллелепипеднинг диагоналини топинг.

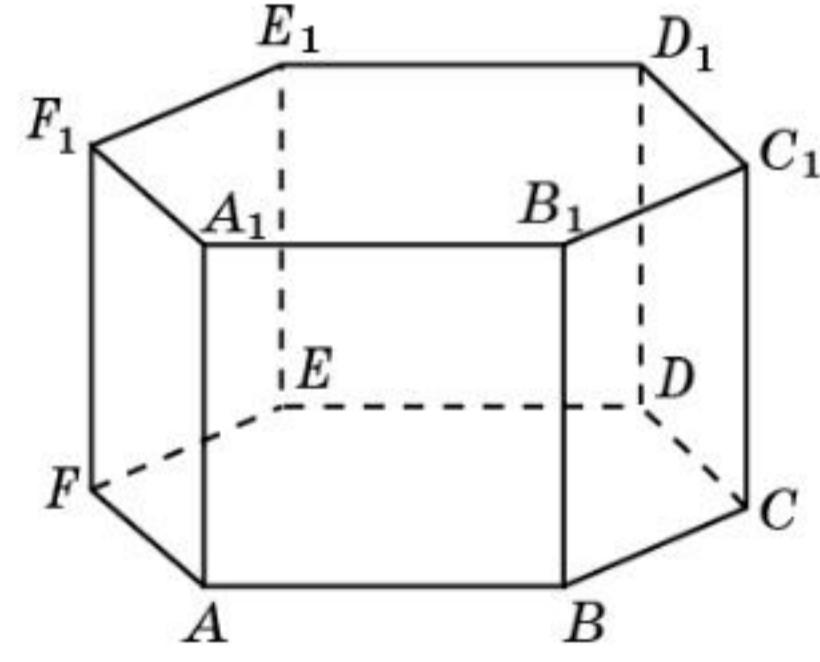


1.12-расм

- 1.8.** Призманинг ён қирраси 2 см га тенг ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясайды. Призманинг баландлыгини топинг.
- 1.9.** Агар кубнинг барча қирраларини 3 марта орттирса, унда унинг ён сиртининг юзи неча марта ортади?
- 1.10.** Агар түғри бурчакли параллелепипеднинг барча қирраларини 2 марта камайтирса, унда унинг ён сиртининг юзи неча марта камаяди?
- 1.11.** Агар призманинг барча қирраларини 2 марта орттирса, унда унинг ён сиртининг юзи неча марта ортади?
- 1.12.** Бир учидан тарқаган қирралари мос равища 5 см, 4 см, 3 см бўладиган түғри бурчакли параллелепипеднинг ён сиртининг юзини топинг.
- 1.13.** Барча қирралари 1 см га тенг бўладиган муентазам учбурчакли призманинг ён сиртининг юзини топинг (1.13-расм).
- 1.14.** Барча қирралари 1 см га тенг бўладиган муентазам олтибурчакли призманинг ён сиртининг юзини топинг (1.14-расм).



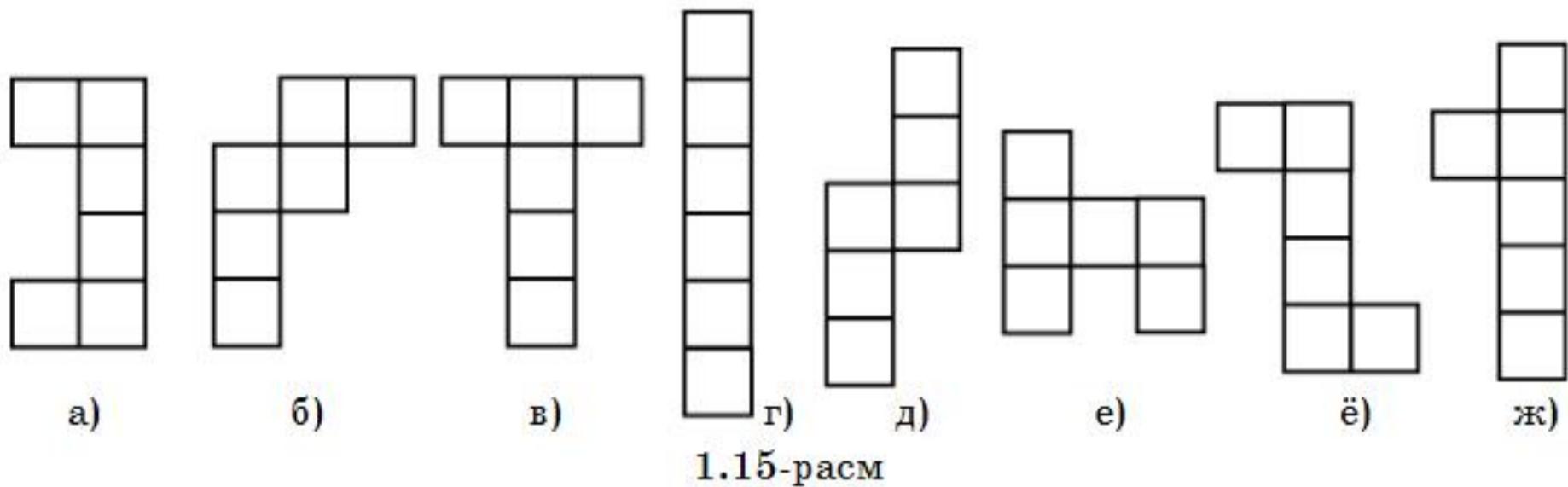
1.13-расм



1.14-расм

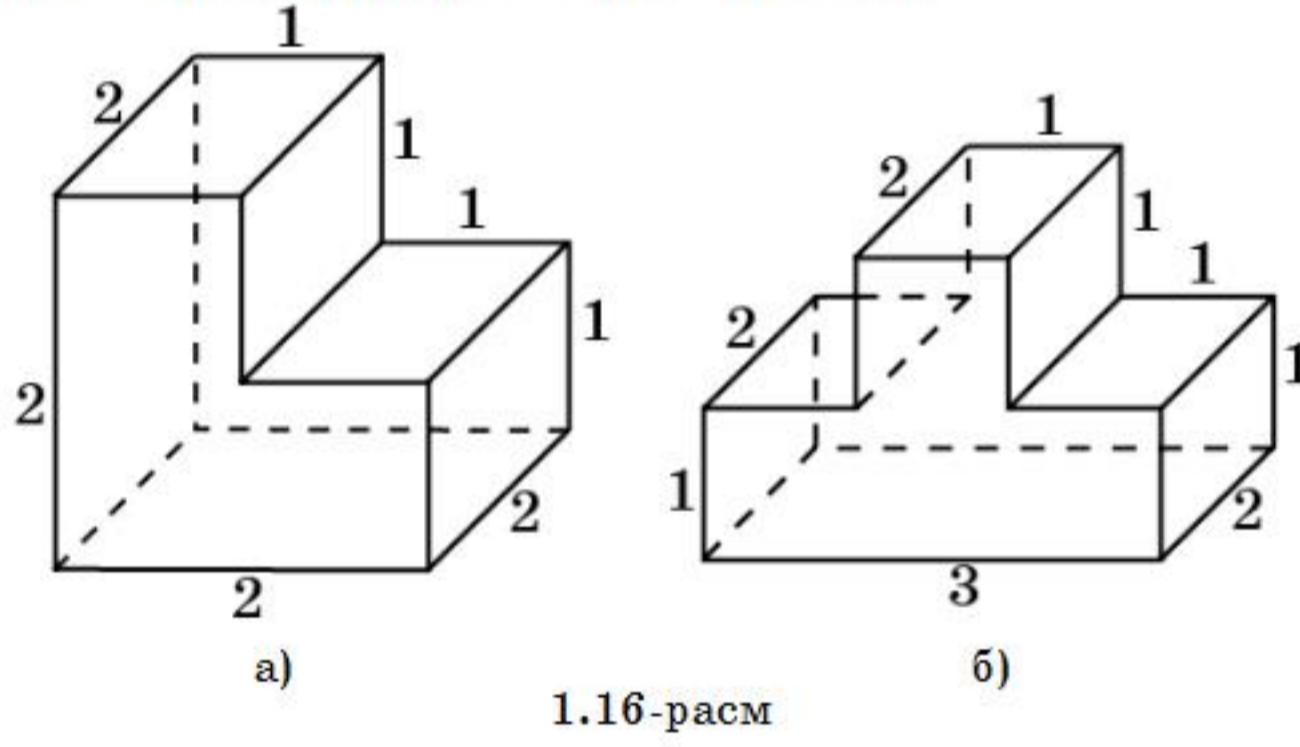
B

- 1.15.** 1.15-расмда тасвирланган фигуналарнинг қайсиси кубнинг ёйилмаси бўлади?
- 1.16.** Кубнинг диагонали 1 см га тенг. Кубнинг қиррасини топинг.
- 1.17.** Муентазам олтибурчакли призманинг ёйилмасини чизинг.



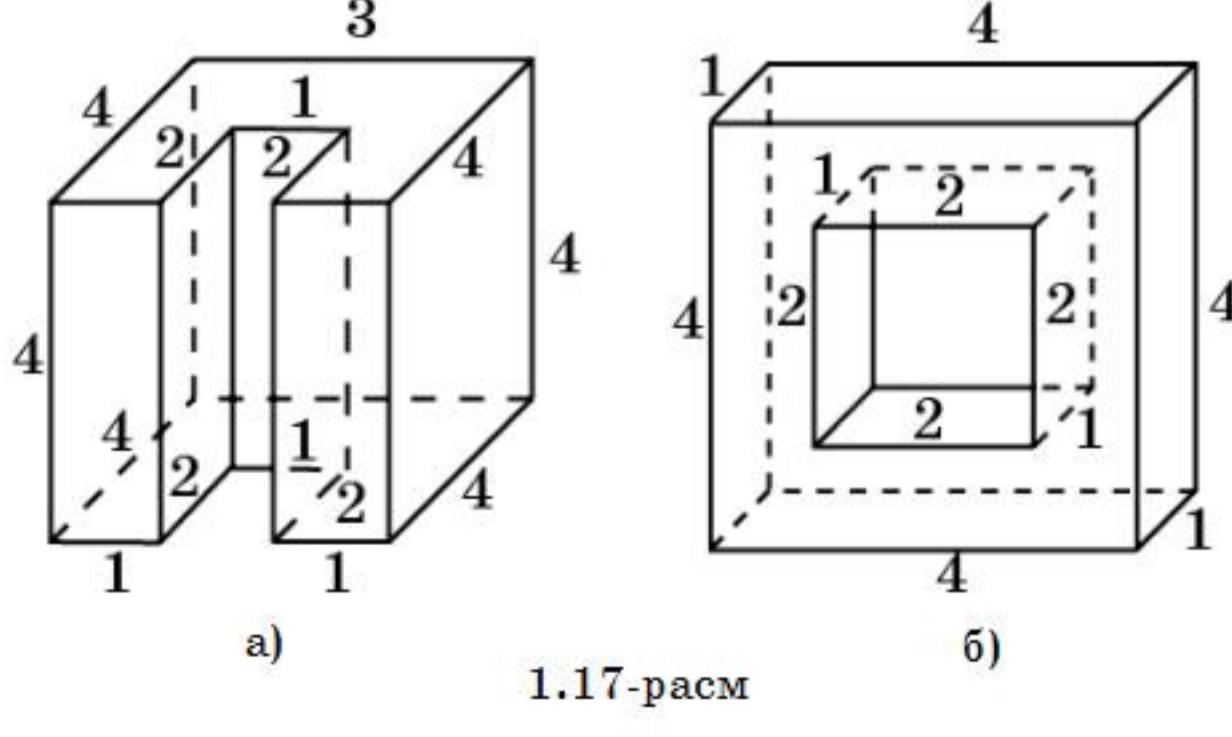
1.15-расм

- 1.18.** Мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 см га тенг. Призманинг диагоналини топинг.
- 1.19.** Мунтазам олтибурчакли призманинг асосининг томони 1 см га, унинг катта диагонали эса 3 см га тенг. Призманинг баландлыгини топинг.
- 1.20.** Түғри бурчакли параллелепипеддинг бир учидан тарқаган икки қирраси 2 см га тенг. Параллелепипед ён сиртининг юзи 40 см^2 га тенг бўлиши учун ушбу учидан тарқаган учинчи қирраси қандай бўлиши керак?
- 1.21.** 1.16-расмдаги түғри бурчакли параллелепипедлардан тузилган фигура ён сиртларининг юзини топинг.



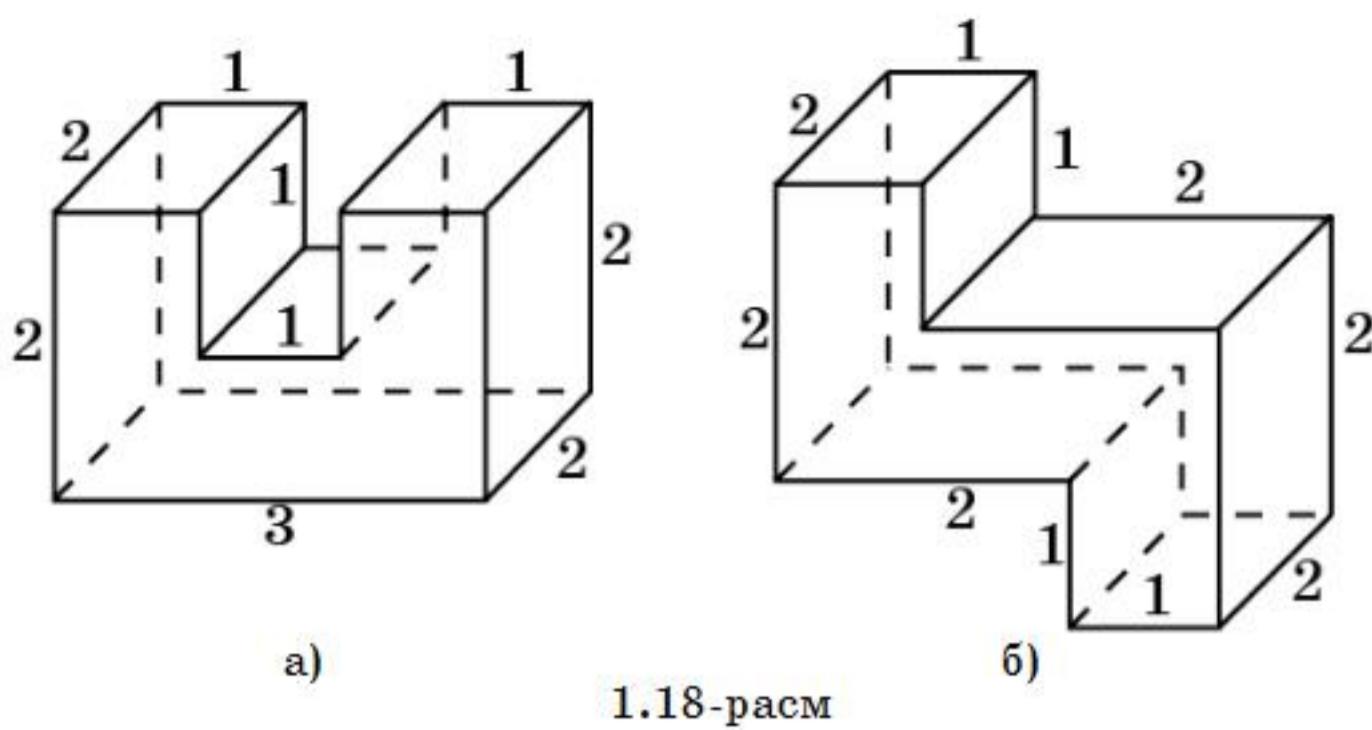
1.16-расм

- 1.22.** 1.17-расмдаги түғри бурчакли параллелепипедлардан тузилган фигура ён сиртларининг юзини топинг.

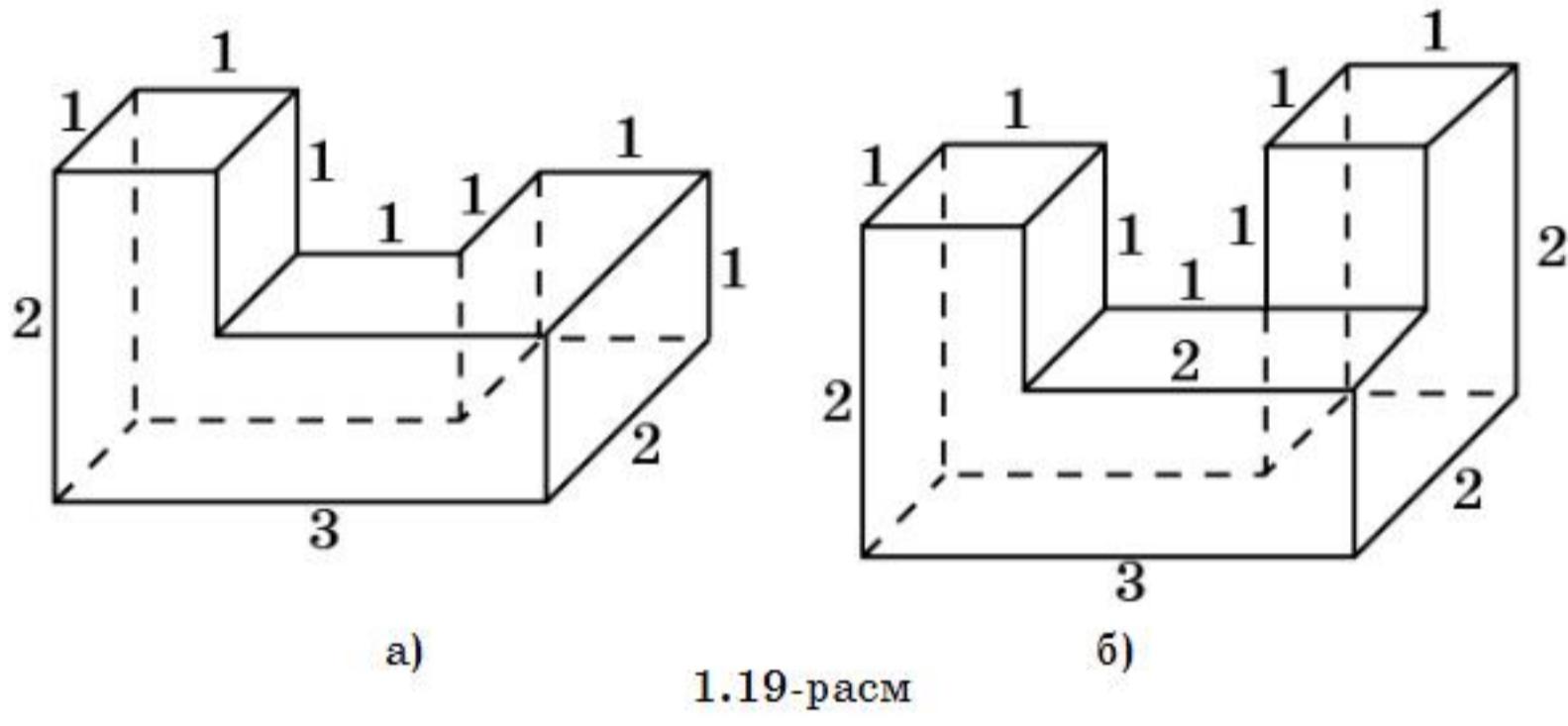


1.17-расм

1.23. 1.18-расмдаги түғри бурчакли параллелепипедлардан тузилган фигура ён сиртларининг юзини топинг.

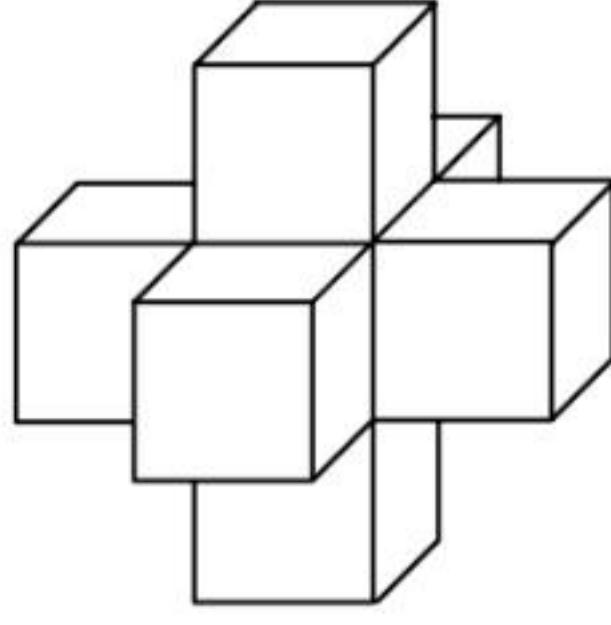


1.24. 1.19-расмдаги түғри бурчакли параллелепипедлардан тузилган фигура ён сиртларининг юзини топинг.

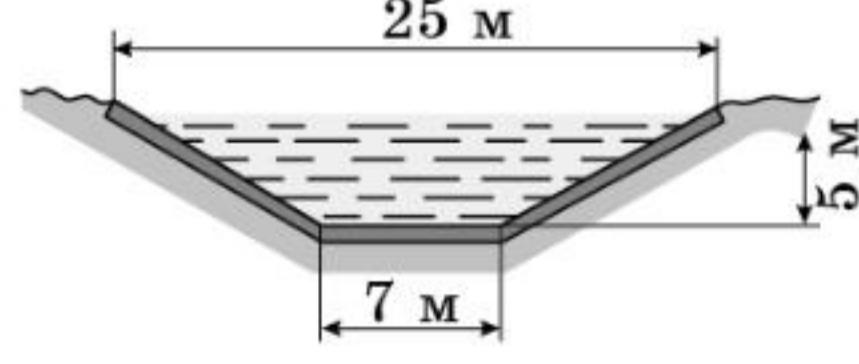


1.25. 1.20-расмдаги фазовий жисмни ташкил қылувчи кубларнинг қирраларини 1 см га тенг деб олиб, жисм сиртининг юзини топинг.

1.26. 1.21-расмда сув йўли каналининг кўндаланг кесими тасвиранган. Каналнинг пастки ва ён ёқлари бетонланган. Каналнинг ҳар бир километрида бетон билан ёпилган юзани топинг.



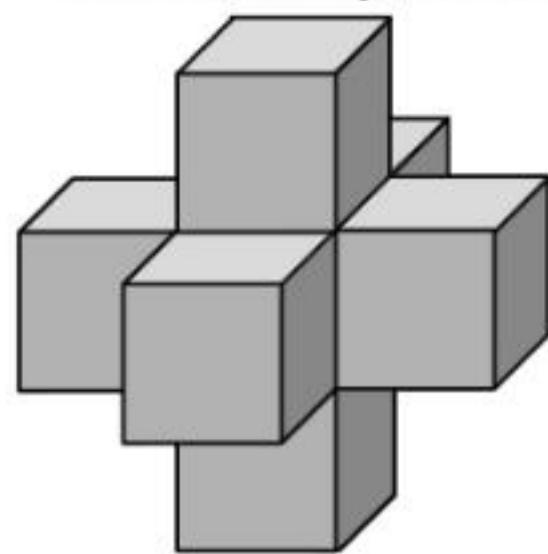
1.20-расм



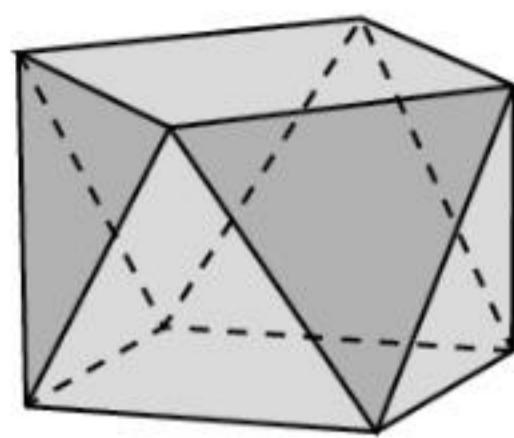
1.21-расм

С

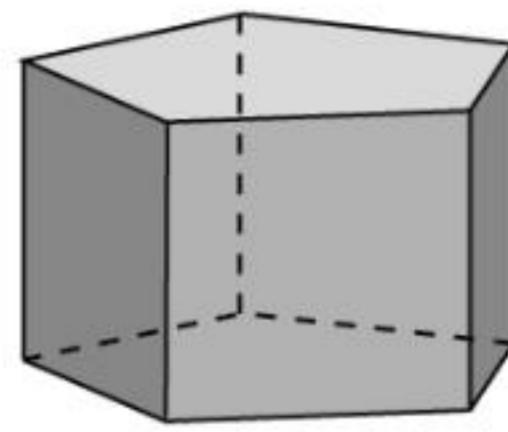
1.27. 1.22-расмда тасвирланған фигуralардан қайси бири қавариқ ва қавариқ бўлмаган кўпёқлар бўлади?



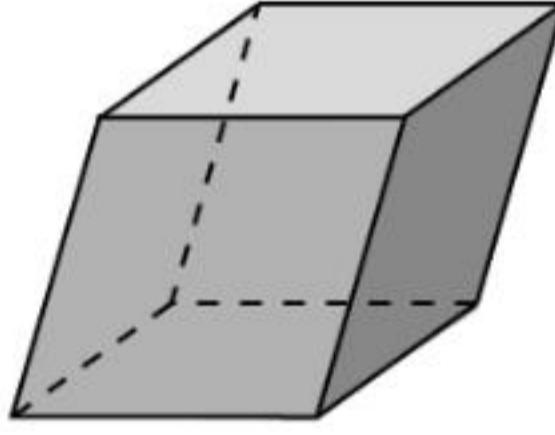
а)



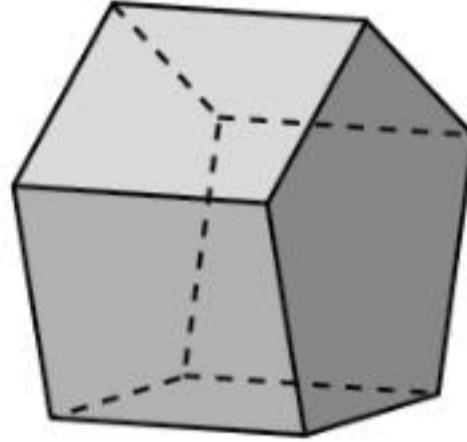
б)



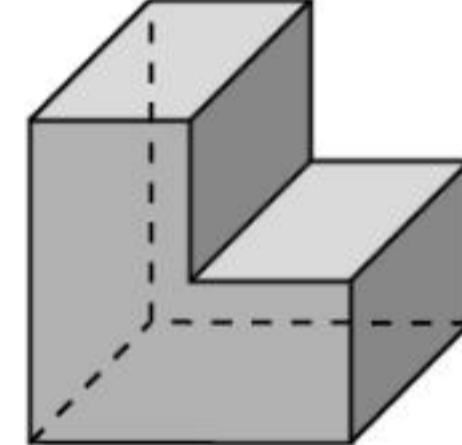
в)



г)



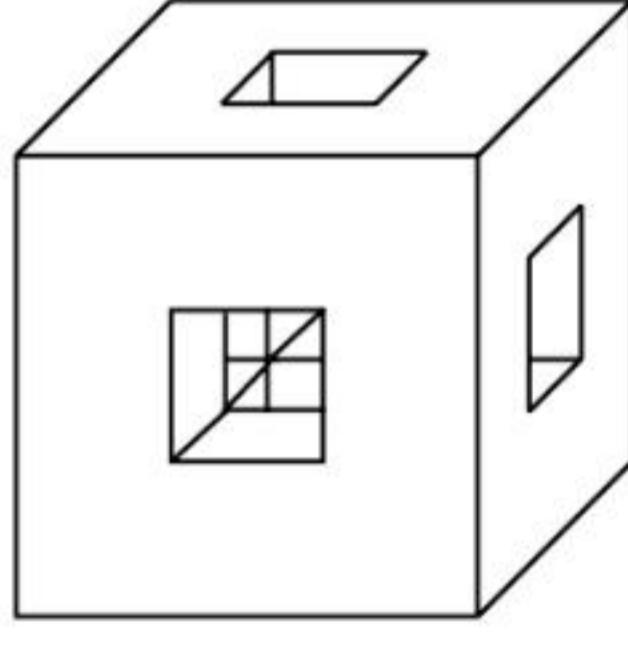
д)



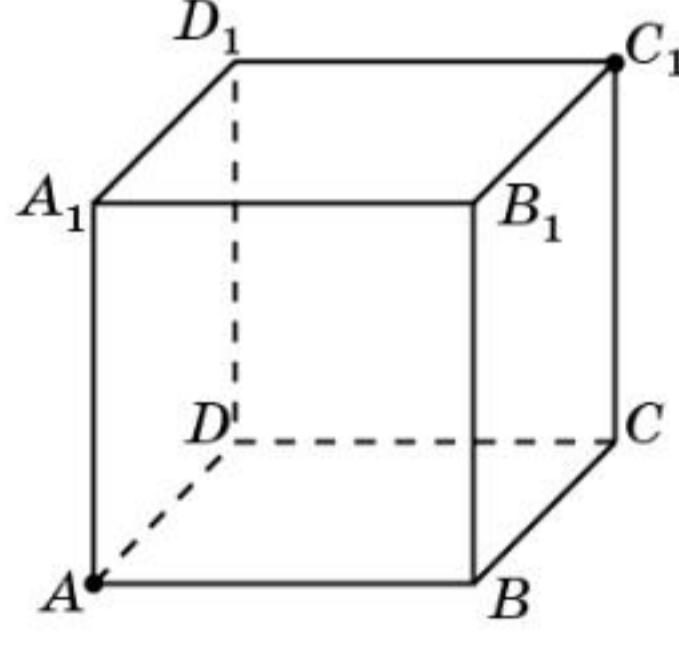
е)

1.22-расм

1.28. Қирраси 6 см га teng бўладиган кубнинг ҳар икки ёғидан квадрат шаклидаги тешиклар ясалди (1.23-расм). Квадратнинг томони 2 см га teng. Кубнинг қолган қисмлари сиртилининг юзини топинг.



1.23-расм



1.24-расм

1.29. Бирлик кубнинг бир учидан унга қарама-қарши ётган учигача бўлган унинг сиртидаги энг қисқа масофани топинг (1.24-расм).

1.30. Қавариқ бўлмаган кўпбурчак қавариқ кўпёқнинг бир ёғи бўла оладими?

1.31. Қавариқ фигуralар биритирилса қавариқ фигура пайдо бўладими?

1.32. Барча ёқлари қавариқ кўпбурчак бўладиган қавариқ бўлмаган кўпёқка мисол келтиринг.

Линги мавзууни ўзлаштиришга тайёрланинг

1.33. “Пирамида” тушунчасини аниқлаб күринг. Унинг сирти қандай күпбурчаклардан ташкил топган?

2-§. Пирамида ва кесик пирамида. Пирамиданинг, кесик пирамиданинг ёйилмаси, ён сирти ва тұла сиртининг юzlари

Пирамида деб шундай күпёкқа айтилады, унинг бир ёғи ихтиёрий күпбурчак, қолган n та ёғи эса учлари умумий бўлган учбурачаклардан иборат бўлади.

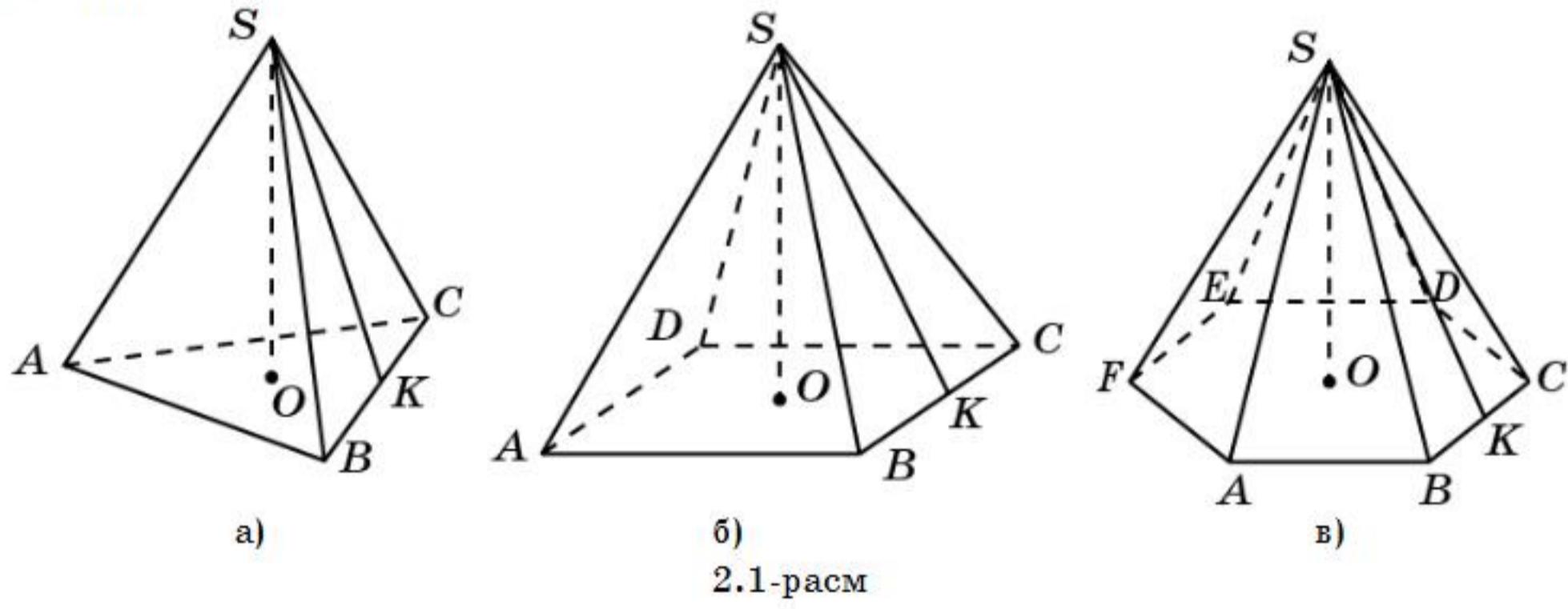
Кўпбурчак пирамиданинг *асоси*, учбурачклар эса пирамиданинг *ён ёқлари* деб аталади.

Ён ёқларининг умумий учи пирамиданинг *учи*, учидан тарқайдиган қирралари эса пирамиданинг *ён қирралари* деб аталади. Пирамида ён ёғининг учидан ўтказилган баландлиги пирамиданинг *апофемаси* деб аталади.

Пирамидалар асосидаги кўпбурчакларга (учбурачклар, тўртбурчаклар, бешбурчаклар ва ҳ.к.) боғлиқ ҳолда мос равишда учбурачкли, тўртбурчакли, бешбурчакли ва ҳ.к. бўлиб бўлинади.

Агар пирамиданинг асоси n -бурчакли бўлса, унда у *n -бурчакли пирамида* деб аталади.

2.1-расмда учбурачкли, тўртбурчакли ва олтибурчакли пирамидалар тасвирланган.



2.1-расм

Пирамида учлари билан белгиланади, масалан: $SABC$ учбурачкли пирамида (2.1, а-расм), $SABCD$ тўртбурчакли пирамида (2.1, б-расм), $SABCDEF$ олтибурчакли пирамида (2.1, в-расм). Пирамидани белгилаганда унинг умумий учи биринчи ёзилади.

Асоси муентазам кўпбурчак бўлган ва барча ён қирралари ўзаро тенг бўлган пирамида *муентазам пирамида* деп аталади.

Муентазам пирамиданинг учидан туширилган ён ёғининг баландлиги пирамиданинг *апофемаси* деб аталади.



Қандай үйлайсиз, тетраэдр учбұрчакли пирамида бўла оладими?

Пирамиданинг учидан унинг асос текислигига туширилган перпендикуляр *пирамиданинг баландлиги* деб аталади. 2.1-расмда пирамиданинг SO баландлиги ва SK апофемаси тасвирланган.

2.2-расмда мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ёйилмаси тасвирланган.

Пирамиданинг ён сирти деб шу пирамиданинг барча ён ёқларидан ташкил топган сиртни айтади. Шу сабабли *пирамиданинг ён сиртининг юзи* деб, унинг ҳамма ён ёқлари юзларининг йиғиндисига айтилади.

Теорема. *Мунтазам пирамида ён сиртининг юзи унинг асоси периметрининг ярми билан апофемасининг кўпайтмасига teng:*

$$S_{\text{ён}} = \frac{1}{2} Pl,$$

Бу ерда l — пирамиданинг апофемаси, P — асосининг периметри.



Ушбу теоремани мустақил исботланг.

Пирамиданинг тўла сиртининг юзи унинг ён сирти билан асосининг юзларининг йиғиндисига teng бўлади, яъни қуйидаги формула билан ҳисобланади:

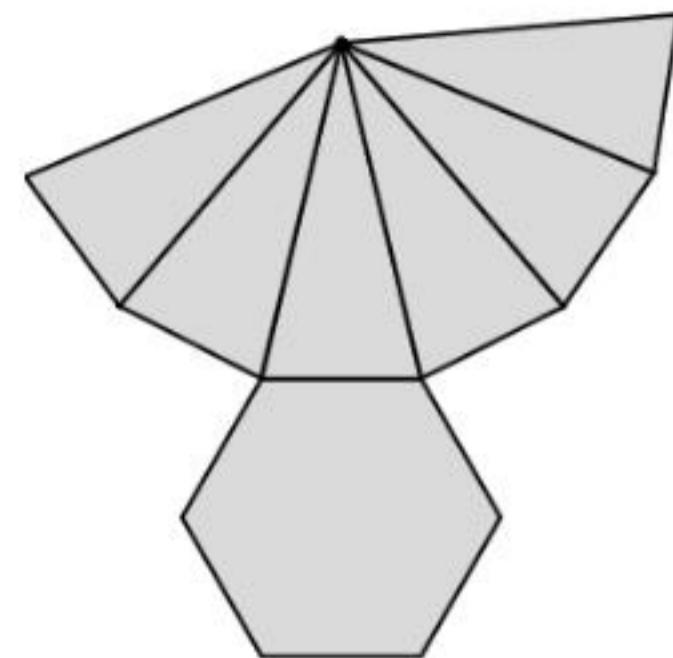
$$S_{\text{пирамида}} = S_{\text{ён.с.}} + S_{\text{асос.}}$$

Пирамиданинг асосига параллел ва ён қирраларини кесиб ўтвчи текисликни кўриб чиқамиз. Шу текислик билан асос текислигининг орасидаги чегараланган пирамиданинг қисми *кесик пирамида* деб аталади (2.3-расм).

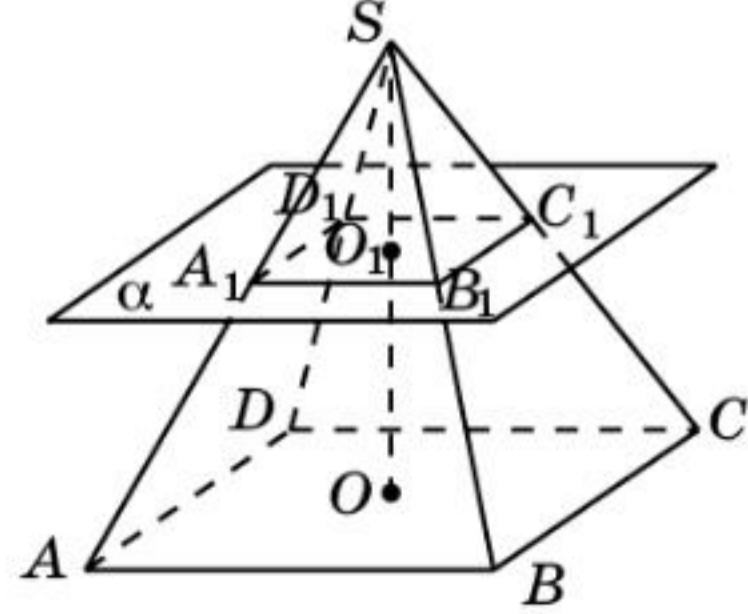
Берилган пирамиданинг асоси ва кесимда ҳосил бўлган кўпбурчак *кесик пирамиданинг асослари* дейилади.

Кесик пирамида унинг асосларининг учлари билан белгиланади, масалан, 2.3-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўртбурчакли пирамида тасвирланган.

Кесик пирамиданинг асосларининг томонлари жуфт-жуфтдан параллел, бинобарин кесик пирамиданинг ён ёқлари трапециялардан иборат. Ён ёқларидан ташкил топган сирт *кесик пирамиданинг ён сирти* деб аталади.



2.2-расм

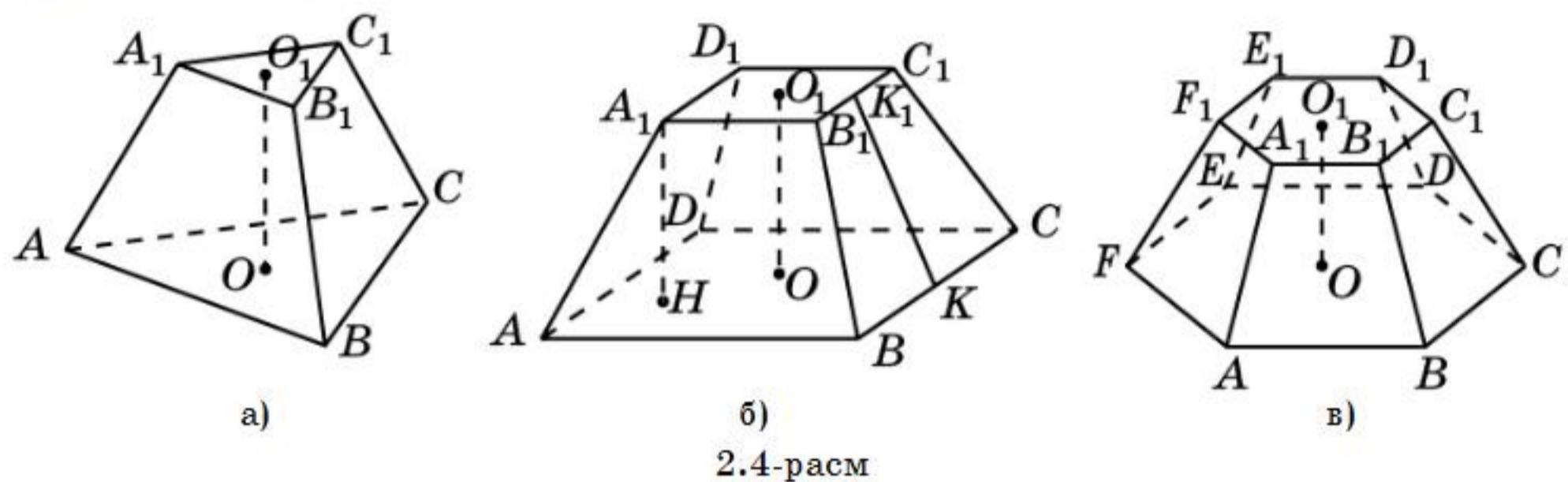


2.3-расм

Кесик пирамида ён ёқларининг умумий қирралари унинг ён қирралари деб аталади.

Кесик пирамида асосида жойлашган күпбурчакларга (учбурчаклар, түртбурчаклар, бешбурчаклар ва ҳ.к.) боғлиқ ҳолда мос равишида учбурчакли, түртбурчакли, бешбурчакли ва ҳ.к. бўлиб бўлинади.

2.4-расмда учбурчакли кесик пирамида (2.4, а-расм), түртбурчакли кесик пирамида (2.4, б-расм) ва олтибурчакли кесик пирамида (2.4, в-расм) тасвирланган.



2.4-расм

Мунтазам пирамидадан олинган кесик пирамида *мунтазам кесик пирамида* деб аталади.

Ён ёғининг баландлиги мунтазам кесик пирамиданинг *апофемаси* деб аталади.

Бир асосининг исталган нуқтасидан иккинчи асос текислигига ўтказилган перпендикуляр кесик пирамиданинг баландлиги деб атала-ди. 2.4, б-расмда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кесик пирамидасининг A_1H баландлиги ва KK_1 апофемаси тасвирланган.

Кесик пирамиданинг ёйилмаси икки ўхшаш күпбурчаклар (кесик пирамиданинг асослари) билан трапециялардан (кесик пирамиданинг ён ёқлари) ташкил топган.

Кесик пирамиданинг ён сирти деб шу кесик пирамиданинг барча ён ёқларидан иборат бўлган сиртни айтади. Бинобарин *кесик пирамида-нинг ён сиртининг юзи* унинг барча ён ёқлари юзларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Теорема. *Мунтазам кесик пирамиданинг ён сиртининг юзи унинг асослари периметрлари йиғиндисининг ярмини апофемасига кўпайтирилганига teng бўлади:*

$$S_{\text{к.пиr.ён.с}} = \frac{1}{2} (P + P_1)l,$$

Бу ерда P ва P_1 — кесик пирамиданинг асосларининг периметрлари, l — апофемаси.



Бу теоремани мустақил исботланг.

Кесик пирамиданинг тұла сиртининг юзи унинг ён сирти билан асослари юзларининг йиғиндисига тенг бўлади, яъни қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S_{\text{кесик пирамида}} = S_{\text{ён.сир.}} + S_{\text{асос}_1} + S_{\text{асос}_2}.$$

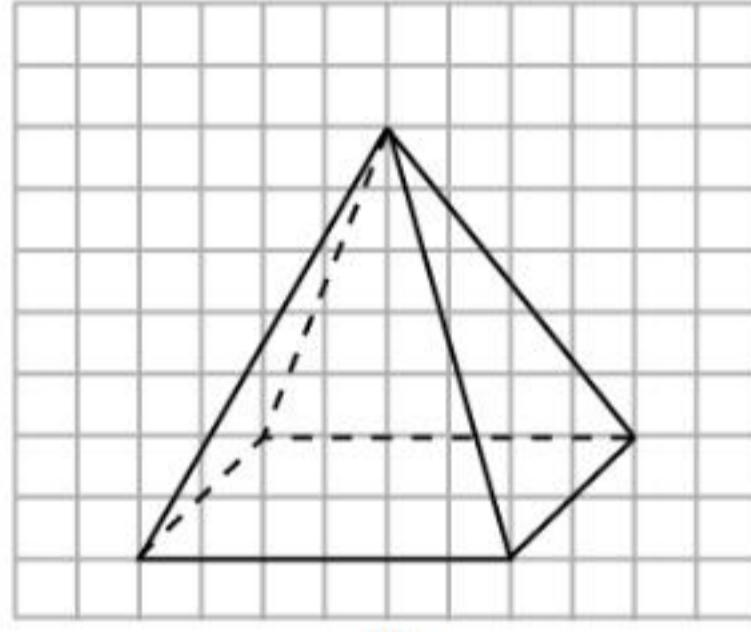
Саволлар

1. Қандай күпёқ пирамида деб аталади?
2. Қандай пирамида түғри пирамида деб аталади?
3. Пирамиданинг баландлиги деганимиз нима?
4. Қандай күпёқ кесик пирамида деб аталади?
5. Қандай кесик пирамида түғри деб аталади?
6. Кесик пирамиданинг баландлиги деганимиз нима?
7. Пирамида сиртининг юзаси қандай ҳисобланади?
8. Кесик пирамиданинг сиртининг юзаси қандай ҳисобланади?

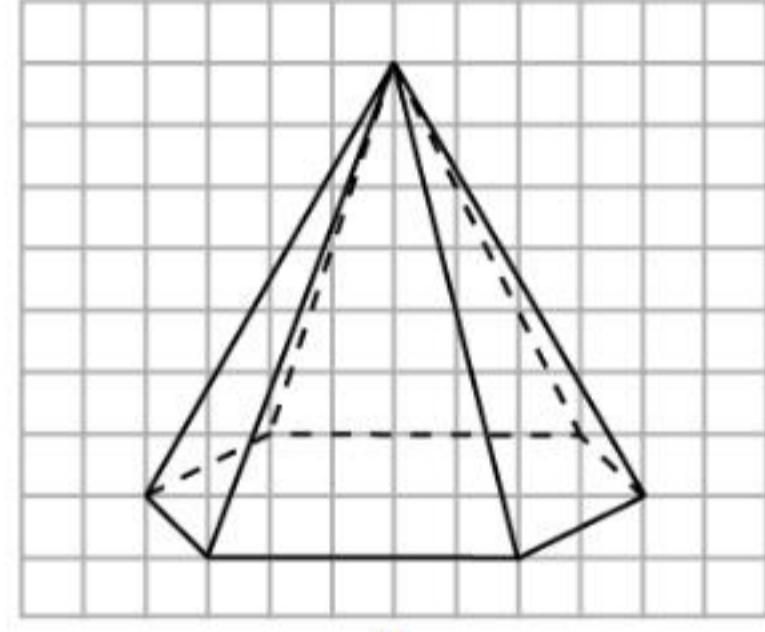
Машқлар

A

- 2.1.** Катак қоғозга 2.5-расмдагига үхшаш пирамидани чизинг ва унинг баландлигини ясанг.



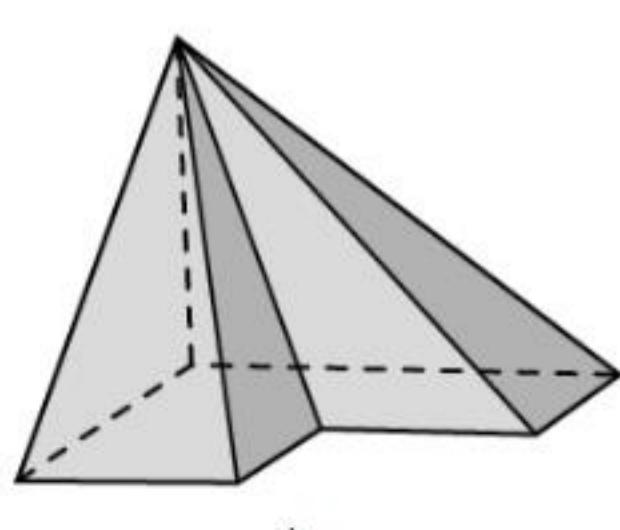
a)



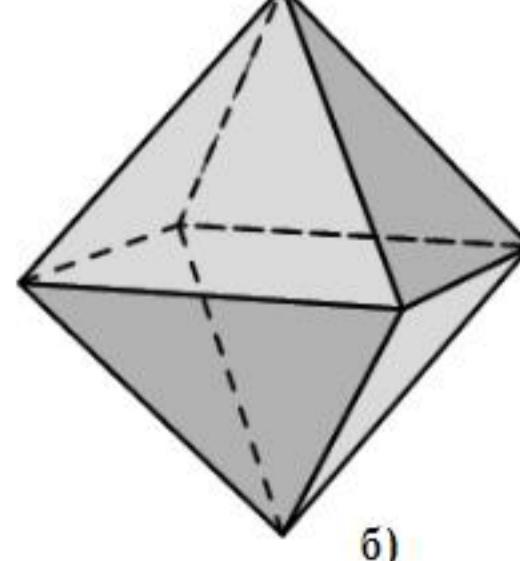
b)

2.5-расм

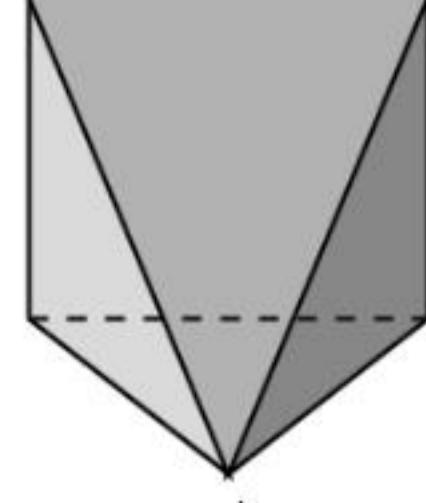
- 2.2.** 2.6-расмда тасвирланган фигуруларнинг қайсиси пирамида бўлади?



a)



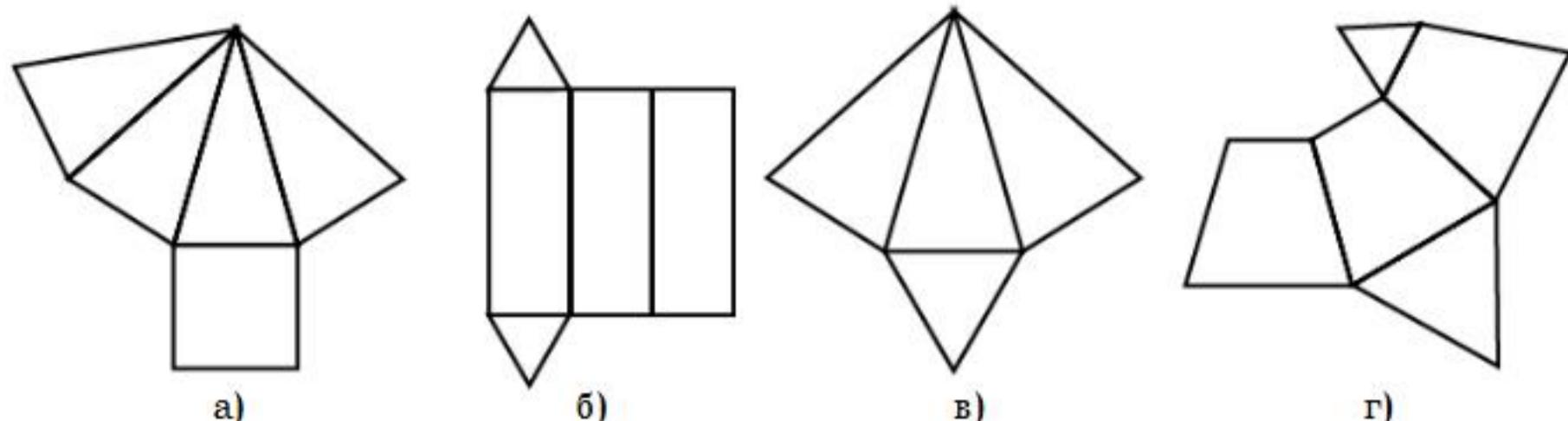
b)



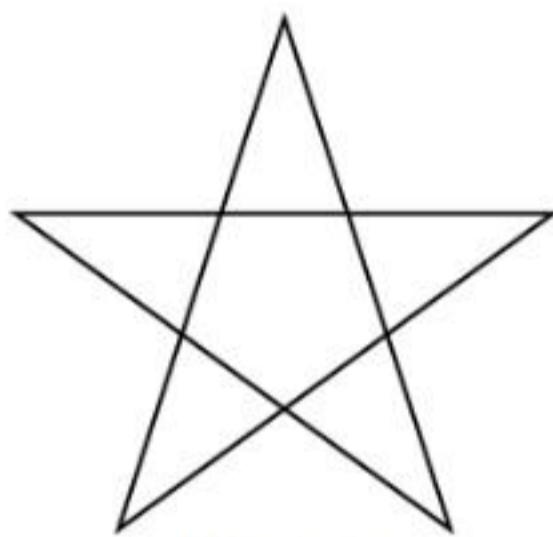
c)

2.6-расм

2.3. 2.7-расмда тасвиirlанган фигуralарнинг қайсиси пирамиданинг ёйилмалари бўлади? Уларнинг турларини аниqlанг.



2.7-расм



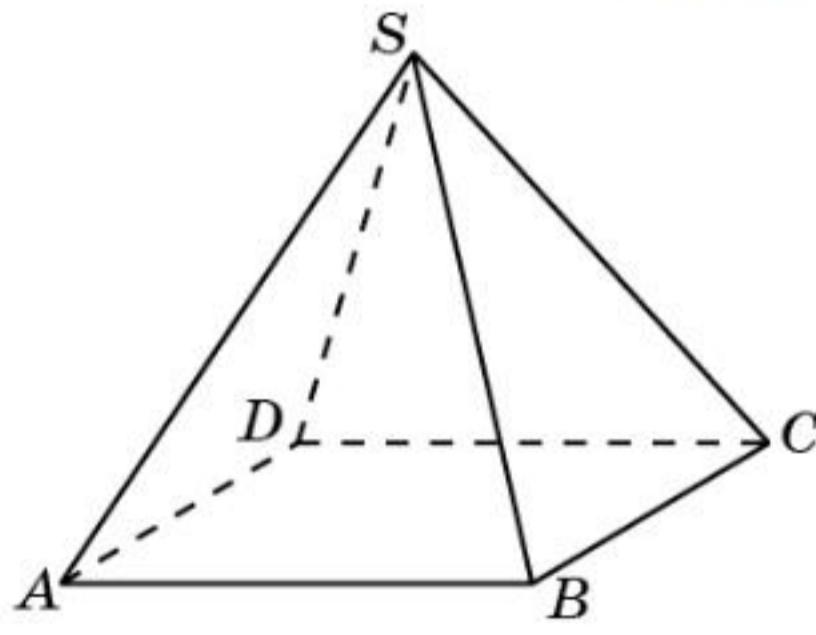
2.8-расм

2.4. 2.8-расмда тасвиirlанган фигура қандай кўпёқнинг ёйилмаси бўлади?

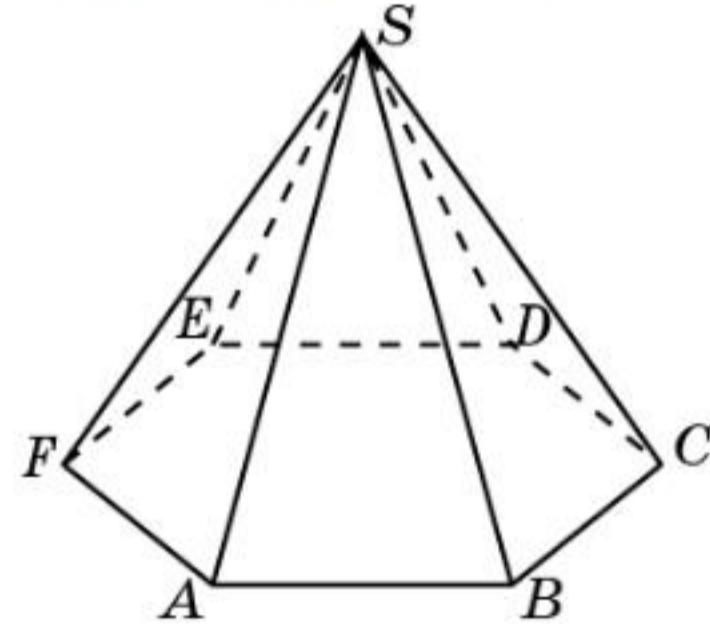
2.5. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ёйилмасини ясанг.

2.6. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 см га teng. Пирамиданинг баландлигини топинг.

2.7. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 см га teng. Пирамиданинг тўла сиртининг юзини топинг (2.9-расм).



2.9-расм



2.10-расм

2.8. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томони 1 см га, ён қирралари эса 2 см га teng. Пирамиданинг тўла сиртининг юзини топинг (2.10-расм).

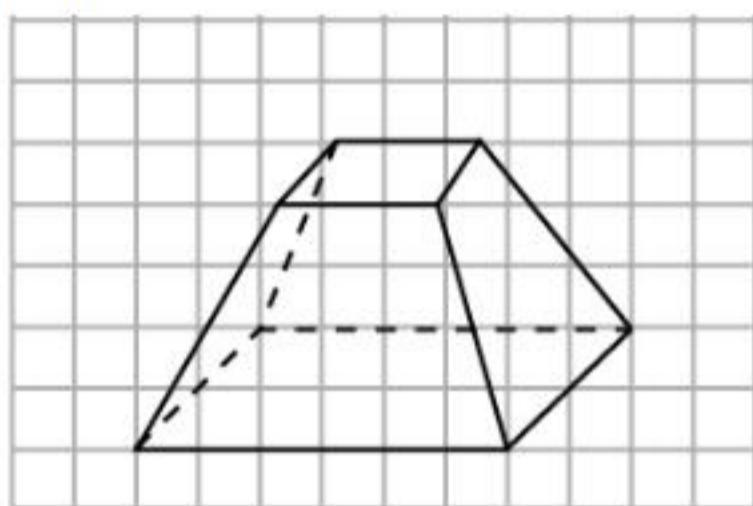
B

2.9. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томони 1 см га, ён қирралари эса 2 см га teng. Пирамиданинг баландлигини топинг.

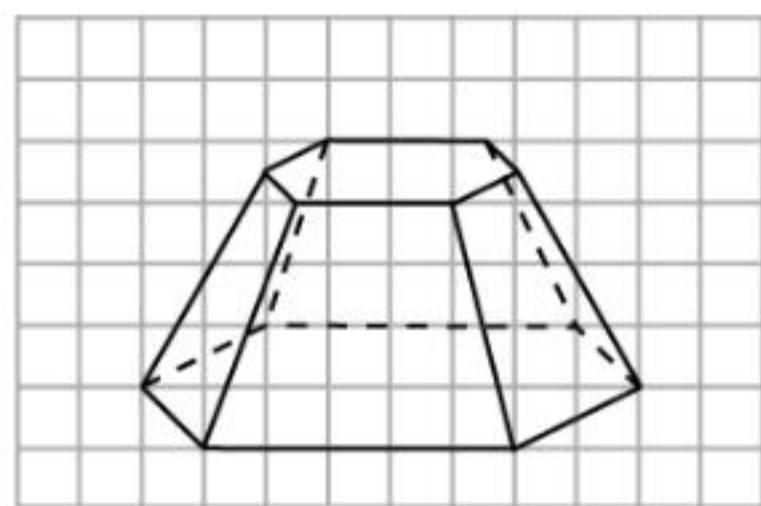
2.10. Агар пирамиданинг барча қирраларини 2 марта орттиурса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?

2.11. Агар пирамиданинг барча қирраларини 3 марта камайтиурса, унда унинг сиртининг юзи неча марта камаяди?

2.12. Катак қоғозга 2.11-расмдагига үхашш кесик пирамидани тасвирланг.



a)



б)

2.11-расм

2.13. Мунтазам түртбурчакли кесик пирамиданинг ёйилмасини тасвирланг.

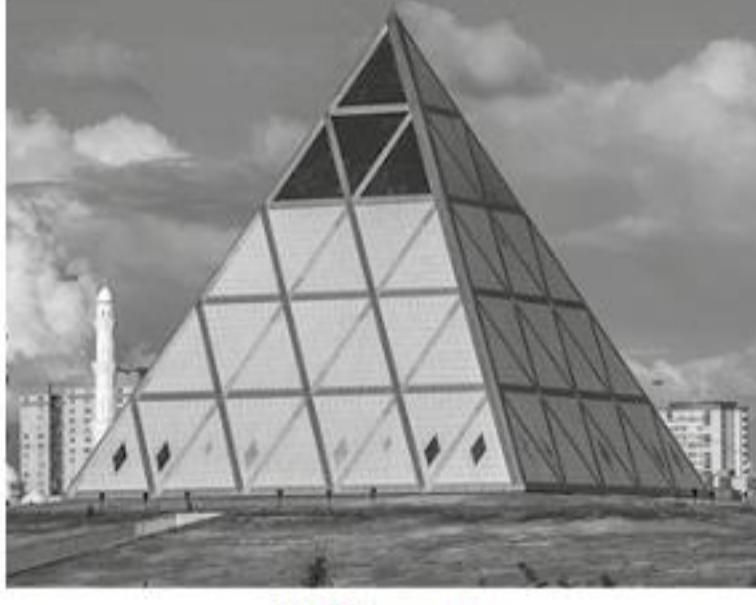
С

2.14. Мунтазам олтибурчакли кесик пирамиданинг ёйилмасини тасвирланг.

2.15. Мунтазам түртбурчакли кесик пирамиданинг асосларининг томонлари 4 см ва 2 см га, ён қирралари эса 3 см га teng. Пирамиданинг баландлигини топинг.

2.16. Мунтазам олтибурчакли кесик пирамиданинг асосларининг томонлари 2 см ва 1 см га, баландлиги эса 3 см га teng. Пирамиданинг ён қиррасини топинг.

2.17. “Нур-Султан” шаҳридаги Тинчлик ва келишув саройи мунтазам түртбурчакли пирамида шаклига эга (2.12-расм). Унинг баландлиги билан асосининг томони 62 м га teng. Пирамиданинг ён сиртининг юзини топинг.



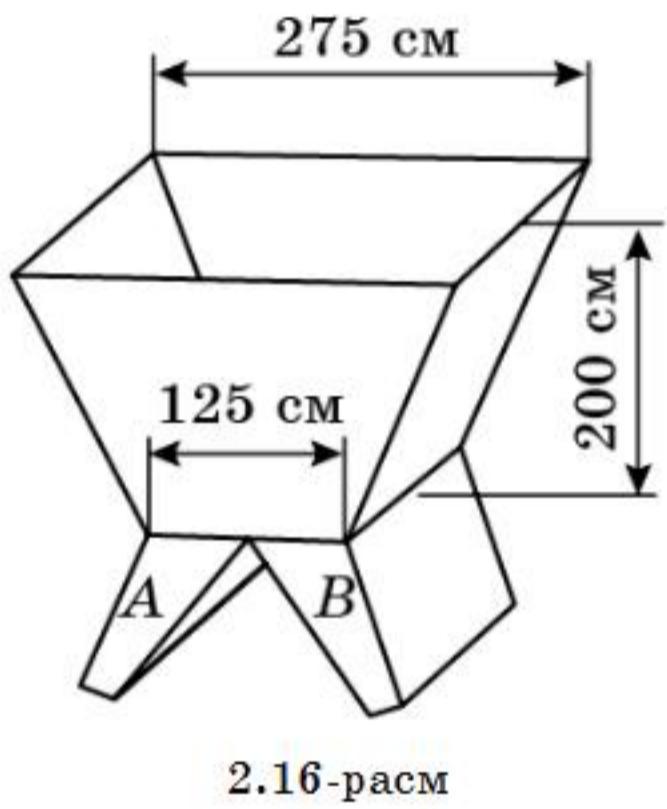
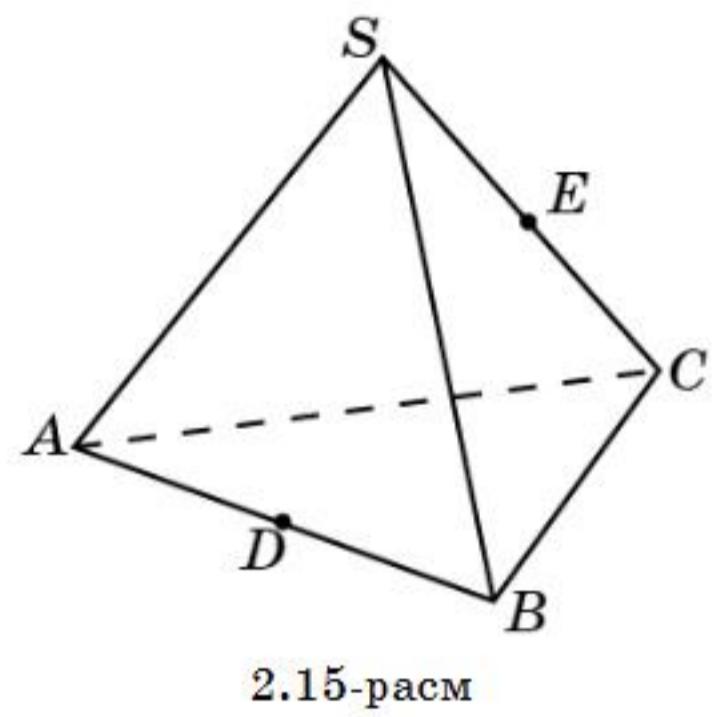
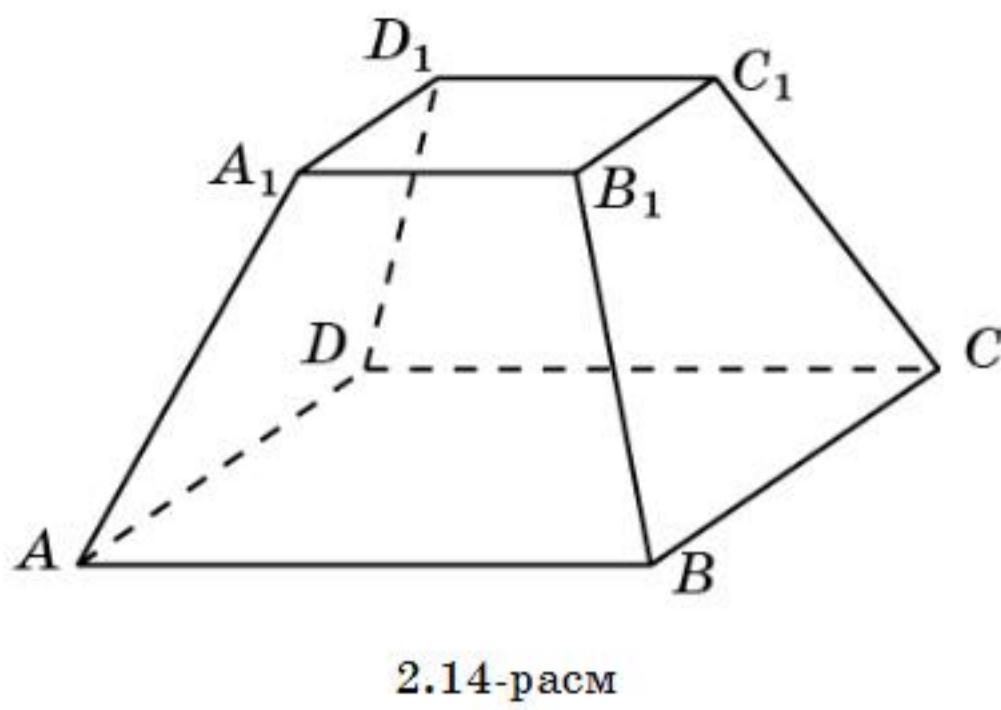
2.12-расм



2.13-расм

2.18. Қадимги Мисрдаги энг баланд биноларнинг бири — Хеопс пирамидаси — мунтазам түртбурчакли пирамида. Унинг баландлиги тахминан 140 м га, асосининг юзи эса 5,3 га га teng (2.13-расм). Мана шу пирамиданинг ён сиртининг юзини топинг.

2.19. Мунтазам түртбурчакли кесик пирамиданинг асосларининг томонлари 1 см ва 2 см га, ён қирралари эса 1 см га teng. Пирамиданинг тўла сиртининг юзини топинг (2.14-расм).



2.20. $SABC$ мунтазам пирамиданинг AB ва SC қирраларининг ўрталарини туташтирувчи пирамида сиртидаги энг қисқа масофани топинг (2.15-расм).

2.21. 2.16-расмда дон сақланадиган идиш (бункер) тасвиirlанган. Унинг асосий қисми сиртини мунтазам түртбурчакли кесик пирамиданинг ён сирти ташкил этади. Расмда күрсатилған ўлчамлари (см-да) бўйича идишни ясаш учун (A ва B қисмларини ҳисобламагандан) қанча квадрат дециметр тунука кераклигини ҳисобланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

2.22. 1) Параллелепипед; **2)** призма; **3)** пирамида учларининг (Y), қирраларининг (K) ва ёқларининг (E) сони учун $Y - K + E = 2$ тенглиги бажарилишини текширинг.

3*-§. Эйлер теоремаси

Бизга маълум бўлган кўпёқларни кўриб чиқиб, уларнинг учларининг (Y), қирраларининг (K) ва ёқларининг (E) сони бўйича жадвални тўлдирамиз.

1-жадвал

Кўпёқнинг номи	Y	K	E
Параллелепипед	8	12	6
Учбурчакли пирамида	4	6	4
Тўртбурчакли пирамида	5	8	5

Давоми

	5	8	5
Түртбұрчакли пирамида	5	8	5
Учбурчакли призма	6	9	5
Түртбұрчакли призма	8	12	6
n -бурчакли пирамида	$n + 1$	$2n$	$n + 1$
n -бурчакли призма	$2n$	$3n$	$n + 2$

Мана шу жадвалдан күриб чиқилған барча күпёқлар учун $U - K + E = 2$ тенглиги бажарилишини күрамиз. Бу тенглик күриб чиқилған күпёқлар учунгина эмас, балки ҳар қандай қавариқ күпёқ учун ҳам ўринли бўлади.

Қавариқ күпёқларнинг бу хоссасини биринчи бўлиб 1752 йили Леонард Эйлер исботлаган ва Эйлер теоремаси деб аталган.

Эйлер теоремаси. *Ҳар қандай қавариқ күпёқлар учун қийидаги тенглик ўринли бўлади:*

$$U - K + E = 2,$$

бу ерда U — берилған күпёқ учларининг сони, K — қирраларининг сони, E — ёқларининг сони.

Исботи. Күпёқ моделининг сиртини күриб чиқайлик. Унинг бир ёғини кесиб, қолған сиртини текисликда ёйсак. Шундан U учлари, K қирраларидан иборат чизмани ва шу чизманинг текисликни ажратадиган E бўлакларини оламиз.

Агар чизмадаги икки учи бор қандай да бир қиррасини унинг учларининг биттасига шу қирраси бўйлаб сиқиб йигадиган бўлсак, унда чизмадаги $U - K + E$ қиймати ўзгармаслигини исботлайлик.

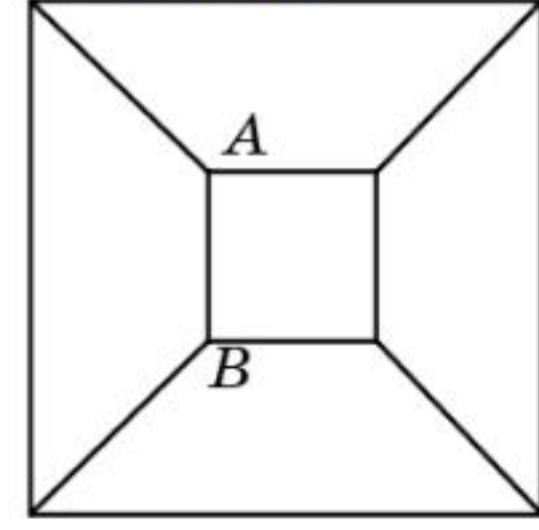
Мисол тариқасида кубдан олинган 3.1-расмдаги чизмани күриб чиқамиз. Бунда $U = 8$, $K = 12$, $E = 6$ бўлади.

АВ қиррасини С нуқтага сиқиб йигданда 3.2-расмдагидек чизма ҳосил бўлади. Натижасида U учларининг сони биттага камаяди, K қирраларининг сони ҳам биттага камаяди, E бўлакларининг сони эса ўзгармайди. Демак, $U - K + E$ қиймати ҳам ўзгармайдиган бўлади.

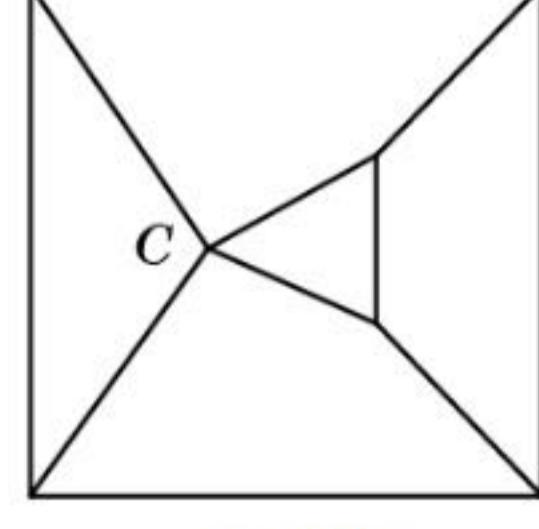
Мана шу хоссаларни фойдаланиб, икки учи бор барча қирраларини сиқиб йиғамиз. Бундан бир учи бор, қирралари эса шу уч билан бўғинлари бўладиган чизмага эга бўламиз (3.3, а-расм).

Бу катак учун ҳам $U - K + E$ қиймати ўзгаришсиз бошланғич қиймат бўлиб қолади.

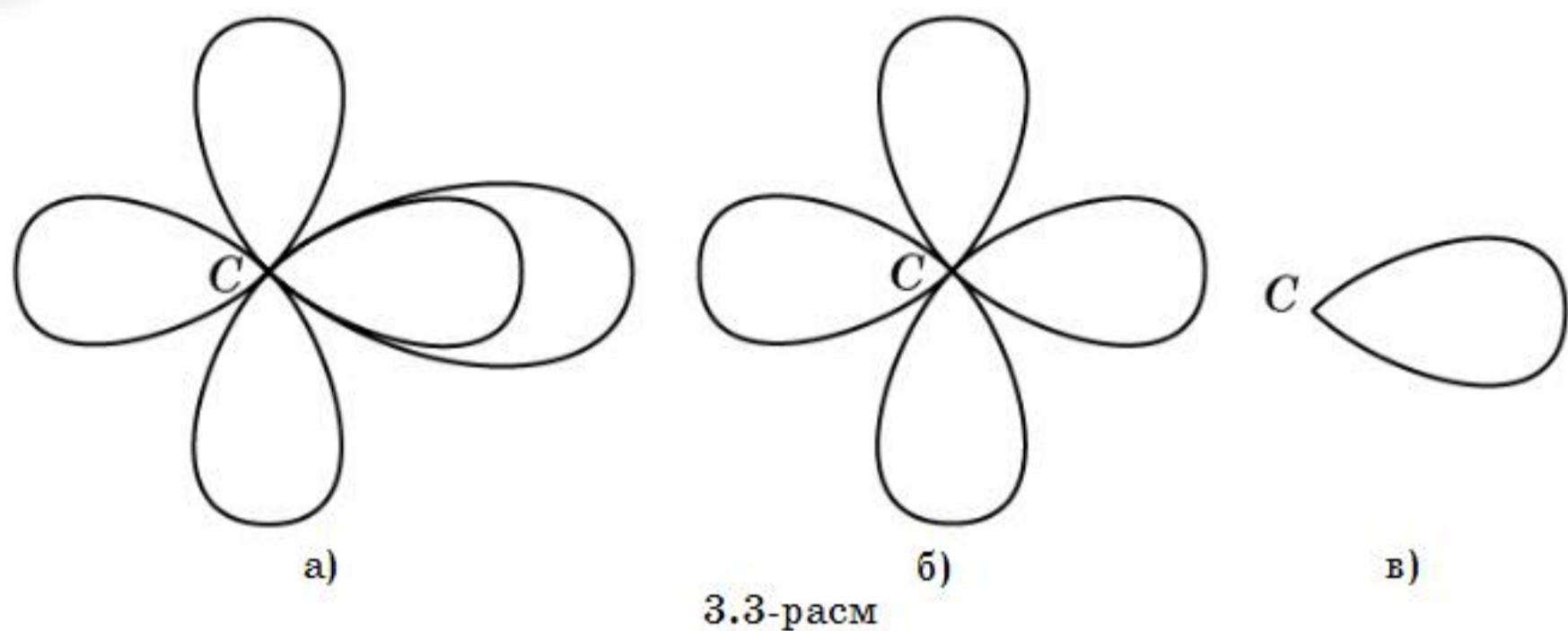
Энди агар ҳосил бўлган чизмадаги қандай да бир бўғинни олиб ташласак, $U - K + E$ қиймати ўзгармаслигини исботлаймиз.



3.1-расм



3.2-расм



Ҳақиқатан, бу ҳолатда Y учларининг сони ўзгармайди, у 1 га тенг. K қирраларининг сони ҳам, E бўлакларининг сони ҳам 1 га камайди (3.3, б-расм). Унда, $Y - K + E$ қиймати ҳам ўзгармайдиган бўлади.

Мана шу хоссаларни фойдаланиб, биттасидан башқа барча бўғинларни олиб ташлаймиз. Бундан бир учи ва бир қирраси (учи билан тугуни) бор чизмани оламиз (3.3, в-расм). Бу чизма учун $Y = 1$, $K = 1$, $E = 2$, яъни $Y - K + E = 2$ бўлади. Демак, бу тенглик бошланғич кўпёқ учун ҳам ўринли бўлади. \square

Эйлер теоремасини фойдаланиб, қавариқ кўпёқнинг учлари (Y), қирралари (K) ва ёқларининг (E) сонини топишга мисол келтирайлик.

Мисол. Қавариқ кўпёқнинг ҳар бир учида бешта учбурчак бирикади. Мана шу кўпёқ учларининг (Y), қирраларининг (K) ва ёқларининг (E) сонини топинг.

Ечими. Берилган кўпёқнинг ҳар бир учида бешта қирраси бирикади. Ҳар бир қиррасининг эса икки учи бўлганлиги туфайли, $5Y = 2K$ тенглиги бажарилади.

Бундан $Y = \frac{2K}{5}$. Бу кўпёқнинг ёқлари фақатгина учбурчаклар, ҳар бир учбурчакнинг учта қирраси бўлганлиги туфайли, $3E = 2K$ тенглиги бажарилади. Демак, $E = \frac{2K}{3}$. Топилган Y ва E қийматларини Эйлер тенглигига қўйиб, қуйидагидай тенгламани оламиз:

$$\frac{2K}{5} - K + \frac{2K}{3} = 2.$$

Мана шу тенгламани ечиб, кўпёқ қирраларининг (K) сонини топамиз, яъни $K = 30$. Бу қийматни Y ва E ифодаларига қўйиб, кўпёқнинг учлари билан ёқларининг сонларини топамиз: $Y = 12$, $E = 20$.

Тарихий маълумотлар

Леонард Эйлер (1707—1783) — жаҳонга таниқли швейцариялик математик. Унинг ишлари математиканинг кўплаган замонавий бўлимларининг ривожланишига ҳисса қўшди.

Эйлер оғир ҳасталикка чалиниб, күриш қобилиятидан махрум бўлди, лекин ҳасталигига қарамасдан ишлаб, натижаларга эришган. Статистик ҳисоблашлар бўйича, Эйлер ҳафтасига ўрта ҳисобда бир янгилик яратган.

Эйлер кашфиётларида татқиқ этилмаган математик масалаларни топиш қийин. Кейинги авлоднинг математиклари Эйлердан билим олган. Таниқли француз олим П.С. Лаплас: “Эйлерни ўқинглар, у ҳаммамизнинг устозимиз”, — деган.

Математика тарихчилари Эйлер теоремасини *топологиянинг дастлабки теоремаси* деб атаганлар. Топология — узилишсиз деформация пайтида ўзгармайдиган, узлуксиз ёки қўшимча елимлашсиз чўзиладиган ва сиқиладиган фигуralарнинг хоссаларини татқиқ этадиган геометриянинг бўлими. Бундай хоссалар *топологиялик* деб аталади.

Қавариқ кўпёқлар учун $У - К + Е = 2$ Эйлер нисбати мана шу топологиялик хоссани таърифлайди. Кўпёқни деформациялашга бўлади, унинг қирралари билан ёқлари эгилиши мумкин, лекин уларнинг сони, яъни Эйлер нисбати ўзгармайди.

Эйлер нисбатини исботлашда биз деформациялашни қўлланганмиз, яъни кўпёқ сиртининг бир ёғини кесиб, текисликка ёйган эдик. Қирралари билан кўпурчакларнинг ўзлари эгилиши мумкин, аммо бу Эйлер нисбатига тасир этмайди.

Леонард Эйлернинг ҳаёти билан ва ижоди билан танишиш учун биз қуйидаги китобни тавсия этамиз: Тиле Р. Леонард Эйлер. — Киев: Вища школа, 1983.

Саволлар

1. n -бурчакли призманинг; 2) n -бурчакли пирамиданинг учлари, қирралари ва ёқларининг сони нечага teng?
2. Эйлер теоремасини айтинг.
3. Эйлер теоремаси қачон исботланди?
4. Топология нимани тадқиқ этади?

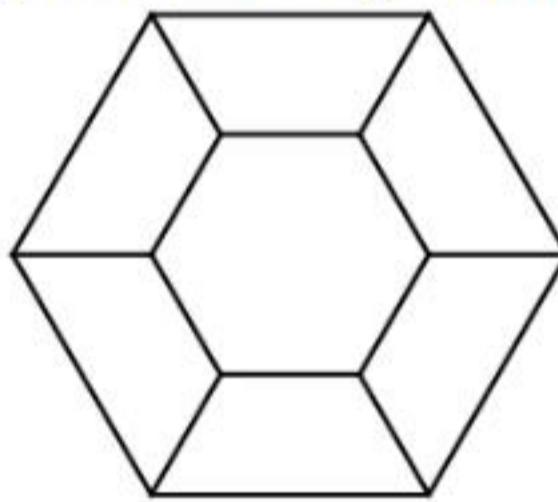
Машқлар

A

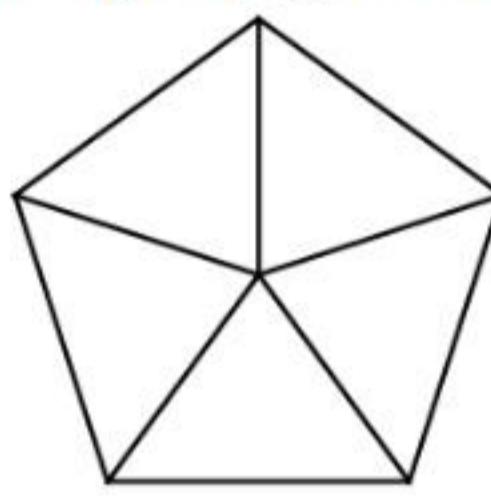
- 3.1.** Қавариқ кўпёқнинг 6 та учи ва 12 та қирраси бор. Унинг нечта ёғи бўлади?
- 3.2.** Қавариқ кўпёқнинг 8 та учи ва 6 та ёғи бор. Унинг нечта қирраси бўлади?
- 3.3.** Қавариқ кўпёқнинг 9 та қирраси ва 5 та ёғи бор. Унинг нечта учи бўлади?

В

- 3.4.** Эластик материалдан ясалған учурчакли призманинг бир асоси кесиб олинди ва қолған ёқлари текисликка ёйилди. Ҳосил бўлган чизманинг расмини чизинг.
- 3.5.** Эластик материалдан ясалған тўртбурчакли пирамиданинг асоси кесиб олинди ва қолған ёқлари текисликка ёйилди. Ҳосил бўлган чизманинг расмини чизинг.
- 3.6.** 3.4-расмдаги чизмаларга мос келадиган кўпёқларни атанг.



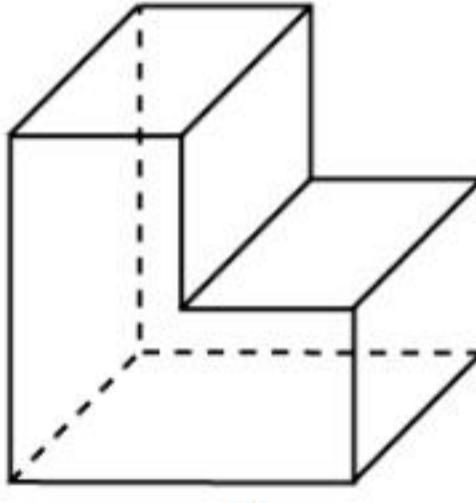
а)



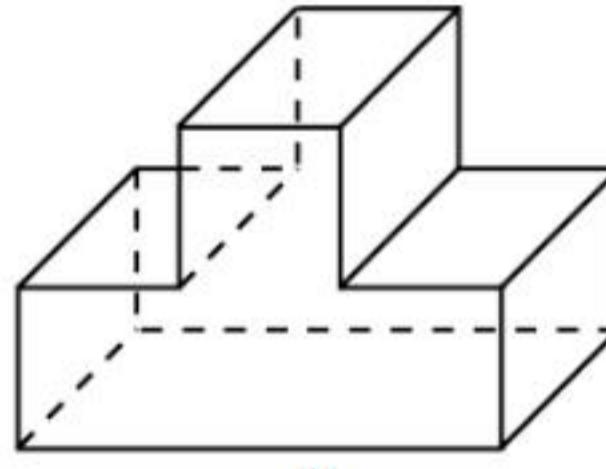
б)

4.4-расм

- 3.7.** 3.5-расмдаги кўпёқлар учун Эйлер нисбатининг бажарилиш ёки бажарилмаслигини текширинг.



а)

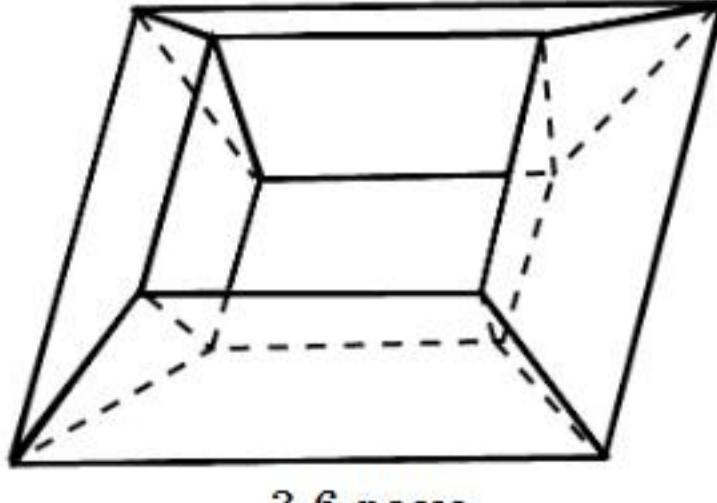


б)

3.5-расм

С

- 3.8.** Қавариқ бўлмаган призма учун Эйлер нисбати бажариладими?
- 3.9.** Қавариқ бўлмаган пирамида учун Эйлер нисбати бажариладими?



3.6-расм

- 3.10.** 3.6-расмдаги кўпёқ учларининг, қирраларининг ва ёқларининг сонини топинг. Мана шу кўпёқ учларининг Эйлер нисбати бажариладими?

- 3.11.** Қавариқ кўпёқнинг ҳар бир учида тўртта учурчак бирлашади. Мана шу кўпёқ учларининг (У), қирраларининг (К) ва ёқларининг (Е) сонини топинг.

- 3.12.** Қаварик күпёқнинг ҳар бир учида уча бешбурчак бирлашади. Мана шу күпёқ учларининг (У), қирраларининг (К) ва ёқларининг (Ё) сонини топинг.

Яңги мавзуны үзлаштиришга тайёрланынг

- 3.13.** Мунтазам күпбурчакнинг қоидасини такрорланг. Мунтазам күпбурчакнинг қоидасини айтиб күринг.

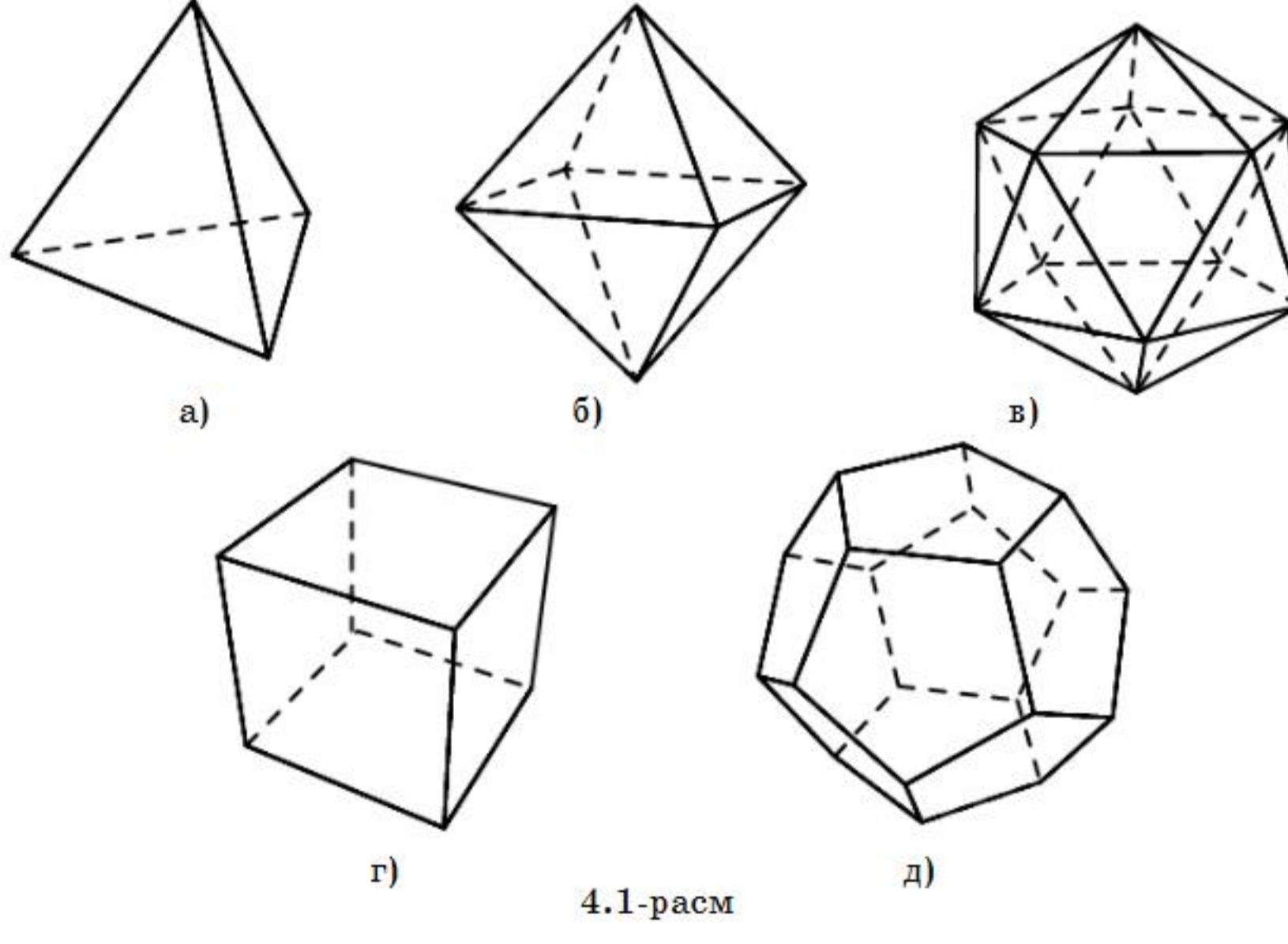
4-§. Мунтазам күпбурчаклар

Агар мунтазам күпбурчак ёқларининг томонларининг сони бир хил бўлган мунтазам күпбурчаклардан иборат бўлса ва шу билан бирга, күпбурчакнинг ҳар бир учида бир хил миқдордаги қирралар учрашса, бундай күпбурчак *мунтазам күпбурчак* деб аталади.

Мунтазам күпёқнинг учларида қандай ва нечта мунтазам күпбурчаклар бирикишини аниқлайлик.

Мунтазам күпёқларнинг орасидаги энг соддаси ёқлари тўртта мунтазам учурчаклардан иборат (4.1, а-расм) ва ҳар бир учида уча ёғи бирикадиган күпёқ ҳисобланади. Бу күпёқ *мунтазам тетраэдр* деб аталади. Юнончадан таржима қилинганда “тетраэдр” сўзи “тўртёқ” (“тетра” — тўрт, “эдра” — ёқ) деган маънони билдиради.

4.1, б-расмда ёқлари мунтазам учурчаклардан иборат ва ҳар бир учида тўртта ёғи бирикадиган күпёқ тасвирланган. Унинг сирти саккизта мунтазам учурчаклардан иборат, шу сабабли у *октаэдр* (“окта” — саккиз) деб аталади.



4.1, в-расмда ҳар бир учида бешта мунтазам учурчакдан бирикадиган күпёқ тасвирланган. Унинг сирти йигирмата мунтазам учурчакдан иборат, шу сабабли у *икосаэдр* (“икоси” — йигирма) деб аталади.

Мунтазам күпёқнинг бир учида бештадан күп бўлмаган мунтазам учурчакларнинг бирикишини кузатамиз, сабаби акс ҳолда бу учидағи ёйик бурчакларнинг йиғиндиси 360° -дан ортиқ ёки тенг бўлади. Шу сабабли ёқлари мунтазам учурчаклар бўладиган бошқача мунтазам күпёқлар бўлмайди.

Шунга ўхашаш, қавариқ күпёқнинг учларида фақатгина учта квадрат бирикканлиги сабабли, кубдан (4.1, г-расм) бошқача ёқлари квадрат бўладиган бошқача мунтазам күпёқлар бўлмайди. Кубнинг олтига ёғи бор, шу сабабли у *гексаэдр* (“гекса” — олти) деб ҳам аталади.

4.1, д-расмда ёқлари мунтазам бешбурчаклар бўладиган ва ҳар бир учида учта ёғи бирикадиган күпёқ тасвирланган. Унинг сирти ўн иккита мунтазам бешбурчакдан иборат, шу сабабли у *додекаэдр* (“додека” — ўн икки) деб аталади.

Қавариқ күпёқ учларида томонининг сони бештадан ортиқ мунтазам күпбурчаклар бирикмаслиги сабабли, бошқача мунтазам күпёқлар бўлмайди. Шу сабабли, қавариқ мунтазам күпёқнинг бешта тури бўлади: *мунтазам тетраэдр*, *гексаэдр* (*куб*), *октаэдр*, *додекаэдр* ва *икосаэдр*.



Қандай ўйлайсизлар, нима сабабли ён ёқлари квадратлар бўладиган мунтазам учурчакли призма мунтазам күпёқ бўлмайди?

Тарихий маълумотлар

Қадимдан мунтазам күпёқлар олимларнинг, қурувчиларнинг, меъморларнинг ва яна бошқаларнинг назарини жалб этган. Уларни мана шу күпёқларнинг гўзаллиги (чиройи), ҳусусиятлиги ва мувофиқлиги (уйғунлиги) хайратда қолдирган. Пифагорликлар бу күпёқларни худо берган ажойиб (хайрат) деб ҳисоблаб, уларни олам ҳақидаги философик ёзувларда қўлланган. Қадимги юони олими Платон (эр.ав. 429—348) мунтазам күпёқларнинг хоссаларини батафсил таърифлаган. Шу сабабли мунтазам күпёқлар *Платон жисмлари* деб ҳам аталади. Евклиднинг машҳур “Негизлар” номли охирги XIII китоби мунтазам күпёқларга бағишиланган.

Қайта уйғониш даврида (XV—XVI асрлар фан ва санъатнинг қайта уйғониш даври) мунтазам күпёқларга ҳайкалтарошлар, архитекторлар ва рассомлар катта қизиқиши билдириди. Леонардо да Винчи (1452—1519 йй.), масалан, күпёқлар теорияси билан шуғулланган ва уларни ўзининг расмларида тасвирлаган. У ўзининг дўсти монах Лука Пачолининг (1445—1517 йй.) “Ажабланарли пропорциялар тўғрисида” китобини мунтазам ва ярим мунтазам күпёқларнинг расмлари билан таърифланган. Қайта уйғониш даврида геометрия билан шуғулланган яна бир

атоқли рәсом Альбрехт Дюрер (1471—1528 йй.) бүлди. Унинг әлга таниқли “Меланхолия” асарида олдинги қаторда додекаэдр чизилган. 1525 йили Дюрер трактат ёзди, унда у сиртлари келажакнинг яхши моделини күрсатадиган бешта мунтазам күпёқни тақдим этди.

Иоганн Кеплер (1571—1630 йй.) ўзининг 1596 йили босилимга чиққан “Дунё сирлари” номли ишида сферага (шу пайтдаги маълум планеталарнинг орбитаси) ташқи чизилган мунтазам күпёқларни фойдаланиб, Куёш тизимишинг моделини яратган. У марказга Ернинг орбитасини жойлаштириди. Кеплернинг фикри бўйича, Куёш тизимишинг геометрияси қуидагида бўлади: “Ер (Ер орбитаси) — барча орбиталарнинг ўлчови. Унга ташқи додекаэдрни чизамиз. Додекаэдрга ташқи чизилган сфера — Марс сфераси. Марс сферасига ташқи тетраэдрни чизамиз. Тетраэдрга ташқи чизилган сфера Юпитернинг сфераси ҳисобланади. Юпитер сферасига ташқи кубни чизамиз. Кубга ташқи чизилган сфера Сатурн сфераси ҳисобланади. Ернинг сферасига ички икосаэдрни чизамиз. Унга ички чизилган сфера Венера сфераси бўлади. Венера сферасига ички октаэдрни чизамиз. Унга ички чизилган сфера Меркурий сфераси бўлади. У даврда бошқа планеталар ҳали очилмаган эди.

Куёш тизимишинг бундай моделини Кеплер “Космик куб” деб атади.

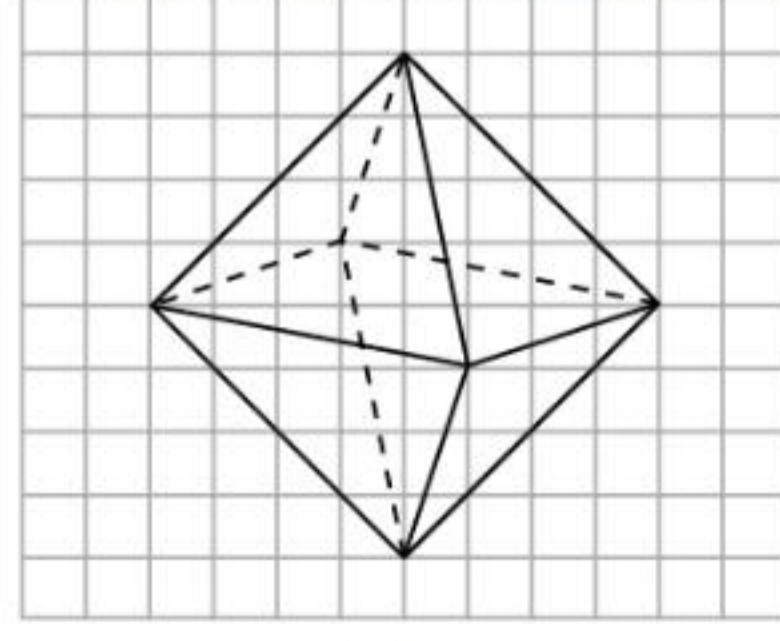
Саволлар

1. Қандай қавариқ күпёқ мунтазам күпёқ деб аталади?
2. Қандай күпёқ: а) мунтазам тетраэдр; ө) октаэдр; б) икосаэдр; в) гексаэдр; г) додекаэдр деб аталади?
3. Мунтазам күпёқларни татбиқ этиш билан кимлар шуғулланади?

Машқлар

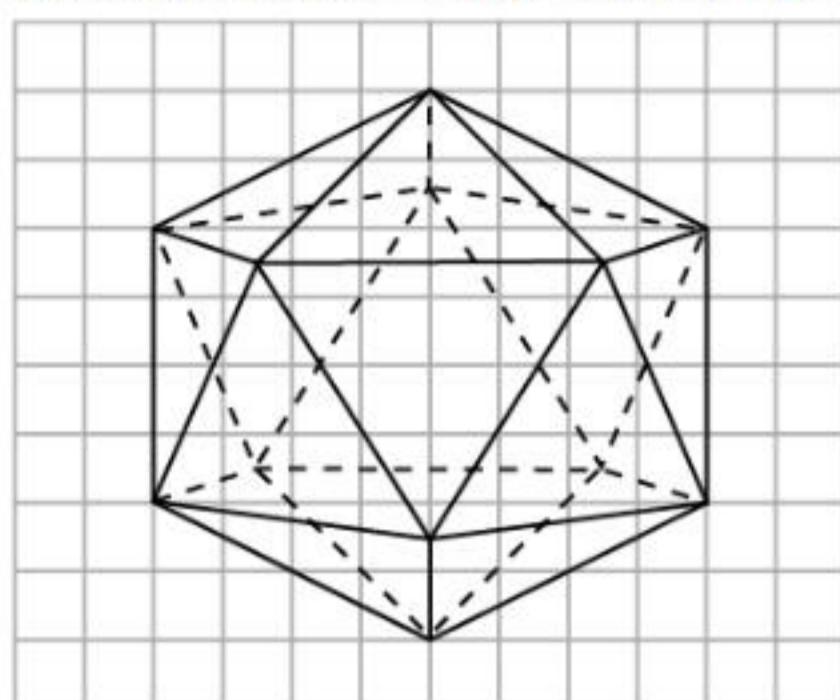
A

- 4.1.** 1) Мунтазам тетраэдрнинг; 2) кубнинг; 3) октаэдрнинг; 4) икосаэдрнинг; 5) додекаэдрнинг нечта учи, қирраси ва ёғи бўлади?
- 4.2.** Учурчакли бипирамида икки мунтазам тетраэдрнинг сиртлари ни юзма-юз қилиб йиғилди (“би” қўшимчаси иккита, иккиланган маъносини билдиради). Ҳосил бўлган күпёқ мунтазам күпёқ бўла оладими? Нима сабабдан?
- 4.3.** Тўртбурчакли бипирамида ён ёқлари мунтазам учурчаклар бўладиган икки тўртбурчакли пирамиданинг асосларини юзма-юз қилиб йиғилди. Ҳосил бўлган күпёқ мунтазам күпёқ бўла оладими?
- 4.4.** Катак қофозга 4.2-расмдагига ўхшаш октаэдрни тасвирланг.

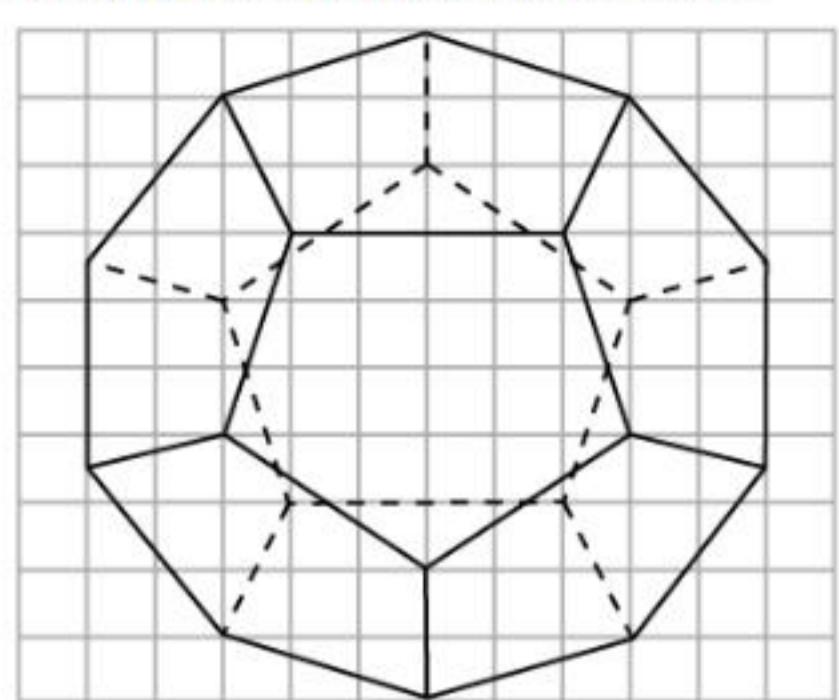


4.2-расм

4.5. Катак қофозга 4.3-расмдагиа ўхаш икосаэдрни тасвирланг.



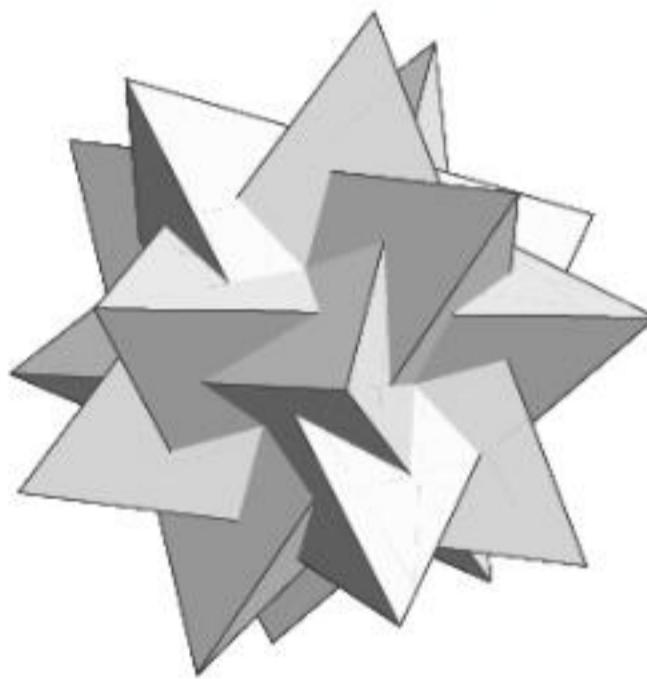
4.3-расм



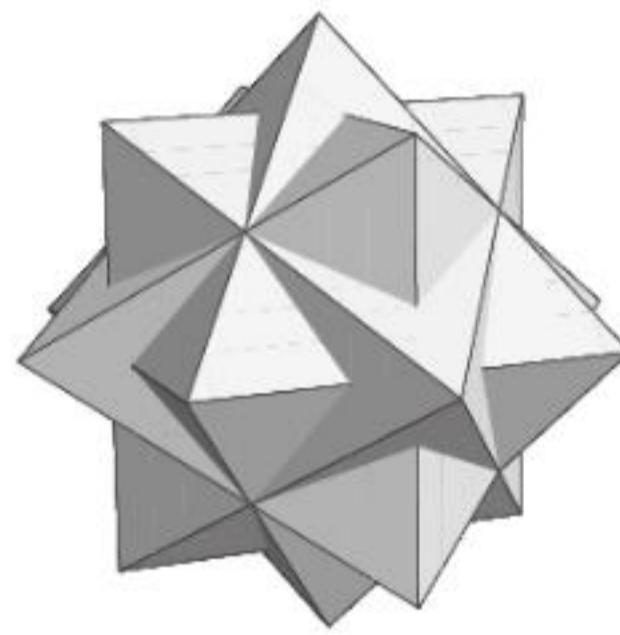
4.4-расм

4.6. Катак қофозга 4.4-расмдагиа ўхаш додекаэдрни тасвирланг.

4.7. 4.5-расмда нечта тетраэдр тасвирланган?



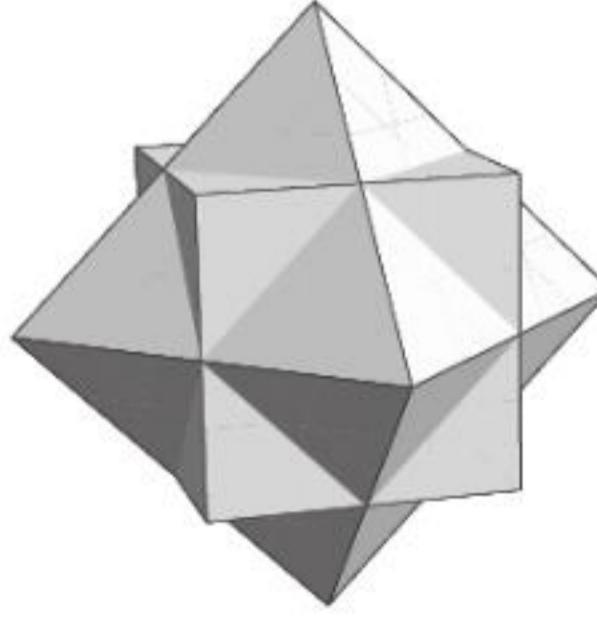
4.5-расм



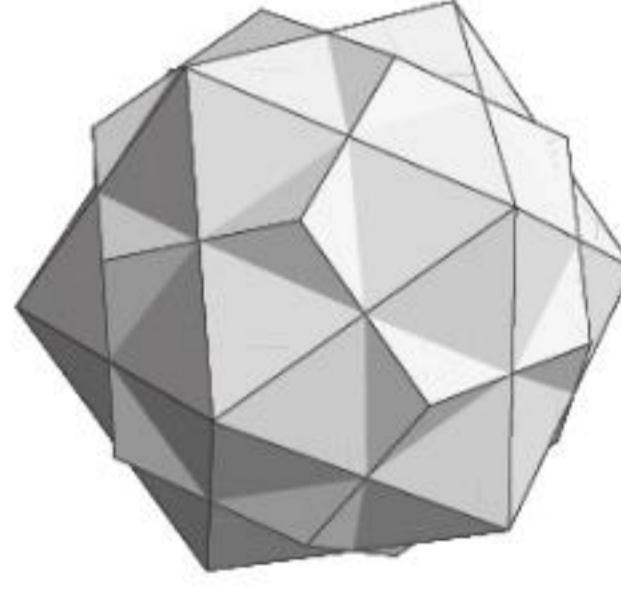
4.6-расм

4.8. 4.6-расмда нечта октаэдр тасвирланган?

4.9. 4.7-расмдаги күпёк қандай икки күпёкни бириктириш орқали ясалган?



4.7-расм



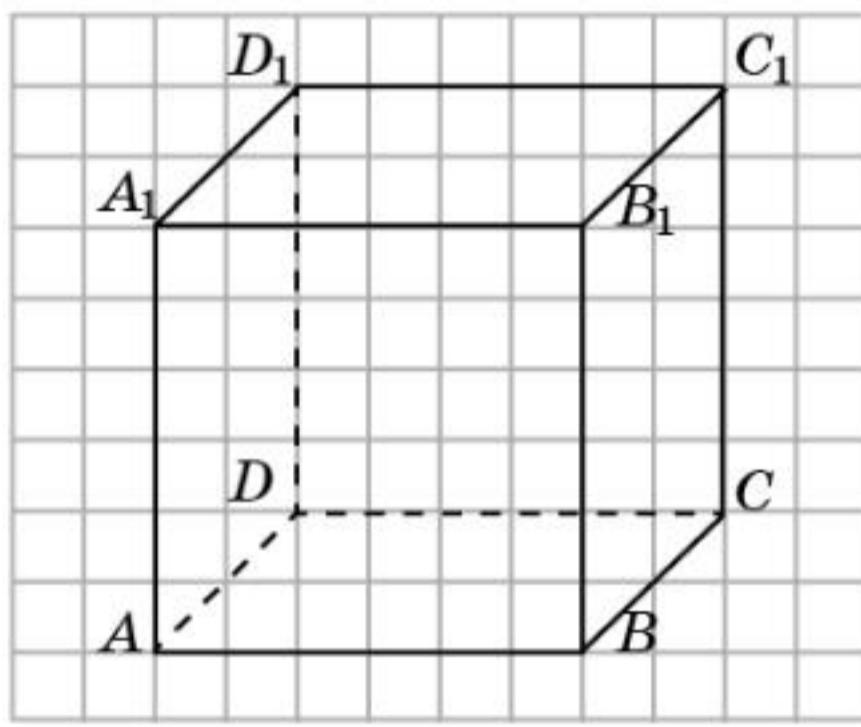
4.8-расм

4.10. 4.8-расмдаги күпёк қандай икки күпёкни бириктириш орқали ясалган?

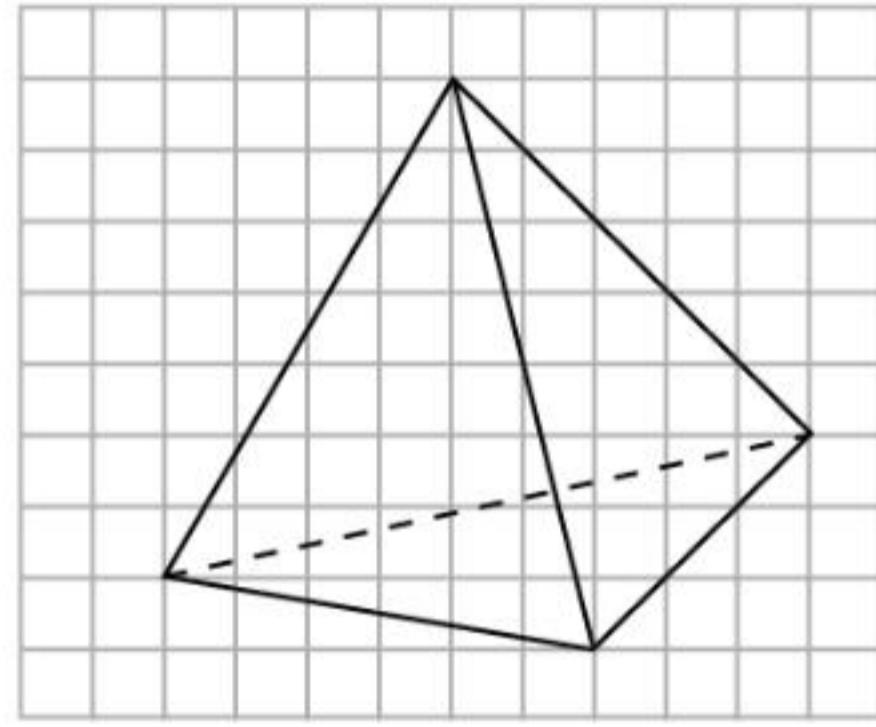
В

4.11. 4.9-расмдагига ўхшаш кубни катак қоғозда тасвиirlанг. Кубнинг A, C, B_1, D_1 учлари қандай күпёқнинг учлари бўлади? Мана шу күпёқни тасвиirlанг. Берилган кубнинг қиррасини 1 га teng деб олиб, ҳосил бўлган күпёқ қиррасининг узунлигини топинг.

4.12. 4.9-расмдагига ўхшаш кубни катак қоғозда тасвиirlанг. Куб ёқларининг марказларини белгиланг. Улар қандай күпёқнинг учлари бўлади? Мана шу күпёқни тасвиirlанг. Берилган кубнинг қиррасини 1 га teng деб олиб, ҳосил бўлган күпёқ қиррасининг узунлигини топинг.



4.9-расм



4.10-расм

4.13. 4.10-расмдагига ўхшаш тетраэдрни катак қоғозда тасвиirlанг. Тетраэдр қирраларининг ўрталарини белгиланг. Улар қандай күпёқнинг учлари бўлади? Мана шу күпёқни тасвиirlанг. Берилган тетраэдрнинг қирраси 1 га teng деб олиб, ҳосил бўлган күпёқ қиррасини топинг.

4.14. Қирраси 2 см га teng тетраэдрнинг ҳар бир учидан қирраси 1 см га teng тетраэдр қирқиб олинса, қолган қисми қандай күпёқ бўлади? Унинг қиррасини топинг.

4.15. Октаэдрнинг қирраси 1 га teng. Унинг қарама-қарши жойлашган учлари орасидаги масофани топинг.

4.16. Бирлик октаэдрнинг қирралари орқали унинг бир учидан унга қарши жойлашган учигача узунлиги 2 га teng бўлган нечта йўл бўлади?

4.17. Бирлик октаэдрнинг қирралари орқали унинг бир учидан унга қарши жойлашган учигача узунлиги 3 га teng бўлган нечта йўл бўлади?

С

4.18. 4.10-расмдагига ўхшаш тетраэдрни катак қоғозда тасвиirlанг. Тетраэдр ёқларининг марказларини белгиланг. Улар қандай күпёқнинг учлари бўлади? Мана шу күпёқни тасвиirlанг. Берилган

тетраэдрнинг қиррасини 1 га тенг деб олиб, ҳосил бўлган кўпёқ қиррасини топинг.

- 4.19. 4.2-расмдагига ўхшаш октаэдрни катак қоғозда тасвиранг. Октаэдр ёқларининг марказларини белгиланг. Улар қандай кўпёқнинг учлари бўлади? Мана шу кўпёқни тасвиранг. Берилган октаэдрнинг қиррасини 1 га тенг деб олиб, ҳосил бўлган кўпёқ қиррасини топинг.
- 4.20. 4.3-расмдагига ўхшаш икосаэдрни катак қоғозда тасвиранг. Икосаэдр ёқларининг марказларини белгиланг. Улар қандай кўпёқнинг учлари бўлади?
- 4.21. 4.4-расмдагига ўхшаш додекаэдрни катак қоғозда тасвиранг. Додекаэдр ёқларининг марказларини белгиланг. Улар қандай кўпёқнинг учлари бўлади?
- 4.22. Бирлик икосаэдрнинг қирралари орқали унинг бир учидан унга қарши жойлашган учигача узунлиги 3 га тенг бўлган нечта йўл бўлади?
- 4.23. Бирлик додекаэдрнинг қирралари орқали унинг бир учидан унга қарши жойлашган учигача узунлиги 5 га тенг бўлган нечта йўл бўлади?

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

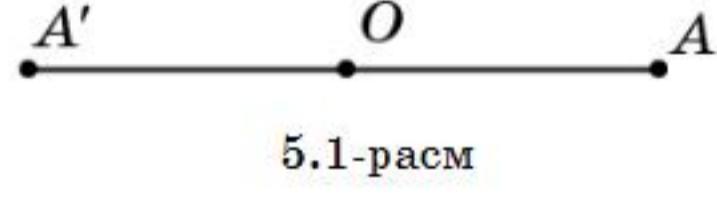
- 4.24. Текисликдаги марказий симметрия билан ўқ симметрияниң қоидаларини такрорланг.

5*-§. Кўпёқларнинг симметрияси

Текисликдаги фигуralарнинг симметрияси тушунчаси планиметрия курсида ўрганилади. Марказий ва ўқ симметрия тушунчалари аниқланди. Фазовий фигуralар учун симметрия тушунчаси шунга ўхшаш аниқланадиган бўлади.

Немис математиги Г. Вейльнинг (1885—1955 йй.) айтишича: “Симметрия — одамларнинг асрлар давомида тартибли, гўзаллик билан камолотни тушунишга ва яратишга ҳаракат қилган ғоялари бўлиб ҳисобланади”.

Симметрияниң чиройли расмлари санъат асарларини — архитектура, ҳайкалларни ва ҳ.к. тасвиrlайди.



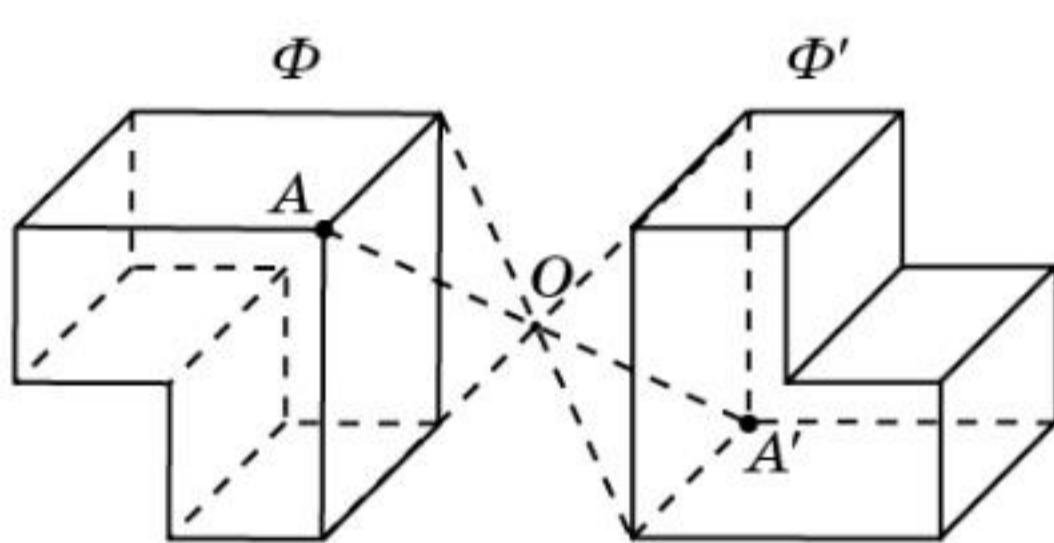
Агар фазодаги O нуқтаси AA' кесмасининг ўртаси бўлса, унда A ва A' нуқталари O нуқтасига нисбатан симметрик деб аталади (5.1-расм). O нуқтаси ўз-ўзига симметрик бўлади.

Фазонинг ҳар бир A нуқтасини берилган O нуқтасига нисбатан симметрик A' нуқтасига кўчирадиган фазодаги шакл алмаштириш марказий симметрия деб аталади. O нуқтаси симметрия маркази деб аталади.

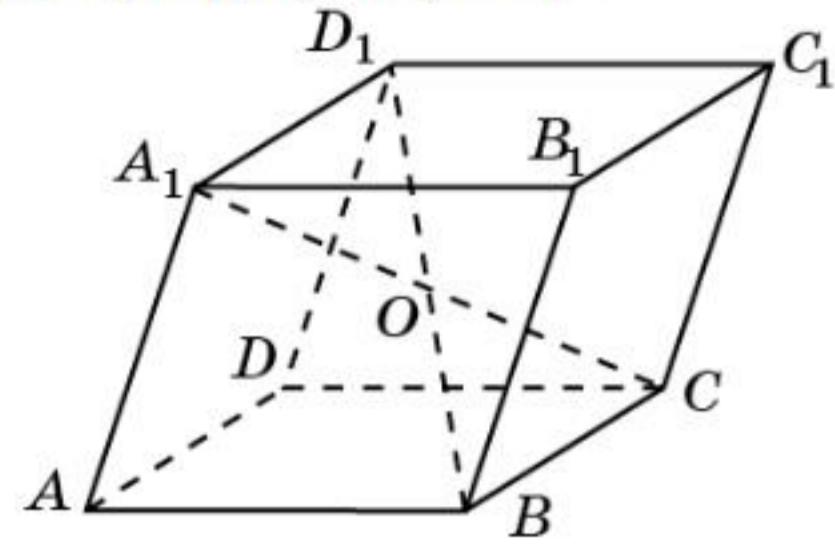
Агар фазодаги O нүктасига нисбатан Φ фигурасининг ҳар бир A нүктаси иккинчи Φ' фигурасининг қандай да бир A' нүктасига симметрик бўлса, унда Φ ва Φ' фигуралари O марказига нисбатан *марказий симметрик* деб аталади (5.2-расм).

Агар фазодаги O нүктасига нисбатан Φ фигураси ўз-ўзига марказий симметрик бўлса, унда Φ фигураси O марказига нисбатан *марказий симметрик* деб аталади.

Масалан, параллелепипед ўзининг диагоналларининг кесишмаси O нүктасига нисбатан *марказий симметрик* бўлади (5.3-расм).



5.2-расм

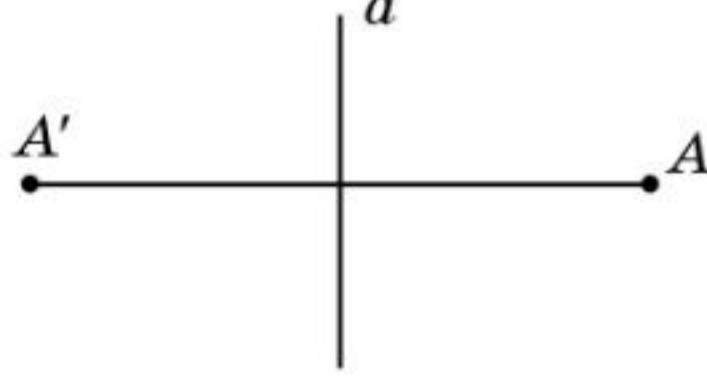


5.3-расм

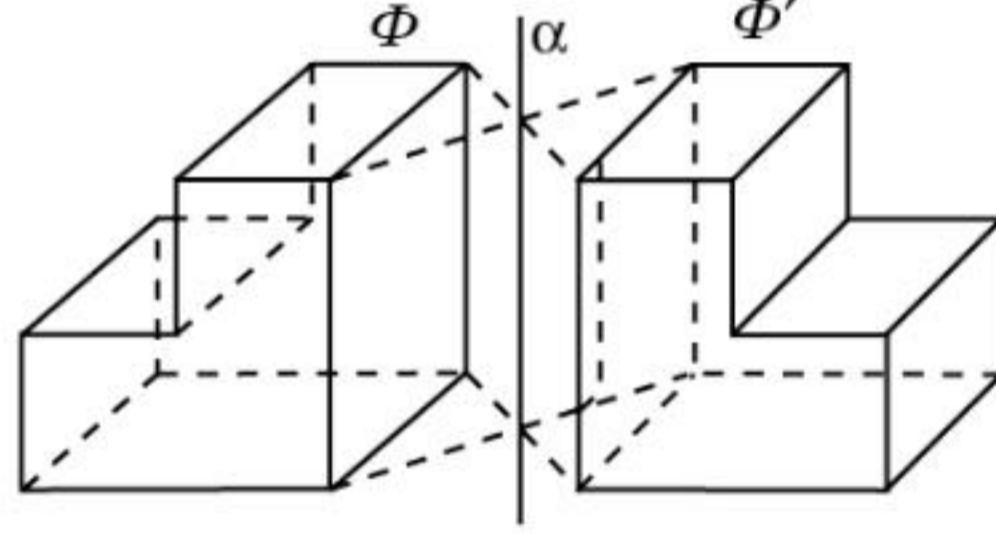


Қандай ўйлайсизлар, фигурада бир нечта симметрия марказлари бўлиши мумкинми?

Агар фазодаги a тўғри чизиги AA' кесмасига перпендикуляр ва унинг ўртаси орқали ўтса, унда A ва A' нүкталари *а тўғри чизигига нисбатан симметрик* деб аталади (5.4-расм). a тўғри чизигининг ҳар бир нүктаси ўз-ўзига симметрик бўлади.



5.4-расм

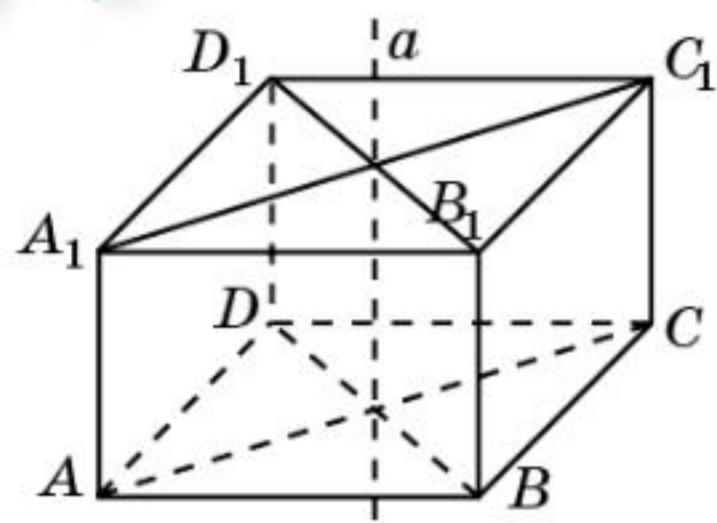


5.5-расм

Фазонинг ҳар бир A нүктасини берилган a тўғри чизигига нисбатан A' нүктасига кўчирадиган фазодаги шакл алмаштириш ўқ симметрик деб аталади. *а тўғри чизиги симметрия ўқи* деб аталади.

Агар фазодаги a тўғри чизигига нисбатан Φ фигурасининг ҳар бир A нүктаси иккинчи Φ' фигурасининг қандайда бир A' нүктасига симметрик бўлса, унда Φ ва Φ' фигуралари *а ўқига нисбатан симметрик* фигуралар деб аталади (5.5-расм).

Агар фазодаги a тўғри чизигига нисбатан Φ фигураси ўз-ўзига симметрик бўлса, унда Φ фигураси *а ўқига нисбатан симметрик* деб аталади.



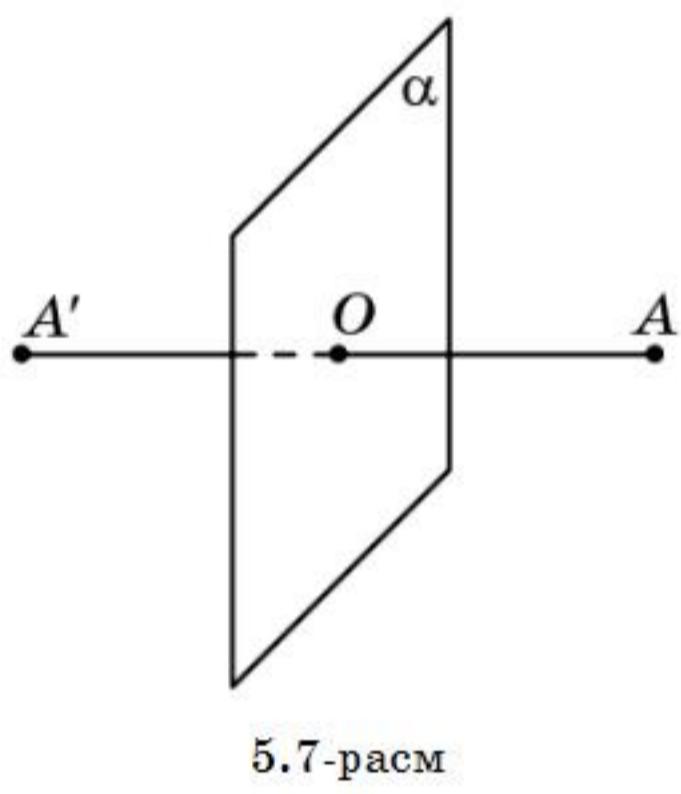
5.6-расм

Масалан, түғри бурчакли параллелепипед ўзининг қарама-қарши жойлашган ёқлари диагоналларининг кесишиш нуқталари орқали үтүвчи үқига нисбатан *марказий симметрик бўлади* (5.6-расм).



Қандай ўйлайсизлар, фигурада бир нечта симметрия ўқлари бўла оладими?

Агар фазодаги A текислиги AA' кесмасига перпендикуляр ва унинг ўртаси орқали ўтса, унда A ва A' нуқталари *а текислигига нисбатан симметрик* деб аталади (5.7-расм). A текислигининг ҳар бир нуқтаси ўз-ўзига симметрик бўлади.

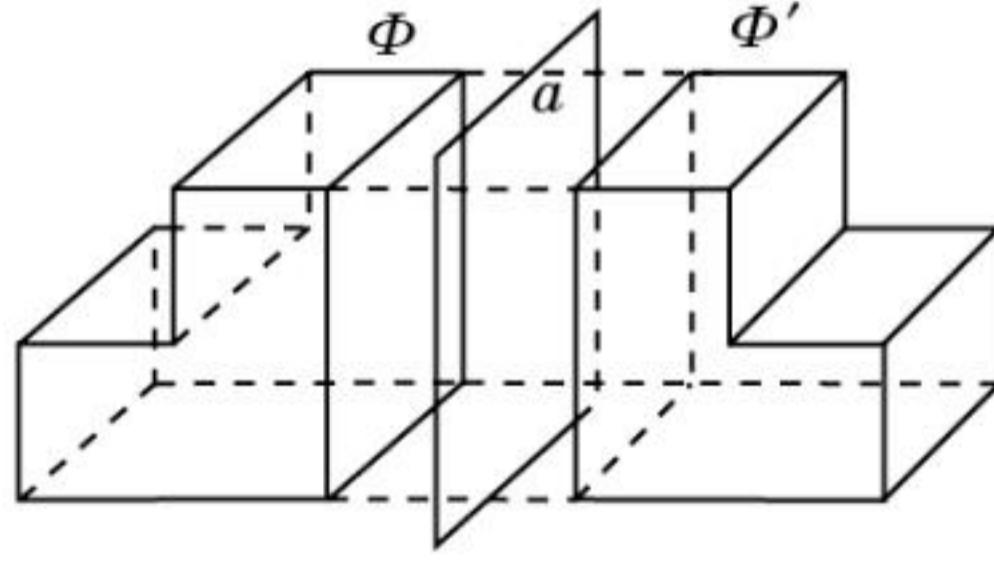


5.7-расм

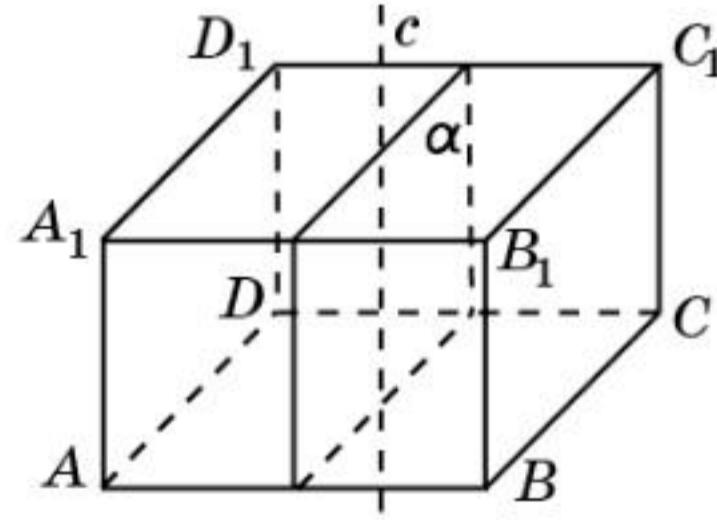
Фазонинг ҳар бир A нуқтасини берилган текислигига нисбатан A' нуқтасига кўчирадиган фазодаги шакл алмаштириш *а текислигига нисбатан симметрия* деб аталади. A текислиги *симметрия текислиги* деб аталади.

Текисликка нисбатан симметрия кўзгуда акслангандай симметрия деб ҳам аталади.

Агар фазодаги A текислигига нисбатан Φ фигурасининг ҳар бир A нуқтаси иккинчи Φ' фигурасининг қандай да бир A' нуқтасига кўзгуда акслангандай симметрик бўлса, унда Φ ва Φ' фигуралари *а текислигига нисбатан кўзгуда акслангандай симметрик фигуралар* деб аталади (5.8-расм).



5.8-расм



5.9-расм

Агар фазодаги A текислигига нисбатан Φ фигураси ўз-ўзига кўзгуда акслангандай симметрик бўлса, унда Φ фигураси *а текислигига нисбатан кўзгуда акслангандай симметрик* деб аталади.

Масалан, түғри бурчакли параллелепипед ўзининг симметрия үқи орқали үтүвчи ва қарама-қарши жойлашган ёқларининг биттасига параллель бўладиган текисликка нисбатан кўзгуда акслангандай симметрик бўлади (5.9-расм).



Қандай үйлайсизлар, фигурада бир нечта симметрия текисликлари бўла оладими?

Кристаллар — табиий кўпёқлар

Кўпёкларнинг кўплаган шакларини одамларнинг ўзлари үйлаб топгани йўқ, улар табиий кристаллар шаклида тузилган. Ош тузининг кристаллари куб шаклига мос (5.10-расм), музнинг ва кварцнинг кристаллари икки ёқли қаламнинг учларига ўхшаш бўлади, яъни асосларида олтибурчакли пирамidalар жойлашган олтибурчакли призма шаклида бўлади (5.11-расм).



7.10-расм



7.11-расм

Олмос кўпинча октаэдр шаклида учрайди (5.12-расм). Икки пичоқли исландия шпати (найзаси) оғма параллелепипед шаклида бўлади (5.13-расм).

Кристалларнинг ташқи шакли — уларнинг физик ва химик ҳоссаларининг кўринишигини. Уларнинг барчаси кристалларнинг геометрик тузилишининг ўзига ҳос хусусиятлари билан, масалан, кристаллик тўрда атомларнинг симметрик жойлашиши орқали тушунтирилади.



7.12-расм



7.13-расм



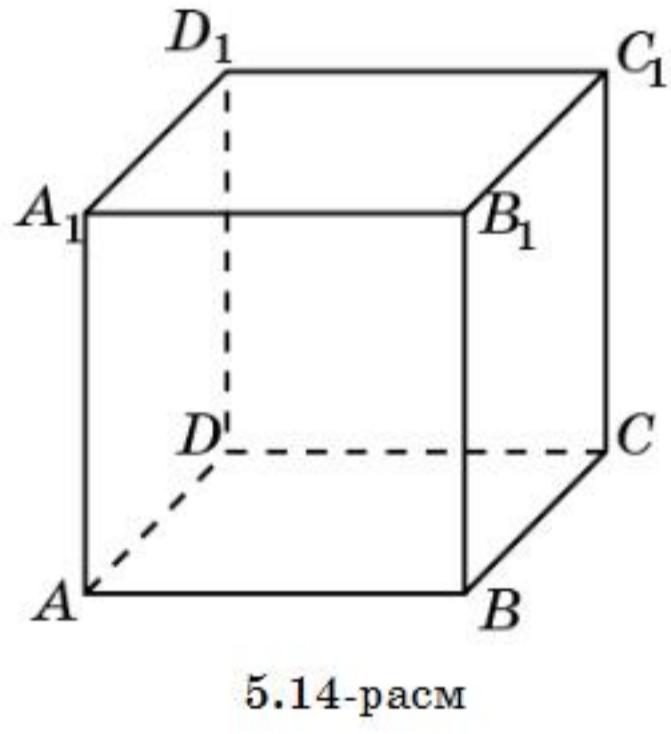
Кристалларга бошқа мисоллар ҳам келтириинг ва уларнинг шаклларини кўрсатинг.

Кристаллар билан батафсил танишиш учун Қозғистон Республикасининг Геология музейи ва А.Е.Ферсман номидаги Минералогия музейи сайтларында киришни тавсия қиласыз.

Саволлар

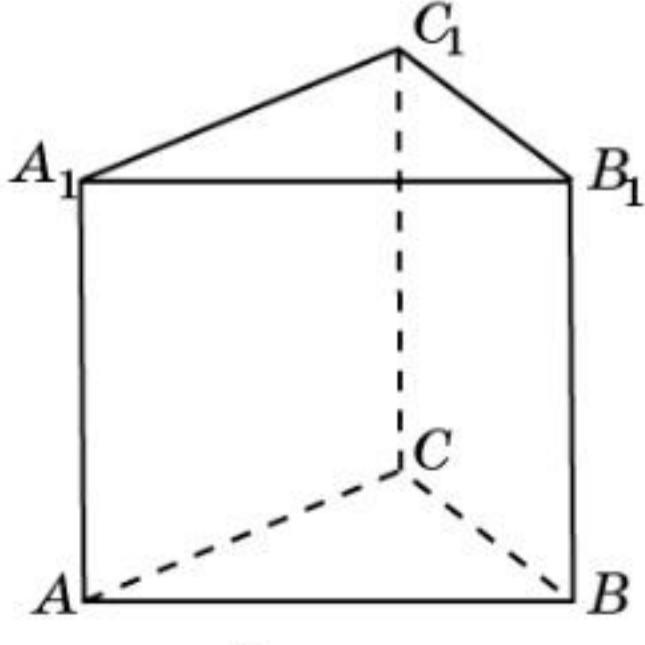
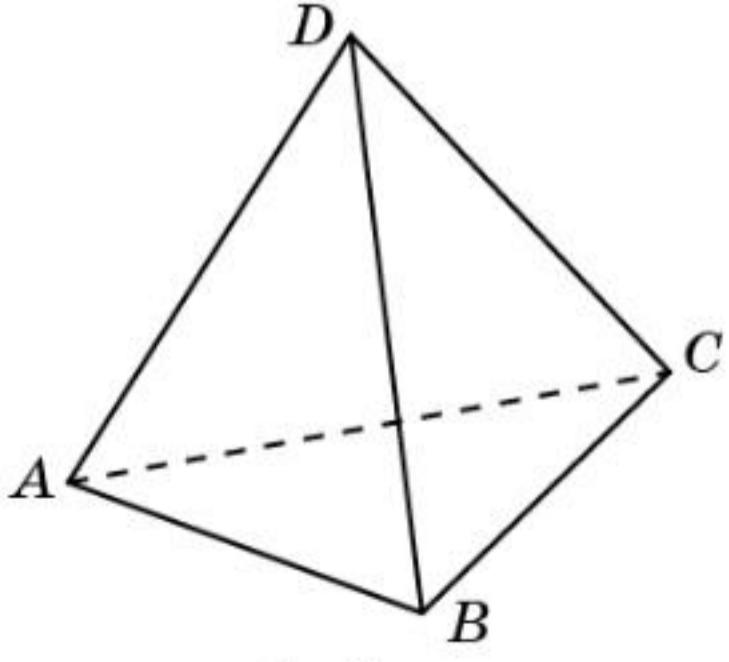
1. Фазонинг қандай нұқталари марказий симметрик деб аталауди?
2. Фазодаги қандай шакл алмаштириш марказий симметрия деб аталауди?
3. Фазодаги қандай икки фигура марказий симметрик фигуналар деб аталауди?
4. Фазодаги қандай фигура марказий симметрик фигура деб аталауди?
5. Қандай нұқталар түғри чизиққа нисбатан симметрик деб аталауди?
6. Фазодаги қандай шакл алмаштириш ўқ симметрияси деб аталауди?
7. Фазодаги қандай икки фигура түғри чизиққа нисбатан симметрик деб аталауди?
8. Фазодаги қандай фигура түғри чизиққа нисбатан симметрик деб аталауди?
9. Фазодаги қандай нұқталар текисликка нисбатан симметрик деб аталауди?
10. Фазодаги қандай шакл алмаштириш күзгуда аксланғандай симметрик деб аталауди?
11. Фазодаги қандай икки фигура күзгуда аксланғандай симметрик деб аталауди?
12. Фазодаги қандай фигура күзгуда аксланғандай симметрик деб аталауди?

Машқлар

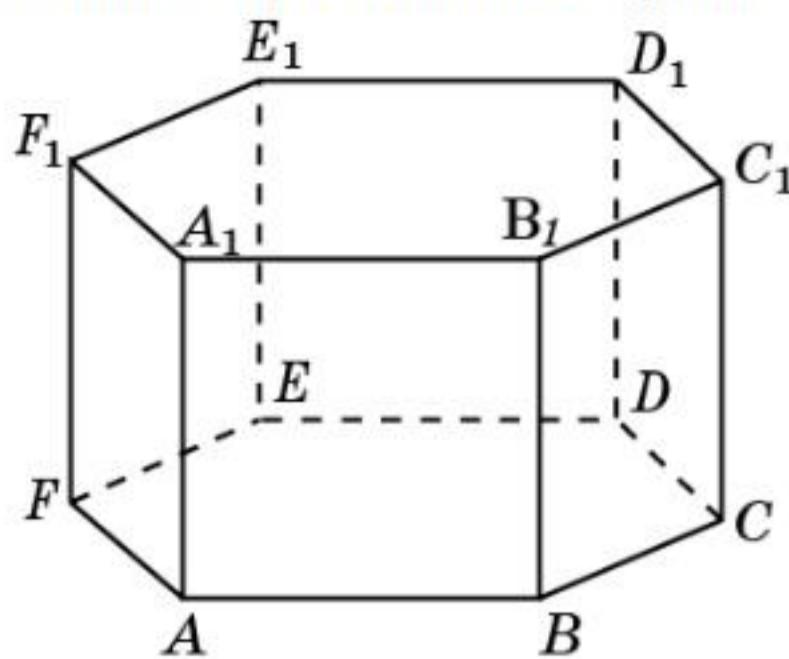


A

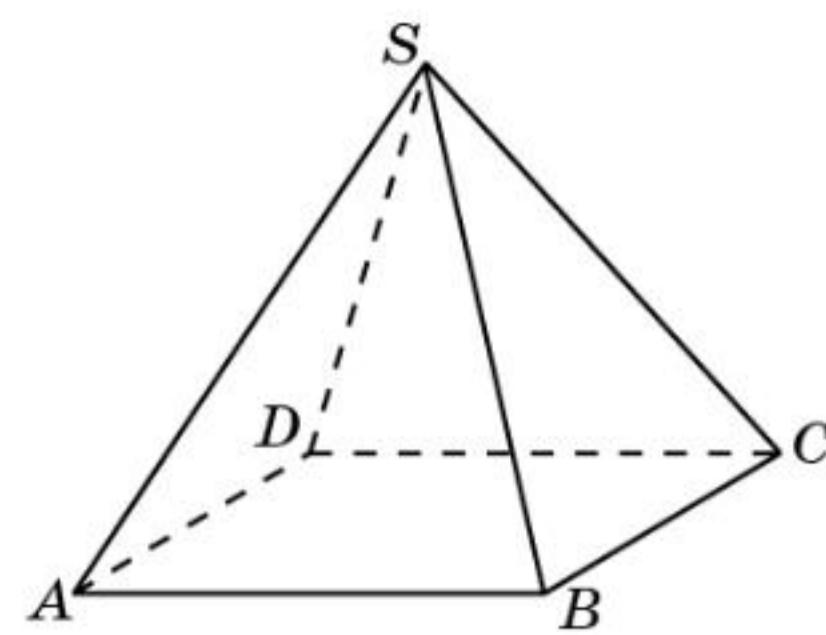
- 5.1.** Фазодаги марказий симметрик ва марказий симметрик эмас фигуналарга мисоллар келтириңг.
- 5.2.** 5.14-расмдаги кубнинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?
- 5.3.** 5.15-расмдаги муентазам тетраэдрнинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?
- 5.4.** 5.16-расмдаги муентазам учбуручакли призманинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?



5.5. 5.17-расмдаги мунтазам олтибурчакли призманинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?



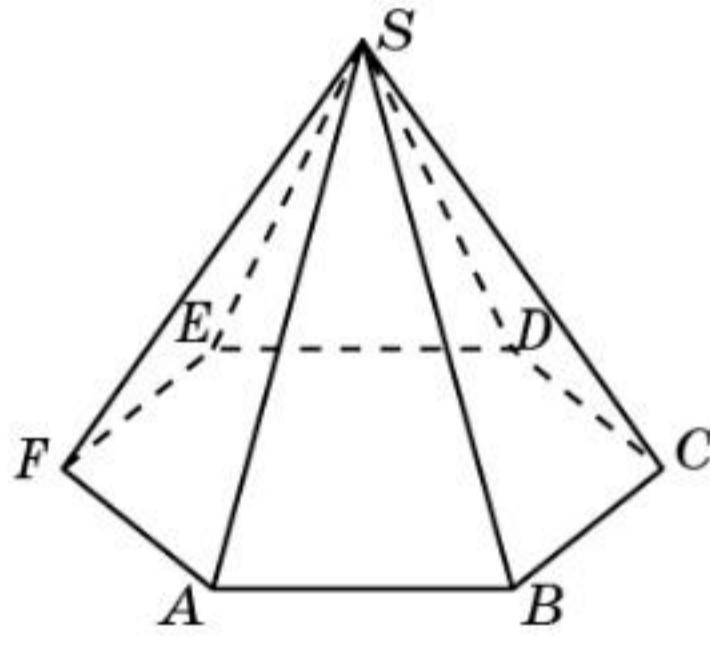
5.17-расм



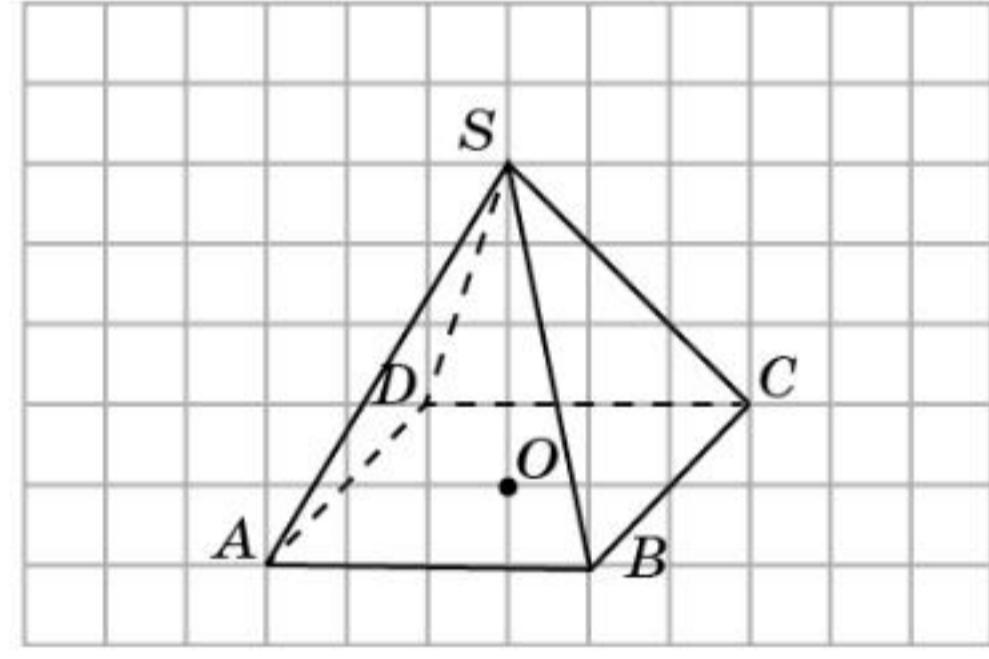
5.18-расм

5.6. 5.18-расмдаги мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?

5.7. 5.19-расмдаги мунтазам олтибурчакли пирамиданинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?



5.19-расм



5.20-расм

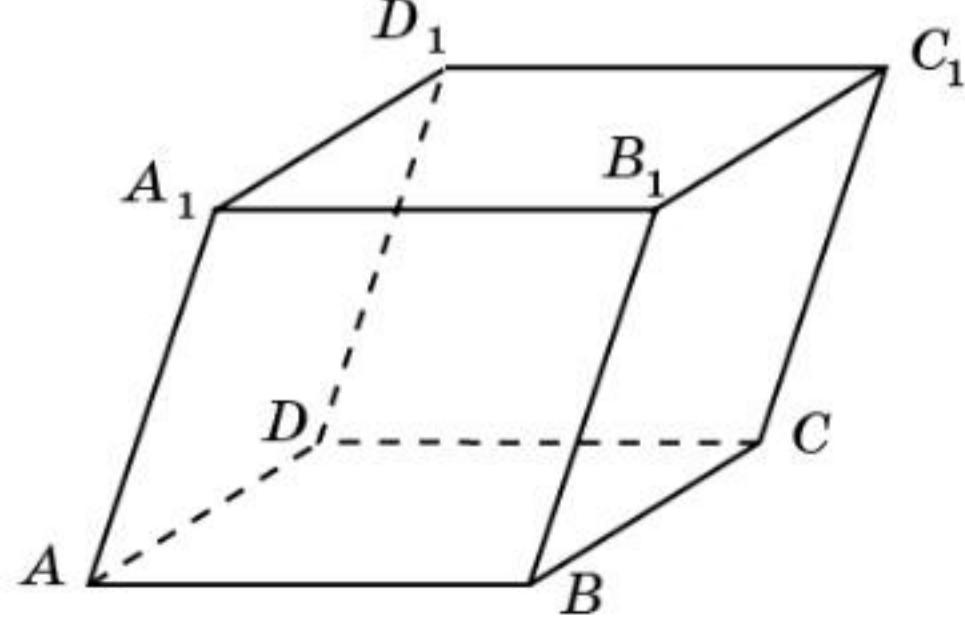
5.8. Катак қоғозда 5.20-расмдаги O нуқтасига нисбатан $SABCD$ пирамидасига симметрик пирамидани тасвирланг.

B

5.9. Параллель икки тўғри чизикдан иборат фигуналарнинг симметрия марказини кўрсатинг.

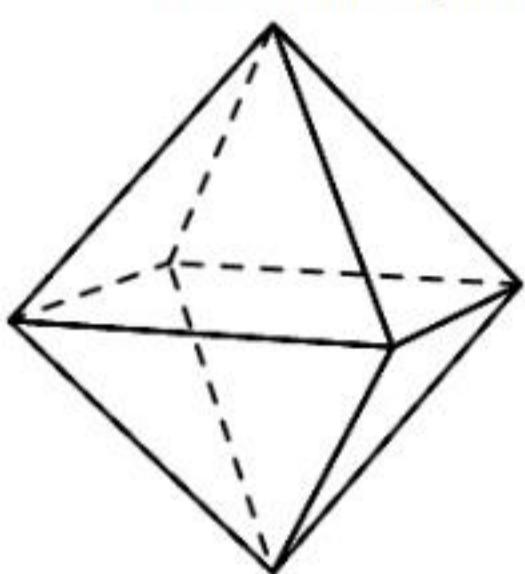
5.10. 1) Кесишувчи икки текисликдан; 2) параллел икки текисликдан иборат фигуналарнинг симметрия марказини кўрсатинг.

5.11. Оғма параллелепипеддинг симметрия маркази бўладими (5.21-расм)?

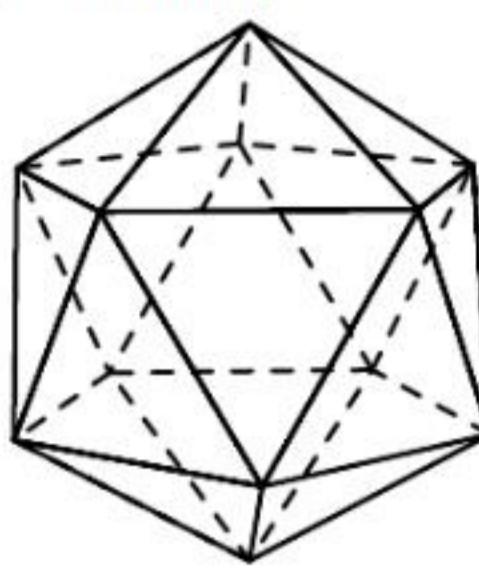


5.21-расм

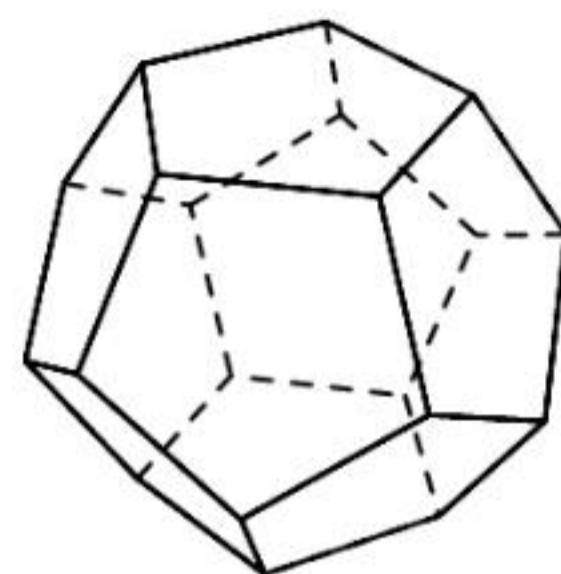
5.12. 1) Октаэдрнинг; 2) икосаэдрнинг; 3) додекаэдрнинг симметрия маркази бўладими (5.22-расм)?



а)



б)



в)

5.22-расм

5.13. Мунтазам: 1) учбуручакли призманинг (5.16-расм); 2) олтибурчакли призманинг нечта симметрия ўқи бўлади (5.17-расм)?

5.14. Мунтазам: 1) учбуручакли призманинг (5.16-расм); 2) олтибурчакли призманинг нечта симметрия текислиги бўлади (5.17-расм)?

5.15. Мунтазам: 1) тўртбурчакли пирамиданинг (5.18-расм); 2) олтибурчакли пирамиданинг нечта симметрия ўқи бўлади (5.19-расм)?

5.16. Мунтазам: 1) тўртбурчакли пирамиданинг (5.18-расм); 2) олтибурчакли пирамиданинг нечта симметрия текислиги бўлади (5.19-расм)?

C

5.17. Мунтазам: 1) n -бурчакли призманинг; 2) n -бурчакли пирамиданинг нечта симметрия ўқи бўлади?

5.18. Мунтазам: 1) n -бурчакли призманинг; 2) n -бурчакли пирамиданинг нечта симметрия текислиги бўлади?

5.19. 1) Октаэдрнинг; 2) икосаэдрнинг; 3) додекаэдрнинг нечта симметрия ўқи бўлади (5.22-расм)?

5.20. 1) Октаэдрнинг; 2) икосаэдрнинг; 3) додекаэдрнинг нечта симметрия текислиги бўлади (5.22-расм)?

5.21. Фазовий фигуранинг симметрия маркази унга тегишли бўлмаслиги мумкинми? Мисол келтиринг.

5.22. 1) Симметрия маркази бор, аммо симметрия ўқи йўқ; 2) симметрия ўқи бор, аммо симметрия маркази йўқ фазодаги фигуralарга мисол келтиринг.

5.23. 1) Симметрия маркази бор, аммо симметрия текислиги йўқ; 2) симметрия ўқи бор, аммо симметрия текислиги йўқ фазодаги фигуralарга мисол келтиринг.

5.24. 1) Симметрия текислиги бор, аммо симметрия маркази йўқ; 2) симметрия текислиги бор, аммо симметрия ўқи йўқ фазодаги фигуralарга мисол келтиринг.

Мынги мавзуның үзлаштиришга тайёрланинг

5.25. Текисликдаги буришнинг қоидасини тақрорланг.

ҰЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Қаварик күпёқнинг ҳар бир учидан учта қирраси тарқайды. Агар унинг 12 учи бор бўлса, унда унинг нечта қирраси бўлади:
A) 12; B) 16; C) 18; D) 24?
2. Қаварик күпёқнинг ҳар бир учида учта учбурчакли ёқлари бирикади. Агар унинг 4 та ёғи бор бўлса, унда унинг нечта учи бўлади:
A) 4; B) 6; C) 9; D) 12?
3. Қаварик күпёқнинг ёқлари — учбурчаклар. Агар унинг 12 та қирраси бор бўлса, унда унинг нечта ёғи бўлади:
A) 6; B) 8; C) 9; D) 12?
4. Қаварик күпёқнинг 10 та учи билан 15 та қирраси бор. Унинг нечта ёғи бўлади:
A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?
5. Қаварик күпёқнинг 6 та учи билан 5 та ёғи бор. Унинг нечта қирраси бўлади:
A) 5; B) 7; C) 9; D) 12?
6. Қаварик күпёқнинг 12 та қирраси билан 8 та ёғи бор. Унинг нечта учи бўлади:
A) 6; B) 7; C) 8; D) 9?
7. Икосаэдрнинг нечта ёғи бўлади:
A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?
8. Додекаэдрнинг нечта учи бўлади:
A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?
9. Мунтазам тетраэдр ёқларининг ўрталари қандай күпёқнинг учлари бўлади:
A) тетраэдр; B) куб; C) октаэдр; D) икосаэдр?
10. Куб ёқларининг ўрталари қандай күпёқнинг учлари бўлади:
A) тетраэдр; B) куб; C) октаэдр; D) икосаэдр?
11. Додекаэдр ёйилмасида нечта бешбурчак бўлади:
A) 8; B) 12; C) 16; D) 20?

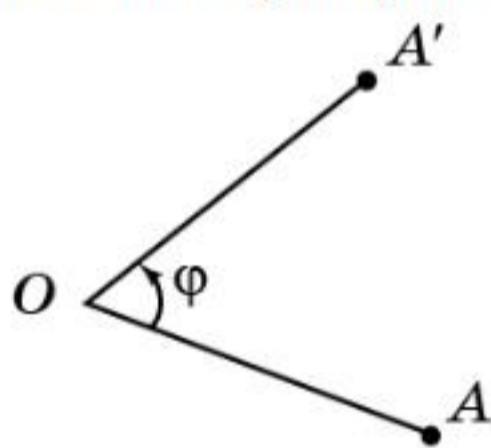
- 12.** Мунтазам тетраэдрнинг қирралари 2 см га тенг. Унинг сиртининг юзини топинг:
- A) $\sqrt{3}$ см²; B) $2\sqrt{3}$ см²; C) $3\sqrt{3}$ см²; D) $4\sqrt{3}$ см².
- 13.** Түғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи қирралари 1 см, 2 см ва 3 см. Параллелепипед сиртининг юзини топинг:
- A) 11 см²; B) 18 см²; C) 22 см²; D) 28 см².
- 14.** Мунтазам учбурчакли призманинг ён қирралари 1 см га, асосининг томонлари эса 2 см га тенг. Призма сиртининг юзини топинг:
- A) $3 + \sqrt{3}$ см²; B) $3 + 2\sqrt{3}$ см²;
C) $6 + \sqrt{3}$ см²; D) $6 + 2\sqrt{3}$ см².
- 15.** Қубнинг неча симметрия үқи бўлади:
- A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?
- 16.** Мунтазам бешбурчакли призманинг неча симметрия үқи бўлади:
- A) 5; B) 6; C) 8; D) 9?
- 17.** Мунтазам тетраэдрнинг неча симметрия текислиги бўлади:
- A) 3; B) 6; C) 8; D) 9?
- 18.** Мунтазам олтибурчакли призманинг неча симметрия текислиги бўлади:
- A) 3; B) 5; C) 7; D) 9?
- 19.** Қайнатилган тузнинг кристаллари қандай кўпёқнинг шаклини беради:
- A) куб; B) тетраэдр;
C) призма; D) октаэдр?
- 20.** Олмос кристаллари кўпинча қандай кўпёқнинг шаклини беради:
- A) куб; B) тетраэдр;
C) призма; D) октаэдр?

АЙПАНИШ ЖИСМПАРИ ВА УЛАРНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

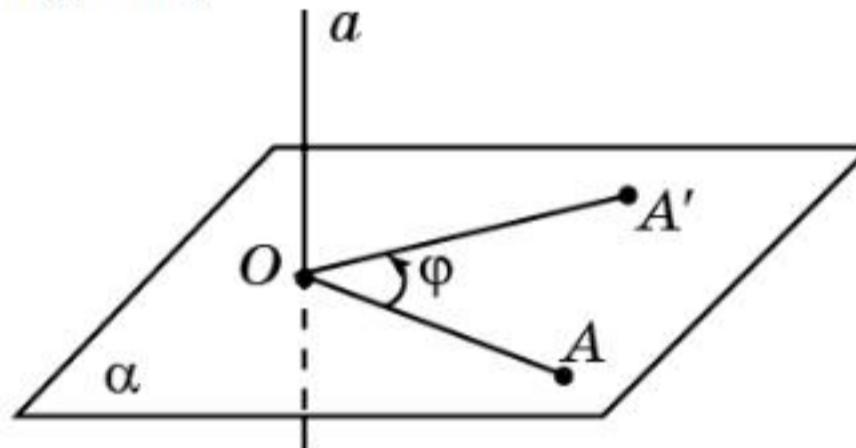
6-§. ЦИЛИНДР ВА УНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ. ЦИЛИНДРНИНГ ЁЙИЛМАСИ, ЁН ВА ТҮЛА СИРТЛАРИНИНГ ЮЗЛАРИ

Фазодаги фигуранларнинг орасида күпёклардан бошқа айланиш жисмлари деб аталадиган фигуранлар алоҳида ўрин олади.

Агар $OA' = OA$ ва $\angle A'OA = \varphi$ бўлса, унда текисликдаги A' нуқта A нуқтани О нуқтадан φ бурчакка айлантира буриш натижасида ҳосил бўлишини эсга туширайлик (6.1-расм).



6.1-расм



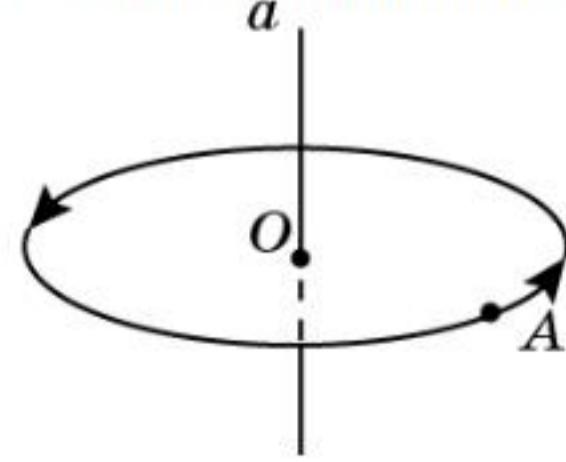
6.2-расм

Фазода a тўғри чизиғи ва шу тўғри чизиғида ётмайдиган A нуқтаси берилсин (6.2-расм). A нуқтаси орқали a тўғри чизиғига перпендикуляр а текислигини ўтказамиз ва a тўғри чизиғи билан а текислигининг кесишиш нуқтасини O деб белгилайлик. Агар а текислигидаги A' нуқтаси A нуқтасини O нуқтасидан айлантира φ бурчакка буриш натижасида ҳосил бўлса, унда фазодаги A' нуқтаси A нуқтасини O нуқтасидан айлантира φ бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинди деб айтилади.

a тўғри чизиғининг нуқталари ўрнида қолиб, қолган барча нуқталар эса шу тўғри чизик атрофида бир хил йўналишда маълум φ бурчакка буриладиган фазодаги шакл алмаштириш a тўғри чизиғи атрофида буриш ёки айланиш деб аталади. a тўғри чизиғи эса айланиш ўқи деб аталади.

Агар фазодаги Φ фигурасининг барча нуқталари F фигурасининг нуқталарини a ўқи атрофида бир хил йўналишда буриш натижасида ҳосил бўлса, унда Φ фигураси F фигурасининг a ўқи атрофида айлантириш натижасида олинди деб айтилади. Φ фигураси айланиш жисми деб аталади.

Масалан, a тўғри чизиғида ётмайдиган A нуқтасининг мана шу тўғри чизикни айлантириш натижасида маркази O нуқтаси бўладиган айлана ҳосил бўлади. O нуқтаси A нуқтаси



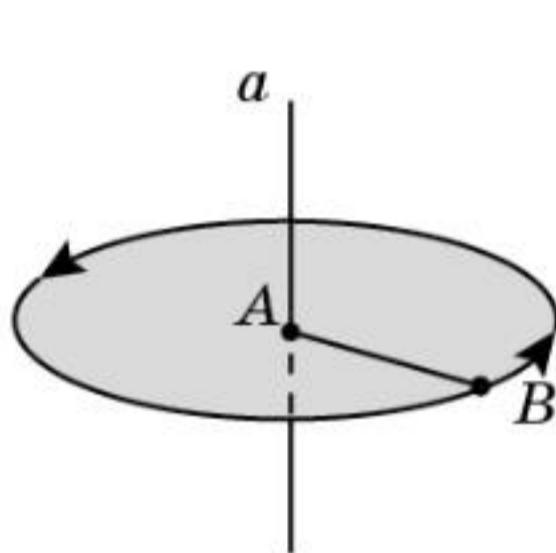
6.3-расм

орқали А үтүвчи ва a түғри чизигиға перпендикуляр текисликнинг шу a түғри чизиги билан кесишиш нұқтаси бўлади (6.3-расм).

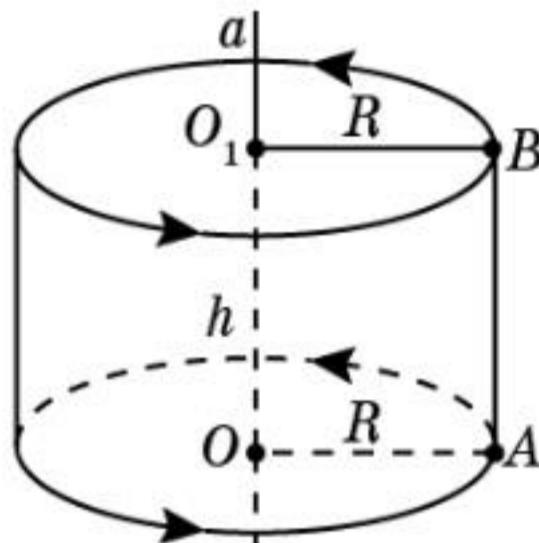
Кесманинг унга перпендикуляр ва унинг бир учи орқали үтүвчи түғри чизиқни айлантириш натижасида радиуси шу кесмага teng доира ҳосил бўлади (6.4-расм).

Цилиндр деб түғри тўртбурчакни унинг томонларидан бири атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган фигурага (жисмга) айтилади.

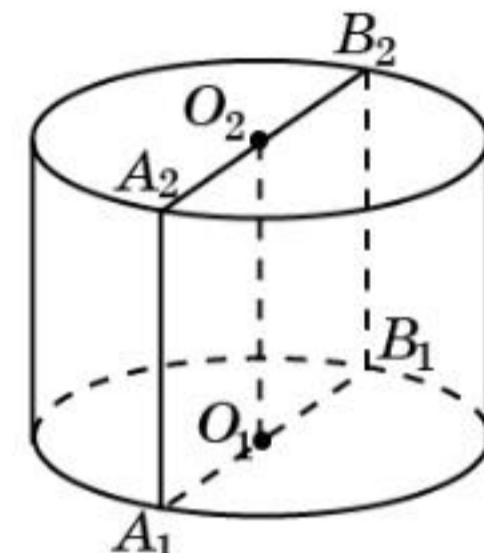
6.5-расмда AOO_1B түғри тўртбурчакни OO_1 томонини ўз ичига олган a түғри чизиги атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган цилиндр тасвириланган.



6.4-расм



6.5-расм



6.6-расм

Түғри тўртбурчакнинг OO_1 томонига перпендикуляр бўлган OA ва O_1B томонларининг айланшидан олинган доиралар *цилиндрнинг асослари*, уларнинг радиуси эса *цилиндрнинг радиуси* деб аталади.

6.5-расмда цилиндрнинг OA радиуси тасвириланган. Түғри тўртбурчакнинг OO_1 томонига параллел бўлган AB томонининг айланши натижасида ҳосил бўлган сирт *цилиндрнинг ён сирти* деб аталади. *Цилиндрнинг тўла сирти асослари* билан ён сиртидан иборат. Тўғри тўртбурчакнинг OO_1 томонига параллел бўлган AB томонининг айланши натижасида ҳосил бўлган кесмалар *цилиндрнинг ясовчиси* деб айтилади. 6.5-расмда цилиндрнинг AB ясовчиси тасвириланган.

Цилиндрнинг асос текисликлари орасидаги масофа цилиндрнинг баландлиги деб аталади. 6.5-расмда цилиндрнинг OO_1 баландлиги тасвириланган.



Цилиндрнинг баландлиги унинг ясовчинининг узунлигига teng бўлишини исботланг.

Цилиндрнинг ўқи орқали үтүвчи текислик билан кесими *цилиндрнинг ўқ кесими* деб аталади (6.6-расм).

Ўқ кесимнинг томонлари цилиндр асосларининг диаметрлари ва иккита ясовчиси ҳисобланади. 6.6-расмда $A_1A_2B_2B_1$ ўқ кесим тасвириланган.



Цилиндрнинг ўқ кесими түғри тўртбурчак бўлишини исботланг.

Цилиндрни мана шу түғри түртбурчакни унинг қарама-қарши жойлашган икки томони ўрталари орқали ўтувчи түғри чизик атрофида айлантириш орқали ҳосил қилиш мумкин.

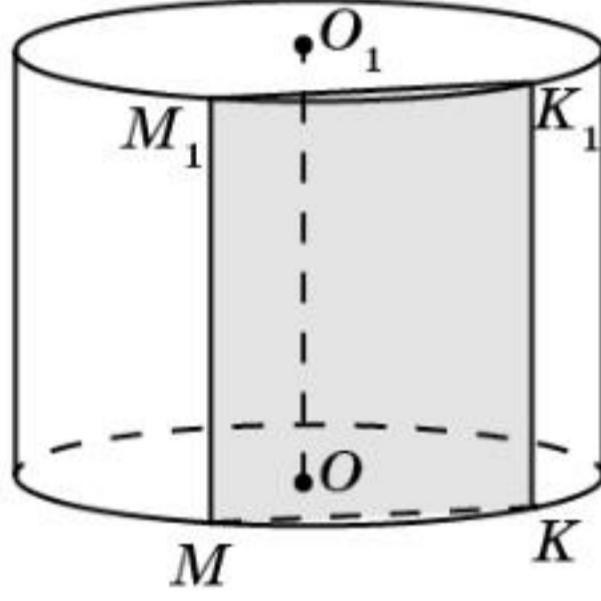


Цилиндрни түғри түртбурчакдан бошқа ёйик фигуralарни айлантириш орқали олиш мумкинми?

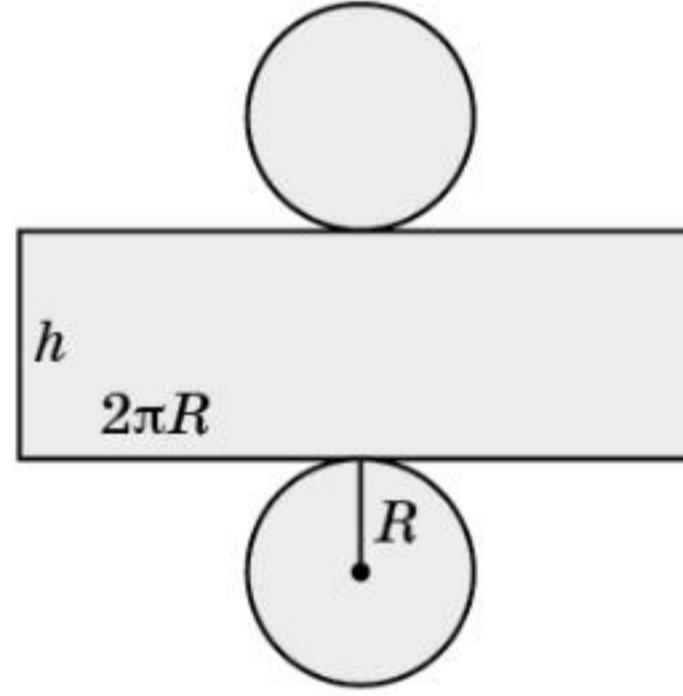
Шу билан бир қаторда кесимни цилиндрнинг ўқига параллел ўтказиш мумкин (6.7-расм). Расмда MM_1K_1K кесим OO_1 ўққа параллел ўтказилган. Бу кесим цилиндр билан унинг иккита ясовчиси орқали ўтувчи текисликнинг кесишишидан пайдо бўлади.



Ушбу кесимнинг ҳам түғри түртбурчак бўлишини исботланг.



6.7-расм



6.8-расм

Агар цилиндрнинг ён сиртини ясовчиси бўйича кесиб текисликка ёйсак ва унга асосларини қўшсак, унда цилиндрнинг ёйилмаси деб аталувчи фигура ҳосил бўлади (6.8-расм).

R цилиндрнинг тўла сиртининг юзи деб унинг ёйилмаси юзига айтилади.

Цилиндрнинг ён сиртининг юзи деб унинг ён сирти ёйилмасининг юзига айтилади. Цилиндрнинг ён сиртининг юзи асос айланасининг узунлигини унинг баландлигига кўпайтмасига teng, яъни қўйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S_{\text{ц.ён.с}} = 2\pi Rh,$$

бунда R — цилиндр асосининг радиуси, h — баландлиги.

Цилиндрнинг тўла сиртининг юзи унинг ён сирти билан икки асоси юзларининг йиғиндисига teng бўлади, яъни қўйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S_{\text{ц.т.с}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R),$$

бунда R — цилиндр асосининг радиуси, h — баландлиги.

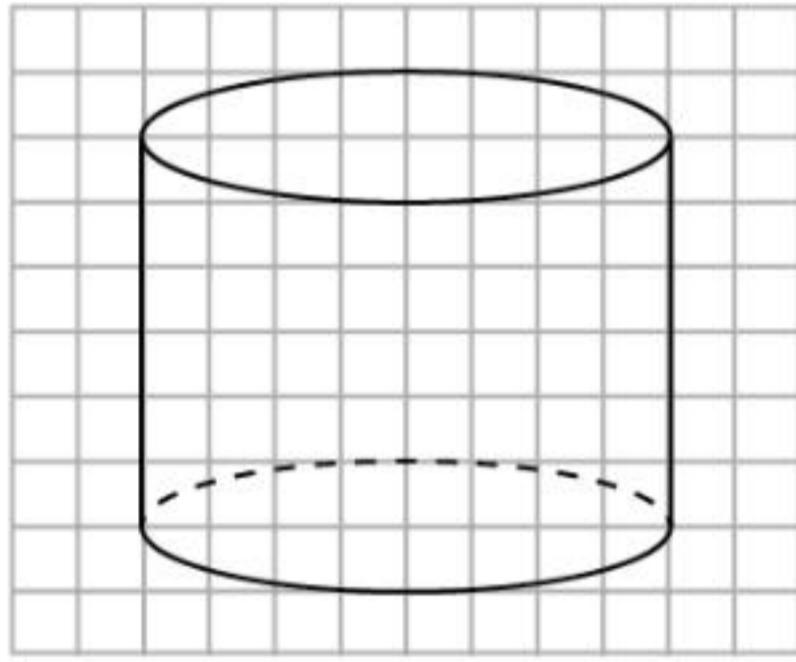
Саволлар

1. Фазодаги қандай шакл алмаштириш түғри чизик атрофида буриш деб аталади?
2. Қандай фигура айланиш фигураси деб аталади?
3. Қандай фигура цилиндр деб аталади?
4. Цилиндрнинг ўқи деганимиз нима?
5. Цилиндрнинг асослари деганимиз нима?
6. Қандай фигура цилиндрнинг ён сирти деб аталади?
7. Қандай кесмалар цилиндрнинг ясовчилари деб аталади?
8. Цилиндрнинг баландлиги деганимиз нима?
9. Цилиндрнинг ўқ кесими деганимиз нима?
10. Цилиндрнинг ёйилмаси деганимиз нима?
11. Цилиндр сиртининг юзи деганимиз нима?
12. Цилиндрнинг ён сиртининг юзи деганимиз нима?
13. Цилиндрнинг ён сиртининг юзини топиш формуласини ёзинг.
14. Цилиндрнинг тұла сиртининг юзини топиш формуласини ёзинг.

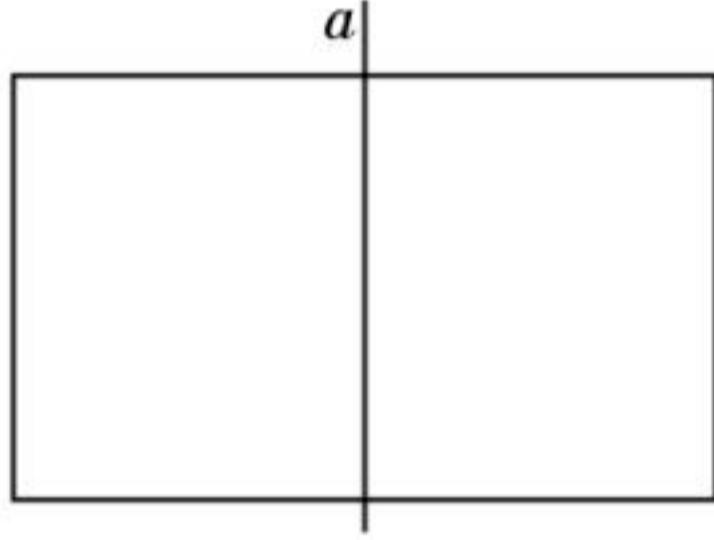
Машқлар

A

- 6.1.** Катак қоғозда 6.9-расмдагига үхашаш цилиндр чизинг. Цилиндрнинг ўқ кесимини тасвирланг.



6.9-расм



6.10-расм

a

A _____ *B*

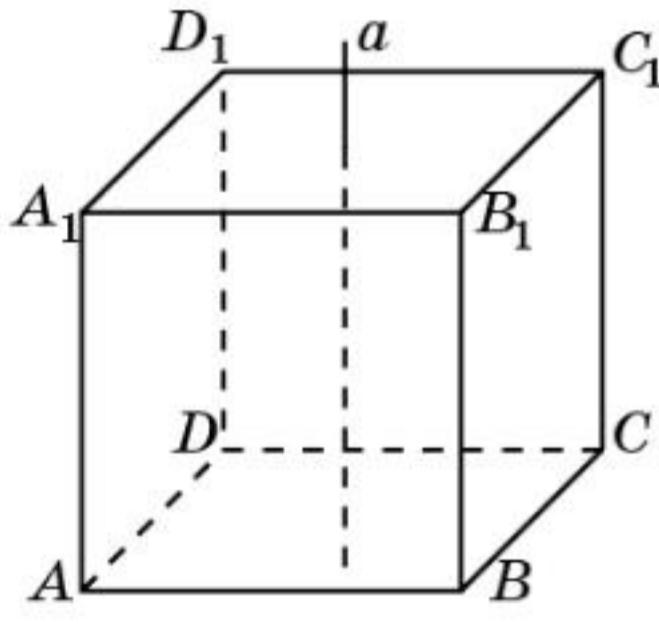
6.11-расм

- 6.2.** Цилиндрнинг қанча ясовчиси бўлади?
- 6.3.** Цилиндрнинг асослариiga параллел текислик билан кесими қандай фигура бўлади?
- 6.4.** Тўғри тўртбурчакни унинг қарама-қарши ётган икки томонининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизик атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (6.10-расм)?
- 6.5.** *AB* кесмасини шу кесма билан бир текисликда ётган, умумий нуқталари бўлмайдиган ва унга перпендикуляр бўлган тўғри чизик атрофида айлантирганида қандай фигура ҳосил бўлади (6.11-расм)?

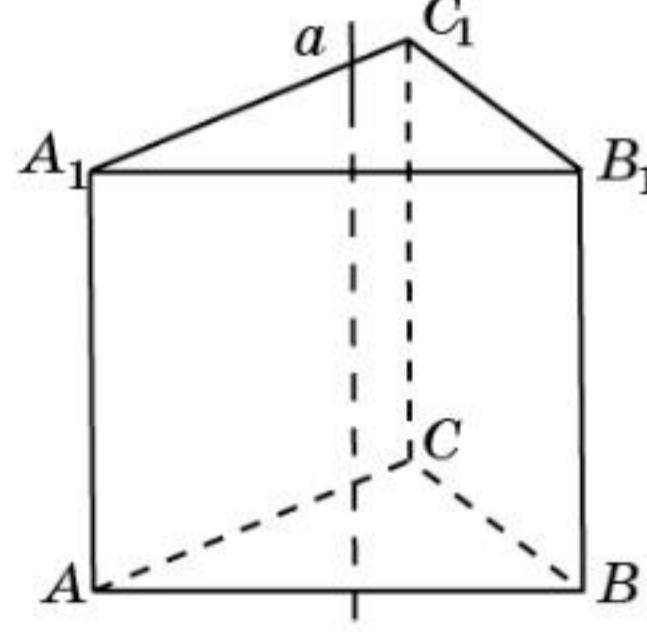
- 6.6.** Цилиндрнинг баландлиги 3 см га, асосининг радиуси эса 2 см га тенг. Унинг ўқ кесимининг диагоналини топинг.
- 6.7.** Цилиндрнинг ён сиртининг ёйилмаси — томони 1 см га тенг квадрат. Цилиндр асосининг радиусини топинг.
- 6.8.** Цилиндр асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси эса 2 см га тенг. Унинг: 1) ён сиртининг; 2) тұла сиртининг юзини топинг.

B

- 6.9.** Катак қоғозга 6.9-расмдагига ўхшаш цилиндрни чизинг. Шу цилиндрнинг асосларига параллел текислик билан кесимини тасвирланг.
- 6.10.** Катак қоғозга 6.9-расмдагига ўхшаш цилиндрни чизинг. Шу цилиндрнинг ўқига параллел текислик билан кесимини тасвирланг. У қандай фигура бўлади?
- 6.11.** Цилиндрнинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?
- 6.12.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубини: 1) AA_1 түғри чизигидан; 2) қарама-қарши ёқларининг марказларини қўшувчи түғри чизик атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (6.12-расм)?



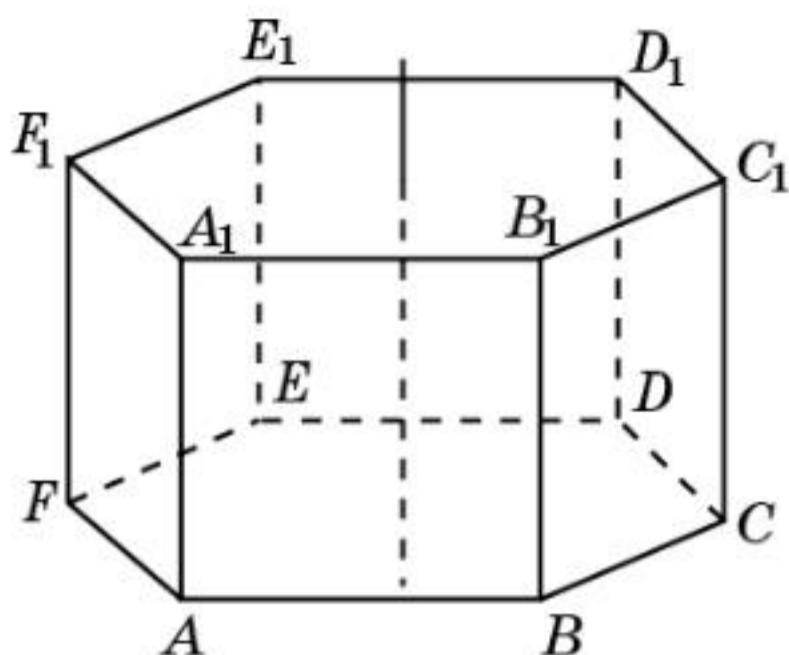
6.12-расм



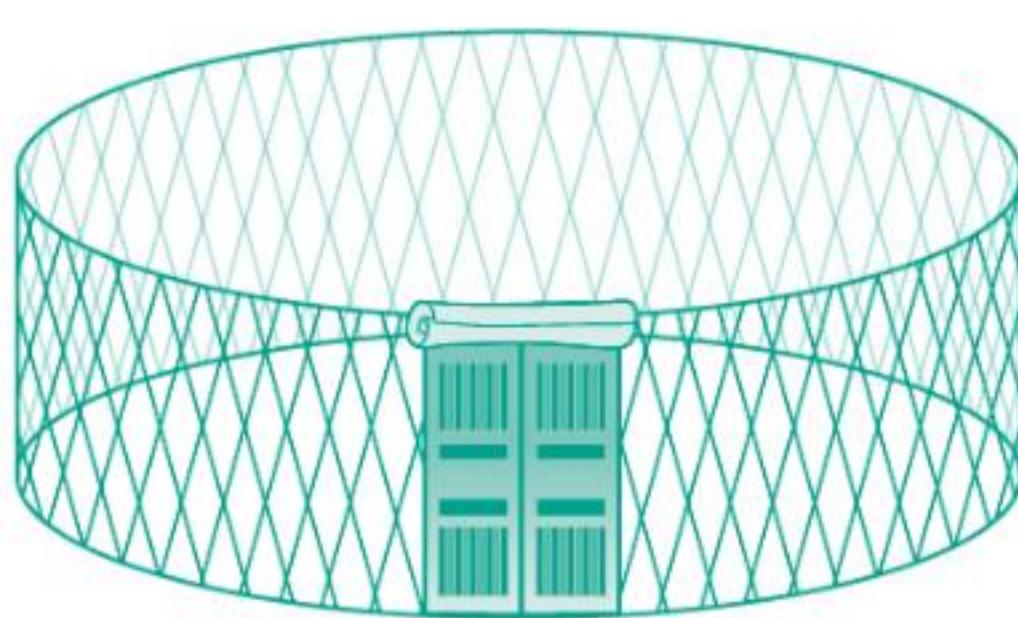
6.13-расм

- 6.13.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$, бирлик кубни: 1) AA_1 түғри чизигидан; 2) қарама-қарши ёқларининг марказларини қўшувчи түғри чизик атрофида айлантирганда ҳосил бўлган цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг.
- 6.14.** Мунтазам учурчакли призмани унинг: 1) ён қирраси орқали ўтувчи түғри чизикдан; 2) асосларининг марказлари орқали ўтувчи түғри чизик бўйича айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (6.13-расм)?
- 6.15.** Мунтазам учурчакли призманинг барча қирралари 1 см га тенг. Шу призмани унинг: 1) ён қирраси орқали ўтувчи түғри чизикдан; 2) асосларининг марказлари орқали ўтувчи түғри чизикдан айлантирганда ҳосил бўлган цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг (6.13-расм).

6.16. Мунтазам олтибурчакли призмани унинг: 1) ён қирраси ётган түғри чизиқдан; 2) асосларининг марказлари орқали ўтувчи түғри чизиқдан айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (6.14-расм)?



6.14-расм



6.15-расм

6.17. Мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 см га тенг.

Шу призмани унинг: 1) ён қирраси түғри чизиқдан; 2) асосларининг марказлари орқали ўтувчи түғри чизиқдан айлантирганда ҳосил бўлган цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг (6.14-расм).

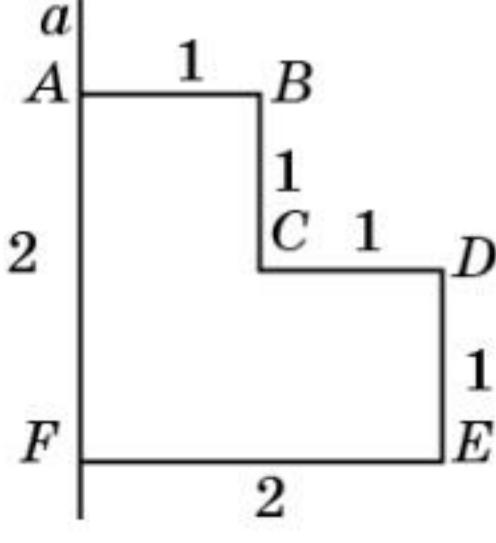
6.18. Кигиз уй — кўчманчиларнинг қадимдан келаётган уйи (6.15-расм). Баландлиги 2 м, диаметри эса 5 м бўладиган кигиз уй “керегеси” сиртининг юзини топинг.

6.19. Цилиндрнинг радиуси 6 см, баландлиги 5 см. Цилиндр ўқига параллел ва асос айланасидан 600 ли ёй ажратувчи текислик билан кесганда ҳосил бўлган кесимнинг юзини топинг.

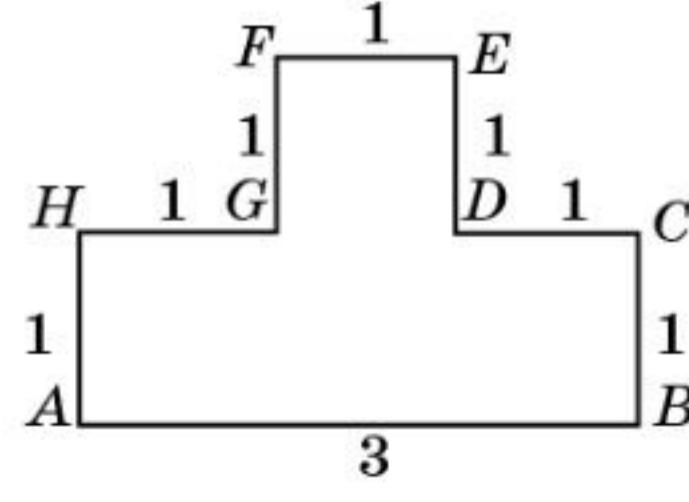
6.20. Цилиндрнинг битта ясовчиси орқали ўзаро перпендикуляр иккита кесим ўtkazilgan va уларнинг юзалари 10 см^2 ва 24 см^2 . Цилиндр ўқ кесимиининг юзини топинг.

C

6.21. 6.16-расмдаги қўшни томонлари түғри бурчак ясовчи $ABCDEF$ кўпбурчагини AF түғри чизигидан айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг.



6.16-расм

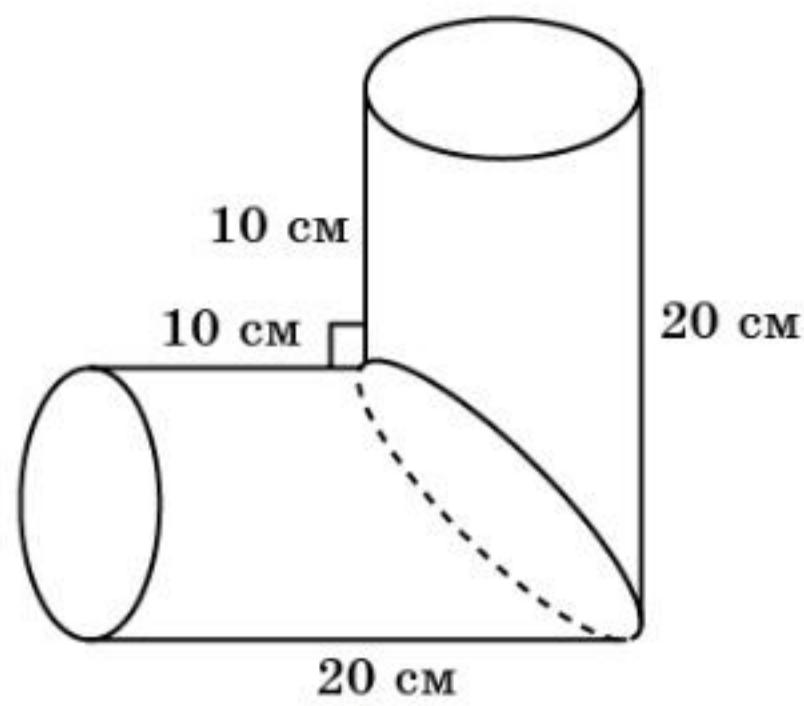


6.17-расм

6.22. 6.17-расмдаги қүшни томонлари түғри бурчак ясовчи $ABCDEFGH$ күпбурчагининг AB түғри чизигидан айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртнинг юзини топинг.

6.23. 6.17-расмдаги 90° бурчак ясовчи цилиндрларнинг иккита тенг қисмидан иборат фигура сиртнинг юзини топинг.

6.24. Цилиндрнинг ўқига параллел ва асос айланасидан A ёй кесиб туширувчи текислик ўтказилган. Ҳосил бўлган кесимнинг диагонали билан цилиндрнинг ясовчиси орасидаги бурчак b га teng. Цилиндрнинг радиуси R га teng. Кесим юзасини топинг.



6.18-расм

Янги мавзууни ўзлаштиришга тайёрланнинг

6.25. Тенг ёнли учбуручакнинг ва доиравий секторнинг қоидаларини такроланг.

7-§. Конус ва унинг элементлари. Конуснинг ёйилмаси, ён ва тўла сиртларининг юзалари

Конус деб түғри бурчакли учбуручак катетларидан бирининг атрофидаги айлантирилганида ҳосил бўладиган фигурани (жисмни) айтади.

Бизга ABO түғри бурчакли учбуручак берилсин (7.1-расм). Агар шу түғри бурчакли учбуручакни унинг AO катети орқали ўтувчи a түғри чизиги бўйлаб айлантиrsак, натижасида айланиш жисми – конусни ҳосил қиласиз.

Тўғри бурчакли учбуручакнинг AO катети *конуснинг ўқи* деб аталади.

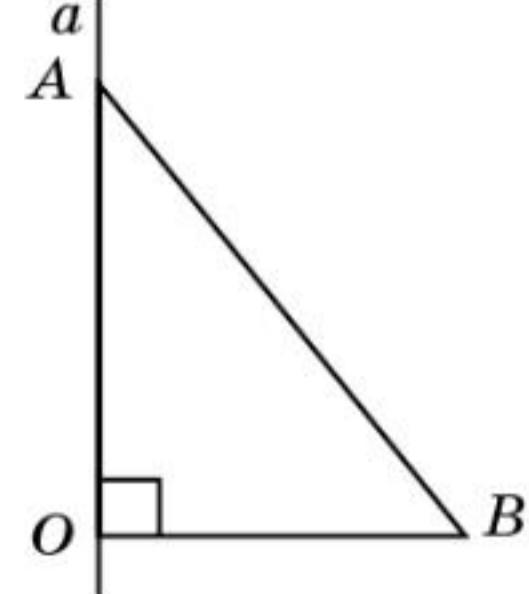
AO катетига перпендикуляр бўлган тўғри бурчакли учбуручакнинг BO томонининг айланиши натижасида ҳосил бўлган доиравий *конуснинг асоси*, унинг радиуси эса *конуснинг радиуси* деб аталади.

7.2-расмда конуснинг OB радиуси тасвиirlанган.

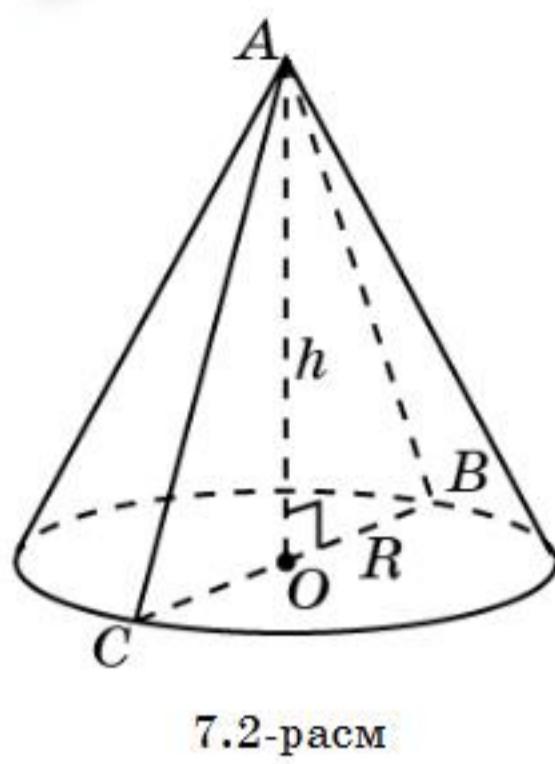
Тўғри бурчакли учбуручакнинг AB гипотенузасининг айланишидан ҳосил бўлган сирт *конуснинг ён сирти* деб аталади.

Конуснинг тўла сирти асоси билан ён сиртидан иборат.

Тўғри бурчакли учбуручакнинг AB гипотенузасининг AO катетидан айланиши натижасида ҳосил бўлган кесмалар *конуснинг ясовчиси* деб аталади.



7.1-расм



7.2-расмда конуснинг AB ва AC ясовчилари тасвириланган.

Конуснинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесмаси конуснинг ўқ кесими деб аталади (7.2-расм).

Үқ кесимнинг томонлари конус асосининг диаметри ва иккита ясовчиси ҳисобланади. 7.2-расмда CAB ўқ кесим тасвириланган.

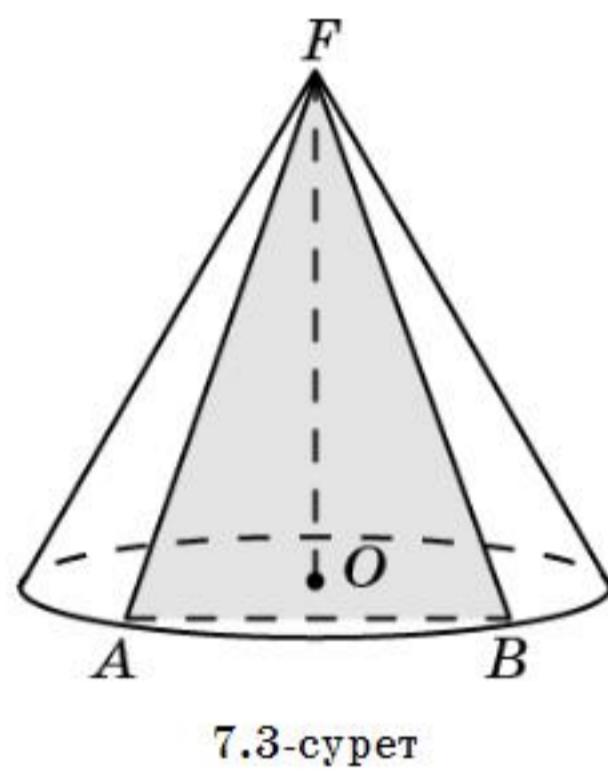


Конуснинг ўқ кесими — тенг ёнли учбұрчак, унинг асоси конус асосининг диаметри бўлишини исботланг.

Конусни шу тенг ёнли учбұрчакнинг асосига туширилган баландлиги ўтувчи түғри чизикдан айлантириш натижасида ҳосил қилиш мумкин. Тенг ёнли учбұрчакнинг асосига қарши жойлашган учи конуснинг учи деб аталади.

Конуснинг учидан унинг асос текислигига туширилган перпендикулярнинг узунлиги конуснинг баландлиги деб аталади.

7.2-расмда конуснинг AO баландлиги тасвириланган.



Қандай ўйлайсизлар, конусни түғри бурчакли әмас ва тенг ёнли әмас учбұрчакни айлантириш орқали ясашга бўладими?

Шу билан бир қаторда кесимни конуснинг учи ва асосининг ватари орқали ҳам ўтказиш мумкин (7.3-расм). Расмда AFB кесим конуснинг F учи ва асосининг AB ватари орқали ўтувчи текислик билан кесишидан ҳосил қилинган. Яъни, текислик конуснинг асосини ватар бўйича, ён сиртини эса иккита ясовчиси бўйича кесиб ўтади.



Ушбу кесимнинг ҳам тенг ёнли учбұрчак бўлишини исботланг.

Агар конуснинг ён сиртини ясовчиси бўйлаб кесиб текисликка ёйилса ва унга асосини қўшса, унда конуснинг ёйилмаси деб аталадиган фигура ҳосил бўлади (7.4-расм).

Конуснинг тўла сиртининг юзи деб унинг ёйилмасининг юзига айтилади.

Конуснинг ён сиртининг юзи деб унинг ён сиртининг ёйилмаси юзига айтилади.

Конуснинг ён сиртининг юзи унинг асоси айланаси узунлиги билан ясовчиси күпайтмасининг ярмига тенг бўлади, яъни қўйидаги формула билан аниқланади:

$$S_{\text{кон.ён.с}} = \pi R l,$$

Бу ерда R — конус асосининг радиуси l — ясовчиси.

Конуснинг тўла сиртининг юзи унинг ён сирти билан асосининг юzlари йиғиндисига тенг бўлади, яъни қўйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S_{\text{тўла}} = \pi R l + \pi R^2 = \pi R(l + R),$$

бунда R — конус асосининг радиуси, l — ясовчиси.

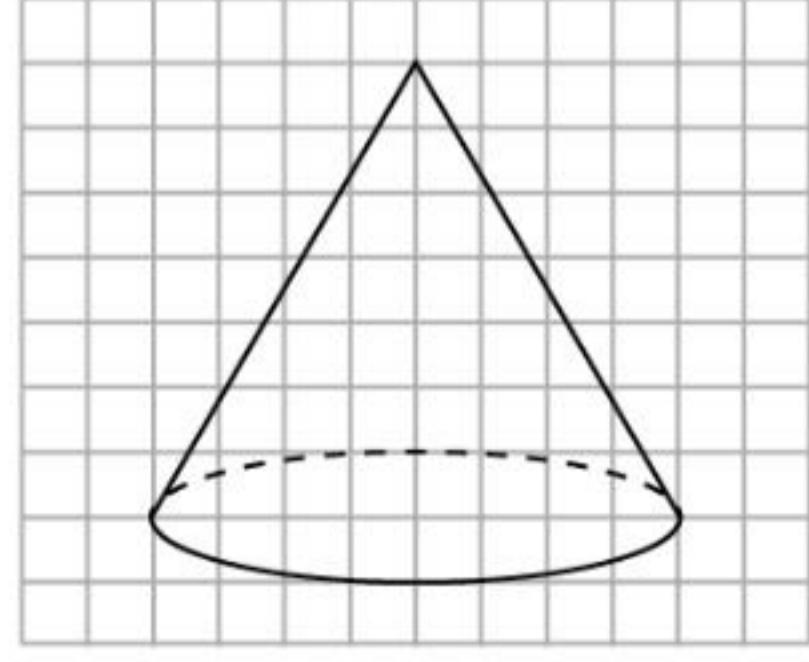
Саволлор

1. Қандай фигура конус деб аталади?
2. Конуснинг ўқи деганимиз нима?
3. Конуснинг асоси деганимиз нима?
4. Қандай фигура конуснинг ён сирти деб аталади?
5. Қандай кесмалар конуснинг ясовчилари деб аталади?
6. Конуснинг ўқ кесими деганимиз нима?
7. Конуснинг учи деганимиз нима?
8. Конуснинг баландлиги деганимиз нима?
9. Қандай фигура конуснинг ёйилмаси деб аталади?
10. Конус сиртининг юзаси деганимиз нима?
11. Конуснинг ён сиртининг юзаси деганимиз нима?
12. Конуснинг ён сиртининг юзасини топиш формуласини ёзинг.
13. Конуснинг тўла сиртининг юзасини топиш формуласини ёзинг.

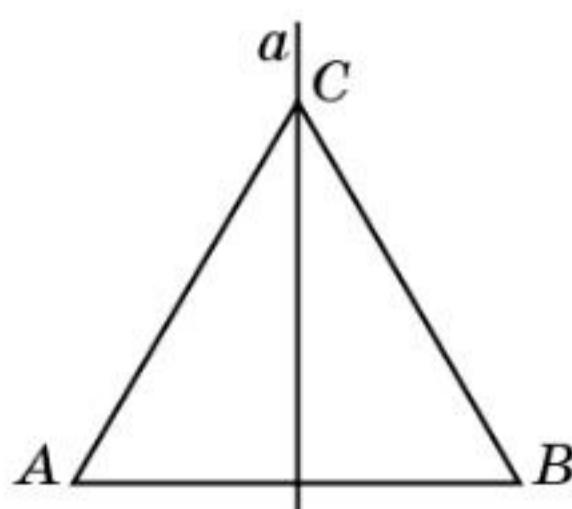
Машқлар

A

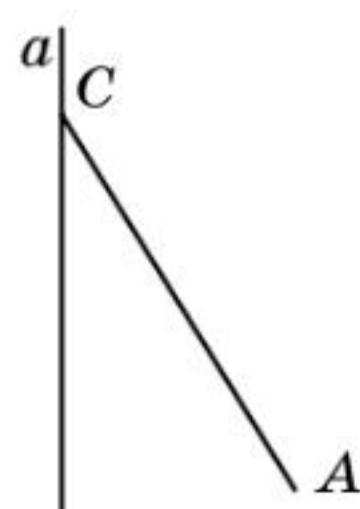
- 7.1. Катак қофозга 7.5-расмдагига ўхшаш конусни чизинг. Конуснинг ўқ кесимини тасвирланг.
- 7.2. Конуснинг қанча ясовчиси бўлади?
- 7.3. Конуснинг асосига параллел текислик билан кесими қандай фигура бўлади?
- 7.4. Тенг ёнли учбуручакни унинг асосига туширилган баландлиги ётадиган тўгри чизик бўйлаб айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.6-расм)?



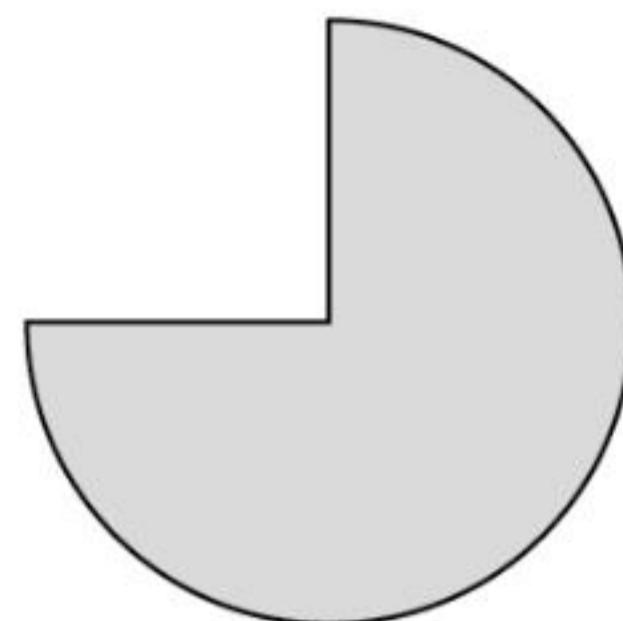
7.5-расм



7.6-расм



7.7-расм

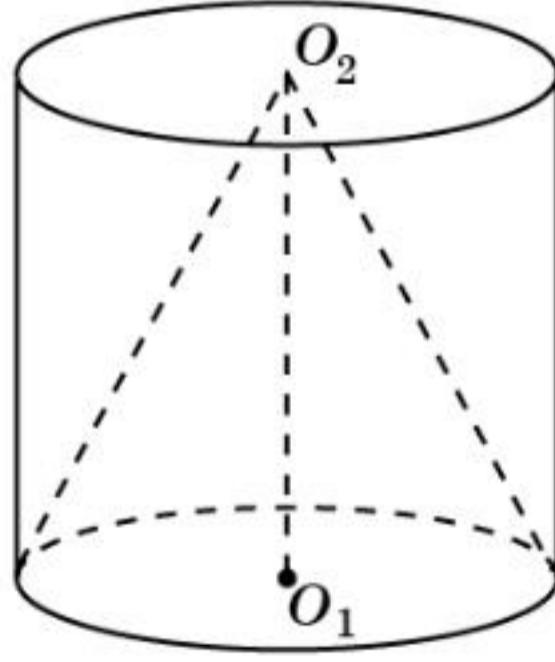


7.8-расм

- 7.5.** AC кесмасини C нүктаси орқали ўтувчи ва унга перпендикуляр бўлмаган тўғри чизик атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.7-расм)?
- 7.6.** Конус асосининг радиуси 3 см га, баландлиги эса 4 см га тeng. Конуснинг ясовчисини топинг.
- 7.7.** Конуснинг ўқ кесими — томони 10 см бўлган тeng томонли учбurchак. Конуснинг: 1) асосининг радиусини; 2) баландлигини топинг.
- 7.8.** Конуснинг ясовчиси 2 см га тeng ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясади. Конуснинг баландлигини топинг.
- 7.9.** Конуснинг ясовчиси 2 см га тeng ва у асос текислиги билан 60° бурчак ясади. Конус асосининг радиусини топинг.
- 7.10.** Конус асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси эса 2 см га тeng. Конус сиртининг юзини топинг.
- 7.11.** 7.8-расмдаги доиранинг қисми конуснинг ён сиртининг ёйилмаси бўлиши мумкинми?

В

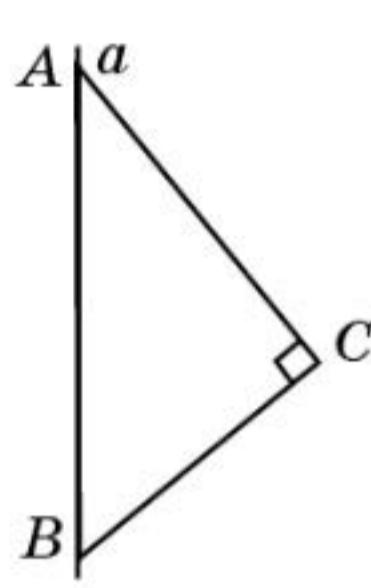
- 7.12.** Конус асосининг радиуси 1 см га тeng. Конус баландлигининг ўртаси орқали ўтувчи ва асос текислигига параллел текислик билан кесимининг юзини топинг.



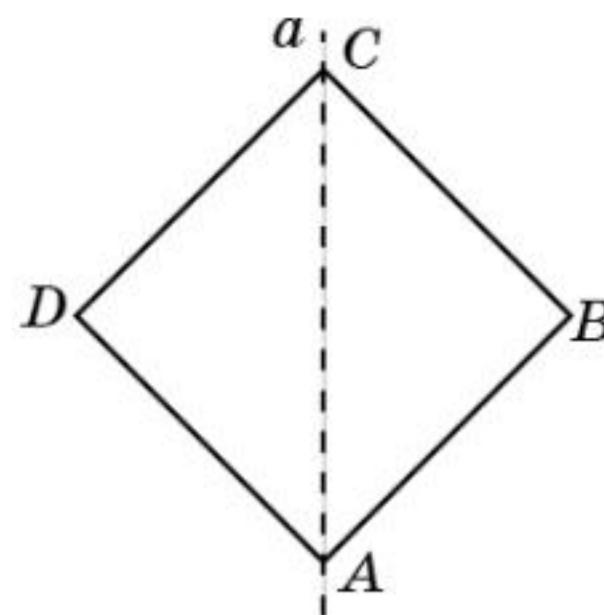
7.9-расм

- 7.13.** Цилиндр асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси эса 2 см га тeng. Асоси цилиндрнинг бир асоси, учи эса цилиндрнинг иккинчи асосининг маркази бўладиган конуснинг ён сиртининг юзини топинг (7.9-расм).
- 7.14.** Конуснинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; 3) симметрия текислиги бўладими?
- 7.15.** Тўғри бурчакли учбurchакни унинг гипотенузаси ётадиган тўғри чизик атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.10-расм)?

7.16. Бирлик квадратни унинг диагонали ётадиган түғри чизик атрофика айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.11-расм)?



7.10-расм

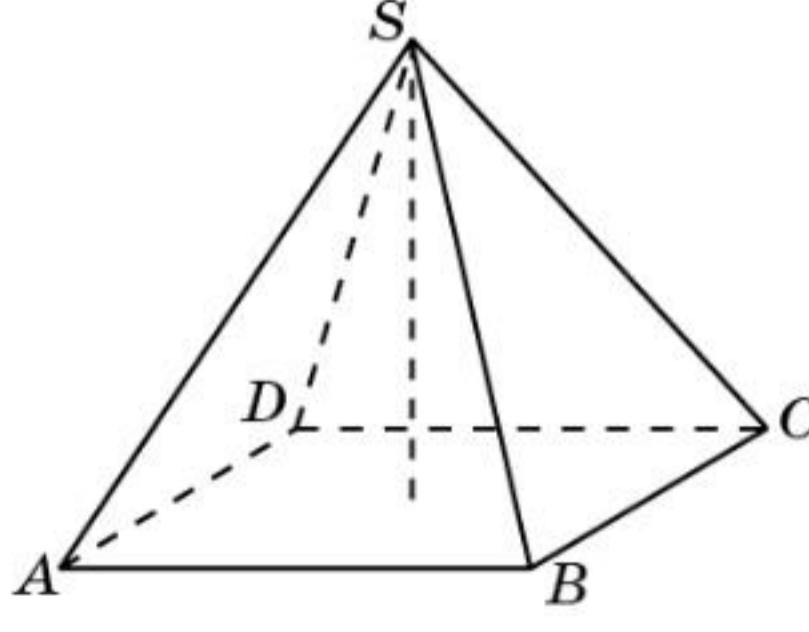


7.11-расм

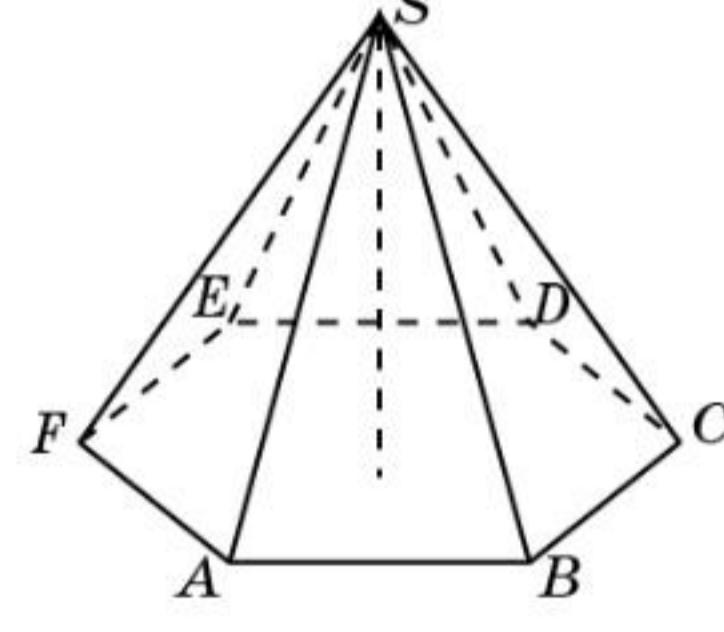
7.17. Мунтазам тўртбурчакли пирамидани унинг баландлиги ётадиган түғри чизик атрофика айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.12-расм)?

7.18. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 см га тенг. Шу пирамидани унинг баландлиги ётадиган түғри чизик атрофика айлантирганда ҳосил бўладиган конус сиртининг юзини топинг (7.12-расм).

7.19. Мунтазам олтибурчакли пирамидани унинг баландлиги ётадиган түғри чизик атрофика айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.13-расм)?



7.12-расм



7.13-расм

7.20. Асосининг томонлари 1 см га, ён қирралари эса 2 см га тенг мунтазам олтибурчакли пирамидани унинг баландлиги ётадиган түғри чизик атрофика айлантирганда ҳосил бўладиган конус сиртининг юзини топинг (7.13-расм).

7.21. Конуснинг баландлиги 4 см, асос айланасининг ватари эса 6 см га тенг ва у 90° ли ёйга тирадиган. Конуснинг уни шу ватар орқали ўтувчи текислик билан кесимини топинг.

7.22. Конуснинг баландлиги h га teng, унинг баландлиги билан ясовчиси орасидаги бурчак 60° . Конуснинг ўзаро перпендикуляр иккита ясовчиси орқали ўтувчи текислик билан кесимининг юзини топинг.

C

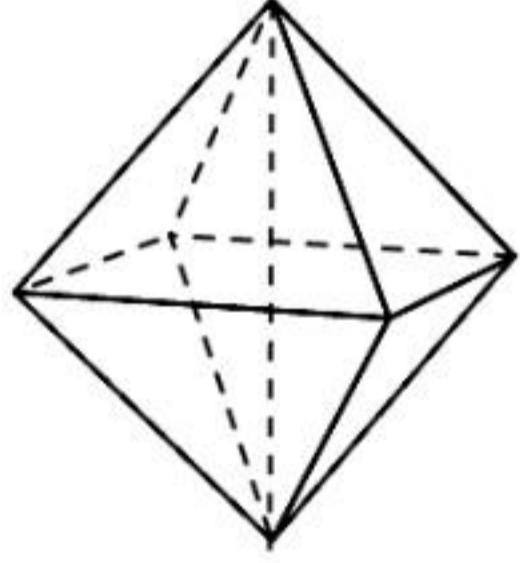
7.23. Октаэдрни унинг қарама-қарши жойлашган учларини қўшувчи тўғри чизик атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (7.14-расм). Октаэдрнинг қирраси 1 см га teng деб олиб, ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг.

7.24. Конуснинг ён сиртининг ёйилмаси — радиуси 1 см га teng яrim доира. Конус асосининг радиусини топинг.

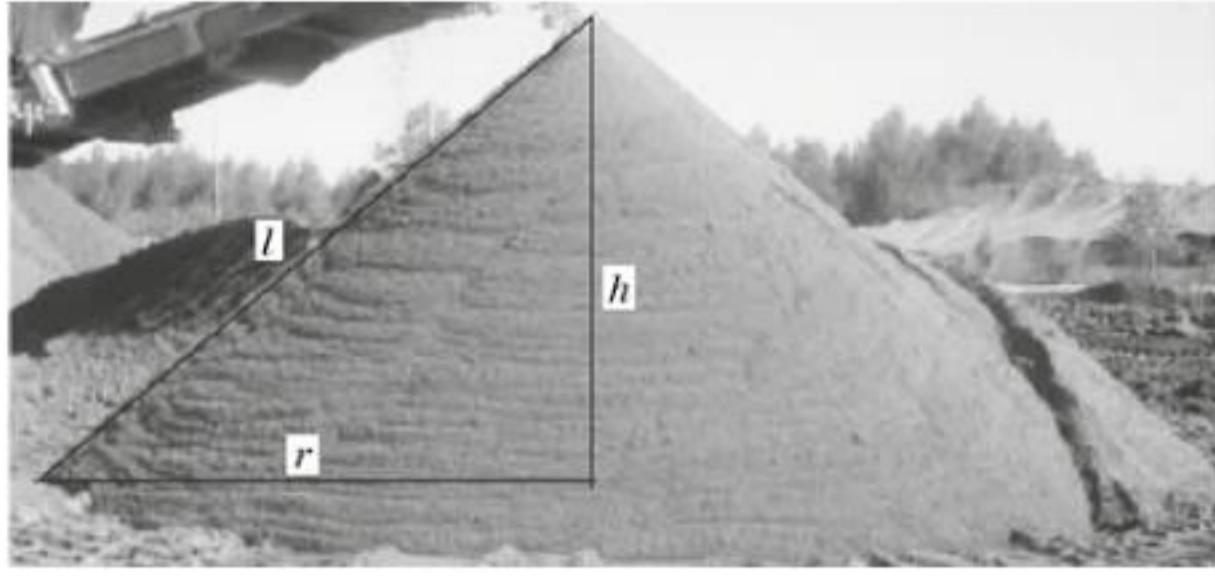
7.25. Конус асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси 3 см га teng. Конуснинг ён сиртининг ёйилмасининг марказий бурчагини топинг.

7.26. Конус шаклида йиғилган пичан тўпламини темир тунука билан ёпиш керак. Унинг баландлиги 2 м га, асосининг диаметри эса 6 м га teng. Агар барча тунука сиртининг 10% и уларни улашга кетадиган бўлса, унда пичанин ёпиш учун $0,7 \times 1,4$ ўлчамдаги қанча тунука керак бўлади ($p d 3$)?

7.27. Қурилиш майдонидаги конус шаклидаги йиғилган қумнинг асоси айланасининг узунлигини метрлик лента билан ўлчаганда 21,6 м бўлди (7.15-расм). Метрли лентани йиғилган қумнинг учи орқали ошириб отиб ўлчаганда унинг икки ясовчисининг узунлиги 7,8 м экани аниқланди. Йиғилган қум сиртининг юзини топинг ($p d 3$).



7.14-расм



7.15-расм

7.28. Малика туғилган кунига атаб қофоздан баландлиги 8 см, асосининг радиуси эса 6 см бўлган конуснинг ён сиртига ўхшаш 8 дона бош кийим ясамоқчи бўлди. Унга бош кийимларни ясаш учун қанча қофоз (см^2) керак эканлигини топинг ($p d 3$).

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

7.29. Доира ҳалқанинг қоидасини ва унинг юзини топиш формуласини такорланг.

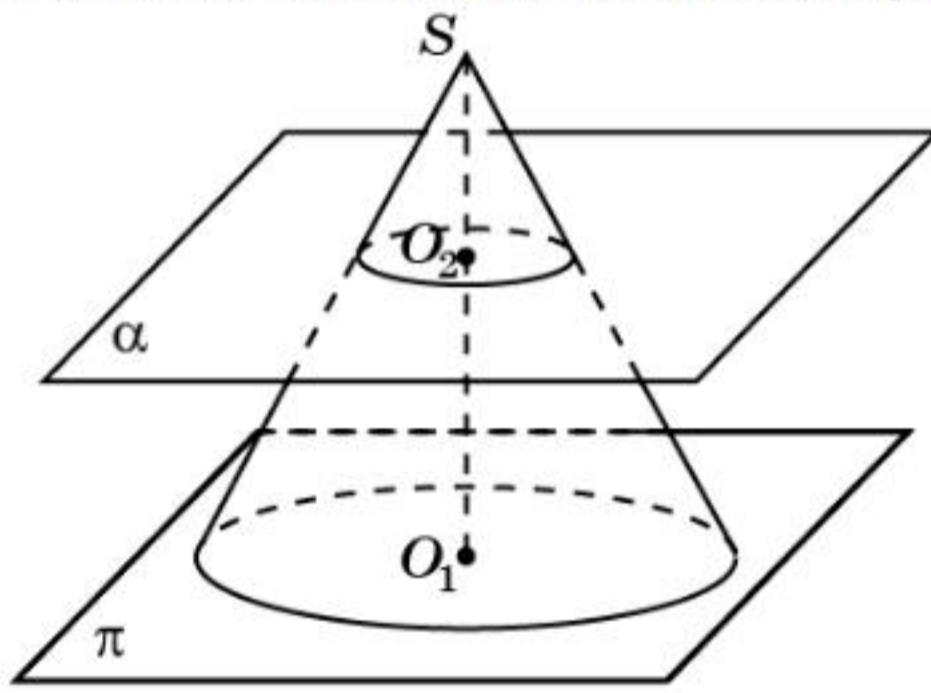
8-§. Кесик конус ва унинг элементлари.

Кесик конус сиртининг юзаси

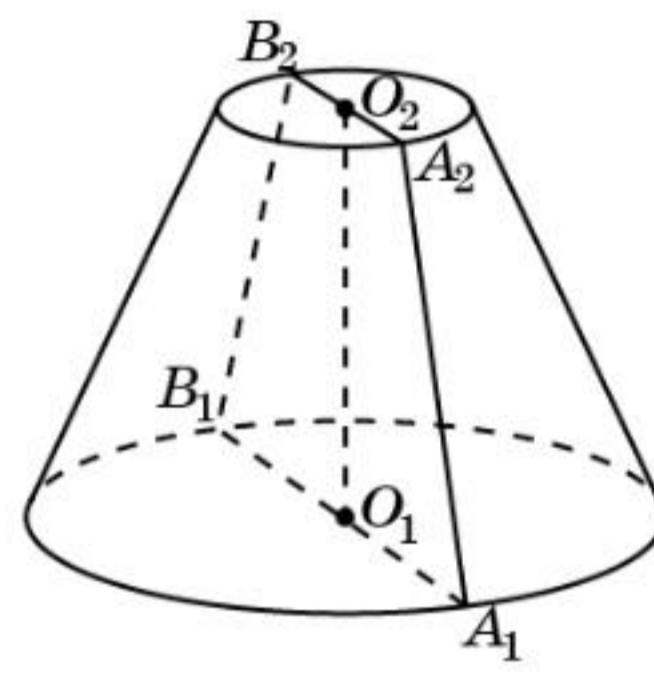
Агар конусни асос текислигига параллел текислик билан кесса, унда конуснинг шу текислик билан асос текислигининг орасидаги чегараланган қисми **кесик конус деб аталади** (8.1-расм).

Конуснинг асос текислигига параллел текислик билан кесими ҳам **кесик конуснинг асоси деб аталади**. Бинобарин, кесик конусни чегараловчи доираларни унинг **асослари деб аталади**.

Конуснинг ўқи **кесик конуснинг ўқи деб аталади**.



8.1-расм



8.2-расм

Кесик конус асосларининг орасида чегараланган конуснинг ён сиртининг қисми кесик конуснинг ён сирти деб аталади.

Кесик конус асосларининг орасида чегараланган конус ясовчиларининг кесмалари кесик конуснинг ясовчилари деб аталади.

Кесик конуснинг асос текисликлари орасидаги масофа кесик конуснинг баландлыги деб аталади.

Кесик конуснинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесими кесик конуснинг ўқ кесими деб аталади (8.2-расм).



Кесик конуснинг ўқ кесими тенг ёнли трапеция бўлишини исботланг.

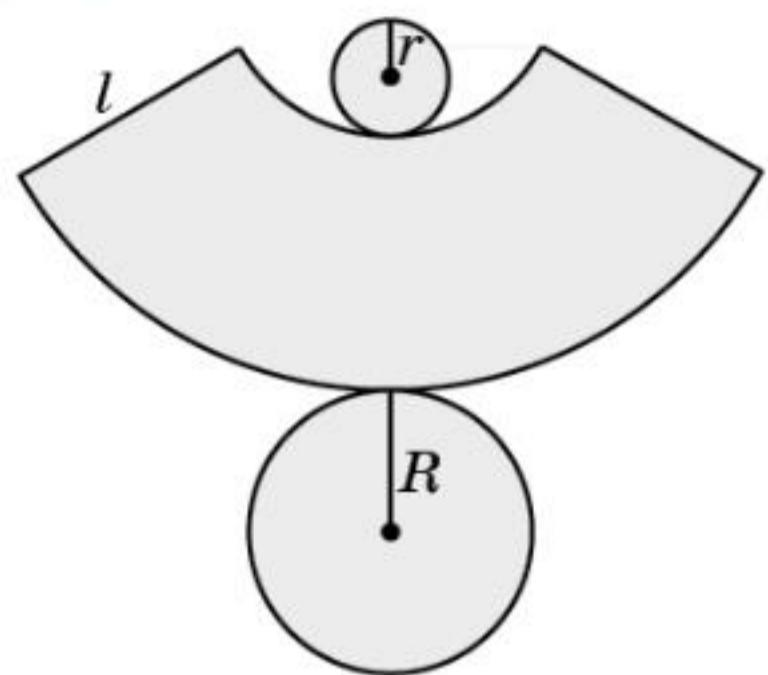
Кесик конусни шу тенг ёнли трапецияни унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизик атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилиш мумкин.



Кесик конусни тенг ёнли бўлмаган трапецияни айлантириш орқали ясаш мумкинми?

Агар кесик конуснинг ён сиртини ясовчиси бўйича кесиб текисликка ёйилса ва унга асослари қўшилса, унда кесик конуснинг ёйилмаси деб аталадиган фигура ҳосил бўлади (8.3-расм).

Кесик конус сиртининг юзи деб унинг ёйилмасининг юзига айтилади.



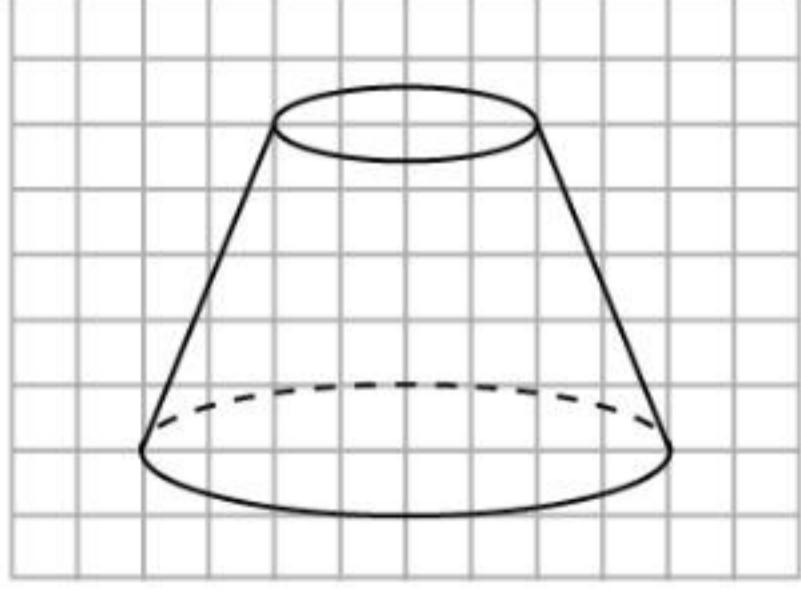
8.3-расм

Саволлар

1. Қандай фигура кесик конус деб аталади?
2. Кесик конуснинг асослари деб нимага айтамиз?
3. Кесик конуснинг баландлығы деб нимага айтамиз?
4. Кесик конуснинг үқи деганимиз нима?
5. Кесик конуснинг үқ кесими деганимиз нима?
6. Қандай фигура кесик конуснинг ёйилмаси деб аталади?
7. Кесик конус сиртининг юзаси деганимиз нима?
8. Кесик конуснинг ён сиртининг юзаси деганимиз нима?
9. Кесик конуснинг ён сиртининг юзасини топиш формуласини ёзинг.
10. Кесик конуснинг тұла сиртининг юзасини топиш формуласини ёзинг..

Машқлар

A



8.4-расм

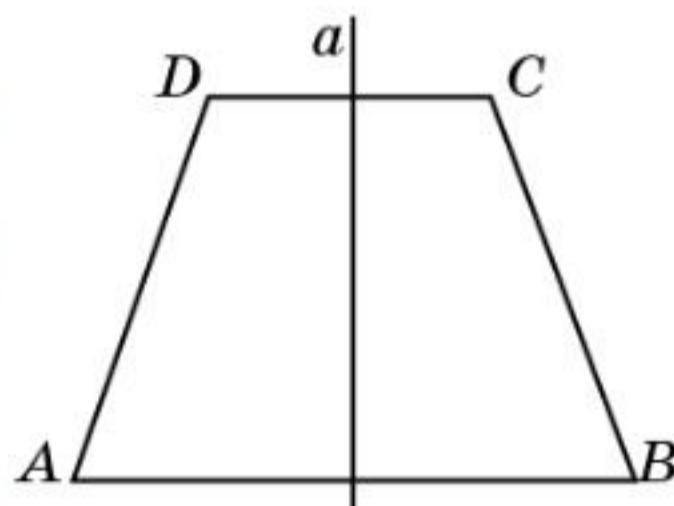
- 8.1. Катак қоғозга 8.4-расмдагига үхшаш кесик конусни ясандырыңыз. Кесик конуснинг үқ кесимини тасвирланыңыз.
- 8.2. Кесик конуснинг қанча ясовчisi бўлади?
- 8.3. Кесик конуснинг асосига параллел текислик билан кесими қандай фигура бўлади?
- 8.4. Тенг ёнли трапецияни унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи түғри чизик атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (8.5-расм)?

- 8.5. BC кесмасини шу кесма билан бир текисликда ўтувчи, умумий нуқтаси бўлмаган ва унга параллел ҳам, перпендикуляр ҳам

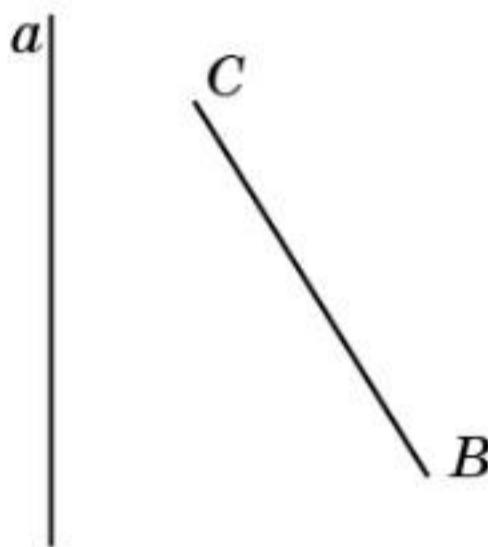
бүлмаган тұғри чизик атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (8.6-расм)?

- 8.6.** Кесик конус асосларининг радиуслари 6 см ва 2 см, баландлиги эса 3 см га teng. Кесик конуснинг ясовчисини топинг.

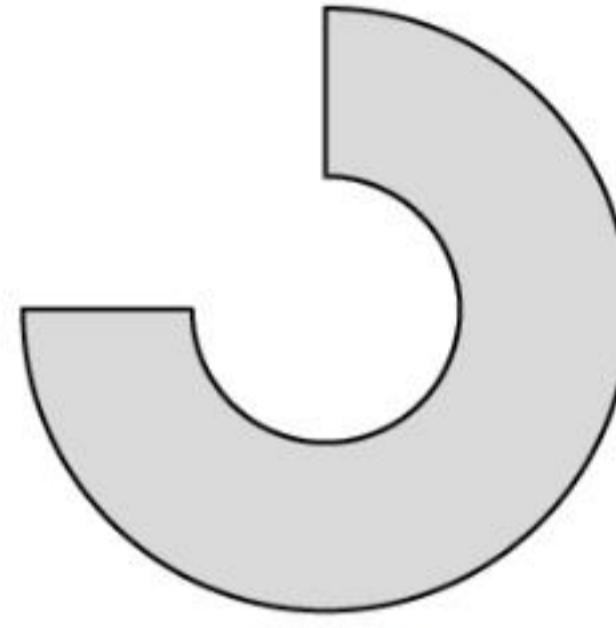
- 8.7.** Кесик конус асосларининг радиуслари 6 см ва 2 см, ясовчиси эса 5 см га teng. Кесик конус сиртининг юзини топинг.



8.5-расм



8.6-расм

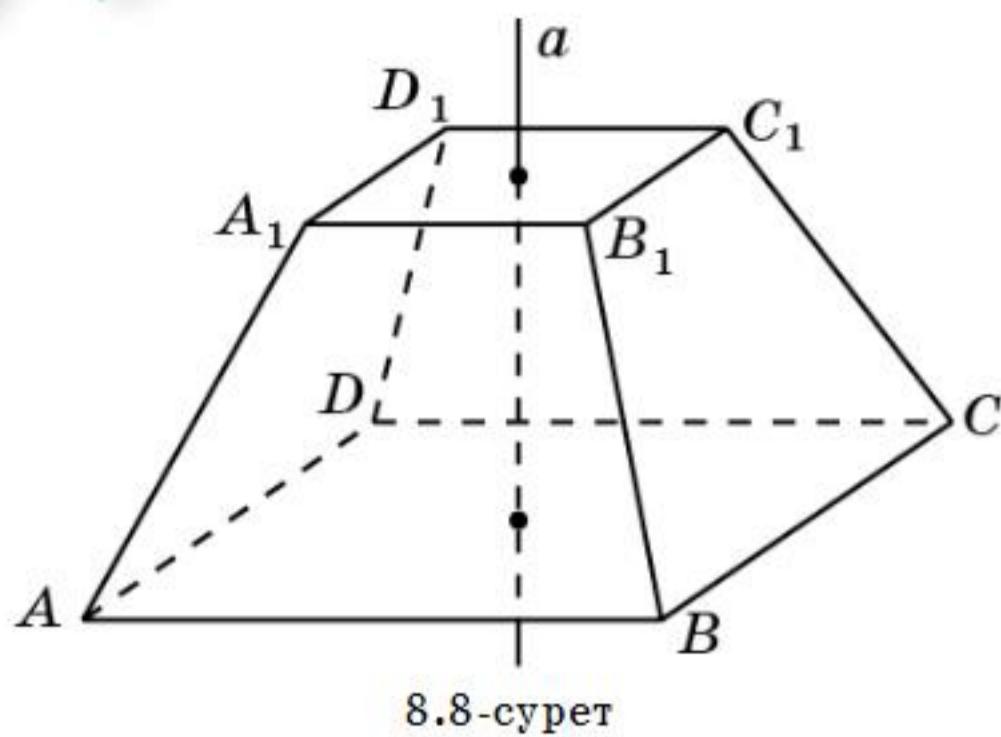


8.7-расм

- 8.8.** 8.7-расмдаги доиранинг қисми кесик конуснинг ён сиртининг ёйилмаси бўладими?

В

- 8.9.** Катак қофозга 8.4-расмдагига ўхшаш кесик конусни ясанг. Шу конуснинг ўқига параллел бўладиган ва асослари билан кесишуви текислик билан кесимини тасвирланг.
- 8.10.** Кесик конус асосларининг радиуслари 2 см ва 4 см. Кесик конус баландлигининг ўртаси орқали асос текислигига параллел бўлган текислик билан кесимининг юзини топинг.
- 8.11.** Кесик конуснинг: 1) симметрия маркази; 2) симметрия ўқи; симметрия текислиги бўладими?
- 8.12.** Кесик конуснинг ясовчиси 2 см га teng ва у асос текислигига 30° бурчак остида оғади. Кесик конуснинг баландлигини топинг.
- 8.13.** Кесик конуснинг ясовчиси 2 см га teng ва у асос текислигига 60° бурчак остида оғади. Кесик конуснинг кичик асосининг радиуси 1 см га teng бўлса, катта асосининг радиусини топинг.
- 8.14.** Тeng ёнли трапециянинг асослари 1 см ва 2 см, ён томонлари эса 2 см. Шу трапецияни унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи тұғри чизик атрофида айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг.



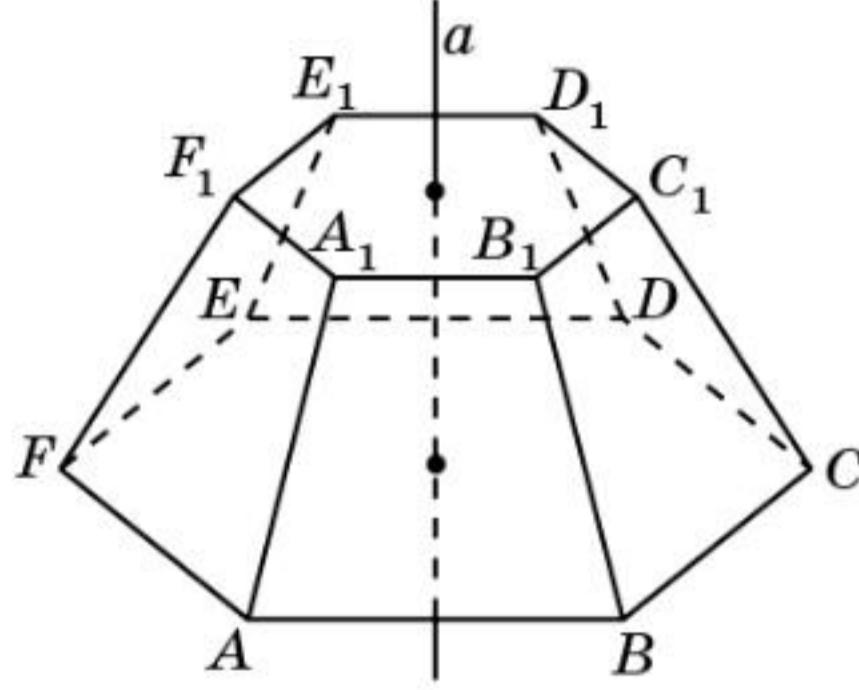
8.15. Мунтазам түртбурчакли кесик пирамидани унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи түғри чизик атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (8.8-расм)?

8.16. Мунтазам түртбурчакли кесик пирамида асосларининг томонлари 4 см ва 2 см, ён қирралари эса 3 см га тенг. Шу пирамидани унинг

асосларининг ўрталари орқали ўтувчи түғри чизик атрофида айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг (8.8-расм)?

8.17. Мунтазам олтибурчакли кесик пирамидани унинг асосларининг ўрталари орқали ўтувчи түғри чизик атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (8.9-расм)?

8.18. Мунтазам олтибурчакли кесик пирамида асосларининг томонлари 2 см ва 1 см, ён қирралари эса 3 см га тенг. Шу пирамидани унинг асосларининг маркази орқали ўтувчи түғри чизик атрофида айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг тўла сиртининг юзини топинг (8.9-расм).

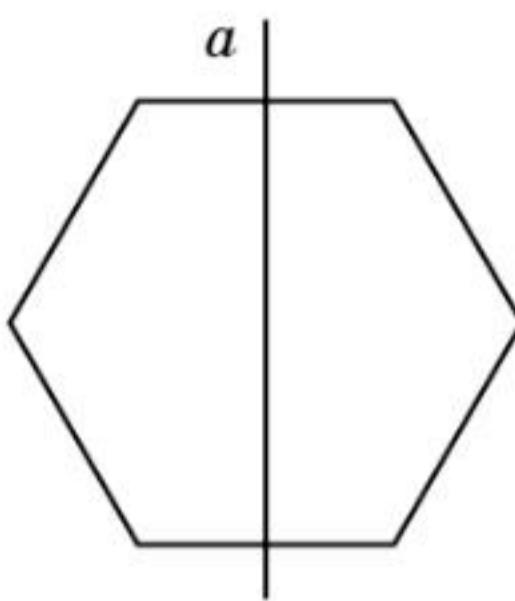


8.19. Кесик конус шаклидаги кигиз уй тундиги асосларининг диаметрлари 5 м ва 1 м, баландлиги эса 2 м га тенг (8.10-расм). Кигиз уй гумбазининг ён сиртининг юзини топинг.

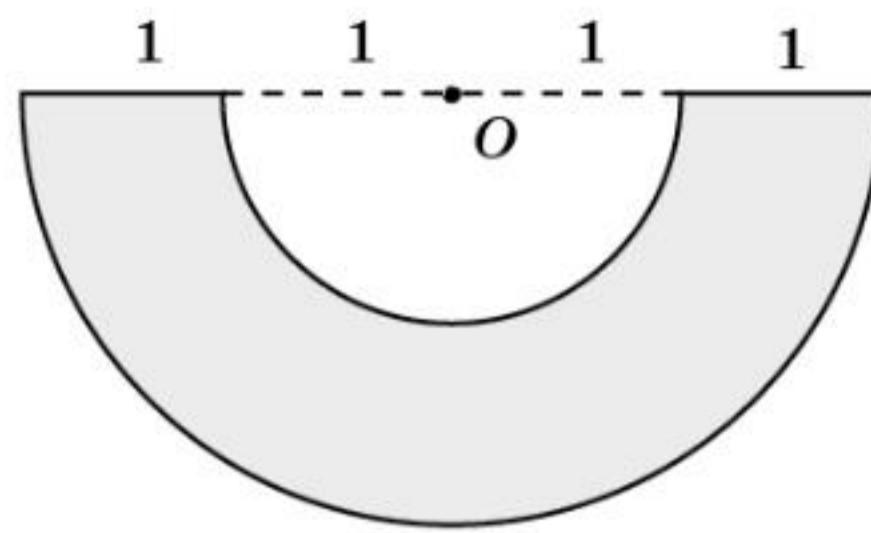
C

8.20. Мунтазам олтибурчакни унинг қарама-қарши ётган томонларининг ўрталари орқали ўтувчи түғри чизик атрофида айлантирганда қандай фигура ҳосил бўлади (8.11-расм)? Мунтазам олтибурчак-

нинг томонлари 1 см га teng бўлса, хосил бўлган фигура сиртиning юзини топинг.



8.11-расм



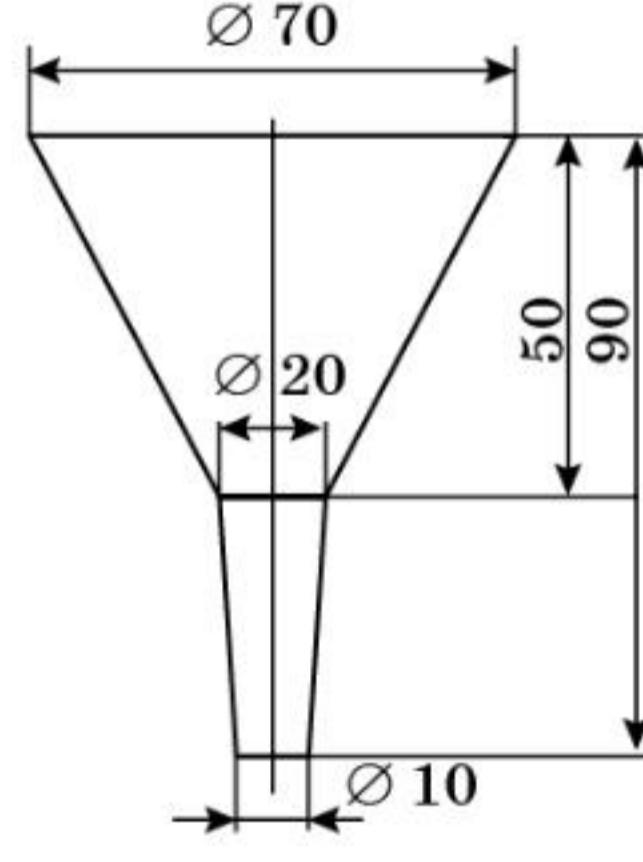
8.12-расм

8.21. 8.12-расмда айланаларининг радиуслари 1 см ва 2 см бўлган доираий ҳалқанинг ярими — кесик конуснинг ён сиртиning ёйилмаси тасвирланган. Кесик конус асосларининг радиусларини топинг.

8.22. Кесик конус шаклидаги чеканнинг ич-сиртини бўяш керак. Унинг асосларининг диаметрлари 30 см ва 20 см, ясовчиси эса 30 см га teng. Агар бўёқнинг ўртача сарфланиши 1 m^2 га 300 г бўлса, унда бу ишни бажариш учун қанча бўёқ керак бўлади?

8.23. 8.13-расмда темир тунукадан ясалган суюқлик қўйиладиган асбобнинг ўлчамлари миллиметрда кўрсатилган. Агар барча тунука сиртиning 10% и уларни бириктиришга кетадиган бўлса, унда суюқлик қўйиладиган асбобни тайёрлаш учун қанча квадрат дециметр тунука керак бўлади?

8.24. Кесик конус шаклидаги чекни темиртунукадан ясаш керак. Унинг асослари нинг диаметрлари 28 см ва 20 см, баландлиги эса 24 см га teng. Бириктиришга кетадиган тунукани ҳисобга олмаганда чеканнинг ён сирти ёйилмасининг ўлчамлари қандай бўлади?



8.13-расм

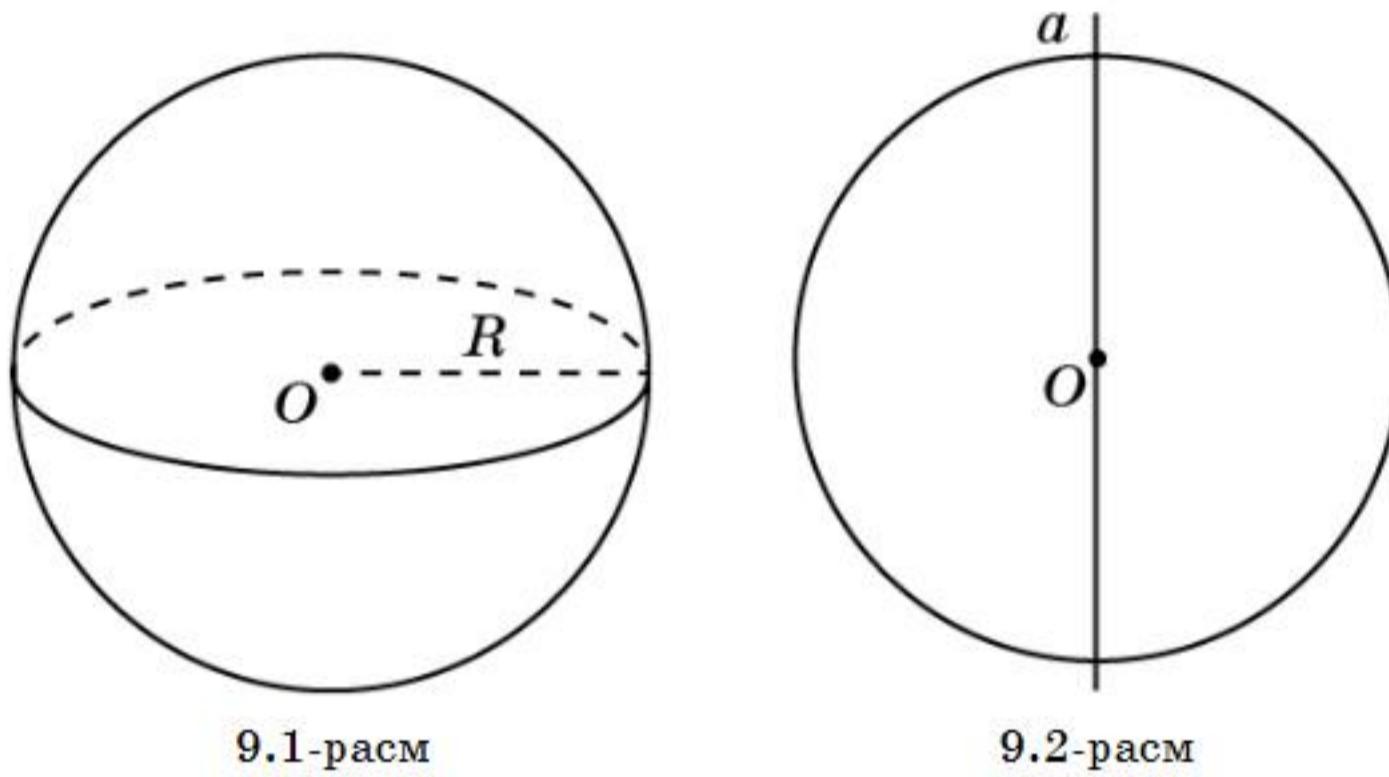
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

8.25. Айлананинг, доиранинг ва уларнинг элементларининг таърифларини, айланага ўtkazилган уринманинг таърифини ва айлана билан тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашиши ҳолларини такрорланг.

9-§. Сфера ва шар

Сфера ва шар — текислиқдаги мос равища айлана билан доиранинг фазовий аналоглари бўлиб ҳисобланади.

Берилган нуқтадан маълум узоқликда жойлашган фазонинг барча нуқталаридан иборат фигура сфера деб аталади (9.1-расм).



Берилган нуқта *сферанинг маркази*, берилган масофа *сферанинг радиуси* деб аталади.

Сферанинг марказини унинг қандайдир бир нуқтаси билан туташтирувчи кесма *сферанинг радиуси* деб атайди.

Бинобарин, маркази O нуқтаси ва радиуси R бўлган сфера шу нуқтасидан узоқлиги R га teng бўлган фазонинг барча нуқталаридан иборат геометрик фигуруни ташкил этади.

Сферада жойлашган ихтиёрий икки нуқтани туташтирувчи кесма *сферанинг ватари* деб аталади. Сферанинг марказидан ўтувчи ватар шу *сферанинг диаметри* бўлади.

Сферанинг марказидан ўтувчи текислик билан кесими *катта доираси* бўлади.

Сферани мана шу доирани унинг диаметри ётган тўғри чизик атрофига айлантириш натижасида ҳосил қилиш мумкин (9.2-расм).

Берилган нуқтадан маълум узоқликдан ошмайдиган фазонинг барча нуқталаридан иборат фигура *шар* деб аталади.

Берилган нуқта *шарнинг маркази*, берилган масофа эса *шарнинг радиуси* деб аталади.

Шарнинг марказини унинг сиртида ётадиган қандайдир бир нуқтаси билан туташтирувчи кесмани ҳам *шарнинг радиуси* деб аталади.

Бинобарин, маркази O нуқтаси ва радиуси R бўлган шар шу нуқтадан узоқлиги R дан ошмайдиган фазонинг барча нуқталаридан иборат геометрик фигуруни ташкил этади.

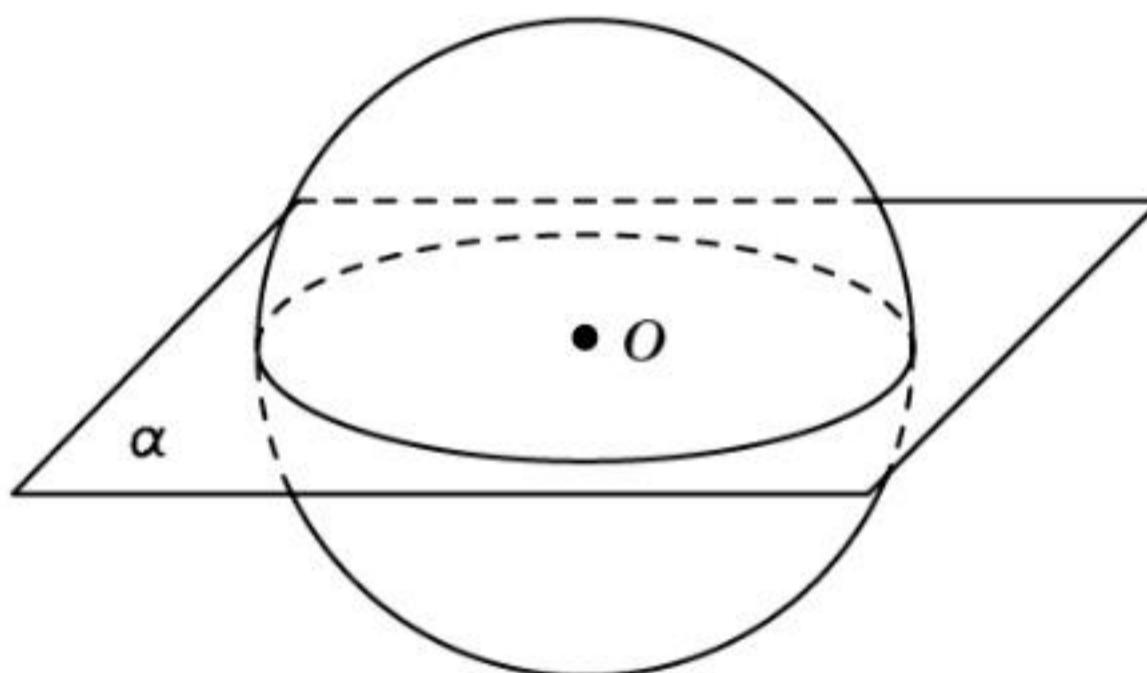
Шарнинг сиртида жойлашган ихтиёрий икки нүктани туташтирувчи кесма шу *шарнинг ватари* деб аталади. Шарнинг маркази орқали ўтувчи ватар шу *шарнинг диаметри*, шарнинг маркази орқали ўтувчи текислик билан кесими *катта доира* бўлади.

Шарни шу доирани унинг диаметри ётган тўғри чизик атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилиш мумкин.

Берилган шарнинг маркази билан ва радиуси билан бир хил бўладиган сфера шу *шарнинг сирти* деб аталади.

Сфера билан текисликнинг ўзаро жойлашиш ҳолларини кўриб чиқайлик.

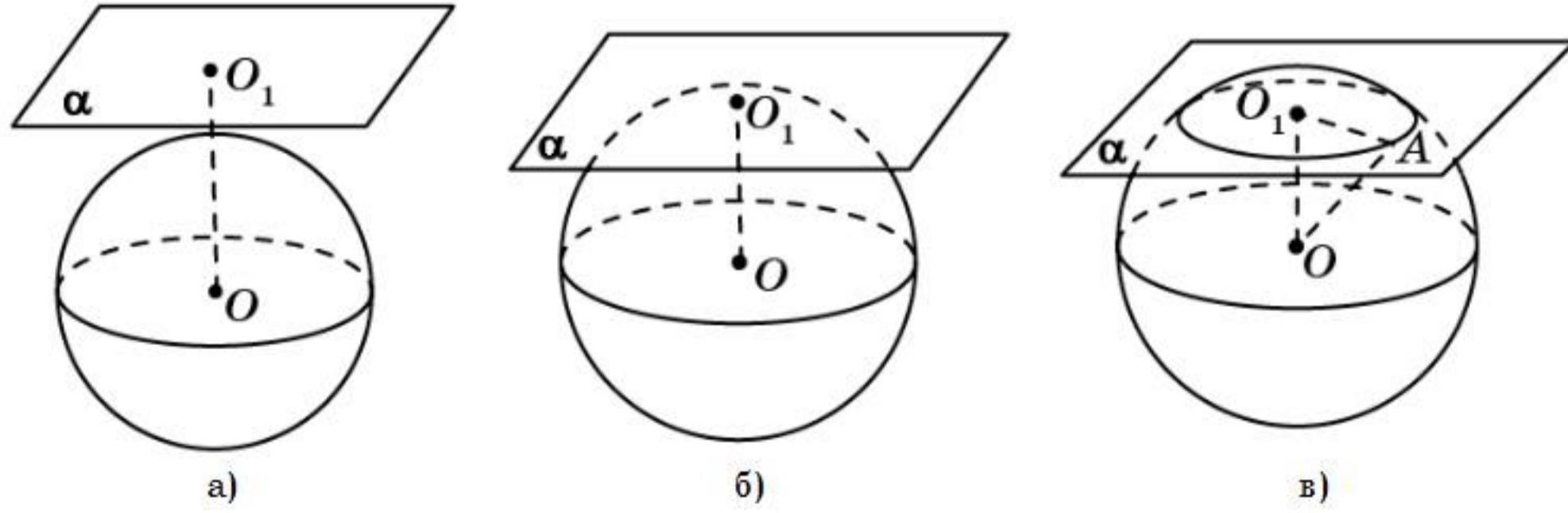
Агар α текислиги сферанинг маркази орқали ўтса, унда сферанинг шу текислик билан кесимида айланга ҳосил бўлади (9.3-расм).



9.3-расм

Агар α текислиги сферанинг маркази орқали ўтмаса, унда шу марказдан α текислигига OO_1 перпендикуляр туширамиз. Бу келаси ҳолларда бажарилиши мумкин.

1-ҳол. Агар OO_1 перпендикулярининг узунлиги сферанинг R радиусидан катта бўлса, унда O нүктасидан α текислигининг ҳар қандай нүктасигача бўлган масофа R -дан катта бўлади. Демак, бу ҳолда сфера билан текисликнинг умумий нүқталари бўлмайди (9.4, а-расм).



9.4-расм

2-жол. Агар OO_1 перпендикулярнинг узунлиги сферанинг R радиусига тенг бўлса, унда сфера билан текисликнинг фақат битта умумий нуқтаси — O_1 нуқтаси бор бўлади (9.4, б-расм).

Сфера билан фақат битта умумий нуқтаси бор текислик *сферага уринма текислик* деб аталади. Бундаги сфера билан текисликнинг умумий нуқтаси *уриниш нуқтаси* деб аталади. Бинобарин, бирга шу нуқтада сфера текисликка *уринади* ёки текислик сфера билан *уринади* деб ҳам айтилади.



Уринма текисликнинг уриниш нуқтасига ўтказилган сферанинг радиусига перпендикуляр бўлишини исботланг.

3-жол. Агар OO_1 перпендикулярининг узунлиги, яъни O нуқтасидан а текислигигача бўлган d масофаси сферанинг R радиусидан кичик бўлса, унда сфера билан текислик *кесишади* ва уларнинг кесишиш — маркази O_1 нуқтаси ва радиуси $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ бўлган айлана бўлади (9.4, в-расм).

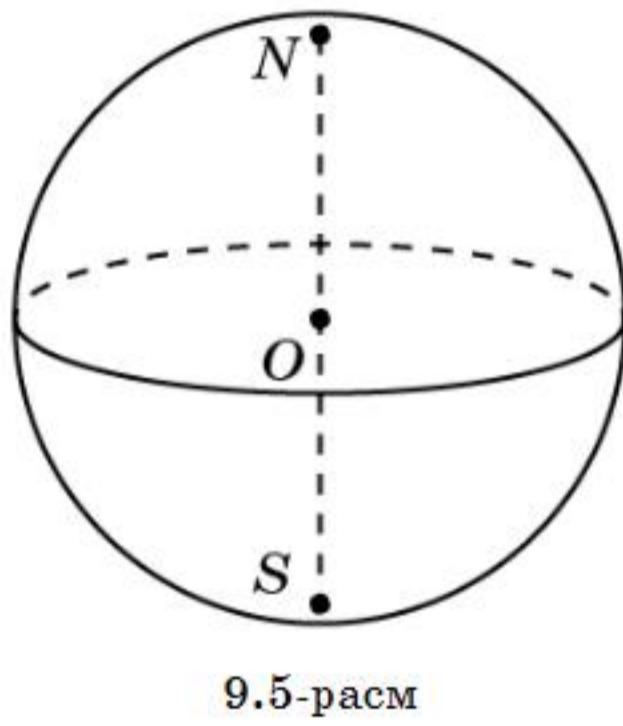
Ҳақиқатан, сфера билан а текислигининг кесиши масида жойлашган қандайдир бир A нуқтаси учун $OO_1 = d$, $OA = R$ бўлишини OO_1A тўғри бурчакли учбурчагидан $O_1A = \sqrt{R^2 - d^2}$ тенглиги келиб чиқади. Аксинча, агар а текислигига жойлашган A нуқтаси учун бу тенглик бажарилса, унда $OA = R$ бўлади, яъни A нуқтаси сферада жойлашади.

Одатда, сфера 9.5-расмдагидек тасвирланади. Бу расмда айланадан бошқа:

а) сферанинг маркази орқали ўтувчи текислик билан кесими — *сферанинг катта айланаси* ёки *экватор*;

б) сферанинг маркази орқали ўтувчи ва экватор текислигига перпендикуляр тўғри чизик — *сферанинг ўқи*;

в) ўқнинг сфера билан кесишиш нуқталари — *сферанинг қутблари* тасвирланган. Одатда, уларни N (шимолий қутб) ва S (жанубий қутб) ҳарфлари билан белгиланади.



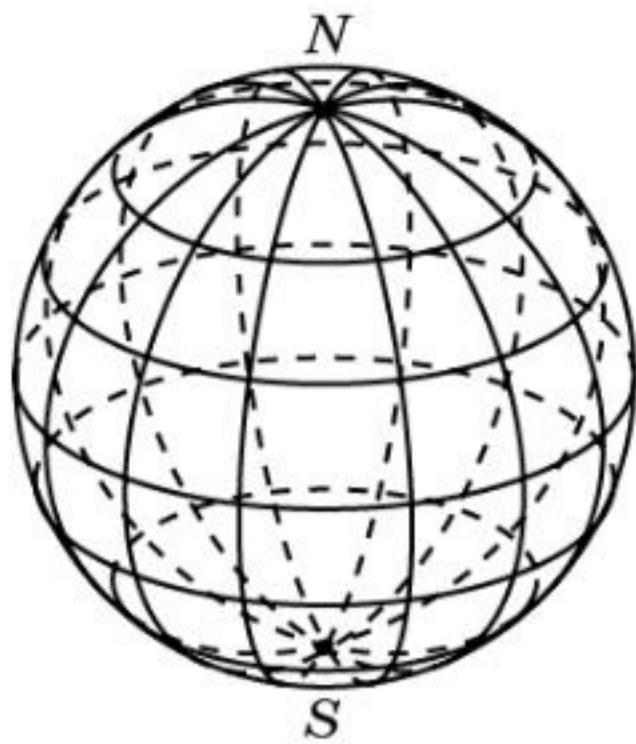
9.5-расм

Баъзида сферанинг расмида қутб билан экватор танлаб олингандан кейин параллеллар билан меридианларнинг контурини ясаш мумкин.

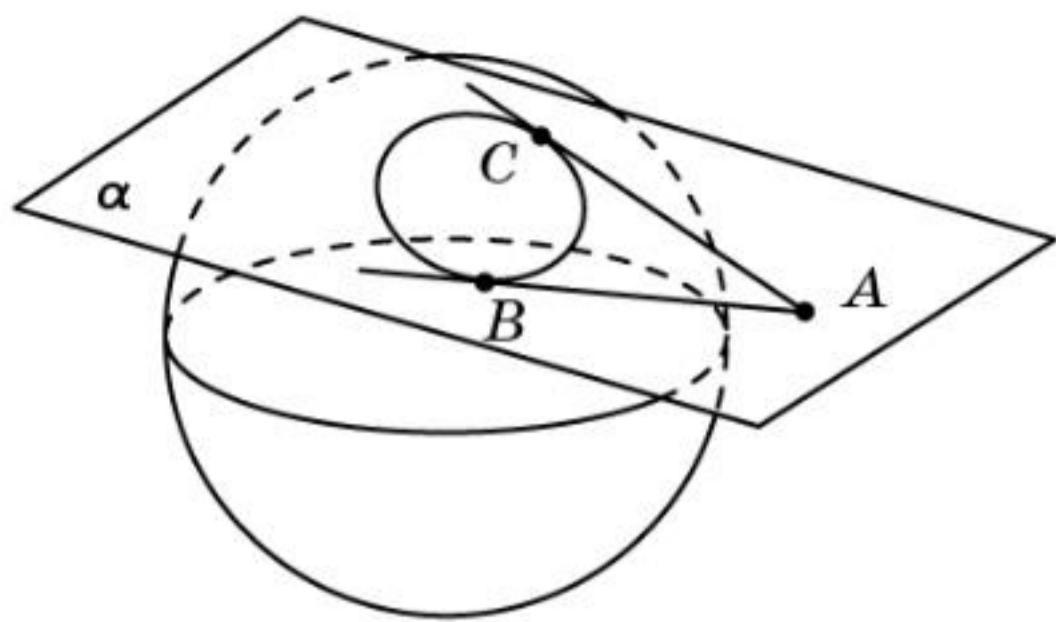
Параллеллар — сферанинг экватор текислигига параллел текисликлар билан кесимлари. *Меридианлар* — сферанинг ўқи орқали ўтувчи текисликлар билан кесимлари (9.6-расм). Одатда, худди шундай Ер шарининг эскизи (тасвири) — глобус тасвирланади.



Шарнинг текислик билан кесими қандай фигура бўлади?



9.6-расм



9.7-расм



Сфера билан текисликнинг ўзаро жойлашиши ҳолларига ўхшаш сфера билан түгри чизикнинг ўзаро жойлашишини мустақил күриб чиқинг.

Сфера билан биттагина умумий нұқтаси бўладиган түгри чизик сферага *уринма түгри чизик* деб аталади.

Теорема. *Сфера ташқарисида жойлашган бир нұқтадан шу сферага ўтказилган уринма түгри чизиқларнинг кесмалари ўзаро тенг бўлади.*

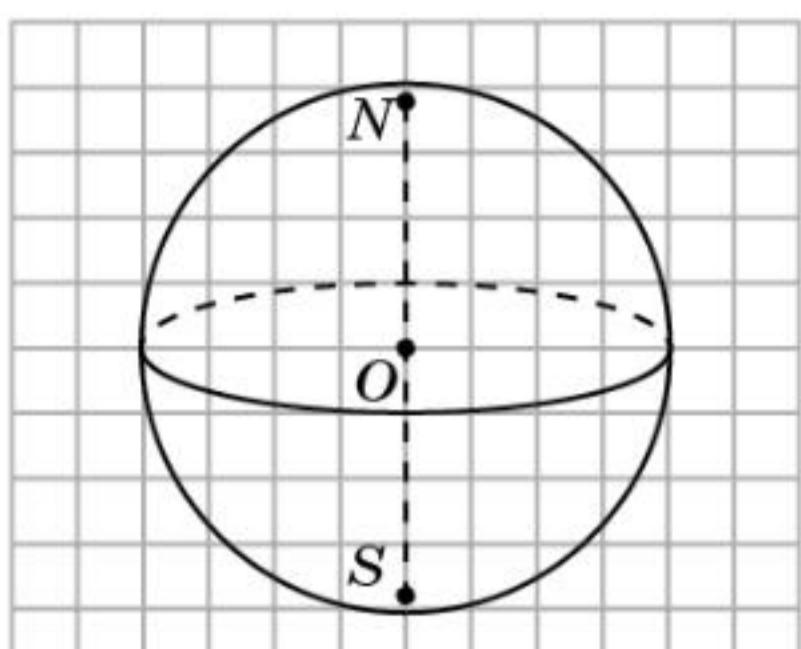
Исботи. AB ва AC қандайдир бир A нұқтасидан сферага ўтказилган уринма кесмалари бўлсин, бу ерда B ва C — уриниш нұқталари (9.7-расм).

A , B ва C нұқталари орқали ўтувчи текисликни кўриб чиқайлик. Бу текислик сфера билан мос равища B ва C нұқталарида AB ва AC түгри чизиқлари билан уринадиган айланана бўйлаб кесишади. Айланадан ташқарисида жойлашган нұқтадан шу айланага ўтказилган уринма кесмаларининг хоссалари бўйича $AB = AC$ бўлади. \square

Саволлар

1. Қандай фигура сфера деб аталади?
2. Сферанинг радиуси деганимиз нима?
3. Сферанинг ватари деганимиз нима?
4. Сферанинг диаметри деганимиз нима?
5. Қандай фигурани айлантириш орқали сфера ясаш мумкин?
6. Қандай фигура шар деб аталади?
7. Шарнинг радиуси деганимиз нима?
8. Шарнинг ватари деганимиз нима?
9. Шарнинг диаметри деганимиз нима?
10. Қандай фигурани айлантириш орқали шар ясаш мумкин?
11. Шарнинг сирти деганимиз нима?
12. Қандай холларда сфера билан текисликнинг умумий нұқтаси бўлмайди?
13. Қандай холларда сфера билан текисликнинг биттагина умумий нұқтаси бўлади?
14. Қандай холларда сфера билан текислик айланана бўйлаб кесишади?
15. Қандай текислик сферага ўтказилган уринма текислик деб аталади?
16. Қандай түгри чизик сферага ўтказилган уринма түгри чизик деб аталади?

Машқлар



9.8-расм

A

- 9.1.** Катак қоғозга 9.8-расмдагига үхшаш сферани тасвиirlанг. Қандайдир бир параллеллар билан меридианларни тасвиirlанг.
- 9.2.** Маркази O нүктаси ва радиуси R бўлган: 1) шар ичида жойлашган; 2) шар сиртида жойлашган A нүктаси қандай тенгсизликни қаноатлантиради?
- 9.3.** Сферанинг радиуси 4 см га teng. Агар берилган нүктадан сферанинг марказигача бўлган масофа: 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см бўлса, унда шу нүкта сферага тегишли қандай жойлашади?
- 9.4.** Сферанинг маркази орқали нечта диаметр ўтказиш мумкин?
- 9.5.** Сферанинг диаметри унинг радиусидан 55 мм катта. Шу диаметрни топинг.
- 9.6.** A ва B нүкталари орасидаги масофа 2 см га teng. Мана шу нүкталар орқали ўтувчи сферанинг энг кичик радиусини топинг.
- 9.7.** Сферанинг радиуси 7 см га teng ва қандайдир бир текислик унинг марказидан: 1) 6 см; 2) 7 см; 3) 8 см узоқликда жойлашган. Мана шу сфера билан текисликнинг бир-бирига нисбатан қандай жойлашганини аниqlанг.

B

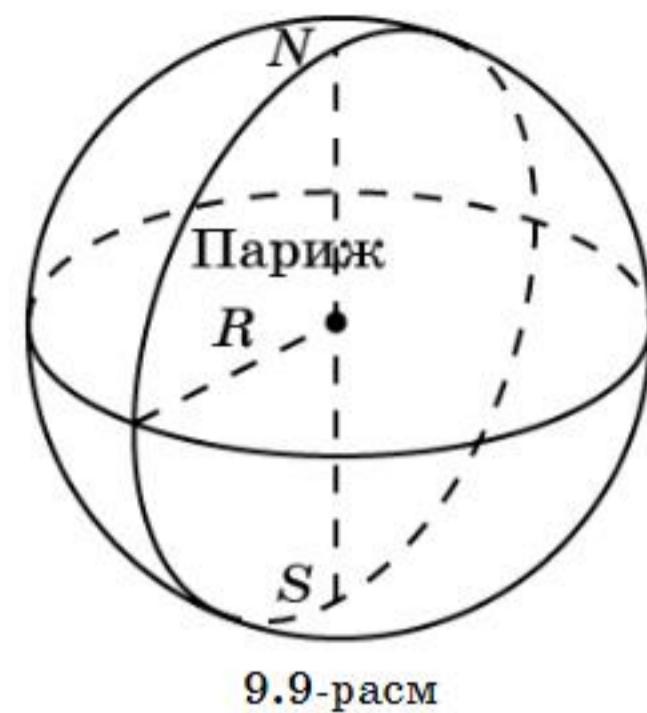
- 9.8.** 1) Сфера контурида жойлашган нүкта орқали; 2) сфера ичида жойлашган нүкта орқали; 3) сферадан ташқарида жойлашган нүкта орқали шу сферага нечта уринма текислик ўтказиш мумкин?
- 9.9.** Шарнинг радиуси 5 см га teng. Шарнинг марказидан 3 см узоқликда бўлган текислик билан кесими бўлган доиранинг радиусини топинг.
- 9.10.** Сферанинг радиуси 3 см га, берилган нүктадан шу сферанинг марказигача бўлган масофа 5 см га teng. Шу нүктадан сферага ўтказилган уринма кесмасининг узунлигини топинг.
- 9.11.** Сферанинг радиуси 6 см га teng ва унинг марказидан қандайдир бир тўғри чизиқ: 1) 5 см; 2) 6 см; 3) 7 см узоқликда жойлашган. Шу сфера билан тўғри чизиқнинг бир-бирига нисбатан қандай жойлашганлигини аниqlанг.
- 9.12.** Сферанинг радиуси 3 см га teng. Берилган нүктадан шу сферага ўтказилган уринма кесмасининг узунлиги 4 см га teng. Шу нүктадан сферанинг марказигача бўлган масофани топинг.

9.13. Сферанинг радиуси 6 см га, берилган нүктадан шу сферанинг марказигача бўлган масофа 10 см га тенг. Шу нүктадан сферага ўтказилган уринма кесмасининг узунлигини топинг.

9.14. Берилган нүктадан сферанинг марказигача бўлган масофа 13 см га тенг. Шу нүктадан сферага ўтказилган уринма кесмасининг узунлиги 12 см. Сферанинг радиусини топинг.

9.15. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ тенгламаси билан берилган сфера ва 1) $z = 1$; 2) $z = 2$; 3) $z = 3$ тенгламаси билан берилган текисликкниң ўзаро жойлашишини аниқланг.

9.16. Париж меридиани узунлиги 40000 км га тенг. Ер шарининг радиусини топинг (9.9-расм).



9.9-расм

9.17. Сферанинг радиуси 4 см га, берилган нүктадан шу сферанинг марказигача бўлган масофа 6 см га тенг. Шу нүктадан сферанинг контурида жойлашган нүқталаригача бўлган энг катта ва энг кичик масофаларни топинг.

9.18. Сферадан ташқарида жойлашган нүктадан шу сферанинг контурида жойлашган нүқталаригача бўлган энг катта ва энг кичик масофалар 4 см ва 6 см. Сферанинг радиусини топинг.

C

9.19. 1) $x + y + z = \sqrt{2}$; 2) $x + y + z = \sqrt{3}$; 3) $x + y + z = 2$ тенглама билан берилган текислик ва $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ тенглама билан берилган сферанинг ўзаро жойлашишини аниқланг.

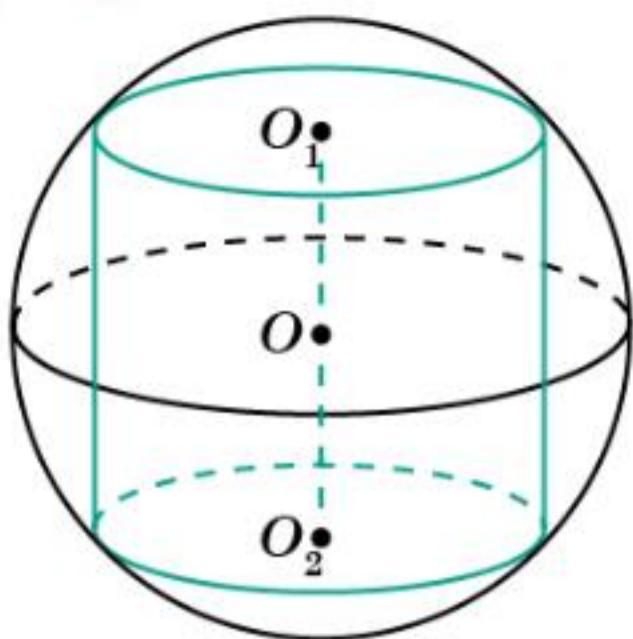
Лиги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

9.20. Тўғри тўртбурчакка, учбурчакка, трапецияга ички ва ташқи чизилган айланаларнинг таърифларини ва уларнинг радиусларини топиш формулаларини такрорланг.

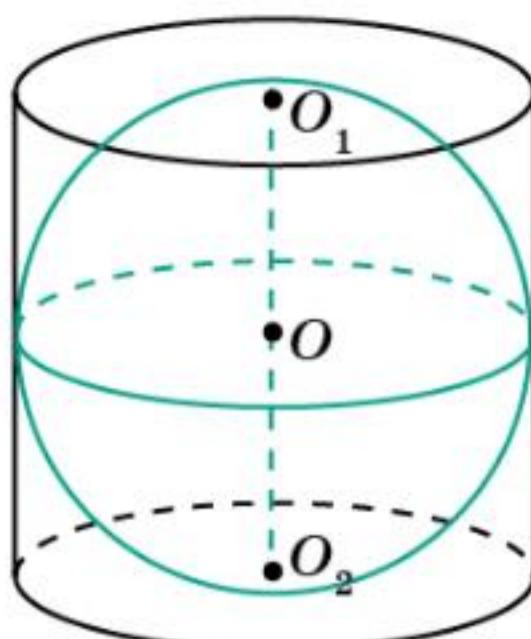
10*-§. Айланиш жисмларининг комбинациялари

“Тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айлана” ва “квадратга ички чизилган айлана” тушунчаларига ўхшаш “цилиндрга ташқи чизилган сфера” ва “цилиндрга ички чизилган сфера” тушунчаларини аниқлайлик.

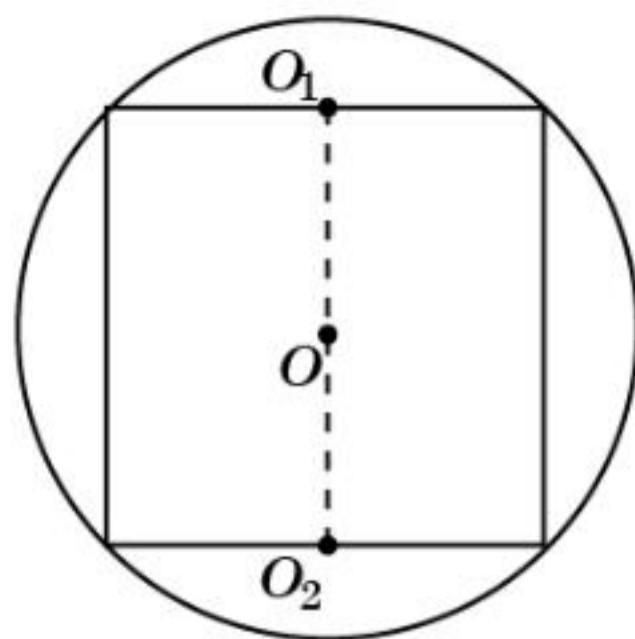
Агар цилиндр асосларининг айланалари сферанинг контурида ётса, унда сфера цилиндрга ташқи чизилган ёки цилиндр сферага ички чизилган деб аталади (10.1-расм).



10.1-расм



10.2-расм



10.3-расм

Агар сфера цилиндрнинг асосларига ва ён сирти билан (ҳар бир ясовчиси билан) уринадиган бўлса, унда *сфера цилиндрга ички чизилган ёки цилиндр сферага ташқи чизилган* деб аталади (10.2-расм).

Фазовий фигуранларнинг комбинациясини ясаш қоидасига кўра, агар берилган фигурага ички чизилган фигура бошқа ранг билан тасвирланган бўлса, у ҳолда у яхлит (кўринадиган) чизиклар билан алоҳида фигура сифатида тасвирланганлигига эътибор қаратамиз. Биз бунда ва кейинчалик ушбу қоидага суяномиз.

Теорема. *Цилиндрга ташқи сфера чизиш мумкин. Унинг радиуси шу цилиндрнинг ўқ кесими — тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусига teng бўлади.*

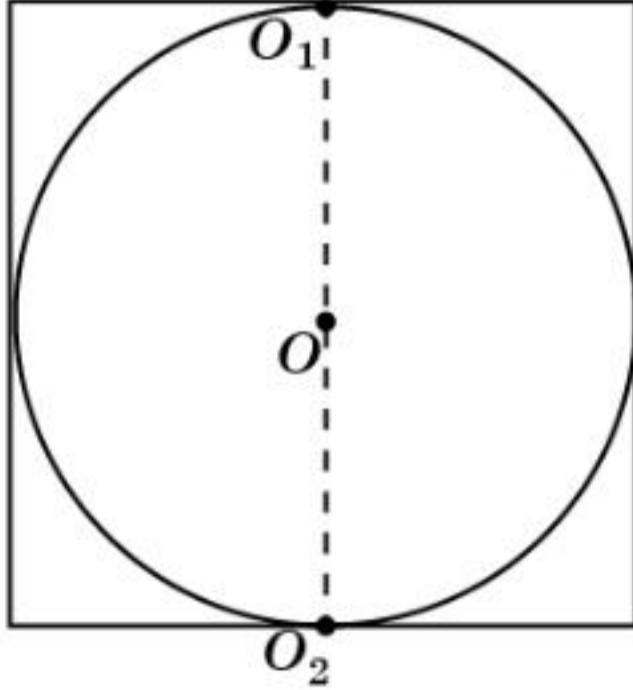
Исботи. Цилиндрнинг ўқ кесими — тўғри тўртбурчакни ва унга ташқи чизилган айланани кўриб чиқамиз (10.3-расм). Цилиндр мана шу тўғри тўртбурчакни унинг қарама-қарши икки томонининг O_1 , O_2 ўрталари орқали ўтувчи тўғри чизик бўйлаб айлантирганда олинади. Айланани шу тўғри чизик бўйлаб айлантирганда берилган цилиндрга ташқи чизилган сфера ҳосил бўлади. Бу сферанинг радиуси тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусига teng бўлади. ■

Агар цилиндр асосининг радиуси r га ва баландлиги h га teng бўлса, унда шу цилиндрга ташқи чизилган сферанинг R радиуси қўйидаги формула орқали аниқланади:

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Теорема. *Агар цилиндрнинг ўқ кесими квадрат бўлса, унда унга ички сфера чизишга бўлади. Ички чизилган сферанинг радиуси цилиндрнинг ўқ кесимига ички чизилган айлананинг радиусига teng бўлади.*

Исботи. Цилиндрнинг ўқ кесимини кўриб чиқамиз (10.4-расм).



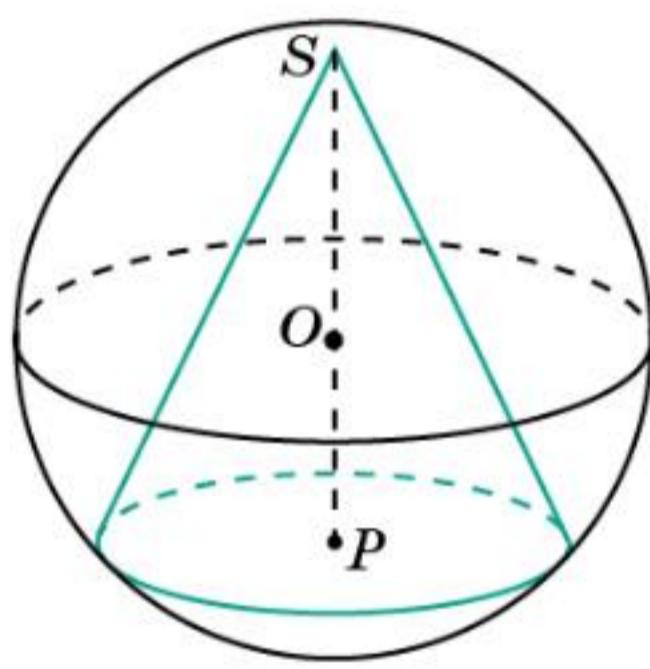
10.4-расм

Агар цилиндрнинг ўқ кесими — түғри түртбурчакка ички айлана чизилган бўлса, унда шу цилиндрга ички сфера чизилади. Бу түғри түртбурчак квадрат бўлган ҳолдагина бажарилади. Демак, ички чизилган радиусига тенг бўлади. \square

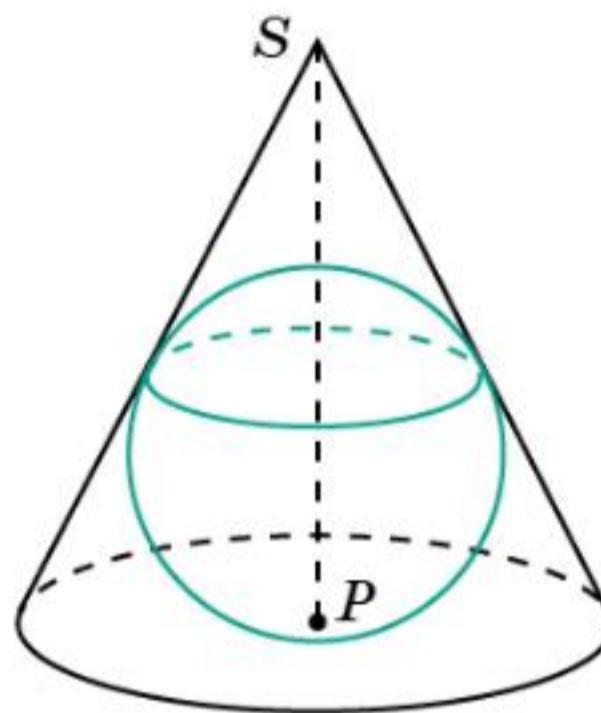
Агар цилиндр асосининг радиуси R га тенг бўлса, унда сферанинг радиуси ҳам R га тенг бўлади.

“Учурчакка ташки чизилган айлана” ва учурчакка ички чизилган айлана тушунчаларига ўхшаш “конусга ташки чизилган сфера” ва “конусга ички чизилган сфера” тушунчаларини аниқлаймиз.

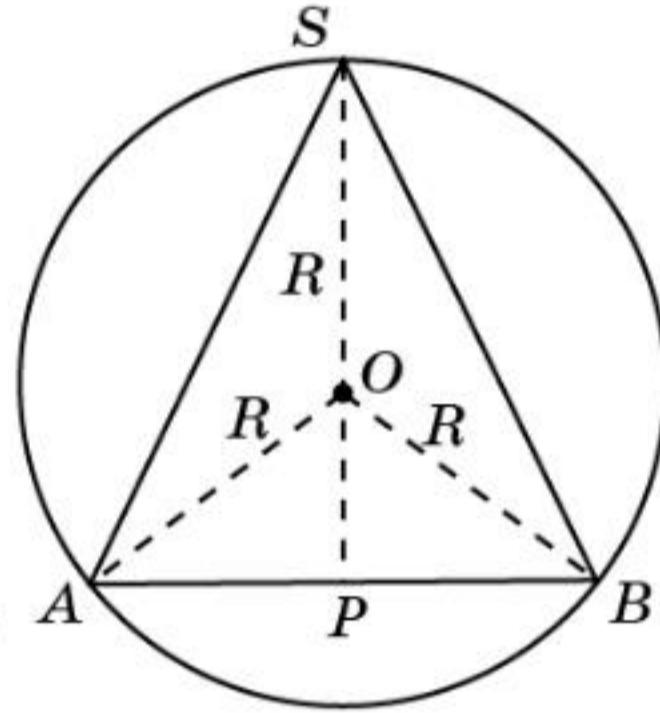
Агар конуснинг уни билан асосининг айланаси сферанинг бўйида ётса, унда *сфера конусга ташки чизилган ёки конус сферага ички чизилган деб аталади* (10.5-расм).



10.5-расм



10.6-расм



10.7-расм

Агар сфера конуснинг асосига ва ён сиртига (ҳар бир ясовчисига) уринадиган бўлса, унда *сфера конусга ички чизилган ёки конус сферага ташки чизилган деб аталади* (10.6-расм).

Теорема. *Конусга ташки сфера чизишга бўлади. Унинг радиуси шу конуснинг ўқ кесими — учурчакка ички чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади.*

Исботи. Конуснинг ўқ кесими — тенг ёнли учурчакни ва унга ташки чизилган — айланани кўриб чиқамиз (10.7-расм). Конус шу учурчакни асосига туширилган баландлиги ётадиган түғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил қилинади. Айланани шу түғри чизик бўйлаб айлантирганда берилган конусга ташки чизилган сфера ҳосил бўлади. Бу сферанинг радиуси тенг ёнли учурчакка ташки чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади. \square

Томонлари a , b , c ва юзи S бўлган учурчакка ташки чизилган айлананинг R радиуси учун қўйидаги формула ўринли бўлишини эсга туширайлик:

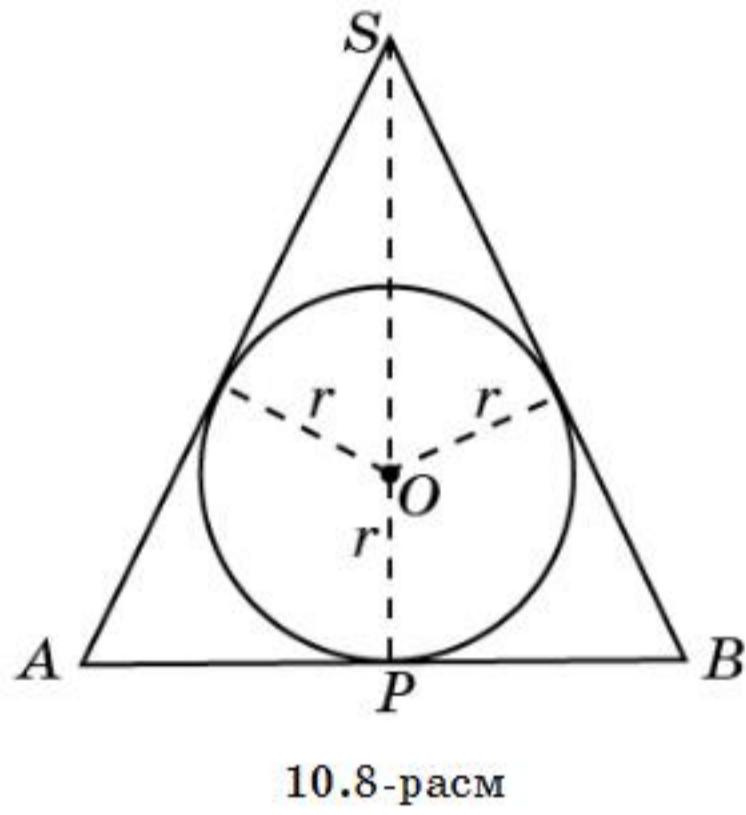
$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Шу формула билан ўқ кесими учурчак бўлган конусга ташқи чизилган сферанинг R радиуси ҳам аниқланади. Бу ерда, a, b, c — учурчакнинг томонлари, S — учурчакнинг юзи.

1-мисол. Конус асосининг радиуси 6 см га, ясовчиси 10 см га тенг. Конусга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг.

Ечими. Конуснинг ўқ кесими — томонлари 12 см, 10 см, 10 см бўлган тенг ёнли учурчак бўлади. Мана шу учурчакнинг асосига туширилган баландлиги 8 см га, юзи эса 48 см^2 га тенг. Демак, конусга ташқи чизилган сферанинг радиуси $6\frac{1}{4}$ см га тенг бўлади.

Теорема. *Конусга ички сфера ясаш мумкин. Ички чизилган сферанинг радиуси конуснинг ўқ кесими — учурчакка ички чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади.*



10.8-расм

Исботи. Конуснинг ўқ кесими — тенг ёнли учурчакни ва унга ички чизилган айланани кўриб чиқайлик (10.8-расм).

Конус шу учурчакни унинг асосига туширилган баландлиги ётадиган тўғри чизикни айлантириш орқали ясалади. Айланани шу тўғри чизик бўйлаб айлантирганда берилган конусга ички чизилган сфера ҳосил бўлади. Бу сферанинг радиуси тенг ёнли учурчакка ички чизилган айлананинг радиусига тенг бўлади. \square

Томонлари a, b, c ва юзи S бўлган учурчакка ички чизилган айлананинг

r радиуси учун қўйидаги формула ўринли бўлишини эсга туширайлик:

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

Мана шу формула билан ўқ кесими учурчак бўлган конусга ички чизилган сферанинг r радиуси ҳам аниқланади. Бу ерда, a, b, c — учурчакнинг томонлари, S — учурчакнинг юзи.

2-мисол. Конус асосининг радиуси 6 см га, ясовчиси 10 см га тенг. Конусга ички чизилган сферанинг радиусини топинг.

Ечими. Конуснинг ўқ кесими — томонлари 12 см, 10 см, 10 см бўлган тенг ёнли учурчак бўлади. Шу учурчакнинг асосига туширилган баландлиги 8 см га, юзи эса 48 см^2 га тенг. Демак, конусга ички чизилган сферанинг радиуси 3 см га тенг бўлади.

Саволлар

1. Қандай сфера цилиндрга ташқи чизилган деб аталади?
2. Қандай сферага ички цилиндр чизилади?
3. Цилиндрга ташқи сферани ҳар доим ҳам чизиш мумкинми?

4. Қандай цилиндрга ички сфера чизилади?
5. Қандай цилиндр сферага ташқи чизилган деб аталади?
6. Қандай конусга ташқи сфера чизилади?
7. Қандай сферага ички конус чизилади?
8. Конусга ташқи сферани ҳар доим ҳам чизиш мүмкінми?
9. Қандай конусга ички сфера чизилади?
10. Қандай сферага ташқи конус чизилади?
11. Конусга ички сферани ҳар доим ҳам чизиш мүмкінми

Машқлар

A

- 10.1.** Сферанинг радиуси R га тенг. Сферага ички чизилган цилиндр асосининг радиуси ва баландлигини топинг.
- 10.2.** Цилиндрниң баландлиги h га тенг. Цилиндрга ички чизилган сферанинг радиусини топинг.
- 10.3.** Цилиндрниң баландлиги билан асосининг радиуси 1 см га тенг. Цилиндрга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг.
- 10.4.** Цилиндр асосининг радиуси 1 см га тенг. Цилиндрга ташқи чизилган сферанинг радиуси 2 см га тенг деб олиб, цилиндрниң баландлигини топинг.
- 10.5.** Цилиндрниң баландлиги 2 см га тенг. Цилиндрга ташқи чизилган сферанинг радиуси 2 см га тенг деб олиб, цилиндр асосининг радиусини топинг.
- 10.6.** Цилиндрниң ўқ кесими — томонлари 3 см ва 4 см бўлган тўғри тўртбурчак. Цилиндрга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг.
- 10.7.** Сферанинг радиуси 1 см га тенг. Сферага ташқи чизилган цилиндр сиртининг юзини топинг.

B

- 10.8.** Конусниң ўқ кесими — томони 1 см га тенг тенг томонли учурчак. Конусга: 1) ташқи чизилган; 2) ички чизилган сферанинг радиусини топинг.
- 10.9.** Конусга ташқи чизилган сферанинг R радиусини конусниң h баландлиги билан асосининг r радиуси орқали ифодаланг.
- 10.10.** Конус асосининг радиуси 3 см га, баландлиги эса 4 см га тенг. Конусга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг.
- 10.11.** Конусга ички чизилган сферанинг r радиусини конусниң h баландлиги билан асосининг r_0 радиуси орқали ифодаланг.
- 10.12.** Конус асосининг радиуси 3 см га, баландлиги эса 4 см га тенг. Конусга ички чизилган сферанинг радиусини топинг.
- 10.13.** Конусниң ясовчиси билан унга ташқи чизилган сферанинг радиуси 2 см га тенг. Конус асосининг радиусини топинг.

- 10.14.** Конус асосининг радиуси 1 см га тенг. Унинг ясовчиси асос текислиги билан 45° бурчак ясади. Конусга: 1) ташқи чизилган; 2) ички чизилган сферанинг радиусини топинг.
- 10.15.** Конуснинг ясовчиси 1 см га тенг ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясади. Конусга: 1) ташқи чизилган; 2) ички чизилган сферанинг радиусини топинг.

Янги мавзуны үзлаштиришга тайёрланинг

- 10.16.** Айланы узунлиги таърифини ва айланы узунлигини топиш формуласини такрорланг.

11-§. Сфера сиртининг юзи

Сфера юзининг таърифи айланы узунлиги таърифига ўхшаш бўлади.

Айланага ички чизилган муентазам кўпбурчак томонлари сонини чексиз ортиргандаги кўпбурчак периметри интиладиган сон айланы узунлигининг аниқ қийматини беришини ёдимизга туширамиз.

Айланага ташқи чизилган муентазам кўпбурчакни ва шу кўпбурчакни айлананинг PQ диаметри ётадиган тўғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуруни кўриб чиқайлик (11.1-расм). Бу фигуранинг сирти конуснинг, кесик конуснинг ва цилиндрнинг ён сиртларидан иборат, фигуранинг ўзи эса айланани айлантирганда ҳосил бўлган сферага ташқи чизилади. Фигура сиртининг юзи унга тегишли конуснинг, кесик конуснинг ва цилиндр ён сиртлари юзларининг йифиндисига тенг бўлади.

Айланани унинг диаметри ётадиган тўғри чизик бўйлаб айлантирганда олинган сферанинг юзи шу айланага ташқи чизилган муентазам кўпбурчак томонлари сонини чексиз ортириб, айлантирганда ҳосил

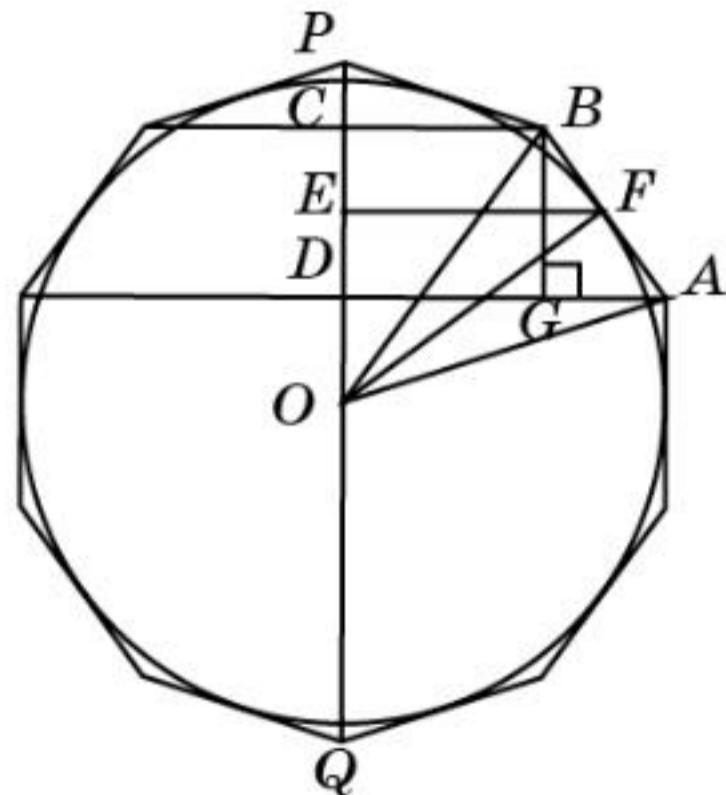
бўлган фигура сиртининг юзига интиладиган сон *сферанинг юзи бўлиб* ҳисобланади.

Энди радиуси R бўлган сферанинг юзи топиш формуласини аниқлаймиз.

Сферанинг юзи деб шу сфера билан чекланган шар сиртининг юзига ҳам айтилади.

Айланага ташқи чизилган M муентазам кўпбурчагининг AB томонини айлантирганда ҳосил бўлган сиртни қараб чиқамиз.

У $ABCD$ тўғри бурчакли трапециясини CD тўғри чизиги атрофида айлантирганда кесик конуснинг ён сирти ҳосил бўлади (11.1-расм).



11.1-расм

Шу сиртнинг $S(AB)$ юзи радиуси трапециянинг EF ўрта чизиги бўладиган айлананинг узунлиги билан AB ён томонининг кўпайтмасига тенг бўлади, яъни

$$S(AB) = 2p \cdot EF \cdot AB.$$

$ABCD$ тўғри бурчакли трапециядан топамиз: $CD = BG = AB \cdot \sin \angle BAD$. Демак,

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin \angle BAD}.$$

$\angle BAD = \angle EOF$ (мос равища перпендикуляр томонларида бурчаклари ҳисобида тенг) эканлигини эътиборга олиб, қуйидаги тенгликни оламиз:

$$S(AB) = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin \angle BAD} = \frac{2\pi \cdot FE \cdot CD}{\sin \angle EOF} = 2p \cdot OF \cdot CD = 2pR \cdot CD.$$

Шунга ўхшаш M кўпбурчагининг бошқа томонларини айлантирганда ҳосил бўлган сиртларнинг юзларининг формуалалари олинади. Шу юзларни қўшиб, M кўпбурчагини айлантирганда ҳосил бўлган сиртнинг $S(M)$ юзини топамиз:

$$S(M) = 2p \cdot OF \cdot PQ = 2pR \cdot 2R = 4pR^2.$$

Айланага ташқи чизилган мунтазам кўпбурчакларнинг томонларининг сонини чексиз орттириб айлантириш натижасида ҳосил бўлган фигура сиртининг юзи интилган сон сферанинг юзи бўлиб ҳисобланади. Шунингдек, сферанинг S юзини қуйидаги формула билан топиш мумкин:

$$S = 4pR^2.$$



Сферанинг юзи шу сферага ташқи чизилган цилиндрнинг ён сиртининг юзига тенг бўлишини исботланг.

Савооплар

1. Сферанинг юзи қандай аниқланади?
2. Шар сиртининг юзи деганимиз нима?
3. Радиуси R бўлган сферанинг юзи қандай формула билан ҳисобланади?

Машқлар

A

- 11.1. Радиуси 1 см га тенг сферанинг юзини топинг.
- 11.2. Юзи 1 см^2 га тенг сферанинг радиусини топинг.
- 11.3. Шарнинг катта доирасининг юзи 3 см^2 га тенг. Шар сиртининг юзини топинг.

- 11.4.** Агар шарнинг радиуси: 1) 2 марта; 2) 3 марта; 3) n марта ортса, унда унинг сиртининг юзи қандай ўзгаради?
- 11.5.** Икки шар сиртларининг юzlари $4 : 9$ нисбатида бўлса, унда уларнинг радиусларининг нисбатларини топинг.
- 11.6.** Икки шарнинг радиуслари 6 см ва 8 см. Сиртининг юзи берилган шарларнинг сиртларининг юzlарининг йиғиндисига teng бўлган шарнинг радиусини топинг.
- 11.7.** Шарга цилиндр ташқи чизилган. Шар сирти юзининг цилиндрнинг ён сиртининг юзига нисбатини топинг

В

- 11.8.** Ўқ кесими бирлик квадрат бўлган цилиндрга ички чизилган сфера сиртининг юзини топинг.
- 11.9.** Ўқ кесими бирлик квадрат бўлган цилиндрга ташқи чизилган сфера сиртининг юзини топинг.
- 11.10.** Қуёшнинг диаметри Ой диаметридан 400 марта катта. Қуёш сиртининг юзи Ой сиртининг юзидан неча марта катта бўлади?
- 11.11.** Кубга ички чизилган сфера сиртининг юзи шу кубга ташқи чизилган сфера сиртининг юзидан неча марта кичик бўлади?
- 11.12.** Конуснинг ўқ кесими — teng томонли учбурчак. Конусга ташқи чизилган сфера сиртининг юзи шу конусга ички чизилган сфера сиртининг юзидан неча марта катта бўлади?
- 11.13.** Шарнинг марказидан 8 см узоқликда ётувчи текислик билан кесими — доиранинг радиуси 6 см. Шар сиртининг юзини топинг.
- 11.14.** Париж меридианининг узунлиги таҳминан 40 000 км га teng. Ер шари сиртининг юзини топинг.
- 11.15.** “Нур-Султан” шаҳридаги “Бәйтерек” монументи шарнинг диаметри 22 м га teng (11.2-расм). Шу шар сиртининг юзини топинг.



11.2-расм



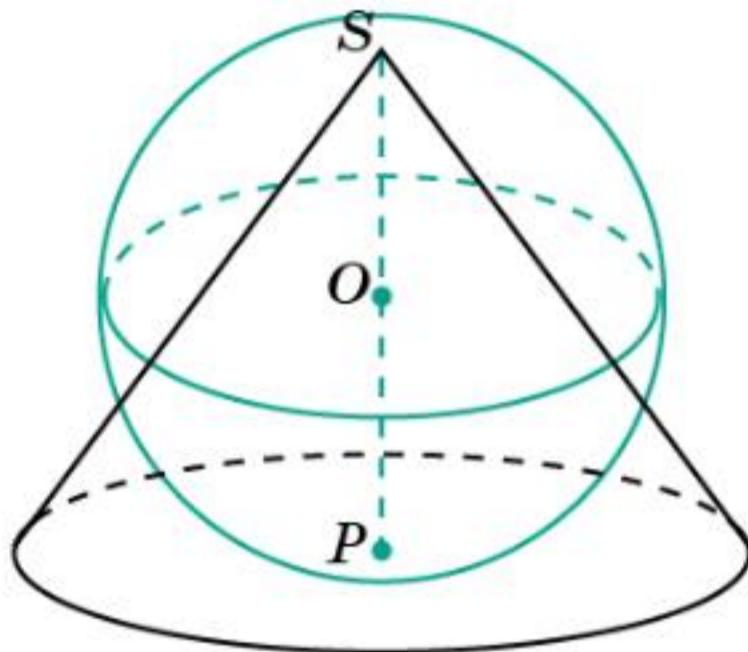
11.3-расм

- 11.16.** ЭКСПО-2017 — Қозоғистон пойтахтида 2017 йили Халқаро кўргазмалар уюшмаси ташкил этган халқаро кўргазма (11.3-

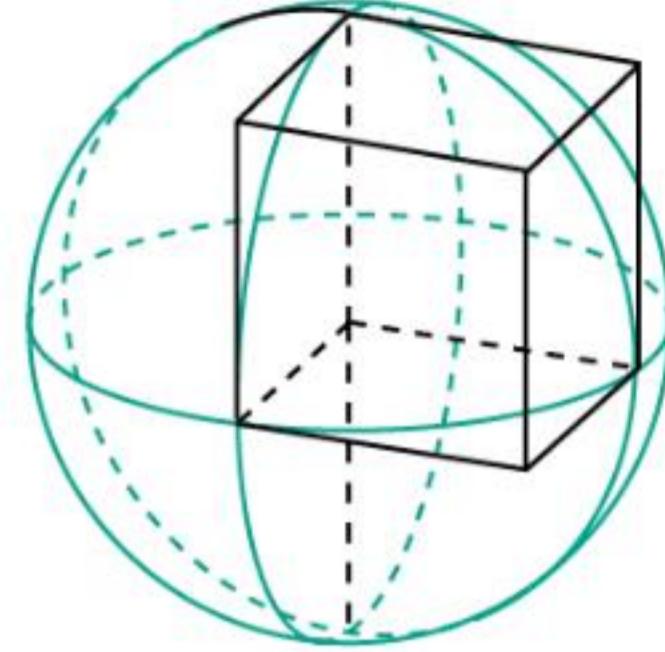
расм). Күргазманинг марказий элементи дунёдаги энг катта сферик бино бўлган “Нұр Әлем” мажмуаси бўлди. Унинг диаметри 80 м. Шу сфера сиртининг юзини топинг ($p \approx 3$).

C

- 11.17.** Конуснинг ўқ кесими — тенг томонли учбурчак (11.4-расм). Конус сиртининг юзи, диаметри шу конуснинг баландлиги билан бирдай шар сиртининг юзига тенг бўлишини исботланг.



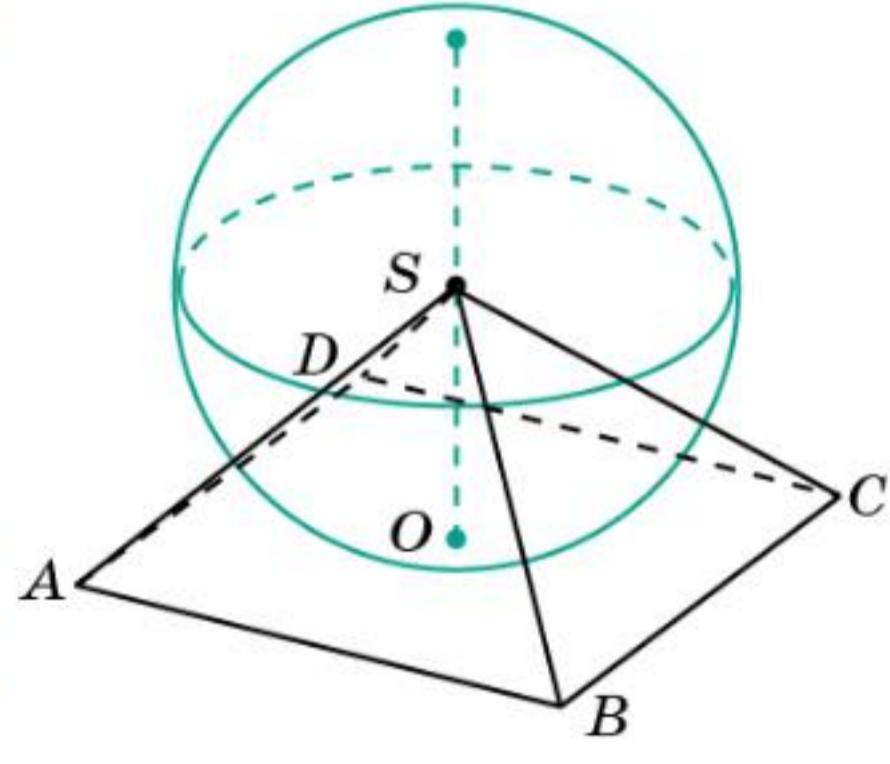
11.4-расм



11.5-расм

- 11.18.** Радиуси 1 см га тенг шарнинг маркази — бирлик кубнинг учи (11.5-расм). Шу кубнинг ичида жойлашган шар сирти қисмининг юзини топинг.

- 11.19.** Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг томонлари 2 см га, баландлиги эса 1 см га тенг. Радиуси 1 см га тенг шарнинг маркази — шу пирамиданинг учи (11.6-расм). Пирамиданинг ичида жойлашган шар сирти қисмининг юзини топинг.



11.6-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

- 11.20.** Ички ва ташқи чизилган кўпбурчакларнинг таърифларини такорланг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

- Цилиндр асосининг радиуси 3 см, ясовчиси эса 8 см. Цилиндрнинг ўқ кесимининг диагоналини топинг:

A) 6 см; B) 10 см; C) 12 см; D) 16 см.

- 2.** Түғри түртбұрчакнинг томонлари 1 см ва 2 см. Шу түғри түртбұрчакни унинг катта томони ётган түғри чизикдан айлантирганда ҳосил бўлган цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг:
- A) $2\pi \text{ см}^2$; B) $3\pi \text{ см}^2$; C) $4\pi \text{ см}^2$; D) $6\pi \text{ см}^2$.
- 3.** Мунтазам учбурчакли призма асосининг томонлари 1 см га ва ён қирралари 2 см га тенг. Шу приzmани унинг ён қирраси ётган түғри чизикдан айлантирганда ҳосил бўлган цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг:
- A) $2\pi \text{ см}^2$; B) $3\pi \text{ см}^2$; C) $4\pi \text{ см}^2$; D) $6\pi \text{ см}^2$.
- 4.** Конус асосининг радиуси 6 см га, ясовчиси эса 10 см га тенг. Конуснинг баландлигини топинг:
- A) 6 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $6\sqrt{2}$ см; D) 8 см.
- 5.** Конуснинг ясовчиси 6 см га тенг ва у асос текислигига 45° бурчак остида оғган. Мана шу конус асосининг радиусини топинг:
- A) 3 см; B) $3\sqrt{2}$ см; C) $3\sqrt{3}$ см; D) 6 см.
- 6.** Конус асосининг радиуси 2 см га, ясовчиси эса 3 см га тенг. Конус сиртининг юзини топинг:
- A) $6\pi \text{ см}^2$; B) $8\pi \text{ см}^2$; C) $10\pi \text{ см}^2$; D) $12\pi \text{ см}^2$.
- 7.** Конус асосининг радиуси 2 см га тенг. Конус баландлигининг ўртаси орқали асос текислигига параллел бўлган текислик билан кесимининг юзини топинг:
- A) $\pi \text{ см}^2$; B) $2\pi \text{ см}^2$; C) $3\pi \text{ см}^2$; D) $4\pi \text{ см}^2$.
- 8.** Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 2 см га ва ён томонлари 4 см га тенг. Мана шу учбурчакни унинг асосига туширилган баландлиги ётадиган түғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган конус сиртининг юзини топинг:
- A) $3\pi \text{ см}^2$; B) $4\pi \text{ см}^2$; C) $5\pi \text{ см}^2$; D) $6\pi \text{ см}^2$.
- 9.** Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 2 см га ва ён қирралари 3 см га тенг. Мана шу пирамидани унинг баландлиги ётадиган түғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган конуснинг ён сиртининг юзини топинг:
- A) $3\pi \text{ см}^2$; B) $4\pi \text{ см}^2$; C) $5\pi \text{ см}^2$; D) $6\pi \text{ см}^2$.
- 10.** Кесик конус асосларининг радиуслари 4 см ва 1 см, баландлиги эса 4 см га тенг. Кесик конуснинг ясовчисини топинг:
- A) 3 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 6 см.
- 11.** Кесик конуснинг ясовчиси 2 см га тенг ва у асос текислигига 45° бурчак остида оғган. Конуснинг катта асосининг радиуси 2 см га тенг бўлса, кичик асосининг радиусини топинг:

- A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ см; D) $2 - \sqrt{2}$ см.
- 12.** Тенг ёнли трапециянинг асослари 2 см ва 4 см, ён томонлари эса 3 см га тенг. Мана шу трапецияни унинг асосларининг ўрталари оркали ўтувчи түғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигура сиртининг юзини топинг:
- A) $8\pi \text{ см}^2$; B) $10\pi \text{ см}^2$; C) $12\pi \text{ см}^2$; D) $14\pi \text{ см}^2$.
- 13.** Шарнинг радиуси 2 см га тенг. Шарнинг марказидан 1 см узоқликда жойлашган текислик билан кесими — доиранинг юзини топинг:
- A) $\pi \text{ см}^2$; B) $2\pi \text{ см}^2$; C) $3\pi \text{ см}^2$; D) $4\pi \text{ см}^2$.
- 14.** Сферанинг ичида ётган нуқтадан сферанинг контурида ётган нуқталаргача бўлган энг кичик ва энг катта масофалар мос равиша 4 см га ва 6 см га тенг. Сферанинг радиусини топинг:
- A) 2 см; B) 4 см; C) 5 см; D) 10 см.
- 15.** Цилиндрнинг ўқ кесими — томонлари 6 см ва 8 см бўлган түғри тўртбурчак. Цилиндрга ташқи чизилган сферанинг радиусини топинг:
- A) 5 см; B) 6 см; C) 8 см; D) 10 см.
- 16.** Конуснинг ўқ кесими — томонлари 2 см бўлган тенг томонли учбурчак. Мана шу конусга ички чизилган сферанинг радиусини топинг:
- A) 1 см; B) $\sqrt{2}$ см; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см.
- 17.** Радиуси 2 см га тенг сферанинг юзини топинг:
- A) $12\pi \text{ см}^2$; B) $14\pi \text{ см}^2$; C) $16\pi \text{ см}^2$; D) $18\pi \text{ см}^2$.
- 18.** Бирлик кубга ички чизилган сферанинг юзини топинг:
- A) $\frac{\pi}{2} \text{ см}^2$; B) $\pi \text{ см}^2$; C) $2\pi \text{ см}^2$; D) $3\pi \text{ см}^2$.
- 19.** Бирлик кубга ташқи чизилган сферанинг юзини топинг:
- A) $\pi \text{ см}^2$; B) $2\pi \text{ см}^2$; C) $3\pi \text{ см}^2$; D) $4\pi \text{ см}^2$.
- 20.** Икки шарнинг радиуслари 2 : 3 нисбатда. Уларнинг сиртлари юзларининг нисбатини топинг:
- A) 2 : 3; B) 4 : 6; C) 6 : 9; D) 4 : 9.

12-§. Жисмлар ҳажмларининг умумий хоссалари

Ҳажм — геометрик фигуранларнинг фазодаги қисмини таърифловчи катталик Ҳажм геометрик жисмларга боғлиқ ҳолда асосий катталикларнинг бири бўлиб ҳисобланади.

Ҳажмнинг ўлчов бирлиги сифатида қиррасининг узунлиги 1 га teng кубнинг ҳажми олинади. У бирлик куб деб аталади.

Масалан, агар узунликнинг ўлчов бирлиги 1 мм, 1 см ёки 1 м бўлса, унда ҳажмнинг ўлчов бирлиги сифатида қиррасининг узунлиги мос равиша 1 мм, 1 см ёки 1 м га teng куб олинади. Бундай куб мос равиша **миллиметр куб, сантиметр куб ёки метр куб** деб аталади.

Оддий ҳолда фигураннинг ҳажми шу фигура ичига сифадиган бирлик кубларнинг ва унинг бўлакларнинг сони билан ўлчанади. Бу сон натурал, рационал ёки иррационал бўлиши мумкин. Фигураннинг ҳажми ўлчов бирлигига боғлиқ бўлганлигидан, тушунарли бўлиши учун иш юзасида шу сондан кейин ҳажмнинг ўлчов бирлиги ёзилади. Масалан, $V \text{ mm}^3$, $V \text{ см}^3$, $V \text{ м}^3$.

Фазодаги фигураннинг ҳажми учун қўйидаги хоссалар ўринли бўлади:

- 1) фазодаги фигураннинг ҳажми номанфий сон;
- 2) teng фигуранларнинг ҳажмлари teng;

3) агар Φ фигураси Φ_1 ва Φ_2 фигуralаридан иборат бўлса, унда Φ фигурасининг ҳажми Φ_1 ва Φ_2 фигуralари ҳажмларининг йиғиндисига teng бўлади, яъни

$$V(\Phi) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2).$$

4) Бир учидан чиққан қирралари a , b , c бўлган *тўғри бурчакли параллелепипеднинг* V ҳажми қўйидаги формула билан ҳисобланади:

$$V(\Phi) = a \cdot b \cdot c.$$

Баъзида *тўғри бурчакли параллелепипеднинг* ҳажми унинг чизиқли ўлчовларининг кўпайтмасига teng ёки унинг асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига teng дейилади. Охирги мулоҳаза ҳар қандай параллелепипед учун ҳам тўғри.

Хусусий ҳолда қирраси a -га teng кубнинг V ҳажми қўйидаги формула билан ҳисобланади:

$$V = a^3.$$



Қандай ўйлайсизлар, фигураннинг ҳажми нолга teng бўладими?

Хажмлари тенг икки фигура *тенгдош фигуралар* деб аталади. Нүкталари орасидаги масофа бир ҳил мусбат сонга күпайтириладиган текисликни шакл алмаштириш *ўхашалик* деб аталишини эслатамиз. Демак, ўхашалик шакл алмаштиришда ҳар қандай A , B нүкталари мос ҳолда A' , B' нүкталарига күчса, $A'B' = k \cdot AB$ бўлади, бунда k — *ўхашалик коэффициенти* деб аталадиган мусбат сон.

Агар фазодаги икки фигуранинг бирини иккинчисига кўчирадиган ўхашалик шакл алмаштириш бор бўлса, унда шу икки фигура *ўхаш* деб аталади.

Ўхаш фигураларга мисоллар:

1) икки кубнинг ўхашалик коэффициенти шу кубларнинг қирралари узунликларининг нисбатига тенг бўлади;

2) икки тўғри бурчакли параллелепипедларнинг a' , b' , c' билан a , b , c қирралари учун қўйидаги тенгликлар бажарилади:

$$a' = ka, b' = kb, c' = kc,$$

бунда k — қандайдир ўзгармас сон;

3) икки шарнинг ўхашалик коэффициенти шу шарларнинг радиусла рининг нисбатига тенг бўлади.



Икки ўхаш кўпёқ сиртларининг юзларининг нисбати ўхашалик коэффициентининг квадратига тенг бўлишини исботланг.



Икки ўхаш шар сиртларининг юзларининг нисбати ўхашалик коэффициентининг квадратига тенг бўлишини исботланг.



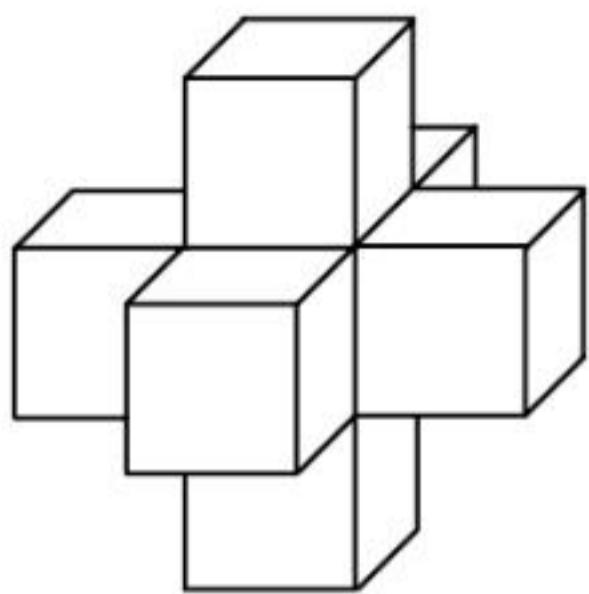
Икки тўғри бурчакли параллелепипед ҳажмларининг нисбати ўхашалик коэффициентининг кубига тенг бўлишини текширинг.

Икки ўхаш фигура ҳажмларининг нисбати ўхашалик коэффициентининг кубига тенг бўлишини исботсиз берамиз, яъни агар k ўхашалик коэффициенти бўйича Φ_2 фигураси Φ_1 фигурасига ўхаш бўлса, унда шу фигураларнинг ҳажмлари учун қўйидаги формула ўринли бўлади:

$$V(\Phi_2) = k^3 V(\Phi_1).$$

Саволлар

1. Ҳажм қандай катталикини таърифлайди?
2. Ҳажмнинг ўлчов бирлиги сифатида нима олинади?
3. Ҳажмнинг хоссаларини айтинг.
4. Фазодаги қандай фигуралар тенгдош деб аталади?
5. Фазодаги қандай шакл алмаштириш ўхашалик деб аталади?
6. Фазодаги қандай фигуралар ўхаш деб аталади?
7. Ўхаш фигураларнинг ҳажмлари ўзаро қандай боғланган?
8. Фазодаги ўхаш фигураларга мисоллар келтиринг.

Машқлар

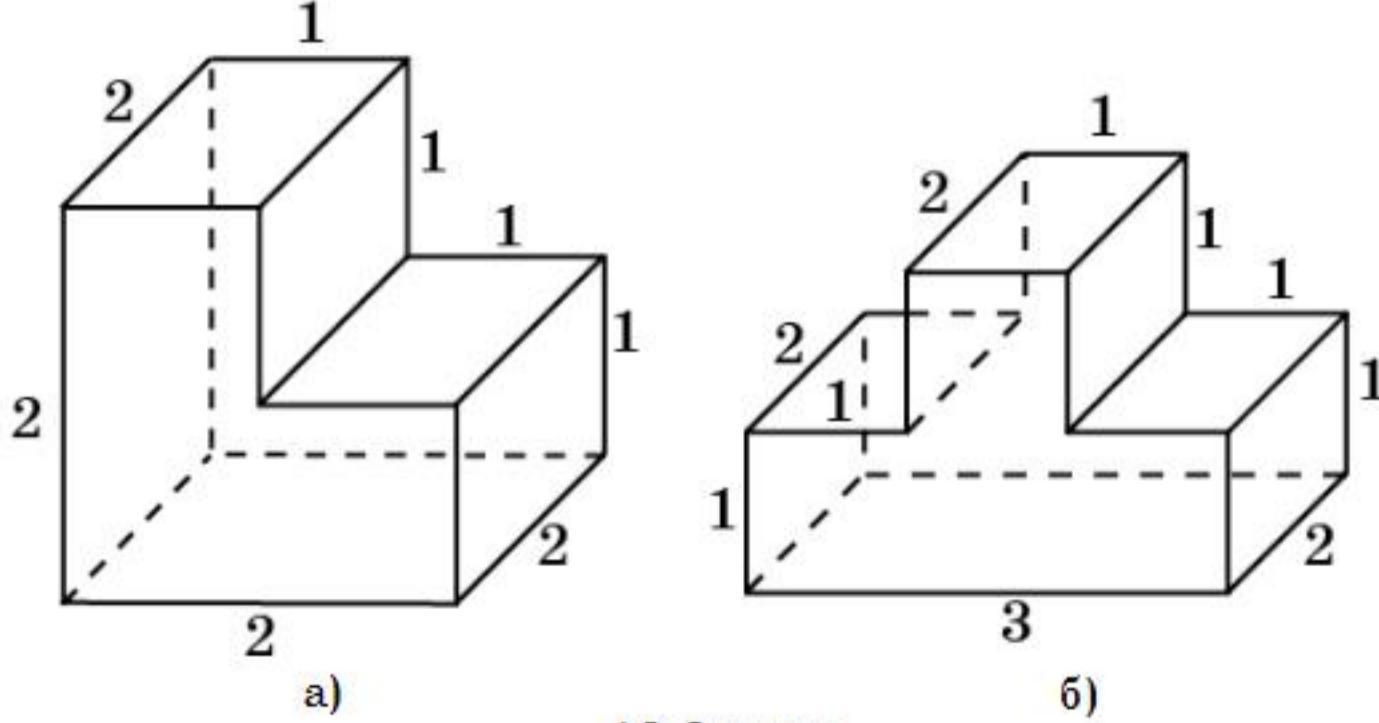
12.1-расм

A

- 12.1.** Кубнинг ҳажми 27 см^3 га тенг. Унинг сиртилининг юзини топинг.
- 12.2.** Куб сиртилининг юзи 24 см^2 га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
- 12.3.** Кубнинг диагонали $\sqrt{12}$ см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
- 12.4.** 12.1-расмдаги фазовий фигураны ташкил этувчи кубларнинг қирралари 1 см га тенг. Шу фигуранинг ҳажмини топинг.
- 12.5.** Агар кубнинг барча қирраларини 3 марта орттирысак, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
- 12.6.** Агар түғри бурчаклы параллелепипеднинг барча қирраларини 2 марта қисқартирысак, унда унинг ҳажми неча марта камаяди?
- 12.7.** Агар түғри бурчаклы параллелепипеднинг: 1) бир чизиқли ўлчамини 2 марта орттирилса; 2) икки чизиқли ўлчамини 3 марта қисқартирилса, унда унинг ҳажми қандай ўзгаради?
- 12.8.** Қурилиш ғишининг оғирлиги 4 кг. Барча чизиқли ўлчамлари шу ғишининг ўлчамларидан түрт марта кичик бўладиган ўйинчоқ ғишининг оғирлиги қанча грамм бўлади?

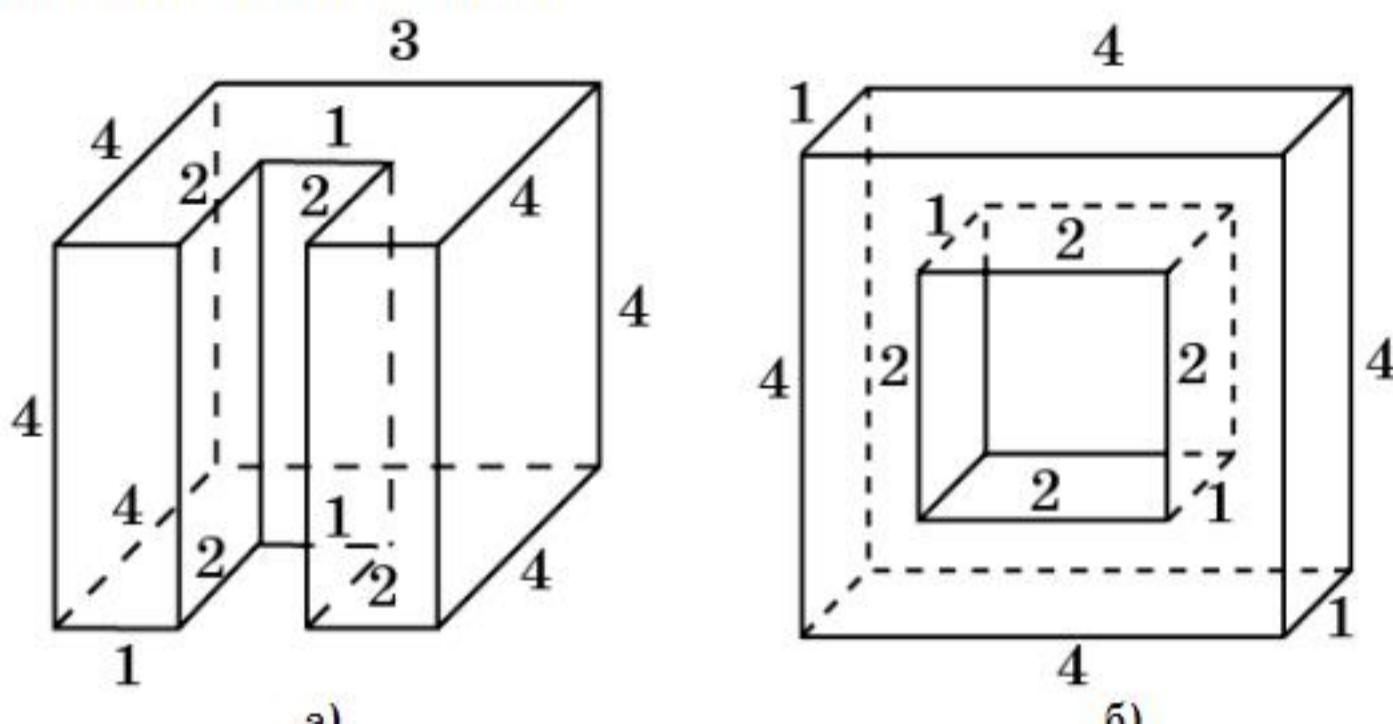
B

- 12.9.** Мактабдаги синф ҳонасининг баландлиги 3,5 м га тенг. Агар ҳар бир ўқувчига $7,5 \text{ м}^3$ ҳаво керак бўлса, унда 28 ўқувчига мўлжалланган синф ҳонасининг юзи қандай бўлиши керак?
- 12.10.** 12.2-расмдаги түғри бурчаклы параллелепипедлардан иборат фигуранинг ҳажмини топинг.



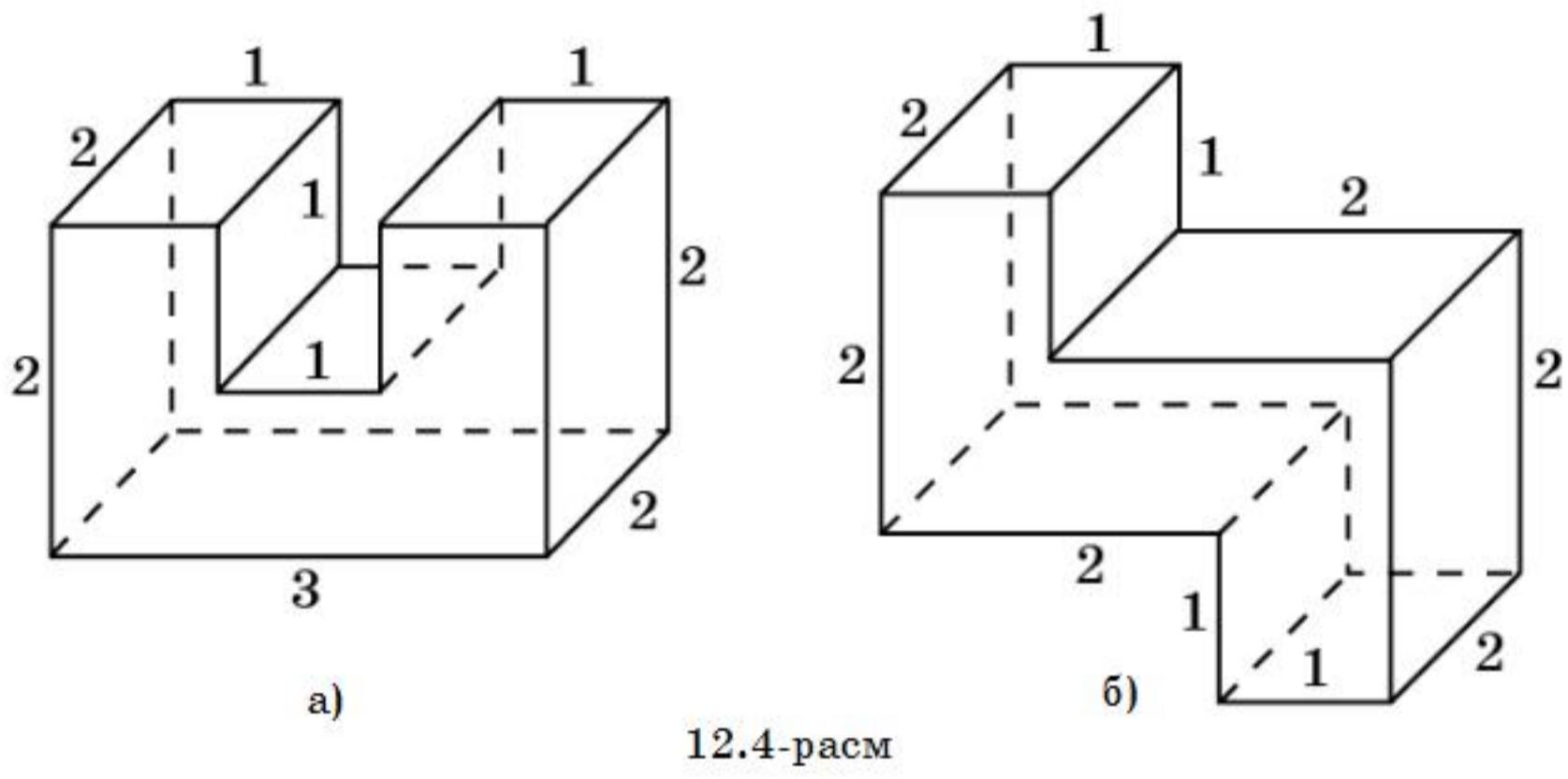
12.2-расм

12.11. 12.3-расмдаги түғри бурчакли параллелепипедлардан иборат фигуранинг ҳажмини топинг.



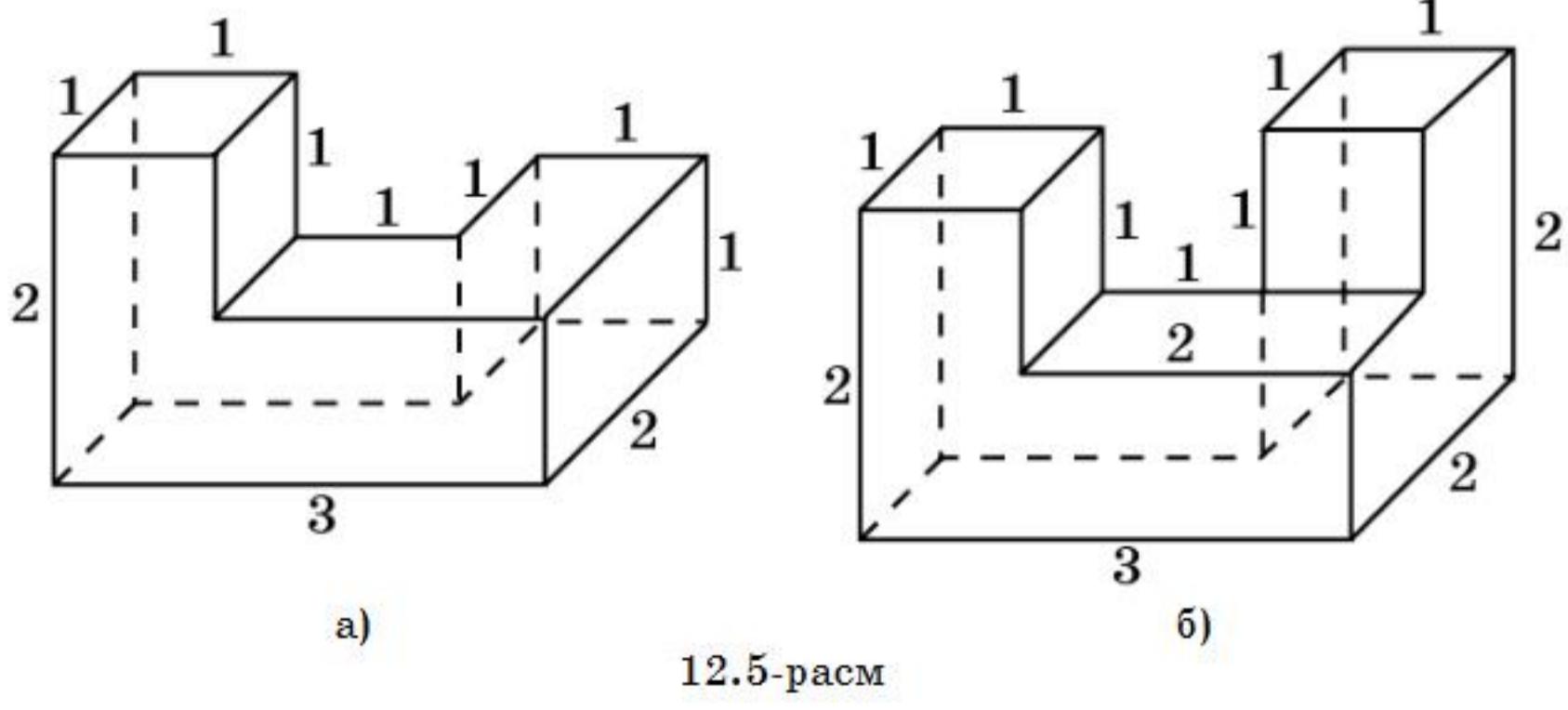
12.3-расм

12.12. 12.4-расмдаги түғри бурчакли параллелепипедлардан иборат фигуранинг ҳажмини топинг.



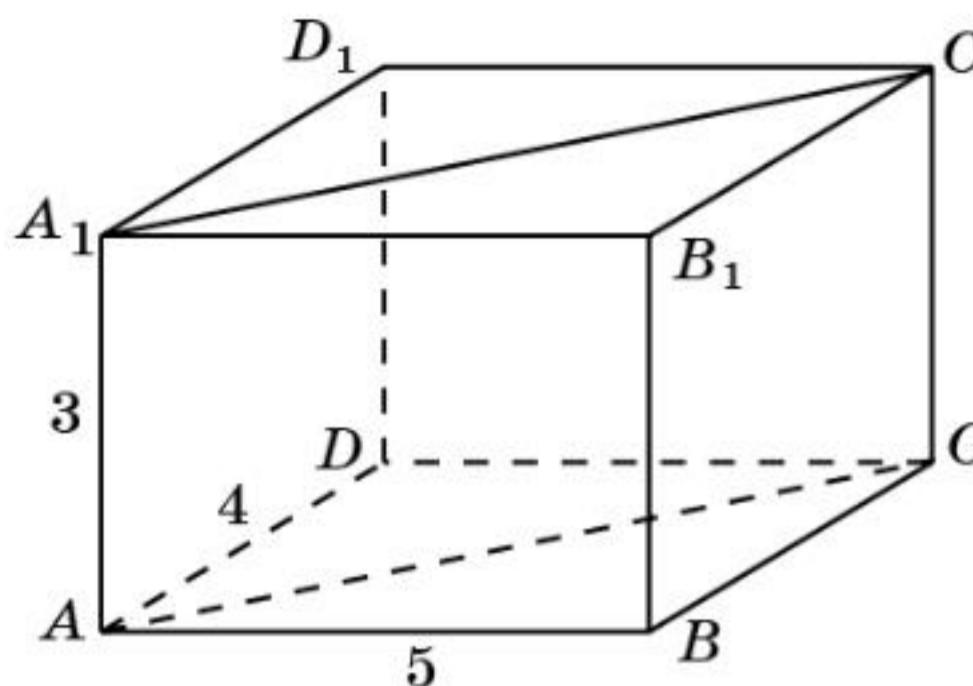
12.4-расм

12.13. 12.5-расмдаги түғри бурчакли параллелепипедлардан иборат фигуранинг ҳажмини топинг.

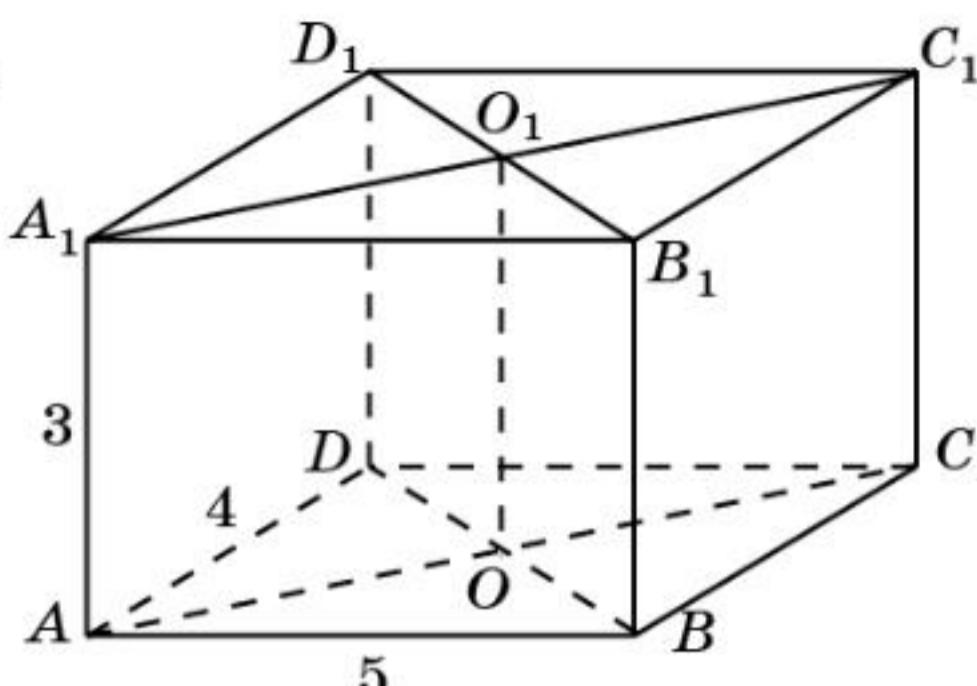


12.5-расм

- 12.14.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ түғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган қирралари 5 см, 4 см, 3 см га тенг. $ABCA_1B_1C_1$ учбұрчакли призманинг ҳажмини топинг (12.6-расм).



12.6-расм

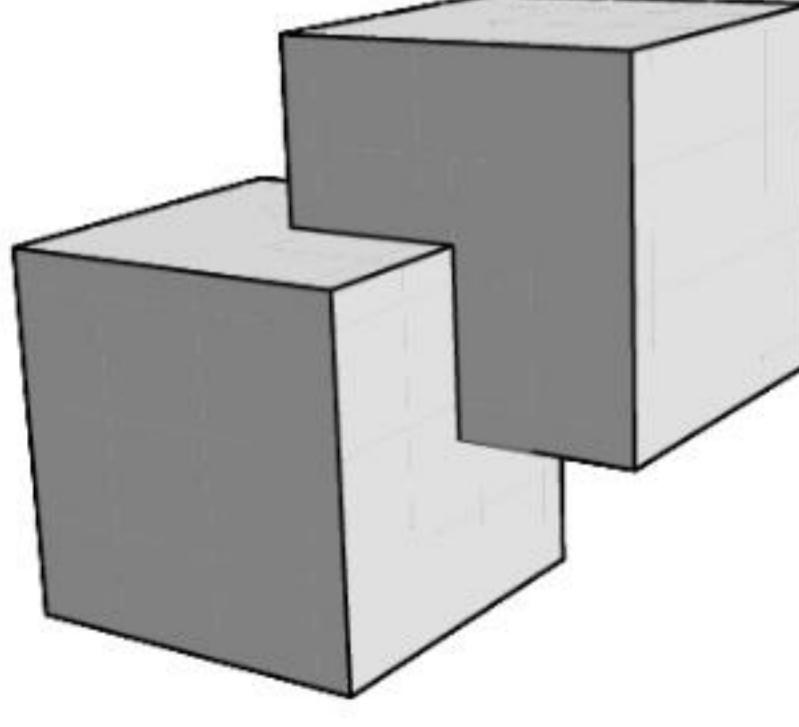


12.7-расм

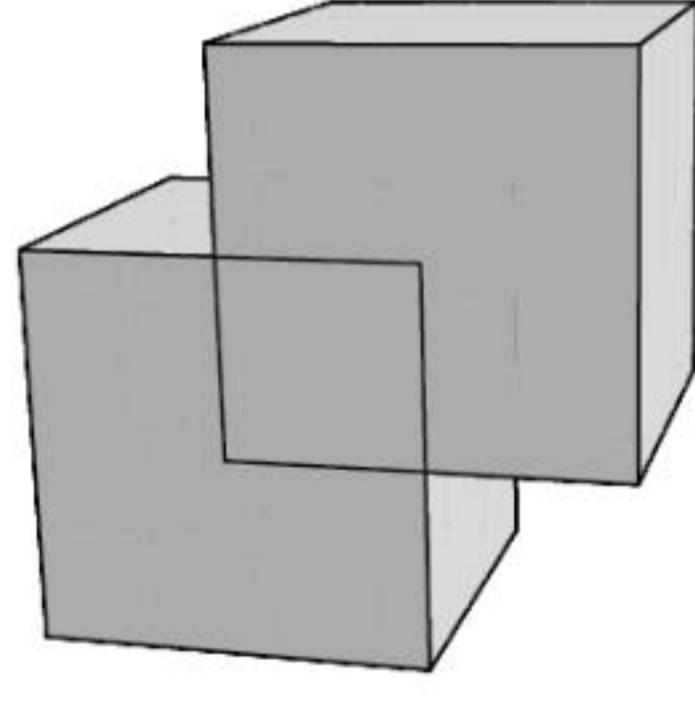
- 12.15.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ түғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган қирралари 5 см, 4 см, 3 см га тенг. $ABOA_1B_1O_1$ учбұрчакли призманинг ҳажмини топинг (12.7-расм).

- 12.16.** Балиқни ўстиришга мүлжалланган аквариумнинг асоси — томонлари 40 см ва 50 см бўладиган түғри тўртбурчак. Аквариумдаги сувнинг чуқурлиги 80 см. Бу сув иккинчи аквариумга қўйиб олинди. Иккинчи аквариумнинг таги — томонлари 80 см ва 100 см га тенг түғри тўртбурчак. Бундаги сувнинг чуқурлиги қандай бўлади?

- 12.17.** Бирининг учи иккинчисининг марказида жойлашган икки бирлик кубнинг умумий қисмининг ҳажмини топинг (12.8-расм).



12.8-расм



12.9-расм

- 12.18.** Бирининг икки учи иккинчисининг икки ёғининг марказларида жойлашган икки бирлик кублардан иборат фигуранинг ҳажмини топинг (12.9-расм).

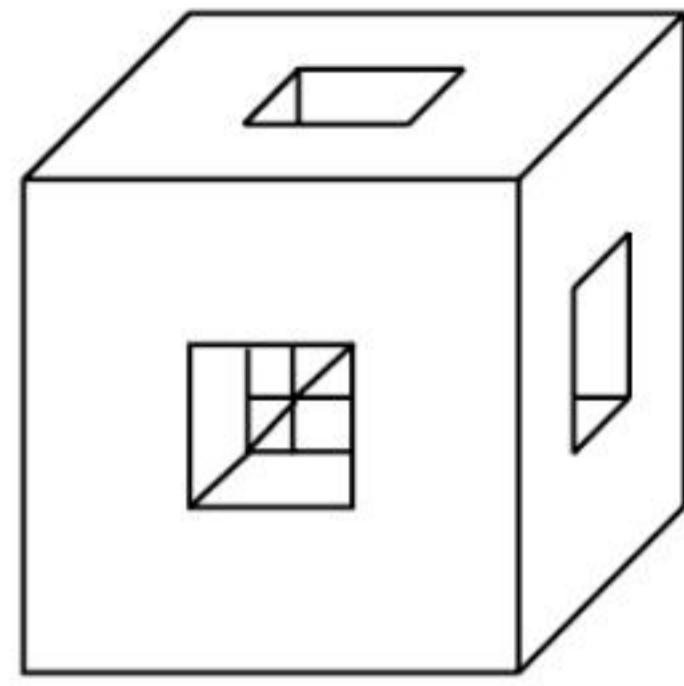
- 12.19.** Курилиш ғишининг ўлчами $25 \text{ см} \times 12 \text{ см} \times 6 \text{ см}$. Цемент әритмаси ҳажмини 15% га орттирадиган бўлса, 10000 ғиштдан иборат деворнинг ҳажмини топинг.
- 12.20.** Қирралари 1 см , 6 см ва 8 см бўлган уч қўрошин кубни эритиб бир куб ясалди. Олинган куб қиррасининг узунлигини топинг.

С

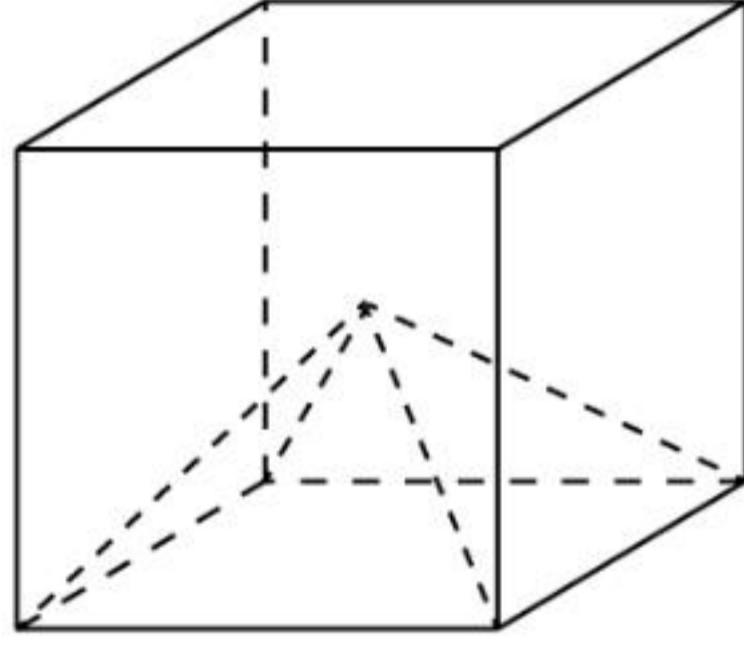
- 12.21.** Агар кубнинг ҳар бир қиррасини 2 см га орттирса, унда кубнинг ҳажми 98 см^3 га ортади. Куб қиррасини топинг.

- 12.22.** Қирраси 6 см бўлган кубнинг ҳар бир ёғидан томони 2 см га teng ковак квадрат тешиклар ясалган (12.10-расм). Кубнинг қолган қисмининг ҳажмини топинг.

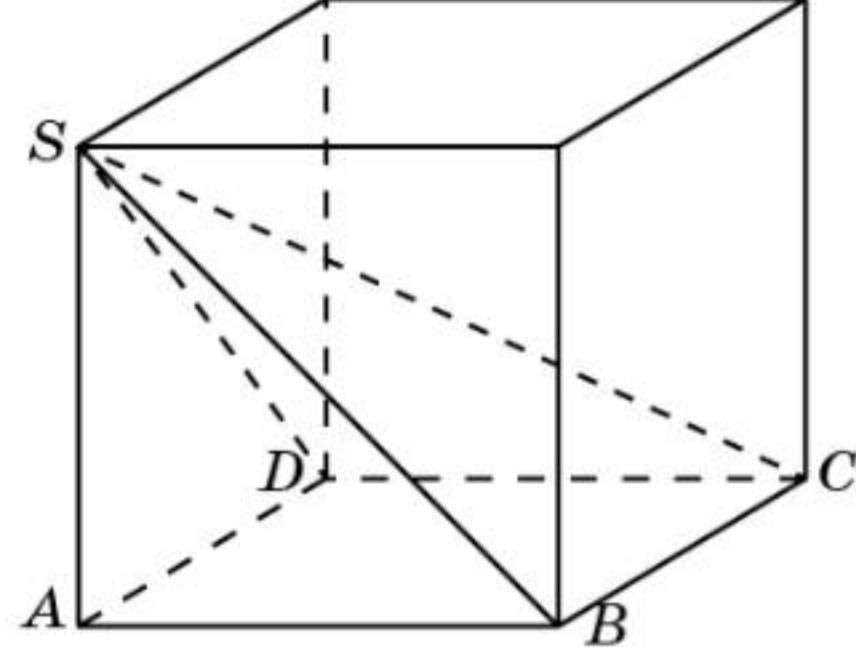
- 12.23.** Мунтазам тўрт бурчакли пирамиданинг асоси — бирлик кубнинг бир ёғи, уни эса шу кубнинг маркази бўлади (12.11-расм). Пирамиданинг ҳажмини топинг.



12.10-расм



12.11-расм



12.12-расм

- 12.24.** Тўрт бурчакли пирамиданинг асоси — бирлик кубнинг бир ёғи, уни эса шу ёғида ётмайдиган кубнинг уни бўлади (12.12-расм). Пирамиданинг ҳажмини топинг.

- 12.25.** Параллелепипед шаклидаги идиш берилган (12.13-расм). Идиш ҳажмининг teng ярми сув билан тўлдирилган. Расмини тасвирлаб кўрсатинг ва тушунириинг. Агар идишнинг узунлиги 4 м , эни баландлиги $0,5 \text{ м}$ ортиқ, баландлиги эса



12.13-расм

узунлигининг 37,5% ни ташкил этса, қүйилган сувнинг ҳажмини топинг.

- 12.26.** Аквариумнинг узунлиги 80 см, эни 45 см, баландлиги эса 55 см. Сув сатқи аквариумнинг юқорғи четидан 10 см паст бўлиши учун шу аквариумга неча литр сув қўйиш керак?

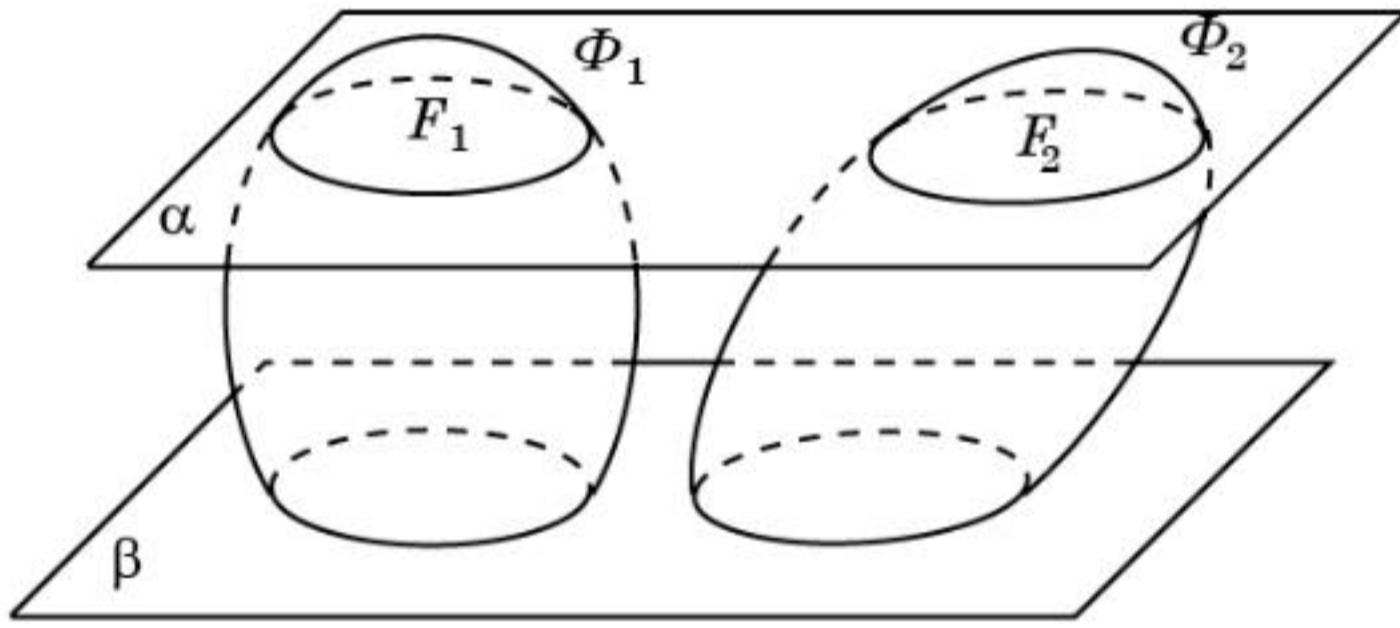
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланнинг

- 12.27.** Призманинг, ички чизилган ва ташқи чизилган призмаларнинг таърифларини такрорланг.

13-§. Призма ҳажми

Италиялик математик Бонавентура Кавальери (1598—1647 йй.) тавсия этган фазовий фигураларнинг ҳажмларини ҳисоблаш усулини кўриб чиқайлик.

Кавальери принципи. *Агар фазодаги Φ_1 ва Φ_2 фигураларининг бир текисликка параллел бўлган текисликлар билан кесимларида юзлари бир хил F_1 ва F_2 фигуралари ҳосил бўлса, унда берилган фазовий фигураларнинг ҳажмлари тенг бўлади (13.1-расм).*



13.1-расм

Кавальери принципини асослаш учун Φ_1 ва Φ_2 фигураларини қалинлиги бир хил юпқа қатламлардан иборат деб оламиз. Улар Φ_1 ва Φ_2 фигураларининг ҳар қандай текисликка параллел бўлган текисликлар билан кесишишидан ҳосил бўлади (13.1-расм). Мана шу қатламларнинг қалинлиги билан юзларининг тенглигидан уларнинг ҳажмларининг тенглиги келиб чиқади. Демак, мана шу қатламлардан иборат Φ_1 ва Φ_2 фигураларнинг ҳажмлари ҳам тенг бўлади.

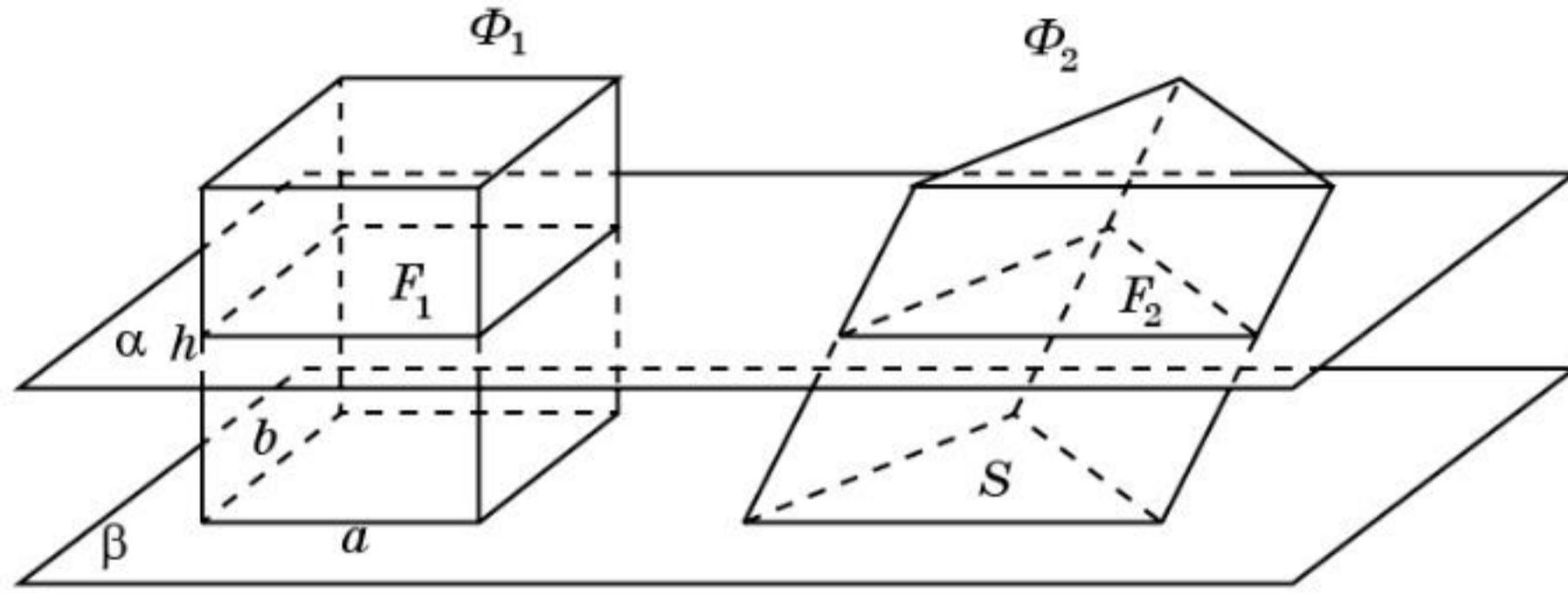
Кавальери принципини фойдаланиб, ҳар қандай призманинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқариш мумкин.

Теорема. *Призманинг ҳажми унинг асоси юзи билан баландлиги-нинг кўпайтмасига тенг бўлади:*

$$V = S \cdot h,$$

бу ерда S — призма асосининг юзи, h — призманинг баландлиги.

Исботи. Асосининг юзи S ва баландлиги h бўлган призма учун тўғри бурчакли параллелепипедни кўриб чиқамиз. Унинг бир учидан чиққан қирралари a, b, h га teng ва $a \cdot b = S$ бўлсин. Призма билан параллелепипедни унинг a, b томонлари ётган ёғи призма асосининг b текислигига ётадигандай ва ўzlари шу текисликнинг бир ёғида бўладигандай қилиб жойлаштирамиз (13.2-расм).



13.2-расм

Параллелепипеднинг b текислигига параллел бўлган a текислиги билан кесимида b текислигидаги томонлари a, b бўлган тўғри тўртбурчакка teng тўғри тўртбурчак ҳосил бўлади. Призманинг шу a текислиги билан кесимида призманинг асосига teng кўпбурчак олинади. Бу кесимларнинг юzlари teng. Демак, Кавальери принципи бўйича параллелепипед билан призманинг ҳажмлари teng бўлади. Бундан призманинг ҳажми $V = S \cdot h$ бўлиши келиб чиқади. \square

Тўғри призманинг баландлиги унинг ён қирраси билан юзма-юз келади, ҳажми эса асосининг юзи билан ён қиррасининг кўпайтмасига teng бўлади.



Баландлиги h ва асосининг томонлари a бўлган мунтазам: а) учбурчакли; б) олтибурчакли призманинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқаринг.

Саволлар

- Кавальери принципи қандай мулоҳаза қилинади?
- Призманинг ҳажми қандай ҳисобланади?

Машқлар

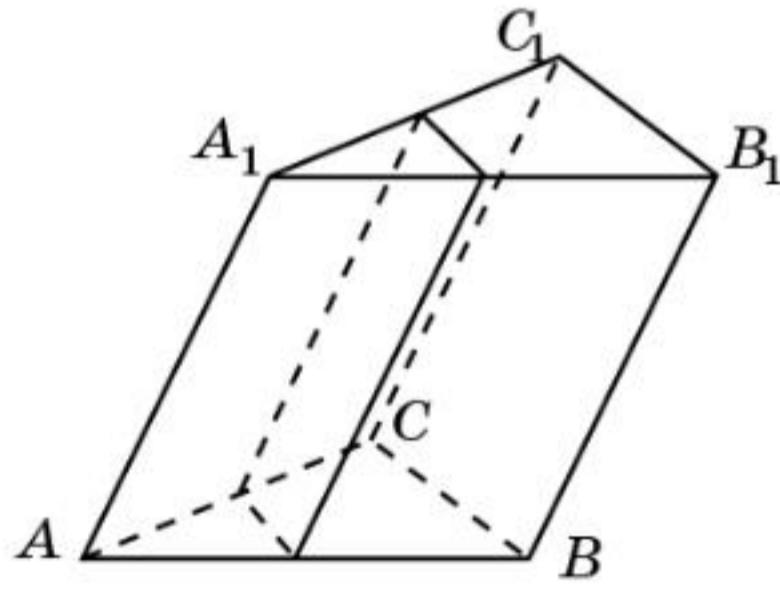
A

- 13.1.** Учбурчакли призманинг асоси — катетлари 3 см ва 4 см бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Призманинг баландлиги 10 см га teng. Унинг ҳажмини топинг.

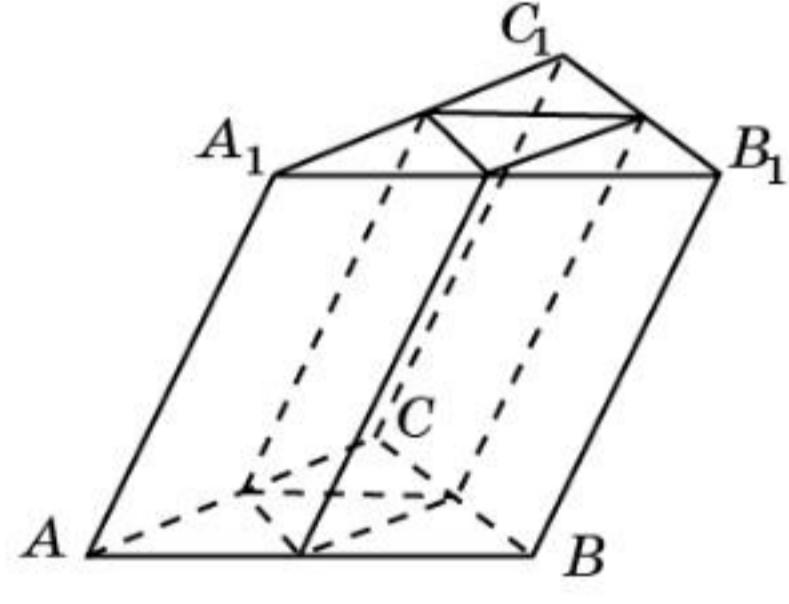
- 13.2.** Мунтазам учурчакли призманинг баландлиги 5 см га, асосининг томонлари эса 4 см га тенг. Шу призманинг ҳажмини топинг.
- 13.3.** Мунтазам олтибурчакли призманинг ён қирралари 3 см га, асосининг томонлари эса 2 см га тенг. Шу призманинг ҳажмини топинг.
- 13.4.** Түртбурчакли призманинг асоси — томонлари 1 см га тенг квадрат. Призманинг ён қирралари 2 см га тенг ва улар асос текислиги билан 60° бурчак ясайды. Призманинг ҳажмини топинг.
- 13.5.** Параллелепипеддинг ёғи — томонлари 1 см ва ўткир бурчаги 60° бўлган ромб. Параллелепипеддинг бир қирраси 1 см га тенг ва шу ёғи билан 60° бурчак ясайды. Унинг ҳажмини топинг.

B

- 13.6.** Мунтазам учурчакли призманинг ҳажми 4800 см^3 га, асосининг томонлари 20 см га тенг. Призманинг баландлигини топинг.
- 13.7.** Учурчакли призма асосининг ўрта чизиги орқали унинг ён қиррасига параллел текислик ўтказилган (13.3-расм). Бу текислик призманинг ҳажмини қандай нисбатда бўлади?



13.3-расм



13.4-расм

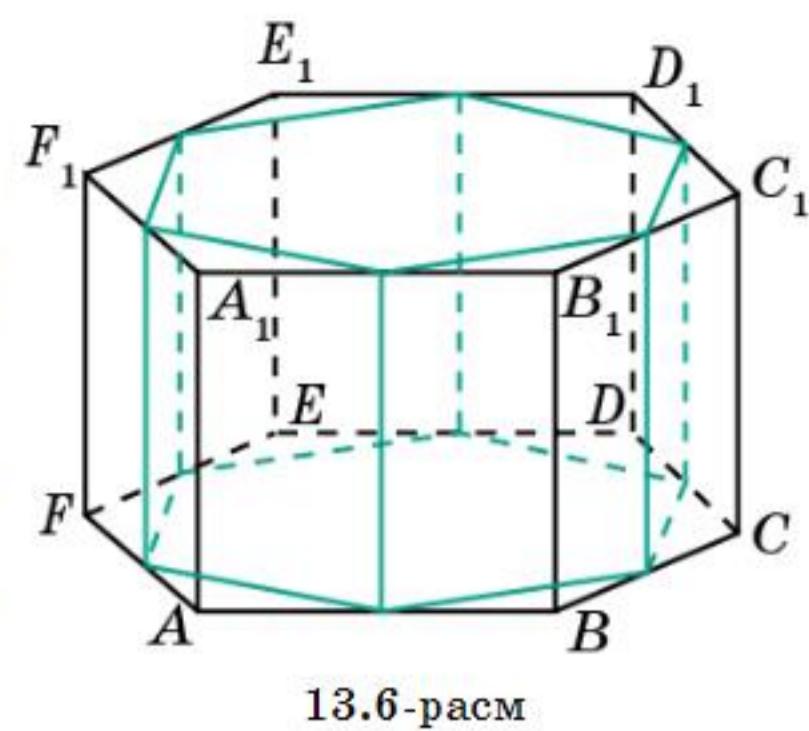
- 13.8.** Учурчакли призманинг ҳажми 12 см^3 га тенг. Асосининг учлари берилган призма асосининг томонларининг ўрталари

бўладиган иккинчи призманинг ҳажмини топинг (13.4-расм).

- 13.9.** Түртбурчакли призманинг ҳажми 10 см^3 га тенг. Асосининг учлари берилган призма асосининг томонларининг ўрталари бўладиган иккинчи призманинг ҳажмини топинг (13.5-расм).

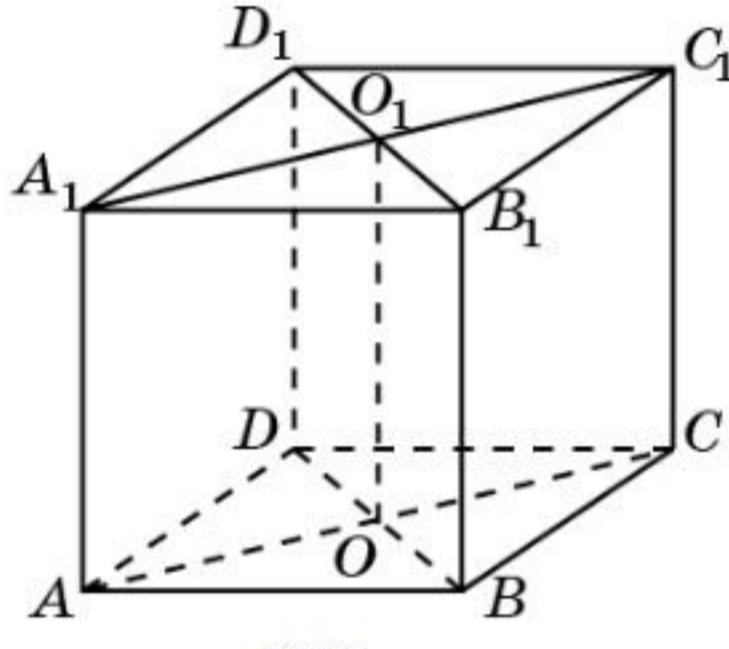
13.10. Олтибурчакли призманинг ҳажми 12 см^3 га тенг. Асосининг учлари берилган призма асоси томонларининг ўрталари бўладиган иккинчи призманинг ҳажмини топинг (13.6-расм).

13.11. Икки мунтазам n -бурчакли призма ўхшаш бўлиши учун уларнинг ён қирралари билан асосининг томонларига тегишли шартларни мулоҳаза қилинг. Шу призма ҳажмларининг нисбатини топинг.

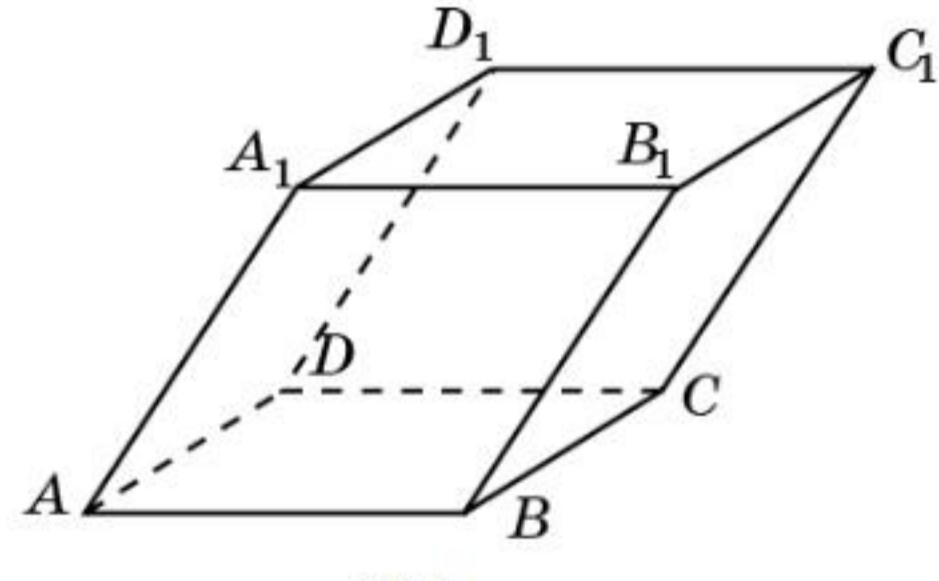


13.6-расм

13.12. Тўғри призманинг асоси — юзи 1 м^2 га тенг бўлган ромб. Унинг диагонали бўйича кесимларининг юzlари 3 м^2 ва 6 м^2 га тенг (13.7-расм). Призманинг ҳажмини топинг.



13.7-расм



13.8-расм

13.13. Параллелепипеднинг умумий учга эга уч ёғи — томонлари 1 см , учидағи ўтқир бурчаги 60° га тенг ромб (13.8-расм). Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

Яңги мавзуны үзлаштиришга тайёрланнинг

13.14. Айланиш жисмлари ва цилиндр таърифларини такрорланг.

14-§. Цилиндр ҳажми

Кавальери принципини цилиндрнинг ҳажмини топишда қўлланайлик.

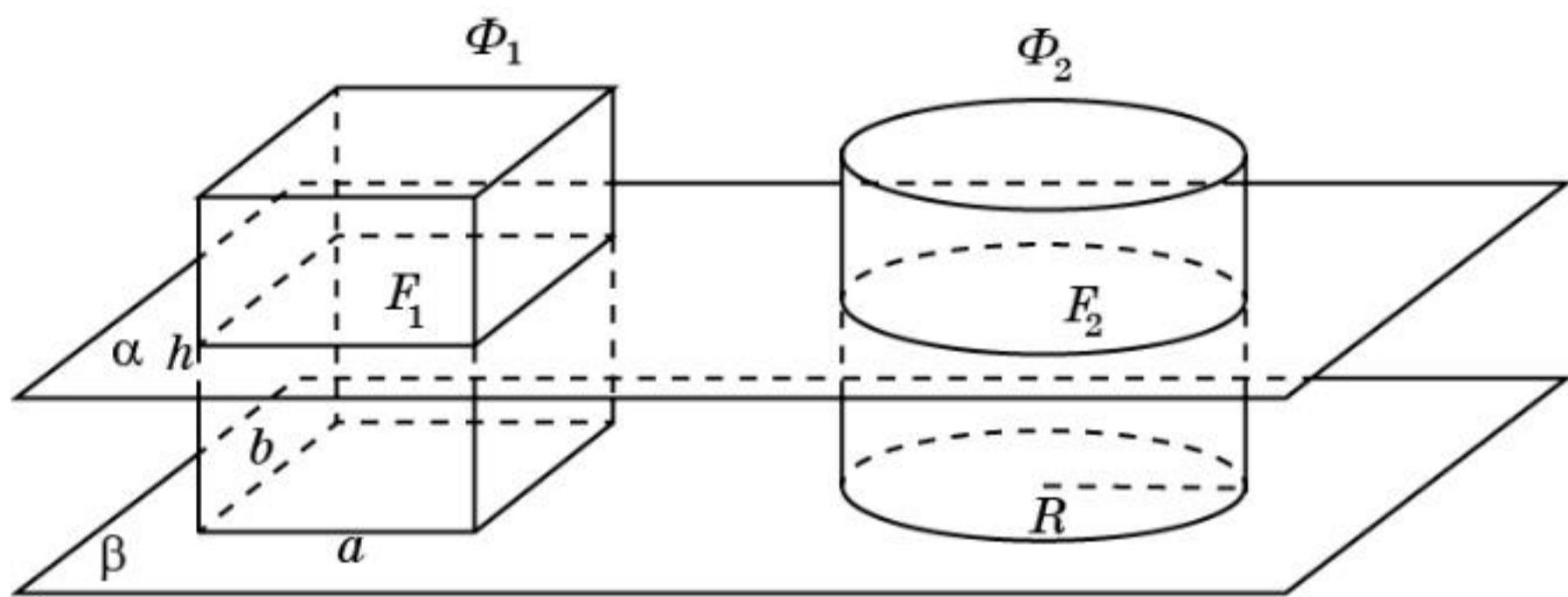
Теорема. Цилиндрнинг ҳажми унинг асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг бўлади:

$$V = S \cdot h = \pi R^2 \cdot h,$$

Бунда: S — цилиндр асосининг юзи, R — асосининг радиуси, h — цилиндрнинг баландлиги.

Исботи. Теореманинг исботи призманинг ҳажмини топиш формуласининг исботига ўхшаш бўлади. Асосининг радиуси R ва баландлиги h бўлган цилиндр учун тўғри бурчакли параллелепипедни кўриб чиқамиз. Унинг бир учидан чиқувчи қирралари a, b, h га teng ва $a \cdot b = \pi R^2$ бўлсин.

Цилиндр билан параллелепипедни унинг a, b томонлари ётган ёғи цилиндр асосининг b текислигига ётувчи ва ўзлари шу текисликнинг бир ёқ бўлагига бўладигандай жойлаштирамиз (14.1-расм).



14.1-расм

Параллелепипеднинг b текислигига параллел α текислиги билан кесимида β текислигидаги томонлари a, b бўлган тўғри тўртбурчакка teng тўғри тўртбурчак ҳосил бўлади. Цилиндрнинг шу a текислиги билан кесимида — цилиндрнинг асосига teng доира олинади. Бу кесимларнинг юзлари teng. Демак, Кавальери принципи бўйича параллелепипед билан цилиндрнинг ҳажмлари teng бўлади. Бундан цилиндрнинг ҳажми $\pi R^2 \cdot h$ бўлади. \square

Савооллар

1. Цилиндрнинг ҳажми қандай ҳисобланади?

Машқлар

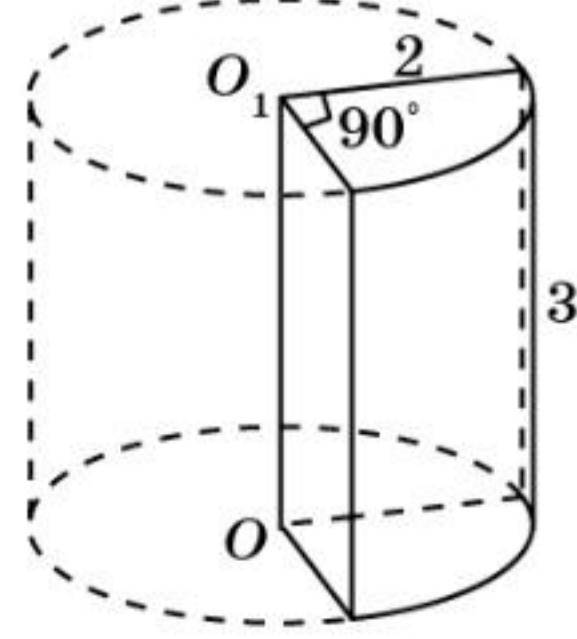
A

- 14.1. Цилиндрнинг ясовчиси 3 см га, асосининг радиуси эса 2 см га teng. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.

- 14.2.** Цилиндрнинг ўқ кесими — томони a см бўлган квадрат. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.
- 14.3.** Бир коса иккинчисига нисбатан 2 марта баландроқ, иккинчи коса эса биринчисига нисбатан 1,5 марта кенгроқ. Қандай косанинг сифимлиги юқори?
- 14.4.** Квадратнинг томони a га teng. Квадратни томони ётган тўғри чизик орқали айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.
- 14.5.** Цилиндрнинг ўқ кесимидан диагонали 1 см га teng ва у асос текислигига 30° бурчак остида оғади. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.
- 14.6.** Бирлик кубга ички чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.
- 14.7.** Тўғри призманинг асоси — томони 1 см га teng квадрат. Призманинг ён қирраси 2 см га teng. Шу призмага ташқи чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.

В

- 14.8.** Тўғри бурчакли a ва b га teng томонлари ётган тўғри чизик бўйлаб айлантирганда икки цилиндр ҳосил бўлди. Шу цилиндрларнинг ҳажмларининг нисбатини топинг.
- 14.9.** Мунтазам тўрт бурчакли призмага ташқи чизилган цилиндрнинг ҳажми шу призмага ички чизилган цилиндрнинг ҳажмидан неча марта ортиқ?
- 14.10.** 14.2-расмдаги цилиндр асосининг радиуси 2 см га, ясовчиси эса 3 см га teng. Шу цилиндрдан икки ёқли тўғри бурчак ясаб кесилиб олинган қисмининг ҳажмини топинг.
- 14.11.** Цилиндросимон идиш асосининг диаметри 9 см га teng. Идишга қандайдир жисмни солганда унинг ичидаги суюқликнинг сатҳи 12 см га кўтарилиди. Жисмнинг ҳажмини топинг.
- 14.12.** Цилиндросимон идишдаги суюқликнинг сатҳи 16 см га teng. Агар шу суюқликнинг диаметри бу идишдан 2 марта катта бўладиган иккинчи идишга қуйилса, унда суюқликнинг сатҳи қандай баландликда бўлади?
- 14.13.** Цилиндрнинг ён сиртининг ёйилмаси — томонлари 1 см ва 2 см бўлган тўғри тўртбурчак. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.
- 14.14.** Бирлик сферага ташқи чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.
- 14.15.** Иккита цилиндр ўхшаш бўлиши учун уларнинг асосларининг радиуслари билан

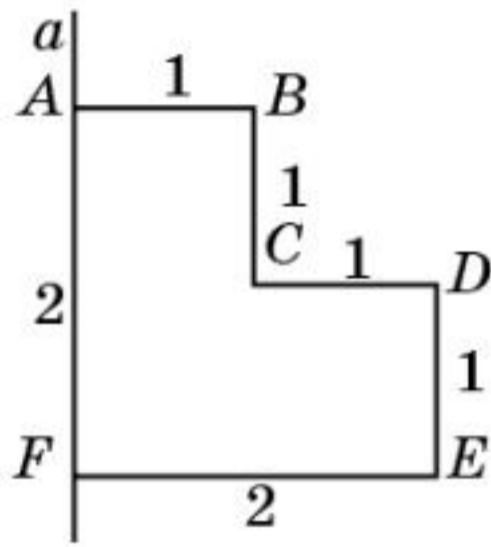


14.2-расм

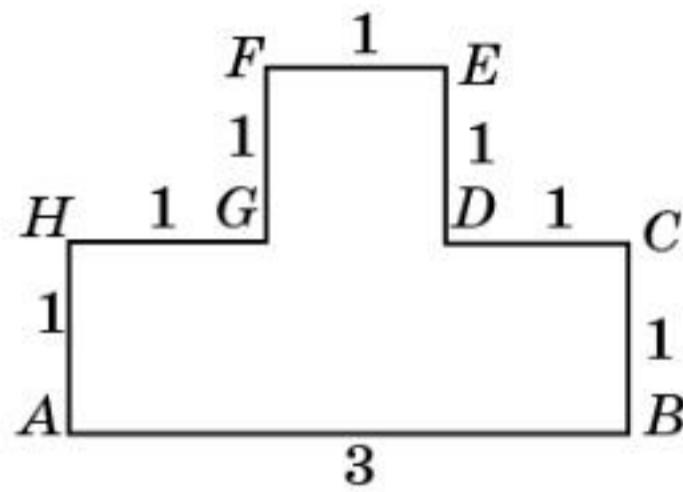
ясовчиларига тегишли шартларни ёзинг. Уларнинг ҳажмлари нисбатини топинг.

C

- 14.16.** 14.3-расмда барча бурчаклари түғри бўлган кўпбурчак тасвириланган. Шу кўпбурчакни 2 см га teng томони ётадиган түғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.



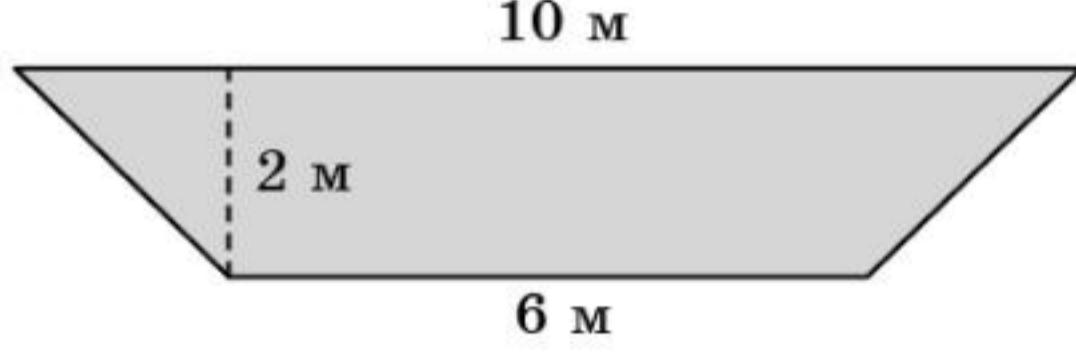
14.3-расм



14.4-расм

- 14.17.** 14.4-расмда барча бурчаклари түғри бўлган кўпбурчак тасвириланган. Шу кўпбурчакни 3 см га teng томони ётадиган AB түғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.

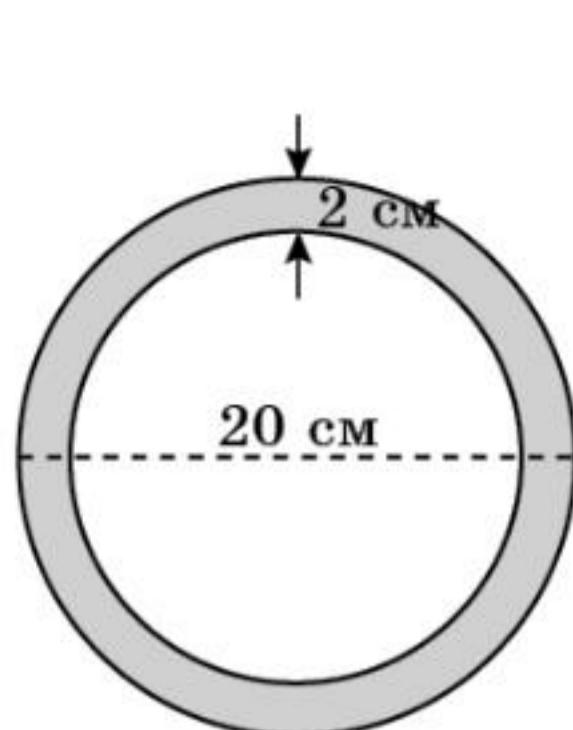
- 14.18.** Дарё ҳавзасининг кўндаланг кесимининг тасвири teng ёнли трапеция шаклида. Унинг асослари 10 м ва 6 м, баландлиги эса 2 м (14.5-расм). Дарё оқимининг тезлиги 1 м/с бўлса, ушбу тасвиридан 1 мин да қандай ҳажмдаги сув оқиб ўтишини топинг. Жавобини метр куб билан ифодаланг.



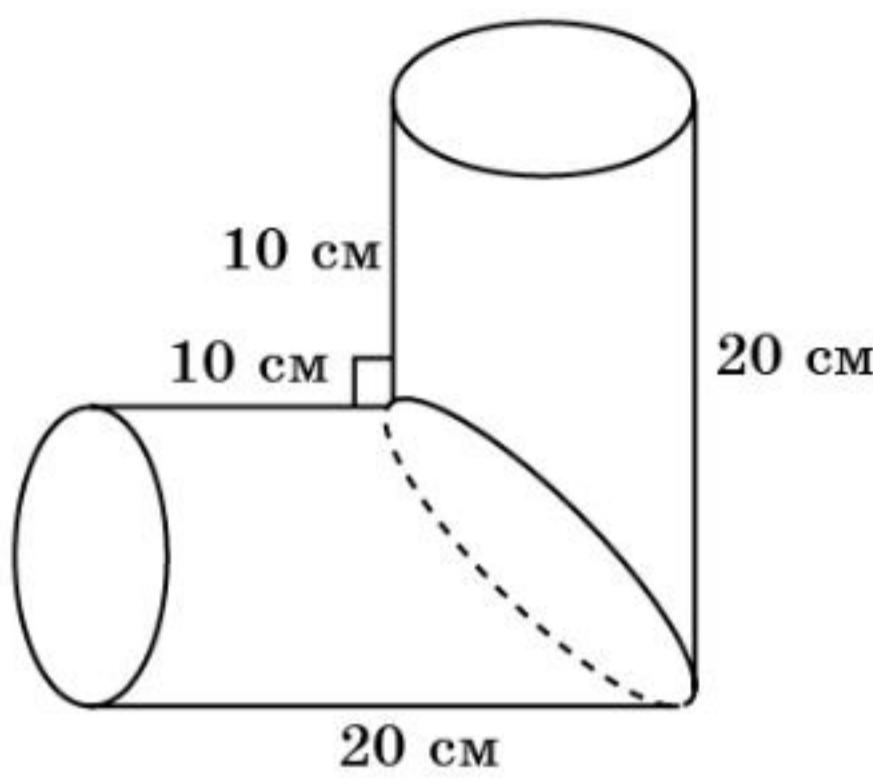
14.5-расм

- 14.19.** Чўян қувурининг узунлиги 2 м, ташки диаметри эса 20 см га teng. Қувур деворининг қалинлиги 2 см (14.6-расм). Агар чўяннинг зичлиги таҳминан $7,5 \text{ г}/\text{см}^3$ бўлса, қувурнинг оғирлигини топинг. Жавобни килограмм билан ифодаланг ($\rho = 3$).

- 14.20.** 14.7-расмдаги 90° бурчак ясовчи цилиндрларнинг иккита teng бўлагидан иборат фигуранинг ҳажмини топинг ($\rho = 3$).



14.6-расм



14.7-расм

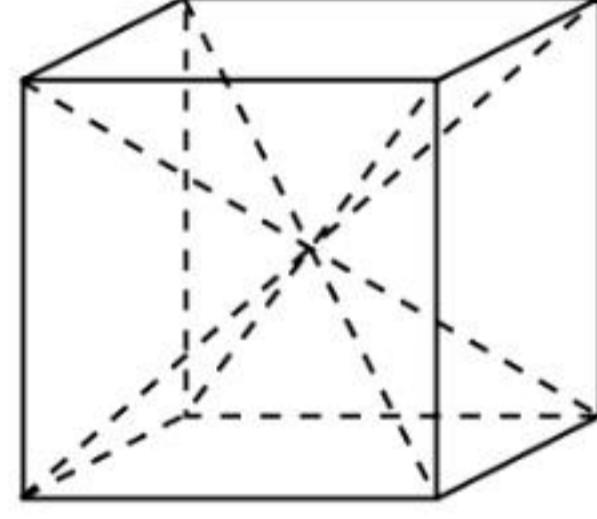
Яңги мавзуның үзлаштиришга тайёрланинг

14.21. Пирамида ва кесик пирамиданинг таърифларини такрорланг.

15-§. Пирамида ва кесик пирамида ҳажмлари

Пирамиданинг ҳажмини ҳисоблаш ҳақидағи дастлабки маълумоттар бизнинг эрамиздан 3000 йил аввал қадимги вавилонликлар билан мисрликларнинг папирусларидан топилған.

Қизиқарлisisи шундаки, улар пирамиданинг ҳажмини топишнинг умумий формуласини келтириб чиқармади, лекин аниқ пирамидаларнинг ҳажмларини ҳисоблаган. Шундай қилиб баландлиги $S \frac{1}{2}$ га, асоси 1 га тенг бўлган муентазам тўртбурчакли пирамиданинг ҳажмини топа олган. У учун улар қирраси ўлчов бирлигига тенг кубни олиб, уни 6 га тенг муентазам тўртбурчакли пирамидаларга бўлган. Бу пирамидаларнинг асослари кубнинг ёқлари бўлади ва улардан ҳар бирининг учи кубнинг марказида жойлашади (15.1-расм). Барча олтита пирамида ўзаро тенг бўлади. Бундан улардан ҳар бирининг ҳажми куб ҳажмининг $\frac{1}{6}$ га тенг бўлади.

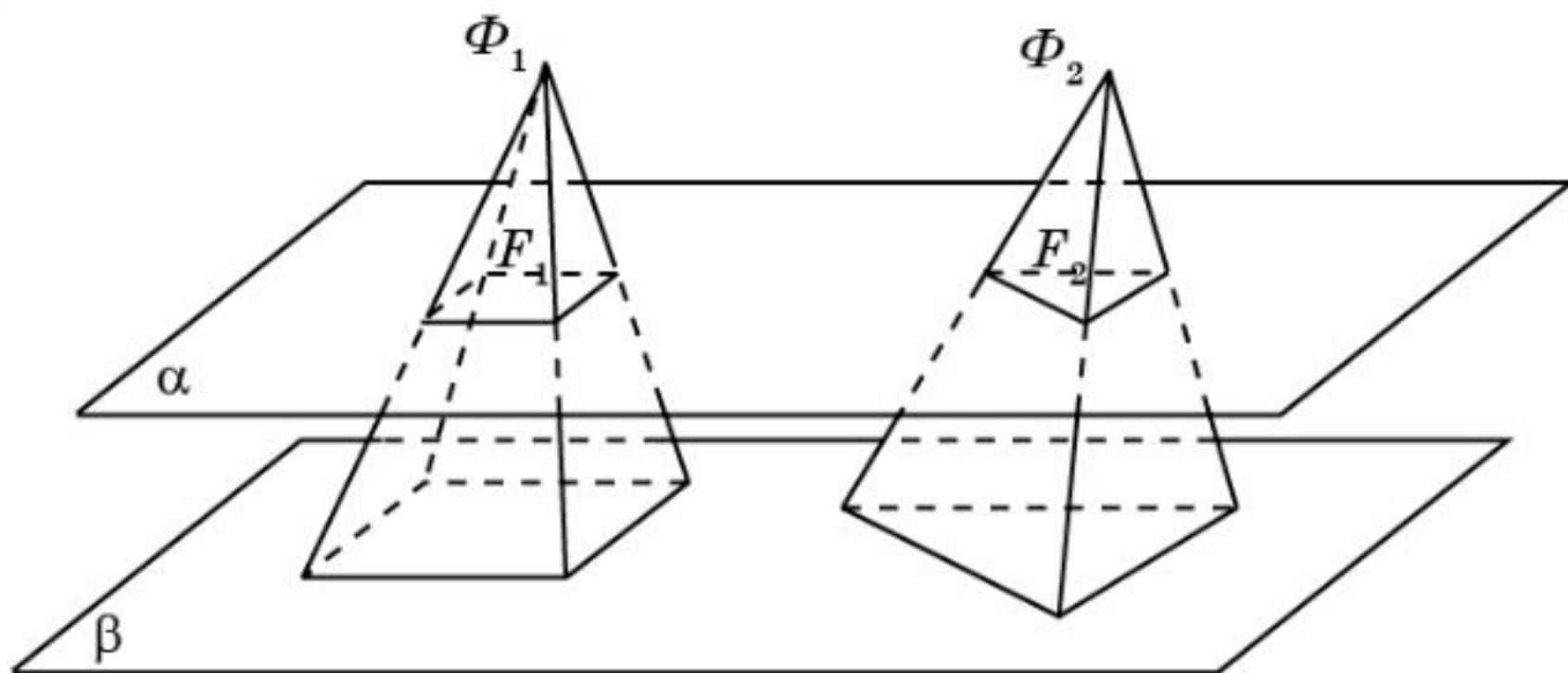


15.1-расм

Кавальери принципини қўлланиб, мана шундай ёрдамчи теоремани исботлайлик.

Теорема. Агар иккии пирамиданинг баландликлари ва асосларининг юзлари ўзаро тенг бўлса, унда уларнинг ҳажлари ҳам тенг бўлади.

Исботи. Φ_1 ва Φ_2 пирамидаларининг баландликлари h га тенг бўлсин ва юзлари S га тенг бўлган асослари бир бир текислигига ётсин (15.2-расм).



15.2-расм

Б текислигига параллел ва ундан x ($0 \leq x \leq h$) узоклиқда бўлган а текислигини ўтказамиш (15.2-расм). Шунда пирамидаларнинг мана шу текислик билан кесимларида ҳосил бўлган F_1 ва F_2 фигуралари мос ҳолда асосларига ўхшаш бўлади ва иккаласида ҳам k ўхшашлик коэффициенти $(h - x) : h$ га тенг бўлади. Демак, F_1 ва F_2 фигураларининг S_1 ва S_2 юzlари мос ҳолда $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулалари билан ифодаланади. Шундай қилиб, улар ўзаро тенг бўлади. Кавальери принципи бўйича пирамидаларнинг ҳажмлари тенг бўлиши келиб чиқади. \square

Энди учбурчакли пирамиданинг ҳажми ҳақидаги асосий теоремани исботлайлик.

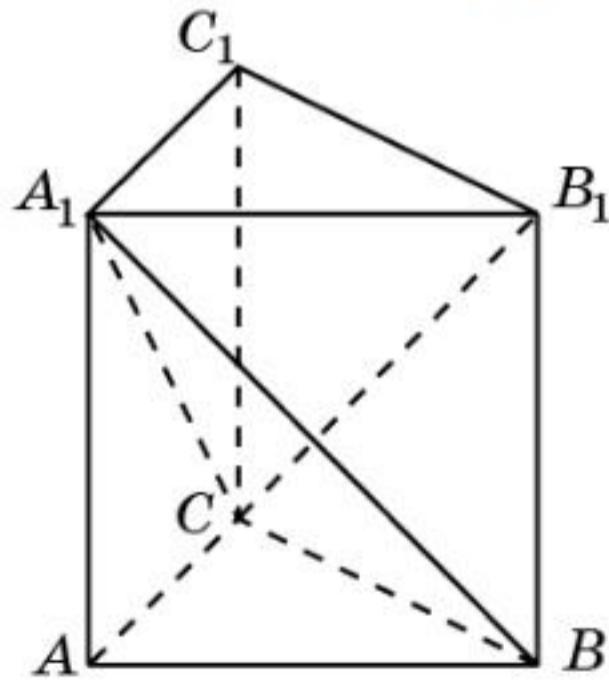
Теорема. Учбурчакли пирамиданинг ҳажми унинг асоси юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг бўлади.

Исботи. A_1ABC — учбурчакли пирамида бўлсин. Уни $ABC A_1 B_1 C_1$ учбурчакли призма сигача тўлдирамиз (15.3-расм).

B , C , A_1 ва C , B_1 , A_1 нукталари орқали ўтувчи текисликлар бу призмани учи A_1 нуктаси бўлган A_1ABC , A_1CBB_1 ва $A_1CB_1C_1$ пирамидаларига бўлади.

A_1CBB_1 ва $A_1CB_1C_1$ пирамидаларининг CBB_1 ва CB_1C_1 асослари тенг бўлади, сабаби CB_1 диагонали CBB_1C_1 параллелограммни иккита тенг учбурчакларга бўлади. Шу билан бирга бу пирамидаларнинг учлари умумий ва асослари бир текисликда ётади. Демак, бу пирамидаларнинг умумий баландлиги бўлади. Бундан пирамидаларнинг ҳажмлари тенг бўлиши келиб чиқади.

Энди A_1ABC ва $CA_1B_1C_1$ пирамидаларини кўриб чиқайлик. Уларнинг ABC ва $A_1B_1C_1$ асослари тенг ва баландликлари ҳам тенг бўлади. Демак бу пирамидаларнинг ҳажмлари тенг бўлади. Бинобарин, барча учта пирамиданинг ҳажмлари тенг бўлади.



15.3-расм

Призманинг ҳажми унинг асосининг юзи билан баландлигининг күпайтмасига тенг эканини эсга олиб, учбурчакли пирамиданинг V ҳажмини топиш формуласини ёзамиз:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

бу ерда S — пирамида асосининг юзи, h — пирамиданинг баландлиги. \square

Энди ҳар қандай пирамиданинг ҳажмини топиш масаласини күриб чиқамиз.

Теорема. *Пирамиданинг ҳажми унинг асоси юзи билан баландлиги күпайтмасининг учдан бирига тенг бўлади.*

Исботи. Берилган пирамида учун асосининг юзи билан баландлиги бир хил учбурчакли пирамидани күриб чиқамиз.

Кавальери принципи бўйича бу пирамидаларнинг ҳажмлари тенг бўлади. Демак, қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

бу ерда S — пирамида асосининг юзи, h — пирамиданинг баландлиги. \square



Баландлиги h ва асосининг томонлари a бўлган мунтазам: а) учбурчакли; б) олтибурчакли пирамиданинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқаринг.

Кесик пирамиданинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқарайлик.

Теорема. *Кесик пирамиданинг V ҳажми қуийдаги формула билан ҳисобланади:*

$$V = \frac{1}{3}h_k(S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

бу ерда S, s — кесик пирамида асосларининг юзлари, h_k — унинг баландлиги.

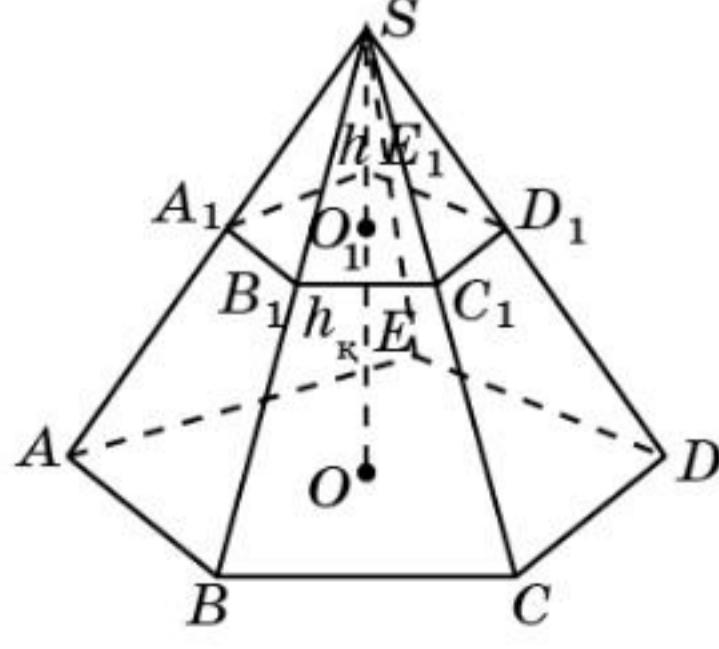
Исботи. Кесик пирамида асосларининг юзлари S ва s га тенг бўлсин. Унинг h_k баландлиги эса дастлабки ва кесилиб олинган пирамидалар баландликларининг $(H - h)$ айирмасига тенг бўлсин.

15.4-расмда $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ бешбурчакли кесик пирамида тасвирланган.

Кесик пирамиданинг V ҳажми учун қуийдаги формула ўринли бўлади:

$$V = \frac{1}{3}SH - \frac{1}{3}sh.$$

Кесик пирамиданинг h_k баландлигини унинг асосларининг S, s юзлари билан дастлабки ва кесилиб олинган пирамидаларнинг H, h баландликлари орқали ифодалаймиз.



15.4-расм

Пирамиданинг асосига параллел текислиқ билан кесиміда унинг асосига үхшаш фигура ҳосил бўлишини кўрамиз. Үхшашлик коэффициенти эса пирамиданинг учидан кесим текислигига ва асос текислигигача бўлган масофаларнинг нисбатига тенг, яъни $\frac{h}{H}$ га тенг бўлади. Шунинг билан үхшаш фигураларнинг юзларининг нисбати үхшашлик коэффициентининг квадратига тенг бўлади.

Бундан қўйидаги тенгликни ҳосил қиласиз:

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{H - h_k}{H}\right)^2.$$

Бу тенгликдан H ва h баландликларини топамиз:

$$H = \frac{h_k \sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}, \quad h = \frac{h_k \sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Топилган H , h қийматларини кесик пирамиданинг V ҳажми учун формулага қўйиб, изланаётган формулани топамиз:

$$V = \frac{1}{3} \left(S \frac{h_k \sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} - s \frac{h_k \sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} \right) = \frac{1}{3} h_k \cdot \frac{S\sqrt{s} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} = \frac{1}{3} h_k (S + \sqrt{S \cdot s} + s). \quad \square$$



Баландлиги h_k ва асосларининг томонлари a билан b бўлган мунтазам тўрт бурчакли кесик пирамиданинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқаринг.

Саволлар

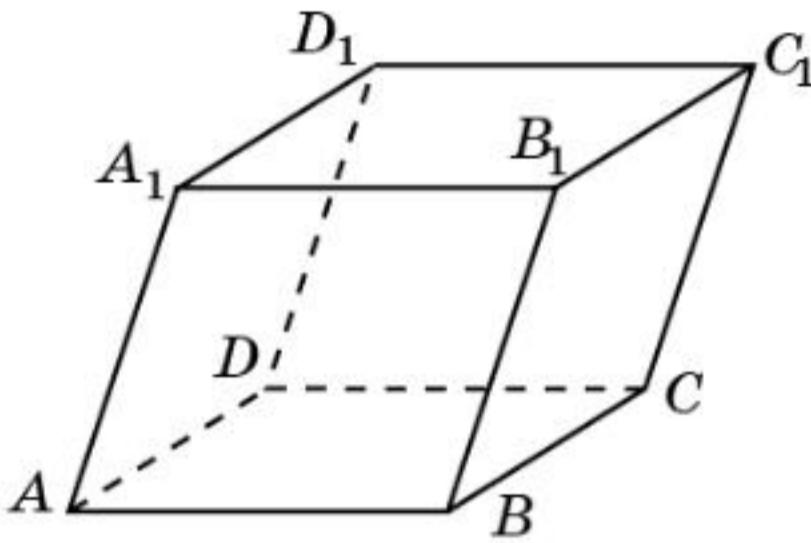
1. Учбурчакли пирамиданинг ҳажми қандай ҳисобланади?
2. Ҳар қандай пирамиданинг ҳажми қандай ҳисобланади?
3. Кесик пирамиданинг ҳажми қандай ҳисобланади?

Машқлар

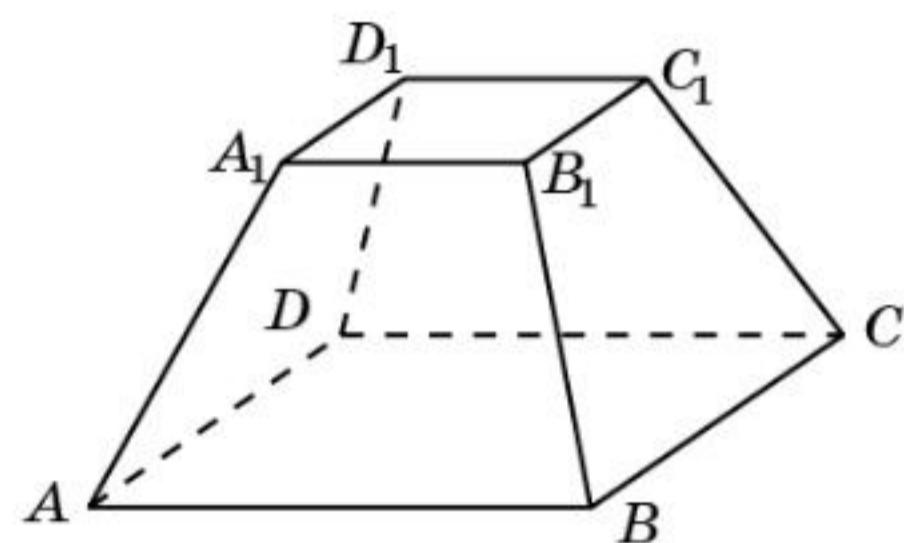
A

- 15.1.** Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлиги h га, асосининг томонлари эса a га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топиш формуласини келтириб чиқаринг.
- 15.2.** Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлиги 3 м га, ён қирралари эса 5 м га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 15.3.** Мунтазам учбурчакли пирамиданинг баландлиги билан асосининг томонлари 1 см га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 15.4.** Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг баландлиги билан асосини томонлари 1 см га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 15.5.** Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 см га, ён қирралари эса 2 см га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.

- 15.6.** Тетраэдрнинг қирраси 1 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
- 15.7.** Агар мунтазам тетраэдрнинг барча қирраларини 2 марта ортириса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
- 15.8.** Агар мунтазам пирамиданинг баландлигини 3 марта орттириса, асоси томонларини эса 3 марта камайтириса, унда унинг ҳажми қандай үзгаради?
- 15.9.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедининг ҳажми 1 см^3 га тенг. Учлари: A, B, C, D, B_1 ; 2) A, B, D, C_1 нүкталари бўладиган кўпёқнинг ҳажмини топинг (15.5-расм).



15.5-расм

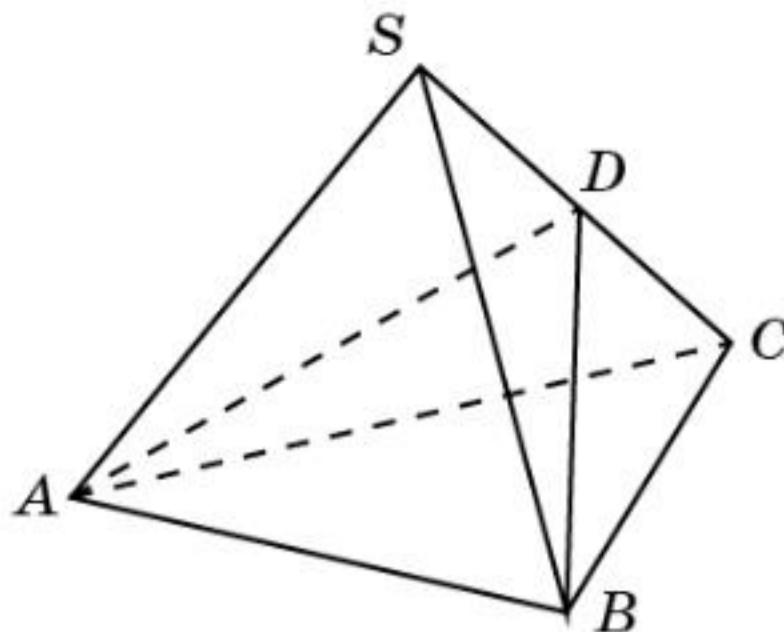


15.6-расм

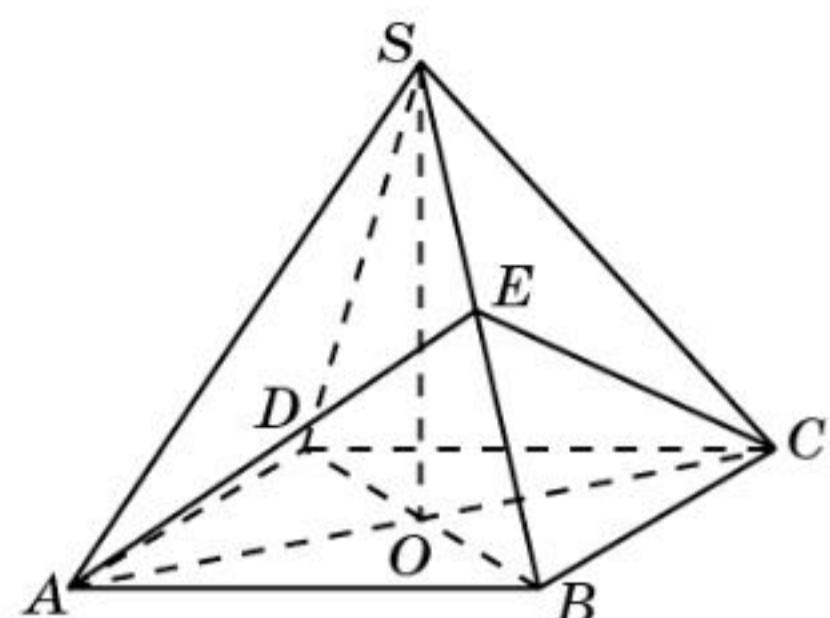
- 15.10.** Пирамида баландлигининг ўртаси орқали ўтувчи ва асосига параллел текислик билан кесими ўтказилган. Пирамиданинг ҳосил бўлган қисмлари ҳажмларининг нисбатини топинг.
- 15.11.** Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамиданинг баландлиги 3 см га, асосларининг томонлари эса 2 см ва 1 см га тенг. Кесик пирамиданинг ҳажмини топинг (15.6-расм).

B

- 15.12.** Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг диагонал кесими — томони 1 см бўлган тенг томонли учбурчак. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 15.13.** Учбурчакли пирамиданинг ён қирралари ўзаро перпендикуляр ва уларнинг ҳар қайсиси 1 см га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 15.14.** Учбурчакли пирамиданинг барча ён қирралари 1 см га, учидаги бурчаклари эса 60° , 90° ва 90° га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 15.15.** Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ҳажми 6 см^3 га, асосининг томонлари 1 см га тенг. Пирамиданинг баландлигини топинг.
- 15.16.** Параллелепипеднинг ҳажми 1 см^3 га тенг (15.5-расм). BDA_1C_1 тетраэдрининг ҳажмини топинг.
- 15.17.** Учбурчакли пирамида асосининг бир томони ва унга қарши ётган қиррасининг ўртаси орқали текислик ўтади (15.7-расм). Бу текислик пирамиданинг ҳажмини қандай нисбатда бўлади?

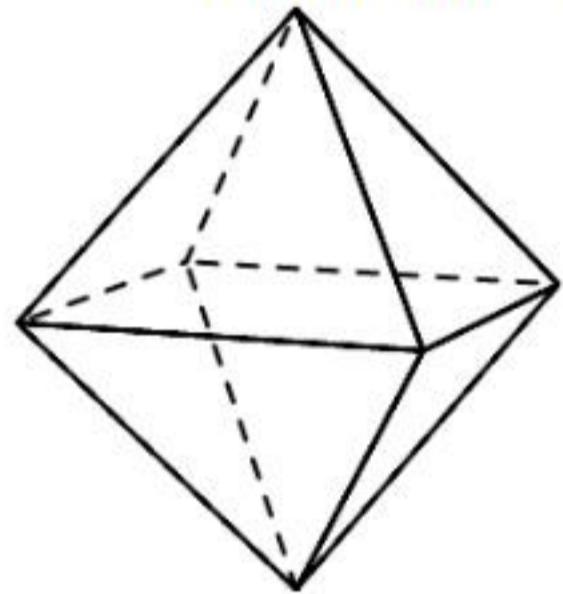


15.7-расм



15.8-расм

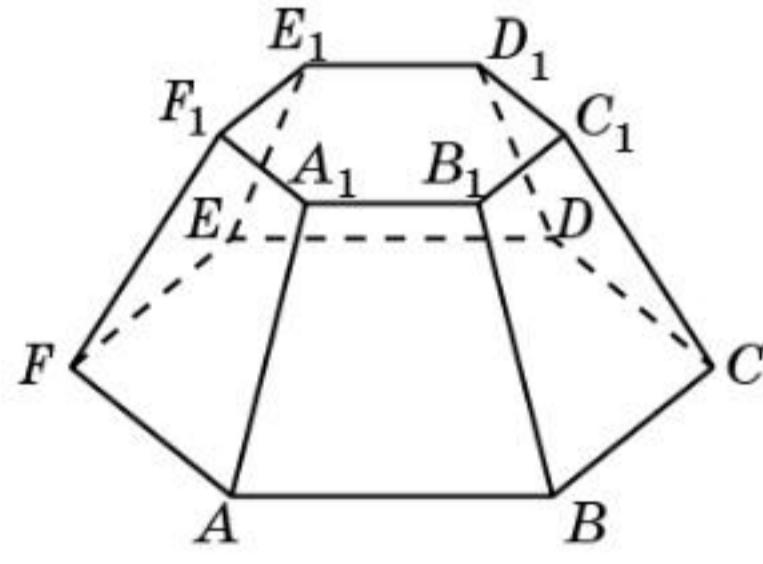
- 15.18.** Мунтазам түртбұрчаклы пирамиданинг ҳажми 12 см^3 га теңг. Пирамида асосининг AC диагонали ва унга қарши ётган ён қиррасининг E ўртаси орқали үтувчи текислик билан кесиб олинған қисмининг ҳажмини топинг (15.8-расм).



15.9-расм

- 15.19.** Октаэдрдинг қирралари 1 см га теңг. Унинг ҳажмини топинг (15.9-расм).

- 15.20.** Мунтазам олтибурчаклы кесик пирамида-нинг баландлиги 3 см га, асосларининг томонлари эса 2 см ва 1 см га теңг (15.10-расм). Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.



15.10-расм



15.11-расм

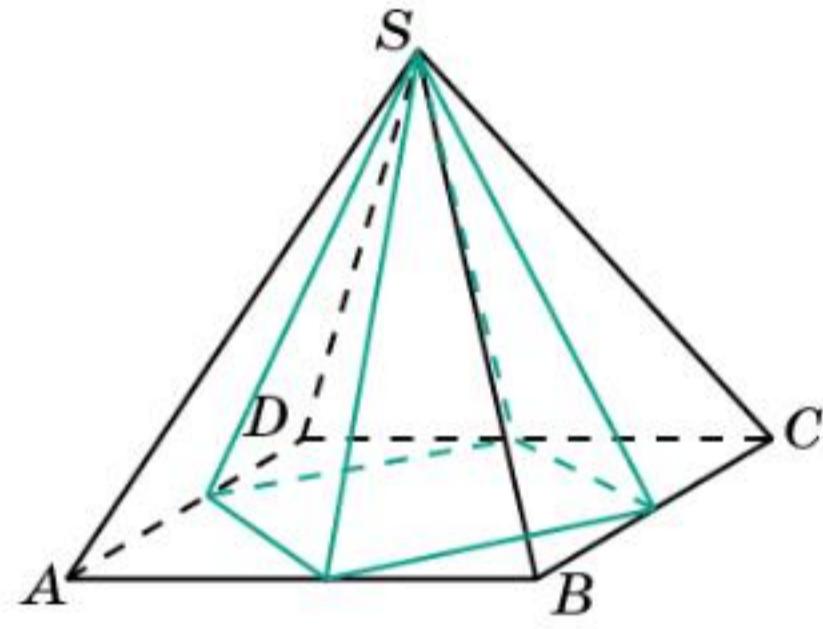
- 15.21.** Нур-Султан шаҳридаги Тинчлик ва келишув саройи мунтазам түртбұрчаклы пирамида шаклига зә (15.11-расм). Унинг баландлиги билан асосининг томони 62 м га теңг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

- 15.22.** Мунтазам n -бурчаклы иккита пирамида үхаш бўлиши учун уларнинг ён қирралари билан асосларининг томонларига тे-

гишли шартларни ёзинг. Уларнинг ҳажмларининг нисбатини топинг.

С

- 15.23.** Мунтазам олтибурчакли пирамида асоси томонлари 1 см га, унинг ён ёғи билан асоси орасидаги бурчак эса 45° га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 15.24.** $SABCD$ тўрт бурчакли пирамидасининг ҳажми 1 см^3 га тенг. Учи берилган пирамиданинг S учи билан мос келадиган, асос учлари эса $ABCD$ асоси томонларининг ўрталари бўладиган пирамиданинг ҳажмини топинг (15.12-расм).
- 15.25.** Тетраэдрнинг ҳажми 1 см^3 га тенг. Учлари шу тетраэдрнинг қирраларининг ўрталари бўладиган кўпёқнинг ҳажмини топинг.
- 15.26.** 15.13-расмда Қадимги Мисрдаги энг катта биноларнинг бири — Хеопс пирамидаси — мунтазам тўртбурчакли пирамида тасвирланган. Унинг баландлиги 146 м га, ён қирралари эса 230 м га тенг. Шу пирамиданинг ҳажмини топинг.



15.12-расм



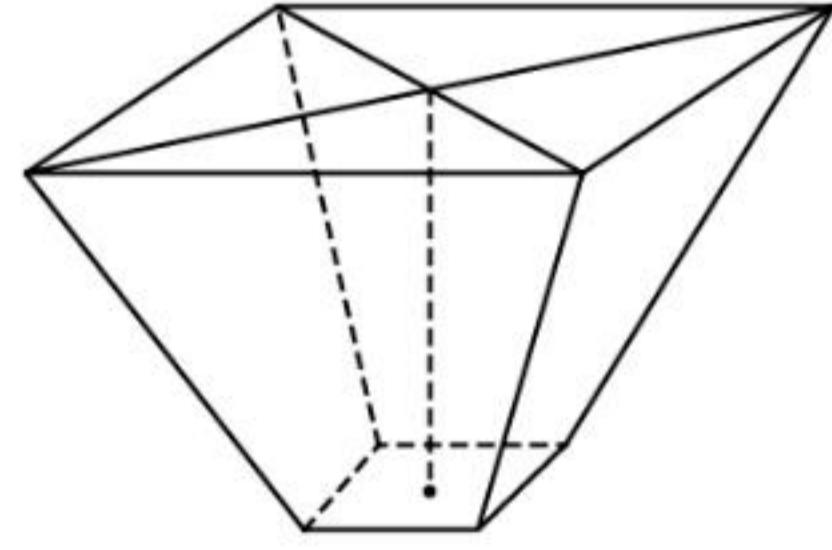
15.13-расм



15.14-расм

- 15.27.** 15.14-расмда томи пирамида шаклидаги турғун уй тасвирланган ва унинг асоси — квадрат. Пирамиданинг барча қирралари 12 м га тенг. Шу уйнинг томининг ҳажмини топинг.

- 15.28.** Мунтазам тўртбурчакли кесик пирамида шаклидаги сабзавотларни сақлашга мўлжалланган яшик асосларининг томонлари мос равишда 6 дм ва 14,4 дм га



15.15-расм

тенг (15.15-расм). Пирамиданинг баландлиги 4,3 дм. Агар 1 дм³ да 0,675 кг сабзавот бўлса, унда яшикнинг ҳажми билан унинг ичидағи сабзавотнинг оғирлигини топинг.

Яңги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланнинг

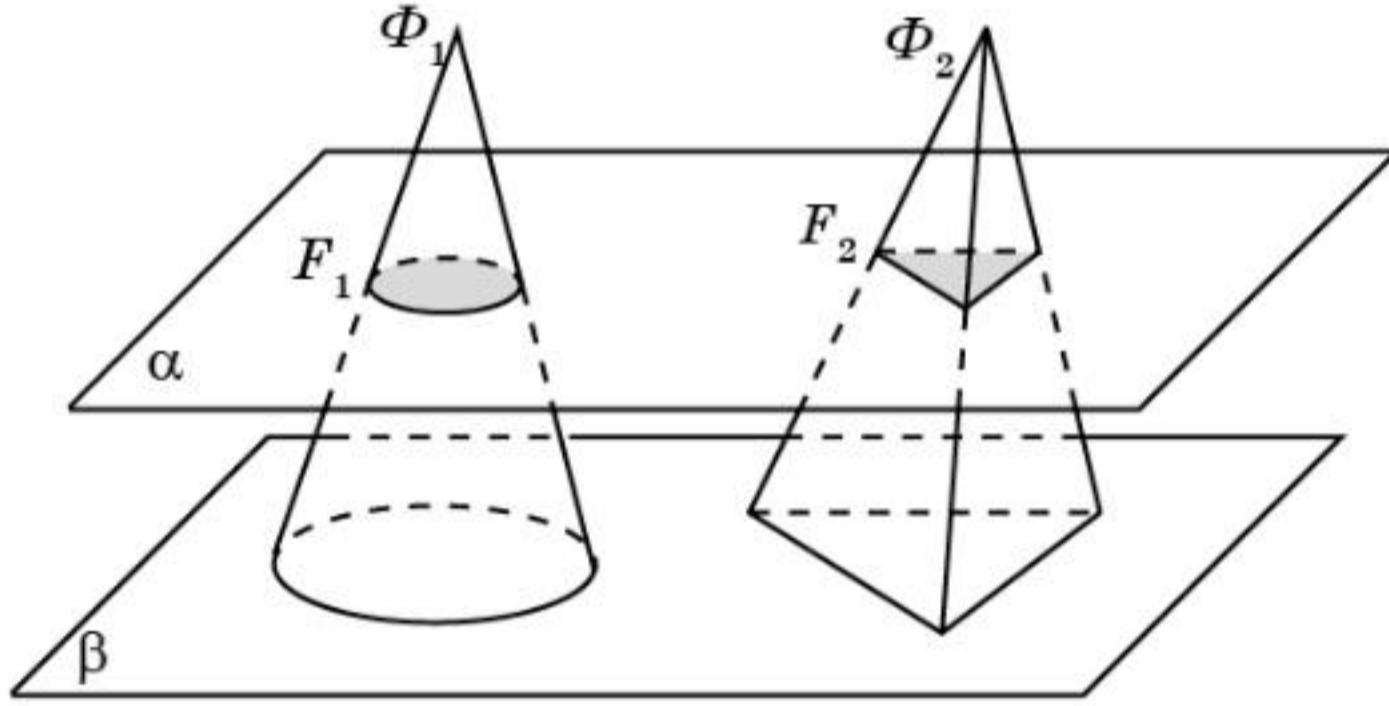
15.29. Конус ва кесик конуснинг таърифларини такрорланг.

16-§. Конус ва кесик конус ҳажмлари

Кавальери принципини конуснинг ҳажмини топишда қўлланайлик.

Теорема. *Конуснинг ҳажми унинг асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг бўлади.*

Исботи. Асосининг юзи S ва баландлиги h га тенг конус учун асосининг юзи ва баландлиги ҳудди шундай бўладиган қандайдир бир пирамидани кўриб чиқамиз. Уларни асослари β текислигига ётадигандай ва ўzlари шу текисликнинг бир ёқ қисмida бўладигандай қилиб жойлаштирамиз (16.1-расм).



16.1-расм

б текислигига параллел ва ундан x узоқликда бўлган а текислигини ўтказамиш ($0 \leq x \leq h$). Шунда конус билан пирамиданинг шу текислик билан кесимларида ҳосил бўлган F_1 ва F_2 фигуралари мос равища асосларига ўхшашиб бўлади ва иккаласида ҳам ўхшашлик коэффициенти $k = \frac{h-x}{h}$ га тенг бўлади. Демак, F_1 ва F_2 фигураларининг S_1 ва S_2 юзлари мос равища $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$ формулалари билан ифодаланади. Шундай қилиб, улар ўзаро тенг бўлади. Кавальери принципи бўйича конус билан пирамиданинг ҳажмлари тенг бўлиши келиб чиқади. Бундан конуснинг V ҳажмини топиш учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h,$$

бу ерда R — конус асосининг радиуси, h — конуснинг баландлиги. □

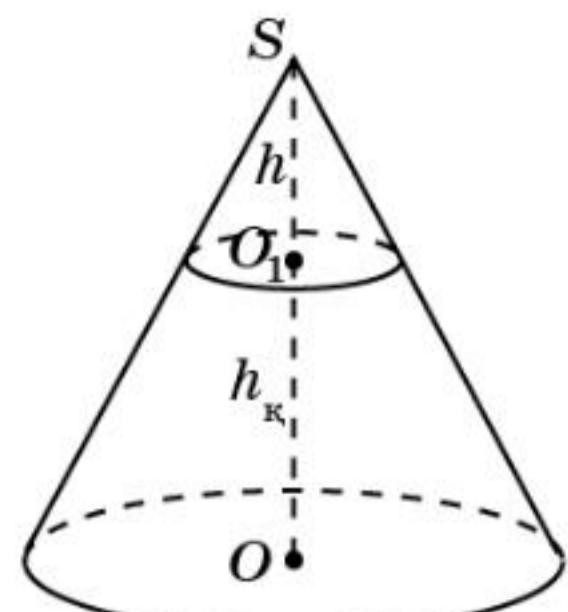
Кесик пирамиданинг ҳажмини топиш формуласига ўхшаш кесик конуснинг ҳажми учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$V = \frac{1}{3} h_k (S + \sqrt{S \cdot s} + s),$$

бу ерда S, s — кесик конус асосларининг юзлари, h_k — кесик конуснинг баландлиги (16.2-расм).



Бу формуланинг исботи кесик пирамиданинг ҳажмини топиш формуласига ўхшаш бўлади. Уни мустақил исботланг.



16.2-расм

Кесик конус асосларининг юзлари мос равишида $S = \pi R^2$ ва $s = \pi r^2$ га тенг эканини ҳисобга олиб, унинг V ҳажмини топиш учун қуйидаги формулани оламиз:

$$V = \frac{1}{3} \pi h_k (R^2 + R \cdot r + r^2),$$

бу ерда R ва r — кесик конус асосларининг радиуслари, h_k — кесик конуснинг баландлиги.

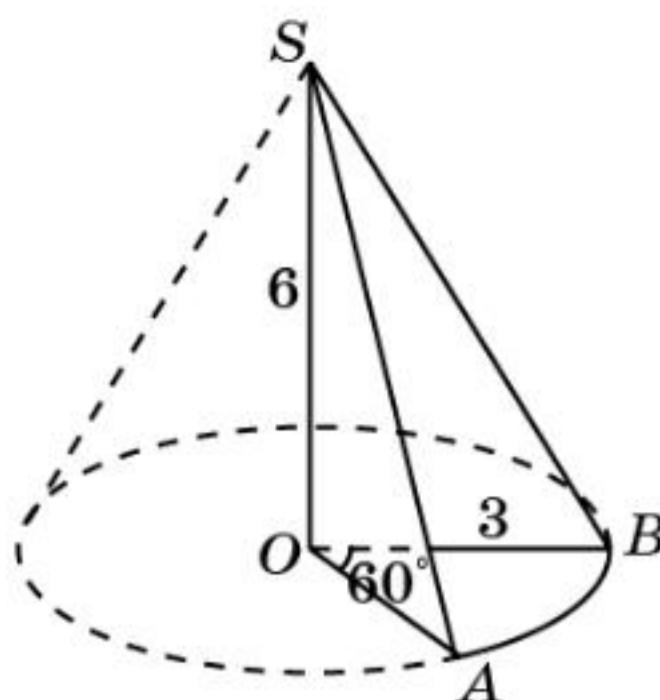
Саволлар

1. Конуснинг ҳажми қандай ҳисобланади?
2. Кесик конуснинг ҳажми қандай ҳисобланади?

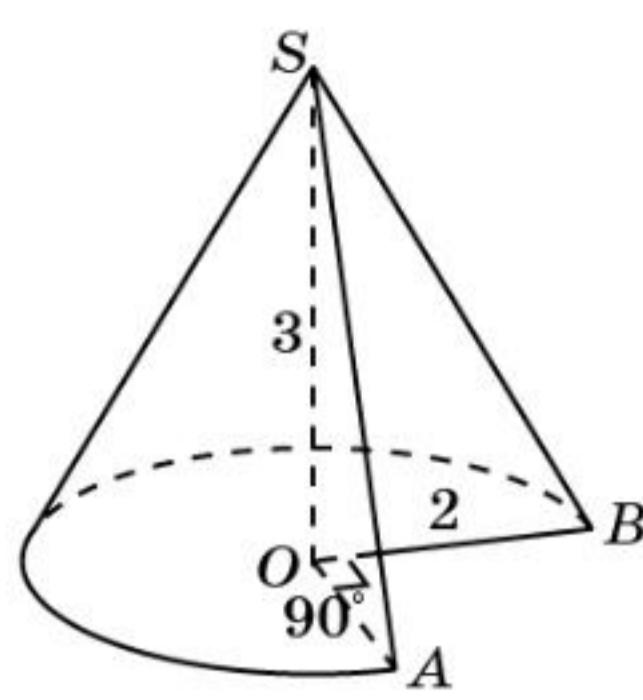
Машқллар

A

- 16.1.** Агар конуснинг: 1) баландлигини 3 марта орттирса; 2) асосининг радиусини 2 марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
- 16.2.** Агар конус баландлигини 2 марта камайтирса, асоси радиусини 2 марта орттирса, унда унинг ҳажми ўзгарадими?
- 16.3.** Цилиндр билан конуснинг умумий асоси бор ва баландлиги бир хил. Цилиндрнинг ҳажми 15 см^3 га тенг деб олиб, конуснинг ҳажмини топинг.
- 16.4.** Конуснинг ҳажми V га тенг. Конуснинг баландлигининг ўртаси орқали ўтувчи ва асосига параллел бўлган кесим ўтказилган. Конуснинг ҳосил бўлган қисмлари ҳажмларининг нисбатини топинг.
- 16.5.** Конуснинг баландлиги 3 см га, ясовчиси эса 5 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
- 16.6.** Конус асосининг радиуси 3 см га, баландлиги эса 6 см га тенг ва $\angle AOB = 60^\circ$. 16.3-расмдаги конус қисмининг ҳажмини топинг.



16.3-расм

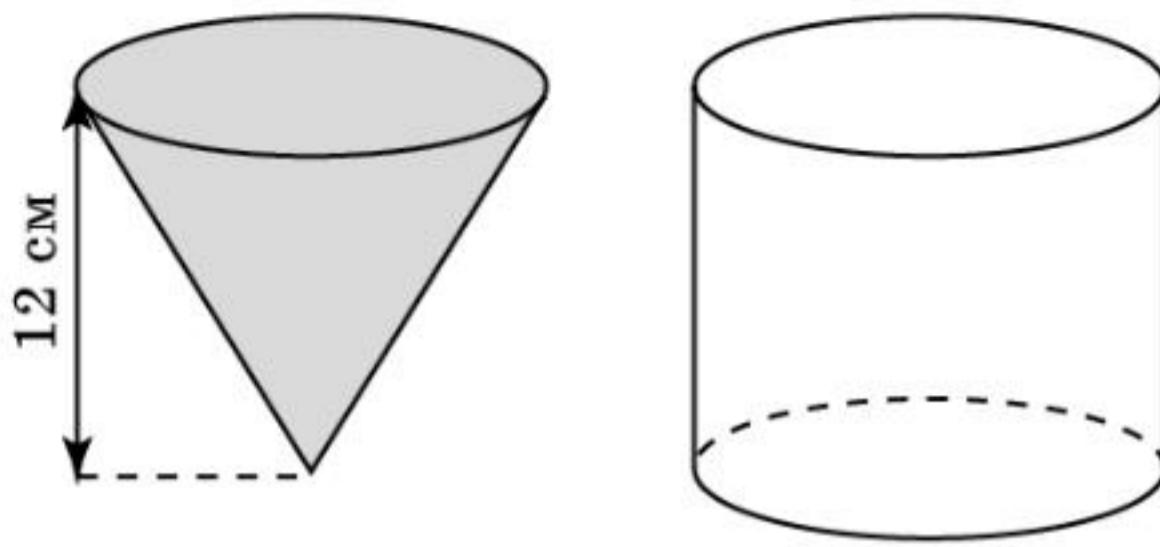


16.4-расм

- 16.7.** Конус асосининг радиуси 2 см га, баландлиги эса 3 см га тенг ва $\angle AOB = 90^\circ$. 16.4-расмдаги конус қисмининг ҳажмини топинг.
- 16.8.** Кесик конус асосларининг радиуслари 1 см ва 2 см га, баландлиги эса 3 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

B

- 16.9.** Конус асосининг диаметри 12 см га, ўқ кесимининг учидағи бурчаги эса 90° га тенг. Конуснинг ҳажмини топинг.
- 16.10.** Конуснинг ўқ кесими — юзи 9 см^2 бўлган тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчак. Конуснинг ҳажмини топинг.
- 16.11.** Томони 1 см бўлган тенг томонли учбурчакни унинг баландлиги ётадиган тўғри чизиқ атрофига айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.
- 16.12.** Тенг ёнли эмас тўғри бурчакли учбурчакни унинг ҳар бир катетидан айлантирганда иккита конус ҳосил бўлади. Шу конусларнинг ҳажмлари тенг бўладими?
- 16.13.** Конуснинг ҳажми 1 см^3 га тенг. Конуснинг баландлиги тенг учта бўлакка бўлинган ва бўлиниш нүқталари орқали унинг асосига параллел текисликлар ўтказилган. Конуснинг ўртадаги бўлагининг ҳажмини топинг.
- 16.14.** Баландлиги 12 см бўлган конус шаклидаги идишга тўлдирилган сув цилиндр шаклидаги идишга қўйилди. Цилиндр шаклидаги идиш асосининг радиуси конус шаклидаги идиш айланасининг радиусига тенг (16.5-расм). Цилиндр шаклидаги идишдаги сувнинг сатҳи унинг асосидан қандай баландликда бўлади?
- 16.15.** Кесик конус асосларининг радиуслари 6 см ва 2 см, ясовчиси эса 5 см га тенг. Шу кесик конуснинг ҳажмини топинг.
- 16.16.** Тенг ёнли трапециянинг асослари 4 см ва 6 см, баландлиги эса 3 см га тенг. Трапецияни унинг асосларининг ўрталари орқали



16.5-расм

ұтувчи түгри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.

- 16.17.** Иккита конус ўхшаш бўлиши учун уларнинг ясовчилари билан асосларининг радиусларига тегишли шартларни ёзинг. Шу конусларнинг ҳажмларининг нисбатини топинг.

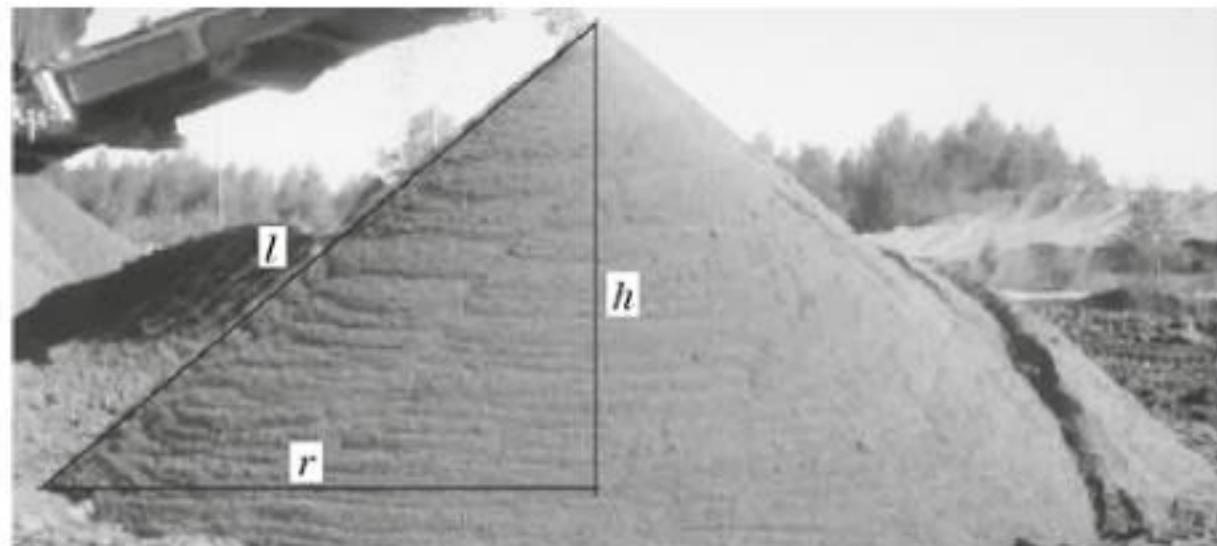
- 16.18.** Кигиз уй — кўчманчиларнинг қадимдан келаётган турар жойи (16.6-расм). Кигиз уйнинг “керегеси” цилиндр шаклида, мана шу “кереге” билан “шацырақ”ни бирлаштирувчи “уық”лар кесик конусни ясайди. Цилиндрнинг асосининг диаметри 5 м га, кесик конус асосларининг диаметрлари 5 м ва 1 м га, цилиндр билан кесик конуснинг баландликлари эса 2 м га teng. Кигиз уйнинг ҳажмини топинг.



16.6-расм

C

- 16.19.** Тўғри бурчакли teng ёнли учбурчакнинг узунлиги 3 см га teng катети ётган тўғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.
- 16.20.** Бирлик квадратни унинг диагонали ётган тўғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг.
- 16.21.** Конуснинг ён сиртининг ёйилмаси — радиуси 2 см га teng яrim доира. Конуснинг ҳажмини топинг.
- 16.22.** Қурилиш майдонидаги конус шакlidagi қум тўпламининг асосидаги айланаси узунлигини метрлик лента билан ўлчаганда 21,6 м бўлди (16.7-расм). Метрлик лентани қум тўпламининг устидан ошириб ўлчаганда унинг икки ясовчисининг узунлиги 7,8 м эканлиги аниqlанди. Қум тўпламининг ҳажмини топинг ($\pi \approx 3$).



16.7-расм

Янги мавзуның үзлаштиришга тайёрланинг

16.23. Шарнинг таърифини ва Кавальери принципини такрорланг.

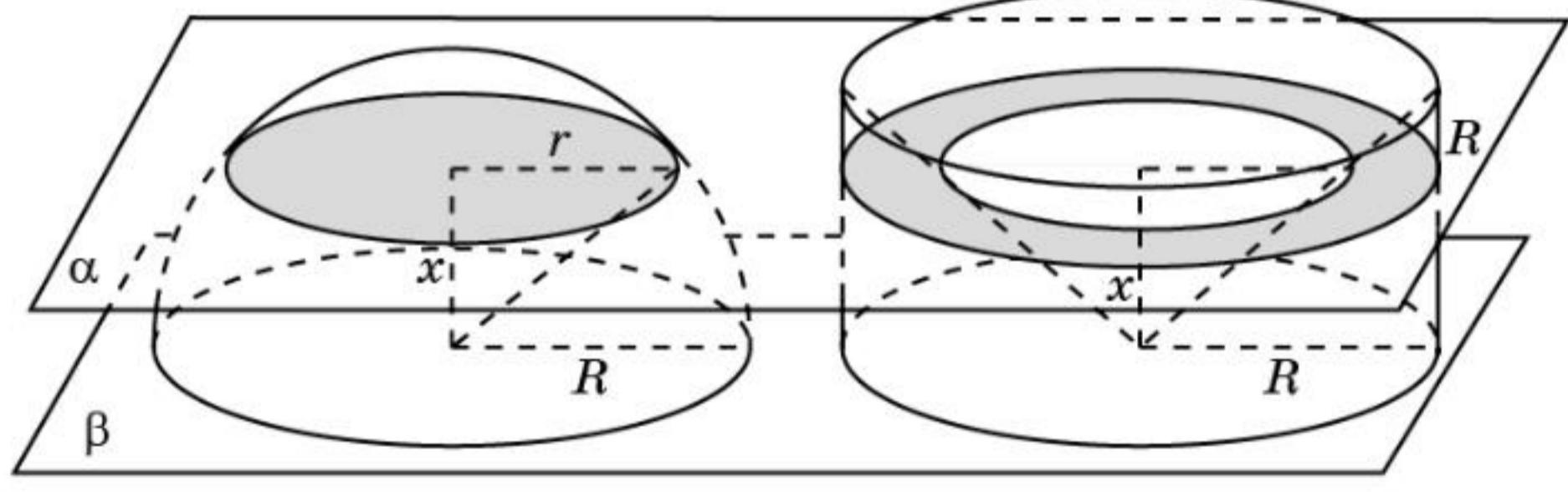
17-§. Шар ҳажми

Кавальери принципини қўлланиб, шарнинг ҳажмини топиш формуласини кўриб чиқайлик.

Теорема. Радиуси R га тенг шарнинг V ҳажми қуийидағи формула билан ҳисобланади:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Исботи. Радиуси R га тенг ва асоси b текислигига ётадиган ярим шарни кўриб чиқайлик. Шу билан бирга асоси шу b текислигига ётадиган цилиндрни олайлик ва унинг асоси радиуси R га, баландлиги ҳам R га тенг бўлсин (17.1-расм).



17.1-расм

Учи цилиндрнинг пастги асосининг марказида, асоси эса цилиндрнинг юқориги асоси бўладигандай қилиб шу цилиндрга ички конус чизамиз.

Конуснинг ичидаги ётувчи цилиндрнинг нукталаридан иборат Φ фигураси билан берилган ярим шарнинг ҳажмлари тенг бўлишини исботлайлик.

Б текислигига параллел ва ундан x узоқликда бўлган а текислиги-ни ўтказамиз ($0 \leq x \leq R$). Шунда ярим шарнинг ўқи текислик билан кесимида радиуси $\sqrt{R^2 - x^2}$ ва юзи $\rho(R^2 - x^2)$ бўлган доира олинади. Φ фигурасининг а текислиги билан кесимида ички доирасининг радиуси x га, ташки доирасининг радиуси эса R -га тенг ҳалқа ҳосил бўлади. Бу ҳалқанинг юзи $\rho R^2 - \rho x^2 = \rho(R^2 - x^2)$ -га тенг. Демак, у ярим шарнинг кесими юзига тенг бўлади.

Кавальери принципи бўйича ярим шар билан Φ фигурасининг ҳажмлари тенг бўлади. Шу ҳажмни ҳисоблайлик. У цилиндр билан конус ҳажмларининг айирмасига тенг бўлади, яъни

$$V = V_{\text{п}} - V_{\text{к}} = \rho R^2 R - \frac{1}{3} \rho R^2 R = \frac{2}{3} \rho R^3.$$

Шарнинг ҳажми ярим шарнинг ҳажмидан икки марта катта бўлади. Демак, шарнинг ҳажми қўйидаги формула билан ҳисобланади:

$$V = \frac{4}{3} \rho R^3. \quad \square$$

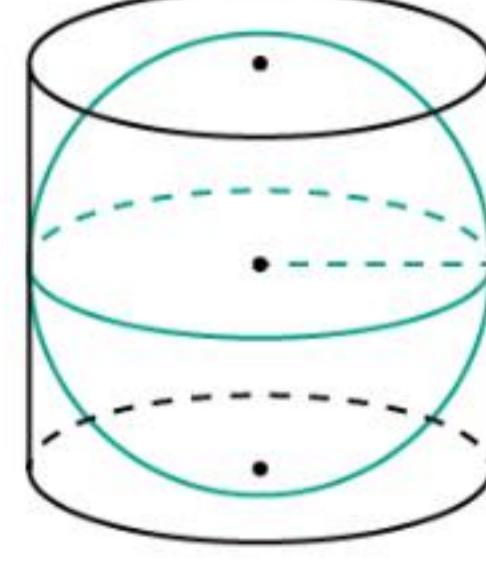
Саволлар

- Шарнинг ҳажми қандай аниқланади?

Машқлар

A

- Шарнинг диаметри 6 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
- Агар шарнинг радиусини: 1) 3 марта; 2) 4 марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
- Учта шарнинг радиуслари 3 см, 4 см ва 5 см га тенг. Ҳажми шу шарларнинг ҳажмларининг йиғиндисига тенг шарнинг радиусини топинг.
- Ҳажмларининг йиғиндиси радиуси 6 см бўлган шарнинг ҳажмига тенг бўладигандай радиуси 2 см га тенг нечта шар олиш мумкин?
- Цилиндрнинг баландлиги 2 см га тенг. Цилиндрга ички чизилган шарнинг ҳажмини топинг (17.2-расм).

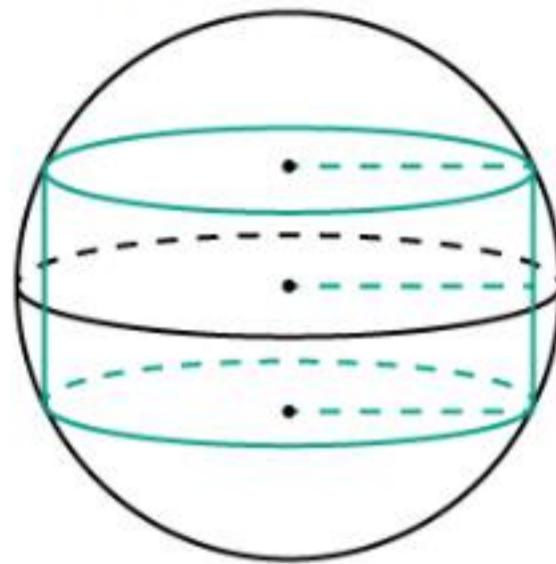


17.2-расм

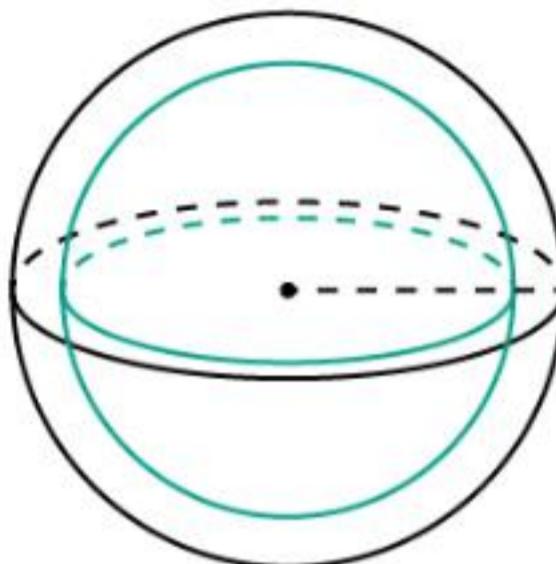
B

- Шарнинг маркази билан 8 см узоқликдаги текислик билан кесимирада радиуси 6 см га тенг. Шарнинг ҳажмини топинг.

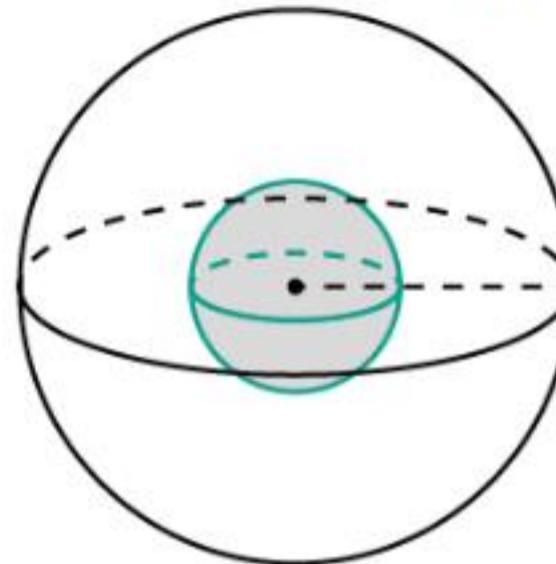
- 17.7.** Цилиндрнинг баландлиги билан асосининг радиуси 1 см га тенг. Цилиндрга ташқи чизилган шарнинг ҳажмини топинг (17.3-расм).
- 17.8.** Икки шарнинг сиртларининг юзлари $m : n$ каби нисбатда. Уларнинг ҳажмлари қандай нисбатда бўлади?
- 17.9.** Марказлари умумий ва радиуслари R_1 билан R_2 ($R_1 > R_2$) бўлган икки шарнинг сиртлари билан чегараланган фигура — шарсимон ҳалқанинг ҳажмини топиш формуласини топинг (17.4-расм).



17.3-расм



17.4-расм



17.5-расм

- 17.10.** Гилос данагининг қалинлиги унинг ичидаги суягининг диаметрига тенг (17.5-расм). Гилос билан унинг ичидаги суягини шар шаклида деб олиб, данаги билан суяги ҳажмларининг нисбатини топинг.



17.6-расм

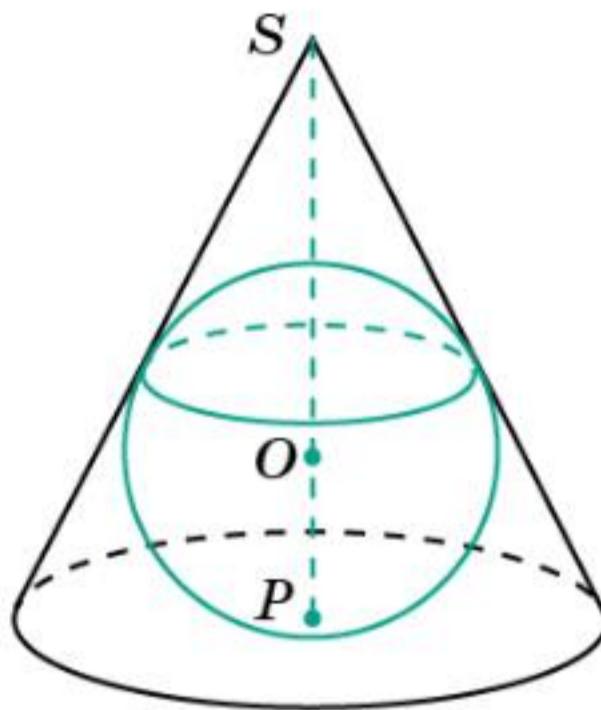
- 17.11.** Апельсин — шар шаклидаги мева. Унинг пўстининг қалинлиги шар радиусининг бешдан бир қисмига тенг бўлади (17.4-расм). Апельсин пўсти унинг ҳажмининг қандай қисмини ташкил қиласи?

- 17.12.** Нур-Султан шаҳридаги “Бўйтепек” монументи — металдан, шиша ва бетондан ясалган баланд меъморий иншоот, барча оламдаги бирлашмалар учун мустақил Қозоғистоннинг рамзи (17.6-расм). Унинг учида диаметри 22 м га тенг шар бор. Ўша шар ҳажмини топинг.

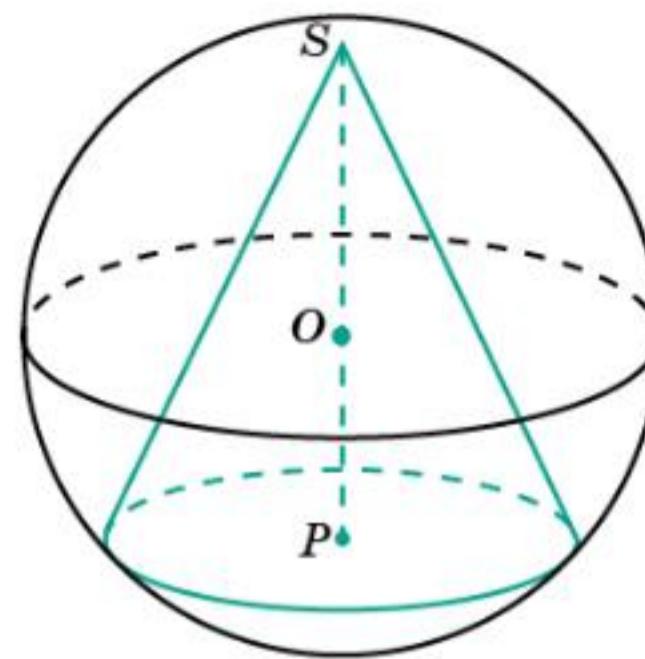
C

- 17.13.** Конус асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси эса 2 см га тенг. Конусга ички чизилган шарнинг ҳажмини топинг (17.7-расм).

- 17.14.** Конус асосининг радиуси 1 см га, ясовчиси эса 2 см га тенг. Конусга ташқи чизилган шарнинг ҳажмини топинг (17.8-расм).

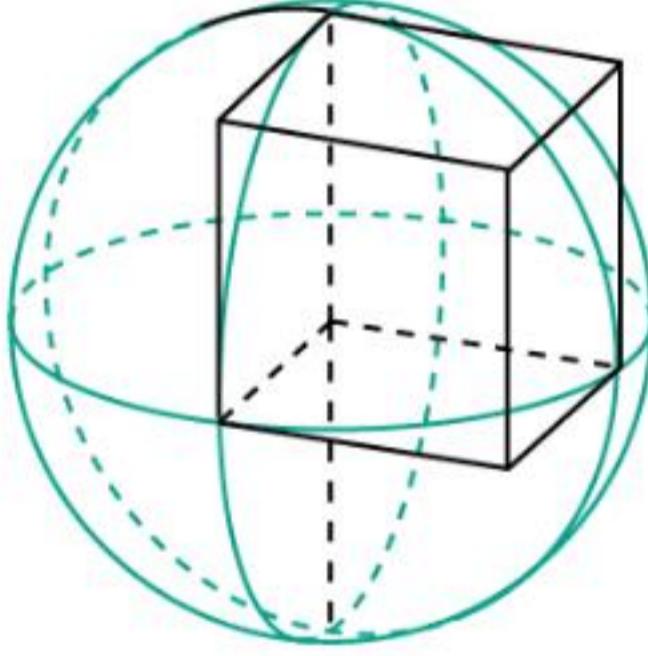


17.7-расм

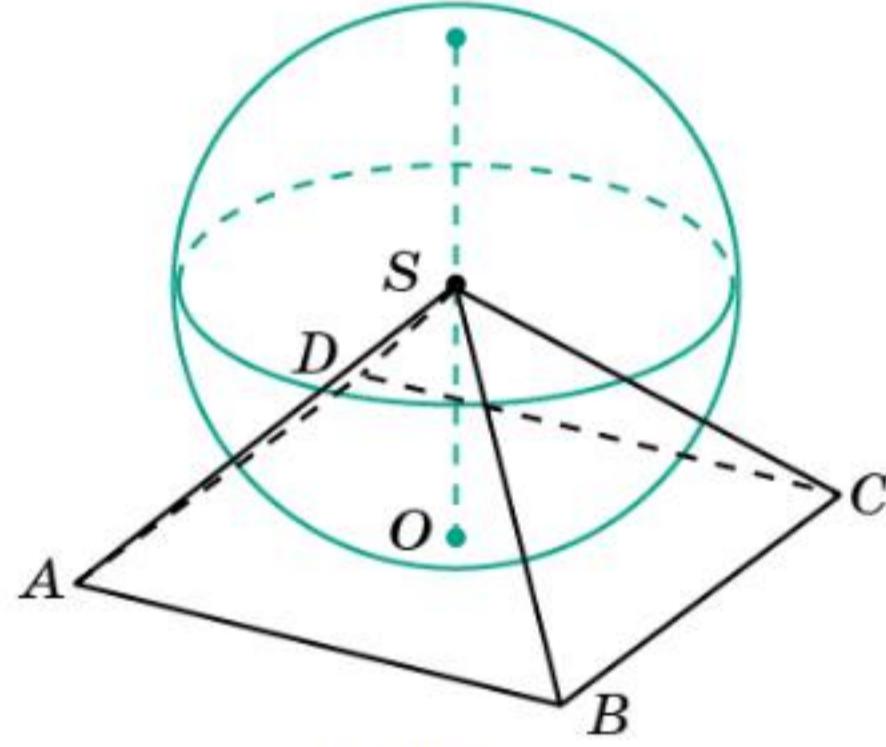


17.8-расм

- 17.15.** Шарнинг радиуси 1 см га тенг. Унинг марказида бирлик кубнинг учи жойлашган (17.9-расм). Куб билан шарнинг умумий бўлагининг ҳажмини топинг.



17.9-расм



17.10-расм

- 17.16.** Мунтазам тўрт бурчакли пирамида асосининг томонлари 2 см га ва унинг баландлиги 1 см га тенг. Радиуси 1 см га тенг шарнинг марказида шу пирамиданинг учи жойлашган (17.10-расм). Пирамида билан шарнинг умумий бўлагининг ҳажмини топинг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

- Агар кубнинг барча қирраларини 2 марта ортириса, унда унинг ҳажми неча марта ортади:

A) 2 марта; B) 4 марта; C) 6 марта; D) 8 марта?

- 2.** Куб сиртининг юзи 12 см^2 . Унинг ҳажмини топинг:
- A) $2\sqrt{2} \text{ см}^3$; B) 4 см^3 ; C) $4\sqrt{2} \text{ см}^3$; D) 8 см^3 .
- 3.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубининг ҳажми 6 см^3 га тенг. ACB_1D_1 тетраэдрининг ҳажмини топинг:
- A) 1 см^3 ; B) 2 см^3 ; C) 3 см^3 ; D) 4 см^3 .
- 4.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ түғри бурчакли параллелепипедида $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Учлари A , B , C , D , C_1 бўлган кўпёқнинг ҳажмини топинг:
- A) 2 см^3 ; B) 4 см^3 ; C) 6 см^3 ; D) 8 см^3 .
- 5.** Мунтазам учбурчакли призманинг ён қирралари 3 см га, асосининг томонлари эса 2 см га тенг. Призманинг ҳажмини топинг:
- A) $\sqrt{3} \text{ см}^3$; B) $2\sqrt{3} \text{ см}^3$; C) $3\sqrt{3} \text{ см}^3$; D) $4\sqrt{3} \text{ см}^3$.
- 6.** Учбурчакли призма асосининг ўрта чизиги орқали унинг ён қиррасига параллел текислик ўтказилган. Агар дастлабки призманинг ҳажми 8 см^3 га тенг бўлса, унда шу текислик билан кесиб олинган учбурчакли призманинг ҳажмини топинг:
- A) 1 см^3 ; B) 2 см^3 ; C) 3 см^3 ; D) 4 см^3 .
- 7.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ҳажми 12 см^3 га тенг. $ABDE A_1B_1D_1E_1$ параллелепипедининг ҳажмини топинг:
- A) 2 см^3 ; B) 4 см^3 ; C) 6 см^3 ; D) 8 см^3 .
- 8.** $ABC A_1B_1C_1$ учбурчакли призманинг ҳажми 6 см^3 га тенг. $A_1BCC_1B_1$ тўрт бурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг:
- A) 1 см^3 ; B) 2 см^3 ; C) 3 см^3 ; D) 4 см^3 .
- 9.** $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ҳажми 12 см^3 га тенг. A_1ABCD пирамиданинг ҳажмини топинг:
- A) 1 см^3 ; B) 2 см^3 ; C) 3 см^3 ; D) 4 см^3 .
- 10.** Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг қирралари 2 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг:
- A) $\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ см}^3$; B) $\boxed{\square} \text{ см}^3$; C) $\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3$; D) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3$.
- 11.** Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ён қирралари 2 см га тенг ва улар асос текислиги билан 30° бурчак ясайди. Пирамиданинг ҳажмини топинг:
- A) $\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3$; B) $\frac{2\sqrt{3}}{2} \text{ см}^3$; C) $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см}^3$; D) $\sqrt{3} \text{ см}^3$.

- 12.** Цилиндр шаклидаги идишдаги суюқликнинг сатҳи 8 см га етади. Агар шу суюқликнинг диаметри биринчи идишдагидан 2 марта кичик бўлган иккинчи идишга қўйилса, унда суюқликнинг сатҳи қандай баландликда бўлади:
- A) 16 см; B) 32 см; C) 48 см; D) 64 см?
- 13.** Бирлик квадратни унинг томони ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг:
- A) $p \text{ см}^3$; B) $2p \text{ см}^3$; C) $3p \text{ см}^3$; D) $4p \text{ см}^3$.
- 14.** Цилидрнинг ён сиртининг ёйилмаси — томони 2 см га teng квадрат. Цилиндрнинг ҳажмини топинг:
- A) $\frac{2}{\pi} \text{ см}^3$; B) $\frac{4}{\pi} \text{ см}^3$; C) $2p \text{ см}^3$; D) $4p \text{ см}^3$.
- 15.** Тeng томонли учурчакнинг томони 2 см га teng. Учурчакни унинг баландлиги ётган тўғри чизиқ бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган фигуранинг ҳажмини топинг:
- A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3$; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3} \text{ см}^3$; C) $\frac{\pi}{3} \text{ см}^3$; D) $p\sqrt{3} \text{ см}^3$.
- 16.** Конуснинг ясовчиси 2 см га teng ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясайди. Конуснинг ҳажмини топинг:
- A) $p \text{ см}^3$; B) $2p \text{ см}^3$; C) $3p \text{ см}^3$; D) $4p \text{ см}^3$.
- 17.** Конуснинг ён сиртининг ёйилмаси — радиуси 3 см ва марказий бурчаги 120° га teng доиравий сектор. Конуснинг ҳажмини топинг:
- A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3$; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3} \text{ см}^3$; C) $\frac{2\pi}{3} \text{ см}^3$; D) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3} \text{ см}^3$.
- 18.** Кесик конуснинг ўқ кесими — асослари 4 см ва 2 см, ён томони эса 2 см бўлган teng ёнли трапеция. Кесик конуснинг ҳажмини топинг:
- A) $\frac{4\sqrt{3}}{3} p \text{ см}^3$; B) $\frac{5\sqrt{3}}{3} p \text{ см}^3$; C) $\frac{7\sqrt{3}}{3} p \text{ см}^3$; D) $\frac{8\sqrt{3}}{3} p \text{ см}^3$.
- 19.** Шар сиртининг юзи 36 см^2 га teng. Шарнинг ҳажмини топинг:
- A) $24\frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ см}^3$; B) $36\frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ см}^3$; C) $48\frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ см}^3$; D) $60\frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \text{ см}^3$.
- 20.** Цилиндрнинг ўқ кесими — бирлик квадрат. Шу цилиндрга ташқи чизилган шарнинг ҳажмини топинг:
- A) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$; B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; C) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

ХАЖМ

А

1. Түғри бурчакли параллелепипед ёғининг юзаси 12 см^2 га ва шу ёғига перпендикуляр қирраси 4 см га тенг. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
2. Түғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми 24 см^3 га, бир қирраси эса 3 см га тенг. Параллелепипеднинг шу қиррасига перпендикуляр бўлган ёғининг юзасини топинг.
3. Түғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми 60 см^3 га, бир ёғининг юзи эса 12 см^2 га тенг. Параллелепипеднинг шу ёғига перпендикуляр бўлган қиррасини топинг.
4. Түғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган иккита қирраси 2 см ва 6 см га тенг. Параллелепипеднинг ҳажми 48 см^3 га тенг. Параллелепипеднинг шу учидан чиқувчи учинчи қиррасини топинг.
5. Түғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган учта қирраси 4 см, 6 см, 9 см га тенг. Мана шу параллелепипедга тенгдош бўлган кубнинг қиррасини топинг.
6. Агар кубнинг барча қирраларини уч марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
7. Учбурчакли түғри призманинг асоси — катетлари 6 см ва 8 см бўлган түғри бурчакли учбурчак, ён қирраси эса 5 см га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.
8. Учбурчакли түғри призманинг асоси — катетлари 3 см ва 5 см бўлган түғри бурчакли учбурчак. Призманинг ҳажми 30 см^3 га тенг. Унинг ён қиррасини топинг.
9. Мунтазам олтибурчакли призма асосининг томонлари 1 см га, ён қирралари эса $\sqrt{3}$ см га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.
10. Агар мунтазам тетраэдрнинг барча қирраларини икки марта орттирса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
11. Пирамиданинг баландлиги 6 см га тенг, асоси эса томонлари 3 см ва 4 см бўлган түғри тўртбурчак. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
12. Пирамиданинг асоси — томонлари 3 см ва 4 см бўлган түғри тўртбурчак. Пирамиданинг ҳажми 16 см^3 га тенг. Унинг баландлигини топинг.
13. Мунтазам учбурчакли пирамида асоси томонлари 1 см га, баландлиги эса $\sqrt{3}$ см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
14. Мунтазам учбурчакли пирамида асоси томонлари 2 см га, ҳажми эса $\sqrt{3}$ см³ га тенг. Унинг баландлигини топинг.

15. Агар пирамиданинг баландлигини түрт марта орттираса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
16. Ичида 6 л суви бор цилиндр шаклли идишга қандайдир жисм солинди. Шунда идишдаги сувнинг сатхи 1,5 марта күтарилди. Жисмнинг ҳажми нимага teng?
17. Цилиндр шаклли идишдаги сувнинг сатхи 18 см. Агар шу сувни диаметри биринчи идишдан 3 марта катта бўлган иккинчи идишга қўйилса, сувнинг сатхи қандай баландликда бўлади?
18. Конус асосининг юзи 2 см^2 га, ясовчиси эса 6 см га teng ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясади. Конуснинг ҳажмини топинг.
19. Агар конуснинг баландлигини уч марта қисқартираса, унда унинг ҳажми неча марта камаяди?
20. Агар конус асосининг радиусини 1,5 марта орттираса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?
21. Цилиндр билан конуснинг асоси ва баландлиги умумий. Конуснинг ҳажми 10 см^3 га teng. Цилиндрнинг ҳажмини топинг.
22. Цилиндр билан конуснинг асоси ва баландлиги умумий. Цилиндрнинг ҳажми 150 см^3 га teng. Конуснинг ҳажмини топинг.
23. Агар шар радиусини уч марта орттираса, унда унинг ҳажми неча марта ортади?

В

24. Кубнинг диагонали $\sqrt{12}$ см га teng. Унинг ҳажмини топинг.
25. Кубнинг ҳажми $24\sqrt{3} \text{ см}^3$ га teng. Унинг диагоналини топинг.
26. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган икки қирраси 2 см, 4 см га, диагонали эса 6 см га teng. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
27. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган икки қирраси 2 см, 3 см га, ҳажми эса 36 см^3 га teng. Параллелепипеднинг диагоналини топинг.
28. Агар кубнинг ҳар бир қиррасини 1 см га орттираса, унда унинг ҳажми 19 см^3 га ортади. Кубнинг қиррасини топинг.
29. Параллелепипеднинг ёғи — томони 1 см га ва ўткир бурчаги 60° га teng бўлган ромб. Параллелепипеднинг бир қирраси шу ёғи билан 60° бурчак ясади ва 2 см га teng. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
30. Цилиндр асосининг радиуси билан баландлиги 2 см га teng. Шу цилиндрга ташқи чизилган тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
31. Цилиндр асосининг радиуси 1 см га teng. Шу цилиндрга ташқи чизилган тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми 8 см^3 га teng. Цилиндрнинг баландлигини топинг.

32. Сферанинг радиуси 2 см га тенг. Шу сферага ташқи чизилган кубнинг ҳажмини топинг.
33. Сферага ташқи чизилган кубнинг ҳажми 216 см^3 га тенг. Сферанинг радиусини топинг.
34. Учурчакли призманинг ҳажми 32 см^3 га тенг. Призма асосининг ўрта чизиги орқали унинг ён қиррасига параллел текислик ўтказилган. Кесиб олинган учурчакли призманинг ҳажмини топинг.
35. Учурчакли призма асосининг ўрта чизиги орқали унинг ён қиррасига параллел текислик ўтказилган. Кесиб олинган учурчакли призманинг ҳажмини топинг.
36. Призма асослари — томонлари 2 см бўлган мунтазам олтибурчак. Призманинг ён қирралари $2\sqrt{3}$ см га тенг ва у асос текислиги билан 30° бурчак ясади. Унинг ҳажмини топинг.
37. Мунтазам тўрт бурчакли пирамиданинг баландлиги 6 см га, ён қирралари эса 10 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
38. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлиги 12 см га, ҳажми эса 200 см^3 га тенг. Пирамиданинг ён қиррасини топинг.
39. Пирамиданинг асоси — тўғри тўртбурчак. Пирамиданинг бир ён ёғи унинг асос текислигига перпендикуляр, бошқа учта ён ёқлари эса асос текислиги билан 60° бурчак ясади. Пирамиданинг баландлиги 6 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
40. Учурчакли пирамиданинг ён қирралари ўзаро перпендикуляр ва уларнинг ҳар қайсиси 3 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
41. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 2 см га, ён қирралари 4 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
42. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ҳажми 6 см^3 га, асосининг томонлари 1 см га тенг. Пирамиданинг ён қиррасини топинг.
43. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 4 см га, ён ёғи билан асосининг орасидаги бурчаги эса 45° га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.
44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедининг ҳажми 12 см^3 га тенг. B_1ABC учурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.
45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубининг ҳажми 12 см^3 га тенг. E, F, E_1, F_1 нукталари — BC, CD, B_1C_1, C_1D_1 қирраларининг ўрталари. $CEFC_1E_1F_1$ учурчакли призмасининг ҳажмини топинг.
46. Кубнинг ҳажми 12 см^3 га тенг. Асоси — кубнинг ёғи, учи эса — кубнинг марказида ётувчи тўртбурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.
47. $ABC A_1B_1C_1$ призмасининг ҳажми 6 см^3 га тенг. Шу призмадан C_1ABC учурчакли пирамидаси кесиб олинган. Қолган бўлакнинг ҳажмини топинг.

- 48.** $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг бўлган $SABC$ учбурчакли пирамидасининг ҳажми 1 см^3 га тенг. Олтибурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 49.** $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ҳажми 12 см^3 га тенг. E нуқтаси — SB қиррасининг ўртаси. $EABC$ учбурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 50.** Учбурчакли пирамиданинг ҳажми 12 см^3 га тенг. Шу пирамиданинг учи орқали ва асосининг ўрта чизиги орқали ўтувчи текислик билан кесиб учбурчакли пирамида олинган. Кесиб олинган учбурчакли пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 51.** $SABC$ учбурчакли пирамиданинг ҳажми 15 см^3 га тенг. Шу пирамида асосининг AB томони орқали ўтувчи текислик унга қарши ётган SC ён қиррасини S нуқтасидан бошлаб ҳисоблаганда $1 : 2$ каби нисбатда бўлувчи D нуқтада кесиб ўтади. $DABC$ пирамиданинг ҳажмини топинг.
- 52.** Бир цилиндр шаклидаги идиш иккинчисидан икки марта баланд, лекин иккинчи идишнинг ичи $1,5$ марта кенг. Иккинчи идиш ҳажмининг биринчи идиш ҳажмига нисбатини топинг.
- 53.** Конуснинг ҳажми 12 см^3 га тенг. Конуснинг баландлигини тенг бўладиган қилиб унинг асосига параллел кесувчи текислик ўтказилган. Кесиб олинган конуснинг ҳажмини топинг.
- 54.** Конуснинг баландлиги 6 см га, ясовчиси эса 10 см га тенг. Унинг ҳажмининг π га нисбатини топинг.
- 55.** Конус асосининг диаметри 6 см га, ўқ кесимининг учидағи бурчаги эса 90° га тенг. Унинг ҳажмининг r га нисбатини топинг.
- 56.** Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг катети 6 см га тенг. Шу учбурчакнинг бир катети ётган тўғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган конус ҳажмининг r га нисбатини топинг.
- 57.** Учта шарнинг радиуслари 6 см , 8 см ва 10 см . Ҳажми шу шарларнинг ҳажмларининг йиғиндисига тенг бўлган янги шар радиусини топинг.

C

- 58.** Тўғри призманинг асоси — юзи 3 см^2 га тенг ромб. Диагонал кесимларининг юzlари 8 см^2 ва 12 см^2 . Призма ҳажмини топинг.
- 59.** Тўғри бурчакли параллелепипеднинг учта ёқларининг юzlари 2 , 3 , 6 . Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
- 60.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубининг қирраси 3 см га тенг. Кубнинг $ABCD$ ёғининг қўшни томонларининг ўрталари орқали ўтувчи ва AA_1 қиррасига параллел кесувчи текисликлар билан тўртта учбурчакли призмалар олинди. Призманинг қолган қисмининг ҳажмини топинг.

- 61.** Мунтазам олтибурчакли призманинг ҳажми 12 см^3 . Учлари берилған призма асосларининг томонларининг үрталари бўлган янги призманинг ҳажмини топинг.
- 62.** Кубнинг қирраси 6 см га teng. Учлари кубнинг тўртта учи билан мос келадигандай кубга ички мунтазам тетраэдр чизилган. Тетраэдрнинг ҳажмини топинг.
- 63.** Тўртбурчакли пирамиданинг ҳажми 12 см^3 га teng. Пирамиданинг учи ва асосининг қўшни томонларининг үрталари орқали ўтадиган кесувчи текисликлар билан тўртта учбурчакли пирамидалар кесилиб олинди. Пирамиданинг қолган қисмининг ҳажмини топинг.
- 64.** Кубнинг қирраси 6 см га teng. Учлари шу куб ёқларининг марказларида ётадиган октаэдрнинг ҳажмини топинг.
- 65.** Шарнинг ҳажми 1 см^3 га teng. Шу шарга ташқи чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.
- 66.** Шарнинг ҳажми 12 см^3 га teng. Асоси — шарнинг катта доираси, баландлиги эса шу доира текислигига перпендикуляр радиуси бўладиган конуснинг ҳажмини топинг.

СИРТНИНГ ЮЗИ

А

- 1.** Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи қирралари $1 \text{ см}, 2 \text{ см}, 3 \text{ см}$ га teng. Унинг сиртининг юзини топинг.
- 2.** Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи икки қирраси 3 см ва 4 см . Параллелепипед сиртининг юзи 52 см^2 . Унинг шу учидан чиқувчи учинчи қиррасини топинг.
- 3.** Агар кубнинг барча қирраларини уч марта орттирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?
- 4.** Агар тетраэдрнинг барча қирраларини икки марта орттирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?
- 5.** Мунтазам олтибурчакли призманинг баландлиги 6 см га, асосининг томонлари 3 см га teng. Призманинг ён сиртининг юзини топинг.
- 6.** Учбурчакли тўғри призманинг баландлиги 10 см га teng, асоси эса — катетлари 6 см ва 8 см бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Призма сиртининг юзини топинг.
- 7.** Цилиндрнинг баландлиги 2 см га, асосидаги айлананинг узунлиги эса 3 см га teng. Цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг.
- 8.** Конуснинг ясовчиси 2 см га, асосидаги айлананинг узунлиги эса 3 см га teng. Конуснинг ён сиртининг юзини топинг.
- 9.** Агар конуснинг ясовчисини 3 марта орттирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?
- 10.** Агар конус асосининг радиусини $1,5$ марта камайтиrsa, унда унинг сиртининг юзи неча марта камаяди?

11. Шарнинг катта доирасининг юзи 1 см^2 га тенг. Шар сиртиning юзини топинг.
12. Агар шарнинг радиусини икки марта орттирса, унда унинг сиртиning юзи неча марта ортади?

В

13. Кубнинг диагонали 1 см га тенг. Унинг сиртиning юзини топинг.
14. Куб сиртиning юзи 8 см^2 га тенг. Унинг диагоналини топинг.
15. Куб сиртиning юзи 24 см^2 га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
16. Кубнинг ҳажми 27 см^3 га тенг. Унинг сиртиning юзини топинг.
17. Түғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган икки қирраси 2 см ва 4 см . Параллелепипеднинг диагонали 6 см га тенг. Унинг сиртиning юзини топинг.
18. Түғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган икки қирраси 1 см ва 2 см . Параллелепипед сиртиning юзи 16 см^2 га тенг. Унинг диагоналини топинг.
19. Агар кубнинг ҳар бир қиррасини 1 см га орттирса, унда унинг сиртиning юзи 30 см^2 га тенг. Кубнинг қиррасини топинг.
20. Түғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқадиган икки қирраси 1 см ва 2 см . Параллелепипеднинг ҳажми 6 см^3 га тенг. Унинг сиртиning юзини топинг.
21. Түғри призманинг ён қирраси 5 см га тенг, асоси әса диагоналлари 3 см ва 4 см бўлган ромб. Призма сиртиning юзини топинг.
22. Түғри призманинг асоси — диагоналлари 6 см ва 8 см бўлган ромб. Призма сиртиning юзи 248 см^2 га тенг. Унинг ён қиррасини топинг.
23. Мунтазам тўртбурчакли призма асосининг томонлари 3 см га, сиртиning юзи 66 см^2 га тенг. Унинг ён қиррасини топинг.
24. Учбурчакли призманинг икки ён ёқлари ўзаро перпендикуляр. Уларнинг умумий қирралари 10 см га тенг ва бошқа ён қирраларидан 6 см ва 8 см узокликда ётади. Призманинг ён сиртиning юзини топинг.
25. Учбурчакли тўғри призманинг асоси — катетлари 6 см ва 8 см бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Призма сиртиning юзи 288 см^2 га тенг. Унинг баландлигини топинг.
26. Учбурчакли призманинг ён сиртиning юзи 12 см^2 га тенг. Призма асосининг ўрта чизиги орқали ён қиррасига параллел текислик ўtkazилган. Кесиб олинган учбурчакли призманинг ён сиртиning юзини топинг.
27. Учбурчакли призма асосининг ўрта чизиги орқали ён қиррасига параллел текислик ўtkazилган. Кесиб олинган учбурчакли призма ён сиртиning юзи 8 см^2 га тенг. Дастрабки призманинг ён сиртиning юзини топинг.

28. Мунтазам түртбурчакли пирамиданинг ён қирралари 5 см га, асоси томонлари эса 6 см га тенг. Пирамида сиртининг юзини топинг.
29. Мунтазам түртбурчакли пирамиданинг баландлиги 4 см га, асоси томонлари эса 6 см га тенг. Пирамида сиртининг юзини топинг.
30. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ён қирралари 5 см га, асоси томонлари эса 6 см га тенг. Пирамида ён сиртининг юзини топинг.
31. Агар октаэдрнинг барча қирраларини 3 марта орттирса, унда унинг сиртининг юзи неча марта ортади?
32. Конуснинг баландлиги 6 см га, ясовчиси 10 см га тенг. Конус сирти юзининг π га нисбатини топинг.
33. Конуснинг ён сиртининг юзи унинг асосининг юзидан икки марта катта. Конуснинг ясовчиси билан асос текислигининг орасидаги бурчагини топинг.
34. Конус сиртининг юзи 12 см^2 га тенг. Унинг баландлигини тенг бўладигандай асосига параллел кесим ўтказилган. Кесиб олинган конус сиртининг юзини топинг.
35. Шар ҳажми 36π . Унинг сирти юзининг π га нисбатини топинг.
36. Бир шарнинг ҳажми иккинчи шарнинг ҳажмидан 27 марта катта. Биринчи шар сиртининг юзи иккинчи шар сиртининг юзидан неча марта катта бўлади?
37. Икки шарнинг радиуслари 6 см ва 8 см. Шу шарларнинг сиртларининг юзларининг йигиндисига тенг бўладиган учинчи шарнинг радиусини топинг.

C

38. Цилиндрнинг ўқ кесимиининг юзи 1 см^2 га тенг. Цилиндрнинг ён сиртининг юзини топинг.
39. Шарга ташқи чизилган цилиндр сиртининг юзи 9 см^2 га тенг. Шар сиртининг юзини топинг.

АЙЛАНИШ ЖИСМЛАРИ**Кўпбурчакларнинг айланиши****A**

1. ABC тўғри бурчакли учбурчагининг катетлари $AC = BC = 1$ см. Шу учбурчакни AC катети ётган тўғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
2. ABC тўғри бурчакли учбурчагининг катетлари $AC = BC = 1$ см. Шу учбурчакни CH баландлиги ётган тўғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

3. ABC тенг томонли учбұрчагининг томони 1 см га тенг. Шу учбұрчакни CH баландлиги ётган түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.
4. ABC тенг ёнли учбұрчагида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$, CH — баландлиги. Шу учбұрчакни CH баландлиги ётган түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.
5. $ABCD$ тенг ёнли трапециянинг AD ва BC ён томонлари 1 см га, AB ва CD асослари эса мос равища 2 см ва 1 см га тенг. Шу трапецияни AB ва CD асосларининг ўрталари орқали ўтувчи с түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.
6. $ABCD$ түғри бурчакли трапециянинг AB ва CD асослари мос равища 2 см ва 1 см га тенг, кичик ён томони эса 1 см га тенг. Шу трапецияни AD томони ётган түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.

В

7. ABC түғри бурчакли учбұрчагининг катетлари $AC = BC = 1$ см. Шу учбұрчакни AB томони ётган түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.
8. ABC тенг томонли учбұрчагининг томони 1 см га тенг. Шу учбұрчакни AB томони ётган түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.
9. ABC тенг ёнли учбұрчагида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Шу учбұрчакни AB томони ётган түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.
10. ABC түғри бурчакли учбұрчагида $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. Шу учбұрчакни AB томони ётган түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.
11. $ABCD$ ромбнинг томонлари 1 см га, ўткир бурчаги эса 60° га тенг. Шу ромбни AC түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.
12. $ABCD$ ромбнинг томонлари 1 см га, ўткир бурчаги эса 60° га тенг. Шу ромбни BD түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.
13. $ABCD$ тенг ёнли трапециянинг AD ва BC ён томонлари 1 см га, AB ва CD асослари эса мос равища 2 см ва 1 см га тенг. Шу трапецияни AB түғри чизик бүйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртилинг юзини топинг.

- 14.** $ABCD$ түғри бурчакли трапециянинг AB ва CD асослари эса мос равища 2 см ва 1 см га тенг, кичик ён томони эса 1 см га тенг. Шу трапецияни AB түғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

C

- 15.** ABC тенг ёнли учбурчагида $AC = BC = 1$, $\angle C = 120^\circ$. Шу учбурчакни AC томони ётган түғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 16.** ABC түғри бурчакли учбурчагида $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$, CH — баландлиги. Шу учбурчакни CH баландлиги ётган түғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 17.** $ABCD$ ромбнинг томонлари 1 см га, ўткир бурчаги эса 60° га тенг. Шу ромбни AB түғри чизик бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 18.** $ABCD$ тенг ёнли трапециянинг AD ва BC ён томонлари 1 см га, AB ва CD асослари эса мос равища 2 см ва 1 см га тенг. Шу трапецияни CD түғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 19.** $ABCD$ тенг ёнли трапециянинг AD ва BC ён томонлари 1 см га, AB ва CD асослари эса мос равища 2 см ва 1 см га тенг. Шу трапецияни ўрта чизиги ётган с түғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 20.** $ABCD$ түғри бурчакли трапециянинг AB ва CD асослари мос равища 2 см ва 1 см га тенг, кичик ён томони эса 1 см га тенг. Шу трапецияни CD түғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 21.** $ABCDEF$ муентазам олтибурчагининг томонлари 1 см га тенг. Шу олтибурчакни AB түғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 22.** $ABCDEF$ муентазам олтибурчагининг томонлари 1 см га тенг. Шу олтибурчакни AC түғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 23.** $ABCDEF$ муентазам олтибурчагининг томонлари 1 см га тенг. Шу олтибурчакни AD түғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 24.** $ABCDEF$ муентазам олтибурчагининг томонлари 1 см га тенг. Шу олтибурчакни AB ва DE томонларининг ўрталари орқали ўтувчи с түғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

Күпёқларнинг айланиши

А

- 1.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини AA_1 тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 2.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ ёқларининг марказлари орқали ўтувчи с тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 3.** $ABC A_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призмасининг барча қирралари 1 см га teng. Шу приzmани AA_1 тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 4.** $ABC A_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призмасининг барча қирралари 1 см га teng. Шу приzmани ABC ва $A_1B_1C_1$ ёқларининг марказлари орқали ўтувчи с тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 5.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмасининг барча қирралари 1 см га teng. Шу приzmани асосларининг марказлари орқали ўтувчи с тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

В

- 6.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубини BC ва B_1C_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи с тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 7.** $ABCD$ бирлик тетраэдрини унинг DH баландлиги ётган тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 8.** $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 см га teng. Шу пирамидани SH баландлиги ётган тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 9.** $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг ён қирралари 2 см га, асосининг томонлари эса 1 см га teng. Шу пирамидани SH баландлиги ётган тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 10.** $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли приzmанинг барча қирралари 1 см га teng. Шу приzmани AA_1 тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

С

- 11.** $ABCD$ бирлик тетраэдрини AB тўғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

- 12.** $S'ABCDS''$ бирлик октаэдрини $S'S''$ түғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 13.** $ABC A_1 B_1 C_1$ муентазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 см га teng. Шу призмани BC ва $B_1 C_1$ қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи с түғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.
- 14.** $ABCDEFA_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ муентазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 см га teng. Шу призмани BC ва $B_1 C_1$ қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи с түғри чизиги бўйлаб айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми билан сиртининг юзини топинг.

ФАН-НОМ КҮРСАТКИЧЛАРИ

- Айланиш 41
- Айланиш ўқи 41
- Айланма фигура 41
- Айланма симметрия 34
- Айланма симметрик фигура 34
- Олмос кристаллари 35
- Бирлик куб 72
- Буриш 41
- Буриш ўқи 41
- Гексаэдр 21
- Геометрик конструктор 26
- Додекаэдр 21
- Қаварик күпёқлик 11
- Қаварик фигура 11
- Мунтазам күпёқлик 20
- Мунтазам кесик пирамида 10
- Мунтазам пирамида 10
- Мунтазам призма 9
- Мунтазам тетраэдр 20
- Текисликка нисбатан симметрик 36
- Уринма текислик 57
- Уринма түгри чизик 58
- Икосаэдр 21
- Исландия шпат кристаллари 35
- Кавальери принципи 77
- Конус 46
- Конусга ички чизилган сфера 62
- Конусга ташқи чизилган сфера 62
- Конус сиртининг юзи 47
- Конуснинг баландлиги 47
- Конуснинг ён сирти 46
- Конус ён сиртининг юзи 47
- Конуснинг ёйилмаси 47
- Конуснинг ясовчиси 46
- Конуснинг ҳажми 90
- Конуснинг ўқи 46
- Конуснинг ўқ кесими 46
- Конуснинг асоси 46
- Конуснинг учи 47
- Оғма призма 9
- Ҳажмнинг ўлчов бирлиги 72
- Күпёқлар 8

Күпёқларнинг симметрияси 34
 Күпёқ сиртининг юзи 26
 Күпёқнинг ёғи 8
 Күпёқнинг ёйилмаси 25
 Күпёқнинг қирралари 9
 Күпёқнинг учи 8
 Куб 8
 Кесик конус 51
 Кесик конус сиртининг юзи 52
 Кесик конуснинг баландлиги 51
 Кесик конуснинг ён сирти 51
 Кесик конуснинг ён сиртининг юзи 52
 Кесик конуснинг ёйилмаси 51
 Кесик конуснинг ясовчиси 51
 Кесик конуснинг ҳажми 91
 Кесик конуснинг ўқи 51
 Кесик конуснинг ўқ кесими 51
 Кесик конуснинг асослари 51
 Кесик пирамида 10
 Кесик пирамида сиртининг юзи 26
 Кесик пирамиданинг ён сирти 10
 Кесик пирамиданинг ён ёғи 10
 Кесик пирамиданинг ён қирраси 10
 Кесик пирамиданинг ҳажми 91
 Кесик пирамиданинг асослари 10
 Меридианлар 58
 Октаэдр 21
 Ўқ симметрияси 35
 Параллелепипед 8
 Параллеллар 58
 Пирамида сиртининг юзи 26
 Пирамиданинг ён сирти 9
 Пирамиданинг ён ёғи 9
 Пирамиданинг ён қирраси 9
 Пирамиданинг ҳажми 84
 Пирамиданинг асоси 18
 Пирамиданинг учи 18
 Платон жисмлари 21
 Призма сиртининг юзи 26
 Призманинг ён сирти 9
 Призманинг ён ёғи 8
 Призманинг ён қирраси 9
 Призманинг ҳажми 77

Призманинг асоси 8
 Симметрия 34
 Симметрия текислиги 36
 Симметрия ўқи 35
 Симметрия маркази 32
 Симметрик фигуралар 35
 Кварц кристаллари 35
 Сфера 55
 Сферага ички чизилган конус 62
 Сферага ички чизилган цилиндр 61
 Сферага ташқи чизилган конус 62
 Сферага ташқи чизилган цилиндр 61
 Сферанинг диаметри 55
 Сферанинг ўқи 57
 Сферанинг қутблари 58
 Сферанинг радиуси 55
 Сферанинг катта айланаси 55
 Сферанинг ватари 55
 Сферанинг маркази 55
 Тенгдош фигуралар 72
 Тетраэдр 29
 Түғри призма 9
 Түғри бурчакли параллелепипед 8
 Топология 18
 Түғри чизикқа нисбатан симметрик 35
 Ўхшашлик 73
 Ўхшашлик коэффициенти 73
 Марказий симметрия 32
 Марказий симметрик фигура 32
 Цилиндр 42
 Цилиндрга ички чизилган сфера 66
 Цилиндрга ташқи чизилган сфера 61
 Цилиндр сиртининг юзи 43
 Цилиндрнинг баландлиги 42
 Цилиндрнинг ён сирти 42
 Цилиндрнинг ён сиртининг юзи 43
 Цилиндрнинг ёйилмаси 42
 Цилиндрнинг ясовчиси 42
 Цилиндрнинг ҳажми 81
 Цилиндрнинг ўқи 42
 Цилиндрнинг ўқ кесими 42
 Цилиндрнинг асоси 42

- Шар 56
- Шарнинг сирти 56
- Шар сиртининг юзи
- Шарнинг диаметри 56
- Шарнинг ҳажми 94
- Шарнинг радиуси 56
- Шарнинг маркази 56
- Эйлер теоремаси 24
- Экватор 57

ЖАВОБЛАР

10-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

1. 1) 3; 2) 6; 3) 10; 4)* $\frac{n(n-1)}{2}$. 2. Битта ёки чексиз күп. 3. 1) 4; 2) 10;
 $3)* \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. 4. 1) 4; 2) 8; 3)* 15. 8. 1) 8; 2) 12; 3) 6. 9. 1) 8; 2) 12; 3) 6. 10. 1) 6; 2) 8;
 3) 10; 4) 12; 5) 2n. 11. 1) ҳа; 4) йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. 12. 1) 9; 2) 12; 3) 15; 4) 18; 5) 3n. 13. 1) йўқ;
 3) ҳа; 4) ҳа; 2) йўқ. 14. 1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8; 5) n + 2. 15. 1) ҳа; 2) ҳа; 3) ҳа; 4) ҳа.
 16. 1) Тўртбурчак; 2) бешбурчак; 3) олтибурчак. 17. 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) n + 1.
 18. 1) ҳа; 2) ҳа; 3) ҳа; 4) ҳа. 19. 1) 6; 2) 8; 3) 10; 4) 12; 5) 2n. 20. 1) йўқ; 4) йўқ;
 2) ҳа; 3) ҳа. 21. 1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 7; 5) n + 1. 22. 1) ҳа; 2) ҳа; 3) ҳа; 4) ҳа. 23.
 1) Тўртбурчак; 2) бешбурчак; 3) олтибурчак. 24. 1) 18; 2) 18; 3) 6; 4) 27. 27. 1) 24;
 2) 24; 3) 3; 4) 24. 28. 1) Айқаш тўғри чизиқлар; 2) Айқаш тўғри чизиқлар; 3) кесишади. 29. 1) Айқаш тўғри чизиқлар; 2) Айқаш тўғри чизиқлар, 3) кесишади. 33. 1)
 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, BCC_1B1 , EFF_1E_1 ; 2) DEE_1D_1 . 35. 1) 3; 2) 3; 3) 1; 4) 4. 37. 1) 3; 2) 48.
 38. 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 90° . 39. 1) 45° ; 2) 60° ; 3) 90° . 40. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 41. 1) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$.
 42. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 43. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $1\frac{1}{2}$. 44. 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. 45. 45° . 46. 60° . 47. 1) 60° ;
 2) 30° ; 3) 90° ; 4) 90° . 48. $\frac{1}{3} \cdot 49. -\frac{1}{3} \cdot 50. 6. 51. 1) 2; 2) \sqrt{5}. 52. 1) \sqrt{3}; 2) \sqrt{6}. 53. \overline{AC_1} = \overline{AB} +$
 $+ \overline{AD} + \overline{AA_1}$. 54. $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$. 55. 1) 120° ; 2) 90° . 56. 1) 1; 2) 0; 3) 1; г) 0.
 57. 1. 58. A(0; 1; 0), B(1; 1; 0), C(1; 0; 0), D(0; 0; 0), A₁(0; 1; 1), B₁(1; 1; 1), C₁(1; 0; 1),
 $D_1(0; 0; 1)$. 59. A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1,5; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0), D(1; $\sqrt{3}$; 0), E(0; $\sqrt{3}$; 0), F(-0,5; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0),
 $A_1(0; 0; 1)$, $B_1(1; 0; 1)$, $C_1(1,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$, $D_1(1; \sqrt{3}; 1)$, $E_1(0; \sqrt{3}; 1)$, $F_1(-0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$. 60. 1) $\sqrt{13}$;
 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{5}$. 61. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$. 62. R = 3, O(2; -1; 0). 63. 7. 64. 6x +
 + 3y + 2z = 6.

I бөб. КҮППЕҚЛАР

1-§

3. а), б). 4. а), б). 5. а), б), в), г). 6. $\sqrt{3}$. 7. $\sqrt{29}$. 8. 1. 9. 9 марта. 10. 4 марта. 11. 4 марта.
 12. 94. 13. $\frac{6 + \sqrt{3}}{2}$. 14. $6 + 3\sqrt{3}$. 15. в), д), е). 16. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. 18. 2 см ва $\sqrt{5}$ см. 19. $\sqrt{5}$ см.
 20. 4 см. 21. а) 22 см; б) 28 см². 22. а) 92 см²; б) 48 см². 23. а) 34 см² б) 34 см². 24. а) 22
 см²; б) 26 см². 25. 30 см². 26. d 27600 м². 27. б), в), д) — қавариқ; а) е) — қавариқ
 эмас. 28. 288 см². 29. $\sqrt{5}$ см. 30. Йўқ. 31. Йўқ.

2-§

2. а), в). 3. а), в). 4. Бешбурчакли пирамида. 6. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{15})}{2}$. 9. $\sqrt{3}$.
 10. 4 марта. 11. 9 марта. 15. $\sqrt{7}$ см. 16. $\sqrt{10}$. 17. d 8595 м². 18. d 8,3 га. 19. $5 + 3\sqrt{3}$ см². 20. 1 см.
 21. d 1710 дм².

3-§

1. 8. 2. 12. 3. 6. 6. а) Мунтазам олтибурчакли призма; б) бешбурчакли пирамида.
 7. а) ҳа; б) ҳа. 8. ҳа. 9. ҳа. 10. У = 12, K = 24, Ё = 12; У - K + Ё = 0. 11. У = 6, K = 12,
 Ё = 8. 12. У = 20, K = 30, Ё = 12.

4-§

1. 1) $Y = 4$, $K = 6$, $\ddot{E} = 4$; 2) $Y = 8$, $K = 12$, $\ddot{E} = 6$; 3) $Y = 6$, $K = 12$, $\ddot{E} = 8$; 4) $Y = 12$, $K = 30$, $\ddot{E} = 20$; 5) $Y = 20$, $K = 30$, $\ddot{E} = 12$. 2. Йүқ. Ёқларининг ҳар хил сони бирикадиган учлари бор бўлади. 3. Ха, бу октаэдр. 7. 5. 8. 3. 9. Куб ва октаэдр. 10. Икосаэдр ва додекаэдр. 11. Тетраэдр, $\sqrt{2}$. 12. Октаэдр, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 13. Октаэдр, $\frac{1}{2}$. 14. Октаэдр, 1 см. 15. $\sqrt{2}$. 16. 4. 17. 8. 18. Тетраэдр, $\frac{1}{3}$. 19. Куб, $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 20. Додекаэдр. 21. Икосаэдр. 22. 10. 23. 6.

5*-§

2. 1) ҳа; 2) ҳа; 3) Ҳа. 3. 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. 4. 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. 5. 1) ҳа; 2) ҳа; 3) Ҳа. 6. 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. 7. 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа. 9. Берилган тўғри чизиқларининг текислигига жойлашган, уларга параллел бўлган ва улардан бир хил узоқликда жойлашадиган тўғри чизиқнинг нуқталари. 10. 1) Берилган текисликларнинг кесишиш тўғри чизигининг нуқталари; 2) берилган текисликларга параллел ва улардан бир хил узоқликда жойлашадиган текисликнинг нуқталари. 11. Ҳа. 12. 1) ҳа; 2) ҳа; 3) Ҳа. 13. 1) 3; 2) 7. 14. 1) 4; 2) 7. 15. 1), 2) 1. 16. 1) 4; 2) 6. 17. 1) n , агар n – тоқ сон, $n + 1$, агар n – жуфт сон; 2) 0, агар n – тоқ сон, 1, агар n – жуфт сон. 18. 1) $n + 1$; 2) n . 19. 1) 9; 2), 3) 15. 20. 1) 9; 2), 3) 15. 21. Ҳа, масалан, сферанинг симметрия маркази унда ётмайди. 22. 1) Ёқлари параллограммлар бўлган параллелепипедда симметрия маркази бор, лекин симметрия ўқи йўқ; 2) мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг симметрия ўқи бор, лекин симметрия маркази йўқ. 23. 1) Ёқлари параллограммлар бўлган параллелепипедда симметрия маркази бор, лекин симметрия текислиги йўқ; 2) асоси параллограмм бўлган тўртбурчакли пирамиданинг симметрия ўқи бор, лекин симметрия текислиги йўқ. 24. 1) Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг симметрия текислиги бор, лекин симметрия маркази йўқ; 2) мунтазам учурчакли пирамиданинг симметрия текислиги бор, лекин симметрия ўқи йўқ.

Ўзингизни текширинг!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C)	A)	B)	B)	C)	A)	D)	D)	A)	C)	B)	D)	C)	D)	D)	A)	B)	C)	A)	D)

II боб. АЙЛАНИШ ЖИСМЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

6-§

2. Чексиз кўп. 3. Доира. 4. Цилиндр. 5. Ҳалқа. 6. 5 см. 7. $\frac{1}{2\pi}$ см. 8. 1) $4\rho \text{ см}^2$; 2) $6\rho \text{ см}^2$. 10. Тўғри тўртбурчак. 11. 1) ҳа; 2) ҳа; 3) ҳа. 12. 1) цилиндр; 2) цилиндр. 13. 1) $2\sqrt{2}\rho$; 2) $\sqrt{2}\rho$. 14. 1) цилиндр; 2) Цилиндр. 15. 1) 2ρ ; 2) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$. 16. 1) цилиндр; 2) цилиндр. 17. 1) 12ρ ; 2) 4ρ . 18. $10\rho \approx 31,4 (\text{м}^2)$. 19. $30\sqrt{2 - 2\cos10^\circ} \text{ см}^2$. 20. 26 см². 21. Асосларининг радиуслари 2 ва 1, баландликлари эса 1 бўлган иккита цилиндрдан иборат фигура. Бу фигура сиртининг юзи 14 ρ га teng. 22. Асосларининг радиуслари 2, 1, 1, баландликлари эса 1 бўлган учта цилиндрдан иборат фигура. Бу фигура сиртининг юзи $\frac{2R(1 - \cos\frac{\alpha}{R})}{\operatorname{tg}\beta} \text{ см}^2$. 23. $350\rho \text{ см}^2$. 24. $\frac{2R(1 - \cos\frac{\alpha}{R})}{\operatorname{tg}\beta} \text{ см}^2$.

7-§

2. Чексиз кўп. 3. Доира. 4. Конус. 5. Конуснинг ён сирти. 6. 5. 7. 1) 5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см. 8. 1 см. 9. 1 см. 10. $3\rho \text{ см}^2$. 11. Ҳа. 12. $\frac{\pi}{4} \text{ см}^2$. 13. $\sqrt{5}\rho \text{ см}^2$. 14. 1) Йўқ; 2) ҳа; 3) ҳа.

15. Асослари умумий бўлган икки конусдан иборат фигура. 16. Асослари умумий бўлган икки конусдан иборат фигура. Унинг сиртиning юзи $\sqrt{2}r$ га тенг. 17. Конус. 18. $\frac{(\sqrt{2} + 1)\pi}{2}$. 19. Конус. 20. $3\pi \text{ см}^2$. 21. 15 см^2 . 22. $2h^2$. 23. Асослари умумий бўлган Иккита тенг конуслардан иборат фигура. Унинг сиртиning юзи $\sqrt{2}r \text{ см}^2$ га тенг. 24. 0,5 см. 25. 120° . 26. 37. 27. $42,12 \text{ м}^2$. 28. 1440 см^2 .

8-§

2. Чексиз кўп. 3. Доира. 4. Кесик конус. 5. Кесик конуснинг ён сирти. 6. 5 см. 7. $80\pi \text{ см}^2$. 8. Ҳа. 10. $9\pi \text{ см}^2$. 11. 1) Йўқ; 2), 3) ҳа. 12. 1 см. 13. 2 см. 14. $\frac{17\pi}{4} \text{ см}^2$. 15. Кесик конус. 16. $(10 + 9\sqrt{2})\pi \text{ см}^2$. 17. Кесик конус. 18. $14\pi \text{ см}^2$. 19. $6\sqrt{2}\pi \approx 26,6 (\text{м}^2)$. 20. Асослари умумий бўлган иккита тенг кесик конуслардан иборат фигура. Унинг сиртиning юзи $3,5\pi \text{ см}^2$ га тенг. 21. 1 см ва 0,5 см. 22. $d = 161 \text{ г}$. 23. $d = 1,1 \text{ дм}^2$. 24. $d = 88 \text{ см}$, $d = 63 \text{ см}$, $d = 24,3 \text{ см}$, $d = 21 \text{ дм}^2$.

9-§

2. 1) $OA < R$; 2) $OA > R$. 3. 1) Сфера ичиди ётади; 2) сферада ётади; 3) сферадан ташқарида ётади. 4. Чексиз кўп. 5. 110 мм. 6. 1 см. 7. 1) кесишади; 2) уринади; 3) умумий нуқталарга эга эмас. 8. 1) Битта; 2) битта ҳам эмас; 3) чексиз кўп. 9. 4 см. 10. 4 см. 11. 1) Кесишади; 2) уринади; 3) умумий нуқталарга эга эмас. 12. 5 см. 13. 8 см. 14. 5 см. 15. 1) Кесишади; 2) уринади; 3) умумий нуқталарга эга эмас. 16. $\approx 6369 \text{ км}$. 17. 2 см ва 10 см. 18. 1 см. 19. 1) Кесишади; 2) уринади; 3) умумий нуқталарга эга эмас.

10*-§

1. R ва $2R$. 2. $\frac{h}{2}$. 3. $\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ см}$. 4. $2\sqrt{3} \text{ см}$. 5. $\sqrt{3} \text{ см}$. 6. $2,5 \text{ см}$. 7. $6\pi \text{ см}^2$. 8. 1) $\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ см}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ см}$. 9. $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$. 10. $3\frac{1}{8} \text{ см}$. 11. $R = \frac{r(\sqrt{r^2 + h^2} - r)}{h}$. 12. $1\frac{1}{2} \text{ см}$. 13. $\sqrt{3} \text{ см}$. 14. 1) 1 см; 2) $\sqrt{2} - 1 \text{ см}$. 15. 1) 1 см; 2) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{2} \text{ см}$.

11-§

1. $4\pi \text{ см}^2$. 2. $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} \text{ см}$. 3. 12 см^2 . 4. 1) 4; 2) 9; 3) n^2 марта ортади. 5. $2 : 3$. 6. 10 см. 7. 1. 8. р. 9. 2π . 10. 160000 марта. 11. 3 марта. 12. 4 марта. 13. $400\pi \text{ см}^2$. 14. $\approx 509554140 \text{ км}^2$. 15. $\approx 1520 \text{ м}^2$. 16. 19200 м^2 . 18. $\frac{\pi}{2} \text{ см}^2$. 19. $\frac{2\pi}{3} \text{ см}^2$.

Ўзингизни текширинг!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B)	C)	C)	D)	B)	C)	A)	C)	D)	C)	D)	D)	C)	D)	A)	D)	C)	B)	C)	D)

III боб. ЖИСМЛАР ХАЖМЛАРИ

12-§

1. 54 см^2 . 2. 8 см^3 . 3. 8 см^3 . 4. 7 см^3 . 5. 27 марта. 6. 8 марта. 7. 1) 2 марта ортади; 2) 9 марта камаяди. 8. $62,5 \text{ г}$. 9. 60 м^2 . 10. а) 6; б) 8. 11. а) 40; б) 12. 12. б) 10. 13. а) 5; б) 6. 14. 30 см^3 . 15. 15 см^3 . 16. 20 см. 17. $\frac{1}{8}$. 18. $1\frac{3}{4}$. 19. $\approx 21 \text{ м}^3$. 20. 9 см. 21. 3 см. 22. 160 см^3 . 23. $\frac{1}{6}$. 24. $\frac{1}{3}$. 25. 6 м^2 . 26. 162 л.

13-§

1. 60 см^3 . 2. $20\sqrt{3} \text{ см}^3$. 3. $18\sqrt{3} \text{ см}^3$. 4. $\sqrt{3} \text{ см}^3$. 5. $0,75 \text{ см}^3$. 6. $16\sqrt{3} \text{ см}$. 7. $1 : 3$. 8. 3 см^3 .
 9. 5 см^3 . 10. 9 см^3 . 12. 3 м^3 . 13. $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ см}^3$.

14-§

1. $12\rho \text{ см}^3$. 2. $\frac{\pi a^3}{4} \text{ см}^3$. 3. Иккинчи. 4. ρa^3 . 5. $\frac{3\pi}{32} \text{ см}^3$. 6. $\frac{\pi}{4}$. 7. $\rho \text{ см}^3$. 8. $\frac{a}{b}$ ёки $\frac{b}{a}$.
 9. Икки марта. 10. $3\rho \text{ см}^3$. 11. $243\rho \text{ см}^3$. 12. 4 см. 13. Цилиндр ассоции танлаб олишимиизга боғлиқ бүләди. $\frac{1}{\pi} \text{ см}^3$ еки $\frac{1}{2\pi} \text{ см}^3$. 14. 2ρ. 16. $5\rho \text{ см}^3$. 17. $6\rho \text{ см}^3$. 18. 960 м^3 .
 19. 162 кг. 20. 2250 см^3 .

15-§

1. $\frac{1}{3}a^2h \cdot 2 \cdot 32 \text{ м}^3$. 3. $\frac{\sqrt{3}}{12} \text{ см}^3$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ см}^3$. 5. $1\frac{1}{2} \text{ см}^3$. 6. $\frac{\sqrt{2}}{12} \text{ см}^3$. 7. 8 марта. 8. 3 марта камаяди. 9. 1) $\frac{1}{3} \text{ см}^3$;
 2) $\frac{1}{6} \text{ см}^3$. 10. $1 : 7$. 11. 7 см^3 . 12. $\frac{\sqrt{3}}{12} \text{ см}^3$. 13. $\frac{1}{6} \text{ см}^3$. 14. $\frac{\sqrt{3}}{12} \text{ см}^3$. 15. $4\sqrt{3} \text{ см}$. 16. $\frac{1}{3} \text{ см}^3$. 17. $1 : 1$.
 18. 3 см^3 . 19. $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ см}^3$. 20. $\frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ см}^3$. 21. $\approx 79443 \text{ м}^3$. 23. $\frac{3}{4} \text{ см}^3$. 24. $\frac{1}{2} \text{ см}^3$. 25. $\frac{1}{2} \text{ см}^3$.
 26. 3074176 м^3 . 27. $\approx 407 \text{ м}^3$. 28. 473 дм^3 , 319 кг.

16-§

1. 1) Уч; 2) түрт марта ортади. 2. 2 марта ортади. 3. 5 см^3 . 4. $1 : 7$. 5. $16\rho \text{ см}^3$. 6. $3\rho \text{ см}^3$.
 7. $3\rho \text{ см}^3$. 8. $7\rho \text{ см}^3$. 9. $72\rho \text{ см}^3$. 10. $9\rho \text{ см}^3$. 11. $\frac{\sqrt{3}\pi}{24} \text{ см}^3$. 12. Йүқ. 13. $\frac{7}{27} \text{ см}^3$. 14. 4 см. 15.
 $52\rho \text{ см}^3$. 16. $19\rho \text{ см}^3$. 18. $\approx 55,5 \text{ м}^3$. 19. $9\rho \text{ см}^3$. 20. $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. 21. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3} \text{ см}^3$. 22. $V = 19,44 \text{ м}^3$.

17-§

1. $36\rho \text{ см}^3$. 2. 1) 27; 2) 64 марта ортади. 3. 6 см. 4. 27. 5. $\frac{4\pi}{3} \text{ см}^3$. 6. $\frac{4000\pi}{3} \text{ см}^3$. 7. $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \text{ см}^3$.
 8. $m^{\frac{3}{2}} : n^{\frac{3}{2}}$. 9. $\frac{4\pi}{3}(R_1^3 - R_2^3)$. 10. $26 : 1$. 11. $\approx 0,5$. 12. $\frac{5324\pi}{3} \approx 5572 (\text{м}^3)$. 13. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{27} \text{ см}^3$.
 14. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27} \text{ см}^3$. 15. $\frac{\pi}{6} \text{ см}^3$. 16. $\frac{2\pi}{9} \text{ см}^3$.

Үзингизни текшириңг!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D)	A)	B)	D)	C)	B)	D)	D)	B)	B)	C)	B)	A)	A)	A)	A)	D)	C)	B)	A)

ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР**ХАЖМ**

1. 48 см^3 . 2. 8 см^2 . 3. 5 см . 4. 4 см . 5. 6 см . 6. 27. 7. 120 см^3 . 8. 4 см . 9. $4,5 \text{ см}^3$. 10. 8.
 11. 24 см^3 . 12. 4 см. 13. $0,25 \text{ см}^3$. 14. 3 см. 15. 4. 16. 3. 17. 2 см. 18. 2 см^3 . 19. 3. 20. 2,25.
 21. 30 см^3 . 22. 50 см^3 . 23. 27. 24. 8 см^3 . 25. 6 см . 26. 32 см^3 . 27. 7 см. 28. 2 см . 29. $1,5 \text{ см}^3$.
 30. 32 см^3 . 31. 2 см. 32. 64 см^3 . 33. 3 см. 34. 8 см^3 . 35. 20 см^3 . 36. 18 см^3 . 37. 256 см^3 .
 38. 13 см. 39. 48 см^3 . 40. $4,5 \text{ см}^3$. 41. 12 см^3 . 42. 7 см. 43. 48 см^3 . 44. 2 см^3 . 45. $1,5 \text{ см}^3$.
 46. 2 см^3 . 47. 4 см³. 48. 6 см^3 . 49. 3 см^3 . 50. 3 см^3 . 51. 10 см^3 . 52. $1,125$. 53. $1,5 \text{ см}^3$.
 54. 128 см^3 . 55. 9 см^3 . 56. 72 см^3 . 57. 12 см^3 . 58. 12 см^3 . 59. 6 см^3 . 60. $13,5 \text{ см}^3$. 61. 9 см^3 .
 62. 72 см^3 . 63. 6 см^3 . 64. 36 см^3 . 65. $1,5 \text{ см}^3$. 66. 3 см³.

СИРТНИНГ ЮЗИ

1. 22 см². 2. 2 см. 3. 9. 4. 4. 5. 108 см². 6. 288 см². 7. 6 см². 8. 3 см². 9. 3. 10. 1,5. 11. 4 см². 12. 4. 13. 2 см². 14. 2 см. 15. 8 см³. 16. 54 см². 17. 64 см². 18. 3 см. 19. 2 см. 20. 22 см². 21. 62 см². 22. 10 см. 23. 4 см. 24. 240 см². 25. 10 см. 26. 6 см². 27. 16 см². 28. 84 см². 29. 96 см². 30. 72 см². 31. 9. 32. 144. 33. 60. 34. 3 см². 35. 36. 36. 9. 37. 10 см. 38. р см². 39. 6 см².

АЙЛАНИШ ЖИСМЛАРИ

Кўпбурчакларнинг айланиши

1. $\frac{\pi}{3}$ см³ ва $(\sqrt{2} + 1)r$ см². 2. $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см³ ва $\frac{(\sqrt{2} + 1)\pi}{2}$ см². 3. $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$ см³ ва $0,75r$ см². 4. $\frac{\pi}{8}$ ва $\frac{(2\sqrt{3} + 3)\pi}{4}$. 5. $\frac{7\sqrt{3}\pi}{24}$ см³ ва $2,75r$ см². 6. $\frac{7\pi}{3}$ см³ ва $(3\sqrt{2} + 5)r$ см². 7. $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ см³ ва $\sqrt{2}r$ см². 8. $\frac{\pi}{4}$ см³ ва $\sqrt{3}r$ см². 9. $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ ва r . 10. $9,6r$ ва $16,8r$. 11. $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$ см³ ва r см². 12. $0,25r$ см³ ва $\sqrt{3}r$ см². 13. r см³ ва $2\sqrt{3}r$ см². 14. $\frac{4\pi}{3}$ см³ ва $(\sqrt{2} + 3)r$ см². 15. $\frac{\pi}{4}$ ва $\frac{(\sqrt{3} + 3)\pi}{2}$. 16. $8,192$ р ва $23,04$ р. 17. $0,75r$ см³ ва $2\sqrt{3}r$ см². 18. $1,25r$ см³ ва $3\sqrt{3}r$ см². 19. $\frac{11\pi}{32}$ см³ ва $\frac{5\sqrt{3}\pi}{14}$ см². 20. $\frac{5\pi}{3}$ см³ ва $(\sqrt{2} + 5)r$ см². 21. $4,5r$ см³ ва $6\sqrt{3}r$ см². 22. $\frac{19\sqrt{3}\pi}{12}$ см³ ва $7r$ см². 23. r см³ ва $2\sqrt{3}r$ см². 24. $\frac{7\sqrt{3}\pi}{12}$ см³ ва $3,5r$ см².

Кўпёқларнинг айланиши

1. $2r$ ва $(2\sqrt{2} + 4)r$. 2. $0,5r$ ва $(\sqrt{2} + 1)r$. 3. r см³ ва $4r$ см². 4. $\frac{\pi}{3}$ см³ ва $\frac{(2\sqrt{3} + 2)\pi}{2}$ см². 5. r см³ ва $4r$ см². 6. $1,25r$ ва $(\sqrt{5} + 2,5)r$. 7. $\frac{\sqrt{6}\pi}{27}$ ва $\frac{(\sqrt{3} + 1)\pi}{3}$. 8. $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ см³ ва $\frac{(\sqrt{2} + 1)\pi}{2}$ см². 9. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ см³ ва $3r$ см². 10. $4r$ см³ ва $12r$ см². 11. $0,25r$ ва $\sqrt{3}r$. 12. $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ ва $\sqrt{2}r$. 13. $0,75r$ см³ ва $\frac{(2\sqrt{3} + 3)\pi}{2}$ см². 14. $3,25r$ см³ ва $\frac{(2\sqrt{13} + 13)\pi}{2}$ см².

МУНДАРИЖА

КИРИШ	3
10-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ.....	4

I боб. КҮПЁҚЛАР

1-§. Күпёқ таърифи. Призма ва параллелепипед. Призманинг ёйилмаси, ён ва тўла сиртининг юзлари	8
2-§. Пирамида ва кесик пирамида. Пирамиданинг, кесик пирамиданинг ёйилмаси, ён сирти ва тўла сиртининг юзлари	18
3*-§. Эйлер теоремаси.....	24
4-§. Мунтазам кўпбурчаклар.....	29
5*-§. Кўпёқларнинг симметрияси	34
Ўзингизни текширинг!	41

II боб. АЙЛАНИШ ЖИСМЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

6-§. Цилиндр ва унинг элементлари. Цилиндрнинг ёйилмаси, ён ва тўла сиртларининг юзлари	43
7-§. Конус ва унинг элементлари. Конуснинг ёйилмаси, ён ва тўла сиртларининг юзлари	49
8-§. Кесик конус ва унинг элементлари. Кесик конус сиртининг юзаси	55
9-§. Сфера ва шар	60
10*-§. Айланиш жисмларининг комбинациялари.....	65
11-§. Сфера сиртининг юзи.....	70
Ўзингизни текширинг!	73

III боб. ЖИСМЛАРНИНГ ҲАЖМЛАРИ

12-§. Жисмлар ҳажмларининг умумий хоссалари.....	76
13-§. Призма ҳажми	82
14-§. Цилиндр ҳажми	85
15-§. Пирамида ва кесик пирамида ҳажмлари.....	89
16-§. Конус ва кесик конус ҳажмлари	96
17-§. Шар ҳажми	100
Ўзингизни текширинг!	103
ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР	106
ФАН-НОМ КЎРСАТКИЧЛАРИ	117
ЖАВОБЛАР	121

Учебное издание

**Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич**

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 11 классов общественно-гуманитарного направления
общеобразовательных школ
(на узбекском языке)

Мұхаррирлар *М. Зайниддинова, В. Мусаева*
Бадий мұхаррир *Л. Уралбаева*
Техник мұхаррир *Л. Садикова*
Компьютерда саҳифаловчи *Д. Бағдаулет*

Нашриётта 7 июль 2003 йилда Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан
министрлигининг № 0000001 давлат лицензияси берилган



ИБ № 6247

Нашрға 19.08.20 рухсат әтилди. Ҳажми $70 \times 100 \frac{1}{16}$. Офсет қоғози.
Харф түри “SchoolBook Kza”. Офсет нашри. Шартли босма табоги $10,32 + 0,32$ форзац.
Шартли бүёқ тамғаси 21,96. Нашр ҳисоб табоги $6,51 + 0,54$ форзац.
Адади 3500 дона. Буюртма №

“Мектеп” нашриёти, 050009, Алмати шаҳри, Абай шоҳ кўчаси, 143

Факс: 8(727) 394-42-30, 394-37-58

Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34

E-mail: mekter@mail.ru

Web-site: www.mekter.kz

