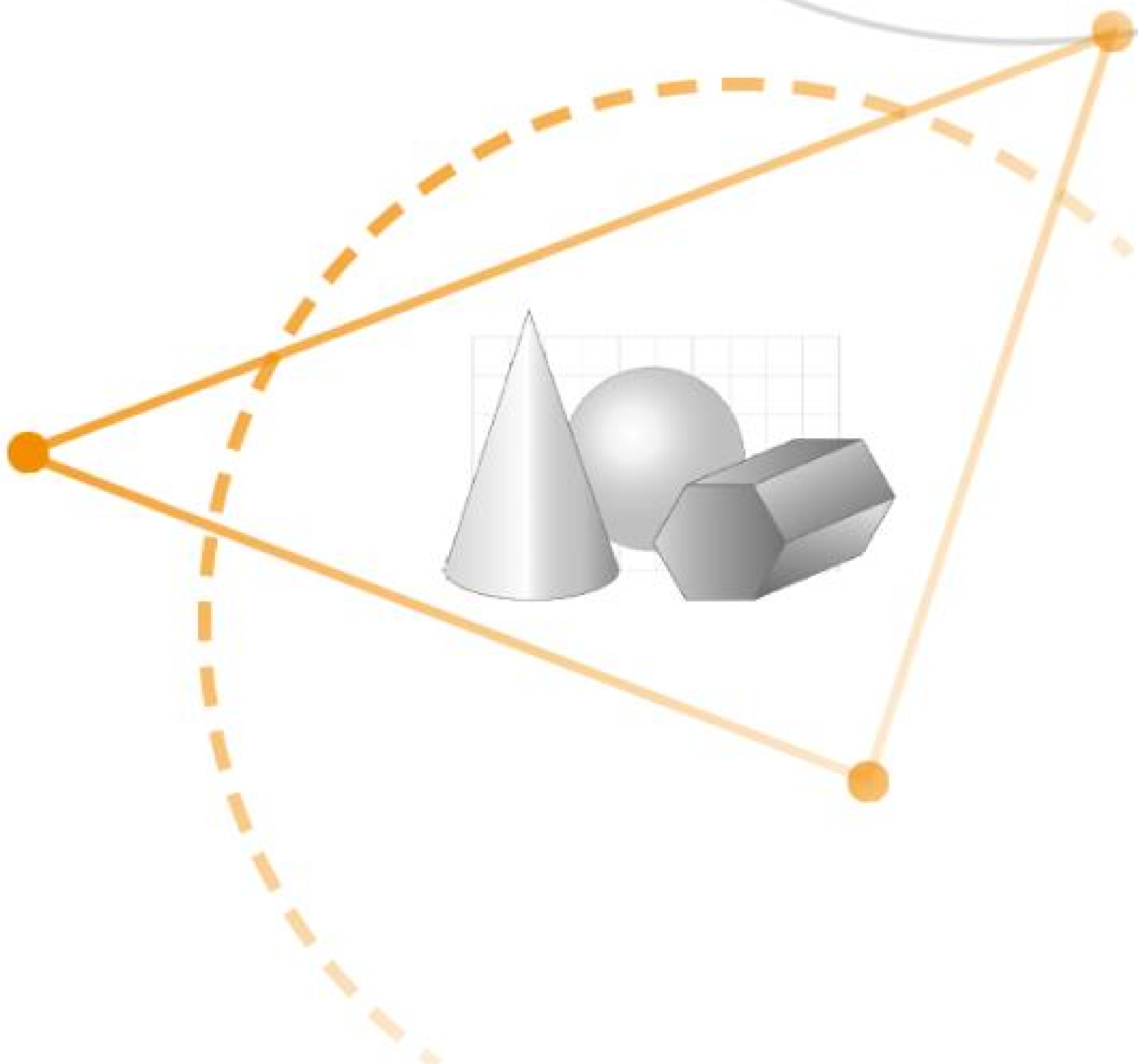
В. А. Смирнов, Е.А. Туёқов

ГЕОМЕТРИЯ

8

Умумтаълим мактабларининг
8-синфи учун дарслик

Қозоғистон Республикаси
Таълим ва фан вазирлиги тасдиқлаган



Алмати “Мектеп” 2018

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72
С53

Таржимон: **М. Зайниддинова**

Шартли белгилар:

— таърифлар, хоссалар, қоидалар

— янги мавзуни ўзлаштириш давомида ечиладиган масалалар

— мустаҳкамлашга доир саволлар

— назарий материалларни мустақил ўрганиш учун керак бўладиган топшириқлар

— теорема ёки хосса исботларининг якунланиши

A — барча ўқувчилар учун мажбурий топшириқлар

B — ўртача даражали топшириқлар

C — юқори даражали топшириқлар

Смирнов В.А., Туёқов Е.А.
С53 **Геометрия.** Умумтаълим мактабларининг 8-синфи учун дарслик — Алмати: Мектеп, 2018. — 160 б., расм.

ISBN 978—601—07—1069—6

С $\frac{4306020502—087}{404(05)—18}$ 63—18

УДК 373.167.1
ББК 22.1я72

ISBN 978—601—07—1069—6

КИРИШ

Ҳурматли ўқувчилар!

Ушбу дарслик 8-синфда геометрия курсини ўрганиш учун мўлжалланган. Сиз текисликдаги геометрик фигураларнинг асосий хоссалари билан танишасиз, кесмаларнинг узунликларини, бурчакларнинг катталикларини, фигураларнинг юзаларини топишга доир исботланиши лозим бўлган ва бошқа масалаларни ечишни ўрганасиз.

Дарсликдаги барча материаллар бўлимлар ва параграфларга бўлинган. Улар назарий материалларни, мустақил бажариш учун берилган топшириқларни, мустаҳкамлашга оид саволларни, мураккаблик даражаси ҳар хил бўлган масалаларни ўз ичига олади.

Теорема исботининг якуни белги орқали белгиланган.

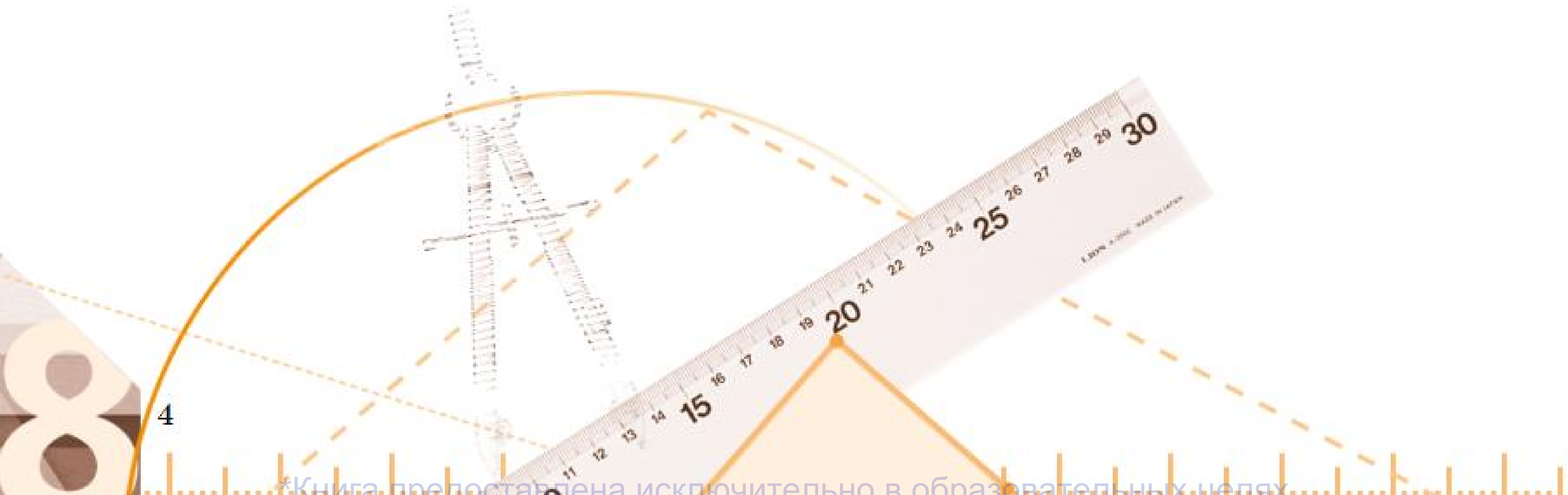
Дарсликда мураккаблик даражаси ҳар хил бўлган топшириқлар: A — мажбурий даража, B — ўртача мураккаб даража, C — мураккаблиги юқори даражали топшириқлар берилган.

(*) юлдузча орқали белгиланган параграфлар ўқув дастурига киритилмаган илмий-тадқиқот ва тадбиқий йўналишдаги қўшимча материалларни ўз ичига олади. Улардан дарсларда ёки қўшимча дарсларда (тўгаракларда, танлов курслари ва ҳ.к.), шу билан бирга, ўқувчиларнинг лойиҳалаш ва тадқиқот ишларини ташкил қилишда фойдаланиш мумкин.

Ҳар бир бўлим охирида бўлим бўйича ўқув материалларини ўзлаштириш сифатини текширишга доир тест топшириқлари берилган.

Дарслик охирида масалаларнинг жавоблари берилган.

Геометрияни ўзлаштиришда муваффақият тилаймиз!



7-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

1-боб. ГЕОМЕТРИЯНИНГ ДАСТЛАБКИ МАЪЛУМОТЛАРИ

1. Тўғри чизиқ чизинг ва ана шу тўғри чизиққа тегишли бўлган ҳамда тегишли бўлмаган нуқталарни белгиланг.
2. Учтаси бир нуқтада ётмайдиган: а) тўртта нуқта; б) бешта нуқта; в) олтита нуқта белгиланг. Шу нуқталарнинг турли хил жуфтлари орқали ўтувчи тўғри чизиқлар ўтказинг.
3. а) учта нуқтаси; б) тўртта нуқтаси; в) бешта нуқтаси; г) олтита нуқтаси кесишувчи тўртта тўғри чизиқ ўтказинг.
4. Тўғри чизиқда: а) 3 та нуқта; б) 4 та нуқта; в) 5 та нуқта; г) n та нуқта белгиланган. Учлари ана шу нуқталар бўлган тўғри чизиқда нечта нур мавжуд?
5. Тўғри чизиқда: а) 3 та нуқта; б) 4 та нуқта; в) 5 та нуқта; г) n та нуқта белгиланган. Учлари ана шу нуқталар бўлган нечта кесма мавжуд?
6. C нуқта A ва B нуқталар орасида ётади. AB кесманинг узунлигини топинг, бунда: а) $AC = 2$ см, $CB = 3$ см; б) $AC = 3$ дм, $CB = 4$ дм; в) $AC = 12$ м, $CB = 5$ м.
7. A, B ва C нуқталар битта тўғри чизиқда ётади. $AB = 4$ см, $AC = 7$ см, $BC = 3$ см. A, B ва C нуқталарнинг қайсилари иккитасининг орасида ётади?
8. $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см бўлса, A, B ва C нуқталар битта тўғри чизиқда ётадими?
9. AB, BC ва CD кесмалар битта тўғри чизиқда кетма-кет жойлашган. $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. AB ва CD кесмалар ўрталари орасидаги масофани топинг.
10. Берилган бурчакка нечта қўшни бурчак мавжуд?
11. Берилган бурчакка нечта вертикал бурчак мавжуд?
12. Битта нуқтада кесишмайдиган, жуфт-жуфтдан кесишадиган учта тўғри чизиқ ўтказинг. Улар текисликни неча бўлакка бўлади?
13. Кесишувчи иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчаклардан бири 30°. Қолган бурчакларни топинг.
14. Кесишувчи иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчаклардан бири иккинчисидан 20° кичик. Шу бурчакларни топинг.
15. Кесишувчи иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчаклардан бири иккинчисидан 4 марта катта. Шу бурчакларни топинг.
16. Кесишувчи иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчаклар учтасининг йиғиндиси 306°. Катта бурчакни топинг.
17. Агар иккита бурчак тенг бўлса, у ҳолда уларга қўшни бўлган бурчаклар ҳам тенг бўлишини исботланг.
18. Траспортир ёрдамида 10°, 30°, 70°, 100°, 150° бурчакларни ясанг.

19. Муайян бир бурчак 38° га тенг. Шу бурчакка қўшни бўлган бурчакни топинг.
20. Иккита қўшни бўлган бурчаклардан бири иккинчисидан икки марта катта. Шу бурчакларнинг градус ўлчовларини топинг.
21. OC нур 60° га тенг бўлган AOB бурчакнинг ичида ётади. AOC бурчак BOC бурчакдан 30° катта бўлса, AOC бурчакни топинг.
22. Ғилдиракнинг а) 10 та сими; б) 12 та сими бор. Қўшни жойлашган иккита сими орасидаги бурчакнинг градус ўлчовини топинг.
23. Соатнинг минут ва соат миллари орасидаги бурчакларни топинг: а) соат 3; б) соат 6; в) соат 5?
24. Қўшни бурчакларнинг биссектрисалари перпендикуляр бўлишини исботланг.

2-боб. УЧБУРЧАКЛАР

1. ABC ва EFG учбурчаклар тенг ва $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. EFG учбурчакнинг томонларини топинг.
2. ABC ва EFG учбурчаклар тенг ва $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$. EFG учбурчакнинг бурчакларини топинг.
3. ABC учбурчакнинг AB томони 17 см. AC томони AB томонидан икки марта узун, BC томони эса AC томонидан 10 см қисқа. ABC учбурчакнинг периметрини топинг.
4. Учбурчакнинг периметри 48 см, бир томони 18 см. Қолган икки томонининг айирмаси 10 см бўлса, ана шу томонларни топинг.
5. Учбурчакнинг периметри 54 см. Томонларининг нисбати 2 : 3 : 4 бўлса, у ҳолда шу томонларни топинг.
6. Икки тўғри чизиқ учбурчакнинг учлари орқали ўтмай битта томонини қирқиб ўтса, у ҳолда у қолган икки томонларидан бирини қирқиб ўтишини исботланг.
7. Тенг учбурчакларнинг мос равишда медианалари ҳам тенг бўлишини исботланг.
8. Тенг учбурчакларнинг мос равишда биссектрисалари ҳам тенг бўлишини исботланг.
9. Тенгёнли учбурчакнинг периметри 15,6 м. Агар унинг: а) асоси ён томонидан 3 м қисқа, б) асоси ён томонидан 3 м узун бўлса, унинг томонларини топинг.
10. Тенгёнли учбурчакнинг асоси билан ён томонининг нисбати 3 : 8 ва периметри 38 см. Унинг томонларини топинг.
11. Агар учбурчакнинг биссектрисаси унинг баландлиги ҳам бўлса, у ҳолда у тенгёнли учбурчак эканлигини исботланг.
12. Тенгёнли учбурчакнинг ён томонларига ўтказилган медианалар тенг эканлигини исботланг.

13. Тенгёнли учбурчакнинг ён томонларига ўтказилган биссектрисалар тенг бўлишини исботланг.
14. Агар ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг AB ва A_1B_1, AC ва A_1C_1 томонлари, CM ва C_1M_1 медианалари тенг бўлса, у ҳолда ана шу учбурчаклар тенг бўлишини исботланг.
15. Агар $AB = 7$ см, $BC = 10$ см ва $AC = 5$ см бўлса, у ҳолда ABC учбурчакнинг бурчакларини таққосланг.
16. Агар $\angle A > \angle B > \angle C$ бўлса, у ҳолда ABC учбурчакнинг томонларини таққосланг.
17. Тўғри бурчакли учбурчакнинг иккита ўткир бурчаги бўлишини исботланг.
18. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси унинг катетларидан катта бўлишини исботланг.

3-боб. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ

1. Учбурчакнинг медианаси ана шу учидан туширилган баландликдан катта бўладими?
2. Учбурчакнинг биссектрисаси ана шу учидан туширилган баландликдан катта бўладими?
3. A нуқтадан b тўғри чизиққа AB перпендикуляр ва AB_1, AB_2 оғмалар ўтказилган. Агар: а) B_1 нуқта B ва B_2 нуқталар орасида ётса; б) B нуқта B_1 ва B_2 нуқталар орасида ётса ва $BB_1 < BB_2$ бўлса, у ҳолда икки оғмадан қайси бири кичик бўлади?
4. Берилган нуқтадан тўғри чизиққа ўтказилган иккита оғмадан қайси бирининг проекцияси катта бўлса ана шу проекция узунлиги ҳам катта бўлишини исботланг.
5. Иккита параллел тўғри чизиқларнинг кесувчи билан кесишишидан ҳосил бўлган бурчаклардан: а) бири 150° га тенг; б) бири иккинчисидан 70° катта бўлса, ана шу бурчакларни топинг.
6. Иккита параллел тўғри чизиқларни кесувчи билан кесганда ички алмашинувчи бурчаклар биссектрисалари параллел, яъни параллел тўғри чизиқларда ётишини исботланг.
7. Агар исталган тўғри чизиқ иккита параллел тўғри чизиқлардан бирини қирқиб ўтса, у ҳолда иккинчисини ҳам қирқиб ўтишини исботланг.
8. ABC учбурчакда A бурчак 40°, $AC = BC$. C бурчакни топинг.
9. ABC учбурчакда C бурчак 120°, $AC = BC$. A бурчакни топинг.
10. Тенгёнли учбурчакнинг бир бурчаги 98°. Қолган иккита бурчагини топинг.
11. Тенгёнли учбурчакнинг бир бурчаги иккинчи бурчагидан 90° кичик. Катта бурчакни топинг.

12. Учбурчакнинг бурчаклари 1 : 2: 3 нисбат каби. Кичик бурчакни топинг.
13. ABC учбурчакда C бурчаги 64°. B учидаги ташқи бурчаги 104°. A бурчакни топинг.
14. ABC учбурчакда $AB = BC$. B учидаги ташқи бурчаги 138°. C бурчакни топинг.
15. Учбурчакнинг ҳамма учта ташқи бурчаклари (ҳар бир учидан биттадан олинган) йиғиндисини топинг.
16. ABC учбурчакда C бурчаги 60°, AD ва BE — O нуқтада кесишувчи биссектрисалар. AOB бурчакни топинг.
17. Учбурчакнинг иккита бурчаги 54° ва 66°. Шу бурчакларнинг учидан туширилган учбурчакнинг баландликлари ҳосил қилувчи ўткир бурчакни топинг.
18. Томонлари: а) 13 см, 2 см, 8 см; б) 1 м, 0,5 м, 0,5 м бўлган учбурчак ясаш мумкинми?
19. Тенгёнли учбурчакнинг иккита томони: а) 6 см ва 3 см; б) 8 см ва 2 см. Учинчи томонини топинг.
20. Учбурчакнинг медианаси унинг ярим периметридан кичик эканини исботланг.

4-боб. АЙЛАНА. ГЕОМЕТРИК ЯСАШЛАР

1. Қуйидаги а) маркази O нуқтада ва радиуси R бўлган доирада; б) маркази O нуқтада ва радиуси R бўлган доира сиртида ётувчи A нуқта қандай тенгсизликни қаноатлантиради?
2. Айлананинг диаметри радиусидан 55 мм узун. Диаметрни топинг.
3. Берилган иккита нуқта орқали нечта айлана ўтади?
4. A ва B нуқталар орасидаги масофа 2 см. Шу нуқталардан ўтувчи айлананинг энг кичик мумкин бўлган радиусини топинг.
5. A нуқта радиуси R бўлган айланадан ташқарида жойлашган ва шу айлананинг O марказидан d масофада ётади. A нуқтадан айлана нуқталаригача бўлган энг кичик ва энг катта масофаларни топинг.
6. Айланадан ташқарида ётган нуқтадан ана шу айлананинг нуқталаригача бўлган энг катта ва энг кичик масофалар мос равишда 50 см ва 20 см. Айлананинг радиусини топинг.
7. Берилган айланага: а) айлана ичида; б) айлана сиртида; в) айланада ётган нуқта орқали нечта уринма ўтказиш мумкин?
8. Айлана радиуси 3 см, айлана марказидан тўғри чизиққача бўлган масофа эса: а) 2 см; б) 3 см; в) 4 см бўлса, тўғри чизиқ билан айлана ўзаро қандай жойлашган?
9. Радиуси 3 см бўлган айлана ва унинг марказидан 5 см узоқликда A нуқта берилган. Маркази A нуқтада бўлган ва берилган айлана билан: а) ташқи; б) ички уринувчи айлана радиусини топинг.

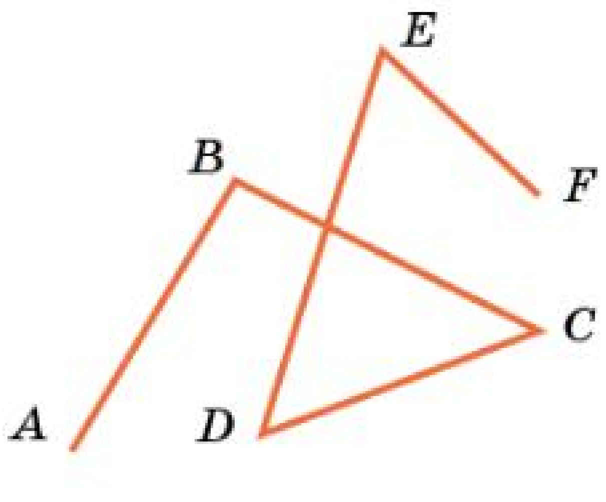
10. Икки айлана марказлари орасидаги масофа 5 см. Агар уларнинг радиуслари: а) 2 см ва 3 см; б) 2 см ва 2 см бўлса, ана шу айланалар бир-бирларига нисбатан қандай жойлашган?
11. Икки айлана марказлари орасидаги масофа d га тенг ва уларнинг R_1 ва R_2 радиуслари йиғиндисидан катта. Шу айланаларда ётувчи нуқталарнинг энг кичик ва энг катта масофаларини топинг.
12. A ва B — текисликнинг нуқталари. а) $AC = BC$; б) $AC > BC$; в) $AC < AB$ бўлса, C нуқтанинг геометрик ўрнини кўрсатинг.
13. Берилган A ва B нуқталардан ўтувчи айланалар марказларининг геометрик ўрнини топинг.
14. Кесишувчи a ва b иккита тўғри чизиқ билан уринувчи айланалар марказларининг геометрик ўрнини топинг.
15. Берилган кесманинг ўртасини белгиланг.
16. Берилган бурчакнинг биссектрисасини ясанг.
17. Берилган учта томонига кўра учбурчак ясанг.
18. Берилган иккита томони ва улар орасидаги бурчак бўйича ABC учбурчак ясанг.
19. Берилган томони ва унга қўшни бўлган иккита бурчаги бўйича ABC учбурчак ясанг.

1-боб

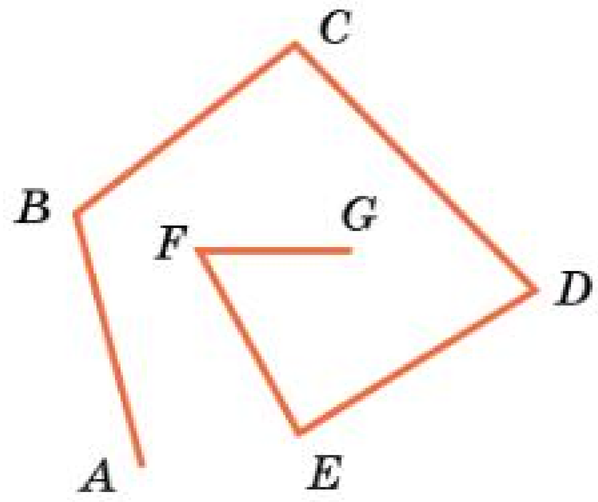
КЎПБУРЧАКЛАР. ТЎРТБУРЧАКЛАРНИ ЎРГАНИШ

1-§. СИНИҚ ЧИЗИҚ

Синиқ чизиқ деб биринчисининг охири иккинчисининг боши, иккинчисининг охири учинчисининг боши ва ҳ.к. бўлиб кетма-кет туташтирилган чекли сондаги кесмалардан ташкил топган фигурага айтилади (1.1-расм). Кесмалар *синиқ чизиқнинг бўғинлари*, уларнинг охирлари эса *синиқ чизиқнинг учлари* дейилади.



1.1-расм



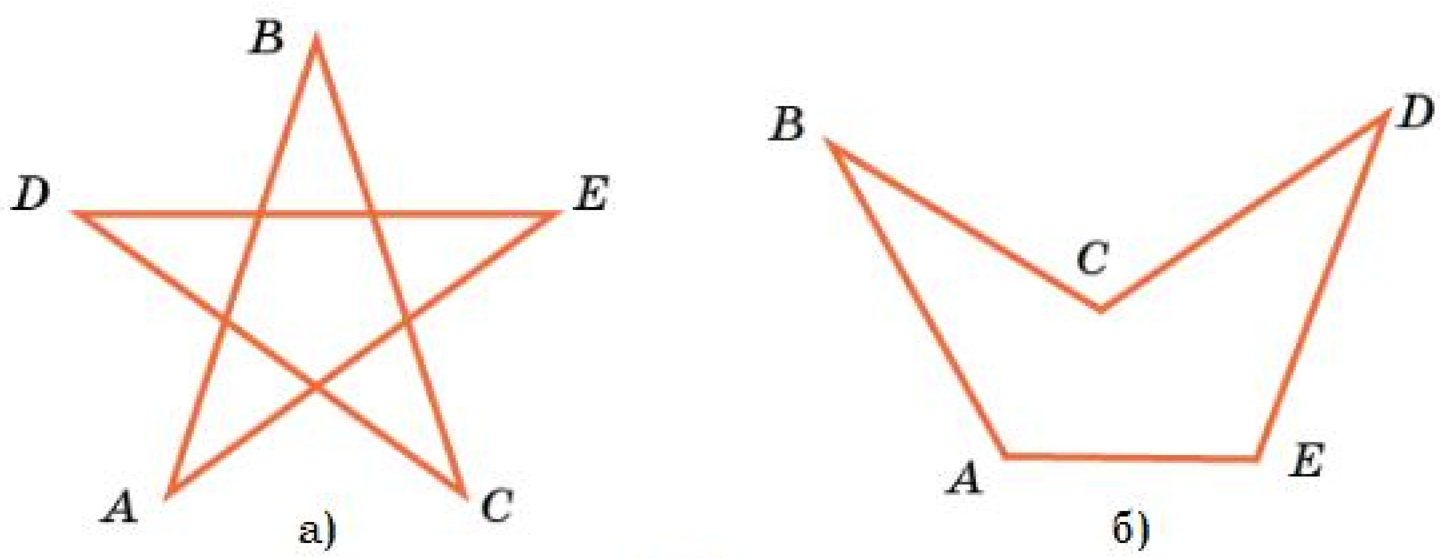
1.2-расм

Синиқ чизиқ бўғинлари узунликларининг йиғиндиси *синиқ чизиқнинг узунлиги* деб аталади. Синиқ чизиқ унинг учларини кетма-кет кўрсатиш орқали белгиланади. Масалан, $ABCDE$, $A_1A_2...A_n$ синиқ чизиқлар.

Агар синиқ чизиқнинг бўғинлари ўзаро кесишмаса, у ҳолда у *содда синиқ чизиқ дейилади* (1.2-расм).

Агар синиқ чизиқ биринчи бўғинининг боши билан сўнгги бўғинининг охири устма-уст тушса, у ҳолда у *ёпиқ синиқ чизиқ* деб аталади (1.3-а расм).

Агар ёпиқ синиқ чизиқ ўз-ўзи билан кесишмаса, у ҳолда у *содда ёпиқ синиқ чизиқ* деб аталади (1.3-б расм).



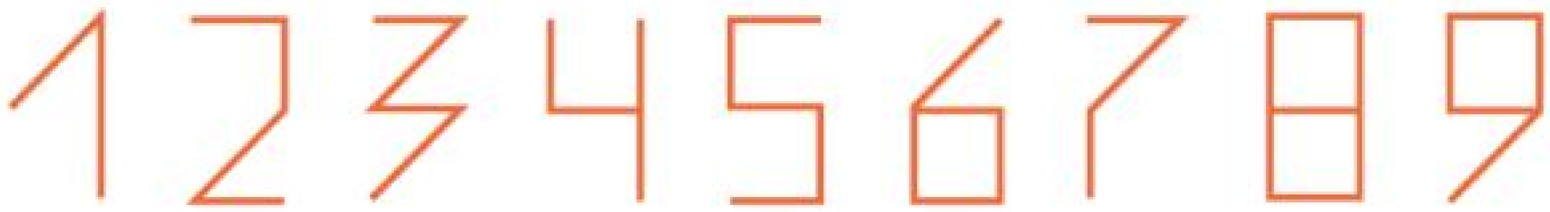
1.3-расм

1. Қандай фигура синиқ чизиқ деб аталади?
2. Синиқ чизиқнинг а) бўғинлари; б) учлари нима?
3. Синиқ чизиқ қандай белгиланади?
4. Синиқ чизиқнинг узунлиги нима?
5. Қандай синиқ чизиқ а) содда; б) ёпиқ синиқ чизиқ деб аталади?

Машқлар

A

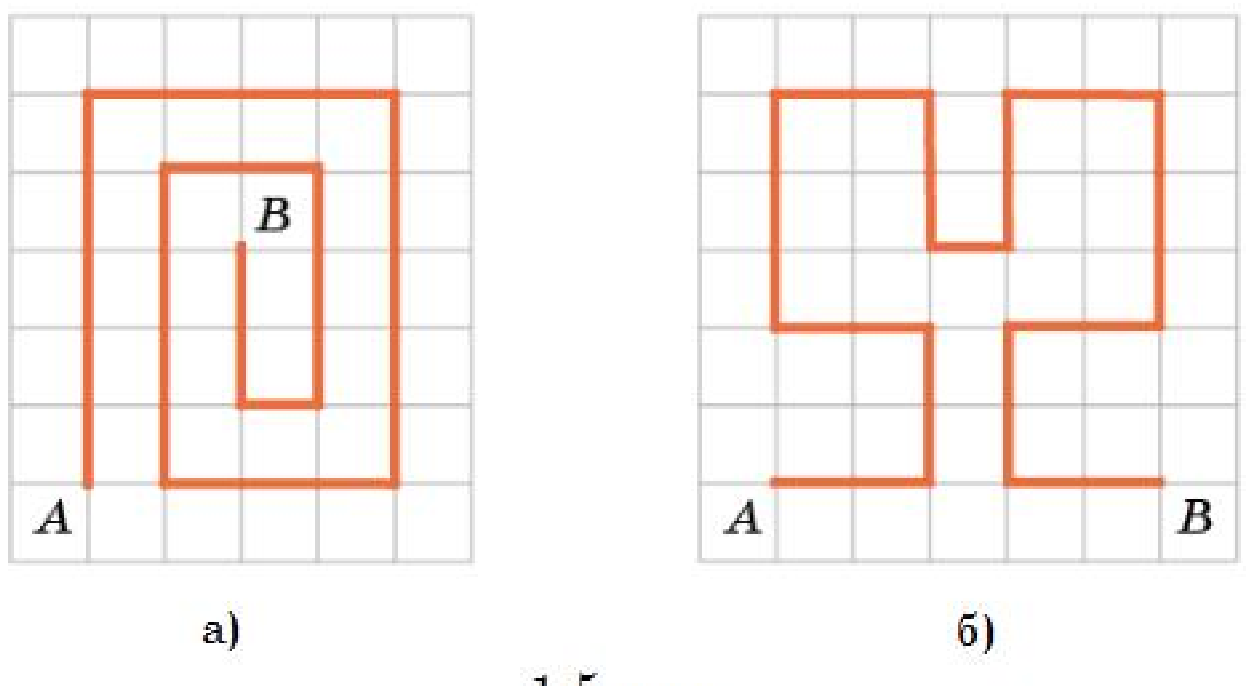
1. Бешта бўғинли ёпиқ синиқ чизиқ ясанг.
2. Олтита бўғинли содда ёпиқ синиқ чизиқ ясанг.
3. Содда синиқ чизиқнинг 10 та учи бор. Унинг томонлари сони нечта?
4. Содда ёпиқ синиқ чизиқнинг 20 та бўғини бор. Унинг учлари сони нечта?
5. 1.4-расмда тасвирланган фигураларнинг қайсилари содда синиқ чизиқ бўлади?



1.4-расм

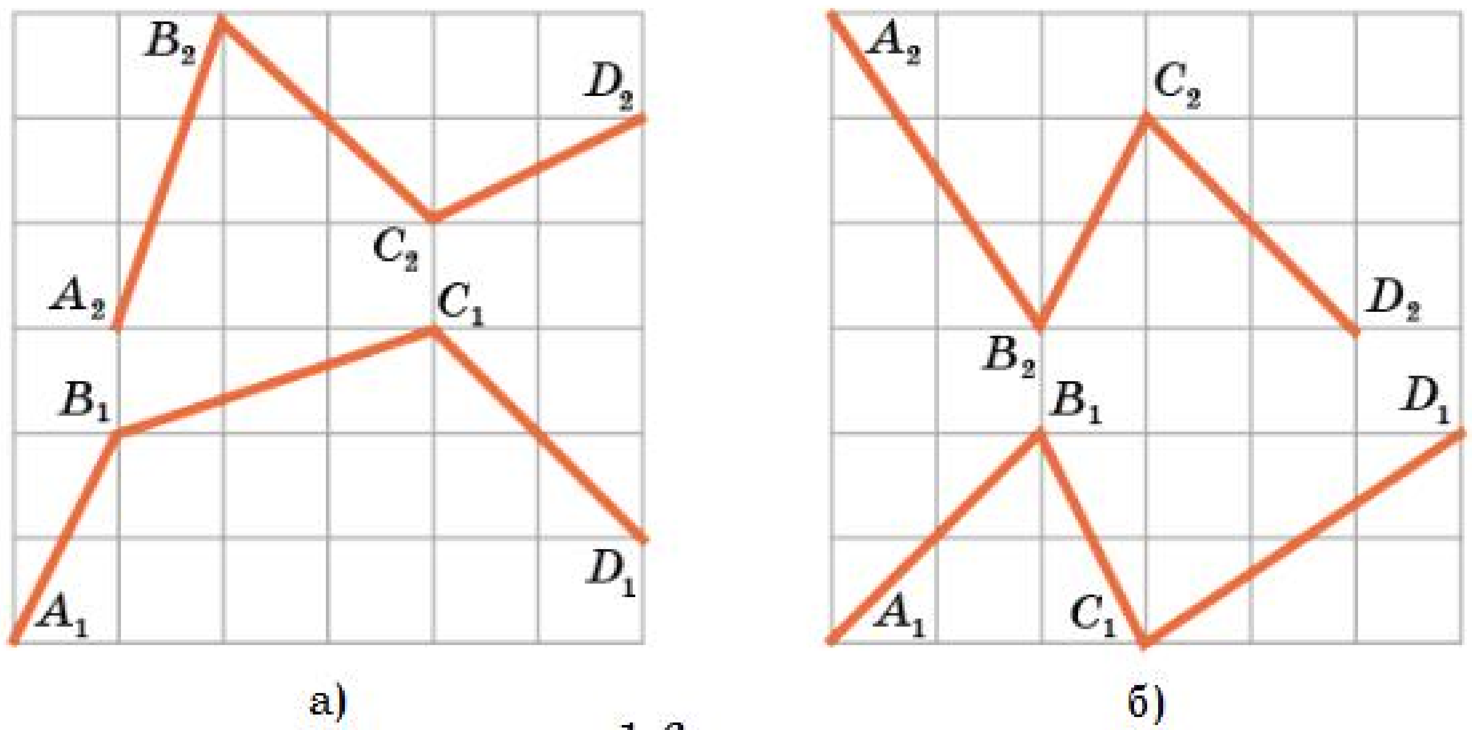
B

6. Қуйидаги: а) икки марта ўз-ўзини қирқиб ўтувчи; б) уч марта ўз-ўзини қирқиб ўтувчи; беш марта ўз-ўзини қирқиб ўтувчи ёпиқ беш бўғинли синиқ чизиқ ясанг.
7. 1.5-расмда тасвирланган охирлари A ва B бўлган синиқ чизиқларнинг узунликларини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.



1.5-расм

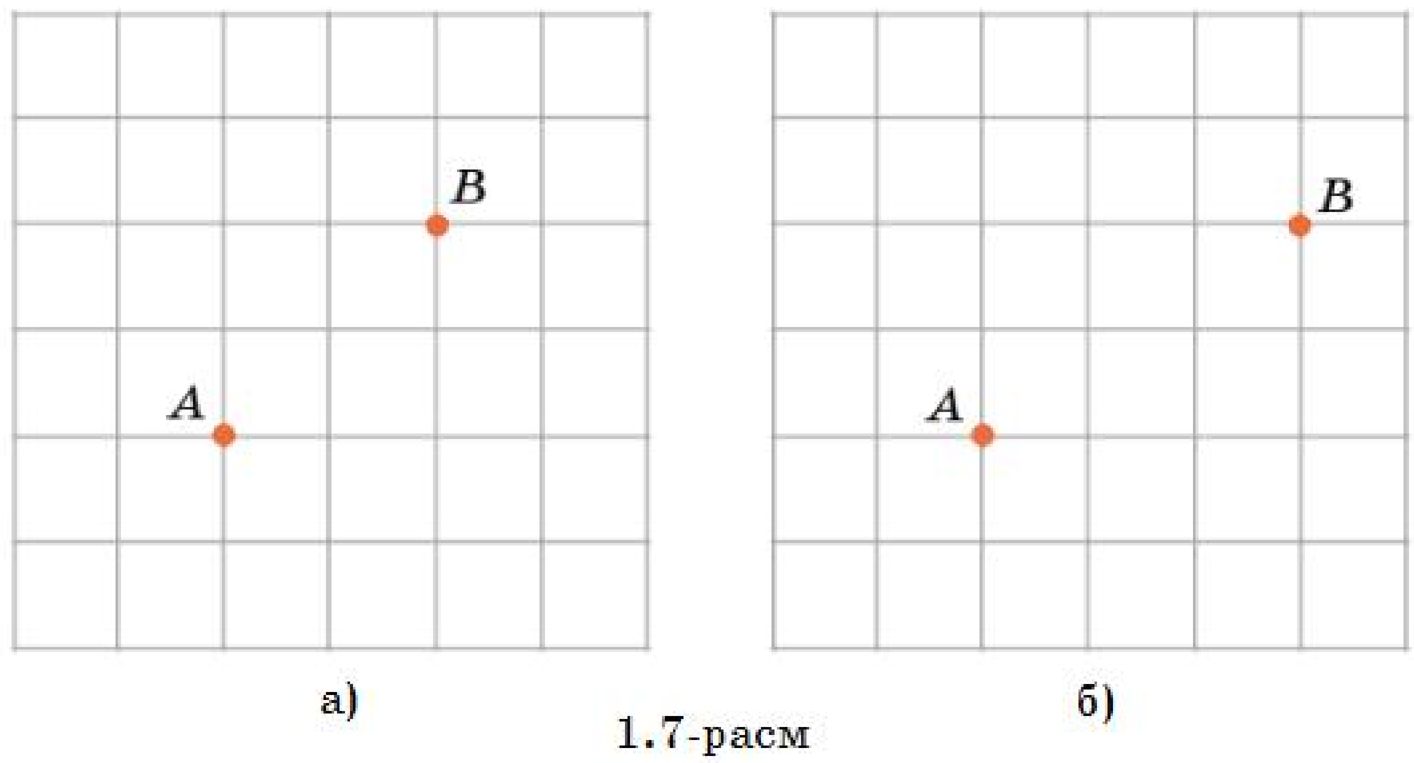
8. 1.6-расмдаги $A_1B_1C_1D_1$ ва $A_2B_2C_2D_2$ синиқ чизиқларнинг узунликларини ўлчамасдан таққосланг.



1.6-расм

C

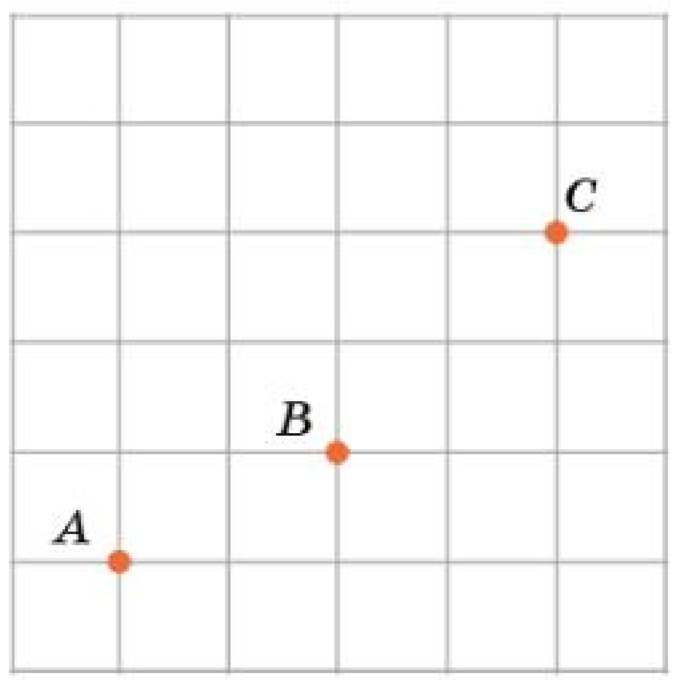
9. 1.7-расмдаги бирлик квадратли катакларнинг томонлари орқали ўтувчи узунлиги а) 4 га; б) 5 га тенг бўлган нечта синиқ чизиқ A ва B нуқталарини қўшади?



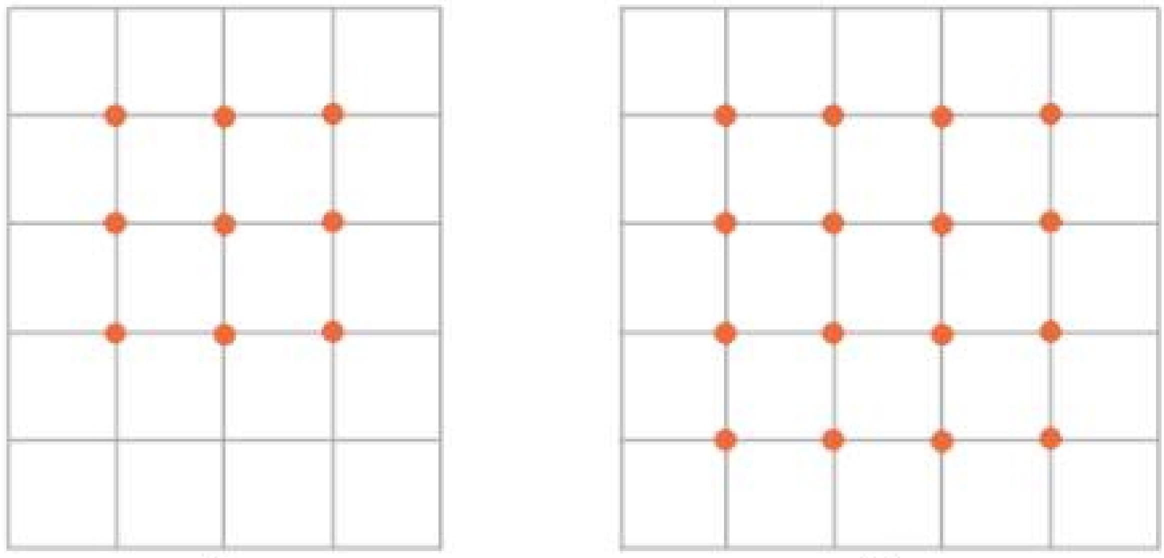
1.7-расм

10. 1.8-расмдаги бирлик квадратли катакларнинг томонларидан ўтувчи ва A, B, C нуқталарни туташтирувчи узунлиги 7 га тенг бўлган нечта синиқ чизиқ мавжуд?

11. 1.9-расмда берилган ҳамма нуқталар орқали ўтувчи а) тўрт бўғинли; б) олти бўғинли синиқ чизиқ ясанг.



1.8-расм



а) б)

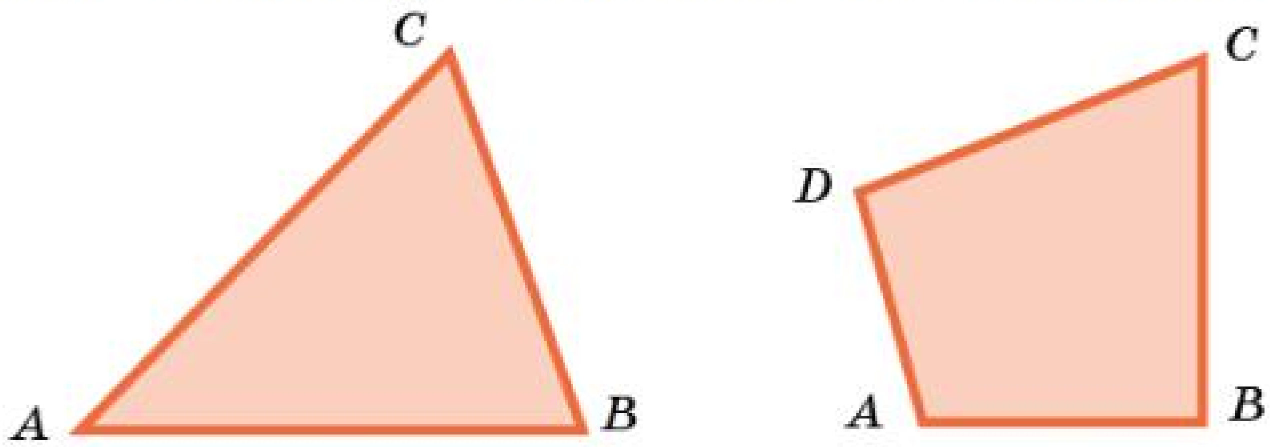
1.9-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

12. Содда ёпиқ синиқ чизиқ текисликни нечта бўлакка бўлади? а) учта бўғинли; б) бешта бўғинли содда ёпиқ синиқ чизиқ ясанг. Шу синиқ чизиқ билан чегараланган ички соҳани бўянг.

2-§. КЎПБУРЧАК

Содда ёпиқ синиқ чизиқ текисликни иккита соҳага, яъни ички ва ташқи соҳаларга ажратади. 2.1-расмда ички соҳалар бўялган.



а) б)

2.1-расм

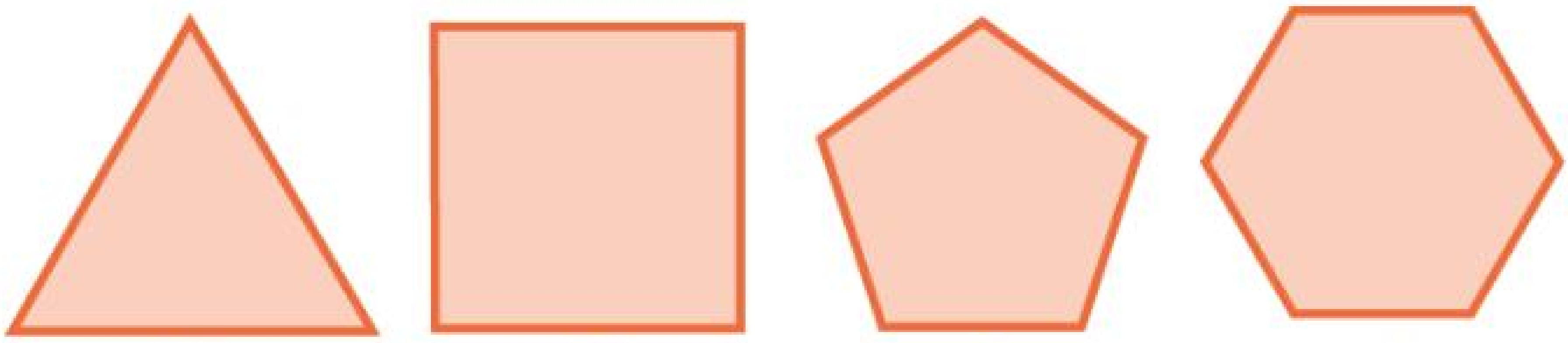
Кўпбурчак деб содда ёпиқ синиқ чизиқдан ташкил топган ва унинг ички соҳаси билан чегараланган фигурага айтилади. Синиқ чизиқнинг учлари — кўпбурчакнинг *учлари*, синиқ чизиқнинг бўғинлари —кўпбурчакнинг *томонлари*, қўшни томонлар орасидаги бурчаклар эса-кўпбурчакнинг *бурчаклари* деб аталади. Кўпбурчакнинг томонларида ётмайдиган нуқталар *ички нуқталар* деб аталади.

Кўпбурчак унинг учларини кетма-кет кўрсатиш орқали белгиланади. Масалан, $ABCD$ кўпбурчак (2.1-б расм), $A_1A_2...A_n$ кўпбурчак ва ҳ.к. *Кўпбурчакнинг периметри* деб унинг барча томонлари узунликлари йиғиндисига айтилади.

Кўпбурчаклар бурчакларига кўра учбурчакларга (учта бурчаги бўлган кўпбурчаклар) (2.1-а расм), тўртбурчакларга (тўртта бурчаги бўлган кўпбурчаклар) (2.1-б расм) ва ҳ.к. бўлинади. n бурчакли кўпбурчак *n-бурчак* деб аталади.

ABCD тўртбурчакда *A* ва *C*, *B* ва *D* учлари, шунингдек, *AB* ва *CD*, *AD* ва *BC* томонлари *қарама-қарши* деб аталади (2.1-а расм). Умумий учга эга тўртбурчакнинг томонлари *қўшнилар* деб аталади.

Агар кўпбурчакнинг ҳамма томонлари ва ҳамма бурчаклари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда у *мунтазам кўпбурчак* деб аталади (2.2-расм).



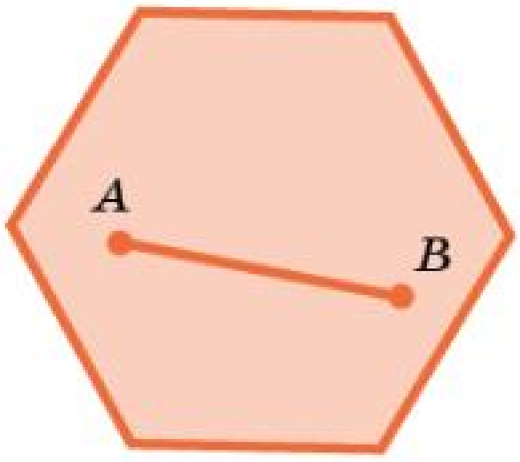
а) б) в) г)

2.2-расм

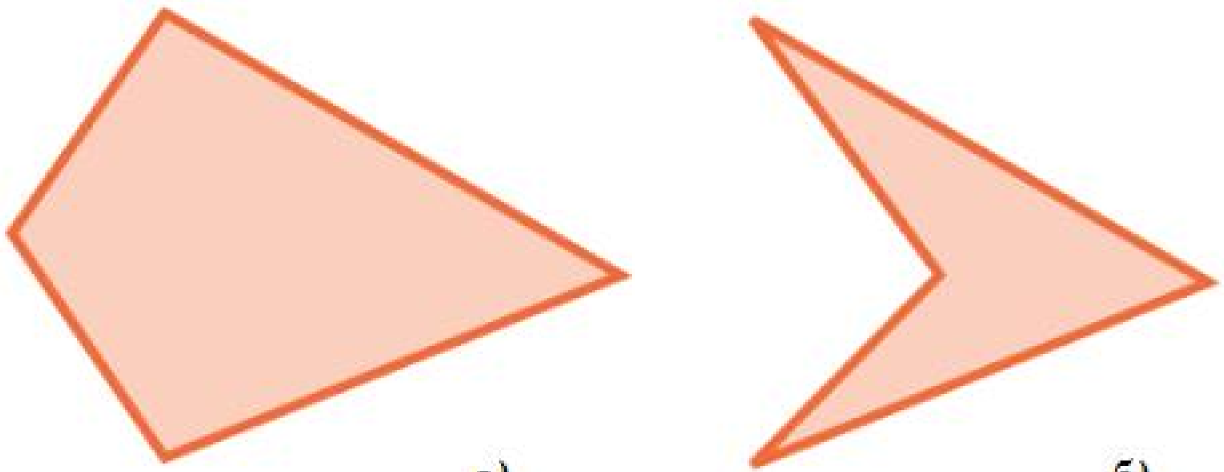
Мунтазам тўртбурчак *квадрат* деб ҳам аталади.

Ҳамма бурчаклари тўғри бурчак бўлган тўртбурчак *тўғри тўртбурчак* деб аталади.

Агар кўпбурчакда унинг исталган иккита нуқтаси билан бирга уларни туташтирувчи кесма ётадиган бўлса, у ҳолда у *қавариқ кўпбурчак* деб аталади (2.3-расм).



2.3-расм

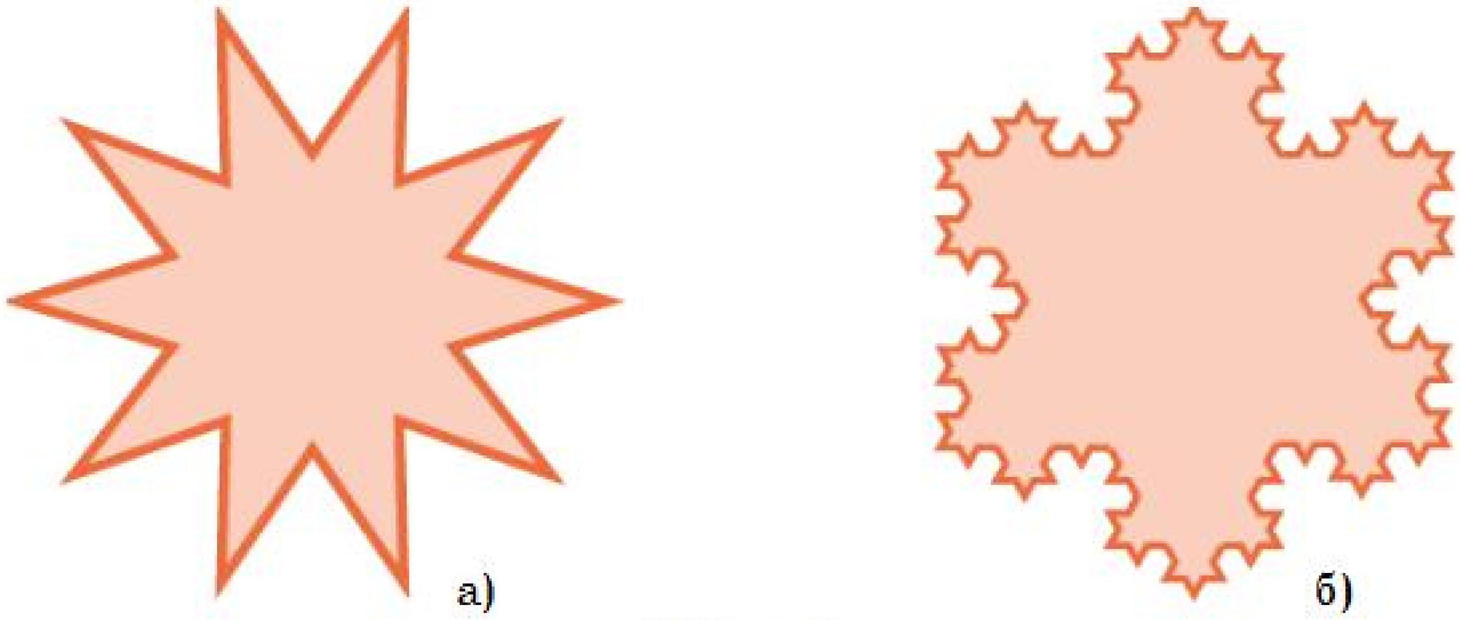


а) б)

2.4-расм

Кўпбурчак қавариқ (2.4-а расм) ва ноқавариқ (2.4-б расм) бўлиши мумкин.

Кўпбурчаклар мураккаб шаклда ҳам бўлиши мумкин. Бундай кўпбурчакларга мисоллар 2.5-расмда кўрсатилган.

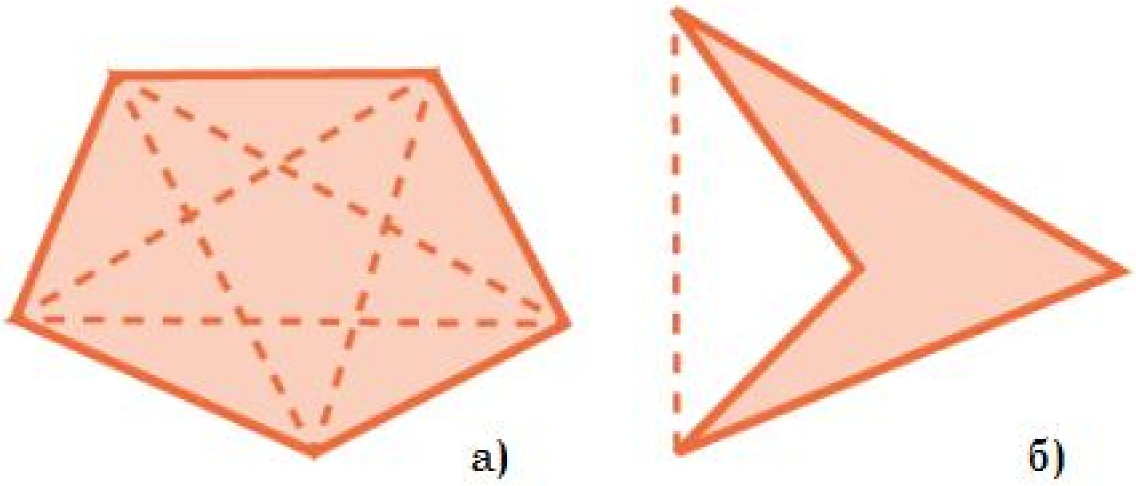


а) б)

2.5-расм

Кўпбурчакнинг қўшни бўлмаган учларини туташтирувчи кесмалар унинг *диагоналлари* деб аталади (2.6-расм).

Қавариқ кўпбурчак ўзининг ҳамма диагоналларини ўз ичига олади (2.6-а расм). Ноқавариқ кўпбурчак ўзининг баъзи бир диагоналларини ўз ичига олмаслиги мумкин (2.6-б расм).



2.6-расм

Учбурчакларнинг қавариқлигини ўзингиз асослаб кўринг.

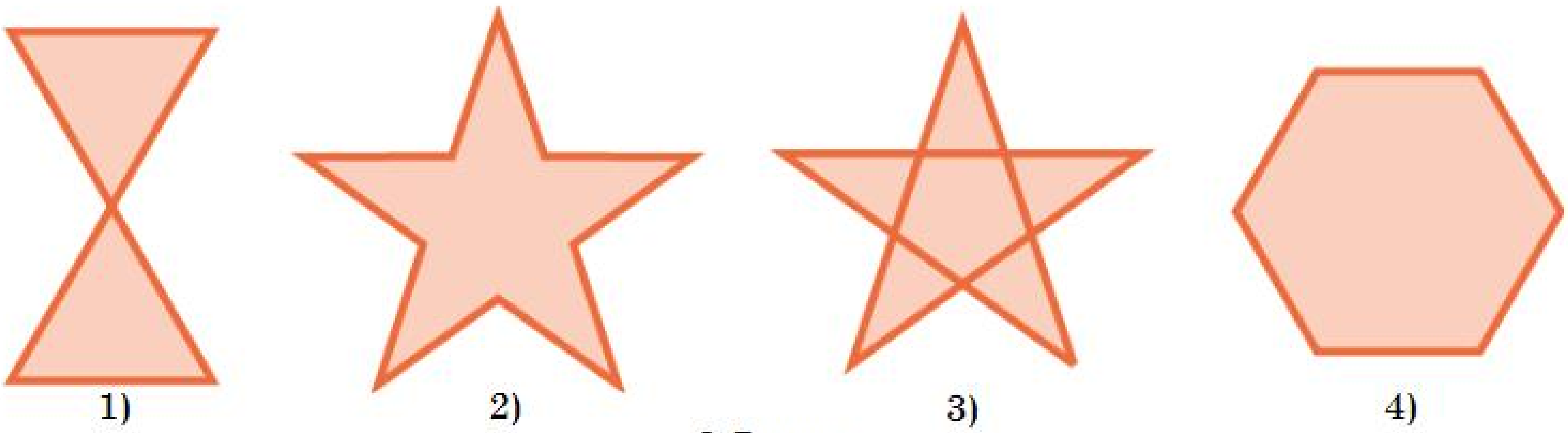
Агар кўпбурчак ҳамма диагоналларини ўз ичига олса, у ҳолда у қавариқ кўпбурчак бўладими?

1. Содда ёпиқ синиқ чизиқ текисликни нечта бўлакка ажратади?
2. Қандай фигура кўпбурчак деб аталади? Кўпбурчакнинг: а) учлари; б) томонлари; в) бурчаклари нима?
3. Кўпбурчакнинг қандай нуқталари ички нуқталар деб аталади?
4. Кўпбурчакнинг периметри нима?
5. Қандай кўпбурчак n бурчакли деб аталади?
6. Қандай кўпбурчак мунтазам деб аталади?
7. Қандай кўпбурчак қавариқ деб аталади?
8. Кўпбурчакнинг диагонали нима?
9. Қандай кўпбурчак ўзининг ҳамма диагоналларини ўз ичига олади?

Машқлар

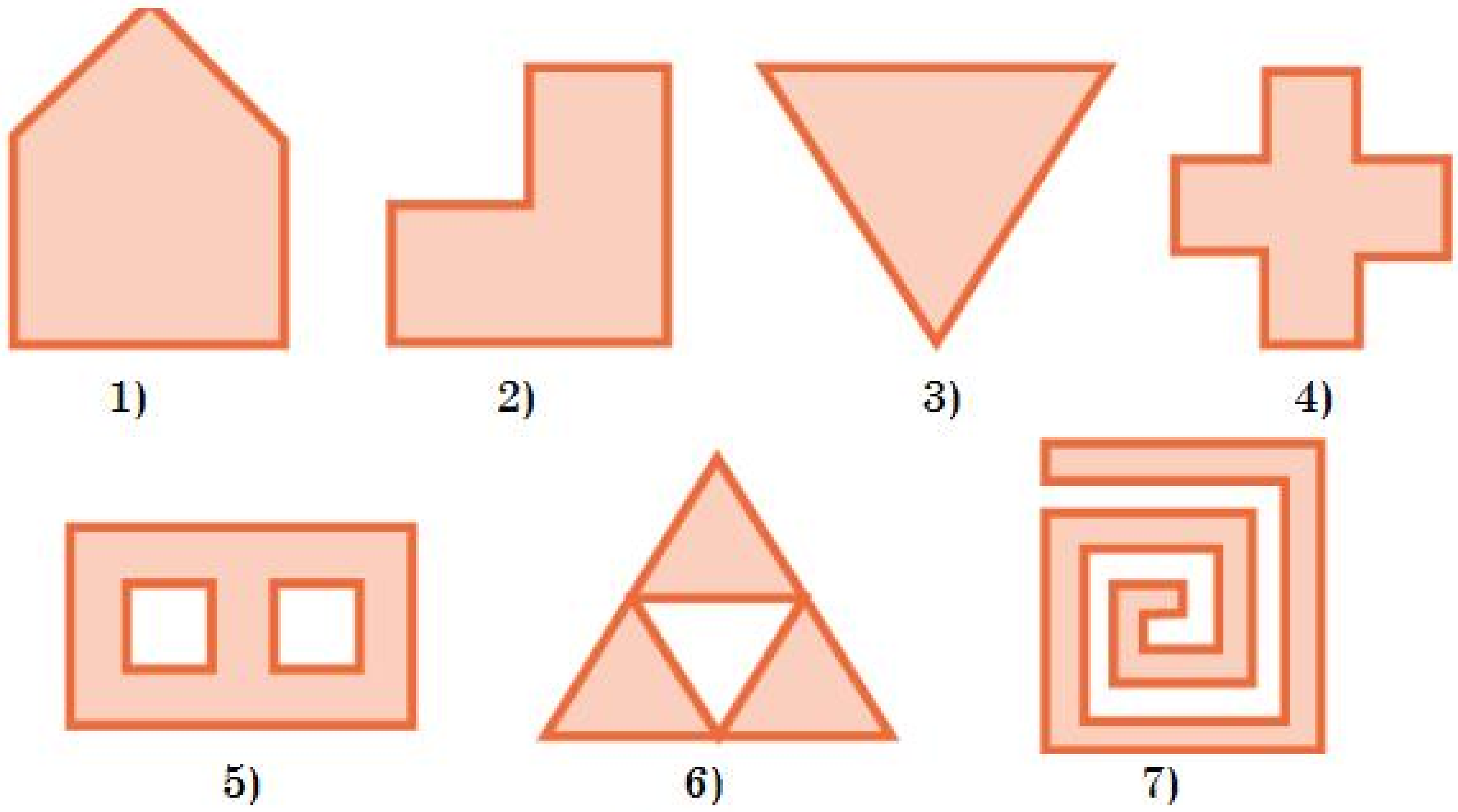
А

1. 2.7-расмдаги фигуралардан қайсилари кўпбурчак бўлади?



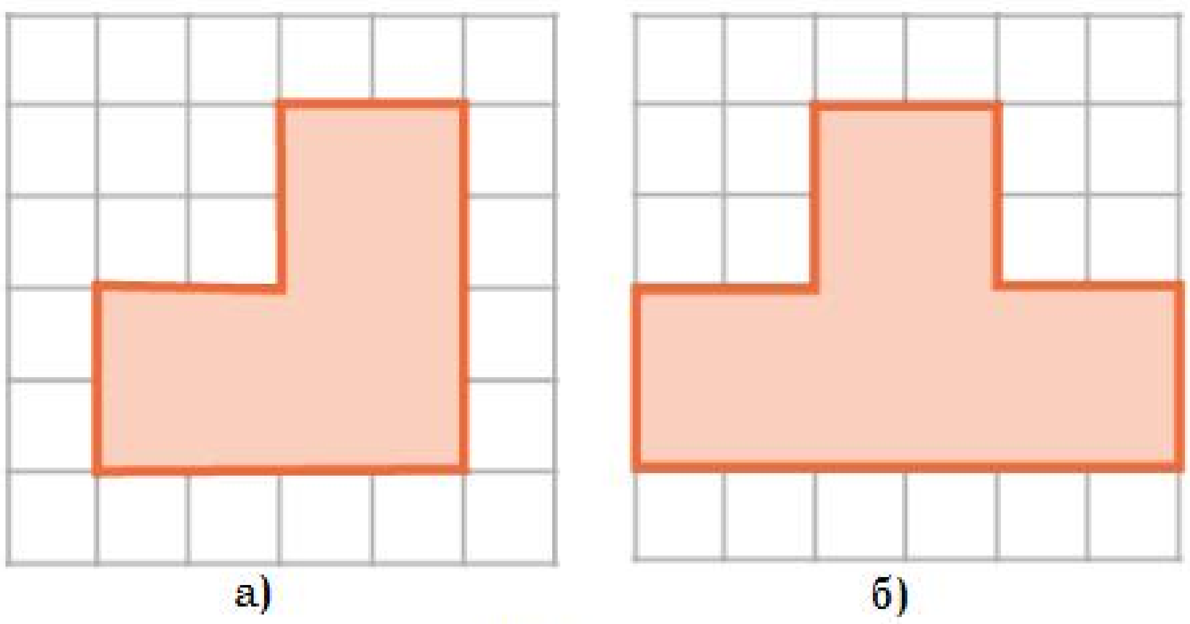
2.7-расм

2. 2.8-расмдаги фигуралардан қайсилари: а) қавариқ кўпбурчак; б) ноқавариқ кўпбурчак бўлади?



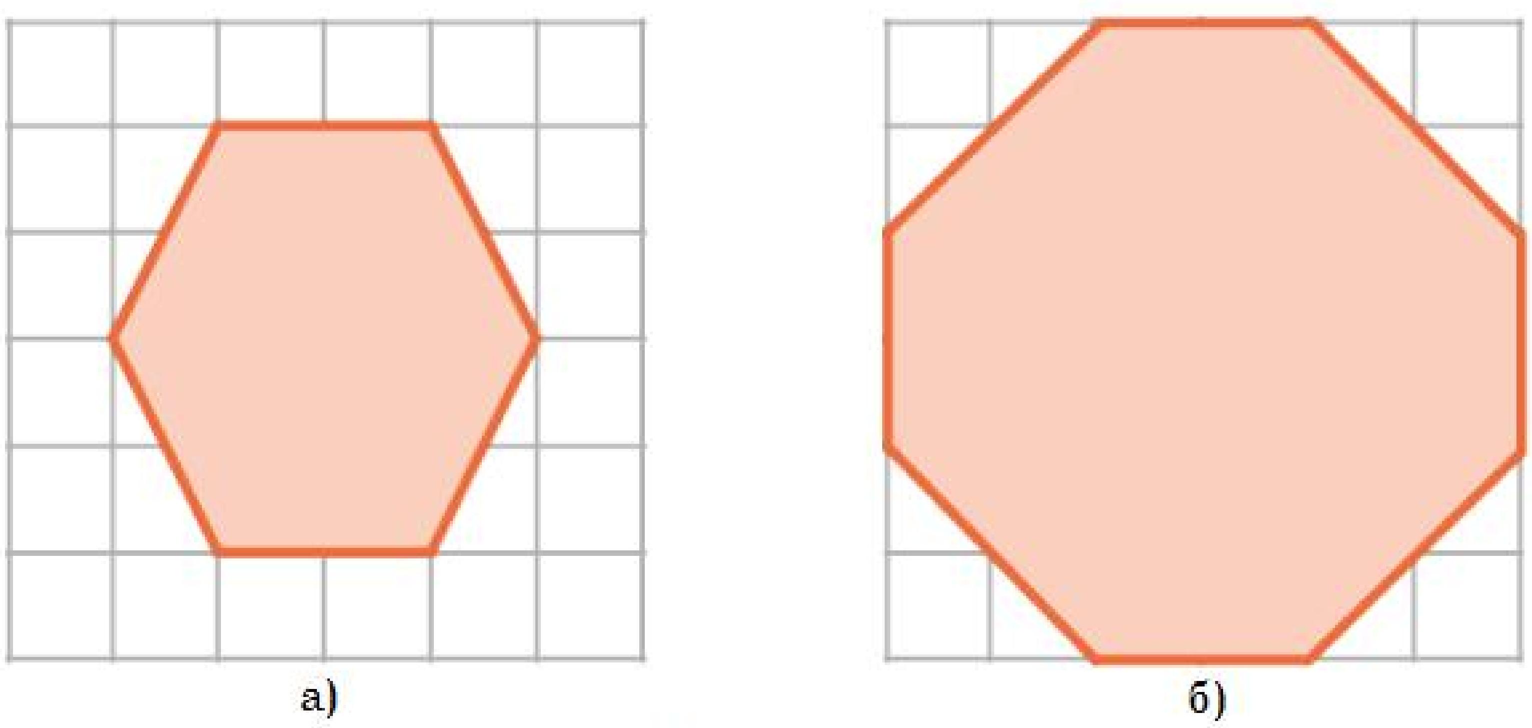
2.8-расм

3. 2.9-расмда тасвирланган кўпбурчакларнинг периметрларини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.



2.9-расм

4. 2.10-расмда тасвирланган кўпбурчаклар мунтазам бўладими?



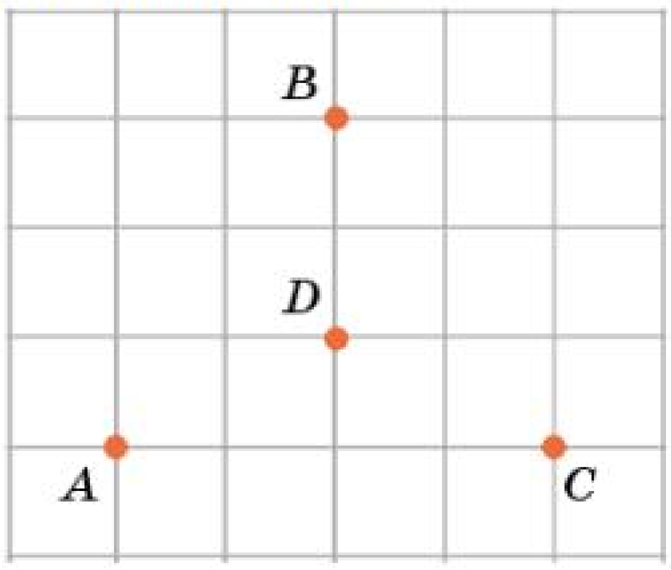
2.10-расм

B

5. Мунтазам: учбурчак; тўртбурчак; бешбурчак; олтибурчак ясанг. Чизғич ва транспортир ёрдамида ясалган кўпбурчакларнинг тўғрилигини текширинг.
6. Қаварик: а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчак г) n-бурчак бир учидан ўтказилган диагоналлари орқали нечта учбурчакларга бўлинади?
7. Қуйидаги: а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчакнинг нечта диагонали мавжуд?
8. Кўпбурчакнинг: а) битта диагонали; б) учта диагонали; в) тўртта диагонали г) бешта диагонали бўладими?

C

9. n-бурчакнинг нечта диагонали бор?
10. а) диагоналлар сони томонларининг сонига тенг; б) диагоналлари сони томонларининг сонидан кам; в) диагоналлари сони томонларининг сонидан ортиқ бўладиган кўпбурчак мавжудми?
11. Қаварик кўпбурчакнинг 14 та диагонали бор. Унинг томонлари сони нечта?
12. Катак варақка учлари A, B, C ва D бўлган исталган тўртбурчак чизинг (2.11-расм). Тўртбурчаклар сони нечта бўлади?
13. Умумий қисми: а) учбурчак; б) тўртбурчак; в) бешбурчак; г) олтибурчак бўладиган иккита учбурчак чизинг.



2.11-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

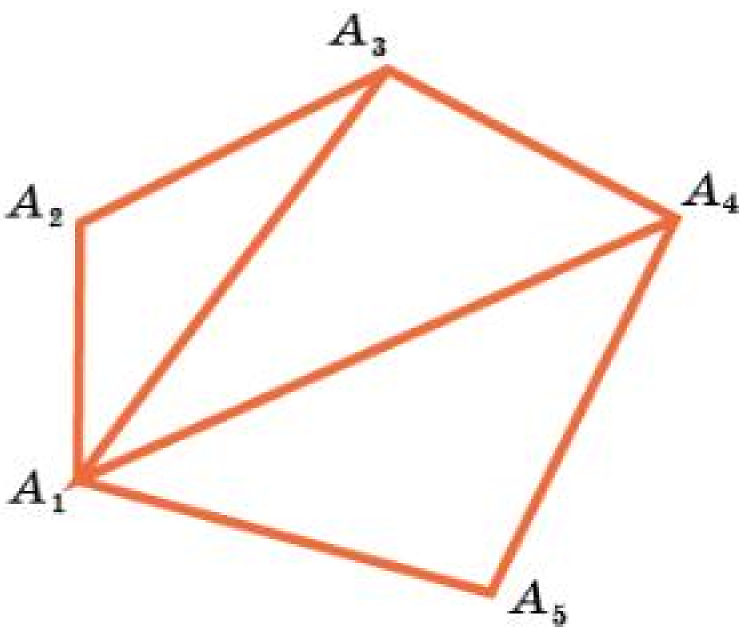
14. Қаварик тўртбурчак бурчакларининг йиғиндиси 360° га тенг эканини исботланг.

3-§. ҚАВАРИҚ КЎПБУРЧАК БУРЧАКЛАРИНИНГ ЙИҒИНДИСИ

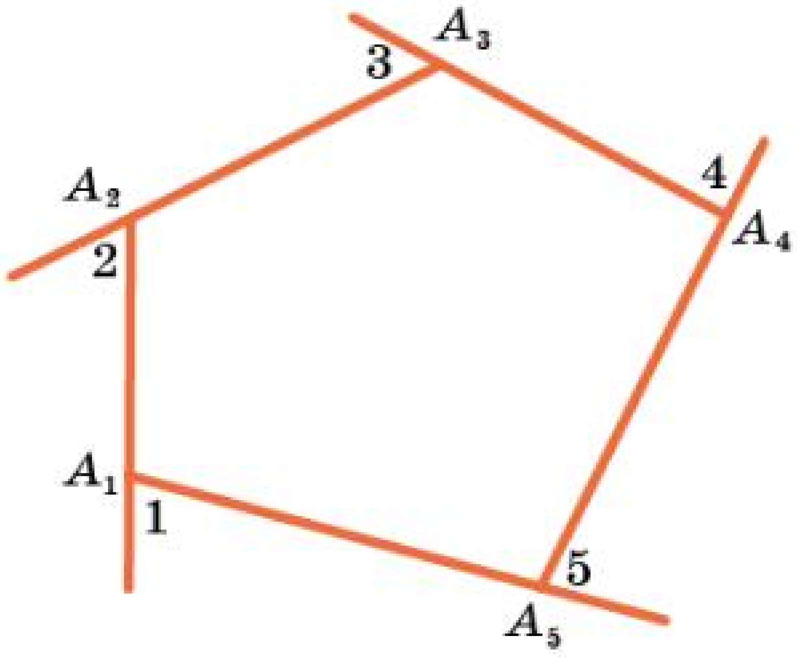
7-синфда учбурчак бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг эканлиги исботланган. Ушбу параграфда биз қаварик кўпбурчакнинг ички ва ташқи бурчаклари йиғиндиси нимага тенг эканини аниқлаймиз.

Теорема. ***Қаварик n-бурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси $180°(n-2)$ га тенг бўлади.***

Исботи. Қаварик n-бурчакни кўриб чиқамиз. Унинг исталган учидан барча диагоналларини ўтказамиз. У ҳолда кўпбурчак $n-2$ та учбурчакларга бўлинади. 3.1-расмда диагоналлари орқали учта учбурчакка бўлинган бешбурчак тасвирланган.



3.1-расм



3.2-расм

Ҳар бир учбурчак бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг ва ана шу бурчаклар кўпбурчакнинг ички бурчаклари ҳисобланади. Демак, n-бурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси $180^\circ(n-2)$ га тенг бўлади.

Қавариқ кўпбурчакнинг ташқи бурчаги деб ана шу кўпбурчакнинг ички бурчаклари билан қўшни бўлган бурчакка айтилади.

3.2-расмда бешбурчак ва унинг 1, 2, 3, 4, 5 ташқи бурчаклари тасвирланган.

Ушбу бурчакларнинг йиғиндисини мустақил топиб кўринг.

Теорема. ***Қавариқ n-бурчакнинг ҳар бир учидан биттадан олинган ташқи бурчаклари йиғиндиси 360° га тенг бўлади.***

Исботи. Қавариқ n-бурчакнинг ҳар бир ташқи бурчаги 180° дан мос равишда ички бурчакнинг катталиги айирмасига тенг. Демак, қавариқ n-бурчакнинг ҳар бир учидан биттадан олинган ҳамма ташқи бурчаклар йиғиндиси $180^\circ \cdot n$ дан ҳамма ички бурчакларнинг йиғиндисини айирмасига тенг бўлади. Ички бурчакларнинг йиғиндиси $180^\circ \cdot (n-2)$ га тенг эканлигидан, ташқи бурчаклар йиғиндиси $180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n-2)$ айирмага тенг, яъни 360° бўлади.

1. Қавариқ n-бурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси нимага тенг?
2. Қандай бурчак қавариқ кўпбурчакнинг ташқи бурчаги деб аталади?
3. Қавариқ n-бурчакнинг ҳар бир учидан олинган ташқи бурчаклар йиғиндиси нимага тенг?

Машқлар

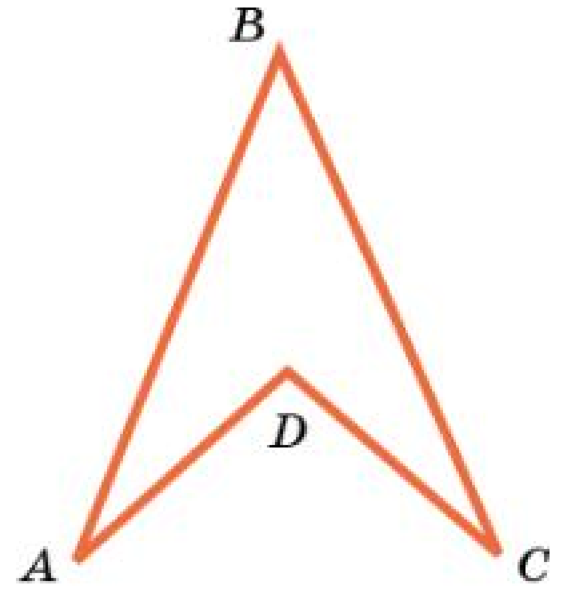
А

1. Қавариқ: а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчак; г) еттибурчак д) саккизбурчакнинг бурчаклари йиғиндисини топинг.

2. Мунтазам: а) учбурчак; б) тўртбурчак; в) бешбурчак; г) олтибурчак бурчакларини топинг.
3. Қавариқ кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси 900° га тенг. Унинг томонлари сонини топинг.
4. Мунтазам: а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчак ; г) саккизбурчак нинг ташқи бурчакларини топинг.

B

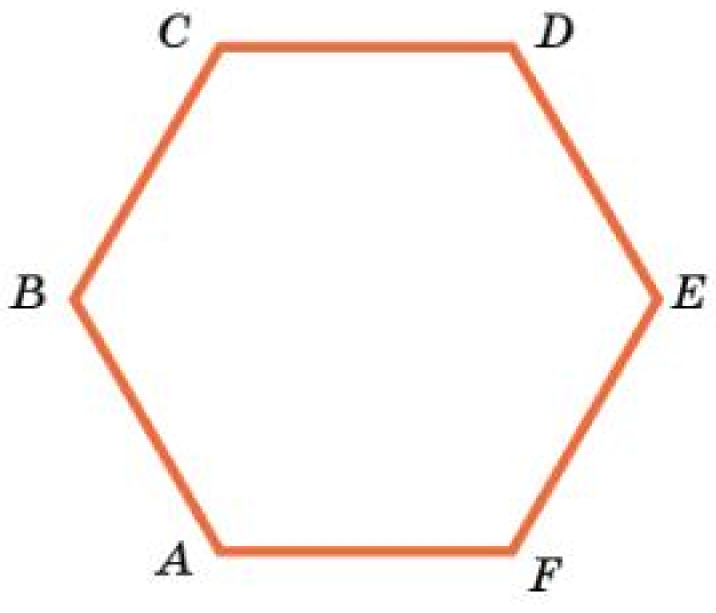
5. Мунтазам n-бурчакнинг ташқи бурчакларини топинг.
6. Ҳар бир ташқи бурчаги: а) 90°; б) 72°; в) 60°; г) 45°; д) 36°; е) 24° бўлган қавариқ кўпбурчакнинг томонлари сонини топинг.
7. Қавариқ тўртбурчакнинг бурчаклари 1, 2, 3, 4 сонларга пропорционал. Ушбу бурчакларни топинг.
8. Ноқавариқ тўртбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси 360° га тенг бўлишини исботланг (3.3-расм).



3.3-расм

C

9. 3.4-расмдаги $ABCDEF$ мунтазам олтибурчакнинг қуйидаги диагоналларидан ташкил топган бурчакни топинг: а) AD ва AE; б) AE ва AC; в) AE ва CF.
10. Қавариқ кўпбурчакда ўтмас ташқи бурчакларнинг учтадан ортиқ бўлмаслигини исботланг.
11. Қавариқ кўпбурчакда ўткир ички бурчаклар учдан ортиқ бўлмаслигини исботланг .
12. 3.4-расмдаги $ABCDE$ мунтазам олтибурчакнинг AD диагонали FE томонига параллел бўлишини исботланг.



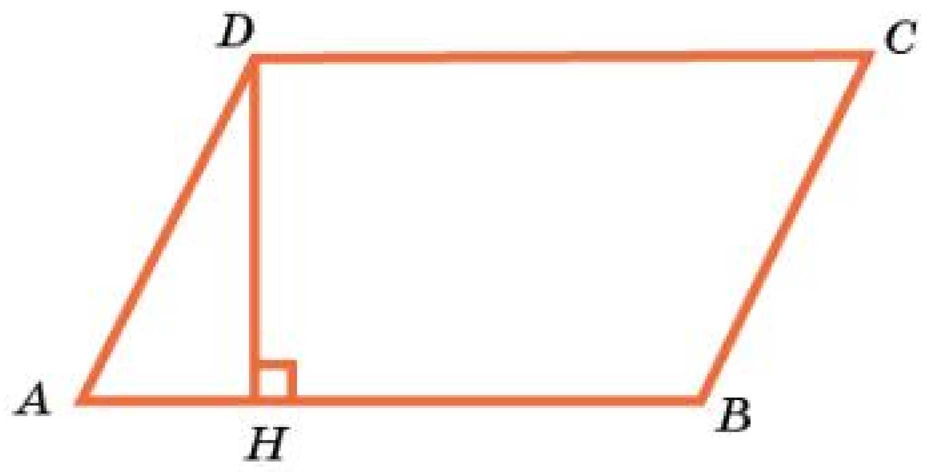
3.4-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

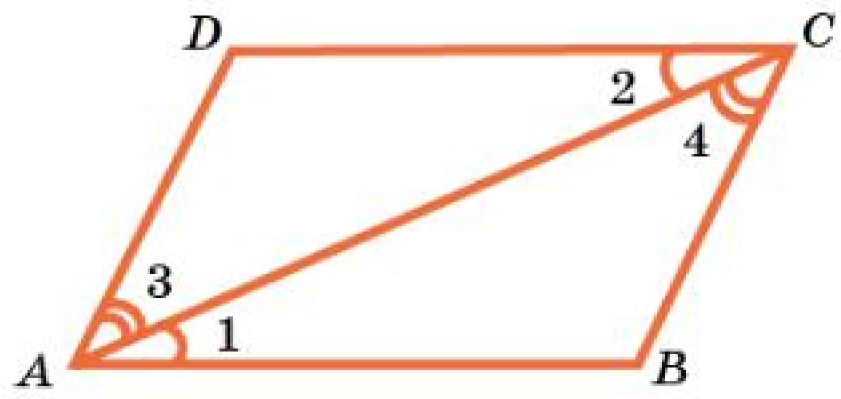
13. Қарама-қарши томонлари жуфт-жуфтдан параллел бўлган тўртбурчак ясанг. Ушбу тўртбурчакнинг томонлари ва бурчаклари ҳақида нима дейиш мумкин?

4-§. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Қарама-қарши томонлари жуфт-жуфтдан параллел бўлган тўртбурчак *параллелограмм* дейилади (4.1-расм).



4.1-расм



4.2-расм

Параллелограмнинг қавариқлигини мустақил асосланг.

Параллелограмнинг бир учидан қарама-қарши ётган томонига туширилган перпендикуляр унинг баландлиги, *баландлик* туширилган томон эса *асоси* деб аталади.

1-хосса. Параллелограмнинг бир томонига ёпишган бурчаклар йиғиндиси 180° га тенг бўлади.

Исботи. $ABCD$ параллелограмм бўлсин. AD томонига ёпишган A ва D бурчаклар йиғиндиси 180° га тенг бўлишини исботлаймиз. Ҳақиқатанан, A ва D бурчаклар AB билан DC параллел тўғри чизиқларни AD кесувчи билан қирқиб ўтганда ҳосил бўладиган ички бурчаклар бўлади. 7-синфда агар иккита параллел тўғри чизиқлар учинчи тўғри чизиқ билан кесишса, у ҳолда уларнинг ички бир томонли бурчаклари йиғиндиси 180° га тенг бўлиши исботланган. Бундан A ва D бурчаклар йиғиндиси 180° га тенг бўлади. Мос равишда параллелограмнинг бошқа томонларига ёпишган бурчаклар йиғиндиси ҳам 180° га тенг бўлиши исботланди. □

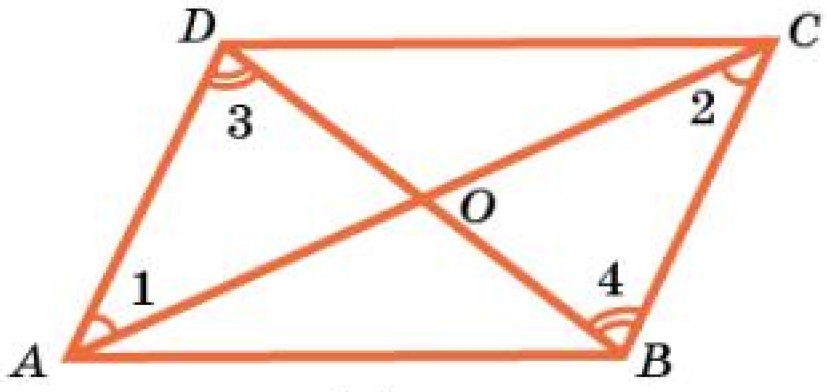
2-хосса. Параллелограмнинг қарама-қарши томонлари ва қарама-қарши бурчаклари тенг бўлади.

Исботи. $ABCD$ параллелограмм бўлсин (4.2-расм).

AC диагонал параллелограмни ABC ва CDA учбурчакларга ажратади. Ушбу учбурчаклар учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатига кўра тенг бўлади (AC — умумий томони, $\angle 1 = \angle 2$ ва $\angle 3 = \angle 4$ — иккита параллел тўғри чизиқларни кесувчи билан кесишдан ҳосил бўлган ички алмашинувчи бурчаклар). Бундан $AB = CD$, $BC = AD$ ва $\angle B = \angle D$. Шу билан бирга, $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$. □

3-хосса. Параллелограмнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади.

Исботи. $ABCD$ параллелограмни кўриб чиқамиз. O — AC ва BD диагоналларининг кесишиш нуқтаси бўлсин (4.3-расм).



4.3-расм

Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатига кўра (параллелограмнинг 2-хоссасидан $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$ ва $\angle 3 = \angle 4$ — иккита параллел тўғри чизиқларни кесувчи билан кесганда ҳосил бўлган ички алмашинувчи бурчаклар) AOD ва COB учбурчаклар тенг бўлади. Демак, $AO = OC$ ва $BO = OD$ бўлади. □

Параллелограмнинг диагоналлари кесишишини мустақил ҳолда тушунтириб кўринг.

1. Қандай тўртбурчак параллелограмм деб аталади?
2. Параллелограмнинг баландлиги нима?
3. Параллелограмнинг бир томонига ёпишган бурчаклар йиғиндиси нимага тенг?
4. Параллелограмнинг қарама-қарши томонлари ҳақида нима дейиш мумкин?
5. Параллелограмнинг қарама-қарши бурчаклари ҳақида нима дейиш мумкин?
6. Параллелограмнинг диагоналлари ҳақида нима дейиш мумкин?

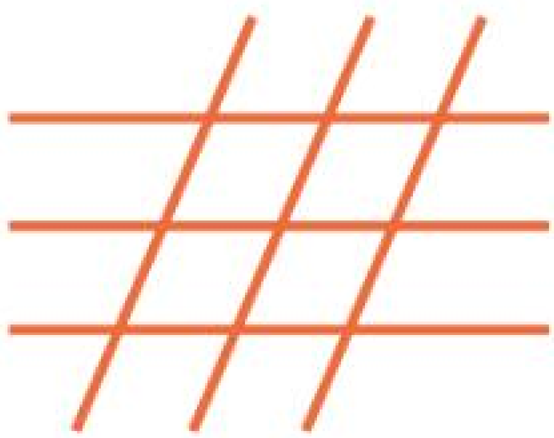
Машқлар

A

1. Параллелограмнинг иккита томони 10 см ва 15 см. Қолган иккита томонини топинг.
2. Параллелограмнинг бир бурчаги 30° га тенг. Қолган бурчакларини топинг.
3. Параллелограмнинг диагонали унинг иккита томони билан 25° ва 35° бурчаклар ҳосил қилади. Параллелограмнинг бурчакларини топинг.
4. Параллелограм диагоналларининг кесишиш нуқтасидан унинг иккита учигача бўлган масофалар 3 см ва 4 см. Ушбу нуқтадан бошқа иккита учларигача бўлган масофаларни топинг.

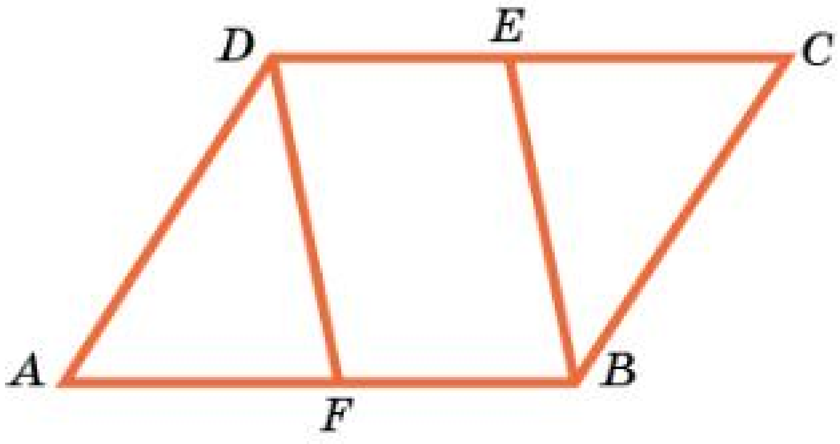
B

5. Параллелограмнинг баландлиги унинг: а) битта томонидан; б) ҳамма томонларидан катта бўладими?
6. Учта параллел тўғри чизиқлар учта параллел тўғри чизиқлар билан кесишган (4.4-расм). У ҳолда нечта параллелограмм ҳосил бўлади?

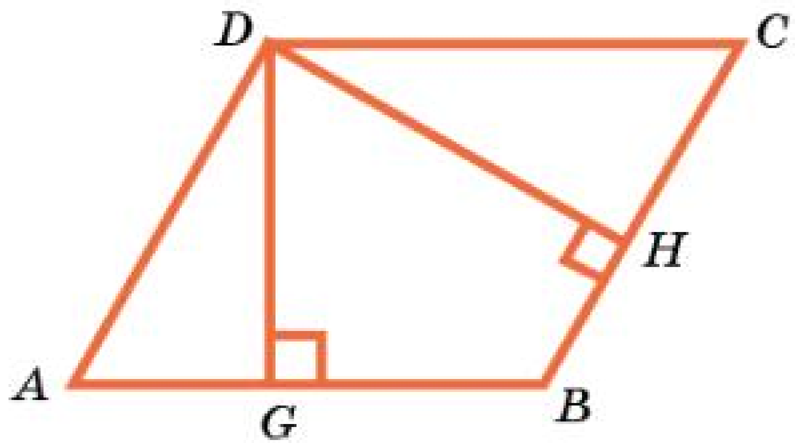


4.4-расм

7. 4.5-расмда $ABCD$ параллелограмм тасвирланган ва $BE \parallel DF$. $BFDE$ тўртбурчак қандай фигура бўлади?



4.5-расм



4.6-расм

8. Агар параллелограмнинг иккита бурчаги йиғиндиси: а) 80°; б) 100°; в) 160° бўлса, у ҳолда бурчакларни топинг.

9. Агар параллелограмнинг бир бурчаги иккинчисидан: а) 40° катта; б) 5 марта кичик бўлса, у ҳолда унинг бурчакларини топинг.

10. Агар параллелограмнинг иккита бурчаги 3 : 7 нисбат каби бўлса, у ҳолда унинг бурчакларини топинг.

11. $ABCD$ параллелограмнинг ўткир бурчаги 60° (4.6-расм). DG ва DH — баландликлари. $BHDG$ тўртбурчакнинг бурчакларини топинг.

12. Параллелограмнинг периметри 48 см. Агар параллелограмнинг: а) бир томони иккинчисидан 2 см узун; б) иккита томонининг айирмаси 6 см га тенг; в) бир томони иккинчисидан икки марта узун бўлса, у ҳолда унинг томонларини топинг.

13. Параллелограмнинг иккита томони 3 : 4 нисбат каби ва унинг периметри 2,8 м га тенг. Параллелограмнинг томонларини топинг.

C

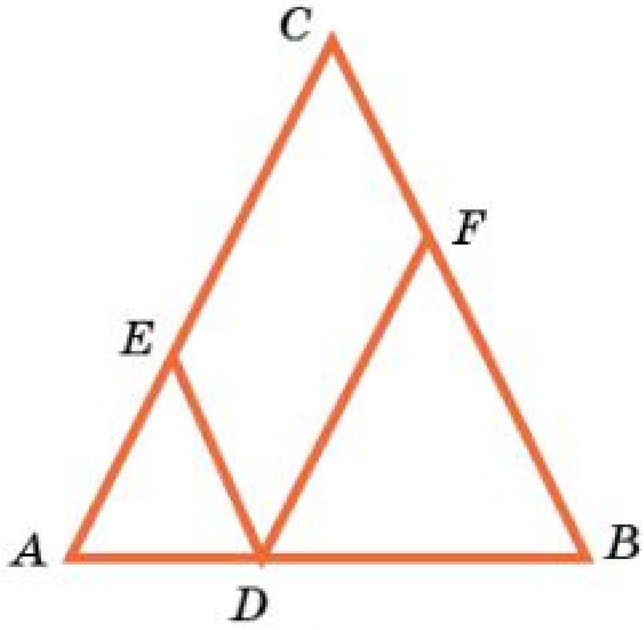
14. Параллелограмнинг бир томонига ёпишган бурчаклар биссектрисалари қандай жойлашган?

15. Қўшни томонлари тенг бўлмаган параллелограмнинг қарама-қарши ётган бурчаклари биссектрисалари қандай жойлашган?

16. Иккита томони ва бир диагонали мос равишда: а) 5 см, 2 см, 2 см; б) 7 см, 4 см, 11 см; в) 2 см, 3 см, 4 см; г) 3 см, 8 см, 10 см бўлган параллелограмм чизиш мумкинми?

17. Тенгёнли учбурчакнинг ён томони 5 м. Ушбу учбурчакнинг асосида ётган нуқта орқали унинг ён томонларига параллел иккита тўғри чизиқ ўтказилган (4.7-расм). Ҳосил бўлган тўртбурчакнинг периметрини топинг.

18. Параллелограмнинг битта бурчаги биссектрисаси ана шу параллелограмдан тенгёнли учбурчакни кесиб тушишини исботланг.



4.7-расм

19. Параллелограмни: а) иккита томони билан диагонали; б) томони ва иккита диагонали бўйича ясанг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

20. Иккита томони тенг ва параллел бўлган тўртбурчак ясанг. Ушбу тўртбурчак параллелограмм бўладими?

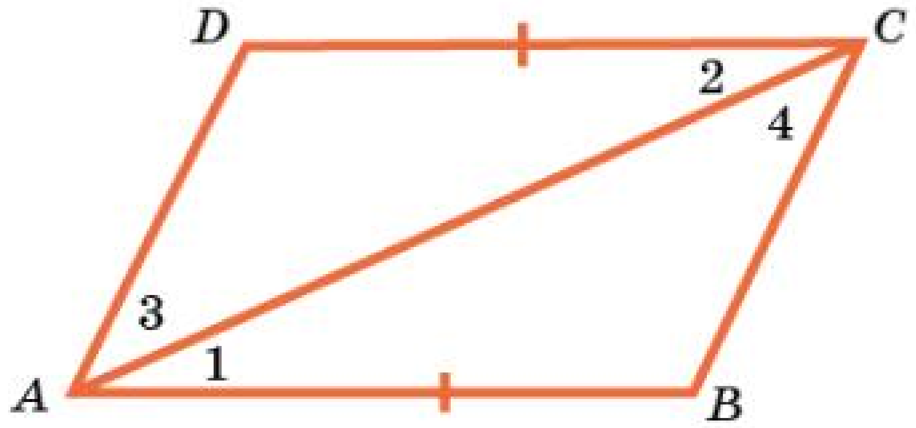
21. Қарама-қарши томонлари жуфт-жуфтдан тенг бўлган тўртбурчак ясанг. Ушбу тўртбурчак параллелограмм бўладими?

5-§. ПАРАЛЛЕЛОГРАМНИНГ АЛОМАТЛАРИ

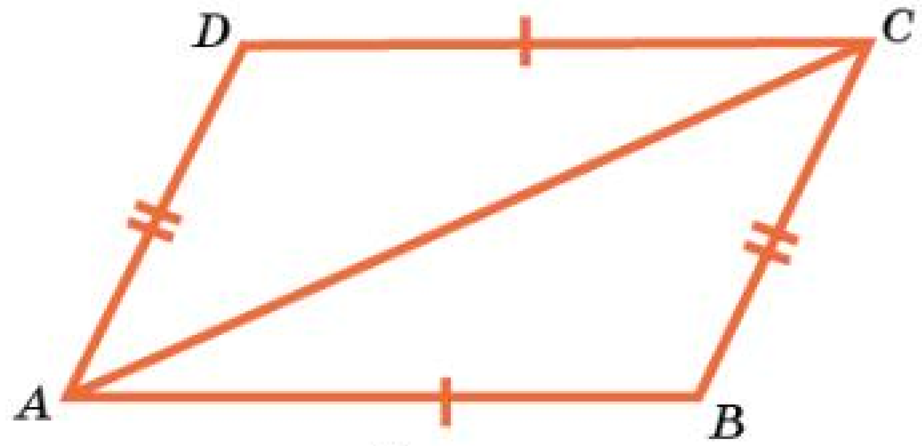
Параллелограмнинг аломатлари деб тўртбурчакнинг параллелограмм бўлиши учун бажариладиган етарли шартларга айтилади.

Теорема. Агар тўртбурчакнинг иккита томони тенг ва параллел бўлса, у ҳолда у параллелограмм бўлади.

Исботи. $ABCD$ тўртбурчакда AB ва CD томонлар тенг ва параллел бўлсин. AC диагоналларни ўтказамиз (5.1-расм).



5.1-расм



5.2-расм

Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра (AC — умумий томон, $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ — иккита параллел тўғри чизиқларни кесувчи билан кесганда ҳосил бўлган ички алмашинувчи бурчаклар) ABC ва CDA учбурчаклар тенг бўлади. Бундан $\angle 3$ ва $\angle 4$ ички алмашинувчи бурчаклар тенг. Демак, AD ва BC тўғри чизиқлар параллел бўлади. Шундай қилиб, $ABCD$ тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари параллел, бундан $ABCD$ параллелограмм эканлиги келиб чиқади. ◻

Теорема. Агар тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари жуфт-жуфтдан тенг бўлса, у ҳолда у параллелограмм бўлади.

Исботи. $ABCD$ тўртбурчакда $AB = CD$, $BC = AD$ тенглик бажарилсин. Уни иккита учбурчакка ажратувчи AC диагонал ўтказамиз (5.2-расм).

Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра ABC ва CDA учбурчаклар тенг бўлади. У ҳолда $\angle CAB = \angle ACD$, демак, AB ва CD тўғри чизиқлар параллел бўлади. Худди шундай $\angle ACB = \angle CAD$, демак, BC ва AD тўғри чизиқлар параллел бўлади. Шундай қилиб, $ABCD$ тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари параллел, бундан $ABCD$ параллелограмм бўлади. ◻

Параллелограмнинг қуйидаги аломатини исботланг.

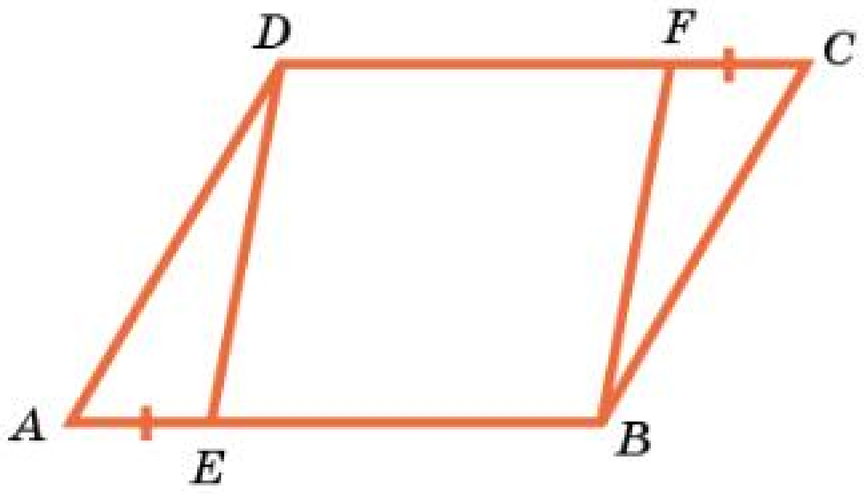
Агар тўртбурчакнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинса, у ҳолда бу тўртбурчак параллелограмм бўлади.

1. Қандай шартлар *параллелограмнинг аломатлари* деб аталади?
2. Параллелограмнинг биринчи аломатини ифодаланг.
3. Параллелограмнинг иккинчи аломатини ифодаланг.

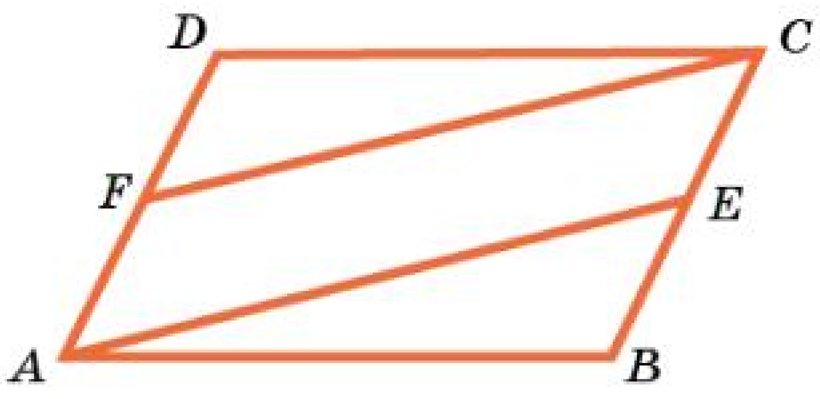
Машқлар

A

1. 5.3-расмдаги $ABCD$ параллелограмнинг томонларидан $AE = CF$ тенг кесмалар ажратилган. $BFDE$ тўртбурчак параллелограмм бўладими?

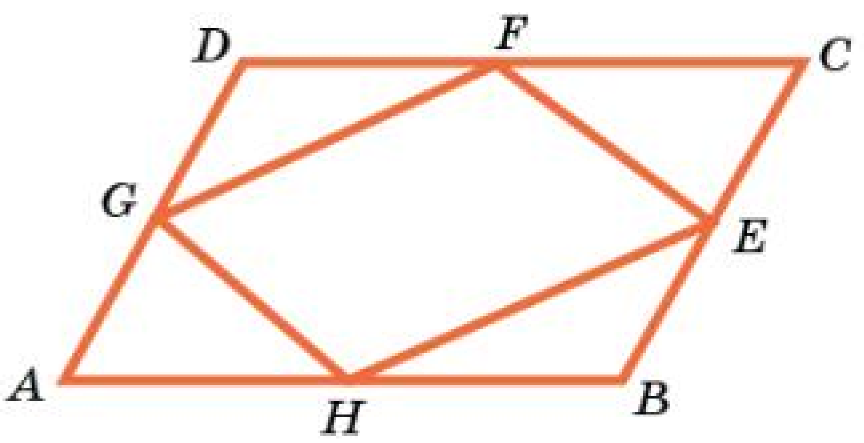


5.3-расм

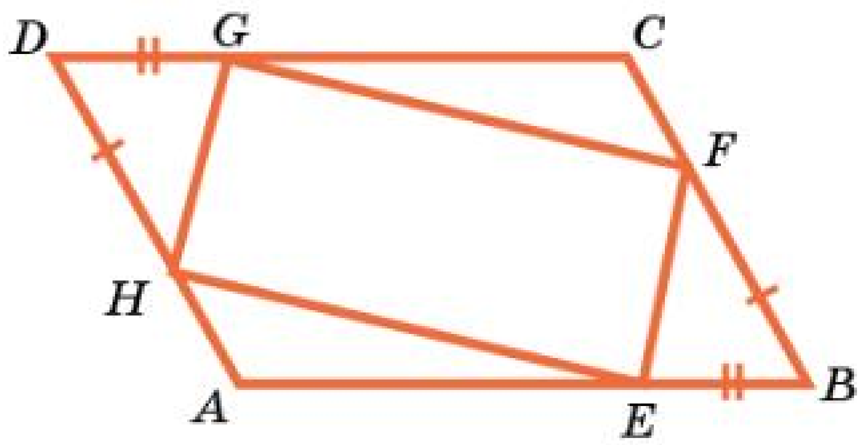


5.4-расм

2. 5.4-расмдаги $ABCD$ параллелограмда AE ва CF параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. $AECF$ тўртбурчак параллелограмм бўладими?
3. 5.5-расмда $ABCD$ параллелограмм берилган. E, F, G, H нуқталар — унинг томонлари ўрталари. $EFGH$ тўртбурчак параллелограмм бўладими? Нима учун?
4. 5.6-расмдаги $ABCD$ параллелограмнинг томонларидан $BE = DG$ ва $BF = DH$ ўзаро тенг кесмалар ажратилган. $EFGH$ тўртбурчак параллелограмм бўладими? Нима учун?



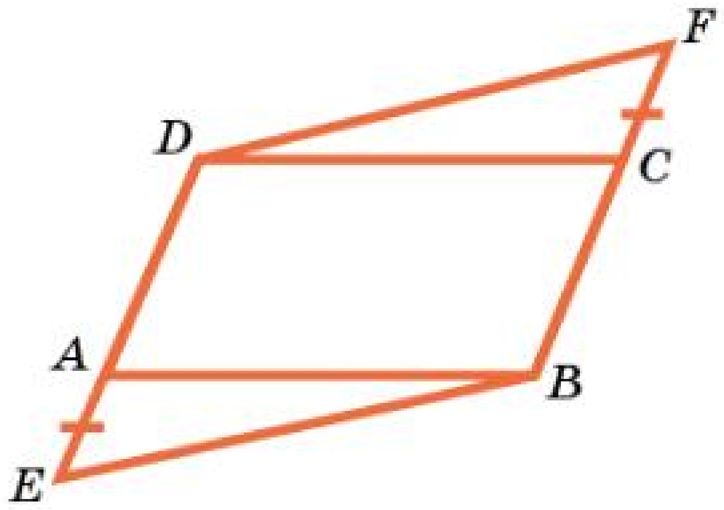
5.5-расм



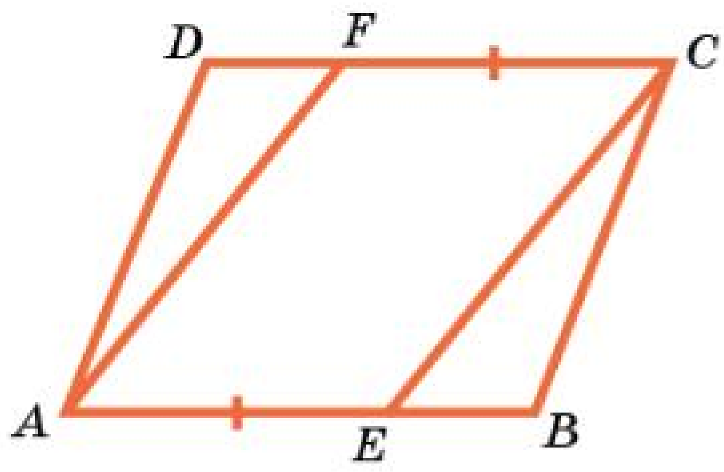
5.6-расм

В

5. Тўртбурчаклардаги иккита қарама-қарши бурчакларнинг тенглиги параллелограмнинг аломати бўладими?
6. Тўртбурчакнинг иккита томони параллел, қолган иккита томони эса тенг. Ушбу тўртбурчак параллелограмм бўлади деган мулоҳаза тўғрими?
7. $ABCD$ параллелограмнинг қарама-қарши томонлари давомида AE ва CF га тенг бўлган кесмалар ажратилган (5.7-расм) ва BE, DF кесмалар ўтказилган. Ҳосил қилинган $BFDE$ тўртбурчакнинг параллелограмм бўлишини исботланг.



5.7-расм

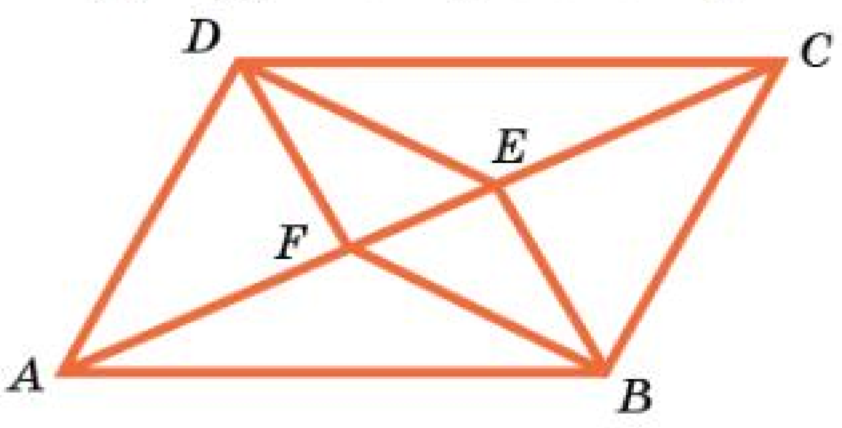


5.8-расм

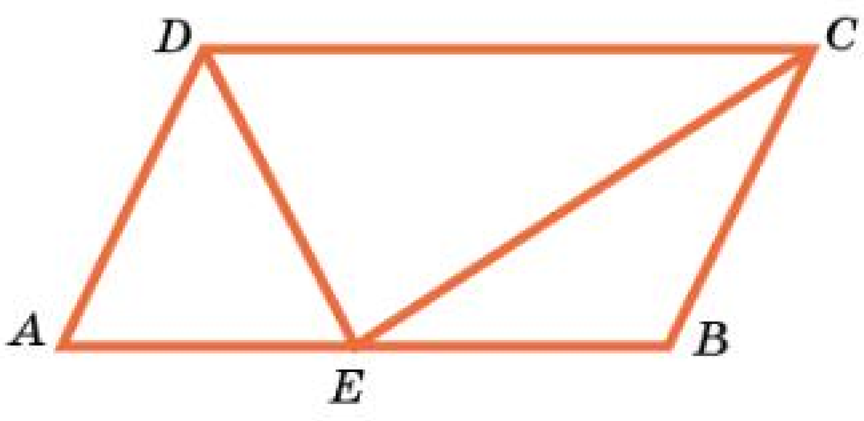
8. 5.8-расмдаги $ABCD$ тўртбурчак — параллелограмм, $AE = CF$. A, E, C, F нуқталар параллелограмнинг учлари бўлишини исботланг.

С

9. 5.9-расмдаги $ABCD$ параллелограмда B ва D бурчаклар биссектрисалари AC диагоналини E ва F нуқталарда қирқиб ўтади ҳамда улар параллелограмнинг B, D учлари билан туташтирилган. $BEDF$ тўртбурчак параллелограмм бўлишини исботланг.



5.9-расм



5.10-расм

10. Параллелограмнинг бир томонига ёпишган иккита бурчаги биссектрисаларининг кесишиш нуқтаси унга қарама-қарши ётган томонида жойлашган (5.10-расм). Расмдаги кесмалар орасидаги алоқаларни аниқланг.
11. Параллелограмни: а) иккита томони ва улар орасидаги бурчаги; б) томони, бурчаги ва диагонали; в) томони ва унга унинг диагоналини қирқиб ўтадиган қилиб учидан туширилган перпендикуляр ёрдамида ясанг.

12. Берилган нуқта орқали ўтиб, берилган тўғри чизиққа параллел бўладиган тўғри чизиқни ясаш усулини кўрсатинг.

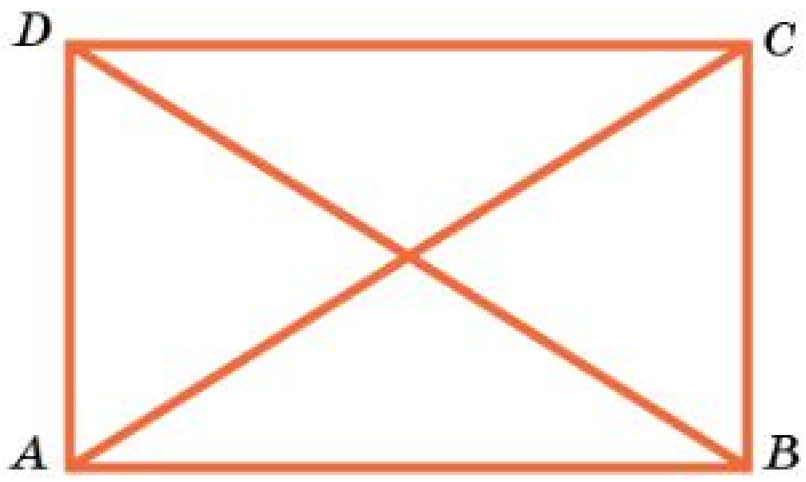
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

13. Тўғри тўртбурчак параллелограмм бўладими?
14. Параллелограмм тўғри тўртбурчак бўлиши учун унинг диагоналлари қандай шартларни қаноатлантириши керак?

6-§. ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАК

Ҳамма бурчаклари тўғри бурчак бўлган параллелограмм *тўғри тўртбурчак* деб аталади (6.1-расм).

6.1-расм



6.2-расм

Тўғри тўртбурчак параллелограмнинг хусусий ҳоли бўлгани учун у параллелограмнинг барча хоссаларига эга бўлади. Масалан, тўғри тўртбурчакда қарама-қарши томонлари жуфт-жуфти билан тенг бўлади ва диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади.

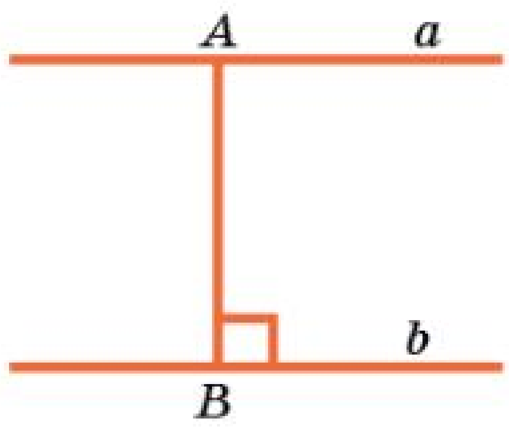
Теорема (тўғри тўртбурчакнинг аломати). Агар параллелограмнинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда у тўғри тўртбурчак бўлади.

Исботи. $ABCD$ — параллелограмм ва $AC = BD$ бўлсин (6.2-расм).

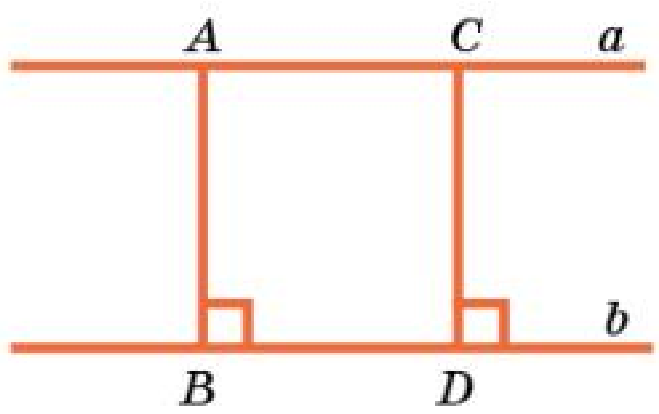
Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра (AB — умумий томон, $AC = BD$, $BC = AD$) ABC ва BAD учбурчаклар тенг бўлади. У ҳолда $\angle ABC = \angle BAD$. Бу бурчаклар йиғиндиси 180° га тенг. Демак, уларнинг ҳар бири 90° га тенг бўлади. Параллелограмда қарама-қарши бурчаклар тенг эканлиги туфайли қолган бурчаклар ҳам 90° га тенг бўлади, яъни $ABCD$ — тўғри тўртбурчак. □

Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг эканини ўзингиз исботланг.

Иккита параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа деб битта тўғри чизиқда ётган нуқтадан иккинчи тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлигига айтилади (6.3-расм).



6.3-расм



6.4-расм

Теорема. Параллел иккита тўғри чизиқ орасидаги масофа биринчи тўғри чизиқдан иккинчи тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг нуқтаси танлаб олинишига боғлиқ бўлмайди.

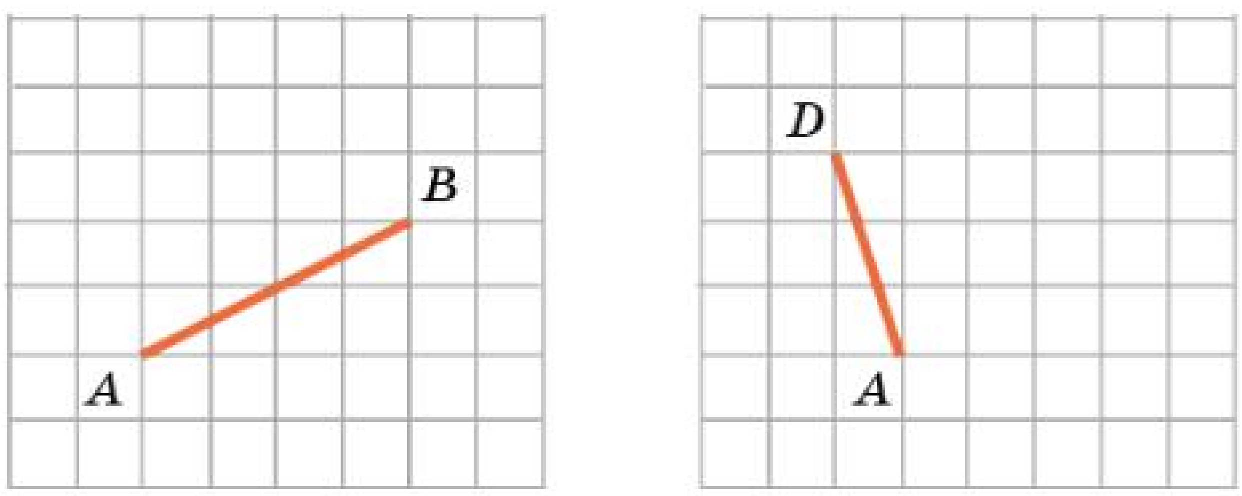
Исботи. a ва b — параллел тўғри чизиқлар, AB ва CD — a тўғри чизиқда A ва C нуқталардан b тўғри чизиққа туширилган иккита перпендикуляр бўлсин (6.4-расм). $BDCA$ — тўғри тўртбурчак, у ҳолда унинг AB ва CD қарама-қарши томонлари тенг бўлади.

1. Қандай параллелограмм *тўғри тўртбурчак* деб аталади?
2. Тўғри тўртбурчакнинг аломатини ифодаланг.
3. Иккита параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа нима?

Машқлар

A

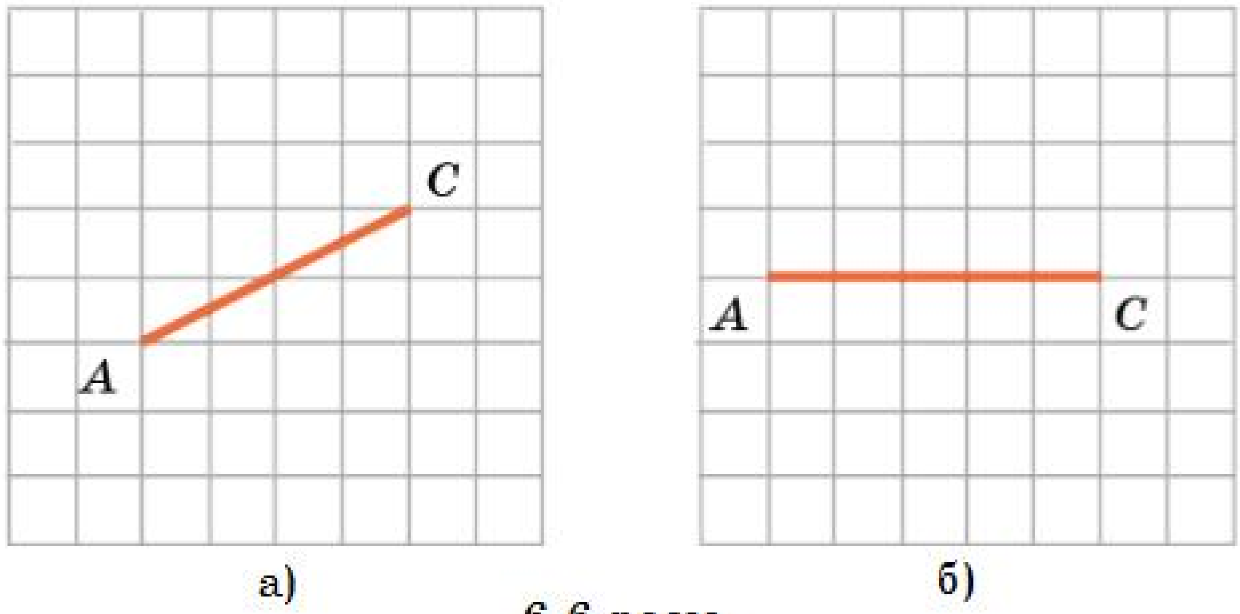
1. Диагоналлари тенг бўлиб, тўғри тўртбурчак бўлмайдиган тўртбурчак мавжудми?
2. Агар тўртбурчакнинг битта бурчаги тўғри бурчак, диагоналлари эса тенг бўлса, у ҳолда у тўғри тўртбурчак бўлади деган мулоҳаза тўғрими?
3. Тўғри тўртбурчак диагоналларининг орасидаги ўткир бурчак 50° га тенг. Диагоналнинг томонлар билан ҳосил қиладиган бурчакларини топинг.
4. Тўғри тўртбурчакнинг кичик томони 5 см га тенг, диагоналлари эса 60° бурчак ясаб кесишади. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналларини топинг.
5. 6.5-расмда бир томони кўрсатилган $ABCD$ тўғри тўртбурчакни чизинг.



6.5-расм

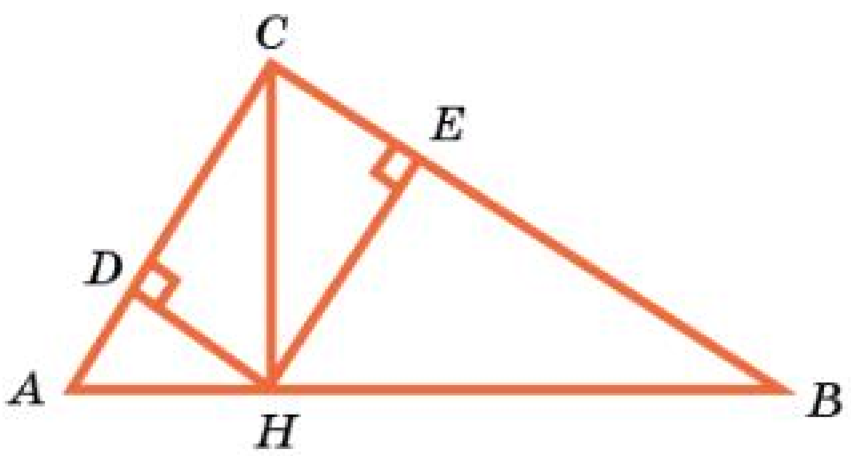
B

6. 6.6-расмда AC диагонали кўрсатилган $ABCD$ тўғри тўртбурчакни чизинг.

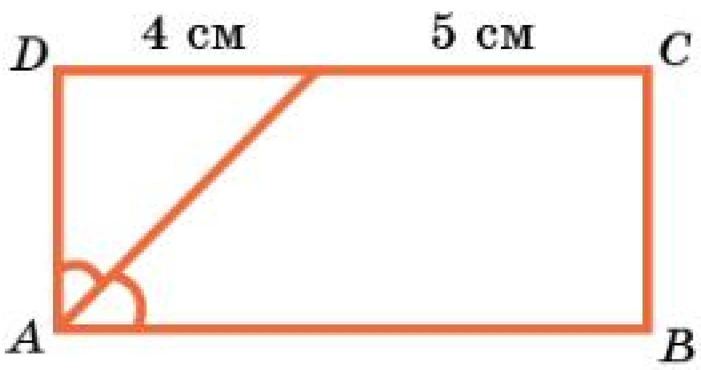


6.6-расм

7. Тўғри тўртбурчакнинг диагонали бурчагини 1 : 2 нисбат каби бўлади, унинг кичик томони 5 см га тенг. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналини топинг.
8. Тўғри тўртбурчакнинг диагонали унинг бир томонидан икки марта катта. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари унинг томонлари билан қандай бурчак ясайди?
9. Тўғри тўртбурчак диагоналларининг орасидаги ўтмас бурчак 120° га тенг. Унинг кичик томонининг диагоналига нисбатини топинг.
10. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 34 см га тенг, унинг диагоналлари орқали бўлинган учбурчаклардан бирининг периметри 30 см га тенг. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналларини топинг.
11. 6.7-расмдаги ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг C тўғри бурчаги учидан 3 см га тенг CH баландлик туширилган. H нуқтадан учбурчакнинг катетларига HD ва HE перпендикулярлар туширилган. D ва E нуқталар орасидаги масофани топинг.
12. Тўғри тўртбурчак бир бурчагининг биссектрисаси унинг томонини 4 см ва 5 см га тенг кесмаларга ажратади (6.8-расм). Унинг томонларини топинг.



6.7-расм

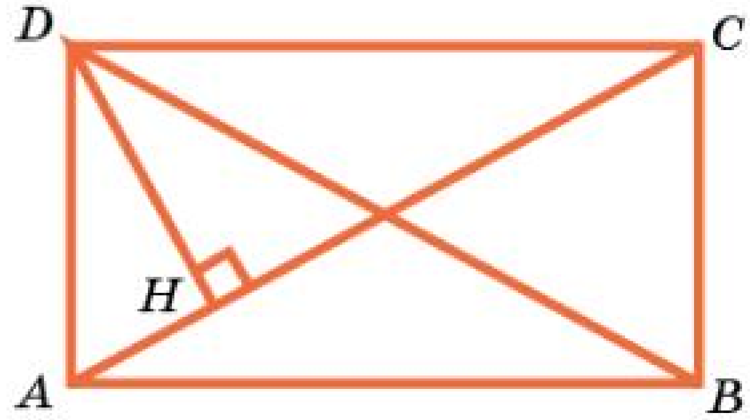


6.8-расм

C

13. Параллелограмнинг бурчаклар биссектрисалари тўғри бурчак ҳосил қилишини исботланг.

14. *ABCD* тўғри тўртбурчакнинг *D* учидан *AC* диагоналга туширилган *DH* перпендикуляр *D* бурчагини 2 : 3 нисбат каби бўлади (6.9-расм). У ҳолда: а) диагоналнинг томонлар билан ҳосил қилувчи бурчакларини; б) *DH* перпендикуляр билан *BD* диагонал орасидаги бурчакни топинг.



6.9-расм

15. Тўғри тўртбурчакни: а) қўшни иккита томони; б) томони ва диагонали бўйича ясанг.

16. Исталган тўғри чизиқ чизинг. Ушбу тўғри чизиқ билан ораларидаги масофа 2 см ва параллел бўлган нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

17. Берилган тўғри чизиқдан бир хил узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрнини аниқланг.

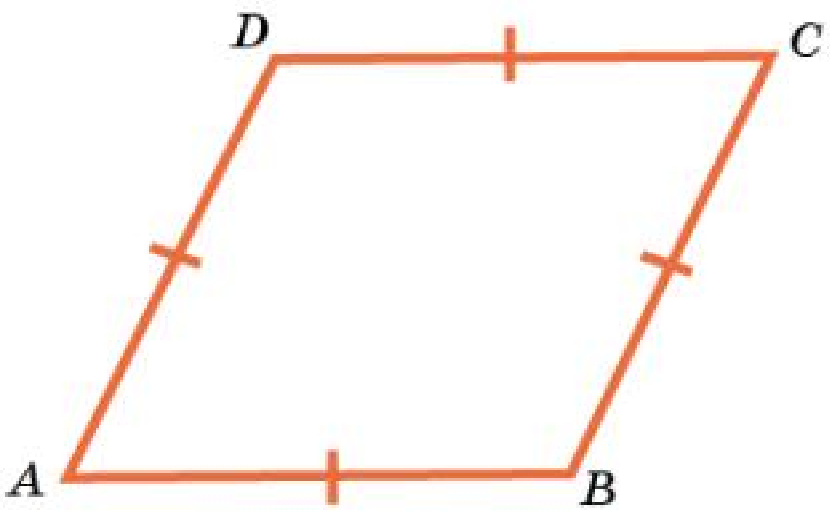
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

18. Ҳамма томонлари тенг бўлган параллелограмм ясанг. Унинг диагоналлари орасидаги бурчак ҳақида нима дейиш мумкин?

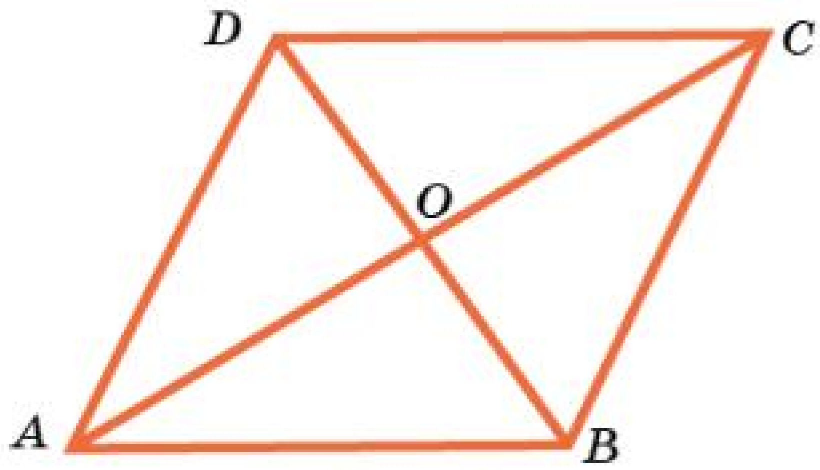
7-§. РОМБ. КВАДРАТ

Параллелограмнинг яна бир хусусий ҳолини кўриб чиқамиз.

Ҳамма томонлари тенг бўлган параллелограмм *ромб* деб аталади (7.1-расм).



7.1-расм



7.2-расм

Ромб параллелограмнинг барча хоссаларига эга бўлади.

Ромбнинг яна бир хоссасини кўриб чиқамиз.

Теорема. Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва улар мос равишда бурчаклари биссектрисалари бўлади.

Исботи. *ABCD* ромб ва *AC*, *BD* — унинг диагоналлари, *O* — диагоналларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин (7.2-расм). Ромбнинг томонлари тенг эканлигидан *ABD* тенгёнли учбурчак (*AB* = *AD*) бўлади. Параллелограмнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинишидан AO кесма ABD тенгёнли учбурчакнинг медианаси бўлади, у ҳолда у ана шу учбурчакнинг ҳам биссектрисаси, ҳам баландлиги бўлади. Демак, AC диагонал A бурчакнинг биссектрисаси ва BD диагоналга перпендикуляр бўлади.

Худди шундай BD диагонал B бурчакнинг биссектрисаси бўлиши исботланади.

Исботлашни мустақил бажаринг.

Теорема (ромбнинг аломати). Агар параллелограмнинг диагоналлари перпендикуляр бўлса, у ҳолда у ромб бўлади.

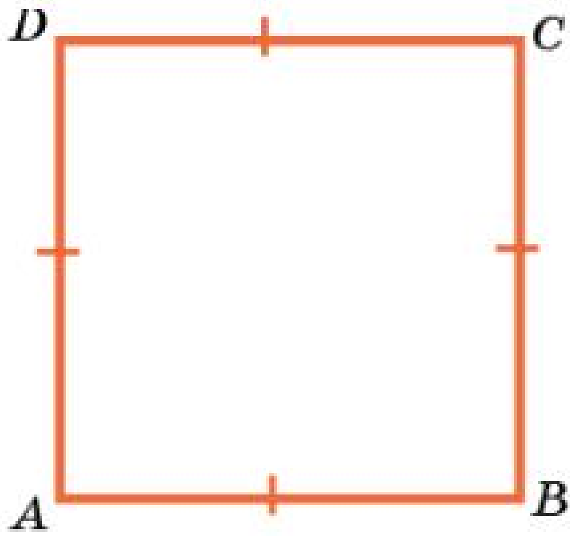
Исботи. $ABCD$ — параллелограмм, AC ва BD диагоналлар перпендикуляр, O — диагоналларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин (7.2-расм).

AOB ва AOD тўғри бурчакли учбурчаклар тенг (иккита катети бўйича: AO — умумий томон, $OB = OD$). У ҳолда $AB = AD$. Параллелограмнинг қарама-қарши томонлари тенг эканлигидан унинг қолган томонлари ҳам тенг бўлади, яъни $ABCD$ — ромб.

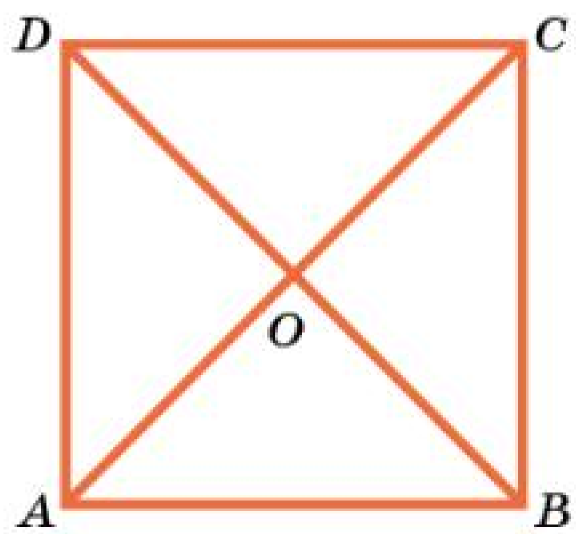
Ромбнинг навбатдаги аломатини исботланг.

Агар параллелограмнинг диагонали унинг бурчаги биссектрисасида ётса, у ҳолда бу параллелограмм ромб бўлади.

Ҳамма томонлари тенг бўлган тўғри тўртбурчак *квадрат* деб аталади (7.3-расм).



7.3-расм



7.4-расм

Ҳамма бурчаклари горизонтал бўладиган ромб *квадрат* деп аталади.

Квадрат тўғри тўртбурчак ва ромбнинг барча хоссаларига эга бўлади.

Теорема (квадратнинг аломати). Агар тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари перпендикуляр бўлса, у ҳолда у квадрат бўлади.

Исботи. $ABCD$ тўғри тўртбурчак, AC ва BD диагоналлар перпендикуляр, O — диагоналларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин (7.4-расм).

AOB ва AOD тўғри бурчакли учбурчаклар тенг (иккита катети бўйича: AO — умумий томон, $OB = OD$). У ҳолда $AB = AD$. Тўғри тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари тенг эканлигидан унинг қолган томонлари ҳам тенг бўлади, яъни $ABCD$ — квадрат. ◻

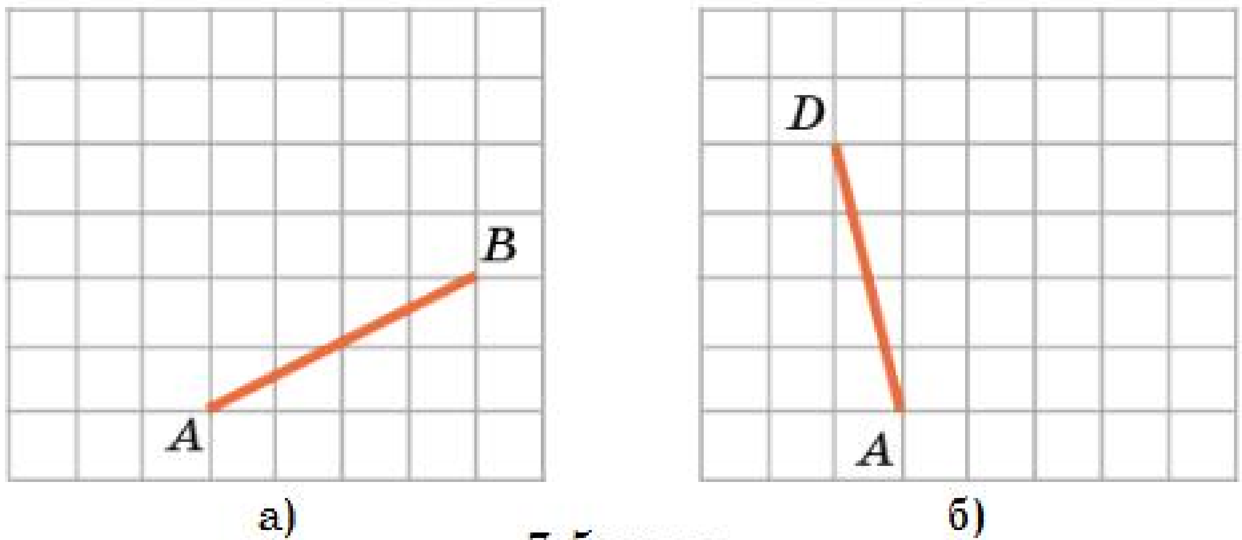
Квадратнинг яна бошқа аломатини айтинг.

1. Қандай параллелограмм ромб дейилади?
2. Ромбнинг аломатини ифодаланг.
3. Қандай тўғри тўртбурчак квадрат дейилади?
4. Қандай ҳолларда ромб квадрат бўлади?
5. Квадратнинг аломатини ифодаланг.

Машқлар

A

1. Квадратнинг: а) диагоналлари орасидаги бурчагини; б) диагонали билан томони орасидаги бурчагини топинг.
2. 7.5-расмдаги битта томони кўрсатилган $ABCD$ квадратни ясанг.

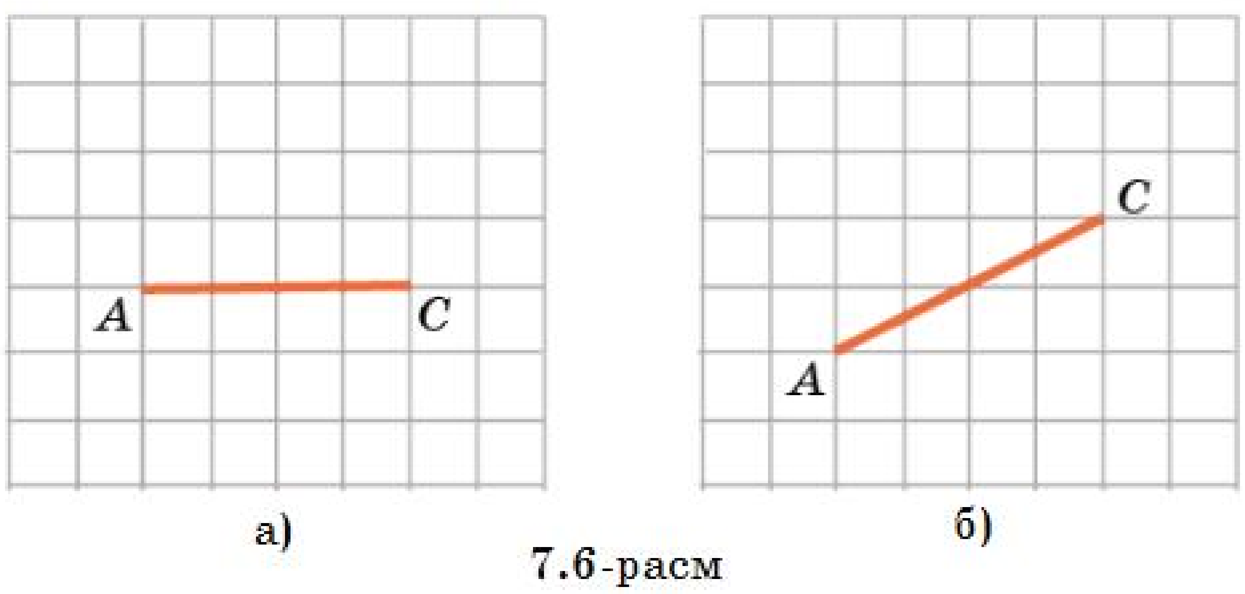


7.5-расм

3. Томони a ва ўткир бурчаги 60° бўлган ромбнинг кичик диагоналини топинг.
4. Ромбнинг бир диагонали унинг томонига тенг. Ромбнинг бурчакларини топинг.

B

5. 7.6-расмда AC диагонал кўрсатилган. $ABCD$ квадратни ясанг.

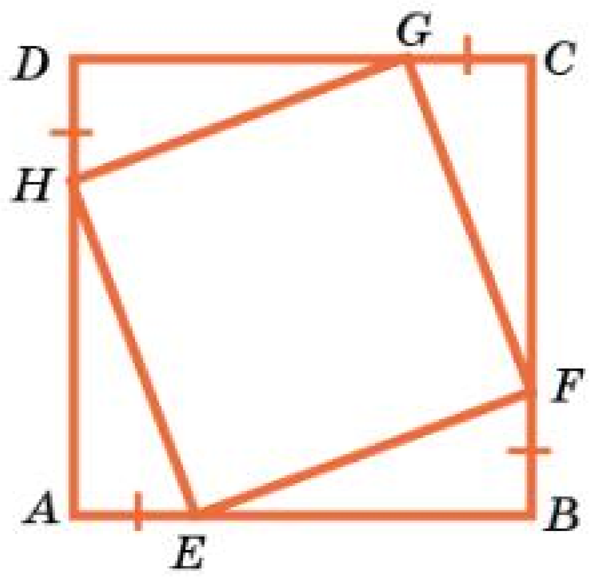


7.6-расм

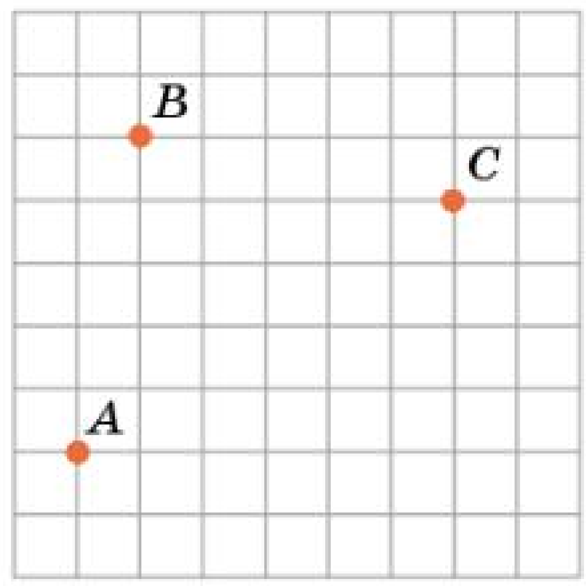
6. Квадрат диагоналларининг кесишиш нуқтасидан унинг бир томонигача бўлган масофа 5 см га тенг. Квадратнинг периметрини топинг.
7. Қандай тўртбурчакнинг учлари тўғри тўртбурчак томонларининг ўрталари бўлади.
8. Қандай тўртбурчакнинг учлари квадрат томонларининг ўрталари бўлади.
9. Квадратнинг диагонали унинг бурчаги биссектрисасида ётишини исботланг.
10. Агар тўғри тўртбурчакнинг диагонали унинг бурчаги биссектрисасида ётса, у ҳолда у квадрат бўлишини исботланг.

C

11. Ромб диагоналларининг унинг бир томони билан ҳосил қилувчи бурчаклари 4 : 5 нисбат каби. Ромбнинг бурчакларини топинг.
12. Агар ромбнинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда у квадрат бўлишини исботланг.
13. $ABCD$ квадратнинг томонларидан кетма-кет $AE = BF = CG = DH$ тенг кесмалар олинган (7.7-расм). $EFGH$ — тўртбурчак квадрат эканини исботланг.

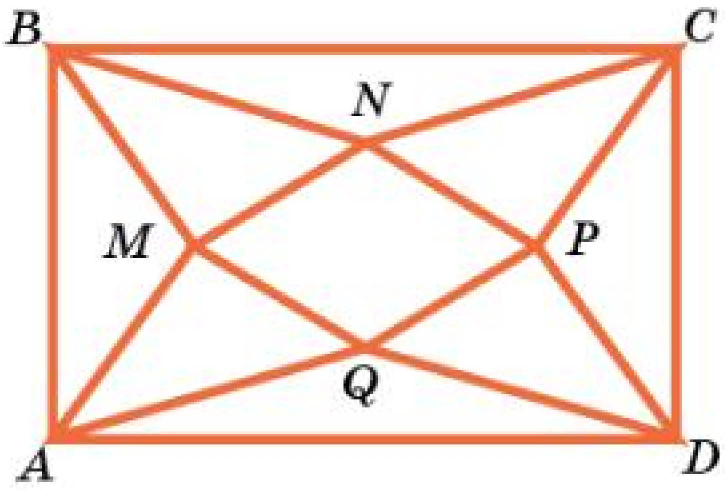


7.7-расм

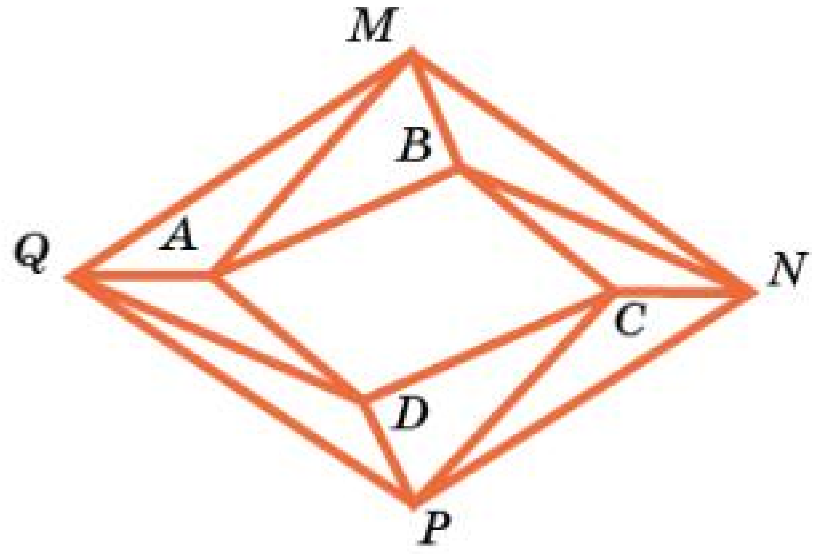


7.8-расм

14. Ромбни: а) томони ва диагонали; б) икки диагонали бўйича ясанг.
15. Квадратни: а) томони; б) диагонали бўйича ясанг.
16. Катак қоғозда $ABCD$ квадратнинг учта учи белгиланган (7.8-расм). Масштабсиз чизғичдан фойдаланиб, квадратнинг тўртинчи учини ва марказини ясанг.
17. 7.9-расмда $ABCD$ тўғри тўртбурчак тасвирланган. Унинг ичида томонлари ўзаро тенг бўлган тенгёнли учбурчаклар ясалган: $\Delta ABM = \Delta CDP$ ва $\Delta BCN = \Delta ADQ$. $MNPQ$ тўртбурчак ромб бўлишини исботланг.
18. 7.10-расмда $ABCD$ параллелограмм тасвирланган. Унинг сиртида томонларига кўра ўзаро тенг учбурчаклар ясалган: $\Delta ABM = \Delta CDP$ ва $\Delta BCN = \Delta DAQ$. $MNPQ$ тўртбурчак ромб бўладими?



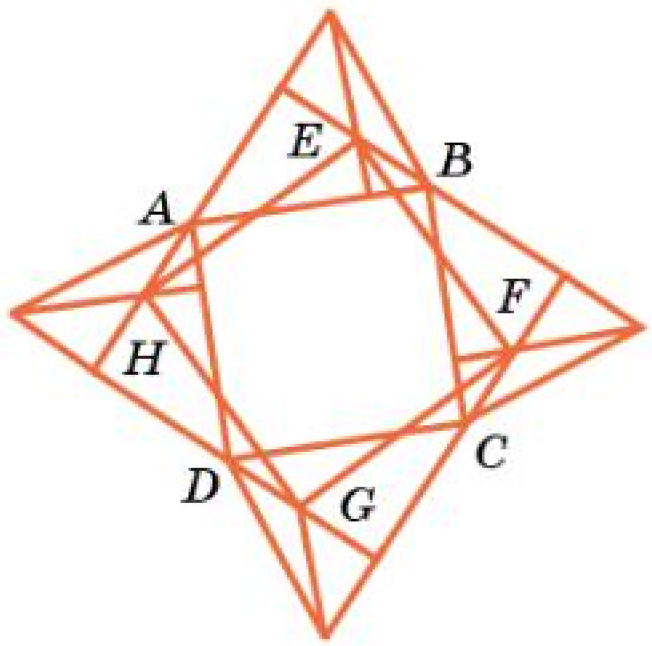
7.9-расм



7.10-расм

19. *ABCD* квадратнинг ташқарисига томонларига кўра тенг бўлган учбурчаклар ясалган (7.11-расм). *E*, *F*, *G*, *H* — ушбу учбурчак баландликларининг кесишиш нуқталари. *EFGH* тўртбурчакнинг квадрат бўлишини исботланг.

20. Майдон марказида фаввора жойлашган, унинг атрофига бир хил 4 та атиргул гулзорини бўлиб қўйиш керак. Фавворанинг ҳамма гулзордан бир хил узоқликда бўлишини таъминлаш учун 36 та атиргулни ҳар бир гулзорга 10 тупдан қандай ўтказиш мумкин?



7.11-расм

21. Бурчаги 120° га тенг бўлган тенгёнли учбурчакнинг учларида жойлашган учта уй аҳолиси умумий қудуқ қазишмоқчи бўлишди. Учала уйдан бир хил узоқликда жойлашадиган қилиб қудуқни қандай жойга қазиш мумкин?

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

22. Исталган бир учбурчак ясанг. Ушбу учбурчакнинг иккита томони ўрталарини туташтирувчи кесма ўтказинг. Ушбу кесманинг қандай хоссалари мавжуд?

8-§. УЧБУРЧАКНИНГ ЎРТА ЧИЗИҒИ

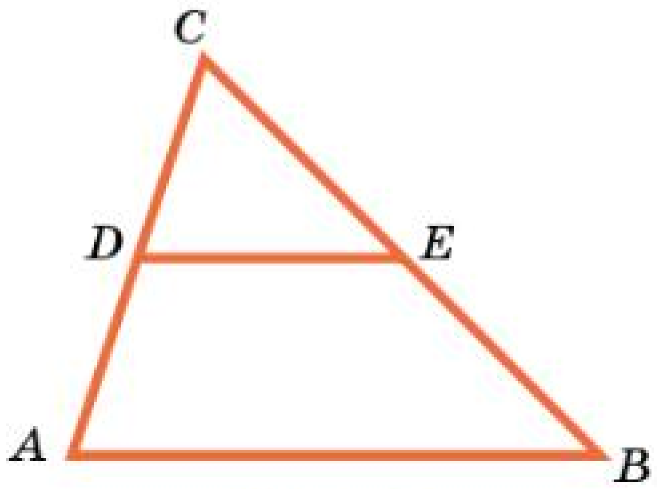
ABC учбурчакни кўриб чиқамиз. *D* ва *E* нуқталар — мос равишда *AC* ва *BC* томонларнинг ўрталари бўлсин. Ушбу нуқталарни *DE* кесма орқали туташтирамиз (8.1-расм).

Учбурчакнинг ўрта чизиғи деб унинг иккита томони ўрталарини туташтирувчи кесмага айтилади.

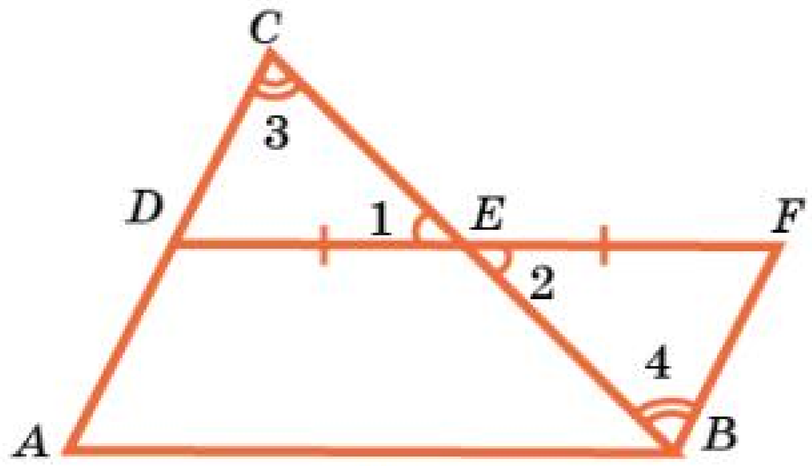
Бир томони *AB* бўлган бир нечта учбурчаклар ясанг. Уларнинг бошқа иккита томони ўрталарини туташтирувчи ўрта чизиқларини ўтказинг ва узунликларини ўлчанг. Учбурчакларнинг ўрта чизиқлари ўзаро тенг бўладими?

Теорема. Учбурчакнинг ўрта чизиғи унинг бир томонига параллел ва унинг ярмига тенг бўлади.

Исботи. ABC учбурчак ва DE кесма — унинг мос равишда AC ва BC томонлари ўрталарини туташтирувчи ўрта чизиғи бўлсин (8.2-расм).



8.1-расм



8.2-расм

Ушбу DE ўрта чизиқ AB томонига параллел ва унинг ярмига тенг эканини исботлаймиз. Бунинг учун DE нурдан $EF = DE$ кесма ажратамиз ва B билан F нуқталарни кесма орқали туташтирамиз. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра (берилгани бўйича $CE = BE$, чизма бўйича $DE = FE$, $\angle 1 = \angle 2$ вертикал бурчаклар) ECD ва EBF учбурчаклар тенг бўлади. У ҳолда $BF = CD$, демак, $BF = AD$. $\angle 3$ бурчак $\angle 4$ бурчакка тенг, демак, AC ва BF тўғри чизиқлар параллел. Шундай қилиб, параллелограмнинг биринчи аломатига кўра $ABFD$ тўртбурчак параллелограмм бўлади. AB томони DF томонига параллел ва тенг бўлади. ABC учбурчакнинг DE ўрта чизиғи DF кесманинг ярмига тенг, демак, у AB томонининг ярмига тенг бўлади. ☐

Учбурчак бир томонининг ўртаси орқали ўтувчи ва иккинчи томонига параллел бўлган тўғри чизиқ унинг учинчи томонини тенг иккига бўлишини исботланг.

1. Учбурчакнинг ўрта чизиғи нима?
2. Учбурчакнинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремани ифодаланг.

Машқлар

A

1. Учбурчакнинг томонлари 8 см, 10 см ва 12 см. Учлари шу учбурчак томонларининг ўрталари бўлган учбурчакнинг томонларини топинг.
2. Учбурчакнинг томонлари 2 см, 3 см ва 4 см. Унинг учлари бошқа учбурчак томонларининг ўрталари бўлади. Учбурчакларнинг периметрини топинг.
3. Тенгтомонли учбурчакнинг периметри 72 см га тенг. Унинг ўрта чизиғини топинг.

4. Учбурчакнинг периметри 15 см. Унинг исталган бир ўрта чизиғи орқали қирқиб олинган учбурчакнинг периметрини топинг.

B

5. Учбурчакнинг томонлари 3 : 4 : 5 нисбат каби, унинг периметри 60 см. Учлари ана шу учбурчак томонларининг ўрталари бўлган учбурчакнинг томонларини топинг.

6. Учбурчакнинг ўрта чизиқлари уни тенг тўртта учбурчакка бўлишини исботланг.

7. Тенгёнли учбурчакнинг асосига параллел бўлган ўрта чизиғи 3 см га тенг. Агар учбурчакнинг периметри 16 см бўлса, у ҳолда унинг томонларини топинг.

8. Исталган тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограмнинг учлари бўлишини исботланг.

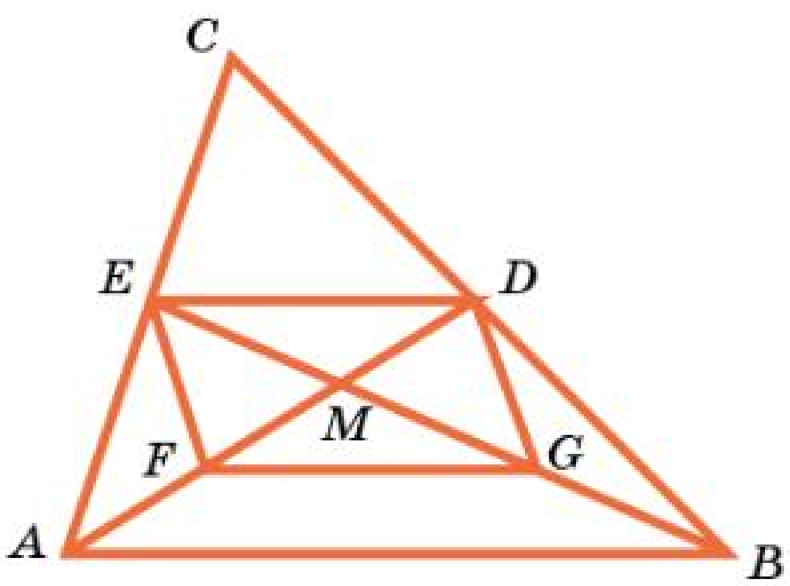
9. Тўртбурчакнинг диагоналлари a ва b. Учлари ана шу тўртбурчак томонларининг ўрталари бўлган тўртбурчакнинг периметрини топинг.

10. Тўғри тўртбурчакнинг кичик томони 20 см га тенг ва у диагонали билан 60° ли бурчак ҳосил қилади. Тўғри тўртбурчак томонларининг ўрталари туташтирилган. Ҳосил бўлган тўртбурчакнинг периметрини топинг.

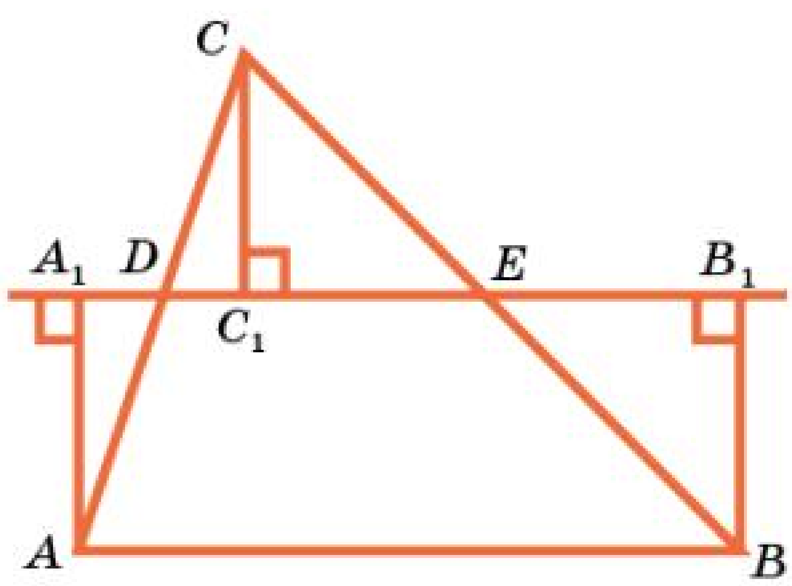
11. Тўғри тўртбурчак томонларининг ўрталари ромбнинг учлари ва аксинча, ромб томонларининг ўрталари тўғри тўртбурчакнинг учлари бўлишини исботланг.

C

12. ABC учбурчакда AD ва BE медианалар ўтказилган ва улар M нуқтада кесишади (8.3-расм). AMB учбурчакда $FG \parallel AB$ ўрта чизиқ ўтказилган. $FGDE$ тўртбурчак параллелограмм бўлишини исботланг.



8.3-расм



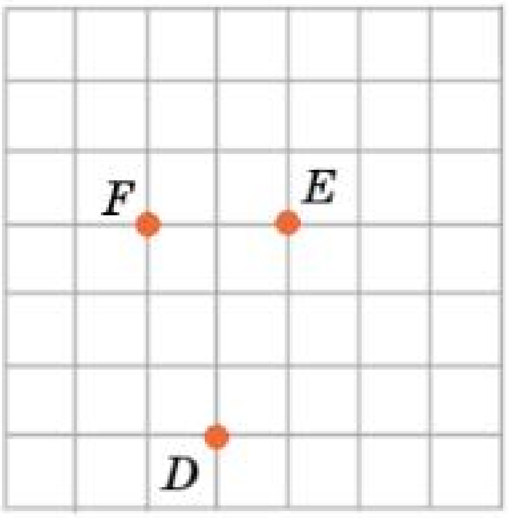
8.4-расм

13. Учбурчакнинг учлари унинг ўрта чизиғи ётган тўғри чизиқдан бир хил узоқликда жойлашишини исботланг (8.4-расм).

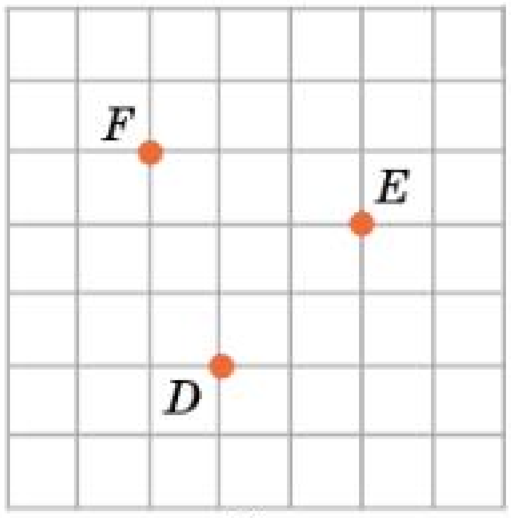
14. Битта тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқта берилган. Шу нуқталардан бир хил узоқликда жойлашган тўғри чизиқ қандай жойлашади? Шундай нечта тўғри чизиқ мавжуд?

15. ABC тенгёнли учбурчакнинг AB ва BC ён томонларидан AD ва BE тенг кесмалар ажратилган. DE кесманинг ўртаси ABC учбурчакнинг асосига параллел бўлган ўрта чизиғида ётишини исботланг.

16. Агар учбурчак томонларининг ўрталари D, E, F берилган бўлса, у ҳолда ана шу учбурчакни ясанг (8.5-расм).



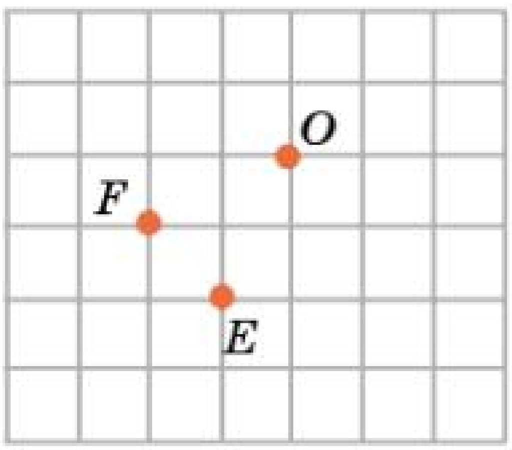
а)



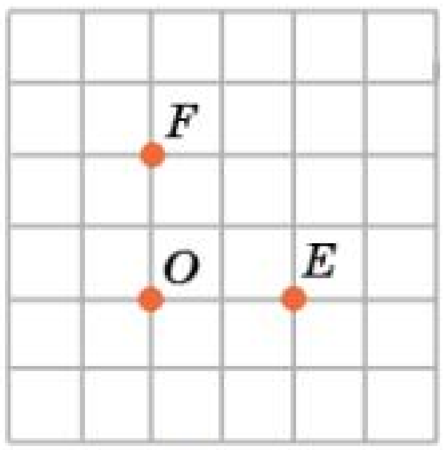
б)

8.5-расм

17. Ромбни унинг диагоналларининг O кесишиш нуқтаси билан иккита қўшни томонларининг E, F ўрталари бўйича ясанг (8.6-расм).

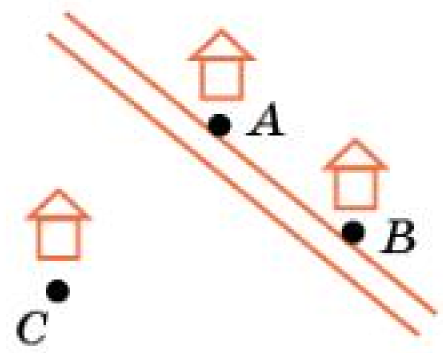


а)



б)

8.6-расм



8.7-расм

18. Учбурчакнинг ўрта чизиғи хоссасидан фойдаланиб, C уй орқали A ва B уйларни туташтирувчи йўлга параллел йўлни қандай ўтказиш мумкин (8.7-расм)?

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

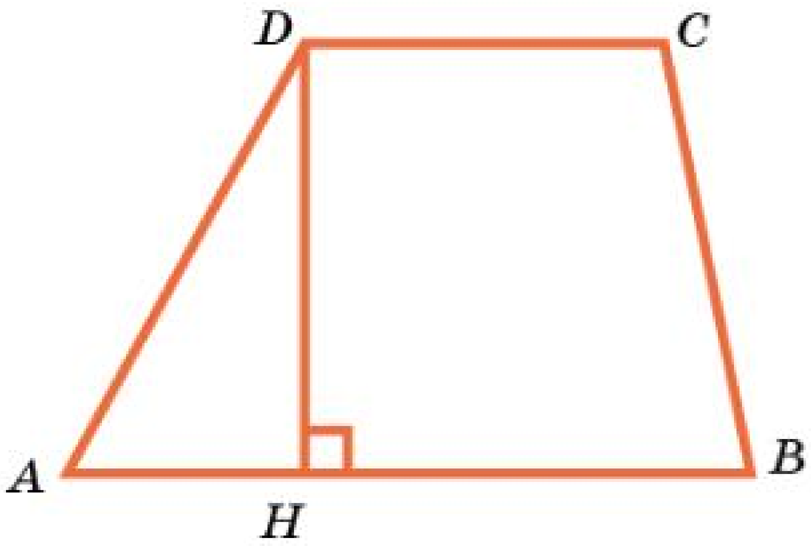
19. Иккита томони параллел ва қолган иккита томони параллел бўлмаган тўртбурчак ясанг. Шу тўртбурчакнинг: а) учта тўғри бурчаги; б) учта ўткир бурчаги бўлиши мумкинми?

9-§. ТРАПЕЦИЯ

Иккита томони параллел, бошқа иккита томони параллел бўлмаган тўртбурчак *трапеция* деб аталади (9.1-расм).

Трапециянинг параллел томонлари унинг асослари, параллел бўлмаган томонлари эса *ён томонлари* деб аталади.

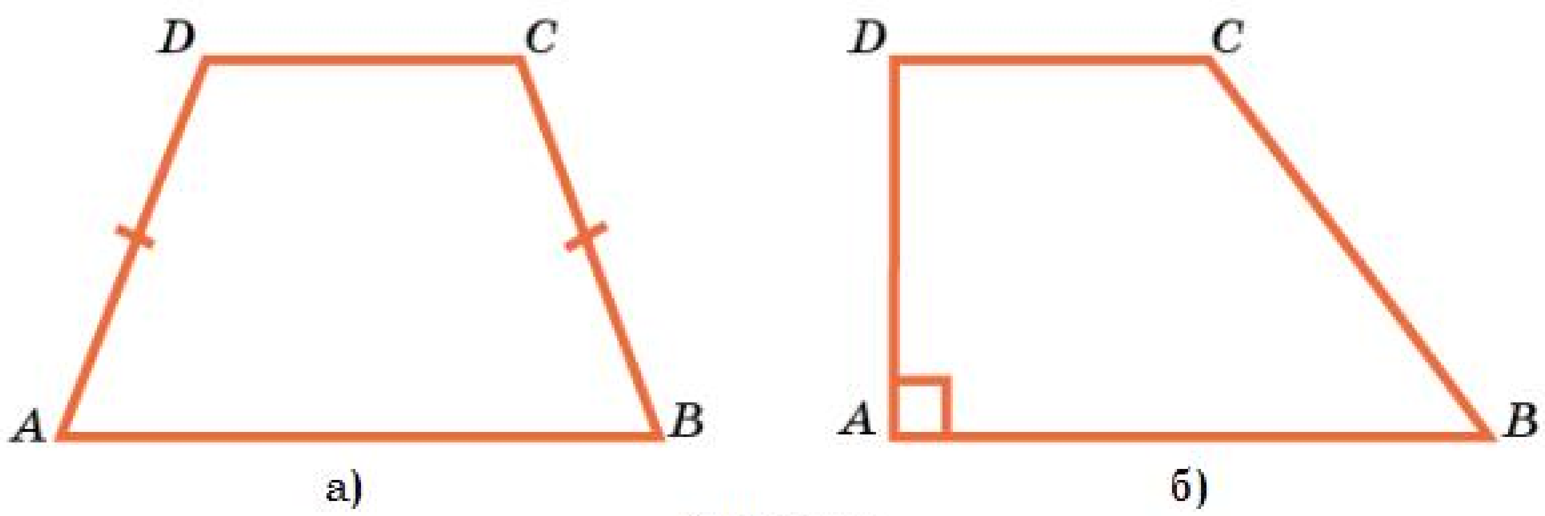
Трапециянинг учидан унга қарама-қарши ётган асосига ёки асосининг давомига туширилган перпендикуляр унинг *баландлиги* деб аталади.



9.1-расм

Агар трапециянинг ён томонлари тенг бўлса, у ҳолда у *тенгёнли трапеция* деб аталади (9.2-а расм).

Агар трапециянинг битта бурчаги тўғри бурчак бўлса, у ҳолда у *тўғри бурчакли трапеция* деб аталади (9.2-б расм).



9.2-расм

Тенгёнли трапециянинг баъзи бир хоссаларини кўриб чиқамиз.

1-хосса. Тенгёнли трапециянинг асосидаги бурчаклари тенг бўлади.

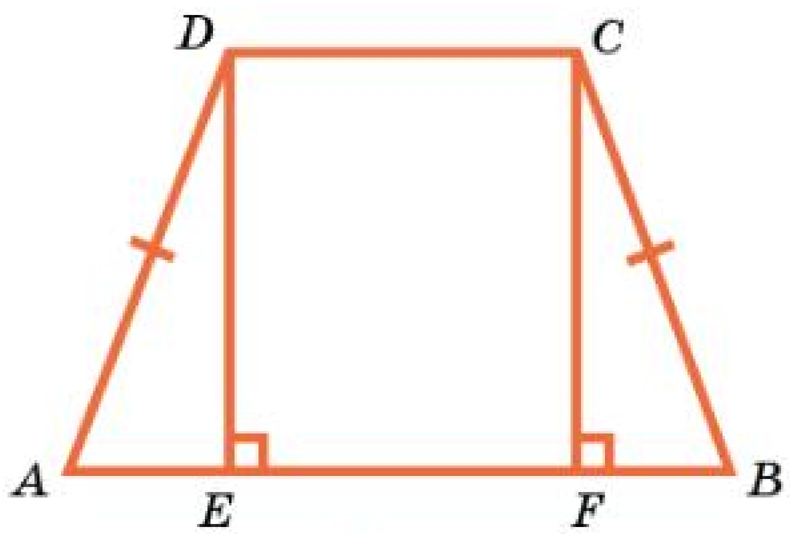
Исботи. $ABCD$ — тенгёнли трапеция, CD — унинг кичик асоси бўлсин (9.3-расм). AB асосидаги бурчаклар тенг бўлишини исботлаймиз.

Трапециянинг CF ва DE баландликларини ўтказамиз. ADE ва BCF тўғри бурчакли учбурчаклар гипотенузаси ва катети бўйича тенг ($AD = BC$, $DE = CF$). Демак, A ва B бурчаклар тенг бўлади.

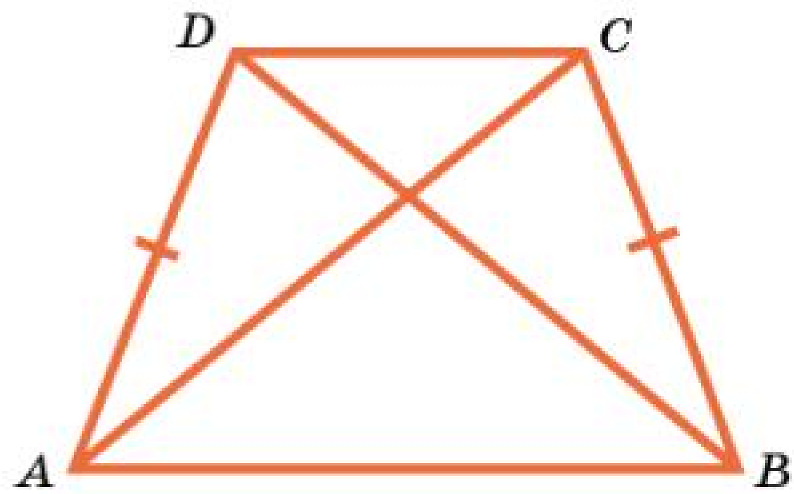
A ва D, B ва C бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг эканлигидан, A ва B бурчакларнинг тенглигидан D ва C бурчакларнинг тенглиги келиб чиқади. ☐

2-хосса. Тенгёнли трапециянинг диагоналлари тенг бўлади.

Исботи. $ABCD$ — тенгёнли трапеция ($AB \parallel CD$), AC, BD — унинг диагоналлари бўлсин (9.4-расм). Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра (AB — умумий томон, $BC = AD$, $\angle ABC = \angle BAD$) ABC ва BAD учбурчаклар тенг бўлади. Демак, $AC = BD$. ☐



9.3-расм



9.4-расм

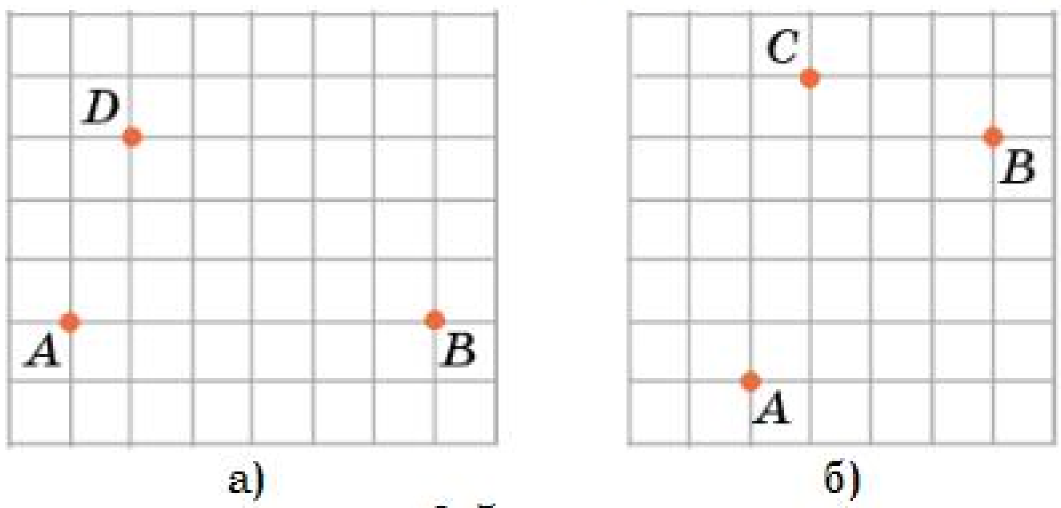
Тенгёнли трапециянинг исталган бир белгисини айтинг.

1. Қандай тўртбурчак трапеция деб аталади?
2. Трапециянинг қандай томонлари: а) асослари; б) ён томонлари деб аталади?
3. Трапециянинг баландлиги нима?
4. Қандай трапеция: а) тенгёнли; б) тўғрибурчакли трапеция деб аталади?
5. Тенгёнли трапециянинг асосидаги бурчаклар ораларида қандай боғланиш бор?
6. Тенгёнли трапециянинг диагоналлари ораларида қандай боғланиш бор?

Машқлар

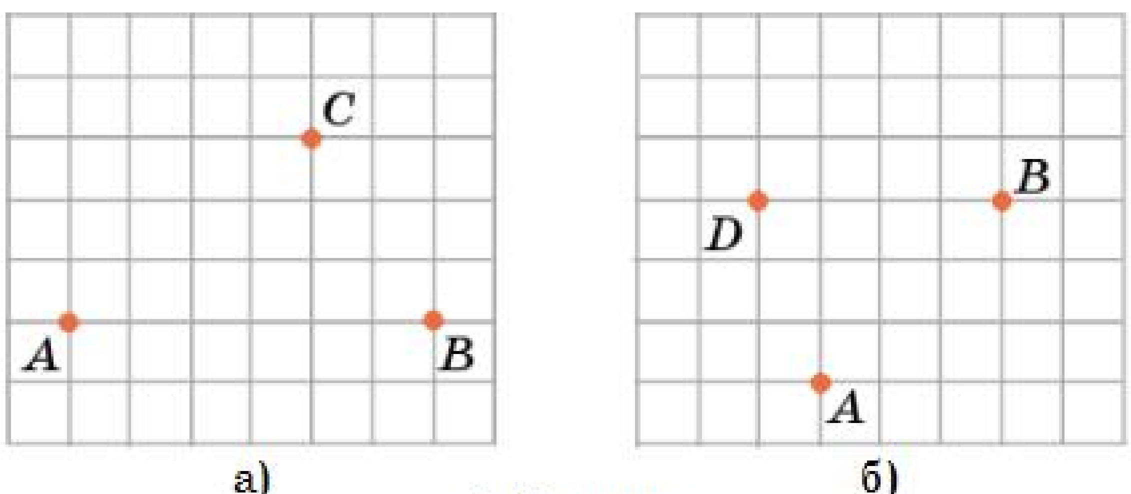
A

1. 9.5-расмда берилган учта учига кўра тенгёнли трапеция ясанг.



9.5-расм

2. 9.6-расмда берилган учта учи бўйича тўғри бурчакли трапеция ясанг.

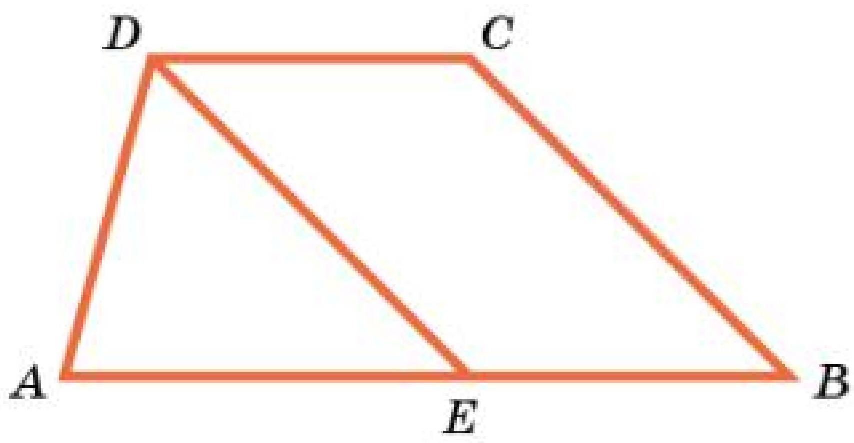


9.6-расм

3. Тўғрибурчакли трапециянинг ён томонлари 4 ва 5. Шу трапециянинг баландлигини топинг.
4. Тенгёнли трапециянинг ўтмас бурчаги учидан катта асосига туширилган перпендикуляр уни узунликлари 10 см ва 4 см бўлган бўлакларга бўлади. Трапециянинг кичик асосини топинг.
5. Тенгёнли трапециянинг қарама-қарши бурчаклари айирмаси 40° га тенг бўлса, у ҳолда унинг бурчакларини топинг.
6. Трапециянинг асосига ёпишган бурчаклардан бири ўткир, иккинчиси ўтмас бўла оладими?

B

7. Трапециянинг: а) учта тўғри бурчаги; б) учта ўткир бурчаги бўладими?
8. Тенгёнли трапеция томонларининг ўрталарини кетма-кет кесмалар орқали туташтирганда ҳосил бўладиган тўртбурчак турини аниқланг.
9. Тўртбурчакнинг диагоналлари тенг. У тенгёнли трапеция бўла оладими?
10. Трапециянинг 3 см га тенг бўлган кичик асоси учи орқали унинг ён томонига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқ трапециядан периметри 15 см га тенг бўлган учбурчакни қирқиб олади (9.7-расм). Трапециянинг периметрини топинг.



9.7-расм

C

11. Агар трапециянинг асосларидаги бурчаклари тенг бўлса, у ҳолда у тенгёнли трапеция эканлигини исботланг.
12. Агар трапециянинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда у тенгёнли трапеция эканлигини исботланг.
13. Трапециянинг: 1) ён томонларининг йиғиндиси асосларининг айирмасидан катта бўлишини; 2) диагоналларининг йиғиндиси асосларининг йиғиндисидан катта бўлишини; 3) асосларининг айирмаси ён томонларининг айирмасидан катта бўлишини; 4) диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинишини исботланг.
14. Тенгёнли трапеция диагоналларининг кесишиш нуқтаси билан ён томонлари давомининг кесишиш нуқтаси орқали ўтувчи тўғри чизиқ трапециянинг асосига перпендикуляр ва уни тенг иккига бўлишини исботланг.
15. Асослари 5 см ва 3 см, кичик ён томони эса 2 см бўлган тўғри бурчакли трапеция ясанг.

16. Асослари 6 см ва 3 см, ён томонлари эса 2 см бўлган тенгёнли трапеция ясанг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

17. Учбурчак ўрта чизиғининг таърифига ўхшаш трапециянинг ўрта чизиғи тушунчасини аниқлаб кўринг. Унинг қандай хоссалари бўлиши мумкин?

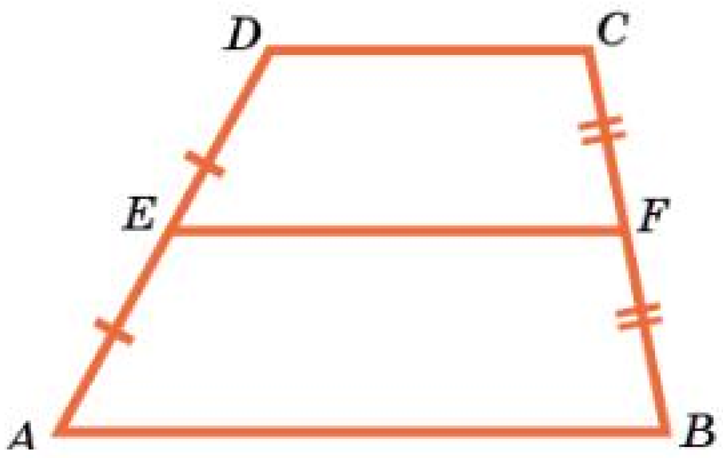
10-§. ТРАПЕЦИЯНИНГ ЎРТА ЧИЗИҒИ

Трапециянинг ўрта чизиғи деб унинг ён томонлари ўрталарини туташтирувчи кесмага айтилади (10.1-расм).

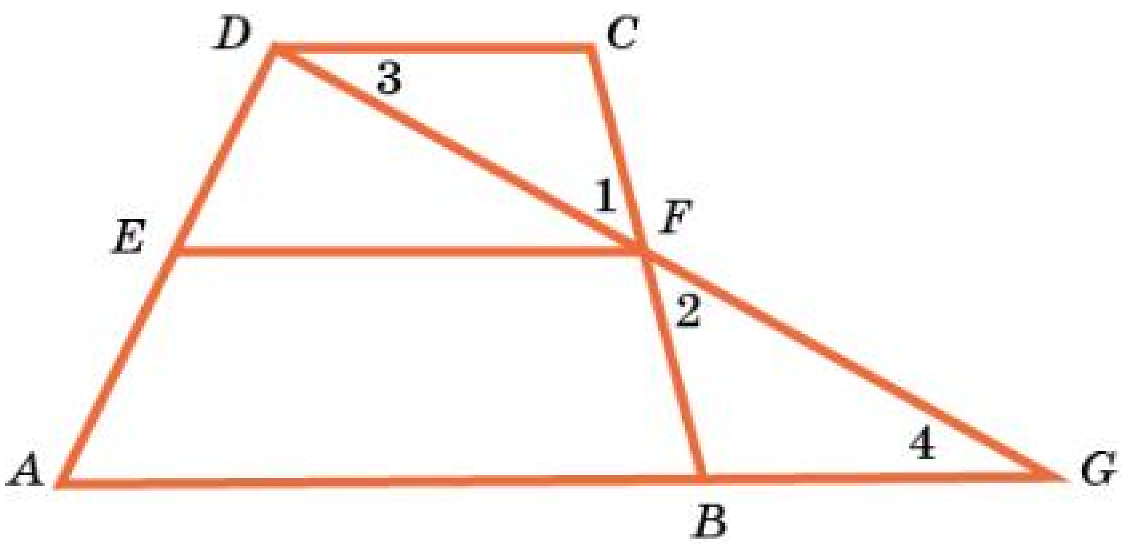
Асослари AB ва CD бўлган бир неча трапециялар ясанг. Уларнинг ўрта чизиқларини ўтказинг ва узунликларини ўлчанг. Барча шу трапециялар учун улар ўзаро тенг бўладими?

Теорема. Трапециянинг ўрта чизиғи унинг асосларига параллел ва улар йиғиндисининг ярмига тенг бўлади.

Исботи. $ABCD$ трапецияни ($AB \parallel CD$) кўриб чиқамиз. EF кесма — унинг мос равишда AD ва BC ён томонлари ўрталарини туташтирувчи ўрта чизиғи бўлсин. DF тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг AB тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасини G орқали белгилаймиз (10.2-расм).



10.1-расм



10.2-расм

Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатига кўра (шартга кўра $CF = BF$, $\angle 1 = \angle 2$ вертикал бурчаклар, $\angle 3 = \angle 4$ айқаш бурчаклар) DFC ва GFB учбурчаклар тенг бўлади. Бундан $DF = GF$ келиб чиқади, демак, EF кесма — AGD учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлади. Учбурчакнинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремага кўра EF ўрта чизиқ AB га параллел ва $EF = \frac{1}{2}AG$ бўлади. $AB \parallel CD$ эканлигидан, EF кесма иккала томонига ҳам параллел бўлади ва $EF = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}(AB + BG) = \frac{1}{2}(AB + CD)$. □

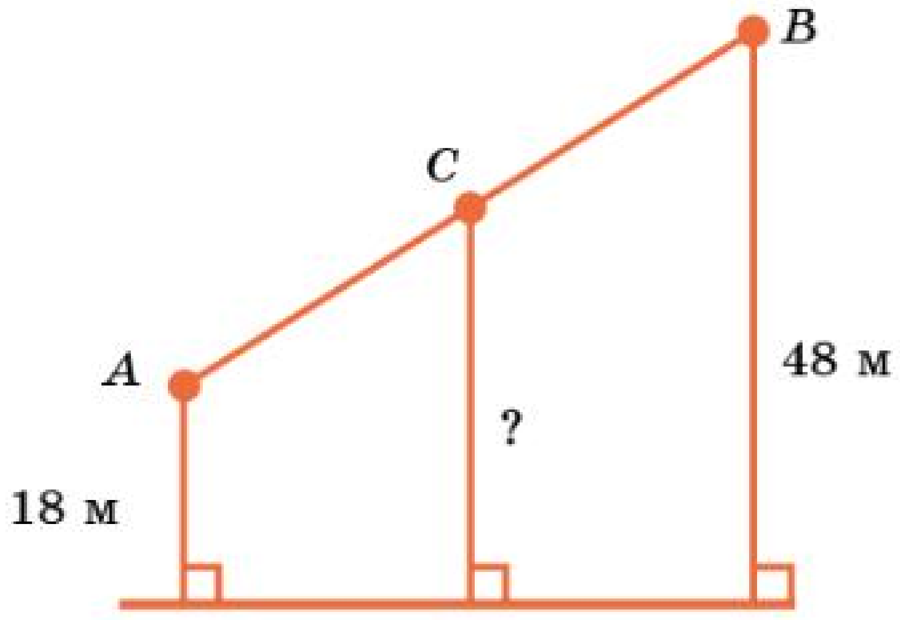
Трапециянинг битта ён томони ўртаси орқали ўтиб, асосларига параллел бўладиган тўғри чизиқ унинг иккинчи ён томонини тенг иккига бўлишини исботланг.

1. Трапециянинг ўрта чизиғи нима?
2. Трапециянинг ўрта чизиғи ҳақидаги теоремани ифодаланг.

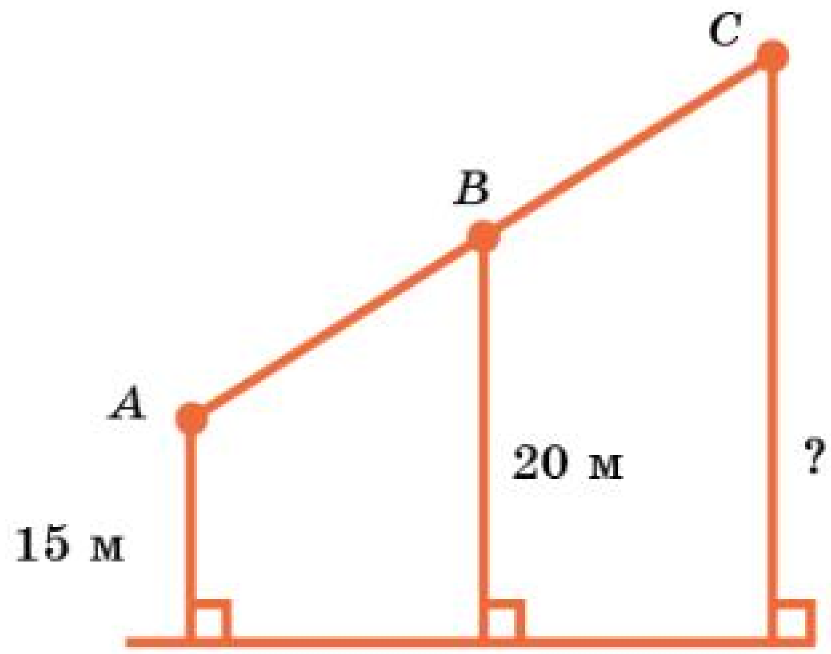
Машқлар

A

1. Трапециянинг асоси 6 см ва 8 см. Унинг ўрта чизиғини топинг.
2. Трапециянинг ўрта чизиғи 5 см га, битта асоси 4 см га тенг. Унинг иккинчи асосини топинг.
3. Трапециянинг ўрта чизиғи 7 см, унинг бир томони эса иккинчи томонидан 4 см узун. Трапециянинг асосларини топинг.
4. Трапециянинг периметри 50 см, параллел бўлмаган томонларининг йиғиндиси 20 см. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.
5. Тенгёнли трапециянинг периметри 80 см, унинг ўрта чизиғи эса ён томонига тенг. Трапециянинг ён томонини топинг.
6. Тенгёнли трапециянинг ўтмас бурчаги учидан катта асосига туширилган перпендикуляр уни узунликлари 5 см ва 2 см бўлган бўлакларга бўлади. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.
7. Трапециянинг асослари 5 : 2 нисбат каби, уларнинг айирмаси эса 18 см га тенг. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.
8. Трапециянинг асослари 2 : 3 нисбат каби, ўрта чизиғи эса 5 м га тенг. Асосларини топинг.
9. Битта тўғри чизиқда бир-бирларидан бир хил узоқликда учта телеграф устунлари турибди (10.3-расм). Четки устунлар йўлдан 18 м ва 48 м узоқликда жойлашган. Ўртадаги устун билан йўл орасидаги масофани топинг.



10.3-расм

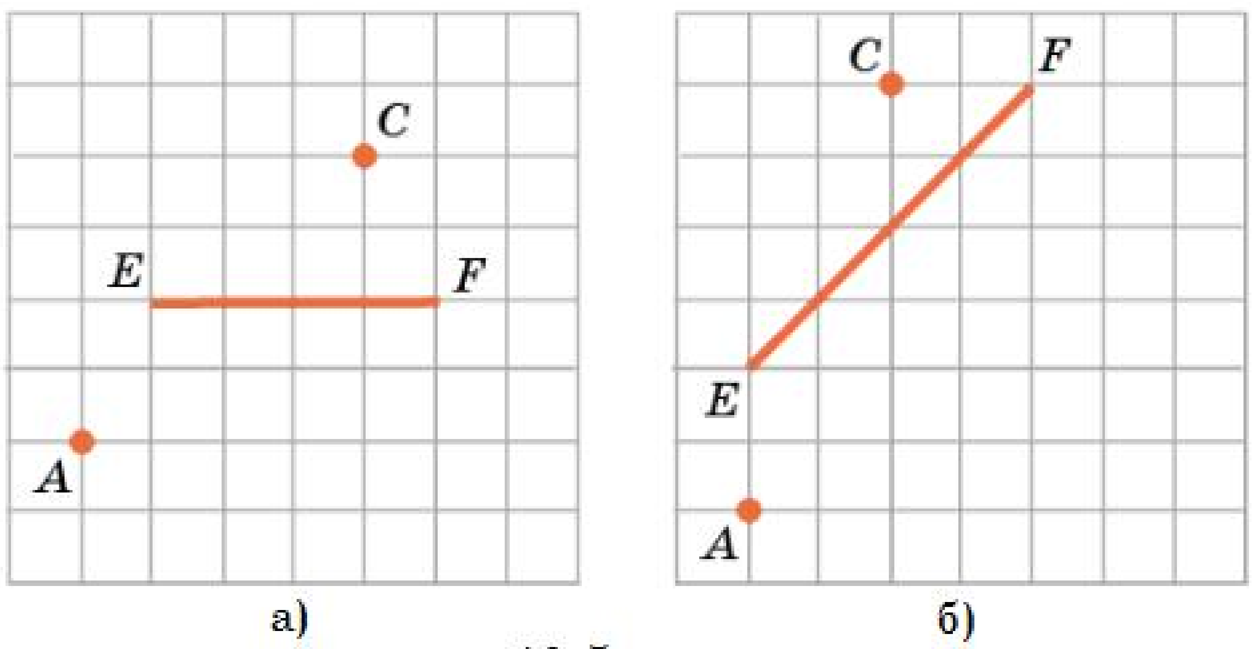


10.4-расм

10. Битта тўғри чизиқда бир-бирларидан бир хил узоқликда учта телеграф устунлари турибди (10.4-расм). Биринчи ва иккинчи устунлар йўлдан 15 м ва 20 м масофада жойлашган. Учинчи устун билан йўл орасидаги масофани топинг.

B

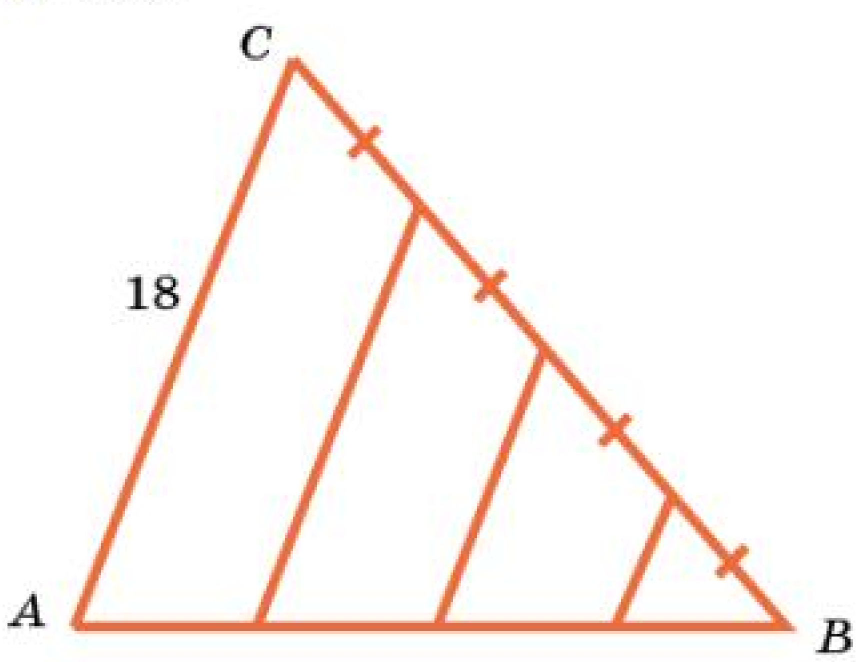
11. Трапециянинг ўрта чизиғи 10 см. Битта диагонали уни айирмаси 2 см га тенг бўлган кесмаларга ажратади. Трапециянинг асосларини топинг.
12. Трапециянинг асослари 4 см ва 10 см. Диагоналларидан бири трапеция ўрта чизиғини бўладиган кесмаларни топинг.
13. Трапециянинг диагонали унинг ўрта чизиғини a ва b га тенг кесмаларга ажратади. Трапециянинг асосларини топинг.
14. 10.5-расмда берилган A, C учлари ва EF ўрта чизиғи бўйича трапеция ясанг.



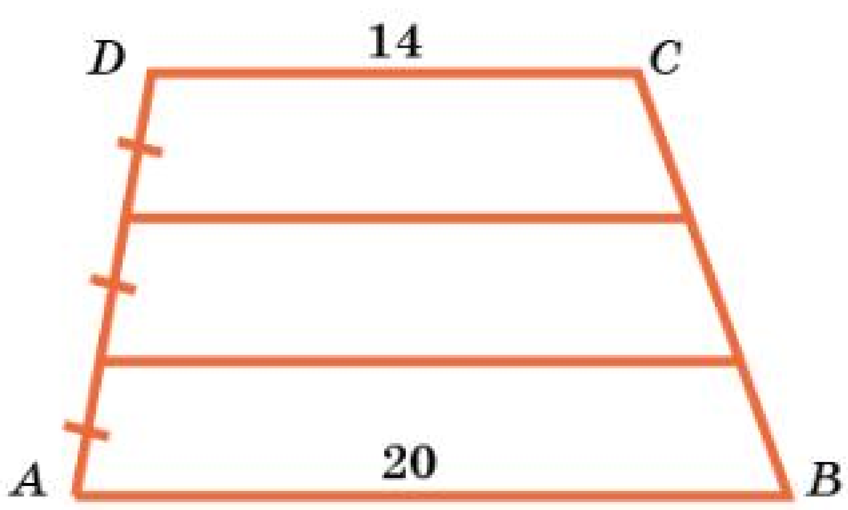
10.5-расм

C

15. ABC учбурчакнинг BC томони ўзаро тенг тўртта бўлакка бўлинган ва ана шу бўлувчи нуқталар орқали узунлиги 18 га тенг AC томонига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Учбурчакнинг ичида жойлашган ана шу тўғри чизиқларнинг кесмаларини топинг (10.6-расм).



10.6-расм



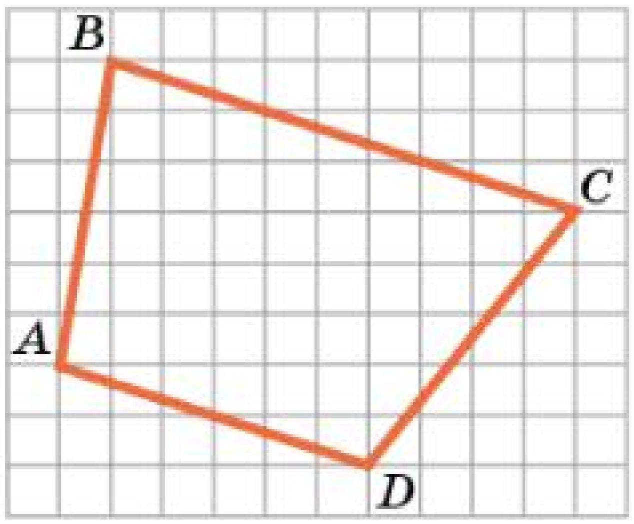
10.7-расм

16. Трапециянинг асослари 14 ва 20 га тенг. Ён томонларидан бири тенг учта бўлакка бўлинган ва ана шу бўлувчи нуқталар орқали асосларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган (10.7-расм). Трапециянинг ичида жойлашган ана шу тўғри чизиқларнинг кесмаларини топинг.

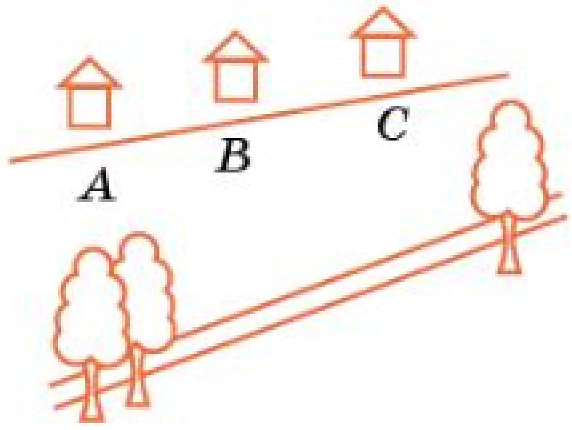
17. Трапеция диагоналларининг ўрталарини туташтирувчи кесма асосларига параллел ва улар айирмасининг ярмига тенг эканлигини исботланг.

18. Трапециянинг ўрта чизиғи диагоналларининг кесишиш нуқтаси орқали ўтадими?

19. Масштабсиз чизғичдан фойдаланиб, $ABCD$ трапециянинг ўрта чизиғини ясанг (10.8-расм).



10.8-расм



10.9-расм

20. Учта A, B, C уйлар битта тўғри чизиқда тўғри чизиқли йўлдан турли хил масофада жойлашган ва $AB = BC$ (10.9-расм). Агар четки иккита уй йўлдан мос равишда 72 м ва 54 м масофада жойлашган бўлса, у ҳолда ўртадаги уй йўлдан қандай узоқликда жойлашган?

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

21. Бурчак ясанг. Унинг бир томонига бир нечта тенг кесмалар жойлаштиринг. Кесмаларнинг учлари орқали бурчакнинг иккинчи томонини қирқиб ўтувчи параллел тўғри чизиқлар ўтказинг. Бурчакнинг иккинчи томонида ана шу тўғри чизиқлар билан ажратиб олинган кесмалар ҳақида нима дейиш мумкин?

11-§. ФАЛЕС ТЕОРЕМАСИ. ПРОПОРЦИОНАЛ КЕСМАЛАР

Қадимги грек олими Фалес номи билан аталган навбатдаги теорема учбурчак ва трапециянинг ўрта чизиқлари ҳақидаги теоремаларнинг умумлаштирилган шакли ҳисобланади.

Теорема (Фалес теоремаси). Агар бурчакнинг томонларини қирқиб ўтувчи параллел тўғри чизиқлар унинг бир томонида тенг кесмалар ажратса, у ҳолда улар унинг иккинчи томонида ҳам тенг кесмалар ажратади.

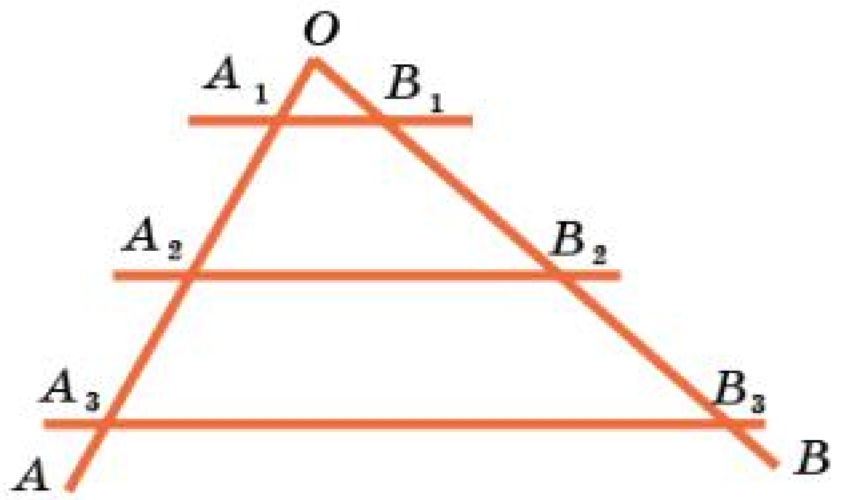
Исботи. AOB бурчакни кўриб чиқамиз. A_1, A_2, A_3 — параллел тўғри чизиқларнинг бурчакнинг битта томони билан кесишиш нуқталари; B_1, B_2, B_3 — параллел тўғри чизиқларнинг бурчакнинг иккинчи томони билан мос равишда кесишиш нуқталари бўлсин (11.1-расм).

Агар $A_1A_2 = A_2A_3$ бўлса, у ҳолда A_2B_2 трапециянинг ўрта чизиғи бўлади, демак, $B_1B_2 = B_2B_3$. □

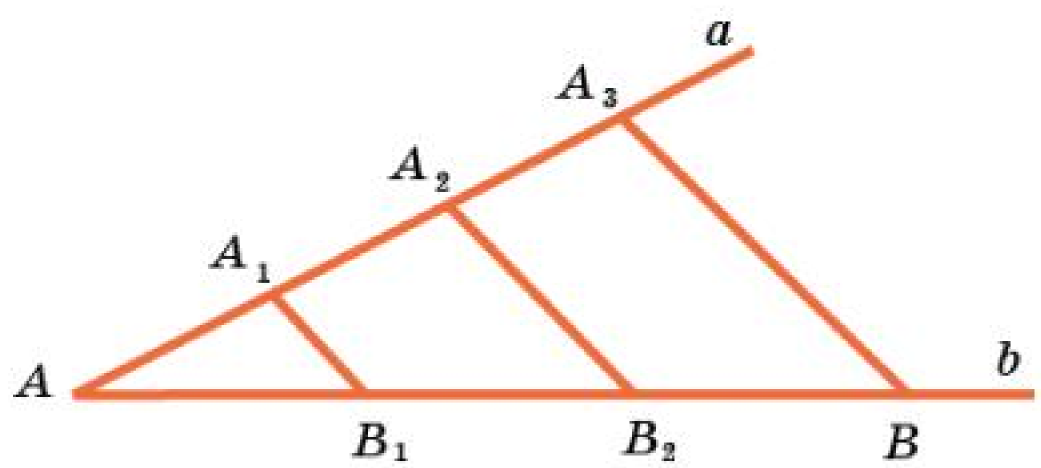
Фалес теоремасидан кесмани тенг n та бўлакка бўлиш учун фойдаланиш мумкин. Масалан, AB кесмани тенг 3 бўлакка бўламиз. A нуқта орқали AB тўғри чизиқда ётмайдиган a нурни ўтказиб, унда $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ тенг кесмалар ҳосил қиламиз (11.2-расм).

A_3B тўғри чизиқни ўтказамиз. A_1, A_2 нуқталар орқали A_3B кесмага параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз ва уларнинг AB кесма билан кесишиш нуқталарини мос равишда B_1, B_2 орқали белгилаймиз. Фалес теоремасига кўра $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$ бўлади.

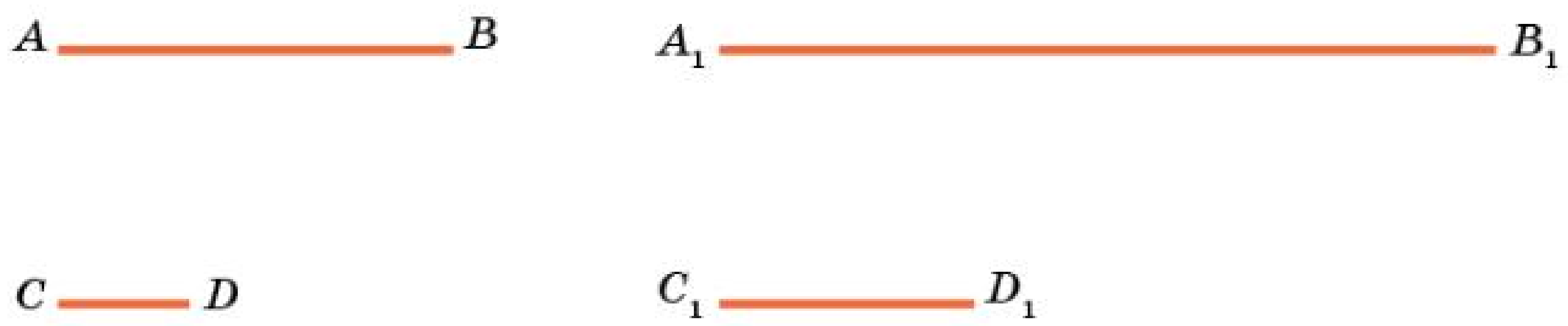
Кесмани тенг бешта бўлакка бўлиш усулини кўрсатинг.



11.1-расм



11.2-расм



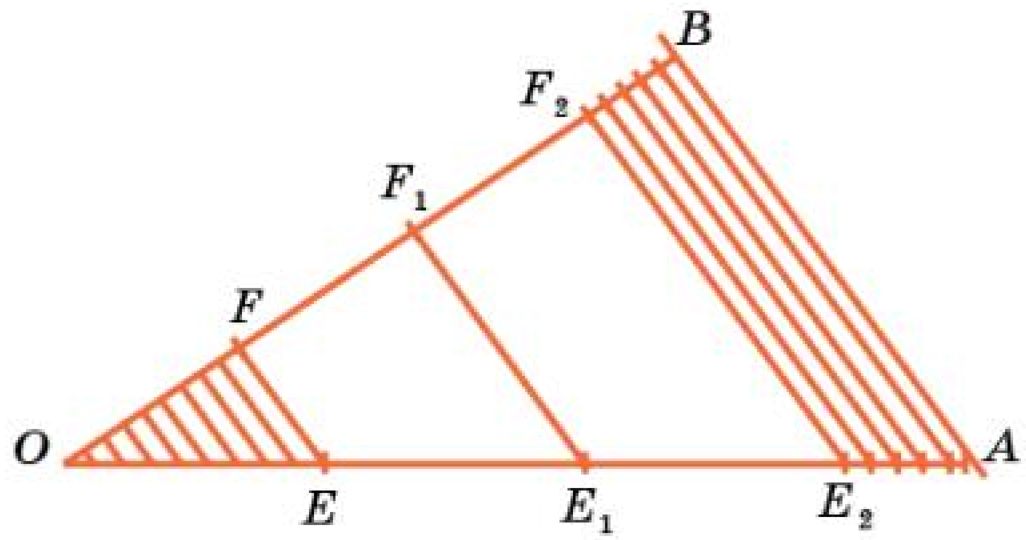
11.3-расм

AB ва CD кесмаларни кўриб чиқамиз (11.3-расм). CD кесмани бирлик кесма сифатида олиб, AB кесманинг узунлигини ўлчаймиз. Ҳосил бўлган сон AB ва CD *кесмаларнинг нисбати* деб аталади ва у $\frac{AB}{CD}$ ёки $AB : CD$ каби белгиланади.

AB, CD кесмалар A_1B_1, C_1D_1 кесмаларга *пропорционал* деб аталади, агар уларнинг нисбатлари тенг бўлса, яъни $\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1} = k$. k сони *пропорционаллик коэффициенти* деб аталади.

Теорема (пропорционал кесмалар ҳақида). Бурчак томонлари билан кесишувчи параллел тўғри чизиқлар бурчак томонларидан пропорционал кесмаларни қирқиб ажратади.

Исботлаш ғояси қуйида. O бурчак томонлари параллел тўғри чизиқлар билан мос равишда A, B ва E, F нуқталарда кесишсин (11.4-расм).



11.4-расм

Қуйидаги тенгликнинг тўғри эканлигини исботлаймиз:

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF}.$$

$\frac{OA}{OE}$ нисбат OE кесманинг OA кесмада неча марта жойлашишини, $\frac{OB}{OF}$ нисбат OF кесманинг OB кесмада неча марта жойлашишини кўрсатади. Фалес теоремаси OA ва OB кесмаларни мос равишда OE ва OF бирлик кесмалар орқали ўлчаш жараёнлари орасидаги мосликни ўрнатишга имкон беради. Ҳақиқатанан, AB га параллел тўғри чизиқлар OA тўғри чизиқдаги тенг кесмаларни OB тўғри чизиқдаги тенг кесмаларга ўтказади. OE кесма OF кесмага ўтади. OE кесманинг ўндан бир бўлаги OF кесманинг ўндан бир бўлагига ўтади ва ҳ.к. Бундан агар OE кесма ва унинг бўлаклари OA кесмада k марта жойлашадиган бўлса, у ҳолда OF кесма ва унинг бўлаклари OB кесмада ҳам k марта жойлашган бўлади, яъни $\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF} = k$. □

Натижа. Агар O бурчакнинг томонлари параллел тўғри чизиқлар билан A, B ва E, F нуқталарда кесишса (11.4-расм), у ҳолда қуйидаги тенглик тўғри бўлади:

$$\frac{EA}{OE} = \frac{FB}{OF}.$$

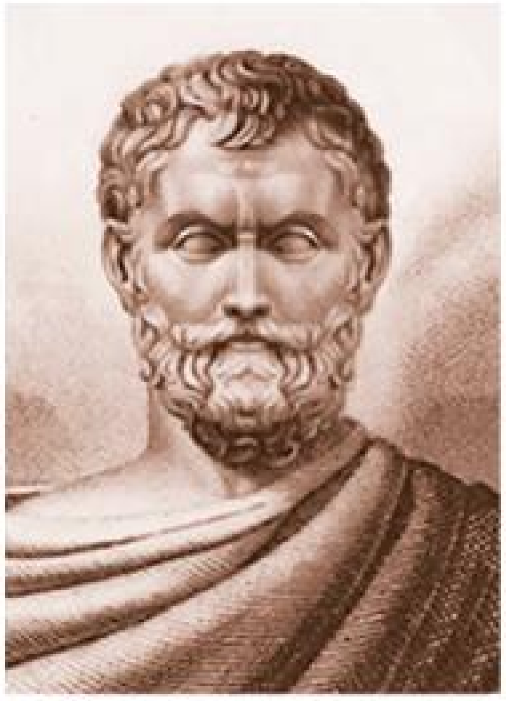
Исботи. Ҳақиқатан, $OA = OE + EA$ ва $OB = OF + FB$. Ушбу ифодаларни $\frac{OA}{OE} = \frac{OB}{OF}$ тенгликка қўйиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$1 + \frac{EA}{OE} = 1 + \frac{FB}{OF}.$$

Демак, берилган тенглик бажарилади. □

Пропорционал кесмалар ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, узунликлари берилган a, b, c кесмалар бўйича $d = \frac{a \cdot b}{c}$ кесмани ясашни кўрсатинг.

Тарихий маълумотлар



Фалес
(милоддан аввалги 624—547 йиллар)

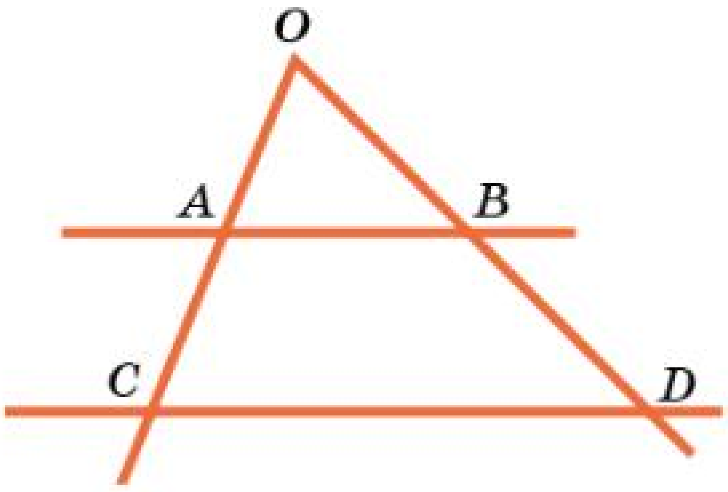
Маълумотларга кўра Фалес Эгей денгизи бўйидаги юнонлар шаҳри Милетда дунёга келиб, ўзининг фалсафа мактабини очган. Фалес биринчи геометрик олимлардан бири ҳисобланади. У геометриянинг дастлабки теоремаларини, яъни амалий кузатишларни хулосалаган ва мантиқий исботларни талаб этувчи ҳақиқатларни тасдиқлаган. Масалан, у вертикал бурчакларнинг тенглиги, тенгёнли учбурчаклар асосидаги бурчакларнинг тенглиги, иккита учбурчакнинг тенглиги ҳақидаги ва бошқа кўпгина теоремаларни исботлаган.

1. Фалес теоремасини ифодаланг.
2. Фалес теоремаси қайси теоремаларнинг умумлаштирилган шакли ҳисобланади?
3. Фалес теоремасидан фойдаланиб кесмани тенг n бўлакка қандай бўлиш мумкин?
4. Иккита кесманинг нисбати нима?
5. Қандай кесмалар пропорционал кесмалар деб аталади?
6. Пропорционал кесмалар ҳақидаги теоремани ифодаланг.

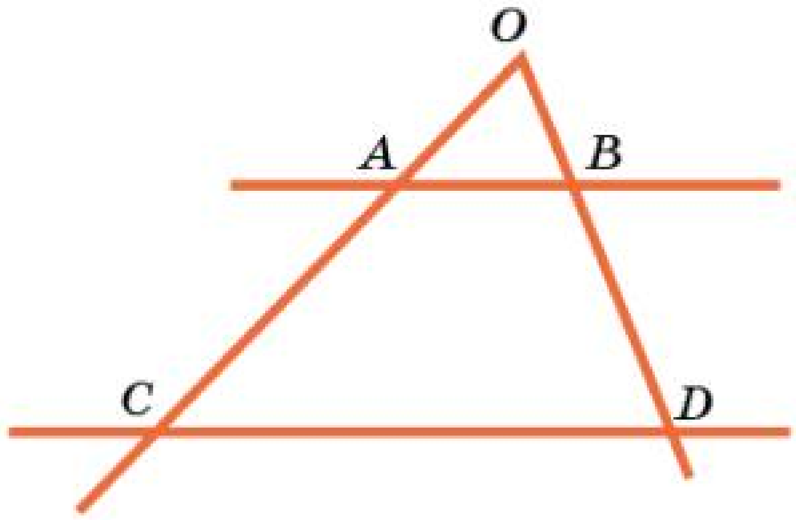
Машқлар

А

1. Учи O бўлган бурчакнинг томонлари иккита параллел тўғри чизиқлар билан мос равишда A, C ва B, D нуқталарда кесишган (11.5-расм). OC кесмани топинг, бу ерда $OB = BD = 5$ ва $OA = 4$.
2. Учи O бўлган бурчакнинг томонлари иккита параллел тўғри чизиқлар билан мос равишда A, C ва B, D нуқталарда кесишган (11.6-расм). OC кесмани топинг, бу ерда $OA = 6$, $AC = 12$ ва $OB = 5$.
3. Бурчакнинг бир томонидан 3 см ва 4 см га тенг иккита кесма олинган. Уларнинг учлари орқали параллел тўғри чизиқлар ўтказилган ва улар бурчакнинг иккинчи томонидан иккита кесма ажратади. Катта кесманинг узунлиги 6 см бўлса, иккинчи кесмани топинг.



11.5-расм



11.6-расм

4. Ушбу a, b ва c, d кесмалар пропорционал бўладими, аниқланг:
а) $a = 0{,}8$ см, $b = 0{,}3$ см, $c = 2{,}4$ см, $d = 0{,}9$ см;
б) $a = 50$ мм, $b = 6$ см, $c = 10$ см, $d = 2$ см.

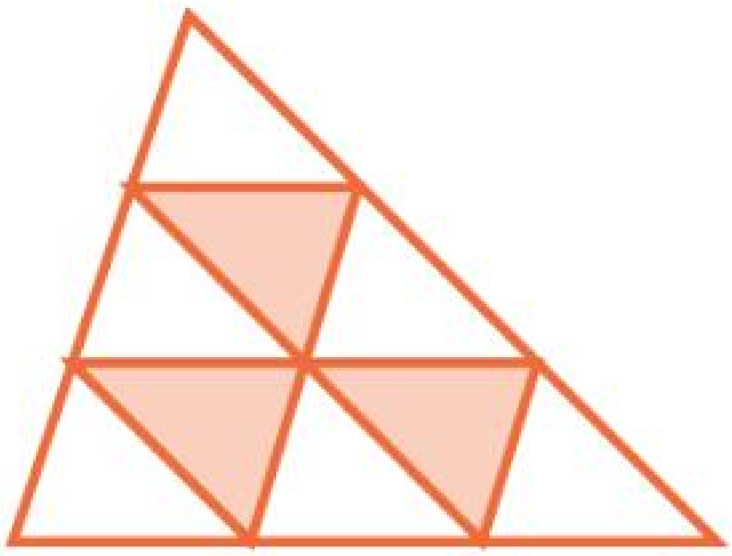
5. Ушбу a, b, c, d, e кесмалар орасидан пропорционал кесмаларни топинг, бу ерда: $a = 2$ см, $b = 17{,}5$ см, $c = 16$ см, $d = 35$ см, $e = 4$ см.

B

6. Параллел иккита тўғри чизиқ учи O бўлган бурчак томонларини мос равишда A, B ва C, D нуқталарда қирқиб ўтади. Топинг: а) CD ни, бу ерда $OA = 8$ см, $AB = 4$ см, $OD = 6$ см; б) OC ва OD ларни, бу ерда $OA : OB = 3 : 5$ ва $OD - OC = 8$ (см); в) OA ва OB ларни, бу ерда $OC : CD = 2 : 3$ ва $OA + OB = 14$ (см).

7. a, b, ва c кесмалар берилган. Иккита жуфт пропорционал кесмалар олиш учун тўртинчи d кесманинг узунлиги қандай бўлиши керак, бу ерда $a = 6$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см ва d кесма ушбу кесмаларнинг ҳар биридан узун.

8. Тенгтомонли учбурчакнинг ҳар бир томони тенг учта кесмага бўлинган ва бўлиниш нуқталари кесмалар орқали туташтирилган (11.7-расм). Дастлабки учбурчакнинг периметри p га тенг бўлса, у ҳолда учта учбурчакдан ташкил топган бўялган фигуранинг периметрини топинг.



11.7-расм

9. Учбурчакнинг учлари орқали унинг қарама-қарши томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Ҳосил қилинган учбурчакнинг томонлари дастлабки учбурчакнинг томонларидан икки марта узун эканлигини исботланг.

10. Берилган кесмани циркуль ва чизғич ёрдамида: а) тенг 3 бўлакка; б) тенг 5 бўлакка; в) тенг 6 бўлакка бўлинг.

11. 11.8-расмда Қозоғистондаги бирлик ва дўстлик, тинчлик ва ҳамжиҳатлик белгиси бўлган Тинчлик ва ҳамкорлик саройи — пи-

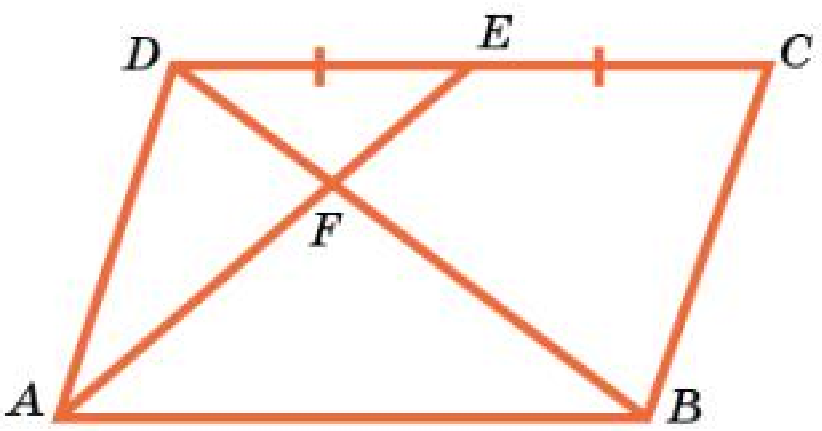
рамида тасвирланган. Пирамиданинг ён ёқлари — тенгтомонли учбурчаклар. Учбурчакнинг ҳар бир томони тенг бешта бўлакка бўлинган ва бўлинма кесмалар орқали туташтирилган. Агар дастлабки учбурчакнинг периметри 186 м га тенг бўлса, у ҳолда 10 та учбурчакдан ташкил топган фигуранинг периметрини топинг.


11.8-расм

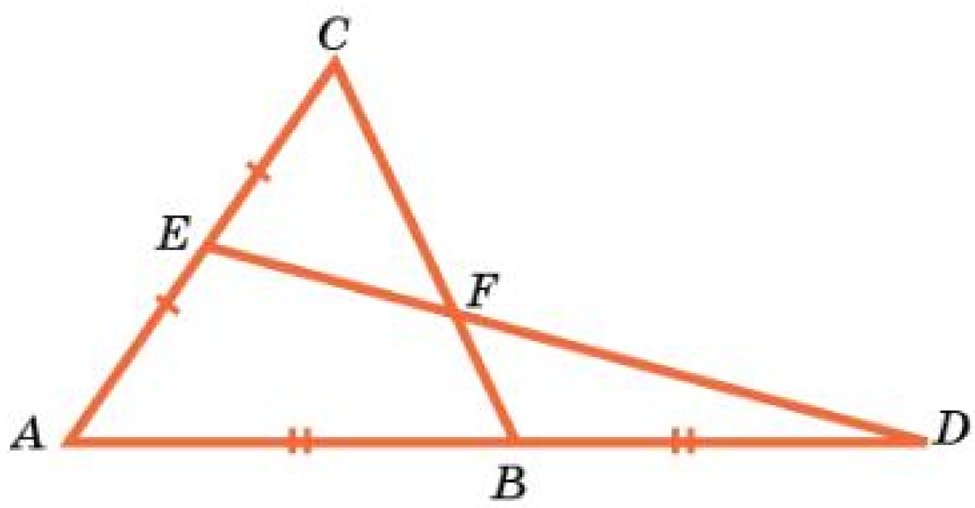
C

12. *ABCD* параллелограмда *E* нуқта — *CD* томоннинг ўртаси. *AE* кесма *BD* диагоналини *F* нуқтада қирқиб ўтади (11.9-расм). *DF* : *FB* нисбатни топинг.

13. *ABC* учбурчак *AB* томонининг давомида *D* нуқта олинган ва *AB* = = *BD*. Ушбу нуқта ва *AC* томоннинг *E* ўртаси орқали *BC* томонини *F* нуқтада кесиб ўтувчи тўғри чизиқ ўтказилган (11.10-расм). *BF* : *FC* нисбатни топинг.

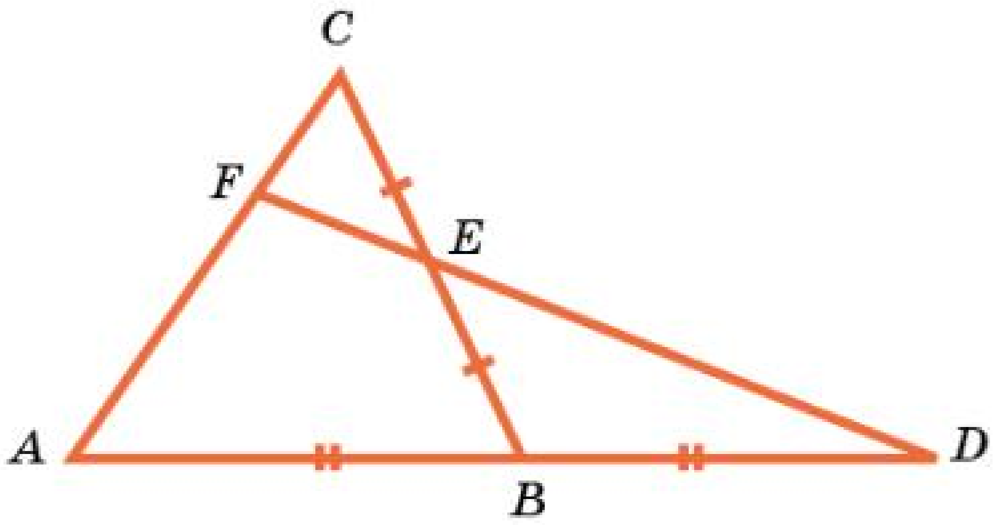


11.9-расм



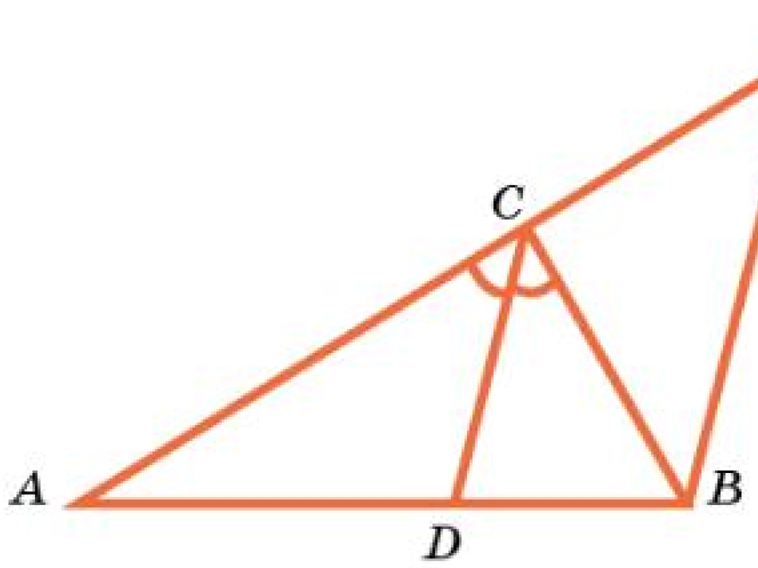
11.10-расм

14. *ABC* учбурчак *AB* томонининг давомида *D* нуқта олинган ва *AB* = *BD*. Ушбу нуқта ва *BC* томонининг *E* ўртаси орқали *AC* томонини *F* нуқтада кесиб ўтувчи тўғри чизиқ ўтказилган (11.11-расм). *AF* : *FC* нисбатни топинг.

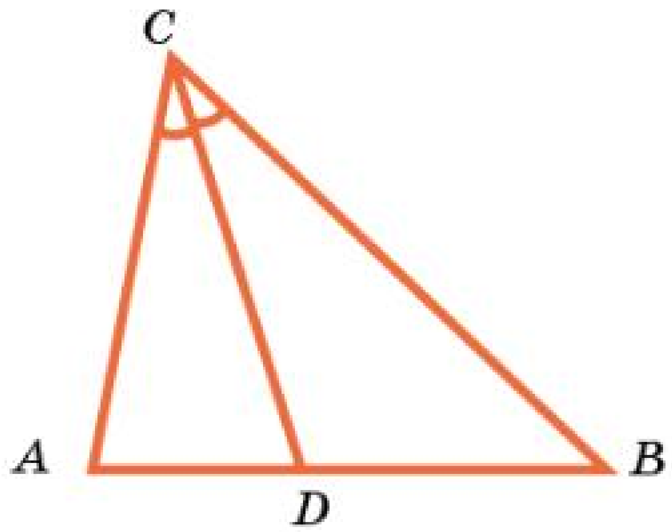


11.11-расм

15. 11.12-расмдан фойдаланиб, учбурчак бурчагининг биссектрисаси унинг қарама-қарши томонини ёпишган томонларига пропорционал бўлган бўлакларга ажратишини исботланг.



11.12-расм



11.13-расм

16. ABC учбурчакда CD — биссектриса, $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 6$ (11.13-расм). AD ва BD кесмаларни топинг.

Ахборот тайёрланг

17. Милетлик Фалес — дастлабки геометрик олимлардан бири. Ушбу олимнинг ҳаёти, илмий ишлари ҳақида ахборот тайёрланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

18. Исталган учбурчак ясанг. Унинг медианаларини ўтказинг.

19. Исталган: а) ўткир бурчакли; б) ўтмас бурчакли учбурчак ясанг. Унинг баландликларини ўтказинг.

12-§. УЧБУРЧАКНИНГ АЖОЙИБ НУҚТАЛАРИ

Учбурчакнинг ажойиб нуқталари:

а) биссектрисаларнинг кесишиш нуқтаси (*ички чизилган айлананинг маркази*);

б) томонларга ўтказилган ўрта перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси (*ташқи чизилган айлананинг маркази*);

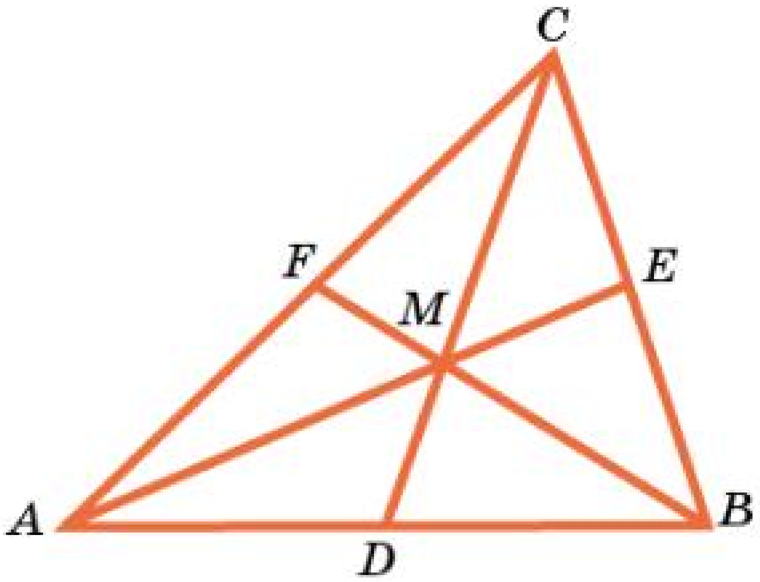
в) медианаларнинг кесишиш нуқтаси (*оғирлик маркази*);

г) баландликлар ёки улар давомларининг кесишиш нуқтаси (*ортоцентр*).

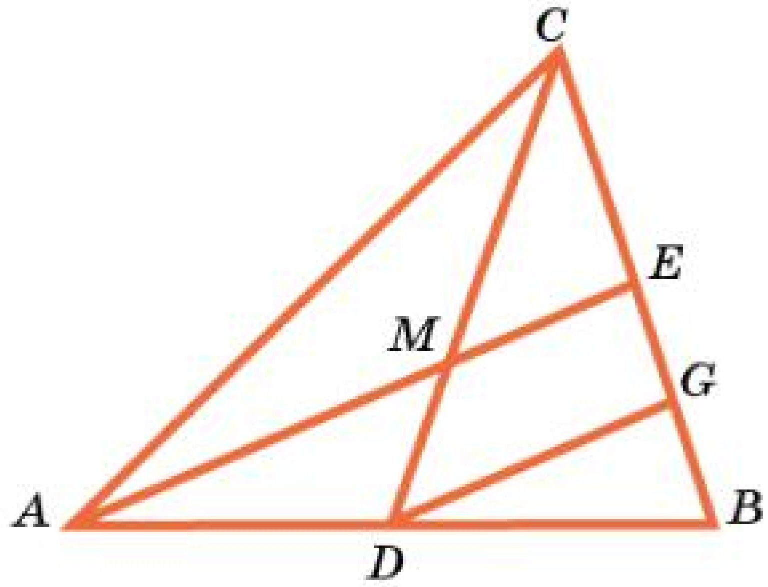
Учбурчак биссектрисаларининг битта нуқтада кесишиши ва томонларига ўтказилган ўрта перпендикулярларнинг битта нуқтада кесишиши 7-синфда кўриб чиқилган ва исботланган.

Исталган учбурчак ясанг. Унинг медианаларини ўтказинг. Улар битта нуқтада кесишадими?

Теорема. Учбурчакнинг медианалари битта нуқтада кесишади ва уларнинг ҳар бири ана шу нуқтада учидан бошлаб ҳисоблаганда 2 : 1 нисбатда бўлинади (12.1-расм).



12.1-расм



12.2-расм

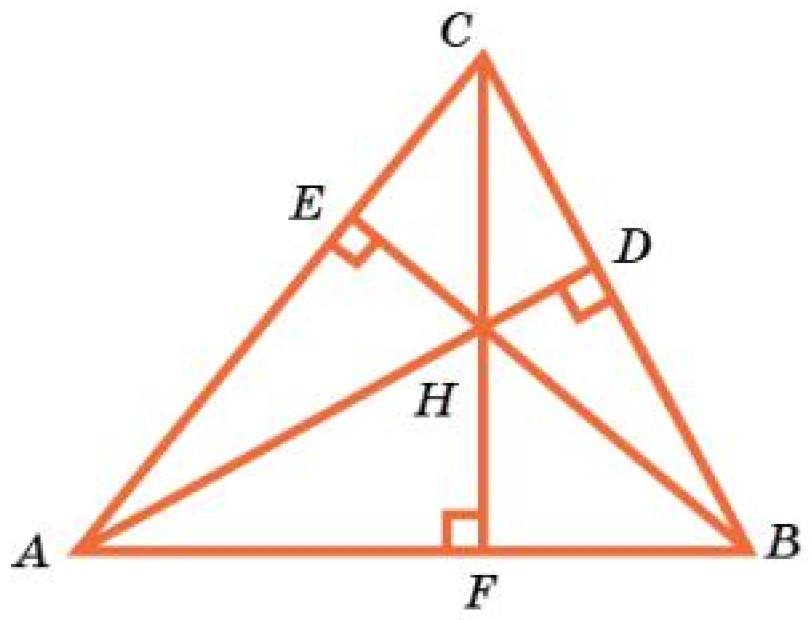
Исботи. ABC учбурчакда CD, AE медианалар ўтказамиз ва уларнинг кесишиш нуқтасини M орқали белгилаймиз (12.2-расм).

ABE учбурчакда DG ўрта чизиқни ўтказамиз. E нуқта — BC кесманинг ўртаси, G нуқта — кесманинг ўртаси бўлгани учун E нуқта CG кесмани C учидан бошлаб ҳисоблаганда 2 : 1 нисбатда бўлади. Пропорционал кесмалар ҳақидаги теоремага кўра M нуқта CD кесмани C учидан бошлаб ҳисоблаганда 2 : 1 нисбатда бўлади, яъни AE медиана CD медианани C учидан бошлаб ҳисоблаганда 2 : 1 нисбатда бўлади. Худди шундай BF медиана CD медианани C учидан бошлаб ҳисоблаганда 2 : 1 нисбатда бўлиши исботланди. Демак, AE ва BF медианалар CD медианани битта M нуқтада қирқиб ўтади.

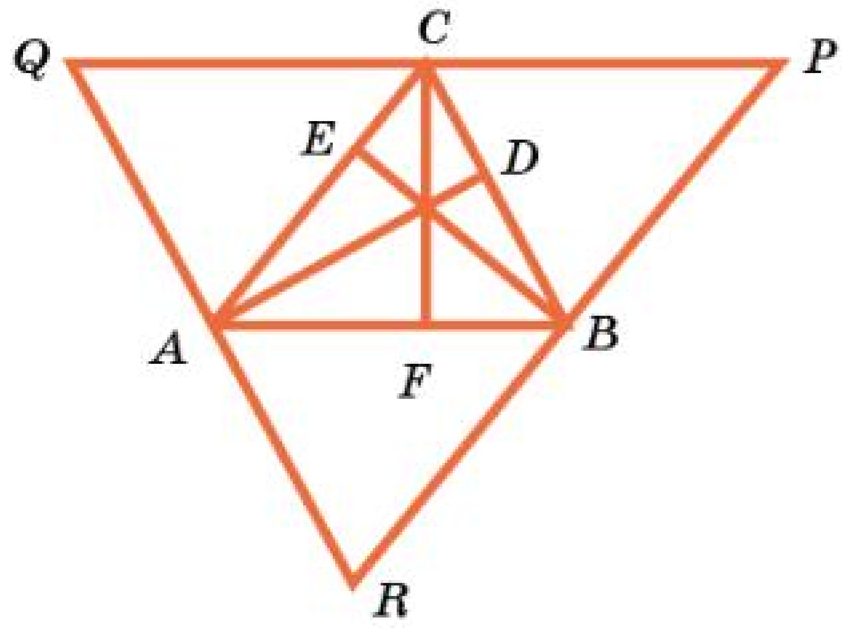
Исталган учбурчак ясанг. Унинг баландликларини ўтказинг. Улар битта нуқтада кесишадими?

Теорема. Учбурчакнинг баландликлари ёки уларнинг давомлари битта нуқтада кесишади (12.3-расм).

Исботи. Берилган ABC учбурчакнинг учлари орқали қарама-қарши томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз (12.4-расм).

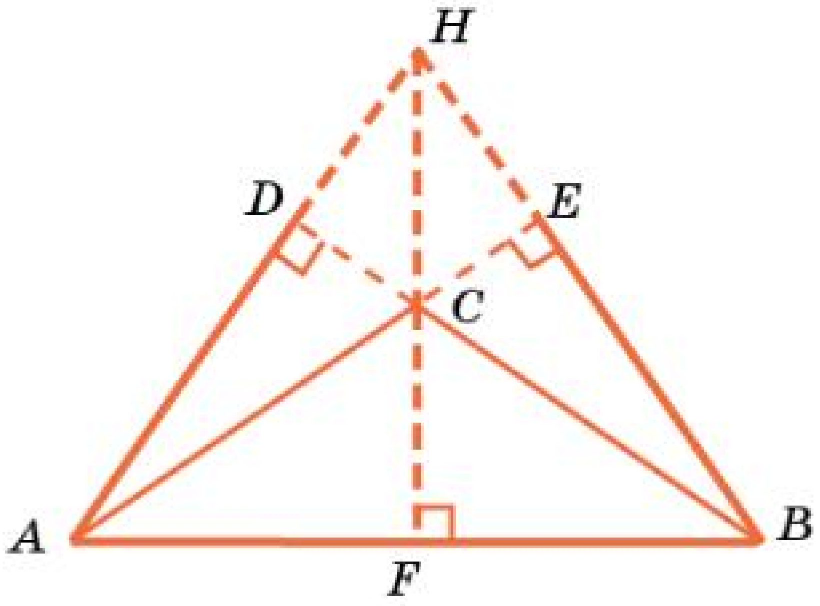


12.3-расм



12.4-расм

Ушбу тўғри чизиқлар янги PQR учбурчакни ҳосил қилади, бу ерда A, B, C нуқталар унинг томонларининг ўрталари бўлади. Ҳақиқатанан, $ABPC$ ва $ABCQ$ параллелограмларнинг мос равишда қарама-қарши томонлари сифатида $CP = AB$ ва $AB = CQ$ бўлади. У ҳолда $CP = CQ$. Худди шундай $BP = BR$, $AQ = AR$ бўлади. Бундан ABC учбурчакнинг баландликлари PQR учбурчак томонларига ўтказилган ўрта перпендикулярларда ётиши келиб чиқади. Демак, ABC учбурчакнинг баландликлари ёки уларнинг давомлари битта нуқтада кесишади. ◻



12.5-расм

Учбурчакнинг баландликлари кесишмаслиги мумкин. 12.5-расмда ABC ўтмас бурчакли учбурчак тасвирланган. Бунда AD, BE CF баландликларнинг давоми H нуқтада кесишади, баландликлари эса кесишмайди.

1. Қандай нуқталар учбурчакнинг ажойиб нуқталари бўлади?
2. Учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтаси қандай аталади?
3. Учбурчакнинг баландликлари ҳамма вақт кесишадими?
4. Учбурчак баландликлари ёки улар давомларининг кесишиш нуқтаси қандай аталади?

Машқлар

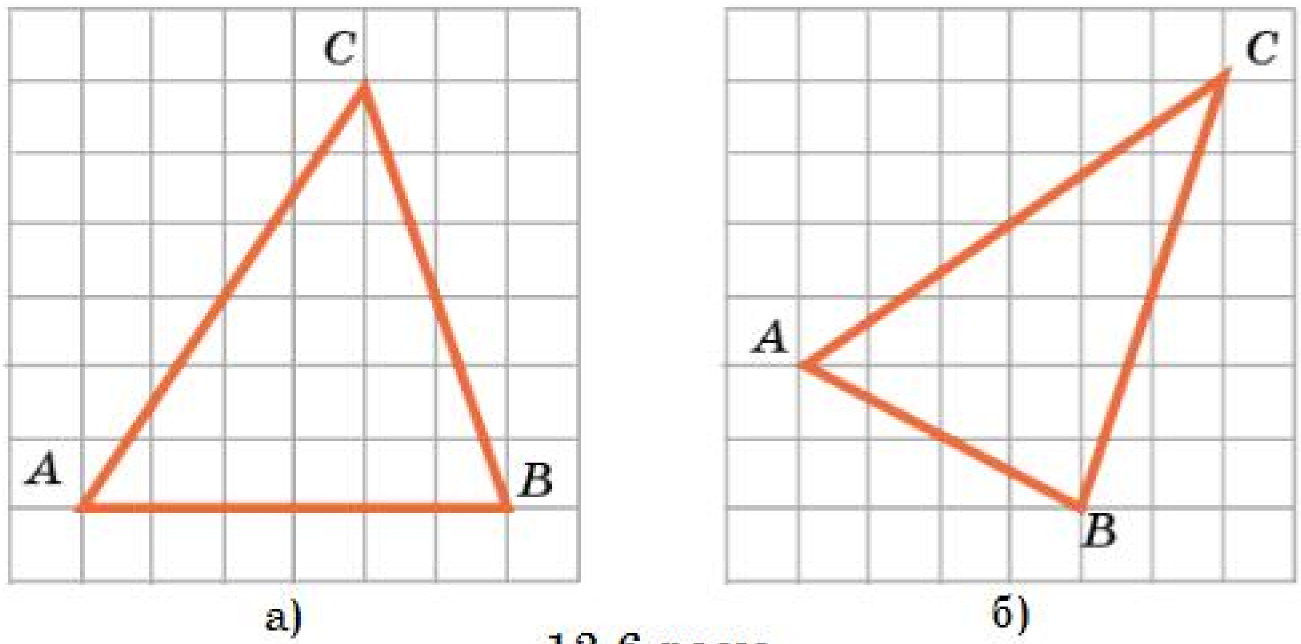
A

1. Учбурчак биссектрисаларининг кесишиш нуқтаси ана шу учбурчакдан ташқарида ётиши мумкинми?
2. Учбурчак томонларига ўтказилган ўрта перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси ана шу учбурчакдан ташқарида ётиши мумкинми?
3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг томонларига ўтказилган ўрта перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси қаерда жойлашган?

4. Учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтаси ана шу учбурчакдан ташқарида ётиши мумкинми?
5. Учбурчак баландликлари ёки улар давомларининг кесишиш нуқтаси ана шу учбурчакдан ташқарида ётиши мумкинми?
6. Тўғри бурчакли учбурчак баландликларининг кесишиш нуқтаси қаерда жойлашган?

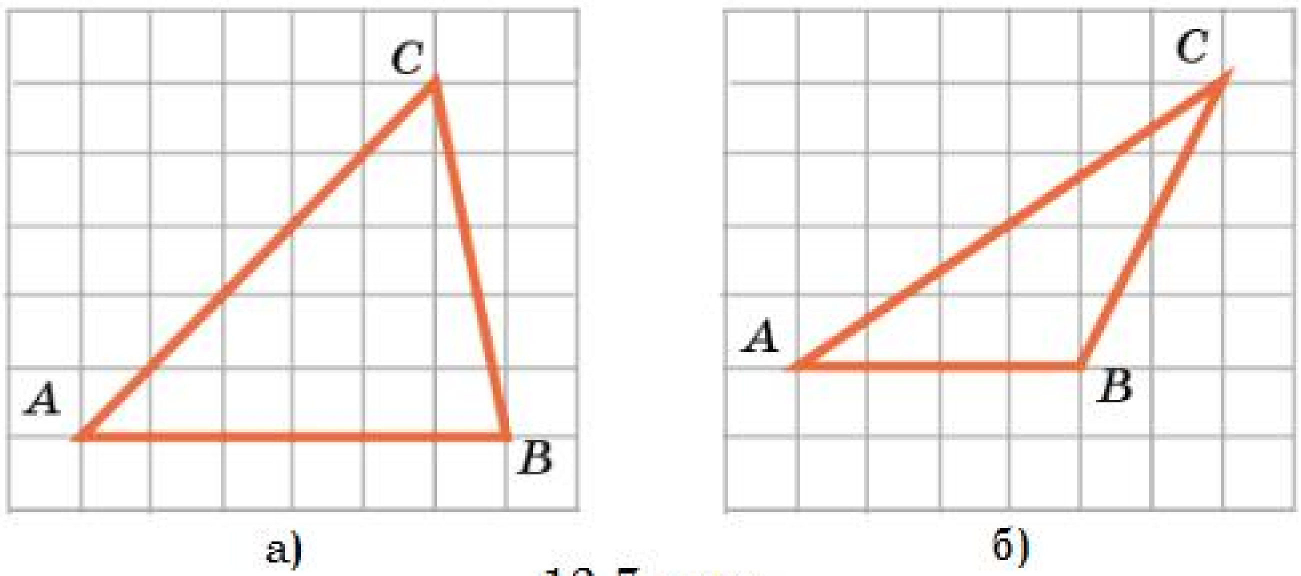
B

7. 12.6-расмда тасвирланган учбурчаклар медианаларининг кесишиш нуқтасини ясанг.



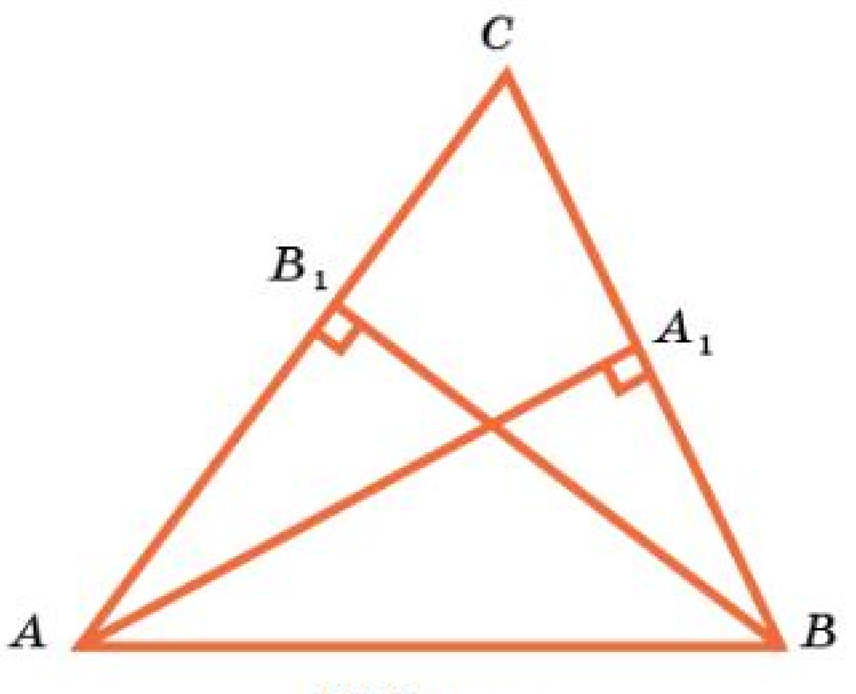
12.6-расм

8. 12.7-расмда тасвирланган учбурчак баландликларининг ёки улар давомларининг кесишиш нуқтасини ясанг.



12.7-расм

9. Агар ABC учбурчакнинг AA_1, BB_1 — баландликлари бўлса, у ҳолда A_1AC бурчак B_1BC бурчакка тенг бўлишини исботланг (12.8-расм).



12.8-расм

C

10. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази унинг томонларидан қайси бирига яқин жойлашган?

11. Учбурчакка ички чизилган айлана маркази унинг томонларидан қайси бирига яқин жойлашган?
12. Учбурчакнинг бир биссектрисаси иккинчисининг ўртаси орқали ўта оладими?
13. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан ўтказилган медианаси гипотенузасининг ярмига тенг эканини исботланг.
14. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 10 га тенг. Унга ташқи чизилган айлана марказининг ўрнини кўрсатинг ва радиусини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

15. Учи A бўлган ўткир бурчак ясанг. Унинг бир томонида B_1, B_2 нуқталарни белгиланг. Ушбу нуқталардан бурчакнинг иккинчи томонига B_1C_1, B_2C_2 перпендикулярлар ўтказинг. Ҳосил қилинган AB_1C_1 ва AB_2C_2 учбурчакларнинг томонларини ўлчанг.

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} \text{ ва } \frac{B_2C_2}{AB_2};\ \frac{AC_1}{AB_1} \text{ ва } \frac{AC_2}{AB_2};\ \frac{B_1C_1}{AC_1} \text{ ва } \frac{B_2C_2}{AC_2}.$$

Нисбатларни топинг. Ушбу нисбатлар ҳақида нима дейиш мумкин?

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. 1, 2, 4, 5 сонларга пропорционал бўладиган тўртбурчак бурчакларини топинг.

A. 10°, 20°, 40°, 50°.
B. 20°, 160°, 30°, 150°.
C. 30°, 60°, 120°, 150°.
D. 30°, 60°, 90°, 90°.

2. Тўртбурчак ташқи бурчакларининг (ҳар бир учидан биттадан олинган) йиғиндисини топинг.

A. 90°. B. 180°. C. 270°. D. 360°.

3. Тўртбурчакнинг бир томонига ёпишган иккита бурчагининг йиғиндиси 90° га тенг. Ушбу бурчаклар биссектрисалари орасидаги бурчакни топинг.

A. 30°. B. 45°. C. 90°. D. 135°.

4. Учта параллел тўғри чизиқлар учта параллел тўғри чизиқлар билан кесишган. Бундай ҳолда нечта параллелограмм ҳосил бўлади?

A. 4. B. 6. C. 8. D. 9.

5. Иккита тенг турли томонли учбурчакларни бир-бирларига турли хил усуллар билан устма-уст тушириш орқали нечта турли хил параллелограмлар ҳосил қилиш мумкин?

A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.

6. Параллелограмнинг ўтмас бурчаги учидан туширилган баландлик ана шу бурчакни 1 : 2 нисбатда бўлади. Параллелограмнинг бурчакларини топинг.

A. 30°, 150°. B. 60°, 120°. C. 45°, 135°. D. 45°, 90°.

7. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари орасидаги бурчак 120°. Унинг кичик томони билан диагонали орасидаги нисбатни ва диагоналининг томонлар билан ҳосил қиладиган бурчакларини топинг.

A. 1 : 2; 60°, 120°. B. 2 : 3; 30°, 60°.
C. 1 : 3; 30°, 30°. D. 1 : 2; 30°, 60°.

8. Тўғрибурчакли учбурчакнинг 13 см га тенг бўлган гипотенузаси ўртаси орқали унинг катетларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Ҳосил бўлган тўртбурчакнинг турини аниқланг ва унинг диагоналини топинг.

A. Параллелограмм; 13 см. B. Тўғри тўртбурчак; 13 см.
C. Квадрат; 6,5 см. D. Тўғри тўртбурчак; 6,5 см.

9. Ромбнинг учидан туширилган баландликлар 100° бурчак ясайди. Ромб диагоналларининг унинг томонлари билан ясайдиган бурчагини топинг.

A. 80°, 100°. B. 50°, 130°. C. 40°, 50°. D. 25°, 65°.

10. Ромб томонларининг ўрталари кетма-кет туташтирилган. Ҳосил қилинган тўртбурчакнинг турини аниқланг.

A. Параллелограмм. B. Тўғри тўртбурчак.
C. Ромб. D. Квадрат.

11. Томони 1 см га тенг бўлган квадрат берилган. Унинг диагонали иккинчи квадратнинг томони бўлади. Иккинчи квадратнинг диагоналини топинг.

A. 0,5 см. B. 1 см. C. 2 см. D. 4 см.

12. Тенгёнли тўғри бурчакли учбурчакка квадрат ички чизилган. Уларнинг битта бурчаги умумий, унга қарама-қарши жойлашган квадратнинг учи учбурчакнинг гипотенузасига тегишли бўлади. Учбурчакнинг катети 12 см га тенг бўлса, квадратнинг периметрини топинг.

A. 12 см. B. 16 см. C. 24 см. D. 48 см.

13. Учбурчакнинг томонлари 3 : 4 : 5 нисбат каби. Унинг периметри 72 см. Учлари ана шу учбурчак томонларининг ўрталарида жойлашган янги учбурчакнинг томонларини топинг.

A. 3 см, 4 см, 5 см. B. 18 см, 24 см, 30 см.
C. 12 см, 24 см, 30 см. D. 9 см, 12 см, 15 см.

14. Трапециянинг диагонали ён томонига перпендикуляр, ана шу диагоналга қарама-қарши ётган ўткир бурчаги 40°. Кичик асоси иккинчи ён томонига тенг бўлса, трапециянинг қолган бурчакларини топинг.

A. 40°, 140°, 40°.
B. 100°, 80°, 90°.
C. 80°, 100°, 140°.
D. 50°, 100°, 40°.

15. Тенгёнли трапециянинг бир бурчаги 60°, ён томони 24 см, асосларининг йиғиндиси 43 см. Унинг асосларини топинг.

A. 9,5 см; 33,5 см.
B. 19 см; 24 см.
C. 12 см; 31 см.
D. 21,5 см; 21,5 см.

16. Тенгёнли трапециянинг диагонали унинг ўткир бурчагини тенг бўлади. Трапециянинг периметри 132 см. Асосларининг нисбати $2:5$. Унинг ўрта чизиғини топинг.

A. 66 см.
B. 41 см.
C. 42 см.
D. 43 см.

17. Тенгёнли трапециянинг томонлари ўрталари қўшилган. Ҳосил қилинган тўртбурчакнинг турини аниқланг.

A. Параллелограмм.
B. Тўғри тўртбурчак.
C. Ромб.
D. Квадрат.

18. Параллелограмнинг иккита қарама-қарши учларидан бурчакларининг биссектрисалари ўтказилган ва улар унинг томонлари билан кесишган. Ҳосил бўлган тўртбурчакнинг турини аниқланг.

A. Параллелограмм.
B. Тўғри тўртбурчак.
C. Ромб.
D. Квадрат.

19. Учларини аниқловчи иккита нуқта бўйича нечта квадрат ясаш мумкин?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

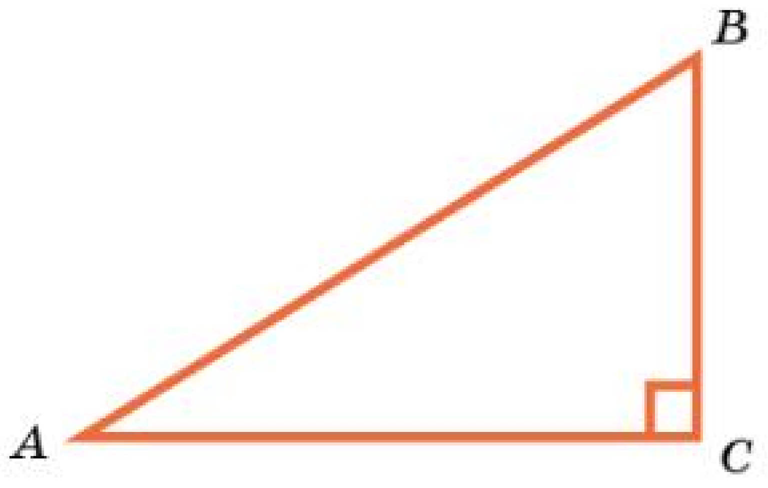
20. Мунтазам олтибурчак ҳосил бўладиган қилиб тўғри тўртбурчакнинг бурчаклари кесилган. Ушбу тўртбурчак томонларининг нисбатини топинг.

A. $1:2$.
B. $2:\sqrt{3}$.
C. $1:\sqrt{2}$.
D. $2:3$.

2-боб

ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАКЛАРНИНГ ТОМОНЛАРИ БИЛАН БУРЧАКЛАРИ ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТЛАР

13-§. ЎТКИР БУРЧАКНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ



13.1-расм

C тўғри бурчаги ва A ўткир бурчаги бўлган ABC учбурчакни кўриб чиқамиз (13.1-расм).

Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг синуси деб, ана шу бурчак қаршисида ётган катетнинг гипотенузага нисбатига айтилади.

A бурчакнинг синуси $\sin A$ орқали белгиланади. Таърифга кўра,

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг косинуси деб, ана шу бурчакка ёпишган катетнинг гипотенузага нисбатига айтилади.

A бурчакнинг косинуси $\cos A$ орқали белгиланади. Таърифга кўра,

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг тангенси деб, ана шу бурчак қаршисида ётган катетнинг ёпишган катетга нисбатига айтилади.

A бурчакнинг тангенси $\operatorname{tg} A$ орқали белгиланади. Таърифга кўра,

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг котангенси деб, ана шу бурчакка ёпишган катет қаршисида ётган катетга нисбатига айтилади.

A бурчакнинг котангенси $\operatorname{ctg} A$ орқали белгиланади. Таърифга кўра,

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Ушбу таърифлардан қуйидаги тенгликлар келиб чиқади

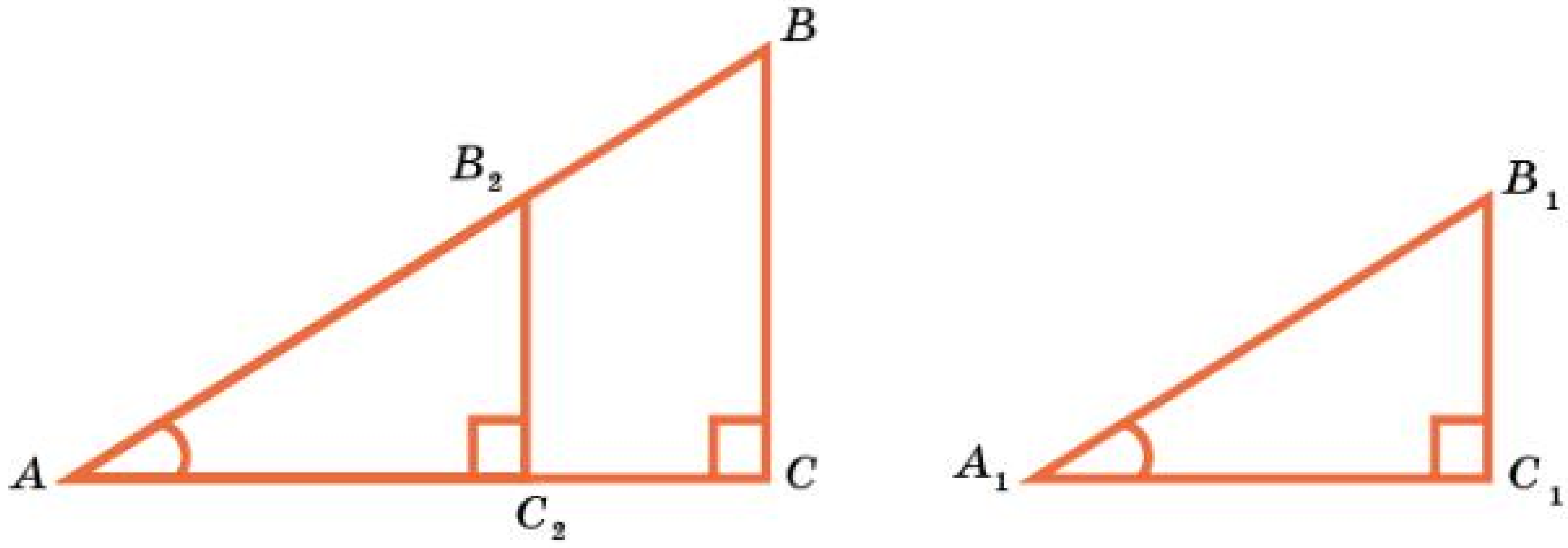
$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Синус, косинус, тангенс ва котангенслар *ўткир бурчакнинг тригонометрик функциялари* деб аталади.

? Исталган тўғри бурчакли учбурчак ясанг. Унинг томонларини ўлчанг. Ўткир бурчакларнинг тригонометрик функцияларини топинг.

Теорема. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг синуси, косинуси, тангенси ва котангенси ўткир бурчакнинг катталигигагина боғлиқ бўлади ва тўғри бурчакли учбурчакни танлашга боғлиқ эмас. Яъни мос равишда бурчаклари тенг бўлган иккита тўғри бурчакли учбурчаклар ўткир бурчакларининг синуси, косинуси, тангенси ва котангенсларининг қийматлари мос келади.

Исботи. A бурчакнинг косинуси учбурчакнинг танлаб олинишига боғлиқ эмас эканини исботлаймиз. ABC ва $A_1B_1C_1$ — иккита тўғри бурчакли учбурчаклар, бу ерда $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ ва $\angle A = \angle A_1$ бўлсин (13.2-расм).



13.2-расм

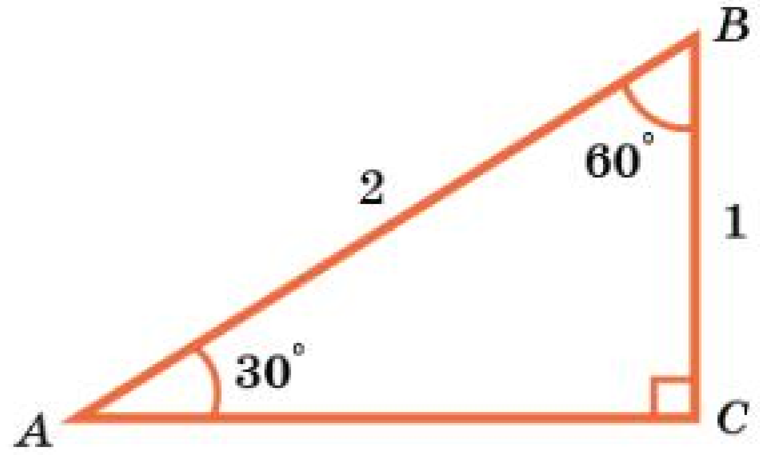
BAC бурчакнинг томонларидан мос равишда A_1B_1 ва A_1C_1 кесмаларга тенг AB_2 ва AC_2 кесмалар оламиз. $A_1B_1C_1$ ва AB_2C_2 тўғри бурчакли учбурчаклар катети ва гипотенузаси бўйича тенг бўлади. Пропорционал кесмалар ҳақидаги теоремага кўра $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_2}{AB_2}$ тенглик бажарилади. Демак, $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$ тенглик ҳам бажарилади.

Синусларнинг боғлиқ эмаслигини исботлаш учун ABC тўғри бурчакли учбурчак A бурчагининг синуси B бурчагининг косинусига тенг эканлигини кўрамиз. Исботга кўра B бурчакнинг косинуси тўғри бурчакни танлаб олишга боғлиқ эмас. Демак, A бурчакнинг синуси ҳам тўғри бурчакли учбурчакнинг танлаб олинишига боғлиқ эмас экан.

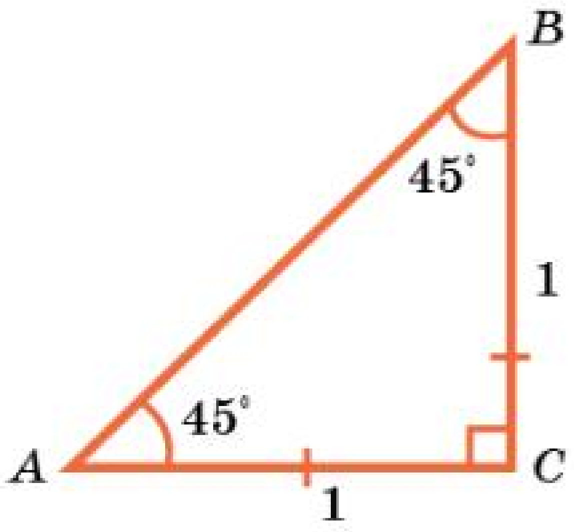
$\mathrm{tg}A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\mathrm{ctg}A = \frac{\cos A}{\sin A}$ тенгликлардан ва A бурчагининг синуси ва косинусининг учбурчакни танлаб олишга боғлиқ эмаслигидан A бурчакнинг тангенси ва котангенсининг учбурчакни танлаб олинишига боғлиқ эмаслиги келиб чиқади. ☐

30°, 45° ва 60° бурчаклар учун тригонометрик функцияларнинг қийматларини топамиз.

C бурчаги тўғри бурчак бўлган ABC тўғри бурчакли учбурчакда A ўткир бурчаги 30°, BC катет эса 1 га тенг бўлсин (13.3-расм).



13.3-расм



13.4-расм

Тўғри бурчакли учбурчакда 30° ли бурчак қаршисида ётган катет гипотенузасининг ярмига тенг эканлигидан, AB гипотенуза 2 га тенг бўлади. Бундан,

$$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}, \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}.$$

Ўткир бурчаги 45° бўлган тўғрибурчакли учбурчакнинг катетлари ўзаро тенг бўлади (13.4-расм). Бундан,

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = 1, \operatorname{ctg} 45^{\circ} = 1.$$

Ўткир бурчакларнинг тригонометрик функциялари тақрибий қийматларини топиш учун дарсликнинг охирида берилган тақрибий қийматлар жадвалидан фойдаланиш мумкин.

Масалан,

$$\sin 45^{\circ} = \cos 45^{\circ} \approx 0{,}71, \sin 60^{\circ} = \cos 30^{\circ} \approx 0{,}87.$$
$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \operatorname{ctg} 60^{\circ} \approx 0{,}58, \operatorname{tg} 60^{\circ} = \operatorname{ctg} 30^{\circ} \approx 1{,}73.$$

Тарихий маълумотлар

Л. Эйлер
(1707—1783)

“Тригонометрия” сўзи “тригон” — “учбурчак” ва “метрео” — “ўлчайман” деган юнонча сўзларидан олинган. Тригонометрия Вавилон, Миср, Хитой, Ҳиндистон ва бошқа қадимги давлатларда пайдо бўлиб, ривожланган. Тригонометриянинг дунёга келиши астрономик кузатишлар, юлдузлар жойлашишини аниқлаш, масофалар ва бурчакларни ҳисоблаш эҳтиёжига боғлиқ вужудга келди.

Дастлабки тригонометрик жадвалларни қадимги юнон олими Гиппарх тузган. Тригонометриянинг замонавий шакли Л.Эйлернинг асарларидан олинган. У $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ ишораларни киритиб, тригонометрик функциялар ҳақидаги фанни тайёрлаган.

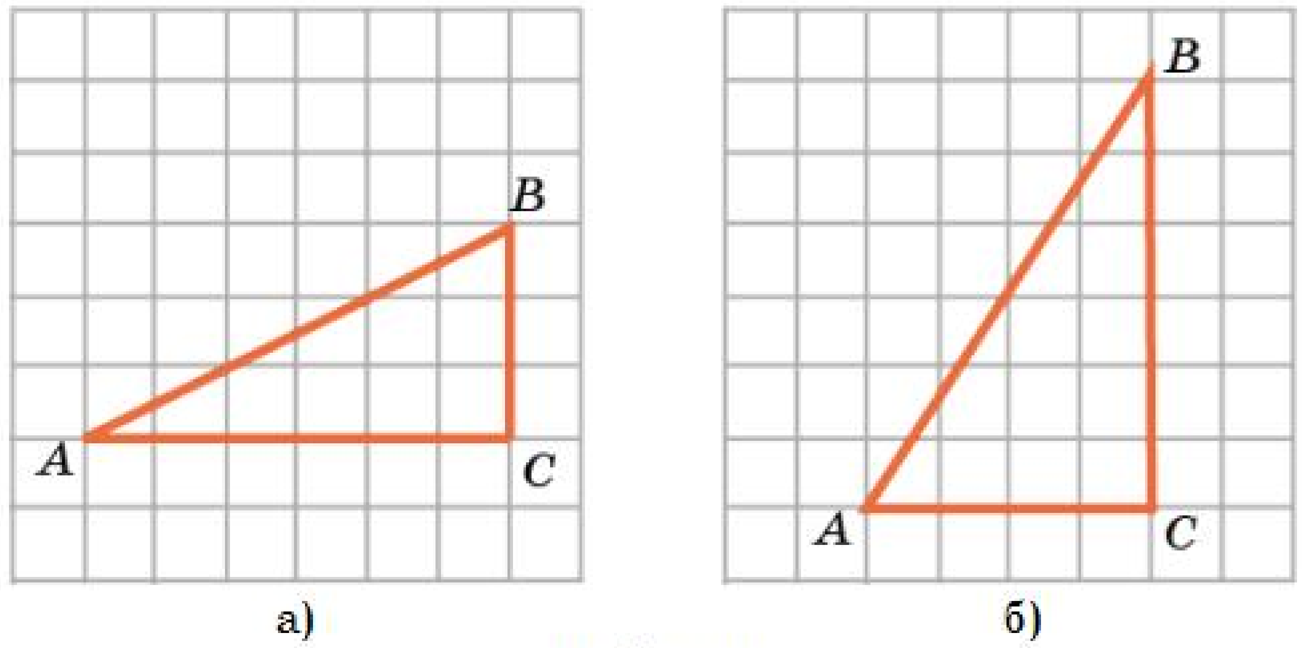
Дарсликнинг сўнгида тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчаклари учун синус ва тангенснинг тақрибий қийматлар жадвали берилган. Ундан фойдаланиб, берилган бурчак синуси ва тангенсининг тақрибий қийматларини ва аксинча синус ва тангенснинг тақрибий қийматлари орқали мос ўткир бурчак қийматини топиш мумкин.

1. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг синуси деб нимага айтилади?
2. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг косинуси деб нимага айтилади?
3. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг тангенси деб нимага айтилади?
4. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг котангенси деб нимага айтилади?
5. Ўткир бурчакнинг тригонометрик функциялари дегани нима?

Машқлар

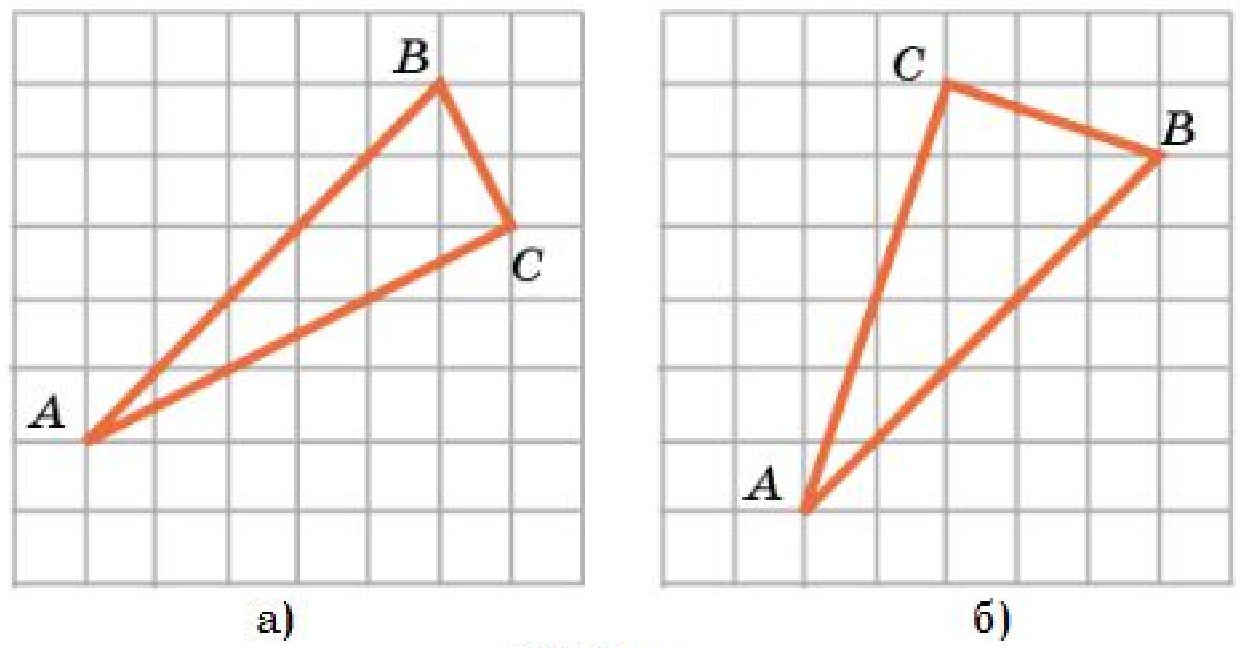
А

1. 13.5-расмда тасвирланган: а) А; б) В бурчакнинг тангенси ва котангенсини топинг.



13.5-расм

2. 13.6-расмда тасвирланган: а) А; б) В бурчакнинг тангенси ва котангенсини топинг.



13.6-расм

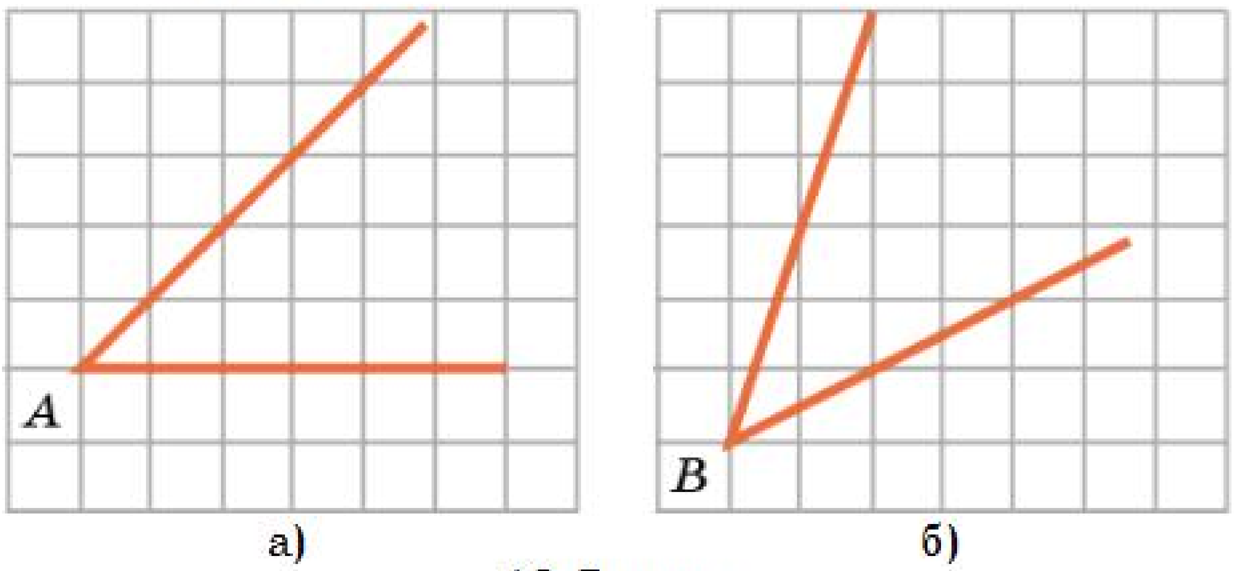
3. Катак қоғозда тангенснинг берилган қиймати бўйича бурчак ясанг: а) 0,5; б) 2.
4. Тригонометрик функцияларнинг тақрибий қийматлари жадвалидан фойдаланиб, қуйидагиларнинг тақрибий қийматларини топинг: а) $\sin 45^\circ$; б) $\operatorname{tg} 30^\circ$; в) $\sin 60^\circ$; г) $\operatorname{tg} 60^\circ$.
5. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг: а) синуси; б) косинуси 1 дан катта бўлиши мумкинми?
6. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг а) тангенси; б) котангенси 10 га тенг бўлиши мумкинми?
7. Катак қоғозда котангенснинг берилган қиймати бўйича бурчак ясанг: а) 0,75; б) 1,125.

B

8. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг: а) синуси; б) косинусининг қийматлари қандай оралиқда ўзгариши мумкин?
9. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг: а) тангенси; б) котангенсининг қийматлари қандай оралиқда ўзгариши мумкин?
10. Қандай бурчакларда синус косинусга тенг бўлади?
11. Қандай ўткир бурчакларда: а) синус косинусдан кичик; б) синус косинусдан катта бўлади?
12. Синуснинг тангенсга тенг бўладиган бурчаги мавжудми?
13. Қандай бурчакларда тангенс котангенсга тенг бўлади?
14. ABC тенгёнли учбурчакнинг ($AC = BC$) ён томони 6 га, асосига туширилган баландлиги 5 га тенг. A бурчакнинг косинусини топинг.
15. ABC тенгёнли учбурчакнинг ($AC = BC$) ён томони 6 га, асосига туширилган баландлиги 4 га тенг. A бурчакнинг синусини топинг.
16. ABC тенгёнли учбурчакнинг ($AC = BC$) асоси 10 га, асосига туширилган баландлиги 8 га тенг. A бурчакнинг тангенсини топинг.

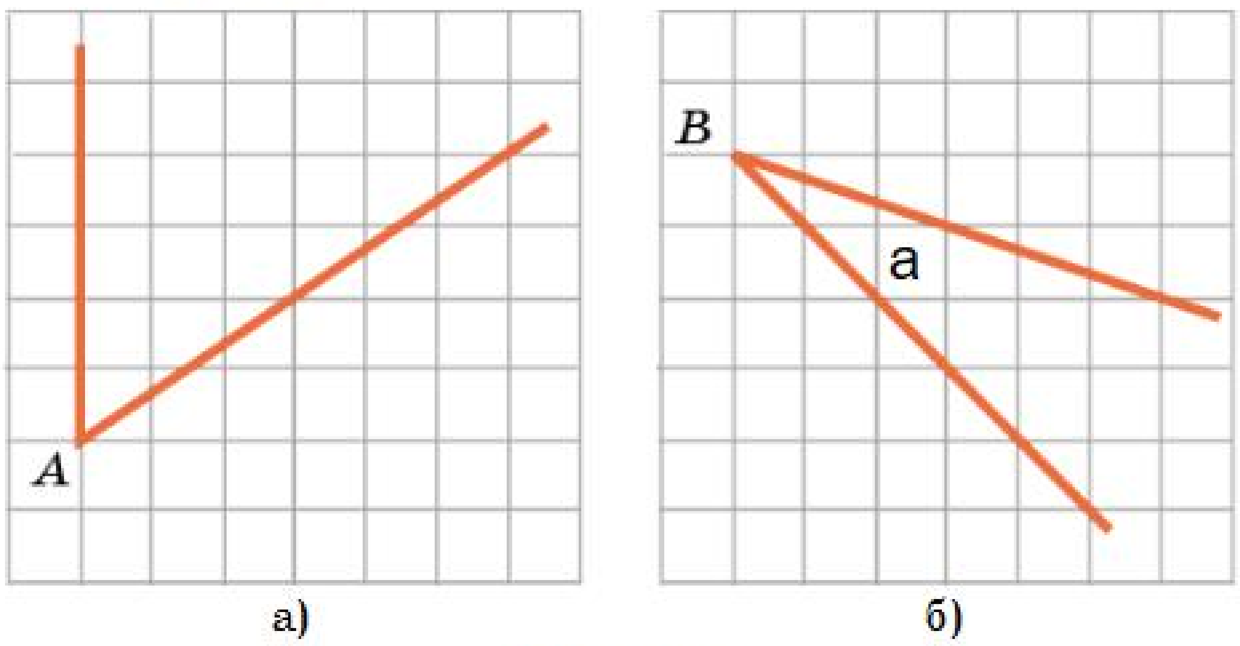
C

17. 13.7-расмда тасвирланган: а) A; б) B бурчакнинг тангенси ва котангенсини топинг.



13.7-расм

18. 13.8-расмда тасвирланган: а) A; б) B бурчакнинг тангенси ва котангенсини топинг.



13.8-расм

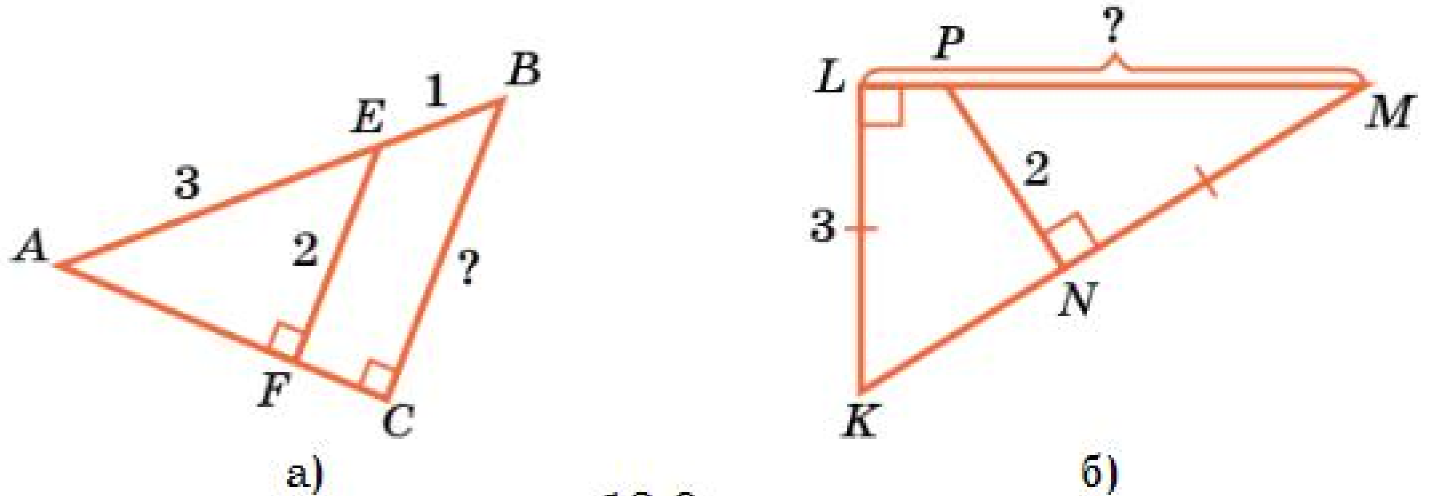
19. Қандай бурчакларда: а) тангенс котангенсдан кичик; б) тангенс котангенсдан катта бўлади?

20. Исталган A ўткир бурчак учун қуйидаги тенгсизлик тўғри эканлигини исботланг: а) $\sin A < \operatorname{tg} A$; б) $\cos A < \operatorname{ctg} A$.

21. Синуснинг берилган қийматига кўра бурчак ясанг: а) 0,4; б) 0,6.

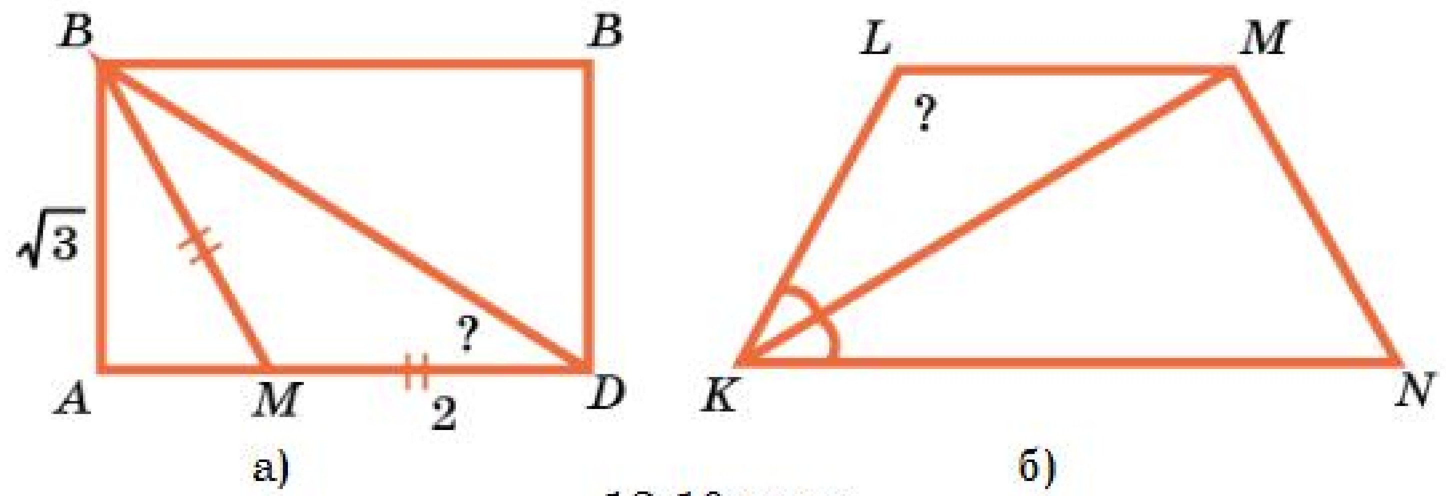
22. Косинуснинг берилган қиймати бўйича бурчак ясанг: а) 0,2; б) 0,8.

23. 13.9-расмдаги номаълум кесманинг узунлигини топинг.



13.9-расм

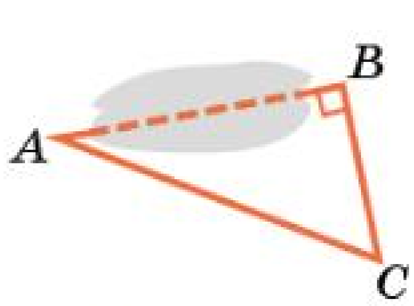
24. $ABCD$ тўғри тўртбурчак (13.10-а расм) билан $KLMN$ трапециянинг (13.10-б расм) номаълум бурчакларини топинг, бу ерда KM ^ MN, $KM : KN = \sqrt{3} : 2$.



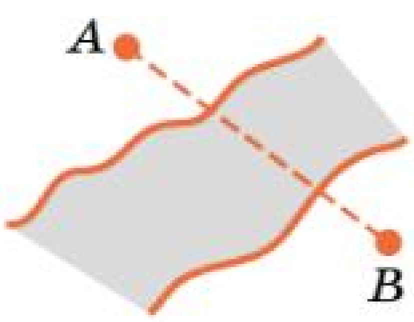
13.10-расм

25. A ва B нуқталар орасидаги чексиз масофани (13.11-расм) ўлчаш учун BC ^ AB кесмалар ясаб, A ва C нуқталарни туташтирамиз. Сўнгра C бурчак билан AC (ёки BC) кесмани ўлчаймиз. Бундан A ва B нуқталар орасидаги масофа нимага тенг бўлади?

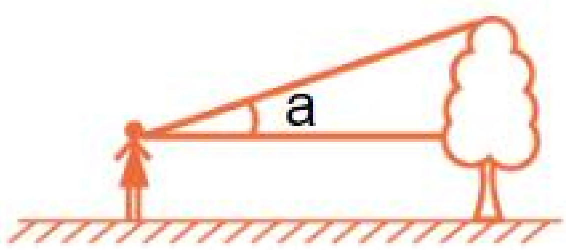
26. Тригонометриядан фойдаланиб, A ва B нуқталар орасидаги масофани (13.12-расм) қандай ўлчаш мумкин?



13.11-расм



13.12-расм



13.13-расм

27. Дарахтдан маълум бир масофада турган одам унинг юқори учини a бурчак остида кўради (13.13-расм). Дарахтнинг баландлигини қандай аниқлаш мумкин?

28. Одам 240 м баландликдан ер юзига 7° бурчак остида арқон йўли орқали тушди. Тушиш йўлининг узунлиги нимага тенг?

29. Учоқ ер юзидан 6° бурчак остида учди. У 20 км учгандан кейин қандай баландликка кўтарилади? Ер юзасидан 5 км баландликка кўтарилганда учоқ аэропортдан қандай узоқликда бўлади?

30. Одам соясининг узунлиги унинг бўйига тенг; бўйидан икки марта узун бўлганда ёруғлик манбаининг бурчак баландлиги нимага тенг бўлади?

31. Ойнинг радиуси 1680 км ва у Ердан $a = 15'$ бурчак остида кўриниб турса, Ердан Ойгача бўлган масофани аниқланг.

32. Томчилари 7 м/с тезлик билан вертикал ёғаётган ёмғирда автобус юриб келяпти. Ушбу автобус йўловчиларига ёмғир қия ёғиб турган бўлиб кўринади. Агар автобуснинг тезлиги 35 км/соат бўлса, йўловчиларга ёмғир томчилари ер юзасига қандай бурчак остида кўриниб тушади?

33. Қуйидаги: а) уйнинг зинапояси билан кўтарилиш; б) уйнинг томидан оғиш бурчагини ҳисобланг. Бунинг учун қандай ўлчашлар бажариш керак?

34. 13.14-расмдаги "Астана-Байтерек" монументи — металл, чинни ва бетондан ясалган ҳамда олтин билан қопланган шари бўлган баланд меъморий иншоот. Иншоотнинг баландлиги — 97 метр, унинг устидаги шар билан биргаликдаги баландлиги 105 метр. Байтерекдан муайян бир масофада турган одам унинг юқори учи ва панорама залида турган одамларни кўради. B ва D бурчакларни қандай ҳисоблаш мумкин? Бу ерда қандай ўлчашлар бажариш керак?

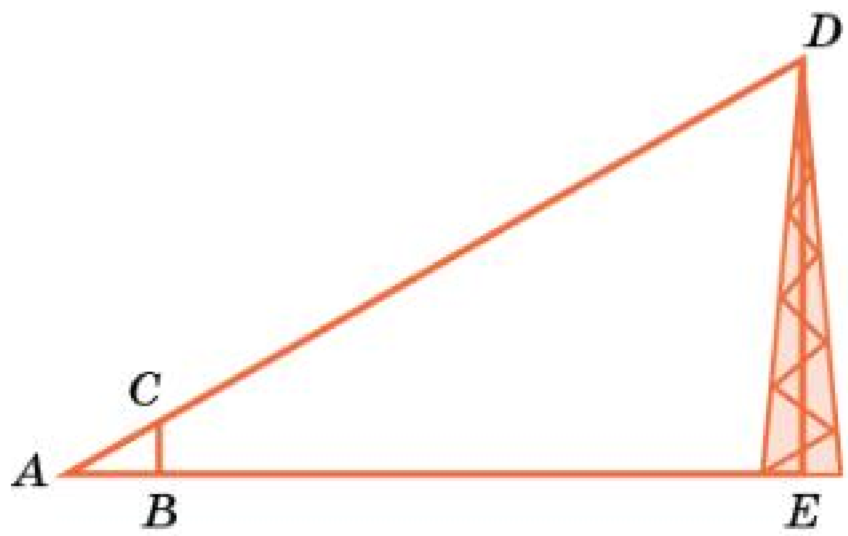
13.14-расм

35. Одам "Шимбулоқ" тоғ чанғи курортидан "Медеу" муз майдонининг базавий станциясигача 83° бурчак остида узунлиги дунёда учинчи ўринда бўлган арқон йўли билан тушиб келди (13.15-расм). Медеу денгиз сатҳидан 1691 метр баландликда, Шимбулоқ эса 2260 метр баландликда жойлашган. Арқон йўлининг узунлигини топинг.

13.15-расм

36. Алматидаги “Сунқар” халқаро тоғ чанғи трамплинлари мажмуаси дунёдаги энг илғор бешликлар қаторига киради (13.16-расм). У қишда қорга ва сунъий қопламга сакраш мумкин бўлган бирлаштирилган трамплин. A нуқтада турган кузатувчи битта тўғри чизиқда ётган қутбнинг C учини ва трамплиннинг D юқори нуқтасини кўради (13.17-расм). Агар $AE = 80$ м, $AB = 6$ м ва $BC = 3$ м бўлса, трамплиннинг баландлигини топинг.

13.16-расм



13.17-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

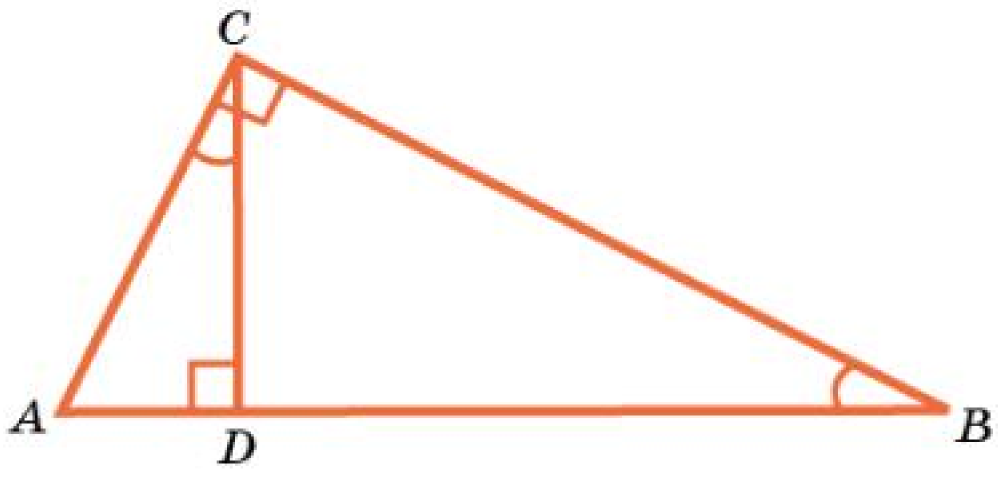
37. Катетлари: а) 3, 4; б) 6, 8; в) 5, 12 бўлган тўғри бурчакли учбурчак ясанг. Унинг гипотенузасини ўлчанг. Гипотенузасини катетлар орқали ифодаловчи формулани топиб кўринг.

14-§. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСИ

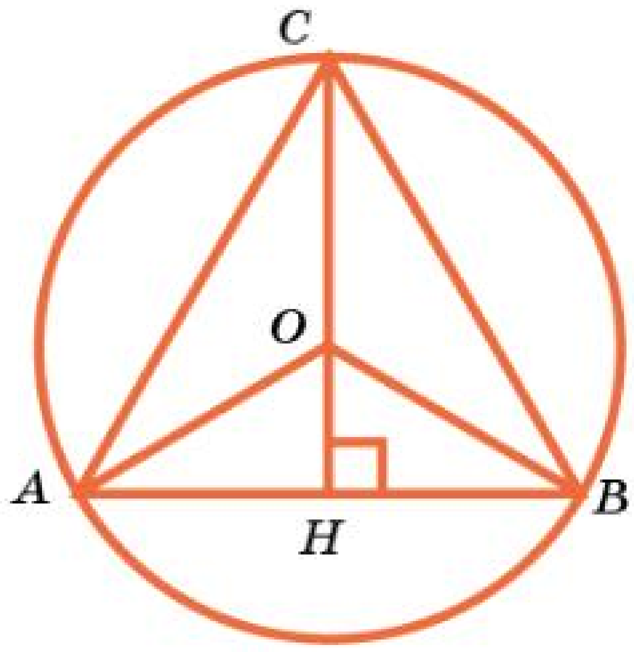
Қадимги юнон олими Пифагор тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари орасидаги боғланишни исботлаган. Шунга боғлиқ ҳолда теорема Пифагор номи билан аталади.

Теорема. Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати унинг катетлари квадратларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Исботи. C тўғри бурчаги бўлган ABC тўғри бурчакли учбурчакни кўриб чиқамиз (14.1-расм).



14.1-расм



14.2-расм

CD баландлик ўтказамиз. У ҳолда $\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$ бўлади. Бундан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$AB \cdot BD = BC^2.$$

$\angle B = \angle ACD$ эканлигидан $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$ бўлади. Бундан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$AB \cdot AD = AC^2.$$

Ушбу тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиш орқали ва $AD + DB = AB$ эканлигини ҳисобга олган ҳолда тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати катетларининг квадратлари йиғиндисига тенг эканлигини кўрсатувчи $AB^2 = AC^2 + BC^2$ тенглик ҳосил қиламиз. ◻

Агар ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг томонларини мос равишда $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ орқали белгиласак, у ҳолда Пифагор теоремаси қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ушбу формула берилган катетлар орқали гипотенузани топишга имкон беради:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

шу билан бир қаторда, берилган гипотенуза ва катет бўйича иккинчи катетни топиш мумкин:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2},\ b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатидан фойдаланиб, Пифагор теоремасига тескари теоремани исботланг.

Теорема. Агар учбурчак битта томонининг квадрати бошқа икки томони квадратларининг йиғиндисига тенг бўлса, у ҳолда у тўғри бурчакли учбурчак бўлади.

Тенгёнли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусини топиш учун Пифагор теоремасидан фойдаланамиз.

AB томони c га, CH баландлиги h га тенг бўлган ABC тенгёнли учбурчакни кўриб чиқамиз (14.2-расм).

Ташқи чизилган айлананинг марказини O, радиусини R орқали белгилаймиз. $OC = R$ эканини инобатга олган ҳолда Пифагор теоремасини AOH учбурчак учун қўллаймиз

$$R^2 = \frac{c^2}{4} + (h - R)^2 .$$

Ушбу тенгламани R га нисбатан ечиб, топамиз:

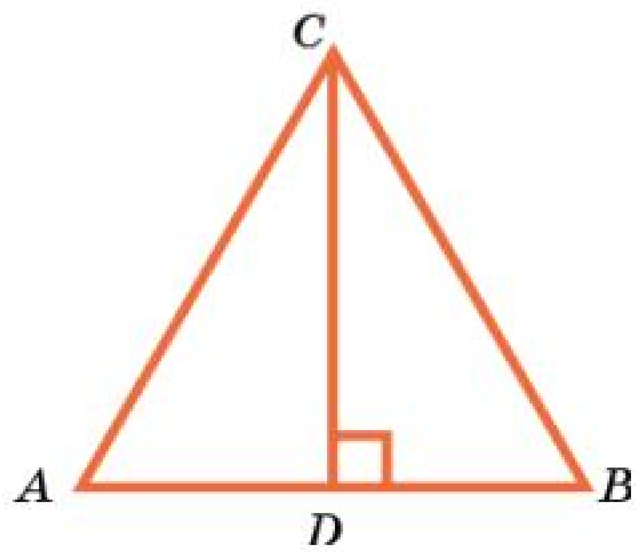
$$R = \frac{c^2 + 4h^2}{8h} .$$

Айрим ҳолларда томони 1 га тенг бўлган тенг томонли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси $\frac{\sqrt{3}}{3}$ бўлади.

Бу формулани ёдда сақлаш шарт эмас. Муҳими, ташқи чизилган айлана радиусини тенглама тузиш орқали топиш усулидир.

Пифагор теоремасидан фойдаланиб, баъзи бир бурчакларнинг тригонометрик функциялари қийматларини топамиз.

Томони 1 га тенг бўлган ABC тенгтомонли учбурчакни кўриб чиқамиз. Унинг CD баландлигини ўтказамиз (14.3-расм).



14.3-расм

Ушбу учбурчакдан $\angle A = 60^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$, $AD = \frac{1}{2}$, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Бундан

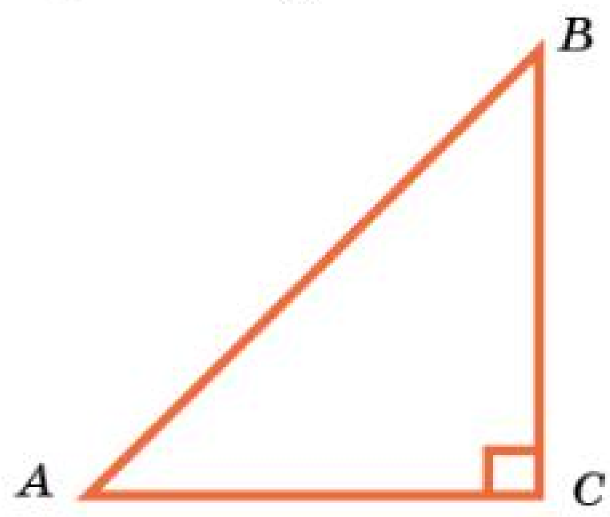
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{tg}\, 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \mathrm{ctg}\, 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2},\ \mathrm{tg}\, 60^\circ = \sqrt{3},\ \mathrm{ctg}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Катетлари 1 га тенг бўлган тенгёнли тўғри бурчакли учбурчакни кўриб чиқамиз (14.4-расм).

Ушбу учбурчакдан $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Бундан

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{tg}\, 45^\circ = \mathrm{ctg}\, 45^\circ = 1.$$



14.4-расм

ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг C тўғри бурчагидан гипотенузасига туширилган CD баландлиги уни D нуқтада AD ва BD кесмаларга ажратади (14.1-расм). CD баландлик AD ва BD кесмаларнинг ўрта геометриги бўлишини исботланг. ACD ва CBD бурчакларнинг тенглиги ва улар тангенсларининг тенглигидан фойдаланинг.

Тарихий маълумотлар

Пифагор
(мил.авв. 580—500 йиллар)

Пифагор — қадимги буюк юнон олимларидан бири, Пифагор теоремаси эса геометриядаги энг ажойиб хулосалардан бири. Унинг 500 дан ортиқ турли хил исботлари мавжуд. Томонлари 3, 4 ва 5 бўлган учбурчак учун Пифагор теоремасининг содда кўриниши Пифагоргача мисрликларга, ундан аввалроқ хитой олимларига (милоддан аввалги тахминан 11000 йил) маълум бўлган. У Мисрда узоқ вақт яшаб, мисрликлар илмини махсус ўрганган ва томонлари 3, 4, 5 бирликлар бўлган ипдан ясалган учбурчак орқали ерга тўғри бурчак ясашни ўзлаштирган. Пифагор 3, 4 ва 5 сонлари орасидаги ажойиб боғланишга ($3^2 + 4^2 = 5^2$) эътибор қаратиб, у боғланишнинг исталган тўғри бурчакли учбурчак учун бажарилишини исботлаган. Тўғри бурчакли учбурчак томонларининг узунликлари бўладиган бутун сонлар *Пифагор сонлари* деб аталади.

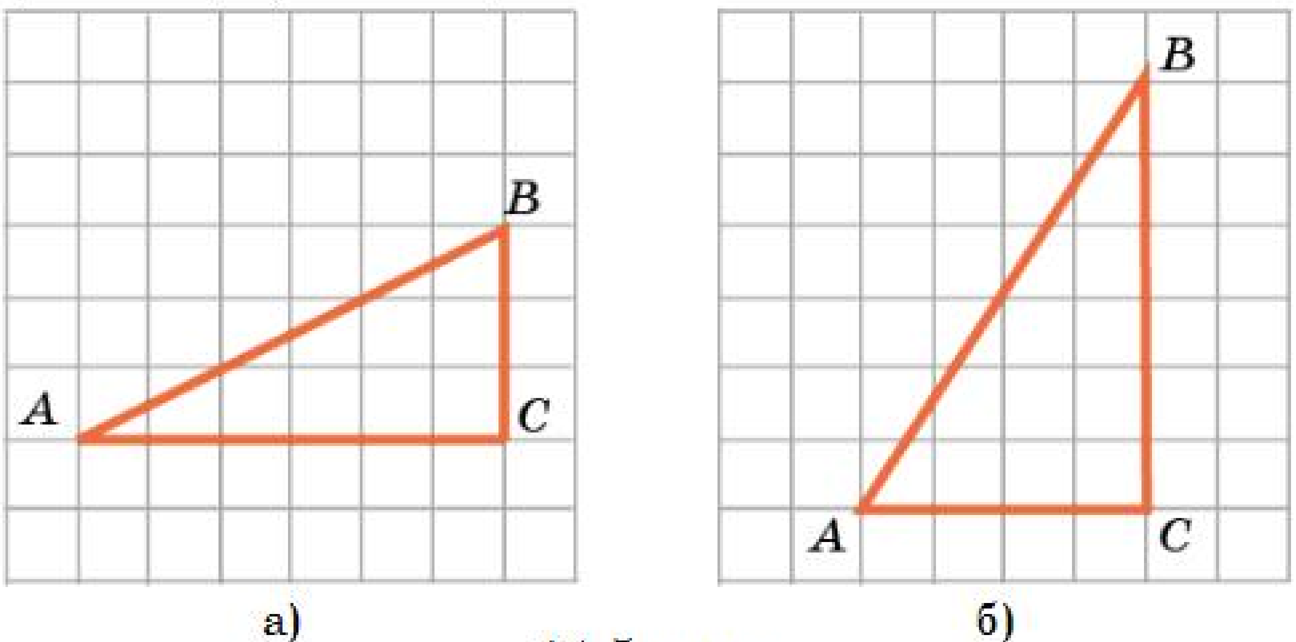
1. Пифагор теоремасини ифодаланг.
2. Пифагор қачон яшаган?
3. Қандай бутун сонлар учлиги Пифагор сонлари деб аталади?
4. 30° ли бурчакнинг тригонометрик функциялари қийматларини айтинг.
5. 45° ли бурчакнинг тригонометрик функциялари қийматларини айтинг.

Машқлар

А

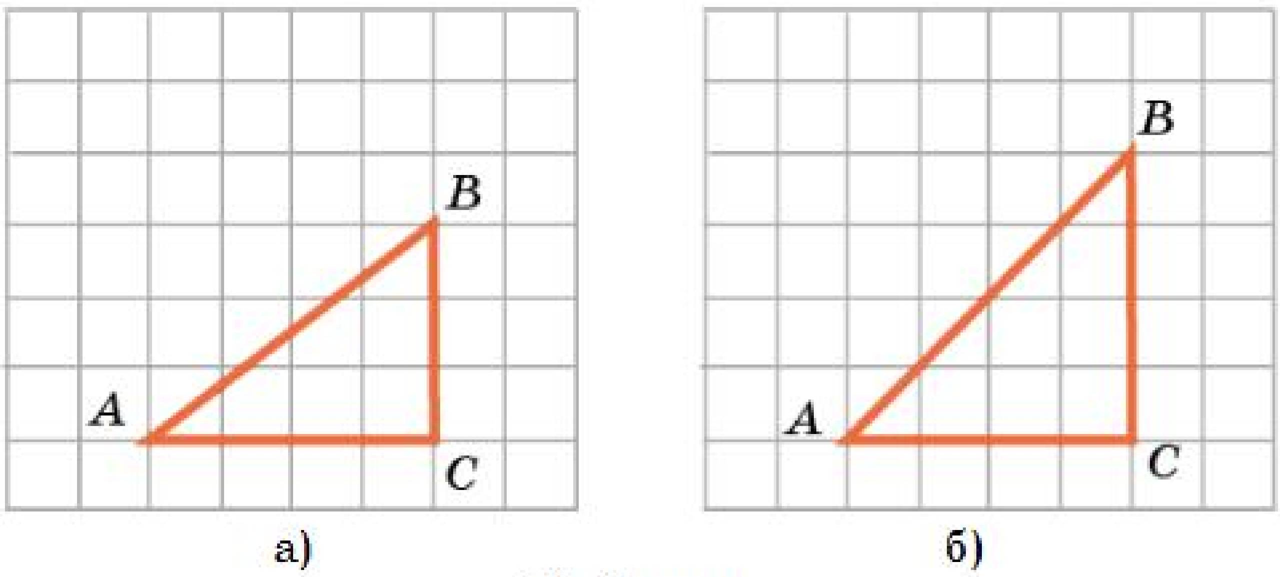
1. Тўғри бурчакли учбурчакнинг a ва b катетлари берилган. Унинг c гипотенузасини топинг, бу ерда: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 5$, $b = 12$; в) $a = 8$, $b = 15$.

2. Тўғри бурчакли учбурчакнинг c гипотенузаси билан a катети берилган. Унинг иккинчи катетини топинг, бу ерда: а) $c = 5$, $a = 3$; б) $c = 13$, $a = 5$; в) $c = 10$, $a = 8$.



14.5-расм

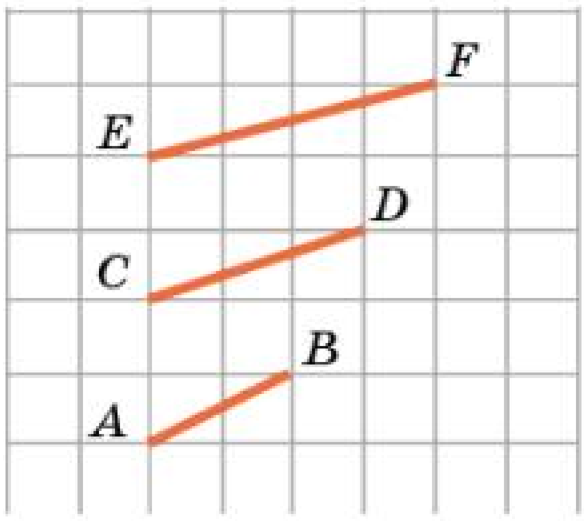
3. 14.5-расмда тасвирланган ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.
4. Томони 1 га тенг бўлган квадратнинг диагоналини топинг.
5. Ихтиёрий Пифагор сонлари учлигини кўрсатинг.
6. 14.6-расмда тасвирланган ABC тўғри бурчакли учбурчак A бурчагининг синуси ва косинусини топинг.



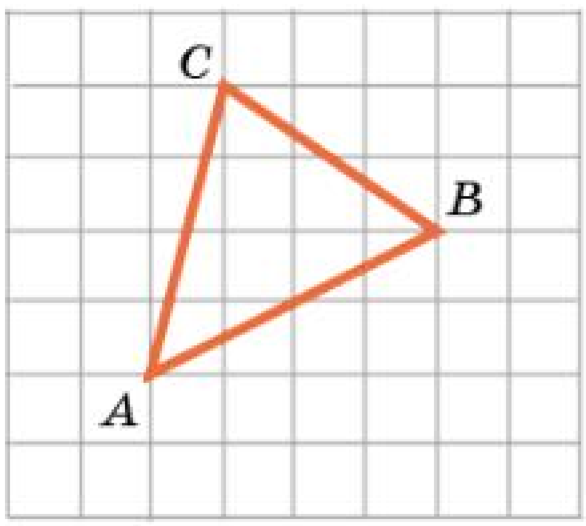
14.6-расм

B

7. 14.7-расмда тасвирланган кесмаларнинг узунликларини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.
8. 14.8-расмда тасвирланган учбурчак томонларини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.
9. Тўғри бурчакли учбурчак томонларини топинг, бу ерда: а) гипотенуза 10 см га, катетлар айирмаси 2 см га тенг; б) гипотенуза 26 см га тенг, катетларнинг нисбати 5 : 12 каби.
10. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси битта катетидан 1 см узун, катетлар йиғиндиси эса гипотенузасидан 4 см узун. Ушбу учбурчакнинг томонларини топинг.
11. Квадрат диагонали 2 га тенг. Унинг томонини топинг.
12. Томони 1 га тенг бўлган тенгтомонли учбурчакнинг баландлигини топинг.
13. Томонлари 5, 5, 6 бўлган тенгёнли учбурчакнинг асосига туширилган баландлигини топинг.



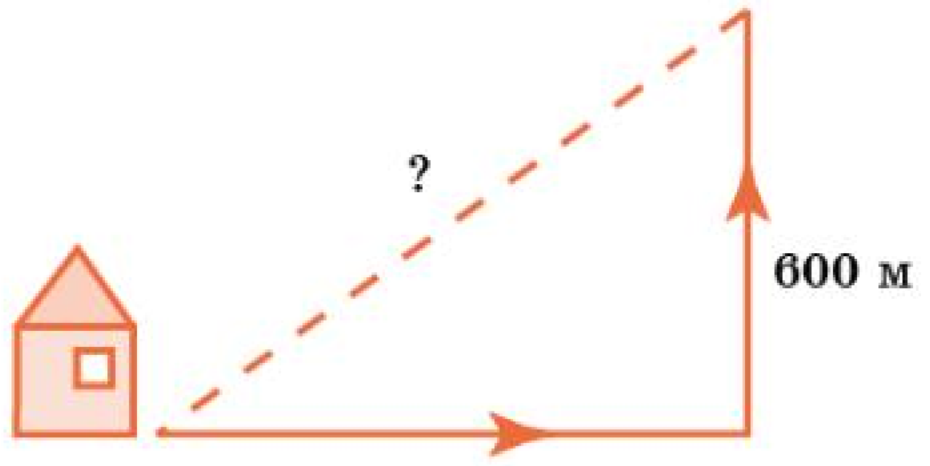
14.7-расм



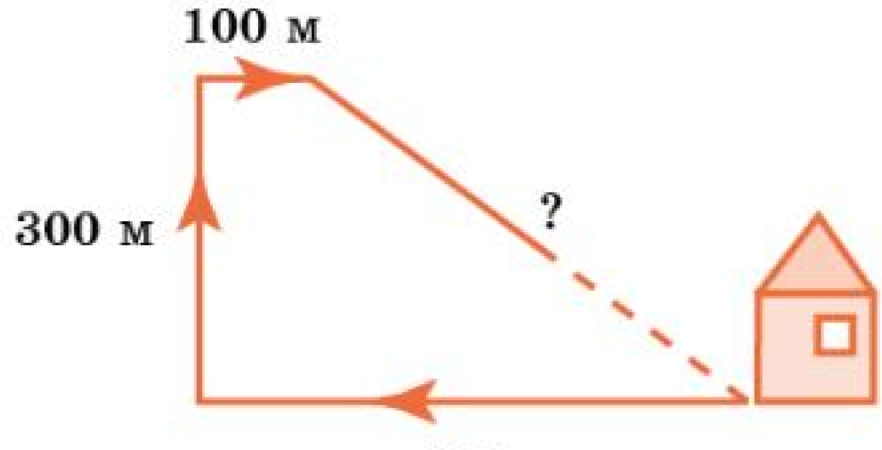
14.8-расм

14. Тенгёнли учбурчакнинг асоси 1 га, баландлиги 2 га тенг. Унга ташқи чизилган айлана радиусини топинг. Ана шу айланани ясанг.
15. Тенгёнли учбурчакнинг асоси 2 га, баландлиги 1 га тенг. Унга ташқи чизилган айлана радиусини топинг. Ана шу айланани ясанг.

16. Бауржан уйидан шарққа томон 800 м юрди. Кейин шимолга бурилиб яна 600 м юрди (14.9-расм). Бауржан уйидан қандай масофада бўлди?



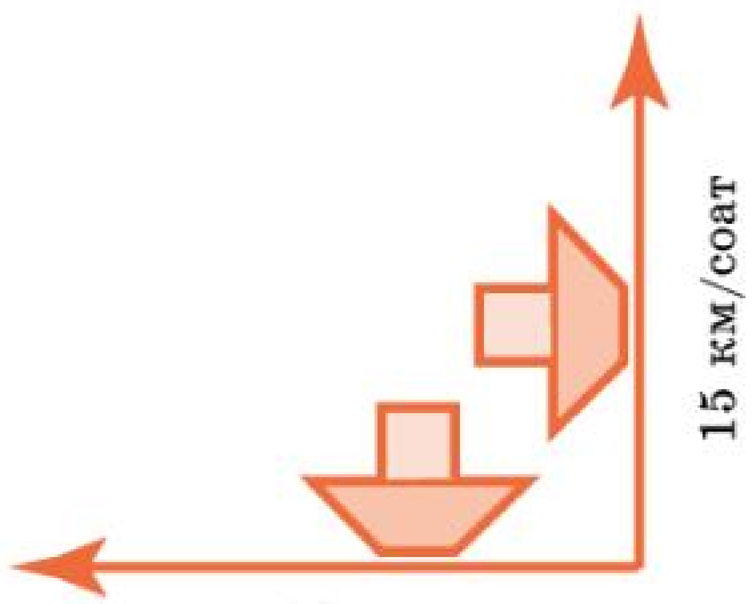
14.9-расм



14.10-расм

17. Маржан уйидан ғарбга томон 500 м, кейин шимолга томон бурилиб, яна 300 м юрди. Сўнгра у шарққа томон бурилиб яна 100 м юрди (14.10-расм). Маржан уйидан қандай масофада бўлди?

18. Иккита кема портдан чиқиб, бири шимолга томон, иккинчиси ғарбга томон сузди. Уларнинг тезликлари мос равишда 15 км/соат ва 20 км/соат (14.11-расм). 2 соатдан кейин улар ораларидаги масофа қандай бўлади?



14.11-расм

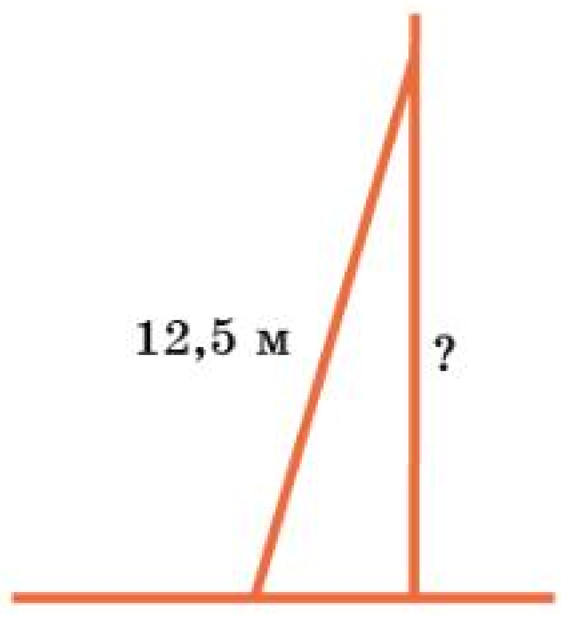
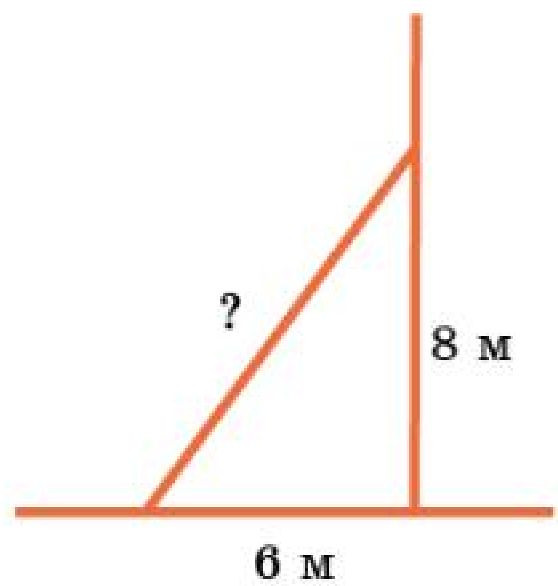


Рис. 14.12-расм



14.13-расм

19. Узунлиги 12,5 м бўлган зинапоя уйнинг деворига унинг пастки учи девордан 3,5 м узоқликда бўладиган қилиб қўйилди (14.12-расм). Зинапоянинг юқори учи ердан қандай узоқликда бўлади?

20. Зинапоянинг пастки учи уй деворидан 6 м узоқликда жойлашган бўлиб, 8 м баландликдаги уй деразасига етиш учун узунлиги қандай бўлиши керак (14.13-расм)?

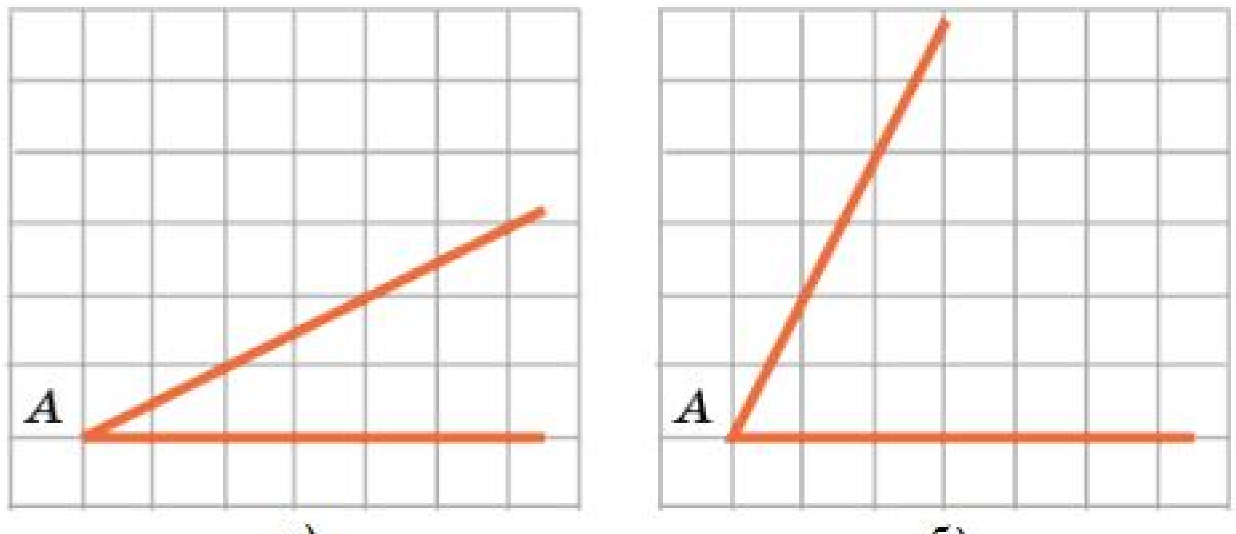
C

21. Ромбнинг диагоналлари 6 см ва 8 см. Унинг томонларини топинг.

22. Катетлари 3 ва 4 бўлган тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасига баландлик туширилган. Ушбу баландликни ва унинг гипотенузани бўлгандаги кесмаларни топинг.

23. Тенгёнли учбурчакнинг асоси c, ёнтомони b. Унга ташқи чизилган айлана радиусини топадиган формулани келтириб чиқаринг.

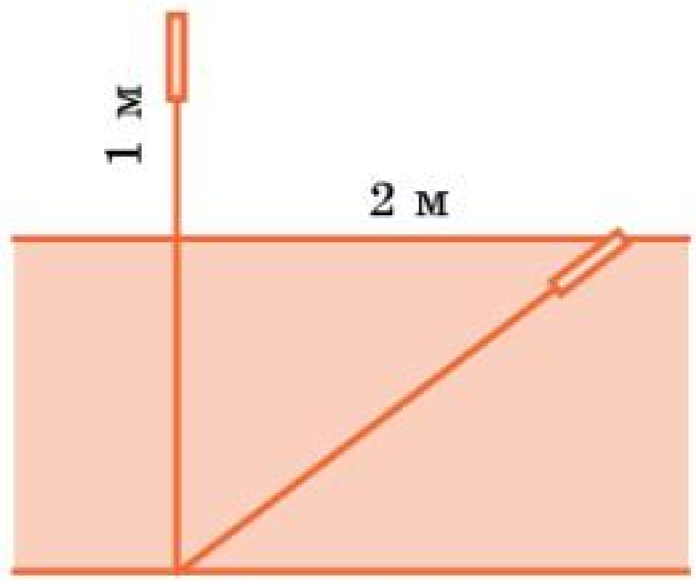
24. 14.14-расмда тасвирланган A бурчакнинг синуси ва косинусини топинг.



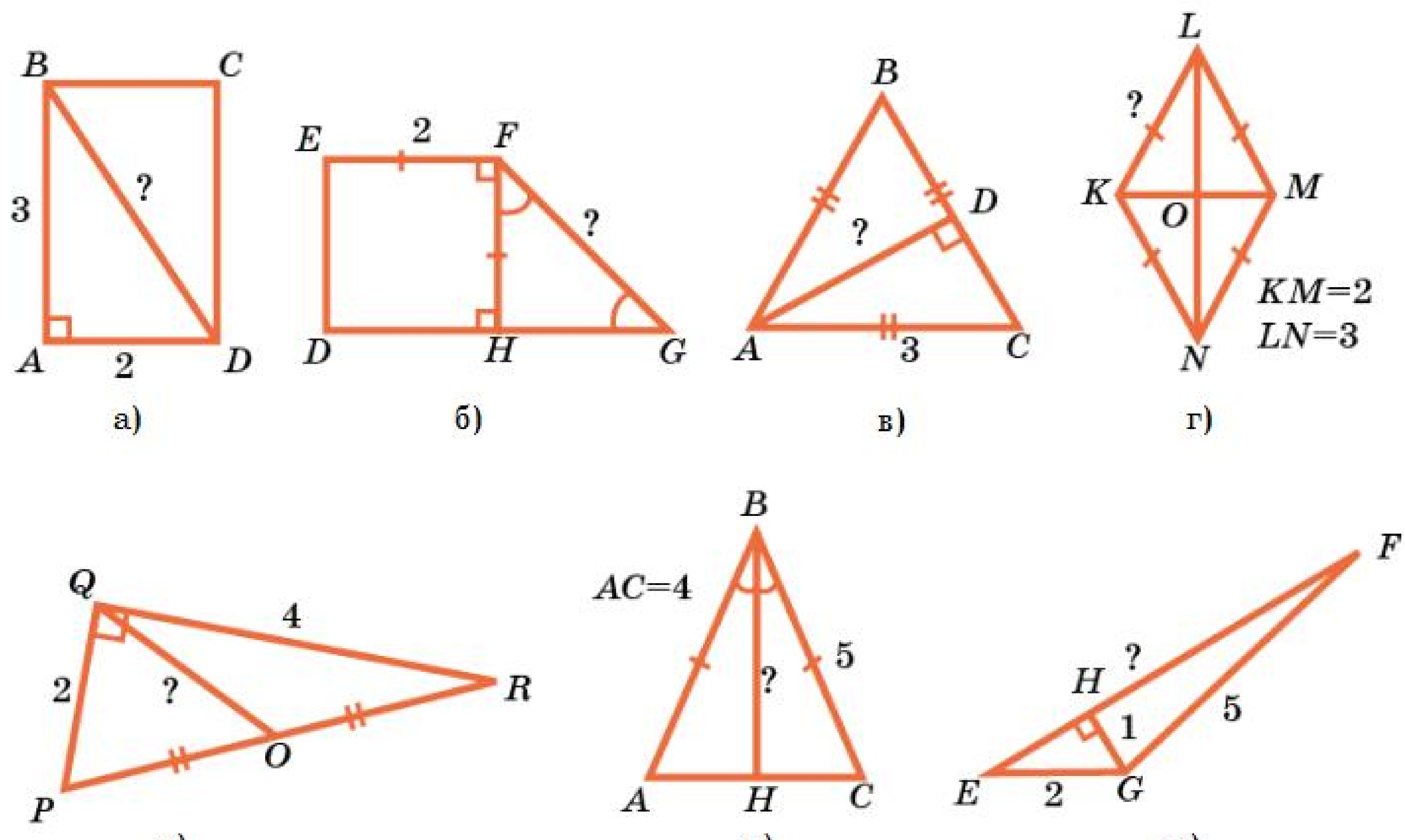
14.14-расм

25. Қамиш пояси кўл сувидан 1 м чиқиб турибди. Унинг юқори учи тик турган ҳолатидан 2 м га қийшайтирилганда, у сув сатҳида бўлди (14.15-расм). Қамиш ўсган жойдаги кўлнинг чуқурлигини топинг.

26. Номаълум кесмаларни топинг (14.16-расм).

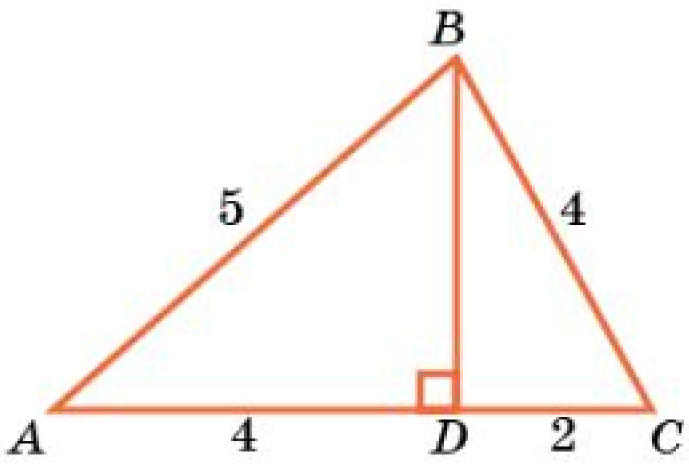


14.15-расм

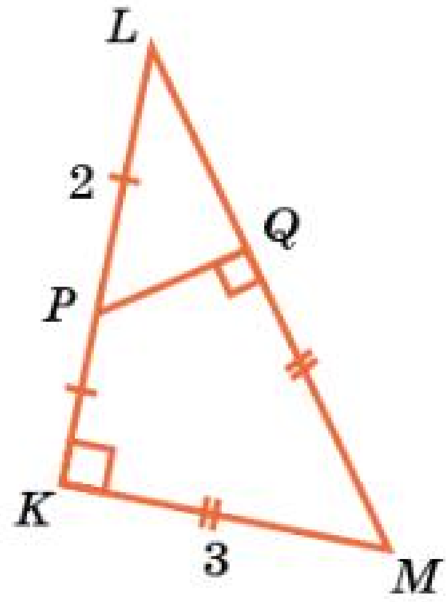


14.16-расм

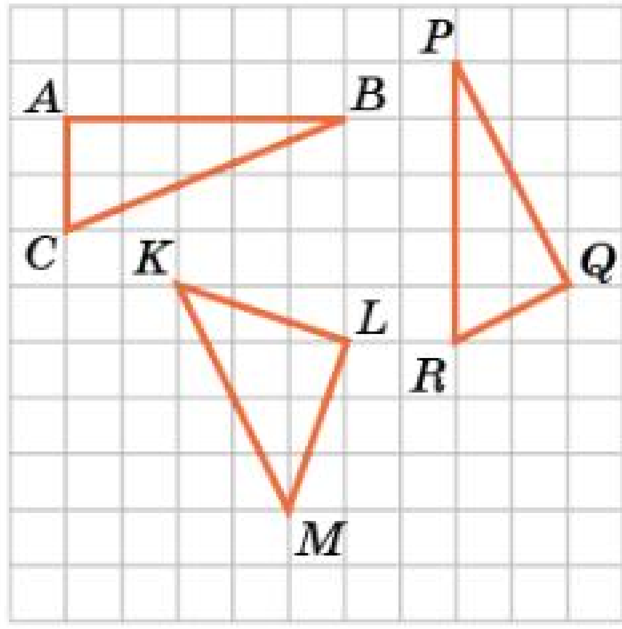
27. 14.17, 14.18-расмларда хатолар борми? Жавобларингизни тушунтиринг.



14.17-расм



14.18-расм

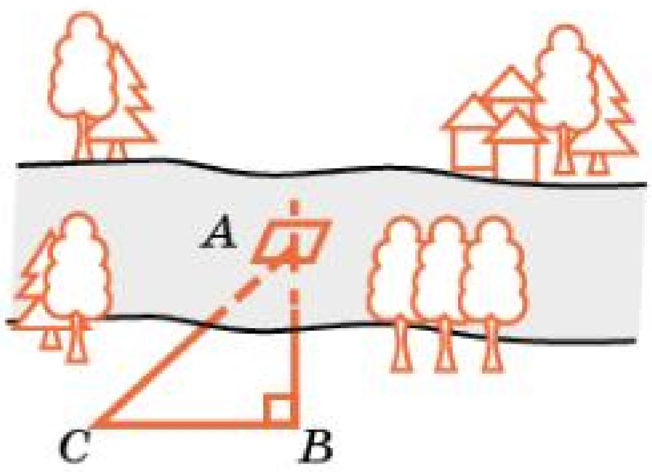


14.19-расм

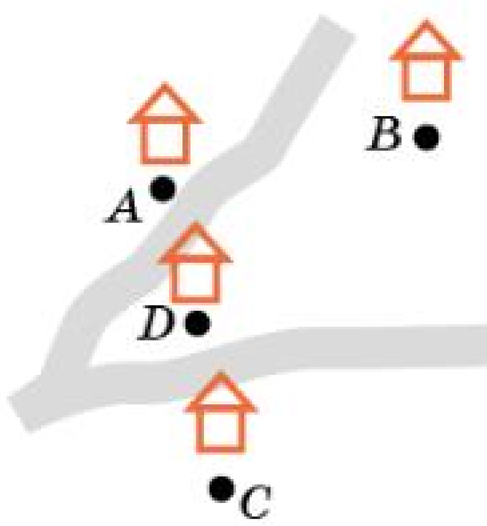
28. ABC, KLM, PQR учбурчаклардан қайси бирининг периметри энг кичик бўлади (14.19-расм)?

29. Саёҳатчилар гуруҳи жануб томонга 7 км, кейин шарқ томонга 4 км ва шимол томонга 4 км юрди. Саёҳатчилар йўлнинг дастлабки нуқтасидан қандай масофани босиб ўтган?

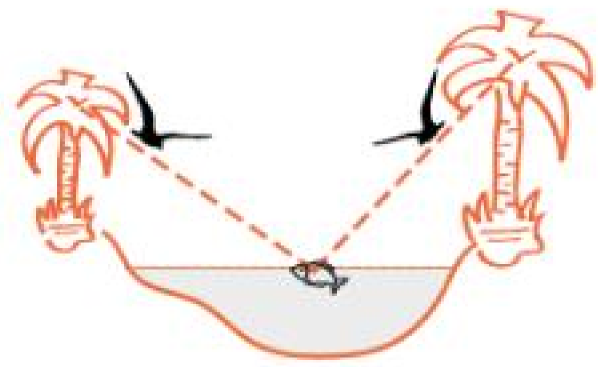
30. Дарё бўйидаги C нуқтадан A нуқтада турган солгача бўлган масофани (14.20-расм) топинг, бу ерда $\angle ACB = 45^\circ$, $BC = 60$ м.



14.20-расм



14.21-расм



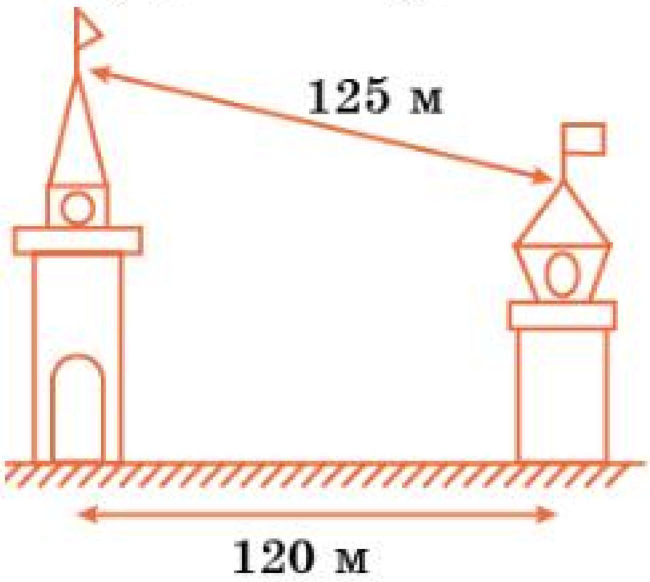
14.22-расм

31. Дарё бўйидаги A, B ва C уйлар тўғри бурчакли тенгёнли учбурчакларнинг учларида, A, D ва C уйлар битта тўғри чизиқда, D уй A ва C уйлардан бир хил узоқликда жойлашган (14.21-расм). Исталган иккита уй орасидаги масофани қандай аниқлаш мумкин?

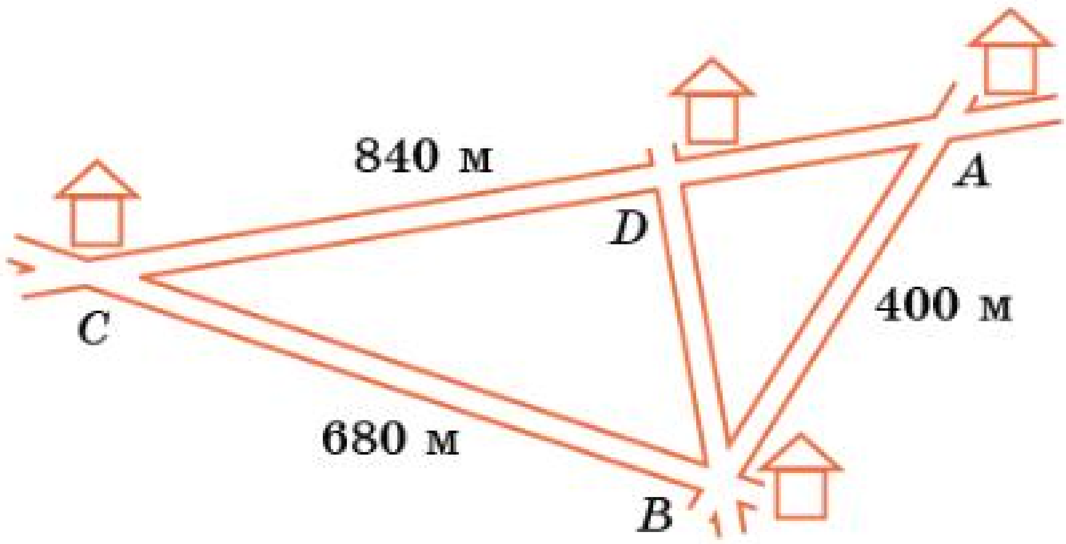
32. Дарёнинг ҳар икки томонида хурма дарахти ўсиб турибди. Дарахтлардан бирининг баландлиги — 30 м, иккинчисиники — 20 м, хурмолар асослари орасидаги масофа эса 50 м. Ҳар бир хурмонинг юқори учларига қушлар қўнган. Иккала қуш ҳам хурмолар орасидаги дарё суви юзига қалқиб чиққан балиқни кўриб қолди (14.22-расм). Қушлар балиққа томон бир вақтда интилишди ва бир вақтда етишди. Балиқ баландроқ хурмодан қандай масофада кўринган эди?

33. Бир минора иккинчисидан бир ярим марта баланд. Миноралар асослари орасидаги масофа 120 м, учлари орасидаги масофа эса 125 м (14.23-расм). Ҳар бир миноранинг баландлиги нимага тенг?

34. Айжан, Берик ва Сабит A, B, C уйларда яшайди ва улар орасидаги масофа мос равишда 400 м, 680 м ва 840 м га тенг (14.24-расм). BD ва AC йўллар тўғри бурчак остида кесишади ва улар кесишган жойда ўқувчилар ўқийдиган мактаб жойлашган. Мактабдан ҳар бир уйгача бўлган масофани топинг.



14.23-расм

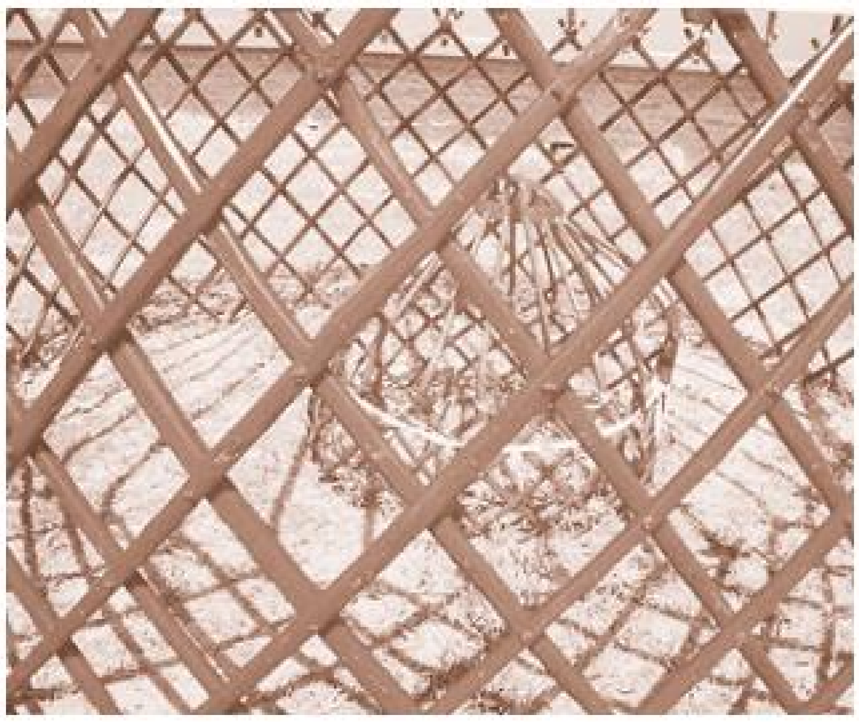


14.24-расм

35. Ер юзасидан 10 км баландликдаги ҳаво шарида турган кузатувчи узоқдан атрофни қандай кўради ($R_{ер}$ ≈ 6400 км)?

36. Кереге — бир-бирига бирлаштирилиб, кигиз уйнинг думалоқ деворини ташкил этувчи йиғиладиган, катак қанотлардан қурилган асоси (14.25-расм). Кигиз уйнинг ўлчови ромбсимон катакли керегенинг ўлчовларига боғлиқ бўлади (14.26-расм). Агар қанотнинг баландлиги ва узунлиги мос равишда 1,6 м, 2,4 м ва битта қанотда бўйига 8, энига 10 ромбсимон катаклар бор бўлса, у ҳолда ана шу ромбнинг периметрини топинг.

14.25-расм



14.26-расм

37. Алматидаги “Сунқар” халқаро тоғ чанғи трамплинлари мажмуаси дунёдаги энг кучли бешликлар қаторига киради. У қишда қорга ва сунъий қопламга сакраш мумкин бўлган иккита трамплиндан ташкил топган (14.27-расм). Битта трамплин иккинчисидан бир ярим марта баланд. Трамплинлар асослари орасидаги масофа 15 м. Учлари орасидаги масофа эса 25 м. Ҳар бир трамплиннинг баландлигини топинг.


14.27-расм

Ахборот тайёрланг

38. Пифагор теоремаси — геометрия фанидаги энг ажойиб хулосалардан бири. Қадимги юнон олими Пифагор ҳаёти, илмий асарлари ҳақида ахборот тайёрланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

39. Пифагор теоремасидан фойдаланиб, $\sin^2 A + \cos^2 A$ йиғинди нимага тенг эканини аниқлаб кўринг.

15-§. ТРИГОНОМЕТРИК АЙНИЯТЛАР

Тўғри бурчакли учбурчакнинг A ўткир бурчагининг тригонометрик функциялари таърифларидан қуйидаги айниятлар келиб чиқади:

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A,\ \cos(90^\circ - A) = \sin A;$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - A) = \operatorname{ctg} A,\ \operatorname{ctg}(90^\circ - A) = \operatorname{tg} A.$$

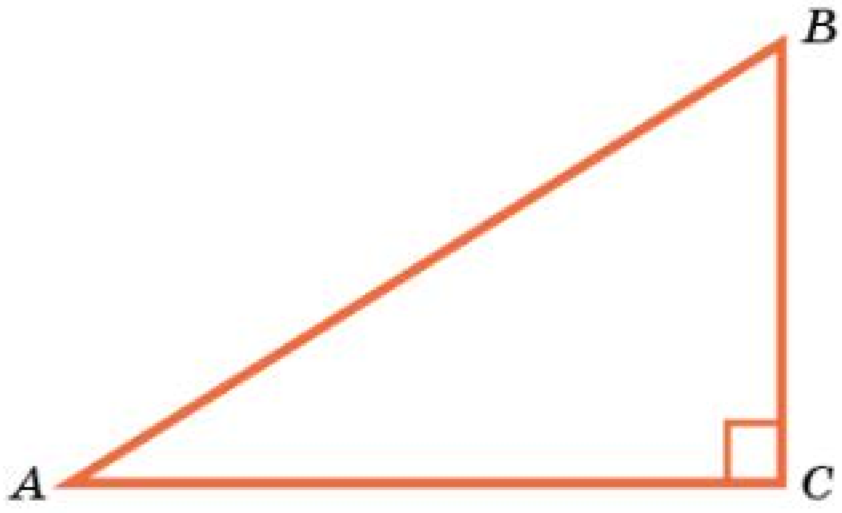
Ушбу тенгликлардан фойдаланиб, дарслик охирида берилган тригонометрик функцияларнинг тақрибий қийматлари жадвали ёрдамида тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчаги учун косинус ва котангенснинг тақрибий қийматларини топиш мумкин.

Масалан, $\cos 40^\circ = \sin 50^\circ \approx 0{,}77$, $\operatorname{ctg} 40^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ \approx 1{,}19$.

Теорема. ***A* ўткир бурчакнинг синуси ва косинуси қуйидаги асосий тригонометрик айниятлар билан ўзаро боғланади:**

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Исботи. ABC тўғри бурчакли учбурчакни ($\angle C = 90^\circ$) кўриб чиқамиз (15.1-расм).



15.1-расм

Тўғри бурчакли учбурчакнинг A ўткир бурчаги синуси ва косинуси таърифларига кўра

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 =$$

$$= \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

Пифагор теоремасига кўра $BC^2 + AC^2 = AB^2$, демак, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. □

Асосий тригонометрик айният ўткир бурчакнинг косинусини синус орқали ва аксинча ифодалашга имкон беради, яъни,

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}, \ \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}.$$

Теорема. ***A* ўткир бурчакнинг тангенси ва косинуси қуйидаги айният билан ўзаро боғланган:**

$$\mathrm{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

Исботи. Асосий тригонометрик айниятнинг иккала томонини $\cos^2 A$ га бўлиб, $\mathrm{tg}\, A = \frac{\sin A}{\cos A}$ тенгликдан фойдаланамиз. У ҳолда қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\mathrm{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}. \ \square$$

Исботланган айниятга ўхшаш бўлган ўткир бурчакнинг котангенси ва синусини ўзаро боғловчи айният келтириб чиқариб кўринг.

1. Қандай тригонометрик айниятлар ўткир бурчак тригонометрик функцияларининг таърифларидан келиб чиқади?
2. Асосий тригонометрик айният нимани билдиради?
3. Бурчакнинг синуси унинг косинуси орқали ва аксинча бурчакнинг косинуси унинг синуси орқали қандай ифодаланади?
4. Ўткир бурчакнинг тангенси билан косинуси ўзаро қандай боғланган?

Машқлар

A

1. Ифодани соддалаштиринг: а) $1 - \sin^2 A$; б) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$.
2. Агар а) $\cos A = \frac{1}{2}$; б) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлса, у ҳолда $\sin A$ ни топинг.
3. Агар а) $\sin A = \frac{1}{3}$; б) $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$ бўлса, у ҳолда $\cos A$ ни топинг.

4. Битта бурчакнинг синуси ва косинуси қуйидаги қийматларга тенг бўлиши мумкинми: а) $\frac{1}{2}$ ва $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ ва $\frac{\sqrt{3}}{2}$?
5. Ифодани соддалаштиринг: а) $\frac{1}{\cos^2 A} - 1$; б) $\frac{1}{\sin^2 A} - 1$.
6. Тригонометрик функцияларнинг тақрибий қийматлари жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги тақрибий қийматларни топинг: а) $\cos 30^\circ$; б) $\cos 45^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 30^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 60^\circ$.

B

7. A ёки B бучаклардан қайси бири катта, бу ерда: а) $\operatorname{tg} A = 2$, $\operatorname{tg} B = 3$; б) $\operatorname{tg} A = 8$, $\operatorname{tg} B = 5$?
8. Агар а) $\cos A = \frac{5}{13}$; б) $\cos A = 0{,}8$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} A$ ни топинг.
9. Агар а) $\operatorname{tg} A = 3$; б) $\operatorname{tg} A = 0{,}5$ бўлса, у ҳолда $\cos A$ ни топинг.
10. Ифодани соддалаштиринг: а) $\cos^2 A + \operatorname{tg}^2 A \cos^2 A$; б) $\sin^2 A + \operatorname{ctg}^2 A \sin^2 A$.
11. Ифодани соддалаштиринг: а) $\cos A + \operatorname{tg} A \sin A$; б) $\sin A + \operatorname{ctg} A \cos A$.
12. Айниятни исботланг: $\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{ctg} A}$.
13. Агар а) $\operatorname{ctg} A = 2$; б) $\operatorname{ctg} A = 0{,}2$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} A$ ни топинг.

C

14. Агар $\angle A < \angle B$ бўлса, у ҳолда $\sin \angle A < \sin \angle B$, $\cos \angle A > \cos \angle B$ эканлигини исботланг.
15. Айниятни исботланг: $1 + \operatorname{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.
16. Агар а) $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\sin A = 0{,}8$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{ctg} A$ ни топинг.
17. Агар а) $\operatorname{ctg} A = 2$; б) $\operatorname{ctg} A = \frac{1}{3}$ бўлса, у ҳолда $\sin A$ ни топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

18. Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг: а) унинг қаршисида ётган ўткир бурчаги синусига; б) ёпишган бурчакнинг косинусига кўпайтмаси нимага тенг?
19. Тўғри бурчакли учбурчак катетининг: а) ёпишган ўткир бурчаги тангенсига; б) қаршисида ётган бурчакнинг котангенси кўпайтмаси нимага тенг?

16-§. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАКЛАРНИ ЕЧИШ

Тригонометрик функцияларнинг таърифларидан тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари билан унинг ўткир бурчакларининг тригонометрик функциялари орасидаги муносабатлар келиб чиқади:

1. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети унинг гипотенузаси билан қаршисида ётган бурчак синуси кўпайтмасига тенг.

Шундай қилиб, ABC тўғри бурчакли учбурчакда (16.1-расм) қуйидаги муносабат бажарилади:

$$BC = AB \cdot \sin A.$$

2. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети унинг гипотенузаси билан унга ёпишган бурчак косинуси кўпайтмасига тенг.

Шундай қилиб, ABC тўғри бурчакли учбурчакда (16.1-расм) қуйидаги муносабат бажарилади:

$$BC = AB \cdot \cos B.$$

3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети унинг иккинчи катети билан қаршисида ётган бурчак тангенси кўпайтмасига тенг.

Шундай қилиб, ABC тўғри бурчакли учбурчакда (16.1-расм) қуйидаги муносабат бажарилади:

$$BC = AC \cdot \operatorname{tg} A.$$

4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети унинг иккинчи катети билан ёпишган бурчак котангенси кўпайтмасига тенг.

Шундай қилиб, ABC тўғри бурчакли учбурчакда (16.1-расм) қуйидаги муносабат бажарилади:

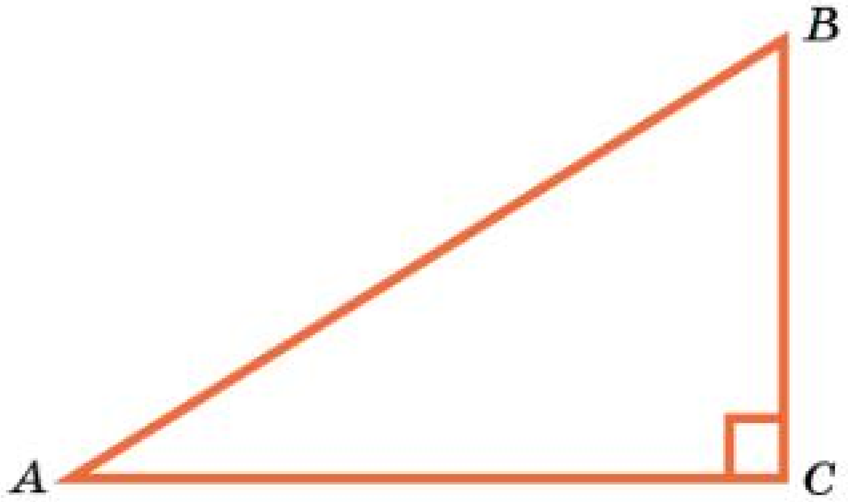
$$BC = AC \cdot \operatorname{ctg} B.$$

Тўғри бурчакли учбурчакларни ечиш деб, берилган икки томони билан ўткир бурчаклар тригонометрик функциялари орқали унинг томонларини топишга айтилади.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетларини топишга мисоллар кўриб чиқамиз.

1-масала. C бурчаги тўғри бурчак бўлган ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг AB гипотенузаси 6 га, A ўткир бурчагининг синуси 0,4 га тенг. BC катетни топинг (16.1-расм).

Ечиш. $BC = AB \cdot \sin A = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4.$



16.1-расм

2-масала. C бурчаги тўғри бурчак бўлган ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг AB гипотенузаси 5 га, A ўткир бурчагининг косинуси 0,6 га тенг. AC катетни топинг (16.1-расм).

Ечиш. $AC = AB \cdot \cos A = 5 \cdot 0{,}6 = 3.$

3-масала. C бурчаги тўғри бурчак бўлган ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг AC катети 4 га, A ўткир бурчагининг тангенси 0,5 га тенг. BC катетни топинг.

Ечиш. $BC = AB \cdot \operatorname{tg} A = 4 \cdot 0{,}5 = 2.$

4-масала. C бурчаги тўғри бурчак бўлган ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг BC катети 3 га, A ўткир бурчагининг котангенси 1,5 га тенг. AC катетни топинг.

Ечиш. $AC = BC \cdot \operatorname{ctg} A = 3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5.$

Кўрсатилган муносабатларга ўхшаш тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасини унинг катети ва ўткир бурчагининг тригонометрик функциялари орқали ифодаловчи муносабат ёзинг.

1. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети унинг гипотенузаси ва қаршисида ётган бурчак синуси орқали қандай ифодаланади?
2. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети унинг гипотенузаси ва ёпишган бурчак косинуси орқали қандай ифодаланади?
3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети унинг иккинчи катети ва қаршисида ётган бурчак тангенси орқали қандай ифодаланади?
4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети унинг иккинчи катети ва ёпишган бурчак котангенси орқали қандай ифодаланади?

Машқлар

A

1. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчаги 30° га тенг ва $AB = 2$. BC томонни топинг.
2. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчаги 30° га тенг ва $AB = 2$. AC томонни топинг.
3. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчаги 30° га тенг ва $BC = 1$. AB томонни топинг.
4. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчаги 30° га тенг ва $AC = 2$. AB томонни топинг.
5. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчаги 30° га тенг ва $AC = 2$. BC томонни топинг.
6. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчаги 30° га тенг ва $BC = 1$. AC томонни топинг.
7. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчаги 45° га тенг ва $AB = 1$. BC томонни топинг.
8. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчаги 45° га тенг ва $AC = 1$. AB томонни топинг.
9. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $BC = 8$, $\sin A = 0{,}8$. AB томонни топинг.
10. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $AC = 6$, $\cos A = \frac{2}{3}$. AB томонни топинг.
11. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $BC = 6$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. AC томонни топинг.

B

12. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчаги 45° га тенг ва $AC = 1$. CH баландликни топинг.

13. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчаги 45° га тенг ва $AB = 1$. CH баландликни топинг.

14. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, CH — баландлик, A бурчак 45° га тенг ва $AB = 1$. AH кесмани топинг.

15. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, CH — баландлик, A бурчак 45° га тенг ва $AB = 1$. BH кесмани топинг.

16. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $AC = 4$, $\sin A = \frac{3}{5}$. AB томонни топинг.

17. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $BC = 3$, $\cos A = \frac{4}{5}$. AB томонни топинг.

18. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $AC = 4$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. AB томонни топинг.

19. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчак 30° га тенг ва $AC = 1$. CH баландликни топинг.

20. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчак 30° га тенг ва $BC = 1$. CH баландликни топинг.

C

21. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, A бурчак 30° га тенг ва $AB = 1$. CH ни топинг.

22. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, CH — баландлик, A бурчак 30° га тенг ва $AB = 1$. AH ни топинг.

23. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, CH — баландлик, A бурчак 30° га тенг ва $AB = 1$. BH ни топинг.

24. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, CH — баландлик, A бурчак 30° га тенг ва $AC = 1$. BH ни топинг.

25. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га, CH — баландлик, A бурчак 30° га тенг ва $BC = 1$. AH ни топинг.

26. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $AC = 4$, $\sin A = \frac{3}{5}$. CH баландликни топинг.

27. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $AC = 4$, $\cos A = \frac{4}{5}$, CH — баландлик. AH ни топинг.

28. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $BC = 3$, $\cos B = \frac{3}{5}$, CH — баландлик. BH ни топинг.

29. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $AB = 5$, $\cos A = 0{,}8$, CH — баландлик. AH ни топинг.

30. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $AB = 5$, $\sin A = 0{,}6$, CH — баландлик. BH ни топинг.

31. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $BC = 3$, $\sin A = \frac{3}{5}$, CH баландликни топинг.

32. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $BC = 3$, $\cos A = \frac{4}{5}$, CH — баландлик. AH ни топинг.

33. ABC учбурчакда C бурчаги 90° га тенг, $AC = 4$, $\sin A = \frac{3}{5}$, CH — баландлик. BH ни топинг.

34. ABC учбурчакда $AB = BC$, $AC = 6$, $\sin C = \frac{4}{5}$. CH баландликни топинг.

35. ABC учбурчакда $AB = BC$, $AC = 5$, $\cos C = 0{,}8$. CH баландликни топинг.

36. ABC учбурчакда $AC = BC = 1$, C бурчаги 120° га тенг. AH томонни топинг.

37. ABC учбурчакда $AC = BC$, C бурчаги 120° га тенг, $AB = 1$. AC томонни топинг.

38. ABC учбурчакда $AC = BC$, C бурчаги 120° га тенг, $AC = 1$. AB томонни топинг.

39. ABC учбурчакда $AC = BC = 1$, C бурчаги 135°га тенг. AH баландликни топинг.

40. ABC учбурчакда $AC = BC = 1$, C бурчаги 150°га тенг. AH баландликни топинг.

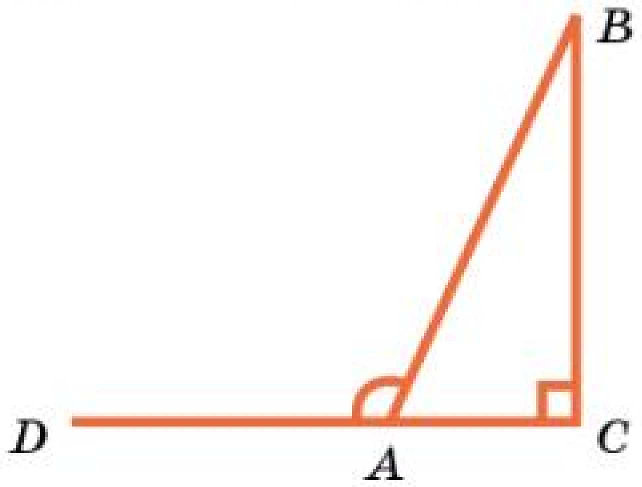
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

41. Тўғри ва ўтмас бурчакларнинг тригонометрик функцияларини аниқлаб кўринг.

17-§. ТЎҒРИ ВА ЎТМАС БУРЧАКЛАРНИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРИ

Тўғри ва ўтмас бурчаклар тригонометрик функцияларининг таърифларини кўриб чиқамиз.

BAD ўтмас бурчак берилсин (17.1-расм).



17.1-расм

17.2-расм

B нуқтадан AD тўғри чизиққа BC перпендикуляр туширамиз. A *ўтмас бурчакнинг синуси* деб, BC нинг AB га нисбатига айтилади, яъни

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Бошқача айтганда, A ўтмас бурчакнинг синуси A бурчакка қўшни бўлган бурчакнинг синусига тенг бўлади, яъни

$$\sin A = \sin(180^\circ - A).$$

A бурчак тўғри бурчак бўлган ҳолда (17.2-расм) ўтказилган перпендикулярнинг C асоси A нуқта билан устма-уст тушади, AB кесма эса CB кесма билан устма-уст тушади. Бу ҳолда тўғри бурчакнинг синуси 1 га тенг бўлади, яъни

$$\sin 90^\circ = 1.$$

A ўтмас бурчакнинг косинуси деб, манфий ишора билан олинган AC нинг AB га нисбатига айтилади, яъни

$$\cos A = -\frac{AC}{AB}.$$

Бошқача айтганда, A ўтмас бурчакнинг косинуси A бурчакка қўшни бўлган бурчакнинг манфий ишора билан олинган косинусига тенг бўлади, яъни

$$\cos A = -\cos(180^\circ - A).$$

A бурчак тўғри бурчак бўлган ҳолда (17.2-расм) туширилган перпендикулярнинг C асоси A нуқта билан устма-уст тушади. Бу ҳолда тўғри бурчакнинг косинуси 0 га тенг бўлади, яъни

$$\cos 90^\circ = 0.$$

A ўтмас бурчакнинг тангенси ва котангенси қуйидаги тенгликлар орқали аниқланади:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \ \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

A бурчак тўғри бурчак бўлган ҳолда $\operatorname{tg} A$ аниқланмайди, чунки $\cos A = 0$. Тўғри бурчакнинг котангенси нолга тенг бўлади, яъни $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$.

Теорема. A тўғри ва ўтмас бурчаклар учун қуйидаги тригонометрик айният бажарилади:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Исботи. Ўткир бурчаклар учун ушбу тенглик аввал исботланган эди. Ушбу тенгликнинг ўтмас бурчак учун бажарилишини исботлаймиз. BAD ўтмас бурчакни кўриб чиқамиз (17.1-расм). Уни A бурчак деб атаймиз.

$\sin A = \sin\angle BAC$ ва $\cos A = -\cos\angle BAC$ эканлигидан $\sin^2 A + \cos^2 A = \sin^2\angle BAC + \cos^2\angle BAC$ бўлади. ABC учбурчак учун $\sin^2\angle BAC + \cos^2\angle BAC = 1$ асосий тригонометрик айниятдан фойдаланамиз. Демак, талаб этилган $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ тенглик бажарилади.

A бурчак тўғри бурчак бўлганда $\sin A = 1$, $\cos A = 0$ бўлади. Бундан $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ эканлиги келиб чиқади. ◻

Шу билан бир каторда, 0° ва 180° бурчаклар учун тригонометрик функцияларни аниқлаймиз, яъни

$$\sin 0^\circ = 0,\ \sin 180^\circ = 0;$$
$$\cos 0^\circ = 1,\ \cos 180^\circ = -1;$$
$$\mathrm{tg}\, 0^\circ = 0,\ \mathrm{tg}\, 180^\circ = 0.$$

0° ва 180° бурчаклар учун асосий тригонометрик айниятнинг бажарилишини текширинг.

Ўтмас ва ўткир бурчаклар тригонометрик функцияларининг нисбатларидан фойдаланиб, дарслик охирида берилган тригонометрик функцияларнинг тақрибий қийматлари жадвали ёрдамида ўтмас бурчаклар тригонометрик функцияларининг тақрибий қийматларини топиш мумкин.

Масалан, $\sin 130^\circ = \sin 50^\circ \approx 0{,}77$; $\mathrm{tg}\, 130^\circ = -\mathrm{tg}\, 50^\circ \approx -1{,}19$.

1. Ўтмас бурчакнинг синуси қандай аниқланади?
2. Ўтмас бурчакнинг косинуси қандай аниқланади?
3. Қуйидаги: а) $\sin 90^\circ$; б) $\cos 90^\circ$ қийматлар нимага тенг?
4. Ўтмас бурчакнинг тангенси ва котангенси қандай аниқланади?
5. Қандай бурчакда тангенс аниқланмаган?
6. Асосий тригонометрик айниятнинг моҳияти нимада?
7. Қуйидаги: а) $\sin 0^\circ$; б) $\sin 180^\circ$ қийматлар нимага тенг?
8. Қуйидаги: а) $\cos 0^\circ$; б) $\cos 180^\circ$ қийматлар нимага тенг?
9. Қуйидаги: а) $\mathrm{tg}\, 0^\circ$; б) $\mathrm{tg}\, 180^\circ$ қийматлар нимага тенг?

Машқлар

А

1. A ўтмас бурчак синусининг ишораси қандай?
2. A ўтмас бурчак косинусининг ишораси қандай?
3. A ўтмас бурчак тангенсининг ишораси қандай?
4. A ўтмас бурчак котангенсининг ишораси қандай?
5. Қуйидаги: а) 120°; б) 135°; в) 150° бурчакнинг синуси нимага тенг?
6. Қуйидаги: а) 120°; б) 135°; в) 150° бурчакнинг косинуси нимага тенг?
7. Қуйидаги: а) 120°; б) 135°; в) 150° бурчакнинг тангенси нимага тенг?
8. Қуйидаги: а) 120°; б) 135°; в) 150° бурчакнинг котангенси нимага тенг?

В

9. Қуйидаги: 60°; 90°; 135°; 150° бурчаклар синусларини ўсиш тартибида жойлаштиринг.
10. Қуйидаги: 60°; 90°; 135°; 150° бурчаклар косинусларини ўсиш тартибида жойлаштиринг.
11. Қуйидаги: 60°; 90°; 135°; 150° бурчаклар тангенсларини ўсиш тартибида жойлаштиринг.
12. Қуйидаги: 60°; 120°; 135°; 150° бурчаклар котангенсларини ўсиш тартибида жойлаштиринг.

13. Ўтмас бурчакнинг синуси 0,8 га тенг. Шу бурчакнинг косинусини топинг.
14. Ўтмас бурчакнинг косинуси 0,8 га тенг. Шу бурчакнинг синусини топинг.
15. Ифодаларни соддалаштиринг: а) $1 - \sin^2 A$; б) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$; в) $\cos^2 A + \operatorname{tg}^2 A \cos^2 A$.
16. Ифодани соддалаштиринг: $(1 - \cos A)(1 + \cos A)$.

C

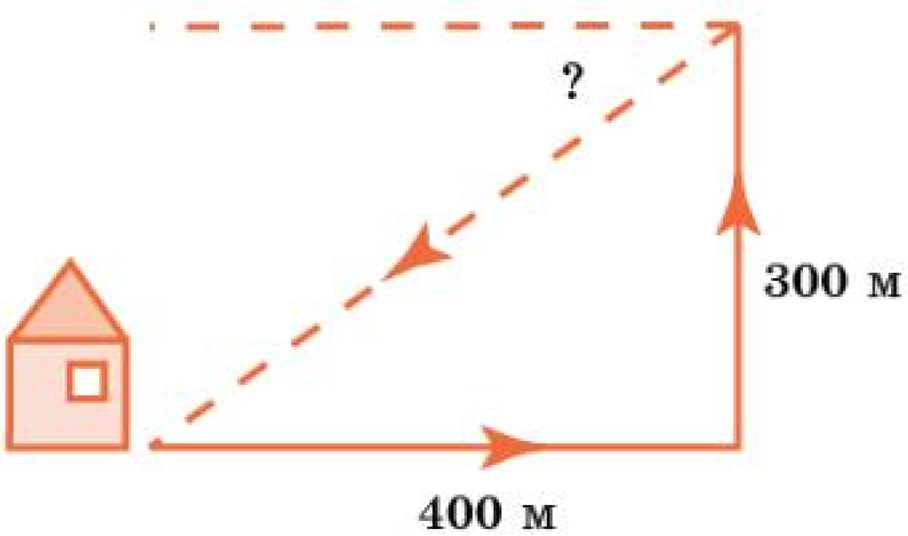
17. A ўтмас бурчак учун қуйидаги тенглик тўғри эканини исботланг:
$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(180^\circ - A);\ \operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg}(180^\circ - A).$$
18. A ўткир бурчак учун қуйидаги тенглик ўринли эканини исботланг:
$$\sin(90^\circ + A) = \cos A,\ \cos(90^\circ + A) = -\sin A.$$
19. Тригонометрик функцияларнинг тақрибий қийматлар жадвалидан фойдаланиб, қуйидагиларнинг тақрибий қийматларини топинг: а) $\sin 140^\circ$; б) $\cos 145^\circ$; в) $\operatorname{tg} 150^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 160^\circ$.

18-§. МАСОФАЛАР ВА БУРЧАКЛАРНИ ТОПИШГА ДОИР АМАЛИЙ МАСАЛАЛАР

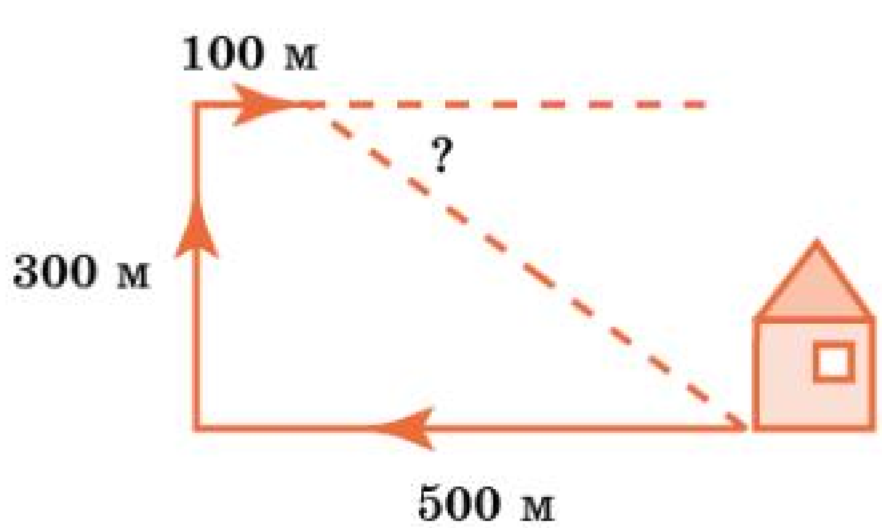
Қуйидаги масалаларни ечиш учун дарслик охирида берилган тригонометрик функцияларнинг тақрибий қийматлари жадвалидан фойдаланинг.

Ушбу жадвалда ўткир бурчак синуси ва тангенсининг тақрибий қийматлари кўрсатилган.
$$\cos A = \sin(90^\circ - A),\ \operatorname{ctg} A = \operatorname{tg}(90^\circ - A)$$
формулаларидан фойдаланиб, косинус ва котангенснинг мос қийматларини топиш мумкин.

1. Асхат уйидан шарққа томон 400 м юрди. Кейин шимолга бурилиб яна 300 м юрди (18.1-расм). Асхат уйига қайтиш учун ғарбга томон қандай бурчакка бурилиб юриши керак? Жавобингизни градуснинг бутун сонида ифодаланг.



18.1-расм

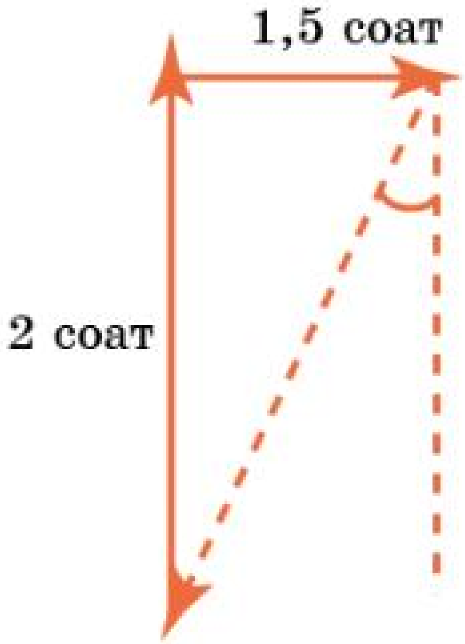


18.2-расм

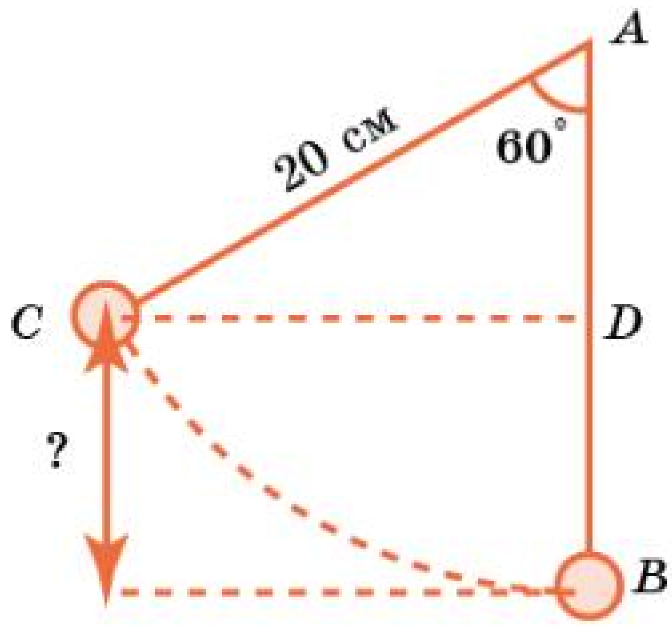
2. Ойнур уйидан ғарбга томон 500 м, кейин шимол томонга бурилиб яна 300 м юрди. Сўнгра у шарққа томон бурилиб яна 100 м юрди

(18.2-расм). Ойнур уйига қайтиши учун шарққа томон қандай бурчакка бурилиб юриши керак? Жавобингизни градуснинг бутун сонида кўрсатинг.

3. Эрмек қўзиқорин териш учун ўрмонга бориб, икки соат давомида шимол томонга, кейин ана шу тезлик билан бир ярим соатлар чамаси шарқ томонга бурилиб яна юрди (18.3-расм). Эрмек ўрмонга кирган жойига қайтиб келиши учун жанубга томон қандай бурчакка бурилиб юриши керак? Жавобингизни градуснинг бутун сонида кўр сатинг.



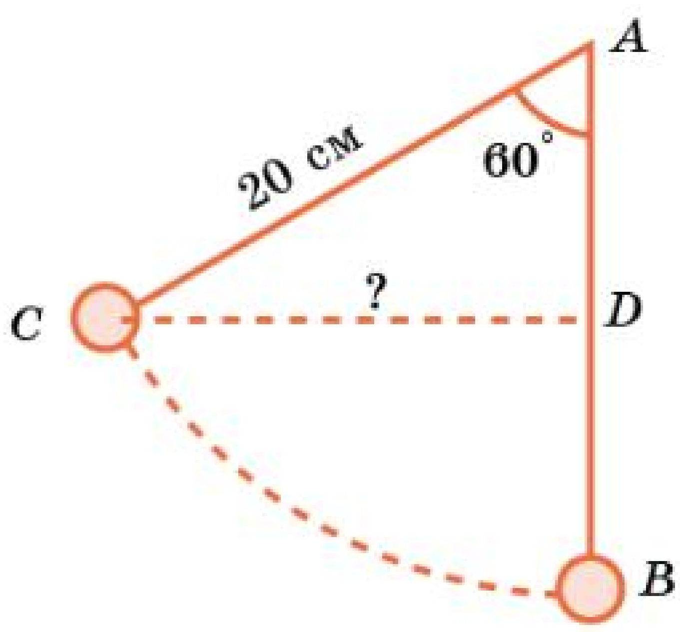
18.3-расм



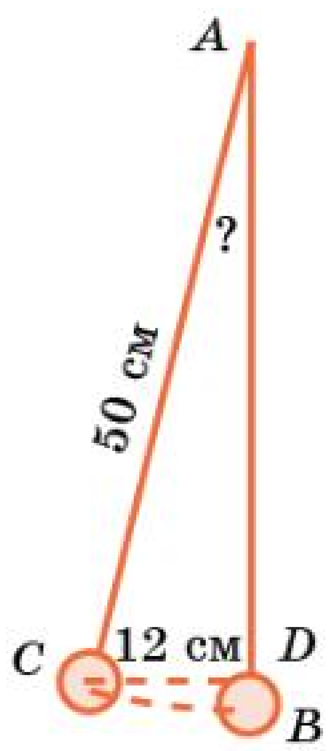
18.4-расм

4. Ипга илиниб турган юк кўринишидаги маятник турган жойидан 60° бурчакка оғди. Маятникнинг AC узунлиги 20 см (18.4-расм). Юкнинг баландлиги турган жойи билан таққослаганда қандай ўзгарди?

5. Ипга илиниб турган юк кўринишидаги маятник турган жойидан 60° бурчакка оғди. Маятникнинг AB узунлиги 20 см (18.5-расм). Юкнинг C жойидан унинг дастлабки жойи орқали ўтувчи AB тўғри чизиққача бўлган CD масофани топинг.



18.5-расм



18.6-расм

6. Узунлиги 50 см бўлган AB маятник турган жойидан 12 см га тенг CD масофага оғди (18.6-расм). Маятникнинг дастлабки AB жойи

билан янги AC жойи ораларидаги бурчакни топинг. Жавобини градуснинг бутун сон билан ифодаланувчи тақрибий қиймати орқали кўрсатинг.

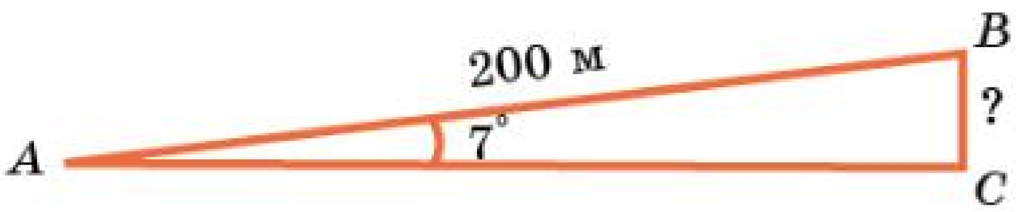
7. Тоғ темирйўли ҳар бир 30 м сайин 1 м баландликка кўтарилади (18.7-расм). Кўтарилиш бурчагини градусларда топинг. Жавобини бутун сонлар орқали ифодаланган градуснинг тақрибий қиймати орқали кўрсатинг.

18.7-расм

8. Одам 1000 м тепалик бўйлаб юқорига кўтарилиб тепалик асосининг текислигидан 90 м баландликка кўтарилди (18.8-расм). Тепаликнинг оғиш бурчагини (ўртача) градусларда топинг. Жавобини бутун сонлар орқали ифодаланган градуснинг тақрибий қиймати орқали кўрсатинг.

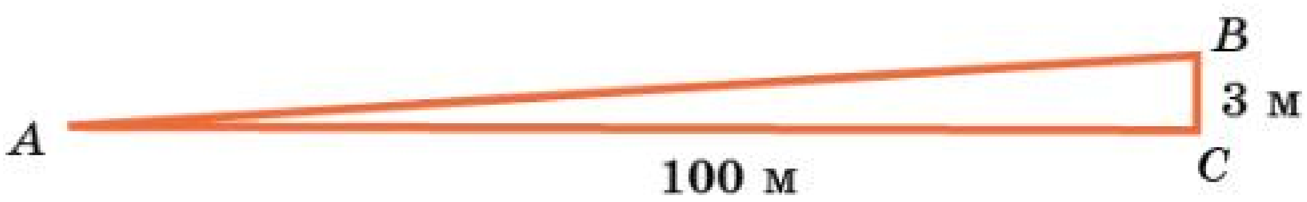
18.8-расм

9. Йўлнинг кўтарилиш бурчаги 7° га тенг (18.9-расм). Йўловчининг 200 м юриб кўтарилган баландлигини топинг



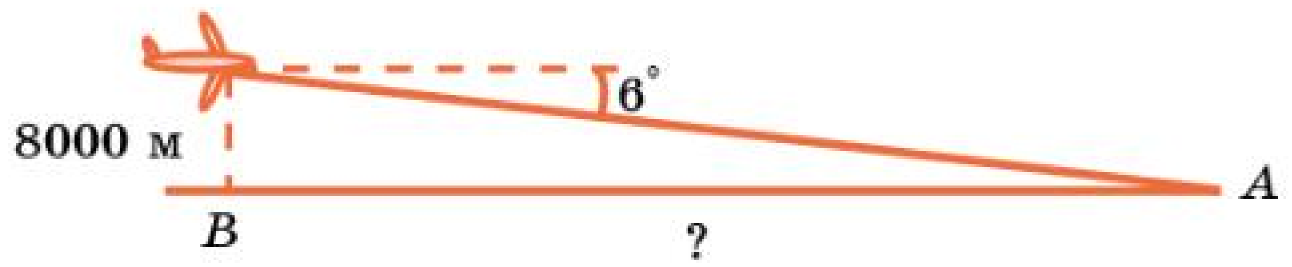
18.9-расм

10. Кузатувчидан 100 м узоқликда турган баландлиги 3 м устуннинг унга кўриниш бурчагини тақрибий топинг (18.10-расм). Жавобингизни градуснинг бутун сонлари билан кўрсатинг.



18.10-расм

11. Учоқ A аэропортга 8000 м баландликда яқинлашди. Учувчига учоқни қўндириш учун 6° бурчак билан пастлашишга кўрсатма берилди (18.11-расм). Учоқнинг қўниш майдонидан пастлашишни бошлаш жойигача бўлган AB масофани топинг. Жавобингизни бутун сонга тенг тақрибий қиймат орқали кўрсатинг.



18.11-расм

Ахборот тайёрланг

12. Маҳаллий ерларда бурчаклар ва масофаларни ўлчаш. Масофалар ва бурчакларни топишга доир амалий масалалар ҳақида маълумот тайёрланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

13. Фигуранинг юзаси тушунчасини аниқлаб кўринг. Юзанинг қандай ўлчов бирликларини биласиз?
14. Юзанинг исталган бир хоссасини ифодаланг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $\sin 60^\circ$ нимага тенг?

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos 30^\circ$ нимага тенг?

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\mathrm{tg}\, 45^\circ$ нимага тенг?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

4. $\mathrm{ctg}\, 30^\circ$ нимага тенг?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

5. a бурчакнинг қандай қиймати учун $\sin a = \cos a$ бажарилади?

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. Ҳеч қандай.

6. a бурчакнинг қандай қиймати учун $\mathrm{tg}\, a = \mathrm{ctg}\, a$ бажарилади?

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. Ҳеч қандай.

7. a бурчакнинг қандай қиймати учун $\sin a = \mathrm{tg}\, a$ бажарилади?

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. Ҳеч қандай.

8. a бурчакнинг қандай қиймати учун $a \cos a = \mathrm{ctg}\, a$ бажарилади?

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. Ҳеч қандай.

9. Томони 2 га тенг бўлган тенгтомонли учбурчакнинг баландлигини топинг.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. ABC тенгёнли учбурчакнинг CD баландлигини топинг, бу ерда $AC = BC = 10$, $AB = 16$.

A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

11. ABC учбурчакда C бурчаги 90°, A бурчаги 30°, $AC = 2$. CH баландликни топинг.

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

12. ABC учбурчакда C бурчаги 90°, A бурчаги 45°, $AC = 2$. CH баландликни топинг.

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

13. $\sin A = \frac{3}{5}$. $\cos A$ ни топинг.

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

14. $\sin A = \frac{4}{5}$. $\operatorname{tg} A$ ни топинг.

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{5}$.

15. $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. $\sin A$ ни топинг.

A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{4}$.

16. $\operatorname{ctg} A = \frac{3}{4}$. $\cos A$ ни топинг.

A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{5}{4}$.

17. ABC учбурчакда $AC = BC$, C бурчаги 120°, $AC = 2$. AB ни топинг:

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

18. ABC учбурчакда $AC = BC = 2$, C бурчаги 120°. AH баландликни топинг.

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2} = 2$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

19. ABC учбурчакда $AC = BC = 2$, C бурчаги 135°. AH баландликни топинг.

A. $\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

20. ABC учбурчакда $AC = BC = 2$, C бурчаги 135°. AH баландликни топинг.

A. 1. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sqrt{3}$.

3-боб

ЮЗА

19-§. ЮЗА ТУШУНЧАСИ. ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАКНИНГ ЮЗАСИ

Фигуранинг юзаси текисликда шу фигура ётган бўлакнинг катталигини тавсифлайди.

Фигуранинг юзасини ўлчаш кесма узунлигини ўлчаш каби ана шу фигуранинг юза бирлиги бўладиган фигура билан таққослашга асосланади.

Юза ўлчов бирлиги сифатида томони узунлик ўлчов бирлигига тенг бўлган квадрат олинади. У *бирлик квадрат* деб аталади.

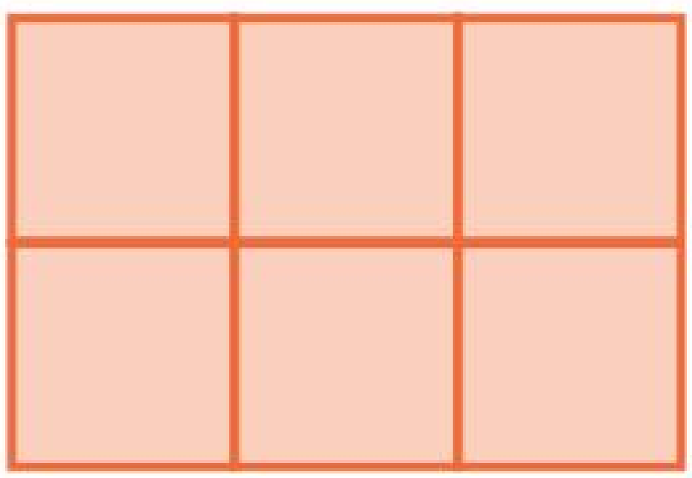
Масалан, агар узунлик ўлчов бирлиги 1 мм, 1 см ёки 1 м бўлса, у ҳолда юза ўлчов бирлиги сифатида томони мос равишда 1 мм, 1 см ёки 1 м га тенг бўлган квадрат олинади. Бундай квадрат *квадрат миллиметр*, *квадрат сантиметр* ёки *квадрат метр* деб аталади.

Фигуранинг юзаси ўлчов бирлигига боғлиқ бўлганлигидан тушунарли бўлиши учун S юзанинг катталигидан кейин ўлчов бирлиги кўрсатилади. Масалан, S мм^2, S см^2, S м^2.

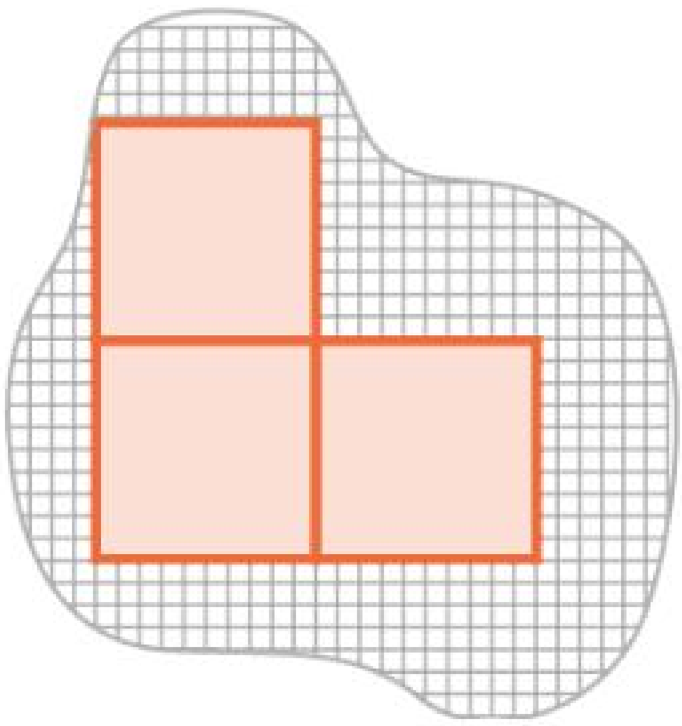
Φ фигура юзасини ўлчаш учун, энг аввало, унга тўлалигича неча бирлик квадрат жамланиши аниқланади.

Агар бирлик квадрат n марта қолдиқсиз тўлалигича жамланса, у ҳолда ўлчаш жараёни шу билан якунланади ва олинган n сони Φ фигура юзаси бўлиб ҳисобланади.

19.1-расмда бирлик квадрат 6 марта қолдиқсиз тўлалигича жамланган фигура кўрсатилган. Унинг юзаси 6 га тенг.



19.1-расм



19.2-расм

Агар бирлик квадрат Φ фигурада Φ' қолдиқ билан жамланадиган бўлса, у ҳолда n сони Φ фигура юзасининг тақрибий қиймати ҳисобланади. 19.2-расмда n сони 3 га тенг бўлади.

Бундай ҳолда бирлик квадрат томони ўндан бир бирлик кесмага тенг бўлган 100 та квадратга бўлинади. Ушбу ҳар бир кичкина квадрат юзаси юздан бирга тенг ҳисобланади. Квадратлар Φ' фигурада қолдиқсиз жамланса, у ҳолда ўлчов жараёни тугайди ҳамда $n + m \cdot 0{,}01$ сони Φ фигура юзаси дея қайд қилинади.

Φ' фигурада Φ'' қолдиқ билан жамланса, у ҳолда бирлик квадрат томони юздан бир бирлик кесмага тенг бўлган 10000 та квадратга бўлинади ва ана шу ўлчов жараёни такрорланади.

Юзани ўлчаш жараёни муайян қадамдан кейин тугаши мумкин. Бундай ҳолда фигура юзаси охирги ўнли каср орқали ифодаланади. Бироқ ўлчаш жараёни ҳеч қандай қадамда якунланмаслиги ҳам мумкин. Бундай ҳолда фигура юзаси чексиз ўнли каср орқали ифодаланади.

Шундай қилиб, *фигура юзаси* деб ўлчаш натижасида олинган ва берилган фигурага неча марта бирлик квадратлар ва унинг бўлаклари жамланишини кўрсатувчи сонга айтилади.

Агар иккита фигура юзалари бир хил бўлса, у ҳолда бундай фигуралар *тенг фигуралар* деб аталади.

Ясси фигуралар юзаларини ўлчаш учун кесмалар узунликларининг хоссаларига ўхшаш хоссалар ҳам тўғри бўлади.

1-хосса. Фигуранинг юзаси мусбат катталик бўлади.

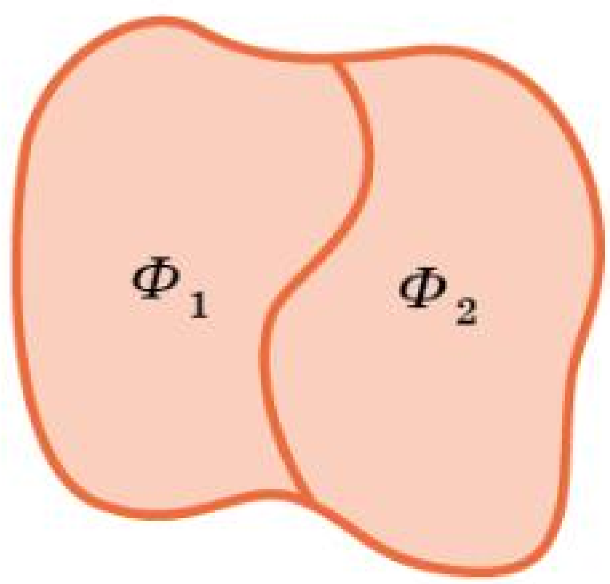
2-хосса. Тенг фигуралар юзалари тенг бўлади.

3-хосса. Агар Ф фигура Φ_1 ва Φ_2 фигураларга бўлинса (19.3-расм), у ҳолда Ф фигура юзаси Φ_1 ва Φ_2 фигуралар юзаларининг йиғиндисига тенг бўлади, яъни $S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$.

Эслатма. Агар бир фигурани иккинчисига ўтказувчи ҳаракат (ўрин алмаштириш) мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу *икки фигура тенг фигура* деб аталади.

Ҳаракатнинг қатъий таърифи 9-синф геометрия дарслигида берилади. Ушбу дарсликда биз фигураларнинг ҳаракати ва тенглиги ҳақидаги кўргазмали тушунчалардан фойдаланамиз.

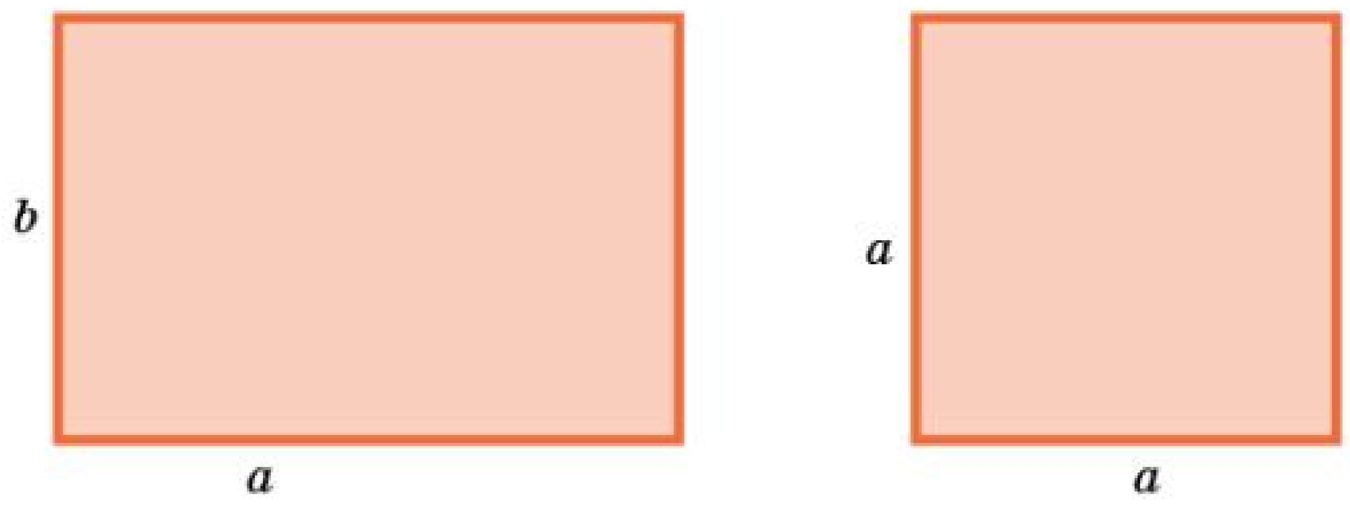
Ушбу хоссалардан агар Φ фигура n та тенг бўлакларга бўлинган бўлса, у ҳолда ҳар бир бўлак юзаси бутун Φ фигура юзасининг n дан бирига тенг бўлади.



19.3-расм

Буни мустақил тушунтириб кўринг.

Юза ҳисоблашдаги энг содда фигура тўғри тўртбурчак ҳисобланади (19.4-а расм).



а) б)

19.4-расм

Томонлари S бўлган тўғри тўртбурчакнинг a, b юзаси қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$S = a \cdot b.$$

Айрим ҳолларда томони a га тенг бўлган квадратнинг (19.4-б расм) юзаси қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

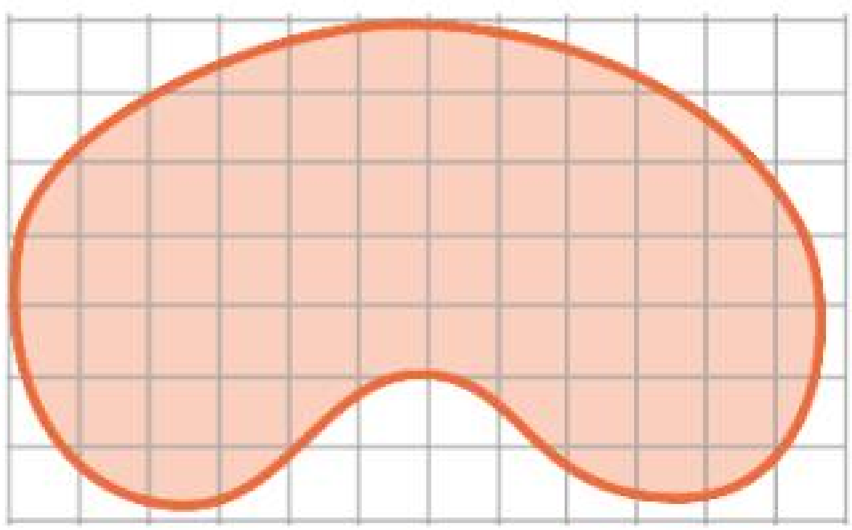
$$S = a^2.$$

1. Юза ўлчов бирлиги сифатида нима олинади?
2. Фигура юзаси деганимиз нима?
3. Фигура юзаси қандай ўлчанади?
4. Қандай иккита фигура тенг деб аталади?
5. Юза хоссаларини ифодаланг.
6. Тўғри тўртбурчакнинг юзаси қандай ҳисобланади?
7. Томони a га тенг бўлган квадратнинг юзаси нимага тенг?

Машқлар

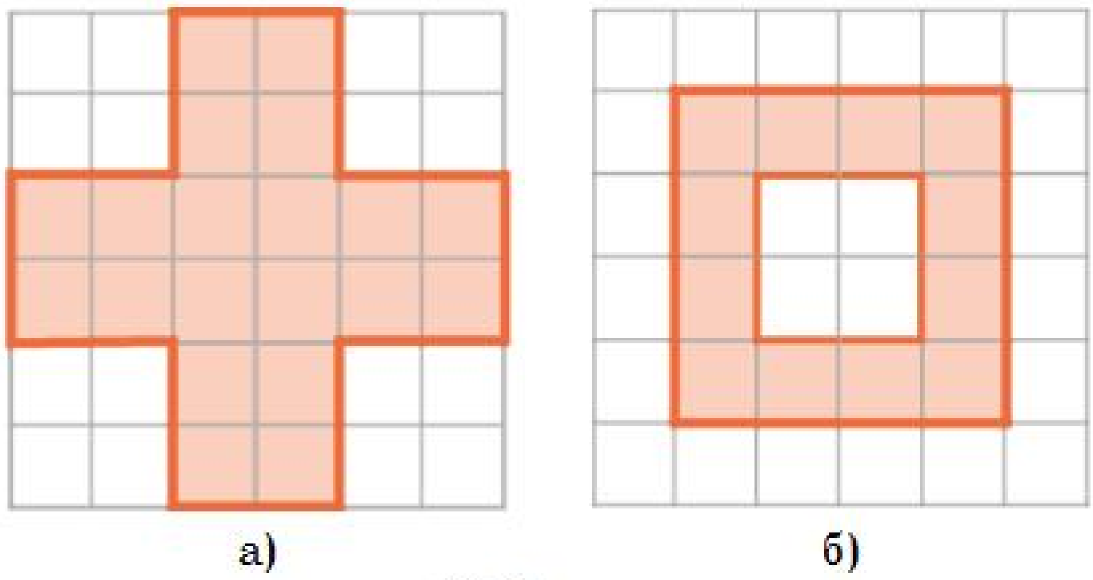
A

1. 19.5-расмда тасвирланган фигурада нечта бирлик квадрат тўлалигича жамланган? Катак томонлари 1 га тенг.



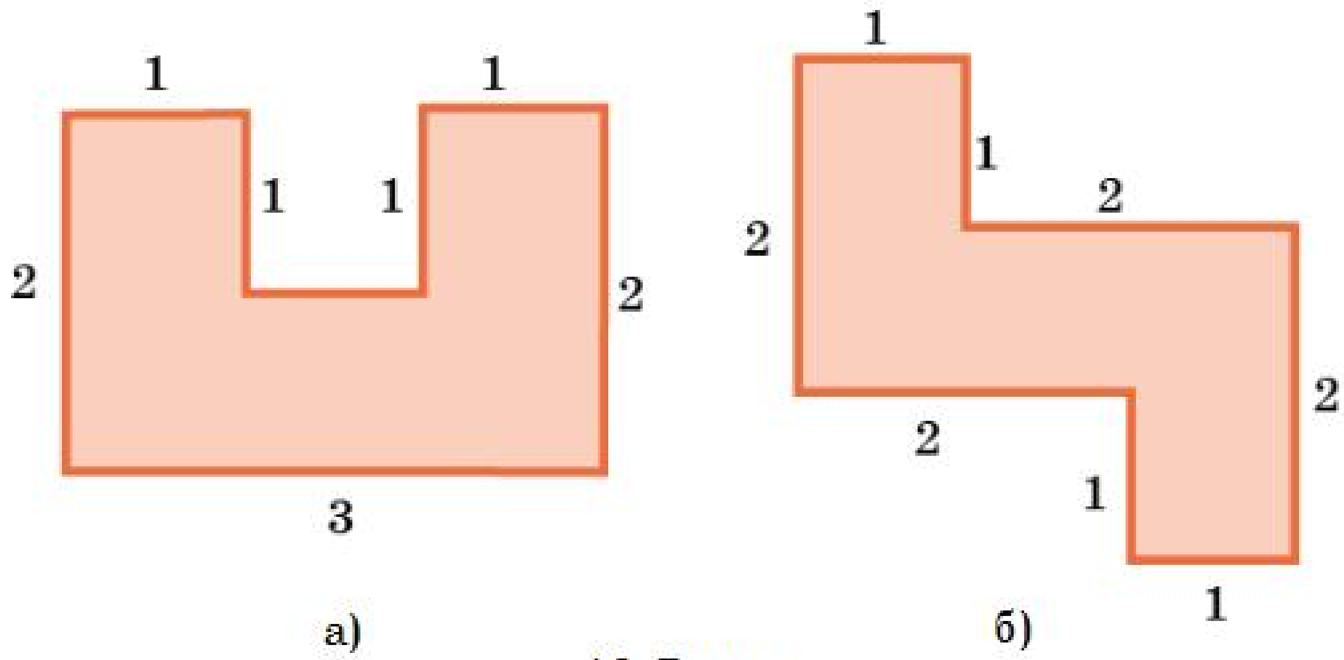
19.5-расм

2. 19.6-расмдаги фигура юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.



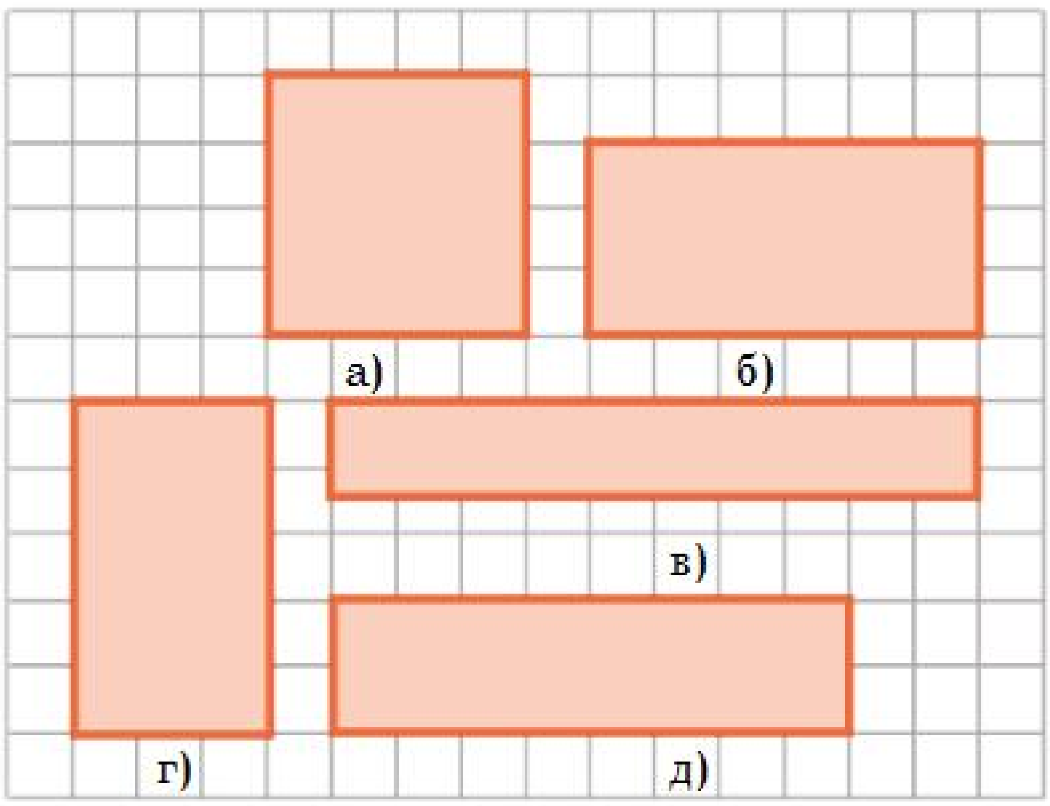
19.6-расм

3. 19.7-расмда тасвирланган ҳамма бурчаклари тўғри бурчак бўлган фигура юзасини топинг.

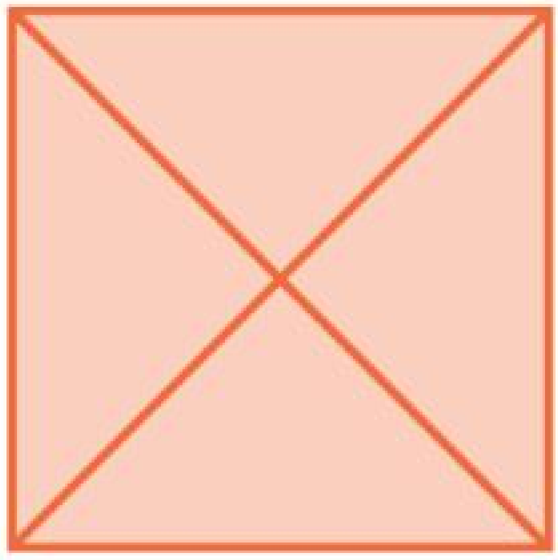


19.7-расм

4. 19.8-расмда берилган тенг фигураларни (катак томонлари 1 га тенг) кўрсатинг.



19.8-расм

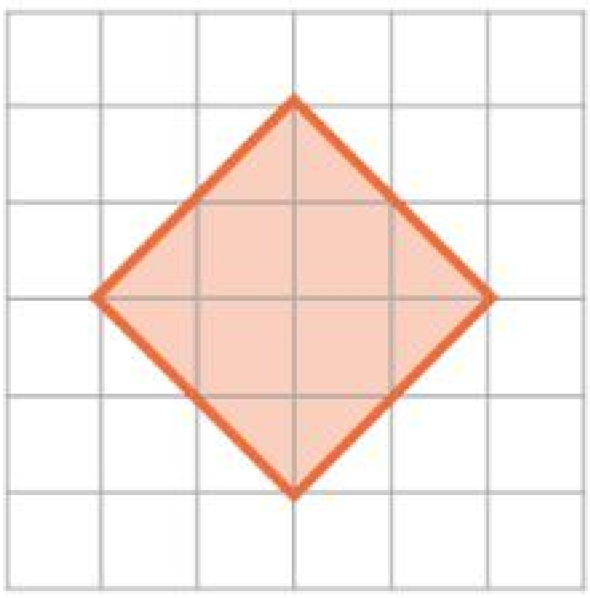


19.9-расм

5. Томони: а) 2 см; б) 10 см; в) 3 м бўлган квадрат юзасини топинг.
6. Периметри 80 см бўлган квадрат юзасини топинг.
7. Квадрат томони 1 га тенг. Диагоналлари орқали бўлинган квадрат бўлакларининг юзалари қандай (19.9-расм)?
8. Томони 6 га, диагонали 10 га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзасини топинг.
9. Агар тўғри тўртбурчакнинг томонлари: а) 2 марта ортса; б) 3 марта камайса, у ҳолда унинг юзаси қандай ўзгаради?
10. Республикамизнинг энг катта кўк байроғи Астана шаҳрида давлат рамзлари майдонидаги энг баланд устунда ҳилпираб турибди. Ҳозирги кунда ушбу давлат байроғимиз ҳажми бўйича дунёда 4-ўринда туради ва у 111 м баландликда ўрнатилганлиги туфайли кўк байроқни шаҳарнинг исталган жойидан кўриш мумкин. Унинг бўйи 30 м, эни эса бўйи узунлигининг 1/2 қисмини ташкил этади. Ушбу кўк байроқни тикиш учун неча квадрат метр газлама керак?

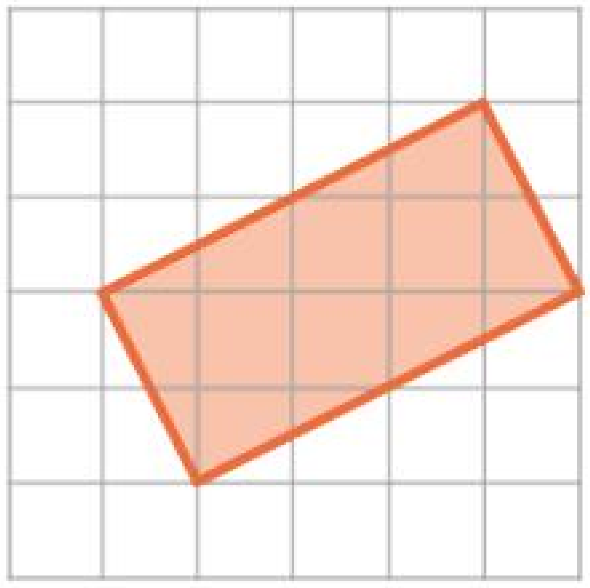
B

11. Диагонали a га тенг бўлган квадрат юзасини топинг.
12. Юза томонлари 8 м ва 18 м бўлган тўғри тўртбурчак юзасига тенг бўлган квадратнинг томонини топинг.
13. 19.10-расмда тасвирланган квадрат юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.

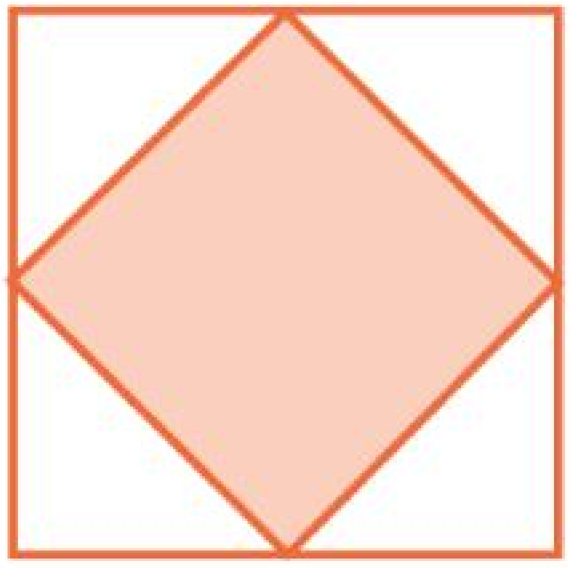


19.10-расм

14. 19.11-расмда тасвирланган тўғри тўртбурчакнинг юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.



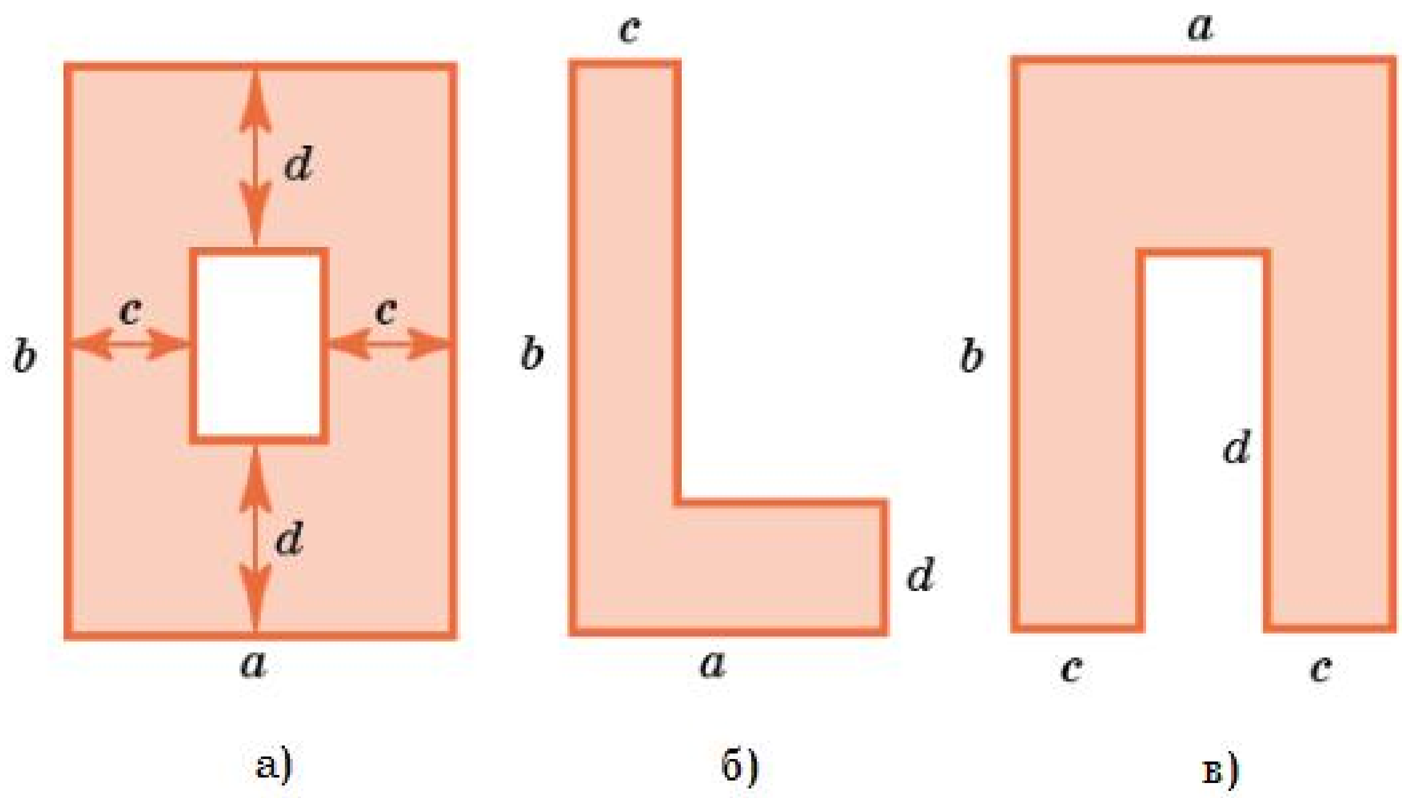
19.11-расм



19.12-расм

15. Квадратнинг юзаси 1 га тенг. Учлари ана шу квадрат томонлари ўрталари бўладиган янги квадрат юзасини топинг (19.12-расм).

16. 19.13-расмда тасвирланган фигура юзасини топинг.



19.13-расм

C

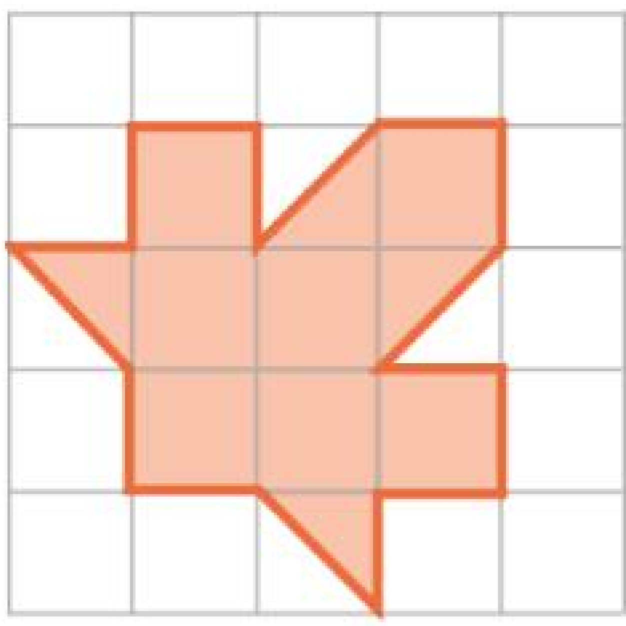
17. Тўғри тўртбурчакнинг юзаси 72 см^2 га тенг, қўшни томонлари эса 1:2 нисбат каби. Тўғри тўртбурчакнинг периметрини топинг.

18. Периметри 10 м, юзаси эса 6 м^2 бўлган тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

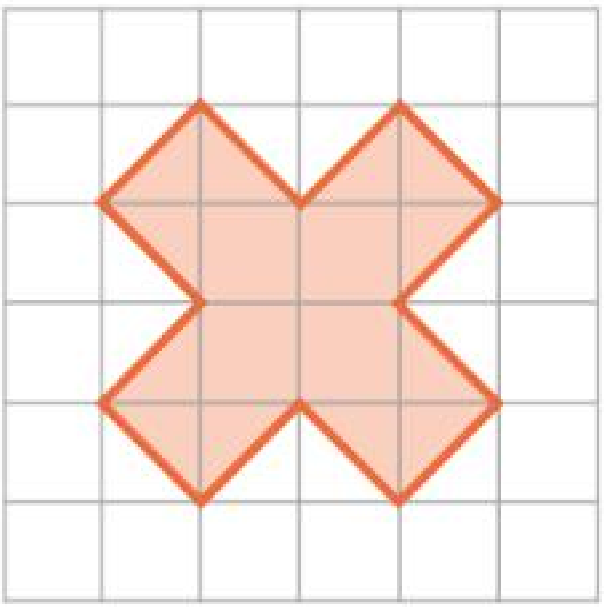
19. 19.14-расмдаги кўпбурчак юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.

20. 19.15-расмдаги фигура юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.

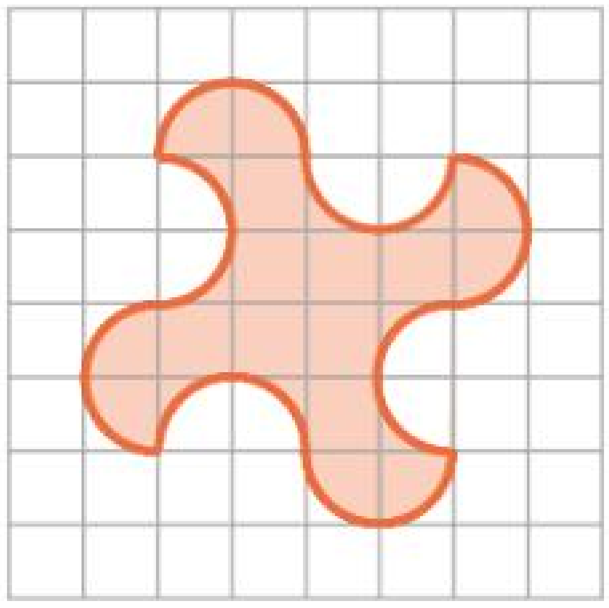
21. 19.16-расмдаги фигура юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.



19.14-расм



19.15-расм



19.16-расм

22. Хонанинг поли тўғри тўртбурчак шаклида ва унинг ўлчамлари 4×6 (м). Ушбу хона полига тўшаш учун ўлчами 10×20 (см) бўлган нечта тўғри тўртбурчак шаклидаги плиткалар керак бўлади?
23. Хонанинг поли тўғри тўртбурчак шаклида ва унинг ўлчами 4×6 (м). Хона шифтининг баландлиги 3 м, эшик юзаси 2 м^2, дераза юзаси 3 м^2 га тенг. Ушбу хона деворларига ёпиштириш учун ўлчами $0,5 \times 10$ (м) бўлган нечта рангли қоғозлар ўрами керак бўлади?
24. Периметри берилган барча тўғритўртбурчаклар орасидан квадрат юзаси энг катта бўлишини исботланг.

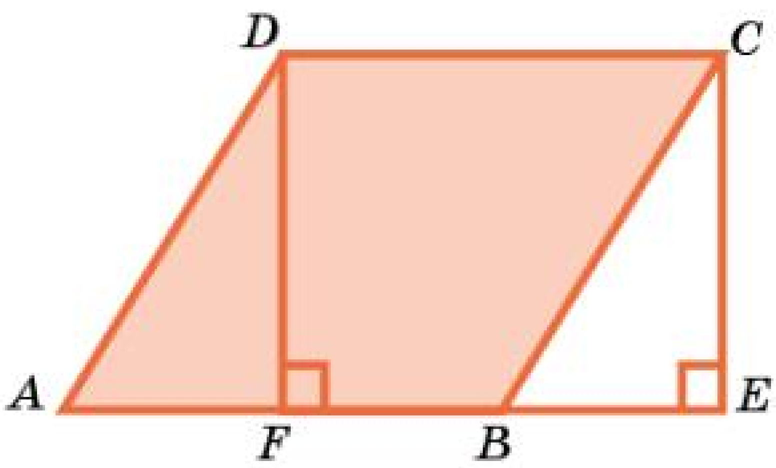
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

25. Параллелограмм юзасини унинг бир томони билан ана шу томонга туширилган баландлиги орқали ифодаловчи формула топиб кўринг.

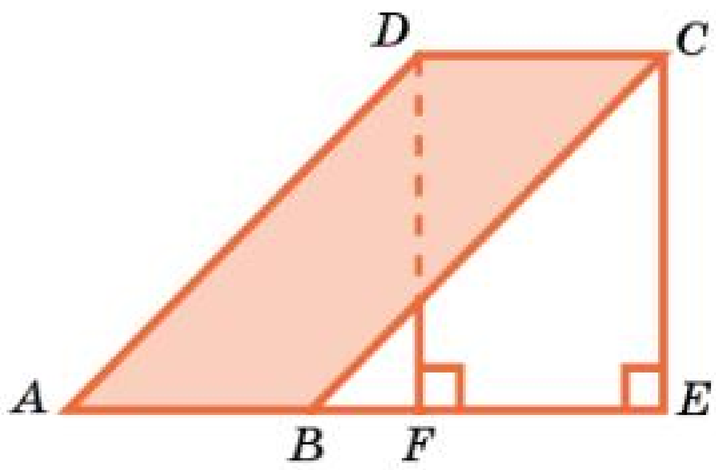
20-§. ПАРАЛЛЕЛОГРАМНИНГ ЮЗАСИ

Теорема. Параллелограмнинг юзаси унинг бир томони билан ана шу томонга туширилган баландлик кўпайтмасига тенг бўлади.

Исботи. *ABCD* параллелограмм берилган (20.1-расм).



20.1-расм



20.2-расм

C ва D учларидан мос равишда CE ва DF баландликларни ўтказамиз. F нуқта AB кесмада ётган ҳолни кўриб чиқамиз. $FECD$ тўғри тўртбурчак билан параллелограмнинг тенг эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатанан берилган параллелограмм $FBCD$ трапеция ва AFD учбурчакдан ташкил топган. Тўғри тўртбурчак ушбу трапеция ва BEC учбурчакдан ташкил топган. Бунда AFD ва BEC тўғри бурчакли учбурчаклар тенг (гипотенуза ва катети бўйича). Бундан параллелограм юзаси тўғри тўртбурчакнинг юзасига тенг бўлади, яъни томони ана шу томонга туширилган баландликнинг кўпайтмасига тенг.

F нуқта AB кесмадан ташқарида ётган ҳолни мустақил кўриб чиқинг (20.2-расм). □

Шундай қилиб a томони ва унга туширилган h баландлиги бўлган параллелограмнинг S юзаси қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

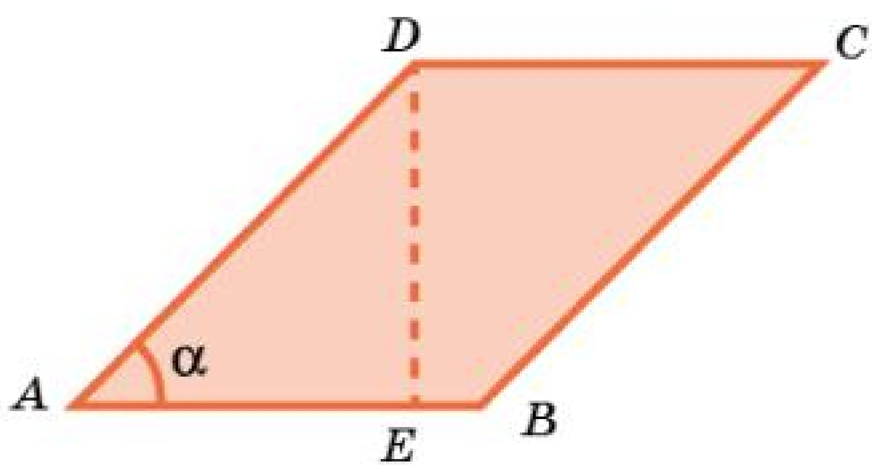
$$S = a \cdot h.$$

Параллелограмм юзасини ҳисобловчи яна битта формулани келтириб чиқарамиз.

Теорема. Параллелограмнинг юзаси унинг иккита қўшни томонлари билан улар орасидаги бурчак синуси кўпайтмасига тенг бўлади.

Исботи. $ABCD$ параллелограмм берилган бўлсин (20.3-расм). $AB = a$, $AD = b$. DE баландлик AD томони билан A бурчак синуси кўпайтмасига тенг. Демак, параллелограмнинг S юзаси қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$S = a \cdot b \cdot \sin A.$$



20.3-расм

Ромб параллелограмнинг хусусий ҳоли эканлиги туфайли уни параллелограмм сифатида кўриб чиқамиз, у ҳолда ромб юзаси унинг томони ва баландлиги кўпайтмасига тенг бўлади:

$$S = a \cdot h,$$

бу ерда a — ромб томони, h — баландлик.

Ромб юзасини қуйидаги формула орқали ҳисоблаш мумкин эканини мустақил исботланг: $S = a^2 \sin A$, бу ерда a — ромб томони, $\angle A$ — бурчаги.

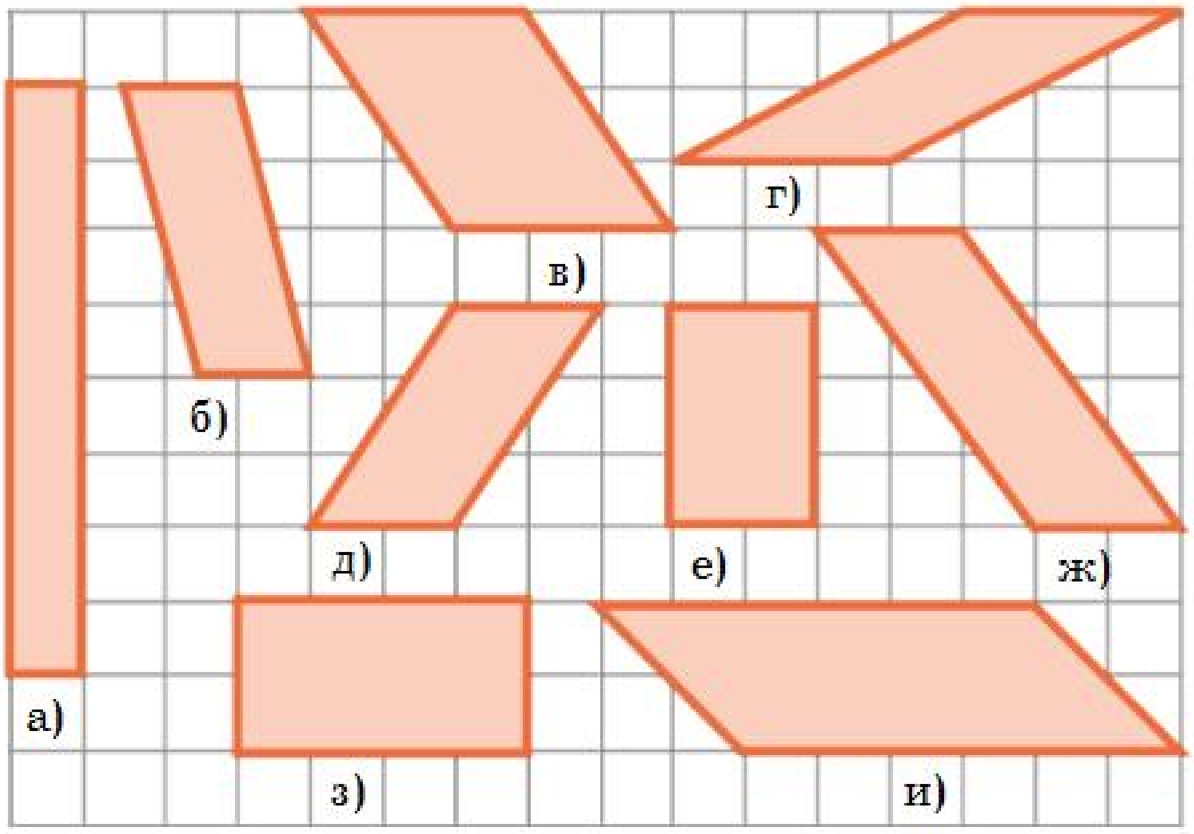
1. Параллелограмнинг баландлиги нима?
2. Параллелограмнинг юзаси ҳақидаги биринчи теоремани ифодаланг.
3. Параллелограмнинг юзаси ҳақидаги иккинчи теоремани ифодаланг.

Машқлар

А

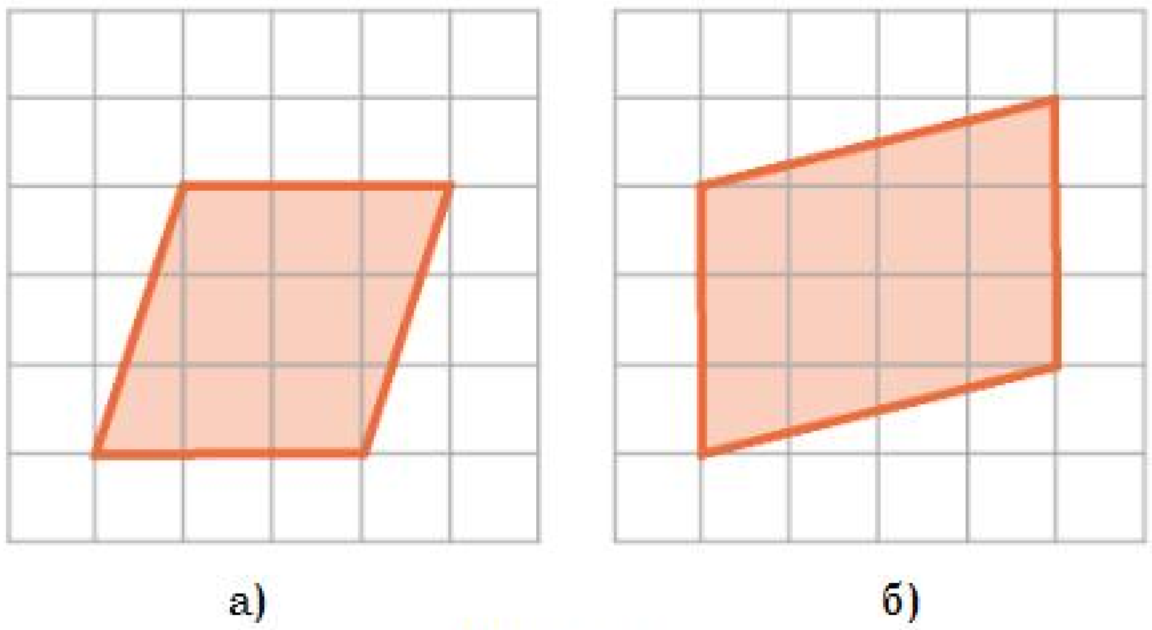
1. Томонлари 10 см ва 4 см, битта баландлиги 5 см бўлган параллелограмнинг юзасини топинг.
2. Томони 5 га, баландлиги 4 га тенг бўлган ромб юзасини топинг.

3. Томонлари 8 см, 10 см ва улар орасидаги бурчак а) 30°; б) 45°; в) 60° бўлган параллелограмнинг юзасини топинг.
4. Томони 6 см ва битта бурчаги: а) 120°; б) 135°; в) 150° бўлган ромб юзасини топинг.
5. 20.4-расмдан тенг параллелограмларни кўрсатинг.



20.4-расм

6. 20.5-расмда тасвирланган параллелограмнинг юзасини топинг. Катак томони 1 га тенг.



20.5-расм

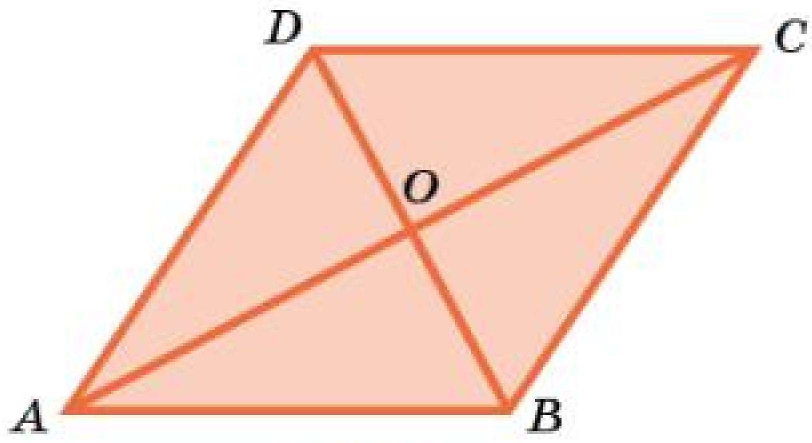
В

7. Параллелограмнинг юзаси 40 $см^2$ га, томонлари 5 см ва 10 см га тенг. Унинг баландлигини топинг.
8. Тўғри тўртбурчак билан параллелограмнинг томонлари мос равишда тенг. Ушбу фигуралардан қайси бирининг юзаси катта бўлади? Нима учун?
9. Тўғри тўртбурчак билан параллелограмнинг томонлари мос равишда тенг. Агар параллелограмнинг юзаси тўғри тўртбурчак юзасининг ярмига тенг бўлса, параллелограмнинг ўткир бурчагини топинг.

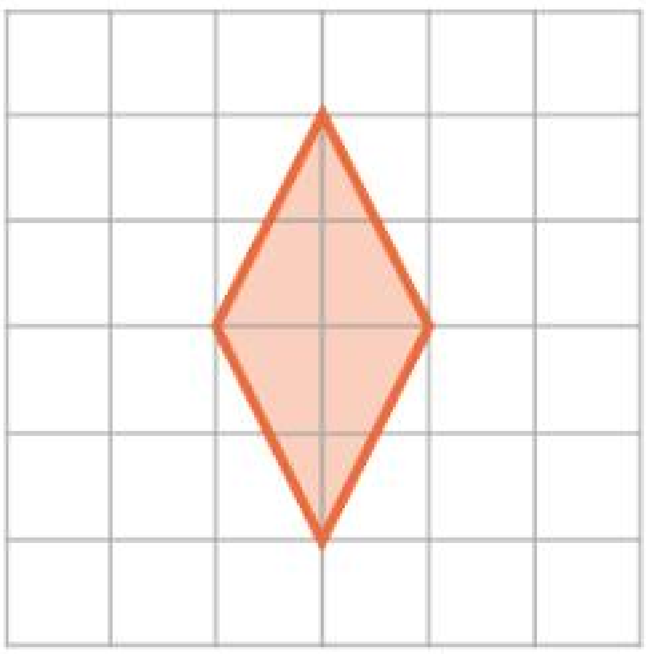
10. Параллелограмнинг қўшни томонлари a ва b. Параллелограмнинг юзаси энг катта юза бўлиши учун улар орасидаги бурчак қандай бўлиши керак?
11. Квадрат ва ромб периметрлари тенг. Уларнинг юзаларини таққосланг.
12. Квадрат ва ромб томонлари мос равишда тенг. Ромб юзаси квадрат юзасининг ярмига тенг бўлса, у ҳолда унинг ўткир бурчагини топинг.

C

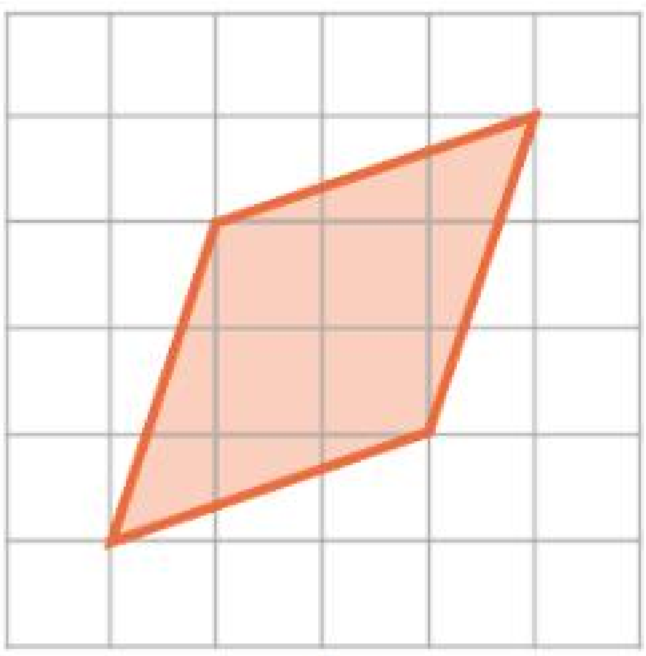
13. 20.6-расмдан фойдаланиб, ромб юзаси унинг диагоналлари кўпайтмасининг ярмига тенг бўлишини исботланг.
14. Диагоналлари 6 см ва 8 см бўлган ромб юзасини топинг.
15. 20.7-расмда тасвирланган тўртбурчакнинг юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.



20.6-расм



а)



б)

20.7-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

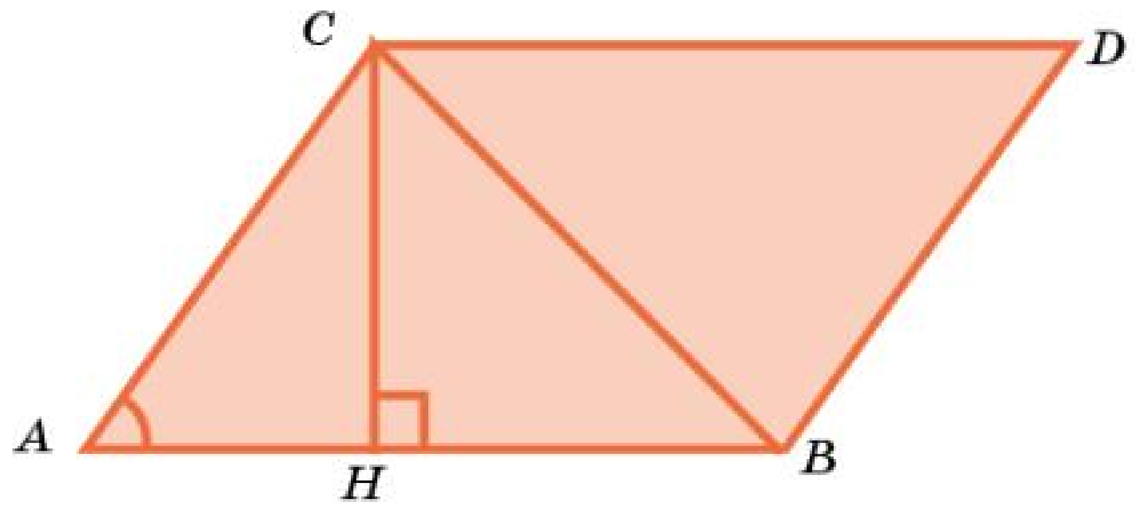
16. Учбурчак юзасини унинг томони ва ана шу томонга туширилган баландлиги орқали ифодаловчи формула топиб кўринг.

21-§. УЧБУРЧАК ЮЗАСИ

Теорема. Учбурчак юзаси унинг томони ва ана томонга туширилган баландлик кўпайтмасининг ярмига тенг бўлади.

Исботи. ABC учбурчак берилган бўлсин. Уни $ABDC$ параллелограмга тўлдирамиз (21.1-расм).

ABC ва *DCB* учбурчаклар учта томонига кўра тенг. У ҳолда уларнинг юзалари ҳам тенг бўлади. Бундан *ABC* учбурчакнинг юзаси *ABDC* параллелограмм юзасининг ярмига тенг бўлади. Ушбу параллелограмнинг *AB* томони учбурчак томонига, унга туширилган баландлик эса учбурчакнинг баландлигига тенг. Демак, *ABC* учбурчакнинг *S* юзаси унинг *a* томони ва ана шу томонга туширилган *h* баландлик кўпайтмасининг ярмига тенг бўлади:



21.1-расм

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Натижа. Тўғри бурчакли учбурчак юзаси унинг катетлари кўпайтмасининг ярмига тенг бўлади.

a, b, c томонлари учун a m b m c тенгсизлик бажариладиган учбурчак юзаси формуласидан фойдаланиб, унинг баландликларини таққосланг.

Учбурчак юзасини ҳисобловчи яна битта формула келтириб чиқарамиз.

Теорема. Учбурчак юзаси унинг икки томони ва улар орасидаги бурчак синуси кўпайтмасининг ярмига тенг бўлади.

Исботи. *ABC* учбурчак берилган бўлсин. Унинг *CH* баландлигини ўтказамиз (21.1-расм). $CH = AC \cdot \sin A$ эканлигидан *ABC* учбурчакнинг юзаси:

$$S = \frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A. \;\square.$$

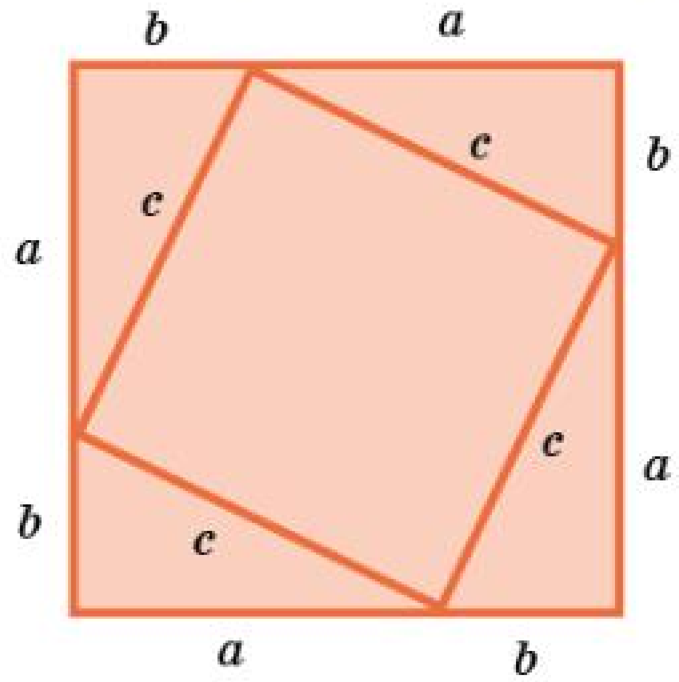
Шундай қилиб, $AB = c$, $AC = b$ бўлган *ABC* учбурчакнинг *S* юзаси қуйидаги формула орқали ҳисобланади

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A.$$

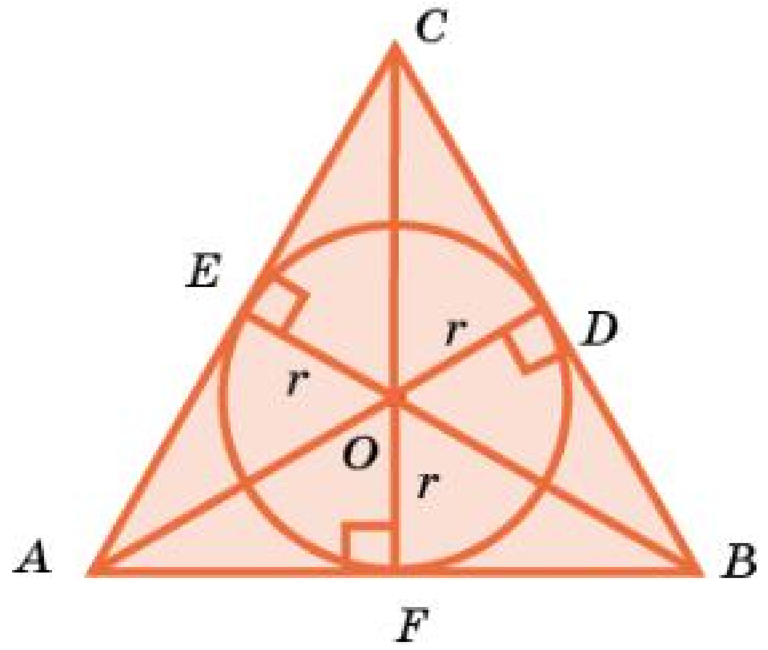
Юза тушунчасидан фойдаланиб, Пифагор теоремасининг яна бир исботини кўриб чиқамиз.

Теорема (Пифагор). Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати катет квадратларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Исботи. *ABC* — *C* тўғри бурчаги бўлган тўғри бурчакли учбурчак ва $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ бўлсин. Томони $a + b$ бўлган квадратни кўриб чиқамиз. Уни ABC учбурчакка тенг бўлган тўртта тўғри бурчакли учбурчакларга ва томони c га тенг бўлган квадратга ажратамиз (21.2-расм). Бир томондан қараганда, ушбу квадрат юзаси $(a+b)^2$ га тенг. Иккинчи томондан, унинг юзаси катетлари a, b бўлган тўртта тўғри бурчакли учбурчаклар ва томони c бўлган квадрат юзаларининг йиғиндисига тенг бўлади, яъни $(a+b)^2 = 2a \cdot b + c^2$. Бундан изланаётган тенглик ҳосил бўлади: $a^2 + b^2 = c^2$.



21.2-расм



21.3-расм

Учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топиш учун учбурчак юзасининг формуласидан фойдаланамиз.

ABC учбурчакда $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ ва юзаси S бўлсин. Ички чизилган айлана марказини O ва радиусини r орқали белгилаймиз. О марказни учбурчакнинг учлари билан бирлаштирамиз (21.3-расм).

BOC, AOC ва AOB учбурчаклар юзалари мос равишда $\frac{1}{2}a \cdot r$, $\frac{1}{2}b \cdot r$ ва $\frac{1}{2}c \cdot r$. Уларни қўшиб, ABC учбурчакнинг юзасини ҳосил қиламиз:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = p \cdot r.$$

Бу ерда $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — ABC учбурчакнинг ярим периметри. Демак, ички чизилган айлананинг r радиуси учун қуйидаги формула тўғри бўлади:

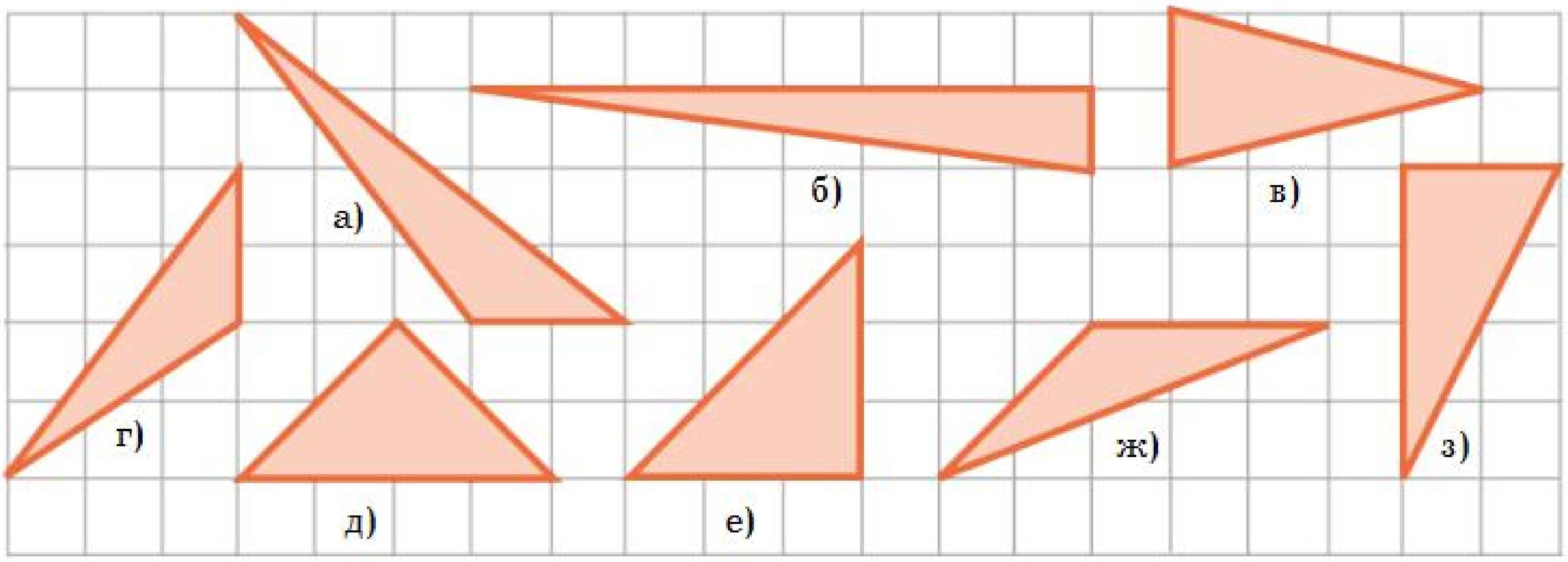
$$r = \frac{S}{p}.$$

1. Учбурчакнинг юзаси ҳақидаги теоремани айтинг.
2. Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзаси нимага тенг?
3. Учбурчакнинг юзаси ҳақидаги иккинчи теоремани тавсифланг.
4. Учбурчакка ички чизилган айлана радиуси унинг юзаси ва периметри орқали қандай ифодаланади?
5. Тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлана радиуси унинг катетлари орқали қандай ифодаланади?
6. Тенгёнли учбурчакка ички чизилган айлана радиуси унинг асоси ва унга туширилган баландлиги орқали қандай ифодаланади?

Машқлар

A

1. 21.4-расмдан тенг учбурчакларни кўрсатинг.
2. Катетлари: а) 4 см ва 7 см; б) 1,2 см ва 35 дм бўлган тўғри бурчакли учбурчак юзасини топинг.

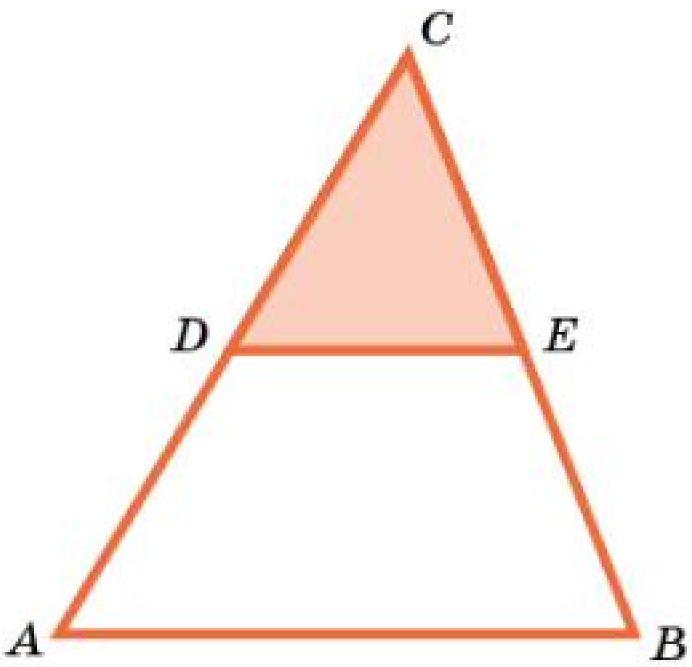


21.4-расм

3. Тенгёнли учбурчакнинг ён томони 5 га, асоси 6 га тенг. Учбурчак юзасини топинг.
4. Учбурчак юзаси 30 га ва бир томони 10 га тенг. Ушбу томонга туширилган баландликни топинг.
5. Иккита томони 3 см, 8 см ва улар орасидаги бурчак а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°га тенг бўлган учбурчак юзасини топинг.

B

6. Учбурчакнинг икки томони 6 см ва 8 см, улар орасидаги бурчак: а) 120°; б) 135°; в) 150°. Учбурчак юзасини топинг.
7. ABC учбурчакда AB томони AC томонидан уч марта узун. B ва C учларидан ўтказилган баландликлар нисбатини топинг.
8. Агар учбурчакнинг: а) томони ўзгартирилмай, унга туширилган баландлик икки марта орттирилса; б) баландлик ўзгартирилмай, у тушувчи томони уч марта камайтирилса; в) битта томони тўрт марта орттирилса ва унга туширилган баландлик саккиз марта камайтирилса, у ҳолда унинг юзаси қандай ўзгаради?
9. ABC учбурчакнинг юзаси 4 га тенг. D, E — нуқталар мос равишда AC ва BC томонлар ўрталари (21.5-расм). CDE учбурчак юзасини топинг.

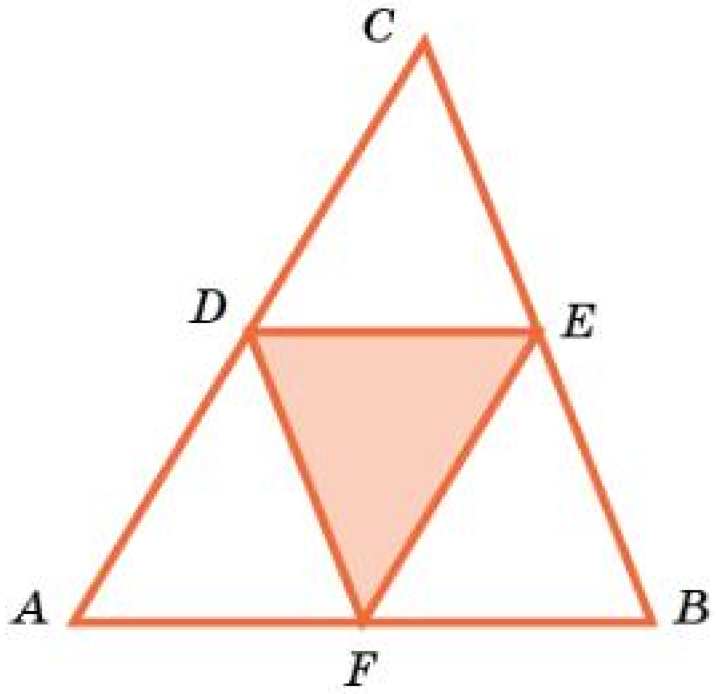


21.5-расм

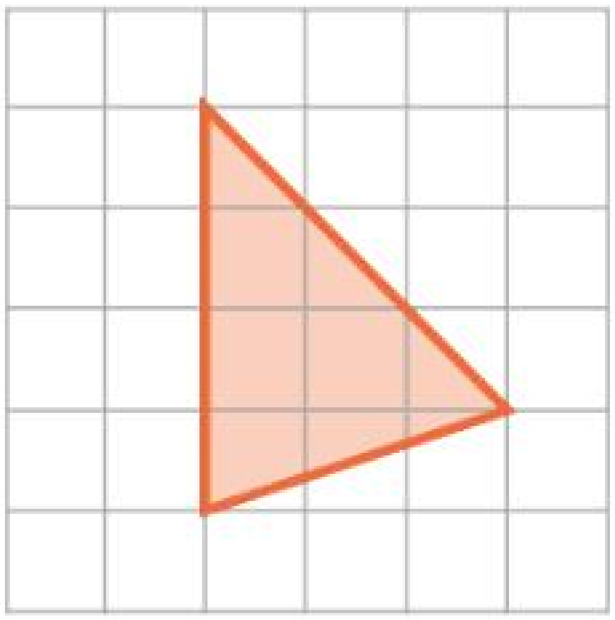
10. Учбурчакнинг барча ўрта чизиқлари ўтказилган (21.6-расм). Ушбу чизиқлар орқали ясалган учбурчак юзаси берилган учбурчак юзасининг қандай қисмини ташкил этади?

11. Учбурчакнинг иккита томони 6 см ва 5 см. Унинг юзаси: а) 10 см^2; б) 15 см^2; в) 20 см^2 га тенг бўлиши мумкинми?

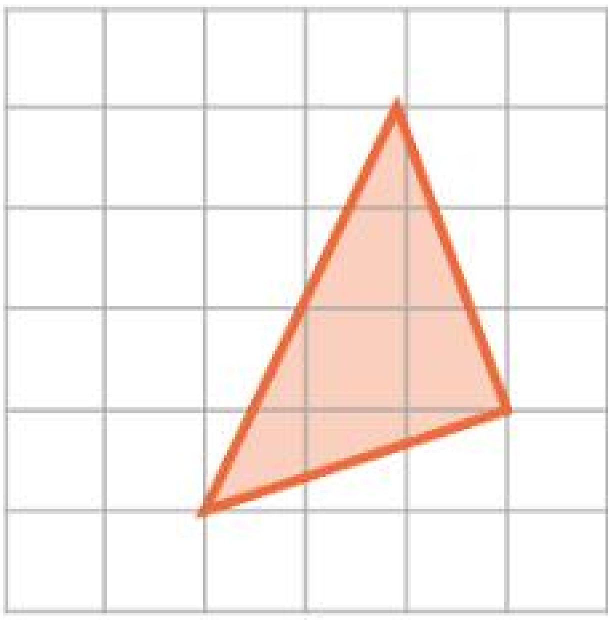
12. 21.7-расмда тасвирланган учбурчакнинг юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.



21.6-расм



а)



б)

21.7-расм

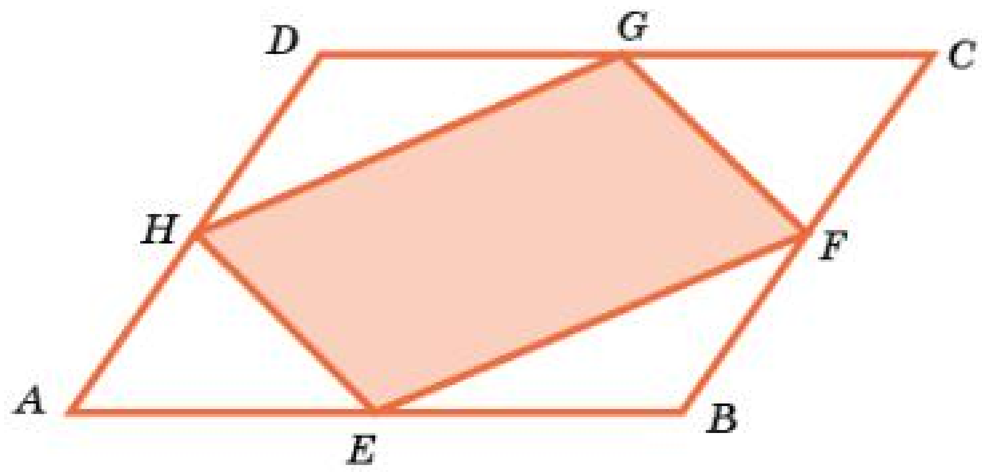
13. Учбурчакнинг медианаси уни иккита тенг учбурчакларга ажратишини исботланг.

C

14. Тенгёнли учбурчакнинг юзаси 48 га, асоси эса 16 га тенг. Учбурчакнинг ён томонини топинг.

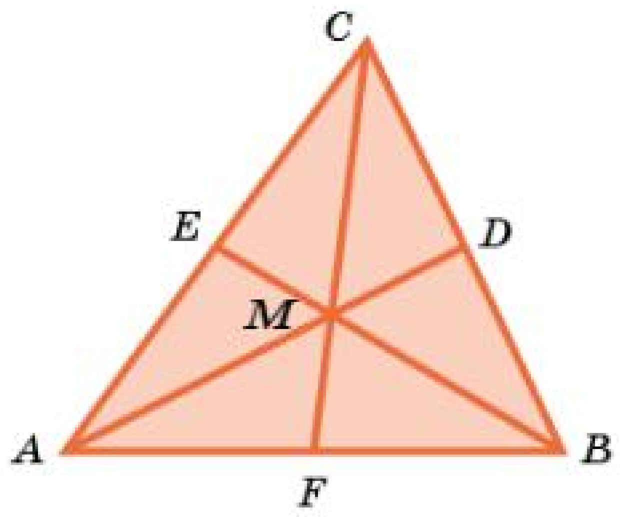
15. ABC учбурчакнинг a ва b томонлари берилган. Ушбу томонлар орасидаги бурчакнинг қандай қийматида учбурчак юзаси энг катта қийматга эга бўлади?

16. Юзаси 16 га тенг бўлган параллелограмм томонлари ўрталари кетма-кет бир-бирига туташтирилган (21.8-расм). Қандай тўртбурчак ҳосил бўлади ва унинг юзаси нимага тенг?

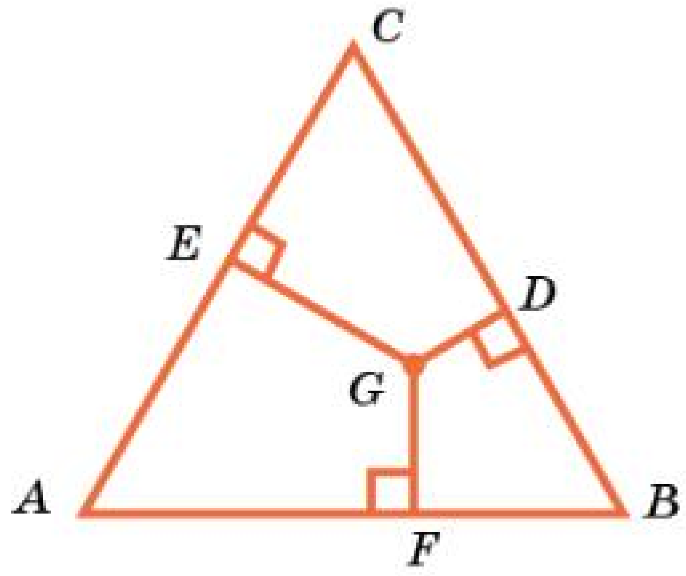


21.8-расм

17. Учбурчакнинг медианалари уни олтита тенг учбурчакларга бўлишини исботланг (21.9-расм).



21.9-расм



21.10-расм

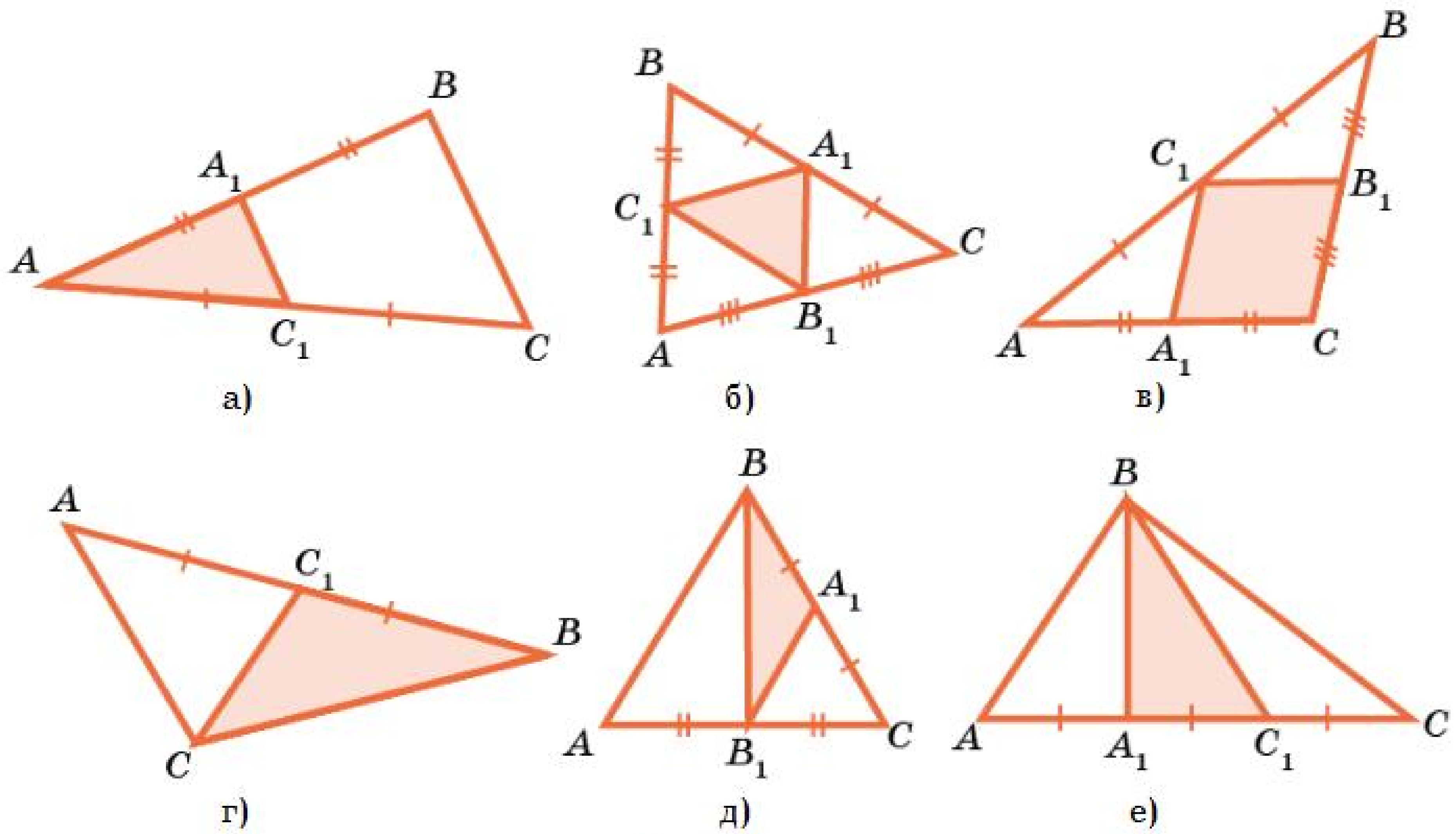
18. ABC учбурчакка тенг ва у билан AB умумий томонга эга бўлган учбурчаклар C учининг геометрик ўрнини топинг.

19. Тенгтомонли учбурчакнинг ичидаги исталган нуқтадан унинг томонларигача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас сон ва ўша учбурчакнинг баландлигига тенг бўлишини исботланг (21.10-расм).

20. Катетлари 3 ва 4 бўлган тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

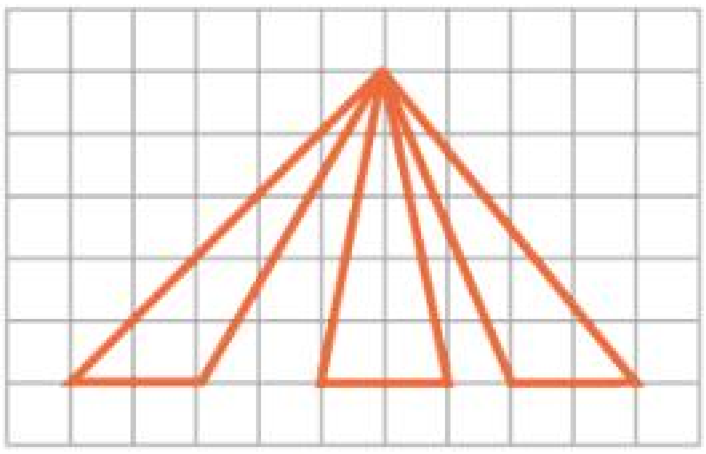
21. Тенгёнли учбурчакнинг асоси 3 га, ана шу томонга туширилган баландлиги эса 2 га тенг. Ушбу учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

22. Бўялган фигура юзаси ABC учбурчак юзасининг қандай қисмини ташкил этади (21.11-расм)?



21.11-расм

23. 21.12, 21.13-расмларда тасвирланган учбурчакларнинг юзаларини таққосланг.



21.12-расм

21.13-расм

24. *ABC* учбурчакнинг учлари айланада ётади, бу ерда *A* ва *C* маълум бир нуқталар, *B* нуқта эса *AC* ёй бўйлаб *A* нуқтадан *C* нуқтага томон ҳаракат қилади (21.14-расм). *ABC* учбурчакнинг юзаси қандай ўзгаради?

25. Тенгёнли *ABC* учбурчак берилган (21.15-расм). Унинг битта учи ўрнини алмаштириб:

а) юзаси *ABC* учбурчак юзасига тенг бўлган тенгёнли тўғри бурчакли учбурчак ҳосил қилинг;

б) юзаси *ABC* учбурчак юзасидан икки марта кичик бўлган тенгёнли тўғри бурчакли учбурчак ҳосил қилинг;

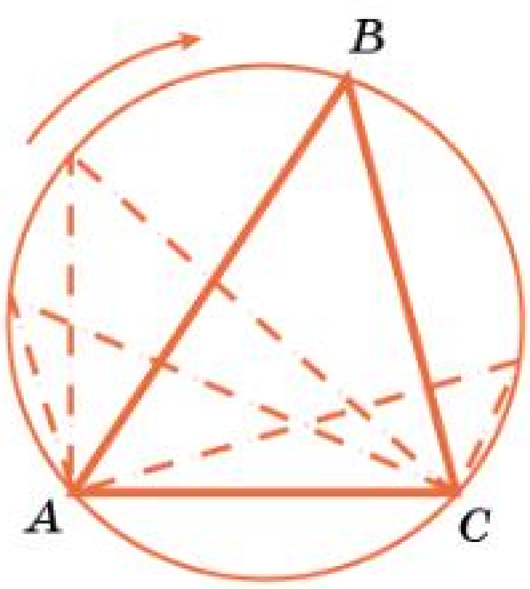
в) юзаси *ABC* учбурчак юзасига тенг бўлган тенгёнли ўтмас бурчакли учбурчак ҳосил қилинг;

г) юзаси *ABC* учбурчак юзасидан уч марта кичик бўлган тенгёнли ўтмас бурчакли учбурчак ҳосил қилинг;

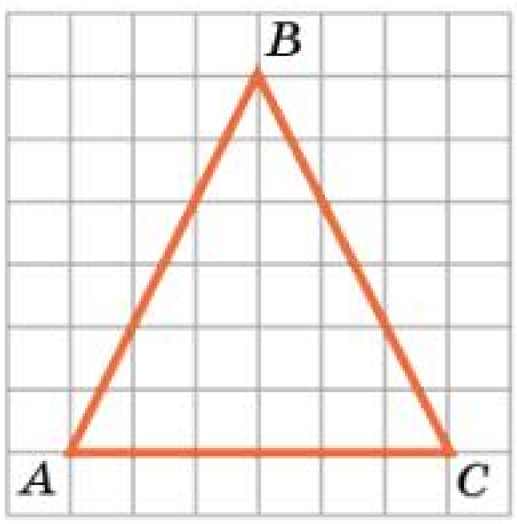
д) юзаси *ABC* учбурчак юзасига тенг бўлган тенгёнли ўткир бурчакли учбурчак ҳосил қилинг;

е) юзаси *ABC* учбурчак юзасидан бир ярим марта катта бўлган тенгёнли ўткир бурчакли учбурчак ҳосил қилинг.

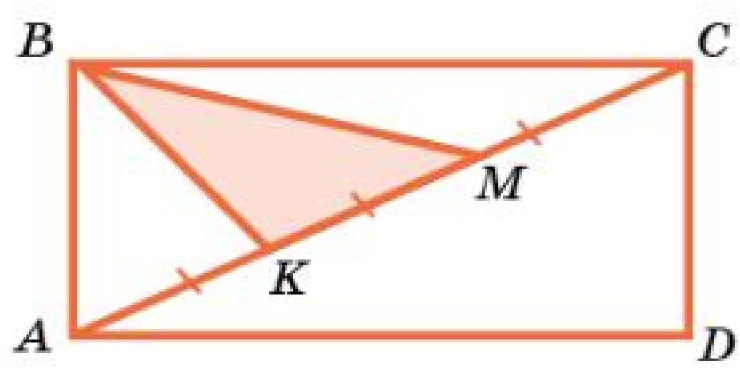
26. *K* ва *M* нуқталар *ABCD* тўғри тўртбурчакнинг *AC* диагоналини ўзаро тенг бўлган учта кесмага ажратади (21.16-расм) *KBM* учбурчак юзаси *ABCD* тўғри тўртбурчак юзасининг қандай қисмини ташкил этади?



21.14-расм

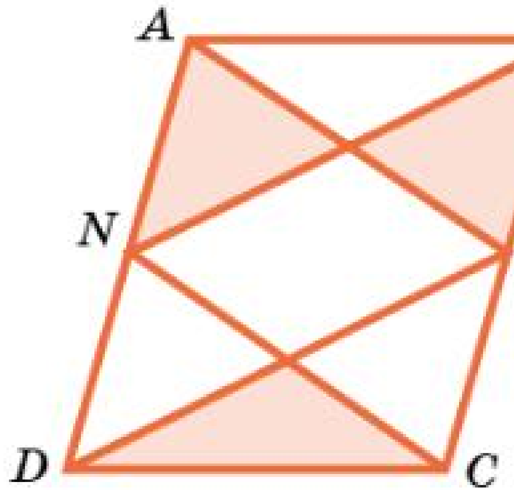


21.15-расм

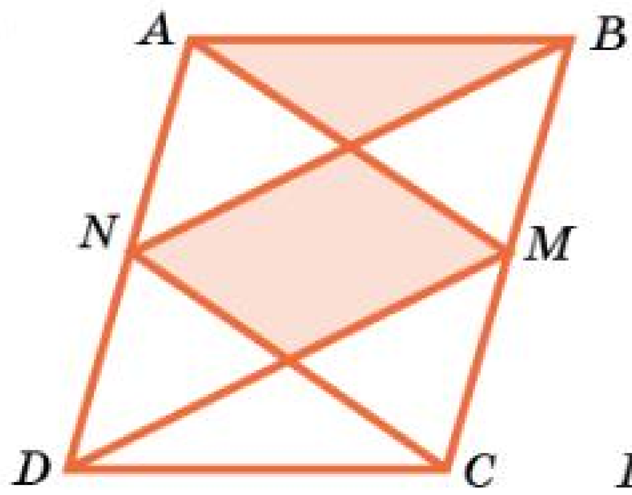


21.16-расм

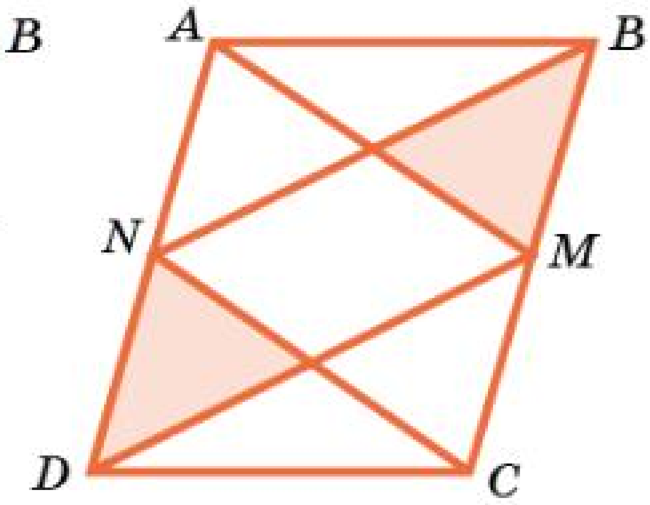
27. M ва N нуқталар — $ABCD$ параллелограмнинг BC ва AD томонлари ўрталари (21.17, 21.18, 21.19-расмлар). Агар $ABCD$ параллелограмнинг юзаси 56 га тенг бўлса, у ҳолда унинг штрихланган бўлаклари юзаларининг йиғиндисини топинг.



21.17-расм



21.18-расм



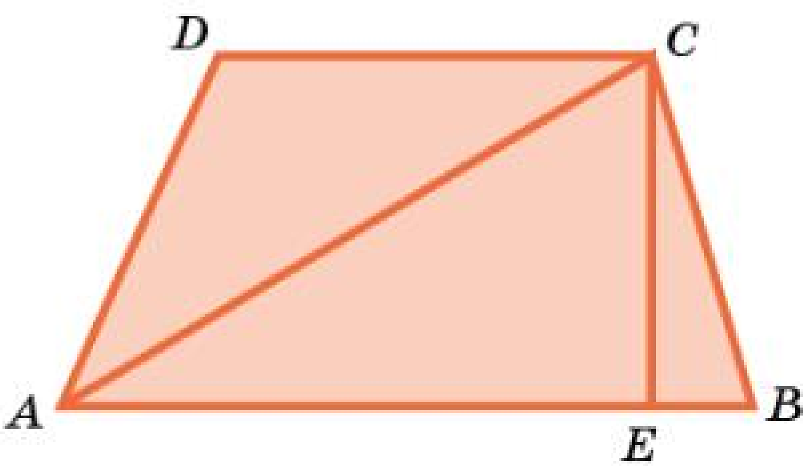
21.19-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

28. Трапеция юзасини унинг асоси ва баландлиги орқали ифодаловчи формулани топиб кўринг.

22-§. ТРАПЕЦИЯНИНГ ЮЗАСИ

Теорема. Трапеция юзаси унинг асослари йиғиндисининг ярми билан баландлигининг кўпайтмасига тенг бўлади.



22.1-расм

Исботи. $ABCD$ ($AB \parallel CD$) трапеция берилган бўлсин (22.1-расм).

AC диагонали уни ABC ва ACD иккита учбурчакка ажратади ва уларнинг мос равишда AB ва CD томонларига туширилган баландликлари трапециянинг CE баландлигига тенг бўлади. Бундан трапеция юзаси ана шу учбурчаклар юзалари йиғиндисига тенг бўлади, яъни:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AB \cdot CE + \frac{1}{2}CD \cdot CE = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot CE. \square$$

Шундай қилиб, S асослари ва a, b баландлиги бўлган трапециянинг h юзаси қуйидаги формула орқали ҳисобланади:

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Натижа. *Трапеция юзаси унинг ўрта чизиғи ва баландлиги кўпайтмасига тенг бўлади.*

Ушбу натижани мустақил исботланг.

1. Трапеция юзаси ҳақидаги теоремани тавсифланг.
2. Трапециянинг ўрта чизиғи ва баландлигини билган ҳолда унинг юзасини қандай топиш мумкин?

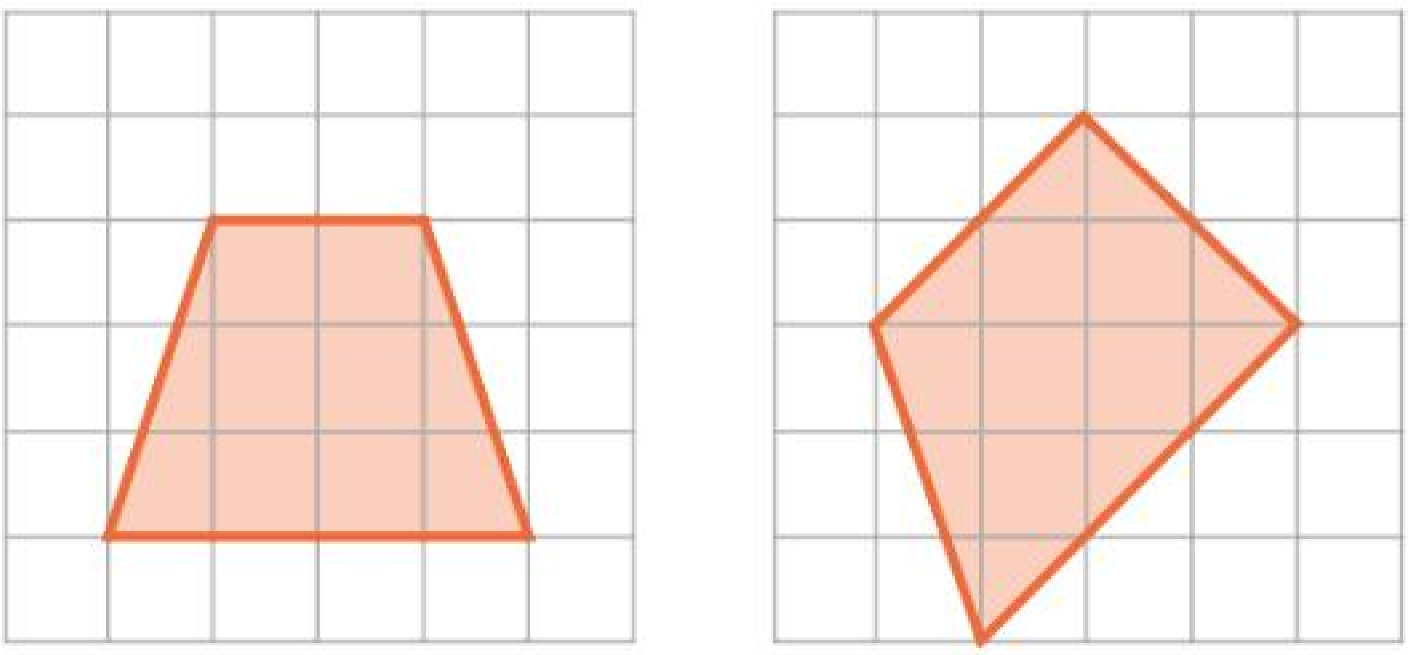
Машқлар

А

1. Асослари 12 см, 16 см ва баландлиги 15 см бўлган трапеция юзасини топинг.
2. Трапециянинг ўрта чизиғи 3 га, баландлиги 2 га тенг. Трапеция юзасини топинг.
3. Трапециянинг асослари 10 см, 35 см ва юзаси 225 $см^2$ га тенг. Унинг баландлигини топинг.
4. Трапециянинг баландлиги 20 см, юзаси 400 $см^2$. Унинг ўрта чизиғини топинг.
5. Трапециянинг асоси 26 см, баландлиги 10 см, юзаси 200 $см^2$. Унинг иккинчи асосини топинг.

В

6. Тенгёнли трапеция асослари 14 ва 26, унинг периметри эса 60 га тенг. Трапеция юзасини топинг.
7. Трапеция асослари 36 см ва 12 см. Унинг 7 см га тенг бўлган ён томони бир асоси билан 150° бурчак ҳосил қилади. Трапеция юзасини топинг.
8. 22.2-расмда тасвирланган трапеция юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.



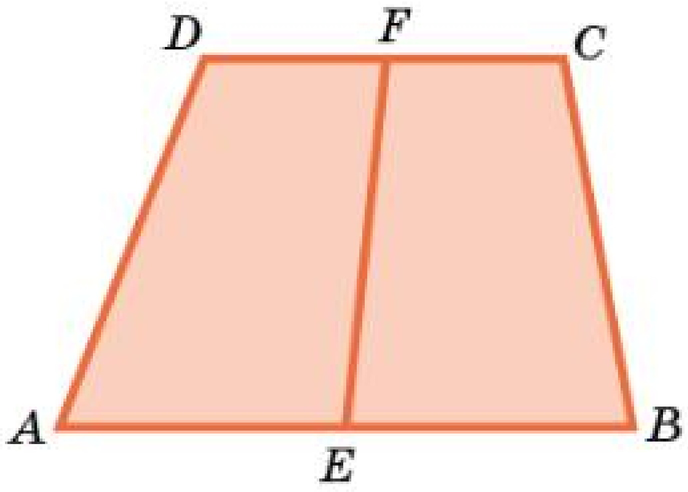
а) б)

22.2-расм

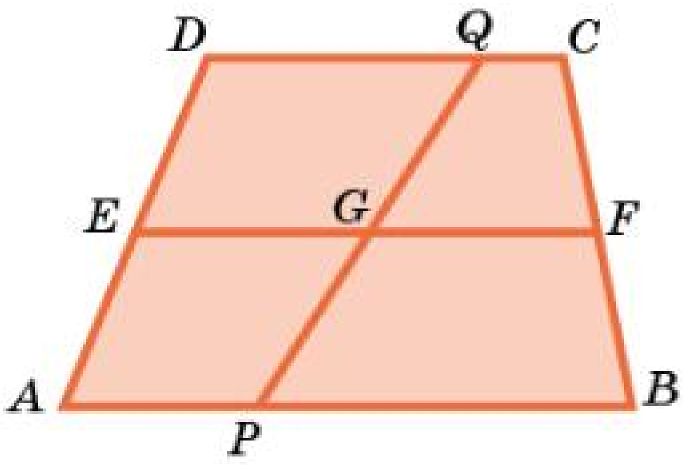
9. Тўғри бурчакли трапеция асослари 3 см ва 1 см, катта ён томони асоси билан 45° бурчак ҳосил қилади. Унинг юзасини топинг.
10. Трапециянинг ўрта чизиғи 10 см, ён томони 6 см ва у бир асоси билан 150° бурчак ҳосил қилади. Унинг юзасини топинг.

C

11. Трапеция асосларининг ўрталарини туташтирувчи кесма уни иккита тенг бўлакларга ажратишини исботланг (22.3-расм).



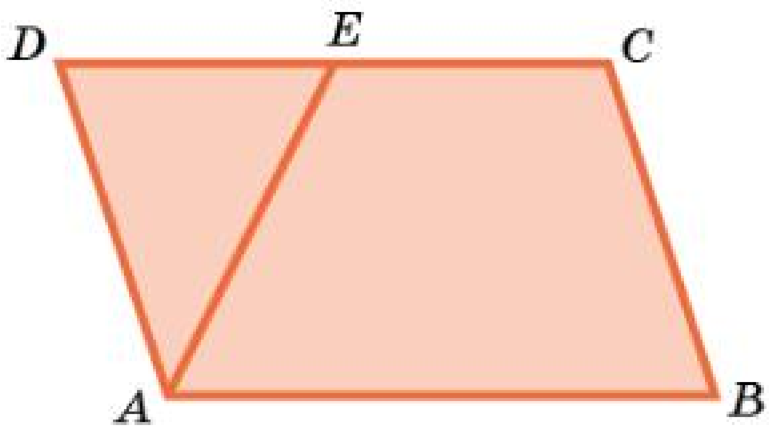
22.3-расм



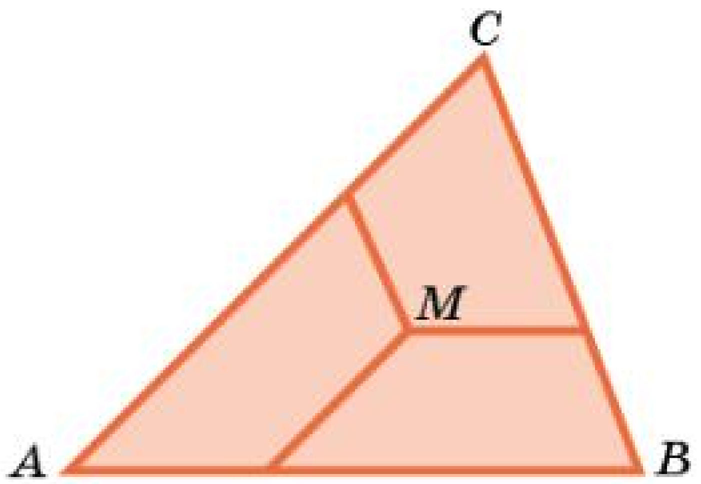
22.4-расм

12. Трапеция ўрта чизиғининг ўртаси орқали ўтувчи ва асосларини қирқиб ўтувчи тўғри чизиқ ана шу трапецияни иккита тенг бўлакларга ажратишини исботланг (22.4-расм).

13. *ABCD* параллелограмда *E* нуқта — *CD* томон ўртаси (22.5-расм). *ADE* учбурчак юзаси 6 га тенг. *ABCE* трапеция юзасини топинг.



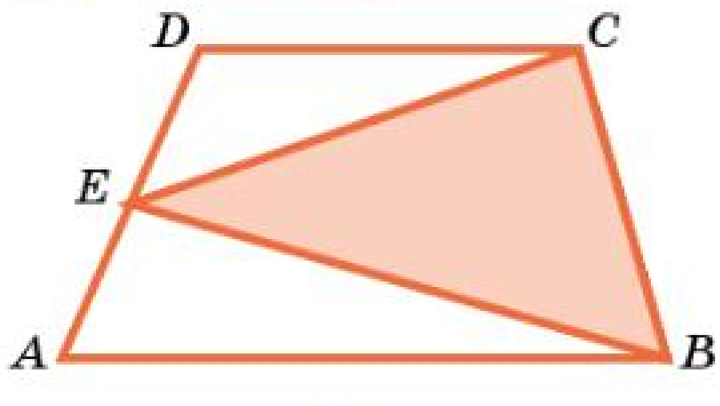
22.5-расм



22.6-расм

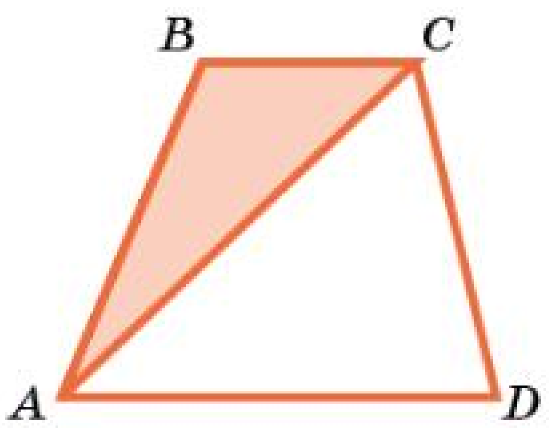
14. *ABC* учбурчакда медианаларнинг кесишиш нуқтаси *M* орқали унинг томонларига параллел кесмалар ўтказилган (22.6-расм). Ҳосил бўлган учта трапециянинг тенг эканлигини исботланг.

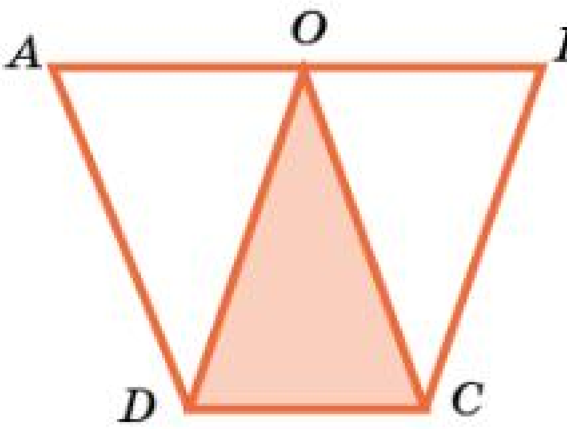
15. *ABCD* трапецияда *E* нуқта — *AD* ён томони ўртаси (22.7-расм). *BCE* учбурчак юзаси *ABCD* трапеция юзасининг ярмига тенг бўлишини исботланг.

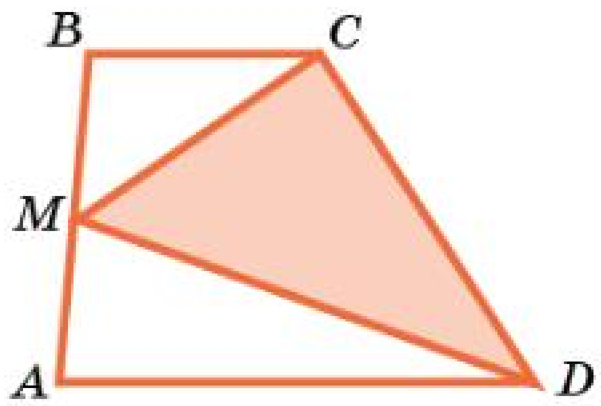


22.7-расм

16. Агар бўялган учбурчак юзаси 3 см^2 бўлса, *ABCD* трапеция юзасини топинг (22.8-расм).



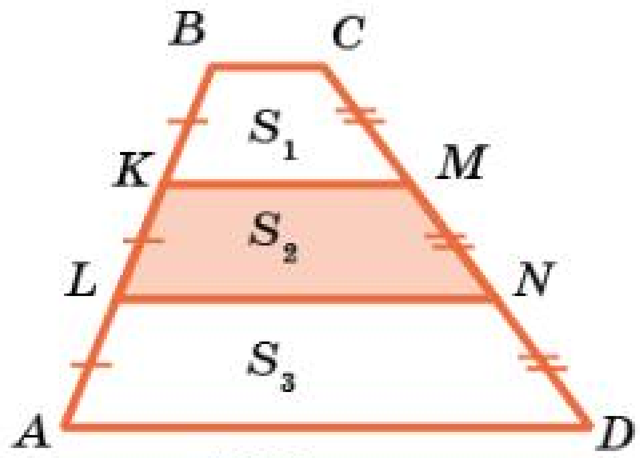




22.8-расм

17. Диагоналлари тўғри бурчак остида кесишувчи тенгёнли трапеция юзаси унинг баландлигининг квадратига тенг эканини исботланг.

18. $ABCD$ трапецияда $S_2 = \frac{S_1 + S_3}{2}$ эканини исботланг (22.9-расм).



22.9-расм

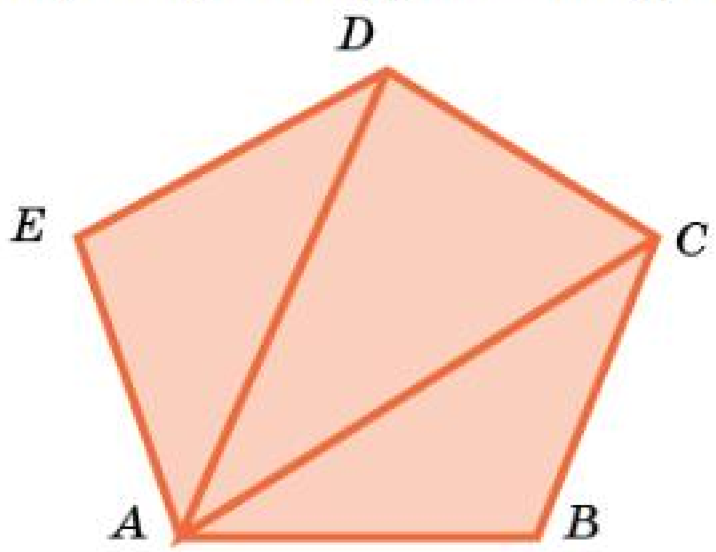
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

19. Исталган кўпбурчак юзасини топишнинг муайян бир усулини кўрсатинг.

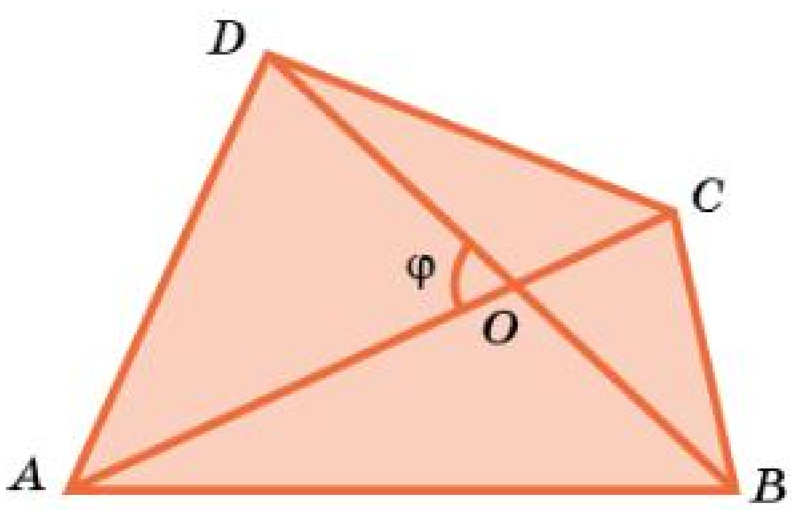
23-§. КЎПБУРЧАКНИНГ ЮЗАСИ

Кўпбурчакнинг юзасини уни учбурчакларга ажратиш орқали топиш мумкин. У ҳолда кўпбурчакнинг юзаси ана шу учбурчаклар юзаларининг йиғиндисига тенг бўлади (23.1-расм).

Теорема. Қаварик тўртбурчак юзаси унинг диагоналлари билан улар орасидаги бурчак синуси кўпайтмасининг ярмига тенг бўлади.



23.1-расм



23.2-расм

Исботи. $ABCD$ қаварик тўртбурчакни кўриб чиқамиз. O — унинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси, φ — шу диагоналлар орасидаги бурчак бўлсин (23.2-расм). У ҳолда:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin\angle AOB,\ S_{BOC} = \frac{1}{2}OC \cdot OB \cdot \sin\angle BOC,$$
$$S_{AOD} = \frac{1}{2}OA \cdot OD \cdot \sin\angle AOD,\ S_{COD} = \frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin\angle COD.$$

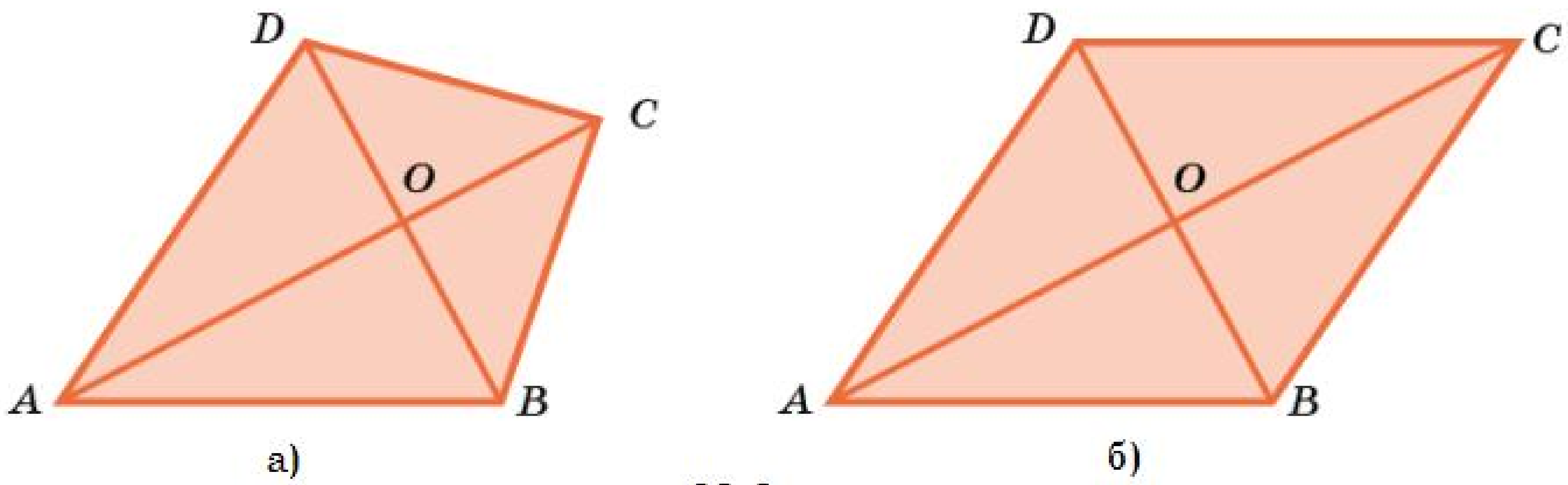
Ушбу тенгликларни қўшиб, берилган бурчаклар синуслари қийматлари φ бурчакнинг синусига тенг эканини ҳисобга олган ҳолда қаварик тўртбурчак юзасини ҳисобловчи формулани ҳосил қиламиз:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\varphi.$$

1-натижа. *Параллелограмм юзаси унинг диагоналлари ва улар орасидаги бурчак кўпайтмасиниг ярмига тенг бўлади.*

2-натижа. *Диагоналлари перпендикуляр бўлган қаварик тўртбурчакнинг юзаси унинг диагоналлари кўпайтмасининг ярмига тенг бўлади* (23.3-а расм).

3-натижа. *Ромб майдони унинг диагоналлари кўпайтмасининг ярмига тенг бўлади* (23.3-б расм).



23.3-расм

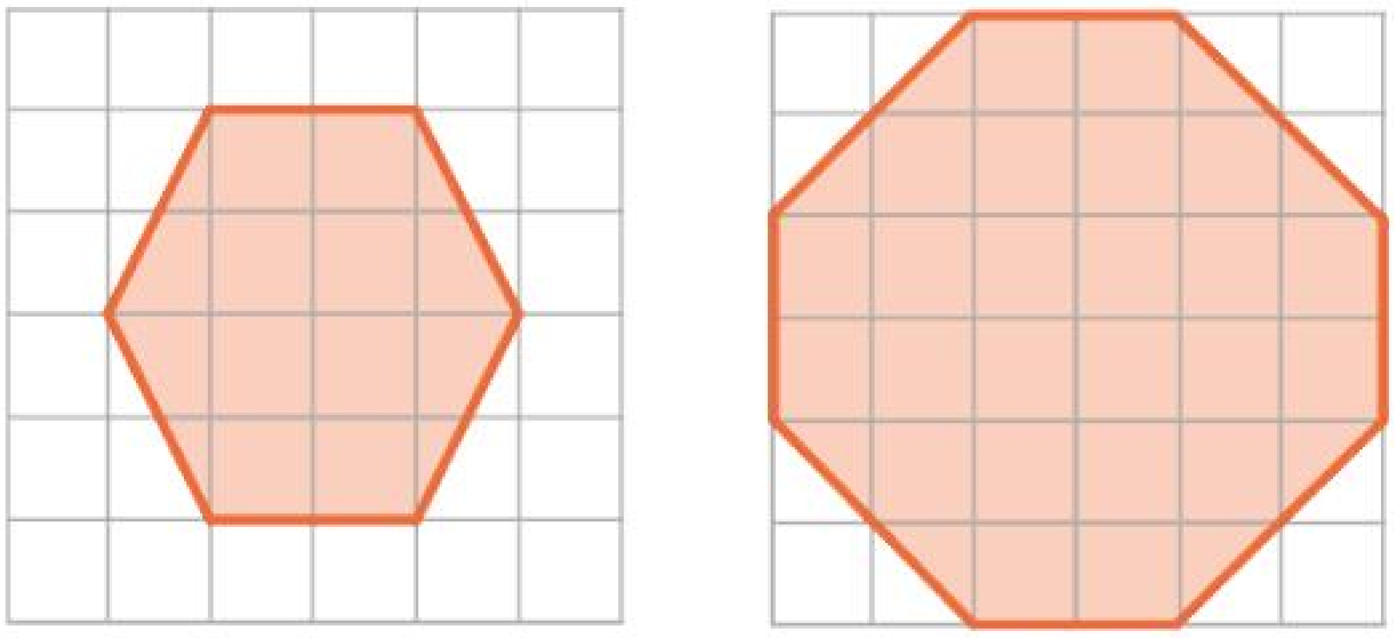
Ушбу теорема ва 2-натижа қаварик бўлмаган тўртбурчаклар учун ҳам бажарилишини аниқланг.

1. Қаварик кўпбурчак юзасини қандай топиш мумкин?
2. Қаварик кўпбурчакнинг юзаси нимага тенг?
3. Диагоналлари перпендикуляр бўлган қаварик тўртбурчак юзаси нимага тенг бўлади?

Машқлар

А

1. Томони 1 см га тенг бўлган мунтазам олтибурчак юзасини топинг.
2. Қаварик тўртбурчак диагоналлари 6 ва 8, улар орасидаги бурчак 30°. Ушбу тўртбурчак юзасини топинг.
3. Тўртбурчак диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва 4 см, 5 см. Ушбу тўртбурчак юзасини топинг.
4. 23.4-расмда тасвирланган кўпбурчак юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.

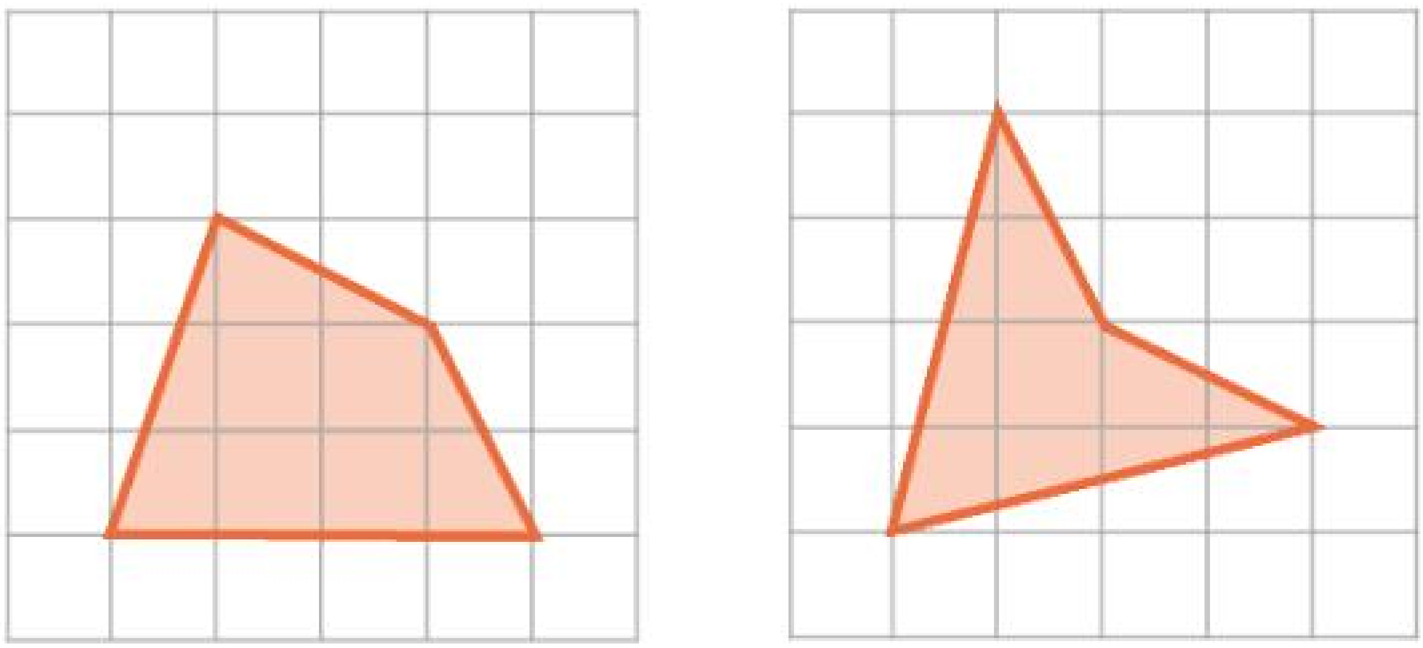


а) б)

23.4-расм

В

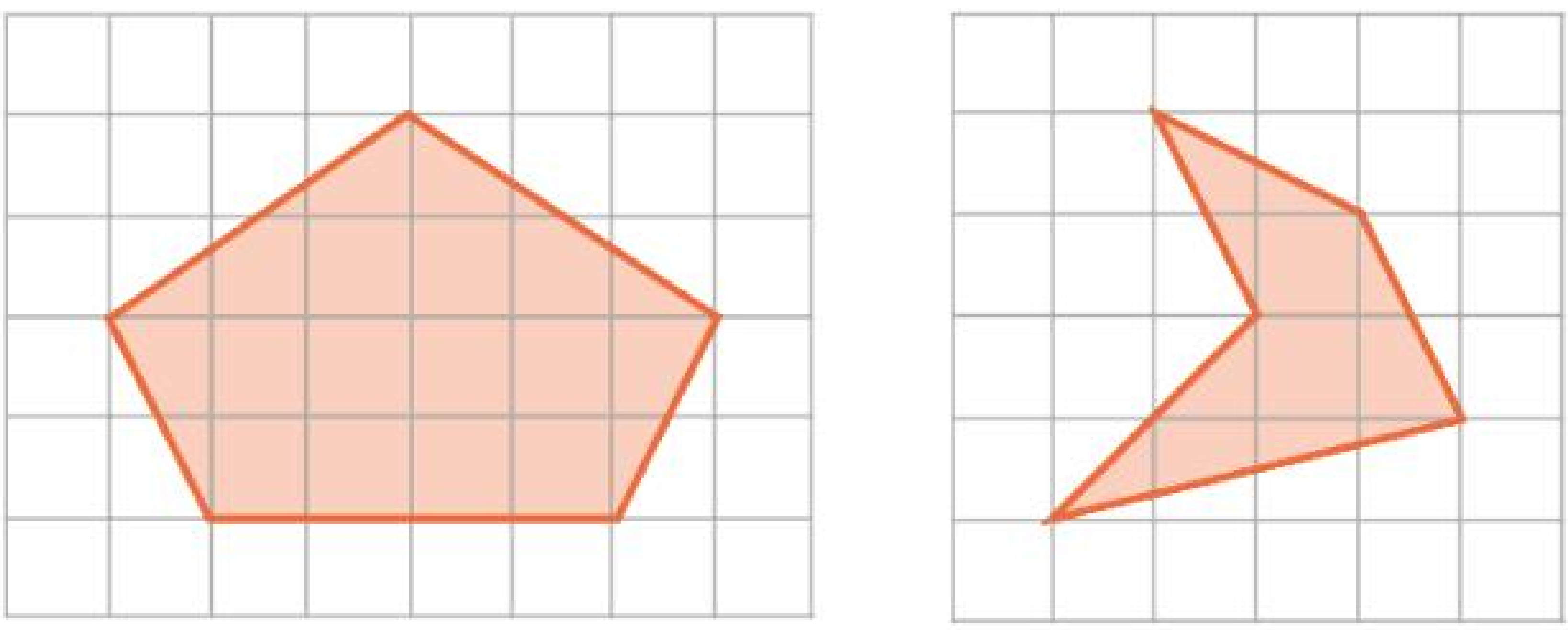
5. 23.5-расмда тасвирланган тўртбурчак юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.



а) б)

23.5-расм

6. 23.6-расмда тасвирланган бешбурчак юзасини топинг. Катак томонлари 1 га тенг.

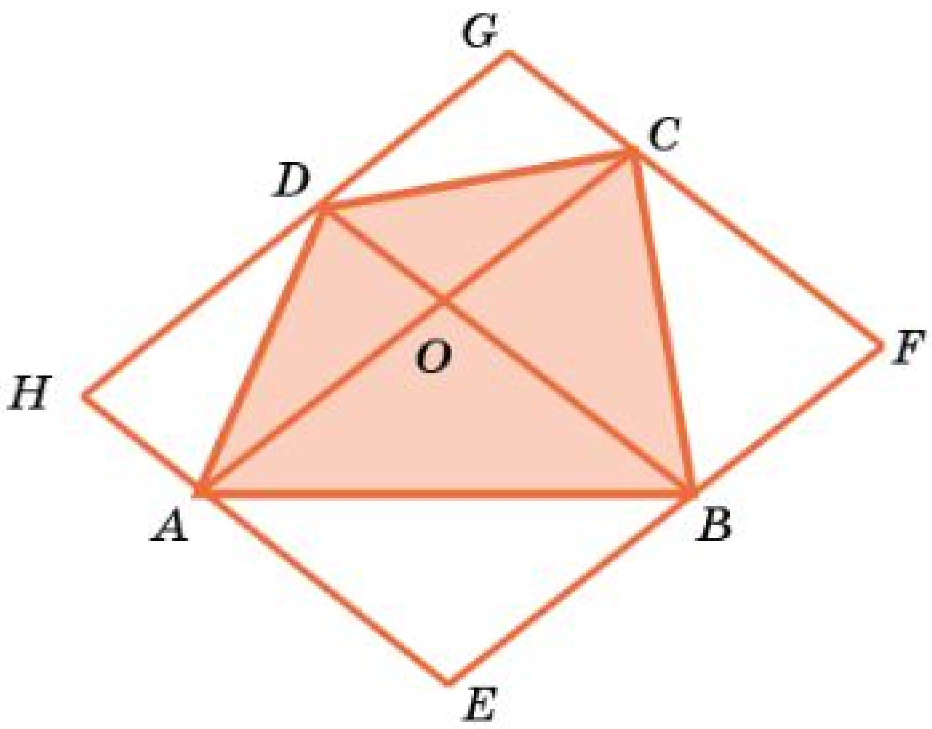


а) б)

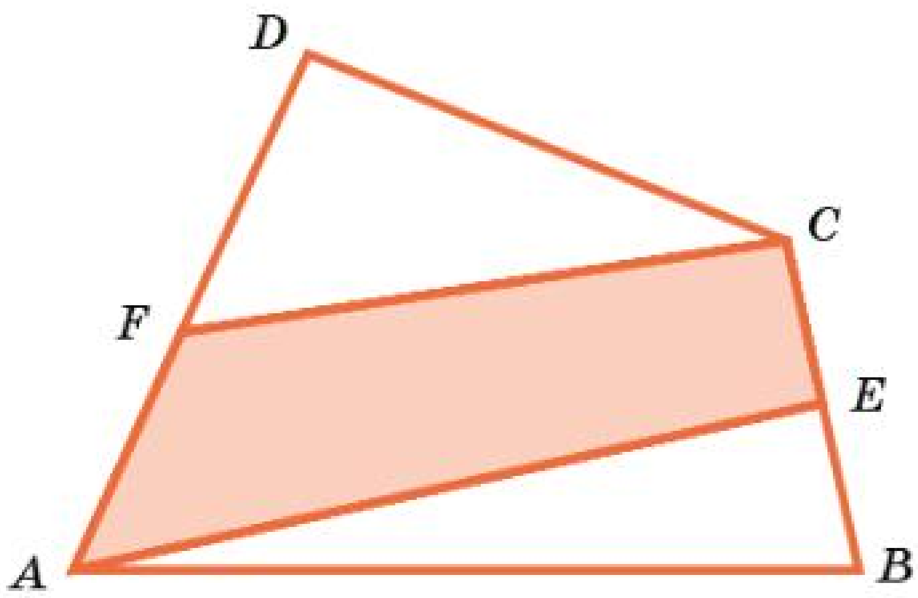
23.6-расм

C

7. Қаварик тўртбурчакнинг диагоналлари 8 ва 10. Ушбу тўртбурчакнинг энг катта юзаси қандай бўлиши мумкин?
8. Қаварик тўртбурчакнинг учлари орқали унинг диагоналларига параллел тўғри чизиқлар ўтказсак, у ҳолда ушбу тўғри чизиқлардан ҳосил бўлган параллелограмм юзаси берилган тўртбурчак юзасидан икки марта катта бўлишини исботланг (23.7-расм).
9. $ABCD$ қаварик тўртбурчакда E ва F нуқталар — мос равишда BC ва AD томонлар ўрталари (23.8-расм). $AECF$ тўртбурчакнинг юзаси $ABCD$ тўртбурчак юзасининг ярмига тенг эканини исботланг.



23.7-расм



23.8-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

10. Агар иккита фигура тенг сонли фигуралардан ташкил топса, улар тенг таркибли фигуралар деб аталади. Тенг таркибли фигураларга мисоллар келтиринг. Тенг таркибли фигуралар юзалари ҳақида нима дейиш мумкин?

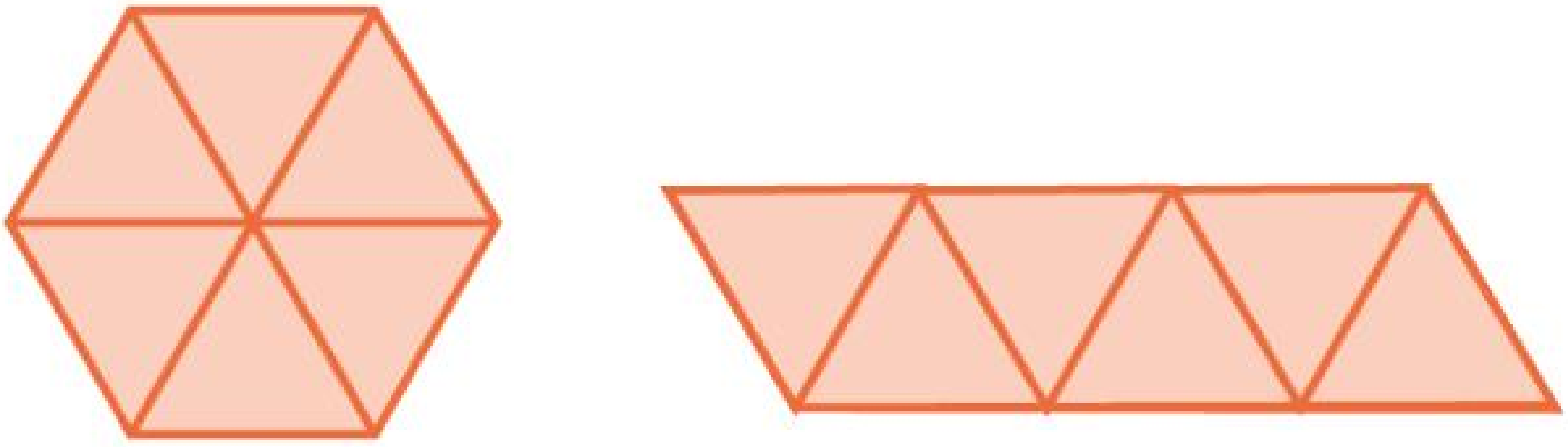
24-§. ТЕНГ ВА ТЕНГ ТАРКИБЛИ ФИГУРАЛАР

Агар иккита фигура тенг сонли бир хил фигуралардан ташкил топса, у ҳолда улар *тенг таркибли* фигуралар деб аталади.

Юзанинг хоссаларидан тенг таркибли фигуралар тенг эканлиги келиб чиқади. Айрим ҳолларда тенг таркибли кўпбурчаклар тенг бўлади. Масалан, 24.1-расмда тасвирланган мунтазам олтибурчак ва параллелограмм — тенг таркибли фигуралар, чунки иккаласи ҳам олттита бир хил тенгтомонли учбурчаклардан ташкил топган.

Тескари савол берилса: “Исталган иккита тенг кўпбурчаклар тенг таркиблими?”. Бунинг аниқ жавоби XIX асрда топилган.

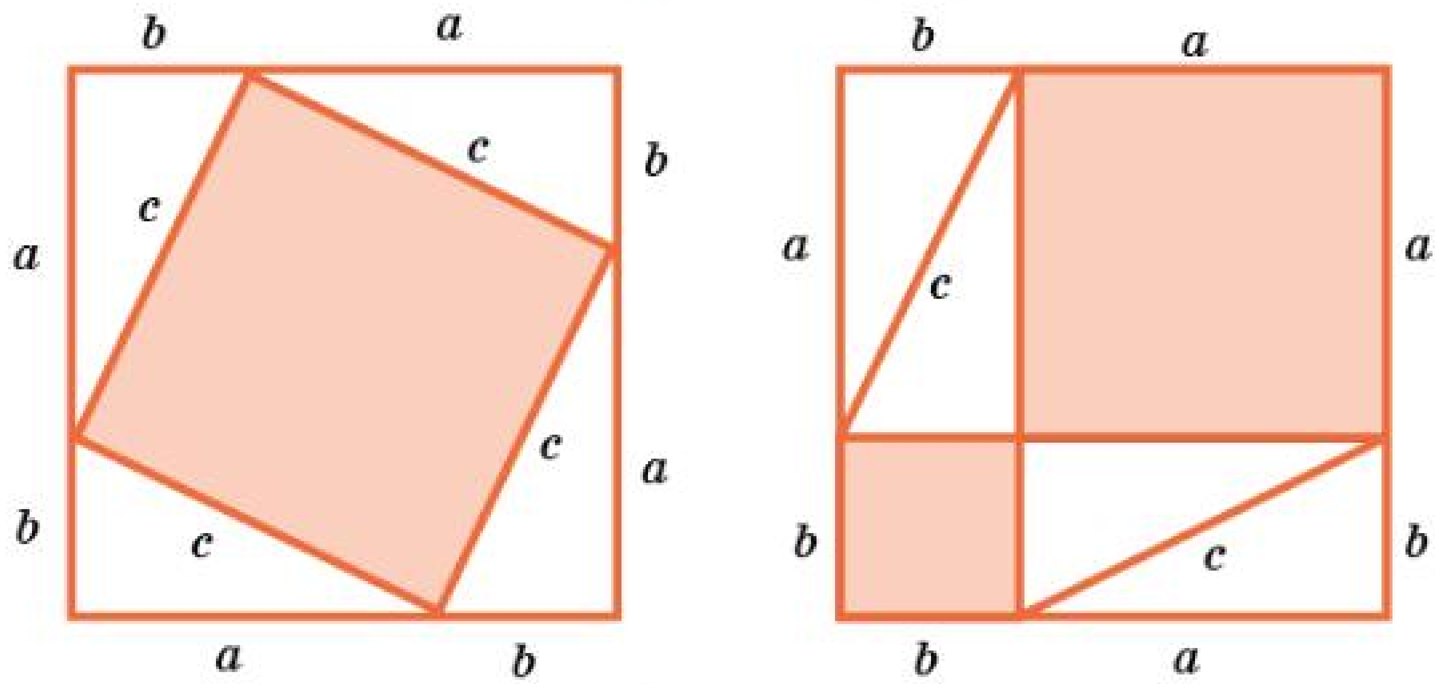
Тенг таркибли фигурадан фойдаланиш учун Пифагор теоремасининг исботини кўриб чиқамиз. Юзалар орқали уни қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин.



24.1-расм

Теорема. Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасига ясалган квадрат юзаси унинг катетларига ясалган квадратлар юзаларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Исботи. Катетлари a, b ва гипотенузаси c бўлган тўғри бурчакли учбурчак берилган бўлсин. Томони шу тўғри бурчакли учбурчак катетларининг йиғиндисига тенг иккита квадратни кўриб чиқамиз. 24.2-расмда кўрсатилгани каби кесмалар ўтказилган.



24.2-расм

Биринчи ҳолда квадрат берилган учбурчак гипотенузасига ясалган квадратга ва унга тенг бўлган тўртта учбурчакларга бўлинади. Иккинчи ҳолда квадрат берилган учбурчак катетларида ясалган иккита квадратга ва берилган учбурчакка тенг бўлган тўртта учбурчакка бўлинади. Шундай қилиб, $c^2 = a^2 + b^2$. ◻

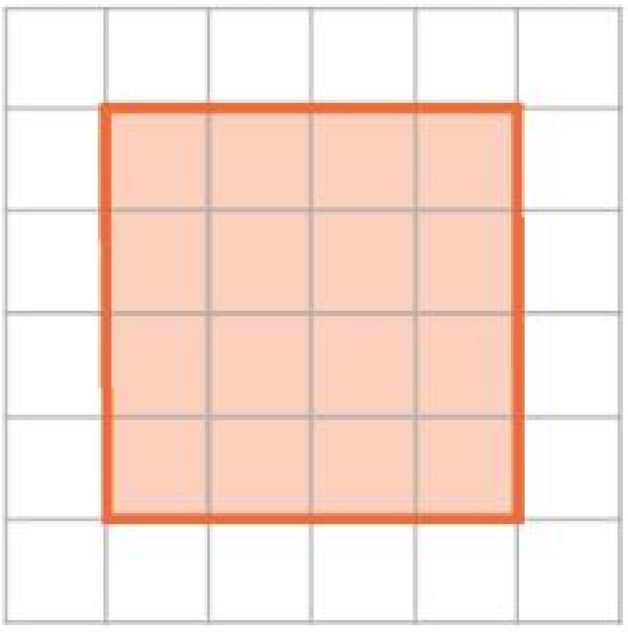
Қуйидаги: а) ўткир бурчакли; б) ўтмас бурчакли учбурчаклар томонларида ясалган квадратлар юзаларини таққосланг.

1. Қандай фигуралар тенг таркибли фигуралар деб аталади?
2. Қандай фигуралар тенг фигуралар деб аталади?
3. Исталган тенг ва тенг таркибли фигуралар ўзаро қандай боғланган?
4. Тенг ва тенг таркибли кўпбурчаклар ўзаро қандай боғланган?

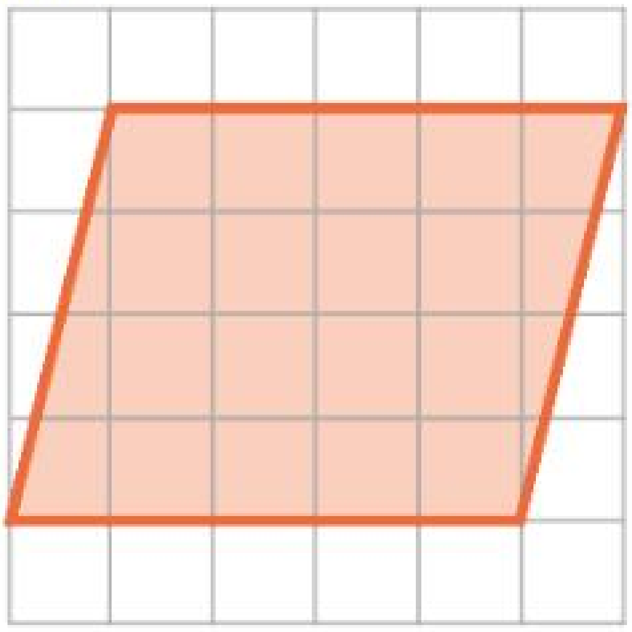
Машқлар

A

1. 24.3-расмдаги квадратни қирқиб, уни тўртта ўзаро тенг бўлган: а) квадратга; б) учбурчакка ажратинг.

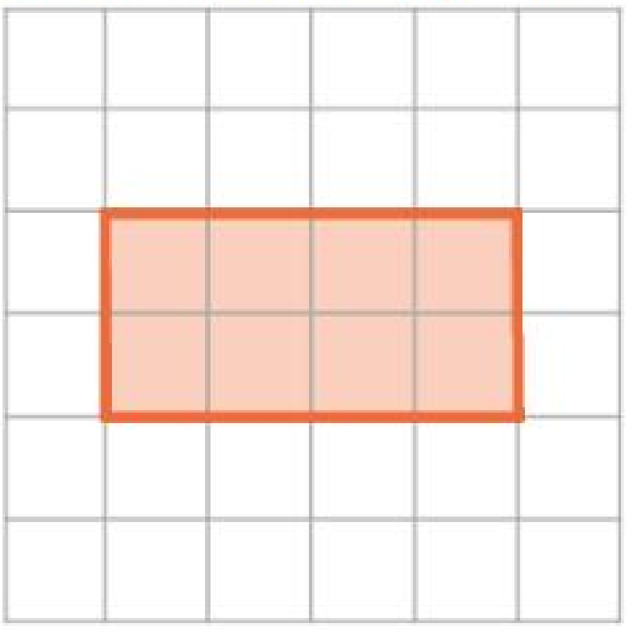


24.3-расм

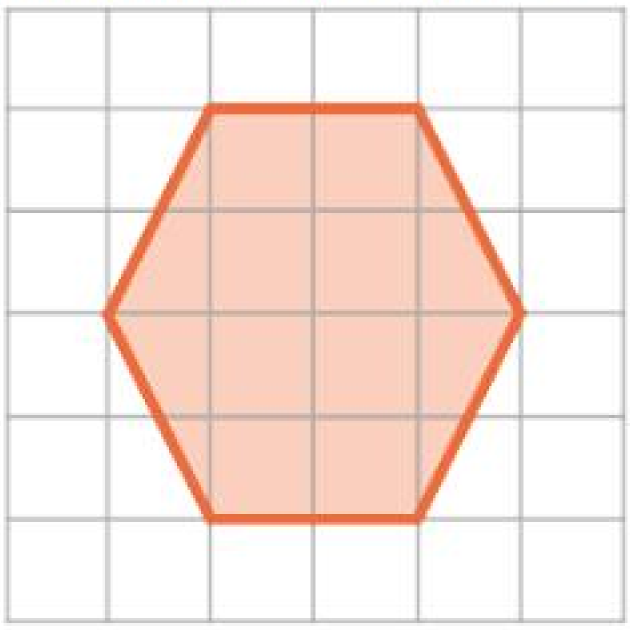


24.4-расм

2. 24.4-расмдаги параллелограмни қирқиб, уни: а) иккита; б) тўртта тенг учбурчакка ажратинг.
3. 24.5-расмдаги тўғритўртбурчакни қирқиб, учбурчак ясаш мумкин бўладиган ҳолатда иккита бўлакка ажратинг.
4. 24.6-расмдаги олтибурчакни қирқиб, параллелограм ясаш мумкин бўладиган ҳолатда иккита тенг трапецияга ажратинг.



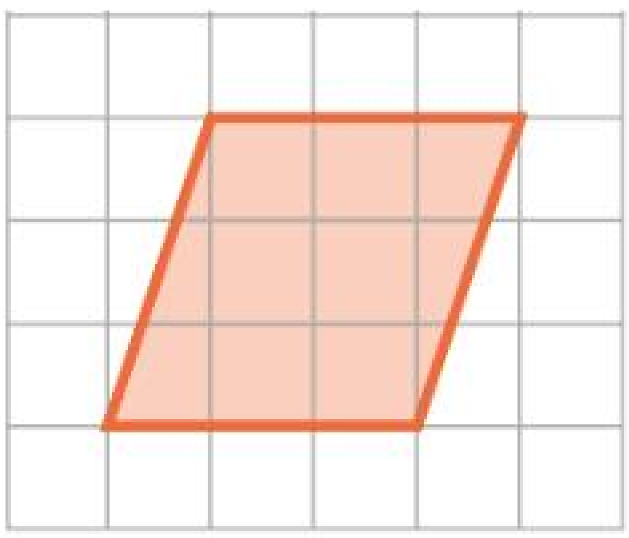
24.5-расм



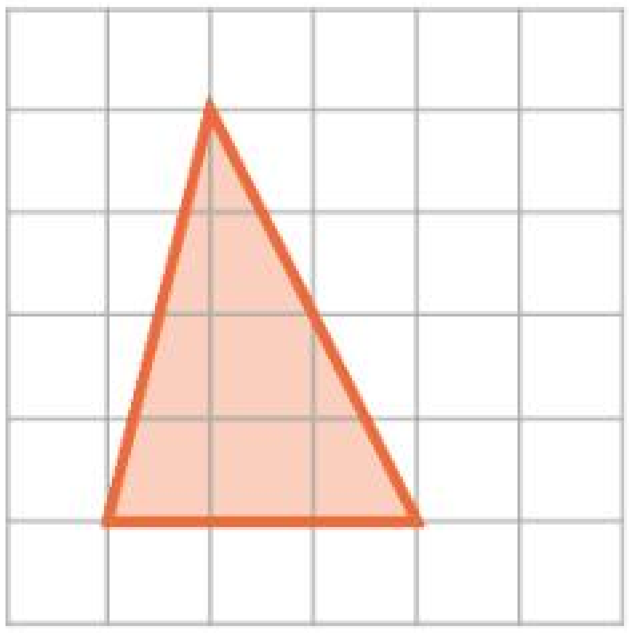
24.6-расм

B

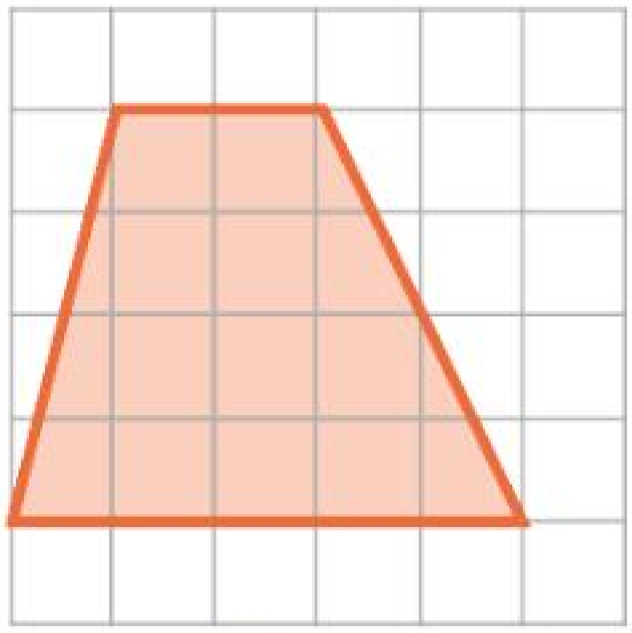
5. Тўғри тўртбурчак ясаш мумкин бўладиган ҳолатда параллелограмни қирқиб, икки бўлакка ажратинг (24.7-расм).
6. Параллелограмм ясаш мумкин бўладиган ҳолатда учбурчакни қирқиб, икки бўлакка ажратинг (24.8-расм).
7. Учбурчак ясашга бўладиган ҳолатда трапецияни қирқиб, иккита бўлакка ажратинг (24.9-расм).



24.7-расм

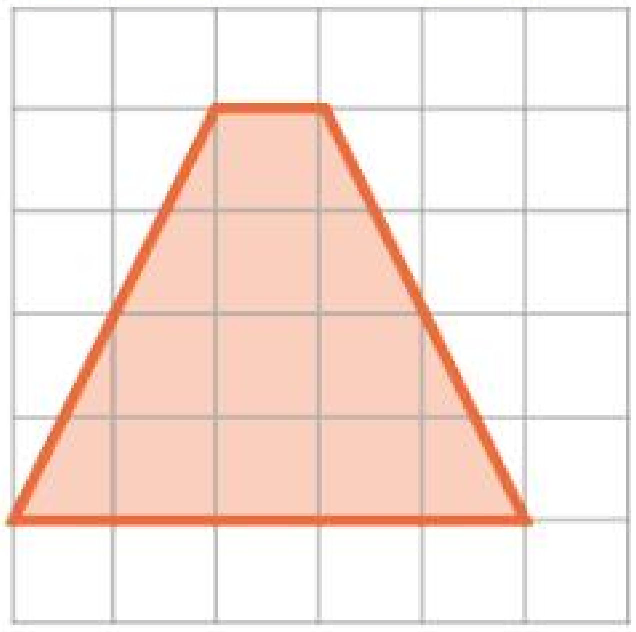


24.8-расм

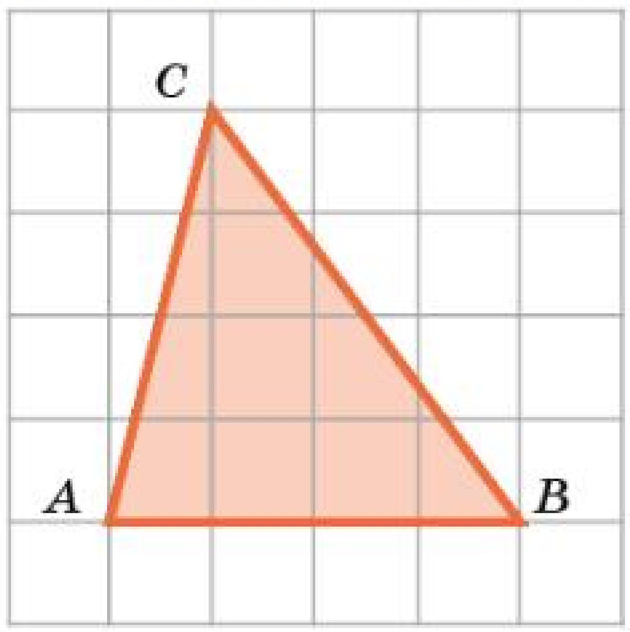


24.9-расм

8. Параллелограмм ясашга бўладиган ҳолатда трапецияни қирқиб, иккита бўлакка ажратинг (24.10-расм).
9. Тўғри тўртбурчак ясашга бўладиган ҳолатда трапецияни қирқиб, учта бўлакка ажратинг (24.10-расм).
10. *ABC* учбурчакнинг *C* учи орқали ушбу учбурчакни иккита тенг бўлакларга ажратадиган тўғри чизиқ ўтказинг (24.11-расм).

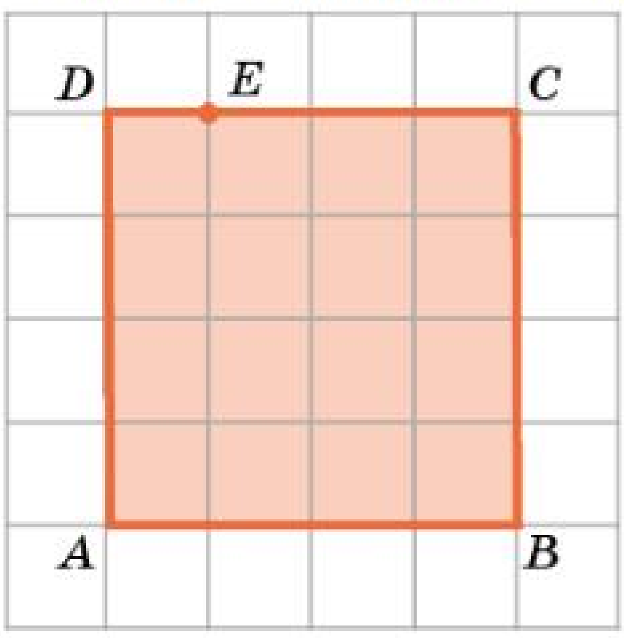


24.10-расм

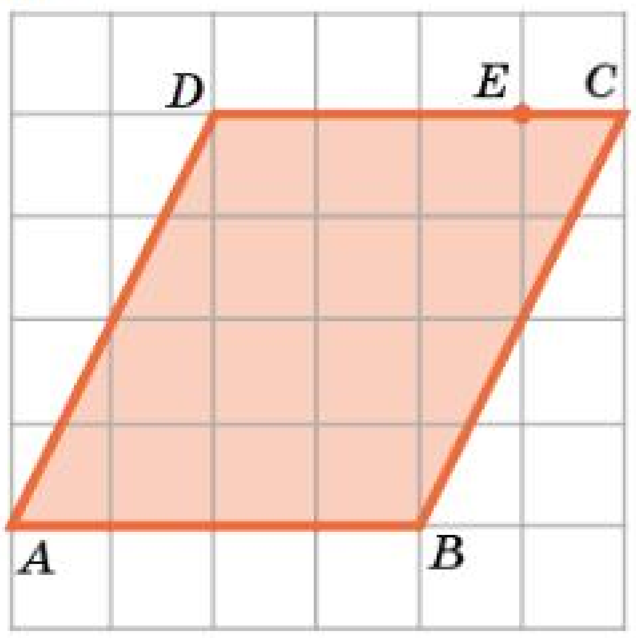


24.11-расм

11. *E* нуқта орқали *ABCD* квадратни иккита тенг бўлакларга ажратувчи тўғри чизиқ ўтказинг (24.12-расм).



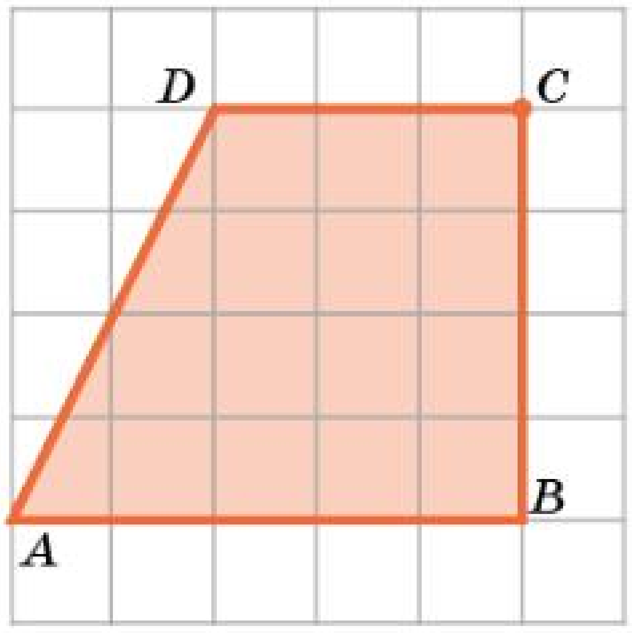
24.12-расм



24.13-расм

12. *E* нуқта орқали *ABCD* параллелограмни иккита тенг бўлакларга ажратадиган тўғри чизиқ ўтказинг (24.13-расм).

13. *ABCD* трапециянинг *C* учи орқали ушбу трапецияни иккита тенг бўлакларга ажратадиган тўғри чизиқ ўтказинг (24.14-расм).

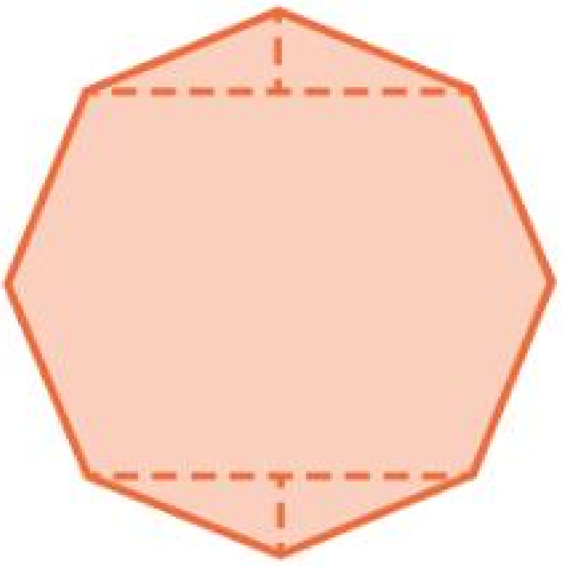


24.14-расм

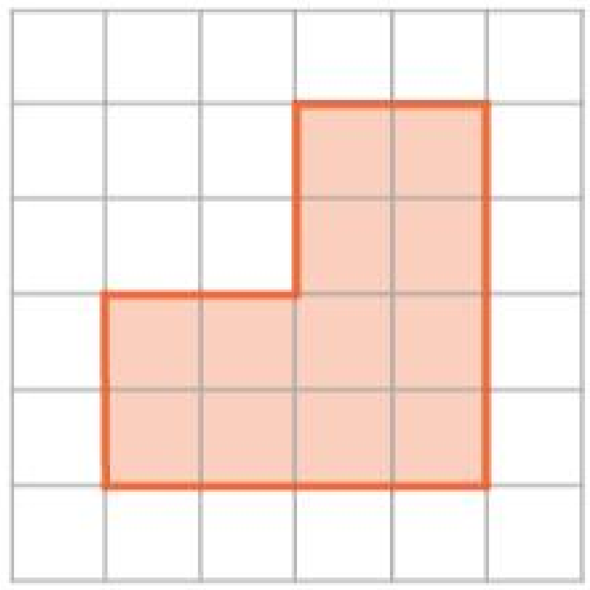
C

14. 24.15-расмда берилган пунктир чизиқлардан фойдаланиб, мунтазам саккизбурчакнинг юзаси унинг энг катта ва энг кичик диагоналлари кўпайтмасига тенг бўлишини исботланг.

15. 24.16-расмдаги фигурани қирқиб, тўртта тенг бўлакларга ажратинг.



24.15-расм



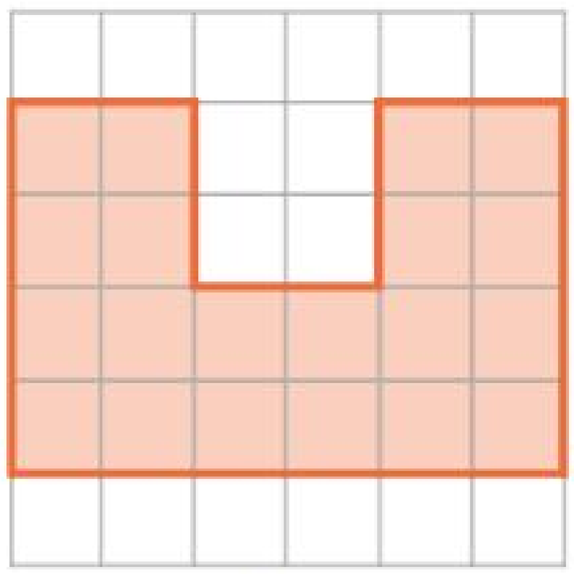
24.16-расм

16. 24.17-расмдаги фигурани қирқиб, тўртта тенг бўлакларга ажратинг.

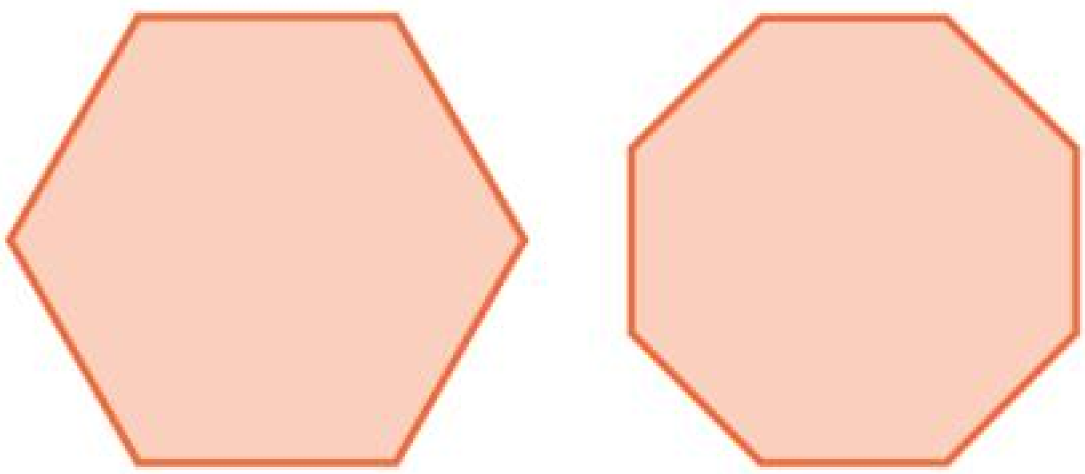
17. Мунтазам: а) олтибурчакни; б) саккизбурчакни қирқиб, параллелограмларга ажратинг (24.18-расм).

18. 24.19-расмдаги фигурани қирқиб, иккита тенг бўлакларга ажратинг.

19. 24.20-расмдаги фигурани қирқиб, иккита тенг бўлакларга ажратинг.

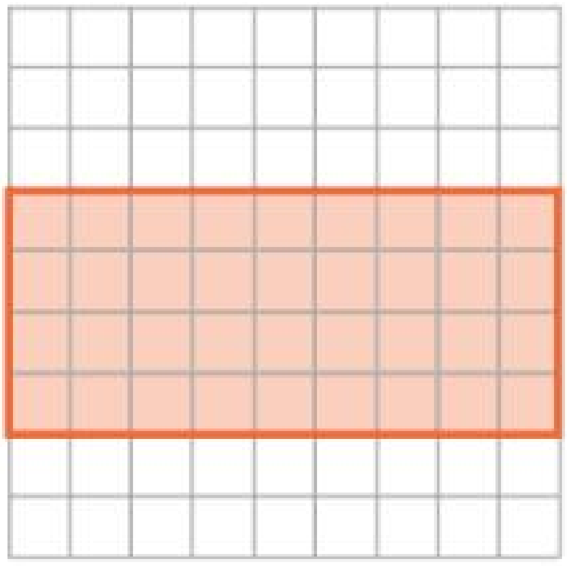


24.17-расм

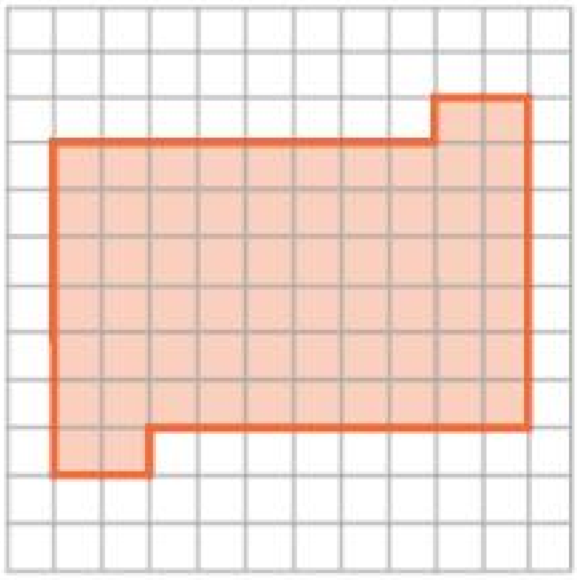


а) б)

24.18-расм

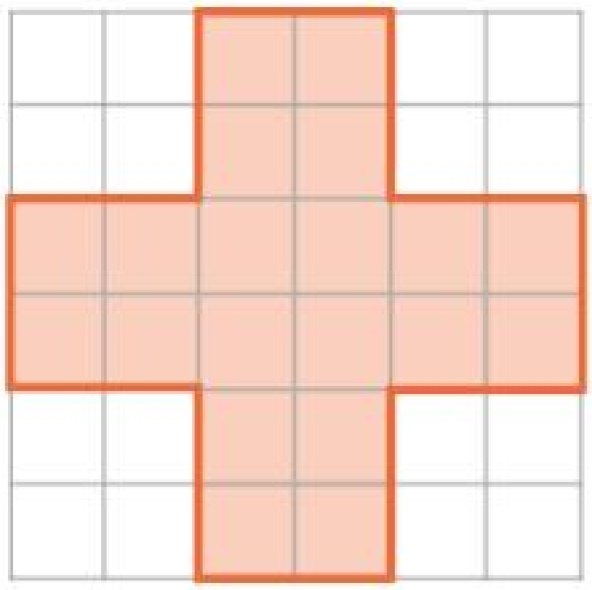


24.19-расм

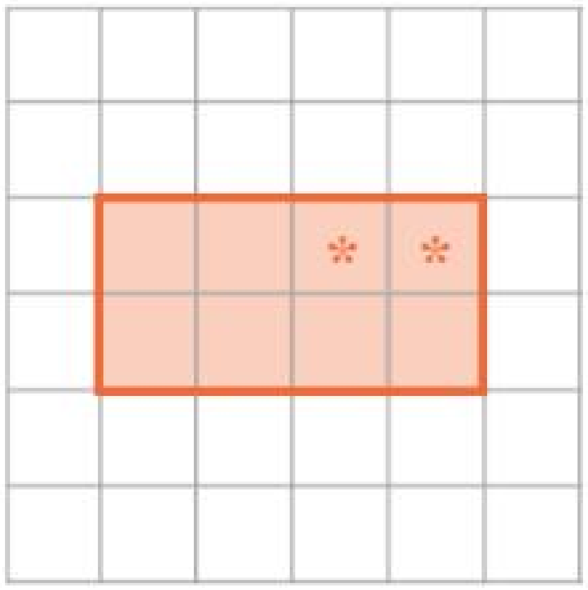


24.20-расм

20. Юнонларнинг хоч белгисини квадрат ясаш мумкин ҳолатга келтириб (24.21-расм) қирқиб, бир нечта бўлакларга ажратинг.



24.21-расм

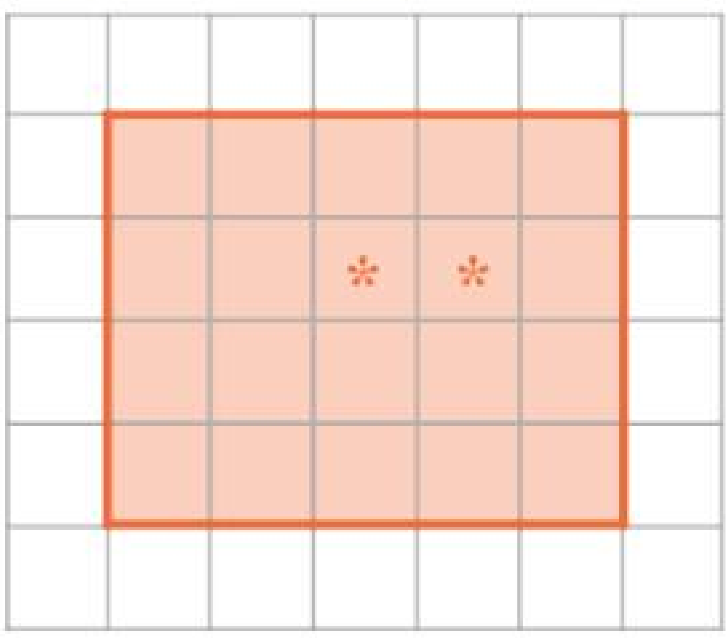


24.22-расм

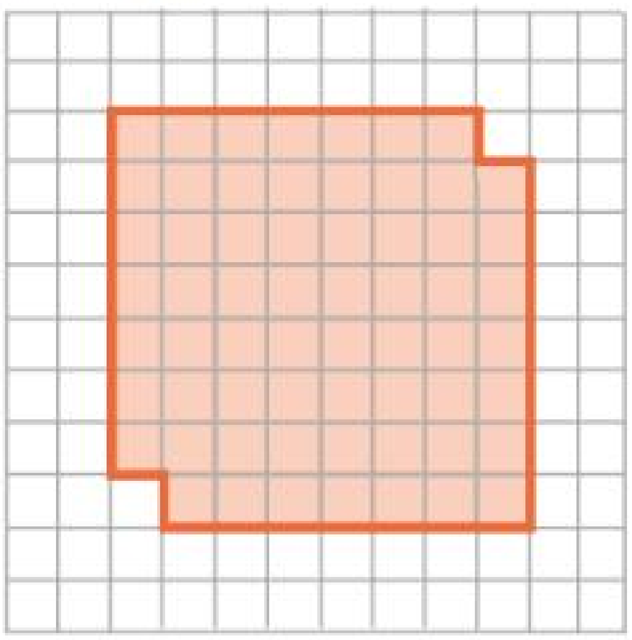
21. 24.22-расмдаги тўғри тўртбурчакни ҳар бирида юлдузча шакли туширилган ҳолатда қирқиб, иккита тенг бўлакларга ажратинг.

22. 24.23-расмдаги тўғри тўртбурчакни ҳар бирида юлдузча шакли туширилган ҳолатда қирқиб, иккита тенг бўлакларга ажратинг.

23. 8×8 ўлчовли квадратдан 1×1 ўлчовли иккита бурчак квадратлари қирқиб олинган (24.24-расм). Қолган фигурани қирқиб, иккита квадратли катаклардан ташкил топган тўғри тўртбурчакларга ажратиш мумкин эмаслигини исботланг.



24.23-расм



24.24-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

24. Тўғри чизиқ чизинг ва унда O нуқта белгиланг. Мазкур тўғри чизиқда бирлик кесма сифатида OE кесмани олинг. Ушбу тўғри чизиқда сонлар ва нуқталар орасидаги мосликни қандай ўрнатиш мумкин?

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Томонлари 4 см ва 6 см, битта бурчаги эса 30° бўлган параллелограмм юзасини топинг.

A. 3 см^2. B. 12 см^2. C. 24 см^2. D. 48 см^2.

2. Параллелограмм юзаси 24 см^2. 8 см га тенг бўлган томонлари орасидаги масофани топинг.

A. 3 см. B. 4 см. C. 8 см. D. 12 см.

3. Юзаси 72 дм^2 бўлган параллелограмм томонлари 6 дм ва 10 дм. Унинг баландлигини топинг.

A. 1,2 дм, 1,5 дм. B. 1,5 дм, 18 дм.
C. 72 см, 120 см. D. 720 дм, 12 дм.

4. Параллелограмм юзаси 36 см^2. Диагоналларининг кесишиш нуқтасидан унинг томонларигача бўлган масофалар 2 см ва 3 см. Параллелограмм периметрини топинг.

A. 7,2 см. B. 15 см. C. 30 см. D. 60 см.

5. Юзаси 400 см^2 га тенг, томонлари 2 : 5 каби нисбатда бўлган тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

A. 10 см, 40 см. B. $4\sqrt{10}$ см, $10\sqrt{10}$ см.
C. 16 см, 25 см. D. $8\sqrt{5}$ см, $20\sqrt{5}$ см.

6. Тўғри тўртбурчакнинг юзаси 400 см^2. Унинг бир томони 2 марта орттирилди, иккинчиси 4 марта камайтирилди. Ҳосил бўлган тўғри тўртбурчак юзасини топинг.

A. 50 см^2. B. 80 см^2. C. 100 см^2. D. 200 см^2.

7. Диагоналлари 6 см ва 8 см бўлган ромб юзасини топинг.

A. 12 см^2. B. 24 см^2. C. 28 см^2. D. 48 см^2.

8. Диагонали d га тенг бўлган квадрат юзасини топинг.

A. d^2. B. $2d^2$. C. $\frac{d^2}{4}$. D. $\frac{d^2}{2}$.

9. Ромб юзаси 2 м^2, ўтмас бурчаги 150°. Ромбнинг периметрини топинг.

A. 1 м. B. 2 м. C. 8 м. D. 16 м.

10. Трапеция баландлиги 12 см, юзаси 120 $см^2$. Унинг ўрта чизиғини топинг.

A. 5 см. B. 10 см. C. 12 см. D. 20 см.

11. Тенгёнли трапециянинг асослари 15 см ва 17 см, ён томони унинг битта асоси билан 45° бурчак ҳосил қилади. Трапеция юзасини топинг.

A. 8 $см^2$. B. 16 $см^2$. C. 32 $см^2$. D. 127,5 $см^2$.

12. Тўғри бурчакли трапециянинг иккита кичик томонидан ҳар бири 12 см дан, энг катта бурчаги 135°. Трапеция юзасини топинг.

A. 216 $см^2$. B. 144 $см^2$. C. 72 $см^2$. D. 48 $см^2$.

13. Трапеция юзаси 60 $см^2$, баландлиги 2 см. Унинг 5:7 нисбатда бўладиган асосларини топинг.

A. 25 см ва 35 см. B. 30 см ва 42 см.
C. 10 см ва 14 см. D. 5 см ва 25 см.

14. Учбурчакнинг иккита томони 8 см ва 6 см. Биринчи томонига туширилган баландлик 3 см га тенг. Иккинчи томонига туширилган баландликни топинг.

A. 2 см. B. 3 см. C. 4 см. D. 6 см.

15. Гипотенузаси 5 см, битта катети 4 см бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг юзасини топинг.

A. 10 $см^2$. B. 5 $см^2$. C. 12 $см^2$. D. 6 $см^2$.

16. Гипотенузаси c га тенг бўлган тўғри бурчакли тенгёнли учбурчакнинг юзасини топинг.

A. $\frac{c^2}{2}$. B. $\frac{c^2}{4}$. C. $2c^2$. D. $\sqrt{2}\,c^2$.

17. Томони 1 га тенг бўлган тенгтомонли учбурчакнинг юзасини топинг.

A. $2\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

18. Тенгёнли учбурчакнинг асоси 6 см, ён томони 10 см. Унинг юзасини топинг.

A. $3\sqrt{91}$ $см^2$. B. 27 $см^2$. C. 16 $см^2$. D. 30 $см^2$.

19. Учбурчакнинг томонлари 10 см ва 16 см, улар орасидаги бурчак 60°. Учбурчак юзасини топинг.

A. 40 $см^2$. B. $40\sqrt{3}$ $см^2$. C. 80 $см^2$. D. $40\sqrt{2}$ $см^2$.

20. Томонлари 10 см ва 20 см бўлган учбурчакнинг энг катта эҳтимолий юзасини топинг.

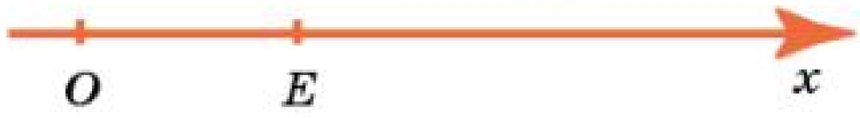
A. 40 $см^2$. B. 100 $см^2$. C. 200 $см^2$. D. 400 $см^2$.

4-боб

ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

25-§. ТЕКИСЛИКДА НУҚТАНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ

O нуқта ва мусбат йўналишни кўрсатувчи OE бирлик кесма танлаб олинган тўғри чизиқ *координаталар тўғри чизиғи ёки координаталар ўқи* деб аталади (25.1-расм). О нуқта *координаталар боши* деб аталади.



25.1-расм

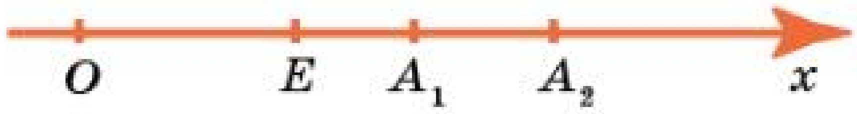
Координаталар тўғри чизиғида A *нуқтанинг координатаси* деб A нуқтадан O координаталар бошигача бўлган "x" масофага айтилади. Агар A нуқта мусбат яримўқда жойлашган бўлса, у "+" ишора билан ва агар A нуқта манфий яримўқда жойлашган бўлса, у "–" ишора билан олинади.

Теорема. Координаталар тўғри чизиғида координаталар мос равишда x_1, x_2 A_1, A_2 нуқталар орасидаги масофа қуйидаги формула орқали ифодаланади:

$$A_1A_2 = |x_2 - x_1|.$$

Исботи координаталар тўғри чизиғидаги нуқталарнинг ўзаро ҳар хил жойлашиш ҳолларини кўриб чиқиш орқали амалга оширилади.

Масалан, агар A_1, A_2 нуқталар мусбат яримўқда ва A_1 нуқта O ва A_2 нуқталар орасида жойлашган бўлса, $OA_1 = x_1$, $OA_2 = x_2$ (25.2-расм), у ҳолда $x_1 < x_2$ ва $A_1A_2 = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$ бўлади. □



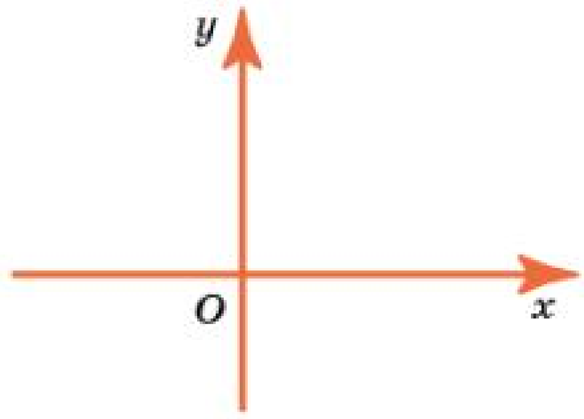
25.2-расм

Координаталар тўғри чизиғидаги нуқталарнинг ўзаро жойлашиш усулларига доир бошқа ҳолларни мустақил кўриб чиқинг.

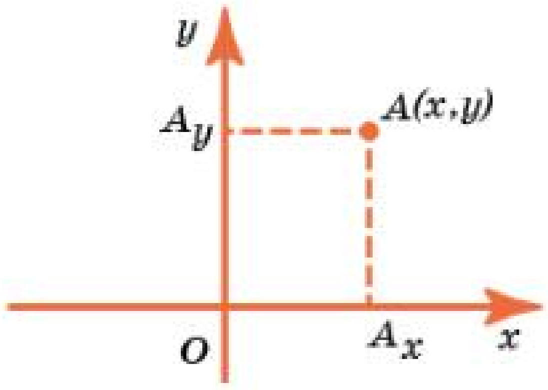
Энди текисликдаги координаталарни кўриб чиқамиз.

Текисликда *тўғри бурчакли координаталар системаси* деб умумий координаталар боши ва ўзаро тенг бўлган бирлик кесмаларига эга бўлган ўзаро перпендикуляр координаталар тўғри чизиқлар жуфтига айтилади.

Координаталар боши O ҳарфи билан, координаталар тўғри чизиқлари эса Ox, Oy орқали белгиланади ва улар мос равишда *абсцисса ўқи*, *ордината ўқи* деб аталади (25.3-расм).



25.3-расм



25.4-расм

Тўғри бурчакли координаталар системаси орқали берилган текислик *координаталар текислиги* деб аталади.

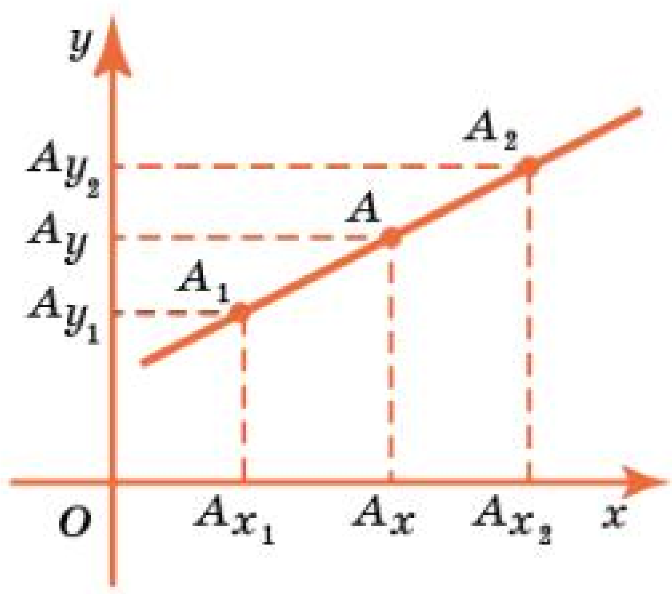
Координаталар текислигидаги A нуқтани кўриб чиқамиз. Ушбу нуқта орқали Ox ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз ва Ox ўқи билан кесишиш нуқтасини A_x орқали белгилаймиз. Нуқтанинг Ox ўқидаги координатаси A нуқтанинг *абциссаси* деб аталади ва x орқали белгиланади. Худди шундай A нуқта орқали Oy ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз ва Oy ўқи билан кесишиш нуқтасини Ay орқали белгилаймиз. Ушбу нуқтанинг Oy ўқидаги координатаси A *нуқтанинг ординатаси* деб аталади ва y орқали белгиланади (25.4-расм).

Шундай қилиб кодинаталар текислигининг ҳар бир A нуқтасига (x, y) жуфт мос келади ва у берилган координаталар системасига тегишли ҳолда *текисликдаги нуқтанинг координаталари* деб аталади. (x, y) координаталари бўлган A нуқта $A(x, y)$ орқали белгиланади.

Координаталар билан берилган A_1, A_2 нуқталар учун A_1A_2 кесма ўртасининг координаталарини топамиз.

Теорема. Координаталар текислигида $A_1(x_1, y_1)$ ва $A_2(x_2, y_2)$ нуқталарни туташтирувчи кесманинг A ўртаси координаталари $A\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ бўлади.

Исботи. A_1A_2 тўғри чизиқ координаталар ўқларига параллел эмас ва улар билан устма-уст тушмайдиган ҳолни кўриб чиқамиз. Ушбу нуқталарни кесмалар орқали туташтириб, унинг ўртасини A деб белгилаймиз (25.5-расм). A_1, A, A_2 нуқталардан координаталар ўқларига перпендикулярлар туширамиз ва уларнинг координаталарини мос равишда A_{x_1}, A_x, A_{x_2}, A_{y_1}, A_y, A_{y_2} деб белгилаймиз. $A_{x_1}A_{x_2}A_2A_1$, $A_{y_1}A_{y_2}A_2A_1$ тўртбурчаклар трапециялар бўлади.



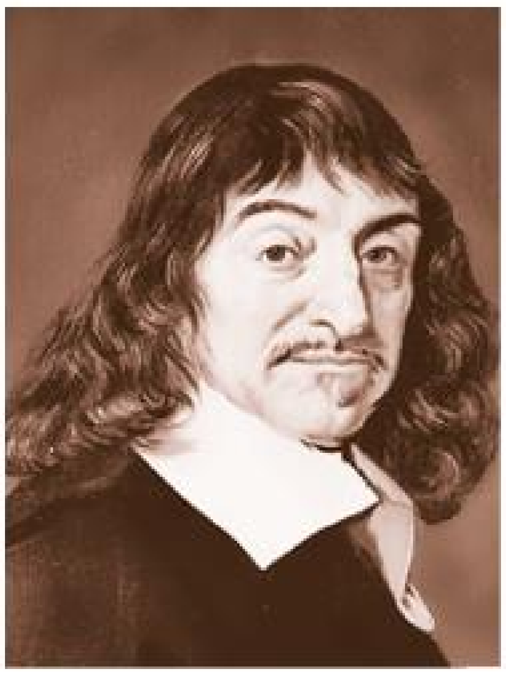
25.5-расм

AA_x, AA_y кесмалар —уларнинг ўрта чизиқлари. Демак, A_x, A_y нуқталар мос равишда $A_{x_1}A_{x_2}$, $A_{y_1}A_{y_2}$ кесмаларнинг ўрталари бўлади. Бундан A кесма ўртасининг координатаси $A\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ бўлади.

A_1A_2 тўғри чизиқ координаталар ўқларига параллел ёки улардан бири билан устма-уст тушадиган ҳолни мустақил кўриб чиқинг.

Пропорционал кесмалар ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, агар A нуқта $A_1(x_1, y_1)$ ва $A_2(x_2, y_2)$ нуқталарни туташтирувчи кесмада ётса ва уни $\frac{A_1A}{AA_2} = k$ нисбатда бўладиган бўлса, у ҳолда A нуқтанинг координаталари $\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}, \frac{y_1+ky_2}{1+k}\right)$ бўлишини исботланг.

Тарихий маълумотлар



Тўғри бурчакли координаталарни дастлаб Р.Декарт киритган, шу сабабли тўғри бурчакли координаталар системаси *Декарт координаталар системаси*, координаталар эса *Декарт координаталари* деб аталади.

Текисликда тўғри бурчакли координаталарни киритиш кўпгина геометрик масалаларни алгебраик масалаларга, аксинча, алгебраик масалаларни геометрик масалаларга ўтказиш имконини вужудга келтирди. Бунга асосланган усул *координаталар усули* деб аталади.

Рене Декарт — XVII асрда яшаб ўтган таниқли олимлардан бири. Олим фалсафа, математика, физика, биология, тиббиёт ва бошқа фан соҳаларда катта натижаларга эришди.

1637 йили чоп этилган китоби Декартга катта муваффақият олиб келди. Китобнинг номи шу давр талабига кўра узун бўлган: “Ақлга йўналиш ва фанда ҳаққонийликни қидиришга имкон берувчи усул ҳақида фикр. Шунингдек, ушбу усул қўшимчалари бўлган Диоптрика, Метеорлар ва Геометрия”.

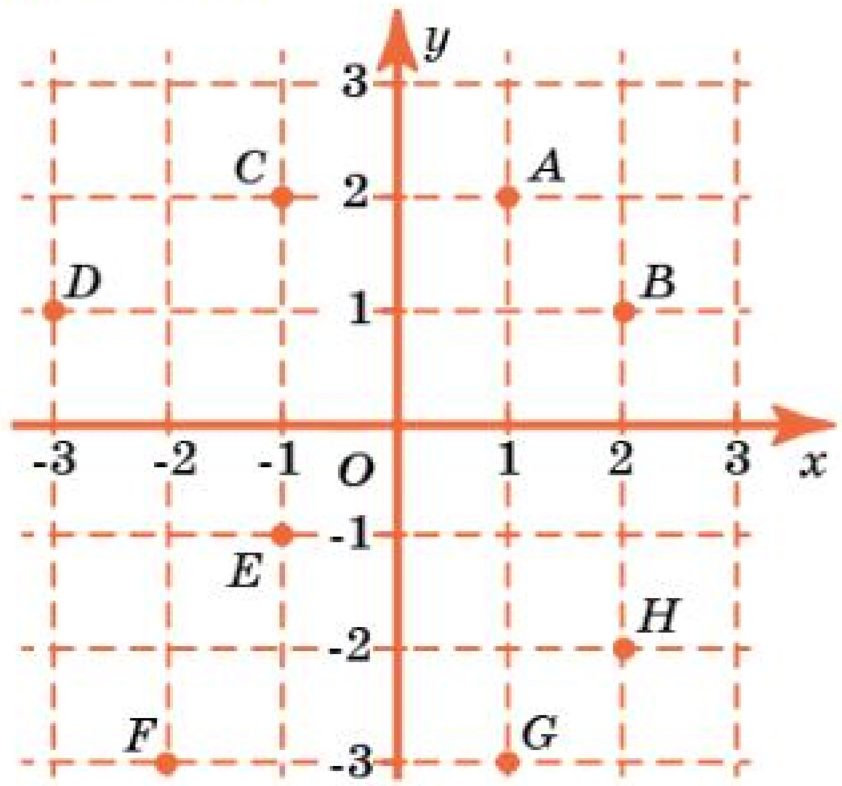
“.... усул ҳақидаги фикр”га илова бўлган Декартнинг “Геометрия”си ўша замон геометриясида инқилоб қилди. Қисқа вақт ичида “Геометрия”нинг тўртта нашри чиқди ва бу китобдан XVII асрда ҳар бир математик унумли фойдаланди. XVII—XIX асрларда Декартнинг координаталар усули асосида кўпўлчовли, кейинчалик чексиз ўлчовли геометрия пайдо бўлди. Ҳозирги пайтда математикани ҳам, физикани ҳам координаталар усулисиз тасаввур қилиш мумкин эмас.

1. Координаталар тўғри чизиғи деб қандай тўғри чизиққа айтилади?
2. Координаталар тўғри чизиғидаги нуқтанинг координатаси нима?
3. Координаталар тўғри чизиғида икки нуқта орасидаги масофа қандай топилади?
4. Тўғри бурчакли координаталар системаси нима?
5. Қандай текислик координаталар текислиги деб аталади?
6. Координаталар текислигидаги координаталар тўғри чизиғи қандай аталади?
7. Кординаталар текислигидаги нуқтанинг абсциссаси ва ординатаси нима?
8. Координаталар текислигида нуқтанинг координатаси нима?
9. Текисликда координаталарни фанга дастлаб ким киритган?
10. Қандай усул координаталар усули деб аталади?

Машқлар

A

1. 25.6-расмда координаталар текислигида берилган нуқталарнинг координаталарини топинг.



25.6-расм

2. Координаталар текислигида қуйидаги нуқталарни белгиланг: $A(2,\ 1)$, $B(1,\ 3)$, $C(4,\ 2)$, $D(-3,\ 2)$, $E(-2,\ -3)$, $F(3,\ -2)$.
3. Абсцисса ўқига параллел бўлган тўғри чизиқда иккита нуқта олинган. Битта нуқтанинг ординатаси 2 га тенг. Иккинчи нуқтанинг ординатаси нимага тенг?
4. Абсцисса ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқда иккита нуқта олинган. Битта нуқтанинг абсциссаси 3 га тенг. Иккинчи нуқтанинг абсциссаси нимага тенг?
5. $A(2,\ 3)$ нуқтадан абсцисса ўқига перпендикуляр туширилган. Перпендикуляр асосининг координаталарини топинг.
6. $A(2,\ 3)$ нуқтадан абсцисса ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Унинг ордината ўқи билан кесишиш нуқтаси координатасини топинг.

7. AB кесма ўртасининг координаталарини топинг, бу ерда: а) $A(1, -2)$, $B(5, 6)$; б) $A(-3, 4)$, $B(1, 2)$; в) $A(5, 7)$, $B(-3, -5)$.

B

8. Текисликда координаталар системасида $A(1, 1)$ ва $B(1, -1)$ нуқталарни белгиланг. AB кесмани ясанг ва у координаталар ўқи билан кесишадими? Агар кесишса, кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг.
9. Координаталар текислигида қуйидаги нуқталарнинг геометрик ўринларини тасвирланг:
а) x ǀ 0; б) $y < 0$; в) x m 0, y ǀ 0; г) $xy > 0$.
10. Учларининг координаталари берилган синиқ чизиқ ясанг: (4, 0), (3, 1,5), (1, 2), (–1, 2), (–4, 0,5), (–6, 2), (–5,5, 0), (–6, –2), (–4, –0,5), (–1, –2), (1, –2), (3, –1,5), (4, 0). Чизма ниманинг тасвирига ўхшайди?

C

11. $O(0, 0)$, $A(6, 2)$, $B(x; y)$ ва $C(0, 6)$ нуқталар — параллелограммнинг кетма-кет жойлашган учлари. B нуқтанинг координаталарини топинг.
12. $O(0, 0)$, $A(8, 2)$, $B(10, 8)$, $C(2, 6)$ нуқталар — тўртбурчакнинг учлари. Унинг диагоналларининг P кесишиш нуқтаси координаталарини топинг.
13. $O(0, 0)$, $A(8, 0)$, $B(7, 6)$ нуқталар — учбурчакнинг учлари. Унинг медианаларининг кесишиш нуқтаси M нинг координаталарини топинг.

Ахборот тайёрланг

14. Рене Декарт — XVII асрда яшаб ўтган таниқли олимлардан бири. Ушбу олимнинг ҳаёти, илмий асарлари ҳақида маълумот тайёрланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

15. $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ нуқталар орасидаги масофани уларнинг координаталари орқали ифодаловчи формулани топиб кўринг.

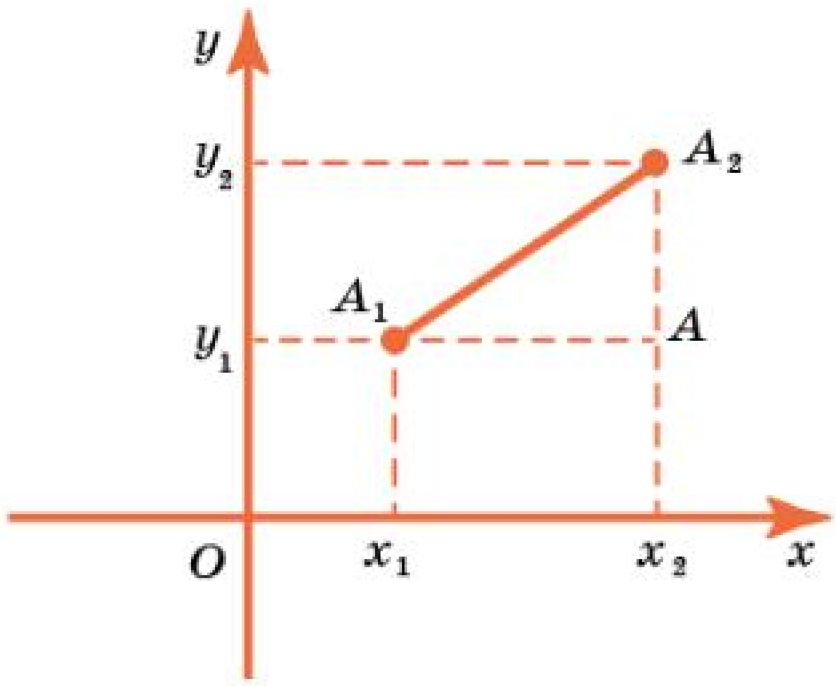
26-§. ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА. АЙЛАНА ТЕНГЛАМАСИ

Координаталар текислигида $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ нуқталар орасидаги масофани ифодаловчи формулани келтириб чиқарамиз.

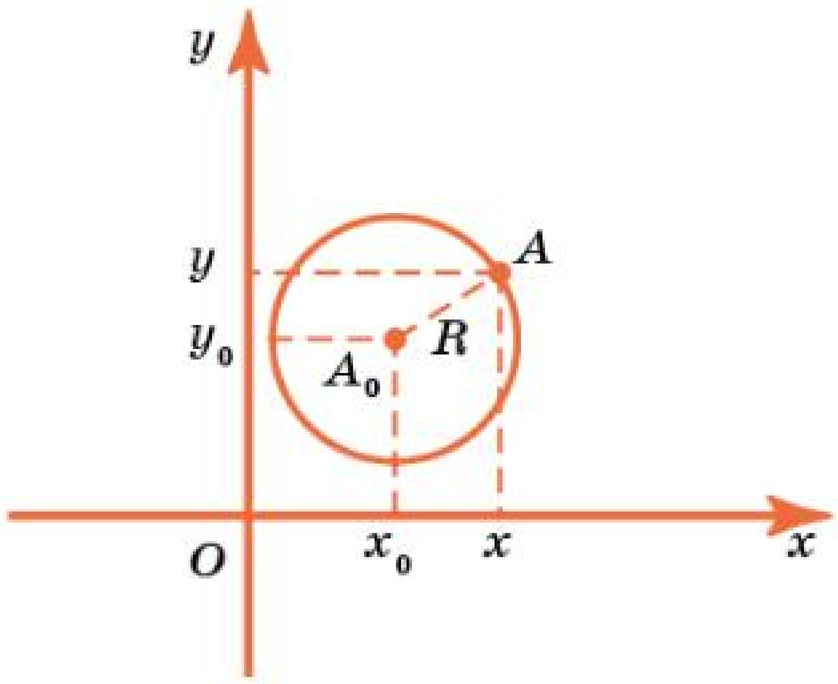
Аввал $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ ҳолларни кўриб чиқамиз. A нуқтанинг координаталарини (x_2, y_1) деб оламиз. AA_1A_2 тўғри бурчакли учбурчакда $A_1A = |x_2 - x_1|$, $AA_2 = |y_2 - y_1|$ (26.1-расм).

Пифагор теоремасига кўра нуқталар орасидаги масофани топиш формуласига эга бўламиз:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



26.1-расм



26.2-расм

Агар $x_1 = x_2$ ёки $y_1 = y_2$ бўлса, у ҳолда текисликда нуқталар орасидаги масофани ҳисобловчи формуланинг тўғри эканини кўриш мумкин.

Буни мустақил исботланг.

Айлана ва доира таърифидан радиуси R ва маркази $A_0(x_0, y_0)$ нуқта бўлган айлана нуқталарининг координаталари қуйидаги тенгликни (26.2-расм):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

мос равишда доира нуқталарининг координаталари қуйидаги тенгсизликни:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le R^2$$

қаноатлантириши келиб чиқади.

Айрим ҳолларда маркази координаталар боши $O(0, 0)$ ва радиуси R бўлган айлана қуйидаги тенглама орқали:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

мос равишда доира қуйидаги тенгсизлик орқали берилади:

$$x^2 + y^2 \le R^2.$$

1. Координаталар бўйича нуқталар орасидаги масофа қандай ифодаланади?
2. Координаталар текислигида айлана қандай тенглама орқали берилади?
3. Координаталар текислигида доира қандай тенгсизлик орқали берилади?

Машқлар

A

1. Қуйидаги нуқталар орасидаги масофани топинг: а) $A_1(1, 2)$ ва $A_2(-1, 1)$; б) $B_1(3, 4)$ ва $B_2(3, -1)$.
2. $A(2, 3)$ нуқтадан: а) Ox; б) Oy ўқигача бўлган масофани топинг.
3. A (2, 1) ёки B (−2, 1) нуқталардан қайси бири координаталар бошига яқин жойлашган?
4. Қуйидаги тенглама орқали берилган айлананинг R радиуси ва C маркази координаталарини топинг: а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$; б) $x^2 + (y - 6)^2 = 16$.
5. а) маркази $O(0, 0)$ нуқта ва радиуси 1 га тенг; б) маркази $C(1, -2)$ нуқта ва радиуси 4 га тенг бўлган айлана тенгламасини топинг.
6. Координаталари берилган қуйидаги нуқталар $x^2 + y^2 = 25$ айланага нисбатан қандай жойлашганлигини аниқланг:
   а) (1, 2); б) (3, 4); в) (−4, 3); г) (0, 5); д) (5, −1).

B

7. $M(1, -2)$, $N(-2, 3)$ ва $K(3, 1)$ нуқталар берилган. MNK учбурчакнинг периметрини топинг.
8. Учларининг координаталари берилган ABC учбурчак турини аниқланг. Бу ерда:
   а) $A(-2, -1)$, $B(2, -1)$, $C(-2, 1)$; б) $A(-2, -2)$, $B(2, -2)$, $C(0, 1)$.
9. Учларининг координаталари берилган тўртбурчак турини аниқланг. Бу ерда:
   а) $A(-2, 0)$, $B(0, -2)$, $C(2, 0)$, $D(0, 2)$;
   б) $A(-2, 1)$, $B(2, -1)$, $C(3, 1)$, $D(-1, 3)$;
   в) $A(-2, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 4)$, $D(-3, 3)$;
   г) $A(-2, -1)$, $B(2, -1)$, $C(1, 2)$, $D(-1, 2)$.
10. Абсцисса ўқига уринувчи ва маркази $C(1, 2)$ нуқта бўлган айлана тенгламасини топинг.
11. Координаталар боши орқали ўтувчи ва маркази $C(-3, 4)$ нуқта бўлган айлана тенгламасини топинг.
12. Радиуси R ва маркази $C(x_0, y_0)$ нуқта бўлган доирага тегишли бўлмаган нуқталарнинг геометрик ўрни қандай тенгсизлик орқали берилади?

C

13. Қуйидаги нуқталардан бир хил узоқликда жойлашган абсцисса ўқидаги нуқталарни топинг:
    а) $A(1, 2)$, $B(3, 2)$; б) $A(1, 2)$, $B(2, 3)$.
14. Қуйидаги нуқталардан бир хил узоқликда жойлашган ордината ўқидаги нуқталарни топинг:
    а) $A(2, 2)$, $B(2, 4)$; б) $A(1, 5)$, $B(3, 1)$.

15. Қуйидаги нуқталардан бир хил узоқликда жойлашган нуқталарни топинг:
а) $O(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$; б) $A(0, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 1)$.
16. Қуйидаги тенглама айлана тенгламаси бўлишини исботланг: а) $x^2 - 4x + y^2 = 0$; б) $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$. Айлана радиуси ва марказининг координаталарини топинг.
17. $A(0, \sqrt{2})$ нуқта маркази $C(3, 0)$ бўлган айланада ётади. Ушбу айлана тенгламасини топинг.
18. $A(2, 0)$, $B(-2, 6)$ нуқталар берилган. Диаметри AB кесма бўлган айлана тенгламасини топинг.
19. $x^2 + y^2 = 1$ тенглама орқали берилган айлана билан қуйидаги тенглама орқали берилган айлананинг ўзаро жойлашишини аниқланг: а) $x^2 + 6x + y^2 - 8y - 11 = 0$; б) $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0$; в) $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 9 = 0$; г) $x^2 + 6x + y^2 - 8y + 16 = 0$.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

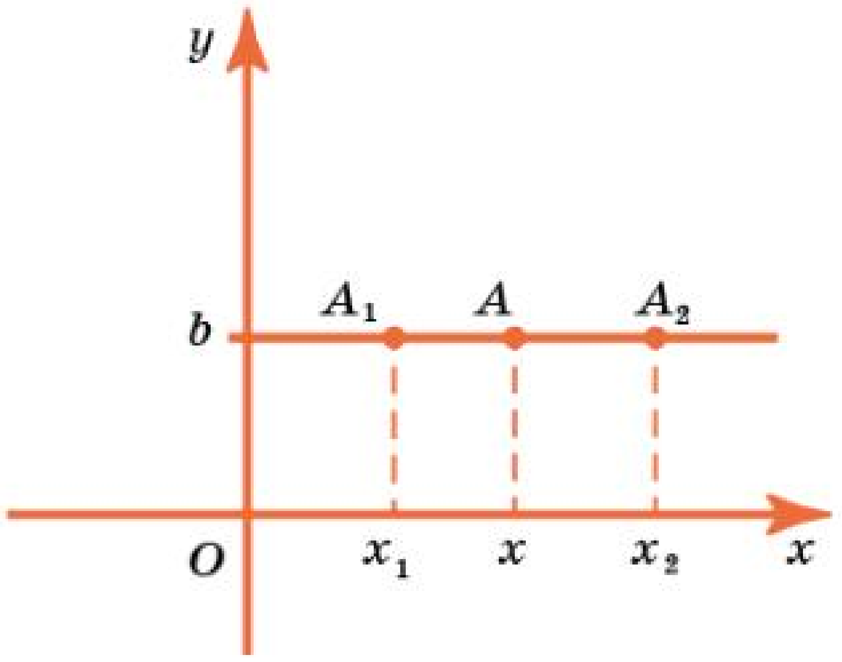
20. $A(1, 1)$ нуқтадан ўтиб: а) абсциссалар ўқига параллел: б) ординаталар ўқига параллел; в) координаталар боши орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

27-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

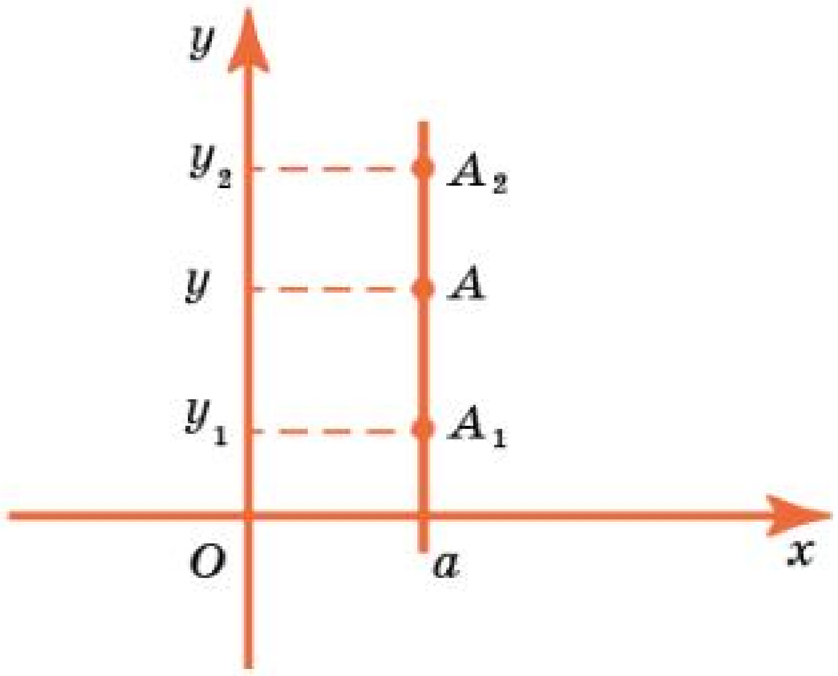
Берилган $A_1(x_1, y_1)$ ва $A_2(x_2, y_2)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзамиз.

$A_1(x_1, y_1)$ ва $A_2(x_2, y_2)$ нуқталар жойлашишининг турли хил ҳолларини кўриб чиқамиз.

1. Агар $y_1 = y_2 = b$ бўлса, у ҳолда координаталари $y = b$ тенгламани қаноатлантирувчи $A(x, y)$ нуқта $A_1(x_1, b)$ ва $A_2(x_2, b)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқда ётади (27.1-расм). Бундай ҳолда тўғри чизиқ Oy ўқига перпендикуляр бўлади.

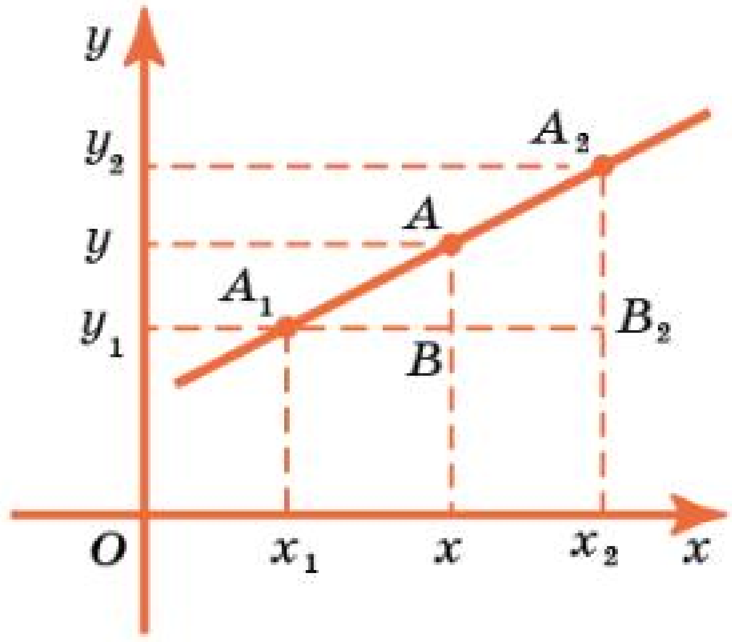


27.1-расм



27.2-расм

2. Агар $x_1 = x_2 = a$ бўлса, у ҳолда координаталари $x = a$ тенгламани қаноатлантирувчи $A(x, y)$ нуқта $A_1(a, y_1)$ ва $A_2(a, y_2)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқда ётади (27.2-расм). Бундай ҳолда тўғри чизиқ Ox ўқига перпендикуляр бўлади.



27.3-расм

3. Бошқа ҳолларда қўшимча $B(x, y_1)$, $B_2(x_2, y_1)$ нуқталарни оламиз (27.3-расм).

Берилган тўғри чизиққа тегишли $A(x, y)$ нуқтанинг y ординатасини x орқали ифодалаймиз. $A_2A_1B_2$ бурчакнинг тангенсини k орқали белгилаймиз.

$x_2 > x_1$ ва $y_2 > y_1$ бўлган ҳолларни кўриб чиқамиз (27.3-расм).

$A_1A_2B_2$ учбурчак бўйича: $A_1B_2 = x_2 - x_1$, $A_2B_2 = y_2 - y_1$. Бундан $A_2A_1B_2$ бурчак тангенси қуйидаги формула орқали ифодаланади:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

AA_1B учбурчак бўйича: $A_1B = x - x_1$, $AB = y - y_1$, $AB = A_1B \cdot \operatorname{tg}\angle AA_1B$.

Бундан $y - y_1 = k(x - x_1)$ тенглик ҳосил бўлади, яъни тўғри чизиқ тенгламасига эга бўламиз: $y = y_1 + k(x - x_1)$.

$x_2 > x_1$ ва $y_2 < y_1$ бўлган ҳолларда $A_2A_1B_2$ бурчак тангенси қуйидаги формула орқали ифодаланади (27.4-расм): $k = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$, тўғри чизиқнинг тенгламаси: $y = y_1 - k(x - x_1)$.

Шундай қилиб, иккала ҳолда ҳам $A_1(x_1, y_1)$ ва $A_2(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = k(x - x_1) + y_1,$$

$$\text{бу ерда } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ушбу k нинг ифодасини тўғри чизиқ тенгламасига қўйиб, айнан шакл алмаштиришлар орқали $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ ҳолда $A_1(x_1, y_1)$ ва $A_2(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

k коэффициент тўғри чизиқнинг *бурчак коэффициенти* дейилади.

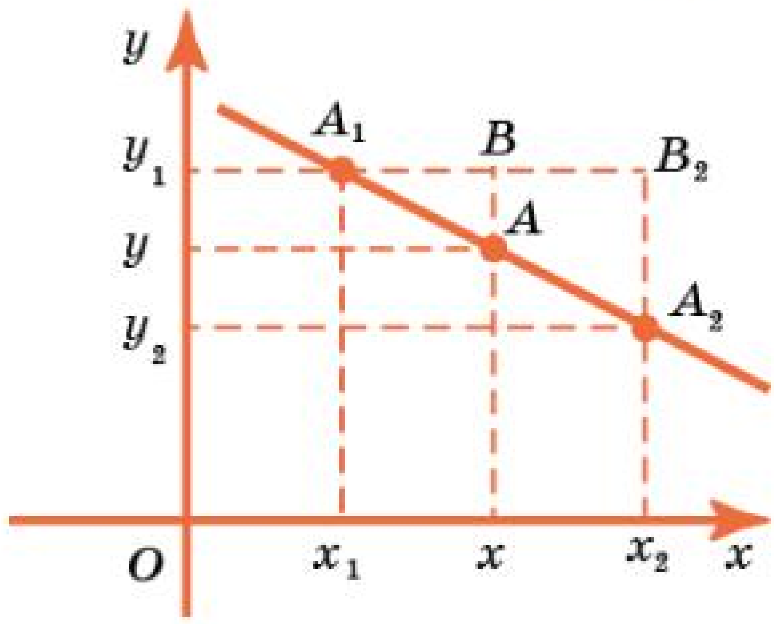
Таърифга кўра у "+" ёки "–" ишора билан олинган тўғри чизиқнинг абсцисса ўқи орқали ҳосил қиладиган бурчак тангенсига тенг бўлади. Ox ўқига параллел бўлган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини нолга тенг деб ҳисоблаймиз.

Масалан, $A_1(1, 3)$, $A_2(3, 1)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг k бурчак коэффициенти – 1 га тенг. Ушбу тўғри чизиқнинг тенгламаси $y = -(x - 1) + 3$, яъни $y = -x + 4$ бўлади.

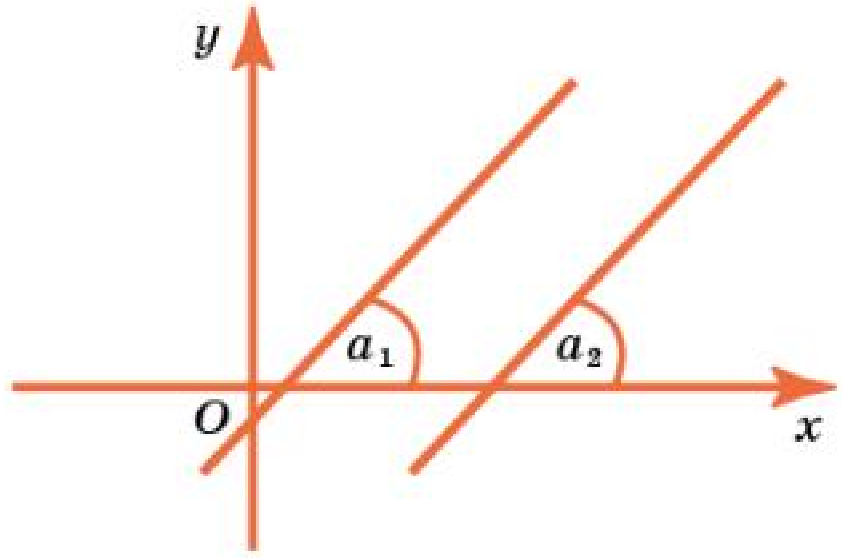
Берилган тенгламаларга боғлиқ ҳолда иккита тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашиш ҳолларини кўриб чиқамиз.

Иккита тўғри чизиқ бурчак коэффициенти орқали ёзилган тенгламалар орқали берилсин:

$$y = k_1x + l_1,\ y = k_2x + l_2.$$



27.4-расм



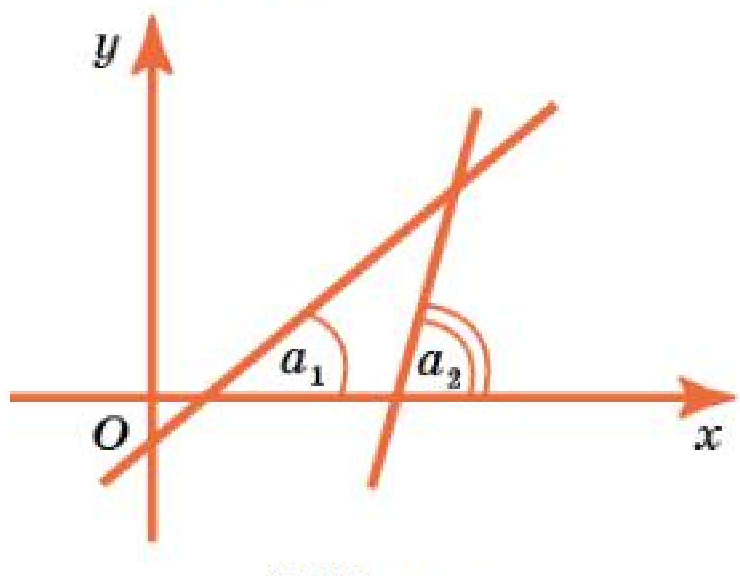
27.5-расм

Агар $k_1 = k_2$ ва $l_1 \neq l_2$ бўлса, у ҳолда k_1 ва k_2 бурчак коэффициентларининг тенглигидан ушбу тўғри чизиқларнинг Ox ўқи билан ҳосил қиладиган мос равишда α_1 ва α_2 бурчаклари тенглиги келиб чиқади (27.5-расм). Демак, бундай ҳолда тўғри чизиқлар параллел бўлади.

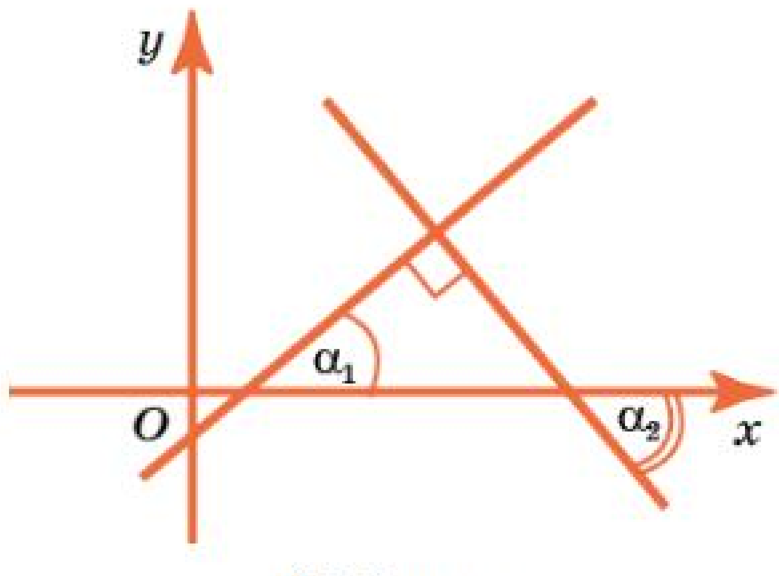
Агар $k_1 \neq k_2$ бўлса, у ҳолда α_1 ва α_2 бурчаклар ўзаро тенг бўлмайди. Бундай ҳолда тўғри чизиқлар кесишади (27.6-расм).

Агар $y = k_1x + l_1$, $y = k_2x + l_2$ тенгламалар орқали берилган иккита тўғри чизиқ перпендикуляр бўлса (27.7-расм), у ҳолда ана шу тўғри чизиқларнинг Ox ўқи орқали ҳосил қилувчи мос равишда α_1 ва α_2 бурчаклари йиғиндиси 90° ни ташкил этади.

Шунинг учун мазкур бурчакларнинг тангенслари учун қуйидаги тенглик тўғри бўлади:



27.6-расм



27.7-расм

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = 1.$$

k_1 ва k_2 бурчак коэффициентлари учун

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 \text{ ва } k_2 = -\operatorname{tg}\alpha_2$$

тенгликлар тўғри эканини инобатга олган ҳолда иккита тўғри чизиқнинг перпендикуляр шарти бўлган қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

$A(0, 1)$ нуқта орқали ўтиб, $y = -x + 4$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти 1 га тенг. Ушбу тўғри чизиқнинг тенгламаси $y = x + 1$ бўлади.

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$ax + by + c = 0$$

Бу ерда a ва b — бир вақтда нолга тенг бўлмаган сонлар.

Агар $a = 0$ бўлса, у ҳолда тенглама $y = -\frac{c}{b}$ кўринишда бўлади.

Агар $b = 0$ бўлса, у ҳолда тенглама $x = -\frac{c}{a}$ кўринишда бўлади.

Агар a ва b нолга тенг бўлмаса, у ҳолда тенглама $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ кўринишда бўлади.

Агар $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ тенгламаларнинг барча коэффициентлари пропорционал бўлса, яъни $a_2 = d \cdot a_1$, $b_2 = d \cdot b_1$, $c_2 = d \cdot c_1$, у ҳолда ушбу тенгламалар битта тўғри чизиқни юзага келтиради.

Агар a_1, a_2 ва b_1, b_2 коэффициентлар пропорционал бўлиб, c_1 билан c_2 пропорционал бўлмаса, яъни $a_2 = d \cdot a_1$, $b_2 = d \cdot b_1$, $c_2 \neq d \cdot c_1$, у ҳолда ушбу тенгламалар параллел тўғри чизиқларни юзага келтиради.

Агар ушбу тўғри чизиқлар тенгламаларининг коэффициентлари учун $a_1a_2 = -b_1b_2$ тенглик бажарилса, у ҳолда тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлади.

Буни мустақил равишда тушунтириб кўринг.

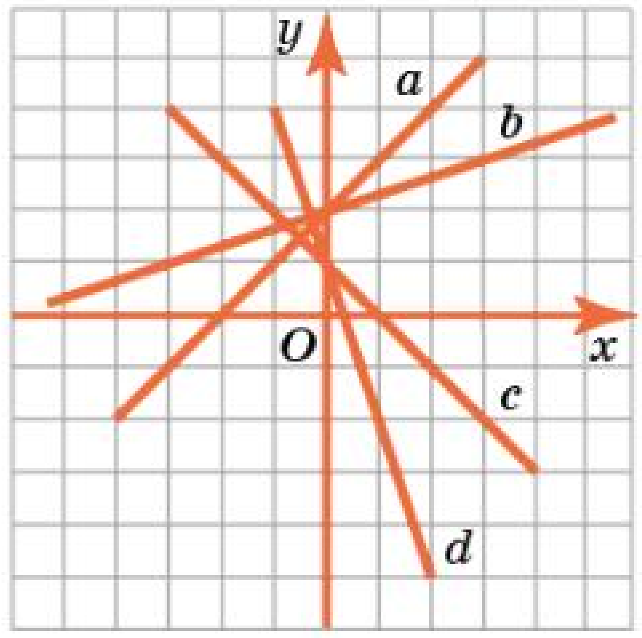
1. Текисликда тўғри чизиқ қандай тенглама орқали берилади?
2. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти нима?
3. Умумий ҳолда тўғри чизиқ тенгламасининг кўриниши қандай бўлади?
4. Қандай тенгламалар битта тўғри чизиқни юзага келтиради?
5. Қандай тенгламалар параллел тўғри чизиқларни беради?
6. Қандай тенгламалар кесишувчи тўғри чизиқларни юзага келтиради?
7. Қандай тенгламалар перпендикуляр тўғри чизиқларни юзага келтиради?

Машқлар

А

1. Қуйидаги: а) Ox; б) Oy координаталар тўғри чизиқларининг тенгламалари қандай кўринишда бўлади?

2. $A(1,\ 2)$ нуқта орқали ўтувчи ва а) Ox; б) Oy ўқига параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини топинг.
3. $A(2,\ 3)$ нуқта орқали ўтувчи ва а) Ox; б) Oy ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини топинг.
4. 27.8-расмда тасвирланган тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларини топинг.

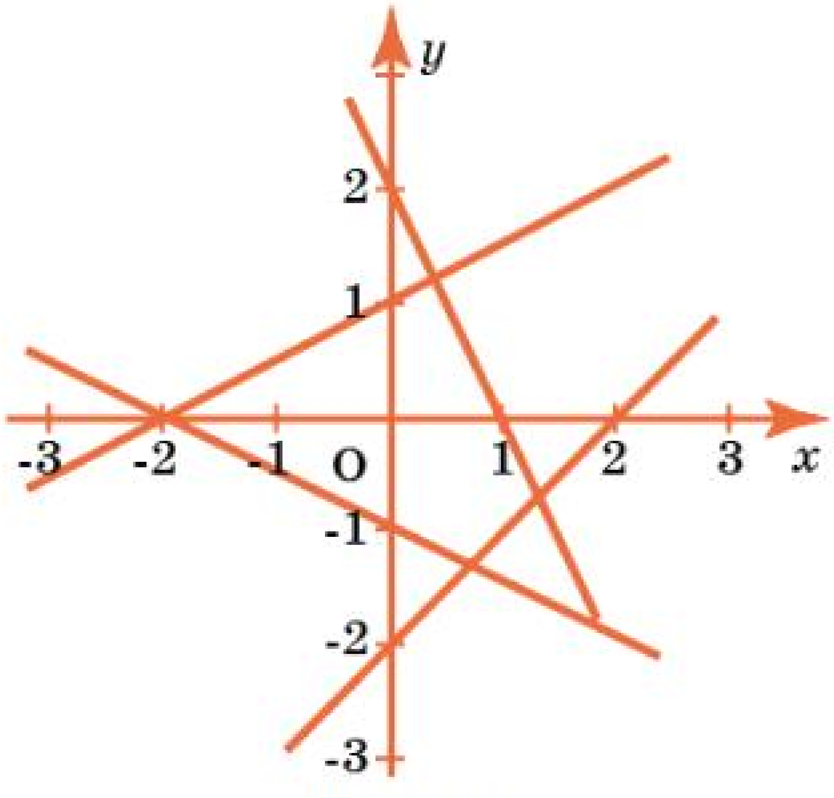


27.8-расм

5. Бурчак коэффициенти берилган координаталар боши орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топинг: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = \frac{1}{2}$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -\frac{1}{2}$. Ушбу тўғри чизиқларни чизинг.
6. Бурчак коэффициенти берилган ва $A(2,\ -1)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топинг: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = \frac{1}{2}$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -\frac{1}{2}$. Ушбу тўғри чизиқларни чизинг.

B

7. Қуйидаги нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топинг: а) $A_1(1,\ 2)$, $A_2(3,\ 2)$; б) $A_1(1,\ 2)$, $A_2(2,\ 3)$; в) $A_1(1,\ 2)$, $A_2(2,\ 1)$.
8. Қуйидаги тенгламалар орқали берилган тўғри чизиқларни чизинг: а) $y = x$; б) $y = 2x + 1$; в) $y = 1 - x$; г) $y = -1 - x$.
9. Қуйидаги тенгламалар орқали берилган тўғри чизиқларни чизинг: а) $x + y = 1$; б) $x + y = 0$; в) $x - y = 1$; г) $x - y = 0$.
10. Қуйидаги тенгламалар орқали берилган тўғри чизиқларни чизинг: а) $2x + 3y - 6 = 0$; б) $x - 2y + 1 = 0$; в) $y - 2x + 1 = 0$.
11. 27.9-расмда тасвирланган тўғри чизиқ тенгламаларини топинг.



27.9-расм

C

12. Қуйидаги тўғри чизиқлар жуфтларидан қайсилари: а) параллел; б) перпендикуляр бўлишини аниқланг:
1) $x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$; 2) $x + y - 2 = 0$, $x - y - 3 = 0$;
3) $-7x + y = 0$, $7x - y + 4 = 0$; 4) $4x - 2y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

13. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси координаталарини топинг:
а) $x - y - 1 = 0$, $x + y + 3 = 0$; б) $x - 3y - 2 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$.

14. $A(0, 1)$ нуқта орқали ўтувчи ва қуйидаги тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини топинг: а) $y = x$; б) $y = 2x$.

15. a тўғри чизиқ $(0, 4)$ ва $(6, 0)$ нуқталардан ўтади. b тўғри чизиқ $(0, 8)$ нуқтадан ўтиб, a тўғри чизиққа параллел бўлади. b тўғри чизиқнинг Ox ўқи билан кесишиш нуқтаси абсциссасини топинг.

16. $A(0, 1)$ нуқта орқали ўтувчи ва қуйидаги тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини топинг: а) $y = x$; б) $y = 2x$.

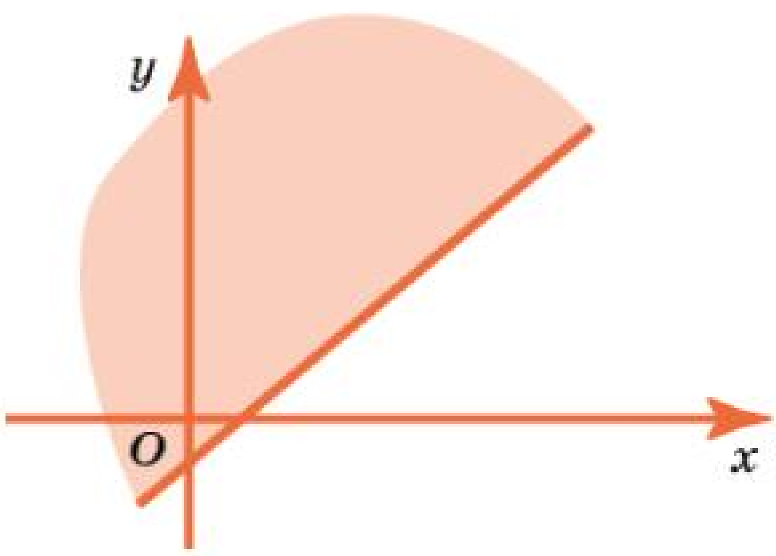
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

17. Қуйидаги: а) яримтекисликнинг; б) қаварик кўпбурчакнинг аналитик ифодасига доир муайян усулини кўрсатинг.

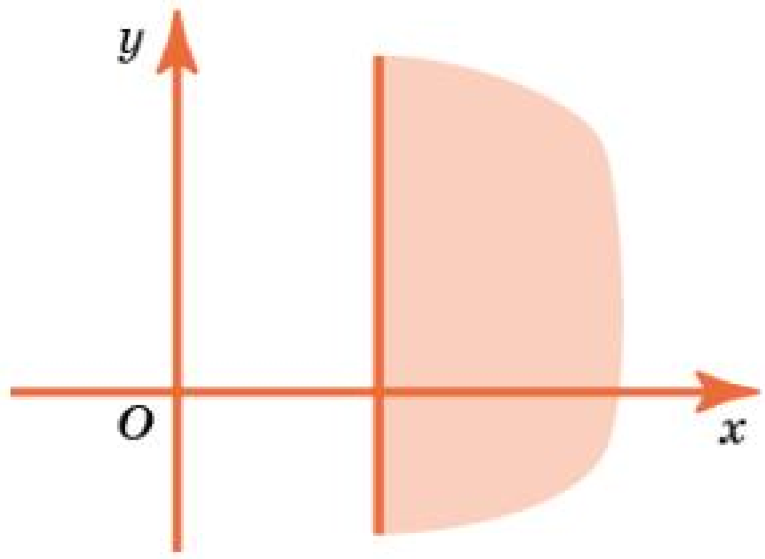
28*-§. ТЕКИСЛИКДА ФИГУРАЛАРНИНГ АНАЛИТИК ИФОДАСИ

$y = kx + l$ тенглама орқали берилган тўғри чизиқни кўриб чиқамиз.

Ушбу тўғри чизиқ билан чегараланган ва Oy ўқига нисбатан тўғри чизиқдан юқорида жойлашган яримтекислик $y \geq kx + l$ тенгсизлик бажариладиган (x, y) нуқталардан ташкил топган (28.1-расм).



28.1-расм



28.2-расм

Мос равишда берилган тўғри чизиқдан пастда жойлашган яримтекислик $y \leq kx + l$ тенгсизлик бажариладиган (x, y) нуқталардан ташкил топган.

Буни мустақил тушунтириб кўринг.

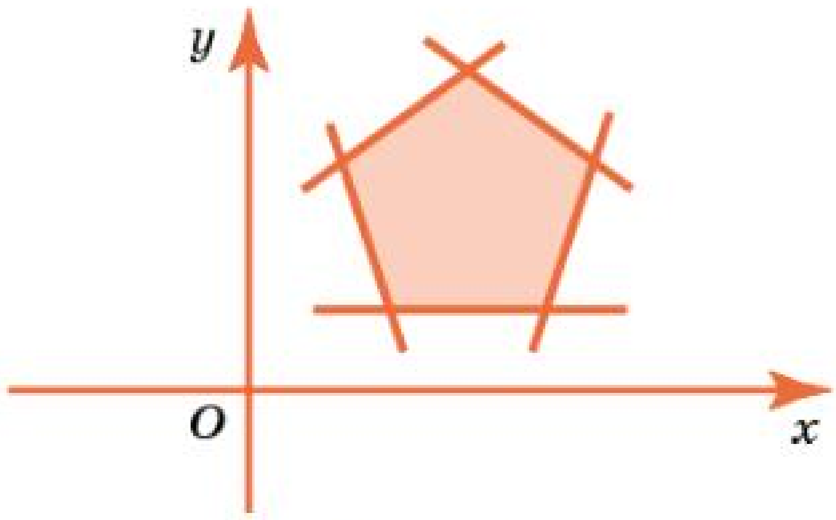
Агар тўғри чизиқ $x = a$ тенглама билан берилса, у ҳолда ушбу тўғри чизиқ билан чегараланган ва Ox ўқига нисбатан ўнг томонда жойлашган $x \geq a$ тенгсизлик бажариладиган нуқталардан (x, y) ташкил топади (28.2-расм).

Аксинча берилган тўғри чизиқнинг чап томонида жойлашган (x, y) тенгсизлик бажариладиган x m a нуқталардан ташкил топади.

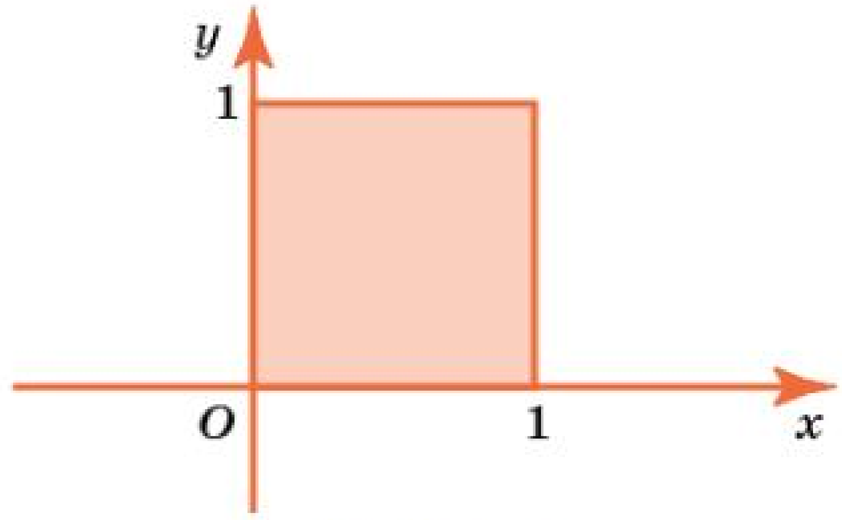
Умумий ҳолда яримтекислик $ax + by + c = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган тенгсизлик орқали берилади $ax + by + c$ l 0.

Қавариқ кўпбурчакни унинг томонлари ётган тўғри чизиқлар билан чегараланган яримтекисликларнинг кесишмаси сифатида кўрсатиш мумкинлигини инобатга олган ҳолда (28.3-расм), координаталар текислигида қавариқ кўпбурчакни қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали бериш мумкинлигини кўрамиз:

$$\begin{cases} a_1x + b_1x + c_1 \geqslant 0, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_nx + b_nx + c_n \geqslant 0. \end{cases}$$



28.3-расм



28.4-расм

Масалан, 28.4-расмда тасвирланган бирлик квадрат қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали берилади:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Фигураларнинг аналитик ифодасидан геометрик масалаларни алгебраик усул билан ечишда, шу билан бирга, турли хил ҳодисаларнинг математик моделларини тузишда ва компьютер ёрдамида моделлашда фойдаланилади.

1. Яримтекислик қандай берилади?
2. Қавариқ кўпбурчак қандай берилади?

Машқлар

А

1. Координаталари қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўринларини кўрсатинг: а) $x > 0$, $y > 0$; б) $x < 0$, $y > 0$; в) $x > 0$, $y < 0$; г) $x < 0$, $y < 0$.

2. Координаталари қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўринларини тасвирланг:
а) $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 3$;
б) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$.

3. Иккита яримтекислик қуйидаги тенгсизликлар орқали берилган:
$a_1x + b_1y + c_1 \geqslant 0$, $a_2x + b_2y + c_2 \geqslant 0$.
Ушбу яримтекисликларнинг кесишмаси қандай берилади?

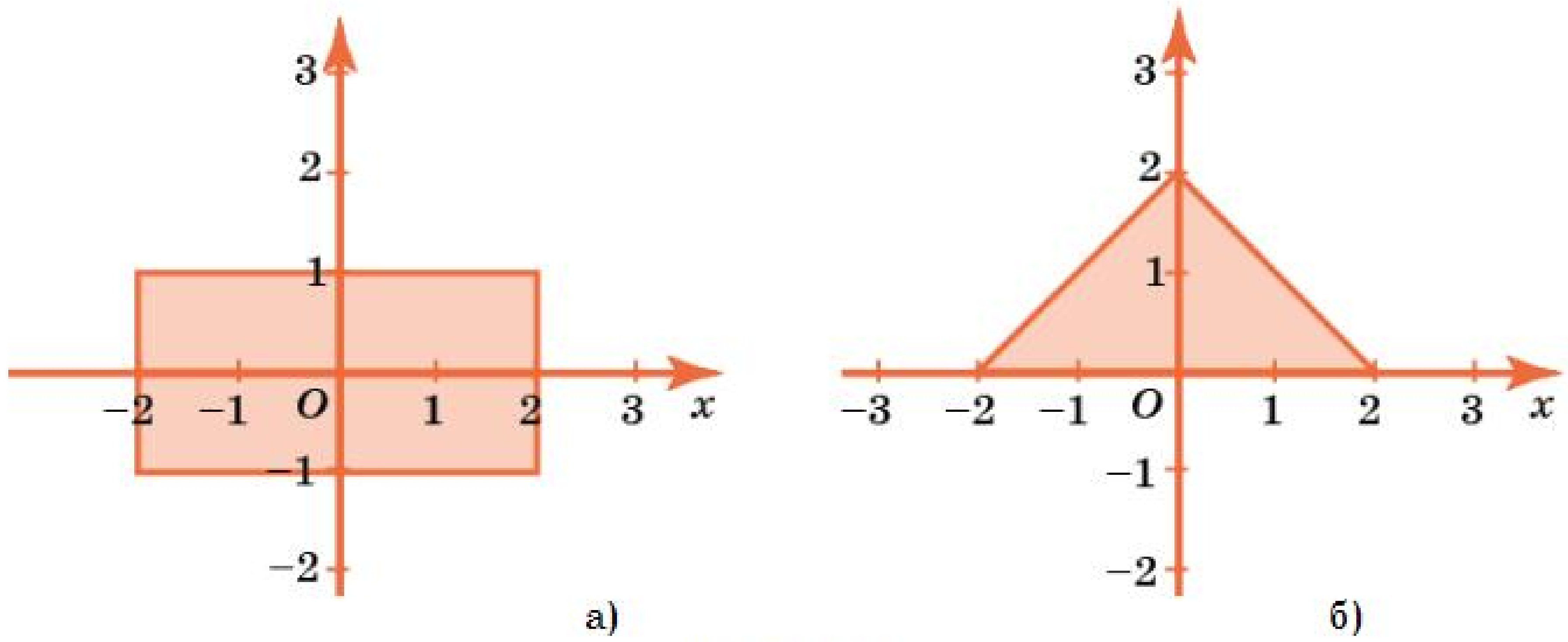
B

4. Нуқталари координаталари қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи кўпбурчак ясанг:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 4. \end{cases}$$

5. Координаталари қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрнини тасвирланг: $|x| + |y| \leqslant 3$.

6. 28.5-расмда тасвирланган фигуралар нуқталарининг координаталарини қаноатлантирувчи тенгсизлик ёзинг.



28.5-расм

C

7. Катак қоғозда $x = 2y$ ва $y = 3x$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларни чизинг. Ушбу тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

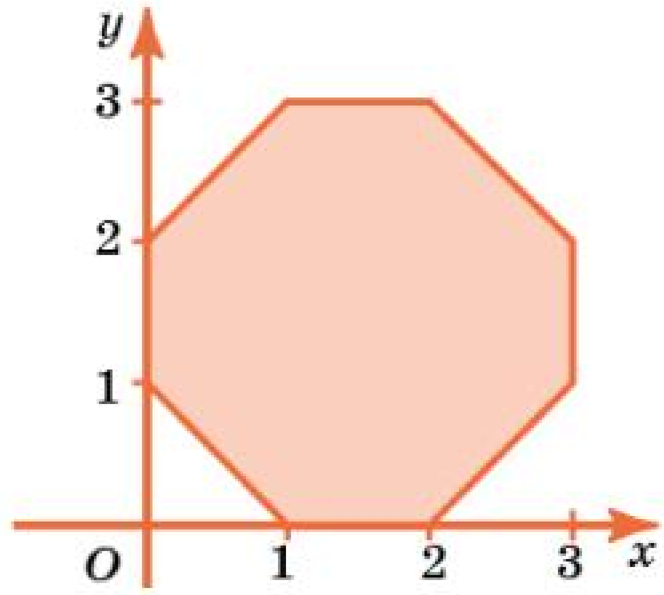
8. Нуқталари координаталари қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи тўғри тўртбурчак периметрини топинг:

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2 \leqslant y \leqslant 5. \end{cases}$$

9. Маркази координаталар бошида ва радиуси 4 га тенг бўлган айланага ташқи уринадиган маркази $P(8, 6)$ нуқтада бўлган янги айлана радиуси қандай бўлиши керак?

10. 28.6-расмда тасвирланган кўпбурчак ҳосил қилувчи тенгсизлик ёзинг.

11. Учлари $A(3, 1)$, $B(0, 3)$, $C(2, 4)$ бўлган учбурчак ҳосил қилувчи тенгсизлик ёзинг.

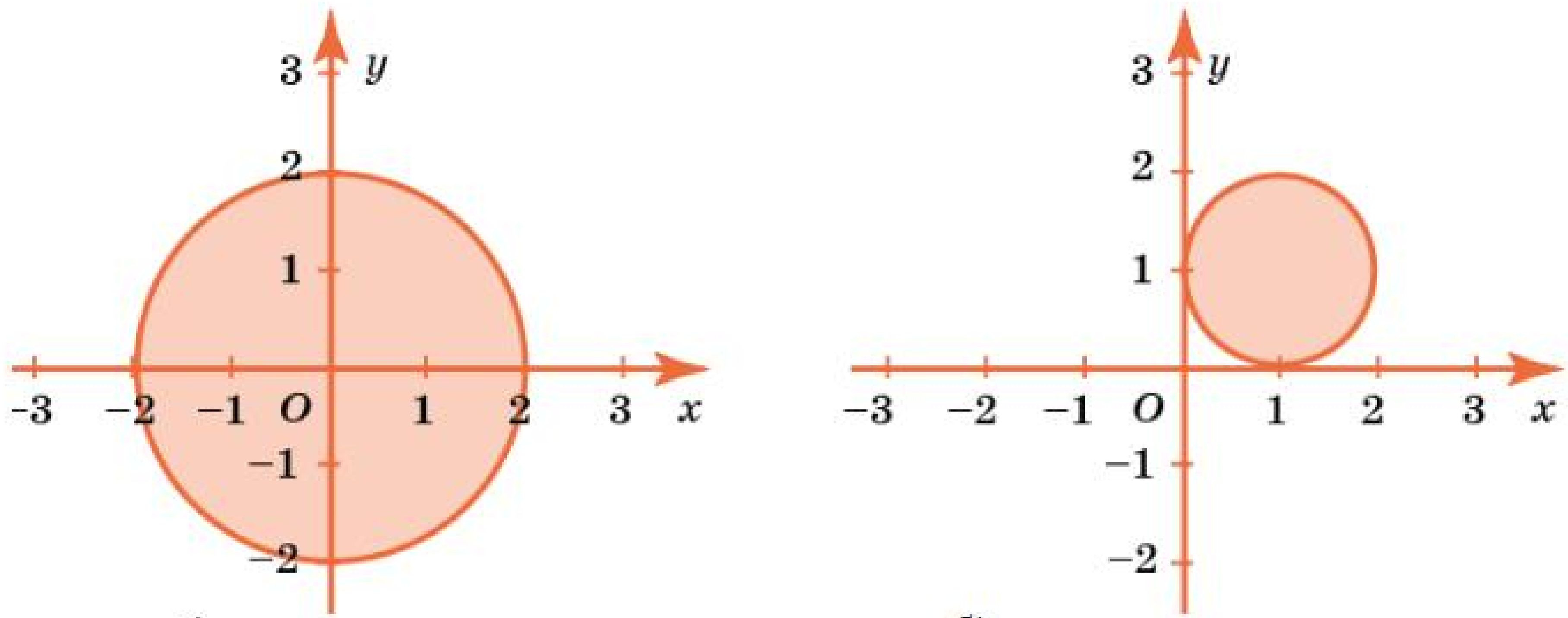


28.6-расм

12. Учлари $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(2, 2)$, $C(1, 2)$ бўлган тўртбурчак ҳосил қилувчи тенгсизлик ёзинг.

13. (x, y) нуқталари координаталари $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ тенгликни қаноатлантирувчи фигура чизинг.

14. 28.7-расмда тасвирланган фигура нуқталари координаталарини қаноатлантирувчи тенгсизлик ёзинг.



а) б)

28.7-расм

15. (x, y) нуқталар координаталари $0 \le x^2 + y^2 - 2x \le 3$ тенгсизликни қаноатлантирувчи фигура чизинг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Абсцисса ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқда иккита нуқта олинган. Биттасининг абсциссаси – 2 га тенг. Иккинчисининг абсциссасини топинг.

A. 2. B. 0.
C. −2. D. Аниқлаш мумкин эмас.

2. Ордината ўқига параллел бўлган тўғри чизиқда иккита нуқта олинган. Биттасининг абсциссаси 5 га тенг. Иккинчисининг абсциссасини топинг.

A. 5. B. 0.
C. −5. D. Аниқлаш мумкин эмас.

3. $A(-1, 8)$ нуқтадан абсцисса ўқига перпендикуляр туширилган. Унинг асоси координаталарини топинг.

A. (−1, 0). B. (0, 8). C. (1, 0). D. (0, −8).

4. $B(5, -4)$ нуқта орқали абсцисса ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Унинг ордината ўқи билан кесишиш нуқтаси координаталарини топинг.

A. (5, 0). B. (−5, 0). C. (0, −4). D. (0, 4).

5. $O(0, 0)$, $A(x, y)$, $B(6, 8)$ ва $C(0, 6)$ нуқталар параллелограмнинг учлари бўлади. A нуқтанинг координаталарини топинг.

A. (2, 6). B. (2, 8). C. (6, 2). D. (6, 0).

6. $3x + 2y = 14$ ва $y = 2x$ тенгламалар орқали берилган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси координаталарини топинг:

A. (1, 2). B. (2, 4). C. (3, 6). D. (4, 8).

7. CD кесма ўртасининг координаталарини топинг, бу ерда $C(0, -9)$ ва $D(-5, 16)$:

A. (0, −3,5). B. (−2,5, 3,5).
C. (−5, −7). D. (−2,5, −3,5).

8. $O(0, 0)$, $A(10, 8)$, $B(8, 2)$, $C(2, 6)$ нуқталар тўртбурчакнинг учлари бўлади. Унинг диагоналлари кесишиш нуқтаси P нинг координаталарини топинг:

A. (5, 4). B. (4, 5). C. (3, 4). 4) (4, 3).

9. $x = -y$ бажариладиган координаталар текислигида нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

A. Абсцисса ўқига параллел тўғри чизиқлар.

B. Биринчи ва учинчи координаталар бурчакларининг биссектрисалари.

C. Иккинчи ва тўртинчи координаталар бурчакларининг биссектрисалари.
D. Абсцисса ўқига перпендикуляр тўғри чизиқлар.

10. $M(0, -8)$ ва $N(-1, 0)$ нуқталар орасидаги масофани топинг:
A. -3. B. 3. C. $\sqrt{17}$. D. $\sqrt{65}$.

11. Квадратнинг иккита қарама-қарши жойлашган учлари координаталари берилган: (4, 4) ва (8, 4). Унинг периметрини топинг.
A. 16. B. $4\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{5}$. D. $8\sqrt{2}$.

12. $A(2, 0)$, $B(0, 3)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топинг:
A. $2x + 3y = 9$. B. $3x + 2y = 6$.
C. $2x - 3y = 9$. D. $3x - 2y = 6$.

13. $A(2, 1)$ нуқта орқали ўтиб, $y = 2x$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини топинг:
A. $x - 2y = 1$. B. $2x + y = 3$.
C. $2x - y = 3$. D. $x + 2y = 4$.

14. Координаталар боши орқали ўтувчи ва маркази $C(-2, 7)$ бўлган айлана тенгламасини топинг:
A. $x^2 + y^2 = 9$. B. $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 9$.
C. $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 53$. D. $x^2 + y^2 = \sqrt{53}$.

15. $x^2 + y^2 - 12y + 4x = -15$ тенглама билан берилган айлана марказининг координаталарини топинг:
A. $(2, -6)$. B. $(-2, 6)$.
C. $(6, -2)$. D. $(-6, 2)$.

16. Ордината ўқи билан уринувчи маркази $P(8, 6)$ нуқтада бўлган айлана радиуси қандай бўлиши керак?
A. 3. B. 4. C. 6. D. 8.

17. Маркази координаталар бошида ва радиуси 2 га тенг бўлган айланага ташқи уринувчи маркази $P(4, 3)$ нуқтада бўлган янги айлана радиуси қандай бўлиши керак?
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

18. $E(1, 2)$ ва $F(3, 4)$ нуқталардан бир хил масофада жойлашган ордината ўқидаги нуқтани топинг:
A. $(2, 1)$. B. $(-2, 0)$.
C. $(0, 2)$. D. $(0, 5)$.

19. Учларининг координаталари $A(0, -2)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 2)$ бўлган ABC учбурчакнинг турини аниқланг.

A. Тўғри бурчакли. B. Тенгёнли.
C. Тенгтомонли. D. Ихтиёрий.

20. Учларининг координаталари $O(0, 0)$, $B(4, 2)$, $C(6, 6)$, $D(2, 4)$ бўлган ABC тўртбурчакнинг турини аниқланг:

A. Тўғри тўртбурчак. B. Квадрат.
C. Ромб. D. Трапеция.

8-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

1. Содда синиқ чизиқнинг 10 та учи бор. Унинг бўғинлари сонини топинг.
2. Содда ёпиқ синиқ чизиқнинг 20 та бўғини бор. Уларнинг учлари сонини топинг.
3. а) икки марта ўз-ўзини кесиб ўтувчи; б) уч марта ўз-ўзини кесиб ўтувчи; в) беш марта ўз-ўзини кесиб ўтувчи ёпиқ бешбўғинли синиқ чизиқ чизинг.
4. Қаварик а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчак; г) n бурчак битта учидан ўтказилган диагонали орқали нечта учбурчакка бўлинади?
5. а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчакларнинг жами нечта диагонали мавжуд?
6. Мунтазам а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчакларнинг бурчаклари нимага тенг?
7. Қаварик кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси 900°. Унинг нечта томони бор?
8. Мунтазам а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчак; г) саккизбурчакларнинг ташқи бурчакларини топинг.
9. Қаварик тўртбурчакнинг бурчаклари 1, 2, 3, 4 сонларига пропорционал. Ушбу бурчакларни топинг.
10. Қаварик кўпбурчакда учтадан кўп бўлмаган ўткир ички бурчаклар бўлишини исботланг.
11. Параллелограмм диагоналлари унинг икки томони билан 25° ва 35° бурчак ҳосил қилади. Параллелограмнинг бурчакларини топинг.
12. Параллелограмм икки бурчагининг йиғиндиси: а) 80°; б) 100°; в) 160°. Параллелограмнинг бурчакларини топинг.
13. Параллелограмнинг иккита томони 3:4 нисбат каби, периметри эса 2,8 м. Унинг томонларини топинг.
14. Параллелограмнинг бир томонига ёпишган бурчаклар биссектрисалари қандай жойлашган?
15. Қўшни томонлари тенг бўлмаган параллелограмнинг қарама-қарши бурчаклари биссектрисалари қандай жойлашган?
16. $ABCD$ параллелограмнинг AB ва CD томонларидан $AE = CF$ кесмалар олинган. $BFDE$ тўртбурчак параллелограмм эканини исботланг.
17. $ABCD$ параллелограмм берилган. E, F, G, H — унинг томонлари ўрталари. $EFGH$ тўртбурчак параллелограмм эканини исботланг.
18. Иккита томони ва диагонали бўйича параллелограмм ясанг.
19. Тўғри тўртбурчак диагоналлари орасидаги бурчак 50°. Диагоналларнинг томонлар билан ҳосил қиладиган бурчакларини топинг.

20. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 34 см, диагонали уни бўлганда ҳосил бўлган бир учбурчакнинг периметри эса 30 см. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналларини топинг.

21. Иккита қўшни томонлари бўйича тўғри тўртбурчак чизинг.

22. Тўғри тўртбурчак томонларининг ўрталари ромб учлари бўлишини исботланг.

23. Ромб диагоналларининг бир томони билан ҳосил қиладиган бурчаклари 4:5 нисбат каби. Ромб бурчакларини топинг.

24. Учбурчакнинг томонлари 8 см, 10 см ва 12 см. Учлари ана шу учбурчак томонлари ўрталари бўлган янги учбурчак томонларини топинг.

25. Исталган тўртбурчак томонлари ўрталари параллелограмнинг учлари бўлишини исботланг.

26. Тўртбурчакнинг диагоналлари a ва b. Учлари ана шу тўртбурчак томонлари ўрталари бўлган тўртбурчакнинг периметрини топинг.

27. Тўғри бурчакли трапециянинг ён томонлари 4 ва 5. Ушбу трапециянинг баландлигини топинг.

28. Тенгёнли трапециянинг қарама-қарши бурчаклари айирмаси 40° бўлса, унинг бурчакларини топинг.

29. Трапециянинг ўрта чизиғи 5. Битта асоси 4 га тенг. Иккинчи асосини топинг.

30. Трапециянинг периметри 50 см, параллел бўлмаган томонлари йиғиндиси 20 см. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.

31. Трапециянинг асослари 4 см ва 10 см. Унинг ўрта чизиғида битта диагонал бўладиган кесмаларни топинг.

32. Учи O бўлган бурчак томонлари иккита параллел тўғри чизиқлар билан мос равишда A, B ва C, D нуқталарда кесишади. а) CD бўлса, $OA = 8$ см, $AB = 4$ см, $OD = 6$ см; б) OC ва OD бўлса, $OA : OB = 3 : 5$ ва $OD - OC = 8$ (см); в) OA ва OB бўлса, $OC : CD = 2 : 3$ ва $OA + OB = 14$ (см) ни топинг.

33. Берилган кесмани тенг: а) 3 бўлакка; б) 5 бўлакка бўлинг.

34. $ABCD$ параллелограмда E нуқта CD томонининг ўртаси. AE кесма BD диагонални F нуқтада қирқиб ўтади. $DF : FB$ нисбатни топинг.

35. Учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази унинг қайси томонига яқин жойлашган?

36. Учбурчакка ички чизилган айлана маркази унинг қайси учига яқин жойлашган?

37. Учбурчак чизинг. Унинг: а) медианалари кесишиш нуқтасини; б) биссектрисаларнинг кесишиш нуқтасини; в) баландликлари ёки улар давомларининг кесишиш нуқтасини топинг.

38. Ҳисобланг: а) $\sin 30^\circ$; б) $\cos 60^\circ$; в) $tg 45^\circ$; г) $ctg 45^\circ$.

39. Қандай оралиқларда ўткир бурчакнинг: а) синуси; б) косинуси ўзгариши мумкин?

40. Қандай оралиқларда ўткир бурчакнинг: а) тангенси; б) котангенси ўзгариши мумкин?
41. Қандай бурчакларда синус косинусга тенг бўлади?
42. Қандай ўткир бурчакларда: а) синус косинусдан кичик; б) синус косинусдан катта бўлади?
43. Қандай бурчакларда: а) тангенс котангенсдан кичик; б) тангенс котангенсдан катта бўлади?
44. Тўғри бурчакли учбурчакнинг a ва b катетлари берилган. c гипотенузани топинг, бу ерда а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 5$, $b = 12$; в) $a = 8$, $b = 15$.
45. Тўғри бурчакли учбурчакнинг c гипотенузаси ва a катети берилган. Иккинчи катетини топинг, бу ерда: а) $c = 5$, $a = 3$; б) $c = 13$, $a = 5$; в) $c = 10$, $a = 8$.
46. Томони 1 га тенг бўлган квадратнинг диагоналини топинг.
47. Квадратнинг диагонали 2 га тенг. Унинг томонларини топинг.
48. Томони 1 га тенг бўлган тенгтомонли учбурчакнинг баландлигини топинг.
49. Тенгёнли учбурчакнинг томонлари 5, 5, 6. Унинг асосига туширилган баландликни топинг.
50. Ромб диагоналлари 6 см ва 8 см. Унинг томонларини топинг.
51. Ифодани соддалаштиринг: а) $1 - \sin^2 A$; б) $1 + \sin^2 A + \cos^2 A$.
52. $\sin A$ ни топинг, бу ерда: а) $\cos A = \frac{1}{2}$; б) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
53. $\cos A$ ни топинг, бу ерда: а) $\sin A = \frac{1}{3}$; б) $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
54. $\mathrm{tg}\,A$ ни топинг, бу ерда: а) $\cos A = \frac{5}{13}$; б) $\cos A = 0{,}8$.
55. Айниятни исботланг: $1 + \mathrm{ctg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$.
56. ABC учбурчакнинг C бурчаги 90° га тенг, A бурчаги 45° га тенг, $AC = 1$. CH баландликни топинг.
57. ABC учбурчакнинг C бурчаги 90°, $\cos A = \frac{4}{5}$, $BC = 3$. AB ни топинг.
58. ABC учбурчакнинг C бурчаги 120°, $AC = BC = 1$. AH баландликни топинг.
59. Синуснинг қуйидаги бурчаклардаги қийматини топинг: а) 120°; б) 135°; в) 150°.
60. Косинуснинг қуйидаги бурчаклардаги қийматини топинг: а) 120°; б) 135°; в) 150°.
61. Тангенснинг қуйидаги бурчаклардаги қийматини топинг: а) 120°; б) 135°; в) 150°.
62. Котангенснинг қуйидаги бурчаклардаги қийматини топинг: а) 120°; б) 135°; в) 150°.

63. A ўтмас бурчак учун қуйидаги тенгликнинг тўғри эканини исботланг:
$\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(180^\circ - A)$; $\operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg}(180^\circ - A)$.
64. A ўткир бурчак учун қуйидаги тенгликнинг тўғри эканини исботланг: $\sin(90^\circ + A) = \cos A$, $\cos(90^\circ + A) = -\sin A$.
65. Тоғ темир йўли ҳар бир 30 м сайин 1 м баландликка кўтарилади. Кўтарилиш бурчагини градусларда топинг. Жавобини бутун сон билан ифодаланган градуснинг тақрибий қиймати орқали кўрсатинг.
66. Одам 1000 м тепалик ёни билан юқорига томон юриб, тепалик асосининг текислигидан 90 м баландликка кўтарилди. Тепаликнинг қиялик бурчагини (ўртача) градусларда топинг. Жавобини бутун сон билан ифодаланган градуснинг тақрибий қиймати орқали кўрсатинг.
67. Йўлнинг кўтарилиш бурчаги 5° га тенг. Йўловчининг 100 м юриб кўтарилган баландлигини топинг.
68. Кузатувчидан 100 м узоқликда турган баландлиги 3 м бўлган устуннинг унга кўриниш бурчагини яхлитлаб топинг. Жавобини градуснинг бутун сони билан кўрсатинг.
69. Периметри 80 см га тенг бўлган квадрат юзасини топинг.
70. Томони 6 га, диагонали 10 га тенг бўлган тўғри тўртбурчак юзасини топинг.
71. Агар тўғри тўртбурчакнинг томонлари: а) 2 марта ортса; б) 3 марта камайса, у ҳолда унинг юзаси қандай ўзгаради?
72. Квадратнинг юзаси 1 га тенг. Учлари ана шу квадрат ўрталари бўлган янги квадратнинг юзасини топинг.
73. Периметри 10 м, юзаси эса 6 $м^2$ бўлган тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.
74. Томонлари 10 см ва 4 см, битта баландлиги 5 см бўлган параллелограмм юзасини топинг.
75. Томонлари 6 см ва бурчаги: а) 120°; б) 135°; в) 150° бўлган ромб юзасини топинг.
76. Параллелограмнинг юзаси 40 $см^2$ га, томонлари 5 см ва 10 см га тенг. Унинг баландлигини топинг.
77. Тўғри тўртбурчак билан параллелограмнинг мос равишда томонлари тенг. Агар параллелограмнинг юзаси тўғри тўртбурчак юзасининг ярмига тенг бўлса, у ҳолда параллелограмнинг ўткир бурчагини топинг.
78. Тенгёнли учбурчакнинг ён томони 5 га, асоси 6 га тенг. Учбурчакнинг юзасини топинг.
79. Учбурчакнинг юзаси 30 га ва бир томони 10 га тенг. Ушбу томонга туширилган баландликни топинг.
80. Иккита томони 3 см, 8 см ва улар орасидаги бурчак 30° га тенг бўлган учбурчак юзасини топинг.

81. Агар учбурчакнинг: а) томонини ўзгартирмай, унга туширилган баландлик икки марта орттирилса; б) баландлигини ўзгартирмай, унинг тушадиган томони уч марта камайтирилса; в) бир томони тўрт марта орттирилиб, унга туширилган баландлик саккиз марта камайтирилса, у ҳолда унинг юзаси қандай ўзгаради?

82. ABC учбурчакнинг юзаси 4 га тенг. D, E нуқталар — мос равишда AC ва BC томонларнинг ўрталари. CDE учбурчакнинг юзасини топинг.

83. Учбурчакнинг медианаси уни иккита тенг учбурчакларга ажратишини исботланг.

84. ABC учбурчакда иккита томони a ва b. Улар орасидаги қандай бурчакда учбурчакнинг юзаси энг катта бўлади?

85. Катетлари 3 ва 4 бўлган тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

86. Асослари 12 см, 16 см ва баландлиги 15 см бўлган трапеция юзасини топинг.

87. Трапециянинг ўрта чизиғи 3 га, баландлиги 2 га тенг. Трапециянинг юзасини топинг.

88. Трапециянинг асослари 10 см, 35 см ва юзаси 225 см^2 га тенг. Унинг баландлигини топинг.

89. Трапециянинг баландлиги 20 см, юзаси 400 см^2. Унинг ўрта чизиғини топинг.

90. Трапециянинг асослари 36 см ва 12 см. Унинг 7 см га тенг бўлган ён томони бир асоси билан 150° бурчак ҳосил қилади. Трапециянинг юзасини топинг.

91. Тўғри бурчакли трапециянинг асослари 3 см ва 1 см, катта ён томони асоси билан 45° бурчак ҳосил қилади. Унинг юзасини топинг.

92. Трапеция асосларининг ўрталарини туташтирувчи кесма уни иккита тенг бўлакларга ажратишини исботланг.

93. Томони 1 см га тенг бўлган мунтазам олтибурчак юзасини топинг.

94. Қавариқ тўртбурчакнинг диагоналлари 6 ва 8, улар орасидаги бурчак 30°. Ушбу тўртбурчак юзасини топинг.

95. Тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва 4 см, 5 см. Ушбу тўртбурчакнинг юзасини топинг.

96. Қавариқ тўртбурчакнинг диагоналлари 8 ва 10. Ушбу тўртбурчакнинг энг катта юзаси қандай бўлиши мумкин?

97. Координаталар текислигида қуйидаги нуқталарни белгиланг: $A(2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(4, 2)$, $D(-3, 2)$, $E(-2, -3)$, $F(3, -2)$.

98. $O(0, 0)$, $A(6, 2)$, B ва $C(0, 6)$ нуқталар параллелограмнинг кетма-кет жойлашган нуқталари. B нуқтанинг координаталарини топинг.

99. AB кесма ўртасининг координаталарини топинг, бу ерда: а) $A(1, -2)$, $B(5, 6)$; б) $A(-3, 4)$, $B(1, 2)$; в) $A(5, 7)$, $B(-3, -5)$.

100. Қуйидаги нуқталар орасидаги масофани топинг: а) $A_1(1, 2)$ ва $A_2(-1, 1)$; б) $B_1(3, 4)$ ва $B_2(3, -1)$.

101. Қуйидаги тенглама орқали берилган айлананинг R радиуси билан C маркази координатасини топинг: а) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$; б) $x^2 + (y - 6)^2 = 16$.

102. Қуйидаги: а) маркази $O(0, 0)$ нуқта ва радиуси 1 га тенг; б) маркази $C(1, -2)$ нуқта ва радиуси 4 га тенг бўлган айлана тенгламасини топинг.

103. Координаталари берилган қуйидаги нуқталар $x^2 + y^2 = 25$ айланага нисбатан қандай жойлашганини аниқланг: а) $(1, 2)$; б) $(3, 4)$; в) $(-4, 3)$; г) $(0, 5)$; д) $(5, -1)$.

104. Радиуси R ва маркази $C(x_0, y_0)$ нуқта бўлган доирага тегишли бўлмаган нуқталарнинг геометрик ўрни қандай тенгсизлик билан берилади?

105. Қуйидаги тенглама айлана тенгламаси эканини исботланг: а) $x^2 - 4x + y^2 = 0$; б) $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$. Унинг радиуси ва маркази координатасини топинг.

106. $A(1, 2)$ нуқта орқали ўтувчи ва а) Ox; б) Oy ўқига параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

107. $A(2, 3)$ нуқта орқали ўтувчи ва а) Ox; б) Oy ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

108. Бурчак коэффициенти берилган координаталар боши орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топинг: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = \frac{1}{2}$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -\frac{1}{2}$. Ушбу тўғри чизиқларни чизинг.

109. Қуйидаги нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини топинг:
а) $A_1(1, 2)$, $A_2(3, 2)$;
б) $A_1(1, 2)$, $A_2(2, 3)$;
в) $A_1(1, 2)$, $A_2(2, 1)$.

110. Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқни чизинг:
а) $y = x$; б) $y = 2x + 1$; в) $y = 1 - x$; г) $y = -1 - x$.

111. Қуйидаги тўғри чизиқлар жуфтларининг қайсилари: а) параллел; б) перпендикуляр бўлишини аниқланг:
1) $x + y - 2 = 0$, $x + y + 3 = 0$;
2) $x + y - 2 = 0$, $x - y - 3 = 0$;
3) $-7x + y = 0$, $7x - y + 4 = 0$;
4) $4x - 2y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

112. Координаталари қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрнини тасвирланг:

а) $0 \leqslant x \leqslant 3$; $0 \leqslant y \leqslant 3$;

б) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$.

113. Нуқталари координаталари қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирувчи кўпбурчак чизинг:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ x + y \geqslant 2. \end{cases}$$

114. (x, y) нуқталари координаталари $0 \leqslant x^2 + y^2 - 2x \leqslant 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи фигура чизинг.

ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ТАҚРИБИЙ ҚИЙМАТЛАРИ ЖАДВАЛИ

A	$\sin A$	$\mathrm{tg}\, A$	A	$\sin A$	$\mathrm{tg}\, A$	A	$\sin A$	$\mathrm{tg}\, A$
$30'$	0,0087	0,0087	30°	0,50	0,58	60°	0,87	1,73
1°	0,0175	0,0175	31°	0,52	0,60	61°	0,87	1,80
2°	0,035	0,035	32°	0,53	0,62	62°	0,88	1,88
3°	0,05	0,05	33°	0,54	0,65	63°	0,89	1,96
4°	0,07	0,07	34°	0,56	0,68	64°	0,90	2,02
5°	0,09	0,09	35°	0,57	0,70	65°	0,91	2,15
6°	0,10	0,11	36°	0,59	0,73	66°	0,91	2,25
7°	0,12	0,12	37°	0,60	0,75	67°	0,92	2,36
8°	0,14	0,14	38°	0,62	0,78	68°	0,93	2,48
9°	0,16	0,16	39°	0,63	0,81	69°	0,93	2,61
10°	0,17	0,18	40°	0,64	0,84	70°	0,94	2,78
11°	0,19	0,19	41°	0,66	0,87	71°	0,95	2,90
12°	0,21	0,21	42°	0,67	0,9	72°	0,95	3,08
13°	0,23	0,23	43°	0,68	0,93	73°	0,96	3,27
14°	0,24	0,25	44°	0,69	0,97	74°	0,96	3,49
15°	0,26	0,27	45°	0,71	1,00	75°	0,97	3,73
16°	0,28	0,29	46°	0,72	1,04	76°	0,97	4,01
17°	0,29	0,31	47°	0,73	1,07	77°	0,97	4,33
18°	0,31	0,32	48°	0,74	1,11	78°	0,98	4,71
19°	0,33	0,34	49°	0,75	1,15	79°	0,98	5,15
20°	0,34	0,36	50°	0,77	1,19	80°	0,98	5,67
21°	0,36	0,38	51°	0,78	1,23	81°	0,99	6,31
22°	0,37	0,40	52°	0,79	1,28	82°	0,99	7,12
23°	0,39	0,42	53°	0,80	1,33	83°	0,992	8,14
24°	0,41	0,45	54°	0,81	1,38	84°	0,994	9,51
25°	0,42	0,47	55°	0,82	1,43	85°	0,996	11,43
26°	0,44	0,49	56°	0,83	1,48	86°	0,998	14,30
27°	0,45	0,51	57°	0,84	1,54	87°	0,999	19,08
28°	0,47	0,53	58°	0,85	1,60	88°	1,00	28,64
29°	0,48	0,55	59°	0,86	1,66	89°	1,00	57,29

ФАН НОМ КЎРСАТКИЧЛАРИ

ЖАВОБЛАР

7-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

1-боб. ГЕОМЕТРИЯГА ОИД ДАСТЛАБКИ МАЪЛУМОТЛАР

2. а) 6; б) 10; в) 15. **4.** а) 6; б) 8; в) 10; г)* $2n$. **5.** а) 3; б) 6; в) 10; г)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **6.** а) 5 см; б) 7 дм; в) 17 м. **7.** B нуқта A ва C нуқталар орасида ётади. **8.** Йўқ. **9.** 8,5 см. **10.** 2. **11.** 1. **12.** 7. **13.** 30°, 150°, 150°. **14.** 80° ва 100°. **15.** 36° ва 144°. **16.** 126°. **19.** 142°. **20.** 120° ва 60°. **22.** а) 36°; б) 30°. **23.** а) 90°; б) 180°; в) 150°.

2-боб. УЧБУРЧАКЛАР

1. $EF = 5$ см, $FG = 6$ см, $EG = 7$ см. **2.** $\angle E = 40°$, $\angle F = 60°$, $\angle G = 80°$. **3.** 75 см. **4.** 20 см ва 10 см. **5.** 12 см, 18 см ва 24 см. **9.** а) 3,2 м, 6, 2 м, 6,2 м; б) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **10.** 6 см, 16 см, 16 см. **15.** $\angle A > \angle C > \angle B$. **16.** а) $BC > AC > AB$; б) $BC > AC = AB$. **18.** Йўқ.

3-боб. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ

1. Йўқ. **2.** Йўқ. **3.** а), б) AB_1. **5.** а) 150°, 30°; б) 55°, 125°. **8.** 100°. **9.** 30°. **10.** 41° ва 41°. **11.** 120°. **12.** 30°.**13.** 40°. **14.** 69°. **15.** 360°. **16.** 120°. **17.** 60°. **18.** а), б) йўқ. **19.** а) 6 см; б) 8 см.

4-боб. АЙЛАНА. ГЕОМЕТРИК ЯСАШЛАР

1. а) OA m R; б) $OA > R$. **2.** 110 мм. **3.** Чексиз кўп. **4.** 1 см. **5.** $d - R$, $d + R$. **6.** 15 см. **7.** а) йўқ; б) иккита; в) битта. **8.** а) кесишади; б) уринади; в) умумий нуқталари йўқ. **9.** а) 2 см; б) 8 см. **10.** а) ташқи уринади; б) умумий нуқталари йўқ, бири иккинчисининг ичида жойлашган. **11.** $d - R_1 - R_2$, $d + R_1 + R_2$. **12.** а) A нуқтани ўз ичига олган, AB кесмага ўтказилган ўрта перпендикуляр билан чегараланган яримтекислик; б) A нуқтани ўз ичига олган, AB кесмага ўтказилган ўрта перпендикуляр билан чегараланган яримтекисликнинг, ўрта перпендикулярнинг ўзида ётмайдиган НГО; **13.** AB кесмага ўтказилган ўрта перпендикуляр. **14.** Берилган тўғри чизиқлардан ясалган бурчак биссектрисалари ётган, кесишиш нуқтаси бўлмаган иккита перпендикуляр тўғри чизиқлар.

ГЕОМЕТРИЯ 8-СИНФ

1-боб. КЎПБУРЧАКЛАР. ТЎРТБУРЧАКЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

1-§

3. 11. **4.** 20. **5.** 1, 2, 3, 5, 7. **7.** а) 29; б) 29. **8.** а), б) тенг. **9.** а) 6; б) 10. **10.** 18.

2-§

2. а) 1, 3; б) 2, 4, 7. **3.** а) 16; б) 20. **4.** а), б) йўқ. **6.** а) 2; б) 3; в) 4; г) $n - 2$. **7.** а) 2; б) 5; в) 9. **8.** а), б), в) йўқ; г) ҳа. **9.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **10.** а), б), в) ҳа. **11.** 7. **12.** 3.

3-§

1. а) 360°; б) 540°; в) 720°; г) 900°; д) 1080°. **2.** а) 60°; б) 90°; в) 108°; г) 120°. **3.** 7. **4.** а) 90°; б) 72°; в) 60°; г) 45°. **5.** $\frac{360°}{n}$. **6.** а) 4; б) 5; в) 6; г) 8; д) 10; е) 15. **7.** 36°, 72°, 108°, 144°. **9.** а) 30°; б) 60°; в) 90°.

4-§

1. 10 см ва 15 см. **2.** 30°, 150°, 150°. **3.** 60°, 60°, 120°, 120°. **4.** 3 см ва 4 см. **5.** а) ҳа; б) йўқ. **6.** 9. **7.** Параллелограмм. **8.** а) 40°, 40°, 140°, 140°; б) 50°, 50°, 130°, 130°;

в) 80°, 80°, 100°, 100°. **9.** а) 70°, 70°, 110°, 110°; б) 30°, 30°, 150°, 150°. **10.** 54°, 54°, 126°, 126°. **11.** 60°, 90°, 90°, 120°. **12.** а) 11 см, 11 см, 13 см, 13 см; б) 9 см, 9 см, 15 см, 15 см; в) 8 см, 8 см, 16 см, 16 см. **13.** 0,6 м, 0,6 м, 0,8 м, 0,8 м. **14.** Перпендикуляр. **15.** Параллел. **16.** а), б) йўқ; в), г) ҳа. **17.** 10 м.

5-§

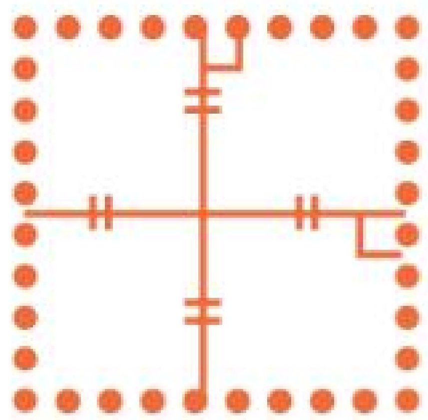
1. Ҳа. **2.** Ҳа. **3.** Ҳа. **4.** Ҳа. **5.** Йўқ. **6.** Йўқ. **10.** Бир томони иккинчи томони икки марта катта.

6-§

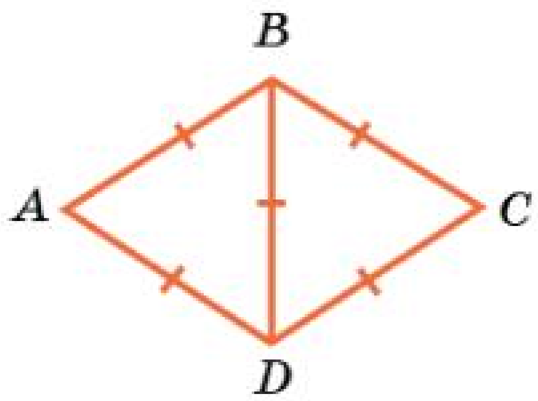
1. Ҳа. **2.** Йўқ. **3.** 25° ва 65°. **4.** 10 см. **7.** 10 см. **8.** 30° ва 60°. **9.** 1 : 2. **10.** 13 см. **11.** 3 см. **12.** 4 см, 4 см, 9 см, 9 см. **14.** а) 36°, 54°; б) 18°.

7-§

1. а) 90°; б) 45°. **3.** a. **4.** 60°, 60°, 120°, 120°. **6.** 40 см. **11.** 80°, 80°, 100°, 100°. **20.** Квадратнинг томонлари бўйлаб (1-расм). **21.** Уйлар A, B ва C нуқталарда бўлсин (2-расм). У ҳолда қудуқни $ABCD$ ромбнинг тўртинчи учи D нуқтада қазиш керак. Иккинчи ечим: ушбу нуқта AB ва BC кесмаларга ўтказилган ўрта перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси бўлади.



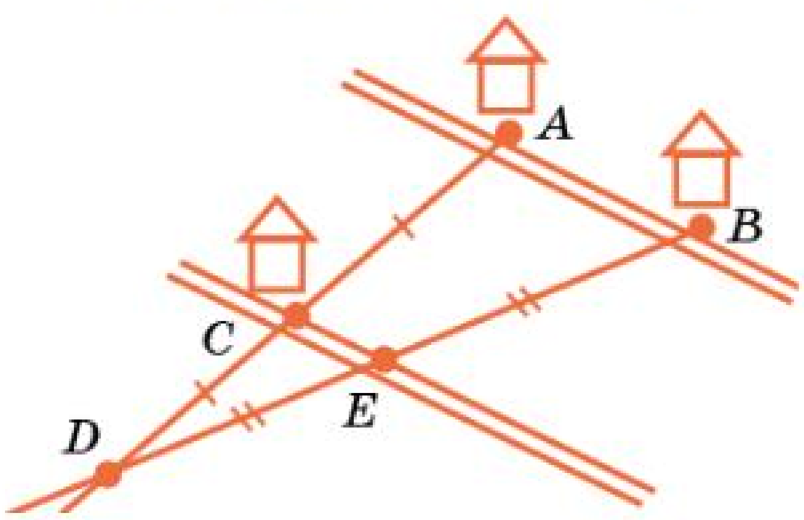
1-расм



2-расм

8-§

1. 4 см, 5 см ва 6 см. **2.** 9 см ва 18 см. **3.** 12 см. **4.** 7,5 см. **5.** 7,5 см, 10 см, 12,5 см. **7.** 5 см, 5 см, 6 см. **9.** $a + b$. **10.** 80 см. **14.** 3. **19.** AC нурдан $CD = CA$ кесмани оламиз, B ва D нуқталарни туташтирамиз ҳамда BD кесманинг E ўртасини топамиз (3-расм), у ҳолда $CE \parallel AB$. Иккинчи ечим: AC томонидан O нуқта оламиз: $AO = OC$, BO нурнинг давомида D нуқта белгилаймиз: $OD = BO$, у ҳолда $AB \parallel CD$.



3-расм

9-§

3. 4. **4.** 6 см. **5.** 70°, 70°, 110°, 110°. **6.** Ҳа. **7.** а), б) Йўқ. **8.** Ромб. **9.** Ҳа. **10.** 21 см.

10-§

1. 7. **2.** 6. **3.** 5 см ва 9 см. **4.** 15 см. **5.** 20 см. **6.** 5 см. **7.** 21 см. **8.** 4 м ва 6 м. **9.** 33 м. **10.** 25 м. **11.** 8 см ва 12 см. **12.** 2 см ва 5 см. **13.** $2a$ ва $2b$. **15.** 13,5; 9; 4,5. **16.** 16 ва

18. 18. Йўқ. **19.** Кўрсатма. Гипотенузалари AB ва CD бўлган тўғри бурчакли учбурчакларнинг ўрта чизиқларини ўтказинг. **20.** 63 м.

11-§

1. 8. **2.** 15. **3.** 4,5 см. **4.** а) ҳа; б) йўқ. **5.** a, e ва b, d; a, b ва e, d. **6.** а) 2 см; б) 12 см ва 20 см; в) 4 см ва 10 см. **7.** 8 см. **8.** p. **11.** 372 м. **12.** 1 : 2. **13.** 1 : 2. **14.** 2 : 1. **16.** 2 ва 3.

12-§

1. Йўқ. **2.** Ҳа. **3.** Гипотенузанинг ўртасида. **4.** Йўқ. **5.** Ҳа. **6.** Тўғри бурчакнинг учида. **10.** Каттасига. **11.** Катта томон қаршисидаги учга. **12.** Йўқ. **14.** Ташқи чизилган айлана маркази гипотенузанинг ўртасида жойлашган, айлана радиуси 5 га тенг бўлади.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	D	D	B	C	D	D	C	B	C	C	D	C	A	C	C	A	C	B

2-боб. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАКЛАРНИНГ ТОМОНЛАРИ БИЛАН БУРЧАКЛАРИ ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТЛАР

13-§

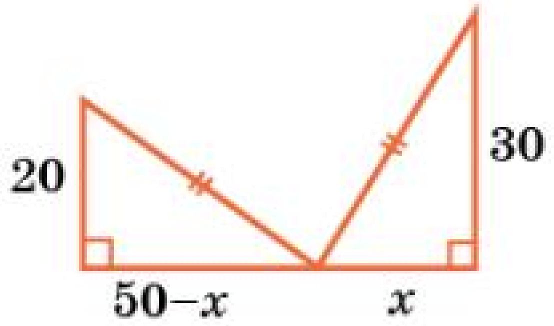
1. а) $\frac{1}{2}$, 2; б) $\frac{2}{3}$, 1,5. **2.** а) $\frac{1}{3}$, 3; б) 2, $\frac{1}{2}$. **4.** а) 0,71; б) 0,58; в) 0,87; г) 1,73. **5.** а), б) йўқ. **6.** а), б) ҳа. **8.** а), б) нолдан катта ва бирдан кичик. **9.** а), б) нолдан катта. **10.** 45°. **11.** а) 45° дан кичик; б) 45° дан катта. **12.** 0°. **13.** 45°. **14.** 0,6. **15.** $\frac{2}{3}$. **16.** 1,6. **17.** а) 1, 1; б) 1, 1. **18.** а) 1,5, $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$, 2. **19.** а) 45° дан кичик; б) 45° дан катта. **23.** а) $2\frac{2}{3}$; б) 4,5. **25.** $AB = AC \cdot \sin\angle C$ ёки $AB = DC \cdot \operatorname{tg}\angle C$. **27.** Агар a — дарахтгача бўлган масофа, h — одамнинг бўйи бўлса, у ҳолда дарахтнинг баландлиги $a \cdot \operatorname{tg} \alpha + h$ бўлади. **28.** Тахминан 1969 м. **29.** Тахминан 2,1 км; 47,8 км. **30.** 45°; $26^\circ 34'$. **31.** 380 000 км. **32.** $35^\circ 45'$. **35.** ≈ 4742 м. **36.** 40 м.

14-§

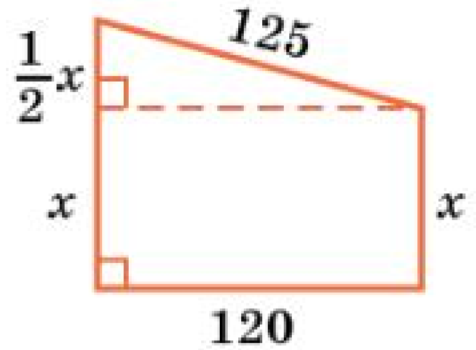
1. а) 5; б) 13; в) 17. **2.** а) 4; б) 12; в) 6. **3.** а) $3\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{13}$. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** 3, 4, 5; 6, 8, 10; 5, 12, 13. **6.** а) 0,6, 0,8; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$. **8.** $2\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$. **9.** а) 6 см, 8 см, 10 см; б) 10 см, 24 см, 26 см. **10.** 5, 12, 13. **11.** $\sqrt{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** 4. **14.** $1\frac{1}{16}$ **15.** 1. **16.** 1000 м. **17.** 500 м. **18.** 50 км. **19.** 12 м. **20.** 10 м. **21.** 5 см. **22.** 2,4; 1,8; 3,2. **23.** $R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - c^2}}$. **24.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **25.** 1,5 м. **27.** 4.17-расмга кўра: $\sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{BC^2 - CD^2}$, бироқ расмда берилганларга кўра $\sqrt{5^2 - 4^2} \neq \sqrt{4^2 - 2^2}$.

14-18-расмга кўра: $LM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, у ҳолда $LQ = LM - QM$, бундан $LQ = 2 = LP$, бу тўғри бурчакли учбурчакда бўлиши мумкин эмас. **28.** KLM. **29.** 5 км. **30.** $AC \approx 84{,}9$ м. **31.** Кўрсатма. B ва D уйлар орасидаги масофани ўлчаш етарли, бунда изланаётган масофани ҳисоблаш осон бўлади: $AB = AC = \frac{2}{\sqrt{5}} BD$, $AD = DC = \frac{1}{\sqrt{5}} BD$, $BC =$ [illegible] BD. **32.** 4-расмга қаранг: $(50 - x)^2 + 20^2 = x^2 + 30^2$, $x = 20$(м). **33.** 5-расмга қаранг: $\frac{x^2}{4} = 125^2 - 120^2$, $x = 70$, у ҳолда миноралар баландликлари 70 м ва 105 м бўлади.

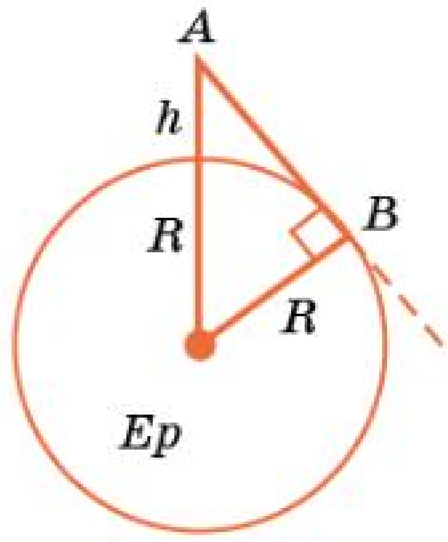
34. 240 м, 320 м ва 600 м. **35.** 6-расмга қаранг: $AB = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} \approx 358$ км. **36.** $\approx$ 62,5. **37.** 40 м, 60м.



4-расм



5-расм



6-расм

15-§

1. а) $\cos^2 A$; б) 2. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **4.** а) йўқ; б) ҳа. **5.** а) $\mathrm{tg}^2 A$; б) $\mathrm{ctg}^2 A$. **6.** а) 0,87; б) 0,71; в) 1,73; г) 0,58. **7.** а) B; A. **8.** а) 2,4; б) 0,75. **9.** а) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; б) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **10.** а), б) 1. **11.** а) $\frac{1}{\cos A}$; б) $\frac{1}{\sin A}$. **13.** а) 0,5; б) 5. **16.** а) 2; б) 0,75. **17.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

16-§

1. 1. **2.** $\sqrt{3}$. **3.** 2. **4.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **5.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $\sqrt{2}$. **9.** 10. **10.** 9. **11.** 8. **12.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.** 0,5. **14.** 0,5. **15.** 0,5. **16.** 5. **17.** 5. **18.** 5. **19.** 0,5. **20.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **21.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **22.** 0,75. **23.** 0,25. **24.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **25.** 1,5. **26.** 2,4. **27.** 3,2. **28.** 1,8. **29.** 3,2. **30.** 1,8. **31.** 2,4. **32.** 3,2. **33.** 1,8. **34.** 4,8. **35.** 3. **36.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **37.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **38.** $\sqrt{3}$. **39.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **40.** 0,5.

17-§

1. Плюс. **2.** Минус. **3.** Минус. **4.** Минус. **5.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$. **6.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** а) $-\sqrt{3}$; б) -1; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) -1; в) $\sqrt{3}$. **9.** $\sin 150^\circ$, $\sin 135^\circ$, $\sin 120^\circ$, $\sin 90^\circ$. **10.** $\cos 150^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\cos 60^\circ$. **11.** $\mathrm{tg}\,135^\circ$, $\mathrm{tg}\,150^\circ$, $\mathrm{tg}\,90^\circ$, $\mathrm{tg}\,60^\circ$. **12.** $\mathrm{ctg}\,150^\circ$, $\mathrm{ctg}\,135^\circ$, $\mathrm{ctg}\,120^\circ$, $\mathrm{ctg}\,60^\circ$. **13.** −0,6. **14.** 0,6. **15.** а) $\cos^2 A$; б) 2; в) 1. **16.** $\sin^2 A$. **19.** а) 0,64; б) −0,72; в) −0,58; г) −2,78.

18-§

1. 37°. **2.** 37°. **3.** 37°. **4.** 10 см. **5.** $10-\sqrt{3}$ см. **6.** 14°. **7.** 18°. **8.** 5°. **9.** 24 м. **10.** 2°. **11.** 76080 м.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	B	D	B	B	D	D	C	B	A	B	D	C	A	A	D	C	A	A

3-боб. ЮЗА

19-§

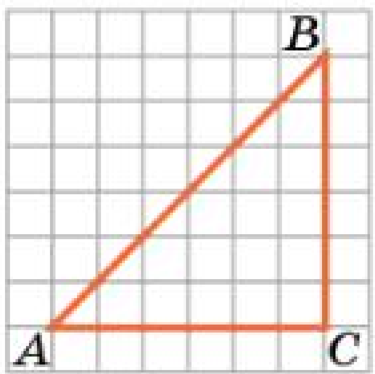
1. 42. **2.** а) 20; б) 12. **3.** а) 5; б) 5. **4.** а) ва д), в) ва г). **5.** а) 4 см^2; б) 100 см^2; в) 9 м^2. **6.** 400 см^2. **7.** 0,25. **8.** 48. **9.** а) 4 марта ортади; б) 9 марта камаяди. **10.** 450 м^2. **11.** $\frac{a^2}{2}$. **12.** 12 м. **13.** 8. **14.** 10. **15.** 0,5. **16.** а) $2bc + 2ad - 4cd$; б) $ad + bc - cd$; в) $ab - ad + 2cd$. **17.** 36 см. **18.** 2 м ва 3 м. **19.** 9. **20.** 10. **21.** 16. **22.** 1200. **23.** 11.

20-§

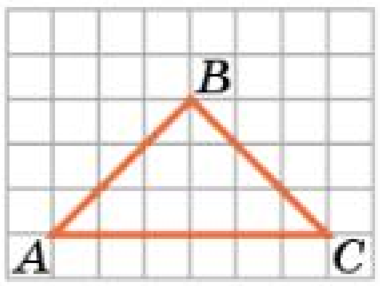
1. 20 см^2. **2.** 20. **3.** а) 40 см^2; б) $40\sqrt{2}$ см^2; в) $40\sqrt{3}$ см^2. **4.** а) $18\sqrt{3}$ см^2; б) $18\sqrt{2}$ см^2; в) 18 см^2. **5.** а), ж), з); б), г), д), е). **6.** а) 9; б) 12. **7.** 8 см ва 4 см. **8.** Тўғри тўртбурчак. **9.** 30°. **10.** 90°. **11.** Квадратнинг юзаси катта. **12.** 30°. **14.** 24 см^2. **15.** а) 4; б) 8.

21-§

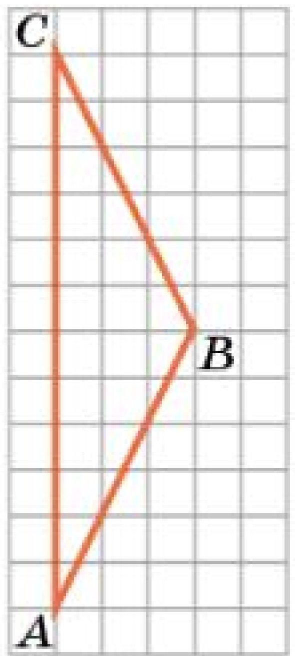
1. а), б), в), д), з); г), ж). **2.** а) 14 см^2; б) 21 м^2. **3.** 12. **4.** 6. **5.** а) 6 см^2; б) $6\sqrt{2}$ см^2; в) $6\sqrt{3}$ см^2; г) 12 см^2. **6.** а) $12\sqrt{3}$ см^2; б) $12\sqrt{2}$ см; в) 12 см. **7.** 3 : 1. **8.** а) 2 марта ортади; б) 3 марта камаяди; в) 2 марта камаяди. **9.** 1. **10.** Тўтдан бир бўлагини. **11.** а), б) ҳа; в) йўқ. **12.** а) 6; б) 5. **14.** 10. **15.** 90°. **16.** Юзаси 8 га тенг бўлган паралелограмм. **18.** *AB* тўғри чизиққа параллел бўлган иккита тўғри чизиқ. **20.** 1. **21.** 0,75. **23.** Учбурчакларнинг юзалари тенг бўлади. **25.** а) 7-расмга қаранг; б) 8-расмга қаранг; в) 9-расмга қаранг; г) 10-расмга қаранг; д) 11-расмга қаранг; е) 12-расмга қаранг. **26.** 1 : 6. **27.** а) 21; б) 21; в) 14.



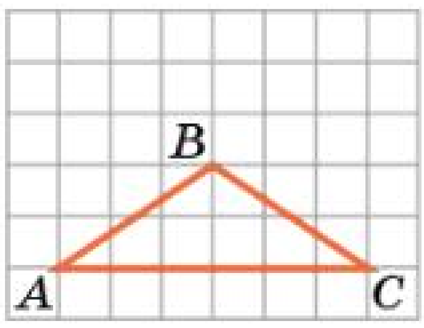
7-расм



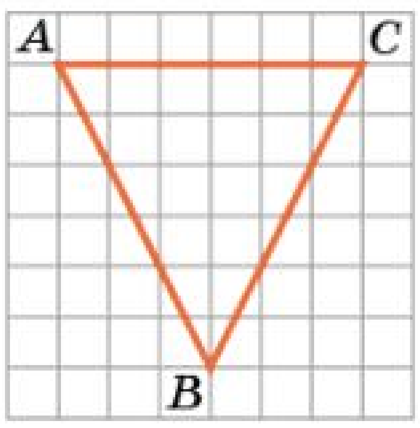
8-расм



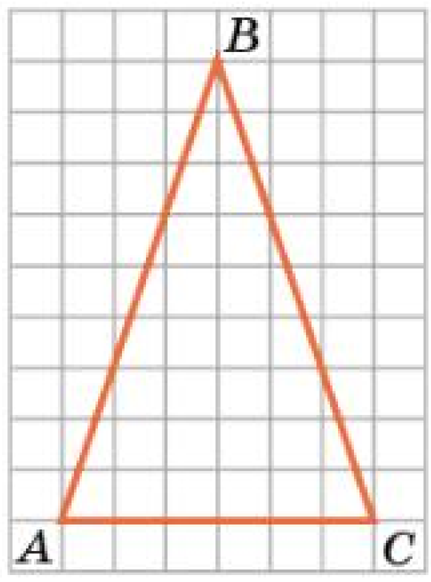
9-расм



10-расм



11-расм



12-расм

22-§

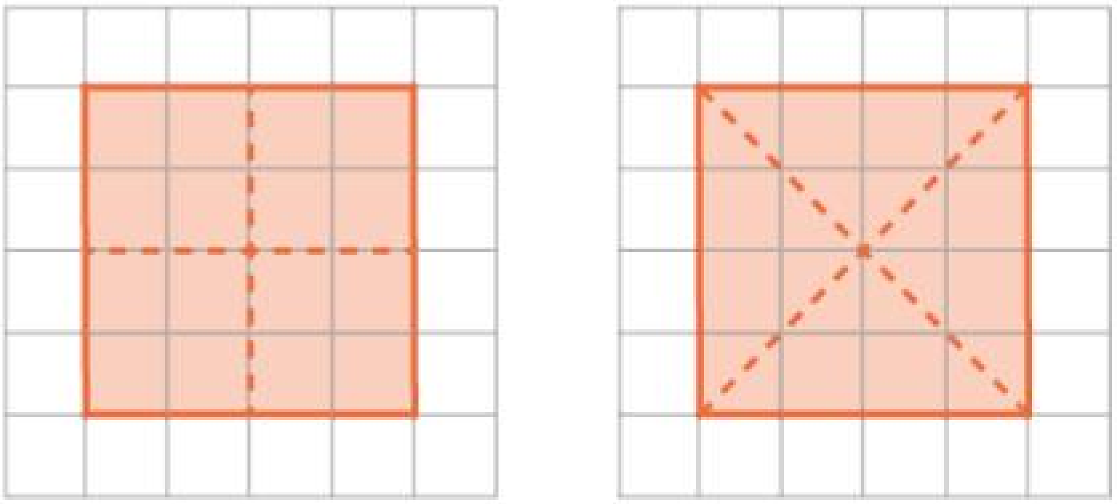
1. 210 см^2. **2.** 6. **3.** 10 см. **4.** 20 см. **5.** 14 см. **6.** 160. **7.** 84 см^2. **8.** а) 9; б) 10. **9.** 4 см^2. **10.** 30 см^2. **13.** 18. **16.** а) 9; б) 9; в) 6. в) Кўрсатма. M нуқта орқали $KM \parallel CD$ тўғри чизиқ ўтказамиз (K ва P нуқталар мос равишда BC ва AD тўғри чизиқларда ётади) ва $S_{ABCD} = S_{CDPK}$ эканини исботлаймиз.

23-§

1. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^2. **2.** 12 см^2. **3.** 10 см^2. **4.** а) 12; б) 28. **5.** а) 7,5; б) 6. **6.** а) 16; б) 6. **7.** 40.

24-§

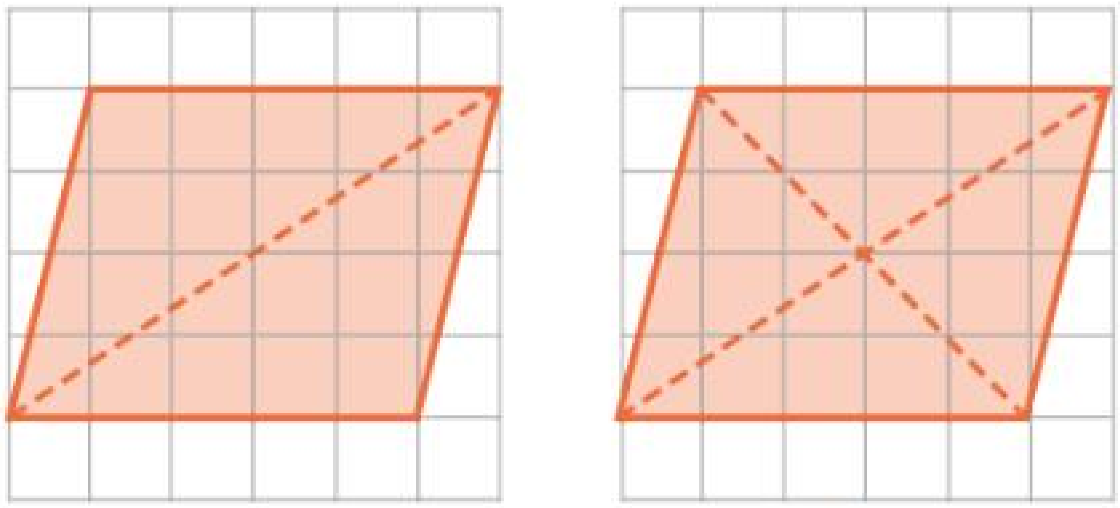
1. Қирқиш чизиғи 13-расмда кўрсатилган.



а) б)

13-расм

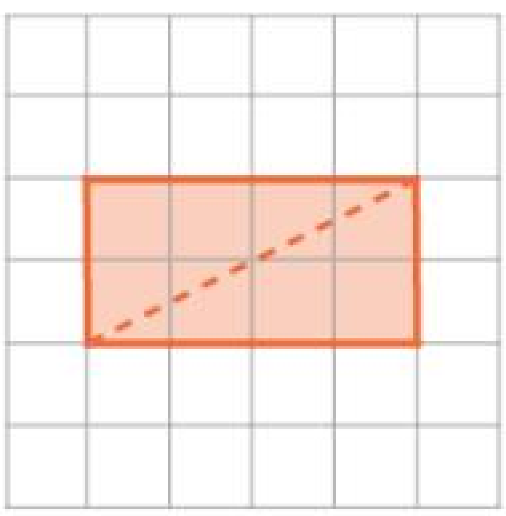
2. Қирқиш чизиғи 14-расмда кўрсатилган.



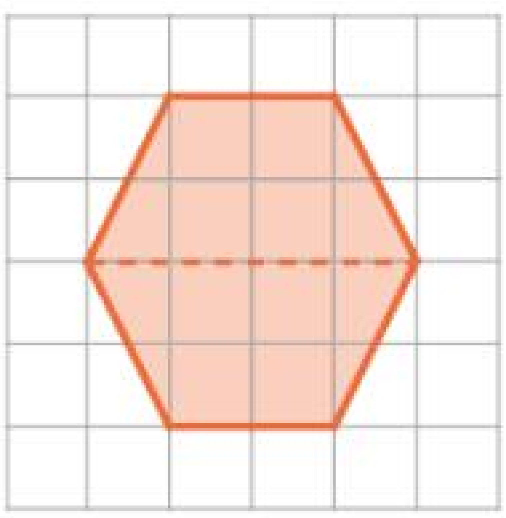
а) б)

14-расм

3. Қирқиш чизиғи 15-расмда кўрсатилган. **4.** Қирқиш чизиғи 16-расмда кўрсатилган.

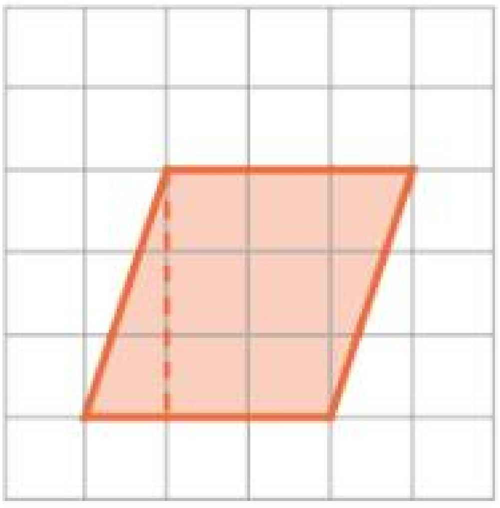


15-расм

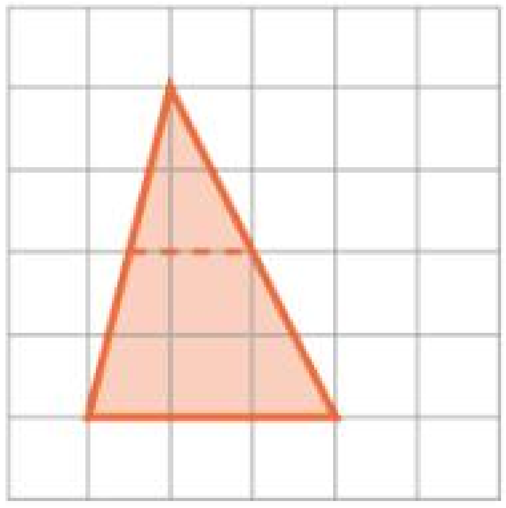


16-расм

5. Қирқиш чизиғи 17-расмда кўрсатилган. **6.** Тўғри чизиқ 18-расмда кўрсатилган.

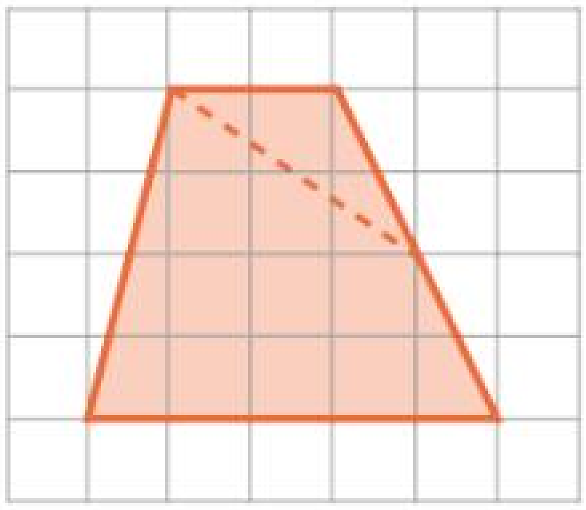


17-расм

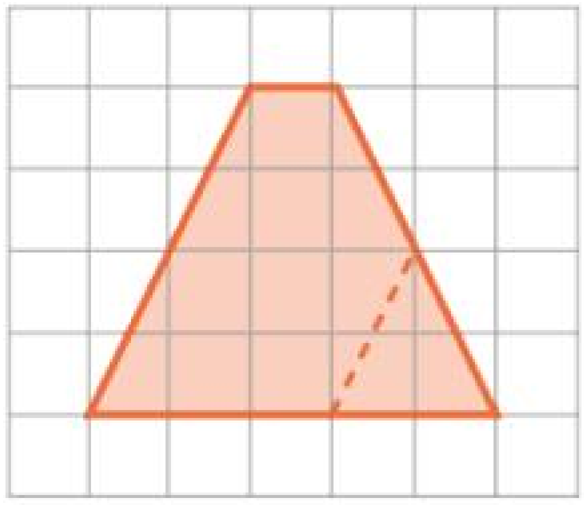


18-расм

7. Қирқиш чизиғи 19-расмда кўрсатилган. **8.** Қирқиш чизиғи 20-расмда кўрсатилган.

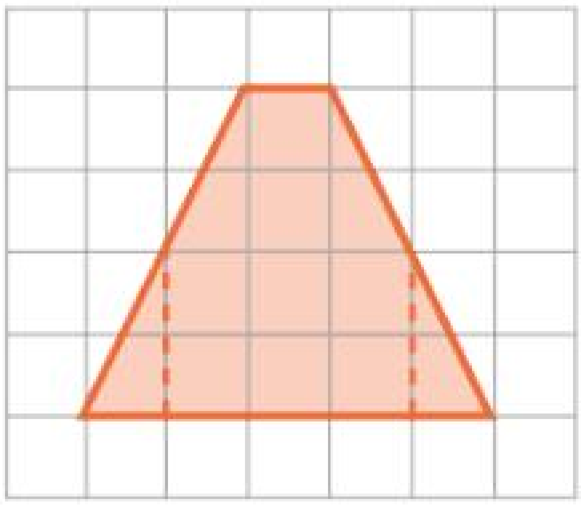


19-расм

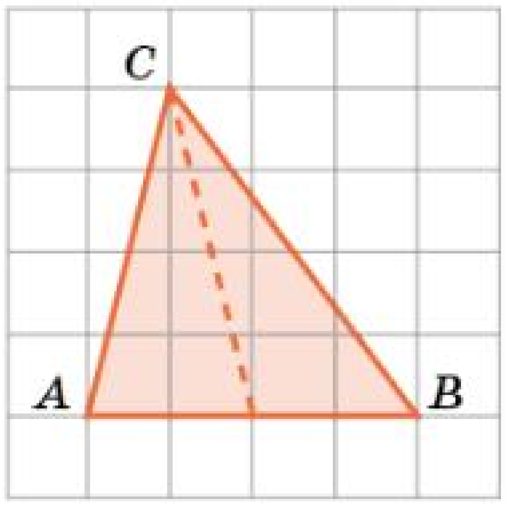


20-расм

9. Қирқиш чизиғи 21-расмда кўрсатилган. **10.** Тўғри чизиқ 22-расмда кўрсатилган.

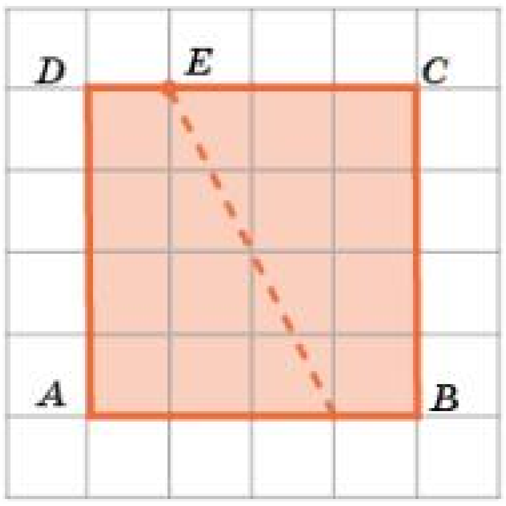


21-расм

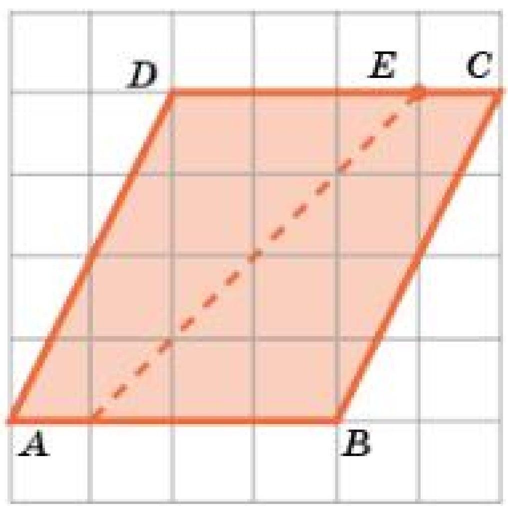


22-расм

11. Тўғри чизиқ 23-расмда кўрсатилган. **12.** Тўғри чизиқ 24-расмда кўрсатилган.

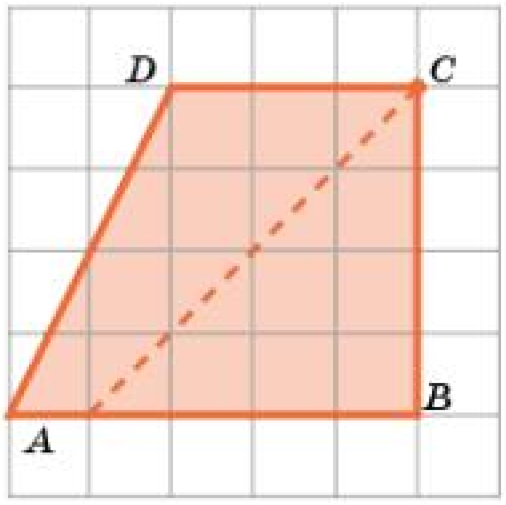


23-расм

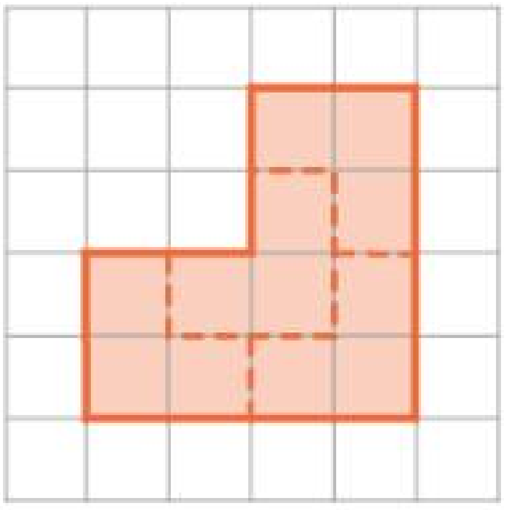


24-расм

13. Тўғри чизиқ 25-расмда кўрсатилган. **15.** Қирқиш чизиғи 26-расмда кўрсатилган.

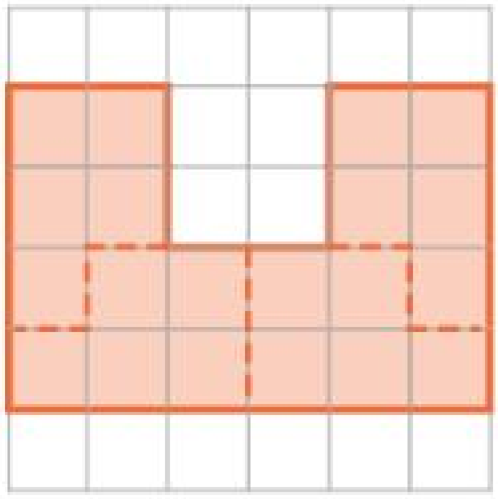


25-расм



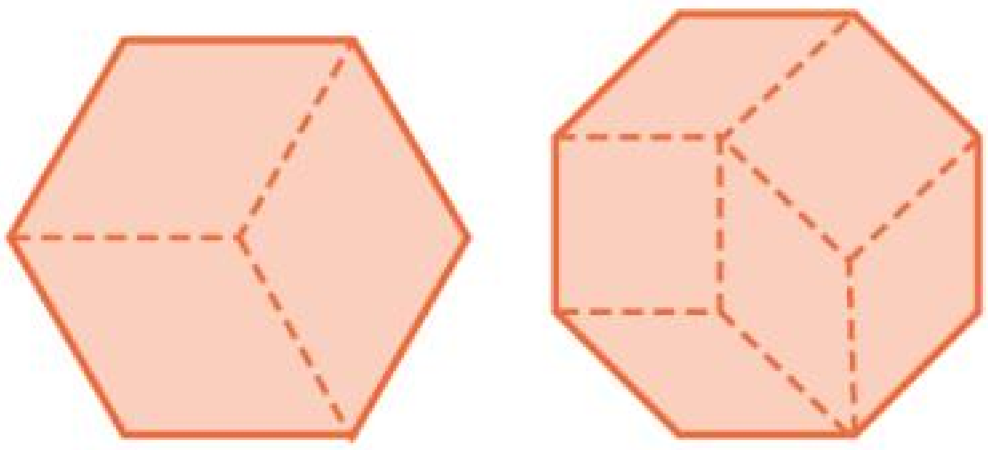
26-расм

16. Қирқиш чизиғи 27-расмда кўрсатилган.



27-расм

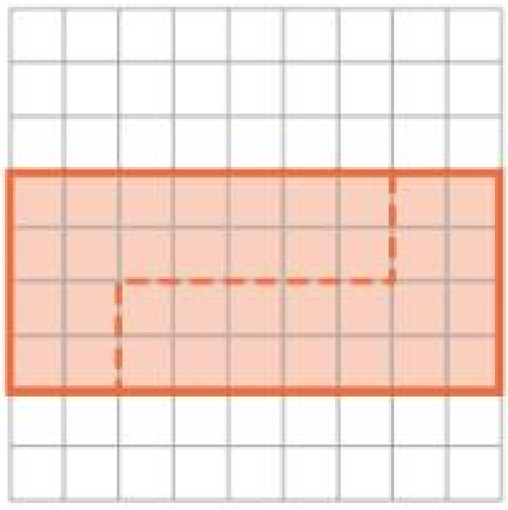
17. Қирқиш чизиғи 28-расмда кўрсатилган.



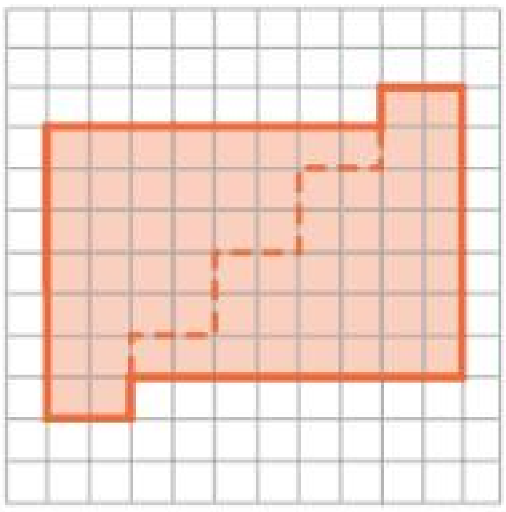
а) б)

28-расм

18. Қирқиш чизиғи 29-расмда кўрсатилган. **19.** Қирқиш чизиғи 30-расмда кўрсатилган.

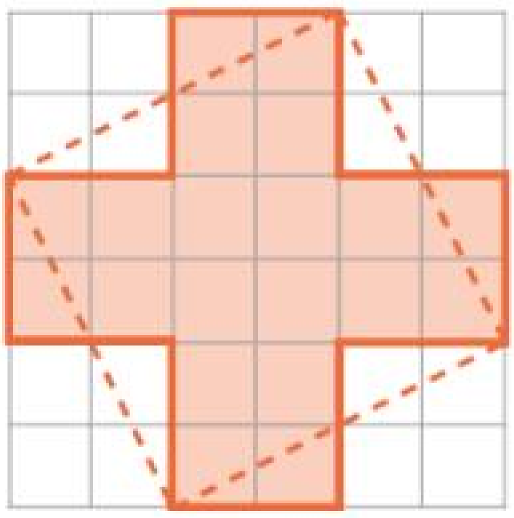


29-расм

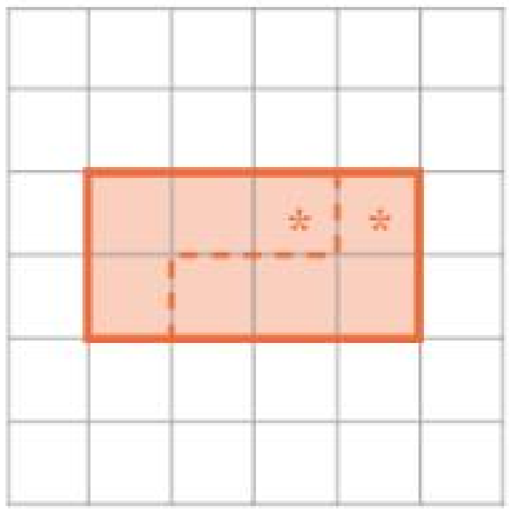


30-расм

20. Қирқиш чизиғи 31-расмда кўрсатилган. **21.** Қирқиш чизиғи 32-расмда кўрсатилган.

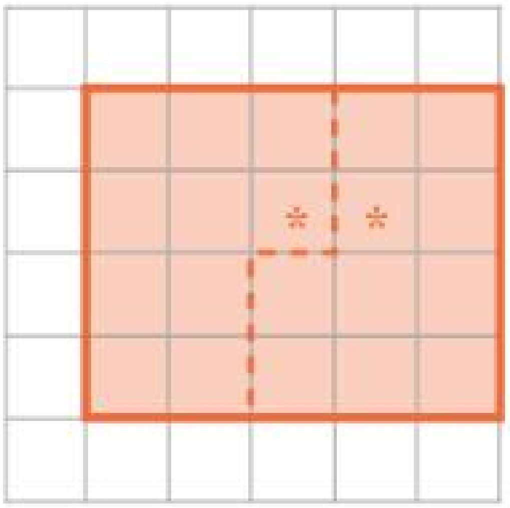


31-расм



32-расм

22. Қирқиш чизиғи 33-расмда кўрсатилган.



33-расм

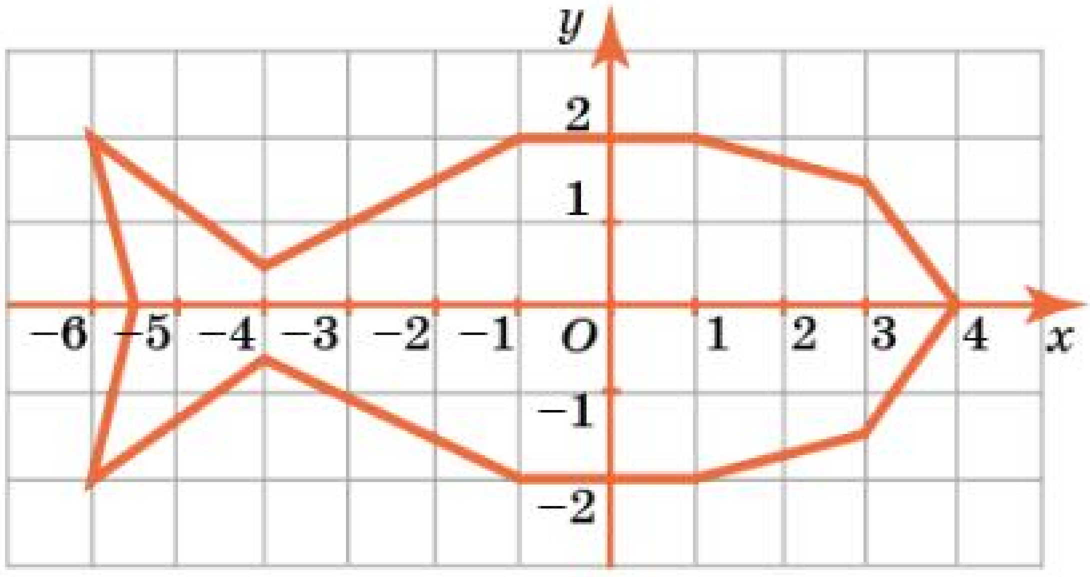
ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	C	C	B	D	B	D	C	B	B	A	A	C	D	B	C	A	B	B

4-боб. ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

25-§

1. $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 2)$, $D(-3, 1)$, $E((-1, -1)$, $F(-2, -3)$, $G(1, -3)$, $H(2, -2)$. **3.** 2. **4.** 3. **5.** (2, 0). **6.** (0, 3). **7.** а) (3, 2); б) (−1, 3); в) (1, 1). **8.** (1, 0). **10.** Синиқ чизиқ 34-расмда тасвирланган. **11.** $B(6, 8)$. **12.** (5, 4). **13.** (2, 2).



34-расм

26-§

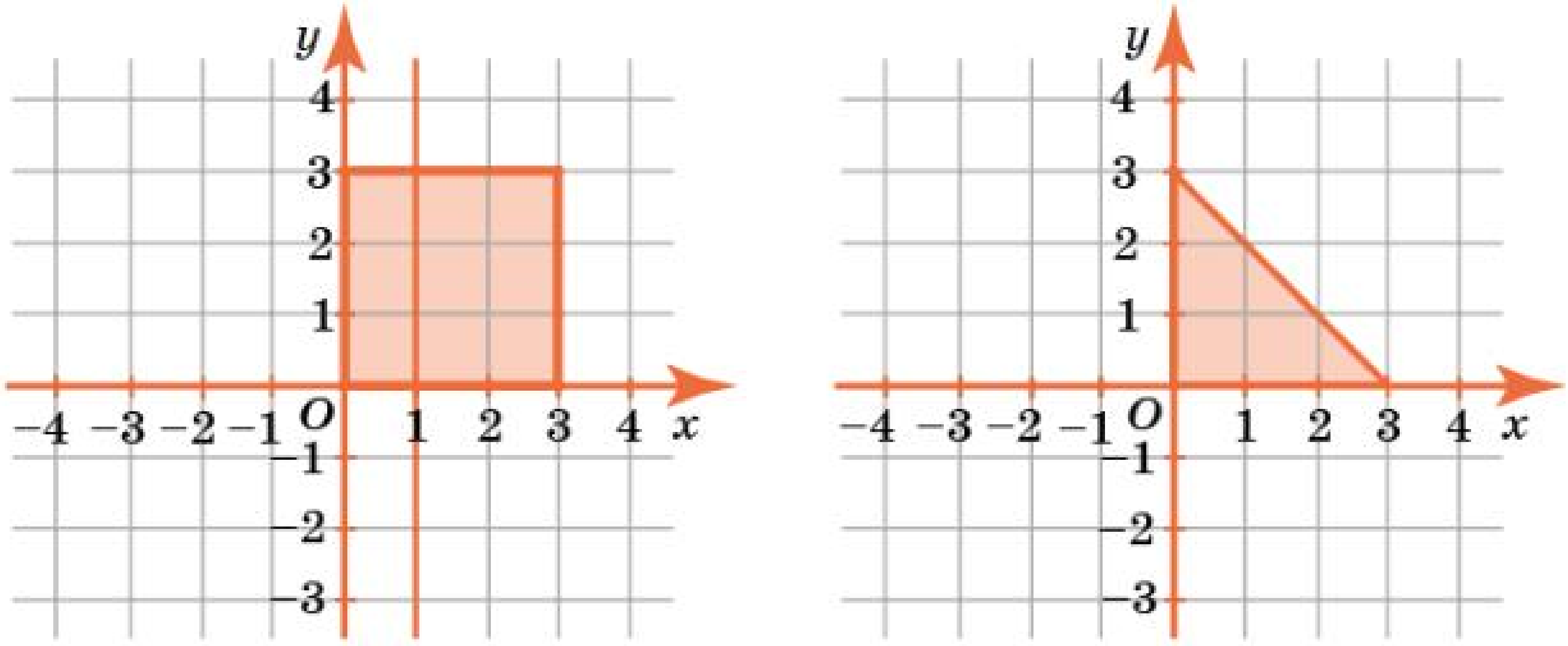
1. а) $\sqrt{5}$; б) 5. **2.** а) 3; б) 2. **3.** Нуқталар бир хил узоқликда жойлашган. **4.** а) $C(2, -5)$, 3; б) $C(0, 6)$, $R = 4$. **5.** а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$. **6.** а) айлананинг ичида; б), в), г) айланада; д) айланадан ташқарида. **7.** $\sqrt{13} + \sqrt{29} + \sqrt{34}$. **8.** а) Тўғри тўртбурчак; б) тенгёнли. **9.** а) Квадрат; б) тўғри тўртбурчак; в) параллелограмм; г) тенгёнли трапеция. **10.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. **11.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **12.** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > R$. **13.** а) (2, 0); б) (4, 0). **14.** а) (0, 3); б) (0, 2). **15.** а) (1, 1); б) (0, 1). **16.** а) 2, (2, 0); б) 1, (−1, 2). **17.** $(x - 3)^2 + y^2 = 11$. **18.** $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. **19.** а) ички уринади; б) кесишади; в) ташқи уринади; г) умумий нуқталари йўқ.

27-§

1. а) $y = 0$; б) $x = 0$. **2.** а) $y = 2$; б) $x = 1$. **3.** а) $x = 2$; б) $y = 3$. **4.** *a*) 1; *b*) $\frac{1}{3}$; *c*) −1; *d*) −3. **5.** а) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = \frac{1}{2}x$; г) $y = -x$; д) $y = -2x$; е) $y = -\frac{1}{2}x$. **6.** а) $y = x - 3$; б) $y = 2x - 5$; в) $y = \frac{1}{2}x - 2$; г) $y = -x + 1$; д) $y = -2x + 3$; е) $y = -\frac{1}{2}x$. **7.** а) $y = 2$; б) $y = x + 1$; в) $y = -x + 3$. **11.** а) $y = 0{,}5x + 1$; б) $y = -2x + 2$; в) $y = x - 2$; г) $y = -0{,}5x - 1$. **12.** а) 1), 3); б) 2), 4). **13.** а) (−1, −2); б) (7, 3). **14.** а) $y = x + 1$; б) $y = 2x + 1$. **15.** 12. **16.** а) $y = -x + 1$; б) $y = -0{,}5x + 1$.

28*-§

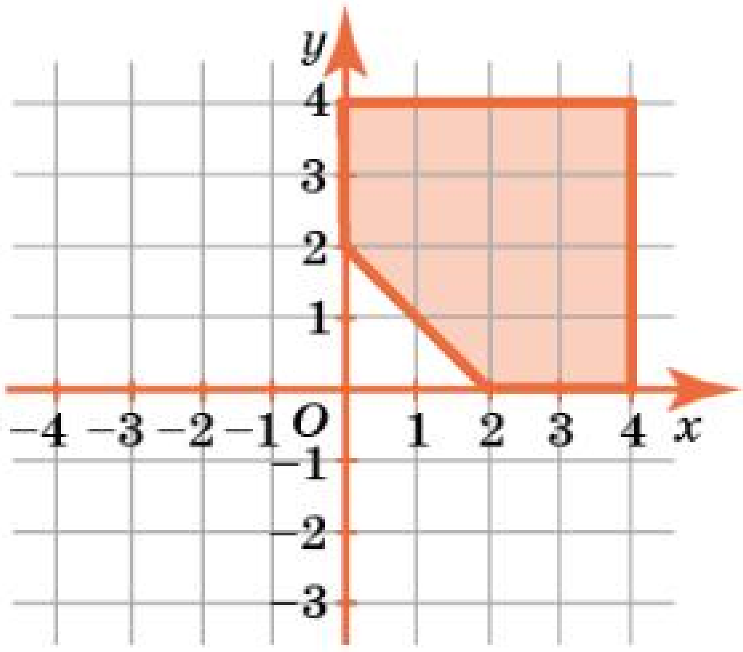
2. Нуқталарнинг геометрик ўрни 35-расмда тасвирланган.



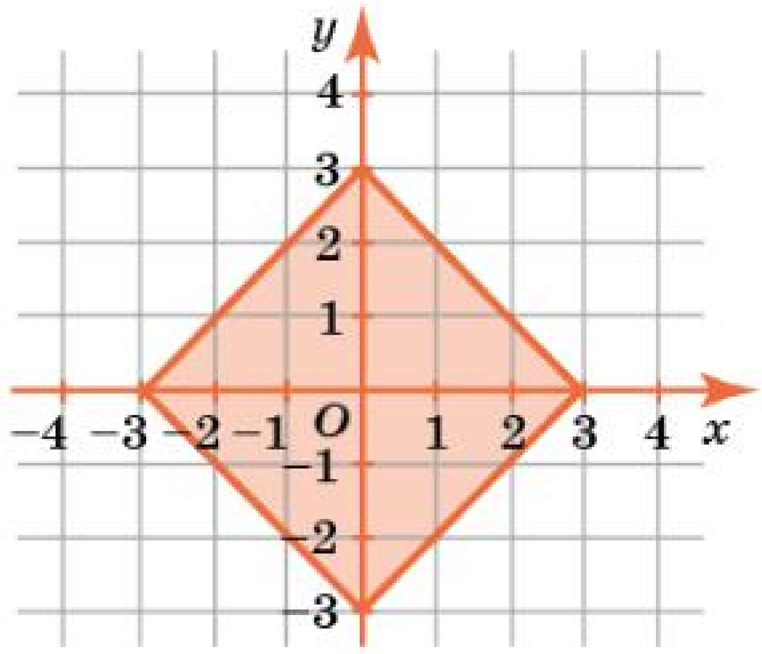
а) б)

35-расм

3. Тенгсизликлар системаси орқали. **4.** Кўпбурчак 36-расмда тасвирланган.

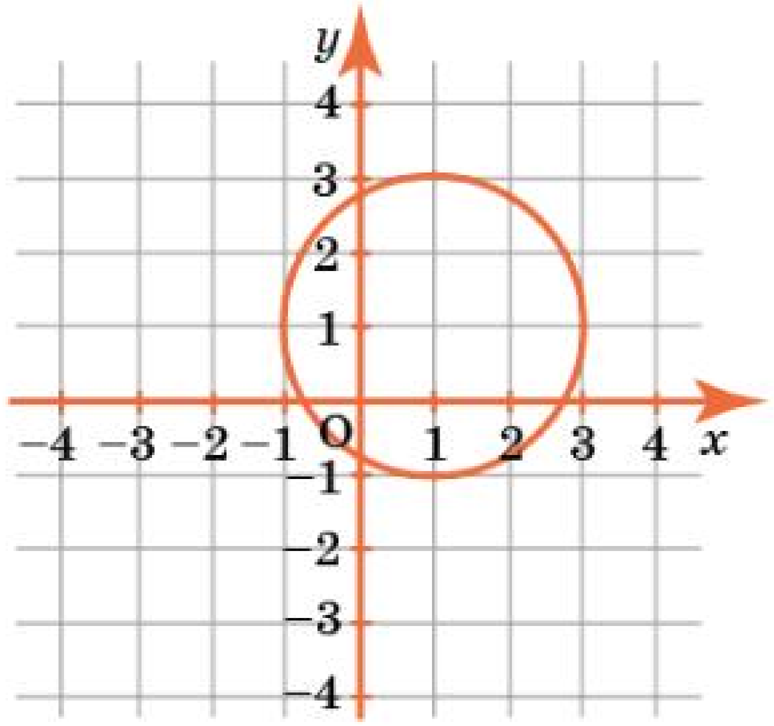


36-расм

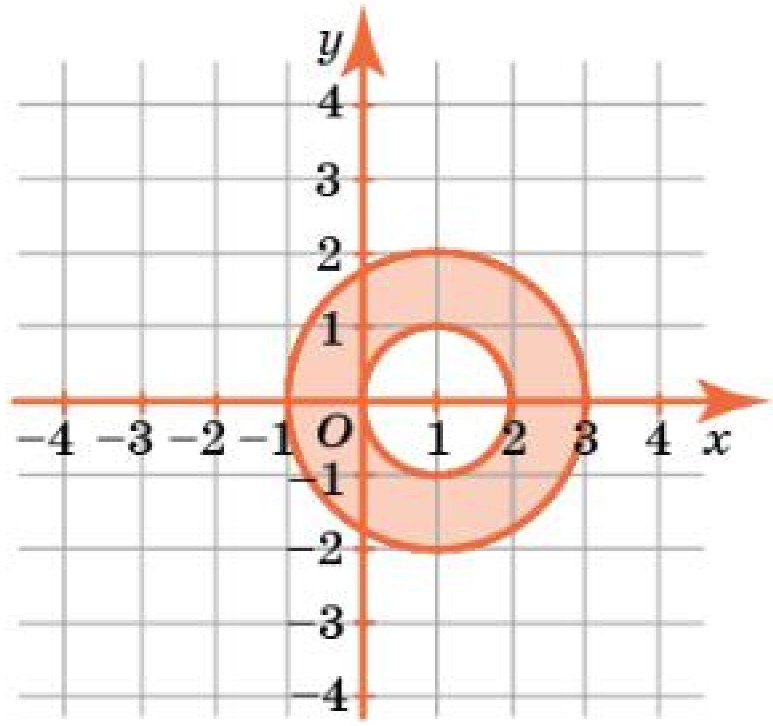


37-расм

5. Фигура 37-расмда тасвирланган. **6.** а) $|x| \ \mathrm{m}\ 2$, $|y| \ \mathrm{m}\ 1$; б) $|x| + |y| \ \mathrm{m}\ 2$, $y \ \mathrm{l}\ 0{,}7$. **7.** 45°. **8.** 10. **9.** 6. **10.** $0 \ \mathrm{m}\ x \ \mathrm{m}\ 3$, $0 \ \mathrm{m}\ y \ \mathrm{m}\ 3$, $1 \ \mathrm{m}\ x + y \ \mathrm{m}\ 5$, $-2 \ \mathrm{m}\ x - y \ \mathrm{m}\ 2$. **11.** $x - 2y + 6 \ \mathrm{l}\ 0$, $2x + 3y - 3 \ \mathrm{l}\ 0$, $-3x + y + 10 \ \mathrm{l}\ 0$. **12.** $0 \ \mathrm{m}\ y \ \mathrm{m}\ 2$, $2x - 2 \ \mathrm{m}\ y \ \mathrm{m}\ 2x$. **13.** Фигура 38-расмда тасвирланган.



38-расм



39-расм

14. 6. а) $x^2 + y^2 \ \mathrm{m}\ 4$; б) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \ \mathrm{m}\ 1$. **15.** Фигура 40-расмда тасвирланган.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	A	C	C	B	B	A	C	D	A	B	C	C	B	D	C	D	B	C

8-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

1. 9. **2.** 20. **4.** а) 2; б) 3; в) 4; г) $n - 2$. **5.** а) 2; б) 5; в) 9. **6.** а) 60°; б) 90°; в) 108°; г) 120°. **7.** 7. **8.** а) 90°; б) 72°; в) 60°; г) 45°. **9.** 36°, 72°, 108°, 144°. **11.** 60°, 60°, 120°, 120°. **12.** а) 40°, 40°, 140°, 140°; б) 50°, 50°, 130°, 130°; в) 80°, 80°, 100°, 100°. **13.** 0,6 м, 0,6 м, 0,8 м, 0,8 м. **14.** Перпендикуляр. **15.** Параллел. **16.** Ҳа. **17.** Йўқ. **19.** 25° ва 65°. **20.** 13 см. **23.** 80°, 80°, 100°, 100°. **24.** 4 см, 5 см ва 6 см. **26.** $a + b$. **27.** 4. **28.** 70°, 70°, 110°, 110°. **29.** 6. **30.** 15 см. **31.** 2 см ва 5 см. **32.** а) 2 см; б) 12 см ва 20 см; в) 4 см ва 10 см. **34.** 1 : 2. **35.** Катта томон. **36.** Катта томон қаршисида ётган учи. **38.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 1. **39.** а), б) нолдан катта ёки бирдан кичик. **40.** а), б) нолдан катта. **41.** 45°. **42.** а) 45° дан кичик; б) 45° дан катта. **43.** а) 45° кичик; б) 45° дан катта. **44.** а) 5; б) 13; в) 17. **45.** а) 4; б) 12; в) 6. **46.** $\sqrt{2}$. **47.** $\sqrt{2}$. **48.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **49.** 4. **50.** 5 см. **51.** а) $\cos^2 A$; б) 2. **52.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **53.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **54.** а) 2,4; б) 0,75. **56.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **57.** 5. **58.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **59.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$. **60.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **61.** а) $-\sqrt{3}$; б) -1; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **62.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) -1; в) $-\sqrt{3}$.

65. 3°. **66.** 4°. **67.** 9 м. **68.** 3°. **69.** 400 см^2. **70.** 48. **71.** а) 4 марта ортади; б) 9 марта камаяди. **72.** 0,5. **73.** 2 м ва 3 м. **74.** 20 см^2. **75.** а) $18\sqrt{3}$ см^2; б) $18\sqrt{2}$ см^2; в) 18 см^2.

76. 8 см ва 4 см. **77.** 30°. **78.** 12. **79.** 6. **80.** 6 см². **81.** а) 2 марта ортади; б) 3 марта камаяди; в) 2 марта камаяди. **82.** 1. **84.** 90°. **85.** 1. **86.** 210 см². **87.** 6. **88.** 10 см. **89.** 20 см. **90.** 84 см². **91.** 4 см². **93.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **94.** 12. **95.** 10 см². **96.** 40. **98.** $B(6, 8)$. **99.** а) (3, 2); б) (−1, 3); в) (1, 1). **100.** а) $\sqrt{5}$; б) 5. **101.** а) (2, −5), 3; б) (0, 6), 4. **102.** а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$. **103.** а) Айлананинг ичида; б), в), г) айланада; д) айланадан ташқарида. **104.** $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > R$. **105.** а) 2, (2, 0); б) 1, (−1, 2). **106.** а) $y = 2$; б) $x = 1$. **107.** а) $x = 2$; б) $y = 3$. **108.** а) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = \frac{1}{2}x$; г) $y = -x$; д) $y = -2x$; е) $y = -\frac{1}{2}x$. **109.** а) $y = 2$; б) $y = x + 1$; в) $y = -x + 3$. **111.** а) 1), 3); б) 2), 4).

МУНДАРИЖА

4-боб. ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 8 классов общеобразовательных школ
(*на узбекском языке*)

Муҳаррир *Р. Азимий*
Бадиий муҳаррир *А. Сланова*
Техник муҳаррир *Л. Садикова*
Компьютерда саҳифаловчи *Б. Нўкер*

Нашриётга 2003 йил 7 июлда Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан вазирлигининг № 0000001 давлат лицензияси берилган

ИБ № 5790

Нашрга 08.08.18 рухсат этилди. Бичими $70 \times 100^1/_{16}$.
Офсет қоғози. Ҳарф тури “SchoolBook Kza”. Офсет нашри.
Шартли босма табоғи 12,9 + 0,32 форзац. Шартли бўёқ тамғаси 27,73.
Нашриёт ҳисоб табоғи 8,48 + 0,54 форзац. Адади 7000 дона. Буюртма №

“Мектеп” нашриёти, 050009, Алмати шаҳри, Абай шоҳ кўчаси, 143
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz