Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

А. Е. Абилқасимова, З. А. Жумағулова

АЛГЕБРА ва АНАЛИЗ АСОСЛАРИ 11

Умумтаълим мактабларининг ижтимоий-гуманитар йўналишдаги 11-синфи учун дарслик

Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан министрлиги тасдиқлаган

Алмати "Мектеп" 2020

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
А17

Таржимон ***В.Мусаева***

ШАРТЛИ БЕЛГИЛАР:

— янги мавзуни ўзлаштиришда қўйиладиган таълим мақсадлари

— мустақил бажариш учун топшириқлар

— теорема ёки хоссалар исботининг якуни

— ўз-ўзини текшириш саволлари

— барча ўқувчилар бажаришлари лозим бўлган машқлар

— ўрта мураккабликдаги машқлар

— электрон ресурслардан фойдаланиш учун машқлар

Абилқасимова А. Е., Жумағулова З. А.

А17 **Алгебра ва анализ асослари:** Умумтаълим мактабларининг ижтимоий-гуманитар йўналишдаги 11-синфи учун дарслик. — Алмати: Мектеп, 2020. — 168 б., расм.

ISBN 978-601-07-1523-3

А $\frac{4306020503-169}{404(05)-20}$ 62(1)—20

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72

© Абилқасимова А. Е., Жумағулова З. А., 2020
© Таржимон Мусаева В.
© "Мектеп" нашриёти, бадиий безак берган, 2020

Барча ҳуқуқлари ҳимояланган

Нашрга оид мулкий ҳуқуқлар "Мектеп" нашриётига тегишли

ISBN 978-601-07-1523-3

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МУҚАДДИМА

Азиз ўқувчилар! Тавсия этилаётган дарслик 10-синф “Алгебра ва анализ асослари” курсининг давоми бўлиб ҳисобланади.

11-синфда сиз *бошлангич функция ва интеграл, иррационал тенгламалар, кўрсаткичли ва логарифмик функциялар, кўрсаткичли ва логарифмик тенгламалар ва тенгсизликлар* тушунчалари билан танишасиз. Шунингдек, даража ва илдиз, даражали функция, математик статистика элементлари бўйича билимингизни кенгайтирасиз.

Иррационал тенгламаларни, кўрсаткичли, логарифмик тенгламалар ва тенгсизликларни ҳамда улар системаларини ечишни, шунингдек, ясси фигуралар юзини аниқ интеграл орқали топишни ўрганасиз.

Дарслик 6 та боб ва 22 та параграфдан ташкил топган.

Ҳар бир параграфдан аввал янги мавзуни ўзлаштиришга доир таянч тушунчалар берилган.

Материални ўзлаштириш мобайнида ўқувчиларни фаол иштирок эттириш мақсадида мавзу ичида мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар тавсия қилинган.

Параграф охирида ўқувчиларнинг мавзу бўйича билимларини мустаҳкамлашга мўлжалланган саволлар берилган.

Дарсликдаги машқлар **А** ва **В** мураккаблик даражасида тавсия этилади. **А** мураккаблик даражасидаги топшириқларни бажаргандан сўнг, **В** мураккаблик даражасидаги топшириқларни ечиш лозим. Шунингдек, дарсликда 11-синф алгебра ва анализ асослари курсини такрорлашга доир машқлар тавсия қилинган.

Ўз-ўзини текшириш учун ҳар бир бобнинг охирида тест топшириқлари ва математик саводхонлик бўйича топшириқлар берилган.

Дарслик охирида глоссарий, шунингдек, машқлар ечимини текшириш учун масалаларнинг жавоблари келтирилган.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

10-СИНФ АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y = 1 - \cos\frac{x}{2}$;
2) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y = \cos^2 x + \sin^2 x + 1$;
4) $y = 2\mathrm{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$.

2. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$;
2) $y = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x}$;
3) $y = 4\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x - 5$;
4) $y = 3 - \frac{\sin 2x}{2\cos x}$.

3. Функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг:

1) $2\sin 0{,}25x + \sin\frac{x}{2}$;
2) $2\cos\left(\frac{x}{7} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 90^\circ - 2$;
3) $\mathrm{tg}0{,}125x + 4$;
4) $\mathrm{ctg}\left(0{,}5x + \frac{\pi}{4}\right) + 6\sin 180^\circ$.

4. Тенгламани ечинг:

1) $\sin^2 x - 10\sin x = 0$;
2) $\sin 3x = \sin x$;
3) $\cos^2 x + 0{,}1\cos x = 0$;
4) $\cos 15x = \cos 3x$;
5) $4\cos^2 x = \sin x \cos x$;
6) $2\sin^2 x = 3\sin x$.

5. Тенгламани ечинг:

1) $\sin x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x$;
2) $\sin^2 x - 0{,}25 = 0$;
3) $\sin^2 x - 1{,}5\sin x = -0{,}5$;
4) $\cos^2 x - 0{,}5\cos x = 0{,}5$;
5) $\sin^2 2x - \sin 4x = 3\cos^2 2x$;
6) $3\sin^2 3x + \sin 6x - \cos^2 3x = 0$.

6. Тенгсизликни ечинг:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) \mathrel{|} \frac{1}{2}$;
2) $\sin\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) \mathrel{m} \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\mathrm{tg}\left(0{,}5x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{3}$;
4) $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \mathrel{m} 0$;
5) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \mathrel{|} 0{,}25$;
6) $\mathrm{ctg}\left(2{,}5x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y = \arcsin\frac{1}{x} + \sqrt{4 - 3x - x^2}$; 2) $y = \arcsin(x - 3) + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

8. Агар $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sin x$ ва $q(x) = \sqrt{x + 1}$ бўлса, ушбу мураккаб функцияларни ҳосил қилинг:

1) $f(g(x))$;
2) $f(q(x))$;
3) $q(g(x))$;
4) $g(f(x))$;
5) $f(g(q(x)))$;
6) $g(q(f(x)))$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

9. $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = 10 - 10x^7 + 2{,}5x^{10}$;
2) $f(x) = \frac{3x+5}{4-x}$;
3) $f(x) = \sqrt{11x - x^2}$;
4) $f(x) = (2x - x^3)\sqrt{2 - x^2}$;
5) $f(x) = 6\cos^3(4 - 3x)$;
6) $f(x) = \sin(4 - 3x)\mathrm{tg}(4 - 3x)$;
7) $f(x) = \frac{\sin 5x}{1 + 3x}$;
8) $f(x) = \frac{2 - 5x}{\cos 10x}$.

10. $y = f(x)$ функция ҳосиласининг x_0 нуқтадаги қийматини топинг:

1) $f(x) = 4x^3 - x^4 + 10$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \frac{3}{x-1}$, $x_0 = 3$;
3) $f(x) = \cos^2 3x + \mathrm{tg}x$, $x_0 = \frac{\neq}{6}$;
4) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 4}$, $x_0 = 2\sqrt{2}$.

11. 1) $y = x^3 + x$ функция графигига абсциссаси 2 га тенг бўлган нуқтадан ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг.

2) $y = 3x^3 - 2$ функция графигининг қандай нуқтасидан ўтказилган уринма абсцисса ўқига параллел бўлади?

3) $y = x^2 - 5x + 4$ функция графигига ўтказилган уринманинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги тангенсини топинг.

12. 1) Агар $f(x) = x^2 + 3x - 39$ бўлса, у ҳолда $f(x) + f'(x) = 0$ тенгламани ечинг;

2) агар $f(x) = -x^2 - 6x + 6$ бўлса, у ҳолда $f(x) - f'(x) > 0$ тенгсизликни ечинг.

13. Функциянинг монотон оралиқларини топинг:

1) $f(x) = \frac{x}{x-1}$;
2) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$;
3) $f(x) = \frac{2x}{16 - x^2}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$;
5) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x + 4)$;
6) $f(x) = \sqrt{x - 1} \cdot (5 - x)$.

14. Функциянинг критик, максимум ва минимум нуқталарини топинг:

1) $y = 0{,}25x^4 - x + 9$;
2) $y = 5x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 11$.

15. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини, экстремумларини топинг:

1) $y = 5x^2 + 3x - 2$;
2) $y = 4x^3 - 3x + 1$;
3) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$;
4) $y = \frac{3}{x^2 + x}$.

16. Функциянинг камайиш оралиқларини, максимум ва минимум нуқталарини топинг:

1) $y' = (x - 5) \cdot (x + 1)^3 \cdot (x - 2)^4$;
2) $y' = (x + 1{,}5) \cdot (x - 1{,}5)^2 \cdot (x - 2)^3$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

17. Функцияни текширинг ва графигини ясанг:

1) $y = 2x^2 - 3x$; 2) $y = x^3 + 6x$; 3) $y = \frac{1}{1 - x^2}$; 4) $y = -\frac{2}{1 + x^2}$.

18. “Жонли геометрия” ёки “GeoGebra” дастуридан фойдаланиб, функциянинг графигини ясанг:

1) $y = \frac{1 + x}{x}$; 2) $y = \frac{x}{1 + x}$;

3) $y = 5 - 2\sqrt{x + 1}$; 4) $y = 3 + 2\sqrt{x - 1}$.

График бўйича функциянинг хоссаларини айтинг.

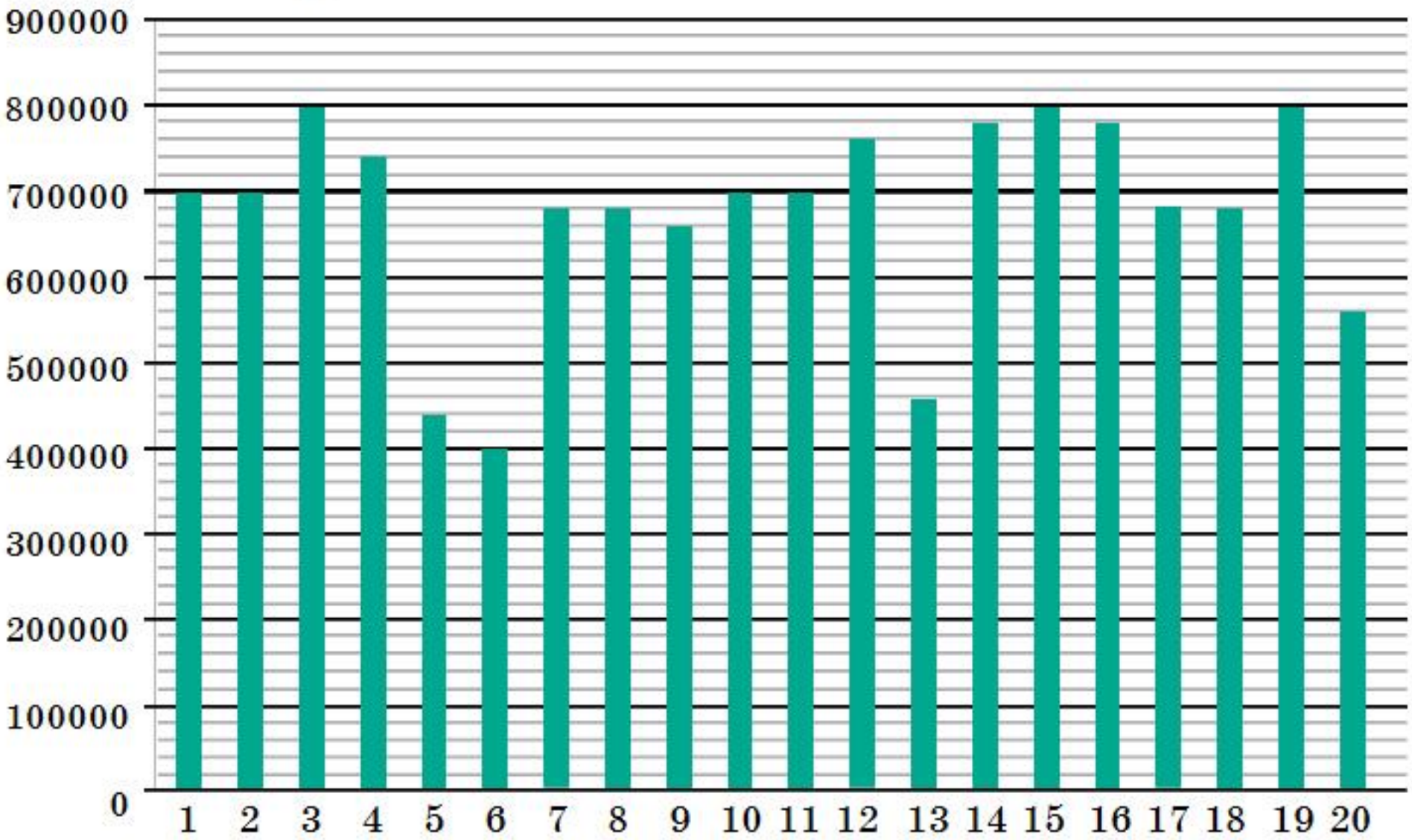
19. “Жонли геометрия” ёки “GeoGebra” дастуридан фойдаланиб, функциянинг графигини ясанг:

1) $y = -2\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$; 2) $y = -2 + 5\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = 4 - 2\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Математик саводхонликка доир топшириқлар

20. Диаграммада 2019 йилнинг 1–20 август оралиғида “Спорт янгиликлари” сайтини кўриб чиққан кишилар сони берилган (1-расм). Горизонтал чизиқ бўйлаб ой кунлари, вертикал чизиқ бўйлаб кишилар сони кўрсатилган.



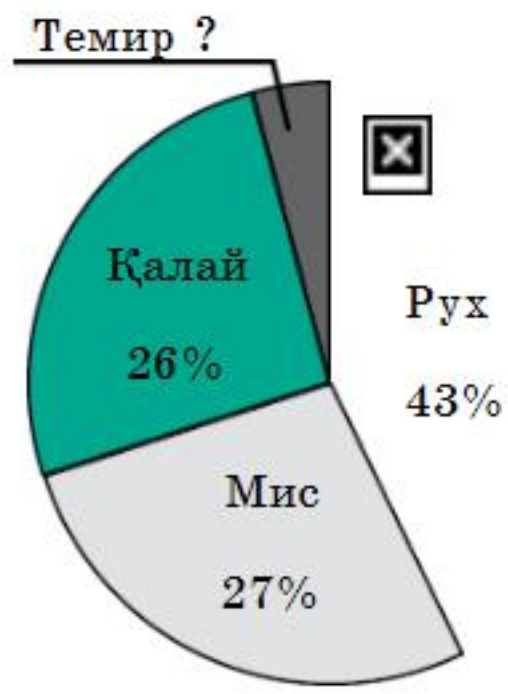
1-расм

1) Ойнинг қайси кунида “Спорт янгиликлари” сайтини одамлар энг кўп кўриб чиққан?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

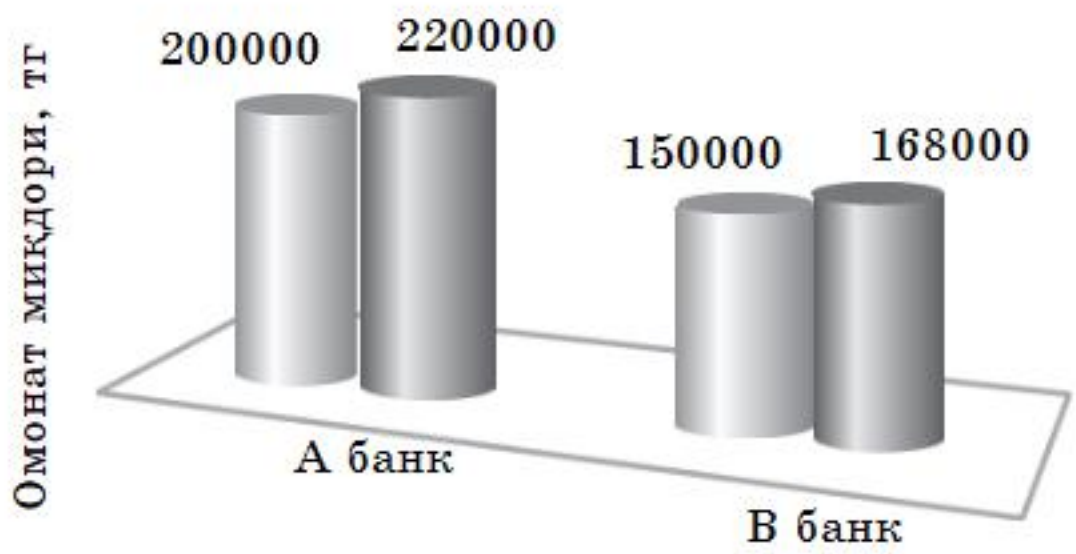
2) Неча кун сайтни қараб чиққан кишилар сони 600 000 дан кам бўлган?
3) Сайтга кирувчилар сони 700 000 дан кам бўлмаган кунлар сонини топинг.
4) Сайтга энг кам кирувчилар сони унга энг кўп кирувчилар сонининг неча фоизини ташкил қилишини топинг.



2-расм

21. Массаси 100 кг бўлган қотишманинг таркиби 2-расмда берилган.
1) Қотишмадаги мис билан рух неча килограммни ташкил қилади?
2) Қотишмада неча килограмм темир бор?

22. Диаграммада дастлабки омонат миқдори ҳамда А ва В банкларда-ги йиллик даромадни ҳисобга олгандаги омонат миқдори ҳақида маълумотлар келтирилган (3-расм).



3-расм

1. А ва В банклардаги омонат миқдорининг фоиз ҳисобидаги йиллик ўсимини топинг.
2. А ва В банклардаги фоиз ҳисобидаги йиллик ўсимлар орасидаги фарқни топинг.

23. 4-расмда турар-жой мажмуасидаги хонадонлар сони кўрсатилган.

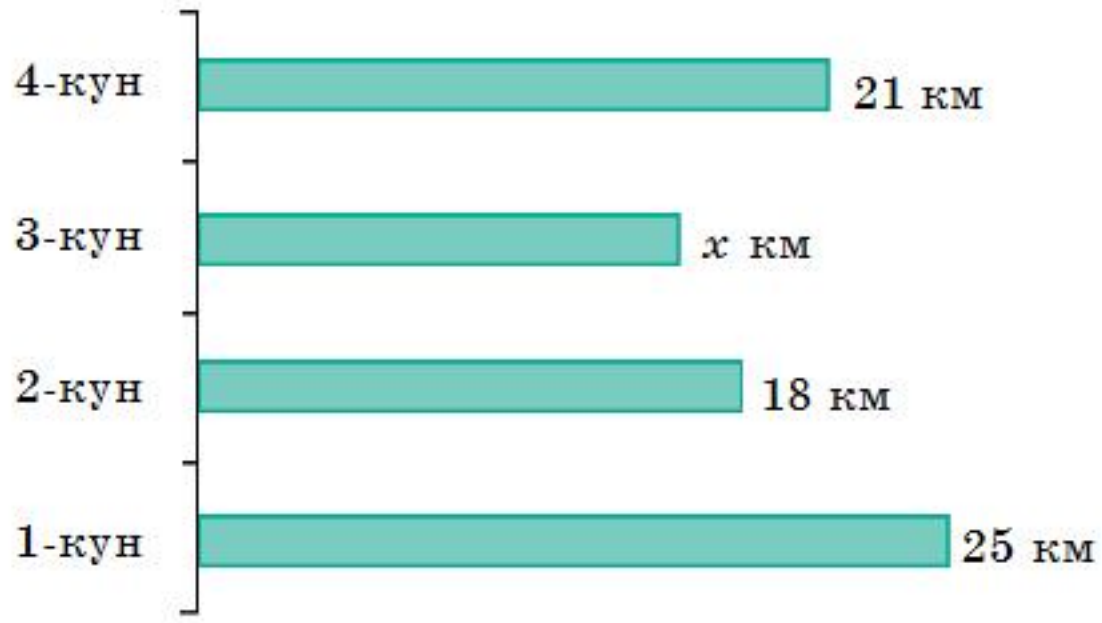
4-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

1) Бир хонали хонадонлар сони умумий хонадонлар сонининг неча фоизини ташкил қилади:
A) 30%; B) 45%; C) 35%; D) 36%; E) 50%?
2) Бир хонали хонадонлар сони тўрт хонали хонадонлар сонидан неча марта ортиқ:
A) 3,5 марта; B) 3,6 марта; C) 4 марта; D) 2,5 марта; E) 4,5 марта?

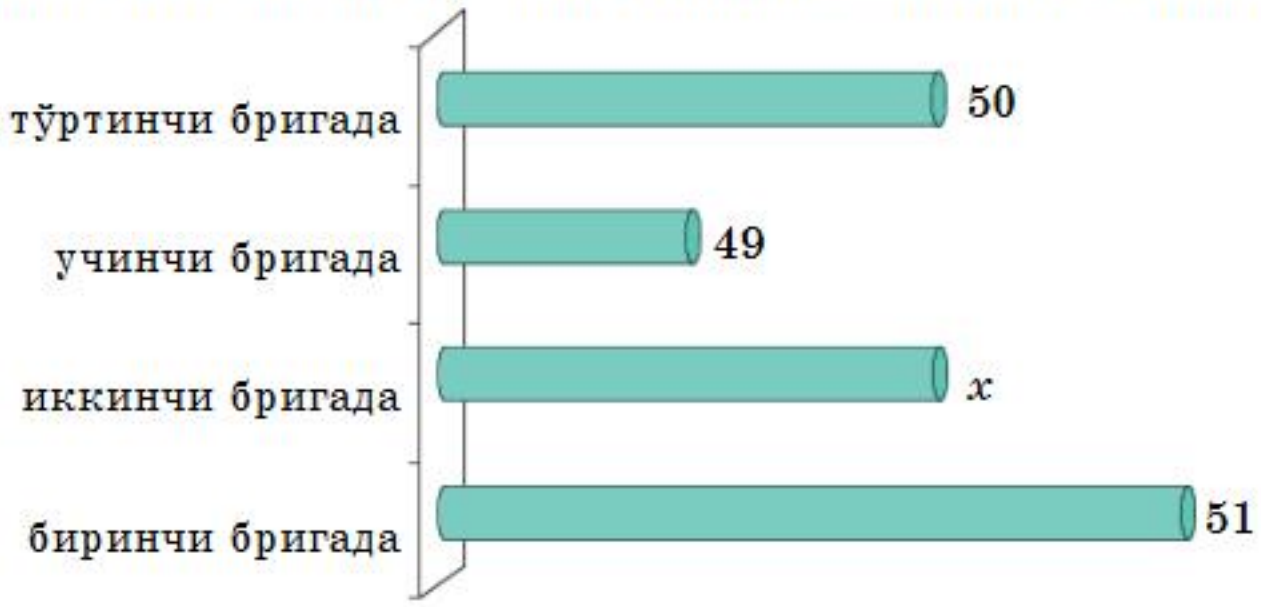
24. Диаграммада сайёҳларнинг тўрт кунда босиб ўтган йўли ҳақида маълумотлар келтирилган (5-расм). Учинчи куни сайёҳларнинг босиб ўтган йўли тўрт кун ичида босиб ўтган йўлнинг бешдан бир қисмига тенг. Сайёҳларнинг учинчи куни босиб ўтган йўлини топинг:



5-расм

A) 15 км; B) 20 км; C) 16 км; D) 15,5 км; E) 17 км.

25. 6-расмда тўртта бригада таъмирлаган йўл узунликлари келтирилган. Агар иккинчи бригада таъмирлаган йўл узунлиги жами таъмирланган йўл узунлигининг тўртдан бир қисмига тенг бўлса, иккинчи бригада неча километр йўлни таъмирлаганини топинг:



6-расм

A) 60 км; B) 55 км; C) 45 км; D) 50 км; E) 53 км.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция тушунчаси, функциянинг лимити, ҳосила, мураккаб функциянинг ҳосиласи, ҳосилани ҳисоблаш қоидалари, ҳосиланинг геометрик ва физик маъноси, функциялар ҳосилаларининг жадвали.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

I БОБ БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА ИНТЕГРАЛ

1-§. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ ХОССАЛАРИ

Бошланғич функция тушунчаси билан танишасиз ва бошланғич функцияни топишни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Функция, аниқланиш соҳаси, ўзгармас сон, ҳосила, функциянинг графиги

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ:

1. $f(x) = x^9$ функциянинг ҳосиласи $f'(x) = 9x^8$.
2. $f'(x) = 6x^5$ бирор функциянинг ҳосиласи бўлсин. Функция ҳосиласига оид билимимиздан фойдаланиб, унинг $f(x) = x^6$ функциянинг ҳосиласи эканини аниқлаймиз.

Ҳосила бўйича топиш мумкин бўлган функция *бошланғич функция* дейилади.

Таъриф. *X тўпламдан олинган ҳар қандай x учун*

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

тенглик бажарилса, F(x) функция шу тўпламда f(x) функция учун ***бошланғич функция*** *дейилади.*

МИСОЛ

1. Ҳар қандай $x \in (-\infty; +\infty)$ да $F(x) = x^5 - 5x$ функция $f(x) = 5x^4 - 5$ функция учун бошланғич функция эканини исботлаймиз.

Исботи. Бошланғич функция таърифига кўра $F(x) = x^5 - 5x$ функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$F'(x) = (x^5 - 5x)' = (x^5)' - (5x)' = 5x^4 - 5.$$

Демак, ҳар қандай $x \in (-\infty; +\infty)$ учун $F(x) = x^5 - 5x$ функция $f(x) = 5x^4 - 5$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади.

МИСОЛ

2. Ҳар қандай $x \in (0; +\infty)$ да $F(x) = \frac{2}{x} + 1$ функция $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ функция учун бошланғич функция бўлишини исботлаймиз.

Исботи. Бунинг учун бошланғич функциянинг таърифига кўра $F(x) = \frac{2}{x} + 1$ функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$F'(x) = \left(\frac{2}{x} + 1\right)' = \left(\frac{2}{x}\right)' + 1' = -\frac{2}{x^2}, \text{ бу ерда } x \neq 0.$$

Демак, ҳар қандай $x \in (0; +\infty)$ учун $F(x) = \frac{2}{x} + 1$ функция $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ функция учун бошланғич функция бўлади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

3. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ функция $f(x) = \frac{6}{x^3}$ функция учун бошланғич функция бўла олмаслигини исботлаймиз.

Исботи. Бошланғич функция таърифига кўра $F'(x) = f(x)$. Шунинг учун $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$F'(x) = \left(-\frac{3}{x^2}\right)' = -3 \cdot (x^{-2})' = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3}, \text{ бу ерда } x \neq 0.$$

Демак, барча ҳақиқий сонлар тўпламида $F(x) = -\frac{3}{x^2}$ функция $f(x) = \frac{6}{x^3}$ функция учун бошланғич функция бўлмайди, чунки $x = 0$ нуқта функцияларнинг аниқланиш соҳасига тегишли эмас.

Агар $F(x) = -$ ва $f(x) = \frac{6}{x^3}$ функцияларни $(-\infty; 0)$ ёки $(0; +\infty)$ интерваллларда қараб чиқсак, у ҳолда $F(x) = -$ функция $f(x) = \frac{6}{x^3}$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади, чунки $F'(x) = f(x)$ тенглик $(-\infty; 0)$ ёки $(0; +\infty)$ интервалларда исталган нуқтада бажарилади.

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ: Маълумки, берилган функциянинг ҳосиласини топиш *дифференциаллаш* деб аталади.

Функциянинг ҳосиласи бўйича бошланғич функциясини топиш *интеграллаш* дейилади.

Интеграллаш дифференциаллаш амалига тескари амалдир. Интеграллашнинг асосий мақсади функциянинг барча бошланғич функцияларини топишдан иборат.

Масалан, $f(x) = x^2$ функция учун бошланғич функция сифатида нафақат $F(x) = \frac{x^3}{3}$ функцияни, балки $G(x) = \frac{x^3}{3} - 4$, $Q(x) = \frac{x^3}{3} + 0{,}9$, $K(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{10}{7}$ ва шу каби функцияларни олиш мумкин. Сабаби ўша бошланғич функцияларнинг ҳосиласини топадиган бўлсак, барча ҳолларда $f(x) = x^2$ функцияга келамиз. Бинобарин, ҳар қандай $f(x)$ функция учун бошланғич функция мавжуд бўлса, унинг чексиз кўп бошланғич функцияларини топиш мумкин.

Демак, бошланғич функциянинг асосий хоссасини қуйидаги теорема орқали бериш мумкин.

Теорема. *Агар $F(x)$ функция X ораликда $f(x)$ функция учун бошланғич функциялардан бири бўлса, у ҳолда бу функциянинг барча бошланғич функциялари тўплами*

$$G(x) = F(x) + C \qquad (1)$$

формула билан топилади.

Бу ерда C – ўзгармас сон.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

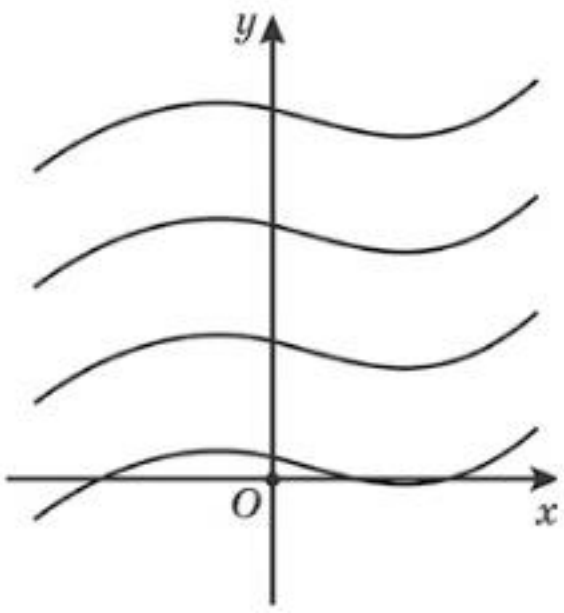
Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Исботи. Бунинг учун (1) тенгликнинг иккала томонидан ҳосила оламиз: $G'(x) = F'(x) + C'$ ёки $G'(x) = F'(x)$, чунки ўзгармаснинг ҳосиласи нолга тенг. Теореманинг шартига кўра $F(x)$ функция $f(x)$ функция учун бошланғич функция, бинобарин, бошланғич функция таърифига кўра $F'(x) = f(x)$. Жумладан, $G'(x) = f(x)$ тенглик бажарилади. Демак, $F(x) + C$ функция ҳам $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўлади.

(1) формула бошланғич функциянинг умумий кўринишини беради.

Сиз бошланғич функциянинг геометрик маъносини билиб оласиз.

$f(x)$ функция учун бошланғич функцияларнинг умумий кўринишини берувчи (1) формуладаги ўзгармасни нолга тенг деб олиб, $y = F(x)$ функциянинг графигини ясаймиз. Қолган бошланғич функциялардаги фарқи ўзгармас C нинг қийматига боғлиқ бўлгани учун, уларнинг графикларини $y = F(x)$ функция графигини Oy ўқ бўйлаб C бирликка параллел кўчириш орқали ҳосил қиламиз. Демак, *бошланғич функциянинг геометрик маъноси графиклари ўзаро параллел бўлган эгри чизиқлар тўпламидан иборат* (7-расм).



7-расм

1-*жадвал*

Бошланғич функцияларни топиш жадвали

Функция	Бошланғич функциянинг умумий кўриниши
$f(x) = k$ (k — ўзгармас)	$F(x) = kx + C$
$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in Z$, $\alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \mathrm{tg}x + C$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\mathrm{ctg}x + C$

Бошланғич функцияларни топиш қоидаларини кўриб чиқамиз.

1-қоида. *Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг, $P(x)$ функция эса $p(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $F(x) + P(x)$ функция $f(x) + p(x)$ функция учун бошланғич функция бўлади.*

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Исботи. Шартга кўра $F(x)$, $P(x)$ функциялар мос равишда $f(x)$, $p(x)$ функцияларнинг бошланғич функциясидир. У ҳолда таърифга кўра $F'(x) = f(x)$ ва $P'(x) = p(x)$, йиғиндини топиш қоидасини татбиқ қилсак,

$$(F(x) + P(x))' = F'(x) + P'(x) = f(x) + p(x).$$

2-қоида. *Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси, k ўзгармас бўлса, у ҳолда $kF(x)$ функция $kf(x)$ функция учун бошланғич функция бўлади.*

2-қоидани мустақил исботланг.

3-қоида. *Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси, k ва b ўзгармаслар (бу ерда $k \neq 0$) бўлса, у ҳолда $\frac{1}{k}F(kx + b)$ функция $f(kx + b)$ функция учун бошланғич функция бўлади.*

Исботи. Мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш қоидасига кўра

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b) \cdot (kx + b)' = \frac{1}{k}F'(kx + b)\, k = f(kx + b).$$

МИСОЛ

4. 1) $f(x) = x^4$; 2) $f(x) = \cos x - 2x^6$; 3) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{10 - 3x}} + \frac{5}{\sin^2(6x - 1)}$ функция учун бошланғич функциянинг умумий кўринишини топамиз.

Ечилиши. 1) $f(x) = x^4$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири $\frac{x^5}{5}$. Демак, берилган функция учун бошланғич функциянинг умумий кўриниши бундай бўлади: $F(x) = \frac{x^5}{5} + C$;

2) $f(x) = \cos x - 2x^6$ функциянинг бошланғич функциясини топиш учун 1- ва 2-қоидалар ва бошланғич функцияларни топиш жадвалидан фойдаланамиз:

$$F(x) = \sin x - 2 \cdot \frac{x^7}{7} + C = \sin x - \frac{2x^7}{7} + C;$$

3) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{10 - 3x}} + \frac{5}{\sin^2(6x - 1)}$ функциянинг бошланғич функциясини топиш учун юқорида берилган учта қоида ва бошланғич функцияларни топиш жадвалидан фойдаланамиз:

$$F(x) = 2 \cdot 2\sqrt{10 - 3x} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 5(-\mathrm{ctg}(6x - 1)) \cdot \frac{1}{6} + C = -\frac{4}{3}\sqrt{10 - 3x} - \frac{5}{6}\mathrm{ctg}(6x - 1) + C.$$

Жавоби: 1) $\frac{x^5}{5} + C$; 2) $\sin x - \frac{2x^7}{7} + C$; 3) $-\frac{4}{3}\sqrt{10 - 3x} - \frac{5}{6}\mathrm{ctg}(6x - 1) + C$.

Аниқмас интеграл тушунчаси билан танишасиз ва аниқмас интегрални топишни ўрганасиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Таъриф. *$f(x)$ функциянинг бошлангич функцияларининг умумий кўриниши, яъни $F(x) + C$ ифода ўша функциянинг* ***аниқмас интеграли*** *дейилади.*

Аниқмас интегрални топиш формуласи:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \qquad (2)$$

2-формуладаги $\int f(x)dx$ — аниқмас интеграл, $\int$ — интеграллаш амалининг белгиси, $f(x)$ — интеграл белгиси остидаги функция, $f(x)\,dx$ — интеграл белгиси остидаги ифода, x — интеграллаш ўзгарувчиси.

2-жадвал

Аниқмас интегрални топиш жадвали

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, бу ерда $n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$

Сиз аниқмас интеграл хоссалари билан танишасиз.

Аниқмас интеграл хоссалари:

1) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

2) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)dx$, бу ерда k — ўзгармас;

3) $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$.

МИСОЛ

5. 1) $\int x^8\,dx$; 2) $\int 8\sin x dx$; 3) $\int (4x^3 - 1)dx$ интегрални топамиз.

Ечилиши. Аниқмас интеграл таърифидан, хоссаларидан, уни топиш жадвалидан фойдаланамиз:

1) $\int x^8\,dx = \frac{x^9}{9} + C$;

2) $\int 8\sin x\,dx = 8\int \sin x\,dx = -8\cos x + C$;

3) $\int (4x^3 - 1)\,dx = x^4 - x + C$.

Жавоби: 1) $\frac{x^9}{9} + C$; 2) $-8\cos x + C$; 3) $x^4 - x + C$.

МИСОЛ

6. $f(x) = 4x - 6x^2$ функция учун графиги $M(2; -4)$ нуқтадан ўтувчи бошланғич функцияни топамиз.

Ечилиши. Дастлаб берилган функция учун бошланғич функциянинг умумий кўринишини ёзамиз:

$$F(x) = 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + C = 2x^2 - 2x^3 + C, \text{ яғни } F(x) = 2x^2 - 2x^3 + C.$$

Энди берилган нуқтанинг координаталарини эътиборга олган ҳолда C нинг қийматини ҳисоблаймиз:

$$-4 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^3 + C \text{ ёки } C = 4.$$

Бунда $F(x) = 2x^2 - 2x^3 + 4$.

Жавоби: $2x^2 - 2x^3 + 4$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

1. *Бошланғич функция* тушунчасини киритиш учун қанча функция кўриб чиқилади? Ўша функциялар қандай шартларни қаноатлантириши керак?
2. Битта функция учун икита бошланғич функция мавжуд бўлса, улар орасидаги фарқни қандай аниқлаш мумкин?
3. Бошланғич функцияни топиш ва интеграллаш орасида фарқ борми?
4. Бошланғич функциянинг умумий кўриниши ва *аниқмас интеграл* тушунчасини боғлайдиган формулани айтинг.
5. $f(x) = 3(2x - 3) + \cos 2x - 5$ функциянинг бошланғич функциясини топиш учун қандай қоидалар қўлланилади?

Машқлар

А

Кўрсатилган ораликда $F(x)$ функция $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўла оладими **(1.1—1.4)**:

1.1. 1) $F(x) = 2x^2 + x + 1$, $f(x) = 4x + 1$, $x \in R$;

2) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, $f(x) = x + 1$, $x \in R$?

1.2. 1) $F(x) = 3\sin x +$, $f(x) = 3\cos x - \frac{2}{x^2}$, $x \in (-\infty; 0)$;

2) $F(x) = 2\cos x - \frac{3}{x}$, $f(x) = -2\sin x + \frac{3}{x^2}$, $x \in (0; +\infty)$?

1.3. 1) $F(x) = \sqrt{x} + 1$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$;

2) $F(x) = 3 - 2\sqrt{x}$, $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$?

1.4. 1) $F(x) = 3\mathrm{tg}x$, $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $F(x) = 5\mathrm{ctg}x$, $f(x) = -\frac{5}{\sin^2 x}$, $x \in (0; \pi)$?

Берилган функциялар учун бошланғич функцияларнинг умумий кўринишини ёзинг **(1.5—1.7)**:

1.5. 1) $f(x) = 1 - x$; 2) $f(x) = 2x - 1$;

3) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$; 4) $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$.

1.6. 1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2$; 2) $f(x) = 4x^3 - 6x^5 + 1$;

3) $f(x) = x^{10} + \frac{13}{12}x^{12}$; 4) $f(x) = -x^9 + \frac{15}{14}x^{14}$.

1.7. 1) $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$; 2) $f(x) = 5\sin x + 6\cos x$;

3) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + 8x^7$; 4) $f(x) = \frac{3}{\sin^2 x} - 9x^8$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Аниқмас интегрални топинг **(1.8-1.9)**:

1.8. 1) $\int x^{21}dx$; 2) $\int x^{-15}dx$;

3) $\int \frac{1}{4\sqrt{x}}dx$; 4) $\int \frac{5}{\sin^2 x}dx$.

1.9. 1) $\int(x^4 - x^3 + x^2)dx$; 2) $\int(4x^3 + 5x^4 + 6x^5)dx$;

3) $\int(\cos x - 2)dx$; 4) $\int(3 + \sin x)dx$.

Графиги $M(a;\ b)$ нуқтадан ўтувчи $f(x)$ функция учун $F(x)$ бошланғич функцияни топинг **(1.10-1.11)**:

1.10. 1) $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$, $M(1;\ 3)$; 2) $f(x) = 2 + 4x$, $M(-1;\ 1)$;

3) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; 4) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{3\pi}{2}; 2\right)$.

1.11. 1) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$, $M(4;\ 5)$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}}$, $M\left(0; \frac{2}{3}\right)$;

3) $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$; 4) $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{4}; 3\right)$.

1.12. Тўғри чизиқли ҳаракатланган нуқтанинг тезлиги $v(t) = t + 3t^2$ қонунга мувофиқ ўзгаради (вақт с, тезлик м/с билан ўлчанади). Вақтга боғлиқ ҳолда нуқта координатасининг ўзгаришини топинг.

1.13. Тўғри чизиқли ҳаракатланган нуқтанинг тезлиги $v(t) = 2t + 6t^2$ қонунга мувофиқ ўзгаради (вақт с, тезлик м/с билан ўлчанади). Вақтга боғлиқ ҳолда нуқта координатасининг ўзгаришини топинг.

B

Берилган ораликда $F(x)$ функция $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўла оладими **(1.14—1.16)**:

1.14. 1) $F(x) = x\sin x$, $f(x) = \sin x + x\cos x$, $x \in R$;

2) $F(x) = x\cos x$, $f(x) = \cos x - x\sin x$, $x \in R$;

3) $F(x) = 2\sin 6x$, $f(x) = 12\cos 6x$, $x \in R$;

4) $F(x) = -5\cos\frac{x}{5}$, $f(x) = \sin\frac{x}{5}$, $x \in R$;

5) $F(x) = 2\cos 2x - \sin 4x$, $f(x) = -4(\sin 2x + \cos 4x)$, $x \in R$;

6) $F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\cos 8x$, $f(x) = \cos 3x - 2\sin 8x$, $x \in R$?

1.15. 1) $F(x) = \frac{3}{x^2} + 2x$, $f(x) = 2 - \frac{6}{x^3}$, $x \in (0;\ +\infty)$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

2) $F(x) = 3x - \frac{2}{x^3}$, $f(x) = 3 + \frac{6}{x^4}$, $x \in (0; +\infty)$?

1.16. 1) $F(x) = \sqrt{4x - 5}$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x - 5}}$, $x \in \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$;

2) $F(x) = \sqrt{5 - 4x}$, $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{5 - 4x}}$, $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$?

Аниқмас интегрални топинг **(1.17-1.18)**:

1.17. 1) $\int\left(0{,}75x^2 + \frac{x^9}{9}\right)dx$; 2) $\int\left(\frac{x^{-7}}{6} - 1{,}25x^4\right)dx$;

3) $\int\left(\frac{10}{\sqrt{5 + 2x}} - 3x^{-11}\right)dx$; 4) $\int\left(15x^{24} - \frac{28}{\sqrt{6 - 7x}}\right)dx$.

1.18. 1) $\int 18 \sin 6x \, dx$; 2) $\int 27 \cos 9x \, dx$;

3) $\int \frac{15}{\cos^2 10x} dx$; 4) $\int \frac{20}{\sin^2 2{,}5x} dx$.

$y = f(x)$ функция учун бошланғич функциянинг умумий кўринишини топинг **(1.19—1.23)**:

1.19. 1) $f(x) = (2x + 3)^3$; 2) $f(x) = (3x - 2)^8$;

3) $f(x) = \sin(3x - 4)$; 4) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

1.20. 1) $f(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)}$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(3x - \frac{\pi}{8}\right)}$;

3) $f(x) = 1 - \frac{5}{\sin^2\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)}$; 4) $f(x) = 1 + \frac{6}{\cos^2\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{5}\right)}$.

1.21. 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \sin\left(3 - \frac{x}{4}\right)$; 2) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 5}} + \cos\left(2 + \frac{x}{3}\right)$;

3) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3 - 4x}} + \frac{1}{(x + 2)^3}$; 4) $f(x) = \frac{4}{5\sqrt{2 + 3x}} - \frac{1}{(2 - x)^4}$.

1.22. 1) $f(x) = \cos^2\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3}$; 2) $f(x) = \sin\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{4}$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{8} \cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{8} + x^2$; 4) $f(x) = 1 - 2\sin^2\frac{x}{6}$.

1.23. 1) $f(x) = \cos^2 x$;

2) $f(x) = \sin^2 x$;

3) $f(x) = \cos\frac{x}{4} \sin\frac{\neq}{9} - \sin\frac{x}{4} \cos\frac{\neq}{9}$;

4) $f(x) = \sin\frac{x}{5} \cdot \sin\frac{\neq}{10} - \cos\frac{x}{5} \cdot \cos\frac{\neq}{10}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$y = f(x)$ функция учун $F(a) = b$ шартни қаноатлантрувчи бошланғич функцияни топинг (**1.24-1.25**):

1.24. 1) $f(x) = \dfrac{2}{(2x+5)^2}$, $F(-2) = \dfrac{1}{2}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x}{2}+3\right)^3}$, $F(-4) = 3$.

1.25. 1) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)}$, $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

1.26. Тўғри чизиқли ҳаракатланган нуқтанинг тезланиши $a = 2t$ (вақт с, тезланиш м/с^2 билан ўлчанади) қонун бўйича ўзгаради. Агар:

1) 1 с вақт ўтгандан кейин ҳаракатланаётган нуқтанинг босиб ўтган йўли 10 м ва унинг тезлиги 4 м/с бўлса;

2) 2 с вақт ўтгандан кейинги тезлиги 6 м/с, 3 с дан кейин босиб ўтган йўли 40 м га тенг бўлса, жисмнинг ҳаракат қонунияти қандай ўзгаради?

МАТЕМАТИК ОЛИМЛАР ҲАҚИДА АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

1.27. $\int$ белгисини Готфрид Вильгельм Лейбниц, “интеграл” атамасини Иоганн Бернулли таклиф қилган. “Интеграл” атамаси илк бор Якоб Бернулли асарларида учрайди.

Г.В. Лейбниц
(1646—1716)

Я. Бернулли
(1655—1705)

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция ва унинг графиги, функциянинг узлуксизлиги ва лимити, ҳосила, бошланғич функция ва унинг асосий хоссаси, бошланғич функцияни топиш қоидалари, бошланғич функцияни топиш жадвали.

2-§. ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ТРАПЕЦИЯ ВА УНИНГ ЮЗИ

Эгри чизиқли трапеция тушунчаси билан танишасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

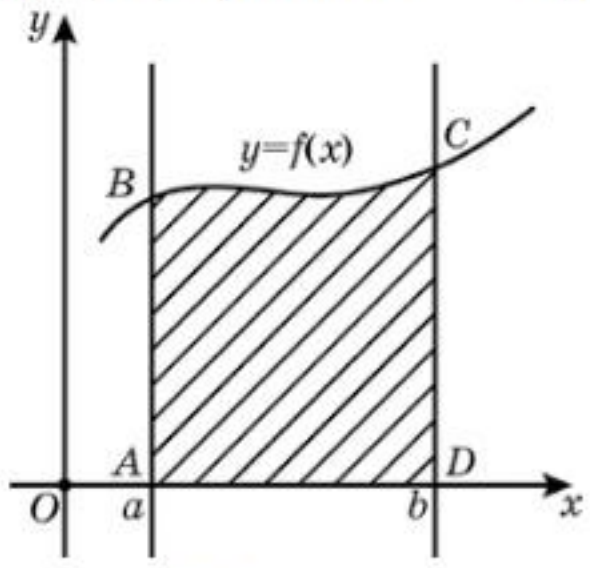
Функция, бошланғич функция, аниқмас интеграл, интеграл белгиси остидаги функция, трапеция, юза, координаталар текислиги

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ: Сиз геометрия курсидан кўпбурчакларнинг юзини ҳисоблаш формуласини биласиз.

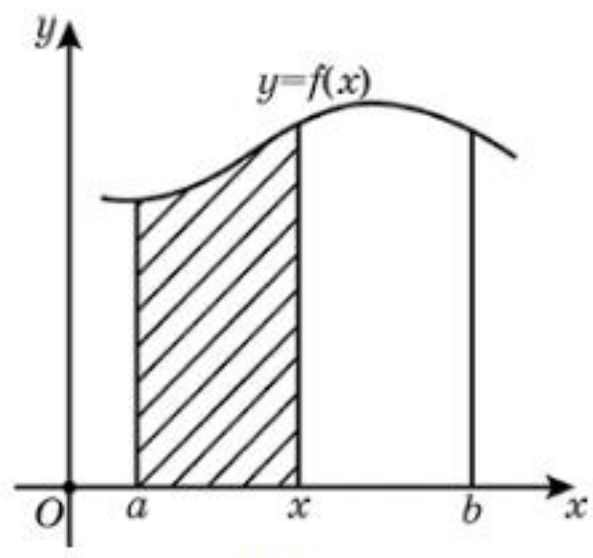
Математикада баъзан маълум геометрик формулалар орқали юзини ҳисоблаш мумкин бўлмаган ясси фигуралар ҳам учрайди. Ана шундай ясси фигуралар юзини топиш йўлини кўриб чиқамиз.

Таъриф. *Юқоридан узлуксиз, номанфий $y = f(x)$ функция графиги, қуйидан Ox ўқдаги $[a; b]$ кесма, ён томонларидан $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқ кесмалари билан чегаралланган ясси фигура* ***эгри чизиқли трапеция*** *деб аталади.*

Бу ерда $[a; b]$ кесма — эгри чизиқли трапециянинг асоси.



8-расм



9-расм

8-расмда $ABCD$ эгри чизиқли трапеция берилган.

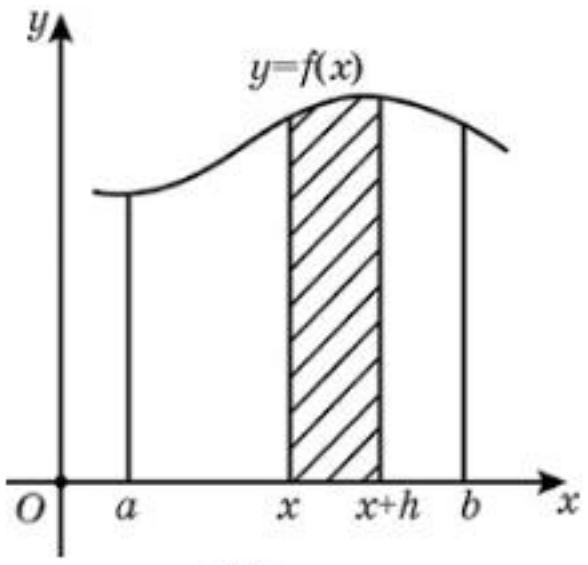
Эгри чизиқли трапеция юзини топиш формуласибилан танишасиз.

Эгри чизиқли трапеция юзини $y = f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)$ орқали ҳисоблаш мумкин эканини кўрсатамиз. Бунинг учун эгри чизиқли трапециянинг юзини S билан белгилаймиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Агар $[a; b]$ кесмага тегишли исталган x нуқтани олиб, ўша нуқтадан $y = f(x)$ функциянинг графиги билан кесишгунга қадар Oy ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказсак, у ҳолда асоси $[a; x]$ кесма бўлган эгри чизиқли трапеция ҳосил бўлади (9-расм). Ушбу эгри чизиқли трапециянинг юзи ўзгарувчи x нуқтага боғлиқ бўлгани учун $S(x)$ функция деб қаралади. Агар $x = a$ бўлса, у ҳолда $S(a) = 0$, $x = b$ бўлса, $S(b) = S$ ҳосил бўлади.



10-расм

Шундай қилиб, $[a; b]$ кесмага тегишли x ўзгарувчи учун $S(x)$ функция $y = f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлишини, яъни $[a; b]$ кесмада $S'(x) = f(x)$ тенглик ўринли эканини исботлаймиз.

Исботлаш учун $[a; b]$ кесмадан яна битта $x + h > 0$ бўлган нуқта олиб, ўша нуқтадан $y = f(x)$ функциянинг графиги билан кесишгунга қадар Oy ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз (10-расм).

Бунда юзлари $S(x)$ ва $S(x + h)$ га тенг иккита эгри чизиқли трапеция ҳосил бўлади. $S(x + h) - S(x)$ айирма эса асоси $[x; x + h]$ кесмадан иборат бўлган эгри чизиқли трапециянинг юзини беради. h нинг кичик қийматида эгри чизиқли трапециянинг юзини асоси $[x; x + h]$ кесма ва баландлиги $f(x)$ бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи билан алмаштириш мумкин: $S(x + h) - S(x) \approx f(x) \cdot h$. Бундан $\frac{S(x + h) - S(x)}{h} \approx f(x)$ ифода келиб чиқади. Охирги ифодадан $h \to 0$ интилгандаги лимитга кўчсак,

$$\frac{S(x + h) - S(x)}{h} \to f(x).$$

Ҳосиланинг умумий таърифига кўра $\frac{S(x + h) - S(x)}{h} \to S'(x)$, яъни $S'(x) = f(x)$. Демак,

$$F(x) = S(x) + C. \qquad (1)$$

(1) тенгликдан $x = a$ бўлса, у ҳолда $F(a) = S(a) + C = C$ ҳосил бўлади, чунки $S(a) = 0$. Агар $x = b$ бўлса, $F(b) = S(b) + C = S + F(a)$ ёки

$$F(b) = S + F(a), \qquad (2)$$

чунки $S(b) = S$, $F(a) = C$. Бинобарин, (2) тенгликдан $S = F(b) - F(a)$ тенгликни ҳосил қилиш мумкин.

Шундай қилиб, эгри чизиқли трапециянинг юзини

$$S = F(b) - F(a) \qquad (3)$$

формула бўйича ҳисоблаб топиш мумкин, бу ерда $F(x)$ функция $y = f(x)$ функция учун бошланғич функциядир.

АЛГОРИТМ

Эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш алгоритми:

1) берилган эгри чизиқларни координаталар текислигида ясаш;

2) фигурани Ox ўқи бўйича чегаралаган кесманинг охирлари бўладиган a ва b нинг қийматларини топиш;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

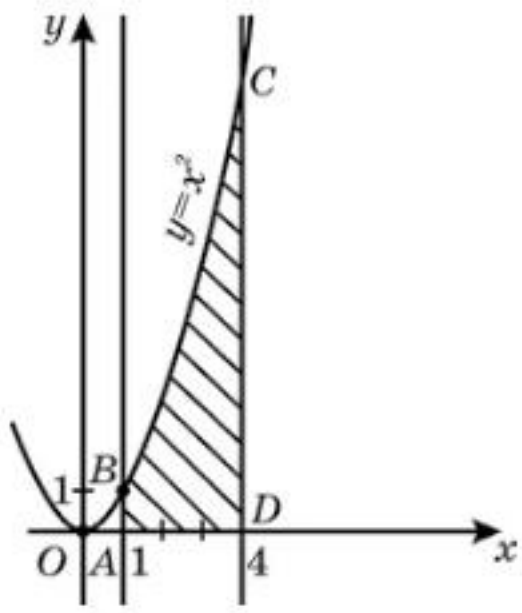
Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини топиш;
4) (3) формуладан фойдаланиб, эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаш.

Энди алгоритмдан фойдаланиб, эгри чизиқли трапеция юзини топишга доир мисоллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

1. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топамиз.



11-расм

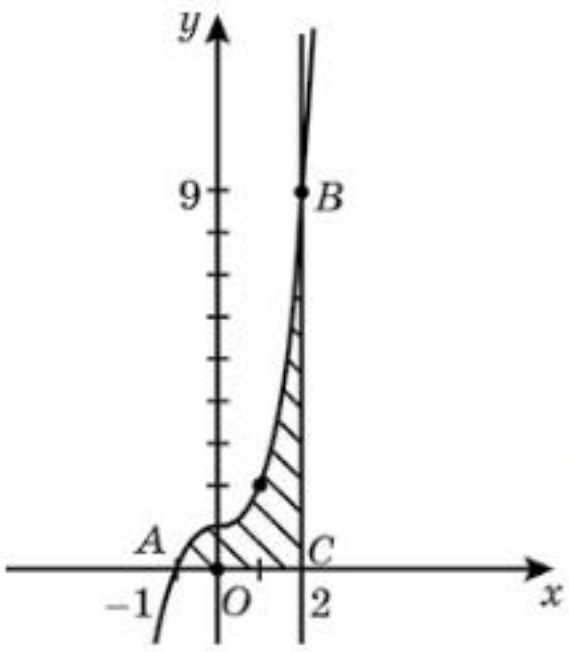
Ечилиши. Дастлаб берилган эгри чизиқларни битта координаталар текислигида ясаймиз. $y = x^2$ функциянинг графиги учи (0; 0) нуқта бўлган, тармоқлари юқорига йўналган парабола; $y = 0$ тўғри чизиқ Ox ўқини беради, $x = 1$ ва $x = 4$ тўғри чизиқлар мос равишда (1; 0) ва (4; 0) нуқталардан ўтувчи Oy ўқига параллел тўғри чизиқлардан иборат (11-расм). Бинобарин, $ABCD$ эгри чизиқли трапецияни ҳосил қилди. Бу ерда $f(x) = x^2$, $a = 1$, $b = 4$. У ҳолда $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Демак, (3) формула бойынша

$$S_{\text{қ. тр.}} = F(4) - F(1) = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$$

Жавоби: 21 кв. бирл.

МИСОЛ

2. $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 2$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топамиз.



12-расм

Ечилиши. Берилган функцияларнинг графикларини координаталар текислигида ясаймиз. $y = x^3 + 1$ функциянинг графиги (0; 1) нуқтадан ўтувчи кубик парабола, $x = 2$ тўғри чизиқ (2; 0) нуқтадан ўтувчи Oy ўқига параллел тўғри чизиқ, $y = 0$ тўғри чизиқ эса Ox ўқини беради (12-расм). У ҳолда ABC эгри чизиқли трапецияни ҳосил қиламиз. Бунда $f(x) = x^3 + 1$, $b = 2$. Энди a нинг қийматини топиш учун $y = x^3 + 1$ ва $y = 0$ эгри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини ҳисоблаймиз, яъни $x^3 + 1 = 0$ тенгламани ечамиз. У ҳолда $a = -1$, $F(x) = \frac{x^4}{4} + x$. Демак, (3) формулага кўра

$$S_{\text{ч. тр.}} = F(2) - F(-1) = \left(\frac{2^4}{4} + 2\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + (-1)\right) = 6 + \frac{3}{4} = 6\frac{3}{4}.$$

Жавоби: $6\frac{3}{4}$ кв. бирл.

МИСОЛ

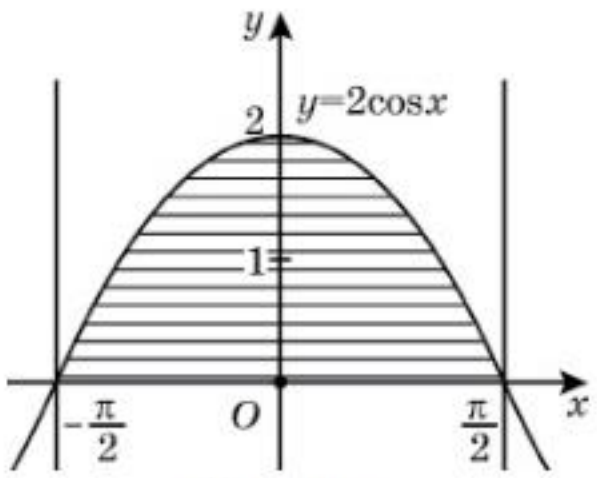
3. $y = 2\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\neq}{2}$, $x = \frac{\neq}{2}$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топамиз.

Ечилиши. Алгоритм бўйича берилган чизиқларни битта координаталар текислигида ясаймиз. $y = 2\cos x$ функциянинг графигини ясаш учун $y = \cos x$ функциянинг графигини Oy ўқи бўйлаб икки марта чўзамиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$y = 0$ тўғри чизиқ Ox ўқини беради. $x = -\frac{\neq}{2}$, $x = \frac{\neq}{2}$ тўғри чизиқлар мос равишда $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ ва $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ нуқталардан ўтувчи Oy ўқига параллел тўғри чизиқлардан иборат. Бунда 13-расмда тасвирланган эгри чизиқли трапецияни ҳосил қиламиз. Бу ерда $f(x) = 2\cos x$, $a = -\frac{\neq}{2}$, $b = \frac{\neq}{2}$, у ҳолда $F(x) = 2\sin x$. Ҳосил бўлган эгри чизиқли трапециянинг юзини икки усулда ҳисоблаш мумкин.



13-расм

I усул. Эгри чизиқли трапециянинг юзини (3) формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$S_{э.ч.\ тр.} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(1 + 1) = 4.$$

II усул. 13-расмда тасвирланган фигура Oy ўқига нисбатан симметрик, шунинг учун $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаги эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаб, иккига кўпайтириш мумкин, бу ерда $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$. Бунда $S_{э.ч.\ тр.} = 2 \cdot \left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right) =$

$= 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4\ (1 - 0) = 4.$

Жавоби: 4 кв. бирл.

1. *Эгри чизиқли трапеция* тушунчасининг *трапеция* тушунчасидан фарқи нимада?
2. Эгри чизиқли трапециянинг юзини геометриядан маълум бўлган формулалар орқали ҳисоблаш мумкинми?
3. $[a; b]$ кесмада $f(x)$ функция қандай функция бўлиши керак?

Машқлар

А

Берилган чизиқлар билан чегараланган трапециянинг юзини топинг (**2.1—2.3**):

2.1. 1) $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

2) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

2.2. 1) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\neq}{4}$, $x = \frac{\neq}{4}$;

2) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\neq}{3}$, $x = \pi$.

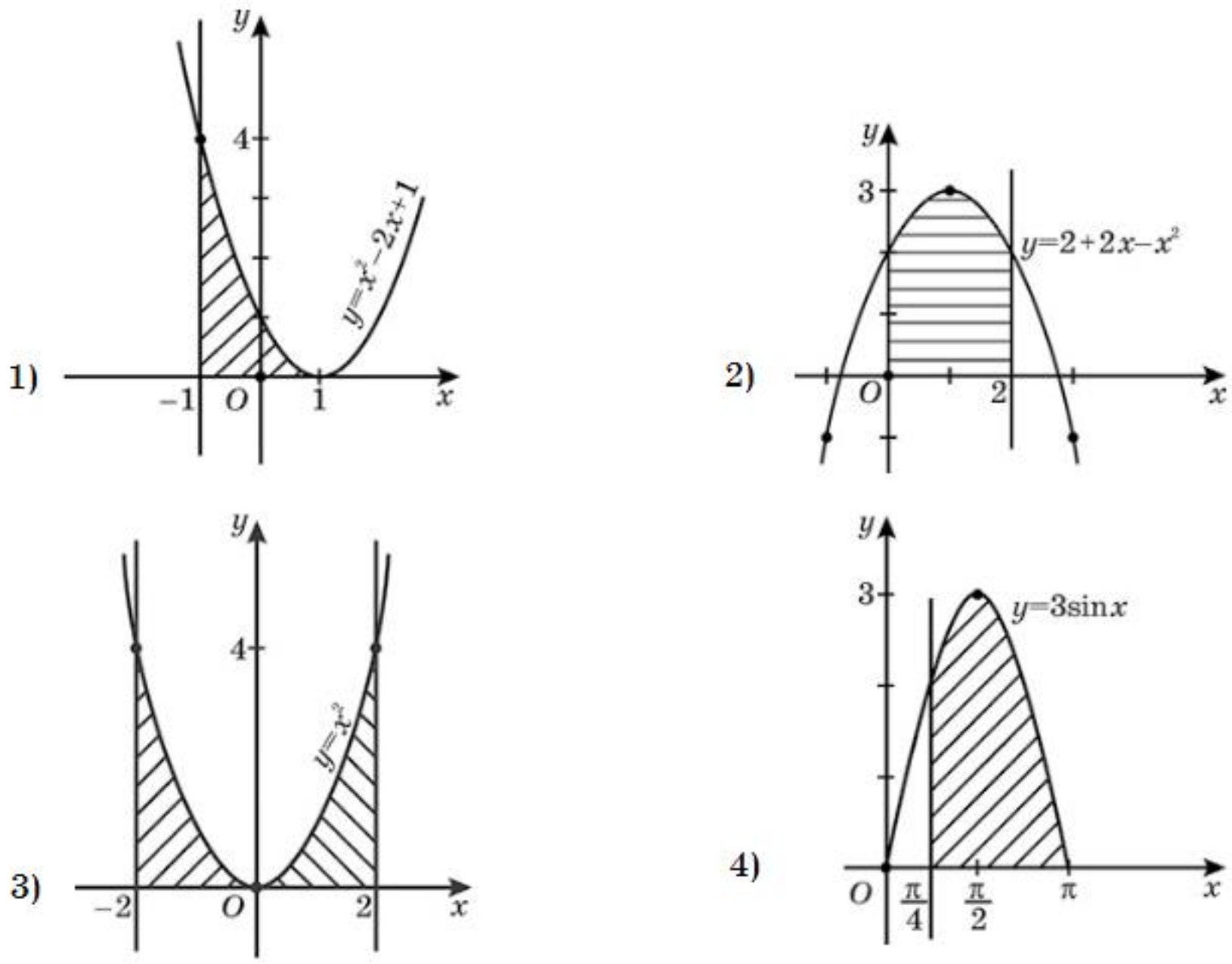
2.3. 1) $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

2) $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

2.4. 14-расмда тасвирланган эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисобланг:



14-расм

В

Берилган чизиқлар билан чегараланган трапециянинг юзини топинг (**2.5—2.8**):

2.5. 1) $y = \frac{1}{(x+1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

2) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$.

2.6. 1) $y = 3x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$;

2) $y = 3x - x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 1$.

2.7. 1) $y = \sin\frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{\neq}{2}$, $x = \frac{3\neq}{2}$;

2) $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = -\frac{\neq}{4}$, $x = \frac{\neq}{4}$.

2.8. 1) $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $y = 0$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = 1$;

2) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -3$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$[a;\ b]$ кесмада $y = f(x)$ функциянинг графиги, $[b;\ c]$ кесмада $y = g(x)$ функциянинг графиги ва Ox ўқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топинг **(2.9-2.10)**:

2.9. 1) $f(x) = -x^2 + 2x$, $[0;\ 1]$ ва $g(x) = 1{,}5 - 0{,}5x$, $[1;\ 3]$;

2) $f(x) = x$, $[0;\ 1]$ ва $g(x) = x^2 - 4x + 4$, $[1;\ 2]$.

2.10. 1) $f(x) = 0{,}5x + 1{,}5$, $[-3;\ -1]$ ва $g(x) = -x^2 - 2x$, $[-1;\ 0]$;

2) $f(x) = x^2 + 4x + 4$, $[-2;\ -1]$ ва $g(x) = -x$, $[-1;\ 0]$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Бошланғич функция тушунчаси, унинг асосий хоссаси ва ҳисоблаш қоидалари, аниқмас интеграл ва уни топиш жадвали, функциянинг лимити, эгри чизиқли трапеция, унинг юзини ҳисоблаш формуласи ва алгоритми.

3-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛ. НЬЮТОН—ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСИ

Аниқ интеграл тушунчаси билан танишасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Функция, бошланғич функция, аниқ интеграл, интеграл остидаги функция

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ: Сиз *аниқмас интеграл* тушунчасини ва эгри чизиқли трапеция юзини ҳисоблаш формуласини биласиз.

Эгри чизиқли трапеция юзини топишнинг яна бир усулини кўриб чиқамиз. Бунинг учун аниқ интеграл таърифини келтирамиз.

Таъриф. $F(b) - F(a)$ *айирма* $y = f(x)$ *узлуксиз функциянинг* $[a;\ b]$ *кесмадаги* ***аниқ интеграли*** *дейилади.*

Аниқ интегралнинг белгиланиши:

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Ўқилиши: “a дан b гача интеграл эф иксдан дэ икс”.

Аниқ интегралнинг белгиланишидаги a — интегралнинг *қуйи чегараси*, b — интегралнинг *юқори чегараси*, $f(x)$ функция *интеграл белгиси остидаги функция* дейилади, $f(x)dx$ — интеграл белгиси остидаги ифода, x ўзгарувчи эса *интеграллаш ўзгарувчиси* дейилади.

Сиз Ньютон—Лейбниц формуласибилан танишасиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Аниқ интеграл таърифига кўра

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

(2) формула *Ньютон—Лейбниц* формуласи дейилади.

Ньютон—Лейбниц формуласи $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз ҳар қандай $f(x)$ функция учун ўринли.

Аввалги параграфдан маълумки, эгри чизиқли трапециянинг юзи $S = F(b) - F(a)$ формула билан аниқланади.

Демак, $[a;\ b]$ кесмада $f(x) \geq 0$ бўлса, қаралаётган эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

формула билан ҳисобланади.

Бундан буён аниқ интегрални қуйидаги формула билан ҳисоблаймиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Агар интеграллаш чегаралари қийматларининг ўринларини алмаштирсак, қуйидаги айниятга эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (4)$$

☒ (4) айниятнинг ўринли эканини мустақил исботланг.

Сиз аниқ интегрални топишни ўрганасиз.

МИСОЛ

1. 1) $\int_0^3 x^2dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$; 3) $\int_{-1}^{1} \frac{8}{\sqrt{5+4x}}\,dx$ интегралларни ҳисоблаймиз.

Ечилиши. 1) $f(x) = x^2$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Энди Ньютон—Лейбниц формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_0^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9 - 0 = 9.$$

2) $f(x) = \sin x$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири $F(x) = -\cos x$. Демак,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \ \boxtimes\ .$$

3) $f(x) = \frac{8}{\sqrt{5+4x}}$ функциянинг бошланғич функциясини топиш учун $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функциянинг бошланғич функцияларидан бирини ҳамда бошланғич функцияни топишнинг иккинчи ва учинчи қоидаларини қўлланамиз:

$$\int_{-1}^{1} \frac{8}{\sqrt{5+4x}}\,dx = 8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{5+4x}\Big|_{-1}^{1} = 4(\sqrt{5+4\cdot 1} - \sqrt{5+4\cdot(-1)}) = 4(3-1) = 8.$$

Жавоби: 1) 9; 2) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; 3) 8.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin x\, dx = \int_0^1 6x^2 dx$ тенглик ўринли эканини исботлаймиз.

Исботи. Бунинг учун тенгликда берилган аниқ интегралларнинг қийматларини ҳисоблаб, таққослаш керак.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin x\, dx = -4\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -4\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = -4\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2;$$

$$\int_0^1 6x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} = 2x^3 = 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 0^3 = 2.$$

Аниқ интегралларнинг қийматлари ўзаро тенг. Демак, берилган тенглик ўринли.

МИСОЛ

3. x нинг қандай қийматида $\int_0^x (6 - 2t)\, dt = 5$ тенглик бажарилишини кўрсатамиз.

Ечилиши. Дастлаб интеграл ифодасини топамиз:

$$\int_0^x (6 - 2t)\, dt = (6t - t^2)\Big|_0^x = (6x - x^2) - (6 \cdot 0 - 0^2) = 6x - x^2.$$

Охирги ифодани 5 сонига тенглаштириб, ҳосил бўлган $6x - x^2 = 5$ тенгламани ечамиз.

$x^2 - 6x + 5 = 0$ тенгламанинг илдизлари $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Демак, берилган тенглик $x = 1$ ва $x = 5$ қийматларда бажарилади.

Жавоби: 1; 5.

?

1. Аниқ интегралнинг аниқмас интегралдан фарқи нимада?
2. $\int_a^b f(x)dx$ нима учун аниқ интеграл дейилади?
3. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ Ньютон—Лейбниц формуласини ёзиш учун $f(x)$ функция қандай шартни қаноатлантириши керак?

Машқлар

A

Интегрални ҳисобланг (**3.1—3.10**):

3.1. 1) $\int_0^1 x^5 dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;

3) $\int_1^2 \frac{1}{x^4} dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$.

3.2. 1) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$; 4) $\int\limits_9^{16} \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx$.

3.3. 1) $\int\limits_0^1 4x^3\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^1 5x^4 dx$;

3) $\int\limits_1^3 \frac{x^2}{5}\,dx$; 4) $\int\limits_1^2 \frac{x^3}{2}\,dx$.

3.4. 1) $\int\limits_2^3 (2x-1)dx$; 2) $\int\limits_0^1 (3x+2)dx$;

3) $\int\limits_0^3 (x^3-2)dx$; 4) $\int\limits_2^4 (3x^2+1)\,dx$.

3.5. 1) $\int\limits_1^2 (2x-x^2)dx$; 2) $\int\limits_0^2 (2x+x^2)dx$;

3) $\int\limits_0^1 (1+x^4)dx$; 4) $\int\limits_{-1}^0 (1-x^5)dx$.

3.6. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x+1)dx$; 2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1-\sin x)dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^0 (3-5\cos x)dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (4\sin x+3)dx$.

3.7. 1) $\int\limits_0^1 (8x^7+2)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^0 (3-9x^8)dx$;

3) $\int\limits_{-1}^1 (6x^5-4)dx$; 4) $\int\limits_1^2 (7x^6+9)dx$.

3.8. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x-3\cos x)\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x-5\sin x)dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi} \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{4}\right)dx$; 4) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{2}\right)dx$.

3.9. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\,dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx$.

3.10. 1) $\int\limits_1^4 \left(2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int\limits_4^9 \left(6-\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $\int_{-5}^{0}\left(\frac{4}{\sqrt{x+9}}+5\right)dx$; 4) $\int_{0}^{8}\left(7-\frac{5}{\sqrt{1+x}}\right)dx$.

Тенгликларнинг тўғрилигини исботланг **(3.11-3.12)**:

3.11. 1) $\int_{1}^{2}3x^2dx = \int_{0}^{1}14x\,dx$; 2) $\int_{4}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{1}^{3}dx$.

3.12. 1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int_{0}^{1}4x^3\,dx$; 2) $\int_{0}^{1}5x^4\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}\,dx$.

3.13. x нинг қандай қийматларида ушбу тенгликлар бажарилади:

1) $\int_{-1}^{x}3t^2\,dt = 2$; 2) $\int_{x}^{1}4t\,dt = 2$;

3) $\int_{0}^{x}15t^4\,dt = 96$; 4) $\int_{x}^{0}9t^2\,dt = 3$?

B

Ҳисобланг **(3.14—3.19)**:

3.14. 1) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(2x+1)^3dx$; 2) $\int_{-2}^{0}\left(3-\frac{x}{2}\right)^2dx$;

3) $\int_{0}^{\frac{1}{3}}(3x-2)^3\,dx$; 4) $\int_{-4}^{0}\left(5+\frac{x}{4}\right)^2dx$.

3.15. 1) $\int_{3}^{4}\frac{dx}{(x-2)^2}$; 2) $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x+3)^2}$;

3) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{(0{,}5x+1)^4}$; 4) $\int_{0}^{5}\frac{dx}{(2-0{,}2x)^5}$.

3.16. 1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\,dx$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2\frac{x}{2}\,dx$;

3) $\int_{0}^{\pi}3\cos^2 2x\,dx$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{4}\sin^2 4x\,dx$.

3.17. 1) $\int_{-1}^{0}\frac{1-x^2}{1-x}dx$; 2) $\int_{0}^{1}\frac{16-x^4}{2-x}dx$;

3) $\int_{1}^{2}\frac{1-8x^3}{1-2x}\,dx$; 4) $\int_{0}^{2}\frac{x^3+2x^2+4x+3}{x+1}\,dx$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3.18. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$; 2) $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{12}\right) dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi} \left(1 - 2\cos^2 \frac{x}{6}\right) dx$.

3.19. 1) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{3x - 2}}$; 2) $\int\limits_{4}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x + 4}}$;

3) $\int\limits_{4}^{20} \frac{dx}{2 \cdot \sqrt{\frac{x}{2} - 1}}$; 4) $\int\limits_{0}^{9} \frac{dx}{4 \cdot \sqrt{\frac{x}{3} + 1}}$.

x нинг қандай қийматларида берилган тенгликлар бажарилади **(3.20-3.21)**:

3.20. 1) $\int\limits_{0}^{x} (5 - 2t)dt = 4$; 2) $\int\limits_{0}^{x} (8 - 2t)dt = 12$?

3.21. 1) $\int\limits_{0}^{x} (3 - 2t)dt = 4 - 2x$; 2) $\int\limits_{0}^{x} (1 - 4t)dt = 12 - 9x$?

x нинг қандай қийматларида берилган тенгсизликлар бажарилади **(3.22-3.23)**:

3.22. 1) $\int\limits_{0}^{x} 3dt > 1$; 2) $\int\limits_{x}^{x^2} 4dt < 0$?

3.23. 1) $\int\limits_{x}^{1} 5dt > 9$; 2) $(2t - 1)dt > 0$?

МАТЕМАТИК ОЛИМ ҲАҚИДА АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

3.24. $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ белгиси француз математиги ва физиги Жан-Батист Жозеф Фурьенинг меҳнатларидан кейин кенг қўлланила бошлаган.

Ж. Фурье
(1768—1830)

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция ва унинг графиги, бошланғич функция ва унинг хоссаси, бошланғич функцияни топиш қоидалари ва ҳисоблаш жадвали, эгри чизиқли трапеция ва унинг юзини топиш алгоритми, аниқ интеграл, Ньютон—Лейбниц формуласи, кўпбурчаклар ва уларнинг юзларини топиш формулалари.

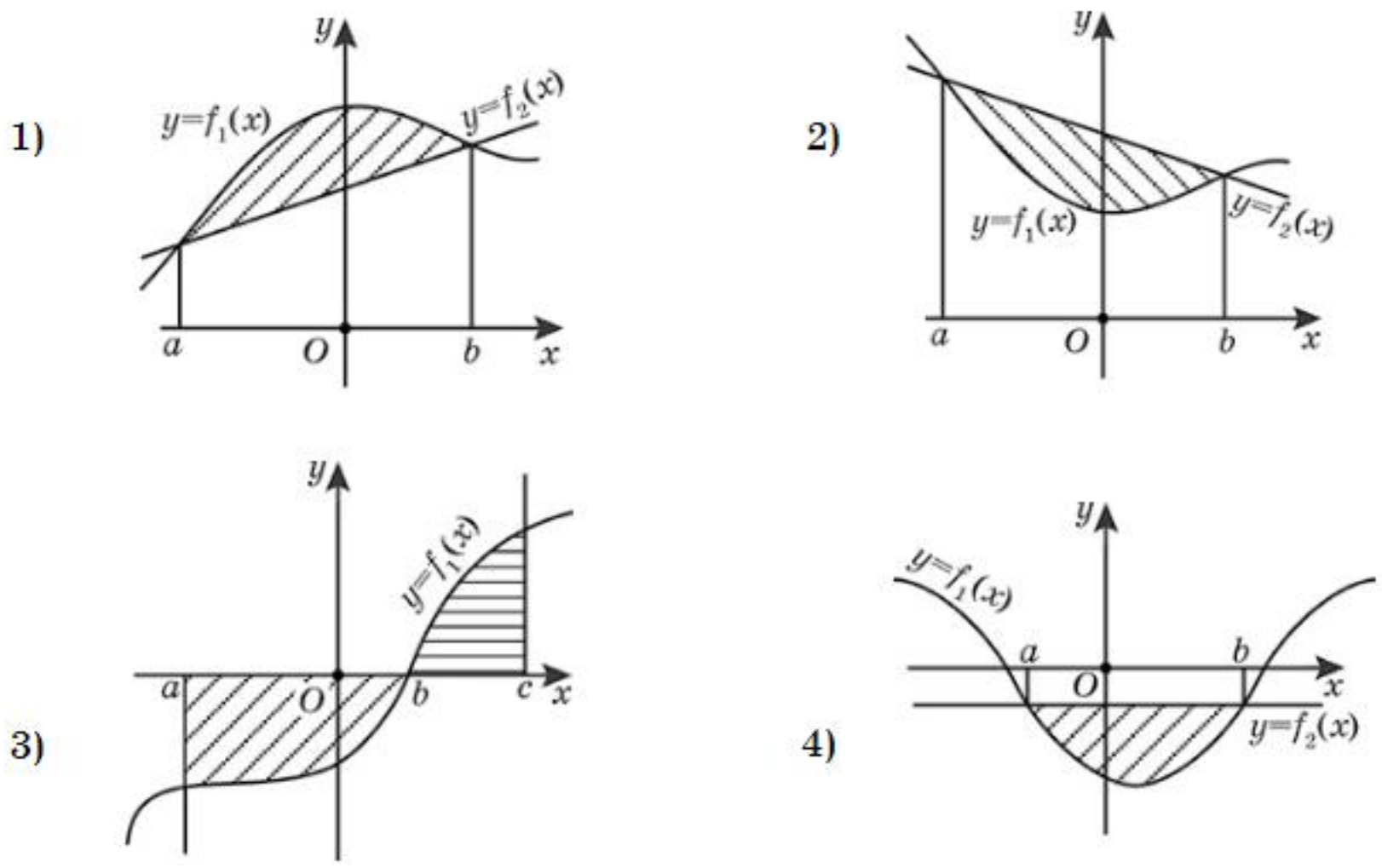
4-§. ЯССИ ФИГУРАЛАР ЮЗЛАРИНИ ВА АЙЛАНИШ ЖИСМЛАРИНИНГ ҲАЖМЛАРИНИ АНИҚ ИНТЕГРАЛ ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШ

Сиз берилган чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини ҳисоблашни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Функция, бошланғич функция, аниқ интеграл, ясси фигура, айланиш жисми, юза, ҳажм

Сиз эгри чизиқли трапеция юзини топишни ўргандингиз. Энди мазкур параграфда геометриядан маълум формулалар орқали ҳисоблаш мумкин бўлмаган ҳар қандай ясси фигуранинг юзини қандай топиш мумкинлигига тўхталамиз. 15-расмда ясси фигуралар жойлашувининг турли ҳоллари тасвирланган.



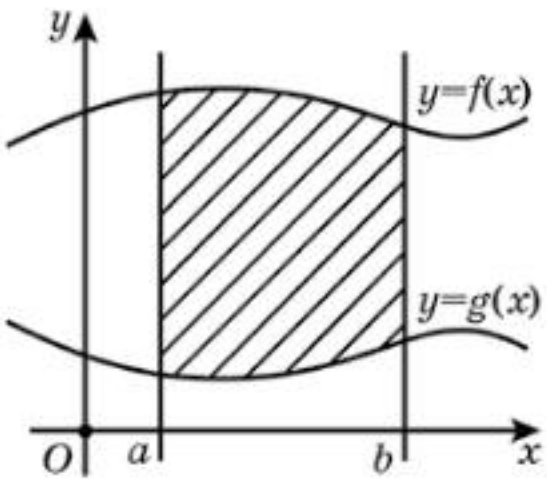
15-расм

Ана шундай ясси фигураларнинг юзларини аниқ интегралдан фойдаланиб ҳисоблашни қараб чиқамиз.

Юқоридан $y = f(x)$ функциянинг графиги, қуйидан $y = g(x)$ функциянинг графиги, чапдан $x = a$, ўнгдан $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигура берилган бўлсин (16-расм).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



16-расм

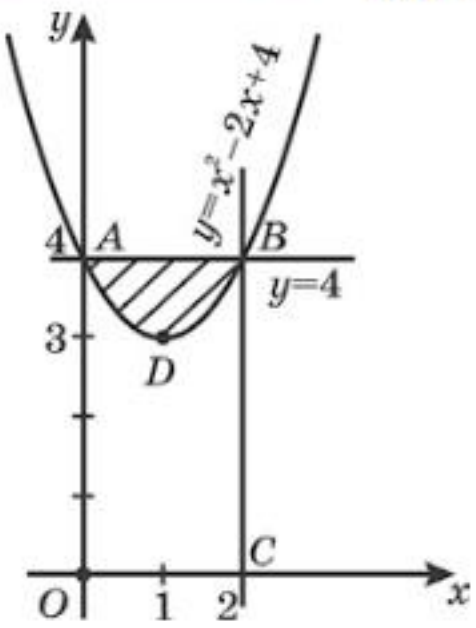
16-расмдан иккита эгри чизиқли трапецияни кўриш мумкин. Демак, штрих билан берилган ясси фигуранинг юзини аниқлаш учун катта эгри чизиқли трапециянинг юзидан кичик эгри чизиқли трапеция юзини айириш керак:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Жумладан, $S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$ (1)

МИСОЛ

1. $y = x^2 - 2x + 4$ ва $y = 4$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топамиз.



17-расм

Ечилиши. Аввал битта координаталар текислигида берилган функцияларнинг графикларини ясаймиз. $y = x^2 - 2x + 4$ функциянинг графиги учи (1; 3) нуқтада бўлган, тармоқлари юқорига қараган парабола, $y = 4$ чизиқ эса (0; 4) нуқтадан ўтувчи Ox ўққа параллел тўғри чизиқ (17-расм).

Энди графикларнинг кесишиш нуқталарини топамиз. Бунинг учун $x^2 - 2x + 4 = 4$ тенгламани ечамиз. У ҳолда $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Демак, интеграллаш чегаралари $a = 0$ ва $b = 2$.

Штрихланган ясси фигуранинг юзини иккита усулда ҳисоблашни қараб чиқамиз, бунда $f(x) = 4$ ва $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

I усул. (1) формулани қўлланамиз:

$$S_ф = \int_0^2 (4 - x^2 + 2x - 4)dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 2^2 - \frac{2^3}{3} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

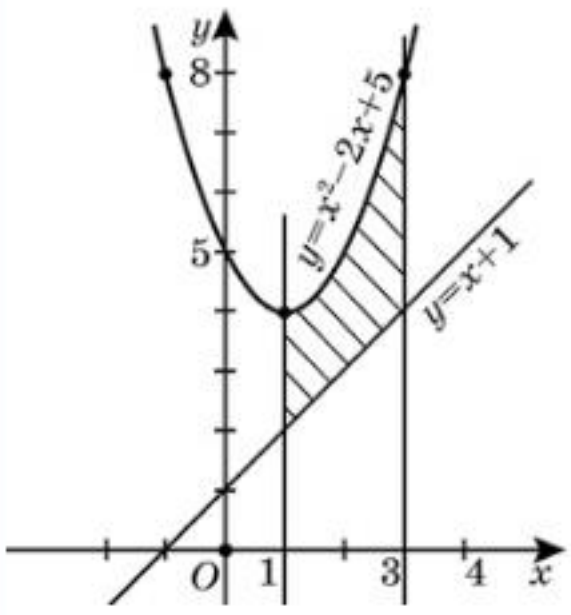
II усул. $OABC$ тўғри тўртбурчакнинг юзидан $OADBC$ эгри чизиқли трапециянинг юзини айирамиз: $S_ф = S_{OABC} - S_{э.ч.тр.}$ бу ерда $S_{OABC} = AB \cdot BC = 2 \cdot 4 = 8$.

$$S_{э.ч.тр.} = \int_0^2 (x^2 - 2x + 4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 8 = \frac{20}{3}.$$ У ҳолда $S_ф = 8 - \frac{20}{3} = \frac{4}{3}$.

Жавоби: $\frac{4}{3}$ кв. бирл.

МИСОЛ

2. $y = x^2 - 2x + 5$, $y = x + 1$ функцияларнинг графиклари ва $x = 1$, $x = 3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини ҳисоблаймиз.



18-расм

Ечилиши. Битта координаталар текислигида берилган функцияларнинг графикларини ясаймиз. $y = x^2 - 2x + 5$ функциянинг графиги учи (1; 4) нуқта бўлган, Oy ўқи билан (0; 5) нуқтада кесишувчи, тармоқлари юқорига қараган парабола; $y = x + 1$ функциянинг графиги (−1; 0) ва (0; 1) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ, $x = 1$ ва $x = 3$ тўғри чизиқлар эса мос равишда (1; 0), (3; 0) нуқталардан ўтувчи Oy ўқига параллел тўғри чизиқлардан иборат (18-расм). Расмда тасвирланган ясси фигуранинг юзини топиш учун (1) формулани қўлланамиз. Мазкур ҳолда $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $g(x) = x + 1$, $a = 1$ ва $b = 3$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Мазкур ҳолда

$$S_{ф} = \int_1^3 ((x^2 - 2x + 5) - (x + 1))dx = \int_1^3 (x^2 - 2x + 5 - x - 1)dx = \int_1^3 (x^2 - 3x + 4)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 = \frac{14}{3}.$$

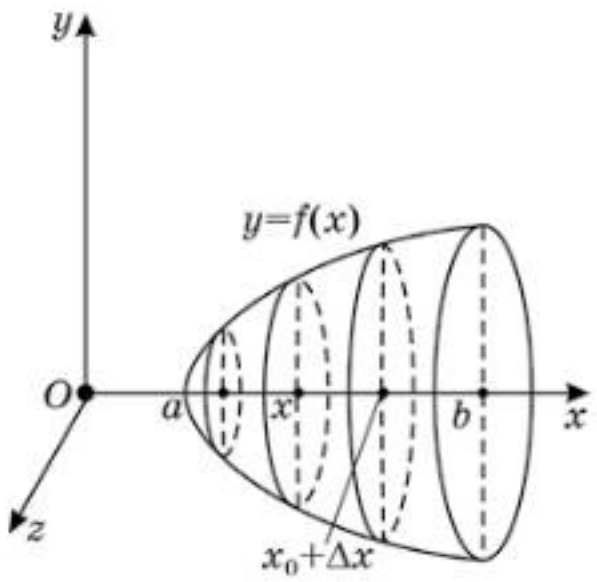
Жавоби: $\frac{14}{3}$ кв. бирл.

Сиз айланиш жисмининг ҳажмини аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш формуласи билан танишасиз.

Айланиш жисмининг ҳажмини топиш учун интегрални татбиқ этишни қараб чиқамиз.

Бунинг учун $[a; b]$ кесмада $y = f(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган эгри чизиқли трапеция берилган бўлсин.

Ўша эгри чизиқли трапецияни Ox ўқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган геометрик жисмнинг ҳажмини топиш керак бўлсин (19-расм).



19-расм

$[a; b]$ кесмада ихтиёрий x нуқтани оламиз. Агар шу нуқтадан Ox ўқига перпендикуляр текислик ўтказсак, у ҳолда текислик ўша айланиш жисмини доира бўйлаб кесиб ўтади (кесимда доира пайдо бўлади). Ҳосил бўлган доиранинг радиуси y га тенг. Демак, кесимнинг юзи $Q(x) = \pi y^2$.

Равшанки, $[a; b]$ кесмада $Q(x)$ кесимнинг юзи узлуксиз бўлади. $[a; x]$ кесмага мос келадиган жисм қисмининг ҳажмини $V(x)$ орқали ифодалаймиз (19-расм).

$V(x)$ функциянинг ҳосиласини топамиз. Бунинг учун бирор x_0 қийматни олиб, унга Δx орттирма берамиз. Δx нинг қиймати нолдан катта ёки нолдан кичик бўлиши мумкин. $\Delta x > 0$ деб ҳисобласак, $V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)$ айирма Ox ўқидан олинган x_0 ва $x_0 + \Delta x$ нуқталардан ўтувчи текисликлар орасида жойлашган жисмнинг ҳажми бўлади (19-расм). Расмдан ушбу тенглик бажарилишини кўриш мумкин:

$$Q(x_0) \cdot \Delta x \le V(x_0 + \Delta x) - V(x_0) \le Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Бу ерда $Q(x_0) \cdot \Delta x$ — олинган қатлам ичида тўлиқ ётган цилиндрик жисмнинг ҳажми, $Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$ — ўша қатламни ўз ичига олган жисмнинг ҳажми $\Delta x > 0$ бўлгани учун

$$Q(x_0) \le \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} \le Q(x_0 + \Delta x).$$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$Q(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз. Шунинг учун x_0 нуқтада ҳам узлуксиз бўлади. Демак, агар Δx қиймат нолга интилса, у ҳолда $Q(x_0 + \Delta x)$ қиймат $Q(x_0)$ қийматга интилади. Шунинг учун $\Delta x \to 0$ ҳолда $\dfrac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x}$ қиймат $Q(x_0)$ қийматга интилади. Жумладан, $V'(x_0) = \dfrac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = Q(x_0)$. Демак, $V(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада функция учун бошланғич функция бўлади. У ҳолда

$$\int_a^b Q(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a).$$

Энди айланиш жисмининг ҳажмини топиш учун a дан b гача ораликда $Q(x) = \pi y^2$ функциянинг интегралини ҳисоблаш кифоя, яъни

$$V = \int_a^b Q\ (x)\ dx = \pi\int_a^b y^2 dx. \qquad (2)$$

МИСОЛ

3. $y = 2x^2$ параболани $x = 0$ дан $x = 2$ га қадар абсцисса ўқига нисбатан айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топамиз.

Ечилиши. Масаланинг шартига кўра $a = 0$, $b = 2$ ва $y = 2x^2$. Жисмнинг ҳажмини топиш учун (2) формуладан фойдаланамиз. Бунда

$$V = \pi\int_0^2 (2x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 4x^4 dx = 4\pi\int_0^2 x^4 dx = 4\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = 4\pi\cdot\frac{2^5}{5} = 4\pi\cdot 6{,}4 = 25{,}6\pi.$$

Жавоби: $25{,}6\pi$ куб. бирл.

1. Қандай ҳолда фигуранинг юзи аниқ интеграл ёрдамида ҳисобланади?

2. Ясси фигура фақатгина эгри чизиқли трапециялардан ташкил топган бўлиши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.

Машқлар

А

Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг (**4.1-4.2**):

4.1. 1) $y = x^2$, $y = x$; 2) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$;

3) $y = x^2$, $y = 4$; 4) $y = -x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

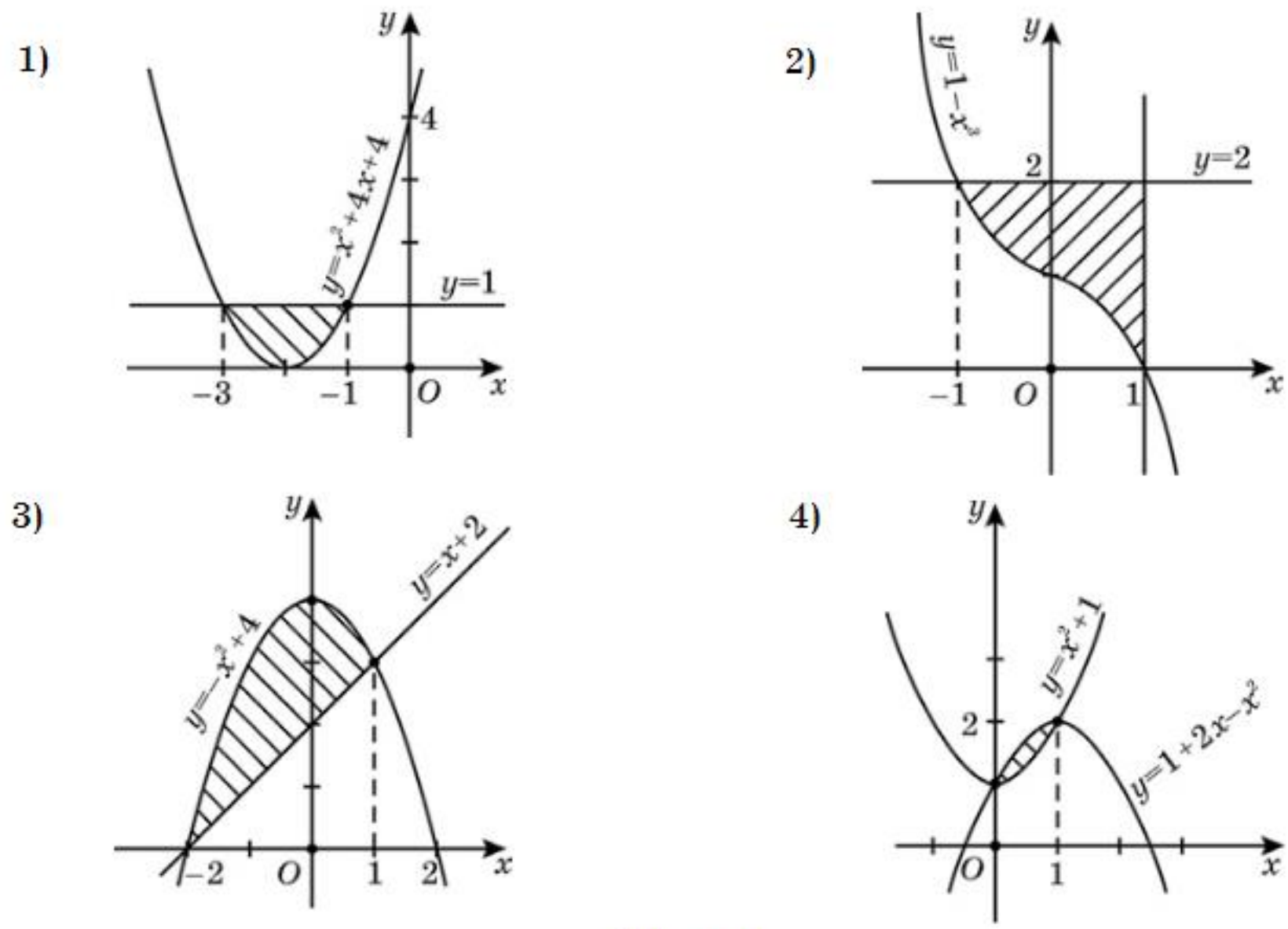
4.2. 1) $y = (x + 1)^2$, $y = 1$; 2) $y = x^3$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$;

3) $y = x^2 + 1$, $y = 5$; 4) $y = 3 - x^2$, $y = 2$;

5) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$; 6) $y = x^3 + 1$, $y = 1$, $x = 1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



20-расм

4.3. 20-расмда тасвирланган фигураларнинг юзларини ҳисобланг.

4.4. Аргументи $[a; b]$ кесмада ўзгарувчи $y = f(x)$ функциянинг графиги ва Ox ўқ билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $f(x) = \sin x$, $[0; 2\pi]$; 2) $f(x) = \cos x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

4.5. $y = x^2$ параболани $x = 0$ дан $x = 3$ га қадар абсциссалар ўқи бўйлаб айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.

4.6. $y = 3x^2$ параболани $x = 1$ дан $x = 2$ га қадар абсциссалар ўқи бўйлаб айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.

4.7. 1) $y = \frac{2}{x}$ гиперболани $x = 1$ дан $x = 3$ га қадар абсциссалар ўқи бўйлаб айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.

2) $y = \frac{3}{x}$ гиперболани $x = 1$ дан $x = 2$ га қадар абсциссалар ўқи бўйлаб айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.

В

4.8. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = \frac{\neq}{4}$, $x = \frac{\neq}{2}$;

2) $y = 2\cos x$, $y = 2\sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\neq}{4}$;

3) $y = x$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$; 4) $y = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x$, $x = \frac{1}{2}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

4.9. 1) $y = 2x^3$ функциянинг графиги, шу графикка $(-1; -2)$ нуқтада ўтказилган уринма ва $x = 1$ тўғри чизиқ билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг.
2) $y = 0$ тўғри чизиқ, $y = 2x - x^2$ парабола ва ўша параболанинг $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ нуқтасидан ўтувчи уринма билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг.

Берилган функцияларнинг графиклари билан чегараланган ясси фигуранинг юзини ҳисобланг **(4.10-4.11)**:

4.10. 1) $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$; 2) $y = x^2 + 2x + 4$, $y = x + 6$;
3) $y = -x^2 + 3$, $y = 2x - 6$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = 1 - 2x$.

4.11. 1) $y = x^2 - 8x + 12$, $y = -x^2 + 8x - 18$;
2) $y = x^2 + 6x + 5$, $y = -x^2 - 6x - 11$;
3) $y = x^2 - 4x - 1$, $y = -x^2 - 4x + 7$;
4) $y = x^2 + 3x - 5$, $y = -x^2 + 3x - 3$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Бошланғич функцияси $F(x) = 9x^2 - 0{,}5x$ бўлган $y = f(x)$ функцияни кўрсатинг:
A) $18x + \frac{1}{2}$; B) $4{,}5x - 0{,}5$;
C) $4{,}5x + 0{,}5$; D) $18x - \frac{1}{2}$.

2. $y = 4x + 6x^3$ фунция учун бошланғич функциянинг умумий кўринишини кўрсатинг:
A) $8x + 1{,}5x^2 + C$; B) $2x^2 + 1{,}5x^4 + C$;
C) $8x^2 + \frac{3}{2}x^4 + C$; D) $4 + 18x^2 + C$.

3. $y = 3x^2 - 1$ функция учун $A(0; 0)$ нуқтадан ўтувчи бошланғич функцияни топинг:
A) $x^3 - x + 1$; B) $x^3 - x$;
C) $x^3 - x - 1$; D) $x^3 + x + 1$.

4. Қандай ораликда $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2x^2}$ функция учун $F(x) = \frac{2x^3}{9} + \frac{3}{2x}$ функция бошланғич функция бўлади:

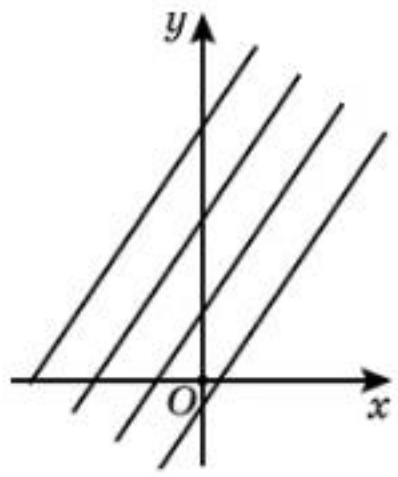
A) $(-\infty; +\infty)$; B) $(0; +\infty)$; C) $(-\infty; 1)$; D) $(-1; +\infty)$?

5. Берилган графиклардан қайси бири бошланғич функциянинг геометрик маъносини бермайди?

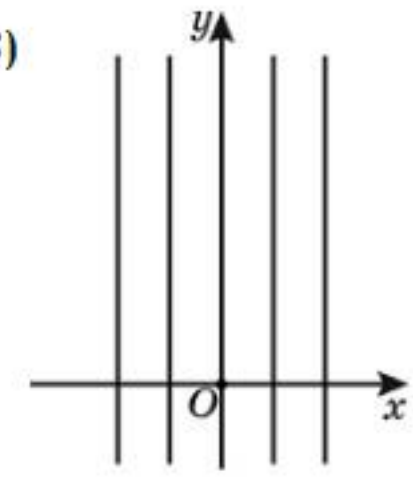
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

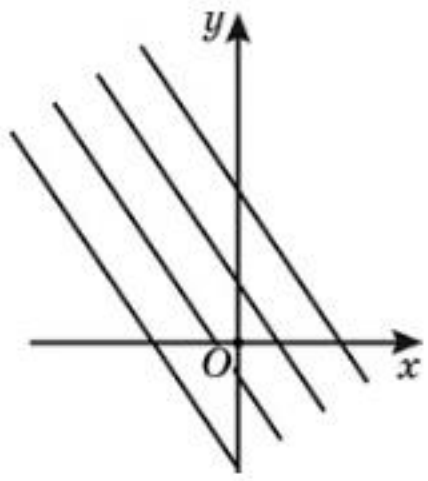
A)



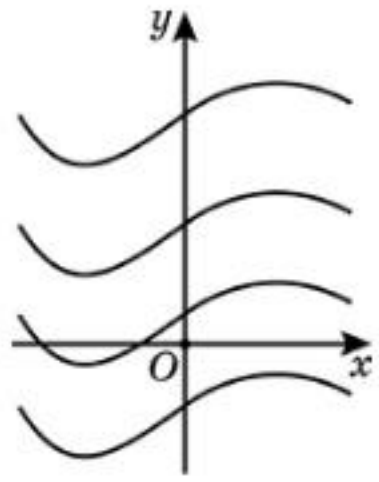
B)



C)

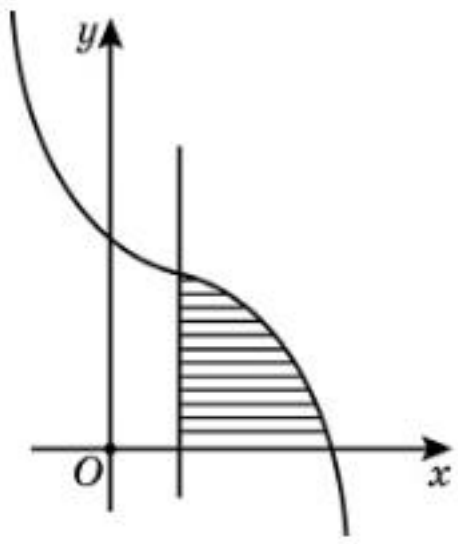


D)

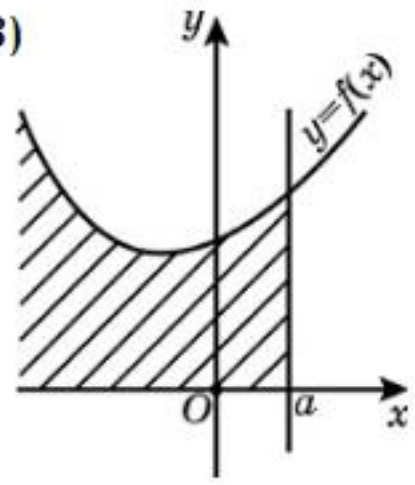


6. Расмда тасвирланган фигуралардан қайси бири эгри чизиқли трапеция эмас?

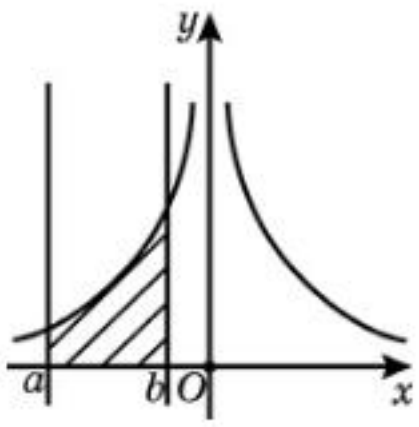
A)



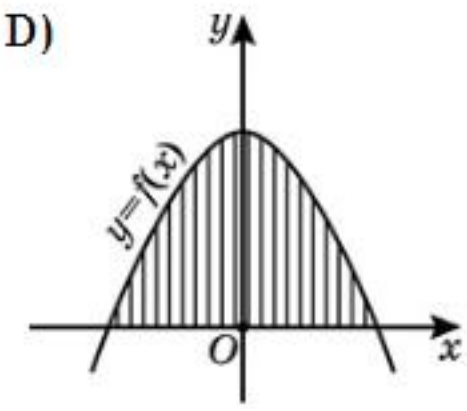
B)



C)



D)



7. $y = x^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топинг:

A) 3; B) 1; C) $\frac{7}{3}$; D) .

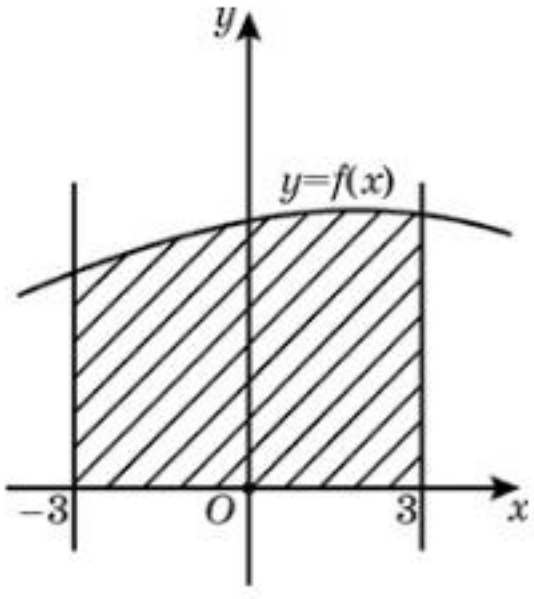
8. $\int_{-1}^{1} x^{10} dx$ интегрални ҳисобланг:

A) 0; B) $\frac{2}{11}$; C) 22; D) $\frac{1}{22}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

9. Расмда тасвирланган фигура юзини топиш формуласини ёзинг:



A) $S = \int_a^b f(x)dx$;

B) $S = 2\int_{-3}^{0} f(x)dx$;

C) $S = \int_{3}^{-3} f(x)dx$;

D) $S = \int_{-3}^{3} f(x)dx$.

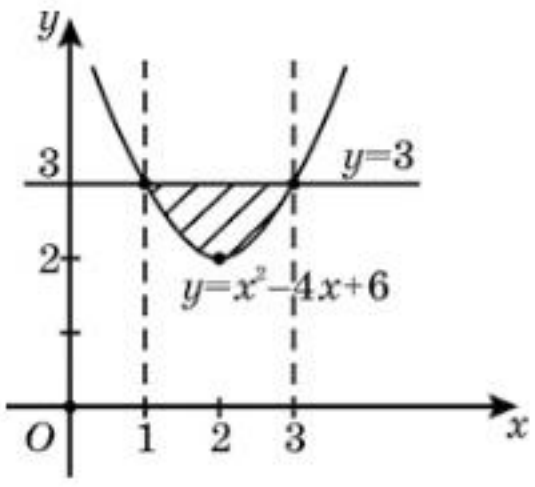
10. $\int_4^9 \frac{25\sqrt{x}}{x}dx$ интегралнинг қийматини топинг:

A) 50; B) 10; C) 5; D) 25.

11. $[a; b]$ кесмада берилган узлуксиз ва номанфий функциядан олинган аниқ интеграл нимани билдиради:

A) эгри чизиқли трапециянинг юзини;
B) бошланғич функциянинг умумий кўринишини;
C) функциянинг ҳосиласини;
D) айланиш жисмининг ҳажмини?

12. Расмда тасвирланган ясси фигура юзини ҳисобланг:



A) $\frac{3}{4}$;

B) $\frac{14}{3}$;

C) $\frac{4}{3}$;

D) $\frac{32}{3}$.

13. $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлиши учун қандай шарт бажарилиши керак:

A) $F(x) = f(x)$; C) $F(x) = f'(x)$;
B) $F'(x) = f(x)$; D) $F'(x) = f'(x)$?

14. C нинг қандай қийматида $f(x) = 5\sin 5x$ функциянинг $F(x)$ бошланғич функцияси $K\left(\frac{\pi}{5}; 1\right)$ нуқтадан ўтади:

A) 0; B) 2; C) −1; D) 1?

15. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4}\cos x dx$ интегралнинг қийматини топинг:

A) $\frac{1}{16}$; B) $-\frac{1}{16}$; C) $-\frac{1}{8}$; D) $\frac{1}{8}$.

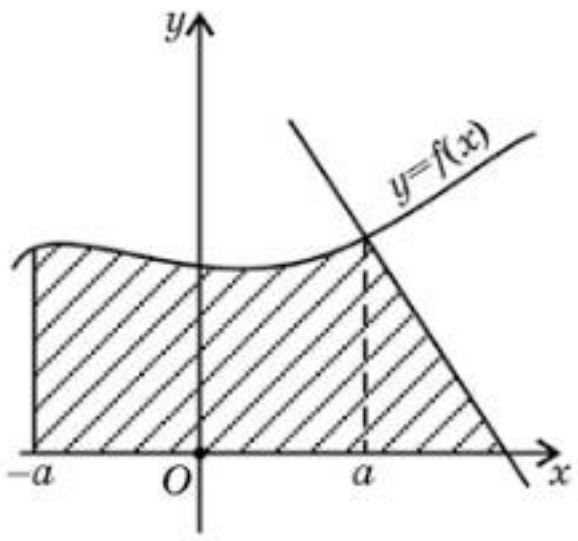
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

16. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^3 - 4x^2 - 5x}{x - 5} dx$ интегралнинг қийматини ҳисобланг:

A) $\frac{1}{6}$; B) $-\frac{1}{6}$; C) $\frac{5}{6}$; D) $-\frac{5}{6}$.

17. Расмда тасвирланган ясси фигура юзини топиш формуласини ёзинг:



A) $S = \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx + S_{\Delta}$;

B) $S = \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$;

C) $S = \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx - S_{\Delta}$;

D) $S = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx + S_{\Delta}$.

18. Қуйида берилган тенглик, тенгсизликлардан қайси бири тўғри эмас:

A) $\int\limits_{1}^{2} x^2 dx < \int\limits_{2}^{3} x dx$; B) $\int\limits_{1}^{9} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx > \int\limits_{1}^{2} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$;

C) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; D) $\int\limits_{3}^{4} dx < \int\limits_{100}^{101} dx$?

19. x нинг қандай қийматларида $\int\limits_{0}^{x} (2t - 5)dt = -6$ тенглик бажарилади:

A) бундай қиймат мавжуд эмас; B) -2; -3;

C) ҳар қандай сон; D) 2; 3?

20. x нинг қандай қийматларида $\int\limits_{0}^{x} (2t - 4)dt$ m -3 тенгсизлик бажарилади:

A) (1; 3); B) $(-\infty;1]$ ∪ $[3; +\infty)$;

C) [1; 3]; D) [−3; −1]?

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Ифода, соннинг даражаси, даражанинг асоси, даража кўрсаткичи, соннинг илдизи, квадрат илдиз, арифметик квадрат илдиз, илдизнинг хоссалари, рационал ва иррационал сонлар.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

II БОБ ДАРАЖА ВА ИЛДИЗ. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯ

5-§. n-ДАРАЖАЛИ ИЛДИЗ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

Сиз *n-даражали илдиз* тушунчаси ва *n*-даражали арифметик илдиз таърифи билан танишасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даража кўрсаткичи, илдиз, квадрат илдиз, арифметик квадрат илдиз, илдизнинг қиймати

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ: Масалан, 25 сонининг арифметик квадрат илдизи 5 га тенг, чунки $5^2 = 25$.

a соннинг квадрат илдизи бу шундай сонки, унинг квадрати a тенг.

a соннинг n-даражали илдизи таърифини ҳам шу каби бериш мумкин.

Таъриф. ***a соннинг n-даражали илдизи*** *деб n-даражаси a сонига тенг бўлган b сонга айтилади.*

Таърифга кўра $\sqrt[n]{a} = b$, бу ерда $a = b^n$. (1)

Бу ерда a сон — n-даражали илдиз белгиси остидаги сон, n — илдиз кўрсаткичи ва $n \in N$ $(n \neq 1)$, b сон — a соннинг n-даражали илдизи.

Масалан, 27 соннинг учинчи даражали илдизи 3 га тенг: $\sqrt[3]{27} = 3$, чунки $3^3 = 27$.

n-даражали илдиз таърифидаги илдиз кўрсаткичининг жуфт ва тоқ бўладиган ҳолларини кўриб чиқамиз.

n жуфт сон бўлганда $b^n = a \geqslant 0$, фақат мусбат сон, чунки ҳар қандай соннинг жуфт даражаси номанфий сон бўлади. Демак, жуфт даражали илдиз остидаги a сон манфий сон бўлиши мумкин эмас.

Агар илдиз кўрсаткичи n тоқ сон бўлса, у ҳолда ҳар қандай сондан n-даражали илдизни ҳисоблаб топиш мумкин. Бундай ҳолда $b^n = a$ тенгликдаги a ва b сонларнинг ишоралари бир хил, яъни мусбат сондан мусбат, манфий сондан манфий илдиз чиқади.

Масалан, 1) $\sqrt[5]{-32} = -2$, чунки $(-2)^5 = -32$;

2) $\sqrt[3]{64} = 4$, чунки $4^3 = 64$.

a соннинг n-даражали илдизи x га тенг бўлсин. У ҳолда таърифга биноан $x^n = a$ тенгламага эга бўламиз. n жуфт бўлганда, $x^n = a$ тенгламанинг (бу ерда $a > 0$, $n \in N$, $n \neq 1$) $-\sqrt[n]{a}$ ва $\sqrt[n]{a}$ иккита илдизи, n тоқ бўлганда $\sqrt[n]{a}$ га тенг битта илдизи мавжуд.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Масалан, 7 ва −7 сонлар $x^4 = 2301$ тенгламанинг илдизидир, чунки $7^4 = 2301$ ва $(-7)^4 = 2301$.

Таъриф. *Номанфий a соннинг n-даражали* ***арифметик илдизи*** *деб n-даражаси a сонга тенг бўлган номанфий b сонга айтилади.*

Сиз *n*-даражали илдиз хоссаларини биласиз.

$n \in N$ ва $k \in N$ бўлганда a ва b номанфий ҳақиқий сонлар учун n- ва k-даражали илдизларнинг ушбу хосслалари бажарилади:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
3. $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$
4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
5. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Берилган n-даражали илдиз хоссаларини даражалаш ва илдиз топиш амалларининг таърифидан фойдаланиб исботлаш мумкин.

Иккинчи хоссани исботлаймиз: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Исботи. n-даражали илдиз таърифига кўра $\sqrt[n]{ab}$ — n-даражаси ab га тенг номанфий сон. $\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$ бўлгани учун, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ сон номанфий. Шунинг учун натурал кўрсаткичли даражанинг $(a \cdot b)^n = a^n b^n$ хоссаси ва n-даражали илдиз таърифидан $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$ ёки

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$$

тенгликни олиш мумкин. Шундай қилиб, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Олтинчи хоссани исботлаймиз: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Исботи. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ ифодани nk даражага кўтарамиз: $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right]^k = (\sqrt[k]{a})^k = a$. Охирги тенгликдан $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)$ ифода a соннинг nk даражали илдизи эканлиги келиб чиқади.

1-, 3-, 4-, 5-хоссаларни мустақил исботланг.

МИСОЛ

1. Берилган ифодаларни алмаштирамиз:

1) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$; 2) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; 4) $\sqrt[21]{128}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Ечилиши. 1) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8 \cdot 4} = \sqrt[5]{32} = 2$;

2) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$;

4) $\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3]{2}$.

Жавоби: 1) 2; 2) 1,5; 3) $\sqrt[15]{7}$; 4) $\sqrt[3]{2}$.

МИСОЛ

2. 1) $\sqrt[4]{243b^4}$, b | 0; 2) $\sqrt{45b^6}$, b m 0; 3) $\sqrt[3]{500a^6b^8}$ илдизлардан кўпайтувчини илдиз белгисидан ташқарига чиқарамиз.

Ечилиши. 1) b | 0 бўлгани учун, илдиз белгисидан ташқарига мусбат ишорали кўпайтувчи чиқади:

$$\sqrt[4]{243b^4} = \sqrt[4]{3 \cdot 81 \cdot b^4} = 3b\sqrt[4]{3};$$

2) b m 0, шунинг учун илдиз белгиси остидан ташқарига манфий ишорали кўпайтувчи чиқади:

$$\sqrt{45b^6} = \sqrt{5 \cdot 9 \cdot (b^3)^2} = -3b^3\sqrt{5};$$

3) $\sqrt[3]{500a^6b^8} = \sqrt[3]{125 \cdot 4 \cdot (a^2)^3 \cdot (b^2)^3 \cdot b^2} = 5a^2b^2\sqrt[3]{4b^2}$.

Жавоби: 1) $3b\sqrt[4]{3}$; 2) $-3b^3\sqrt{5}$; 3) $5a^2b^2\sqrt[3]{4b^2}$.

МИСОЛ

3. 1) $4\sqrt[3]{3}$; 2) $-a\sqrt[6]{3}$, a | 0 ифодалардаги кўпайтувчини илдиз белгиси остига киритамиз.

Ечилиши. 1) $4\sqrt[3]{3}$ ифодада илдиз учинчи даражали бўлгани учун, 4 сонини илдиз белгиси остига учинчи даража билан киритамиз:

$$4\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{192}.$$

2) $-a\sqrt[6]{3}$ ифодадаги a сони номанфий сон ва илдиз олтинчи даражали бўлгани учун, илдиз белгиси остига a соннинг олтинчи даражасини киритамиз:

$$-a\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{3a^6}.$$

Жавоби: 1) $\sqrt[3]{192}$; 2) $-\sqrt[6]{3a^6}$.

1. n-даражали илдиз қийматининг сони нимага боғлиқ? Жавобингизни асосланг.
2. Нима учун манфий сон жуфт даражали илдизга эга бўлмайди? Жавобингизни асосланг.

Машқлар

А

Берилган тенгликларнинг бажарилишини текширинг **(5.1-5.2)**:

5.1. 1) $\sqrt[3]{64} = 4$; 2) $\sqrt[5]{-1} = -1$; 3) $\sqrt[10]{1024} = 2$; 4) $\sqrt[5]{-243} = -3$.

5.2. 1) $\sqrt[21]{1} = 1$; 2) $\sqrt[6]{64} = 2$; 3) $\sqrt[3]{-125} = -5$; 4) $\sqrt[17]{0} = 0$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Ҳисобланг **(5.3-5.4)**:

5.3. 1) $\sqrt[5]{-32}$; 2) $\sqrt[4]{81}$; 3) $\sqrt[3]{-64}$; 4) $\sqrt[3]{-216}$.

5.4. 1) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{625}{81}}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{256}{81}}$.

Тенгламаларни ечинг **(5.5-5.6)**:

5.5. 1) $x^3 + 8 = 0$; 2) $x^6 = 7$; 3) $x^3 = 4$; 4) $x^4 = 16$.

5.6. 1) $16x^4 - 1 = 0$; 2) $0{,}01x^3 + 10 = 0$;
3) $x^7 + 128 = 0$; 4) $x^6 - 64 = 0$.

Ифоданинг қийматини топинг **(5.7—5.11)**:

5.7. 1) $\left(-\sqrt[4]{13}\right)^4$; 2) $\left(3\sqrt[5]{(-3)}\right)^5$; 3) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3$; 4) $\left(-\sqrt[6]{2}\right)^6$.

5.8. 1) $\sqrt[4]{625 \cdot 81}$; 2) $\sqrt[5]{243 \cdot 32}$; 3) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; 4) $\sqrt[4]{0{,}0001 \cdot 81}$.

5.9. 1) [illegible]; 2) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; 3) $\sqrt[4]{27 \cdot 48}$; 4) $\sqrt[3]{45 \cdot 75}$.

5.10. 1) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[9]{8}$; 2) $\sqrt[7]{16} \cdot \sqrt[7]{-8}$; 3) $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}$; 4) $\sqrt[3]{-25} \cdot \sqrt[6]{25}$.

5.11. 1) $\frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{-8}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$; 4) $\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}$.

5.12. Кўпайтувчини илдиз белгисидан ташқарига чиқаринг ($x > 0$, $y > 0$):

1) $\sqrt[6]{64x^{11}y^{13}}$; 2) $\sqrt[4]{256x^8 \cdot y^9}$; 3) $\sqrt[3]{54x^{12} \cdot y^{13}}$; 4) $\sqrt[4]{16x^5y^7}$.

5.13. Кўпайтувчини илдиз белгиси остига киритинг ($x > 0$, $y > 0$):

1) $x^2y\sqrt[3]{4}$; 2) $xy^2\sqrt[5]{\frac{3y^3}{x^4}}$; 3) $x^2y^3\sqrt[4]{8}$; 4) $xy^2\sqrt[3]{-5}$.

B

Ифодаларни соддалаштиринг **(5.14-5.15)**:

5.14. 1) $\sqrt[7]{x^7}$ ифодани $x \geq 0$, $x < 0$ бўлган ҳоллар учун қараб чиқинг;
2) $\sqrt[8]{x^8}$, бу ерда $x \geq 0$; 3) $\sqrt[5]{x^5}$; 4) $\sqrt{x^2}$, бу ерда $x \geq 0$.

5.15. 1) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2}$, бу ерда $a \leq 0$; 2) $\sqrt[5]{x^5} - \sqrt[6]{x^6}$, бу ерда $x \geq 0$;
3) $\sqrt[4]{b^4} + 2\sqrt[7]{b^7}$, бу ерда $b \geq 0$; 4) $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[8]{x^8}$, бу ерда $x \leq 0$.

Ҳисобланг **(5.16—5.18)**:

5.16. 1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{-9}$; 2) $\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{25}} \cdot \sqrt[3]{100}$;
3) $\frac{\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{45}}{\sqrt[3]{35}} \cdot \sqrt[3]{6}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{12}}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

5.17. 1) $3-\sqrt{1\frac{9}{16}}-0{,}2\sqrt[4]{625}$; 2) $2\cdot\sqrt{1\frac{24}{25}}+0{,}8\sqrt[3]{0{,}008}$;

3) $0{,}25\cdot\sqrt[3]{729}-0{,}17\sqrt[4]{0{,}0016}$; 4) $5{,}6\cdot\sqrt[5]{243}+0{,}75\sqrt[3]{1{,}331}$.

5.18. 1) $\left(3\sqrt{175}-2\sqrt{112}-3\sqrt{63}\right)^2+0{,}25\sqrt[4]{10000}$;

2) ;

3) $\sqrt[3]{375}+0{,}25\sqrt[3]{192}+10\sqrt[3]{3000}$;

4) $4\sqrt[3]{24}+\sqrt[4]{0{,}1296}-1{,}6\sqrt[3]{375}$.

МАТЕМАТИК ОЛИМ ҲАҚИДА АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

5.19. $\sqrt{\ }$ ва $\sqrt[n]{\ }$ белгиларни француз математиги Альбер Жирар, немис файласуфи ва математиги Готфрид Вильгельм Лейбниц изчиллик билан қўллана бошлаганлар.

А. Жирар
(1595—1632)

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даражанинг асоси ва кўрсаткичи, натурал кўрсаткичли даража, бутун кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари, рационал сон, n-даражали илдиз ва унинг хоссалари

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

6-§. РАЦИОНАЛ КЎРСАТКИЧЛИ ДАРАЖА

Сиз рационал кўрсаткичли даража тушунчаси билан танишасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даража кўрсаткичи, *n*-даражали илдиз, рационал сон, ифода

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ:

Маълумки, ҳар қандай сонни натурал даражага, нолдан фарқли сонни нолинчи ва бутун манфий даражага кўтариш, шу билан бирга ҳар қандай a ва b сонлар ҳамда ҳар қандай m ва n бутун сонлар учун қуйидаги хоссалар ўринли:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$
6. Агар $m > n$ бўлса, у ҳолда
   $a > 1$ ҳолда $a^m > a^n$
   $0 < a < 1$ ҳолда $a^m < a^n$

Энди ҳар қандай номанфий сонни мусбат ва манфий каср кўрсаткичли даражага кўтаришни кўриб чиқамиз.

Масалан, $3^{\frac{5}{6}}$; $4^{\frac{2}{8}}$; $16^{\frac{3}{4}}$; $5^{-\frac{3}{4}}$.

Рационал кўрсаткичли $a^{\frac{m}{n}}$ сонни оламиз, бу ерда $n \in N$, $m \in Z$. Ўша ифодани n-даражага кўтарамиз, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$.

n-даражали илдиз таърифига мувофиқ охирги тенгликдан $a^{\frac{m}{n}}$ сони a^m соннинг n-даражали илдизи бўлади. Энди рационал кўрсаткичли даража таърифини келтирамиз.

Таъриф. ***$a > 0$ соннинг $\frac{m}{n}$ рационал кўрсаткичли даражаси*** *деб a^m сондан олинган n-даражали илдизнинг қийматига айтилади.*

Таърифга кўра

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad (1)$$

бу ерда m — ҳар қандай бутун сон, n — ҳар қандай натурал сон ($n > 1$) ва n — илдиз кўрсаткичи, m — илдиз белгиси остидаги a соннинг даражаси.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

1. Рационал кўрсаткичли даражани илдиз шаклида ёзамиз:

1) $6^{\frac{2}{5}}$; 2) $a^{-\frac{4}{13}}$; 3) $5^{1,7}$.

Ечилиши. (1) формуладан фойдаланиб ифодани: 1) $6^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{6^2}$; 2) $a^{-\frac{4}{13}} = \sqrt[13]{a^{-4}}$ кўринишда ёзамиз; 3) кўрсаткичдаги ўнли касрни оддий касрга айлантиргандан сўнг (1) формулани татбиқ этамиз: $5^{1,7} = 5^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{5^{17}}$.

Жавоби: 1) $\sqrt[5]{6^2}$; 2) $\sqrt[13]{a^{-4}}$; 3) $\sqrt[10]{5^{17}}$.

МИСОЛ

2. 1) $8^{\frac{4}{3}}$; 2) $625^{0,75}$; 3) $128^{-\frac{3}{7}}$ ифодаларнинг қийматларини ҳисоблаймиз.

Ечилиши. (1) формулани қўлланамиз: 1) $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{8^3 \cdot 2^3} = 8 \cdot 2 = 16$;

2) $625^{0,75} = \sqrt[4]{625^3} = \sqrt[4]{(5^3)^4} = 5^3 = 125$;

3) $128^{-\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{128^{-3}} = \sqrt[7]{(2^{-3})^7} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Эслатма. Агар $a < 0$ бўлса, у ҳолда рационал кўрсаткичли даража аниқланмайди. Масалан, $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$. Бинобарин, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. У ҳолда $(-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{27^2} = \sqrt[6]{3^6} = 3$.

Демак, даражанинг асоси манфий сон бўла олмайди.

Жавоби: 1) 16; 2) 125; 3) $\frac{1}{8}$.

Сиз рационал кўрсаткичли даражанинг хоссаларини билиб оласиз.

Даражанинг хоссалари рационал кўрсаткичли даража учун ҳам бажарилади.

$a > 0$, $b > 0$ ва ҳар қандай r ва s рационал сонлар учун қуйидаги тенгликлар бажарилади:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $a^r : a^s = a^{r-s}$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $(ab)^r = a^r b^r$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

2- ва 5-хоссаларнинг исботларини келтирамиз.

Бунинг учун $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ каби белгилаймиз, бу ерда n ва q — натурал сонлар, m, p — бутун сонлар.

$a^r : a^s = a^{r-s}$ тенглик ўринли эканини исботлаймиз.

Исботи.

$a^r : a^s = a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{r-s}$, демак, $a^r : a^s = a^{r-s}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ $(b \neq 0)$ тенглик ўринли эканини исботлаймиз.

Исботи. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}$, яъни $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

1-, 3-, 4-хоссаларни мустақил исботланг.

Энди рационал кўрсаткичли даражанинг хоссаларига мисоллар қараб чиқамиз.

МИСОЛ

3. Ифодаларни соддалаштирамиз:

1) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} + y^{\frac{1}{4}}$; 2) $\frac{x - y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} : \frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

Ечилиши. 1) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} + y^{\frac{1}{4}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)} + y^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}$.

Берилган ифодани соддалаштирганда $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ формула татбиқ қилинди.

2) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ формулани, умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш, рационал касрларни кўпайтириш, бўлиш амалларини ва қисқартиришни қўлланиб соддалаштирамиз:

$$\frac{x - y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} : \frac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{4}}} =$$

$$= x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}.$$

Жавоби: 1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$.

Шунингдек, рационал кўрсаткичли даражанинг тенгсизлик орқали бериладиган қуйидаги иккита хоссаси бор.

6. r — рационал сон ва $0 < a < b$ бўлса, у ҳолда

$r > 0$ бўлганда $a^r < b^r$; $r < 0$ бўлганда $a^r > b^r$.

7. Ҳар қандай r ва s рационал сонлар учун $r > s$ тенгсизликдан

$a > 1$ бўлса, у ҳолда $a^r > a^s$; $0 < a < 1$ бўлса, у ҳолда $a^r < a^s$ келиб чиқади.

Сиз рационал кўрсаткичли даража хоссаларини алгебраик ифодаларни шакл алмаштиришда қўлланишни ўрганасиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

4. Берилган сонларни таққослаймиз:

1) $\sqrt[5]{27}$ ва $\sqrt[4]{9}$; 2) $\sqrt[9]{16}$ ва $\sqrt[7]{8}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}$ ва $\left(\frac{1}{6}\right)^{200}$.

Ечилиши. 1) Дастлаб n-даражали илдизларни бир хил асосли рационал кўрсаткичли даражага келтирамиз: $\sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3^3} = 3^{\frac{3}{5}} = 3^{0,6}$; $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{0,5}$. Энди 7-хоссани татбиқ этамиз: $3 > 1$ ва $0,6 > 0,5$ бўлгани учун, $3^{0,6} > 3^{0,5}$. Демак, $\sqrt[5]{27} > \sqrt[4]{9}$.

2) n-даражали илдизларни бир хил асосли рационал кўрсаткичли даражага келтирамиз: $\sqrt[9]{16} = \sqrt[9]{2^4} = 2^{\frac{4}{9}}$; $\sqrt[7]{8} = \sqrt[7]{2^3} = 2^{\frac{3}{7}}$. Энди 7-хоссани қўлланамиз: $2 > 1$ ва $\frac{4}{9} > \frac{3}{7}$ бўлгани учун, $\sqrt[9]{16} > \sqrt[7]{8}$.

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{300}$ ва $\left(\frac{1}{6}\right)^{200}$ рационал кўрсаткичли даражаларни шакл алмаштириш орқали бир хил кўрсаткичларга келтирамиз: $\left(\frac{1}{4}\right)^{300} = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^3\right)^{100} = \left(\frac{1}{64}\right)^{100}$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{200} = \left(\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)^{100} = \left(\frac{1}{36}\right)^{100}$.

Энди 6-хоссани татбиқ этамиз: $0 < \frac{1}{64} < \frac{1}{36}$ ва $100 > 0$ бўлгани учун, $\left(\frac{1}{64}\right)^{100} < \left(\frac{1}{36}\right)^{100}$. Демак, $\left(\frac{1}{4}\right)^{300} < \left(\frac{1}{6}\right)^{200}$.

?

1. Рационал кўрсаткичли даражанинг аниқланиш соҳасини айтинг. Жавобингизни тушунтиринг.
2. "Асоси бутун сон бўлганда рационал кўрсаткичли даражанинг қийматлари бутун сонлар тўпламини беради" деган фикр тўғрими? Жавобингизни асосланг.
3. $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$ тенглик a нинг қандай қийматларида тўғри бўлади?

Машқлар

А

6.1. Берилган ифодаларни илдиз шаклида ёзинг:

1) $3^{1,8}$; 2) $2^{1,6}$; 3) $6^{-1,5}$; 4) $7^{1,2}$.

6.2. Берилган илдизни рационал кўрсаткичли даража кўринишида ёзинг:

1) $\sqrt[3]{x^{-2}}$; 2) $\sqrt[7]{3y}$; 3) [illegible]; 4) $\sqrt[8]{5^3}$.

Ифодаларнинг қийматини топинг (**6.3-6.4**):

6.3. 1) $81^{0,5}$; 2) $\left(\frac{256}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 3) $16^{\frac{7}{4}}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$.

6.4. 1) $\left(8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}\right) : 8^{\frac{1}{2}}$; 2) $\sqrt[3]{100} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}} \cdot (5)^{\frac{1}{3}}$;

3) $81^{0,75} : 8^{\frac{7}{3}}$; 4) $\left(\frac{36}{25}\right)^{0.5} \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Ифодаларни кўпайтувчиларга ажратинг **(6.5-6.6)**:

6.5. 1) $(bx)^{\frac{1}{3}} + (by)^{\frac{1}{3}}$; 2) $b - b^{\frac{1}{2}}$;

3) $3 + 3^{\frac{1}{3}}$; 4) $(5x)^{\frac{1}{2}} + (3x)^{\frac{1}{2}}$.

6.6. 1) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} + 1$; 2) $c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}}$;

3) $5 - 5^{\frac{2}{3}}$; 4) $x + y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.

Касрларни қисқартиринг **(6.7-6.8)**:

6.7. 1) $\dfrac{x - y}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{x - 8}{x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 4}$;

3) $\dfrac{x - 16}{x^{\frac{1}{2}} - 4}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a + b}$.

6.8. 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}} - 1}{a - a^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{4}{9}} - b^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\dfrac{x^{1,2} - y^{2,1}}{x^{0,8} + x^{0,4}y^{0,7} + y^{1,4}}$.

6.9. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $320^{\frac{1}{3}} - 2 \cdot (135)^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot (40)^{\frac{1}{3}}$; 2) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}} + 1}{3^{\frac{1}{2}} - 1} + \dfrac{3^{\frac{1}{2}} - 1}{3^{\frac{1}{2}} + 1}$;

3) $10 \cdot 0{,}027^{\frac{1}{3}} - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-2} + 4 \cdot 16^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\dfrac{1}{1 + 5^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{5^{\frac{1}{3}}}{1 - 5^{\frac{1}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}} + \dfrac{1}{3} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$.

B

6.10. Ифодани рационал кўрсаткичли даража кўринишида ёзинг:

1) ; 2) $\sqrt[3]{a^7\sqrt[4]{a}}$; 3) $\sqrt[9]{b^8} \cdot \sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27 \cdot \sqrt[3]{x}}$.

6.11. Ифодани илдиз шаклида ёзинг:

1) $5 \cdot 7^{-\frac{3}{5}}$; 2) $a^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{2}{3}}$; 3) $3b^{-\frac{4}{5}}$; 4) $b^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{3}{7}}$.

6.12. Ифодаларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $(x + 1)^{\frac{3}{7}}$; 2) $x^{\frac{3}{5}}$; 3) $x^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(x - 3)^{\frac{2}{3}}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

6.13. Соддалаштиринг:

1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}+b^{\frac{1}{2}}$, $a>0$, $b>0$; 2) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$, $x \neq y$;

3) $\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$, $a>0$, $b>0$;

4) $\left(a\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+b\cdot\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-2(ab)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot(ab)^{\frac{1}{2}}$, $a>0$, $b>0$.

Ҳисобланг **(6.14-6.15)**:

6.14. 1) $\dfrac{4-3\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\left(2^{\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}\right)^2}$; 2) $\dfrac{\left(24^{\frac{1}{4}}+6^{\frac{1}{4}}\right)^2}{4\cdot 3^{\frac{1}{2}}+3\cdot 6^{\frac{1}{2}}}$;

3) $\dfrac{\left(9^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{2}}\right)^2}{3^{\frac{1}{3}}+2\cdot 3^{\frac{1}{6}}+1}$; 4) $\dfrac{1-2\cdot 5^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{2}}}{\left(5^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{3}{4}}\right)^2}$.

6.15. 1) $\left(\dfrac{1}{13^{\frac{1}{2}}-17^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{17^{\frac{1}{2}}+13^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot 13^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(\dfrac{5}{6^{\frac{1}{2}}+11}+\dfrac{5}{6^{\frac{1}{2}}-11}\right)\cdot 0{,}1\cdot 6^{\frac{1}{2}}$;

3) $\left(8-28^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}+\left(8+28^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$; 4) $\left(6+4\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}+\left(6-4\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$.

6.16. Соддалаштиринг:

1) $\left(\dfrac{1}{(a+1)^{\frac{1}{2}}}+(1-a)^{\frac{1}{2}}\right):\left(\left(1-a^2\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)$, $-1<a$ m 1;

2) $\dfrac{1+a^{\frac{1}{2}}}{1+a+a^{\frac{1}{2}}}:\dfrac{1}{1-a^{\frac{3}{2}}}$, a | 0, $a\neq 1$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Ифода, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, ифодаларни айнан шакл алмаштириш, айният, айниятни исботлаш, n-даражали илдиз ва унинг хоссалари, рационал кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

7-§. ИРРАЦИОНАЛ ИФОДАЛАРНИ ШАКЛ АЛМАШТИРИШ

Сиз иррационал ифодаларни шакл алмаштириш учун n-даражали илдиз хоссаларини татбиқ қилишни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Даража, n-даражали илдиз, иррационал ифода, хосса, шакл алмаштириш

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ: Кўпайтувчини илдиздан ташқарига чиқариш, кўпайтувчини илдиз остига киритиш, касрнинг махражини иррационалликдан қутқариш сизга 8-синф алгебра курсидан маълум. Аввалги мавзуларда n-даражали илдиз, рационал кўрсаткичли даража ва уларнинг хоссаларини ўқиб ўргандингиз.

Энди ушбу шакл алмаштиришларни иррационал ифодаларга татбиқ этишни кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

1. $\left(5\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$ кўпайтмани кўпҳад шаклида ёзамиз.

Ечилиши. $\left(5\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=5\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-5\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}=$
$=5\sqrt{6}+8-30-8\sqrt{6}=-22-3\sqrt{6}$.

Жавоби: $-22-3\sqrt{6}$.

МИСОЛ

2. $15\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+30-2\sqrt[3]{b}$ ифодани кўпайтувчиларга ажратамиз.

Ечилиши. $15\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+30-2\sqrt[3]{b}=$ ▭ $=$
$=\sqrt[3]{a}\left(15-\sqrt[3]{b}\right)+2\left(15-\sqrt[3]{b}\right)=\left(15-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+2\right)$.

Жавоби: $\left(15-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}+2\right)$.

Иррационал ифодаларни шакл алмаштиришда қиймати ҳам мусбат, ҳам манфий бўладиган ифодадан n-даражали илдиз чиқариш керак бўлади.

Ифодадан n-даражали илдизни чиқарганда ушбу қоидаларни қўлланиш лозим:

1) агар n жуфт сон бўлса, у ҳолда илдизнинг қиймати модуль белгиси билан олинади;

2) агар n тоқ сон бўлса, у ҳолда илдизнинг қиймати модулсиз олинади.

МИСОЛ

3. $\sqrt{34+24\sqrt{2}}+\sqrt{34-24\sqrt{2}}$ ифоданинг қийматини топамиз.

Ечилиши. Илдиз остидаги ифодаларни шакл алмаштирамиз: $34+24\sqrt{2}=(4+3\sqrt{2})^2$ ва $34-24\sqrt{2}=(4-3\sqrt{2})^2$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

У ҳолда

$$\sqrt{34+24\sqrt{2}}+\sqrt{34-24\sqrt{2}}=\sqrt{\left(4+3\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(4-3\sqrt{2}\right)^2}=\left|4+3\sqrt{2}\right|+\left|4-3\sqrt{2}\right|=$$
$$=4+3\sqrt{2}-4+3\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

Жавоби: $6\sqrt{2}$.

Энди касрнинг махражини иррационалликдан қутқаришга доир мисоллар келтирамиз.

МИСОЛ

4. 1) $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$; 2) $\frac{6}{3+\sqrt{3}}$ касрларнинг махражида илдиз белгиси бўлмайдиган қилиб шакл алмаштирамиз.

Ечилиши. 1) $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$ касрнинг махражида $\sqrt[3]{5}$ сони берилган. Ўша илдиз остидаги ифодани 5^3, яъни тўғри илдиз ҳосил бўладиган ҳолда тўлдирамиз. Бунинг учун 5 ни 25 сонига кўпайтириш керак. Демак, берилган касрнинг сурати ва махражини $\sqrt[3]{25}$ сонга кўпайтирамиз:

$$\frac{15}{\sqrt[3]{5}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{15\cdot\sqrt[3]{25}}{5}=3\sqrt[3]{25}.$$

2) $\frac{6}{3+\sqrt{3}}$ касрнинг аввалги касрдан фарқи — махражида битта қўшилувчиси радикал бўлган йиғинди берилган. Бундай ҳолда махражни илдиздан қутқариш учун касрнинг сурати ва махражини махраждаги ифоданинг ўзаро қўшма ифодасига, яъни $3-\sqrt{3}$ ифодага кўпайтирамиз:

$$\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\frac{6\cdot(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{6}=3-\sqrt{3}.$$

Жавоби: 1) $3\sqrt[3]{25}$; 2) $3-\sqrt{3}$.

1. Рационал ва иррационал ифодаларни шакл алмаштиришда фарқ борми?

Машқлар

А

7.1. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\sqrt[3]{20+\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{20-\sqrt{57}}$;

2) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$;

3) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$;

4) $-\frac{\sqrt[3]{\left(4+\sqrt{17}\right)^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}}-\sqrt{17}$.

Ҳисобланг (**7.2—7.4**):

7.2. 1) $3\sqrt{8}-5\sqrt{18}+12\sqrt{50}$;

2) ;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $\left(2\sqrt{2}-3\right)^2 \cdot \sqrt[6]{8}$; 4) $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17}+5}$.

7.3. 1) $\sqrt[3]{7-\sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7+\sqrt{22}}$; 2) $\frac{1}{4+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4-2\sqrt{3}}$;

3) $\frac{3}{6-2\sqrt{6}} + \frac{3}{6+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{3}+2+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

7.4. 1) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{\frac{3}{8}} + 4\sqrt{1{,}5}\right) \cdot 2\sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\sqrt{0{,}75} + 3\sqrt{\frac{1}{27}} - \sqrt{6{,}75}\right) \cdot \sqrt{3}$;

3) $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{6}} - \sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{4{,}5}\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$; 4) $\left(\sqrt[4]{\frac{125}{27}} - \sqrt[4]{375} - \frac{1}{\sqrt[4]{135}}\right) \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$.

7.5. Ифодаларни шундай шакл алмаштирингки, бунда касрнинг махражида радикаллар (илдиз белгиси) бўлмасин:

1) $\frac{6}{\sqrt{7}-1}$; 2) $\frac{5}{\sqrt{6}+1}$; 3) $\frac{2}{x+\sqrt{a}}$; 4) $\frac{3}{x-\sqrt{a}}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$; 6) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; 7) $\frac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$; 8) $\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$.

В

Соддалаштиринг **(7.6-7.7)**:

7.6. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-1} - \frac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}-1}$;

2) $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} + \sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{a+\sqrt{a}\sqrt{b}} + \frac{1}{a-\sqrt{a}\sqrt{b}}\right) \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$;

4) $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

7.7. 1) $\frac{p-q}{\sqrt[3]{p}-\sqrt[3]{q}} - \sqrt[3]{pq}$, $p \neq q$;

2) $\frac{\sqrt{p^3}+\sqrt{q^3}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} + \sqrt{pq}$, $p > 0$, $q > 0$;

3) [illegible], $a > 0$, $b > 0$;

4) $\frac{\sqrt[3]{a^2b} - a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{ab}} + \sqrt[3]{a^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

7.8. Касрнинг махражини иррационал ифодадан қутқаринг:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; 3) $-\frac{7}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$;

4) $\frac{15}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 5) $\frac{6}{2-\sqrt[3]{2}}$; 6) $\frac{32}{3+\sqrt[3]{5}}$;

7) $\frac{1-b}{\sqrt{1-\sqrt{b}}}$, $0 \le b < 1$; 8) $\frac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}}$, $a \ge 0$.

7.9. Соддалаштиринг:

1) $\left(1+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right):\left(1-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$; 2) $\left((a-b)\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+a-b\right)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right)$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даражанинг асоси ва кўрсаткичи, функция, унинг хоссалари ва графиги.

8-§. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИГИ

Сиз ҳақиқий кўрсаткичли даражали функция тушунчаси билан танишасиз; даража кўрсаткичига боғлиқ даражали функция графигини ясашни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Функция, график, даражали функция, даражанинг кўрсаткичи, ҳақиқий сон

Ҳар қандай ҳақиқий α сон учун мусбат ўзгарувчили x^{α} кўринишдаги сонни аниқлаш мумкин.

Таъриф.

$$f(x) = x^{\alpha},\ \alpha \in R \qquad (1)$$

формула билан берилган функция ***даражали функция*** *дейилади.*

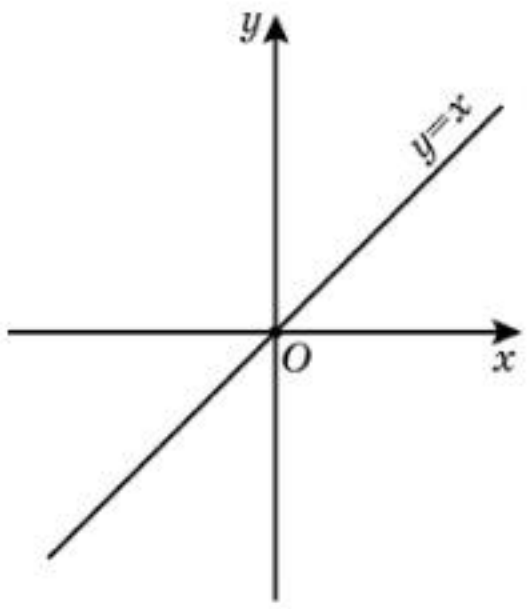
Бунда даражанинг асоси сифатида x эркли ўзгарувчи, унинг даража кўрсаткичи сифатида α ҳақиқий сон олинган.

Кичик синфларда даражали функциянинг кўрсаткичи натурал ва бутун сонлар бўлган ҳолларни қараб чиққансиз.

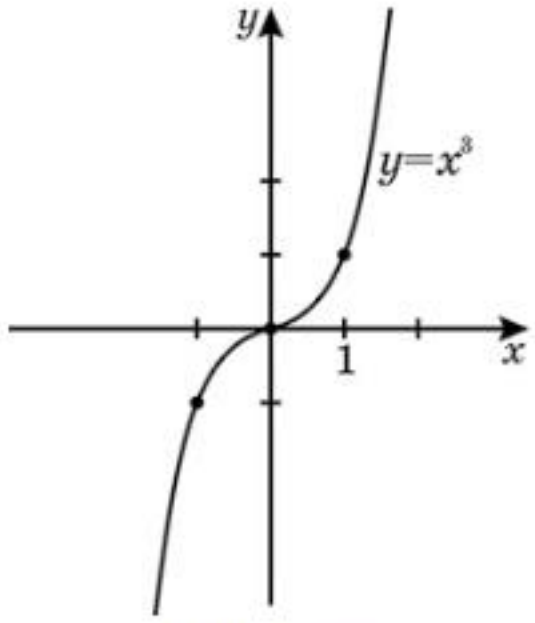
Масалан, маълумки, $\alpha = 1$ бўлганда графиги координаталар текислигининг I ва III чоракларидаги биссектрисани берадиган $y = x$ чизиқли функцияга (21-расм), $\alpha = 3$ бўлганда графиги кубик параболани берадиган $y = x^3$ учинчи даражали функцияга эга бўламиз (22-расм).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



21-расм



22-расм

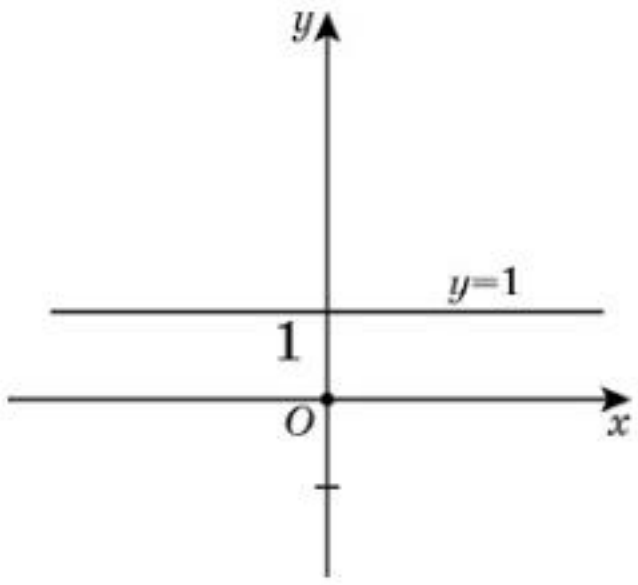
1. Натурал кўрсаткичли функцияларнинг ҳаммасини

$$y = x^n,\ n \in N \qquad (2)$$

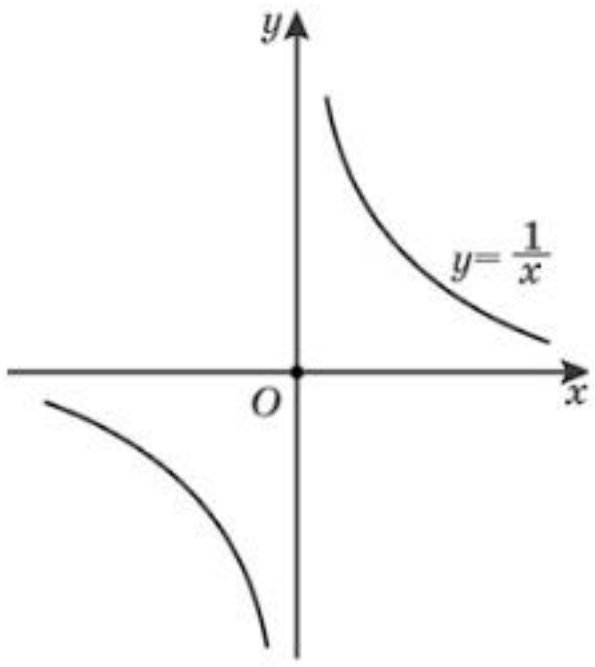
формула билан бериш мумкин. Жумладан, мисолларда $n = 1$, $n = 3$ бўлгандаги натурал кўрсаткичли даражали функциялар қараб чиқилди.

(2) формулада $n = 0$ бўлганда $f(x) = x^0 = 1$, у ҳолда функциянинг графиги ординаталари 1 га тенг абсцисса ўқига параллел бўлган $y = 1$ тўғри чизиқдан иборат (23-расм).

(2) формуладаги n сони жуфт сонлар (2; 4; 6; 8; ...) бўлса, у ҳолда ўша функцияларнинг графиклари 2; 4; 6; 8; ... даражали параболалар, агар тоқ сонлар (3; 5; 7; 9; ...) бўлса, у ҳолда 3; 5; 7; 9; ... даражали параболалар бўлади. Жуфт даражали функцияларнинг графиклари — ординаталар ўқига нисбатан симметрик, тоқ даражали функцияларнинг графиклари эса координаталар бошига нисбатант симметрик чизиқлардан иборат.



23-расм



24-расм

2. (2) формуладаги n сонни $-n$ сони билан алмаштирсак,

$$y = x^{-n},\ n \in N \qquad (3)$$

бутун манфий кўрсаткичли даражали функцияга эга бўламиз.

24-расмда $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ функциянинг, 25-расмда эса $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ функциянинг графиги кўрсатилган.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

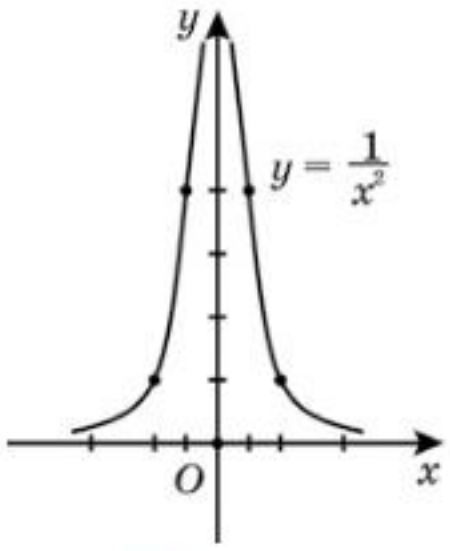
Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$y = \frac{1}{x^2}$ ва $y = \frac{1}{x^3}$ функцияларнинг қийматлар тўплами бир хил бўлиши мумкинми? Жавобингизни асосланг.

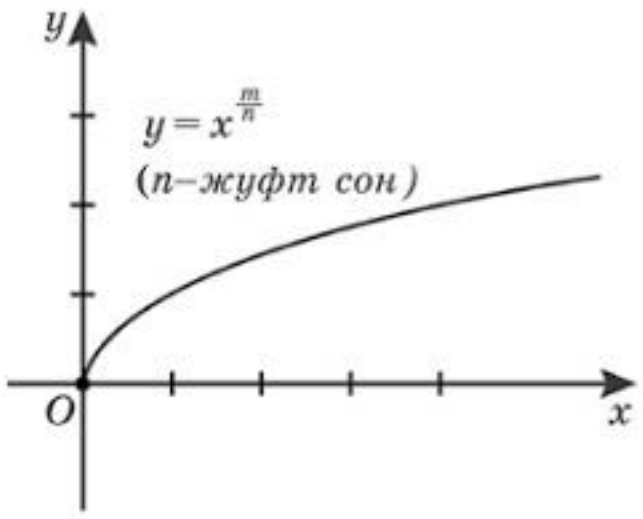
Энди мусбат ва манфий кўрсаткичли даражали функцияни кўриб чиқамиз.

3. Агар $\alpha = \frac{m}{n}$ (n, m — ўзаро туб натурал сонлар) ва $m < n$ бўлса, у ҳолда мусбат каср кўрсаткичли $y = x^{\frac{m}{n}}$ даражали функцияга эга бўламиз.

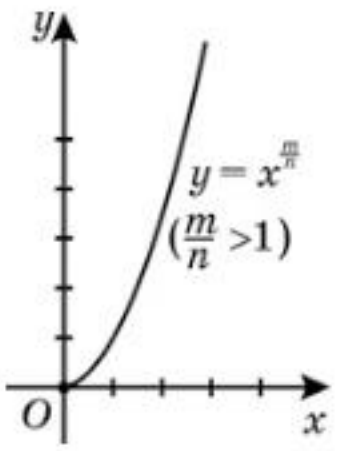
Мазкур функциянинг графиги 26-расмда тасвирланган.



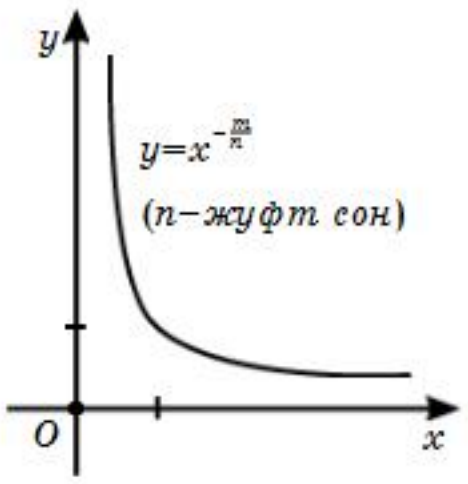
25-расм



26-расм



27-расм



28-расм

4. Агар $\alpha = \frac{m}{n}$ (n, m — ўзаро туб натурал сонлар) ва $\frac{m}{n} > 1$ бўлган ҳолда мусбат каср кўрсаткичли $y = x^{\frac{m}{n}}$ даражали функцияни ҳосил қиламиз. Ушбу функциянинг графиги 27-расмда берилган.

5. Агар $\alpha = -\frac{m}{n}$ (n, m — ўзаро туб натурал сонлар) бўлса, у ҳолда манфий каср кўрсаткичли $y = x^{-\frac{m}{n}}$ даражали функцияга эга бўламиз.

$y = x^{-\frac{m}{n}}$ функция графигининг умумий кўриниши 28-расмда тасвирланган.

Иррационал кўрсаткичли даража ҳақида тушунча.

$a > 0$ ва α сон иррационал сон бўлсин. У ҳолда иррационал даражали a соннинг, яъни a^{α} соннинг қийматини аниқлаймиз. Бунинг учун қуйидаги учта ҳолни қараб чиқамиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

1) $a = 1$ бўлса, у ҳолда $1^{\alpha} = 1$.

2) $a > 1$ ва α иррационал сон r_1 рационал сондан катта ($\alpha > r_1$), аммо r_2 рационал сондан кичик ($\alpha < r_2$) бўлсин, яъни $r_1 < \alpha < r_2$. У ҳолда $r_1 < r_2$ ва $a^{r_1} < a^{r_2}$.

Демак, иррационал кўрсаткичли a^{α} сони даражалари исталган r_1, r_2 рационал сонлар бўлган a^{r_1} ва a^{r_2} сонлар орасида жойлашган сондир: $a^{r_1} < a^{\alpha} < a^{r_2}$. Ўша қонуният исталган $a > 1$ ва исталган α иррационал сон учун бажарилади.

3) Энди $0 < a < 1$ оралиқни кўриб чиқамиз. Мазкур ҳолда $r_1 < \alpha$ ва $r_2 > \alpha$ учун $r_1 < r_2$ ва $a^{r_1} > a^{r_2}$ ҳосил бўлади, бинобарин, $a^{r_2} < a^{\alpha} < a^{r_1}$ эга бўламиз. Ўша қонуният ҳар қандай $0 < a < 1$ ва исталган α иррационал сон учун ўринли.

Рационал кўрсаткичли даражаларнинг хоссалари иррационал кўрсаткичли даражалар учун ҳам ўринли.

Энди кўрсаткичи ҳақиқий сонлар бўлганда даражали функцияни, яъни $y = x^{\alpha}$ (α — ҳар қандай ҳақиқий сон, x — даражали функциянинг аргументи) формула билан берилган даражали функцияни қараб чиқамиз.

Агар $\alpha > 0$ бўлса, даражали функцияни $x = 0$ бўлган ҳолда ҳам аниқланган функция деб ҳисоблаймиз, чунки $0^{\alpha} = 0$.

Агар $\alpha \in Z$ бўлса, даражали функция $x > 0$ ёки $x < 0$ ҳолда ҳам аниқланган функция бўлади. α сон жуфт сон бўлса, у ҳолда $y = x^{\alpha}$ функция жуфт функция, α тоқ сон бўлса, у ҳолда тоқ функция бўлади. Шунинг учун $y = x^{\alpha}$ даражали функцияни $x \in (0; +\infty)$ интервалда ўрганиш, кифоя.

1. Даражали функциянинг даража кўрсаткичига боғлиқ турларини айтинг ва унга мисол келтиринг.
2. $[0; +\infty)$ оралиқда жойлашган $y = x^2$ ва $y = \sqrt{x}$ функцияларнинг графикларини тавсифланг.
3. $y = x^{-2,5}$ ва $y = x^{2,5}$ функцияларнинг аниқланиш соҳаларида қандай фарқ мавжуд? Жавобингизни асосланг.

Машқлар

А

$y = f(x)$ функциянинг графигини ясанг (**8.1-8.2**):

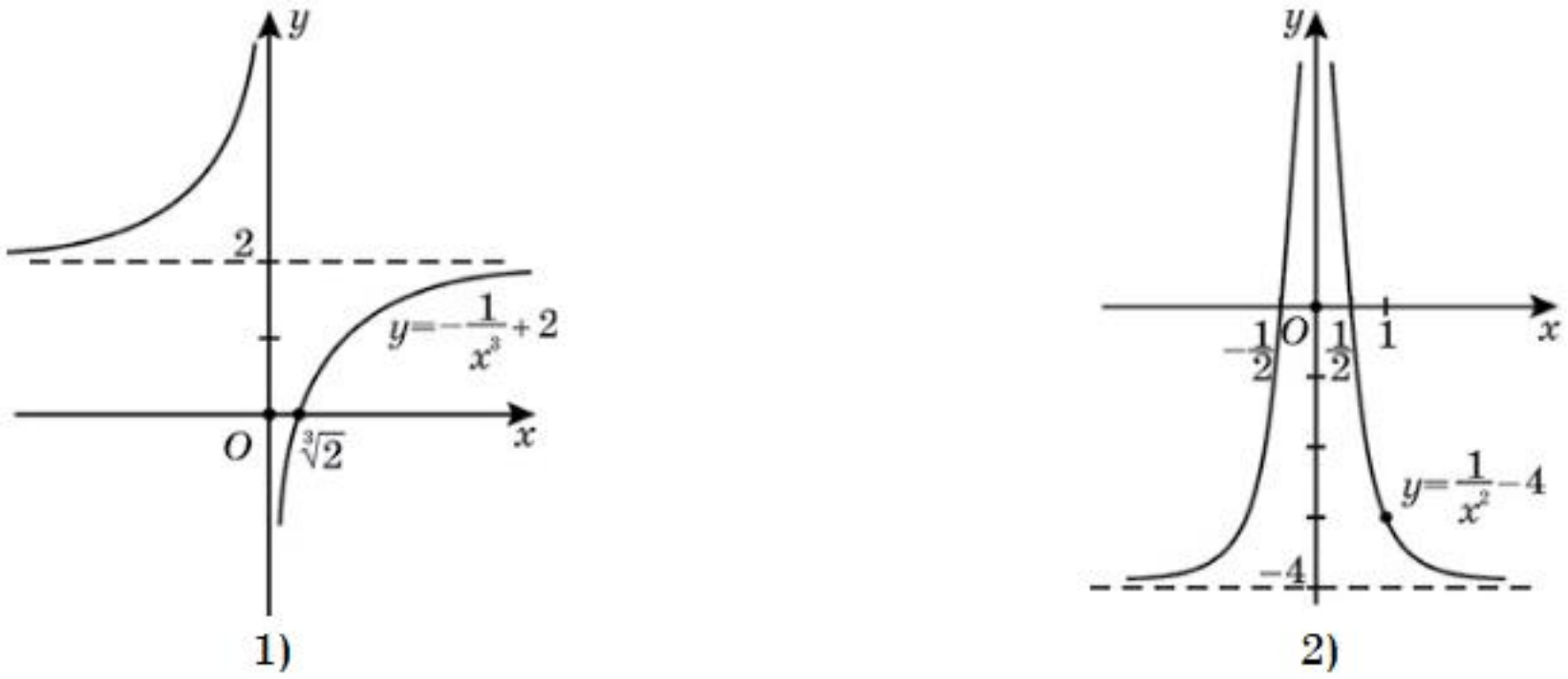
8.1. 1) $f(x) = x^6$; 2) $f(x) = x^{-5}$; 3) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$; 4) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$.

8.2. 1) $f(x) = x^{\pi}$; 3) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$; 2) $f(x) = x^{-\pi}$; 4) $f(x) = (3x)^{\frac{1}{3}}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

8.3. Берилган график бўйича $y = f(x)$ функциянинг хоссаларини айтинг (29-расм):



29-расм

В

8.4. $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 3$; 2) $f(x) = x^{4,5} + 2$;

3) $f(x) = x^{-2,5} + 2$; 4) $f(x) = -\frac{1}{x^3} + 4$.

8.5. $y = f(x)$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - 5$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^4} + 3,5$;

3) $f(x) = x^{3,7} - 2$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{7}$.

Содда алмаштиришларни қўлланиб, $y = f(x)$ функциянинг графигини ясанг. Графикдан фойдаланиб, функцияни тавсифланг (8.6-8.7):

8.6. 1) $f(x) = -\frac{1}{x^3}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^6} + 3,5$;

3) $f(x) = x^{0,5} - 2$; 4) $f(x) = 3 + 2x^{0,5}$.

8.7. 1) $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} + 4$; 2) $f(x) = -\frac{3}{(x+2)^3} + 1,5$;

3) $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{4}} - 2,5$; 4) $f(x) = (x+1)^{-\frac{3}{4}} + 3,5$.

8.8. Тенгламаларнинг нечта илдизи бўлишини график усулда кўрсатинг:

1) $\frac{1}{x^2} = 4,5$; 2) $x^2 - x^{3,7} = 0$; 3) $\frac{1}{x^3} = x^4$; 4) $\sqrt{x} = -\frac{1}{x^2}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

8.9. Тенгсизликлар системасини график усулда ечинг:

1) $\begin{cases} y > x^2, \\ y \leqslant x + 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \geqslant -x^2, \\ y < -x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y < x^3, \\ y \geqslant x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \leqslant x^5, \\ y > -x^4. \end{cases}$

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даражали функция, ҳосила, интеграл ва унинг хоссалари.

9-§. ҲАҚИҚИЙ КЎРСАТКИЧЛИ ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ ВА ИНТЕГРАЛИ

Сиз ҳақиқий кўрсаткичли даражали функция ҳосиласини топиш қоидаларини татбиқ этишни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Функция, даражали функция, ҳосила, бошланғич функция, интеграл

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ:

Даражали функция хусусий ҳолларининг ҳосиласини ҳисоблаш формулалари сизга маълум.

$f(x) = x^n$, $n \in Z$ ва $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ функцияларнинг ҳосиласи мос равишда $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ва $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ формулалар билан аниқланади.

Энди $f(x) = x^{\alpha}$, $x \neq 0$ ва α ҳар қандай ҳақиқий сон бўлганда даражали функциянинг ҳосиласини топиш формуласини берамиз.

Теорема. *Агар $x > 0$ ва α исталган ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда $f(x) = x^{\alpha}$ даражали функциянинг ҳосиласи*

$$f'(x) = (x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1} \qquad (1)$$

формула бўйича топилади.

Исботи. 10-синфда берилган ҳосиланинг таърифи бўйича исботлаш алгоритмидан фойдаланамиз:

1) x га Δx орттирма берамиз: $x + \Delta x$;

2) аргумент орттирмасига мос функциянинг орттирмасини аниқлаймиз:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha} = x^{\alpha}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right];$$

3) Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатини топамиз:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\Delta x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=$$

$$=x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\frac{\Delta x}{x}};$$

4) ҳосил бўлган нисбатнинг $\Delta x\to 0$ даги лимитини топамиз:

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\to\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, яъни $f'(x)=(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

Ҳар қандай ҳақиқий α сон учун $\Delta x\to 0$ да $\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}\to\alpha$ бўлади.

$\alpha=\frac{1}{2}$ учун $\Delta x\to 0$ ҳолда $\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{2}$ эканини исботлаймиз.

Исботи. Дастлаб касрнинг суратини иррационалликдан қутқарамиз. Бунинг учун касрнинг суратини ҳам, махражини ҳам ўзаро қўшма ифодага кўпайтирамиз:

$$\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]}{\frac{\Delta x}{x}\cdot\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]}=\frac{1+\frac{\Delta x}{x}-1}{\frac{\Delta x}{x}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right]}=$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+1}.$$

Охирги касрнинг $\Delta x\to 0$ интилгандаги қиймати $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ бўлади.

$\alpha=1$, $\alpha=2$ учун $\Delta x\to 0$ ҳолда $\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha$ бўлишини мустақил исботланг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ **1.** Берилган функцияларнинг ҳосиласини топамиз:

1) $f(x) = 11x^{-\frac{3}{11}} + x^{\sqrt{6}}$; 2) $f(x) = \sqrt[5]{3x-1} - 5x^{0,75}$.

Ечилиши. Ҳосилани топиш қоидалари ва (1) формулани қўлланамиз::

1) $f'(x) = (11x^{-\frac{3}{11}} + x^{\sqrt{6}})' = 11 \cdot \left(-\frac{3}{11}\right) \cdot x^{-\frac{3}{11}-1} + \sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1} = -3x^{-\frac{14}{11}} + \sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1}$;

2) $f'(x) = (\sqrt[5]{3x-1} - 5x^{0,75})' = ((3x-1)^{\frac{1}{5}} - 5x^{0,75})' = \frac{1}{5}(3x-1)^{-\frac{4}{5}} \cdot 3 - 5 \times$
$\times 0,75x^{-0,25} = \frac{3}{5}(3x-1)^{-\frac{4}{5}} - 3,75x^{-\frac{1}{4}}$.

Жавоби: 1) $-3x^{-\frac{14}{11}} + \sqrt{6}x^{\sqrt{6}-1}$; 2) $\frac{3}{5}(3x-1)^{-\frac{4}{5}} - 3,75x^{-\frac{1}{4}}$.

Сиз ҳақиқий кўрсаткичли даражали функциянинг интегралини топишни ўрганасиз.

Даражали функциянинг бошланғич функциясини топиш формуласини берамиз.

Теорема. $\alpha \neq -1$ *бўлганда* $y = x^{\alpha}$ *даражали функциянинг бошланғич функцияси*

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (2)$$

формула билан топилади.

Исботи. $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ функция $f(x) = x^{\alpha}$ функция учун бошланғич функция бўлишини кўрсатиш керак. Бунинг учун бошланғич функция таърифидан фойдаланамиз:

$$F'(x) = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (x^{\alpha+1})' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1)\, x^{\alpha+1-1} = x^{\alpha} = f(x).$$

МИСОЛ **2.** Аниқмас интегрални топамиз:

1) $\int x^3\,dx$; 2) $\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx$; 3) $\int x^{\frac{5}{4}}\,dx$.

Ечилиши. (2) формулани татбиқ этамиз:

1) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$; 2) $\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$;

3) $\int x^{\frac{5}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + C$.

Жавоби: 1) $\frac{x^4}{4} + C$; 2) $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$; 3) $\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + C$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

3. Аниқ интегралнинг қийматини топамиз:

1) $\int_2^5 x^2\,dx$; 2) $\int_1^9 x^{\frac{3}{2}}\,dx$.

Ечилиши. (2) формула ва аниқ интегрални ҳисоблаш формуласидан фойдаланамиз.

1) $\int_2^5 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39;$

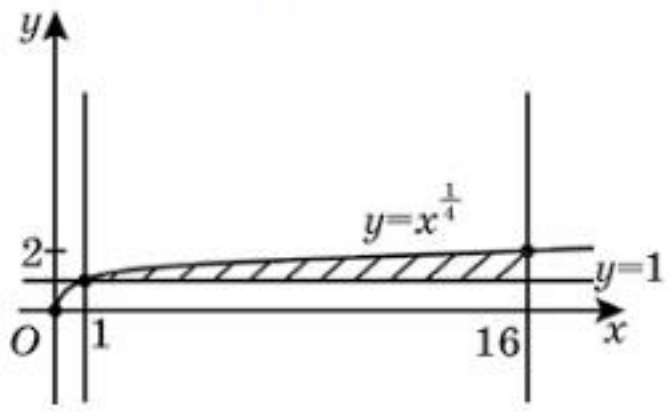
2) $\int_1^9 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right|_1^9 = \left.\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right|_1^9 = \frac{2\cdot 9^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2\cdot 1}{5} = \frac{2}{5}(243-1) = \frac{484}{5} = 96{,}8.$

Жавоби: 1) 39; 2) 96,8.

МИСОЛ

4. $y = \sqrt[4]{x}$ чизиқ ва $y = 1$, $x = 1$, $x = 16$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини ҳисоблаймиз.

Ечилиши. Ясси фигуранинг геометрик тасвири 30-расмда берилган. Ясси фигуранинг юзини топиш формуласидан фойдаланамиз:



30-расм

$S_ф = \int_1^{16}(\sqrt[4]{x} - 1)\,dx = \int_1^{16}(x^{\frac{1}{4}} - 1)\,dx = \left.\left(\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} - x\right)\right|_1^{16} = \boxed{} - \left(\frac{4}{5} - 1\right) = 9{,}6 + 0{,}2 = 9{,}8.$

Жавоби: 9,8 кв. бирл.

?

1. Агар $f(x) = x^{-n}$ $(n \in N)$ бўлса, у ҳолда $f'(x) \in R$ мулоҳаза тўғрими? Жавобингизни асосланг.
2. $y = x^{-n}$ $(n \in N)$ функциянинг қандай нуқтада бошланғич функциясини топиш мумкин эмас? Жавобингизни асосланг.

Машқлар

А

$y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг (**9.1-9.2**):

9.1. 1) $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$; 2) $f(x) = x^{-\frac{3}{7}}$; 3) $f(x) = x^{\sqrt{5}}$; 4) $f(x) = x^{-1+\sqrt{3}}$.

9.2. 1) $f(x) = x^{1,4}$; 2) $f(x) = x^{-3,5}$; 3) $f(x) = x^{\pi}$; 4) $f(x) = x^{-\pi}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

9.3. $y = f(x)$ функциянинг графигига $N(a; b)$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

1) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $N\left(\frac{1}{27};\ 3\right)$;
2) $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} + x$, $N(1; 2)$;
3) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, $N(1; 1)$;
4) $f(x) = x^{-3} + 3x^{\frac{2}{3}}$, $N(1; 4)$.

9.4. $y = f(x)$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $[1; 4]$;
2) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $[1; 8]$;
3) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $[-8; -1]$;
4) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$, $[1; 16]$.

9.5. $y = f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини ёзинг:

1) $f(x) = x^{3\sqrt{2}}$;
2) $f(x) = -2x^{-\pi}$;
3) $f(x) = \frac{1}{4}x^{-4}$;
4) $f(x) = 0{,}5x^{-0{,}5}$.

9.6. Интегрални ҳисобланг:

1) $\int_1^8 x^{-\frac{1}{3}}dx$;
2) $\int_1^4 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$;
3) $\int_{16}^{81} 4x^{-\frac{1}{4}}dx$;
4) $\int_1^{32} 6x^{\frac{1}{5}}dx$.

9.7. Берилган чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
2) $y = \frac{1}{x^6}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;
3) $y = x^{-\frac{1}{3}}$, $x = 1$, $x = 8$, $y = 0$;
4) $y = \frac{1}{x^4}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

B

9.8. $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = x^{\sqrt{5}} + x^{2{,}5} + 10$;
2) $f(x) = x^{\sqrt{3}-2} - x^{-\frac{1}{8}} - 5{,}8$;
3) $f(x) = x^{-\frac{5}{6}} + (x-2)^{\sqrt{2}}$;
4) $f(x) = x^{\frac{3}{8}} - (1 + x^2)^{-\frac{5}{4}}$.

9.9. $y = f(x)$ функциянинг графигига $N(a; b)$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

1) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $N\left(\frac{1}{8}; 2\right)$;

2) $f(x) = x^{-\frac{1}{4}} + 2x$, $N(1; 3)$;

3) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$, $N(-1; 1)$;

4) $f(x) = x^3 - 3x^{\frac{2}{3}}$, $N(-1; -4)$.

9.10. $y = f(x)$ функциянинг $[a; b]$ кесмада энг катта ва энг кичик қийматини топинг:

1) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $[1; 9]$;

2) $f(x) = x^{-5}$, $[2; 3]$;

3) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, $[8; 27]$;

4) $f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$, $[1; 16]$.

9.11. $y = f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини ёзинг:

1) $f(x) = x^{-1+\sqrt{5}} + x^{2,5}$;

2) $f(x) = -2x^{-53} + \sqrt{x}$;

3) $f(x) = x^{3+\sqrt{2}} + \sqrt[4]{x^3}$;

4) $f(x) = 5x^{-\sqrt{6}-1} - \sqrt[5]{x^2}$.

Интегрални ҳисобланг (**9.12-9.13**):

9.12. 1) $\int_0^7 (x+1)^{-\frac{2}{3}}\,dx$;

2) $\int_{-4}^{3} \frac{dx}{(5+x)^{\frac{1}{3}}}$.

9.13. 1) $\int_0^5 5(1+3x)^{-0,75}\,dx$;

2) $\int_0^{155} 0,4\,(1+0,2x)^{-0,6}dx$.

9.14. Берилган чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $y = x^{-2}$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 1$;
2) $y = -x^2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = -2$;
3) $y = x^{-3}$, $x = -4$, $x = -1$, $y = -1$;
4) $y = -x^3$, $x = -3$, $x = -2$, $y = 2$.

МАТЕМАТИК ОЛИМ ҲАҚИДА АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

9.15. Швейцариялик математик Иоганн Бернулли x^r функциянинг аниқ интегралини топиш формуласини келтириб чиқарган.

И. Бернулли
(1667—1748)

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $\sqrt{0,64} + \sqrt[3]{-15\frac{5}{8}} + \sqrt[4]{16}$ ифоданинг қийматини топинг:

A) 5,3; B) 0,3; C) 2,8; D) 3.

2. $a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{4}}$ ифодани квадратга кўтаринг:

A) $a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} + 2b^{\frac{1}{2}}$; B) $a + 4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} + 4b^{\frac{1}{2}}$;

C) $a + 4b^{\frac{1}{2}}$; D) $a + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} + 4b^{\frac{1}{2}}$.

3. $\sqrt[5]{2^3 \cdot 3^2} \cdot \sqrt[5]{2^7 \cdot 3^3}$ ифоданинг қийматини ҳисобланг:

A) 56; B) 18; C) 12; D) 36.

4. a нинг қандай қийматида $\left(a^8\right)^{\frac{1}{4}} = a^2$ тенглик ўринли бўлади:

A) a — мусбат сон; B) a — ҳар қандай сон;

C) бундай қиймат мавжуд эмас; D) номанфий сон?

5. Орасида $12^{\frac{1}{4}}$ ифода жойлашган кетма-кет иккита бутун сонни айтинг:

A) 1 ва 2; B) 2 ва 3;

C) 3 ва 4; D) 4 ва 5.

6. $\left(\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[4]{y}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{y}\right) + 4\sqrt[8]{y^7} : \sqrt[8]{y^3}$ ифодани соддалаштиринг:

A) $x^{\frac{1}{2}}$; B) $x^{\frac{1}{2}} - 8y^{\frac{1}{2}}$; C) $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$; D) $8y^{\frac{1}{2}}$.

7. ☒ ифоданинг қиймати нимага тенг:

A) 1; B) $\frac{2}{9}$; C) 0,5; D) $\frac{1}{3}$?

8. Агар $c = \frac{1}{13}$ бўлса, у ҳолда $\sqrt[4]{625c^4} + \sqrt[5]{32c^5} + \sqrt{36c^2}$ ифоданинг қийматини топинг:

A) 13; B) −13; C) −1; D) 1.

9. $\frac{a - b}{a^{0,5}b^{0,5} - b}$ касрни қисқартиринг:

A) $\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{b^{0,5}}$; B) $\frac{a^{0,5} + b^{0,5}}{b^{0,5}}$; C) $\frac{a^{0,5}}{b}$; D) $\frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{b}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

10. $\sqrt[3]{54a^5b^7c^3}$ ифодадаги кўпайтувчини илдиздан ташқарига чиқаринг:

A) $54abc\sqrt[3]{a^2b}$; B) $3abc\sqrt[3]{ab^2}$;

C) $3ab^2c\sqrt[3]{2a^2b}$; D) $3abc\sqrt[3]{54a^2b}$.

11. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{b}}$ касрнинг махражини иррационалликдан қутқаринг:

A) $\frac{\sqrt{5}}{5-b}$; B) $\frac{25+b}{5-b}$; C) $\frac{5+\sqrt{5b}}{5-b}$; D) $\frac{25-\sqrt{5b}}{5+b}$.

12. $x^4 - 16 = 0$ тенгламанинг нечта илдизи мавжуд:

A) битта илдизи мавжуд; B) иккита илдизи мавжуд;

C) чексиз кўп илдизи мавжуд; D) тўртта илдизи мавжуд?

13. $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{-\frac{1}{2}}$ ифодани соддалаштиринг:

A) $\frac{2}{(a-1)^{\frac{1}{2}}}$; B) $\frac{2a^{\frac{1}{2}}}{(a-1)^{\frac{1}{2}}}$; C) 1; D) $\frac{2a^{\frac{1}{2}}+2}{(a-1)^{\frac{1}{2}}}$.

14. $y = x^{\frac{1}{4}}$ функциянинг графигига абсциссаси $x = 1$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

A) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$; B) $y = x - \frac{1}{4}$;

C) $y = \frac{1}{4}x + 2$; D) $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

15. $\int_0^{15/4} x^{\frac{1}{4}}dx$ интегралнинг қийматини топинг:

A) 1; B) $\frac{25}{16}$; C) $-\frac{25}{16}$; D) -1.

16. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$ чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

A) $\frac{8}{3}$; B) $\frac{3}{16}$; C) $\frac{16}{3}$; D) $\frac{2}{3}$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, тенгламанинг илдизи, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, тенг кучли тенгламалар, n-даражали илдиз, даражага кўтариш.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

III БОБ ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

10-§. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Сиз иррационал тенглама таърифини биласиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, иррационал тенглама, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, тенгламанинг ечими, чет илдиз

ЭСЛАБ КЎРИНГ

Жадвални тўлдиринг:

3-жадвал

	Тенгламанинг номи	Тенгламанинг ечими
$2x + 3 = -10$		
$x^2 + 2x - 3 = 0$		
$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$		
$\frac{5 + x}{x - 6} = 0$		

Жадвални тўлдиришда рационал тенгламаларни ечиш усуллари ёдга туширилди. Энди иррационал тенгламалар тушунчасига кўчамиз.

$\sqrt{x} = 4$, $10 - \sqrt{x} = 4$, $10 - x^{\frac{1}{3}} = 4$ тенгламаларнинг юқорида келтирилган тенгламалардан қандай фарқи бор?

Бундай тенгламалар иррационал тенгламаларга мисол бўла олади.

Таъриф. *Ўзгарувчиси илдиз белгиси остида ёки каср кўрсаткичининг асосида берилган тенгламалар* ***иррационал тенгламалар*** *дейилади.*

МИСОЛ

1. $x + \sqrt{3x + 7} = 0$; $6 + x^{\frac{1}{3}} = 0$; $\sqrt[4]{x} = 16$; $2 - \sqrt[5]{x} = 1$ тенгламалар иррационал тенгламалардан иборат. Биринчи, учинчи ва тўртинчи тенгламаларда ўзгарувчи илдиз остида, иккинчи тенгламада ўзгарувчи каср кўрсаткичли даражанинг асосида берилган.

Шунингдек, биринчи ва учинчи тенгламалардаги илдиз кўрсаткичи жуфт сон, тўртинчи тенгламадаги илдизнинг кўрсаткичи эса тоқ сон бўлади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ: Кўрсаткичи жуфт сон бўлган илдизларнинг илдиз остидаги ўзгарувчисининг қиймати номанфий сон бўлгандагина ифода маънога эга бўлади.

Шунинг учун кўрсаткичи жуфт сон бўлган илдизларга эга иррационал тенгламаларни ечиш мобайнида *арифметик квадрат илдиз* тушунчаси эътиборга олинади ва ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами излаштирилади.

☒ Нима учун $\sqrt[4]{x} = -16$ иррационал тенгламанинг ечими бўш тўпламдан иборат?

МИСОЛ

2. $\sqrt{2x+3} = x$ иррационал тенгламада илдиз кўрсаткичи жуфт эканини эътиборга олиб, илдиз белгиси остидаги ифода ўзгарувчининг қандай қийматларида маънога эга бўлишини аниқлаш керак.

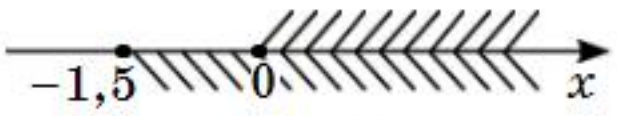
Демак, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларини топиш иррационал тенгламанинг таркибий қисми бўлиб ҳисобланади.

Сиз ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топишга оид билимингизни кенгайтирасиз.

МИСОЛ

3. $\sqrt{2x+3} = x$ иррационал тенгламадаги ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топамиз.

Ечилиши. Тенгламадаги илдиз кўрсаткичи жуфт сон бўлгани учун, $\begin{cases} 2x+3 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ҳосил қиламиз. Бундан $\begin{cases} x \geqslant -1{,}5, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ тенгсизликлар системасининг ечими $[0; +\infty)$ оралиқда бўлади (31-расм).



31-расм

Жавоби: $[0; +\infty)$.

МИСОЛ

4. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{4-x} = 0$ иррационал тенгламадаги ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топамиз.

Ечилиши. Тенгламада квадрат илдизлар берилган, шунинг учун $\begin{cases} 2x+3 \geqslant 0, \\ 4-x \geqslant 0 \end{cases}$ тенгсизликлар системасига эга бўламиз. Бундан $\begin{cases} x \geqslant -1{,}5, \\ x \leqslant 4 \end{cases}$ тенгсизликлар системасининг ечими $[-1{,}5; 4]$ оралиқдан иборат (32-расм).

32-расм

Жавоби: $[-1{,}5; 4]$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

☒ $\sqrt{2x-1}+\sqrt{-4-x}=0$ иррационал тенгламадагиўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами бўш тўплам бўлишини мустақил исботланг.

Иррационал тенгламани ечиш — унинг ечимлар тўпламини топиш демакдир.

МИСОЛ

5. 3 ва −1 сонлар $\sqrt{2x+3}=x$ иррационал тенгламаларнинг илдизлари бўла оладими?

Ечилиши. Бунинг учун сонларни берилган тенгламага қўямиз. Жумладан, $\sqrt{2\cdot 3+3}=3$ тенглик тўғри, $\sqrt{2\cdot(-1)+3}=-1$ тенглик эса тўғри эмаслигини кўриш мумкин. У ҳолда 3 сони тенгламанинг илдизи, −1 сони эса чет илдиз бўлади.

Жавоби: 3 сони илдизи; −1 сони чет илдиз.

1. Иррационал тенгламалар рационал тенгламалардан нима билан фарқ қилади?
2. Иррационал тенгламалар билан рационал тенгламалар орасида қандай ўхшашликлар бор?

Машқлар

A

10.1. Ўзгарувчининг қандай қийматларида ифода маънога эга:

1) $\sqrt{x-5}$; 2) $\sqrt[4]{7-x}$; 3) $\sqrt[3]{x+16}$; 4) $\sqrt[5]{11-x}$?

10.2. Ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топинг:

1) $\sqrt{x^2-8x}$; 2) $\sqrt[3]{x^2-25}$; 3) $\sqrt{6x+x^2}+x$; 4) $x+\sqrt{4x^2-49}$.

10.3. Илдизи берилган сон бўладиган иррационал тенгламани тузинг:

1) $x=5$; 2) $x=-6$; 3) $x=-0{,}2$; 4) $x=2{,}3$.

10.4. Иррационал тенгламанинг илдизлари тегишли бўлган тўпламни топинг:

1) $\sqrt{x+4}=x$; 2) $\sqrt{5x+x^2}=3x$; 3) $\sqrt{x^2-1}=2x$; 4) $\sqrt{5x-x^2}=3x$.

10.5. Берилган сон (сонлар) иррационал тенгламанинг илдизи (илдизлари) бўла оладими:

1) $\sqrt{x-5}=3$ ва $x=14$; 2) [illegible] $=0$ ва $x=-20$;

3) $\sqrt{2x+24}=0$ ва $x=-4$, $x=-12$;

4) $\sqrt{3x+2}=x$ ва $x=2$, $x=1$?

B

10.6. Ўзгарувчининг қандай қийматларида ифода маънога эга:

1) $\sqrt{x+4}+\sqrt{5-x}$; 2) $\sqrt{10-2x}+\sqrt{49+7x}$;

3) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x-2}$; 4) $\sqrt{4+x}+\sqrt{16-x^2}$?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

10.7. Ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топинг:

1) $\sqrt{\frac{x+1}{15-x}} + x$; 2) $\sqrt{\frac{x-7}{8-x}} - x$;

3) $\sqrt{\frac{x}{x^2-36}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$; 4) $\sqrt[3]{\frac{3}{x+2}} - \sqrt{\frac{4-x^2}{x+1}}$.

10.8. Берилган сонлар иррационал тенгламанинг илдизлари бўла оладими:

1) $\sqrt{6x - x^2} = x$ ва $x = 0$, $x = -3$;

2) $\sqrt{14 - 20x - x^2} = x$ ва $x = 2$, $x = 5$?

11-§. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Сиз тенгламанинг иккала қисмини бир хил n-даражага кўтариш усули орқали иррационал тенгламаларни ечишни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР
Иррационал тенглама, тенгламанинг илдизи, тенгламани ечиш усули

Иррационал тенгламаларни ечишнинг икки усулини қараб чиқамиз:

1) тенгламанинг иккала қисмини бир хил даражага кўтариш;

2) янги ўзгарувчи киритиш.

I. *Тенгламанинг иккала қисмини бир хил даражага кўтариш усули орқали иррационал тенгламаларни ечиш.*

АЛГОРИТМ

1) Берилган иррационал тенгламани шакл алмаштириш орқали $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ кўринишга келтириш;

2) тенгламанинг иккала қисмини n-даражага кўтариб $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = (g(x))^n$, ечиш усули маълум бўлган $f(x) = g^n(x)$ кўринишдаги тенгламани ҳосил қилиш;

3) охирги тенгламани ечиш, топилган илдизларни берилган тенгламага қўйиб текшириш;

4) тенгламани қаноатлантирувчи илдизларни тенгламанинг илдизлари сифатида олиш.

МИСОЛ

1. $x + \sqrt{3x + 7} = 7$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Радикалга эга ифодани тенгликнинг чап қисмида қолдириб, тенгламанинг қолган ҳадларини тенгликнинг ўнг қисмига ўтказамиз: $\sqrt{3x + 7} = 7 - x$. Тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтарамиз: $\left(\sqrt{3x + 7}\right)^2 = (7 - x)^2$. Бундан $3x + 7 = 49 - 14x + x^2$ ёки $x^2 - 17x + 42 = 0$. Охирги тенгламанинг илдизлари $x_1 = 3$ ва $x_2 = 14$. Топилган x нинг қийматларини берилган тенгламага қўйиб, тенгликнинг бажарилишини текширамиз:

1) $x_1 = 3$ илдизни x нинг ўрнига қўйсак, $3 + \sqrt{3 \cdot 3 + 7} = 7$; $3 + \sqrt{16} = 7$; $3 + 4 = 7$; $7 \equiv 7$, яъни тенглик бажарилади.

Биринчи илдиз берилган иррационал тенгламани қаноатлантиради.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

2) $x_2 = 14$, яъни $14 + \sqrt{3 \cdot 14 + 7} = 7$; $14 + \sqrt{49} = 7$; $14 + 7 = 7$; $21 \neq 7$. Иккинчи илдиз берилган иррационал тенгламани қаноатлантирмайди. Демак, $x_2 = 14$ чет илдиз.

Жавоби: 3.

МИСОЛ

2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Тенгламани ечиш учун илдизга эга ифодалардан бирини тенгламанинг чап қисмида қолдириб, иккинчисини тенгламанинг ўнг қисмига ўтказамиз: $\sqrt{2x+6} = 6 - \sqrt{x-1}$. Тенгламани ечиш учун унинг иккала қисмини иккинчи даражага кўтарамиз: $\left(\sqrt{2x+6}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{x-1}\right)^2$, $2x + 6 = 36 - 12\sqrt{x-1} + x - 1$ ёки $12\sqrt{x-1} = 29 - x$. Иррационал тенглама ҳосил бўлгани учун охирги тенгламанинг иккала қисмини яна бир марта квадратга кўтарамиз: $144(x-1) = (29-x)^2$, $144x - 144 = 841 - 58x + x^2$; $x^2 - 202x + 985 = 0$. Ҳосил бўлган тенгламанинг илдизлари: $x_1 = 5$ ва $x_2 = 197$.

Текширишни бажариб, $x_1 = 5$ берилган тенгламанинг илдизи эканини, $x_2 = 197$ эса чет илдиз эканини аниқлаймиз.

Жавоби: 5.

МИСОЛ

3. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{6x-11}$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Берилган тенглама олдинги тенгламалардан бир нечта радикалли қўшилувчилари борлиги билан фарқланади. Шунинг учун алмаштиришларни бажармай, тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтарамиз:

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3})^2 = (\sqrt{6x-11})^2;$$

$$x - 2 + 2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} + x + 3 = 6x - 11;$$

$$2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} = 4x - 12 \text{ ёки } \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} = 2x - 6.$$

Охирги тенгламани яна квадратга кўтарамиз: $(x-2)(x+3) = (2x-6)^2$ ёки $3x^2 - 25x + 42 = 0$. Ушбу тенгламанинг илдизлари $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 6$.

Топилган илдизлар учун тенгликнинг бажарилишини текширамиз: $x_1 = \frac{7}{3}$ илдиз учун $\sqrt{\frac{7}{3} - 2} + \sqrt{\frac{7}{3} + 3} = \sqrt{6 \cdot \frac{7}{3} - 11}$; $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{16}{3}} \neq \sqrt{3}$. Демак, $x_1 = \frac{7}{3}$ — чет илдиз. Энди $x_2 = 6$ илдизни текширамиз: $\sqrt{6-2} + \sqrt{6+3} = \sqrt{6 \cdot 6 - 11}$; $2 + 3 = 5$; $5 \equiv 5$. Демак, $x_2 = 6$ берилган иррационал тенгламанинг илдизи бўлади.

Жавоби: 6.

Сиз ўзгарувчини алмаштириш усули орқали иррационал тенгламаларни ечишни ўрганасиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

II. *Иррационал тенгламани янги ўзгарувчи киритиш орқали ечиш.*

МИСОЛ

4. $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}} + \boxed{} = 2{,}5$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}} = t > 0$ янги ўзгарувчи киритамиз. Бунда $\boxed{} = \dfrac{1}{t}$.

Берилган иррационал тенглама ушбу кўринишга келади: $t + \dfrac{1}{t} = 2{,}5$. Ҳосил бўлган каср-рационал тенгламани квадрат тенгламага келтирамиз: $t^2 - 2{,}5t + 1 = 0$, бундан $t_1 = 2$; $t_2 = \dfrac{1}{2}$. Илдизларни ҳисобга олсак, $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}} = 2$ ва $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}} = \dfrac{1}{2}$ иррационал тенгламаларга эга бўламиз. Энди ҳосил бўлган иррационал тенгламаларни ечамиз.

1) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}} = 2$ тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтарамиз: $\dfrac{3x-2}{2x+3} = 4$ ёки $3x - 2 = 8x + 12$, бундан $x = -2{,}8$.

2) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+3}} = \dfrac{1}{2}$ тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтарамиз: $\dfrac{3x-2}{2x+3} = \dfrac{1}{4}$ ёки $12x - 8 = 2x + 3$, бундан $x = 1{,}1$.

Топилган илдизларнинг берилган тенгламани қаноатлантиришини текширамиз.

$x = -2{,}8$ учун $\sqrt{\dfrac{3\cdot(-2{,}8)-2}{2\cdot(-2{,}8)+3}} + \sqrt{\dfrac{2\cdot(-2{,}8)+3}{3\cdot(-2{,}8)-2}} = \sqrt{\dfrac{-8{,}4-2}{-5{,}6+3}} + \sqrt{\dfrac{-5{,}6+3}{-8{,}4-2}} =$

$= \sqrt{4} + \sqrt{\dfrac{1}{4}} = 2 + \dfrac{1}{2} = 2{,}5.$

$x = -2{,}8$ илдиз берилган иррационал тенгламани қаноатлантиради.

$x = 1{,}1$ учун $\sqrt{\dfrac{3\cdot 1{,}1-2}{2\cdot 1{,}1+3}} + \sqrt{\dfrac{2\cdot 1{,}1+3}{3\cdot 1{,}1-2}} = \sqrt{\dfrac{1{,}3}{5{,}2}} + \sqrt{\dfrac{5{,}2}{1{,}3}} = \dfrac{1}{2} + 2 = 2{,}5.$

$x = 1{,}1$ қиймат ҳам берилган иррационал тенгламани қаноатлантиради.

Жавоби: 1,1; −2,8.

МИСОЛ

5. $\sqrt[5]{(x-2)^2} - \sqrt[5]{x-2} = 2$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Берилган иррационал тенгламани янги ўзгарувчи киритиш усулида ечамиз. $\sqrt[5]{x-2} = u$ деб олсак, $\sqrt[5]{(x-2)^2} = u^2$. Берилган тенглама янги ўзгарувчи киритиш орқали квадарт тенгламага келтирилади: $u^2 - u - 2 = 0$. Мазкур тенгламанинг илдизлари: $u_1 = -1$; $u_2 = 2$. Жумладан $\sqrt[5]{x-2} = -1$ ва $\sqrt[5]{x-2} = 2$ иррационал тенгламаларга эга бўламиз. Энди олинган тенгламаларни ечамиз:

1) $\sqrt[5]{x-2} = -1$ тенгламани ечиш учун унинг иккала қисмини бешинчи даражага кўтарамиз: $\left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5 = (-1)^5$, бундан $x - 2 = -1$ ёки $x_1 = 1$;

2) $\sqrt[5]{x-2} = 2$ тенгламани ечиш учун тенгламанинг иккала қисмини бешинчи даражага кўтарамиз: $\left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5 = 2^5$, $x - 2 = 2^5$, бундан $x - 2 = 32$, $x_2 = 34$. Ушбу олинган $x_1 = 1$ ва $x_2 = 34$ илдизлар берилган тенгламани қаноатлантиради.

Жавоби: 1; 34.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

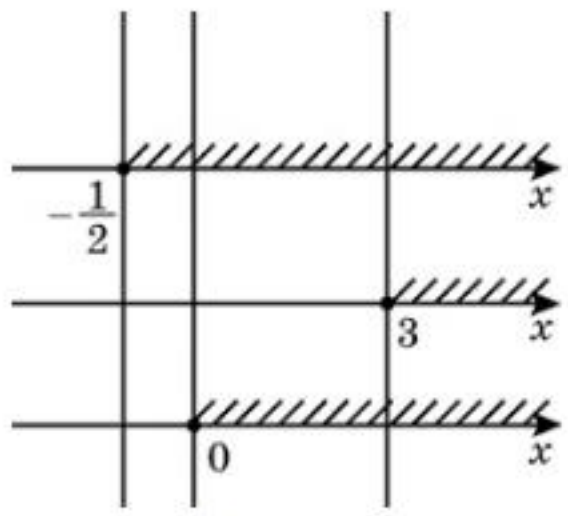
Ечимлари кўрсатилган барча мисолларда илдизлар тенгламани қаноатлантиришини текширдик. Иррационал тенгламаларнинг илдизларини топишдан аввал илдизлари бўладиган тўплам аниқланса, ўша аниқланган тўпламгагина тегишли илдизларни текшириш кифоя, тегишли бўлмаган илдизлар эса чет илдиз бўлади. Бунга мисоллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

6. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Дастлаб берилган тенгламанинг ечимлари бўладиган тўпламни аниқлаймиз. Тенгламадаги радикаллардан ҳар қайсиси квадрат илдизлар бўлгани учун, ушбу тенгсизликлар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases}2x+1\geqslant 0,\\ x-3\geqslant 0,\\ x\geqslant 0\end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases}x\geqslant -\frac{1}{2},\\ x\geqslant 3,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$$



33-расм

Ҳар бир тенгсизликнинг ечимлар тўпламини алоҳида координаталар тўғри чизиғида белгилаб, сонли ораликларнинг кесишмасини топамиз (33-расм). Бунда x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами $[3; +\infty)$ ораликдан иборат.

Шундай қилиб, берилган иррационал тенгламанинг илдизлари $[3; +\infty)$ ораликдан бўлиши лозим. Энди берилган $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$ тенгламани ечамиз. Бунинг учун тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтарамиз: $\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\right)^2=$ $=\left(2\sqrt{x}\right)^2$, бундан $2x+1+2\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-3}+x-3=4x$ ёки $2\cdot\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-3}=$ $=x+2$. Охирги тенгламани яна бир марта квадратга кўтарамиз. Жумладан, $4(2x+1)(x-3)=x^2+4x+4$ эга бўламиз. Бундан $8x^2+4x-24x-12=x^2+4x+4$ ёки $7x^2-24x-16=0$, илдизлари эса $x_1=4$ ва $x_2=-\frac{4}{7}$.

$x_1=4$ илдиз берилган тенгламанинг ечими бўлган тўпламга тегишли. Демак, бу илдиз учун текширишни бажариб, унинг берилган тенгламани қаноатлантиришини кўриш мумкин.

Иккинчи илдиз $x_2=-\frac{4}{7}$ тенгламанинг ечими бўлган тўпламга, яъни $x \mid 3$ тўпламга тегишли бўлмагани учун, текширишни бажармасдан ҳам, уни чет илдиз деб айтиш мумкин.

Жавоби: 4.

1. Нима учун иррационал тенгламаларни ечганда чет илдиз пайдо бўлади?
2. Иррационал тенгламаларнинг илдизларини албатта текшириш керакми? Жавобингизни асосланг.
3. Қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами маълум бўлганда иррационал тенгламанинг чет илдизларини қандай кўрсатиш мумкин?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Машқлар

A

Тенгламаларни ечинг **(11.1—11.4)**:

11.1. 1) $\sqrt{x+2}=4$; 2) $\sqrt{x^2-28}=6$;

3) $\sqrt[3]{3-x^2}=-1$; 4) $\sqrt[4]{x^3-11}=2$.

11.2. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{4x-3}=x$;

3) $\sqrt[3]{1-x^3}=1-x$; 4) $\sqrt[4]{x^4+x^2-1}=x$.

11.3. 1) $x+\sqrt{x+3}=3$; 2) $\sqrt{2x+18}-5=x$;

3) $\sqrt[3]{x^3-8}+2=x$; 4) $\sqrt[3]{4x+3x^2}=x$.

11.4. 1) $\sqrt{3x+4}=2-x$; 2) $\sqrt{2x^2-3x+2}=2x-2$;

3) $\sqrt{7-3x}=1-x$; 4) $\sqrt{2x^2-5x+4}=2x+2$.

B

Тенгламаларни ечинг **(11.5—11.9)**:

11.5. 1) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$; 2) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+1}=2$;

3) $x-1+\sqrt{x-1}=2$; 4) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$.

11.6. 1) $\sqrt{(4x+5)(3x-2)}=4x+5$; 2) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1$;

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$; 4) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$.

11.7. 1) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$;

3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$; 4) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x+2}$.

11.8. 1) $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=5$; 2) x^2-x+ [redacted] $=3$;

3) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$; 4) $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$.

11.9. 1) $\sqrt{\dfrac{3x-5}{3x+5}}+\left(\dfrac{3}{4}x+2\right)\cdot\sqrt{9x^2-25}=0$;

2) $\sqrt{\dfrac{6x-5}{6x+5}}+(3x+4)\cdot\sqrt{36x^2-25}=0$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $\frac{2}{\sqrt{2-x}}=\sqrt{\frac{x+6}{x+3}}$;

4) $\frac{x+1}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{2x+1}$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $\sqrt{x^2-8x}$ ифодадаги ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами:

A) $(0; 8)$; B) $[0; 8]$; C) $(-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$;
D) $(-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$; E) $(0; 8]$.

2. $\sqrt{64-x^2}$ ифодадаги ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами:

A) $(-8; 8)$; B) $[-8; 8]$; C) $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$;
D) $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$; E) $(-8; 8]$.

3. $y = 2 - \sqrt{x^2+3}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

A) $(-\infty; -3)$; B) $(-\infty; \sqrt{3}]$; C) ҳар қандай сон; D) $[\sqrt{3}; +\infty)$;
E) $(3; +\infty)$.

4. $\sqrt{x-4} = 7$ тенгламани ечинг:

A) 0; B) 49; C) 50; D) 53; E) 7.

5. $\sqrt{2x+3} = x$ тенгламанинг илдизини топинг:

A) -3; B) 1; C) 3; D) -1; E) 0.

6. $\sqrt{3x-5} = x - 3$ тенгламани ечинг:

A) 2; 7; B) 7; C) 2; D) ечимга эга эмас; E) -7.

7. $\sqrt{x+4} = \sqrt{5-x}$ тенгламанинг илдизларини топинг:

A) 4,5; B) $-4,5$; C) $-0,5$; D) 0,5; E) бўш тўплам.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг хоссалари ва графиги, функциянинг лимити, ҳосила, даража, даражанинг асоси ва кўрсаткичи, узлуксизлик.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

IV БОБ КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛАР

12-§. КЎРСАТКИЧЛИ ФУНКЦИЯ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИГИ

Сиз *кўрсаткичли функция* тушунчаси билан танишасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функция графиги, кўрсаткичли функция, аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, функциянинг хоссалари

Таъриф.

$$y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1 \qquad (1)$$

формула билан берилган функция ***кўрсаткичли функция*** *дейилади.*

Бу ерда a сон — кўрсаткичли функциянинг *асоси*, эркли ўзгарувчи x — даражанинг *кўрсаткичи*.

Кўрсаткичли функциянинг асосий хоссалари:

1) аниқланиш соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $D(a^x) = R$;

2) қийматлар тўплами — барча мусбат ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $E(a^x) = R_+$;

3) асоси $a > 1$ бўлганда функция аниқланиш соҳасида ўсувчи, $0 < a < 1$ бўлганда камаювчи функция;

4) барча $x \in R$ ҳақиқий сонлар тўпламида $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ функция узлуксиз;

5) ҳар қандай $a > 0$ учун $a^0 = 1$, демак, $y = a^x$ функциянинг графиги координаталари (0; 1) бўлган нуқтадан ўтади.

Кўрсаткичли функция учун x ва y нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматларида ушбу тенглик бажарилади:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} (a \neq 0);\ (ab)^x = a^x \cdot b^x;\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}\ (b \neq 0);\ (a^x)^y = a^{xy}.$$

Функциянинг юқорида келтирилган хоссаларини исботлаймиз.

Исботи. 1) Асоси $a > 0$ бўлганда, x нинг ҳар қандай қиймати учун a^x даражасини ҳисоблаш мумкин. Бинобарин, $y = a^x$ функциянинг аниқланиш соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами.

2) $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциянинг қиймати ҳар қандай x ҳақиқий сон учун мусбат сон. Демак, $y = a^x$ функциянинг қийматлар тўплами барча мусбат ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

3) Ox ўқида исталган x_1 ва x_2 $(x_1 < x_2)$ нуқталар (сонлар)ни олсак, ўша икки нуқтага мос функция бундай қийматларни қабул қилади: $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$a > 1$ бўлганда кичик аргументга функциянинг кичик қиймати, катта аргументга функциянинг катта қиймати мос бўлгани учун, $a^{x_1} < a^{x_2}$. Ўша қонуният функциянинг аниқланиш соҳаси тўпламидаги исталган иккита нуқта учун бажарилади. Демак, $a > 1$ бўлганда $y = a^x$ функция — ўсувчи функциядан иборат.

Кўрсаткичли функциянинг асоси $0 < a < 1$ бўлганда юқорида айтилган қонуният тескарисига бажарилади, кичик аргументга функциянинг катта қиймати, катта аргументга функциянинг кичик қиймати мос бўлгани учун, $a^{x_1} > a^{x_2}$. Демак, $0 < a < 1$ оралиқда $y = ax$ функция — камаювчи функциядир.

Сиз кўрсаткичли функциянинг графигини ясашни ўрганасиз.

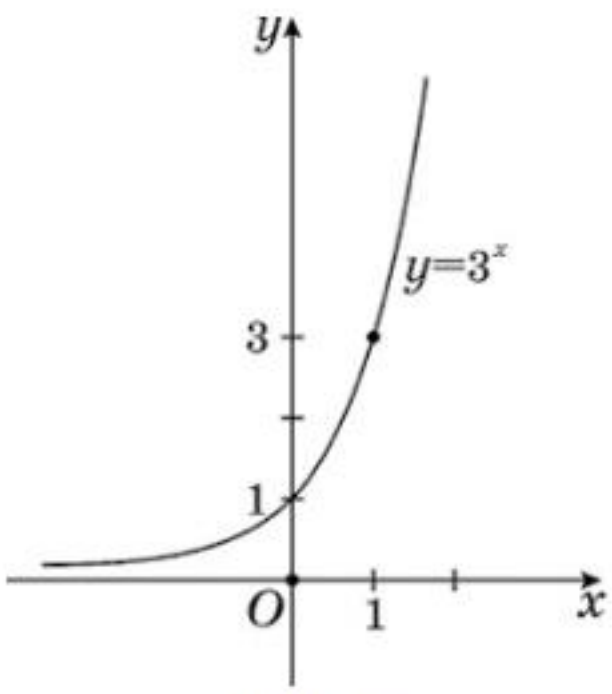
Мисол тариқасида $y = 3^x$ ва $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функцияларнинг графикларини кўриб чиқамиз.

I. $y = 3^x$ функциянинг графигини ясаш учун ушбу жадвални тузамиз:

4-жадвал

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

$\left(-3; \frac{1}{27}\right)$, $\left(-2; \frac{1}{9}\right)$, $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$, (0; 1), (1; 3), (2; 9), (3; 27) нуқталарни координаталар текислигида ясагандан кейин уларни туташтирсак, $y = 3^x$ функция графигини ҳосил қиламиз (34-расм).



34-расм

Графикдан берилган функциянинг ўсувчи функция эканини кўриш мумкин.

II. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функциянинг графигини ясаш учун ушбу жадвални тузамиз:

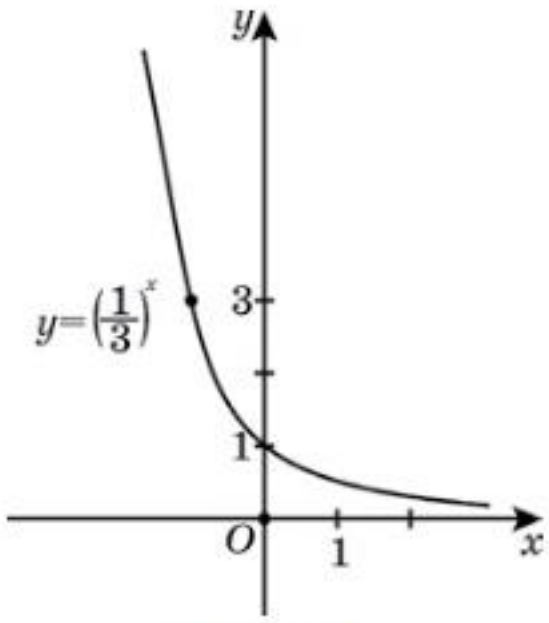
5-жадвал

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

(−3; 27), (−2; 9), (−1; 3), (0; 1), $\left(1; \frac{1}{3}\right)$, $\left(2; \frac{1}{9}\right)$, $\left(3; \frac{1}{27}\right)$ нуқталарни координаталар текислигида ясаб ва уларни туташтириб, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функциянинг графигига эга бўламиз (35-расм).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



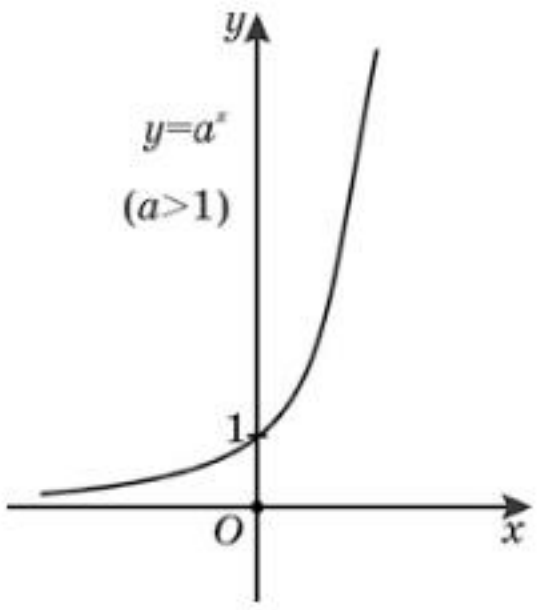
35-расм

Графикдан кўриниб турибдики, берилган функция аниқланиш соҳасида камаювчи функция экан.

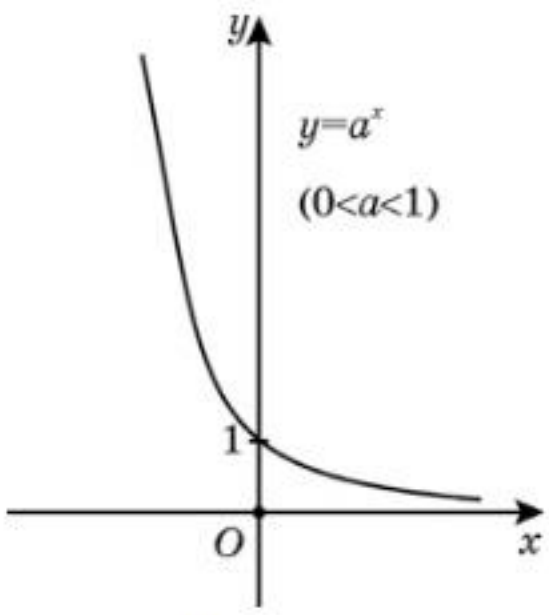
Энди $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, функциянинг графигини умумий кўринишда берамиз.

$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциянинг $a > 1$ бўлгандаги графиги 36-расмда, $0 < a < 1$ бўлгандаги графиги 37-расмда тасвирланган.

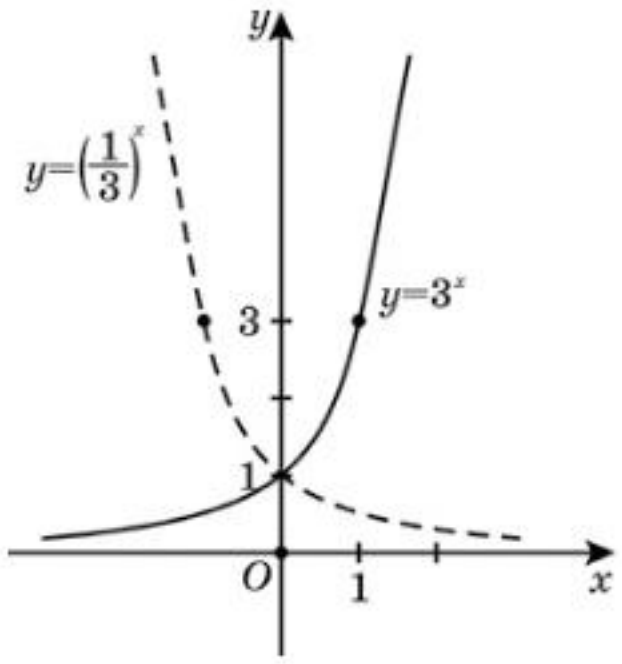
$y = 3^x$ ва $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ кўрсаткичли функцияларнинг графикларини битта координаталар текислигида ясаймиз (38-расм). Расмдан кўринадики, келтирилган функцияларнинг графиклари Oy ўқига нисбатан симметрик. Бундан ушбу фикр келиб чиқади: *агар кўрсаткичли иккита функциянинг асослари ўзаро тескари сонлар бўлса, у ҳолда ўша функцияларнинг графиклари Oy ўқига нисбатан симметрик.*



36-расм



37-расм



38-расм

4) Кўрсаткичли функциянинг узлуксизлигини исботлаймиз.

$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, функция берилган бўлсин. Агрумент x га Δx орттирма берсак, аргумент орттирмасига мос функция ҳам орттирма қабул қилади:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x = a^x\,(a^{\Delta x} - 1).$$

Энди ўша орттирманинг $\Delta x \to 0$ интилгандаги лимитини топамиз:

$$\Delta y \to a^x \cdot (a^0 - 1) = 0.$$

Аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг чексиз кичик орттирмаси мос келади. Бу қонуният $y = a^x$ функция учун аргументнинг аниқланиш соҳасидаги исталган нуқтада бажарилади. Демак, $y = a^x$ функция ўзининг аниқланиш соҳасидаги исталган нуқтада узлуксиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Сиз кўрсаткичли функция хоссаларини масалаларечишда қўлланишни ўрганасиз.

МИСОЛ **1.** $y = 5^{x-1} + 1$ функциянинг графигини ясаймиз.

Ечилиши. Дастлаб $y = 5^x$ функциянинг графигини ясаш керак. Бунинг учун $a = 5 > 1$ эканини эътиборга олиб, 36-расм бўйича барча ҳақиқий сонлар тўпламида ўсувчи функциянинг графигини ясаймиз. Сўнгра ясалган графикни Ox ўқ бўйлаб бир бирлик ўнгга параллел кўчирамиз. Ҳосил бўлган графикни Oy ўқ бўйлаб бир бирлик юқорига параллел кўчирамиз (39-расм).

МИСОЛ **2.** $0{,}27^4$ ва $0{,}27^{10}$ сонларни таққослаймиз.

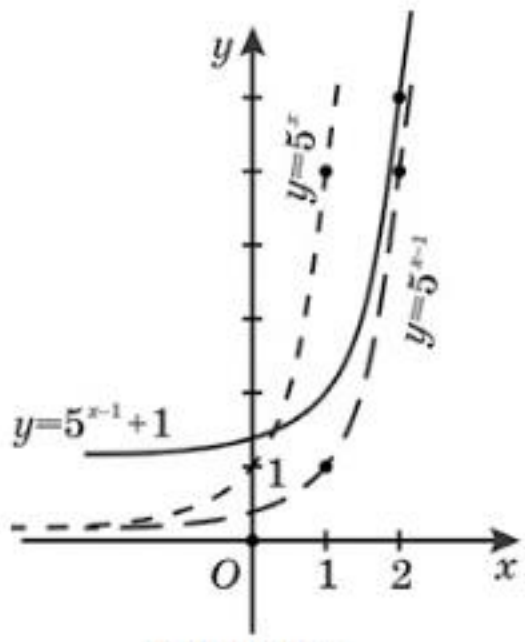
Ечилиши. Берилган сонларнинг асослари бир хил ва 0,27 га тенг. Ўша асосни 1 сони билан таққослаймиз: $0{,}27 < 1$, мазкур ҳолда кўрсаткичли функция камаювчи. Демак, кичик аргументга функциянинг катта қиймати мос келади. Шунинг учун $0{,}27^4 > 0{,}27^{10}$.

Жавоби: $0{,}27^4 > 0{,}27^{10}$.

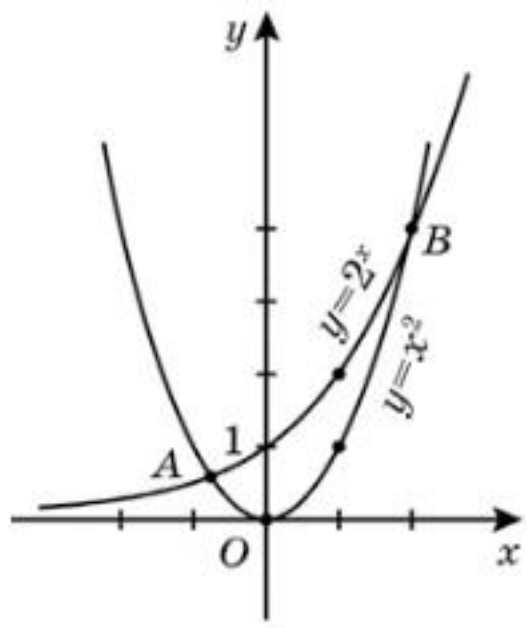
МИСОЛ **3.** $y = 2^x$ ва $y = x^2$ функцияларнинг графиклари нечта нуқтада кесишишини кўрсатамиз.

Ечилиши. Бунинг учун битта координаталар текислигида $y = 2^x$ ва $y = x^2$ функцияларнинг графикларини ясаймиз. Биринчи функция кўрсаткичли функция ва асоси 1 дан катта. Демак, $y = 2^x$ функциянинг графиги (0; 1) нуқтадан ўтувчи ва R да ўсувчи эгри чизиқдан иборат. $y = x^2$ функциянинг графиги эса учи (0; 0) нуқтада бўлган, тармоқлари юқорига йўналган параболадир. Графиклар A ва B нуқталарда кесишади (40-расм).

Жавоби: иккита нуқтада кесишади.



39-расм



40-расм

1. Кўрсаткичли функциянинг ўсувчи ёки камаювчи эканлигини қандай аниқлаш мумкин?
2. Нима учун барча кўрсаткичли функцияларнинг графиклари (0; 1) нуқтадан ўтади? Жавобингизни асосланг.
3. Нима учун $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функция юқоридан чегараланмаган, қуйидан эса чегараланган ($a > 1$ ва $0 < a < 1$ бўлган ҳоллар учун қараб чиқинг)?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Машқлар

А

$y = f(x)$ функциянинг графигини ясанг (**12.1-12.2**):

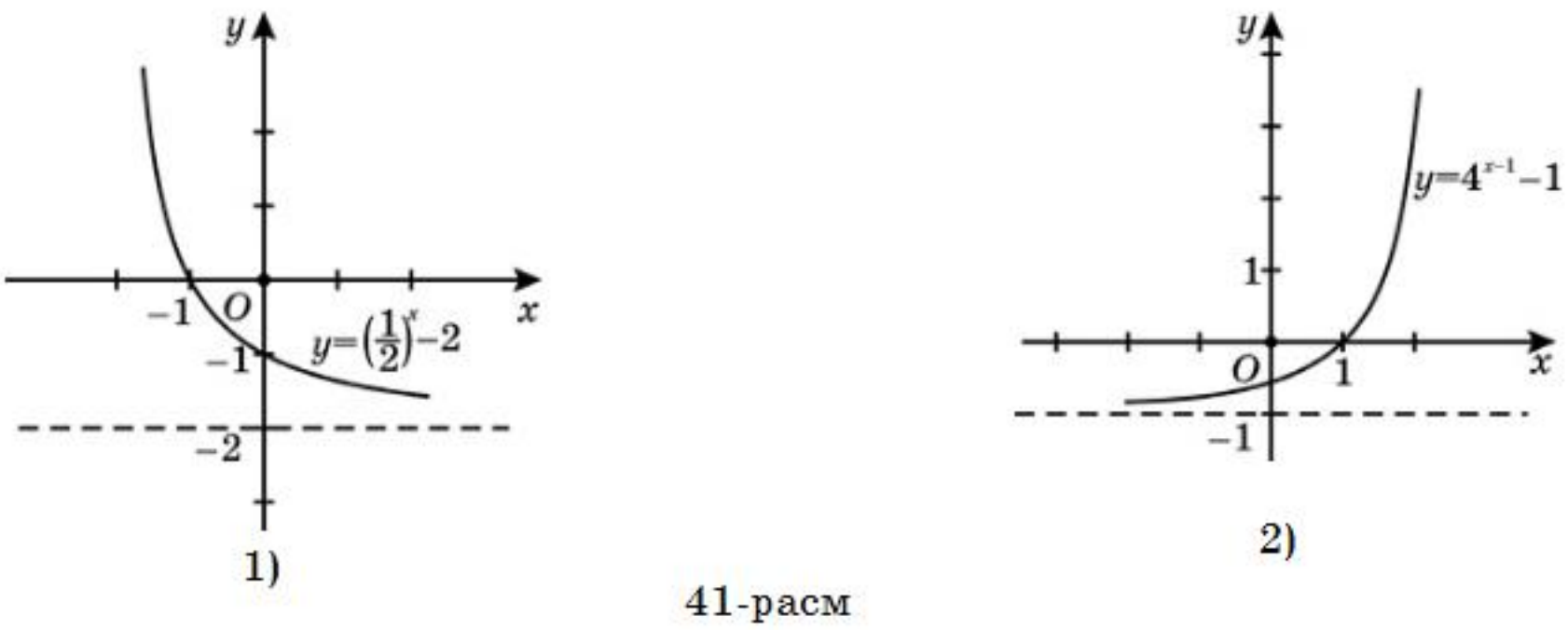
12.1. 1) $f(x) = 5^x$; 2) $f(x) = 1{,}5^x$;

3) $f(x) = 0{,}85^x$; 4) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

12.2. 1) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 2) $f(x) = \left(1\frac{1}{6}\right)^x$;

3) $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x$; 4) $f(x) = 4^x$.

12.3. Берилган график бўйича функциянинг хоссаларини айтинг (41-расм):



41-расм

12.4. $y = f(x)$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x) = 0{,}24^x + 3$; 2) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x - 2$;

3) $f(x) = -7^x + 1$; 4) $f(x) = 36^x - 4$.

12.5. Сонларни таққосланг:

1) $1{,}8^3$ ва 2^3; 2) $0{,}8^2$ ва $0{,}54$;

3) $0{,}5^3$ ва $0{,}5^7$; 4) $3{,}2^{1{,}6}$ ва $3{,}2^{1{,}7}$;

5) $0{,}2^{\sqrt{2}}$ ва $0{,}2^{1{,}4}$; 6) 3^{π} ва $3^{3{,}149}$.

12.6. 1; 8; 32; $\frac{1}{64}$; 0,25; 0,0625 сонларни 2 сонининг даражаси кўринишида ёзинг.

12.7. Ҳисобланг:

1) $4^{1-3\sqrt{2}} \cdot 64^{\sqrt{2}-1}$; 2) $\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $49^{\sqrt{7}} : 7^{2\sqrt{7}}$; 4) $6^{2\sqrt{5}+1} : 36^{\sqrt{5}}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

12.8. Соддалаштиринг:

1) $\left(\frac{1}{a}\right)^{2+\sqrt{3}} \cdot a^{\sqrt{3}+2}$; 2) $\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}} \cdot$ [redacted] ;

3) $b^{3,5} : \left(b\sqrt{b^3}\right)$; 4) $b^{\sqrt{5}} \cdot b^{1,4} : \sqrt[4]{b^{4\sqrt{5}}}$.

12.9. $y = f(x)$ ва $y = g(x)$ функцияларнинг графиклари нечта нуқтада кесишишини топинг:

1) $f(x) = 3^x$ ва $g(x) = 3x$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ ва $g(x) = x^2$;

3) $f(x) = 7^x$ ва $g(x) = \frac{1}{x}$; 4) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ ва $g(x) = x^3$.

B

12.10. $y = a^x$ функциянинг графигига содда алмаштиришлар қўлланиб, $y = g(x)$ функциянинг графигини ясанг:

1) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$; 2) $g(x) = 4^x + 3$;

3) $g(x) = (2,5)^{x-1} + 2$; 4) $g(x) = (2,25)^{x+3} - 4$.

12.11. $y = f(x)$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x) = 4^x - 5,6$; 2) $f(x) = (0,35)^x + 3$;

3) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} - 1$; 4) $f(x) = 1 - 3^x$.

12.12. Таққосланг:

1) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ ва $3^{1,5}$;

2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{5}}$ ва $6^{-2,25}$;

3) $(7 - 4\sqrt{3})^{-3,5}$ ва $(7 - 4\sqrt{3})^{3,5}$;

4) $(5 + 2\sqrt{6})^{3,3}$ ва $(5 + 2\sqrt{6})^{-3,1}$.

12.13. $y = g(x)$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $g(x) = 3^{\cos x}$; 2) $g(x) = 2^{\sin x}$;

3) $g(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{2\sin x}$; 4) $g(x) = 4 - 16^{\frac{1}{2}\cos x}$.

12.14. Агар:

1) $b = 5$ бўлса, у ҳолда $\left(b^2\sqrt{b}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(b^3\sqrt{b}\right)^{\frac{1}{7}}$;

2) $b = 3$ бўлса, у ҳолда $\left(b^3\sqrt{b}\right)^{\frac{4}{7}} \cdot \left(b^5\sqrt[3]{b}\right)^{\frac{9}{16}}$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $b = 2$ бўлса, у ҳолда $\left(b^3\sqrt[3]{b}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot \left(b^2\sqrt[4]{b}\right)^{\frac{8}{9}}$;

4) $b = 4$ бўлса, у ҳолда $\left(b\sqrt[4]{b}\right)^{\frac{8}{5}} \cdot \left(b^2\sqrt[5]{b}\right)^{\frac{5}{11}}$ ифоданинг қийматини топинг.

12.15. $y = f(x)$ ва $y = g(x)$ функцияларнинг графиклари нечта нуқтада кесишишини кўрсатинг:

1) $f(x) = 5^x$ ва $g(x) = 6 - x$;

2) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ва $g(x) = 3 - x$;

3) $f(x) = 2^x - 2$ ва $g(x) = 1 - x$;

4) $f(x) = 3^{-x}$ ва $g(x) = -\frac{3}{x}$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даражанинг асоси ва хоссалари, кўрсаткичли функция, унинг хоссалари ва графиги.

13-§. СОННИНГ ЛОГАРИФМИ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

Сиз *соннинг логарифми* тушунчаси билан танишасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Сон, логарифм, ўнли логарифм, натурал логарифм, *e* сони

Таъриф. *Асоси a бўлган мусбат* ***b соннинг логарифми*** *деб b сонга тенг бўлган асоснинг даража кўрсаткичига айтилади.*

Логарифмнинг белгиланиши: log.

Логарифмнинг умумий кўриниши: $\log_a b$, бу ерда *a — логарифмнинг асоси, b — логарифм белгиси остидаги ифода.*

Логарифмнинг умумий кўринишининг ўқилиши: b соннинг a асос бўйича логарифми.

Таърифга кўра

$$\log_a b = u,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0, \qquad (1)$$

яъни $a^u = b > 0$.

Масалан: $\log_5 25 = 2$, чунки $5^2 = 25$; $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$, чунки $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

1. 16; 64; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{128}$ сонларнинг 2 асос бўйича логарифмларини топамиз.

Ечилиши. Логарифмларни топиш учун (1) формуладан фойдаланамиз:

$\log_2 16 = 4$, чунки $2^4 = 16$; $\log_2 64 = 6$, чунки $2^6 = 64$;

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, чунки $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $\log_2 \frac{1}{128} = -7$, чунки $2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$.

(1) формулани $a^u = b$ тенгликка қўйиб, ушбу айниятни ҳосил қилиш мумкин:

$$a^{\log_a b} = b. \qquad (2)$$

(2) айният *асосий логарифмик айният* дейилади.

Сиз логарифмнинг хоссаларини билиб оласиз.

$a > 0$, $a \neq 1$ ҳамда b, c мусбат сонлар бўлганда логарифм қуйидаги хоссаларга эга бўлади:

1) бир сонининг логарифми нолга тенг: $\log_a 1 = 0$;

2) a асосли a соннинг логарифми бирга тенг: $\log_a a = 1$;

3) кўпайтманинг логарифми кўпайтувчилар логарифмларининг йиғиндисига тенг:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c;$$

4) нисбат ёки касрнинг логарифми суратининг логарифми билан махражи логарифмларининг айирмасига тенг:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

5) даражанинг логарифми даража кўрсаткичининг шу даража асосидан олинган логарифмга кўпайтмасига тенг:

$$\log_a b^k = k \log_a b;$$

6) янги асосга, яъни бир асосдан бошқа асосга ўтиш: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $0 < c \neq 1$;

7) $\log_{a^r} b = \frac{1}{r} \log_a b$.

Эслатма: $a^u = b$ бўлгани учун, барча формулаларда логарифм белгиси остидаги сонлар мусбат сонлар бўлади.

Берилган хоссалардан баъзиларини исботлаймиз.

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ хоссани исботлаймиз.

Исботи. $b = a^{\log_a b}$, $c = a^{\log_a c}$ бўлсин. b ва c сонларнинг кўпайтмасини аниқлаймиз:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$b \cdot c = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}$, яъни $b \cdot c = a^{\log_a b + \log_a c}$. Бундан логарифм таърифига мувофиқ ушбу тенгликка эга бўламиз:

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Энди $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ хоссани исботлаймиз.

Исботи. Бунинг учун асосий логарифмик $a^{\log_a b} = b$ айниятнинг иккала қисмидан асослари c га $(0 < c \neq 1)$ тенг логарифм оламиз,

$$\log_c (a^{\log_a b}) = \log_c b.$$

Энди даражанинг логарифми формуласидан фойдаланамиз ва

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Қолган хоссаларни мустақил исботланг.

Сиз логарифм хоссаларини билиб оласиз ва улардан логарифмик ифодаларни шакл алмаштиришда фойдаланишни ўрганасиз.

МИСОЛ

2. Логарифмларни ҳисоблаймиз:

1) $\log_3 (27 \cdot 81)$; 2) $\log_2 (32)^3$; 3) $\log_5 \sqrt[5]{25}$.

Ечилиши. 1) $\log_3 (27 \cdot 81) = \log_3 27 + \log_3 81 = 3 + 4 = 7$;

2) $\log_2 (32)^3 = 3\log_2 32 = 3\log_2 2^5 = 3 \cdot 5 = 15$;

3) $\log_5 \sqrt[5]{25} = \log_5 5^{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{5} \log_5 5 = \dfrac{2}{5}$.

Жавоби: 1) 7; 2) 15; 3) $\dfrac{2}{5}$.

Логарифмнинг асосий хоссалари логарифм иштирок этган алгебраик ифодаларни айнан шакл алмаштирганда қўлланилади.

Алгебраик ифода кўпайтма, бўлинма, даражалаш ва илдизни топиш амаллари орқали берилган мусбат сонларнинг ифодалари бўлса, у ҳолда уларни логарифмнинг асосий хоссаларидан фойдаланиб логарифмлаш мумкин.

МИСОЛ

3. $x = \dfrac{15^2 \cdot \sqrt{120}}{\sqrt[4]{58 \cdot 82}}$ ифодани логарифмлаймиз.

Ечилиши. Ифода каср кўринишида берилган. Дастлаб ифоданинг ўнг қисмига бўлинманинг логарифмини, сўнгра кўпайтма ва даражанинг логарифмини татбиқ этиб, шакл алмаштирамиз:

$\log_a x = \log_a \left(15^2 \cdot \sqrt{120}\right) - \log_a \left(\sqrt[4]{58 \cdot 82}\right) = \log_a 15^2 + \log_a \sqrt{120} - \log_a \sqrt[4]{58} - \log_a \sqrt[4]{82} =$

$= 2\log_a 15 + \dfrac{1}{2} \log_a 120 - \dfrac{1}{4} \log_a 58 - \dfrac{1}{4} \log_a 82.$

Шундай қилиб, $\log_a x = 2\log_a 15 + \dfrac{1}{2} \log_a 120 - \dfrac{1}{4} \log_a 58 - \dfrac{1}{4} \log_a 82.$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Сиз *ўнли логарифм* ва *натурал логарифм* тушунчалари билан танишасиз.

Логарифм асосга боғлиқ ҳолда бир неча турга бўлинади.

Асоси 10 сони бўлган логарифм *ўнли логарифм* дейилади.

Белгиланиши: $\lg b$, жумладан, $\log_{10} b = \lg b$.

Математикада баъзан логарифмнинг асоси сифатида олинадиган e сони қўлланилади. e — иррационал сон, $e \approx 2{,}718\ldots$. Унинг тақрибий қиймати $e \approx 2{,}72$.

Асоси $e \approx 2{,}718\ldots$ сонига тенг бўлган логарифм *натурал логарифм* дейилади. У $\ln b$ каби белгиланади, яъни $\log_e b = \ln b$.

МИСОЛ

4. 1) $\lg 30 - \lg 3$; 2) $\ln 0{,}5 + \ln(2e^3)$ қийматларни ҳисоблаймиз.

Ечилиши. 1) $\lg 30 - \lg 3$ ифоданинг қийматини топиш учун касрнинг логарифмини топиш хоссасидан фойдаланамиз:

$\lg 30 - \lg 3 = \lg(30 : 3) = \lg 10 = 1$, чунки $10^1 = 10$;

2) $\ln 0{,}5 + \ln(2e^3)$ ифодага логарифм кўпайтмасининг хоссасини татбиқ этиб, бундай ёзамиз: $\ln 0{,}5 + \ln(2e^3) = \ln(0{,}5 \cdot 2e^3) = \ln e^3 = 3\ln e = 3 \cdot 1 = 3$.

Жавоби: 1) 1; 2) 3.

Энди логарифми бошқа ифодаларнинг логарифмлари орқали берилган ифодани топишни қараб чиқамиз, бундай шакл алмаштиришлар *потенциаллаш* дейилади.

Потенциаллаш учун ушбу мулоҳазадан фойдаланамиз:

$$\log_a t = \log_a s$$

тенглик $t = s$ бўлгандагина бажарилади, бу ерда $a > 0$, $a \neq 1$, $t > 0$, $s > 0$.

Потенциаллашга доир мисол кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

5. $\log_a x = 3\log_a 17 + \frac{2}{3}\log_a 5 - \frac{1}{7}\log_a 75 - \frac{1}{7}\log_a 96$ тенгликдаги x нинг қийматини топамиз.

Ечилиши. Берилган тенгликнинг ўнг қисмидаги ифодани логарифмнинг хоссаларидан фойдаланиб шакл алмаштирамиз:

$3\log_a 17 + \frac{2}{3}\log_a 5 - \frac{1}{7}\log_a 75 - \frac{1}{7}\log_a 96 = \log_a 17^3 + \log_a \sqrt[3]{5^2} - \log_a \sqrt[7]{75} - \log_a \sqrt[7]{96} = \log_a \frac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$. Бунда $\log_a x = \log_a \frac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$. Демак, потенциаллаш бўйича $x = \frac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$.

Жавоби: $\frac{17^3 \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[7]{75 \cdot 96}}$.

1. Манфий соннинг логарифми мавжудми? Жавобингизни асосланг.
2. Янги асосга ўтиш хоссаси қачон қўлланилади?
3. Потенциаллашда логарифмнинг асоси эътиборга олинадими? Жавобингизни асосланг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Машқлар

А

Тенгликларни логарифм орқали ифодаланг **(13.1—13.3)**:

13.1. 1) $3^3 = 27$; 2) $2^5 = 32$;
3) $3^{-2} = \frac{1}{9}$; 4) $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

13.2. 1) $4^3 = 64$; 2) $2^{-6} = \frac{1}{64}$;
3) $3^4 = 81$; 4) $3^{-5} = \frac{1}{243}$.

13.3. 1) $27^{\frac{2}{3}} = 9$; 2) $32^{\frac{3}{5}} = 8$;
3) $81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$; 4) $125^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{25}$.

Тенгликларнинг ўринли эканини текширинг **(13.4—13.7)**:

13.4. 1) $\log_3 81 = 4$; 2) $\log_5 1 = 0$;
3) $\log_2 64 = 6$; 4) $\log_5 625 = 4$.

13.5. 1) $\log_5 0{,}04 = -2$; 2) $\log_7 2401 = 4$;
3) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$; 4) $\lg 0{,}001 = -3$.

13.6. 1) $\log_{\sqrt{2}} 16 = 8$; 2) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$;
3) $\log_3 243 = 5$; 4) $\lg 0{,}1 = -1$.

13.7. 1) $\log_{0,2} 0{,}008 = 3$; 2) $\log_{0,3} 0{,}09 = 2$;
3) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$; 4) $\lg 10^3 = 3$.

Берилган сонларнинг a асосдаги логарифмларини топинг **(13.8-13.9)**:

13.8. 1) 5; $\frac{1}{5}$; $\sqrt{5}$, $a = 5$; 2) 64; $\frac{1}{8}$; 128, $a = 2$;
3) 7; $\frac{1}{7}$; 49, $a = 7$; 4) 4; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{64}$, $a = 2$.

13.9. 1) 243; $\frac{1}{81}$; 27, $a = 3$; 2) 5; 25; $\frac{1}{625}$, $a = \frac{1}{5}$;
3) 4; 8; $\frac{1}{32}$, $a = \frac{1}{2}$; 4) 3; 9; $\frac{1}{27}$, $a = \frac{1}{3}$.

Ҳисобланг **(13.10—13.13)**:

13.10. 1) $\log_{12}3 + \log_{12}4$; 2) $\log_7 98 - \log_7 2$;
3) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} 5 - \log_{\frac{1}{3}} 405 + \log_{\frac{1}{3}} 9$.

13.11. 1) $3^{\log_3 5} + 5^{\log_5 6}$; 2) $25^{\log_5 3} + 49^{\log_7 2}$;
3) $7^{\log_7 6} - 8^{\log_8 9}$; 4) $0{,}04^{\log_{0,2} 5} + 0{,}36^{\log_{0,6} 5}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

13.12. 1) $\lg 4 + \lg 250$; 2) $\log_2 6 - \log_2 \frac{6}{32}$;

3) $(\log_{12} 4 + \log_{12} 36)^2$; 4) $\lg 13 - \lg 1300$.

13.13. 1) $\left(\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{\log_3 16}{\log_3 4}\right)^{-1}$;

3) $(\log_2 13 - \log_2 52)^5$; 4) $(\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10)^4$.

13.14. Тенгламани ечинг:

1) $\log_3 x = -1$; 2) $\log_2 x = -5$;

3) $\log_3 x = 2$; 4) $\log_4 x = 3$;

5) $\log_4 x = -3$; 6) $\log_7 x = 0$;

7) $\log_{\frac{1}{7}} x = 1$; 8) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

B

Ҳисобланг (**13.15—13.17**):

13.15. 1) $\log_2 \log_2 \log_3 81$; 2) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$;

3) $\log_{\sqrt{3}} \log_5 125$; 4) $\log_4 \log_3 81$.

13.16. 1) $\frac{1}{\log_9 27}$; 2) $\frac{1}{\log_{16} 8}$;

3) $\log_2 128 \cdot \log_5 \frac{1}{125}$; 4) $\log_3 (\log_2 5 \cdot \log_5 8)$.

13.17. 1) $\frac{3}{\log_3 3} - \frac{2}{\log_8 4} - \frac{1}{\log_{27} 81}$; 2) $\frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 3{,}6 + 1}$;

3) $2^{2-\log_2 5} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$; 4) ☒ .

13.18. Тенгламани ечинг:

1) $\log_x 81 = 4$; 2) $\log_x \frac{1}{16} = 2$;

3) $\log_x \frac{1}{27} = -3$; 4) $\log_x 36 = 2$.

13.19. Берилган сонларни a асосдаги логарифм шаклида ёзинг:

1) $2;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 0,\ a = 2$; 2) $3;\ -1;\ -3;\ 1,\ a = 3$;

3) $4;\ 3;\ 0;\ -1,\ a = 4$; 4) $5;\ 3;\ 0;\ 1,\ a = 5$.

13.20. Берилган ифодаларни ўнли логарифм орқали ифодаланг:

1) $N = 100\sqrt{ab^3c}$; 2) $N = \frac{a^6}{0{,}1c^3\sqrt{6}}$;

3) $N = \sqrt[4]{10}a^{\frac{1}{3}}b^4c^{-\frac{1}{2}}$; 4) $N = \frac{0{,}001a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{c}\cdot b^3}$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

5) $N = 10^4 a^5 \sqrt{b}\, c^{-4}$;

6) $N = \dfrac{c^{\frac{2}{3}}}{10^3 b^6 c^4}$;

7) $N = 10^{-4} \cdot a^3 b^3 c^{\frac{2}{3}}$;

8) $N = \dfrac{c^{\frac{4}{7}}}{10^7 a^{\frac{3}{2}} b^9}$.

13.21. Исботланг:

1) $\log_5 6 + \log_4 5 > -1$;

2) $\log_{\frac{1}{4}} 2 + \log_{\frac{2}{3}} 4 < 1$;

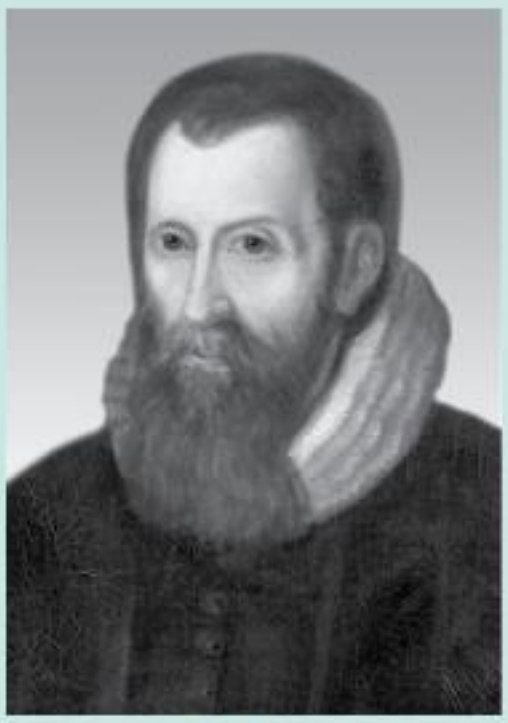
3) $8^{\log_7 9} = 9^{\log_7 8}$;

4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_4 \frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_4 \frac{1}{6}}$.

МАТЕМАТИК ОЛИМ ҲАҚИДА АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

13.22. 1) *Соннинг логарифми* тушунчасининг ривожланиш тарихи бўйича ахборот тайёрланг.

2) Математик олим Жон Непер ва унинг "Логарифмларнинг ажойиб жадвали" ҳақида ахборот тайёрланг.



Ж. Непер
(1550—1617)

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг аниқланиш соҳаси ва графиги, даража, кўрсаткичли функция, унинг хоссалари ва графиклари, логарифм ва унинг хоссалари.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

14-§. ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИГИ

Сиз *логарифмикфункция* тушунчаси билан танишасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг графиги, логарифмик функция, аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, функциянинг хоссалари

Таъриф.

$$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1) \qquad (1)$$

формула билан берилган функция ***логарифмик функция*** *дейилади.*

Сиз логарифмик функциянинг хоссалари билан танишасиз; графигини ясашни ўрганасиз.

$y = \log_a x (a > 0,\ a \neq 1)$ функциянинг асосий хоссалари:

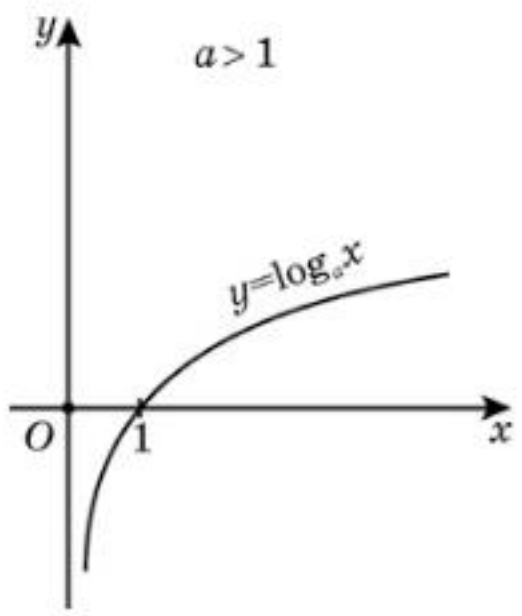
1) аниқланиш соҳаси — барча мусбат сонлар тўплами, яъни $D(\log_a x) = (0; +\infty)$;

2) логарифмик функциянинг қийматлар тўплами — барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$;

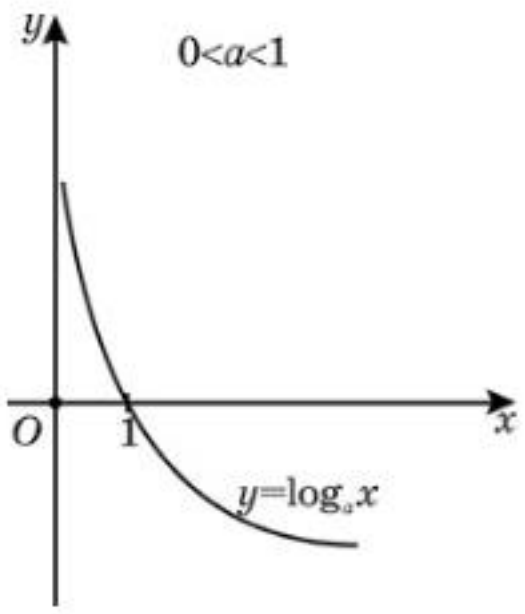
3) асоси $a > 1$ бўлганда логарифмик функция ўсувчи, асоси $0 < a < 1$ бўлганда камаювчи функция;

$y = \log_a x$ функциянинг асоси $a > 1$ бўлгандаги графиги 42.1-расмда, асоси $0 < a < 1$ бўлгандаги графиги 42.2-расмда кўрсатилган;

4) $y = \log_a x$ функция ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиз.



1)



2)

42-расм

Функциянинг хоссаларини исботлаймиз.

1) Ҳар қандай мусбат соннинг берилган асосда ($a > 0,\ a \neq 1$) логарифмга эга бўлишини аввалги параграфда исботладик. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси — барча мусбат сонлар тўплами.

2) Логарифм таърифига кўра ҳар қандай u учун ушбу тенглик бажарилади:

$$\log_a a^u = u.$$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $y = \log_a x$ функциянинг аниқланиш соҳасидан аргументнинг исталган x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ қийматларини олиб ва уларга мос функциянинг $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$ қийматларини қараб чиқамиз.

$a > 1$ бўлган ҳолда $x_1 < x_2$ учун $\log_a x_1 < \log_a x_2$ тенгсизлик бажарилади.

Чунки асос $a > 1$ бўлганда катта сонга катта логарифм, кичик сонга кичик логарифм мувофиқ келади. Масалан, $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$; $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$. Демак, $\log_2 4 < \log_2 8$.

Логарифмнинг асоси $0 < a < 1$ бўлганда $x_1 < x_2$ учун

$$\log_a x_1 > \log_a x_2$$

бажарилади. Чунки асос $0 < a < 1$ бўлганда кичик сонга катта логарифм, катта сонга кичик логарифм мос келади.

Масалан, $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 2^2 = 2\log_{\frac{1}{2}} 2 = 2\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = -2$;

$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}}(2^3) = 3\log_{\frac{1}{2}} 2 = 3\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -3\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = -3$, бунда

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$. Демак, $\log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 8$.

4) $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ функциянинг узлуксизлигини исботлаймиз.

Аргумент x га Δx орттирма берамиз: $\Delta x = (x + \Delta x) - x$. Бунга мос функция орттирма қабул қилади: $\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x =$ $= \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$, бунда $\Delta y = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

Тенгликнинг иккала қисмидан $\Delta x \to 0$ интилгандаги лимитга ўтсак,

$$\Delta y \to \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a 1 = 0,$$

яъни аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг чексиз кичик орттирмаси мос келади.

Демак, $y = \log_a x$ функция x нуқтада узлуксиз функция. x нуқта — аниқланиш соҳасидаги ихтиёрий нуқта. Жумладан, $y = \log_a x$ аниқланиш соҳасидаги ҳар қандай нуқтада узлуксиз функция.

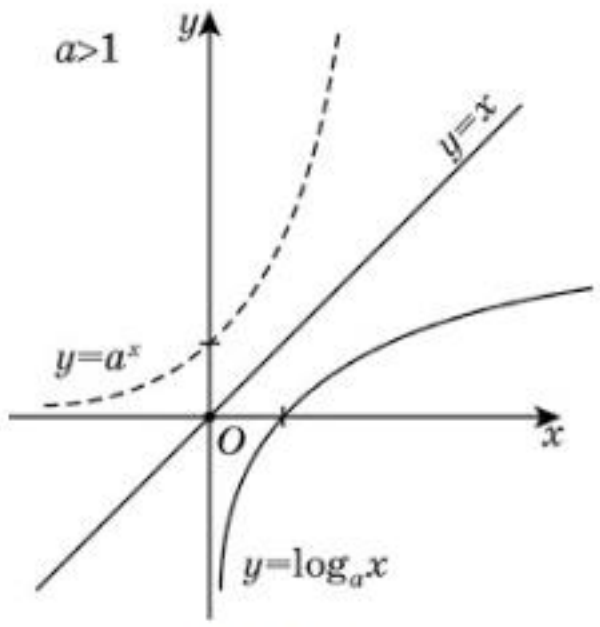
Энди функциянинг графигига тўхталамиз (43, 44-расмлар).

$a > 1$ бўлганда $x > 1$ қийматларда $y = \log_a x > 0$, $0 < x < 1$ қийматларда эса $y = \log_a x < 0$. $0 < a < 1$ бўлганда $x > 1$ қийматларда $y = \log_a x < 0$, $0 < x < 1$ қийматларда эса $y = \log_a x > 0$.

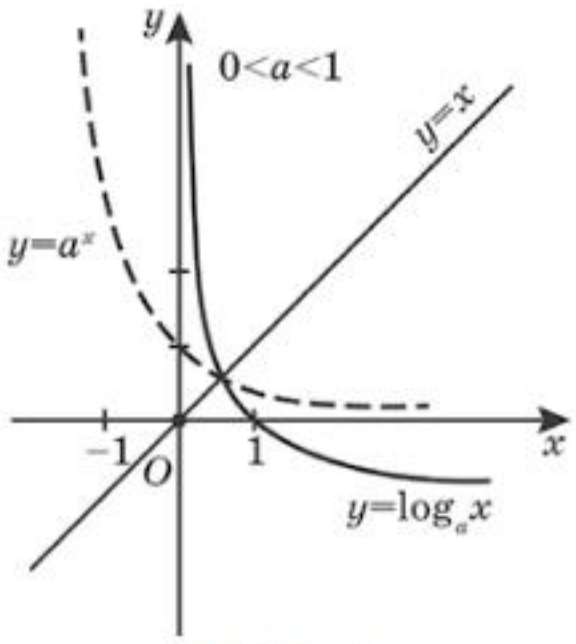
$y = \log_a x$ ва $y = a^x$ функцияларнинг графиклари $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик (43, 44-расмлар).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



43-расм



44-расм

Сиз логарифмик функция хоссаларини масалаларечишда қўлланишни ўрганасиз.

Логарифмик функциянинг асосий хоссаларига доир мисоллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

1. 1) $f(x) = \log_3(8 - 3x)$; 2) $f(x) = \log_2(5x^2 - 8x - 4)$; 3) $f(x) = \log_4 \frac{5x+3}{6-7x}$ функцияларнинг аниқланиш соҳасини топамиз.

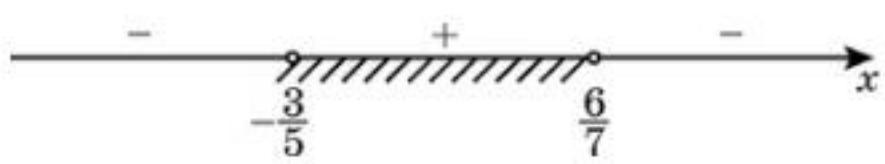
Ечилиши. 1) Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси — барча мусбат сонлар тўплами: $R_+ = (0; +\infty)$. Шунинг учун $f(x) = \log_3(8 - 3x)$ функциянинг аргументи $8 - 3x > 0$ ёки $x < \frac{8}{3}$.

Демак, $f(x) = \log_3(8 - 3x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $\frac{8}{3}$ дан кичик сонлар.

2) $f(x) = \log_2(5x^2 - 8x - 4)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $5x^2 - 8x - 4 > 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи сонлар тўплами. Интерваллар усулини татбиқ этиб, $x < -0{,}4$ ва $x > 2$, яъни $(-\infty; -0{,}4) \cup (2; +\infty)$ оралиқларни оламиз (45-расм):

45-расм

3) $f(x) = \log_4 \frac{5x+3}{6-7x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топиш учун $\frac{5x+3}{6-7x} > 0$ тенгсизликни кўриб чиқамиз. Ўша тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг қийматларини интерваллар усулида топамиз (46-расм):



46-расм

Шундай қилиб, $f(x) = \log_4 \frac{5x+3}{6-7x}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{7}\right)$ ораликдан иборат.

Жавоби: 1) $\left(-\infty; \frac{8}{3}\right)$; 2) $(-\infty; -0{,}4) \cup (2; +\infty)$; 3) $\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{7}\right)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

2. Берилган сонларни таққослаймиз:

1) $\log_2 13$ ва $\log_2 17$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} 3$ ва $\log_{\frac{1}{4}} 5$.

Ечилиши. 1) $\log_2 13$ ва $\log_2 17$ логарифмларнинг асослари бир хил ва $a = 2$. Асоси $a > 1$ бўлганда логарифмик функция ўсувчи, яъни катта сонга катта логарифм, кичик сонга кичик логарифм мос келади. Шунинг учун $\log_2 13 < \log_2 17$, чунки $13 < 17$.

2) $\log_{\frac{1}{4}} 3$ ва $\log_{\frac{1}{4}} 5$ логарифмлар бир хил асосга эга ва улар $\frac{1}{4}$ га тенг ва $0 < \frac{1}{4} < 1$. $0 < a < 1$ бўлганда эса логарифмик функция камаювчи. Демак, $3 < 5$ бўлгани учун, $\log_{\frac{1}{4}} 3 > \log_{\frac{1}{4}} 5$.

Жавоби: 1) $\log_2 13 < \log_2 17$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} 3 > \log_{\frac{1}{4}} 5$.

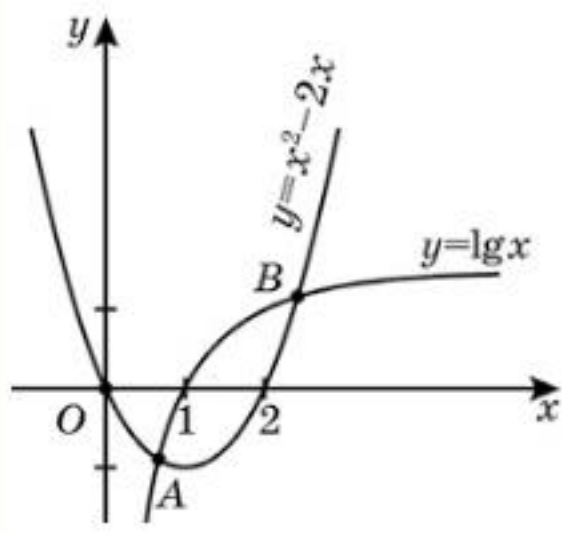
МИСОЛ

3. $y = \lg x$ ва $y = x^2 - 2x$ функцияларнинг графиклари нечта нуқтада кесишишини топамиз.

Ечилиши. Бунинг учун битта координаталар текислигида $y = \lg x$ ва $y = x^2 - 2x$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (47-расм).

Графиклар A ва B нуқталарда кесишади.

Жавоби: иккита нуқтада кесишади.



47-расм

1. Нима учун логарифмик функциянинг графиги Oy ўққа нисбатан координаталар текислигида ўнг томонда жойлашган?
2. Логарифмланадиган ифодалар қандай шартларни қаноатлантириши керак?
3. Кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг қандай ўхшашлиги бор?
4. Кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг қийматлар тўпламида фарқ борми? Жавобингизни асосланг.

Машқлар

А

$y = g(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг (**14.1-14.2**):

14.1. 1) $g(x) = \log_3 (3 + 4x)$; 2) $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} (7 - 2x)$;

3) $g(x) = \log_{5,2} (8 - 5x)$; 4) $g(x) = \log_{0,7} (x^2 - 49)$.

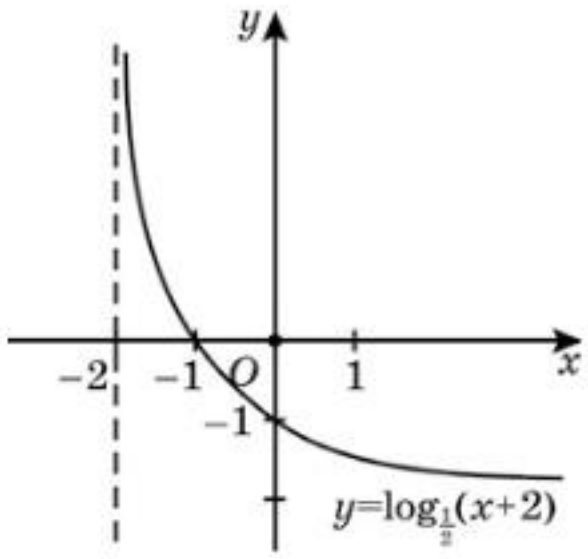
14.2. 1) $g(x) = \log_{0,12} (7 + 6x - x^2)$; 2) $g(x) = \log_{\sqrt{3}} \frac{x + 8}{2x - 7}$;

3) $g(x) = \lg \frac{3x + 15}{4 - x}$; 4) $g(x) = \ln(x^2 + x - 12)$.

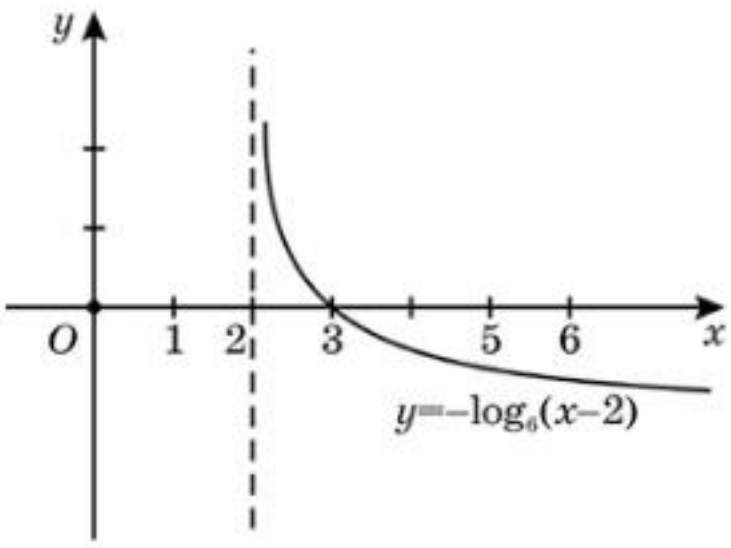
14.3. Графиклари 48-расмда берилган функцияларнинг хоссаларини айтинг:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



1)



2)

48-расм

Таққосланг (**14.4-14.5**):

14.4. 1) $\log_4 5{,}8$ ва $\log_4 8{,}1$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} 0{,}25$ ва $\log_{\frac{1}{5}} 0{,}36$;

3) $\log_{6,5} \frac{5}{6}$ ва $\log_{6,5} \frac{1}{6}$; 4) $\log_{\sqrt{3}} 5$ ва $\log_{\sqrt{3}} 4$.

14.5. 1) $\log_{\sqrt{7}} 8$ ва 1; 2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 10$ ва $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8$;

3) $\log_{\pi} \frac{3}{16}$ ва $\log_{\pi} \frac{1}{16}$; 4) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ ва $\log_{0,9} 2$.

14.6. $y = f(x)$ ва $y = g(x)$ функциялар графикларининг нечта нуқтада кесишишини кўрсатинг:

1) $f(x) = \lg x$ ва $g(x) = x$; 2) $f(x) = \lg x$ ва $g(x) = -x$;

3) $f(x) = \log_2 x$ ва $g(x) = x^2$; 4) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ ва $g(x) = -x^2$.

B

14.7. $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = \log_{1,5}(x^2 - 4) + \log_3(9 - x^2)$;

2) $f(x) = \log_4 x^3 - \log_{1,8}(x^2 - x)$;

3) $f(x) = \log_{1,5} \frac{x^2 - 1}{x + 5} - \sqrt{x}$;

4) $f(x) = \log_{0,7} \frac{4 - x^2}{6 - x} + \log_6 x$.

14.8. $y = f(x)$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x) = -\log_5(x + 1)$; 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(1 + x) + 5$;

3) $f(x) = |\log_7(x + 1)|$; 4) $f(x) = |\lg x| + 6$.

14.9. $y = f(x)$ функциянинг графигини ясаб, хоссаларини айтинг:

1) $f(x) = \log_4(x + 3)$; 2) $f(x) = -\log_2 x + 2$;

3) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x - 1)$; 4) $f(x) = \log_{0,5} x - 3$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

14.10. $y = f(x)$ ва $y = g(x)$ функцияларнинг графиклари нечта нуқтада кесишишини кўрсатинг:

1) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ва $g(x) = x - 1$;

2) $f(x) = \lg x$ ва $g(x) = x + 1$;

3) $f(x) = \log_5 x$ ва $g(x) = 7 + x$;

4) $f(x) = \log_{0,5} x$ ва $g(x) = 2 - x$.

14.11. $[a;\ b]$ кесмада $y = f(x)$ функциянинг энг кичик ва энг катта қийматини топинг:

1) $f(x) = \log_3 x$, $[1;\ 9]$; 2) $f(x) = \log_{0,5} x$, $[0,5;\ 4]$;

3) $f(x) = \log_7 x$, $[1;\ 7]$; 4) $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x$, $[5;\ 25]$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг лимити, функциянинг ҳосиласи, мураккаб функциянинг ҳосиласи, бошланғич функция, ҳосила ва бошланғич функцияни ҳисоблаш қоидалари, ҳосиланинг геометрик ва физик маъноси, функциянинг ҳосиласи ва бошланғич функция жадвали, уринма тенгламаси, интеграл.

15-§. КЎРСАТКИЧЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ ВА ИНТЕГРАЛИ. ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

Сиз кўрсаткичли функция ҳосиласини топишни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Кўрсаткичли функция, логарифмик функция, ҳосила, бошланғич функция, аниқ интеграл

Мазкур бобнинг бошида кўрсаткичли функциянинг аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, унинг аниқланиш соҳасида монотон ўсувчи ёки монотон камаювчи, узлуксиз эканлиги кўриб чиқилди. Энди $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ кўрсаткичли функциянинг аниқланиш соҳасидаги исталган нуқтада ҳосилани топиш формуласини берамиз.

Теорема 1. $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *кўрсаткичли функция ўзининг аниқланиш соҳасидаги ҳар бир нуқтада ҳосилага эга ва у ҳосила*

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (1)$$

формула билан топилади.

Исботи. Маълумки, $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ кўрсаткичли функциянинг аргументи x нуқтадан $x + \Delta x$ нуқтагача ўзгарганда ўртача тезлиги

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$\frac{\varnothing y}{\varnothing x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ формула билан аниқланади. Функциянинг ҳосиласини топиш учун $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ нисбатнинг $\Delta x \to 0$ интилгандаги лимитини топиб, уни функциянинг x нуқтадаги қийматига кўпайтирамиз. $\Delta x \to 0$ ҳолда $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to \ln a$ (мазкур формула олий математика курсида қаралади). Демак, $\Delta x \to 0$, у ҳолда $\frac{\varnothing y}{\varnothing x} \to a^x \ln a$, яъни $y' = a^x \ln a$.

Теорема 2. *$y = e^x$ кўрсаткичли функция ўзининг аниқланиш соҳасидаги ҳар бир нуқтада ҳосилага эга ва у ҳосила*

$$(e^x)' = e^x \qquad (2)$$

формула билан топилади.

МИСОЛ **1.** 1) $5a^x$; 2) $x^3 \cdot 2^x$; 3) $(x^2 + 1) \cdot 3^x$; 4) e^{3x} функцияларнинг ҳосилаларини топамиз.

Ечилиши. Берилган функцияларнинг ҳосилаларини топиш учун (1) ва (2) формулалар билан бирга ҳосилани ҳисоблаш формулаларидан фойдаланамиз:

1) $(5a^x)' = 5a^x \ln a$;

2) $(x^3 \cdot 2^x)' = (x^3)' \cdot 2^x + x^3 \cdot (2^x)' = 3x^2 \cdot 2^x + x^3 \cdot 2^x \cdot \ln 2 = x^2 \cdot 2^x (3 + x \ln 2)$;

3) $((x^2 + 1) \cdot 3^x)' = (x^2 + 1)' \cdot 3^x + (x^2 + 1) \cdot (3^x)' = 2x \cdot 3^x + (x^2 + 1) \cdot 3^x \ln 3 = 3^x \cdot (2x + (x^2 + 1) \ln 3)$;

4) $(e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = 3 \cdot e^{3x}$.

Жавоби: 1) $5a^x \ln a$; 2) $x^2 \cdot 2^x (3 + x \ln 2)$; 3) $3^x(2x + (x^2 + 1) \ln 3)$; 4) $3 \cdot e^{3x}$.

Сиз логарифмик функциянинг ҳосиласини топишни ўрганасиз.

Логарифмик функция ҳосиласини топиш формуласини келтирамиз.

Теорема 3. *$y = \log_a x$ функция аниқланиш соҳасида исталган нуқтада ҳосилага эга ва у*

$$y' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (3)$$

формула билан топилади.

Исботи. Бунинг учун аргумент x га Δx орттирма бериб, ўша орттирмага мос функция орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатини ёзамиз:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$. Энди охирги нисбатни айнан шакл алмаштирамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\varnothing x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$ ёки

$$\frac{\varnothing y}{\varnothing x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Энди логарифмик функциянинг узлуксизлигидан фойдаланиб, $\Delta x \to 0$ интилгандаги лимитга ўтамиз:

$\Delta x \to 0$, $\frac{\varnothing y}{\varnothing x} \to \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$, бу ерда $\Delta x \to 0$ интилганда $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \to e$ бўлади.

Шундай қилиб, $y = \log_a x$ функция учун $y' = \frac{1}{x}\log_a e$ ёки $y' = \frac{1}{x\ln a}$.

(3) формуладаги a сонни e сон билан алмаштирсак, $(\log_e x)' = \frac{1}{x\ln e}$ ёки

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (4)$$

МИСОЛ **2.** 1) $f(x) = \log_5 x$; 2) $g(x) = 3\ln x$; 3) $\phi(x) = 6\ln(x^2 - 4)$ функцияларнинг ҳосилаларини топамиз.

Ечилиши. Берилган функцияларнинг ҳосиласини топиш учун (3) ва (4) формулалар ва ҳосилани топиш жадвалидан фойдаланамиз:

1) $f'(x) = (\log_5 x)' = \frac{1}{x\ln 5}$; 2) $g'(x) = (3\ln x)' = \frac{3}{x}$;

3) $\phi'(x) = (6\ln(x^2 - 4))' = 6 \cdot \frac{1}{x^2 - 4} \cdot (x^2 - 4)' = \frac{12x}{x^2 - 4}$.

Жавоби: 1) $\frac{1}{x\ln 5}$; 2) $\frac{3}{x}$; 3) $\frac{12x}{x^2 - 4}$.

Сиз кўрсаткичли функциянинг бошланғич функциясини топишни ўрганасиз.

Кўрсаткичли функция учун бошланғич функция формуласини берамиз.

Теорема 4. *$y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$) кўрсаткичли функция ўзининг аниқланиш соҳасидаги исталган нуқтада бошланғич функцияга эга бўлади ва у*

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (5)$$

формула билан топилади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Исботи. Бунинг учун бошланғич функция таърифидан фойдаланиб, $F(x)$ функциядан ҳосила оламиз: $F'(x) = \left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (a^x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x$, $x \in R$. Бинобарин, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

МИСОЛ

3. Берилган функцияларнинг бошланғич функцияларини топамиз: 1) $f(x) = 7^x$; 2) $g(x) = 5 \cdot 3^x$; 3) $h(x) = 5e^{2x} - 8 \cdot 2^{3x}$.

Ечилиши. Берилган функцияларнинг бошланғич функциясини топиш учун (5) формула ва бошланғич функцияларни топиш жадвалини қўлланамиз: 1) $F(x) = \frac{7^x}{\ln 7} + C$; 2) $G(x) = 5 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$; 3) $H(x) = 5 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - 8 \cdot \frac{2^{3x}}{\ln 2} \cdot \frac{1}{3} + C = \frac{5}{2} e^{2x} - \frac{2^{3x+3}}{3\ln 2} + C$.

Жавоби: 1) $\frac{7^x}{\ln 7} + C$; 2) $5 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$; 3) $\frac{5}{2} e^{2x} - \frac{2^{3x+3}}{3\ln 2} + C$.

$y = \frac{1}{x}$ функция учун бошланғич функция

$$F(x) = \ln|x| + C \qquad (6)$$

формула билан топилади.

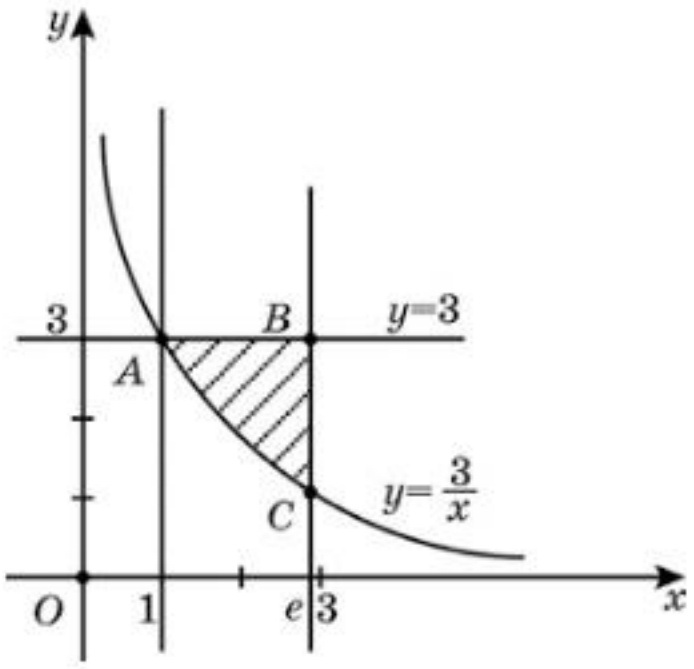
Демак, аниқмас интегрални топиш формуласи бундай бўлади: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$.

МИСОЛ

4. $y = \frac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 1$, $x = e$ чизиқлар билан чегараланган ясси фигура юзини топамиз.

Ечилиши. Берилган чизиқларни битта координаталар текислигида ясаймиз ва ABC ясси фигурани ҳосил қиламиз (49-расм).

Бу ерда $f(x) = 3$, $g(x) = \frac{3}{x}$, $a = 1$, $b = e$. Демак, $S_ф = \int_1^e \left(3 - \frac{3}{x}\right) dx = (3x - 3\ln|x|)\Big|_1^e = 3e - 3 - 3 = 3e - 6$.



49-расм

Жавоби: $3e - 6$ кв. бирл.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

1. Нима учун $y = a^x$ кўрсаткичли функция ҳосиласининг формуласи хусусий ҳолга эга? Жавобингизни асосланг.
2. Логарифмик функция ҳосиласининг формуласини бериш логарифмнинг қандай хоссасига асосланган?

Машқлар

А

$y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг (**15.1—15.3**):

15.1. 1) $f(x) = 3e^x + 3$; 2) $f(x) = 5x + 3e^x$;
3) $f(x) = 5 - \frac{1}{2}e^x$; 4) $f(x) = 5 \cdot e^{-x}$.

15.2. 1) $f(x) = e^x \cdot \sin x$; 2) $f(x) = e^{3x} + 2 \cdot 2^x$;
3) $f(x) = x^2 e^{3x}$; 4) $f(x) = 5 \cdot e^x \cdot \cos x$.

15.3. 1) $f(x) = \ln x \cdot \sin x$; 2) $f(x) = \ln x^3 + 4 \cdot 6^x$;
3) $f(x) = x^2 \ln(x^2 - 10)$; 4) $f(x) = 5 \cdot \ln(x - x^3) \cdot \cos x$.

15.4. $y = f(x)$ функция учун бошланғич функциянинг умумий кўринишини ёзинг:
1) $f(x) = 3e^x$; 2) $f(x) = 2 \cdot 5^x$;
3) $f(x) = 7 \cdot 4^x$; 4) $f(x) = 1 + 2^x$.

15.5. Интегралларни ҳисобланг:

1) $\int_0^1 2^x\,dx$; 2) $\int_0^1 e^x\,dx$; 3) $\int_1^3 2^x\,dx$; 4) $\int_{-2}^{-1} 3^x\,dx$.

15.6. Берилган чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; 2) $y = 5^x$, $x = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

В

$y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг (**15.7-15.8**):

15.7. 1) $f(x) = e^{x^3} \cos x$; 2) $f(x) = 5^{\frac{x}{2}} \cdot \mathrm{tg}\,x$;
3) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$; 4) $f(x) = 3^{x^2} \cdot \ln x$.

15.8. 1) $f(x) = (5^x + 4) \cdot x^3$; 2) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \log_2 x$;
3) $f(x) = x^2 \cdot e^{5x}$; 4) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$.

15.9. $y = f(x)$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:
1) $f(x) = e^x - ex$; 2) $f(x) = 2xe^x$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

15.10. $y = f(x)$ функциянинг экстремум нуқталарини топинг:

1) $f(x) = e^x - x$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

15.11. $f(x) = e^x$ функциянинг графигига $x_0 = -1$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг.

15.12. $y = x \ln x$ функцияни текшириб, графигини ясанг.

15.13. $y = g(x)$ функция учун B $(a;\ b)$ нуқтадан ўтувчи бошланғич функцияни топинг:

1) $g(x) = 4^x$, $B(\log_2 3;\ 0)$; 2) $g(x) = \frac{2}{x-3}$, $B(4;\ -2)$.

15.14. Ҳисобланг:

1) $\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx$; 2) $\int_0^{\log_3 2} 3^{0,5x}dx$.

15.15. Берилган чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $y = -\frac{5}{x}$, $x = -1$, $x = -2$, $y = 2$; 2) $y = 4^x$, $x = 2$, $y = 4$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $y = \frac{x-3}{125 - 5^{3x}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

A) R; B) Z;

C) $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; D) $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

2. $\log_{12}\left(\frac{49}{9}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2\right)$ ифоданинг қийматини ҳисобланг:

A) 12; B) 0;

C) 1; D) 144.

3. $y = \log_{5,3}(6 - 5x) + 10$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

A) $(-\infty;\ 1,2]$; B) $(-\infty;\ -1,2)$;

C) $(1,2;\ +\infty)$; D) $(-\infty;\ 1,2)$.

4. $\frac{1}{3}$; 27; 3^{-3}; 1; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ сонларни ўсиб бориш тартибида жойлаштиринг:

A) $\frac{1}{3}$; 27; 3^{-3}; 1; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; B) $\frac{1}{3}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; 3^{-3}; 1; 27;

C) 3^{-3}; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\frac{1}{3}$; 1; 27; D) 1; 3^{-3}; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\frac{1}{3}$; 27.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

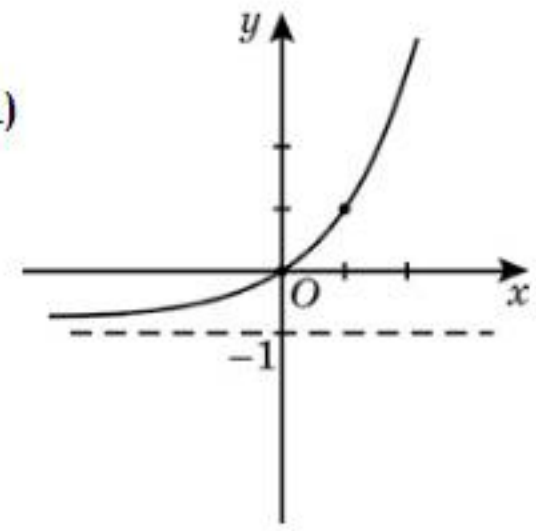
Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

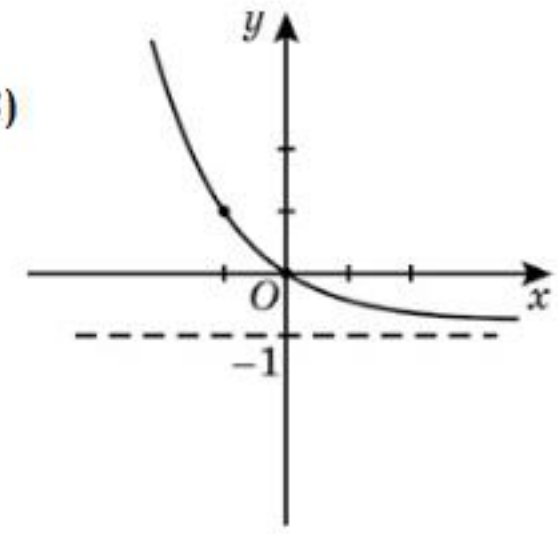
5. Агар $\log_7 5 = a$ ва $\log_7 13 = b$ бўлса, у ҳолда $\log_{65} 25$ ифоданинг қийматини топинг:

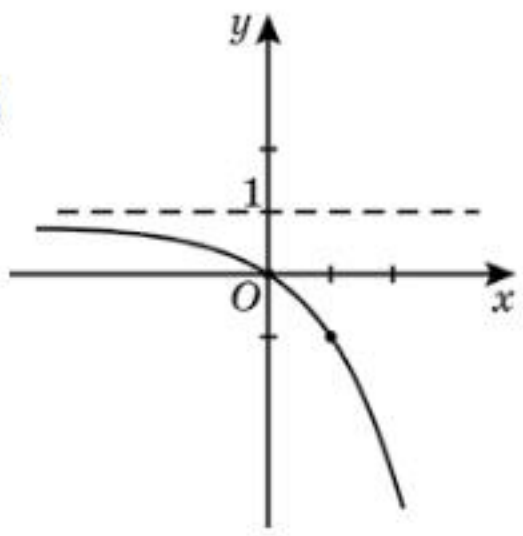
A) $\frac{2b}{a+b}$; B) $\frac{a+b}{2b}$;

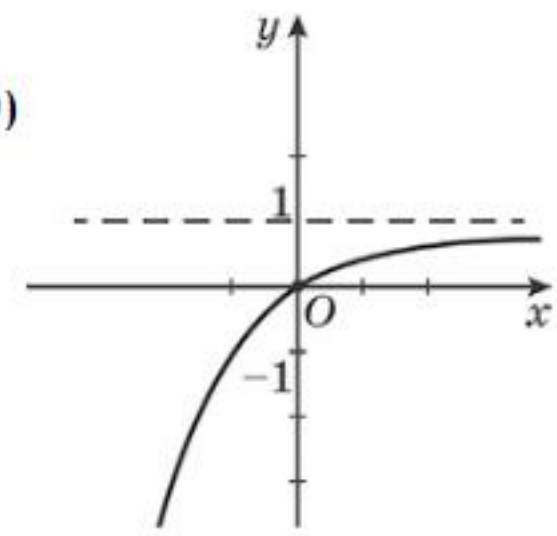
C) $\frac{2a}{a+b}$; D) $\frac{a+b}{b}$.

6. $y = -2^x + 1$ функциянинг графигини аниқланг:

A)


B)


C)


D)


7. $27^{\log_3 2} + 28$ ифоданинг қийматини ҳисобланг:

A) 12; B) 18;

C) 36; D) 3.

8. $y = \lg\frac{x+4}{2x-1}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

A) $(-\infty; -4] \cup (0{,}5; +\infty)$; B) $(-4; 0{,}5)$;

C) $(-\infty; -4) \cup (0{,}5; +\infty)$; D) $[-4; 0{,}5]$.

9. $y = \log_3(\sin 3x)$ функциянинг $x = \frac{\pi}{18}$ нуқтадаги ҳосиласи қийматини ҳисобланг:

A) $\frac{3}{\ln 3}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{\ln 3}$; C) $\frac{1}{\sqrt{3}\ln 3}$; D) $\frac{3\sqrt{3}}{\ln 3}$.

10. $y = 6xe^x$ функциянинг $[1; 2]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг:

A) 6; 12; B) $6e^2$; $12e$;

C) $6e$; $12e$; D) $12e^2$; $6e$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

11. Абсциссаси $x = 1$ бўлган нуқтадан ўтувчи $y = xe^{4x}$ функциянинг графигига ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

A) $5e^4x - 5e^4$; B) $5e^4x$;

C) $5e^4x - 4e^4$; D) $4e^4x - 5e^4$.

12. $\int_1^3 \left(\frac{2}{x} - 4^x\right) dx$ интегралнинг қийматини ҳисобланг:

A) $2\ln 3 - \frac{68}{\ln 4}$; B) $2\ln 3 + \frac{64}{\ln 4}$;

C) $2\ln 3 - \frac{60}{\ln 4}$; D) $\ln 3 - \frac{64}{\ln 4}$.

13. $y = 2^x$, $y = 1$, $x = 2$ чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

A) $2\ln 2 - 2$; B) $\frac{3}{\ln 2} - 2$;

C) $4\ln 2 - 2$; D) $\ln 2 - 2$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Кўрсаткичли функция ва унинг хоссалари, айнан шакл алмаштиришлар, тенглама, тенгламанинг илдизи, тенг кучли тенгламалар, тенгламалар ва улар системасини ечиш усуллари, даражага кўтариш, n-даражали илдиз ва унинг хоссалари.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

V БОБ КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

16-§. КЎРСАТКИЧЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Сиз *кўрсаткичли тенглама* тушунчаси билан танишасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, кўрсаткичли тенглама, даражанинг асоси, даражанинг кўрсаткичи, чет илдиз, тенгламани ечиш

Сиз кичик синфларда чизиқли, квадрат, каср-рационал ва тригонометрик тенгламаларни ечишни ўргандингиз. Тенгламаларнинг кенг тарқалган туридан бири — кўрсаткичли, яъни ўзгарувчи даража кўрсаткичида берилган тенгламалардир.

Таъриф.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1 \qquad (1)$$

кўринишда берилган ёки ўша кўринишга келадиган тенгламалар ***кўрсаткичли тенгламалар*** *дейилади.*

Масалан, $2^x = 32$; $7^x + 3 \cdot 7^{1-x} = 6$; $5^x - 13^x + 8^x = 0$ кўрсаткичли тенгламалардир.

Ҳар қандай кўрсаткичли тенгламани айнан шакл алмаштириш орқали

$$a^x = b \qquad (2)$$

тенгламага келтириш мумкин, бу ерда $a > 0$, $a \neq 1$, b — ихтиёрий сон.

(2) кўринишда берилган тенглама *содда кўрсаткичли тенглама* дейилади.

Кўрсаткичли функциянинг қиймати ҳар доим мусбат сон бўлгани учун, (2) тенгламанинг ўнг қисмидаги b сон ҳам мусбат бўлиши лозим. Демак, $b < 0$ ёки $b = 0$ бўлса, у ҳолда (1) тенглама ечимга эга эмас, яъни илдизлари мавжуд эмас.

Энди кўрсаткичли тенгламаларни ечиш усулларини қараб чиқамиз.

Сиз кўрсаткичли тенгламани бир хил асосга келтириш усулида ечишни ўрганасиз.

Кўрсаткичли тенгламанинг иккала қисмини бир хил асосга келтириш.

Бунинг учун (1) тенгламадаги b сонни a нинг бирор даражаси кўринишида шакл алмаштирамиз: $b = a^m$. У ҳолда

$$a^x = a^m. \qquad (3)$$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Асослари бир хил бўлгани учун, уларнинг даража кўрсаткичларини тенглаштириб $x = m$, (1) тенглама ёрдамида ечиш усули маълум бўлган $f(x) = g(x)$ тенгламага келтирамиз.

МИСОЛ

1. 1) $5^x = 125$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$; 3) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ тенгламаларни ечамиз.

Ечилиши. 1) $5^x = 125$ тенгламани ечиш учун $125 = 5^3$ эканини эътиборга олиб, $5^x = 5^3$ тенгламага эга бўламиз. Бунда (3) тенгламага кўра $x = 3$;

2) $81 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ эканини ҳисобга олсак, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$ тенгламага тенг кучли $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ тенгламага эга бўламиз. Бунда (3) тенгламага мувофиқ $x = -4$;

3) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ тенгламанинг ўнг қисмидаги $16\sqrt{2}$ сонни рационал кўрсаткичли даража хоссасини татбиқ этиб, асоси 2 бўлган даражага келтирамиз: $16\sqrt{2} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{4,5}$. Бунда берилган тенглама (3) тенгламадаги кўринишга келади: $2^{x^2-6x-2,5} = 2^{4,5}$. Бинобарин, $x^2 - 6x - 2,5 = 4,5$ ёки $x^2 - 6x - 7 = 0$, бундан $x_1 = -1$, $x_2 = 7$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ тенгламанинг иккала қисмини ҳам бир хил асосга келтириш учун дастлаб тенгламанинг чап қисмига кўрсаткичли функциянинг $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ хоссасини татбиқ этамиз: $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$ ёки $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3$. Ҳосил бўлган кўрсаткичли тенгламанинг асослари бир хил бўлгани учун, $x = 3$.

Жавоби: 1) 3; 2) −4; 3) −1; 7; 4) 3.

Сиз кўрсаткичли тенгламани умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш орқали ечишни ўрганасиз.

II. Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш.

Мазкур усулда кўрсаткичли функция умумий кўпайтувчи сифатида қавсдан ташқарига чиқарилиб, берилган тенглама содда кўрсаткичли тенгламага келтирилади.

МИСОЛ

2. 1) $6^{x+2} - 6^x = 210$; 2) $3^{3\cos x-1} + 3^{3\cos x-2} + 3^{3\cos x-3} = 13$; 3) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$ тенгламаларни ечамиз.

Ечилиши. 1) $6^{x+2} - 6^x = 210$ тенгламани шакл алмаштирамиз: $6^x \cdot 6^2 - 6^x = 210$. Энди 6^x даражани умумий кўпайтувчи сифатида қавсдан ташқарига чиқарамиз: $6^x \cdot (36 - 1) = 210$ ёки $6^x = 6$, бундан $x = 1$.

2) $3^{3\cos x-1} + 3^{3\cos x-2} + 3^{3\cos x-3} = 13$ тенгламани ечиш учун тенгламанинг чап қисмидаги умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарамиз: $3^{3\cos x-3}(3^2 + 3 + 1) = 13$ ёки $3^{3\cos x-3} \cdot 13 = 13$. Охирги тенгламанинг иккала қисмини 13 га қисқартирамиз: $3^{3\cos x-3} = 1$ ёки $3^{3\cos x-3} = 3^0$. Жумладан, $3\cos x - 3 = 0$ ёки $\cos x = 1$ ҳосил қиламиз. Тригонометрик тенгламани ечишнинг хусусий ҳолини татбиқ этамиз: $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$ тенгламадаги $2^{\sqrt{x}-1}$ қўшилувчини тенгламанинг ўнг қисмига ўтказамиз: $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} - 2^{\sqrt{x}-1} = 12$. Энди $2^{\sqrt{x}-1}$ умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарамиз: $2^{\sqrt{x}-1}(2^3 - 2^2 - 1) = 12$ ёки $2^{\sqrt{x}-1} = 4$, $2^{\sqrt{x}-1} = 2^2$, у ҳолда $\sqrt{x} - 1 = 2$ ёки $\sqrt{x} = 3$. Ҳосил бўлган иррационал тенгламани ечиб, $x = 9$ эга бўламиз.

Жавоби: 1) 1; 2) $x = 2\pi n$, $n \in Z$; 3) 9.

Сиз кўрсаткичли тенгламани янги ўзгарувчи киритиш усулида ечишни ўрганасиз.

III. Янги ўзгарувчи киритиш орқали ечиш усули. Кўрсаткичли функцияни янги ўзгарувчи орқали белгилаб, тенгламани ечиш усули.

МИСОЛ **3.** $4^x + 2^{x+1} = 80$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. $4^x + 2^{x+1} = 80$ тенгламада $4^x = (2^x)^2$ эканини назарга олсак, $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 80 = 0$ квадрат тенгламага эга бўламиз. $2^x = a$ янги ўзгарувчи киритамиз, $a^2 + 2a - 80 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Унинг илдизлари $a_1 = 8$, $a_2 = -10$. Демак, $2^x = 8$, $2^x = 2^3$, $x = 3$. Кўрсаткичли функциянинг қийматлар тўплами фақат мусбат сонлар бўлгани учун, $2^x = -10$ тенглама ечимга эга эмас.

Жавоби: 3.

Сиз кўрсаткичли тенгламанинг иккала қисмини кўрсаткичли функцияга бўлиш орқали ечишни ўрганасиз.

IV. Тенгламанинг иккала қисмини кўрсаткичли функцияга бўлиш. Баъзи кўрсаткичли тенгламаларда икки ёки ундан кўп кўрсаткичли функциялар берилиши мумкин. Бундай ҳолларда кўрсаткичли функциянинг қиймати нолга тенг бўлмаслигини эътиборга олиб, тенгламанинг иккала қисмини ҳам кўрсаткичли функцияга ҳадма-ҳад бўлиб, уни ечиш усули маълум бўлган тенгламага келтирамиз.

МИСОЛ **4.** $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Кўрсаткичли функция хоссаларидан фойдаланиб, тенгламадаги 16^x; 36^x; 81^x ифодаларни шакл алмаштирамиз: $16^x = 2^{4x}$, $36^x = 2^{2x} \cdot 3^{2x}$, $81 = 3^{4x}$. Бунда берилган тенглама $3 \cdot 2^{4x} + 37 \cdot 2^{2x} \cdot 3^{2x} = 26 \cdot 3^{4x}$ кўринишга келади. Энди кўрсаткичли функциянинг қиймати нолга тенг бўлмаслигини назарга олиб, тенгламанинг иккала қисмини 3^{4x} даражага ҳадма-ҳад бўламиз: $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} + 37 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 26$. Бунда $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = t$ ўзгарувчини киритиб, $3t^2 + 37t - 26 = 0$ квадрат тенгламага келтирамиз. Унинг илдизлари $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = -13$. Кўрсаткичли функциянинг қийматлар тўплами фақат мусбат сонлар бўлгани учун, $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$ кўрсаткичли тенгламани ечамиз холос. Бундан $2x = 1$ ёки $x = 0{,}5$.

Жавоби: 0,5.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

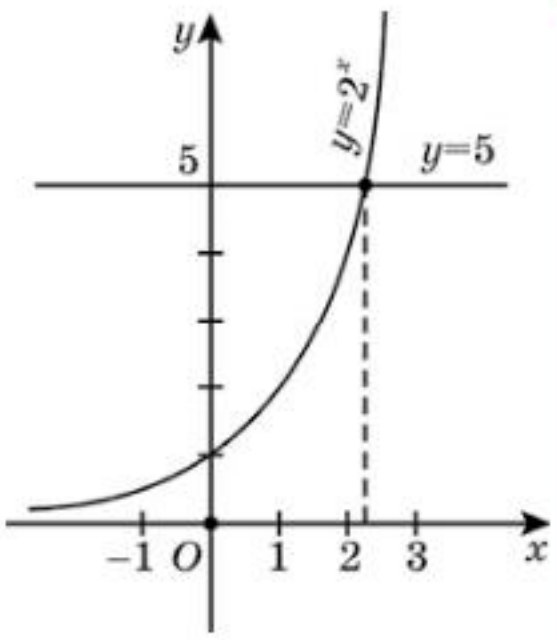
V. График усулни қўлланиш. График усул (2) кўринишдаги кўрсаткичли тенгламани, яъни $a^x = b$ тенгламани (3) кўринишдаги тенглама билан алмаштириш мумкин бўлмаган ҳолларда қўлланилади. Бундай тенгламанинг илдизини топиш учун $f(x) = a^x$ ва $g(x) = b$ функцияларнинг графикларини битта координаталар текислигида ясаб, кесишиш нуқталарини топамиз. Кесишиш нуқталарининг абсциссалари берилган кўрсаткичли тенгламанинг илдизлари бўлади.

МИСОЛ

5. $2^x = 5$ тенгламанинг илдизлари сонини аниқлаймиз.

Ечилиши. 5 сонини 2 сонининг даражаси кўринишида ёзиш мумкин эмас, яъни берилган тенглама (3) тенгламага келтирилмайди. Шунинг учун $2^x = 5$ тенгламани график усулда ечамиз. Бунинг учун $y = 2^x$ ва $y = 5$ функцияларнинг графикларини битта координаталар текислигида ясаймиз (50-расм). Расмдан кўриниб турибдики, ўтказилган чизиқлар фақат битта нуқтада кесишади. Демак, берилган тенгламанинг биттагина илдизи мавжуд.

Жавоби: битта илдиз.



50-расм

Сиз *кўрсаткичли тенгламаларсистемаси* тушунчаси билан танишасиз, кўрсаткичли тенгламаларсистемасини ечишни ўрганасиз.

Кўрсаткичли тенгламалар системасини ечишни кўриб чиқамиз.

Таъриф. *Таркибида кўрсаткичли тенгламалари бўлган тенгламалар системаси* ***кўрсаткичли тенгламалар системаси*** *дейилади.*

Кўрсаткичли тенгламалар системасини ечиш учун кўрсаткичли функциянинг хоссалари, кўрсаткичли тенгламалар ва тенгламалар системасини ечиш усуллари татбиқ қилинади.

Кўрсаткичли тенгламалар системасини ечишга доир мисоллар қараб чиқамиз.

МИСОЛ

6. $\begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x + 4^y = 80 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз.

Ечилиши. Берилган тенгламалар системасини ечиш учун ўрнига қўйиш усулидан фойдаланиб, тенг кучли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} y = 5 - x, \\ 4^x + 4^y = 80. \end{cases}$$

Бундан $4^x + 4^{5-x} = 80$ ёки $4^x + \dfrac{1024}{4^x} - 80 = 0$ тенглама ҳосил бўлади, бинобарин, $(4^x)^2 - 80 \cdot 4^x + 1024 = 0$. Энди $4^x = z$ деб олиб, $z^2 - 80z + 1024 = 0$ квадрат тенгламани ечамиз. Ҳосил бўлган квадрат тенгламанинг илдизлари $z_1 = 16$ ва $z_2 = 64$. Бунда $4^x = 16$ ва $4^x = 64$. Демак, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, у ҳолда мос равишда $y_1 = 3$, $y_2 = 2$.

Жавоби: (3; 2), (2; 3).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

7. $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \frac{11}{4}, \\ 2^x - 3^y = -\frac{3}{4} \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз.

Ечилиши. Тенгламалар системасида иккита кўрсаткичли функция берилган. Дастлаб янги ўзгарувчилар киритамиз: $2^x = u$, $3^y = v$. Натижада иккита номаълумли чизиқли тенгламалар системасига эга бўламиз: $\begin{cases} 3u + 2v = \frac{11}{4}, \\ 2u - 2v = -\frac{3}{2}. \end{cases}$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасига алгебраик қўшиш усулини татбиқ қиламиз.

У ҳолда $5u = \frac{5}{4}$ ёки $u = \frac{1}{4}$. u нинг қийматини системадаги биринчи тенгламага қўямиз, $2v = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = 2$, $v = 1$.

Бунда $2^x = \frac{1}{4}$, $3^y = 1$ кўрсаткичли тенгламалар ҳосил бўлади . Уларни ечиб, $x = -2$, $y = 0$ эга бўламиз.

Жавоби: $(-2; 0)$.

1. $5^{2x} = -7$, $2^{3x} = 9$ тенгламаларнинг илдизлари мавжудми? Илдизлари мавжуд бўлса, тенгламани қандай усулда ечиш керак?
2. Кўрсаткичли тенгламанинг чет илдизи бўлиши мумкинми? Жавобингизни асосланг.
3. Кўрсаткичли тенгламаларни ечганда янги ўзгарувчи киритиш усулини қандай мақсадда қўлланамиз? Жавобингизни асосланг.

Машқлар

А

Тенгламаларни ечинг **(16.1—16.6)**:

16.1. 1) $5^x = 625$; 2) $2^x = 1024$;

3) $3^x = 729$; 4) $7^x = \frac{1}{343}$.

16.2. 1) $2^{x+3} = 64$; 2) $3^{\frac{x}{2}} = 27$;

3) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 216$; 4) $\sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{343}$.

16.3. 1) $3^{x+2} - 3^x = 72$; 2) $2^x - 2^{x-4} = 15$;

3) $3^{x-3} + 3^{x-2} + 3^{x-1} = 3159$;

4) $2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

16.4. 1) $3^{x^2+1}+3^{x^2-1}=270$;

2) $2^{12x-1}-4^{6x-1}+8^{4x-1}-16^{3x-1}=1280$;

3) $2^{x^2+x-6}-2^{x^2+x-9}=56$;

4) $10^x-5^{x-1}\cdot 2^{x-2}=950$.

16.5. 1) $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x=128$;

2) $5^{x^2+x-5}=\frac{1}{125}$;

3) $(0{,}5)^{x^2-9x+17{,}5}=\frac{8}{\sqrt{2}}$;

4) $(0{,}5)^{x^2-2x-2}=\frac{1}{64}$.

16.6. 1) $5^{2x^2-x}=6^{2x^2-x}$;

2) $8\cdot 7^{x^2-5x+7}=7\cdot 8^{x^2-5x+7}$;

3) $0{,}6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$;

4) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11}=\left(\frac{125}{27}\right)^3$.

16.7. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $2^x=3$; 2) $0{,}2^x=5$; 3) $6^x=-1$;

4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}=4$; 5) $7^{-x}=-2$; 6) $4^{x-1}=4{,}4$.

Тенгламалар системасини ечинг (**16.8-16.9**):

16.8. 1) $\begin{cases}5^{x+y}=125,\\3^{(x-y)^2-1}=1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}3^x+3^y=12,\\6^{x+y}=216;\end{cases}$

3) $\begin{cases}4^{x+y}=128,\\5^{3x-2y-3}=1;\end{cases}$

4) ☒

16.9. 1) $\begin{cases}4^{x+y}=16,\\4^{x+2y-1}=1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}6^{3x-y}=\sqrt{6},\\2^{y-2x}=\frac{1}{\sqrt{2}};\end{cases}$

3) $\begin{cases}5^{2x+y}=125,\\7^{3x-2y}=7;\end{cases}$

4) $\begin{cases}3^{4x-3y}=27\sqrt{3},\\2^{4y+x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{cases}$

В

Тенгламаларни ечинг (16.10—16.14):

16.10. 1) $2^{x^2-6x+0{,}5}=\frac{1}{16\sqrt{2}}$;

2) $16\sqrt[5]{8^{x^2-3x-5}}=128$;

3) $\left(\frac{9}{16}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2x^2+5x}=\left(\frac{64}{27}\right)^4$;

4) $3^{x+1}\cdot 4^x=0{,}25\cdot 12^{3x-1}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

16.11. 1) $\sqrt{3^{x-54}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-58}} = 162$;

2) $5^{2x-1} + 4^x = 5^{2x} - 4^{x+1}$;

3) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$;

4) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$.

16.12. 1) $5^{x-3} - 5^{x-4} = 16 \cdot 5^{x-5} + 4$;

2) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;

3) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

4) $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0$.

16.13. 1) $x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3}-x} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3}-x}$;

2) $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} = 16 \cdot 4^{\sqrt{6-x}}$;

3) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$;

4) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.

16.14. 1) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$;

2) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;

3) $2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-2} = 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-3}$;

4) $8^x - 4^{x+0,5} - 2^x + 2 = 0$.

Тенгламалар системасини ечинг (16.15—16.17):

16.15. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{3x} = 3^{7-y}, \\ \frac{1}{x} + 2 = \frac{12}{y}. \end{cases}$

16.16. 1) $\begin{cases} 2^x + 3^y - 31 = 0, \\ 2^x + 23 = 3^y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5^x - 2 \cdot 3^y + 13 = 0, \\ 2 \cdot 5^x - 19 = -3^y. \end{cases}$

16.17. 1) $\begin{cases} -7^x + 11^y = 18, \\ 4 \cdot 7^x - 11^y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 13^x + 2 \cdot 3^y = 67, \\ 13^x + 14 = 3^y. \end{cases}$

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Логарифм, логарифмнинг асосий хоссалари, логарифмик функция, логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси, тенгламалар, тенг кучли тенгламалар, тенгламалар системаси.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

17-§. ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР

Сиз *логарифмик тенглама* тушунчаси билан танишасиз, логарифмик тенгламани ечишни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР
Тенглама,логарифмик тенглама,соннинг логарифми,логарифмнинг асоси,логарифм остидаги ифода,ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами,тенгламани ечиш

Таъриф.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \ (a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) > 0,\ g(x) > 0) \qquad (1)$$

кўринишда берилган ёки ўша кўринишга келадиган тенглама ***логарифмик тенглама*** *дейилади.*

Логарифмик тенгламани ечиш учун:

1) тенгламанинг иккала қисмини бир хил асосга келтириш;
2) янги ўзгарувчи киритиш;
3) потенциаллаш керак.

МИСОЛ **1.** $\log_5(2 - x) = 2$ тенгламанинг илдизларини топамиз.

Ечилиши. Дастлаб логарифмик тенгламанинг ўнг қисмидаги 2 сонини асоси 5 бўлган логарифм билан алмаштирамиз. У ҳолда $\log_5(2 - x) = \log_5 25$. Потенциаллаш орқали $2 - x = 25$ тенгламани ҳосил қиламиз. Тенгламанинг илдизи $x = -23$. Энди ҳосил бўлган илдизни берилган тенгламага қўйиб, тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоби: -23.

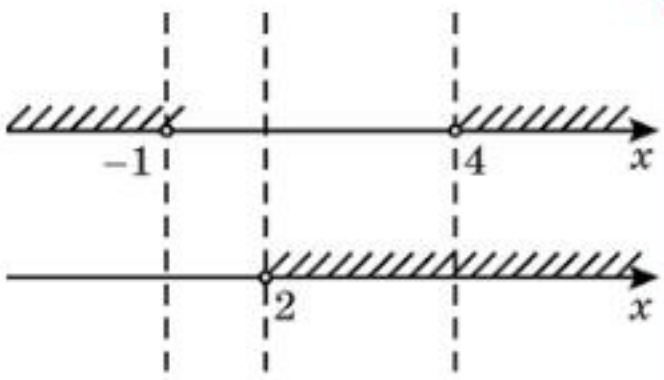
Умуман, логарифмик тенгламаларни ечганда логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси мусбат сонлар эканини эътиборга олиб, x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини аниқлаш мумкин. Сўнгра тенгламани ечиб, илдизларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламига тегишлилигини текшириш кифоя.

МИСОЛ **2.** $\log_3(x^2 - 3x - 4) = \log_3(2x - 4)$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Дастлаб x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топамиз. Бунинг учун логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси фақат мусбат сонлардан иборат эканини эътиборга олиб,

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0, \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} (x + 1)(x - 4) > 0, \\ x > 2 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасига эга бўламиз.



51-расм

Тенгсизликлар системасидаги ҳар қайси тенгсизликнинг ечимини координаталар тўғри чизиғида тасвирлаб, улар учун умумий бўлган қисмини топамиз (51-расм).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Демак, қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами $(4; +\infty)$ интервалдан иборат.

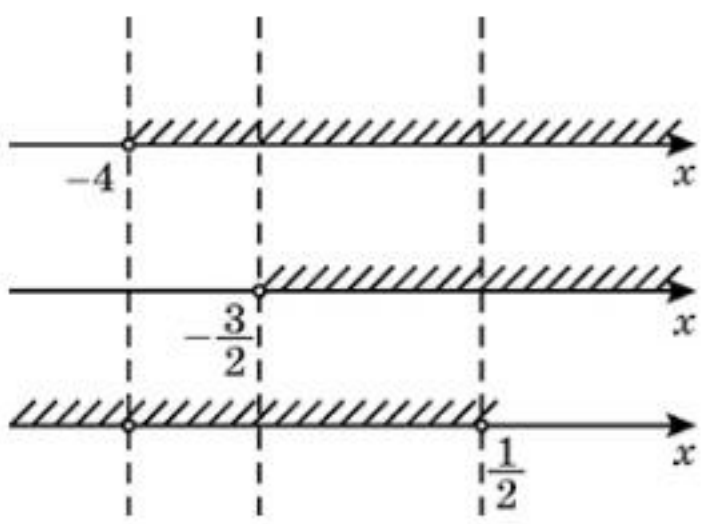
Берилган тенгламани потенциаллаймиз, $x^2 - 3x - 4 = 2x - 4$ тенглама ҳосил бўлади, бундан $x^2 - 5x = 0$ ва $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. Ҳосил бўлган илдизларнинг $(4; +\infty)$ интервалга тегишлилигини текширамиз. Жумладан, берилган логарифмик тенгламанинг илдизи $x = 5$, $x = 0$ эса чет илдиз бўлади.

Жавоби: 5.

МИСОЛ **3.** $\log_2(2x + 8) + \log_2(2x + 3) = \log_2(2 - 4x)$ тенгламанинг илдизларини топамиз.

Ечилиши. x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топамиз: $\begin{cases} 2x + 8 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 2 - 4x > 0 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x > -4, \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

Тенгсизликлар системасидаги ҳар бир тенгсизликнинг қийматлар тўпламини координаталар тўғри чизиғида тасвирлаймиз.



52-расм

Бунда x ўзгарувчининг қиймати $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ тенгсизликни қаноатлантириши керак (52-расм). Берилган логарифмик тенгламани (1) тенглама кўринишига келтирамиз. Бунинг учун тенгламанинг чап қисмига логарифм хоссасини татбиқ этамиз:

$$\log_2(2x + 8) + \log_2(2x + 3) = \log_2[(2x + 8)(2x + 3)].$$

У ҳолда берилган тенглама ушбу кўринишга келади:

$$\log_2[(2x + 8)(2x + 3)] = \log_2(2 - 4x).$$

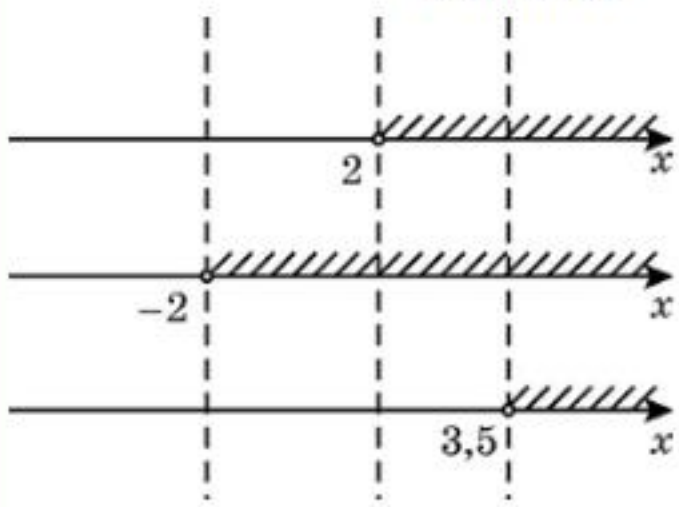
Потенциаллаш орқали охирги тенгламага тенг кучли тенгламани оламиз:

$$(2x + 8)(2x + 3) = 2 - 4x, \text{ бундан } 2x^2 + 13x + 11 = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари $x_1 = -5{,}5$ ва $x_2 = -1$. $x = -5{,}5$ чет илдиз, чунки x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламига тегишли эмас. Шунинг учун берилган тенгламанинг илдизи $x = -1$ бўлади.

Жавоби: -1.

МИСОЛ **4.** $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = 1 - \log_7(2x - 7)$ тенгламани ечамиз.



53-расм

Ечилиши. Дастаб x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топамиз. Бунинг учун

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ 2x - 7 > 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x > 2, \\ x > -2, \\ x > 3{,}5 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини ечамиз.

53-расмда кўрсатилганидек, x ўзгарувчининг қиймати $x > 3{,}5$ тенгсизликни қаноатлантириши керак.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Логарифмнинг хоссаларидан фойдаланиб, берилган тенгламадан ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$\log_7 \frac{x-2}{x+2} = \log_7 \frac{7}{2x-7}.$$

Асослари бир хил бўлгани учун, потенциаллаш орқали $\frac{x-2}{x+2} = \frac{7}{2x-7}$ тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан $(x-2)(2x-7) = 7(x+2)$ ёки $2x^2 - 18x = 0$, унинг илдизлари $x_1 = 0$ ва $x_2 = 9$.
$x_1 = 0$ — чет илдиз, $x_2 = 9$ x илдиз эса x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламига, яъни $(3{,}5; +\infty)$ оралиққа тегишли. Шунинг учун берилган тенгламанинг ечими $x = 9$.

Жавоби: 9.

МИСОЛ

5. $\log_5(x^2 + 8) = \log_5(x + 1) + 3\log_5 2$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топиш учун ушбу тенгсизликлар системасини кўриб чиқамиз:

$$\begin{cases} x^2 + 8 > 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

$x^2 + 8 > 0$ тенгсизлик x нинг ҳар қандай қийматида бажарилади. Демак, x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами $(-1; +\infty)$ интервалдан иборат. Логарифм хоссаларини қўлланиб, тенгламанинг ўнг қисмини шакл алмаштирамиз: $\log_5(x^2 + 8) = \log_5(x + 1) + \log_5 8$ ёки $\log_5(x^2 + 8) = \log_5(8(x + 1))$.
Ўша тенгламани потенциаллаймиз ва $x^2 + 8 = 8(x + 1)$ ёки $x^2 - 8x = 0$ эга бўламиз. Унинг илдизлари $x_1 = 0$, $x_2 = 8$. x нинг ушбу иккала қиймати ҳам $(-1; +\infty)$ интервалга тегишли.

Жавоби: 0; 8.

МИСОЛ

6. $x^{\log_6 x - 1} = 36$ тенгламанинг илдизларини топамиз.

Ечилиши. Берилган тенгламани айнан шакл алмаштириш орқали (1) тенгламага келтирамиз. Бунинг учун берилган тенгламанинг иккала қисмини бир хил асосда логарифмлаймиз: $\log_6 x^{\log_6 x - 1} = \log_6 36$ ёки $(\log_6 x - 1)\log_6 x = 2$ ёки $\log_6^2 x - \log_6 x - 2 = 0$. Энди $\log_6 x = u$ деб олиб, $u^2 - u - 2 = 0$ тенгламага келамиз. Унинг илдизлари $u_1 = -1$; $u_2 = 2$. У ҳолда $\log_6 x = -1$; $\log_6 x = 2$ тенглама ҳосил бўлади. $\log_6 x = -1$, $x_1 = \frac{1}{6}$; $\log_6 x = 2$, $x_2 = 36$. x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами $(0; +\infty)$ оралиқдан иборатлигини эътиборга олиб, x нинг иккала қийматини ҳам берилган логарифмик тенгламанинг илдизи сифатида оламиз.

Жавоби: $\frac{1}{6}$; 36.

Сиз логарифмик тенгламаларсистемасини ечишни ўрганасиз.

Логарифмик тенгламалар системасини ечишни кўриб чиқамиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Логарифмик тенгламалар системасини ечиш учун тенгламалар системаси ва логарифмик тенгламаларни ечиш усули қўлланилади.

МИСОЛ 7. $\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6 \end{cases}$ системани ечамиз.

Ечилиши. x ва y ўзгарувчиларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами мусбат сонлар. Логарифм хоссаларидан фойдаланиб, берилган системани шакл алмаштирамиз. Жумладан, $\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 (xy) = \log_2 64 \end{cases}$ тенгламалар системасини ҳосил қиламиз, бу тенгламалар системаси ўз навбатида ушбу системага тенг кучли:

$$\begin{cases} x + y = 34, \\ xy = 64. \end{cases}$$

Охирги тенгламалар системасидан $x^2 - 34x + 64 = 0$ квадрат тенгламага эга бўламиз. Унинг илдизлари $x_1 = 2$ ва $x_2 = 32$ ҳамда унга мос равишда $y_1 = 32$ ва $y_2 = 2$. Топилган (2; 32) ва (32; 2) сонлар жуфти берилган тенгламалар системасини қаноатлантиради.

Жавоби: (2; 32); (32; 2).

МИСОЛ 8. $\begin{cases} \lg(2x - y) + 1 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ 2\log_3 (x - y) = \log_3 (y + 2) \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз.

Ечилиши. Системадаги тенгламаларни айнан шакл алмаштириб,

$\begin{cases} \lg(2x - y) + \lg 10 = \lg(y + 2x) + \lg 6, \\ \log_3 (x - y)^2 = \log_3 (y + 2) \end{cases}$ ёки $\begin{cases} \lg[(2x - y) \cdot 10] = \lg[(y + 2x) \cdot 6], \\ \log_3 (x - y)^2 = \log_3 (y + 2), \end{cases}$ ёки

$\begin{cases} x = 2y, \\ (x - y)^2 = y + 2 \end{cases}$ тенгламалар системасига келтирамиз.

Ўрнига қўйиш усулидан фойдаланиб, охирги системадаги иккинчи тенгламанинг ўрнига $y^2 - y - 2 = 0$ эга бўламиз. Бундан $y_1 = -1$, $y_2 = 2$ ва унга мос равишда $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ илдизларни топамиз. Энди (−2; −1), (4; 2) қийматларни берилган тенгламалар системасига қўйиб текширамиз, (−2; −1) илдизнинг чет илдиз эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоби: (4; 2).

1. Берилган тенгламадаги логарифмик функцияларнинг аниқланиш соҳасини топиш шартми?
2. Кўрсаткичли ва логарифмик тенгламаларни ечишнинг умумий усулларини айтинг.
3. Қандай ҳолда x ўзгарувчининг қиймати логарифмик тенгламанинг ечими бўлмайди? Жавобингизни асосланг.

Машқлар

А

Тенгламаларни ечинг (**17.1—17.5**):

17.1. 1) $\log_7 x = 2$; 2) $\log_{\frac{2}{3}} x = 3$;

3) $\log_5 x = -3$; 4) $\log_{\frac{4}{7}} x = -2$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

17.2. 1) $\log_{\frac{1}{8}}(x-4)=-1$; 2) $\log_{2,5}(x+2)=1$;

3) $\lg x=-2$; 4) $\ln x=1$.

17.3. 1) $\log_2(x^2-2x)=3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(4x+x^2)=-1$;

3) $\log_{0,5}(x^3+1)=-1$; 4) $\lg(7x-x^2)=1$.

17.4. 1) $\log_{3,2}(2-x)=\log_{3,2}(3x+6)$; 2) $\log_{0,8}(1+2x)=\log_{0,8}(4x-10)$;

3) $\log_2(x-6)+\log_2(x-8)=3$; 4) $\log_8(x-2)-\log_8(x-3)=\frac{1}{3}$.

17.5. 1) $\lg(5-x)=\frac{1}{3}\lg(35-x^3)$;

2) $\log_2\frac{x-5}{x+5}+\log_2(x+5)=0$;

3) $\square(4x-6)-2=\square(2x-5)$;

4) $\log_2(3x-6)-1=\log_2(9x-19)$.

17.6. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}x-y=8,\\ \log_3 x+\log_3 y=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=14,\\ \log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y=-1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_4 x-\log_4 y=1,\\ x+y=20;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\lg x-\lg y=0,\\ 2x-y=10.\end{cases}$

В

Тенгламаларни ечинг (**17.7—17.11**):

17.7. 1) $\log_7(x-2)+\log_7(x+2)=\log_7(4x+41)$;

2) $\log_4(x+1)-\log_4(1-x)=\log_4(2x+3)$;

3) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$;

4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=3\lg 2+\lg(x-2)$.

17.8. 1) $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$; 2) $2\lg x-\lg 4+\lg(5-x^2)=0$;

3) $\lg(x(x+9))+\lg\frac{x+9}{x}=0$; 4) $\frac{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}{\lg 8-\lg(x-5)}=-1$.

17.9. 1) $3\lg^2(x-1)-10\lg(x-1)+3=0$;

2) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$;

3) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x}$;

4) $\lg^2 x-2\lg x=\lg^2 100-1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

17.10. 1) $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$; 2) $\log^2_2 x^5 - 5\log_2 x^3 = 10$;

3) $\lg(10x) \cdot \lg(0{,}1 \cdot x) = \lg x^3 - 3$; 4) $\frac{1 - \lg^2(x^2)}{\lg x - 2\lg^2 x} = 4\lg x + 5$.

17.11. 1) $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = \frac{4}{3}$; 2) $\log^2_2(2x) = 4\log_2 x$;

3) $\log_3(3^{x+1} + 3^x) = \log_3 324$; 4) $\lg(x^2) + \lg(-x) = 9$.

Тенгламалар системасини ечинг **(17.12-17.13)**:

17.12. 1) $\begin{cases} \lg x + \lg 2 = \lg y, \\ 3x - 2y = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_2(x^2 - xy + y) = 1, \\ x - y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} - \frac{4}{9} = 0, \\ \lg(3x - y) - 4\lg 2 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{15}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 5. \end{cases}$

17.13. 1) $\begin{cases} \lg(x - y) = 2, \\ \lg x = \lg 3 + \lg y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2y, \\ \log_3(x - y) + \log_3(x + y) = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 1 + \log_2 y = \log_2(x + y), \\ \log_2(x + y) + \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases}$

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даражанинг асоси ва кўрсаткичи, кўрсаткичли функция, унинг хоссалари ва графиги, тенгсизлик, тенгсизликни ечиш усуллари, интерваллар усули.

18-§. КЎРСАТКИЧЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Сиз кўрсаткичли тенгсизликларни ечишни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР
Тенгсизлик, кўрсаткичли тенгсизлик, даражанинг асоси, даража кўрсаткичи, тенг кучлилик, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, тенгсизликни ечиш

Аввалги мавзуларда сиз кўрсаткичли функция тушунчаси билан танишиб, кўрсаткичли тенгламалар ва улар системасини ечиш кўникмасини шаклланг-

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

тирдингиз. Энди кўрсаткичли тенгсизликни ечиш усулларини қараб чиқамиз.

Таъриф.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \ (a^{f(x)} < a^{g(x)};\ a^{f(x)} \ \mathsf{l}\ \ a^{g(x)};\ a^{f(x)} \ \mathsf{m}\ a^{g(x)}),\ a > 0,\ a \neq 1, \qquad (1)$$

кўринишда берилган ёки ўша кўринишга келадиган тенгсизлик ***кўрсаткичли тенгсизлик*** *дейилади.*

Кўрсаткичли тенгсизликни ечиш учун ушбу теоремани қўлланамиз.

Теорема. *Агар $a > 1$ бўлса, у ҳолда $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ тенгсизлик $f(x) > g(x)$ тенгсизликка; агар $0 < a < 1$ бўлса, у ҳолда $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ тенгсизлик $f(x) < g(x)$ тенгсизликка тенг кучли бўлади.*

Исботи. Теоремани исботлаш учун (1) тенгсизликнинг иккала томонини $a^{g(x)}$ ифодага бўлиб, $\frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} > 1$ тенгсизликка эга бўламиз.

Охирги тенгсизликни $a^{f(x)-g(x)} > 1$ тенгсизликка келтирамиз. Энди $f(x) - g(x) = t$ каби белгилашлар киритиб, $a^t > 1$ тенгсизликка эга бўламиз. Ўша тенгсизликни ечиш учун $a > 1$ ва $0 < a < 1$ бўлган иккита ҳолни қараб чиқиш кифоя.

Агар $a > 1$ бўлса, у ҳолда $a^t > 1$ тенгсизлик бажарилиши учун $t > 0$ бўлиши керак, яъни $f(x) - g(x) > 0$. Бундан $f(x) > g(x)$.

Агар $0 < a < 1$ бўлса, у ҳолда $a^t > 1$ тенгсизлик бажарилиши учун $t < 0$ бўлиши керак, яъни $f(x) - g(x) < 0$. Демак, $f(x) < g(x)$.

Мисоллар келтирамиз.

МИСОЛ

1. 1) $3^{3x-5} > 81$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $0{,}98^{x^2+3} \ \mathsf{m}\ 0{,}98^{6x-5}$;

4) $2^{x^2+7} > 2^{8x}$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. 1) $3^{3x-5} > 81$ тенгсизликнинг иккала қисмини бир хил асосга келтирамиз: $3^{3x-5} > 3^4$. Охирги тенгсизликда $3 > 1$ бўлгани учун, теоремага биноан $3x - 5 > 4$ ёки $x > 3$;

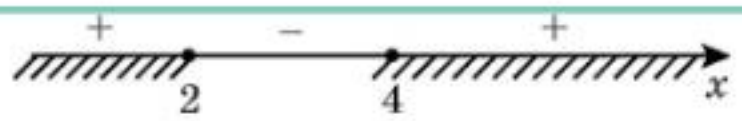
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ тенгсизликнинг ўнг қисмидаги сонни асосга келтириб, унга тенг кучли тенгсизлик оламиз: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$ ёки $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Ҳосил бўлган тенгсизликнинг асоси $0 <$ < 1 бўлгани учун, теоремага кўра $2x - 4 >$.

Бундан $2x > 4{,}5$ ёки $x > 2{,}25$;

3) $0{,}98^{x^2+3} \ \mathsf{m}\ 0{,}98^{6x-5}$ тенгсизликнинг асослари бир хил ва $0 < 0{,}98 < 1$. Демак, теоремага кўра $x^2 + 3 \ \mathsf{l}\ 6x - 5$ ёки $x^2 - 6x + 8 \ \mathsf{l}\ 0$. Охирги тенгсизликни интерваллар усули билан ечамиз ва $x \ \mathsf{m}\ 2$, $x \ \mathsf{l}\ 4$ (54-расм) ёки $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$ ечимлар тўпламига эга бўламиз:

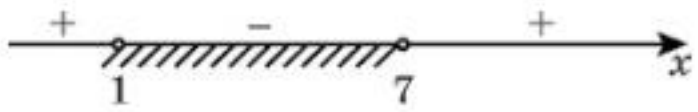
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



54-расм

4) $2^{x^2+7} < 2^{8x}$ тенгсизликнинг асослари бир хил ва 1 дан катта, шунинг учун берилган тенгсизлик $x^2 + 7 < 8x$ тенгсизлик билан тенг кучли ёки $x^2 - 8x + 7 < 0$. Охирги тенгсизликка интерваллар усулини татбиқ этиб, $x \in (1; 7)$ эга бўламиз (55-расм).



55-расм

Жавоби: 1) $(3; +\infty)$; 2) $(2{,}25; +\infty)$; 3) $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$; 4) $(1; 7)$.

МИСОЛ

2. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. Тенгсизликнинг чап қисмини шакл алмаштирамиз: $2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52$. Тенгсизликнинг чап қисмидаги 2^{2x-4} ифодани умумий кўпайтувчи сифатида қавсдан ташқарига чиқариб, ҳисоблашларни бажарамиз, $2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52$, $2^{2x-4}(16 - 4 + 1) > 52$ ёки $2^{2x-4} > 4$, $2^{2x-4} > 2^2$. Ҳосил бўлган тенгсизликнинг асослари бир хил ва $2 > 1$, шунинг учун $2x - 4 > 2$ ёки $x > 3$.

Жавоби: $(3; +\infty)$.

МИСОЛ

3. $3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1}$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. Бир хил асосли кўрсаткичли функцияларни тенгсизликнинг бир қисмига ўтказамиз: $7^x - 4 \cdot 7^{x-1} < 34 \cdot 3^{x-1} - 3^{x+2}$. Тенгсизликнинг ҳар бир қисмидаги умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарамиз: $7^{x-1}(7 - 4) < 3^{x-1}(34 - 3^3)$ ёки $7^{x-1} \cdot 3 < 3^{x-1} \cdot 7$. Тенгсизликнинг иккала қисмини $3 \cdot 3^{x-1} > 0$ кўпайтувчига бўламиз: $\left(\frac{7}{3}\right)^{x-1} < \frac{7}{3}$. Охирги тенгсизликнинг асоси $\frac{7}{3} > 1$ бўлгани учун, $x - 1 < 1$ ёки $x < 2$.

Жавоби: $(-\infty; 2)$.

1. Кўрсаткичли тенгсизликларни ечиш учун кўрсаткичли тенгламаларни ечиш усуллари қўлланиладими?
2. Бир хил асосли кўрсаткичли тенгсизликларни ечиш билан чизиқли тенгсизликларни ечиш орасида ўхшашлик борми? Жавобингизни асосланг.
3. Кўрсаткичли функциянинг асоси фақат мусбат сон бўлиши кўрсаткичли тенгсизликларни ечишда ҳисобга олинадими? Жавобингизни асосланг.

Машқлар

А

Тенгсизликларни ечинг **(18.1—18.7)**:

18.1. 1) $2^x \mid 32$; 2) $\left(\frac{4}{7}\right)^x < \frac{16}{49}$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) 6^{x-4} m 36; 4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} > \frac{27}{125}$.

18.2. 1) $5^{1-x} < 125$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x+1} > \frac{27}{64}$;

3) $\left(\frac{9}{2}\right)^{x+4} \geqslant \left(\frac{4}{81}\right)^{3+x}$; 4) $\left(\frac{1}{32}\right)^{x}$ m 8^{2x-1}.

18.3. 1) $3^{x} \cdot 9^{x}$ m 81; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x}$ l 32;

3) ☒ ; 4) $(2,5)^{x+4}$ l $(0,16)^{x-3}$.

18.4. 1) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2}$ m 9; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$ m 26;

3) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4}$ m 315; 4) $2^{x} - 2^{x-4} > 15$.

18.5. 1) $5^{2x+1} + 3 \cdot 5^{2x-1} > 3500$; 2) $3^{x+1} + 3^{x-1}$ l 270;

3) $10^{x-5} + 10^{x-2} < 1001$; 4) $2^{x} - 2^{x-4} - 15$ m 0.

18.6. 1) $25^{x} < 6 \cdot 5^{x} - 5$; 2) $3^{2x} - 10 \cdot 3^{x} + 9 < 0$;

3) $4^{x} + 2^{x+3} > 20$; 4) $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} + 2 > 0$.

18.7. 1) $3^{x+1} > 11^{x+1}$; 2) $2^{x} < 5^{x}$;

3) 4^{x-2} m 7^{x-2}; 4) $6^{x^2-4} \geqslant 13^{x^2-4}$.

B

Тенгсизликларни ечинг **(18.8—18.13)**:

18.8. 1) $2^{\frac{x+1}{x-2}}$ l 4; 2) $0,125 < 16^{x}$;

3) $36^{0,5x^2-1}$ l $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$; 4) $125\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2}$ m $\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$.

18.9. 1) $2^{x^2+2x-3} - 8 \cdot 2^{x} > 0$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} > 5^{-x}$;

3) 2^{x^2+12} m $64 \cdot 2^{5x}$; 4) $8 \cdot 2^{x^2-3x} < (0,5)^{-1}$.

18.10. 1) $6 \cdot 5^{x+1} - 5^{x+2} + 6 \cdot 5^{x}$ l 55; 2) $3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x} - 2^{x+2}$ m 14;

3) $x^{3} \cdot 3^{x} - 3^{x} > 0$; 4) $x^{2} \cdot 4^{x} - 4^{x} < 0$.

18.11. 1) $5^{2x} - 2 \cdot 5^{x} - 15$ l 0; 2) $13^{2x} - 14 \cdot 13^{x} + 13$ m 0;

3) $3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 > 0$; 4) $2 \cdot 4^{\cos x} - 3 \cdot 2^{\cos x} + 1 < 0$.

18.12. 1) $4^{x+2} + 8 < 9 \cdot 2^{x+2}$; 2) $3^{1+\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}$ m 12;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $4^{1-x} + 2^{1-x} - 4$ m $4 \cdot 2^{1-x} - 6$;
4) $4^{x+2} - 6 \cdot 2^{x+2} + 8 < 0$.

18.13. 1) $4^x - 9^x < 0$; 2) $5 \cdot 4^x$ m $4 \cdot 5^x$;

3) $3^{x-3} - 2^{x-3} < 0$; 4) $2^{2x+1} - 5^{2x+1}$ | 0.

18.14. Берилган тенгсизликларнинг умумий ечимини топинг:

1) $3^x > 9$ ва $x - 2$ m 6; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^x > 25^{-1}$ ва $1 - x$ m 0;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ m 8^{-1} ва $4x - 3 > 1$; 4) 4^x m 64 ва $5 - 2x < 0$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция ва унинг аниқланиш соҳаси, логарифм ва унинг хоссалари, логарифмик функция, унинг хоссалари ва графиги, тенгсизлик, тенгсизликларни ечиш усуллари, интерваллар усули, кўрсаткичли тенгсизликлар.

19-§. ЛОГАРИФМИК ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Сиз логарифмик тенгсизликларни ечишни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР
Тенгсизлик, логарифмик тенгсизлик, логарифмнинг асоси, даража кўрсаткичи, тенг кучлилик, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, тенгсизликни ечиш

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ: Чизиқли, квадрат, каср-рационал, тригонометрик, кўрсаткичли тенгсизликларни ечиш усулларини биласиз.

Мактаб курсида ўрганиладиган тенгсизликларнинг яна бир тури — логарифмик тенгсизликлар. Аввал ўша тенгсизликлар таърифини берамиз.

Таъриф.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$(\log_a f(x) < \log_a g(x),\ \log_a f(x) \text{ l } \log_a g(x),\ \log_a f(x) \text{ m } \log_a g(x)),$$

$$a > 0,\ a \neq 1,\ f(x) > 0,\ g(x) > 0, \qquad (1)$$

кўринишда берилган ёки ўша кўринишга келадиган тенгсизликлар ***логарифмик тенгсизлик*** *дейилади.*

Логарифмик тенгсизликларни ечиш учун қуйидаги теоремани қўлланамиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Теорема. *Агар* $f(x) > 0$ ва $g(x) > 0$ *бўлса, у ҳолда* $a > 1$ *бўлганда* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ *тенгсизлик* $f(x) > g(x)$ *тенгсизлик билан тенг кучли тенгсизлик бўлади,* $0 < a < 1$ *оралиқда эса* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ *тенгсизлик* $f(x) < g(x)$ *тенгсизликка тенг кучли бўлади.*

Исботи. Исботлаш учун (1) тенгсизликни айнан шакл алмаштириб, $\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$ тенгсизликка эга бўламиз, бундан

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

Охирги тенгсизликни қуйидаги иккита ҳол учун кўриб чиқамиз:

1) $a > 1$ бўлганда логарифмик функция ўсувчи, шунинг учун $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$, яъни $f(x) > g(x)$;

2) $0 < a < 1$ интервалда логарифмик функция камаювчи, демак, $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$, яъни $f(x) < g(x)$.

Шундай қилиб, (1) логарифмик тенгсизликни ечишда логарифмнинг асосига боғлиқ ҳолда қуйидаги иккита ҳолдан бирини қараб чиқамиз:

1) $a > 1$ бўлганда $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ тенгсизликка тенг кучли

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad (2)$$

тенгсизликлар системаси ечилади;

2) $0 < a < 1$ бўлганда $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ тенгсизликка тенг кучли

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \qquad (3)$$

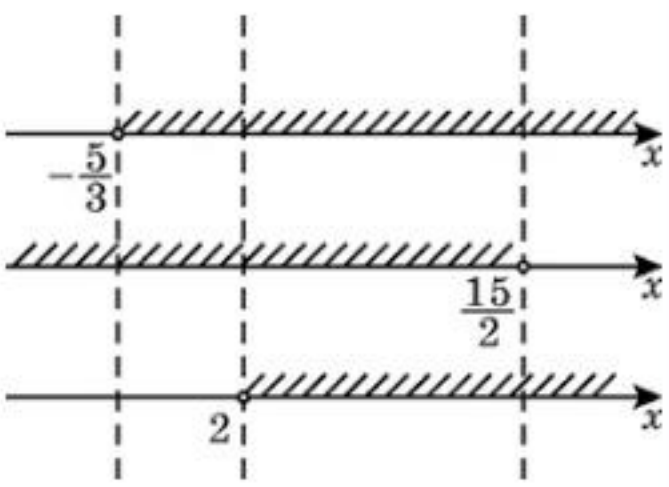
тенгсизликлар системаси ечилади.

Логарифмик тенгсизликларни ечишга доир мисоллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ **1.** $\log_5(3x + 5) > \log_5(15 - 2x)$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. Берилган логарифмик тенгсизликнинг асоси $a = 5 > 1$ бўлгани учун, (2) формулага мувофиқ берилган тенгсизликка тенг кучли ушбу тенгсизликлар системасини оламиз:

$$\begin{cases} 3x + 5 > 0, \\ 15 - 2x > 0, \\ 3x + 5 > 15 - 2x \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x > -\frac{5}{3}, \\ x < \frac{15}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$



56-расм

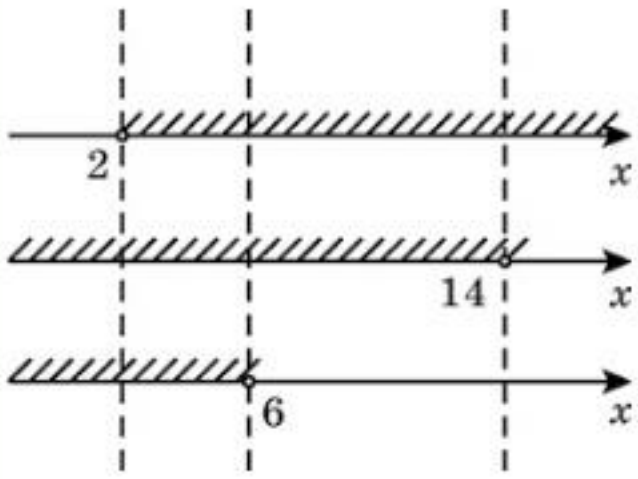
Охирги тенгсизликларни сонлар тўғри чизиғида ясаб, тенгсизликлар системаси ечимига эга бўламиз: $2 < x < \frac{15}{2}$ (56-расм).

Жавоби: $\left(2; \frac{15}{2}\right)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ **2.** $\log_{0,8}(x-2) > \log_{0,8}(7-0,5x)$ тенгсизликни ечамиз.



57-расм

Ечилиши. Мазкур тенгсизликдаги логарифмнинг асоси $a = 0,8 < 1$, демак, логарифмик тенгсизлик (3) формулага мувофиқ ушбу тенгсизликлар системасига ўтади:

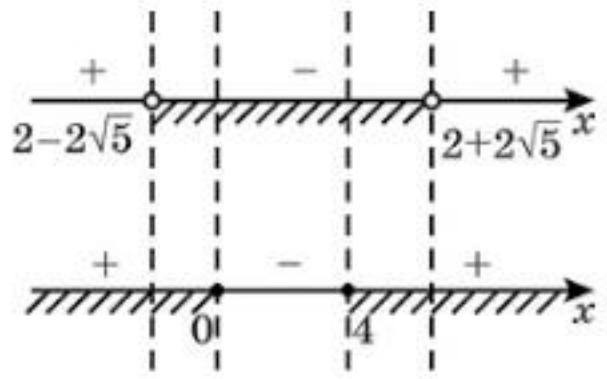
$$\begin{cases} x-2>0, \\ 7-0,5x>0, \\ x-2<7-0,5x \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x>2, \\ x<14, \\ x<6. \end{cases}$$

Тенгсизликларни сонлар тўғри чизиғида тасвирлаш орқали $2 < x < 6$ интервални оламиз (57-расм). Демак, берилган логарифмик тенгсизликнинг ечимлар тўплами (2; 6) интервал бўлади.

Жавоби: (2; 6).

МИСОЛ **3.** $\log_{0,25}(16+4x-x^2) \mid -2$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. Тенгсизликнинг ўнг қисмидаги −2 сонини асоси 0,25 га тенг логарифм кўринишида ёзамиз.



58-расм

Бунинг учун 0,25 сонини −2 даражага кўтарамиз: $(0,25)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$. Бунда $\log_{0,25}(16+4x-x^2) \mid \log_{0,25}16$ тенгсизликка эга бўламиз.

$a = 0,25$ эканини эътиборга олиб, (3) системага кўчамиз:

$$\begin{cases} 16+4x-x^2>0, \\ 16+4x-x^2 \leqslant 16 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x^2-4x-16<0, \\ x^2-4x \geqslant 0, \end{cases}$$

ёки $\begin{cases} (x-2+2\sqrt{5})(x-2-2\sqrt{5})<0, \\ x(x-4) \geqslant 0. \end{cases}$

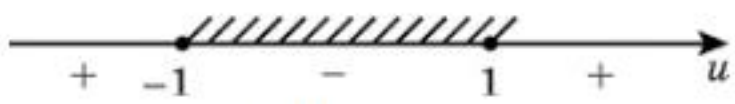
Интерваллар усулини татбиқ этиб, ҳар қайси тенгсизликнинг ечимлар тўпламини координаталар тўғри чизиғида тасвирлаймиз (58-расм).

Демак, берилган логарифмик тенгсизликнинг ечими $(2-2\sqrt{5}; 0] \cup [4; 2+2\sqrt{5})$ оралиқлардан иборат.

Жавоби: $(2-2\sqrt{5}; 0] \cup [4; 2+2\sqrt{5})$.

МИСОЛ **4.** $4\log_2^2 x - 4 \mid 0$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. Тенгсизликни ечиш учун $\log_2 x = u$ янги ўзгарувчи киритамиз ва $4u^2 - 4 \mid 0$ квадрат тенгсизликка келамиз. Охирги тенгсизликни ечиш учун интерваллар усулини татбиқ этиб, $u \in [-1; 1]$ эга бўламиз (59-расм).



59-расм

У ҳолда $\log_2 x \in [-1; 1]$, яъни $-1 \mid \log_2 x \mid 1$ ёки $\log_2 \frac{1}{2} \mid \log_2 x \mid \log_2 2$ ҳосил бўлади.

Логарифмнинг асоси $a = 2 > 1$ эканини назарга олиб, қўш тенгсизликдан $\frac{1}{2} \mid x \mid 2$ ёки

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

0,5 m x m 2 тенгсизликка ўтамиз. x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами барча мусбат сонлар тўпламидан иборат. Шунинг учун берилган логарифмик тенгсизликнинг ечимлар тўплами [0,5; 2] кесма бўлади.

Жавоби: [0,5; 2].

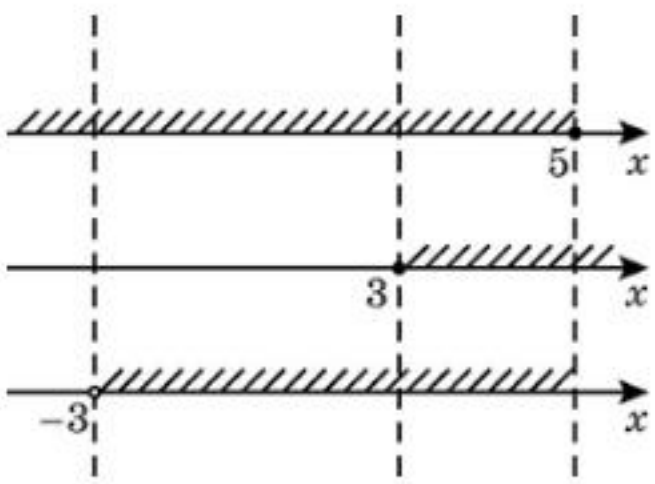
Сиз логарифмик тенгсизликлар системасини ечишни ўрганасиз.

МИСОЛ

5. $\begin{cases} 5 - x \geqslant 0, \\ \log_6 (x + 3) \geqslant 1 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечамиз.

Ечилиши. Чизиқли тенгсизликни ечиш усулини қўлланиб ва логарифмик функциянинг аниқланиш соҳасини назарга олиб, иккинчи тенгсизликдаги 1 сонини $\log_6 6$ ифода билан алмаштириб, берилган тенгсизликлар системасидан ушбу тенгсизликлар системасини ҳосил қиламиз:

$\begin{cases} -x \geqslant -5, \\ \log_6 (x + 3) \geqslant \log_6 6, \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x + 3 \geqslant 6, \\ x > -3 \end{cases}$ ёки $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x \geqslant 3, \\ x > -3. \end{cases}$



60-расм

Ҳар қайси тенгсизликнинг ечимлар тўпламини алоҳида координаталар тўғри чизиғида тасвирлаб, умумий оралиқни топамиз (60-расм). Жумладан, берилган тенгсизликлар системасининг ечими [3; 5] кесмадан иборат.

Жавоби: [3; 5].

1. Логарифмик тенгсизликларни ечишда логарифмларнинг хоссалари қўлланиладими?
2. Логарифмик тенгсизликларни ечишда қандай усуллар қўлланилади?
3. Логарифмик тенгсизликларнинг ечими логарифмик функциянинг асосига боғлиқми? Жавобингизни асосланг.

Машқлар

А

Тенгсизликларни ечинг (**19.1—19.5**):

19.1. 1) $\log_4 x > 2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x < -3$;

3) $\lg x > -2$; 4) $\ln x$ m 1.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

19.2. 1) $\log_6(4x+1) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) \mid -1$;

3) $\log_{0,4}(x+0,6) < 1$; 4) $\log_{0,2}(7-x) > -1$.

19.3. 1) $\log_5(3x+2) \mid \log_5(x-1)$; 2) $\log_{0,8}(6x-2) \mid \log_{0,8}(x+5)$;

3) $\lg(2x-1) < \lg(3x+2)$; 4) $\ln(4-2x) < \ln(x+3)$.

19.4. 1) $\log_{0,4}(2x-5) > \log_{0,4}(x+1)$; 2) $\log_4(3x-1) < \log_4(2x+3)$;

3) $\log_3 \frac{2-3x}{x} \mid -1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) < \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$.

19.5. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) > \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x-2)$;

2) $1+\log_2(x-2) > \log_2(x^2-3x+2)$;

3) $\lg(x-2)+\lg(27-x) < 2$;

4) $\lg(2x-3) > \lg(x+1)$.

Тенгсизликлар системасини ечинг **(19.6-19.7)**:

19.6. 1) $\begin{cases} x-18 < 0, \\ \log_5 x > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x < -2, \\ x+1 > 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \ln x \geqslant 0, \\ 5-x < 0; \end{cases}$ 4) ☒

19.7. 1) $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x > -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8-x > 0, \\ \log_5 x < 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \log_{0,7} x < 1, \\ x-0,3 \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 9-x \leqslant 0, \\ \log_{\frac{1}{6}} x > -1. \end{cases}$

B

Тенгсизликларни ечинг **(19.8—19.11)**:

19.8. 1) $\log_2 x > \log_2(3-x)$; 2) $\lg x + \lg(x-1) < \lg 6$;

3) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$; 4) $\log_{0,5} x \mid -6 + \log^2_{0,5} x$.

19.9. 1) $\log_3(11+4^x) > 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(22+3^x) > -2$;

3) $\lg(x^2-1) \mid 0$; 4) $\lg(1-x^2) \mid 0$.

19.10. 1) $\log_5(x^2-3) > 0$; 2) $\log_8(-9+x^2) \mid 0$;

3) $\log_4 \frac{2x-1}{x+1} \mid \log_4 3$; 4) $\lg \frac{3-x}{x+2} < 1$.

19.11. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)} > 1$; 2) $2^{\log_2(x^2+x)} < 2$;

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\frac{1}{6}}(x-1)} \geqslant 7^{\log_7(2-x)}$; 4) $0,9^{\log_{0,9}(x^2+x)} \leqslant 6^{\log_6(x+3)}$.

Тенгсизликлар системасини ечинг **(19.12-19.13)**:

19.12. 1) $\begin{cases} \log_{0,2}(x+1) \geqslant -1, \\ 2x-1 < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg(1-x) \leqslant 1, \\ 3-x \leqslant 2; \end{cases}$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $\begin{cases} \ln(x+5) \leqslant 0, \\ x+15 > 6x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 11x+12 \geqslant 13x, \\ \log_7(31-2x) < 1. \end{cases}$

19.13. 1) $\begin{cases} x^2-4 \geqslant 0, \\ \log_{\frac{1}{7}}(x+2) \leqslant -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-9 \geqslant 0, \\ \log_2(x-3) \leqslant 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_{81}(x+2) > \frac{1}{2}, \\ 36-x^2 > 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_3(x-5) \leqslant 1, \\ x^2-16 > 0. \end{cases}$

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $\left(\frac{7}{11}\right)^{4x-5} = \left(\frac{11}{7}\right)^{5x-4}$ тенгламани ечинг:

A) 1; B) 0; C) –1; D) илдизга эга эмас.

2. $0{,}37^{x-9} > 0{,}37$ тенгсизликнинг энг катта натурал ечимини топинг:

A) 10; B) 8; C) 9; D) бундай сон мавжуд эмас.

3. $10^{\cos x} - \sqrt{10} = 0$ тенгламани ечинг:

A) $(-1)^n \frac{\neq}{3} + \pi n,\ n \in Z$; B) $(-1)^n \frac{\neq}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

C) $\pm\frac{\neq}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; D) $\pm\frac{\neq}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

4. $\log_5(x-7) + \log_5(x-2) = \log_5(x+5)$ тенгламанинг илдизларини топинг:

A) 9; B) 1; C) 1; 9; D) 7.

5. x нинг қандай қийматларида $y = \log_2(x-5)$ функция мусбат қийматларни қабул қилмайди:

A) $(5; +\infty)$; B) $[5; +\infty)$; C) $(6; +\infty)$; D) $[6; +\infty)$?

6. $\begin{cases} x^2-4 \geqslant 0, \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} < 5 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг:

A) $[-2; 2]$; B) $(-\infty; -2]$; C) $[2; +\infty)$; D) $(0; +\infty)$.

7. $\begin{cases} \log_5(x+y) = 1, \\ 2x+y = 7 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечинг:

A) (3; 2); B) (2; 3); C) (–2; –3); D) (3; 1).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

8. $5^{x^2} \mid 5^{10x-21}$ ва $5 - x > 0$ тенгсизликларнинг умумий ечими топинг:

A) $[3; 7]$; B) $(-\infty; 3]$; C) $(5; 7]$; D) $[3; 5) \cup (5; 7]$.

9. $\log_{\frac{1}{7}}(2x - 1) \mid 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи энг кичик бутун сонни топинг:

A) 1; B) 0; C) 2; D) бундай сон мавжуд эмас.

10. $\begin{cases} \log_2 x \geqslant 0, \\ 0{,}19^{x^2} > 0{,}19^{x} \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг:

A) $(0; 1)$; B) $(0; 1]$; C) $(0; +\infty)$; D) ечимга эга эмас.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Варианта, вариацион қатор, тақсимот қатори, полигон, частота полигони.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

VI БОБ МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

20-§. БОШ ТЎПЛАМ ВА ТАНЛАНМА

Математик статистиканинг асосий атамаларибилан танишасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР
Танланма,бош тўплам, статистик қатор, частота, гистограмма

Экспериментлар олиб борилганда катта ҳажмдаги ахборотлар олинади. Масалан, шаҳар ёки районда ЯМТ топширган ўқувчиларнинг натижалари, Қозоғистон банкларидаги халқнинг омонат миқдори, Қозоғистон Республикасидаги аниқ бир вилоятдан ҳарбий хизматга чақирилганларнинг вазни ва сони, кун мобайнида супермаркетга келган истеъмолчилар сони ва ҳ.к.о.

Статистикада ахборотни тўплаш ва сақлаш, турли тахминларни ишлаб чиқиш, уларнинг ишончлилигини баҳолаш ва бошқа ҳисоблашлар олиб борилади. Бироқ математик статистиканинг асосий вазифаларидан бири олинган ахборотни тегишли равишда ишлаб чиқишдан иборат, шундагина қолган вазифаларнинг натижасига эришиш мумкин.

Дастлабки олинган ахборотни ишлаш тартиби тахминан қуйидагича:

— ўлчов (тажриба) маълумотлари тартибга келтирилади ва гуруҳланади;

— гуруҳлангандан сўнг маълумотларни ўлчаш жадваллари тузилади;

— тақсимот жадваллари бўйича маълумотларни тақсимлаш графиклари тузилади;

— олинган ўлчовларнинг асосий сонли тавсифларининг кичик сони тўпланган ўша ўлчовлар ҳужжати тузилади.

Таъриф. ***Бош тўплам*** *деб ўрганиш мумкин бўлган барча объектларнинг ёки бир объектга бир хил шароитларда олиб бориладиган барча кузатишларнинг мумкин бўлган натижалари тўпламига айтилади.*

Таъриф. ***Танланма тўплам ёки танланма*** *деб объектлар тўпламини ёки бош тўпламдан тасодифий равишда танлаб олинган объектни кузатиш натижаларига айтилади.*

Таъриф. *Танланмадаги объектлар ёки кузатишлар сони* ***танланма ҳажми*** *дейилади.*

Танланма қийматлари деб X тасодифий миқдорнинг кузатиладиган қийматларига айтилади.

Аниқ, ишончли натижалар олиш учун танланма берилган ҳажм бўйича етарли бўлиши лозим. Катта танланма — тартибланмаган сонлар тўплами. Кузатиш учун танланма аниқ тартибланган кўринишга келтирилади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ: Вариацион қатор иккита элемент: частота ва вариантадан ташкил топган.

Тақсимот қаторида қабул қилинадиган белгининг алоҳида қиймати *варианта* дейилади.

Алоҳида варианта ёки вариацион қатордаги ҳар қайси гуруҳнинг сони *частота* дейилади.

x_1, x_2, x_3, ... , x_k қатор берилган бўлсин. Бу ерда x_1 варианта n_1 марта, x_2 варианта n_2 марта, x_3 варианта n_3 марта учрайди ва ҳ.к.о.

У ҳолда n сони, бу ерда $n = n_1 + n_2 + n_3 + ...+ n_k$, варианта ҳажми бўлади.

n_i қиймат — x_i вариантанинг частотаси, $\frac{n_1}{n}$ — нисбий частоталар сони.

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ: Ушбу жадвал частотанинг статистик қаторини беради:

6-жадвал

Варианта	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Варианта частотаси	n_1	n_2	n_3	...	$\frac{n_k}{n}$

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ: Частота полигони (кўпбурчак) координаталари гуруҳлаш интервалларининг ўртача қийматларига ва ўша интерваллар частотасига мос келувчи нуқталарни туташтирувчи эгри чизиқни беради.

Полигон (polygon) сўзи юнон тилида кўпбурчак маъносини англатади.

Нисбий частотаси берилган варианта жадвалини тузамиз:

7-жадвал

x_i варианта	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\frac{n_i}{n}$ нисбий частота	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

Берилган жадвал *нисбий частотанинг вариацион қатори* дейилади.

Координаталари гуруҳлаш интервалларининг ўртача қийматлари ва ўша интервалларнинг нисбий частотасига мос нуқтларни туташтирувчи синиқ чизиқ *нисбий частота полигони* дейилади.

Яъни нисбий частота полигонини координаталар текислигида ясаш учун $(x_1; \frac{n_1}{n})$, $(x_2; \frac{n_2}{n})$, ... , $(x_k; \frac{n_k}{n})$ нуқталар белгиланиб, кесмалар билан туташтирилади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ 1. 2, 3, 4, 5, 2, 2, 5, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 4, 2, 2, 2, 2 сонлар қатори берилган. Танланма ҳажмини, танланма варианталарини топинг, частота ва нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг, частота полигонини ясанг.

Ечилиши. Масаланинг шартига кўра танланма ҳажми 20 га тенг. Берилган қаторда 2, 3, 4, 5 сонлар учрайди. Улар танланма варианталари бўлиб ҳисобланади.

Частотанинг вариацион қаторини тузамиз:

8-жадвал

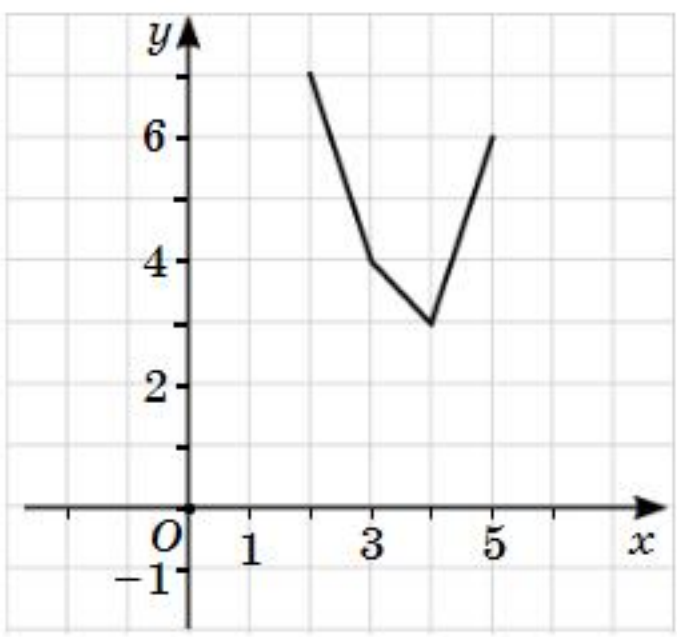
x_i варианта	2	3	4	5
n_i варианта частотаси	7	4	3	6

Нисбий частотанинг вариацион қаторини тузамиз:

9-жадвал

x_i варианта	2	3	4	5
$\frac{n_i}{n}$	0,35	0,2	0,15	0,3

Частота полигонини ясаймиз (61-расм).



61-расм

1. Математик статистиканинг асосий атамаларини айтинг.
2. Бош тўпламнинг танланмадан қандай фарқи бор?
3. Частота полигони, нисбий частота полигони нимани кўрсатади?
4. Танланма учун абсолют ва нисбий частота жадваллари қандай тузилади?

Машқлар

А

20.1. 6, 3, 2, 6, 3, 5, 3, 5, 6, 6, 2, 2, 3, 6, 3, 5, 3, 5, 2, 6 сонлар қатори берилган. Танланма ҳажмини, танланма варианталарини топинг; частотанинг вариацион қаторини ва нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

20.2. 10, 9, 4, 8, 8, 10, 9, 4, 4, 4, 9, 8, 8, 9, 4, 8, 10, 8, 10, 8 сонлар қатори берилган. Танланма ҳажмини, танланма варианталарини топинг; частотанинг вариацион қаторини, нисбий частотанинг вариацион қаторини, фоизларда берилган нисбий частота қаторини тузинг.

20.3. 11-синф ўқувчиларининг I чоракдаги алгебра ва анализ асосларидан жамловчи баҳолаш натижалари жадвалда кўрсатилган:

10-*жадвал*

3	4	3	4	3	4	5	4	3	3
4	3	5	3	3	4	3	5	2	4
3	4	3	3	4	5	5	4	5	4

1) натижаларнинг вариацион қаторини тузинг ва танланма ҳажмини топинг;
2) нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг;
3) фоизларда берилган нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг.

20.4. Частотанинг вариацион қатори бўйича танланма ҳажмини топинг ва частота полигонини ясанг:

11-*жадвал*

1)

x_i	7	9	10	12
n_i	9	2	3	6

12-*жадвал*

2)

x_i	11	13	17	19
n_i	6	8	6	5

13-*жадвал*

3)

x_i	3	5	7	9	11
n_i	6	5	9	4	6

В

20.5. Жадвалда бир гуруҳ ўқувчилар бўйларини (см ларда) ўлчаш натижалари кўрсатилган.

14-*жадвал*

157	159	156	158	158
156	158	159	159	157
155	155	154	156	159
158	156	154	160	156

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Жадвалдаги маълумотлар бўйича:

1) натижаларнинг вариацион қаторини тузинг ва танланма ҳажмини топинг;
2) нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг;
3) нисбий частотанинг фоиз ҳисобида берилган вариацион қаторини тузинг.

20.6. Жадвалда бригада ишчилари бир кунда тайёрлаган механизмлар сони кўрсатилган.

15-*жадвал*

45	50	48	49	45
48	49	45	50	50
48	48	49	50	45

Жадвалдаги маълумотлар бўйича:
1) натижаларнинг вариацион қаторини тузинг ва танланма ҳажмини топинг;
2) нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг;
3) нисбий частотанинг фоизларда берилган вариацион қаторини тузинг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Варианта, вариацион қатор, тақсимот қатори, полигон, частота полигони, танланма бош тўплам, статистик қатор, частота, гистограмма.

21-§. ДИСКРЕТ ВА ИНТЕРВАЛЛИ ВАРИАЦИОН ҚАТОРЛАР

Дискрет вариацион қатор тушунчаси билан танишасиз; дискрет вариацион қаторни тузиш учун маълумотларни таҳлил қилишни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Қатор, гуруҳ, дискрет вариацион қатор, интервалли вариацион қатор

СИЗ БУНИ БИЛАСИЗ:

Ҳар бир аломати, аломатлар тўплами ёки аломатлар синфи бўйича гуруҳдаги бирликлар сони ёки умумий натижадаги ўша соннинг ўрни маълум бўлган ўзига хос турдаги гуруҳлар *тақсимот қатори* дейилади.

Тақсимот қатори миқдорий ёки ўзига хос белгиларига қараб тузилади.

Миқдорий аломати бўйича тузилган тақсимот қатори *вариацион қатор* дейилади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Вариацион қаторлар дискрет ва интервалли бўлади. Тақсимот қатори муттасил ўзгариб турувчи аломат бўйича (аломат бирор интервал доирасида ҳар қандай қийматларни қабул қила олганда) ва дискрет ўзгарувчи аломат бўйича (қатъий аниқланган бутун қийматларни қабул қилади) ясалиши мумкин.

Дискрет вариацион қаторнинг *тақсимоти* деб мос частоталар ва бўлинмалар бўйича варианталарнинг бўлиниш тўпламига айтилади. Дискрет қаторнинг варианталари – аломатнинг дискрет ўзгарувчи қийматлари, одатда, у ҳисоблаш натижасидир.

Дискрет вариацион қаторлар, одатда, ўрганиладиган аломатнинг қийматлари бир-биридан ҳеч бўлмаганда бирор чекли миқдорга фарқ қилгандагина тузилади.

Дискрет қаторда аломатнинг нуқтавий қийматлари берилади.

МИСОЛ

1. 20 та ишчининг тариф бўйича разряди ҳақида маълумотлар берилган. 2, 3, 2, 4, 4, 5, 5, 4, 6, 3, 1, 4, 4, 5, 5, 6, 4, 3, 2, 3 тариф разряди бўйича ишчилар тақсимотининг дискрет вариацион қаторини тузинг.

Ечилиши:

Дастлаб жадвални тузамиз. Тақсимот қатори иккита элементдан ташкил топгани учун, жадвал икки қатордан иборат.

Биринчи қатор — варианта, берилган шартга кўра ишчиларнинг тариф разряди; иккинчи қатор — частота, яъни варианталарнинг учраши частотаси, берилган мисолда маълум бир разряд бўйича ишчилар сони.

Топшириқнинг шартини эътиборга олиб, ҳеч бўлмаганда бир марта учрайдиган қийматларни аниқлаймиз. Улар ушбу сонлар: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сўнгра вариантанинг ҳар бир қиймати неча марта учрашини санаймиз ва қуйидаги жадвални тузамиз:

16-*жадвал*

Тариф разряди (x_i)	1	2	3	4	5	6
Ишчилар сони (n_i)	1	3	4	6	4	2

Натижада тариф разряд бўйича ишчилар тақсимотининг дискрет вариацион қатори олинди.

$x_n - x_1$ айирма *ўлчаш қулочи* ёки энг катта ва энг кичик вариантанинг *айирмаси* дейилади. Маълумотлар қаторининг *модаси* — ўлчашлар қаторида кўп учрайдиган варианта. Мода карралиси энг катта бўлган вариантага тенг.

Тоқ сондаги маълумотлар қаторининг $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{2k} \le x_{2k+1}$ *медианаси* деб $m = x_{k+1}$ сонга, *жуфт сондаги* $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{2k-1} \le x_{2k}$ *маълумотлар қаторининг медианаси* деб $m = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ сонга айтилади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Ўлчаш маълумотларининг кўп учрайдиган тавсифи уларнинг ўрта арифметик қиймати ёки ўртача қиймати M бўлиб ҳисобланади.

Ўртача қийматни топиш учун:
1) барча ўлчов маълумотлари йиғиндисининг қийматини топиш;
2) олинган йиғинди қийматини маълумотлар сонига бўлиш (танланма ҳажми) лозим:
$M = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

Ўртача қиймат, мода ва медиана маълумотлар қаторидаги сонли тавсифларнинг бир тури ҳисобланади. Баъзан улар *марказий жараён ўлчови* дейилади. Ўша сонлардан ҳар қайсиси маълумотлар қаторининг ўртача қийматини тавсифлайди.

1-мисолдаги модани, медианани ва ўртача қийматни топинг.

Интервалли вариацион қатор тушунчаси билан танишасиз; интервалли вариацион қатор тузиш учун маълумотларни таҳлил қилишни ўрганасиз.

Таъриф. ***Интервалли вариацион қатор*** *деб тасодифий миқдор қийматларини мос частоталари ёки улардан ҳар бирига миқдор қийматларининг тушиш частоталари билан алмаштиришларнинг тартибланган интерваллари тўпламига айтилади.*

Қиймати ўлчаш ёки ўлчаш йўли билан қайд қилинган интервалли қаторлар узлуксиз ўзгарувчи аломат тақсимотини таҳлил қилишга йўналтирилган. Бундай қаторнинг вариантаси — гуруҳлашдан иборат.

Агар дискрет вариацион қаторда частота тавсифи қаторнинг вариантасига бевосита тегишли бўлса, у ҳолда интервалли вариация гуруҳига тааллуқлидир.

Интервални тузишнинг бир неча усули мавжуд:

1) маълумотларни мантиқий таҳлил қилиш асосида қўшимча ҳисоблашларсиз кўз билан чамалаш усули; агар шартга кўра тенг оралиқларни ясаш талаб қилинса, у ҳолда формула бўйича ҳисоблаш;

2) қўшимча ҳисоблашлар усули. Интервал миқдорини ҳисоблаш учун қуйидаги формула қўлланилади:

$$i = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}, \qquad (1)$$

бу ерда i — миқдор ёки интервал узунлиги;
x_{max} — энг катта қиймат;
x_{min} — энг кичик қиймат;
n — масаланинг шартига кўра керакли гуруҳлар сони.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Биринчи интервалли ясаш энг кичик қийматдан бошланади, унга интервал миқдори қўшилади ва биринчи интервалнинг юқори чегараси олинади. Сўнгра биринчи интервалнинг юқориги чегараси иккинчи оралиқнинг қуйи чегарасига айланади, унга оралиқ миқдори қўшилиб, иккинчи оралиқ олинади. Ундан кейин шартга кўра қанча интерваллар ясаш лозим бўлса, шунча марта интерваллар аниқланади.

МИСОЛ

2. Банкда 10 та омонатчининг омонат миқдори ҳақида маълумотлар берилган: 280, 240, 400, 340, 200, 310, 260, 360, 330, 230 (минг тг.). Омонат ҳажмини тенг оралиқли 3 та гуруҳга бўлиб, тақсимотнинг интервалли вариацион қаторини тузинг. Ҳар қайси гуруҳ бўйича омонатларнинг умумий миқдорини ҳисобланг.

Ечилиши: Дастлаб жадвал тузамиз. Тақсимот қаторида иккита элемент бўлгани учун жадвал икки қатордан ташкил топади.

Биринчи қатор — варианта, мисолда банкдаги омонат миқдори; иккинчи қатор — частота, берилган ҳолда интервалга тушган тегишли омонати бўлган омонатчилар сони. (1) формуладан фойдаланиб, интервал миқдорини топамиз. Масаланинг шартига кўра энг катта қиймат 400 минг тг, энг кичик қиймат 200 минг тг, гуруҳлар сони — 4 та. У ҳолда $i = \frac{400\,000 - 200\,000}{4} = 50000$.

17-*жадвал*

Банкдаги омонат миқдори (x)	200 000 – 250 000	250 000 – 300 000	300 000 – 350 000	350 000 – 400 000
Омонатчилар сони (n)	3	2	3	2

Энди ҳар бир интервал бўйича ва умуман олгандаги омонатлар жами ҳажмининг ҳисобини бажарамиз. Бунинг учун ҳар бир интервал бўйича омонат миқдорини қўшамиз ва омонатларнинг умумий қийматини оламиз. Бунда
биринчи интервал бўйича: 230 000 + 240 000 + 200 000 = 670 000;
иккинчи интервал бўйича: 280 000 + 240 000 = 520 000;
учинчи интервал бўйича: 310 000 + 330 000 + 340 000 = 980 000;
тўртинчи интервал бўйича: 360 000 + 400 000 = 760 000.

18-*жадвал*

Банкдаги омонат миқдори (x)	200 000 — 250 000	250 000 — 300 000	300 000 — 350 000	350 000 — 400 000	Жами
Омонатчилар сони (n)	3	2	3	2	10
Омонатнинг умумий ҳажми	670 000	520 000	980 000	760 000	2 930 000

Берилган шартга кўра вариацион қатор маълумотларини таҳлил қилишни ўрганасиз.

Тақсимот қаторларини уларнинг график тасвири ёрдамида таҳлил қилиш қулай. Бу тақсимот шакли ва қонунияти ҳақида фикр юритишга имкон беради.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Дискрет қатор графикда синиқ чизиқ полигони шаклида тасвирланади. Уни тўғри бурчакли координаталар системасида ясаш учун абсциссалар ўқи бўйича координаталари бир хил масштабда ўзгарадиган аломатнинг тартибланган қийматлари қўйилади, ординаталар ўқи бўйлаб частоталарни кўрсатиш учун шкала ясалади.

☒ 1-мисолдаги қийматларнинг модасини, медианасини ва ўртача қийматини топинг.

Интервалли қаторлар гистограмма (яъни диаграмма устунлари) шаклида тасвирланади. Гистограммани ясаганда абсциссалар ўқида интерваллларнинг катталиги тасвирланади, частоталар эса тегишли оралиқларда ясалган тўғри тўртбурчаклар билан тасвирланади. Интерваллар тенг бўлганда устунларнинг баландлиги частотага пропорционал бўлиши лозим.

☒ 2-мисолга интервалли вариацион қаторни мустақил тузинг.

1. Дискрет вариацион қатордан қандай маълумотлар олиш мумкин?
2. Интервалли қатордан қандай маълумотлар олиш мумкин?

Машқлар

А

21.1. Ишчиларнинг разрядлари ҳақида маълумотлар берилган: 3, 4, 5, 6, 3, 3, 4, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 5, 5, 5, 6. Ишчиларнинг разрядлари бўйича тақсимотининг дискрет вариацион қаторини тузинг.

21.2. 40 та ўқувчига исталган рақамни айтиш таклиф қилинди. Натижада қуйидаги маълумотлар олинди:

19-жадвал

5	5	4	5	3	9	0	4	3	7
6	9	5	1	7	5	6	2	1	3
4	7	0	7	5	6	5	3	9	2
3	1	3	1	3	3	6	8	1	9

Берилган ўлчовларнинг такрорланиш тақсимот жадвалини тузинг ва танланма ҳажмини ҳамда модасини топинг.

21.3. 30 ўқувчига 10 дан 20 гача исталган икки хонали сонни айтиш таклиф қилинди. Натижада қуйидаги маълумотлар олинди:

20-жадвал

14	17	10	17	16	15	15	13	19	12
16	19	15	15	17	15	16	12	13	13
13	11	13	11	13	14	16	18	19	19

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Берилган ўлчовларнинг такрорланиш тақсимот жадвалини тузинг ва танланма ҳажмини ҳамда модасини топинг.

21.4. 21.2-машқдаги ўлчаш маълумотларининг ўртача қийматини топинг.

21.5. 21.3-машқдаги ўлчаш маълумотларининг ўртача қийматини топинг.

B

21.6. 21.2, 21.3-машқлардаги маълумотлар полигонини ясанг.

21.7. Ўқувчиларнинг вазнлари (кг ларда): 35, 44, 46, 37, 50, 36, 38, 48, 35, 44, 46, 39, 50, 40, 54, 36, 40, 42, 52, 39. Уларни вазнлари бўйича тенг интерваллар орқали 5 та гуруҳга бўлиб, ўқувчиларнинг интервалли вариацион тақсимот қаторини ясанг. Ҳар қайси гуруҳ бўйича вазнларнинг умумий ўлчамини топинг.

21.8. Дўконда гулнинг 25 хил тури сотилади. Уларнинг баҳоси қуйидагича тақсимланган (21-жадвал).

21-жадвал

Баҳоси (тг)	[500—800)	[800—1100)	[1100—1400)	[1400—1700]
Гул турларининг сони	7	4	(*)	8

1) Жадвалдан (*) топинг;

2) нисбий частотанинг фоизларда кўрсатилган вариацион қаторини тузинг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Варианта, вариацион қатор, тақсимот қатори, полигон, частота полигони, танланма, бош тўплам, статистик қатор, частота, гистограмма, дискрет вариацион қатор, интервалли вариацион қатор.

22-§. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРНИНГ СОНЛИ ТАВСИФЛАРИНИ ТАНЛАНМАЛАР БЎЙИЧА БАҲОЛАШ

Танланма бўйича тасодифий миқдорларнинг сонли тавсифларини баҳолашни ўрганасиз.

МУҲИМ ТУШУНЧАЛАР

Статистика ўртача қиймат, дисперсия, ўртача четлашиш

Баъзида тасодифий миқдорни (бош тўплам) ўрганишда танланма маълумотлари асосида тақсимотнинг баъзи сонли (нуқтавий) тавсифларини баҳолашни ҳисоблаш кифоя. Сонли тавсифлар танлаб олинган маълумотлар асосида назарий тақсимот параметрларини аниқлашда ҳам ҳисобланади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Нуқтавий баҳо деб битта сон билан бериш мумкин бўлган баҳога айтилади. Нуқтавий баҳолар бош тўпламнинг мос параметри миқдори ҳақида тахминий тасаввур беради.

Танлаб олинган маълумотлар асосида тасодифий миқдорнинг сонли тавсифларини баҳолашни қараб чиқамиз.

Нисбий частотанинг варианталари кўрсатилган жадвал берилган бўлсин, бу ерда $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ (22-жадвал).

22-жадвал

x_i варианта	x_1	x_2	x_3	....	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	.....	$\frac{n_k}{n}$

Ўртача қиймат билан баҳоланадиган математик кутилма ушбу формула билан ҳисобланади:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\ (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k). \qquad (1)$$

$\overline{X}$ ўртача қиймат атрофидаги x_1, x_2, x_3, ..., x_k сонларнинг тарқалиши(сочилиши)ни тавсифловчи миқдор *дисперсия* деб аталади ва $\overline{D}$ каби бегиланади.

Танланма дисперсиясини ҳисоблаш формуласи:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}[(x_1 - \overline{X})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{X})^2 \cdot n_2 + \ldots + (x_k - \overline{X})^2 \cdot n_k)]. \qquad (2)$$

Танланманинг ҳажми камайиши билан хатоликлар пайдо бўлади. Шунинг учун n m 30 бўйича тузатилган танланма дисперсияси.

$$\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} \qquad (3)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

(2) ва (3) формулаларни эътиборга олиб, танланманинг ўртача квадратик четлашиши мос равишда

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} \qquad (4)$$

ва

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} \qquad (5)$$

формулалар билан ҳисобланади.

Одатда, танланма дисперсияси

$$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \qquad (6)$$

формула билан ҳисобланади, бу ерда $\overline{X^2} = \frac{1}{n}\ (x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \ldots + x_k^2 n_k)$.

Дисперсияни ва ўртача квадратик четлашишни ҳисоблаш анча мураккаб, шу сабабли уни ҳисоблаш учун маълум бир компьютер

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

дастуридан (масалан, Microsoft Office Excel) фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Агар ҳисоблашлар бевосита олиб борилса, у ҳолда хатоликларни назорат қилиш учун натижаларни жадвал кўринишида бериш афзал.

Узлуксиз тасодифий миқдорлар учун интервалли нисбий вариантанинг жадвали берилган бўлсин (23-жадвал):

23-жадвал

Интерваллар	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	....	$[x_{k-1}; x_k]$
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	.....	$\frac{n_k}{n}$

У ҳолда $x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2}$, $x_2^* = \frac{x_1 + x_2}{2}$, ..., $x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ эканини назарга олиб, танланманинг нисбий частотаси жадвалини қараб чиқамиз (24-жадвал):

24-жадвал

x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	.....	$\frac{n_k}{n}$

МИСОЛ Интервалли нисбий частота жадвалини қўлланиб, танланма дисперсиясини ва ўртача квадратик четлашиш танланмасини топамиз.

25-жадвал

Интерваллар	[1; 3)	[3; 6)	[6;9]
$\frac{n_i}{n}$	0,6	0,2	0,2

Ечилиши. Танланманинг нисбий частотаси жадвалини тузамиз. Бунинг учун интерваллар ўртасини топамиз: $x_1^* = (1 + 3) : 2 = 2$; $x_2^* = (3 + 6) : 2 = 4,5$; $x_3^* = (6 + 9) : 2 = 7,5$.

Бунда ушбу жадвални оламиз:

26-жадвал

x_i^*	2	4,5	7,5
$\frac{n_i}{n}$	0,6	0,2	0,2

Энди қуйидаги миқдорларни ҳисоблаймиз:

$$\overline{X} = 2 \cdot 0,6 + 4,5 \cdot 0,2 + 7,5 \cdot 0,2 = 3,6;$$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$$\overline{X^2} = \frac{1}{10}(2^2 \cdot 6 + 4{,}5^2 \cdot 2 + 7{,}5^2 \cdot 2) = 17{,}7;$$

$$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 17{,}7 - 3{,}6^2 = 17{,}7 - 12{,}96 = 4{,}74.$$

$n = 10$ ва у 30 дан кичик, шунинг учун тузатилган танланма дисперсиясини топамиз:

$$\overline{\overline{D}} = \frac{10}{9} \cdot 4{,}74 \approx 5{,}27.$$

Мос равишда танланманинг ўртача квадратик четлашишини ҳисоблаймиз:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} \approx \sqrt{5{,}27} \approx 2{,}29.$$

Жавоби: $\approx 5{,}27$; $\approx 2{,}29$.

1. Танланма дисперсияси ва тузатилган танланма дисперсиясининг ўхшашлиги ва фарқи нимада?
2. Ўртача квадратик четлашиш формуласини танлаш нимага боғлиқ?
3. Танланма дисперсия ва ўрта квадратик четлашиш формуласини ёзинг.

Машқлар

А

22.1—22.3-машқларда бир хил ўлчашларнинг натижалари кўриб чиқилади. Бош тўпламни ўрганишда мустақил кузатишлар бўйича ушбу қийматлар олинди (27-жадвал):

27-жадвал

111	112	111	108	113	111	114	113
112	111	110	110	109	109	110	112
109	113	114	111	111	112	111	111

22.1. 1) Кузатишларнинг вариацион қаторини тузинг ва танланма ҳажмини топинг;
2) нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг;
3) нисбий частотанинг фоизларда берилган вариацион қаторини тузинг.

22.2. 1) Модани, медианани, математик кутилмани топинг;
2) нисбий частота полигонини фоизларда кўрсатинг.

22.3. Дисперсияни ва ўртача квадратик четлашишни топинг.

В

22.4. Тақсимот жадвали ва “ўртача қиймат 9 га тенг” деган мулоҳазани қўлланиб, қуйидаги ҳисоблашларни бажаринг (28-жадвал):

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

28-жадвал

Варианта	4	8	12
Карралилик	x	2	9

1) x сонни топинг;
2) тузатилган танланма дисперсиясини топинг.

22.5. Тақсимот жадвали ва "ўртача қиймат 5 га тенг" деган мулоҳазани қўлланиб, қуйидаги ҳисоблашларни бажаринг (28-жадвал):

29-жадвал

Варианта	3	x	7	9
Карралилик	13	6	9	2

1) x сонни топинг;
2) тузатилган танланма дисперсиясини топинг.

22.6. Варианталарнинг интервалли нисбий жадвалидан фойдаланиб, танланма дисперсиясини ва танланманинг ўртача квадратик четлашишини топинг:

30-жадвал

Интерваллар	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15]
n_i	7	5	8
$\frac{n_i}{n}$	0,4	0,2	0,4

МАТЕМАТИК ОЛИМ ҲАҚИДА АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

22.7. Замонавий математик статистиканинг асосчиларидан бири инглиз математиги Карл Пирсон. Турли статистик маълумотлар орасида корреляция (боғлиқлик)ни сонли баҳолашнинг ривожланиши унинг номи билан боғлиқ.

Карл Пирсон
(1857—1936)

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қатори берилган.

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	?	0,2	?	0,1	?

Номаълум нисбий частота 3 : 3 : 1 сонларга пропорционал. Бунда нисбий частота вариацион қаторининг тўлдирилган жадвали ушбу кўринишга эга:

A)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,3	0,15	0,2

B)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,25	0,15	0,2

C)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,15	0,15	0,25	0,15	0,25

D)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

E)

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,2	0,15	0,3

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

2. Нисбий частотанинг вариацион қатори бўйича ўртача қийматини топинг:

X	2	3	4	5	6
$\frac{n_i}{n}$	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1

A) 5,2; B) 4,5; C) 5,1; D) 3,5; E) 5,5.

3. Нисбий частотанинг вариацион қатори бўйича дисперсияни топинг:

X	2	4	6	8
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,2	0,4	0,2

A) 5,8; B) 4,96; C) 5,16; D) 4,6; E) 4,8.

4. 3-топшириқдаги нисбий частотанинг вариацион қатори бўйича ўртача квадратик четлашишни топинг:

A) 2,28; B) 2,29; C) 3,96; D) 3,95; E) 2,88.

5. Жадвалда фирма дўконидаги аёллар пальтосининг баҳоси (минг тг) ҳақида маълумотлар келтирилган:

32,3	40,0	34,9	28,8	48,9
28,4	25,2	24,6	30,0	25,3
20,0	35,8	37,4	23,2	35,2

Маълумотларни нархи бўйича тенг интервалли 3 та гуруҳга тақсимлаб, аёллар пальтоси тақсимотининг интервалли вариацион қаторини тузинг:

A)

Интерваллар	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$

B)

Интерваллар	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{2}{15}$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

C)

Интерваллар	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{15}$

D)

Интерваллар	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{15}$

E)

Интерваллар	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	7	6	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

11-СИНФ АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

I. Ҳисоблашлар

Интегрални ҳисобланг **(1—5)**:

1. 1) $\int_{-1}^{0}(1-3x^2)dx$; 2) $\int_{0}^{1}(x^3-2x^2+x+1)dx$;

3) $\int_{0}^{1}(2+x)^3\,dx$; 4) $\int_{2}^{3}(4-x)^4\,dx$.

2. 1) $\int_{\frac{\pi}{120}}^{\frac{\pi}{40}}\frac{5\,dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+5x\right)}$; 2) $\int_{\frac{\pi}{36}}^{\frac{\pi}{18}}\left(\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)dx$;

3) $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}}\frac{3\,dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{12}+3x\right)}$; 4) $\int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{\pi}{12}}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right)dx$.

3. 1) $\int_{1}^{2}(x^3+x^{-3})dx$; 2) $\int_{4}^{9}\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int_{-2}^{-1}(5-3x^{-2}+3x^2)dx$; 4) $\int_{8}^{27}\left(x^{\frac{2}{3}}+3x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$.

4. 1) $\int_{1}^{e}(2x^{-1}+1)dx$; 2) $\int_{0}^{2}3^{0,5x}dx$;

3) $\int_{1}^{e}(3x^{-1}-4)dx$; 4) $\int_{0}^{1}\left(e^{\frac{x}{3}}-3x^2\right)dx$.

5. 1) $\int_{0}^{2}(e^{3x}+1)dx$; 2) $\int_{1}^{e}\frac{x^2+1}{2x^3}dx$;

3) $\int_{-1}^{0}\frac{3}{(5x-1)^3}dx$; 4) $\int_{0}^{4}\frac{4}{(2x+1)^3}dx$.

Ифоданинг қийматини топинг **(6—10)**:

6. 1) $\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}+\sqrt[4]{81}$; 2) ⊠ ;

3) $\sqrt{\frac{16}{25}}+\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}+\sqrt[6]{64}$; 4) $\sqrt{1{,}21}+\sqrt[3]{-4\frac{12}{125}}+\sqrt[4]{625}$.

7. 1) $\sqrt[6]{2^7\cdot3^5}\cdot\sqrt[6]{2^5\cdot3}$; 2) $\sqrt[5]{5^3\cdot6^2}\cdot\sqrt[5]{5^{12}\cdot6^3}$;

3) $\sqrt[8]{4^5\cdot7^7}\cdot\sqrt[8]{4^7\cdot7}$; 4) $\sqrt[4]{2^5\cdot5^3}\cdot\sqrt[4]{2^3\cdot5}$.

8. 1) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$; 2) $\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}$;

3) $\sqrt[6]{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[6]{9-\sqrt{17}}$; 4) $\sqrt[7]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[7]{7+4\sqrt{3}}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

9. 1) $25^{2,5} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1,5} + \left(\frac{5}{3}\right)^{2,7} \cdot (0,6)^{2,7}$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1,5} + 8^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{2}{7}\right)^{6} \cdot \left(3\frac{1}{2}\right)^{6}$;

3) $16^{1,5} - \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{0,19} \cdot (1,5)^{0,19}$;

4) $81^{0,25} + \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{2}{5}} - (0,15)^{-0,35} \cdot \left(6\frac{2}{3}\right)^{-0,35}$;

5) $\dfrac{16^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{6}}{4^{-\frac{1}{3}} \cdot 64^{-\frac{2}{3}}} \cdot 4\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{4}$;

6) $\dfrac{25^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2}}{125^{-\frac{2}{3}} \cdot 5^{-2}} \cdot \left(25^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

10. 1) $\log_{27}3 - \log_{\sqrt{5}}\frac{1}{5} + \log_{2,5}0,4$;

2) $\log_{\sqrt{6}}\frac{1}{36} - \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2} - \log_{0,2}5$;

3) $9^{\frac{3}{2}} - \log_{\frac{1}{5}}25$;

4) $\log_{\sqrt{3}}27 - \log_{1,5}\frac{2}{3} - \log_{8}4$;

5) $\log_{3}\frac{1}{27} - \log_{4}32$;

6) $625^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\log_{2}4 \cdot 36^{\log_{6}2}$.

11. Агар:

1) $\log_{3} a = \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда a нинг;

2) $\log_{b}\frac{1}{81} = -4$ бўлса, у ҳолда b нинг;

3) $\log_{6} c = 3$ бўлса, у ҳолда c нинг;

4) $\log_{m} 0,25 = -4$ бўлса, у ҳолда m нинг қийматини топинг.

12. Агар $\log_{7}3 = a$ ва $\log_{7}5 = b$ бўлса, у ҳолда:

1) $\log_{7}25 - \log_{7}243$;

2) $\log_{125}81 + 2\log_{7}15$;

3) $\frac{1}{2}\log_{7}441 - \log_{5}9$;

4) $\log_{15}21 + 3\log_{15}245$ ифоданинг қийматини топинг.

II. Айнан шакл алмаштиришлар

Берилган оралиқда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлишини исботланг **(13—15)**:

13. 1) $F(x) = 4\sqrt{x-3} + 2$, $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$, $x \in (3; +\infty)$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

2) $F(x) = \frac{1}{12}x^6 - 16\sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x^5}{2} - \frac{8}{\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$;

3) $F(x) = x^3 - 3\sin x$, $f(x) = 3x^2 - 3\cos x$, $x \in R$;

4) $F(x) = 2\cos(4x - 1) + 7x^7$, $f(x) = -8\sin(4x - 1) + 49x^6$, $x \in R$.

14. 1) $F(x) = x + \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, $x \in (0; +\infty)$;

2) $F(x) = \cos x^4$, $f(x) = -4x^3 \sin x^4$, $x \in R$;

3) $F(x) = -1{,}5\sin^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $f(x) = -\frac{3}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in R$;

4) $F(x) = -\mathrm{ctg}5x + 5x$; $f(x) = 5\left(\frac{1}{\sin^2 5x} + 1\right)$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{5}\right)$.

15. 1) $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + 3x$, $f(x) = 3^x + 3$, $x \in R$;

2) $F(x) = \ln x - (0{,}5)^x$, $f(x) = \frac{1}{x} - 0{,}5^x \ln\frac{1}{2}$, $x \in R$;

3) $F(x) = x - \ln x^3$, $f(x) = \frac{x - 3}{x}$, $x \in (0; +\infty)$;

4) $F(x) = \ln x^2$, $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in (0; +\infty)$.

Ифодани соддалаштиринг **(16—19)**:

16. 1) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{a-b}\right)$; 2) $\sqrt{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 - 4\sqrt{ab}}$;

3) $\frac{a^{\frac{4}{3}} - 4a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}} - 2a^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\frac{a^{\frac{23}{3}} - 25a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{13}{6}} - 5a^{\frac{1}{2}}}$.

17. 1) $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + 4}{x^{1,5} - 4x} - \frac{x^{\frac{1}{2}} - 4}{x^{1,5} + 4x}\right) \cdot \frac{x - 16}{x^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\left(\frac{5}{y - 5y^{\frac{1}{2}}} - \frac{y^{1,5}}{y^2 - 25y}\right) : \frac{5y^{\frac{1}{2}} + 25 - y}{y^{\frac{1}{2}} + 5}$.

18. 1) $\left(\frac{b^{\frac{1}{2}} + 6}{b^{\frac{3}{2}} - 6b} - \frac{b^{0,5} - 6}{b^{1,5} + 6b}\right) : \frac{2b^{0,5}}{b - 36}$; 2) $\left(\frac{7}{b - 7b^{0,5}} - \frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2 - 49b}\right) \cdot \frac{b^{0,5} + 7}{49 + 7b^{\frac{1}{2}} - b}$.

19. 1) $\left(\frac{25x - 16x^{-1}}{5x^{0,5} - 4x^{-0,5}} + \frac{x - 4x^{-1}}{x^{0,5} - 2x^{-0,5}}\right)^2$; 2) $\frac{1 - y^{-2}}{y^{0,5} - y^{-0,5}} - \frac{2}{y^{0,5}} - \frac{y^{-2} - 1}{y^{0,5} + y^{-0,5}}$.

20. Айниятни исботланг:

1) $\sqrt{97 - 56\sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} = 1 - \sqrt{5}$;

3) $\frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{21 + 12\sqrt{3}}}$; 4) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$.

21. Агар:

1) $B = \sqrt{37 + 20\sqrt{3}} + \sqrt{37 - 20\sqrt{3}}$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

2) $B = \sqrt{55 + 14\sqrt{6}} + \sqrt{55 - 14\sqrt{6}}$;

3) $B = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$;

4) $B = \sqrt[3]{29\sqrt{2} - 45} + \sqrt[3]{29\sqrt{2} + 45}$ бўлса, B нинг бутун сон бўлишини исботланг.

Айниятни исботланг **(22—24)**:

22. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b - ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - ab = 0$;

2) $\dfrac{m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}} - \sqrt{mn} = m + n$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}{a + 1} + \dfrac{a^{-\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{1}{2}} + 1} - (a - 7)^0 = \dfrac{2}{\sqrt{a}} - 1$, бу ерда $a > 7$;

4) $\dfrac{a - 1}{\sqrt[3]{a} - 1} - \dfrac{a + 1}{\sqrt[3]{a} + 1} + (a + 10)^0 = 2\sqrt[3]{a} + 1$.

23. 1) $\dfrac{\log_5 3 + \log_5 9}{3\log_5 2 - \log_5 24} = -3$;

2) $\dfrac{\log_6 75 - \log_6 3}{2\log_6 \frac{1}{3} + \log_6 45} = 2$;

3) $\dfrac{2\log_{11} 5 + 2\log_{11} 2}{2\log_{11} 4 + \log_{11} 5 - 3\log_{11} 2} = 2$;

4) $\dfrac{3\lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 30 - \lg 15} = 5$.

24. 1) $9^{\log_3 5} \cdot 13^{2\log_{13} 2} = 100$;

2) $49^{\log_7 3 + \frac{1}{2}\log_7 3} = 27$;

3) $5^{\log_{\sqrt{5}} 2} \cdot 121^{\log_{11} 3} = 36$;

4) $\left(8^{\log_2 3} : 27^{\log_3 2}\right) \cdot 25^{\log_5 4} = 54$.

III. Тенгламалар ва уларнинг системалари

Иррационал тенгламаларни ечинг **(25—29)**:

25. 1) $\sqrt{2x - 7} = 3$;

2) $\sqrt[3]{x^2 + 7x + 8} = 2$;

3) $\sqrt{11 + 3x} = 4$;

4) $\sqrt[3]{27 + 2x - x^2} = 3$.

26. 1) $x = 7 - \sqrt{3x + 7}$;

2) $\sqrt{15 - 3x} - x = 1$;

3) $\sqrt{21x + 25} - 3x = 5$;

4) $\sqrt{121 - 12x} = 11 - 3x$.

27. 1) $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x + 2}$;

2) $\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = x$;

3) $\dfrac{\sqrt{3x - 5}}{x - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$;

4) $x + 2 = \sqrt{(3x + 4)(x + 1)}$.

28. 1) $\dfrac{x + 1}{9 - x} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3}$;

2) $\dfrac{4 - x}{2 + \sqrt{x}} = 8 - x$;

3) $\sqrt{x - 9} + 2 = \sqrt{x - 1}$;

4) $\sqrt{x + 5} = 5 - \sqrt{x - 10}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

29. 1) $\sqrt{1-\sin x}=\cos x$; 2) $\sqrt{1-\cos x}=\sin x$;

3) $\sqrt{\frac{x}{x+1}}+2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3$; 4) $\sqrt{\frac{x-1}{x}}-3\sqrt{\frac{x}{x-1}}=2$.

Кўрсаткичли тенгламаларни ечинг **(30—35)**:

30. 1) $\sqrt{3^x}=27^{-\frac{2}{3}}$; 2) $\sqrt{5^x}=25^{-\frac{3}{2}}$;

3) $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2^{3x-1}}=16^{-\frac{3}{4}}$; 4) $27^{-1}\cdot\sqrt{9^{x+1}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5}$.

31. 1) $9\cdot 3^{\cos x}=\sqrt{27}$; 2) $4\cdot 2^{\sin x}=\sqrt{8}$;

3) $25^{-1}\cdot\sqrt{125^x}=5^x$; 4) $216^{-1}\cdot\sqrt{36^x}=6^{0,5x}$.

32. 1) $2^x-5\cdot 2^{x-4}=11$; 2) $5^x-4\cdot 5^{x-2}=21$;

3) $3\cdot 2^{x-1}+2^{x+4}=35$; 4) $6^{x-1}+5\cdot 6^{x-2}=11$.

33. 1) $7^{x+1}-2\cdot 7^{x-2}=341$; 2) $3\cdot 11^{x+1}-2\cdot 11^{x-1}=361$;

3) $2^{x-1}+3\cdot 2^{x-2}+5\cdot 2^{x-3}=15$; 4) $7\cdot 3^{x-2}-3^{x-1}+5\cdot 3^x=49$.

34. 1) $4^x+16=10\cdot 2^x$; 2) $9^x-36\cdot 3^x+243=0$;

3) $25^x-\frac{26}{5}\cdot 5^x+1=0$; 4) $36^x-\frac{7}{36}\cdot 6^x+\frac{1}{216}=0$.

35. 1) $4^{x+1}+4^{1-x}-10=0$; 2) $3^{1+x}-2\cdot 3^{1-x}=7$;

3) $4^{\sqrt{x+3}}-32=4\cdot 2^{\sqrt{x+3}}$; 4) $25^{\sqrt{x+2}}-10=3\cdot 5^{\sqrt{x+2}}$.

Логарифмик тенгламаларни ечинг **(36—41)**:

36. 1) $\log_4(x^2-5)=1$; 2) $\log_6(x^2-2)=1$;

3) $\log_3(4+\sqrt{x})=2$; 4) $\log_5(\sqrt{x}+1)=2$.

37. 1) $\log_5(2x+3)+\log_5(4-x)=1$; 2) $\log_7(3x-17)-\log_7(x+1)=0$;

3) $\log_2(2x-1)+\log_2(x+3)=2$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(4x+5)=\log_{\frac{1}{4}}(5x+2)$.

38. 1) $\log_3(x+1)-\log_3(x-1)=1$; 2) $\log_7(x^2+6x)=1$;

3) $\log_2(x^2-x)=1$; 4) $\log_4(7x+4)-\log_4(2x-1)=1$.

39. 1) $\log^2_{\frac{1}{2}}x+2\log_{\frac{1}{2}}x-3=0$;

2) $2\log_3(x-1)=\log_3(1,5x+1)$;

3) $\log_2(x^2+4x+1)=\log_2(6x+2)-1$;

4) $\log_3(3-x)-2\log_3 2=1-\log_3(4-x)$.

40. 1) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+2)}{\log_{\frac{1}{2}}(6-5x)}=1$; 2) $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(3x+2x^2)}{\log_{\frac{1}{3}}(6x+2)}=1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

41. 1) $\log_3(2^x - 1) = 1 - \log_3(2^x - 3)$;

2) $\log_2(3^x - 1) = 1 - \log_2(3^x - 2)$.

Тенгламалар системасини ечинг **(42—44)**:

42. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ \log_2 x + \log_2 y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$

43. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ \lg x + \lg y = \lg 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_{0,5} x + \log_{0,5} y = -1, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$

44. 1) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x+2y)} = 6x, \\ 3^{x^2-2y} = 9^{0,5x}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y = \frac{1}{27}, \\ 0,1^x \cdot 10^y = 10^{-8}. \end{cases}$

IV. Тенгсизликлар

Кўрсаткичли тенгсизликларни ечинг **(45—54)**:

45. 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3x}$ m 8^2; 2) $9^{-4x} > \left(\frac{1}{81}\right)^2$;

3) $5^{\frac{2x}{x+1}} > 5$; 4) $6^{\frac{2x-1}{x}} < 36$.

46. 1) $4^{x^2-1} > 64$; 2) $5^{6-2x^2} < \frac{1}{625}$;

3) $27 \cdot 3^{x^2-3x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; 4) $8 \cdot 2^{x^2-4x} > \frac{1}{2}$.

47. 1) $49^{0,5x^2-1}$ m $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; 2) $(0,16)^{0,5x^2-3}$ l $(2,5)^{-3}$;

3) $(0,04)^{3-0,5x^2}$ l 125; 4) $9^{0,5x^2-2,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

48. 1) $7^{x^2-2x} > 343$; 2) $6^{3x-x^2} < 36$;

3) $\frac{3^x - 9}{3x^2 + 2}$ m 0; 4) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{4}}{7 + 2x^2}$ l 0.

49. 1) $27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2}$ m ☒ ; 2) $25 \cdot (5)^{-5x^2}$ l 125^{3x};

3) $\sqrt{243} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4x^2} \geqslant \left(\frac{1}{27}\right)^{-3x}$; 4) $\sqrt{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6x^2} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4x}$.

50. 1) $36 \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^{2x} < 6^{x(x-3)}$; 2) $25 \cdot 0,2^{x(3+x)} > 0,04^{2x}$;

3) $9^x - 10 \cdot 3^x$ m -9; 4) $4^{x+1} - 3 \cdot 2^x > 1$.

51. 1) $11^{\frac{x+3}{x^2-4}} > 1$; 2) $7^{\frac{x^2-25}{x+6}}$ m 1;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $0{,}08^{\frac{x}{x^2-1}} \mid 1$; 4) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x^2-36}{x^2-16}} < 1$.

52. 1) $3 - 8 \cdot 3^{-x} - 3^{1-2x} \mid 0$; 2) $5 \cdot 4^x + 3 \cdot 10^x - 2 \cdot 25^x \text{ m } 0$;

3) $3^{2x+1} > 4 - 3^x$; 4) $8^x + 3 \cdot 4^x - 2^{x+2} - 12 \mid 0$.

53. 1) $5^{\sin x} \mid \frac{1}{5}$; 2) $7^{\cos x} < \frac{1}{7}$;

3) $4^{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} < \frac{1}{4}$; 4) $6^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \mid \left(\sqrt{6}\right)^{\sqrt{3}}$.

54. 1) $7^x - 5^{x+2} > 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$; 2) $5^x - 3^{x+1} > 2 \cdot (5^{x-1} - 3^{x-2})$;

3) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$; 4) $2^{x+1} - 3^x > 3^{x-1} - 2^x$.

Логарифмик тенгсизикларни ечинг **(55—63)**:

55. 1) $\log_4(5 - 3x) > 1$; 2) $\log_2(6 - 5x) < 1$;

3) $\log_{0,5}(1 + 2x) < -1$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(4x - 3) > -1$.

56. 1) $\log_{\frac{1}{7}}\frac{x-5}{x+4} \mid 0$; 2) $\log_{0,15}\frac{5-x}{4+x} < 0$;

3) $\log_4\frac{x-3}{x} \text{ m } 0$; 4) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{x}{x+2} < -1$.

57. 1) $\log_{\frac{2}{3}}(3x - 8) < \log_{\frac{2}{3}}(2x - 9)$; 2) $\log_{\frac{4}{3}}(7x + 1) \mid \log_{\frac{4}{3}}(x - 9)$;

3) $\log_5(x^2 - 1) > \log_5 3$; 4) $\log_{11}(x^2 + 7) < \log_{11}(6x - 1)$.

58. 1) $\log_{2,7}(x - 2) + \log_{2,7}x > \log_{2,7}(x + 4)$;

2) $\log_{\frac{1}{4}}x + \log_{\frac{1}{4}}(x - 6) < \log_{\frac{1}{4}}(3x - 8)$;

3) $\log_2(x - 1) + \log_2 x \text{ m } 1$;

4) $\log_3 x + \log_3(x - 8) \mid 2$.

59. 1) $\log_{\frac{1}{6}}\left(8 - \frac{4}{5}x\right) > -2$; 2) $\log_3(4x - x^2) \mid 1$;

3) $\log_3\left(3 - \frac{x}{2}\right) > \log_3(2x - 1)$; 4) $\log_{0,8}(x^2 - 8) \mid \log_{0,8}8$.

60. 1) $\frac{\lg x}{x-3} \mid 0$; 2) $\frac{3-2x}{\log_5 x} > 0$;

3) $\frac{\log_4 x}{x-4} \text{ m } 0$; 4) $\frac{x+1}{\log_2(x-4)} > 0$.

61. 1) $\frac{x^2+3x}{\log_2(x+1)} \text{ m } 0$; 2) $\log_{12}\frac{x^2+x}{x+4} \mid 0$;

3) $\frac{2x^2-8}{\log_5 x} \mid 0$; 4) $\frac{\log_6(x+2)}{x^3} \text{ m } 0$.

62. 1) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2+3}{x+3} < -1$;

2) $\log_2\frac{x^2-4}{x+10} > 1$;

3) $\log_3 x + \log_3(x - 1) > \log_3 x + 1$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

4) $\log_{0,1}(x-2)+1$ m $\log_{0,1}0,3-\log_{0,1}x$.

63. 1) $\log_{\frac{1}{4}}\sin 2x$ m $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$; 2) $\log_{13}\sin x+\log_{13}\cos x>\log_{13}\frac{1}{4}$;

3) $\log_{0,9}(2\cos 4x)>\log_{0,9}\sqrt{3}$; 4) $\log_{\frac{4}{5}}\operatorname{tg}x$ m 0.

V. Функция

$y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг **(64-65)**:

64. 1) $f(x)=5-\sqrt{x+4}$; 2) $f(x)=8-\sqrt{4-x}$;

3) $f(x)=\sqrt{x}-\log_2(x+1)$; 4) $f(x)=6x+\log_7(x^2-1)$.

65. 1) $f(x)=\log_{0,7}(x^2-5x-6)$; 2) $f(x)=\log_5(x-4)+\log_5 x$;

3) $f(x)=\log_{\frac{1}{6}}(4-x^2)$; 4) $f(x)=\log_7\frac{x+8}{x}+\lg x$.

$y=f(x)$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг **(66-67)**:

66. 1) $f(x)=2+\sqrt{x}$; 2) $f(x)=-3+\sqrt{x}$;

3) $f(x)=2^x+2$; 4) $f(x)=3+\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

67. 1) $f(x)=5^{x+1}-4$; 2) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3-x)$;

3) $f(x)=\log_2(x-5)$; 4) $f(x)=\log_5(7-x)$.

"Жонли геометрия" ёки "GeoGebra" дастуридан фойдаланиб, $y=f(x)$ функциянинг графигини ясанг ва хоссаларини айтинг **(68-69)**:

68. 1) $f(x)=\sqrt{x}+1$; 2) $f(x)=3^x+3$;

3) $f(x)=4^{x-1}-1$; 4) $f(x)=|2^{x+2}-5|$.

69. 1) $f(x)=\log_5(x+1)$; 2) $f(x)=3+\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$;

3) $f(x)=\log_6 x-2$; 4) $f(x)=3+\log_2(x+2)$.

$y=f(x)$ функциянинг ўзгармас ишорали оралиқларини топинг **(70-71)**:

70. 1) $f(x)=\sqrt{x}-1$; 2) $f(x)=3\sqrt{x}$;

3) $f(x)=3^x-3$; 4) $f(x)=\left(\frac{1}{7}\right)^x+1$.

71. 1) $f(x)=\log_5(x-1)$; 2) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(2+x)$;

3) $f(x)=|\log_4 x|$; 4) $f(x)=|5^x-5|$.

72. $y=f(x)$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

1) $f(x)=xe^{3x}$; 2) $f(x)=3x\cdot e^x$;

3) $f(x)=x^2e^x$; 4) $f(x)=x\cdot e^{2x}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

73. $y = f(x)$ функциянинг графигини ясанг:

1) $f(x) = 5\log_5(x^2 - 1)$; 2) $f(x) = \frac{1}{4}^{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}$;

3) $f(x) = 0{,}5^{\log_2(x-5)}$; 4) $f(x) = 9^{\log_3 \frac{1}{x}}$.

74. $y = f(x)$ функцияни текширинг ва графигини ясанг:

1) $f(x) = 4xe^{0,5x}$; 2) $f(x) = x\ln x$; 3) $f(x) = \ln x - x$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

75. $y = f(x)$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг:

1) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $[-1; 0]$; 2) $f(x) = 2^x - 4$, $[-2; 2]$;

3) $f(x) = 3 + \log_5 x$, $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$; 4) $f(x) = \log_4 x - 1$, $\left[\frac{1}{16}; 4\right]$.

$y = f(x)$ функция учун графиги $K(a; b)$ нуқтадан ўтувчи бошланғич функцияни топинг (**76-77**):

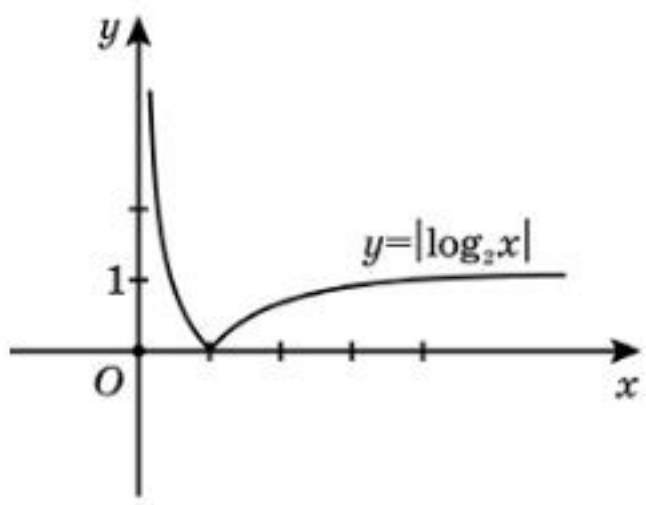
76. 1) $f(x) = \frac{9}{(5 - 3x)}$, $K(1; 1)$; 2) $f(x) = \frac{6}{\cos^2 3x} + 1$, $K\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $f(x) = 5e^x$, $K\left(-1; \frac{1}{e}\right)$; 4) $f(x) = e^{2x} - 10x$, $K(0; 1)$.

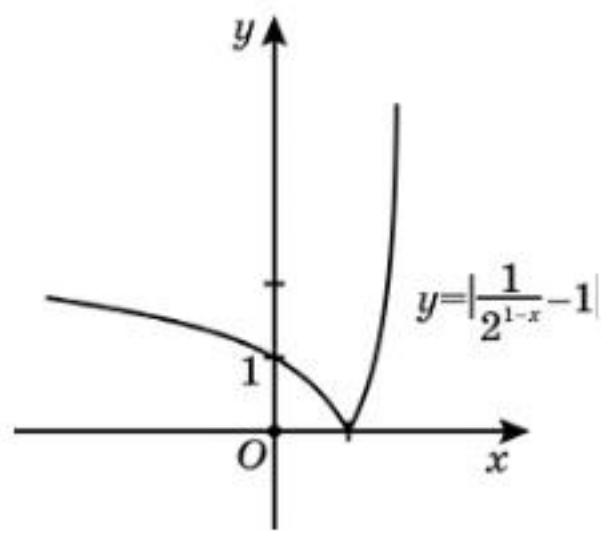
77. 1) $f(x) = 16x^3 + 3x^2$, $K(1; 2)$; 2) $f(x) = \frac{2}{5x^4} + 7x^6$, $K(-1; 1)$;

3) $f(x) = \frac{5}{3\sin^2 x}$, $K\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 4) $f(x) = -\frac{6}{\sqrt{1 + 3x}}$, $K(5; 0)$.

78. Берилган графиклари бўйича $y = f(x)$ функцияни тавсифланг (62, 63-расмлар).



62-расм



63-расм

Берилган чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг (**79—81**):

79. 1) $y = x^2 - 4x + 7$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;
2) $y = x^2 + 6x - 8$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
3) $y = x^2 + 3x$, $y = 0$;
4) $y = 6x - x^2$, $y = 0$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

80. 1) $y = x^2 + 3x + 6$, $y = 6$; 2) $y = 5x + x^2 + 2$, $y = 2$;
3) $y = 5 + 4x - x^2$, $y = x + 1$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

81. 1) $y = \frac{3}{x}$, $y = 1$, $x = 1$; 2) $y = \frac{5}{x}$, $x + y = 6$;
3) $y = \frac{2}{x}$, $x + y = 3$; 4) $y = \frac{7}{x}$, $y = -1$, $x = -1$.

Тенгламани график усулда ечинг **(82-83)**:

82. 1) $3^x = x - 2$; 2) $\log_4 x = 2 - x$;
3) $(0,2)^x - x^2 = 0$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} x = x^2 - 1$.

83. 1) $5^x = x^2 + 1$; 2) $\log_2 x = 2^x$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{x} + 1$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} x = \sqrt{x} - 1$.

Математик саводхонликка доир топшириқлар

84. $\frac{5\neq}{6}$; $\frac{11\neq}{18}$; $0,4\pi$; $\frac{7\neq}{9}$; $0,75\pi$ катталиклар орасидан энг кичигини кўрсатинг:

A) $\frac{7\neq}{9}$; B) $\frac{5\neq}{6}$; C) $0,75\pi$; D) $\frac{11\neq}{18}$; E) $0,4\pi$.

85. Тўла бурчакнинг $\frac{7}{4}$ қисми неча градусга тенг:

A) 540°; B) 720°; C) 560°; D) 630°; E) 580°?

86. Агар $a \# c = a + 4c$ бўлса, у ҳолда $(3 \# 2) \# (2 \# 1)$ ифоданинг қийматини топинг:

A) 34; B) 32; C) 35; D) 33; E) 36.

87. 450° неча радианга тенг:

A) $2,5\pi$; B) $5,2\pi$; C) $3,5\pi$; D) 5π; E) 4π?

88. Километрнинг $\frac{1}{5}$ қисми неча метрни ташкил қилади:

A) 200 м; B) 500 м; C) 150 м; D) 250 м; E) 750 м?

89. $3,5\pi$ неча градусдан иборат:

A) 540°; B) 720°; C) 560°; D) 630°; E) 450°?

90. Бир хонали сонлар уч хонали сонларга нисбатан неча марта кам:

A) 901 марта; B) 100 марта; C) 10 марта;
D) 900 марта; E) 899 марта?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

91. –9 дан 3 гача –9 билан 3 ни бирга олгандаги сонлар орасида қанча бутун сон бор:

A) 13; B) 14; C) 12; D) 15; E) 16?

92. –5 дан 5 гача бўлган оралиққа тегишли натурал сонлар сони ўша оралиққа тегишли бутун сонлар сонидан қанча кам:

A) 4 га; B) 6 га; C) 5 га; D) 7 га;
E) натурал ва бутун сонларнинг сони бир хил?

93.

a	n
c	m

–8	–0,8
0,5	6

Жадваллардан фойдаланиб, $6a + \frac{2}{c} - 5n + 7m - 2$ ифоданинг қийматини топинг:

A) 2; B) –2; C) 50; D) –50; E) 0.

94. A, B — турли рақамлар ва $\overline{AB} \cdot \overline{BA} = 2668$ экани маълум. $A^2 + B^2 + 15$ ифоданинг қийматини топинг.

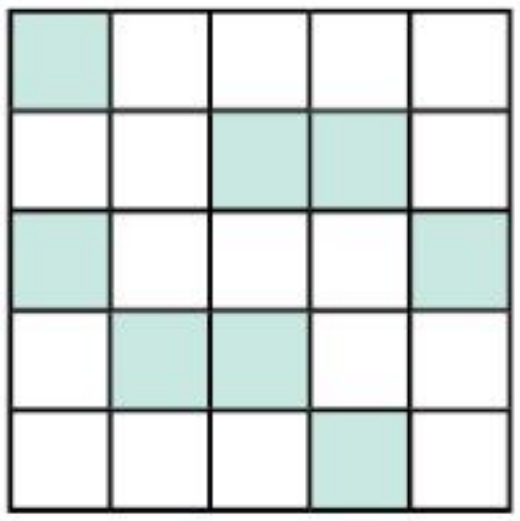
A) 90; B) 95; C) 100; D) 110; E) 121.

95. a сон 28 000 сонининг 20% ига тенг. c сон 6000 сонининг 60% ига тенг. Тўғри мулоҳазани кўрсатинг:

A) $a + c = 2400$; D) $2a + c = 2400$;
B) $a - c = 2000$; E) $c - a = 2400$.
C) $a - c = 0$;

96. Фигуранинг бўялган қисми унинг неча фоизини ташкил қилади (64-расм):

A) 35%; B) 40%; C) 32%; D) 36%; E) 45%?



64-расм

97. Тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги идишда 60 дм^3 сув бор эди. Идишдан 6 дм^3 сув қуйиб олинса, қолган сувнинг ҳажми дастлабки ҳажмининг неча фоизини ташкил қилади:

A) 80%; B) 85%; C) 5%; D) 10%; E) 90%?

98. Жадвалда ўқувчиларнинг 200 м масофага югуриш натижалари берилган.

31-*жадвал*

Югуриш натижалари интервали (секундларда)	30—32	33-34	35-36
Натижаларни кўрсатган ўқувчилар сони	9	12	15

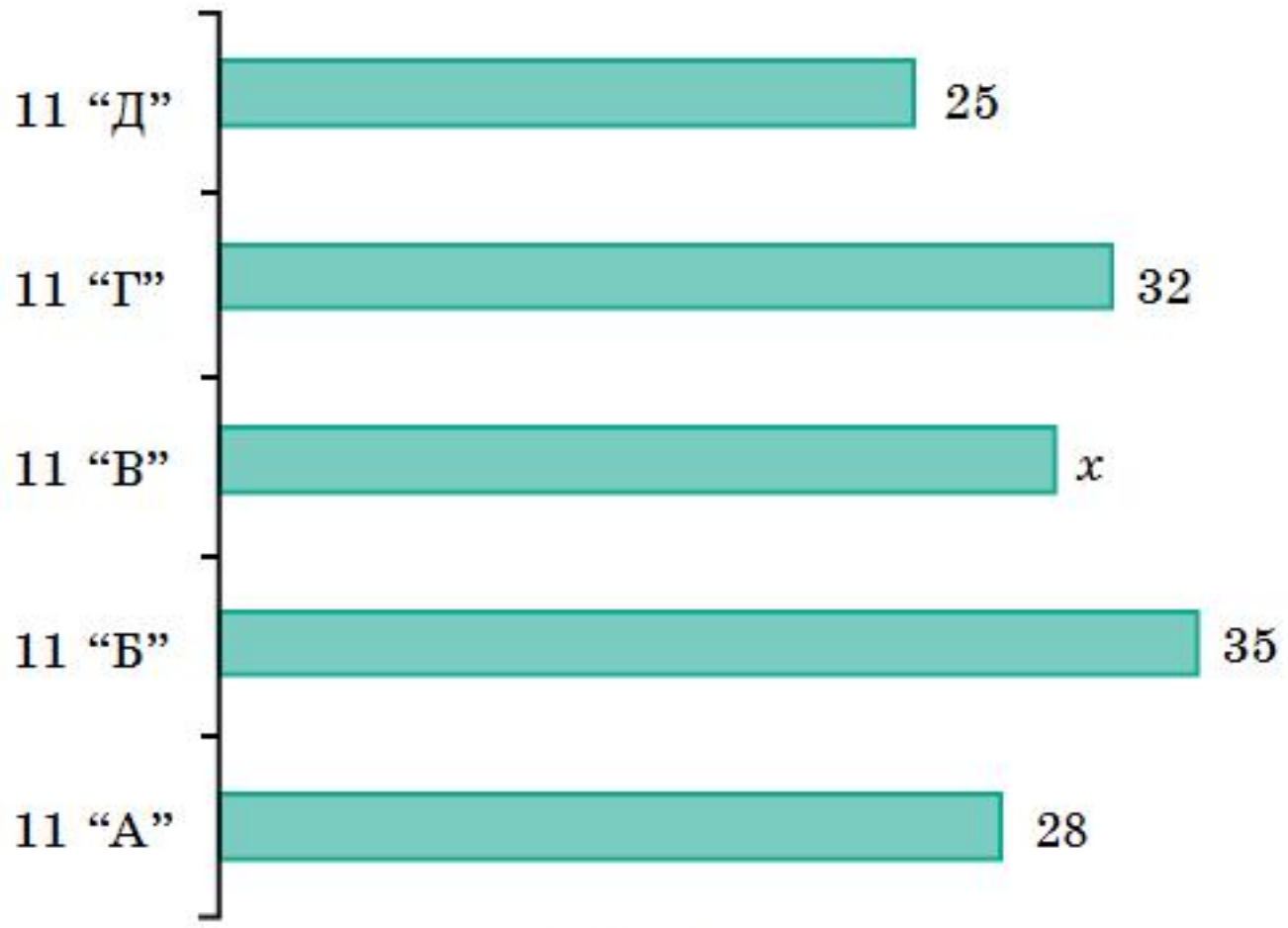
33 дан 36 гача натижаларни кўрсатган ўқувчилар сони умумий ўқувчилар сонининг неча фоизини ташкил қилади:

A) 65%; B) 75%; C) 80%; D) 70%; E) 60%?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

99. 11-синф ўқувчилари сони 65-расмда кўрсатилган.



65-расм

1) Агар 1- “В” синф ўқувчилари сони 11-”Б” ва 11-”Д” синфлардаги ўқувчилар сони йиғиндисининг 50% ига тенг бўлса, у ҳолда жами ўқувчилар сонини топинг (3-расм):

A) 155; B) 160; C) 150; D) 165; E) 170.

2) Агар 1- “В” синф ўқувчилари сони жами ўқувчилар сонининг бешдан бир қисмига тенг бўлса, у ҳолда жами ўқувчилар сонини топинг:

A) 170; B) 150; C) 160; D) 165; E) 155.

100. 66-расмда бир ҳафта давомида дўконга келган харидорлар сони келтирилган. Бир кундаги харидорларнинг ўртача сонини топинг:

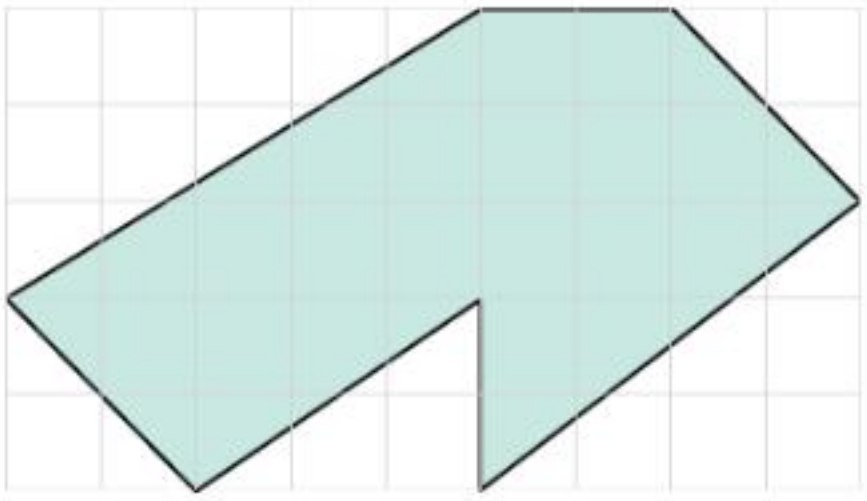
66-расм

A) 130; B) 110; C) 125; D) 120; E) 115.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

101. Фигура тенг квадратларга бўлинган (67-расм).



67-расм

1) Фигуранинг бўялган қисмининг юзи берилган фигура юзидан қанча кам:

A) 22; B) 24,5; C) 26; D) 28,5; E) 25?

2) Фигуранинг бўялмаган қисмининг юзи бўялган қисми юзидан қанча кам:

A) 2 кв. бирл.; B) 4 кв. бирл.; C) 6 кв. бирл.;
D) 8 кв. бирл.; E) 5 кв. бирл.?

102. Товарнинг баҳоси 15 600 тг. Баҳо дастлаб 20% арзонлаштирилди, сўнгра 10% кўтарилди. Натижада товарнинг баҳоси қандай ўзгарди:

A) 2018 тг арзонлашди; B) 2018 тг қимматлашди;

C) 1872 тг арзонлашди; D) 1872 тг қимматлашди;

E) баҳолар ўзгармади?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ГЛОССАРИЙ

Аниқ интеграл	$\int_a^b f(x)dx$ ифода a дан b га қадар $f(x)$ функциянинг *аниқ интеграли* дейилади.
Аниқмас интеграл	$f(x)$ функциянинг барча бошланғич функцияларининг умумий кўринишини, яъни $F(x) + C$ ифода ўша функциянинг *аниқмас интеграли* дейилади.
Бошланғич функция	Ҳар қандай X тўпламда ўзгарувчи x учун $F'(x) = f(x)$ тенглик ўринли бўлса, берилган тўпламда $f(x)$ функция учун $F(x)$ функция *бошланғич функция* дейилади.
Бош тўплам	*Бош тўплам* деб ўрганишга тааллуқли барча объектлар ёки бир объектга бир хил шароитларда олиб бориладиган барча кузатишларнинг мумкин бўлган натижалари тўпламига айтилади.
Даражали функция	$y = x^r$ кўринишда берилган функция *даражали функция* дейилади. Бу ерда x — эркли ўзгарувчи, r — ҳар қанда рационал сон
Жисм ҳажмини топиш формуласи	$V = \pi\int_a^b y^2\, dx$ — жисм ҳажмини топиш формуласи
Дискрет вариацион қатор	*Дискрет вариацион қатор* деб мос келувчи частоталари ёки бўлинмалари бўйича варианталарнинг тақсимот тўпламига айтилади.
e сони	$e = 2{,}7182818289...$
Интеграллаш	Функциянинг маълум ҳосиласи бўйича бошланғич функциясини топиш *интеграллаш* дейилади.
Иррационал тенглама	Ўзгарувчиси илдиз белгиси остида ёки каср кўрсаткичли даража асосида берилган тенгламалар *иррационал тенгламалар* дейилади.
Интервалли вариацион қатор	*Интервалли вариацион қатор* деб частоталари ёки уларнинг ҳар бирига миқдор қийматларининг тушиш частоталари билан алмашадиган тартибланган интерваллар тўпламига айтилади.
Эгри чизиқли трапеция	Юқоридан узлуксиз, номанфий $y = f(x)$ функциянинг графиги, қуйидан Ox ўқи, ён ёқидан $x = a$, $x = b$ кесмалар билан чегараланган ясси фигура *эгри чизиқли трапеция* дейилади.
Кўрсаткичли тенглама	$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a \neq 1, a > 0)$ кўринишда берилган ёки ўша кўринишга келадиган тенглама *кўрсаткичли тенглама* дейилади.
Кўрсаткичли тенгсизлик	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $(a^{f(x)} \mid a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \text{ m } a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \text{ m } a^{g(x)})$, $a \neq 1$, $a > 0$ кўринишда берилган ёки ўша кўринишга келадиган тенгсизлик *кўрсаткичли тенгсизлик* дейилади.
Кўрсаткичли функция	$y = a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$ формула орқали берилган функция *кўрсаткичли функция* дейилади.
Соннинг логарифми	Асоси a бўлган мусбат b *соннинг логарифми* деб b сонга тенг бўлган асоснинг даража кўрсаткичига айтилади.
Логарифмик тенглама	$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a \neq 1, a > 0, f(x) > 0, g(x) > 0)$ кўринишда берилган ёки ўша кўринишга келадиган тенглама *логарифмик тенглама* дейилади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Логарифмик тенгсизлик	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ($\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$) $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ кўринишда берилган ёки ўша кўринишга келадиган тенгсизлик *логарифмик тенгсизлик* дейилади.
Логарифмик функция	$y = \log_a x$ ($a \neq 1$, $a > 0$) формула орқали берилган функция *логарифмик функция* дейилади.
Натурал логарифм	Асоси e бўлган соннинг логарифми *натурал логарифм* дейилади.
Ньютон-Лейбниц формуласи	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
n-даражали арифметик илдиз	Номанфий a соннинг n-даражали арифметик илдизи деб n-даражаси a сонга тенг бўлган номанфий b сонга айтилади.
n-даражали илдиз	a соннинг *n-даражали илдизи* деб n-даражаси a сонга тенг бўлган b сонга айтилади.
Ўнли логарифм	Асоси 10 сони бўладиган логарифм *ўнли логарифм* дейилади.
Рационал кўрсаткичли даража	$a > 0$ соннинг $\frac{m}{n}$ (бу ерда $\frac{m}{n}$ — қисқармас каср) *рационал кўрсаткичли даражаси* деб, a^m сондан олинган n-даражали илдизнинг қийматига айтилади.
Танланма	*Танланма тўплам* ёки *танланма* деб объектлар тўпламини ёки бош тўпламдан тасродифий равишда сараланган объектни кузатиш натижаларига айтилади.
Танланма ҳажми	Танланмадаги объектлар ёки кузатишлар сони *танланма ҳажми* дейилади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ЖАВОБЛАР

10-СИНФ АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

3. 1) 8π; 2) 14π; 3) 8π; 4) 2π. **4.** 1) πn, $n \in Z$; 2) πn, $n \in Z$; $\frac{\neq}{4} + \frac{\neq k}{2}$, $k \in Z$; 3) $\frac{\neq}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $\pm(\pi - \arccos 0{,}1) + 2\pi k$, $k \in Z$. **5.** 5) $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\neq}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 6) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\neq}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **6.** 4) $[\pi n; \frac{\neq}{2} + \pi n]$, $n \in Z$; 5) $\left[\frac{5\pi}{36} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$. **7.** 1) $[-4; -1] \cup \{1\}$. **8.** 1) $f(g(x)) = \sin^3 x - 1$; 6) $g(q(f(x))) = \sin\sqrt{x^3}$. **9.** 5) $27\cos(4 - 3x)\sin(8 - 6x)$; 8) $-\frac{5}{\cos 10x} + \frac{(20 - 50x)\operatorname{tg} 10x}{\cos 10x}$. **10.** 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. **11.** 1) $y = 13x - 16$. **12.** 1) -9; 4; 2) $(-6; 2)$. **13.** 1) $(-\infty; +\infty)$ — камаяди; 2) $(-\infty; -6]$; $[0; +\infty)$ — ўсади; $[-6; -3)$; $(-3; 0]$ — камаяди; 3) $(-\infty; -4)$; $(-4; 4)$; $(4; +\infty)$ — ўсади; 4) $(-\infty; -3)$; $(-3; 0)$ — ўсади; $(0; 3)$; $(3 +\infty)$ — камаяди; 5) $[0; +\infty)$ — ўсади; 6) $[1; 2\frac{1}{3}]$ — ўсади; $[2\frac{1}{3}; +\infty)$ — камаяди. **14.** 2) $(-\infty; \frac{1}{20}]$ — камаяди; $[\frac{1}{20}; +\infty)$ — ўсади; $x_{\min} = \frac{1}{20}$. **15.** 1) $(-\infty; -\frac{3}{10}]$ — камаяди; $[-\frac{3}{10}; +\infty)$ — ўсади; $y_{\min}\left(-\frac{3}{10}\right) = -2{,}45$. **16.** 1) $[-1; 5]$ — камаяди, $x_{\max} = -1$; $x_{\min} = 5$; 2) $[-1{,}5; 2]$ — камаяди, $x_{\max} = -1{,}5$; $x_{\min} = 2$. **20.** 1) ойнинг 3, 15, 19 кунлари; 2) тўрт кун; 3) ўн бир кун; 4) 50%. **21.** 1) 70 кг; 2) 4 кг. **22.** 1) 20% — А банк; 12% — В банк; 2) 8%. **23.** 1) D; 2) B. **24.** C. **25.** D.

I боб. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА ИНТЕГРАЛ

1.5. 3) $x^3 + x^2 - x + C$; 4) $2x - 2x^2 - x^3 + C$. **1.6.** 3) $\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{12} + C$; 4) $-\frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{15}}{14} + C$. **1.7.** 2) $-5\cos x + 6\sin x + C$; 4) $-3\operatorname{ctg} x - x^9 + C$. **1.10.** 2) $2x + 2x^2 + 1$; 3) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$. **1.11.** 2) $-$ [redacted] $+ \frac{4}{3}$; 4) $-2\operatorname{ctg} x + 5$. **1.12.** $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + t^3 + C$ (м). **1.13.** $s(t) = t^2 + 2t^3 + C$ (м). **1.19.** 1) $\frac{1}{8}(2x + 3)^4 + C$; 3) $-\frac{1}{3}\cos(3x - 4) + C$. **1.20.** 3) $x + 25\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{6}\right) + C$; 4) $x + 36\operatorname{tg}\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{5}\right) + C$. **1.21.** 2) $\sqrt{x - 5} + 3\sin\left(2 + \frac{x}{3}\right) + C$; 4) $\frac{8}{15}\sqrt{2 + 3x} - \frac{1}{3(2 - x)^3} + C$. **1.22.** 1) $\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3} + C$; 3) $x + \frac{1}{3}x^3 + C$. **1.23.** 2) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$; 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{9} - \frac{x}{4}\right) + C$; 4) $-5\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) + C$. **1.24.** 1) $-\frac{1}{2x + 5} + \frac{3}{2}$; 2) $-\frac{1}{\left(\frac{x}{2} + 3\right)^2} + 4$. **1.25.** 1) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}$. **1.26.** 1) $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + 3t + 6\frac{2}{3}$ (м); 2) $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t + 25$ (м). **2.1.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$. **2.2.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{3}{2}$. **2.3.** 1) $\frac{27}{4}$; 2) $\frac{27}{4}$. **2.4.** 1) $\frac{8}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{16}{3}$; 4) $\frac{3(2 + \sqrt{2})}{2}$. **2.5.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$. **2.6.** 1) 13; 2) $\frac{13}{6}$. **2.7.** 1) $2\sqrt{2}$; 2) 1. **2.8.** 1) $2\sqrt{2} - 1$; 2) 2. **2.9.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$. **2.10.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$. **3.1.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 1; 3) $\frac{7}{8}$; 4) $\frac{1}{2}$. **3.2.** 1) 2; 2) $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$; 3) 1; 4) 6. **3.3.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{26}{15}$; 4) $\frac{15}{8}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3.4. 1) 4; 2) $\frac{7}{2}$; 3) $\frac{57}{4}$; 4) 58. **3.5.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{20}{3}$; 3) $\frac{6}{5}$; 4) $\frac{7}{6}$. **3.6.** 1) $1 + \frac{\neq}{2}$; 2) $1 + \frac{\neq}{2}$; 3) $\frac{3\pi - 10\sqrt{2}}{4}$; 4) $\frac{3\neq}{4} - 2\sqrt{2} + 4$. **3.7.** 1) 3; 2) 2; 3) −8; 4) 136. **3.8.** 1) $\frac{5\sqrt{2} - 6}{2}$; 2) $\frac{3(1 - \sqrt{3})}{2}$; 3) $2\sqrt{2} + 2$; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - 3 - \sqrt{2}$. **3.9.** 1) $\frac{-2 + \sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3} - 2}{2}$; 3) −4; 4) 6. **3.10.** 1) 21; 2) 20; 3) 33; 4) 36. **3.13.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) −1. **3.14.** 1) 30; 2) $\frac{74}{3}$; 3) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{244}{3}$. **3.15.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{75}{64}$. **3.16.** 1) $\frac{2 + \pi}{4}$; 2) $\frac{\pi - 2}{4}$; 3) $\frac{3\neq}{2}$; 4) $\frac{\neq}{64}$. **3.17.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $10\frac{11}{12}$; 3) $13\frac{1}{3}$; 4) $10\frac{2}{3}$. **3.18.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **3.19.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 4; 4) $\frac{3}{2}$. **3.20.** 1) 1; 4; 2) 2; 6. **3.21.** 1) 1; 4; 2) 2; 3. **3.22.** 1) $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 2) (0; 1). **3.23.** 1) $(-\infty; -0{,}8)$; 2) (−1; 2). **4.1.** 1) $\frac{1}{6}$ кв. бирл.; 2) $\frac{3}{4}$ кв. бирл. **4.2.** 1) $\frac{4}{3}$ кв. бирл.; 2) $\frac{1}{4}$ кв. бирл.; 3) $\frac{32}{3}$ кв. бирл.; 4) $\frac{4}{3}$ кв. бирл. **4.3.** 1) $\frac{4}{3}$ кв. бирл.; 2) 2 кв. бирл.; 3) $\frac{9}{2}$ кв. бирл.; 4) $\frac{1}{3}$ кв. бирл. **4.4.** 1) 4 кв. бирл; 2) 4 кв. бирл. **4.5.** $48{,}6\pi$ куб. бирл. **4.6.** $54{,}6\pi$ куб. бирл. **4.7.** 1) $\frac{8\neq}{3}$ куб. бирл.; 2) $\frac{9\neq}{2}$ куб. бирл. **4.8.** 1) $\sqrt{2}-1$ кв. бирл.; 2) $2(\sqrt{2}-1)$ кв. бирл.; 3) 1 кв. бирл.; 4) $\frac{5}{4}$ кв. бирл. **4.9.** 1) 8 кв. бирл.; 2) $\frac{7}{96}$ кв. бирл. **4.10.** 1) $\frac{9}{2}$ кв. бирл.; 2) 4,5 кв. бирл. **4.11.** 1) $2\frac{2}{3}$ кв. бирл.; 2) $2\frac{2}{3}$ кв. бирл.; 3) $21\frac{1}{3}$ кв. бирл.; 4) $2\frac{2}{3}$ кв. бирл.

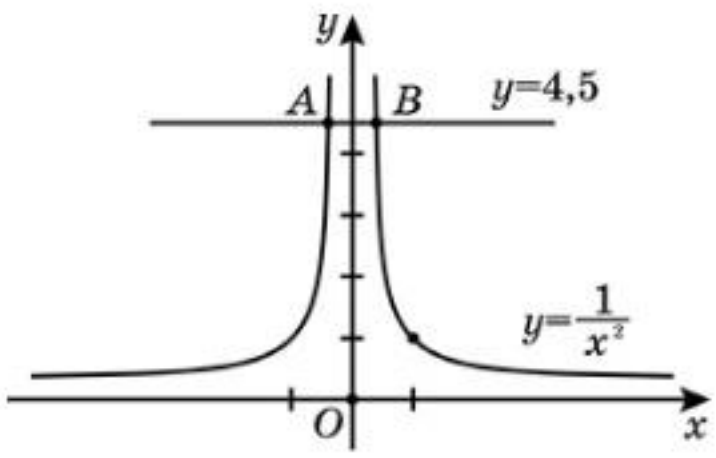
II боб. ДАРАЖА ВА ИЛДИЗ. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯ

5.3. 1) −2; 2) 3; 3) −4; 4) −6. **5.4.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) $\frac{4}{3}$. **5.5.** 1) −2; 2) $\pm\sqrt[6]{7}$; 3) $\sqrt[3]{4}$; 4) ±2. **5.6.** 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) −10; 3) −2; 4) ±2. **5.7.** 1) 13; 2) −729; 3) 7; 4) 2. **5.8.** 1) 15; 2) 6; 3) 6; 4) 0,3. **5.9.** 1) 10; 2) 6; 3) 6; 4) 15. **5.10.** 1) 2; 2) −2; 3) 3; 4) −5. **5.11.** 1) 2; 2) 2; 3) −3; 4) 2. **5.12.** 1) $2xy^2\sqrt[6]{x^5y}$; 2) $4x^2y^2\sqrt[4]{y}$; 3) $3x^4y^4\sqrt[3]{2y}$; 4) $2xy\sqrt[4]{xy^3}$. **5.13.** 1) $\sqrt[3]{4x^6y^3}$; 2) $\sqrt[5]{3xy^{13}}$; 3) $\sqrt[4]{8x^8y^{12}}$; 4) $\sqrt[3]{-5x^3y^6}$. **5.14.** 1) x | 0 бўлганда x; $x < 0$ бўлганда x; 2) x; 3) x; 4) x. **5.15.** 1) $2a$; 2) 0; 3) $3b$; 4) 0. **5.16.** 1) −27; 2) 20; 3) 6; 4) 12. **5.17.** 1) 0,75; 2) 2,96; 3) 2,216; 4) 17,625. **5.18.** 1) 25,5; 2) 3749,9; 3) $106\sqrt[3]{3}$; 4) 0,6. **6.1.** $\sqrt[5]{3^9}$; 2) $\sqrt[5]{2^8}$; 3) $\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^3}$; 4) $\sqrt[5]{7^6}$. **6.2.** 1) $x^{-\frac{2}{3}}$; 2) $(3y)^{\frac{1}{7}}$; 3) $x^{-\frac{2}{3}}$; 4) $5^{\frac{3}{8}}$. **6.3.** 1) 9; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 128; 4) $\frac{9}{625}$. **6.4.** 1) $\frac{27}{2}$; 2) 20; 3) [illegible]; 4) $\frac{18}{25}$. **6.5.** 1) $b^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)$; 2) $b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{2}} - 1\right)$; 3) $3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} + 1\right)$; 4) $x^{\frac{1}{2}}\left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)$. **6.6.** 1) $\left(a^{\frac{1}{3}} - 1\right)\left(b^{\frac{1}{3}} - 1\right)$; 4) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)$. **6.7.** 4) $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$. **6.8.** 1) $\frac{a^{\frac{1}{4}} + 1}{a^{\frac{1}{2}}}$; 2) $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{4}}$. **6.9.** 1) $4\sqrt[3]{5}$; 2) 4; 3) −21; 4) $\frac{1}{6}$. **6.10.** 1) $\left(\frac{ax^5}{64}\right)^{\frac{1}{7}}$; 2) $a^{\frac{29}{12}}$; 3) $b^{\frac{11}{9}}$; 4) $x^{\frac{1}{9}}$. **6.11.** 2) $\sqrt[12]{\frac{a^9}{b^8}}$; 3) $3\sqrt[5]{\frac{1}{b^4}}$. **6.12.** 1) $[-1; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $[3; +\infty)$. **6.13.** 1) $a^{\frac{1}{2}}$; 3) $ab + b^2 - 1$; 4) $(a - b)^2$. **6.14.** 1) −1; 2) 1; 3) 3; 4) $\frac{1}{5}$. **6.15.** 1) −6,5; 2) $-\frac{6}{115}$; 3) $\frac{4}{9}$; 4) 3. **6.16.** 1) $\frac{1}{\sqrt{a + 1}}$; 2) $1 - a$. **7.1.** 1) 7; 2) 3; 3) 2; 4) 4.

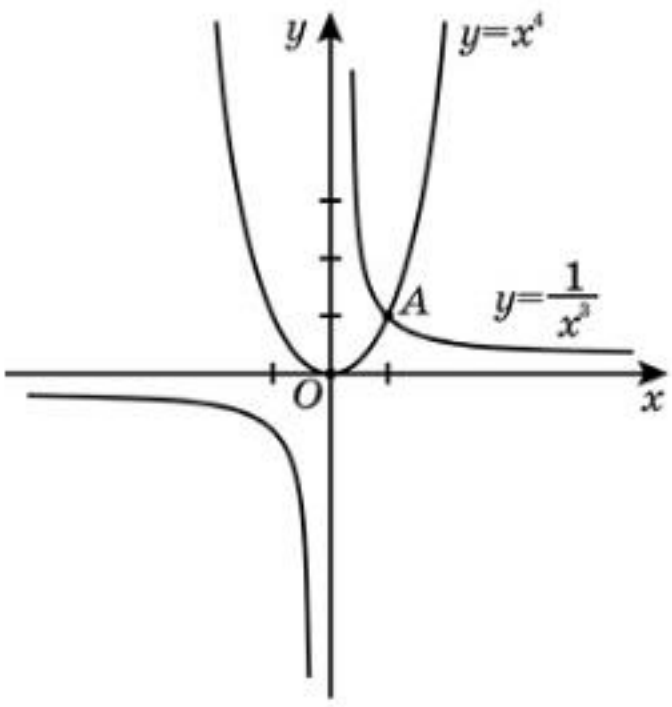
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

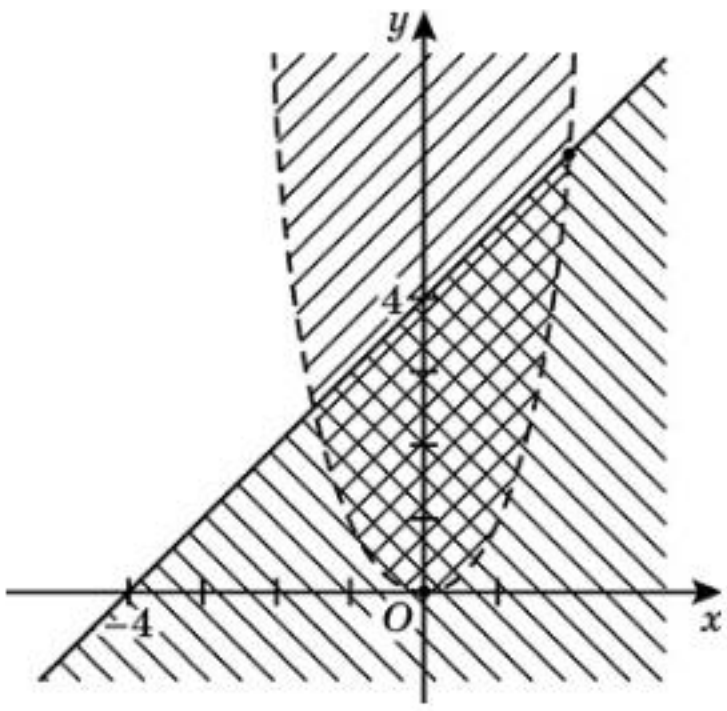
7.2. 1) $51\sqrt{2}$; 2) $8\sqrt{15} - 30$; 3) $17\sqrt{2} - 24$; 4) 2. **7.3.** 1) 3; 2) 2; 3) 3; 4) 4. **7.4.** 1) 7; 2) −2; 3) −1; 4) $-\frac{11}{3}$. **7.5.** 1) $1 + \sqrt{7}$; 2) $\sqrt{6} - 1$; 3) $\frac{2(x - \sqrt{a})}{x^2 - a}$; 4) $\frac{3(x + \sqrt{a})}{x^2 - a}$; 5) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; 6) $2(\sqrt{7} + \sqrt{5})$; 7) $\sqrt{8} + \sqrt{5}$; 8) $\frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}{x^2 - 2}$. **7.6.** 2) $2x^{\frac{1}{2}} - 1$; 4) $x - 1$. **7.7.** 1) $p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{8}}$; 2) $p + q$; 3) 0; 4) $a^{\frac{1}{3}}$. **7.8.** 1) $-\frac{\sqrt{6} - 4}{10}$; 2) $\frac{2\sqrt{6} + 3}{10}$; 3) $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$; 5) $4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$; 6) $9 - 3\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}$; 7) $(1 + \sqrt{b})\sqrt{1 - \sqrt{b}}$; 8) $(1 - \sqrt{a})\sqrt{1 + \sqrt{a}}$. **7.9.** 1) $\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$; 2) $2b$. **8.5.** 1) $[-5; +\infty)$; 2) $(3{,}5; +\infty)$; 3) $[-2; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{7}; +\infty\right)$. **8.8.** 1) 68-расм; 3) 69-расм. **8.9.** 1) 70-расм; 4) 71-расм. **9.3.** 1) $y = -27x + 4$; 2) $y = 0{,}5x + 1{,}5$; 3) $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$; 4) $y = -x + 5$. **9.4.** 3) $f(-8) = 4$; $f(-1) = 1$; 4) $f(1) = 1$; $f(16) = 2$. **9.5.** 1) $\frac{3\sqrt{2} - 1}{17} x^{3\sqrt{2}+1} + C$; 2) $\frac{2}{\pi - 1} x^{-\pi + 1} + C$; 3) $-\frac{1}{12x^3} + C$; 4) $\sqrt{x} + C$. **9.6.** 1) $\frac{9}{2}$; 2) 1; 3) [illegible]; 4) 315. **9.7.** 1) 2 кв. бирл.; 2) $\frac{31}{160}$ кв. бирл.; 3) $\frac{9}{2}$ кв. бирл.; 4) $\frac{7}{24}$ кв. бирл. **9.8.** 1) $\sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1} + 2{,}5x^{1{,}5}$; 2) $(\sqrt{3} - 2)x^{\sqrt{3}-3} + \frac{1}{8}x^{-\frac{9}{8}}$; 3) $-\frac{5}{6}x^{-\frac{11}{6}} + \sqrt{2}(x - 2)^{\sqrt{2}-1}$; 4) $\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{8}} + 2{,}5x(1 + x^2)^{-\frac{9}{4}}$. **9.9.** 1) $y = -\frac{16}{3}x + \frac{8}{3}$; 2) $y = \frac{7}{4}x + \frac{5}{4}$; 3) $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$;



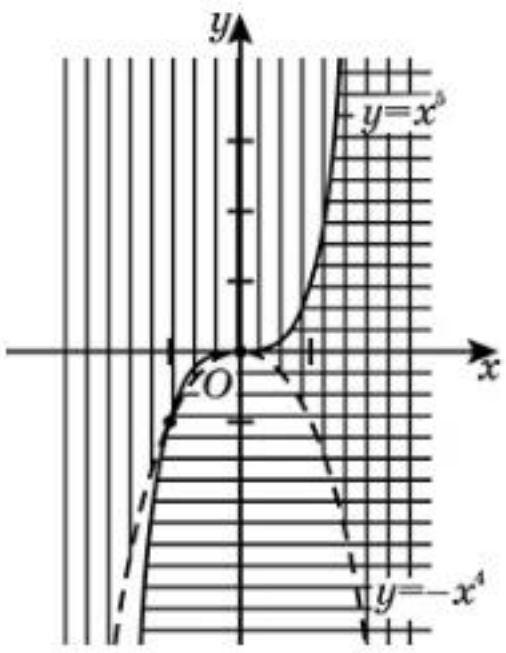
68-расм



69-расм



70-расм



71-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

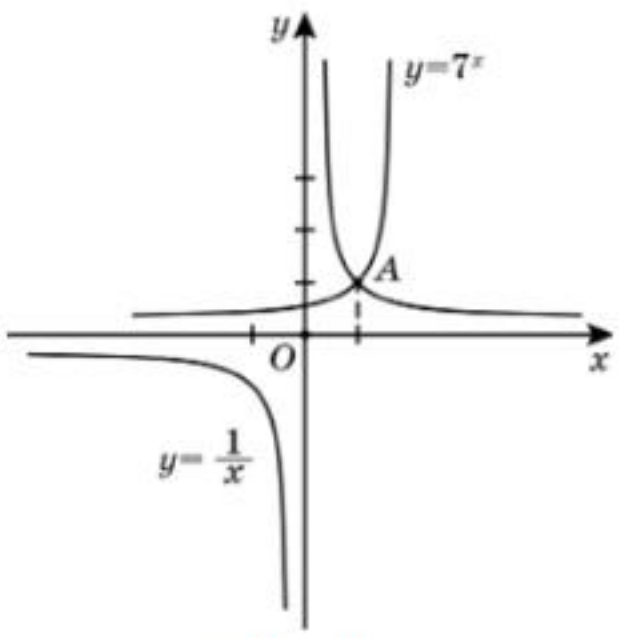
4) $y = 5x + 1$. **9.10.** 3) $f(8) = \frac{1}{4}$; $f(27) = \frac{1}{9}$; 4) $f(1) = 1$; $f(16) = \frac{1}{2}$. **9.11.** 1) $\frac{\sqrt{5}x^{\sqrt{5}}}{5} + \frac{2x^{3,5}}{7} + C$; 2) $\frac{x^{-52}}{26} + \frac{2x^{1,5}}{3} + C$; 3) $\frac{(4-\sqrt{2})x^{\sqrt{2}+4}}{14} + \frac{4x^{\frac{7}{4}}}{7} + C$; 4) $-\frac{5\sqrt{6})x^{-\sqrt{6}}}{6} - \frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + C$. **9.12.** 1) 3; 2) 4,5. **9.13.** 1) $\frac{20}{3}$; 2) 15. **9.14.** 1) $\frac{5}{6}$ кв. бирл.; 2) $\frac{10}{3}$ кв. бирл.; 3) $\frac{81}{32}$ кв. бирл.; 4) $\frac{57}{4}$ кв. бирл.

III боб. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

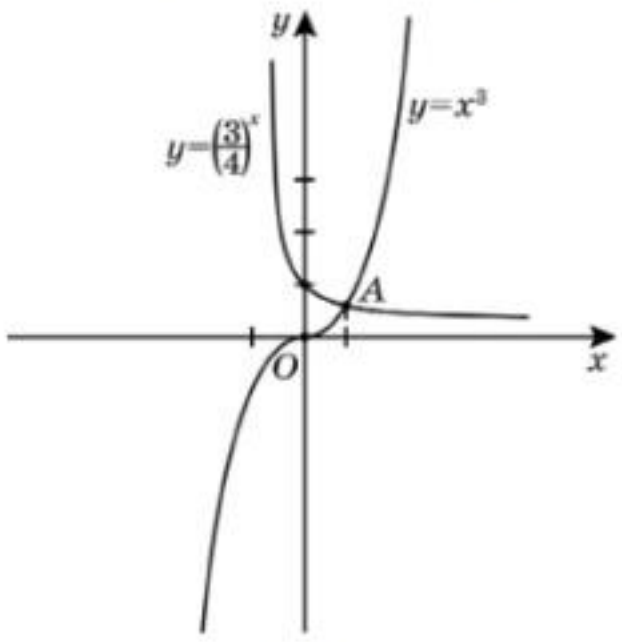
10.1. 1) $[5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 7]$; 3) R; 4) R. **10.2.** 1) $(-\infty; 0]\cup[8; +\infty)$; 2) R; 3) $(-\infty; -6]\cup[0; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3,5]\cup[3,5; +\infty)$. **10.4.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $[0; 5]$. **10.5.** 1) бўлади; 2) бўлмайди; 3) $x = -12$ бўлади; $x = -4$ бўлмайди; 4) $x = 2$ бўлади; $x = 1$ бўлмайди. **10.6.** $[-4; 5]$; 2) $[-7; 5]$; 3) $[3; +\infty)$; 4) $[-4; 4]$. **10.7.** 1) $[-1; 15)$; 2) $[7; 8)$; 3) $(-6; 0)\cup(6; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2)\cup(-1; 2]$. **11.1.** 1) 14; 2) ± 8; 3) ± 2; 4) 3. **11.2.** 1) 2; 2) 1; 3; 3) 1; 0; 4) 1. **11.3.** 1) 1; 2) -1; 3) 0; 2; 4) 0; -1; 4. **11.4.** 1) 0; 2) 2; 3) -3; 4) 0. **11.5.** 1) 1; 5; 2) 3; 4) 4. **11.6.** 1) $-\frac{5}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 7; 8; 4) 1. **11.7.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 2. **11.8.** 2) 0; 1; 3) 1; 4) $-\frac{4}{3}$. **11.9.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) 0; -8; 4) 0.

IV боб. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛАР

12.4. 1) $(3; +\infty)$; 2) $(-2; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $(-4; +\infty)$. **12.7.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) 5; 3) 1; 4) 6. **12.8.** 1) 1; 2) a^7; 3) b; 4) $b^{1,4}$. **12.9.** 3) 72-расм; 4) 73-расм. **12.11.** 4) $(-\infty; 1)$. **12.12.** 4) $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{3,3} > \left(5+2\sqrt{6}\right)^{-3,1}$, чунки $5 + 2\sqrt{6} > 1$. **12.13.** 1) 3; $\frac{1}{3}$; 2) 2; $\frac{1}{2}$; 3) 64; $\frac{1}{64}$. **12.14.** 1) 5; 2) 243; 3) 16; 4) 64. **12.15.** 3) 74-расм; 4) 75-расм. **13.1.** 3) $\log_3\frac{1}{9} = -2$. **13.2.** 2) $\log_2\frac{1}{64} = -6$. **13.3.** 4) $\log_{125}\frac{1}{25} = -\frac{2}{3}$. **13.8.** 3) $\log_7 7 = 1$; $\log_7\frac{1}{7} = -1$; $\log_7 49 = 2$. **13.9.** 2) $\log_{\frac{1}{5}}5 = -1$; $\log_{\frac{1}{5}}25 = -2$; $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{625} = 4$. **13.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 2. **13.11.** 1) 11; 2) 13; 3) -3; 4) 50. **13.12.** 1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) -2. **13.13.** 1) 8; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -32; 4) 16. **13.14.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{32}$; 3) 9; 4) 64; 5) $\frac{1}{64}$; 6) 1; 7) ; 8) 8. **13.15.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 1. **13.16.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) -21; 4) 1. **13.17.** 1) $-\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $36\frac{1}{4}$. **13.18.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 3; 4) 6. **13.19.** 2) $3 = \log_3 27$; $-1 = \log_3\frac{1}{3}$; $-3 = \log_3\frac{1}{27}$; $1 = \log_3 3$.



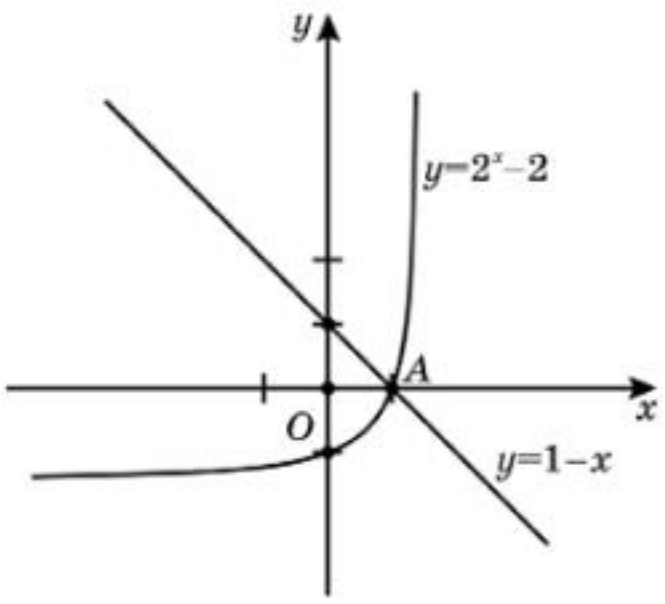
72-расм



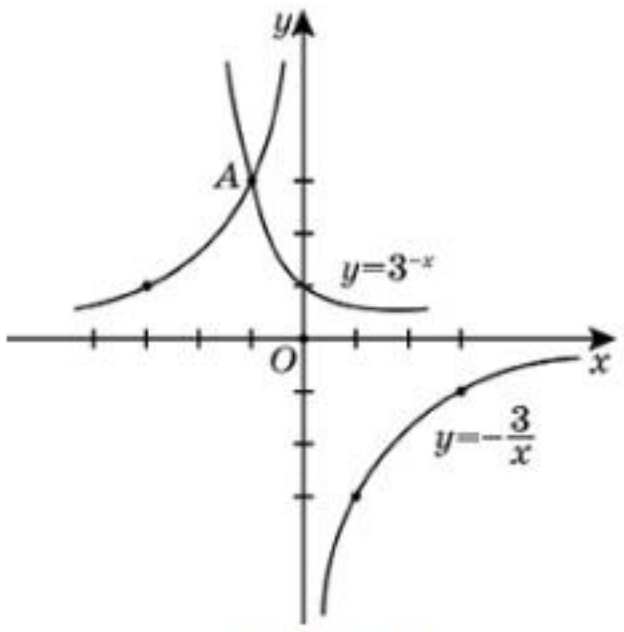
73-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



74-расм



75-расм

13.20. 4) $-3+\frac{2}{3}\lg a-\frac{1}{2}\lg c-3\lg b$; 8) $\frac{4}{7}\lg c-7-\frac{3}{2}\lg a-9\lg b$. **14.1.** 2) $(-\infty;\ 3{,}5)$; 3) $(-\infty;\ 1{,}6)$; 4) $(-\infty;\ -7)\cup(7;\ +\infty)$. **14.2.** 1) $(-1;\ 7)$; 2) $(-\infty;\ -8)\cup(3{,}5;\ +\infty)$; 3) $(-5;\ 4)$; 4) $(-\infty;\ -4)\cup(3;\ +\infty)$. **14.7.** 1) $(-3;\ -2)\cup(2;\ 3)$; 2) $(1;\ +\infty)$; 3) $(1;\ +\infty)$; 4) $(0;\ 2)\cup(6;\ +\infty)$. **14.8.** 1) $(-\infty;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ +\infty)$; 3) $[0;\ +\infty)$; 4) $[6;\ +\infty)$. **14.10.** 1) битта нуқтада кесишади; 2) кесшимайди; 3) кесшимайди; 4) икки нуқтада кесишади. **14.11.** 1) 0; 2; 2) −2; 1; 3) 0; 1; 4) 2; 4. **15.1.** 4) $-5e^{-x}$. **15.2.** 4) $5e^{x}(\cos x-\sin x)$. **15.3.** 1) $\frac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x$. **15.4.** 3) $\frac{7\cdot 4^{x}}{\ln 4}+C$. **15.5.** 4) $\frac{2}{9\ln 3}$. **15.6.** 2) $\frac{124}{\ln 5}$ кв. бирл. **15.7.** 4) $2x\cdot 3^{x^2}\ln 3\cdot\ln x+\frac{3^{x^2}}{x}$. **15.8.** 2) $\frac{1}{\sqrt{x}\ln 2}\cdot\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$. **15.9.** 2) $(-\infty;\ 1]$ — камаяди; $[1;\ +\infty)$ — ўсади. **15.10.** 1) $x=0$ — минимум нуқта; 2) $x=1$ — минимум нуқта. **15.11.** $y=\frac{x}{e}+\frac{2}{e}$. **15.13.** 1) $\frac{1}{\ln 4}(4^{x}-9)$; 2) $\ln|x-3|-2$. **15.14.** 1) 1,5; 2) $\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\ln 3}$.

V боб. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФЛИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГИЗЛИКЛАР

16.1. 1) 4; 2) 10; 3) 6; 4) −3. **16.2.** 1) 3; 2) 6; 3) 6; 4) 2,4. **16.3.** 1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) 3. **16.4.** 1) ±2; 2) 1; 3) −4; 3; 4) 3. **16.5.** 1) $2\frac{1}{3}$; 2) −2; 1; 3) 4; 5; 4) −2; 4. **16.6.** 1) 0; $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3; 3) −2,5; 3; 4) −3,5; 2. **16.8.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (1; 2), (2; 1); 3) (2; 1,5); 4) (−5; −6). **16.9.** 1) (3; −1); 2) (0; −0,5). **16.10.** 1) 1; 5; 2) −2; 5; 3) −3,5; 2; 4) 1. **16.11.** 1) 66; 2) 1; 3) 0; 4) 1,5. **16.12.** 1) 5; 2) 1,5; 3) $\pm\sqrt{3}$; 4) 0. **16.13.** 1) 3; $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 2) ±4; 3) 0; 4) ±1. **16.14.** 1) 1; 2; 2) 10; 3) 4; 4) 1; 0. **16.15.** 1) (1; 2); 2) (1; 4), $\left(-\frac{7}{6};\ \frac{21}{2}\right)$. **16.16.** 1) (2; 3); 2) (1; 2). **17.1.** 1) 49; 2) $\frac{8}{27}$; 3) $\frac{1}{125}$; 4) $\frac{49}{16}$. **17.2.** 1) 12; 2) 0,5; 3) 0,01; 4) e. **17.3.** 1) −2; 4; 2) −5; 1; 3) 1; 4) 2; 5. **17.4.** 1) −1; 2) 5,5; 3) 10; 4) 4. **17.5.** 1) 2; 3; 2) 6; 3) $\frac{19}{6}$; 4) $\frac{32}{15}$. **17.6.** 1) (9; 1); 4) (10; 10). **17.7.** 1) 9; 2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 3) 5; 4) 3; 5. **17.8.** 1) 3; $3+\sqrt{2}$; 2) 1; 2; 3) −10; 4) 29. **17.9.** 1) 1001; $\sqrt[3]{10}+1$; 2) 100; 1000; 3) 10; $\frac{1}{10000\sqrt{10}}$; 4) 1000; 0,1. **17.10.** 1) 2; $\frac{1}{128}$; 2) 2; $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$; 3) 10; 100; 4) 0,1; $\sqrt[4]{10}$. **17.11.** 1) 2; 2) 2; 3) 4; 4) −1000. **17.12.** 1) (2; 4); 2) (1; 1); 3) (14; 26); 4) (3; 5). **17.13.** 1) (150; 50); 2) (2; 1); 3) (1; 1); 4) (1; 1). **18.1.** 1) $[5;\ +\infty)$; 2) $(2;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 6]$; 4) $(-\infty;\ 0)$. **18.2.** 1) $(-2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 1)$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $\left[-\frac{10}{3}; +\infty\right)$; 4) $\left[\frac{3}{11}; +\infty\right)$. **18.3.** 1) $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$; 2) $(-\infty; -1]$; 3) $(-1; +\infty)$; 4) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **18.4.** 1) $(-\infty; 2]$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 3]$; 4) $(4; +\infty)$. **18.5.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $[4; +\infty)$; 3) $(-\infty; 5)$; 4) $(-\infty; 4]$. **18.6.** 1) $(0; 1)$; 2) $(0; 2)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **18.7.** 1) $(-\infty; -1)$; 2) $(0; +\infty)$; 3) $[2; +\infty)$; 4) $[-2; 2]$. **18.8.** $(2; 5]$; 2) $(-0{,}75; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **18.9.** 1) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$; 2) $(0; 1)$; 3) $[2; 3]$; 4) $(1; 2)$. **18.10.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1]$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $(-1; 1)$. **18.11.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $[0; 1]$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right) \cup$, $n \in Z$. **18.12.** 1) $(-2; 1)$; 2) $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$; 3) $[0; 1]$; 4) $(-1; 0)$. **18.13.** 1) $(0; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 3)$; 4) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. **18.14.** 1) $(2; 8]$; 2) $[1; 2)$; 3) $[3; +\infty)$; 4) $(2{,}5; 3]$. **19.1.** 1) $(16; +\infty)$; 2) $(8; +\infty)$; 3) $(0; 0{,}01)$; 4) $(0; e]$. **19.2.** 1) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$; 2) $[0; 1{,}5)$; 3) $(-0{,}2; +\infty)$; 4) $(2; 7)$. **19.3.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{5}\right]$; 3) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 4) $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$. **19.4.** 1) $(2{,}5; 6)$; 2) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; 3) $(0; 0{,}6]$; 4) $(2; +\infty)$. **19.5.** 1) $(-4; -3) \cup (2; +\infty)$; 2) $(2; 3)$; 3) $(2; 7) \cup (22; 27)$; 4) $(4; +\infty)$. **19.6.** 1) $(5; 18)$; 2) $(9; +\infty)$. **19.7.** 1) $(0; 2)$; 2) $(0; 8)$; 3) $(0{,}7; +\infty)$; 4) $\varnothing$. **19.8.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$; 2) $(1; 3)$; 3) $(0; 0{,}001) \cup (10; +\infty)$; 4) $\left[\frac{1}{8}; 4\right]$. **19.9.** 1) $(2; +\infty)$; 3) $\left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$; 4) 0. **19.10.** 1) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; +\infty)$; 3) $[-4; -1)$; 4) $\left(-\frac{17}{11}; 3\right)$. **19.11.** 1) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$; 2) $(-2; -1) \cup (0; 1)$; 3) $[1{,}5; 2)$. **19.12.** 1) $(-1; 1]$; 2) $\varnothing$; 3) $(-5; -4]$; 4) $\varnothing$. **19.13.** 1) $[5; +\infty)$; 2) $(3; 7]$.

VI боб. МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

20.1. Танланма ҳажми — 20; варианталар — 2; 3; 5; 6.

32-жадвал

Варианта	2	3	5	6
Абсолют частота	4	6	4	6
Нисбий частота	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

20.2. Танланма ҳажми — 20; варианталар — 4; 8; 9; 10.

33-жадвал

Варианта	4	8	9	10
Абсолют частота	5	7	4	4
Нисбий частота	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
Нисбий частота (% ларда)	25%	35%	20%	20%

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

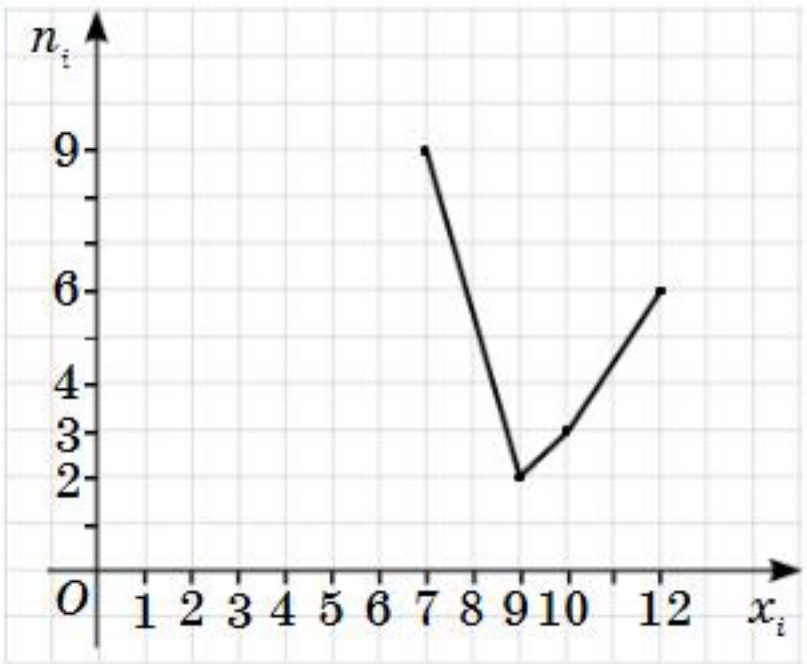
Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

20.3. Танланма ҳажми — 30.

34-жадвал

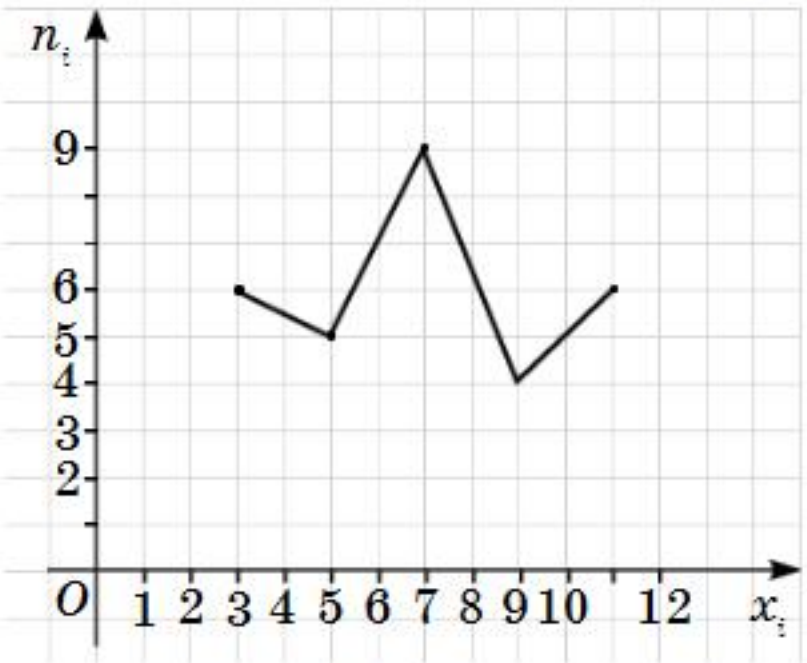
Варианта	2	3	4	5
Частота	1	12	11	6
Нисбий частота	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{5}$
Нисбий частота (% ларда)	≈0,03%	40%	≈0,37%	20%

20.4. 1) Танланма ҳажми – 20. Частоталар полигони — 76-расм.



76-расм

3) Танланма ҳажми –320. Частоталар полигони – 77-расм.



77-расм

20.5. 1) Танланма ҳажми – 20.

35-жадвал

Варианта	154	155	156	157	158	159	160
Абсолют частота	2	2	5	2	4	4	1
Нисбий частота	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$
Нисбий частота (% ларда)	10%	10%	25%	10%	20%	20%	5%

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

20.6. 1) Танланма ҳажми — 15.

36-жадвал

Варианта	45	48	49	50
Абсолют частота	4	4	3	4
Нисбий частота	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$
Нисбий частота (% ларда)	≈0,27%	≈0,27%	20%	≈0,27%

21.1.

37-жадвал

Ишчилар разряди	3	4	5	6
Ишчилар сони	4	6	5	5

21.2. Танланма ҳажми — 40; мода — 3.

38-жадвал

Сони	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ўқувчилар сони	2	5	2	8	3	7	4	4	1	4

21.3. Танланма ҳажми — 30; мода — 13.

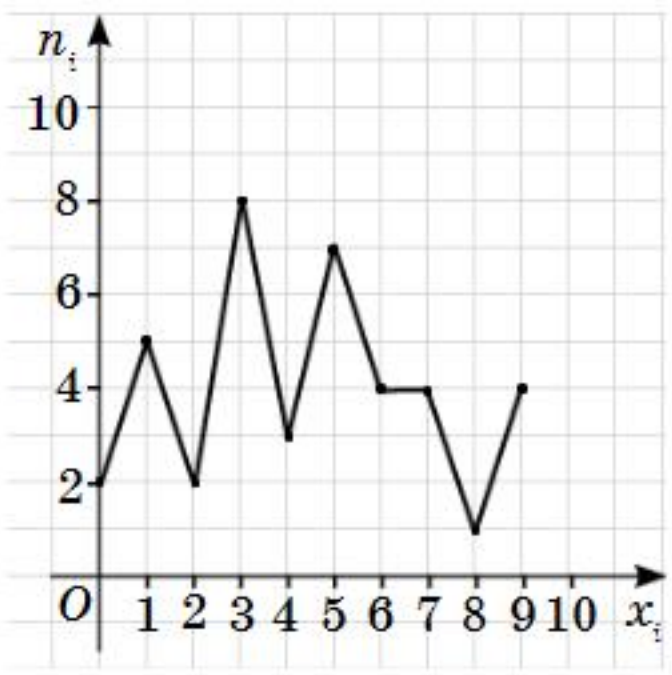
39-жадвал

Икки хонали сон	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Қисқача	1	2	2	6	2	5	4	3	1	4

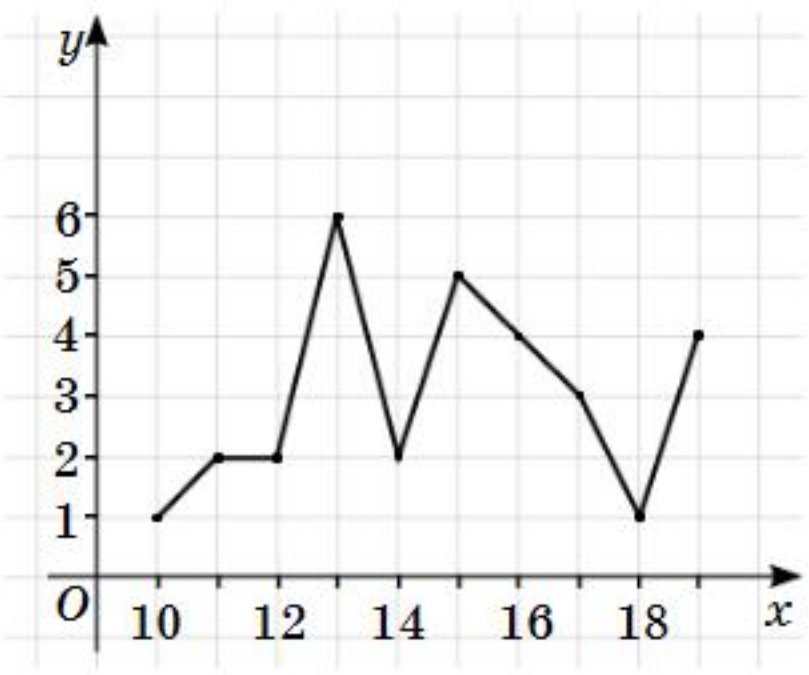
21.4. ўртача қиймати — 4,4.

21.5. ўртача қиймати — ≈14,9.

21.6. 1) Частоталар полигони — 78-расм.



78-расм



79-расм

2) Частоталар полигони — 79-расм.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

21.7.

40-жадвал

Масса	[35—39)	[39—43)	[43—47)	[47—51)	[51—54]
Ўқувчилар сони	6	5	4	3	2

I интервал: 35 + 37 + 36 + 38 + 35 + 36 = 217;

II интервал: 39 + 40 + 40 + 42 + 39 = 200;

III интервал: 44 + 44 + 46 + 46 = 180;

IV интервал: 50 + 48 + 50 = 148;

V интервал: 54 + 52 = 106.

21.8. 25 – (7 + 4 + 8) = 6. Қиймати (*) – 6.

41-жадвал

Баҳоси	[500–800)	[800–1100)	[1100–1400)	[1400–1700]
Турлар сони	7	4	6	8
Нисбий частота	$\frac{7}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{8}{25}$
Нисбий частота (% ларда)	28%	16%	24%	32%

22.1. Танланма ҳажми — 24.

42-жадвал

Варианта	108	109	110	111	112	113	114
Абсолют частота	1	3	3	8	4	3	2
Нисбий частота	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$
Нисбий частота (% ларда)	≈4%	≈13%	≈13%	≈33%	≈16%	≈13%	8%

22.2. 1) Модаси – 111. Медианаси – 8.

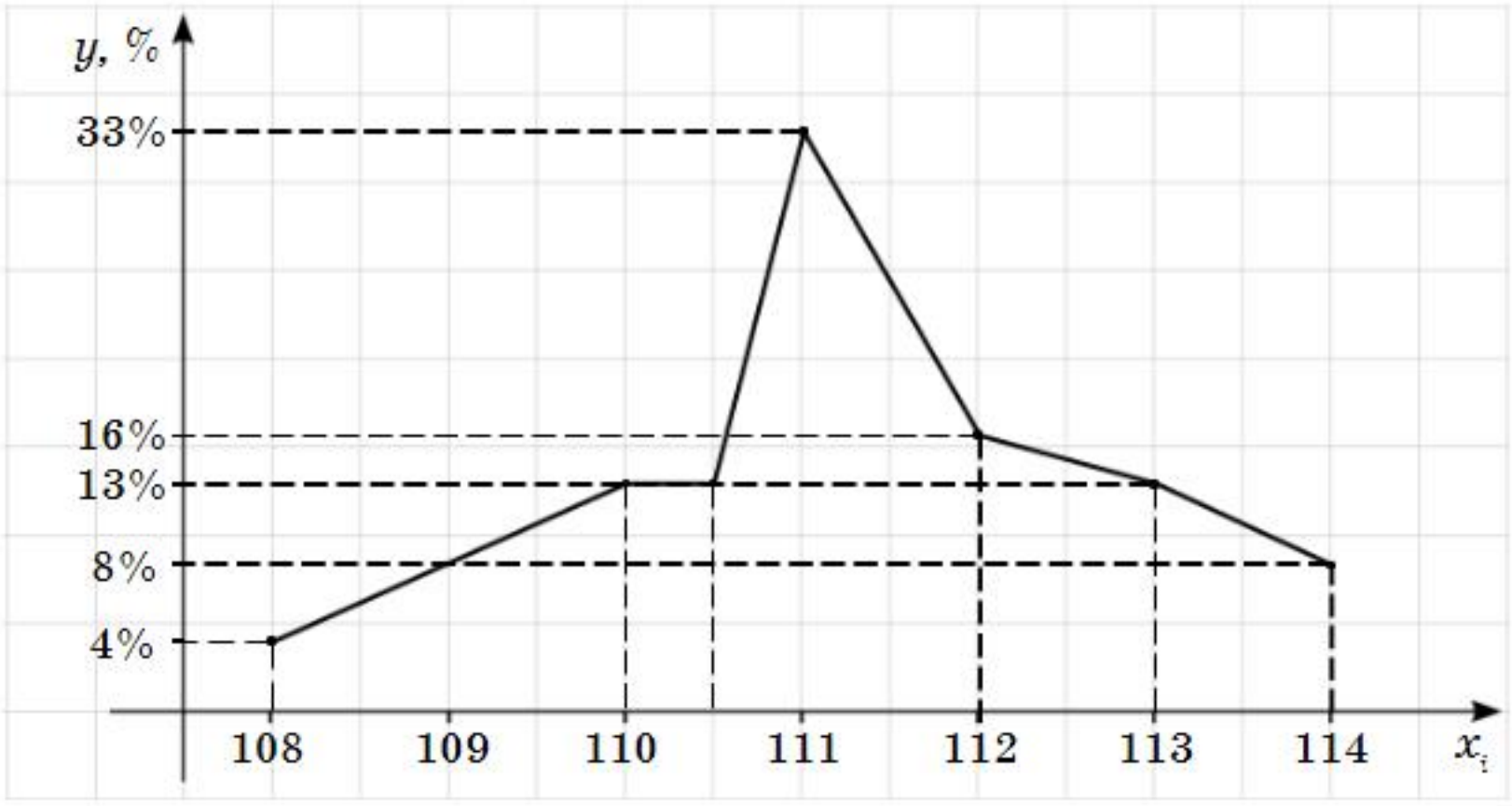
Математик кутилма:

$$\overline{X} = \frac{1}{24}(108 + 3 \cdot 109 + 3 \cdot 110 + 8 \cdot 111 + 4 \cdot 112 + 3 \cdot 113 + 2 \cdot 114) \approx 111{,}17.$$

2) Частоталар полигони – 80-расм.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



80-расм

22.3. ((108 − 111,17)^2 + (109 − 111,17)^2 · 3 + (110 − 111,17)^2 · 3 + (111 − − 111,17)^2 · 8 + (112 − 111,17)^2 · 4 + (113 − 111,17)^2 · 3 + (114 − 111,17)^2 · 2) 2,39.

$\bar{\sigma} = \sqrt{2,39} \approx 1,55.$

11-СИНФ АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

1. 1) 0; 2) $\frac{13}{12}$; 3) $\frac{65}{4}$; 4) $\frac{31}{5}$. **2.** 1) $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{1}{12}\left(\sqrt{3}-1\right)$; 3) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)$. **3.** 1) $\frac{33}{8}$; 2) $\frac{50}{3}$; 3) 10,5; 4) 135,6. **4.** 1) $1+e$; 2) $\frac{4}{\ln 3}$; 3) $7-4e$; 4) $3e^{\frac{1}{3}}-4$. **5.** 1) $\frac{1}{3}e^6+\frac{5}{3}$; 2) $-\frac{1}{4e^2}+\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{7}{24}$; 4) $\frac{80}{81}$. **6.** 1) $\frac{29}{12}$; 2) 5,2; 3) $\frac{31}{20}$; 4) $\frac{9}{2}$. **7.** 1) 12; 2) 750; 3) 56; 4) 20. **8.** 1) 3; 2) 2; 3) 2; 4) 1. **9.** 1) 3118; 2) 42; 3) −16; 4) 6; 5) 1; 6) 625. **10.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) −1; 3) 29; 4) $\frac{19}{3}$; 5) $-\frac{11}{2}$; 6) 3. **11.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 3; 3) 216; 4) $\sqrt{2}$. **12.** 1) $2b-5a$; 3) $a+1-\frac{2a}{b}$; 4) $\frac{a+3b+7}{a+b}$. **16.** 1) b; 2) $|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$; 3) $\sqrt{a}+2$; 4) $a^{\frac{5}{3}}+5$. **17.** 1) $\frac{16}{x}$; 2) $\frac{1}{y-5y^{0,5}}$. **18.** 1) $\frac{12}{b}$; 2) $\frac{1}{b-7b^{0,5}}$. **19.** 1) $36\left(x+\frac{1}{x}+2\right)$; 2) 0. **25.** 1) 8; 2) 0; −7; 3) $\frac{5}{3}$; 4) 0; 2. **26.** 1) 3; 2) 2; 3) 0; −1; 4) 0. **27.** 1) 4; 2) −1; 3) 3; 4) −1,5; 0. **28.** 1)1; 2) 9; 3) 10; 4) 11. **29.** 1) $2\pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$. **30.** 1) −4; 2) −6; 3) $-\frac{1}{3}$. **31.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$; **32.** 1) 4; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **33.** 1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 2. **34.** 1) 1; 3; 2) 3; 2; 3) 1; −1; 4) −1; −2. **35.** 1) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 6; 4) −1. **36.** 1) 3; −3; 2) $\pm 2\sqrt{2}$; 3) 25; 4) 576. **37.** 1) 3,5; −1; 2) 9; 3) 1; 4) 3. **38.** 1) 2; 2) 1; −7; 3) −1; 2; 4) 8. **39.** 1) 8; $\frac{1}{2}$; 2) 3,5; 3) 0; 4) 0. **40.** 1) −2. **41.** 1) 2; 2) 1. **42.** 1) (1; 2), (2; 1), 2) (4; 2). **43.** 1) (3; 4), (4; 3), 2) $\left(4; \frac{1}{2}\right)$. **44.** 1) (2; 1); 2) (2,5; −5,5). **45.** 1) $(-\infty; 1]$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$. **46.** 1) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$; 3) (1; 2); 4) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. **47.** 1) [−2; 2]; 2) [−3; 3]; 3) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; 4) (−3; 3). **48.** 1) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3) $(-\infty;\ 2]$; 4) $[2;\ +\infty)$. **49.** 1) $(-\infty;\ -3] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left[-2; \frac{1}{5}\right]$; 3) $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right]$; 4) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **50.** 1) $(-\infty;\ -2) \cup (1;\ +\infty)$; 2) $(-1;\ 2)$; 3) $[0;\ 2]$. **51.** 1) $(-3;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -6) \cup [-5;\ 5]$; 3) $(-\infty;\ -1) \cup [0;\ 1)$; 4) $(-\infty;\ -6) \cup (-4;\ 4) \cup (6;\ +\infty)$; **52.** 4) $[1;\ +\infty)$. **54.** 1) $(2;\ +\infty)$; 3) $(-1;\ 1)$. **55.** 2) $\left(\frac{4}{5}; \frac{6}{5}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right)$. **56.** 1) $(5;\ +\infty)$; 4) $(-2{,}5;\ -2)$. **57.** 3) $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$; 4) $(2;\ 4)$. **58.** 1) $(4;\ +\infty)$; 2) $(8;\ +\infty)$; 3) $(1;\ 2]$; 4) $(9;\ +\infty)$. **59.** 1) $(-35;\ 10)$; 2) $[1;\ 3]$; 3) $(0{,}5;\ 1{,}6)$; 4) $[-4;\ -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2};\ 4)$. **60.** 4) $(5;\ +\infty)$. **62.** 3) $(4;\ +\infty)$; 4) $[3;\ +\infty)$. **63.** 2) $\left(\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n\right)$, $n \in Z$; 4) $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **64.** 3) $[0;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$. **65.** 4) $(0;\ +\infty)$. **66.** 1) $[2;\ +\infty)$; 2) $[-3;\ +\infty)$; 3) $(2;\ +\infty)$; 4) $(3;\ +\infty)$. **72.** 3) $(-\infty;\ -2] \cup [0;\ +\infty)$ — ўсади; $[-2;\ 0]$ — камаяди. **75.** 1) $\frac{3}{2}$; 1; 3) 4; 2. **76.** 4) $F(x) = 0{,}5e^{2x} - 5x^2 + 0{,}5$. **77.** 4) $F(x) = -4\sqrt{1 + 3x} + 16$. **80.** 1) 4,5 кв. бирл; 4) 9 кв. бирл. **81.** 2) $12 - 5\ln 5$ кв. бирл. **82.** 1) $\varnothing$; 2) 1; 4) 1. **83.** 1) 0; 2) $\varnothing$; 3) 0; 4) 1. **84.** B. **85.** D. **86.** C. **87.** A. **88.** A. **89.** D. **90.** B. **91.** A. **92.** C. **93.** E. **94.** C. **95.** B. **96.** C. **97.** E. **98.** B. **99.** 1) C; 2) B. **100.** D. **101.** 1) B; 2) B. **102.** C.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МУНДАРИЖА

Муқаддима 3
10-синф алгебра ва анализ асослари курсини такрорлашга доир машқлар 4

I боб. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА ИНТЕГРАЛ

1-§. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл. Аниқмас интеграл хоссалари 9
2-§. Эгри чизиқли трапеция ва унинг юзи 18
3-§. Аниқ интеграл. Ньютон-Лейбниц формуласи 23
4-§. Ясси фигуралар юзларини ва айланиш жисмларининг ҳажмларини аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш 29
Ўзингизни текширинг! 34

II боб. ДАРАЖА ВА ИЛДИЗ. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯ

5-§. n-даражали илдиз ва унинг хоссалари 38
6-§. Рационал кўрсаткичли даража 43
7-§. Иррационал ифодаларни шакл алмаштириш 49
8-§. Даражали функция, унинг хоссалари ва графиги 52
9-§. Ҳақиқий кўрсаткичли даражали функциянинг ҳосиласи ва интеграли 57
Ўзингизни текширинг! 63

III боб. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

10-§. Иррационал тенгламалар 65
11-§. Иррационал тенгламаларни ечиш усуллари 68
Ўзингизни текширинг! 73

IV боб. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛАР

12-§. Кўрсаткичли функция, унинг хоссалари ва графиги 74
13-§. Соннинг логарифми ва унинг хоссалари 80
14-§. Логарифмик функция, унинг хоссалари ва графиги 87
15-§. Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи ва интеграли. Логарифмик функциянинг ҳосиласи 92
Ўзингизни текширинг! 97

V боб. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

16-§. Кўрсаткичли тенгламалар 100
17-§. Логарифмик тенгламалар 107
18-§. Кўрсаткичли тенгсизликлар 112
19-§. Логарифмик тенгсизликлар 116
Ўзингизни текширинг! 121

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

VI боб. МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

20-§. Бош тўплам ва танланма 123
21-§. Дискрет ва интервалли вариацион қаторлар 127
22-§.Тасодифий миқдорнинг сонли тавсифларини танланмалар бўйича баҳолаш...132
Ўзингизни текширинг! 137
11-синф алгебра ва анализ асослари курсини такрорлашга доир машқлар 140
Глоссарий 153
Жавоблар 155

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебник для 11 класса общественно-гуманитарного направления общеобразовательных школ

(*на узбекском языке*)

Муҳаррир *В. Мусаева*
Бадиий муҳаррир *А. Сланова*
Техник муҳаррир *И. Тарапунец*
Компьютерда саҳифалаган *Ч. Рузиева*

Нашриётга 7 июль 2003 йилда Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан министрлигининг № 0000001 давлат лицензияси берилган

ИБ № 6248

Нашрга 27.08.20 рухсат этилди. Ҳажми $70\times100/_{16}$.
Офсет қоғози. Ҳарф тури "SchoolBook Kza". Офсет нашри.
Шартли босма табоғи 13,55+0,32 форзац. Шартли бўёқ тамғаси 28,42.
Нашр ҳисоб табоғи 6,67+0,54 форзац. Адади 3500 нусха. Буюртма №

"Мектеп" нашриёти, 050009, Алмати шаҳри, Абай шох кўчаси, 143-уй
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217