В.А. Смирнов, Е.А. Туяқов

ГЕОМЕТРИЯ
10

Умумтаълим мактабларининг табиий-математик йўналишидаги 10-синфи учун дарслик

Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан министрлиги тасдиқлаган

Алмати "Мектеп" 2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72
С53

Шартли белгилар:

— янги билимни ўзлаштириш давомида ечиладиган масала

— назарий материалларни мустақил ўрганиш учун мўлжалланган топшириқлар

— теорема исботланишининг якуни

A — ҳамма учун мажбурий бўлган топшириқлар

B — ўрта даражали топшириқлар

C — юқори даражали топшириқлар

Смирнов В.А., Туяқов Е.А.
С53 **Геометрия:** Умумтаълим мактабларининг табиий-математик йўналишидаги 10-синфи учун дарслик. — Алмати: Мектеп, 2019. — 200 б., расм.

ISBN 978—601—07—1348—2

С $\frac{4306020502-121}{404(05)-19}$ 117(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72

ISBN 978—601—07—1348—2

КИРИШ

Сизлар геометриянинг энг қизиқарли ва муҳим бўлимларидан бири бўлган стереометрия курсини ўрганасизлар. Бу бўлим нима учун керак? Биринчидан, бўлим ҳар хил фазовий фигуралар, фазовий фигураларнинг текисликлар билан кесимлари ва уларнинг хоссалари билан таништиради, керакли фазовий тушунчаларни шакллантиради. Иккинчидан, стереометрия илми англаш усулларни ўргатиб мантиқий фикрлаш қобилиятини оширишга имконият яратади.

Шу билан бирга стереометрияни ўқиш, фазовий фигураларни тасаввур қилиш, моделлаш ва ясашга, асосий геометрик ўлчовларни (узунликлар, бурчаклар, юзалар, ҳажмлар) ўлчаш учун лозим бўлган амалий малакаларни уюштириш учун имконият яратади.

Ахборот технологияларининг ривожланиши геометрияни ролини кучайтиради, яъни материални график шаклида бериш билан компьютерлик моделлаштириш имкониятлари етарли даражада кенгайтирилади.

Дарсликдаги барча материаллар боблар билан параграфларга бўлинган. Улар назарий материалларни, мустақил бажариш учун мўлжалланган топшириқларни, мустаҳкамлаш саволларини, турли хил мураккабликдаги топшириқларни ўз ичига олади.

Теоремани исботлашнинг якуни (□) белгиси билан белгиланган.

Дарсликда мураккаблиги турли масалалар: **A** (бажарилиши мажбурий ўқув материали), **B** (мураккаблиги ўртача), **C** (мураккаблиги юқори топшириқлар) берилган.

Ҳар бир бобнинг охирида шу боб бўйича ўқув материалларини мустаҳкамлашга доир тест топшириқлари берилган.

(*) юлдузча билан белгиланган параграфлар ўқув дастурига кирмайдиган илмий ва дарсдан ташқари ва мустақил ишлаганда уларнинг масала ечиш малакасини оширишга мўлжалланган ностандарт, ижодий даражадаги масалаларни ўз ичига олади. Улардан қўшимча дарсларда(тўгаракларда, танлов курсларида) фойдаланиш мумкин.

Дарсликнинг охирида масалаларнинг жавоблари келтирилган.

Геометрияни ўқишда омад тилаймиз!

7–9-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

Планиметриянинг асосий тушунчалари

Планиметриянинг (текисликдаги геометрия) асосий геометрик фигуралари нуқта ва тўғри чизиқ. Уларнинг ўзаро жойлашувининг асосий хоссалари (аксиомалари) қуйидагилардир:

1. *Ҳар қандай икки нуқтадан фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.*

2. *Бир тўғри чизиққа тегишли бўлмаган камида учта нуқта мавжуд.*

Нур ёки *ярим тўғри чизиқ* деб, берилган нуқтадан ва шу нуқтанинг бир томонида ётувчи барча нуқталардан иборат тўғри чизиқнинг қисмига айтилади.

Кесма деб, берилган икки нуқтадан ва шу нуқталарнинг орасида ётувчи барча нуқталаридан иборат тўғри чизиқнинг қисмига айтилади. Бу ерда берилган нуқталар кесманинг учлари деб аталади.

Кесманинг узунлиги — берилган кесмадаги бирлик кесма ва унинг бўлаклари неча марта жойлашганини кўрсатувчи мусбат сон.

AB кесманинг узунлигини A ва B нуқталарнинг *орасидаги масофа* деб ҳам айтиш мумкин.

Умумий бошланғич нуқтага эга бўлган икки турли ярим тўғри чизиқдан иборат фигура *бурчак* дейилади. Бу бошланғич умумий нуқта бурчакнинг учи,ярим тўғри чизиқлар эса *бурчакнинг томонлари* дейилади.

Бурчакнинг градус ўлчови бир градусга тенг бурчак ва унинг қисмлари шу бурчакка неча марта жойлашишини кўрсатади.

Агар бурчакнинг томонлари бир тўғри чизиқнинг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлар бўлса, бундай бурчак *ёйиқ бурчак* дейилади. Акс ҳолда, *ёйиқ эмас бурчак* дейилади.

Агар иккита бурчакнинг битта томони умумий,қолган томонлари тўлдирувчи ярим тўғри чизиқ бўлса, улар *қўшни бурчаклар* дейилади.

Агар икки бурчакдан бирининг томонлари иккинчи бурчак томонларининг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлари бўлса, бу икки бурчак *вертикал бурчаклар* дейилади.

Ўзининг қўшни бурчагига тенг бўлган бурчак *тўғри бурчак* дейилади. Тўғри бурчакдан кичик бўлган бурчак *ўткир бурчак* дейилади.

Тўғри бурчакдан катта, лекин ёйиқ бурчакдан кичик бўлган бурчак *ўтмас бурчак* дейилади.

Берилган бурчакнинг учидан чиқиб, шу бурчакни тенг икки бурчакка бўлувчи *нур биссектриса* дейилади.

Кесишувчи икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб, шу тўғри чизиқларни кесишиш нуқтаси орқали ҳосил бўлган нурларнинг орасидаги энг кичик бурчакка айтилади. Агар иккита тўғри чизиқ тўғри бурчак остида кесишса, бу тўғри чизиқлар *перпендикуляр тўғри чизиқлар* дейилади.

Агар иккита тўғри чизиқ кесишмаса, яъни умумий нуқтага эга бўлмаса, у ҳолда бундай тўғри чизиқлар *параллел тўғри чизиқлар* дейилади.

Параллел тўғри чизиқларнинг асосий хоссаси қуйидагидан иборат: *Берилган тўғри чизиқда ётмайдиган бир нуқта орқали шу тўғри чизиққа параллел бўлган фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.*

Ихтиёрий бир тўғри чизиқ A нуқта орқали ўтиб, b тўғри чизиғига перпендикуляр бўлсин ва B шу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин. AB кесма A нуқтадан b тўғри чизиққа туширилган *перпендикуляр* дейилади. B нуқта *перпендикулярнинг асоси* дейилади. *Перпендикулярнинг узунлиги* деб, A нуқтадан b тўғри чизиққача бўлган масофага айтилади.

b тўғри чизиқда ётган B нуқтадан бошқа C нуқта учун AC кесма A нуқтадан b тўғри чизиққа туширилган *оғма* дейилади. C нуқта *оғманинг асоси* дейилади. BC кесма b тўғри чизиқдаги оғманинг проекцияси дейилади.

Икки параллел тўғри чизиқларнинг орасидаги масофа деб, бир тўғри чизиқда ётувчи нуқтадан иккинчи тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлигига айтилади.

Пропорционал кесмалар ҳақида теорема. *Бурчакнинг томонларини кесиб ўтувчи параллел тўғри чизиқлар бурчакнинг томонларидан пропорционал кесмаларни ажратади.*

Масалалар

1. Жуфт-жуфти билан олганда ўнта кесишиш нуқтаси бўладиган бешта тўғри чизиқни ясанг.
2. Тўғри чизиқда: а) 3 та нуқта; б) 4 та нуқта; в) 5 та нуқта; г) *n та нуқта белгиланган. Учлари шу нуқталарда бўлган нечта кесмалар мавжуд?
3. Тўғри чизиқда $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см бўлган кетма-кет учта кесма жойлаштирилган. AB ва CD кесмалар ўрталари орасидаги масофани топинг.
4. Бир нуқтада кесишувчи n та тўғри чизиқ текисликни нечта бўлакка бўлади?
5. Икки тўғри чизиқ кесишганда ҳосил бўлган бурчаклардан учтасининг йиғиндиси 306° га тенг. Уларнинг ичидаги энг катта бурчакнинг градус ўлчовини топинг.
6. OC нур AOB бурчакнинг ичида жойлашган ва AOB бурчак 120° га тенг. Агар AOC бурчак BOC бурчакдан 30°га кам бўлса, унинг градус ўлчовини топинг
7. Агар қўшни бурчакларнинг бири иккинчисидан икки марта ортиқ бўлса, уларнинг градус ўлчовларини топинг.

8. Бурчаклари мос равишда 60° ва 90° бўлган AOB ва COD бурчакларнинг орасидаги BOC бурчакнинг ўлчови 30°га тенг. OC нур AOB бурчак ичида жойлашган бўлса, AOD бурчакни топинг.
9. Ғилдиракнинг: а) 10 та сими; б) 12 та сими мавжуд. Икки қўшни симларнинг орасидаги бурчакнинг ўлчовини топинг.
10. Соатнинг минут мили: а) 20 минут; б) 10 минут; в) 50 минутда неча градусга бурилади?
11. Икки параллел тўғри чизиқларни кесувчи тўғри чизиқ ҳосил қилган икки ички алмашинувчи бурчакларнинг йиғиндиси 150°га тенг. Шу бурчакларни топинг.
12. Агар ихтиёрий бир тўғри чизиқ икки параллел тўғри чизиқлардан бирини кесиб ўтса, у ҳолда иккинчисини ҳам кесиб ўтишини исботланг.

Учбурчаклар

Бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтани кетма-кет бирлаштирувчи учта кесмадан ҳосил бўлган фигура *учбурчак* дейилади. Нуқталар учбурчакнинг *учлари*, кесмалар эса *томонлари* дейилади.

Агар учбурчакнинг ҳамма бурчаклари ўткир бўлса, бундай учбурчак *ўткир бурчакли учбурчак* дейилади.

Агар учбурчакнинг тўғри бурчаги мавжуд бўлса, бундай *учбурчак тўғри бурчакли учбурчак* дейилади.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги қаршисида ётган томони *гипотенуза*, қолган икки томонлари *катетлари* дейилади.

Агар учбурчакнинг ўтмас бурчаги бор бўлса, бундай учбурчак *ўтмас бурчакли учбурчак* дейилади.

Учбурчакнинг учлари, томонлари ва бурчакларидан бошқа элементлари қуйидагилар:

• учбурчакнинг *медианаси* — учбурчакнинг бир учи билан унинг қаршисидаги томонининг ўртасини туташтирувчи кесма

• учбурчакнинг *биссектрисаси* — учбурчакнинг бурчагини тенг иккига бўлувчи ва қаршисидаги томон билан туташтирувчи кесма;

• учбурчакнинг *баландлиги* — учбурчакнинг учидан унинг қаршисидаги томонига ёки унинг тўлдирувчисига туширилган перпендикуляр;

• учбурчакнинг *периметри* деб, учбурчакнинг борча томонлари узунликларининг йиғиндисига айтилади.

Томонларининг орасидаги нисбатларига қараб учбурчаклар: а) турли томонли; б) тенг ёнли; в) тенг томонли бўлган турларга бўлинади.

Агар учбурчакнинг томонлари бир-бирига тенг бўлмаса, у ҳолда бу *турли томонли учбурчак* дейилади.

Иккита томони ўзаро тенг бўлган учбурчакка *тенг ёнли учбурчак* дейилади. Тенг бўлган томонлари учбурчакнинг *ён томонлари*, учинчи томони эса учбурчакнинг *асоси* дейилади.

Агар учбурчакнинг барча томонлари ўзаро тенг бўлса, бундай учбурчак *тенг томонли* учбурчак дейилади.

Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги иккинчи учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*

Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган бурчаклари бошқа учбурчакнинг мос томони ва унга ёпишган бурчакларига тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*

Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг учта томони иккинчи учбурчакнинг учта томонига мос равишда тенг бўлса бундай учбурчаклар тенг бўлади.*

Тенг ёнли учбурчакнинг аломати. *Учбурчакнинг иккита бурчаги тенг бўлса, бу учбурчак тенг ёнли бўлади.*

Планиметриянинг асосий теоремаларидан бири — учбурчакнинг бурчаклари ҳақидаги теорема.

Теорема. ***Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси 180°га тенг.***

Учбурчакнинг икки томони ўрталарини туташтирувчи кесмага учбурчакнинг *ўрта чизиғи* дейилади.

Теорема. ***Учбурчакнинг ўрта чизиғи унинг томонларидан бирига параллел ва унинг ярмига тенг.***

Учбурчакнинг ажойиб нуқталари қуйидагилардан иборат:

а) биссектрисаларнинг кесишиш нуқтаси (ички чизилган айлананинг маркази);

б) учбурчак томонларининг ўрталаридан ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси (ташқи чизилган айлананинг маркази);

в) медианаларнинг кесишиш нуқтаси (центроид);

г) баландликларнинг ёки уларнинг тўлдирувчиларининг кесишиш нуқтаси(ортоцентр).

Теорема (Пифагор). ***Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати катетлари квадратларининг йиғиндисига тенг.***

Шунингдек, агар тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва b, гипотенузаси эса c га тенг бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Учбурчаклар ўхшашлигининг биринчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг иккита бурчаги иккинчи учбурчакнинг иккита бурчагига мос равишда тенг бўлса,бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади.*

Учбурчакларнинг ўхшашлигининг иккинчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг икки томони иккинчи учбурчакнинг икки томонига пропорционал бўлса ва бу томонлар ҳосил қилган бурчаклар тенг бўлса, бундай иккита учбурчаклар ўхшаш бўлади.*

Учбурчаклар ўхшашлигининг учинчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг томонлари иккинчи учбурчакнинг томонларига пропорционал бўлса, бундай иккита учбурчак ўхшаш бўлади.*

Масалалар

13. а) ABC ўткир бурчакли учбурчак; б) ABC тўғри бурчакли учбурчак; в) ABC ўтмас бурчакли учбурчак чизинг. Шу учбурчакларнинг медианаси, биссектрисаси ва баландлигини ўтказинг.
14. Учбурчакнинг периметри 54 см. Унинг томонларининг нисбати 2 : 3 : 4 бўлса, уларнинг узунликларини топинг.
15. Тенг учбурчакларнинг: а) медианалари; б) биссектрисалари; в) баландликлари тенг бўлишини исботланг.
16. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 15,6 м. Агар: а) асоси ён томонидан 3 м га қисқа; б) асоси ён томонидан 3 м га узун бўлса, у ҳолда унинг томонларини топинг.
17. Агар ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, CM медианаси C_1M_1 медианасига тенг бўлса, ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар тенг эканлигини исботланг.
18. ABC учбурчакда A бурчаги 40°га тенг ва $AC = BC$ бўлса, C бурчагини топинг.
19. Учбурчакнинг бурчаклари 1 : 2 : 3 каби нисбатда. Уларнинг энг кичигини топинг.
20. ABC учбурчакда $AB = BC$. B учидаги ташқи бурчаги 138°. C бурчагини топинг.
21. Учбурчакнинг периметри 15 см. Шу учбурчакнинг бир ўрта чизиғи кесиб ўтганда ҳосил бўлган учбурчакнинг периметрини топинг.
22. Томонининг узунлиги 1 га тенг бўлган тенг томонли учбурчакнинг баландлигини топинг.
23. Биринчи учбурчакнинг томонлари 16 см, 8 см ва 10 см. Шу учбурчакка ўхшаш иккинчи учбурчакнинг энг кичик томони 6 см га тенг. Иккинчи учбурчакнинг қолган томонларини топинг.
24. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига туширилган баландлиги уни дастлабки учбурчакка ўхшаш иккита учбурчакка бўлишини исботланг.

Синиқ чизиқлар ва кўпбурчаклар

Синиқ чизиқ деб биринчисининг охири ва иккинчисининг боши, иккинчисининг охири учинчисининг боши ва ҳоказо бўлиб жойлашган чекли сондаги кесмалардан иборат фигурага айтилади. Кесмалар синиқ *чизиқнинг бўғинлари* деб аталади. Уларнинг учлари *синиқ чизиқнинг учлари* дейилади.

Синиқ чизиқ бўғинларининг узунликларининг йиғиндиси синиқ *чизиқнинг узунлиги* деб аталади. Синиқ чизиқ унинг учларини кетма-кет кўрсатиш орқали белгиланади. Масалан, $ABCDE$, $A_1A_2...A_n$ синиқ чизиқлар.

Агар синиқ чизиқнинг бўғинлари ўз-ўзи билан кесишмаса, бундай синиқ чизиқ *содда синиқ чизиқ* дейилади.

Агар синиқ чизиқнинг охирлари устма-уст тушса, бундай синиқ чизиқ *ёпиқ синиқ чизиқ* дейилади.

Қўшни бўғинлари бир тўғри чизиқда ётмаган содда ёпиқ синиқ чизиқ ва унинг ички соҳаси билан чегараланган фигура *кўпбурчак* дейилади.

Синиқ чизиқнинг учлари *кўпбурчакнинг учлари*, синиқ чизиқнинг бўғинлари *кўпбурчакнинг томонлари*, қўшни томонлари орасидаги бурчак *кўпбурчакнинг бурчаклари* деб аталади. Кўпбурчакнинг томонларида ётмайдиган нуқталари *ички нуқталари* дейилади.

Кўпбурчакнинг периметри деб, унинг борча томонлари узунликларининг йиғиндисига айтилади.

Кўпбурчаклар *учбурчакли* (учта бурчаги мавжуд), *тўртбурчакли* (тўртта бурчаги мавжуд) ва ҳоказо турларга бўлинади. n та бурчаги мавжуд бўлган кўпбурчак *n бурчакли кўпбурчак* дейилади.

Ҳамма томонлари тенг ва ҳамма бурчаклари тенг бўлган қавариқ кўпбурчак *мунтазам кўпбурчак* дейилади.

Агар кўпбурчакнинг учлари ихтиёрий томони орқали ўтказилган тўғри чизиқнинг бир томонида ётса, у холда бундай кўпбурчак *қавариқ кўпбурчак* деб аталади.

Теорема. ***Қавариқ n бурчакли кўпбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси $180°(n - 2)$ га тенг.***

Масалалар

25. Содда ёпиқ синиқ чизиқнинг 20 та бўғини мавжуд бўлса, унинг учлари нечта бўлади?

26. а) икки марта ўзини-ўзи кесувчи; б) уч марта ўзини-ўзи кесувчи; в) беш марта ўзини-ўзи кесувчи синиқ чизиқ ясанг.

27. Мунтазам учбурчак; тўртбурчак; бешбурчак; олтибурчак ясанг. Чизғич ва транспортир ёрдамида ясалган кўпбурчакларнинг тўғрилигини текширинг.

28. Қавариқ: а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчак г) n бурчакнинг бир учидан ўтказилган диагоналлари орқали нечта учбурчакка бўлинади?

29. а) тўртбурчакнинг; б) бешбурчакнинг; в) олтибурчакнинг нечта диагоноли мавжуд?

30. Қавариқ: а) тўртбурчакнинг; б) бешбурчакнинг; в) олтибурчакнинг г) еттибурчакнинг д) саккизбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндисини топинг?

31. Қавариқ кўпбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 900° га тенг. Унинг томонлари сонини топинг.

32. Мунтазам: а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчак; г) саккизбурчакнинг ташқи бурчакларининг градус ўлчовини топинг.

Тўртбурчаклар

Қарама-қарши томонлари параллел бўлган, яъни параллел тўғри чизиқларда ётадиган тўртбурчак *параллелограмм* дейилади.

Параллелограммнинг биринчи аломати. *Агар тўртбурчакнинг икки томони тенг ва параллел бўлса, у ҳолда бундай тўртбурчак параллелограмм бўлади.*

Параллелограммнинг иккинчи аломати. *Агар тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда бундай тўртбурчак параллелограмм бўлади.*

Барча бурчаклари тўғри бўлган параллелограмм *тўғри тўртбурчак* деб аталади.

Тўғри тўртбурчакнинг аломати. *Агар параллелограммнинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда бундай параллелограмм тўғри тўртбурчак бўлади.*

Барча томонлари тенг бўлган параллелограмм *ромб* деб аталади.

Ромбнинг аломати. *Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва улар мос равишда бурчакларининг биссектрисалари бўлади.*

Барча томонлари тенг бўлган тўғри тўртбурчак *квадрат* деб аталади.

Квадратнинг аломати. *Агар тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари перпендикуляр бўлса, у ҳолда бундай тўғри тўртбурчак квадрат бўлади.*

Иккита қарама-қарши томонларигина параллел бўлган тўртбурчак *трапеция* деб аталади.

Трапециянинг параллел томонлари унинг *асослари*, параллал бўлмаган томонлари ён томонлари деб аталади.

Трапециянинг учидан унга қарама-қарши ётган томонига ёки томонининг давомига туширилган перпендикуляр унинг *баландлиги* деб аталади.

Агар трапециянинг ён томонлари тенг бўлса, у ҳолда бундай трапеция *тенг ёнли трапеция* дейилади.

Агар трапециянинг бир бурчаги тўғри бурчак бўлса, у ҳолда бундай трапеция *тўғри бурчакли трапеция* деб аталади.

Трапеция ён томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесма *трапециянинг ўрта чизиғи* дейилади.

Теорема. ***Трапециянинг ўрта чизиғи асосларига параллел ва улар йиғиндисининг ярмига тенг.***

Масалалар

33. Параллелограммнинг диагонали унинг икки томони билан 25° ва 35° ли бурчак ҳосил қилади. Параллелограммнинг бурчакларини топинг.

34. Агар параллелорамм бурчакларидан иккитасини йиғиндиси: а) 80°; б) 100°; б) 160° бўлса, параллелограммнинг ҳамма бурчакларини топинг.

35. Параллелограммнинг периметри 48 см. Агар параллелорамнинг: а) бир томони иккинчи томонидан 2 см узун; б) икки томонининг айирмаси 6 см; в) бир томони иккинчи томонидан икки марта узун бўлса, у ҳолда унинг томонларини топинг.

36. Параллелограммнинг икки томонининг нисбати $3 : 4$ га тенг, периметри эса 2,8 м га тенг. Параллелограммнинг томонларини топинг.

37. Тўғри тўртбурчак диагоналлари орасидаги ўткир бурчак 50° га тенг. Диагоналининг томонлари билан ҳосил қилган бурчакларини топинг.

38. Тўғри тўртбурчакнинг кичик томони 5 см, диагоналлари эса кесишганда 60° ли бурчак ҳосил қилади. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналларини топинг.

39. Агар тўғри тўртбурчакнинг периметри 34 см, диагонали билан бўлинганда ҳосил бўлган учбурчакнинг периметри 30 см бўлса, шу тўғри тўртбурчакнинг диагоналларини топинг.

40. Параллелограммнинг ўзаро тенг эмас қўшни томонлари орасидаги бурчакларнинг биссектрисалари тўғри тўртбурчак ҳосил қилишини исботланг.

41. Тўғри тўртбурчак томонларининг ўрталари ромбнинг учлари эканини исботланг.

42. Тенг ёнли трапециянинг қарама-қарши бурчакларининг айирмаси 40° бўлса, у ҳолда унинг бурчаклари нимага тенг?

43. Трапециянинг 3 см га тенг кичик томонининг учи орқали унинг ён томонига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқ трапециядан периметри 15 см га тенг учбурчакни ҳосил қилади. Трапециянинг периметрини топинг.

44. Трапециянинг асослари 4 см ва 10 см. Диагоналларининг бири ўрта чизиғини қандай кесмаларга ажратади.

Тригонометрик функциялар

C бурчаги тўғри ва *A* бурчаги ўткир бўлган *ABC* тўғри бурчакли учбурчакни кўриб чиқайлик.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг *ўткир бурчагининг синуси* деб, шу бурчак қаршисида ётган катетнинг гипотенузага нисбатига айтилади. *A* бурчакнинг *синуси* sinA орқали белгиланади. Таъриф бўйича,

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Тўғри бурчакли учбурчакнинг *ўткир бурчагининг косинуси* деб, шу бурчакка ёпишган катетнинг гипотенуза нисбатига айтилади. A бурчакнинг *косинуси* $\cos A$ орқали белгиланади. Таъриф бўйича,

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тўғри бурчакли учбурчакнинг *ўткир бурчагининг тангенси* деб, шу бурчак қаршисида ётган катетнинг ёпишган катетга нисбатига айтилади. A бурчакнинг *тангенси* $\operatorname{tg} A$ орқали белгиланади. Таъриф бўйича

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Тўғри бурчакли учбурчакнинг *ўткир бурчагининг котангенси* деб, шу бурчакка ёпишган катетнинг қаршисида ётган катетга нисбатига айтилади. A бурчакнинг *котангенси* $\operatorname{ctg} A$ орқали белгиланади. Таъриф бўйича

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Шу таърифлардан қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A},\ \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Синус, косинус, тангенс ва котангенслар ўткир бурчакнинг *тригонометрик функциялари* деб аталади.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2},\ \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},\ \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

Асосий тригонометрик айниятлар. *A ўткир бурчакнинг синуси ва косинуси қуйидаги асосий тригонометрик айният билан ўзаро боғлиқ:*

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

A ўткир бурчакнинг тангенси билан косинуси қуйидаги айният билан ўзаро боғлиқ:

$$\operatorname{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

A ўткир бурчакнинг котангенси билан синуси қуйидаги айният билан ўзаро боғлиқ

$$\operatorname{ctg}^2 A + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}.$$

Теорема (синуслар теоремаси). *Учбурчакнинг томонлари қаршисидаги бурчакларнинг синусларига пропорционал. Учбурчак*

томони унинг қаршисидаги бурчаги синусига нисбати учбурчакка ташқи чизилган айлананинг диаметрига тенг бўлади.

Шунинг билан, агар ABC учбурчакда $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ ва R — унга ташқи чизилган айлананинг радиуси бўлса, унда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Косинуслар теоремаси Пифагор теоремасининг умумий кўриниши бўлиб хисобланади.

Теорема (косинуслар теоремаси). ***Учбурчак исталган томонининг квадрати қолган икки томони квадратлари йиғиндисидан шу икки томон билан улар орасидаги бурчак косинусининг иккиланган кўпайтмасини айириш натижасига тенг.***

Шунингдек, агар ABC учбурчакда $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Масалалар

45. ABC тенг ёнли учбурчакнинг ($AC = BC$) асоси 6 га, ён томони 5 га тенг. A бурчагининг тригонометрик функцияларининг қийматларини топинг.

46. ABC учбурчакда C бурчаги 90°, A бурчаги 30°, $AC = 2$ га тенг. CH баландлигини топинг.

47. ABC учбурчакда $AC = BC = 2$, C бурчаги 120°га тенг. AH баландлигини топинг.

48. Агар: а) $\sin A = \frac{1}{3}$; б) $\sin A = \frac{3}{5}$ бўлса, у ҳолда $\cos A$ нинг қийматини топинг.

49. Агар: а) $\cos A = \frac{2}{3}$; б) $\cos A = \frac{5}{13}$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} A$ нинг қийматини топинг.

50. Агар: а) $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} A = 2$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{ctg} A$ нинг қийматини топинг.

51. Агар бурчакнинг градус ўлчови: а) 120°; б) 135°; в) 150° бўлса, у ҳолда бурчакнинг синусини топинг?

52. Агар бурчакнинг градус ўлчови: а) 120°; б) 135°; в) 150° бўлса, у ҳолда бурчакнинг косинусини топинг?

53. Учбурчак бир бурчагининг қандай қийматида шу бурчакка қарши ётган томонининг квадрати: а) қолган икки томонининг квадратларининг йиғиндисидан кичик; б) қолган икки томонининг квадратларининг йиғиндисига тенг; в) қолган икки томонининг квадратларининг йиғиндисидан катта бўлади?

54. ABC учбурчакда $AB = 12$, $AC = 8$, $\angle A = 60^{\circ}$. Учинчи томонини топинг.

55. ABC учбурчакда $AC = BC = 1$, C бурчаги 150°. AB томонининг узунлигини топинг.

56. Учбурчакнинг учта томони берилган: $BC = 2$, $AC = 3$, $AB = 4$. A, B, C бурчакларнинг косинусларини топинг.

Юза

Фигуранинг юзаси текисликдаги шу фигура жойлашган бўлакнинг катталигини аниқлайди.

Фигуранинг юзасини ўлчаш текисликдаги кесманинг узунлигини ўлчаш каби шу фигурани юза бирлиги бўладиган фигура билан таққослашга асосланади.

Юзанинг ўлчов бирлиги сифатида томони ўлчов бирлигига тенг квадрат олинади. У *бирлик квадрат* деб аталади.

Фигуранинг юзаси деб ўлчаш натижасида олинган ва берилган фигурада неча марта бирлик квадратлар билан унинг бўлаклари жойлашганлигини кўрсатувчи сонга айтилади.

Агар икки фигуранинг юзалари бир хил бўлса, *улар тенгдош* деб аталади

Томонлари a, b бўлган тўғри тўртбурчакнинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = a \cdot b.$$

Теорема. ***Параллелограмнинг юзи унинг томонини шу томонга туширилган баландлигига кўпайтирилганига тенг.***

Шунингдек, томони a ва шу томонига туширилган h баландлиги бўлган параллелограмнинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = a \cdot h.$$

Теорема. ***Параллелограмнинг юзи унинг икки қўшни томони билан улар орасидаги бурчак синусининг кўпайтмасига тенг.***

Шунингдек, қўшни томонлари a, b ва уларнинг орасидаги C бурчаги бўлган параллелограмнинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = ab \cdot \sin C.$$

Теорема. ***Учбурчакнинг юзи унинг икки томони билан улар орасидаги бурчак синусининг кўпайтмасининг ярмига тенг.***

Шунингдек, томонлари c ва уларнинг орасидаги h бурчаги бўлган учбурчакнинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = \frac{1}{2}c \cdot h.$$

Теорема. ***Трапециянинг юзи унинг асослари йиғиндисининг ярми билан баландлиги кўпайтмасига тенг.***

Шунингдек, асослари a, b ва баландлиги C бўлган трапециянинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

Теорема. ***Қавариқ тўртбурчакнинг юзаси унинг диагоналлари билан улар орасидаги бурчак синуси кўпайтмасининг ярмига тенг.***

Шунингдек, диагоналлари a, b ва улар орасидаги бурчак h бўлганда қавариқ тўтбурчакнинг S юзаси қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.$$

Теорема. ***Трапециянинг юзи унинг асослари йиғиндисининг ярми билан баландлиги кўпайтмасига тенг.***

Шунингдек, асослари d_1, d_2 ва баландлиги C бўлган трапециянинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \cdot \sin C.$$

Кўпбурчакнинг юзасини уни учбурчакларга ажратиш орқали топиш мумкин. Шунда кўпбурчакнинг юзаси шу учбурчаклар юзаларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Масалалар

57. Томони 6 га, диагонали 10 тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзасини топинг.

58. Диагонали a га, тенг квадратнинг юзасини топинг.

59. Квадратнинг юзаси 1 га тенг. Учлари шу квадрат томонлари ўрталарида бўлган янги квадрат юзасини топинг.

60. Томонлари 8 см, 10 см ва улар орасидаги бурчак: а) 30°; б) 45°; в) 60° бўлган параллелограммнинг юзасини топинг.

61. Параллелограммнинг юзи 40 см^2, томонлари 5 см ва 10 см га тенг. Унинг баландлигини топинг.

62. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 5 га, асоси 6 га тенг. Шу учбурчакнинг юзасини топинг.

63. Учбурчакнинг юзи 30 га, бир томони 10 га тенг. Шу томонга туширилган баландлигини топинг.

64. Икки томони 3 см ва 8 см, улар орасидаги бурчак 30° бўлган учбурчак юзасини топинг.

65. Трапециянинг ўрта чизиғи 3 га, баландлиги 2 га тенг. Унинг юзасини топинг.

66. Трапециянинг асоси 10 см ва 35 см, юзаси 225 $см^2$ га тенг. Унинг баландлигини топинг.

67. Трапециянинг баландлиги 20 см, юзаси 400 $см^2$ га тенг. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.

68. Трапециянинг юзаси 200 $см^2$, асосларидан бири 26 см, баландлиги 10 см га тенг. Трапециянинг иккинчи асосини топинг.

69. Томони 1 га тенг мунтазам олтибурчакнинг юзасини топинг.

70. Каварик тўртбурчакнинг диагоналлари 6 ва 8, улар орасидаги бурчак эса 30°га тенг. Шу тўртбурчак юзасини топинг.

Векторлар

Вектор деб, йўналтирилган кесмага айтилади.

Агар икки вектор бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, бундай векторлар *коллинеар векторлар* деб аталади.

Агар AB ёки CD нурларнинг бири иккинчисида ётса у ҳолда бир тўғри чизиқда ётган $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар *йўналишдош* деб аталади.

Акс ҳолда улар *қарама-қарши йўналган* деб аталади.

Агар бир тўғри чизиқда ётмайдиган икки вектор параллел тўғри чизиқларда ётиб бир томонга (турли томонга) йўналса, унда улар *йўналишдош* (*қарама-қарши йўналган*) деб аталади.

Йўналишдош ёки қарама-қарши йўналган икки вектор *коллинеар векторлар* деб аталади.

Векторнинг узунлиги ёки модули деб, шу векторни тасвирловчи кесманинг узунлигига айтилади. $\overline{AB}$, $\vec{a}$ деб белгиланади. Агар икки векторнинг йўналишлари ва узунликлари бир хил бўлса, у ҳолда бундай векторлар *тенг векторлар* деб аталади.

Боши ва охири устма-уст тушувчи вектор *ноль вектор* деб қаралади ва $\overline{0}$ деб белгиланади. Узунлиги эса *нолга* тенг деб ҳисобланади. Барча ноль векторлар бир-бирига тенг деб ҳисобланади.

Векторлар учун кесмаларга ўхшаш қўшиш амали аниқланган. $\vec{a}$ ва $\bar{b}$ векторларини қўшиш учун, $\bar{b}$ векторини унинг боши $\vec{a}$ векторининг охири билан устма-уст тушадиган қилиб жойлаштириш керак.

Боши $\vec{a}$ векторининг боши билан, охири $\bar{b}$ векторининг охири билан устма-уст тушувчи вектор $\vec{a}$ *ва* $\bar{b}$ *векторларининг йиғиндиси* деб аталади $\vec{a} + \bar{b}$ деб белгиланади.

$\vec{a}$ векторининг t сонига *кўпайтмаси* деб, узунлиги $|t|\cdot|\vec{a}|$ бўлган ва йўналиши $t > 0$ да ўзгаришсиз $t < 0$ да қарама-қарши йўналишда бўлган векторга айтилади. $\vec{a}$ векторининг t сонига кўпайтмаси $t\vec{a}$ деб белгиланади. Таъриф бўйича, $|t\vec{a}| = |t|\cdot|\vec{a}|$.

$\vec{a}$ векторнинг -1 сонига кўпайтмаси $-\vec{a}$ деб белгиланади ва у $\vec{a}$ векторга *қарама-қарши вектор* деб аталади.

Таърифга кўра $-\vec{a}$ векторнинг йўналиши $\vec{a}$ векторнинг йўналишига қарама-қарши бўлади ва $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$.

Теорема. ***Агар икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ нолдан фарқли коллинеар эмас векторлар бўлса, унда ихтиёрий $\vec{c}$ вектори учун $\vec{c} = t\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b}$ тенглик ўринли бўладиган битта ва фақат битта t ва s сонлари мавжуд.***

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ нолдан фарқли векторлар бўлсин. O нуқтадан $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ векторларни ясаймиз. Агар шу векторлар бир хил йўналган бўлмаса, унда OA ва OB нурларнинг орасидаги бурчак $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *векторларнинг орасидаги бурчак* деб аталади.

Бир хил йўналган векторлар орасидаги бурчак 0°га тенг деб ҳисобланади.

Орасидаги бурчак тўғри бурчак бўлган икки вектор *перпендикуляр вектор* деб аталади.

Берилган тўғри чизиққа перпендикуляр вектор шу тўғри чизиқнинг *нормал вектори* деб аталади.

Икки нолдан фарқли векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* деб, уларнинг узунликлари билан орасидаги бурчакнинг косинуси кўпайтмасига айтилади.

Агар бир вектор ноль вектор бўлса, у ҳолда шу векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг деб ҳисобланади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{a}\cdot\vec{b}$ деб белгиланади. Таъриф бўйича,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$

бу ерда φ бурчак — $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак.

$\vec{a}\cdot\vec{a}$ кўпайтма *скаляр квадрат* деб аталади ва $\vec{a}^2$ деб белгиланади. Скаляр кўпайтманинг таърифидан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ келиб чиқади.

Масалалар

71. Томонлари 1 га тенг ва диагоналлари O нуқтада кесишадиган $ABCDEF$ мунтазам олтибурчак берилган. а) $\overline{DE}$; б) $\overline{OF}$; в) $\overline{BE}$; г) $\overline{FC}$ векторларни топинг.

72. $ABCD$ параллелограммда қуйидаги векторларни кўрсатинг: а) $\overline{AB} + \overline{AD}$; б) $\overline{AC} + \overline{CD}$; в) $\overline{AD} + \overline{CB} + \overline{DC}$.

73. $ABCD$ тўғри тўртбурчакда $AB = 4$, $BC = 3$. AC ва BD диагоналлар O нуқтада кесишади ва улар 5 га тенг. а) $|\overline{AB} + \overline{AD}|$; б) $|\overline{AO} + \overline{BO}|$; в) $|\overline{OB} + \overline{OC}|$; г) $|\overline{AC} + \overline{BD}|$ топинг.

74. $ABCD$ ромбнинг O нуқтасида кесишувчи AC ва BD диагоналлари мос равишда 14 ва 10га тенг. Қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overline{AB} - \overline{AD}$; б) $\overline{AB} - \overline{BC}$; в) $2\overline{AB} - \overline{AC}$; г) $\overline{BC} - \overline{OC}$.

75. Томонлари 1 га тенг ва диагоналлари O нуқтада кесишувчи $ABCDEF$ мунтазам олтибурчак берилган. Қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{OE}$; в) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{FE}$.

76. $ABCD$ тўғри тўртбурчакда $AB = 4$, $AD = 3$, AC ва BD диагоналлари 5 га тенг. Қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

77. $ABCDEF$ мунтазам олтибурчак учун қуйидаги векторларнинг орасидаги бурчакни топинг: а) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{EF}$; в) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{DC}$; д) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{BE}$; е) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{DE}$.

78. Томонлари $AB = 8$, $AD = 6$ бўлган $ABCD$ тўғри тўртбурчак учун қуйидаги скаляр кўпайтмани топинг. а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Координаталар

O нуқта ва мусбат йўналишни кўрсатадиган OE бирлик кесма танлаб олинган тўғри чизиқ — *координаталар тўғри чизиғи* ёки *координаталар ўқи* деб аталади. O нуқта *координаталар боши* дейилади.

Координаталар тўғри чизиғидаги *A нуқтанинг координатаси* деб, A нуқтадан O координаталар бошигача бўлган x масофага айтилади. Агар A нуқта мусбат ярим ўқда ётса, у “+” ишора билан, агар A нуқта манфий ярим ўқда ётса, у “–” ишора билан олинади.

Теорема. ***Координаталар тўғри чизиғидаги координаталари мос равишда x_1, x_2 бўлган A_1, A_2 нуқталар орасидаги масофани топиш ушбу формула бўйича ифодаланади:***

$$A_1A_2 = |x_2 - x_1|.$$

Текисликдаги тўғри бурчакли координаталар системаси деб, умумий координаталар бошига эга бўлган ўзаро перпендикуляр координата тўғри чизиқларининг жуфтига айтилади.

Координаталар боши O ҳарфи билан, координаталар тўғри чизиғи эса Ox, Oy орқали белгиланади ва улар мос равишда *абциссалар ўқи* ва *ординаталар ўқи* деб аталади.

Тўғри бурчакли координаталар системаси билан берилган текислик *координаталар текислиги* деб аталади.

Координаталар текислигидаги A нуқтани олайлик. Шу нуқта орқали Ox ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз ва Ox ўқи билан кесишиш нуқтасини A_x орқали белгилаймиз. Нуқтанинг Ox ўқидаги координатасини A нуқтанинг абциссаси деб аталади ва x орқали белгиланади. Шунга ўхшаш A нуқта орқали Oy ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз ва Oy ўқи билан кесишиш нуқтани A_y орқали белгилаймиз. Шу нуқтанинг Oy ўқидаги координатасини A нуқтасининг *ординатаси* деб аталади ва y орқали белгилайди.

Шунингдек координата текислигидаги ҳар бир A нуқтага $(x;\ y)$ жуфти тўғри келади ва у берилган координаталар системасига тегишли текисликдаги нуқтанинг координаталари деб аталади.

Координаталар текислигидаги $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ нуқталарнинг орасидаги масофани топиш формуласи қуйидагича ифодаланади:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Маркази $(x_0;\ y_0)$ нуқта ва радиуси R бўлган айлана қуйидаги тенглама билан берилади:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Тўғри чизиқ $ax + by + c = 0$ тенглама билан берилади, бунда a ва b — бир вақтда нолга тенг эмас сонлар.

Боши координаталар боши билан тўғри келадиган ихтиёрий бир вектор ясайлик. Шунда унинг учининг координаталари *векторнинг координаталари* деб аталади.

Координаталари мос равишда (1; 0), (0; 1) бўлган векторларни $\vec{i}$, $\vec{j}$ деб белгилайлик. Бу векторларни координатали векторлар деб атаймиз ва бошлари координаталар бошига мос тушадиган қилиб ясаймиз.

Теорема. ***$\vec{a}$ векторни $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ кўринишида тасвирлагандагина унинг координаталари $(x;\ y)$ бўлади.***

$A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ нуқталари билан берилган $\overline{A_1A_2}$ векторнинг узунлиги қуйидаги формула бўйича ифодаланади:

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

$\vec{a}_1(x_1;\ y_1)$ ва $\vec{a}_2(x_2;\ y_2)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги формула бўйича ифодаланади:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Нормал векторлари $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ бўлган тўғри чизиқларнинг орасидаги φ бурчакнинг косинуси векторларнинг скаляр кўпайтмасининг формуласи бўйича ҳисобланади:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Хусусий ҳолда, агар $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, яъни

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

тенглиги бажарилса, у ҳолда икки тўғри чизиқ перпендикуляр бўлади.

Масалалар

79. AB кесма ўртасининг координаталарини топинг, агар: а) $A(-2;\ 1)$, $B(6;\ 5)$; б) $A(4;\ -3)$, $B(2;\ 1)$; в) $A(7;\ 5)$, $B(-5;\ -3)$.

80. $O(0; 0)$, $A(6; 2)$, $C(0; 6)$ ва B нуқталар $OABC$ паралелограммнинг учлари бўлса, B нуқтанинг координаларини топинг.

81. $O(0; 0)$, $A(8; 2)$, $B(10; 8)$, $C(2; 6)$ нуқталар паралелограмнинг учлари. Шу параллелограммнинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси бўлган Р нуқтанинг координаларини топинг.

82. а) $A_1(2; 1)$ ва $A_2(1; -1)$; б) $B_1(4; 3)$ ва $B_2(-1; 3)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

83. $A(3; 2)$ нуқтадан қуйидаги ўқларгача бўлган масофани топинг: а) Ox; б) Oy.

84. $A(1; 2)$ ёки $B(1; -2)$ нуқталарнинг қайси бири координаталар бошига яқин жойлашган?

85. Қуйидаги тенглама билан берилган айлананинг C марказининг координаталарини ва R радиусини топинг: а) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$; б) $x^2 + (y - 3)^2 = 9$.

86. а) Маркази $O(0; 0)$ нуқта ва радиуси 1 га тенг; б) маркази $C(-2; 1)$ нуқта ва радиуси 3 га тенг бўлган айлана тенгламасини ёзинг.

87. Маркази координаталар боши бўлган ва $A(3; 3)$ нуқта орқали ўтувчи айлана тенгламасини ёзинг.

88. Қуйидаги тенгламалар айлана тенгламалари бўлишини исботланг: а) $x^2 - 8x + y^2 = 0$; б) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 4 = 0$. Унинг радиуси ва марказининг координатасини топинг.

89. $\vec{a}_1(2; -1)$ ва $\vec{a}_2(-1; 2)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

90. Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг: а) $2x + y - 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$; б) $x + y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

91. $A_0(2; 1)$ нуқта орқали ўтувчи ва нормал вектори $\vec{n}(1; -1)$ бўлган тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

92. $M(-1; 3)$, $N(1; 4)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг. Шу тўғри чизиқ нормал вектори координаталарини топинг.

93. Қуйидаги тўғри чизиқлар жуфтининг қайсиси: а) параллел; б) перпендикуляр эканини аниқланг:
1) $x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$; 2) $x + y - 2 = 0$, $x - y - 3 = 0$;
3) $-7x + y = 0$, $7x - y + 4 = 0$; 4) $4x - 2y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

94. Қуйидаги тўғри чизиқлар кесишиш нуқтаси координаталарини топинг:
а) $x - y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$;
б) $x - 3y + 2 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$.

95. $\vec{a}(-1; 2)$ ва $\vec{b}(2; -4)$ векторлар берилган. $3\vec{a} - 2\vec{b}$ векторнинг координаталарини топинг.

96. $\vec{a}_1(1; 3)$ ва $\vec{a}_2(3; -1)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

97. $\vec{a}_1(3; 4)$ ва $\vec{a}_2(4; 3)$ векторларнинг орасидаги бурчак косинусини топинг.

I боб

СТЕРЕОМЕТРИЯ АСОСЛАРИ. ФАЗОДАГИ ПАРАЛЛЕЛЛИЛИК

1-§. Стереометриянинг асосий тушунчалари

Стереометрия ёки фазодаги геометрия — турли фазовий фигураларнинг ўрнини, шаклини, ўлчамларини ва хоссаларини ўргатадиган геометриянинг бўлими.

“Стереометрия” — грекча “стереос” — фазо, “метрео” — ўлчайман деган сўзларидан олинган. “Стереометрия” сўзи эса жисмларни ўлчаш маъносини билдиради.

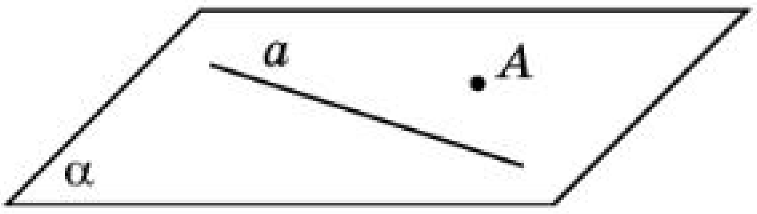
Стереометриянинг асосий тушунчалари фазодаги шаклларни тасвирловчи *нуқта, тўғри чизиқ ва текислик* бўлиб ҳисобланади.

Нуқта жуда кичкина яъни ўлчамини ҳисобга олмаса бўладиган шакл. Евклид ўзининг “Асослар” китобида нуқтанинг бўлаклари йўқ деб таърифлади.

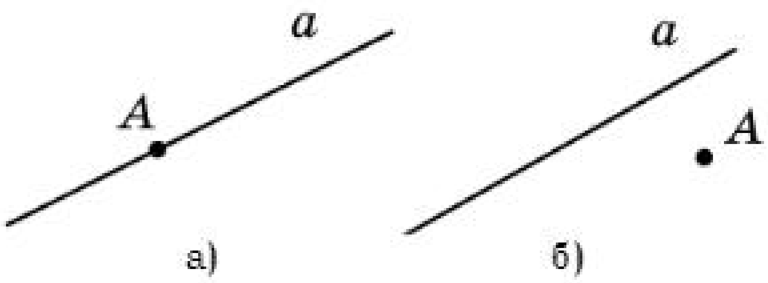
Тўғри чизиққа тўғри тўртбурчак шаклидаги столнинг қирраси, ёйилган ипнинг кўриниши мисол бўлади. Тўғри чизиқ бўйича ёруғлик нури таралади.

Текислик — сувнинг текис юзаси, стол, доска, ойна ва бошқалар юзаси.

Нуқта, тўғри чизиқ ва текисликни 1.1-расмда кўрсатилгандай тасвирлаймиз.



1.1-расм



1.2-расм

Нуқталар A, B, C, ... лотин алифбосининг бош ҳарфлари билан белгиланади.

Нуқта берилган тўғри чизиқда ётиши мумкин (1.2, а-расм) ёки ётмаслиги ҳам мумкин (1.2, б-расм).

Агар нуқта тўғри чизиқда ётса, унда тўғри чизиқ нуқта орқали ўтади деб айтилади.

Тўғри чизиқлар a, b, c, ... лотин алифбосининг кичик ҳарфлари билан белгиланади, шунингдек ушбу тўғри чизиқда ётадиган икки нуқтани тасвирловчи икки лотин алифбосининг ҳарфлари билан белгиланади, масалан: AB тўғри чизиғи, C_1D_1 тўғри чизиғи ва ҳ.з.

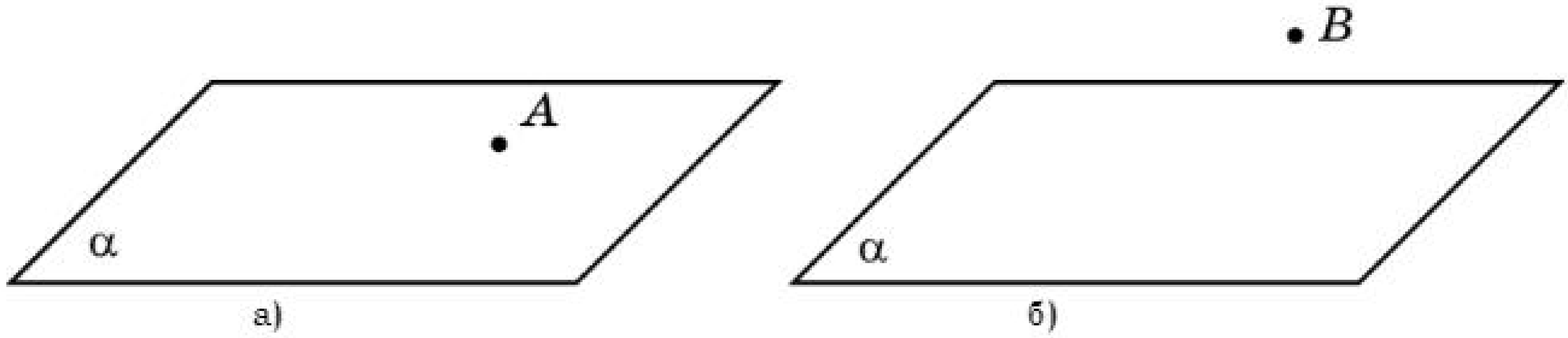
Математикада тегишлилик нисбатини $\in$ белгиси билан белгиланади. Масалан, A нуқтанинг a тўғри чизиғига тегишлилиги $A \in a$ деб, B нуқтани a тўғри чизиғига тегишли эмаслигини $B \notin a$ деб белгиланади.

Фазода икки тўғри чизиқнинг биргина умумий нуқтаси мавжуд бўлса, унда улар *кесишувчи тўғри чизиқлар* дейилади.

C нуқта a ва b тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси $C = a \cap b$ кўринишида белгиланади.

Нуқта берилган текисликда ётиши ҳам, ётмаслиги ҳам мумкин (1.3, а-расм).

Агар нуқта текисликда ётса, унда текислик шу нуқта орқали ўтади деб айтилади.

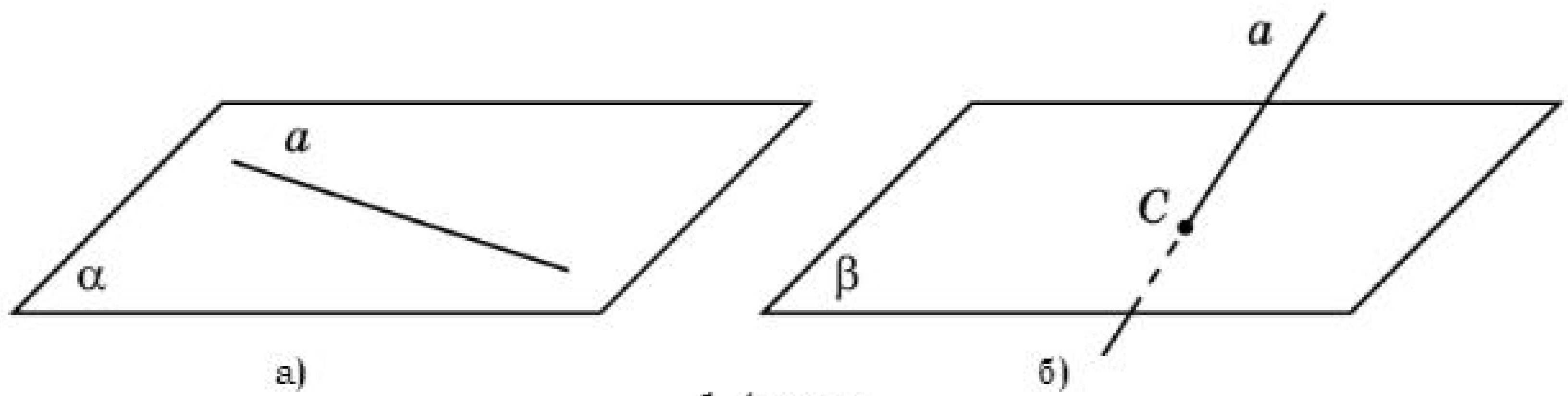


1.3-расм

Текислик α, β, γ, ... грек алифбосининг ҳарфлари билан, шу билан бирга шу текисликда бир тўғри чизиқда ётмайдиган уч нуқтани тасвирловчи лотин алифбосининг уч ҳарфи билан белгиланади, масалан: ABC текислиги, $D_1E_1F_1$ текислиги ва ҳоказо.

A нуқтанинг α текислигида ётиши $A \in \alpha$ деб, B нуқтасини α текислигида ётмаслиги $B \notin \alpha$ деб белгиланади.

Агар тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси текисликда ётса, унда тўғри чизиқ текисликда ётади ёки текислик тўғри чизиқ орқали ўтади деб айтилади (1.4, а-расм).



1.4-расм

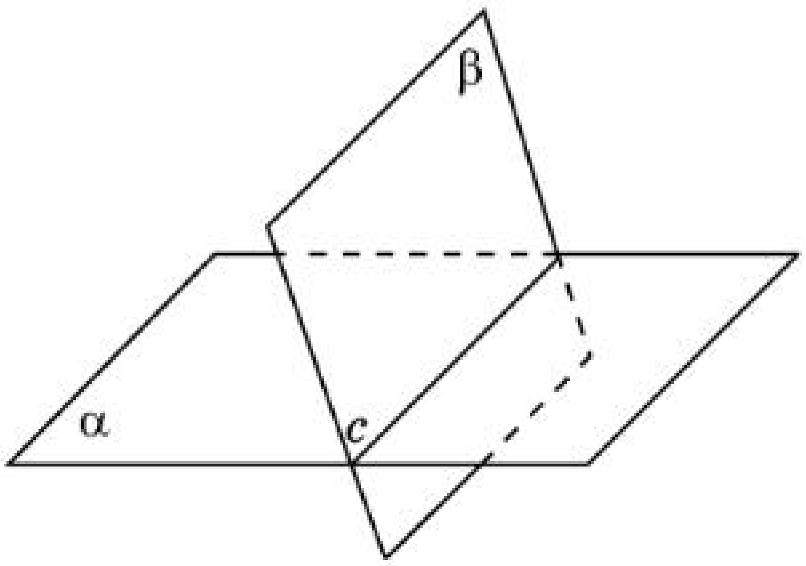
a тўғри чизиғининг α текислигида ётиши $a \in \alpha$ деб белгиланади.

Агар тўғри чизиқ билан текисликнинг биргина умумий нуқтаси бор бўлса, унда тўғри чизиқни кесиб ўтади дейилади (1.4, б-расм).

C нуқтаси a тўғри чизиғи билан β текислигининг кесишиш нуқтаси бўлиши $C = a \cap \beta$ деб белгиланади (1.4, б-расм).

Текисликни кесиб ўтмайдиган тўғри чизиқ чизиб кўринг.

Агар икки текисликнинг умумий нуқталари бир тўғри чизиқнинг нуқталари бўлса, у ҳолда бундай текисликлар шу тўғри чизиқ билан кесишади деб айтамиз (1.5-расм).



1.5-расм

c тўғри чизиғи α текислиги билан β текислигининг кесишиш чизиғи бўлиши $c = \alpha \cap \beta$ деб белгиланади (1.5-расм).

Икки кесишмайдиган текисликларни чизиб кўринг.

Тарихий маълумотлар

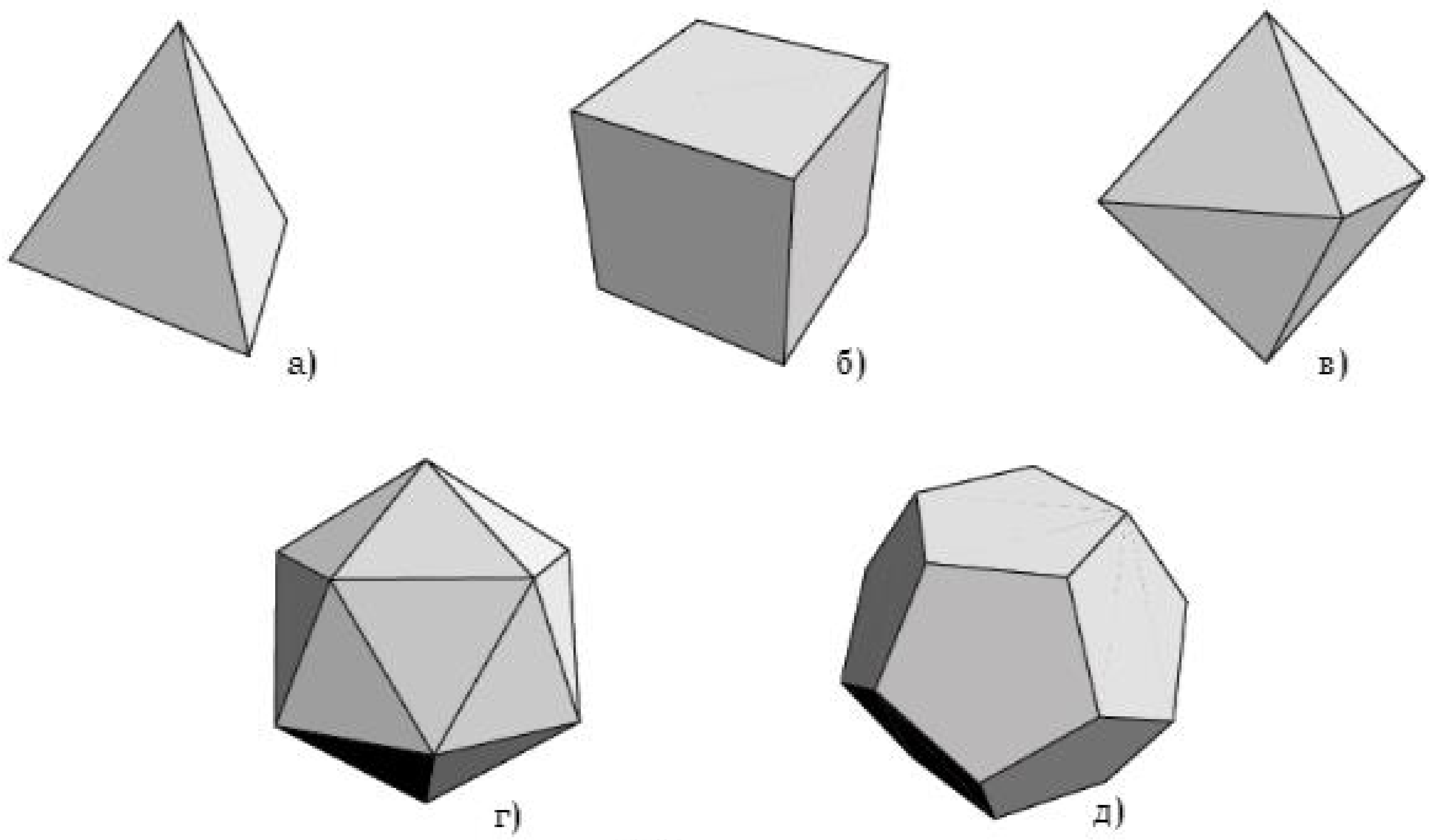
Стереометрия планиметрия курсига ўхшаб одамнинг амалий иш-ҳаракатига боғлиқ холда келиб чиқади. Қадимги Мисрда геометриянинг келиб чиқиши хақида э.а. 2000 йил аввал Қадимги Грек олими Геродот "Мисрлик фараон Сеозоострис хар бир мисрликка ер майдонини қурта ташлаш орқали бўлиб бериб, хар бир ер майдонидан солиқ олиб ўтирган. Нил дарёси тошиб, ерни сув босган вақтда азият чекканлар подшоҳнинг олдига боради, шу вақтда подшох солиқни камайтириш учун ер майдонини қанчага камайганини аниқлаш мақсадида ер ўлчовчиларни юборади. Шу билан Мисрда геометрия пайдо бўлди, кейин Грекияга алмашди".

Оддий биноларни қуриш вақтида ҳам қурилишга қанча материал зарур эканини ҳисоблаш, фазодаги нуқталар орасидаги масофани, тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни ҳисоблаш, оддий геометрик фигураларнинг хоссаларини қўллаш керак бўлди. Э.а. 2,3 ва 4 минг йил аввал қурилган Миср пирамидалари ўзининг метрик нисбати билан лол қолдирди, яъни қурувчиларнинг стереометрияни яхши ўзлаштирганини кўрсатади.

Денгизда сузиш ва савдони ривожлантириш вақт билан фазода йўлланма бериш тажрибасини талаб этди, яъни йил фаслларининг алмашиш вақтини билиш, картада ўзининг турган жойини аниқлаш, ҳаракат йўналишини топиш ва масофани ўлчаш. Кун, ой, юлдузларни ўрганиш ва фазодаги тўғри чиқизлар билан текисликларнинг ўзаро жойлашиш қонунларини ўрганиш шу мисолларни ечишга имконият яратди ва янги илмнинг бошланиши — астрономияга йўл очди.

Э.а. VII асрдан Қадимги Грецияда амалий геометриядан назарий геометрияга алмашиши аста-секин амалга ошувчи фалсафий мактаблар очилди. Шу мактабларда ҳар хил қарашлар ўрин олиб, уларнинг ёрдами билан янги геометрик маълумотлар олишга имконият бўлди.

Илк машҳур мактабларнинг бири Пифагор мактаби ва унинг асосчиси Пифагорнинг номи билан аталган (э.а. VI-V асрларда). Пифагорликлар ўзларининг фалсафий назарияларига мунтазам кўпёқларни қўллаган, улар фигураларнинг шаклларини ҳаётдаги элементлар билан таққослаган, яъни олов — мунтазам тетраэдр (1.6, а-расм), ер — гексаэдр (1.6, б-расм); ҳаво — октаэдр (1.6, в-расм); сув — икосаэдр (1.6, г-расм); ер юзи — додекаэдр (1.6, д-расм).



1.6-расм

Кўпёқларнинг номларини грек тилидан таржима қилганда: “тетра” — тўрт, тетраэдрнинг ёқлари — тўртта мунтазам учбурчаклар; “гекса” — олти, гексаэдрнинг (куб) олтита квадрат ёқлари мавжуд; “окто” — саккиз, октаэдрнинг ёқлари — саккизта мунтазам учбурчаклар; “икоси” – йигирма, икосаэдрнинг ёқлари — йигирмата мунтазам учбурчаклар, “додека” — ўн икки, додекаэдрнинг ёқлари — ўн иккита мунтазам бешбурчаклар, “эдра” грек тилидан таржимаси — “ёқ” деган маънони англатади.

Кейинги фалсафий мактаб — Александрия мактаби — эрамиздан аввалги 300 йил аввал дунёга таниқли олим Евклид олиб келган. Бироқ унинг ҳаёти ҳақида маълумотлар кам. Ўзининг асарларида Папп математик (э.а. III аср) Евклидни обрўли, ҳақиқатгўй, сабрли ва мулойим инсон сифатида таърифлаган. Евклид таниқли “Асослар” китобини ёзди, унда геометрия дастлабки илмий асосда таърифланди ва геометриянинг тўғри аксиоматик шаклланиши тафсия этилди. Икки минг йилдан буён бу китоб геометрия курсини системали ўқишга асос бўлди.

Евклид хақидаги бу ривоятда Птоломей подшоси Евклиддан “геометрияни унинг “Асослар”дан бошқа қисқа ўрганиш усули борми” деган саволига Евклид “Геометрияда подшоликка йўл йўқ” деб жавоб берди”.

Сўнгги юз йилликда янги усуллар, жумладан геометрик масалаларни алгебраик усулда ва аксинча кўчиришга имконият берувчи координата ва вектор тушунчалари пайдо бўлди. Геометрик тадқиқотларнинг янги йўналишлари ривожланиб келяпти: Лобачевский геометрияси, проектив геометрия, топология, компьютерли геометрия ва бошқалар. Геометрик усуллар бошқа илмларда масалан: солиштирма назарияси, квант механикаси, кристаллография ва бошқа кўплаган соҳаларда қўлланилади.

Саволлар

1. Стереометрия нимани ўргатади?
2. “Стереометрия” сўзининг грек тилидан таржимаси қандай?
3. а) нуқта; б) тўғри чизиқ; в) текислик қандай шаклларнинг ўрни бўлади?
4. а) нуқта; б) тўғри чизиқ; в) текислик қандай белгиланади?
5. A нуқтанинг a тўғри чизиғига тегишли бўлиши қандай белгиланади?
6. B нуқтанинг a тўғри чизиғига тегишли эмаслиги қандай белгиланади?
7. Фазода қандай икки тўғри чизиқ кесишувчи тўғри чизиқлар деб аталади?
8. C нуқта a ва b тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлиши қандай белгиланади?
9. A нуқтанинг α текислигида ётиши қандай белгиланади?
10. B нуқтанинг α текислигида ётмаслиги қандай белгиланади?
11. Қандай холатда тўғри чизиқ: а) текисликда ётади; б) текисликни кесиб ўтади деб айтилади?
12. a тўғри чизиғининг α текисликда ётиши қандай белгиланади?
13. C нуқта а тўғри чизиғи ва β текислигининг кесишиш нуқтаси бўлиши қандай белгиланади?
14. Қандай холатда икки текислик тўғри чизиқ бўйича кесишади деб айтилади?
15. c тўғри чизиқ α ва β текислигининг кесишиш чизиғи бўлиши қандай белгиланади?
16. Геометрия қачон ва қаерда пайдо бўлди?
17. 1.6-расмда тасвирланган кўпёқлар қандай аталади? Уларнинг нечта ёғи бор?

Масалалар

A

1.1. Синфнинг деворлари — текисликнинг бўлаклари деб ўйланг.
а) кесишувчи икки текисликни;
б) кесишмайдиган икки текисликни;

в) текисликни ва у билан кесишмайдиган тўғри чизиқни;
г) кесишувчи икки тўғри чизиқни;
д) кесишмайдиган икки тўғри чизиқни кўрсатинг.

1.2. Тасвирланг:
а) кесишувчи икки тўғри чизиқни;
б) текисликни ва у билан кесишмайдиган тўғри чизиқни;
в) кесишмайдиган икки текисликни.

1.3. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётмайди. Шу нуқталарнинг турли жуфтлари орқали ўтувчи тўғри чизиқларни ёзинг.

1.4. A, B, C, D ннуқталар бир текисликда ётмайди. Шу нуқталарнинг турли учтаси орқали ўтувчи текисликларни ёзинг.

B

1.5. A, B, C, D нуқталар бир текисликда ётмайди. AD тўғри чизиғи билан: а) ABC; б) BCD текислигининг кесишиш нуқтасини кўрсатинг.

1.6. A, B, C, D нуқталар бир текисликда ётмайди. ABC текислиги билан: а) ABD; б) BCD; в) ACD текислигининг кесишиш чизиғини кўрсатинг.

1.7. Бир тўғри чизиқда учтаси ётмайдиган қуйидаги: а) уч нуқтанинг; б) тўрт нуқтанинг; в) беш нуқтанинг ҳар хил жуфтлари орқали нечта тўғри чизиқ ўтади?

1.8. Бир текисликда ётмайдиган тўртта нуқтанинг ҳар хил учтаси орқали нечта текислик ўтади?

C

1.9. Бир тўғри чизиқда учтаси ётмайдиган нуқталарнинг ҳар хил жуфтлари орқали нечта тўғри чизиқ ўтади?

1.10. Бир тўғри чизиқда тўрттаси ётмайдиган нуқталарнинг ҳар хил учтаси орқали нечта текислик ўтади?

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

1.11. Геометриянинг текисликдаги аксиомаларини такрорланг.

1.12. Текисликдаги геометрия аксиомаларини айтинг беринг.

2-§. Стереометрия аксиомалари

Планиметрия курсидаги каби текисликда нуқталарнинг, тўғри чизиқлар ва текисликларнинг айрим хоссалари исботсиз қабул қилинади, улар *аксиомалар* деб аталади. Грек тилидан таржима қилинганда “аксиома” — “шубҳа қилинмайдиган” яъни исботлашни талаб қилмайдиган тасдиққа айтилади.

Стереометриянинг қуйидаги аксиомаларини қарайлик.

1. *Фазодаги икки нуқта орқали битта ва фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.*

Белгилашлардан фойдаланиб бу аксиомани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

Фазодаги ихтиёрий A_1, A_2 нуқталар учун $A_1 \in a$ ва $A_2 \in a$ бўладиган биргина a тўғри чизиғи топилади.

2. *Фазода бир тўғри чизиқда ётмайдиган ихтиёрий уч нуқта орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.*

Белгилашлардан фойдаланиб бу аксиомани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

Фазодаги бир тўғри чизиқда ётмайдиган ихтиёрий A_1, A_2, A_3 нуқталар учун $A_1 \in \alpha$ ва $A_2 \in \alpha$, $A_3 \in \alpha$ бўладиган биргина α текислик топилади.

3. *Агар икки турли текислик умумий нуқтага эга бўлса, улар шу нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ бўйича кесишади.*

Белгилашларни фойдаланиб, бу аксиомани ўзингиз келтириб чиқаринг.

4. *Бир текисликда ётмайдиган камида тўртта нуқта мавжуд.*

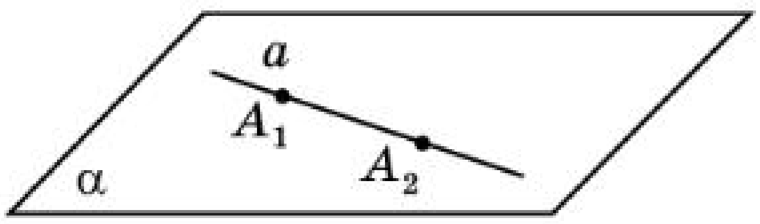
Белгилашларни фойдаланиб, бу аксиомани ўзингиз келтириб чиқаринг.

5. *Фазодаги тўғри чизиқлар ва текисликлар учун планиметриянинг барча аксиомалари ўринли.*

Стереометрия аксиомаларини қўллаб мантиқий мулоҳазалар ёрдамида бошқа хоссаларнинг тўғрилиги исботланади. Уларнинг айримларини кўриб чиқайлик.

1-хосса. *Агар тўғри чизиқ билан текисликнинг иккита умумий нуқтаси бор бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ шу текисликда ётади.*

Исботи. a тўғри чизиғининг α текислиги билан A_1 ва A_2 умумий нуқталари мавжуд бўлсин (2.1-расм).

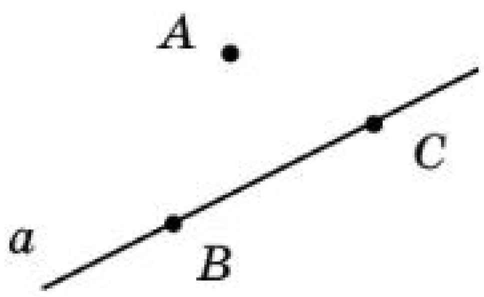


2.1-расм

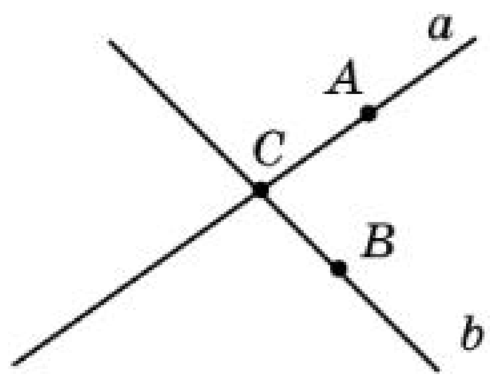
α текислигида планиметриянинг аксиомалари бажарилганлигидан шу текисликда A_1, A_2 нуқталар орқали биргина тўғри чизиқ ўтади. Агар у a тўғри чизиқ билан мос келмаса, унда биз берилган икки нуқта орқали ўтувчи икки тўғри чизиқ олар эдик. Бу биринчи аксиомага зид, демак, бу тўғри чизиқлар устмауст тушади. *Шундан*, a тўғри чизиқ α текисликда ётади.

2-хосса. *Тўғри чизиқ ва шу тўғри чизиқда ётмайдиган нуқта орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкин*

Исботи. A нуқта a тўғри чизиқда ётмайди. a тўғри чизиқда планиметрия аксиомалари бажарилганлиги сабабли унда ётувчи B, C нуқталар топилади (2.2-расм).



2.2-расм



2.3-расм

Иккинчи аксиома бўйича бир тўғри чизиқда A, B, C нуқталар орқали фақат битта α текислик ўтади. 1-хосса бўйича a тўғри чизиқ α текисликда ётади. Демак, α текислик a тўғри чизиқ ва A нуқта орқали ўтади.

Шу текисликнинг фақат битта бўлишини исботлайлик. Ҳақиқатан ҳам, a тўғри чизиқ ва A нуқта орқали ўтувчи текислик A, B, C нуқталар орқали ҳам ўтади. Иккинчи аксиома бўйича у α текислик билан устма-уст тушади. ☐

3-хосса. Кесишувчи икки тўғри чизиқ орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

Исботи. a ва b тўғри чизиқлар C нуқтада кесишсин. a ва b тўғри чизиқларда планиметриянинг аксиомалари бажарилганлигидан уларга тегишли C нуқтадан бошқа мос равишда A ва B нуқталар топилади (2.3-расм).

A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётмайди, шундан 2-аксиома бўйича улар орқали фақат битта текислик ўтади. A ва C нуқталар шу текисликда ётганлигидан 1-хосса бўйича a тўғри чизиқ шу текисликда ётади. Шунга ўхшаш B ва C нуқталар шу текисликда ётганлигидан 1-хосса бўйича b тўғри чизиқ шу текисликда ётади. Демак, текислик берилган икки тўғри чизиқ орқали ўтади.

Шу текисликнинг фақат битта бўлишини исботлайлик. Ҳақиқатан ҳам, a ва b тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текислик бир тўғри чизиқда ётмайдиган A, B, C нуқталар орқали ўтади. 2-аксиома бўйича бундай текислик биттагина бўлади. ☐

4-аксиомадан фойдаланиб, фазода тўртта текислик мавжудлигини исботланг.

Фазодаги икки нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

Саволлар

1. “Аксиома” сўзининг маъноси нима?
2. Стереометриянинг аксиомаларини айтиб беринг.
3. Белгилашлардан фойдаланиб, стереометриянинг аксиомаларини айтинг.
4. Тўғри чизиқ билан текисликнинг икки умумий нуқтаси мавжуд бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ билан текислик қандай жойлашади?

5. Тўғри чизиқ билан унда ётмайдиган нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?
6. Кесишувчи икки тўғри чизиқ орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

Масалалар

A

2.1. Бир нуқта орқали нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

2.2. Бир нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

2.3. Берилган уч нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин? Уч нуқта қандай жойлашганда улар орқали чексиз кўп текисликлар ўтказиш мумкин?

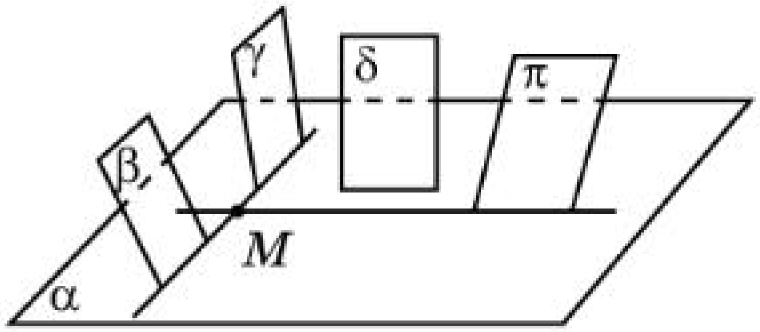
2.4. Бир текисликда ётмайдиган тўртта нуқта берилган. Уларнинг учтаси бир тўғри чизиқда ётиши мумкинми?

2.5. Икки текисликнинг: а) битта умумий нуқтаси; б)иккита умумий нуқтаси бўлиши мумкинми?

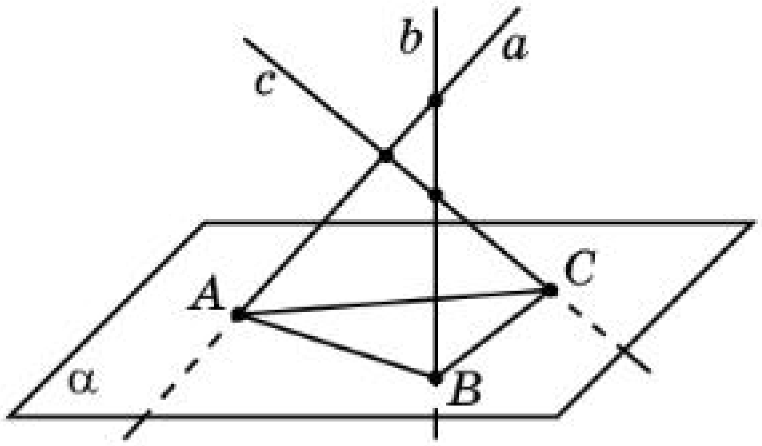
2.6. Икки текисликнинг иккита умумий чизиғи бўлиши мумкинми?

B

2.7. M нуқта α текисликда ётибди. 2.4-расмдан M нуқта қандай текисликларда ётишини аниқланг.



2.4-расм



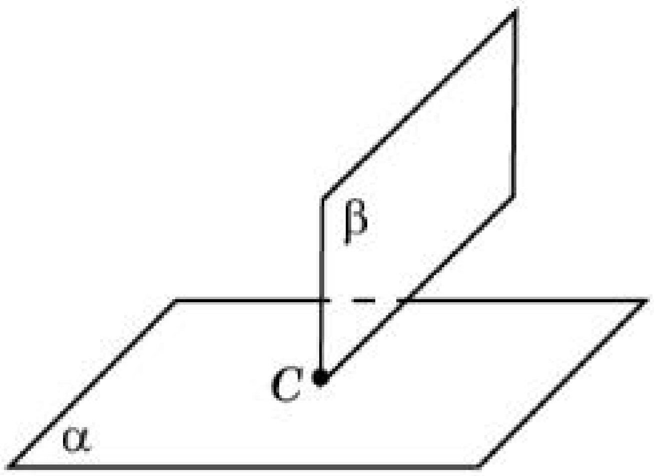
2.5-расм

2.8. 2.5-расмда жуфт жуфтдан кесишувчи a, b, c тўғри чизиқлар текисликни мос равишда A, B, C нуқталарда кесиб ўтади. Расм тўғри чизилганми?

2.9. Параллелограммнинг икки учи ва диагоналларининг кесишиш нуқтаси бир текисликда ётибди. Параллелограммнинг бошқа икки учи ҳам шу текисликда ётиши мумкинми?

2.10. 2.6-расмда тасвирланган икки текисликнинг кесишишидан нима ҳосил бўлади?

2.11. Кесишувчи икки текислик фазони неча бўлакка бўлади?



2.6-расм

C

2.12. Тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган икки нуқта орқали ҳар доим текислик ўтказиш мумкинми?

2.13. Учта текислик фазони энг кўпи билан нечта бўлакка ажратади?

2.14. Агар икки текисликнинг умумий нуқтаси мавжуд бўлса, у ҳолда улар шу нуқта орқали ўтадиган тўғри чизиқ бўйлаб кесишишини исботланг.

2.15. Ихтиёрий текислик учун унга тегишли бўлмаган нуқталар ҳам мавжудлигини исботланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

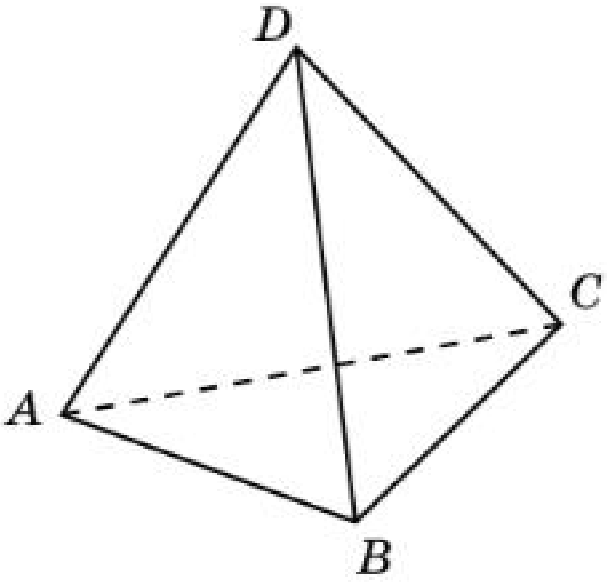
2.16. Кўпбурчак тушунчасини такрорланг.

2.17. Кўпёққа таъриф беринг. *Кўпёқ* деб, ... ташкил топган жисмга айтилади.

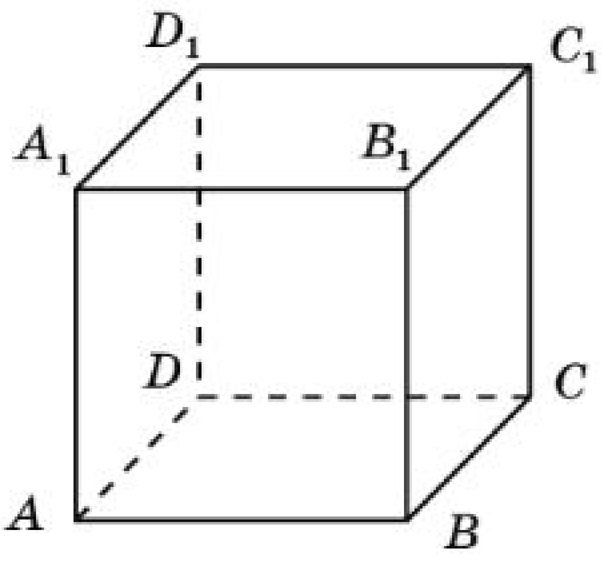
3-§. Фазода фигуралар. Тетраэдр, куб, параллелепипед

Фазовий фигураларнинг ичида *кўпёқлар* — чекли сондаги кўпбурчаклардан ташкил топган жисм. Шу кўпбурчаклар кўпёқнинг ёқлари, кўпбурчакнинг томонлари ва учлари мос равишда кўпёқнинг *қирралари ва учлари* деб аталади.

Кўпёқнинг бир ёғида ётмайдиган икки учини туташтирувчи кесма унинг *диагонали* деб аталади. Содда кўпёқларнинг бири — ёқлари мунтазам тўртта учбурчакдан ташкил топган тетраэдрдир (3.1-расм). Одатда тетраэдр унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади масалан, $ABCD$.



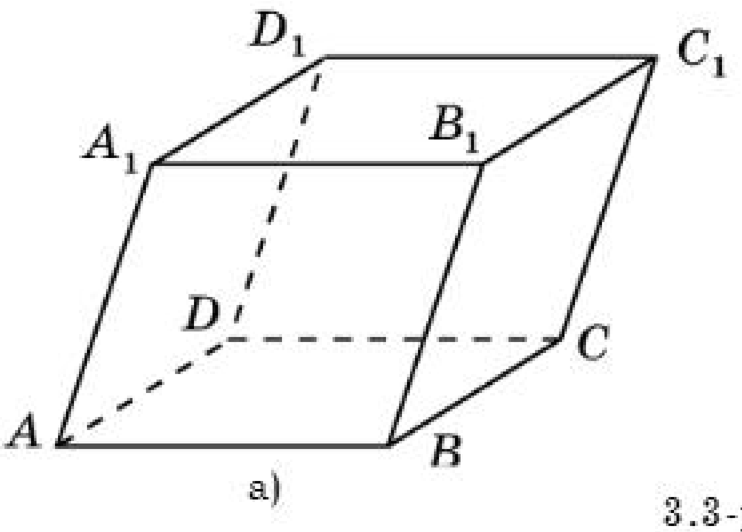
3.1-расм

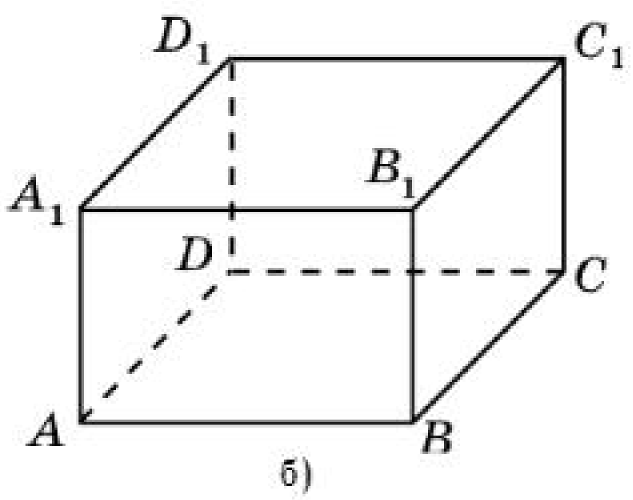


3.2-расм

Куб деб, олтита ёғи ҳам квадратдан иборат бўлган кўпёққа айтилади (3.2-расм). Одатда куб унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Қирраси 1 га тенг куб *бирлик куб* деб аталади.

Параллелепипед деб, қарама-қарши ёқлари ўзаро параллел бўлган кўпёққа (олтиёқ) айтилади (3.3-расм). Параллелепипед унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



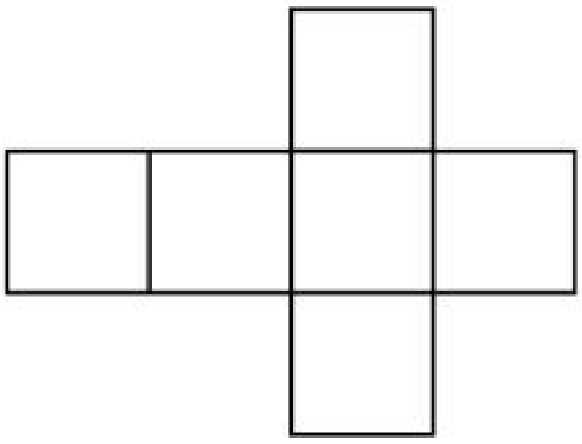


3.3-расм

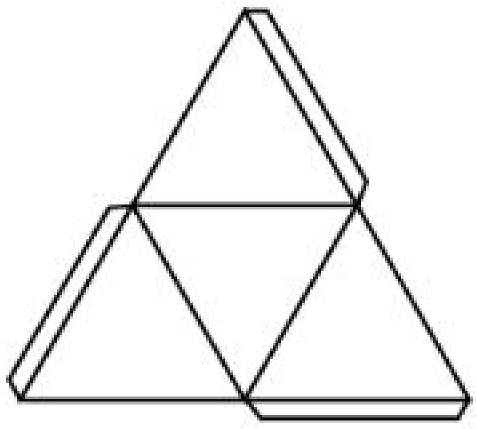
Барча ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат бўлган параллелепипед *тўғри бурчакли параллелепипед* деб аталади. (3.3, б-расм). Акс ҳолда у *оғма параллелепипед* деб аталади (3.3, а-расм).

Куб параллелепипед бўла оладими? Фикрингизни тушунтиринг?

Агар кўпёқнинг ёқларини барча кўпбурчаклари бир текисликда ётадиган қилиб айрим қирралари бўйича кесиб, текисликка ёйса,унда ҳосил бўлган фигура *кўпёқнинг ёйилмаси* деб аталади, масалан: 3.4-расмда кубнинг ёйилмаси кўрсатилган.



3.4-расм



3.5-расм

Қаттиқ қоғоздан, картондан ёки бошқа материалдан кўпёқнинг модели-ни ясаш учун аввал унинг ёйилмасини тайёрлаб, кейин мос қирраларини унинг ёйилмасини тайёрлаб, кейин мос қирраларини елимлаб əништирган маъқул. Қулай бўлиши учун кўпёқнинг ёйилмасини елимлаб ёпиштириш учун кўпёқнинг ёйилмасини елимлаб ёпиштириш учун махсус қолпоқчалар ясалади. 3.5-расмда тетраэдрнинг əйилмаси қолпоқчалари билан мас-вирланган. Текисликдаги сингари фазо учун хам ҳаракат, тенглик ва ўхшашлик тушунчалари аниқланади.

Ҳаракат деб, нуқталар орасидаги масофа сақланадиган фазодаги акслантиришга айтилади.

Яъни, агар ҳаракат ихтиёрий икки A, B нуқталарни A', B' нуқталарга кўчирса, у ҳолда $A'B' = AB$ бажарилади.

Агар фазода бир фигурани иккинчи фигурага кўчирадиган ҳаракат мавжуд бўлса, у ҳолда шу *икки фигура тенг* деб аталади.

Ўхшашлик деб, нуқталар орасидаги масофа маълум бир сонгагина ўзгарадиган фазодаги акслантиришга айтилади.

Яъни ҳаракат ихтиёрий икки A, B нуқталарни A', B' нуқталарга кўчирса, у ҳолда $A'B' = kAB$ бажарилади, бу ерда k — ўхшашлик коэффиценти деб аталувчи мусбат сон. Агар фазода бир фигурани иккинчи фигурага кўчирадиган ўхшашлик мавжуд бўлса, у ҳолда у икки фигура *ўхшаш* деб аталади.

Ўхшаш кўпёқларга мисоллар келтиринг.

Саволлар

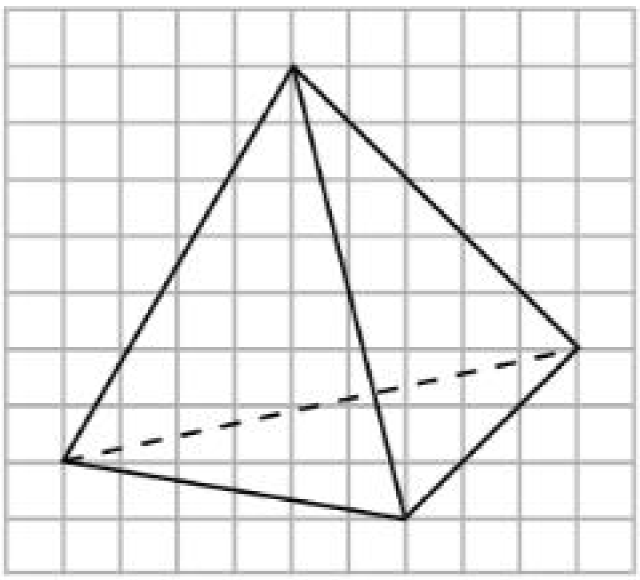
1. Фазодаги қандай фигурага кўпёқ деб аталади?
2. Кўпёқнинг диагонали деб нимага айтилади?
3. Қандай кўпёққа: а) куб; б) параллелепипед; в) тетраэдр деб аталади?
4. Қандай кўбурчакка: а) куб; б) параллелепипед деб аталади?
5. Қандай параллелепипед тўғри бурчакли деб аталади?
6. а) Куб; б) параллелепипед; в) тетраэдр қандай белгиланади?
7. Атрофимиздаги оламдан: а) куб; б) параллелепипед; в) тетраэдр шаклидаги жисмларга мисоллар келтиринг.
8. Кўпёқнинг ёйилмаси деб нимага айтилади?
9. Фазодаги қандай алмаштириш ҳаракат деб аталади?
10. Фазодаги қандай фигуралар тенг деб аталади?
11. Фазодаги қандай фигуралар ўхшаш деб аталади?

Масалалар

А

3.1. Қуйидаги: а) тетраэдр; б) куб; в) параллелепипеднинг нечта учи (У), қирраси (Қ) ва ёғи (Ё) бўлади?

3.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдан унинг қирраси ётадиган ва ABC текисликни кесиб ўтувчи тўғри чизиқларни кўрсатинг.



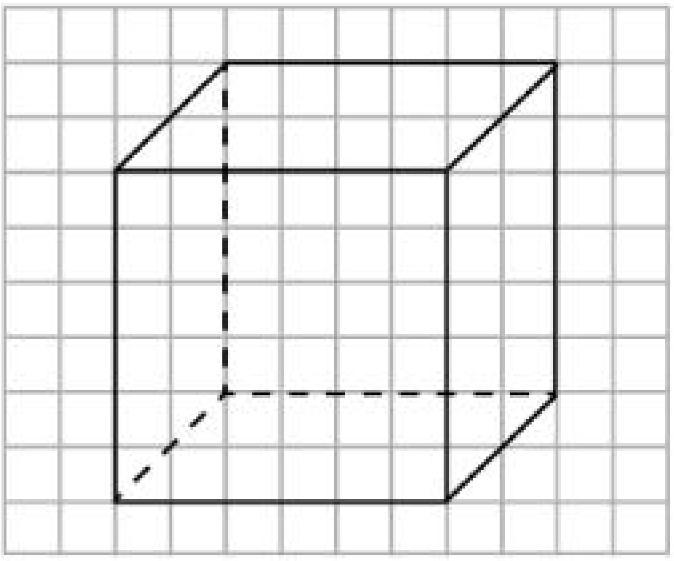
3.6-расм

3.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдан унинг ёғи ётадиган ва BCC_1 текислик билан кесишадиган текисликни кўрсатинг.

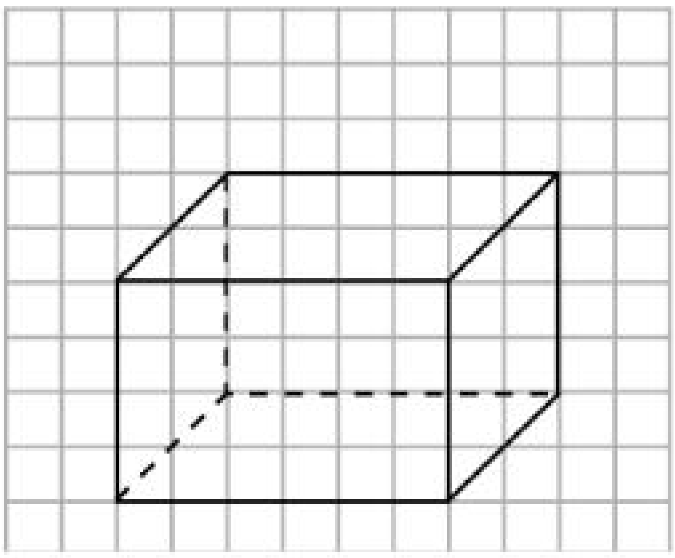
3.4. Катак қоғозда 3.6-расмдагига ўхшаш тетраэдр чизинг.

3.5. Катак қоғозда 3.7-расмдагига ўхшаш 3.6-расм куб чизинг.

3.6. Катак қоғозда 3.8-расмдагига ўхшаш тўғри бурчакли параллелепипед чизинг.



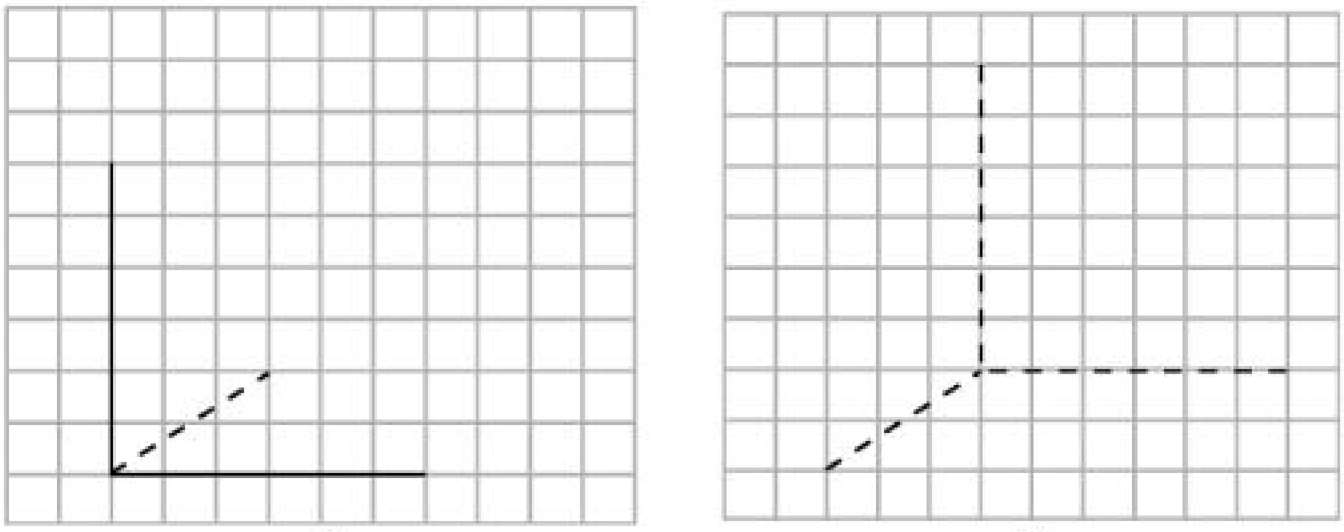
3.7-расм



3.8-расм

B

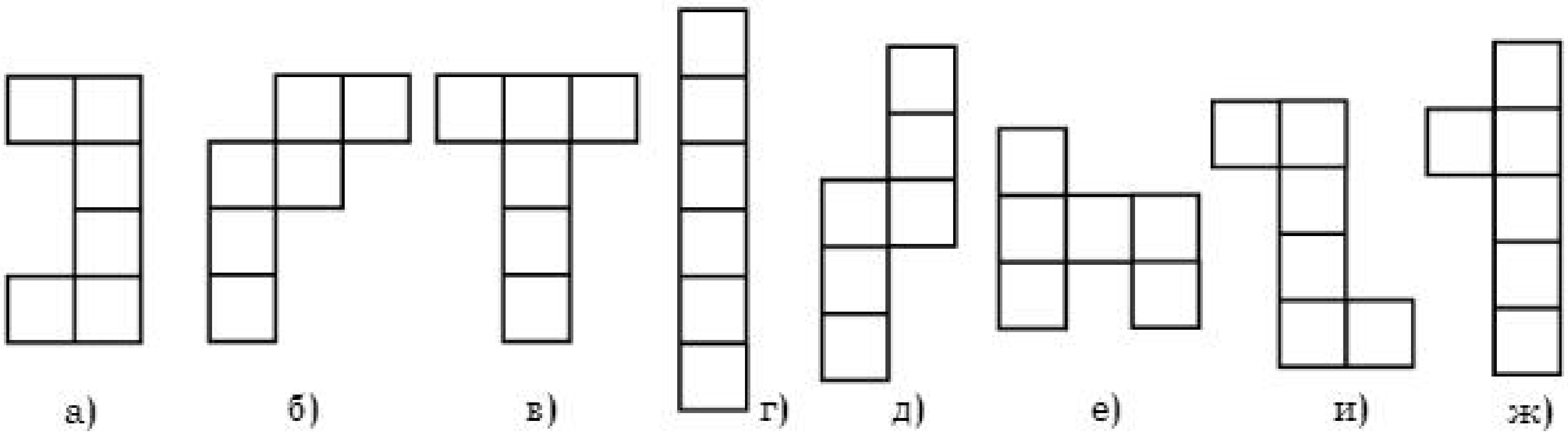
3.7. Катак қоғозда кубнинг уч қирраси тасвирланган (3.9-расм). Кубнинг тўлиқ расмини чизинг.



а) 3.9-расм б)

3.8. Қуйидаги: а) тетраэдрнинг; б) кубнинг; в) параллелепипеднинг диагоналлар сони нечта бўлади?

3.9. 3.10-расмда тасвирланган фигураларнинг қайси бири кубнинг ёйилмаси бўлади?



а) б) в) г) д) е) и) ж)

3.10-расм

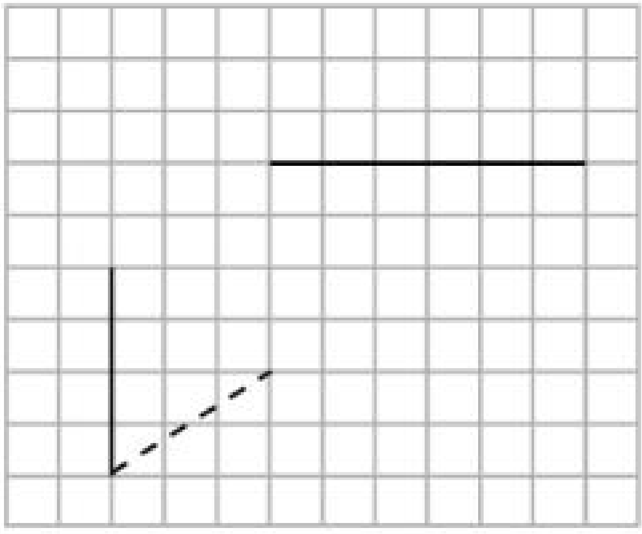
3.10. Тетраэдрнинг ва тўғри бурчакли параллелепипеднинг ёйилмаларини чизинг.

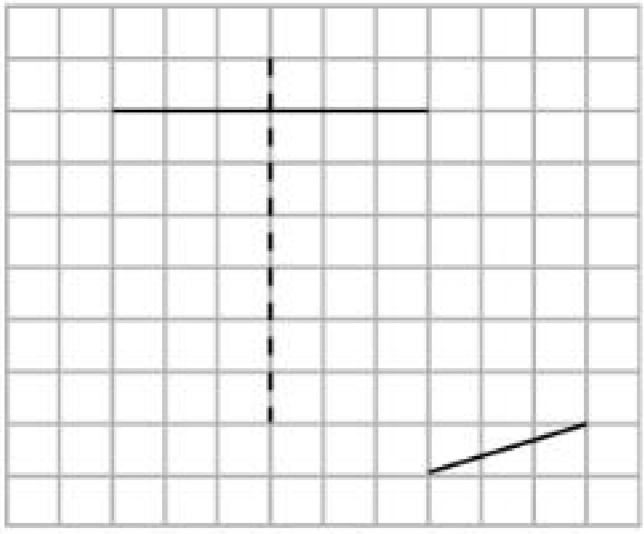
3.11. Тетраэдрнинг, кубнинг ва параллелепипеднинг ёйилмаларини тайёрлаб, уларнинг моделини ясанг.

C

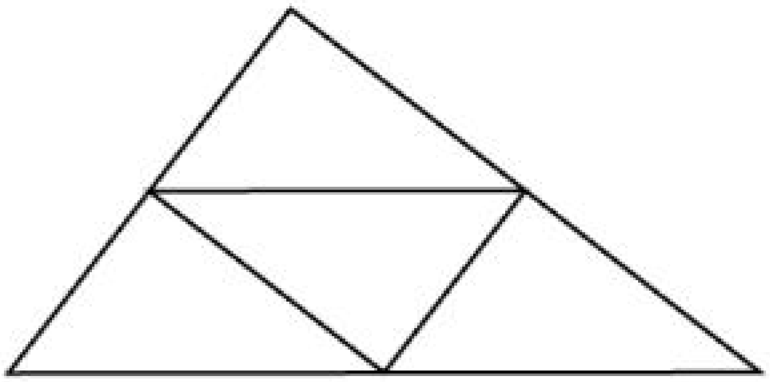
3.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдан унинг қирраси ётадиган BCC_1 текисликни кесиб ўтадиган текисликни кўрсатинг.

3.13. Катак қоғазда тўғри бурчакли параллелепипеднинг учта қирраси тасвирланган (3.11-расм). Параллелепипедни тўлиқ тасвирланг.


а)


б)

3.11-расм



3.12-расм

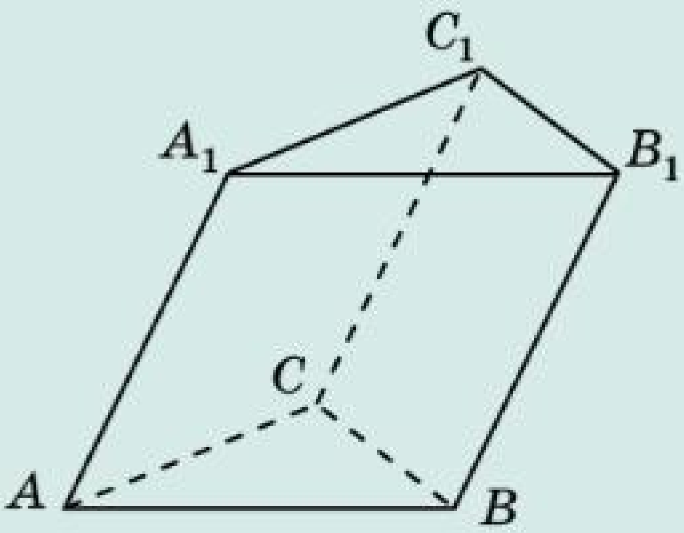
3.14. Тўртта тенг тўғрибурчакли учбурчакдан иборат фигура (3.12-расм) тетраэдрнинг ёйилмаси бўла оладими?

3.15. Ёқлари ромбдан иборат бўлган оғма параллелепипеднинг ёйилмасини ясанг.

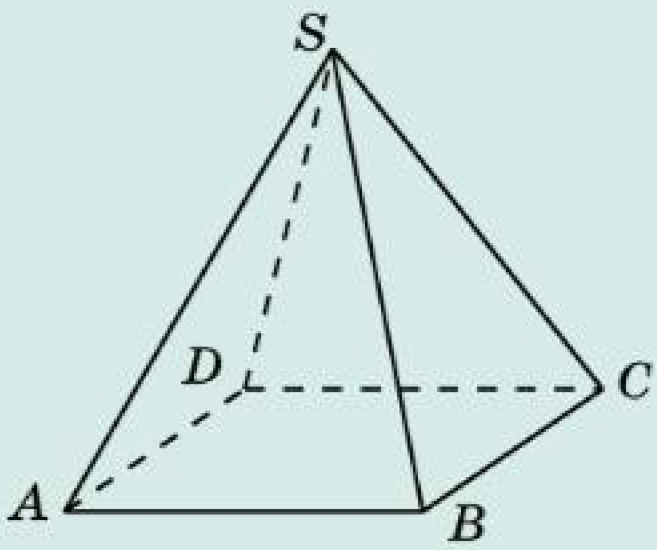
3.16. Оғма параллелепипеднинг ёйилмасини тайёрлаб, унинг моделини ясанг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

3.17. 3.13-расмда учбурчакли призма тасвирланган. Шу кўпёққа таъриф беринг.



3.13-расм



3.14-расм

3.18. 3.14-расмда тўртбурчакли пирамида тасвирланган. Шу кўпёққа таъриф беринг.

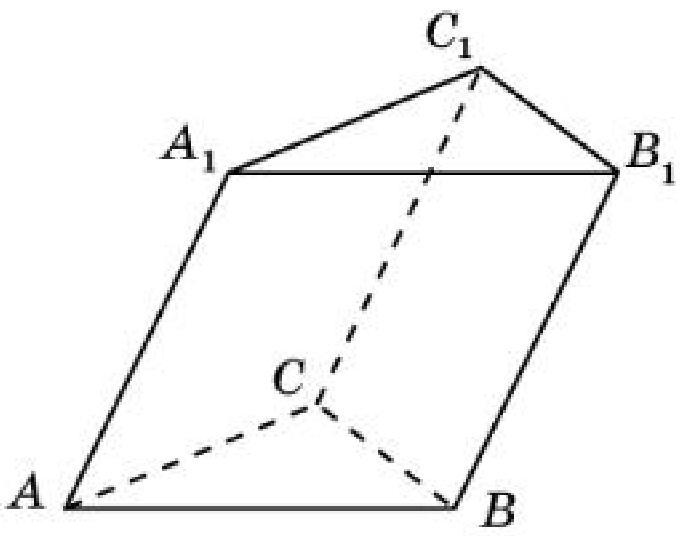
4-§. Фазода фигуралар. Призма. Пирамида

Призма деб, параллел кўчириш билан устма-уст тушувчи иккита ясси кўпбурчакдан ва бу кўпбурчакларнинг мос нуқталарини туташтирувчи ҳамма кесмалардан иборат кўпёққа айтилади. Кўпбурчаклар призманинг асослари, параллелограммлар призманинг *ён ёқлари* деб аталади. Призманинг асосларида ётмайдиган қирралари унинг *ён қирралари* деб аталади.

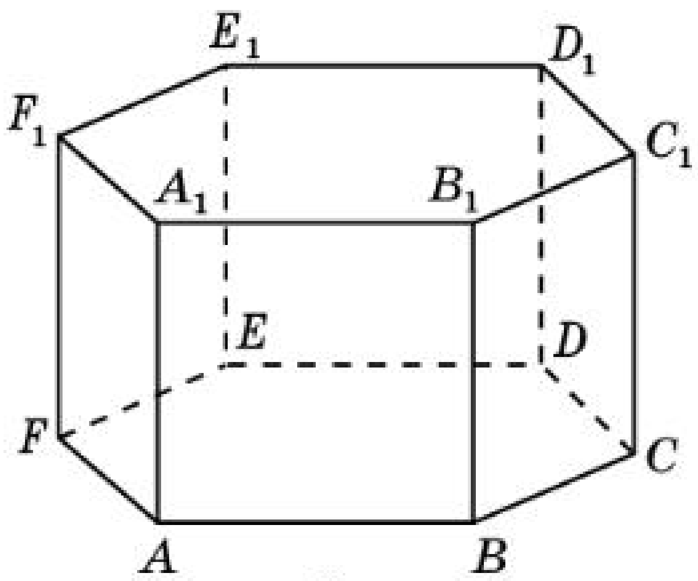
Призмалар асосларида ётган кўпбурчакларга (учбурчаклар, тўртбурчаклар, бешбурчаклар ва ҳоказо) боғлиқ мос равишда учбурчакли, тўртбурчакли, бешбурчакли ва ҳоказо бўлиб бўлинади.

Агар призманинг асослари n бурчаклардан иборат бўлса, у ҳолда n *бурчакли призма* деб айтилади.

Призма унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади, масалан: $ABCA_1B_1C_1$ — учбурчакли призма (4.1, а-расм), $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — олтибурчакли призма (4.1, б-расм).



а)



б)

4.1-расм

1-расмда учбурчакли ва олтибурчакли призмалар тасвирланган.

Ён ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат бўлган призма *тўғри призма* деб аталади. Бошқа ҳолатда у *оғма призма* деб аталади. 4.1, а-расмда учбурчакли *оғма призма* тасвирланган. 4.1, б-расмда тўғри олтибурчакли призма тасвирланган.

Асослари мунтазам кўпбурчаклардан иборат бўлган тўғри призма *мунтазам призма* деб аталади. 4.1, б-расмда мунтазам олтибурчакли призма тасвирланган.

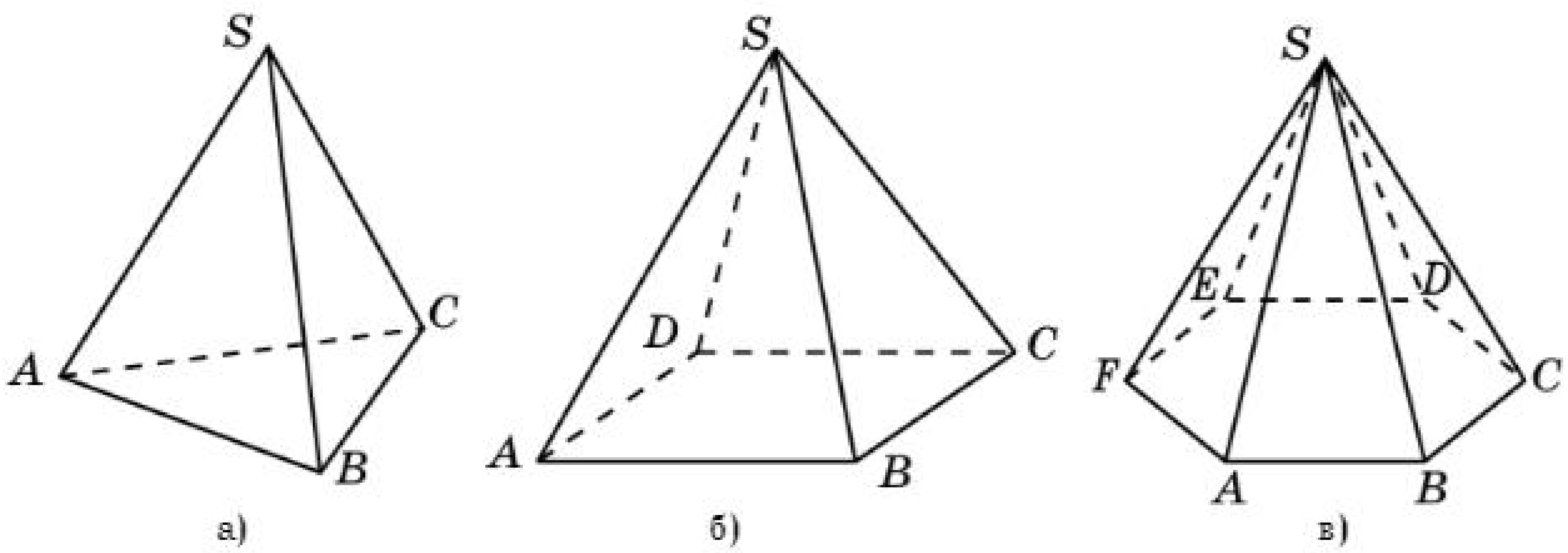
Қандай ўйлайсиз, параллелепипед тўртбурчакли призма бўла оладими?

Пирамида деб, ясси кўпбурчак ва унда ётмаган бир нуқтани шу кўпбурчак учлари билан туташтирувчи кесмалардан ташкил топган кўпёққа айтилади. Кўпбурчак *пирамиданинг асоси*, учбурчаклар эса *пирамиданинг ён ёқлари* деб аталади. Ён ёқларининг умумий нуқтаси *пирамиданинг учи* дейилади.

Пирамиданинг учини асосининг учлари билан туташтирувчи кесмалар *пирамиданинг ён қирралари* дейилади.

Агар пирамиданинг асоси n бурчакдан иборат бўлса, у ҳолда *n бурчакли пирамида* деб аталади.

4.2-расмда учбурчакли, тўртбурчакли, олтибурчакли пирамидалар тасвирланган.



4.2-расм

Пирамида унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади, маслан: $SABC$ учбурчакли пирамида (4.2, а-расм), $SABCD$ тўртбурчакли пирамида (4.2, б-расм), $SABCDEF$ олтибурчакли пирамида (4.2, в-расм).

Асосида мунтазам кўпбурчак ва барча ён қирралари ўзаро тенг бўлган пирамида — *мунтазам пирамида* деб аталади.

Қандай ўйлайсиз, тетраэдр учбурчакли пирамида бўла оладими?

Саволлар

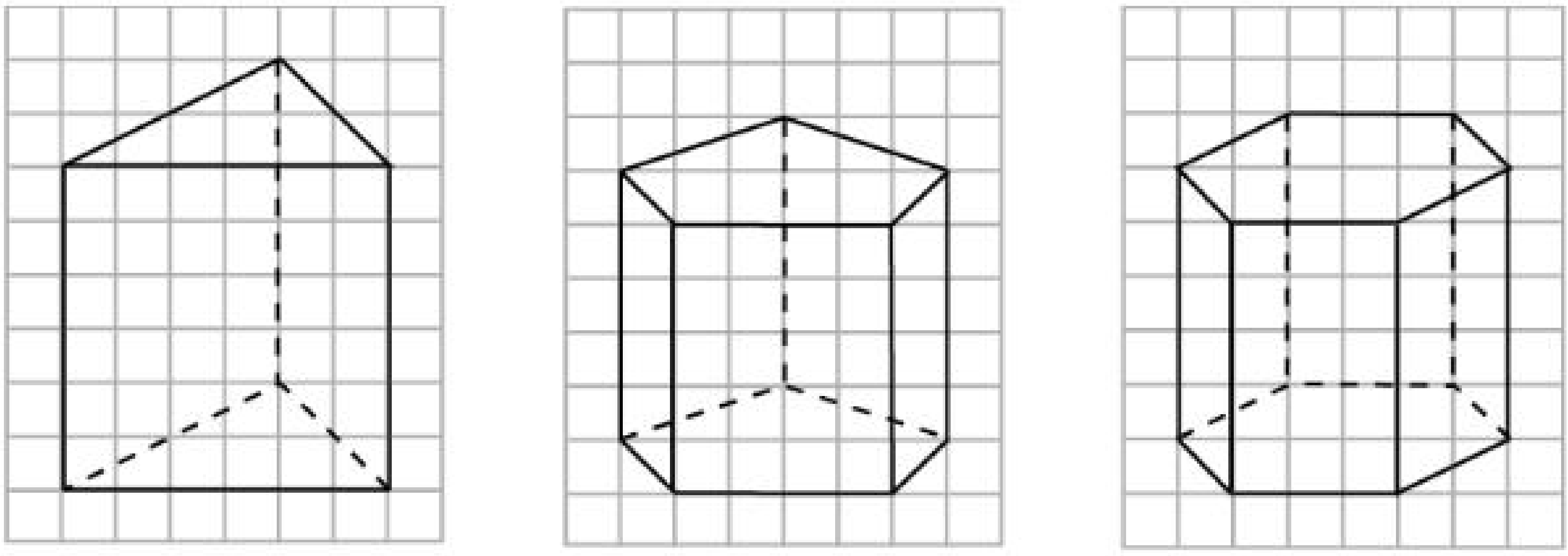
1. Қандай кўпёқ призма деб аталади?
2. Қандай призма тўғри призма деб аталади?
3. Қандай призма мунтазам призма деб аталади?
4. Призма қандай белгиланади?
5. Қандай кўпёқ пирамида деб аталади?
6. Қандай пирамида мунтазам пирамида деб аталади?
7. Пирамида қандай белгиланади?

Масалалар

А

4.1. а) n бурчакли призманинг; б) n бурчакли пирамиданинг нечта учи (У), қирраси (Қ) ёғи (Ё) бўлади?

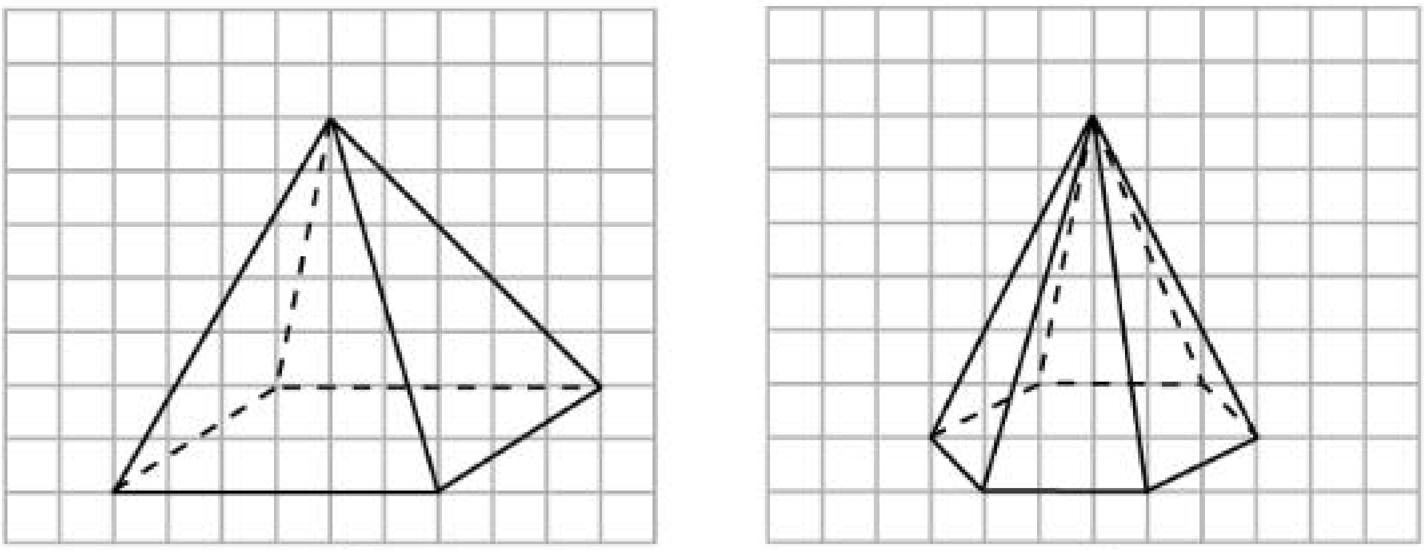
4.2. Катак қоғозда 4.3-расмдагига ўхшаш призмаларни чизинг.



а) б) в)

4.3-расм

4.3. Катак қоғозда 4.4-расмдагига ўхшаш пирамидаларни чизинг.



а) б)

4.4-расм

B

4.4. Призманинг: а) 9 та учи; б) 16 та учи бўлиши мумкинми?

4.5. а) 20 та учи; б) 10 та учи мавжуд бўлган призманинг асосида қандай кўпбурчак бўлади?

4.6. а) 10 та учи; б) 18 та қирраси; б) 8 та ёғи мавжуд призманинг турини аниқланг.

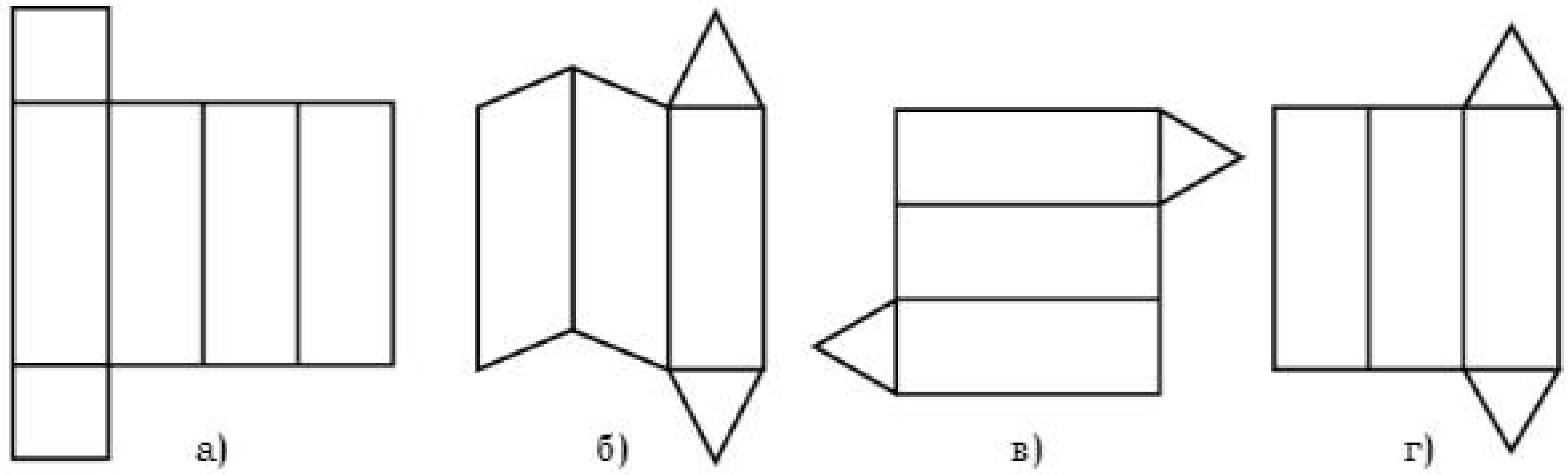
4.7. Пирамиданинг: а) 9 та қирраси; б) 16 та қирраси бўлиши мумкинми?

4.8. а) 32 та қирраси; б) 15 та ёғи мавжуд пирамиданинг асосида қандай кўпбурчак ётади?

4.9. а) 10 та учи; б) 18 та қирраси; б) 8 та ёғи мавжуд пирамиданинг турини аниқланг.

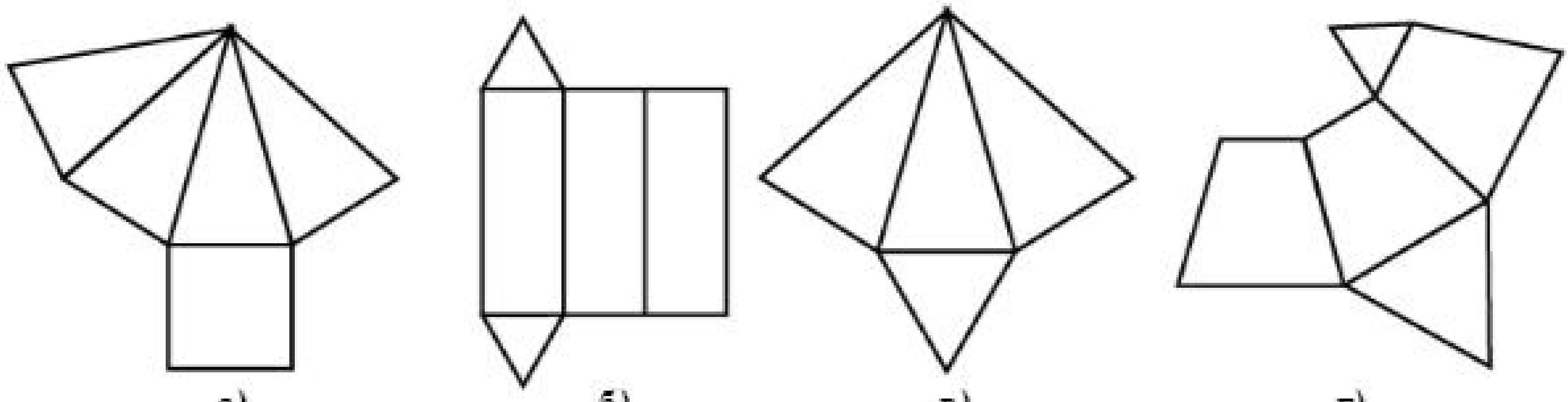
4.10. *SABCD* тўртбурчакли пирамиданинг ёқлари ётган текисликларнинг кесишган жуфтларини кўрсатинг (4.2, б-расм).

4.11. 4.5-расмдан призманинг ёйилмаси бўладиган фигураларни топинг. Шу призманинг турини аниқланг.

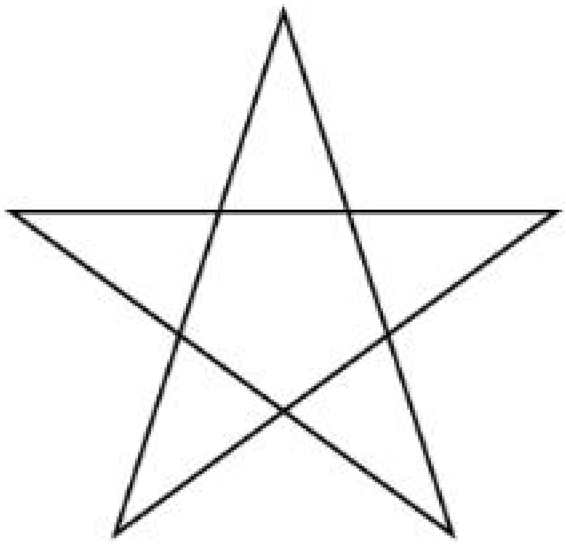


4.5-расм

4.12. 4.6-расмдаги ёйилмалардан пирамиданинг ёйилмаларини топинг. Уларнинг турини аниқланг.



4.6-расм



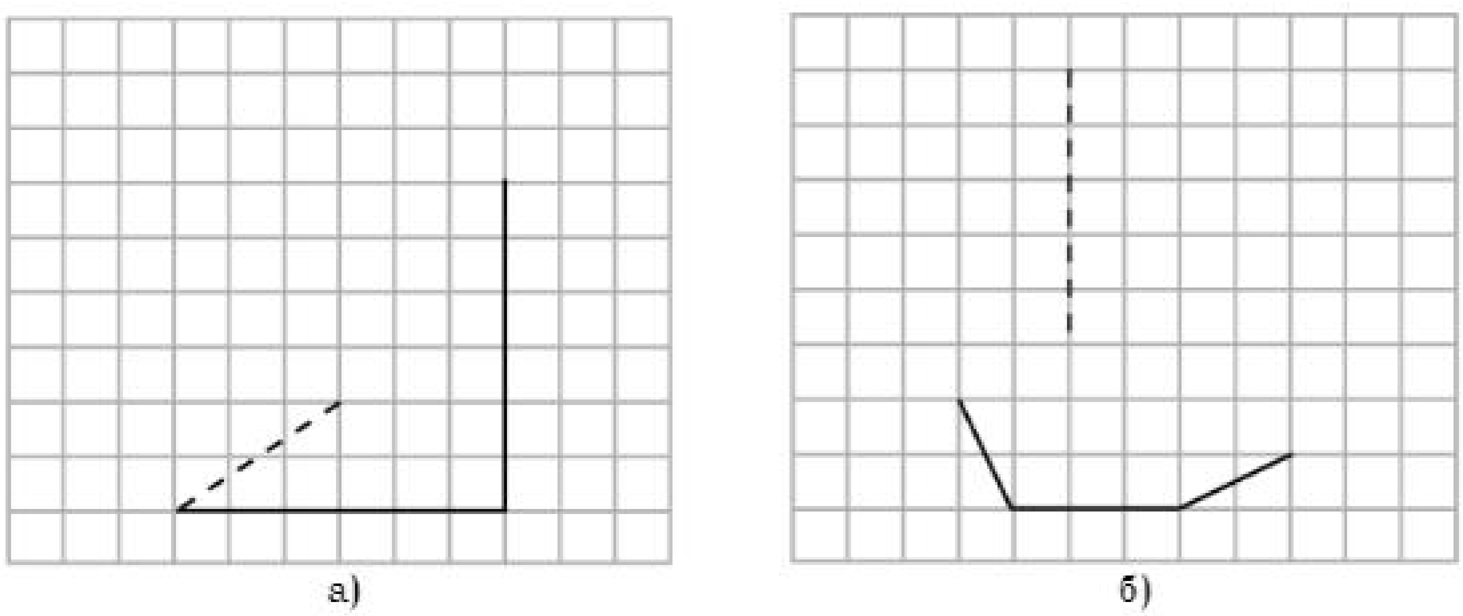
4.7-расм

4.13. 4.7-расмда тасвирланган фигура қандай кўпёқнинг ёйилмаси бўлади?

4.14. Мунтазам олтибурчакли: а) призманинг; б) пирамиданинг ёйилмасини тайёрланг ва уларнинг моделини ясанг.

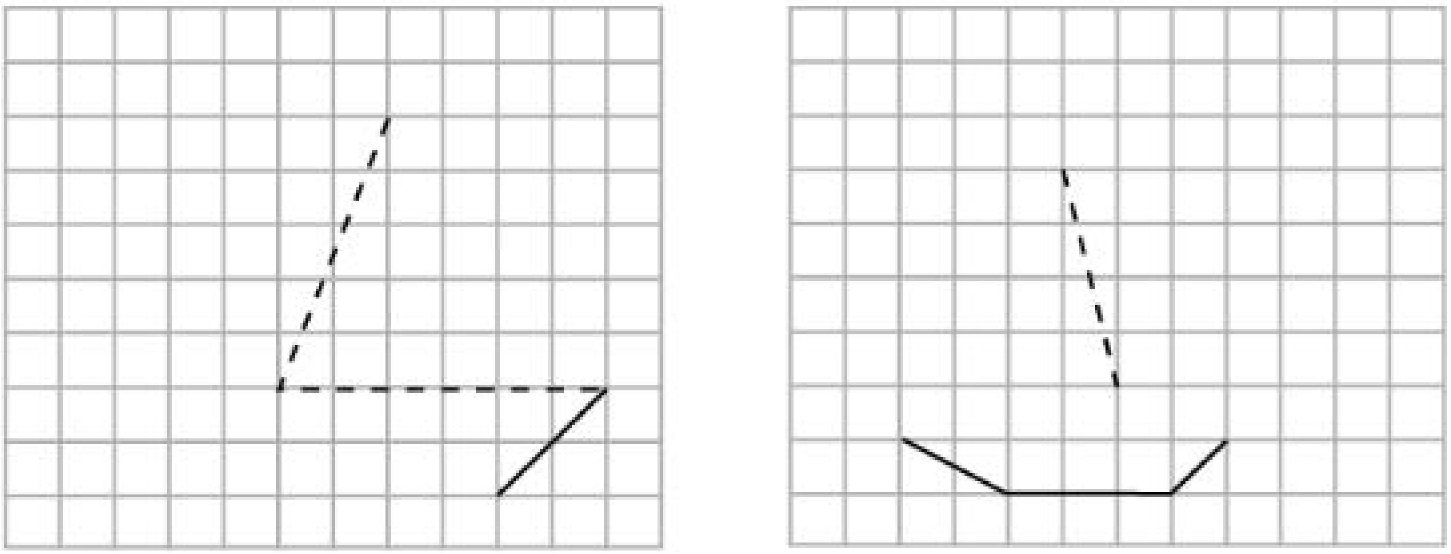
C

4.15. Катак қоғозда: а) учбурчакли; б) олтибурчакли призманинг қирралари тасвирланган (4.8-расм). Призмани чизинг.



4.8-расм

4.16. Катак қоғозда: а) тўртбурчакли; б) олтибурчакли пирамиданинг қирралари тасвирланган (4.9-расм). Пирамидани чизинг.

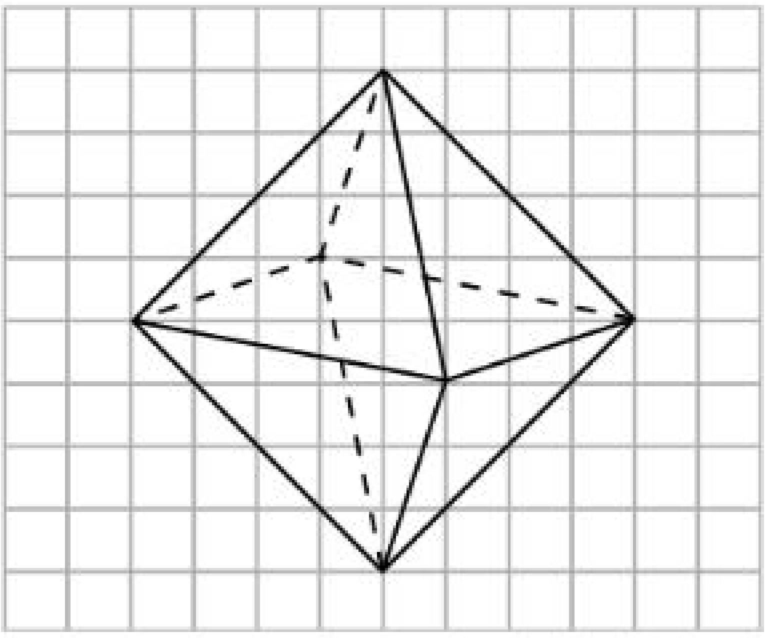


а) б)

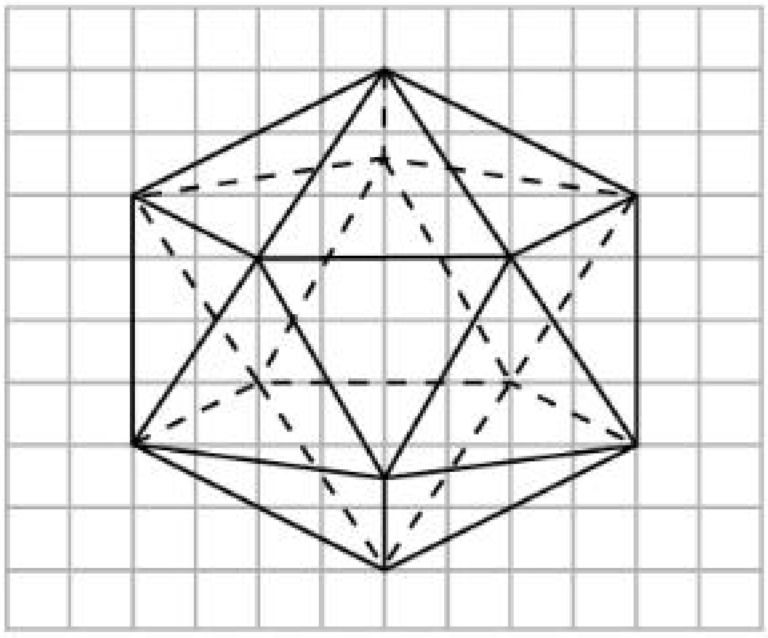
4.9-расм

4.17. а) n бурчакли пирамиданинг; б) n бурчакли призманинг диагоналлар сони нечта бўлади?

4.18. Катак қоғозда 4.10-расмга ўхшаш октаэдр ясанг. Унинг нечта учи (У), қирраси (Қ) ва нечта ёқи (Ё) мавжуд?



4.10-расм

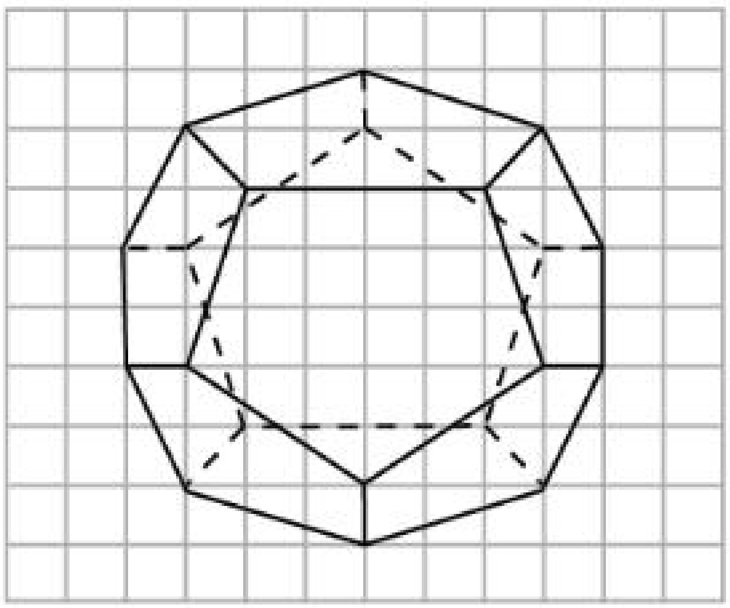


4.11-расм

4.19. Катак қоғозда 4.11-расмга ўхшаш икосаэдр ясанг. Унинг нечта учи (У), қирраси (Қ) ва нечта ёқи (Ё) мавжуд?

4.20. Катак қоғозда 4.12-расмга ўхшаш додекаэдр ясанг. Унинг нечта учи (У), қирраси (Қ) ва нечта ёқи (Ё) мавжуд?

4.21. Атроф оламдан: а) призма; б) пирамидага шаклдош жисмларга мисоллар келтиринг.



4.12-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

4.22. Текисликдаги икки тўғри чизиқ параллелигининг таърифини такрорланг.

4.23. Фазодаги тўғри чизиқларнинг параллеллиги тушунчасини таърифланг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Фазодаги бир нуқта орқали нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

A. Ўтказишга бўлмайди. B. Битта.
C. Иккита. D. Чексиз кўп.

2. Фазодаги бир нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Ўтказишга бўлмайди. B. Битта.
C. Иккита. D. Чексиз кўп.

3. Фазодаги иккита нуқта орқали нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

A. Ўтказишга бўлмайди. B. Битта.
C. Иккита. D. Чексиз кўп.

4. Фазода бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтанинг ҳар хил жуфтлари орқали нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

A. Ўтказишга бўлмайди. B. Учта.
C. Олтита. D. Чексиз кўп.

5. Фазодаги тўртта нуқтанинг ҳар хил жуфтлари орқали энг кўпи билан нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

A. Тўртта. B. Бешта. C. Олтита. D. Саккиз.

6. Фазодаги бешта нуқтанинг ҳар хил жуфтлари орқали энг кўпи билан нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

A. 5. B. 10. C. 15. D. 25.

7. Кесишувчи иккита текисликнинг нечта умумий нуқтаси бўлади?

A. Битта. B. Иккита.
C. Учта. D. Чексиз кўп.

8. Фазодаги икки нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Ўтказишга бўлмайди. B. Битта.
C. Иккита. D. Чексиз кўп.

9. Фазодаги бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Ўтказишга бўлмайди. B. Битта.
C. Иккита. D. Чексиз кўп.

10. Фазодаги бир тўғри чизиқда ётувчи учта нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Ўтказишга бўлмайди. B. Битта.
C. Учта. D. Чексиз кўп.

11. Фазодаги бир текисликда ётмайдиган тўртта нуқтанинг ихтиёрий учтаси орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Учта. B. Тўртта.
C. Олтита. D. Чексиз кўп.

12. Кубнинг учта учи орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Битта. B. Учта.
C. Олтита. D. Чексиз кўп.

13. Тўғрибурчакли параллелепипед диагоналларининг сонини топинг.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

14. Олтибурчакли призма диагоналларининг сонини топинг.

A. 6. B. 12. C. 9. D. 18.

15. 12 та қиррали пирамиданинг асоси қандай фигура?

A. Учбурчак. B. Тўртбурчак.
C. Олтибурчак. D. 12 бурчак.

16. 36 та қиррали призманинг асоси қандай фигура?

A. Олтибурчак. B. Тўққизбурчак.
C. 12 бурчак. D. 36 бурчак.

17. 18 та учи мавжуд бўлган призманинг асоси қандай фигура?

A. Учбурчак. B. Олтибурчак.
C. Тўққизбурчак. D. 18 бурчак.

18. 10 та учи мавжуд бўлган пирамиданинг асоси қандай фигура?

A. Бешбурчак. B. Олтибурчак.
C. Саккизбурчак. D. Тўққизбурчак.

19. Призманинг 18 та диагонали мавжуд бўлса, унинг асоси қандай фигура?

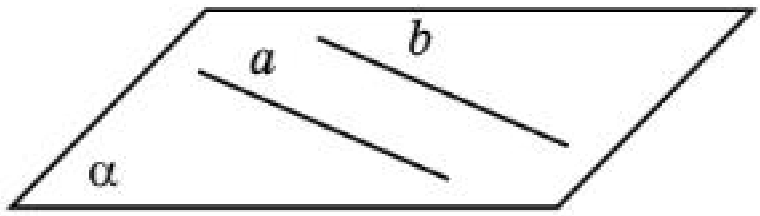
A. Учбурчак. B. Олтибурчак.
C. Тўққизбурчак. D. 18 бурчак.

20. Етти бурчакли пирамиданинг диагоналлари сони қанча.

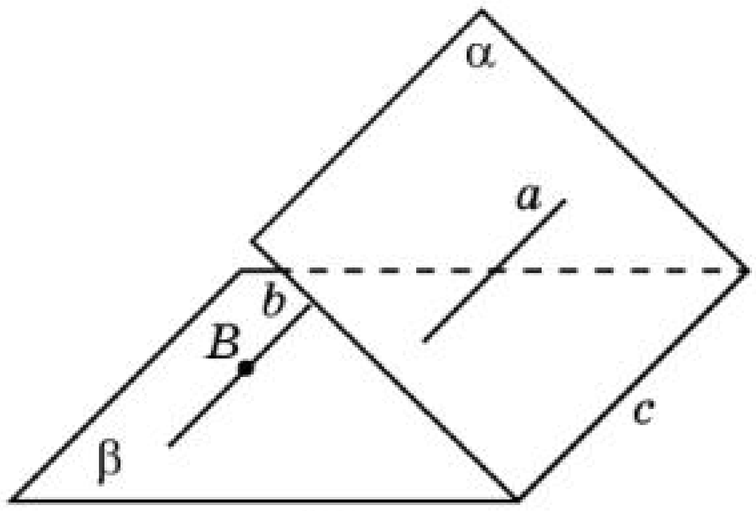
A. Хеч бири эмас. B. 6.
C. 7. D. 14.

5-§. Фазодаги тўғри чизиқларнинг параллелиги

Текисликда кесишмайдиган, яъни умумий нуқтаси бўлмаган икки тўғри чизиқ параллел тўғри чизиқ бўлишини эслатиб ўтайлик. Шунга ўхшаш фазодаги бир текисликда ётувчи ва ўзаро кесишмайдиган икки *тўғри чизиқ параллел тўғри* чизиқлар дейилади (5.1-расм).



5.1-расм



5.2-расм

a ва b тўғри чизиқларнинг параллеллиги $a \parallel b$ каби белгиланади. Фазодаги икки тўғри чизиқ параллел бўлиши учун улар кесишмаслиги керак деган талабдан бошқа уларнинг бир текисликда ётиши кераклигини ҳам айтиб ўтиш керак.

Параллел тўғри чизиқларда ётувчи икки кесмани, параллел кесмалар деб атаймиз.

Теорема (икки тўғри чизиқларнинг параллеллик аломати). ***Учинчи тўғри чизиққа параллел бўладиган икки тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлади.***

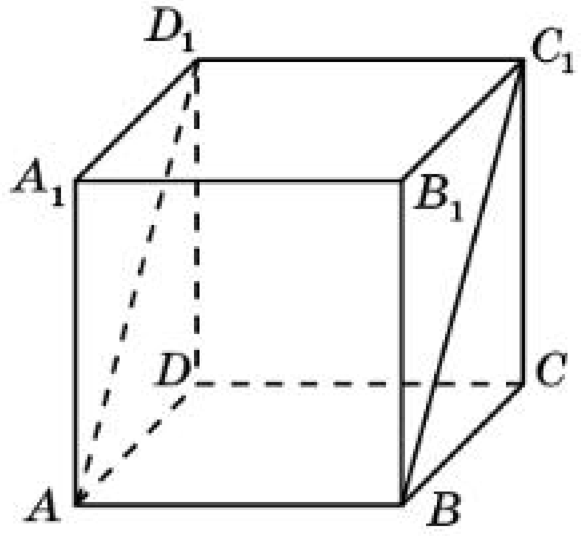
Исботи*. a ва b тўғри чизиқлар c тўғри чизиғига параллел бўлсин (5.2-расм).

a, b, c тўғри чизиқларнинг бир текисликда ётган ҳолати планиметрия бўлимида ўргатилган. Энди шу тўғри чизиқлар бир текисликда ётмайдиган ҳолатини кўрайлик.

a ва b тўғри чизиқларни параллел эканлигини исботлайлик. Бунинг учун a ва b тўғри чизиқлар бир текисликда ётишини ва кесишмаслигини исботлашимиз зарур. a ва c тўғри чизиқлар орқали α текислигини ўтказамиз. b ва c тўғри чизиқлар орқали β текислигини ўтказамиз. a ва b тўғри чизиғида ётган ихтиёрий бир B нуқта орқали γ текислигини ўтказамиз. γ текислиги β текислигини қандайда бир b' тўғри чизиғи бўйлаб кесиб ўтади. Бу тўғри чизиқ α текислиги билан кесишмайди, чунки уларнинг кесишиш нуқтаси a ва c тўғри чизиқларда ётиши керак.

Бундан, a ва c тўғри чизиқларнинг умумий нуқтаси мавжуд эди,бу шу тўғри чизиқларнинг параллеллигининг шартига зид. b' тўғри чизиғи α текислиги билан кесишмаганликдан, у c тўғри чизиғини ҳам кесиб ўтмайди. Демак, b' ва c тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлади. β текислигидаги B нуқта орқали c тўғри чизиғига параллел биттагина тўғри чизиқ ўтадиганлигидан, b' ва b тўғри чизиқлар устма-уст тушади. b тўғри чизиғи α текислиги билан кесишмаслигидан, a тўғри чизиғи билан ҳам кесишмайди. Шунинг билан, a ва b тўғри чизиқлар бир текисликда ётади ва кесишмайди, ўзаро параллел бўлади.

Масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB ва C_1D_1 тўғри чизиқлар A_1B_1 тўғри чизиғига параллел бўлади. Демак, AB ва C_1D_1 ўзаро параллел (5.3-расм).



5.3-расм

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD_1 ва BC_1 тўғри чизиқлар параллел эканлигини исботлайлик. Ҳақиқатан, юқорида кўрсатилгандай AB ва C_1D_1 тўғри чизиқлар параллел ва тенг бўлади. Демак, ABC_1D_1 тўртбурчак — параллелограмм . Бундан AD_1 ва BC_1 тўғри чизиқлар параллел бўлади.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг учлари орқали ўтадиган AA_1 ва BC тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўладими?

Тарихий маълумотлар

Берилган нуқта орқали ўтувчи ва берилган тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқларнинг сони тўғрисидаги масалани қадимдан келаётган тарихи мавжуд. Евклиднинг "Асослар" китобидаги бешинчи постулат ўзининг мазмуни бўйича 7-синфда ўтилган параллеллик аксиомаси билан мос келади, яъни "Берилган тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқтадан шу тўғри чизиққа битта параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин".

Евклиддан кейин икки минг йил давомида математиклар шу постулатни исботлашга ҳаракат қилди, бироқ уларнинг барча уринишлари зое кетди. Эртами, кечми уларнинг мулоҳазаларида хатоликлар аниқланди. Фақат 1926 йили Қозон университетининг профессори буюк математик Н.И. Лобачевский (1792—1856) шу постулатни Евклиднинг бошқа постулатларидан(аксиомаларидан) мантиқий йўл билан чиқариб олишга, яъни исботлашга бўлмаслигини тушунди. Шунинг учун уни аксиома сифатида қабул қилиш керак, ёки бўлмаса аксиома сифатида берилган нуқта орқали шу тўғри чизиққа параллел бир неча тўғри чизиқ мавжуд бўлиши тушунчасини қабул қилиш кераклигини айтган. Геометриянинг асоси сифатида шу паралеллик аксиомани олиб Лобачевский янги Евклид эмас геометрияни тузди ва у Лобачевский геометрияси деб аталди.

Лобачевскийнинг ғоялари шу давр етук математикларининг ҳам тушунишига анча қийинлик туғдирди. Шунга қарамасдан Лобачевский ўз ғояларидан бош тортмади. У янги геометриянинг мантиқий қарама-қаршиликларига ишонибгина қолмай, бу геометрияни ҳақиқий физикавий фазода таҳлил қилишга ишонч билдирди. Шу мақсадда Лобачевский мураккаб астрономик текширув ва ўлчов ишларини ўтказди, ўлчов асбобларининг етарли бўлмаганлиги сабабли унинг ихтиросини тўғрилигини исботлашга имконият бермади.

Лобачевский геометриясининг тўғрилигини тан олиш, у дунёдан ўтгандан кейин юзага чиқди. Лобачевскийнинг меҳнатлари кўплаган тилларга таржима қилиниб, бутун олам математиклари билан ўрганиб чиқилди. Ҳозирги вақтда Лобачевский геометрияси замонавий математиканинг ажралмас бўлаги ва одамзот билимининг кўплаган соҳаларида қўлланилиб, атроф оламни чуқуррок билишга имконият яратиб келмоқда.

Саволлар

1. Фазодаги қандай икки тўғри чизиқ параллел деб аталади?
2. Фазодаги қандай икки кесма параллел деб аталади?
3. Фазодаги параллел тўғри чизиқларнинг хоссаларини айтинг.

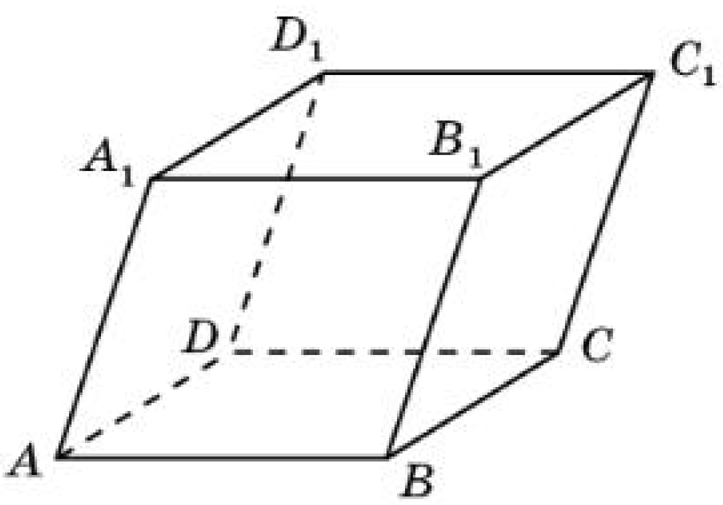
Масалалар

A

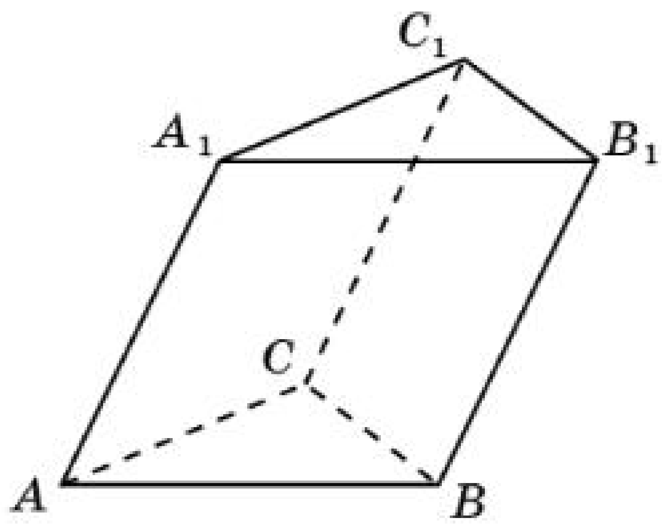
5.1. Текисликда параллел тўғри чизиқларнинг бирини кесиб ўтувчи тўғри чизиқ иккинчисини хам кесиб ўтиши маълум. Шу мулоҳаза фазо учун хам тўғрими?

5.2. Текисликда берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқта орқали шу тўғри чизиқни кесмайдиган фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Шу мулоҳаза фазо учун хам тўғрими?

5.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг: а) AB; б) AA_1 қирраларига параллел бўлган қирраларини ёзинг (5.4-расм).



5.4-расм



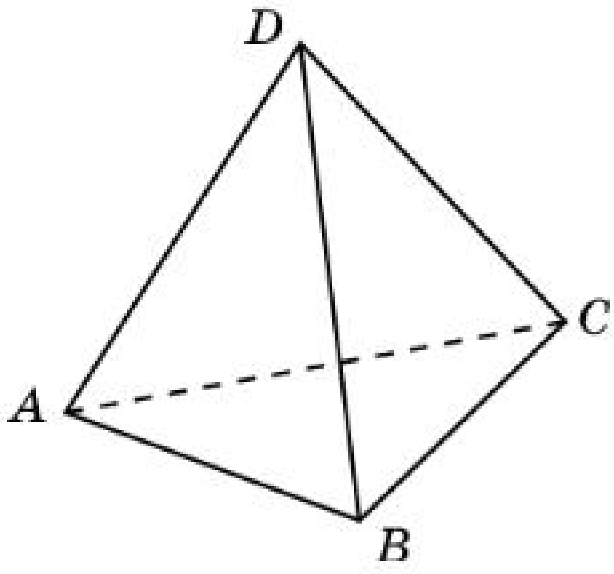
5.5-расм

5.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг AB ва B_1C_1 қирралари параллел бўладими (5.4-расм)?

5.5. $ABCA_1B_1C_1$ призманинг параллел қирралари жуфтини ёзинг (5.5-расм).

5.6. $ABCA_1B_1C_1$ призманинг AB ва CC_1 қирралари параллел бўладими (5.5-расм)?

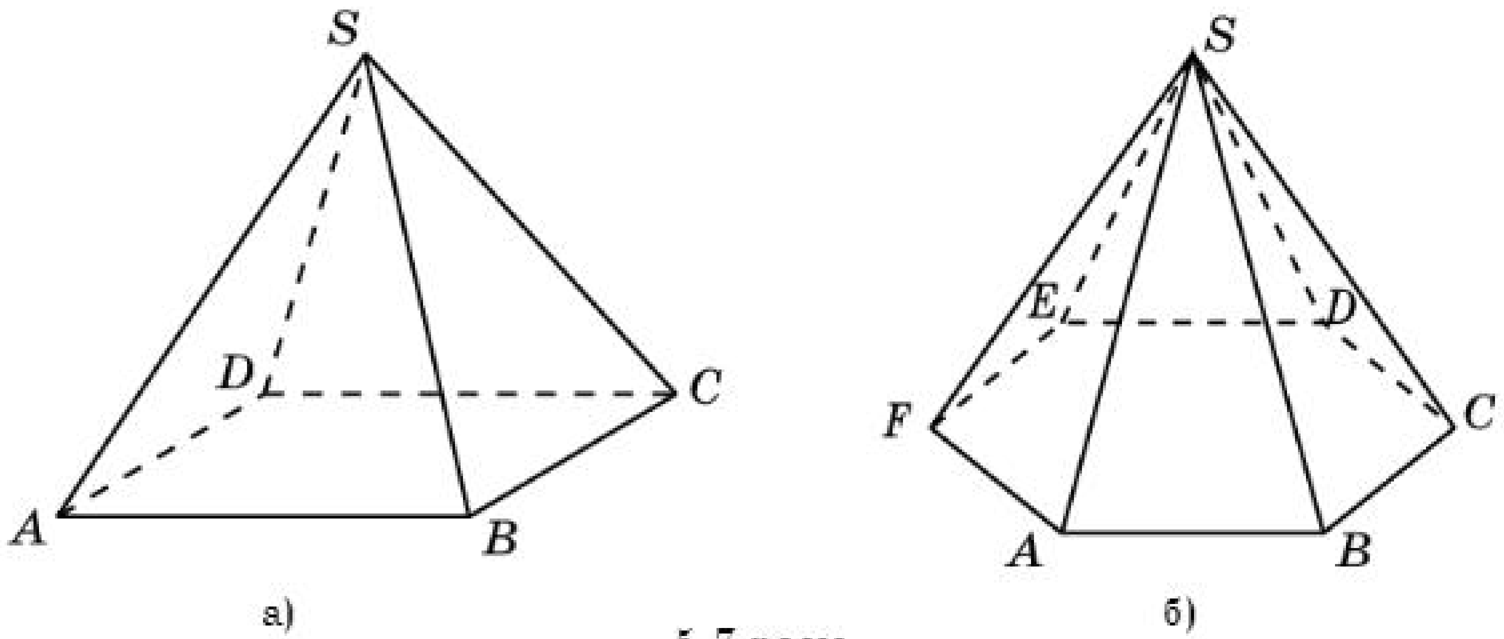
5.7. $ABCD$ тетраэдрнинг қарама-қарши ётган AB ва CD қирралари параллел бўладими (5.6-расм)?



5.6-расм

В

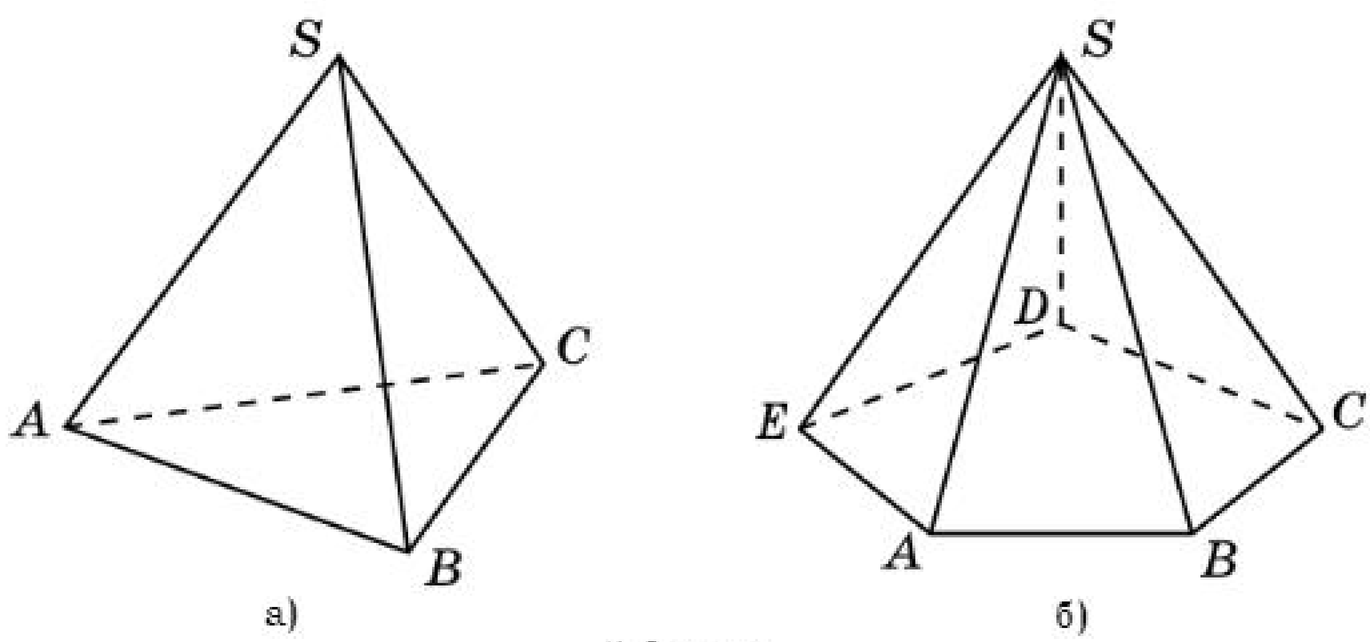
5.8. а) $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг (5.7, а-расм); б) $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг (5.7, б-расм) параллел қирраларининг жуфтини ёзинг.



5.7-расм

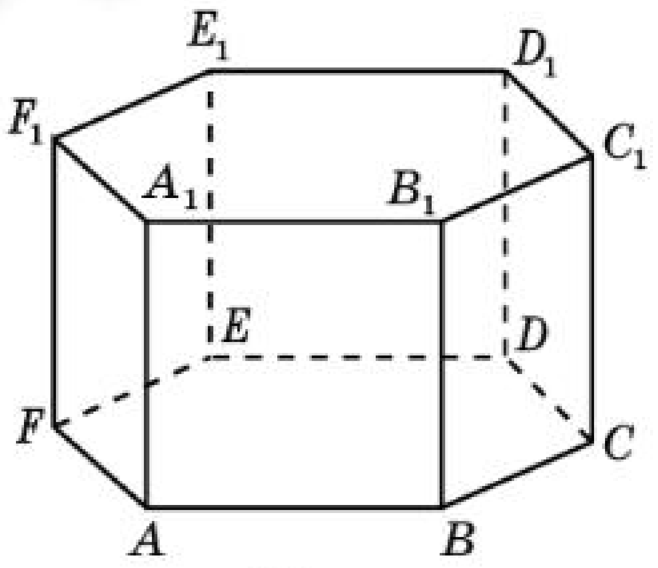
5.9. Қуйидаги: а) $SABCD$ пирамиданинг (5.7, а-расм); б) $SABCDEF$ пирамиданинг (5.7, б-расм) AB ва SC қирралари параллел бўладими?

5.10. а) Мунтазам учбурчакли пирамиданинг (5.8, а-расм) мунтазам бешбурчакли пирамиданинг (5.8, б-расм) параллел қирралари мавжудми?



5.8-расм

5.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ олтибурчакли призма учун қуйидаги тўғри чизиқлар параллел эканлигини исботланг: а) AA_1 ва CC_1; б) AA_1 ва DD_1 (5.9-расм).



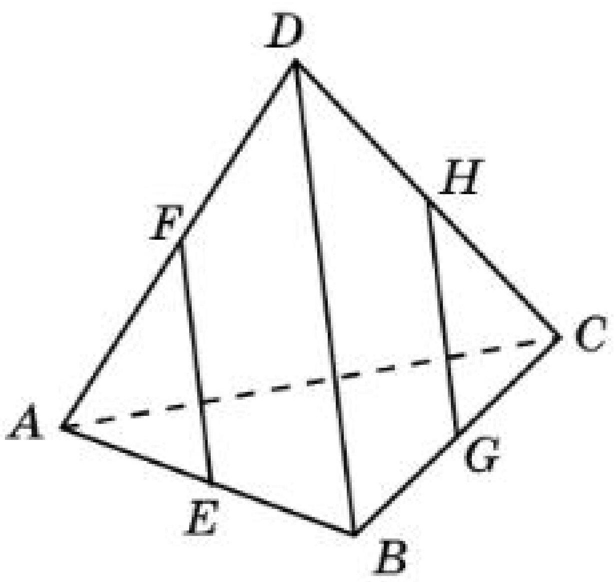
5.9-расм

5.12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг қуйидаги қирраларига параллел қирраларини ёзинг: а) AA_1; б) AB (5.9-расм).

5.13. Кубнинг нечта параллел қирраларининг жуфти мавжуд?

5.14. Мунтазам олтибурчакли призманинг нечта параллел қирраларининг жуфти мавжуд?

С



5.10-расм

5.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеддан қуйидаги тўғри чизиқларнинг параллел эканлигини исботланг (5.4-расм): а) AC ва A_1C_1; б) AB_1 ва DC_1.

5.16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмадан қуйидаги тўғри чизиқларнинг параллел эканлигини исботланг: а) AD ва A_1D_1; б) AB_1 ва ED_1.

5.17. $ABCD$ тетраэдрда E, F, G, H нуқталари мос равишда AB, AD, BC, CD қирраларининг ўрталари (5.10-расм). EF ва GH тўғри чизиқлари параллел эканини исботланг.

5.18. Фазода берилган тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқта орқали шу тўғри чизиққа параллел фақат биттагина тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

5.19. Атрофдан параллел тўғри чизиқларни кўрсатувчи буюмларга мисоллар келтиринг.

5.20. Фазода тўғри чизиқ ва шу тўғри чизиққа тегишли бўлмаган нуқта берилган. Шу нуқта орқали берилган тўғри чизиқни кесиб ўтмайдиган нечта тўғри чизиқ ўтади?

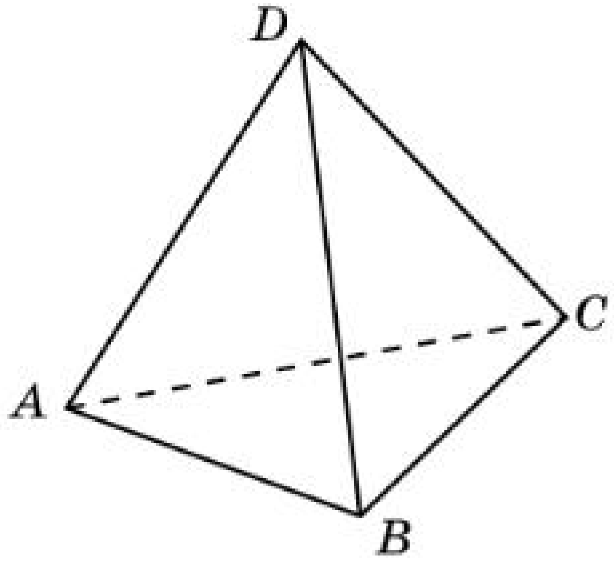
6-§. Фазодаги тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашуви

Фазода икки тўғри чизиқ кесишиши ёки параллел бўлишини биламиз. Текисликка қараганда фазода тўғри чизиқларнинг жойлашишининг яна бир тури мавжуд: улар кесишмайди ва бир бирига параллел эмас.

Фазода бир текисликда ётмайдиган ва кесишмайдиган икки тўғри чизиқлар *айқаш тўғри чизиқлар* дейилади.

Шунингдек икки кесма айқаш тўғри чизиқларда ётса, уларни *айқаш кесмалар* деб атайди.

Масалан, $ABCD$ тетраэдрда AB ва CD қирралари айқаш (6.1-расм).

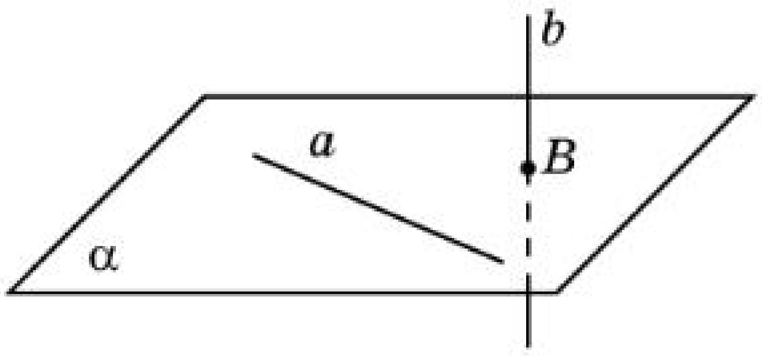


6.1-расм

Шуни ўзингиз исботлаб кўринг.

Теорема. (Айқаш тўғри чизиқларнинг аломати) ***Агар тўғри чизиқларнинг биттаси берилган текисликда ётса, иккинчиси эса шу текисликни биринчи тўғри чизиққа тегишли бўлмаган нуқтада кесиб ўтса, у ҳолда бу икки тўғри чизиқ айқаш бўлади.***

Исботи. a тўғри чизиғи α текислигида ётсин, b тўғри чизиқ α текислигини a тўғри чизиғига тегишли бўлмаган B нуқтада кесиб ўтсин (6.2-расм). Агар a ва b тўғри чизиқлар бир текисликда ётадиган бўлса, унда бу текисликда a тўғри чизиқ билан B нуқта ҳам ётган бўлар эди. Тўғри чизиқ ва шу тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқта орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкинлигидан бу текислик α текислиги бўлади. Бундай ҳолатда b тўғри чизиқ α текислигига тегишли бўлар эди. Бу эса масала шартига зид. Демак, a ва b тўғри чизиқлар бир текисликда ётмайди, яъни улар айқаш бўлади.

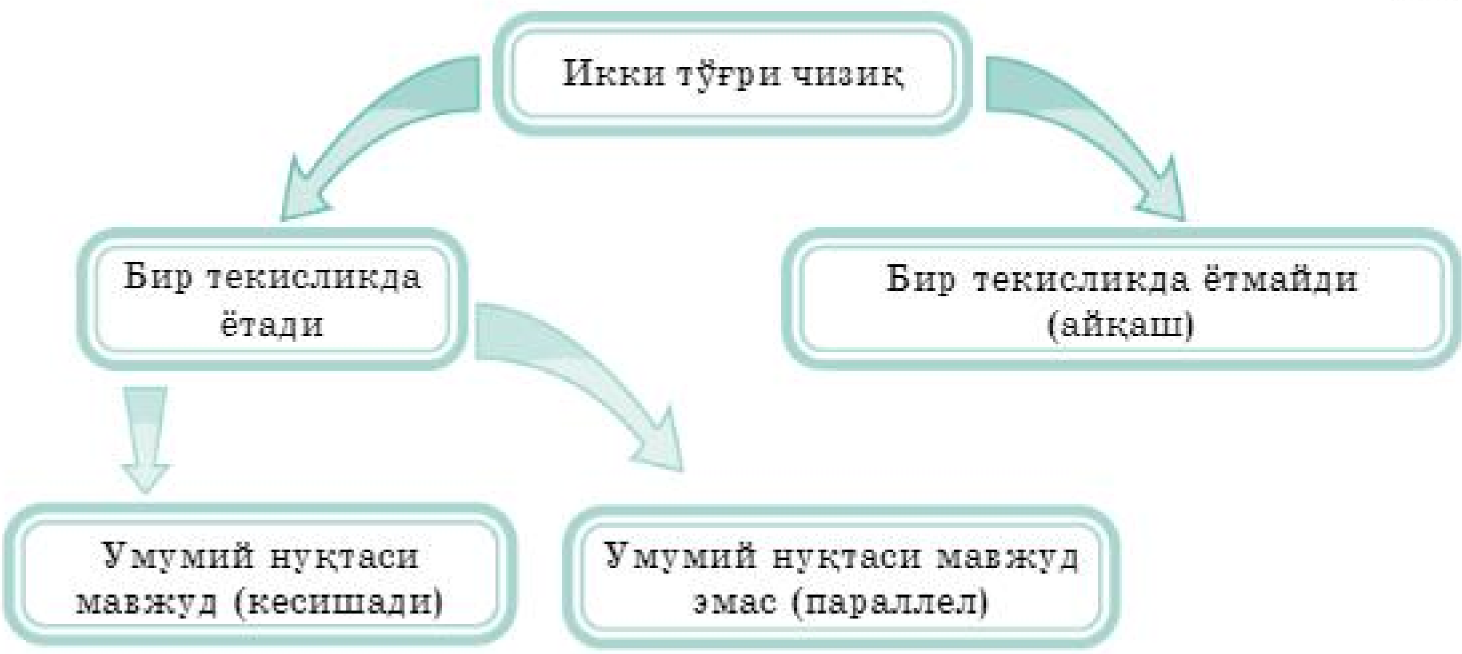


6.2-расм

Агар икки тўғри чизиқ орқали текислик ўтказиш мумкин бўлмаса, у ҳолда бу тўғри чизиқлар айқаш тўғри чизиқлар эканлигини исботланг.

Фазодаги икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашувининг турли ҳолатларини қуйидаги схема кўринишида кўрсатайлик.

6.1-*схема*



Учинчи тўғри чизиқ билан айқаш икки тўғри чизиқ айқаш бўлиши мумкинми? Мисол келтиринг.

Саволлар

1. Фазодаги қандай икки тўғри чизиқ айқаш тўғри чизиқ деб аталади?
2. Фазодаги қандай икки кесма айқаш кесма деб аталади?
3. Айқаш тўғри чизиқлар аломатини келтириб чиқаринг.

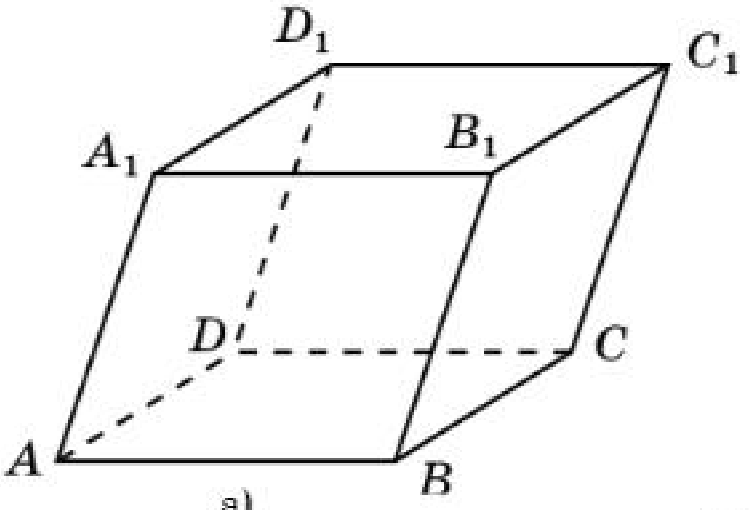
Масалалар

A

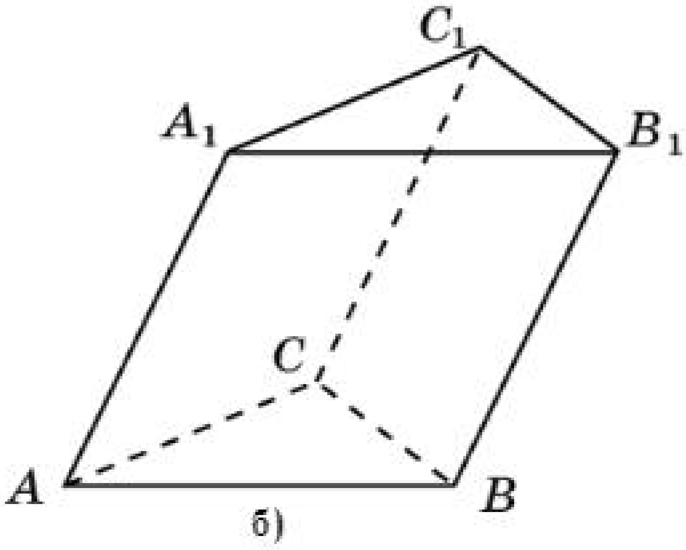
6.1. Агар икки тўғри чизиқ турли текисликларда ётса, у ҳолда улар айқаш эканлиги тўғрими?

6.2. Берилган тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқта орқали шу тўғри чизиқ билан айқаш бўладиган нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

6.3. а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед; б) $ABCA_1B_1C_1$ призма учун AB қирраси билан айқаш қирраларини ёзинг (6.3, а, б-расмдар).



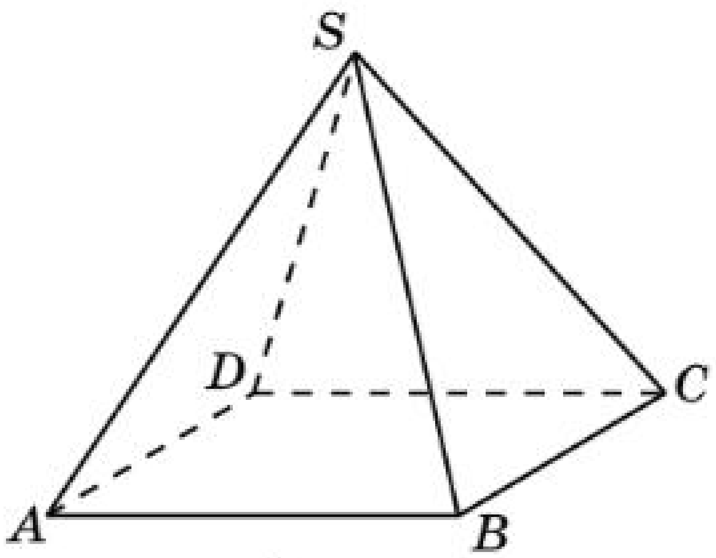
а)



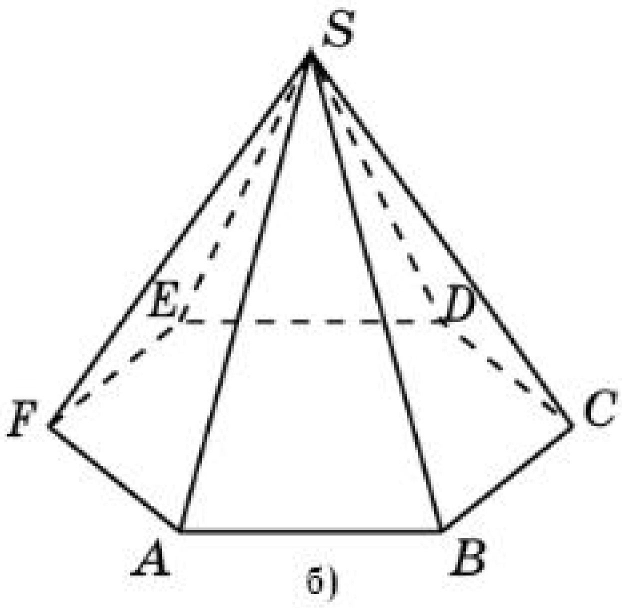
б)

6.3-расм

6.4. а) $SABCD$ тўртбурчакли пирамида (6.4, а-расм); б) $SABCDEF$ олтибурчакли пирамида (6.4, б-расм) SA қирраси билан айқаш қирраларини ёзинг.



а)

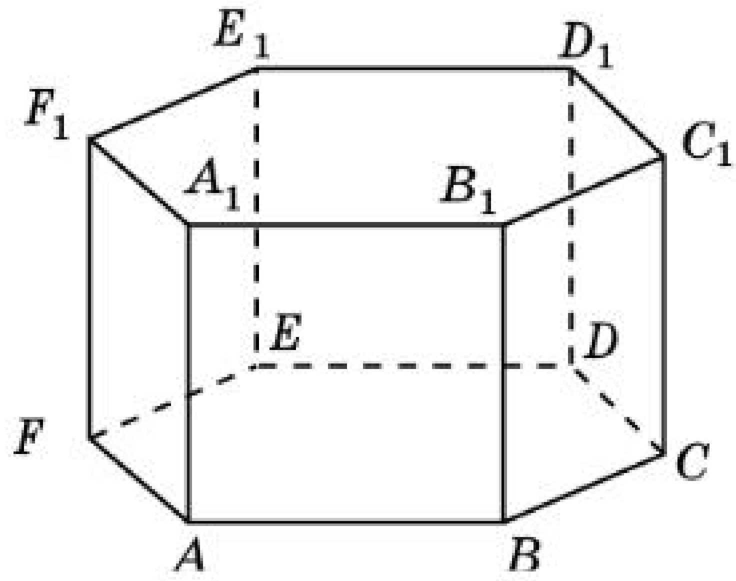


б)

6.4-расм

6.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ олтибурчакли призманинг: а) AA_1; б) AB (6.5-расм) қирралари билан айқаш қирраларини ёзинг.

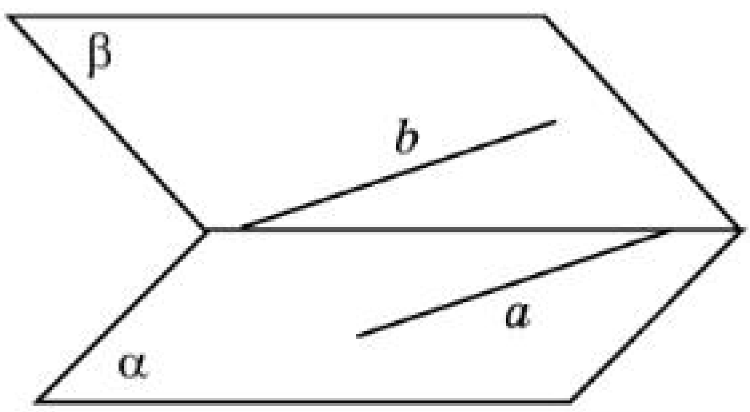
6.6. Тетраэдрнинг айқаш қирраларини жуфти нечта бўлади?



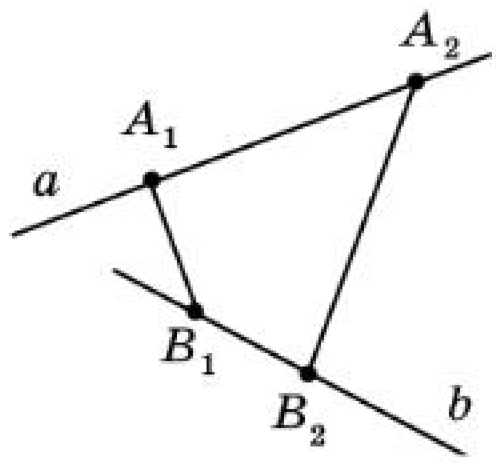
6.5-расм

B

6.7. Фазодаги α ва β текисликларда жойлашган a ва b тўғри чизиқлар ўзаро қандай жойлашган (6.6-расм)? Жавобингизни тушунтиринг.



6.6-расм



6.7-расм

6.8. a ва b айқаш тўғри чизиқлар бўлсин (6.7-расм). A_1B_1 ва A_2B_2 тўғри чизиқлар a ва b тўғри чизиқларини кесиб ўтади. A_1B_1 ва A_2B_2 тўғри чизиқлари айқаш ёки параллел бўлиши мумкинми?

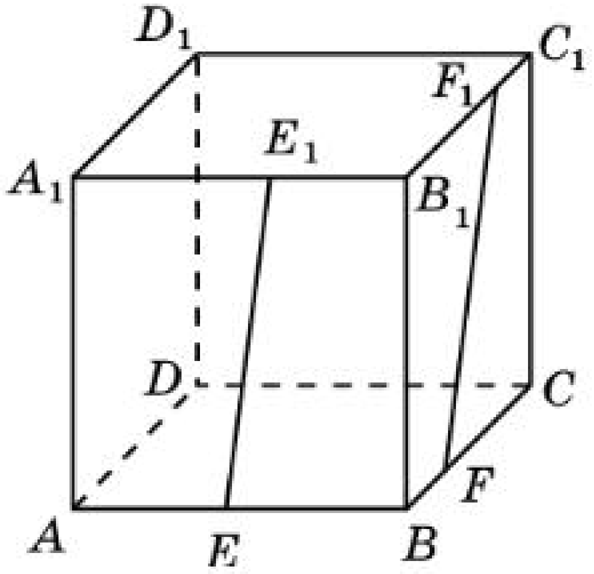
6.9. Тўртбурчакли пирамиданинг айқаш қирралари жуфти нечта бўлади?

6.10. Кубнинг айқаш қирралари жуфти нечта бўлади?

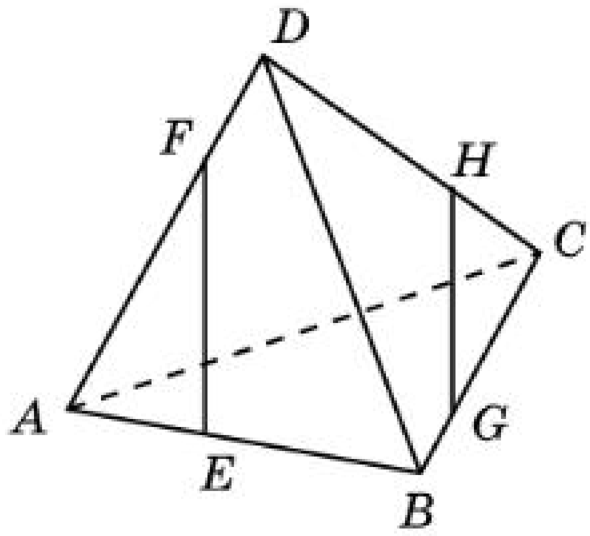
C

6.11. EE_1 ва FF_1 тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашиши қандай (6.8-расм)? Жавобингизни тушунтиринг.

6.12. EF ва GH тўғри чизиқлар ўзаро қандай жойлашган (6.9-расм)? Жавобингизни тушунтиринг.



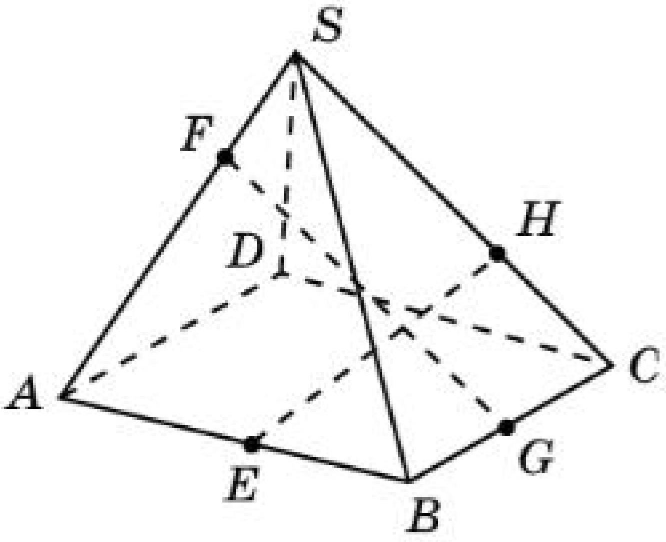
6.8-расм



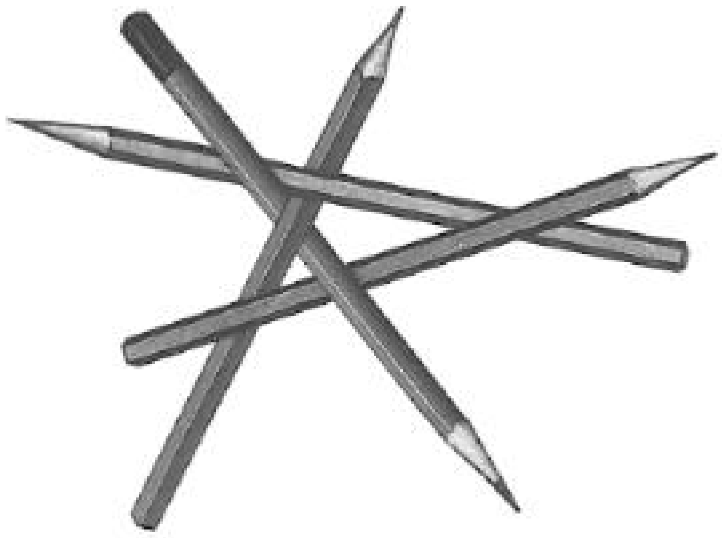
6.9-расм

6.13. *EH* ва *FG* кесмалар кесишадими (6.10-расм)? Жавобингизни тушунтиринг.

6.14. Қаламларнинг 6.11-расмдагидай жойлашиши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.



6.10-расм



6.11-расм

6.15. Атрофимиздаги оламда айқаш тўғри чизиқларни тасвирловчи буюмларга мисоллар келтиринг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

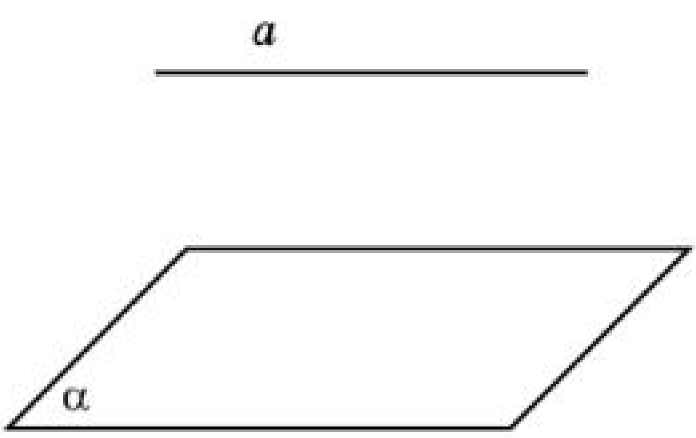
6.16. Тўғри чизиқ билан текисликнинг параллелиги тушунчасини таърифланг.

7-§. Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашиши

Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашишини кўриб чиқайлик.

Тўғри чизиқ текисликда ётади яъни тўғри чизиқнинг барча нуқталари текисликка тегишли бўлади. Тўғри чизиқ текисликни кесиб ўтади яъни тўғри чизиқ билан текисликнинг битта умумий нуқтаси мавжуд бўлади. Тўғри чизиқ билан текислик кесишмайди, яъни тўғри чизиқнинг текислик билан битта ҳам умумий нуқтаси бўлмайди.

Агар тўғри чизиқ текислик билан битта ҳам умумий нуқтага эга бўлмаса, унда бу тўғри чизиқ текисликка *параллел* деб айтилади (7.1-расм).

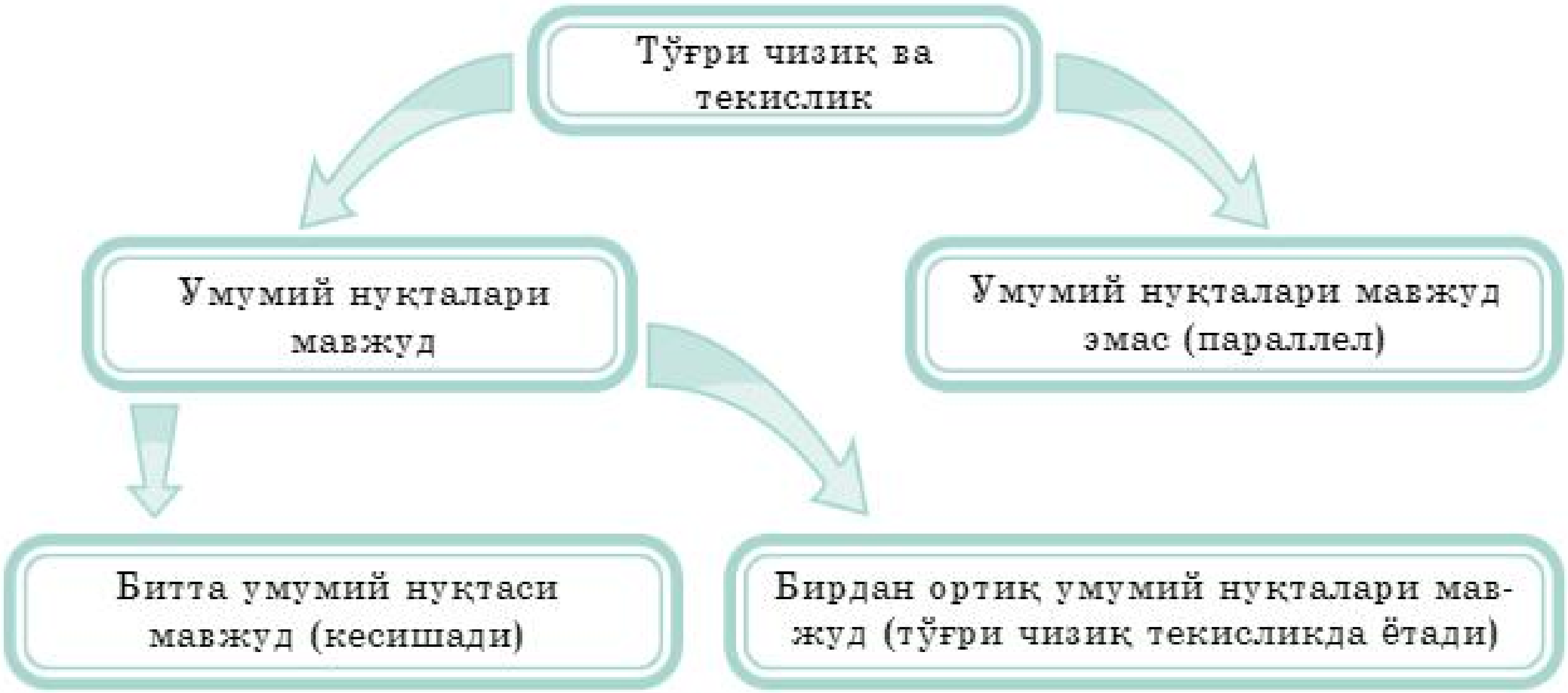


7.1-расм

a тўғри чизиқ билан α текисликнинг параллелиги $a \parallel \alpha$ каби белгиланади.

Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашишининг турли ҳолатларини қуйидаги схема ёрдамида кўрсатайлик.

7.1-*схема*

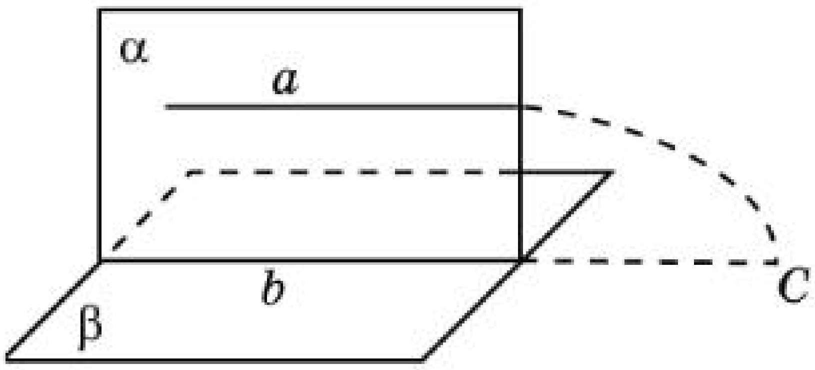


Агар кўпёқнинг қирраси кўпёқ ёғининг текислигига параллел тўғри чизиқда ётса, унда шу қирра кўпёқнинг шу ёғига параллел деб аталади.

Қуйидаги теорема тўғри чизиқ билан текисликнинг етарлилик шартини беради.

Теорема (тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик аломати). ***Агар текисликка тегишли бўлмаган тўғри чизиқ ана шу текисликдаги қандайдир бир тўғри чизиққа параллел бўлса, у ҳолда ушбу тўғри чизиқ текисликка ҳам параллел бўлади.***

Исботи. a тўғри чизиғи α текислигида ётсин ва шу текисликдаги b тўғри чизиғига параллел бўлсин (7.2-расм).



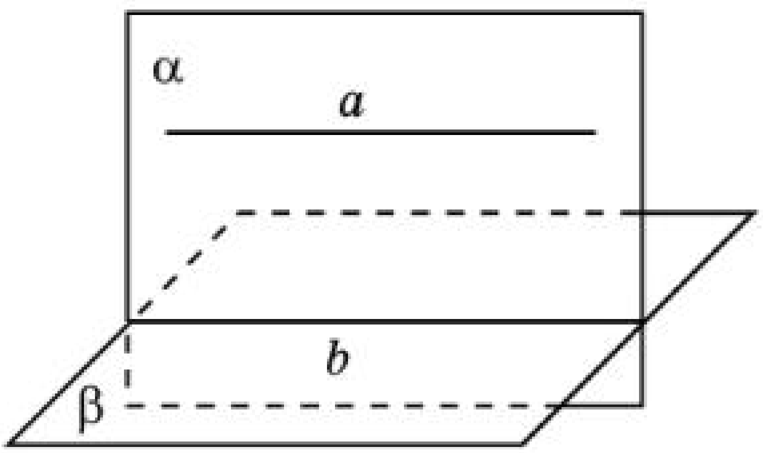
7.2-расм

a тўғри чизиғи β текислигига параллел эканлигини исботлайлик. Аксинча a тўғри чизиғи β текислигини қандайдир бир C нуқтада кесиб ўтсин дейлик. a ва b тўғри чизиқлар орқали ўтувчи α текислигини кўриб чиқайлик (шарт бўйича $a \parallel b$). C нуқта β текислигига ҳам, α текислигига ҳам тегишли, яъни уларнинг кесишиш чизиғи b тўғри чизиғига тегишли. Демак, a ва b тўғри чизиқлар кесишади. Бу эса шартга зид. Шундай қилиб билан $a \parallel \beta$. ◻

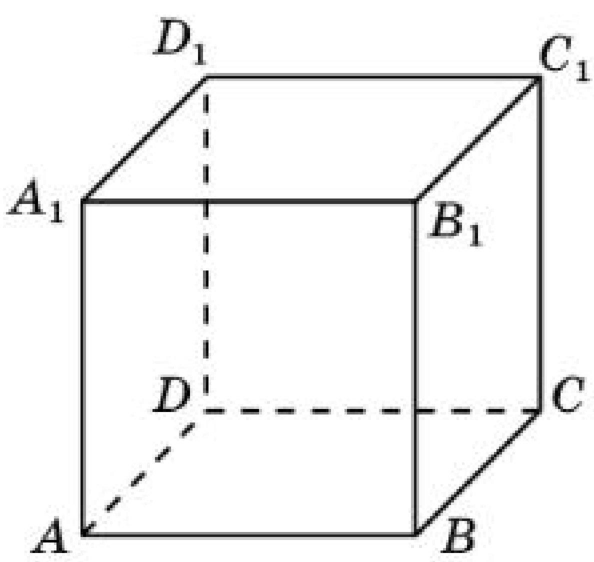
Текисликка параллел тўғри чизиқ шу текисликдаги ихтиёрий тўғри чизиққа параллел эканлигини тўғрими?

Теорема. ***Агар бир текислик иккинчи текисликка параллел тўғри чизиқ орқали ўтса ва у текислик билан кесишса, у ҳолда текисликларнинг кесишиш тўғри чизиғи биринчи тўғри чизиққа параллел бўлади.***

Исботи. α текислик β текислигига параллел a тўғри чизиғи орқали ўтсин ва шу текисликни b *тўғри чизиғи орқали кесиб ўтсин* (7.3-расм). a тўғри чизиғи билан β текислигининг умумий нуқталари бўлмаганликдан, a ва b тўғри чизиқларининг ҳам умумий нуқталари бўлмайди. Бу тўғри чизиқлар бир текисликда ётганлигидан улар параллел бўлиб ҳисобланади.



7.3-расм



7.4-расм

Масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куби (7.4-расм) учун AA_1 тўғри чизиғи BCC_1 текислигига параллел эканлигини исботланг.

Ечиш. AA_1 тўғри чизиғи BCC_1 текислигидаги BB_1 тўғри чизиғига параллел ва шу текисликда ётмайди. Демак, AA_1 тўғри чизиқ BCC_1 текислигига параллел бўлади.

Саволлар

1. Тўғри чизиқ билан текислик ўзаро қандай жойлашиши мумкин?
2. Қандай тўғри чизиқ текисликка параллел деб аталади?
3. Тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллик аломатини айтиб беринг?

Масалалар

А

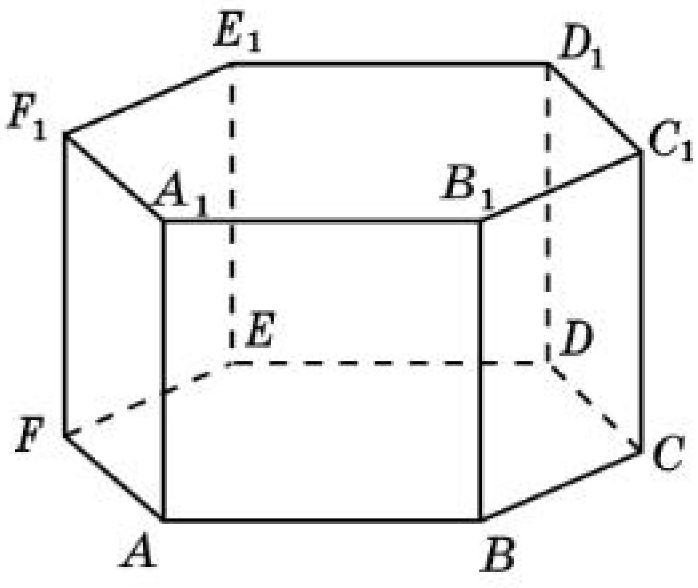
7.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг $ABCD$ ёғига параллел қирраларини кўрсатинг (7.4-расм).

7.2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг: а) AB; б) AA_1 қуйидаги қирраларига параллел ёқларини кўрсатинг (7.5-расм).

7.3. Бир текисликка параллел икки тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлиши тўғрими?

7.4. Агар тўғри чизиқ текисликда ётган қандайдир бир тўғри чизиққа параллел бўлса, унда бу тўғри чизиқ текисликнинг ўзига ҳам параллел бўлиши тўғрими?

7.5. Икки параллел тўғри чизиқнинг бири текисликка параллел. Иккинчи тўғри чизиқ шу текисликка параллел бўлиши тўғрими?

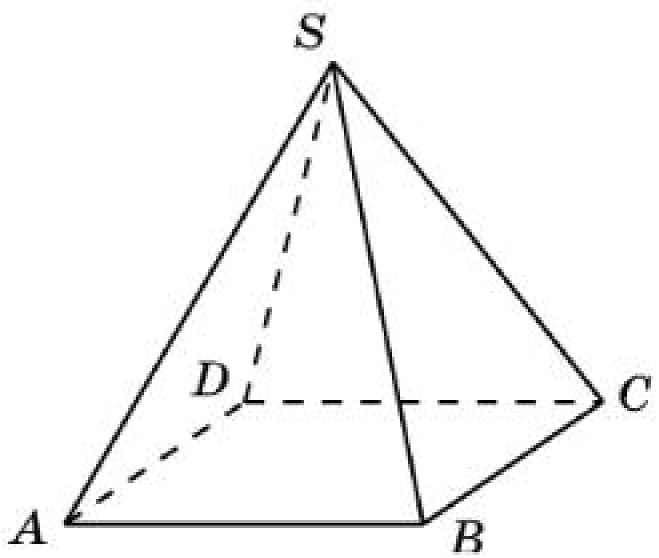


7.5-расм

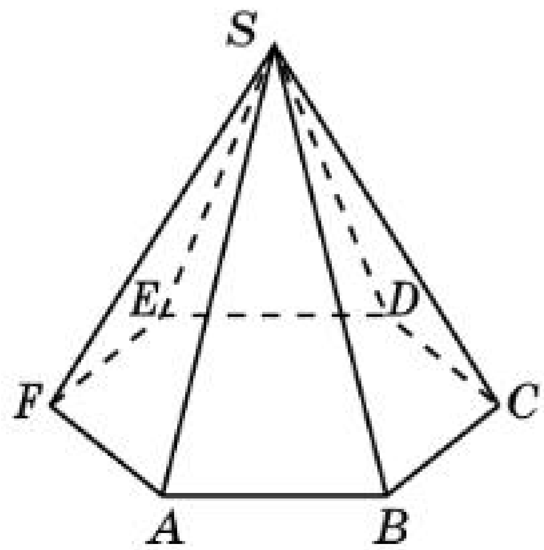
B

7.6. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг параллел қирралари билан ёқларини кўрсатинг (7.6-расм).

7.7. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг параллел қирралари билан ёқларини кўрсатинг (7.7-расм).



7.6-расм



7.7-расм

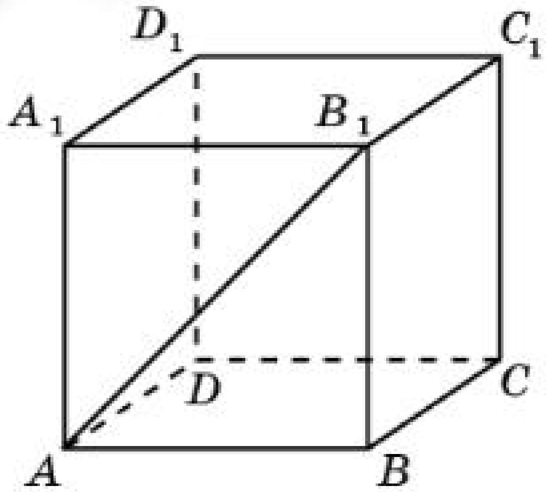
7.8. $ABCD$ параллелограмм берилган. AB қирраси орқали параллелограмм текислиги билан устма-уст тушмайдиган α текислиги ўтказилган. $CD \parallel \alpha$ эканлигини исботланг.

7.9. $ABCDEF$ мунтазам олтибурчакнинг AF қирраси олтибурчак текислиги билан кесишмайдиган α текислигида ётибди. α текислиги билан параллел бўлган олтибурчакнинг томонини кўрсатинг.

C

7.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг (7.8-расм) AB_1 тўғри чизиғи қуйидаги текисликка параллел эканлигини исботланг: а) CDD_1; б) BDC_1.

7.11. Учбурчакнинг икки томонининг ўрталари орқали учбурчак текислиги билан устма-уст тушмайдиган текислик ўтказилган. Шу текислик учбурчакнинг учинчи томонига параллел бўлишини исботланг.



7.8-расм

7.12. Берилган текисликка тегишли бўлмаган нуқтадан шу текисликка параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг. Бундай тўғри чизиқлар сони қанча?

7.13. Агар икки тўғри чизиқ параллел бўлса, у ҳолда бири орқали иккинчисига параллел текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг. Бундай текисликларнинг сони қанча?

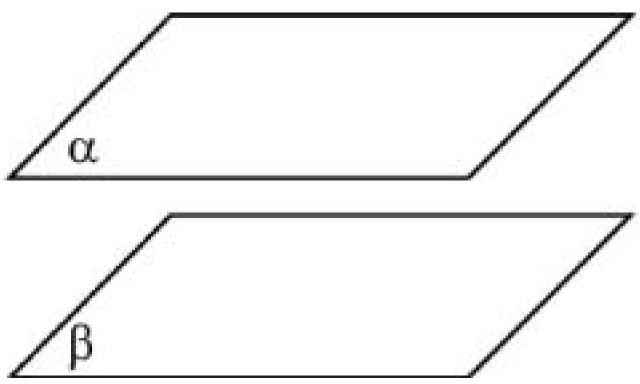
7.14. Икки айқаш тўғри чизиқ берилган. Уларнинг бири орқали иккинчисига параллел текисликни қандай ўтказиш мумкин?

7.15. Атрофимиздаги оламдан ўзаро параллел тўғри чизиқ билан текисликни тасвирловчи буюмларга мисол келтиринг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

7.16. Икки текисликнинг параллеллиги тушунчасини таърифланг.

8-§. Текисликларнинг параллеллиги



8.1-расм

Кесишмайдиган, яъни умумий нуқтаси бўлмаган икки текислик *параллел текисликлар* деб аталади (8.1-расм).

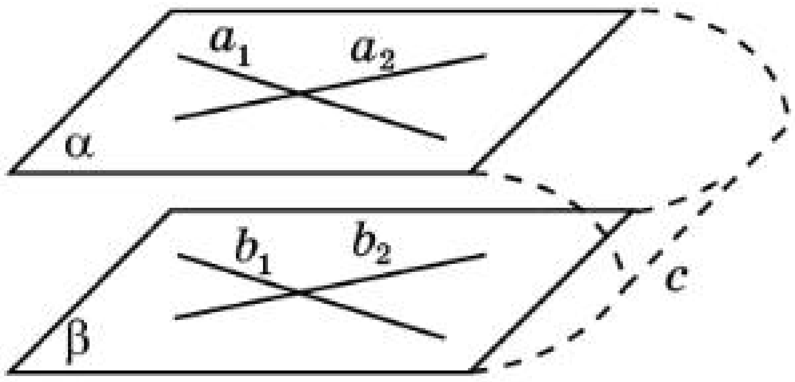
Икки текисликнинг ўзаро жойлашишини турли ҳолатларини схема ёрдамида кўрсатайлик.

8.1-*схема*

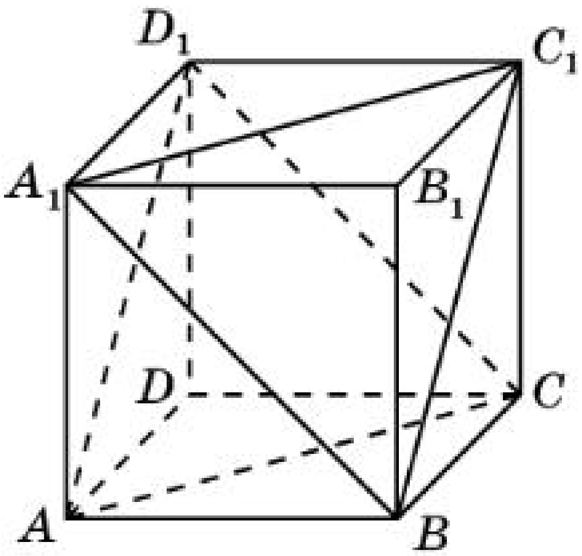
Қуйидаги теорема икки текисликнинг параллеллигининг етарлилик шарти.

Теорема. (Икки текисликнинг параллеллик аломати) ***Агар бир текисликда ётадиган кесишувчи икки тўғри чизиқнинг ҳар бири иккинчи текисликка параллел бўлса, у ҳолда бу текисликлар параллел бўлади.***

Исботи. α текислигида кесишган a_1, a_2 тўғри чизиқлар β текислигидаги мос равишда b_1, b_2 тўғри чизиқларга параллел бўлсин (8.2-расм). α ва β текисликлар параллел бўлишини исботлайлик.



8.2-расм



8.3-расм

Аксинча, α ва β текисликлар c тўғри чизиғи бўйича кесишади деб ҳисоблайлик. Тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик аломати бўйича a_1 тўғри чизиғи β текислигига параллел бўлади. Демак, у c тўғри чизиғига ҳам параллел (a_1 мен c тўғри чизиқлари бир текисликда ётади ва кесишмайди). Шунга ўхшаш a_2 тўғри чизиғи c тўғри чизиғига ҳам параллел бўлади. Шу билан α текислигида бир тўғри чизиққа параллел бўлган кесишувчи икки тўғри чизиқни ҳосил қиламиз. Бундай бўлиши мумкин эмас. Олинган зидлик бизнинг α ва β текисликлар кесишиши тўғрисидаги тушунчанинг тўғри эмаслигини кўрсатади. Ундай бўлса, улар параллел текисликлар.

Агар икки текислик параллел бўлса,у ҳолда шу текисликларнинг бирига тегишли бўлган ихтиёрий тўғри чизиқ иккинчи текисликка параллел бўлишини исботланг.

Берилган текисликда ётмайдиган нуқта орқали шу текисликка параллел нечта текислик ўтказиш мумкин?

Масалан. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ACD_1 ва BA_1C_1 текисликлар параллел бўлишини исботланг (8.3-расм).

Ечиш. AC тўғри чизиқ A_1C_1 тўғри чизиққа ва CD_1 тўғри чизиқ BA_1 тўғри чизиққа параллел бўлади. Шу билан ACD_1 текислигида ётган кесишувчи икки тўғри чизиқ BA_1C_1 текислигидаги мос икки тўғри чизиққа параллел бўлади. Демак, ACD_1 ва BA_1C_1 текисликлар параллел бўлади.

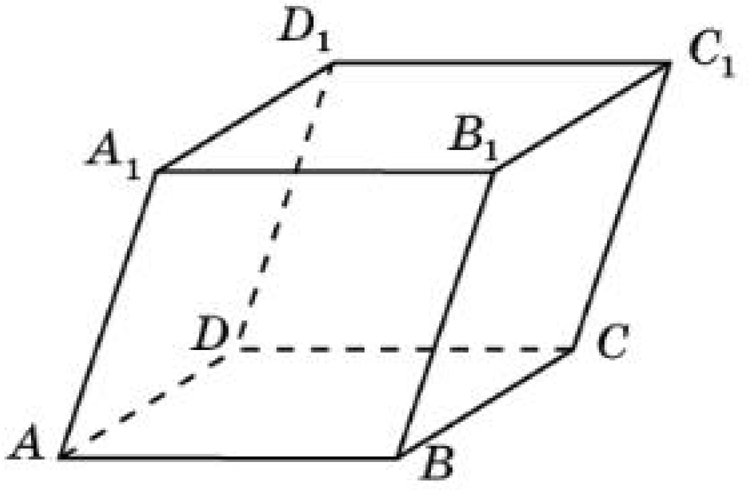
Саволлар

1. Қандай икки текислик параллел деб аталади?
2. Икки текисликнинг ўзаро жойлашиш ҳолатларини айтинг.
3. Икки текисликнинг параллеллик аломатини таърифлаб беринг.

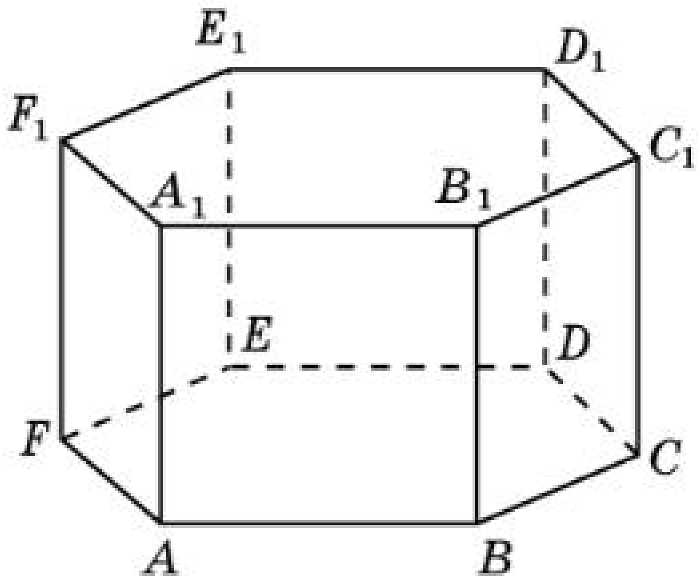
Масалалар

A

8.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг ёқлари ётган параллел текисликларни кўрсатинг (8.4-расм).



8.4-расм

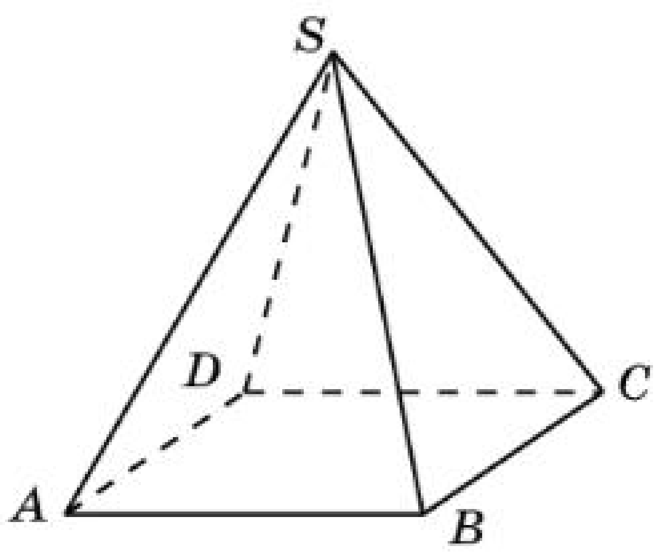


8.5-расм

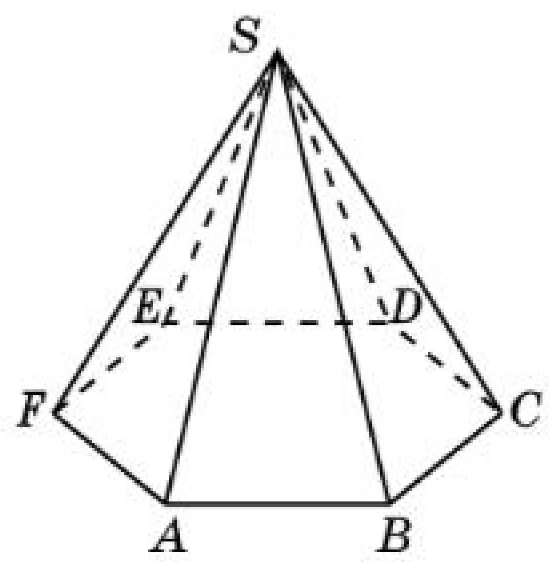
8.2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ёқлари ётган параллел текисликларни кўрсатинг (8.5-расм).

8.3. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг параллел ёқлари бўладими (8.6-расм)?

8.4. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг параллел ёқлари бўладими (8.7-расм)?



8.6-расм



8.7-расм

B

8.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедда қуйидаги текисликлар параллел бўлишини исботланг: а) ABB_1 ва CDD_1; б) AB_1D_1 ва BDC_1.

8.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада қуйидаги текисликлар параллел бўлишини исботланг: а) ABC ва $A_1B_1C_1$; б) ABB_1 ва DEE_1; в) ABB_1 ва CFF_1; г) ACC_1 ва DFF_1.

8.7. Қуйидаги мулоҳаза тўғрими: “Агар бир текисликда ётган тўғри чизиқ иккинчи текисликдаги тўғри чизиққа параллел бўлса, унда бу текисликлар параллел бўлади”?

8.8. Қуйидаги мулоҳаза тўғрими: “Агар бир текисликда ётган икки тўғри чизиқ иккинчи текисликдаги икки тўғри чизиққа параллел бўлса, унда бу текисликлар параллел бўлади”?

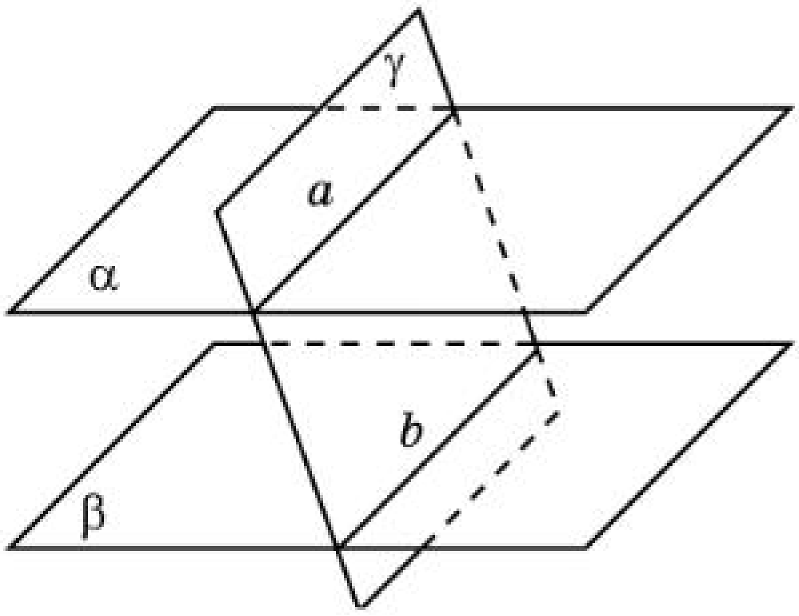
C

8.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ABC_1 ва BCD_1 текисликларнинг кесишиш чизиғини кўрсатинг.

8.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада ABC_1 ва BCD_1 текисликларнинг кесишиш чизиғини кўрсатинг.

8.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада ABC_1 ва CD_1E_1 текисликларнинг параллел бўлишини исботланг.

8.12. Агар параллел икки текислик учинчи текислик билан кесишса, унда уларнинг кесишиш тўғри чизиқлари параллел бўлишини исботланг (8.8-расм).



8.8-расм

8.13. Атрофимиздаги оламдан параллел текисликларни тасвирловчи буюмларга мисоллар келтиринг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

8.14. Текисликдаги бурчакнинг таърифини такрорланг.

8.15. Фазодаги бурчак тушунчасини таърифланг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. a ва b тўғри чизиқлар берилган. a тўғри чизиқ орқали берилган тўғри чизиқлар ётган текисликдан бошқа α текислик ўтади. b тўғри чизиқ билан α текислик ўзаро қандай жойлашади?

A. b тўғри чизиқ α да ётади.

B. b тўғри чизиқ α ни кесиб ўтади.

C. b тўғри чизиқ α га параллел.
D. Аниқлаш мумкин эмас.

2. Бир текисликда ётмайдиган уч параллел тўғри чизиқларнинг турли жуфтлари орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Битта. B. Иккита.
C. Учта. D. Олтита.

3. Учтаси бир текисликда ётмайдиган тўртта параллел тўғри чизиқларнинг ҳар хил жуфтлари орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Битта. B. Иккита.
C. Учта. D. Олтита.

4. Икки параллел тўғри чизиқнинг ҳар бири орқали текисликлар ўтказилган. Бу икки текислик кесишади. Уларнинг кесишиш чизиғи берилган тўғри чизиқларга нисбатан қандай жойлашган?

A. Параллел. B. Кесишади.
C. Бири билан устма-уст тушади. D. Бири билан айқаш.

5. Айқаш a, b тўғри чизиқлари ва a тўғри чизиқда ётадиган A нуқта берилган. a тўғри чизиқ билан A нуқта ва b тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик ўзаро қандай жойлашган?

A. a тўғри чизиқ текисликни кесади.
B. a тўғри чизиқ текисликка параллел.
C. a тўғри чизиқ текисликда ётади.
D. Аниқлаш мумкин эмас.

6. K нуқта ва c, d айқаш тўғри чизиқлар берилган. K нуқта билан c тўғри чизиқ ва K нуқта билан d тўғри чизиқ орқали ўтадиган текисликлар бир-бирига нисбатан қандай жойлашган?

A. Устма-уст тушади.
B. Кесишади.
C. Параллел.
D. Аниқлаш мумкин эмас.

7. α текислик β текисликка параллел бўлган a тўғри чизиқ билан кесишади. α ва β текисликлар ўзаро қандай жойлашган?

A. Параллел.
B. Устма-уст тушади.
C. Кесишади.
D. Аниқлаш мумкин эмас.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AB қиррасига параллел бўлган қиррасини кўрсатинг.

A. CC_1. B. DD_1. C. B_1C_1. D. C_1D_1.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призма учун B_1C_1 текисликларнинг кесишиш чизиғига параллел тўғри чизиқларни кўрсатинг.

A. AA_1. B. EF. C. C_1D_1. D. DE.

10. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг SAB ва SDE текисликларнинг кесишиш чизиғига параллел тўғри чизиқларни кўрсатинг.

A. BC. B. CF. C. AD. D. BE.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AA_1 қиррасига айқаш бўлган қиррасини кўрсатинг.

A. BC. B. BB_1. C. AB. D. A_1D_1.

12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг AB қиррасига айқаш бўлган қиррасини кўрсатинг.

A. CD. B. EF. C. DD_1. D. D_1E_1.

13. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг SA қиррасига айқаш бўлган қиррасини кўрсатинг.

A. AB. B. SC. C. SD. D. BC.

14. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг BC қиррасига айқаш бўлган қиррасини кўрсатинг.

A. DE. B. SB. C. SA. D. AF.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг CC_1 қиррасига параллел бўлган текисликни кўрсатинг.

A. ABC. B. ABC_1. C. BDA_1. D. BDD_1.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BC_1 қиррасига параллел бўлган текисликни кўрсатинг.

A. ACD_1. B. ACB_1. C. ADB_1. D. CDA_1.

17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ олтибурчакли призманинг AF қиррасига параллел бўлган текисликни кўрсатинг.

A. BEE_1. B. BDD_1. C. BCC_1. D. CEE_1.

18. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг CD қиррасига параллел бўлган текисликни кўрсатинг.

A. SAB. B. SAF. C. SBC. D. SEF.

19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг ACB_1 текислигига параллел текисликни кўрсатинг.

A. ABC. B. ADD_1. C. DA_1C_1. D. BA_1D_1.

20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ADC_1 текислигига параллел текисликни кўрсатинг.

A. EFA_1. B. BED_1. C. CFE_1. D. EFF_1.

II боб ФАЗОДА ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛИЛИК

9-§. Фазода тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

Фазода бурчак тушунчаси текисликдаги бурчак тушунчасига ўхшаш аниқланади.

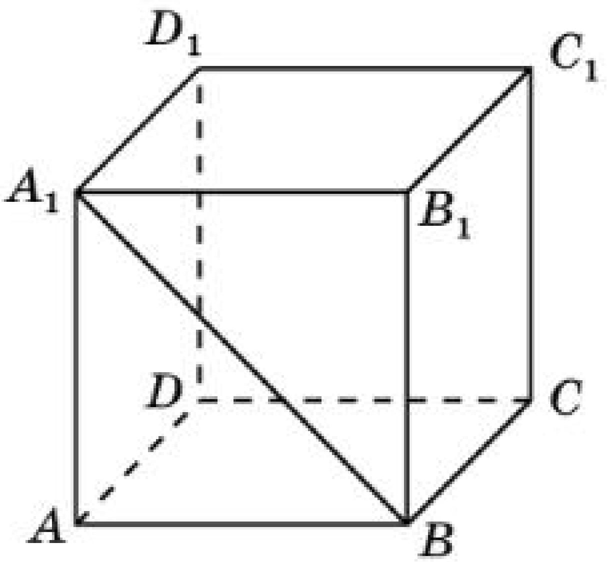
Фазода бурчак деб, учлари умумий бўлган икки нурдан ва улар билан чегараланган текисликнинг бир бўлагидан (шу нурлар ётган) тузилган фазодаги фигурага айтилади.

Фазода кесишган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб, учлари кесишиш нуқтасидаги шу тўғри чизиқларнинг нурларидан ясалган бурчакларнинг кичигига айтилади.

Фазода тўғри бурчак ясаб, кесишувчи икки тўғри чизиқ *перпендикуляр тўғри чизиқлар* деб аталади.

Кесишувчи икки кесма перпендикуляр тўғри чизиқларда ётса, уларни *перпендикуляр кесмалар* дейилади. *Кесишувчи икки кесма орасидаги бурчак* деб, уларга мос тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка айтилади.

Масалан, кубнинг кесишувчи қирралари ўзаро перпендикуляр, кубнинг ёғининг диагонали шу ёқнинг қирралари билан 45° бурчак ясайди (9.1-расм).



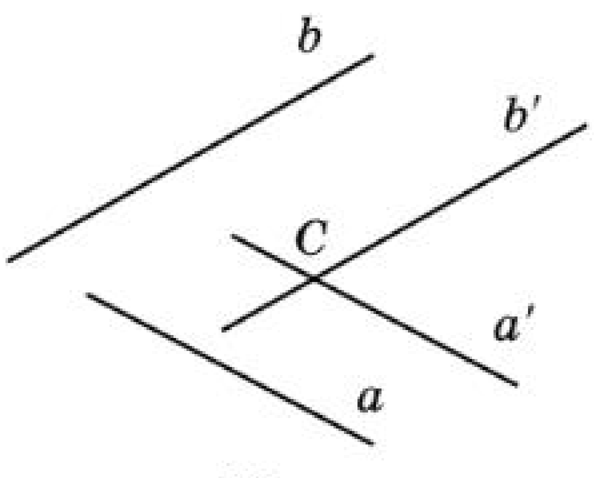
9.1-расм

Текисликдаги каби агар фазода бири иккинчисини тўлдирса, ёки уларнинг учларидан ўтувчи тўғри чизиққа нисбатан бир томонда (ёғида) параллел тўғри чизиқларда ётса, унда улар *бир хил йўналган* (*йўналишдош*) деб аталади.

Текисликдаги бурчакнинг хоссасига ўхшаш фазодаги бурчакнинг қуйидаги хоссалари ўринли бўлади.

1-хосса. *Мос томонлари йўналишдош бўлган икки бурчак тенг бўлади.*

2-хосса. *Мос параллел тўғри чизиқлардан ясалган икки бурчак тенг бўлади.*



9.2-расм

Мос томонлари параллел бўлган икки бурчак ҳар доим тенг бўладими? Мисол келтиринг.

Энди айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак тушунчасини аниқлаймиз.

a ва b — айқаш тўғри чизиқлар бўлсин (9.2-расм). Фазода қандайдир бир C нуқтани олиб, шу нуқта орқали a ва b тўғри чизиқларга параллел мос a', b' тўғри чизиқларини ўтказамиз.

Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб, уларга мос параллел кесишган тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакка айтилади.

Параллел томонларнинг орасидаги бурчаклар тенг бўлганликдан бу таъриф C нуқтани танлашга боғлиқ эмас. Хусусий ҳолда C нуқта a ёки b тўғри чизиқда ётиши ҳам мумкин. Бундай ҳолатда a' ёки b' тўғри чизиқ учун мос a ёки b тўғри чизиқни ўзини олиш мумкин.

Агар икки айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак тўғри бўлса, унда улар *перпендикуляр* деб аталади.

Берилган тўғри чизиқда: а) ётадиган; б) ётмайдиган нуқта орқали берилган тўғри чизиққа перпендикуляр нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

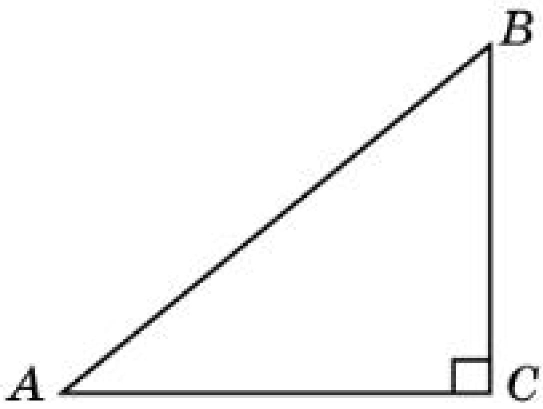
Агар икки кесма перпендикуляр тўғри чизиқларда ётса, унда уларни *перпендикуляр* деб аталади.

Фазодаги *икки кесма орасидаги бурчак* деб, шу кесмалар ётган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка айтилади.

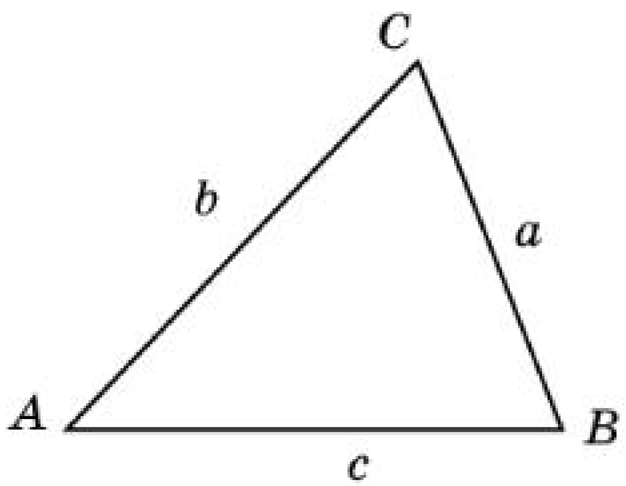
Учбурчакнинг бурчакларини топиш учун тригонометрик функциялардан фойдаланиш мумкинлигини эсга солайлик.

Масалан, C тўғри бурчаги бўлган ABC учбурчакнинг томонлари маълум бўлса (9.3-расм), унда унинг A ўткир бурчагини қуйидаги тригонометрик функцияларнинг бирини қўллаб топиш мумкин:

$$\sin A = \frac{BC}{AB},\ \cos A = \frac{AC}{AB},\ \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC},\ \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$



9.3-расм



9.4-расм

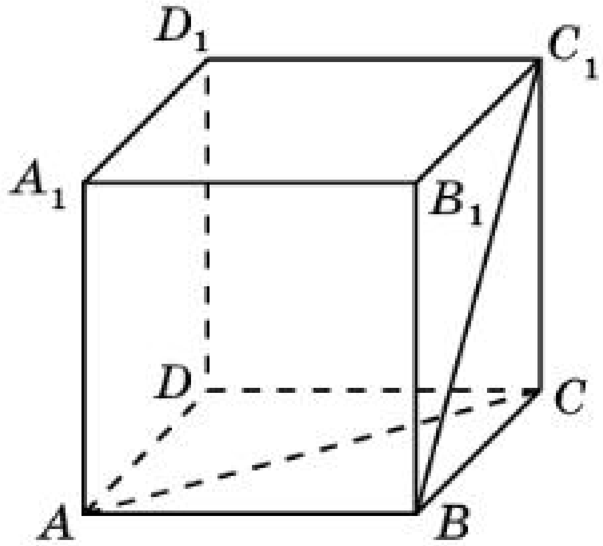
Томонлари $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ бўлган ихтиёрий ABC учбурчакнинг C бурчагини топиш учун косинуслар теоремасини қўллаш мумкин (9.4-расм):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

У ҳолда,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

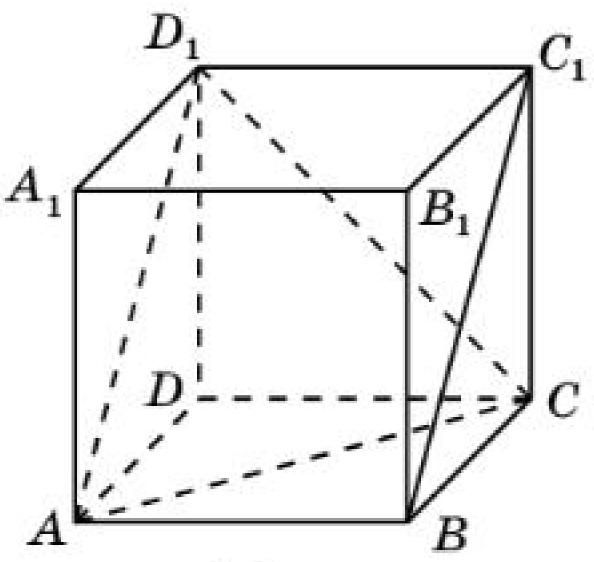
1-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC ва BC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг (9.5-расм).



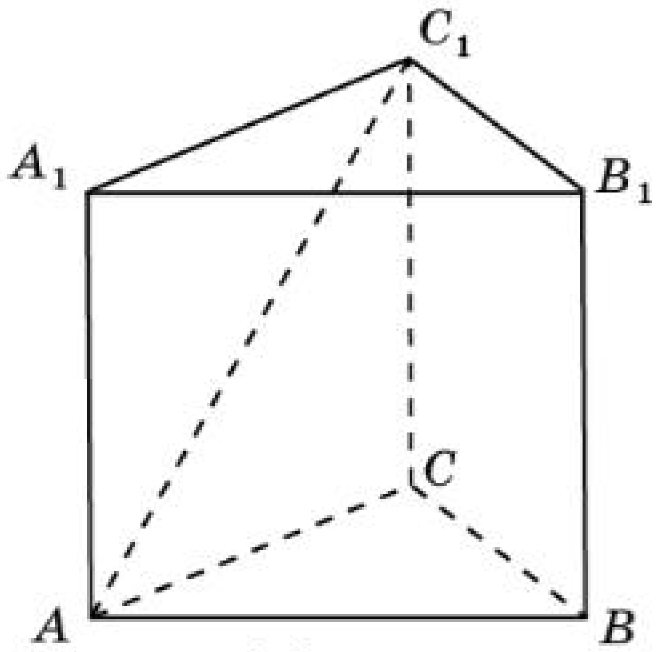
9.5-расм

Ечиш. BC_1 тўғри чизиққа параллел AD_1 тўғри чизиқни ўтказамиз. AC ва BC_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчак AC ва AD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка тенг бўлади. Шу бурчакни топиш учун ACD_1 учбурчакни кўриб чиқайлик (9.6-расм). У тенг томонли учбурчак бўлади. Демак, излаган CAD_1 бурчак 60°га тенг.

2-мисол. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (9.7-расм). AC_1 ва A_1B_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.



9.6-расм



9.7-расм

Ечиш. A_1B_1 тўғри чизиқ AB тўғри чизиққа параллел бўлганлигидан, изланаётган бурчак BAC_1 бурчакка тенг бўлади ABC_1 учбурчакда $AB = 1$, $AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$. Косинуслар теоремаси бўйича

$$BC_1^2 = AB^2 + AC_1^2 - 2AB \cdot AC_1 \cdot \cos\angle BAC_1.$$

AB, AC_1, BC_1 узунликларининг қийматларини қўйиб, қуйидагини топамиз: $\cos\angle BAC_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Саволлар

1. Фазода бурчак деб нимага айтилади?
2. Фазодаги кесишувчи икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб нимага айтилади?
3. Икки айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб нимага айтилади?
4. Фазодаги қандай икки тўғри чизиқ перпендикуляр деб аталади?
5. Фазодаги бурчаклар учун қандай хоссалар ўринли бўлади?
6. Томонлар берилган тўғри бучакли учбурчакнинг бурчакларини қандай топиш мумкин?
7. Томонлари берилган ихтиёрий учбурчакнинг бурчакларини қандай топиш мумкин?

Масалалар

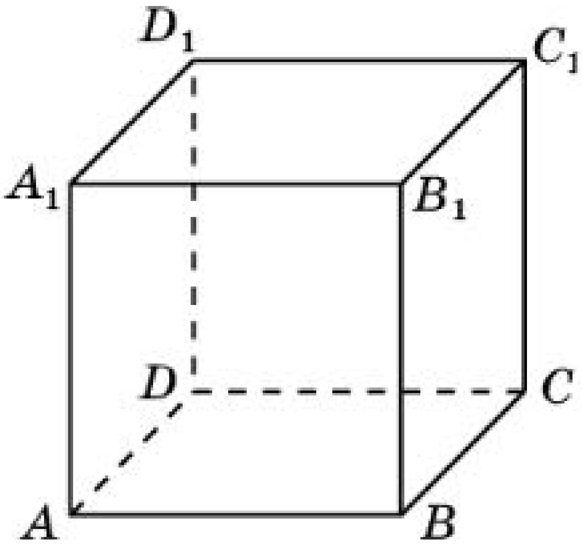
A

9.1. Фазода тўғри чизиқ ва унда ётувчи нуқта олинган. Шу нуқта орқали ўтиб, берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

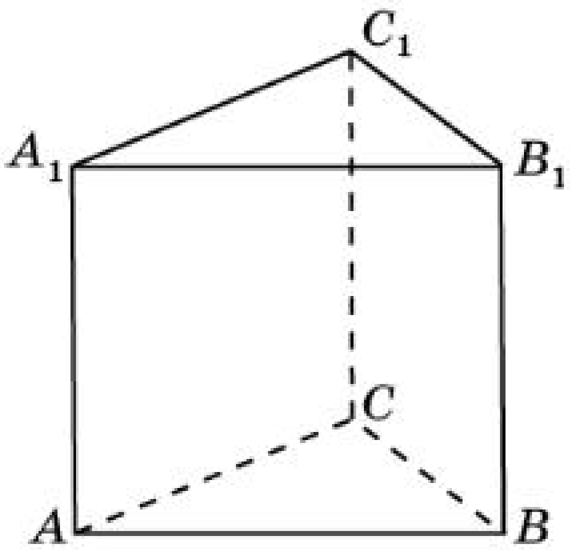
9.2. Тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта берилган. Шу нуқта орқали ўтиб, берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

9.3. Текисликда учинчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ параллел бўлади. Шу мулоҳаза фазо учун тўғрими?

9.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AB қиррасига перпендикуляр бўлган қирраларни кўрсатинг (9.8-расм).



9.8-расм



9.9-расм

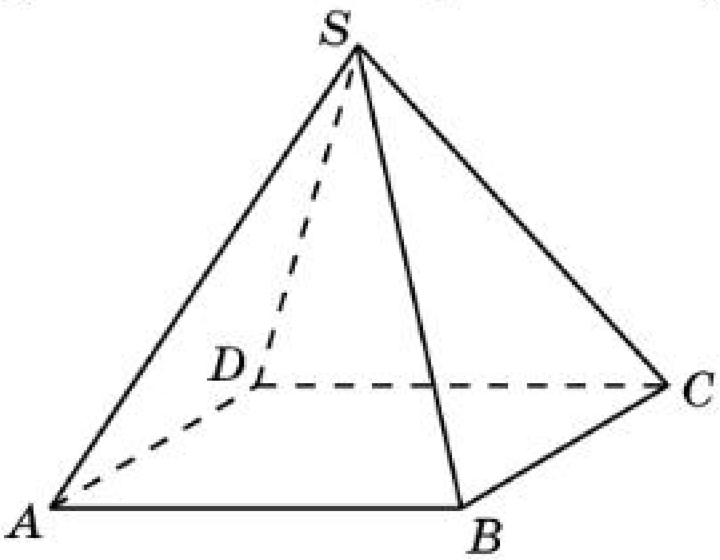
9.5. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг BB_1 қиррасига перпендикуляр бўлган қирраларини кўрсатинг (9.9-расм).

В

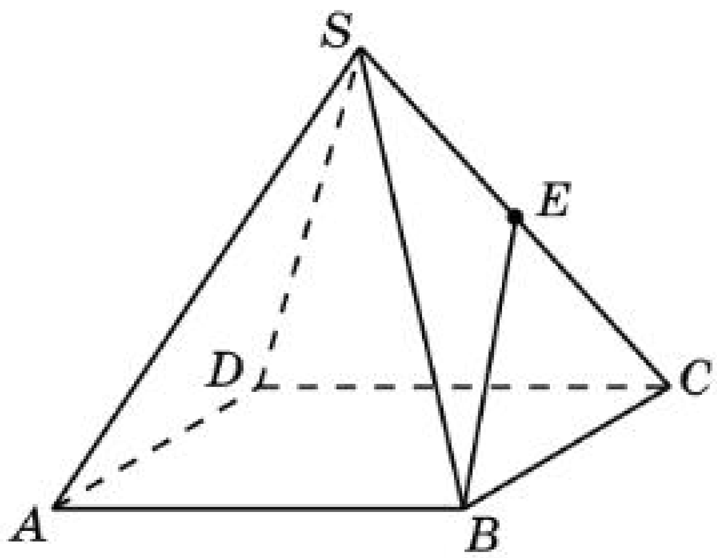
9.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг қуйидаги тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни топинг: а) AC ва B_1D_1; б) AB ва B_1C_1; в) AB_1 ва BC_1.

9.7. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг қуйидаги тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни топинг: а) AB ва CC_1; б) AB ва B_1C_1.

9.8. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг (9.10-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни топинг: а) AB ва SC; б) SB ва SD.



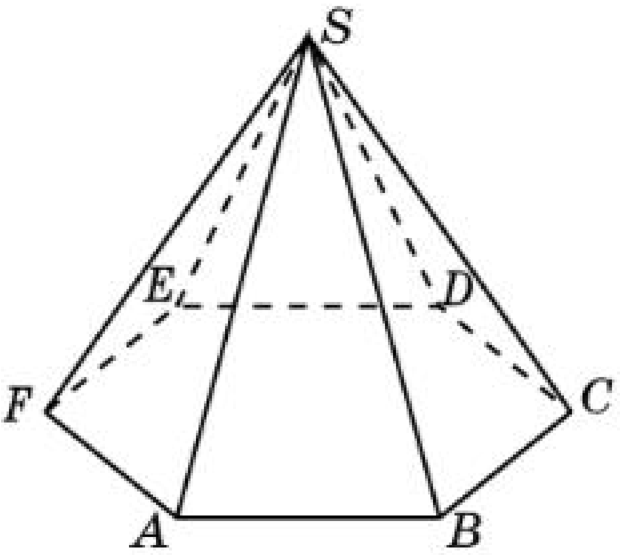
9.10-расм



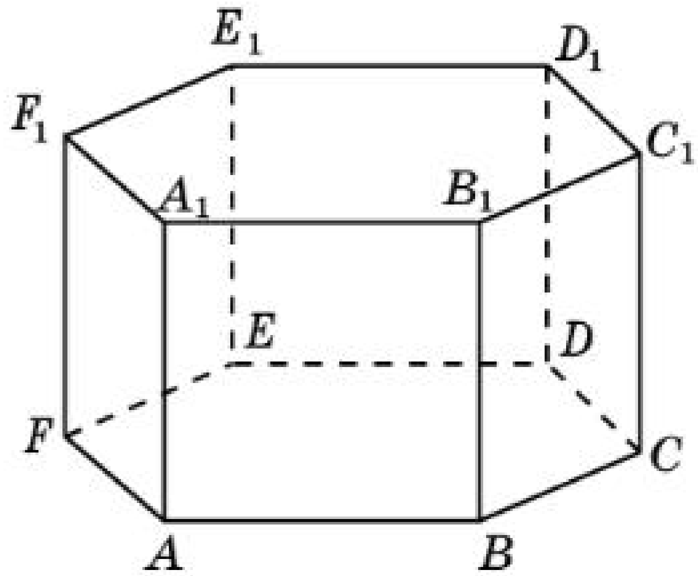
9.11-расм

9.9. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг ва E нуқтаси — SC қиррасининг ўртаси (9.11-расм). AD ва BE тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни топинг.

9.10. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (9.12-расм). SA ва BC тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.



9.12-расм

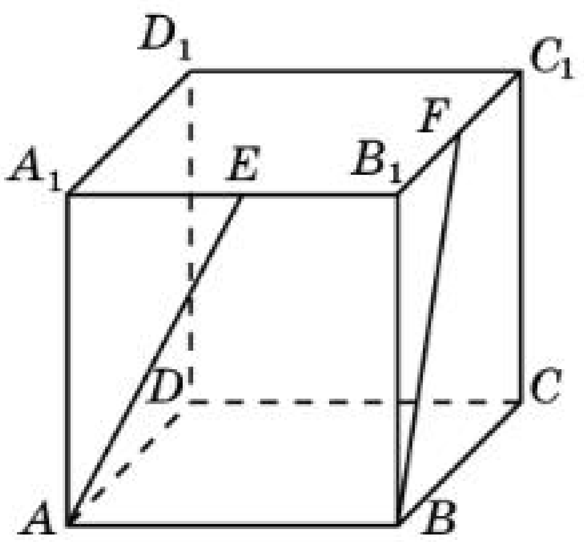


9.13-расм

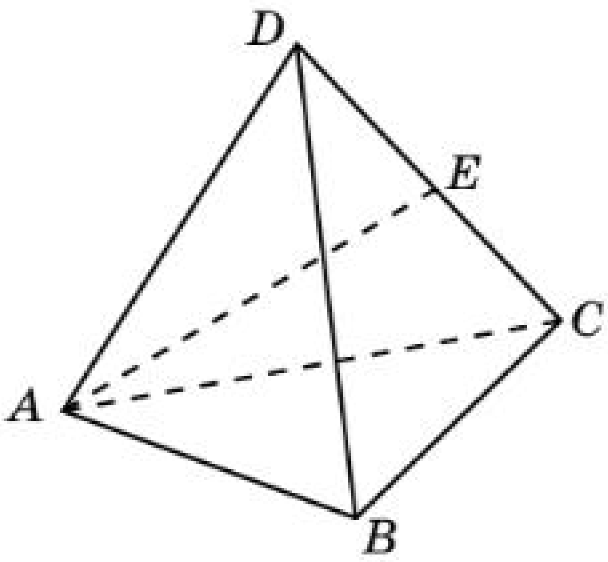
9.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (9.13-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг: а) AA_1 ва BC_1; б) AA_1 ва DE_1; в) AB ва B_1C_1; г) AB ва C_1D_1; д) AC ва B_1C_1; е) AC ва B_1D_1; з) AC ва B_1E_1.

C

9.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг барча қирралари 1 га тенг ва E нуқта — A_1B_1 қиррасининг ўртаси, F нуқта — B_1C_1 қиррасининг ўртаси (9.14-расм). AE мен BF тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.



9.14-расм

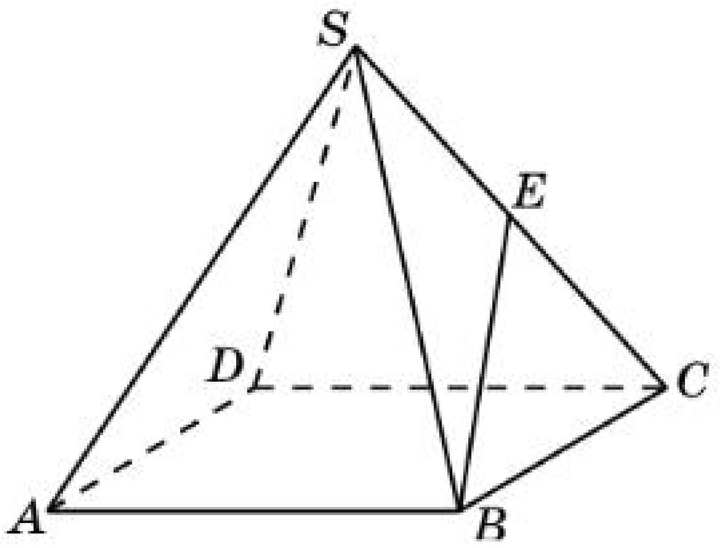


9.15-расм

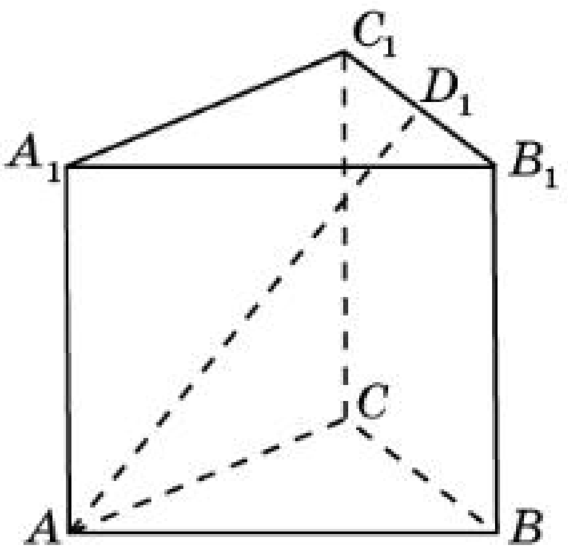
9.13. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг ва E нуқта — CD қиррасининг ўртаси (9.15-расм). AE ва BC тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

9.14. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг ва E нуқта — SC қиррасининг ўртаси (9.16-расм). SA ва BE тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

9.15. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг, D_1 нуқта — B_1C_1 қиррасининг ўртаси (9.17-расм). AD_1 ва BB_1 тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.



9.16-расм



9.17-расм

9.16. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (9.12-расм). Қуйидаги тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг: а) SA ва CD; б) SA ва BD.

9.17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (9.13-расм). Қуйидаги тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг: а) AB_1 ва BC_1; б) AB_1 ва CD_1..

9.18. Атрофимиздаги оламдан перпендикуляр тўғри чизиқларни тасвирловчи буюмларга мисоллар келтиринг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

9.19. Берилган нуқтадан текисликкача бўлган масофа таърифини такрорланг.

9.20. Фазодаги нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа тушунчасини таърифланг.

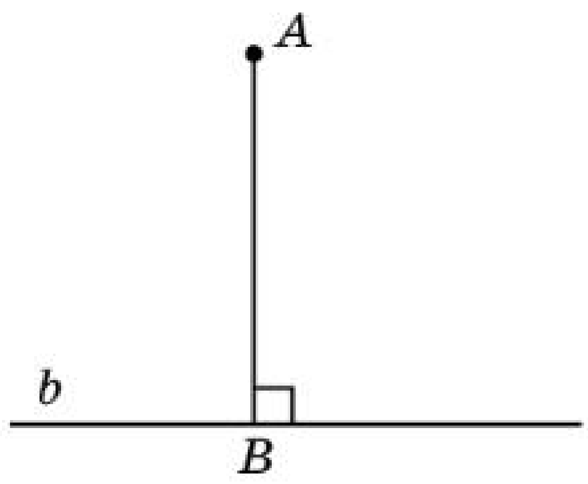
9.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан қуйидаги тўғри чизиққача бўлган масофани топинг: а) BC; б) BB_1.

10-§. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа

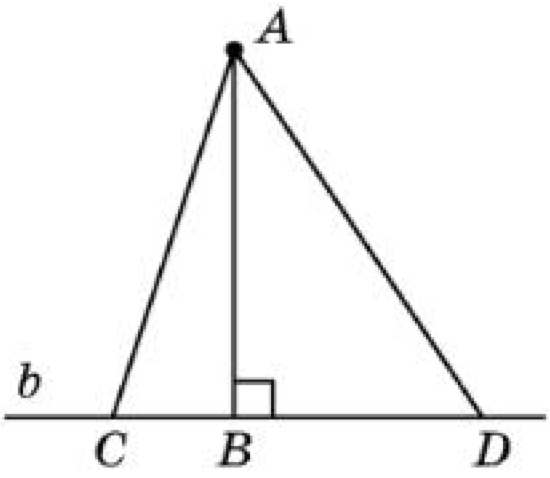
Текисликдаги нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа деб берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлигига айтилишини эслайлик.

Нуқта билан тўғри чизиқ бир текисликда ётганлигидан нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа таърифи фазо учун ҳам ўринли бўлади.

Фазодаги *нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа* деб, берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлигига айтилади (10.1-расм).



10.1-расм

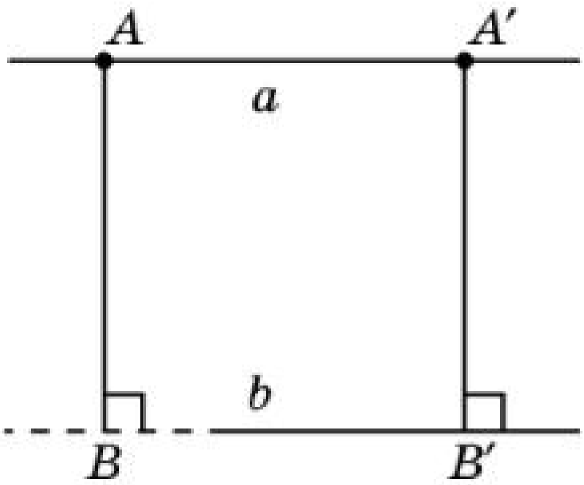


10.2-расм

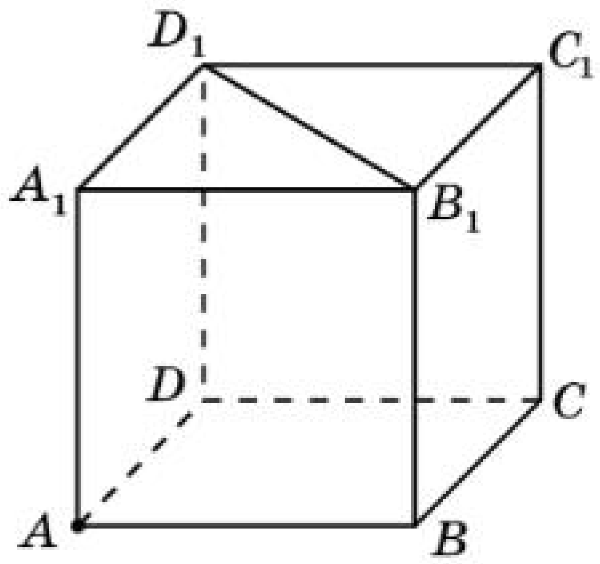
A нуқтадан b тўғри чизиққача бўлган масофани топиш учун, дастлаб A нуқтадан b тўғри чизиғига туширилган перпендикулярнинг B асосини топамиз. Агар AB перпендикулярнинг узунлигини топиш масаланинг шартидан келиб чиқмаса, унда b тўғри чизиғидан қандайдир C, D нуқталарни олиб, баландлиги AB бўлган ACD учбурчакни кўриб чиқамиз (10.2-расм). AB баландлигини топиш учун Пифагор теоремаси ёки бошқа муҳим теоремалар билан формулалар қўлланилади.

Агар перпендикулярнинг B асоси 10.3-расмдагидай b тўғри чизиғидан ташқарида ётса, унда A нуқта орқали b тўғри чизиғига параллел a тўғри чизиғини ўтказамиз ва ундан перпендикулярнинг B' асоси b тўғри чизиғида ётадиган A' нуқтасини танлаб оламиз (10.3-расм). $A'B'$ кесманинг узунлиги изланган A нуқтадан b тўғри чизиғигача бўлган масофага тенг бўлади.

AB ва $A'B'$ кесмаларнинг тенглигини мустақил исботланг.

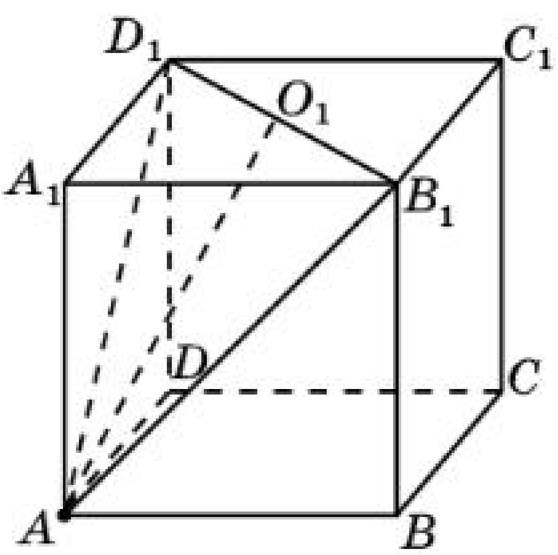


10.3-расм



10.4-расм

Масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан B_1D_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг (10.4-расм).



10.5-расм

Ечиш. AB_1D_1 учбурчагини кўриб чиқайлик. У томони $\sqrt{2}$ га тенг бўлган тенг томонли учбурчак. A учидан B_1D_1 тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг асоси. B_1D_1 кесманинг O_1 ўртаси бўлади (10.5-расм). AO_1 перпендикуляр $\frac{\sqrt{6}}{2}$ га тенг.

Шунингдек, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан B_1D_1 тўғри чизиғигача бўлган масофа $\frac{\sqrt{6}}{2}$ га тенг бўлади.

Саволлар

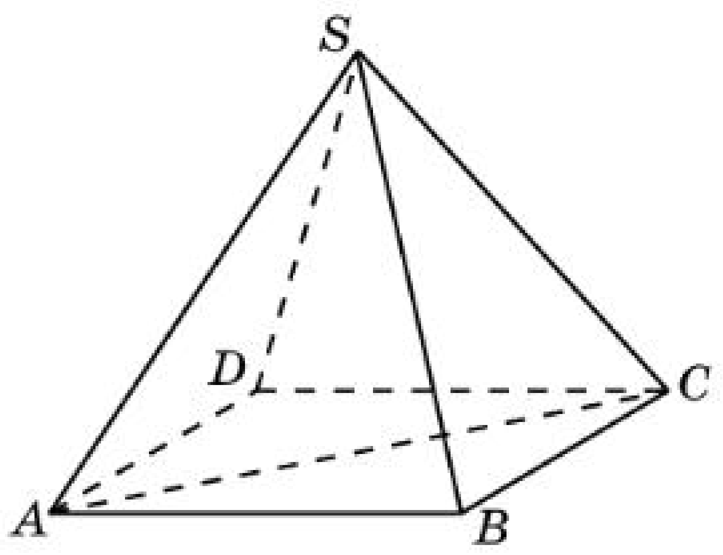
1. Фазодаги нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа деб нимага айтилади?
2. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа қандай топилади?

Масалалар

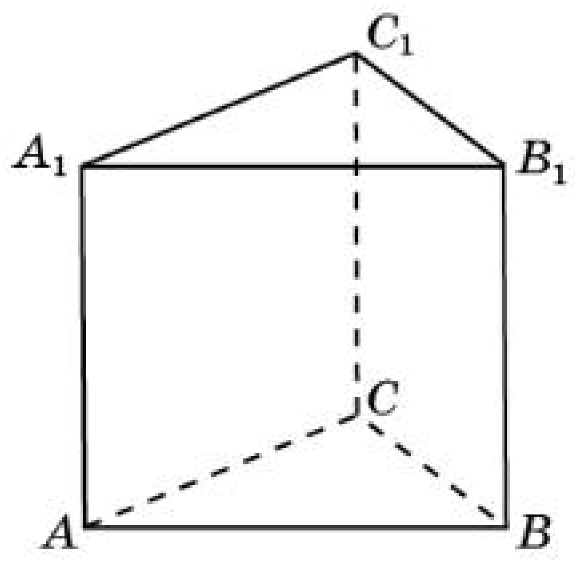
A

10.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан қуйидаги тўғри чизиққача бўлган масофани топинг: а) BC; б) BD; в) C_1D_1.

10.2. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари бирга тенг (10.6-расм). S учидан қуйидаги тўғри чизиққача бўлган масофани топинг: а) AB; б) AC.



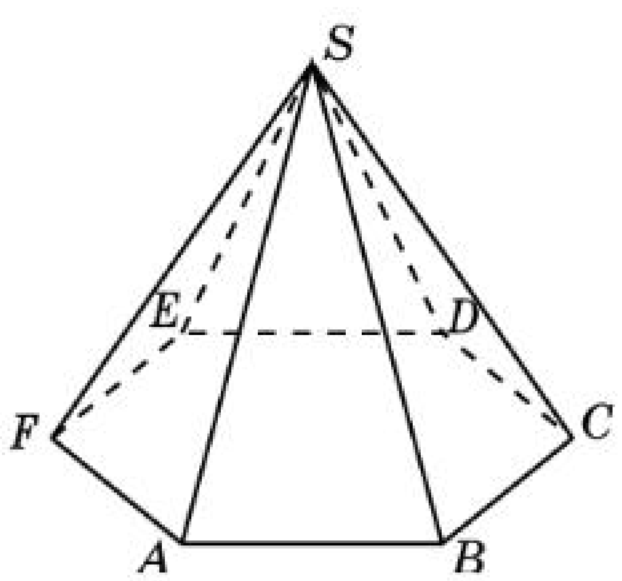
10.6-расм



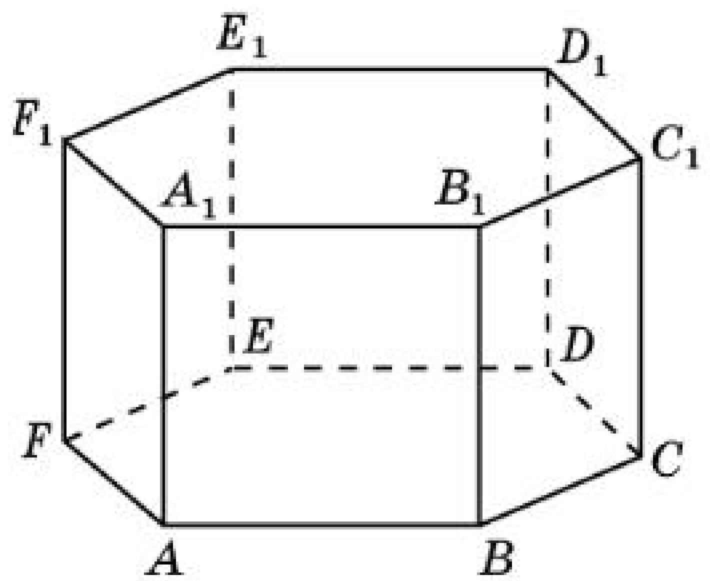
10.7-расм

10.3. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари бирга тенг (10.7-расм). A нуқтадан қуйидаги тўғри чизиққача бўлган масофани топинг: а) BB_1; б) BC; в) BA_1.

10.4. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (10.8-расм). S учидан AD тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.



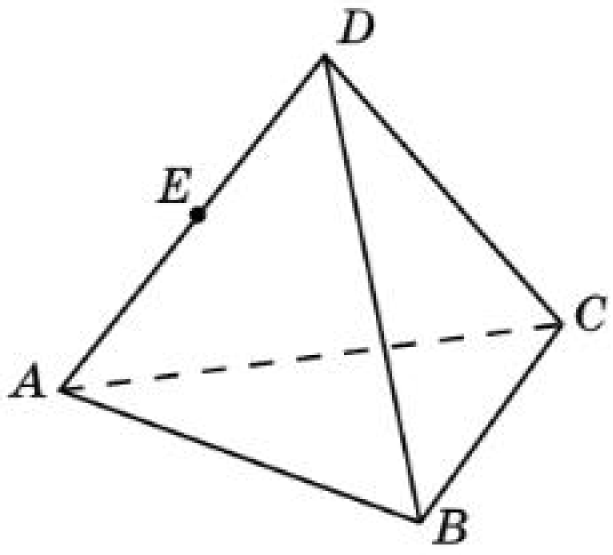
10.8-расм



10.9-расм

10.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (10.9-расм). A нуқтадан қуйидаги тўғри чизиққача бўлган масофани топинг: а) BB_1; б) BA_1; в) BC; г) CD; д) DE; е) BD; ё) BE; ж) BF; з) CE; и) CF; к) A_1B_1.

B



10.10-расм

10.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A нуқтасидан CB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

10.7. $ABCD$ тетраэдрининг барча қирралари 1 га тенг (10.10-расм). Унинг AD қиррасининг E ўртасидан BC тўғри чизиғигача бўлган масофа топинг.

10.8. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (10.7-расм). A нуқтадан B_1C_1 тўғри чизиғигача бўлган масофа топинг.

10.9. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асоси 1 га, ён қирралари 2 га тенг (10.8-расм). S учидан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

C

10.10. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (10.7-расм). A нуқтадан BC_1 тўғри чизиғигача бўлган масофа топинг.

10.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (10.9-расм). A нуқтадан тўғри чизиғигача бўлган масофа топинг: а) B_1F_1; б) B_1C_1.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

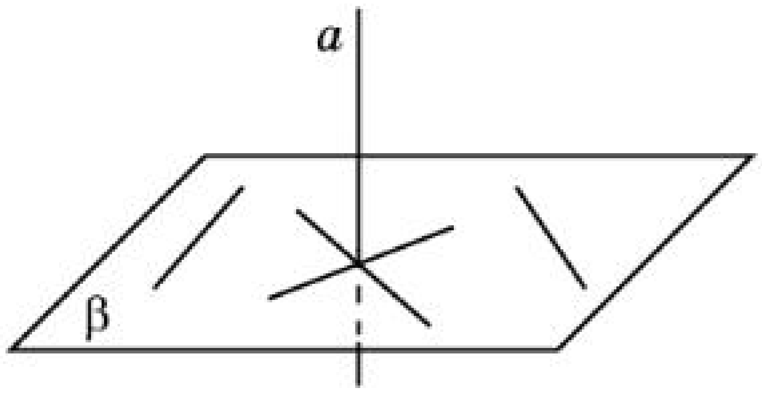
10.12. Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлигини таърифланг.

10.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг ABC текислигига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқларини кўрсатинг.

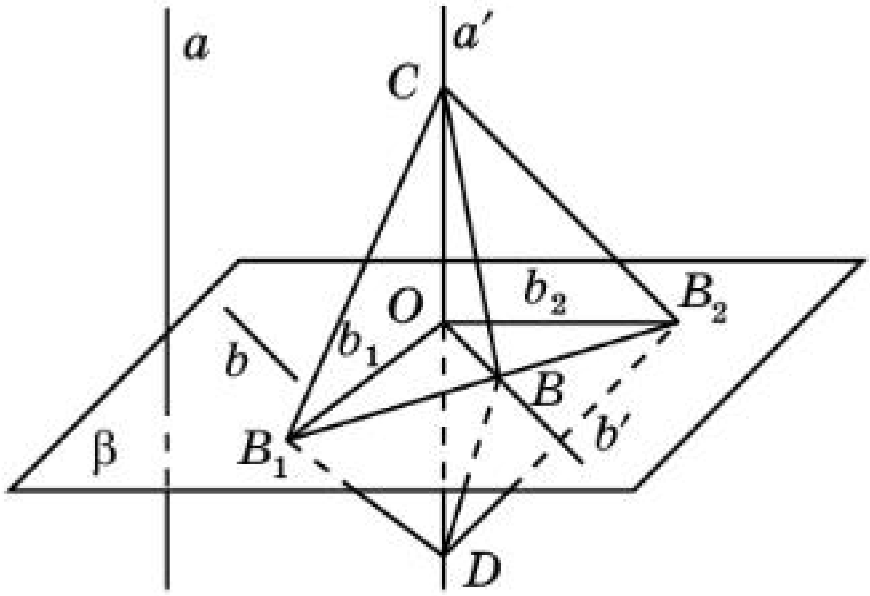
11-§. Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикуляриги

Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлиги тушунчасини аниқлайлик.

Агар тўғри чизиқ текисликдаги ихтиёрий бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, унда шу *тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр* деб аталади (11.1-расм).



11.1-расм



11.2-расм

a тўғри чизиғи билан β текислигининг перпендикулярлиги $a \perp \beta$ орқали белгиланади.

Текисликка перпендикуляр тўғри чизиқда ётадиган кесма ҳам шу текисликка перпендикуляр бўлади.

Текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ шу текисликни кесиб ўтишини биламиз. Ҳақиқатан, агар тўғри чизиқ текисликда ётса ёки унга параллел бўлса, у ҳолда шу текисликда унга параллел бўлган тўғри чизиқ мавжуд. Бундан, дастлабки тўғри чизиқ берилган текисликка перпендикуляр эмаслиги келиб чиқади.

Қуйидаги теорема тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлигининг етарлилик шартини беради.

Теорема (Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлик аломати). ***Агар тўғри чизиқ текисликда ётган ўзаро кесишувчи икки тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, унда бу тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлади.***

Исботи. a тўғри чизиғи β текислигида ётган O нуқтада кесишувчи b_1, b_2 тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлсин (11.2-расм).

β текислигининг ихтиёрий b тўғри чизиғини кўриб чиқайлик. O нуқта орқали a, b тўғри чизиқларга параллел мос равишда a', b' тўғри чизиқларни ўтказамиз. a, b тўғри чизиқларнинг перпендикулярлигини исботлаш учун a', b' тўғри чизиқларнинг перпендикулярлигини исботлаш етарли.

Бунинг учун β текислигида b_1, b_2, b' тўғри чизиқларни мос равишда B_1, B_2, B нуқталарда кесиб ўтувчи тўғри чизиқ ўтказамиз. a' тўғри чизиғидаги O нуқтадан OC, OD тенг кесмаларни оламиз ва C, D нуқталарни B_1, B_2, B нуқталари билан туташтирамиз. OB_1C ва OB_1D тўғри бурчакли учбурчаклар тенг (катетлари бўйича) бўлади. Демак, $B_1C = B_1D$.

Шунга ўхшаш, OB_2C ва OB_2D тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглигидан $B_2C = B_2D$ келиб чиқади. B_1B_2C ва B_1B_2D учбурчаклар тенг (уч томони бўйича) бўлади. Демак, $\angle CB_1B = \angle DB_1B$.

B_1BC ва B_1BD учбурчаклар тенг (икки томони ва уларнинг орасидаги бурчаги бўйича) бўлади. Шунинг билан $BC = BD$. OBC ва OBD учбурчаклар тенг (уч томони бўйича), унда $\angle BOC = \angle BOD = 90^\circ$, яъни a' билан b' тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр.

Демак, a тўғри чизиқ β текисликка перпендикуляр бўлади. □

Агар тўғри чизиқ текисликка тегишли икки тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ текисликка ҳам перпендикуляр бўладими? Мисол келтиринг.

Тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлмайдиган шартига мулоҳаза юритинг.

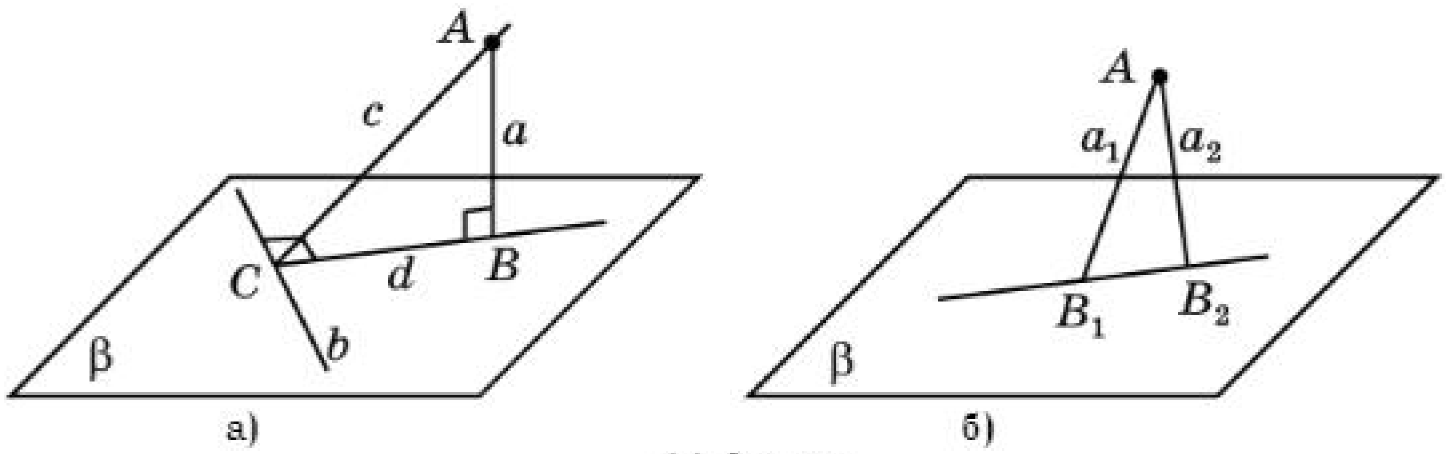
Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлигининг айрим хоссаларини кўриб чиқайлик.

1-хосса. *Берилган текисликдан ташқарида ётган нуқта орқали шу текисликка перпендикуляр фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.*

Исботи. A нуқта ва β текисликни кўриб чиқайлик (11.3, а-расм). β текислигида ихтиёрий b тўғри чизиғини ўтказамиз.

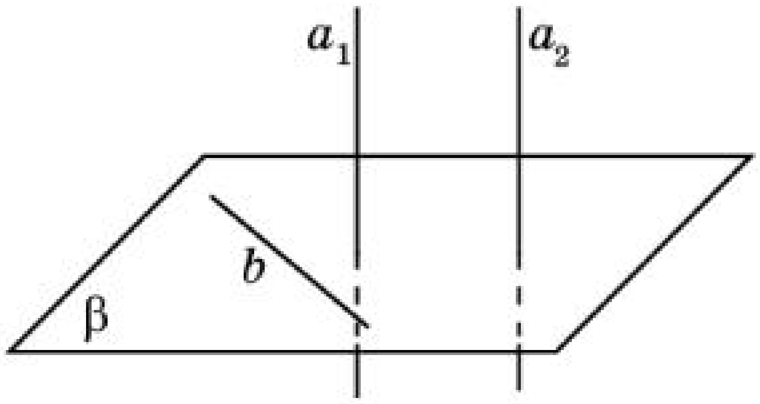
A нуқта ва b тўғри чизиғи билан берилган текисликда b тўғри чизиғига перпендикуляр. b ва c тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини C нуқта орқали белгилайлик. β текислигида C нуқта орқали b тўғри чизиққа перпендикуляр d тўғри чизиғини ўтказамиз. b тўғри чизиғи c ва d тўғри чизиқлар билан берилган β текислигига перпендикуляр бўлиши келиб чиқади.

A нуқта ва d тўғри чизиғи билан берилган текисликда d тўғри чизиғига перпендикуляр a тўғри чизиғини ўтказамиз. Шу тўғри чизиқ β текислигига перпендикуляр изланган тўғри чизиқ бўлади. Ҳақиқатан, a тўғри чизиғи d тўғри чизиғига перпендикуляр бўлади. Шундай қилиб у β текислигида ётади, энди b тўғри чизиғига перпендикуляр бўлади. Шунинг билан a тўғри чизиғи β текислигидаги кесишувчи икки b ва d тўғри чизиқларига перпендикуляр бўлади, Демак, у шу текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.



11.3-расм

Ягоналигини исботлайлик. A нуқта орқали β текислигига перпендикуляр икки a_1 ва a_2 тўғри чизиқлари мавжуд, деб фараз қилайлик (11.3, б-расм). Уларнинг β текислиги билан мос равишда кесишувчи нуқталарни B_1, B_2 деб белгилайлик. Шунда AB_1B_2 текислигида A нуқта орқали ўтувчи ва B_1B_2 тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ мавжуд бўлади. Бу эса текисликдаги перпендикуляр тўғри чизиқларнинг мос хоссасига зид келади. Энди A нуқта орқали β текислигига перпендикуляр биттадан ортиқ тўғри чизиқ



11.4-расм

ўтиши мумкин эмас. Демак, бундай тўғри чизиқ фақат битта бўлади. □

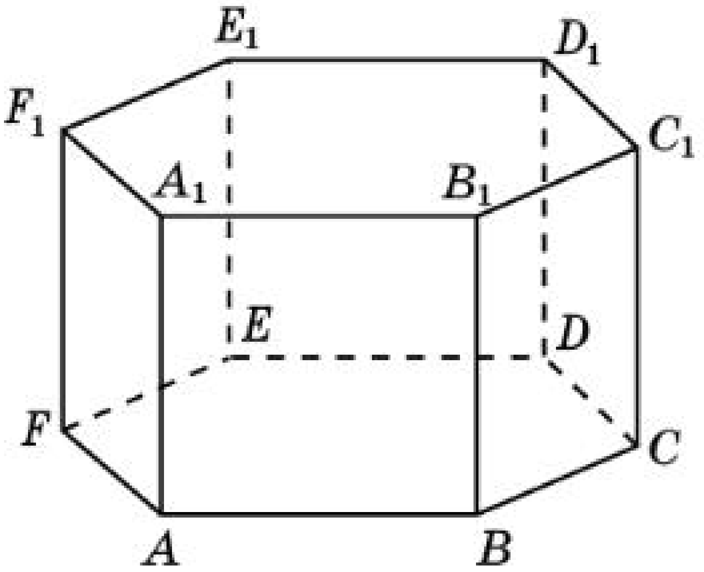
2-хосса. *Агар тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлса, унда бу тўғри чизиққа параллел бўлган ихтиёрий тўғри чизиқ шу текисликка перпендикуляр бўлади.*

Исботи. a_1 тўғри чизиғи β текислигига перпендикуляр ва a_2 тўғри чизиғи a_1 тўғри чизиғига параллел бўлсин (11.4-расм). a_1 тўғри чизиғи β текислигида ётган ихтиёрий тўғри чизиққа перпендикуляр бўлганлигидан, a_1 тўғри чизиғига параллел a_2 тўғри чизиғи ҳам шу текисликда ётган ихтиёрий тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади. Демак, у β текислигига перпендикуляр бўлади. □

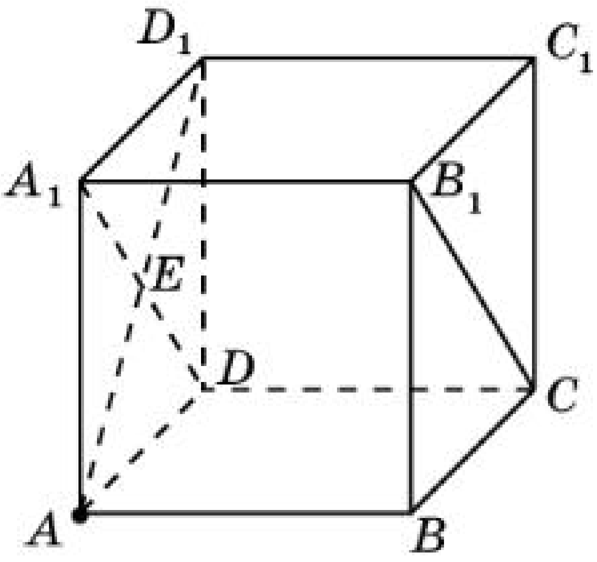
3-хосса. *Бир текисликка перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлади.*

Исботи. a_1 ва a_2 тўғри чизиқлар β текислигига перпендикуляр бўлсин. a_2 тўғри чизиғида ётган ихтиёрий бир A_2 нуқта орқали a_1 тўғри чизиғига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. 2-хосса бўйича у β текислигига перпендикуляр бўлади. 1-хосса бўйича у a_2 тўғри чизиғи билан мос келади. Демак, a_2 тўғри чизиғи a_1 тўғри чизиғига параллел бўлади. □

1-масала. Тўғри призманинг ён қирралари унинг асосига перпендикуляр бўлишини исботланг (11.5-расм).



11.5-расм



11.6-расм

Ечиш. Тўғри призманинг ён ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат. Шу туфайли ҳар бир ён қирраси призманинг асосининг ёпишган томонларига перпендикуляр бўлади. Демак, асосига перпендикуляр бўлади.

2-масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD_1 тўғри чизиғи CDA_1 текислигига перпендикуляр бўлишини исботланг.

Ечиш. AD_1 тўғри чизиғи DA_1 тўғри чизиғига перпендикуляр бўлади (11.6-расм). Шу билан бирга, у CD тўғри чизиғи перпендикуляр бўлган ADD_1 текислигида ётади. Демак, AD_1 тўғри чизиғи CDA_1 текислигига перпендикуляр бўлади.

Саволлар

1. Қандай тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр деб аталади?
2. Қандай кесма текисликка перпендикуляр деб аталади?
3. Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлик аломатини келтириб чиқаринг.

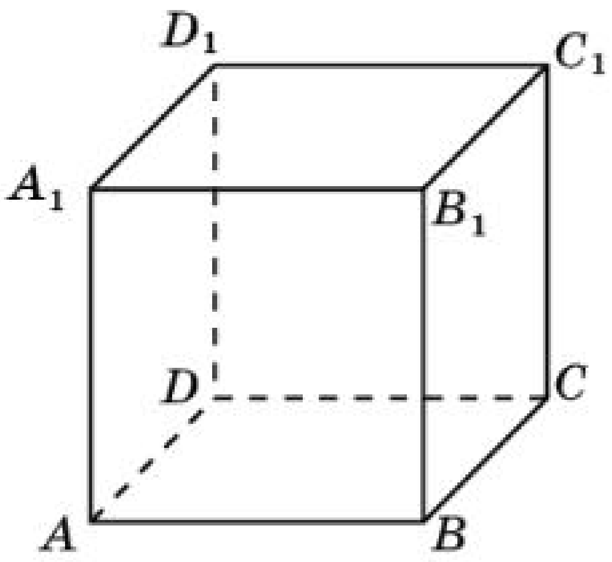
Масалалар

A

11.1. Тўғри чизиқ текисликка параллел. У шу текисликда ётган ихтиёрий бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиши мумкинми?

11.2. Учбурчакнинг икки томонига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ учбурчак текислиги билан қандай жойлашади?

11.3. Агар тўғри чизиқ доиранинг: а) диаметрига; б) иккита диаметрига перпендикуляр бўлса, у ҳолда уларнинг марказидан ўтувчи шу тўғри чизиқ доира текислигига перпендикуляр бўлиши ростми?



11.7-расм

11.4. a тўғри чизиғи α текислигини перпендикуляр бўлмаган ҳолда кесиб ўтади. α текислигида a тўғри чизиғи билан перпендикуляр бўлган тўғри чизиқлар мавжудми?

11.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (11.7-расм) қуйидаги тўғри чизиқ билан текислик перпендикуляр бўлишини исботланг: а) AA_1 ва ABC; б) AB ва BCC_1; в) AB_1 ва BCD_1.

B

11.6. Агар тўғри чизиқ параллел икки текисликнинг бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ иккинчи текисликка ҳам перпендикуляр бўлиши тўғрими?

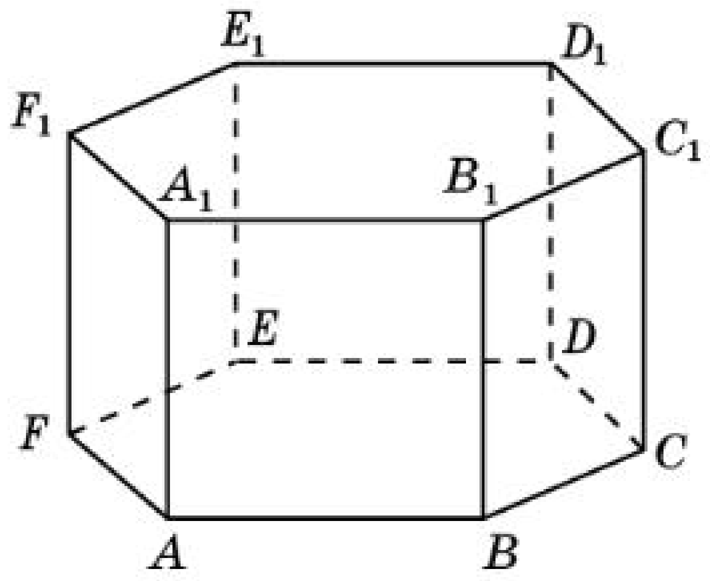
11.7. Икки тўғри чизиқ қандай жойлашганда биринчиси орқали иккинчисига перпендикуляр бўлган текисликни ўтказиш мумкин?

11.8. Агар учбурчакнинг бир томони орқали иккинчи томонига перпендикуляр текислик ўтказиш мумкин бўлса, унда учбурчакнинг турини аниқланг.

11.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (11.7-расм) қуйидаги тўғри чизиқларнинг перпендикулярлигини исботланг: а) AA_1 ва AC; б) AA_1 ва BD; в) AB ва BC_1.

11.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада (11.8-расм) қуйидаги тўғри чизиқ билан текислик перпендикуляр бўлишини исботланг: а) AA_1 ва ABC; б) AB ва BDD_1; в) AC ва CDD_1; г) AC ва BEE_1; д) AD ва CEE_1; е) AB_1 ва BDE_1.

11.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада қуйидаги тўғри чизиқларнинг перпендикуляр бўлишини исботланг: а) AA_1 ва AC; б) AA_1 ва AD; в) AA_1 ва AE; г) AA_1 ва BF; д) AB ва BD_1; е) AB ва EA_1; г) AC ва DC_1.



11.8-расм

C

11.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC ва BD_1 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлишини исботланг.

11.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BD_1 тўғри чизиғи ACB_1 текислигига перпендикуляр бўлишини исботланг.

11.14. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамидада AC ва SB тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлишини исботланг.

11.15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада BE_1 тўғри чизиғи ACB_1 текислигига перпендикуляр бўлишини исботланг.

11.16. Берилган текисликдаги ихтиёрий нуқта орқали шу текисликка фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.

11.17. Атрофимиздаги оламда ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқ билан текисликка мисоллар келтиринг.

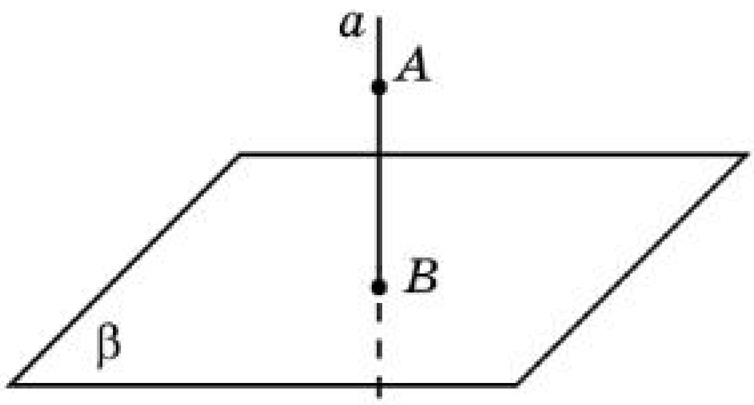
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

11.18. Нуқтадан текисликкача бўлган масофани таърифланг.

11.19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A_1 учидан ABC текислигигача бўлган масофани топинг.

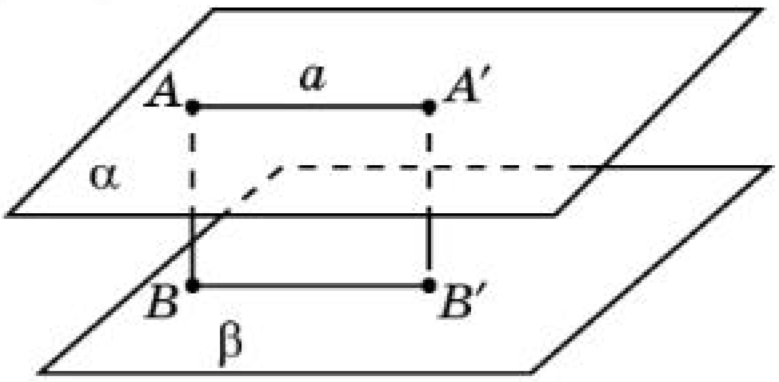
12-§. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа

β текисликда ётмайдиган A нуқта орқали шу текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг текислик билан кесишиш нуқтасини B деб белгилайлик (12.1-расм). AB кесмага A нуқтадан β текислигига туширилган *перпендикуляр* деб аталади. Бу кесма узунлиги *A нуқтадан β текисликкача бўлган масофа* деб аталади.



12.1-расм

Агар перпендикулярнинг *B асоси* 12.2-расмдагидек β текислиги юзасидан сиртда ётса, у ҳолда A нуқта орқали



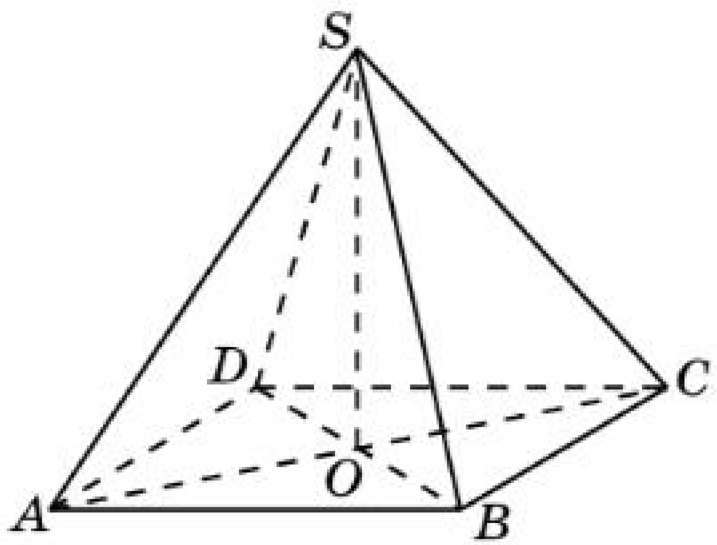
12.2-расм

β текислигига паралел a тўғри чизиқни ёки α текислигини ўтказамиз ва унга тегишли перпендикулярнинг B' асоси β текислигида ётувчи A' нуқтасини оламиз. $A'B'$ кесманинг узунлиги сўралаётган A нуқтадан β текислигигача бўлган масофага тенг бўлади.

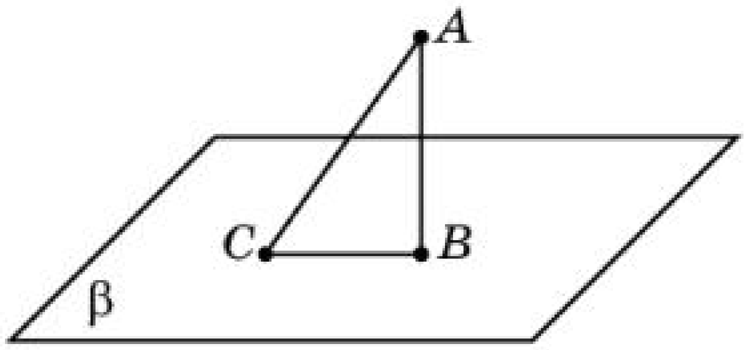
AB ва $A'B'$ кесмаларнинг тенглигини мустақил исботланг.

Пирамиданинг учидан унинг асос текислигига туширилган перпендикуляр *пирамиданинг баландлиги* деб аталади.

12.3-расмда $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг SO баландлиги кўрсатилган.



12.3-расм

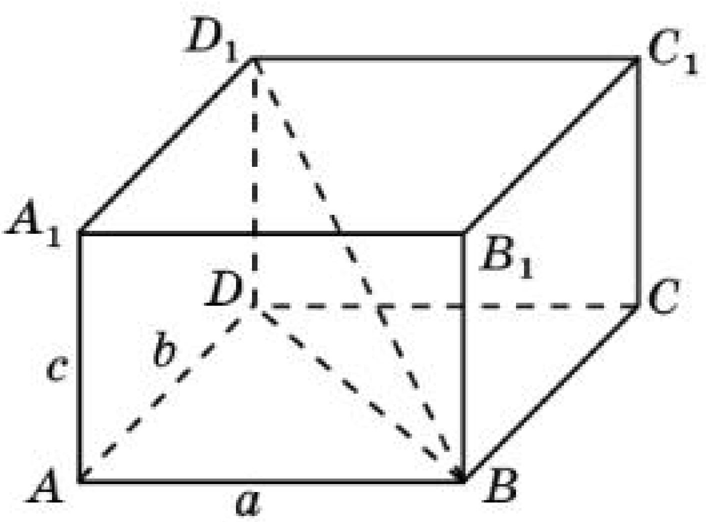


12.4-расм

β текислигига тегишли бўлмаган A нуқтани шу текисликдаги C нуқта билан туташтирувчи ва перпендикуляр бўлмайдиган AC кесмани A нуқтадан β текислигига *туширилган оғма* деб аталади (12.4-расм).

Берилган нуқтадан текисликка туширилган перпендикуляр шу нуқтадан берилган текисликка ўтказилган ихтиёрий оғмадан кичик бўлишини исботланг.

Масофаларни топишга доир мисолларни қарайлик.



12.5-расм

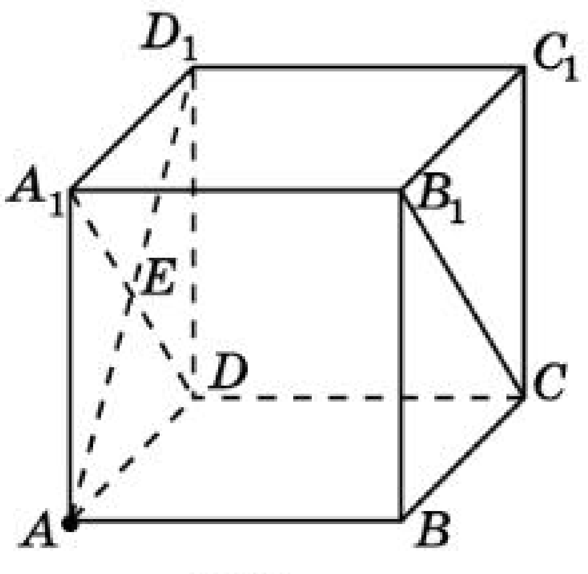
1-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипединг B ва D_1 учлари орасидаги (диагонали) масофани топинг (12.5-расм), бунда $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

Ечиш. DD_1 тўғри чизиғи DA ва DC тўғри чизиқларига перпендикуляр. У эса ABC текислигига перпендикуляр. Демак, у тўғри чизиқ DB тўғри чизиғига ҳам перпендикуляр бўлади.

BDD_1 тўғри бурчакли учбурчакда $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, $DD_1 = c$. Пифагор теоремаси бўйича гипотенузасини топамиз: $BD_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан CDA_1 текислигигача бўлган масофани топинг (12.6-расм).

Ечиш. AD_1 кесмани ўтказамиз. Унинг DA_1 кесма билан кесишиш нуқтасини E деб белгилайлик. AE тўғри чизиқ DA_1 ва DC тўғри чизиқларига перпендикуляр. Демак, у CDA_1 текислигига ҳам перпендикуляр бўлади. AE кесма A нуқтадан CDA_1 текислигига туширилган изланган перпендикуляр бўлади. Унинг узунлиги $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ге тенг. Демак, бирлик кубнинг A учидан CDA_1 текислигигача бўлган масофа $\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг бўлади.



12.6-расм

Саволлар

1. Нуқтадан текисликка туширилган перпендикуляр деб нимага айтилади?
2. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа деб нимага айтилади?
3. Оғма деб нимага айтилади?

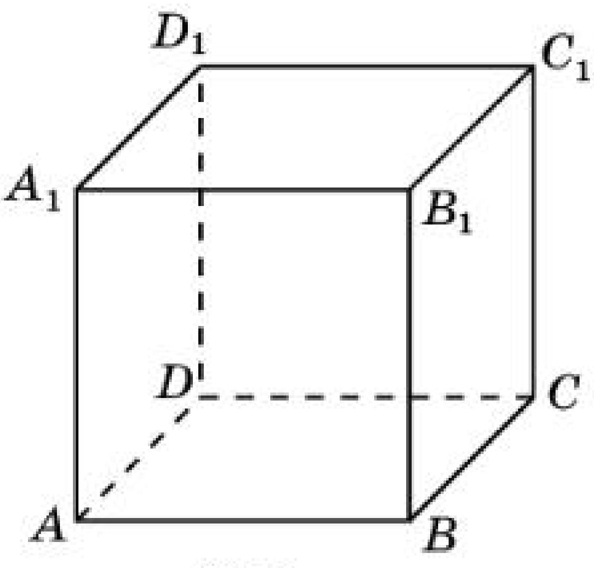
Масалалар

A

12.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедда $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. AC_1 диагоналини топинг.

12.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги A учидан қуйидаги текисликларгача бўлган масофани топинг: а) BCC_1; б) BCD_1 (12.7-расм).

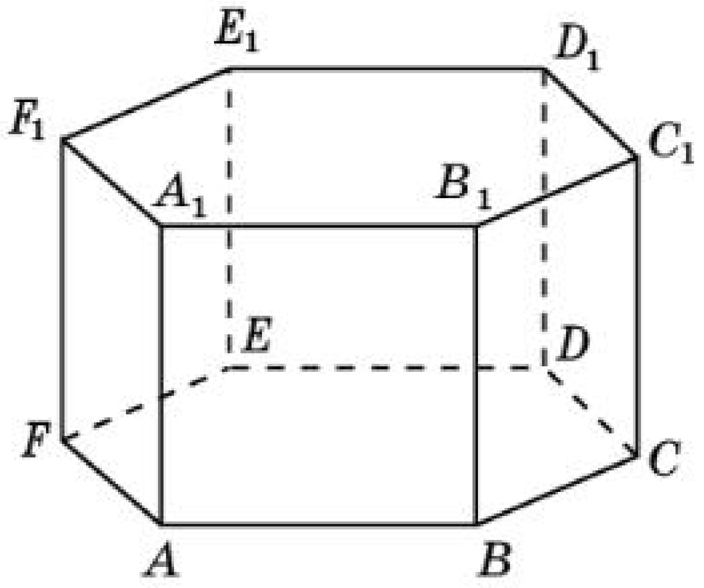
12.3. Барча қирралари 1 га тенг $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлигини топинг (12.3-расм).



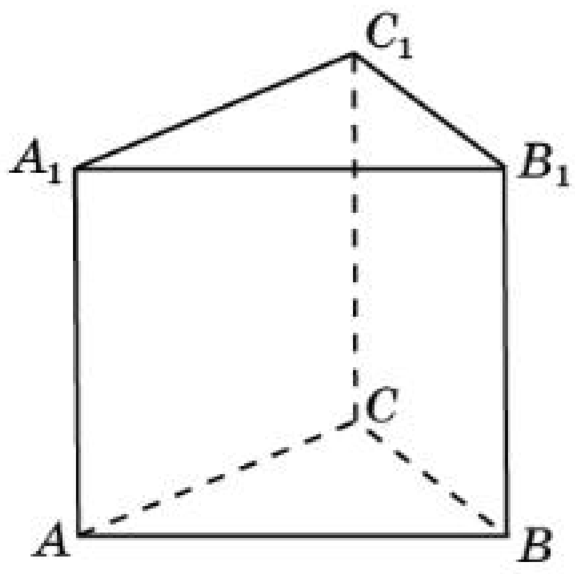
12.7-расм

B

12.4. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (12.8-расм). A учидан қуйидаги текисликларгача бўлган масофани топинг: а) BDD_1; б) BEE_1; в) BFF_1; г) BCC_1; д) CDD_1; е) CEE_1; ж) CFF_1.



12.8-расм



12.9-расм

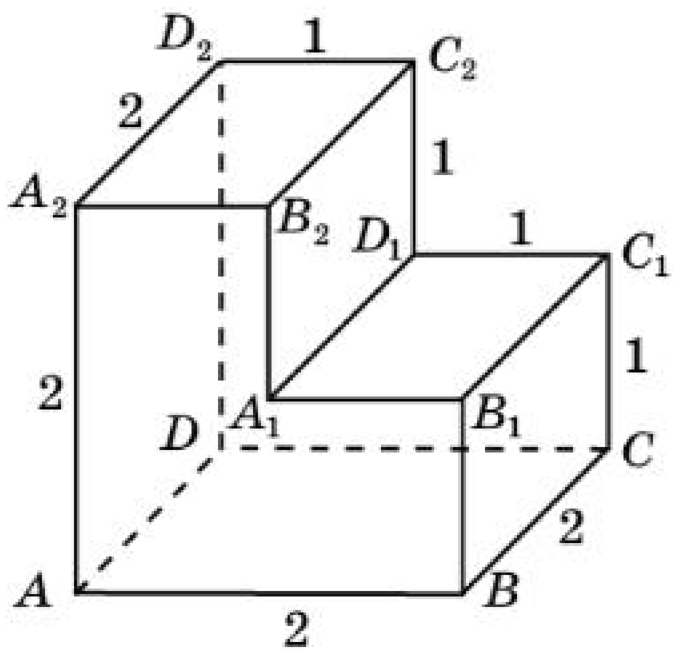
12.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (12.8-расм). Икки учи орасидаги масофани топинг: а) A ва C_1; б) A ва D_1.

12.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (12.8-расм). A учидан қуйидаги чизиқларгача бўлган масофани топинг: а) BD_1; б) CD_1.

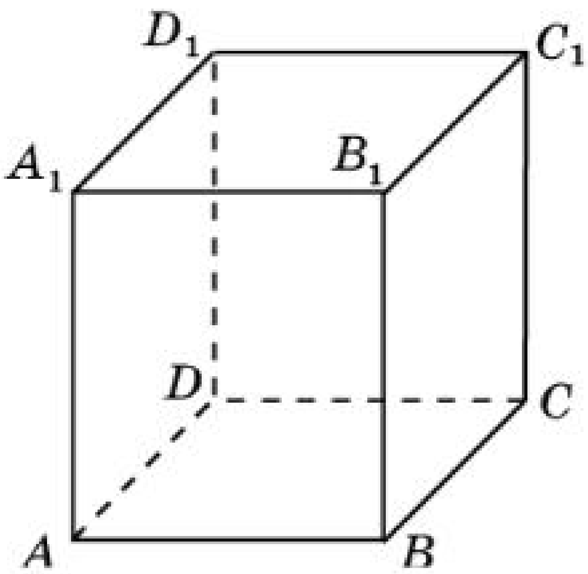
12.7. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг асосининг томонлари 1 га тенг (12.9-расм). Шу призманинг A учидан BCC_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

12.8. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар бўлади (12.10-расм). Қуйидаги учлари орасидаги масофани топинг: а) A ва C_1; б) A ва D_1; в) A ва C_2; г) B ва D_1; д) B ва D_2.

12.9. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар бўлади (12.10-расм). A учидан қуйидаги чизиққача бўлган масофани топинг: а) B_1C_1; б) A_1D_1; в) B_2C_2.



12.10-расм

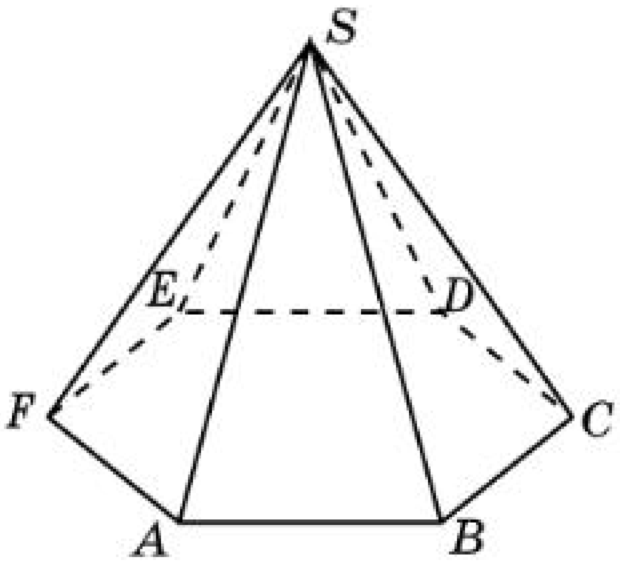


12.11-расм

12.10. Тўғри тўртбурчакли призманинг асоси ромб. Унинг томони 3 га ва ўткир бурчаги 60°га тенг. Призманинг ён қирраси 4 га тенг. Призманинг кичик диагоналини топинг (12.11-расм).

12.11. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг баландлигини чизинг (12.12-расм).

12.12. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. Унинг баландлигини топинг (12.12-расм).



12.12-расм

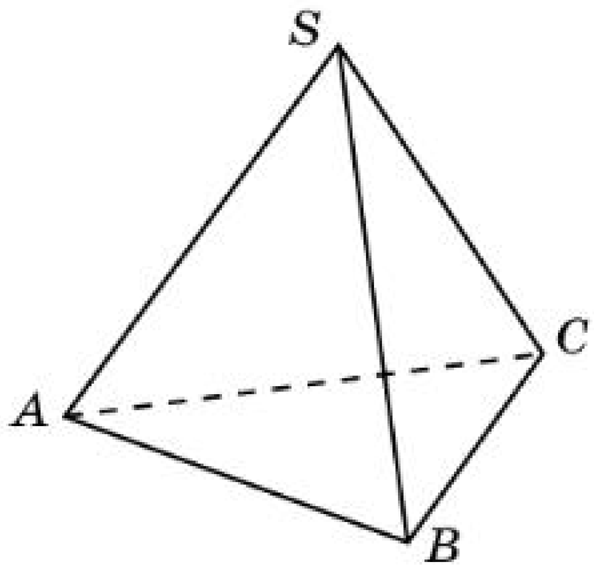
C

12.13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (12.8-расм). A учидан қуйидаги чизиқларгача бўлган масофани топинг: а) BE_1; б) CE_1.

12.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги B учидан ACB_1 текислигигача бўлган масофани топинг (12.7-расм).

12.15. $SABC$ мунтазам учбурчакли пирамиданинг баландлигини ясанг (12.13-расм).

12.16. $SABC$ мунтазам учбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг баландлигини топинг (12.13-расм).



12.13-расм


12.14-расм

12.17. Нур-Султан шаҳридаги мустақиллик саройи мунтазам тўртбурчакли пирамидага ўхшаш (12.14-расм). Унинг баландлиги асосининг томонига, яъни 62 м га тенг. Шу пирамиданинг ён қиррасининг узунлигини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

12.18. Параллел тўғри чизиқ ва текислик орасидаги масофа тушунчасини таърифланг.

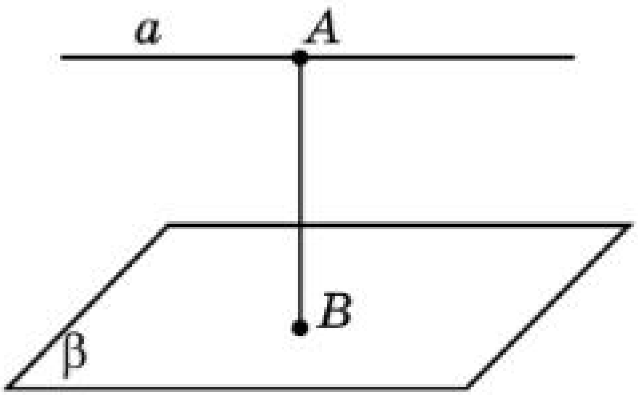
12.19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги A_1C_1 тўғри чизиғи билан ABC орасидаги масофани топинг.

12.20. Параллел икки текислик орасидаги масофа тушунчасини таърифланг.

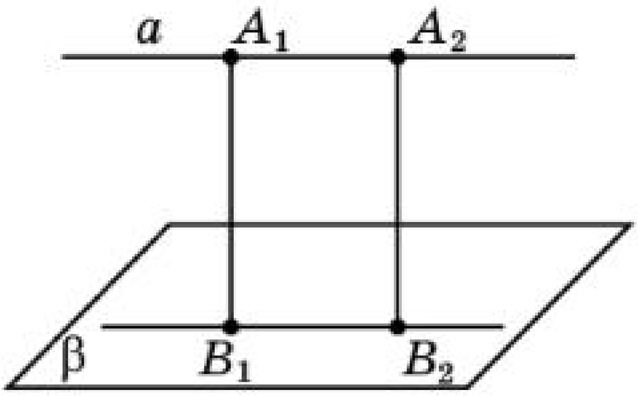
12.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги $A_1B_1C_1$ ва ABC текисликлар орасидаги масофани топинг.

13-§. Ўзаро параллел тўғри чизиқ билан текислик ва параллел икки текислик орасидаги масофа

Тўғри чизиқ ва унга параллел текислик берилсин. *Ўзаро параллел тўғри чизиқ билан текислик орасидаги масофа* деб, тўғри чизиқнинг ихтиёрий бир нуқтасидан текисликкача бўлган масофага айтилади (13.1-расм).



13.1-расм

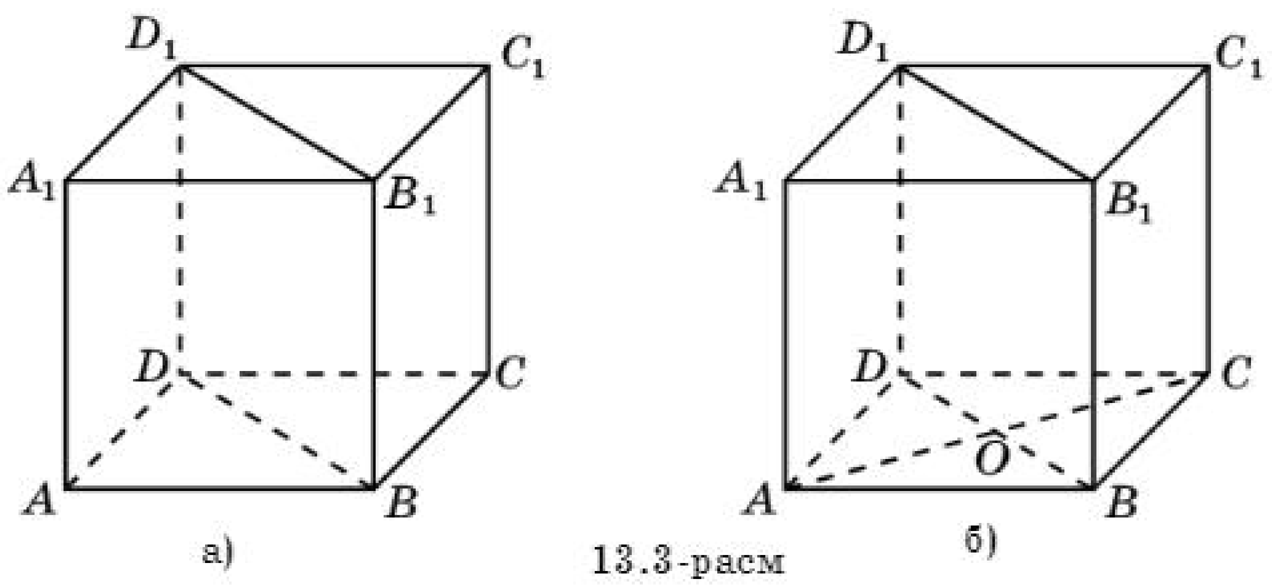


13.2-расм

Теорема. ***Ўзаро параллел тўғри чизиқ билан текислик орасидаги масофа тўғри чизиқдан олинган нуқтанинг танлаб олинишига боғлиқ эмас.***

Исботи. A_1, A_2 нуқталар — β текислигига параллел бўлган a тўғри чизиқда ётган нуқталар (13.2-расм), B_1, B_2 нуқталар — шу нуқталардан текисликка туширилган перпендикулярларнинг асослари булсин. 11-параграфдаги 3-хосса бўйича A_1B_1 ва A_2B_2 перпендикулярлар ўзаро параллел бўлади. B_1B_2 тўғри чизиқ β текислигининг шу перпендикулярлар ва берилган текислик билан кесишиш чизиғи бўлади. Шунга ўхшаш B_1B_2 тўғри чизиқ a текислиги билан ўзаро параллел $A_1A_2B_2B_1$ тўртбурчак — параллелограмм(тўғри тўртбурчак). Демак, $A_1B_1 = A_2B_2$ бўлади. ◻

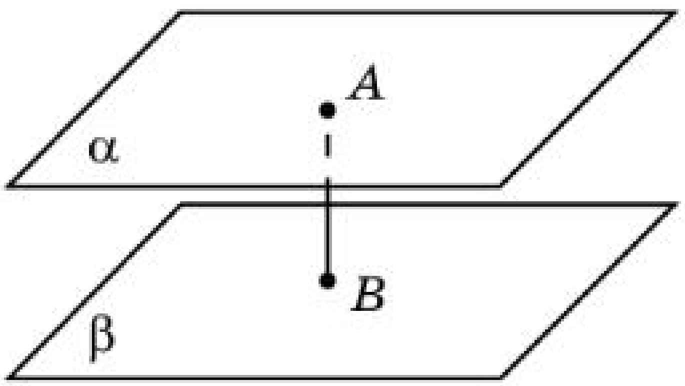
1-масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AA_1 тўғри чизиқ ва BDD_1 айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг (13.3, а-расм).



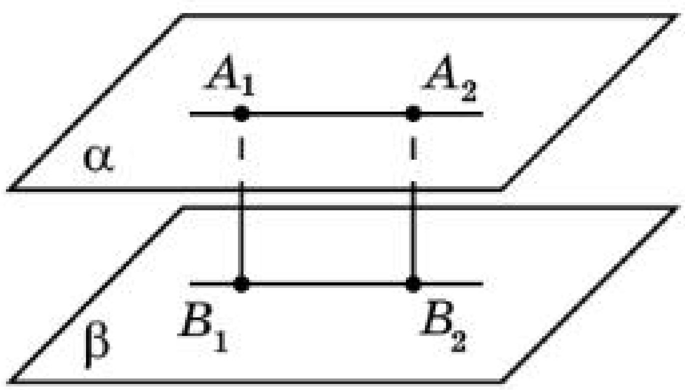
13.3-расм

Ечиш. Кубнинг $ABCD$ ёғининг AC диагонали BDD_1 текислигига перпендикуляр. AC диагоналининг BDD_1 текислиги билан кесишиш нуқтасини O деб белгилайлик (13.3, б-расм). AA_1 тўғри чизиқ билан BDD_1 текислигининг орасидаги масофа AO кесманинг узунлигига, яъни $\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг бўлади.

Параллел икки текислик орасидаги масофа деб, улардан бирининг ихтиёрий нуқтасидан иккинчи текисликка туширилган перпендикулярга айтилади (13.4-расм).



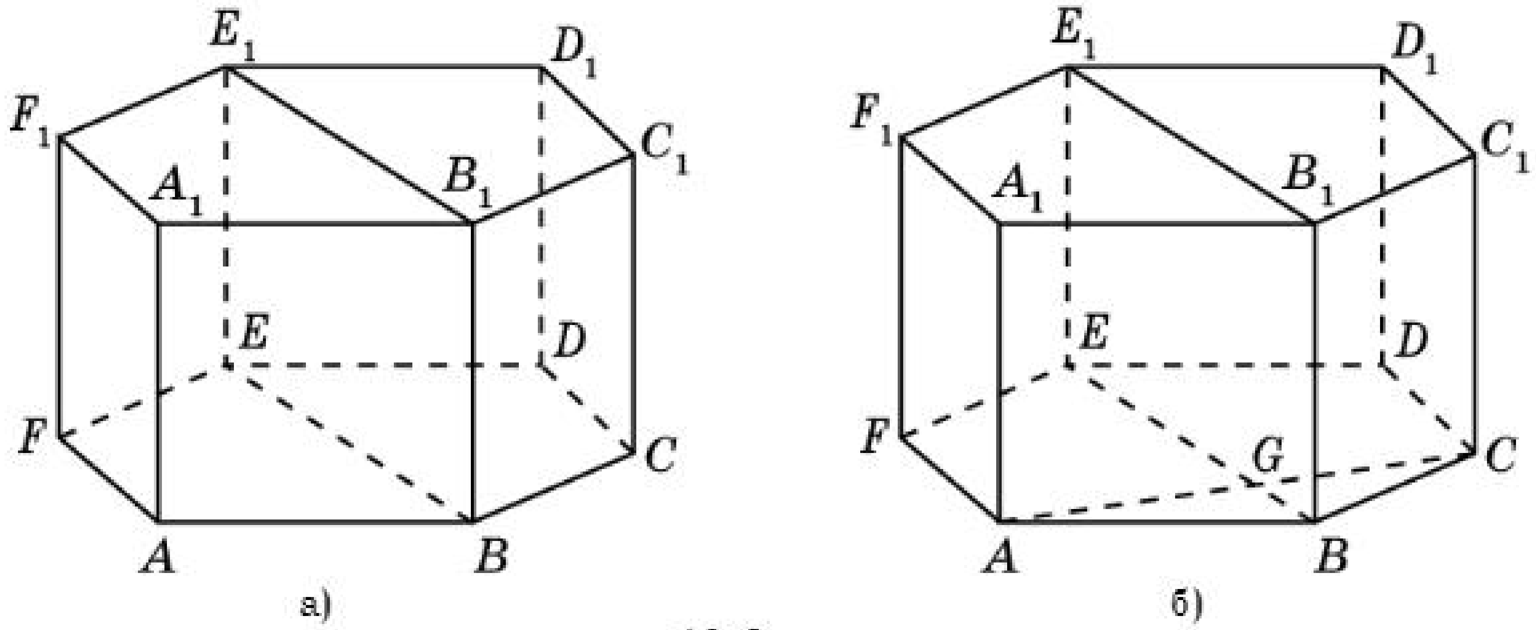
13.4-расм



13.5-расм

Параллел икки текислик орасидаги масофа текисликдаги нуқтани танлаб олишга боғлиқ эмаслигини мустақил исботланг (13.5-расм).

2-масала. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AFF_1 ва BEE_1 текисликлар орасидаги масофани топинг (13.6, а-расм).



13.6-расм

Ечиш. Призманинг $ABCDEF$ ёғининг AC диагонали BEE_1 текислигига перпендикуляр. Шу диагоналнинг BEE_1 текислиги билан кесишиш нуқтасини G деб белгилайлик (13.6, б-расм). AFF_1 ва BEE_1 текисликлар орасидаги масофа AG кесманинг узунлигига, яъни $\frac{\sqrt{3}}{2}$ га тенг бўлади.

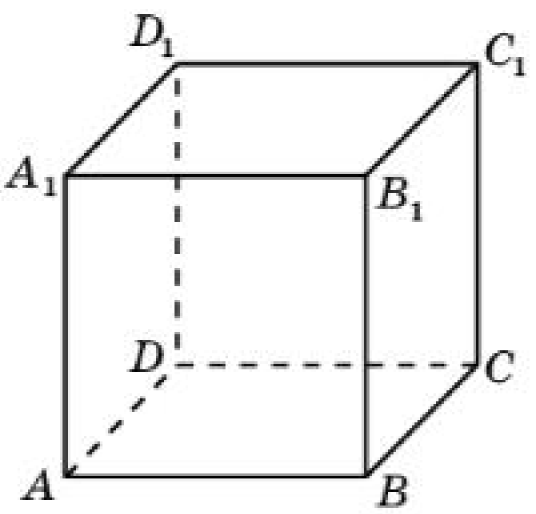
Саволлар

1. Ўзаро параллел тўғри чизиқ билан текислик орасидаги масофа деб нимага айтилади?
2. Ўзаро параллел тўғри чизиқ билан текислик орасидаги масофа қандай топилади?
3. Ўзаро параллел икки текисликнинг орасидаги масофа деб нимага айтилади?

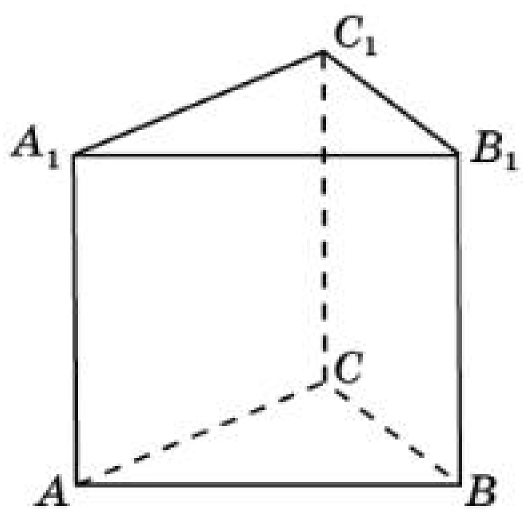
Масалалар

A

13.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда: а) AA_1 тўғри чизиқ билан BCC_1 текислиги орасидаги масофани; б) AB_1 тўғри чизиқ билан CDD_1 текислиги орасидаги масофани топинг (13.7-расм).



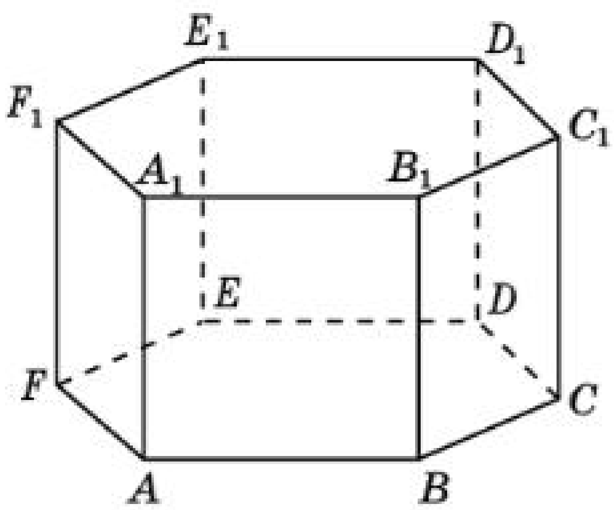
13.7-расм



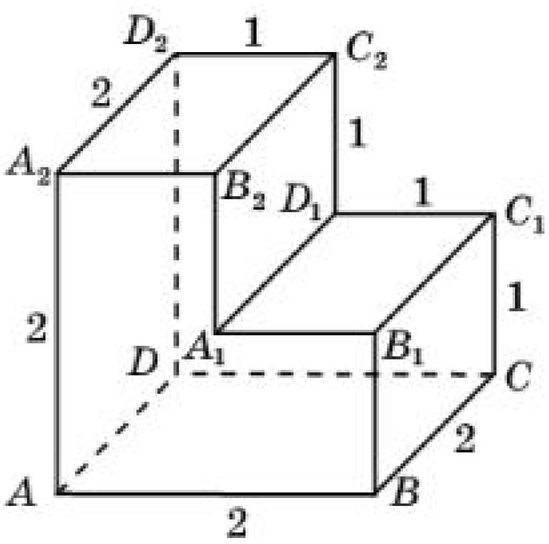
13.8-расм

13.2. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари бирга тенг (13.8-расм). AA_1 тўғри чизиқ билан BCC_1 текислиги орасидаги масофани топинг.

13.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (13.9-расм). AA_1 тўғри чизиқ билан қуйидаги текислик орасидаги масофани топинг: а) BCC_1; б) CDD_1; в) DEE_1; г) BDD_1; д) BEE_1; е) BFF_1; ж) CEE_1; и) CFF_1.



13.9-расм



13.10-расм

13.4. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар (13.10-расм). Қуйидаги текисликлар орасидаги масофани топинг: а) ABB_1 ва CDD_2; б) ADD_2 ва BCC_1; в) ADD_2 ва $A_1D_1C_2$; г) ABC ва $A_1B_1C_1$.

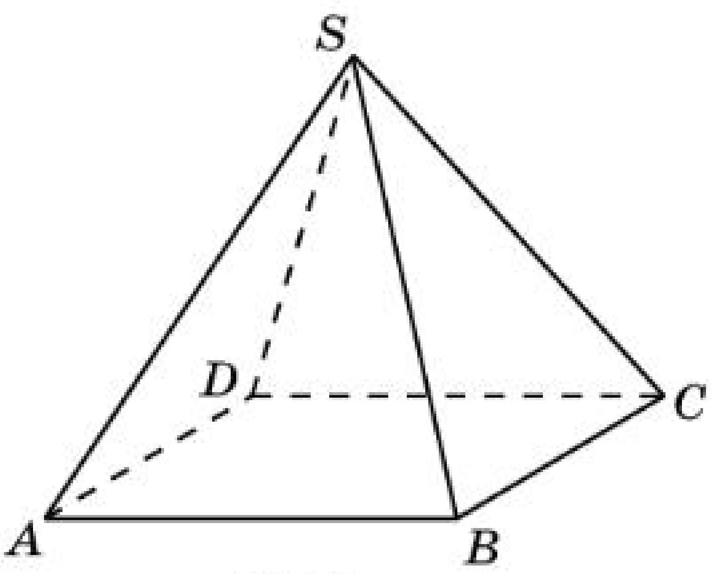
B

13.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда: а) BB_1 тўғри чизиқ билан ACC_1 текислиги орасидаги масофани; б) AB тўғри чизиқ билан CDA_1 текислиги орасидаги масофани топинг.

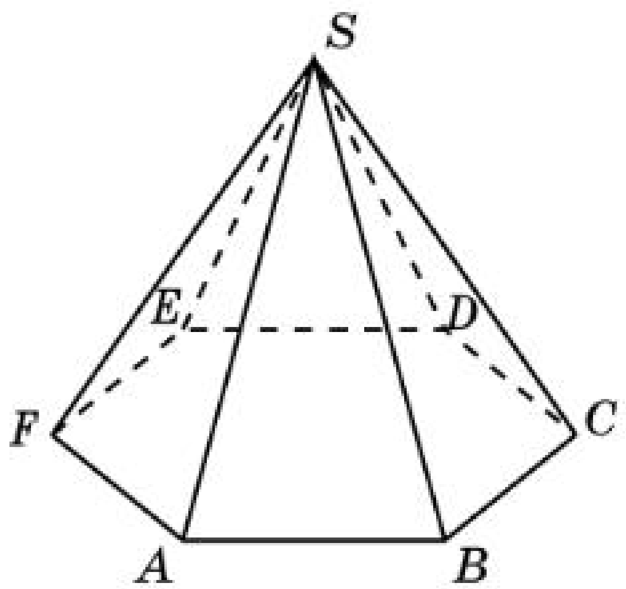
13.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Қуйидаги текисликлар орасида масофани топинг: а) ABB_1 ва DEE_1; б) ABB_1 ва CFF_1; в) ACC_1 ва FDD_1.

C

13.7. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирраси 1 га тенг (13.11-расм). BC тўғри чизиқ билан SAD текислигининг орасидаги масофани топинг.



13.11-расм



13.12-расм

13.8. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (13.12-расм). CD тўғри чизиқ билан SAF текислигининг орасидаги масофани топинг.

13.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги ACB_1 ва DC_1A_1 текисликлар орасидаги масофани топинг.

13.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда O нуқта — $ABCD$ ёғининг диагоналларининг кесишиш нуқтаси. OB_1 тўғри чизиқ билан DA_1C_1 текислиги орасидаги масофани топинг.

13.11. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиқ билан CA_1B_1 текислигининг орасидаги масофани топинг.

13.12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (13.9-расм). ACB_1 ва ED_1F_1 текисликлар орасидаги масофани топинг.

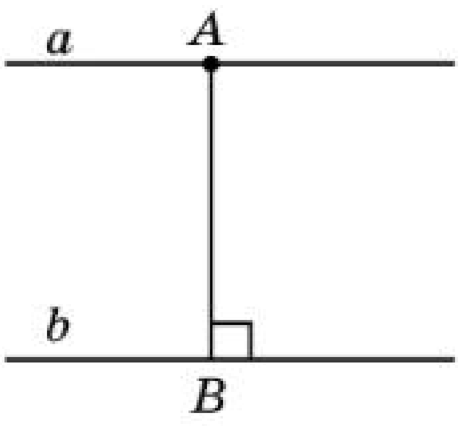
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

13.13. Айқаш икки тўғри чизиқларнинг орасидаги масофа тушунчасини таърифланг.

13.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги AB ва B_1C_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

14-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги масофа

Планиметрия курсида параллел икки тўғри чизиқ орасидаги масофа деб,улардан бирининг ихтиёрий бир нуқтасидан иккинчи тўғри чизиққача бўлган масофанинг айтилишини эслайлик.

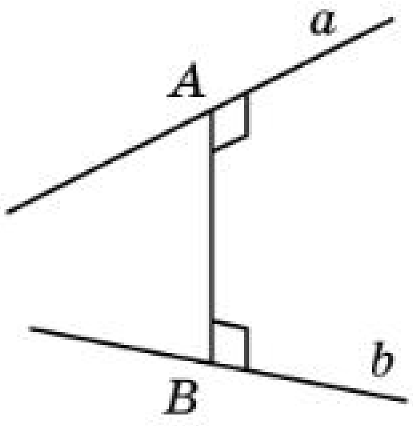


14.1-расм

Параллел икки тўғри чизиқ бир текисликда ётганлиги учун бу тушунча фазо учун ҳам ўринли бўлади.

Фазодаги параллел икки тўғри чизиқ орасидаги масофа деб, улардан бирининг ихтиёрий бир нуқтасидан иккинчи тўғри чизиққача бўлган масофага айтилади (14.1-расм).

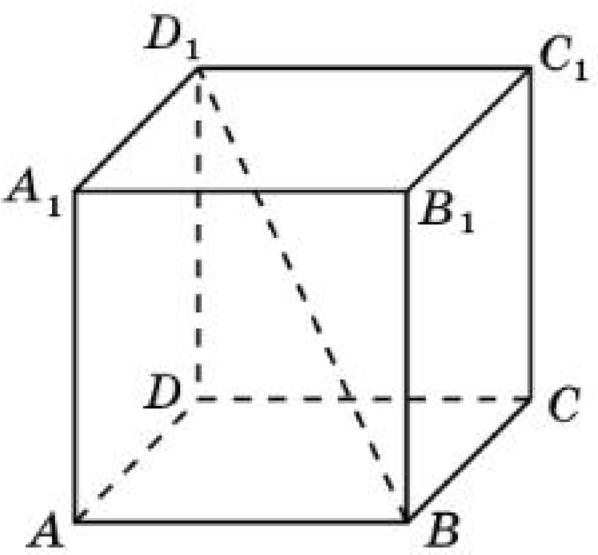
Энди текисликдаги айқаш икки тўғри чизиқ орасидаги масофа тушунчасини қарайлик.



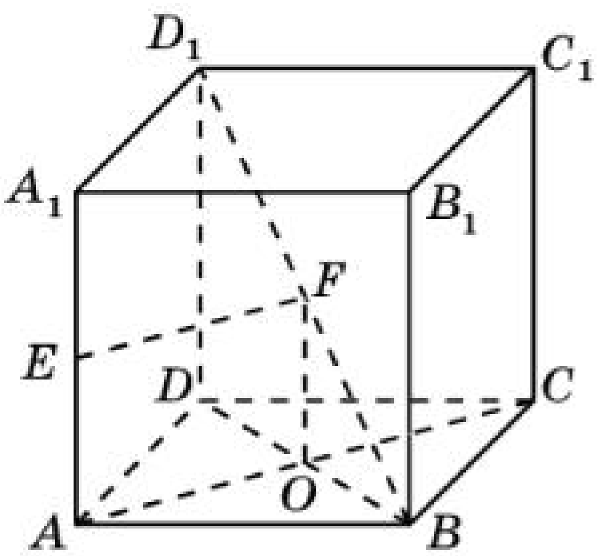
14.2-расм

Айқаш тўғри чизиқларнинг умумий перпендикуляри деб, шу тўғри чизиқларнинг ҳар бирига перпендикуляр бўлиб, учлари шу тўғри чизиқларда ётувчи кесмага айтилади. Умумий перпендикулярнинг узунлиги *айқаш тўғри чизиқларнинг орасидаги масофа* деб аталади (14.2-расм).

1-масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AA_1 ва BD_1 айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг (14.3-расм).



14.3-расм

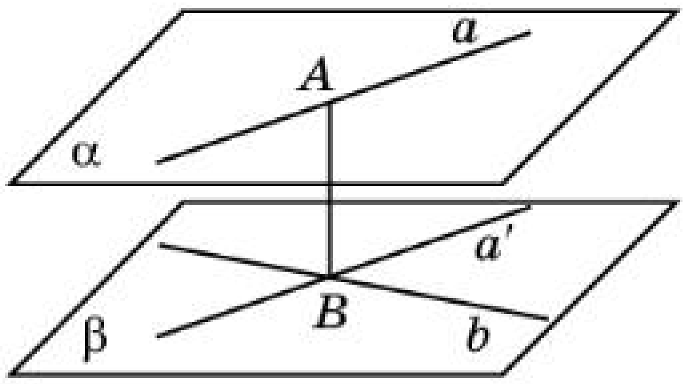


14.4-расм

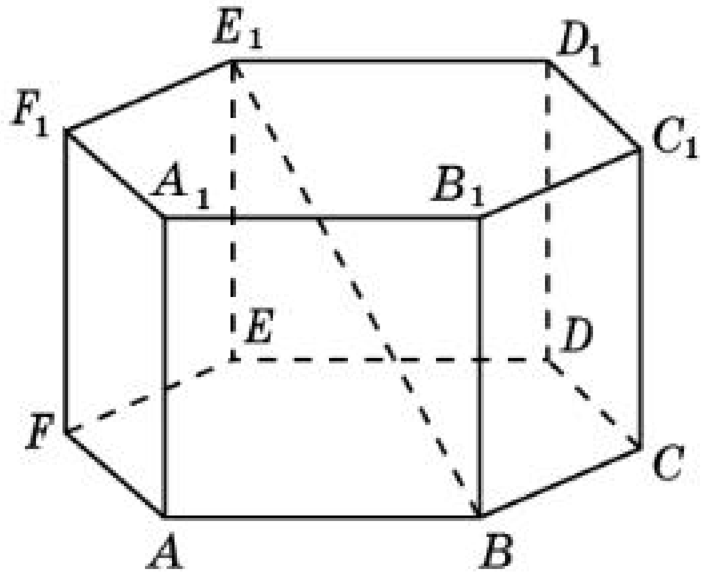
Ечиш. Берилган тўғри чизиқлар учун умумий перпендикуляр AA_1 ва BD_1 кесмаларнинг ўрталарини туташтирувчи EF кесма бўлади (14.4-

расм). EF кесма AA_1 тўғри чизиқ ва BDD_1 текислигига перпендикуляр бўлган AC тўғри чизиққа параллел бўлади. У ҳолда у шу текисликда ётган BD_1 тўғри чизиқа ҳам перпендикуляр. EF умумий перпендикуляр AO кесмага тенг, демак $\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг бўлади.

Паралел тўғри чизиқ билан текислик орасидаги масофа тушунчасини айқаш икки тўғри чизиқ орасидаги масофани топишда қўллаш мумкин.



14.5-расм



14.6-расм

a ва b — айқаш икки тўғри чизиқ бўлсин. b тўғри чизиқнинг ихтиёрий бир нуқтаси орқали a тўғри чизиққа паралел a' тўғри чизиқ ўтказамиз b тўғри чизиғи a тўғри чизиғига паралел бўлган β текислигини ифодалайди (14.5-расм). Берилган айқаш тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлган AB перпендикуляр β текислигига перпендикуляр бўлади. Демак, унинг узунлиги a тўғри чизиқ билан β текислик орасидаги масофага тенг бўлади.

a ва b — айқаш икки тўғри чизиқларнинг орасидаги масофа шу тўғри чизиқлар ётадиган параллел α ва β текисликлар орасидаги масофага тенг бўлишини исботланг (14.5-расм).

2-масала. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.6-расм). AA_1 ва BE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. AA_1 тўғри чизиқ BEE_1 текислигига паралел. Энди, AA_1 ва BE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофа AA_1 тўғри чизиқ билан BEE_1 текислик орасидаги масофага тенг. Аввалги параграфда кўрсатилгандек, бу масофа $\frac{\sqrt{3}}{2}$ га тенг бўлади.

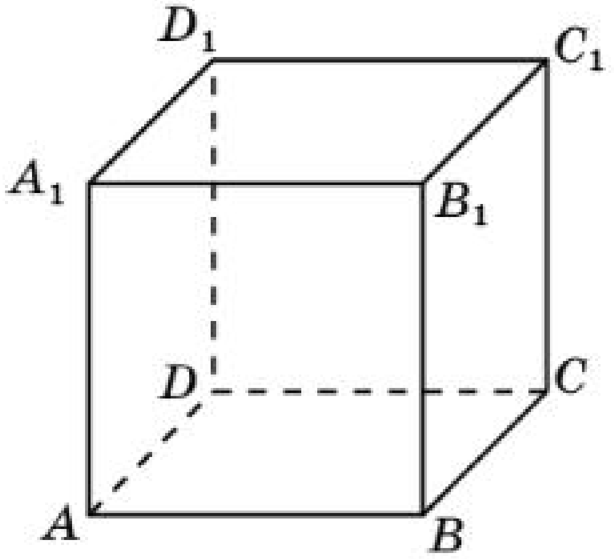
Саволлар

1. Паралел икки тўғри чизиқ орасидаги масофа деб нимага айтилади?
2. Айқаш икки тўғри чизиқнинг умумий перпендикуляри деб нимага айтилади?
3. Айқаш икки тўғри чизиқ орасидаги масофа деб нимага айтилади?

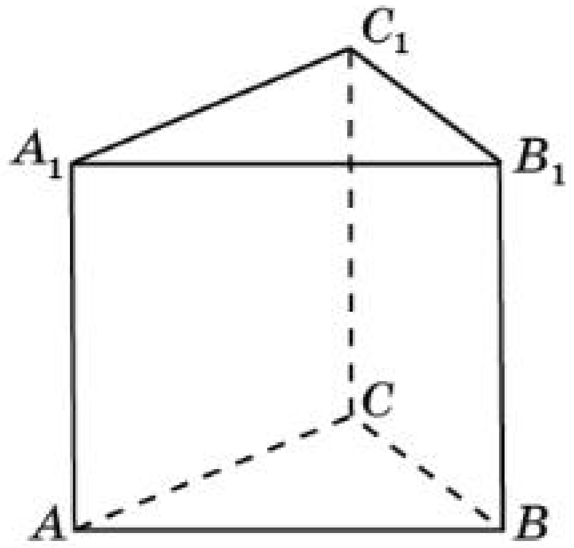
Масалалар

A

14.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AA_1 ва BB_1; б) AA_1 ва CC_1; в) AA_1 ва BC; г) AA_1 ва CD; д) AA_1 ва BC_1; е) AA_1 ва CD_1; ж) AA_1 ва BD; з) AB_1 ва CD_1 (14.7-расм).



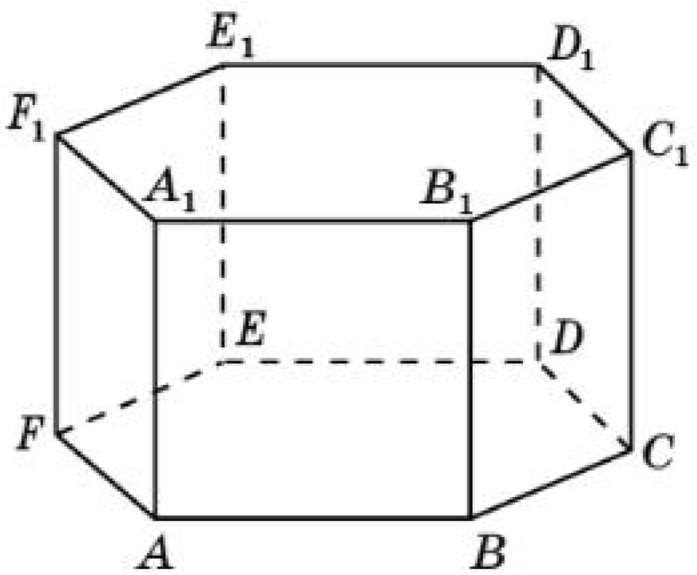
14.7-расм



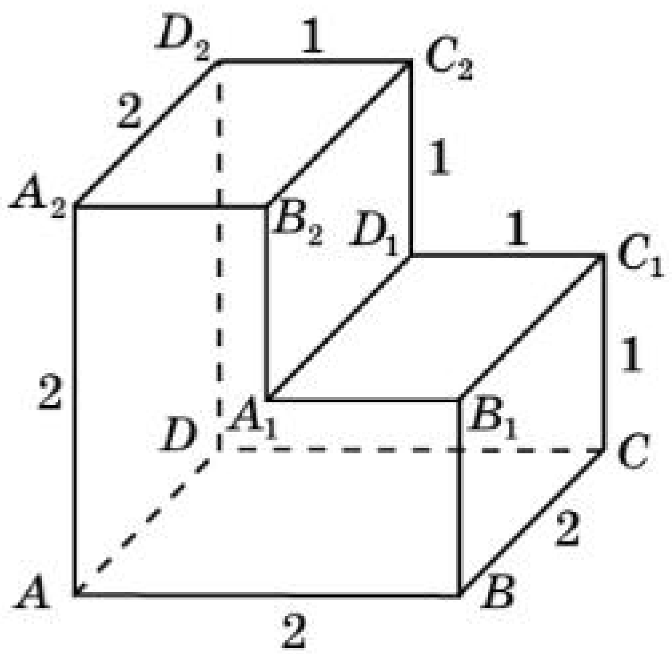
14.8-расм

14.2. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.8-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орсидаги масофани топинг: а) AA_1 ва BC; б) AB ва A_1C_1.

14.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.9-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AB ва A_1B_1; б) AB ва B_1C_1; в) AA_1 ва CC_1; г) AA_1 ва DD_1.



14.9-расм



14.10-расм

14.4. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар бўлсин (14.10-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AB ва C_1D_1; б) AB ва C_2D_2; в) AA_2 ва CC_1; г) AA_2 ва D_1C_2.

B

14.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги AC_1 ва BC тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг (14.7-расм).

14.6. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.8-расм). AA_1 ва BC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

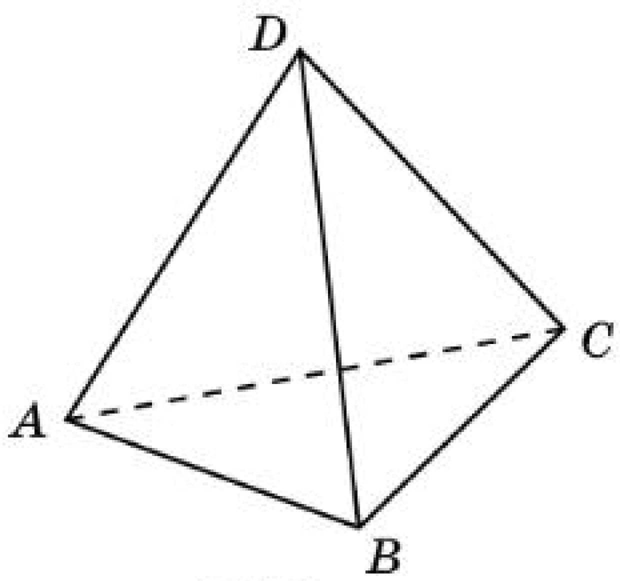
14.7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.9-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AA_1 ва B_1C_1; б) AA_1 ва C_1D_1; в) AA_1 ва CD_1; г) AA_1 ва DE_1; д) AA_1 ва BD_1.

14.8. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар бўлсин (14.10-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AA_2 ва B_1C_1; б) AA_2 ва A_1D_1; в) AB_1 ва CC_1; г) AB ва D_1C_2; д) A_2B_2 ва CC_1.

C

14.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AB_1 ва BD_1; б) AB_1 ва DA_1 (14.7-расм).

14.10. $ABCD$ тетраэдрининг барча қирралари 1 га тенг (14.11-расм). AB ва CD тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.



14.11-расм

14.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.9-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AA_1 ва CE_1; б) AA_1 ва CF_1; в) AB_1 ва DE_1; г) AB_1 ва CF_1.

14.12. $SABC$ мунтазам учбурчакли пирамида асосининг томони 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA тўғри чизиғи билан BC тўғри чизиқ орасидаги масофани топинг: а) BC; б) CD.

14.13. Ихтиёрий айқаш тўғри чизиқлар учун умумий перпендикулярнинг мавжудлигини исботланг.

14.14. Ихтиёрий айқаш тўғри чизиқлар учун умумий перпендикулярнинг ягоналигини исботланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

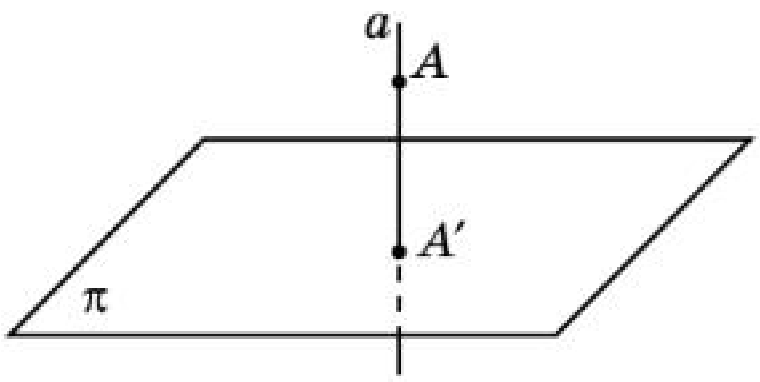
14.15. Текисликдаги тўғри чизиққа туширилган оғма тушунчасига ўхшаш фазодаги текисликка туширилган оғма тушунчасини таърифланг.

14.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ABC текислигига ўтказилган оғмаларни кўрсатинг.

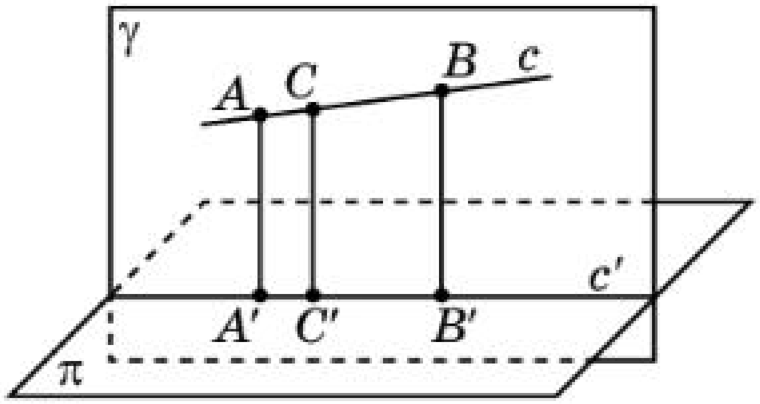
14.17. Бир нуқтадан текисликка ўтказилган перпендикуляр билан оғма орасида қандай боғликлик мавжуд?

15-§. Ортогонал проекциялаш

Ихтиёрий бир π текислиги берилсин. Текисликнинг ихтиёрий A нуқтаси орқали шу текисликка перпендикуляр a тўғри чизиғини ўтказамиз. Шу тўғри чизиқнинг берилган текислик билан кесишувчи A' нуқтаси A нуқтасининг текисликдаги *ортогонал проекцияси* деб аталади (15.1-расм).



15.1-расм



15.2-расм

Фазодаги нуқталарга уларнинг берилган текисликдаги ортогонал проекцияларини мослаштиришни шу *текисликка ортогонал проекциялаш* деб атайди. Текисликнинг ўзи проекциялаш текислиги деб аталади.

Ортогонал проекциялашнинг баъзи хоссаларини қарайлик.

1-хосса. *Ортогонал проекциялаш текисликка перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқларни тўғри чизиқларга, перпендикуляр чизиқларни эса нуқталарга кўчиради.*

Исботи. c тўғри чизиқ π проекциялаш текислигига перпендикуляр бўлмасин (15.2-расм). c тўғри чизиғига тегишли ихтиёрий бир A, B нуқталарни қараймиз. Шу нуқталар орқали π текислигига перпендикуляр тўғри чизиқлар ўтказайлик.

Уларнинг π текислиги билан кесишиш нуқталарини мос равишта A', B' деб белгилаймиз. Ўтказилган тўғри чизиқлар параллел бўлганлиги сабабли улар бир текисликда ётади. Бу текисликни γ деб белгилайлик. c' — тўғри чизиғи шу текисликнинг π текислиги билан кесишиш чизиғи бўлсин. c' *тўғри чизиғи* c *тўғри чизиғининг ортогонал проекцияси эканини исботлайлик.*

Ҳақиқатан ҳам, c тўғри чизиғида ётувчи ихтиёрий C нуқта учун шу нуқта орқали ўтувчи ва π текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ γ текислигида ётади. Демак, унинг π текислиги билан кесишиш нуқтаси c' тўғри чизиғига тегишли бўлади. Бундан C нуқтанинг ортогонал проекцияси c' тўғри чизиғида ётади. Аксинча, агар C' нуқта c' тўғри чизиғига тегишли бўлса, унда шу нуқта орқали ўтувчи ва π текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ γ текислигида ётадиган бўлади. Демак, у c тўғри чизиғини қандайдир бир C нуқтада кесиб ўтади. Унинг ортогонал проекцияси C' нуқта бўлади. Агар тўғри чизиқ π текислигига перпендикуляр бўлса (15.1-расм), унда унинг ортогонал проекцияси нуқта бўлиши аниқ. ☐

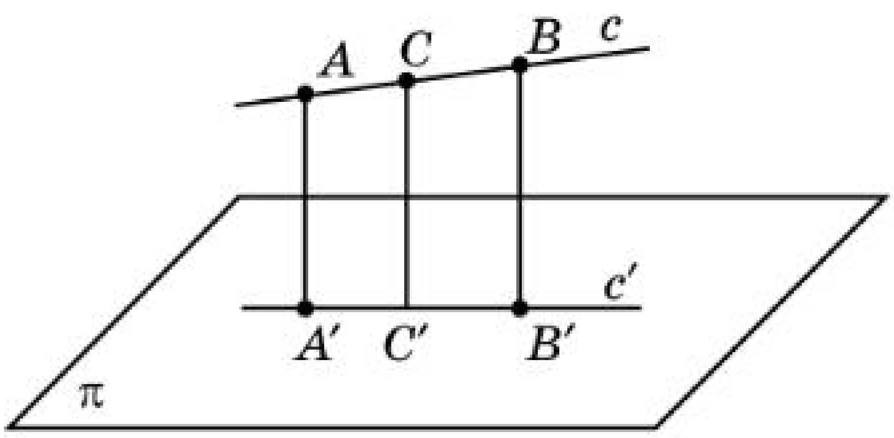
Ортоганал проекциялаш текисликка перпендикуляр бўлмаган кесмаларни кесмаларга акслантиришини мустақил исботланг.

Қандай ўйлайсиз, ортогонал проекциялашда кесмаларнинг узунликлари сақланадими?

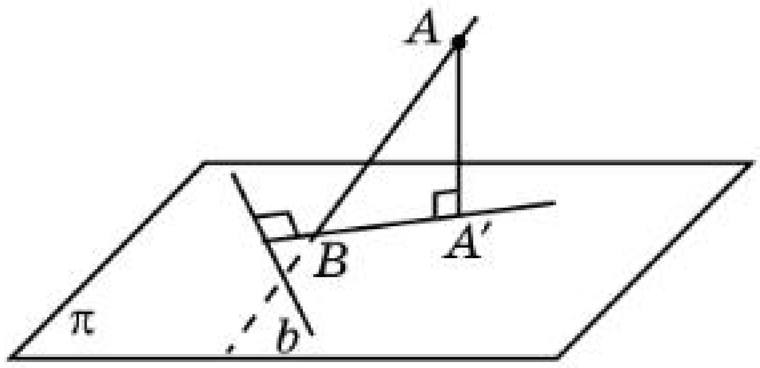
2-хосса. *Ортогонал проекциялаш текисликка перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқда ётувчи кесмалар нисбатини сақлайди. Хусусий ҳолда кесманинг ўртаси шу кесманинг проекциясининг ўртасига проекцияланади.*

Исботи. A, B, C нуқталар π текислигига перпендикуляр бўлмаган c тўғри чизиғига тегишли бўлсин. A', B', C' уларнинг мос равишда c тўғри чизиғининг текисликдаги c' ортогонал проекциясида ётувчи ортогонал проекциялари бўлсин (15.3-расм). AA', BB', CC' тўғри чизиқлари параллел бўлганликдан, пропорционал кесмалар тўғрисидаги теорема бўйича қуйидаги нисбатлар тенглиги бажарилади:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}. \square$$



15.3-расм



15.4-расм

Текисликка перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқ *оғма* деб аталади. Шу билан бирга *оғма* деб текисликдан ташқарида ётган нуқтани шу текисликдаги нуқта билан туташтирувчи ва перпендикуляр бўлмаган кесмани айтамиз.

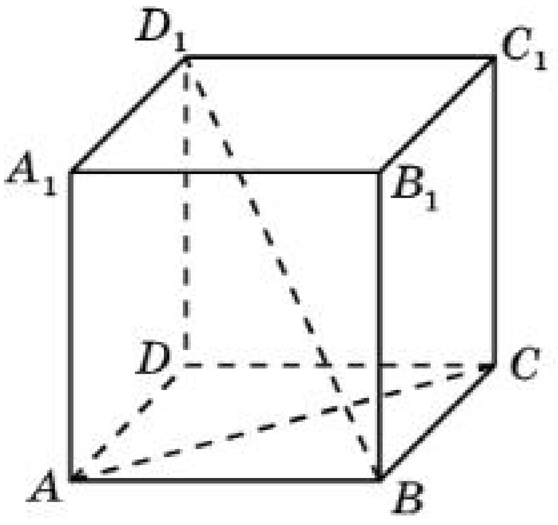
Теорема (уч перпендикуляр ҳақида). ***Текисликда оғманинг асосидан унинг проекциясига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикуляр бўлади.***

Исботи. AA' — π текислигига перпендикуляр, AB — оғма, $A'B$ оғманинг ортогонал проекцияси бўлсин (15.4-расм).

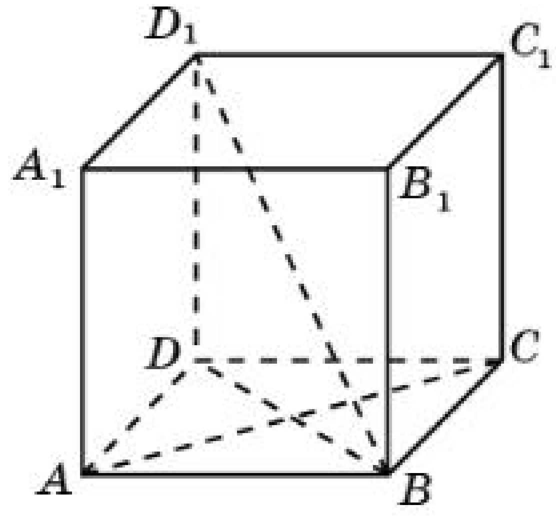
AA' тўғри чизиқ π текислигига перпендикуляр бўлганлигидан, π текислигида ётувчи ихтиёрий b тўғри чизиқ AA' тўғри чизиғига перпендикуляр бўлади.

Агар шу билан бирга, b тўғри чизиғи $A'B$ тўғри чизиғига перпендикуляр бўлса, унда у тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлик аломати бўйича $AA'B$ текислигига перпендикуляр бўлади. Демак, у ўша текисликда ётган ихтиёрий тўғри чизиққа, яъни AB оғмага ҳам перпендикуляр бўлади. $\square$

Масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC ва BD_1 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлишини исботланг (15.5-расм).



15.5-расм



15.6-расм

Ечиш. BD_1 тўғри чизиғининг ABC текислигидаги ортогонал проекцияси BD тўғри чизиқ бўлади (15.6-расм). AC тўғри чизиқ BD тўғри чизиғига перпендикуляр, демак у BD_1 тўғри чизиғига ҳам перпендикуляр бўлади.

Саволлар

1. Нуқтанинг текисликдаги ортогонал проекцияси деб нимага айтилади?
2. Текисликка ортогонал проекциялаш нима?
3. Ортогонал проекциялаш хоссаларини айтинг.
4. Оғма деб нимага айтилади?
5. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремани айтинг.

Масалалар

A

15.1. A нуқтадан берилган текисликка AA' перпендикуляр ва AB оғма ўтказилган. Агар $AB = 37$ см, $AA' = 35$ см бўлса, унда AB кесманинг ортогонал проекциясини топинг.

15.2. A нуқтадан берилган текисликка AA' перпендикуляр ва AB оғма ўтказилган. Агар $AA' = 6$ см, $\angle A'AB = 60^\circ$ бўлса, унда AB кесманинг узунлигини топинг.

15.3. A нуқтадан берилган текисликка AA' перпендикуляр ва AB оғма ўтказилган. Агар $AB = 2\sqrt{10}$ см, $A'B = 3\,AA'$ бўлса, унда AA' кесманинг узунлигини топинг.

15.4. Узунлиги 13 м бўлган нарвоннинг юқори учи ердан 12 м баландликда жойлашиши учун унинг пастки учини уй киррасидан қандай узоқликда жойлаштириш керак?

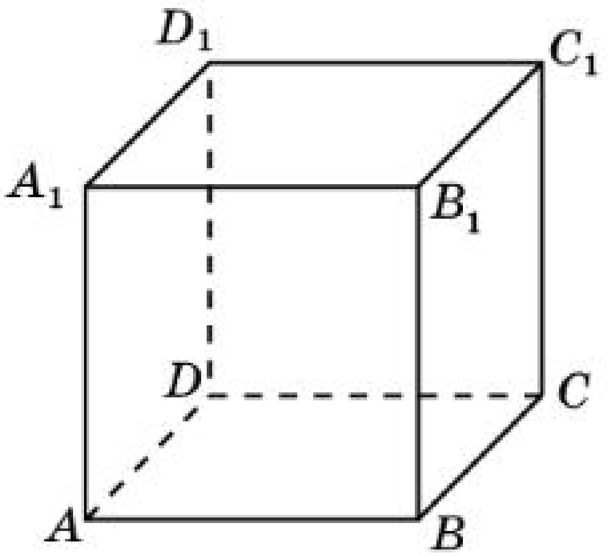
15.5. Нарвоннинг пастки учи уйдан 6 м узоқликда бўлиб, юқориги учи ердан 8 м баландликдаги уй деразасига етиш учун қандай узунликда бўлиш керак?

В

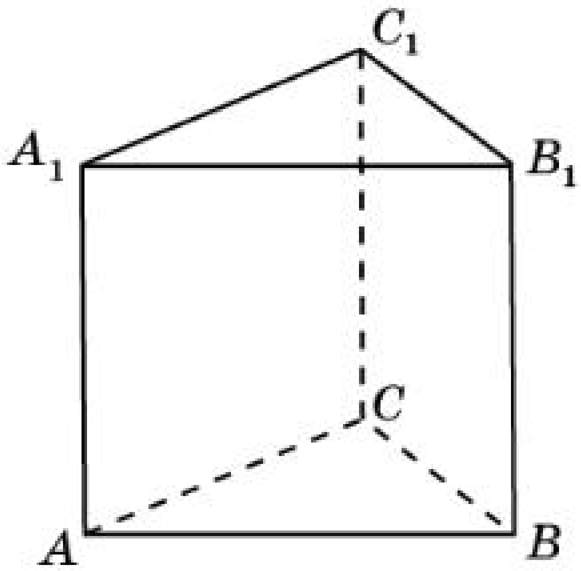
15.6. Бир нуқтадан текисликка ўтказилган икки оғманинг кесмаларининг узунликлари 15 см ва 20 см. Шу кесмаларнинг биттасининг ортогонал проекцияси 16 см. Иккинчи кесманинг ортогонал проекциясини топинг.

15.7. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда жойлашган ва A', B', C' — шу нуқталарнинг мос равишда ортогонал проекциялари. $AB = 5$, $BC = 10$, $A'C' = 12$. $A'B'$ ва $B'C'$ кесмаларнинг узунликларини топинг.

15.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг (15.7-расм) ACC_1 текислигига қуйидаги кесмаларнинг ортогонал проекцияларини чизинг: а) BB_1; б) BC_1; в) BD_1.



15.7-расм



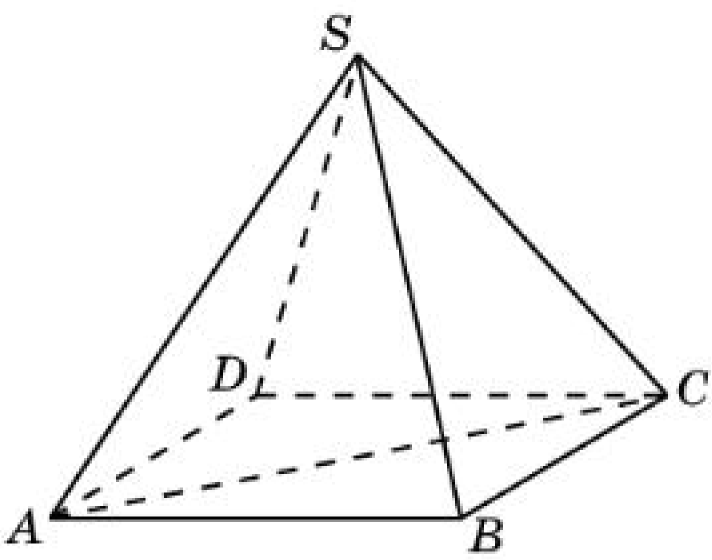
15.8-расм

15.9. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг (15.8-расм) ACC_1 текислигига қуйидаги кесмаларнинг ортогонал проекцияларини чизинг: а) BB_1; б) BC; в) BC_1.

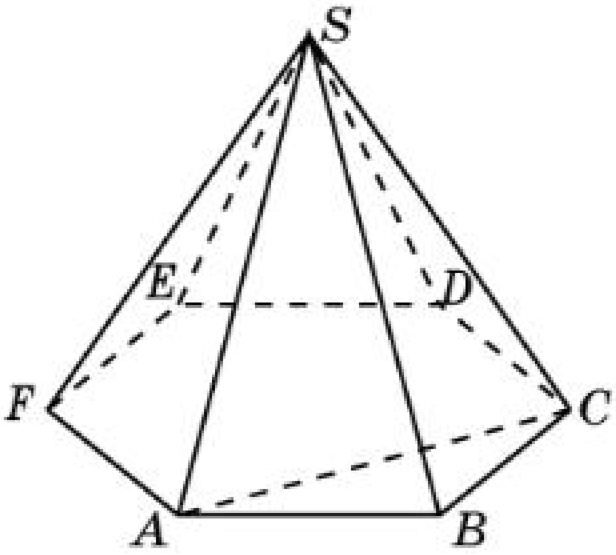
15.10. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг асосининг AC диагонали у билан айқаш SB қиррасига перпендикуляр эканлигини исботланг (15.9-расм).

15.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ қуйидаги тўғри чизиқлар перпендикуляр эканлигини исботланг (15.7-расм): а) AB_1 ва BD_1; б) AC_1 ва BD; в) AD_1 ва CA_1.

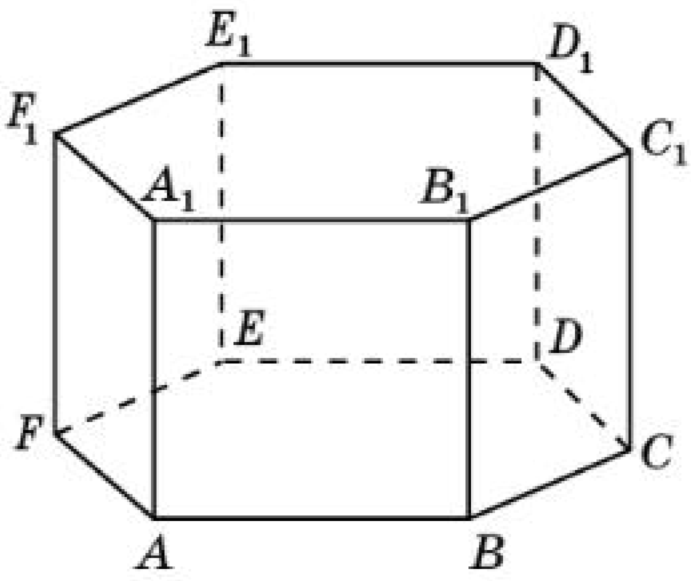
15.12. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг AC диагонали у билан айқаш SB қиррасига перпендикуляр эканини исботланг (15.10-расм).



15.9-расм



15.10-расм



15.11-расм

15.13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада (15.11-расм) қуйидаги чизиқлар перпендикуляр эканини исботланг: а) AC_1 ва BE; б) AD_1 ва CE; в) AB_1 ва BE_1.

C

15.14. Бир нуқтадан берилган текисликка ўтказилган тенг оғмаларнинг шу текисликдаги ортогонал проекциялари тенг бўлишини исботланг.

15.15. Агар бир нуқтадан берилган текисликка ўтказилган оғмаларнинг ортогонал проекциялари тенг бўлса, у ҳолда оғмаларнинг ўзлари ҳам тенг бўлишини исботланг.

15.16. Агар пирамиданинг ён қирралари тенг бўлса, у ҳолда унинг баландлиги шу пирамида асосига ташқи чизилган айлананинг маркази орқали ўтишини исботланг.

15.17. Мунтазам пирамиданинг ён қирраси b га, асосига ташқи чизилган айлананинг радиуси эса r га тенг. Пирамиданинг баландлигини топинг.

15.18. Берилган икки нуқтадан бир хил узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

15.19. Уч перпендикуляр ҳақидаги тескари теоремани исботланг: “агар текисликдаги тўғри чизиқ оғмага перпендикуляр бўлса, у ҳолда шу тўғри чизиқ оғманинг проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади.

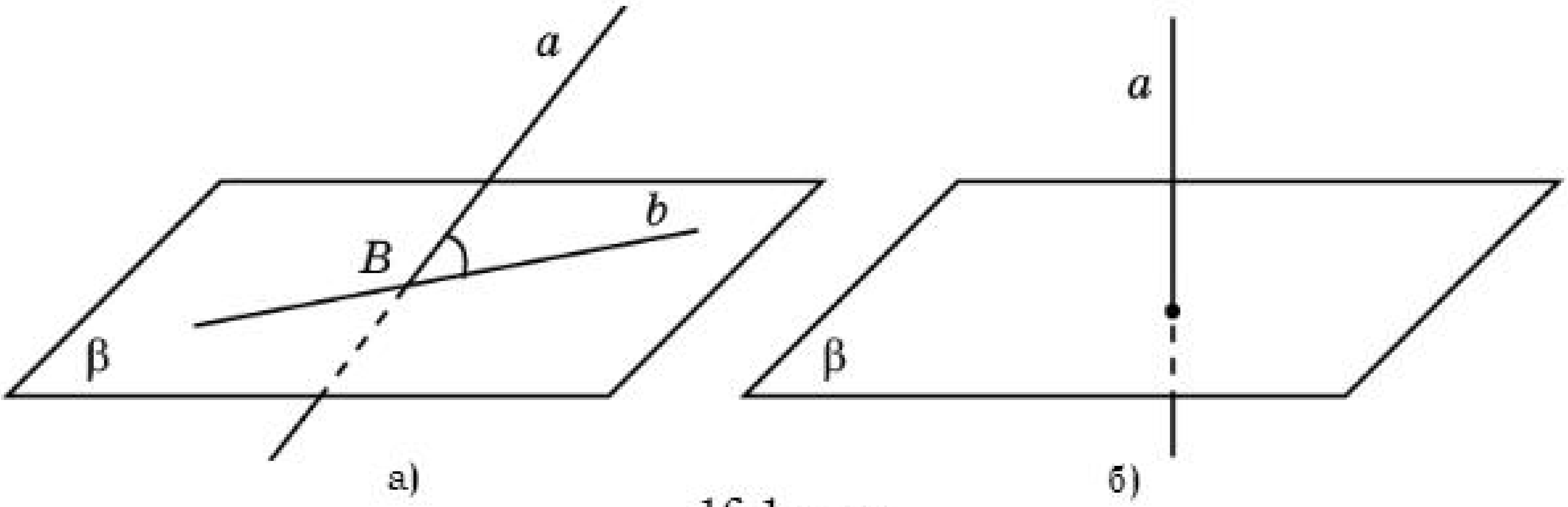
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

15.20. Оғма ва текислик орасидаги бурчак тушунчасини таърифланг.

15.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AD_1 оғма билан ABC текислиги орасидаги бурчакни топинг.

16-§. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак

Ортогонал проекциялаш проекция текислигига перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқларни (оғмалар) тўғри чизиқларга, текисликка перпендикуляр тўғри чизиқларни эса нуқталарга кўчиришига тўхтайлик (16.1-расм).



16.1-расм

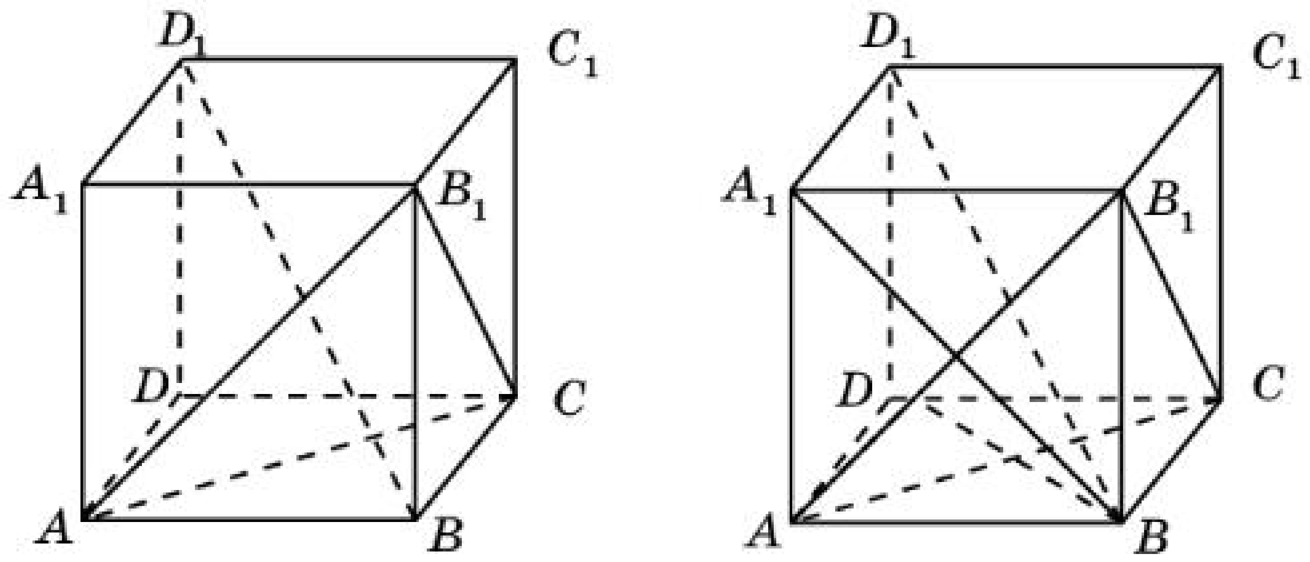
Текислик ва оғма орасидаги бурчак деб, оғма ва унинг текисликдаги ортогонал проекцияси орасидаги бурчакка айтилади (16.1, а-расм).

Текислик ва унга перпендикуляр тўғри чизиқ орасидаги бурчак 90° га тенг деб ҳисобланади (16.1, б-расм).

Кесма ва текислик орасидаги бурчак деб, шу кесмани ўз ичига олувчи тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчакка айтилади.

Масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BD_1 тўғри чизиқ ACB_1 текислигига перпендикуляр бўлишини исботланг (16.2-расм).

Ечиш. BD_1 тўғри чизиқнинг ABC текислигидаги ортогонал проекцияси AC тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган BD тўғри чизиқ бўлади (16.3-расм).

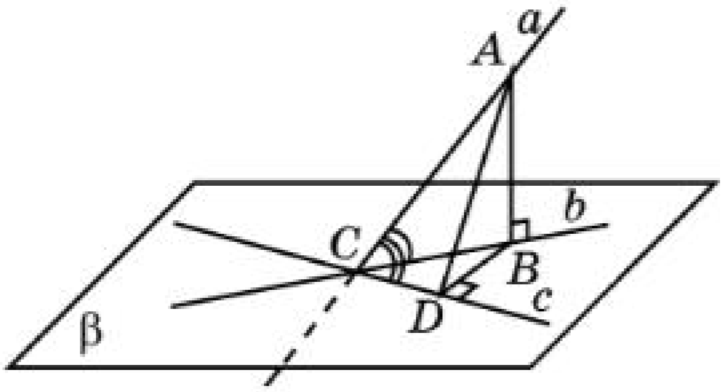


16.2-расм 16.3-расм

Шу билан BD_1 тўғри чизиқ ACB_1 текислигидаги кесишувчи AC ва AB_1 тўғри чизиқларига перпендикуляр бўлади. Демак, BD_1 тўғри чизиқ ACB_1 текислигига перпендикуляр бўлади.

Теорема. ***Оғма ва текисликнинг орасидаги бурчак, шу оғма билан текисликка тегишли тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакларнинг ичидаги энг кичиги бўлади.***

Исботи. a тўғри чизиқ — β текислигига оғма, b — унинг шу текисликдаги ортогонал проекцияси, c тўғри чизиқ — β текислигига тегишли a ва b тўғри чизиқларнинг кесишувчи C нуқтаси орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўлсин (16.4-расм).



16.4-расм

a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчак a ва c тўғри чизиқлар орасидаги бурчакдан кичик эканлигини исботлаймиз.

Агар c тўғри чизиқ b тўғри чизиғига перпендикуляр бўлса, у ҳолда a ва c тўғри чизиқлари ҳам ўзаро перпендикуляр бўлади. Демак, a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчак a ва c тўғри чизиқлар орасидаги бурчакдан кичик бўлади.

c тўғри чизиқ b тўғри чизиғига перпендикуляр бўлмаган ҳолда a тўғри чизиғига тегишли C нуқтадан бошқа A нуқтани оламиз. Унинг b тўғри чизиғидаги ортогонал проекциясини B деб белгилаймиз. B нуқтадан c тўғри чизиғига BD перпендикуляр ўтказамиз. AB перпендикуляр AD оғмасидан кичик бўлгани учун ACB бурчагининг синуси ACD бурчагининг синусидан кичик бўлади. Бундан, ACB бурчаги ACD бурчагидан кичик деган хулоса чиқади. Демак, a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчак a ва c тўғри чизиқлар орасидаги бурчакдан кичик бўлади.

Текисликка ўтказилган оғма билан шу текисликка тегишли тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчак қандай ҳолатда энг катта бўлади?

Саволлар

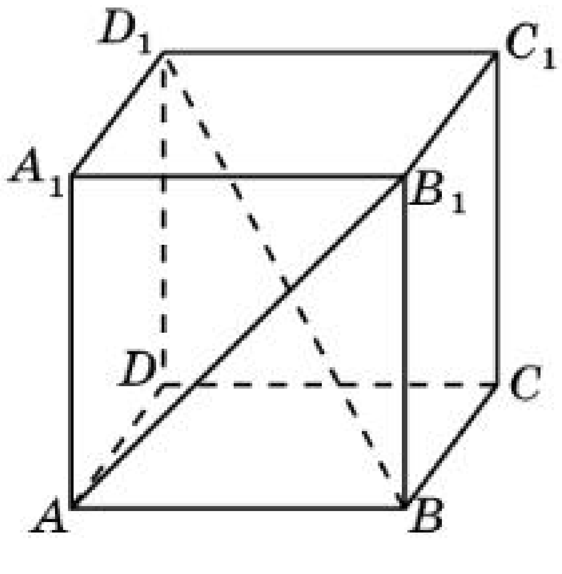
1. Оғма билан текислик орасидаги бурчак деб нимага айтилади?
2. Текислик билан унга перпендикуляр тўғри чизиқ орасидаги бурчак нимага тенг?
3. Кесма билан текислик орасидаги бурчак деб нимага айтилади?

Масалалар

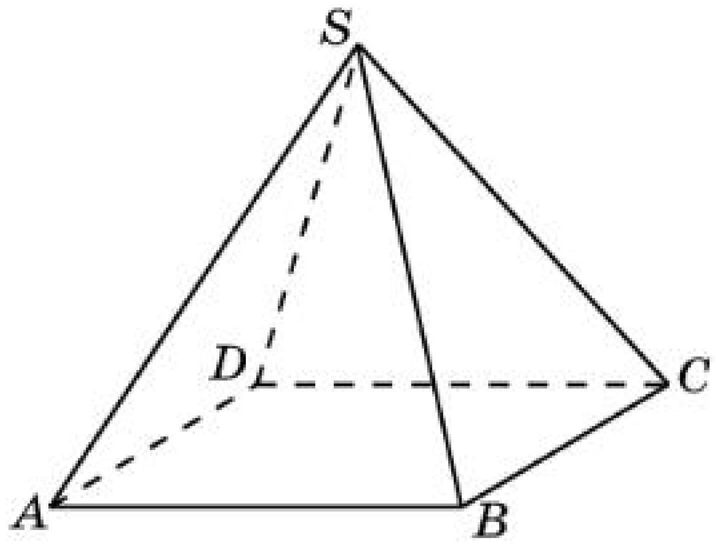
A

16.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги AB_1 тўғри чизиқ билан қуйидаги текисликнинг орасидаги бурчакни топинг (16.5-расм): а) ABC; б) BCC_1; в) BCD_1.

16.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги BD_1 тўғри чизиқ билан ABC текислигининг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг (16.5-расм).



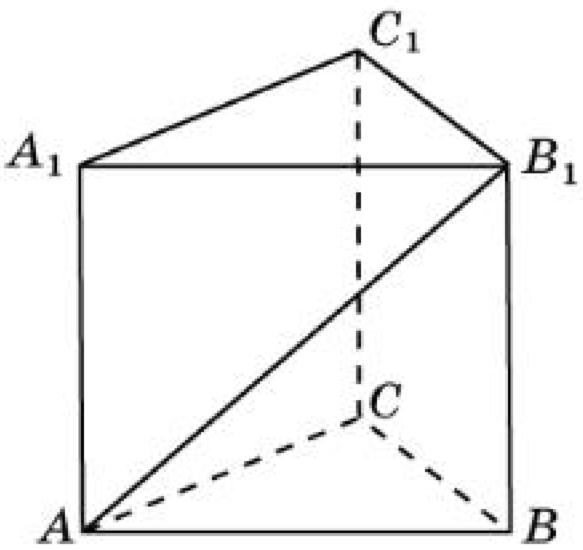
16.5-расм



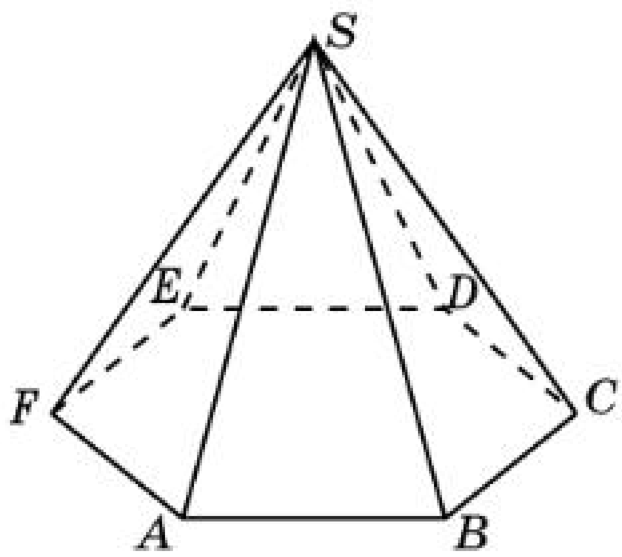
16.6-расм

16.3. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг (16.6-расм). SA тўғри чизиқ билан ABC текислигининг орасидаги бурчакни топинг.

16.4. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (16.7-расм). а) AB_1 тўғри чизиқ билан ABC текислигининг; б) AB тўғри чизиқ билан BCC_1 текислигининг орасидаги бурчакни топинг.



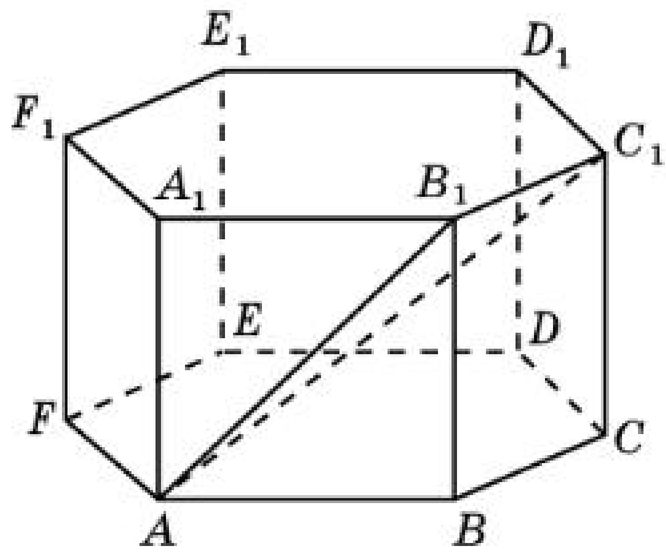
16.7-расм



16.8-расм

16.5. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га тенг. Ён қирралари 2 га тенг (16.8-расм). SA тўғри чизиқ билан ABC текислигининг орасидаги бурчакни топинг.

16.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (16.9-расм). а) AB_1 тўғри чизиқ билан ABC текислик; б) AC_1 тўғри чизиқ билан ABC текислик; б) AA_1 тўғри чизиқ билан ACD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.



16.9-расм

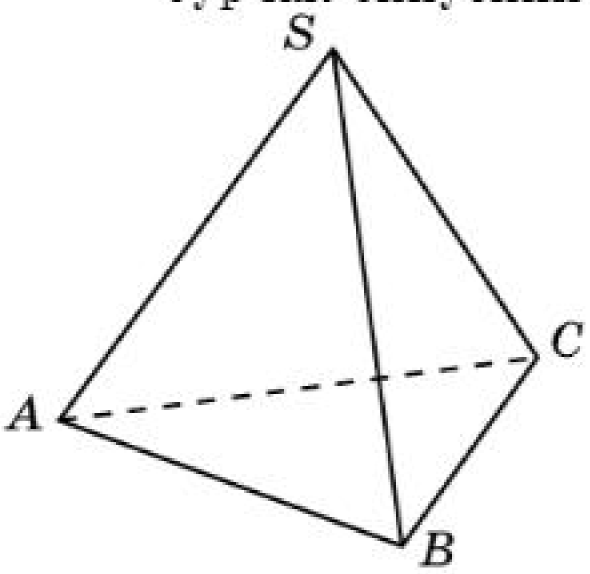
16.7. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг

(16.6-расм). AB тўғри чизиқ билан SBC текислигининг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

B

16.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги CC_1 тўғри чизиқ билан AB_1D_1 текислигининг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

16.9. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB_1 тўғри чизиқ билан BCC_1 текислигининг орасидаги бурчак синусини топинг.



16.10-расм

16.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB_1 тўғри чизиқ билан қуйидаги текислик орасидаги бурчак синусини топинг: а) BCC_1; б) CDD_1.

16.11. $SABC$ мунтазам учбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг (16.10-расм). SA тўғри чизиқ билан ABC текислигининг орасидаги бурчак косинусини топинг.

C

16.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги AB_1 тўғри чизиқ билан BC_1D_1 текислигининг орасидаги бурчакни топинг.

16.13. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га, ён қирраси 2 га тенг. AB тўғри чизиқ билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

16.14. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг, D нуқта — CC_1 қиррасининг ўртаси бўлсин. AD ва A_1B тўғри чизиқларининг перпендикуляр эканлигини исботланг.

16.15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AD_1 тўғри чизиқ BFA_1 текислигига перпендикуляр эканлигини исботланг.

16.16. Нур-Султан шахридаги мустақиллик саройи мунтазам тўртбурчакли пирамидага ўхшаш (§12, 12.14-расмга қаранг). Унинг баландлиги асосининг томонига, яъни 62 м га тенг. Шу пирамиданинг ён қирраси билан асос текислигининг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

16.17. Кесишувчи икки текислик орасидаги бурчак тушунчасини таърифланг.

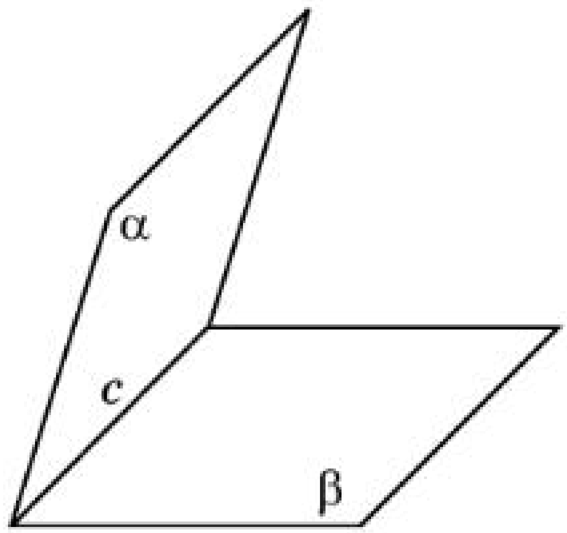
16.18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги ABC_1 ва ABC текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

17-§. Икки ёқли бурчак. Икки текислик орасидаги бурчак

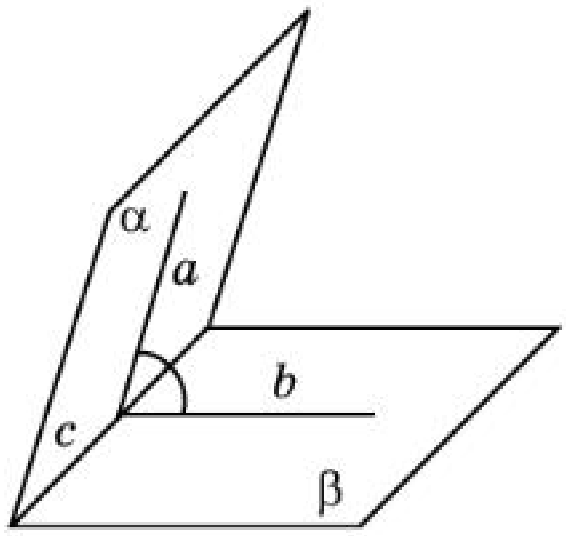
Фазода ярим текисликни текисликдаги нурга ўхшатиш мумкин. Бунда бурчакка фазода иккиёқли бурчак деб аталувчи фигура мос келади.

Иккиёқли бурчак деб, умумий битта тўғри чизиқ билан чегараланган иккита ярим текисликдан ва фазонинг ўша ярим текисликлар билан чегараланган қисмидан ташкил топган фигурага айтилади (17.1-расм).

Ярим текисликлар иккиёқли бурчакнинг *ёқлари*, уларни чегараловчи тўғри чизиқни эса *қирралари* деб аталади.



17.1-расм



17.2-расм

α ва β — умумий тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликлар (17.2-расм). c тўғри чизиғига перпендикуляр қилиб γ текислигини олайлик ва унинг α ва β ярим текисликлар билан кесишиш чизиқларини мос равишда a ва b деб белгилайлик. Ушбу нурлардан ҳосил бўладиган бурчак *иккиёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги* деб аталади.

Чизиқли бурчакнинг катталиги γ текисликни танлаб олинишига боғлиқ эмаслигини исботлаймиз.

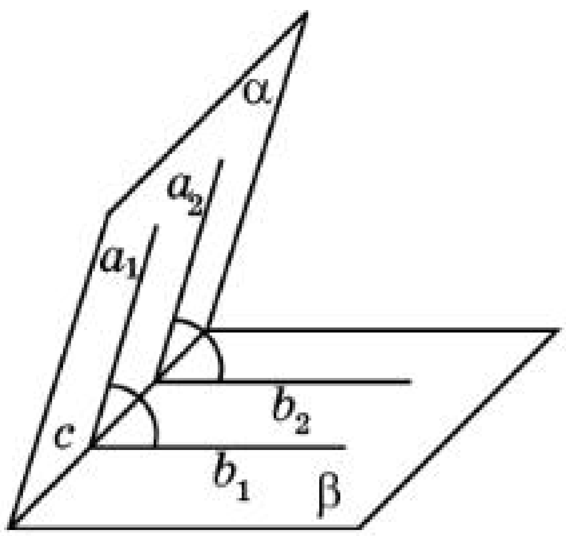
Аслида γ_1, γ_2 текисликлар c тўғри чизиққа перпендикуляр ва улар α ва β ярим текисликларни мос равишда a_1, a_2 ва b_1, b_2 нурлар бўйича кесиб ўтсин (17.3-расм). c тўғри чизиғига перпендикуляр бўлганлиги туфайли, a_1 билан a_2 ва b_1 билан b_2 нурлар йўналиши бир хил. Шу сабабдан ҳам улардан ясалган бурчаклар тенг.

Иккиёқли бурчакнинг катталиги деб, унинг чизиқли бурчагининг катталигига айтилади (17.2-расм).

Иккиёқли бурчакнинг катталиги $(0^\circ; 180^\circ]$ оралиғида ётади.

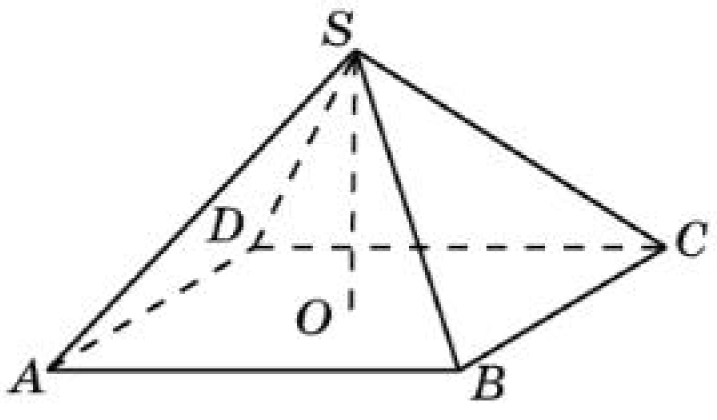
Иккиёқли бурчак унинг чизиқли бурчагининг турига (ўткир, тўғри ёки ўтмас) мос равшида *ўткир*, *тўғри*, *ўтмас* деб аталади.

1-масала. *SABCD* мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 2 га,

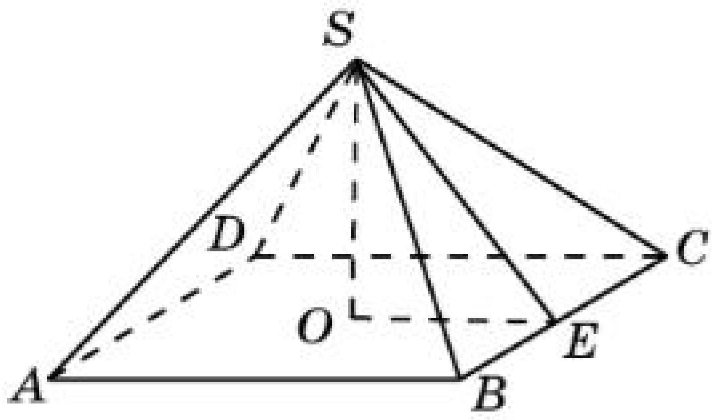


17.3-расм

SO баландлиги 1 га тенг (17.4-расм). Пирамиданинг ён ёғи билан асосининг орасидаги икки ёқли бурчакни топинг.



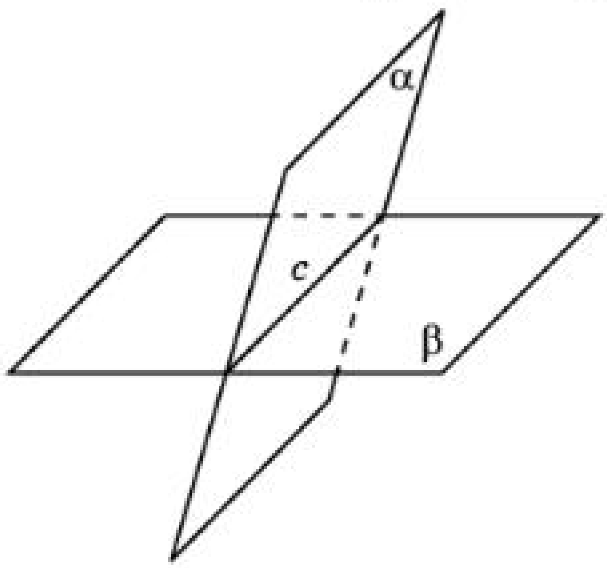
17.4-расм



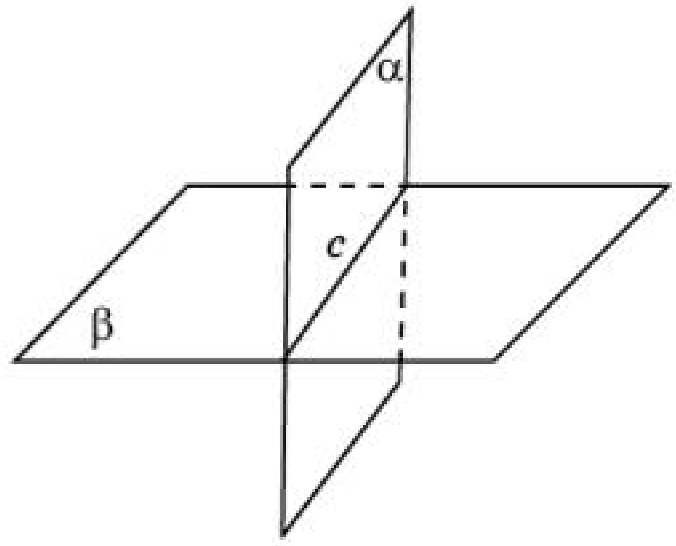
17.5-расм

Ечиш. SBC учбурчакнинг SE баландлигини ўтказамиз (17.5-расм). SEO бурчаги изланаётган иккиёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлади. SEO тўғри бурчакли учбурчакда SO ва EO катетлари 1 га тенг. Шундан SEO бурчаги 45°. Демак, изланган иккиёқли бурчак 45° га тенг бўлади.

Кесишувчи икки текислик орасидаги бурчак деб, мос иккита ярим текисликлар ёрдамида ясалган иккиёқли бурчаклар энг кичигининг катталигига айтилади (17.6-расм).



17.6-расм



17.7-расм

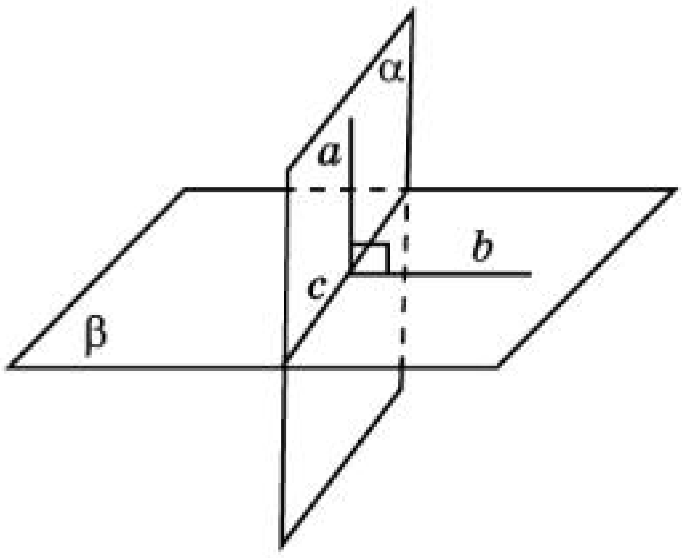
Текисликлар кесишганда ҳосил бўлган иккиёқли бурчакнинг бири 60°га тенг. Шу текисликлар кесишишидан ҳосил бўлган қолган учта иккиёқли бурчакларнинг бурчакларини топинг.

Икки текислик тўғри иккиёқли бурчак ҳосил қилса, у ҳолда улар *перпендикуляр текисликлар* деб аталади (17.7-расм).

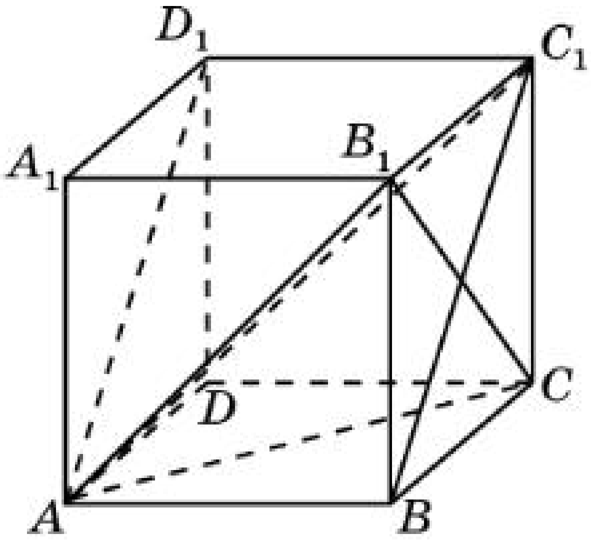
Қуйидаги теорема икки текислик перпендикулярлигининг етарлилик шарти ҳисобланади.

Теорема. (Текисликларнинг перпендикулярлик аломати) ***Агар икки текисликнинг бири иккинчисига перпендикуляр тўғри чизиқ орқали ўтса, у ҳолда бундай текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади.***

Исботи. α текислик β текисликка перпендикуляр a тўғри чизиғи орқали ўтсин. c — α ва β текисликларининг кесишиш чизиғи (17.8-расм).



17.8-расм



17.9-расм

α ва β текисликларнинг перпендикуляр эканлигини исботлаймиз. β текислигида a тўғри чизиғи билан β текислигининг кесишиш нуқтаси орқали c тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган b тўғри чизиғини ўтказамиз. a тўғри чизиғи β текислигига перпендикуляр бўлганлиги учун у шу текисликда ётган ихтиёрий тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади. Демак, a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчак тўғри. У мос равишда иккиёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлади. Бундан α ва β текисликларнинг перпендикулярлиги келиб чиқади.

2-масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ABC_1 ва ACB_1 текисликларнинг перпендикуляр эканлигини исботланг (17.9-расм).

Ечиш. ACB_1 текислигида ABC_1 тўғри чизиқ билан BC_1 текислигининг AB тўғри чизиғига перпендикуляр CB_1 тўғри чизиқ ётади. Демак, ABC_1 ва ACB_1 текисликлар перпендикуляр бўлади.

Саволлар

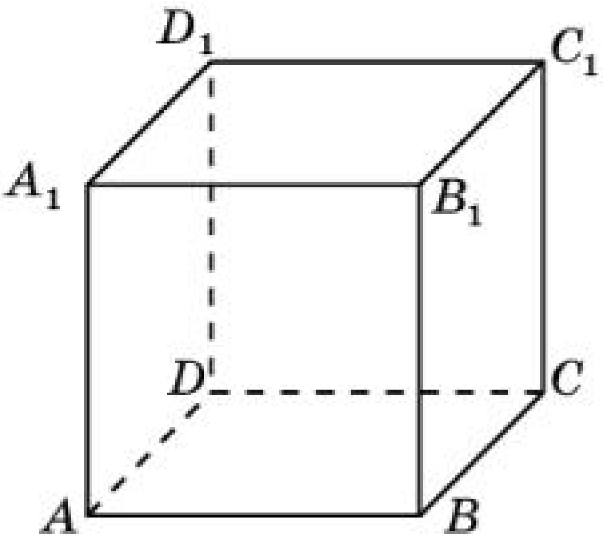
1. Иккиёқли бурчак деб нимага айтилади?
2. а) Иккиёқли бурчакнинг ёғи; г) иккиёқли бурчакнинг қирраси деб нимага айтилади?
3. Иккиёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги деб нимага айтилади?
4. Иккиёқли бурчакнинг катталиги деб нимага айтилади?
5. Қандай иккиёқли бурчак тўғри деб аталади?
6. Кесишувчи икки текислик орасидаги бурчак деб нимага айтилади?
7. Қандай кесишган икки текислик перпендикуляр деб аталади?
8. Икки текисликнинг перпендикулярлик аломатини айтинг.

Масалалар

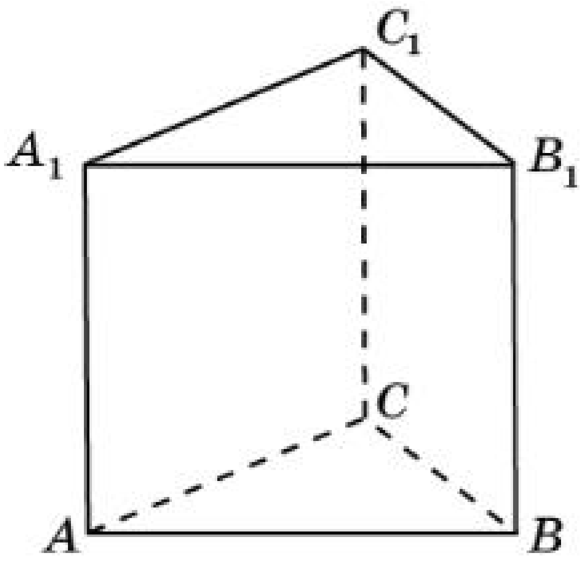
A

17.1. Кубнинг қўшни ёқлари билан ясалган иккиёқли бурчакларни топинг (17.10-расм).

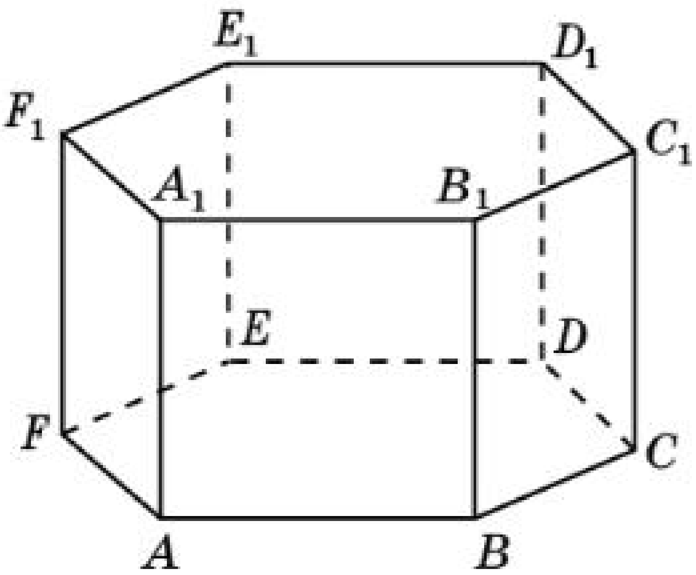
17.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда: а) ABC ва BDD_1; б) ACC_1 ва BDD_1 текисликларининг перпендикуляр эканлигини исботланг.



17.10-расм



17.11-расм



17.12-расм

17.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги ABC ва CDA_1 текисликларнинг орасидаги бурчакни топинг.

17.4. Мунтазам учбурчакли призманинг қўшни икки ён ёқлари орасидаги иккиёқли бурчакни топинг (17.11-расм).

17.5. Мунтазам олтибурчакли призманинг қўшни икки ён ёқлари орасидаги иккиёқли бурчакни топинг (17.12-расм).

B

17.6. Учинчи текисликка перпендикуляр икки текислик ўзаро перпендикуляр бўлиши тўғрими?

17.7. Берилган нуқта орқали берилган текисликка перпендикуляр нечта текислик ўтказиш мумкин?

17.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда қуйидаги текисликларнинг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг: а) ABC ва AB_1D_1; б) ABC ва ACB_1.

17.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ACB_1 ва ACD_1 текисликларининг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

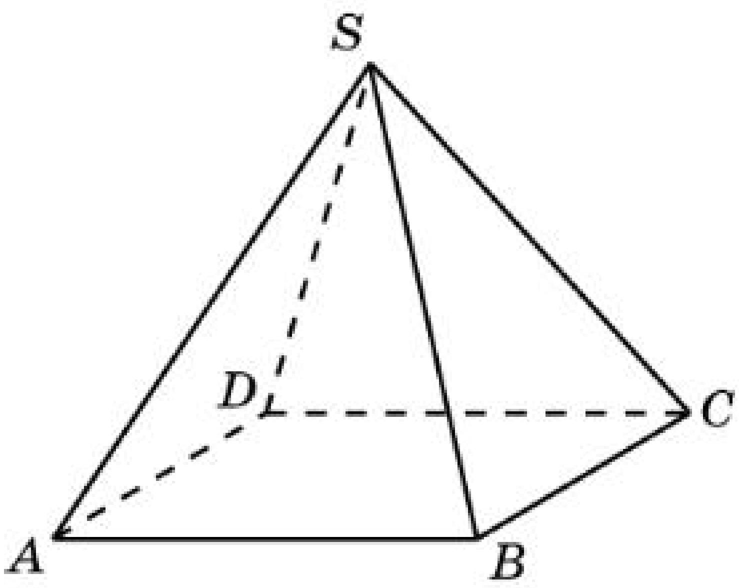
17.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Қуйидаги текисликларнинг орасидаги бурчакни топинг: а) ABB_1 ва CDD_1; б) ACC_1 ва CDD_1; в) ACC_1 ва DEE_1; г) ACC_1 ва CEE_1; д) ABC ва BDE_1; е) CDF_1 ва AFD_1.

17.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг қуйидаги текисликлари перпендкуляр эканини исботланг: а) ABC ва ABB_1; б) ABC ва ACC_1; в) ABC ва ADD_1; г) ACC_1 ва BEE_1; д) ADD_1 ва BFF_1.

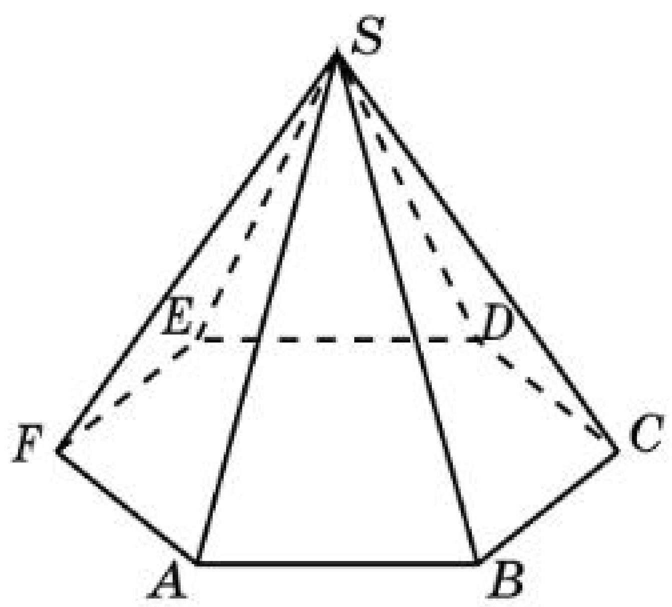
17.12. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари тенг (17.13-расм). Пирамиданинг ён ёғи билан асосининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг тангенсини топинг.

17.13. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (17.14-расм). Пирамиданинг ён ёғи билан асосининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг тангенсини топинг.

17.14. Хеопс пирамидаси асосининг томонлари 230 м, баландлиги тахминан 138 м бўлган мунтазам тўртбурчакли пирамида. Унинг ён ёғи билан асосининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг тангенсини топинг. Тригонометрик функцияларнинг жадвалидан фойдаланиб, бурчакнинг тахминий қийматини топинг.



17.13-расм



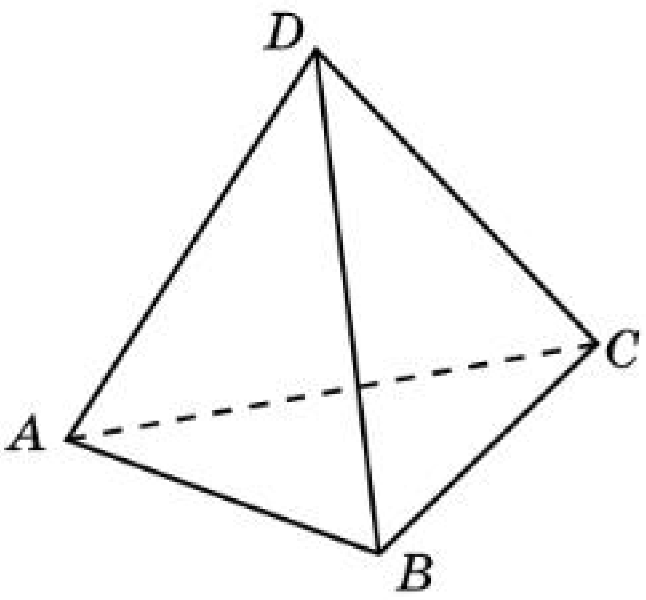
17.14-расм

C

17.15. Мунтазам тетраэдрнинг қўшни икки ёғининг орасидаги иккиёқли бурчакнинг косинусини топинг (17.15-расм).

17.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги ABC_1 билан BCD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

17.17. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари тенг. Унинг қўшни ён ёқлари орасидаги икки ёқли бурчакларнинг косинусини топинг.



17.15-расм

17.18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Қуйидаги текисликларнинг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг: а) ABC ва BCD_1; б) ABC ва ADE_1.

17.19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BCD_1 ва EFA_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг. BCD_1 ва EFA_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

17.20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги ABC_1 ва BDA_1 текисликларнинг перпендикуляр бўлишини исботланг.

17.21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ACB_1 ва ABD_1 текисликларнинг перпендикуляр бўлишини исботланг.

17.22. Нур-Султан шаҳридаги мустақиллик саройи мунтазам тўртбурчакли пирамидага ўхшаш (12.14-расм). Унинг баландлиги асосининг томонига, яъни 62 м га тенг. Шу пирамиданинг ён ёқи билан асос текислигининг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги AD_1 ва CB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги AC ва DA_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги BD ва CA_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги AA_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Мунтазам учбурчакли пирамиданинг айқаш қирраларининг орасидаги бурчакни топинг:

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

6. Барча қирралари 1 га тенг бўлган мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг айқаш қирраларининг орасидаги бурчакни топинг.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг BC ва C_1D_1 тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакни топинг.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 120°.

8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг AD_1 ва CD тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги BD_1 тўғри чизиғи билан BCC_1 текислигининг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

10. Текисликка ўтказилган оғманинг ортогонал проекциясининг узунлиги оғмадан икки марта кам бўлганда улар орасидаги бурчакни топинг.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

11. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. SAD ва SBC текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. A ва D_1 учлари орасидаги масофани топинг.

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{5}$.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги B_1 учидан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призминг барча қирралари 1 га тенг. B учидан E_1F_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

15. Текисликда ётмайдиган бир нуқта орқали текисликка перпендикуляр ва оғма ўтказилган. Агар перпендикуляр 12 см, оғма 15 см бўлса, унда оғманинг проекцияси узунлигини топинг.

A. 3 см. B. 9 см. C. 27 см. D. 81 см.

16. Кесманинг учлари берилган текисликдан 10 см ва 15 см узоқликда жойлашган. Унинг текисликдаги ортогонал проекцияси 12 дм га тенг бўлса, кесманинг узунлигини топинг.

A. 11 см. B. 12 см. C. 13 см. D. 14 см.

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда BC ва DB_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

18. $ABCD$ бирлик тетраэдрда AD ва BC тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B учидан ACB_1 текислигигача бўлган масофани топинг.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. Унинг баландлигини топинг.

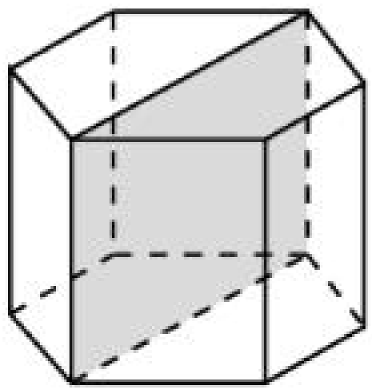
A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{14}}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

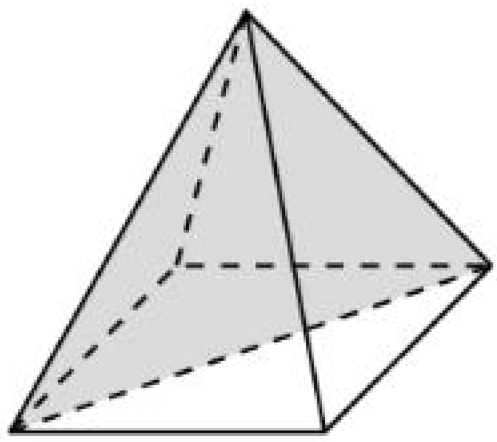
18-§*. Кубнинг, призманинг ва пирамиданинг кесимлари

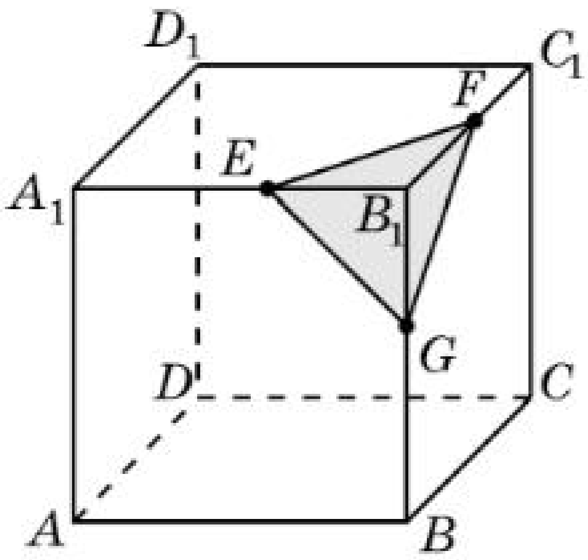
Кўпёқнинг текислик билан кесими деб, шу кўпёқ билан текисликнинг умумий кесишишган қисми бўлган кўпбурчакка айтилади.

Призма асосининг диагонали билан унга қўшни бўлган икки ён қирраси орқали ўтган текислик билан кесими, унинг *диагонал кесими* дейилади (18.1-расм).

Пирамида асосининг диагонали билан учи орқали ўтган текислик билан кесими, унинг *диагонал кесими* дейилади (18.2-расм).


18.1-расм


18.2-расм



18.3-расм

Қуйидаги: а) учбурчакли; б) тўртбурчакли; в) n бурчакли призманинг нечта диагонал кесими мавжуд

Қуйидаги: а) учбурчакли; б) тўртбурчакли; в) n бурчакли пирамиданинг нечта диагонал кесими мавжуд?

Кубнинг, призманинг ва пирамиданинг текислик билан кесимини ясаш масаласини қарайлик.

1-масала. Кубнинг чизмаси (18.3-расм) ва шу кубнинг бир учидан чиқадиган қирраларига тегишли E, F, G нуқталари берилсин. Кубнинг E, F, G нуқталари орқали ўтувчи текислик кесимини ясанг.

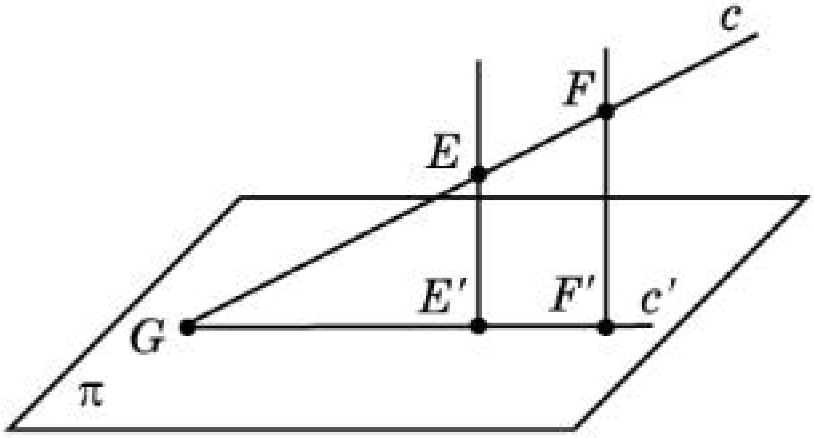
Ясаш. E ва F нуқталари кубнинг $A_1B_1C_1D_1$ ёқига тегишли бўлганлиги учун, EF кесма кесим текислигига ва кубнинг шу ёқига умумий бўлади. EG кесма билан кубнинг ABB_1A_1 BCC_1B_1 ёқи ҳақида ҳам шу каби айтиш мумкин.

Кубнинг шу нуқталар орқали ўтадиган текислик кесимини ясаш учун уларни кесмалар орқали бирлаштириш етарли. Натижада олинган EFG учбурчак куб кесимининг изланаётган текислик кесими бўлади (18.3-расм).

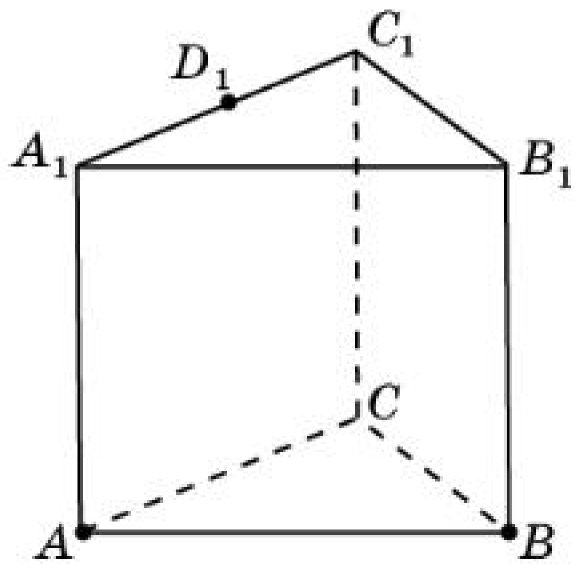
Бундан мураккаброқ кесимларни ясаш учун проекциялар усули қўлланилади.

c тўғри чизиқ E, F нуқталар орқали ўтсин ва шу нуқталарнинг π текислигидаги E', F' ортогонал проекциялари маълум бўлсин. У ҳолда c тўғри чизиқ билан E', F' нуқталар орқали ўтувчи c' тўғри чизиқнинг G кесиниш нуқтаси c тўғри чизиғқ билан π текислигининг изланаётган кесишиш нуқтаси бўлади (18.4-расм). Призма ва пирамиданинг кесимларини ясашга доир мисоллар кўрамиз.

2-масала. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг A, B учлари ва A_1C_1 қиррасининг ўртаси D_1 орқали ўтувчи текислик кесимини ясайлик (18.5-расм).

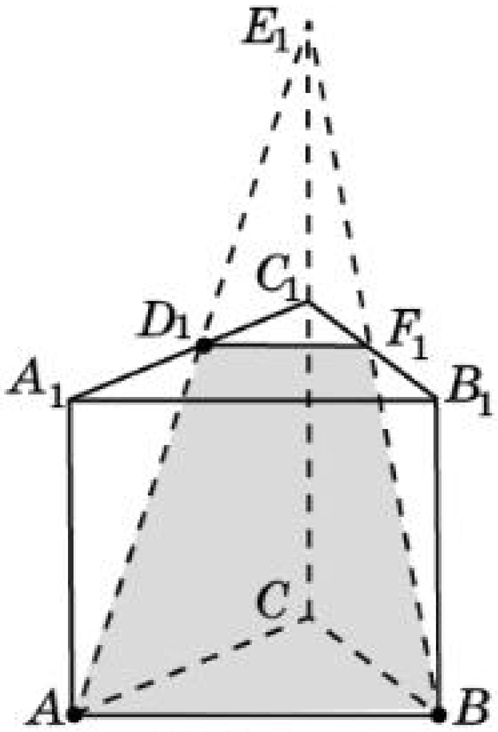


18.4-расм

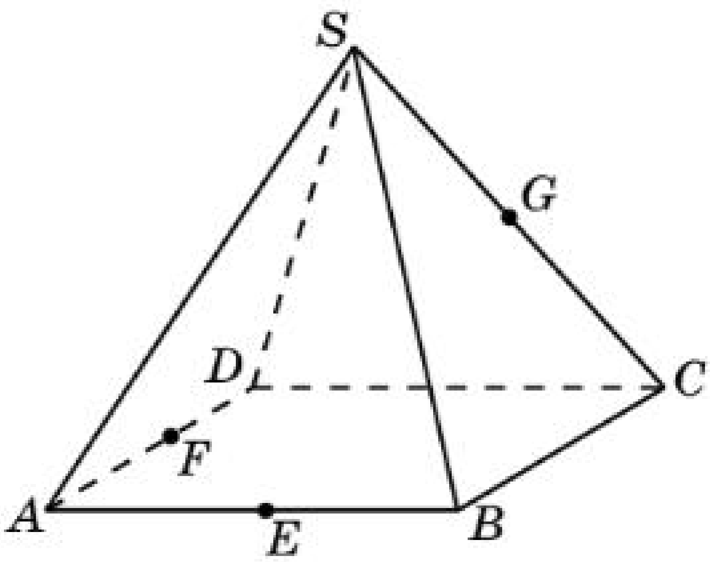


18.5-расм

Ясаш. AD_1 тўғри чизиғини ўтказайлик ва унинг CC_1 тўғри чизиғи билан кесишиш нуқтасини E_1 деб белгилайлик. B ва E_1 нуқталар орқали тўғри чизиқ ўтказиб, унинг B_1C_1 қирраси билан кесишиш нуқтасини F_1 деб белгилайлик. D_1 ва F_1 нуқталарни туташтирамиз. ABF_1D_1 тўртбурчак изланаётган кесим бўлади (18.6-расм).



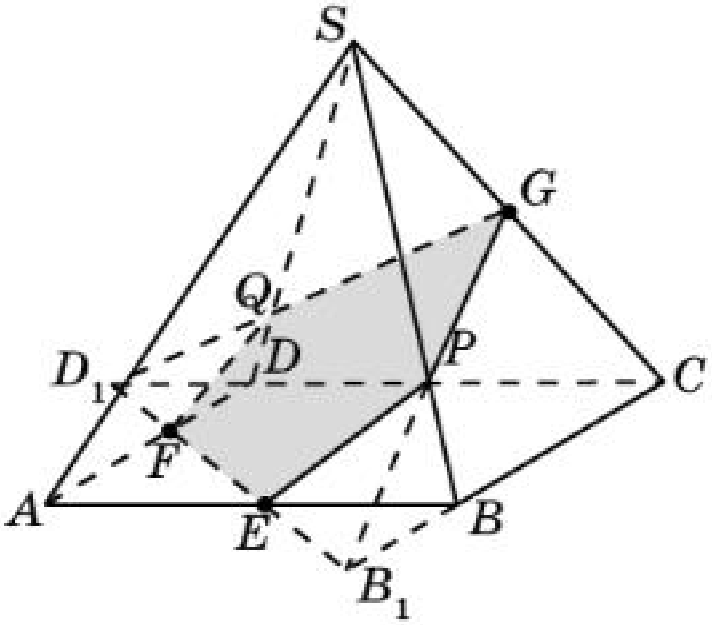
18.6-расм



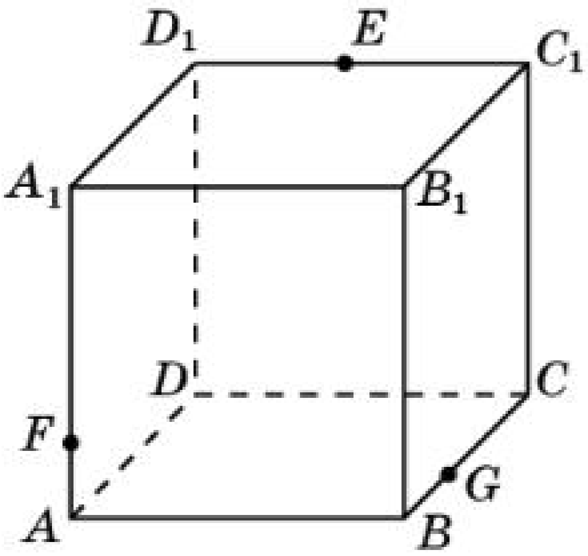
18.7-расм

3-масала. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг AB, AD ва SC қирраларининг ўрталари мос равишда E, F ва G нуқталар орқали ўтувчи кесимини ясанг (18.7-расм).

Ясаш. EF тўғри чизиғини ўтказиб, унинг BC ва CD чизиқлар билан кесишиш нутасини мос равишда B, B_9, D, деб белгилайлик. B_1G, D_1G тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталарини мос равишда SB, SD қирралари билан кесишиш нуқталарини мос равишда P, Q деб белгилайлик. E ва P, F ва Q нуқталарни кесмалар билан туташтирамиз. $FEPGQ$ бешбурчак изланаётган кесим бўлади (18.8-расм).



18.8-расм

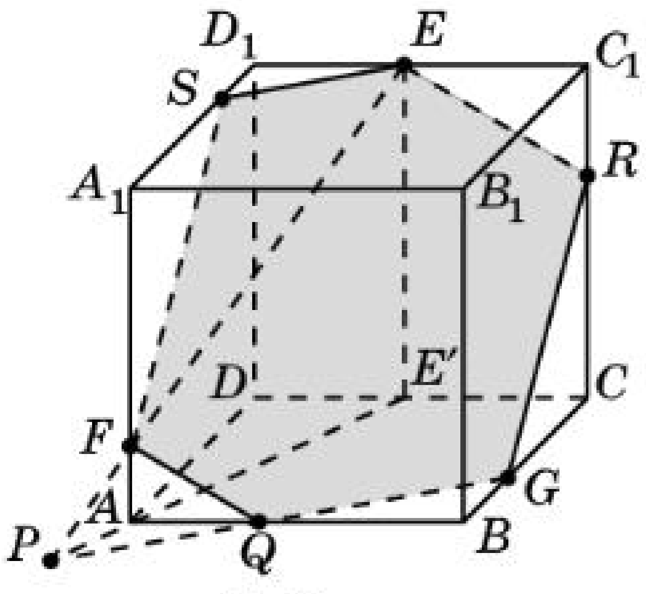


18.9-расм

4-масала. Проекция усулини қўллаб, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг айқаш қирраларида ётадиган E, F, G нуқталар орқали ўтувчи текислик кесимини ясанг (18.9-расм).

Ясаш. Кесим текислигида ётадиган EF тўғри чизиғи кубнинг $ABCD$ ёқининг текислиги билан кесишишини топайлик. Бунинг учун E нуқтасининг кубнинг шу ёғига E' ортогонал проекциясини ясаймиз (18.10-расм). EF ва $E'A$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси изланаётган P нуқта бўлади. У кесим текислигида ва кубнинг $ABCD$ ёқида ётади.

G нуқта ҳам кесим текислиги билан кубнинг шу ёқида ётади. Демак, кесим текислиги кубнинг $ABCD$ ёқининг текислигини PG тўғри чизиғи орқали кесиб ўтади. Шу тўғри чизиқни кубнинг AB қирраси билан кесишиш нуқтаси кесимнинг яна бир Q нуқтасини беради.



18.10-расм

G ва Q, F ва Q нуқталарни кесмалар билан туташтирамиз. Кубнинг қарама-қарши ёқлари параллел бўлганлиги учун, кесиб ўтувчи текислик шу ёқларни параллел тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтади. E нуқта орқали FQ тўғри чизиғига параллел тўғри чизиқ ўтказайлик ва унинг CC_1 қирраси билан кесишиш нуқтасини R деб белгилайлик. R ва G нуқталарини кесмалар билан туташтирамиз.

Шунга ўхшаш E нуқта орқали GQ тўғри чизиғига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг A_1D_1 қирраси билан кесишиш нуқтасини S деб белгилайлик. E ва S, F ва S нуқталарини кесмалар билан туташтирамиз. $ESFQGR$ кўпбурчак кубнинг текислик билан кесимининг изланаётган кесими бўлади.

? Қандай кўпбурчаклар кубнинг кесими бўла олади? Мисоллар келтиринг.

Саволлар

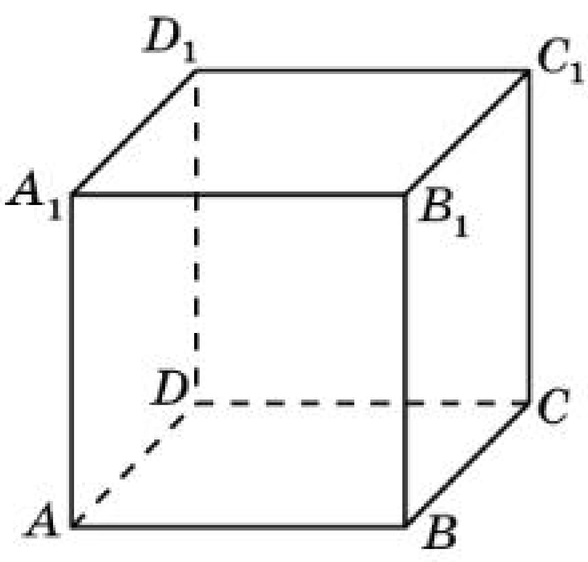
1. Кўпёқнинг текислик билан кесими деганда нимани тушунасиз?
2. Призманинг текислик билан қандай кесми диагонал кесим деб аталади?
3. Пирамиданинг текислик билан қандай кесми диагонал кесим деб аталади?
4. Проекциялар усулининг маъноси қандай?

Масалалар

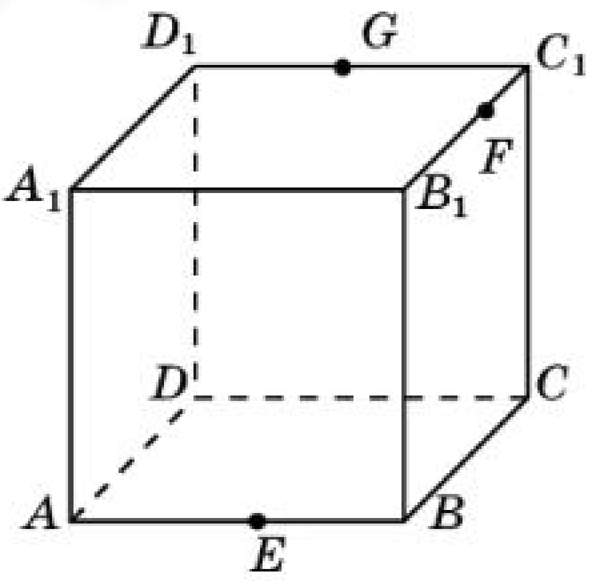
B

18.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг B, D_1 учлари ва CC_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесим текислигини ясанг (18.11-расм). Кесимнинг шаклини аниқланг.

18.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AB, BC ва A_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесим текислигини ясанг. Кесимнинг шаклини аниқланг.



18.11-расм



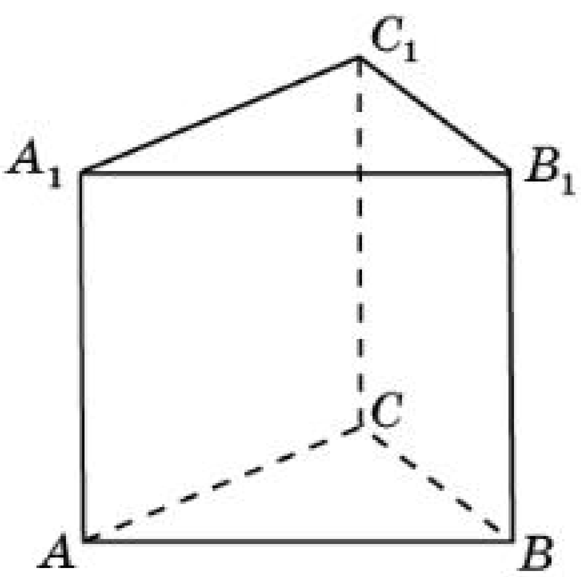
18.12-расм

18.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг A, C учлари ва A_1D_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесим текислигини ясанг. Кесимнинг шаклини аниқланг.

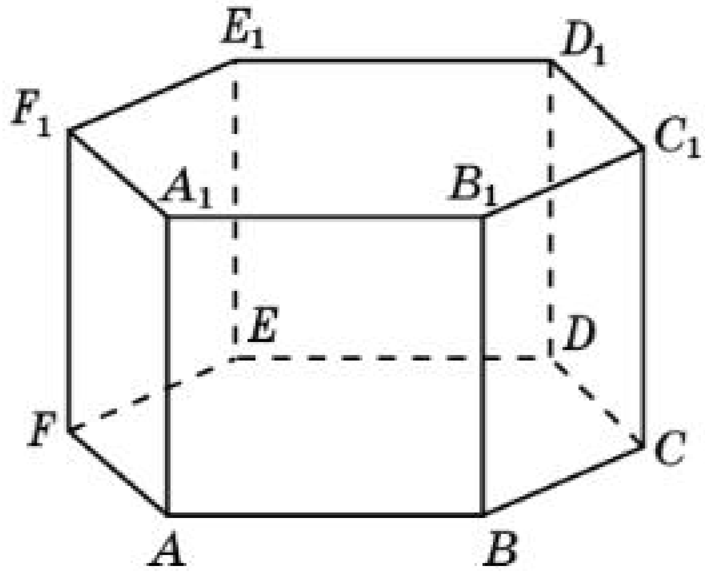
18.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг C_1 учи ва AB ва AD қирраларининг ўртаси орқали ўтувчи кесим текислигини ясанг (18.11-расм). Кесимнинг шаклини аниқланг.

18.5. 18.12-расмдаги E, F, G нуқталар орқали ўтувчи текислик кесимини ясанг.

18.6. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг AA_1, BB_1 ва B_1C_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи текислик кесимини ясанг (18.13-расм). Кесимнинг шаклини аниқланг.



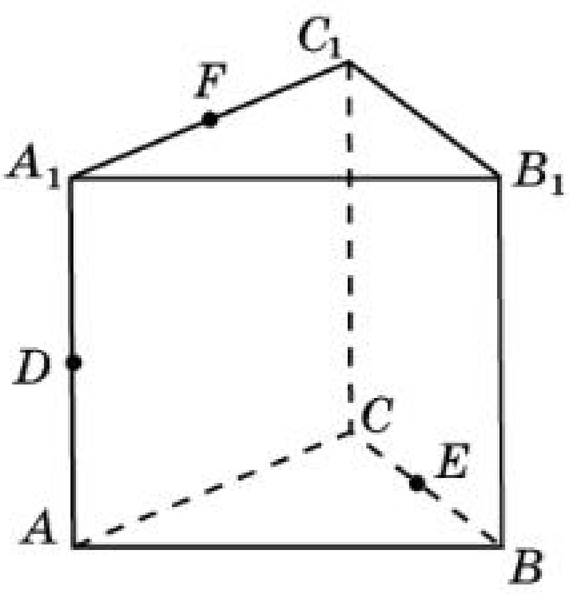
18.13-расм



18.14-расм

18.7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг A, B ва D_1 учлари орқали ўтувчи текислик кесимини ясанг (18.14-расм).

C

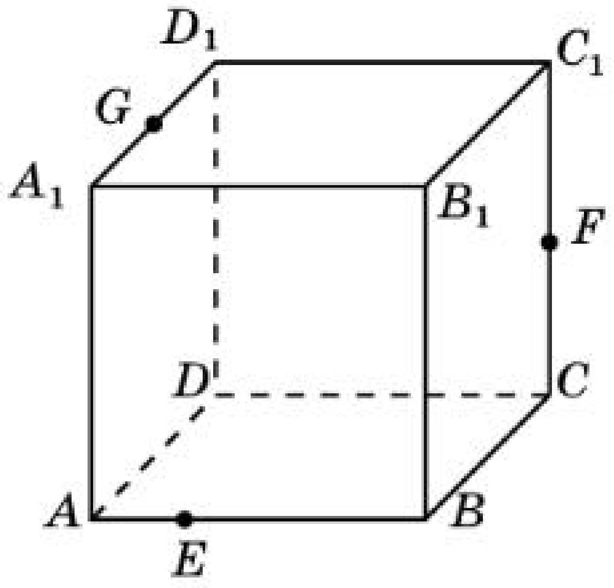


18.15-расм

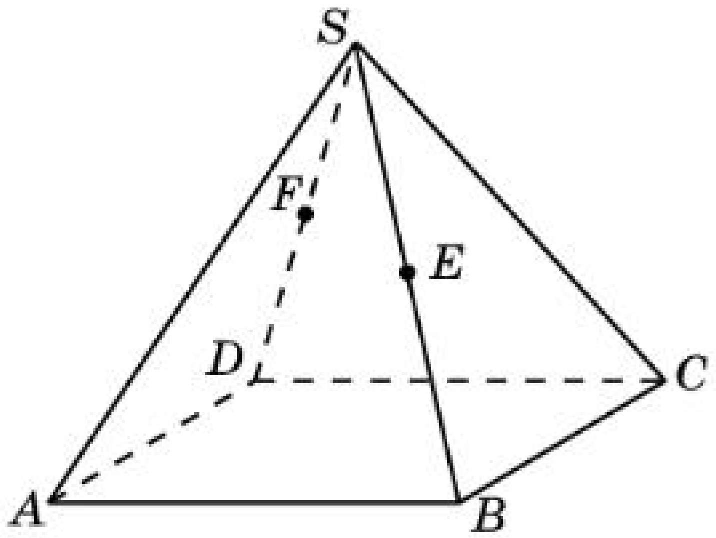
18.8. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг AA_1, BC ва A_1C_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи текислик кесимини ясанг (18.15-расм).

18.9. 18.16-расмдаги E, F, G нуқталар орқали ўтувчи текислик кесимини ясанг.

18.10. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг A учи ва SB билан SD қирраларининг ўрталари мос равишда E ва F нуқталар орқали ўтувчи текислик кесимини ясанг (18.17-расм).



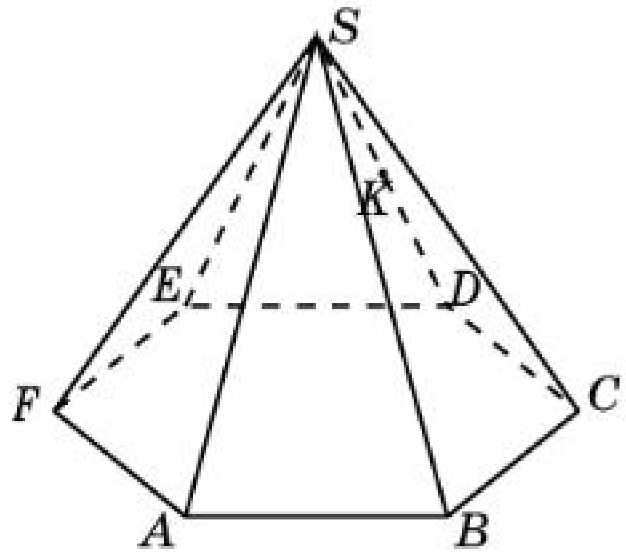
18.16-расм



18.17-расм

18.11. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг A, B учлари ва SD қиррасининг ўртаси K нуқта орқали ўтувчи текислик кесимини ясанг (18.18-расм).

18.12. Қуйидаги кўпбурчаклар кубнинг кесими бўлиши мумкинми: а) мунтазам бешбурчак; б) мунтазам олтибурчак; в) еттибурчак?



18.18-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

18.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг қуйидаги учлари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг: а) B, C, D_1; б) B, D, C_1.

19-§. Ортогонал проекциянинг юзаси

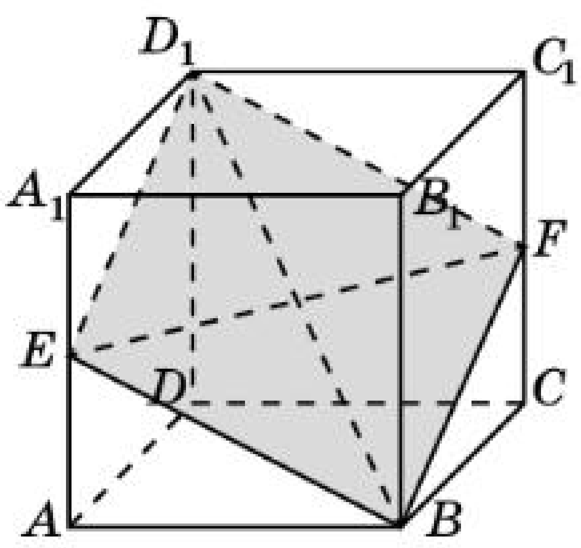
Кесимнинг юзасини топишга мисоллар келтирайлик.

1-масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B, D_1 учлари ва CC_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг.

Ечими. Изланаётган кесим BED_1F ромб бўлади (19.1-расм).

Ромбнинг юзаси унинг диагоналлари кўпайтмасининг ярмига тенглигини қўллаймиз. Бу ҳолатда $EF = \sqrt{2}$, $BD_1 = \sqrt{3}$. Демак, ромбнинг юзаси $\frac{\sqrt{6}}{2}$ га тенг бўлади.

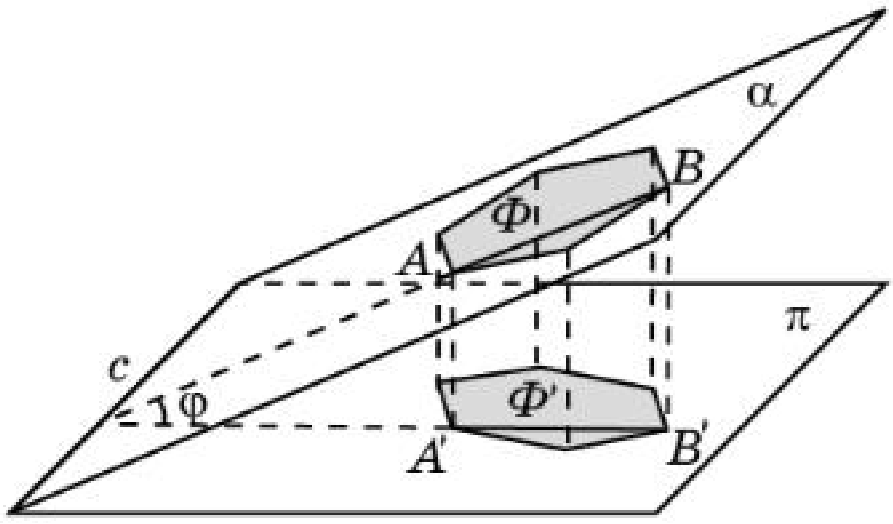
Кесим юзасини топишнинг умумий усулларидан бири қуйидаги теоремага асосланади.



19.1-расм

Теорема. ***Ясси фигуранинг ортогонал проекциясининг юзаси шу фигура юзасининг фигура ётган текислик билан проекция текислигининг орасидаги бурчакнинг косинуси кўпайтмасига тенг.***

Φ — α текислигида ётган фигура, Φ' — унинг π текислигидаги ортогонал проекцияси, ал φ — шу текисликлар орасидаги бурчак бўлсин (19.2-расм).



19.2-расм

Қуйидаги формула ўринли: $S' = S \cdot \cos\varphi$, бу ерда S ва S' — мос равишда Φ ва Φ' фигураларнинг юзалари.

Бунда биз бу формуланинг исботини бермаймиз. Фақат Φ фигура Φ' фигурани $\cos\varphi$ коэффициент билан c тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган йўналишда сиқиш орқали ҳосил қилинишинигина айтиб ўтамиз, бунда c — текисликларнинг кесишиш чизиғи.

Бу теоремадан Φ ясси фигуранинг S юзаси унинг Φ' ортоганал проекциясининг S' юзаси орқали ифодалганган формуласи келиб чиқади:

$$S = \frac{S'}{\cos\varphi}$$

Фигуранинг ортогонал проекциясининг юзаси фигуранинг ўзининг юзасидан катта бўлиши мумкинми? Нима учун?

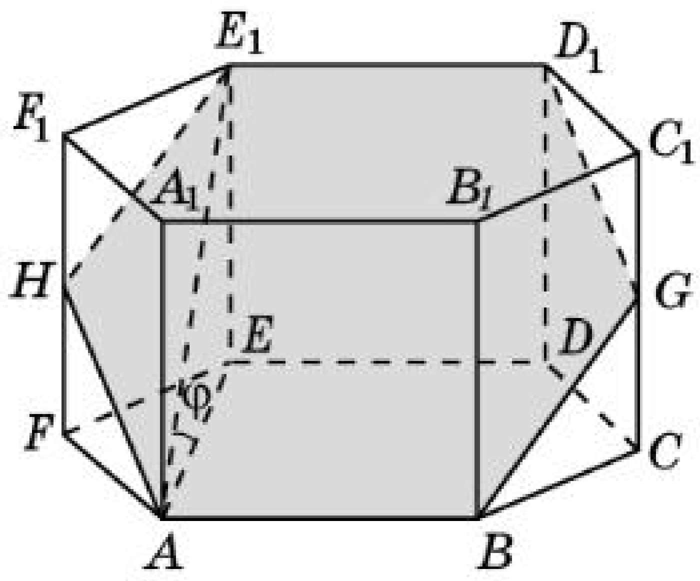
1-мисолдаги кесимнинг юзасини топиш учун ортогонал проекциянинг юзаси формуласидан фойдаланайлик.

BED_1F ромбнинг ABC текислигидаги ортогонал проекцияси $ABCD$ квадрат бўлади. BED_1 ва ABC текисликлар орасидаги бурчакнинг косинуси $BD : BD_1$ нисбатга, яъни $\frac{\sqrt{6}}{3}$ га тенг. $ABCD$ квадратнинг юзаси 1 га тенглигидан ромбнинг юзаси $\frac{\sqrt{6}}{2}$ га тенг бўлади.

2-масала. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, B ва D_1 учлари орқали ўтувчи текислик кесимининг юзасини топинг.

Ечиш. Изланаётган кесим $ABGD_1E_1H$ олтибурчак бўлади (19.3-расм).

Шу олтибурчакнинг ортогонал проекцияси томонлари 1 га тенг $ABCDEF$ мунтазам олтибурчак бўлади. Унинг юзаси $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ га тенг. ABG ва ABC текисликлар орасидаги φ бурчакнинг косинуси $AE : AE_1$ нисбатга, яъни $\frac{\sqrt{3}}{2}$ га тенг. Демак, изланаётган олтибурчакнинг юзаси 3 га тенг бўлади.



19.3-расм

Саволлар

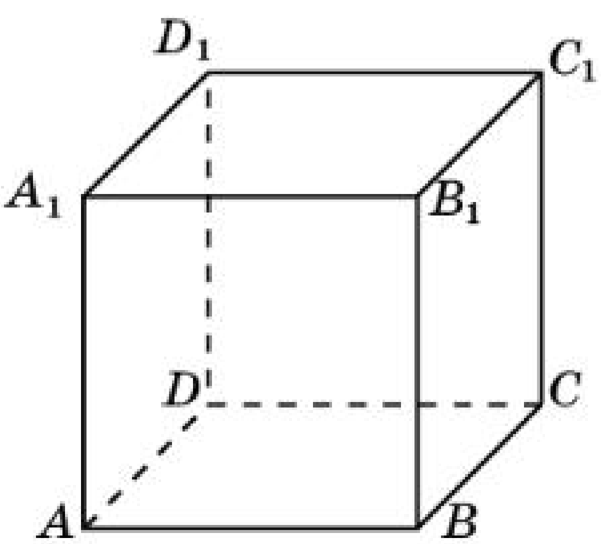
1. Ясси фигуранинг ортогонал проекциясининг юзаси ҳақидаги теоремани таърифланг.

Масалалар

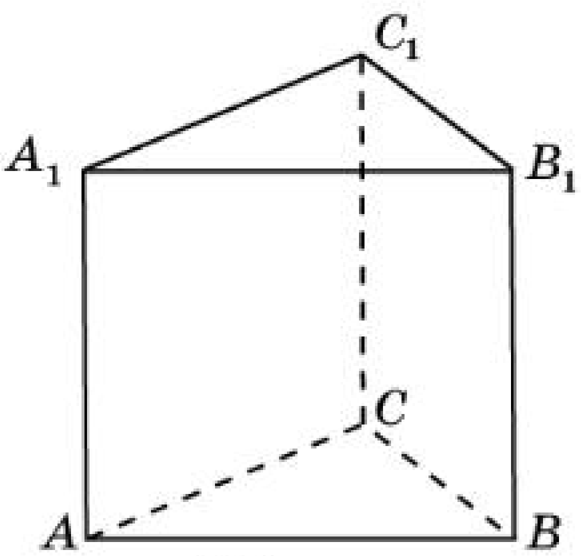
A

19.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг қуйидаги учлари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг: а) A, B, C_1; б) A, C, D_1 (19.4-расм).

19.2. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, B ва C_1 учлари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг (19.5-расм).

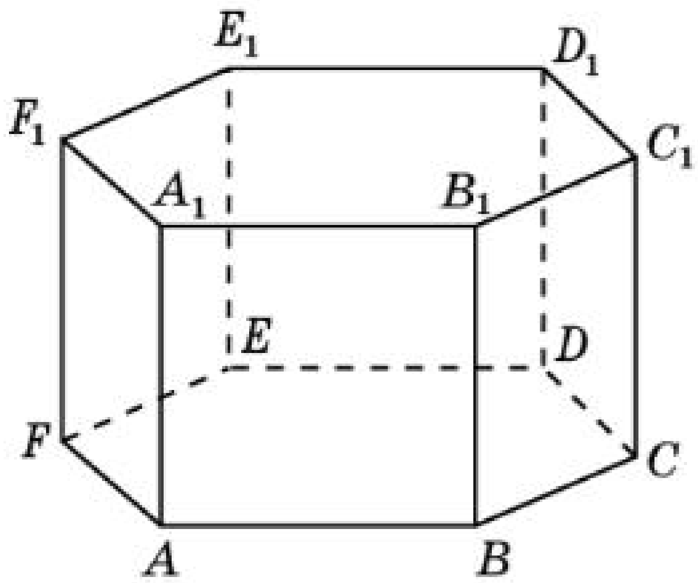


19.4-расм

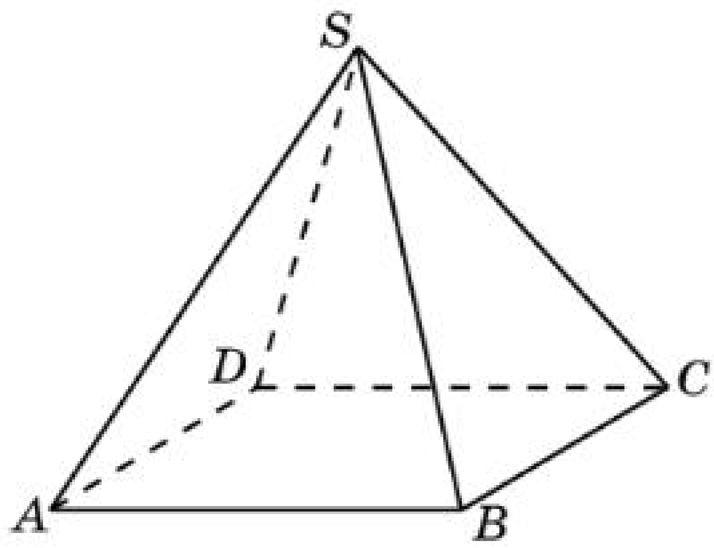


19.5-расм

19.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг қуйидаги учлари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг: а) A, C, C_1; б) A, D, D_1 (19.6-расм).



19.6-расм

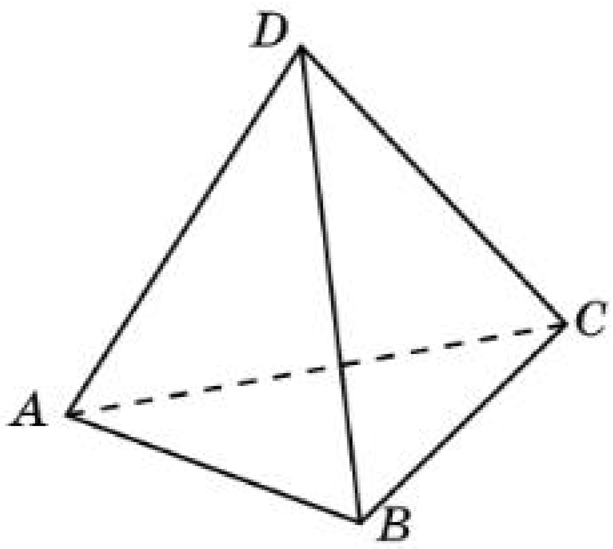


19.7-расм

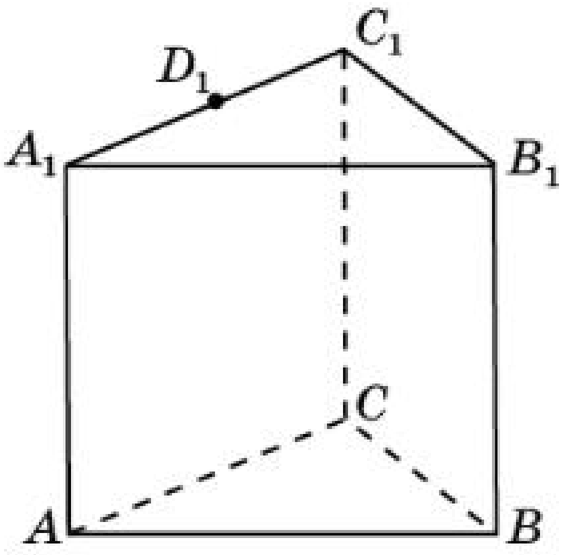
19.4. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, C ва S учлари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг (19.7-расм).

B

19.5. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг AB, BC ва CD қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг (19.8-расм).

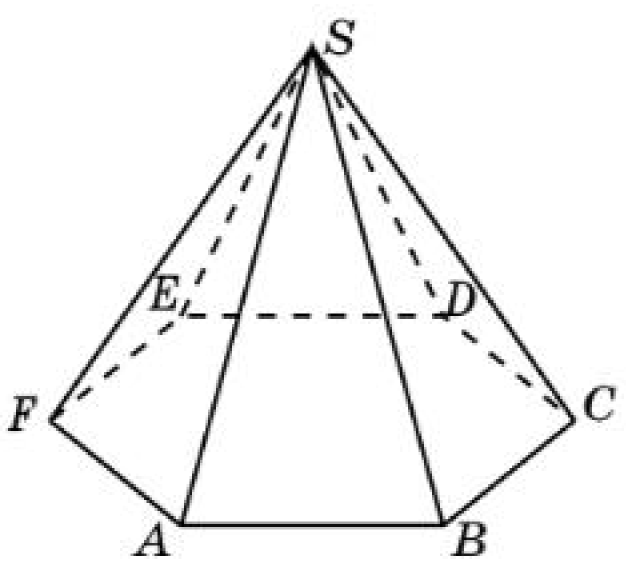


19.8-расм



19.9-расм

19.6. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, B учлари ва A_1C_1 қиррасининг ўртаси D_1 нуқта орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг (19.9-расм).



19.10-расм

19.7. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. Қуйидаги учлари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг: а) A, D ва S; б) A, C ва S (19.10-расм).

19.8. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг.

Унинг AA_1, BB_1 ва A_1C_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг.

C

19.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AB, BC ва A_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг.

19.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда D_1 учи ва AB, BC қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг.

19.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AB, BC, DD_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг.

19.12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, C_1 ва E_1 учлари орқали ўтувчи кесим текислигининг юзасини топинг.

19.13. Нур-Султан шаҳридаги мустақиллик саройи мунтазам тўртбурчакли пирамидага ўхшаш (§ 12, 12.14-расмга қаранг). Унинг баландлиги асосининг томонига, яъни 62 м га тенг. Шу пирамиданинг диагонал кесимининг юзасини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

19.14. Текисликдаги векторнинг таърифини такрорланг.

19.15. Текисликдаги векторнинг таърифига ўхшаш фазодаги векторнинг таърифини таърифланг.

19.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг боши A учида, охири C_1 учида бўладиган векторнинг узунлигини топинг.

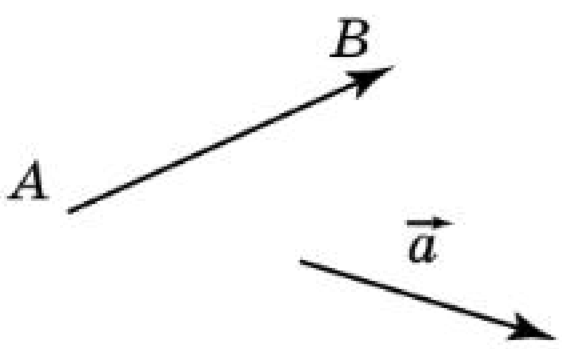
III боб ФАЗОДА ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ ВА ВЕКТОРЛАР

20-§. Фазода векторлар

Фазода векторнинг таърифи текисликдаги векторнинг таърифига ўхшаш бўлади.

Фазода ҳам текисликдаги каби *вектор* деб йўналтирилган кесмага, яъни, боши ва охири кўрсатилган кесмага айтилади.

Боши ва охири устма-уст тушувчи *ноль векторлар* ҳам қаралади.



20.1-расм

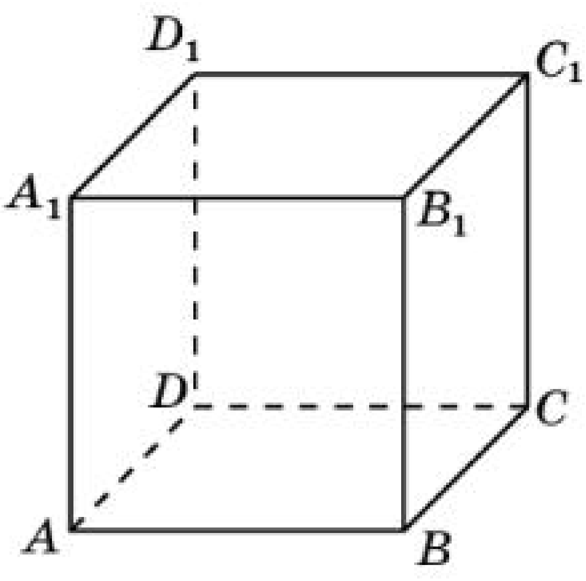
Боши A нуқтада ва охири B нуқтада бўлган вектор $\overrightarrow{AB}$ деб белгиланади ва чизмада векторларнинг йўналиши стрелка билан кўрсатилади (20.1-расм). Шу билан бирга векторларни белгилаш учун лотин алифбосининг кичик ҳарфи билан устига стрелка қўйиб белгиланади, масалан $\vec{a}$, $\vec{b}$ каби. Ноль вектор $\vec{0}$ деб белгиланади.

Агар ноль бўлмаган икки вектор бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, у ҳолда бу икки векторни коллинеар вектор деб атаймиз. Коллинеар векторлар йўналишдош ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$) ёки қарама-қарши йўналтирилган ($\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{n}$) векторларга ажралади.

Агар фазодаги нолдан фарқли икки векторни бир нуқтадан ясаганда бир тўғри чизиқда ётса, у ҳолда улар коллинеар векторлар бўлишини исботланг.

Векторнинг узунлиги ёки модули деб, шу векторни тасвирлаб турган кесманинг узунлигига айтилади. У $|\overrightarrow{AB}|$ ёки $|\vec{a}|$ деб белгиланади. Ноль векторнинг узунлиги нолга тенг.

Агар икки вектор йўналишдош ва узунликлари тенг бўлса, улар *тенг векторлар* деб аталади.



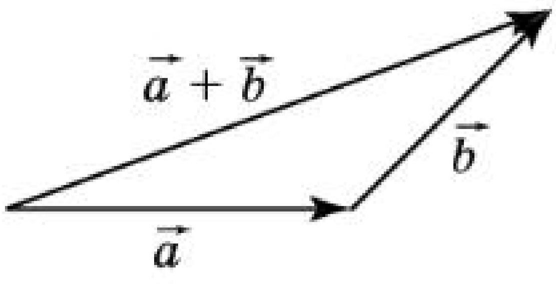
20.2-расм

Барча ноль векторлар ўзаро тенг бўлади.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда учлари орқали $\overrightarrow{AA_1}$ векторга тенг бўлган векторларни кўрсатинг (20.2-расм).

Текисликдаги векторлар каби фазодаги векторлар учун ҳам векторларни қўшиш, сонга кўпайтириш амаллари бажарилади.

Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни қўшиш учун $\vec{b}$ векторни унинг боши $\vec{a}$ векторнинг охири билан устма-уст тушадиган ҳолда жойлаштириш керак (20.3-расм).



20.3-расм

Боши $\vec{a}$ векторнинг боши билан, охири эса $\vec{b}$ векторнинг охири билан устма-уст тушадиган вектор $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторларнинг йиғиндиси* деб аталади ва $\vec{a}+\vec{b}$ каби белгиланади.

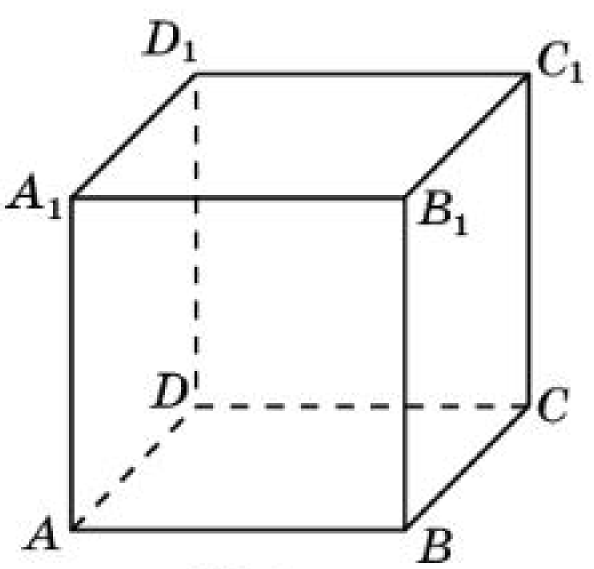
Векторларни қўшиш амали учун сонларни қўшишнинг хоссаларига ўхшаш қўйидаги хоссалар бажарилади:

1-хосса. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*ўрин алмаштириш қонуни*).

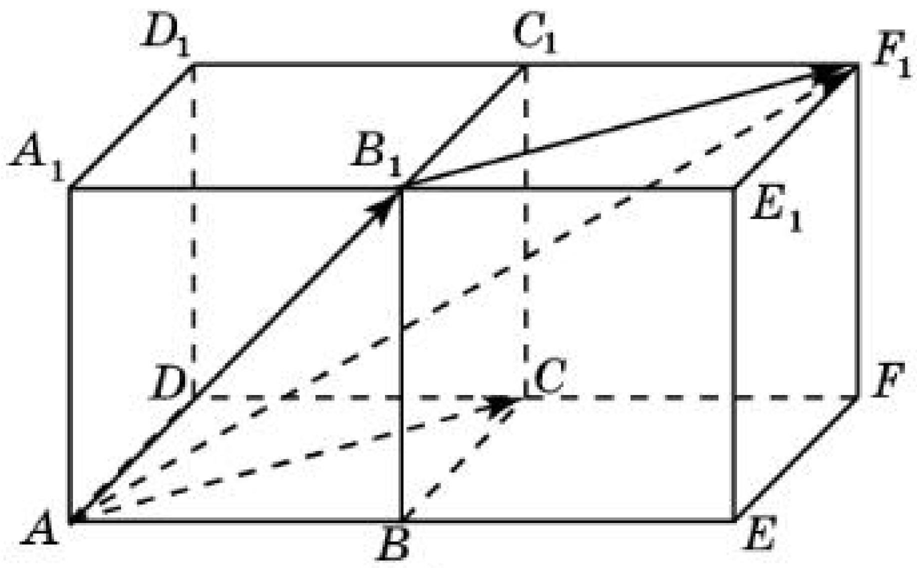
2-хосса. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (*группалаш қонуни*).

Ушбу хоссаларни текисликдаги векторлар каби мустақил исботланг.

1-масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда учлари орқали $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}$ векторга тенг векторларни кўрсатинг (20.4-расм).



20.4-расм



20.5-расм

Ечиш. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубга $BEFCB_1E_1F_1C_1$ бирлик кубни қўшиб, тўғри бурчакли паралеллепипед ясаймиз (20.5-расм). $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}$ йиғиндиси $\overrightarrow{AF_1}$ векторга тенг. Унинг узунлиги $\sqrt{6}$ га тенг бўлади.

$\vec{a}$ *векторнинг* t *сонга кўпайтмаси деб узунлиги* $|t|\cdot|\vec{a}|$ бўладиган ва йўналиши $t>0$ бўлганда ўзгаришсиз қоладиган, $t<0$ бўлганда қарама-қарши йўналишда бўладиган векторга айтилади. Векторнинг нолга кўпайтмаси ноль вектор бўлиб ҳисобланади.

$\vec{a}$ векторнинг t сонига кўпайтмаси $t\vec{a}$ деб белгиланади. Таъриф бўйича $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$.

$\vec{a}$ векторнинг -1 сонига кўпайтмаси $-\vec{a}$ деб белгиланади ва у $\vec{a}$ *векторга қарама-қарши йўналган вектор* деб аталади.

Таъриф бўйича $-\vec{a}$ ввекторнинг йўналиши $\vec{a}$ векторнинг йўналишига қарама-қарши бўлади. Яъни, $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

$\vec{b}=t\vec{a}$ тенглик тўғри бўладиган t ҳақиқий сон топилсагина нолдан фарқли $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлади.

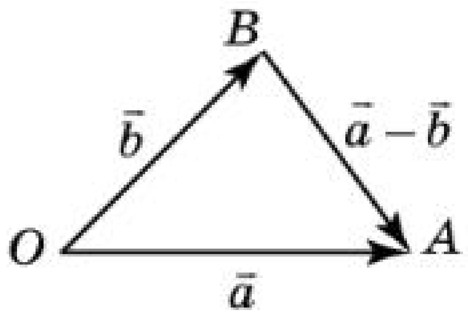
Векторни сонга кўпайтириш амали учун сонларни кўпайтиришнинг хоссаларига ўхшаш қуйидаги хоссалар ўринли бўлади:

1-хосса. $(ts)\vec{a} = t(s\vec{a})$ (*группалаш қонуни*).

2-хосса. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$ (*биринчи тақсимот қонуни*).

3-хосса. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$ (*иккинчи тақсимот қонуни*).

Шу хоссаларни текисликдаги векторлар каби мустақил исботланг.

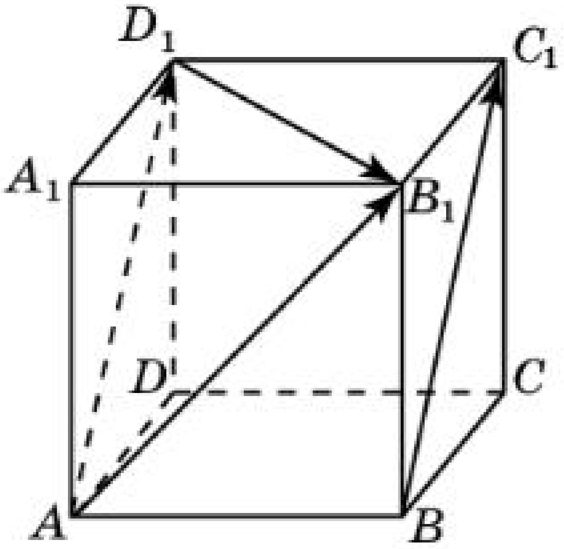


20.6-расм

$\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторларнинг айирмаси* деб $\vec{a} + (-\vec{b})$ векторга айтилади. Яъни $\vec{a} - \vec{b}$ деб белгиланади.

$\vec{a} - \vec{b}$ айирмани топиш учун $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг бошланғич нуқталари мос келадиган қилиб ясаш кифоя (20.6-расм).

Боши $\vec{b}$ векторнинг охири билан, охири $\vec{a}$ векторнинг охири билан мос келувчи вектор изланган векторларнинг айирмаси бўлади.



20.7-расм

2-масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда $\overline{AB_1} - \overline{BC_1}$ векторнинг узунлигини топинг (20.7-расм).

Ечими. $\overline{AB_1} - \overline{BC_1} = \overline{AB_1} - \overline{AD_1} = \overline{D_1B_1}$. $\overline{D_1B_1}$ векторнинг узунлиги $\sqrt{2}$ га тенг.

Саволлар

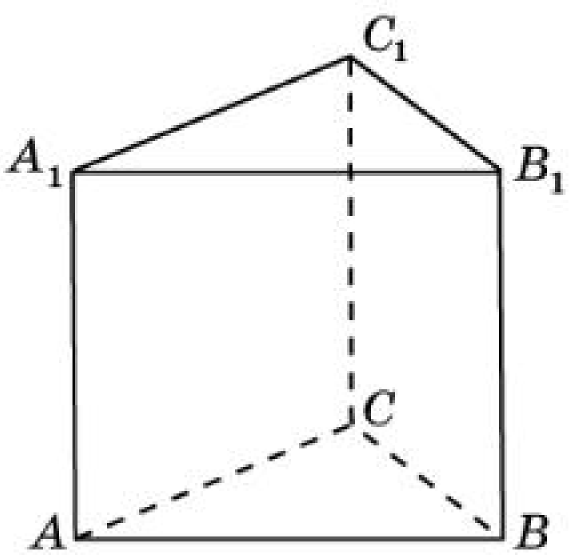
1. Вектор деб нимага айтилади?
2. Қандай вектор ноль вектор деб аталади?
3. Қандай икки вектор коллинеар деб аталади?
4. Векторнинг узунлиги(модули) деб нимага айтилади?
5. Қандай икки вектор тенг деб аталади?
6. Векторларнинг қўшиш амали қандай аниқланади?
7. Векторларнинг қўшишнинг ўрин алмаштириш қонунини айтинг.
8. Векторларни қўшишнинг группалаш қонунини айтинг.
9. Векторни сонга кўпайтириш амали қандай аниқланади?
10. Векторни сонга кўпайтириш қандай белгиланади?
11. Қандай вектор берилган векторга қарама-қарши вектор деб аталади? У қандай белгиланади?
12. Икки векторнинг айирмаси деб нимага айтилади? У қандай белгиланади?
13. Векторни сонга кўпайтиришнинг группалаш қонунини айтинг.
14. Векторни сонга кўпайтиришнинг 1-тақсимот қонунини айтинг.
15. Векторни сонга кўпайтиришнинг 2-тақсимот қонунини айтинг.

Масалалар

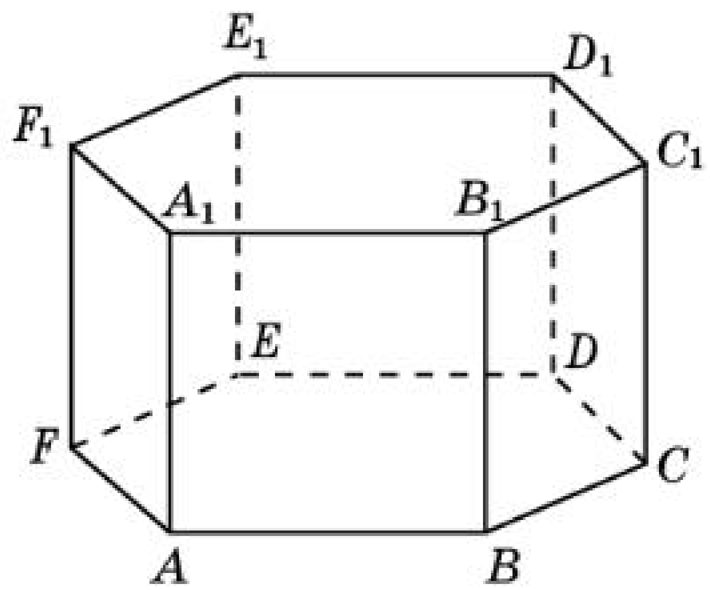
A

20.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (20.4-расм) учлари орқали $\overrightarrow{AB}$ векторга тенг векторларни кўрсатинг (20.4-расм).

20.2. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призмада (20.8-расм) учлари орқали $\overrightarrow{AA_1}$ векторга тенг векторларни кўрсатинг.



20.8-расм



20.9-расм

20.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада (20.9-расм) учлари орқали қуйидаги векторларга тенг векторларни кўрсатинг: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{AB_1}$; д) $\overrightarrow{AC_1}$.

20.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB_1}$; в) $\overrightarrow{AC_1}$.

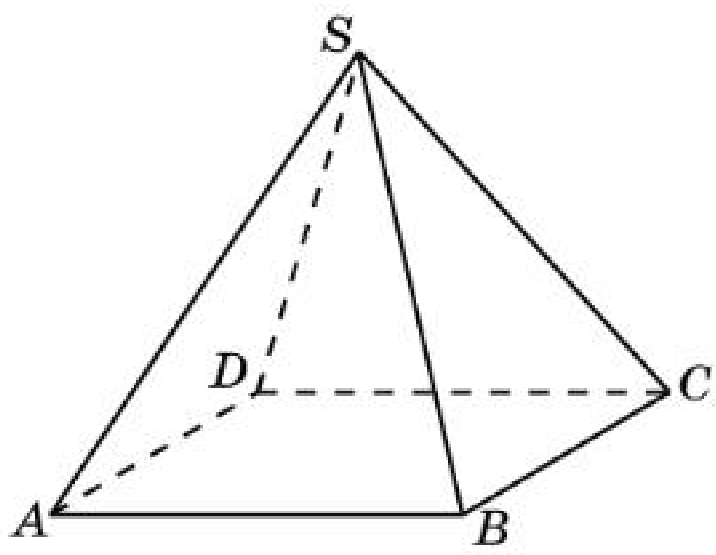
20.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (20.9-расм). Қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{AB_1}$; д) $\overrightarrow{AC_1}$; е) $\overrightarrow{AD_1}$.

20.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда учлари орқали қуйидаги векторларга тенг векторларни топинг: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}$; д) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

B

20.7. Қуйидаги кўпёқларнинг қирралари неча турли векторларни беради: а) куб; б) учбурчакли призма; в) мунтазам тўртбурчакли пирамида (20.10-расм)?

20.8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада учлари орқали қуйидаги векторларга тенг векторларни кўрсатинг: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE_1}$.



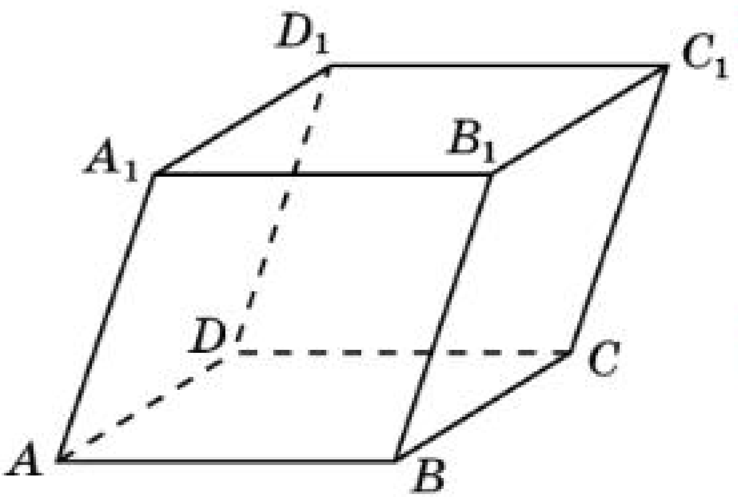
20.10-расм

20.9. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (20.8-расм). $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$ векторнинг узунлигини топинг.

20.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда қуйидаги векторларнинг узунлигини топинг: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}$; д) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

20.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призминнг барча қирралари 1 га тенг. Қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE_1}$.

20.12. Қандай ҳолларда векторларнинг йиғиндисининг узунлиги қўшилувчиларнинг узунликларининг йиғиндисига тенг бўлади?



20.11-расм

20.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедда (20.11-расм) қуйидаги векторларни кўрсатинг: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$; г) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}$.

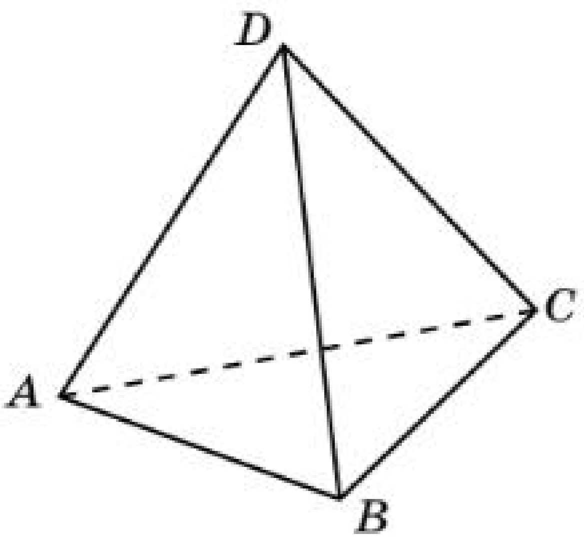
20.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$; г) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}$.

C

20.15. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг (20.12-расм). $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ векторнинг узунлигини топинг.

20.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда қуйидаги тенглик ўринли бўладиган X нуқтани кўрсатинг: а) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$; б) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD} = \vec{0}$; в) $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} + \overrightarrow{XD_1} = \vec{0}$.

20.17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (20.9-расм). Қуйидаги тенглик ўринли бўладиган t, s сонларини топинг: а) $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AF}$; в) $\overrightarrow{AE} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AF}$; г) $\overrightarrow{AC_1} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AF_1}$.



20.12-расм

20.18. $ABCD$ тетраэдрда E ва F нуқталар мос равишда AB ва CD қирраларининг ўрталари бўлади (20.12-расм). $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ бўлишини исботланг.

20.19. Қайиқ шимолий-шарққа қараб 2 км, ундан кейин шимолга қараб бурилиб, яна 1 км юрди. Масштабни аниқлаб, ўрин алмаштириш векторини чизинг ва унинг узунлигини топинг.

20.20. Қайиқ қирғоққа перпендикуляр йўналишда 5 м/с тезлик билан сузиб боради. Дарёнинг эни 720 м ва оқимнинг тезлиги 1 м/с га тенг. Қайиқ ҳар 5 м юрганда, перпендикуляр йўналишдан 1 м га силжиб туради. Қайиқ қарама-қарши қирғоққа етгунга қадар қанча м га силжийди.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

20.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $\overrightarrow{AC_1}$ векторни $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ векторлар орқали ифодаланг.

21-§. Компланар векторлар

Агар фазодаги уч вектор бир текисликда ёки паралел текисликларда ётса, у ҳолда улар *компланар векторлар* деб аталади. Масалан: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$ векторлар компланар бўлади.

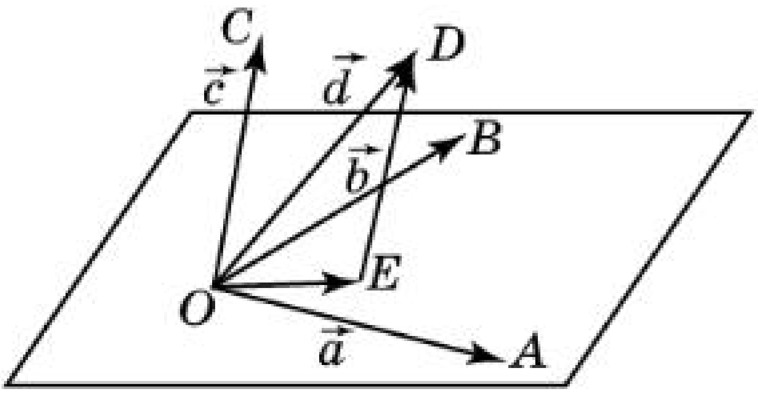
Агар фазодаги нолдан фарқли уч векторни бир нуқтадан чизганда бир текисликда ётса, у ҳолда улар компланар векторлар бўлишини исботланг.

Планиметрия курсида “агар текисликдаги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар эмас бўлса, унда шу текисликдаги ихтиёрий $\vec{c}$ векторни биттагина $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ кўринишида ёзиш мумкин. Бу ерда t ва s қандайдир бир ҳақиқий сонлар” деган таъриф исботланган бўлади.

Фазода шунга ўхшаш векторни уч компланар эмас векторлар бўйича ёйилмаси тўғрисидаги теорема келиб чиқади.

Теорема. ***Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$, ва $\vec{c}$ векторлар компланар эмас бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\vec{d}$ вектор биргина $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ кўринишда ифодаланади. Бу ерда x, y, z — ҳақиқий сонлар.***

Исботи. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{d}$ векторларни O нуқтадан бошлаб чизамиз ва уларнинг учларини мос равишда A, B, C, D деб белгилаймиз. D нуқта орқали OC тўғри чизиғига паралел тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг AOB текислиги билан кесишиш нуқтасини E деб белгилаймиз (21.1-расм).



21.1-расм

Агар D нуқта OC тўғри чизиғида ётса, унда E нуқта сифатида O нуқтани оламиз. $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ векторлари компланар. Энди $\overrightarrow{OE} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ тенглик ўринли бўладиган x ва y сонлари мавжуд. $\overrightarrow{ED}$ ва $\overrightarrow{OC}$ векторлар коллинеар. Энди $\overrightarrow{ED} = z\overrightarrow{OC}$ тенглик ўринли бўладиган z сони мавжуд. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED}$ бўлганликдан, $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ тенглик ўринли бўлади, яъни $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Энди шу тенгликнинг ягона эканлигини исботлайлик. Агар олинган тенгликдан фарқли $\vec{d} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$ тенглик ўринли бўлса, бунда x' *сони* x дан фарқли ёки y' сони y дан фарқли. Унда $\vec{0} = (x' - x)\vec{a} + (y' - y)\vec{b} + (z' - z)\vec{c}$ тенглиги ўринли бўлар эди, бу ерда $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ *нолдан* фарқли сонлар. Демак, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор компланар бўлади, бу шартга зид келади. ☐

$ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призманинг учларида боши ва охири бўладиган учта компланар бўлмаган векторларга мисол келтиринг.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $\overrightarrow{BD_1}$ векторни $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ ва $\overrightarrow{BB_1}$ векторлар орқали ифодаланг (21.2-расм).

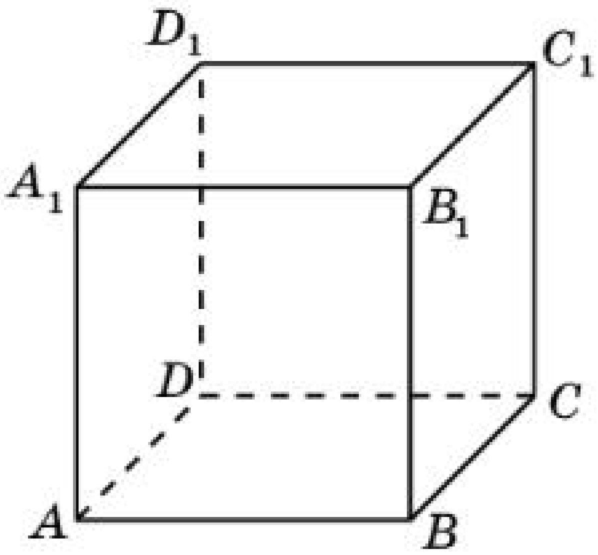
Саволлар

1. Фазодаги қандай учта вектор компланар деб аталади?
2. Векторни учта компланар эмас векторлар бўйича ёйиш тўғрисидаги теоремани айтиб беринг.

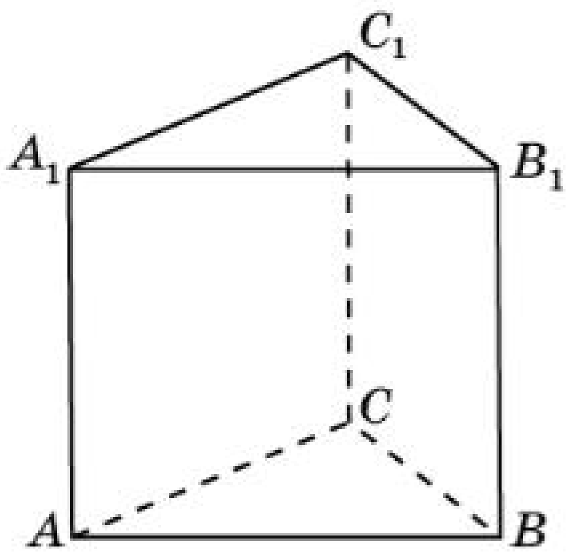
Масалалар

А

21.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (21.2-расм) учлар орқали $\overrightarrow{AB}$ векторга коллинеар векторларни кўрсатинг (21.2-расм).



21.2-расм



21.3-расм

21.2. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призмада (21.3-расм) учлари орқали $\overrightarrow{AA_1}$ векторга коллинеар векторларни кўрсатинг (21.3-расм).

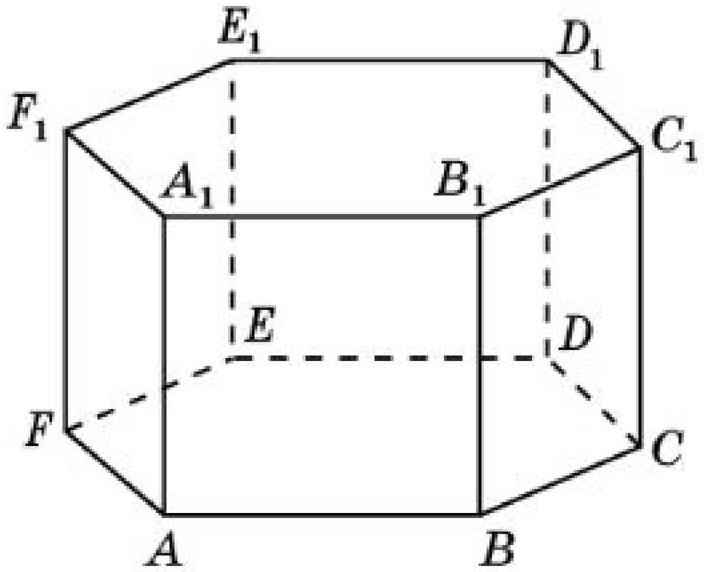
21.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада (21.4-расм) учлари орқали $\overrightarrow{AB_1}$ векторга коллинеар векторларни кўрсатинг.

21.4. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар коллинеар. $\vec{a}$ ва $\vec{c}$ векторлар коллинеар бўладими?

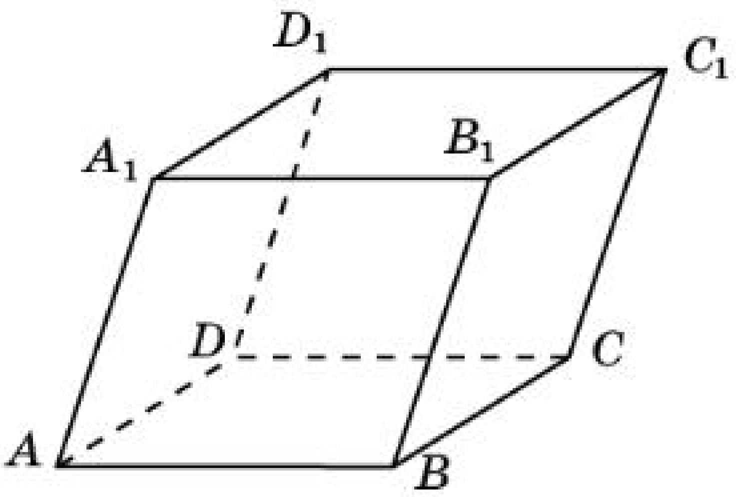
21.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада $\overline{AD_1}$ ва $\overline{BC_1}$ коллинеар бўладими (21.4-расм)?

B

21.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеддан: а) компланар векторларни; б) учта компланар эмас векторларни кўрсатинг (21.5-расм).



21.4-расм



21.5-расм

21.7. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призмада: а) компланар векторларни; г) компланар эмас векторларни кўрсатинг (21.3-расм).

21.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ ва $\overline{AA_1}$ векторлар орқали қуйидаги векторларни ифодаланг: а) $\overline{A_1C}$; б) $\overline{BD_1}$ (21.2-расм).

21.9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ ва $\overline{AA_1}$ векторлар орқали қуйидаги векторларни ифодаланг: а) $\overline{AD_1}$; б) $\overline{AC_1}$ (21.4-расм).

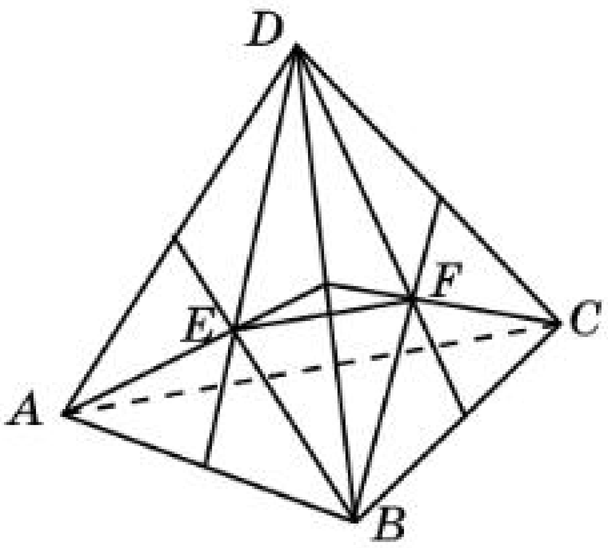
C

21.10. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар. $\vec{a}+\vec{b}$ ва $\vec{a}-\vec{b}$ векторлар коллинеар бўладими?

21.11. $\vec{a}+\vec{b}$ ва $\vec{a}-\vec{b}$ векторлар коллинеар. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар эканлигини исботланг.

21.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $\overline{AC_1}$ векторни коллинеар $\overline{AC}$, $\overline{AB_1}$ ва $\overline{AD_1}$ векторлар орқали ифодаланг.

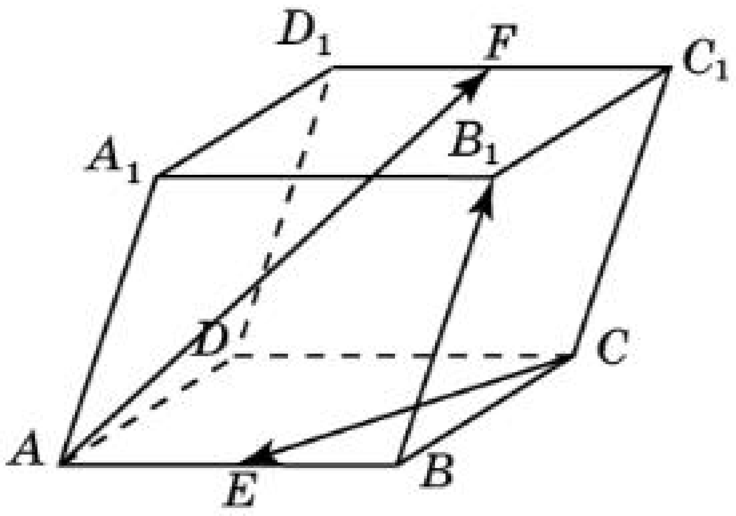
21.13. $ABCD$ тетраэдрда (21.6-расм) E, F нуқталар мос равишда ADB ва BDC ёқлари медианаларининг кесишиш нуқталари бўлсин. $\overline{EF}$ ва



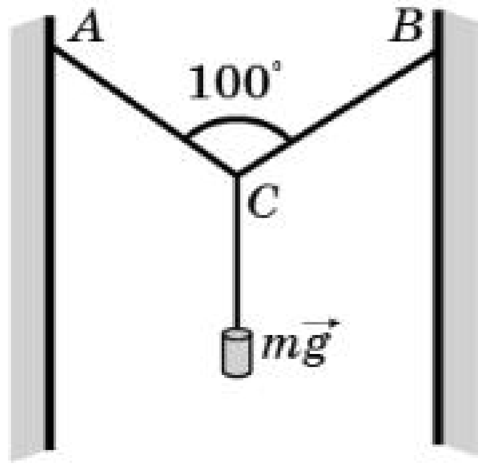
21.6-расм

$\overrightarrow{AC}$ векторлар коллинеар бўлишини исботланг. Шу векторларнинг узунликлари нисбатини топинг.

21.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедда E ва F нуқталар мос равишда AB ва C_1D_1 қирраларнинг ўрталари (21.7-расм). $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AF}$ ва $\overrightarrow{BB_1}$ векторларнинг компланар бўлишини исботланг.



21.7-расм



21.8-расм

21.15. 21.8-расмда сим A ва B нуқталарга маҳкамланган. C нуқтада унга $P = mg = 45$ Н куч таъсир қилади. A ва B нуқталарни бир хил даражада деб олиб, AC ва BC бўлакларига тушадиган кучларни топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

21.16. Текисликдаги векторлар орасидаги бурчак таърифини такрорланг.

21.17. Текисликдаги векторлар орасидаги бурчак таърифига мос фазодаги векторлар орасидаги бурчак тушунчасини таърифланг.

21.18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $\overrightarrow{AD_1}$ ва $\overrightarrow{CD_1}$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

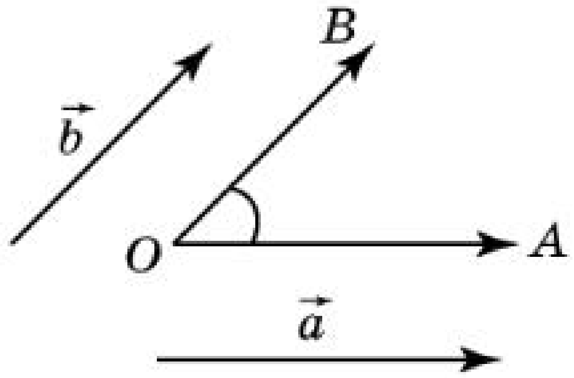
21.19. Текисликдаги векторлар скаляр кўпайтмасининг таърифига мос фазодаги векторлар скаляр кўпайтмасини таърифланг.

21.20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $\overrightarrow{AD_1}$ ва $\overrightarrow{CD_1}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

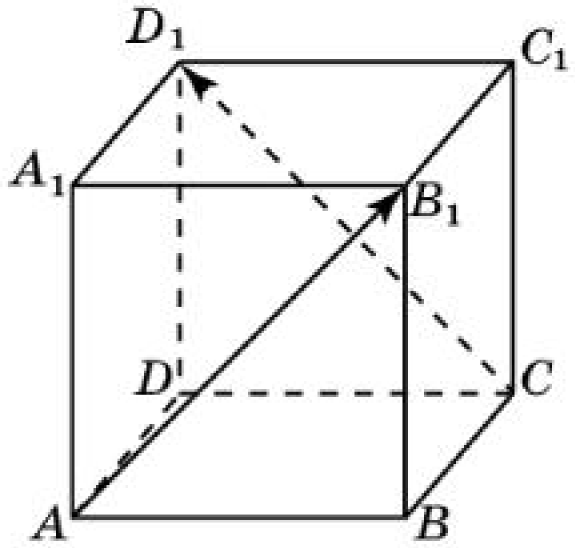
22-§. Векторлар орасидаги бурчак. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Фазода векторлар орасидаги бурчак текисликдаги каби таърифланади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ икки нолдан фарқли векторлар бўлсин. Уларни O нуқтадан $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ бўладигандай қилиб чизамиз (22.1-расм). Агар ушбу векторлар йўналишдош бўлмаса, у ҳолда OA ва OB нурлар орасидаги бурчак $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *векторлар орасидаги бурчак* деб аталади.



22.1-расм



22.2-расм

Йўналишдош векторлар орасидаги бурчак 0° га тенг деб ҳисобланади.

Агар икки вектор орасидаги бурчак тўғри бўлса, унда *икки вектор перпендикуляр* деб аталади.

1-масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (22.2-расм) $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\overrightarrow{CD_1}$ векторлар берилган. Векторларнинг орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\overrightarrow{CD_1}$ векторларнинг орасидаги бурчак $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\overrightarrow{BA_1}$ векторларнинг орасидаги бурчакка тенг. Демак, 90°га тенг деб ҳисобланади.

Фазодаги векторларнинг скаляр кўпайтмаси текисликдаги сингари аниқланади.

Нолдан фарқли икки векторнинг скаляр кўпайтмаси деб, уларнинг узунликлари билан орасидаги бурчакнинг косинусини кўпайтмасига айтилади.

Агар бир вектор ноль вектор бўлса, у ҳолда шу векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг деб ҳисобланади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{a} \cdot \vec{b}$ деб белгиланади. Таъриф бўйича

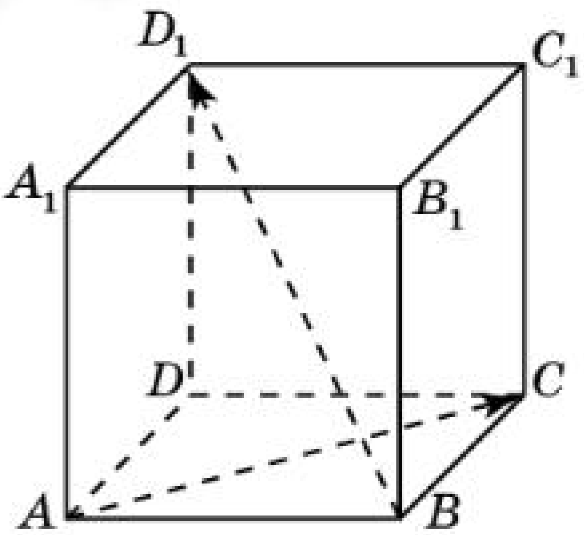
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

Бунда φ бурчак — $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак.

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ кўпайтма скаляр квадрат деб аталади ва $\vec{a}^2$ деб белгиланади. Скаляр кўпайтманинг таърифидан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ келиб чиқади.

Нолдан фарқли икки вектор орасидаги бурчак 90° га тенг бўлса, унда уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши аниқ, сабаби бу ҳолатда шу векторларнинг орасидаги бурчакнинг косинуси нолга тенг бўлади.

Қарама-қарши йўналган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини уларнинг узунликлари орқали ифодаланг.



22.3-расм

Векторларнинг скаляр кўпайтмасининг содда физикавий маъноси мавжуд. Яъни иш кучнинг ўрин алмаштиришга скаляр кўпайтмасига тенг:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

2-масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда (22.3-расм) $\overline{AC}$ ва $\overline{BD_1}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Ечиш. $\overline{AC}$ ва $\overline{BD_1}$ векторлар перпендикуляр. Демак, уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади.

Саволлар

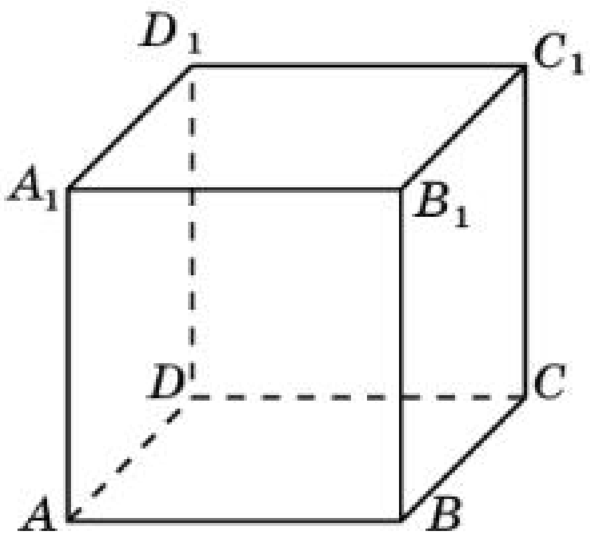
1. Векторларнинг орасидаги бурчак деб нимага айтилади?
2. Қандай икки вектор перпендикуляр деб аталади?
3. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси деб нимага айтилади?
4. Скаляр кўпайтма қандай белгиланади?
5. Скаляр квадрат деб нимага айтилади?
6. Қандай шароитда икки векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади?
7. Скаляр кўпайтманинг физикавий маъноси қандай?

Масалалар

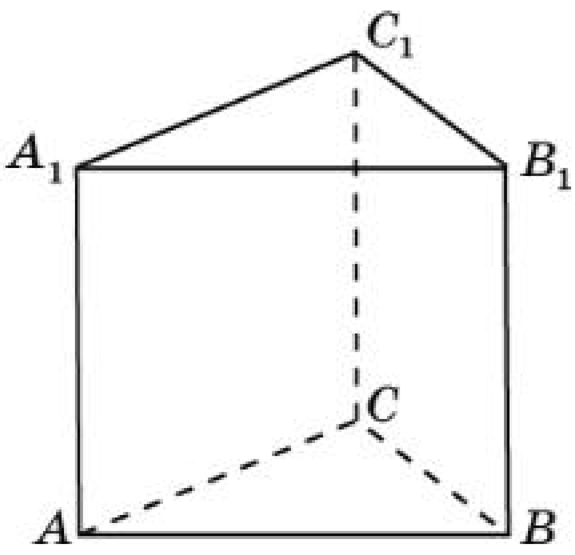
A

22.1. Векторларнинг орасидаги бурчак: а) ўткир; б) ўтмас бўлса, улар скаляр кўпайтмасининг ишораси қандай бўлади?

22.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (22.4-расм) қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни топинг: а) $\overline{AC}$ ва $\overline{B_1D_1}$; б) $\overline{AB}$ ва $\overline{B_1C_1}$; в) $\overline{AB_1}$ ва $\overline{BC_1}$.



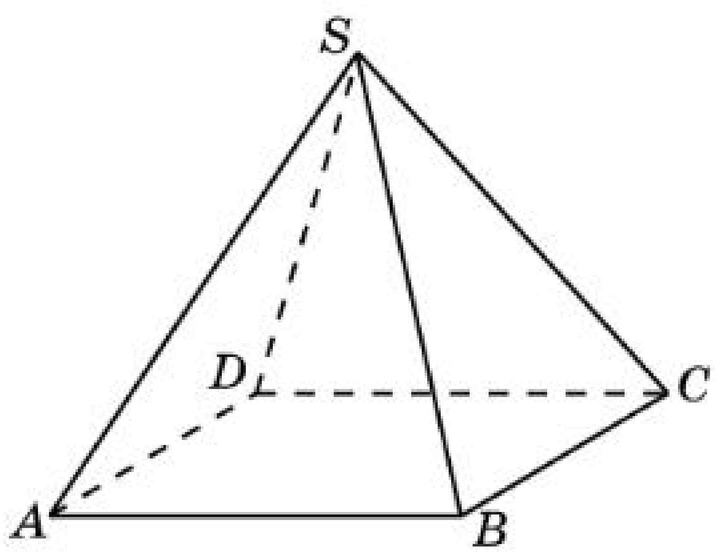
22.4-расм



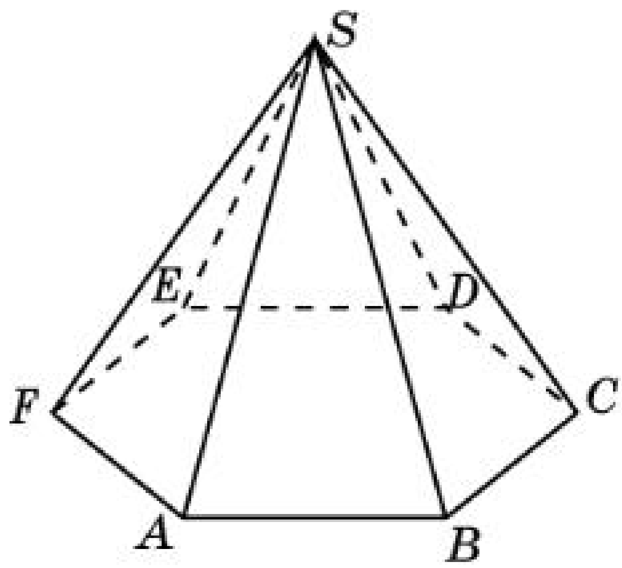
22.5-расм

22.3. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призмада (22.5-расм) қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни топинг: а) $\overline{AB}$ ва $\overline{CC_1}$; б) $\overline{AB}$ ва $\overline{B_1C_1}$.

22.4. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари бирга тенг (22.6-расм). Қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни топинг: а) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{SC}$; б) $\overrightarrow{SB}$ ва $\overrightarrow{SD}$.



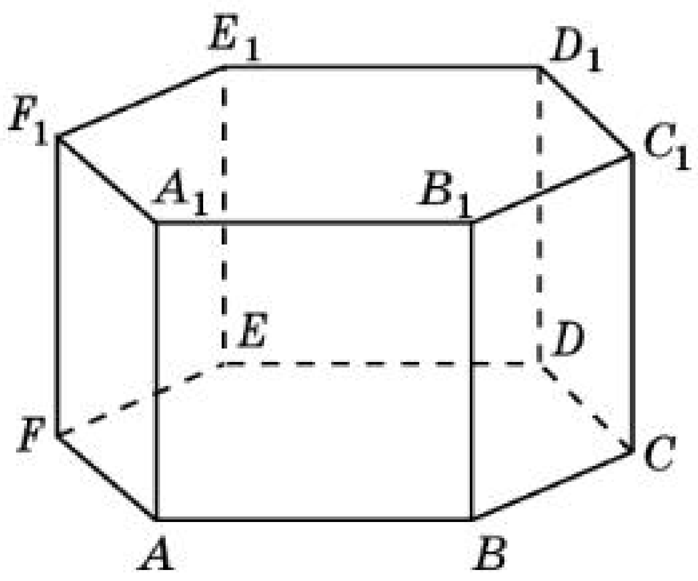
22.6-расм



22.7-расм

22.5. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари бирга тенг, ён қирралари иккига тенг (22.7-расм). Қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни топинг: а) $\overrightarrow{SA}$ ва $\overrightarrow{SD}$; б) $\overrightarrow{SA}$ ва $\overrightarrow{BC}$.

22.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (22.8-расм). Қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни топинг: а) $\overrightarrow{AA_1}$ ва $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$ ва $\overrightarrow{DE_1}$; в) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{C_1D_1}$; д) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; е) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1D_1}$; ж) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1E_1}$.



22.8-расм

B

22.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда (22.4-расм) қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\overrightarrow{BC_1}$.

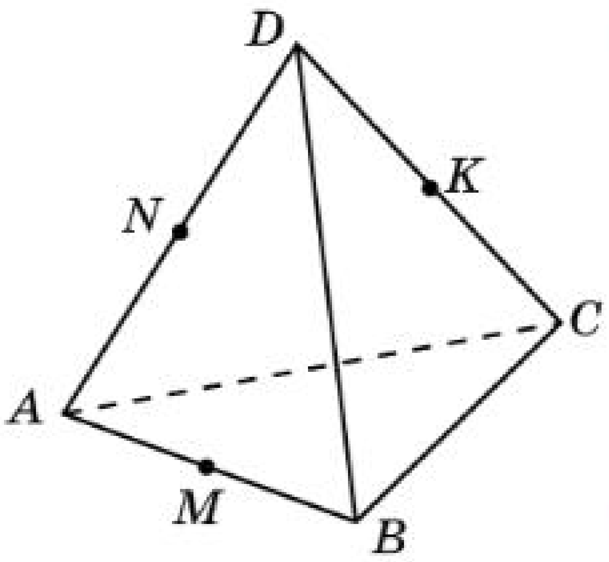
22.8. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (22.5-расм). Қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$.

22.9. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг (22.6-расм). Қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{SC}$; б) $\overrightarrow{SB}$ ва $\overrightarrow{SD}$.

22.10. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (22.7-расм). Қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{SA}$ ва $\overrightarrow{SD}$; б) $\overrightarrow{SA}$ ва $\overrightarrow{BC}$.

22.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг(22.8-расм). Қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{AA_1}$ ва $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$ ва $\overrightarrow{DE_1}$; в) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{C_1D_1}$; д) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; е) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1D_1}$; ж) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1E_1}$.

C

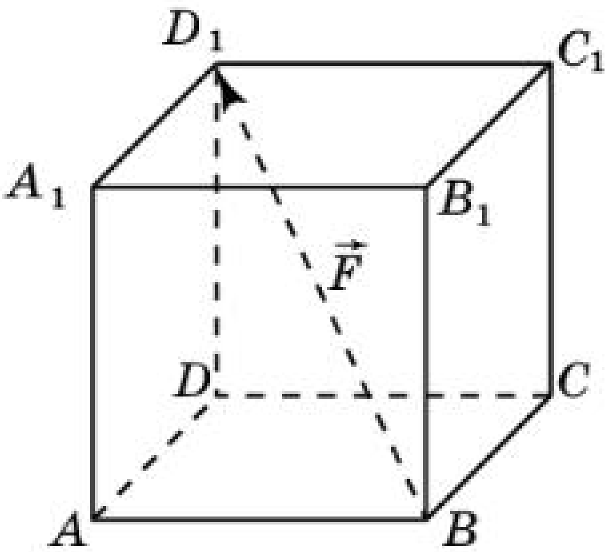


22.9-расм

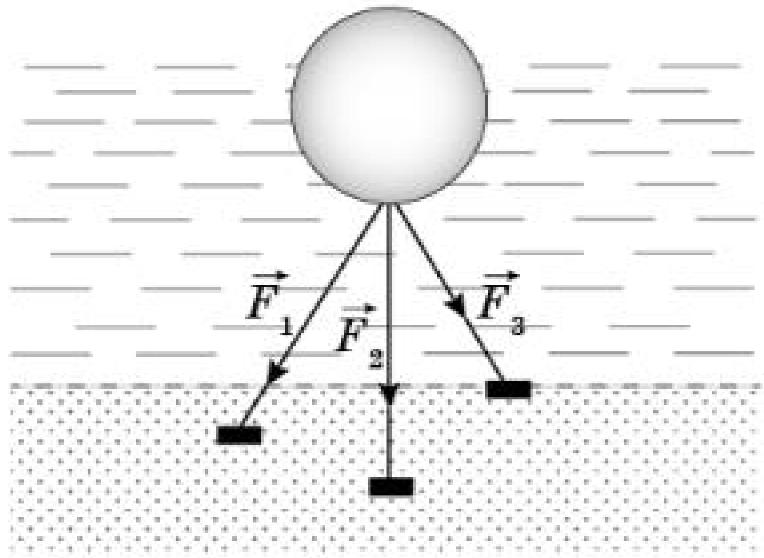
22.12. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. M, N, K нуқталари мос равишда AB, AD, CD қирраларининг ўрталари (22.9-расм). Қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{KN}\cdot\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{NK}\cdot\overrightarrow{BA}$; е) $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{DC}$.

22.13. α текислигига тегишли бўлмаган C нуқтадан шу текисликка CA перпендикуляри ўтказилган. α текислигининг ихтиёрий B нуқтаси учун $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ скаляр кўпайтмаси B нуқтасининг жойлашиш ўрнига боғлиқ эмаслигини исботланг.

22.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда $\vec{F}$ куч орқали объектнинг A учидан D учига кўчгандаги бажариладиган ишни ҳисобланг (22.10-расм).



22.10-расм



22.11-расм

22.15. Ҳар бири 10 Н бўлган кучлар бир нуқтага туширилган ва уларнинг йўналишлари орасидаги бурчаклар 60°, 60°, 90° га тенг. Учаласининг тенг таъсир этувчи кучининг катталигини топинг.

22.16. Оғирлиги 500 кг ва ҳажми 0,7 м^3 бўлган шар,бир хил узунликдаги учта трос билан сув остида қотирилган (22.11-расм). Агар ихтиёрий икки троснинг орасидаги бурчак 60°га тенг бўлса, ҳар бир троснинг тортилиш кучини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

22.17. Текисликдаги тўғри бурчакли координаталар системаси тушунчасини такрорланг.

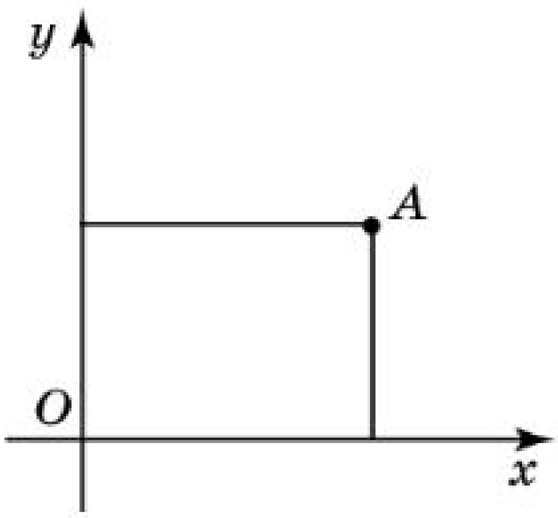
22.18. Координата текислигидаги $A_1(x_1;\ y_1)$ ва $A_2(x_2;\ y_2)$ нуқталар учун A_1A_2 кесманинг ўртасини координатасини иопинг.

22.19. Координата текислигидаги $A_1(x_1;\ y_1)$ ва $A_2(x_2;\ y_2)$ нуқталар учун A_1A_2 кесмани k нисбатда бўладиган $\left(\frac{A_1A}{AA_2} = k\right)$ A нуқтанинг координаталарини топинг.

22.20. Текисликдаги тўғри бурчакли координаталар системаси тушунчасига ўхшаш фазодаги тўғри бурчакли координаталар системаси тушунчасига таъриф беринг.

23-§. Фазода тўғри бурчакли координаталар системаси

Планиметрия курсида биз текисликдаги тўғри бурчакли координаталар системаси билан танишдик. Координаталар боши деб аталган O нуқталар ва мусбат йўналишни кўрсатувчи $\overline{OE}$ бирлик вектори орқали танлаб олинган тўғри чизиқ координаталар тўғри чизиғи деб аталишини эслайлик.



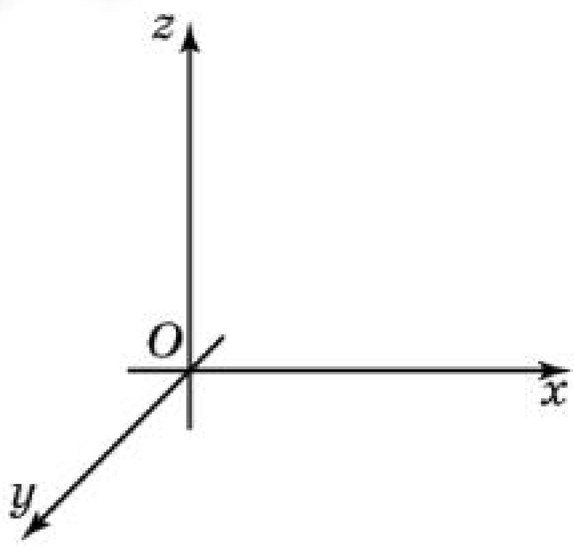
23.1-расм

Текисликдаги тўғри бурчакли координаталар системаси деб, умумий координаталар бошига эга бўлган ўзаро перпендикуляр координата чизиқлари жуфтига айтилади. Координаталар боши O ҳарфи билан координаталар тўғри чизиқлари Ox, Oy орқали белгиланади ва улар мос равишда *абсциссалар ўқи, ординаталар ўқи* деб аталади (23.1-расм).

Координаталар тўғри чизиғидаги ҳар бир нуқтага шу нуқтанинг координатаси деб аталган сон мос келади. Текисликдаги координаталар системасидаги ҳар бир нуқтага шу нуқтанинг координаталари деб аталувчи $(x,\ y)$ сонлар жуфти мос келади.

Тўғри бурчакли координаталарни дастлаб Р.Декарт киритган. Шунинг учун тўғри бурчакли координаталар системаси декарт координаталар системаси, координаталарни эса *декарт координаталари* деб атайди.

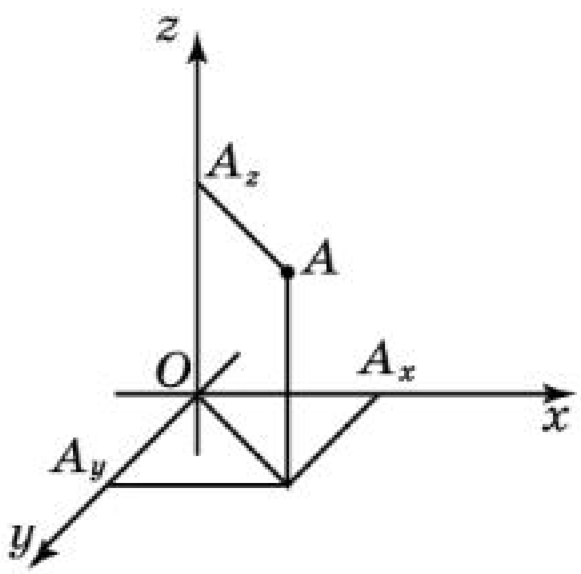
Текисликдаги ва фазодаги тўғри бурчакли координаталарни киритиш кўплаган геометрик масалаларни алгебраик масалаларга, аксинча, алгебраик масалаларни геометрик масалаларга алмаштиришга имконият яратади. Шунга асосланган усул *координаталар усули* деб аталади.



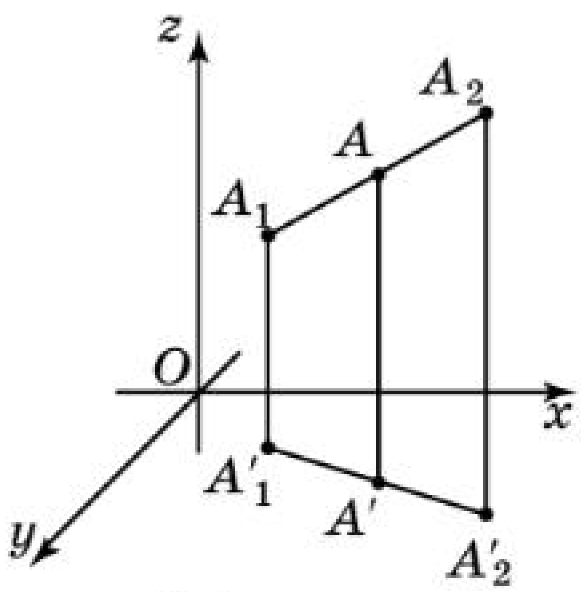
23.2-расм

Фазодаги тўғри бурчакли координаталар системаси деб умумий координаталар боши бўлган ўзаро перпендикуляр координаталар чизиқлар учлигига айтилади. Координаталар боши O ҳарфи билан, координата тўғри чизиқлари эса Ox, Oy, Oz орқали белгиланади ва улар мос равишда *абсцисса ўқи, ордината ўқи, аппликата ўқи* деб аталади (23.2-расм). Координаталар тўғри чизиқлари жуфти орқали ўтувчи текисликлар *координаталар текисликлари* деб аталади. Яъни, Oxy, Oxz, Oyz деб белгиланади.

Фазодаги тўғри бурчакли координаталар системасида ихтиёрий A нуқтани қараб чиқайлик. Шу нуқта орқали Ox ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз ва Ox ўқи билан кесишиш нуқтасини A_x орқали белгилаймиз (23.3-расм). Шу нуқтанинг Ox ўқидаги координатаси A *нуқтасининг абсциссаси* деб аталади ва x орқали белгиланади. Шунга ўхшаш Oy, Oz ўқларида A_y ва A_z нуқталар аниқланади. Улар мос равишда A нуқтанинг ординатаси билан аппликатаси деб аталади ва мос равишда y билан z орқали белгиланади. $(x;\ y;\ z)$ сонлар учлиги фазодаги A *нуқтанинг координаталари* деб аталади.



23.3-расм



23.4-расм

$A(x;\ y;\ z)$ нуқтанинг Oxy, Oxz, Oyz координаталар текислигидаги ортогонал проекцияларининг координаталари мос равишда $(x;\ y;\ 0)$, $(x;\ 0;\ z)$, $(0;\ y;\ z)$ бўлишини сезамиз.

Планиметрияда $A_1(x_1;\ y_1)$ ва $A_2(x_2;\ y_2)$ нуқталарини туташтирувчи кесма ўртасининг координаталари $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ эканлиги исботланган эди. Фазода шунга ўхшаш қуйидаги теорема ўринли бўлади.

Теорема. ***$A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталарни туташтирувчи кесма ўртасининг координаталари $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ бўлади.***

Исботи. $A(x;\ y;\ z)$ нуқта A_1A_2 кесманинг ўртаси бўлсин. Шу кесмани Oxy текислигига проекциялаймиз, яъни A_1, A_2 нуқталар орқали Oxy

текислигига перпендикуляр тўғри чизиқлар ўтказамиз (23.4-расм). Oxy текислигида мос равишда $A'_1(x_1;\ y_1;\ 0)$, $A'(x;\ y;\ 0)$, $A'_2(x_2;\ y_2;\ 0)$ нуқталарини оламиз. Ортогонал проекциялаш бир тўғри чизиқда ётган кесмаларнинг нисбатини сақлаганликдан, A' нуқта – $A'_1A'_2$ кесманинг ўртаси бўлади. Текисликдаги геометриянинг мос теоремаси бўйича унинг координаталари $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; 0\right)$ бўлади. Шунга ўхшаш A_1A_2 кесманинг Oxz (ёки Oyz) текислигидаги ортогонал проекциясини кўриб чиқиб, қуйидагини оламиз: $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$. Шу билан A_1A_2 кесманинг ўртаси бўлган A нуқтанинг координаталари $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ бўлади.

Пропорционал кесмалар ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталарни туташтирувчи кесмада ётувчи ва шу кесмани $\frac{A_1A}{AA_2} = k$ нисбатда бўлувчи A нуқтанинг координаталари $A = \left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}; \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}; \frac{z_1 + kz_2}{1 + k}\right)$ бўлишини исботланг.

Тарихий маълумотлар

Рене Декарт — XVII асрнинг таниқли математик олимларидан бири. Унинг тадқиқот олиб борган соҳаларининг кенглиги ҳаммани лол қолдиради. Р. Декарт фалсафа, математика, физика, биология, медицина ва бошқа фан соҳаларидан татқиқот натижаларига эришган. У фалсафанинг реал оламдаги кўпгина ҳодисаларга жавоб берадиган, табиат ва инсоннинг идрокини бошқарувчи қонуниятларни яратувчи оммабоп фан сифатида ўрганди.

Декарт ғарбнинг замонавий фалсафий-илмий мулоҳазаларининг асосини яратувчи шахс сифатида тўлиқ фалсафий система яратди. У фалсафада дуализм (қўшасос) ва рационализм йўналишини ривожлантирди.

Декарт картезиан фалсафий фанларининг (Картезий Декартнинг лотинча исми) асосини яратувчи бўлди. У бунда табиий фанлар назариясини ривожлантиришга шахсий қўзқарашларини таклиф қилган. Бинобарин, у Қуёш системасининг пайдо бўлишини илмий томондан тушунтириш масаласини ўрганиб, шахсий мулоҳазаларини таклиф қилди.

1637 йили чоп этилган китоби Р. Декартни таниқли қилиб, таниқли номга эга бўлди (Декарт у вақтда 41 ёшда эди). Шу вақтнинг урф-одатларига кўра унинг номи узун бўлган, яъни “Ақлни йўналтиришга ва фандаги ҳақиқатни топишга имконият яратувчи усуллар ҳақида ўйлар. Шу билан бир қаторда ушбу усулнинг қўшимчаси бўлган Диоптрика, Метеорлар ва Геометрия”. Бу асарда Декарт “Усулнинг асосий қоидаларини” ёзган, жумладан:

Биринчидан, исталган нарсанинг ҳақиқат эканлигига ишонч хосил қилмай, ҳақиқат деб қабул қилиш керак эмас, яъни тезкор қарор қабул қилишдан ва нотўғри тушунчалардан йироқ бўл, ва ўз фикрингни фақатгина ўйланиб, шубҳа туғдирмайдиган қилиб аниқ баён эт.

Иккинчидан, кўриладиган шахсий масалаларни самарали хал қилиш учун уларни кераклигича турли хил бўлакларга бўлиб хал қилиш таклиф қилинади.

Учинчидан, шахсий ўйлаш малакасини назорат қилиш, яъни соддадан бошлаб босқичма-босқич мураккаб билиш даражасигача кўтарилиш, ўз фикрларининг йўналишини бошқаришга, ҳатто бир-бирларига қарши бўлмайдиганлар орасида тартибни сақлашга имконият яратиш.

Тўртинчидан, кундалик муаммоларнинг тўлиқ рўйхатини ва умумий обзорларнинг барчасини қолдирмай хеч нарса йўқ эканлигига ишончли қилиб ясаш.

Декарт “Илмий назариянинг асосида аниқ ва содда қоидалар бўлиши керак. Табиат ходисаларини ўрганиш, тавсифлаш, гуруҳлаш, тажрибалар ва математик ҳисоблашлар олиб бориш керак. Табиатни ўрганишда ўзгалардан ёрдам кутмай, фақат ўзининг кучига ишониш керак”, — деб айтган.

Р.Декарт замонавий математиканинг ривожланишига катта хисса қўшган. Унинг геометрияга қўшимча бўлган “... усуллар ҳақида ўйлар” илмий мақоласи шу вақтга қадар геометрия фанига янгиликлар киритди. Қисқа муддатли “Геометрия” тўртта нашрдан ўтиб, XVII асрдаги ҳар бир математикнинг ён китобчаси бўлди. У геометрик координаталар системасини формулага айлантириш орқали “Аналитик геометриянинг отаси” деб аталди.

XVIII—XIX асрларда Декартнинг координаталар усули асосида кўпўлчовли, кейинчалик чексиз ўлчовли геометрия пайдо бўлди. Ҳозирги кунда координаталар усулисиз математикани ҳам, физикани ҳам тасаввур қилиш мумкин эмас.

Саволлар

1. Қандай тўғри чизиқ координата тўғри чизиғи деб аталади?
2. а) текисликдаги; г) фазодаги тўғри бурчакли координаталар системаси деб нимага айтилади?
3. а) Абсцисса; г) ордината; д) аппликата ўқи деб нимага айтилади?
4. Қандай текисликларни координата текисликлари деб аталади?
5. Нуқтанинг: а) абсциссаси;г) ординатаси; д) аппликатаси деб нимага айтилади?

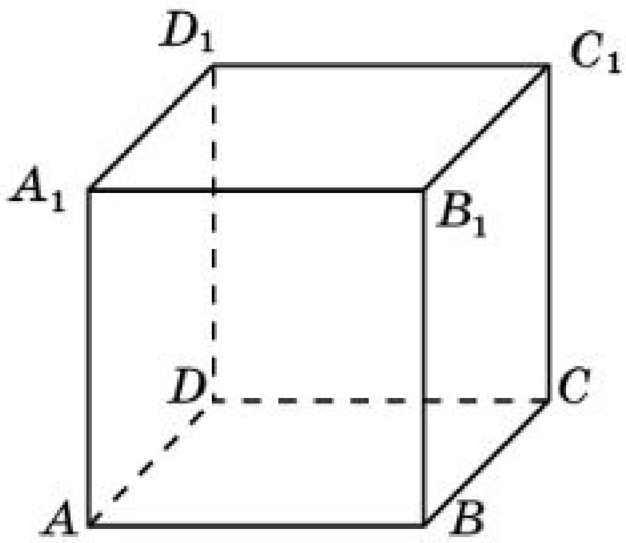
Масалалар

А

23.1. Фазодаги тўғри бурчакли координаталар системасида координаталари берилган қуйидаги нуқталарни тасвирланг: (1; 2; 3), (2; –1; 1), (–1; 3; 2).

23.2. $A(1; 3; 4)$ ва $B(5; -6; 2)$ нуқталарнинг: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz текисликлардаги ортогонал проекцияларининг координаталарини топинг.

23.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик куб берилган (23.5-расм). Координаталар боши D нуқтада ётибди. Координаталар ўқининг мусбат нурлари мос равишда DC, DA ва DD_1. Кубнинг барча учларининг координаталарини топинг.



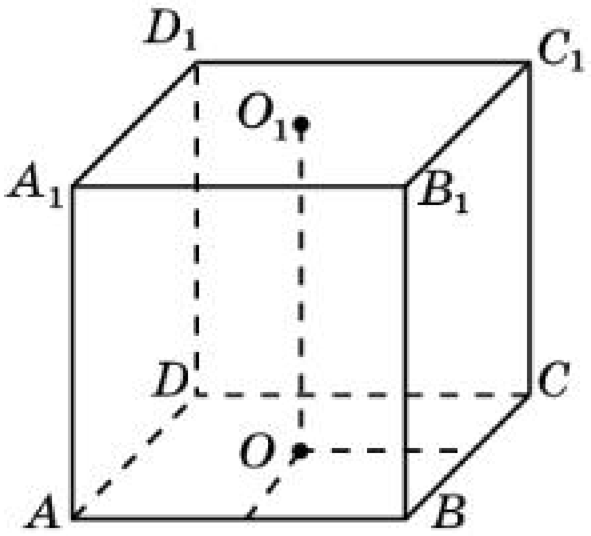
23.5-расм

23.4. Қуйидаги кесмаларнинг ўрталарининг координаталарини топинг: а) AB, бунда $A(1; 2; 3)$ ва $B(-1; 0; 1)$; б) CD, бунда $C(3; 3; 0)$ ва $D(3; -1; 2)$.

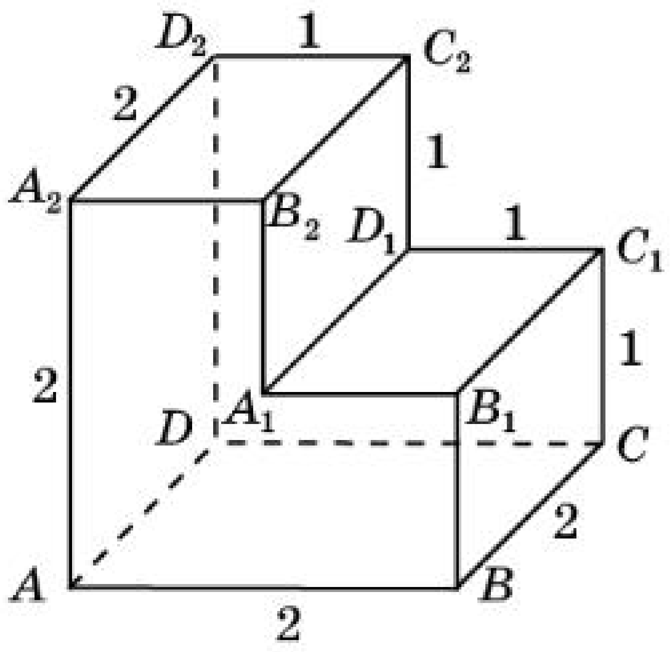
B

23.5. A нуқта $A_1(1; -2; 3)$, $A_2(-2; 1; 0)$ нуқталар билан чегарланган кесмада ётади ва уни 2 : 1 нисбатда бўлади, яъни $\frac{A_1A}{AA_2} = 2$. A нуқтанинг координаталарини топинг.

23.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб тўғри бурчакли координаталар системасида чизилган ва $ABCD$ ёғининг маркази координаталар боши (23.6-расм), қирралари мос равишда координаталар ўқига паралел, A учининг координаталари $(-1; 1; 0)$. Кубнинг қолган учлари координаталарини топинг.



23.6-расм

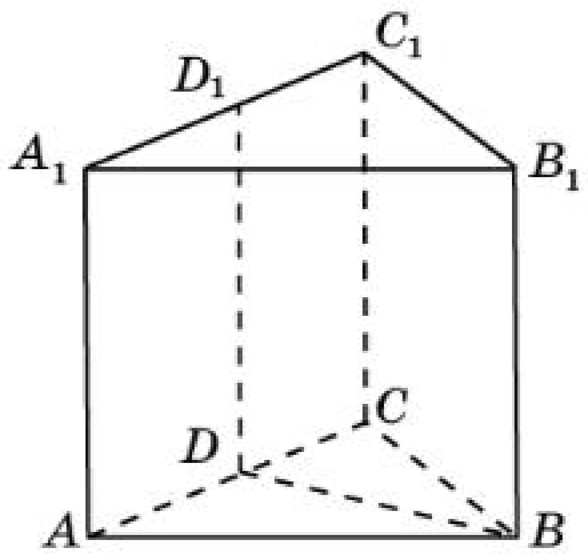


23.7-расм

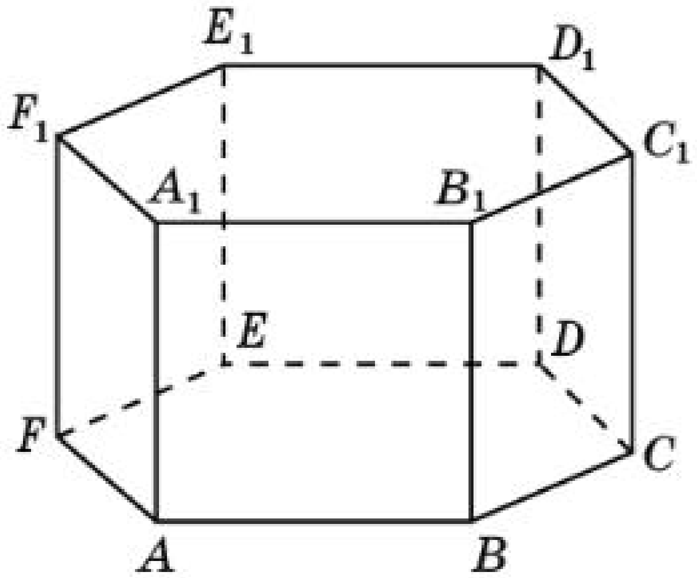
23.7. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар бўлади (23.7-расм). D учи — координаталар боши, DC, DA, DD_2 кесмалар мос равишда Ox, Oy ва Oz координаталар ўқида ётади. Кўпёқ учларининг координаталарини топинг.

23.8. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. D ва D_1 — мос равишда AC ва A_1C_1 қирраларининг ўрталари (23.8-расм). D нуқта — координаталар боши, DB, DA, DD_1 кесмалари мос равишда Ox, Oy ва Oz координата ўқларида ётади. Призма учларининг координаталарини топинг.

23.9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. E учи — координаталар боши, ED, EA, EE_1 кесмалари мос равишда Ox, Oy ва Oz координата ўқларида ётади (23.9-расм). Призма учларининг координаталарини топинг.



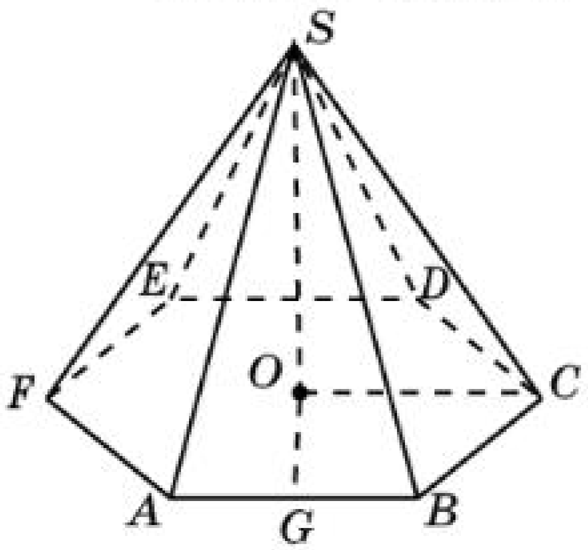
23.8-расм



23.9-расм

23.10. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. O нуқта — асосининг маркази, G нуқта — AB қиррасининг ўртаси, OC, OG, OS кесмалари мос равишда Ox, Oy ва Oz координата ўқларида ётади (23.10-расм). Пирмаданиг учларининг координаталарини топинг.

23.11. Фазода жойлашган қуйидаги нуқталарнинг геометрик ўрнининг маъноси қандай: а) биринчи координатаси нолга тенг; г) иккинчи координатаси нолга тенг; д) учинчи координатаси нолга тенг; ж) биринчи ва иккинчи координаталари нолга тенг; и) биринчи ва учинчи координаталари нолга тенг; з) иккинчи ва учинчи координаталари нолга тенг; и) барча координаталари нолга тенг?

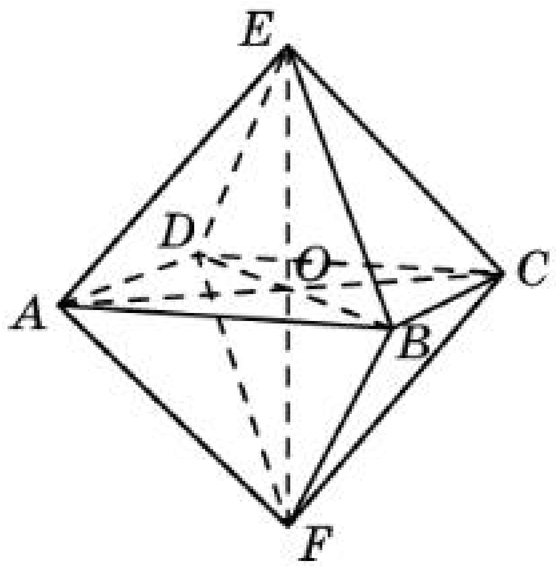


23.10-расм

23.12. $A(-1;\ 2;\ 3)$ нуқтадан қуйидаги текисликларгача бўлган масофаларни топинг: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

C

23.13. Октаэдрнинг O маркази координаталар боши бўлади. Унинг икки учи координаталари $A(0;\ 1;\ 0)$ ва $B(1;\ 0;\ 0)$



23.11-расм

(23.11-расм). Октаэдрнинг қолган учлари координаталарини топинг.

23.14. $A(x; y; z)$ нуқтадан қуйидаги координаталар текислигигача бўлган масофани топинг: а) Oxy; б) Oxz; б) Oyz.

23.15. а) Oxy, Oxz координаталар текисликларидан; б) барча учта координаталар текисликларидан бир хил масофада жойлашган фазовий нуқталарнинг координаталари қандай шартларни қаноатлантиради?

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

23.16. Координаталар текислигидаги нуқталар орасидаги масофани топиш формуласини такрорланг.

23.17. Координаталар текислигидаги нуқталар орасидаги масофани топиш формуласидан фойдаланиб, фазодаги $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нуқталар орасидаги масофа формуласини ёзинг.

23.18. $O(0; 0; 0)$ ва $A(1; 2; 2)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

23.19. Координаталар текислигидаги айлана тенгламасидан фойдаланиб, фазодаги маркази $A_0(x_0; y_0; z_0)$ ва радиуси R бўлган сферанинг тенгламасини ёзинг.

23.20. Маркази $O(0; 0; 0)$ ва радиуси 1 га тенг бўлган сферанинг тенгламасини ёзинг.

24-§. Икки нуқта орасидаги масофа. Сфера тенгламаси

Планиметрия курсида текисликдаги $A_1(x_1; y_1)$ ва $A_2(x_2; y_2)$ нуқталар орасидаги масофа қуйидаги формула билан ифодаланганлиги исботланган эди:

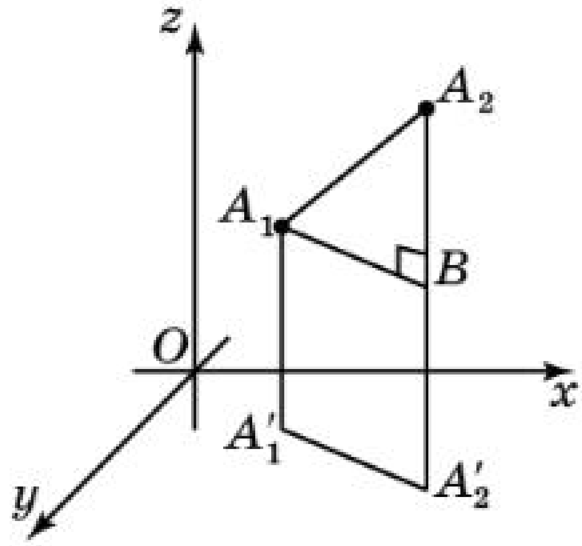
$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Фазода ҳам шунга ўхшаш формула мавжуд.

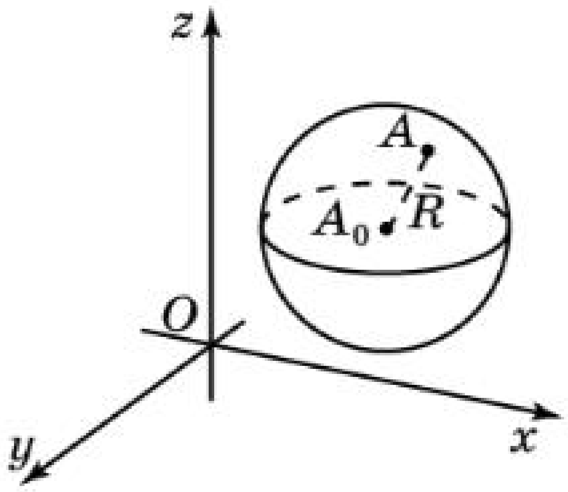
Теорема. ***Фазода $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нуқталар орасидаги масофа қуйидаги формула билан ифодаланади:***

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Исботи. Фазода $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нуқталар учун A_1A_2 тўғри чизиғини кўриб чиқайлик. У барча координата ўқларига бир вақтда параллел бўла олмайди. Масалан, у Oz ўқига параллел эмас дейлик, яъни, A_1', A_2' — Oxy текислигидаги мос A_1, A_2 нуқталарига ортогонал проекциялари бўлсин (24.1-расм).



24.1-расм



24.2-расм

Бу проекцияларнинг мос $(x_1;\ y_1;\ 0)$, $(x_2;\ y_2;\ 0)$ координаталари мавжуд. A_1', A_2' нуқталар орасидаги масофа қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$A_1'A_2' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

A_1 нуқта орқали $A_1'A_2'$ тўғри чизиғига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг $A_2'A_2$ тўғри чизиғи билан кесишиш нуқтасини B деб белгилаймиз. Шунда A_1A_2B учбурчак- тўғри бурчакли бўлади, яъни, $A_1B = A_1'A_2'$, $A_2B = |z_2 - z_1|$. Пифагор теоремаси бўйича:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Сферанинг таърифидан маркази $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада ва радиуси R бўладиган сфера нуқталарининг координаталари қуйидаги тенгликни қаноатлантириши келиб чиқади:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Бу тенглик маркази $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада ва радиуси R бўлган *сферанинг тенгламаси* деб аталади (24.2-расм).

Шу жумладан, шар нуқталарининг координаталари қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant R^2.$$

Маркази $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада ва радиуси R бўлган шарга тегишли бўлмаган нуқталарнинг координаталарини қаноатлантирувчи тенгсизлик ёзинг.

Саволлар

1. Фазодаги икки нуқта орасидаги масофа қандай формула билан ифодаланади?
2. Сфера нуқталарининг координаталари қандай тенгсизликни қаноатлантиради?
3. Қандай тенглама сферанинг тенгламаси деб аталади?
4. Шар нуқталарининг координаталари қандай тенгсизликни қаноатлантиради?

Масалалар

A

24.1. Қуйидаги нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофани топинг: а) $A(3;\ 4;\ 0)$; б) $B(1;\ -2;\ 2)$.

24.2. $A(3;\ 1;\ 5)$ ёки $B\ (1;\ -1;\ 6)$ нуқталарнинг қайси бири координаталар бошига яқинроқ жойлашган?

24.3. Қуйидаги нуқталар орасидаги масофани топинг: а) $A_1(1;\ 2;\ 3)$ ва $A_2(-1;\ 1;\ 1)$; б) $B_1(3;\ 4;\ 0)$ ва $B_2(3;\ 1;\ -4)$.

24.4. Қуйидаги тенглама билан берилган сферанинг C марказининг координаталарини ва R радиусини топинг: а) $(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=9$; б) $x^2+(y-6)^2+(z+1)^2=4$.

24.5. Сферанинг тенгламасини ёзинг: а) маркази $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқтада ва радиуси 1 га тенг; г) маркази $O(1;\ -2;\ 3)$ нуқтада ва радиуси 4 га тенг.

B

24.6. Учбурчак учларининг координаталари берилган: $A(0;\ 0;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(2;\ 0;\ 0)$. Унинг турини аниқланг.

24.7. $A(1;\ -2;\ 3)$ нуқта: а) Ox; б) Oy; б) Oz координата тўғри чизиғидан қандай масофада жойлашган?

24.8. Қуйидаги координата текислигига уриниб ўтадиган маркази $O(1;\ 2;\ -1)$ нуқтадаги сферанинг тенгламасини ёзинг: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

C

24.9. Қуйидаги координата текислигига уриниб ўтадиган маркази $O(3;\ -2;\ 1)$ нуқтадаги сферанинг тенгламасини ёзинг: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

24.10. Радиуси 3 га тенг ва учта координаталар текислигига урунувчи сферанинг тенгламасини топинг. Бундай сфераларнинг сони нечта бўлади?

24.11. Радиуси $\sqrt{2}$ га тенг ва учта координаталар текислигига урунувчи сферанинг тенгламасини топинг. Бундай сфераларнинг сони нечта бўлади?

24.12. $x^2-4x+y^2+z^2=0$ тенглама фазодаги сфера тенгламаси эканлигини исботланг. Унинг марказини координатасини ва радиусини топинг.

24.13. Маркази $O(3;\ 0;\ 0)$ нуқтада бўлган ва $A(0;\ \sqrt{2};\ \sqrt{5})$ нуқтадан ўтувчи сферанинг тенгламасини ёзинг.

24.14. $x^2+y^2+z^2-8x+4y+2z-4=0$ сферага тегишли қуйидаги нуқта қандай жойлашган: а) $A(5;\ 1;\ 2)$; б) $B(4;\ 2;\ 2)$; в) $C(3;\ 2;\ 2)$?

24.15. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=1$, $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ сфералар бир-бирига нисбатан қандай жойлашган?

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

24.16. Координаталар текислигидаги вектор координаталари таърифини такрорланг.

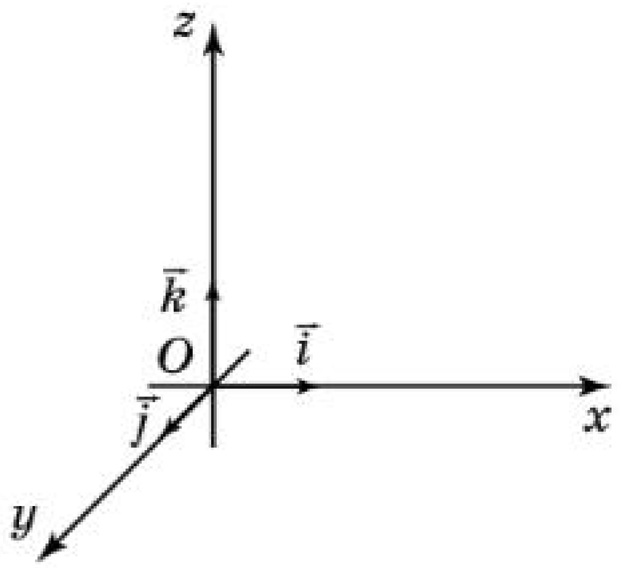
24.17. Координаталар текислигидаги вектор координаталари тушунчаси таърифига ўхшаш фазодаги вектор координаталари тушунчасини аниқланг.

24.18. $\vec{a}(x;\ y;\ z)$ векторнинг $|\vec{a}|$ узунлигини унинг координаталари орқали ифодалаш формуласини ёзинг.

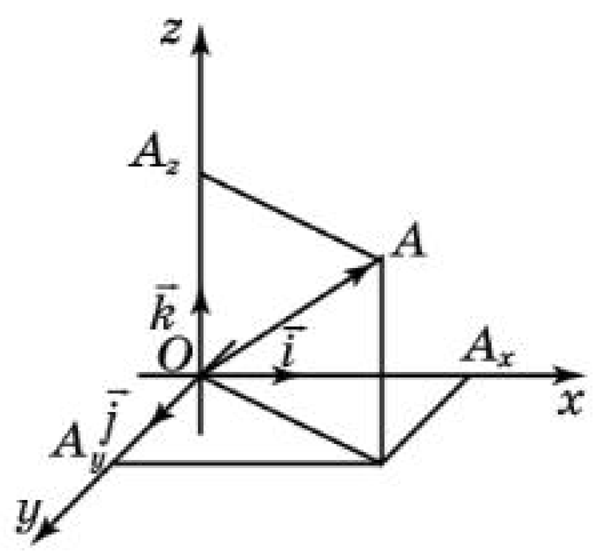
25-§. Векторнинг координаталари

Тўғри бурчакли координаталар системасида берилган фазодаги векторнинг координаталари тушунчасини аниқлайлик. Бунинг учун векторнинг бошини координаталар бошига мос келадиган қилиб ясаймиз. Шунда унинг охирининг координаталари *векторнинг координаталари* деб аталади.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторларни мос равишда (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1) координаталари билан белгилайлик. Уларнинг узунликлари 1 га тенг, йўналишлари эса мос координаталари ўқларининг йўналишига мос келади. Бу векторларни координаталари бошидан бошлаб чизамиз ва уларни *бирлик координата векторлари* деб атаймиз (25.1-расм).



25.1-расм



25.2-расм

Теорема. $\vec{a}$ *векторни* $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ *кўринишида ёзиш мумкин бўлган ҳолдагина унинг координаталари* $(x;\ y;\ z)$ **бўлади.**

Исботи. $\vec{a}$ векторни координаталар бошидан бошлаб чизамиз ва бнинг учун A нуқта орқали белгилаймиз. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$ тенглик бажарилади (25.2-расм). Шунда $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z} = z\vec{k}$ тенглиги бажарилган ҳолдагина $(x;\ y;\ z)$ координаталарга эга бўлади. Демак, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ☐

Теорема. $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *ва* $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ *векторларнинг* $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ *йиғиндисининг координаталари* $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$ *бўлади.*

Исботи. $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторларни координата векторлари бўйича ёзамиз:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

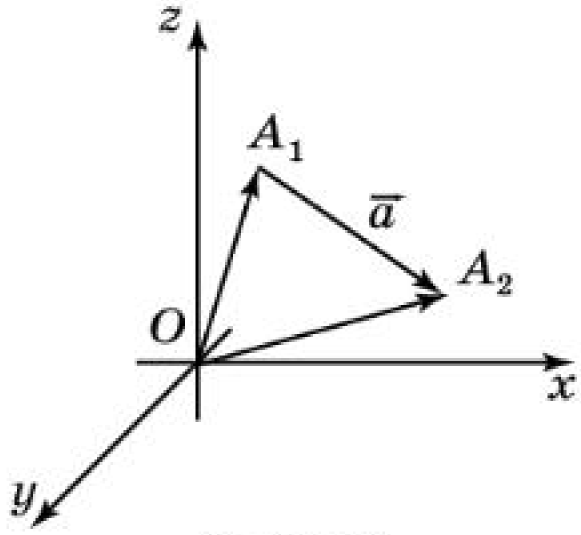
Шунда $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ йиғиндиси учун қуйидаги тенглик бажарилади:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

бундан $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$ сонлар учлиги $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторнинг координаталари бўлиб топилади. □

Векторни сонга кўпайтирганда унинг барча координаталари шу сонга кўпайтирилишини ўзингиз исботланг $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ Бундан $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ айирмаси $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ координаталарга эга бўлишини келтириб чиқаринг.

Энди боши билан охирининг координаталари берилган векторнинг координаталари қандай топилишини кўриб чиқамиз. $\vec{a}$ векторнинг боши $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва охири $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталарда бўлсин (25.3-расм).



25.3-расм

У ҳолда уни $\vec{a} = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$ векторларнинг айирмаси сифатида кўрсатиш мумкин, яъни, координаталари: $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

$\vec{a}(x;\ y;\ z)$ векторнинг узунлиги координаталари орқали қуйидаги формула билан аниқланади:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Агар $\overline{A_1A_2}$ векторнинг боши ва охирининг координаталари $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталарда берилса, у ҳолда унинг узунлиги қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Нолдан фарқли *икки векторнинг скаляр кўпайтмаси* деб, уларнинг узунликлари билан орасидаги бурчакнинг косинуси кўпайтмасига айтилишини эсга соламиз.

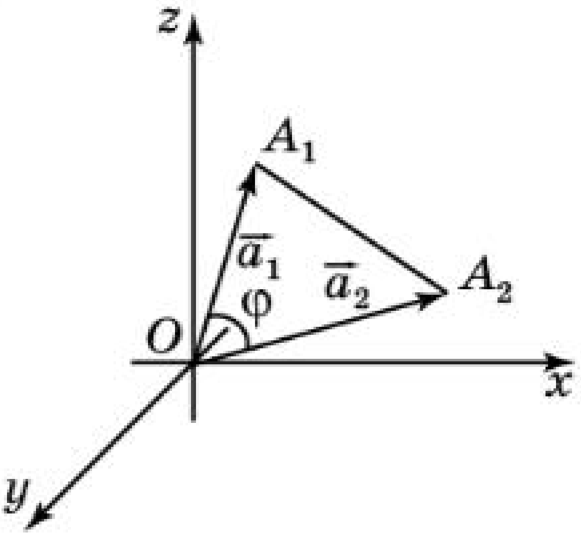
Агар бир вектор ноль вектор бўлса, унда шу векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг деб ҳисобланади.

$\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ деб белгиланади. Таъриф бўйича,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos\varphi,$$

бу ерда φ бурчаги — $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторларнинг орасидаги бурчак.

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ кўпайтма *скаляр квадрат* деб аталади ва $\vec{a}^2$ деб белгиланади. Скаляр кўпайтманинг таърифидан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ келиб чиқади.



25.4-расм

Векторларнинг скаляр кўпайтмасини уларнинг координаталари орқали ифодалайлик. $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ ва $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ векторлар берилсин. Векторнинг бошини координаталар бошидан бошлаб чизамиз, охирини A_1, A_2 деб белгилаймиз (25.4-расм).

Косинуслар теоремa бўйича қуйидаги тенгликни оламиз:

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos\varphi,$$

яъни $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^{\,2} + \vec{a}_2^{\,2} - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Сўнгги тенгликдан скаляр кўпайтмани ифодалаймиз ва қуйидаги тенгликларни фойдаланамиз:

$$\vec{a}_1^{\,2} = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;\ \vec{a}_2^{\,2} = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$
$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Шунда

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Шундай қилиб қуйидаги формула ҳосил бўлади: $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Олинган скаляр кўпайтманинг формуласи координаталари берилган $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ ва $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ векторлар орасидаги бурчакни топишга имконият беради. Яъни қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Саволлар

1. Векторнинг координаталари деб нимага айтилади?
2. Қандай векторлар координата векторлари деб аталади?
3. Векторнинг узунлиги координаталар орқали қандай ифодаланади?
4. Векторнинг узунлиги унинг боши ва охирининг координаталари орқали қандай ифодаланади?
5. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси қандай белгиланади?
6. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси қандай аниқланади?
7. Векторнинг скаляр квадрати деб нимага айтилади?
8. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси уларнинг координаталари орқали қандай ифодаланади?
9. Векторларнинг орасидаги бурчак уларнинг координаталари орқали қандай ифодаланади?

Масалалар

A

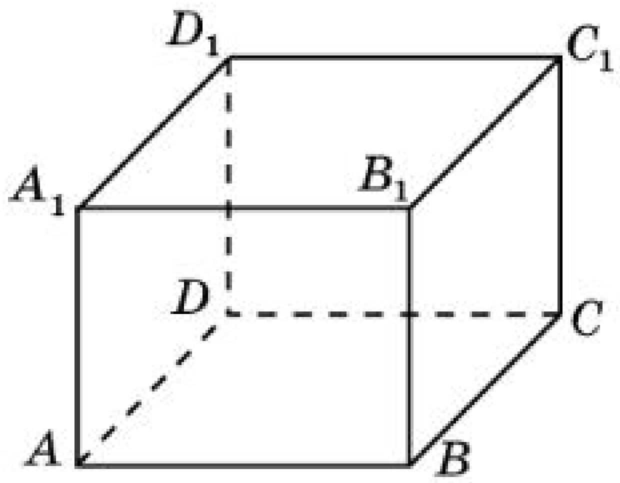
25.1. Қуйидаги векторларнинг координаталарини топинг: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j} + \vec{k}$; г) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{k}$.

25.2. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталари топинг: а) $A(2; -3; 4)$, $B(-5; 2; -6)$; б) $A(1; 3; -4)$, $B(6; -5; -8)$; в) $A(-3; 1; -10)$, $B(5; 2; -1)$.

25.3. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталари $(a; b; c)$. $\overrightarrow{BA}$ векторнинг координаталари топинг.

25.4. $\vec{a}_1(x_1; y_1; z_1)$ ва $\vec{a}_2(x_2; y_2; z_2)$ векторлар коллинеар, уларнинг координаталарининг ўзаро қандай боғлиқлиги бор?

25.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедда D учи — координаталар боши, DC, DA, DD_1 қирралари мос равишда Ox, Oy, Oz координаталар ўқларида жойлашган ва $DC = 4$, $DA = 3$, $DD_1 = 2$ (25.5-расм). Қуйидаги векторнинг координаталарини топинг: а) $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{AB}$; е) $\overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AB_1}$; з) $\overrightarrow{AD_1}$; и) $\overrightarrow{AC_1}$.



25.5-расм

25.6. Векторнинг координаталарини топинг: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$, бунда $\vec{a}(1; 0; 3)$, $\vec{b}(0; -2; 4)$.

25.7. Агар $\overrightarrow{MN}$ векторнинг координаталари $(2; -1; 0)$ ва $M(1; -3; -5)$ бўлса, у ҳолда N нуқтанинг координаталарини топинг.

25.8. Қуйидаги векторнинг узунлигини топинг: а) $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; б) $3\vec{j} + \vec{k}$; б) $-\vec{i} + 2\vec{k}$.

25.9. $\vec{a}_1(-1; 2; 3)$ ва $\vec{a}_2(2; -1; 4)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

B

25.10. $\vec{a}(-1; 2; 5)$, $\vec{b}(2; -3; 4)$ векторлар берилган. Қуйидаги векторларнинг координаталарини топинг: а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $-\vec{a} + 3\vec{b}$.

25.11. Векторнинг а) Oxy координата текислигига перпендикуляр; б) Ox координата тўғри чизиғига паралел бўлиши учун координаталари қандай шартни қаноатлантириши керак?

25.12. Векторнинг узунлиги 3 га тенг. Векторнинг координаталари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда уларни аниқланг.

25.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедда D учи — координаталар боши, DC, DA, DD_1 қирралари мос равишда Ox, Oy, Oz координаталар ўқларида жойлашган ва $DC = 4$, $DA = 3$, $DD_1 = 2$ (25.5-расм). Қуйидаги векторнинг координаталарини топинг: а) $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{AB}$; е) $\overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AB_1}$; и) $\overrightarrow{AD_1}$; к) $\overrightarrow{AC_1}$.

25.14. $\vec{a}_1(-1; 2; 2)$ ва $\vec{a}_2(3; 0; 4)$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

C

25.15. $\vec{e}(1;\ 1;\ 1)$ векторнинг координата векторлари билан ясовчи бурчакларининг косинусларини топинг.

25.16. $\vec{e}(1;\ 1;\ 1)$ векторнинг Oxy, Oxz, Oyz текисликлари билан ясовчи бурчакларининг косинусини топинг.

25.17. z нинг қандай қийматида $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + z\vec{k}$ ва $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлади?

25.18. Учлари $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(1;\ 1;\ 4)$ ва $C\ (0;\ 1;\ 3)$ нуқталарда бўлган ABC учбурчакнинг B бурчаги тўғри бўлишини исботланг.

25.19. $A(2;\ 4;\ -4)$, $B(1;\ 1;\ -3)$, $C(-2;\ 0;\ 5)$, $D(-1;\ 3;\ 4)$ нуқталар параллелограммнинг учлари эканлигини исботланг.

25.20. Жисм $\overline{F}(-3;\ 4;\ 7)$ кучнинг таъсирида $M(5;\ -1;\ 2)$ жойидан $N(2;\ 1;\ 3)$ жойига тўғри чизиқли ҳаракат қилиб, жой алмаштирганда бажариладиган A ишни топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

25.21. Координаталар текислигидаги тўғри чизиқ тенгламасини такрорланг.

25.22. Координаталар текислигидаги тўғри чизиқ тенгламасига ўхшаш фазодаги текислик тенгламасини ёзинг.

25.23. $(1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 1)$ нуқталар орқали ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

26-§. Фазода текислик тенгламаси

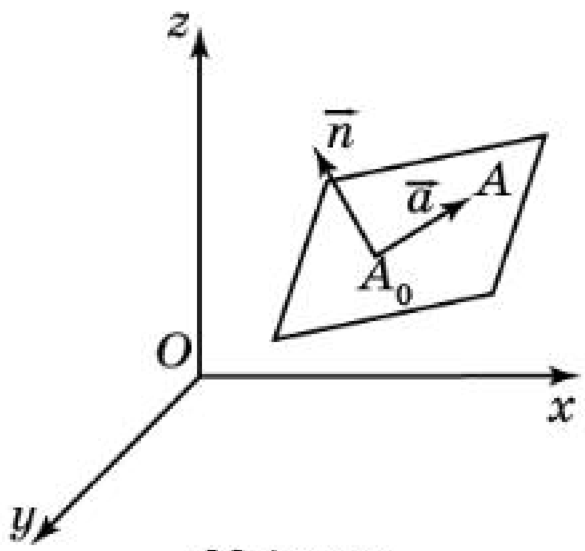
Планиметрия курсида текисликдаги тўғри чизиқ $ax + by + c = 0$ тенглама билан берилиши исботланган, бу ерда a, b, c — ҳақиқий сонлар ва a, b сонлар бир вақтда нолга тенг эмас. Фазода шунга ўхшаш теорема мавжуд.

Теорема. ***Фазода текислик***

$$ax + by + cz + d = 0$$

тенглама билан берилади. Бу ерда a, b, c, d — ҳақиқий сонлар. a, b, c сонлар бир вақтда нолга тенг эмас ва улар шу текисликка перпендикуляр $\vec{n}$ векторнинг координаталари бўлади. $\vec{n}$ вектор нормал вектор деб аталади.

Исботи. $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта орқали ўтувчи ва $\vec{n}(a;\ b;\ c)$ векторга перпендикуляр текисликни кўриб чиқайлик (26.1-расм). Шу текисликда ётган ихтиёрий $A(x;\ y;\ z)$ нуқта учун $\overline{A_0A}(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$ вектор $\vec{n}$ векторга перпендикуляр бўлади. Яъни $\vec{n} \cdot \overline{A_0A}$ скаляр кўпайтма нолга тенг бўлади. Скаляр кўпайтмани бу векторларнинг координаталари орқали ёзиб берилган текисликни ифодоловчи қуйидаги тенгламани оламиз:



26.1-расм

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

$-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ деб белгилаб, тенгламани шакл алмаштириш орқали текисликнинг тенгламасини оламиз:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Фазодаги текисликларнинг ўзаро жойлашишини уларнинг тенгламалари орқали кўриб чиқайлик. Фазодаги икки текисликнинг $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормал векторлари коллинеар бўлса, у ҳолда улар параллел ёки устма-уст тушади. Шу билан қандайдир бир t сони учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\vec{n}_2 = t \cdot \vec{n}_1.$$

Энди

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\ (*)$$

тенгламалар билан текисликларнинг нормал векторларининг координаталари $(a_1; b_1; c_1)$, $(a_2; b_2; c_2)$ бўлади. Демак, қандайдир бир t сони учун $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$ тенгликлар бажарилса, у ҳолда бу текисликлар параллел ёки устма-уст тушувчи бўлади.

Агар $d_2 = td_1$ бўлса, у ҳолда (*) тенгламалар бир текисликни таърифлайди. Агар $d_2 \neq td_1$ бўлса, у ҳолда бу тенгламалар параллел текисликларни аниқлайди. Агар текисликлар параллел бўлмаса, у ҳолда улар тўғри чизиқ бўйича кесишади ва улар орасидаги бурчакни нормал векторлар орасидаги бурчак орқали ҳисоблашга бўлади.

Агар нормал векторлар орасидаги бурчак ўткир ёки тўғри бўлса, у ҳолда бу текисликлар орасидаги бурчакка тенг, агар нормал векторлар орасидаги бурчак ўтмас бўлса, у ҳолда у $180°$ билан текисликлар орасидаги бурчакнинг айирмасига тенг бўлишини мустақил текширинг.

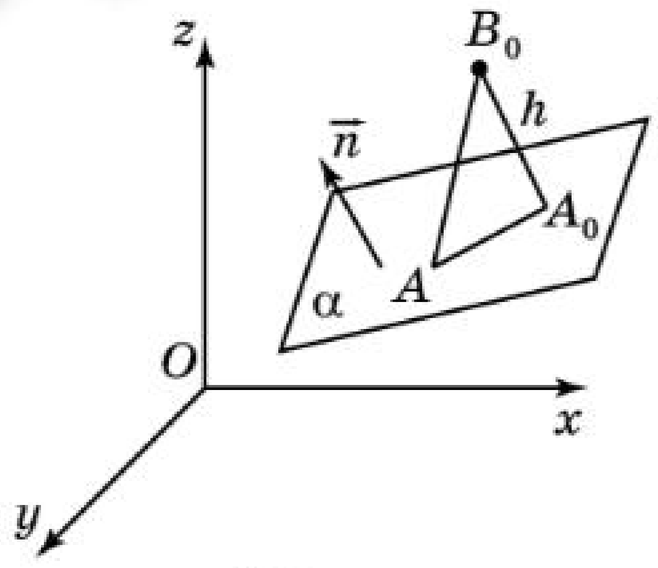
Шу билан бирга, текисликлар орасидаги φ бурчак косинусини нормал векторларнинг скаляр кўпайтмаси формуласи орқали ҳисоблаш мумкин:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Хусусий ҳолларда текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади, агар $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, яъни қуйидаги тенглик ўринли бўлса,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

$B_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтадан $ax + by + cz + d = 0$ тенглама билан берилган текисликкача бўлган масофани топишга доир формулани келтириб чиқарайлик.



26.2-расм

B_0 нуқтадан *текисликкача бўлган масофа* деб, берилган нуқтадан берилган текисликка туширилган B_0A_0 перпендикулярнинг узунлигига айтамиз. $\overline{A_0B_0}$ вектор $\vec{n}(a;\, b;\, c)$ нормал векторга коллинеар (26.2-расм).

$A(x;\, y;\, z)$ — α текислигининг қандайдир бир нуқтаси бўлсин. У ҳолда,

$$\cos\angle AB_0A_0 = \frac{\vec{n}\cdot\overline{B_0A}}{|\vec{n}|\cdot|\overline{B_0A}|} =$$

$$= \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cdot|\overline{B_0A}|}.$$

$-ax - by - cz = d$ эканлиги ва изланаётган h масофа $|\overline{B_0A}|\cdot\cos\angle AB_0A_0$ тенг эканлигини эслатиб, қуйидагини оламиз:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Саволлар

1. Фазодаги текислик қандай тенглама билан берилади?
2. Қандай вектор текисликнинг нормал вектори деб аталади?
3. Қандай ҳолатда икки тенглама фазодаги паралел текисликларни аниқлайди?
4. Қандай ҳолатда икки тенглама фазодаги бир текисликни аниқлайди?
5. Қандай ҳолатда икки тенглама фазодаги перпендикуляр текисликларни аниқлайди?
6. Тенгламалари берилган икки текисликнинг орасидаги бурчакни қандай топишга бўлади?

Масалалар

A

26.1. Текисликнинг нормал векторининг координаталарини топинг:
а) $5x - y - 1 = 0$; б) $3x + 18z - 6 = 0$;
б) $15x + y - 8z + 14 = 0$; в) $x - 3y + 15z = 0$.

26.2. Координата текислигининг тенгламасини ёзинг: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

26.3. $A(3;\, 2;\, 5)$, $B(-1;\, -2;\, 2)$, $C(7;\, 0;\, -9)$ нуқталар берилган. $2x - 3y + z - 5 = 0$ текислигига тегишли нуқталарни аниқланг.

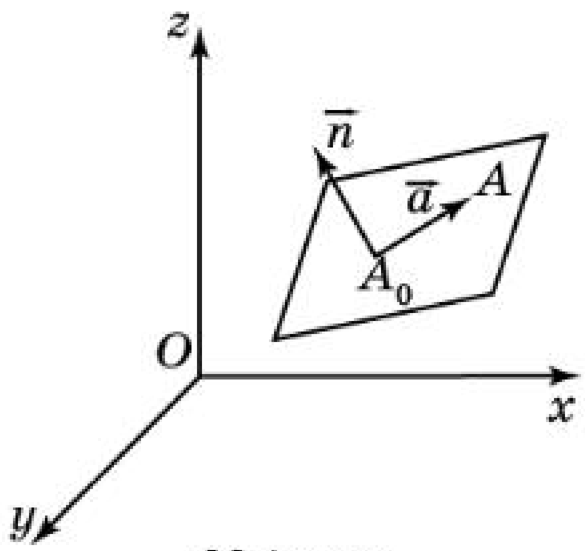
26.4. $x + 2y - 3z - 1 = 0$ текислик берилган. Унинг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг.

26.5. $M(-1;\, 2;\, 1)$ нукта орқали ўтувчи ва $\vec{n}$ нормал векторнинг координаталари берилган текисликнинг тенгламасини топинг:
а) $(0;\, -5;\, 2)$; б) $(6;\, -1;\, 3)$; в) $(-4;\, -2;\, -1)$; г) $(-3;\, -8;\, 0)$.

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

$-ax_0-by_0-cz_0=d$ деб белгилаб, тенгламани шакл алмаштириш орқали текисликнинг тенгламасини оламиз:

$$ax+by+cz+d=0.$$



26.1-расм

Фазодаги текисликларнинг ўзаро жойлашишини уларнинг тенгламалари орқали кўриб чиқайлик. Фазодаги икки текисликнинг $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормал векторлари коллинеар бўлса, у ҳолда улар параллел ёки устма-уст тушади. Шу билан қандайдир бир t сони учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\vec{n}_2=t\cdot\vec{n}_1.$$

Энди

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\ (*)$$

тенгламалар билан текисликларнинг нормал векторларининг координаталари $(a_1;\ b_1;\ c_1)$, $(a_2;\ b_2;\ c_2)$ бўлади. Демак, қандайдир бир t сони учун $a_2=ta_1$, $b_2=tb_1$, $c_2=tc_1$ тенгликлар бажарилса, у ҳолда бу текисликлар параллел ёки устма-уст тушувчи бўлади.

Агар $d_2=td_1$ бўлса, у ҳолда (*) тенгламалар бир текисликни таърифлайди. Агар $d_2\neq td_1$ бўлса, у ҳолда бу тенгламалар параллел текисликларни аниқлайди. Агар текисликлар параллел бўлмаса, у ҳолда улар тўғри чизиқ бўйича кесишади ва улар орасидаги бурчакни нормал векторлар орасидаги бурчак орқали ҳисоблашга бўлади.

Агар нормал векторлар орасидаги бурчак ўткир ёки тўғри бўлса, у ҳолда бу текисликлар орасидаги бурчакка тенг, агар нормал векторлар орасидаги бурчак ўтмас бўлса, у ҳолда у $180°$ билан текисликлар орасидаги бурчакнинг айирмасига тенг бўлишини мустақил текширинг.

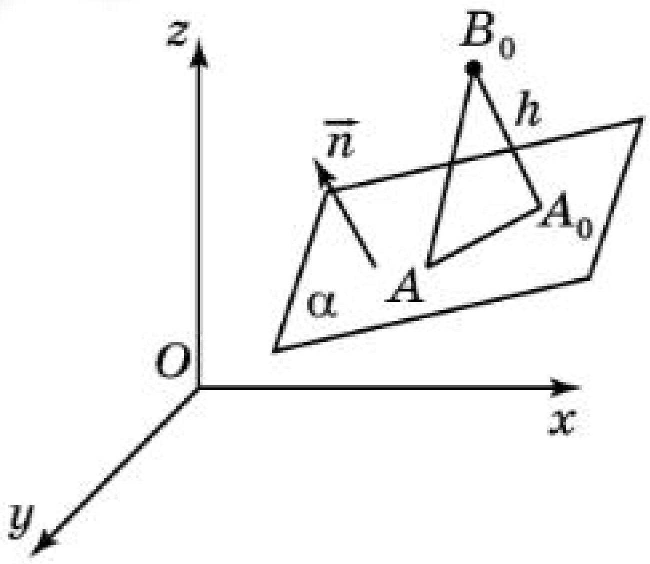
Шу билан бирга, текисликлар орасидаги φ бурчак косинусини нормал векторларнинг скаляр кўпайтмаси формуласи орқали ҳисоблаш мумкин:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

Хусусий ҳолларда текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади, агар $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, яъни қуйидаги тенглик ўринли бўлса,

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0.$$

$B_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтадан $ax+by+cz+d=0$ тенглама билан берилган текисликкача бўлган масофани топишга доир формулани келтириб чиқарайлик.



26.2-расм

B_0 нуқтадан *текисликкача бўлган масофа* деб, берилган нуқтадан берилган текисликка туширилган B_0A_0 перпендикулярнинг узунлигига айтамиз. $\overline{A_0B_0}$ вектор $\vec{n}(a; b; c)$ нормал векторга коллинеар (26.2-расм).

$A(x; y; z)$ — α текислигининг қандайдир бир нуқтаси бўлсин. У ҳолда,

$$\cos\angle AB_0A_0 = \frac{\vec{n}\cdot\overline{B_0A}}{|\vec{n}|\cdot|\overline{B_0A}|} =$$

$$= \frac{|a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot|\overline{B_0A}|}.$$

$-ax - by - cz = d$ эканлиги ва изланаётган h масофа $|\overline{B_0A}|\cdot$ $\cdot\cos\angle AB_0A_0$ тенг эканлигини эслатиб, қуйидагини оламиз:

$$h = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Саволлар

1. Фазодаги текислик қандай тенглама билан берилади?
2. Қандай вектор текисликнинг нормал вектори деб аталади?
3. Қандай ҳолатда икки тенглама фазодаги паралел текисликларни аниқлайди?
4. Қандай ҳолатда икки тенглама фазодаги бир текисликни аниқлайди?
5. Қандай ҳолатда икки тенглама фазодаги перпендикуляр текисликларни аниқлайди?
6. Тенгламалари берилган икки текисликнинг орасидаги бурчакни қандай топишга бўлади?

Масалалар

А

26.1. Текисликнинг нормал векторининг координаталарини топинг:
а) $5x - y - 1 = 0$; б) $3x + 18z - 6 = 0$;
б) $15x + y - 8z + 14 = 0$; в) $x - 3y + 15z = 0$.

26.2. Координата текислигининг тенгламасини ёзинг: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

26.3. $A(3; 2; 5)$, $B(-1; -2; 2)$, $C(7; 0; -9)$ нуқталар берилган. $2x - 3y + z - 5 = 0$ текислигига тегишли нуқталарни аниқланг.

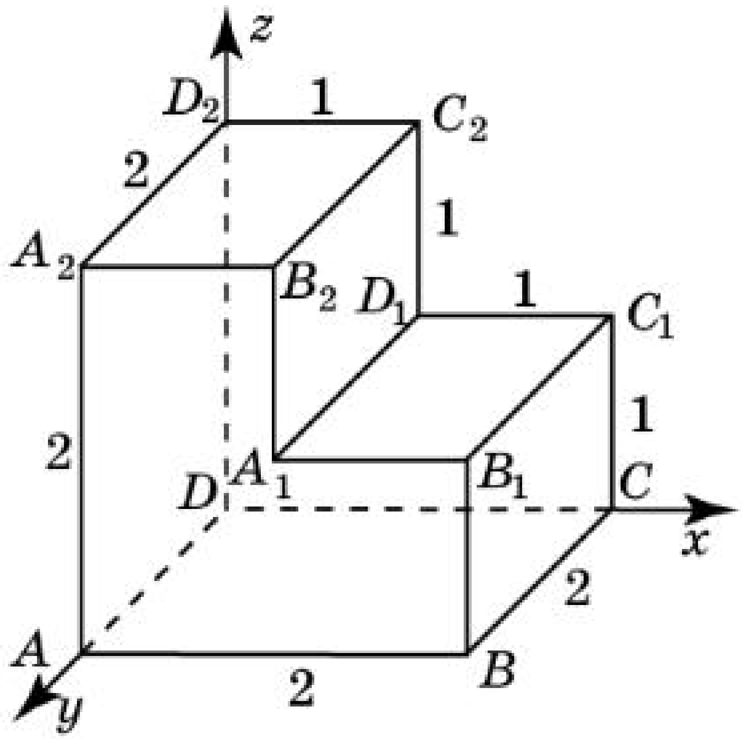
26.4. $x + 2y - 3z - 1 = 0$ текислик берилган. Унинг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг.

26.5. $M(-1; 2; 1)$ нукта орқали ўтувчи ва $\vec{n}$ нормал векторнинг координаталари берилган текисликнинг тенгламасини топинг:
а) $(0; -5; 2)$; б) $(6; -1; 3)$; в) $(-4; -2; -1)$; г) $(-3; -8; 0)$.

E ва F нуқталар — BC ва CC_1 қирраларининг ўрталари. D нуқтадан AEF текислигигача бўлган масофани топинг.

26.21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғрибурчакли параллелепипедда D учи координаталар боши, DC, DA, DD_1 қирралари мос равишда Ox, Oy, Oz ўқларида ётади ва $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$. D нуқтадан ACD_1 текислигигача бўлган масофани топинг.

26.22. 26.7-расмдаги купёқнинг ёқлари ётган текисликларнинг тенгламаларини ёзинг.



26.7-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

26.23. Координаталар текислигидаги параметрли тўғри чизиқ тенгламасини такрорланг.

26.24. Координаталар текислигидаги тўғри чизиқнинг берилишига ўхшаш фазодаги $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта орқали ўтувчи ва $\vec{e}(k;\ l;\ m)$ йўналтирилган вектори бўлган параметрли тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

26.25. $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқта орқали ўтувчи ва йўналтирилган вектори бўлган параметрли тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

26.26. $O(0;\ 0;\ 0)$ ва $A(1;\ 2;\ 3)$ нуқталар орқали ўтувчи ва параметрли тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

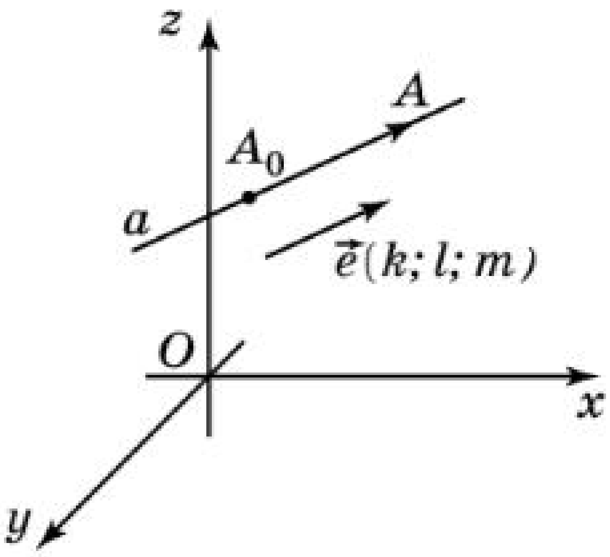
27-§. Фазода тўғри чизиқ тенгламаси

Фазода тўғри чизиқни икки текисликнинг кесишиш чизиғи сифатида қараш мумкин. Демак, фазодаги тўғри чизиқнинг аналитик берилишининг бир усули икки текислик тенгламаларидан ташкил топган система орқали бериш мумкин:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Тўғри чизиқнинг аналитик берилишининг бошқа ҳолини ҳам қарайлик. Фазодаги тўғри чизиқни аниқлаш учун шу тўғри чизиқ ўтадиган $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар жуфтини ёки тўғри чизиқдаги $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта билан шу тўғри чизиққа параллел ёки тўғри чизиқда ётган $\vec{e}(k;\ l;\ m)$ *йўналтирувчи векторни* олишимиз етарли.

Агар тўғри чизиқ икки $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар орқали берилса, унда йўналтирувчи векторнинг ўрнига координаталари $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ бўлган $\overline{A_1A_2}$ векторни, A_0 нуқтанинг ўрнига эса A_1, A_2 нуқталардан бирини олиш мумкин.



27.1-расм

$A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта орқали ўтувчи ва $\vec{e}(k;\ l;\ m)$ йўналтирувчи вектори мавжуд a тўғри чизиққа тегишли $A(x;\ y;\ z)$ нуқтанинг координаталарини қаноатлантирадиган шартни топайлик (27.1-расм).

Бу ҳолатда $\overline{A_0A}(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$ вектор $\vec{e}(k;\ l;\ m)$ векторга коллинеар бўлиши керак. Шунинг учун шу векторларнинг координаталари пропорционал, яъни қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\begin{cases} x - x_0 = kt, \\ y - y_0 = lt, \\ z - z_0 = mt, \end{cases}$$

бунда t — ҳақиқий сон.

Бу тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt. \end{cases}$$

Бу система фазодаги тўғри чизиқнинг *параметрик тенгламаси* дейилади.

Агар йўналтирувчи векторнинг координаталари нолдан фарқли бўлса,унда тенгламаларни мос координаталарига бўлиш орқали қуйидаги тенгламага эга бўламиз

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{k} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{l} = t, \\ \dfrac{z - z_0}{m} = t. \end{cases}$$

Бу системада t параметрни тенглаштириш орқали фазодаги тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини келтириб чиқарамиз:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

Агар фазодаги тўғри чизиқ $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар орқали берилса, унда йўналтирувчи векторнинг ўрнига координаталари $\overline{A_1A_2}$ $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ векторни ва A_0 нуқта ўрнида A_1 нуқтани олиб, қуйидаги тўғри чизиқнинг тенгламасини оламиз:

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases}$$

$A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нуқталари орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини ёзинг.

Йўналтирувчи векторлари $\vec{e}_1(k_1; l_1; m_1)$ ва $\vec{e}_2(k_2; l_2; m_2)$ бўлган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакнинг косинусини топиш формуласини ёзинг.

Одатда физик масалаларда t параметр вақтни кўрсатиб, чизиқнинг параметрли тенгламаси нуқтанинг ҳаракат тенгламаси сифатида қаралади. $t = 0$ момен да унга тўғри чизиқдаги $A_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқта мос келади.

t параметр ўзгарганда параметрли тенгламани қаноатлантирувчи, координаталари $(x; y; z)$ бўлган A нуқта тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланади. Нуқтанинг тўғри чизиқ бўйича ўрин алмаштириши текис ҳаракат эканлигини исботлайлик ва унинг тезлигини топайлик.

t_1 дан t_2 гача бўлган $T = t_2 - t_1$ вақт оралиғини кўриб чиқайлик. Нуқтанинг шу вақт оралиғидаги тўғри чизиқ бўйича ҳаракатининг $\overline{A_1A_2}$ ўрин алмаштириш вектори $(kT; lT; mT)$ координаталарга эга бўлади. Ўрин алмаштириш векторини T вақтга бўлиб тезлик векторининг координаталари $(k; l; m)$ га эга бўламиз. У $\vec{e}$ йўналтирувчи вектор билан мос келади ва вақт оралиғида танлашга боғлиқ бўлмайди.

Демак, нуқтанинг тўғри чизиқ бўйича ҳаракати текис бўлади. Тезлик векторининг узунлиги нуқтанинг тўғри чизиқ бўйича ҳаракат тезлигини беради:

$$|\vec{e}| = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}.$$

Саволлар

1. Фазода тўғри чизиқ қандай берилади?
2. Қандай вектор тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори деб аталади?
3. Тўғри чизиқнинг қандай тенгламаси параметрли тенглама дейилади?

Масалалар

B

27.1. Координата тўғри чизиғида бериладиган тенгламаларни ёзинг: а) Ox; б) Oy; в) Oz.

27.2. $A(1; -2; 3)$ нуқта орқали ўтувчи ва йўналтирувчи вектори $\vec{e}(2; 3; -1)$ бўлган тўғри чизиқнинг параметрли ва каноник тенгламаларини ёзинг.

27.3. $A_1(-2;\ 1;\ -3)$ ва $A_2(5;\ 4;\ 6)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг параметрли ва каноник тенгламаларини ёзинг.

27.4. $M(1;\ 2;\ -3)$ нуқта орқали ўтувчи ва $x + y + z + 1 = 0$ текислигига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг параметрли тенгламаларини ёзинг.

27.5. Қуйидаги тенгламалар орқали берилган тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашишини аниқланг:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -8t, \\ z = 4 + 2t. \end{cases}$$

C

27.6. $A(-1;\ 0;\ 2)$ ва $B(3;\ 1;\ 1)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ билан $2x - y + z - 6 = 0$ текислигининг кесишиш нуқтасини координатасини топинг.

27.7. Нуқта $\vec{e}(1;\ 2;\ 3)$ векторнинг йўналиши билан тўғри чизиқ чизиқли бирдай қўзғалади. $t = 0$ вақт ичида унинг координаталари — $(-1;\ 1;\ -2)$. $t = 4$ бўлганда нуқтанинг координаталари қандай бўлади?

27.8. Фазодаги нуқтанинг қўзғалишининг параметрли тенгламаси берилган:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -3 + 1t. \end{cases}$$

Шу нуқтанинг қўзғалиш тезлигини топинг.

27.9. Нуқта тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланади. $t = 2$ вақт ичида унинг координаталари $(3;\ 4;\ 0)$, $t = 6$ бўлганда эса координаталари $(1;\ 2;\ -1)$ бўлди. Нуқтанинг қўзғалиш тезлигини топинг.

27.10. Йўналтирувчи векторларнинг координаталари: а) $(1;\ -1;\ 1)$ ва $(1;\ 1;\ 1)$; б) $(1;\ 0;\ 0)$ ва $(1;\ 1;\ 1)$ бўладиган тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакни топинг.

27.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғрибурчакли параллелепипедда D учи координалар боши, DC, DA, DD_1 қирралари мос равишда Ox, Oy, Oz ўқларда ётади ва $DC = 3$, $DA = 2$, $DD_1 = 1$. AB_1 ва BC_1 тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчак косинусини топинг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ён қирралари 1 га, асосининг томонлари 2 га тенг. Унинг AB, AC, A_1B_1 қирраларининг ўрталари орқали кесиб ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

A. 0,5. B. 1.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ён қирралари 1 га, асосининг томонлари 2 га тенг. Унинг SA, SB, SC учлари орқали кесиб ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

A. 0,25. B. 0,5.

C. 1. D. 2.

3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. Унинг B, E, E_1 учлари орқали кесиб ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

A. 0,5. B. 1.

C. 1,5. D. 2.

4. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. Унинг S, C ва F учлари орқали кесиб ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

A. 1. B. 2.

C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AA_1}$ векторнинг узунлигини топинг.

A. 1. B. 2.

C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

6. $A(-5; 6; -7)$ нуқтанинг Oyz текислигидаги ортогонал проекциясининг координаталарини топинг.

A. $(0; 6; -7)$. B. $(-5; 0; -7)$.

C. $(-5; 6; 0)$. D. $(-5; 0; 0)$.

7. $B(3; -8; -11)$ нуқтадан Oxy текисликкача бўлган масофани топинг.

A. -11. B. 11.

C. 3. D. 8.

8. $C(1; -5; 6)$ нуқта Oz ўқидан қандай узоқликда жойлашган?

A. 5. B. $2\sqrt{13}$.

C. 6. D. $\sqrt{26}$.

9. $E(-1; 0; 4)$ ва $F(2; -5; 1)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

A. $5\sqrt{18}$. B. $\sqrt{51}$.

C. $\sqrt{43}$. D. $\sqrt{59}$.

10. Агар $G(3; -2; 0)$ ва $H(0; -12; 5)$ бўлса, у ҳолда GH кесма ўртасининг координаталарини топинг.

A. $(\frac{3}{2}; -5; 5)$. B. $(3; -7; -\frac{5}{2})$.

C. $(\frac{3}{2}; -7; \frac{5}{2})$. D. $(-3; 7; -\frac{5}{2})$.

11. $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z + 1 = 0$ тенглама билан берилган сфера марказининг координаталарини топинг.

A. $(1; -1; 2)$. B. $(1; 2; -1)$.

C. $(0; -1; 2)$. D. $(0; 1; -2)$.

12. Агар $I(5; -1; 2)$ ва $J((3; -2; 0)$ бўлса $\overline{IJ}$ векторнинг координаталарини топинг.

A. $(2; -1; 2)$. B. $(-2; -1; 2)$.

C. $(2; -3; 2)$. D. $(-2; -1; -2)$.

13. Агар $K(0; -1; 2)$ ва $L(-3; 5; 0)$ бўлса, $\overline{KL}$ векторнинг узунлигини топинг.

A. $\sqrt{29}$. B. 7.

C. 5. D. $2\sqrt{7}$.

14. $5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ векторнинг узунлигини топинг.

A. 36. B. 6.

C. $\sqrt{30}$. D. $2\sqrt{7}$.

15. $\vec{a}(-5; 6; 1)$ ва $\vec{b}(0; -9; 7)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

A. -52. B. 47.

C. -47. D. -56.

16. Агар $\vec{a}(0; 1; -2)$ ва $\vec{b}(2; 0; 1)$ бўлса, у ҳолда k нинг қандай қийматида $2\vec{a} - k\vec{b}$ ва $\vec{a} + \vec{b}$ векторлар перпендикуляр бўлади?

A. 2. B. $3\frac{1}{2}$.

C. $-3\frac{1}{2}$. D. ечими йўқ.

17. $M(2; 1; m)$ нуқта $3x - y + 2z - 1 = 0$ текисликда ётади. mни топинг.

A. 3. B. -3.

C. 2. D. -2.

18. $P(3; -2; -4)$ нуқта орқали ўтувчи $4x - 5y + 2z + 11 = 0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламасини топинг.

A. $4x - 5y + 2z - 10 = 0$.

B. $8x - 10y + 4z + 22 = 0$.

C. $4x - 5y + 2z + 14 = 0$.
D. $4x - 5y + 2z - 14 = 0$.

19. Фазода қандай фигура $y^2 + z^2 = 0$ тенглама билан берилади?

A. Oyz текислик.
B. Ox ўқи.
C. Oy ва Oz ўқлари.
D. Oxy ва Oxz текисликлар.

20. Фазода қандай фигура $z \geqslant 0$ тенгсизлик билан берилади?

A. Oz ярим ўқи.
B. Oyz координаталар текислиги билан чегараланган ярим фазо.
C. Oxz координаталар текислиги билан чегараланган ярим фазо.
D. Oxy координаталар текислиги билан чегараланган ярим фазо.

10-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

БУРЧАКЛАР

В

Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB ва CB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB ва DA_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва CB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва B_1D_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва AC тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва AD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC ва BD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BC_1 ва CA_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BC_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда CA_1 ва DC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BD_1 ва DC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва AC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD_1 ва CA_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда A_1C_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда A_1C_1 ва BD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
19. $ABCD$ қирраларининг ўрталари AB ва CD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
20. $ABCD$ қирраларининг ўрталари AC ва BD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
21. $ABCD$ қирраларининг ўрталари E ва F нуқталар — мос равишда BC ва BD қирраларининг ўрталари. AB ва EF тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
22. $ABCD$ қирраларининг ўрталари E ва F нуқталар — мос равишда BD ва CD қирраларининг ўрталари. AD ва EF тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
23. $ABCD$ қирраларининг ўрталари E, F, G нуқталар — мос равишда BC, BD, AD қирраларининг ўрталари. EFG бурчакни топинг.
24. $ABCD$ қирраларининг ўрталари E, F, G нуқталар — мос равишда AB, AD, CD қирраларининг ўрталари. EFG бурчакни топинг.
25. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. D нуқта — BC қиррасининг ўртаси. BB_1 ва AD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
26. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. D нуқта — BC қиррасининг ўртаси. A_1C_1 ва AD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
27. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. D нуқта — BC қиррасининг ўртаси. B_1C_1 ва AD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
28. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. D нуқта — BC қиррасининг ўртаси. CB_1 ва AD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
29. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC_1B бурчагининг косинусини топинг.
30. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг SB ва AC тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
31. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг E, F нуқталари — мос равишда AB, BC қирраларининг ўрталари. SA ва EF тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
32. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг E нуқта — SC қиррасининг ўртаси. AD ва BE тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABD_1 бурчакни топинг.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABE_1 бурчакнинг тангенсини топинг.

35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC ва B_1F_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC ва B_1D_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB ва CF_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ACD_1 бурчакни топинг.
39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC_1D_1 бурчакни топинг.
40. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. CC_1 ва BE_1 чизиқлар орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
41. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг BF_1 ва CC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
42. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва B_1E тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC ва DF_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
44. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA ва BC тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
45. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. G нукта — SD қиррасининг ўртаси. AG ва BC тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
46. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA ва BF тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
47. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA ва CE тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
48. Октаэдрнинг айқаш қирралари орасидаги бурчакни топинг.

Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC тўғри чизиғи билан BCD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BD тўғри чизиғи билан BCD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда DA_1 тўғри чизиғи билан BCD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD_1 тўғри чизиғи билан BCD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда A_1C_1 тўғри чизиғи билан BCD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BC_1 тўғри чизиғи билан BCD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB_1 тўғри чизиғи билан ABC_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC тўғри чизиғи билан ABC_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB_1 тўғри чизиғи билан BDD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BC_1 тўғри чизиғи билан BDD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда CA_1 тўғри чизиғи билан AB_1D_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BD_1 тўғри чизиғи билан ACB_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
13. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — AD қиррасининг ўртаси. AD тўғри чизиғи билан BCE текислиги орасидаги бурчакни топинг.
14. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — AD қиррасининг ўртаси. AB тўғри чизиғи билан BCE текислиги орасидаги бурчакни топинг.
15. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг SA тўғри чизиғи билан SBD текислиги орасидаги бурчакни топинг.
16. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг AB тўғри чизиғи билан SBD текислиги орасидаги бурчакни топинг.
17. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг, SH — баландлиги. SH тўғри чизиғи билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BE_1 тўғри чизиғи билан ABC текислиги орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BD_1 тўғри чизиғи билан ABC текислиги орасидаги бурчакни топинг.

20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиғи билан BCC_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AF тўғри чизиғи билан BCC_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

22. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BF тўғри чизиғи билан BCC_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BE тўғри чизиғи билан BCC_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BD тўғри чизиғи билан BCC_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. FB_1 тўғри чизиғи билан BCC_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиғи билан BDD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг BA_1 тўғри чизиғи билан BDD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. FB тўғри чизиғи билан BDD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AF тўғри чизиғи билан BDD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиғи билан BEE_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AD тўғри чизиғи билан BEE_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 тўғри чизиғи билан BCE_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BF тўғри чизиғи билан BCE_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. CC_1 тўғри чизиғи билан BDE_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиғи билан BDE_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.

Текисликлар орасидаги бурчак

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ABC_1 ва BCC_1 текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда CDD_1 ва BCD_1 текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB_1C_1 ва BCD_1 текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

4. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда E нуқта — AD қиррасининг ўртаси. ACD ва BCE текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

5. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — SC қиррасининг ўртаси. ABC ва BDE текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

6. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг SAD ва SBE текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

7. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг AFF_1 ва ACC_1 текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

8. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг ABB_1 ва AEE_1 текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ACC_1 ва AEE_1 текисликлариорасидаги бурчакни топинг.

10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг AFF_1 ва BCC_1 текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг AFF_1 ва DEE_1 текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг AFF_1 ва BDD_1 текисликлари орасидаги бурчакни топинг.

13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва BDE_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ACC_1 ва BFF_1 текисликлари орасидаги бурчакни топинг.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ADD_1 ва BFF_1 текисликлари орасидаги бурчакни топинг.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва BCE_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BCE_1 ва BCC_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

C

Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AB ва CA_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AB ва DB_1 чизиқлар орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BD_1 ва DB_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AC_1 ва CA_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
5. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда E нуқта — AD қиррасининг ўртаси. AB ва CE тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
6. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда E нуқта — BC қиррасининг ўртаси. AB ва DE тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
7. $ABCD$ тетраэдрида E, F нуқталар — мос равишда AB ва BC қирраларининг ўрталари. EDF бурчагининг косинусини топинг.
8. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда E нуқта — AD қиррасининг ўртаси. BEC бурчагининг косинусини топинг.
9. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB ва CB_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
10. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB_1 ва BC_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
11. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — SC қиррасининг ўртаси. SA ва BE тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
12. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — SC қиррасининг ўртаси. ABE бурчагининг косинусини топинг.

13. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E, F нуқталар — мос равишда SC ва SD қирраларининг ўрталари. BEF бурчагининг косинусини топинг.
14. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E, F нуқталар — мос равишда SC ва SD қирраларининг ўрталари. AF ва BE тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
15. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E, F нуқталари — мос равишда SC ва SD қирраларининг ўрталари. AF ва BE тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. DE ва BF_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB ва CD_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB ва CE_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. DF ва CE_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. DF ва CF_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг синусини топинг.
21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC ва DE_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
22. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва CB_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва DC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва FC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва FB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва CD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC_1 ва BD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC_1 ва BE_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
30. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA ва DE тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
31. $SABCDEF$ мунтазам олти бурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA ва BD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
32. $SABCDEF$ мунтазам олти бурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA ва BE тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BD_1 тўғри чизиғи билан ABC текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг DB_1 тўғри чизиғи билан ADD_1 текислиги орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AC_1 тўғри чизиғи билан BCD_1 текислиги орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг DB_1 тўғри чизиғи билан ABC_1 текислиги орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг CA_1 тўғри чизиғи билан BDD_1 текислиги орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BC тўғри чизиғи билан AB_1D_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг CC_1 тўғри чизиғи билан AB_1D_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг CD тўғри чизиғи билан AB_1D_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AC тўғри чизиғи билан AB_1D_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BA_1 тўғри чизиғи билан AB_1D_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг CB_1 тўғри чизиғи билан AB_1D_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BD_1 тўғри чизиғи билан AB_1D_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг DD_1 тўғри чизиғи билан ACB_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг A_1D_1 тўғри чизиғи билан ACB_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг C_1D_1 тўғри чизиғи билан ACB_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BA_1 тўғри чизиғи билан ACB_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг B_1D_1 тўғри чизиғи билан ACB_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг CA_1 тўғри чизиғи билан ACB_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

19. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда AD тўғри чизиғи билан ABC текислиги орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

20. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда E нуқта — AB қиррасининг ўртаси. DE тўғри чизиғи билан ABC текислиги орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

21. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда E нуқта — CD қиррасининг ўртаси. AE тўғри чизиғи билан ABC текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

22. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда E нуқта — BCD учбурчак медианаларининг кесишиш нуқта. AE тўғри чизиғи билан ABC текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

23. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 тўғри чизиғи билан BCC_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

24. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — B_1C_1 қиррасининг ўртаси. AE тўғри чизиғи билан ABC текислиги орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

25. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AA_1 тўғри чизиғи билан AB_1C_1 текислиги орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

26. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. A_1B_1 тўғри чизиғи билан AB_1C_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

27. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 тўғри чизиғи билан AB_1C_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

28. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — SB қиррасининг ўртаси. AE тўғри чизиғи билан SBD текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

29. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиғи билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

30. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. AC тўғри чизиғи билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

31. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — AD қиррасининг ўртаси. SE тўғри чизиғи билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

32. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. SE — баландлиги. SE тўғри чизиғи билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

33. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. AB тўғри чизиғи билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

34. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. AF тўғри чизиғи билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

35. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. BF тўғри чизиғи билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

36. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA тўғри чизиғи билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

37. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. F тўғри чизиғи билан SBC текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 тўғри чизиғи билан BCC_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AF_1 тўғри чизиғи билан BCC_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

40. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B_1E тўғри чизиғи билан BCC_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.

41. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиғи билан BCE_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.
42. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC_1 тўғри чизиғи билан BCE_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.
43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BD_1 тўғри чизиғи билан BCE_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.
44. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B_1E тўғри чизиғи билан BCE_1 текислиги орасидаги бурчакнинг синусини топинг.
45. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. FC_1 тўғри чизиғи билан BCE_1 текислиги орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

Икки текислик орасидаги бурчак

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг $A_1B_1C_1$ ва BDC_1 текисликлари орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг ABC ва CB_1D_1 текисликлари орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BCC_1 ва CB_1D_1 текисликлари орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг ADD_1 ва BDC_1 текисликлари орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг ABC_1 ва AB_1D_1 текисликлари орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BDA_1 ва BDC_1 текисликлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг BA_1C_1 ва AB_1D_1 текисликлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг ABC_1 ва BCD_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг ABC_1 ва BCD_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг ACB_1 ва BCD_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.
11. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва ACD текисликлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
12. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва SCD текисликлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

13. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. SAB ва SCD текисликлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

14. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. SAC ва SBC текисликлари орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

15. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. SAD ва SCD ёқлари орасидаги икки ёқли бурчакнинг косинусини топинг.

16. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. ABC ва SEF текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

17. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SAF ва SCD текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

18. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SAB ва SAF ёқлари орасидаги икки ёқли бурчакнинг косинусини топинг.

19. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SAF ва SBC текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

20. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SBD ва SDF текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

21. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва BCA_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

22. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва AB_1C_1 текисликлари орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

23. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BCA_1 ва AB_1C_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва AEF_1 текисликлари орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва CA_1E_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва BFE_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AFD_1 ва CDF_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва AFE_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва BFD_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AFE_1 ва CDE_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AFE_1 ва BCD_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ACB_1 ва DFE_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BCC_1 ва AFE_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

МАСОФА

B

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан AB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан CB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан A_1D_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан C_1D_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан DD_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан A_1C_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан DA_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан DC_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

10. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

11. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

12. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан A_1C_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

13. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CD тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

14. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг S нуқтадан BC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

15. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан SA тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

16. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан SC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

17. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

18. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан SD тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

19. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. S нуқтадан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

20. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. S нуқтадан AB тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

21. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан AF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

22. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан EF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан CB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан FE тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DE тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан EE_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан E_1F_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан D_1E_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AE тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CE тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AD тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AE_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CE_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

Нуқтадан текисликкача бўлган масофа

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан ACC_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан AB_1C_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан CDA_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
4. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда E нуқта — CD қиррасининг ўртаси. D нуқтадан ABE текисликкача бўлган масофани топинг.
5. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ACC_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
6. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. S нуқтадан ABC текисликкача бўлган масофани топинг.
7. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан SAC текисликкача бўлган масофани топинг.
8. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — SB қиррасининг ўртаси. B нуқтадан ACE текисликкача бўлган масофани топинг.
9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DEE_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан EFF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CDD_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AFF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CFF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ADD_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан ACC_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DFF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AED_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CEF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

Тўғри чизиқлар орасидаги масофа

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва CD_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва DC_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва A_1C_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва B_1D_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва C_1D_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва CB_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва DA_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда BA_1 ва DC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
9. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. BC ва EF тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
10. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB ва B_1C_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
11. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва A_1C_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва C_1D_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва D_1E_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва E_1F_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва A_1F_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва A_1B_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва EF тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва DD_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва EE_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва DE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC_1 ва FE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

C

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан AC_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан CA_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан DB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
4. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AC_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
5. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. S нуқтадан BF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
6. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. S нуқтадан BE тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
7. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SA тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
8. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SD тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

9. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SE тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан A_1F_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтаданC_1D_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан C_1E_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан A_1E_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан C_1F_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан A_1D_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан D_1F_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан A_1C_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтаданFE_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DE_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AC_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CA_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
22. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AD_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан CF_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CD_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан FD_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DF_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан FC_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DA_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан FA_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан DC_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

Нуқтадан текисликкача бўлган масофа

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан ACB_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан DA_1C_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан ACD_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан AB_1D_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан CB_1D_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
6. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда D нуқтадан ABC текисликкача бўлган масофани топинг.
7. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ACB_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
8. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AB_1C_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

9. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CA_1B_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

10. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан SAD текисликкача бўлган масофани топинг.

11. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан SCD текисликкача бўлган масофани топинг.

12. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — SD қиррасининг ўртаси. B нуқтадан ACE текисликкача бўлган масофани топинг.

13. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. S нуқтадан ABC текисликкача бўлган масофани топинг.

14. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SEF текисликкача бўлган масофани топинг.

15. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SDE текисликкача бўлган масофани топинг.

16. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SAF текисликкача бўлган масофани топинг.

17. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SCD текисликкача бўлган масофани топинг.

18. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SAD текисликкача бўлган масофани топинг.

19. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SCF текисликкача бўлган масофани топинг.

20. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SAE текисликкача бўлган масофани топинг.

21. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SCE текисликкача бўлган масофани топинг.

22. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SAC текисликкача бўлган масофани топинг.

23. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан SDF текисликкача бўлган масофани топинг.

24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DEA_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан EFB_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CFA_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ADC_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан DEF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан EFA_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ACB_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DFA_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DFB_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CFE_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ADE_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ACD_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DFE_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ACE_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AEF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CED_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

Икки тўғри чизиқ орасидаги масофа

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AB ва CA_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AB ва DB_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда BA_1 ва CB_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг BA_1 ва AC тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг BA_1 ва B_1D_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг BA_1 ва AD_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг BA_1 ва AC_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг BA_1 ва DB_1 тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
9. $ABCD$ тетраэдрнинг AD ва BC тўғри чизиқлари орасидаги масофани топинг.
10. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг SB ва AC тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
11. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг SB ва AD тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
12. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг SB ва CD тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
13. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SB ва AF тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
14. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SB ва EF тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
15. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SB ва CD тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

16. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SB ва DE тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

17. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SB ва AC тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

18. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SB ва DF тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

19. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SB ва AE тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

20. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SB ва CE тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

21. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. CC_1 ва AB тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

22. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва AC тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

23. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AA_1 ва BC тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

24. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва AC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

25. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва A_1C_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

26. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB ва CB_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

27. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB_1 ва BC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

28. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB_1 ва CA_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва EE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва C_1D_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва D_1E_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва E_1F_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва A_1F_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва CD_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва DC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва DE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва ED_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва EF_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва FE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

40. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг BB_1 ва AF_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

41. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва FA_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

42. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва CE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва EC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

44. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва DF_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

45. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва FD_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

46. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва EA_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

47. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва AE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
48. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва CF_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
49. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва FC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
50. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва DA_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
51. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва AD_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
52. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва ED_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
53. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва CB_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
54. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва DC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
55. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва FE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
56. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва AF_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
57. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
58. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва AE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
59. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва AD_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
60. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BD_1 ва EA_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

ОРТОГОНАЛ ПРОЕКЦИЯНИНГ ЮЗАСИ

B

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A, B ва C_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B, C ва D_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг C, D ва A_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A, C ва C_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AB, BC, A_1B_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AD, BC, CC_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AD, CD, A_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AB, CD, AA_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан ва CC_1, DD_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B учидан ва AA_1, DD_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда A учидан ва CD, C_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B учидан ва AD, A_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
13. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг AD қиррасининг ўртаси орқали ўтиб, ABC ёғига параллел текислик билан кесимининг юзасини топинг.
14. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг AB қиррасининг ўртаси орқали ўтиб, BCD ёғига параллел текислик билан кесимининг юзасини топинг.
15. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг AB қиррасининг ўртаси орқали ўтиб, шу қиррасига перпендикуляр текислик билан кесимининг юзасини топинг.
16. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг AD қиррасининг ўртаси орқали ўтиб, шу қиррасига перпендикуляр текислик билан кесимининг юзасини топинг.
17. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг SA қиррасининг ўртаси орқали ўтиб, $ABCD$ асосига параллел текислик билан кесимининг юзасини топинг.

18. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг SB қиррасининг ўртаси орқали ўтиб, шу қиррасига перпендикуляр текислик билан кесимининг юзасини топинг.

19. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. Унинг SA қиррасининг ўртаси орқали ўтиб, $ABCDEF$ асосига параллел текислик билан кесимининг юзасини топинг.

20. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. Унинг SA қиррасининг ўртаси орқали ўтиб, $ABCDEF$ асосига перпендикуляр текислик билан кесимининг юзасини топинг.

21. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, B ва C_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

22. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, B_1 ва C_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

23. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг AB, AC ва A_1B_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

24. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг AC, BC ва A_1C_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

25. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг B, B_1 учлари ва AC қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

26. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг C, C_1 учлари ва AB қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

27. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, C_1 учлари ва BC қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

28. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, B_1 учлари ва A_1C_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, C ва C_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, D ва D_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг BC, EF ва B_1C_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг AB, BC ва A_1B_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг A, C ва D_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг B, D ва E_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг C, E ва F_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг D, F ва A_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг E, A ва B_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Унинг F, B ва C_1 учлари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

C

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан ва BB_1, DD_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B учидан ва AA_1, CC_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг C учидан ва BB_1, DD_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг D учидан ва AA_1, CC_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан ва CD, A_1B_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B учидан ва A_1B_1, CD қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B_1 учидан ва AB, C_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A_1 учидан ва AB, C_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан ва BC, A_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг D учидан ва BC, A_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B учидан ва AD, B_1C_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг C учидан ва AD, B_1C_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг BB_1, DD_1 қирраларининг ўрталари ва A учидан 0,25 узоқликда AA_1 қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AA_1, CC_1 қирраларининг ўрталари ва B учидан 0,25 узоқликда BB_1 қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг BB_1, DD_1 қирраларининг ўрталари ва C учидан 0,25 узоқликда CC_1 қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AA_1, CC_1 қирраларининг ўрталари ва D учидан 0,25 узоқликда DD_1 қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A_1B_1, CD қирраларининг ўрталари ва A учидан 0,25 узоқликда AB қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A_1B_1, CD қирраларининг ўрталари ва A учидан 0,75 узоқликда AB қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AB, C_1D_1 қирраларининг ўрталари ва D учидан 0,25 узоқликда CD қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB, C_1D_1 қирраларининг ўрталари ва D учидан 0,75 узоқликда CD қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

21. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг BC, A_1D_1 қирраларининг ўрталари ва A учидан 0,25 узоқликда AD қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг BC, A_1D_1 қирраларининг ўрталари ва A учидан 0,75 узоқликда AD қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AD, B_1C_1 қирраларининг ўрталари ва B учидан 0,25 узоқликда BC қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.

24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AD, B_1C_1 қирраларининг ўрталари ва B учидан 0,75 узоқликда BC қиррасида ётувчи нуқта орқали ўтувчи кесимнинг юзасини топинг.
25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AB, BC, CC_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг
26. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг BC, CD, DD_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг
27. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг CD, AD, AA_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг
28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AD, AB, BB_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг
29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A, C учлари ва C_1D_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A, C учлари ва B_1C_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
31. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B, D учлари ва A_1D_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
32. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B, D учлари ва C_1D_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A_1, C_1 учлари ва AD қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда A_1, C_1 учлари ва AB қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
35. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B_1, D_1 учлари ва AD қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
36. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B_1, D_1 учлари ва BC қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
37. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A_1, B учлари ва CD қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A_1, B учлари ва CC_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
39. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A, B_1 учлари ва CD қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A, B_1 учлари ва DD_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
41. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг C, D_1 учлари ва AB қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг C, D_1 учлари ва BB_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.
43. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг D, C_1 учлари ва AB қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг D, C_1 учлари ва AA_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B, C_1 учлари ва AA_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

46. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B, C_1 учлари ва AD қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

47. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг C, B_1 учлари ва AD қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

48. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг C, B_1 учлари ва DD_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

49. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A, D_1 учлари ва BB_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

50. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A, D_1 учлари ва BC қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

51. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг D, A_1 учлари ва BC қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг D, A_1 учлари ва CC_1 қиррасининг ўртаси орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг.

53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан ва BC, A_1B_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

54. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан ва CD, A_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

55. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан ва BC, DD_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

56. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан ва BB_1, A_1D_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан ва CD, BB_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан ва A_1B_1, DD_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

59. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг D_1 учидан ва AB, BC қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

60. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг B_1 учидан ва AD, CD қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

61. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг C_1 учидан ва AB, AD қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

62. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A_1 учидан ва BC, CD қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг

63. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг AB, BC, DD_1 қирраларининг ўрталари орқали ўтувчи кесимни ясанг. Кесимнинг юзасини топинг