Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

А. Е. Абилқасимова, З. А. Жумағулова

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ

10

Умумтаълим мактабларининг ижтимоий-гуманитар йўналишдаги 10-синфи учун дарслик

Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан министрлиги тасдиқлаган

Алмати "Мектеп" 2019

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72
А14

Шартли белгилар:

— янги мавзуни ўзлаштиришда ҳал қилинадиган муаммолар

— таърифлар, қоидалар, хоссалар

— мустаҳкамлаш саволлари

— теорема ёки хоссалар исботининг якуни

— мавзу ичида берилган топшириқлар

— қўшимча маълумотлар

А — барча ўқувчилар учун мажбурий машқлар

В — ўрта мураккабликдаги машқлар

А.Е.Абилқасимова, З.А.Жумағулова

А14 **Алгебра ва анализ асослари:** Умумтаълим мактабларининг ижтимоий-гуманитар йўналишдаги 10-синфи учун дарслик. — Алмати: Мектеп, 2019. — 152 б., расм.

ISBN 978-601-07-1335-2

А $\frac{4306020503-143}{404(05)-19}$ 109(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.14я72

© Абилқасимова А.Е., Жумағулова З.А., 2019
© "Мектеп" нашриёти, бадиий безак берган, 2019

Барча ҳуқуқлари ҳимояланган

Нашрга оид мулкий ҳуқуқлар "Мектеп" нашриётига тегишли

ISBN 978-601-07-1335-2

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МУҚАДДИМА

Азиз ўқувчилар! Бу дарслик олдинги синфлардаги алгебра курсининг давоми ва математик анализнинг дастлабки элементларини ўрганишнинг бошланиши бўлиб ҳисобланади. Алгебра ва анализ асослари курси элементар ва олий математика орасидаги узвийликни шакллантириш мақсадида мактаб дастурига киритилган.

Бу курсда функция тушунчаси ва унинг хоссаларини, турларини, берилиш усулларини, графикларини чуқур ўрганасиз. Тескари функция, мураккаб функция тушунчалари билан танишасиз. Содда шакл алмаштиришлардан фойдаланиб функциялар графикларини ясашни ўрганасиз.

Тригонометрик формулалар, тескари тригонометрик функциялар тушунчаси ва уларнинг графиклари билан танишиб, тригонометрик тенгламалар ва тенгсизликларни ечиш малакасини эгаллайсиз.

Функциянинг нуқтадаги лимити, функциянинг нуқтадаги ва кесмадаги узлуксизлиги, уларнинг хоссалари, функциянинг ҳосиласи тушунчаси билан танишасиз, ҳосиладан функцияларни текширишда фойдаланишни ўрганиб оласиз.

Эҳтимоллар назарияси бўйича билимингизни мукаммаллаштирасиз.

Дарслик 7 та бўлим ва 24 та параграфдан ташкил топган.

Тавсия қилинган дарсликнинг йўналишига боғлиқ ҳолда масалалар ечишининг аниқ алгоритмлари, мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар, мустаҳкамлаш учун саволлар, тест топшириқлари, биргаликда ишлаш учун ҳамда математик саводхонликка доир топшириқлар берилган.

Машқлар икки гуруҳга бўлинган: А — барча ўқувчилар учун мажбурий топшириқлар; В — изланишни талаб этувчи топшириқлар.

А гуруҳи топшириқларини бажариш малакалари шаклланганидан кейин ўқувчиларнинг имкониятлари ва қобилиятларига мос равишда В гуруҳи топшириқларини бажаришга ўтиш керак.

Дарсликда 7—9-синфлар алгебра ва 10-синф алгебра ва анализ асослари курсини такрорлашга доир машқлар берилган.

Дарсликнинг охирида глоссарий тавсия қилинган.

Машқлар жавобининг тўғрилигини текшириш учун дарслик охирида машқларнинг жавоблари келтирилган.

*Книга предоставлена исключительно в образовательные цели
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

7—9-СИНФ АЛГЕБРА КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{3-2b}{a+b}\cdot\frac{9b+9a}{4b^2-9}-\frac{6b}{2b+3}$;

б) $\frac{16a^2-25c^2}{ac+c^2}:\frac{5c-4a}{3c}+\frac{21a+24c}{a+c}$;

в) $\left(\frac{b+2}{b^2-3b+9}-\frac{6}{b^3+27}\right):\frac{3b+15}{2b^2-6b+18}$;

г) $\left(\frac{a-1}{a^2+2a+4}-\frac{2}{a^3-8}\right):\frac{3-a}{a^2+2a+4}$;

д) $\frac{2a+1}{a-7}+\left(\frac{a}{a+8}+\frac{a}{7-a}\right):\frac{a}{8+a}$;

е) $\left(\frac{b}{2b-3}-\frac{b}{3+2b}\right):\frac{b}{9+12b+4b^2}+\frac{45-6b}{3-2b}$;

ё) $25\sqrt{b}-0{,}5\sqrt{4b}+100\sqrt{0{,}16b}$;

ж) $\sqrt{98a}+3\sqrt{242a}-17\sqrt{512a}$.

2. Тенгламани ечинг:

а) $(x-4)^2-6=(2+x)^2$;

б) $(5-y)^2+17=(y-3)^2$;

в) $10+(3x-1)^2=20-6x$;

г) $7x+x(x-7)=(2x+5)(5-2x)$;

д) $(3x+2)(4x-1)-12=x(10+11x)$;

е) $2y(3y-4)+24y=(7y-3)(2+y)$;

ё) $x^2-x+2(x-1)^2=3x-2$;

ж) $31-3x-x^2=20x+7(x-2)^2$.

3. Тенгламанинг илдизини топинг:

а) $\frac{3}{x+7}=\frac{2}{9-x}$;

б) $\frac{x+5}{3}=\frac{5}{3+x}$;

в) $\frac{x+1}{x-2}=\frac{2+x}{1+x}$;

г) $\frac{x}{x-3}-\frac{4}{3-x}=0$;

д) $\frac{x}{x-5}+\frac{6}{25-x^2}=0$;

е) $\frac{x}{4+x}+\frac{x}{5-x}=\frac{x^2}{x-5}$;

ё) $\frac{6}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}=\frac{1}{x+2}$.

4. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases}x+y=7,\\x^2-9y=7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-y=-1,\\5x-y^2=-4;\end{cases}$ в) $\begin{cases}xy=12,\\\frac{3}{x}-\frac{1}{y}=\frac{5}{12};\end{cases}$ г) $\begin{cases}xy=2{,}5,\\\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}2\alpha}.\end{cases}$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

5. Тенгламалар системасини график усулда ечинг:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ y = x^2 + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x - y = 1, \\ y = \frac{3}{x}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = \quad . \end{cases}$

6. Тенгсизликни квадрат функциянинг графиги ёрдамида ва интерваллар усулида ечинг:

а) $x^2 - 7x + 12 \mid 0;$ б) $x^2 + 6x - 16 < 0;$

в) $-x^2 + 7x - 10 \mid 0;$ г) $-7x^2 + 2x + 5 < 0.$

7. Тенгсизликни ечинг:

а) $\frac{x^2 - 4}{9 + x} \mid 0;$ б) $\frac{2x - x^2}{6 - x} \mid 0;$ в) $\frac{x + 7}{3x - x^2} > 0;$

г) $\frac{5 - x}{x^2 + 4x} < 0;$ д) $\frac{1 + |x|}{x - 1} < 0;$ е) $\frac{|x| + 4}{5 + x} \mid 0.$

8. Тенгсизликни қаноатлантирувчи энг кичик бутун сонни топинг:

а) $(x + 1)(x - 2)(x - 3) > 0;$ б) $(x + 2)(x + 4)(x - 8) > 0;$

в) $(x + 7)(x + 1)(x - 6)^2 < 0;$ г) $(x + 3)^2(x - 1)(x - 5) < 0.$

9. Тенгсизликни қаноатлантирувчи энг катта бутун сонни топинг:

а) $(x + 1)(x - 4)(x - 5) \mathrm{m} 0;$ б) $(x + 2)(x - 2)(x - 3) < 0;$

в) $(x - 3)(x - 8)^2 \mathrm{m} 0;$ г) $(x + 5)^2(x + 1) < 0.$

10. Тенгсизликлар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0, \\ x - 5 \mid 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2x - 24 \mid 0, \\ 3 - x > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \mathrm{m} 0, \\ x^2 - 5x + 6 \mid 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9 - x^2 \mid 0, \\ x^2 + 3x - 28 < 0. \end{cases}$

11. Тенгсизликлар системаси билан берилган нуқталар тўпламини координаталар текислигида тасвирланг:

а) $\begin{cases} x^2 - 3x > 0, \\ x - 4 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - x^2 \mathrm{m} 0, \\ 3 - x > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ |x| + 1 \mid 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y^2 + x^2 < 16, \\ 2x - 1 \mathrm{m} 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y + x^2 < 0, \\ y^2 + x^2 \mathrm{m} 4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 1 - x^2 \mathrm{m} 0, \\ 1 + |x| < 0. \end{cases}$

12. Функциянинг графигини ясанг ва қийматлар тўпламини топинг:

а) $y = x^2 - 8x;$ б) $y = -x^2 + 7x;$ в) $y = \sqrt{x+1} - 1;$

г) $y = 2 - \sqrt{x+2};$ д) $y = x^2 - |x|;$ е) $y = -x^2 + |x|.$

13. а) Биринчи натурал сон иккинчи натурал соннинг 75% ига тенг ва улар кўпайтмасининг қиймати 1200 га тенг бўлган иккита натурал сонни топинг;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

б) агар касрнинг сурати иккига, махражи 3 га орттирилса, у ҳолда берилган касрдан $\frac{49}{35}$ га катта каср ҳосил бўлади. Дастлабки касрни топинг;

в) икки хонали сон рақамлари йиғиндисининг қиймати 9 га, рақамлари квадратларининг айирмаси 27 га тенг. Икки хонали сонни топинг;

г) катер дарё оқими бўйлаб 36 км, дарё оқимига қарши 48 км юриб, бутун йўлга 6 соат вақт сарфлади. Агар дарё оқимининг тезлиги 3 км/соат бўлса, у ҳолда катернинг турғун сувдаги тезлигини топинг;

д) орасидаги масофа 180 км бўлган йўлга биринчи поезд иккинчи поездга қараганда 1,5 соат ортиқ вақт сарфлади. Агар поездлар 3 соатда биргаликда 162 км масофани босиб ўтса, ҳар бир поезднинг тезлигини топинг.

14. а) 3,2; 4; 4,8; ... арифметик прогрессиянинг айирмасини, тўққизинчи ҳадини ва дастлабки ўнта ҳади йиғиндисининг қийматини топинг;

б) 40; 39,6; 39,2; ... арифметик прогрессиянинг еттинчи ҳадини ва дастлабки йигирмата ҳади йиғиндисининг қийматини топинг;

в) арифметик прогрессиянинг олтинчи ҳади 35 га, дастлабки саккизта ҳади йиғиндисининг қиймати 220 га тенг. Прогрессиянинг биринчи ҳадини ва айирмасини топинг;

г) арифметик прогрессиянинг иккинчи ва саккизинчи ҳадлари айирмасининг қиймати 60 га, учинчи ва еттинчи ҳадлари йиғиндисининг қиймати 40 га тенг. Прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг.

15. а) 1,5; 3; 6; ... геометрик прогрессиянинг карралисини, еттинчи ҳадини ва дастлабки саккизта ҳади йиғиндисининг қийматини топинг;

б) $\frac{2}{3}$; −2; 6; ... геометрик прогрессиянинг бешинчи ҳадини ва дастлабки олтита ҳади йиғиндисининг қийматини топинг;

в) геометрик прогрессиянинг бешинчи ҳади 4 га, дастлабки учта ҳади йиғиндисининг қиймати 112 га тенг. Прогрессиянинг биринчи ҳадини ва карралисини топинг;

г) ҳамма ҳадлари мусбат сонлар бўлган геометрик прогрессиянинг бешинчи ҳади $\frac{1}{3}$ га, учинчи ва биринчи ҳадлари айирмасининг қиймати 24 га тенг. Прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг.

16. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\sin 30^\circ - 2\cos 60^\circ + \mathrm{ctg}\,45^\circ - \mathrm{tg}\,180^\circ$;

б) $\sin 60^\circ - 8\mathrm{tg}\,45^\circ - \cos 30^\circ - 8\mathrm{tg}\,135^\circ$;

в) $-\cos 300^\circ + \sin 30^\circ - \mathrm{ctg}\,120^\circ + \mathrm{tg}\,210^\circ$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

г) $\mathrm{tg}60^\circ - \mathrm{ctg}30^\circ + \sin120^\circ - 3\cos210^\circ$;

д) $-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 4\sin\frac{\pi}{6} - 2\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4} + 3\mathrm{tg}0^0$;

е) $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} - 9\mathrm{tg}\frac{9\pi}{4} + 5\mathrm{ctg}0{,}5\pi$.

17. Агар: а) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ва $\sin2\alpha = -\frac{24}{25}$ бўлса, у ҳолда $\cos\alpha$ ва $\mathrm{tg}\alpha$ ни;

б) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ ва $\sin2\alpha = -\frac{24}{25}$ бўлса, у ҳолда $\sin\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ ни топинг.

18. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{4\cos4\alpha}{\mathrm{ctg}2\alpha - \mathrm{tg}2\alpha}$; б) $\frac{\sin2\alpha + \mathrm{tg}2\alpha}{1 + \cos2\alpha}$; в) $\frac{\mathrm{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}2\alpha}$.;

г) $\frac{\cos4\alpha + \sin^2 2\alpha}{0{,}5\sin4\alpha}$; д) $\frac{\sin(2\pi - 2\alpha)}{\cos(\alpha + \pi)\cdot\mathrm{ctg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$;

е) $\frac{2 - 2\sin^2(\alpha + 0{,}5\pi)}{1 - \cos(\alpha - \pi)} - 2\sin(\alpha + 1{,}5\pi)$;

ё) $\frac{\cos(\pi + \alpha)\cdot\cos(1{,}5\pi - 2\alpha)}{2\mathrm{ctg}(\alpha + 0{,}5\pi)}$; ж) $\frac{2\sin^2(\alpha - 2\pi) - 2}{\cos(\alpha + 1{,}5\pi) - 1} - 2\cos(1{,}5\pi + \alpha)$.

19. Айниятни исботланг:

а) $\frac{\sin3\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos3\alpha}\cdot\cos^2 2\alpha = 0{,}5$;

б) $\frac{\sin3\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos3\alpha}\cdot\sin^2 2\alpha - 0{,}5 = 0$;

в) $\frac{\sin3\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos3\alpha}{0{,}5\cos2\alpha\sin4\alpha} - \mathrm{tg}^2\alpha = 1$;

г) $\frac{\sin3\beta\sin6\beta}{\cos4\beta\cos\beta - \sin4\beta\sin\beta} + 2\cos^2 3\beta = 1$.

Математик саводхонликка доир топшириқлар

20. (8*5) * (660 * 11) = 100 тенглик тўғри бўлиши учун юлдузчалар ўрнига арифметик амалларни қўйинг:

A) (·), (+), (·); Г) (+), (·), (−); C) (·), (+), (·);
D) (·), (−), (:); E) (·), (+), (:).

21. Агар $6a = 25$ ва $3b = 5$ бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}$ нисбатни топинг:

A) 0,4; Г) $\frac{5}{6}$; C) 2,5; D) 1,2; E) 6.

22. 61 сонининг иккала томонига биттадан рақамни шундай қўйинки, у 49 сонига каррали бўлсин:

A) 6615; Г) 7625; C) 8615; D) 7614; E) 8616.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

23. 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26 сонлар кетма-кетлигида 3 га бўлинадиган сонлар шу кетма-кетликнинг неча фоизини ташкил этади:

A) 20%; Г) 25%; C) 30%; D) 40%; E) 50%?

24. Агар $(a - b)^2 = 64$ ва $ab = 33$ бўлса, у ҳолда $(a + b)^2$ ифоданинг қиймати нимага тенг:

A) 169; Г) 144; C) 180; D) 175; E) 196?

25. 9 сонига бўлганда қолдиқда 6 сони қоладиган энг кичик уч хонали сонни топинг:

A) 117; Г) 119; C) 118; D) 116; E) 114.

26. Жадвалдаги сонлар маълум бир қонуният билан жойлаштирилган. Номаълум сонни топинг:

1-жадвал

2	6	66	5478
3	11	83	?

A) 5627; Г) 5629; C) 5637; D) 5617; E) 5619.

27. 6; 8; 1 рақамлардан нечта уч хонали жуфт сон тузиш мумкин:

A) 8; Г) 4; C) 10; D) 12; E) 6?

28. Корхонанинг бир ойдаги харажати диаграмма кўринишида берилган (1-расм). Умумий харажат 3 000 000 тенгени ташкил этади. Корхонанинг маиший хизмат учун сарфлаган харажатини топинг.

1-расм

A) 150 050; Г) 150 150; C) 150 000;
D) 150 200; E) 150 300.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ФУНКЦИЯ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИГИ

1

1-§. ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ БЕРИЛИШ УСУЛЛАРИ

Таянч тушунчалар

Функция, аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, функциянинг берилиш усуллари

Функциялар тўғрисидаги билимингизни чуқурлаштирасиз.

2-жадвални тўлдиринг.

2-жадвал

Функция	Аниқланиш соҳаси	Қийматлар тўплами	Графиги
$y = ax + b$			
$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$			
$y = ax^3$			
$y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$			
$y = \sqrt{x}$, x | 0			

X тўпламдаги x нинг ҳар бир қийматига Y тўпламнинг биттагина y қийматини мос қўювчи қоида ёки қонуният ***функция*** *дейилади.*

Функция $y = f(x)$, $y = \phi(x)$, $y = g(x)$ ва ҳ.к.о белгиланади, бунда x — эркли ўзгарувчи ёки функциянинг аргументи, y — эрксиз ўзгарувчи ёки функция, f, ϕ, g ва ҳ.к.о — қоида ёки қонуният.

БУНИ БИЛАСИЗ:

1. Функция биттагина қиймат қабул қиладиган эркли ўзгарувчининг қийматлар тўплами функциянинг аниқланиш соҳаси (D) деб аталади.

2. Аниқланиш соҳасидан олинган ҳар бир эркли ўзгарувчига мос топилган функциянинг қийматлари унинг қийматлар тўплами (E) дейилади.

Бунда таърифдаги X тўплам функциянинг аниқланиш соҳаси, Y тўплам функциянинг қийматлар тўплами бўлади.

МИСОЛ

1. а) $y = x^2 + 2x - 5$; б) $y =$; в) $y = \sqrt{x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз.

Ечилиши. а) $y = x^2 + 2x - 5$ функция кўпҳад (бутун рационал функция) эканлигидан, аргументнинг исталган қийматида аниқланган. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $D(f) = R$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

б) $y =$ ☒ каср-рационал функция, унинг махражи $x + 1 \neq 0$ бўлиши шарт ёки $x \neq -1$. Демак, $x = -1$ қийматда функция аниқланмаган. Бунда берилган функциянинг аниқланиш соҳаси -1 сонидан фарқли барча ҳақиқий сонлар ёки $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

в) $y = \sqrt{x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топиш учун илдиз остидаги ифодани номанфий деб оламиз, яъни x | 0. Бундан $D(f) = [0; +\infty)$.

Жавоби: а) R; б) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; в) $[0; +\infty)$.

МИСОЛ

2. $y = 3\sin x$ функциянинг қийматлар тўпламини топамиз.

Ечилиши. $y = \sin x$ функциянинг қийматлар тўплами $[-1; 1]$ кесма эканлиги маълум, яъни берилган функциянинг қийматлар тўпламини топиш учун -1 m $\sin x$ m 1 қўш тенгсизликка кўчамиз. Энди қўш тенгсизликнинг ҳар бир қисмини 3 га кўпайтирамиз: -3 m $3\sin x$ m 3. Демак, берилган функциянинг қийматлар тўплами $[-3; 3]$ кесмадан иборат.

Жавоби: $[-3; 3]$.

Шундай қилиб:

1) бутун рационал функциянинг (кўпҳад кўринишида берилиши) аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами;

2) каср-рационал функциянинг аниқланиш соҳаси касрнинг махражи нолга тенг бўладиган аргумент қийматларидан бошқа барча ҳақиқий сонлар тўплами;

3) агар функция иррационал ифода кўринишида берилса, у ҳолда функциянинг аниқланиш соҳаси илдизнинг даража кўрсаткичига боғлиқ, яъни илдизнинг даража кўрсаткичи тоқ бўлса, унинг аниқланиш соҳаси махражи нолга тенг бўлмайдиган сонлардан бошқа барча ҳақиқий сонлар тўплами; агар илдизнинг даража кўрсаткичи жуфт бўлса, у ҳолда илдиз остидаги ифода номанфий (илдиз ифоданинг фақат суратида бўлса) ёки мусбат (илдиз ифоданинг махражида бўлса) бўладиган аргумент қийматларининг тўплами;

4) мураккаб трансцендент функцияларнинг аниқланиш соҳалари мос элементар функцияларнинг аниқланиш соҳалари асосида топилади;

5) агар функция ҳар хил функцияларнинг алгебраик йиғиндиси кўринишида берилса, унинг аниқланиш соҳаси қўшилувчи функциялар аниқланиш соҳаларининг кесишмасига тенг.

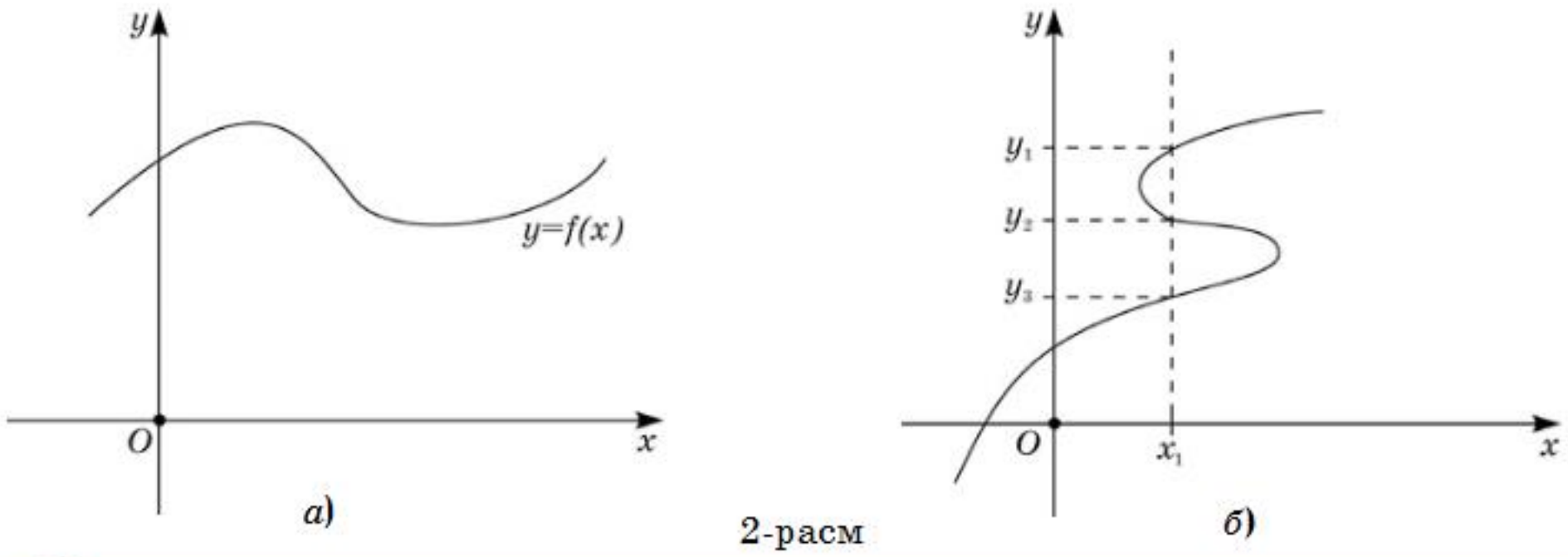
БУНИ БИЛАСИЗ:

Координаталар текислигида абсциссалари эркли ўзгарувчи x, ординаталари эрксиз ўзгарувчи y бўлган $(x; f(x))$ нуқталарнинг геометрик ўрни $y = f(x)$ функциянинг графиги бўлиши маълум (2, *а*-расм).

2, *б*-расмда берилган эгри чизиқ функциянинг графиги бўлмайди, чунки x_1 аргументга функциянинг y_1, y_2, y_3 бир нечта қийматлари мос келади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



а) 2-расм б)

Функциянинг берилиш усуллари тўғрисидаги билимингизни чуқурлаштирасиз.

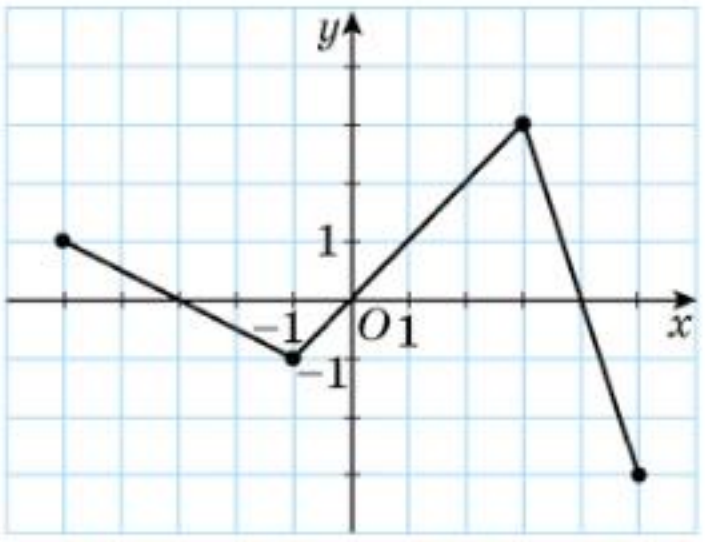
Функцияларнинг жадвал, график ва аналитик усулларда берилиши маълум.

Функциянинг жадвал усулда берилиши. Қиш ойларидан бирида бир сутка ичида ҳаво ҳароратининг ўзгаришини оламиз (3-жадвал).

3-жадвал

t (соат)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
T (°C)	−12	−15	−16	−12	−6	−4	−6	−9	−11

Бунда биринчи қаторда t вақтнинг (суткадаги) қийматлари, иккинчи қаторда вақтнинг қийматларига мос аниқланган T ҳаво ҳарорати берилган. Демак, жадвалда ҳарорат билан сутка вақти орасидаги боғланиш кўрсатилган.



3-расм

Функциянинг график усулда берилиши. 3-расмда берилган функциянинг графиги бўйича унинг қуйидаги хоссаларини кузатиш мумкин:

1) функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f) = [-5; 5]$;
2) функциянинг қийматлар тўплами $E(f) = [-3; 3]$;
3) функциянинг ноллари: $x = -3;\ 0;\ 4$;
4) $f(-5) = 1,\ f(0) = 0,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3,\ f(4) = 0,\ f(5) = -3$.

Кундалик ҳаётда, амалиётда, фаннинг барча соҳаларида, бинобарин, физика, кимё, тиббиёт, метеорологияда график усул кенг фойдаланилади. Метеорологияда фойдаланиладиган асбоб — барограф атмосфера босимининг ўзгариш графиги барограммани чизса, тиббиётда электрокардиограф юрак уришини қайд қилиб, уни график кўринишида (электрокардиограмма) беради. График бўйича рўй бераётган жараён ҳақида тавсиф бериш мумкин.

Функциянинг аналитик усулда берилиши.

а) $f(x) = x^2 + \frac{1-x}{x}$; б) $f(x) = \sin x + x$ аналитик усулда берилган функциялар.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ЭСЛАБ ҚОЛИНГ:

1) *жадвал усулида берилишнинг ўзига хослиги* — аргументнинг қийматларига мос функциянинг қийматлари бирга берилади;

2) *график усулнинг ўзига хослиги* — яққоллигида;

3) *аналитик усул* функцияни тўлиқ текшириш учун жуда қулай.

1. Функциянинг аниқланиш соҳасига қандай тўплам мос қўйилади?
2. Функциянинг аниқланиш соҳасини топиш учун қандай шартлар кўриб чиқилади? Мисоллар келтиринг.
3. Функциянинг графигини $y = b$ ва $x = a$ тўғри чизиқлар бир нечта нуқтада кесиб ўтиши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.

Машқлар

А

1.1. $y = f(x)$ функциянинг берилган нуқталардаги қийматларини топинг:

а) $f(x) = 2x^2 + 3$, $x = -1$; 2,5; 3; б) $f(x) = \frac{1}{3} - 5x$, $x = -0{,}5$; $\frac{1}{15}$; 0;

в) $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$, $x = 4$; 5; $\frac{1}{2}$; г) $f(x) = \frac{2}{2+x}$, $x = -1$; 0; $-\frac{1}{5}$.

1.2. а) $f(x) = x^2 + 2$; б) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$; в) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 4}$; г) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ функциянинг $f(-2)$, $f(0{,}5)$, $f(1)$ қийматларини топинг.

1.3. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $g(x) = 2{,}5x - 4{,}2$; б) $g(x) = 3x^2 - 7x + 4$;

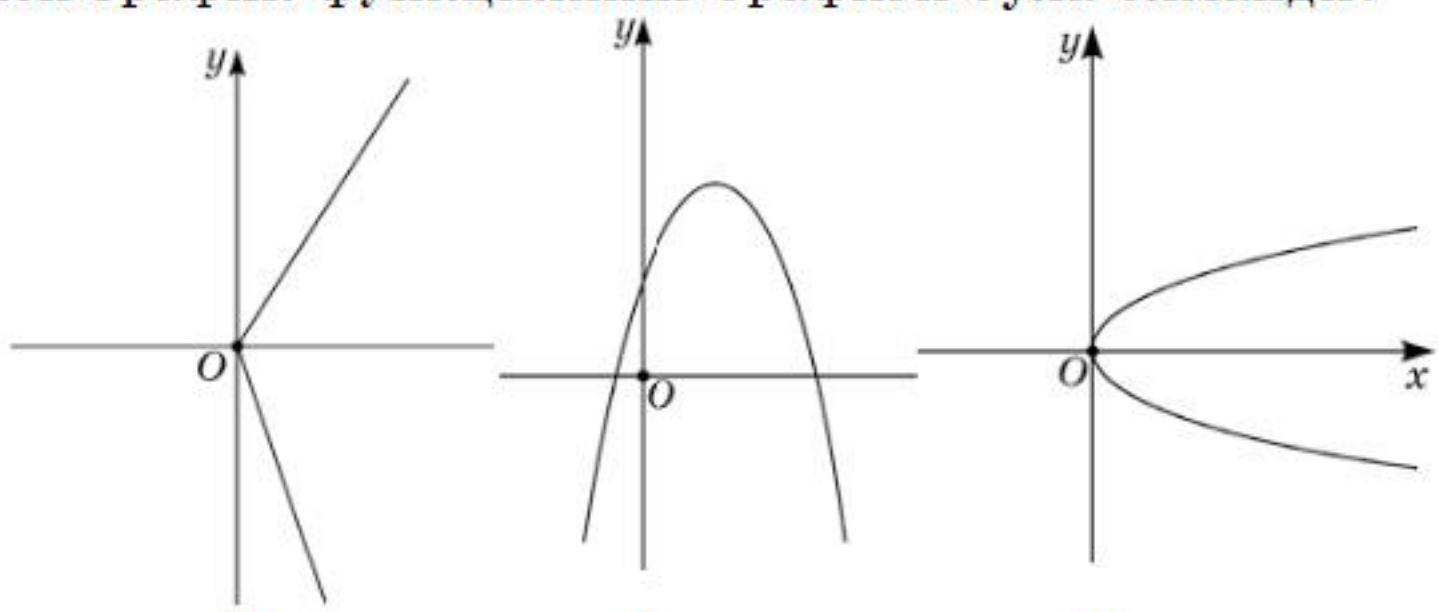
г) $g(x) = \frac{2}{2x+1}$; г) $g(x) = \frac{2}{3x} + 3$.

1.4. $f(x) = -\frac{1}{3x} - x$ ва $g(x) = \frac{3}{x} + x$:

а) $f(1) + g(1) + g\left(-\frac{1}{3}\right)$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right) + g\frac{2}{3x}$; в) $f(-2) - g(-3)$;

г) $4f(2) + 3g-\frac{1}{3x}$ ифоданинг қийматини топинг.

1.5. 4-расмдаги қайси график функциянинг графиги бўла олмайди?



а) б) в) г)

4-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

1.6. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ функция берилган. Аргументнинг қандай қийматларида берилган функция:
а) $f(x) = 4$; б) $f(x) = 9$; б) $f(x) = 19$; в) $f(x) = -11$ қийматни қабул қилади?

1.7. $f(x) = x^2 - 5x + 2$ функция берилган. $f(2) = -4$, $f(-1) = 8$ тенгликларнинг бажарилишини текширинг.

B

1.8. Берилган нуқталарда $y = g(x)$ функциянинг қийматларини топинг:
а) $g(x) = x^2 - \frac{x+2}{x}$; $x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1{,}5$;
б) $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$; $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$;
в) $g(x) = 3 - \cos 2x$; $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{\pi}{4}$; $x_3 = -\frac{\pi}{4}$;
г) $g(x) = \frac{2}{x^2} + 3x$; $x_1 = t$; $x_2 = t + 2$; $x_3 = \frac{2}{t}$.

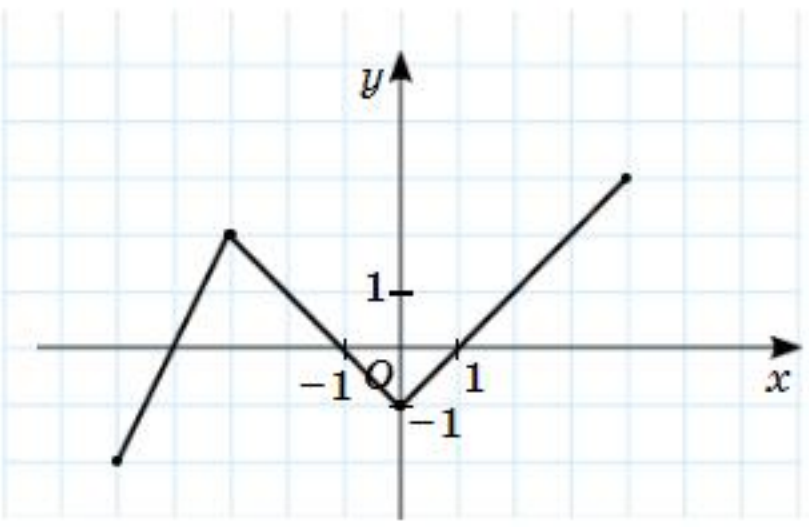
1.9. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:
а) $f(x) = 0{,}5 - \sqrt{x-3}$; б) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x + 5}$;
в) $f(x) = \frac{x+5}{16x^2 - 1}$; г) $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{x+1}{4x^2 - 9}$.

1.10. Функциянинг аниқланиш соҳасини ва қийматлар тўпламини топинг:
а) $y = x^2 - 4x + 4$; б) $y = \frac{3}{x} - 5$;
в) $y = \frac{1}{2} - 2\sin x$; г) $y = 5\cos\frac{x}{2}$.

1.11. $f(x) = \frac{3}{x} - 2x^2$ ва $g(x) = \frac{4}{x} + 2$ функциялар берилган:
а) $f(-3) + g(-2) + f(1)$; б) $f(0{,}5) - g\left(\frac{1}{4}\right)$;
в) $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g(-2) - \frac{g(0{,}5)}{f(3)}$; г) $3f(a) + 4g(a)$ функциянинг қийматларини топинг.

1.12. Агар $f(x) = \frac{1+x}{x} + 1$ ва $g(x) = \frac{3x}{2-x} - 4$ бўлса, у ҳолда шу функцияларнинг $x = -1$ нуқтадаги қийматларини таққосланг.
а) $f(x) < g(x)$; б) $f(x) > g(x)$;
в) $f(x) = g(x)$; г) $f(x)$ m $g(x)$.

1.13. $f(x)$ функциянинг графиги берилган (5-расм).
а) функциянинг аниқланиш соҳасини;
б) функциянинг қийматлар тўпламини ;
в) функциянинг нолларини;
г) $f(-4)$, $f(0)$, $f(4)$ қийматларини топинг.



5-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Чизиқли функция, квадрат функция, тескари пропорционал боғланиш, фигураларни шакл алмаштириш турлари, нуқта ва тўғри чизиққа нисбатан симметрия, параллел кўчириш, гомотетия.

2-§. ФУНКЦИЯЛАР ГРАФИКЛАРИНИ ШАКЛ АЛМАШТИРИШ

Таянч тушунчалар

Функция, функциянинг графиги, шакл алмаштириш

Функция графигига шакл алмаштиришни қўллашни ўрганасиз.

БУНИ БИЛАСИЗ:

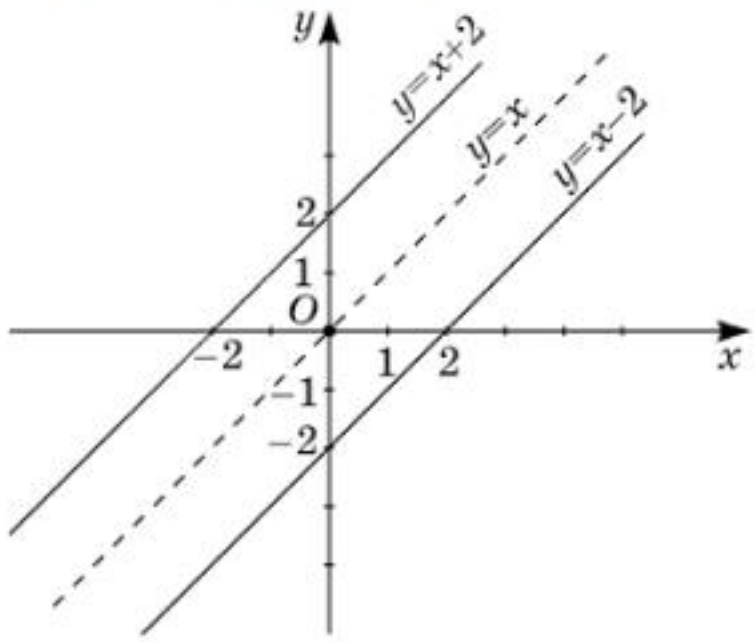
$y = ax + b$ чизиқли функциянинг графиги — тўғри чизиқ, $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, квадрат функциянинг графиги — парабола, $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ тескари пропроционал боғланиш графиги — гипербола.

$y = kf(ax + b) + d$ (бунда k, a, b, d — нолдан фарқли ҳақиқий сонлар) функциянинг графигини содда шакл алмаштиришлар орқали ясаш йўлларини кўриб чиқамиз.

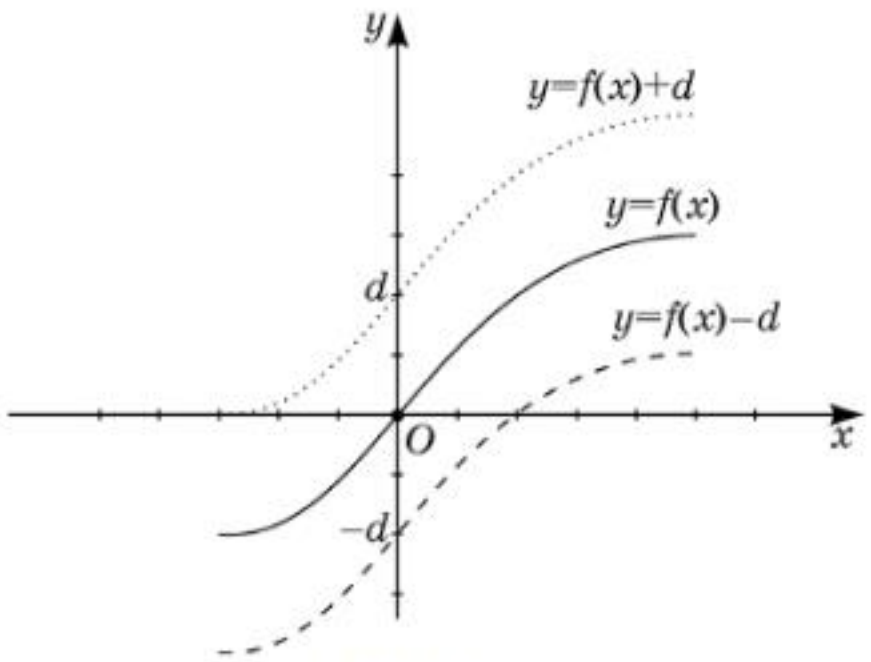
МИСОЛ

1. Битта координаталар текислигида $y = x$, $y = x + 2$, $y = x - 2$ функцияларнинг графикларини ясаб, 6-расмга эга бўламиз. Энди $y = x + 2$ ва $y = x - 2$ функциялар графикларини $y = x$ функциянинг графиги билан таққослаймиз. Бунда $y = x + 2$ функциянинг графигини олиш учун $y = x$ тўғри чизиқни Oy ўқи бўйича 2 бирлик юқорига, $y = x - 2$ функциянинг графигини олиш учун Oy ўқи бўйича 2 бирлик пастга параллел кўчирилганлигини кўрамиз.

Демак, $y = f(x) + d$ функциянинг графиги $y = f(x)$ функция графигини Oy ординаталар ўқи бўйича , агар $d > 0$ бўлса, у ҳолда d бирлик юқорига, агар $d < 0$ бўлса, у ҳолда d бирлик пастга параллел кўчириш орқали ясалади (7-расм).



6-расм



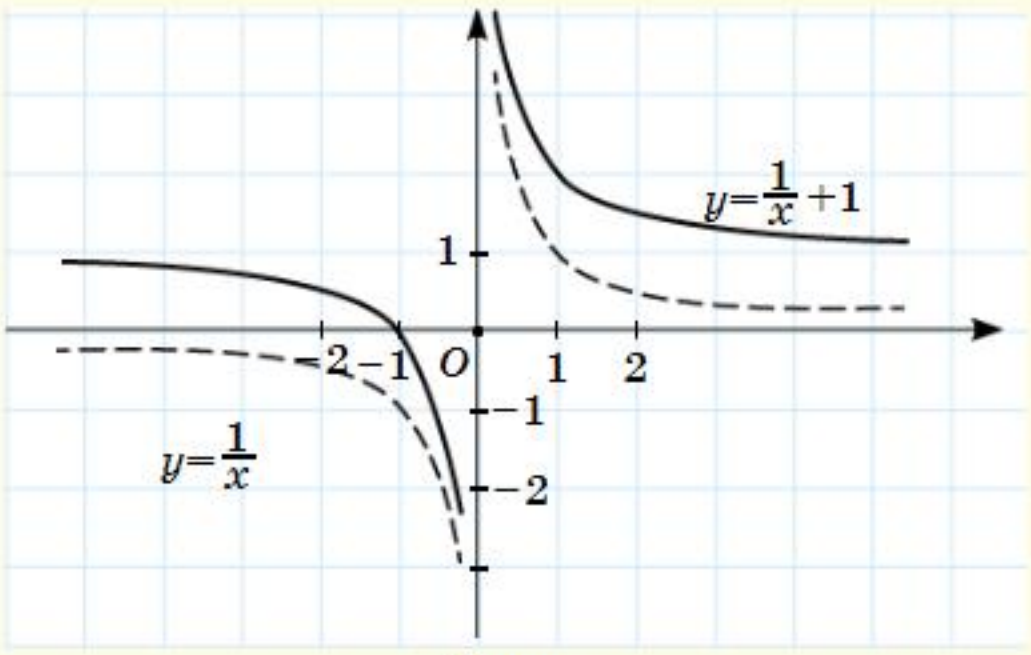
7-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ТУШУНТИРИНГ

$y = \frac{1}{x} + 1$ функция графигини ясаш учун $y = \frac{1}{x}$ функциянинг графигига қандай шакл алмаштириш фойдаланилган (8-расм)?

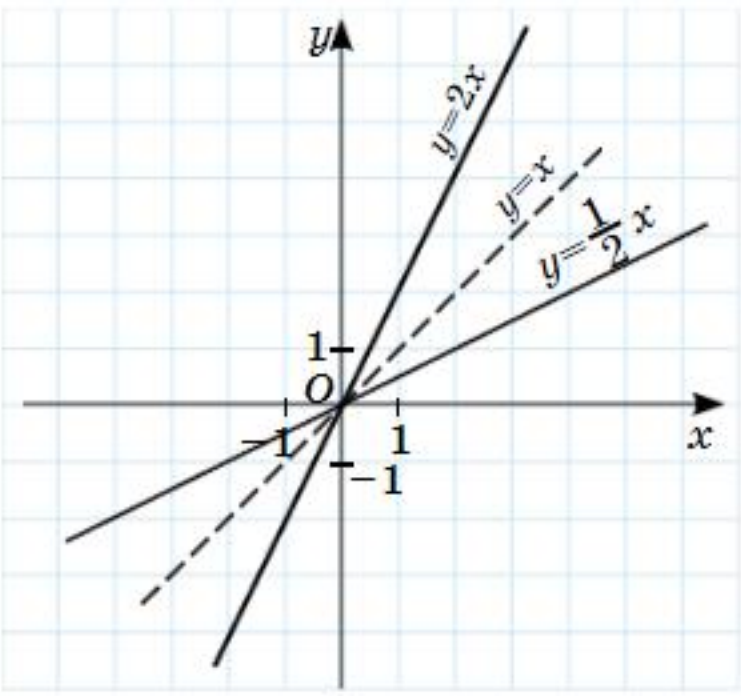


8-расм

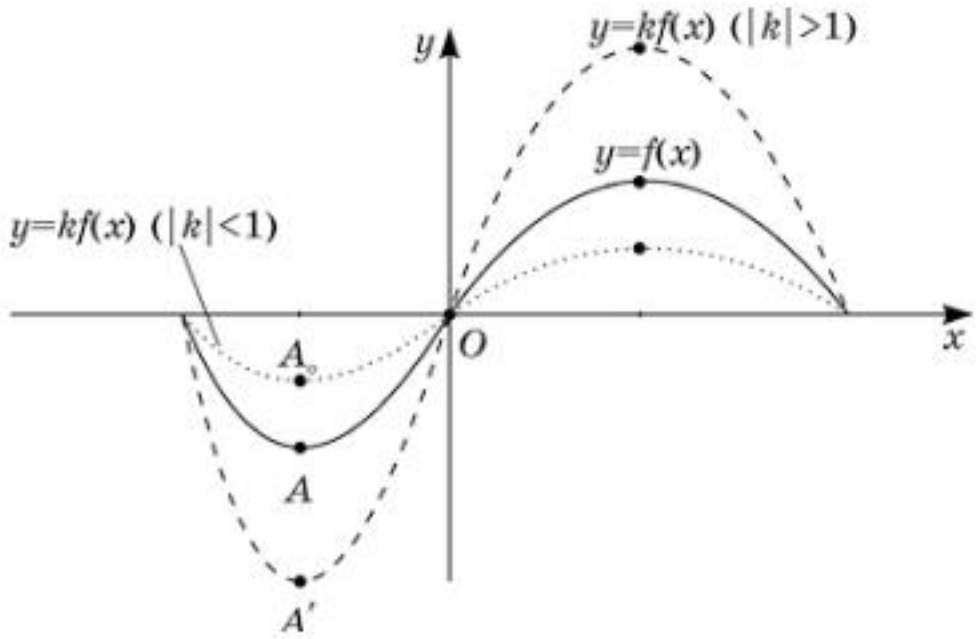
МИСОЛ

2. Координаталар текислигида $y = x$, $y = 2x$ ва $y = \frac{1}{2}x$ функцияларнинг графикларини ясаб, 9-расмга эга бўламиз. Энди $y = 2x$ ва $y = \frac{1}{2}x$ функциялар графикларининг жойлашувини $y = x$ функция графиги билан таққослаймиз. Бунда $y = 2x$ ва $y = \frac{1}{2}x$ функцияларнинг графикларини олиш учун $y = x$ функция графигини Oy ўқи бўйича мос равишда 2 марта чўзамиз ва сиқамиз.

Демак, $y = k\ f(x)$ (бунда $k \neq 0$) функция графигини ясаш учун $y = f(x)$ функциянинг графигини Oy ўқи бўйича $|k| > 1$ бўлганда $|k|$ марта чўзиш, $|k| < 1$ бўлганда $\left(\frac{1}{|k|}\right)$ қадар сиқиш керак (10-расм).



9-расм



10-расм

Агар $|k| > 1$ ($|k| < 1$) бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция графиги нуқталарининг барча ординаталари $|k|$ $\left(\frac{1}{|k|}\right)$ марта ортади (камаяди).

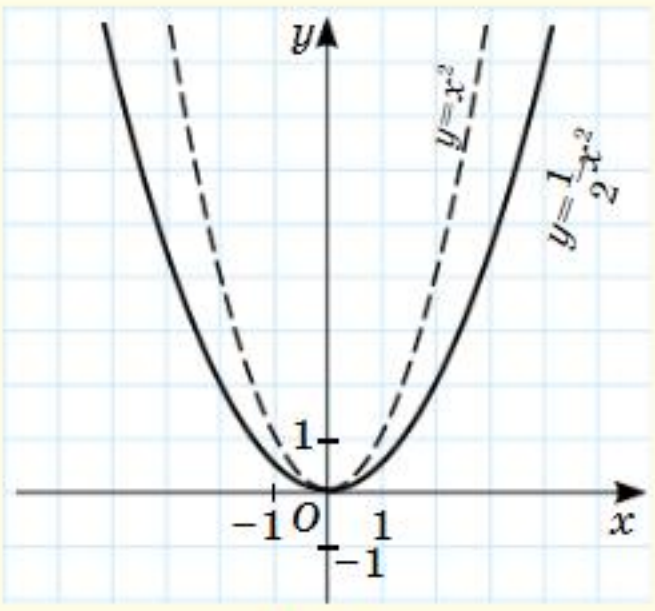
Агар $k < 0$ бўлса, у ҳолда $y = |k|f(x)$ функциянинг графиги ясалиб, ҳосил бўлган график Ox ўқига нисбатан симметрик тасвирланади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ТУШУНТИРИНГ

$y = \frac{1}{2}x^2$ функциянинг графигини ясаш учун $y = x^2$ функция графигига қандай шакл алмаштиришлар фойдаланилган (11-расм)?



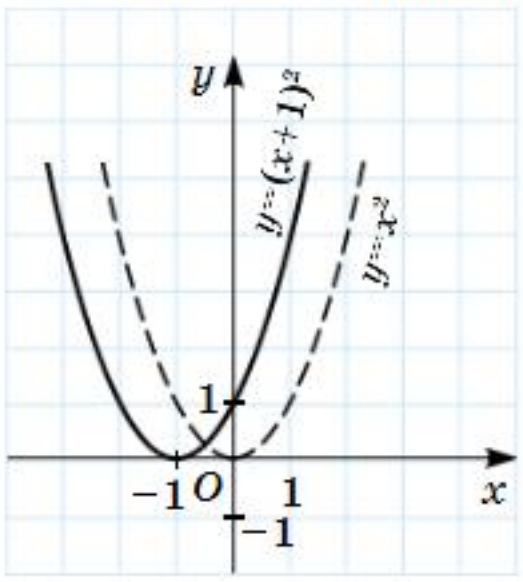
11-расм

МИСОЛ

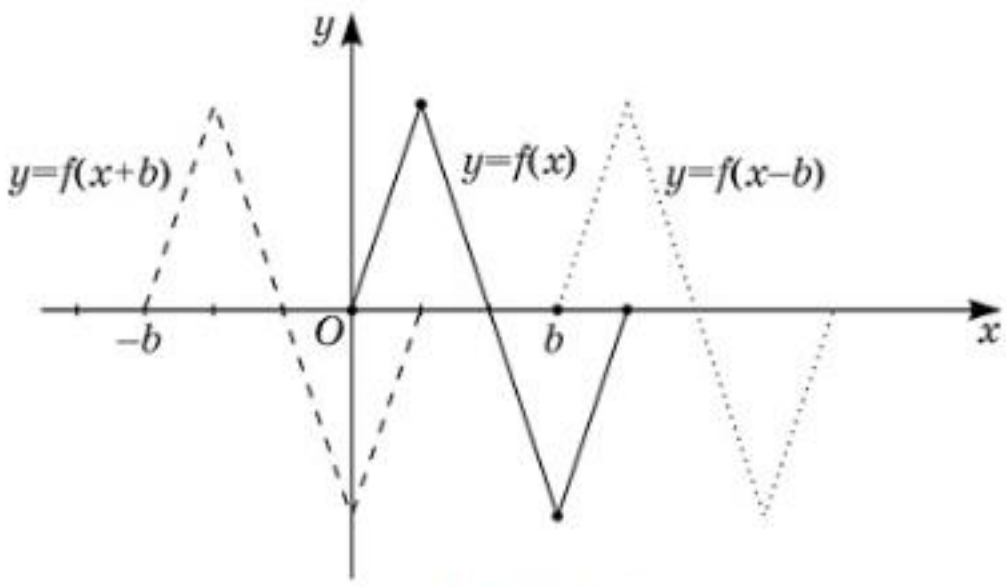
3. Битта координаталар текислигида $y = x^2$ ва $y = (x + 1)^2$ функцияларнинг графиклари ясалган (12-расм).

ТУШУНТИРИНГ

$y = (x + 1)^2$ функциянинг графигини ясаш учун $y = x^2$ функция графигига қандай шакл алмаштиришлар фойдаланилган (12-расм)?



12-расм



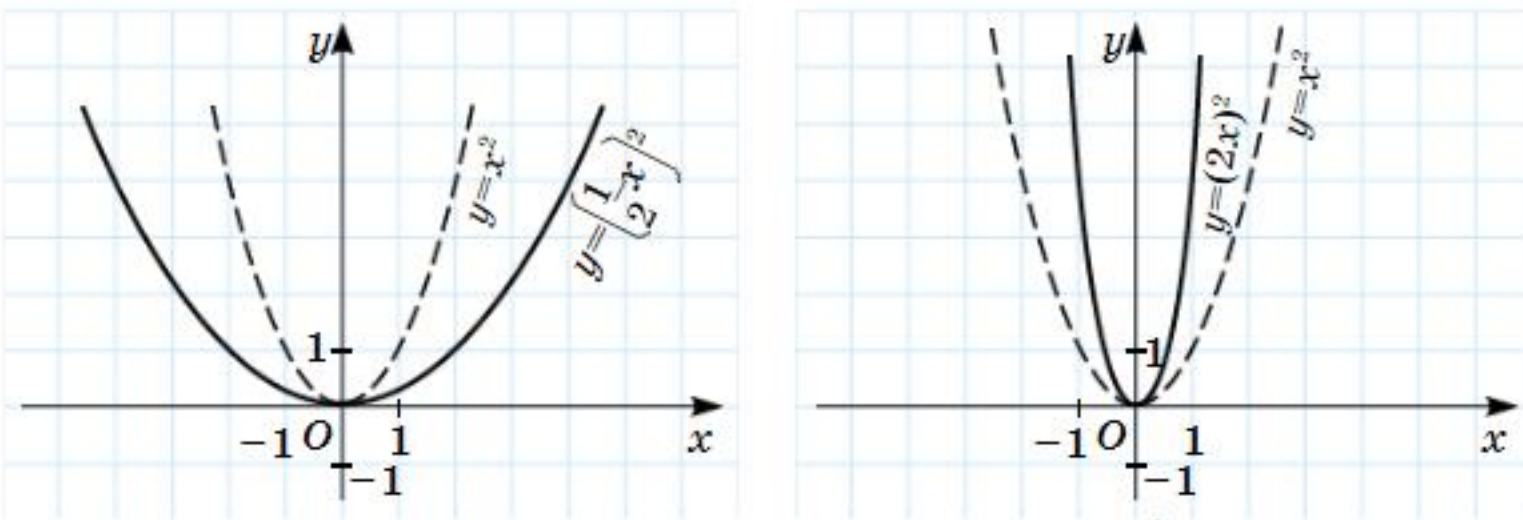
13-расм

Демак, $y = f(x + b)$ (бунда $b \neq 0$) функциянинг графигини $y = f(x)$ функция графигидан Ox ўқи бўйича $b > 0$ бўлганда манфий йўналишда, $b < 0$ бўлганда мусбат йўналишда $|b|$ бирлик параллел кўчириш орқали ҳосил қилиш мумкин (13-расм).

МИСОЛ

4. а) $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ ва б) $y = (2x)^2$ функциянинг графигини ясаймиз.

Ечилиши: Бунинг учун берилган функцияларнинг графикларини $y = x^2$ функция графигини Ox ўқи бўйича мос равишда 2 марта чўзиш; 4 марта сиқиш орқали оламиз (14 *а*, *б*-расм).



а) 14-расм *б*)

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Демак, $y = f(ax)$ (бунда $a \neq 0$ — исталган сон) функциянинг графиги $y = f(x)$ функция графигидан Ox ўқи бўйича $|a| > 1$ бўлганда, $|a|$ марта сиқиш ёки $0 < |a| < 1$ бўлганда, $\frac{1}{|a|}$ марта чўзиш орқали олинади (15-расм).

Энди ҳамма шакл алмаштиришлардан фойдаланишни талаб этадиган функция графигини ясашга мисол келтирамиз.

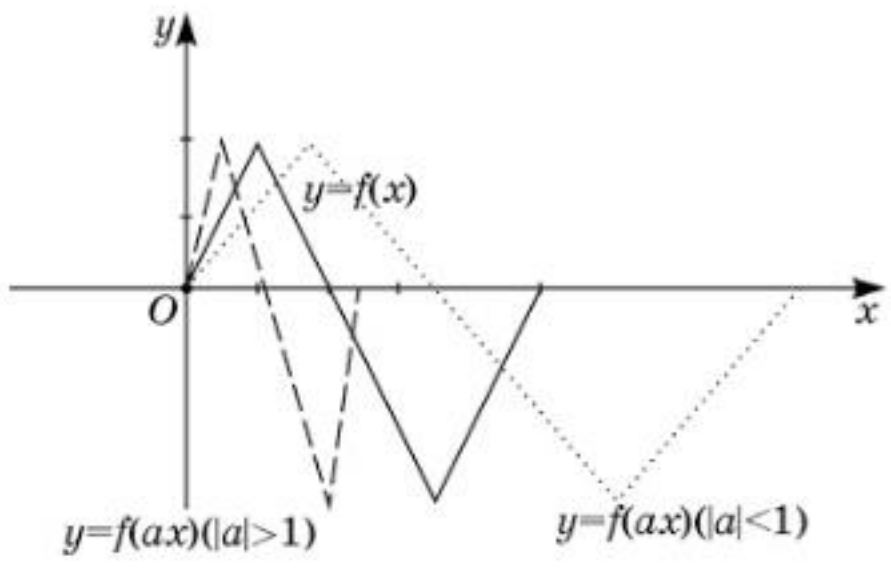
МИСОЛ

5. $y = (x - 2)^2 + 3$ функциянинг графигини ясаймиз. Бунинг учун:

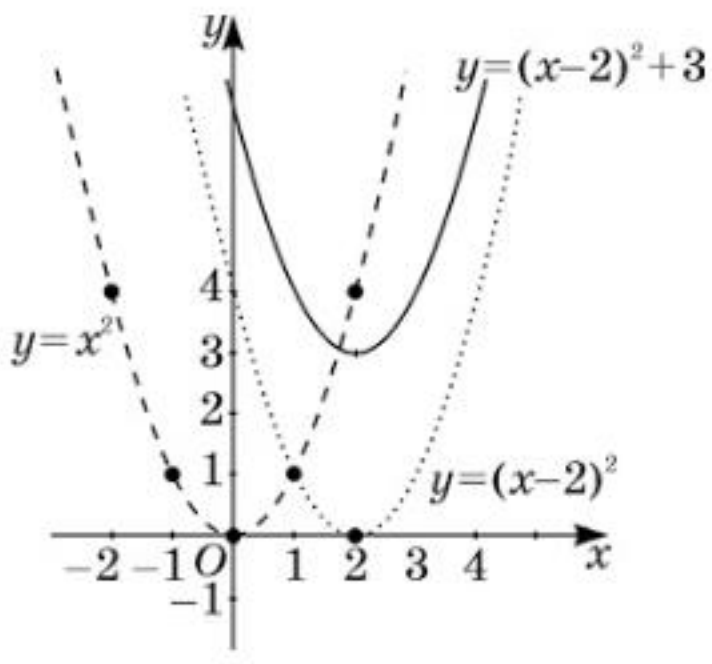
1) $y = x^2$ параболани ясаймиз;

2) параболани мусбат йўналишда Ox ўқи бўйича 2 бирликка параллел кўчирамиз;

3) ҳосил бўлган параболани Oy ўқи бўйича 3 бирлик юқорига параллел кўчирамиз (16-расм).



15-расм



16-расм

Демак, $y = kf(ax + b) + d$ функциянинг графигини $y = f(x)$ функция графигидан юқорида кўриб чиқилган шакл алмаштиришдан фойдаланиб ҳосил қиламиз.

$y = (2x + 1)^2 - 4$ функциянинг графигини ясаш учун қандай шакл алмаштириш бажарилганлигини айтинг.

1. Графикларни шакл алмаштиришдан қандай ҳолларда фойдаланган маъқул?
2. $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$ функцияларнинг графикларини шакл алмаштириш орқали ясашнинг ўзига хос хусусияти нимада? Мисол келтиринг.
3. $y = -af(x)$, $y = f(-ax)$ функциялар графикларини ясашда $f(x)$ функциянинг графигини шакл алмаштиришда қандай ўхшашликлар бор?

Машқлар

А

2.1. $y = x$ функциянинг графигидан фойдаланиб, $y = 3x$, $y = -2x$, $y = x + 2$, $y = -4x - 1$ функциялар графикларини битта координаталар текислигида ясанг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

2.2. $y = \frac{1}{x}$ функциянинг графигидан фойдаланиб, $y = \frac{1}{x} + 1$, $y = -\frac{1}{x} + 1{,}5$, $y = \frac{1}{x+1} - 2$ функциялар графикларини битта координаталар текислигида ясанг.

2.3. Функциянинг графиги қандай эгри чизиқ бўлади:

а) $y = \sin\frac{\pi}{2} - 2x^2$; б) $y = 2\cos 0 + \frac{2}{x}$;

в) $y = 4\sin\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}x^3$; г) $y = -\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$?

2.4. $y = -2x^2$, $y = x^2 + \frac{1}{2}$, $y = -x^2 + 5$, $y = 3x^2$ функцияларнинг графикларини $y = x^2$ функция графигидан фойдаланиб, битта координаталар текислигида ясанг.

2.5. $y = \sqrt{x}$ функция графигидан фойдаланиб, $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}$, $y = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$, $y = 3\sqrt{x} - 1$ функцияларнинг графикларини битта координаталар текислигида ясанг.

B

2.6. а) $y = 2(3 + x)^2 - 5$ б) $y = -2(x - 1)^2 + 4$ функциялар графигини $y = x^2$ функциянинг графигидан қандай шакл алмаштиришлар бажариш орқали ҳосил қилиш мумкин? Графигини ясанг.

2.7. $y = x^3$ функциянинг графигидан фойдаланиб, $y = f(x)$ функция графигини ясанг:

а) $f(x) = x^3 + 4$; б) $f(x) = -x^3 - 3$;

в) $f(x) = -2x^3 + 1$; г) $f(x) = 2(x - 1)^3 - 5$.

ТАКРОРЛАШ

2.8. Берилган функциялар графикларининг кесишишини график ёрдамида кўрсатинг:

а) $y = x^2 - 2x$ ва $y = -1$; б) $y = x^2 - 5x + 4$ ва $y = -\frac{3}{x}$.

2.9. График усулда тенгламанинг нечта илдизи мавжуд эканлигини топинг: а) $x^2 = \frac{1}{x}$; б) $x^2 - 1 = \sqrt{x}$.

2.10. 4-жадвалда берилган қийматлар $y = 2x + 1$, $y = 2x^2 + 1$, $y = x^3 - 3$ функциялардан қайси бирининг формуласига мос келади?

4-жадвал

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

2.11. Агар $f(x) = x^4 + x^2 - 10$ ва $g(x) = x^3 + x - 9$ бўлса, у ҳолда $f(1)$ ва

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$g(1)$ қийматларини таққосланг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар тўплами, функциянинг графиги, берилиш усуллари, функция графигини содда шаклга алмаштириш.

3-§. ФУНКЦИЯНИНГ ХОССАЛАРИ

Таянч тушунчалар

Функция, функциянинг хоссалари

Функциянинг хоссалари ҳақидаги билимингизни чуқурлаштирасиз.

Жуфт ва тоқ функцияларга таъриф бериш учун дастлаб симметрик тўплам тушунчасини киритамиз.

Агар X тўпламда исталган x элемент билан бирга $(-x)$ элемент ҳам мавжуд бўлса, бундай тўплам ***симметрик тўплам*** *дейилади.*

Масалан, $(-5; 5)$, $[-b; b]$, $(-\infty; +\infty)$ — симметрик тўплам.

Агар $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси симметрик тўплам бўлиб, x аргументнинг исталган қиймати учун $f(-x) = f(x)$ тенглик бажарилса, ***функция жуфт функция*** *$f(-x) = -f(x)$ тенглик бажарилса,* ***функция тоқ функция*** *дейилади.*

Бундан баъзи функцияларнинг жуфтлик ёки тоқлик хоссалари келиб чиқади. Агар таърифдаги шартлар бажарилмаса, функция жуфт ҳам, тоқ ҳам бўлмайди. Бундай функциялар умумий кўринишдаги функциялар дейилади.

МИСОЛ

1. а) $f(x) = 5x^2$; б) $f(x) = x^3 - x$; в) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$ функцияларнинг жуфт ёки тоқлигини аниқлаймиз.

Ечилиши. Бунинг учун жуфт ва тоқ функцияларнинг таърифидан фойдаланамиз. Берилган функцияларнинг аниқланиш соҳалари — симметрик тўпламлар.

а) $f(-x) = 5(-x)^2 = 5x^2 = f(x)$ — жуфт функция;

б) $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$ — тоқ функция;

в) $f(-x) = 2(-x)^2 + \frac{1}{-x} = 2x^2 - \frac{1}{x}$ функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас.

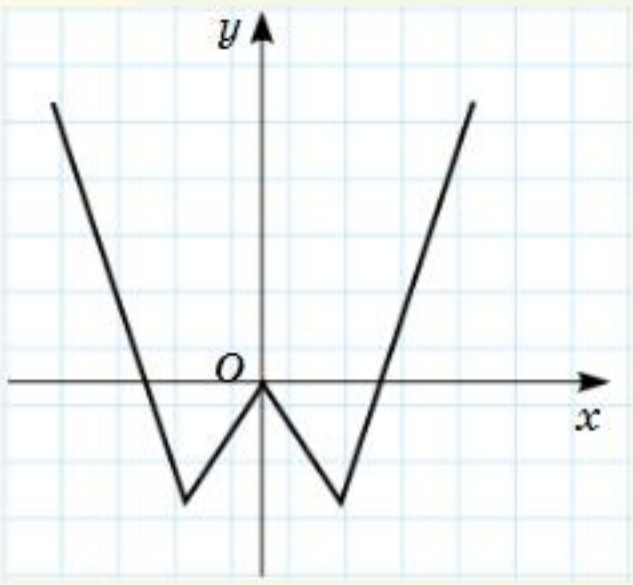
Жавоби: а) жуфт; б) тоқ; в) жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас.

Жуфт ва тоқ функциялар графикларининг ўзига хос хусусиятлари мавжуд, *яъни жуфт функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик, тоқ функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган эгри чизиқдан иборат.*

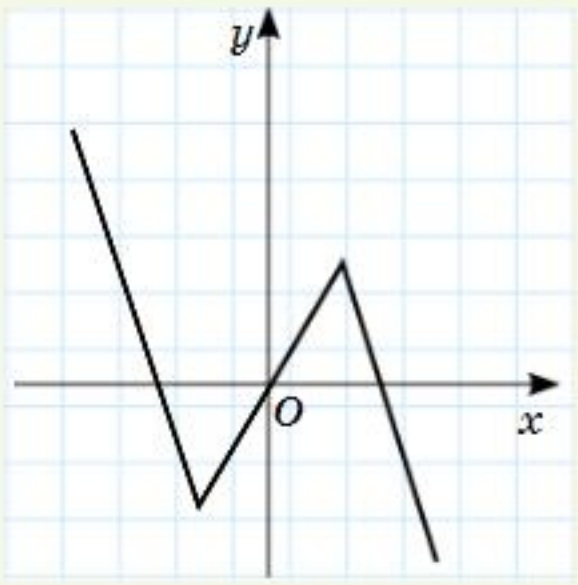
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

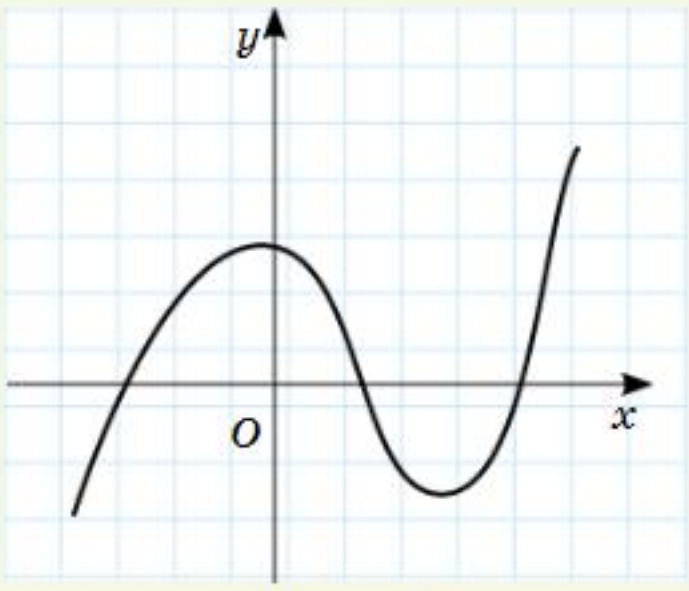
МИСОЛ **2.** 17-расмда берилган графиклар бўйича функцияларнинг жуфт ёки тоқлигини аниқланг.



17-расм



18-расм



19-расм

Ечилиши. Жуфт ва тоқ функциялар графикларининг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидаги хулосага келамиз:

1) график Oy ўқига нисбатан симметрик, демак, функция жуфт функция (17-расм);

2) график координаталар бошига нисбатан симметрик, у ҳолда функция тоқ функция (18-расм);

3) графикда симметриклик мавжуд эмас, шунинг учун функция тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас (19-расм).

Агар $y = f(x)$ функция учун $T \neq 0$ сони топилиб ва аниқланиш соҳасидан олинган исталган x лар учун $f(x + T) = f(x)$ тенглик бажарилса, у ***даврий функция*** *деб аталади.*

$T \neq 0$ сони *функциянинг даври* дейилади.

МИСОЛ **3.** $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ функцияларнинг даврини топамиз.

Ечилиши: $y = \sin x$, $y = \cos x$ функциялар учун мос равишда $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$; $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ функциялар учун мос равишда $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}x$ тенгликлар бажарилиши 9-синфдан маълум. Демак, $y = \sin x$, $y = \cos x$ функциялар учун $T = 2\pi$; $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ функциялар учун $T = \pi$ бўлади.

Агар $y = f(x)$ функциянинг даври $T \neq 0$ сонига тенг бўлса, у ҳолда $n \cdot T$ (бунда n — исталган бутун сон) сони ҳам берилган функция учун давр бўлади.

Бундан берилган хоссага кўра тригонометрик функциялар учун қуйидаги тенгликлар бажарилади:

$$\begin{aligned} &\sin(x + 2\pi n) = \sin x, \ n \in Z; \\ &\cos(x + 2\pi n) = \cos x, \ n \in Z; \\ &\mathrm{tg}(x + \pi n) = \mathrm{tg}x, \ n \in Z; \\ &\mathrm{ctg}(x + \pi n) = \mathrm{ctg}x, \ n \in Z. \end{aligned} \qquad (1)$$

Энди $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, $n \in Z$ тенглик бажарилишини исботлаймиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

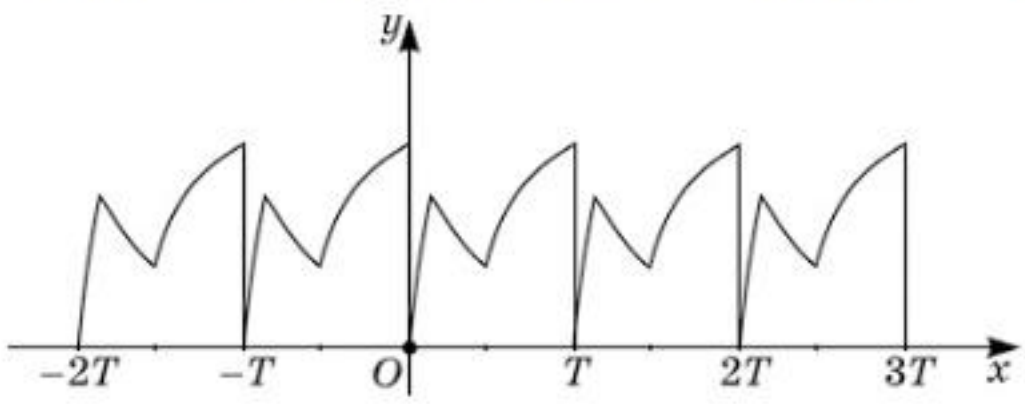
Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Исботи. 9-синфдан маълум бўлган $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ формуладан фойдаланамиз. У ҳолда $\sin(x + 2\pi n) = \sin x \cdot \cos 2\pi n + \cos x \cdot \sin 2\pi n$, бунда $\cos 2\pi n = 1$, $\sin 2\pi n = 0$ эканини эътибога олсак, $\sin(x + 2\pi n) = \sin x \cdot 1 + \cos x \cdot 0 = \sin x$. Демак, $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$.

(1) формуланинг тўғрилигини мустақил исботланг.

Энг кичик мусбат давр функциянинг даври деб қабул қилинади. Масалан, $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларнинг энг кичик мусбат даври 2πга, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ функцияларнинг энг кичик мусбат даври πга тенг бўлади.

Даври T сонига тенг бўлган даврий функция графигини ясаш учун узунлиги T га тенг кесмага графикни ясаб, уни Ox ўқи бўйлаб ўнгга ва чапга $n \cdot T$ масофага қадар параллел кўчириш керак (20-расм).



20-расм

Агар $y = f(x)$ функция даврий ва унинг даври T сонига тенг бўлса, у ҳолда $y = kf(ax + b)$ (бунда k, $a \neq 0$ ва b — ўзгармас сонлар) функция ҳам даврий ва унинг даври $\frac{T}{|a|}$ сонига тенг.

МИСОЛ

4. $y = \cos(3x - 1)$ функциянинг даврини топамиз.

Ечилиши. Берилган функциянинг даврини юқорида берилган хоссалар бўйича аниқлаймиз. $y = \cos x$ функциянинг даври 2π, масаланинг шартига кўра $a = 3$. У ҳолда $\frac{T}{|a|} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ бўлади. Демак, берилган функциянинг даври $\frac{2}{3}\pi$ сонига тенг.

Жавоби: $\frac{2}{3}\pi$.

Аниқланиш соҳасининг исталган нуқтасида $f(x)$ функция қийматларининг абсолют катталиги маълум бир $b > 0$ сондан кичик бўлмаса, яъни $|f(x_0)| \leq b$, $x_0 \in X$, у ўша тўпламда функция ***чекланган функция*** *деб аталади.* Агар тенгсизлик бажарилмаса, у ҳолда функция ***чекланмаган функция*** деб аталади.

МИСОЛ

5. $f(x) = 1 + \sin 2x$ функциянинг чекланган функция эканлигини исботлаймиз.

Исботи. $y = \sin x$ функция қийматларининг абсолют катталиклари исталган $x \in R$ учун 1 дан ортиқ эмас, яъни $|\sin x| \leq 1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Бундан $|\sin 2x| \le 1$ ёки $-1 \le \sin 2x \le 1$. Охирги қўш тенгсизликнинг иккала томонига 1 ни қўшсак, $0 \le 1 + \sin 2x \le 2$ қўш тенгсизликка эга бўламиз. Шундай қилиб, берилган функциянинг қийматлар тўплами $E(f) = [0; 2]$. Бу чегараланган функциядир.

Аниқланиш соҳасининг маълум бир оралиқларида функция фақат мусбат қийматларни (унинг графиги Ox ўқининг юқори қисмида жойлашган), бошқа оралиқларда фақат манфий қийматларни (график Ox ўқининг пастки қисмида жойлашган) қабул қилса, бундай оралиқлар ***функциянинг ўзгармас ишорали оралиқлари*** *дейилади.*

МИСОЛ

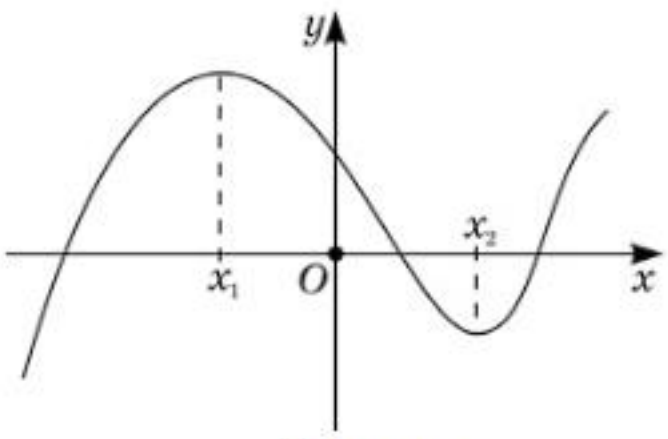
6. а) $y = x + 1$; б) $y = \frac{x^2 + 2}{x}$ функциянинг ўзгармас ишорали оралиқларини топамиз.

Ечилиши. а) $y = x + 1$ функция ҳақиқий сонлар тўпламида ўсувчи ва $x = -1$ нуқтада 0 га тенг. Бинобарин, бу функциянинг $(-\infty; -1)$ оралиқда манфий ишорали, $(-1; +\infty)$ оралиқда мусбат ишорали бўлиши равшан. Булар функциянинг ўзгармас ишорали оралиқларидир.

б) Касрнинг сурати x нинг исталган қийматида мусбат бўлгани учун, унинг ишораси махраждаги ифодага боғлиқ. Демак, $(-\infty; 0)$ оралиқда функция манфий қийматларни, $(0; +\infty)$ оралиқда мусбат қийматларни қабул қилади.

Агар $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасида исталган $x_1 < x_2$ сонлар учун $f(x_1) < f(x_2)$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда функция ўсувчи, $f(x_1) > f(x_2)$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда функция ***камаювчи функция*** *дейилади.*

Агар $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасида исталган $x_1 < x_2$ сонлар учун $f(x_1) \ge f(x_2)$ тенгсизлик бажарилса, функция ***камаймайдиган*** *ва $f(x_1) \le f(x_2)$ тенгсизлик бажарилса, функция* ***ўсмайдиган функция*** *дейилади.*



21-расм

Ўсувчи, камаювчи, камаймайдиган ва ўсмайдиган *функциялар монотон функциялар* дейилади.

Функцияни маълум бир нуқта атрофида текширганда нуқтанинг атрофи тушунчасидан фойдаланилади.

а нуқтанинг атрофи деб шу нуқтани ўз ичига олган ҳар қандай оралиққа айтилади.

21-расмдаги x_1 (x_2) нуқтада функциянинг графиги ўсишдан камайишга (камайишдан ўсишга) ўтади. Бундай нуқта *максимум* (x_{max}) (*минимум* (x_{min})) *нуқтаси* деб аталади.

Агар x_0 нуқтанинг маълум бир атрофидан олинган барча x лар учун $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг ***минимум (максимум) нуқтаси*** *деб аталади.*

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Минимум ва максимум нуқталар *экстремум нуқталари*, шу нуқталардаги қийматлар мос равишда *функциянинг минимуми* ва *максимуми* ёки функциянинг *экстремумлари* дейилади.

1. Агар жуфт функциянинг аниқланиш соҳаси $[a; b]$ кесма бўлса, у ҳолда a ва b сонлар ҳақида нима айтиш мумкин?
2. Фақат мусбат қийматларни қабул қиладиган тоқ функция мавжудми? Жавобингизни тушунтиринг.
3. Функциянинг даврийлиги нима?
4. Функциянинг ўзгармас ишорали оралиқлари қандай аниқланади?
5. Агар $y = f(x)$ функция ҳақиқий сонлар тўпламида ўсувчи бўлса, у ҳолда $y = -f(x)$ функция ўсувчи бўладими ёки камаювчи?

Машқлар

А

3.1. Функцияни жуфтликка текширинг:

а) $f(x) = -3x^4 + 2{,}5x^2$; б) $f(x) = \cos\frac{2x}{3} - 4x^2 + x$;

в) $f(x) = 5\sin^2 x + \frac{1}{2} - x$; г) $f(x) = -2{,}5x^6 - 5$.

3.2. Функцияни тоқликка текширинг:

а) $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 1$; б) $f(x) = \sin x - 2x^3$;

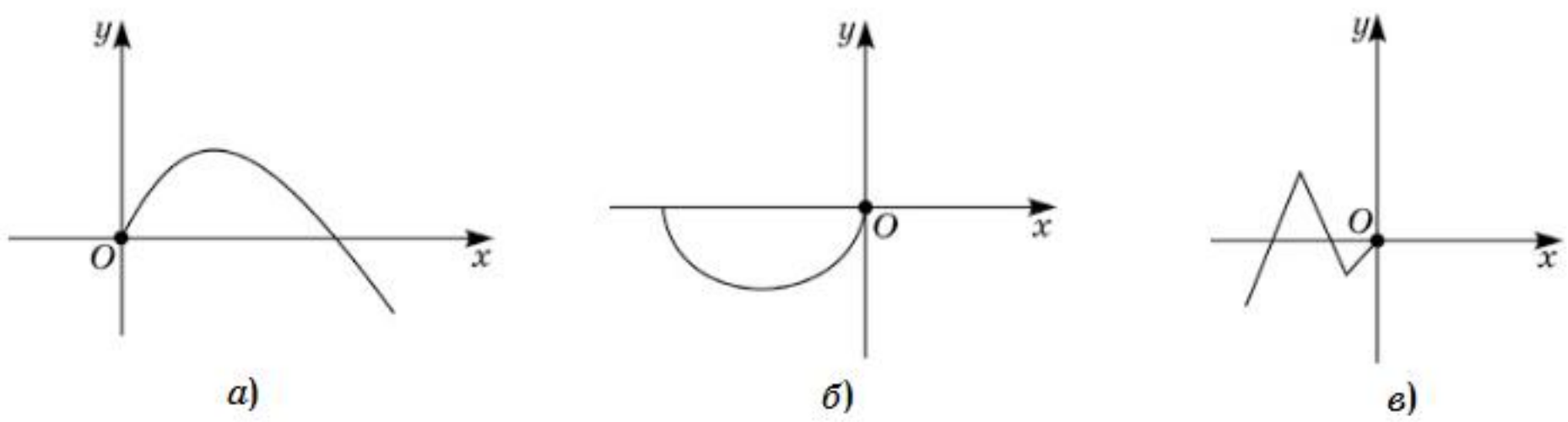
в) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 \cdot \mathrm{ctg}x^2$; г) $f(x) = 2x\,|x| - 3x - 1$.

3.3. T сони $y = f(x)$ функциянинг даври бўлишини текширинг:

а) $f(x) = 2\sin\frac{1}{3}x$, $T = 6\pi$; б) $f(x) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{8}\right)$, $T = 10\pi$;

в) $f(x) = \frac{1}{3}\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 1$, $T = 3\pi$; г) $f(x) = \mathrm{tg}5x + 2{,}5$, $T = \frac{\pi}{5}$.

3.4. 22 а, б, в-расмларда $x \geqslant 0$ ($x \leqslant 0$) шартни қаноатлантирувчи барча x лар учун $y = f(x)$ функциянинг графиги берилган. а) $f(x)$ — тоқ функция; б) $f(x)$ — жуфт функция; в) $f(x)$ — тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас деб олиб, $f(x)$ функциянинг графигини тўлдириб ясанг.

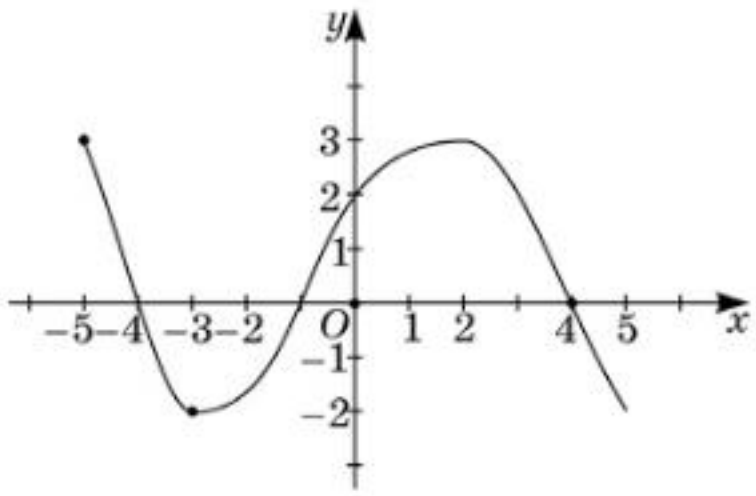


22-расм

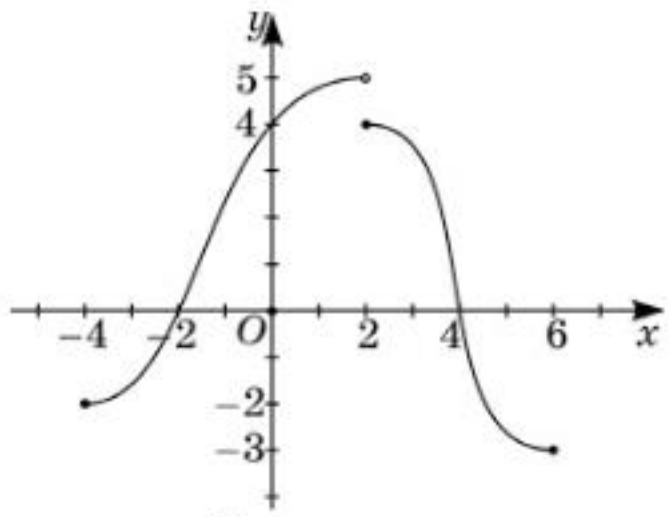
3.5. 23-24-расмларда $y = f(x)$ функция графигининг қисми берилган. Графикдан фойдаланиб, функциянинг: 1) координата ўқлари билан

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



23-расм



24-расм

кесишиш нуқталарининг координаталарини; 2) ўсиш ва камайиш оралиқларини; 3) ўзгармас ишорали оралиқларини топинг.

В

3.6. $y = f(x)$ функциянинг жуфт ёки тоқ эканлигини исботланг:

а) $y = \frac{2}{3}x^4 + 4|x|$; б) $f(x) = |x| - 2x^2$;

в) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{0{,}5\sin 2x}$; г) $f(x) = \frac{x(x-3)}{\cos 3x}$.

3.7. Берилган функцияларнинг энг кичик мусбат даврини топинг:

а) $f(x) = \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$;

в) $f(x) = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)$; г) $f(x) = 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

3.8. Қуйида берилганлардан фойдаланиб, $f(x)$ функциянинг графигини ясанг:

а) функция $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ оралиқда ўсади, $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ оралиқда камаяди;

б) $(-\infty; 1]$ ва $[3; +\infty)$ оралиқларда ўсади; $[1; 3]$ — камаяди;;

в) $(-\infty; -4]$ ва $[1; +\infty)$ оралиқларда камаяди; $[-4; 1]$ — ўсади;

г) $x_{max} = -1$, $x_{min} = 2$, $f(-1) = 2$, $f(2) = -3$;

д) $f(x)$ — жуфт функция, $x_{max} = 0$, $x_{min} = 1$, $f(0) = 4$, $f(1) = 0$;

е) $f(x)$ — тоқ функция, $x_{min} = 5$, $f(0) = 2$, $f(5) = -3$.

3.9. Шакл алмаштиришлар ёрдамида $y = f(x)$ функция графигини ясанг. График бўйича функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини, экстремум нуқталарини, ўзгармас ишорали оралиқларини топинг:

а) $y = 2x - x^2$; б) $y = \frac{1}{x+2} - 3$.

3.10. $y = f(x)$ функция жуфт функция эканлиги маълум.

а) $f(x) = 2x^2$; б) $f(x) = x^4 - x^2$

функциянинг формуласи қандай алгебраик қўшилувчилар билан тўлдирилганда: 1) жуфт функцияни; 2) умумий кўринишдаги функцияни олиш мумкин?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3.11. $y = f(x)$ функция тоқ функция эканлиги маълум.

а) $f(x) = -3x^3$; б) $f(x) = x + x^3$

функциянинг формуласи қандай алгебраик қўшилувчилар билан тўлдирилганда: 1) тоқ функцияни; 2) умумий кўринишдаги функцияни олиш мумкин?

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг турлари, графиги ва хоссалари, аргумент, функциянинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар тўплами, бир ўзгарувчини иккинчи ўзгарувчи орқали ифодалаш.

4-§. ТЕСКАРИ ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ. МУРАККАБ ФУНКЦИЯ

Таянч тушунчалар

Функция, тескари функция, мураккаб функция, функциянинг графиги

Тескари функция тушунчаси билан танишасиз; берилган функцияга тескари функцияни топишни ўрганасиз; ўзаро тескари функциялар графикларининг жойлашуви хоссасини билиб оласиз.

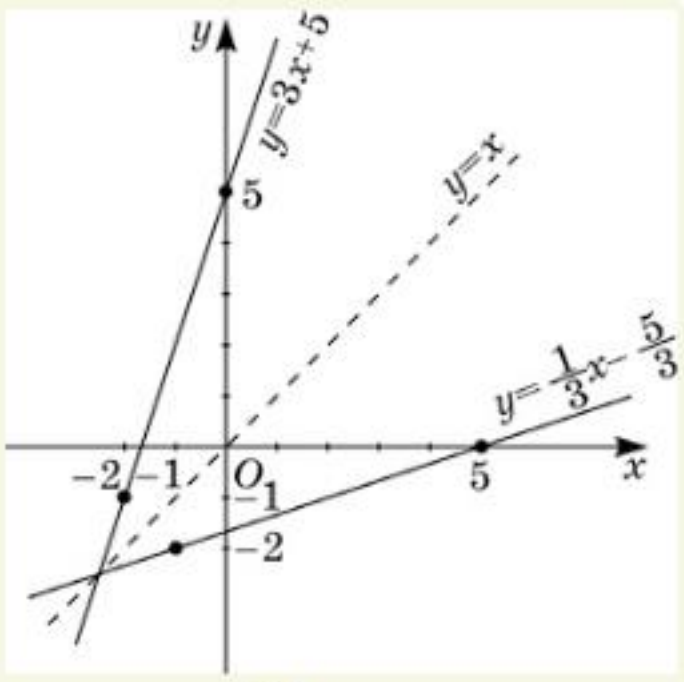
Агар $y = f(x)$ функция X аниқланиш соҳасида монотон ўсувчи (ёки камаювчи) функция бўлса, у ҳолда шу функциянинг Y қийматлар тўпламида аниқланган монотон ўсувчи (монотон камаювчи) функция унга ***тескари функция*** *бўлади.*

Ўзаро тескари функцияларнинг графиклари $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлади.

МИСОЛ

1. $y = 3x + 5$ функцияга тескари функцияни топамиз.

Ечилиши. Берилган чизиқли функция x нинг исталган қийматида аниқланган ва ўсувчи функция. Демак, берилган функцияга тескари функция мавжуд. Уни топиш учун x ўзгарувчини y ўзгарувчи орқали ифодалаймиз. Бунда $3x = y - 5$ ёки $x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$. Охирги тенгликдаги x ва y ўзгарувчиларнинг ўринларини алмаштирсак, $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ функцияни оламиз. Ушбу функция $y = 3x + 5$ функцияга тескари функция. Бинобарин, $y = 3x + 5$ тўғри функция, $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ тескари функциядан иборат.



25-расм

Бу функциялар монотон ўсувчи, уларнинг графиклари 25-расмда тасвирланган.

Жавоби: $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.

ТУШУНТИРИНГ

Нима учун $y = x^2$ функцияга тескари функция $y = \sqrt{x}$, бунда $x \geq 0$, бўлишини тушунтиринг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Мураккаб функция тушунчаси билан танишасиз, мураккаб функцияни фарқлашни ва функциялар композициясини тузишни ўрганасиз.

$y = f(u)$ функция берилган бўлсин. Аниқланиш соҳаси U, функция қийматларининг тўплами Y бўлсин. u ўзгарувчи ўз навбатида x ўзгарувчига боғлиқ бўлса, яъни $u = g(x)$, $x \in X$, у ҳолда $y = f(g(x))$ функция X тўпламда аниқланган ***мураккаб функция*** деб аталади.

Демак, мураккаб функциянинг умумий кўриниши $y = f(g(x))$.

Масалан, $y = \sqrt{2x+1}$ функция $x \in [-\frac{1}{2}; +\infty)$ ораликда аниқланган мураккаб функция, чунки $y = \sqrt{\ }$, $u = 2x + 1$.

МИСОЛ

2. $v = x + 1$ ва $u = \sqrt{x}$ функциялар берилган. Ўша функциялардан $v(u(x))$ ва $u(v(x))$ мураккаб функцияларни тузамиз.

Ечилиши. Агар $y = v(u(x))$ бўлса, у ҳолда $y = \sqrt{x} + 1$, $x \in [0; +\infty)$; агар $y = u(v(x))$ бўлса, у ҳолда $y = \sqrt{x+1}$, $x \in [-1; +\infty)$.

1. Исталган функцияга тескари функция топиш мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.

2. $y = x^2$, $y = (3x + 5)^2$ функциялар мураккаб функцияларми?

Машқлар

A

4.1. Берилган функцияга тескари функция топинг:

а) $y = 7x + 2$; б) $y = \frac{2x}{3}$; в) $y = 5 - x$.

4.2. $y = f(g(x))$ мураккаб функцияни ташкил этувчи f ва g функцияларни топинг:

а) $y = (x + 1)^2$; б) $y = \sqrt{2x}$.

4.3. $y = x^2$ ва $y = \sqrt{x}$ функциялар x нинг қандай қийматларида ўзаро тескари функциялар бўлади?

4.4. $y = 2x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ функциялардан мумкин бўлган мураккаб функциялар тузинг.

B

4.5. Берилган функцияга тескари функцияни топиб, графигини ясанг:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = -6x + 9$.

4.6. $f(x) = \frac{2}{x^3}$ ва $g(x) = 3x - 5$ функциялардан мураккаб функциялар тузинг.

4.7. $f(x) = 3x^2 - 2$ функцияга тескари функция тузинг, бунда $x \mid 0$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

4.8. $f(x) = 2x^2$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$ функциялардан мураккаб функция тузинг.

4.9. $y = \sqrt{\frac{3}{x}}$ мураккаб функция қандай функциялардан тузилганини икки хил усул билан кўрсатинг.

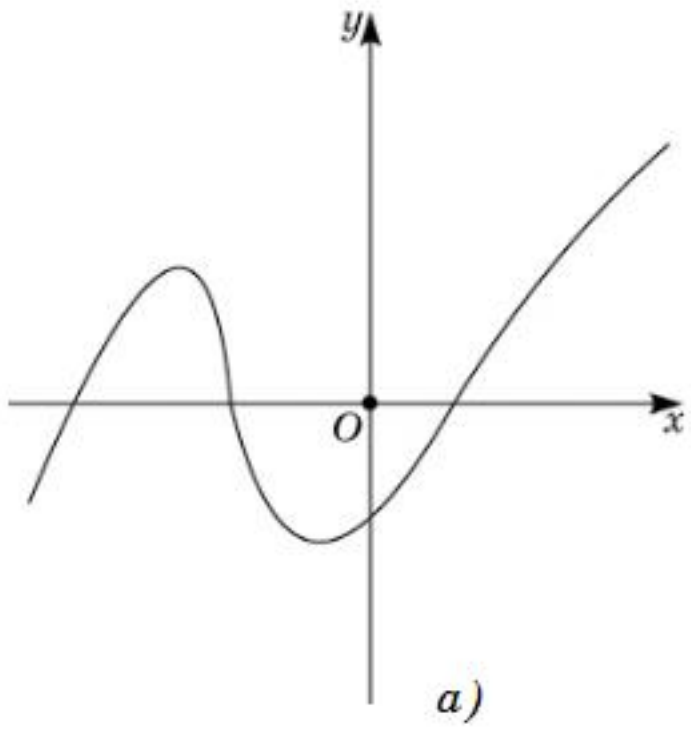
4.10. $f(x) = x$; $g(x) = \sqrt{x}$ ва $\phi(x) = x^2 - 3$ функциялардан $f(g(\phi(x)))$ мураккаб функция тузинг ва мураккаб функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

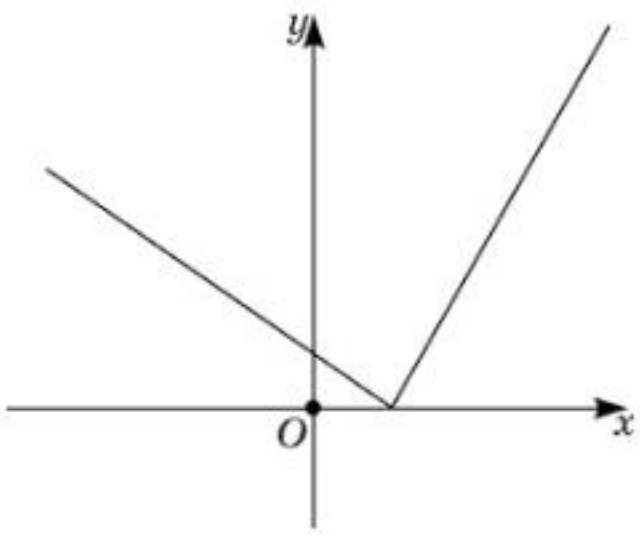
1. $f(x) = \sqrt{x-2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини кўрсатинг:
A) $[-2; +\infty)$; B) $(2; +\infty)$; C) $[2; +\infty)$; D) $(-\infty; 2)$.

2. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ функциянинг $x_0 = 3$ нуқтадаги қийматини топинг:
A) 4; B) -2; C) -1; D) 2.

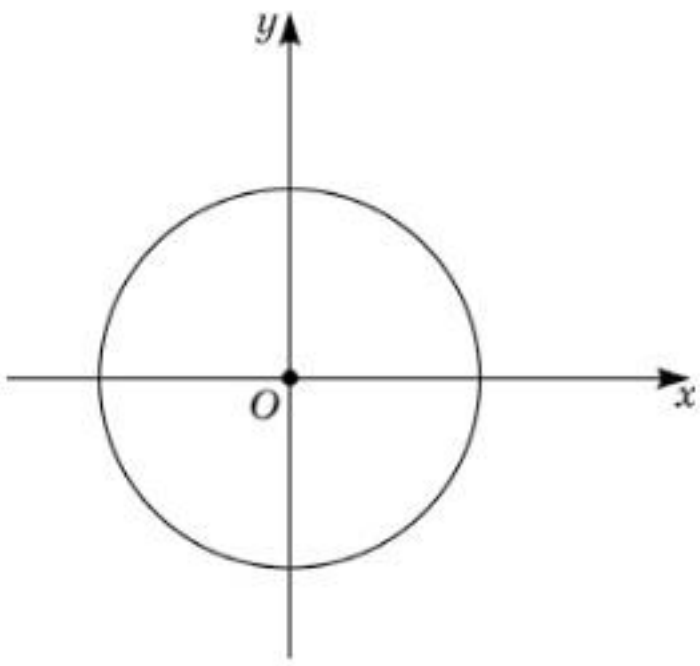
3. Қуйида тасвирланган эгри чизиқлардан қайси бири функциянинг графиги бўлмайди:
A) *а*; B) *б*; C) *в*; D) *г*?



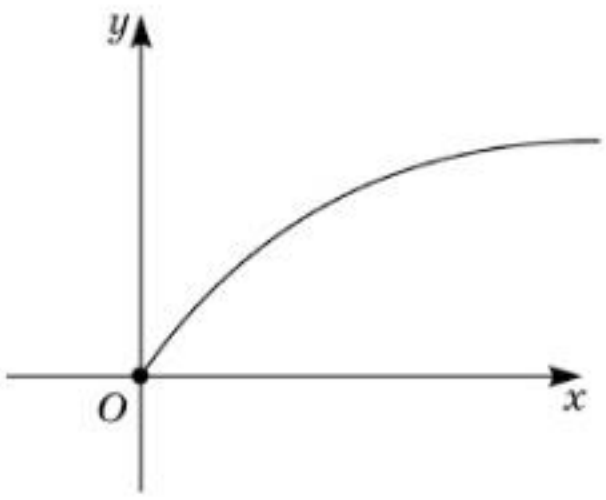
а)



б)



в)



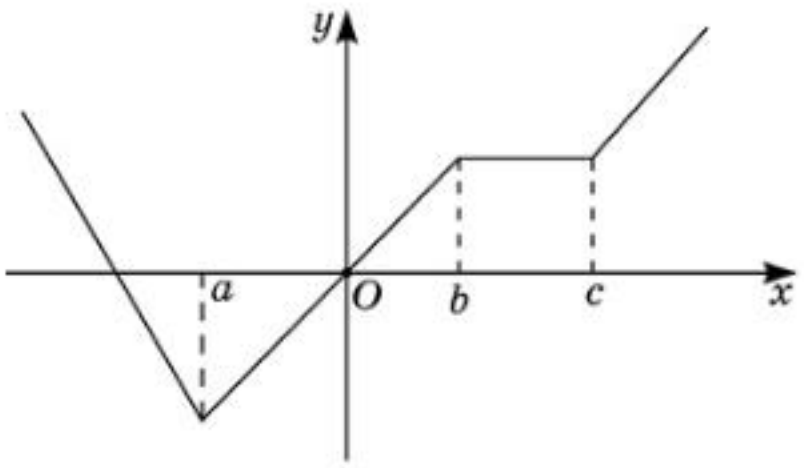
г)

4. Берилган функциянинг қайси бири жуфт функция бўлади:
A) $y = 2\cos x$; B) $y = 1{,}5\sin x$; C) $y = x$; D) $y = \mathrm{tg}\,x$?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

5. $y = f(x)$ функциянинг графиги берилган. Шу функциянинг ўсиш оралиқларини топинг:



A) $[a; b] \cup [c; +\infty)$;
B) $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$;
C) $(-\infty; a]$; D) $[a; b]$.

6. 5-топширикдаги расмдан фойдаланиб, функциянинг камайиш оралиқларини кўрсатинг:
A) $[a; b]$ ва $[c; +\infty)$; B) $(-\infty; a]$ ва $[b; +\infty)$;
C) $(-\infty; a]$; D) $[a; b]$.

7. $f(x) = \frac{x+10}{(x+4)(x+1)}$ функциянинг аниқланиш соҳасини кўрсатинг:
A) $x \neq 4$; B) $x \neq 1$, $x \neq -4$;
C) $x \neq 1$; D) $x \neq -4$, $x \neq -1$.

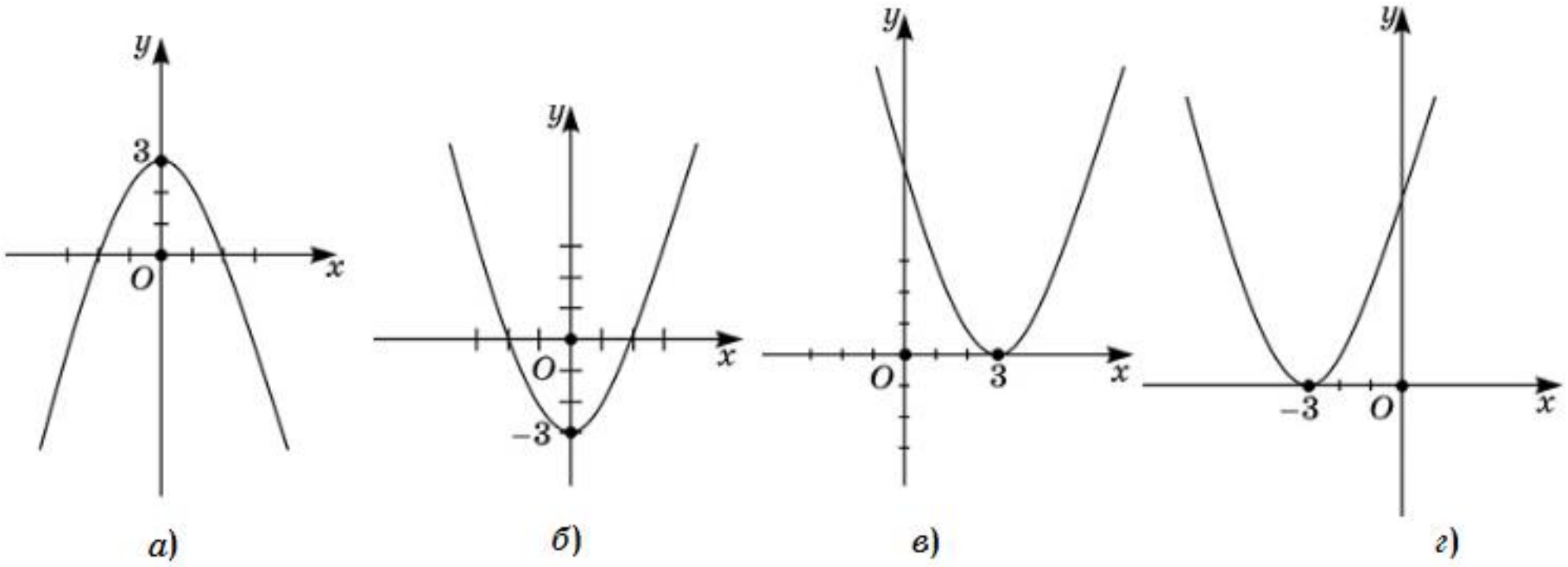
8. Тоқ функцияни кўрсатинг:
A) $y = -\sin^2 x$; B) $y = \sin x$;
C) $y = \cos x$; D) $y = \cos^2 x$.

9. $f(x) = \sqrt{2}\cos 4x + \sqrt{2}$ функциянинг $x = \frac{\pi}{4}$ нуқтадаги қийматини кўрсатинг:
A) $\sqrt{2}$; B) 0; C) $2\sqrt{2}$; D) $-\sqrt{2}$.

10. $y = 7{,}8 - 5x$ функциянинг қийматлар тўплами қандай:
A) R; B) Q; C) Z; D) N?

11. Агар $f(x) = \frac{x+8}{4+x}$, $g(x) = \frac{2}{1-x}$ ва $x = 0$ бўлса, у ҳолда $3f(x) - 2g(x)$ ифоданинг қийматини топинг:
A) 2; B) 2,5; C) 1; D) −2,5.

12. $y = (x-3)^2$ функциянинг графиги қайси расмда тасвирланган:
A) *а*; B) *б*; C) *в*; D) *г*?



а) *б*) *в*) *г*)

13. $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+2)(x-5)}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

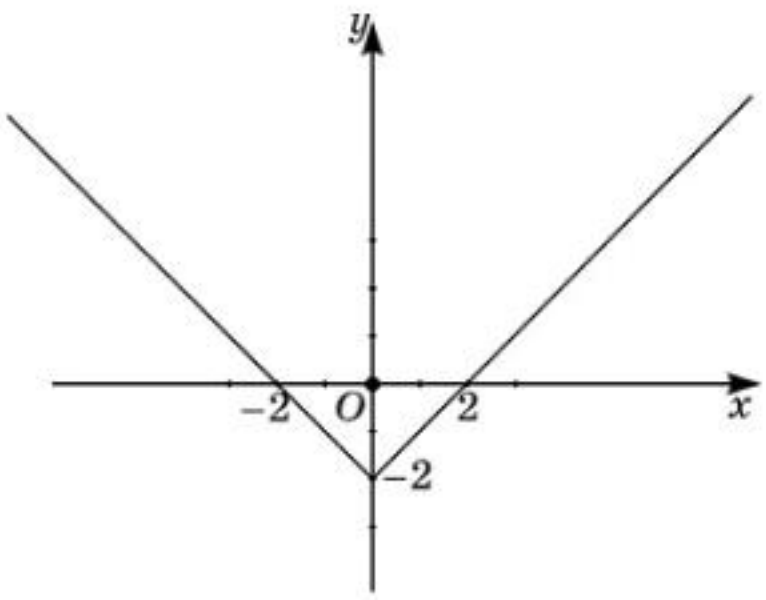
A) $[0; 2) \cup (2; 5)$; B) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$;
C) $[0; 5) \cup (5; +\infty)$; D) $[0; +\infty]$.

14. Тоқ функцияни кўрсатинг:
A) $y = |x| + x$; B) $y = |x| + x^2$;
C) $y = x^2|x|$; D) $y = -x\,|x|$.

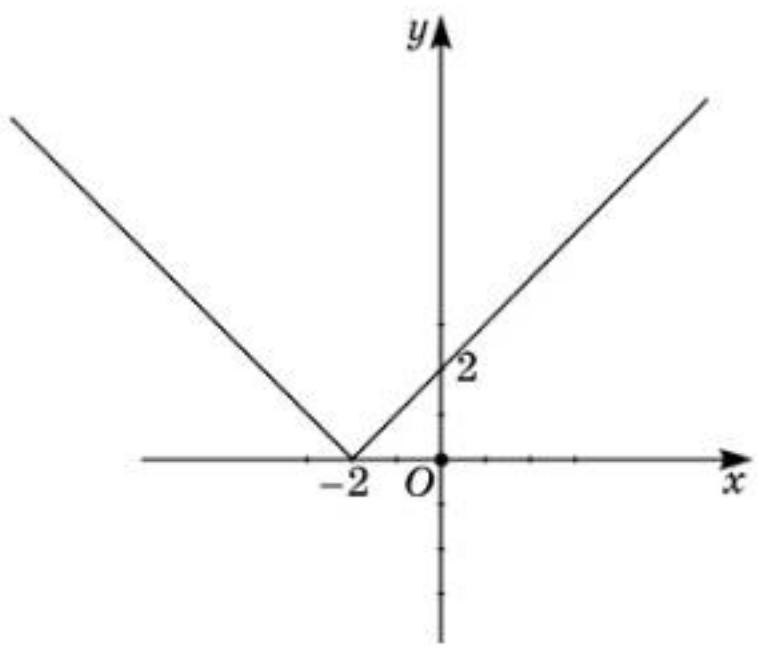
15. $y = \cos x + 1$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг:
A) $[-1; 1]$; B) $[0; 1]$; C) $[-2; 0]$; D) $[0; 2]$.

16. $y(x) = 2 + x$ функцияга тескари функцияни кўрсатинг:
A) $x(y) = 2 - y$; B) $x(y) = y + 2$;
C) $x(y) = y$; D) $x(y) = y - 2$.

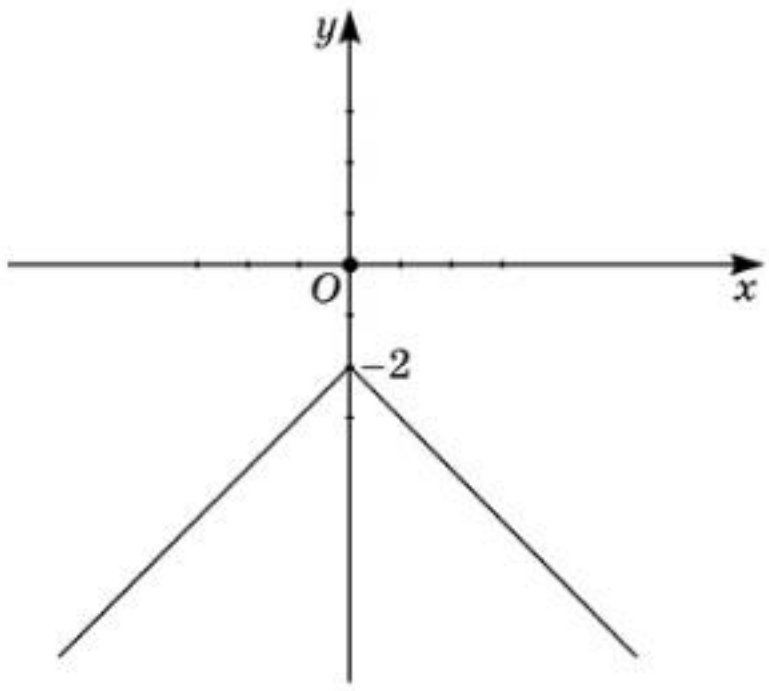
17. Қуйидаги графиклардан қайси бири $y = |x + 2|$ функциянинг графиги бўлади:
A) *а*; B) *б*;
C) *в*; D) *г*?



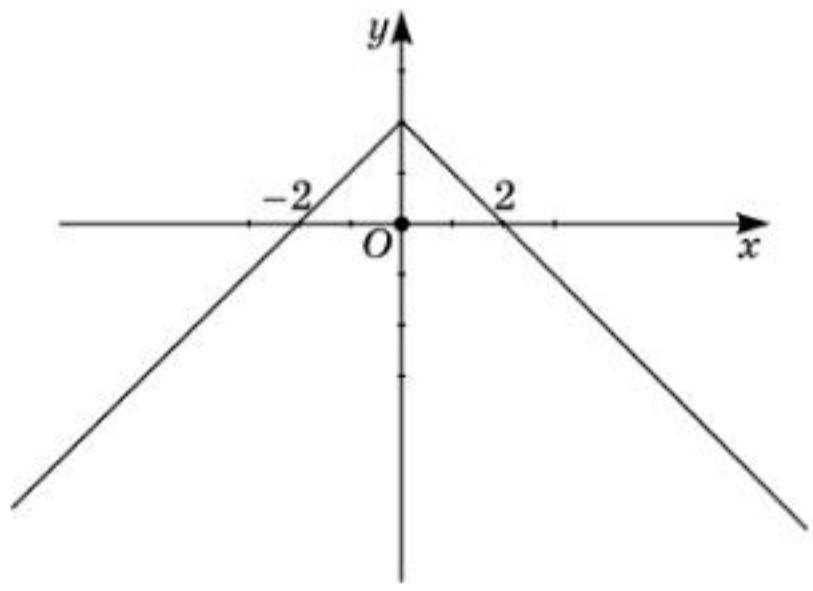
а)



б)



в)



г)

18. Жуфт функцияни кўрсатинг:
A) $y = x^3 - \cos x$; B) $y = x^2 - \cos x$;
C) $y = x - \sin x$; D) $y = x^3 - \sin 5x$.

19. $y = \sin x - 2$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг:
A) $(-\infty; 0]$; B) $[-3; -1]$; C) $[0; 2]$; D) $(-2; 0]$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

20. $y = \frac{5 - x}{1 + x^2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:
A) $x \neq -2$; $x \neq 2$; B) $x \neq 0$; C) $x \neq -2$; D) x — исталган сон.

21. $y = \frac{\sqrt{x}}{x - 4}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:
A) $x \neq 4$; B) $x \neq -4$; C) $x \geq 0$; $x \neq 4$; D) $x \geq 0$.

22. $y = \frac{1}{x + 1} - 7$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг:
A) $y \neq -1$; B) $y \neq -7$; C) $y \neq 1$; D) $y \neq 7$.

Математик саводхонликка доир топшириқлар

23. Копток 16 м юқоридан ташланди ва ташланган баландликнинг чорагига кўтарилди. Копток тўхтагунга қадар неча метр босиб ўтади:
A) 26; B) 25; C) 27; D) 16; E) 24?

24. Учта бола баскетбол саватига копток ташлади. Улардан ҳар бири 10 мартадан ташлади. 5-жадвалдаги a ва b нинг қийматларини топинг:

5-жадвал

Ўйинчи	Саватга тушган коптоклар сони	Саватга тушган коптоклар сонининг фоизи
Биринчи	8	a
Иккинчи	b	25%
Учинчи	5	50%

A) 50%; B) 25%; C) 30%; D) 70%; E) 80%.

25. Агар $7x = 10$ ва $49y = 25$ бўлса, у ҳолда $\frac{25x}{28y} + 1{,}5$ ифоданинг қийматини топинг:
A) 1,5; B) 2,65; C) 4; D) 5; E) 6,5.

26. Босмахона бир кунда 20 тахлам қоғоз сарфлайди. Уч ҳафтада қанча тахлам қоғоз сарфлайди:
A) 300; B) 400; C) 440; D) 350; E) 420?

27. Диаграммада беш кишили оиланинг бир ойда баъзи озиқ-овқат маҳсулотларига сарфлайдиган харажати кўрсатилган (26-расм). Бир киши учун бир ойда сут ва пишлоққа неча тенге сарфланади:
A) 5500 тг; B) 5000 тг; C) 1100 тг; D) 1000 тг; E) 2000 тг?

26-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ТАРИХИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Дунёни танишда функция тушунчаси муҳим ўрин эгаллайди. Катталиклар орасидаги дастлабки математик муносабатлардан, сонларга қўлланиладиган дастлабки қоидалардан, фигураларнинг юзи ва ҳажмини топишнинг дастлабки формулаларидан бири бўлган функционал боғланиш ушбу ғоя (функция)нинг қадимдан уйғонганини билдиради.

XVII асрда функционал боғланишдан фойдаланиш ва уни текшириш математикага ўзгарувчи катталик тушунчасининг киритилишига боғлиқ ҳолда бошланди.

У вақтларда функция тушунчаси аниқ берилмаган, бироқ функциянинг дастлабки таърифини Р.Декарт "Геометрия" номли асарида берди. Бу асарида у алгебраик тенгламалар ёрдами билангина аниқ тасвирланган эгри чизиқларни кўриб чиқди. Кейинчалик функция тушунчаси унинг аналитик тавсифи — формула билан тенглашди.

Функция сўзидан (лотинча *functio* — "бажариш, амалга ошириш") Г.В. Лейбниц берилган ёки бошқа вазифаларни бажарувчи катталик маъносида фойдаланди. "x дан функция" атамасидан дастлаб Г.В. Лейбниц ва унинг шогирди И.Бернулли фойдаланди. Шу билан бир қаторда 1698 йилдан бошлаб Г.В. Лейбниц "ўзгарувчи" ва "константа" (ўзгармас) атамаларини киритди.

Функцияга аниқ таърифни 1718 йил швейцариялик математик И.Бернулли : "*Ўзгарувчан катталикнинг функцияси* деб шу ўзгарувчи билан доимийдан маълум бир усулда тузилган катталикка айтилади" деб берган.

Л.Эйлер " Анализга кириш" (1748 йил) номли китобида функциянинг таърифини қуйидагича берди: " *Ўзгарувчи катталикнинг функцияси* — шу ўзгарувчи катталик ва сонлардан ёки ўзгармас катталикдан тузилган аналитик ифода демакдир". У ҳозирги вақтда қабул қилинган функциянинг белгилашларини ҳам киритган.

Функциянинг берилиш усули қўлланилмайдиган сонли функциянинг ҳозирги таърифини рус математиги Н.И.Лобачевский (1834 йил) ва немис математиги П.Дрихле (1837 йил) бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда берганлар.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг хоссалари ва графиги, тригонометрик функцияларнинг таърифлари, қийматлар жадвали, тригонометрик айниятлар.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

2 ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР

5-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР, УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИКЛАРИ

Таянч тушунчалар

Функция, тригонометрия, синус, косинус, тангенс, котангенс

Тригонометрик функцияларнинг асосий хоссалари билан танишасиз, уларнинг графикларини ясашни ўрганасиз.

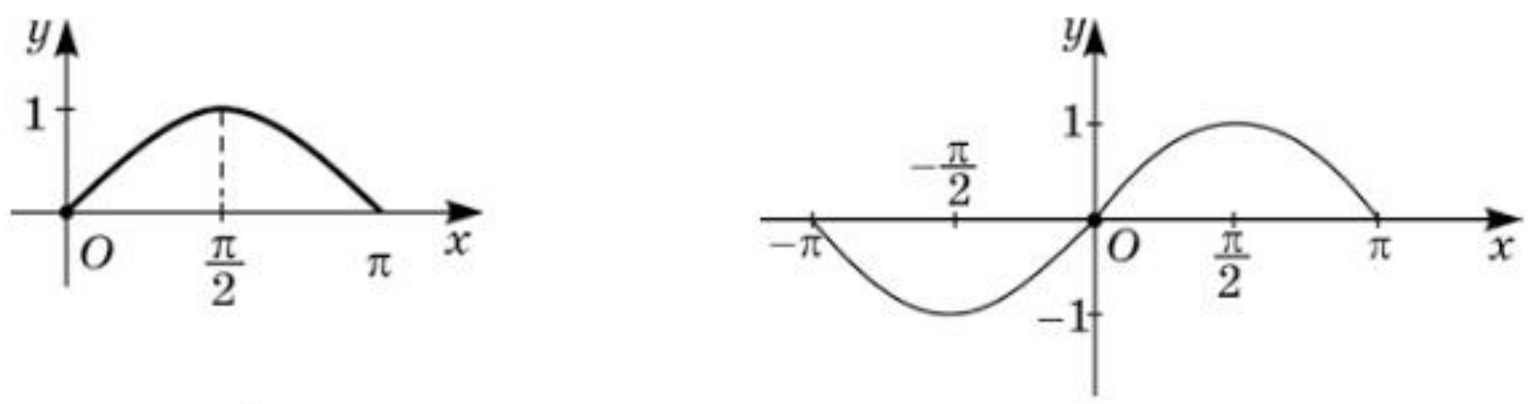
9-синф алгебра курсида тригонометрик функцияларнинг таърифлари, формулалари ва баъзи хоссалари билан танишгансиз. Шуларни инобатга олиб ва график ясаш алгоритмидан фойдаланиб, тригонометрик функцияларнинг графикларини ясашни кўриб чиқамиз.

I. $y = \sin x$ функция.

1) Аниқланиш соҳаси – барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $x \in R$;
2) Қийматлар тўплами $[-1; 1]$ кесма, яъни $y \in [-1; 1]$;
3) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, даврий функция, энг кичик мусбат даври 2π.
4) Тоқ функция, чунки $\sin(-x) = -\sin x$.

$(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $(\pi; 0)$ нуқталарни координаталар текислигида белгилаб, $y = \sin x$ функциянинг $[0; \pi]$ кесмадаги графигини ясаймиз (27, а-расм).

$y = \sin x$ функция тоқ функция бўлгани учун унинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик. Ушбу хоссадан фойдаланиб, $[-\pi; 0]$ ораликда графикни давом эттирамиз. Бундан $y = \sin x$ функциянинг $[-\pi; \pi]$ кесмадаги графигини оламиз (27, б-расм).



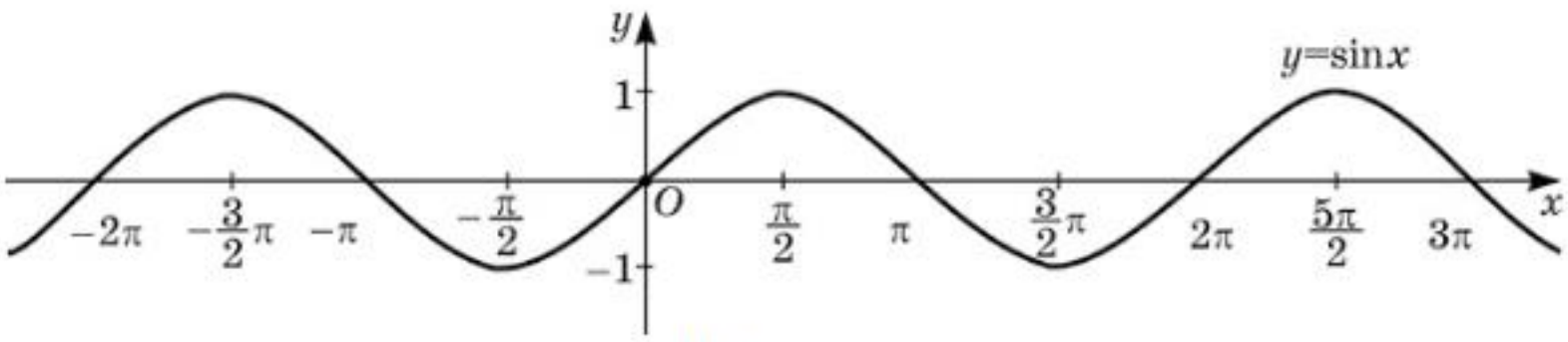
а) б)

27-расм

Демак, $y = \sin x$ функциянинг тўлиқ бир давр ичидаги графигини ясадик. Энди даврий функциянинг хоссасидан фойдаланиб, барча аниқланиш соҳасидаги функция графигини ясаш мумкин (28-расм).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



28-расм

5) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$, кесмаларда функция монотон ўсувчи, $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$, кесмаларда монотон камаювчи.

$y = \sin x$ функциянинг графиги *синусоида* деб аталади.

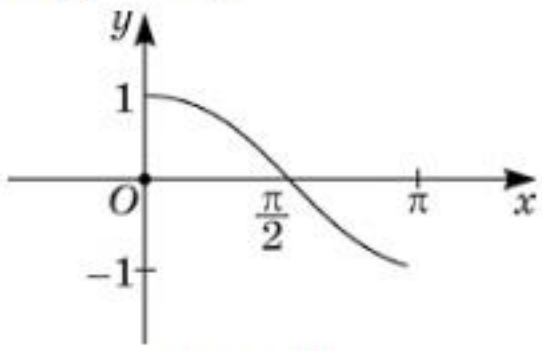
II. $y = \cos x$ функция.

Функциянинг:

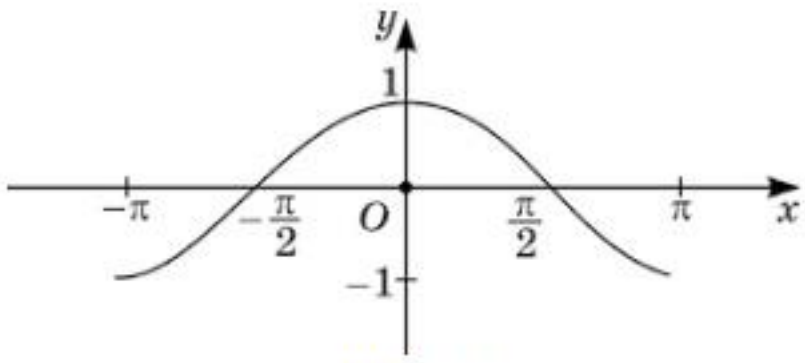
1) аниқланиш соҳаси – барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $x \in R$;
2) қийматлар тўплами $[-1; 1]$ кесма, яъни $y \in [-1; 1]$;
3) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, даврий функция, энг кичик мусбат даври 2π;
4) функция жуфт функция, чунки $\cos(-x) = \cos x$.

$(0; 1)$, $\left(\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3};-\frac{1}{2}\right)$, $(\pi; -1)$ нуқталарни координаталар текислигида белгилаб, $y = \cos x$ функциянинг $[0; \pi]$ кесмадаги графигини ясаймиз (29-расм).

Модомики, $y = \cos x$ функция жуфт функция экан, унинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик жойлашган эгри чизиқдан иборат. Ушбу хоссадан фойдаланиб, $[-\pi; 0]$ кесмада графикни давом эттирамиз. Бундан $y = \cos x$ функциянинг $[-\pi; \pi]$ кесмадаги графигини оламиз (30-расм).

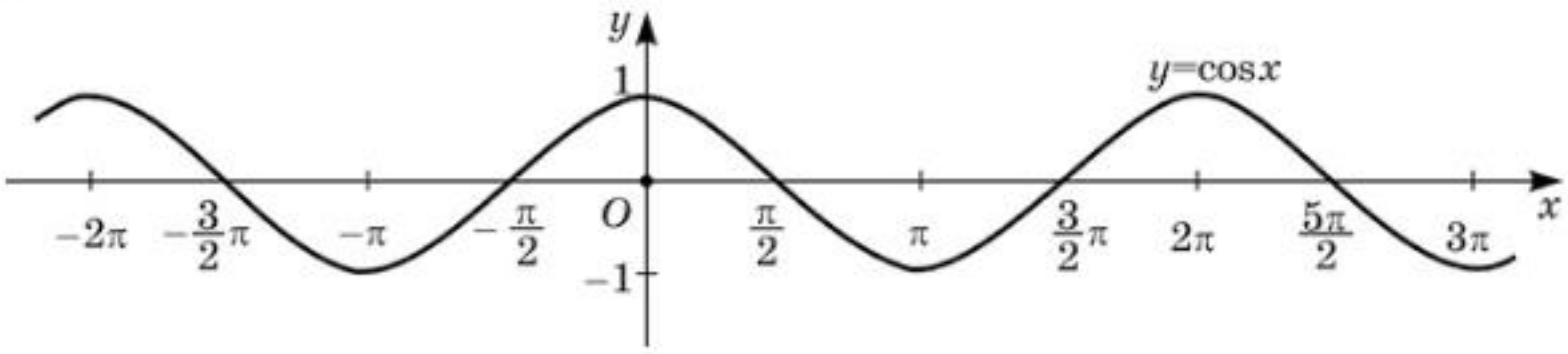


29-расм



30-расм

Энди даврий функция графигини ясаш хоссасидан фойдаланиб, барча аниқланиш соҳасидаги функциянинг графигини ясаш мумкин (31-расм).



31-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

5) $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$, кесмаларда функция монотон камаювчи ва $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$ кесмаларда монотон ўсуви функция.

$y = \cos x$ функциянинг графиги *косинусоида* деб аталади.

Шунингдек, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ эканини эътиборга олиб, $y = \cos x$ функциянинг графигини $y = \sin x$ функция графигидан Ox ўқи бўйича $\frac{\pi}{2}$ масофага манфий йўналишда параллел кўчириш орқали ҳам олиш мумкин.

III. $y = \mathrm{tg}x$ функция.

Функциянинг:

1) аниқланиш соҳаси $\{x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\}$ тўпламдан бошқа барча ҳақиқий сонлар тўплами, чунки $y = \mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

2) қийматлар тўплами – барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $\mathrm{tg}x \in R$;

3) $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}(x + \pi)$ — даврий функция, энг кичик мусбат даври π;

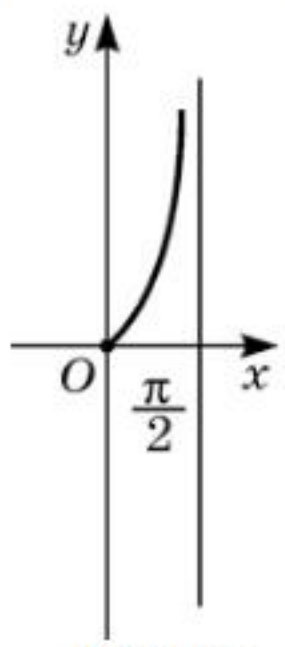
4) тоқ функция, чунки $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$.

Энди $\mathrm{tg}x$ функциянинг графигини ясаймиз.

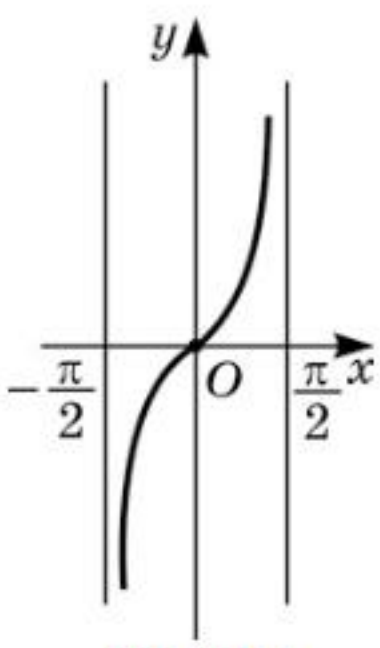
$(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$ нуқталарни координаталар текислигида белгилаб, $[0; \frac{\pi}{2})$ ораликда $y = \mathrm{tg}x$ функциянинг графигини ясаймиз (32-расм).

$y = \mathrm{tg}x$ функция тоқ функция бўлганлиги учун унинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган эгри чизиқдан иборат эканлигини инобатга олиб, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ ораликда графикни давом эттирамиз. Бунда $y = \mathrm{tg}x$ функциянинг $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалдаги графиги ҳосил бўлади (33-расм).

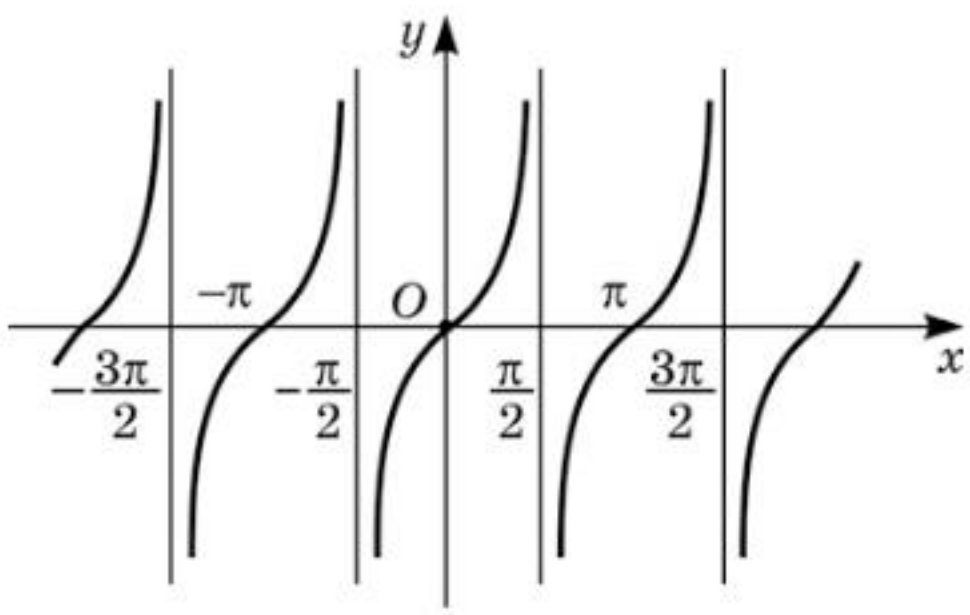
5) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, интерваллларда функция монотон ўсувчи функциядир.



32-расм



33-расм



34-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Энди даврий функциянинг графигини ясаш хоссасидан фойдаланиб, барча аниқланиш соҳасидаги функция графигини ясаш мумкин (34-расм).

$y = \text{tg}x$ функциянинг графиги *тангенсоида* дейилади.

IV. $y = \text{ctg}x$ функция.

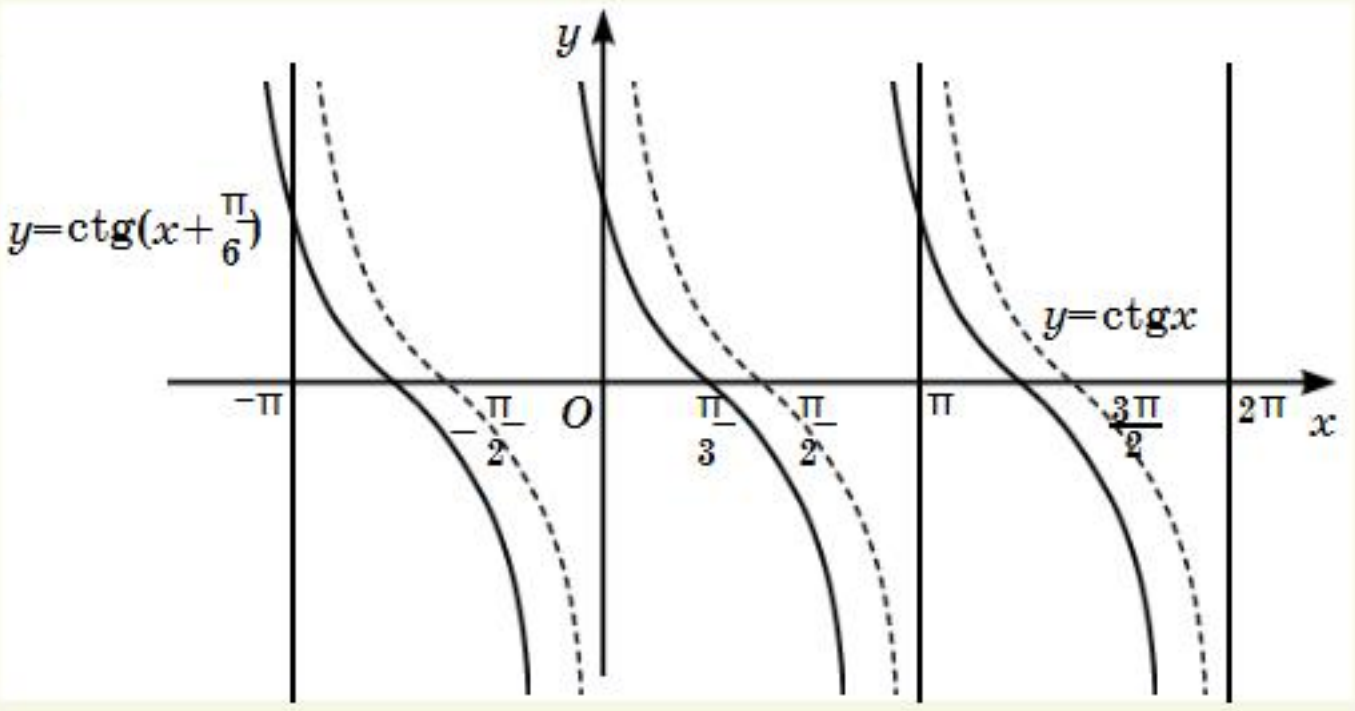
$y = \text{ctg}x$ функциянинг асосий хоссаларидан фойдаланиб, графигини ясанг.

$y = \text{ctg}x$ функциянинг графиги *котангенсоида* дейилади.

Тригонометрик функцияларнинг графикларига содда шакл алмаштиришларни қўллашга доир мисоллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ $y = \text{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ функциянинг графигини ясаймиз.

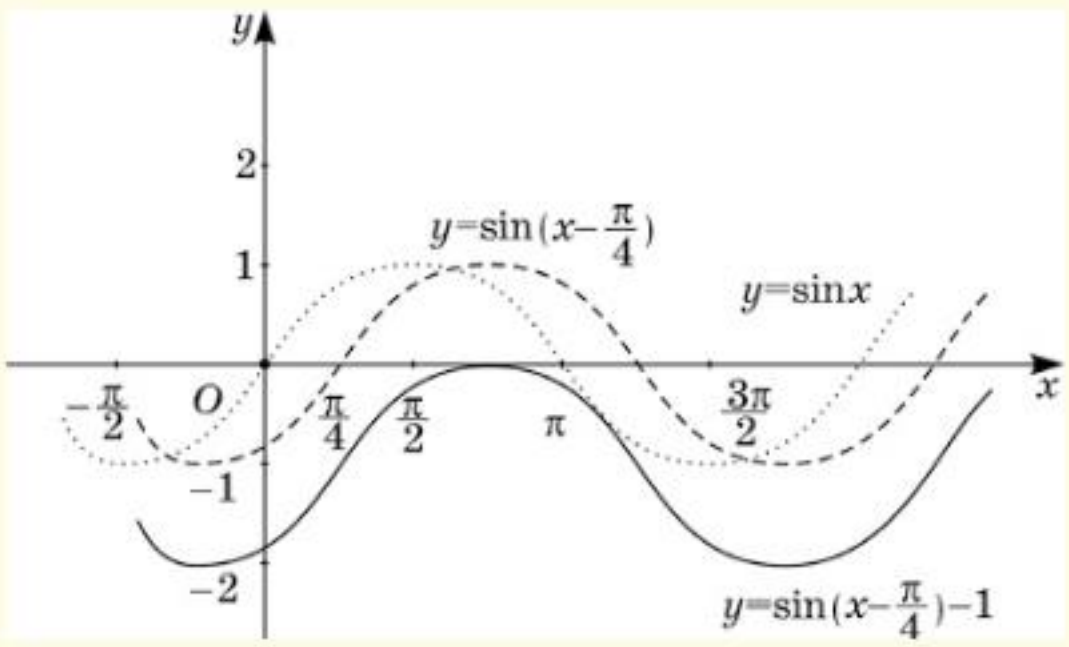
Ечилиши. Дастлаб $y = \text{ctg}x$ функциянинг графигини ясаймиз. Сўнгра графикни Ox ўқи бўйича $\frac{\pi}{6}$ га тенг оралиққа манфий йўналишда параллел кўчирамиз (35-расм).



35-расм

ТУШУНТИРИНГ

36-расмда $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ функциянинг графиги қандай ясалган?



36-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

1. Синусоида эгри чизиғида монотон ўсувчи ёки монотон камаювчи қисмлари борми?
2. Нима учун $y = \cos x$ функциянинг қийматлари 1 дан катта эмас?
3. 1 ва -1 сонлари $y = \sin x$ функциянинг қийматлари деган тушунчадан ташқари яна қандай хоссасини кўрсатади?
4. $y = \cos x$ ва $y = \sin x$ функциялар фарқини аниқ кўрсатадиган хоссаларини айтинг.
5. Нима учун барча ҳақиқий сонлар тўплами $y = \mathrm{tg}x$ ва $y = \mathrm{ctg}x$ функциялар аниқланиш соҳасининг тўплами бўла олмайди?

Машқлар

A

5.1. Функциянинг жуфт ёки тоқ эканлигини аниқланг:

а) $y = x\cos x$; б) $y = \dfrac{\cos 5x + 1}{x}$;

в) $y = \dfrac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$; г) $y = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{4 - x^4}$.

5.2. Содда шакл алмаштиришлардан фойдаланиб, $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ функциянинг графигини ясанг. Ушбу графикнинг $y = \sin x$ функция графигидан фарқини кўрсатинг.

5.3. $y = f(x)$ функциянинг графигини ясанг:

а) $y = 1 + \cos x$; б) $y = \sin x - 3$; в) $y = \mathrm{tg}x - 1$; г) $y = -2 + \mathrm{ctg}x$.

5.4. Функциянинг графигини ясанг:

а) $y = \mathrm{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)$.

B

5.5. $y = f(x)$ функциянинг графигини ясанг:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos 3x$; в) $y = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$;

г) $y = \mathrm{ctg}\dfrac{x}{3}$; д) $y = 3 - \sin\dfrac{x}{2}$; е) $y = \cos 1{,}5x - 2$.

5.6. $y = f(x)$ функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг:

а) $f(x) = \sin 7x$; б) $f(x) = \mathrm{tg}\dfrac{2x}{3}$; в) $f(x) = \cos\dfrac{x}{6}$;

г) $f(x) = \mathrm{ctg}\, 8x$; д) $f(x) = \sin 0{,}25x$; е) $f(x) = \cos 2{,}5x$.

5.7. Содда шакл алмаштиришлардан фойдаланиб, берилган функциянинг графигини ясанг:

а) $y = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$; б) $y = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{x}{2}\right) - 1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, унинг аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, хоссалари, тескари функция тушунчаси, уни тузиш усули, тригонометрик функцияларнинг хоссалари, графиклари.

6-§. АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС, АРККОТАНГЕНС

Таянч тушунчалар

Функция, тескари функция, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс

Сиз арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс тушунчалари билан танишасиз; уларнинг қийматларини топишни, ифодаларни соддалаштиришни, айниятни исботлашни ўрганасиз.

6-жадвални тўлдиринг:

6-жадвал

Функция	Берилган функцияга тескари функция
$y = 2x$	
$y = x-2$	
$y = -x+3$	
$y = x^2 (x \mid 0)$	

ТУШУНТИРИНГ

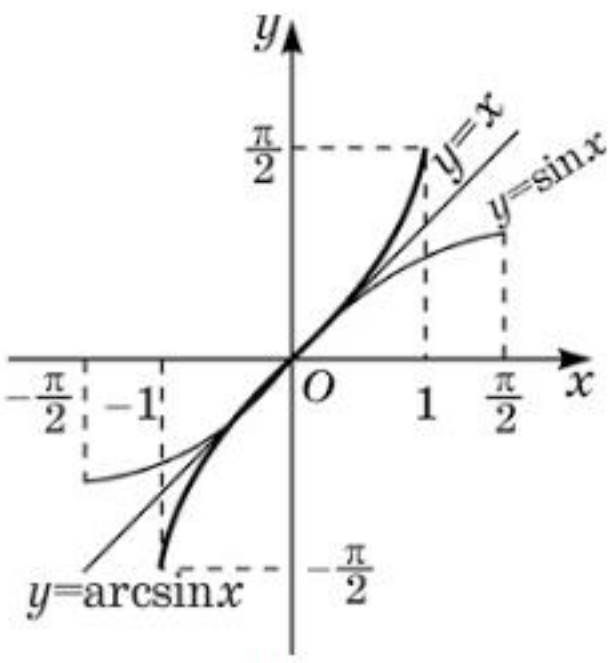
Нима учун жадвалдаги тўртинчи мисолда қўшимча шарт берилган?

Тескари функциянинг таърифи ва унинг мавжудлик шартидан фойдаланиб, тескари тригонометрик функциялар тушунчасини киритамиз.

I. $y = \sin x$ функцияга тескари функция.

$y = \sin x$ функция $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада аниқланган, монотон ўсувчи ва ўзининг ҳамма қийматларини $[-1; 1]$ кесмада қабул қилади. Демак, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада $y = \sin x$ функцияга тескари функция мавжуд.

$y = \sin x$ функцияга тескари функция $y = \arcsin x$ деб белгиланиб, ***арксинус икс*** деб ўқилади.



37-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

У ҳолда $y = \arcsin x$ функция $[-1; 1]$ кесмада аниқланган, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада ўзгарувчи монотон ўсувчи функция.

$y = \arcsin x$ функциянинг графиги $y = \sin x$ функция графигига $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик эгри чизиқдан иборат. Демак, $y = x$ тўғри чизиқ симметрия ўқи бўлиб ҳисобланади (37-расм).

Энди $y = \arcsin x$ тескари тригонометрик функциянинг хоссаларини келтирамиз:

1) функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1; 1]$ кесма;

2) қийматлар тўплами $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесма;

3) тоқ функция, яъни $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

4) функция монотон ўсувчи.

Исталган $x \in [-1; 1]$ учун $\sin(\arcsin x) = x$ ва $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$y = \sin x$ (бунда $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $(-1 \text{ m} \sin x \text{ m } 1)$ — тўғри функция.

$y = \arcsin x$ (бунда $x \in [-1; 1]$, $(-\frac{\pi}{2} \text{ m} \arcsin x \text{ m } \frac{\pi}{2})$ — тескари функция.

МИСОЛ

1. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ нинг қийматини топамиз.

Ечилиши. Таърифга кўра $y = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ функцияни $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ кўринишда ёзамиз ва $-\frac{\pi}{2} \text{ m } y \text{ m } \frac{\pi}{2}$. Бинобарин, $y = \frac{\pi}{4}$, у ҳолда $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

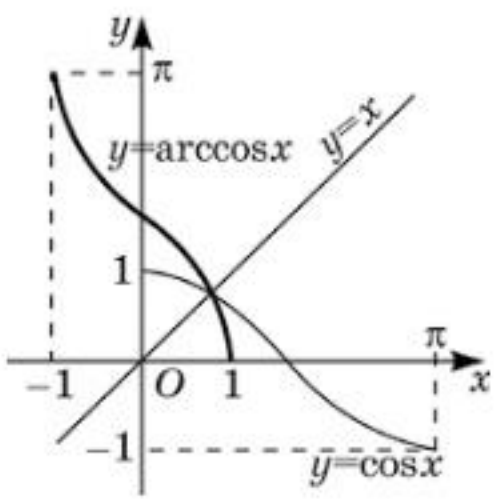
Жавоби: $\frac{\pi}{4}$.

ТУШУНТИРИНГ

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

II. $y = \cos x$ функцияга тескари функция.

$y = \cos x$ функция $x \in [0; \pi]$ кесмада аниқланган, монотон камаювчи ва ўзининг ҳамма қийматларини, $-1 \text{ m} \cos x \text{ m} 1$, кесмада қабул қилади. Демак, $x \in [0; \pi]$ кесмада $y = \cos x$ функцияга тескари функция мавжуд.



38-расм

$y = \cos x$ функцияга тескари функция $y = \arccos x$ каби белгиланиб, ***арккосинус икс*** деб ўқилади.

$y = \arccos x$ функция $[-1; 1]$ кесмада аниқланган, $[0; \pi]$ кесмада ўзгарувчи монотон камаювчи функция.

$y = \arccos x$ функциянинг графиги $y = \cos x$ функция графигига $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик эгри чизиқдан иборат. Демак, $y = x$ тўғри чизиқ симметрия ўқи бўлади (38-расм).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

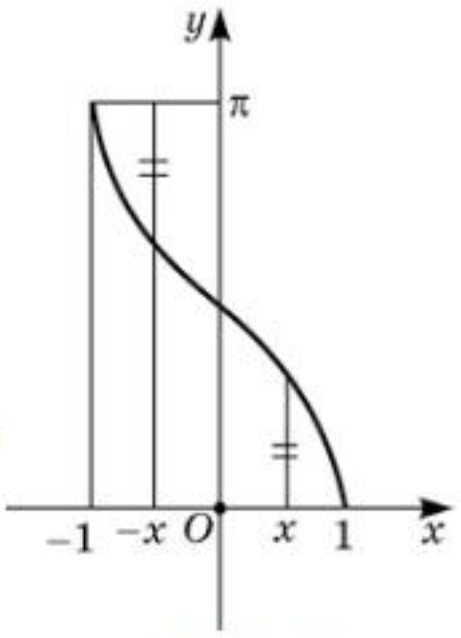
Энди $y = \arccos x$ тескари тригонометрик функциянинг хоссаларини кўриб чиқамиз:

1) функциянинг аниқланиш соҳаси $[-1; 1]$ кесма;
2) қийматлар тўплами $[0; \pi]$ кесма;
3) функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас;
4) функция монотон камаювчи.

Исталган $x \in [-1; 1]$ учун $x = \cos(\arccos x)$, $0 \le \arccos x \le \pi$ тенглик бажарилади.

Демак, $y = \cos x$ (бунда $x \in [0; \pi]$, $-1 \le \cos x \le 1$) — тўғри функция;

$y = \arccos x$ (бунда $x \in [-1; 1]$, $0 \le \arccos x \le \pi$) — тескари функция.



39-расм

Исталган $x \in [-1; 1]$ учун $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$ ёки

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \qquad (1)$$

айниятни олиш мумкин. Ушбу айниятнинг тўғрилигини $y = \arccos x$ функциянинг графигидан кўриш мумкин (39-расм).

МИСОЛ **2.** $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ нинг қийматини топамиз.

Ечилиши. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ ифоданинг қийматини топиш учун (1) айниятдан фойдаланамиз: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Жавоби: $\frac{2\pi}{3}$.

ТУШУНТИРИНГ

Нима учун $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ бўлади?

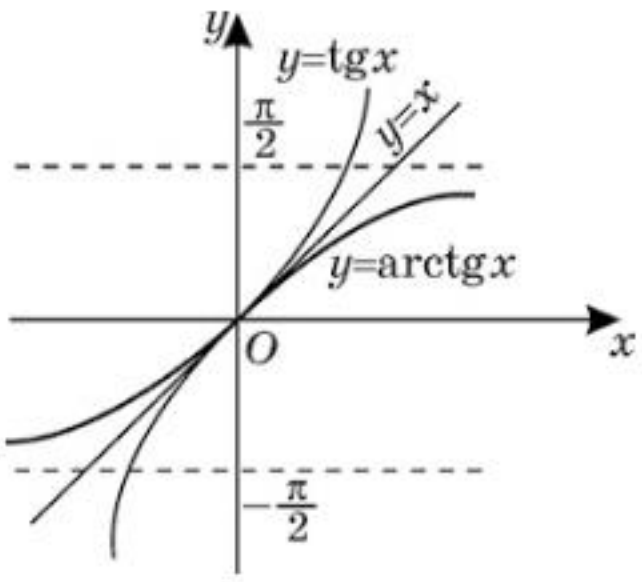
III. $y = \mathrm{tg}x$ функцияга тескари функция.

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда $y = \mathrm{tg}x$ функция аниқланган, монотон ўсувчи ва ўзининг ҳамма қийматларини қабул қилади, $\mathrm{tg}x \in (-\infty; +\infty)$. Демак, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда $y = \mathrm{tg}x$ функцияга тескари функция мавжуд.

$y = \mathrm{tg}x$ функцияга тескари функция $y = \mathrm{arctg}x$ каби белгиланиб, ***арктангенс икс*** деб ўқилади.

$y = \mathrm{arctg}x$ функция $x \in R$ тўпламда аниқланган, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда ўзгарувчи монотон ўсувчи функция.

$y = \mathrm{arctg}x$ функциянинг графиги $y = \mathrm{tg}x$ функция графигига $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик эгри чизиқдан иборат (40, *а*-расм). Демак, $y = x$ тўғри чизиқ симметрия ўқи бўлади.



40, *а*-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Энди $y = \text{arctg}x$ тескари тригонометрик функциянинг хоссаларини кўриб чиқамиз:

1) функциянинг аниқланиш соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $x \in R$;

2) қийматлар тўплами $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервал;

3) функция тоқ, яъни исталган x учун $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}x$;

4) функция монотон ўсувчи.

Исталган x учун $x = \text{tg}(\text{arctg}x)$, $-\frac{\pi}{2} < \text{arctg}x < \frac{\pi}{2}$.

МИСОЛ

3. $\text{arctg}\sqrt{3}$ нинг қийматини топамиз.

Ечилиши. Таърифга кўра $\text{tg}y = \sqrt{3}$ ва $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Бундан $y = \frac{\pi}{3}$. У ҳолда, $\text{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

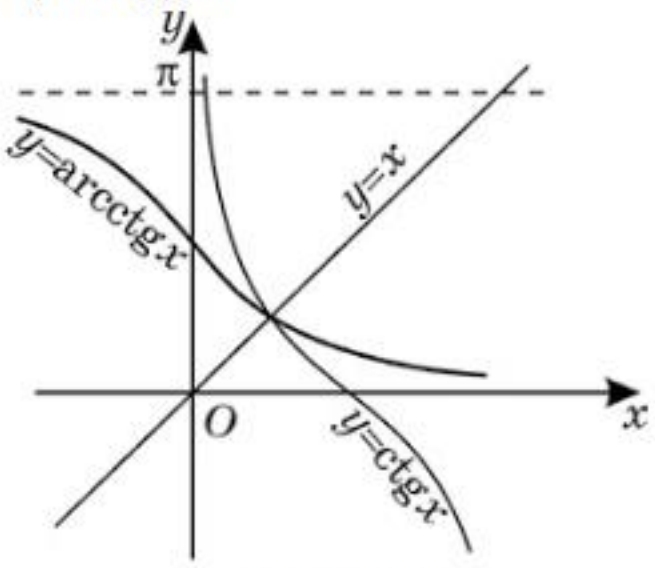
Жавоби: $\frac{\pi}{3}$.

ТУШУНТИРИНГ

Нима учун $\text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ бўлади?

IV. $y = \text{ctg}x$ функцияга тескари функция.

$y = \text{ctg}x$ функция $(0; \pi)$ интервалда аниқланган, монотон камаювчи ва шу ораликда R тўпламдаги ўзининг ҳамма қийматларини қабул қилади.



40, б-расм

Демак, ўша интервалда $y = \text{ctg}x$ функцияга тескари функция мавжуд.

$y = \text{ctg}x$ функцияга тескари функция $y = \text{arcctg}x$ каби белгиланиб, ***арккотангенс икс*** деб ўқилади.

Бунда $y = \text{arcctg}\,x$ функция $x \in R$ тўпламда аниқланган, $(0; \pi)$ интервалда ўзгарувчи монотон камаювчи функция.

$y = \text{arcctg}x$ функциянинг графиги $y = \text{ctg}x$ функциянинг графигига $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик эгри чизиқдан иборат (40, б-расм). Демак, $y = x$ тўғри чизиқ симметрия ўқи бўлиб ҳисобланади.

$y = \text{arcctg}x$ тескари тригонометрик функциянинг хоссаларини кўриб чиқамиз. Функциянинг:

1) аниқланиш соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $x \in R$;

2) қийматлар тўплами$(0; \pi)$ оралиқ;

3) функция тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас;

4) функция монотон камаювчи.

Исталган x учун $x = \text{ctg}\,(\text{arcctg}x)$, $0 < \text{arcctg}y < \pi$;

$$\text{arcctg}\,(-x) = \pi - \text{arcctg}x \qquad (2)$$

тенглик бажарилади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

4. $\text{arcctg}(-\sqrt{3})$ нинг қийматини топамиз.

Ечилиши. $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}x$ айниятга кўра , $\text{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \text{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Жавоби: $\frac{5\pi}{6}$.

ТУШУНТИРИНГ

Нима учун $\text{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$ бўлади?

Ифодаларни соддалаштириш, ҳисоблаш, тенгламаларни ечиш, айниятларни исботлашда тескари тригонометрик функциялардан фойдаланишга доир мисоллар келтирамиз.

МИСОЛ

5. Агар x аргумент $[-1; 1]$ кесмада ўзгарса, у ҳолда $\cos(\arcsin x)$ ни топамиз.

Ечилиши. $\arcsin x = y$ деб оламиз. Бунда $x = \sin y$ ва $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Энди $\cos y$ ни топиш учун $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ айниятдан фойдаланамиз. Бунда $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, демак, $\cos^2 y = 1 - x^2$. $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада $\cos y \geq 0$. Бундан $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, яъни $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Жавоби: $\sqrt{1 - x^2}$.

МИСОЛ

6. $\text{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$ ифоданинг қийматини топамиз.

Ечилиши. Дастлаб $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \phi$ деб белгилаймиз. Бунда $\cos\phi = -\frac{3}{5}$ ва $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$. Энди ярим бурчак формуласига кўра $\text{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{8}{2} = 4$. Бундан $\text{tg}\frac{\varphi}{2} = \pm 2$ бўлади. Масаланинг шартига кўра $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$, демак, $\frac{\pi}{4} < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда эса $\text{tg}\frac{\varphi}{2} = 2$. Демак, $\text{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = 2$.

Жавоби: 2.

ЭСЛАБ ҚОЛИНГ:

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, бунда $x \in [-1; 1]$.

2. $\text{arctg}x + \text{arcctg}x = \frac{\pi}{2}$.

?

1. Нима учун $y = \sin x$ функцияга тескари функцияни $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадагина кўриб чиқамиз?
2. $y = \text{ctg}x$ функцияга тескари функция мавжуд бўлиши учун қандай шартлар бажарилиши керак?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Машқлар

А

6.1. Ҳисобланг:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; д) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; е) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.2. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}1$; б) $\arcsin(-1) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\sqrt{3}$; г) $\arcsin 1 + \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

6.3. Таққосланг:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ ва $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arcsin\frac{1}{2}$ ва $\operatorname{arctg}1$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ва $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{arcctg}(-1)$ ва $\operatorname{arctg}(-1)$.

Ифодаларнинг қийматларини топинг **(6.4—6.7)**:

6.4. а) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)\right)$;

в) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.5. а) $\operatorname{arcctg}1 - \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right); - \operatorname{arcctg}\sqrt{3}$;

в) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2} + 3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

г) $-4\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 8\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 15\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

В

6.6. а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; б) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$; г) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

6.7. а) $\operatorname{tg}\left(\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$;

в) $\cos(\pi - \arcsin(-1))$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos(-1)\right)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Калькулятор ёки жадвал ёрдамида ифодаларнинг қийматини топинг **(6.8–6.9)**:

6.8. а) arcsin0,5005; б) arccos0,8091.

6.9. а) arctg3,5; б) arccos0,2184.

6.10. Тенгламани ечинг:

а) $\text{arctg}2x = \frac{\pi}{6}$; б) $\text{arcctg}(-3x) = \frac{\pi}{4}$;

в) $2\arcsin(5x - 1) = -\frac{\pi}{2}$; г) $3\arccos(2x + 3) = \frac{5\pi}{2}$.

6.11. Қуйидаги ифодалар маънога эгами:

а) $\arcsin\sqrt{5}$; б) $\text{arctg}\sqrt{7}$;

в) $\arccos\sqrt{3}$; г) arcctg 0?

ЎЗИНГИЗНИИ ТЕКШИРИНГ!

1. $y = \frac{x}{\cos x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

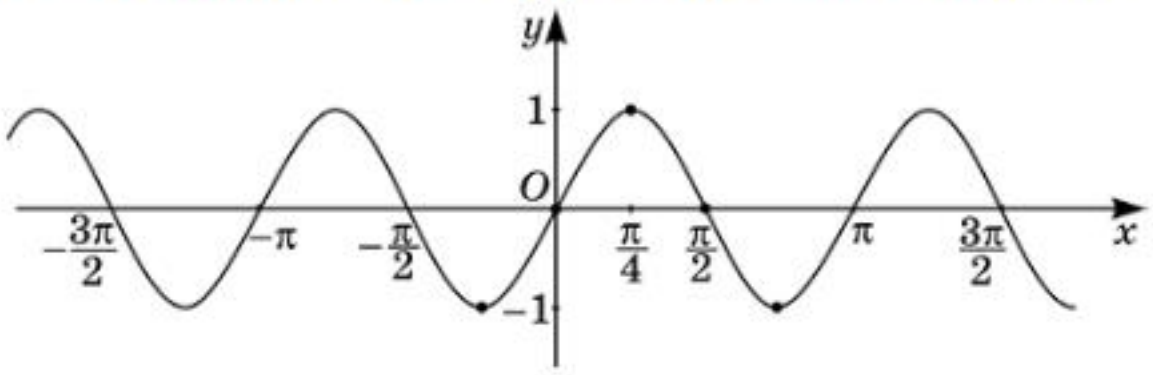
A) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; B) $x \neq 2\pi n,\ n \in Z$;

C) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$; D) $x \neq \pi n,\ n \in Z$.

2. $y = 3 + 2\cos x$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

A) [−1; 3]; B) [−5; 0]; C) [1; 5]; D) [3; 5].

3. Расмда қайси функциянинг графиги тасвирланган:



A) $y = \sin 2x$; B) $y = \cos\frac{x}{2}$; C) $y = \cos 2x$; D) $y = \sin\frac{x}{2}$?

4. $y = \sin 4x + \frac{1}{x-3}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

A) $(-\infty; 3)$; B) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; C) [0; 3]; D) $(-3; +\infty)$.

5. $y = 3\cos^2 x - 1$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

A) [1; 2]; B) [−1; 3]; C) [−1; 2]; D) [0; 3].

6. $\arcsin\frac{1}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ ифоданинг қиймати нимага тенг:

A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{6}$; C) $\frac{\pi}{4}$; D) 0?

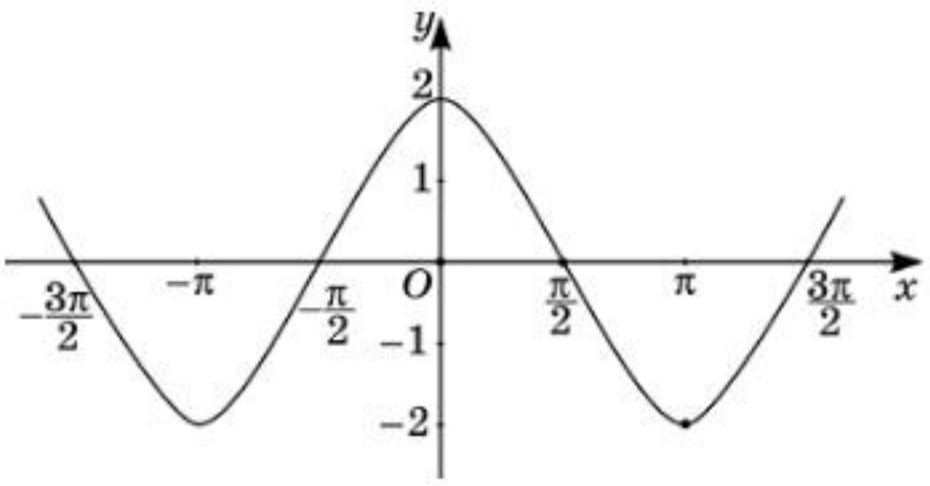
7. Расмда қайси фигуранинг графиги тасвирланган:

A) $y = \cos 2x$;

B) $y = -2\cos x$;

C) $y = 2\cos x$;

D) $y = 2\sin x$?



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

8. arcsin1 – arccos0 – 2arctg 0 ифоданинг қийматини топинг:

A) 0; B) –1; C) 1; D) 2.

9. $\arcsin\frac{1}{2}$ ва $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ сонларни таққосланг:

A) $\arcsin\frac{1}{2} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; B) $\arcsin\frac{1}{2} > \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

C) $\arcsin\frac{1}{2} < \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; D) $\arcsin\frac{1}{2}$ m $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10. $y = \cos x$ функция графигига неча марта шакл алмаштиришлар бажариш орқали $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ функциянинг графигини олиш мумкин:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5?

11. $\mathrm{arctg}0 - \arccos\frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{2} + \mathrm{arcctg}0$ ифода қийматининг квадрати нимага тенг:

A) 2; B) 1; C) 4; D) 0?

Математик саводхонликка доир топшириқлар

12. Квадратнинг юзи 81 см^2. Томонларининг узунлиги берилган квадрат томонининг 25% ини ташкил этувчи иккинчи квадратнинг периметрини топинг:

A) 18; B) 10; C) 4; D) 9; E) 15.

13. 15 кг нок ва 6 кг олманинг нархи 5 кг нок ва 18 кг олманинг нархи билан бир хил. 1 кг нокнинг баҳоси 1 кг олманинг баҳосидан неча марта ортиқ:

A) 2 марта Г) 3 марта C) 25 марта D) 1,5 марта E) 1,2 марта?

14. 25 сонига бўлганда қолдиқда бир сони қоладиган энг катта уч хонали сонни топинг:

A) 976; B) 975; C) 974; D) 966; E) 964.

15. Жадвалдаги сонлар маълум бир қонуният билан жойлаштирилган. Номаълум сонни топинг:

3	5
4	60

2	6
5	60

4	7
5	?

A) 150; B) 160; C) 140; D) 130; E) 170.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тригонометрик функцияларнинг таърифлари, хоссалари, графиклари, формулалари, тескари тригонометрик функциялар, айнан шакл алмаштиришлар.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

3

7-§. ЭНГ СОДДА ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР

Таянч тушунчалар

Тенглама, тригонометрия, тенгламанинг ечими

Сиз энг содда тригонометрик тенгламалар тушунчаси билан танишасиз ва содда тригонометрик тенгламаларни ечишни ўрганасиз.

БУНИ БИЛАСИЗ: Сиз тригонометрик айниятларни, формулаларни, тригонометрик функцияларнинг хоссаларини, алгебраик тенгламаларни ечиш усулларини биласиз.

Номаълуми (ўзгарувчиси) тригонометрик функциянинг аргументи кўринишида берилган тенгламалар ***тригонометрик тенгламалар*** *дейилади.*

Масалан, $2\sin x = 1$; $\mathrm{ctg}x = 1$; $\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2$; $3\cos x = 7\sin x$; $4\sin^2 x + 2\cos^2 x = 3\sin^2 x$; $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x$ ва ҳ.к.

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \mathrm{tg}x = a,\ \mathrm{ctg}x = a \qquad (1)$$

(бунда a — исталган ҳақиқий сон) кўринишда берилган тригонометрик тенгламалар ***энг содда тригонометрик тенгламалар*** дейилади.

Берилган тенгламани тўғри айниятга айлантирадиган аргументнинг қийматларини топиш ***тригонометрик тенгламани ечиш*** *дейилади.*

Тригонометрик тенгламаларни ечишнинг ўзига хос усуллари бор:

1) тригонометрик тенгламанинг битта илдизи мавжуд бўлса, у ҳолда унинг чексиз кўп илдизлари мавжуд бўлади;

2) бошқа тенгламалар каби тригонометрик тенгламаларни ҳам унинг иккала томонига умумий кўпайтувчи бўладиган тригонометрик функцияга бўлиш мумкин эмас, чунки тенгламанинг камида битта ечими йўқолади.

Исталган тригонометрик тенглама айнан шакл алмаштиришлардан кейин (1) кўринишдаги тенгламалардан бирига келади.

Энди энг содда тенгламаларни ечишини кўриб чиқамиз.

I. $\sin x = a$ тенгламани ечамиз.

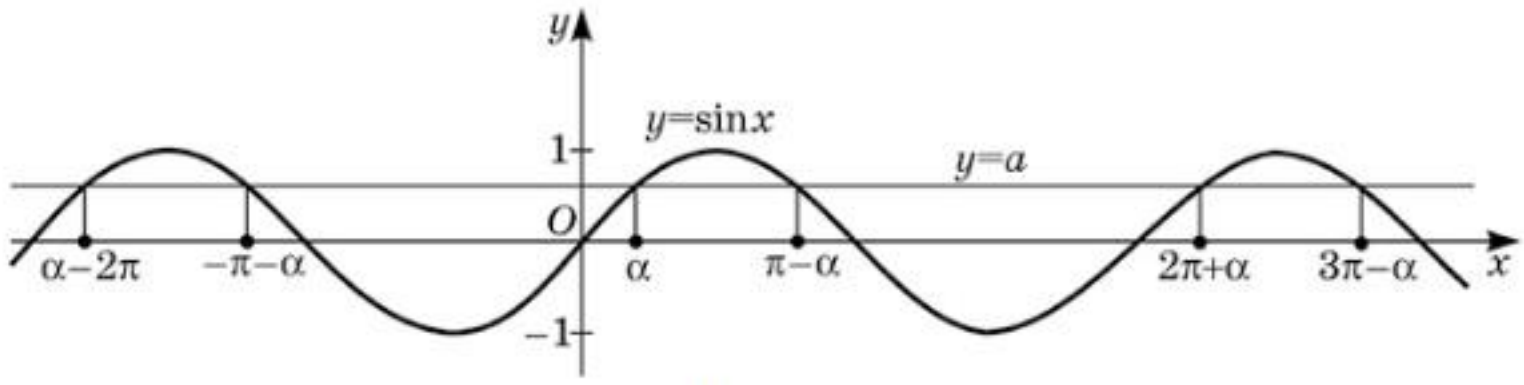
$y = \sin x$ функциянинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $x \in R$. Қийматлар тўплами $[-1; 1]$ кесмадан иборат, яъни $|\sin x| \leq 1$, функция чегаралланган.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Шунинг учун $\sin x = a$ тенгламанинг $|a| \leqslant 1$ шарт бажарилгандагина ечими мавжуд. Агар a сони модули бўйича бирдан катта, яъни $|a| > 1$ бўлса, $\sin x = a$ тенгламанинг ечими мавжуд эмас.

Энди $\sin x = a$, бунда $|a| \leqslant 1$, тенгламанинг ечимини кўриб чиқамиз. $\sin x = a$ тенгламани ечиш учун $y = \sin x$ ва $y = a$ функцияларнинг графикларини битта координаталар текислигида ясаймиз (41-расм).



41-расм

Абсциссалар ўқига параллел $y = a$ тўғри чизиқ синусоида эгри чизиғи билан чексиз кўп нуқталарда кесишади. Кесишиш нуқталарининг абсциссалари $\sin x = a$ тенгламанинг ечими бўлади. $y = \sin x$ функция даврий функция бўлгани учун, $\sin x = a$ тенгламанинг бир давр ичида ҳамма ечимларини топиш кифоя. Қолган ечимлар функциянинг даврийлик хоссаси билан аниқланади. Аргумент $[0; 2\pi]$ кесмада ўзгарганда, $\sin x = a$ тенгламанинг $y = a$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарининг абсциссалари $x_1 = \alpha$, $x_2 = \pi - \alpha$ бўлади.

Энди $\sin x$ функциянинг даври 2π га тенг эканлигини инобатга олиб, тенгламанинг ҳамма ечимларини ёзиш учун қуйидаги формулаларни келтириб чиқарамиз:

$$x = \alpha + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (2)$$

$$x = \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (3)$$

Ушбу ечимларни битта формула орқали бериш мумкин:

$$x = (-1)^n \alpha + \pi n;\ n \in Z. \qquad (4)$$

(4) формуладан (2) ва (3) формулалар билан ёзилган ечимларни олиш мумкинлигига ишонч ҳосил қилайлик.

Агар $n = 2k$ бўлса, у ҳолда (4) формуладан

$$x = (-1)^{2k} \cdot \alpha + 2\pi k = \alpha + 2\pi k,\ \ k \in Z.$$

Бу (2) формулани беради.

Энди $n = 2k + 1$ бўлса, у ҳолда (4) формуладан

$x = (-1)^{2k+1} \cdot \alpha + \pi(2k + 1) = -\alpha + 2\pi k + \pi = \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in Z.$

Бу (3) формулани беради.

$\sin\alpha = a$ бўлса, у ҳолда $\alpha = \arcsin a$ эканлигини назарга олиб, (4) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n,\ n \in Z. \qquad (5)$$

(5) *формула* $\sin x = a$ *тенглама ечимининг умумий кўриниши бўлиб ҳисобланади.*

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$\sin x = a$ тенгламанинг хусусий ечимлари қуйидаги 7-жадвалда кўрсатилган.

7-жадвал

$\sin x = 1$	$\sin x = -1$	$\sin x = 0$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \pi n,\ n \in Z$

МИСОЛ

1. $2\sin x = \sqrt{3}$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Энди $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$. Бу тенгламанинг радианлардаги ечимлари, градусдаги ечимлари $x = (-1)^n \cdot 60^\circ + 180^\circ \cdot n,\ n \in Z$.

Жавоби: $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$ ёки $(-1)^n \cdot 60^\circ + 180^\circ \cdot n,\ n \in Z$.

Тригонометрик тенгламаларнинг ечимини радиан ёки градус кўринишда бериш мумкин. Бундан буён ечимларни фақат битта кўринишда берамиз.

ТУШУНТИРИНГ

$2\sin(2x - 1) = 1$ тенгламанинг ечилишини тушунтиринг.

Ечилиши. $\sin(2x - 1) = \frac{1}{2}$;

$2x - 1 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n;\ n \in Z$;

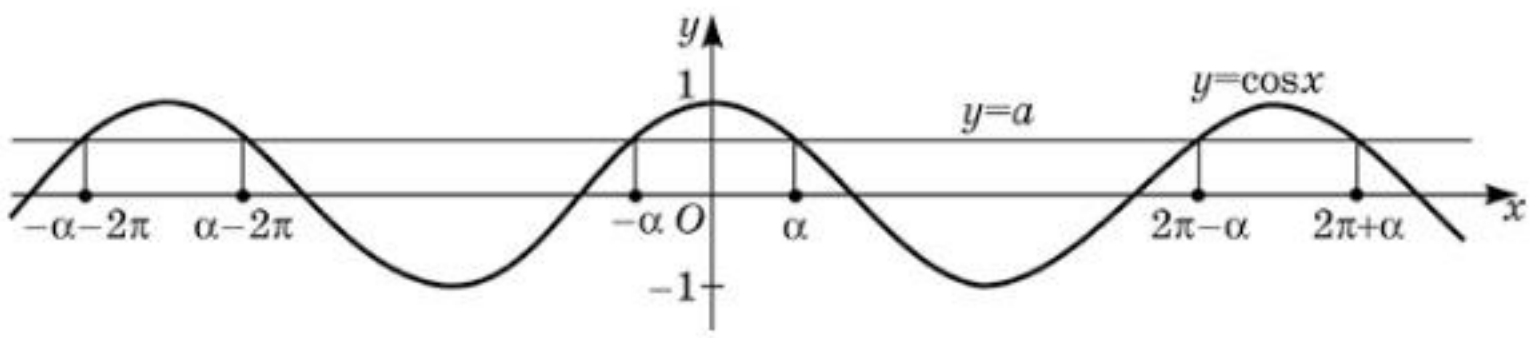
$2x = 1 + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n;\ n \in Z$;

$x = \frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n,\ n \in Z$.

Жавоби: $\frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n,\ n \in Z$.

II. $\cos x = a$ тенгламанинг ечимларини топамиз.

$y = \cos x$ функциянинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами ($x \in R$), функциянинг қийматлар тўплами $[-1; 1]$ кесмадан иборат, яъни $|\cos x| \le 1$ функция чегараланган. Агар тенгликнинг ўнг томонидаги сон $|a| > 1$ бўлса, у ҳолда $\cos x = a$ тенгламанинг ечими мавжуд эмас. Шу сабабли тенгликнинг ўнг томонидаги a сони $|a| \le 1$ шартни қаноатлантириши керак. Энди $\cos x = a$ (бунда $|a| \le 1$) тенгламанинг ечимини топиш учун косинусоида эгри чизиғини ва ординаталар ўқига параллел $y = a$ тўғри чизиқ графикларини битта координаталар текислигида ясаймиз (42-расм).



42-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Косинусоида билан $y = a$ тўғри чизиқ чексиз кўп нуқталарда кесишади. Кесишиш нуқталарининг абсциссаслари $\cos x = a$ тенгламанинг ечимларидан иборат.

$y = \cos x$ даврий функция, унинг энг кичик мусбат даври 2π. Шунинг учун $\cos x = a$ тенгламанинг бир давр ичидаги барча ечимларини топиш кифоя. Қолган ечимлар функциянинг даврийлик хоссаси билан аниқланади. Шу билан бирга функция жуфт функция бўлгани учун, $[-\pi; \pi]$ кесмада $y = \cos x$ функция билан $y = a$ $(0 < a < 1)$ тўғри чизиқ кесишиш нуқталарининг абсциссалари симметрик сонлар бўлади. Демак, α сони $\cos x = a$ тенгламанинг битта ечими бўлса, у ҳолда иккинчи ечими $(-\alpha)$ дан иборат.

Энди $\cos x$ функциянинг даври 2π га тенг эканини инобатга олиб,

$$x = \alpha + 2\pi n;\ n \in Z. \qquad (6)$$

$$x = -\alpha + 2\pi n;\ n \in Z. \qquad (7)$$

Ушбу формулаларни бирлаштириб ёзиш мумкин, яъни

$$x = \pm\alpha + 2\pi n;\ n \in Z. \qquad (8)$$

Энди $\cos\alpha = a$ бўлса, у ҳолда $\alpha = \arccos a$ эканини инобатга олсак, (8) формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n;\ n \in Z. \qquad (9)$$

(9) формула $\cos x = a$ тенглама ечимининг умумий кўриниши.

$\cos x = a$ тенгламанинг хусусий ечимлари 8-жадвалда кўрсатилган.

8-жадвал

$\cos x = 1$	$\cos x = -1$	$\cos x = 0$
$x = 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

МИСОЛ

2. $2\cos x = -1$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Берилган тенгламани ечиш учун иккала томонини ҳам 2 га бўламиз: $\cos x = -\frac{1}{2}$, у ҳолда $x = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z$;

$x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z$;

$x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi n,\ n \in Z$;

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Жавоби: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

ТУШУНТИРИНГ

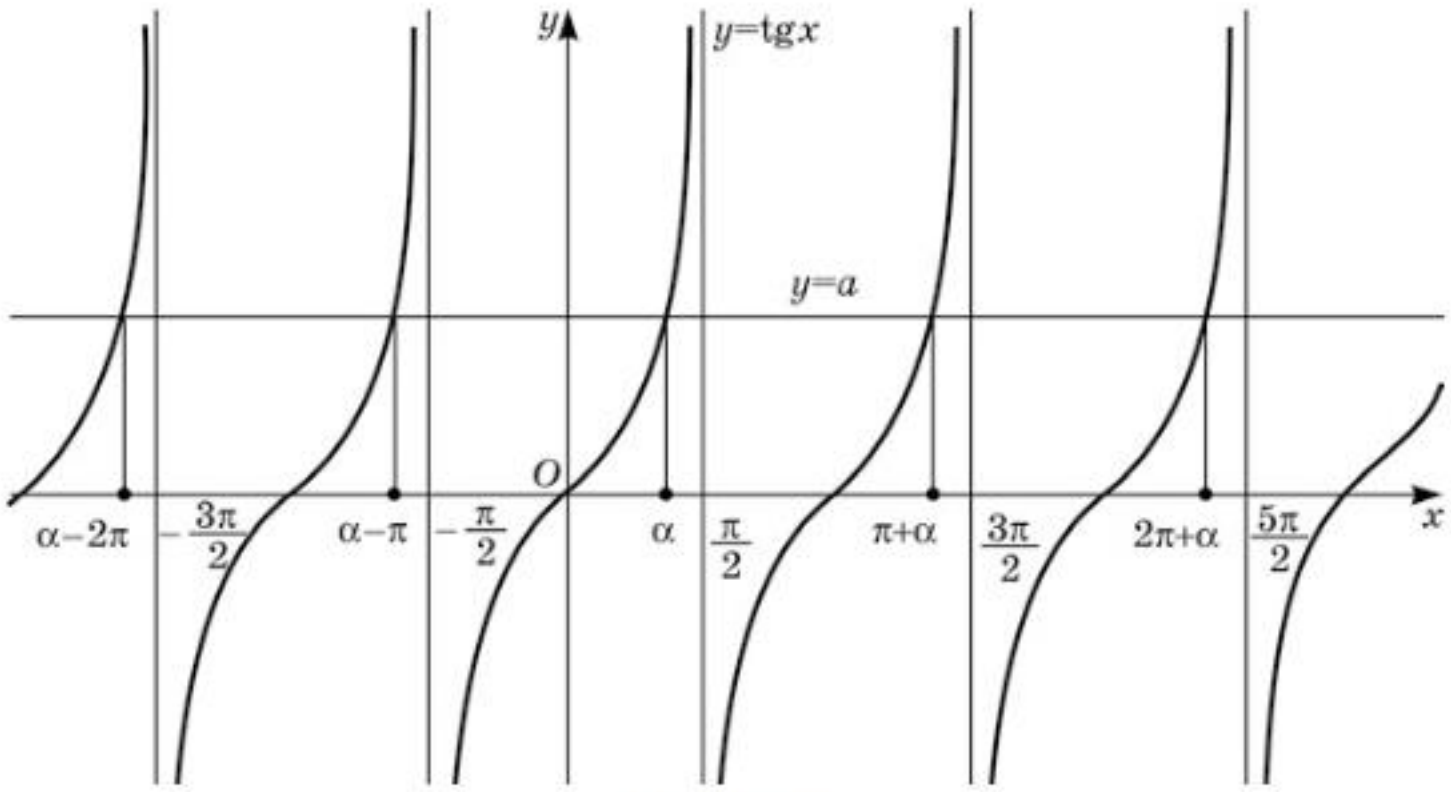
Нима учун $3\cos x = 4$ тенгламанинг ечими мавжуд эмас?

III. $\mathrm{tg}x = a$ ва $\mathrm{ctg}x = a$ тенгламаларнинг ечимини топамиз.

Барча ҳақиқий сонлар тўплами $y = \mathrm{tg}x$ функциянинг қийматлар тўплами эканлиги маълум, яъни $\mathrm{tg}x \in R$. Бундан $\mathrm{tg}x = a$ тенглама a нинг исталган қийматида ечимга эга.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ



43-расм

$y = \mathrm{tg}x$ функциянинг графиги тангенсоида эгри чизиғи $y = a$ тўғри чизиқ билан исталган давр ичида биттагина нуқтада кесишади. Шу кесишиш нуқтасининг абсциссаси $\mathrm{tg}x = a$ тенгламанинг ечими бўлади (43-расм).

Қолган ечимлар функциянинг даврийлик хоссаси билан аниқланади.

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда $\mathrm{tg}x = a$ тенгламанинг ечимини α деб олсак, у ҳолда тенгламанинг барча ечимлари $x = \alpha + \pi n$, $n \in Z$ формула билан аниқланади. $\mathrm{tg}\alpha = a$, $\alpha = \mathrm{arctg}a$ бўлгани учун, охирги формула қуйидаги кўринишга келади:

$$x = \mathrm{arctg}a + \pi n,\ n \in Z. \qquad (10)$$

(10) формула $\mathrm{tg}x = a$ тенглама ечимининг умумий кўринишидир. Айнан шундай $\mathrm{ctg}\ x = a$ тенгламанинг ечимлари умумий кўринишда берилган

$$x = \mathrm{arcctg}a + \pi n,\ n \in Z \qquad (11)$$

формула билан аниқланади.

$\mathrm{tg}x = a$ ва $\mathrm{ctg}x = a$ тенгламаларнинг хусусий ечимлари 9-, 10-жадвалларда берилган:

9-жадвал

$\mathrm{tg}x = 1$	$\mathrm{tg}x = -1$	$\mathrm{tg}x = 0$
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \pi n,\ n \in Z$

10-жадвал

$\mathrm{ctg}x = 1$	$\mathrm{ctg}x = -1$	$\mathrm{ctg}x = 0$
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

МИСОЛ

3. $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. $x = \mathrm{arctg}\sqrt{3} + \pi n,\ n \in Z$. Энди $\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ эканлигини инобатга олсак, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Жавоби: $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ТУШУНТИРИНГ

$\text{ctg}\frac{x}{2} = 1$ тенглама қандай ечилган?

Ечилиши. $\frac{x}{2} = \text{arcctg}1 + n\pi$; $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in Z$;

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Жавоби: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

МИСОЛ

4. $2\sin x = \sqrt{3}$ тенгламанинг $[-\pi; \pi]$ оралиққа тегишли бўлган ечимларини топамиз.

Ечилиши: Аввал берилган тенгламанинг умумий ечимини аниқлаймиз.

$2\sin x = \sqrt{3}$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Энди n нинг ўрнига қиймат бериш орқали тенгламанинг берилган оралиққа тегишли ечимини топамиз.

$n = 0$, $x = (-1)^0 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi \cdot 0 = \frac{\pi}{3}$;

$n = 1$, $x = (-1)^1 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi \cdot 1 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$;

$n = -1$, $x = (-1)^{-1} \frac{\pi}{3} + \pi \cdot (-1) = -\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{4\pi}{3}$ ва ҳ.к.о.

Бунда $\frac{\pi}{3} \in [-\pi; \pi]$; $\frac{2\pi}{3} \in [-\pi; \pi]$; $-\frac{4\pi}{3} \notin [-\pi; \pi]$.

Жавоби: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$.

1. Тригонометрик тенгламалар билан алгебраик тенгламалар орасида қандай фарқ бор?
2. Тригонометрик тенгламалар ечимининг чексиз кўп бўлиш сабаби нимада? Алгебраик тенгламаларда бундай ҳоллар учрайдими? Жавобингизни тушунтиринг.
3. Тригонометрик тенгламанинг иккала томонидаги бир хил кўпайтувчи тригонометрик функция бўлган ҳолда қандай шакл алмаштириш қўлланилади?
4. $2\sin x + \cos x = 3$ тенглама энг содда тригонометрик тенгламага мансубми?

Машқлар

А

Тенгламани ечинг **(7.1—7.4)**:

7.1. а) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos x = \frac{1}{2}$; г) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.2. а) $\text{tg}x = 2$; б) $\text{ctg}x = -3$; в) $\text{tg}x = -\sqrt{3}$; г) $\text{ctg}x = \sqrt{3}$.

7.3. а) $\sin\frac{x}{3} = 0$; б) $\cos 2x = 0$;

в) $5\cos 3x - 5 = 0$; г) $6\sin 5x + 6 = 0$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

7.4. а) $\mathrm{tg}(x-2)=0$; б) $\mathrm{ctg}(x+3)=0$;

в) $2\sin 3x+1=0$; г) $\cos\frac{x}{2}-0{,}5=0$.

Берилган оралиққа тегишли бўлган тенгламанинг ечимларини топинг **(7.5-7.6)**:

7.5. а) $\sin\phi=-1,\ \phi\in[0;\ 2\pi]$; б) $\mathrm{ctg}\,\phi=1,\ \phi\in[-\pi;\ \pi]$;

в) $\mathrm{tg}\,\phi=\sqrt{3},\ \phi\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$; г) $\cos\phi=-1,\ \phi\in[0;\ 2\pi]$.

7.6. а) $\sin\phi=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \phi\in[-\pi;\ \pi]$; б) $2\cos\phi=\sqrt{3},\ \phi\in[-\pi;\ \pi]$;

в) $\mathrm{tg}\,\phi=-\sqrt{3},\ \phi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\mathrm{ctg}\,\phi=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \phi\in(0;\ \pi)$.

B

Тенгламани ечинг **(7.7—7.12)**:

7.7. а) $3\mathrm{tg}2x-\sqrt{3}=0$; б) $-\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}4x+3=0$;

в) $2\sin 2x-\sqrt{2}=0$; г) $-2\cos 2x+\sqrt{3}=0$.

7.8. а) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$; б) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1=0$;

в) $\mathrm{tg}\left(\pi+\frac{x}{3}\right)-1=0$; г) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)=\sqrt{3}$.

7.9. а) $3\mathrm{tg}\left(\frac{2x}{3}+2\right)=-4$; б) $4\mathrm{ctg}\left(\frac{3x}{2}-1\right)-3=0$;

в) $2\sin\left(\frac{2x}{5}+3\right)=\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}\cos\left(\frac{5x}{2}-1\right)+2=0$.

7.10. а) $\sin 3x\cdot\cos 3x=-\frac{1}{2}$; б) $\sin^2 2x-\cos^2 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,2x}{1-\mathrm{tg}^2\,2x}=\sqrt{3}$; г) $2\sin^2 4x-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.11. а) $\sin 6x-\sin 4x=0$; б) $\cos 5x+\cos 3x=0$.

7.12. а) $\cos 7x-\cos 5x=0$; б) $\sin 9x-\sin 13x=0$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тригонометрик тенгламалар, тенгламалар системаси, уларни ечиш усуллари, тригонометрик айниятлар, формулалар, тенгламанинг илдизлари.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

8-§. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ

Таянч тушунчалар

Тенглама, тригонометрик тенглама, тенгламаларни ечиш усуллари

Сиз тригонометрик тенгламаларни ечиш усуллари билан танишасиз.

Олдинги мавзуда энг содда тригонометрик тенгламаларни ечиш йўллари билан танишдингиз. Энди баъзи тригонометрик тенгламалар турларини Ечилишининг умумий ҳолини кўриб чиқамиз. Тригонометрик тенгламаларни ечиш учун уларни айнан шакл алмаштиришлар орқали энг содда тригонометрик тенгламаларга келтириш керак эканлиги юқорида айтилган.

Биттагина тригонометрик функцияга боғлиқ бўлган, алгебраик тенгламаларга келтириладиган тригонометрик тенгламаларни ечишни ўрганасиз.

МИСОЛ

1. $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Берилган тенглама $\cos x$ функцияга нисбатан квадрат тенглама ҳисобланади. Шунинг учун $\cos x = u$ алмаштиришларни бажарсак, $2u^2 + 3u - 2 = 0$ квадрат тенгламани оламиз, унинг илдизлари $u_1 = -2$; $u_2 = \frac{1}{2}$.

Бунда берилган тенглама $\cos x$ функцияга нисбатан $\cos x = -2$ ва $\cos x = \frac{1}{2}$ кўринишдаги иккита содда тенгламага келади.

$\cos x = -2$ тенгламанинг ечими мавжуд эмас, чунки $|-2| > 1$.

$\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Жавоби: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Тригонометрик формулаларни фойдаланиш орқали ечиладиган тригонометрик тенгламаларни ечишни ўрганасиз.

МИСОЛ

2. $\sin 2x = \frac{3}{2}\sin x$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ формуладан фойдаланиб, берилган функцияни бир хил аргументли тригонометрик функцияга келтирамиз: $2\sin x\cos x = \frac{3}{2}\sin x$, бундан $2\sin x\cos x - \frac{3}{2}\sin x = 0$; $\sin x(2\cos x - \frac{3}{2}) = 0$. Тенглама иккита содда тенгламага келди: $\sin x = 0$, $2\cos x - \frac{3}{2} = 0$.

Шундай қилиб, $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$;

$2\cos x = \frac{3}{2}$ ёки $\cos x = \frac{3}{4}$. Бундан $x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Жавоби: πn, $n \in Z$; $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

3. $3\text{tg}x - \text{ctg}x = 0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. $\text{tg}x \cdot \text{ctg}x = 1$ формуладан олинган $\text{tg}x = \frac{1}{\text{ctg}x}$ ифодани берилган тенгламага қўямиз: $3 \cdot \frac{1}{\text{ctg}x} - \text{ctg}x = 0$, $3 - \text{ctg}^2x = 0$, $\text{ctg}^2x = 3$; $\text{ctg}x = \pm\sqrt{3}$, яъни $\text{ctg}x = \sqrt{3}$; $\text{ctg}x = -\sqrt{3}$.

Берилган тенглама иккита содда тенгламага келади. Уларнинг ечимлари:

1) $\text{ctg}x = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\text{ctg}x = -\sqrt{3}$, $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Жавоби: $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

МИСОЛ

4. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Берилган тенгламани ечиш учун қўшилувчиларни гуруҳлаймиз: $(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 0$. Қавс ичидаги ифодага косинуслар йиғиндиси формуласини қўллаймиз: $2\cos\frac{x+3x}{2} \cdot \cos\frac{x-3x}{2} + \cos 2x = 0$; $2\cos 2x \cdot \cos(-x) + \cos 2x = 0$. Энди умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарамиз: $\cos 2x(2\cos x + 1) = 0$. У ҳолда $\cos 2x = 0$ ва $2\cos x + 1 = 0$ тенгламаларни оламиз. Бундан $\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$.

$$2\cos x + 1 = 0;\ 2\cos x = -1;\ \cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k \text{ ёки } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Жавоби: $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

МИСОЛ

5. $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x \cos x$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Тригонометрик формулалардан фойдаланиб, кўпайтма кўринишида берилган ифодаларни йиғинди билан алмаштирамиз: $\cos 4x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$, $\cos 5x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x)$. У ҳолда берилган тенглама бундай ёзилади:

$$\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x),$$
$$\cos 6x + \cos 2x - \cos 6x - \cos 4x = 0,$$
$$\cos 2x - \cos 4x = 0.$$

Энди косинуслар айирмаси формуласидан фойдаланамиз:

$$2\sin 3x \cdot \sin x = 0.$$

Агар $\sin 3x = 0$ бўлса, у ҳолда $3x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$.

Агар $\sin x = 0$ бўлса, у ҳолда $x = \pi k$, $k \in Z$.

Ечимларнинг иккита гуруҳини битта формулага бирлаштириш мумкин, яъни $x = \frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$.

Жавоби: $\frac{\pi}{3}n$, $n \in Z$.

Бир жинсли тригонометрик тенгламаларни,ечишни ўрганасиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Бир жинсли тригонометрик тенгламалар *деб ҳар бир қўшилувчисининг даража кўрсаткичлари ўзаро тенг бўлган тенгламаларга айтилади.*

МИСОЛ

6. $10\sin^2 x = 1 + 3\cos^2 x$ тенгламани ечамиз.

Ечилиши. Тенгламанинг ўнг томонидаги 1 сонини биринчи тригонометрик айният билан алмаштирамиз.

$10\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x + 3\cos^2 x$ ёки $9\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0$.

Ушбу ҳосил бўлган тенгламанинг чап томонида турган қўшилувчилардан ҳар бирининг даражаси 2 га тенг. Демак, берилган тенглама – иккинчи даражали бир жинсли тенглама. Бу тенгламани ечиш учун тенгликнинг иккала томонини ҳадма-ҳад $\cos^2 x \neq 0$ ёки $\sin^2 x \neq 0$ функцияга бўламиз.

Агар $\cos^2 x \neq 0$ га бўлсак, у ҳолда $\mathrm{tg}x$, $\sin^2 x \neq 0$ га бўлсак, у ҳолда $\mathrm{ctg}x$ функцияга нисбатан квадрат тенгламага келамиз. Биринчи ҳолни кўриб чиқамиз:

$$\frac{9\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;\ 9\mathrm{tg}^2 x - 4 = 0.$$

Бундан $(3\mathrm{tg}x - 2)\cdot(3\mathrm{tg}x + 2) = 0$.

$3\mathrm{tg}x - 2 = 0;\ 3\mathrm{tg}x + 2 = 0$.

Шундай қилиб, $3\mathrm{tg}x = 2;\ \mathrm{tg}x = \frac{2}{3},\ x_1 = \mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z$;

$3\mathrm{tg}x = -2;\ \mathrm{tg}x = -\frac{2}{3},\ x_2 = \mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z$;

$\mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\mathrm{arctg}\frac{2}{3}$ бўлгани учун, $x_2 = -\mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Жавоби: $\mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in Z;\ -\mathrm{arctg}\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

?

1. Нима учун тригонометрик тенгламаларнинг ечимлари чексиз кўп?
2. Тригонометрик тенгламаларни ечишнинг алгебраик тенгламаларни ечишдан қандай фарқи бор?

Машқлар

А

Тенгламаларни ечинг **(8.1—8.4)**:

8.1. а) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; б) $2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$;
в) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; г) $6\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}x - 2 = 0$.

8.2. а) $3\cos^2 x + 10\cos x + 3 = 0$; б) $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$;
в) $2 + \cos^2 x = 2\sin x$; г) $3 - 3\cos x = 2\sin^2 x$.

8.3. а) $\mathrm{tg}x + 3\,\mathrm{ctg}x = 4$; б) $\mathrm{tg}x - 4\mathrm{ctg}x = 3$;
в) $\mathrm{tg}^2 x - 1 = 0$; г) $\mathrm{ctg}^2 x - 3 = 0$.

8.4. а) $\cos 7x + \cos x = 0$; б) $\sin 7x - \sin x = 0$;
в) $\sin^2 x + \sin 2x = 1$; г) $\cos^2 x - \sin 2x = 1$.

Тенгламанинг илдизларини топинг **(8.5—8.6)**:

8.5. а) $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2\cos^2 x$;
б) $2\cos^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$.

8.6. а) $9\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$;
б) $2\sin^2 x - \sin x\cos x = \cos^2 x$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

В

Тенгламаларни ечинг **(8.7—8.12)**:

8.7. а) $5\sin^2 x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4$; б) $6\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 7$.

8.8. а) $4\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 3$; б) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos x - 1$.

8.9. а) $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$; б) $\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$.

8.10. а) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$; б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x - \sqrt{3}\,\mathrm{ctg}x = 2$;
в) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$; г) $3\sin 2x + \cos 2x = 2\cos^2 x$;
д) $\cos^2 x + 4\sin^2 x = 2\sin 2x$.

8.11. а) $6\sin^2 x = 4 + \sin 2x$; б) $3\sin 2x + 8\cos^2 x = 7$.

8.12. а) $\sin 2x \cdot \cos 4x = \sin 7x \cdot \sin 9x$;
б) $\cos 10x \cdot \cos 7x - \cos 2x \cdot \cos 15x = 0$;
в) $\sin 5x \cdot \sin 3x + \cos 7x \cdot \cos x = 0$;
г) $\cos x \cdot \sin 5x = \cos 2x \cdot \sin 4x$;
д) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
е) $\sin 3x \cdot \sin^2 x = \sin 3x \cdot \cos^2 x$.

Тенгламанинг илдизларини топинг **(8.13-8.14)**:

8.13. а) $2\sin^2 2x + 3\cos^2 2x = 5\sin 2x \cdot \cos 2x$;
б) $3\sin^2 2x - \sin 2x \cdot \cos 2x - 4\cos^2 2x = 0$.

8.14. а) $3\sin^2\frac{x}{3} + 2\cos^2\frac{x}{3} - 7\sin\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{3} = 0$;
б) $2\cos^2 3x + \sin^2 3x - 3\sin 3x\cos 3x = 0$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тригонометрик функциялар, уларнинг аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, хоссалари, графиклари, тригонометрик формулалари, тескари тригонометрик функциялар.

9-§. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ЕЧИШ

Таянч тушунчалар

Тенгсизлик, тригонометрик тенгсизлик, функциянинг графиги

Тригонометрик тенгсизлик тушунчаси билан танишасиз; энг содда тригонометрик тенгсизликларни ечишни ўрганасиз.

Олдинги мавзуда тригонометрик тенгламаларни ечишни кўриб чиқдик. Исталган тригонометрик тенгламалар айнан шакл алмаштириш орқали тригонометрик тенгламаларга келтирилиб ечилишига ишонч ҳосил қилдик.

Энди тригонометрик тенгсизликларни ечишга тўхталиб ўтамиз. Тригонометрик тенгсизликларни ечишни энг содда тригонометрик

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

тенгсизликларни ечишдан бошлаймиз. Чунки исталган тригонометрик тенгсизликлар айнан шакл алмаштиришлар бажарилгандан кейин қуйидаги тенгсизликлардан ҳеч бўлмаганда биттасига келади:

$$\begin{aligned} &\sin x \geqslant a;\ \sin x \leqslant a;\ \sin x < a;\ \sin x > a;\\ &\cos x \geqslant a;\ \cos x \leqslant a;\ \cos x < a;\ \cos x > a;\\ &\mathrm{tg}\,x \geqslant a;\ \mathrm{tg}\,x \leqslant a;\ \mathrm{tg}\,x < a;\ \mathrm{tg}\,x > a;\\ &\mathrm{ctg}\,x \geqslant a;\ \mathrm{ctg}\,x \leqslant a;\ \mathrm{ctg}\,x < a;\ \mathrm{ctg}\,x > a, \end{aligned} \qquad (1)$$

бунда $a \in R$.

(1) *кўринишда берилган тенгсизликлар* **содда тригонометрик тенгсизликлар** *деб аталади.*

Содда тригонометрик тенгсизликлар график усулда ечилади. Бинобарин, содда тригонометрик тенгсизликларни ечиш учун функциянинг графиги ёки бирлик айлана қўлланилади.

АЛГОРИТМ Тригонометрик тенгсизликни функциянинг графиги ёрдамида ечиш алгоритми:

1) тригонометрик тенгсизликни (1) кўринишдаги содда тригонометрик тенгсизликка келтириш;

2) битта координаталар текислигида тенгсизлик таркибида берилган тригонометрик функциянинг графигини ясаш ва $y = a$ тўғри чизиқ ўтказиш;

3) функциялар графикларининг кесишиш нуқталарини белгилаш;

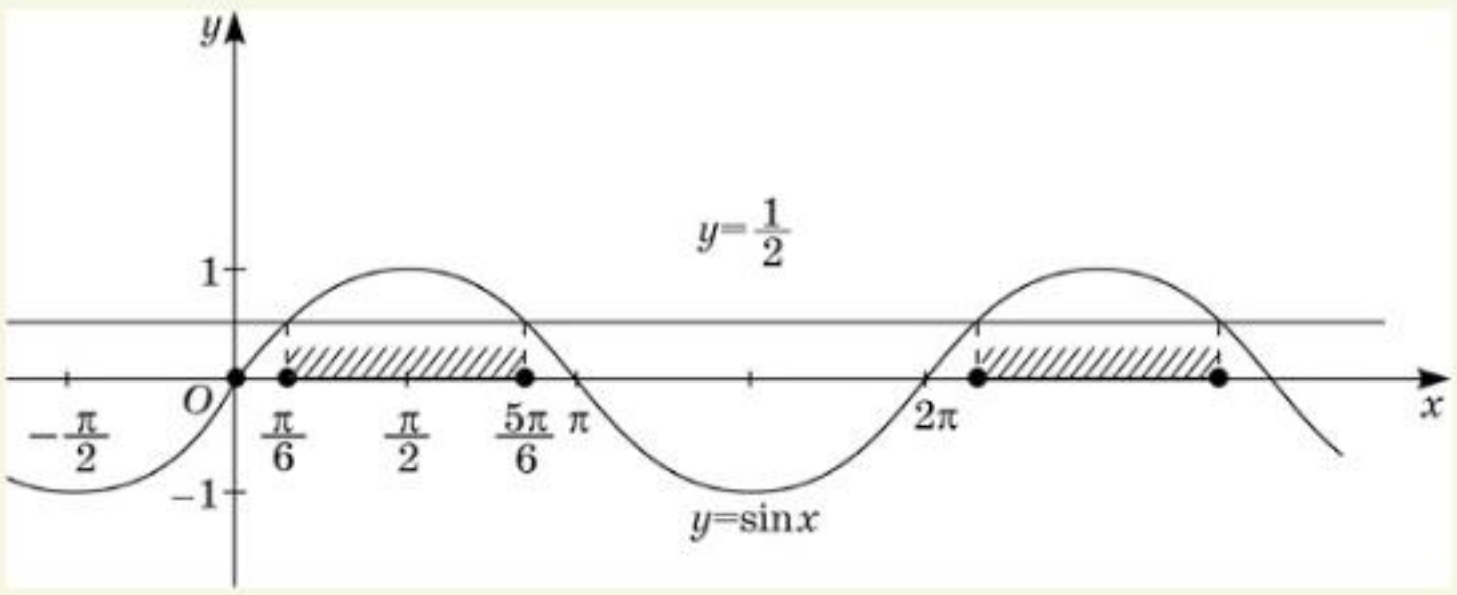
4) берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи эгри чизиқ қисмини, сўнгра Ox ўқидаги асосий оралиқни (координаталар бошига яқин жойлашган оралиқни) топиш;

5) берилган тенгсизликда кўрсатилган функцияга тескари тригонометрик функциянинг қийматини инобатга олиб, асосий оралиқнинг четки нуқталари абсциссаларининг қийматини топиш;

6) тригонометрик функцияларнинг даврийлик хоссасидан фойдаланиб, тенгсизликнинг умумий ечимини ёзиш.

МИСОЛ **1.** $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. Тенгсизликни ечиш учун $y = \sin x$ функциянинг графиги синусоида эгри чизиғи билан $y = \frac{1}{2}$ тўғри чизиқни координаталар текислигида ясаймиз, бунда $y = \frac{1}{2}$ тўғри чизиқ синусоидани чексиз кўп нуқталарда кесиб ўтади (44.1-расм).



44.1-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи синусоида эгри чизиғининг қисмлари $y = \frac{1}{2}$ тўғри чизиқдан юқорида жойлашган. Абсцисса ўқининг ўнг томонида жойлашган биринчи кесма учларини x_1, x_2 деб белгилаб, уларнинг қийматларини топамиз. Бунинг учун $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ эканлигини эътиборга оламиз. У ҳолда $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ келиб чиқади.

Демак, $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$. Берилган тенгсизликнинг тўлиқ ечимини ёзиш учун $y = \sin x$ функциянинг даврийлигидан фойдаланамиз: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Жавоби: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

АЛГОРИТМ

Содда тригонометрик тенгсизликларни бирлик айлана ёрдамида ечиш алгоритми:

1) бирлик айлана ясаш;
2) мусбат томони аргументи аркфункциясининг қийматини айлана ёйида белгилаш;
3) аркфункциянинг қиймати орқали Ox (Oy) ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказиш;
4) тригонометрик тенгсизликнинг ечимлар тўплами бўладиган айлана ёйининг қисмини кўрсатиш;
5) жавобини ёзиш.

МИСОЛ

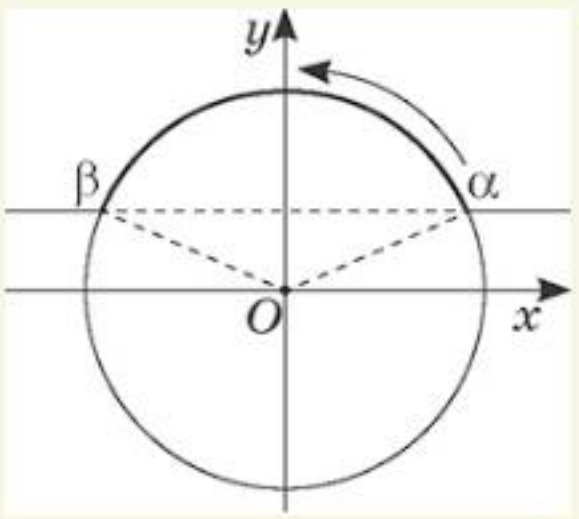
2. $\sin x \ge \frac{1}{2}$ тенгсизликни бирлик айлана орқали ечамиз.

Ечилиши. $\alpha = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $b = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Демак, $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$ (44.2-расм). Энди функциянинг даврийлигини эътиборга олсак,

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$, *ҳосил бўлади.*

Жавоби: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

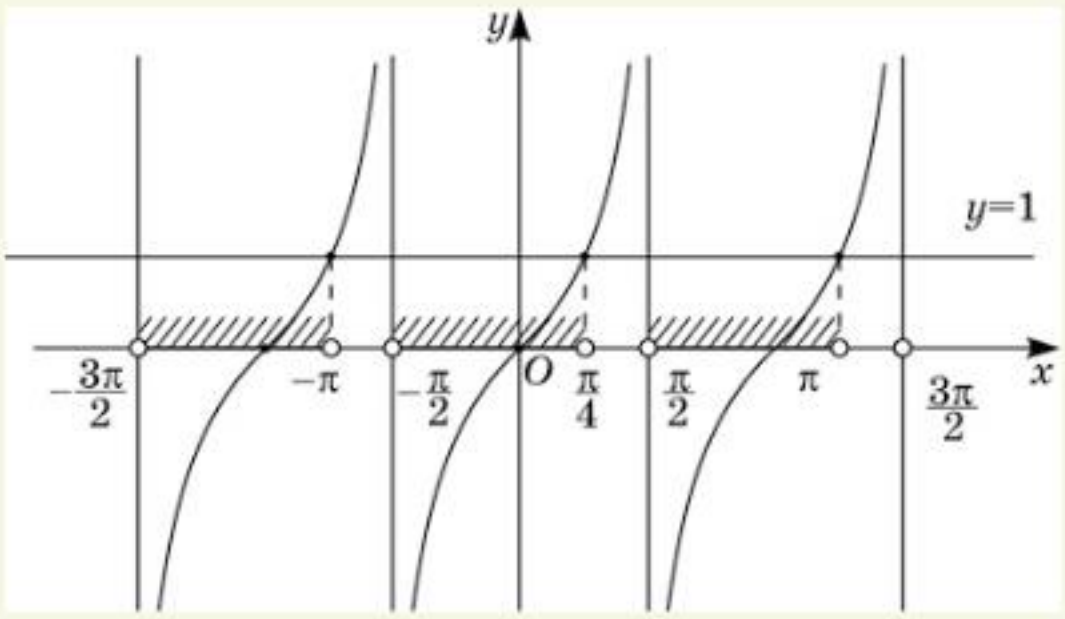


44.2-расм

МИСОЛ

3. $\mathrm{tg}x < 1$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. $\mathrm{tg}x < 1$ тенгсизликни ечиш учун $y = \mathrm{tg}x$ фукциянинг графиги билан $y = 1$ тўғри чизиқни битта координаталар текислигида ясаймиз, бунда $y = 1$ тўғри чизиқ тангенсоидани чексиз кўп нуқталарда (ҳар бир даврда бир марта) кесиб ўтади (45-расм).



45-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

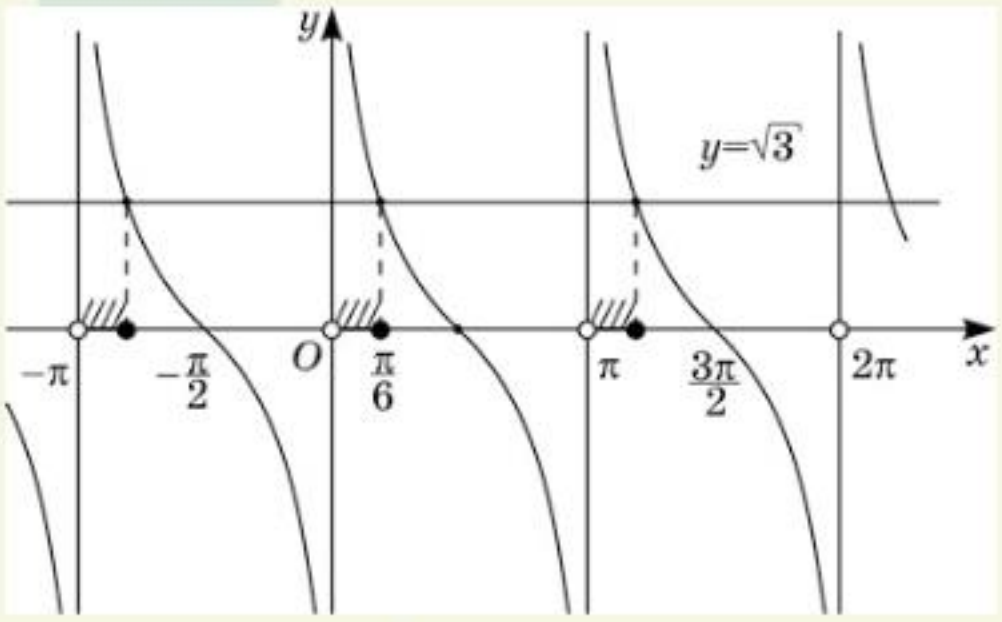
Берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи тангенсоиданинг қисмлари $y = 1$ тўғри чизиқдан пастда жойлашган. Энди $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ эканини эътиборга олсак, графикларнинг $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалдаги кесишиш нуқтасининг абсциссаси $x = \frac{\pi}{4}$. Демак, берилган тенгсизлик ечимининг асосий оралиғи $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$, яъни $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$. Энди $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг даврийлигини эътиборга олиб, берилган тенгсизликнинг барча ечимларини топамиз: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Жавоби: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

МИСОЛ

4. $\operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3}$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. Тенгсизликни ечиш учун $y = \operatorname{ctg} x$ функциянинг графигини ва $y = \sqrt{3}$ тўғри чизиқ графигини битта координаталар текислигида ясаймиз, $y = \sqrt{3}$ тўғри чизиқ котангенсоида эгри чизиғини чексиз кўп нуқталарда (ҳар даврда бир марта) кесиб ўтади (46-расм).



46-расм

Берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи котангенсоиданинг қисмлари $y = \sqrt{3}$ тўғри чизиқдан юқорида ётади.

$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ эканини эътиборга олсак, берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи асосий оралиқ $\left(0; \frac{\pi}{6}\right]$ ёки $0 < x \leqslant \frac{\pi}{6}$ бўлади.

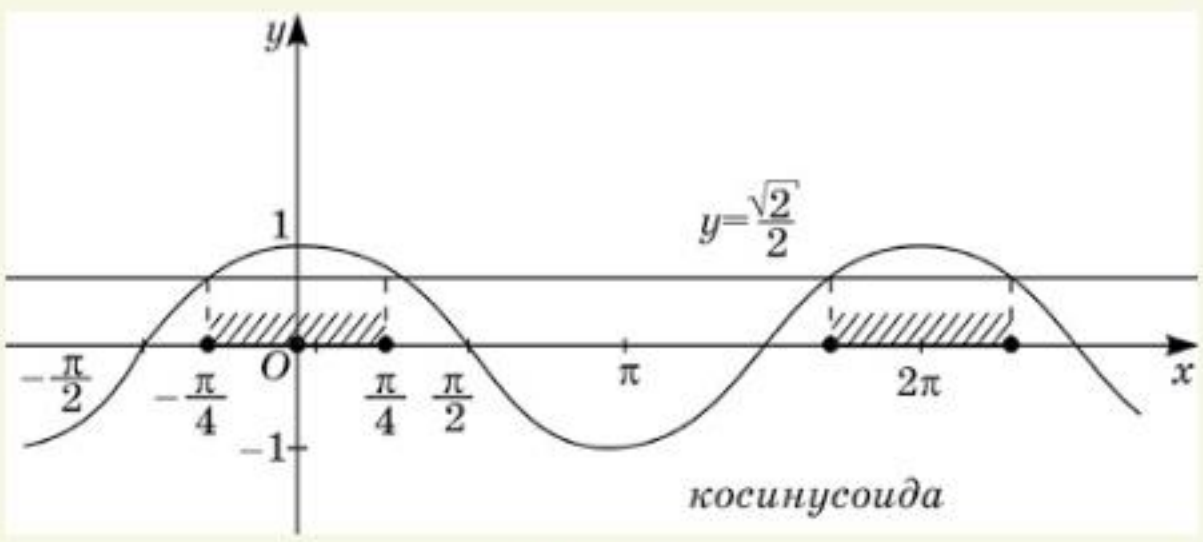
$\operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3}$ тенгсизликнинг тўлиқ ечимини топиш учун $y = \operatorname{ctg} x$ функциянинг даврийлик хоссасидан фойдаланамиз, яъни $\pi n < x \leqslant \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Жавоби: $\left(\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

МИСОЛ

5. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ тенгсизликни ечамиз.

Ечилиши. Тенгсизликни ечиш учун косинусоида билан $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ тўғри чизиғини битта координаталар текислигида ясаймиз, бунда $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ тўғри чизиқ косинусоидани чексиз кўп нуқталарда кесиб ўтади (47-расм).



47-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи косинусоиданинг қисмлари $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ тўғри чизиқдан юқорида жойлашган. Бинобарин, асосий оралиқ $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Демак, $-\frac{\pi}{4}$ m $x + \frac{\pi}{6}$ m $\frac{\pi}{4}$. Энди $y = \cos x$ функциянинг даврийлигидан фойдаланиб, қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ m $x + \frac{\pi}{6}$ m $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. Охирги тенгсизликнинг ҳар бир қисмидан $\frac{\pi}{6}$ ни айирсак, $-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n$ m x m $\frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Жавоби: $\left[-\frac{5\pi}{12} + 2\pi n, \frac{\pi}{12} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

1. Тригонометрик тенгсизликларни ечиш билан алгебраик тенгсизликларни ечишнинг фарқи нимада?
2. Тригонометрик тенгсизликни ечиш билан тригонометрик тенгламани ечиш орасида ўхшашлик борми? Жавобингизни тушунтиринг.
3. Тригонометрик тенгсизликни ечганда тригонометрик функцияларнинг хоссалари фойдаланиладими?

Машқлар

А

Тенгсизликларни ечинг **(9.1-9.2)**:

9.1. а) $\sin x > 0$; б) $\cos x$ m 0;

в) $\mathrm{tg}\, x$ m 0; г) $\mathrm{ctg}\, x > 0$.

9.2. а) $\sin x$ l $0{,}5$; б) $2\cos x$ l $-\sqrt{3}$;

в) $\sin x$ m $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-3\mathrm{tg}\, x$ m $\sqrt{3}$;

д) $\sin 3x > -\frac{1}{2}$; е) $\cos 2x < -\frac{1}{2}$;

ё) $\mathrm{tg}\, 5x$ l -1; ж) $\mathrm{ctg}\, 4x$ m -1.

Тенгсизликнинг берилган оралиқлардаги ечимларини топинг **(9.3-9.4)**:

9.3. а) $\cos 2x$ l $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$; б) $\sin\frac{x}{3} < \frac{1}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

9.4. а) $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$ l 1, $x \in (0; \pi)$; б) $\mathrm{tg}\, 4x > -\sqrt{3}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

В

9.5. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y = \sqrt{\cos\frac{x}{4}} + 2$; б) $y = \sqrt{\sin\frac{x}{3}} - 2$.

Тенгсизликларни ечинг **(9.6—9.8)**:

9.6. а) $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin x - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

б) $\sin x \cdot \sin\frac{\pi}{5} - \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin 4x \cdot \cos 4x$ m $0{,}25$;

г) $\sin^2 3x - \cos^2 3x > -0{,}5$.

9.7. а) $2\cos 2x > -1$; б) $2\sin 4x < -1$;

в) $-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ m 1; г) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ | 1.

9.8. а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ m 1; б) $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ m $\sqrt{2}$;

в) $3\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > \sqrt{3}$; г) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) < -1$.

9.9. а) $4\sin x - 2$ | 0; б) $2\mathrm{tg}2x + 2 > 0$; в) $5\cos 3x + 2$ m 7 тенгсизликнинг ечими мавжудми?

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $y = \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

A) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ m x m $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$;

B) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ m x m $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$;

C) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$ m x m $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

D) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ m x m $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2. $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1$ тенгсизликни ечинг:

A) $2\pi n$, $n \in Z$; B) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

C) $-\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; D) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

3. $\cos\frac{x}{2} = 0$ тенгсизликни ечинг:

A) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$; B) $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$;

C) $\pi + 4\pi n$, $n \in Z$; D) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

4. $y = \sqrt{\mathrm{tg}x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

A) 0 m $x <$ ¦ , $n \in Z$; B) $0 < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

C) πn m $x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; D) 0 m x m πn, $n \in Z$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

5. $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$ тенгламанинг илдизини топинг:

A) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$;
B) $(-1)^n\ \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;
C) $(-1)^n\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$;
D) $\frac{\pi}{2} + 3\pi n,\ n \in Z$.

6. tg x m$\sqrt{3}$ тенгсизликни ечинг:

A) $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right],\ n \in Z$;
B) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$;
C) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right],\ n \in Z$;
D) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

7. ctg$x = 7$ тенгламани ечинг:

A) $-\text{arctg } 7 + \pi k,\ k \in Z$;
B) $\text{arcctg } 7 + \pi k,\ k \in Z$;
C) arctg 7;
D) $-\text{arcctg } 7 + \pi k,\ k \in Z$.

8. $y = \text{tg}x$ функция графигининг Oy ўқи билан кесишиш нуқталарини топинг:

A) 0;
B) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;
C) $\pi n,\ n \in Z$;
D) $-\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

9. $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ тенгламани ечинг:

A) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$;
B) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;
C) $\frac{7\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z$;
D) $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

10. $\cos x = \frac{1}{2}$ тенгламанинг $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесма оралиғида нечта илдизи мавжуд:

A) 4;
B) 3;
C) 2;
D) 1?

11. $4\sin^2 x = \cos^2 x$ тенгламани ечинг:

A) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;
B) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;
C) $\pm\ \text{arctg}2 + \pi n,\ n \in Z$;
D) $\pm\ \text{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

12. $\sin x + \cos x = 0$ тенгламани ечинг:

A) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;
B) -1;
C) 1;
D) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

13. 0 m $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ тенгсизликни ечинг:

A) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z$;

B) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$;

C) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{2} + 2\pi n\right),\ n \in Z$;

D) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\ n \in Z$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

14. $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ тенгламани ечинг:

A) $\pm\frac{\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in Z$; B) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$;

C) $(-1)^k\frac{\pi}{4} + 4\pi k,\ k \in Z$; D) $\pm\frac{\pi}{8} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Математик саводхонликка доир топшириқлар

15. 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20 сонлар кетма-кетлигида 5 га бўлинадиган сонлар неча фоизни ташкил этади:

A) 50%; B) 75%; C) 20%; D) 25%; E) 30%?

16. 400 та деталдан 15 таси яроқсиз. Тасодифий олинган деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоллигини топинг:

A) $\frac{1}{20}$; B) $\frac{3}{300}$; C) $\frac{3}{80}$; D) $\frac{1}{80}$; E) $\frac{1}{100}$.

17. $x^2 - 6x + 5 = 0$ тенгламанинг илдизлари қайси оралиққа тегишли бўлади:

A) (0; 5); B) [2; 3]; C) (0; 5]; D) (1; 6); E) (2; 3)?

18. Сонлар маълум бир қонуният асосида жойлаштирилган. Номаълум сонни топинг:

5	10	30	80	?

A) 100; B) 200; C) 150; D) 240; E) 220.

ТАРИХИЙ МАЪЛУМОТЛАР

XVII аср бошларидаги тригонометриянинг ривожланиш босқичида янги аналитик йўналиш шакллана бошлади. XVII асргача тригонометрия учбурчакларни ечиш, геометрик фигуралар элементларини ҳисоблаш учун фойдаланилган бўлса, XVII—XIX асрларда тригонометрия математик анализнинг бир қисми сифатида қарала бошланди. У механика, физика ва техникада асосан тебранма ҳаракатлар ва бошқа даврий жараёнларни ўрганишда кенг фойдаланилган. Ф.Виет ўзининг дастлабки математик тадқиқотларида тригонометрик функцияларнинг даврийлик хоссаси ҳақида айтган. Швейцариялик математик И.Бернулли (1667-1748) шу вақтнинг ўзидаёқ тригонометрик функциялар белгиларидан фойдаланган. Агар алгебраик белгилашларнинг ривожланиши қарама-қарши сонлар ва йўналтирилган кесмаларни киритиш, бурчак ва ёй тушунчаларининг кенг ривожланишига олиб келган бўлса, тебранма ҳаракатлар, товуш, ёруғлик ва электромагнит тўлқинлар ҳақидаги фаннинг ривожланиши тригонометрия мазмунининг асоси — тебранма жараёнларни текшириш ва ривожлантиришга олиб келди. Гармоник тебранишлар (масалан, маятникнинг, ўзгарувчан электр токининг тебраниши) тенгламаси

$$y = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (1)$$

экани физика курсидан маълум.

Гармоник тебранишлар графиги синусоидалар бўлгани учун физика ва техникада гармоник тебранишлар *синусоидал тебранишлар* деб аталади.

arcsin ва arctg белгилашларни 1792 йилда веналик математик Г.М. Шерфер ва таниқли француз олими Ж.Л.Лагранж ўз меҳнатларида фойдаланган. Д.Бернулли

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

шу белгилашларни аввал бошқача кўриб чиққан эди. Бироқ бу белгилашлар XVII асрда қўлланила бошлади. “Арк” қўшимчаси лотинча arcus – “ёй” сўзидан олинган. arcsin$x$ сўзи (ёй деб айтиш ҳам мумкин) синуси x га тенг бўлган бурчак тушунчасига мос келади.

Тригонометрик функциялар ҳақидаги дунёқарашларнинг ривожланиши янги аналитик базанинг шаклланишига олиб келди, яъни тригонометрик функциялар геометрияга боғлиқ бўлмаган даражали қаторлар ва математик анализдан бошқа тушунчалар ёрдамида аниқланади.

Тригонометрик функцияларнинг аналитик назарияси асосини тузишга И.Ньютон ва Л.Эйлер ўз ҳиссаларини қўшган. Бироқ бу назариянинг асосини Л.Эйлер яратган деб айтиш мумкин. XIX асрда бу назарияни ривожлантиришни Н.И.Лобачевский ва бошқа олимлар давом эттирган.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Ҳодиса, элементар ҳодиса, частота, нисбий частота, эҳтимоллик, статистика, статистик эҳтимоллик, эҳтимолликнинг классик таърифи.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

4 ЭҲТИМОЛЛИК

10-§. ҲОДИСАНИНГ ЭҲТИМОЛЛИГИ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

Таянч тушунчалар

Эҳтимоллик, ҳодиса, ҳодисанинг турлари, эҳтимолликнинг хоссалари

Сиз тасодифий ҳодиса тушунчаси, тасодифий ҳодисанинг турларибилан танишасиз;эҳтимолликхоссаларидан фойдаланиб, ҳодисанинг эҳтимоллигини топишни ўрганасиз.

Ҳодиса — маълум бир тажрибанинг натижаси.

Тажриба натижасида бажариладиган ёки бажарилмайдиган ҳодиса ***тасодифий ҳодиса*** *дейилади.*

Тасодифий ҳодисанинг белгиланиши: A, B, C,...

Тажриба натижасида шартли равишда бажариладиган ҳодиса ***рост ҳодиса*** *дейилади.*

Тажриба натижасида бажарилмайдиган ҳодиса ***мумкин бўлмаган (ёлгон) ҳодиса*** *деб аталади.*

A ҳодисанинг бажарилиши натижасида B ҳодиса ҳам бажарилса, A *ҳодиса* B *ҳодисанинг хусусий ҳоли* дейилади.

Агар A ва B ҳодисалар бир-бирининг хусусий ҳоли бўлса, у ҳолда ҳодисалар *тенг имкониятли ҳодисалар* дейилади.

A ва B ҳодисалар тенглигининг ёзилиши: $A = B$.

A *ҳодисага қарама-қарши* ҳодиса деб A ҳодиса бажарилмаганда бажариладиган $\overline{A}$ ҳодисага айтилади.

Тажриба давомида иккита ҳодиса бир вақтда бажариладиган бўлса, у ҳолда бундай ҳодисалар *биргаликда бўлган ҳодисалар* деб аталади.

Тажриба давомида иккита ҳодиса бири иккинчисининг бажарилишини инкор этса, бундай ҳодисалар *биргаликда бўлмаган ҳодисалар* дейилади.

Амалда бир шароитда бир эмас, бир нечта тажриба ўтказилади. Тажрибалар сони кўп бўлиши мумкин. Маълум бир ҳодисанинг пайдо бўлиш частотасини топиш учун тажрибалар сони кўпайтирилади.

A ҳодисанинг эҳтимоллиги $P(A)$ белгиси билан белгиланади.

БУНИ БИЛАСИЗ:

A ҳодисанинг эҳтимоллиги қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$P(A) = \frac{m}{n}$, бунда m — тажрибанинг A ҳодисага қулай натижалар сони, n – барча натижалар сони.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Масалан, тангани ташлаганда A — “герб томонининг тушиши” ва B — “сон томонининг тушиши” бўлса, у ҳолда $P(A) = 0,5$, $P(Г) = 0,5$ ёки $P(A) = 50\%$, $P(Г) = 50\%$.

Эҳтимолликнинг хоссалари

1-хосса. Рост ҳодисанинг эҳтимоллиги 1 га тенг.

2-хосса. Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоллиги 0 га тенг.

3-хосса. Тўла гуруҳ ташкил этадиган ҳодисанинг эҳтимоллиги 1 га тенг.

4-хосса. Қарама-қарши ҳодисалар эҳтимоллиги 1 билан берилган ҳодисалар эҳтимолликларининг айирмасига тенг, яъни $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Ҳодисалар эҳтимоллигининг аҳамиятлилиги – ҳодиса эҳтимоллигини тажриба ўтказмасданоқ, мантиқий таҳлил қилиш орқали топиш мумкин.

1. Қандай ҳолларда ҳодисалар эҳтимоллигини тажриба ўтказмасдан топиш мумкин?
2. Ҳодисанинг эҳтимоллиги қандай қийматларга тенг бўла олади?

Машқлар

А

10.1. Ўйин соққасини ташлаганда 1 дан 6 гача бўлган сонлар тушади. Қуйидаги ҳодисалар эҳтимолликларини топинг:
а) 3 сонининг тушиши; б) 2 ёки 3 сонининг тушиши;
в) 1 ёки 5 сонининг тушиши; г) тоқ соннинг тушиши.

10.2. Қутида 3 та оқ ва 7 та қизил шар бор. Қутидан тасодифий олинган битта шарнинг : а) оқ; б) қизил бўлиш эҳтимолини топинг.

10.3. Қутида 2 та қизил ва 6 та кўк шар бор. Қутидан тасодифий олинган битта шарнинг : а) қизил; б) кўк бўлиш эҳтимолини топинг.

10.4. Синфда 30 та ўқувчи бор. Улардан 6 та ўқувчи аъло, 16 та ўқувчи яхши баҳо олди. Синфдан тасодифий танлаб олинган битта ўқувчи баҳосининг: а) аъло бўлиши; б) яхши бўлиши ; г) аъло бўлмаслиги эҳтимолини топинг.

В

10.5. Битта танга икки марта ташланди. Ҳеч бўлмаганда бир марта “герб” томонининг тушиш эҳтимолини топинг.

10.6. Уч марта танга ташланди. Икки марта “герб” тушиш эҳтимолини топинг.

10.7. Тасодифан икки хонали сон танлаб олинди. Қуйидаги ҳодисалар эҳтимолликларини топинг: а) олинган сон 0 билан тугайди;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

б) олинган сон бир хил рақамлардан тузилган; в) олинган сон бутун соннинг квадрати бўлмайди.

10.8. Сардор икки хонали сон ўйлади. Ўйланган соннинг 2 ва 5 сонларига каррали бўлиш эҳтимолини топинг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тажриба, ҳодиса, тасодифий ҳодиса частотаси, эҳтимоллик, статистика, статистик маълумотлар, асосий жамлама, танлама, статистик хулоса.

11-§. ЭҲТИМОЛЛИКЛАРНИ ҚЎШИШ ВА КЎПАЙТИРИШ ҚОИДАЛАРИ

Таянч тушунчалар

Эҳтимоллик, ҳодиса, қўшиш қоидаси, кўпайтириш қоидаси

Сиз ҳодисаларнатижаси, ҳодисаларнингкўпайтмаси тушунчалари, шунингдек, эҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари билан танишасиз; улардан фойдаланиб масалалар ечишни ўрганасиз.

БУНИ БИЛАСИЗ: Сиз эҳтимоллик қандайдир ҳодисанинг маълум бир шароитда пайдо бўлиш имкониятининг тавсифи эканини биласиз.

Қуйидаги мулоҳазаларни ёдга туширайлик:

1) агар ҳодиса мумкин бўлмаса, у ҳолда унинг эҳтимоллиги нолга тенг;

2) агар ҳодисанинг бажарилиши мумкин бўлса, унинг эҳтимоллиги 1 га тенг;

3) агар битта ҳодисанинг бажарилиши мумкин, бироқ тушиши абсолют рост бўлмаса, у ҳолда унинг эҳтимоллиги 0 ва 1 сонлари орасида жойлашган сон. Масалан, тангани ташлаганда унинг “герб” ва “сон” томони билан тушиши биргаликда бўлмаган ҳодисалар.

A ва B ҳодисаларнинг A + B йиғиндиси *деб A ҳодисанинг ё B ҳодисанинг, ёки иккаласининг бажарилишидан ташкил топган ҳодисага айтилади.*

Хусусий ҳолда, агар A, B ҳодисалар биргаликда бўлмаса, у ҳолда $A + B$ ушбу иккита ҳодисадан бирининг бажарилиш ҳодисасидир.

Бир нечта ҳодисанинг йиғиндиси айнан шундай топилади.

A ва B ҳодисалар биргаликда бўлсин. A ҳодисанинг бажарилиш эҳтимоллигини $P(A)$, B ҳодисанинг пайдо бўлишини $P(B)$ деб белгилайлик. A ҳодиса ёки B ҳодиса $P(A + B)$ эҳтимоллигини қандай топиш мумкин? Бу саволга жавобни қуйидаги қўшиш теоремаси беради.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

1-теорема (*биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолликларини қўшиш*).

Биргаликда бўлмаган иккита ҳодисадан исталган бирининг бажарилиши эҳтимоллиги шу ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

МИСОЛ

1. Қутида 30 та шар бор, унинг 15 таси қизил, 10 таси кўк ва 5 таси яшил. Қутидан олинган исталган шарнинг яшил бўлмаслик (A ҳодиса) эҳтимоллигини топинг.

Ечилиши. Қутидан олинган шар қизил (B ҳодиса) ёки кўк (C ҳодиса) бўлган ҳолда A ҳодисанинг бажарилиши мумкин, яъни A ҳодиса биргаликда бўлмаган B ва C ҳодисаларнинг йиғиндисига тенг. Бундан 1-теоремага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$P(A) = P(B + C) = P(Г) + P(C) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Жавоби: $\frac{5}{6}$.

Бир тажрибанинг натижаси учун гуруҳнинг фақатгина битта ҳодисаси бўладиган

$$A_1, A_2, ..., A_n \qquad (1)$$

ҳодисалар тўплами **ҳодисаларнинг тўлиқ гуруҳи** деб аталади.

Бошқача айтганда, (1) тўлиқ гуруҳ ҳодисалари учун қуйидаги шартлар бажарилади:

1) 1 дан n гача бўлган исталган i учун A_i ҳодиса рост;

2) A_i ва A_j $(i \neq j)$ ҳодисалар жуфти биргаликда бўлмаган ҳодисалар, яъни $A_i A_j = 0$ $(i \neq j)$, бунда 0 — мумкин бўлмаган ҳодиса. Ҳодисаларнинг тўлиқ гуруҳига $\overline{A}$ ва A ҳодисалар мисол бўла олади. Бу ерда А ҳодиса — $\overline{A}$ ҳодисага қарама-қарши ҳодисадир.

2-теорема. ***Тўлиқ гуруҳ ҳодисалари эҳтимолликларининг йиғиндиси 1 га тенг.***

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1. \qquad (2)$$

А ва В ҳодисаларнинг кўпайтмаси *деб шу иккита ҳодисанинг бир вақтда бажарилишидан ташкил топган АВ ҳодисага айтилади.*

Масалан, қутида №1 ва №2 заводлар тайёрлаган деталлар бор, A — стандарт деталларнинг тушиши, B — №1 завод тайёрлаган деталь, у ҳолда $A \cdot B$ — №1 завод тайёрлаган деталлар.

A ва B биргаликда бўлмаган ҳодисалар ва уларнинг эҳтимолликлари $P(A)$ ва $P(B)$ эканлиги маълум бўлсин. A ва B ҳодисаларнинг биргаликда бўлишини қандай топиш мумкин?

3-теорема (*боғлиқ бўлмаган (мустақил) ҳодисалар эҳтимолликларининг кўпайтмаси*).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

А ва В боғлиқ бўлмаган ҳодисаларнинг бир вақтда бажарилиш эҳтимоллиги шу ҳодисаларнинг кўпайтмасига тенг:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

МИСОЛ 2. Агар ўйин соққаси ва танга ташланса, танганинг "герб" томони ва ўйин соққасида 5 сонининг тушиш эҳтимоллиги қандай?

Ечилиши. $\frac{1}{2}$ — тангадаги "герб" ва $\frac{1}{6}$ — ўйин соққасидаги 5 сонининг тушиш эҳтимоллиги. У ҳолда 3-теоремага кўра:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Жавоби: $\frac{1}{12}$.

Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремаси ҳодисалар сони иккитадан ортиқ бўлган ҳолларда ҳам кўрилади.

МИСОЛ 3. Тангани 10 марта ташлаганда 10 марта "герб" томони билан тушиш эҳтимоли қандай?

Ечилиши. Ҳар бир ташлашда "герб" томонининг тушиши аввалги натижага боғлиқ эмас. Шу сабабли бу ерда 10 та биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг биргаликда бўлиши тўғрисида айтилган. Бир марта ташлаганда "герб" тушиш эҳтимоли $\frac{1}{2}$ га тенг. Бундан изланаётган эҳтимоллик $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ га тенг, яъни $\frac{1}{1024}$.

Жавоби: $\frac{1}{1024}$.

Бу ерда эҳтимоллик — жуда кичик катталик, чунки тангани 10 марта ташлаганда 10 марта "герб" тушиши мумкин эмас.

А ҳодиса бажарилгандан кейин аниқланган В ҳодисанинг эҳтимоллиги $P_A(B)$ ***шартли эҳтимоллик*** *деб аталади.*

A, B — боғлиқ бўлган ҳодисалар ва $P(A)$, $P_A(B)$ эҳтимолликлар маълум бўлсин. Ушбу ҳодисаларнинг биргаликда бўлишини қандай топиш мумкин?

4-теорема. ***Ўзаро боғлиқ бўлган иккита ҳодисанинг бажарилиш эҳтимоллиги биринчи ҳодиса эҳтимоллигини биринчи ҳодиса бажарилгандан кейин тугалланган иккинчи ҳодисанинг шартли эҳтимоллигига кўпайтирилганига тенг:***

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Бу теорема боғлиқ бўлган ҳодисалар сони иккитадан орик бўлганда ҳам бажарилади. Масалан, учта боғлиқ бўлган ҳодисалар учун

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$$

бажарилади. $P_{AB}(C)$ белги A ва B ҳодисалар бажарилгандан кейинги C ҳодисанинг эҳтимоллигини беради.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

4. Техник лицей устахонасидаги учта дастгоҳда деталлар ясалди. Детални биринчи дастгоҳда ясаш эҳтимоли 0,6 га тенг. Биринчи дастгоҳда яроқли деталь ясаш эҳтимоли 0,8. Яроқли деталнинг биринчи дастгоҳда ясалиш эҳтимолини топинг.

Ечилиши. A — "биринчи дастгоҳда ясалган деталь", B — "яроқли деталь" бўлсин. Масала шартига кўра $P(A) = 0{,}6$ ва $P_A(Г) = 0{,}8$.

Энди 4-теоремадан фойдаланамиз:

$$P(AB) = P(A)P_A(Г) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48.$$

Жавоби: 0,48.

?

1. Боғлиқ бўлган ҳодисанинг боғлиқ бўлмаган ҳодисадан қандай фарқи бор?
2. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндиси билан боғлиқ бўлмаган ҳодисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасини топиш орасида қандай ўхшашлик бор?

Машқлар

А

11.1. Нишон (I) доира ва (II ва III) иккита ҳалқадан ташкил топган учта концентрик доирадан иборат. Ўқнинг I, II ва III соҳаларга тушиш эҳтимолликлари мос равишда 0,45; 0,30; 0,15. Ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоллигини топинг.

11.2. Куннинг очиқ бўлиш эҳтимоли $P(A) = 0{,}75$. Куннинг булутли бўлиш эҳтимолини топинг.

11.3. Университетнинг сиртқи ўқув бўлимига ёзма ишлар A, B ва C шаҳарлардан келиб тушди. Уларнинг A шаҳардан келиш эҳтимоли 0,6, B шаҳардан келиш эҳтимоли 0,1. Навбатдаги ишнинг C шаҳардан келиб тушиш эҳтимолини топинг.

11.4. Иккита ўйин соққаси ташланди. Тушган сонларнинг йиғиндиси бешдан ортиқ бўлиши эҳтимоли қандай?

11.5. Иккита мерган битта нишонни кўзлади. Биринчи мерганнинг нишонга текказиш эҳтимоли 0,9, иккинчисиники 0,8. 1) Иккала мерганнинг ҳам; 2) ҳеч бўлмаганда битта мерганнинг нишонга аниқ текказиш эҳтимоли қандай?

В

11.6. Иккита ўйин соққаси бир вақтда ташланди. Иккита тўрт сонининг бир вақтда тушиш эҳтимоли қандай?

11.7. Тасодифий олинган фабрика маҳсулотининг яроқлилик эҳтимоллиги $\frac{92}{100}$, тасодифий олинган яроқли маҳсулотнинг биринчи навли бўлиш эҳтимоллиги $\frac{72}{100}$. Олинган фабрика маҳсулотининг биринчи навли бўлиш эҳтимоллиги қандай?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

11.8. 1) Қутида ўлчамлари бир хил 2 та оқ, 3 та қизил ва 5 та кўк шар бор. Қутидан тасодифий олинган шарнинг бўялган (оқ эмас) бўлиш эҳтимолини топинг.
2) Қутида 7 та оқ ва 3 та қора шар бор. Қутидан оқ (*B* ҳодиса) ёки қора (*C* ҳодиса) шар олингандан кейин иккинчи марта олинган шарнинг оқ бўлиш эҳтимолини топинг.

11.9. Қутида 4 та оқ ва 7 та қора шар бор. Қутига қайтарилмай иккита шар навбат билан олинган. Биринчи шарнинг оқ, иккинчи шарнинг қора бўлиш эҳтимоли қандай?

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Ҳақиқий сонлар тўплами, функция, аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, графиги, функциянинг лимити, узлуксизлиги, нуқтанинг атрофи.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Тажриба натижасида бир вақтда бажариладиган ҳодисалар:
A) рост; Г) ёлғон; C) биргаликда бўлмаган;
D) қарама-қарши; E) тенг имкониятли.

2. Тажриба натижасида шартли равишда бажариладиган ҳодисалар:
A) рост; Г) ёлғон; C) биргаликда бўлмаган;
D) қарама-қарши; E) тенг имкониятли.

3. Тажриба натижасида битта ҳодисанинг бажарилиши иккинчи ҳодисанинг бажарилишини инкор этувчи ҳодисалар:
A) рост; Г) ёлғон; C) биргаликда бўлмаган;
D) қарама-қарши; E) тенг имкониятли.

4. Ёлғон ҳодисаларнинг бажарилиш эҳтимоли:
A) 1 га тенг; Г) 0 га тенг; C) −1 га тенг;
D) мусбат бўлмаган сонга тенг; E) манфий сонга тенг.

5. Қутида 3 та оқ ва 12 та қизил шар бор. Қутидан битта шар олинди. Олинган шарнинг қизил рангли бўлиш эҳтимолини топинг:
A) 0,7; Г) 0,2; C) 0,8; D) 0,75; E) 0,4.

6. Қутида 3 та оқ ва 12 та қизил шар бор. Қутидан битта шар олинди. Олинган шарнинг оқ рангли бўлиш эҳтимолини топинг:
A) 0,7; Г) 0,2; C) 0,8; D) 0,75; E) 0,4.

7. Қутида 9 та сариқ, 9 та оқ ва ва 12 та қизил шар бор. Қутидан битта шар олинди.Олинган шарнинг оқ рангли бўлиш эҳтимолини топинг:
A) 0,7; Г) 0,2; C) 0,8; D) 0,75; E) 0,4.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

8. Танга билан ўйин соққаси ташланганда танганинг “герб” томони ва ўйин соққасининг 12 сонининг бўлувчиси бўладиган “сон” томони билан тушиш эҳтимолини топинг:

A) $\frac{5}{6}$; Г) $\frac{5}{6}$; C) 1; D) 0,75; E) 0,5.

9. Ўйин соққаси икки марта ташланди. Биринчи марта беш сони, иккинчи марта жуфт сон тушиши эҳтимолини топинг:

A) $\frac{7}{6}$; Г) $\frac{1}{12}$; C) 1; D) 0,75; E) 0,5.

Математик саводхонликка доир топшириқлар

10. Инфузория содда жонвори иккига бўлиниш орқали кўпаяди. Агар тўрт марта бўлингандан кейин уларнинг сони 96 га тенг бўлса, у ҳолда дастлаб қанча инфузория бўлган:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

11. 2 кг олма ва 5 кг нок 3100 тг туради. 20 кг нок билан 8 кг олма қанча туради:

A) 12 000 тг; B) 9300 тг; C) 12 400 тг; D) 15 500 тг; E) 16 000 тг?

12. 165; 175; 385 сонлардан қайсиларини уч сонидан катта турли хил туб сонларнинг кўпайтмаси кўринишида ёзиш мумкин:

A) 165; 175; Г) 175; 385; C) 165; D) 175; E) 385?

13. Агар рақамлар такрорланадиган бўлса, 6; 9; 0 рақамлардан нечта икки хонали сон ҳосил мумкин:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

14. Квадрат периметри 5 см бўлган бир хил тўртта квадратга бўлинган. Берилган квадратнинг периметри кичик квадрат периметридан неча фоиз ортиқ:

A) 20%; B) 100%; C) 25%; D) 50%; E) 150%?

15. Синфдаги 5 та ўқувчининг исми “А” ҳарфи билан бошланади. Агар синфда 35 та ўқувчи бўлса, у ҳолда тахтага чиққан ўқувчининг исми “А” ҳарфи билан бошланмаслиги эҳтимолини топинг:

A) $\frac{7}{6}$; Г) $\frac{6}{7}$; C) 1; D) $\frac{1}{7}$; E) 0,5.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

5 ҲОСИЛА

12-§. ФУНКЦИЯНИНГ НУҚТАДАГИ ЛИМИТИ. ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

Таянч тушунчалар

Функция, функциянинг лимити, функциянинг узлуксизлиги, узилиш нуқтаси

Сиз функциянинг нуқтадаги лимити, функциянинг узлуксизлиги ва узилиш нуқталари, узлуксиз функция ва унинг хоссалари билан танишасиз;

функциянинг лимитини топиш, уни узлуксизликка текширишга доир масалаларечишни ўрганасиз.

Математик анализда функционал боғланиш тушунчаси каби функциянинг лимити ҳам муҳим тушунчаларга тааллуқли.

МИСОЛ

1. $y = f(x)$ функциянинг x нуқтаси 2 га интилгандаги ($x \to 2$) лимитини топамиз: а) $f(x) = 1 + x^2$; б) $f(x) = \frac{x+2}{x}$.

Ечилиши. $x = 2$ нуқта функциянинг аниқланиши соҳасига тегишли бўлгани учун, унинг $x = 2$ нуқтадаги лимитини топиш учун функциянинг шу нуқтадаги қийматини топамиз: а) $f(2) = 1 + 2^2 = 5$; б) $f(2) = \frac{2+2}{2} = 2$.

Шундай қилиб, x аргумент интилган сон $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлса, унинг шу нуқтадаги қиймати функциянинг лимити бўлиб ҳисобланади.

Ушбу мулоҳазани қуйидагича ёзиш мумкин:

агар $x \to x_0$ бўлса, у ҳолда $f(x) \to f(x_0)$.

Функциянинг лимитини унинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлмаган нуқталарда топиш керак бўлган ҳоллар ҳам учрайди. Мазкур ҳолда $x \to x_0$, $f(x) \to a$, бунда a — ҳақиқий сон.

a сони топилмаслиги ҳам мумкин, у ҳолда функциянинг $x = x_0$ нуқтада лимити мавжуд эмас дейилади.

$f(x_0)$ ва a қийматлар x_0 нуқтадаги *функциянинг лимити* дейилади.

Агар x аргумент a сонига (ўнг томондан ёки чап томондан) интилганда $f(x)$ функциянинг қиймати b сонига интилса, у ҳолда b сони $f(x)$ функциянинг x аргумент a сонига интилгандаги (a нуқтадаги) ***лимити*** *деб аталади.*

Олдиндан берилган исталган $\varepsilon > 0$ сони учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сони топилиб, ўзгарувчи x нинг $|x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун $|f(x) - b| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сони $f(x)$ функциянинг x аргументи a сонига интилгандаги (a нуқтадаги) ***лимити*** *деб аталади.*

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

2. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ функциянинг $x \to 2$ нуқтага интилгандаги лимитини топамиз.

Ечилиши. $x = 2$ нуқта функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли эмас. Бундан $x \to 2$ интилганда функциянинг лимитини топиш учун уларни шакл алмаштирамиз:

а) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$, бундан $f(2) = 2 + 2 = 4$.

ТУШУНТИРИНГ

$x \to 2$ интилганда функциянинг лимити қандай топилган?

$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2}$, $f(2) = \frac{2 + 3}{2 + 2} = \frac{5}{4}$.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада аниқланган ва $x \to x_0$ интилганда функциянинг лимити x_0 нуқтадаги қийматига тенг бўлса, у ҳолда функция ***x_0 нуқтада узлуксиз функция*** *деб аталади.*

Таърифдаги x_0 нуқта функциянинг *узлуксизлик нуқтаси* деб аталади.

Узлуксиз функция таърифидан келиб чиқадиган учта ҳолга тўхталиб ўтамиз:

1) $f(x)$ функция x_0 нуқтада аниқланган бўлади;

2) x_0 нуқтада функциянинг лимити мавжуд бўлиши керак;

3) функциянинг лимити x_0 нуқтадаги қийматига тенг, яъни $x \to x_0$ интилганда $f(x) \to f(x_0)$.

Агар ушбу шартлардан бири бажарилмаса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узилишга эга бўлади. Бу ҳолда x_0 нуқта функциянинг ***узилиш нуқтаси*** *деб аталади.*

Агар $y = f(x)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда унинг графиги силлиқ эгри чизиқдан иборат бўлади.

Нуқтада узлуксиз функцияларнинг хоссалари:

Агар $f(x)$ ва $\phi(x)$ функциялар x_0 нуқтада узлуксиз функциялар бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси $f(x) + \phi(x)$, кўпайтмаси $f(x) \cdot \phi(x)$ ва бўлинмаси $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\phi(x_0) \neq 0)$ x_0 нуқтада узлуксиз функциялар бўлади.

Агар $f(x)$ функция X тўпламнинг исталган нуқтасида узлуксиз бўлса, у ўша X тўплам (кесма) да ***узлуксиз функция*** *деб аталади.*

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Кесмадаги узлуксиз функцияларнинг хоссалари:

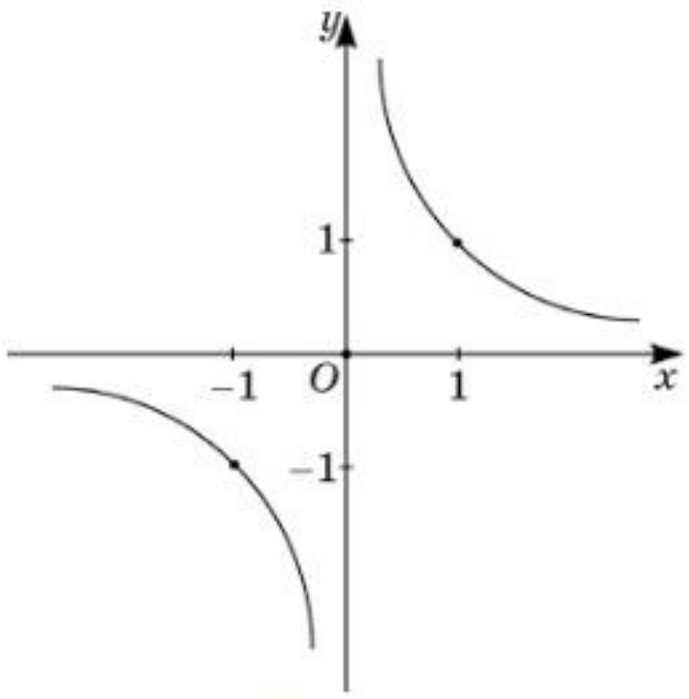
1) *агар* $[a; b]$ *кесмада функция узлуксиз ва нолга айланмайдиган бўлса, у ўша интервалда ўзгармас ишорасини сақлайди;*

2) *агар* $y = f(x)$ *функция* $x \in [a; b]$ *кесмада узлуксиз функция бўлса, у ҳолда: а) ушбу кесмада чегараланган функция бўлади; б) ушбу кесмада функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларини қабул қилади, яъни* $m \le f(x) \le M$, *бунда* m — *функциянинг энг кичик,* M — *функциянинг энг катта қиймати;*

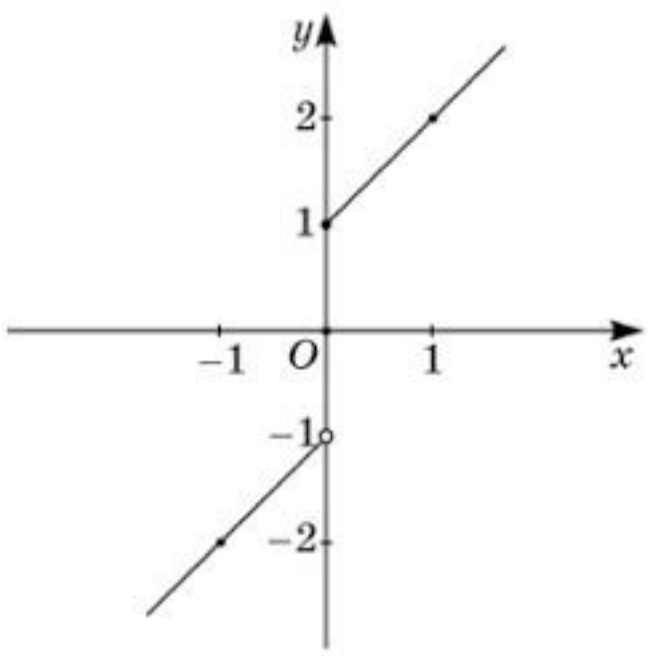
3) *агар* $y = f(x)$ *функция* $x \in [a; b]$ *кесмада узлуксиз функция бўлса ва унинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматлар қабул қилса, у ҳолда* $[a; b]$ *кесма ичида функция ҳеч бўлмаганда битта нуқтада нолга айланади.*

МИСОЛ

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ функцияни оламиз. Бу функция сизга маълум бўлган тескари пропорционал боғланиш. Функциянинг аниқланиш соҳаси нолдан фарқли барча ҳақиқий сонлар тўплами. Демак, $x = 0$ нуқта функциянинг узилиш нуқтаси, яъни функция –узилишга эга функция. Буни функциянинг графигидан кўриш мумкин (48-расм).



48-расм



49-расм

МИСОЛ

4. $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ агар } x \geq 0, \\ x - 1, \text{ агар } x < 0 \end{cases}$ функциянинг графигини ясаб, $x = 0$ нуқтада функциянинг узлуксиз эмаслигини аниқлаймиз.

Ечилиши. Функция иккита формула билан берилган: $g(x) = x + 1, x \geq 0$ ва $\phi(x) = x - 1$, $x < 0$. Ушбу иккала функциянинг графиги ҳам тўғри чизиқдан иборат. Шунинг учун $g(x) = x + 1$ функция учун $x \geq 0$, $\phi(x) = x - 1$, $x < 0$ бўлганда эса иккита нуқтанинг координатасини топамиз. Бунда биринчи ҳолда (0; 1), (1; 2) ва иккинчи ҳолда (–1; –2), (–0,5; –1,5) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқларни ясаймиз (49-расм). Расмдан берилган функциянинг графиги силлиқ эгри чизиқ эмаслиги кўриниб турибди. Демак, $x = 0$ нуқтада функция узилишга эга.

1. Функциянинг нуқтадаги лимити билан нуқтадаги узлуксизлиги орасида фарқ борми?
2. Агар x_0 нуқтада $f(x)$ функция узилишга эга бўлса, шу нуқтада функциянинг лимити мавжуд эмас деган хулоса тўғрими? Жавобингизни тушунтиринг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3. Агар x_0 нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз, $g(x)$ функция узилишга эга бўлса, у ҳолда улар йиғиндисининг, кўпайтмасининг, бўлинмасининг шу нуқтадаги узлуксизлиги ҳақида нима айтиш мумкин?

Машқлар

А

12.1. $y = f(x)$ функциянинг $x \to x_0$ интилгандаги лимитини топинг:

а) $f(x) = 3x + 2,\ x \to 2$; б) $f(x) = 4x^3 - 3x,\ x \to -1$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3},\ x \to -3$; г) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4},\ x \to 2$.

12.2. а) $f(x) = 4x - 5$; б) $f(x) = 5x - 2$ функциянинг $x_0 = -2$; $x_0 = -0{,}5$ нуқталардаги лимитини топинг.

12.3. $y = f(x)$ функциянинг графигини ясаб, унинг x_0 нуқтадаги узлуксизлигини аниқлаш:

а) $y = \begin{cases} x, \text{ агар } x \geq 0, \\ x+1, \text{ агар } x < 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$; б) $y = \begin{cases} x+1, \text{ агар } x \geq 0, \\ -x, \text{ агар } x < 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

12.4. $y = f(x)$ функцияни узлуксизликка текширинг:

а) $y = \dfrac{6}{x - 3}$; б) $y = \dfrac{x}{2{,}5 + x}$; в) $y = \dfrac{5}{x(x + 1)}$; г) $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

12.5. $y = f(x)$ функцияни узлуксизликка текширинг:

а) $y = \dfrac{5}{\cos x}$; б) $y = -\dfrac{2}{\sin x}$.

В

12.6. $y = f(x)$ функциянинг $x \to x_0$ интилгандаги лимитини топинг:

а) $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{x - 2},\ x \to 2$; б) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x + 1},\ x \to -1$;

в) $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3},\ x \to 3$; г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^4 - 16},\ x \to 2$;

д) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4},\ x \to 1$; е) $f(x) =$ [illegible] $,\ x \to -\dfrac{2}{3}$;

ё) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4},\ x \to 4$; ж) $f(x) = \dfrac{4x - x^3}{2x^2 + 3x - 2},\ x \to -2$.

12.7. Функциянинг графигини ясаб, узилиш нуқтасини топинг:

а) $f(x) = \begin{cases} -3, \text{ агар } x < 0, \\ x, \text{ агар } x \geq 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ агар } x < 0, \\ x^2 + 2, \text{ агар } x \geq 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ агар } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ x - 4, \text{ агар } x \geq 0; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, \text{ агар } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{4}, \\ x - \dfrac{\pi}{4}, \text{ агар } x \geq \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

12.8. $y = f(x)$ функцияни узлуксизликка текширинг:

а) $y = \frac{25}{3x^2 + 25}$; б) $y = \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$; в) $y = \frac{4x}{x^2 + x}$; г) $y = \frac{x}{1 - \cos x}$.

12.9. Сонлар ўқининг исталган нуқтасида: а) $x = 0$ нуқтадан бошқа нуқталарда; б) $x = 0$ ва $x = 1$ нуқталардан бошқа нуқталарда узлуксиз бўладиган функцияга мисол келтиринг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Аргумент, функция, функциянинг аниқланиш соҳаси, функциянинг нуқтадаги лимити, нуқтадаги узлуксизлиги.

13-§. ҲОСИЛАНИНГ ТАЪРИФИ

Таянч тушунчалар

Функция, ҳосила, орттирма, дифференциал

Сиз ҳосиланинг таърифини биласиз, энди ҳосиланинг таърифидан фойдаланиб, ҳосилани топишни ўрганасиз.

Функциядан содда ҳаракатлар, ҳодисалар ва жараёнларнинг математик модели сифатида кўриб чиқиш мақсадида фойдаланилади.

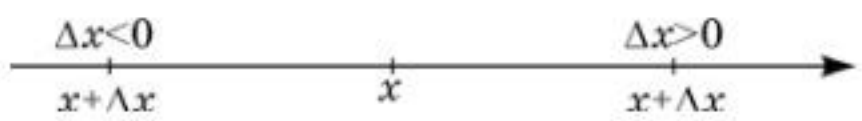
Дастлаб аргумент ва функция орттирмалари тушунчаларини аниқлаб оламиз.

Узлуксиз $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Аргументнинг x_1 ва x_2 қийматлари функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган бўлсин.

*$x_2 - x_1$ айирма **аргументнинг x_1 нуқтадаги орттирмаси** дейилади.*

Орттирма Δx орқали белгиланиб, **"дельта икс"** деб ўқилади.

Функциянинг аргументи x га Δx орттирма берайлик. Δx орттирмани қабул қилгандан кейин аргументнинг қиймати $x + \Delta x$ бўлади. Орттирманинг ишораси мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин. Агар $\Delta x > 0$ бўлса, у ҳолда $x + \Delta x$ нуқта x нуқтанинг ўнг томонида, $\Delta x < 0$ бўлса, у ҳолда $x + \Delta x$ нуқта x нуқтанинг чап томонида жойлашади (50-расм).



50-расм

Шундай қилиб, аргумент орттирмасини

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x \qquad (1)$$

тенглик орқали ифодалаш мумкин.

Демак, аргумент орттирмаси унинг иккита нуқтадаги қийматларининг айирмасига тенг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Аргумент x га Δx орттирма берганда $y = f(x)$ функция ҳам орттирма қабул қилади. Бу функциянинг орттирмаси Δy каби белгиланиб,

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y$$

ёки

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (2)$$

тенглик билан аниқланади.

У ҳолда функция орттирмаси функциянинг иккита нуқтадаги қийматлари айирмасига тенг.

МИСОЛ

1. $y = x^3$ функциянинг аргументи x қийматдан $x + \Delta x$ қийматга алмашгандаги орттирмасини топамиз.

Ечилиши. $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3$.

Шундай қилиб, $\Delta y = (3x^2 + 3x\,\Delta x + \Delta x^2)\Delta x$.

Функция ҳосиласининг таърифини берамиз. Бунинг учун функция орттирмасини аргумент орттирмасига бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *ифоданинг аргумент орттирмаси* $\Delta x \to 0$ *интилгандаги лимити мавжуд бўлса, у ҳолда бу лимит* ***y = f(x) функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи*** *дейилади.*

Ҳосиланинг белгиланиши: $y' = f'(x)$.

$\Delta x \to 0$ интилганда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$ ёки $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f'(x)$. (4)

Ўқилиши: $f'(x)$ — "x дан эф штрих".

Функциянинг ҳосиласини топиш амали *функцияни дифференциаллаш* дейилади.

x нуқтада функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлса, f(x) функция шу ***нуқтада дифференциалланувчи функция*** *дейилади. Агар функция оралиқнинг барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ўша* ***оралиқда дифференциалланувчи функция*** *дейилади.*

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шу нуқтада функция узлуксиз бўлади. Тескари мулоҳаза барча ҳолларда тўғри бўлавермайди.

АЛГОРИТМ

Таърифга кўра ҳосилани топиш алгоритми:

1) аргументга Δx орттирма бериш;

2) Δx орттирмага мос $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ функция орттирмасини топиш;

3) функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатини топиш, яъни $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

4) аргумент орттирмаси Δx нолга интилгандаги нисбатининг лимитини, яъни $\Delta x \to 0$ бўлганда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қийматни топиш.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Алгоритмдан фойдаланиб, ҳосилани топишга доир мисоллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ **2.** а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \sqrt{x}$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласини топамиз.

Ечилиши: а) $f(x) = x^2$ функциянинг ҳосиласини топамиз. Алгоритм бўйича:

1) $x + \Delta x$;

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

4) $\Delta x \to 0$ ҳолда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x$, у ҳолда $f'(x) = 2x$, яъни $(x^2)' = 2x$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ функциянинг ҳосиласини топамиз. Алгоритм бўйича:

1) $x + \Delta x$;

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} =$

$= \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} : \Delta x = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$;

4) $\Delta x \to 0$ ҳолда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$, у ҳолда $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, яъни $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$ функциянинг ҳосиласини топамиз. Алгоритм бўйича:

1) $x + \Delta x$;

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)} : \Delta x = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$;

4) $\Delta x \to 0$ ҳолда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\frac{1}{x^2}$, у ҳолда, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, яъни $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Ушбу кўриб чиқилган мисоллардан қуйидаги хулосага келамиз:

$(x^2)' = 2x$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Жавоби: а) $2x$; б) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $-\frac{1}{x^2}$.

Худди шундай $f(x) = C$ (C — ўзгармас) ва $f(x) = x$ функцияларнинг ҳосилалари мос равишда $C' = 0$, $(x)' = 1$ бўлади.

1. Аргумент ва функциянинг орттирмалари орасида қандай боғланиш бор? Жавобингизни тушунтиринг.
2. Функциянинг нуқтадаги ва оралиқдаги дифференциалланиши деган тушунчаларнинг фарқи нимада?
3. Функциянинг нуқтадаги дифференциалланиши билан узлуксизлиги орасидаги боғланишни қандай тушунтириш мумкин?

Машқлар

А

13.1. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмасини топинг:

а) $f(x) = 1 + 2x$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}01$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

б) $f(x) = -5x + 1{,}6$, $x_0 = -5$, $\Delta x = -0{,}1$;
в) $f(x) = 3x^2 - 1$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
г) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -3$, $\Delta x = -0{,}3$.

13.2. а) Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 5 см ва 12 см. Унинг энини 0,8 см, бўйини 0,6 см орттиргандаги тўғри тўртбурчакнинг периметри ва юзининг орттирмасини топинг. б) Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 3 см, 4 см. Агар катетлари мос равишда 0,4 см ва 0,2 см орттирилса, унинг юзининг орттирмаси қандай бўлади?

13.3. Функциянинг x_0 нуқтадаги Δx ва Δf орттирмаларини топинг:
а) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{3}$;
б) $f(x) = \mathrm{tg}x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{4}$.

В

13.4. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмасини Δx ва x_0 орқали ифодаланг:
а) $f(x) = x^2 + x$; б) $f(x) = 2x^2 - x$.

13.5. Алгоритмдан фойдаланиб, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласини топинг:
а) $f(x) = 3x^2 + 1$, $x_0 = -2$; б) $f(x) = x^2 - 2$, $x_0 = -1$.

13.6. Функциянинг x_0 нуқтадаги Δx ва Δf орттирмаларини топинг:
а) $f(x) = \frac{1}{2} + \sin x$; $x_0 = \frac{3\pi}{4}$; $x = \frac{2\pi}{3}$;
б) $f(x) = \mathrm{ctg}\, x - \sqrt{3}$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{\pi}{3}$.

13.7. Функциянинг аргументи Δx орттирма қабул қилганда x_1 га тенг. Функциянинг орттирмасини топинг:
а) $f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta x = 0{,}29$, $x_1 = 2{,}25$;
б) $f(x) = \sqrt{x}$, $\Delta x = 0{,}25$, $x_1 = 1{,}69$.

13.8. Бир мамлакат аҳолиси сони t вақтда $f(t)$ га тенг. t_0 дан $t_0 + \Delta t$ гача бўлган ораликдаги функция орттирмасининг маъноси қандай бўлади?

13.9. Айрининг чап томондаги четидан x масофа жойлашган нуқтанинг ҳарорати $f(x)$ га тенг. x_0 нуқта $x_0 + \Delta x$ нуқтага алмашганда $f(x)$ функция орттирмасининг физик маъноси қандай бўлади?

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг лимити, аргументнинг ва функциянинг орттирмаси, ҳосила, даражали функция.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

14-§ ҲОСИЛАНИ ҲИСОБЛАШ ҚОИДАЛАРИ

Таянч тушунчалар

Функция, ҳосила, ҳосилани топиш қоидалари

Сиз ҳосилани топиш қоидалари ва даражали функция ҳосиласини топиш формулалари билан танишасиз;

қоидалардан фойдаланиб ҳосилани топишни ўрганасиз.

$u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг x нуқтадаги қийматларини қисқача бундай белгилайлик: $u(x) = u$, $v(x) = v$, $u'(x) = u'$, $v'(x) = v'$.

1-қоида. *Агар x нуқтада u ва v функцияларнинг u', v' ҳосилалари мавжуд бўлса, у ҳолда шу нуқтада улар йиғиндиларининг ҳам ҳосиласи мавжуд бўлади ва у*

$$(u + v)' = u' + v' \qquad (1)$$

формула билан аниқланади.

Исботи. Исботлаш учун ҳосиланинг таърифи ва ҳосилани топиш алгоритмидан фойдаланамиз.

Бунинг учун иккита функциянинг йиғиндиси $u(x) + v(x) = F(x)$ функцияни оламиз ва аргумент x га Δx орттирма берамиз. Бунда $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = u(x + \Delta x) - u(x) + v(x + \Delta x) - v(x)$ оламиз.

Функциянинг орттирмасини аргумент орттирмаси Δx га бўлсак,

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Энди $\Delta x \to 0$ функция лимитини топамиз ва ҳосиланинг таърифига кўра $F'(x) = u' + v'$ ни оламиз. Бунда $(u + v)' = u' + v'$.

2-қоида. *Агар x нуқтада u ва v функцияларнинг u', v' ҳосилалари мавжуд бўлса, у ҳолда шу нуқтада улар айирмасининг ҳам ҳосиласи мавжуд бўлади ва у*

$$(u - v)' = u' - v' \qquad (2)$$

формула билан аниқланади.

(2) формуланинг исботини мустақил кўриб чиқинг.

МИСОЛ

1. $f(x) = x^2 - x + 5$ функциянинг ҳосиласини топамиз.

Ечилиши. $f'(x) = (x^2 - x + 5)' = (x^2)' - (x)' + (5)' = 2x - 1 + 0 = 2x - 1.$

Жавоби: $2x - 1$.

ТУШУНТИРИНГ

$(10 + x - x^2)' = 1 - 2x$ функциянинг ҳосиласи қандай топилган?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

3-қоида. *Агар x нуқтада u ва v функцияларнинг ҳосилалари мавжуд бўлса, у ҳолда шу нуқтада улар кўпайтмасининг ҳам ҳосиласи мавжуд бўлади ва у*

$$(u \cdot v)' = u'v - v'u \qquad (3)$$

формула орқали аниқланади.

Натижа. *Агар v функциянинг x нуқтада ҳосиласи мавжуд бўлиб, C ўзгармас сон бўлса, Cv функциянинг ҳам ўша x нуқтада ҳосиласи мавжуд ва у*

$$(Cv)' = C \cdot v' \qquad (4)$$

формула билан аниқланади.

(4) формулани учинчи қоидадан фойдаланибисботланг.

МИСОЛ

2. $y = 15x^2$ функциянинг ҳосиласини топамиз.

Ечилиши: Бунда $C = 15$, $v = x^2$, демак, (4) формуладан фойдаланамиз:

$$y' = (15x^2)' = 15 \cdot (x^2)' = 15 \cdot 2x = 30x\ .$$

Жавоби: $30x$.

ТУШУНТИРИНГ

$y = 6x^2 - 3x + 1$ функциянинг ҳосиласи $12x - 3$ бўлишини тушунтиринг.

4-қоида. *Агар x нуқтада u ва v функцияларнинг ҳосилалари мавжуд бўлиб ва* $v \neq 0$ *бўлса, у ҳолда ўша нуқтада уларнинг бўлинмаси ҳам ҳосилага эга бўлади ва у*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (5)$$

формула орқали аниқланади.

МИСОЛ

3. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ функциянинг ҳосиласини топамиз.

Ечилиши: $y' = \left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x^2)' \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Жавоби: $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

1 дан катта исталган $n \in N$ учун $y = x^n$ даражали функциянинг ҳосиласи

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (6)$$

формула билан ҳисобланади.

МИСОЛ **4.** а) $y = x^6$; б) $y = 5x^4 + x^9$; в) $y = \frac{1}{2}x^8 - \frac{3}{x^7}$ функцияларнинг ҳосиласини топамиз.

Ечилиши. а) $y' = (x^6)' = 6 \cdot x^{6-1} = 6x^5$;

б) $y' = (5x^4 + x^9)' = 5(x^4)' + (x^9)' = 5 \cdot 4x^3 + 9x^8 = 20x^3 + 9x^8$;

в) $y' = \left(\frac{1}{2}x^8 - \frac{3}{x^7}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (x^8)' - 3 \cdot (x^{-7})' = \frac{1}{2} \cdot 8x^7 - 3 \cdot (-7) \cdot x^{-7-1} = 4x^7 + \frac{21}{x^8}$.

Жавоби: а) $6x^5$; б) $20x^3 + 9x^8$; в) $4x^7 + \frac{21}{x^8}$.

1. Қўшилувчилари сони иккитадан ортиқ бўлган ҳосилани қандай топиш мумкин?
2. Бўлинманинг ҳосиласини ҳисоблаганда қандай шарт бажарилиши керак?
3. Бўлинманинг ҳосиласини иккита функция кўпайтмасининг ҳосиласи каби қараш мумкинми?

Машқлар

А

14.1. Функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4$; б) $f(x) = 4x^8 + \sqrt{x}$;

в) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^4$; г) $f(x) = 4x^6 + 7x^5 + 1$;

д) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x - 4$; е) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$;

ё) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2$; ж) $f(x) = -5x^2 + x + 1$.

14.2. $f'(x) = 0$ тенгламани ечинг:

а) $f(x) = 4x^2 + 2x$; б) $f(x) = 3x^2 - 4x$;

в) $f(x) = x^2 + x - 1$; г) $f(x) = -0{,}5x^2 - 4x + 0{,}1$.

14.3. $y = f(x)$ функцияларнинг x_0 нуқтадаги ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = x^2(x - 1)$, $x_0 = -1$; б) $f(x) = \frac{2x+1}{x}$, $x_0 = -1$;

в) $f(x) = 3x(x + 1)$, $x_0 = -\frac{2}{3}$; г) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x_0 = 1$.

14.4. $f'(x) > 0$ тенгсизликни ечинг:

а) $f(x) = 18x^2 - 7x + 1$; б) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + 2$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

в) $f(x) = 1 + 3x - x^2$; г) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{6}{7}$.

14.5. Функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = (x + 5)(x - 4)$;

б) $f(x) = \sqrt{2}\,x^2 - (3x - 2)(5x + 1)$;

в) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$; г) $f(x) = \frac{3x - x^2}{x + 2}$.

В

14.6. Функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{3 + x^2}$; б) $f(x) = \frac{16 - x^4}{x^2 + 4}$;

в) $f(x) = \frac{3x^3 - 1}{x^3}$; г) $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$.

14.7. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи қийматини топинг:

а) $f(x) = 4x^4 - 5x^2$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 1$, $x_0 = -2$.

14.8. $y = f(x)$ функциянинг $x = -1$ нуқтадаги ҳосиласи қийматини топинг:

а) $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$; б) $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$;

в) $f(x) = \frac{3}{2x + 2}$; г) $f(x) = \frac{x + 4}{2x - 1}$.

14.9. $f'(x) = 0$ тенгламани ечинг:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

б) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$.

14.10. $f'(x) > 0$ тенгсизликни ечинг:

а) $f(x) = 12x^3 + 18x^2 - 7$;

б) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$.

14.11. $f'(x)$ m 0 тенгсизликни ечинг:

а) $f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 4x + 2$;

б) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 0{,}5x^2 + 2x$.

14.12. Агар $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ ва $g(x) = x^4 - 3x^3 - 3x$ бўлса, у ҳолда $f'(0)$ ва $g'(0)$ қийматларни таққосланг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг графиги, функция ва аргументнинг орттирмаси, ҳосила, уринма, ҳосилани топиш қоидалари.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

15-§. ҲОСИЛАНИНГ ФИЗИК ВА ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ. ФУНКЦИЯ ГРАФИГИГА ЎТКАЗИЛГАН УРИНМА ТЕНГЛАМАСИ

Таянч тушунчалар

Функция, ҳосила, функциянинг графиги, уринма

Сиз ҳосиланинг физик ва геометрик маъносини биласиз; уринма тенгламасибилан танишасиз, уринманинг физик ва геометрик маъносидан фойдаланиб, масалаларечишни ўрганасиз.

Ҳосиланинг физик маъноси

Тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи физик жисмнинг t вақт ичида босиб ўтган йўли $s(t)$ функция орқали берилган бўлсин. Ҳаракатдаги жисмнинг $t + \Delta t$ вақт ўтгандан кейинги йўли $s\,(t + \Delta t)$ функция орқали аниқланади. Вақт t дан $t + \Delta t$ катталикка ўзгарганда йўл катталиги

$$s(t + \Delta t) - s(t)$$

айирмага тенг. Энди шу айирмани Δt вақтга бўлсак, ҳаракатланаётган жисмнинг ўртача тезлиги ҳосил бўлади:

$$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}, \text{ ёки } v_{ўрт} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Охирги ифодадан Δt нолга интилгандаги лимитга ўтсак, ўртача тезлик t вақтдаги тезликка интилади $v_{ўрт} \to v(t)$ ёки

$$v\,(t) = s'(t) \qquad (1)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Бунда $s(t)$ — ҳаракатдаги жисмнинг t вақт ичида босиб ўтган йўли, $v(t) = s'(t)$ — ҳаракатдаги жисмнинг t вақтдаги *оний тезлиги*.

БУНИ БИЛАСИЗ:

Баландликдан эркин тушган жисмнинг t вақт ичида босиб ўтган йўли $h(t) = g\frac{t^2}{2}$ функция билан аниқланиши физика курсидан маълум.

t вақтда жисмнинг тушиш тезлиги $v\,(t) = h'(t) = \left(g\frac{t^2}{2}\right)' = g\frac{2t}{2} = gt$, яъни $h'(t) = v(t) = gt$, бунда $g = 9{,}81$ м/с^2 — жисмнинг эркин тушиш тезланиши.

Демак, $v(t) = gt$ ифода берилган $h(t) = \frac{g}{2}t^2$ тенгламага мувофиқ ҳаракатланувчи жисм (функция)нинг оний тезлигини беради.

Умуман, $y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи унинг x нуқтадаги ўзгариш тезлигини аниқлайди. Бу ҳосиланинг физик маъносидир.

Агар $v(t)$ тезликдан ҳосила оладиган бўлсак, у ҳолда $v'(t) = (gt)' = g$ ҳосил бўлади. Демак, тезликдан олинган ҳосила тезланишга тенг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

1. Ҳаракатланувчи жисмнинг босиб ўтган йўли $s(t) = t^2 + 2$ формула билан берилган. Шу жисмнинг $t = 5$ с вақтдаги оний тезлигини ва тезланишини топинг.

Ечилиши. Оний тезлик $s(t) = t^2 + 2$ функциянинг $t = 5$ аргумент қийматидаги ҳосиласига тенг: $v(t) = s'(t) = 2t$, $v(5) = 2 \cdot 5 = 10$.

Тезланишни топиш учун оний тезликдан ҳосила оламиз, у ҳолда $a(t) = v'(t) = (2t)' = 2$, $a(5) = 2$.

Жавоби: 10 м/с; 2 м/с².

Ҳосиланинг геометрик маъноси

$y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги $y' = f'(x)$ ҳосиласи мавжуд деб олиб, унинг геометрик маъносини аниқлаймиз. 51-расмда AB эгри чизиқ $y = f(x)$ функциянинг графиги бўлсин. N_0 ва N нуқталар — AB эгри чизиқда ётган нуқталар. Шу иккита нуқта орқали ўтказилган TT' — кесувчи тўғри чизиқ. Ox ўқининг мусбат йўналиши билан TT' тўғри чизиқ орасидаги бурчакни β деб белгилайлик. Ox ўқига параллел N_0E, N нуқтадан Oy ўқига параллел NE тўғри чизиқларни ўтказамиз. Бунда N_0EN тўғри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. $\angle N_0EN = 90^\circ$, $\angle EN_0N = \beta$, $MN_0 = E_1E = f(x_0)$, чунки $N_0(x_0, f(x_0))$ ва $MN_0 \parallel E_1E$.

$$N_0E = \Delta x,\ E_1N = f(x_0 + \Delta x),\ EN = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y.$$

$\frac{EN}{N_0E} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\beta$. AB эгри чизиқдаги N_0 нуқта ўзгармас нуқта бўлсин, N нуқтани эгри чизиқ бўйича силжитганда N_0 нуқта билан устма-уст тушади деб ҳисоблаймиз.

Бунда кесувчи TT' эгри чизиқнинг N_0 нуқтадаги уринмаси, яъни FF' тўғри чизиққа айланади. Кесувчи билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги β бурчак уринма билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги α бурчакка айланади, яъни $\Delta x \to 0$ интилганда $\beta \to \alpha$ (51-расм).

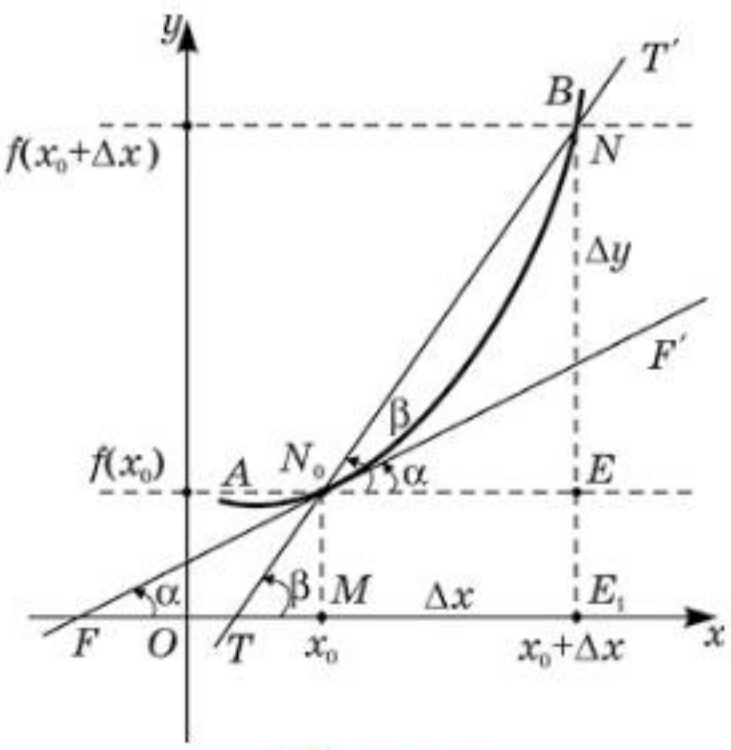
Юқорида айтилганларни қуйидаги тенглама орқали ёзиш мумкин, $\Delta x \to 0$ бўлганда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$. У ҳолда, $\beta \to \alpha$ интилганда $\mathrm{tg}\beta \to \mathrm{tg}\alpha = k$.

Демак, $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(x_0)$ шу функция графигининг $(x_0;\ f(x_0))$ нуқтасидан ўтувчи уринманинг бурчак коэффициентига тенг:

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha = k. \qquad (2)$$

(2) формула ҳосиланинг геометрик маъносини беради.

Ҳосиланинг геометрик маъноси – функция графигига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентидан иборат.



51-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ **2.** $y = x^2$ параболага $N_0(1; 1)$ нуқтада ўтказилган уринма билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчакни топамиз.

Ечилиши. $y = x^2$ функциянинг ҳосиласи $y' = 2x$. (2) формула бўйича $f'(1) = \text{tg}\alpha = 2 \cdot 1 = 2$, уринма билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак $\alpha = \text{arctg}2$.

Жавоби: arctg2.

Функциянинг графигига берилган нуқтада ўтказилган уринма билан Ox ўқи орасидаги бурчак:

а) ўткир бўлса, у ҳолда берилган нуқтадаги ҳосила мусбат;

б) ўтмас бўлса, у ҳолда берилган нуқтадаги ҳосила манфий;

в) нолга тенг бўлса, у ҳолда берилган нуқтадаги ҳосила нолга тенг бўлади.

Берилган нуқтада функция графигига ўтказилган уринма тенгламаси

$y = f(x)$ функция ва унинг графигига тегишли $N_0(x_0; y_0)$ нуқтадаги $f'(x_0)$ ҳосиланинг қиймати берилган бўлсин.

Уринма тўғри чизиқ бўлгани учун, уринма тенгламасини $y = kx + b$ чизиқли функция кўринишида излаштирамиз. Бунда $k = \text{tg}\alpha = f'(x_0)$, жумладан $y = f'(x_0)x_0 + b$. Ушбу тенгламага $N_0(x_0; f(x_0))$ нуқтанинг координаталарини қўямиз: $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, бундан $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Охирги ифодани $y = f'(x_0)x + b$ тенгламага қўйсак, $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ҳосил бўлади.

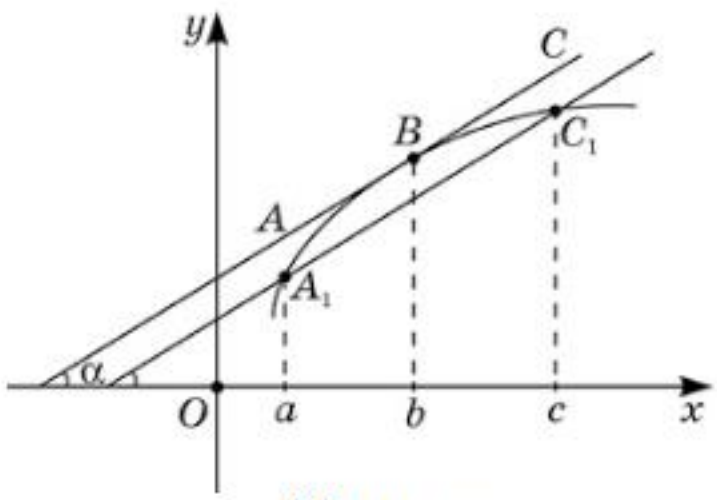
Демак,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (3)$$

(3) тенглама *уринма тенгламаси* бўлиб ҳисобланади.

$A_1(a; f(a))$, $C_1(c; f(c))$ нуқталардан ўтувчи кесувчига параллел бўлган $f(x)$ функция графигига $(a; c)$ интервалдан олинган абсциссаси b га тенг B нуқтада ўтказилган AC уринманинг мавжуд бўлишини тушунтириш учун ҳосиланинг геометрик маъносидан фойдаланамиз.

$y = f(x)$ функциянинг B нуқтасидан ўтувчи AC уринмага параллел A_1C_1 тўғри чизиқ ўтказамиз (52-расм). Бунда α бурчак A_1C_1 кесувчининг оғиш (қиялик) бурчагига тенг бўлади, яъни $f'(b) = \text{tg}\alpha = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.



52-расм

Шундай қилиб, агар $f(x)$ функция $(a; c)$ оралиқда дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда

$$f'(b) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \qquad (4)$$

тенглик бажариладиган $b \in (a; c)$ нуқта топилади.

Бу формула *Лагранж формуласи* деб аталади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

АЛГОРИТМ $f(x)$ функциянинг графигига абсциссаси x_0 га тенг нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзиш алгоритми:

1) x_0 га мос $f(x_0)$ ни топиш;
2) $f(x)$ функциянинг ҳосиласини топиш;
3) x_0 даги ҳосиланинг қиймати $f'(x_0)$ ни топиш;
4) топилган қийматларни (3) формулага қўйиб, уринма тенгламасини ёзиш.

МИСОЛ **3.** $y = x^2 - 2x - 1$ функциянинг абсциссаси $x_0 = 3$ бўлган нуқтадан ўтказилган уринма тенгламасини ёзамиз.

Ечилиши. Уринма тенгламасини ёзиш алгоритмидан фойдаланамиз:

1) $x_0 = 3$, у ҳолда $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 2 - 1 = 2$;
2) $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)' = 2x - 2$;
3) $f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$;
4) Энди топилган қийматларни (2) тенгламага қўямиз: $y = 2 + 4(x - 3) = 2 + 4x - 12 = 4x - 10$. Демак, уринма тенгламаси $y = 4x - 10$ бўлади.

Жавоби: $y = 4x - 10$.

МИСОЛ **4.** $y = 2x^2 - 4x + 5$ параболага (0; 5) ва (2; 5) нуқталардан ўтказилган уринмаларнинг қандай нуқтада кесишишини аниқланг.

Ечилиши. 1) Берилган функция графигининг (0; 5) нуқтасидан ўтказилган уринма тенгламасини ёзамиз.

$x_0 = 0$, $f(0) = 5$;

$f'(x) = (2x^2 - 4x + 5)' = 4x - 4$; $f'(0) = 4 \cdot 0 - 4 = -4$.

Энди топилган қийматларни (2) тенгламага қўямиз: $y = 5 + (-4) \cdot (x - 0) = 5 - 4x$. Демак, графикка (0; 5) нуқтадан ўтказилган уринма тенгламаси $4x + y = 5$ бўлади.

2) Берилган функция графигига (2; 5) нуқтадан ўтказилган уринма тенгламасини ёзамиз. $x_0 = 2$, $f(2) = 5$;

$f'(x) = (2x^2 - 4x + 5)' = 4x - 4$; $f'(2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4$.

Энди топилган қийматларни (3) тенгламага қўямиз. Бунда $y = 5 + 4(x - 2) = 4x - 3$. Демак, (2; 5) нуқтадан ўтказилган уринма тенгламаси $4x - y = 3$ бўлади.

3) Энди уринмаларнинг $4x + y = 5$ ва $4x - y = 3$ тенгламаларидан тенгламалар системасини тузиб ва уни ечиб, $x = 1$ ва $y = 1$ ни ҳосил қиламиз. Демак, уринмаларнинг кесишиш нуқтаси (1; 1).

Жавоби: (1; 1).

1. Ҳосиланинг физик маъноси оний тезликми, ёки ўртача тезлик?
2. Функциянинг исталган нуқтасидан ўтувчи уринма ва ҳосила тушунчаси орасида қандай боғланиш мавжуд?

Машқлар

А

15.1. а) $x(t) = 2t^2 + 3$ қонун бўйича ҳаракатланган жисмнинг $t = 2$ с пайтдаги ҳаракат тезлигини топинг.

б) Нуқта $x(t) = 15t^2 + 6t$ қонун бўйича ҳаракатланади. Исталган t пайтдаги тезликни ҳисоблаш формуласи ёрдамида нуқтанинг $t = 1$ с вақтдаги тезлигини ва тезланишини топинг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

в) жисм $x(t) = t^2 + 4t - 1$ қонун бўйича ҳаракатланади. Ҳаракат бошлангандан 1 с ўтгандан кейинги жисмнинг тезлигини топинг.

15.2. $y = f(x)$ функция графигининг берилган A нуқтасидан ўтувчи уринманинг абсцисса ўқига оғиш бурчаги тангенсини топинг:

а) $f(x) = 2x^2 + 2$, $A(0; 2)$;

б) $f(x) = 3x^2 - 1$, $A(2; 11)$;

в) $f(x) = 4x^2 + 3x$, $A(1; 7)$.

15.3. $y = f(x)$ функция графигига абсциссаси x_0 бўлган нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

а) $f(x) = 4x^2 - 2$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = 3x^2 + 1$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = 1 - 5x^2$, $x_0 = 1$.

15.4. $y = f(x)$ функция графигига берилган A нуқтадан ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$, $A(0; 1)$; б) $f(x) = 3 - x^2$, $A(-1; 2)$.

В

15.5. $y = f(x)$ функция графигига абсциссаси x_0 бўлган нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

а) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5$, $x_0 = -1$; б) $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 3$, $x_0 = 1$.

15.6. Берилган $f(x)$ функция графигига абсциссаси $x = a$ бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг абсцисса ўқига оғиш бурчагининг қийматини топинг:

а) $f(x) = x^2 - 0{,}5x + 1$, $a = 1$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{7}$, $a = 1{,}5$.

15.7. $y = f(x)$ функциянинг графигига $(x_0; f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

а) $f(x) = 3x + 2x^2$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = 4x^2 + x - 1$, $x_0 = 2$.

15.8. $y = f(x)$ функция графигига ўтказилган уринма абсцисса ўқига параллел бўладиган тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг:

а) $y = 2 + x^2$; б) $y = -x^2$;

в) $y = x^2 - 3$; г) $y = x^2 - 2x$.

15.9. $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$ параболага $(-1; 2)$ ва $(2; 0{,}5)$ нуқталардан ўтказилган уринмалар қандай нуқтада кесишади?

15.10. $y = f(x)$ функция графигининг ординаталар ўқи билан кесишиш нуқтасидан ўтувчи уринма тенгламасини ёзинг:

а) $y = -2x + x^2$; б) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

15.11. $y = x + 1$ тўғри чизиққа параллел бўлган $y = 3 - x^2$ функциянинг графигига ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, ҳосила, ҳосилани топиш қоидалари.

16-§. МУРАККАБ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

Таянч тушунчалар

Функция, мураккаб функция, ҳосила

Сиз мураккаб функция ҳосиласини топиш формуласи билан танишасиз;

формуладан фойдаланиб мураккаб функция ҳосиласини топишни ўрганасиз.

ЁДГА ТУШИРАМИЗ!

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ бўлса, у ҳолда $f(g(x))$, $g(f(x))$ функцияларни тузинг.

2) $y = 3 + \sqrt{x}$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ ни ёзинг.

Агар $y = f(u)$ функциянинг u нуқтада, $u = g(x)$ функциянинг x нуқтада ҳосилалари мавжуд бўлса, у ҳолда мураккаб функциянинг x аргументи бўйича ҳосиласи мавжуд ва у ҳосила

$$y' = f'(g(x))\, g'(x) \qquad (1)$$

формула билан аниқланади.

МИСОЛ

1. а) $y = (6x - 13)^5$; б) $y = \sqrt{1 - x^3}$ функциянинг ҳосиласини топамиз.

Ечилиши. а) Бунда $f(u) = u^5$, $u(x) = 6x - 13$. У ҳолда $f'(u) = 5u^4$, $u'(x) = 6$. *Бундан* $y' = 5u^4 u' = 5(6x - 13)^4 \cdot 6 = 30(6x - 13)^4$;

б) Бунда $f(u) =$ ▣ , $u(x) = 1 - x^3$, у ҳолда $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, $u'(x) = -3x^2$;

Бинобарин, $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\, u' = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^3}}(-3x^2) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1 - x^3}}$.

Жавоби: а) $30(6x - 3)^4$; б) $-\frac{3x^2}{2\sqrt{1 - x^3}}$.

ТУШУНТИРИНГ

$(x^5 + 3x - \sqrt{x + 1})' = 5x^4 + 3 - \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$ мураккаб функциянинг ҳосиласи қандай топилган?

1. $y = x^n$, $y = (3x + 5)^n$, $y = \cos x$, $y = \cos(1 + 3x^2)$ функциялар мураккаб функция бўладими?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Машқлар

А

16.1. $y = f(g(x))$ мураккаб функцияни ташкил этувчи f ва g функцияларни топинг:

а) $y = (2x - 1)^2$; б) $y = \sqrt{3x + 2}$; в) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = \mathrm{tg}4x$.

16.2. $y = f(g(x))$, $y = g(f(x))$ мураккаб функцияларни ёзинг:

а) $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2x$; б) $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x + 1$;

в) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 4x - 1$; г) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{2}{x + 1}$.

Функциянинг ҳосиласини топинг **(16.3-16.4)**:

16.3. а) $f(x) = \sqrt{x+15}$; б) $f(x) = \sqrt{7-8x}$;

в) $f(x) = (-x^2 + 5)^3$; г) $f(x) = (-8x^2 + 1)^4$.

16.4. а) $f(x) = 5(3x + x^3 - 4x^4)^3$; б) $f(x) = (4x^2 - x^4)^2$;

б) $f(x) = (3\sqrt{x} - 2x^2 + x^5)^5$; г) $f(x) = (4\sqrt{x} + 6x^2 - 5x)^5$.

В

16.5. $y = f(g(x))$, $y = g(f(x))$ мураккаб функцияларни ёзинг:

а) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{2}{x^3 - 1}$; б) $f(x) = 3x^3 + 2x^2$, $g(x) = \mathrm{tg}x$.

16.6. Функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = (7x^5 - 3x^7)^{17} + (6 - 3x^3)^{13}$;

б) $f(x) = \left(\frac{1}{3} - 9x^3\right)^{27} - \left(\frac{1}{5}x - 9\right)^{30}$;

в) $f(x) = (4 - 5x)^{10} - (5 - 4x)^{20}$;

г) $f(x) = (x^5 - 4x)^{13} + \left(\frac{1}{6} - 9x^6\right)^{14}$.

Функциянинг ҳосиласини топинг **(16.7—16.9)**:

16.7. а) $f(x) = \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)^3$; б) $f(x) = \left(5 - \frac{4}{x}\right)^2$.

16.8. а) $f(x) = \frac{12}{x - \sqrt{x}} - (x - 6)^2$; б) $f(x) = \frac{10}{x + \sqrt{x}} + \left(\sqrt{x} - 1\right)^3$.

16.9. а) $f(x) = \sqrt{1 - 3x^2} + \frac{1}{x^2 + 4}$; б) $f(x) = (8 - 3x^6)^3 - \frac{x^2}{5 - x^2}$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Ҳосила, ҳосиланинг таърифи, ҳосилани топиш қоидалари, мураккаб функциянинг ҳосиласи, тригонометрик функциялар, тригонометрия формулалари.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

17-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОСИЛАЛАРИ

Таянч тушунчалар

Функция, ҳосила, тригонометрик функциялар

Сиз тригонометрик функцияларнинг ҳосиласини топиш формулаларибилан танишасиз;

формулалардан фойдаланиб тригонометрик функцияларнинг ҳосиласини топишни ўрганасиз.

I. $y = \sin x$ функциянинг ҳосиласи.

Аргумент x га Δx орттирма берсак, функция аргументнинг орттирмасига мос орттирма олади, $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} \times$$
$$\times \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Энди функция орттирмасини аргумент орттирмасига бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Охирги тенгликдан аргумент орттирмаси Δx нолга интилгандаги лимитга ўтсак, у ҳолда $y' = 1 \cdot \cos x = \cos x$ оламиз, чунки $\Delta x \to 0$ бўлганда, $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$ ($x \to 0$ бўлганда $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ формула бўйича. Бу формула олий математика курсида кўриб чиқилади), $\Delta x \to 0$ бўлганда $\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \to \cos(x + 0) = \cos x$.

Демак,

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad (1)$$

II. $y = \cos x$ функциянинг ҳосиласи.

Бунинг учун $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ формуладан ва мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш формуласидан фойдаланамиз: $y' = (\cos x)' =$
$= \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\right)' = \ = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)' = -\sin x \cdot 1 = -\sin x.$

Демак,

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad (2)$$

III. $y = \mathrm{ctg}\, x$ функциянинг ҳосиласи.

$\mathrm{ctg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$ эканлиги маълум, демак, учинчи қоидадан фойдаланамиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

$$(\mathrm{ctg}x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

У ҳолда

$$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (3)$$

IV. $y = \mathrm{tg}x$ функциянинг ҳосиласи.

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (4)$$

(4) формулани мустақил исботланг.

Олинган формулаларга мисоллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

1. а) $y = 3\sin x$; б) $y = 7{,}5 - \cos 4x$; в) $y = 2\sin^2 x$; г) $y = \mathrm{ctg}3x - \mathrm{tg}3x$ функциянинг ҳосиласини топамиз.

Ечилиши.

а) $y' = (3\sin x)' = 3\cos x$;

б) $y' = (7{,}5 - \cos 4x)' = (7{,}5)' - (\cos 4x)'(4x)' = 0 - (-\sin 4x) \cdot 4 = 4\sin 4x$;

в) $y' = (2\sin^2 x)' = 2(\sin^2 x)' = 2 \cdot 2\sin x(\sin x)' = 4\sin x\cos x = 2(2\sin x \cos x) = 2\sin 2x$;

г) $y' = (\mathrm{ctg}3x - \mathrm{tg}3x)' = (\mathrm{ctg}3x)' - (\mathrm{tg}3x)' = -\frac{1}{\sin^2 3x} \cdot (3x)' - \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' = -\frac{3}{\sin^2 3x} - \frac{3}{\cos^2 3x} = -\frac{3\left(\cos^2 3x + \sin^2 3x\right)}{\sin^2 3x \cos^2 3x} = -\frac{3}{\frac{1}{4}4\sin^2 3x \cos^2 3x} = -\frac{12}{\sin^2 6x}.$

Жавоби: а) $3\cos x$; б) $4\sin 4x$; в) $2\sin 2x$; г) $-\frac{12}{\sin^2 6x}$.

ЭСЛАБ ҚОЛИНГ!

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;

$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

1. $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг аниқланиш соҳасидаги исталган нуқтада ҳосила мавжуд деб айтиш мумкинми?
2. $y = \mathrm{tg}x$ ва $y = \mathrm{ctg}x$ функцияларнинг аниқланиш соҳасидаги исталган нуқтада ҳосила мавжуд деб айтиш мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.
3. $y = \sin x$ функция ҳосиласи мавжудлигининг геометрик маъносини қандай тушунтирасиз?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Машқлар

А

Функциянинг ҳосиласини топинг **(17.1—17.4)**:

17.1. а) $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$; б) $f(x) = \mathrm{ctg}x - 1$;
в) $f(x) = \mathrm{tg}x + \sin x$; г) $f(x) = 2\cos x - \mathrm{tg}x$.

17.2. а) $f(x) = 2x + 2\mathrm{tg}x$; б) $f(x) = 4x\mathrm{ctg}x$;
в) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $f(x) = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

17.3. а) $f(x) = -\cos 2x + \sin 2x$; б) $f(x) = 3x + \cos 4x$;
в) $f(x) = x^3 - 2\sin 2x$; г) $f(x) = 2\mathrm{tg}2x$.

17.4. а) $f(x) = -3\mathrm{ctg}x - 4x^3$; б) $f(x) = \sin 2x + \mathrm{tg}x$;
в) $f(x) = 4 - \frac{1}{4}\mathrm{tg}x$; г) $f(x) = x^2\,\mathrm{ctg}x$.

17.5. Функция ҳосиласининг берилган нуқтадаги қийматини топинг:
а) $f(x) = \cos x + 1,\ x = \frac{\pi}{6}$; б) $f(x) = \mathrm{tg}x - 2,\ x = \frac{\pi}{3}$;
в) $f(x) = \frac{2\sin x}{3},\ x = \frac{\pi}{3}$; г) $f(x) = \mathrm{ctg}x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}x,\ x = \frac{\pi}{3}$.

17.6. $f'(x) = 0$ тенгламани ечинг:
а) $f(x) = -\sin x - 1$; б) $f(x) = \cos 4x + 1$.

17.7. $f(x)$ функция графигига абсциссаси x_0 бўлган нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:
а) $f(x) = \sin x;\ x_0 = \frac{2\pi}{3}$; б) $f(x) = \mathrm{tg}x;\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

17.8. $f'(x) = 0$ тенгламани ечинг:
а) $f(x) = 3\sin 2x$; б) $f(x) = 4\cos 2x$.

В

Функциянинг ҳосиласини топинг **(17.9—17.11)**:

17.9. а) $f(x) = \cos x \cdot (\cos x - 1)$; б) $f(x) = \mathrm{tg}x\,(\cos x + 2)$;
в) $f(x) = \sin x\,(\mathrm{ctg}x - 1)$; г) $f(x) = (4x - 1) \cdot \sin x$.

17.10. а) $f(x) = \cos^2 x - 1$; б) $f(x) = 3\sin^2 2x + 2x$;
в) $f(x) = (\sin 2x + 1)^2$; г) $f(x) = (\cos 2x + \sin 2x)^3$.

17.11. а) $f(x) = \frac{3x + 4}{\cos x}$; б) $f(x) = \frac{5x - 2}{\sin x}$;
в) $f(x) = \frac{\mathrm{tg}x}{3 + x}$; г) $f(x) = \frac{x - 2}{\mathrm{ctg}x}$.

17.12. $f'(x) = 0$ тенгсизликни ечинг:
а) $f(x) = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{2}x$; б) $f(x) = \sqrt{2}(x - 1) + \cos 2x$.

17.13. $f'(x) > 0$ тенгсизликни ечинг:
а) $f(x) = \cos x + \frac{x}{2}$; б) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

17.14. Функция ҳосиласининг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x}$; б) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + \sin x}$.

17.15. $f(x)$ функция ҳосиласининг $x_0 = 0$ нуқтадаги қийматини топинг:

а) $f(x) = \sin\left(x^2 + x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $f(x) = \frac{4}{3}\operatorname{tg}(x^3 + x)$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг қиймати, катталик, нуқтанинг атрофи, ҳосила, ҳосиланинг қоидалари ва формулалари, уринма тенгламаси, градус ва радиан ўлчовлар.

18-§. ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШЛАР

Таянч тушунчалар

Функция, функциянинг қиймати, тақрибий қиймат, орттирма

Сиз функция қийматини тақрибий ҳисоблаш формулаларибилан танишасиз, функциянинг қийматини тақрибий ҳисоблашни ўрганасиз.

Тақрибий ҳисоблаш формулаларини мисоллар ёрдамида келтирамиз.

МИСОЛ

1. $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^2 - x + 15$ функциянинг $x = 1{,}98$ нуқтадаги қийматини топиш керак.

Ечилиши. 1,98 қиймат $x_0 = 2$ нуқтанинг атрофига тегишли. Функциянинг $f(2) = -11$ қиймати осон топилади. $x_0 = 2$ нуқтанинг атрофида графиги унинг $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ уринмасига яқин жойлашади. Жумладан, $f(1{,}98) \approx y(1{,}98)$.

У ҳолда $f'(x) = 6x^5 - 15x^4 + 4x - 1$, $f'(x_0) = f'(2) = -41$ ва $f(x) \approx y(x) = -11 + (-41) \cdot (-0{,}02) = -10{,}16$.

Калькулятор ёрдамида ҳисоблаганда $f(1{,}98) \approx -10{,}1795$.

Жавоби: $\approx -10{,}1795$.

Умумий ҳолда x_0 нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функция аргументи Δx орттирмасининг нолдан фарқи кичик бўлганда, унинг графиги абсциссаси x_0 га тенг нуқтада унга ўтказилган уринмага яқин жойлашади, яъни жуда кичик Δx катталикда

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (1)$$

Агар x_0 нуқтада $f(x_0)$ ва $f'(x_0)$ қийматни топиш қийин бўлмаса, у ҳолда (1) формула x_0 га жуда яқин бўлган x нуқтадаги $f(x)$ функциянинг тақрибий қийматини топишга имкон беради.

Энди (1) формуладан фойдаланиб,

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x \qquad (2)$$

тақрибий ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз.

$f(x) = \sqrt{x}$ бўлсин. $x_0 = 1$ деб олсак, $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ бўлади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

У ҳолда $f(x_0) = \sqrt{1} = 1$ ва $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, бундан $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}$. У ҳолда (1) формулага кўра $f(x) = \sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$ оламиз.

МИСОЛ

2. а) $\sqrt{0,98}$; б) $\sqrt{25,5}$ қийматларни топамиз.

Ечилиши. а) $\sqrt{0,98} = \sqrt{1+(-0,02)} \approx 1 + \frac{1}{2}(-0,02) = 0,99$;

б) $\sqrt{25,5} = \sqrt{25+0,5} = \sqrt{25(1+0,02)} = 5\sqrt{(1+0,02)} \approx 5(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,02) = 5,05$.

Жавоби: а) 0,99; б) 5,05.

Тақрибий ҳисоблашларнинг умумий формуласи:
$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$, бу ерда n – бутун сон. (3)

Исботи. $f(x) = x^n$ бўлсин. $x_0 = 1$ деб олиб, $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ ҳосил бўлади. У ҳолда $f(x_0) = f(1) = 1$ ва $f'(x) = nx^{n-1}$. Бундан $f'(x_0) = f'(1) = n$.

(1) формулага кўра $f(x) = (1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x$ ҳосил қиламиз.

МИСОЛ

3. $(1,007)^{200}$ қийматни топамиз.

Ечилиши. $(1,007)^{200} = (1 + 0,007)^{200} \approx 1 + 200 \cdot 0,007 = 2,4$.

Жавоби: 2,4.

МИСОЛ

4. $\sin 33^\circ$ ифоданинг қийматини топамиз.

Ечилиши. (1) формулага кўра $\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0)$. Энди градус ўлчовни радиан ўлчовга ўтказамиз.

$33^\circ = 30^\circ + 3^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} \cdot 3^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60}$, бинобарин, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60}$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Бундан $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{60} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{60} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{60}\right) \approx$
$\approx \frac{1}{2} \cdot 1,0907 = 0,5454$.

Жавоби: 0,5454.

1. Тақрибий ҳисоблаш формулаларини олиш қандай формулага асосланган?
2. Тақрибий ҳисоблаш формуласи нима учун бир неча кўринишда берилган? Жавобингизни тушунтиринг.

Машқлар

А

18.1. (1) формула ёрдамида аргументнинг берилган x_1 ва x_2 қийматларига мос $f(x)$ функциянинг қийматини топинг:

а) $f(x) = x^3 + 3x$, $x_1 = 1,998$, $x_2 = 6,002$;
б) $f(x) = x^2 - x^5$, $x_1 = 3,03$, $x_2 = 2,997$;
в) $f(x) = 2x - x^4$, $x_1 = 5,002$, $x_2 = 3,995$;
г) $f(x) = 3x^2 + 2x^3$, $x_1 = 4,996$, $x_2 = 7,02$.

18.2. (2) ва (3) формулалардан фойдаланиб, ифодаларнинг тақрибий қийматларини топинг:

а) $1,003^{100}$; б) $0,996^{16}$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

в) $0{,}997^{40}$; г) $1{,}002^{200}$;
д) $\sqrt{1{,}003}$; е) $\sqrt{1{,}004}$; ё) $\sqrt{4{,}008}$.

В

(1) — (3) формулалардан фойдаланиб, ифодаларнинг тақрибий қийматларини топинг (**18.3-18.4**):

18.3. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0{,}004\right)$; б) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0{,}02\right)$; в) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-0{,}05\right)$.

18.4. а) $\frac{1}{1{,}002^{40}}$; б) $\frac{1}{0{,}015^{50}}$; в) $\frac{1}{0{,}996^{6}}$.

18.5 а) $\sqrt{9{,}27}$; б) $\sqrt{4{,}16}$; в) $\sqrt{16{,}32}$.

18.6. а) $\cos 35^\circ$; б) $\mathrm{tg}46^\circ$; в) $\mathrm{ctg}87^\circ$.

18.7. $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг x_0 нуқтадаги тақрибий қийматларини таққосланг:
а) $f(x)=x^2-4x^5$, $g(x)=x^3-3x^4$, $x_0=3{,}998$;
б) $f(x)=x^5-1$, $g(x)=1-x^4$; $x_0=1{,}999$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $y=3x^3-4x^2$ функциянинг ҳосиласини топинг:
A) $\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3$; B) $9x-9$; C) $9x^2-9x$; D) $9x^2-8x$.

2. $y=x-2$ тўғри чизиқ $y=f(x)$ функциянинг графигига $x_0=-1$ абсциссада уринади. $f(-1)$ ни топинг:
A) -3; B) 2; C) 3; D) -2.

3. $f(x)=-2x^2+8x-3$ функциянинг ҳосиласини топиб, $f'(0)+f'(-1)$ ифоданинг қийматини топинг:
A) -40; B) 20; C) 25; D) -10.

4. $y(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ функциянинг ҳосиласини топинг:
A) $\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; B) $\frac{1}{2\sqrt{(x^2+1)^3}}$; C) $-\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; D) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$.

5. $y=\left(\frac{1}{2}x+5\right)^{10}$ функциянинг ҳосиласини топинг:
A) $10\left(\frac{1}{2}x+5\right)^{11}$; B) $5\left(\frac{1}{2}x+5\right)^{9}$; C) $\left(\frac{1}{2}x-6\right)^{9}$; D) $8\left(\frac{1}{2}x-6\right)^{9}$.

6. $y(x)=\mathrm{ctg}x$ функциянинг $x=\frac{\pi}{6}$ нуқтадаги ҳосиласи қийматини топинг:
A) $\frac{3}{4}$; B) $\frac{4}{3}$; C) -4; D) 4.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

7. $f(x) = 3x^3 - 4x$ функция графигига $M(1; 1)$ нуқтада ўтказилган уринма оғиш бурчагининг тангенсини топинг:

A) $\text{tg}\alpha = 5$; B) $\text{tg}\alpha = 1$; C) $\text{tg}\alpha = 13$; D) $\text{tg}\alpha = -1$.

8. $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)$ функциянинг ҳосиласи нимага тенг:

A) $2x^8$; B) $4x^3$; C) $8x^2$; D) $4x^5$.

9. $y = \sin 3x$ функциянинг ҳосиласини топинг:

A) $\sin 3x$; B) $3\cos 3x$; C) $-\sin 3x$; D) $-3\sin 3x$.

10. $f(x) = (1 - 2x) \cdot (2x + 1)$ функция ҳосиласининг $x = 1$ бўлгандаги қийматини топинг:

A) -8; B) -4; C) 2; D) 0.

11. Абсциссаси $x_0 = -1$ бўлган нуқтада $y = x^4 + x$ функциянинг графигига ўтказилган уринма тенгламасини кўрсатинг:

A) $y = 3x + 3$; B) $y = -3x - 3$; C) $y = 3x + 7$; D) $y = x - 7$.

12. Абсциссаси $x = 1$ бўлган нуқтада $f(x) = \sqrt{x}$ функция графигига уринма ўтказилган. Ординатаси $y = 8{,}5$ бўлган уринма нуқтасининг абсциссасини топинг:

A) 17; B) 19; C) 16; D) 15.

13. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ функциянинг ҳосиласи:

A) $2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; B) $2x^2 + 2\sqrt{x}$; C) $-2x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; D) $2x^2 + \frac{1}{x}$.

14. $f(x) = -2\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ функция ҳосиласининг $x = -\frac{3}{4}\pi$ нуқтадаги қийматини топинг:

A) қийматга эга эмас; B) $-\frac{3}{4}$; C) 2; D) -2.

15. Нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $s = t^3 + 2t^2 - 4$ қонун бўйича ҳаракатланади. $t = 2$ пайтдаги нуқтанинг тезлигини топинг:

A) 10; B) 20; C) 34; D) 16.

16. $f(x) = \frac{1}{\cos 5x}$ функциянинг ҳосиласини топинг:

A) $\frac{5\,\text{tg}\,5x}{\cos 5x}$; B) $\text{tg}5x + 1$; C) $\frac{1}{\text{tg}\,5x}$; D) $-\frac{\sin 5x}{5\cos^2 5x}$.

17. $f(x) = \text{tg}\frac{x}{4}$ функциянинг ҳосиласини топинг:

A) $\frac{4}{\cos^2\frac{x}{4}}$; B) $\frac{4}{\sin^2\frac{x}{4}}$; C) $\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{4}}$; D) $\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}}$.

18. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 10$ функция берилган. $f'(x) = 0$ тенгламани ечинг:

A) $-3; -1$; B) $-3; 1$; C) $3; -1$; D) $2; -3$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

19. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ функция берилган. $f'(x) \mid 0$ тенгламани ечинг:

A) $(-2; 2)$; B) $(-\infty; -2]$; C) $(2; +\infty)$; D) $[2; +\infty)$.

20. $f(x) = \cos 10x \cos 6x + \sin 10x \sin 6x$ функциянинг ҳосиласи нимага тенг:

A) $-4\cos 4x$; B) $-4\sin 4x$; C) $4\sin 4x$; D) $4\cos 4x$.

Математик саводхонликка доир топшириқлар

21. Рақамлар такрорланмасдан 2; 3; 8 рақамлардан нечта уч хонали жуфт сон тузиш мумкин:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

22. Ҳаридор товарни 10% ли чегирма билан олиб 9045 тг тўлади. Товарнинг дастлабки баҳосини топинг:

A) 10 050 тг; B) 10 500 тг; C) 15 000 тг;
D) 10 005 тг; E) 10 550 тг.

23. Агар $x \cdot y = x^3 - y^2$ бўлса, у ҳолда $5 \cdot (4 \cdot 8)$ ифоданинг қийматини топинг:

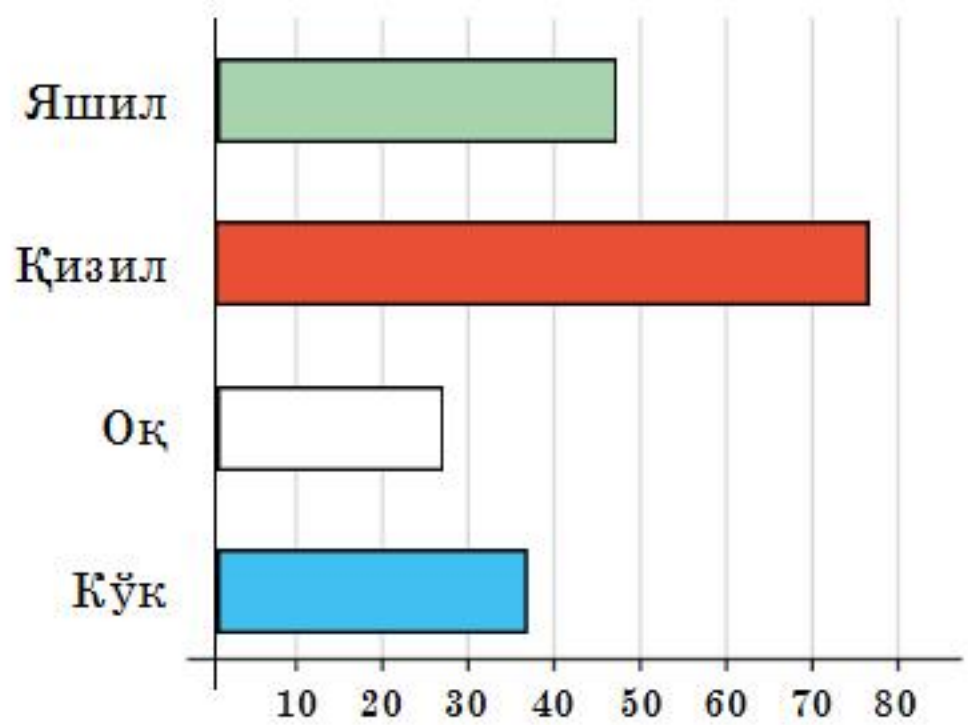
A) −61; B) 253; C) 61; D) −3; E) 125.

24. Қутида 9 та сариқ, 9 та оқ ва 12 та қизил шар бор. Қутидан битта шар олинди. Олинган шарнинг сариқ рангли бўлмаслиги эҳтимолини топинг:

A) 0,7; Г) 0,2; C) 0,8; D) 0,75; E) 0,4.

25. Диаграммада байрам учун сотиб олинган тўрт хил шарнинг сони кўрсатилган (53-расм). Яшил рангли шарлар сони қизил рангли шарлар сонидан неча фоиз кам:

A) 50%; Г) 25%; C) 15%; D) 40%; E) 65%?



53-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ТАРИХИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Дифференциал ҳисоблашларнинг асосий тушунчаси — ҳосила физика, механика ва математика масалаларини, бинобарин, тўғри чизиқли текис ҳаракат тезлиги билан исталган эгри чизиққа уринма ўтказишга доир масалаларни ечиш жараёнида XVII асрда пайдо бўлган. XV—XVII асрларда исталган нуқтага уринма ўтказишнинг умумий усулини топиш масаласи кўпгина математикларни қаттиқ ўйлантирган.

Умумий масалаларни ечишнинг баъзи хусусий ҳоллари қадим замонлардан маълум эди. Масалан, Евклиднинг "Негизлар" асарида айланага уринма ўтказиш усули берилган. Архимед ўз номи билан номланган спиралга уринма ўтказса, Апполоний эса уринмани эллипс, гипербола ва параболага ўтказган. Бироқ, қадимги грек олимлари масалани охиригача ечмаган, яъни маълум бир эгри чизиқнинг исталган нуқтасига уринма ўтказишнинг қулай, умумий усулини топиша олмаган.

XVII асрнинг бошларида баъзи олимлар, жумладан Э.Торричелли, В.Вивиани, Ж.Роберваль, И.Барроу бу саволнинг ечимини кинематик жиҳатдан излаштира бошлади. Алгебраик эгри чизиққа уринма ўтказишнинг биринчи умумий усули Р.Декартнинг "Геометрия" номли асарида кўрсатилди. П.Ферманинг уринмалар ўтказиш усули дифференциал ҳисоблашларни ривожлантиришдаги умумий ва муҳим усул бўлиб ҳисобланади. П.Ферманинг хулосалари ва баъзи натижаларига асосланиб, Г.В.Лейбниц мос алгоритм тузган ва масалани аввалги олимларга қараганда тўлиқроқ ечган.

Ҳозирги пайтда фойдаланилаётган $\frac{dy}{dx}$ ҳосила белгисини Г.В.Лейбниц кўрсатган. Бироқ у асосий тушунчани ҳосила эмас, дифференциал деб берган.

XVIII аср ўрталарида Л.Эйлер ўзгарувчи катталикнинг орттирмаларини белгилаш учун грекча Δ ҳарфидан фойдаланган, яъни $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ ва ҳоказо. Бу белгилаш ҳозирги вақтгача сақланган.

Ҳосиланинг y' ва $f'(x)$ белгилашларини Ж.Л.Лагранж киритган.

Ҳосила тушунчасининг фан ва техникада нечоғли катта аҳамиятга эга эканини кўрсатадиган мисолларни кўп келтириш мумкин. Масалан, тезланиш — вақт бўйича тезликнинг ҳосиласи, жисмнинг солиштирма иссиқлик сиғими — ҳарорат бўйича иссиқлик ҳажмининг ҳосиласи, радиоактив парчаланиш тезлиги — вақт бўйича радиоактив жисм массасининг ҳосиласи бўлиб ҳисобланади. Ҳосилаларни топиш усуллари ва хоссаларини ўзлаштириш, улардан функцияларни текширишда фойдаланиш дифференциал ҳисоблашнинг асосини ташкил этади.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар тўплами, ҳосила, координаталар тўғри чизиғи, сонлар ораликлари, интерваллар усули.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

6 ҲОСИЛАНИНГ ТАТБИҚИ

19-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЎСИШ ВА КАМАЙИШ АЛОМАТЛАРИ

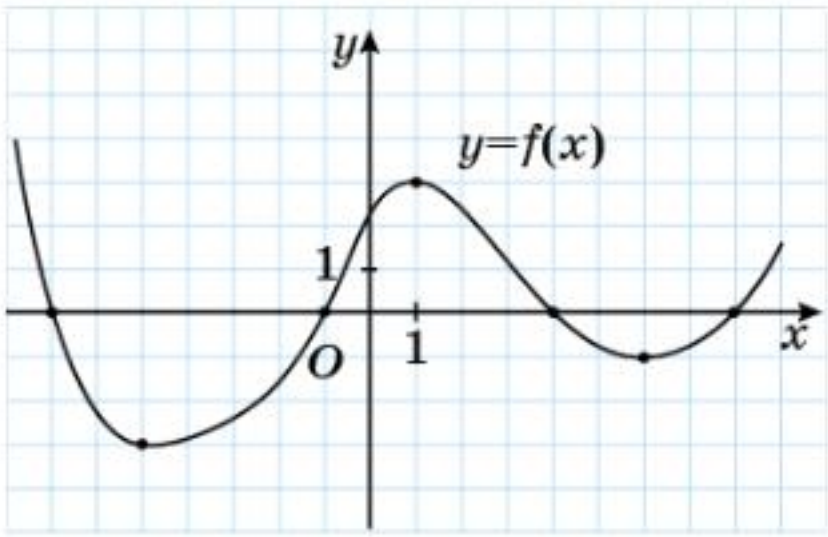
Таянч тушунчалар

Функция, ўсиш оралиғи, камайиш оралиғи, ҳосила

Сиз функциянинг ўсиш ва камайиш аломатлари билан танишасиз, ҳосила ёрдамида функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топишни ўрганасиз.

БУНИ БИЛАСИЗ:

Функциянинг геометрик тасвири, унинг графиги, координаталар текислигида $(x; y)$ нуқталарнинг геометрик ўрнини ташкил этувчи эгри чизиқ эканлигини биламиз. Ўсувчи ва камаювчи функциялар таърифларидан фойдаланиб, графиклар бўйича унинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топишни биласиз.



54-расм

$y = f(x)$ функциянинг графиги берилган (54-расм).

График бўйича функциянинг:
1) аниқланиш соҳасини;
2) қийматлар тўпламини;
3) ўсиш оралиқларини;
4) камайиш оралиқларини топинг.

Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини ҳосила ёрдамида топишни кўриб чиқамиз. Бунинг учун дастлаб функциянинг ораликдаги ўсиш ва камайишининг етарлилик шартларини берамиз.

Агар дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг ҳосиласи X оралиқнинг ҳар бир нуқтасида мусбат ишорали, яъни $f'(x) > 0$ (манфий ишорали, яъни $f'(x) < 0$) бўлса, функция шу ораликда ўсувчи (камаювчи) бўлади.

Исботи. Исботлаш учун Лагранж формуласидан фойдаланамиз.

X оралиқнинг исталган x_1 ва x_2 (бунда $x_1 < x_2$) нуқталарини оламиз. Лагранж формуласига кўра

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a) \qquad (1)$$

тенглик бажариладиган $(x_1; x_2)$ оралиққа тегишли a сонини олиш мумкин. x_1, x_2 нуқталар X оралиққа тегишли бўлгани учун, a сони ҳам шу оралиққа тегишли, яъни $x_1 < a < x_2$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Агар X оралиққа тегишли исталган x лар учун $f'(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $f'(a) > 0$ бўлади ва танловимизга кўра $x_2 - x_1 > 0$ бўлгани учун, (1) тенгликнинг чап томонидаги $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ёки $f(x_1) < f(x_2)$ келиб чиқади, яъни $f(x)$ — ўсувчи функция.

Агар X оралиқдаги исталган x учун $f'(x) < 0$ бўлса, у ҳолда $f'(a) < 0$, (1) формуладаги $f(x_1) > f(x_2)$ бўлади, чунки $x_2 - x_1 > 0$.

Демак, X оралиқдаги $f(x)$ функция камаювчи.

Шундай қилиб, ҳосила ёрдамида $f(x)$ функция ўсувчи (камаювчи) эканини исботлаб, унинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топиш мумкин.

АЛГОРИТМ

Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топиш алгоритми:

1) функциянинг аниқланиш соҳасини топиш;

2) функциянинг ҳосиласини топиш;

3) $f'(x) > 0$ ёки $f'(x) < 0$ тенгсизликни ечиш;

4) берилган теореманинг хулосасига кўра функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини ёзиш, жумладан, охирги тенгсизликлар ечимлари функциянинг ўсиш, камайиш оралиқлари бўлади.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция оралиқнинг четки нуқталарида узлуксиз бўлса, у ҳолда бу нуқталар ўша оралиққа тегишли нуқталар бўлади.

МИСОЛ

1. $f(x) = 3x^2 - 12x$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топамиз.

Ечилиши. 1) Функциянинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами.

2) $f'(x) = (3x^2 - 12x)' = 6x - 12$.

3) $f'(x) > 0$, яъни $6x - 12 > 0$, $6x > 12$, $x > 2$. У ҳолда аниқланиш соҳасининг $x < 2$ қисмида $f'(x) < 0$ бўлиши равшан.

4) Теорема бўйича $(2; +\infty)$ оралиқда функция ўсувчи, $(-\infty; 2)$ оралиқда эса функция камаювчи.

Жавоби: $(-\infty; 2)$ — камаювчи, $(2; +\infty)$ — ўсувчи.

МИСОЛ

2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топамиз.

Ечилиши. 1) $D(f) = R$; 2) $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2\right)' = x^2 - 4$;

3) $f'(x) > 0$, $x^2 - 4 > 0$.

Олинган тенгсизликни интерваллар усулида ечамиз. Бунда $x^2 - 4 = 0$, $x_{1,2} = \pm 2$. Энди ± 2 нуқталар орқали координаталар тўғри чизиғини учта интервалга бўлиб, ҳар биридаги ҳосиланинг ишорасини аниқлаймиз. Бунинг учун $x = 3$ деб олиб, ҳосиланинг ишорасини аниқлаймиз. $f'(3) = 3^2 - 4 = 5 > 0$, яъни $x > 2$ бўлганда, $f'(x) > 0$. Демак, $x = 3$ сони тегишли интервалда ҳосиланинг ишораси мусбат бўлади, қолган интервалларда мусбат ва манфий ишоралар навбат билан қўйилади (55, *а*-расм). Демак, $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ оралиқда $f'(x) > 0$, $[-2; 2]$ оралиқда $f'(x) < 0$.

55, *а*-расм

Жавоби: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ — ўсади, $[-2; 2]$ — камаяди.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

3. $f(x) = 0{,}25x^4 - x$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг.

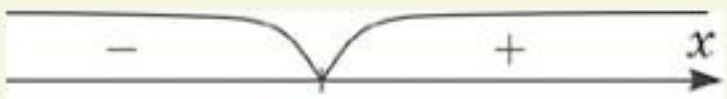
Ечилиши. 1) Функциянинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами.

2) $f'(x) = (0{,}25x^4 - x)' = x^3 - 1$.

3) $f'(x) > 0$, $x^3 - 1 > 0$. $x^3 - 1 = 0$, $x^3 = 1$, $x = 1$. Сонлар тўғри чизиғини $x = 1$ нуқта орқали иккита оралиққа бўламиз. $x = 0$ бўлганда $f'(0) = 0^3 - 1 = -1$.

Интерваллардаги ҳосиланинг ишорасини сонлар тўғри чизиғида ясаймиз (55, *б*-расм).

4) $(-\infty; 1]$ оралиқда функция камаювчи, $[1; +\infty)$ — ўсувчи.



55, *б*-расм

Жавоби: $(-\infty; 1]$ — камаяди; $[1; +\infty)$ — ўсади.

МИСОЛ

4. $f(x) = \sin x - 2x$ функциянинг монотон ўсувчи, монотон камаювчи оралиқларини топамиз.

Ечилиши. 1) Функциянинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами.

2) $f'(x) = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2$.

3) Ҳосиланинг ишорасини аниқлаймиз. $|\cos x| \leq 1$ бўлгани учун, $\cos x - 2$ ифоданинг қиймати x нинг исталган қийматида 0 дан кичик. Шунинг учун $x \in R$ бўлганда $f'(x) < 0$. Демак, берилган функция — барча ҳақиқий сонлар тўпламида монотон камаювчи функция.

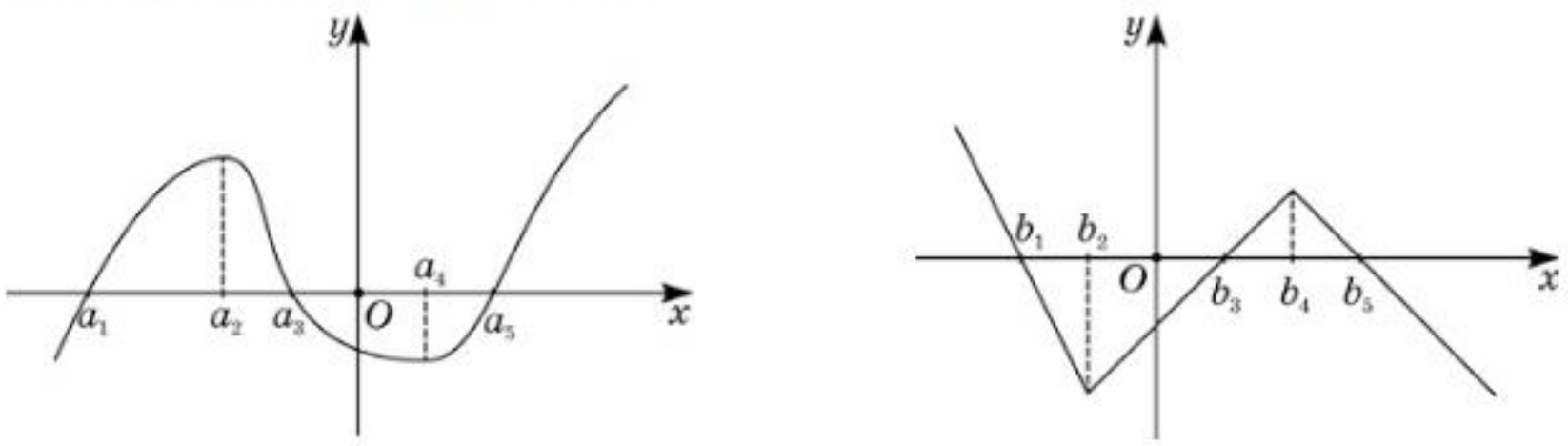
Жавоби: функция R тўпламда камаювчи.

1. Нима учун $y = \mathrm{ctg}\,x$ функция $(0; \pi)$ оралиқда камаяди? Жавобингизни тушунтиринг.
2. Маълум бир оралиқда функция монотон ўсувчи бўлсин. Ушбу оралиқда функциянинг ҳосиласи мусбат ишорали бўладими?
3. Ҳақиқий сонлар тўпламида ҳосиласи 1 га тенг бўладиган функциянинг графиги қандай бўлади? Жавобингизни тушунтиринг.

Машқлар

А

19.1. 56, *а*-расмда $y = f(x)$ функциянинг графиги берилган. Функциянинг ҳосиласи: а) мусбат ишорали; б) манфий ишорали бўлган оралиқларини кўрсатинг.



а) б)

56-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

19.2. 56, *б*-расмда $y = f(x)$ функция ҳосиласининг графиги берилган. Расмдан фойдаланиб, $y = f(x)$ функциянинг: а) ўсиш; б) камайиш оралиқларини топинг.

19.3. $f(x)$ функциянинг монотон ўсувчи ва монотон камаювчи оралиқларини топинг:

а) $f(x) = x + 4$; б) $f(x) = 3x + x^2$;

в) $f(x) = 2x^2 - x$; г) $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

19.4. Берилган функциянинг аниқланиш соҳасида ўсувчи бўлишини исботланг:

а) $y = \frac{1}{5} + 3{,}1x$; б) $y = -\frac{4}{x}$; в) $y = 2x^3 + 1{,}4$; г) $y = 3 - \frac{2}{x}$.

19.5. $y = f(x)$ функция аниқланиш соҳасида камаювчи бўлишини исботланг:

а) $y = 7 - 5x$; б) $y = 2 - 3x^3$; в) $y = \frac{2}{x}$; г) $y = 6 + \frac{3}{x}$.

В

19.6. Функциянинг ўсиш(камайиш) оралиқларини топинг:

а) $f(x) = x^3 + 4x - 7$; б) $f(x) = 5x^2 - 3x - 8$;

в) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$; г) $f(x) = 3x^3 - x - 2$.

19.7. $y = f(x)$ функциянинг ўсувчи эканлигини исботланг:

а) $y = x^3 + x$; б) $y = -\frac{4}{x}$.

19.8. $f(x)$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; б) $f(x) = x^3 - 4x + 7$;

в) $f(x) = x^5 + 5$; г) $f(x) = x^4 - 4x$.

19.9. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида $f(x)$ функция камаювчи, $g(x)$ функция эса ўсувчи бўлишини исботланг:

а) $f(x) = 5 - x^7$; б) $g(x) = 4 + \frac{2}{3}x^3$;

в) $f(x) = -8x - \sin 2x$; г) $g(x) = -\cos 6x + 7x$.

19.10. a нинг қандай қийматларида $f(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2 + x$ функция ҳақиқий сонлар тўпламида ўсувчи бўлади?

19.11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ функциянинг монотон камаювчи оралиғида x нинг бутун қийматлари сонини топинг.

19.12. Ҳосиласи $f'(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 2)^2$ бўлган функциянинг камайиш оралиқлари узунликларининг йиғиндисини топинг.

19.13. $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 - 16)$ кўринишда берилган. Функциянинг монотон камаювчи оралиқлари узунликларининг йиғиндисини топинг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг аниқланиш соҳаси, ҳосила, ҳосилани топиш қоидалари, ҳосилани топиш формулалари, функциянинг ўсиш ва камаиш аломатлари.

20-§. ФУНКЦИЯНИНГ КРИТИК ВА ЭКСТРЕМУМ НУҚТАЛАРИ

Таянч тушунчалар

Функция, функциянинг аниқланиш соҳаси, критик нуқталар, функциянинг экстремуми

Сиз функциянинг критик нуқталари таърифи, функция экстремумининг мавжудлик шарти билан танишасиз;

критик ва экстремум нуқталарни топишни ўрганасиз.

ЁДГА ТУШИРИНГ!

55-56-расмлардан фойдаланиб, экстремум нуқталарни, минимум ва максимум нуқталарни кўрсатинг.

Функцияни текшириш ва графигини ясаганда ўсиш ва камайиш оралиқлари билан бирга функциянинг критик ва экстремум нуқталарини топа олиш керак.

Функциянинг ҳосиласи нолга тенг ёки ҳосиласи мавжуд бўлмаган аниқланиш соҳасининг ички нуқталари ***критик нуқталар*** *деб аталади.*

Критик нуқталаргина экстремум нуқталари бўлиши мумкин.

Функциянинг экстемуми мавжудлигининг етарлилик шарти.

Теорема. *Агар x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг экстремуми ва шу нуқта атрофида $f'(x)$ ҳосила мавжуд бўлса, у ҳолда ҳосиланинг x_0 нуқтадаги қиймати нолга тенг, яъни $f'(x_0) = 0$.*

Ҳар бир критик нуқта экстремум нуқта бўлавермайди.

МИСОЛ

1. $y = x^3 - 1$ функцияни оламиз. Бу функциянинг ҳосиласи $f'(x) = 3x^2$. $f'(x) = 0$ тенгламани ечамиз, яъни $3x^2 = 0$ ёки $x = 0$. Шундай қилиб, $f'(x) = 3 \cdot 0 = 0$.

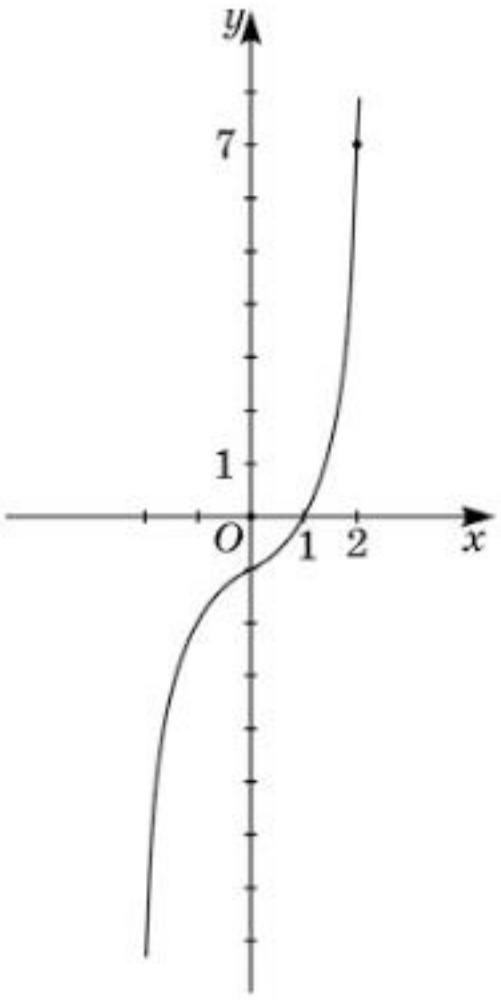
Бироқ, бу нуқтада функциянинг экстремуми мавжуд эмас (57-расм).

Экстремумнинг максимум ва минимум бўлишининг етарлилик шарти.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Теорема. *Агар x_0 нуқтада $f(x)$ узлуксиз, $(a; x_0)$ оралиқда $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ ва $(x_0; b)$ оралиқда $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқтада $f(x)$ функциянинг максимум (минимум) нуқтаси мавжуд бўлади.*



57-расм

Кўп ҳолларда бу теореманинг осонлаштирилган тарифидан фойдаланган маъқул, яъни агар x_0 нуқтада ҳосила ишорасини плюсдан минусга (минусдан плюсга) алмаштирса, у ҳолда x_0 *нуқта максимум (минимум)* нуқта бўлади.

Исботи: Теоремани максимум нуқта учун исботлаймиз. Интерваллар усулидан фойдаланиб, ҳар бир оралиқдаги ҳосиланинг ишорасини аниқлаймиз.

Теореманинг шартига кўра $(a; x_0)$ оралиқда $f'(x) > 0$, x_0 нуқтада узлуксиз бўлгани учун, $(a; x_0]$ оралиқда ўсади, шу сабабли шу оралиқда барча x лар учун $f(x) < f(x_0)$. Худди шундай $[x_0; b)$ оралиқда $f(x)$ камаювчи, ҳосила $f'(x) < 0$, шу сабабли $[x_0; b)$ оралиқда барча x лар учун $f(x) < f(x_0)$ тенгсизлик бажарилади. Демак, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг максимум нуқтасидан иборат.

x_0 нуқта минимум нуқта бўлишини мустақил исботланг.

АЛГОРИТМ

Функциянинг экстремум нуқталарини топиш алгоритми:

1) функциянинг ҳосилани топиш;

2) функциянинг критик нуқталарини топиш, яъни $f'(x) = 0$ тенгламани ечиш;

3) критик нуқталар атрофидаги $f'(x)$ ҳосиланинг ишорасини интерваллар усулида аниқлаш;

4) экстремум нуқталар мавжудлигининг етарлича шартидан фойдаланиб, максимум ва минимум нуқталарни топиш.

МИСОЛ

2. $y = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$ функциянинг экстремум нуқталарини топамиз.

Ечилиши. 1) Функциянинг ҳосиласи:

$$y' = (2x^3 - x^2 - 4x + 5)' = 6x^2 - 2x - 4 = 2(3x^2 - x - 2);$$

2) $2(3x^2 - x - 2) = 0$, $3x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$;

3) $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 1$ нуқталар орқали сонлар тўғри чизиғини интервалларга бўлиб, ҳар бир интервалдаги ҳосиласининг ишорасини аниқлаймиз. Масалан, $\left[-\frac{2}{3}; 1\right]$ оралиқдан $x = 0$ нуқта оламиз. У ҳолда $f'(0) = 2 \cdot (3 \cdot 0^2 - 0 - 2) = -4 < 0$.

Функция ҳосиласининг ишорасини сонлар тўғри чизиғида кўрсатамиз (58-расм).

58-расм

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

4) Бунда $x_1 = -\frac{2}{3}$ — максимум, ал $x_2 = 1$ — функциянинг минимум нуқтаси.

Жавоби: $x_{max} = -\frac{2}{3}$; $x_{min} = 1$.

МИСОЛ

3. $y = -\frac{2}{3}x^3 + 8x + 10$ функциянинг экстремум нуқталарини топамиз.

Ечилиши. 1) $y'(x) = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 8x + 10\right)' = -2x^2 + 8 = -2(x^2 - 4)$;

2) $y'(x) = 0$, $-2(x^2 - 4) = 0$. Бундан $x^2 = 4$, у ҳолда $x_{1,2} = \pm 2$.

$[-2; 2]$ оралиқдан $x = 0$ нуқтани олсак, $f'(0) = -2 \cdot 0^2 + 8 = 8$. Ҳосиланинг оралиқдаги ишораларини сонлар тўғри чизиғига жойлаштирамиз (59-расм).

59-расм

3) $x_1 = -2$ — минимум, $x_2 = 2$ — максимум нуқта бўлади. Ушбу нуқталарда функциянинг экстремум қийматларини топамиз:

$f(-2) = -\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 8 \cdot (-2) + 10 = \frac{16}{3} - 6 = \frac{16 - 18}{3} = -\frac{2}{3}$ — функциянинг минимуми,

$f(2) = -\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 + 10 = -\frac{16}{3} + 26 = \frac{-16 + 78}{3} = \frac{62}{3}$ — функциянинг максимуми.

Жавоби: $\min f(x) = f(-2) = -\frac{2}{3}$; $\max f(x) = f(2) = \frac{62}{3}$.

МИСОЛ

4. $[0; 1]$ кесмада $-12x^4 + 16x^3 - 3 = 0$ тенгламанинг нечта ҳақиқий илдизлари мавжуд эканлигини топамиз.

Ечилиши. $f(x) = -12x^4 + 16x^3 - 3$ функцияни кўриб чиқамиз. Функциянинг аниқланиш соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами. Функциянинг критик нуқталарини излаштирамиз.

Дастлаб ҳосилани топамиз: $f'(x) = -48x^3 + 48x^2 = -48x^2(x - 1)$. Энди $f'(x) = 0$ тенгламани ечамиз: $-48x^2(x - 1) = 0$. Ҳосила $x_1 = 0$ ва $x_2 = 1$ нуқталарда нолга тенг бўлади.

Критик нуқталарда функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$f(0) = -12 \cdot 0^4 + 16 \cdot 0^3 - 3 = -3$; $f(1) = -12 \cdot 1^4 + 16 \cdot 1^3 - 3 = -12 + 16 - 3 = 1$.

$[0; 1]$ кесмада функция -3 дан 1 гача ўсади. Узлуксиз функцияларнинг хоссаларига кўра $[0; 1]$ кесмада берилган функция битта нуқтада нолга тенг, яъни унинг $[0; 1]$ кесмада битта ҳақиқий илдизи мавжуд.

Жавоби: ҳақиқий илдизи битта.

1. Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ оралиқда аниқланган бўлса, у ҳолда $x = a$ унинг экстремум нуқтаси бўла оладими?
2. Камаювчи функциянинг экстремум нуқталари бўлиши мумкинми?
3. Жуфт (тоқ) функциянинг: а) битта; б) иккита; г) учта экстремум нуқтаси бўлиши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.

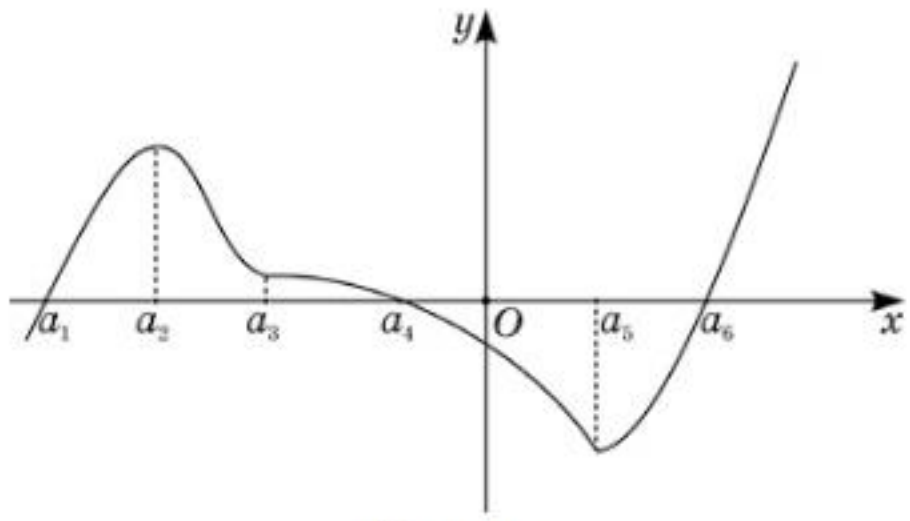
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Машқлар

А

20.1. 60-расмда берилган $f(x)$ функциянинг графиги бўйича унинг ўсиш, камайиш оралиқларини ва экстремум нуқталарини топинг.



60-расм

Функциянинг критик нуқталарини топиб, улардан қайсилари минимум, қайсилари максимум нуқта бўлишини аниқланг (**20.2-20.3**):

20.2. а) $f(x) = 3x^2 - 2$; б) $f(x) = 7x^2 + 3$;
в) $f(x) = 3x - x^2 + 1$; г) $f(x) = 5x^2 - 8x - 3$.

20.3. а) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$; б) $f(x) = -4x^2 + 1$;
в) $f(x) = x^2 - \frac{x}{3}$; г) $f(x) = -x^2 + 3x$.

20.4. а) $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{9}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x} - 5x$

функциянинг экстремум нуқталари мавжуд эмаслигини исботланг.

В

20.5. Функциянинг максимум ва минимум нуқталарини топинг:
а) $f(x) = \frac{1}{5}\cos x + 1$; б) $f(x) = x + 2\sin x$.

20.6. Функциянинг критик нуқталарини топинг. Максимум, минимум нуқталарини топинг:
а) $f(x) = \frac{1}{3}x - x^3$; б) $f(x) = 2x^4 - 8x$;
в) $f(x) = x^4 - 32x^2 + 1$; г) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
д) $y = x^2(x + 1)$; е) $y = 3x^4 + 4x^3$.

20.7. Хоссалари бўйича функция графигининг тасвирини ясанг:
а) $D(f) = [-2; 4]$; $x \in (-2; 1)$, $f'(x) < 0$, $x \in (1; 4)$ оралиқда $f'(x) > 0$;
б) $D(f) = [-2; 4]$; $x \in (-2; -1)$ оралиқда $f'(x) > 0$, $x \in (-1; 4)$ оралиқда $f'(x) < 0$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

в) $D(f) = [a;\ b]$; x_1 — минимум нуқта, x_2 — максимум нуқта ва $f(a) < f(b)$;

г) $D(f) = [a;\ b]$; x_1 — минимум нуқта, x_2 — максимум нуқта ва $f(a) = f(b)$.

20.8. $f(x)$ функциянинг критик нуқталари мавжуд эмаслигини исботланг:

а) $f(x) = 15 + x$; б) $f(x) = \mathrm{tg}x + 1$;

в) $f(x) = x^3 + 2$; г) $f(x) = x^5 + x$.

20.9. $y = f(x)$ функциянинг экстремум нуқталарини топинг:

а) $f(x) = \frac{3}{x} - 12x^2$; б) $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$.

20.10. Берилган кесмада тенгламанинг нечта илдизи мавжудлигини топинг.

а) $x^3 - 12x + 10 = 0$, $[-2;\ 2]$; б) $x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$, $[-1;\ 1]$.

20.11. Функциянинг критик нуқталарини топинг:

а) $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)^2$; б) $f(x) = (x + 1)^2 (x - 2)^2$.

20.12. Чексиз кўп экстремум нуқталари мавжуд бўлган функцияларга мисол келтиринг.

20.13. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ функциянинг экстремум нуқталари ординаталарининг йиғиндисини топинг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, функциянинг графиги ва хоссалари, ҳосила, ҳосилани топиш қоидалари ва формулалари, функциянинг ўсиш ва камайиш аломатлари, экстремум нуқталари.

21-§. ҲОСИЛА ЁРДАМИДА ФУНКЦИЯНИ ТЕКШИРИШ ВА УНИНГ ГРАФИГИНИ ЯСАШ

Таянч тушунчалар

Функция, функциянинг хоссалари, функцияни текшириш, функциянинг графиги

Сиз функцияни ҳосила ёрдамида текшириш алгоритми билан танишасиз;

Алгоритмдан фойдаланиш орқали функцияни текширишни ва графигини ясашни ўрганасиз.

Сиз функциянинг аниқланиш соҳасини топиш йўлларини, функциянинг хоссаларини, ҳосила ёрдамида ўсиш, камайиш оралиқларини, экстремумларини топиш йўлларини ўргандингиз. Энди эгаллаган билимингизни изчиллаштириб, функцияни ҳосила ёрдамида текширишни ва унинг асосида графигини ясашни кўриб чиқамиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

АЛГОРИТМ Функцияни ҳосила ёрдамида текшириш ва унинг графигини ясаш алгоритми:

1) функциянинг аниқланиш соҳасини топиш;
2) функциянинг жуфт, тоқ ва даврийлигини аниқлаш;
3) функция графигининг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини топиш;
4) ўзгармас ишорали оралиқларини топиш;
5) ўсиш ва камайиш оралиқларини, экстремумларини топиш;
6) текшириш натижаларини жадвалга киритиш;
7) функциянинг графигини ясаш.

МИСОЛ $y = x^3 + 3x^2$ функцияни текшириб, графигини ясаймиз.

Ечилиши. Функцияни текшириш алгоритмидан фойдаланамиз.

1) Функция рационал функция бўлганлиги сабабли, аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами, яъни $D(y) = R$;

2) функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас, чунки $y(-x) = (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 = -x^3 + 3x^2$. Функция даврий эмас;

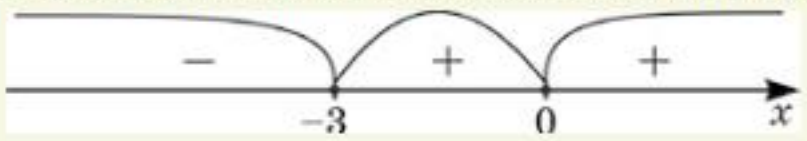
3) функция графигининг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз:

Oy ўқи билан: $x = 0$, $y(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$; $(0; 0)$;

Ox ўқи билан: $y = 0$, $x^3 + 3x^2 = 0$,

$x^2(x + 3) = 0$, $(0; 0)$, $(-3; 0)$.

4) Функциянинг ўзгармас ишорали оралиқларини топиш учун сонлар тўғри чизиғини $x = 0$ ва $x = -3$ нуқталар орқали интерваллларга бўлиб, функциянинг ҳар бир интервалдаги ишорасини аниқлаймиз: $x = 2$, $y(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 20 > 0$; $x = -2$, $y(-2) = 4 > 0$; $x = -4$, $y(-4) = -16 < 0$. Сонлар тўғри чизиғида интервалларда функциянинг ишорасини белгилаймиз (61-расм).



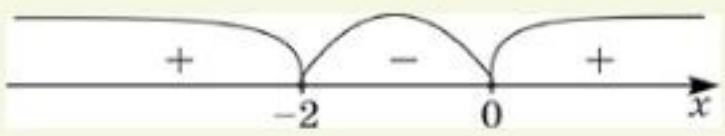
61-расм

Демак, $(-3; 0) \cup (0; +\infty)$ оралиқда $f(x) > 0$, $(-\infty; -3)$ оралиқда эса $f(x) < 0$;

5) $y' = (x^3 + 3x^2)' = 3x^2 + 6x$;

$3x^2 + 6x = 0$ ёки $3x(x + 2) = 0$, у ҳолда $x_1 = 0$; $x_2 = -2$ — критик нуқталар.

$x_1 = 0$ ва $x_2 = -2$ нуқталар орқали функциянинг аниқланиш соҳасини оралиқларга бўлиб, ҳар бир оралиқда ҳосиланинг ишорасини интерваллар усулида аниқлаймиз: $x = 1$; $y'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 9 > 0$. Сонлар тўғри чизиғида функция ҳосиласининг ишорасини белгилаймиз (62-расм).



62-расм

Демак, $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$ оралиқда $f'(x) > 0$ — функция монотон ўсувчи, $[-2; 0]$ оралиқда $f'(x) < 0$ — функция монотон камаювчи.

$x = -2$ — максимум нуқтаси. $x = 0$ — минимум нуқтаси.

Экстремум нуқталаридаги функциянинг қийматларини топамиз:

$y(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = 4$; $(-2; 4)$;

$y(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0$; $(0; 0)$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

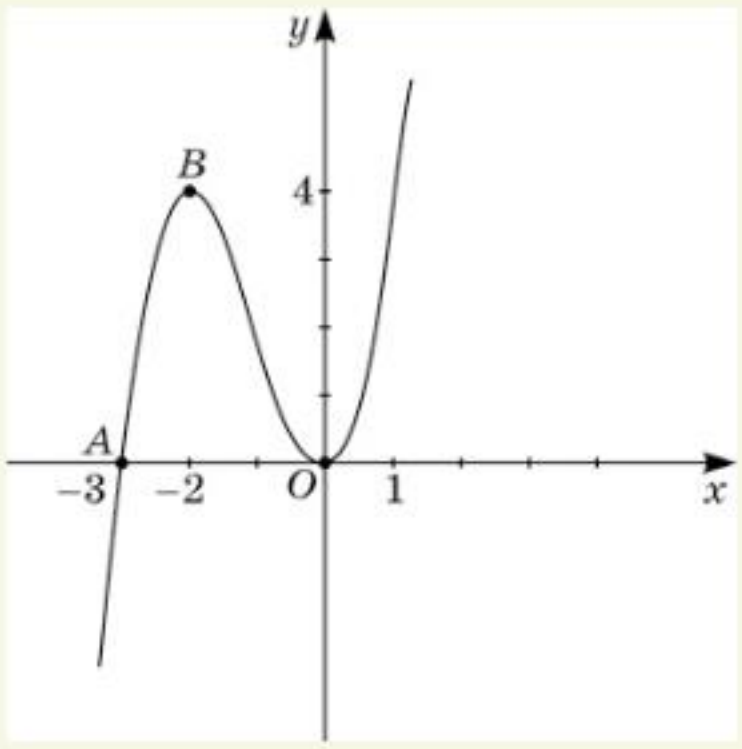
Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

6) Текширишлар натижасини 10-жадвалга киритамиз:

11-жадвал

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	+	9	+	0	−	0	+
$f(x)$	Манфий ишорали монотон ўсувчи	0	Мусбат ишорали монотон ўсувчи	4 max	Мусбат ишорали монотон камаювчи	0 min	Мусбат ишорали монотон ўсувчи

7) Графигини ясаймиз (63-расм).



63-расм

1. Алгоритмнинг иккинчи бандидаги хоссалардан қайсилари бир вақтда бажарилиши мумкин? Жавобингизни тушунтиринг.
2. Функцияни текшириш алгоритмининг 5 банди қайси вақтда батафсил кўриб чиқилмайди? Жавобингизни тушунтиринг.

Машқлар

А

21.1. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг:

а) $y = 2x + 1$; б) $y = 5 - x$; в) $y = x^2 + 3x - 5$; г) $y = (x - 2)^2$.

21.2. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини, экстремумларини топинг:

а) $y = -0{,}5x^2 + x$; б) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$;

в) $y = 2x^2 - x + 3$; г) $y = 5x - 2x^2 - 2$.

21.3. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг:

а) $y = 4x - x^2$; б) $y = 8x - \frac{1}{4}x^2$; в) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$; г) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$;

д) $y = 3x^2 - 10x + 3$; е) $y = 2x^2 + 5x + 2$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

21.4. $f(x)$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $f(x) = x^3 + 1$; б) $f(x) = x^3 + 3x - 5$;

в) $f(x) = 2x - \cos x$; г) $f(x) = -3x + \sin x$.

В

Функцияларни текширинг ва уларнинг графикларини ясанг **(21.5—21.7)**:

21.5. а) $y = x^2(x + 3)$; б) $y = x^3 + 3x - 5$.

21.6. а) $y = 4x - x^4$; б) $y = x^4 - 8x^2$.

21.7. а) $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, , ҳосила, критик нуқталар, кесмадаги узлуксиз функциянинг хоссалари.

22-§. ФУНКЦИЯНИНГ КЕСМАДАГИ ЭНГ КАТТА ВА ЭНГ КИЧИК ҚИЙМАТЛАРИ

Таянч тушунчалар

Функция, функциянинг қиймати, энг катта қиймат, энг кичик қиймат

Берилган оралиқда функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишни, улардан геометрик масалаларниечишда фойдаланишни ўрганасиз.

Тажрибада, амалиётда функциянинг берилган кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топишга доир масалалар кўп учрайди. Функциянинг бундай қийматларини ҳосила ёрдамида топиш йўлларини кўриб чиқамиз.

$y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган, узлуксиз ва кесманинг ички нуқталарида ҳосиласи мавжуд функция бўлсин. Бундай функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари мавжудлиги ҳақидаги теорема V бўлимнинг 12-§ ида берилган.

АЛГОРИТМ

Функциянинг берилган кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш алгоритми:

1) $f(x)$ функциянинг ҳосиласини топиш;
2) $f'(x) = 0$ тенгламани ечиб, критик нуқталарини аниқлаш;
3) шу кесмага тегишли бўлган критик нуқталарни аниқлаш;
4) кесманинг четки нуқталаридаги ва шу оралиққа тегишли критик нуқталардаги функциянинг қийматини ҳисоблаш;
5) функциянинг топилган қийматларини таққослаб, энг катта ва энг кичик қийматларини топиш.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ **1.** $f(x) = x^3 - 3x^2$ функциянинг $[-2; 4]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз.

Ечилиши. Функциянинг берилган ораликдаги энг кичик ва энг катта қийматларини топиш алгоритмидан фойдаланамиз.

1) функциянинг ҳосиласини топамиз: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

2) $f'(x) = 0$ тенгламани ечамиз: $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x - 2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

3) критик нуқталарнинг берилган кесмага тегишли бўлишини аниқлаймиз, $0 \in [-2; 4]$; $2 \in [-2; 4]$.

4) Энди функциянинг қийматларини топамиз: $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$,

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$,

$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 = 16$,

$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 = -20$.

5) Шундай қилиб, $f(0) = 0$; $f(2) = -4$, $f(4) = 16$, $f(-2) = -20$. Функциянинг энг кичик қиймати $f(-2) = -20$; функциянинг энг катта қиймати $f(4) = 16$.

Жавоби: 16; −20.

МИСОЛ **2.** $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ функциянинг $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз.

Ечилиши. Функциянинг берилган ораликдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топиш алгоритмидан фойдаланамиз.

1) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$.

2) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2} = 0$, $x \neq 0$.

Бундан $x^2 + 1 \neq 0$; $x^2 - 1 = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$.

3) $x_1 = -1 \notin \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, шунинг учун функциянинг фақат $x = 1$; $\frac{1}{2}$; 2 нуқталардаги қийматларинигина топамиз.

4) $f(1) = 1^3 + \frac{3}{1} = 1 + 3 = 4$,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + 6 = 6\frac{1}{8} = 6{,}125$, $f(2) = 2^3 + \frac{3}{2} = 8 + 1{,}5 = 9{,}5$.

Шундайқилиб, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6{,}125$, $f(1) = 4$, $f(2) = 9{,}5$. Демак, функциянинг энг кичик қиймати $f(1) = 4$, энг катта қиймати $f(2) = 9{,}5$.

Жавоби: 9,5; 4.

Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш амалий масалаларни ечишда керак бўлади. Бундай ҳолда узлуксиз функцияларнинг қуйидаги хоссаларидан фойдаланилади:

Агар берилган ораликда функция узлуксиз ва унинг ягона экстремуми мавжуд бўлса, у ҳолда нуқтанинг минимумида энг кичик, максимумида эса энг катта қиймати бўлади.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

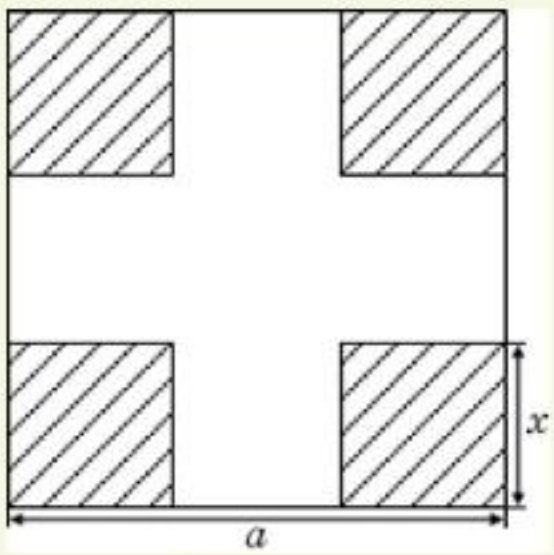
Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

МИСОЛ

3. Томони a бўлган квадрат шаклидаги тунукадан асоси квадрат ва юқори қисми очиқ бўлган энг катта ҳажмли қути тайёрлаш учун қирқиб олинган квадрат томонларининг узунликлари қандай бўлиши керак?

Ечилиши. Тунукадан қути тайёрлаш учун бурчакларидан бир хил квадратлар қирқиб олиш керак (64-расм). Буклаганда унинг ҳажми тенг бўлиши керак.

Қирқиб олинган квадрат томонининг узунлигини x деб белгилаймиз. У ҳолда қути асосининг томони $a - 2x$ бўлади. Бинобарин, қутининг ҳажми:



64-расм

$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x = (a^2 - 4ax + 4x^2) \cdot x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$, бунда $x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$.

Чунки $a - 2x \mid 0$, $a \mid 2x$ ёки $x \mid \frac{a}{2}$.

Энди $\left[0; \frac{a}{2}\right]$ кесмадаги $V(x)$ функциянинг энг катта қийматини топамиз.

$V'(x) = (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)' = a^2 - 8ax + 12x^2$,

$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$, бундан $x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$. Топилган критик нуқталар берилган кесмага тегишли: $\frac{a}{6} \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$; $\frac{a}{2} \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$. Энди $x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$ нуқталарда $V(x)$ нинг қийматларини топамиз: $V(0) = 0$, $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$, $V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$.

Шундай қилиб, қирқиб олинган квадрат томонларининг узунлиги $\frac{a}{6}$ га тенг бўлса, қутининг ҳажми энг катта бўлади.

Жавоби: $\frac{a}{6}$.

?

1. Функциянинг энг катта қиймати максимум нуқтадаги функциянинг қийматига тенг бўлиши шартми?
2. $f(x_0)$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта (энг кичик) қиймати бўлсин. Бундан x_0 нуқта функциянинг максимум (минимум) нуқтаси бўлади деб айта оламизми?
3. а) Маълум бир кесмада; б) маълум бир чекли оралиқда узлуксиз функциянинг энг катта ёки энг кичик қиймати мавжуд бўлиши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Машқлар

A

$y = f(x)$ функцияларнинг берилган кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг **(22.1—22.3)**:

22.1. а) $f(x) = 2x - 3$, $[-1; 1]$; б) $f(x) = 5 - 3x$, $[-2; 1]$.

22.2. а) $f(x) = 2x^2 - 8x$, $[-2; 1]$; б) $f(x) = x - \frac{4}{x}$, $[1; 4]$.

22.3. а) $f(x) = \frac{x-1}{3x}$, $[-2; 0]$; б) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, $[-2; 0]$.

22.4. а) 7 сонини қандай иккита қўшилувчига ажратганда уларнинг кўпайтмаси энг катта қийматга тенг бўлади?

б) 10 сонини қандай иккита қўшилувчига ажратганда улар кубларининг йиғиндиси энг кичик бўлади?

22.5. а) 64 сони иккита мусбат кўпайтувчиларга ажратилган. Кўпайтувчиларнинг йиғиндиси энг кичик сон бўлиши учун кўпайтувчилар қандай сонлар бўлиши керак?

б) 100 сони иккита мусбат кўпайтувчиларга ажратилган. Қўшилувчилари энг катта сон бўлиши учун кўпайтувчилар қандай сонлар бўлиши керак?

22.6. а) Моддий нуқта $x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t + 3$ қонуни бўйича тўғри чизиқли ҳаракатланади. Дастлабки 2 с ичидаги $x(t)$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

б) Жисм $x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t + 10$ қонунга мувофиқ ҳаракатланади. Функциянинг дастлабки 4 с ичидаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

B

Берилган кесмалардаги $y = f(x)$ функцияларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг **(22.7—22.10)**:

22.7. а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$, $[-4; 2]$;

б) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$, $[1; 4]$.

22.8. а) $f(x) = 2x^2 - \frac{8}{x} + 3$, $[-5; 1]$; б) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} - 5$, $[\frac{1}{2}; 3]$.

22.9. а) $f(x) = \sin x + x$, $[-\pi; \pi]$; б) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, $[0; 2\pi]$.

22.10. а) $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$, $[0{,}5; 1]$; б) $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, $[-1; 0]$.

22.11. а) 75 сонини қандай иккита натурал қўшилувчиларга ажратганда улардан бирининг иккинчи қўшилувчининг квадрат илдизига кўпайтмаси энг катта бўлади?

б) 32 сонини қандай иккита натурал қўшилувчиларга ажратганда улардан бирининг иккинчи қўшилувчининг квадрат илдизи билан йиғиндиси энг кичик бўлади?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

22.12. а) 18 сонини қандай иккита қўшилувчига ажратганда иккиланган биринчи қўшилувчи билан иккинчи қўшилувчи квадратининг йиғиндиси энг кичик бўлади?
б) 16 сонини қандай иккита қўшилувчига ажратганда улар квадратларининг йиғиндиси энг кичик бўлади?

22.13. а) Радиуси 1 см бўлган айланага ички чизилган тўғри тўртбурчаклар орасидан юзи энг каттасини топинг;
б) узунлиги 12 см бўлган кесмадан ясаш мумкин бўлган тўғри тўртбурчаклар орасидан юзи энг кичик тўғри тўртбурчакни топинг.

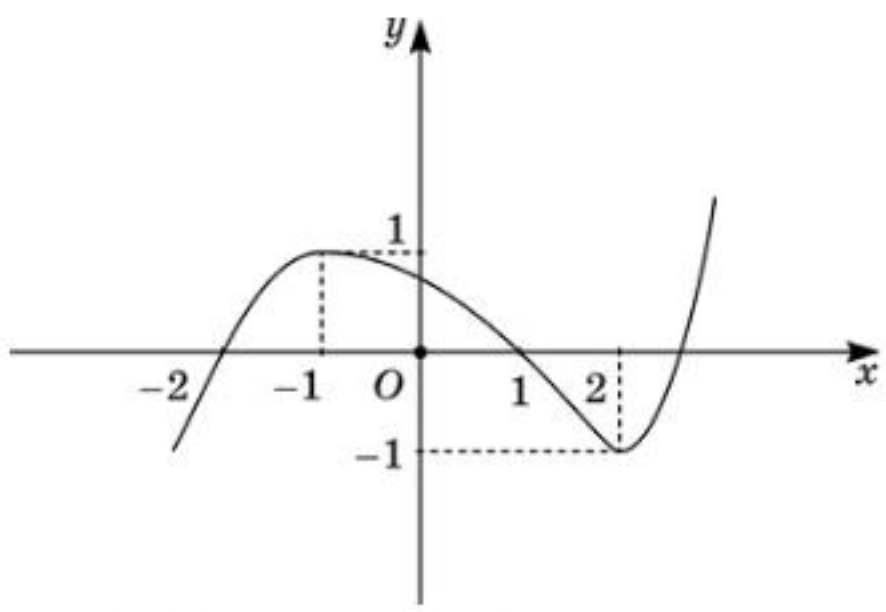
22.14. а) Юзи энг катта бўладиган қилиб тўғри тўртбурчак шаклидаги майдонни умумий узунлиги 80 м бўлган девор билан ўраш керак. Майдон ўлчамларини топинг;
б) юзи энг катта бўладиган қилиб тўғри тўртбурчак шаклидаги гулзорни умумий узунлиги 16 м бўлган девор билан ўраш керак. Гулзор ўлчамларини топинг.

22.15. а) Гипотенузаси билан битта катетининг йиғиндиси 21 га тенг бўлган барча тўғри бурчакли учбурчаклар орасидан юзи энг катта тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчагини топинг;
б) гипотенузаси $c = \sqrt{2}$ бўлган барча тўғри бурчакли учбурчаклар орасидан периметри энг катта бўлган учбурчакни топинг.

22.16. Юзи 400 га бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги экин майдони атрофига эни $l = 10$ м бўлган йўлакка дарахтлар ўтқазиш керак. Ўралган дарахтлар майдонининг юзи энг кичик бўлиши учун экин майдонининг чизиқли ўлчамлари қандай бўлиши керак?

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Қуйида берилган график асосида функциянинг ўсувчи ва камаювчи оралиқларини топинг:



A) $(-1;\ 2)$ — ўсувчи; $(-\infty;\ -1)$ ва $(2;\ +\infty)$ — камаювчи;
B) $(-2;\ 1)$ — камаювчи; $(1;\ +\infty)$ — ўсувчи;
C) $(-\infty;\ -1]$ ва $[2;\ +\infty)$ — ўсувчи; $[-1;\ 2]$ — камаювчи;
D) $(-\infty;\ -1)$ ва $(2;\ +\infty)$ — камаювчи; $(-1;\ 2)$ — ўсувчи.

2. 1-топшириқда берилган график асосида фукнциянинг экстремум нуқталарини топинг:
A) $x_{min} = -2,\ x_{max} = 1$;
B) $x_{min} = -1,\ x_{max} = 2$;
C) $x_{min} = 2,\ x_{max} = -1$;
D) $x_{min} = 1,\ \ x_{max} = 1$.

3. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ функциянинг камайиш оралиғини топинг:
A) $[-1;\ 0)$; B) $[1;\ +\infty)$; C) $[-1;\ 0]$; D) $(-\infty;\ -1]$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

4. $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x$ функциянинг экстремум нуқталарини топинг :
A) $x_{max} = 1$, $x_{min} = -1$; B) $x_{max} = -1$, $x_{min} = 1$;
C) $x_{min} = 1$; D) $x_{max} = -1$.

5. $f(x) = x + 5$ функциянинг ўсиш оралиғини топинг:
A) $(-\infty; +\infty)$; B) $(-\infty; 5)$; C) $(5; +\infty)$; D) мавжуд эмас.

6. $\frac{x^2 - 1}{x}$ функциянинг критик нуқталарини топинг:
A) йўқ; B) 5; C) 2; D) -5.

7. $y = x^3 - 3x$ функциянинг $[0; 1]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:
A) 2; 0; B) 0; -2; C) 3; 0; D) -3; 0.

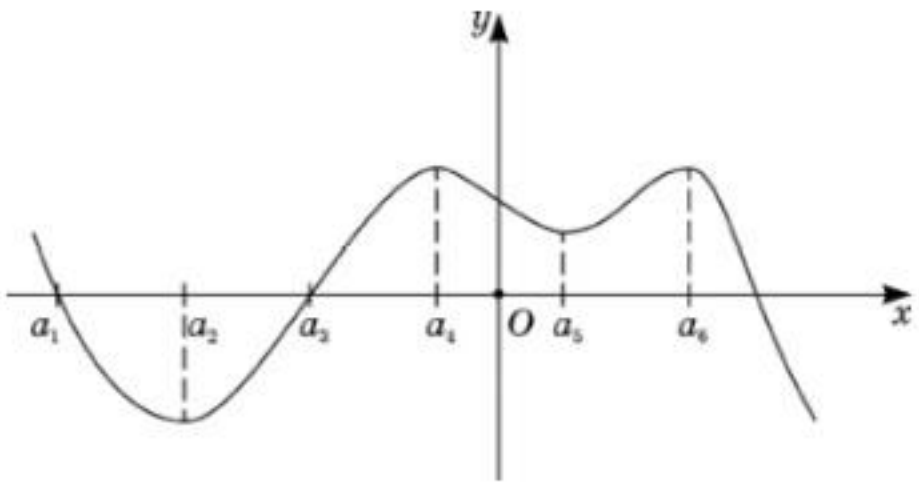
8. $y = 3x^2 - x^3$ функциянинг ўсиш оралиғини топинг:
A) $(-\infty; -2]$ ва $[0; +\infty)$; B) $(-\infty; -2]$ ва $[0; +\infty)$;
C) $(-\infty; 0]$ ва $[2; +\infty)$; D) $[0; 2]$.

9. $y = \sqrt{3}x + \sin 2x$ функциянинг $[0; \pi]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топинг:
A) $\frac{\pi}{6}$; π; B) $\pi\sqrt{3}$; π;
C) 0; $\pi\sqrt{3}$; D) 0; π.

10. $f(x) = -x^3 - 2$ функциянинг максимум нуқтасини топинг:
A) 2; B) -2; C) 0; D) мавжуд эмас.

11. $f(x) = x^2 - 1$ функциянинг минимум нуқтасини топинг:
A) $x_{min} = -3$; Г) $x_{min} = -1$; C) $x_{min} = 1$; D) $x_{min} = 0$.

12. Функциянинг расмда берилган графиги бўйича экстремум нуқталарини топинг:
A) a_1; a_3; a_6;
B) a_1; a_4;
C) a_2; a_4; a_5; a_6;
D) a_1; a_4; a_6.



13. $f(x) = x^2 - 8x$ функциянинг $[-2; 1]$ оралиқдаги энг кичик қийматини топинг:
A) 2; B) -7; C) 3; D) 1.

14. $y = 1 - x^2$ функциянинг камайиш оралиқларини топинг:
A) $[-1; 1]$; B) $[-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$;
C) $(-\infty; 0]$; D) $[0; +\infty)$.

15. Ҳосиласи $f'(x) = x(4 - x)$ бўлган $f(x)$ функциянинг ўсиш оралиқлари узунликларининг йиғиндисини топинг:
A) 3; B) 4; C) 6; D) 5.

16. $g(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$ функциянинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:
A) 9; 1; B) -1; 0; C) $\frac{1}{3}$; 0; D) 0; $-\frac{1}{3}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

17. $y(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}$ функциянинг камайиш оралиқларини топинг:

A) мавжуд эмас; B) $[-3; 3]$;
C) $(-\infty; -3]$ ва $[0; 3)$; D) $(-\infty; -3)$ ва $(0; +\infty)$.

18. $y = x^2 - 2$ функциянинг $[2; 3]$ ораликдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

A) 4; 1; B) −4; 7; C) 2; 7; D) 6; 12.

19. $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$ функциянинг нолларини топинг:

A) −3; 0; 3; B) 3; −3; C) −3; 0; D) 0; 3.

20. $f(x) = 4\sin^2 x + 5\cos^2 x$ функциянинг энг катта қийматини топинг:

A) −2; B) 0; C) 5; D) 2.

21. $f(x) = \sqrt{2}x + \cos 2x$ функциянинг $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топинг:

A) $1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \left[\frac{\pi}{4} + 1\right]$; B) $0; \pi\sqrt{2}$; C) $\frac{\pi}{4}; \pi$; D) $\pi\sqrt{2}; \pi$.

Математик саводхонликка доир топшириқлар

22. Рақамлари такрорланмайдиган ҳолда 2; 3; 5 рақамларидан нечта уч хонали тоқ сон тузиш мумкин:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

23. Иккита бригада жами 40 км йўл таъмирлади. Биринчи бригада кунига 9,5 км, иккинчи бригада эса кунига 7 км йўл таъмирлади. Агар биринчи бригада иккинчисига қараганда бир кун кам ишласа, у ҳолда қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири рост бўлади:

A) биринчи бригада уч кун, иккинчи бригада эса тўрт кун ишлаган;
Г) биринчи бригада тўрт кун, иккинчи бригада эса уч кун ишлаган;
C) биринчи бригада иккинчи бригадага қараганда 3 км ортиқ йўл таъмирлаган;
D) иккинчи бригада биринчи бригадага қараганда 2 км ортиқ йўл таъмирлаган;
E) иккинчи бригада биринчи бригадага қараганда 3 км ортиқ йўл таъмирлаган?

24. [209; 245) оралиққа тегишли 7 га каррали бўлган нечта натурал сон мавжуд:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

25. Агар биринчи сон 25%, иккинчи сон 40% камайтирилса, шу сонларнинг кўпайтмаси неча фоиз камаяди:

A) 40% камаяди; B) 45% камаяди;
C) 20% камаяди; D) 50% камаяди; E) 35% камаяди?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ТАРИХИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Maximum ва *minimum* сўзлари лотинчадан таржима қилинганда мос равишда "энг катта" в "энг кичик" деган маънони билдиради. Геометрик катталикларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишнинг баъзи алоҳида саволлари билан қадимги математиклар ҳам шуғулланган.

Қадимги юнон математиги Евклид ўзининг "Негизлар" номли асарида маъноси бундай тушунчани билдирадиган мулоҳазани исботлайди (геометрик нуқтаи назардан): берилган учбурчакка ички чизилган барча параллелограммлар орасидан асоси учбурчак асосининг ярмига тенг параллелограмнинг юзи энг катта бўлиб ҳисобланади.

Янги асрнинг бошларида табиатшунослик, фан ва техника масалалари катталикларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун умумий усулни талаб қилди. Шу вақтда немис математиги И.Кеплер (1615 йил) катталикнинг максимум атрофидаги ўзгариши жуда кичик деб, экстремумни топишда ҳосилани нолга тенглаштириш ҳақида фикр айтган. Француз математиги П.Ферма ўзининг "Максимумлар ва минимумларни текшириш усули" деб аталувчи асарида лимит ва ҳосила тушунчаларидан фойдаланмаган, унинг экстремумларни топиш усули биз фойдаланаётган ва ҳосилани нолга тенглаш бўлиб ҳисобланадиган Г.Лейбниц ва И.Ньютон усулларига мос келади.

П.Ферма берилган шарга ҳажми энг катта бўлган конусни, сирти энг катта бўлган цилиндрни ички чизиш масалаларидан бошқа масалаларга ҳам ўз усулини қўлланган. Шу билан бирга ўз усулини фақат бутун алгебраик функцияларгагина қўлланиб, экстремумларни фарқлаш (максимумни минимумдан) мезонидан фойдаланмаганини айтиб ўтган маъқул. 1958 йил голландиялик математик Б.Гудденинг берган максимумлар ва минимумларни топиш қоидаси ҳақида ҳам шуни айтиш мумкин.

И.Ньютон (1671 йил) катталикларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишни, яъни тўхталиш тамойилини қуйидагича ифодалаган: "Агар катталик мумкин бўлган қийматларнинг энг каттаси ёки энг кичиги бўлса, у ҳолда ўша пайтда у ўзгармайди". И.Ньютон ўз қоидасини иррационалликка ҳам фойдаланиш мумкин бўлгани учун, Гудде қоидасининг умумий кўриниши бўлишини иккита мисол билан келтирган.

Максимумлар ва минимумлар муаммоларини ўрганишга Л.Лейбниц ҳам катта ҳисса қўшган. Ўзининг "Янги усул" (1684 йил) номли асарида у функциянинг ўсиш ва камайиш оралиғини текширишда дифференциал тушунчасидан фойдаланди ва асосан биз фойдаланаётган, агар $y(x)$ *функциянинг ҳосиласи маълум бир оралиқда функция аргументининг ўзгариши давомида мусбат бўлса, берилган функция шу оралиқда ўсувчи, ҳосила манфий бўлса, функция камаювчи* деган теоремани таърифлайди. Функциянинг (экстремуми мавжуд бўлганда) энг катта ёки энг кичик ординатаси уринманинг оғма бўлмаслик шарти, яъни дифференциал $dy = 0$ шарт билан аниқланади. Бу ҳолда ординаталар "ўсмайди, камаймайди, бир хил туради".

Л. Эйлер (1755 йил) ўзининг "Дифференциал ҳисоблаш" номли асарида функциянинг қиймати, масалан, максимум нуқтасида шу функциянинг энг катта қиймати билан мутлақо мос келмаслигини эътиборга олиб, абсолют экстремумларни "асосий тавсифи" деб аталувчи нисбий экстремумлардан

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

фарқлайди. Шунингдек, у кўп ўзгарувчили $f(x, y, z, \ldots, u)$ функциянинг максимум ва минимуларини кўриб чиқади. Функцияларни максимум ва минимумга текшириш учун Л.Эйлер биринчи ва иккинчи ҳосилалар билангина чекланмай, юқори тартибли ҳосилалардан ҳам фойдаланади.

Максимумлар ва минимумлар ҳақидаги таълимот бизнинг замонимизда вақтдан унумли фойдаланиш, ишлаб чиқаришни керакли хом ашё билан таъминлаб, меҳнат самарадорлигини ошириш, умумий иқтисодни ривожлантириш масалалари ҳозирги жамиятда муҳим бўлиб ҳисобланади.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тасодифий ҳодисалар ва уларнинг турлари, ҳодисалар эҳтимоллигининг классик формуласи, боғлиқ бўлган ва боғлиқ бўлмаган ҳодисалар, уларнинг эҳтимоликларини ҳисоблаш формулалари.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

7 ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ВА УЛАРНИНГ СОНЛИ ТАВСИФЛАРИ

23-§. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИНГ ТАҚСИМОТ ҚОНУНИ

Таянч тушунчалар

Тасодифий миқдор, тақсимот қонуни, Дискрет тасодифий миқдор, узлуксиз тасодифий миқдор

Сиз тасодифий миқдорлар ва уларнинг турлари ҳақида тушунчага эга бўласиз; тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонуни билан танишасиз; улар ёрдамида масалаларечишни ўрганасиз.

БУНИ БИЛАСИЗ: Эҳтимоллар назариясида маълум бир шартлар бажарилганда тажриба ўтказилади. Тажриба натижаси ҳодиса деб қабул қилинади. Ҳодисалар уч гуруҳга бўлинади: 1) рост ҳодисалар; 2) мумкин бўлмаган (ёлғон) ҳодисалар; 3) тасодифий ҳодисалар.

Масалан, “ атмосфера босимида 20°С ҳароратда сув ўзининг суюқ ҳолатини сақлаши”, “кун ва тун йил фаслига боғлиқ ҳолда маълум вақт ичида алмашиб туради”, “кун ва туннинг алмашиши, кундуз ёруғ, тунда қоронғу бўлиши” – рост ҳодисалардир.

БУНИ БИЛАСИЗ: Тасодифий ҳодисалар биргаликда бўлган, биргаликда бўлмаган, тенг имкониятли ҳодисалар, қарама-қарши ҳодисалар бўлиб тўрт гуруҳга бўлинади. Шунингдек, тўла ҳодисалар гуруҳи, бир имкониятли ҳодисалар, эркли (боғлиқ бўлмаган) ва эрксиз (боғлиқ бўлган) ҳодисалар тушунчалари сизга қуйи синфлардан маълум.

Тасодифий ҳодисаларни ўрганганда унинг сонли хоссаларига ҳам тўхталиб, уларни баҳолаш керак. Сонларга тавсиф бериш учун эҳтимоллар назариясида тасодифий миқдорлар деб аталадиган тушунча киритилади.

Тажриба натижасида бир нечта қийматлардан бирини қабул қилувчи миқдор ***тасодифий миқдор*** *деб аталади ва бу қийматлардан қайси бирини қабул қилишини олдиндан айтиш мумкин эмас.*

Тасодифий миқдорларга мисоллар:

1) бир сутка ичида Алмати шаҳридаги туғруқхоналарда дунёга келган чақалоқлар сони;

2) нишонга аниқ теккизгунга қадар отиладиган ўқлар сони;

3) артиллерия снарядининг учиш масофаси;

4) ҳар қандай ишлаб чиқариш ёки ҳар қандай электр энергиясини истеъмол қилиш миқдори (маълум вақт бирлигида, чунончи, ой, йил ва б.).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Юқорида қайд этилган тасодифий миқдорларни тажриба ўтказмасдан аниқ аниқлаш мумкин эмас.

Эҳтимоллар назариясида тасодифий миқдорлар лотинча катта ҳарфлар билан (X; Y; Z; ...), уларнинг қийматлари лотинча кичик ҳарфлар (x_1; y_1; z_1; ...) билан белгиланади.

Қийматлар тўплами чекли ва саноқли бўладиган тасодифий миқдорлар ***дискрет тасодифий миқдорлар*** *дейилади.*

Юқорида келтирилган 1) ва 2) мисоллар дискрет тасодифий миқдорлардир.

Қийматлари узлуксиз $[a; b]$ *кесмада (бу ерда $a < b$, a ва b — аниқ ҳақиқий сонлар) жойлашган тасодифий миқдорлар* ***узлуксиз тасодифий миқдорлар*** *дейилади.*

Юқорида келтирилган 3- ва 4- мисоллар дискрет узлуксиз тасодифий миқдорларни беради.

Эслатма. Дарслик йўналишига мувофиқ дискрет тасодифий миқдорларнинг қийматлари алоҳида аниқ сонлар билан, узлуксиз тасодифий миқдорларнинг қийматлари чекланган кесмада қаралади.

X тасодифий миқдор бўлсин. Унинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n ва уларга мос эҳтимолликлари p_1, p_2, p_3, ..., p_{n-1}, p_n бўлсин. У ҳолда 12-жадвални тузиш мумкин.

12-жадвал

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n

12-жадвалда тасодифий миқдор $X = x_1$ ҳодисанинг эҳтимоллиги p_1, $X = x_2$ ҳодисанинг эҳтимоллиги p_2, $X = x_3$ ҳодисанинг эҳтимоллиги p_3 ва ҳ.к.о $X = x_{n-1}$ ҳодисанинг эҳтимоллиги p_{n-1}, $X = x_n$ ҳодисанинг эҳтимоллиги p_n бўлиш мослиги бажарилган.

12-жадвалда берилган қонуният ***X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни*** *дейилади.*

Модомики, тасодифий миқдор ўзининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларини албатта қабул қилар экан,

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} + p_n = 1 \qquad (1)$$

тенглик бажарилади.

МИСОЛ

1. Лотереяда 10 000 та чипта бор. Бир ютуқда 5000 тг, юзта ютуқда 1000 тг, мингта ютуқда 100 тг дан ютуқ бор бўлиб, қолган чипталарда ютуқ йўқ. Битта чипта сотиб олган одамда ютуқ бўлиш имконияти X тасодифий миқдор бўлса, тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни жадвалини тузамиз.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Ечилиши. Масаланинг шартига кўра ютуқ миқдори 5000 тг ютуқ бўлган битта чипта, 1000 тг ютуқ бўлган юзта чипта, 100 тг ютуқ бўлган мингта чипта бор. Ҳар қайсисининг эҳтимоллигини аниқлаймиз.

$x_1 = 5000,\ p_1 = \frac{1}{10000} = 0{,}0001;$

$x_2 = 1000,\ p_2 = \frac{100}{10000} = 0{,}01;$

$x_3 = 100,\ \ p_3 = \frac{1000}{10000} = 0{,}1.$

У ҳолда ютуқсиз чипталар эҳтимоллиги (1) формула бўйича ҳисобланади.

$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 - 0{,}0001 - 0{,}01 - 0{,}1 = 0{,}8899$. Демак, тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни 12-жадвалда берилган.

13-жадвал

X	5000	1000	100	0
P	0,0001	0,01	0,1	0,8899

МИСОЛ

2. Биринчи мерганнинг нишонни аниқ мўлжалга олиш эҳтимоллиги 0,8. Иккинчи мерганнинг аниқ мўлжалга олиш эҳтимоллиги 0,75. Мерганларнинг ҳар қайсиси нишонга биттадан ўқ отди. X тасодифий миқдор – нишонга теккизишлар сони. Нишонни аниқ мўлжалга олишнинг тақсимот қонунини аниқлаймиз.

Ечилиш. Тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари: 1) $x_1 = 0$ — ҳар икки мергандан иккаласининг ҳам теккиза олмаслиги. Ўша ҳодисага мос эҳтимоллик: $P(\vec{A} \cdot \vec{B}) = P(\vec{A}) \cdot P(\vec{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05.$

2) $x_2 = 1$ (мерганлардан фақат биттасининг аниқ мўлжал олиши). Ўша ҳодисага мос келувчи эҳтимоллик: $P(A\vec{B} + \vec{A}B) = P(A) \cdot P(\vec{B}) + P(\vec{A}) \cdot P(Г) = 0{,}8 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}75 = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35.$

3) $x_3 = 2$ (мерганлардан иккаласининг ҳам аниқ мўлжалга олиши). Ўша ҳодисага мос келувчи эҳтимоллик: $P(A \cdot Г) = P(A) \cdot P(Г) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}6.$

X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни 14-жадвалда берилган.

14-жадвал

X	0	1	2
P	0,05	0,35	0,6

1. Тасодифий ҳодисалар турининг тасодифий миқдорларга таъсири қандай?
2. Тасодифий ҳодисалар ва тасодифий миқдорлар фарқини қандай тушунтириш мумкин?
3. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзиш учун қандай элементлар зарур?
4. Нима учун тасодифий миқдорни тажриба ўтказмасдан ҳам аниқлаш мумкин?

Машқлар

А

23.1. 15-жадвалда тасодифий миқдорнинг тўлиқ бўлмаган тақсимот қонуни берилган:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

15-жадвал

X	4	7	10	13	17
P	0,05	?	?	?	0,05

Номаълум эҳтимолликлар улушларини бир хил деб ҳисоблаб, тасодифий миқдорнинг тўла тақсимот қонунини ёзинг.

23.2. Жадвалда тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни берилган (16-жадвал):

16-жадвал

X	2	?	?	?	?	12
P	0,05	?	?	?	?	0,05

Тасодифий миқдорнинг номаълум қийматлари берилган ҳадлар билан бирга ўсувчи арифметрик прогрессияни ҳосил қилади, уларнинг мос эҳтимолликлари 1 : 3,5 : 3,5 : 1 каби пропорция қонуниятини беради деб ҳисоблаб, тасодифий миқдорнинг тўла тақсимот қонунини ёзинг.

23.3. Ўрта ҳадлари 8 га, 12 га тенг бўлган фақат тўртта ҳаддан иборат арифметрик прогрессия берилган. Агар ўрта ҳадларнинг эҳтимолликлари четки иккита ҳаднинг эҳтимолликларидан тўрт марта катта бўлса, тасодифий миқдорнинг тўла тақсимот қонунини ёзинг.

23.4. Мерган нишонга 3 марта ўқ узди. Нишонга аниқ текказиш эҳтимоллиги 0,9. Мерганнинг нишонга аниқ текказишининг тақсимот қонунини топинг.

B

23.5. Тўртта патрони бор бўлган мерган нишонга текказгунча отади. Мерганнинг нишонни аниқ мўлжалга олиш эҳтимоллиги 0,6 га тенг. Мерганнинг нишонни аниқ мўлжалга олиши учун отган патронларининг тақсимот қонунини топинг.

23.6. 100 та лотерея чиптаси сотилган. Уларда 500 тг дан битта ютуқ, 100 тг дан ўнта ютуқ, 50 тг дан элликта ютуқ бор, қолган чипталар ютуқсиз. Битта лотерея чиптасини сотиб олган киши учун ютуқнинг тақсимот қонунини топинг.

23.7. Бир марта ташланган танганинг “герб” томони билан тушушининг тақсимот қонунини топинг.

23.8. Иккита мерган нишонни мўлжалга олди. Уларнинг нишонни аниқ мўлжалга олиш эҳтимолликлари мос равишда 0,9 ва 0,8. Мерганлар нишонга биттадан ўқ отишди. X тасодифий миқдор нишонга аниқ текказишлар сони. Ўша тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзинг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тасодифий ҳодиса, тасодифий миқдор, уларнинг турлари, тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

24-§. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАРНИНГ СОНЛИ ТАВСИФЛАРИ

Таянч тушунчалар

Тасодифий миқдор, математик кутилма, дисперсия, ўртача квадратик (стандарт) четлашиш

Сиз математик кутилма, дисперсия, ўртача квадратик четлашиш тушунчалари ва уларнинг хоссалари ҳамда формулалари билан танишасиз;

тасодифий миқдорнинг сонли тавсифларидан фойдаланишга доир мисоллар ечишни ўрганасиз.

Тақсимот қонуни тасодифий миқдорнинг батафсил тавсифини беради. Баъзи ҳолларда тасодифий миқдорнинг сонли тавсифини аниқлаш зарур. Шунинг учун тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси, дисперсияси ва ўртача квадратик четлашиш тушунчалари киритилиб, тасодифий миқдорнинг номаълум қийматларини топишни ёки тасодифий миқдорни текширишни қараб чиқамиз.

I. Математик кутилма

Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни 17-жадвалда берилган:

17-жадвал

X	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n

X тасодифий миқдор қийматларининг уларга мос эҳтимоллик қийматларига кўпайтмаларининг йиғиндиси X тасодифий миқдорнинг ***математик кутилмаси*** *дейилади.*

Математик кутилманинг белгиланиши: $M(X)$.

Математик кутилмани ҳисоблаш формуласи:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_{n-1} \cdot p_{n-1} + x_n \cdot p_n. \qquad (1)$$

МИСОЛ

1. Тарқалиш қонунияти 18- ва 19-жадвалларда берилган тасодифий миқдорнинг математик кутилмасини ҳисобланг.

18-жадвал

X	3	7	11	13	16
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

19-жадвал

Y	2	5	8	9	12
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Ечилиши. Ҳар бирининг математик кутилмасини ҳисоблаш учун (1) формуладан фойдаланамиз:

1) $M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}2 + 11 \cdot 0{,}4 + 13 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}1 = 10{,}3$;

2) $M(Y) = 2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}1 = 7{,}4$.

Жавоби: 1) 10,3; 2) 7,4.

Мисолдаги ҳар бир ҳол учун ўрта арифметик қийматни аниқлаймиз.

$$\bar{x} = \frac{3 + 7 + 11 + 13 + 16}{5} = 10; \qquad \bar{y} = \frac{2 + 5 + 8 + 9 + 12}{5} = 7{,}2.$$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Ўша қаралаётган мисолдан бундай хулоса чиқариш мумкин:

1) математик кутилма – тасодифий миқдор қийматларининг ўрта арифметигига яқин жойлашадиган миқдордир:

$$M(X) \approx \bar{x}, \; M(Y) \approx \bar{y},$$

2) тасодифий миқдор қийматлари ўсувчи кетма-кетлик бўлган ҳолда математик кутилмадан кичик тасодифий миқдорнинг қийматлари унинг тақсимот қонуни жадвалининг чап қисмида, катта қийматлари ўнг қисмида жойлашади.

Табиийки, савол туғилади: "Нима учун ..... ўрта арифметикка яқин жойлашади?"

n марта тажриба ўтказилди, деб фараз қилайлик. Ўша тажрибалар натижасида x тасодифий миқдор x_1 қийматни m_1 марта, x_2 қийматни m_2 марта, x_k қийматни m_k марта қабул қилсин.

Бунда X тасодифий миқдорнинг n марта тажриба ўтказилганда ($m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$) қабул қилган барча қийматларининг йиғиндиси қуйидаги йиғиндига тенг:

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k.$$

Ҳар қайси тажрибага мос келувчи тасодифий миқдорнинг қиймати:

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{n} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \cdot \frac{m_k}{n}, \qquad (2)$$

бу ерда $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots, \frac{m_k}{n}$ қийматлар $x_1, x_2, \ldots, x_k$ бўлган ҳолдаги нисбий частоталардир.

Тажрибалар сони n ортган сари $\frac{m_1}{n} \to p_1$, $\frac{m_2}{n} \to p_2$, ..., $\frac{m_k}{n} \to p_k$ интилади. Бинобарин, математик кутилмага тенг миқдорни оламиз.

МИСОЛ

2. 10 киши ишлайдиган компанияда маош бундай тақсимланган: икки киши 20 минг тенге; уч киши 40 минг тенге; тўрт киши 80 минг тенге; бир киши 100 минг тенге олади. Ой сайин маош учун 580 минг тенге ажратилади. Агар барча ишчига бир хил иш ҳақи тўланса, ҳар қайси ишчи ойига қанча маош олган бўлар эди?

Ечилиши. Иш ҳақи миқдори тасодифий миқдор бўлсин. Иш ҳақининг тақсимот қонунини ёзамиз (20-жадвал).

20-жадвал

20 минг тенге	40 минг тенге	80 минг тенге	100 минг тенге
$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

Компаниядаги барча ишчиларга бир хил маош тўланса, уларнинг ҳар бири ойига 58 минг тенге олган бўлар эди. Бу – ўртача ойлик маош миқдори. Математик кутилма ўша ўртача маош миқдорини бериши керак.

$$M(X) = 20000 \cdot \frac{2}{10} + 40\,000 \cdot \frac{3}{10} + 80\,000 \cdot \frac{4}{10} + 100\,000 \cdot \frac{1}{10} = 58\,000.$$

Демак, ўртача маош миқдори математик кутилмага тенг.

Жавоби: 58 минг тенге.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ЭСЛАБ ҚОЛИНГ:

Математик кутилманинг хоссалари:

1) агар C —ўзгармас, X — тасодифий миқдор бўлса, у ҳолда

$$M(C) = C, \quad (3)$$

$$M(CX) = CM(X); \quad (4)$$

2) X, Y, Z — тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда

$$M(X + Y + Z) = M(X) + M(Y) + M(Z). \quad (5)$$

МИСОЛ

3. Биринчи мисолда ҳисобланган X ва $У$ тасодифий катталикларнинг математик кутилмасини қўлланиб, 1) $M(2X)$; 2) $M(4Y)$; 3) $M(5X - 3Y)$ қийматларни топамиз.

Ечилиши. 1-мисолнинг ечилиши бўйича $M(X) = 10,3$; $M(Y) = 7,4$. У ҳолда 1) (4) формулага кўра $M(2X) = 2 \cdot M(X) = 2 \cdot 10,3 = 20,6$; 2) $M(4Y) = 4M(Y) = 4 \cdot 7,4 = 29,6$; 3) (5) ва (4) формулалардан фойдаланиб, $M(5X - 3Y) = 5M(X) - 3M(Y) = 5 \cdot 10,3 - 3 \cdot 7,4 = 51,5 - 22,2 = 29,3$ эга бўламиз.

Жавоби: 1) 20,6; 2) 29,6; 3) 29,3.

Математик кутилма тасодифий миқдорнинг ўрта арифметигига яқин жойлашган катталикнинг сонли тавсифи эканини аниқладик. Ўрта арифметикдан қандай масофада жойлашгани номаълум бўлгани учн тасодифий миқдорнинг бошқа қийматларини топиш муҳим амалий аҳамиятга эга. Масалан, аксарият заводларнинг республика миқёсида ўртача меҳнат унумдорлиги маълум бўлгани билан, ҳар қайси заводнинг хусусий меҳнат унумдорлиги номаълум, эътиборсиз ҳолда қолаверади. Кооператив хўжаликларда ўртача маҳсулотга эътибор қаратилади. Якка кооператив хўжаликларнинг унумдорлиги кўп ҳолларда ҳисобга олинмай қолади.

Демак, тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари унинг ўртача қийматларига нисбатан қандай жойлашганини текшириш учун тасодифий миқдорнинг сонли тавсифлари, яъни дисперсия, ўртача квадратик четлашиш тушунчаларига тўхталиб ўтамиз.

$\{X - M(X)\}$ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси деб ҳисоблайлик. $X - M(X)$ айирма тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қиймати билан ўртача қиймати орасидаги фарқ, ўша фарқ эҳтимоллар назариясида *четлашиш* дейилади.

Четлашишнинг тақсимот қонунини ёзамиз (21-жадвал):

21-жадвал

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	...	$x_n - M(X)$
P	p_1	p_2	...	p_n

Энди четлашишнинг ўртача қийматини ёки унинг математик кутилмасини ҳисоблаймиз. $M(X)$ — ўзгармас миқдор, шунинг учун $M[M(X)]$, яъни доимий (ўзгармас)нинг математик кутилмаси ўзига тенг:

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) \equiv 0.$$

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Шундай қилиб, ҳар қандай тасодифий миқдор четлашишининг ўртача қиймати нолга тенг экан. Демак, четлашишнинг ўртача қиймати тасодифий миқдор қийматларининг бир-бирига яқин ёки узоқ жойлашгани қонуниятини текшира олмайди. Шунинг учун эҳтимоллар назариясида тасодифий миқдорнинг тарқалиш қонуниятини текшириш учун четлашишнинг иккинчи даражасининг математик кутилмаси қаралади.

II. Дисперсия

X тасодифий миқдорнинг математик кутилмасидан четлашиши квадратининг математик кутилмаси тасодифий миқдорнинг ***дисперсияси*** *дейилади.*

Дисперсиянинг белгиланиши: $D(X)$.

Дисперсияни ҳисоблаш формуласи:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \qquad (6)$$

ЭСЛАБ ҚОЛИНГ:

Дисперсиянинг хоссалари:

1) агар C — ўзгармас, X — тасодифий миқдор бўлса, у ҳолда

$$D(C) = 0; \qquad (7)$$

$$D(CX) = C^2D(X); \qquad (8)$$

2) $$D(X) = M(X^2) - M^2(X); \qquad (9)$$

3) X ва Y тасодифий миқдорлар бўлса,

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y). \qquad (10)$$

(6) ва (9) формулаларнинг ўзаро тенг эканини математик кутилма хоссаларидан фойдаланиб исботлаймиз.

Исботланиши. $M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = M(X^2) - 2M(X)\cdot M(M(X)) + M^2(X) = M(X^2) - 2M(X)\cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$. Демак, (9) формула *дисперсияни ҳисоблаш формуласи* ҳисобланади ■.

МИСОЛ

4. 22-жадвалдан фойдаланиб, X тасодифий миқдор дисперсиясини ҳисоблаймиз:

22-жадвал

X	5	7	10	15
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Ечилиши. Дастлаб математик кутилмани топамиз.

$$M(X) = 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 0{,}1 = 8.$$

$[X - M(X)]^2$ миқдорнинг тақсимот қонунини ўрнатамиз. Бунинг учун x_1 ни ҳисоблаб кўрсатамиз: $[X - M(X)]^2 = (5 - 8)^2 = (-3)^2 = 9$. Айнан шундай ҳисоблаб, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 49$ эга бўламиз (23-жадвал).

23-жадвал

$[X - M(X)]^2$	9	1	4	49
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Демак, (6) формуладан фойдаланиб дисперсияни топамиз:

$D(X) = M[X - M(X)]^2 = 9 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2 + 49 \cdot 0{,}1 = 8.$

Жавоби: 8.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

III. Ўртача квадратик четлашиш

Дисперсия тушунчаси – квадрат ўлчовли тушунча, унинг ўлчови тасодифий миқдорнинг квадратига тенг.

Дисперсиядан олинган квадрат илдиз ***ўртача квадратик четлашиш*** *дейилади.*

Ўртача квадратик четлашишнинг белгиланиши: $\sigma(X)$.

Ўртача квадратик четлашишни ҳисоблаш формуласи:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)}. \qquad (11)$$

Ўртача квадратик четлашиш ўлчови – чизиқли ўлчовдир.

МИСОЛ

5. Юқорида келтирилган мисолдаги тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четлашишини ҳисоблаймиз.

Ечилиши. Ҳисоблашларга кўра $D(X) = 8$. Энди (11) формулани қўлланамиз: $\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Жавоби: $2\sqrt{2}$.

Энди тасодифий миқдорнинг сонли тавсифини берувчи математик кутилма, дисперсия, ўртача квадратик четлашишни ҳисоблашга доир мисоллар қараб чиқамиз.

МИСОЛ

6. X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунлари 24 – 25-жадвалларда берилган:

24-жадвал

X	3	5	8	10	12
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

25-жадвал

Y	2	5	8	12	14
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

1) $M(X)$, $M(Y)$; 2) $D(X)$, $D(Y)$; 3) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$; 4) $D(3X - 2Y)$ қийматларни ҳисоблаймиз.

Ечилиши. 1) $M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}1 = 7{,}4$;

$M(Y) = 2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}3 + 12 \cdot 0{,}3 + 14 \cdot 0{,}1 = 8{,}6$.

2) Дисперсияларни аниқлаш учун 26-, 27-жадвалларни тўлдирамиз:

26-жадвал

X^2	9	25	64	100	144
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

27-жадвал

Y^2	4	25	64	144	196
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

$M(X^2) = 9 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}3 + 64 \cdot 0{,}3 + 100 \cdot 0{,}2 + 144 \cdot 0{,}1 = 62$,

$M(Y^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}2 + 64 \cdot 0{,}3 + 144 \cdot 0{,}3 + 196 \cdot 0{,}1 = 87{,}4$.

$D(X) = 62 - 7{,}4^2 = 62 - 54{,}76 = 7{,}24$,

$D(Y) = 87{,}4 - 8{,}6^2 = 87{,}4 - 73{,}96 = 13{,}44$.

3) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}24} \approx 2{,}7$, $\quad \sigma(X) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{13{,}44} \approx 3{,}7$;

4) $D(3X - 2Y) = 9D(X) + 4D(Y) = 9 \cdot 7{,}24 + 4 \cdot 13{,}44 = 65{,}16 + 53{,}76 = 118{,}92$.

Жавоби: 1) 7,4; 8,6; 2) 7,24; 13,44; 3) ≈2,7; ≈3,7; 4) 118,92.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

1. Математик кутилма орқали тасодифий миқдорнинг қандй хоссаси аниқланади?
2. Ўрта арифметик тасодифий миқдорнинг қандай сонли тавсифига мувофиқ келади?
3. Ўртача квадратик четлашиш ва дисперсия тушунчаларининг геометрик хоссаларини қандай тушунтириш мумкин?
4. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ни топиш учун тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунларидан бошқа қўшимча маълумотлар керакми? Жавобингизни тушунтиринг.

Машқлар

А

24.1. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни 28-жадвалда берилган:

28-жадвал

X	2	4	7	9	12
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Математик кутилмани ҳисобланг.

24.2. Тасодифий миқдорнинг берилган тақсимот қонунига кўра унинг дисперсиясини топинг (29-жадвал):

29-жадвал

X	3	8	12	16	18
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

24.3. Тасодифий миқдорнинг берилган тақсимот қонунига кўра четлашиш миқдорини топинг (30-жадвал):

30-жадвал

X	2	5	7	10
P	0,2	0,4	0,2	0,2

24.4. Жадвалда X тасодифий миқдорнинг тўлиқ бўлмаган қонунияти берилган. Тақсимот қонунига кўра дисперсия ва ўртача квадратик четлашишни топинг (31-жадвал):

31-жадвал

X	3	21	30	50
P	0,25	?	0,25	0,25

24.5. Тасодифий миқдор X нинг тарқалиш қонуниятидан фойдаланиб, $M(X)$ қийматини ҳисобланг (32-, 33-жадваллар):

32-жадвал

1)

X	1	2	3
P	0,7	0,1	0,2

33-жадвал

2)

Y	−1	1	2
P	0,4	0,1	0,5

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

24.6. Тасодифий миқдор Y нинг тарқалиш қонуниятидан фойдаланиб дисперсияни топинг (34-, 35-жадваллар):

34-жадвал

1)

Y	−2	−1	1	2	3
P	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

35-жадвал

2)

Y	−2	−1	1	2
P	0,1	0,2	0,5	0,2

24.7. 24.5- ва 24.6-машқларда берилган тарқалиш қонунидан фойдаланиб ўртача квадратик четлашишни топинг.

В

24.8. Номаълум эҳтимолликларнинг улушлари бир хил бўлган ҳолда X тасодифий катталикнинг тўлиқ бўлмаган тақсимот қонуни жадвалини тўлдиринг. 36-жадвалдан фойдаланиб $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ни топинг.

36-жадвал

X	3	7	12	15	18	21
P	0,1	0,1	?	?	0,1	0,1

24.9. X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонуни ёрдамида $M(X + Y)$, $D(X + Y)$ қийматларни топинг (37-, 38-жадваллар):

37-жадвал

X	6	10	14	20
P	$\frac{1}{4}$	0,2	0,3	$\frac{1}{4}$

38-жадвал

Y	3	8	11	16
P	0,2	0,3	0,3	0,2

24.10. 24.9-машқдаги 37, 38-жадваллардан фойдаланиб $\sigma(X + Y)$, $\sigma(X + 2Y)$ қийматларни топинг.

24.11. Жадвалда берилган X ва Y тасодифий миқдорларнинг тўлиқ бўлмаган қонунлари бўйича $M(X)$, $M(Y)$, $M(X - M(X))$, $M(Y - M(Y))$, $D(X)$, $D(Y)$ миқдорларни топинг (39-, 40-жадваллар):

39-жадвал

X	3	21	30
P	0,25	?	0,45

40-жадвал

Y	24	26	28
P	0,25	0,25	?

Мос миқдорларни таққослаб, қайси миқдорларнинг яқин жойлашганини кўрсатинг.

24.12. Иккита мерган нишонга бир мартадан отганда ўқни нишонга аниқ текказишининг тақсимот қонуни берилган (41-, 42-жадваллар):

41-жадвал

X	8	8	10
P	0,4	0,1	0,5

42-жадвал

Y	8	9	10
P	0,2	0,5	0,3

Иккита мергандан қайси бири нишонга аниқ текказган?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

24.13. Тасодифий миқдор X нинг тақсимот қонуни бўйича $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(2X + 5)$, $D(2X + 5)$ миқдорларни топинг (43-жадвал):

43-жадвал

X	2	3	4	5
P	0,3	0,1	0,5	0,1

24.14. $X(-1;\ 0;\ 1)$ ва $M(X) = 0{,}1$; $M(X^2) = 0{,}9$ берилган. Тасодифий миқдорнинг қийматларига мос эҳтимолликларни топинг ва тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзинг.

24.15. X ва Y ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар ва $D(X) = 2$, $D(Y) = 5$. $D(3X + Y)$ ва $D(3Y - 2X)$ қийматларни топинг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Тўрттаси яроқли, биттаси яроқсиз деталлар бор. Шу деталлардан тасодифий қонуният билан иккита деталь олинган. Олинган деталлардан иккаласининг ҳам яроқли деталь бўлиш эҳтимолини топинг:

A) 0,4; Г) 0,6; C) 0,5; D) 0,7.

2. 44-жадвалда X тасодифий миқдорнинг тўлиқ бўлмаган тақсимот қонуни берилган:

44-жадвал

X	5	8	12	15	18
P	0,2	?	?	?	0,2

Номаълум эҳтимолликлар тақсимоти 1 : 2 : 1 каби пропорция билан берилган деб олиб, тақсимот қонуни жадвалини тўлдиринг (45—48-жадваллар):

45-жадвал

A)

X	5	8	12	15	18
P	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2

46-жадвал

B)

X	5	8	12	15	8
P	0,2	0,2	0,5	0,2	0,2

47-жадвал

C)

X	5	8	12	15	18
P	0,2	0,15	0,3	0,15	0,2

48-жадвал

D)

X	5	8	12	15	8
P	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

3. 49-жадвалда X тасодифий миқдорнинг тўлиқ бўлмаган тақсимот қонуни берилган:

49-жадвал

X	5	?	?	?	17
P	0,05	?	?	?	0,05

Номаълум эҳтимолликларнинг тақсимоти бир хил, уларга мос қийматлари берилган қийматлар билан бирга ўсувчи арифметик прогрессияни ташкил этади деб олиб, тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни жадвалини тўлдиринг (50—53-жадваллар):

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

A)

50-жадвал

X	5	8	11	14	17
P	0,05	0,3	0,3	0,3	0,05

B)

51-жадвал

X	5	8	12	15	17
P	0,02	0,3	0,3	0,3	0,8

C)

52-жадвал

X	5	8	11	14	17
P	0,05	0,2	0,3	0,4	0,05

D)

53-жадвал

X	5	8	12	15	18
P	0,05	0,3	0,3	0,3	0,5

4. X тасодифий миқдор 54-жадвалдаги каби тақсимот қонуни билан берилган:

54-жадвал

X	1	3	5	8	12
P	0,125	0,25	0,25	0,25	0,125

$M(X)$; $M\,[X - M(X)]$; $M(5X)$ қийматларини топинг:
A) 5,625; 0; 28,25;
Г) 28,125; 5,65; 0;
C) 5,625; 0; 28,125;
D) 5,65; 0; 28,25.

5. X тасодифий миқдор 55-жадвалдаги каби тақсимот қонуни билан берилган:

55-жадвал

X	3	7	11	16	18
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Ушбу тарқалиш қонунидан фойдаланиб дисперсия ва ўртача квадратик четлашишни топинг:

A) $D(X) = 20{,}25$, $\sigma(X) = 4{,}5$; B) $D(X) = 4{,}4$, $\sigma(X) = 19{,}49$;
C) $D(X) = 12{,}25$, $\sigma(X) = 3{,}5$; D) $D(X) = 19{,}49$, $\sigma(X) \approx 4{,}4$.

6. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидаги 56-жадвалда кўрсатилган:

56-жадвал

X	3	4	7	9	18
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ қийматларни топинг:
A) $M(X) = 6{,}7$, $D(X) = 6{,}61$, $\sigma(X) \approx 2{,}57$;
B) $M(X) = 6$, $D(X) = 5$, $\sigma(X) \approx \sqrt{5}$;
C) $M(X) = 6{,}61$, $D(X) = 6{,}7$, $\sigma(X) = 2{,}57$;
D) $M(X) = 6$, $D(X) = 4$, $\sigma(X) = 2$.

7. X ва Y тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонуни 57-, 58-жадвалларда берилган:

57-жадвал

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

58-жадвал

Y	3	5	8	12	15
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Кўрсатилган сонли тавсифларни топинг: 1) $M(3X - 4Y)$; 2) $D(2X + 3Y)$.

A) 7,5; 60,59; B) 2,3; 60,59;
C) 7,5; 139,33; D) 2,3; 139,33.

8. Биринчи мерганнинг бир марта отганда нишога текказиш эҳтимоли 0,9. Иккинчи мерганнинг худди шундай шароитдаги эҳтимоллиги 0,95. X тасодифий миқдор—нишонга аниқ текказишлар сони. Ушбу тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг (59—62-жадваллар):

A) *59-жадвал*

X	0	1	2
P	0,14	0,855	0,005

B) *60-жадвал*

X	0	1	2
P	0,14	0,005	0,855

C) *61-жадвал*

X	0	1	2
P	0,855	0,14	0,005

D) *62-жадвал*

X	0	1	2
P	0,005	0,14	0,855

9. Имтиҳон билетлари учта саволдан ташкил топган. Ўқувчининг исталган саволга жавоб бериш эҳтимоли 0,8. Тасодифий миқдор X — ўқувчи жавоб бера оладиган саволлар сони. Тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг (63—66-жадваллар):

A) *63-жадвал*

X	0	1	2	3
P	0,008	0,096	0,384	0,512

B) *64-жадвал*

X	0	1	2	3
P	0,512	0,096	0,384	0,008

C) *65-жадвал*

X	0	1	2	3
P	0,096	0,384	0,008	0,512

D) *66-жадвал*

X	0	1	2	3
P	0,384	0,008	0,512	0,096

Математик саводхоналикка доир топшириқлар

10. Харидорда 20 000 тг бор. Сотиш акциясигача шу пулга у бир хил товар олди. Чегирма вақтида тўртта бир хил товар олинди. Акция вақтида товарнинг баҳоси неча фоиз камайган:

A) 20%; B) 30%; C) 25%; D) 50%; E) 75%?

11. (111; 123] оралиққа тегишли 3 га каррали бўлган қанча натурал сон мавжуд:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7?

12. 9; 1; 0; 8 рақамлардан тузилган энг катта тўрт хонали сон билан энг кичик тўрт хонали соннинг айирмасидан 1279 га ортиқ сонни топинг:

A) 9000; B) 9090; C) 10 000; D) 9990; E) 9900.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

13. Таъмирлаш ишларини ўтказиш учун гулқоғоз олиш керак. Учта дўконда гулқоғозларнинг баҳоси ҳар хил, бироқ ҳар бирида чегирмалар бор (67-жадвал).

67-жадвал

	Товарнинг баҳоси (бир ўрам)	Чегирма (%)
Биринчи дўкон	8600 тг	10%
Иккинчи дўкон	7000 тг	5%
Учинчи дўкон	8000 тг	15%

Рост мулоҳазаларни кўрсатинг:

A) учинчи дўкондаги бир ўрамнинг баҳоси бошқа дўконлардаги битта ўрамнинг баҳосидан ортиқ;

B) учинчи дўкондаги битта ўрамнинг баҳоси бошқа дўконлардаги битта ўрамнинг баҳосидан кам;

C) чегирмани ҳисобга олиб гулқоғозни биринчи дўкондан олган маъқул;

D) иккинчи дўкондаги иккита ўрамнинг нархи учинчи дўкондаги иккита ўрамнинг нархидан ортиқ;

E) иккинчи дўкондаги иккита ўрамнинг нархи қолган иккита дўкондаги битта ўрам баҳоларининг йиғиндисидан кам.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

10-СИНФ АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

I. Ҳисоблашлар

1. Берилган нуқталардаги $y = f(x)$ функциянинг қийматини топинг:

а) $f(x) = 0{,}5x - 4{,}9, \quad x = 0;\ 2;\ 9;$

б) $f(x) = x - x^2, \ x = \frac{1}{2}; -\frac{1}{2};\ 7;$

в) $f(x) = x^2 + 2, \ x = 1; -1; -3;$

г) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 5}, \ x = -4; -6; 0.$

2. а) $f(x) = \sin 3x - x;$ б) $f(x) = 5\mathrm{tg}x - 5\sqrt{3};$

в) $f(x) = \cos 2x - \sin x;$ г) $f(x) = \frac{x}{\cos x}$ функциялар берилган.

$f(0), \ f\left(\frac{\pi}{3}\right), \ f(-\pi)$ қийматларни топинг.

3. Ифоданинг қийматини топинг:

а) $\arccos(-1) - 5\mathrm{arctg}1 - \arcsin(-1);$

б) $\arcsin 1 + 6\mathrm{arctg}1 - \arccos(-\frac{1}{2});$

в) $\mathrm{arctg}(-1) - \mathrm{arcctg}(-1) - 6\arccos 0;$

г) $\mathrm{arcctg}1 \cdot \arccos 1 + \mathrm{arcctg}\sqrt{3} \cdot \arcsin 0;$

д) $\frac{6}{\pi}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arctg}(\sqrt{3})\right);$

е) $-\frac{6}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$

4. $x \to x_0$ ҳолда $y = f(x)$ функциянинг лимитини топинг:

а) $f(x) = x^2 - 1, \ x \to 1;$ б) $f(x) = \sin^2 x, \ x \to \frac{3\pi}{2};$

в) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 6}, \ x \to 6;$ г) $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 49}, \ x \to 7.$

5. Функция орттирмасининг тақрибий қийматини топинг:

а) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 80, \ x_0 = 4, \ \Delta x = 0{,}001;$

б) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7}, \ x_0 = 3$ ва $\Delta x = 0{,}1$.

6. Квадрат томонининг узунлиги 5 см. Томонининг узунлиги 0,01 см узартилганда юза орттирмасининг тақрибий қийматини топинг.

7. Функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = x^2 + 0{,}5x;$ б) $f(x) = -3x^3 + 10x^2;$

в) $f(x) = x + 10\sqrt{x};$ г) $f(x) = \sin x - \cos x + 5;$

д) $f(x) = \frac{x^3}{x^3 + 1};$ е) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}.$

8. Берилган нуқтадаги $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласи қийматини топинг:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

а) $f(x) = x^2 - 6x$; $x = 0$; б) $f(x) = x \cdot \mathrm{tg}x$; $x = \pi$;

в) $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $x = 2$; г) $f(x) = \frac{x-1}{x}$; $x = -2$.

9. Функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = \frac{1}{7}x^7 + \cos x$; б) $f(x) = \frac{1}{12}x^6 - \sin x$; в) $f(x) = x^6 \cdot (x^4 - 1)$;

г) $f(x) = x^{11} \cdot (x^7 + 2)$; д) $f(x) = \frac{2}{x^8} - x^8$; е) $f(x) = \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^5}$.

10. Жисм $s(t) = 3t^2 + 5$ қонун бўйича ҳаракатланади. $t = 2$ с вақтдаги жисмнинг тезлигини топинг.

11. Ҳаракат $s(t) = 4t^2 - 3$ қонун билан берилган. $t = 5$ с вақтдаги жисмнинг тезлигини топинг.

12. $s(t) = t^2 - 4t + 5$ қонун бўйича ҳаракатланган нуқтанинг тезлиги қайси вақтда нолга тенг бўлади?

13. а) $s(t) = t^3 - 6t + 8$, $t = 3$; б) $s(t) = t^3 - 2t^2 + 1$ қонун бўйича ҳаракатланувчи жисмнинг $t = 2$ с вақтдаги тезлиги ва тезланишини топинг.

14. Мураккаб функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = (x^3 - 6)^{110}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$;

в) $f(x) = \sin^5(6x - 1)$; г) $f(x) = 2\cos^4\left(\frac{\pi}{3} - x^4\right)$.

15. Агар:

а) $f(x) = (x^6 + x)^3 - 15$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = \mathrm{tg}^4\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = 0$;

в) $f(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; г) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x^3$, $x_0 = 0$

бўлса, у ҳолда $f'(x_0)$ қийматини топинг.

16. Даражанинг тақрибий қийматини топинг:

а) $(1{,}012)^3$; б) $(1{,}005)^{10}$; в) $(0{,}975)^4$; г) $(3{,}027)^4$.

17. Илдизнинг тақрибий қийматини топинг:

а) $\sqrt{1{,}006}$; б) $\sqrt{24{,}84}$; в) $\sqrt{99{,}5}$; г) $\sqrt{1{,}3}$.

18. Берилган ораликда функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

а) $f(x) = x - x^2$, $[1; 2]$; б) $f(x) = x^2 + x + 1$, $[0; 1]$;

в) $f(x) = x^3 - 3x + 7$, $[-3; 1]$; г) $f(x) = 3x^3 - x + 1$, $[-2; 3]$.

19. Қуршовининг узунлиги 50 м га тенг тўғри тўртбурчак шаклидаги ер майдонининг энг катта юзини топинг.

20. Юзи 400 м^2 тўғри тўртбурчак шаклидаги ер майдони қуршовининг энг кичик узунлигини топинг.

21. Кубларининг йиғиндиси энг кичик бўлиши учун 5 сонини қандай иккита қўшилувчига ажратиш керак?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

22. Тўғри бурчакли учбурчакнинг асоси ва баландлигининг йиғиндиси 12 см. Учбурчакнинг юзи энг катта бўлиши учун унинг асоси узунлиги қандай бўлиши керак?

II. Тенгламалар ва тенгламалар системаси

Тригонометрик тенгламаларни ечинг **(23—27)**:

23. а) $\cos 5x \cdot \mathrm{tg}x = 0$; б) $\sin 3x \cdot \mathrm{tg}x = 0$;
в) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3} = 0$; г) $3\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{3} = 0$.

24. а) $\cos 5x = \cos 3x$; б) $\sin 5x = \sin 3x$;
в) $\sin 6x + \sin 2x = \sin 4x$; г) $\cos 2x - \sin 4x = 0$.

25. а) $\mathrm{tg}^2x - 3\mathrm{tg}x + 2 = 0$; б) $2\sin^2x - 3\sin x + 1 = 0$;
в) $3\cos^2x - 5\cos x + 2 = 0$; г) $4\mathrm{ctg}^2x - 6\mathrm{ctg}x + 2 = 0$.

26. а) $\mathrm{tg}x - 3\mathrm{ctg}x = 0$; б) $2 - \sin x = 2\cos^2x$;
в) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2x$; г) $\cos^2x + 3\sin^2x - 3 = 0$.

27. а) $3\sin^2x + \cos^2x = 2\sin 2x$; б) $\sqrt{3}\sin 2x - 6\cos^2x = -3$;
в) $\sin^2x + \frac{3}{2}\cos^2x = \frac{5}{2}\sin x \cdot \cos x$;
г) $6\sin^2x + 3\sin x \cdot \cos x - 5\cos^2x = 2$.

$f'(x) = 0$ тенгламани ечинг **(28—31)**:

28. а) $f(x) = x^2 + 2x$; б) $f(x) = x - x^2$;
в) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}5x^2 + 6x$; г) $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 25x$.

29. а) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^3 + 20x$; б) $f(x) = \frac{5}{2}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 3x$;
в) $f(x) = x^7 - 7x$; г) $f(x) = 0{,}25x^8 + 2x$.

30. а) $f(x) = \sin x + x$; б) $f(x) = x - \cos x$.

31. а) $f(x) = \mathrm{tg}x - x$; б) $f(x) = x + \mathrm{ctg}x$.

III. Тенгсизликлар

Тенгсизликни ечинг **(32—36)**:

32. а) $\sin 2x$ l $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) cos ☒ m $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$; г) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) < 1$.

33. а) $\sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x > \frac{1}{2}$;
б) $\cos 6x\cos x - \sin 6x\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

34. а) $\frac{2\mathrm{tg}2x}{1 - \mathrm{tg}^2 2x}$ m$\sqrt{3}$; б) $\frac{1 - \mathrm{tg}^2 3x}{2\mathrm{tg}3x} > -\sqrt{3}$.

35. а) $\cos^2x + \frac{1}{2} > \sin^2x$; б) $4\sin 2x\cos 2x - \sqrt{2}$ m 0.

36. а) $\frac{1}{\mathrm{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ l $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{1}{\mathrm{tg}x - \frac{\pi}{3}}$ m -1.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Тенгсизликлар системасини ечинг (37-38):

37. а) $\begin{cases}\sin x \geqslant 0,\\ \cos x \leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2\sin x \leqslant 0,\\ 3\cos x > 0.\end{cases}$

38. а) $\begin{cases}\mathrm{tg}x < 0,\\ \mathrm{ctg}x < 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\mathrm{tg}x > 0,\\ \sin x \geqslant 0.\end{cases}$

39. $f'(x) < g'(x)$ тенгсизликни ечинг:

а) $f(x) = -x^2 + x$, $g(x) = x - 10$; б) $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 3x - x^2$;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -x$; г) $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$, $g(x) = 6x + \frac{2}{x}$.

40. $f'(x) \mid 0$ тенгсизликни ечинг:

а) $f(x) = x^2 - 1$; б) $f(x) = x + 2x^2$; б) $f(x) = 3x + x^3$; г) $f(x) = 6 + x^3$.

41. $f'(x) \text{ m } 0$ тенгсизликни ечинг:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$; б) $f(x) = x^3 - 5{,}5x^2 - 20x$;

в) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 15$; г) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 20$.

42. $f'(x) > 0$ тенгсизликни ечинг:

а) $f(x) = -\cos(2x - 1) - x$; б) $f(x) = -\sin(x + 1) + 0{,}5x$;

в) $f(x) = 2\sin x - \sqrt{3}x$; г) $f(x) = \frac{1}{4}\cos 8x + \sqrt{2}x$.

IV. Функция

43. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y = \sqrt{4 - x}$; б) $y = \sin x + \sqrt{x}$; в) $y = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$; г) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}$.

44. Функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

а) $y = x^2 + 2x - 10$; б) $y = \frac{1}{x - 40}$; в) $y = 8\cos x$; г) $y = 3 + 2\sin x$.

45. $y = x^2$ функциянинг [0; 3] кесмада графиги берилган. Агар функция: а) жуфт; б) тоқ; г) жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас бўлса, у ҳолда графикни давом эттириб ясанг.

46. Функциянинг жуфт ёки тоқ эканини аниқланг:

а) $f(x) = x^5 - x^{21}$; б) $f(x) = \sin x - \sin 3x$;

в) $f(x) = x^2 + \cos^3 x$; г) $f(x) = \sin^4 x - x$;

д) $f(x) = \frac{x}{\cos x} + \mathrm{tg}x$; е) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x + \frac{x^3}{\sin x}$.

47. Даври 3 га тенг бўлган $y = f(x)$ даврий функциянинг [0; 3] ораликдаги графигининг қисмини ясаб, уни [−3; 9] ораликда давом эттиринг.

48. Функциянинг даврини топинг:

а) $y = 3\cos 3x$; б) $y = 2\sin\frac{1}{x}$; в) $y = -4\mathrm{tg}(x + 2)$; г) $y = \mathrm{ctg}(3 - 2x)$.

49. Сонлар тўғри чизиғида узлуксиз ва:

а) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ оралиқларда ўсувчи, [−1; 3] ораликда камаювчи ва $f(-1) = 4$, $f(3) = -2$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

б) $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$ оралиқларда камаювчи, $[2; 4]$ оралиқда ўсувчи ва $f(2) = -1$, $f(4) = 3$;

в) $(-\infty; -5] \cup [3; 6]$ оралиқларда ўсувчи, $[-5; 3] \cup [6; +\infty)$ оралиқда камаювчи ва $f(-5) = 0$, $f(3) = -3$, $f(6) = 2$;

г) $(-\infty; -4] \cup [0; 2]$ оралиқларда камаювчи, $[-4; 0] \cup [2; +\infty)$ оралиқда ўсувчи ва $f(-4) = -2$, $f(0) = 2$, $f(2) = -5$ бўлган $y = f(x)$ функциянинг графигини ясанг.

50. Содда шакл алмаштиришлардан фойдаланиб функциянинг графигини ясанг:

а) $y = x^2 - 2x + 5$; б) $y = x^2 + 4$;

в) $y = 2 - \frac{1}{x}$; г) $y = 1 + \frac{2}{x-3}$;

д) $y = 2\sin x$; е) $y = 2 + \cos x$;

ё) $y = 1 + 3\sin 2x$; ж) $y = 3\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$;

з) $y = \mathrm{tg}$ [illegible] $+ 2$; и) $y = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - 1$.

51. Кўрсатилган оралиқда берилган функция учун тескари функцияни ёзиб, унинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $f(x) = 2x + 3$, $x \in R$;

б) $f(x) = (x-1)^2$, $x \in [0; +\infty)$;

в) $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [0; +\infty)$.

52. Функциянинг узилиш нуқталарини топинг:

а) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; б) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$; в) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$;

г) $f(x) = \frac{x-3}{x(x+1)(x^2-25)}$; д) $f(x) = \frac{x-1}{\cos x}$; е) $f(x) = \frac{3}{\sin x}$.

53. $g(x) = x^3 + 1$; $\phi(x) = \sqrt{x}$; $u(x) = \frac{2}{x}$. Мураккаб функциялар тузинг.

54. Абсциссаси x_0 бўлган нуқтада $y = f(x)$ функциянинг графигига ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

а) $y = x^2 - 3x + 4$, $x_0 = 1$; б) $y = 4 - x^2$, $x_0 = -1$;

в) $y = x^3 + 2x - 1$, $x_0 = 0$; г) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, $x_0 = 3$.

55. $y = x^2 - 3x + 5$ функция графигининг $M(2; 3)$ нуқтасидан ўтувчи уринма абсцисса ўқи билан қандай бурчак ҳосил қилади? Ушбу уринма тенгламасини ёзинг.

56. $y(x) = x^2 - 2x + 3$ параболанинг абсциссаси $x_0 = 2$ бўлган нуқтада ўтказилган уринмаси абсцисса ўқи билан қандай бурчак ҳосил қилади?

57. Абсциссаси x_0 бўлган нуқтада $y = f(x)$ функциянинг графигига ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

а) $y = \mathrm{ctg}x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; б) $y = \mathrm{tg}x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

58. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $y = 2x - x^2$; б) $y = x^2 + 7$;

в) $y = x^3 - 3x + 10$; г) $y = \frac{1}{3}x^3 - 9x - 11$;

д) $y = \frac{x}{x+1}$; е) $y = \frac{x+1}{x}$;

ё) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$; ж) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 2$.

59. Функцияни экстремумга текширинг:

а) $y = 8 - x^2$; б) $y = x^3 + 6x$;

в) $y = x^4 - 2x^2 + 1$; г) $y = 4x - x^4$;

д) $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$; е) $y = \frac{4}{3}x^3 + 24x - 3$;

ё) $y = \frac{3x}{x^2+1}$; ж) $y = 3x - \frac{27}{2 - x^2}$.

60. Функцияни ҳосила ёрдамида текшириб, графигини ёзинг:

а) $y = x^2 - 10x + 9$; б) $y = x^3 + 9x$; в) $y = -x^2 + 4x$;

г) $y = 6x^2 - x^3$; д) $y = \frac{x}{x+1}$; е) $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Математик саводхонликка доир топшириқлар

61. x ва y турли иккита сон ва ҳар бири z сонига бўлинади. Рост мулоҳазани кўрсатинг:

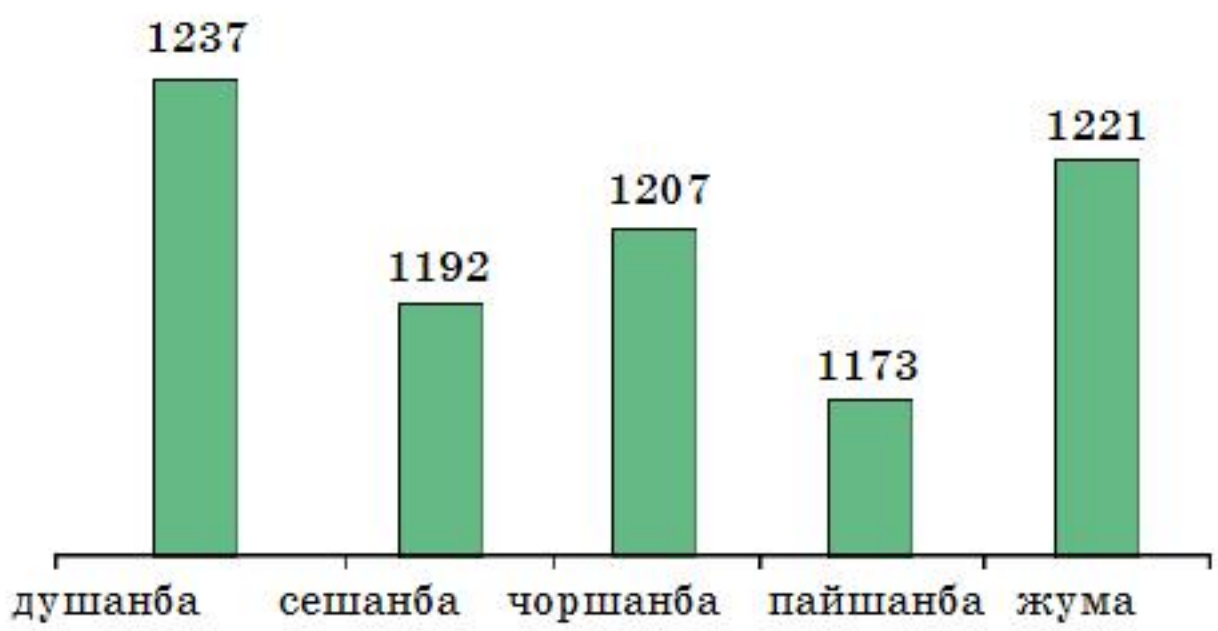
A) $\frac{x-y}{5x}$ ифода z сонига бўлинади; B) $\frac{6y}{x+y}$ ифода z сонига бўлинади;

C) $-4x + 3$ ифода z сонига бўлинади;

D) $-4x + 3x$ ифода z сонига бўлинади;

E) $\frac{x^3}{y^3}$ ифода z сонига бўлинади;

62. Диаграммадан фойдаланиб корхонанинг беш кунда тайёрлаган маҳсулотларининг ўрта арифметиги билан четлашишини топинг (65-расм):



65-расм

A) ўрта арифметиги — 1208, четлашиш — 64;

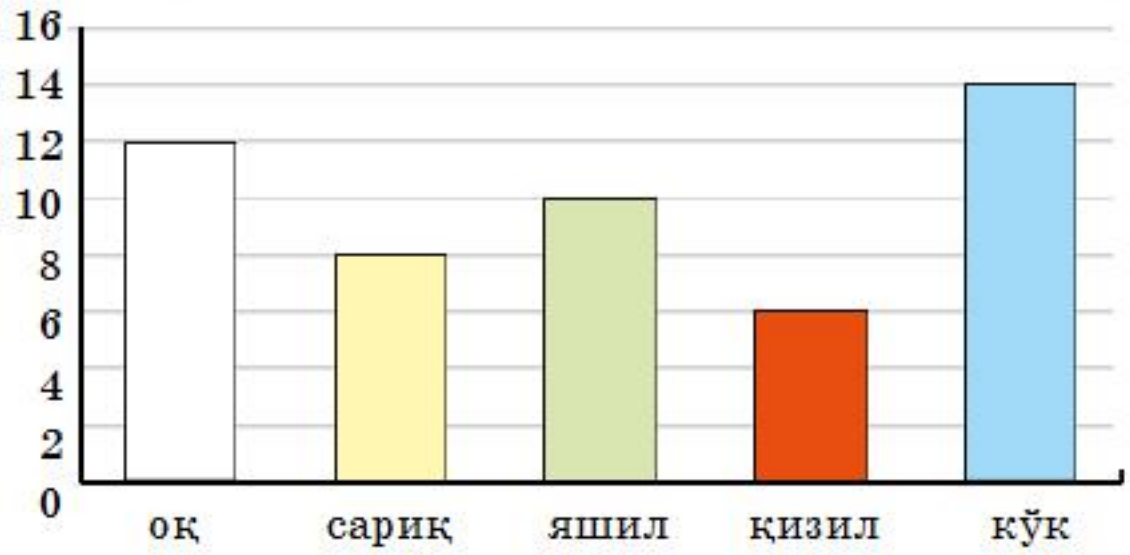
B) ўрта арифметиги — 1206, четлашиш — 66;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

C) ўрта арифметиги — 1206, четлашиш — 64;
D) ўрта арифметиги — 1208, четлашиш — 70;
E) ўрта арифметиги — 1208, четлашиш — 66.

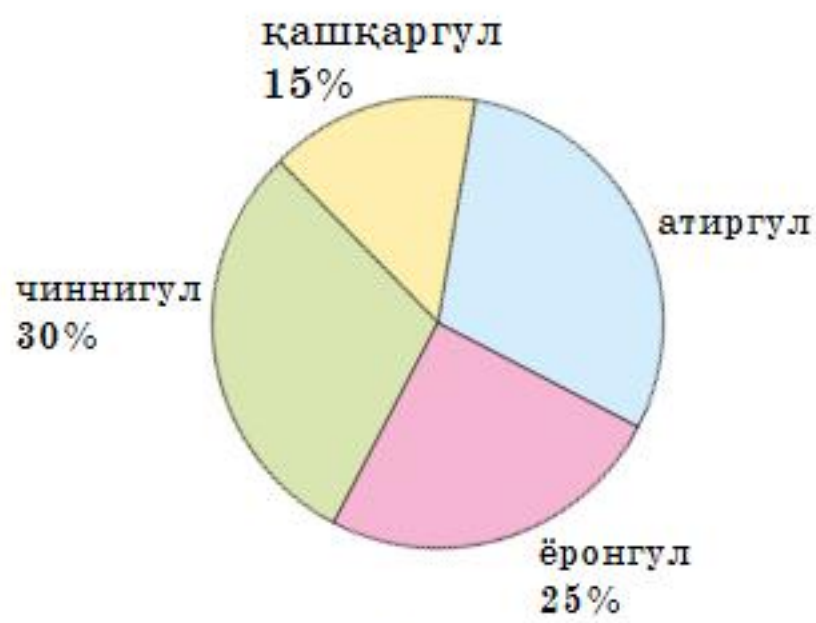
63. Қутидаги шарлар сони диаграммада берилган (66-расм).



66-расм

Қутидан тасодифан олинган шарнинг яшил бўлмаслиги эҳтимолини топинг:

A) $\frac{6}{25}$; Г) $\frac{7}{25}$; C) 0,8;
D) $\frac{3}{25}$; E) 0,5.

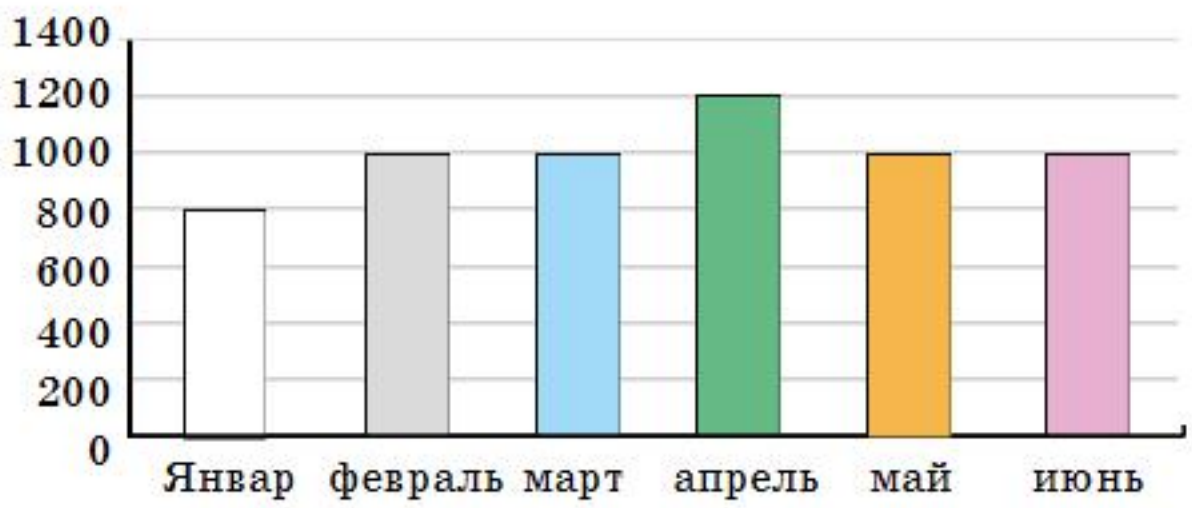


67-расм

64. Байрамга тўрт хил гулдан 300 дона сотиб олинди. Диаграммада гулларнинг номлари ва баъзиларининг сони фоизларда берилган (67-расм). Нечта атиргул сотиб олинган:

A) 100; Г) 120; C) 90; D) 75; E) 80?

65. Диаграммада олти ойда тайёрланадиган деталлар сони кўрсатилган (68-расм):



68-расм

A – I чоракда тайёрланган деталлар сони, B–II чоракда тайёрланган деталлар сони. Рост мулоҳазани кўрсатинг:

A) $A > B$; B) $A < B$; C) $A - B > 200$;
D) $A + B < -200$; E) $A - B = 0$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

ГЛОССАРИЙ

a сонининг арккосинуси	a ($\lvert a\rvert \leqslant 1$) *сонининг арккосинуси деб* a га тенг бўлган $[0; \pi]$ оралиқдаги сонга айтилади
a сонининг арккотангенси	a *сонининг арккотангенси* деб котангенси a га тенг бўлган $(0; \pi)$ интервалдаги сонга айтилади
a сонининг арксинуси	a ($\lvert a\rvert \leqslant 1$) *сонининг арксинуси* деб синуси a га тенг бўлган $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ оралиқдаги сонга айтилади
a сонининг арктангенси	a *сонининг арктангенси* деб тангенси a га тенг бўлган $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ оралиқдаги сонга айтилади
Аргумент орттирмаси	$x_1 - x_2$ *айирма аргументининг* x_1 *нуқтадаги орттирмаси* деб аталади
Арккосинус	$y = \cos x$ функцияга тескари функция *арккосинус* деб аталади ва $y = \arccos x$ каби белгиланади
Арксинус	$y = \sin x$ функцияга тескари функция *арксинус* деб аталади ва $y = \arcsin x$ каби белгиланади
Арккотангенс	$y = \mathrm{ctg}\, x$ функцияга тескари функция *арккотангенс* деб аталади ва $y = \mathrm{arcctg}\, x$ каби белгиланади
Арктангенс	$y = \mathrm{tg}\, x$ функцияга тескари функция *арктангенс* деб аталади ва $y = \mathrm{arctg}\, x$ каби белгиланади
Аркфункциялар	Тригонометрик функцияларга тескари бўлган функциялар *тескари тригонометрик функциялар* ёки *аркфункциялар* деб аталади
Бир жинсли тригонометрик тенглама	*Бир жинсли тригонометрик тенгламалар* деб ҳар бир қўшилувчининг даража кўрсаткичлари ўзаро тенг бўлган тенгламаларга айтилади.
Дискрет (узилишга эга) тасодифий катталик	Бир-биридан фарқли, бошқа қиймат қабул қиладиган тасодифий катталик *дискрет (узилишга эга) тасодифий катталик* деб аталади
Дисперсия	Четлашишнинг иккинчи даражасининг математик кутилмаси X тасодифий миқдорнинг дисперсияси дейилади ва $D(X) = ((X - M(X))^2)$ формула билан ҳисобланади
Дифференциаллаш	Функциянинг ҳосиласини топиш амали *дифференциаллаш* деб аталади
Дифференциалланувчи функция	x нуқтада функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция шу нуқтада *дифференциалланувчи функция* дейилади.Агар функция оралиқнинг барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда шу оралиқда *дифференциалланувчи функция* дейилади

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Давоми

Энг содда тригонометрик тенгламалар	$\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}x = a$, $\mathrm{ctg}x = a$ (бунда a — исталган ҳақиқий сон) кўринишда берилган тригонометрик тенгламалар *энг содда тригонометрик тенгламалар* дейилади
Тасодифий ҳодиса	Тажриба натижасида бажариладиган ёки бажарилмайдиган ҳодиса *тасодифий ҳодиса* деб аталади
Тасодифий миқдорнинг четлашиши	Тасодифий миқдор билан унинг математик кутилмасининг айирмаси, яъни $X - M(X)$ миқдор *тасодифий миқдорнинг четлашиши* дейилади
Тасодифий миқдорнинг тақсимоти	Тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари билан уларнинг эҳтимолликларини кетма-кет ёзиш *тасодифий миқдорнинг тақсимоти* дейилади
Тескари функция	Агар $y = f(x)$ функция X аниқланиш соҳасида монотон ўсувчи (ёки камаювчи) функция бўлса, у ҳолда шу функциянинг Y қийматлар тўпламида аниқланган монотон ўсувчи (монотон камаювчи) функция *тескари функция* бўлади
Мураккаб функция	$y = f(u)$ функция берилган бўлсин. Аниқланиш соҳаси X, функциянинг қийматлар тўплами Y бўлсин. Ўзгрувчи u ўз навбатида ўзгарувчи x-га боғлиқ функция бўлса, яъни $u = g(x)$, $x \in X$ у ҳолда $y = f(g(x))$ функция X тўпламда аниқланган мураккаб функция дейилади
Максимум нуқтаси	a нуқтанинг маълум бир атрофида ҳар бир x $(x \neq a)$ учун $f(x) < f(a)$ тенгсизлик бажарилган ҳолдагина a нуқта $y = f(x)$ функциянинг *максимум нуқтаси* дейилади
Математик кутилма	X тасодифий миқдор қийматларининг мос эҳтимоллик қийматларига кўпайтмаларининг йиғиндиси X тасодифий миқдорнинг *математик кутилмаси* дейилади, *яъни* $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n$ сони дискрет тасодифий миқдорнинг *математик кутилмаси* дейилади
Минимум нуқтаси	a нуқтанинг маълум бир атрофида ҳар бир x $(x \neq a)$ учун $f(x) > f(a)$ тенгсизлик бажарилган ҳолдагина a нуқта $y = f(x)$ функциянинг *минимум нуқтаси* дейилади
Мумкин бўлмаган (ёлғон) ҳодиса	Тажриба натижасида бажарилмайдиган ҳодиса *мумкин бўлмаган (ёлғон) ҳодиса* деб аталади
Ҳодисаларнинг кўпайтмаси	*A ва B* ҳодисаларга тегишли бўлган элементар ҳодисалардан тузилган ҳодиса *A ва B ҳодисаларнинг кўпайтмаси* деб аталади
Ҳодисаларнинг йиғиндиси	*A ёки B* ҳодисаларга тегишли бўлган элементар ҳодисалардан тузилган ҳодиса *A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси* деб аталади
Ўртача квадратик четлашиш	Дисперсиядан олинган квадрат илдиз *ўртача квадратик четлашиш* деб аталади

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Давоми

Нуқтада узлуксиз функция	Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада аниқланган ва функциянинг чекли қиймати x_0 нуқтадаги қийматига тенг бўлса, у ҳолда функция x_0 *нуқтада узлуксиз функция* дейилади
Нуқтанинг атрофи	Нуқта тегишли бўлган исталган интервал *нуқтанинг атрофи* дейилади
Синусоида	$y = \sin x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг графиклари *синусоида* деб аталади
Критик нуқта	Функциянинг ҳосиласи нолга тенг ёки ҳосиласи мавжуд бўлмаган аниқланиш соҳасининг ички нуқталари *критик нуқталар* дейилади
Тангенсоида	$y = \mathrm{tg}x$ функциянинг графиги *тангенсоида* дейилади
Тригонометрик тенглама	Номаълуми (ўзгарувчи) тригонометрик функциянинг аргументи сифатида ёки аргументнинг таркиби берилган тенглама *тригонометрик тенглама* дейилади.
Тригонометрик тенгламани ечиш	Берилган тенгликни тўғри айниятга айлантирувчи аргуметнинг қийматларини топиш *тригонометрик тенгламани ечиш* деб аталади.
Тригонометрик тенгсизлик	Номаълуми (ўзгарувчи) тригонометрик функциянинг аргументи сифатида берилган тенгсизлик *тригонометрик тенгсизлик* дейилади.
Ҳосиланинг геометрик маъноси	Ҳосиланинг геометрик маъноси — функциянинг графигига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти
Ҳосиланинг физик маъноси	$y = f(x)$ функциянинг x нуқтадаги $f'(x)$ ҳосиласи унинг x нуқтадаги ўзгариш тезлигини аниқлайди. Бу — ҳосиланинг физик маъноси
Узилиш нуқтаси	Агар ушбу шартлардан бирортаси бажарилмаса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узилишга эга бўлади. Бундай ҳолда x_0 нуқта функциянинг *узилиш нуқтаси* бўлади
Узлуксиз тасодифий миқдор	Қийматлари узлуксиз маълум бир $[a; b]$ кесмада (бунда $a < b$, a ва b — аниқ ҳақиқий сонлар) жойлашган тасодифий катталик узликсиз *тасодифий миқдор* деб аталади
Узлуксиз функция	Агар $f(x)$ функция X тўпламнинг исталган нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда у ўша X тўпламда (кесмада) *узлуксиз функция* деб аталади
Шартли эҳтимоллик	A ҳодиса бажарилгандан кейин аниқланган B ҳодисанинг бажарилиш эҳтимоллиги $P_A(Г)$ *шартли эҳтимоллик* дейилади
Функциянинг максимуми	Функциянинг максимум нуқтасидаги қиймати функциянинг максимуми дейилади

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

Давоми

Функциянинг минимуми	Функциянинг минимум нуқтасидаги қиймати функциянинг минимуми дейилади.
Функция орттирмаси	Аргумент x га Δx орттирма берганда $y = f(x)$ функция ҳам орттирма қабул қилади. Бу *функциянинг орттирмаси* Δy деб белгиланиб, $\Delta y = (y + \Delta y) - y$ ёки $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ тенглик билан аниқланади
Функциянинг ҳосиласи	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ифоданинг аргумент орттирмаси $\Delta x \to 0$ интилганда лимити мавжуд бўлса, бу лимит $y = f(x)$ *функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи* деб аталади.
Функциянинг лимити	Аввал берилган исталган $\varepsilon > 0$ сони учун $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сони топилиб, ўзгарувчи x нинг $\lvert x - a\rvert < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун $\lvert f(x) - b\rvert < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сони $f(x)$ *функциянинг x* аргумент a сонига интилгандаги (a нуқтадаги) *лимити* деб аталади
Функциянинг экстремум нуқталари	Максимум ва минимум нуқталари функциянинг *экстремум нуқталари* дейилади
Экстремум	Максимум ва минимум нуқталари функциянинг экстремум нуқталари, экстремум нуқтасидаги функциянинг қиймати эса функциянинг *экстремуми* дейилади

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

Все учебники Казахстана ищите на сайтах OKULYK.COM и OKULYK.KZ

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217