

В. А. Смирнов, Е. А. Туёков

ГЕОМЕТРИЯ

7

Умумтаълим мактабларининг
7-синфи учун дарслик

Қозогистон Республикаси Таълим ва фан
министрлиги тасдиқлаган



Алмати "Мектеп" 2017

*Книга представлена исключительно в образовательных целях

согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

УДК 373.167.1(075.3)

ББК 22.151я72

С54

Таржимон М. Йўлдош қизи

Шартли белгилар:



— таърифлар, хоссалар, қоидалар



— янги материални ўзлаштириш давомида ечиладиган масала



— мустаҳкамлашга доир саволлар



— параграф ичидаги савол ва топшириқлар



— теорема исботларининг якунланиши

A

— ўртача даражали топшириқлар

B

— юқори даражали топшириқлар

C

— такрорлаш учун машқлар

Смирнов В. А., Түәқов Е. А.

С54 Геометрия. Умумтаълим мактабларининг 7-синфи учун дарслик. — Алмати: Мектеп, 2017. — 144 бет.

ISBN 978—601—07—0932—4

С 4306020502—165
404(05)—17 47—17

УДК 373.167.1(075.3)
ББК 22.151я72

ISBN 978—601—07—0932—4

© Смирнов В. А., Түәқов Е. А., 2017
© Таржимон Йўлдош қизи М., 2017
© "Мектеп" нашриёти, бадий безак берган, 2017
Барча ҳукуқлар ҳимояланган
Нашрнинг мулкий ҳукуқлари
"Мектеп" нашриётига тегишли

ГЕОМЕТРИЯНИНГ БОШЛАНГИЧ ТУШУНЧАЛАРИ

1

УЧБУРЧАКЛАР

2

ТҮФРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ

3

АЙЛАНА. ГЕОМЕТРИК ЯСАШЛАР

4

КИРИШ

Хурматли ўқувчилар! Сиз математика фанини үзлаштиришини давом эттирасиз.

Геометрия — математиканинг энг муҳим ва қизиқарли бўлимларидан биридир. *Геометрия* юнонча (*geo* — ер, *метрео* — ўлчайман) сўз бўлиб, “ер ўлчаш” деган маънони англатади. Геометрия планиметрия ва стереометрия деб аталган икки бўлимдан иборат. Планиметрияда текисликда жойлашган ясси фигуralар ўрганилади. Стереометрияда текисликда ётмайдиган ясси бўлмаган фигуralар ўрганилади. Кўпинча улар *фазовий фигуralар* дейилади.

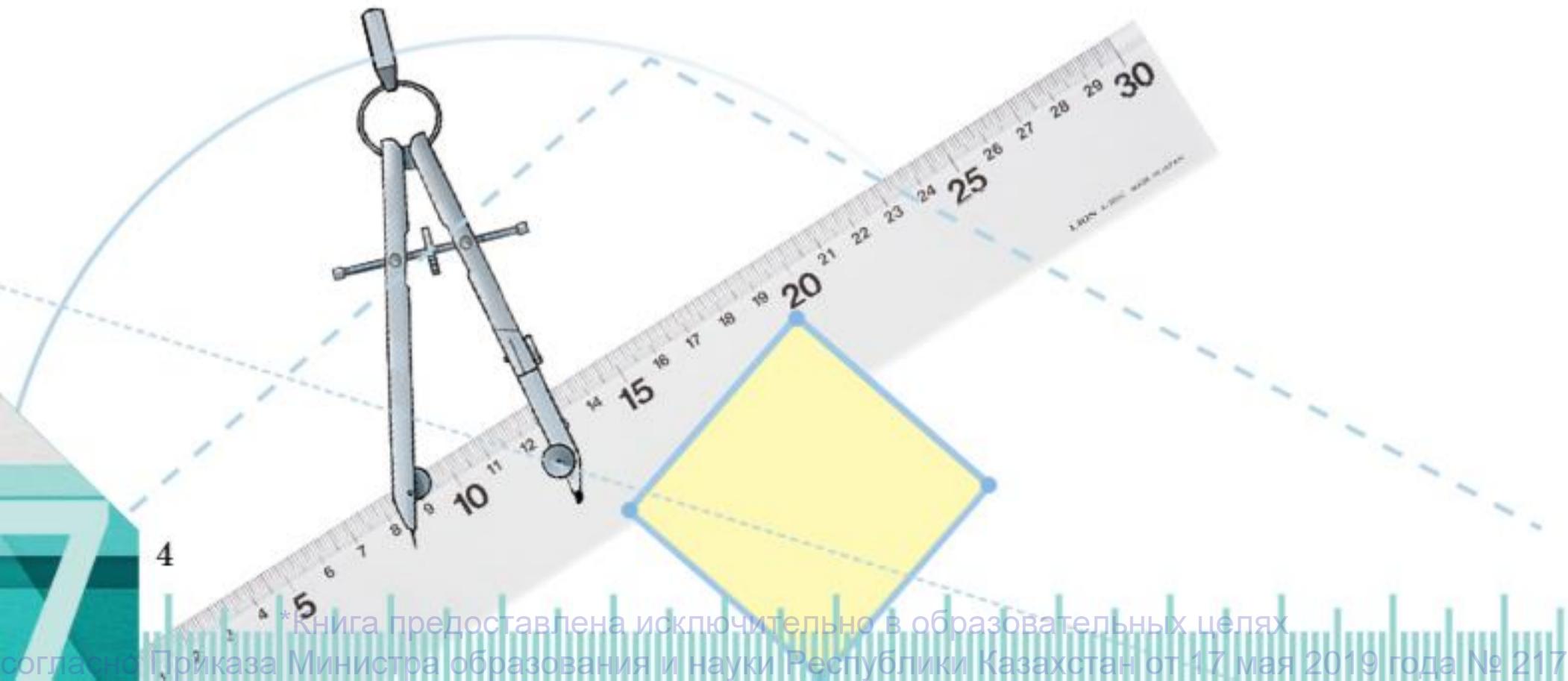
Хўш, геометрия нима учун зарур? Биринчидан, айнан геометрия фазовий фигуralарнинг турлари билан таниширади, керакли фазовий тасаввурларни шакллантиради. Иккинчидан, геометрия илмий билиш услубини беради, мантиқий фикрлаш қобилиятини ривожлантиради. Учинчидан, геометрияни ўрганиш фазовий фигуralарни тасвиirlаш, моделлаш ва қуриш, асосий геометрик катталикларни (узунлик, бурчаклар, юза, ҳажм) ўлчаш учун зарурий амалий кўникма ҳосил қилишга имкон беради.

Мазкур курсда Сиз асосий геометрик фигуralар билан танишасиз, уларни ясашни, қўшимча ясашлар олиб боришни, исботлашни, кесмаларнинг узунлигини, бурчакларнинг катталикларини, амалий ва бошқа масалаларни ечишни ўрганасиз.

Машқларнинг тўғрилигини текшириш учун дарсликнинг охирги бетида масаллар жавоблари берилган.

Ҳар бир боб охирида ўтилган мавзууни үзлаштиришини текширишга мўлжалланган тест топшириқлари берилган.

Геометрияни ўқиб ўрганишингизда омад тилаймиз!



*Книга представлена исключительно в образовательных целях

согласно Приказа Министра образования и науки Республики Казахстан от 17 мая 2019 года № 217

ГЕОМЕТРИЯНИНГ БОШЛАНГИЧ ТУШУНЧАЛАРИ

1-§. ГЕОМЕТРИЯНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Геометрик фигуналар ҳақида тушунча бизни ўраб турған обьектарни күрсатади. Бинобарин, ҳақиқий обьектларга нисбатан геометрик фигуналар аниқ бўлади.

Нуқта жуда кичик обьектларнинг тасвири ҳисобланади. Қадимги юнон олим Евклид ўзининг “Негизлар” номли асарида биринчилардан бўлиб геометрияни илмий нуқтаи назардан ўрганиб, нуқтани қисмлари йўқ бўлган фигура сифатида қараган.

Нуқталар қоғозга учи яхши чиқарилган қалам ёки ручка билан, тахтага эса бор ва ҳ. к. билан чизилади. Бироқ нуқталарнинг тасвири фақат умумлаштирилган варианти, чунки қалам билан чизилган нуқтанинг ҳамма вакт жуда кичик бўлса ҳам ноль бўлмаган ўлчовлари мавжуд бўлади, геометрик нуқтада эса ўлчов бўлмайди.

Нуқталар лотинча бош ҳарфлар билан белгиланади: A, B, C, \dots , $A_1, B_2, C_3, \dots, A', B'', C''$,

Тўғри чизиқ тортилган ингичка ипнинг, тўғри тўртбурчак шаклидаги стол қиррасининг тасвири ҳисобланади. Ёруғлик нури тўғри чизиқ бўйича тарқалади.

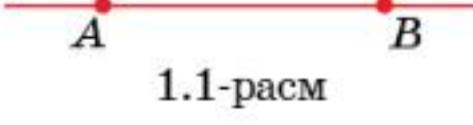
Евклид тўғри чизиқни эни бўлмаган узунлик сифатида ўрганганди.

Тўғри чизиқлар қоғоз ёки тахтага чизғич ёрдамида чизилади. Тўғри чизиқларнинг тасвири чекли бўлишига қарамай, уларни иккала томонидан ҳам чексиз деб фараз қилиш керак. Тасвирлаш учун тўғри чизиқнинг ранги муҳим эмас. Тўғри чизиқлар лотин алифбосининг кичик ҳарфлари билан $a, b, c, \dots, a_1, b_2, c_3, \dots, a', b'', c'''$, ... ёки лотин алифбосининг иккита бош ҳарфлари билан $AB, CD, \dots, A_1B_1, C_2D_2, \dots, A'B', C''D''$, ... белгиланади.

Текислик сув, стол, тахта, ойна ва ҳ.к. ясси сиртнинг тасвири ҳисобланади.

Нуқта берилган тўғри чизиқка тегишли бўлиши мумкин, бу ҳолда тўғри чизиқ нуқта орқали ўтади, деб айтилади, шу билан бир қаторда, нуқта тўғри чизиқка тегишли бўлмаслиги мумкин, у ҳолда тўғри чизиқ нуқта орқали ўтмайди, деб айтилади. 1.1-расмда AB нуқталари a тўғри чизигига тегишли, C нуқта тегишли эмас.

• c



1.1-расм

Евклид таклиф қилған ва амалга оширган геометрияни аксиоматик усул билан қуриш ғояси қуйидаги: агар биз үрганилган объектнинг нимани билдиришини аниклай олмасак, у ҳолда объектнинг мұхим белгиларини бўлиб олиб, унинг хоссаларини аниклашимиз керак. Бу хоссалар *аксиомалар* деб аталади, юон тилидан таржима қилинганда “шубҳа йўқ, лойиқ деб топилган” деган маъноларни билдиради.

Масалан, шахмат доналаридаги каби фил ҳақиқий филга ўхшамайдиган, турли хил материаллардан ясалиши, турли хил шаклларда бўлиши мумкин. Барча ушбу белгилар улар учун мұхим ҳисобланмайди. Энг мұхими, уларнинг шахмат тахтасидаги ҳаракатланиш қоидаси (аксиомалар).

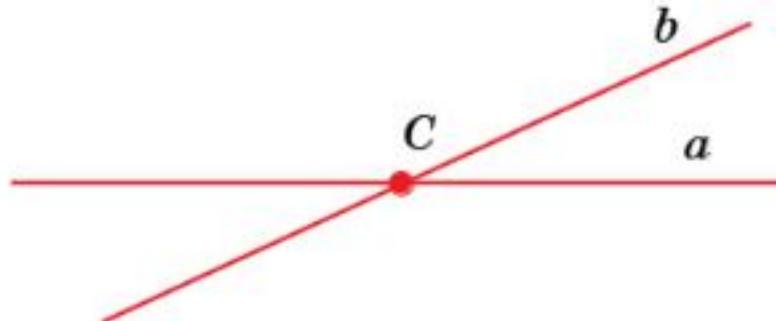
Ҳар бир фаннинг ўзига хос қоидалари мавжуд. Кундалик ҳаётда у ёки бу белгиланган қоидаларга дуч келамиз. Масалан, турли хил ўйинлар қоидаларга асосланган. Компьютер билан ишлаш давомида муайян қоидаларга эътибор қаратамиз. Кишиларнинг турли соҳалардаги фаолиятини тартибга солувчи қонунлар тўплами ҳам қоидалар тўплами ҳисобланади.

Худди шу каби геометрия аксиомаларини геометриядаги ўйин қоидалари сифатида кўриб чиқиш мумкин. Мантиқий фикрлаш орқали, аксиомалардан фойдаланган ҳолда *теоремалар* деб аталувчи геометрик фигуralар хоссалари олинади (исботланади). Бу ерда мантиқий муроҳазалар — исботлашлар алоҳида ўринга эга. Геометрик фигуralарнинг баъзи бир хоссалари расмдан келиб чиқсан бўлиб кўриниши мумкин, бироқ улар исбот талаб қиласди. Расмлар исботни топишга ёрдамлашади, бироқ унинг ўрнини эгаллай олмайди.

Аксиома сифатида қуйидаги хоссалар қабул қилинади:

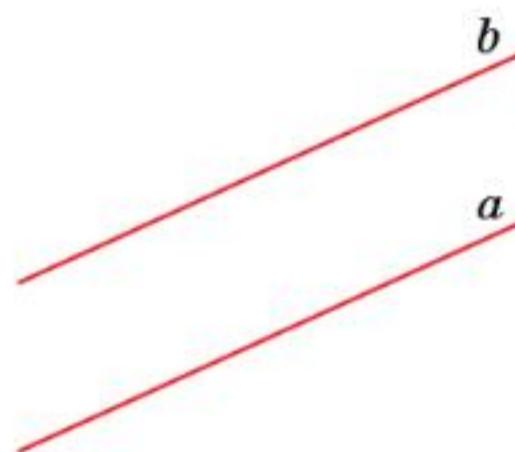
Ихтиёрий иккита нуқта орқали ягона тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Агар иккита тўғри чизиқ битта умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда тўғри чизиқлар ана шу нуқтада *кесишади* деб айтамиз (1.2-расм).



1.2-расм

Битта текисликда ётувчи ва умумий нұқтага эга бүлмаган икки түгри чизик параллель түгри чизиқтар деб аталади (1.3-расм).



1.3-расм

Текисликда икки түгри чизиқнинг жойлашуви



1.2, 1.3-расмларга үхашаш учта түгри чизиқнинг турли хил үзаро жойлашиш ҳолларини тасвирланг.



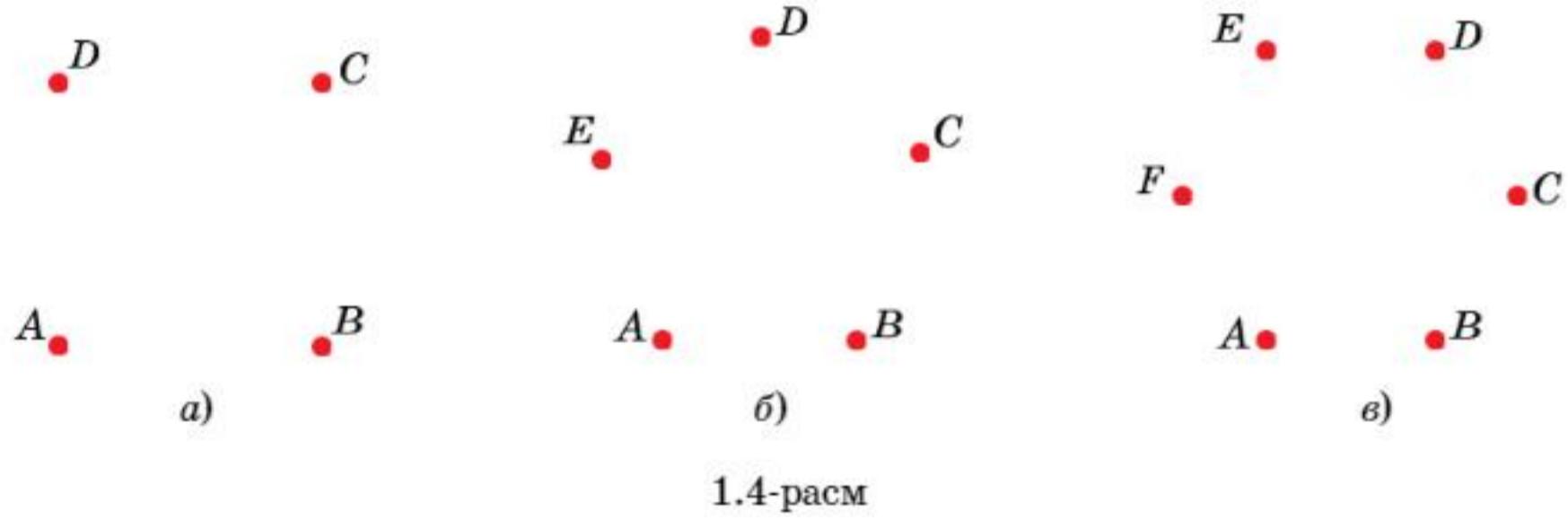
1. Нұқта қандай объектларнинг тасвири ҳисобланади?
2. Евклид нұктани қандай аниклаган?
3. Нұқталар қандай тасвирланади?
4. Нұқталар қандай белгиланади?
5. Түгри чизик қандай объектларнинг тасвири ҳисобланади?
6. Евклид түгри чизиқни қандай аниклаган?
7. Түгри чизиқтар қандай тасвирланади?
8. Түгри чизиқтар қандай белгиланади?
9. Түгри чизиқнинг асосий хоссаларидан бири қайси?
10. Нұқта ва түгри чизик үзаро қандай жойлашиши мүмкін?
11. Иккита түгри чизиқнинг нечта умумий нұктаси бўлиши мүмкін?
12. Текислик қандай объектларнинг тасвири ҳисобланади?
13. Қандай иккита түгри чизик кесишади дейилади?
14. Қандай иккита түгри чизик параллель дейилади?
15. Текисликда иккита түгри чизик үзаро қандай жойлашиши мүмкін?
16. Геометрияни аксиоматик усул билан қуришнинг мақсади нимада?
17. Аксиома нима?
18. Теорема нима?
19. Исбот нима?



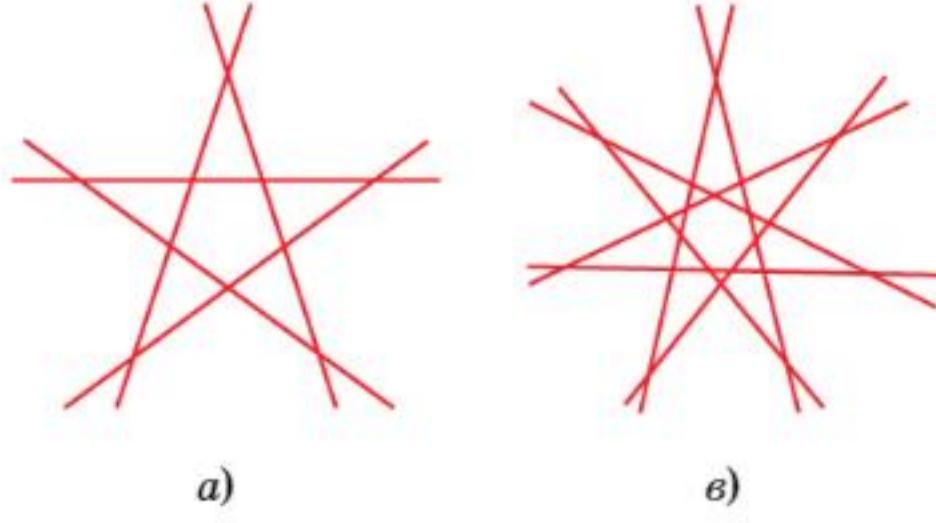
Машқлар

А

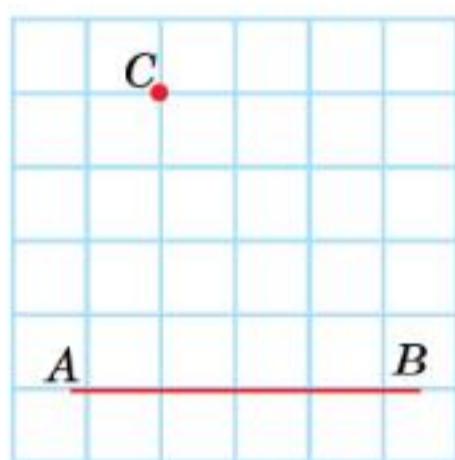
- 1.1.** Түғри чизиққа тегишли ва тегишли бўлмаган нуқталари бўлган түғри чизик чизинг.
- 1.2.** A, B, C нуқталар битта түғри чизиққа тегишли бўлсин ва B, C, D нуқталар битта түғри чизиққа тегишли бўлсин. Барча A, B, C, D нуқталари ҳақида нима дейиш мумкин?
- 1.3.** Битта түғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтани белгиланг. Берилган учта нуқтадан турли хил нуқталар жуфти орқали ўтувчи түғри чизиқларни ясанг. Бундай түғри чизиқларнинг сони қанча?
- 1.4.** Учта нуқтаси битта түғри чизиқда ётмайдиган: а) тўртта нуқта; б) бешта нуқта; в) олтига нуқта ясанг (1.4-расм). Ушбу нуқталардан турли хил нуқталар жуфти орқали ўтувчи түғри чизиқларни ясанг. Бундай түғри чизиқлар нечта?



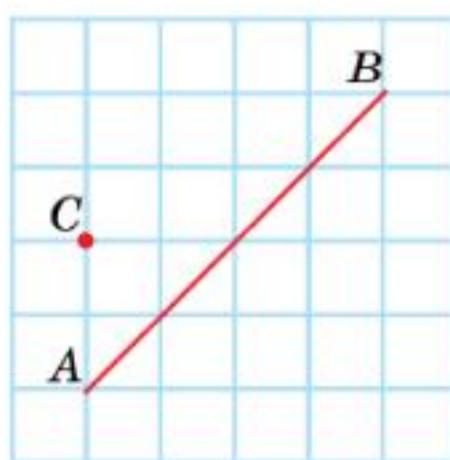
- 1.5.** 1.5-расмда нечта түғри чизик тасвириланган? Жуфтларнинг кесишиш нуқталари сони нечта?



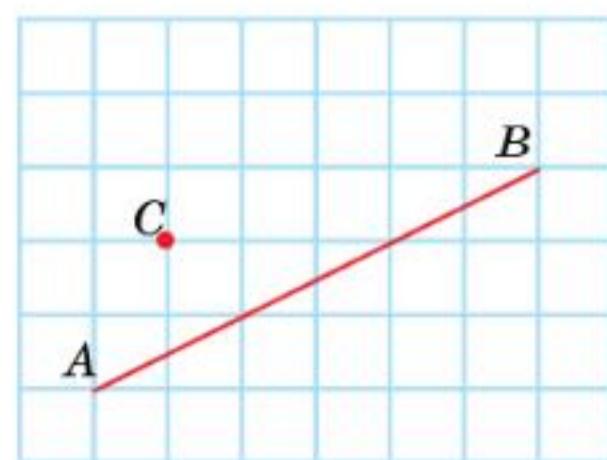
- 1.6.** Катак қоғозга 1.6-расмда күрсатилгани каби AB түғри чизик ва C нүктаны ясанг. C нүкта орқали үтувчи AB түғри чизикқа параллель түғри чизик ясанг.



a)



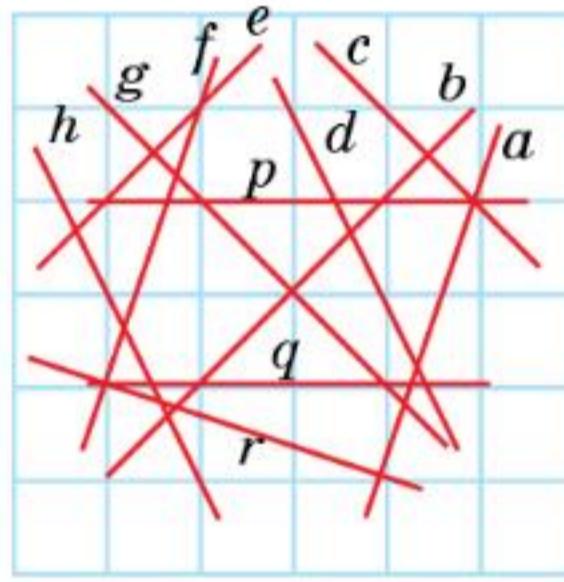
б)



в)

1.6-расм

- 1.7.** 1.7-расмда тасвирланган a түғри чизик билан кесишувчи түғри чизикларни күрсатинг.

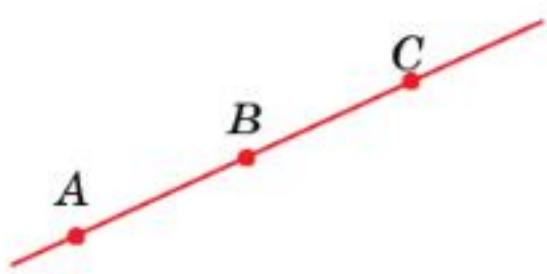


1.7-расм

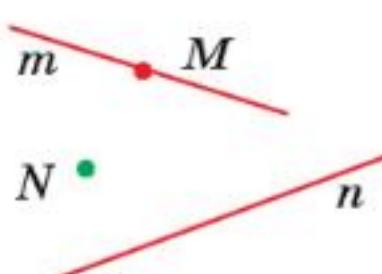
B

- 1.8.** a , b , c түғри чизиклар битта нүктада кесишадиган бўлсин ва b , c , d түғри чизиклар битта нүктада кесишисин. Барча a , b , c , d түғри чизиклар ҳақида нима дейиш мумкин?
- 1.9.** Учта түғри чизик кесишганда кесишувчи жуфтларнинг нечта нүктаси бўлиши мумкин? Турли хил ҳолларни тасвирланг.
- 1.10.** Кесишувчи жуфтларнинг : а) учта нүктаси; б) тўртта нүктаси; в) бешта нүктаси; г) олтига нүктаси бўладиган қилиб тўртта түғри чизик чизинг.
- 1.11.** Кесишувчи жуфтларнинг ўнта нүктаси бўладиган қилиб бешта түғри чизик чизинг.

- 1.12.** 1.8 ва 1.9-расмлардан фойдаланиб, иккита рост ва иккита ёлғон муроҳаза тузинг.



1.8-расм



1.9-расм

- 1.13.** Онажан, Саида, Нурбек ва Рамазон түғри чизик бүйича бир қаторга туришди. Нурбек Онажон ва Сайданинг ўртасида, Саида эса Нурбек ва Рамазоннинг ўртасида турибди. Болалар қандай тартибда турибди?

C

- 1.14.** Қуидаги: а) 3 нұқта; б) 4 нұқта; в) 5 нұқта; г) $*n$ нұқталар жуфти орқали нечта түғри чизик үтказиш мүмкін? Ҳар бир учта нұқта битта түғри чизикда ётmasлиги керак.
- 1.15.** Қуидаги: а) 3 та түғри чизик; б) 4 та түғри чизик; в) 5 та түғри чизик; г) $*n$ та түғри чизик жуфт-жуфти билан кесишишганды ҳосил бўладиган нұқталарнинг энг кўп сони нечта?

Ахборот тайёрланг

- 1.16.** Геометрия фани тарихидаги асосий шахслар — Пифагор, Евклид, Архимед, И.Кеплар, Р.Декарт, Л.Эйлар, Н.И. Лобачевский. Ушбу олимларнинг ҳаёти, илмий ишлари ҳақида ахборот тайёрланг.

Яңги мавзууни ўзлаштиришга тайёрланинг

- 1.17.** Түғри чизикда: а) битта нұқта; б) иккита нұқта; в) учта нұқта; г) $*n$ та нұқта белгиланган. Бу нұқталар берилган түғри чизикни неча бўлакка бўлади?

2-§. НУР ВА КЕСМА

Түғри чизик ясанг ва унда ётувчи ихтиёрий нұқта белгиланг.



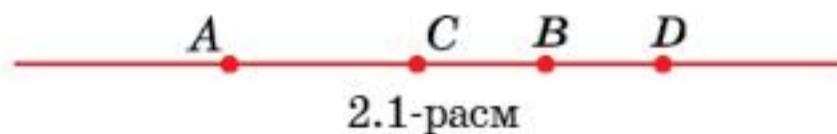
Сиз нима деб ўйлайсиз, бу нұқта түғри чизикни неча бўлакка бўлади?

Тұғри чизиқнинг ушбу хоссаси аксиома сифатида қабул қилинади.

Тұғри жавоб — икки бүлакка бўлади.

Тұғри чизиқдаги ҳар бир нуқта шу тұғри чизиқни икки бүлакка бўлади.

2.1-расмда C нуқта тұғри чизиқни икки бүлакка бўлади. A ва B нуқталар тұғри чизиқнинг турли қисмида жойлашган. Бу ҳолда A ва B нуқталар C нуқтанинг *турли томонида ётибди*, C нуқта эса A ва B нуқталарнинг *орасида ётади* дейилади. B ва D нуқталар тұғри чизиқнинг бир қисмида жойлашган. Бу ҳолда B ва D нуқталар C нуқтанинг *бир томонида ётади* дейилади.



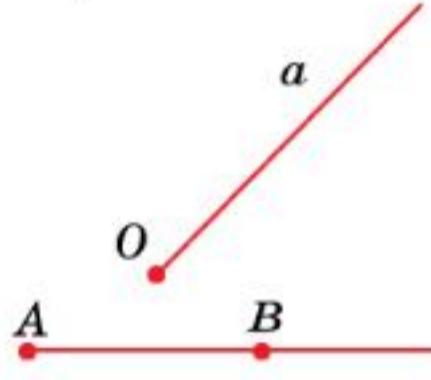
2.1-расм

Нур ёки ярим тұғри чизиқ деб, берилган нуқта билан барча нуқталар шу берилган нуқтанинг бир томонида ётувчи тұғри чизиқнинг қисмiga айтилади. Берилган нуқта *нурнинг учи* ёки *нурнинг боши* дейилади.

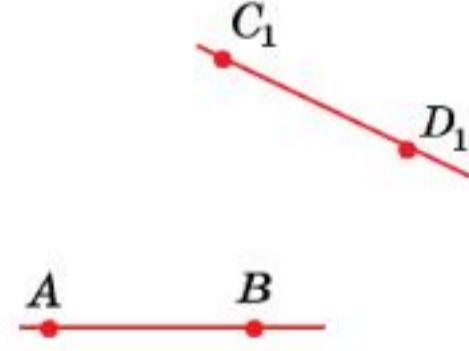
Нурни белгилаш учун лотин алифбосидаги кичик ҳарфлардан фойдаланилади, масалан, *a* ёки лотин алифбосидаги бош ҳарфларнинг жуфти, масалан, AB . Бу жуфтнинг биринчи ҳарфи нурнинг учини, иккинчи ҳарфи эса нурда ётган ихтиёрий бир нуқтани билдиради (2.2-расм).

Икки нуқта ва улар орасида жойлашган нуқталардан ташкил топған тұғри чизиқнинг бўлаги *кесма* деб аталади. Бунда берилган нуқталар *кесманынг учлари* деб аталади.

Кесма учларидаги нуқталар билан белгиланади. Масалан, AB , C_1D_1 (2.3-расм) ва ҳ.к.



2.2-расм



2.3-расм

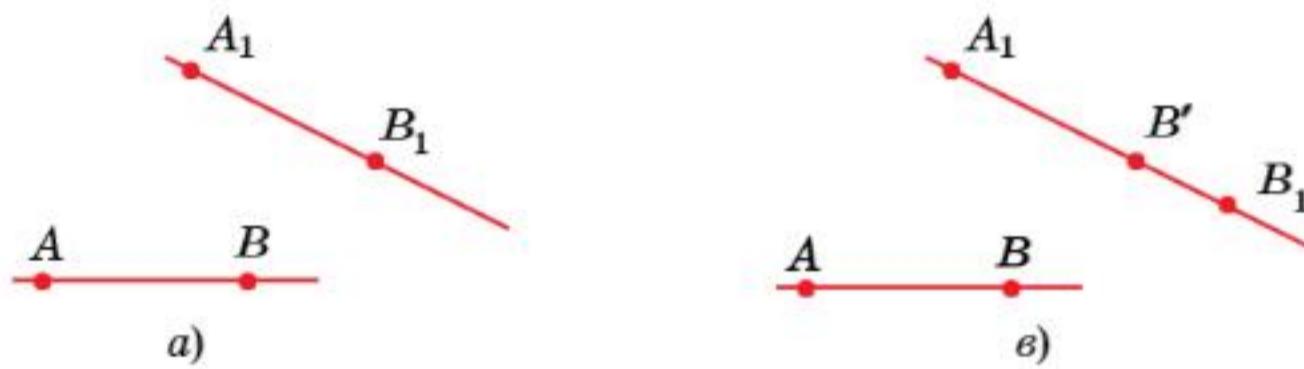
Кесмалар устида бажариладиган асосий амаллардан бири берилган нурнинг учидан бошлаб *берилган кесмани жойлаштириш* ҳисобланади. Бу ерда ҳосил бўлган кесма дастлабки кесмага *тенг* кесма деб аталади.

Қуйидаги хоссани аксиома сифатида қабул қилиш мумкин.

Ихтиёрий нурнинг учидан бошлаб берилган кесмага тенг бўлган ягона кесма ясаш мумкин.

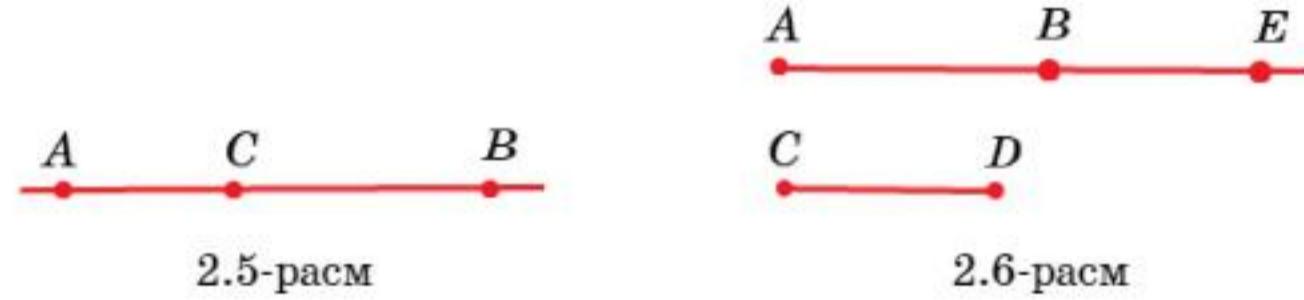
AB ва A_1B_1 кесмаларнинг тенглиги $AB = A_1B_1$ күринишида ёзилади. Агар ушбу кесмалардан бирини, масалан, AB кесмани A_1B_1 нуктадан бошлаб A_1 нурда жойлаштирасак, у ҳолда AB кесма A_1B_1 кесма билан устма-уст тушади (2.4-расм).

Агар AB кесма A_1 нуктадан бошлаб A_1B_1 нурга жойлаштирилганда A_1 ва B_1 нукталар орасида ётган B нукта B' нуктага алмашса, у ҳолда AB кесма A_1B_1 кесмадан кичик дейилади ва $AB < A_1B_1$ каби белгиланади. Шу билан бир қаторда, A_1B_1 кесма AB кесмадан катта деб айтилади ва $A_1B_1 > AB$ күринишида белгиланади (2.4, б-расм)



2.4-расм

Агар AB кесманинг A ва B нукталари орасидан ихтиёрий C нуктани олсак, у ҳолда AC ва CB янги иккита кесма ҳосил бўлади. AB кесма AC ва CB кесмаларнинг йигиндиси деб аталади ва $AB = AC + CB$ күринишида белгиланади (2.5-расм). AC ва CB кесмаларнинг ҳар бири AB кесма билан иккинчи кесманинг айримаси деб аталади ҳамда $AC = AB - CB$, $CB = AB - AC$ каби белгиланади.



2.5-расм

2.6-расм

Ихтиёрий AB ва CD кесмаларни қўшиш учун AB кесмани B нуктадан бошлаб давом эттирамиз ва BE кесмани CD кесмага тенг қилиб ясаймиз (2.6-расм). AE кесма AB ва CD кесмаларнинг йиғиндисини беради: $AE = AB + CD$.



Худди шу каби ўзингиз катта кесмадан кичигини айрииш қоидасини келтириб чиқаринг.

Кесмани тенг иккига бўлувчи нукта унинг ўртаси дейилади.



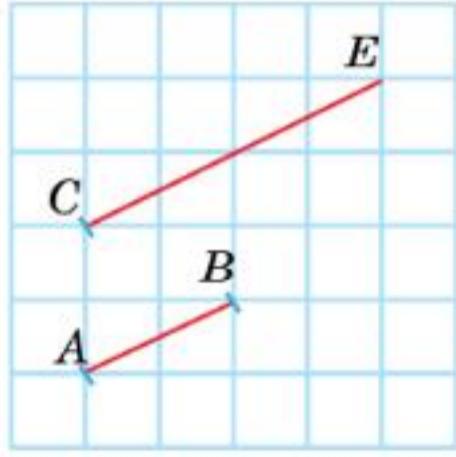
1. Аксиома сифатида қабул қилинган тўғри чизикнинг хоссасини келтириб чиқаринг.
2. Қандай фигура нур деб аталади?

3. Нур қандай белгиланади?
4. Нур бошқача қандай аталади?
5. Нурнинг учи бошқача қандай аталади?
6. Қандай фигура кесма деб аталади?
7. Кесма қандай белгиланади?
8. Кесма устида қандай амаллар бажарилади?
9. Кесмаларнинг тенглиги қандай белгиланади?
10. Қандай нүкта кесманинг ўртаси деб аталади?

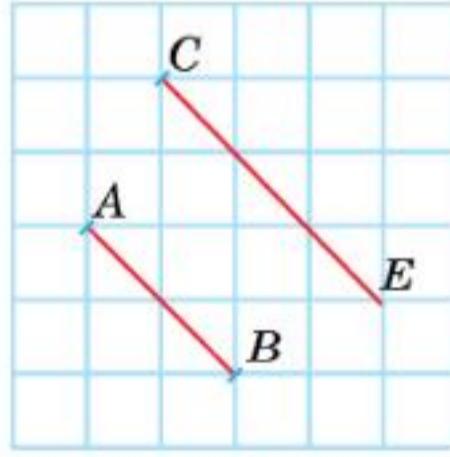
Машқлар

A

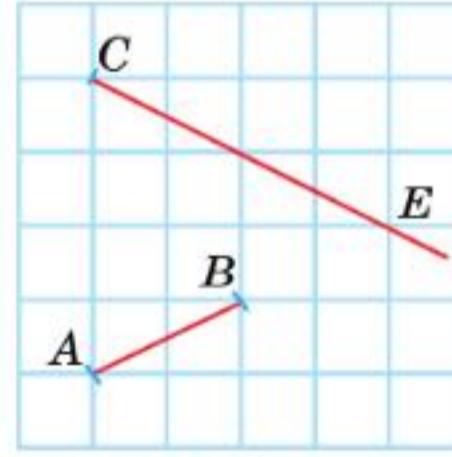
- 2.1.** Берилган нүктани учи сифатида қабул қилиб, нечта нур ўтказиш мумкин?
- 2.2.** Берилган түғри чизикда ётувчи, ушбу түғри чизикдаги барча нүкталар учи бўладиган нечта нур мавжуд?
- 2.3.** AB кесмада C нүкта олинган. AB , AC , CA , CB , BA , BC нурлар орасидан мос нурлар жуфтини аниқланг.
- 2.4.** A, B, C, D нүкталарни қуйидаги шартлар бажариладиган қилиб түғри чизикда тасвиirlанг:
 - а) C нүкта A ва B нүкталар орасида, D нүкта эса B ва C нүкталар орасида ётсин;
 - б) A нүкта B ва C нүкталар орасида, C нүкта эса B ва D нүкталар орасида ётсин.
- 2.5.** Катак қофозда 2.7-расмдаги каби CE нур ва AB кесмани ясанг. CE нурнинг C учидан AB кесмага тенг бўлган CD кесма ясанг.



a)



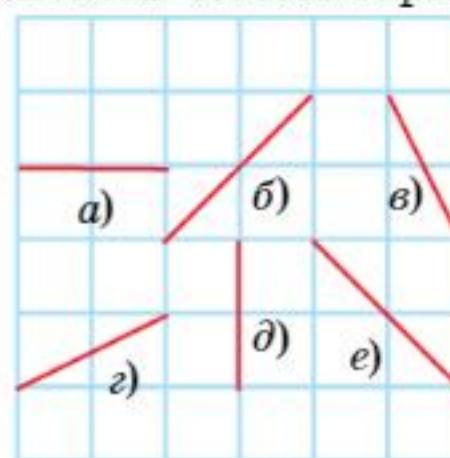
б)



в)

2.7-расм

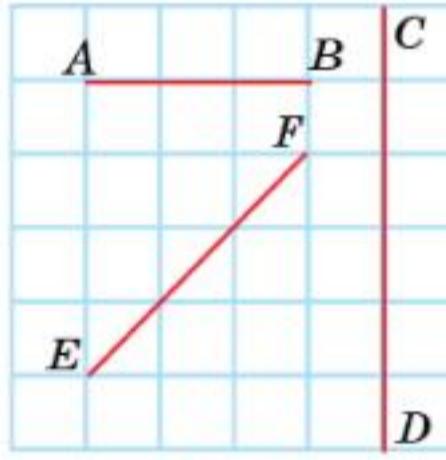
2.6. 2.8-расмда берилған тенг кесмаларни күрсатинг.



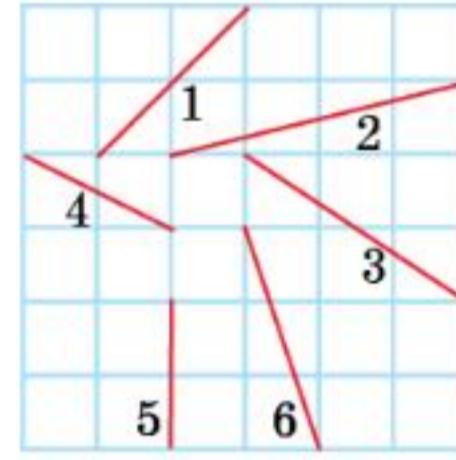
2.8-расм

B

- 2.7.** Түғри чизиқдаги A, B, C, D нүкталар учун B ва C нүкталар A нүктадан бир томонда, B ва D нүкталар A нүктадан бир томонда ётгани маълум. C ва D нүкталар A нүктага нисбатан қандай жойлашған?
- 2.8.** 2.9-расмда күрсатилгани каби катак қоғозда кесмаларни ясанг. AB, CD, EF кесмаларнинг ўртасини күрсатинг.
- 2.9.** 2.9-расмда күрсатилгани каби катак қоғозда кесмаларни ясанг. AB, CD, EF кесмаларни тенг уч бўлакка бўладиган нүкталарни күрсатинг.

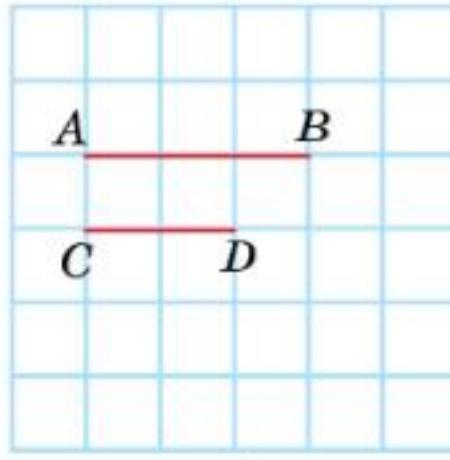


2.9-расм

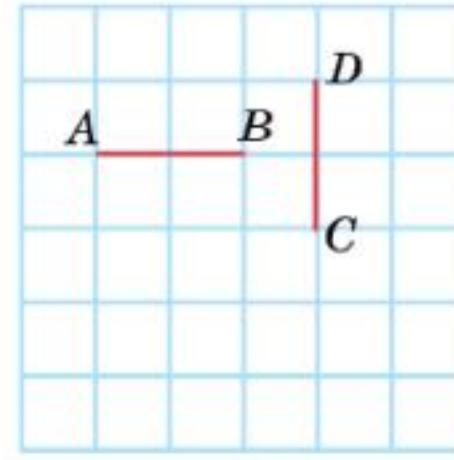


2.10-расм

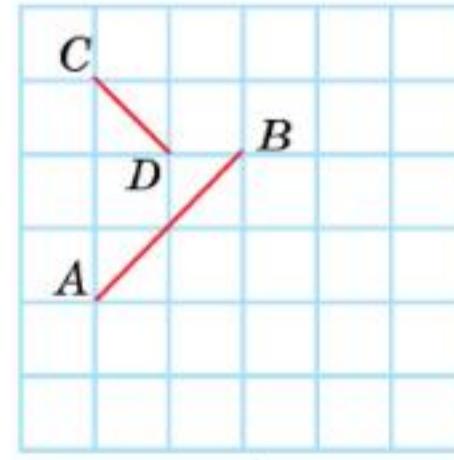
- 2.10.** 2.10-расмда тасвирланган кесмаларни ўсиш тартибида жойлаштиринг.
- 2.11.** 2.11-расмда тасвирлангани каби катак қоғозда кесмаларни ясанг. AB ва CD кесмаларнинг йиғиндисига тенг бўлган кесмани ясанг.



a)



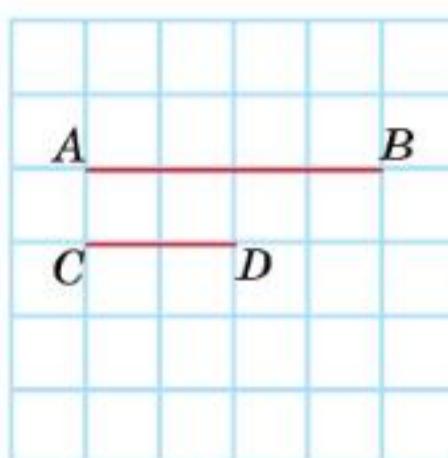
б)



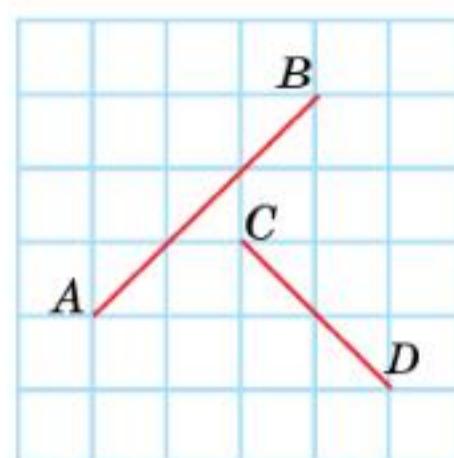
в)

2.11-расм

- 2.12.** 2.12-расмда күрсатилгани каби катак қоғозда кесмаларни ясанг. AB ва CD кесмаларнинг айирмасига тенг кесмани ясанг.



a)



б)

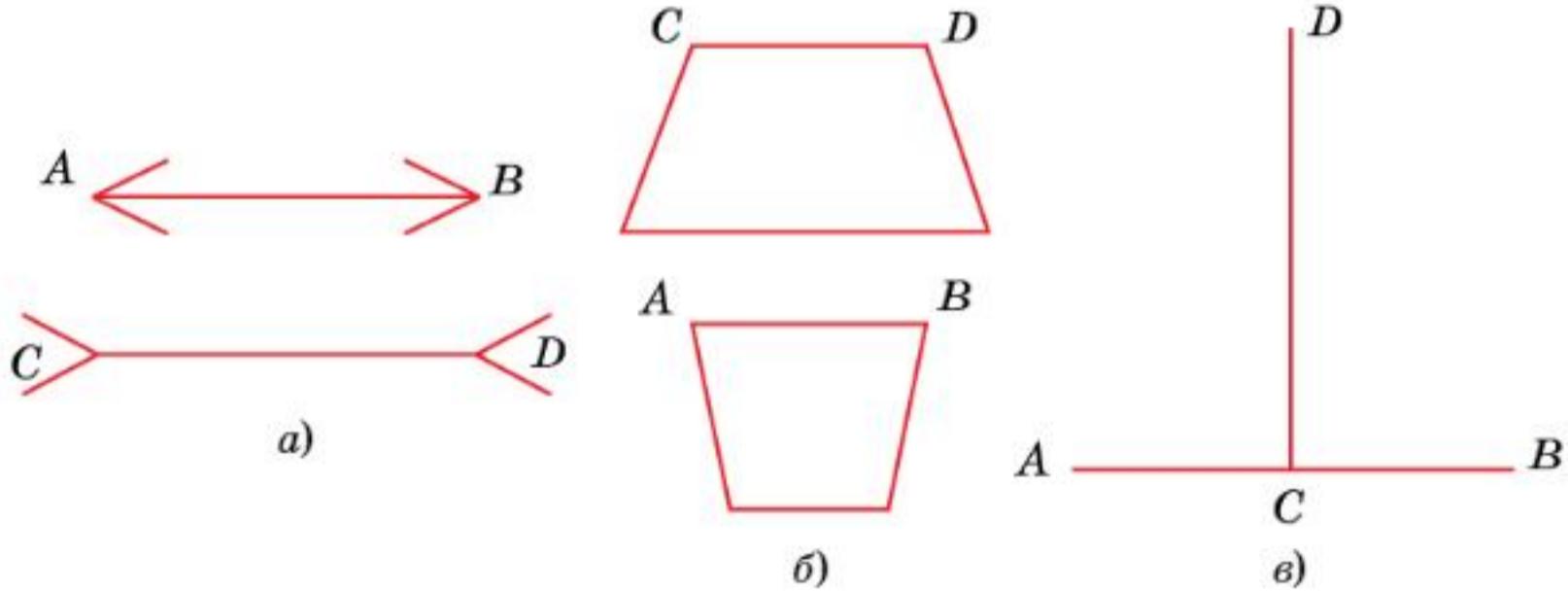
2.12-расм

С

- 2.13.** Түғри чизикда: а) 3 та нүкта; б) 4 та нүкта; в) 5 та нүкта; г) $*n$ та нүкта белгиланган. Ушбу нүкталар учлари бўлган, берилган түғри чизикда ётувчи нечта нур мавжуд?

- 2.14.** Түғри чизикда: а) 3 та нүкта; б) 4 та нүкта; в) 5 та нүкта; г) $*n$ та нүкта белгиланган. Ушбу нүкталар учлари бўлган нечта кесма мавжуд?

- 2.15.** 2.13-расмда тасвиirlанган AB ва CD кесмаларни таққосланг.



2.13-расм

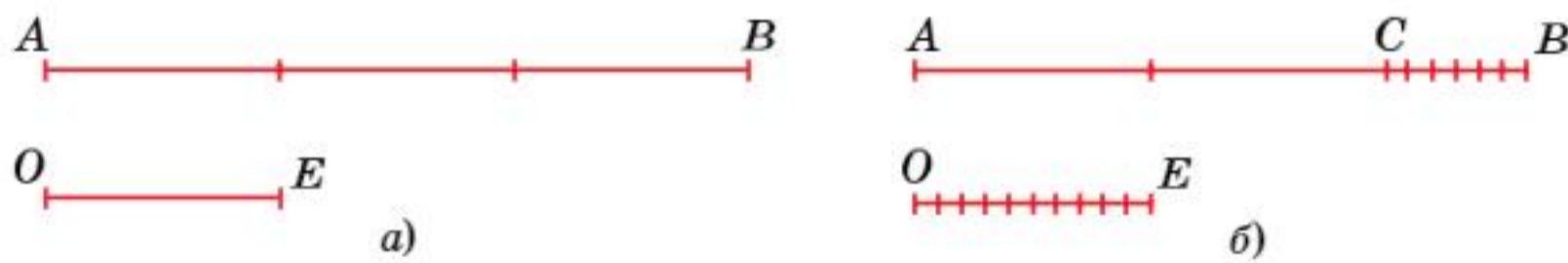
Янги мавзуни үзлаширишга тайёрланинг

- 2.16.** Түғри чизик ясанг. Чизғич ёрдамида түғри чизикда бир йўналишда узунлиги 5 см бўлган AB кесма ва узунлиги 6 см бўлган BC кесма олинг. AC кесманинг узунлигини топинг.

3-§. КЕСМАЛАРНИНГ УЗУНЛИГИНИ ЫЛЧАШ

Кесмаларнинг узунлигини ўлчаш узунлик бирлиги сифатида қабул қилинган (бирлик кесма) кесманинг узунлиги билан таққослашга асосланган. *Кесманинг узунлиги* – бирлик кесмани берилған кесмада неча марта жойлаштириш мүмкінлегини күрсатувчи мусбат сон.

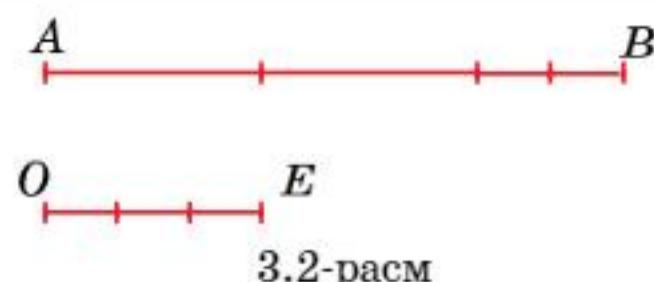
AB кесманинг узунлигини ўлчаш учун AB нурнинг A учидан бошлаб OE бирлик кесма кетма-кет жойлаштириләди. Агар бирлик кесмани AB кесмада қолдиксиз бир неча марта жойлаштириш мүмкін бўлса, у ҳолда ўлчаш натижасида олинган бутун сон кесманинг узунлиги ҳисобланади. Масалан, 3.1-а расмда бирлик кесма берилған кесма бўйлаб уч марта жойлаштирилган.



3.1-расм

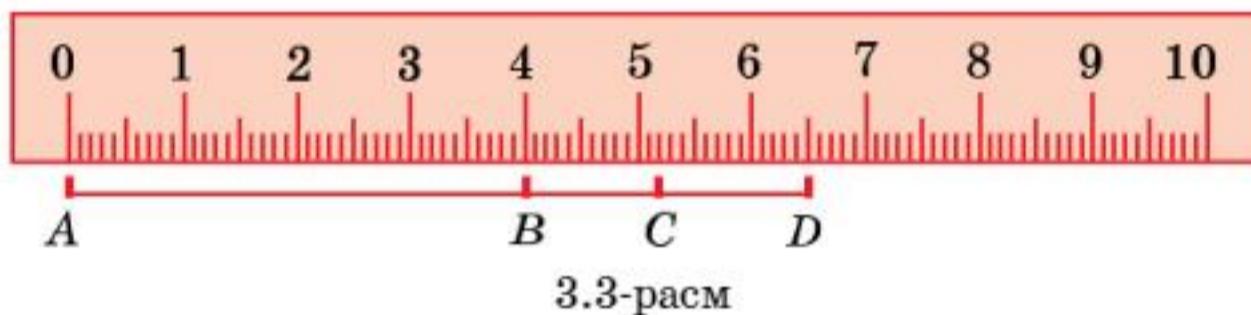
AB кесмада бирлик кесма бутун ва қолдиқ билан жойлаштирилса, яъни бирлик кесманинг учи C нуқта AB кесманинг учи билан устма-уст тушса ва CB қолган қисми бирлик кесмадан кичик бўлса (3.1-б расм), у ҳолда n сони бирлик кесма ўлчовининг тақрибий қиймати бўлади (1 гача аниқликда). Бу ҳолда бирлик кесма 10 та тенг бўлакка бўлинади. CB нурнинг C учидан бирлик кесманинг ўнли қисми кетма-кет жойлаштирилиб, CB кесманинг неча марта келишини билдирувчи m сони топилади. Агар охирги кесманинг учи CB кесманинг учи билан устма-уст тушса, у ҳолда ўлчаш жараёни тўхтатилиб, n , m ўнли касрлар билан ифодаланувчи сон AB кесманинг узунлиги бўлади. 3.1-б расмда $n=2$, $m=6$.

Агар охирги кесманинг учи CB кесманинг учи билан устма-уст тушса, у ҳолда n , m сонлари кесма узунлигининг тақрибий қиймати ҳисобланади (0,1 гача аниқликда). Бундай ҳолларда бирлик кесманинг ўндан бир бўлаги тенг ўн бўлакка бўлинади ва юқоридаги жараён такрорланади. Натижада ўлчаш жараёни маълум бир қадамдан кейин тугаши мүмкин. Бундай ҳолларда кесманинг узунлиги ўнли касрлар билан ифодаланади. Айрим ҳолларда бу ўлчаш жараёни ҳеч қандай қадамда тугамаслиги мүмкин. Бундай ҳолларда кесманинг узунлиги чексиз ўнли каср билан ифодаланади. Бирлик кесмани тенг 10 та бўлакка бўлибгина қўймай, бошқа тенг бўлакларга ҳам бўлиш мүмкин. Агар бирлик кесмани тенг q бўлакларга бўлиб ва ана шу бўлакни AB кесмада р марта жойлаштириш мүмкин бўлса, у ҳолда AB кесманинг узунлиги $\frac{p}{q}$. 3.2-расмда $q = 3$, $p = 8$.



AB кесманинг узунлиги A ва B нүқталар орасидаги масофа дейилади. AB кесма узунлиги AB деб белгиланади.

Кесмаларнинг узунлигини ўлчаш учун турли хил ўлчов қуролларидан фойдаланилади, улар ичида энг соддаси сантиметрлар билан бўлинган ва унинг ўнли бўлаги миллиметрлар билан бўлинган чизғич. 3.3-расмда AB , AC ва AD кесмаларнинг узунликлари мос равища 4 см, 5 см 2 мм, 6 см 5 мм га teng.



Маҳаллий ҳудудларда узунликни ўлчаш учун, одатта, бирлик кесма сифатида ўлчови 1 м (метр), 100 см га teng бўлган ўлчов тасмасидан фойдаланилади. Узун масофаларни ўлчаш учун ўлчов бирлиги сифатида 1000 м га teng бўлган 1 км (километр) узунлик олинади. Кесмаларнинг узунлиги учун қуидаги хоссалар бажарилади.

1-хосса. Тeng кесмаларнинг узунликлари teng бўлади.

2-хосса. Кесмалар йигиндисининг узунлиги улар узунликларининг йигиндисига teng.



Кесмалар айрмасининг узунлиги нимага teng эканлигини ўзингиз келтириб чиқаринг.



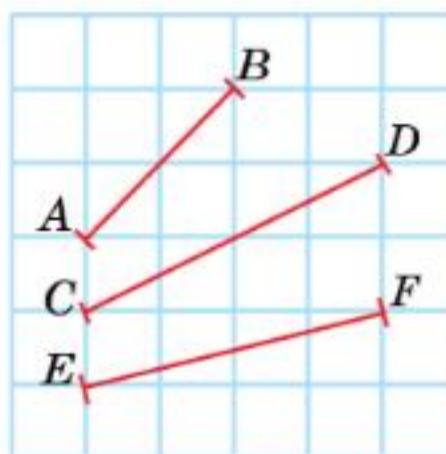
1. Кесманинг узунлиги деб нимага айтилади?
2. Кесманинг узунлиги қандай белгиланади?
3. Кесманинг узунлиги қандай ўлчанади?
4. Икки нүқта орасидаги масофа деб нимага айтилади?
5. Кесмаларнинг узунлиги учун қандай хоссалар бажарилади?

Машқлар

A

- 3.1.** Чизғичдан фойдаланиб, узунлиги: а) 6 см; б) 18 мм; в) 1 дм бўлган кесмаларни таққосланг.

- 3.2.** Катак қоғозга 3.4-расмда күрсатилгани каби AB , CD , EF , кесмаларни ясанг. Уларнинг узунлигини чизғич ёрдамида үлчанг.



3.4-расм

- 3.3.** 3.5-расмда $AB = CD$, $AC = 6$ см. BD ни топинг.

- 3.4.** 3.5-расмда $AC = BD$, $AC = 10$ см, $CD = 4$ см. BC кесманинг узунлигини топинг.



3.5-расм

B

- 3.5.** С нуқта тўғри чизиқдаги A ва B нуқталар орасида жойлашган. Агар: а) $AC = 2$ см, $CB = 3$ см; б) $AC = 3$ дм, $CB = 4$ дм; в) $AC = 12$ м, $CB = 5$ м бўлса, AB кесманинг узунлиги топинг.

- 3.6.** Тўғри чизиқнинг бир томонида $OE = 5$ см, $EF = 30$ мм, $FG = 15$ мм, $GH = 11$ см кесмалар жойлашган. а) OF ; б) OH ; в) EG ; г) FH кесмаларни топинг.

- 3.7.** A , B ва C нуқталар битта тўғри чизиқقا тегишли. Агар $AB = 4$ см, $AC = 7$ см, $BC = 3$ см эканлиги маълум бўлса, у ҳолда A , B , C нуқталарнинг қайсилари қолган иккитасини орасида жойлашган?

- 3.8.** Агар $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см бўлса, у ҳолда A , B , C нуқталар битта тўғри чизиқда ётиши мумкинми?

- 3.9.** A , B ва C нуқталар битта тўғри чизиқка тегишли. Агар $AC = 3$ см, $BC = 5$ см бўлса, у ҳолда B нуқта AC кесмага тегишлими?

- 3.10.** Энг катта AB кесманинг узунлиги AC ва BC кесмалар узунликларининг йиғиндисидан кичик бўлса, у ҳолда A , B , C нуқталар битта тўғри чизиқда ётиши мумкинми?

- 3.11.** $AB = 10$ см, $BC = 5$ см кесмалар тўғри чизиқда ётади. Агар: а) B нуқта A ва C нуқталар орасида; б) C нуқта A ва B нуқталар орасида ётса, AC ни топинг.

- 3.12.** AB ва CD кесмалар O нуқтада кесишади ва шу нуқтада тенг иккига бўлинади. $AO = 2 CO$ эканлиги маълум. AB ва CD кесмаларни таққосланг.

- 3.13.** Иккита кесманинг йиғиндиси 6 см га teng, уларнинг айирмаси эса 2 см, кесмаларнинг узунликларини топинг.
- 3.14.** Узунлиги 15 м бўлган AB кесмада C нуқта белгиланган. Агар: а) AC кесма BC кесмадан 3 м узун; б) AC кесма BC кесмадан икки марта узун; в) AC ва BC кесмаларнинг узунликларининг нисбати 2:3 каби бўлса, AC ва BC кесмаларнинг узунликларини топинг.
- 3.15.** Тўғри чизикда $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см бўлган AB , BC ва CD кесмалар жойлашган. AB ва CD кесмалар ўрталари орасидаги масофани топинг.
- 3.16.** Тўғри чизикда $AB = 60$ мм, $AC = 100$ мм бўлган A нуқтадан бир хил йўналишда AB ва AC кесмалар жойлашган. а) BC кесманинг узунлигини; б) A нуқтадан BC кесманинг ўртасигача бўлган масофани; в) AB ва AC кесмалар ўрталарининг ораларидаги масофани топинг.
- 3.17.** A , B , C учта қишлоқ бир тўғри йўлнинг бўйида жойлашган. A ва B қишлоқлар орасидаги масофа 2 км, A ва C қишлоқлар орасидаги масофа эса 5 км. B ва C қишлоқлар орасидаги масофани топинг. Масаланинг нечта ечими бор?
- 3.18.** Чизғич бўлакларидан фойдаланмай, 2 м тасманинг 150 см бўлагини қандай кесиб олиш мумкин?

С

- 3.19.** Тўғри чизикдаги битта нуқтадан бир хил йўналишда учта teng кесма жойлаширилган. Биринчи кесманинг учи иккинчи кесманинг ўртаси, иккинчи кесманинг учи эса учинчи кесманинг ўртаси бўлади. Учлари биринчи кесманинг боши ва учинчи кесманинг охири бўладиган кесманинг узунлиги 28 см. Ушбу кесмаларнинг узунлигини топинг.
- 3.20.** Газета варафининг қалинлиги 0,1 миллиметрга teng. Газета варафидан икки буклаб, кейин яна буклаб, шу тариқа 50 марта букланди. Агар бундай буклашлар мумкин бўлса, букловнинг қалинлиги қандай бўлади?

Ахборат тайёрланг

- 3.21.** XVII аср охиридаги ҳар бир давлатнинг ўлчов бирликлари ҳақида нималарни биласиз? Узунлик ўлчов бирлиги эталони сифатида метр нима сабабдан қабул қилинган?

Янги мавзууни ўзлаширишга тайёрланинг

- 3.22.** Умумий учга эга бўлган а) иккита нур; б) учта нур; в) тўртта нур; г) * n та нур текислик неча бўлакка бўлинади?

4-§. ЯРИМТЕКИСЛИК ВА БУРЧАК

Текисликда ихтиёрий түғри чизик үтказинг.

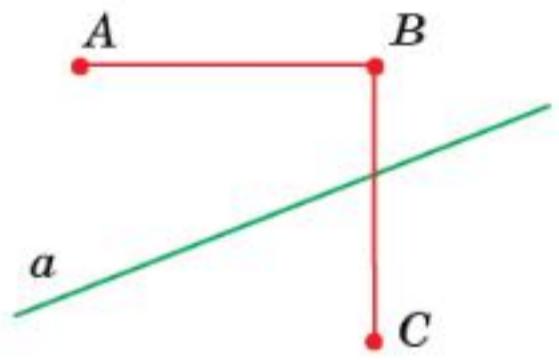


Бу түғри чизик текисликни неча бўлакка бўлади деб ўйлайсиз?

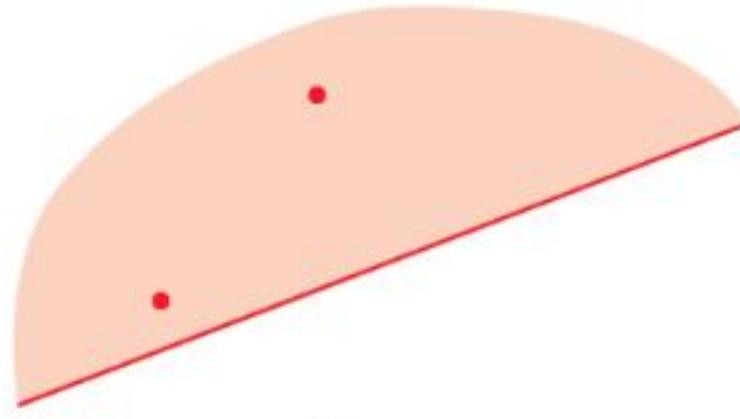
4.1-расмда a түғри чизик текисликни икки бўлакка бўлади. Бунда агар A ва B нуқталар ушбу бўлакларнинг бирида ётса, у ҳолда AB кесма түғри чизиқни кесмайди. Бу ҳолда A ва B нуқталар a түғри чизиқнинг бир томонида ётади дейилади. Агар B ва C нуқталар текисликнинг турли бўлакларида ётса, у ҳолда BC кесма түғри чизиқни кесиб ўтади. Бу ҳолда B ва C нуқталар a түғри чизиқнинг турли томонида ётибди деб аталади.

Түғри чизиқнинг ушбу хоссаси аксиома сифатида қабул қилинади.

Текисликдаги ҳар бир түғри чизик шу текисликни икки бўлакка бўлади. Агар икки нуқта текисликнинг турли бўлагида ётса, у ҳолда шу нуқталарни туташтирувчи кесма түғри чизик билан кесишиади. Агар икки нуқта текисликнинг бир бўлагида ётса, у ҳолда ана шу нуқталарни туташтирувчи кесма түғри чизик билан кесишмайди.



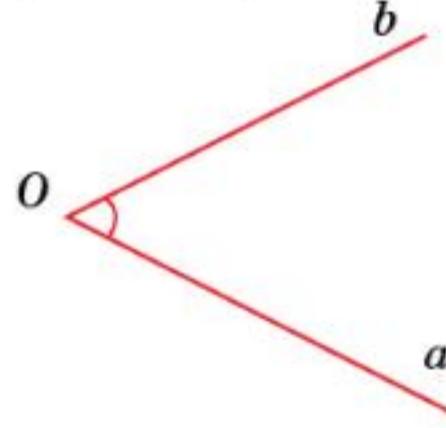
4.1-расм



4.2-расм

Түғри чизиқнинг бир томонида ётувчи ва шу түғри чизик ва нуқталардан ташкил топган текисликнинг қисми яримтекислик дейилади (4.2-расм).

Учлари умумий бўлган иккита нурни кўриб чиқамиз (4.3-расм). Улар текисликни икки бўлакка бўлади.



4.3-расм

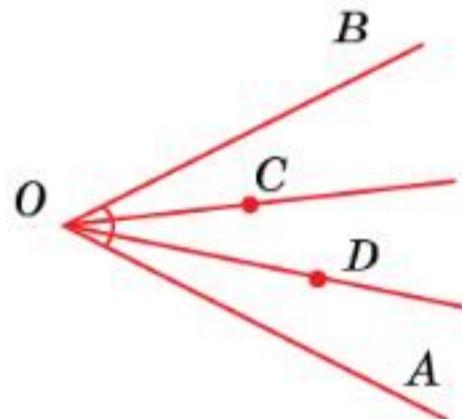


Буни ўзингиз түшунтириб кўринг.

Учлари умумий бўлган иккита нурдан ва шу нурлар билан чегараланган текисликнинг бир қисмидан ташкил топган фигура *бурчак* дейилади. Нурларнинг умумий учи *бурчакнинг учи*, нурлар эса *бурчакнинг томонлари* деб аталади.

Бурчак учини кўрсатувчи битта ҳарф билан ёки томонларида олинган ихтиёрий нуқталар билан биргаликда учта ҳарф билан белгиланади. Учидаги ҳарф ўртасида ёзилади. Масалан, $\angle A$, $\angle AOB$ ва ҳ.к. Баъзида бурчаклар рақам билан ҳам белгиланади, масалан, $\angle 1$, $\angle 2$ ва ҳ.к.

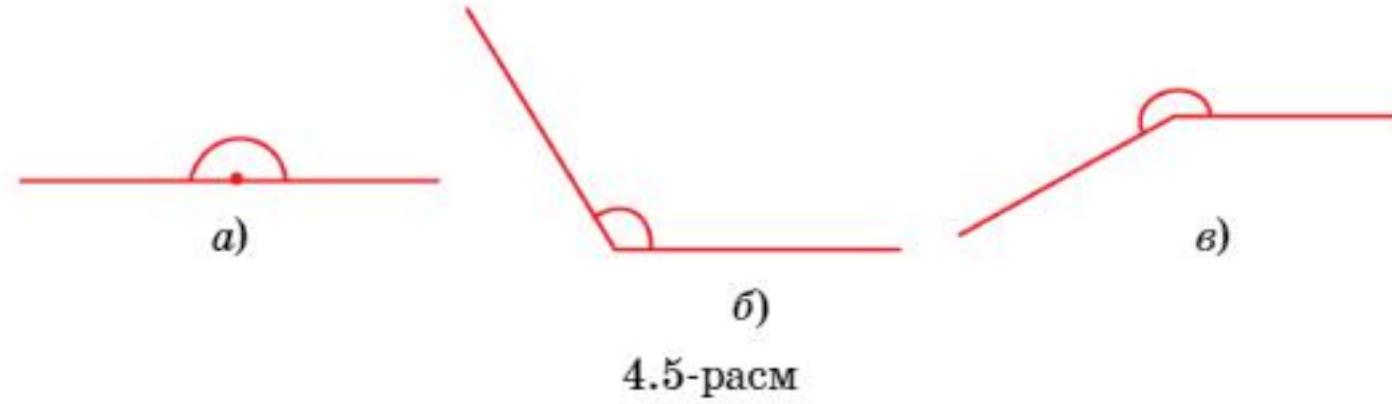
Томонларида ётмайдиган бурчакнинг нуқталари *ички нуқталар* дейилади. Бурчакнинг учидан чиқувчи ва бурчакнинг ички нуқталаридан ўтувчи нурлар *ички нурлар* деб аталади. 4.4-расмда AOB бурчак тасвириланган. C ва D нуқталар — унинг ички нуқталари, OC ва OD нурлар — унинг ички нурлари.



4.4-расм

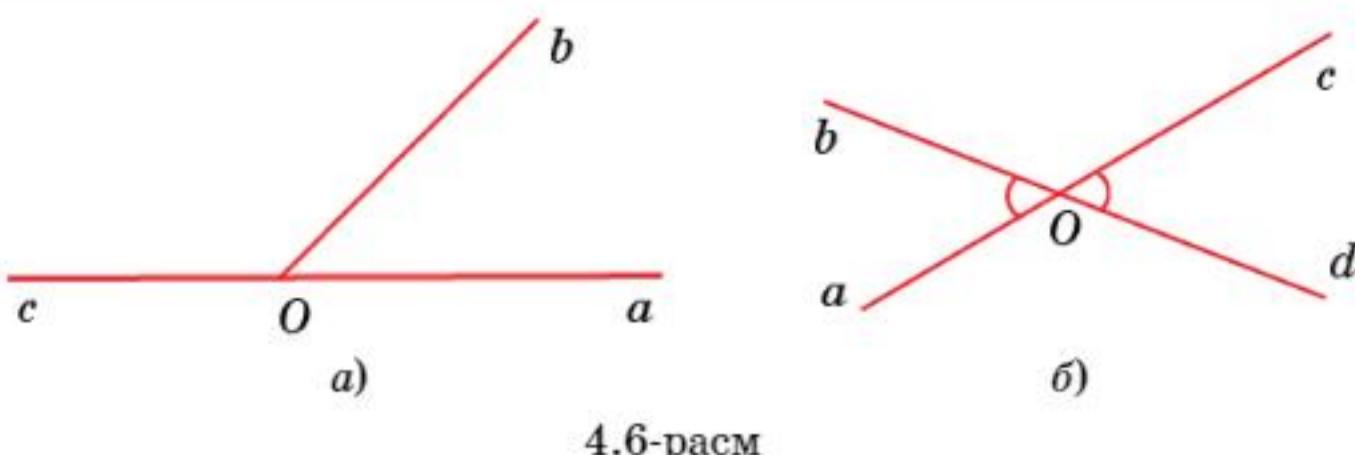
Бурчакнинг томонлари тўғри чизик ташкил қиласидиган бўлса, у ҳолда у *ёйик бурчак* дейилади (4.5-а расм). Акс ҳолда бурчак *ёйик эмас* дейилади.

Ёйик эмас бурчак ёйик бурчакдан кичик, яъни ёйик бурчакнинг қисми ҳисобланади (4.5-б расм) ёки ёйик бурчакдан катта, яъни ёйик бурчакни ўз ичига олиши мумкин (4.5-в расм).



4.5-расм

Биз ёйик бурчакдан кичик бўлган бурчакни кўриб чиқамиз. Агар иккита бурчакнинг битта томони умумий, бошқа иккита томони битта тўғри чизиқда ётса, у ҳолда бу бурчаклар *қўшини бурчаклар* дейилади (4.6-а расм).



4.6-расм

Агар бурчакнинг битта томони иккинчи бурчакнинг томонини түғри чизикқа түлдирса, у ҳолда бу бурчаклар *вертикал бурчаклар* дейилади (4.6-б расм).



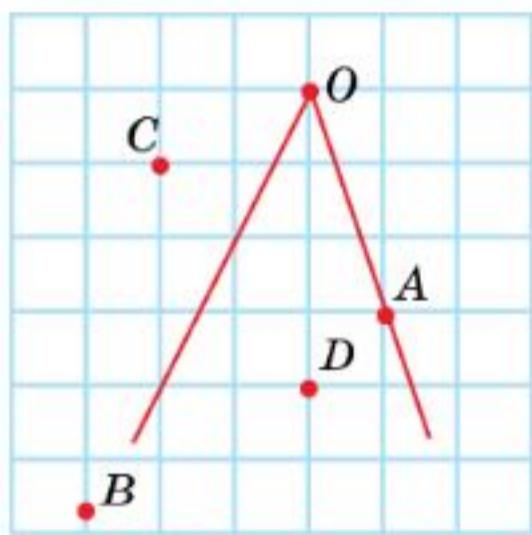
1. Түғри чизик текисликни неча бўлакка бўлади?
2. Текисликда нуқталарнинг берилган түғри чизикқа нисбатан ўзаро жойлашиши хоссасининг маъноси нимада?
3. Яримтекислик деб нимага айтилади?
4. Қандай ҳолларда иккита нуқта берилган түғри чизикқа нисбатан:
а) битта ярим текисликда; б) турли ярим текисликларда ётади?
5. Қандай фигура бурчак деб деб аталади? Бурчакнинг учи деб нимага айтилади? Бурчакнинг томонлари деб нимага айтилади?
6. Қандай бурчак ёйиқ бурчак деб аталади?
7. Қандай бурчаклар: а) қўшни; в) вертикал бурчаклар деб аталади?
8. Бурчаклар қандай белгиланади?

Машқлар

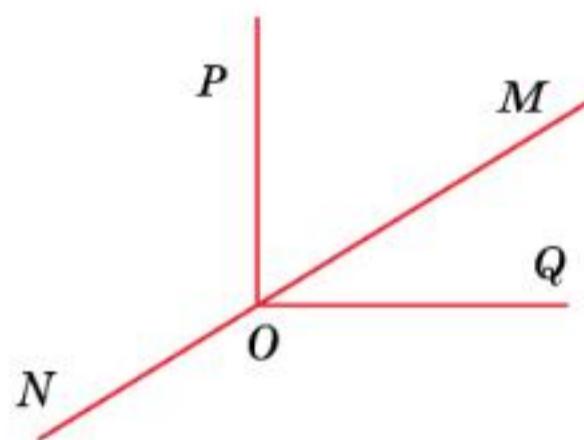
A

- 4.1. p түғри чизик ва A, B, C, D, E, F нуқталарни ясанг. A, E нуқталар берилган түғри чизикда ётади, қолганлари түғри чизикқа тегишли эмас, D ва F турли текисликларда, B ва C битта текисликда, BD кесма p түғри чизик билан кесишиади.
- 4.2. a түғри чизик ва шу түғри чизикда ётмайдиган A, B, C, D , нуқталар берилган. Агар: а) AB , BC ва CD кесмалар a түғри чизикни кесиб ўтади; б) a түғри чизик AC ва BC кесмаларни кесиб ўтади, бироқ BD кесмани кесиб ўтмайди; в) a түғри чизик AB ва CD кесмаларни кесиб ўтади, бироқ BC кесмани кесиб ўтмайди; г) a түғри чизик AB ва CD кесмаларни кесиб ўтмайди, бироқ BC кесмани кесиб ўтади; д) AB , BC ва CD кесмалар a түғри чизикни кесиб ўтмайди; е) AB , BC ва CD кесмалар a түғри чизикни кесиб ўтадиган бўлса, AD кесма a түғри чизикни кесиб ўтадими? Ушбу ҳолларни ясанг.
- 4.3. Кесишувчи иккита түғри чизик ясанг. Улар текисликни неча бўлакка бўлади?

- 4.4.** Бир нүктада кесишувчи уча түғри чизик ясанг. Улар текисликни неча бўлакка бўлади?
- 4.5.** Бир нүктада кесишувчи тўртта түғри чизик ясанг. Улар текисликни неча бўлакка бўлади?
- 4.6.** а) AOB бурчакда OC нур ётадиган, BOC бурчакнинг ичида OD нур ётадиган; б) BOC бурчакда OA нур ётадиган, AOD бурчакнинг ичида OC нур ётадиган қилиб OA, OB, OC, OD нурларни ясанг.
- 4.7.** 4.7-расмда белгиланган нүқталарнинг қайсилари бурчакнинг томонида, қайсилари бурчакнинг ичида жойлашган?
- 4.8.** 4.8-расмда O нүкта учи бўладиган нечта бурчак тасвиранган?



4.7-расм

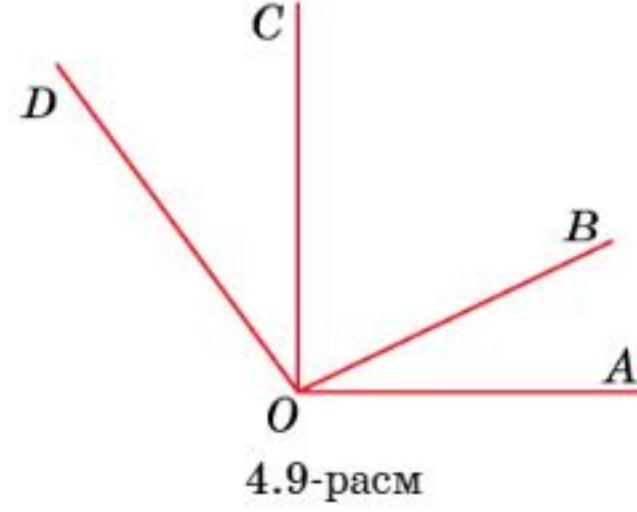


4.8-расм

- 4.9.** Берилган бурчакка қўшни бўлган нечта бурчак мавжуд?
- 4.10.** Берилган бурчакка вертикал бўлган нечта бурчак мавжуд?

В

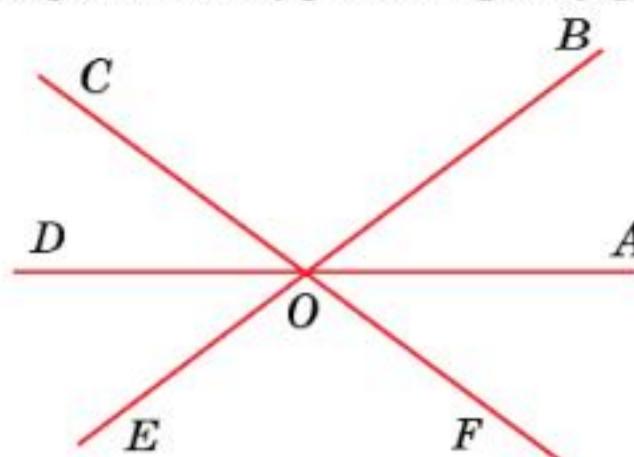
- 4.11.** Бешта нүкта ва шу нүқталардан ўтмайдиган түғри чизик берилган. Ушбу түғри чизикка тегишли бўлган нүқталарнинг утаси битта текисликда, иккитаси эса иккинчи яримтекисликда ётиди. Ҳар бир иккита нүкта кесма билан туташтирилган. Нечта кесма: а) түғри чизик билан кесишиди; б) түғри чизик билан кесишмайди? Мос ясашларни бажаринг.
- 4.12.** Битта нүктада кесишмайдиган, бироқ жуфт-жуфти билан кесишидиган түғри чизикларни ясанг. Улар текисликни неча бўлакка бўлади?
- 4.13.** Утаси битта нүктада кесишмайдиган, бироқ жуфт-жуфти билан кесишидиган тўртта түғри чизик ясанг. Улар текисликни неча бўлакка бўлади?
- 4.14.** 4.9-расмда тасвиранган нурлар ёрдамида аниқланган бурчакларнинг нетаси ёйик бурчакдан кичик бўлади? Уларни атанг.



4.9-расм

4.15. 4.10-расмдаги қүшни бурчаклар жуфтини ёзинг.

4.16. 4.10-расмдаги вертикал бурчаклар жуфтини ёзинг.



4.10-расм

C

4.17. Битта нүктада кесишувчи n та түғри чизик текисликни неча бўлакка бўлади?

4.18. а) 2 та нукта; б) 3 та нукта; в) 4 та нукта; г) $*n$ та нукта түғри чизиқда белгиланган. Шу нукталар учи бўладиган неча ёйик бурчаклар пайдо бўлди?

4.19. Учи умумий бўлган: а) иккита нур; б) учта нур; в) тўртта нур; г) $*n$ та нур текисликни неча бўлакка бўлади?

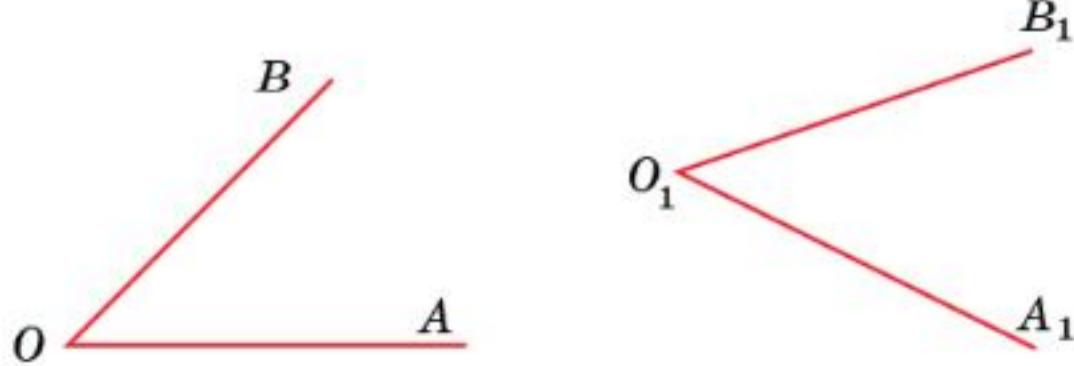
4.20. Учта түғри чизиқнинг ҳеч бири битта нүктада кесиshmайдиган, жуфт-жуфти билан кесишадиган n түғри чизиқни неча бўлакка бўлади?

Янги мавзууни ўзлаштиришга тайёрланинг

4.21. OA нурни ясанг. Транспортир ёрдамида унинг бир йўналишида 60° га тенг бўлган AOB бурчак ва 30° га тенг BOC бурчак ясанг. AOC бурчакнинг катталигини топинг.

5-§. БУРЧАКЛАР УСТИДА АМАЛЛАР БАЖАРИШ. БУРЧАКЛАРНИНГ ТЕНГЛИГИ

Бурчаклар устида бажариладиган амаллардан бири — берилган бурчакни берилган нурдан бошлаб бошқа жойга жойлаштириш (5.1-расм). Ҳосил бўлган бурчак берилган бурчакка *тенг* деб аталади.



5.1-расм

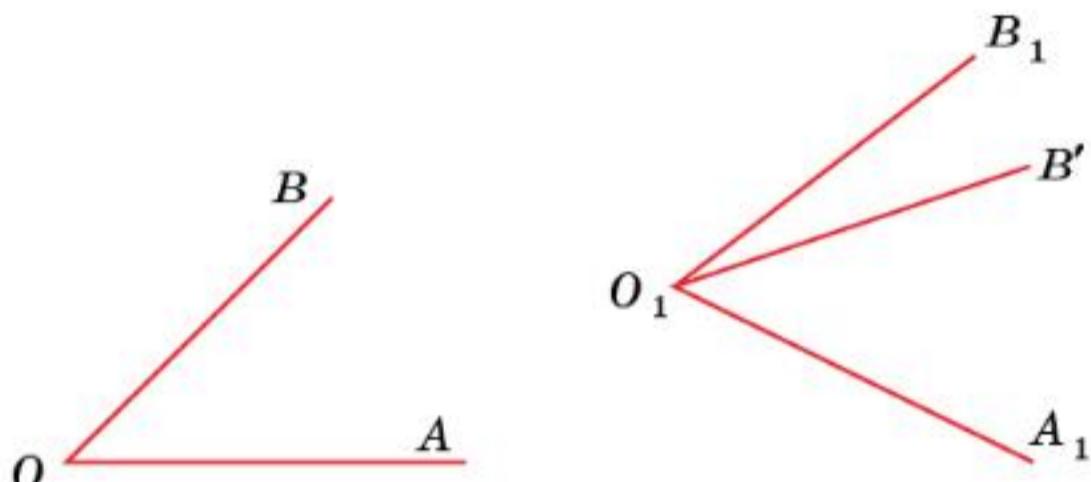
$\angle AOB$ ва $\angle A_1O_1B_1$ бурчакларнинг тенглиги $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ күринишида ёзилади. Бунинг маъноси, агар ушбу бурчаклардан бирини, масалан, $\angle AOB$ бурчакни, O_1A_1 нурдан бошлаб O_1B_1 нур билан аниқланувчи ёқса жойлаштирасак, у ҳолда $\angle AOB$ бурчак $\angle A_1O_1B_1$ бурчак билан устма-уст тушади.

Аксиома сифатида қуидаги хоссалар қабул қилинади.

Текисликда ихтиёрий нурдан бошлаб берилган бурчакка тенг бўлган ягона бурчак жойлаштириш мумкин.

Барча ёйиқ бурчаклар тенг бўлади.

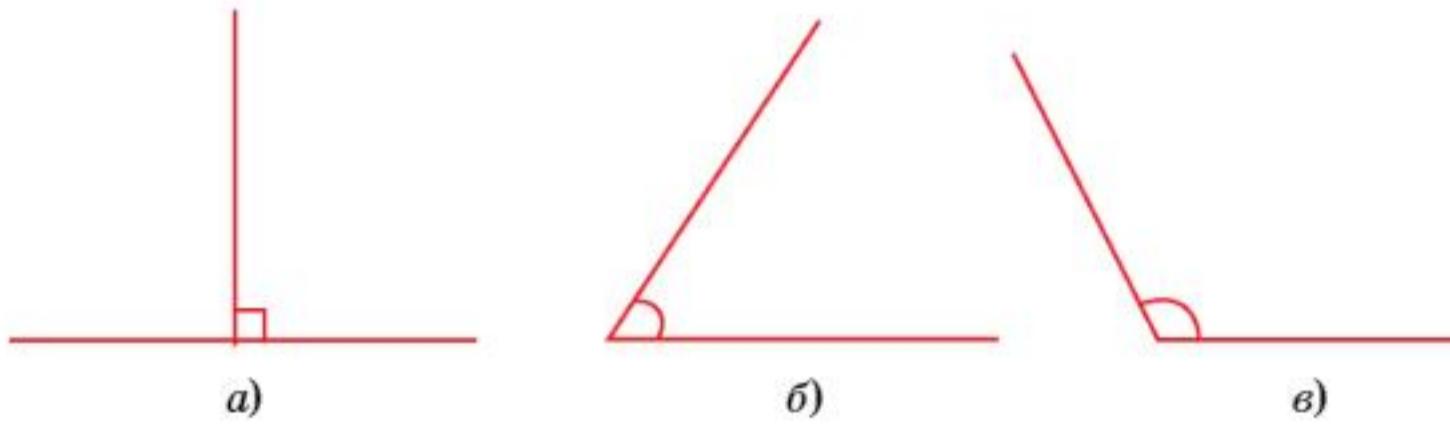
Шу билан бирга, $\angle AOB$ бурчакни O_1A_1 нурдан бошлаб ясаганда OB нур $A_1O_1B_1$ бурчакнинг ичида ётувчи O_1B' нурга ўтса, у ҳолда $\angle AOB$ бурчак $\angle A_1O_1B_1$ бурчакдан кичик бўлади ва $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$ каби белгиланади (5.2-расм).



5.2-расм

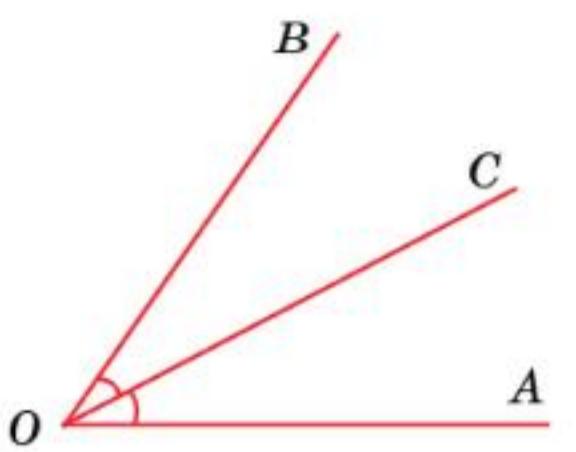
Шу билан бирга, $\angle A_1O_1B_1$ бурчак $\angle AOB$ бурчакдан катта дейилади ва $\angle A_1O_1B_1 > \angle AOB$ каби белгиланади.

Ўзининг қўшни бурчагига тенг бўлган бурчак *тўғри бурчак* дейилади (5.3-а расм). Тўғри бурчакдан кичик бўлган бурчак *ўтқир бурчак* деб аталади (5.3 б-расм). Тўғри бурчакдан катта бўлган бурчак *ўтмас бурчак* дейилади (5.3 в-расм).

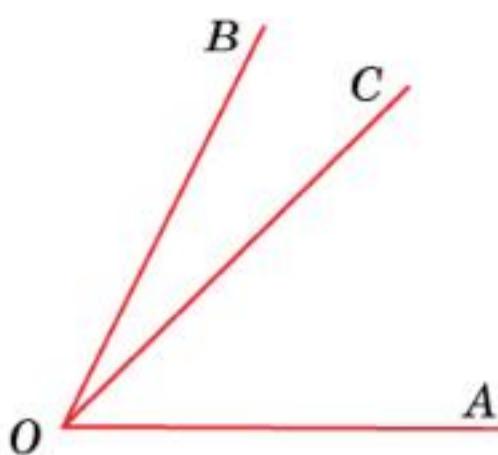


5.3-расм

Бурчакни тенг иккига бўлувчи ички нур бурчакнинг **биссектрисаси** дейилади (5.4-расм).



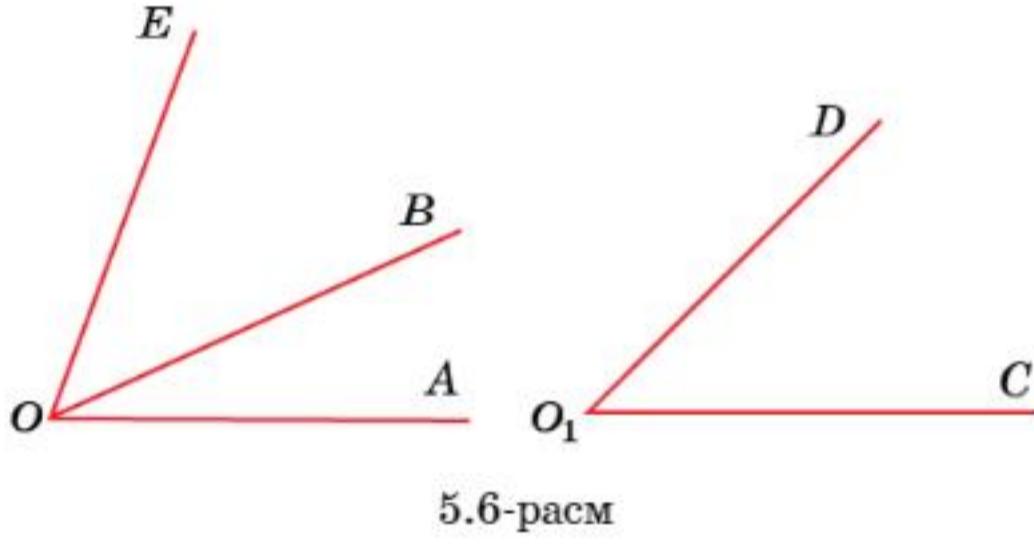
5.4-расм



5.5-расм

Агар AOB бурчакнинг ичидан OC нур ўтказсак, у ҳолда AOC ва COB бурчаклар ҳосил бўлади (5.5-расм). AOB бурчак AOC ва COB бурчакларнинг *йигиндиси* деб аталади ва $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ кўринишда ёзилади. AOC ва COB бурчакларнинг ҳар қайси бири AOB бурчак билан иккинчисининг *айирмаси* деб аталади. Унинг ёзилиши: $\angle AOC = \angle AOB - \angle COB$, $\angle COB = \angle AOB - \angle AOC$.

Иккита бурчакни қўшиш учун, масалан, AOB ва CO_1D (5.6-расм), OB нурдан бошлаб CO_1D бурчакнинг A ва D нуқталари OB тўғри чизиқнинг турли томонларида жойлашган қилиб ясаймиз. O_1D нурга ўтувчи нурни OE деб белгилайлик. У ҳолда AOE бурчак AOB ва CO_1D бурчакларнинг *йигиндисини* беради, $\angle AOE = \angle AOB + \angle CO_1D$.



5.6-расм



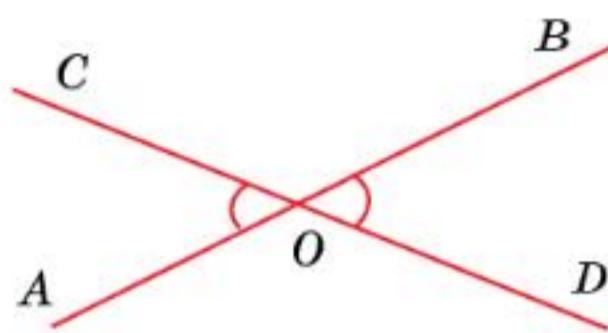
Худди шу каби ўзингиз катта бурчакдан кичигини айиринг.

Бурчаклар йигиндисининг таърифидан қўшни бурчакларнинг йигиндиси ёйиқ бурчакка тенг эканлиги келиб чиқади.

Теорема. Вертикал бурчаклар тенг бўлади.

Исботи. AOC ва BOD вертикал бурчаклар бўлсин. BOD бурчакнинг OB ва OD томонлари давоми AOC бурчакнинг OA ва

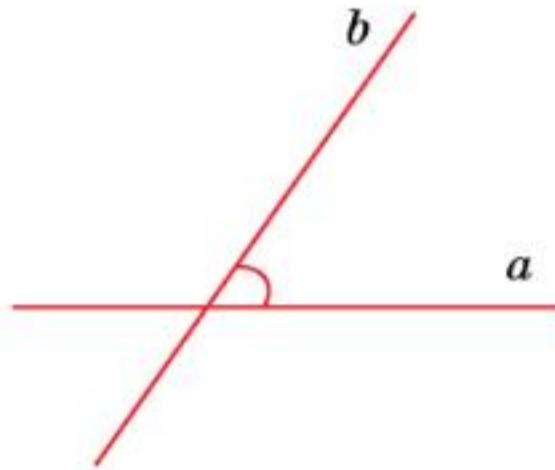
OC томонлари билан мос равиша түғри чизикқа тұлдирилади (5.7-расм). У ҳолда AOC ва COB бурчакларнинг йиғиндиси ёйик бурчак бўлади. BOD ва COD бурчакларнинг йиғиндиси ҳам ёйик бурчак бўлади. Шундай қилиб, $\angle AOC + \angle COB = \angle BOD + \angle COD$. Тенгликнинг иккала томонидан $\angle COD$ ни айирсак, $\angle AOC = \angle BOD$ тенгликка эга бўламиз .



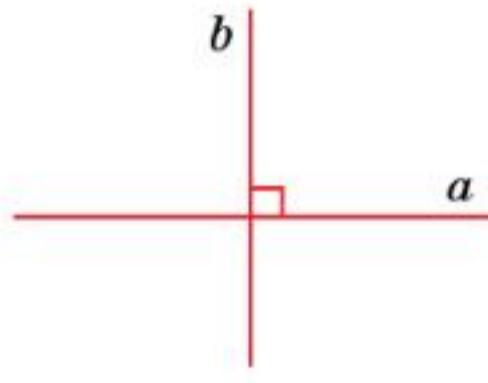
5.7-расм

Түғри чизикларнинг кесишиш нүктасида ҳосил бўлган нурлардан ташкил топган энг кичик бурчак *кесишуви түғри чизиклар орасидаги бурчак* дейилади (5.8-расм).

Түғри бурчак остида кесишган түғри чизиклар *перпендикуляр түғри чизиклар* дейилади (5.9-расм).



5.8-расм



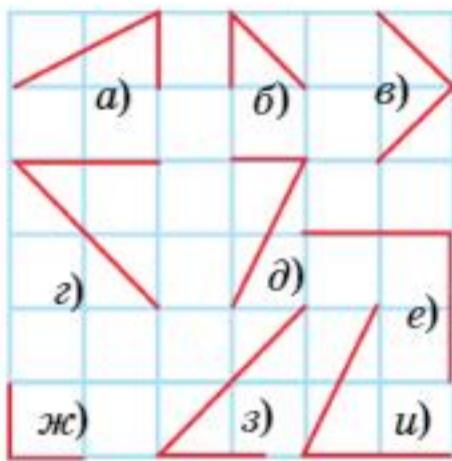
5.9-расм

- 1. Қандай бурчаклар тенг бурчаклар дейилади?
- 2. Бурчакларнинг тенглиги қандай белгиланади?
- 3. Бир бурчак бошқа бурчакдан кичик бўлса, нимани билдиради?
- 4. а) ўткир; б) түғри; в) ўтмас бурчак деб қандай бурчакларга айтилади?
- 5. Бурчакнинг биссектрисаси деб нимага айтилади?
- 6. а) иккита бурчакнинг йиғиндиси; б) иккита бурчакнинг айирмаси қандай аниқланади?
- 7. Вертикал бурчаклар ҳақидаги теоремани келтириб чиқаринг.
- 8. Кесишуви түғри чизиклар орасидаги бурчак деб нимага айтилади?
- 9. Қандай түғри чизиклар перпендикуляр түғри чизиклар дейилади?

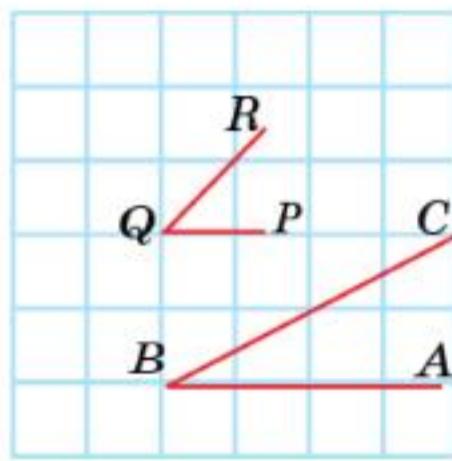
Машқлар

А

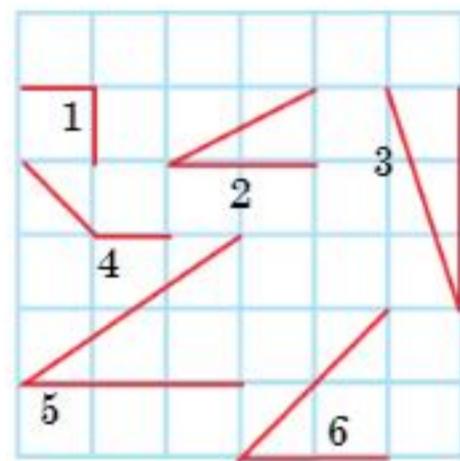
- 5.1.** 5.10-расмда күрсатилған бурчаклар ичиdan тенг бурчакларни атанды.
- 5.2.** 5.11-расмда күрсатилған бурчаклардан қайсылари катта?
- 5.3.** 5.12-расмда күрсатилған бурчакларни үсиш тартибида жойлаштириңг.



5.10-расм

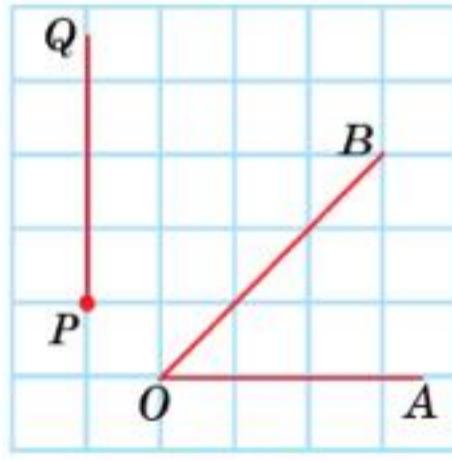


5.11-расм

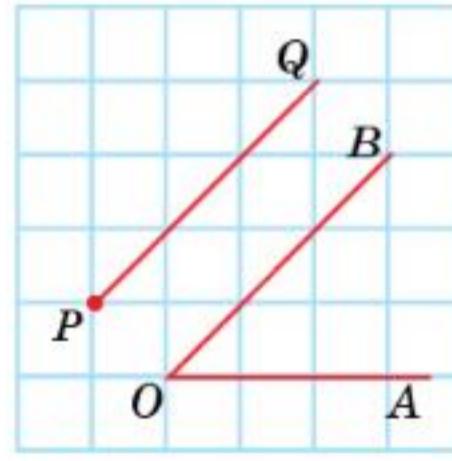


5.12-расм

- 5.4.** 5.13-расмда күрсатилгани каби катак қоғозда $\angle AOB$ бурчак ва PQ нур ясанғ. PQ нурда $\angle AOB$ бурчакка тенг бўлган $\angle QPR$ бурчак ясанғ.



a)



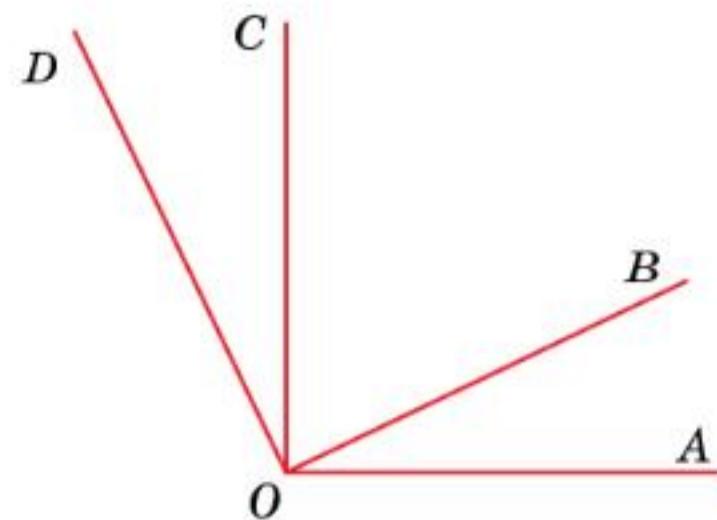
б)

5.13-расм

- 5.5.** Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак: а) тўғри; б) ўтмас бўладими?
- 5.6.** Кесишувчи тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклардан бири 30° га тенг. Колган бурчакларни топинг.

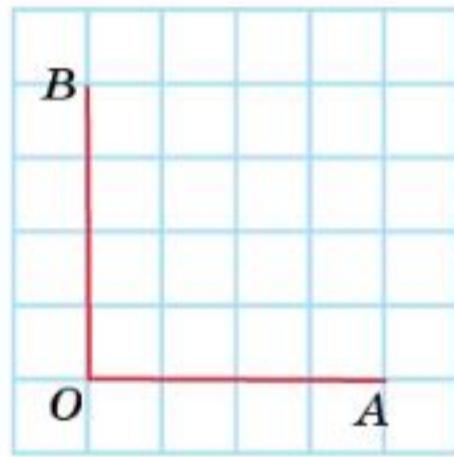
В

- 5.7.** 5.14-расмда күрсатилған ёйик бурчакдан катта, нурлардан ясалған нечта бурчак мавжуд?

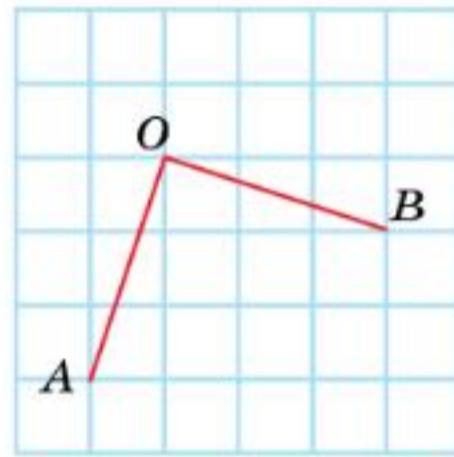


5.14-расм

- 5.8.** 5.14-расмда тасвирланган нурлардан ясалған нечта: а) үткир;
б) түғри; в) үтмас бурчак бор?
- 5.9.** Иккита қүшни бурчак бир вақтда: а) үткир; б) түғри; в) үтмас бурчак бўла оладими?
- 5.10.** 5.15-расмда берилгани каби катак қоғозда AOB бурчак ясанг.
Ушбу бурчакнинг биссектрисасини үтказинг.



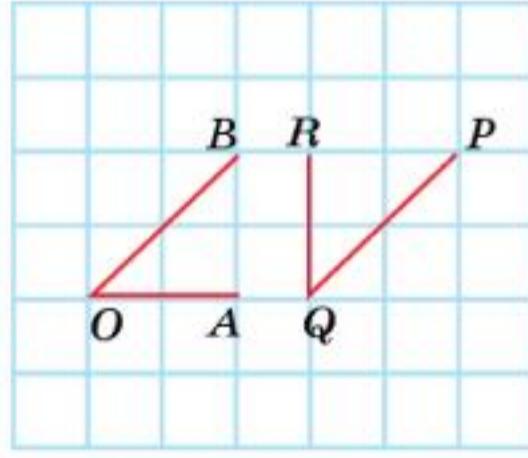
a)



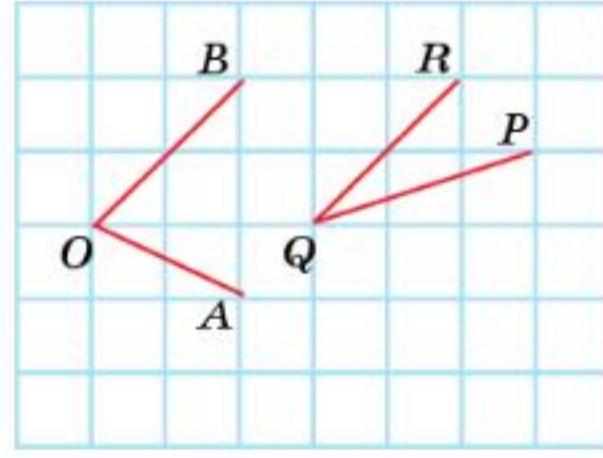
б)

5.15-расм

- 5.11.** Катак қоғозда AOB ва PQR бурчаклар йиғиндисига тенг бўлган бурчак ясанг (5.16-расм).



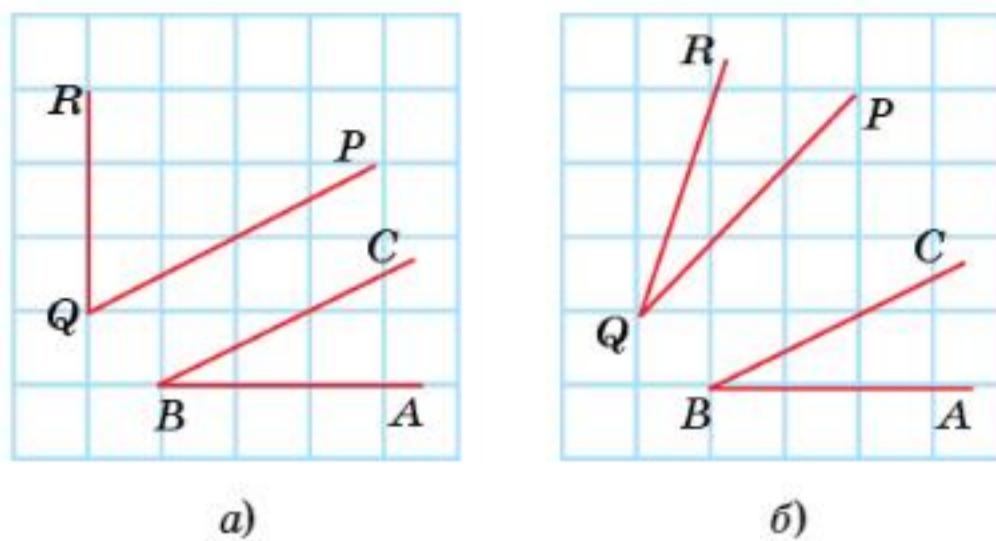
a)



б)

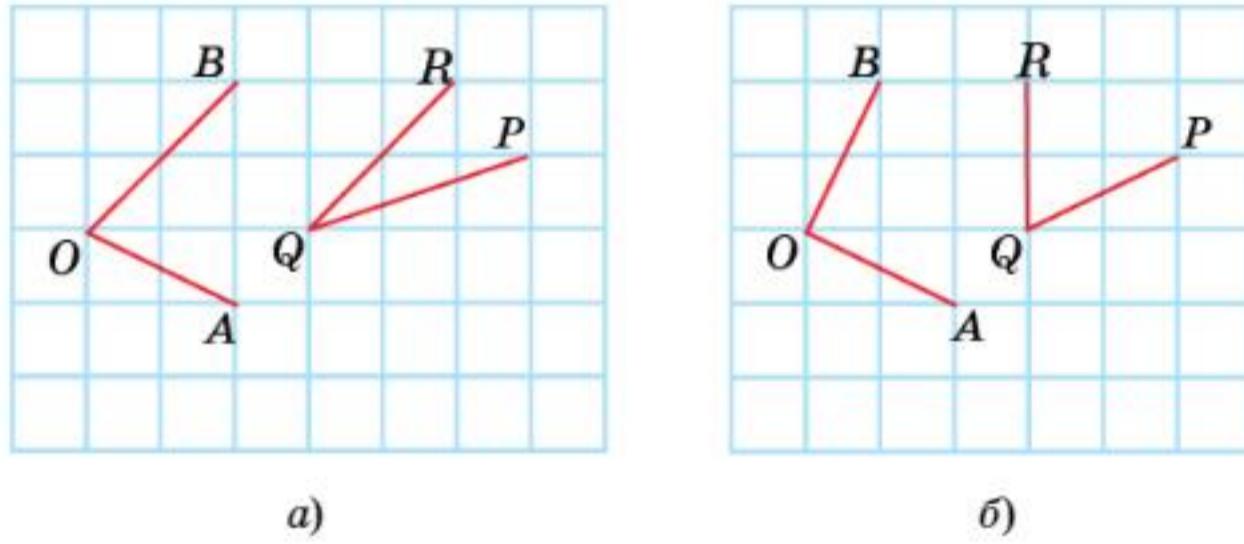
5.16-расм

- 5.12.** Катак қоғозда ABC ва PQR бурчакларнинг йиғиндисига тенг бўлган бурчак ясанг (5.17-расм).



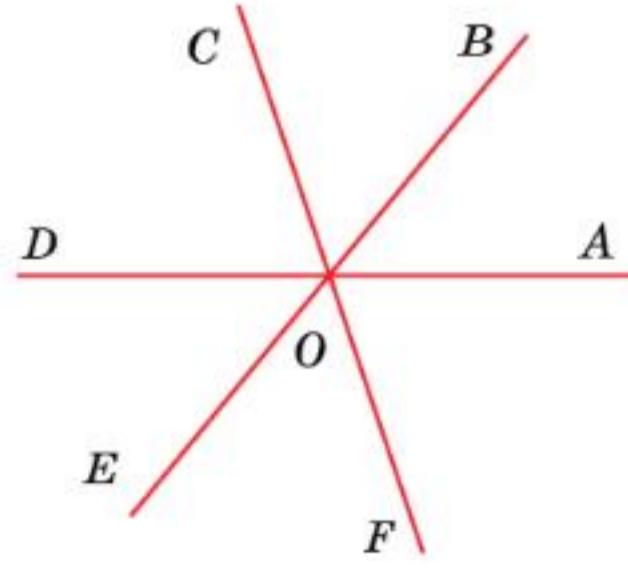
5.17-расм

- 5.13.** Катак қоғозда ABC ва PQR бурчакларнинг айирмасига тенг бўлган бурчак ясанг (5.18-расм).



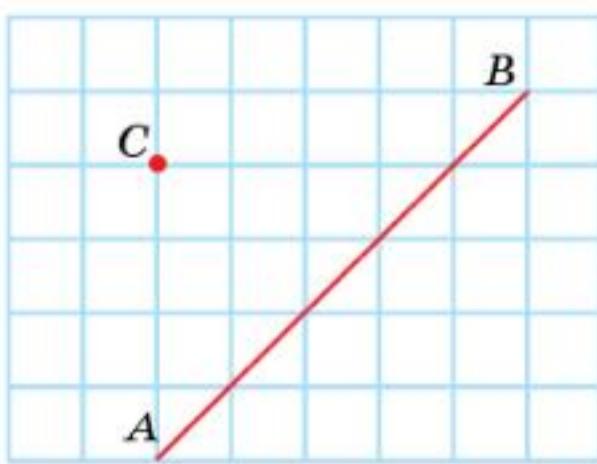
5.18-расм

- 5.14.** 5.19-расмда AOB бурчак 50° га тенг, COD бурчак 60° га тенг. EOF бурчакни топинг.

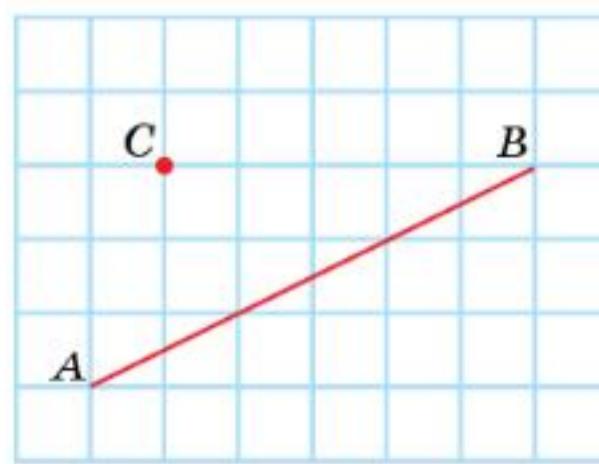


5.19-расм

- 5.15.** Катаң қоғозга C нүкте орқали AB түғри чизикқа перпендикуляр бўлган түғри чизик ясанг (5.20-расм).



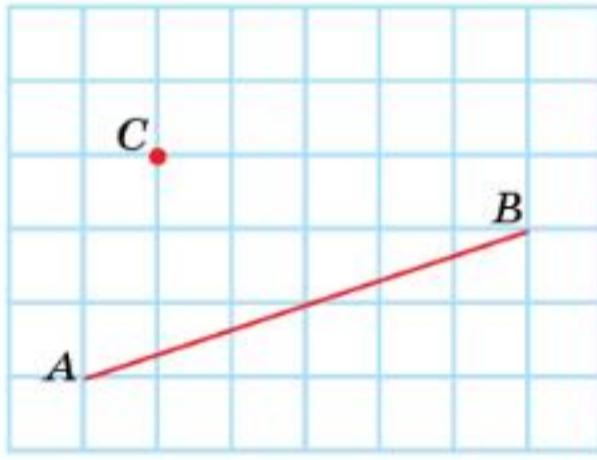
a)



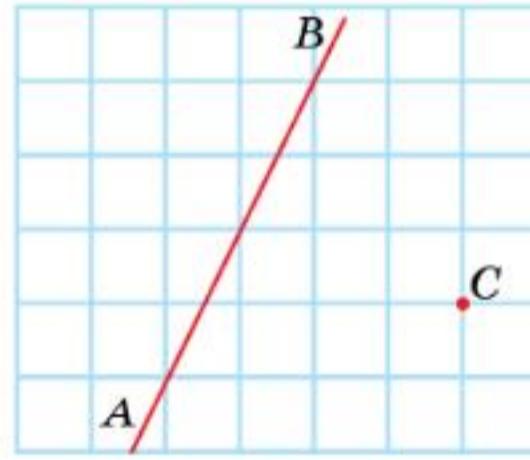
б)

5.20-расм

- 5.16.** Катаң қоғозга C нүкта орқали AB түғри чизикқа перпендикуляр бўлган түғри чизик ясанг (5.21-расм).



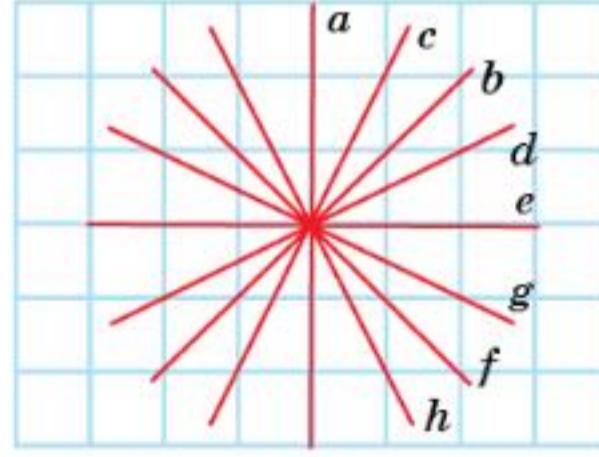
а)



б)

5.21-расм

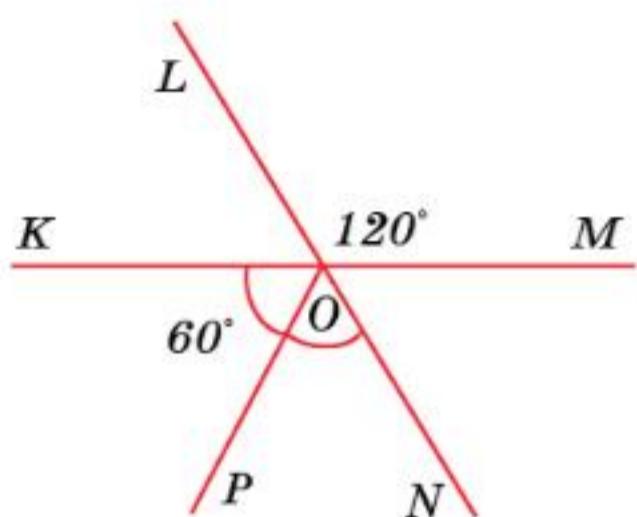
- 5.17.** 5.22-расмда берилган түғри чизикнинг қайси бири: а) a ; б) b ; в) c ; г) d түғри чизикқа перпендикуляр?



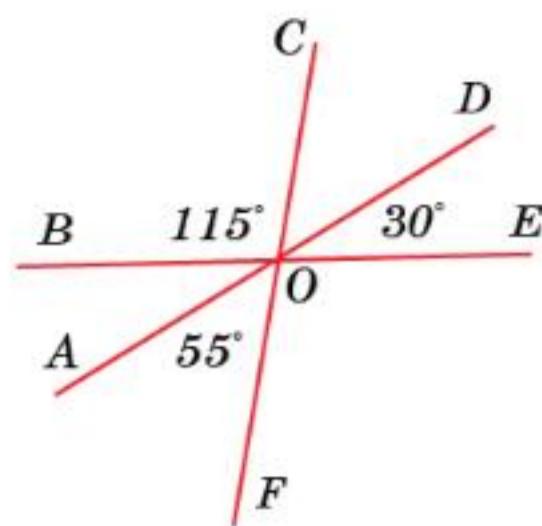
5.22-расм

- 5.18.** Қайик дастлаб шимолга қараб сузди, сўнгра 90° га бурилди. У қандай йўналишда сузади? Масаланинг нечта ечими мавжуд?

5.19. 5.23, 5.24-расмларда хато борми? Жавобингизни тушунтириңг.



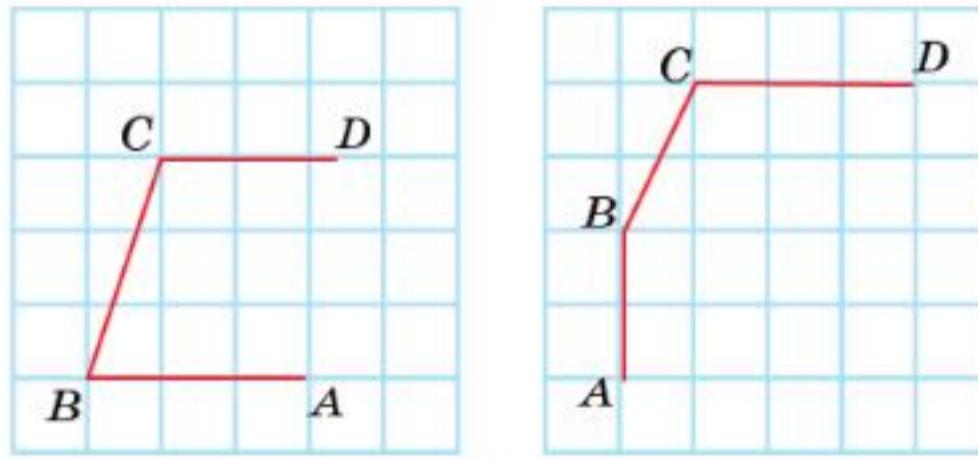
5.23-расм



5.24-расм

C

5.20. Катақ қоғозда а) C ва B (5.25-а расм); б) B ва C (5.25-б расм) бурчакларнинг айирмасига тенг бўлган бурчакларни таққосланг.



a)

б)

5.25-расм

- 5.21.** Агар иккита бурчак тенг бўлса, у ҳолда унга қўшни бўлган бурчаклар ҳам тенг бўлишини исботланг.
- 5.22.** Кесишувчи иккита тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклардан бири иккинчисидан 20° кичик. Ушбу бурчакларни топинг.
- 5.23.** Кесишувчи иккита тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклардан бири иккинчисидан 4 марта катта. Ушбу бурчакларни топинг.
- 5.24.** Кесишувчи иккита тўғри чизиқлар орасидаги учта бурчакнинг йиғиндиси 306° га тенг. Ушбу бурчакларнинг каттасини топинг.
- 5.25.** Кесишувчи иккита тўғри чизиқлар орасидаги учта бурчакнинг йиғиндиси 150° га тенг бўлиши мумкинми?

Янги мавзууни ўзлаштиришга тайёрланинг

- 5.26.** Филдиракнинг қўшни бўлган симлари орасидаги бурчак 20° га тенг бўлса, филдиракнинг симлари сонини топинг.
- 5.27.** Соатнинг минут мили 30 минутда неча градусга бурилади?

6-§. БУРЧАКНИНГ КАТТАЛИГИНИ ЫЛЧАШ

Бурчакнинг катталигини үлчаш ҳам кесманинг узунлигини үлчаш каби бажарилади.

Дастлаб бурчакни үлчов бирлиги сифатида бирлик бурчакни танлаб оламиз. Одатта, бирлик бурчак ёйик бурчакнинг бир юз саксондан бир қисмини ташкил этади. Унинг катталиги бир градусга тенг деб ҳисобланади ва 1° каби белгиланади.

АОВ бурчакни үлчаш учун *OA* нурдан бошлаб бирлик бурчакни кетма-кет қўйиш орқали n ни топамиз, у бурчакка неча марта бирлик бурчак қўйилганини кўрсатади. Агар охирги бирлик бурчак *OB* нур билан устма-уст тушса, унда үлчаш жараёнини тўхтатамиз ва топилган n градус сони *AOB* бурчакнинг катталигини билдиради, $\angle AOB = n^\circ$ каби белгиланади. Агар *OC* нур охирги бирлик *OA* ва *OB* нурларнинг орасида ётса, у ҳолда бирлик бурчакни тенг 60 бўлакка бўламиз. Ушбу бўлаклардан бирини минут деб атаб, $1'$ каби белгилаймиз. Сўнгра охирги *OC* нурдан бошлаб бир минутга тенг бўлган бурчакни кетма-кет қўйиб борамиз, у ҳолда тони топилади, у *COB* бурчакка неча марта кетма-кет қўйилганини кўрсатади. Агар охирги нур *OB* нур билан устма-уст тушса, у ҳолда үлчаш жараёни тўхтатилиб, бурчакнинг катталиги n° т' бўлади, бу ерда n° га қанча 1° ли бурчак, t' га қанча $1'$ ли бурчак мос келишини кўрсатади. Агар охирги нур *OC* ва *OB* нурларнинг ўртасига тушса, у ҳолда бир минут яна тенг 60 бўлакка бўлинади-да (бу бўлакнинг катталиги бир секунд деб аталади, $1''$ каби белгиланади) үлчаш жараёни такрорланади.

Шундай қилиб, *бурчакнинг градус катталиги* неча марта градусларда ва унинг бўлакларида үлчанишини кўрсатади. Бурчакнинг градус катталигини қўйидаги хоссалар қаноатлантиради.

1-хосса. *Тенг бурчакларнинг градус үлчовлари тенг.*

2-хосса. *Бурчаклар йигиндисининг градус үлчови уларнинг градус үлчовларининг йигиндисига тенг.*



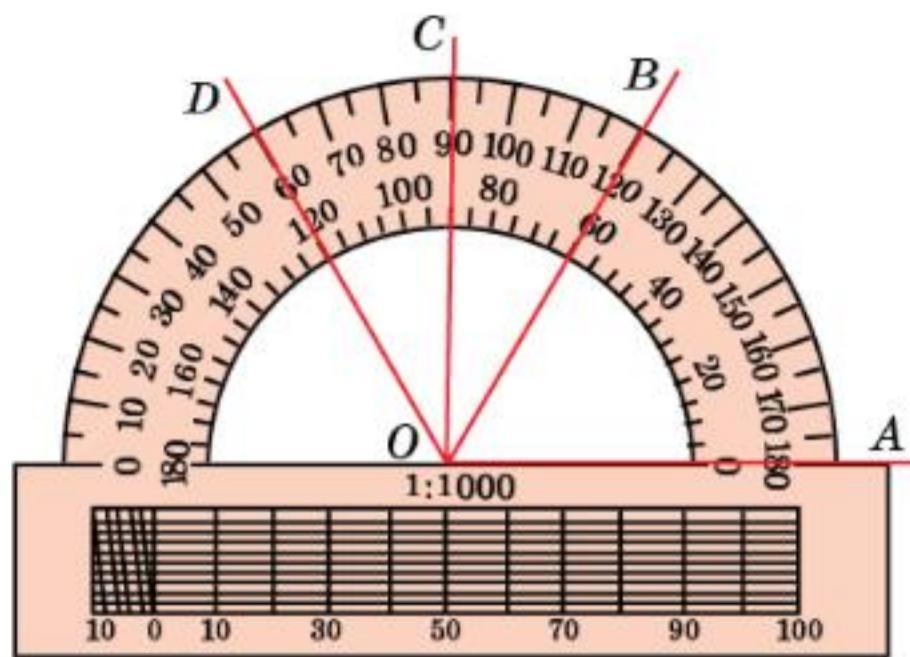
Бурчаклар айирмасининг градус үлчови нимага тенг эканлигини мустақил келтириб чиқаринг.

Бурчакнинг градус үлчови шу бурчак каби белгиланади. Масалан, $\angle AOB = 30^\circ$ ёзув *AOB* бурчакнинг катталиги 30° га тенг эканини кўрсатади. *AOB* бурчак 30° га тенг деб айтилади. Баъзан бурчакларнинг градус үлчовлари юнон алифбосидаги ҳарфлар билан белгиланади, масалан, ϕ , Ψ ва χ . к.

Таърифга кўра тўғри бурчак 90° га тенг эканлиги келиб чиқади. Ўтқир бурчак 90° дан кичик, ўтмас бурчак эса 90° дан катта, бироқ 180° дан кичик.

Бурчакларнинг катталигини ўлчаш учун турли хил ўлчов асбобларидан фойдаланилади, уларнинг ичида бизга маълум бўлган содда тури транспортир (6.1-расм) ҳисобланади.

6.1-расмда AOB , AOC ва AOD бурчаклар мос равишида 60° , 90° ва 120° .



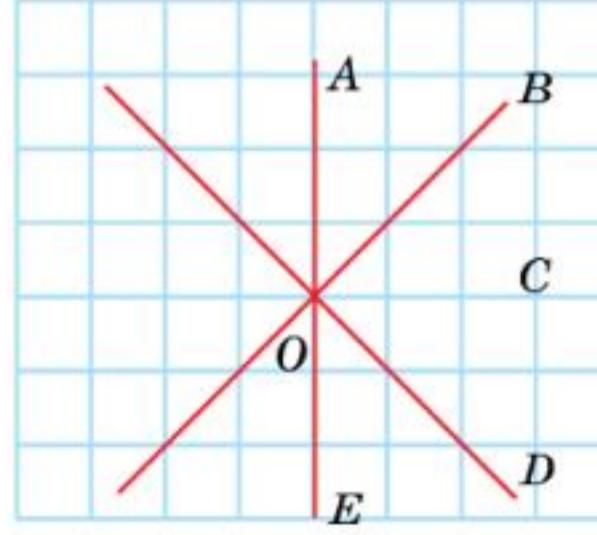
6.1-расм

-  1. Бурчакларни ўлчаш учун қандай бирликтан фойдаланамиз?
- 2. Градус нима?
- 3. Минут нима?
- 4. Секунд нима?
- 5. Бурчакнинг градус ўлчови қандай ўлчанади?
- 6. Бурчакнинг градус ўлчовлари учун қандай хоссалар бажарилади?

Машқлар

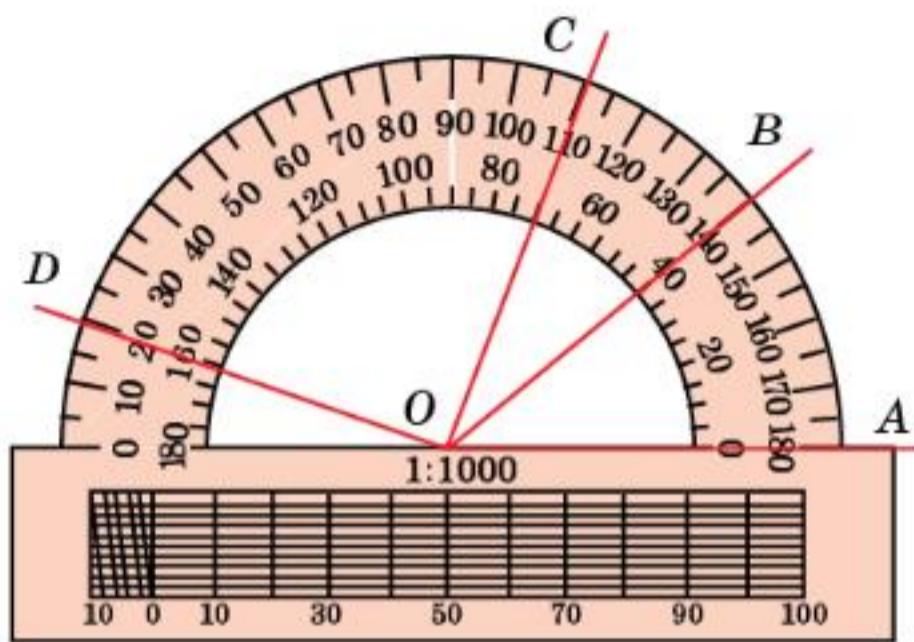
A

6.1. а) AOC ; б) AOB ; в) AOD ; г) AOE ; д) BOD ; е) BOC ; ж) BOE бурчакларнинг градус ўлчовларини топинг (6.2-расм).



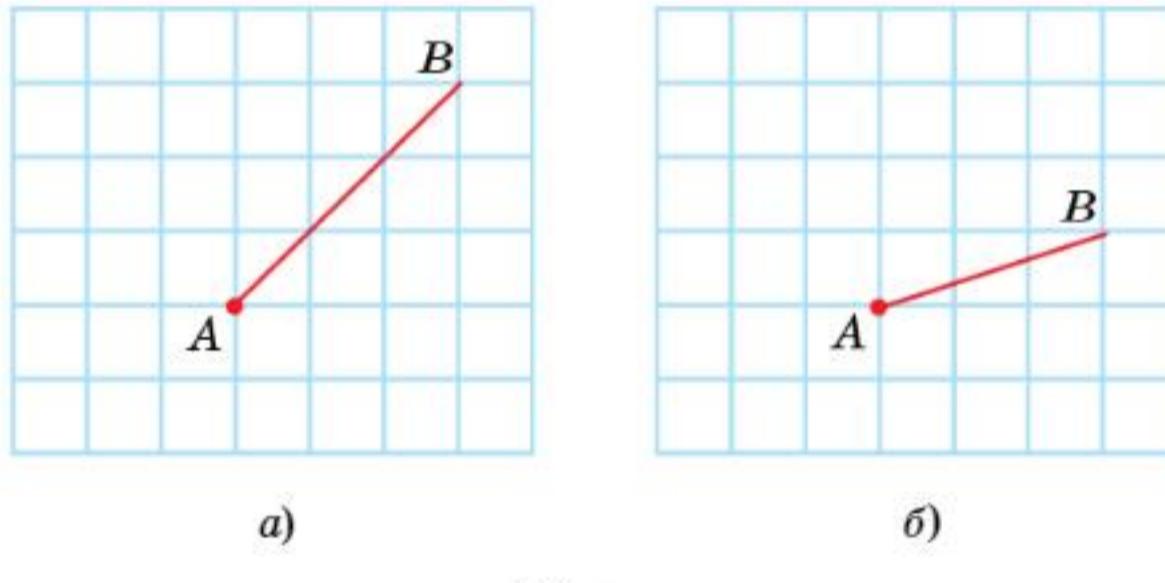
6.2-расм

- 6.2.** 6.3-расмда берилган AOB , AOC , AOD , BOC , BOD , COD , бурчакларнинг градус ўлчовларини топинг.
- 6.3.** Транспортир ёрдамида ўлчовлари 10° , 30° , 70° , 100° , 150° бўлган бурчакларни ясанг.



6.3-расм

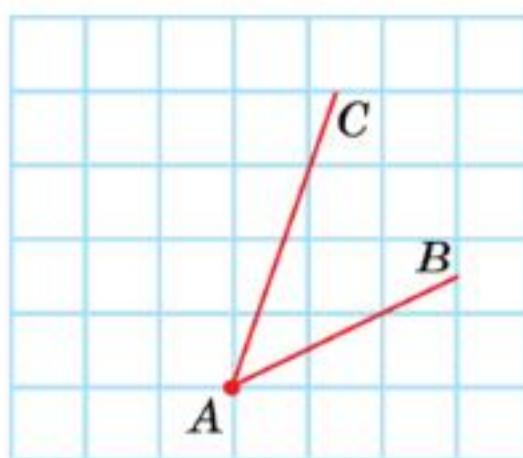
- 6.4.** Катак қофозга 6.4-расмда кўрсатилгандай тарзда AB нурни ясанг. AB нурда: а) 45° ; б) 90° га teng бўлган BAC бурчак ясанг.



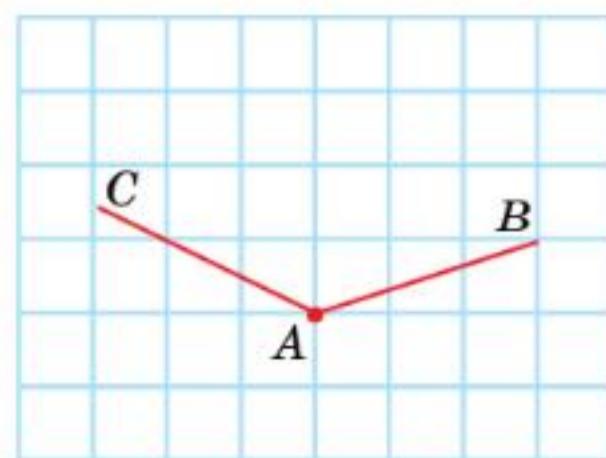
6.4-расм

- 6.5.** Фарб ва шимоли-шарқ орасидаги бурчак катталиги нимага teng?
- 6.6.** Катак қофозга 6.5-расмда берилган бурчакларни ясанг. “Кўз билан чамалаб” уларнинг градус катталикларини баҳоланг. Ўз баҳоларингизни транспортир ёрдамида ўлчаш орқали текширинг.





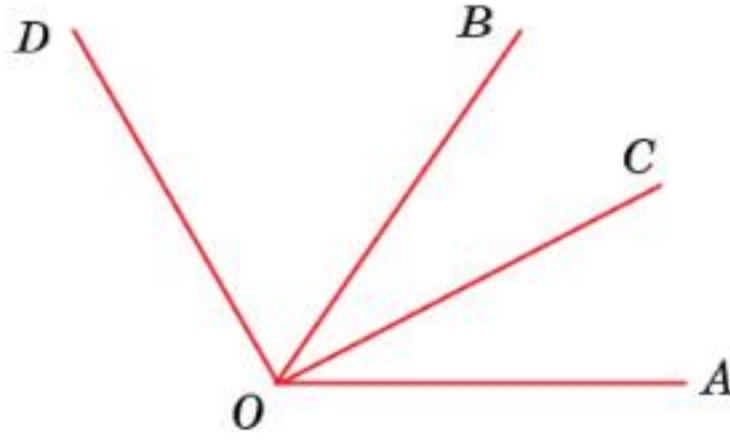
a)



б)

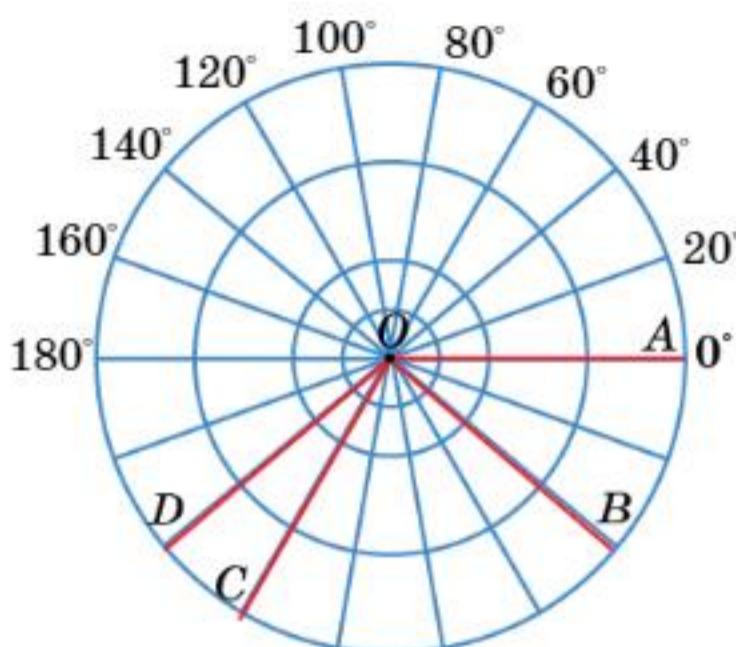
6.5-расм

- 6.7.** 60° га тенг бўлган AOB бурчакнинг ичида OC нур жойлашган. BOC бурчакдан 30° катта бўлган AOC бурчакни топинг.
- 6.8.** 45° га тенг бўлган AOB бурчакнинг ичида OC нур жойлашган. BOC бурчакдан икки марта катта бўлган AOC бурчакни топинг.
- 6.9.** 120° га тенг бўлган AOB бурчакнинг ичида OC нур жойлашган. BOC бурчакдан 30° катта бўлган AOC бурчакни топинг.
- 6.10.** 120° га тенг бўлган AOB бурчакнинг ичида OC нур жойлашган. AOC бурчакдан уч марта катта бўлган BOC бурчакни топинг.
- 6.11.** 38° га тенг бўлган бурчак билан қўшни бўлган бурчакнинг катталиги нимага тенг?
- 6.12.** Агар қўшни бурчаклардан бири иккинчисидан икки марта катта бўлса, у ҳолда қўшни бурчакларнинг катталигини топинг.
- 6.13.** а) бири иккинчисидан 30° ортиқ; б) уларнинг айирмаси 40° га тенг; в) бири иккинчисидан тўрт марта кичик; г) ўзаро тенг бўлган қўшни бурчакларнинг градус катталикларини топинг.
- 6.14.** а) $2 : 3$; б) $3 : 7$; в) $11 : 25$; г) $22 : 23$ нисбатда бўлган иккита қўшни бурчакларнинг градус катталикларини топинг.
- 6.15.** Катталиги 30° бўлган BOC бурчак, ўлчовлари мос равиша 60° ва 90° бўлган AOB ва COD бурчакларнинг умумий қисми (6.6-расм). AOD бурчакни топинг.
- 6.16.** Вертикал бурчаклар биссектрисалари ораларидағи бурчак нимага тенг?



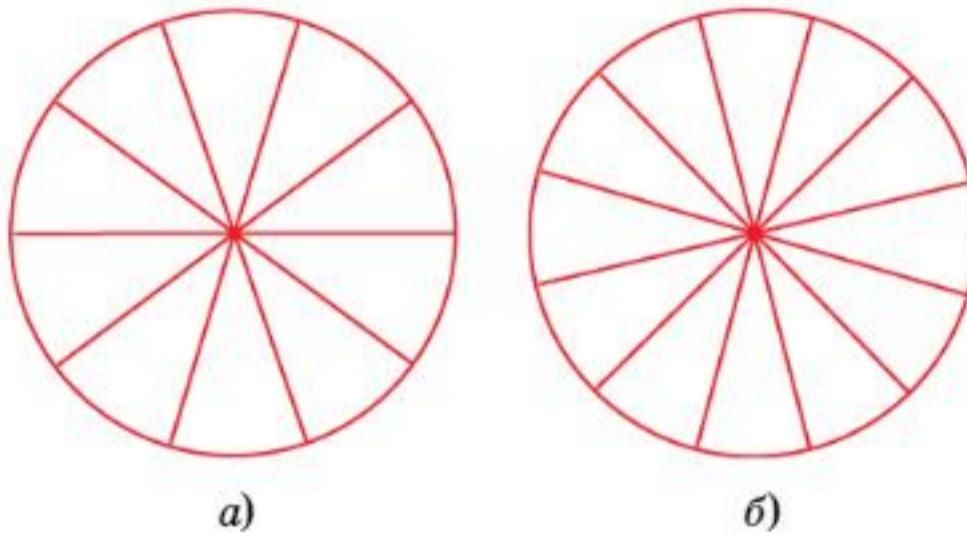
6.6-расм

- 6.17.** 6.17-расмда тасвирланган AOB , AOC , AOD , BOC , BOD , COD , бурчакларнинг катталиги нимага тең?



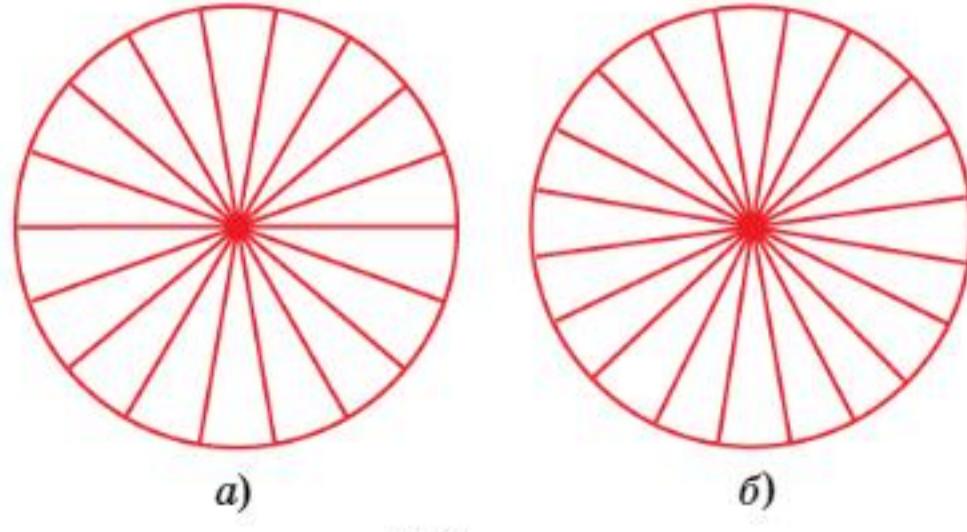
6.7-расм

- 6.18.** Филдиракда: а) 10 та сим; б) 12 та сим (6.8-расм) бор. Қүшни жойлашган иккита сим орасидаги бурчакнинг катталигини топинг (градус ўлчов бирлигига).



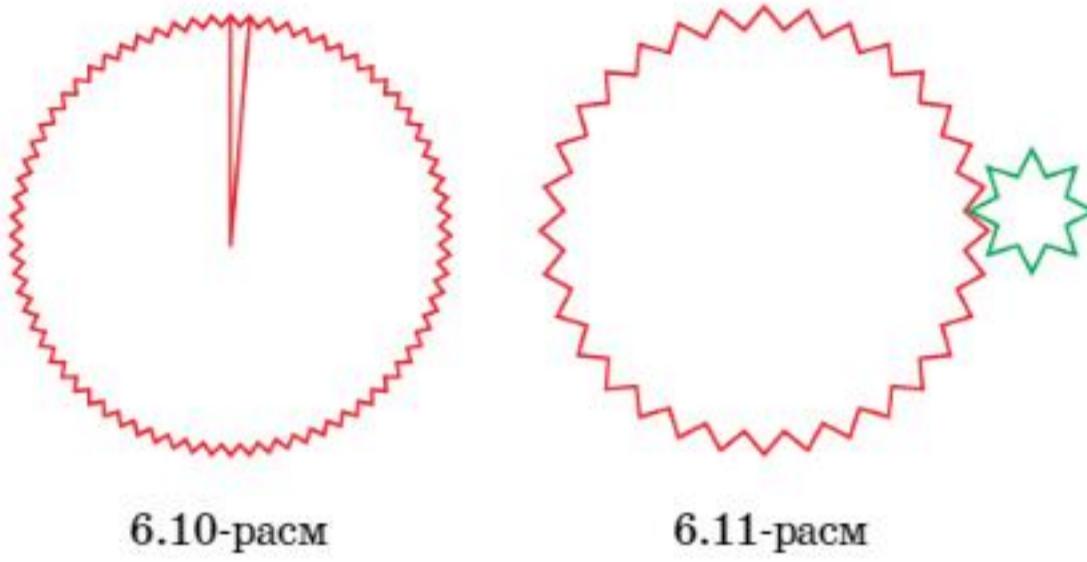
6.8-расм

- 6.19.** Филдиракда: а) 18 та сим; б) 20 та сим (6.9-расм) бор. Қүшни жойлашган иккита сим орасидаги бурчакнинг катталигини топинг (градус ўлчов бирлигига).



6.9-расм

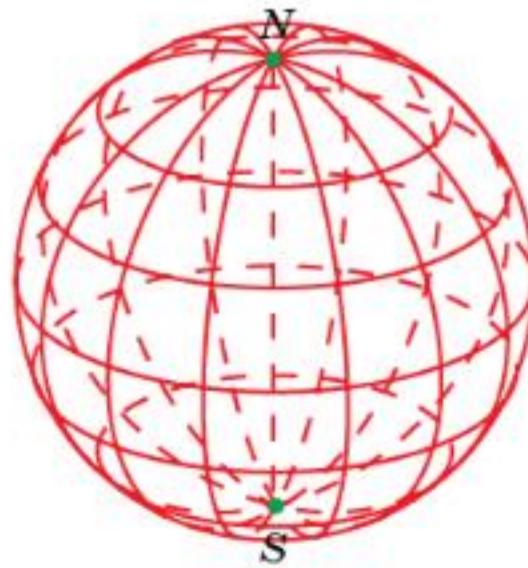
- 6.20.** Филдиракнинг 72 та тиши бор (6.10-расм). Қүшни икки тишинг орасини бирлаштирувчи айлана ёйи неча градусни ташкил этади?
- 6.21.** Агар 8 та тиши бўлган филдирак минутига 12 марта тўлиқ айланса, у ҳолда 32 та тиши бўлган филдирак минутига неча марта айланади (6.11-расм)?



- 6.22.** а) соат 3; б) соат 6; в) соат 5 бўлса, соатнинг минут ва соат милли ораси неча градус бўлади?
- 6.23.** а) 20 минутда; б) 10 минутда; в) 50 минутда соатнинг минут мили неча градусга бурилади?
- 6.24.** а) 1 соатда; б) 30 минутда; в) 20 минутда соатнинг соат мили неча градусга бурилади?

C

- 6.25.** Қўшни бурчакларнинг биссектрисалари тўғри бурчак ясалини исботланг.
- 6.26.** 8 соатда Ер ўзининг SN ўқи атрофида неча градусга бурилади (6.12-расм)?
- 6.27.** Ер ўз ўқи атрофида 90° га неча соатда бурилади (6.12-расм).



Ахборот тайёрланг

- 6.28.** 1) Бурчакни ўлчаш асбобларидан бири – **астролябия** қандай пайдо бўлган?
- 2) Геодезик ишларни бажариш учун фойдаланиладиган бурчак асбоби **теодолит** қандай пайдо бўлган?

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Битта нуқта орқали нечта тўғри чизик ўтказиш мумкин?
A) Ҳеч қандай. B) Битта. C) Иккита. D) Чексиз кўп.
2. Иккита нуқта орқали нечта тўғри чизик ўтказиш мумкин?
A) Чексиз кўп. B) Иккита. C) Битта. D) Ҳеч қандай.
3. Иккита тўғри чизиқда кўпи билан нечта мумумий нуқта бўлиши мумкин?
A) Ҳеч қандай. B) Битта. C) Иккита. D) Чексиз кўп.
4. Битта тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқталар жуфтидан нечта тўғри чизик ўтказиш мумкин?
A) Битта. B) Иккита. C) Учта. D) Чексиз кўп.
5. Ихтиёрий утаси битта тўғри чизиқда ётмайдиган тўртта нуқталар жуфтидан кўпи билан нечта тўғри чизик ўтказиш мумкин?
A) 4. B) 6. C) 8. D) 12.
6. Ихтиёрий утаси битта тўғри чизиқда ётмайдиган бешта нуқталар жуфтидан кўпи билан нечта тўғри чизик ўтказиш мумкин?
A) 5. B) 10. C) 15. D) 20.
7. Учта тўғри чизиқнинг энг кўп кесишувчи жуфтлари нуқтаси нечта?
A) Битта. B) Иккита. C) Учта. D) Чексиз кўп.
8. Тўртта тўғри чизиқдаги кесишувчи жуфтларнинг энг кўп нуқтасини аниқланг.
A) 4. B) 6. C) 8. D) 12.
9. Тўртта тўғри чизиқдаги кесишувчи жуфтларнинг энг кўп нуқтасини аниқланг.
A) 5. B) 10. C) 15. D) 20.



- 10.** Түғри чизиқда түртта нұқта белгиланған. Шу нұқталар кесманинг учлари бўладиган нечта кесма мавжуд?
- A) 3. B) 4. C) 5. D) 6.
- 11.** OA нурда OA кесмадан кичик бўлган OB кесма жойлаширилган. Учта нұқтадан қайси бири қолган иккитасининг орасида ётади?
- A) A. B) O. C) B. D) Мумкин эмас.
- 12.** Учта кесма түғри чизиқда кетма-кет жойлаширилган: AB, BC ва CD, $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. AB ва CD кесмалар орасидаги масофани топинг.
- A) 6,5 см. B) 7,5 см. C) 8,5 см. D) 10,5 см.
- 13.** Берилган бурчакка қўшни бўлган нечта бурчак мавжуд?
- A) 1. B) 2. C) 3. D) 4.
- 14.** Қўшни бурчаклардан бири 30° . Иккинчи бурчакни топинг.
- A) 30° . B) 60° . C) 120° . D) 150° .
- 15.** Қўшни бурчаклардан бири иккинчисидан 90° катта. Шу бурчакларни топинг.
- A) $90^\circ, 180^\circ$. B) $30^\circ, 120^\circ$. C) $60^\circ, 150^\circ$. D) $45^\circ, 135^\circ$.
- 16.** Қўшни бурчаклардан бири иккинчисидан уч марта катта. Шу бурчакларни топинг.
- A) $45^\circ, 135^\circ$. B) $60^\circ, 120^\circ$. C) $30^\circ, 90^\circ$. D) $15^\circ, 45^\circ$.
- 17.** Қўшни бурчаклардан бири иккинчисининг 20% ини ташкил ётади. Шу бурчакларни топинг.
- A) $20^\circ, 160^\circ$. B) $45^\circ, 135^\circ$. C) $60^\circ, 120^\circ$. D) $30^\circ, 150^\circ$.
- 18.** Икки түғри чизиқнинг кесишишидан хосил бўлган вертикал бурчакларнинг йифиндиси 150° . Шу түғри чизиқлар орасидаги ҳамма бурчакларни топинг.
- A) $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$. B) $30^\circ, 150^\circ, 30^\circ, 150^\circ$.
 C) $75^\circ, 105^\circ, 75^\circ, 105^\circ$. D) $50^\circ, 130^\circ, 50^\circ, 130^\circ$.
- 19.** 20 минутда соатнинг мили қандай бурчакка бурилади?
- A) 30° . B) 60° . C) 90° . D) 120° .
- 20.** Соат 13 дан 30 минут ўтганда соатнинг минут ва соат миллари қандай бурчак ясайди?
- A) 90° . B) 120° . C) 135° . D) 150° .

УЧБУРЧАКЛАР

7-§. УЧБУРЧАК ВА УНИНГ ТУРЛАРИ

Учурчак асосий геометрик фигурандардан бири ҳисобланади. 7.1-расмда турли хил учурчаклар тасвирланган. Қандай фигура учурчак деб аталишини мустақил аниқлаб күринг. 7.1-расмда тасвирланган учурчакларнинг фарқи нимада?

Битта түғри чизикда ётмайдиган уча нұқтадан ва уларни туаштирувчи уча кесмадан ташкил топған фигура *учурчак* дейилади. Нұқталар учурчакнинг *учлари*, кесмалар эса учурчакнинг *томонлари* деб аталади.

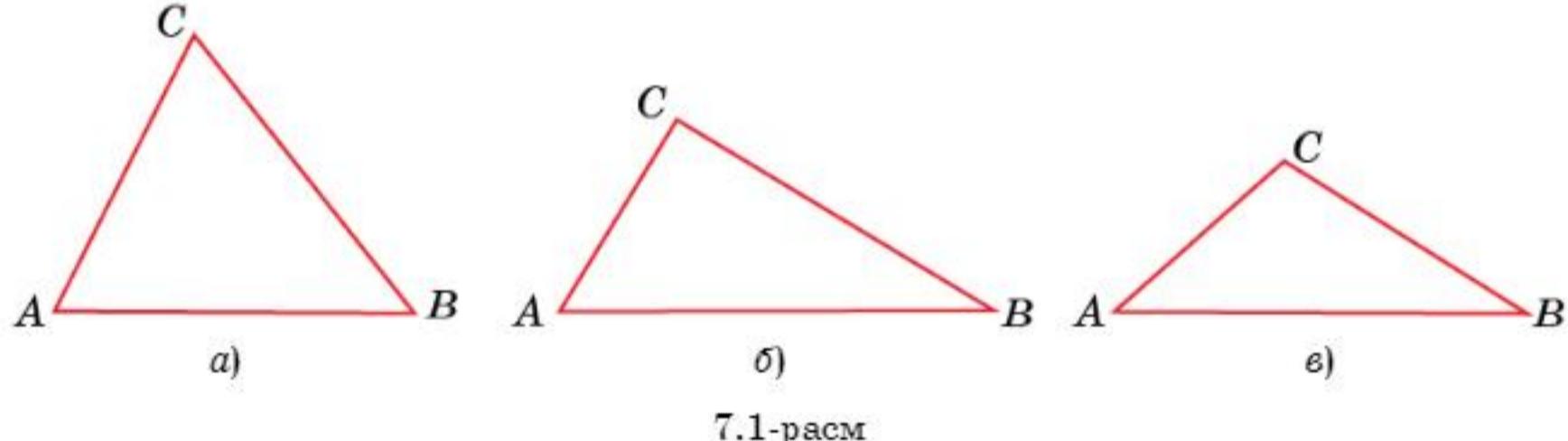
Учурчаклар унинг учларини күрсатиш орқали белгиланади. Масалан, $\triangle ABC$ учурчак.

Учи учурчакнинг учи, томонлари эса учурчакнинг томонлари бўлган бурчак учурчакнинг *бурчаги* дейилади.

Ҳамма бурчаклари ўткир бурчак бўлган учурчак *ўткир бурчакли учурчак* дейилади (7.1-а расм).

Агар учурчакнинг битта бурчаги түғри бурчак бўлса, у ҳолда у *түғри бурчакли учурчак* деб аталади (7.1-б расм).

Агар учурчакнинг битта бурчаги ўтмас бурчак бўлса, у ҳолда у *ўтмас бурчакли учурчак* дейилади (7.1-в расм).



7.1-расм

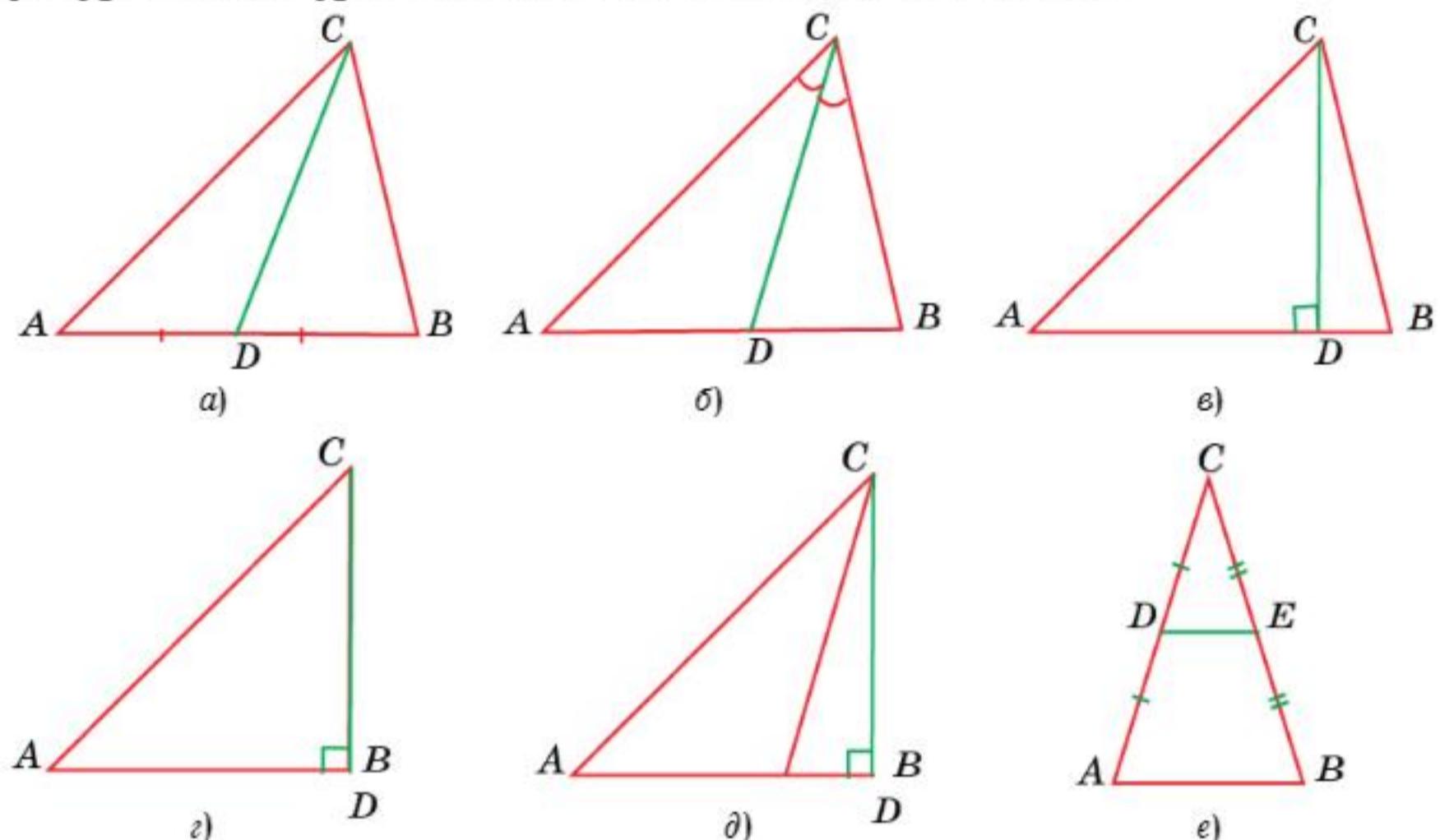
Учурчакнинг учлари, томонлари ва бурчакларидан бошқа қуидаги асосий элементлари мавжуд:

- учурчакнинг *медианаси* — учурчакнинг учи билан унга қарама-қарши ётган томоннинг ўртасини туаштирувчи кесма (7.2-а расм);
- учурчакнинг *биссектрисаси* — учурчак бурчаги биссектрисининг учи билан унга қарама-қарши ётган томонини туаштирувчи кесма (7.2-б расм);

• учурчакнинг баландлиги — учурчакнинг учи билан унга да-вомида ётган нүктани туташтирувчи ва шу томонга перпендикуляр бўлган кесма (34.2-в, г, д расм).

Учурчакнинг барча томонлари узунликларининг йиғиндиси унинг *периметри* дейилади.

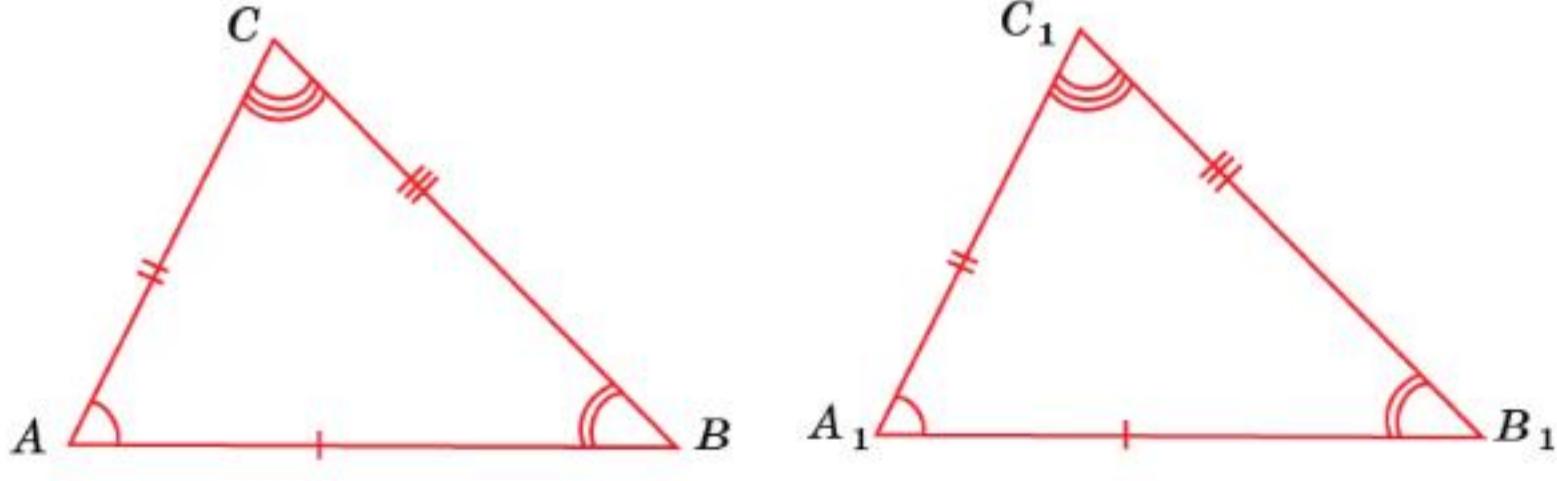
Учурчакнинг икки томони ўртасини бирлаштирадиган кесма учурчакнинг *ўрта чизиги* деб аталади (7.2-е расм).



7.2-расм

Агар бир учурчакнинг томонлари ва улар орасидаги бурчаклари иккинчи учурчакнинг томонлари ва улар орасидаги бурчакларига мос равишда teng бўлса, у ҳолда бундай учурчаклар *тенг* дейилади.

Шундай қилиб, ABC ва $A_1B_1C_1$ учурчакларда: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, тенгликлар бажарилса, у ҳолда бу учурчаклар тенг бўлади ва қуидагича белгиланади: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (7.3-расм).



7.3-расм



ABC ва *DEF* тенг учурчаклар учун тенгликтерни мустақил ёзинг.

Тенглик түшүнчесини фақат учурчаклар учун эмас, балки бошқа фигураналар учун ҳам ишлатиш мүмкін. Агар иккита фигураның шакллари ва ўлчовлари бир хил бўлса, у ҳолда у фигураналар тенг бўлади. Фигураналар тенглиги таърифи 9-синфда ўрганиладиган ҳаракат түшүнчесига асосланган. Агар ҳаракат ёрдамида бир фигурани иккинчи фигурага ўтказиш мүмкін бўлса, у ҳолда бу фигураналар *тенг* деб аталади.



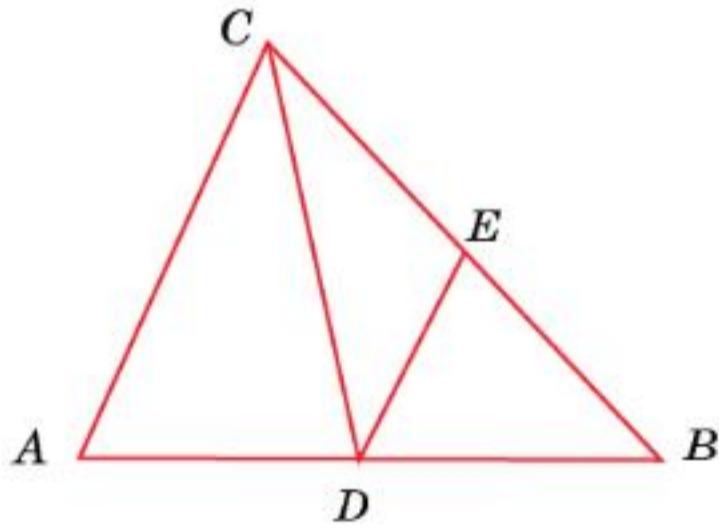
1. Қандай фигура учурчак деб аталади?
2. Учурчак қандай белгиланади?
3. Учурчакнинг медианаси нима?
4. Учурчакнинг биссектрисаси нима?
5. Учурчакнинг баландлиги нима?
6. Учурчакнинг периметри нима?
7. Қандай учурчаклар тенг деб аталади?
8. Қандай учурчак: а) ўткир бурчакли; б) тўғри бурчакли; в) ўтмас бурчакли деб аталади?

Машқлар

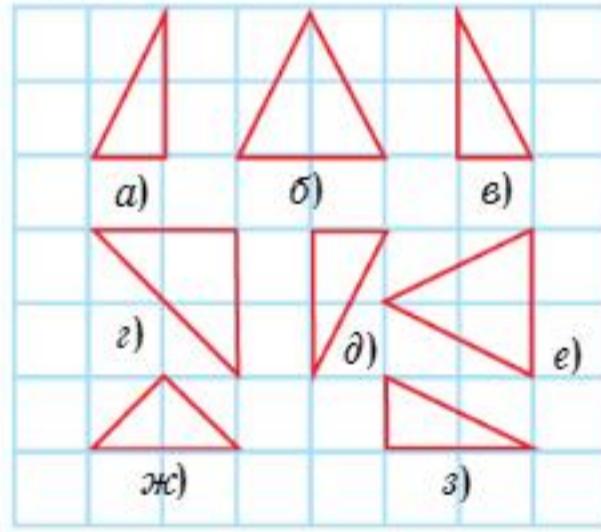
A

7.1. 7.4-расмда тасвирланган барча учурчакларни атанг.

7.2. 7.5-расмдаги тенг учурчакларни кўрсатинг.



7.4-расм

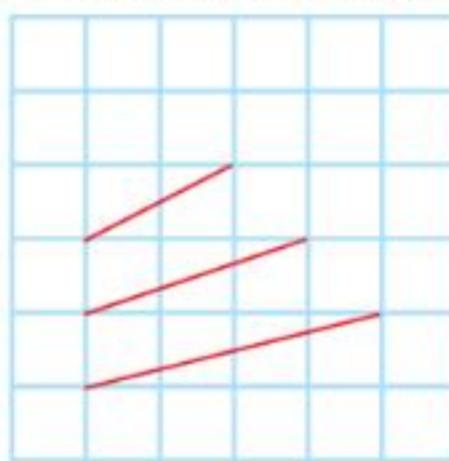


7.5-расм

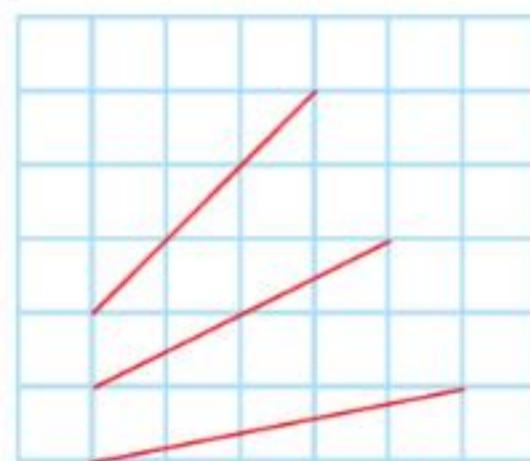
- 7.3. Қуйидаги: а) ўткир бурчакли ва тўғри бурчакли учурчаклар; б) ўткир бурчакли ва ўтмас бурчакли учурчаклар; в) тўғри бурчакли ва ўтмас бурчакли учурчаклар тенг бўлиши мумкинми?
- 7.4. Учурчакда нечта: а) медиана; б) биссектриса; в) баландлик бор?
- 7.5. Учурчакдан ташқарида а) медиана; б) биссектриса; в) баландлик ўтказиш мумкинми?

B

- 7.6.** Катақ вақытта томонлари 7.6-расмда тасвирланған кесмаларга тенг бўлган учурчак ясанг.



a)



б)

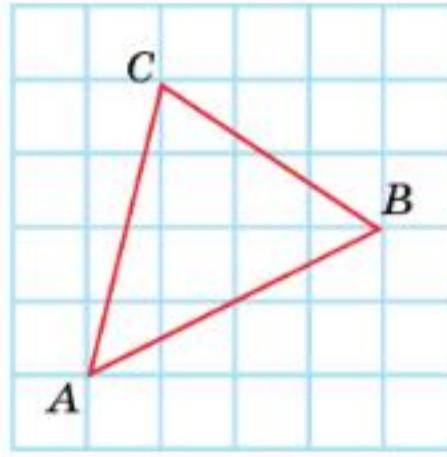
7.6-расм

- 7.7.** ABC ва EFG учурчаклар тенг ва $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. EFG учурчакнинг томонларини топинг.

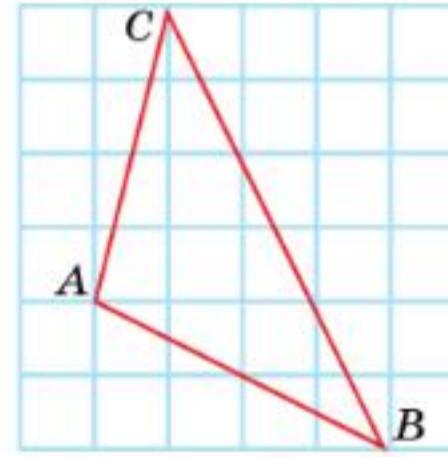
- 7.8.** ABC ва EFG учурчаклар тенг ва $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$. EFG учурчакнинг томонларини топинг.

- 7.9.** ABC , PQR ва XYZ учурчаклар тенг ва $AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $XZ = 7$ см. Ҳар бир учурчакнинг қолган томонларини топинг.

- 7.10.** Катақ вақытта ABC учурчак ясанг (7.7-расм) ва унинг медианаларини ўтказинг.



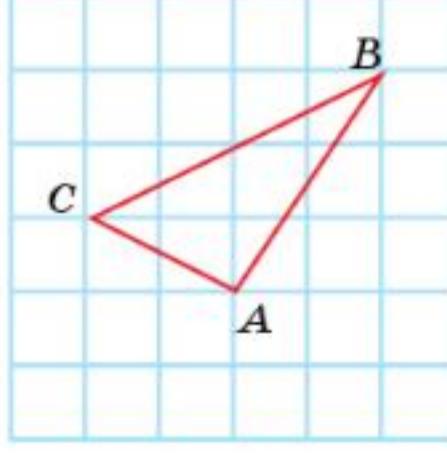
a)



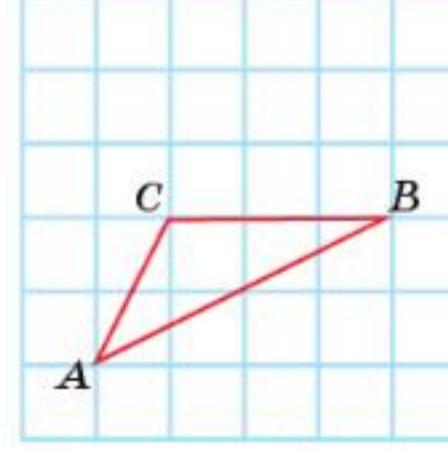
б)

7.7-расм

- 7.11.** Катақ вақытта ABC учурчак ясанг (7.8-расм) ва унинг а) CD ; б) AD биссектрисаларини ўтказинг.



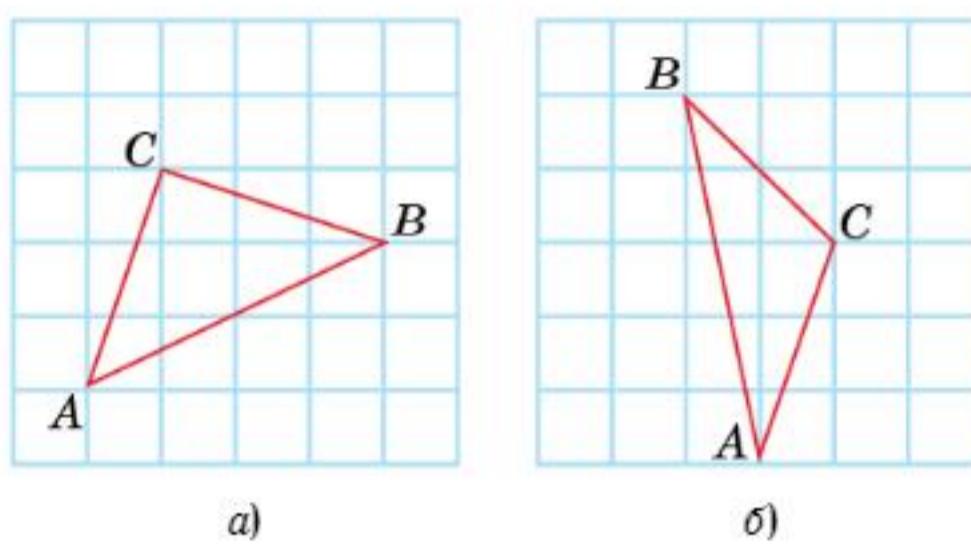
a)



б)

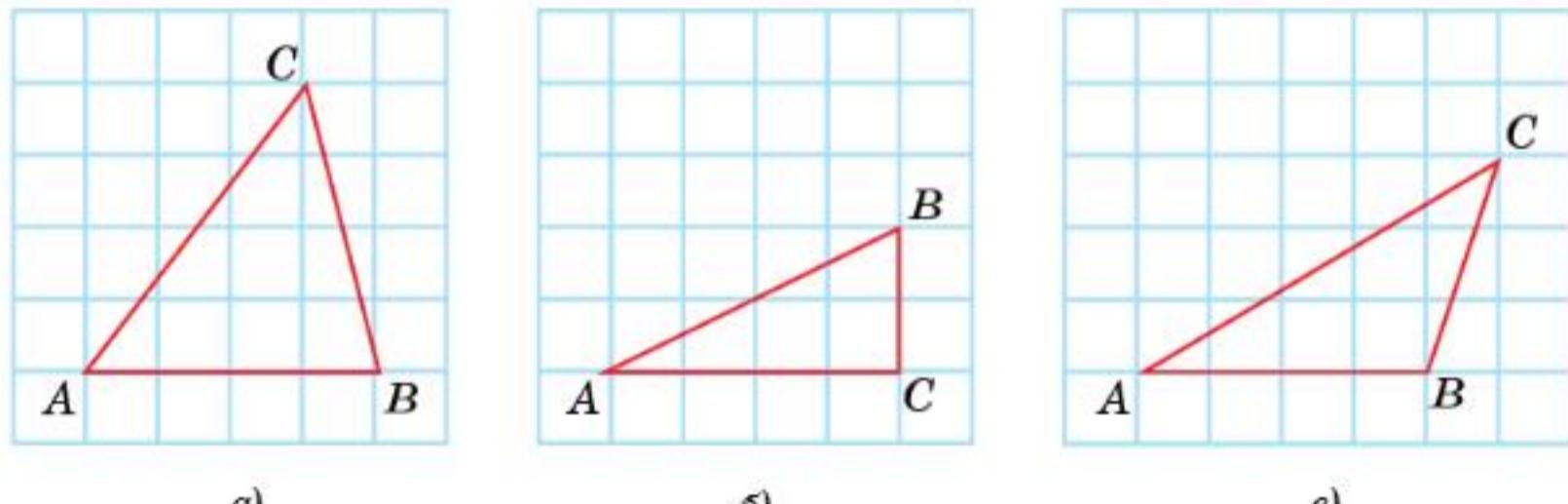
7.8-расм

- 7.12.** Катақ варақда ABC учбұрчак ясанды (7.9-расм) ва унинг а) CD ; б) AD баландликтерини үтказинг.



7.9-расм

- 7.13.** 7.10-расмда күрсатылғаны каби катақ варақда: а) ABC үткір бурчакли учбұрчак; б) ABC түрі бурчакли учбұрчак; в) ABC үтмас бурчакли учбұрчак ясанды. С учидан медиана, биссектриса ва баландлик үтказинг.

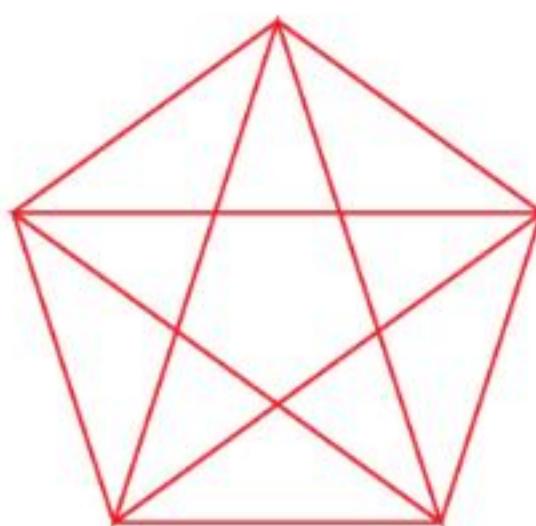


7.10-расм

- 7.14.** AB ABC учбұрчакнинг томони 17 см га теңг. AC томон AB томонга қараганда икки мартада узун. AC томон эса BC томондан 10 см қисқа. ABC учбұрчакнинг периметрини топинг.
- 7.15.** Учбұрчакнинг периметри 48 см ва бир томони 18 см. Агар қолган иккита томонининг айримаси 10 см бўлса, у ҳолда шу томонларни топинг.
- 7.16.** Учбұрчакнинг периметри 54 см. Агар томонларининг нисбати 2:3:4 каби бўлса, у ҳолда учбұрчак томонларини топинг.
- 7.17.** Учбұрчак шаклидаги ер майдонининг периметри бўйича бир-биридан 2 м узокликда қарағат кўчатларини үтқазиш керак. Агар ер майдонининг томонлари узунликлари 16 м, 24 м ва 20 м бўлса, жами неча туп кўчат үтқазиш мумкин?

С

7.18. 7.11-расмда нечта учбұрчак тасвиrlанған?



7.11-расм

7.19. Агар түғри чизик учбұрчакнинг томонларидан бирини кесиб үтса ва унинг уchlари орқали үтмаса, у ҳолда у қолган иккита томондан биттасини кесиб үтишини исботланг.

Яңги мавзууны үзлаштиришга тайёрланинг

7.20. Бир учбұрчакнинг бир томони билан унга ёпишган бурчаги иккинчи учбұрчакнинг мос томони билан унга ёпишган бурчагига teng. Ушбу учбұрчаклар teng бўла оладими? Мисоллар келтиринг.

8-§. УЧБУРЧАКЛАР ТЕНГЛИГИНИНГ БИРИНЧИ АЛОМАТИ

Учбұрчакларда tengлик ўрнатиш учун ҳамма томонлари ва бурчаклари жуфтларининг tengligini текшириш шарт эмас, улардан айримларининг tengligini текшириш етарли. Буларга мос равишида теоремалар *учбұрчаклар tengligининг аломатлари* деб аталади.

Чизғич ва транспортирдан фойдаланиб, $AB = 5$ см, $AC = 4$ см, A бурчаги 60° бўлган ABC учбұрчак ясанг. Ушбу учбұрчакни пардошингиз ясаган учбұрчак билан таққосланг.

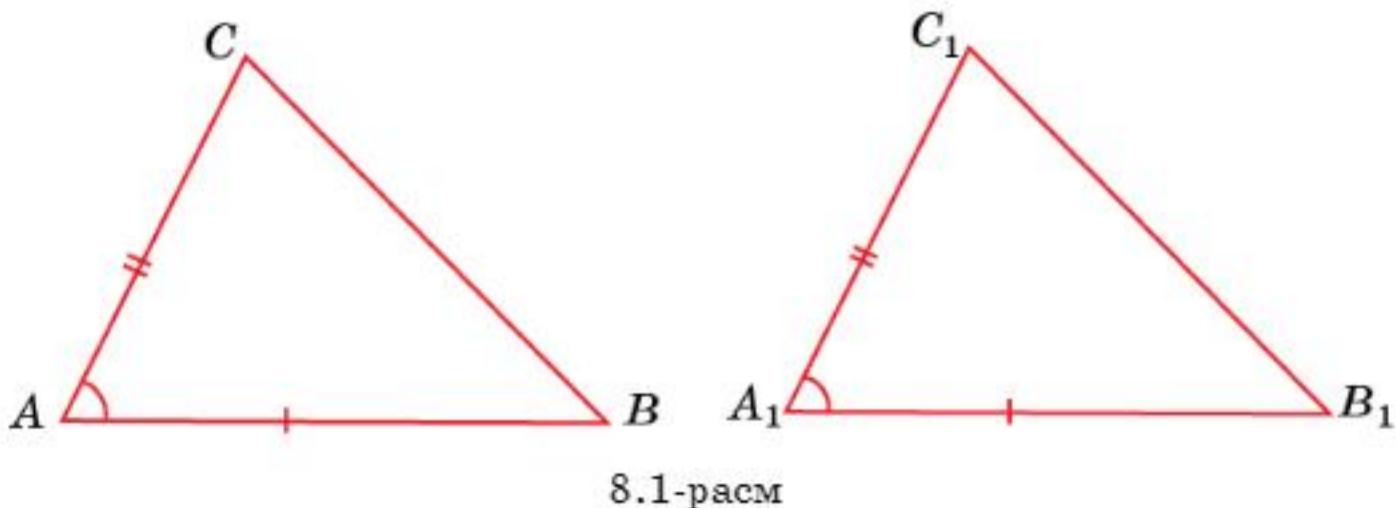


Сиз қандай ўйлайсиз, бу учбұрчаклар tengми?

Улар teng бўлади. Учбұрчаклар tengligининг қўйидаги аломати түғри бўлади.

Теорема (Учбұрчаклар tengligининг биринчи аломати). Агар бир учбұрчакнинг иккита томони ва улар орасидаги бурчаги иккинчи учбұрчакнинг иккита томони ва улар орасидаги бурчагига мос равишида teng бўлса, у ҳолда бу учбұрчаклар teng бўлади.

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбұрчакларда $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ бўлсин (8.1-расм).



C_1 учи билан аниқланган ярим текисликда ABC нурдан бошлаб $A_1B_1C_1$ учбұрчак ясаймиз. A учи A_1 уч билан устма-уст тушади. B томонлари ўзаро тенг бўлғанлиги туфайли AB ва A_1B_1 , B учи B_1 уч билан устма-уст тушади A ва A_1 бурчаклар тенг бўлғанлиги сабабли AC томон A_1C_1 томонда ётади ва бу томонлар тенг эканидан C учи C_1 уч билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, ABC учбұрчак $A_1B_1C_1$ учбұрчак билан устма-уст тушади, яъни ушбу учбұрчаклар тенг бўлади .



Учбұрчаклар тенглигининг биринчи аломати бўйича ABC ва DEF , учбұрчаклар элементларининг тенглигини мустақил ёзинг.

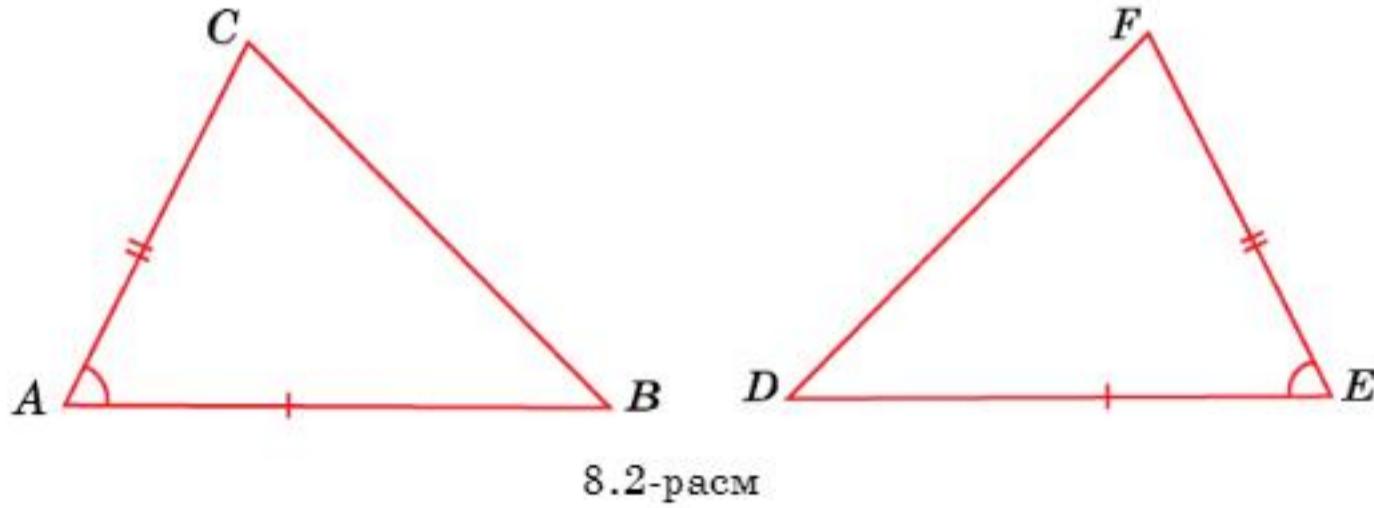


1. Қандай теоремалар учбұрчаклар тенглигининг биринчи аломати деб аталади?
2. Учбұрчаклар тенглигининг биринчи аломатини келтириб чиқаринг.

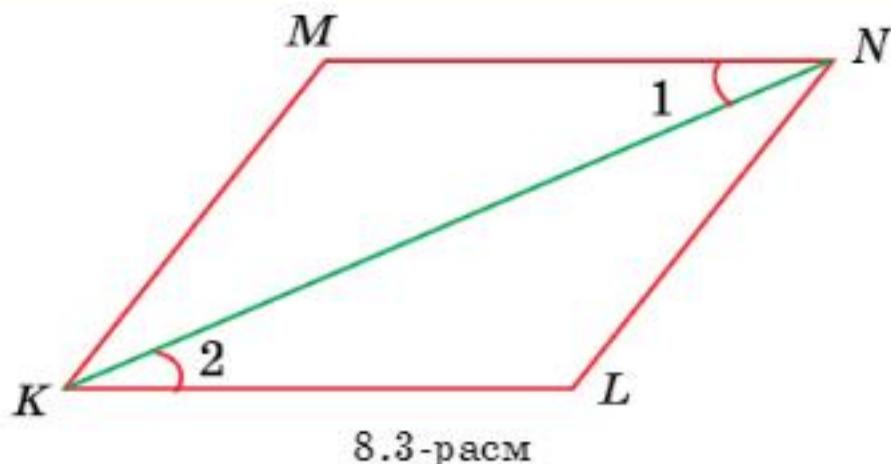
Машқлар

A

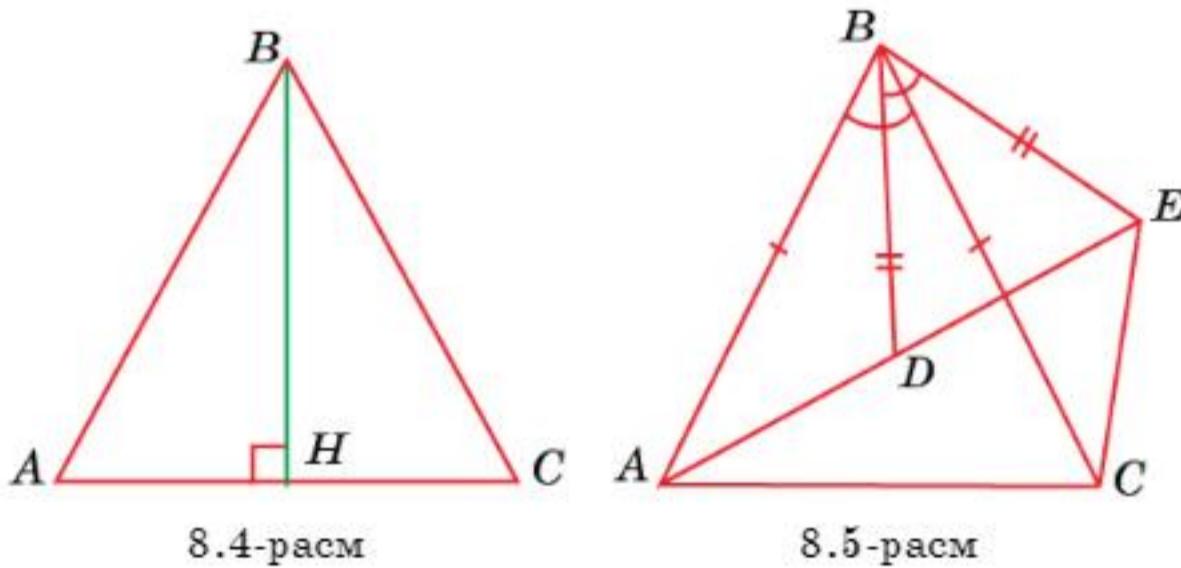
- 8.1.** Агар $AB = DE$, $AC = EF$ ва A бурчак E бурчакка тенг бўлса, у ҳолда 8.2-расмда тасвирланган учбұрчаклар тенг бўладими?



- 8.2.** Агар KLN ва NMK бўлса, у ҳолда 8.3-расмдаги $KL = NM$, $\angle 1 = \angle 2$ учбұрчаклар тенг бўладими?
- 8.3.** 8.3-расмда $KL = NM = 4$ см, 1-бурчак 2-бурчакка тенг, $KM = 3$ см. LN узунлигини топинг.

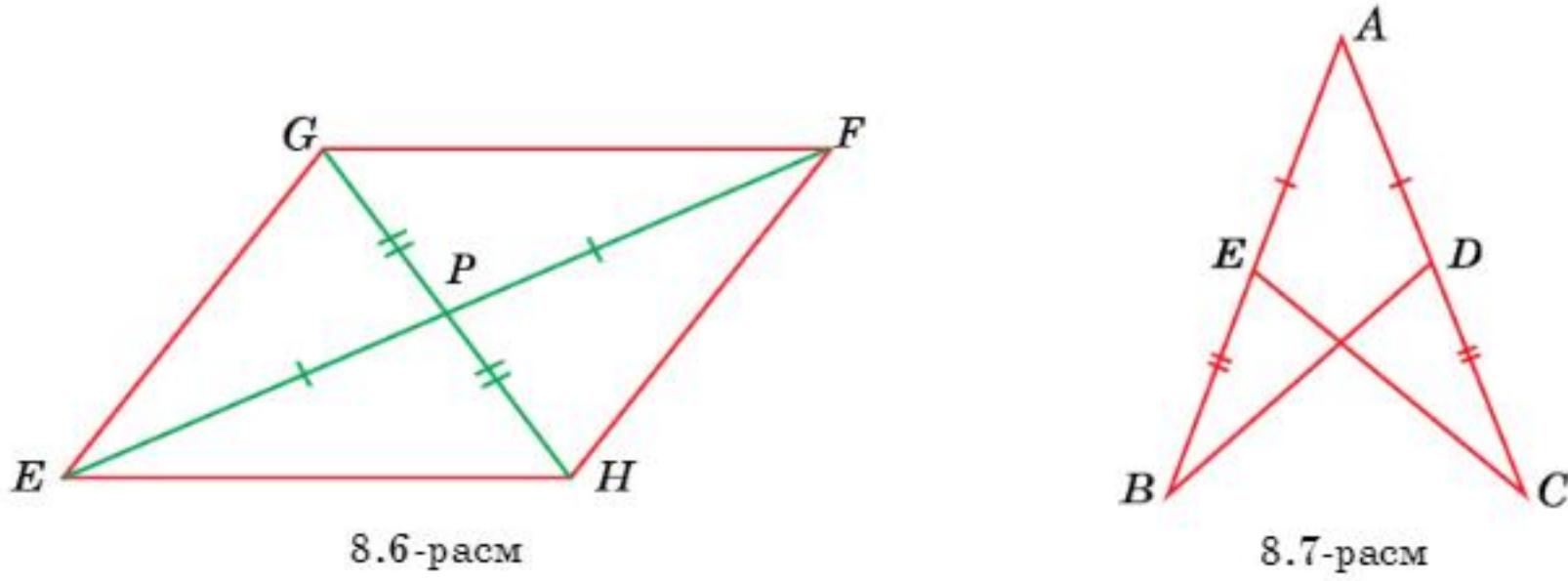


- 8.4.** Агар ABH ва CBH бўлса, у ҳолда 35.4-расмдаги $BH \perp AC$ ва $AH = CH$ учбурчаклар тенг бўладими?
- 8.5.** 8.4-расмдаги BH кесма AC ва $AH = CH = 2$ см томонга перпендикуляр ва $AB = 5$ см. BC томоннинг узунлигини топинг.
- 8.6.** 8.5-расмда ABC ва DBE тенг бурчаклар ва тенг томонлар кўрсатилган. Тенг учбурчакларни ёзинг.

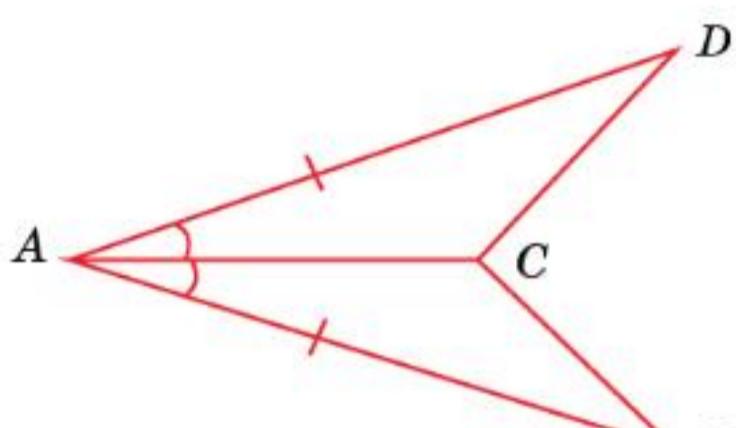


- 8.7.** 8.6-расмда P нуқта — EF ва GH кесмаларнинг ўртаси. Ушбу расмда тенг учбурчаклар мавжудми?

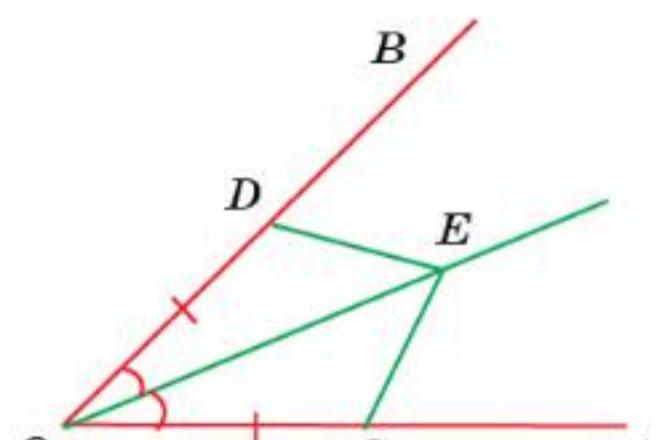
- B**
- 8.8.** 8.7-расмда $AB = AC$, $AE = AD$. $BD = CE$ эканлигини исботланг.
- 8.9.** 8.7-расмда $AE = AD = 2$ см, $BE = CD = 3$ см, $BD = 4$ см. CE нинг узунлигини топинг.



- 8.10.** 8.8-расмда $AB = AD$ ва BAC бурчак DAC бурчакка тенг. $BC = DC$ эканини исботланг.
- 8.11.** AOB бурчакнинг томонларидан OC ва OD тенг кесмалар олинган (8.9-расм). Ушбу бурчакнинг биссектрисасидан олинган E нуқта C ва D нуқталар билан туташтирилган. $EC = ED$ эканини исботланг.

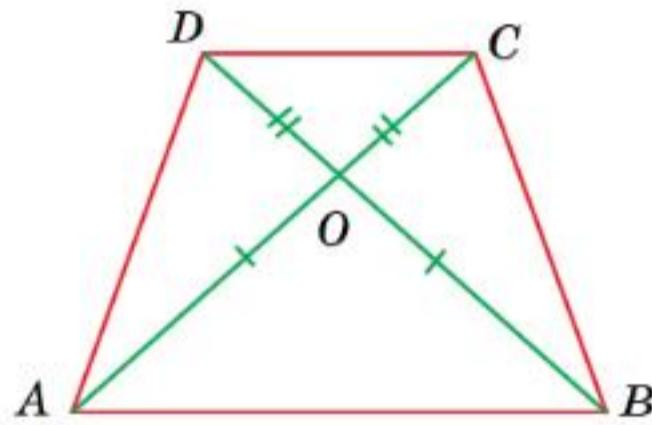


8.8-расм

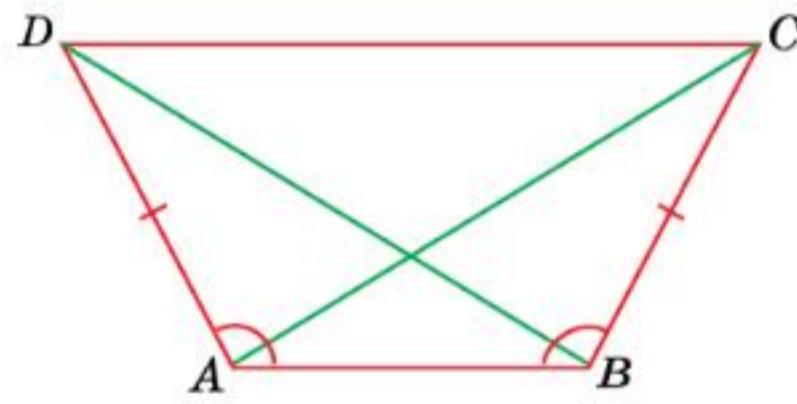


8.9-расм

- 8.12.** 8.10-расмда $AO = OB$ ва $DO = OC$. AD ва BC кесмаларнинг тенглигини исботланг.
- 8.13.** 8.11-расмда A бурчак B бурчакка тенг ва $AD = BC$. $AC = BD$ эканини исботланг.



8.10-расм



8.11-расм

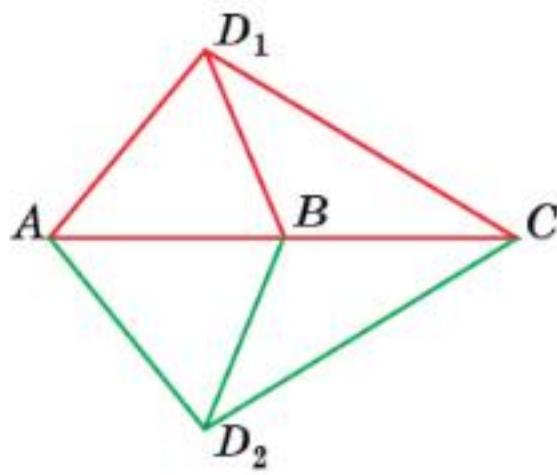
- 8.14.** B қишлоқ A қишлоқдан жанубга томон 15 км, C қишлоқ эса B қишлоқдан шимоли-шарққа томон 7 км узоқликда жойлашадиган A, B, C қишлоқлар жойлашган. Яна бошқа N қишлоғи M қишлоқдан ғарбга томон 15 км, M қишлоқ K қишлоқдан шимоли-ғарбга томон 7 км узоқликда жойлашадиган M, N, K қишлоқлар жойлашган. A ва C қишлоқлари орасидаги масофа билан N ва K қишлоқлари орасидаги масофани таққосланг.

С

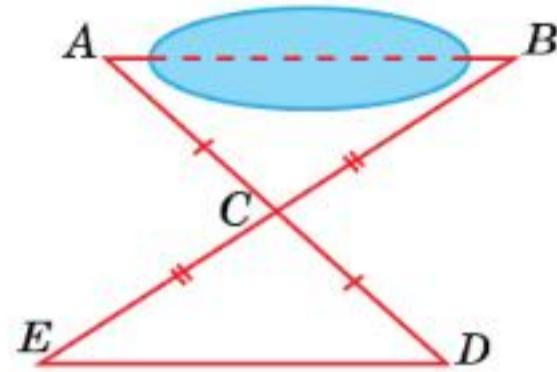
- 8.15.** Тенг учбурчакларда мос равища медианалари ҳам тенг бўлишини исботланг.
- 8.16.** 8.12-расмда A, B, C нуқталар битта тўғри чизиқда жойлашган. D_1 ва D_2 нуқталар шу тўғри чизиқнинг турли томонлари-

да жойлашган. Агар ABD_1 ва ABD_2 учурчаклар тенг бўлса, у ҳолда BCD_1 ва BCD_2 учурчаклар ҳам тенг бўлишини исботланг.

- 8.17.** Ер майдонида ораларида тўғри чизик бўйича ўтиш мумкин бўлмаган A ва B нуқталар орасидаги масофани ўлчаш учун (8.13-расм) AC ва BC масофаларни ўлчаш мумкин бўлган C нуқта олинади ва кесмалар ясалади. Бунда $CD = AC$ ва $CE = BC$. E ва D нуқталар орасидаги масофа изланаётган масофага тенг бўлади. Ечимни тушунтиринг.



8.12-расм



8.13-расм

- 8.18.** Агар бир учурчакнинг иккита томони билан битта бурчаги иккинчи учурчакнинг иккита томони билан битта бурчагига мос равища тенг бўлса, у ҳолда бу учурчаклар тенг бўладими?

Янги мавзууни ўзлаштиришга тайёрланинг

- 8.19.** Бир учурчакнинг иккита бурчаги иккинчи учурчакнинг иккита бурчагига мос равища тенг. Бу учурчаклар ўзаро тенг бўладими? Мисол келтиринг.

9-§. УЧБУРЧАКЛАР ТЕНГЛИГИНИНГ ИККИНЧИ АЛОМАТИ

Чизғич ва транспортидан фойдаланиб $AB = 5$ см, A бурчаги 60° , B бурчаги 45° бўлган учурчак ясанг. Ушбу учурчакни парта дошингиз ясаган учурчак билан таққосланг.

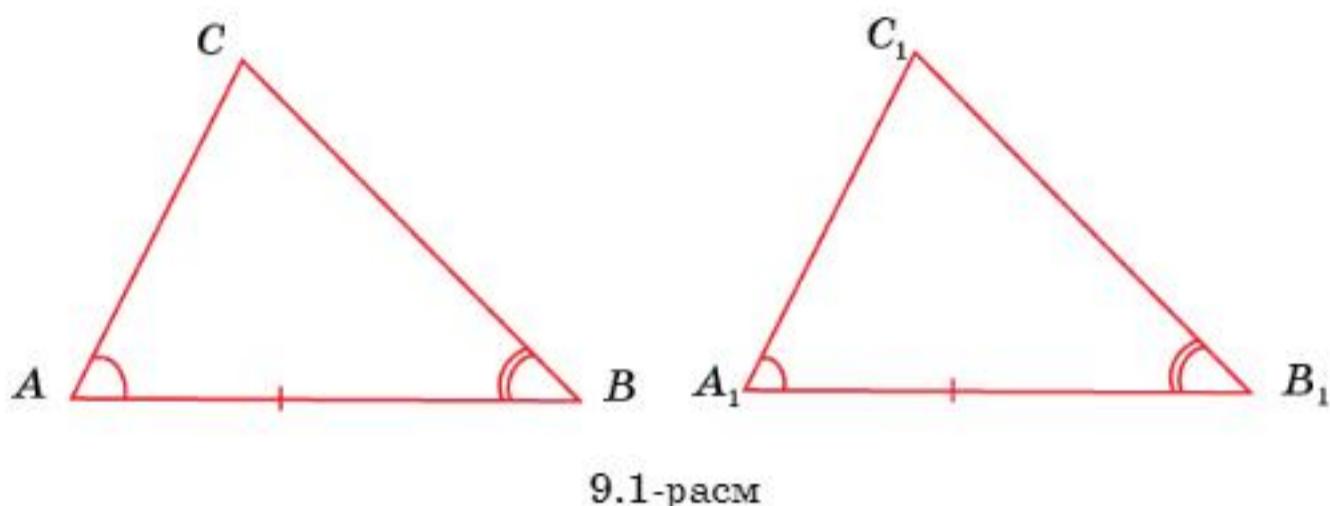


Сиз нима деб ўйлайсиз, бу учурчаклар тенгми?

Улар тенг бўлади. Учурчаклар тенглигининг қуидаги аломати бажарилади.

Теорема (Учурчаклар тенглигининг иккинчи аломати). Агар бир учурчакнинг бир томони ва унга ёпишган иккита бурчаги иккинчи учурчакнинг бир томони ва унга ёпишган иккита бурчагига мос равища тенг бўлса, у ҳолда бу учурчаклар тенг бўлади.

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учурчакларда $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ бўлсин (9.1-расм).



ABC учи билан аниқланувчи ярим текисликда A_1B_1 нурдан бошлаб C_1 учурчак ясаймиз. A учи A_1 уч билан устма-уст тушади. AB ва A_1B_1 томонлар тенг эканлиги туфайли B учи B_1 уч билан устма-уст тушади. A ва A_1 бурчаклар тенг эканлиги туфайли AC томон A_1C_1 томонда ётади ва B ва B_1 бурчаклар тенг эканлиги туфайли BC томон B_1C_1 томонда ётади. Шундай қилиб, ABC учурчак $A_1B_1C_1$ учурчак билан устма-уст тушади. Демак, бу учурчаклар тенг бўлади □.



Учурчаклар тенглигининг иккинчи аломати бўйича ABC ва DEF , учурчаклар элементларининг тенглигини мустақил ёзинг.

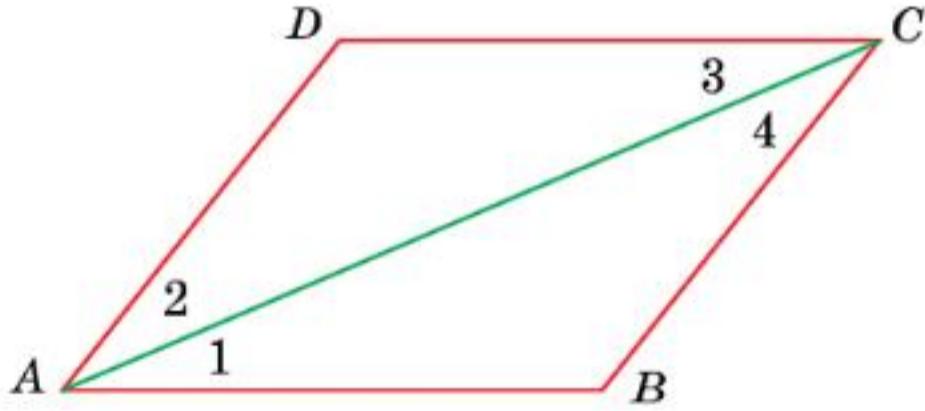


Учурчаклар тенглигининг иккинчи аломатини келтириб чиқаринг.

Машқлар

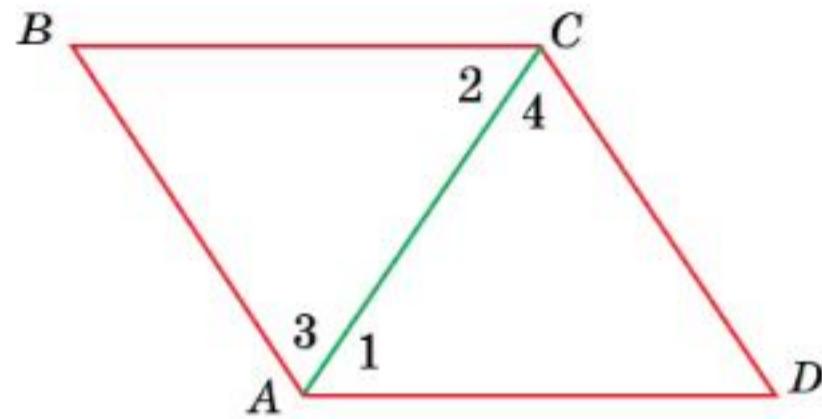
A

9.1. 9.2-расмда $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. CDA ва ABC учурчаклар тенг бўладими?

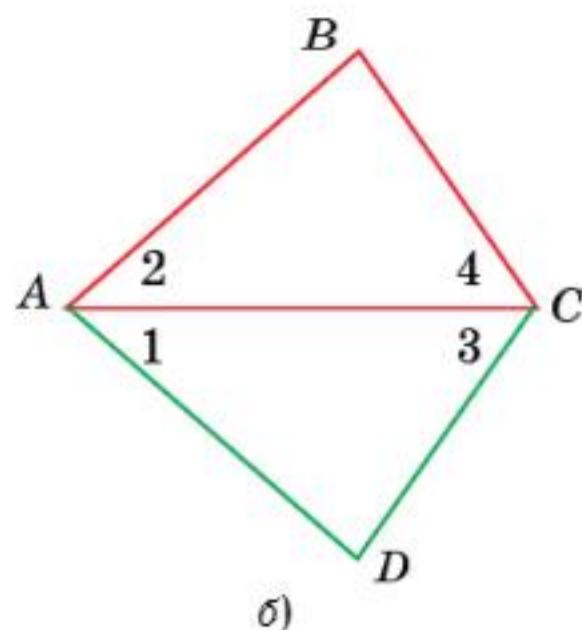


9.2-расм

9.2. 9.3 а, б-расмларда $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Расмдан тенг кесмаларни күрсатинг.



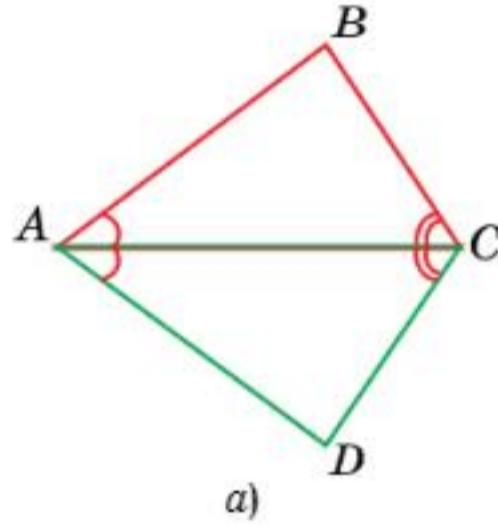
a)



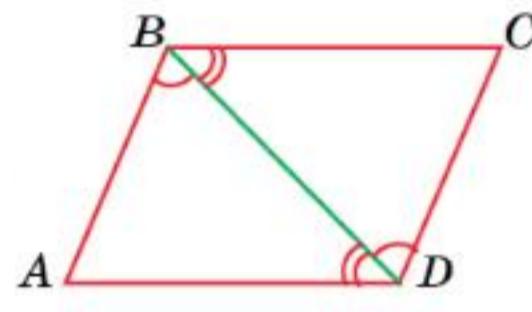
б)

9.3-расм

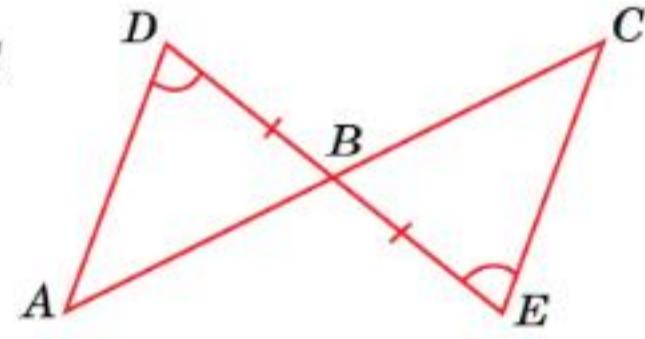
9.3. 9.4-расмда тенг кесмалар ва тенг бурчаклар күрсатилған. Тенг учурчакларни күрсатинг.



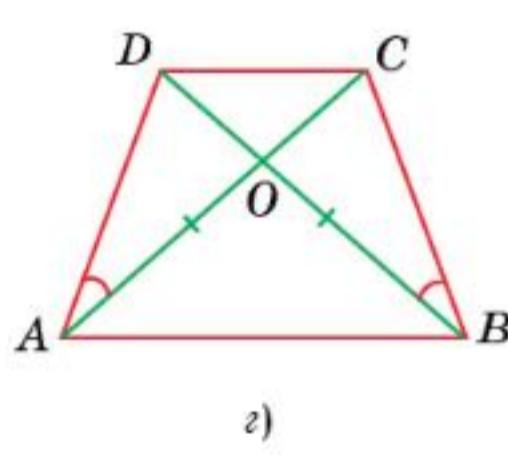
а)



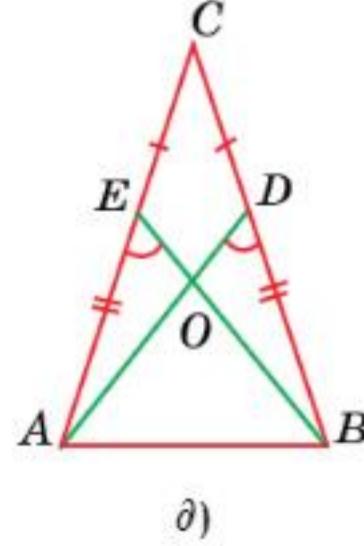
б)



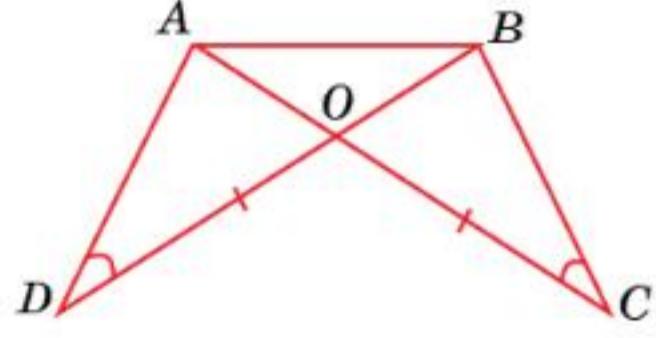
в)



д)



е)



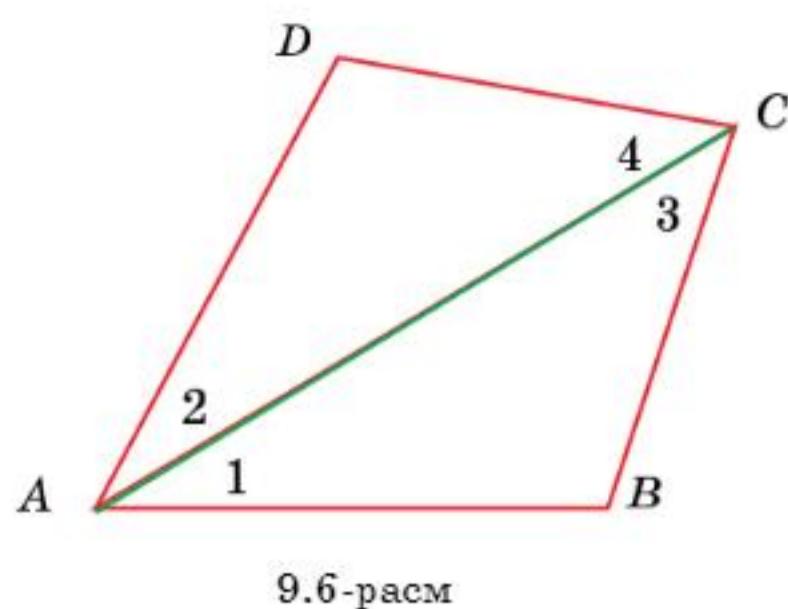
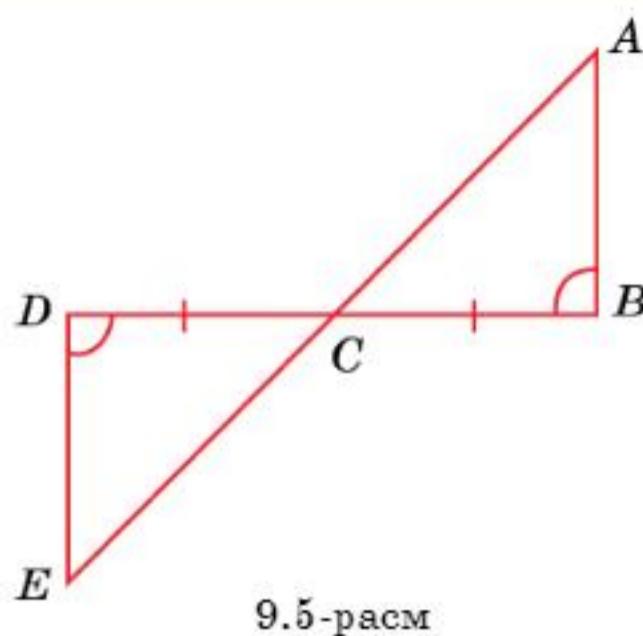
е)

9.4-расм

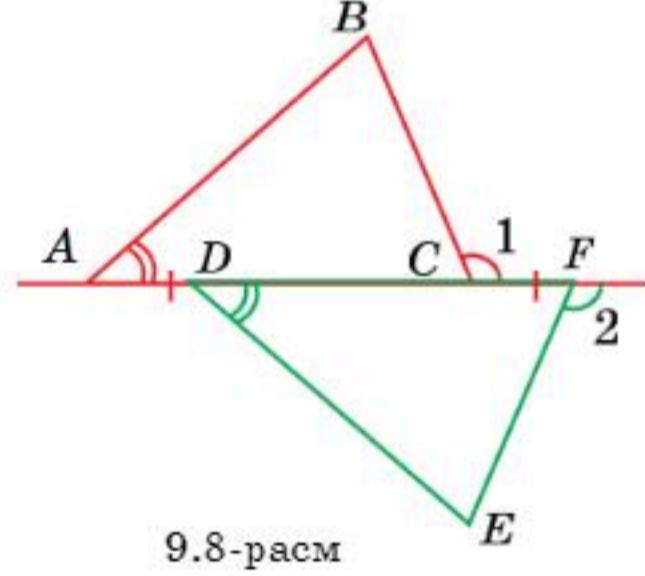
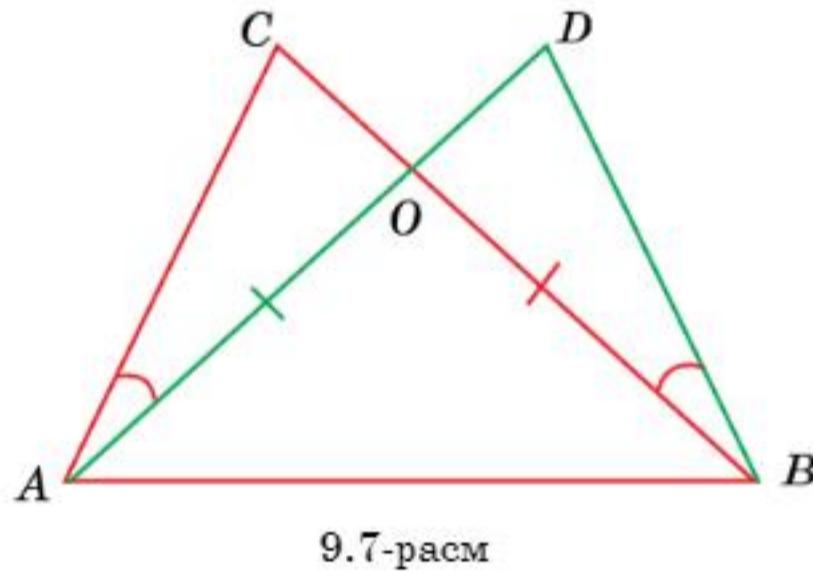
B

9.4. 9.5-расмда $BC = CD$, $\angle B = \angle D$, $AC = CE$ эканини исботланг.

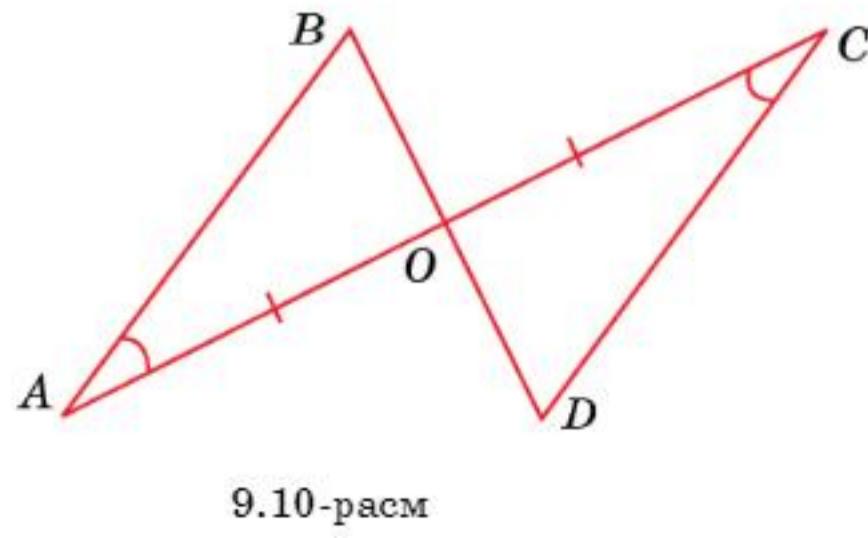
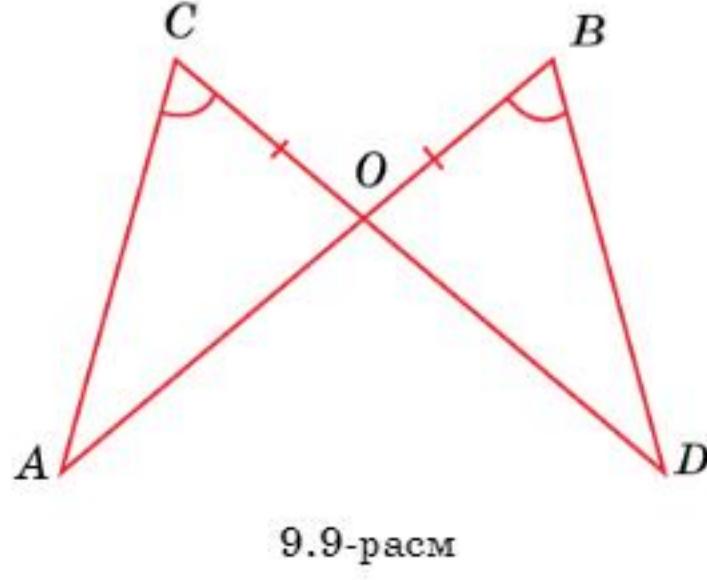
9.5. 9.6-расмда $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = AD$ эканини исботланг.



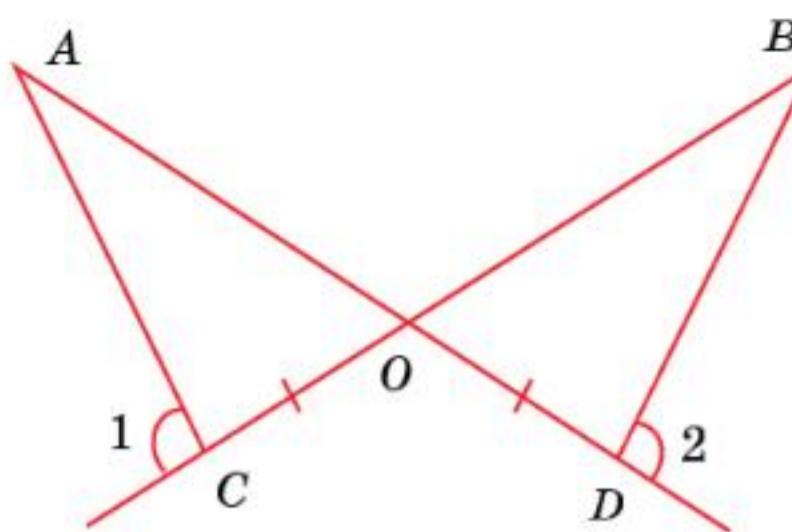
- 9.6.** 9.7-расмда $AC = BD$ бурчак тенг бўлишини ва $\angle DBC = \angle DAC$ ва $BO = AO$ эканини исботланг.
- 9.7.** 9.8-расмда $AD = CF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle 1 = \angle 2$ бўлган фигура тасвириланган. ABC ва DEF учбуручаклар тенг эканини исботланг.



- 9.8.** 9.9-расмда AB ва CD кесмалар O нуқтада кесишиди. $OB = OC$ ва $\angle B = \angle C$. AOC ва DOB учбуручакларнинг тенглигини исботланг.
- 9.9.** 9.10-расмда AC ва BD кесмалар O нуқтада кесишиди. $AO = OC$ ва $\angle A = \angle C$. AOB ва COD учбуручакларнинг тенглигини исботланг.

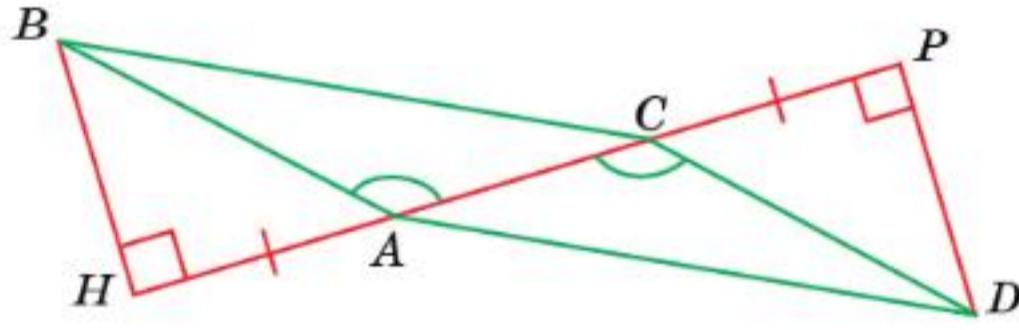


- 9.10.** 9.11-расмда AD ва BC нурлар O нүктәде кесишиади. $\angle 1 = \angle 2$. $OC = OD$. А бурчак B бурчакка тенг эканини исботланг.



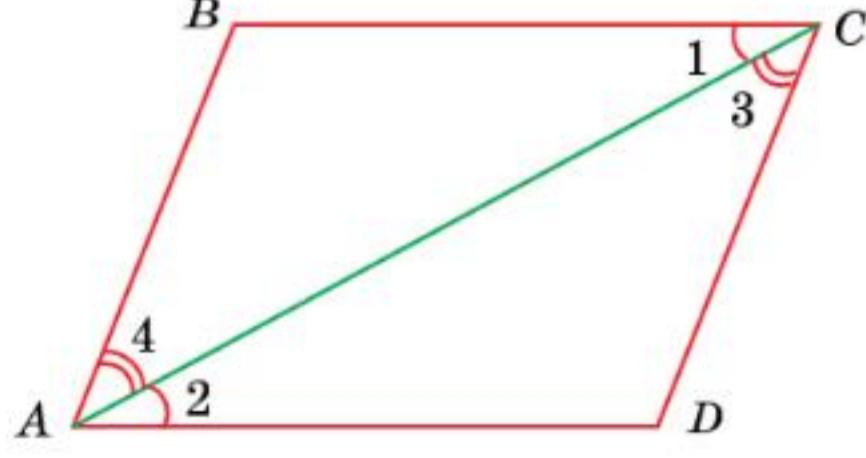
9.11-расм

- 9.11.** 9.12-расмда BH перпендикуляр AC , DP перпендикуляр AC , $AH = CP$ ва $\angle BAC = \angle ACD$ тенг бурчаклар. Расмдан тенг учбұрчакларни топинг.



9.12-расм

- 9.12.** 9.13-расмда $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. ABC ва CDA учбурчаклар тенглигини исботланг. Агар AB ва BC бўлса, у ҳолда $AD = 19$ см, $CD = 11$ см томонларни топинг.

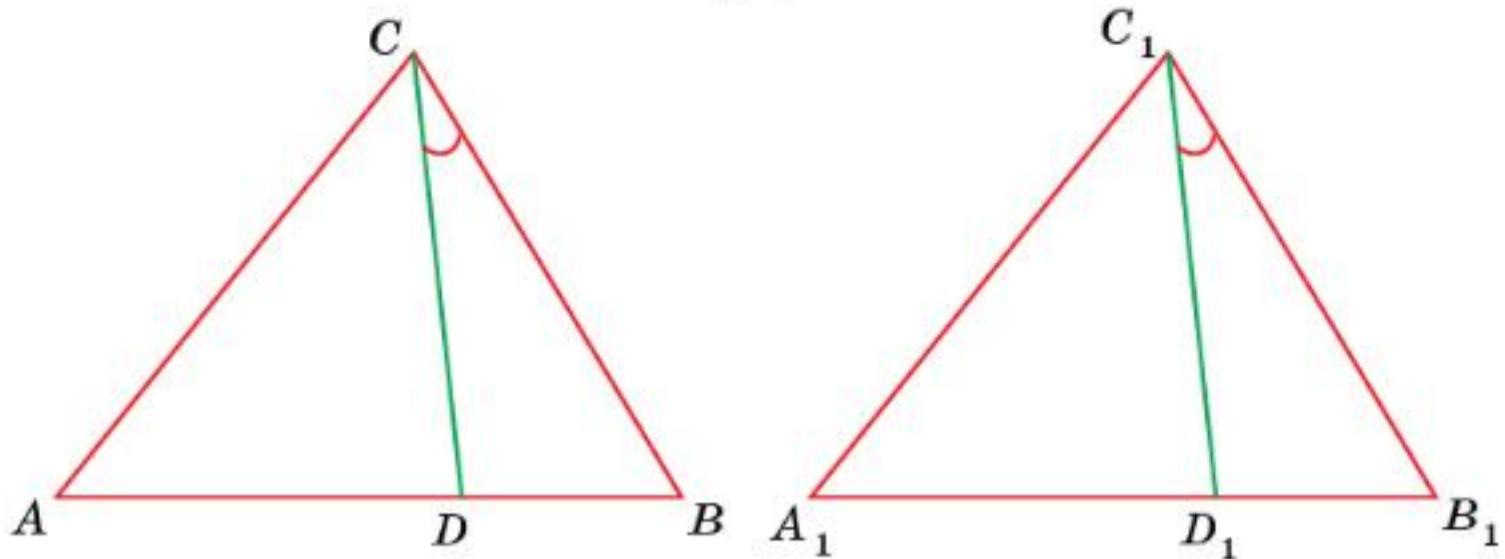


9.13-расм

С

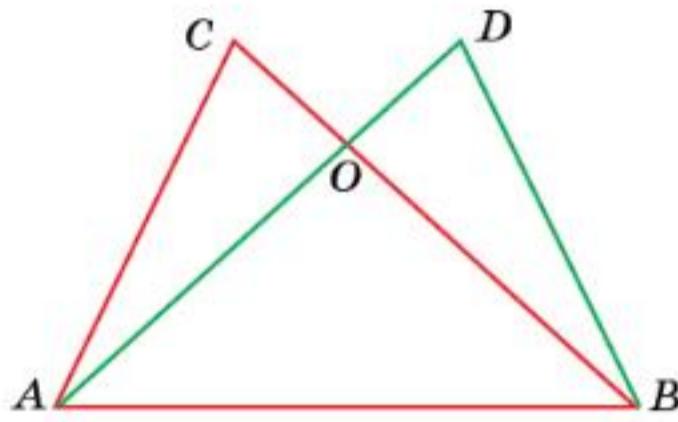
- 9.13.** Тенг учбурчакларда мос равишида биссектрисалари ҳам тенг бўлишини исботланг.

- 9.14.** 9.14-расмда ABC ва $A_1B_1C_1$ учурчаклар тенг. CD ва C_1D_1 кесмалар мос равиша CB ва C_1B_1 томонлар билан тенг бурчаклар ҳосил қиласы. $AD = A_1D_1$ эканини исботланг.



9.14-расм

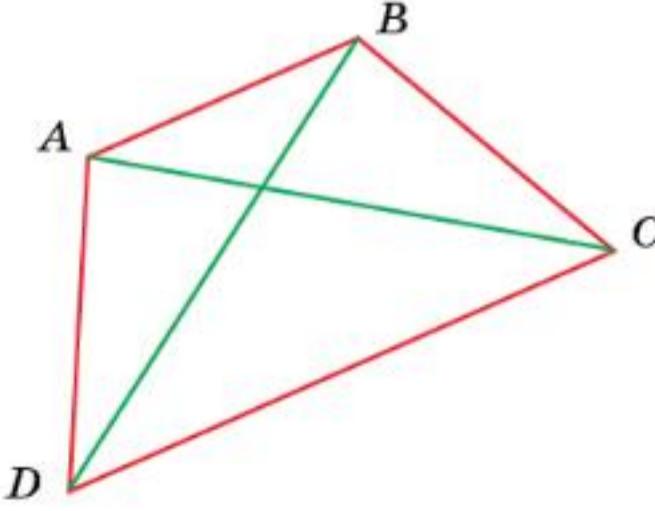
- 9.15.** 9.15-расмда $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $CA = 13$ см. DB кесмәни топинг.



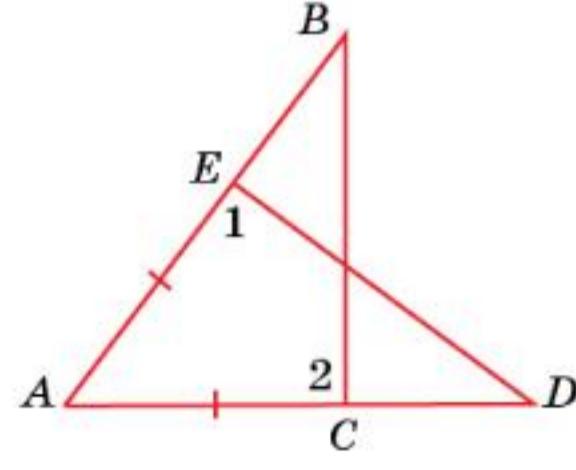
9.15-расм

- 9.16.** $ABCD$ түртбұрчакда $\angle DAB = \angle CBA$, AC ва BD диагоналлары AB томонлари билан тенг бурчаклар ясайды (9.16-расм), $AD = 3$ см, $AC = 4$ см. BD кесмәни топинг.

- 9.17.** 9.17-расмда $AE = AC$, $\angle 1 = \angle 2$, A бурчак 50° , бурчак $B = 40^\circ$. D бурчакни топинг.

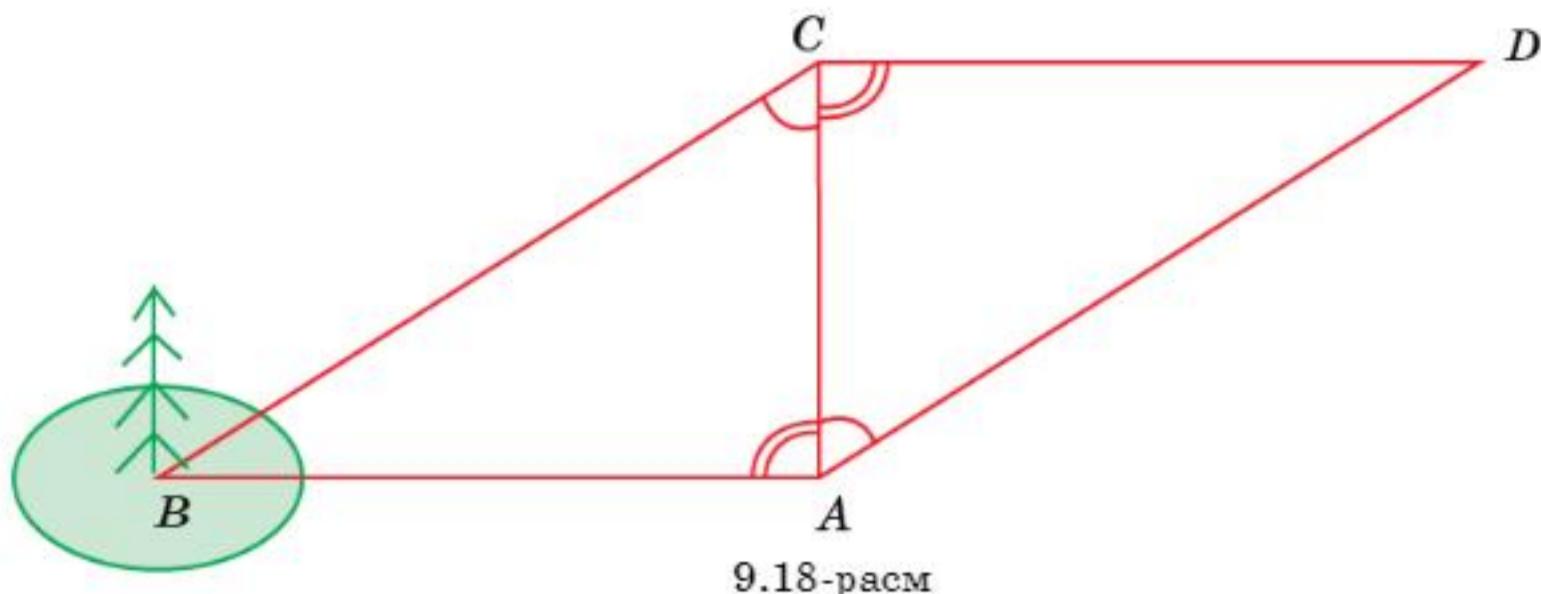


9.16-расм



9.17-расм

- 9.18.** 9.18-расм ёрдамида A нүктадан үлчаш имконияти бўлмаган. В нүкта гача (масалан, оролдаги дарахтгача) бўлган масофани қандай топиш мумкинлигини тушунтиринг.



9.18-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

- 9.19.** Икки томони үзаро тенг бўлган учбурчак ясанг. Транспортир ёрдамида унинг учинчи томонига ёпишган бурчакларни үлчанг. Улар үзаро тенг бўладими?

10-§. ТЕНГЁНЛИ УЧБУРЧАКЛАР

Томонлари ораларидаги боғланишга кўра учбурчаклар: а) тенг ёнли, б) тенг томонли турларга бўлинади.

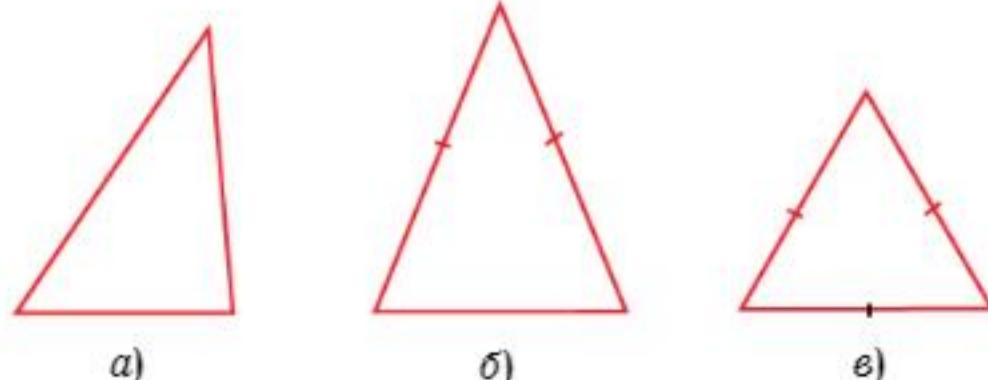
Агар учбурчакнинг томонлари үзаро тенг бўлмаса, у ҳолда бу учбурчаклар *турли томонли учбурчаклар* деб аталади (10.1-а расм).

Агар учбурчакнинг иккита томони үзаро тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар *тенг ёнли учбурчаклар* деб аталади (10.1-б расм).

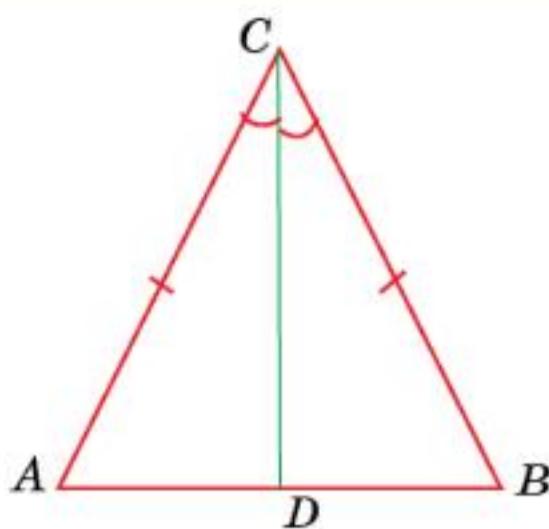
Ўзаро тенг бўлган томонлар учбурчакнинг ён томонлари, учинчи томони эса *асоси* деб аталади.

Агар учбурчакнинг ҳамма томонлари тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчак *тенг томонли учбурчак* деб аталади (10.1-в расм).

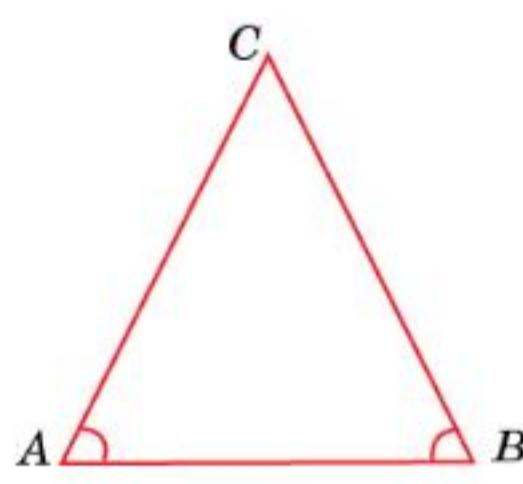
Агар учбурчакнинг ҳамма томонлари ва ҳамма бурчаклари тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчак *тўғри учбурчак* деб аталади (10.1-в расм).



10.1-расм



10.2-расм



10.3-расм

Теорема. Тенг ёнли учурчакнинг асосларидаги бурчаклари тенг бўлади.

Исботи. ABC — тенг ёнли учурчак бўлсин ($AC = BC$). CD биссектриса ўтказамиз (10.2-расм).

ADC ва BDC учурчаклар учурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра тенг бўлади ($AC = BC$, CD — умумий томон, $\angle ACD = \angle BCD$). Бундан, $\angle A = \angle B$

Ушбу теоремадан тенг томонли учурчакларнинг ҳамма бурчаклари ўзаро тенг бўлиши келиб чиқади. Демак, тенг томонли учурчак муентазам учурчак бўлади.

Чизғич ва транспортир ёрдамида $AB = 5$ см, A ва B бурчаклари 70° бўлган ABC учурчак ясанг.



Сиз қандай ўйлайсиз, ушбу учурчак тенг ёнли бўладими?

ABC тенг ёнли учурчак бўлади. Тенг ёнли учурчакларнинг қуидаги аломати бажарилади.

Теорема (тенг ёнли учурчаклар аломати). Агар учурчакнинг иккита бурчаги ўзаро тенг бўлса, у ҳолда у тенг ёнли учурчак бўлади.

Исботи. ABC учурчакда $\angle A = \angle B$ бўлсин (10.3-расм).

Учурчаклар тенглигининг иккинчи аломатидан ABC ва BAC учурчаклар учун фойдаланамиз. Бундан $AB = BA$, $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$. Демак, $AC = BC$, яъни ABC — тенг ёнли учурчак



Тенг ёнли учурчаклар аломати бўйича DEF учурчак элементларининг тенглигини мустақил ёзинг.

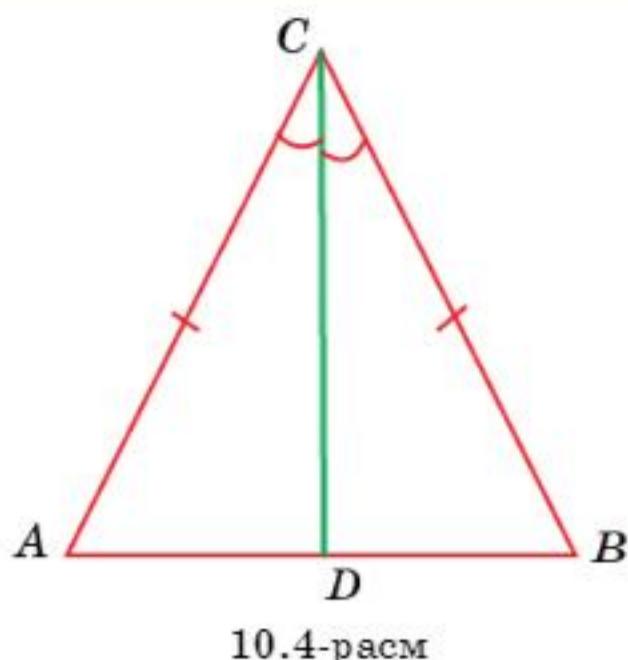
$AB = 4$ см бўлган ($AC = BC$), ABC тенг ёнли учурчак ясанг. С учидан биссектриса, медиана ва баландлик ўтказинг. Уларнинг барчаси устма-уст тушадими?

Ха, устма-уст тушади. Қуидаги теорема бажарилади.

Теорема. Тенг ёнли учурчакнинг асосига туширилган биссектриса унинг ҳам медианаси, ҳам баландлиги бўлади.

Исботи. ABC — тенг ёнли учурчак, $AC = BC$, CD — биссектриса бўлсин (10.4-расм).





10.4-расм

У ҳолда учурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра ACD ва BCD учурчаклар тенг бўлади ($AC = BC$, CD — умумий томон, $\angle ACD = \angle BCD$). Демак, $AD = BD$, $\angle ADC = \angle BDC$ тенгликлар тўғри. Биринчи тенглик CD кесма берилган учурчакнинг медианаси бўлишини, иккинчи тенглик CD кесма берилган учурчакнинг баландлиги бўлишини билдиради \square .

Шундай қилиб, ABC тенг ёнли учурчакда CD кесма — биссектриса, медиана ва баландлик, шу билан бир қаторда, асоснинг ўртаси орқали ўтувчи перпендикуляр ҳисобланади.

Ушбу хоссаларнинг ҳар бири CD кесманинг жойлашиш ўрнини аниқлаганлиги сабабли уларнинг биттаси бажарилса, қолган хоссалари ҳам бажарилади. Масалан, тенг ёнли учурчакнинг асосига туширилган баландлик асосининг қаршисида ётган бурчакнинг биссектрисаси, асосига ўтказилган медиана асосининг ўртаси орқали ўтказилган перпендикуляр бўлади.

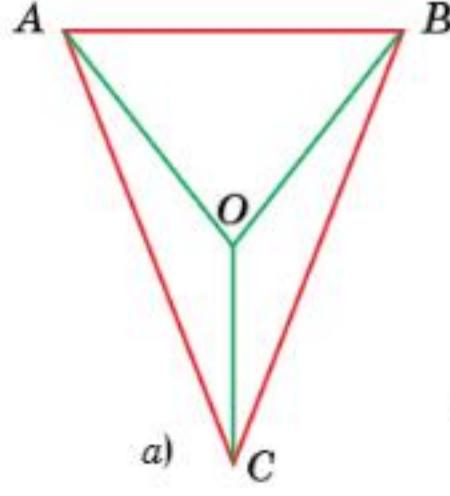


- Томонлари ораларидаги муносабатлар орқали аниқланувчи учурчакларнинг турларини атанг.
- Қандай учурчаклар: а) турли томонли; б) тенг ёнли; в) тенг томонли учурчаклар деб аталади?
- Тенг ёнли учурчакнинг қандай томони ён томони, қайси томони асоси деб аталади?
- Тенг ёнли учурчакнинг асосидаги бурчаклар ҳақида нима дейиш мумкин?
- Тенгёнли учурчаклар аломатини келтириб чиқаринг.
- Тенг ёнли учурчакнинг асосига ўтказилган биссектриса нима бўлади?

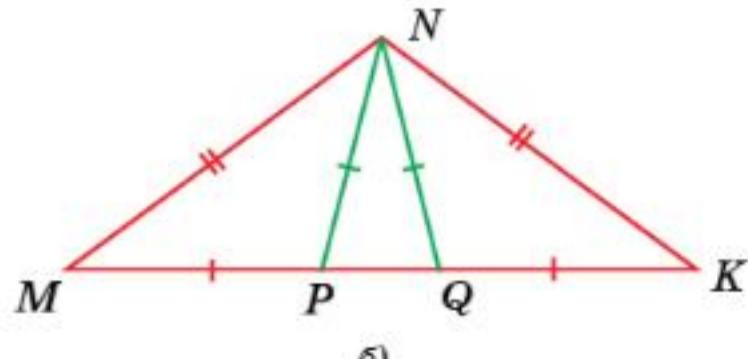
Машқлар

A

10.1. 10.5-расмдаги ҳамма тенг ёнли учурчакларни атанг.



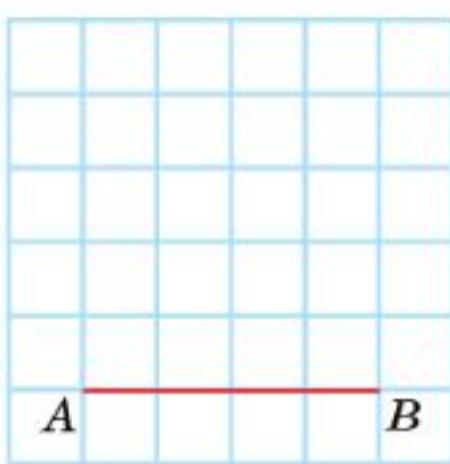
a)



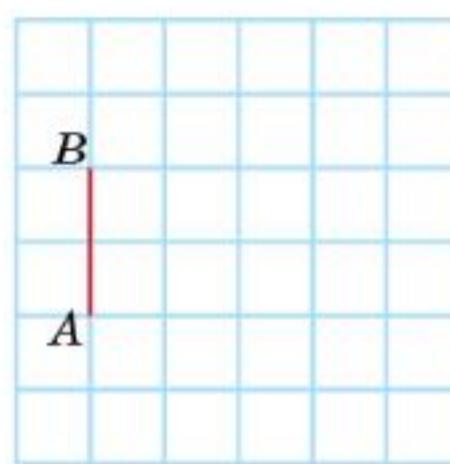
б)

10.5-расм

10.2. Асоси AB кесма бўлган, C учи катакларнинг кесишиш нуқтасида жойлашган тенг ёнли учбурчак ясанг (10.6-расм).



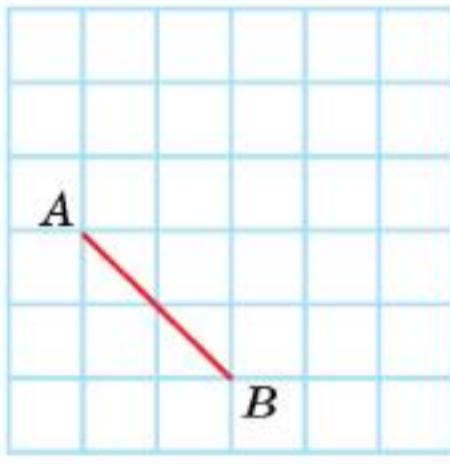
a)



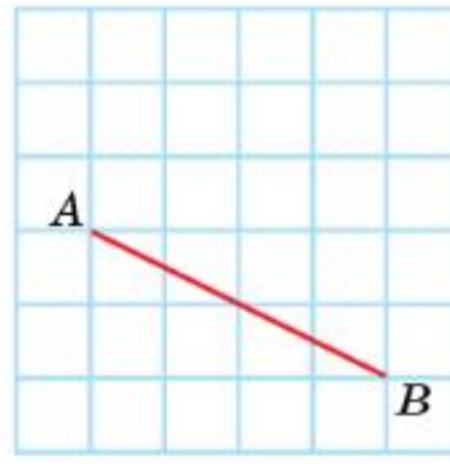
б)

10.6-расм

10.3. Асоси AB кесма бўлган, C учи катакларнинг кесишиш нуқтасида жойлашган тенг ёнли учбурчак ясанг (10.7-расм).



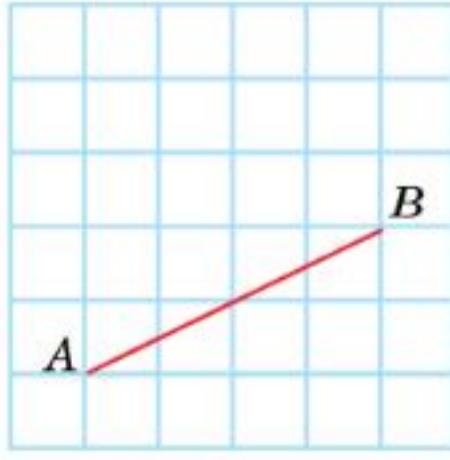
а)



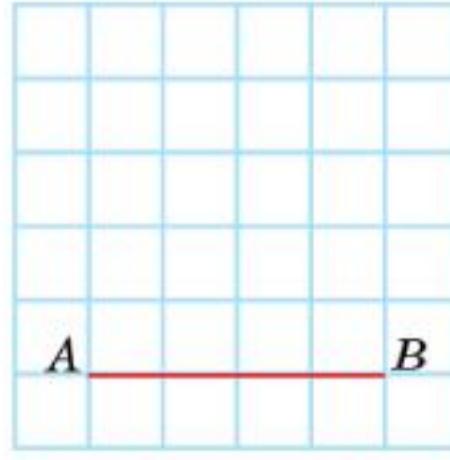
б)

10.7-расм

10.4. Асоси AB кесма бўлган, C учи катакларнинг кесишиш нуқтасида жойлашган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак ясанг (10.8-расм).



а)

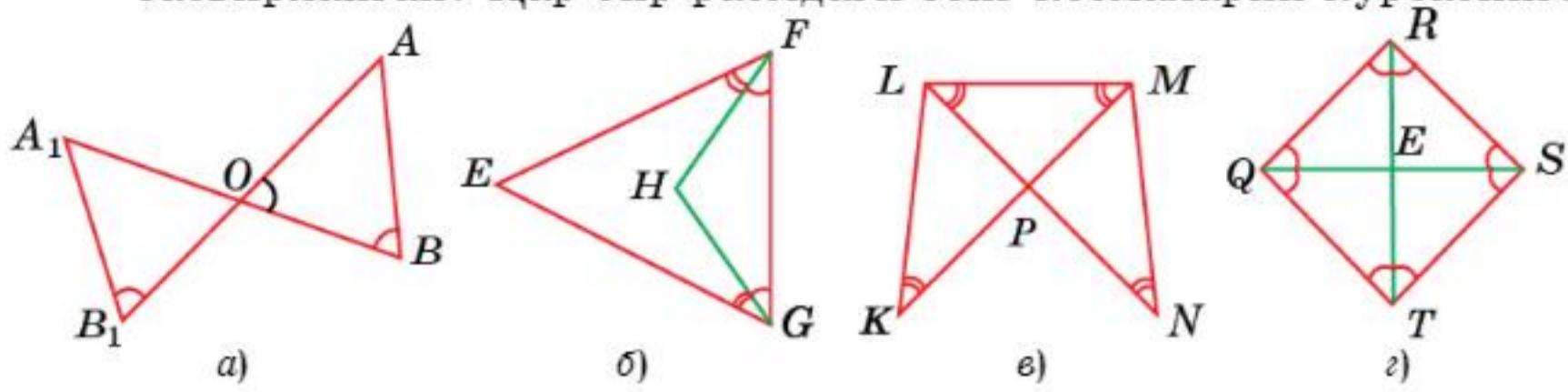


б)

10.8-расм

B

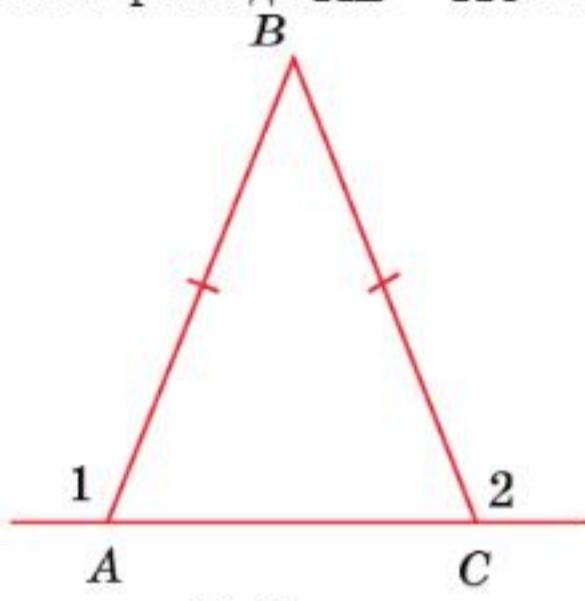
10.5. 10.9-расмнинг ҳар бирида жами нечта тенг ёнли учурчаклар тасвирланган? Ҳар бир расмдаги тенг кесмаларни күрсатинг.



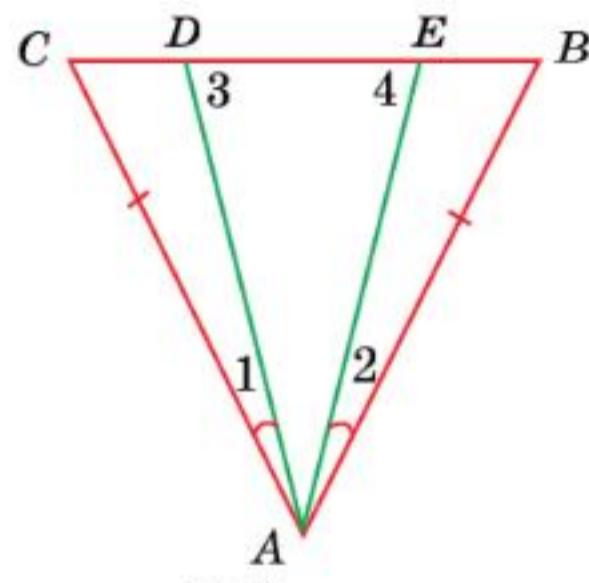
10.9-расм

10.6. 10.10-расмда $AB = BC$ бўлишини исботланг.

10.7. 10.11-расмда $AB = AC$ ва $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ эканини исботланг.



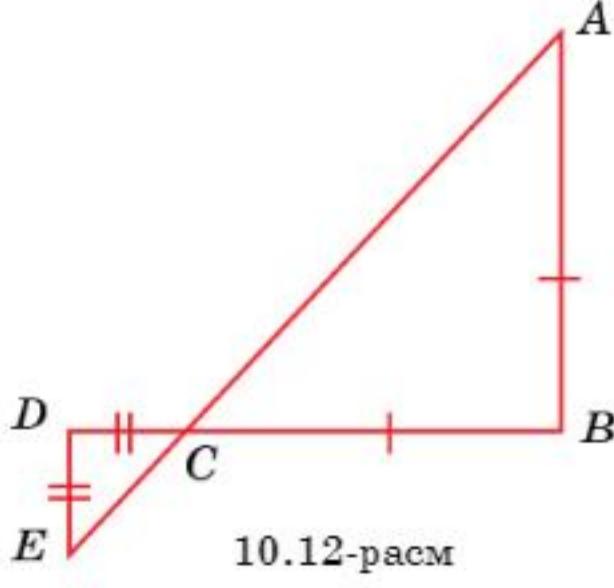
10.10-расм



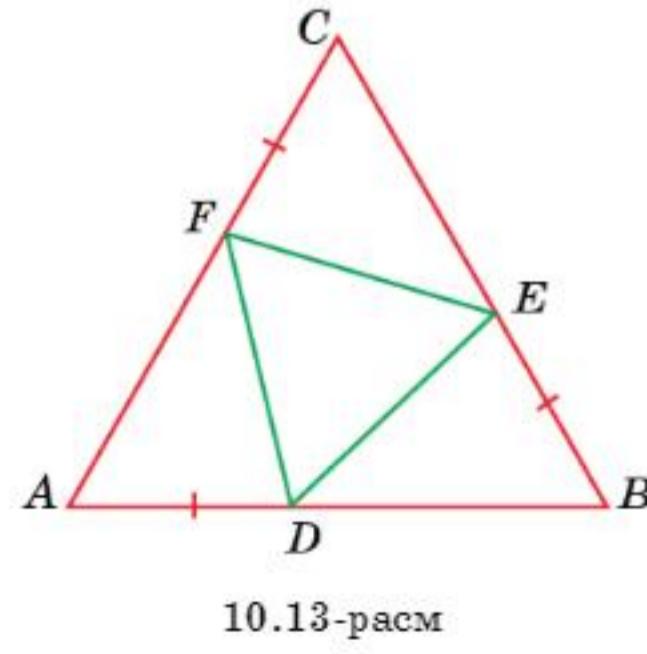
10.11-расм

10.8. 10.12-расмда $AB = BC$, $CD = DE$. $\angle A = \angle E$ бўлишини исботланг.

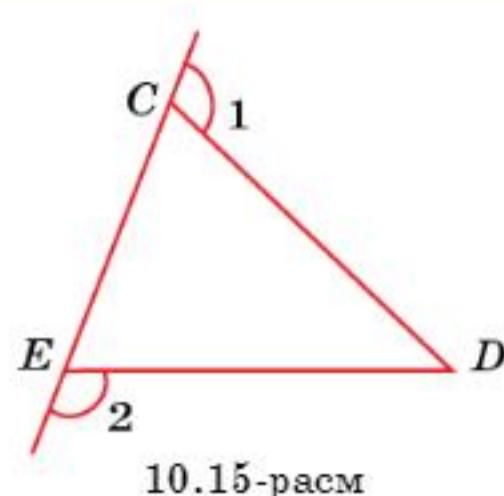
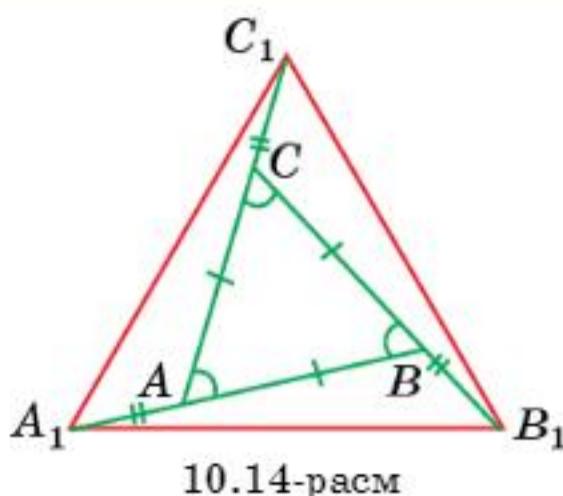
10.9. ABC мунтазам учурчакнинг томонларидан ўзаро тенг бўлган AD , BE ва CF кесмалар олинган. D , E ва F нуқталар кесмалар орқали туташтирилган (10.13-расм). DEF мунтазам учурчак эканини исботланг.



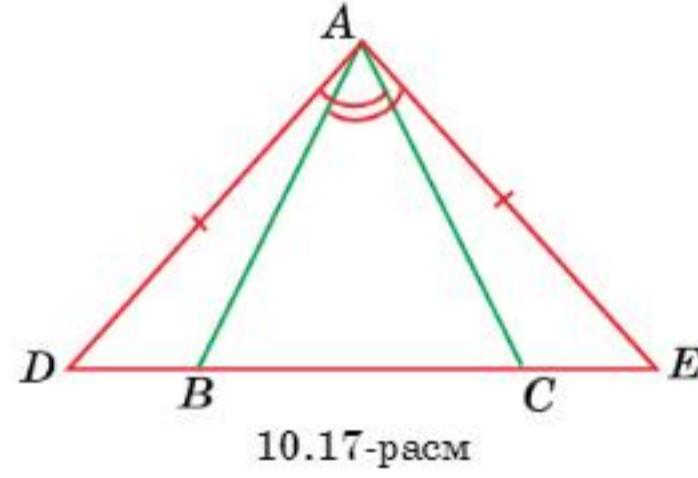
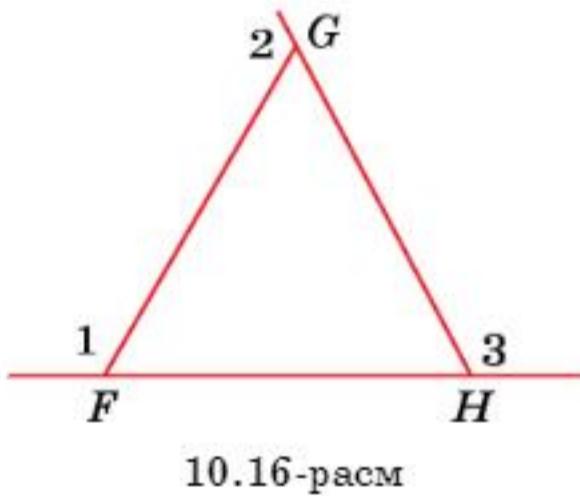
10.12-расм



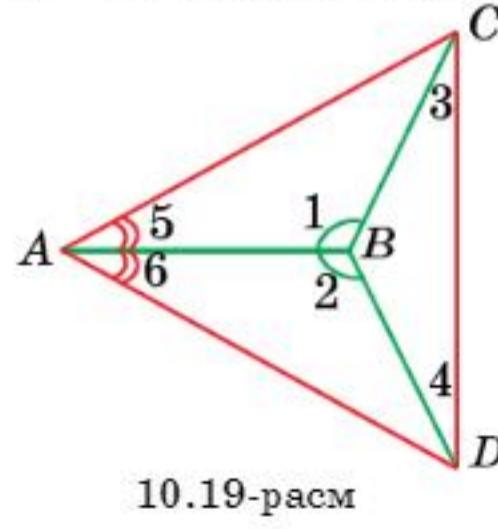
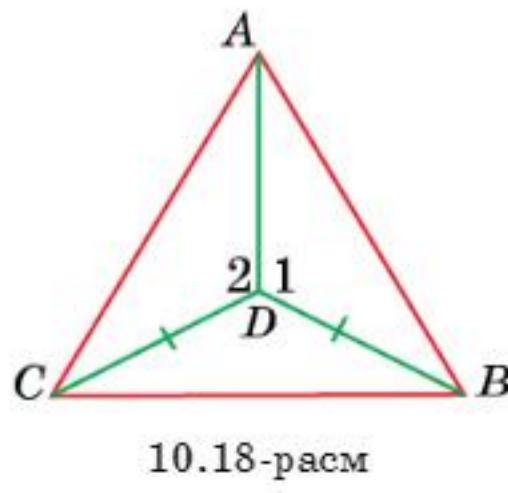
10.13-расм

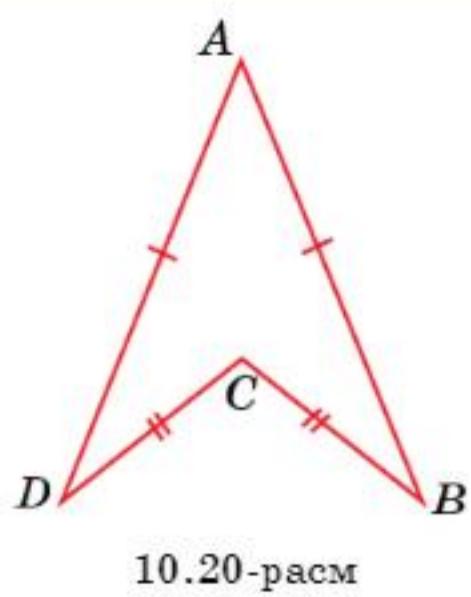


- 10.10.** ABC учурчак томонларининг давомида ўзаро тенг AA_1 , BB_1 ва CC_1 кесмалар олинган (10.14-расм). $A_1B_1C_1$ учурчак мунтазам учурчак эканини исботланг.
- 10.11.** Тенг ёнли учурчакнинг периметри 15,6 м. Агар унинг:
а) асоси ён томонидан 3 м қисқа; б) асоси ён томонидан 3 м узун бўлса, у ҳолда учурчакнинг томонларини топинг.
- 10.12.** Тенг ёнли учурчакнинг асоси билан ён томонининг нисбати 3:8 каби. Агар учурчакнинг периметри 38 см бўлса, у ҳолда унинг томонларини топинг.
- 10.13.** CDE учурчакда $\angle 1 = \angle 2$ (10.15-расм). Шу учурчак тенг ёнли учурчак деган мулоҳаза тўғрими?
- 10.14.** FGH учурчакда 1, 2 ва 3 бурчаклари ўзаро тенг (10.16-расм). Ушбу учурчак: а) тенг ёнли; б) тенг томонли; в) мунтазам учурчак деган мулоҳаза тўғрими?
- 10.15.** 10.17-расмда $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. $BD = CE$ эканини исботланг.

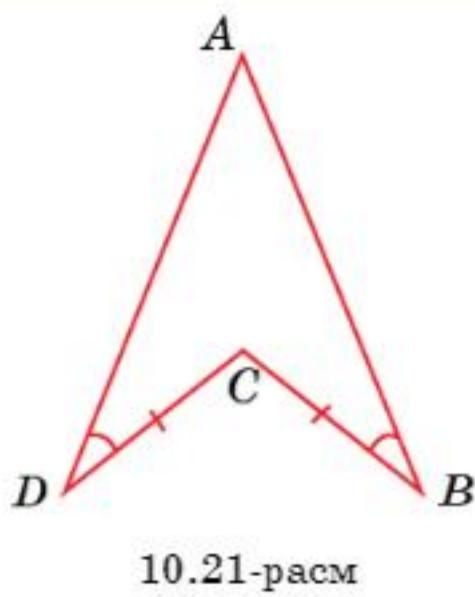


- 10.16.** 10.18-расмда $CD = BD$, $\angle 1 = \angle 2$. ACB бурчак ABC бурчакка тенг эканини исботланг.
- 10.17.** 10.19-расмда $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4$ эканини исботланг.

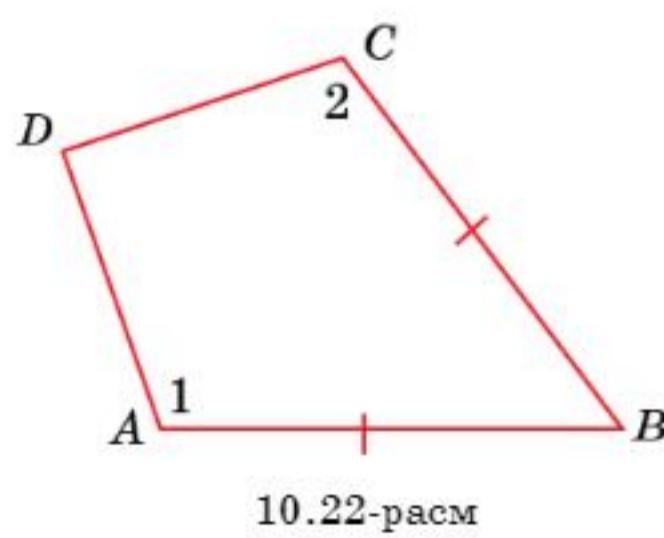




10.20-расм



10.21-расм



10.22-расм

- 10.18.** 10.20-расмда $AB = AD$ ва $DC = BC$. ABC ва ADC бурчакларнинг ўзаро тенглигини исботланг.
- 10.19.** 10.21-расмда $DC = BC$, B ва D бурчаклар тенг. $AB = AD$ эканини исботланг.
- 10.20.** 10.22-расмда $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. $AD = CD$ эканини исботланг.

C

- 10.21.** Агар учбуручакнинг биссектрисаси унинг баландлиги бўлса, у ҳолда унинг тенг ёнли учбуручак бўлишини исботланг.
- 10.22.** Тенг ёнли учбуручакнинг ён томонларига ўтказилган медианалари ўзаро тенг бўлишини исботланг.
- 10.23.** Тенг ёнли учбуручакнинг ён томонларига ўтказилган биссектрисалари ўзаро тенг бўлишини исботланг.
- 10.24.** Асоси ABC бўлган AC тенг ёнли учбуручакда BD медиана ўтказилган. Агар ABC учбуручакнинг периметри 50 м, ABD учбуручакнинг периметри эса 40 м бўлса, у ҳолда 40 м медиананинг узунлигини топинг.

Ахборот тайёрланг

- 10.25.** Учбуручак — қадимда шаклланган дастлабки геометрик фигура. Ахмес папиросидаги тенг ёнли учбуручаклар.

Янги мавзууни ўзлаштиришга тайёрланинг

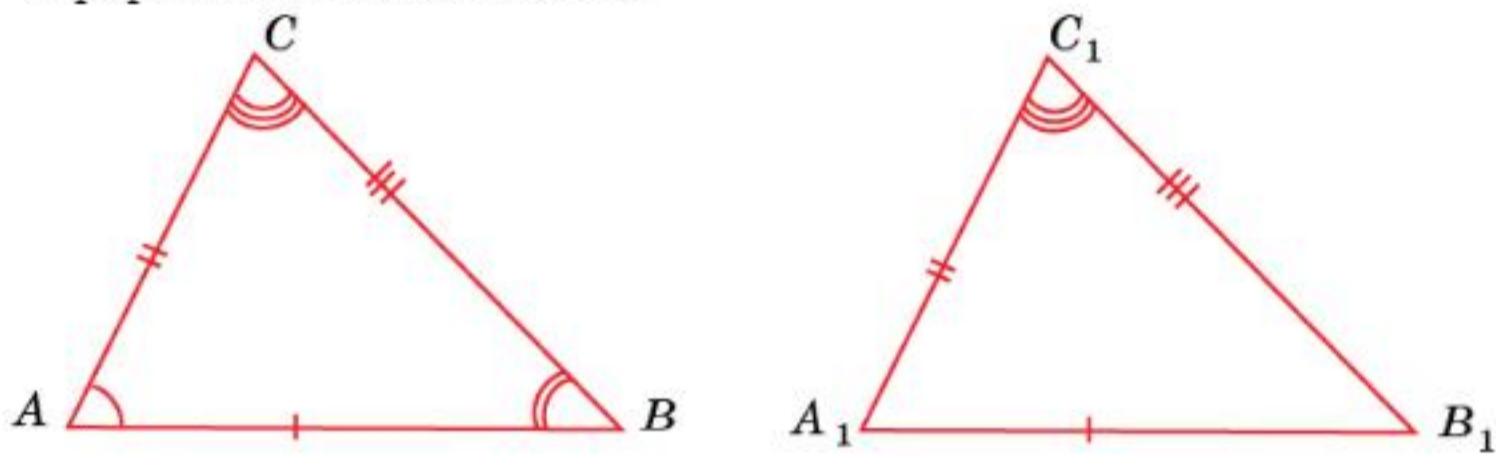
- 10.26.** Бир учбуручакнинг иккита томони иккинчи учбуручакнинг иккита томонига мос равишда тенг. Шу учбуручаклар тенг бўладими? Мисол келтиринг.

11-§. УЧБУРЧАКЛАР ТЕНГЛИГИНИНГ УЧИНЧИ АЛОМАТИ

Учбурчаклар тенглигининг яна бир алматини күриб чиқамиз.

Теорема. (Учбурчаклар тенглигининг учинчи алмати) *Агар бир учбурчакнинг уча томони иккинчи учбурчакнинг уча томонига мес равиша тенг бўлса, у ҳолда бу учбурчаклар тенг бўлади.*

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ — учбурчакларда $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ бўлсин (11.1-расм).



11.1-расм

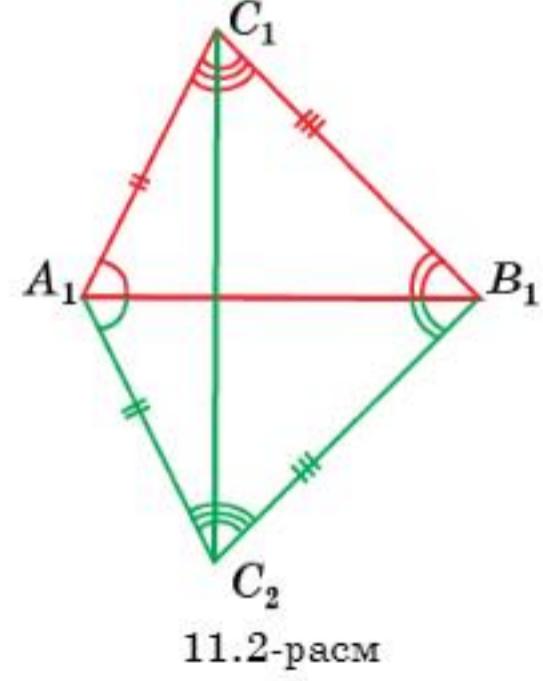
Ушбу учбурчакларнинг тенг бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун ABC нурдан бошлаб C учи A_1B_1 тўғри чизикка тегишли C нуқтанинг иккинчи томонида ётувчи C_2 нуқтага ўтадиган C_1 учбурчак ясаймиз (11.2-расм).

У ҳолда $A_1B_1C_2$ ва ABC учбурчаклар тенг бўлади. C_1C_2 нур $A_1C_1B_1$, бурчакнинг ичида, битта томони билан устма-уст тушиши ёки бурчакдан ташқарида ётиши мумкин. Биринчи ҳолни кўриб чиқамиз.



C_1C_2 нур $A_1C_1B_1$ бурчакнинг бир томони билан устма-уст тушиши ёки бурчакдан ташқарида ётиши ҳолларини мустақил кўриб чиқинг.

A_1C_1 ва A_1C_2 томонларнинг тенглигидан $C_1A_1C_2$ тенг ёнли учбурчак экани келиб чиқади, демак, $\angle A_1C_1C_2 = \angle A_1C_2C_1$. Худди шундай B_1C_1 ва B_1C_2 томонларнинг тенглигидан $C_1B_1C_2$ тенг ёнли учбурчак бўлиши келиб чиқади, демак, $\angle B_1C_1C_2 = \angle B_1C_2C_1$. Тенг бурчакларни қўшиб, C_1 ва C_2 бурчакка тенг бўлишини кўрамиз. Шундай қилиб, $A_1B_1C_1$ ва $A_1B_1C_2$ учбурчаклар тенг бўлади (учбурчаклар тенглигининг биринчи алмати). Бундан ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар тенг бўлади □.



11.2-расм



Учбурчаклар тенглигининг учинчи алмати бўйича ABC ва DEF учбурчаклар элементларининг тенглигини мустақил ёзинг.

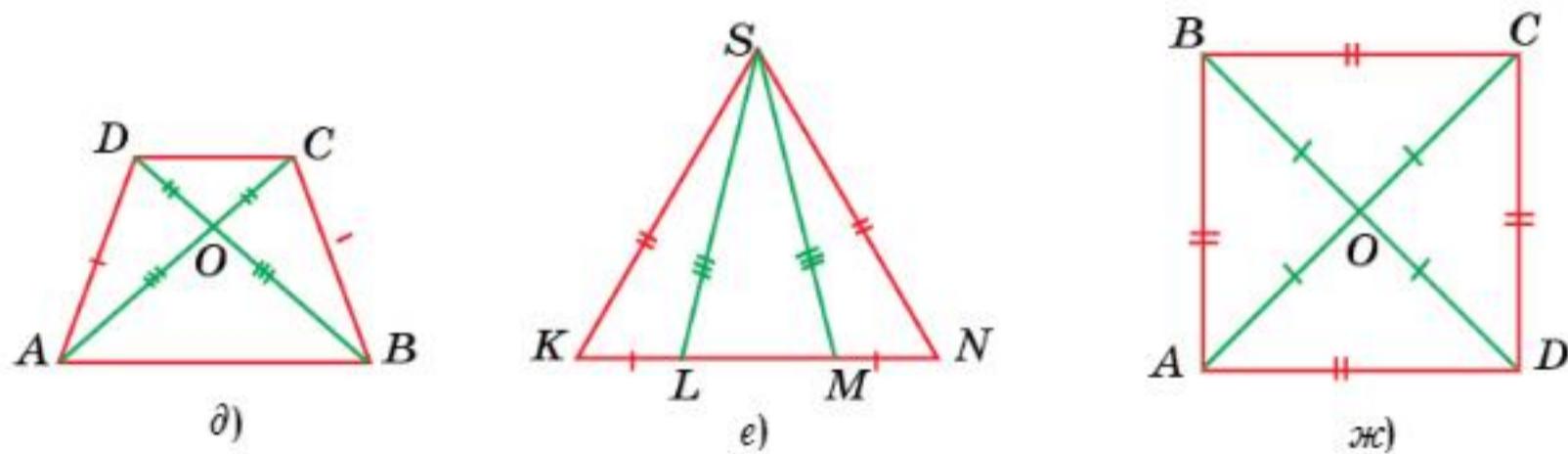
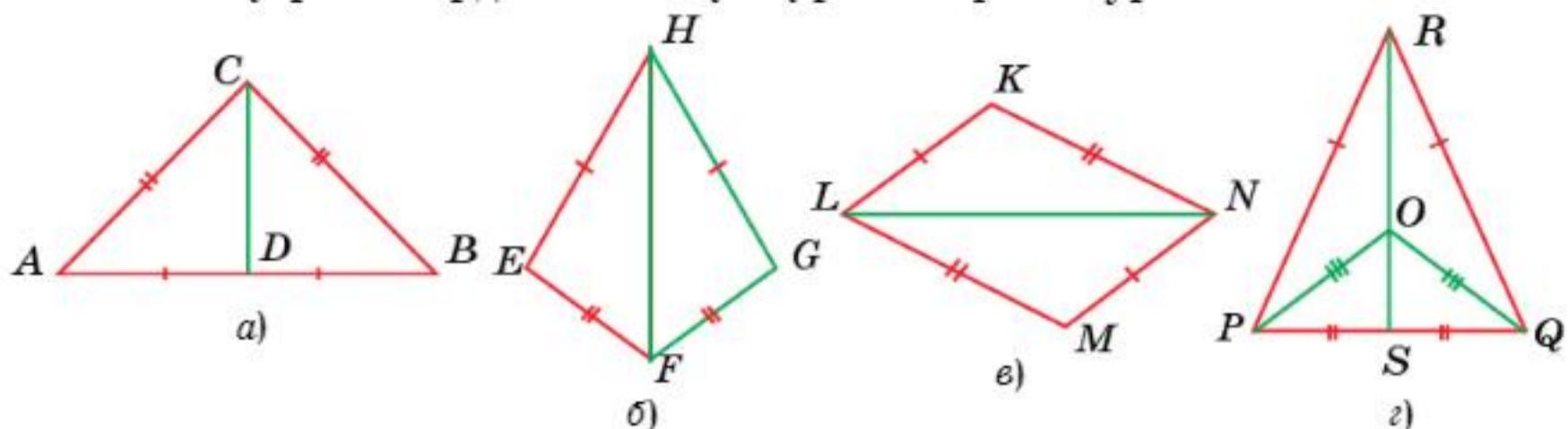


Учбурчаклар тенглигининг учинчи алматини келтириб чиқаринг.

Машқлар

A

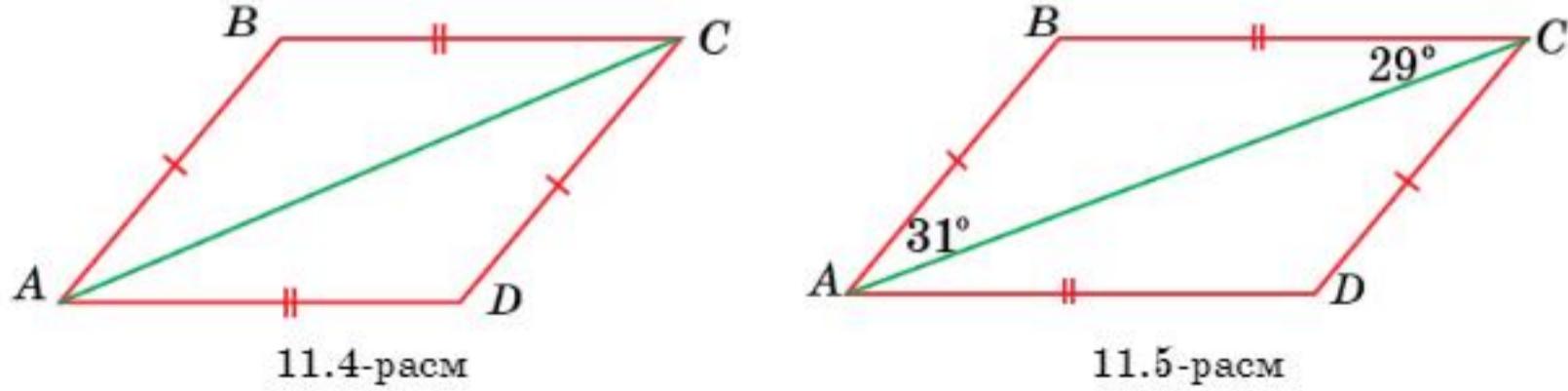
- 11.1.** 11.3-расмларда тенг кесмалар ва тенг бурчаклар белгиланган. Ушбу расмлардаги тенг учурчакларни күрсатинг.



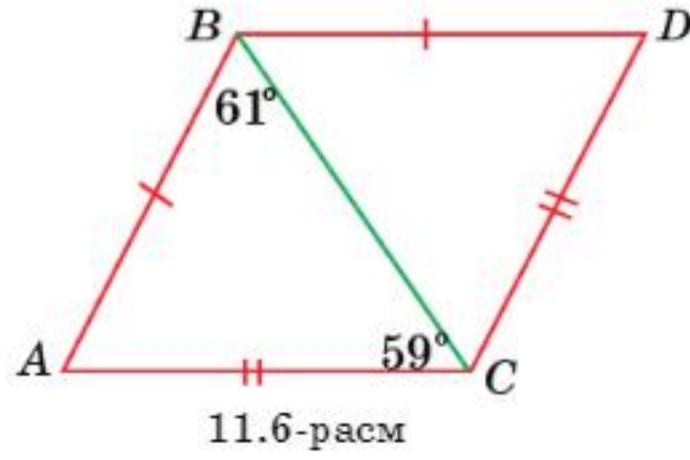
11.3-расм

- 11.2.** 11.4-расмда $AB = DC$ ва $BC = AD$. B ва D бурчакларнинг тенглигини исботланг.

- 11.3.** 11.5-расмда $AB = DC$ ва $BC = AD$, бурчак $BAC = 31^\circ$, бурчак $BCA = 29^\circ$. ACD бурчакни топинг.



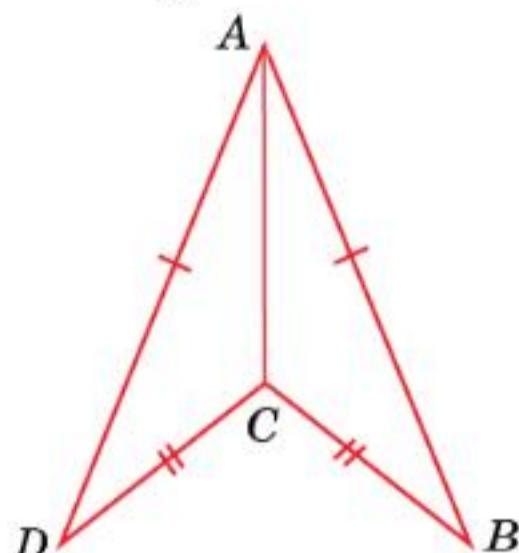
- 11.4.** 11.6-расмда $AB = BD$ ва $AC = CD$, бурчак $ABC = 61^\circ$, бурчак $ACB = 59^\circ$. BCD бурчакни топинг.



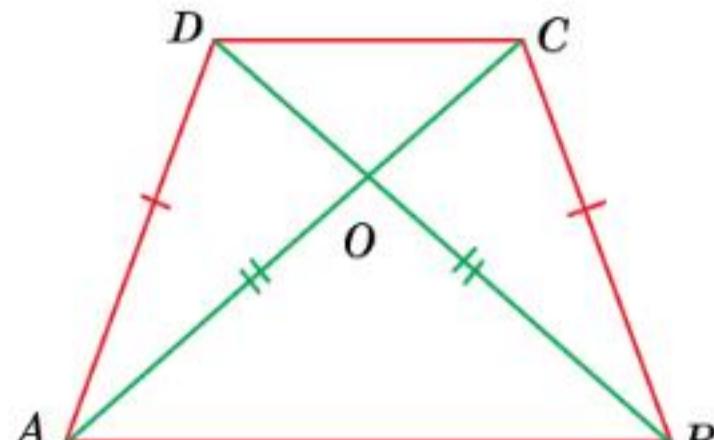
B

11.5. 11.7-расмда $AB = AD$ ва $DC = BC$. AC кесма BAD бурчакнинг биссектрисаси бўлишини исботланг.

11.6. 11.8-расмда $AD = BC$ ва $AC = BD$. BAD ва ABC бурчакларнинг тенг бўлишини исботланг.



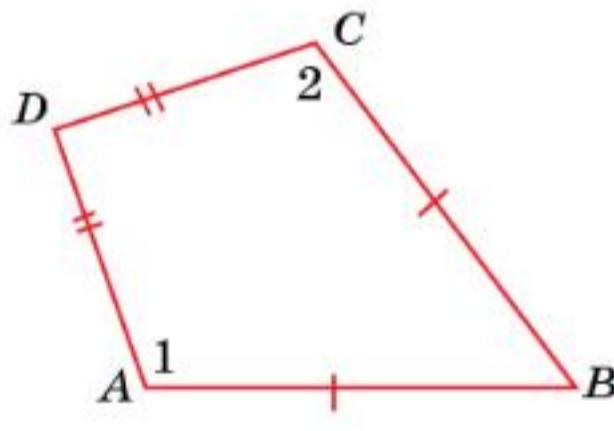
11.7-расм



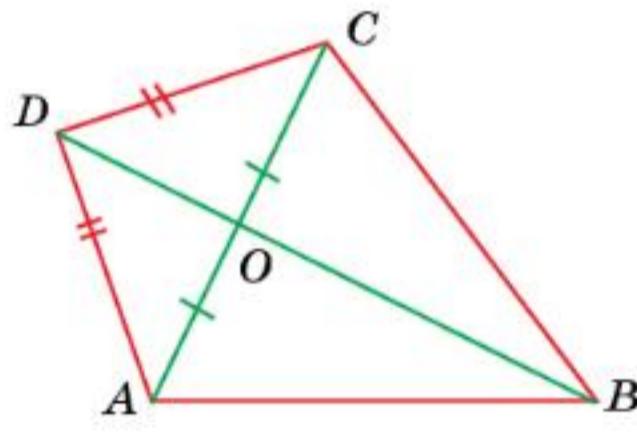
11.8-расм

11.7. 11.9-расмда $AB = BC$, $AD = CD$. 1 ва 2-бурчаклар тенг бўлишини исботланг.

11.8. 11.10-расмда $AO = OC$, $AD = CD$. $AB = BC$ эканини исботланг.



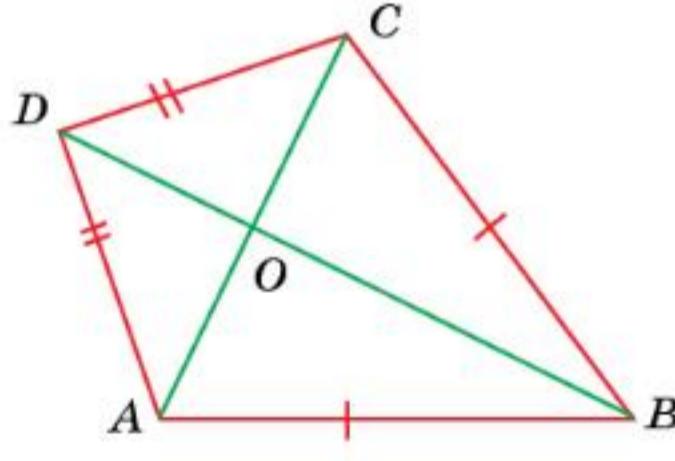
11.9-расм



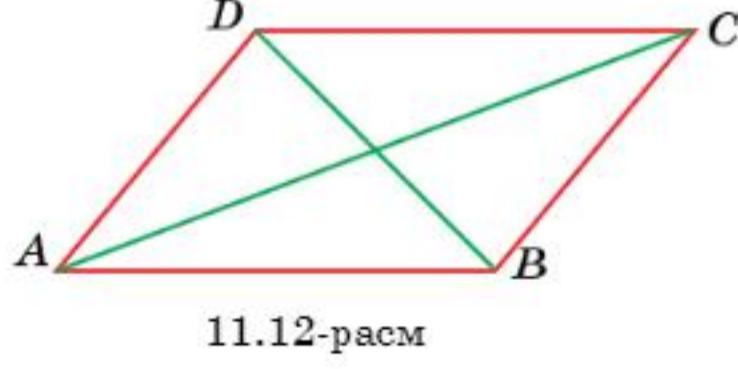
11.10-расм

11.9. 11.11-расмда $AB = BC$, $AD = CD$. $AO = OC$ эканини исботланг.

11.10. 11.12-расмда ABC ва CDA учбурчаклар тенг, B ва D нукталар AC тўғри чизиқнинг турли томонларида ётади. BCD ва DAB учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

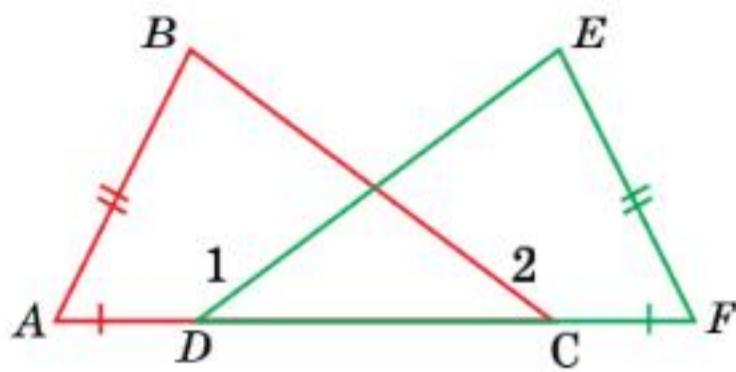


11.11-расм

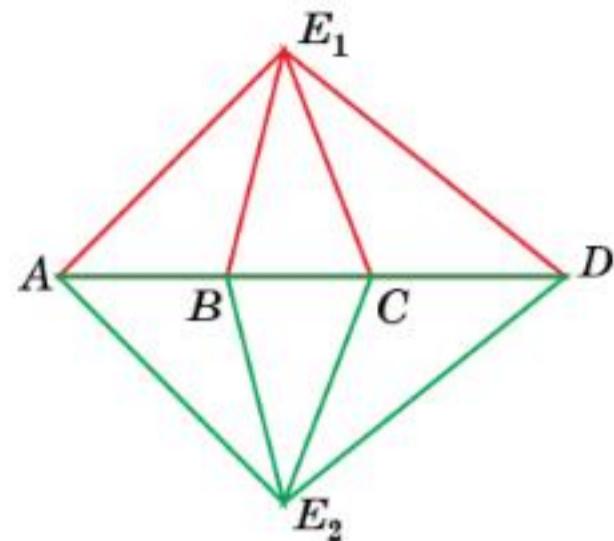


11.12-расм

- 11.11.** 11.13-расмда $AD = CF$, $AB = FE$, $BC = ED$. 1 ва 2-бұрчакларнинг тенг эканини исботланг.
- 11.12.** A, B, C, D нүкталар битта түғри чизикда ётади. Агар ABE_1 ва ABE_2 учбуручаклар тенг бўлса (11.14-расм), у ҳолда CDE_1 ва CDE_2 учбуручаклар ҳам тенг бўлишини исботланг.

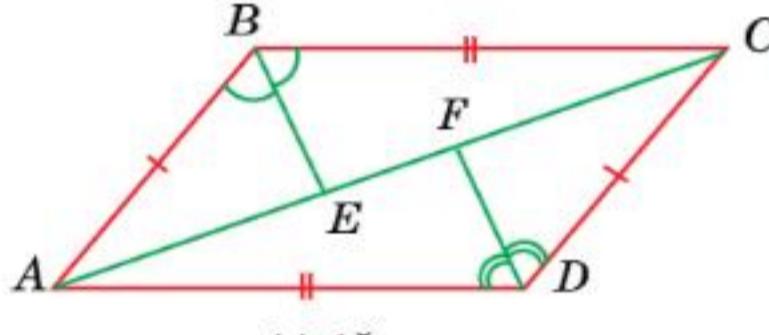


11.13-расм



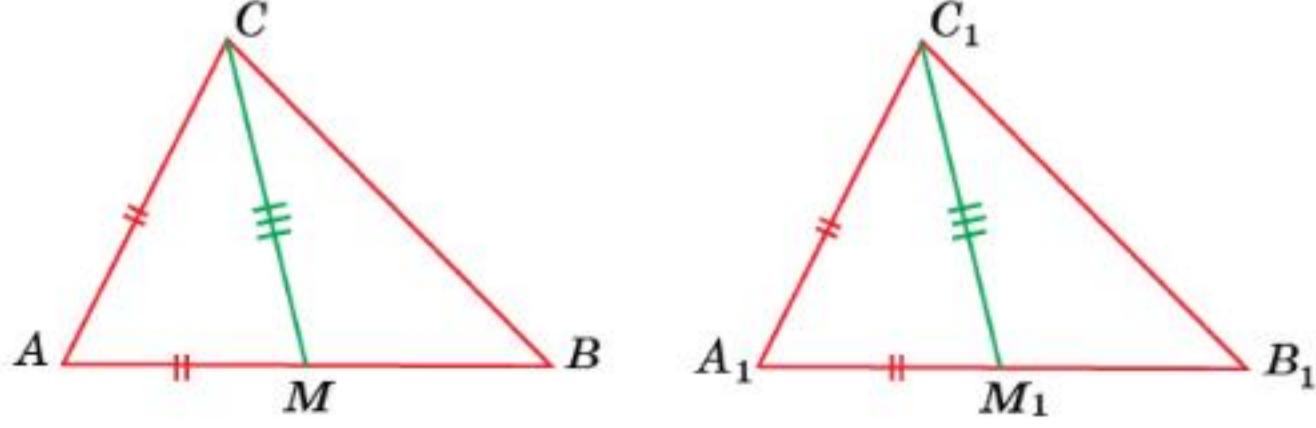
11.14-расм

- 11.13.** 11.15-расмда $AB=CD$, $AD=BC$, BE — бурчакнинг биссектрисаси ABC , DF — бурчакнинг биссектрисаси ADC . $\triangle ABE = \triangle CDF$ эканини исботланг.



11.15-расм

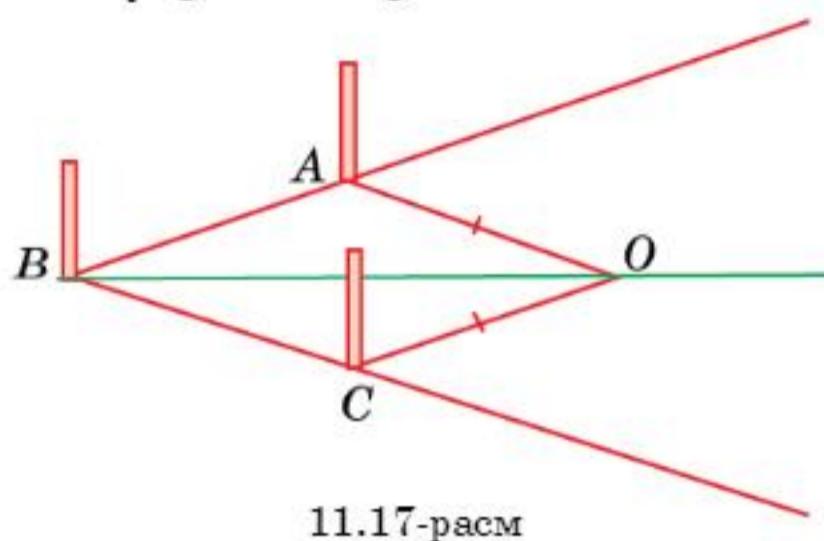
- 11.14.** Агар ABC ва $A_1B_1C_1$ медианалар тенг бўлса, у ҳолда AB ва A_1B_1 , AC ва A_1C_1 , CM ва C_1M_1 учбуручаклар тенг бўлишини исботланг (11.16-расм).



11.16-расм

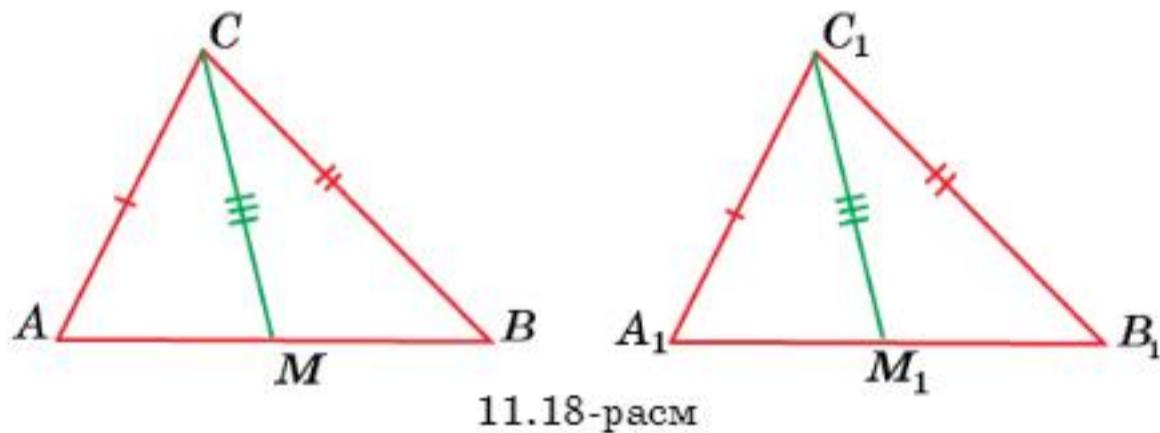
- 11.15.** Ер майдонидаги бурчакни тенг иккига бўлиш керак (11.17-расмдаги ABC бурчакни). Бунинг учун унинг томонларидан ўлчов асбоби ёрдамида ўзаро тенг бўлган BA ва BC

кесмалар ясалади. Сүнгра ўртаси белгиланган (O нүкта) тасма олиб, унинг четлари A ва C нүкталарга боғланади. Тасманинг ўртасидан тортиб, ер майдонида O нүктанинг ўрни белгиләнди. Ана шунда BO нур BO бурчакни тенг иккига бўлади. Ясашларнинг тўғри бажарилганини асосланг.

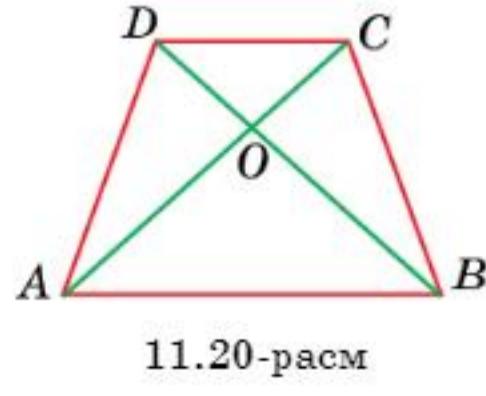
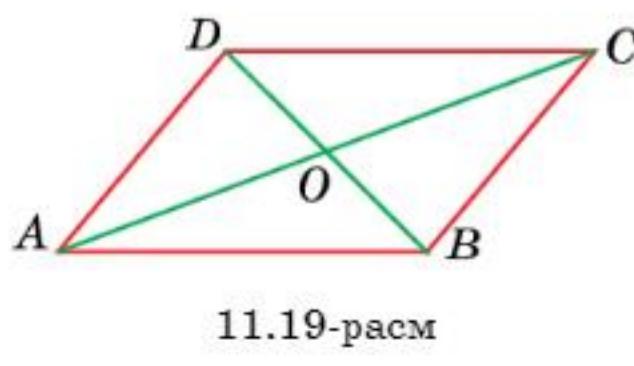


C

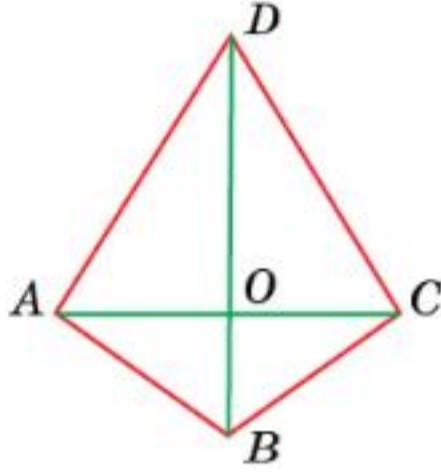
- 11.16.** ABC ва $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ учбурчакларда, CM медианаси C_1M_1 медианага тенг бўлса (11.18-расм), у ҳолда ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар тенг бўлишини исботланг.



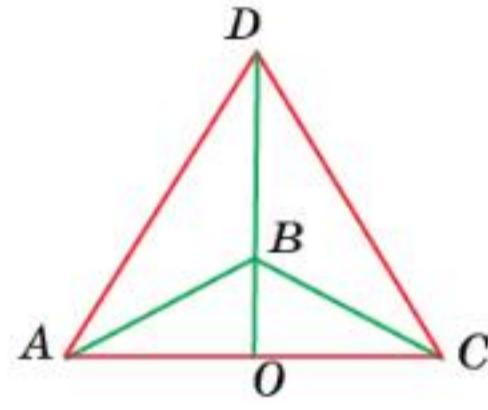
- 11.17.** 11.19-расмда $AB = CD$ ва $AD = BC$. BAC ва DCA бурчаклар тенг эканини исботланг.
11.18. 11.19-расмда $AB = CD$ ва BAC ва DCA бурчаклар тенг. DAC ва BCA бурчаклар тенг бўлишини исботланг.
11.19. 11.19-расмда $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle ADB = \angle CBD$. BAD ва DCB бурчаклар тенг бўлишини исботланг.
11.20. 11.20-расмда $AD = BC$ ва $AC = BD$. ADC ва BCD бурчаклар тенг бўлишини исботланг.



- 11.21.** 11.20-расмда $AO = BO$ ва $CO = DO$. DAC ва CBD бурчаклар тенг бўлишини исботланг.
- 11.22.** 11.20-расмда $\angle BAC = \angle ABD$, $\angle BAD = \angle ABC$. $AD = BC$ эканини исботланг.
- 11.23.** 11.21-расмда $AB = CB$ ва $AD = CD$. BAD ва BCD бурчаклар тенг бўлишини исботланг.
- 11.24.** 11.21-расмда $AD = CD$, ADB ва CDB бурчаклар тенг. $AB = BC$ эканини исботланг.
- 11.25.** 11.21-расмда ADB ва CDB бурчаклар тенг, AC ва BD ўзаро перпендикуляр. $AD = CD$ эканини исботланг.
- 11.26.** 11.22-расмда $AB = CB$ ва $AD = CD$, ADB ва CDB бурчаклар тенг эканини исботланг.
- 11.27.** 11.22-расмда $AD = CD$, ADB ва CDB бурчаклар тенг. BAD ва BCD бурчаклар тенг бўлишини исботланг.



11.21-расм



11.22-расм

- 11.28.** 11.22-расмда ADB ва CDB бурчаклар тенг, AC ва BD ўзаро перпендикуляр. $AD = CD$ эканини исботланг.

Янги мавзууни ўзлаштиришга тайёрланинг

- 11.29.** ABC учбурчакда A бурчак B бурчакдан катта. AC ёки BC томонлардан қайси бири катта?

12-§. УЧБУРЧАК ТОМОНЛАРИ ВА БУРЧАКЛАРИ ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТЛАР

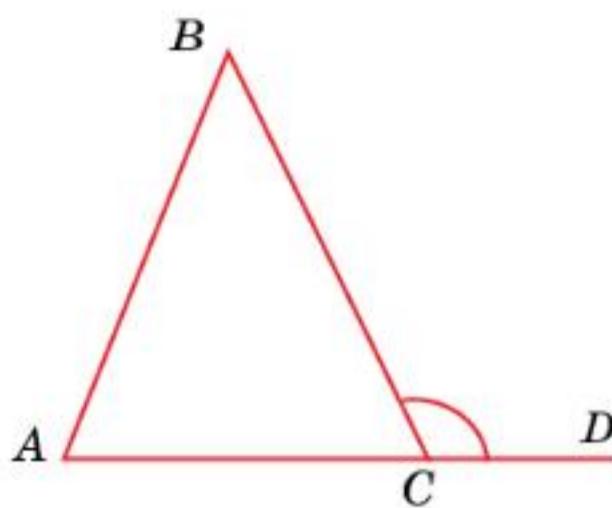
ABC учбурчакнинг битта томонини, масалан, AC томонини давом эттирамиз ва C бурчаги билан қўшни бўлган BCD бурчакни кўриб чиқамиз (12.1-расм).

Бундай бурчак учбурчакнинг ташқи бурчаги учбурчакнинг ўзининг бурчакларини эса унинг ички бурчаклари деб аталади.

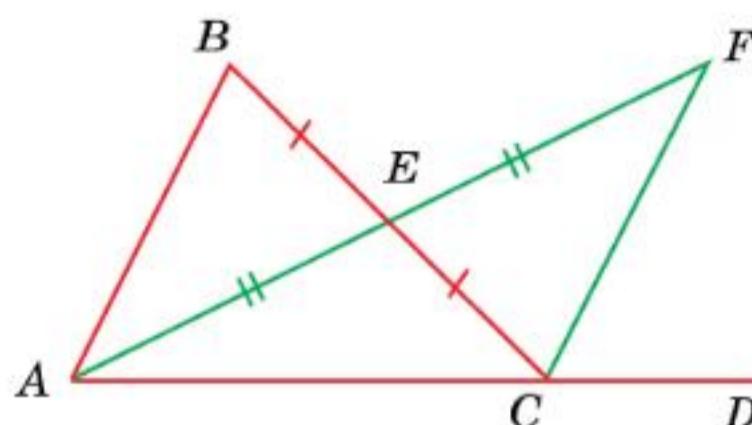
Учбурчакнинг ҳар бир учидағи бурчакларни давом эттириш орқали унинг иккита ташқи бурчагини ясаш мумкин. Бу бурчаклар вертикал бўлгани учун ўзаро тенг бўлади.

Теорема. Учбұрчакнинг ташқи бурчаги унга құшни бўлмаган ҳар бир ички бурчакдан катта бўлади.

Исботи. ABC — ихтиёрий учбұрчак бўлсин. BCD ташқи бурчакни кўриб чиқамиз ва у ABC ички бурчакдан катта эканини исботлаймиз (12.2-расм).



12.1-расм



12.2-расм

Бунинг учун A учи ва E томоннинг ўртаси бўлган E нуқта орқали тўғри чизик ўтказиб, шу тўғри чизикда BC кесмага тенг EF , кесма оламиз. Учбұрчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра ABE ва FCE учбұрчаклар тенг бўлади ($BE = CE$, $AE = FE$, $\angle AEB = \angle FEC$). Демак, $\angle ABC = \angle BCF$. Бироқ F учи BCD бурчакнинг ичида ётибди. Бундан BCF бурчак BCD бурчакнинг бир қисминигина ташкил этади. Демак, $\angle BCD > \angle ABC$



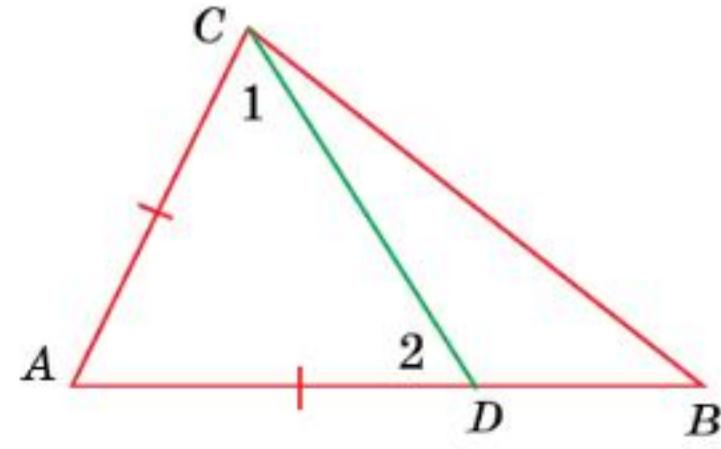
$\angle BCD > \angle ABC$ исботлашлар каби $\angle BCD > \angle ABC$ эканини мустақил исботланг.

Учбұрчакларнинг томонлари билан бурчаклари орасидаги муносабатни кўриб чиқамиз.

Теорема. Ихтиёрий учбұрчакнинг катта томони қаршиисида катта бурчак ётади.

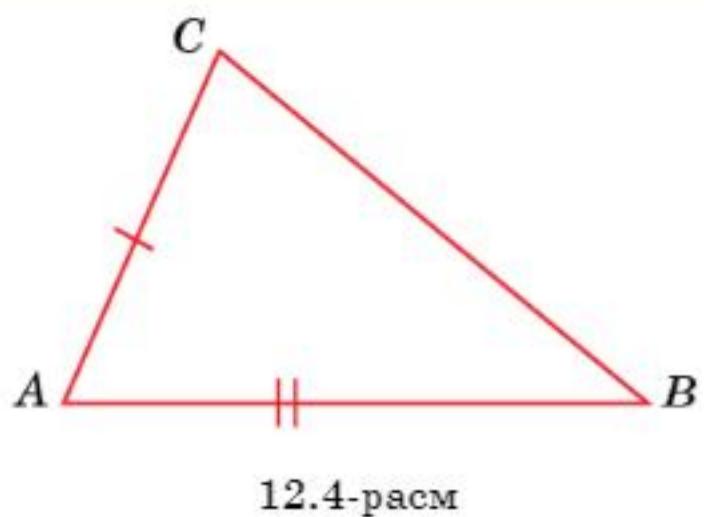
Исботи. ABC учбұрчакда AB томон AC томондан катта бўлсин. C бурчак B бурчакдан катта бўлишини исботлаймиз. Бунинг учун AB нурда AC томонига тенг бўлган AD кесма ясаймиз (12.3-расм).

ACD — асоси CD бўлган тенг ёнли учбұрчак. Демак, $\angle 1 = \angle 2$. 1 бурчак C бурчакнинг қисмини ташкил этади. Бундан $\angle 1 < \angle C$. BCD бошқа томондан 2 бурчак. $\angle 2 > \angle B$ учбұрчакнинг ташқи бурчаги бўлади. Бундан $\angle C > \angle 1 = \angle 2 > \angle B$, яъни $\angle C > \angle B$



12.3-расм





Теорема. Ихтиёрий учурчакда ихтиёрий катта бурчак қаршисида катта томон ётади.

Исботи. ABC учурчакда C бурчак B бурчакдан катта бўлсин (12.4-расм). AB ва AC томонлар тенг бўлмайди, чунки бу ҳолда ABC учурчакли ёни BC учурчак асоси C бўлган тенг ёнли

учурчак бўлиб, C бурчаги B бурчагига тенг бўлар эди. AB томон AC томондан кичик бўлмайди, чунки бу ҳолда исботга кўра C бурчак B бурчакдан кичик бўлар эди. AB томон AC томондан катта бўлар экан \square .

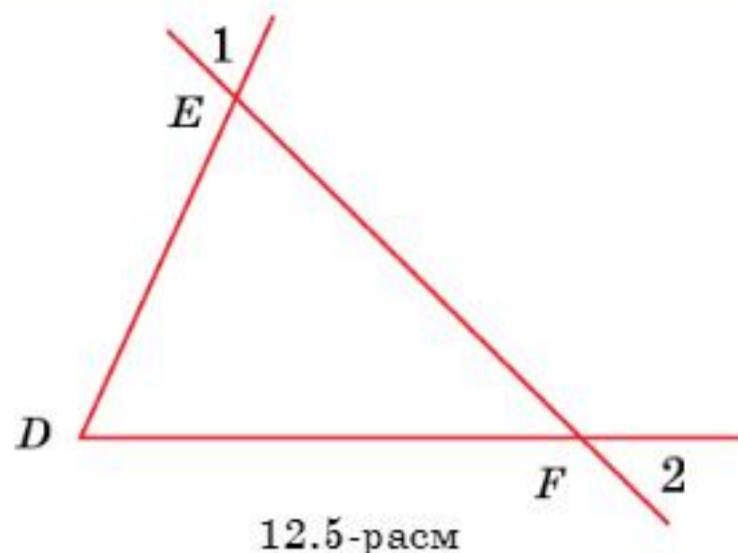


1. Учурчакнинг ташқи бурчаги деб қандай бурчакка айтилади?
2. Учурчакнинг ҳар бир учида нечта ташқи бурчаги бўлади?
3. Убурчакнинг ташқи бурчаги учун қандай тенгсизлик бажарилади?
4. Учурчакнинг катта томони қаршисида қандай бурчак ётади?
5. Учурчакнинг катта бурчаги қаршисида қандай томон ётади?

Машқлар

A

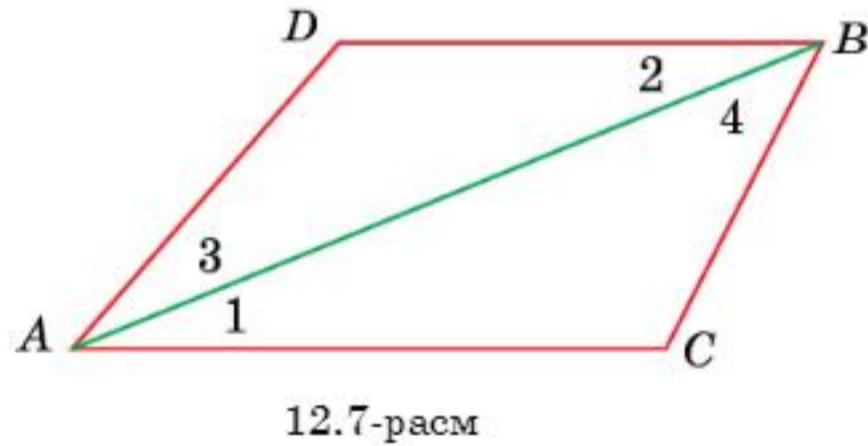
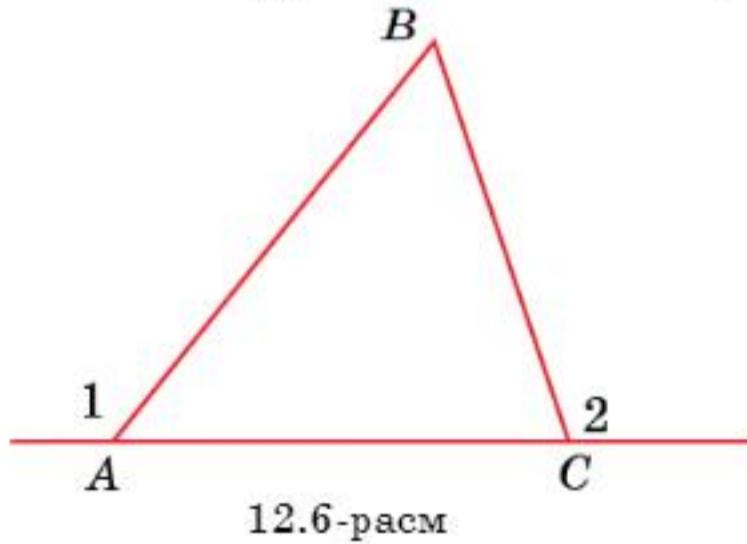
- 12.1.** Учурчакнинг ташқи бурчаги унинг: а) битта ички бурчагидан; б) иккита ички бурчакларидан; в) уча ички бурчакларидан катта бўладими? Мисоллар келтириинг.
- 12.2.** Учурчакнинг ташқи бурчаги унинг: а) битта ички бурчагига тенг; б) битта ички бурчагидан кичик бўладими?
- 12.3.** Агар учурчакнинг битта ташқи бурчаги ўткир бурчак бўлса, у ҳолда бошқа ташқи бурчаклари қандай бўлади?
- 12.4.** Учурчакда иккита: а) ўткир; б) ўтмас; в) тўғри ташқи бурчаклар бўлиши мумкинми?
- 12.5.** ABC учурчакда AB энг катта томони. C бурчаги қандай бўлади?
- 12.6.** Агар $AB = 7$ см, $BC = 10$ см ва $AC = 5$ см бўлса, ABC учурчакнинг бурчакларини таққосланг.
- 12.7.** ABC $BC > AC > AB$ учурчакда. Қуйидаги бурчаклардан қайси бири катта: а) B ёки A ; б) C ёки ш; в) B ёки C ?
- 12.8.** 12.5-расмда $DE < DF$. 1 ва 2 бурчакларни таққосланг.



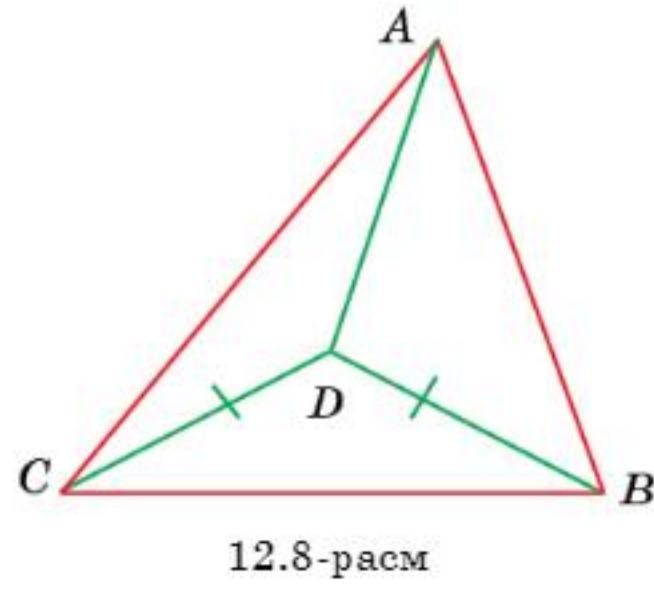
- 12.9.** Агар ABC : а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B = \angle C$ бўлса, у ҳолда учурчакнинг томонларини таққосланг.

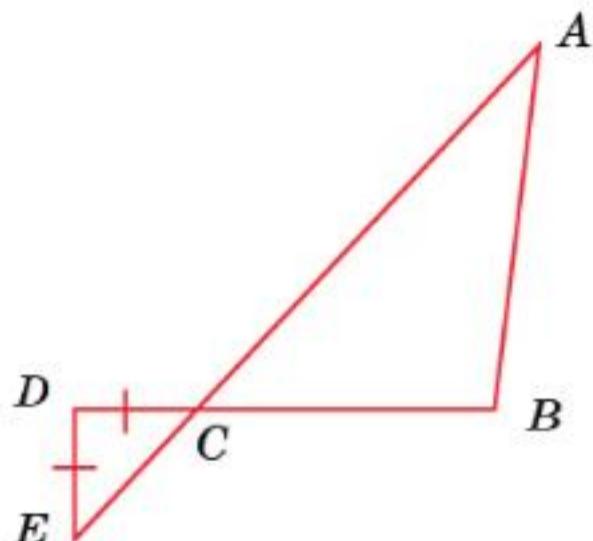
B

- 12.10.** Учурчакда фақат биттагина: а) тўғри бурчак; б) ўтмас бурчак бўлиши мумкинлигини исботланг.
- 12.11.** 12.6-расмда $AB > BC$. 1 бурчак 2 бурчакдан катта бўлишини исботланг.
- 12.12.** 12.7-расмда 1 бурчак 2 бурчакка teng ва $AC > BD$. 3 бурчак 4 бурчакдан кичик бўлишини исботланг.



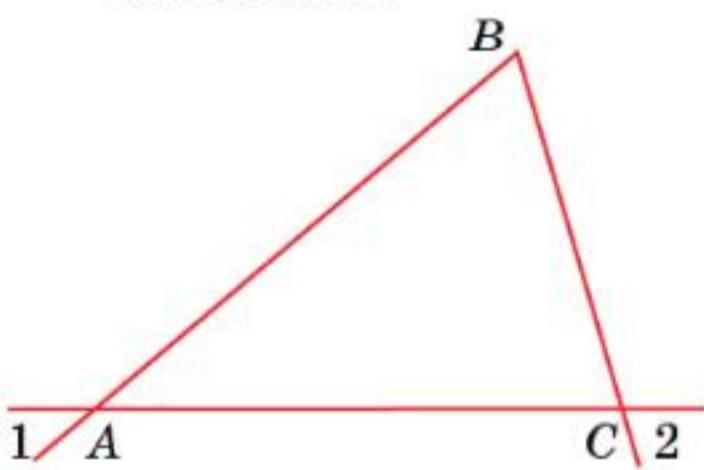
- 12.13.** ABC учурчакнинг учлари унинг ичида ётган D нуқта билан кесмалар орқали туташтирилган ва $AC > AB$, $CD = BD$ (12.8-расм). ACD бурчак ABD бурчакдан кичик бўлишини исботланг.



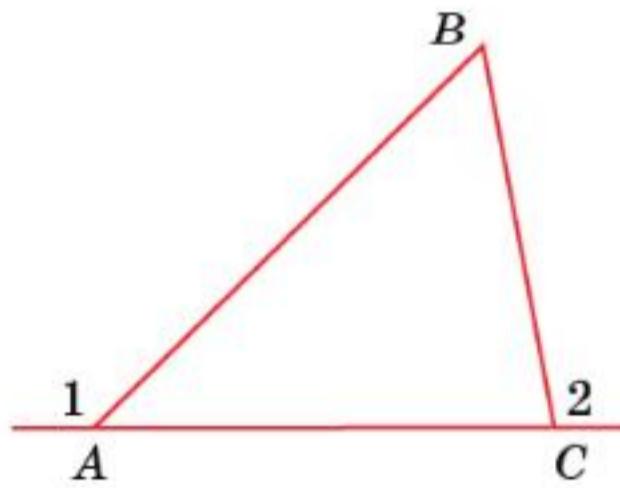


12.9-расм

- 12.14.** AE ва BD кесмалар С нүктада кесишиди ва $AB > BC$, $CD = DE$ (12.9-расм). BAC бурчак DEC бурчакдан кичик бўлишини исботланг.
- 12.15.** 12.10-расмда 1 бурчак 2 бурчакдан кичик. ABC учбурчакнинг AB ва BC томонларини таққосланг.
- 12.16.** 12.11-расмда 1 бурчак 2 бурчакдан катта. $AB > BC$ эканини исботланг.

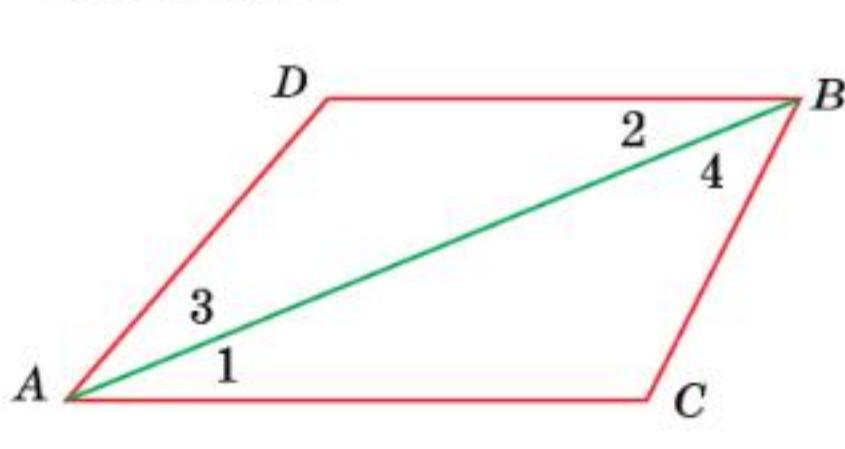


12.10-расм

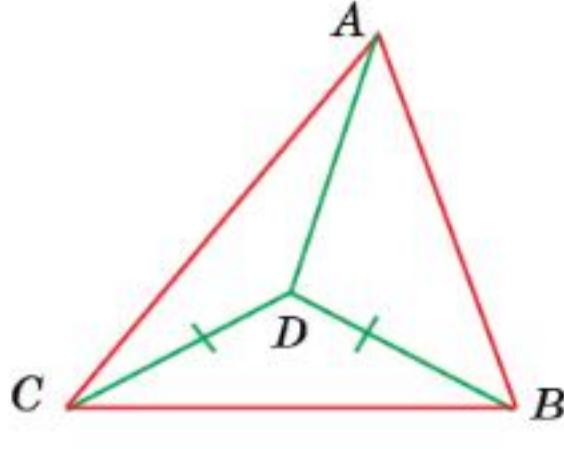


12.11-расм

- C**
- 12.17.** 12.12-расмда 1 ва 2 бурчаклар teng, 3 бурчак 4 бурчакдан кичик. $AC > BD$ эканини исботланг.
- 12.18.** ABC учбурчакнинг учлари унинг ичида жойлашган D нүкта билан кесмалар орқали туташтирилган ва $CD = BD$, ACD бурчак ABD бурчакдан кичик (12.13-расм). $AC > AB$ эканини исботланг.



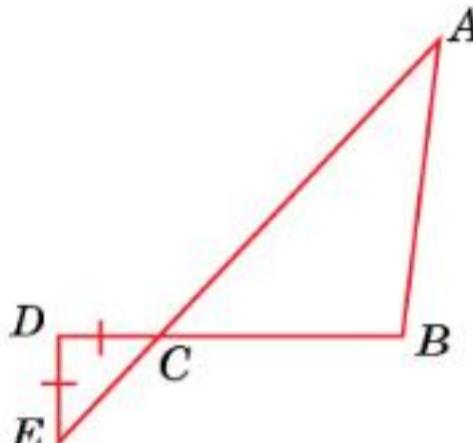
12.12-расм



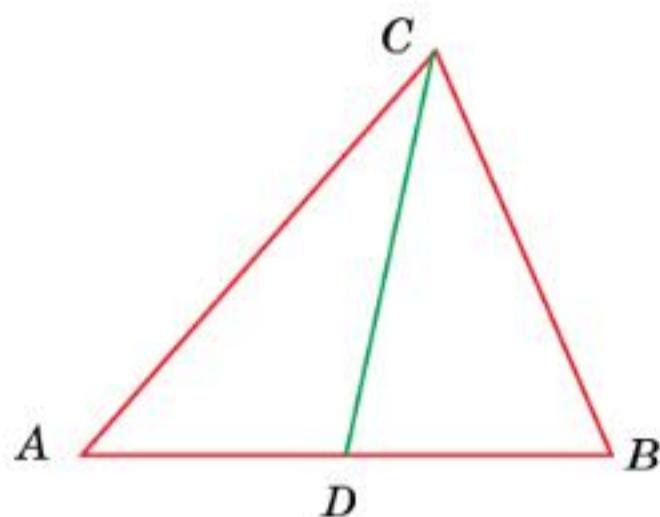
12.13-расм

12.19. AE ва BD кесмалар C нүктада кесишиди ва $CD = DE$, бурчак BAC бурчак DEC бурчакдан кичик (12.14-расм). $AB > BC$ эканини исботланг.

12.20. ABC учбурчакда $AC > BC$, тенгсизлик бажарилади, CD — медиана (12.15-расм). BCD бурчак ACD бурчакдан катта эканини исботланг.



12.14-расм



12.15-расм

Янги мавзууни үзлаштиришга тайёрланинг

12.21. Иккита томони 3 см ва 4 см, улар орасидаги бурчак эса 90° га тенг бўлган учбурчак ясанг.

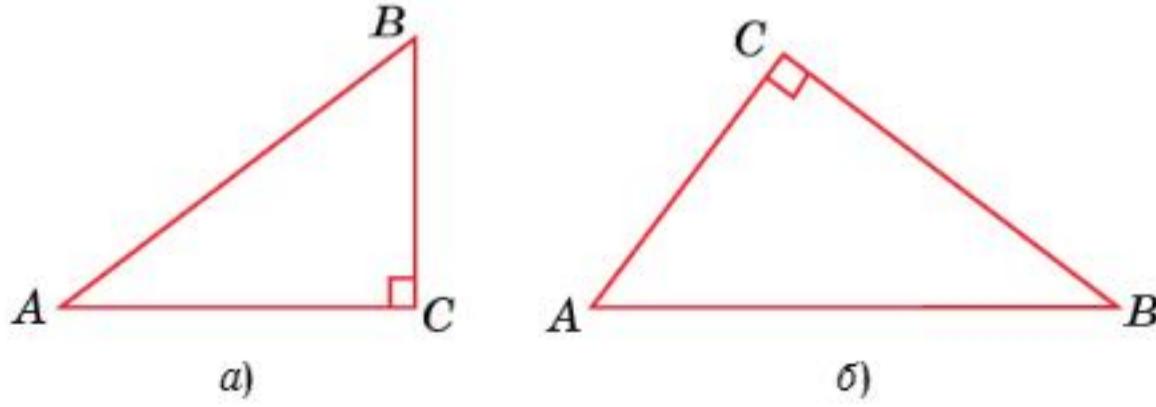
13-§. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАКЛАР

Агар учбурчакнинг тўғри бурчаги бор бўлса, у ҳолда учбурчак *тўғри бурчакли учбурчак* деб аталишини ёдга туширамиз (13.1-расм).

Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги қаршисида ётган томон *гипотенуза*, қолган иккита томонлари эса *катетлар* деб аталади.

13.1-расмда ABC тўғри бурчакли учбурчакда $\angle C = 90^\circ$, AB — гипотенуза, AC ва BC — катетлар.

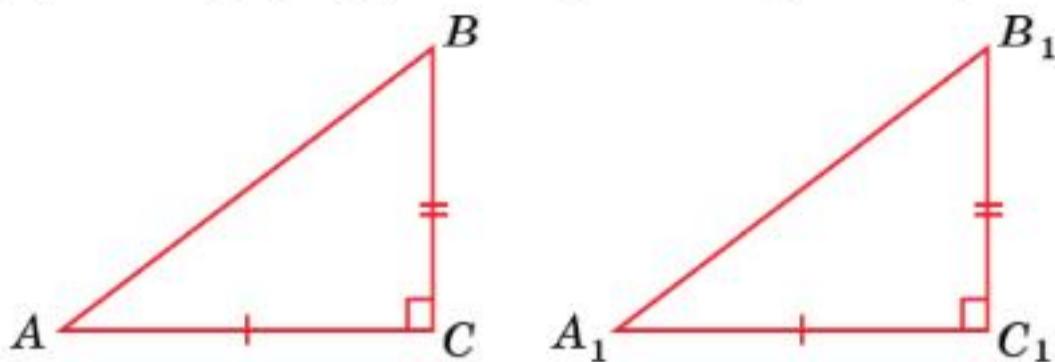
Учбурчакнинг ташқи бурчаги унга қўшни бўлмаган ҳар бир ички бурчагидан катта бўлгани учун тўғри бурчакли учбурчакнинг бир бурчаги тўғри, қолган иккита бурчаги ўткир бурчаклар бўлади.



13.1-расм

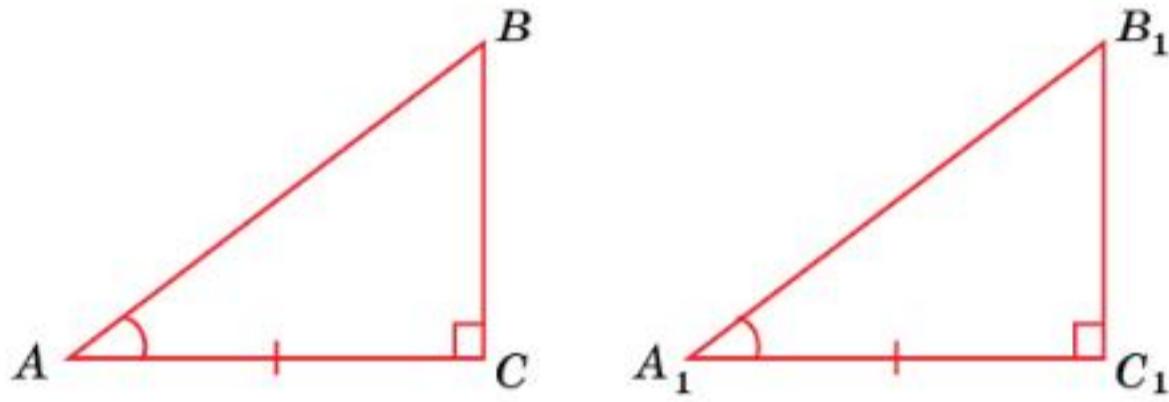
Учурчаклар тенглигининг аломатларини түғри бурчакли учурчакларга құллаб, түғри бурчакли учурчаклар тенглигининг күйидаги аломатларига эга бўламиз.

1-аломат. Агар бир түғри бурчакли учурчакнинг катетлари иккинчи түғри бурчакли учурчакнинг катетларига мос равишида тенг бўлса, у ҳолда бу учурчаклар тенг бўлади (13.2-расм).



13.2-расм

2-аломат. Агар бир түғри бурчакли учурчакнинг катети ва унга ёпишган бурчаги иккинчи түғри бурчакли учурчакнинг катети ва унга ёпишган бурчагига мос равишида тенг бўлса, у ҳолда бу учурчаклар тенг бўлади (13.3-расм).



13.3-расм



Ушбу аломатларни мустақил иеботланг.

Түғри бурчакли учурчаклар тенглигининг яна иккита мураккаб аломатларини кўриб чиқамиз.

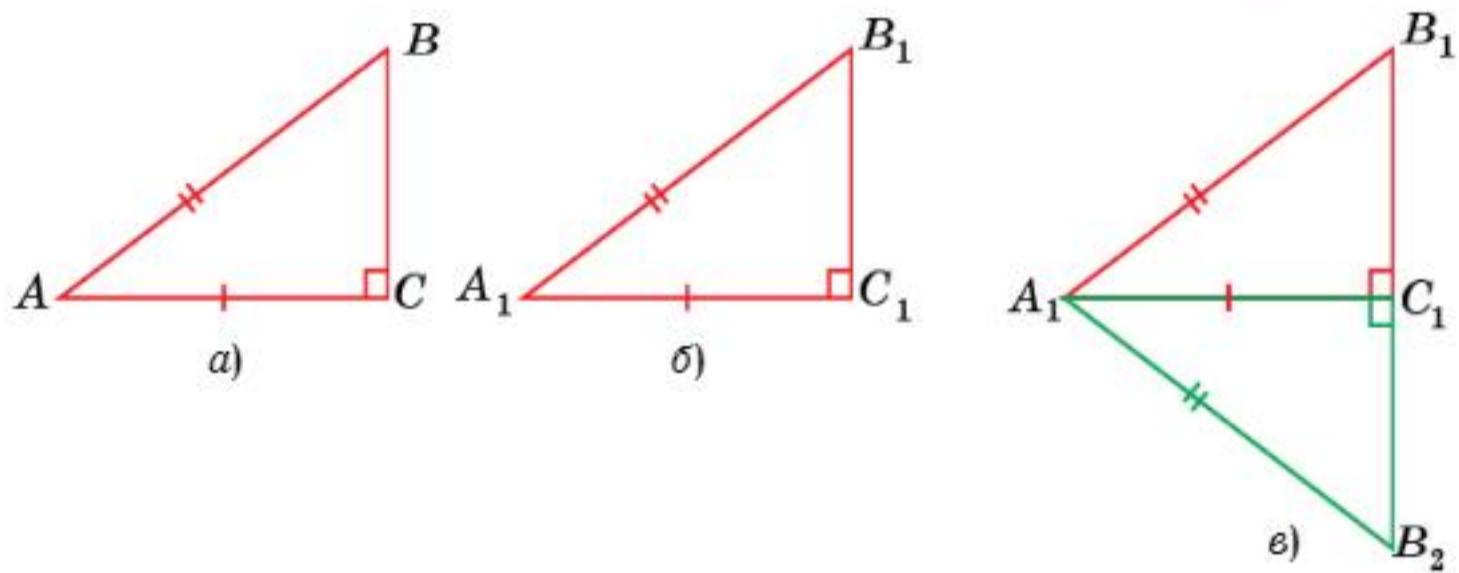
3-аломат. Агар бир түғри бурчакли учурчакнинг гипотенузаси ва катети иккинчи түғри бурчакли учурчакнинг гипотенузаси ва катетига мос равишида тенг бўлса, у ҳолда бу учурчаклар тенг бўлади.

Иеботи. Иеботи учурчаклар тенглигининг учинчи аломатининг иеботи каби бўлади. ABC ва $A_1B_1C_1$ — түғри бурчакли учурчаклар, бу ерда C ва C_1 бурчаклар түғри бурчаклар, $AB = A_1B_1$ ва $AC = A_1C_1$ бўлсин (13.4-а расм).

A_1C_1 нурда A учи A_1 учи билан устма-уст тушади, B учи эса A_1C_1 түғри чизиққа нисбатан B_1 учининг иккинчи томонида ётувчи B_2 нуқтага ўтадиган қилиб ABC учурчак ясаймиз (13.4-расм).

У ҳолда $A_1B_2C_1$ учурчак ABC учурчакка тенг бўлади. $A_1C_1B_1$ ва $A_1C_1B_2$ — бурчаклар түғри бўлганлиги сабабли C_1B_1 ва B_2 нуқталар

битта түғри чизикда ётади. A_1B_1 ва A_1B_2 , томонларнинг тенглигидан $B_1A_1B_2$ учбұрчакнинг тенг ёнли эканлиги келиб чиқади. Тенг ёнли учбұрчакнинг асосига туширилган баландлик биссектриса бўлишидан фойдаланамиз. A_1C_1 — биссектриса, демак, $C_1A_1B_1$ ва $C_1A_1B_2$ бурчаклар тенг. Шундай қилиб, учбұрчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра $A_1B_1C_1$ ва $A_1B_2C_1$ учбұрчаклар тенг бўлади. Бундан, ABC ва $A_1B_1C_1$ учбұрчаклар ҳам тенг бўлади \square .



13.4-расм

4-аломат. Агар бир түғри бурчакли учбұрчакнинг гипотенузаси билан үткір бурчаги иккинчи түғри бурчакли учбұрчакнинг гипотенузаси билан үткір бурчагига мөсравишида тенг бўлса, у ҳолда бу учбұрчаклар тенг бўлади.

Бу аломатни исботлаш учун исботланиши лозим бўлган мулоҳазани нотўғри деб олиб, зиддиятга олиб келувчи “тескари фараз қилиш” усулидан фойдаланамиз.

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ — түғри бурчакли учбұрчаклар, бу ерда C ва C_1 бурчаклар түғри бурчаклар, $AB = A_1B_1$ ва $\angle A = \angle A_1$ бўлсин (13.4-а расм). Ушбу учбұрчакларнинг тенглигини исботлаш учун AC ва A_1C_1 , катетларнинг тенглигини исботлаш етарли, чунки бу ҳолда учбұрчаклар гипотенузаси ва катети бўйича тенг бўлади. Тескарисини фараз қиласиз, яъни AC ва A_1C_1 катетлар тенг эмас бўлсин. AC нурда A_1C_2 га тенг бўлган A_1C_1 кесма ясаймиз. Биринчи аломатга кўра ABC_2 учбұрчак $A_1B_1C_1$ учбұрчакка тенг бўлади. У ҳолда BC_2 , A бурчак түғри бурчак бўлади. Демак, BCC_2 учбұрчакда иккита түғри бурчак бор бўлиб қолади, бу эса мумкин эмас. Ҳосил бўлган зиддият AC ва A_1C_1 катетларнинг тенг эмаслиги ҳақидаги мулоҳаза нотўғри эканини кўрсатади. Демак, катетлар тенг ва берилган учбұрчаклар тенг бўлади \square .

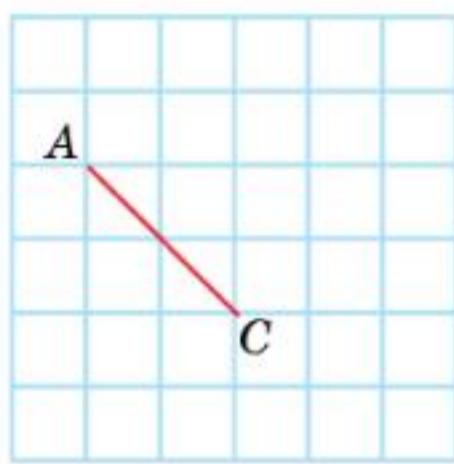


1. Қандай учбұрчаклар түғри бурчакли учбұрчаклар деб аталади?
2. Түғри бурчакли учбұрчакларнинг катети ва гипотенузаси деганимиз нима?
3. Түғри бурчакли учбұрчакларнинг аломатларини келтириб чиқаринг.

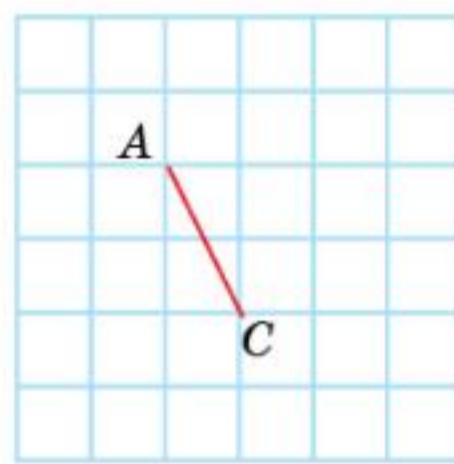
Машқлар

A

- 13.1.** Катак варакда AC кесма катет бўладиган, B учи катакларнинг кесишиш нуқтасида жойлашган тўғри бурчакли учбурчак ясанг (13.5-расм).



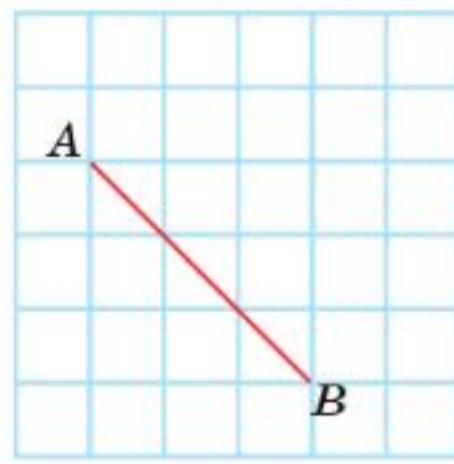
a)



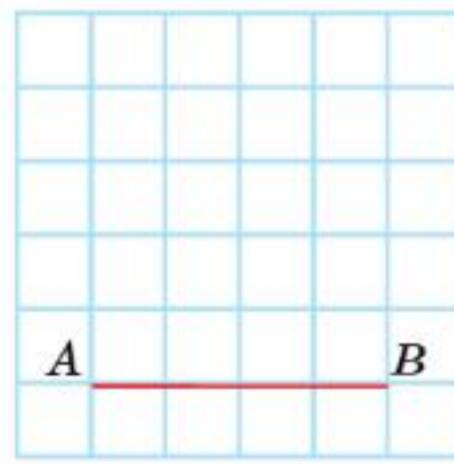
b)

13.5-расм

- 13.2.** Катак варакда AB кесма гипотенуза бўладиган, C учи катакларнинг кесишиш нуқтасида жойлашган тўғри бурчакли учбурчак ясанг (13.6-расм).



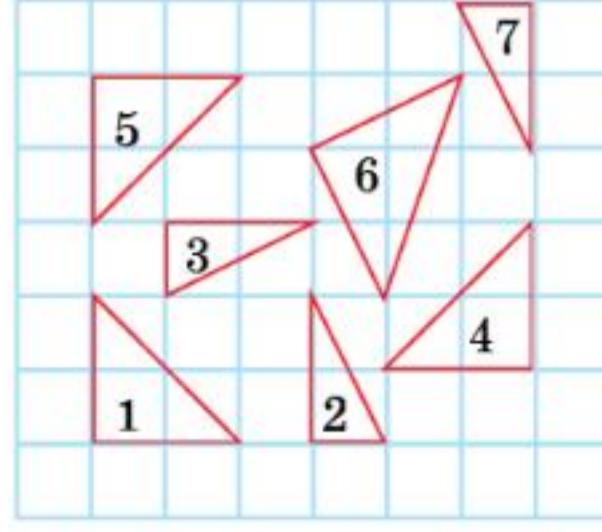
a)



b)

13.6-расм

- 13.3.** 13.7-расмдан ўзаро тенг тўғри бурчакли учбурчакларни кўрсатинг.



13.7-расм

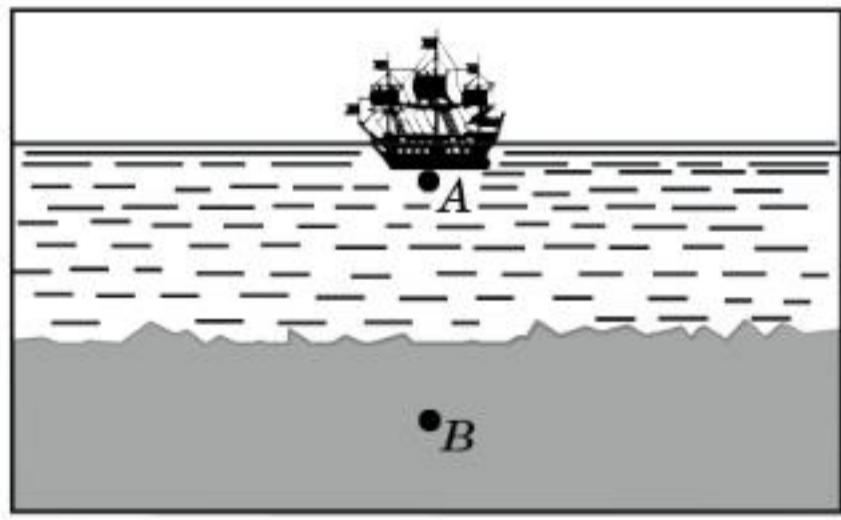
- 13.4.** Түғри бурчакли учурчаклар: а) тенг ёнли; б) тенг томонли бўла оладими?
- 13.5.** Түғри бурчакли учурчакнинг томонлари 4, 5, 5 бўла оладими?
- 13.6.** Түғри бурчакли учурчакнинг катетлари 11 см ва 111 см бўла оладими?
- 13.7.** Түғри бурчакли учурчакнинг томонлари 3 см, 4 см, 5 см. Гипотенузаси нечага тенг?

B

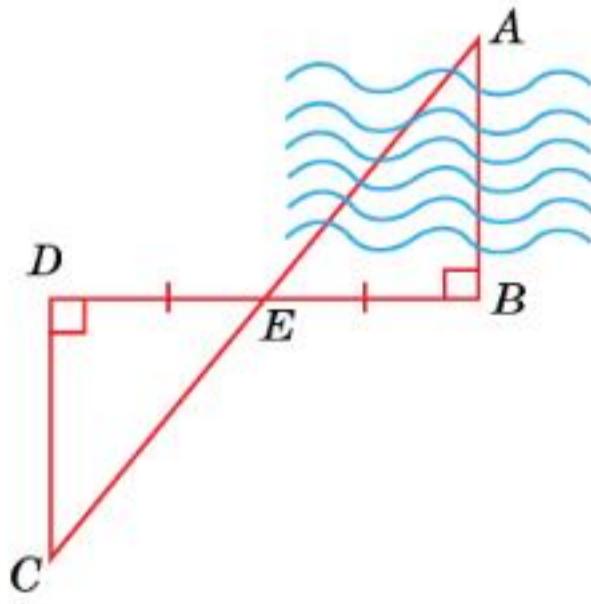
- 13.8.** Түғри бурчакли учурчакда иккита ўткир бурчак бўлишини исботланг.
- 13.9.** Түғри бурчакли учурчакнинг гипотенузаси унинг катетларидан катта эканини исботланг.
- 13.10.** ABC тенг ёнли учурчакда $AC = BC$ ва CD — баландлик. ACD ва BCD учурчакларнинг тенглигини исботланг.
- 13.11.** Агар учурчакнинг иккита баландлиги ўзаро тенг бўлса, у ҳолда бу учурчак тенг ёнли учурчак бўлишини исботланг.

C

- 13.12.** Тескари фараз қилиш усулидан фойдаланиб, бир түғри бурчакли учурчакнинг катети билан унинг қаршисида ётган ўткир бурчаги иккинчи түғри бурчакли учурчакнинг катети билан унинг қаршисида ётган ўткир бурчаги мос равища тенг бўлса, у ҳолда бу учурчаклар тенг бўлишини исботланг.
- 13.13.** Тенг учурчакларда мос равища баландликлар ҳам тенг бўлишини исботланг.
- 13.14.** Қирғоқдан (қирғоқдаги муайян нуқтадан) дengиздаги узокда бўлмаган кемагача бўлган масофани топиш усулини кўрсатинг (13.8-а расм). 13.8-б расмдан фойдаланинг.



a)



б)

13.8-расм

Ахборот тайёрланг

13.15. Ахмес папиусидаги түғри бурчакли учурчакларга доир масалалар ҳақида нималар биласиз?

Үзаро тенг томонли ва унга ёпишган иккита бурчаги бүйича иккита учурчакнинг тенглиги ҳақидаги Фалес теоремаси.

Яңги мавзууни үзлаштиришга тайёрланинг

13.16. b түғри чизигини ва унга тегишли эмас A нүктаны тасвирланг. A нүкта орқали b түғри чизигига перпендикуляр a түғри чизигини юритинг. Ана шундай нечта түғри чизик юритиш мумкин?

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Қандай учурчакнинг ихтиёрий баландлиги берилган учурчакни тенг иккита учурчакка ажратади?

A) Тенг ёнли. B) Ихтиёрий.
C) Тенг томонли. D) Бундай учурчак мавжуд эмас.
2. Учурчакнинг битта томонига ўтказилган медианаси томонига перпендикуляр. Берилган учурчакнинг турини аникланг.

A) Түғри бурчакли. B) Турли томонли.
C) Тенг ёнли. D) Аниклаш мумкин эмас.
3. $AB = BC = CA$ бўлган ABC учурчак берилган. CD — биссектриса, $AD = 3$ см. ABC учурчакнинг периметрини топинг:

A) 3 см. B) 6 см. C) 9 см. D) 18 см.
4. Учурчакнинг бир томонига ўтказилган баландлик томонни тенг иккига бўлади. Учурчакнинг турини аникланг:

A) Түғри бурчакли. B) Турли томонли.
C) Тенг ёнли. D) Аниклаш мумкин эмас.
5. $AB = BC = CA$ бўлган ABC учурчак берилган. BH — баландлик. Берилган учурчакнинг периметри 42 см. AH узунлигини топинг:

A) 7 см. B) 14 см. C) 21 см. D) 35 см.
6. Учурчакнинг периметри 60 см. Унинг томонлари 3:4:5 нисбат каби. Томонларини топинг.

A) 9 см, 12 см, 15 см. B) 12 см, 16 см, 20 см.
C) 10 см, 20 см, 30 см. D) 15 см, 20 см, 25 см.

- 7.** Учурчакнинг бир томонига ўтказилган биссектриса томонини тенг иккига бўлади. Учурчакнинг турини аниқланг:
- A) Тўғри бурчакли. B) Турли томонли.
C) Тенг ёнли. D) Аниқлаш мумкин эмас.
- 8.** Тенг ёнли учурчакнинг периметри 32 см. Асосининг қаршисида ётган бурчакнинг биссектрисаси учурчакни периметрлари 24 см бўлган иккита учурчакка ажратади. Шу биссектрисанинг узунлигини топинг:
- A) 6 см. B) 8 см. C) 12 см. D) 16 см.
- 9.** EF ва GH кесмалар кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади. Агар $EH = 10$ см бўлса, у ҳолда GF кесманинг узунлигини топинг:
- A) 5 см. B) 10 см. C) 15 см. D) 20 см.
- 10.** Тенг томонли учурчакларнинг тенглигини ўрнатиш учун уларнинг қандай элементлари тенглигини текшириш етарли?
- A) Бир томони. B) Бир бурчаги.
C) Битта бурчаги билан битта томони. D) Икки томони.
- 11.** Иккита тўғри бурчакли учурчакларнинг биттадан ўткир бурчаклари тенг. Ушбу учурчаклар тенг бўлиши учун яна қандай элементлари тенг бўлиши етарли?
- A) Иккинчи ўткир бурчаги.
B) Ёпишган катети.
C) Гипотенуза ва иккинчи ўткир бурчаги.
D) Катети ва иккинчи ўткир бурчаги.
- 12.** Тенг ёнли учурчакнинг асоси 8 см. Асосидаги бир учининг бурчаги орқали ўтказилган медиана учурчакнинг периметрини бири иккинчисидан 2 см катта бўладиган иккита бўлакка бўлади. Учурчакнинг ён томонини топинг.
- A) 4 см. B) 8 см. C) 10 см. D) 12 см.
- 13.** Учурчакнинг битта ташқи бурчаги тўғри бурчак эканлиги маълум. Учурчакнинг турини аниқланг:
- A) Тўғри бурчакли. B) Ўткир бурчакли.
C) Ўтмас бурчакли. D) Аниқлаш мумкин эмас.
- 14.** Учурчакнинг битта ташқи бурчаги ўткир бурчак эканлиги маълум. Учурчакнинг турини аниқланг:
- A) Тўғри бурчакли. B) Ўткир бурчакли.
C) Ўтмас бурчакли. D) Аниқлаш мумкин эмас.
- 15.** Агар учурчакнинг битта ташқи бурчаги ички бурчагига тенг бўлса, у ҳолда учурчакнинг турини аниқланг:

- A) Тенг томонли.
C) Түғри бурчакли.
- B) Үтмас бурчакли.
D) Үткір бурчакли.
- 16.** Агар $AB = 5$ см, $AC = 7$ см, $BC = 6$ см бўлса, у ҳолда ABC учурчакнинг бурчакларини таққосланг.
- A) $\angle A > \angle B > \angle C$.
C) $\angle C > \angle A > \angle B$.
- B) $\angle A > \angle C > \angle B$.
D) $\angle B > \angle A > \angle C$.
- 17.** Агар $DE = DF = 12$ см, $EF = 5$ см бўлса, у ҳолда DEF учурчакнинг бурчакларини таққосланг:
- A) $\angle D < \angle E = \angle F$.
C) $\angle D > \angle E = \angle F$.
- B) $\angle D > \angle E > \angle F$.
D) $\angle D < \angle F < \angle E$.
- 18.** ABC учурчакнинг томонларини таққосланг, бу ерда $\angle A < \angle B < \angle C$:
- A) $AB < AC < BC$.
C) $AB > AC > BC$.
- B) $AB < BC < AC$.
D) $AB > BC > AC$.
- 19.** DEF учурчакнинг томонларини таққосланг, бу ерда $\angle D > \angle E > \angle F$:
- A) $DE > DF > EF$.
C) $DF > EF > DE$.
- B) $DF > DE > EF$.
D) $EF > DF > DE$.
- 20.** ABC учурчакнинг томонларини таққосланг, бу ерда $\angle A < \angle B = \angle C$:
- A) $AB < AC = BC$.
C) $AC > BC = AB$.
- B) $BC < AB = AC$.
D) $AB > BC = AC$.

ТҮФРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ҮЗАРО ЖОЙЛАШИШИ

14-§. ПЕРПЕНДИКУЛЯР ВА ОФМА

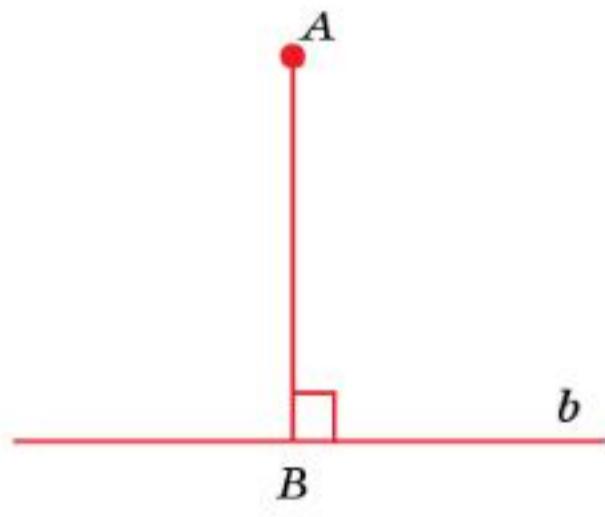
В түғри чизиқ ва унга тегишли бўлмаган A нуқтани кўриб чиқамиз. A нуқта орқали b түғри чизиққа перпендикуляр түғри чизиқ ўтказамиш ва B нуқта шу нуқталарнинг кесишиш нуқтаси бўлсин.

AB кесма A нуқтадан b түғри чизиққа туширилган перпендикуляр, B нуқта перпендикулярнинг асоси (14.1-расм) деб аталади. Перпендикулярнинг узунлиги A нуқтадан b түғри чизиққача бўлган масофа деб аталади.

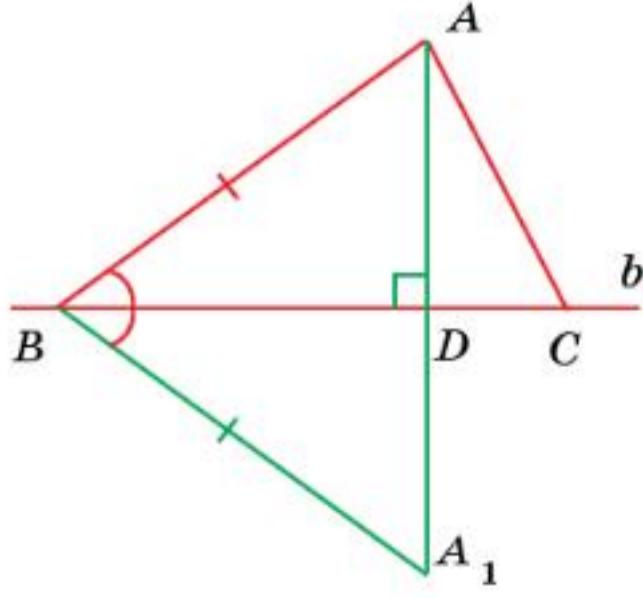
Теорема. Берилган түғри чизиқда ётмайдиган ихтиёрий нуқта орқали шу түғри чизиққа перпендикуляр ўтказиш мумкин ва у ягона.

Иёботи. A нуқта b түғри чизиққа тегишли бўлмаган нуқта бўлсин (14.2-расм).

Шу түғри чизиқда исталган B ва C нуқталарни оламиз. Агар ABC бурчак түғри бурчак бўлса, у ҳолда AB изланаётган перпендикуляр бўлади. Аксинча BC нурда A нуқта ётмайдиган ярим текисликда ABC бурчакка teng бўлган кесмалар teng бўладиган қилиб A_1BC нуқта танлаб оламиз. AB ва A_1B нуқталарни туташтирамиз. BC түғри чизиқда ABA_1 бурчакнинг биссектрисаси жойлашган. Шу биссектриса билан AA_1 кесманинг кесишиш нуқтасини D деб белгилаймиз. Асоси AA_1 бўлган ABA_1 teng ёнли учбурчакда BD биссектриса баландлик бўлади. Демак, AD кесма A нуқтадан b түғри чизиққа туширилган изланаётган перпендикуляр бўлади.



14.1-расм



14.2-расм

Ушбу перпендикулярнинг ягона бўлишини исботлайлик. Дарҳақиқат, агар AD_1 ва AD_2 , иккита перпендикуляр мавжуд бўлса (14.3-расм), у ҳолда AD_1D_2 учбурчакнинг иккита тўғри бурчаги мавжуд бўлар эди, бу эса тўғри бурчакли учбурчакнинг хоссасига кўра мумкин эмас .



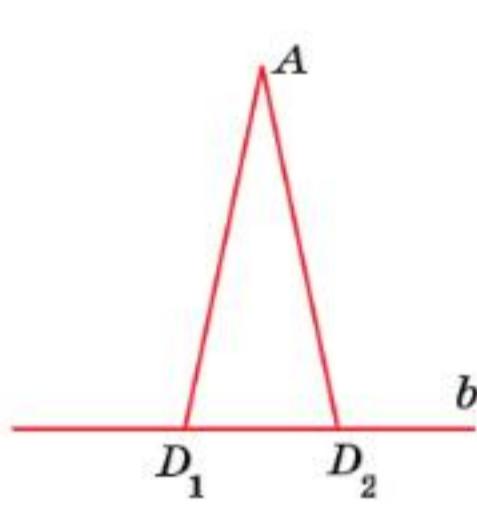
Берилган тўғри чизикда ётган нуқта орқали шу тўғри чизикка перпендикуляр қилиб ягона тўғри чизик ўтказиш мумкинлигини мустақил тушунтиринг.

б тўғри чизикда B нуқтадан бошқа исталган C нуқта учун AC кесма A нуқтадан b тўғри чизикка туширилган **оғма** дейилади. С нуқта оғманинг асоси, BC кесма оғманинг b тўғри чизикдаги **проекцияси** дейилади (14.4-расм).

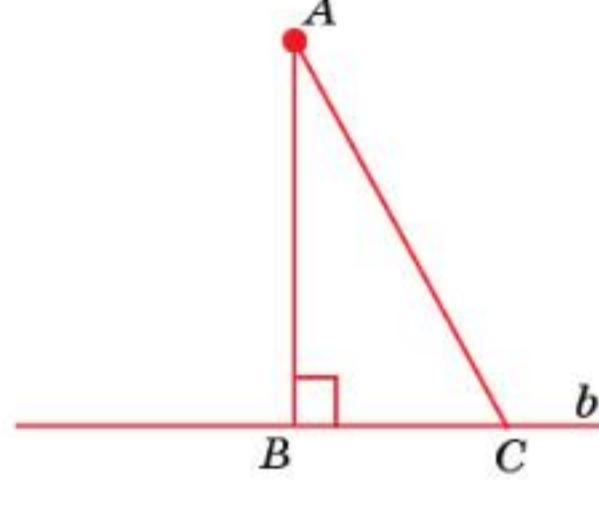
Тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари орасидаги муносабатдан қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема. *Берилган нуқтадан берилган тўғри чизикка туширилган перпендикуляр шу нуқтадан шу тўғри чизикка туширилган исталган оғмадан қисқа бўлади. Бошқача айтганда, нуқтадан тўғри чизикка масофа шу нуқтадан шу тўғри чизикнинг нуқталаригача бўлган масофаларнинг энг кичиги бўлади.*

Исботи. А нуқта b тўғри чизикка тегишли бўлмасин, AB — перпендикуляр, AC — оғма (14.4-расм). Бунда ABC тўғри бурчакли учбурчакда AB — катети, AC гипотенузаси бўлади. Демак, $AB < AC$ .



14.3-расм



14.4-расм

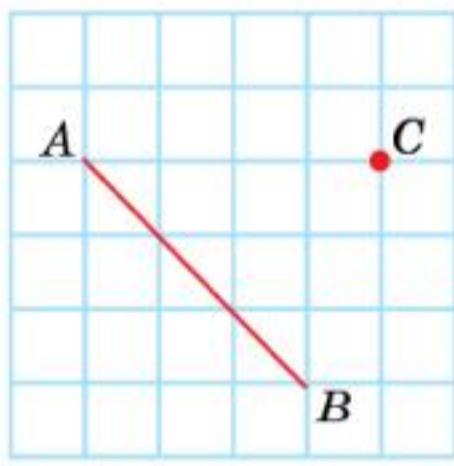


1. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизикка туширилган перпендикуляр деганимиз нима? Перпендикулярнинг асоси нима?
2. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизикка ўтказилган оғма деганимиз нима? Оғманинг: а) асоси; в) проекцияси деганимиз нима?
3. Нуқтадан тўғри чизикка бўлган масофа деганимиз нима?
4. Бир нуқтадан берилган тўғри чизикка ўтказилган перпендикуляр ёки оғманинг қайси бири катта?

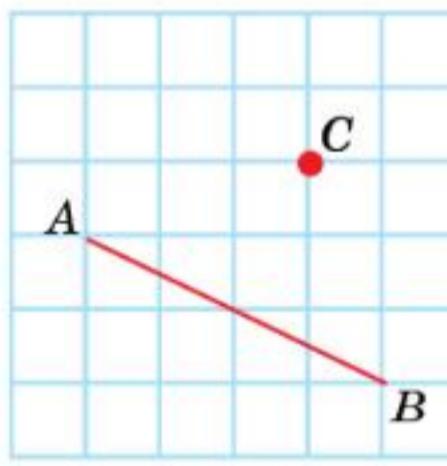
Машқлар

A

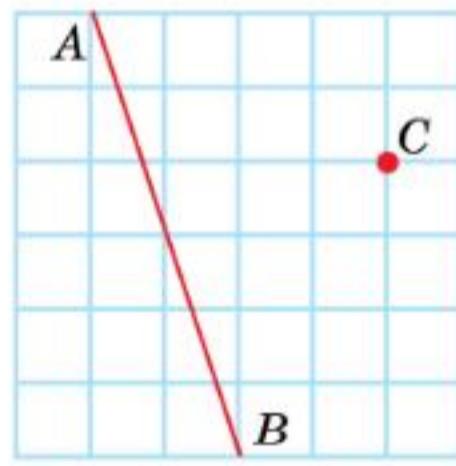
- 14.1.** Берилған нүктадан берилған түғри чизикқа нечта перпендикуляр үтказиш мүмкін?
- 14.2.** Берилған нүктадан берилған түғри чизикқа узунлиги маълум бўлган нечта оғма үтказиш мүмкін?
- 14.3.** Учурчакнинг медианаси шу учдан үтказилған баландликдан катта бўладими?
- 14.4.** Учурчакнинг биссектрисаси шу учдан үтказилған баландликдан катта бўладими?
- 14.5.** Катак варакда 14.5-расмда кўрсатилгандай нүқталар ва түғри чизиқларни ясанг. С нүктадан AB түғри чизикқа CD перпендикуляр туширинг.



a)



б)



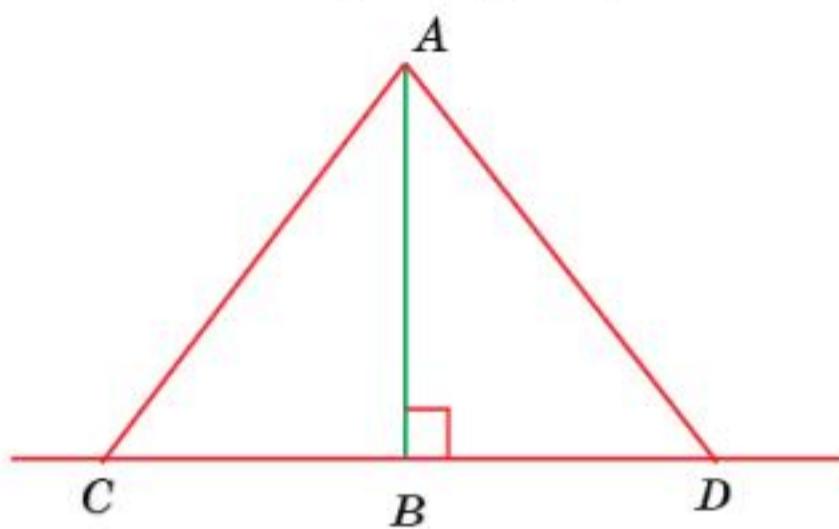
в)

14.5-расм

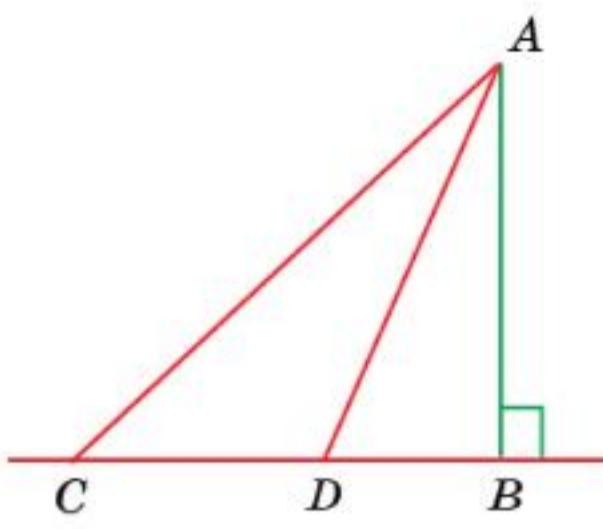
B

- 14.6.** Томони 1 бўлган тенг томонли учурчак бир томонининг иккинчи томонида ётган түғри чизикқа туширилган порекцияси нимага тенг?
- 14.7.** Тенг ёнли учурчакнинг томонлари 6, 8, 8. Шу учурчак ён томонининг унинг асосида ётган түғри чизиқдаги проекцияси нимага тенг?
- 14.8.** Түғри бурчакли учурчакнинг томонлари 3, 4, 5. Учурчакнинг гипотенузасидан унинг катта катети ётган түғри чизиқдаги проекцияси нимага тенг?
- 14.9.** А нүктадан b түғри чизикқа AB перпендикуляр ва AB_1 , AB_2 оғмалар үтказилған. Агар: а) B_1 нүқта B билан B_2 оралиғида ётса; в) B нүқта B_1 билан B_2 оралиғида ётса ва $BB_1 < BB_2$, бўлса, у ҳолда иккита оғмадан қайси бири кичик бўлади?
- 14.10.** Берилған нүктадан берилған түғри чизикқа үтказилған ўзаро тенг бўлган оғмаларнинг проекциялари ҳам тенг бўлишини исботланг (14.6-расм).

- 14.11.** Берилган нүктадан берилган түғри чизикқа үтказилған үзаро тенг бўлган оғмаларнинг проекциялари ҳам тенг бўлишини исботланг (14.6-расм).



14.6-расм



14.7-расм

C

- 14.12.** Берилган нүктадан берилган түғри чизикқа үтказилған иккита оғманинг проекциялари тенг бўлса, у ҳолда оғмаларнинг үзаро тенг бўлишини исботланг (14.7-расм).
- 14.13.** Берилган нүктадан берилган түғри чизикқа үтказилған иккита оғмадан қайси бири катта бўлса, шу оғманинг проекцияси ҳам катта бўлишини исботланг.
- 14.14.** Учурчакнинг биссектрисаси шу учдан үтказилған медиандан катта эмаслигини исботланг.

Янги мавзууни үзлаштиришга тайёрланинг

- 14.15.** b түғри чизик ва унга тегишли бўлмаган A нүктани ясанг. A нүкта орқали b түғри чизикқа параллел a түғри чизик үтказинг. Худди шундай нечта түғри чизик үтказиш мумкин?

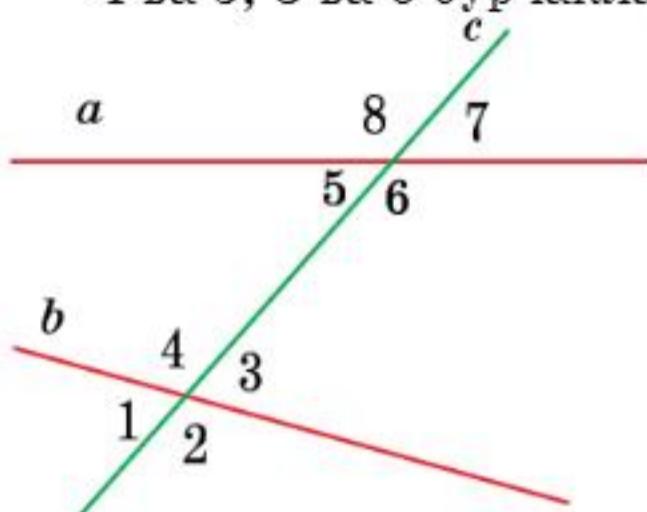
15-§. ТҮҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ПАРАЛЛЕЛЛИГИ

Агар текисликда иккита түғри чизик кесиши маса, яъни умумий нүктага эга бўлмаса, у ҳолда улар *параллель түғри чизиқлар* дейилишини ёдга туширайлик.

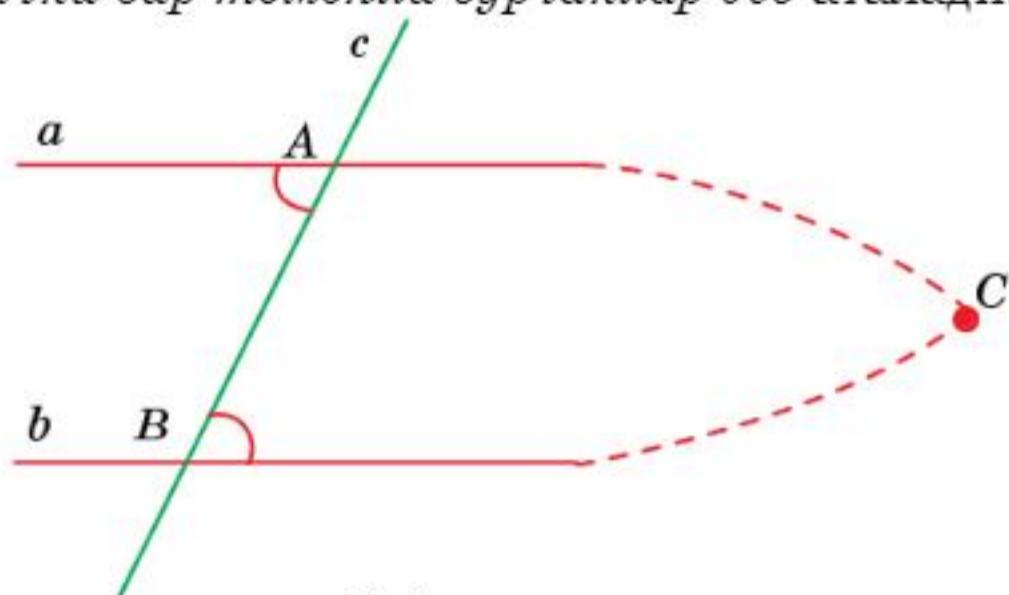
Түғри чизиқларнинг параллеллиги \parallel белги орқали белгиланади. Агар a ва b түғри чизиқлар параллель бўлса, у ҳолда қуйидагича ёзилади: $a \parallel b$.

a ва b — түғри чизиқлар берилсин ва уларни *кесувчи* деб аталувчи учинчи түғри чизик кесиб үтсин. Ушбу түғри чизиқлар ёрдамида ясалган бурчакларни 15.1-расмда кўрсатилгани каби 1, ..., 8 рақамлари орқали белгилаймиз.

1 ва 5, 4 ва 8, 2 ва 6, 3 ва 7 бурчаклар мос бурчаклар;
 3 ва 5, 4 ва 6 бурчаклар ички алмашувчи бурчаклар;
 4 ва 5, 3 ва 6 бурчаклар ички бир томонли бурчаклар деб аталади.



15.1-расм



15.2-расм



15.1-расмдаги a ва b түғри чизиқлар параллелми? Сиз қандай үйлайсиз, түғри чизиқлар параллель бўлиши учун ички алмашинувчи бурчаклар қандай бўлиши керак?

Ушбу саволга жавоб қуидаги теорема орқали берилади.

Теорема (Икки түғри чизиқнинг параллеллик аломати). Агар иккита түғри чизиқ учинчи түғри чизиқ билан кесишганда ички алмашувчи бурчаклари тенг бўлса, у ҳолда бу икки түғри чизиқ параллел бўлади.

Исботи. a ва b түғри чизиқлар c түғри чизиқ билан мос равища A ва B нуқталарда кесишиб, ўзаро тенг бўлган ички алмашувчи бурчаклар ҳосил қиласин. Агар a ва b түғри чизиқлар ихтиёрий C нуқтада кесишадиган бўлса (15.2-расм), у ҳолда ABC учбурчакда A бурчакнинг ташқи бурчаги B бурчакнинг ички бурчагига тенг бўлар эди.

Бу учбурчакнинг ташқи бурчаги у билан қўшни бўлмаган ҳар бир ички бурчакдан катта бўлади деган теоремага зид келади. Демак, A ва B түғри чизиқлар кесишмайди, яъни параллель бўлади □.

1-натижа. Агар иккита түғри чизиқ учинчи түғри чизиқ билан кесишганда мос бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда бу икки түғри чизиқ параллел бўлади.

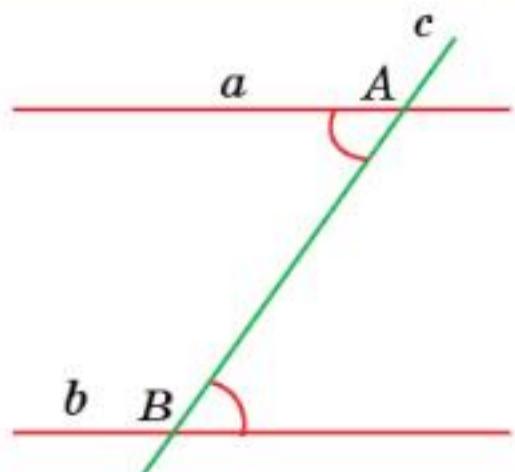
2-натижа. Агар иккита түғри чизиқ учинчи түғри чизиқ билан кесишганда ички бир томонли бурчакларнинг йигиндиси 180° бўлса, у ҳолда бу икки түғри чизиқ параллель бўлади.

3-натижа. Агар икки түғри чизиқни учинчи түғри чизиқка перпендикуляр бўлса, у ҳолда бу икки түғри чизиқ параллель бўлади.

Ҳақиқатан, бу ҳолда ички алмашувчи бурчаклар тенг бўлади, шу сабабли түғри чизиқлар параллел бўлади.

Параллель түғри чизиқларнинг асосий хоссаси (аксиомаси) қуидагича ифодаланади:

Берилган түғри чизиқда ётмайдиган нуқта орқали шу түғри чизиқка параллель бўлган түғри чизиқ ўтказиш мумкин ва фақат битта.



15.3-расм

Бундан берилган түғри чизикқа тегишли бўлмаган нуқта орқали шу түғри чизикқа параллель ягона түғри чизик ўтказиш мумкинлиги келиб чиқади. Шу сабабли иккита түғри чизиқнинг параллеллик аломатига кўра теорема түғри бўлади.

Теорема. Агар иккита параллель түғри чизик учинчи түғри чизик билан кесишига, у ҳолда ички алмашувчи бурчаклар тенг бўлади.

Исботи. a ва b — түғри чизиклар с түғри чизик билан мос равища A ва B нуқталарда кесишуви параллель түғри чизиклар бўлсин (15.3-расм).

A нуқта орқали a_1 түғри чизиклар ва a_1 , b кесувидан ташкил топган ички алмашувчи бурчаклар тенг бўладиган қилиб түғри чизик ўтказамиз. У ҳолда түғри чизиқларнинг параллеллик аломатига кўра a_1 ва b түғри чизиклар параллель бўлади. A нуқта орқали b түғри чизикқа параллель қилиб ягона түғри чизик ўтганлиги туфайли a_1 түғри чизиклар устма-уст тушади. Демак, түғри чизиклар a ва b кесувидан ташкил топган ички алмашувчи бурчаклар тенг бўлади ■.

1-натижа. Агар иккита параллель түғри чизик учинчи түғри чизик билан кесишига, у ҳолда мос бурчаклар тенг бўлади.

Дарҳақиқат, исботланган теоремага кўра агар иккита параллел түғри чизик учинчи түғри чизик билан кесишига, у ҳолда ички алмашувчи бурчаклар тенг бўлади. Бундан мос бурчакларнинг тенг бўлиши келиб чиқади.

2-натижа. Агар иккита параллель түғри чизиклар учинчи түғри чизик билан кесишига, у ҳолда ички бир томонли бурчакларнинг йигиндиси 180° га тенг бўлади.



Ушбу натижанинг холосасини мустақил асосланг.



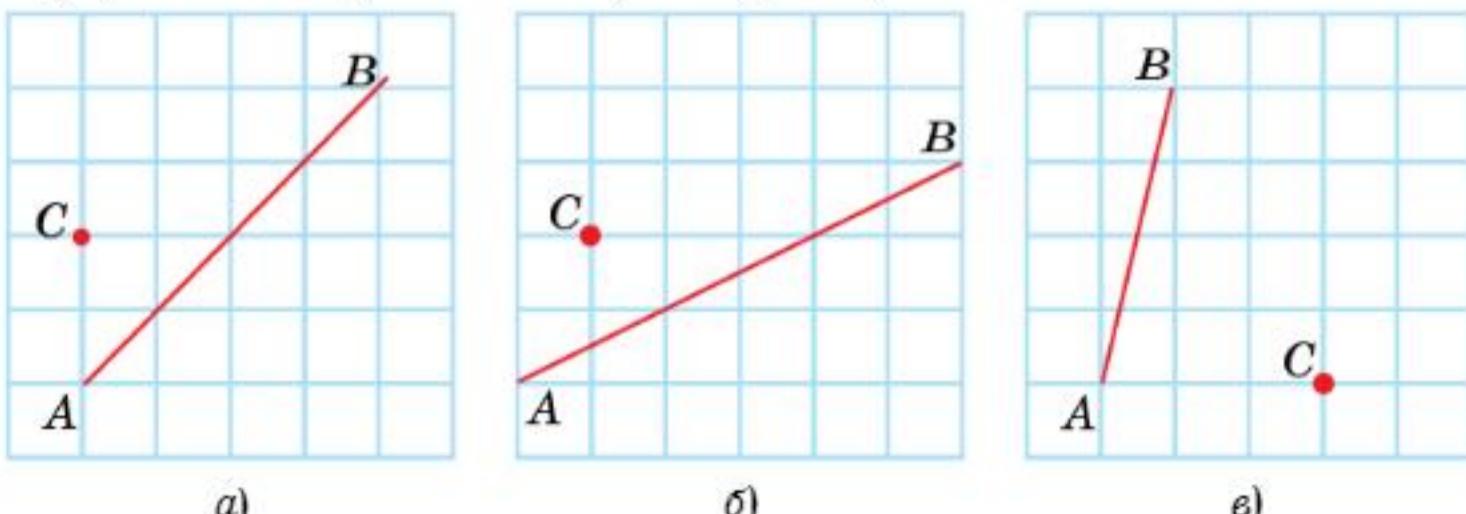
1. Берилган иккита түғри чизик учун қандай түғри чизик кесувчи деб аталади?
2. Иккита түғри чизиқнинг параллеллик аломатини келтириб чиқаринг.
3. Параллель түғри чизикларнинг аксиомасини келтириб чиқаринг.
4. Текисликда берилган нуқта орқали берилган түғри чизикқа параллель бўладиган нечта түғри чизик ўтказиш мумкин?

Машқлар

A

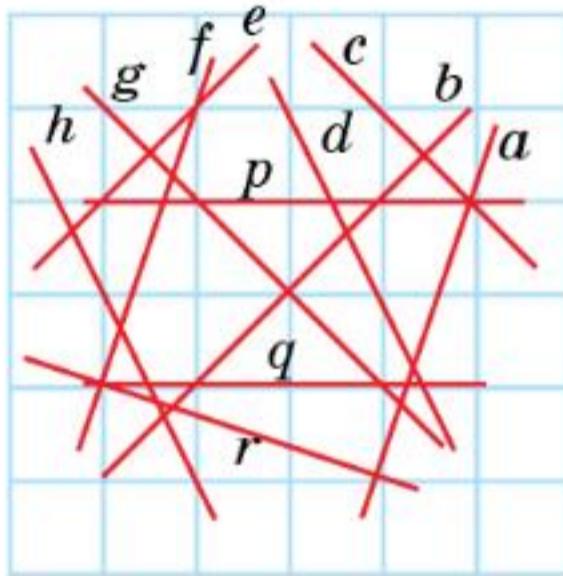
- 15.1. Иккита түғри чизик учинчи түғри чизик билан кесишиганда 8 та бурчак ҳосил бўлди. Улардан нечтаси ўтмас бурчак бўлади?
- 15.2. Иккита түғри чизик учинчи түғри чизик билан кесишиганда ички бир томонли бурчакларнинг иккаласи ҳам ўтмас бурчак бўлиши мумкинми?
- 15.3. Иккита түғри чизик учинчи түғри чизик билан кесишиганда ички бир томонли бурчаклар тенг бўлиши мумкинми?

- 15.4.** Иккита түғри чизик учинчи түғри чизик билан кесишигандың қосыл бўлган барча бурчаклар ўзаро тенг бўлиши мумкинми?
- 15.5.** Катак варакда C нуқта орқали AB түғри чизикқа параллель түғри чизик ўтказинг (15.4-расм).

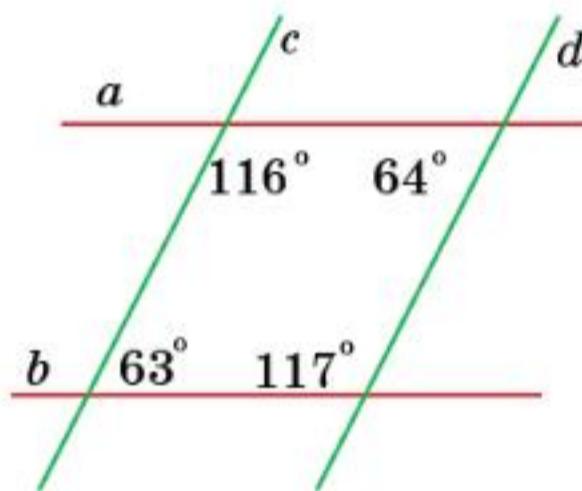


15.4-расм

- 15.6.** 15.5-расмдан параллель түғри чизиклар жуфтини кўрсатинг.
15.7. 15.6-расмда қандай түғри чизиклар параллель бўлади?

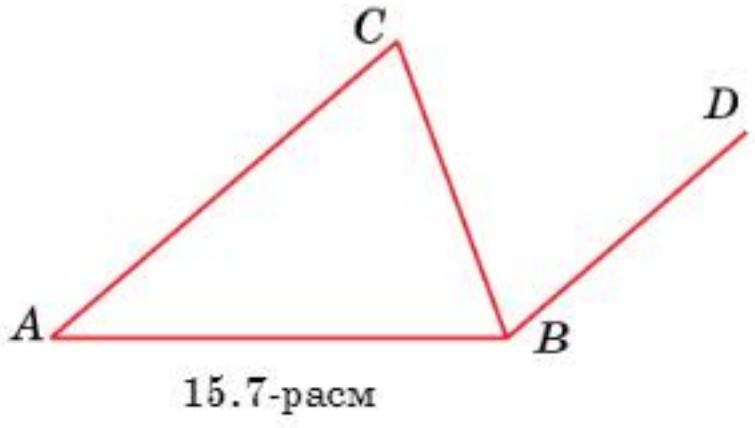


15.5-расм

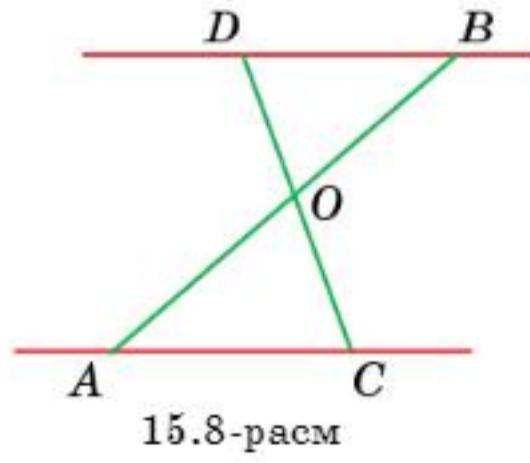


15.6-расм

- 15.8.** ABC учбурчакда $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. В учи орқали BC нур ABD бурчакнинг биссектрисаси бўладиган қилиб BD түғри чизик ўтказилган (15.7-расм). AC ва BD түғри чизиклар параллель эканини исботланг.
- 15.9.** AB ва CD кесмалар уларнинг ўртаси бўлган O нуқтада кесишиди (15.8-расм). AC ва BD түғри чизикларнинг параллель эканини исботланг.

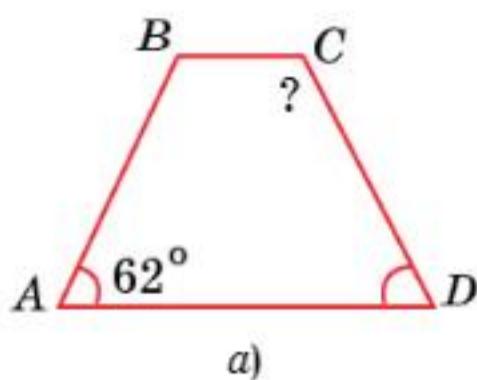


15.7-расм

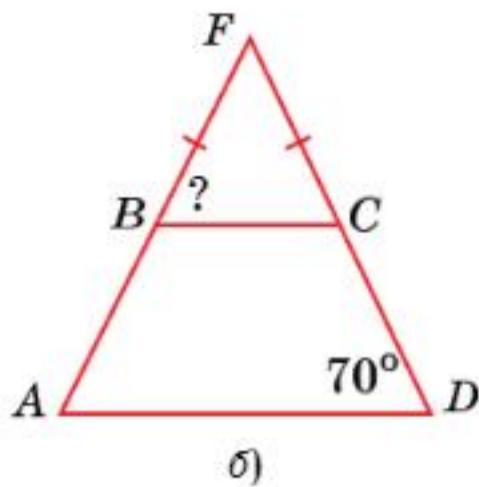


15.8-расм

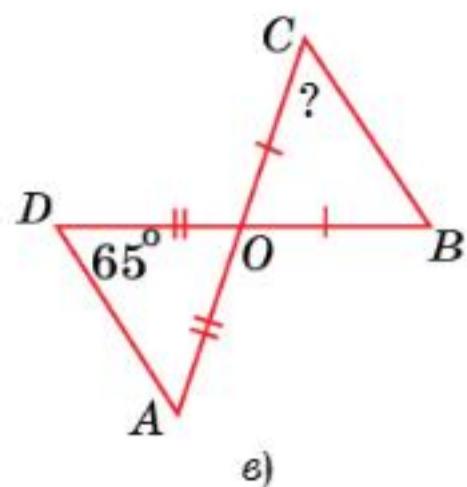
- 15.10.** Агар $AD \parallel BC$ бўлса, у ҳолда номаълум бурчакни топинг (15.9-расм).



a)



б)



в)

15.9-расм

- 15.11.** Агар иккита параллель тўғри чизиқларнинг кесувчи билан ҳосил қиласиган бурчаклари: а) бири 150° га тенг; б) бири иккинчисидан 70° катта бўлса, шу бурчакларни топинг.

- 15.12.** Параллел тўғри чизиқларнинг кесувчи билан ҳосил қиласиган иккита ички алмашинувчи бурчакларининг йигиндиси 150° га тенг. Шу бурчакларни топинг.

- 15.13.** Параллель тўғри чизиқларнинг кесувчи билан ҳосил қиласиган иккита ички алмашинувчи бурчакларининг айирмаси 30° га тенг. Шу бурчакларни топинг.

- 15.14.** AB кесманинг учлари a ва b параллель тўғри чизиқларда ётади. Ушбу кесманинг ўртаси бўлган O нуқта орқали ўтувчи тўғри чизик a ва b тўғри чизиқларни C ва D нуқталарда кесиб ўтади. $CO = OD$ эканини исботланг.

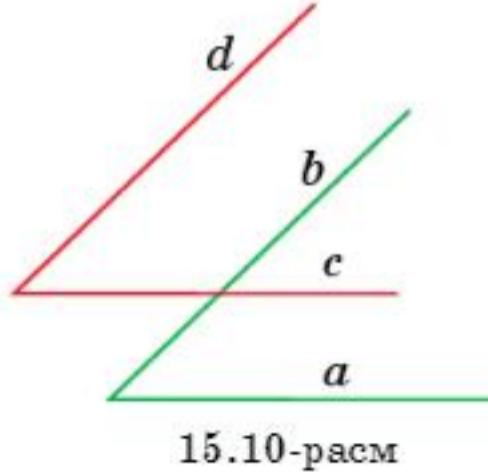
- 15.15.** Иккита параллель тўғри чизиқларнинг кесишишидан ҳосил бўлган ички алмашувчи бурчаклар биссектрисалари параллель, яъни параллель тўғри чизиқларда ётишини исботланг.

С

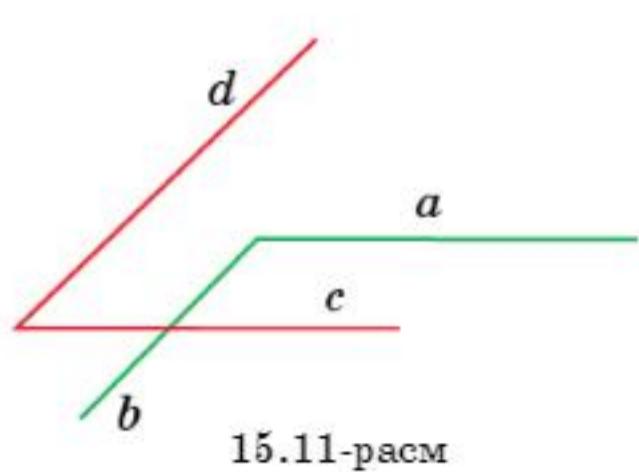
- 15.16.** Агар исталган тўғри чизик иккита параллель тўғри чизиқлардан бирини кесиб ўтса, у ҳолда иккинчисини ҳам кесиб ўтишини исботланг.

- 15.17.** Учинчи тўғри чизиқقا параллель бўлган иккита тўғри чизик ўзаро параллель бўлишини исботланг.

- 15.18.** 15.10-расмда бир бурчакнинг a ва b томонлари иккинчи бурчакнинг мос равища c ва d томонларига параллель. Ушбу бурчакларнинг tengligini исботланг.



15.10-расм



15.11-расм

15.19. 15.11-расмда бир бурчакнинг a ва b томонлари иккинчи бурчакнинг c ва d томонларига параллель. Ушбу бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг бўлишини исботланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

15.20. Ихтиёрий учбурчак ясанг. Транспортир ёрдамида унинг бурчакларини ўлчанг ва уларнинг йиғиндисини топинг.

16-§. УЧБУРЧАК БУРЧАКЛАРИНИНГ ЙИҒИНДИСИ

Ихтиёрий бир учбурчак ясанг. Транспортир ёрдамида унинг бурчакларини ўлчанг ва уларнинг йиғиндисини топинг.



Қандай ўйлайсиз, ушбу ҳосила тахминан 180° га тенг бўладими?

Теорема. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг бўлади.

Исботи. Исталган ABC учбурчакнинг C учи орқали AB томонга параллель тўғри чизик ўтказамиз (16.1-расм).

У ҳолда ички алмашинувчи бурчаклар сифатида $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 5$ бўлади. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 3 = 180^\circ$

Натижা. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчакларининг йиғиндиси 90° га тенг бўлади.

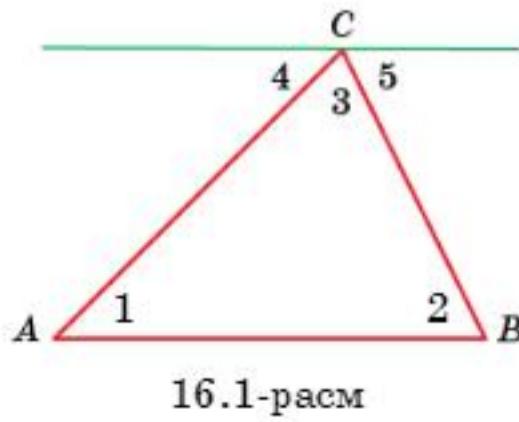


Ушбу натижани мустақил асосланг.

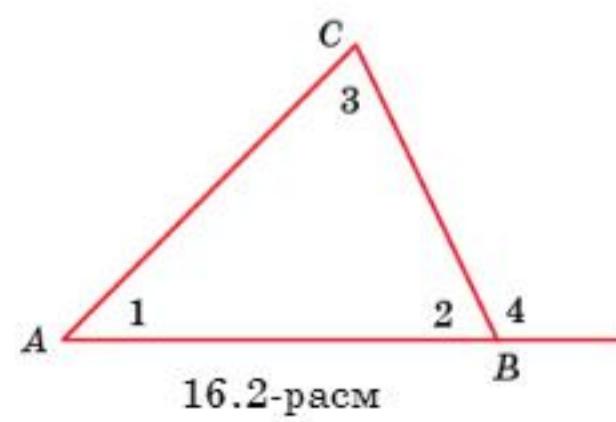
Теорема. Учбурчакнинг ташқи бурчаги унга қўшни бўлмаган иккита бурчакнинг йиғиндисига тенг бўлади.

Исботи. ABC учбурчакнинг ички бурчакларини 1, 2 ва 3 рақамлари билан белгилаймиз (16.2-расм).

4 бурчак 1 ва 3 бурчаклар билан қўшни бўлмаган ташқи бурчак бўлсин. У ҳолда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ва $\angle 4 = 180^\circ - \angle 2 = \angle 1 + \angle 3$



16.1-расм



16.2-расм

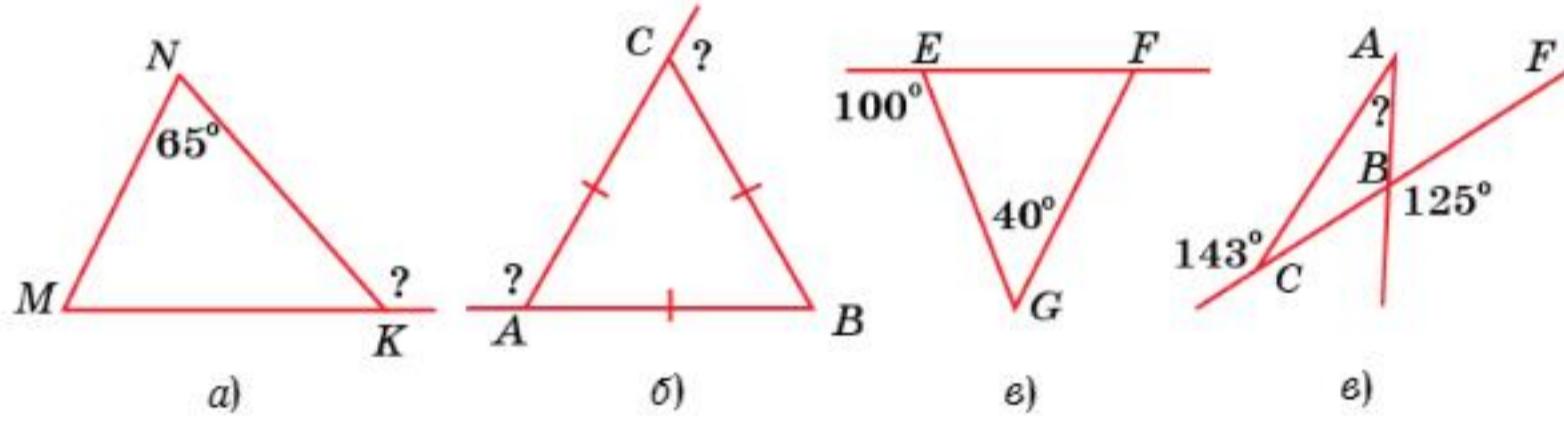
1. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг?
2. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг?
3. Учбурчакнинг ташқи бурчаги нимага тенг?



Машқлар

A

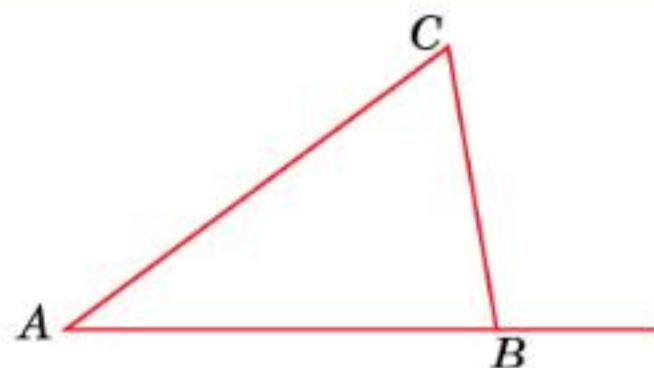
- 16.1.** Тенг томонли учебурчакнинг томонлари нимага тенг?
- 16.2.** Түғри бурчакли тенгёнли учебурчак үткір бурчаклари нимага тенг?
- 16.3.** ABC учебурчакда A бурчак 30° га, B бурчак 90° га тенг. Унинг С бурчагини топинг.
- 16.4.** Түғри бурчакли учебурчакнинг битта үткір бурчаги иккинчисидан 32° катта. Унинг катта үткір бурчагини топинг.
- 16.5.** Түғри бурчакли учебурчакнинг бир үткір бурчаги иккинчисидан икки марта катта. Унинг кичик үткір бурчагини топинг.
- 16.6.** Түғри бурчакли учебурчакнинг иккита үткір бурчагининг нисбати $2:3$ каби. Унинг катта үткір бурчагини топинг.
- 16.7.** ABC учебурчакда A бурчак 40° , $AC = BC$. С бурчакни топинг.
- 16.8.** ABC учебурчакда C бурчак 120° , $AC = BC$. А бурчагини топинг.
- 16.9.** 16.3-расмдаги номаълум бурчакларни топинг.



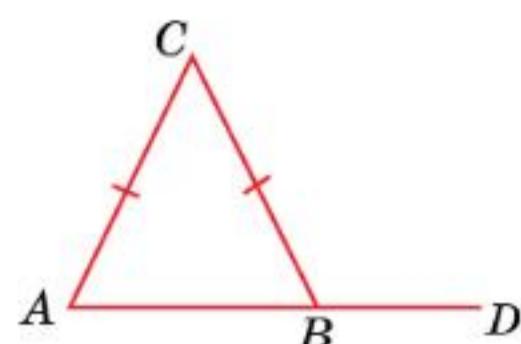
16.3-расм

B

- 16.10.** Тенгёнли учебурчакнинг бир бурчаги 98° . Унинг қолган иккита бурчагини топинг.
- 16.11.** Тенгёнли учебурчакнинг бир бурчаги иккинчисидан 90° кичик. Унинг катта бурчагини топинг.
- 16.12.** Учурчак бурчакларининг нисбати $1:2:3$. Унинг кичик бурчагини топинг.
- 16.13.** ABC учебурчакда бурчак 64° га, В учидағы ташқи бурчак 104° га тенг (16.4-расм). Унинг А бурчагини топинг.
- 16.14.** ABC учебурчакда $AC = BC$. В учидағы ташқи бурчак 122° га тенг (16.5-расм). Унинг С бурчагини топинг.
- 16.15.** ABC учебурчакда $AC = BC$, С бурчак 50° га тенг (16.5-расм). CBD ташқи бурчакни топинг.



16.4-расм

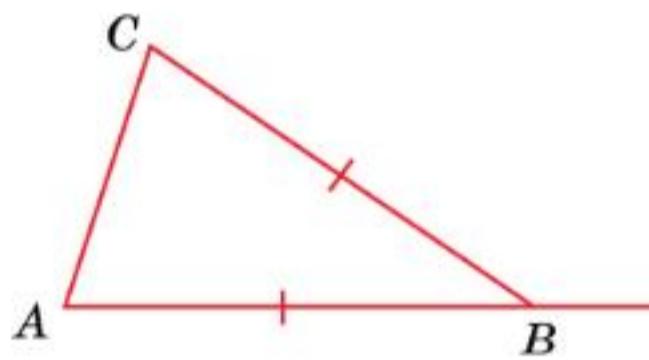


16.5-расм

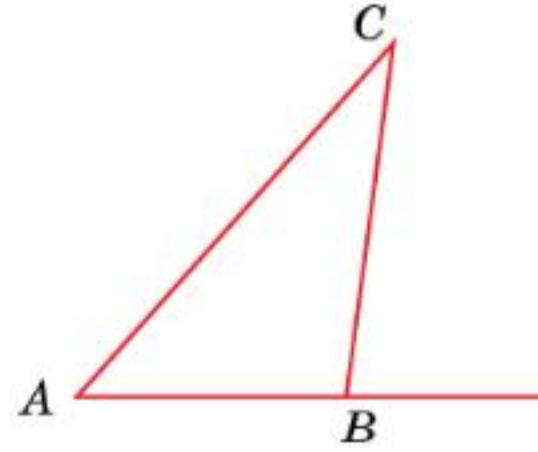
16.16. $\triangle ABC$ учурчакда $AC = BC$. B бурчак 138° га тенг (16.6-расм). Унинг C бурчагини топинг.

16.17. $\triangle ABC$ учурчакда $AB = BC$. A бурчак 70° га тенг (16.6-расм). B уидаги ташқи бурчакни топинг.

16.18. Учурчакнинг битта ташқи бурчаги 85° га тенг. Ушбу ташқи бурчак билан қўшни бўлмаган бурчакларнинг нисбати $2:3$ каби (16.7-расм). Улар ичидан энг каттасини топинг.



16.6-расм



16.7-расм

16.19. Тўғри бурчакли учурчакнинг битта ташқи бурчаги 120° га тенг. Ушбу учурчакнинг ўткир бурчакларини топинг.

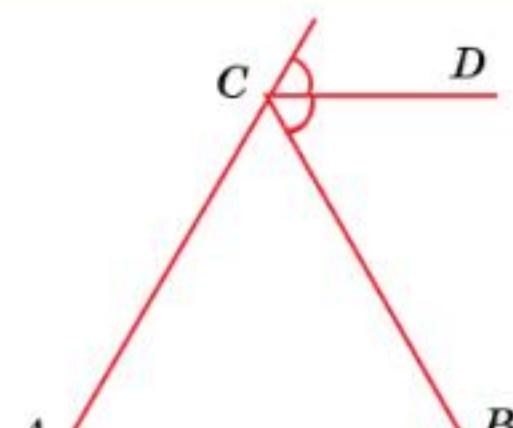
16.20. Учурчакнинг ҳар бир уидаги биттадан олинган барча ташқи бурчакларининг йиғиндисини топинг.

С

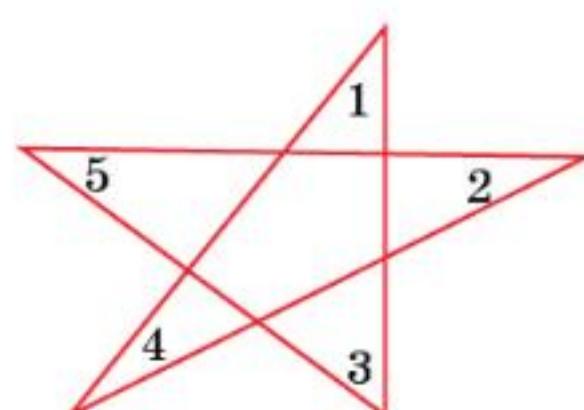
16.21. Агар тўғри бурчакли учурчакнинг бир бурчаги 30° бўлса, у ҳолда шу бурчакка қарама-қарши ётган катет гипотенузанинг ярмига тенг бўлишини исботланг.

16.22. Тенгёнли учурчак асосига қарама-қарши жойлашган уидаги бурчакнинг биссектрисаси унга параллел бўлишини исботланг (16.8-расм).

16.23. Исталган беш бурчакли юлдузнинг ўткир бурчаклари йиғиндисини топинг (16.9-расм).

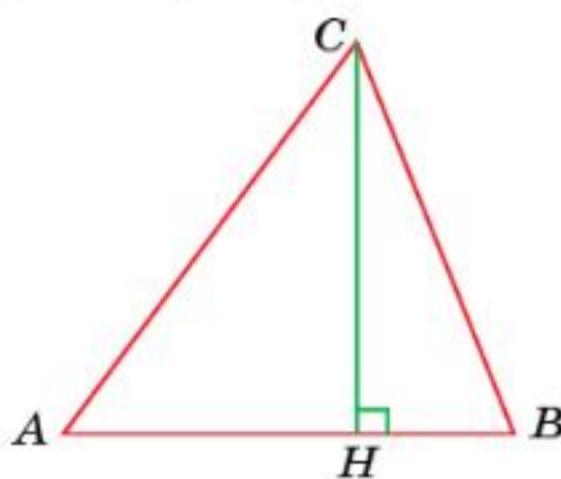


16.8-расм

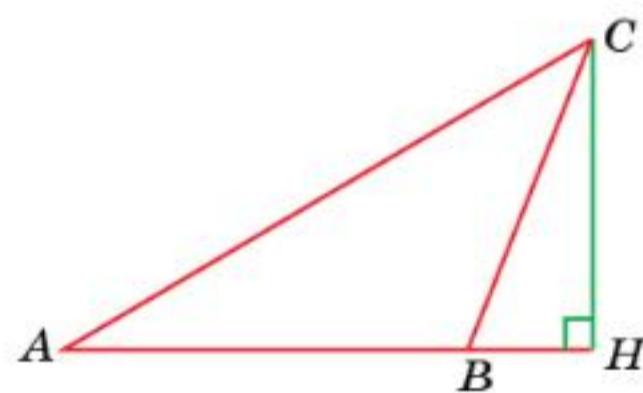


16.9-расм

- 16.24.** $\triangle ABC$ учурчакда A бурчак 60° , B бурчак 70° , CH — баландлик (16.10-расм). ACH ва BCH бурчакларнинг айирмасини топинг.



16.10-расм

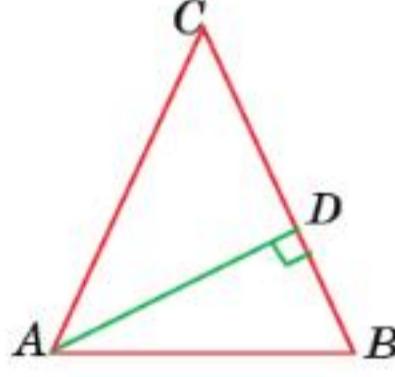


16.11-расм

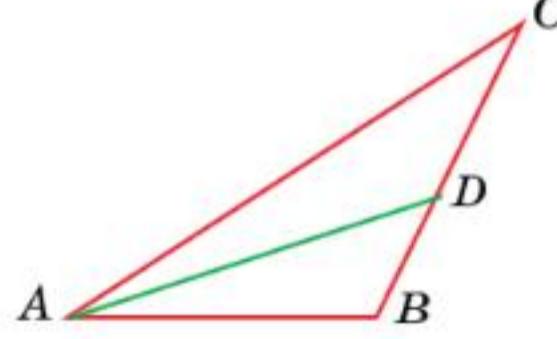
- 16.25.** $\triangle ABC$ учурчакда B бурчак ўтмас. A бурчак 30° , CH — баландлик BCN бурчак 22° (16.11-расм). ACB бурчакни топинг. $\triangle ABC$ учурчакда $AC = BC$, AD — баландлик, BAD бурчак 24° (16.12-расм) C бурчакни топинг.

- 16.26.** $\triangle ABC$ учуршакда $AC = BC$, AD — биқтігі, BAD бурчак 24° (16.12-расм). C бурчакни топинг.

- 16.27.** $\triangle ABC$ учурчакда AD — биссектриса, C бурчак 30° , BAD бурчак 22° (16.13-расм). ADB бурчакни топинг.



16.12-расм

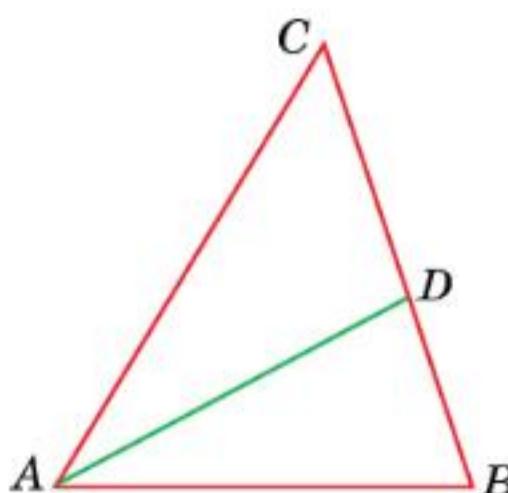


16.13-расм

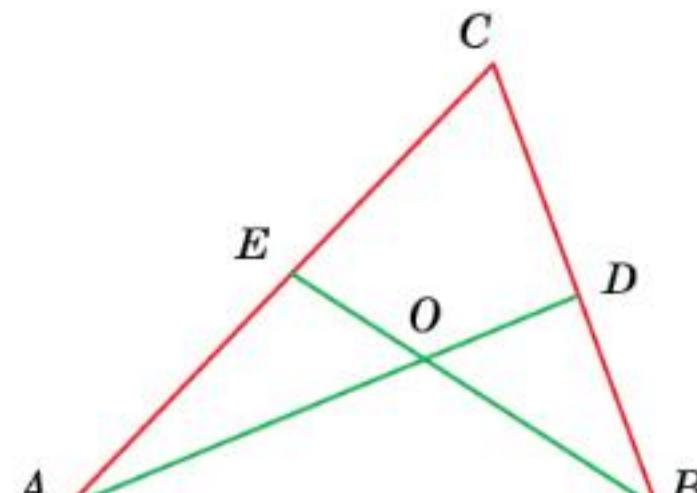
- 16.28.** $\triangle ABC$ учурчакда AD — биссектриса, C бурчак 50° , бурчак CAD 28° (16.14-расм). B бурчакни топинг.

- 16.29.** $\triangle ABC$ учурчакда AD — биссектриса, B бурчак 72° , CAD бурчак 30° (16.14-расм). C бурчакни топинг.

- 16.30.** ABC учурчакда C бурчак, 60° , AD ва BE — кесмалар O нүктада кесишиувчи биссектрисалар (16.15-расм). AOB бурчакни топинг.



16.14-расм

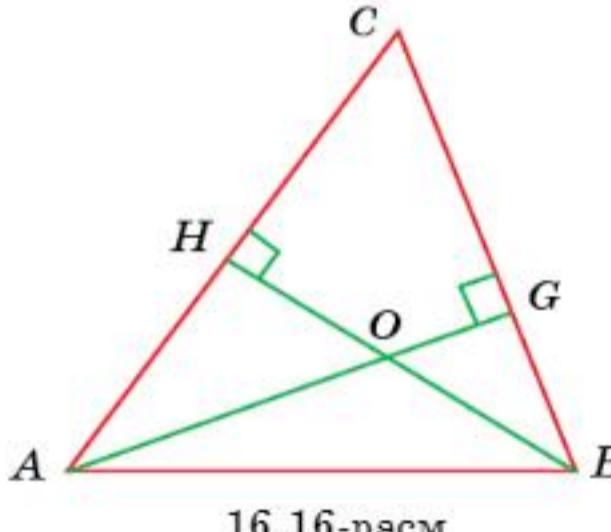


16.15-расм

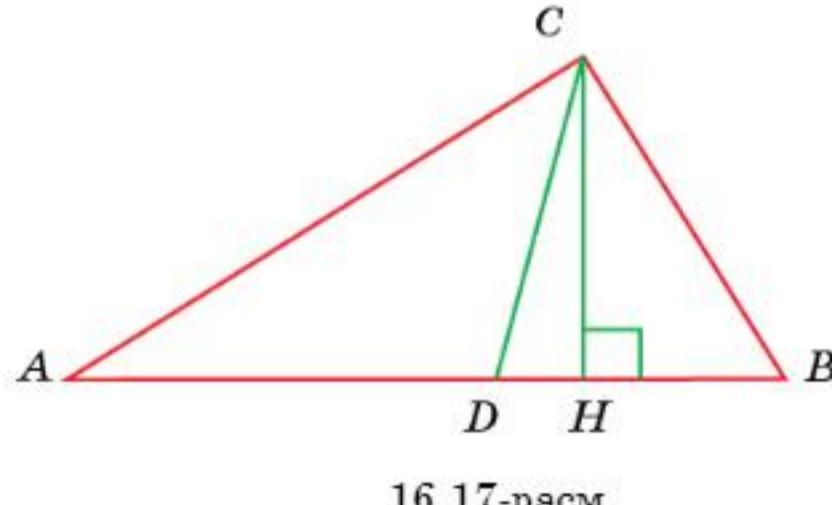
- 16.31.** Түғри бурчакли учурчакнинг ўткир бурчаклари биссектрисалари орасидаги ўткир бурчакни топинг.

- 16.32.** Учурчакнинг иккита бурчаги 54° ва 66° . Ушбу бурчакларнинг учларидан туширилган баландликлар орасидаги ўткир бурчакни топинг (16.16-расм).

- 16.33.** Түғри бурчакли учурчакнинг битта ўткир бурчаги 30° . Унинг түғри бурчаги учидан туширилган баландлиги ва биссектрисаси орасидаги бурчакни топинг (16.17-расм).



16.16-расм



16.17-расм

- 16.34.** ABC түғри бурчакли учурчакнинг A ўткир бурчаги 30° га, AB гипотенуза 12 см га teng. BC катетнинг гипотенузадаги проекциясини топинг.

Яңги мавзуны үзлаштиришга тайёрланинг

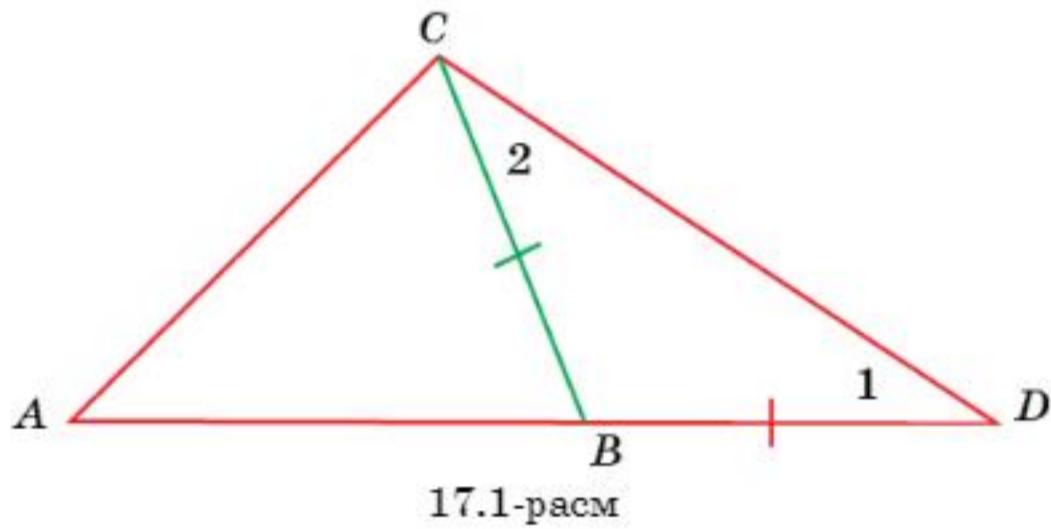
- 16.35.** Исталган учурчак ясанг. Чизғич ёрдамида унинг томонларини үлчанг. Учурчакнинг ҳар бир томони унинг бошқа икки томони йиғиндисидан кичик ва айирмасидан катта эканлиги түғрими?

17-§. УЧБУРЧАКЛАР ТЕНГСИЗЛИГИ

Учбұрчаклар томонлари орасидаги асосий мұносабатлардан бири учбұрчаклар тенгсизлиги ҳисобланади.

Теорема. Учбұрчакнинг ҳар бир томони бошқа икки томони йиғиндисидан кичик бўлади.

Исботи. ABC учбұрчакни кўриб чиқамиз. AC томон AB ва BC томонлар йиғиндисидан кичик эканини исботлаймиз. AB томоннинг давомида BC томонга тенг бўлган BD кесма оламиз (17.1-расм).



BDC асоси BD бўлган тенгёнли учбұрчак, бундан $\angle 1 = \angle 2$. 2 бурчак ACD бурчакнинг бир қисмини ташкил этади. Демак, $\angle 2 < \angle ACD$. Шундай қилиб, ACD учбұрчакдаги C бурчак D бурчакдан катта. Учбұрчакларда катта бурчак қаршисида катта томонётади деган мулоҳазадан фойдаланамиз. $AD > AC$ тенгсизликка эга бўламиз. $AD > AC$ тенгсизлигини оламиз. Бироқ $AD = AB + BD = AB + BC$. Бундан учбұрчакнинг AC томони бошқа икки томони йиғиндисидан кичиклигини кўрсатувчи тенгсизликка эга бўламиз: $AB + BC > AC$ ёки $AC < AB + BC$



$AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$ эканини мустақил текширинг.

1-натижа. Учбұрчакнинг ҳар бир томони бошқа икки томонининг айрмасидан катта бўлади.

Исботи. ABC учбұрчакда AC томон BC томондан катта бўлсин. Исботланган теоремага кўра $AB + BC > AC$ тенгсизлик бажарилади. Ушбу тенгсизликнинг иккала томонидан BC ни айриб, учбұрчакнинг томони AC ва BC томонларининг айрмасидан катталигини билдирувчи $AB > AC - BC$ тенгсизликка эга бўламиз.



$AC > AB - BC$ ва $BC > AC - AB$ эканини мустақил текширинг.

2-натижа. Агар $AC + CB = AB$ тенглик бажарилса, у ҳолда C нуқта AB кесмада A ва B нуқталар орасида ётади.

Исботи. Ҳақиқатан агар C нуқта AB тўғри чизикка тегишли бўлмаса, у ҳолда $AC + CB > AB$ тенгсизлик бажарилади. Агар C нуқта AB тўғри чизикка тегишли бўлса ва AB кесмада ётмаса,

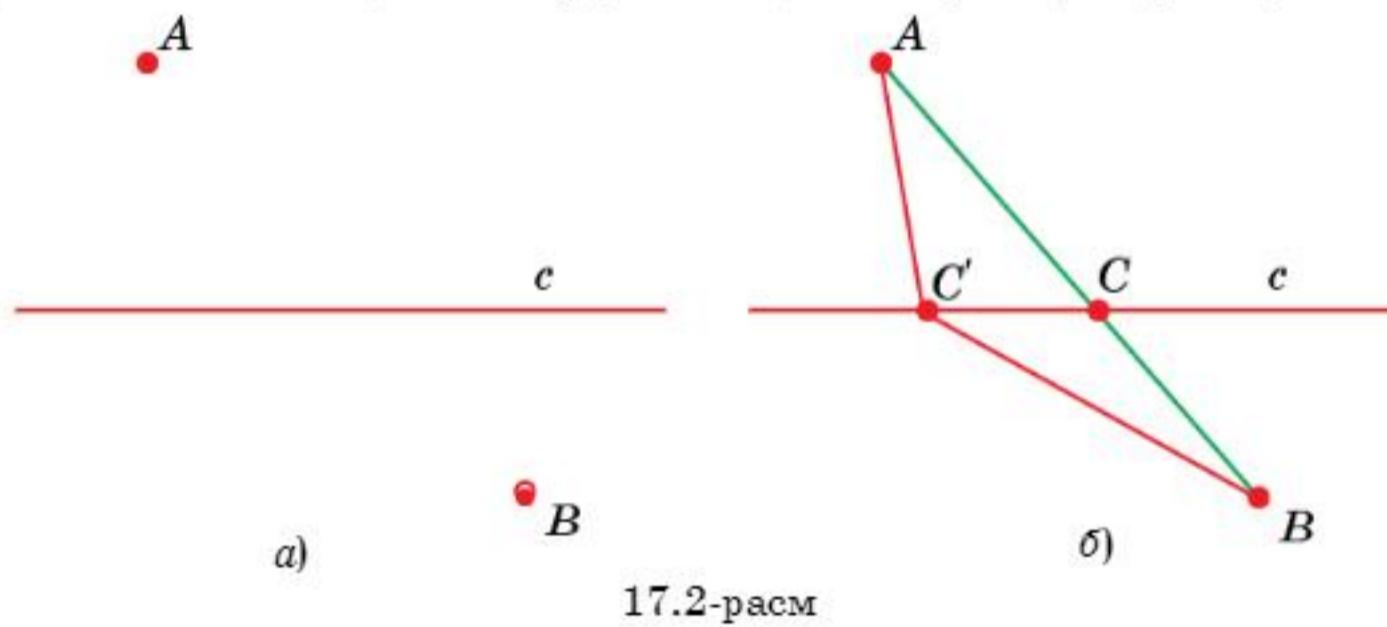
у ҳолда ушбу тенгсизлик яна бажарилади. Биттагина имконият қолди, у — C нүкта AB кесмада A ва B нүкталар орасыда ётади .

Учурчаклар тенгсизлигининг баъзи бир экстремал масалалари — кесмалар узунликларининг, бурчакларининг катталиклари ва ҳ.к. энг кичик ёки энг катта қийматларини топишга доир масалаларни ечишда фойдаланамиз.

Дастлабки экстремал масалалардан бири текисликда энг қисқа йўлни топиш ҳақидаги қуйидаги классик масала ҳисобланади. Унинг ечими Архимедга (милоддан аввалги 287—212 йиллар) маълум бўлган.

Масала. Текисликда c тўғри чизик ва иккита A ва B нүкталар берилган. $AC + CB$ масофаларнинг йифиндиси энг кичик бўладиган қилиб шу тўғри чизикда C нүктани топинг.

Ечиш. Аввал A ва B нүкталар c тўғри чизиқнинг турли томонларида жойлашган ҳолни кўриб чиқамиз (17.2, а-расм).

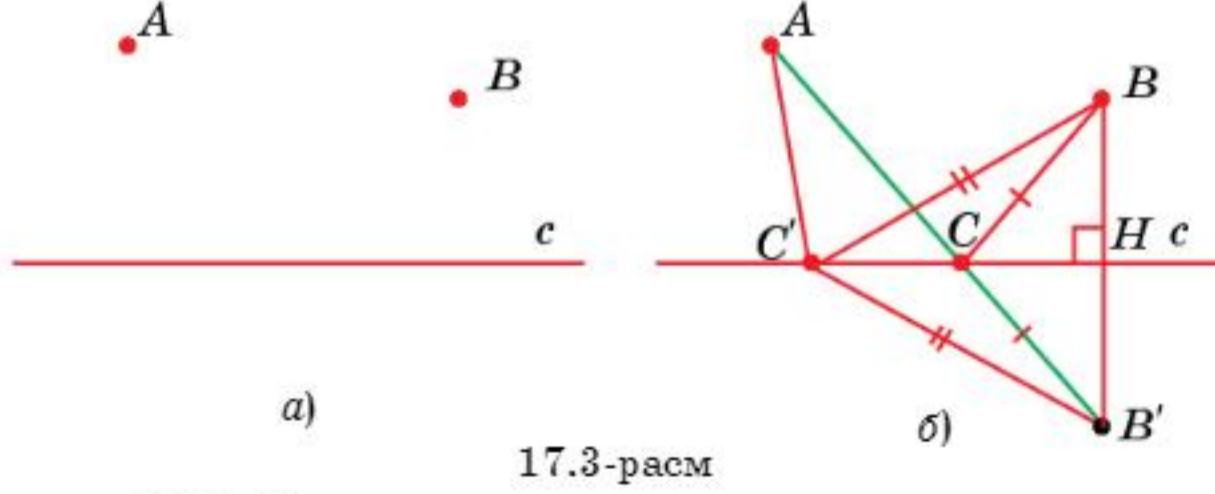


17.2-расм

Бу ҳолда изланаётган C нүкта AB кесманинг c тўғри чизик билан кесишиш нүктаси бўлишини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, учурчаклар тенгсизлигидан C' тўғри чизиқнинг $AC' + C'B > AC + CB$ нүктаси учун тенгсизлик бажарилади (17.2-б расм). Демак, $AC + CB$ йифинди энг кичик бўлади.

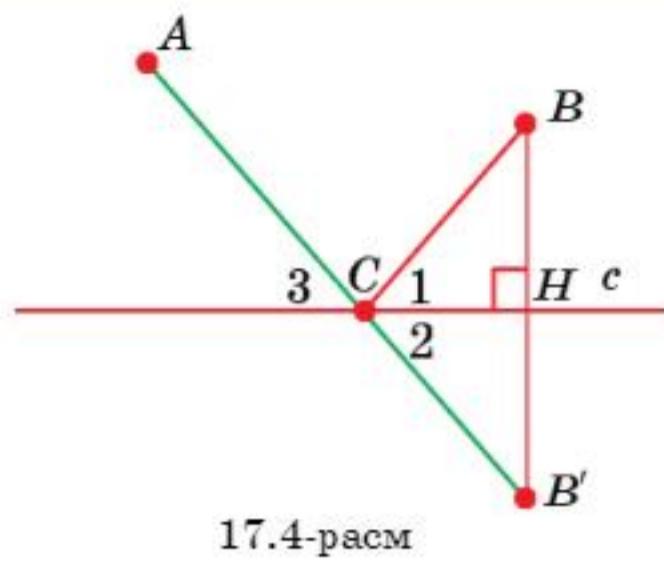
Энди A ва B нүкталар c тўғри чизиқнинг бир томонида ётсин дейлик (17.3-а расм).

Изланаётган C нүктани топиш фикри B нүктанинг B' тўғри чизиқнинг иккинчи томонида ётган c нүкта билан алмаштириб, уни дастлабки ҳолга келтириш мумкин.



17.3-расм

B нүктадан BH тўғри чизикка перпендикуляр туширамиз ва HB' га тенг BH кесма оламиз (17.3-б расм). C' нүкта c тўғри чизиқнинг



17.4-расм

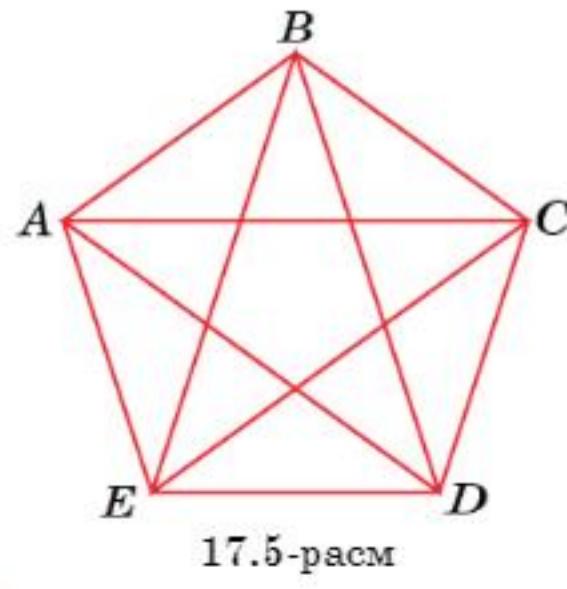
нүктаси бўлсин. BNC' ва $B'NC'$ тўғри бурчакли учбурчаклар тенг (икки катети бўйича), демак, $C'B = C'B'$ тенглик бажарилади. Бундан $AC' + C'B$ йиғинди энг кичик бўлса, у ҳолда фақат шу ҳолдагина $AC' + C'B'$ йиғинди энг кичик бўлади. Агар A , B' , C' нукталар битта тўғри чизиқда ётса, йиғинди энг кичик бўлиши маълум, яъни изланаетган C нукта AB' кесманинг тўғри чизиқ билан кесишиш нүктаси бўлади

Ҳосил қилинган C нуктанинг қуйидаги хоссаларини эслатиб ўтамиз: AC ва CB тўғри чизиқларининг C тўғри чизиқ билан ҳосил қилувчи бурчаклари тенг бўлади (17.4-расм). Дарҳақиқат $\angle 1 = \angle 2$ BNC ва $B'NC$ учбурчаклар тенглигидаги мос бурчаклар), $\angle 2 = \angle 3$ (вертикал бурчаклар). Демак, $\angle 1 = \angle 3$.

Ушбу бурчакларнинг тенглигидан ёруғликнинг қайтиш қонуни келиб чиқади. Аниқроқ айтадиган бўлсак, ёруғлик нури энг қисқа йўл билан тарқалади. Шу сабабли агар ёруғлик нури A нуктадан чиқиб, c тўғри чизиқ билан тўқнашиб, B нуктага келса, у ҳолда C нукта қайтиш нүктаси бўлади. Шундай қилиб, ёруғликнинг қайтиш қонуни тўғри: ёруғлик нурининг тушиш бурчаги қайтиш бурчагига тенг бўлади.

- 1. Учбурчаклар тенгсизлигининг маъноси нимада?
- 2. Учбурчаклар икки томонининг айрмаси ҳақида нима дейиш мумкин?
- 3. $AC + CB = AB$ тенглик бажариладиган C нукта ҳақида нима дейиш мумкин?

Машқлар



17.5-расм

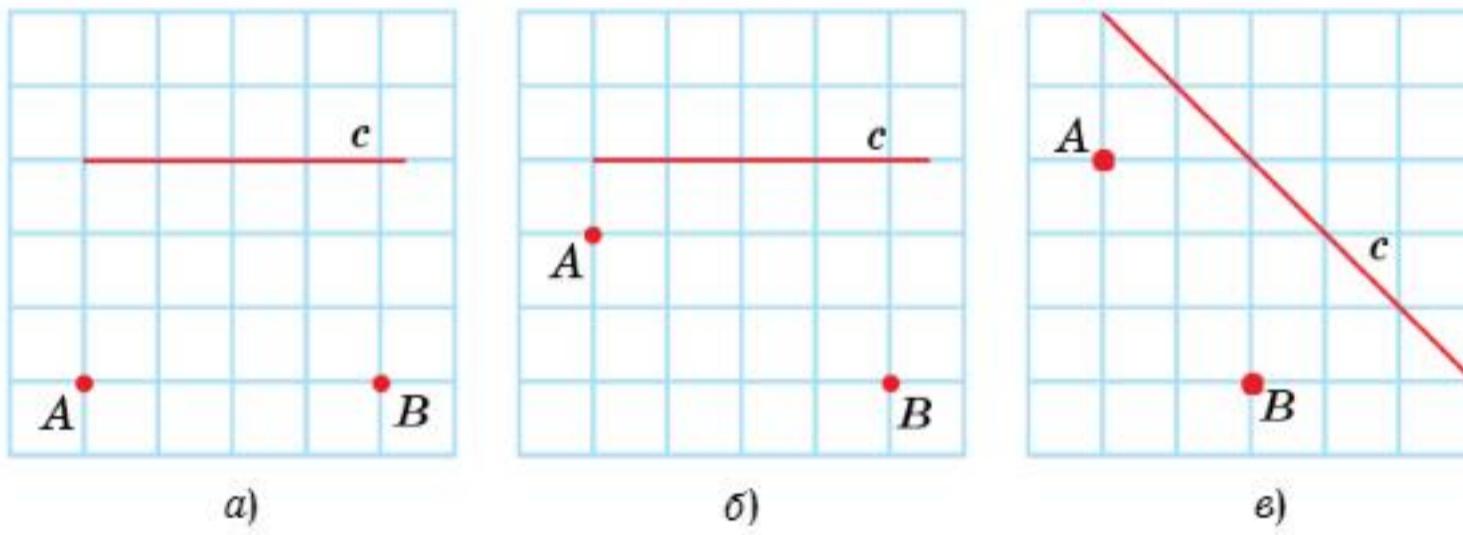
A

- 17.1. Томонлари қуйидагича бўлган учбурчак ясаш мумкинми: а) 13 см, 2 см, 8 см; б) 1 м, 0,5 м, 0,5 м?
- 17.2. Учбурчакнинг томонлари қуйидаги нисбатда бўлиши мумкинми: а) 1 : 2 : 3; б) 2 : 3 : 6; в) 1 : 1 : 2?
- 17.3. Тенгёнли учбурчакнинг бир томони 25 см, иккинчиси эса 10 см. Улардан қайси бири асоси бўлади?
- 17.4. Тенгёнли учбурчакнинг иккита томони берилган: а) 6 см ва 3 см; б) 8 см ва 2 см. Унинг учинчи томонини топинг.

- 17.5.** Саёхатчилар гурухи A пунктдан B пунктга етиши керак (17.5-расм). A пунктдан B пунктгача бир нечта йўллар бор. Исталган йўлдаги ҳаракат бир хил бўлса, уларнинг қайси бири билан тезроқ етиш мумкин? Жавобингизни тушунтиринг.

Б

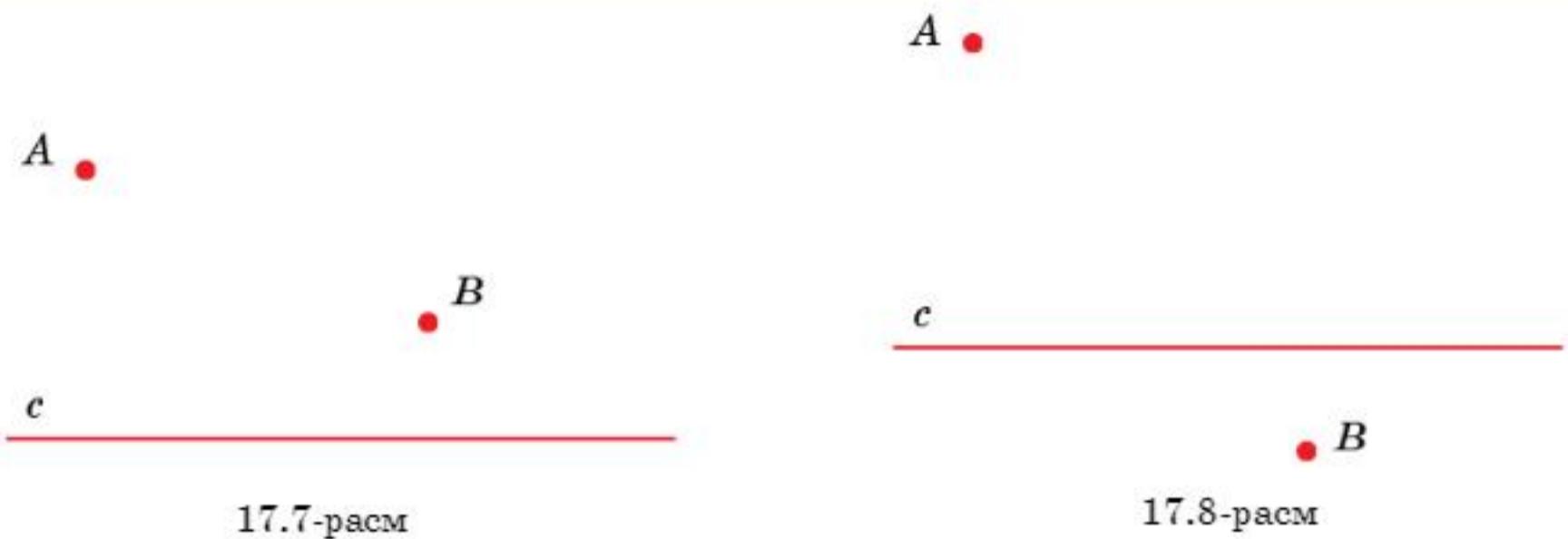
- 17.6.** Тенгёнли учурчакнинг бир томони 12 см, иккинчи томони 5 см. Шу учурчакнинг периметрини топинг.
- 17.7.** Тенгёнли учурчакнинг периметри 20 см. Унинг бир томони иккинчисидан икки марта узун. Шу учурчакнинг томонларини топинг.
- 17.8.** с тўғри чизикда $AC+BC$ масофаларнинг йиғиндиси энг кичик бўладиган қилиб C нуктани кўрсатинг (17.6-расм).



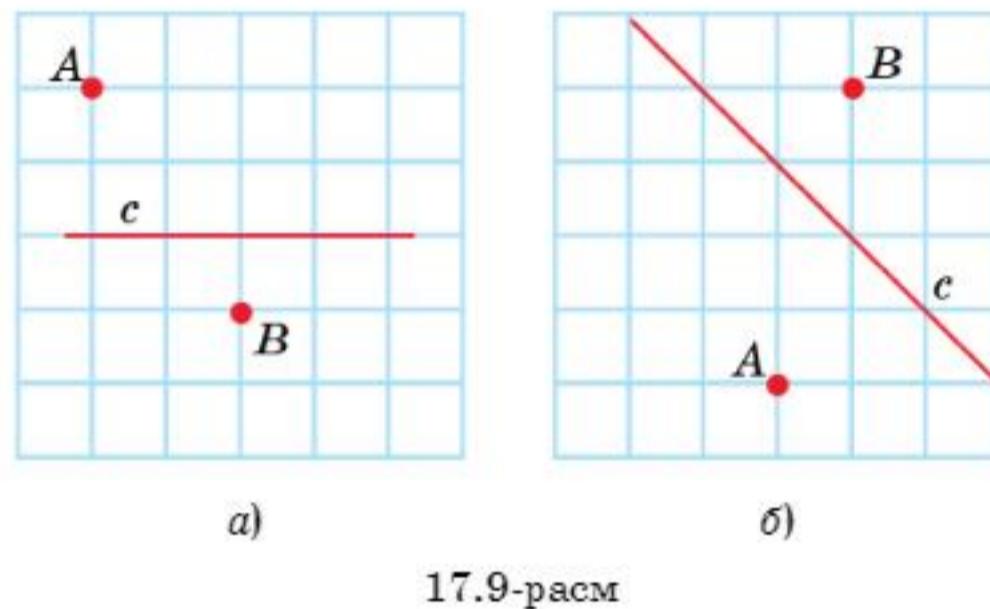
17.6-расм

С

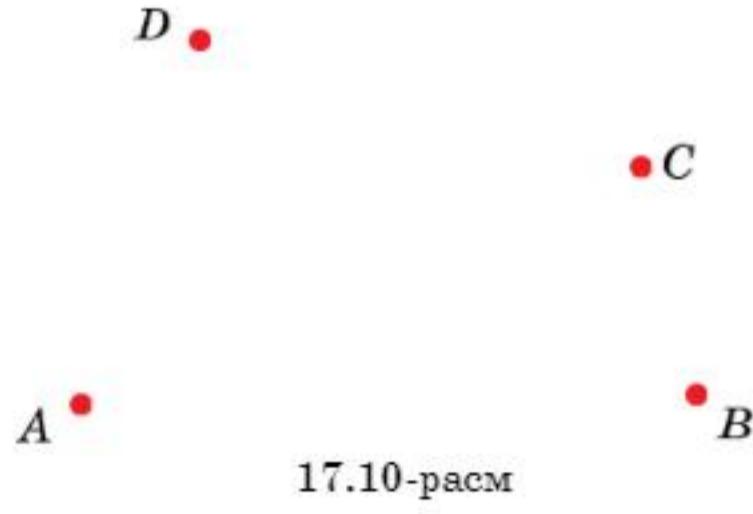
- 17.9.** Учурчакнинг ҳар бир томони унинг периметрининг ярмидан кичик бўлишини исботланг.
- 17.10.** Учурчакнинг медианаси унинг ярим периметридан кичик бўлишини исботланг.
- 17.11.** Учурчакнинг исталган ички нуктасидан унинг учларигача бўлган масофаларнинг йиғиндиси унинг ярим периметридан катта бўлишини исботланг.
- 17.12.** Учурчакнинг медианаси уни чегараловчи томонларнинг ярим йиғиндисидан кичик бўлишини исботланг.
- 17.13.** с тўғри чизик ва унинг турли томонларида жойлашган A ва B нукталар берилган (17.7-расм). с тўғри чизикда $AC - CB$ масофаларнинг айирмаси энг катта бўладиган C нуктани белгиланг.
- 17.14.** с тўғри чизик ва унинг турли томонларида ётган A ва B нукталар берилган (17.8-расм). с тўғри чизикда $AC - CB$ масофаларнинг айирмаси энг катта бўладиган C нуктани белгиланг.



17.15. с түрі чизикда $AC = CB$ масофаларнинг айирмаси әнд катта бўладиган қилиб С нуқтани белгиланг (17.9-расм).



17.16. Тўртта аҳоли пункти A, B, C, D нуқталарда жойлашган (17.10-расм). Новвойхонадан ҳамма тўрт аҳоли пунктигача бўлган масофаларнинг йифиндиси әнд кичик бўладиган қилиб новвойхонани қаерга қуриш керак?



Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

17.17. Циркуль ёрдамида маркази O ва радиуси 2 см бўлган айланана ясанг. Ушбу айлананинг а) ичида; б) сиртида жойлашган нуқталар қандай тенгсизликни қаноатлантиради?

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!



- 10.** Учурчак бурчакларининг нисбати 1:2:3 каби. Шу учурчакнинг турини аниқланг:
- A) Тенг ёнли. B) Ўткир бурчакли.
C) Түғри бурчакли. D) Ўтмас бурчакли.
- 11.** Бир бурчаги бошқа икки бурчагининг йиғиндисидан катта бўлган учурчакнинг турини аниқланг:
- A) Тенг ёнли. B) Ўткир бурчакли.
C) Түғри бурчакли. D) Ўтмас бурчакли.
- 12.** Түғри бурчакли учурчакнинг иккита ўткир бурчаги нисбати 1:2. Унинг катта ўткир бурчагини топинг:
- A) 40° . B) 50° . C) 60° . D) 80° .
- 13.** ABC учурчакда A бурчак 50° , $AC = BC$. C бурчакни топинг:
- A) 40° . B) 50° . C) 60° . D) 80° .
- 14.** ABC учурчакда C бурчак 100° , $AC = BC$. A бурчакни топинг:
- A) 40° . B) 50° . C) 60° . D) 80° .
- 15.** Тенгёнли учурчакнинг бир бурчаги 90° . Унинг бошқа иккита бурчагини топинг:
- A) 30° . B) 45° . C) 60° . D) 90° .
- 16.** Тенгёнли учурчакнинг асосидаги бурчаги 70° . Унинг ён томонига туширилган баландлиги билан иккинчи ён томони орасидаги бурчакни топинг:
- A) 20° . B) 50° . C) 70° . D) 110° .
- 17.** Мунтазам учурчакнинг иккита биссектрисаси орасидаги бурчакни топинг:
- A) 30° . B) 45° . C) 60° . D) 90° .
- 18.** Учурчакнинг иккита бурчаги 40° ва 60° . Ушбу бурчакларнинг учларидан ўтказилган баландликлари орасидаги ўткир бурчакни топинг.
- A) 20° . B) 40° . C) 80° . D) 100° .
- 19.** Түғри бурчакли учурчакнинг битта ўткир бурчаги 40° . Учурчакнинг түғри бурчаги учидан ўтказилган баландлиги ва биссектрисаси орасидаги бурчакни топинг:
- A) 5° . B) 10° . C) 15° . D) 20° .
- 20.** Тенгёнли учурчакнинг иккита томони 10 см ва 5 см. Унинг учинчи томонини топинг:
- A) 5 см. B) 10 см. C) 15 см. D) 20 см.

АЙЛАНА. ГЕОМЕТРИК ЯСАШЛАР

18-§. АЙЛАНА ВА ДОИРА

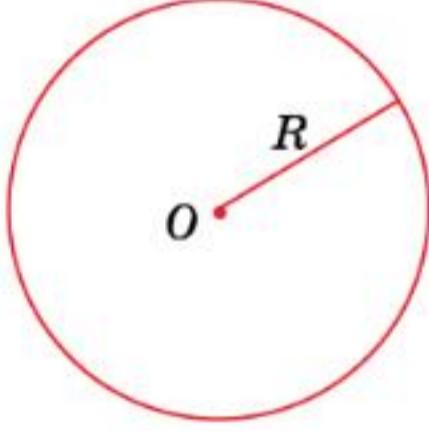
18.1-расмда айлана күрсатылған. Айланани ясаш учун циркулдан фойдаланилади. Циркуль ёрдамида исталған айлана ясанг. Қандай фигура айлана деб аталишини мустақил аниқлаб күринг.

Берилған нүктадан муайян узоқликда жойлашған текисликкінг барча нүкталаридан ташкил топған геометрик фигура *айлана* деб аталади. Берилған нүкта айлананинг маркази, берилған масофа — *айлананинг радиуси* деб аталади. Айлананинг нүктасини унинг маркази билан туташтирувчи ихтиёрий кесма ҳам радиус деб аталади.

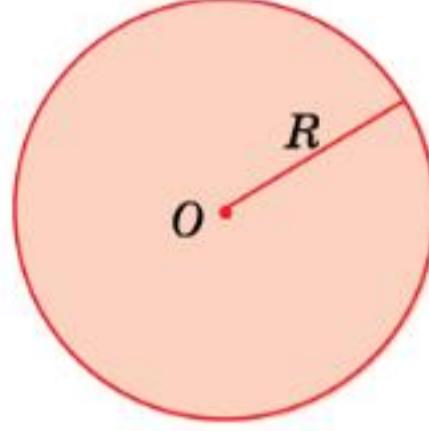
Шундай қилиб, маркази O нүктада ва радиуси R бўлған айлана шу O нүктадан ораларидағи масофа R га teng бўлған текисликкінг барча нүкталаридан ташкил топған геометрик фигурани ҳосил қиласи.

18.2-расмда доира тасвириланган. Қандай фигура доира деб аталишини мустақил аниқлаб күринг.

Берилған нүктадан берилған масофадан катта бўлмаган текисликкінг барча нүкталаридан ташкил топған фигура *доира* дейилади (18.2-расм). Берилған нүкта *доиранинг маркази*, берилған масофа эса *доиранининг радиуси* деб аталади.



18.1-расм

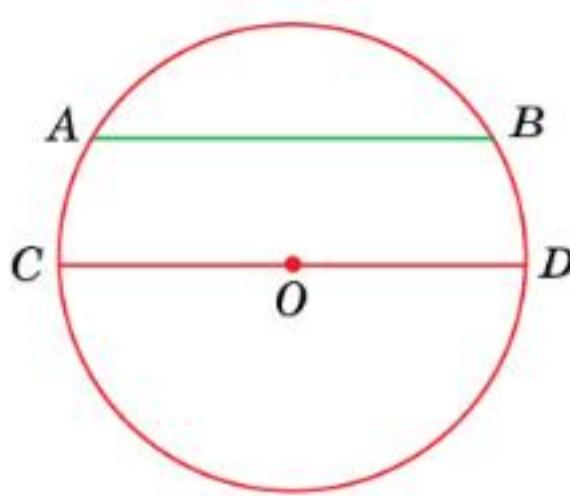


18.2-расм

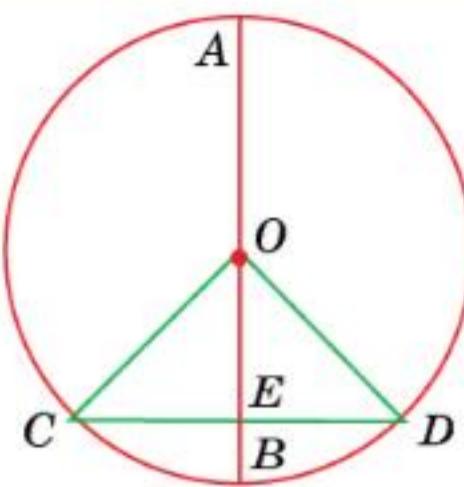
Шундай қилиб, маркази O нүктада ва радиуси R бўлған доира ана шу O нүктадан ораларидағи масофа R дан катта бўлмаган текисликкінинг барча нүкталаридан ташкил топған геометрик фигурани ҳосил қиласи.

Доирини айлана билан чегараланган фигура сифатида күрсатиш мумкин.

Айлананининг исталған иккита нүктасини туташтирувчи кесма шу айлананинг *ватари* деб аталади. Айлана маркази орқали ўтувчи ватар шу айлананинг *диаметри* деб аталади (18.3-расм).



18.3-расм



18.4-расм

Доиранинг ватари ва диаметри деб шу доирани чегараловчи айлананинг мос радиуси ва диаметрига айтилади.

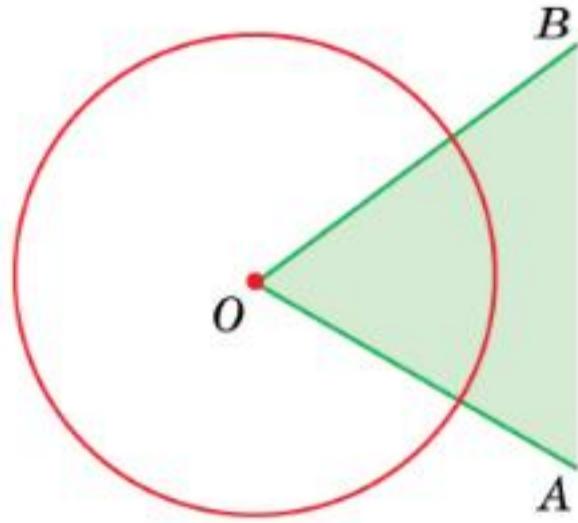
Теорема. Айлананинг ватарига перпендикуляр бўлган диаметр шу ватарни тенг иккига бўлади.

Исботи. Маркази O нуқтада бўлган айлана берилсин ва AB диаметр CD ватарга перпендикуляр бўлсин. Агар CD ватар O марказ орқали ўтса, у ҳолда у диаметр бўлиб, O нуқтада тенг иккига бўлинади. Энди CD ватар O марказ орқали ўтмайдиган бўлсин. Унинг AB диаметр билан кесишиш нуқтасини E деб белгилайлик (18.4-расм).

OEC ва OED тўғри бурчакли учбурачаклар тенг (гипотенузаси билан катети бўйича). Демак, $EC = ED$

Айлананинг марказ бурчаги деб учи ана шу доира марказида ётувчи бурчакка айтилади (18.5-расм). Марказий бурчак ичида жойлашган айлананинг қисми айлана ёйи деб аталади.

Марказ бурчаги ичида жойлашган доиранинг қисми доиравий сектор деб аталади.



18.5-расм



Доиравий секторни мустақил тасвирланг.

Айлана ёйининг градус ўлчови деб марказ бурчагининг мос градус ўлчовига айтилади. Агар айлана иккита ёйининг градус ўлчовлари тенг бўлса, улар тенг ёйлар деб аталади.



Доиравий секторнинг градус ўлчови нима эканини мустақил аникланг.



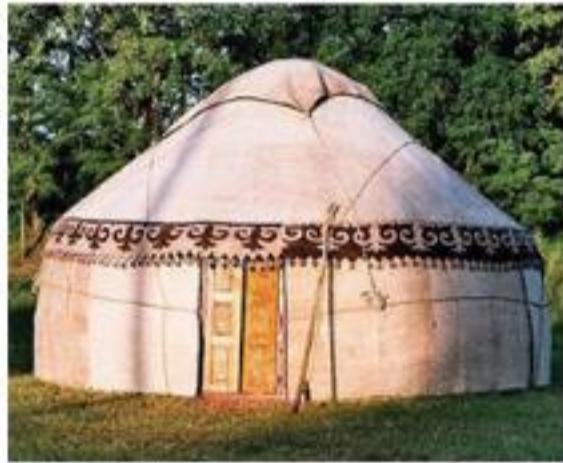
- Қандай фигура айлана деб аталади? а) Айлананинг маркази; в) айлананинг радиуси деганимиз нима?
- Қандай фигура доира деб аталади? а) доиранинг маркази; в) доиранинг радиуси деганимиз нима?

3. Айлананинг: а) ватари; в) диаметри деганимиз нима?
4. Айлананинг радиуси ва диаметри үзаро қандай бөлгөнгөн?
5. Айлананинг энг катта ватари нима?
6. Ватарга перпендикуляр диаметр қандай нисбатда бўлади?
7. Айлананинг марказ бурчаги деб қандай бурчакка айтилади?
8. Айлананинг ёйи нима?
9. Доиранинг градус үлчови деганимиз нима?
10. Айлананинг қандай ёйлари тенг деб аталади?

Машқлар

A

- 18.1.** Қуидаги: а) маркази O нүктада ва радиуси R бўлган доира-да; в) маркази O нүкта ва радиуси R бўлган доиранинг сирти-да ётган А нүкта қандай тенгсизликни қаноатлантиради?
- 18.2.** Берилган нүкта орқали ўтувчи, берилган радиусли айлан-ларнинг марказлари қандай фигурами ташкил этади?
- 18.3.** Айлана маркази орқали нечта диаметр ўтказиш мумкин?
- 18.4.** Айлана радиусидан 55 мм катта бўлган айлананинг диаме-трини топинг.
- 18.5.** Тарвуз иккита тенг бўлакка бўлинди. Кесилган бўлакдаги айлананинг радиуси 15 см. Тарвузнинг диаметри қандай бўлган?
- 18.6.** Кигиз уй — кўчманчиларнинг қадимдан келаётган турар жойи (18.6-а расм). Ўлчовларига кўра кигиз уйлар ҳар турли бўлади. Агар: а) диаметрлари 1 м; 1,2 м; 1,4 м; 2 м бўлса, чанғироғининг (18.6-б расм); в) диаметрлари 5 м; 6 м; 7 м; 10 м бўлган кигиз уй керегесининг (18.6-в расм) радиусини топинг.



a)



б)

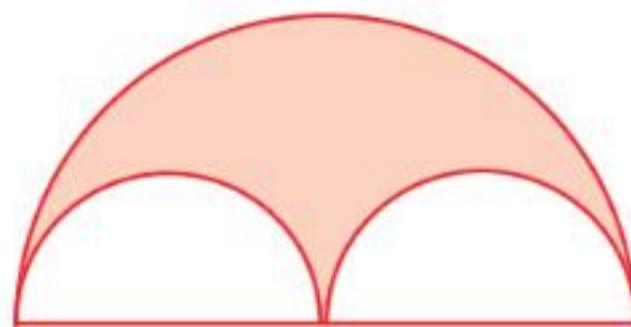


в)

18.6-расм

- 18.7.** Кичкина ярим айланалар ҳар қайси бирининг диаметри (18.7-а расм) катта ярим айлананинг радиусига тенг. Агар катта ярим айланаларнинг диаметри d бўлса, кичкина яри-майланаларнинг радиуслари нимага тенг бўлади? Бундай

фигурани Архимед арбелос деб атаган. “арβιλος” юончы сүз бўлиб этикдўзниң пичоғи (18.7-б расм) деган маънени билдиради. Бу масалада кичик доираларниң диаметлари тенг бўлган арбелос (тенгёнли арбелос) назарда тутилган.



a)



б)

18.7-расм

- 18.8.** Агар кигиз уй асосининг радиуслари: а) 2,5 м; в) 3 м; в) 3,5 м; г) 5 м бўлса, у ҳолда унинг диаметрини топинг (18.8-расм).

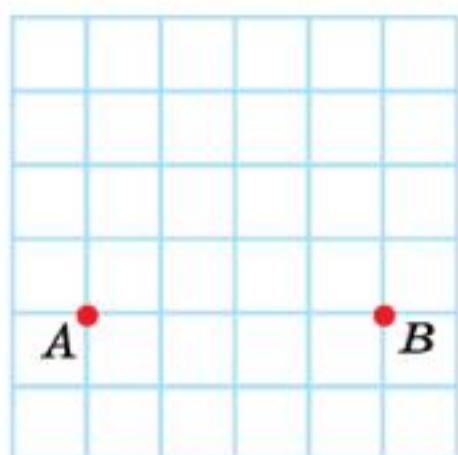


18.8-расм

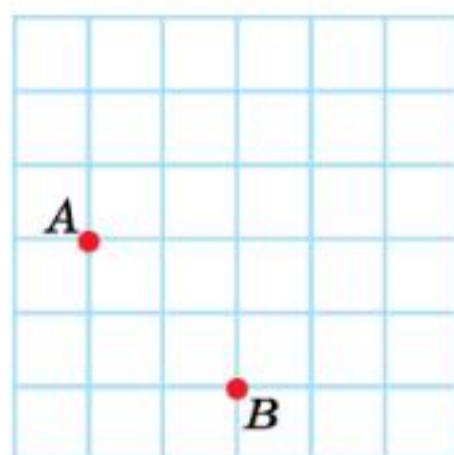
- 18.9.** Градус катталиклари: а) 90° ; в) 180° бўлган доиравий сектор ясанг.

B

- 18.10.** A ва B нуқталар орасидаги масофа 2 см. Шу нуқталар орқали ўтувчи айлананинг эҳтимолий энг кичик радиусини топинг.
- 18.11.** Катак варакда берилган иккита нуқта орқали ўтувчи ва катакниң кесишган нуқталарида жойлашган айлана марказларини тасвиirlанг (18.9-расм).



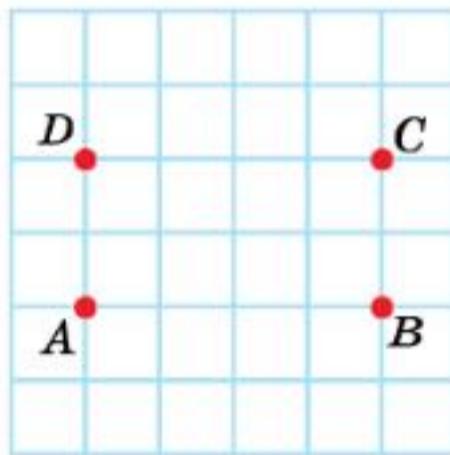
a)



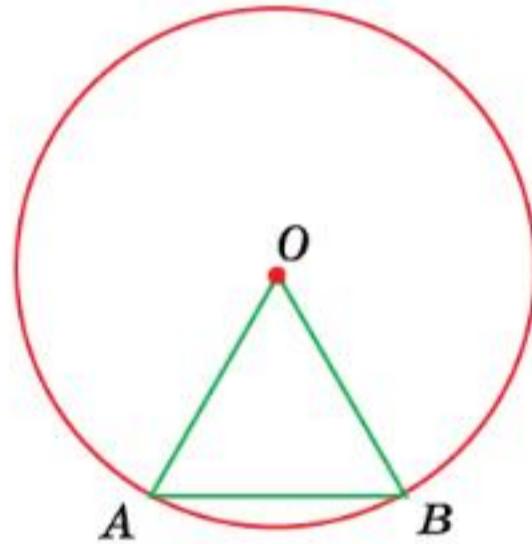
б)

18.9-расм

- 18.12.** Берилган иккита нүкта орқали нечта айланы үтказиш мүмкін?
- 18.13.** Катақ варакда берилган A, B, C, D нүкталар орқали үтувчи айлананынг O марказини тасвиirlанг (18.10-расм).
- 18.14.** Айлананынг AB ватари OA радиусига тенг (18.11-расм). $\angle AOB$ бурчак нимага тенг?

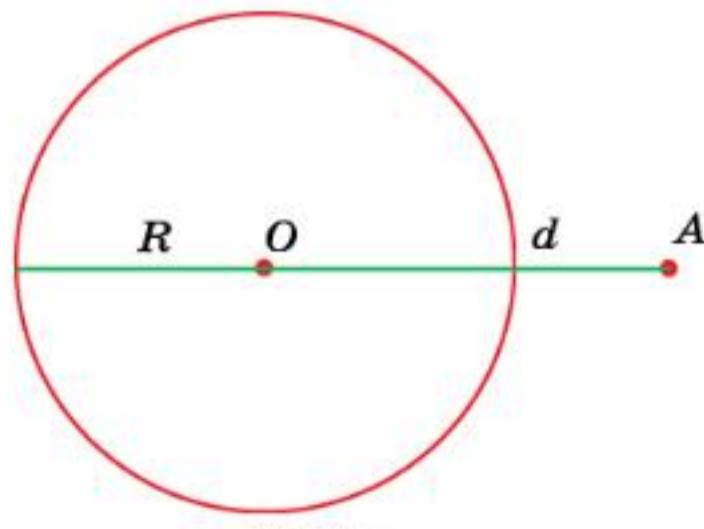


18.10-расм



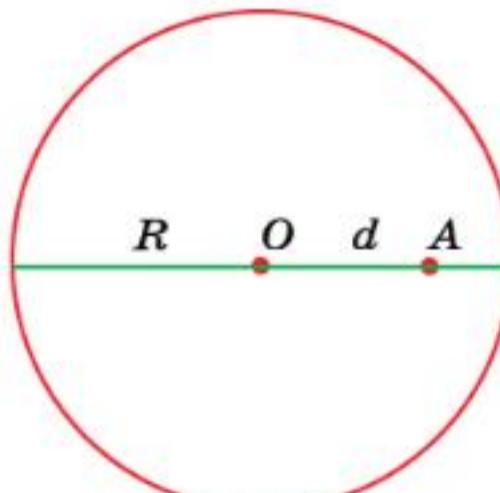
18.11-расм

- 18.15.** A нүкта радиуси R бўлган айланы сиртида маркази O нүктадан d масофада жойлашган (18.12-расм). A нүктадан берилган айлананынг нүкталаригача бўлган энг кичик ва энг катта масофалар нимага тенг?
- 18.16.** Айланы сиртида ётган берилган нүктадан айланы нүктасигача бўлган энг катта ва энг кичик масофалар мос равишида 50 см ва 20 см. Шу айлананынг радиусини топинг.



18.12-расм

- 18.17.** А нүкта радиуси R бўлган айлананинг ичида унинг маркази O нүктадан d масофада жойлашган (18.13-расм). А нүктадан берилган айланагача бўлган энг кичик ва энг катта масофани топинг.

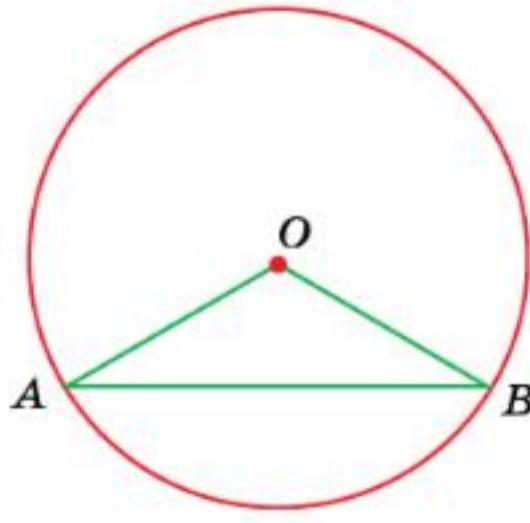


18.13-расм

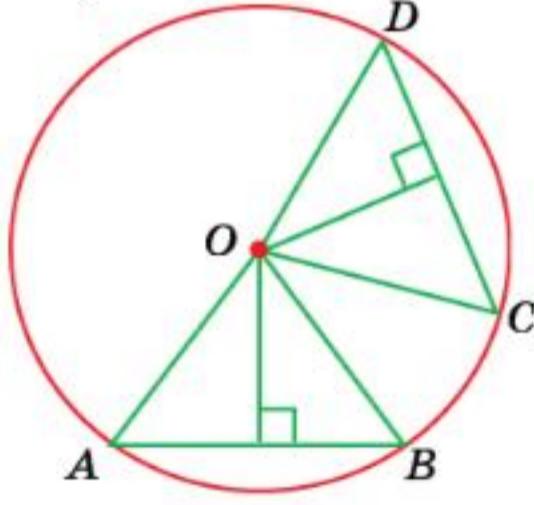
- 18.18.** Айлана ичида жойлашган берилган нүктадан айлананинг нүкласигача бўлган энг катта ва энг кичик масофалар мос равища 20 см ва 4 см. Шу айлананинг радиусини топинг.

C

- 18.19.** Ватарнинг ўртаси орқали ўтказилган диаметр шу ватарга перпендикуляр бўлишини исботланг.
- 18.20.** 18.14-расмдан фойдаланиб, диаметр айлананинг энг катта ватари эканини исботланг.
- 18.21.** Айлананинг teng ватарлари унинг марказидан бир хил узоқликда жойлашишини исботланг (18.15-расм).
- 18.22.** Айлана марказидан бир хил узоқликда жойлашган ватарлар teng бўлишини исботланг (18.15-расм).



18.14-расм



18.15-расм

Ахборот тайёрланг

- 18.23.** Айлана — қадимдан шаклланган геометрик фигуralардан бири. Коперник, Галилей, Кеплерларнинг (XVII аср) таълимотлари ҳақида айтинг.

Янги мавзууни үзлаштиришга тайёрланинг

18.24. Түғри чизик ва айлананинг нечта умумий нұқталари бўлиши мумкин? Эҳтимолий ҳолларни тасвирланг.

19-§. ТҮҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН АЙЛАНАНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ

Түғри чизик билан айлананинг ўзаро жойлашиш ҳолларини кўриб чиқамиз.

Түғри чизик билан айлананинг умумий нұқтаси бўлмаслиги мумкин (19.1-а расм), биттагина умумий нұқтаси (19.1-б расм) ёки иккита умумий нұқтаси (19.1-в расм) бўлиши мумкин.

Агар түғри чизикнинг айланана билан биттагина умумий нұқтаси бўлса, у ҳолда *түғри чизик айланага уринади* дейилади ва түғри чизик айланага *уринма* деб аталади (19.1-б расм).

Шундай қилиб, *айланага уринма* — айланана билан битта умумий нұқтага эга бўлган түғри чизик. Умумий нұқта уриниш нұқтаси деб аталади.

Агар түғри чизик билан айлананинг иккита умумий нұқтаси бўлса, у ҳолда түғри чизик билан айланана *кесишади* дейилади (19.1-б расм).

Түғри чизик билан айлананинг ўзаро жойлашиши айлананинг маркази билан берилган түғри чизик орасидаги масофага боғлиқ.

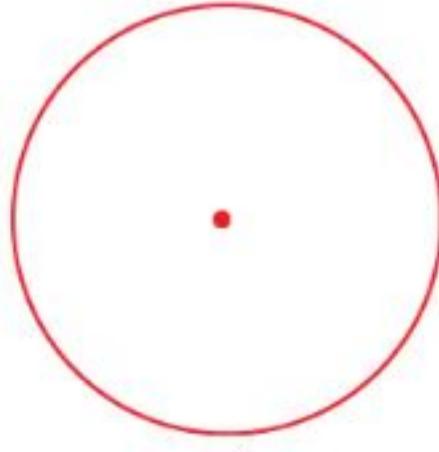
Түғри чизик чизинг ва шу түғри чизикдан 4 см узоқликда жойлашган O нұқта белгиланг. Циркуль ёрдамида маркази O нұқтада ва радиуси 3 см бўлган айланана чизинг.



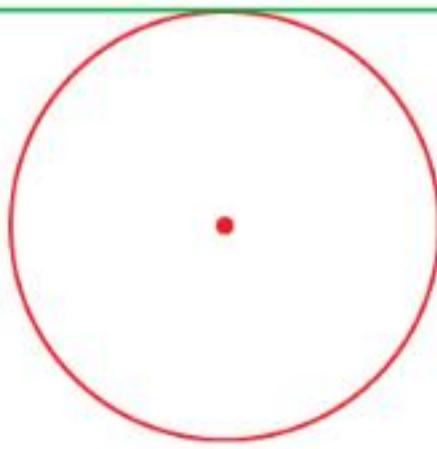
Шу түғри чизик билан айланана бир-бирига нисбатан қандай жойлашган?

Ушбу саволга жавобни қўйидаги теорема беради.

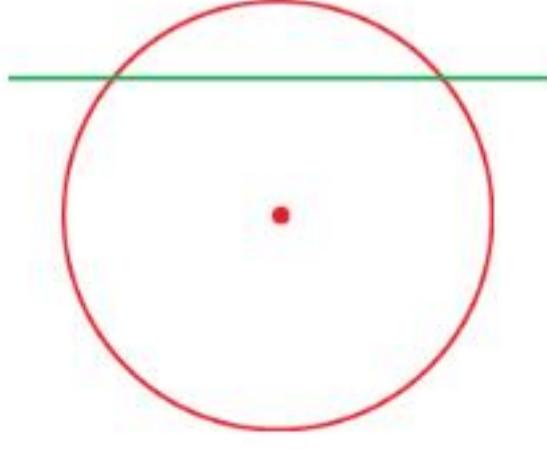
Теорема. Агар айланана марказидан түғри чизикқача бўлган масофа айлананинг радиусидан катта бўлса, у ҳолда бу түғри чизик билан айлананинг умумий нұқтаси бўлмайди.



a)



б)



в)

19.1-расм

Исботи. Айлананинг O марказдан a түғри чизикқача бўлган масофа айлананинг R радиусидан катта бўлсин (19.2-расм).

Шу түғри чизикқа O нуктадан OA перпендикуляр туширамиз. У ҳолда $OA > R$. a түғри чизикдан исталган бошқа B нуктадан ясалган OB оғма OA перпендикулярдан катта бўлади, демак, R радиусдан ҳам катта. Шундай қилиб, a түғри чизикнинг исталган нуктасидан O марказгача бўлган масофа R дан катта. Демак, a түғри чизик билан айлананинг умумий нукталари бўлмайди.

Түғри чизик ясанг ва шу түғри чизикдан 4 см узоқликда жойлашган O нукта белгиланг. Циркуль ёрдамида маркази O нукта ва радиуси 4 см бўлган айланана ясанг.

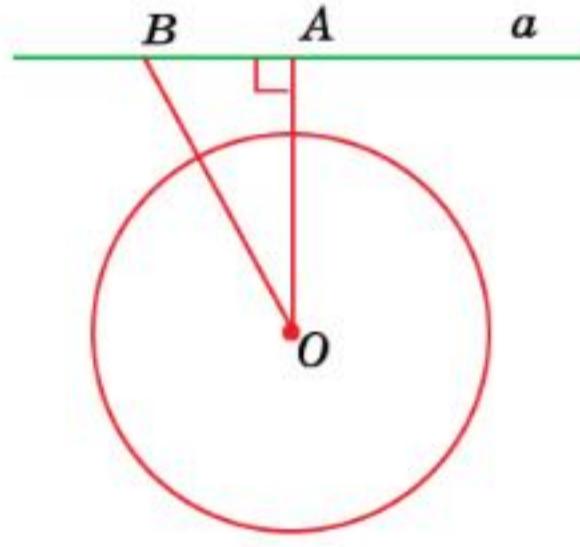


Ушбу түғри чизик билан айланана бир-бирларига нисбатан қандай жойлашган?

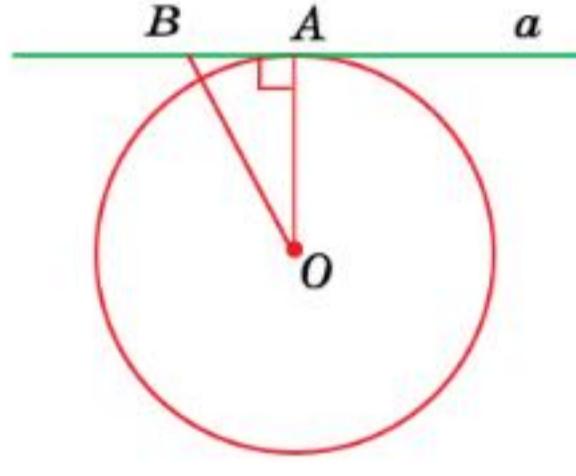
Мазкур саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. Агар айланана марказидан түғри чизикқача бўлган масофа айлананинг радиусига teng бўлса, у ҳолда бу түғри чизик айланага уринма бўлади.

Исботи. Айлананинг O марказидан a түғри чизикқача бўлган масофа айлананинг R радиусига teng бўлсин (19.3-расм).



19.2-расм



19.3-расм

Айлананинг O марказидан шу түғри чизикқа OA перпендикуляр туширамиз. У ҳолда $OA = R$. a түғри чизик исталган бошқа B нуктадан ясалган OB оғма OA перпендикулярдан катта бўлади, демак, R радиусдан ҳам катта. Шундай қилиб, a түғри чизикнинг A нуктасидан бошқа исталган нуктасидан O марказгача бўлган масофа R радиусдан катта. Демак, a түғри чизик билан айлананинг битта умумий A нуктаси бўлади, яъни түғри чизик айланага уринади

Энди айланана марказидан түғри чизикқача бўлган масофа айлананинг радиусидан кичик бўлган ҳолни кўриб чиқиш қолди.

Түғри чизик ясанг ва шу түғри чизикдан 4 см узоқликда жойлашган O нуктани белгиланг. Циркуль ёрдамида маркази O нукта ва радиуси 5 см бўлган айланана чизинг.



Ушбу түғри чизик билан айлана бир-бирларига нисбатан қандай жойлашган?

Агар айлана марказидан түғри чизикқача бўлган масофа айлана радиусидан кичик бўлса, у ҳолда түғри чизик билан айлананинг кесишишини исботсиз қабул қиласиз.

Түғри чизик билан айлананинг ўзаро жойлашиши кўриб чиқилган ҳоллардан уринманинг қуидаги хоссаси келиб чиқади.

Теорема. Айланага уринма шу айлананинг уриниши нуктасига ўтказилган радиусга перпендикуляр бўлади.

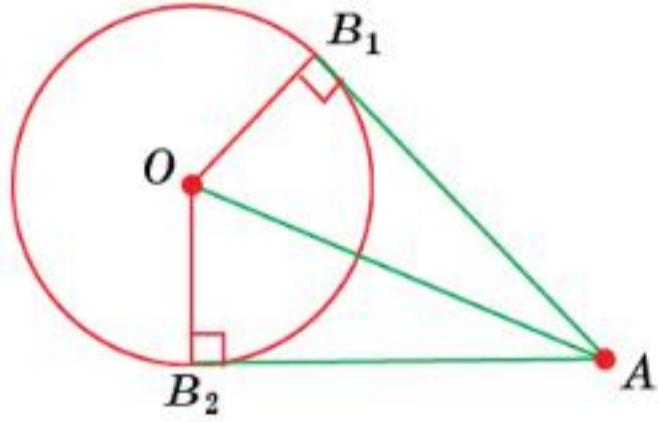
Исботи. Ҳақиқатан агар түғри чизик айланага уринса, у ҳолда айлана марказидан түғри чизикқача бўлган масофа унинг радиусидан катта ёки OA кичик бўлиши мумкин эмас, демак, у радиусга тенг бўлади. Шу сабабли уринмага ўтказилган OA перпендикуляр айлананинг радиуси бўлади, демак, айланага уринма шу радиусга перпендикуляр .



Айлана ва шу айланага уринма түғри чизик ясанг.

Теорема. Айлана сиртида ётган нуктадан шу айланага ўтказилган уринмаларнинг кесмалари тенг бўлади.

Исботи. AB_1 ва AB_2 — маркази O нукта бўлган айланага ўтказилган уринмаларнинг кесмалари бўлсин (19.4-расм). Түғри бурчакли учбурчаклар катети ва гипотенузаси бўйича тенг AOB_1 ва AOB_2 ($OB_1 = OB_2$, умумий гипотенуза AO). Демак, AB_1 билан AB_2 кесмалар тенг бўлади .



19.4-расм



1. Түғри чизик билан айлана бир-бирларига нисбатан қандай жойлашади?
2. Қандай түғри чизик: а) айланага уринма; в) айланани кесувчи деб аталади?
3. Қандай ҳолда түғри чизик билан айлананинг умумий нуктаси бўлмайди?
4. Қандай ҳолда түғри чизик айланага уринади?
5. Қандай ҳолда түғри чизик айлана билан кесишади?

Машқлар

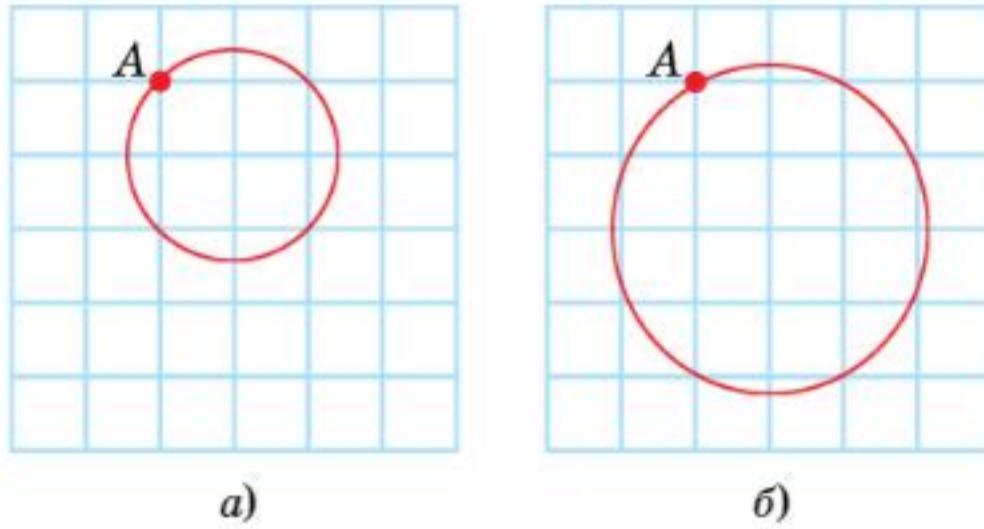
A

- 19.1.** Түғри чизик айланани кесиб ўтади. Берилган айлана билан чегараланган, түғри чизик билан айлананинг кесишишидан (умумий қисми) ҳосил бўлган фигура қандай аталади?

- 19.2.** Қуидаги: а) айлана ичида; в) айлана сиртида; в) айланада ётган нұқта орқали берилған айланага нечта уринма үтказиш мүмкін?
- 19.3.** Берилған түғри чизикқа берилған нұқтада уринувчи нечта айлана ясаш мүмкін?
- 19.4.** Берилған түғри чизикқа берилған нұқтада уринувчи берилған радиусли нечта айлана ясаш мүмкін?
- 19.4.** Айланага уринма билан уриниш нұқтасидан үтказилған радиус қандай бурчак ҳосил қиласы?

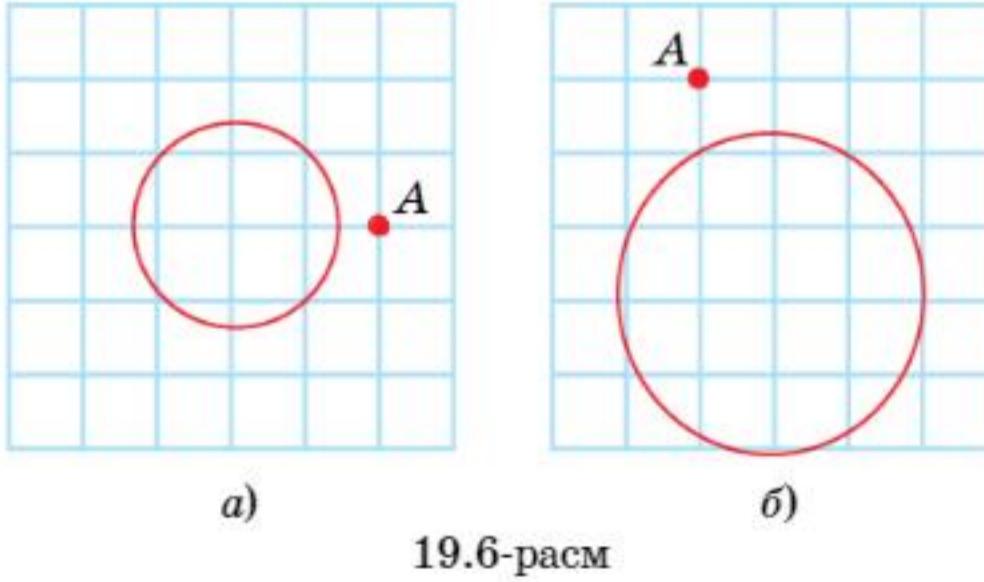
B

- 19.6.** Агар айлана радиуси 3 см ва айлана марказидан түғри чизикқача бўлған масофа: а) 2 см; в) 3 см; в) 4 см бўлса, түғри чизик билан айланага ўзаро қандай жойлашади?
- 19.7.** Катак варакда A нұқта орқали берилған айланага уринма үтказинг (19.5-расм).



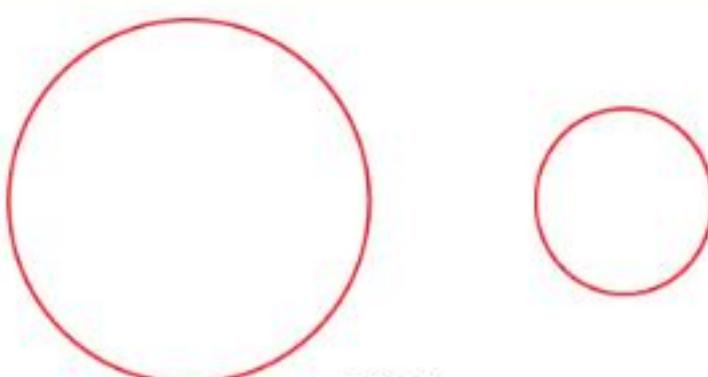
19.5-расм

- 19.8.** Катак варакда A нұқта орқали берилған айланага уринма үтказинг (19.6-расм).



19.6-расм

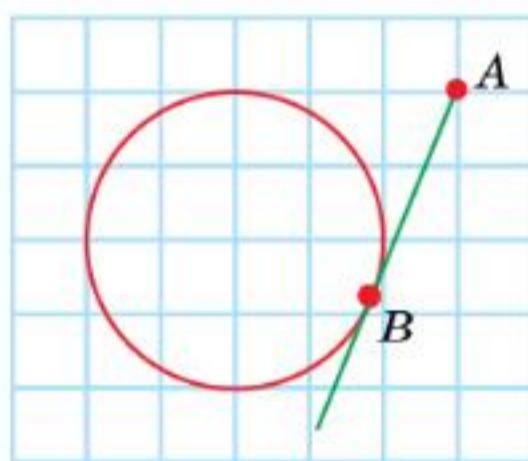
- 19.9.** Икки түғри чизик айланага диаметрал қарама-қаши нұқталарда уринади. Ушбу түғри чизикларнинг ўзаро жойлашиши қандай?
- 19.10.** 19.7-расмда тасвирланған иккита айланага уринувчи нечта түғри чизик үтказиш мүмкін?



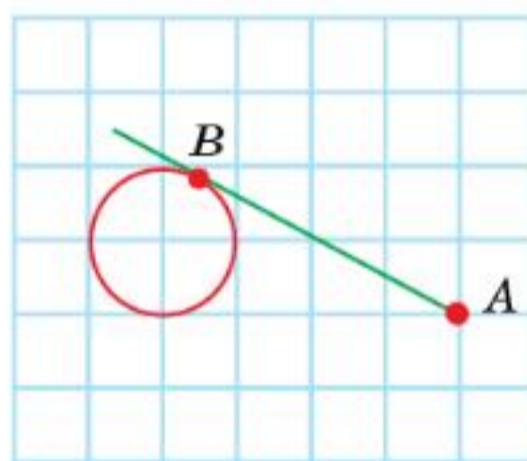
19.7-расм

С

- 19.11.** Иккита айланага умумий бүлгән ички уринмаларнинг AB кесмалари тенг бўлишини исботланг. Каток томони 1 га тенг (19.8-расм).



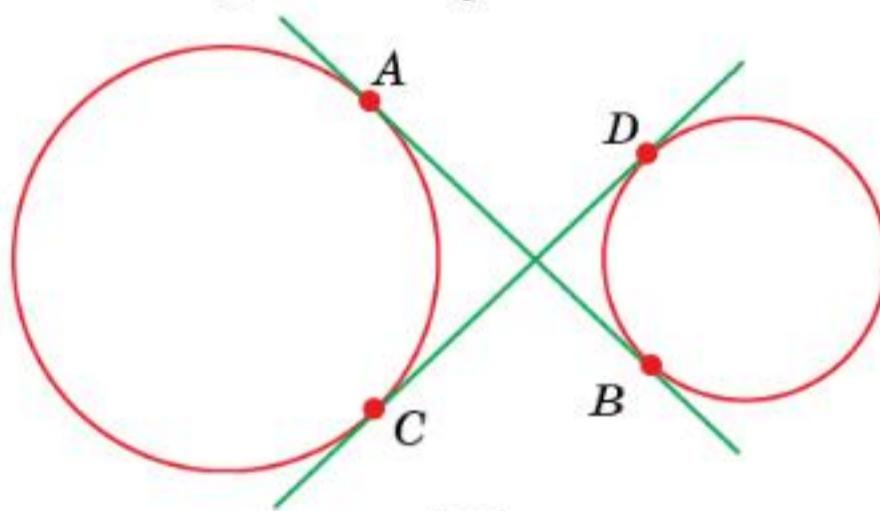
a)



б)

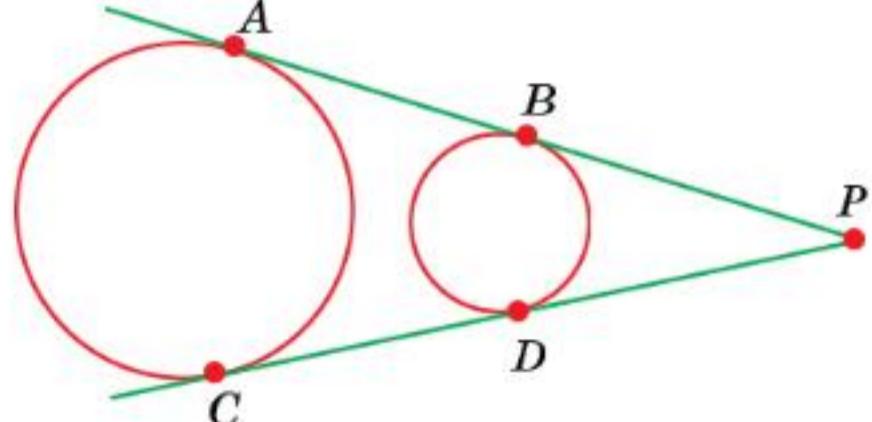
19.8-расм

- 19.12.** AB ва CD кесмалари тенг бўлишини исботланг (19.9-расм).



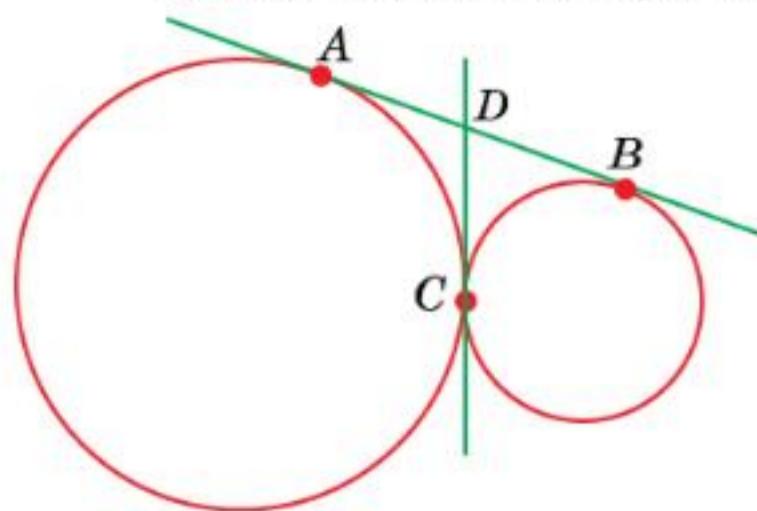
19.9-расм

- 19.13.** Иккита айланага умумий бўлгән ташқи уринмаларнинг AB ва CD кесмалари тенг бўлишини исботланг (19.10-расм).

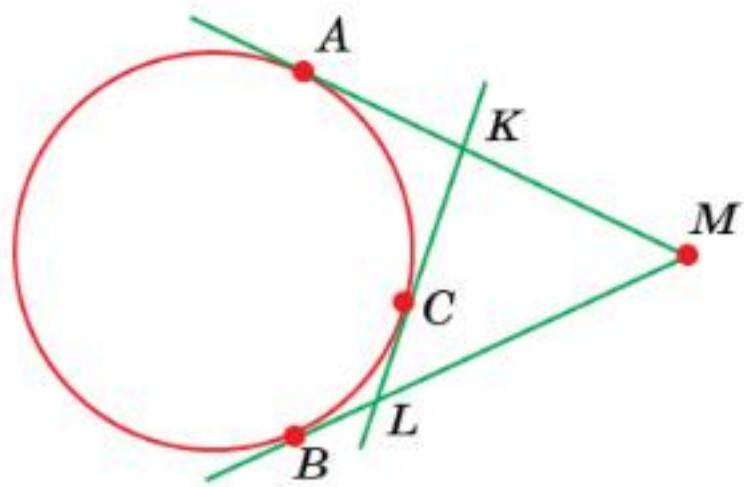


19.10-расм

- 19.14.** 19.11-расмда DA , DB , DC — уринмалар AB нүкта D кесмани қандай нисбатда бўлади?



19.11-расм



19.12-расм

- 19.15.** Айланада сиртида ётган M нүкта орқали MA ва MB уринмалар ўтказилган. Айлананинг C нүктаси орқали MA ва MB кесмаларни мос равишда K ва L нүқталарда кесиб ўтувчи уринма ўтказилган (19.12-расм). KLM учбурчакнинг периметри C нүктанининг жойлашишига боғлиқ эмаслигини исботланг.

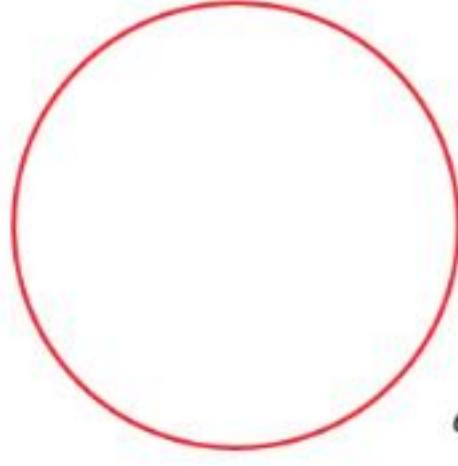
Янги мавзууни ўзлаштиришга тайёрланинг

- 19.16.** Иккита айлананинг нечта умумий нүктаси бўлиши мумкин? Эҳтимолий ҳолларни тасвиrlанг.

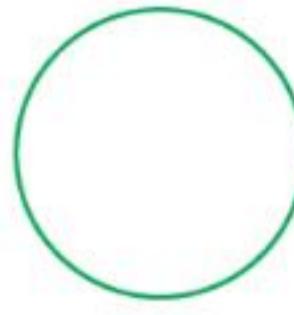
20-§. ИККИ АЙЛАНАНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ

Икки айлананинг ўзаро жойлашиш ҳолларини кўриб чиқамиз.

- 1) Икки айлананинг умумий нүқталари бўлмаслиги мумкин. Бу ҳолда улар бир-бирларидан алоҳида ётиши (20.1-а расм) ёки бири иккинчисининг ичидаги ётиши мумкин (20.1-б расм).



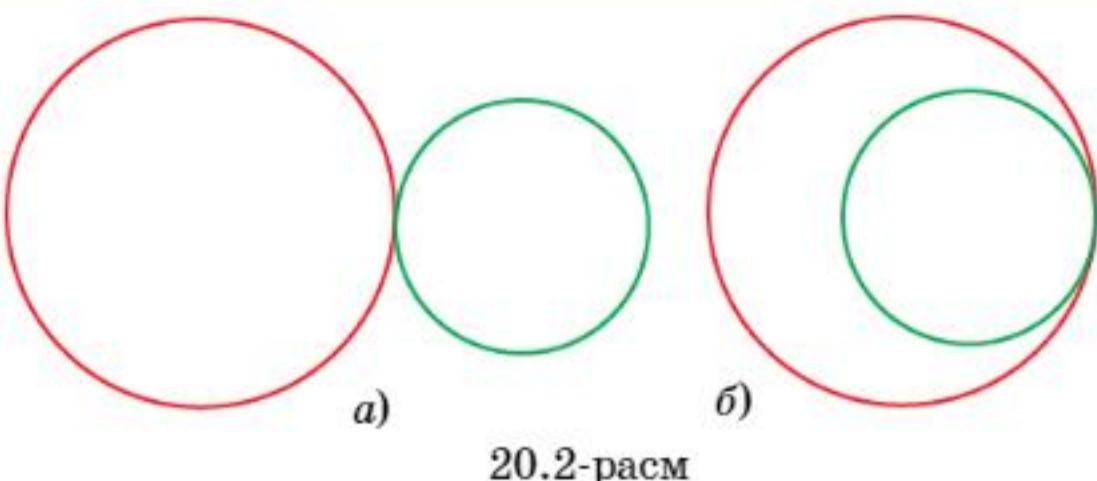
а)



б)

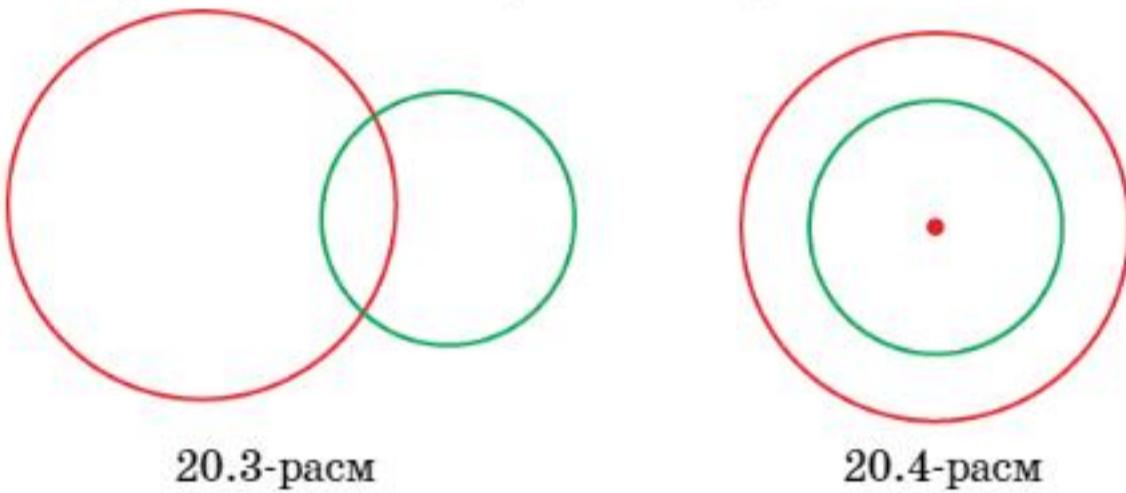
20.1-расм

- 2) Икки айлананинг битта умумий нүктаси бўлиши мумкин. Бу ҳолда айланалар *уринади* дейилади. Айланалар ташқи (20.2-а расм) ёки ички уриниши мумкин (20.2-б расм).



3) Икки айлананинг иккита умумий нүктаси бўлиши мумкин (20.3-расм). Бу ҳолда айланалар *кесишиади* дейилади.

Марказлари умумий бўлган айланалар *марказдош* (концентрик) айланалар деб аталади (20.4-расм).



Икки айлананинг ўзаро жойлашиши уларнинг радиуслари билан марказлари орасидаги масофага боғлиқ бўлади.

Бир-бирларидан 6 см узоқликда жойлашган O_1 ва O_2 нүқталарни белгиланг. Циркуль ёрдамида маркази O_1 нүқта ва радиуси 3 см бўлган айлана ясанг. Маркази O_2 нүқта ва радиуси 2 см бўлган айлана ясанг.



Ушбу айланалар бир-бирларига нисбатан қандай жойлашган?

Бир-бирларидан 1 см узоқликда жойлашган O_1 ва O_2 нүқталарни белгиланг. Циркуль ёрдамида маркази O_1 нүқта ва радиуси 4 см бўлган айлана ясанг. Маркази O_2 нүқта ва радиуси 2 см бўлган айлана ясанг.

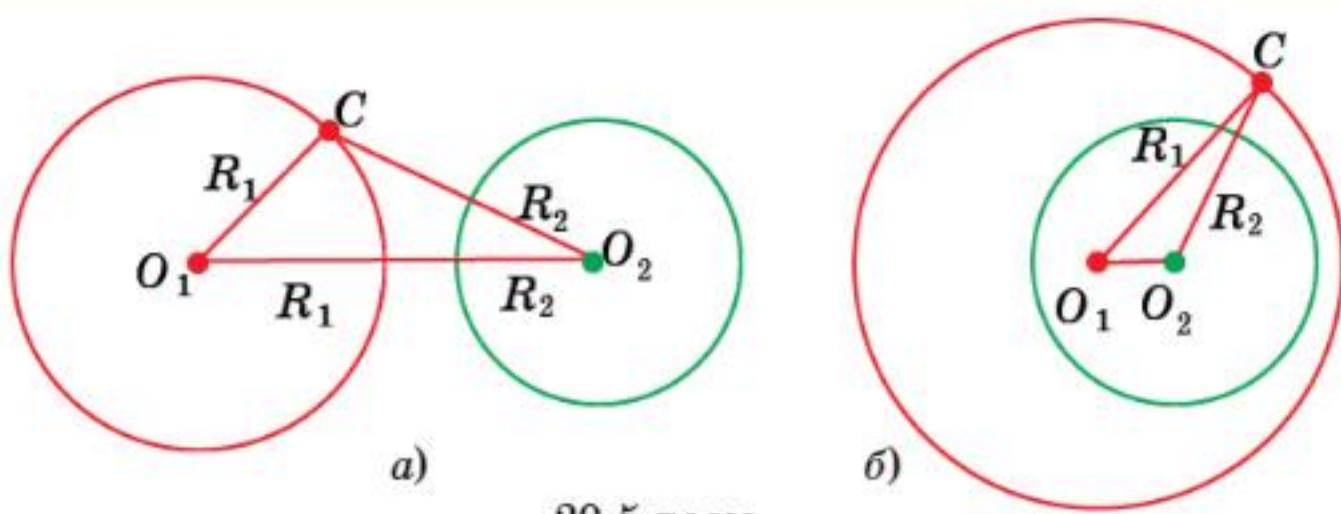


Ушбу айланалар бир-бирларига нисбатан қандай жойлашган?

Ушбу саволларга жавобни қуидаги теорема беради.

Теорема. Агар икки айлана марказлари орасидаги масофа улар радиуслари йигиндисидан катта ёки айрмасидан кичик бўлса, у ҳолда бу айланаларнинг умумий нүқталари бўлмайди.

Исботи. Марказлари O_1 , O_2 нүқталарда ва радиуслари мос равиша R_1 , R_2 , $O_1O_2 > R_1 + R_2$ бўлган иккита айлана берилсин (20.5-а расм).



20.5-расм

Биринчи айланадаги C нүктаны күриб чиқамиз, $O_1C = R_1$. Бунда $O_2C \geq O_1O_2 - O_1C > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$, демек, C нүкта иккинчи айланага тегишли әмас. У ҳолда бу айланалар умумий нүктага әга әмас ва уларнинг бири иккинчисидан алоҳида ётибди.

Энди $O_1O_2 < R_1 - R_2$ ($R_1 > R_2$) бўлсин дейлик (20.5-б расм). Биринчи айланадаги C нүктаны күриб чиқамиз, $O_1C = R_1$. Бунда $O_2C \geq O_1C - O_1O_2 = R_1 - O_1O_2 > R_2$, демек, C нүкта иккинчи айланага тегишли әмас. У ҳолда бу айланалар умумий нүктага әга әмас ва уларнинг бири иккинчисининг ичидаги ётибди □.

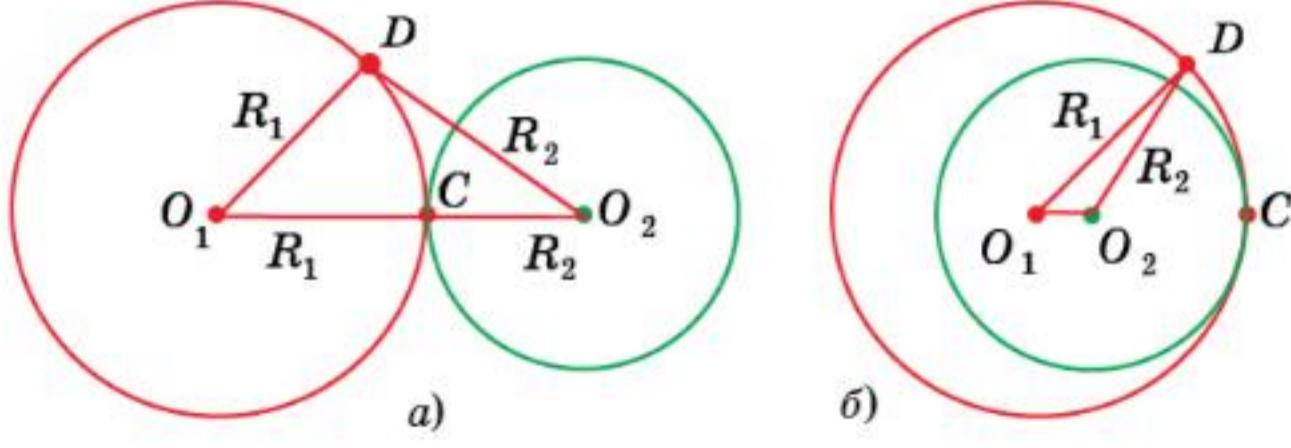


Бир-бири билан уринувчи айланаларнинг радиуслари билан уларнинг марказлари орасидаги масофа ораларидаги боғланишни мустақил ўрнатиб кўринг (20.2-расм).

Бунга жавоб сифатида қўйидаги теорема ўринли бўлади.

Теорема. Агар иккита айдана марказлари орасидаги масофа уларнинг радиуслари йигиндиси ёки айримасига тенг бўлса, у ҳолда бу айланалар уринади.

Исботи. Марказлари O_1 , O_2 нүкталар ва радиуслари мос равища R_1 , R_2 , $O_1O_2 = R_1 + R_2$ бўлган иккита айдана берилсин (20.6-а расм).



20.6-расм

O_1O_2 кесмадаги C нүктаны күриб чиқамиз, $O_1C = R_1$. У ҳолда $O_2C = R_2$. Демак, C нүкта берилган айланаларнинг умумий нүктаси бўлади. Агар D нүкта биринчи айланадаги C нүктадан бошқа нүкта бўлса, у ҳолда учбурчаклар тенгсизлигидан $O_2D > O_1O_2 - O_1D = R_1 + R_2 - R_1 = R_2$ келиб чиқади. У ҳолда D нүкта иккинчи ай-

ланага тегишли эмас. Демак, берилган айланалар битта умумий нүктага эга, яъни ташқи уринади.

Энди $O_1O_2 = R_1 - R_2$ ($R_1 > R_2$) деб олайлик (20.6-б расм). O_1O_2 нурдаги C нүктаны күриб чиқамиз, $O_1C = R_1$. У ҳолда $O_2C = R_2$. Демак, C нүкта берилган айланаларнинг умумий нүктаси бўлади. Агар D нүкта биринчи айланадаги C нүктадан бошқа нүкта бўлса, у ҳолда учбурчаклар тенгсизлигидан $O_2D > O_1D - O_1O_2 = R_1 - O_1O_2 = R_2$ келиб чиқади. У ҳолда D нүкта иккинчи айланага тегишли эмас. Демак, берилган айланалар битта умумий нүктага эга бўлади, яъни айланалар ички уринади ■.



Ташқи ва ички уринган айланаларни тасвирланг.

Икки айлананинг жойлашишидаги охирги ҳолни кўриб чиқамиз.

Бир-бирларидан 6 см узоқликда жойлашган O_1 ва O_2 нүкталарни белгиланг. Циркуль ёрдамида маркази O_1 нүкта ва радиуси 4 см бўлган айлана ясанг. Маркази O_2 нүкта ва радиуси 3 см бўлган айлана ясанг.



Ушбу айланалар бир-бирларига нисбатан қандай жойлашган?

Бир-бирларидан 2 см узоқликда жойлашган O_1 ва O_2 нүкталарни белгиланг. Циркуль ёрдамида маркази O_1 нүкта ва радиуси 3 см бўлган айлана ясанг. Маркази O_2 нүкта ва радиуси 2 см бўлган айлана ясанг.

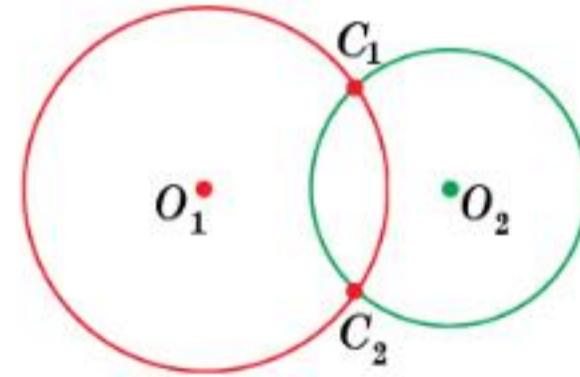


Ушбу айланалар бир-бирларига нисбатан қандай жойлашган?

Ушбу саволларга жавобни қўйидаги теорема беради.

Теорема. Агар иккита айлана марказлари орасидаги масофа уларнинг радиуслари йигиндисидан кичик ва айрмасидан катта бўлса, у ҳолда бу айланалар кесишади (20.7-расм).

Теоремани исботсиз қабул қиласиз.



20.7-расм



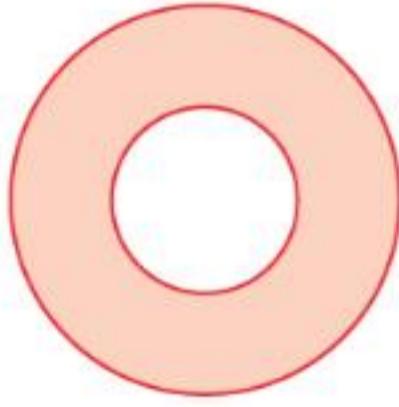
- Иккита айлана бир-бирига нисбатан қандай жойлашиши мумкин?
- Иккита айлананинг нечта умумий нүктаси бўлиши мумкин?
- Қандай иккита айлана: а) уринувчи; в) кесишувчи деб аталади?
- Қандай айланалар марказдош деб аталади?
- Қандай ҳолларда битта айлана: а) иккинчисидан ташқарида; в) иккинчисининг ичидаги ётади?
- Қандай ҳолларда иккита айлана: а) ташқи; в) ички уринади?
- Қандай ҳолларда иккита айлана кесишади?

Машқлар**A**

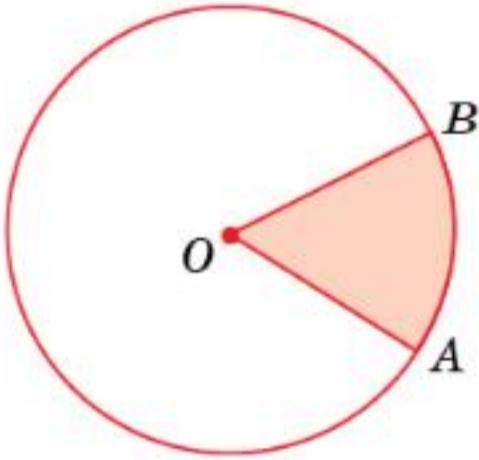
- 20.1.** Қуидаги: а) умумий нүктеге эга эмес; в) марказдош; в) ташқы уринувчи; г) ички уринувчи; д) кесишувчи иккита айланы чизинг.
- 20.2.** Радиуси 3 см га teng бўлган айланана ва унинг марказидан 5 см узоқликда жойлашган A нұқта берилган. Маркази A нұқта бўлган ва берилган айланана билан: а) ташқи; в) ички уринувчи иккинчи айлананинг радиусини топинг.
- 20.3.** Икки айланана марказлари орасидаги масофа 5 см га teng. Агар уларнинг радиуслари: а) 2 см ва 3 см; в) 2 см ва 2 см бўлса, улар бир-бирларига нисбатан қандай жойлашган?
- 20.4.** Икки айланана марказлари орасидаги масофа 2 см. Ага уларнинг радиуслари: а) 3 см ва 5 см; в) 2 см ва 5 см бўлса, улар бир-бирларига нисбатан қандай жойлашган?
- 20.5.** Радиуслари 4 см ва 6 см бўлган айланалар: а) ташқи; в) ички уринувчи бўлса, уларнинг марказлари орасидаги масофани топинг.

B

- 20.6.** 20.8-расмда ҳалқа деб аталувчи фигура тасвирланган. Ушбу фигуранинг таърифини келтириб чиқаринг.
- 20.7.** 20.9-расмда сектор деб аталувчи фигура тасвирланган. Ушбу фигуранинг таърифини келтириб чиқаринг.



20.8-расм

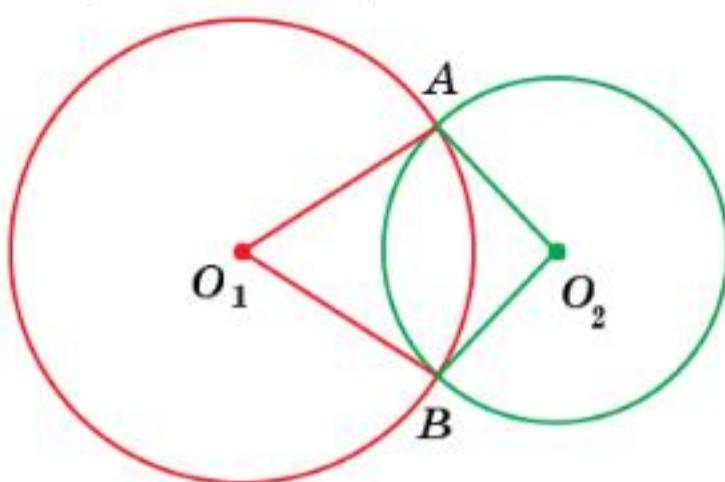


20.9-расм

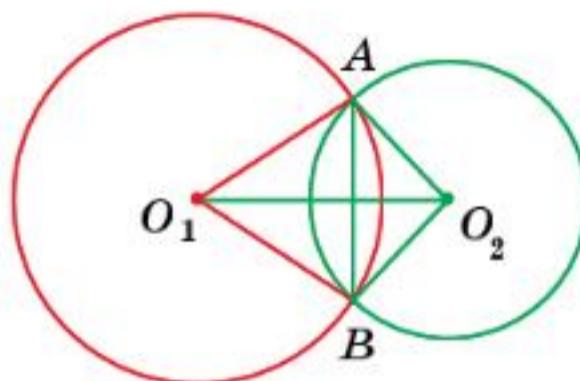
- 20.8.** Икки айланана марказлари орасидаги масофа d ва у R_1 ва R_2 радиусларнинг йифиндисидан катта. Ушбу айланаларда ётган нүкталарнинг энг кичик ва энг катта масофаларини топинг.
- 20.9.** Икки айланана марказлари орасидаги масофа d ва у R_1 ва R_2 радиусларнинг айирмасидан кичик $R_1 - R_2$ ($R_1 > R_2$). Ушбу айланаларда ётган нүкталарнинг энг кичик ва энг катта масофаларини топинг.
- 20.10.** Агар бир марвариддинг радиуси 5 мм бўлса, узунлиги 50 см га teng бўлган мунчоқ тайёрлаш учун неча марварид керак бўлади?

С

- 20.11.** Марказлари O_1 , O_2 нүкталар бўлган иккита айлана A ва B нүкталарда кесишиди. $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$ бўлишини исботланг (20.10-расм).



20.10-расм



20.11-расм

- 20.12.** Марказлари O_1 , O_2 нүкталар бўлган иккита айлана A ва B нүкталарда кесишиди (20.11-расм). AB тўғри чизик O_1O_2 тўғри чизикка перпендикуляр бўлишини исботланг.

- 20.13.** Бир хил радиусли учта айлана бир-бирлари билан жуфт-жуфтдан уринади. Уларнинг марказлари мунтазам учбурчакнинг учлари бўлишини исботланг.

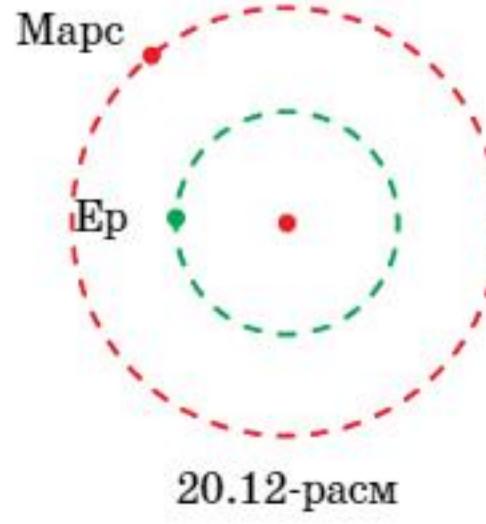
- 20.14.** Қуйидаги: а) учта айлана; в) тўртта айлана; в) бешта айлана бир-бири билан жуфт-жуфтдан уринадими?

- 20.15.** Бир хил радиусли тўртта айлана бир-бири билан жуфт-жуфтдан уринадими?

- 20.16.** Қуйидаги: а) икки айлана; в) учта айлана; в) тўртта айлана; г) n та айлана жуфт-жуфтдан кесишиганда кўпи билан нечта нүкта бўлади? Мос айланаларни ясанг.

- 20.17.** Қуйидаги: а) икки айлана; в) учта айлана; в) тўртта айлана текисликни кўпи билан нечта бўлакка бўлади? Мос бўлакларни ясанг.

- 20.18.** Ер ва Марс Қуёшни турли бурчак тезликлари билан радиуслари 150 ва 228 миллион километр бўлган доиравий (таксиминан) орбиталар бўйича айланади (20.12-расм). Ер ва Марс ораларидаги энг катта ва энг кичик масофани топинг.



20.12-расм

Яңги мавзууни үзлаштиришга тайёрланинг

20.19. А ва В нұқталарни белгиланг. А ва В нұқталарға бўлган масофалари тенг бўладиган нұқталарни кўрсатинг.

21-§. НҰҚТАЛАРНИНГ ГЕОМЕТРИК ЎРНИ

Текисликда фигураналар берилишининг асосий усулларидан бири шу фигура нұқталари қаноатлантирадиган хоссаларни кўрсатиш ҳисобланади.

Айлананинг таърифини эсга олайлик. *Берилган нұқтадан маълум масофада жойлашган текисликнинг барча нұқталаридан ташкил топган геометрик фигура айлана дейилади.* Бу ерда хосса: берилган нұқтадан маълум масофага узоқлашиш бўлади.

Берилган хоссани қаноатлантирувчи барча нұқталардан ташкил топган фигураналар “нұқталарнинг геометрик ўрни” деган ўзига хос номга эга бўлади. Шундай қилиб, берилган хоссани ёки бир неча хоссани қаноатлантирадиган барча нұқталардан ташкил топган фигура *нұқталарнинг геометрик ўрни* дейилади.

Ушбу таърифдаги “берилган хоссани қаноатлантирувчи барча нұқталар” деган сўзнинг маъносини тушунтирайлик. Унинг маъноси, фигурага тегишли барча нұқталар берилган хоссани қаноатлантиради ва аксинча берилган хоссани қаноатлантирувчи барча нұқталар фигурага тегишли бўлади. Бошқача айтганда, нұқта фигурага тегишли бўлади, шунда ва фақат шундагина агар унга берилган хосса бажарилса.

Шундай қилиб, айлана берилган нұқтадан маълум масофада ётган текисликдаги нұқталарнинг геометрик ўрни бўлади.

Яна бир нечта нұқталарнинг геометрик ўрнини кўриб чиқамиз.

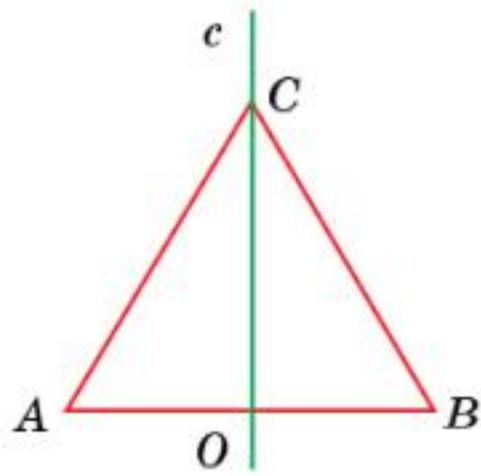
Берилган кесманинг ўрта перпендикуляри деб шу кесмага перпендикуляр ва унинг ўртаси орқали ўтувчи тўғри чизикка айтилади.

Ўрта перпендикуляр қандай нұқталарнинг геометрик ўрни эканини аниқлайлик.

Теорема. *Кесманинг ўрта перпендикуляри ана шу кесма учларидан бир хил узоқликдаги нұқталарнинг геометрик ўрни бўлади.*

Исботи. АВ кесма ва унинг ўртаси О нұқта берилсин. А ва В нұқталардан бир хил узоқликдаги нұқталарнинг геометрик ўрни АВ кесманинг ўрта перпендикуляри с бўлишини кўрсатайлик (21.1-расм).

Дарҳақиқат, О нұқта А, В нұқталардан бир хил узоқликда ётади ва ўрта перпендикулярга тегишли бўлади. Агар С нұқта А ва В



21.1-расм

нүкталардан бир хил узокликда ётиб, O нүкта билан усма-уст тушмаса, у ҳолда ABC учбурчак тенгёнли ва CO — унинг медианаси. Тенгёнли учбурчакларнинг хоссасига кўра унинг медианаси ҳам баландлик бўлади. Демак, C нүкта ўрта перпендикулярга тегишили.

Аксинча, C нүкта ўрта перпендикулярга тегишили ва O нүкта билан устма-уст тушмайдиган бўлсин. У ҳолда AOC ва BOC тўғри бурчакли учбурчаклар тенг (катетлари бўйича). Демак, $AC = BC$.



Кесма ва унинг ўрта перпендикулярини чизинг.

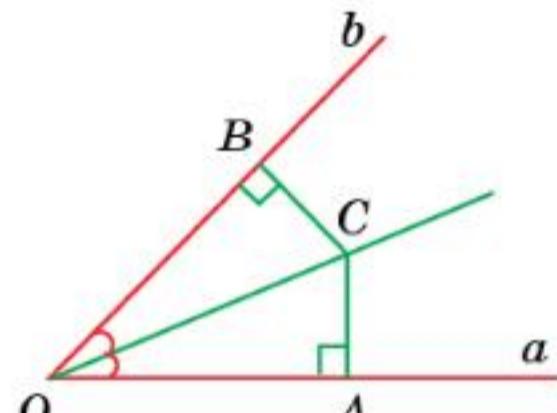
Теорема. Бурчакнинг биссектрисаси шу бурчакнинг ичида ётади ва унинг томонларидан бир хил узокликда жойлашган нүкталарнинг геометрик ўрни бўлади.

Иёботи. Учи O нүктада, томонлари a , b бўлган бурчакни кўриб чиқамиз. C нүкта берилган бурчакнинг ичида ётсин. Шу нүктадан a ва b томонларга мос равища CA ва CB перпендикулярлар туширамиз (21.2-расм).

Агар $CA = CB$ бўлса, у ҳолда AOC ва BOC тўғри бурчакли учбурчаклар тенг бўлади (гипотенузаси ва катети бўйича). Бундан AOC ва BOC бурчаклар тенг бўлади. Демак, C нүкта бурчакнинг биссектрисасига тегишили.

Аксинча, агар C нүкта бурчакнинг биссектрисасига тегишили бўлса, у ҳолда AOC ва BOC тўғри бурчакли учбурчаклар тенг бўлади (гипотенузаси ва ўткир бурчаги бўйича). Бундан $AC = BC$.

Демак, C нүкта берилган бурчакнинг томонларидан бир хил узокликда ётади.



21.2-расм



Бурчак ва бурчакнинг биссектрисасини чизинг.



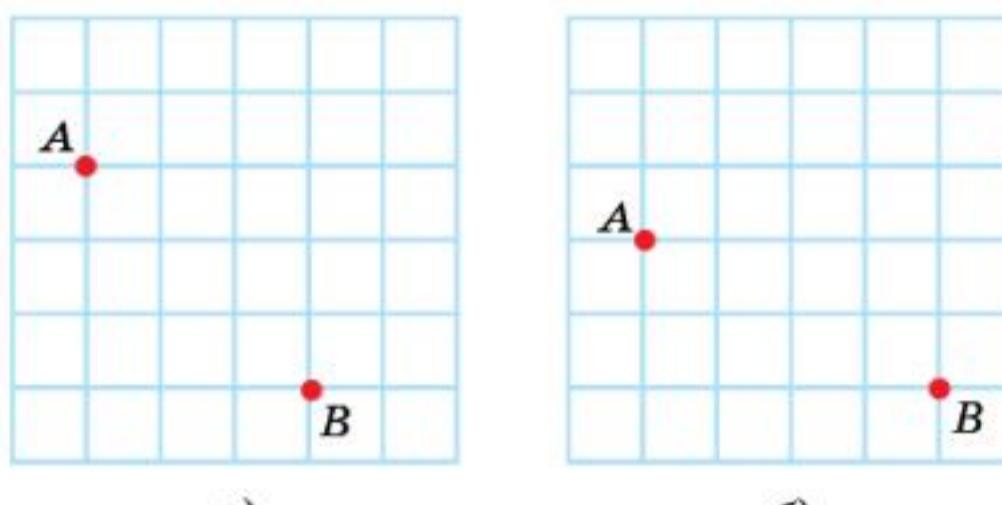
- Нүкталарнинг геометрик ўрни деганимиз нима?
- Нүкталарнинг геометрик ўрни тушунчаси ёрдамида айланани аникланг.
- Қандай тўғри чизик кесманинг ўрта перпендикуляри деб аталади?
- Қуйидаги: а) кесманинг ўрта перпендикуляри; в) бурчакнинг биссектрисаси қандай нүкталарнинг геометрик ўрни бўлади?

Машқлар

A

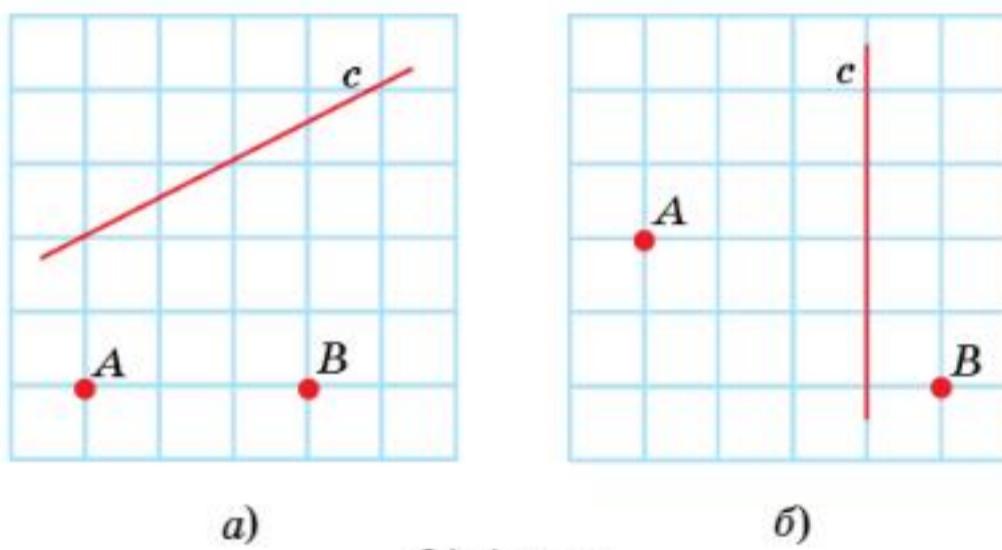
- 21.1.** Қуйидаги: а) кесма; в) нур; в) маркази O нүкта ва радиуси R бўлган доира; г) маркази O нүкта ва радиуслари R_1 , R_2 ($R_1 < R_2$) бўлган ҳалқа қандай нүкталарнинг геометрик ўрни бўлади?

- 21.2.** Катак варақда A ва B нұқталардан бир хил узоклиқда жойлашған нұқталарнинг геометрик үрнини (НГҮ) тасвирланг (21.3-расм).



21.3-расм

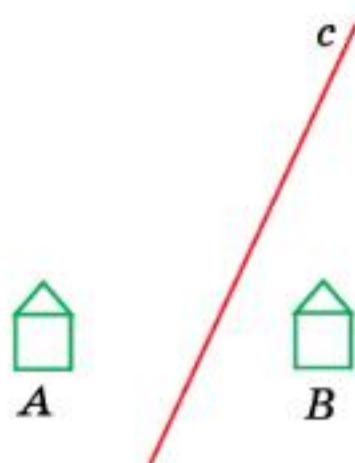
- 21.3.** С түғри чизиқда A ва B бурчакнинг томонлардан бир хил узоклиқда жойлашған C нұктаны белгиланг (21.4-расм).



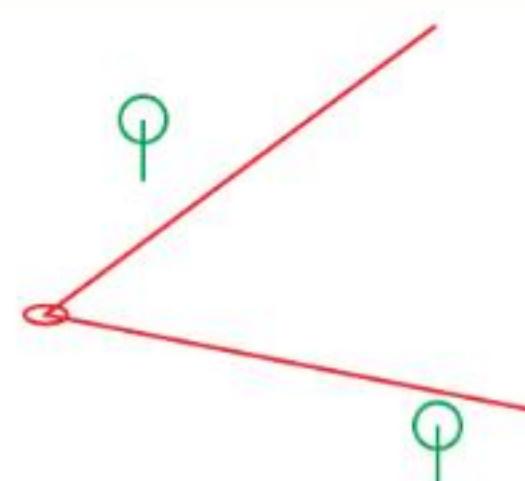
21.4-расм

- 21.4.** A, B, C, D ақоли пунктлари, бу ерда A қишлоқ B қишлоқдан жанубга томон бир неча километр узоклиқда, B ва C қишлоқлар A қишлоқдан ғарб ва шарққа томон (мос равища) бир хил узоклиқда жойлашған. B ва C қишлоқлар D қишлоқдан бир хил узоклиқда жойлашгани түғрими?

- 21.5.** Иккита уй йўлнинг турли томонида жойлашған (21.5-расм). Шу икки уйдан бир хил узоклиқда жойлашадиган қилиб автобус бекатини қаерга қуриш керак?
- 21.6.** Олдингизда қароқчилар хазина яширган орол харитасининг бир парчаси кўрсатилган (21.6-расм). Афсуски, хазинанинг қаерга яширгани белгиланмаган, бироқ сақлаб қолинган йўналишлар (йўл бўйидаги тош ва иккита дарахт) орқали уни аниқлаш мумкин. Хазина икки йўлдан ва икки дарахтдан бир хил узоклиқда яширгани маълум. Хазинани топа оласизми?

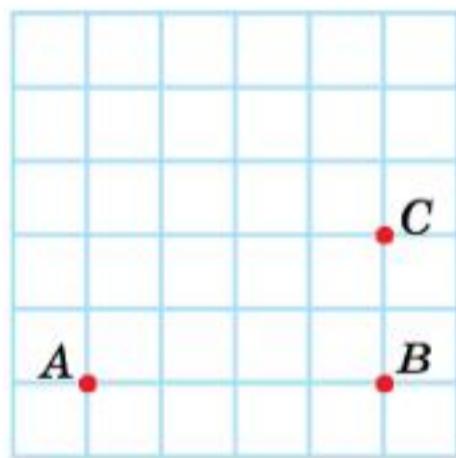


21.5-расм

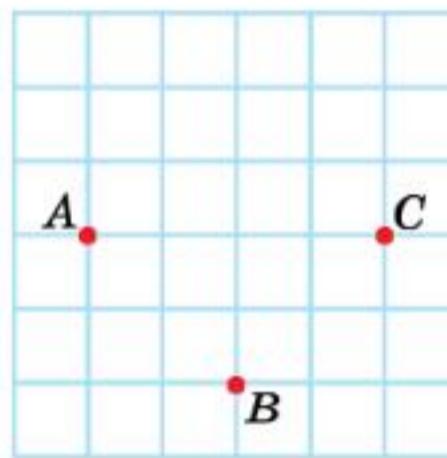


21.6-расм

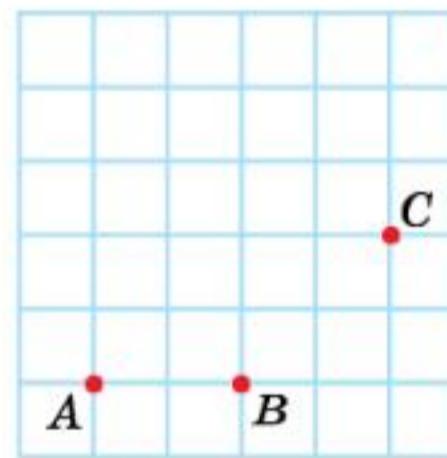
21.7. A , B ва C нүкталардан бир хил узоқликда ётган нүктаны белгіланг (21.7-расм).



a)



б)

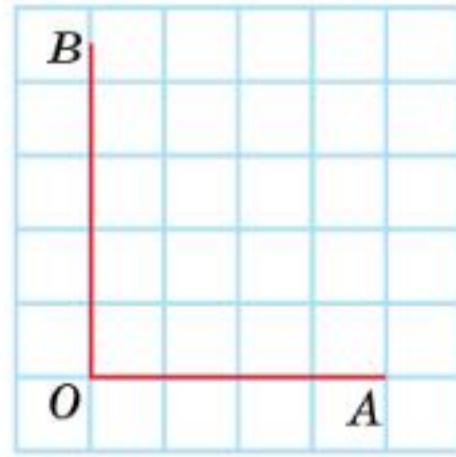


в)

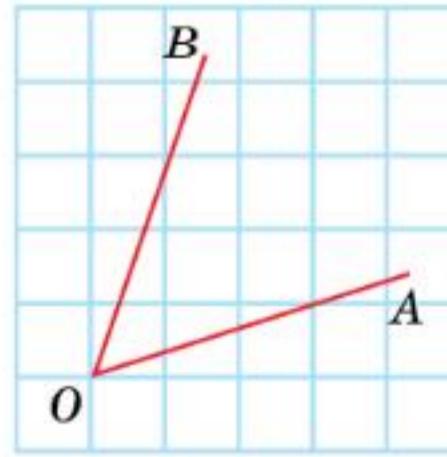
21.7-расм

21.8. A ва B текисликдаги нүкталар бўлсин. а) $AC \geq BC$ в) $AC < AB$ учун C нүктанинг геометрик ўрнини кўрсатинг.

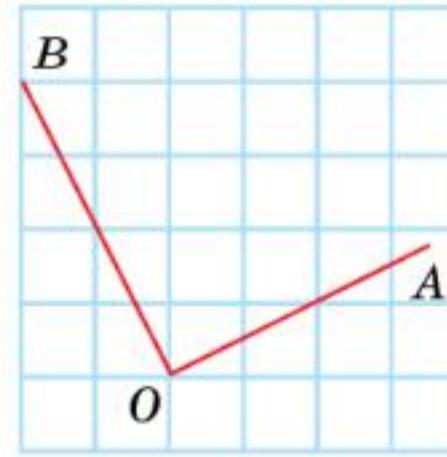
21.9. AOB бурчак томонларидан бир хил узоқликда жойлашган ички нүкталарнинг геометрик ўрнини тасвирланг (21.8-расм).



а)



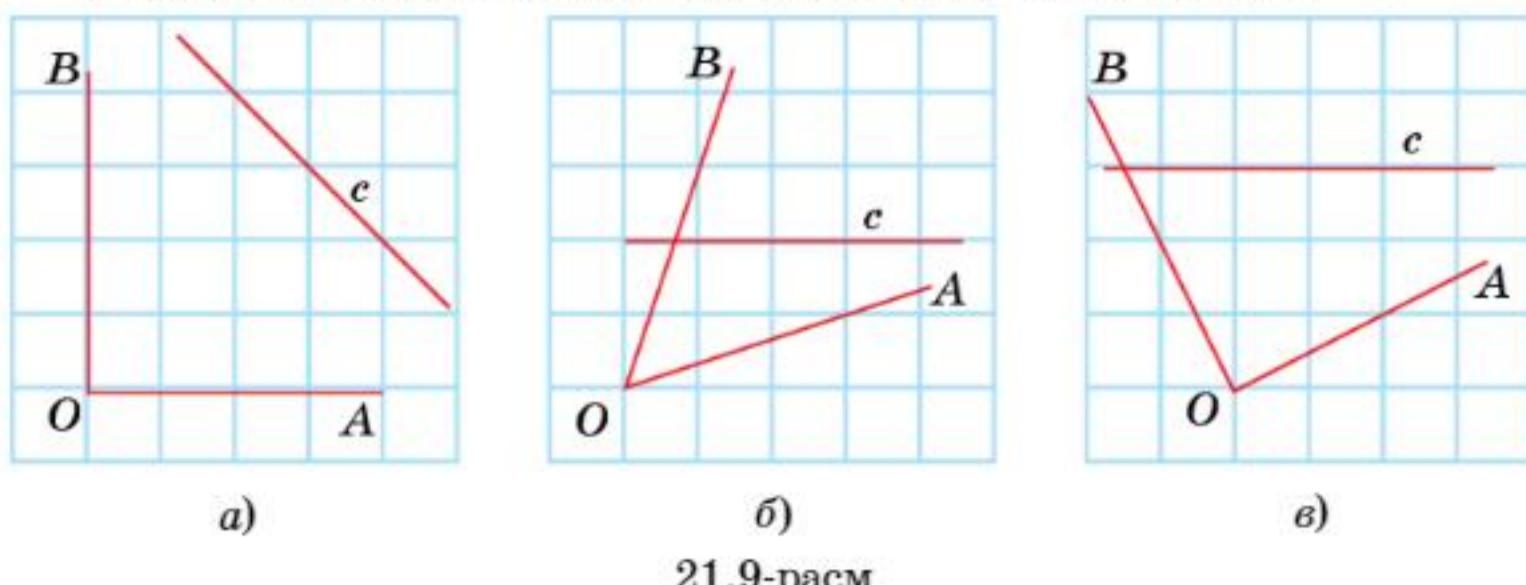
б)



в)

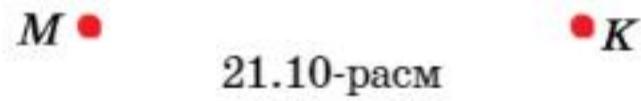
21.8-расм

- 21.10.** $\triangle OAB$ бурчакнинг томонларидан бир хил узоклика жойлашган с түғри чизиқда C нуқтани белгиланг (21.9-расм).

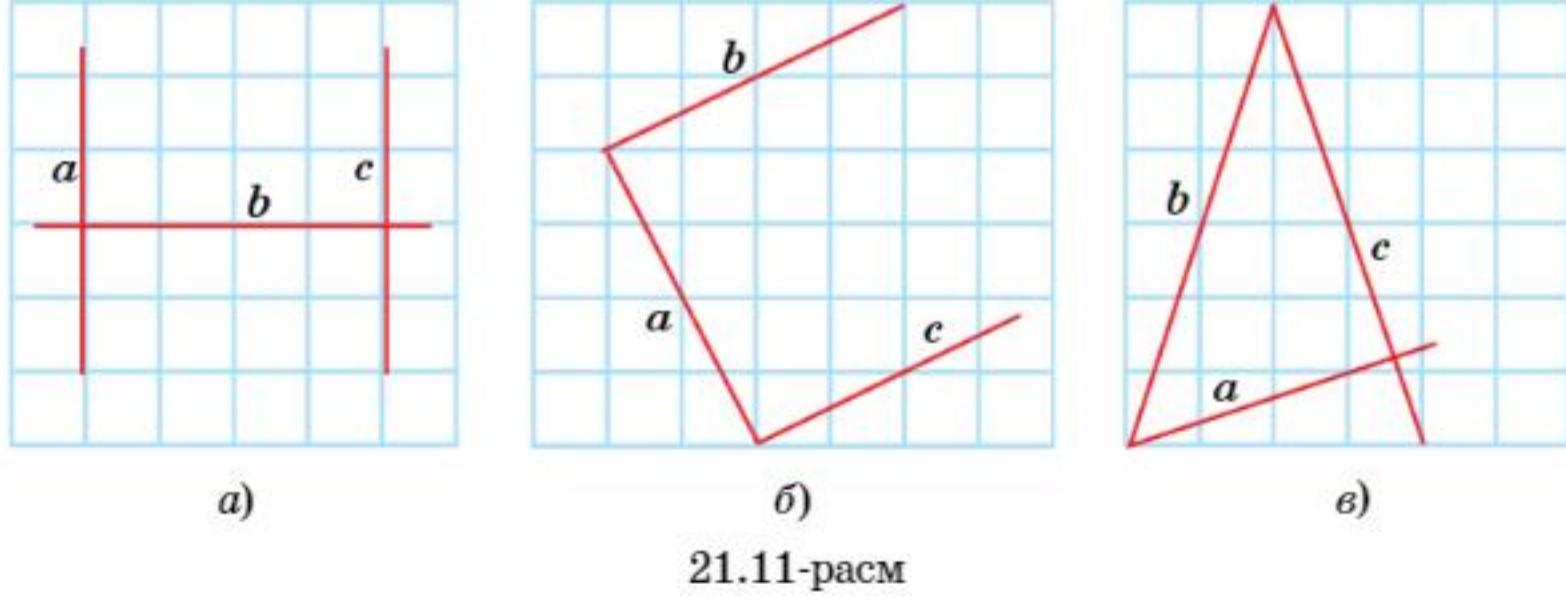


- 21.11.** M, N, K аҳоли пунктлари битта түғри чизиқда жойлашмаган (21.10-расм). N шаҳар орқали M ва K шаҳарлардан бир хил узоклика ётган түғри чизиқли йўлни қандай солиш мумкин?

● N



- 21.12.** Берилган A ва B нуқталар орқали ўтувчи айланалар марказларининг геометрик ўрнини топинг.
- 21.13.** Асоси AB бўлган tengёнли учбурчакнинг C учининг геометрик ўрнини топинг.
- 21.14.** 21.11-расмда тасвирланган a, b, c учта түғри чизиқдан бир хил узоклика ётган нуқталарни кўрсатинг.



- 21.15.** Берилган икки кесишувчи a ва b түғри чизикларни кесиб үтүвчи айланалар марказларининг геометрик ўрнини топинг.
- 21.16.** Радиуси R бўлган берилган айланага уринувчи, шу R радиусли айланалар марказларининг геометрик ўрнини топинг.
- 21.17.** Радиуси R бўлган берилган айланага уринувчи радиуси s га тенг бўлган R_1 ($R \neq R_1$) айланалар марказларининг геометрик ўрнини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёрланинг

- 21.18.** Айдана ва учлари шу айланада ётган учбурчак чизинг.
- 21.19.** Айдана ва томонлари шу айланага уринувчи учбурчак чизинг.

22-§. УЧБУРЧАККА ТАШҚИ ЧИЗИЛГАН АЙДАНА. УЧБУРЧАККА ИЧКИ ЧИЗИЛГАН АЙДАНА

Агар учбурчакнинг ҳамма учлари айланада ётса, у ҳолда айдана учбурчакка ташқи чизилган ёки учбурчак айланага ички чизилган деб аталади (22.1-расм).

Исталган учбурчак ясанг. Унга ташқи айдана чизиб кўринг.

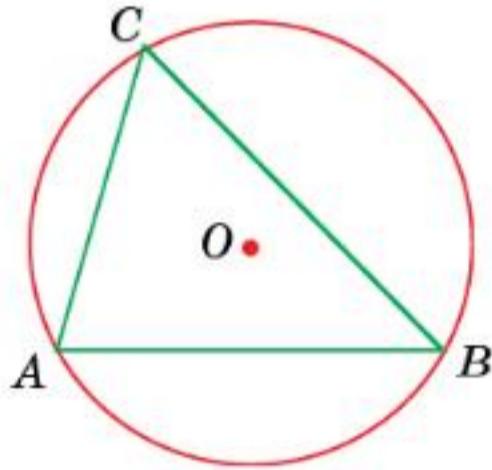


Сиз қандай ўйлайсиз, исталган учбурчакка ташқи айдана чизиш мумкинми?

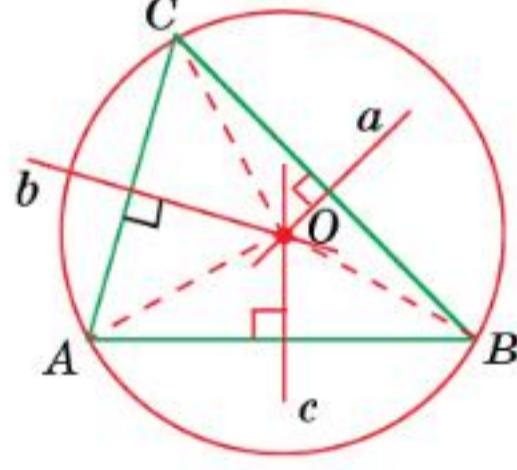
Ушбу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Ихтиёрий учбурчакка ташқи чизилган айдана чизиш мумкин. Унинг маркази учбурчакнинг томонларига ўтказилган ўрта перпендикулярларнинг кесишиши нуқтаси бўлади.*

Исботи. ABC учбурчакни кўриб чиқамиз. AB ва AC томонларига мос равища c ва b ўрта перпендикулярлар ўтказамиз (22.2-расм).



22.1-расм



22.2-расм

Уларнинг кесишиш O нуқтаси ташқи чизилган айлананинг маркази бўлишини исботлаймиз. Бунинг учун $OA = OB = OC$ тенгликнинг бажарилишини текшириш етарли. Дарҳақиқат, O нуқта AB кесмага туширилган c ўрта перпендикулярга тегишли бўлгани

учун у A ва B учлардан бир хил узоқликда жойлашган, яъни $OA = OB$. О нүкта AC кесмага туширилган b ўрта перпендикулярга тегишли бўлгани учун у A ва C учлардан бир хил узоқликда жойлашган, яъни $OA = OC$. Демак, О нүкта ABC учбурчакнинг A , B , C учларидан бир хил узоқликда жойлашган, яъни $OA = OB = OC$. $OB = OC$ тенгликтан О нүкта BC кесмага туширилган ўрта A перпендикулярга тегишли эканини кўрамиз. Шундай қилиб, ҳамма уч ўрта перпендикулярлар битта О нүктада кесишади. Маркази шу нүктада ва радиуси ABC бўлган айлана изланаетган ташки чизилган айлана ҳисобланади.

Параллеллик аксиомаси ва тескари фараз қилиш усулидан фойдаланиб, учбурчакнинг иккита томонига туширилган перпендикулярларнинг кесишишини исботлаймиз. ABC — учбурчак, c ва b мос ҳолда AB ва AC томонларга туширилган ўрта перпендикулярлар бўлсин (22.3-расм).

b ва c тўғри чизиқлар кесишмайди дейлик, демак, улар параллель. AB тўғри чизиқ c тўғри чизиқка перпендикуляр. AC тўғри чизиқ b тўғри чизиқка перпендикуляр, демак, у c тўғри чизиқка параллель. Шундай қилиб, AB ва AC тўғри чизиқлар битта c тўғри чизиққагина перпендикуляр бўлади. Бироқ нүктадан тўғри чизиққа ўтказилган перпендикулярнинг ягоналиги ҳақидаги теоремага кўра улар усма-уст тушади. Бизнинг ҳолда бу тўғри чизиқлар кесишади. Бундан b ва c тўғри чизиқлар параллел деганимиз нотўғри бўлади. Демак, улар кесишади .



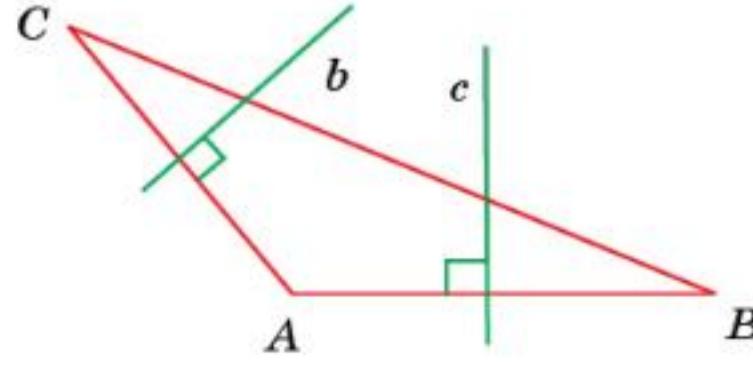
Ўткир бурчакли ва ўтмае бурчакли учбурчакларга ташки чизилган айланалар чизинг.

Агар учбурчакнинг ҳамма томонлари айлана билан уринса, у ҳолда айлана учбурчакка ички чизилган ёки учбурчак айланага ташки чизилган деб аталади (22.4-расм).

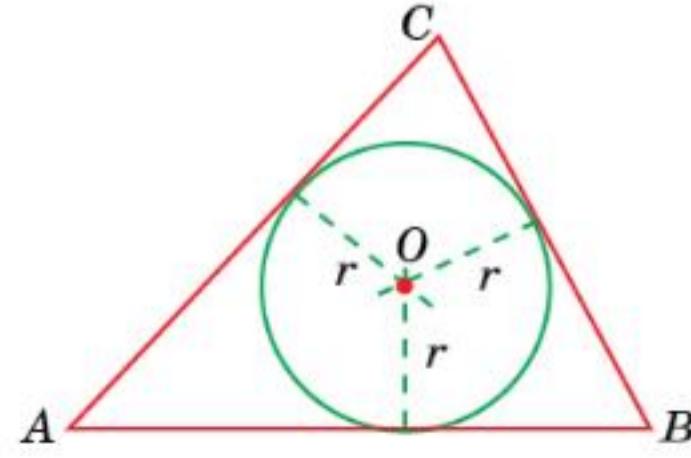
Исталган учбурчак ясанг. Унга ички чизилган айлана чизинг.



Сиз қандай ўйлайсиз, ихтиёрий учбурчакка ички чизилган айлана чизиш мумкинми?



22.3-расм



22.4-расм

Ушбу саволга қуйидаги теорема жа-
воб беради.

Теорема. Ичкі чизилган айланың чизиш мүмкін.
Унинг маркази учурчак биссектрисаса-
ларининг кесишиш нүктаси бўлади.

Исботи. ABC учурчакни кўриб чи-
қамиз ва унинг A ва B учларидан мос ра-
вишда a ва b биссектрисалар ўтказамиз
(22.5-расм).

Биссектрисаларнинг кесишиш O нүктаси ичкі чизилган айла-
нанинг маркази бўлишини исботлаймиз. Бунинг учун O нүктадан ABC учурчакнинг томонларига туширилган OD , OE ва OF пер-
пендикулярларнинг тенглигини ёки O нүкта ABC учурчакнинг
томонларидан бир хил узоқликда ётганлигини текшириш етарли.
Дарҳақиқат, O нүкта a биссектрисага тегишли бўлгани учун у AB
ва AC томонлардан бир хил узоқликда ётади. O нүкта ABC биссек-
тристага тегишли бўлгани учун у AB ва BC томонлардан бир хил
узоқликда ётади. Демак, O нүкта ABC учурчакнинг ҳамма томон-
ларидан бир хил узоқликда ётади. O нүкта BC ва AC томонларидан
бир хил узоқликда жойлашгани учун C бурчакнинг c биссектри-
сада ётиши келиб чиқади, яъни учта биссектриса битта O нүктада
кесишади. Маркази шу нүкта ва радиуси $r = OD = OE = OF$ бўлган
айланы изланади .



Ўтқир бурчакли ва ўтмас бурчакли учурчакларга ичкі чизилган айла-
налар чизинг.



1. Қандай айланы учурчакка ташқи чизилган дейилади?
2. Қандай учурчак айланага ичкі чизилган дейилади?
3. Қандай айланы учурчакка ичкі чизилган дейилади?
4. Қандай учурчак айланага ташқи чизилган дейилади?
5. Қандай нүкта учурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази
бўлади?
6. Қандай нүкта учурчакка ичкі чизилган айлананинг маркази бўлади?

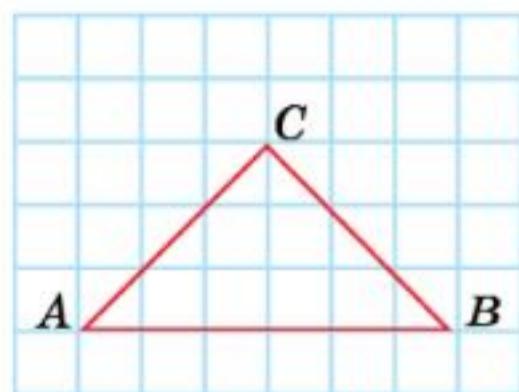
Машқлар

A

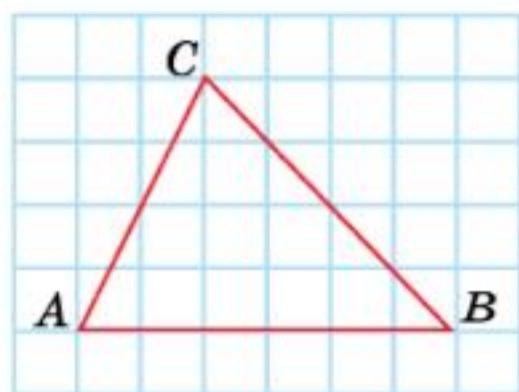
- 22.1. Учурчакка ичкі чизилган айлананинг маркази шу учурчак-
нинг сиртида ётиши мумкинми?
- 22.2. Учурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази: а) учурчак-
нинг ичида; в) учурчакнинг томонида; в) учурчакнинг сиртида
ётиши мумкинми? Мисол келтиринг.

B

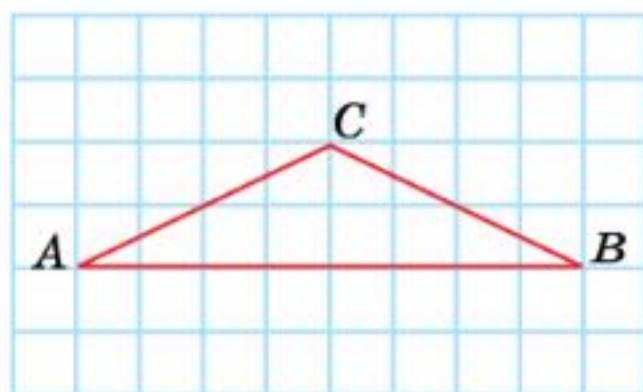
22.3. 22.6-расмда тасвириланган учурчакларга ташқи чизилган айланалар марказларини белгиланг.



a)



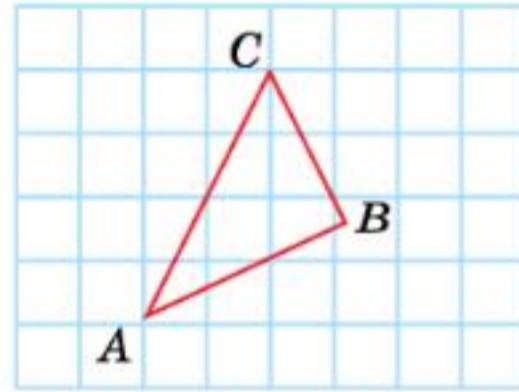
б)



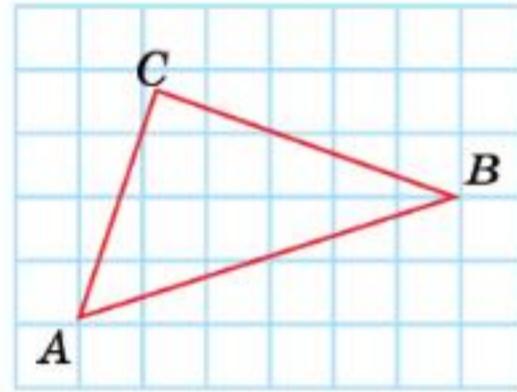
в)

22.6-расм

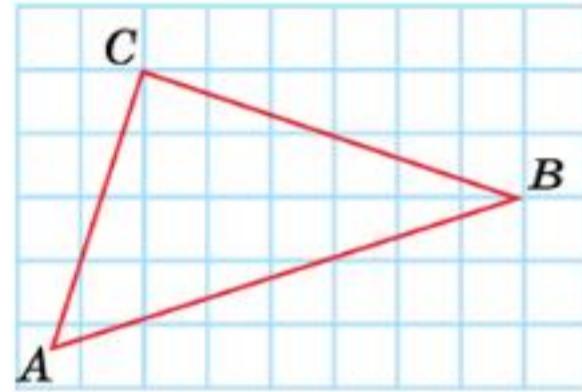
22.4. 22.7-расмда тасвириланган учурчакларга ички чизилган айланаларнинг марказларини белгиланг.



а)



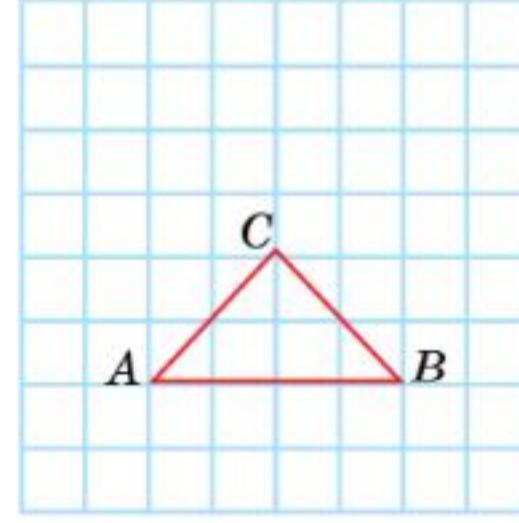
б)



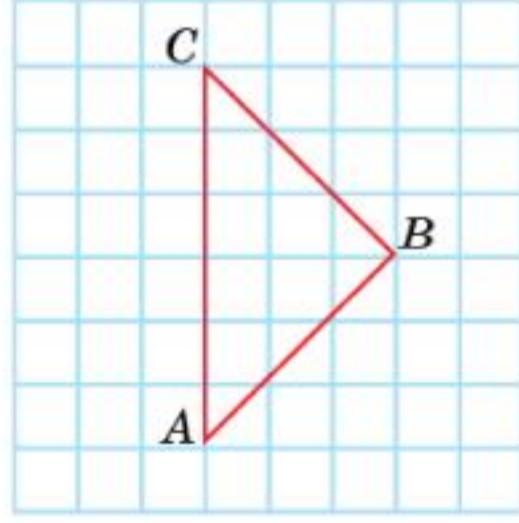
в)

22.7-расм

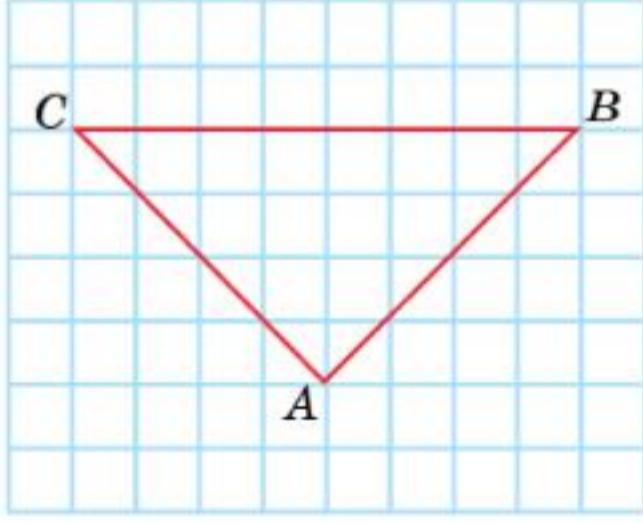
22.5. 22.8-расмда тасвириланган учурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг (катақ томони 1 га teng).



а)



б)

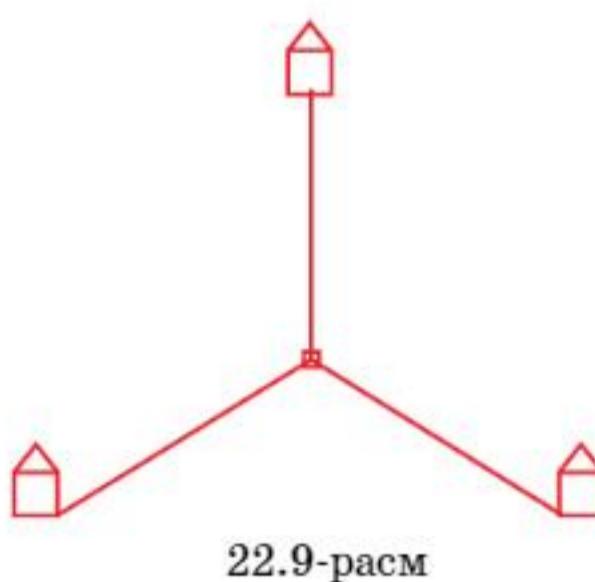


в)

22.8-расм

22.6. Түғри бурчакли учурчакнинг учларида жойлашган A , B ва C учта уйнинг аҳолиси ҳамма уйдан бир хил узоқликда жой-

лашган қудук қазиши мөкчі (22.9-расм). Улар қудукни қаерда қазишилари керак?



C

- 22.7.** Тенгёнли учурчакка ички чизилган айлананинг маркази, шу учурчакнинг асосига қарама-қарши ётган учидан туширилган баландликка тегишли эканини исботланг.
- 22.8.** Тенгёнли учурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази, шу учурчакнинг асосига қарама-қарши ётган бурчакнинг биссектрисасиги тегишли эканини исботланг.
- 22.9.** Агар учурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази учурчакнинг битта медианасига тегишли бўлса, у ҳолда учурчакнинг турини аниқланг.
- 22.10.** Агар учурчакка ички чизилган айлананинг маркази учурчакнинг битта баландлигига тегишли бўлса, у ҳолда учурчакнинг турини аниқланг.
- 22.11.** Агар учурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг марказлари устма-уст тушса, у ҳолда учурчакнинг турини аниқланг.
- 22.12.** Тенгёнли учурчакка ички чизилган айлана унинг бир ён томонини уриниш нуқтасида асосидан бошлаб ҳисоблаганда узунликлари 5 см ва 4 см бўлган иккита кесмага ажратади. Учурчакнинг периметрини топинг.
- 22.13.** Гипотенузаси 10 см бўлган тўғри бурчакли тенгёнли учурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.
- 22.14.** Ён томонлари 4 см , улар орасидаги бурчак 120° бўлган тенгёнли учурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.
- 22.15.** Томонлари 3 см , 4 см , 5 см бўлган тўғри бурчакли учурчакка ички чизилган айлананинг радиусини топинг.

Яңги мавзууни үзлаштиришга тайёрланинг

22.16. AB кесма ясанг. Маркази A нүктада ва радиуси AB бўлган айлана чизинг. Маркази B нүктада ва радиуси BA бўлган айлана чизинг. Шу айланаларнинг кесишиш нүқталари орқали тўғри чизик ўтказинг. Шу тўғри чизик ҳақида нима дейиш мумкин?

23-§. ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

Чизғич ва циркуль геометрик ясашлар учун асосий чизма куроллари ҳисобланади.

Чизғич ёрдамида берилган иккита нүқта орқали тўғри чизик ўтказилади. Циркуль ёрдамида берилган маркази ва радиусига кўра айлана чизилади. Айрим ҳолларда циркуль ёрдамида нурда унинг бошидан берилган кесмага teng бўлган кесма ясаш мумкин.

Ясашга доир масалаларни ечиш қоидага кўра тўрт босқичдан иборат.

1. Масала шартини *таҳлил қилиши*, изланаётган фигурани ясашга имкон берадиган алоқаларни топиш.

2. *Ясаш*, изланаётган фигурани ясаш учун бажариш лозим бўлган асосий нурларнинг кетма-кетлигини кўрсатиш.

3. *Исботлаш*, ясалган фигуранинг масаланинг барча шартларини қаноатлантиришини аниқлаш.

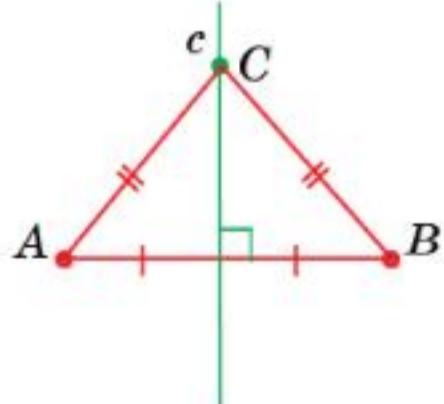
4. *Ўрганиш*, ясашни ҳамма вақт танлаб олинган усулда бажариш мумкинлигини ва масаланинг нечта ечими бўлишини аниқлаш.

Чизғич ва циркуль ёрдамида бъзи бир геометрик ясаш масалаларини кўриб чиқамиз.

1-масала. Берилган кесманинг ўрта перпендикулярини ясанг.

Ечиш. *Таҳлил.* AB берилган кесма бўлсин. с ўрта перпендикуляр ясалган деб фараз қиласайлик (23.1-расм).

У шу кесманинг A ва B учларидан бир хил узоқликда жойлашган C нүқталарнинг геометрик ўрни бўлади. Демак, марказлари A ва B нүқталар бўлган бир хил радиусли ўзаро кесишувчи иккита айлана чизсак, у ҳолда уларнинг кесишиш нүқталари изланаётган ўрта перпендикулярга тегишли бўлади.



23.1-расм

Ясаш. Марказлари A , B нүқталар ва радиуси AB нинг ярмидан катта бўлган айланалар ясаймиз (23.2-расм).

AB тўғри чизикнинг тури томонида ётган айланаларнинг кесишиш нүқталарини C_1 ва C_2 , орқали белгилаймиз. C_1C_2 тўғри чизикни ўтказамиз. У изланаётган AB кесманинг ўрта перпендикуляри бўлади.

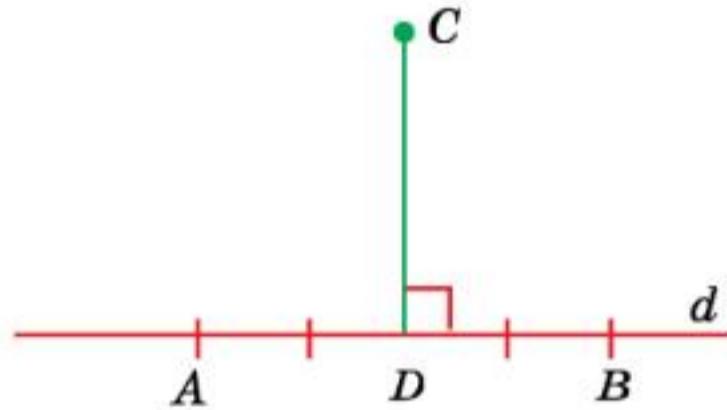
Исботи. Ясалган C_1 билан C_2 нүкта-лар AB кесманинг учларидан бир хил узоклика жойлашади. У ҳолда улар ўрта перпендикулярларга тегишли, демак, C_1C_2 түғри чизик ҳақиқатан изла-наётган ўрта перпендикуляр бўлади.

Ўрганиш. Айлана марказлари орасидаги масофа шу айланалар радиусла-рининг йиғиндисидан кичик ва улар-нинг айирмасидан катта бўлгани учун бу айланалар кесишади, яъни иккита умумий нүктаси бўлади. Демак, ясаш ягона.

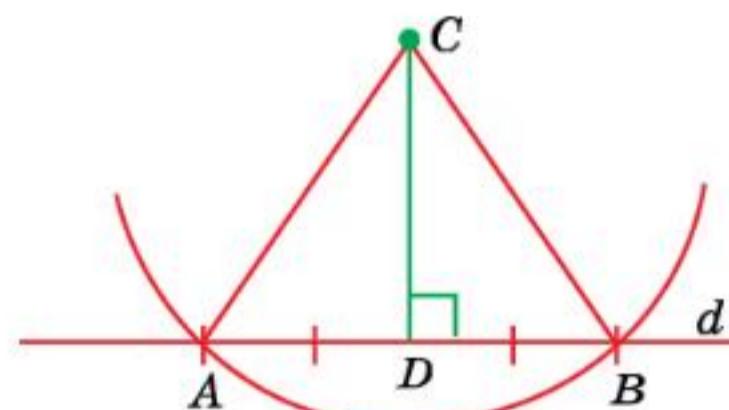
2-масала. Берилган түғри чизикда ётмайдиган нүкта орқали шу түғри чизикқа перпендикуляр ўтказинг.

Ечиш. Таҳлил. С — берилган нүкта, d — берилган түғри чизик бўлсин. CD перпендикуляр ўтказилган деб фараз қиласайлик (23.3-расм). Агар d түғри чизикқа тегишли A ва B нүкталар D нүктадан бир хил узоклика ётса, у ҳолда CD түғри чизик AB кесманинг ўрта перпендикуляри бўлади.

Ясаш. A ва B нүкталарни белгилаш учун маркази C нүктада ва радиуси C нүктадан d түғри чизикқача бўлган масофадан катта бўлган айлана чизамиз (23.4-расм).



23.3-расм



23.4-расм

Бу ҳолда айлана d түғри чизикни иккита нүктада кесиб ўтади. Уларни A ва B деб белгилаймиз. 1-масала бўйича AB кесманинг ўрта перпендикулярини ясайлик. С нүкта A ва B нүкталардан бир хил ма-софада жойлашганлиги сабабли улар ана шу ўрта перпендикулярга тегишли бўлади. Ўрта перпендикулярнинг A ва B түғри чизик билан кесишиш нүктасини AB деб белгилаймиз. CD кесма изланётган С нүктадан d түғри чизикқа туширилган перпендикуляр бўлади.



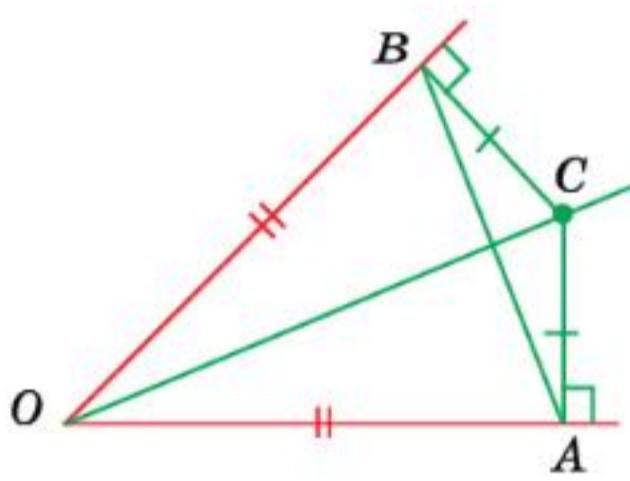
Исботлаш ва ўрганишни мустақил бажаринг.

3-масала. Берилган бурчакнинг биссектрисасини ясанг.

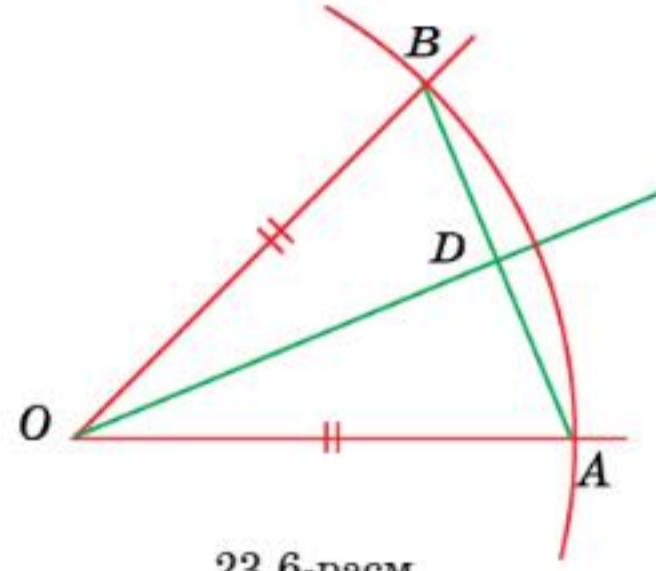
Ечиш. Таҳлил. О бурчак берилсин. Унинг биссектрисаси ўтказилган деб фараз қиласын. У ана шу бурчак томонларидан бир хил узоқликда жойлашган C ички нүкталарнинг геометрик ўрни бўлади (23.5-расм), яъни C нүктадан бурчак томонларига туширилган CA ва CB перпендикуляр тенг бўлади.

OAC ва OCB тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглигидан (гипотенузаси ва катети бўйича) $OA = OB$ экани келиб чиқади. Асоси AB бўлган OAB тенгёнли учбурчакда О учидан ўтказилган биссектриса ҳам медианаси, ҳам баландлиги бўлади. Демак, биссектриса AB кесманинг ўрта перпендикулярида ётади.

Ясаш. Маркази берилган бурчакнинг O учида бўлган бурчак томонларини A ва B нүкталарда кесиб ўтувчи айланга ясаймиз (23.6-расм). AB кесманинг ўрта перпендикулярини ўтказамиз. Берилган бурчакнинг ичида ётган унинг қисми изланаётган биссектриса бўлади.



23.5-расм



23.6-расм

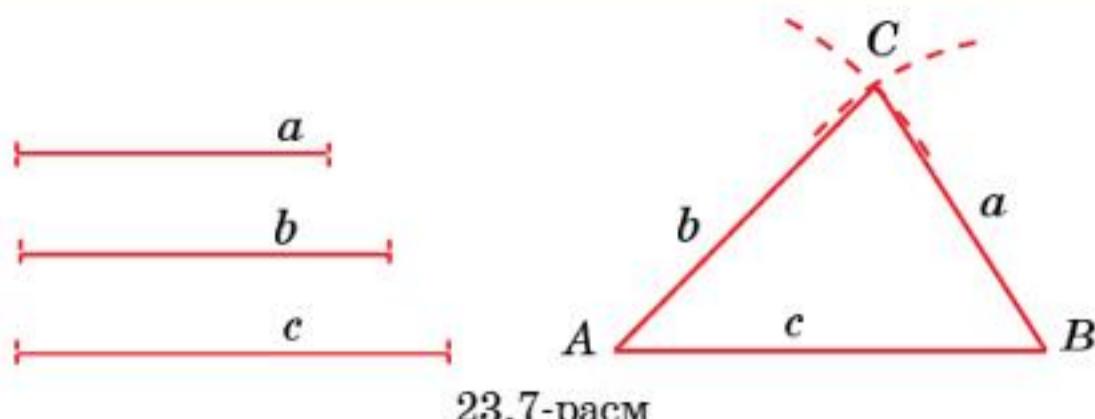


Иеботлаш ва ўрганишни мустақил бажаринг.

4-масала. Берилган $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ томонлари бўйича ABC учбурчак ясанг.

Ечиш. Таҳлил. Агар учта кесманинг ҳар бири қолган иккитасининг йиғиндисидан кичик ёки айирмасидан катта бўлса, у ҳолда бу кесмалар учбурчакнинг томонлари бўлишини ҳисобга оламиз.

Ясаш. Ушбу шартларни қаноатлантирувчи a , b ва c кесмалар берилсин. Тўғри чизик чизиб, унда A нүктани белгилаймиз. Шу тўғри чизиқда циркулнинг b катталикли очилиш бурчаги билан c кесмага тенг бўлган AB кесма оламиз. Маркази A нүктада бўлган циркулнинг a катталикли очилиш бурчаги ёрдамида айланча чизамиз. Маркази B нүктада бўлган циркулнинг b катталикли очилиш бурчаги ёрдамида айланча чизамиз. Ушбу айланаларнинг кесишиш нүктасини С орқали белгилаймиз ва A ва B нүкталарни кесмалар орқали туташтирамиз. ABC изланаётган учбурчак ҳосил бўлади (23.7-расм).



Исботлаш ва ўрганишни мустақил бажаринг.



1. Геометрик фигуналарни ясаш учун қандай геометрик қуроллардан фойдаланилади?
2. Қандай ясашлар: а) чизғич; в) циркуль ёрдамида амалга оширилади?
3. Кесманинг ўрта перпендикулярини қандай ясаш мүмкин?
4. Берилган нүктадан берилган түғри чизиққа перпендикуляр қандай ўтказилади?
5. Бурчакнинг биссектрисасини қандай ясаш мүмкин?
6. Учта томонига кўра учбурчакни қандай ясаш мүмкин?

Машқлар

A

- 23.1. Берилган кесмага teng кесма ясанг.
- 23.2. Берилган кесманинг ўртасини белгиланг.

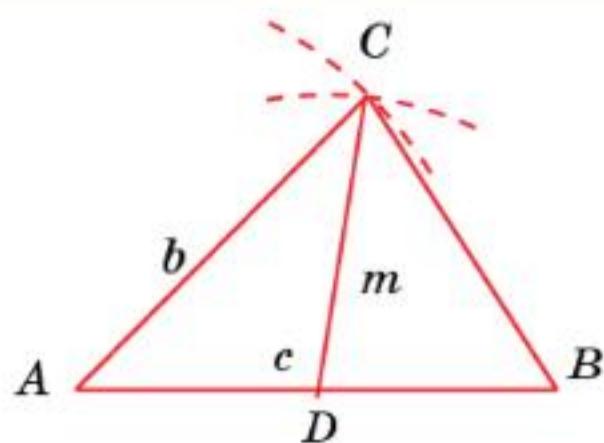
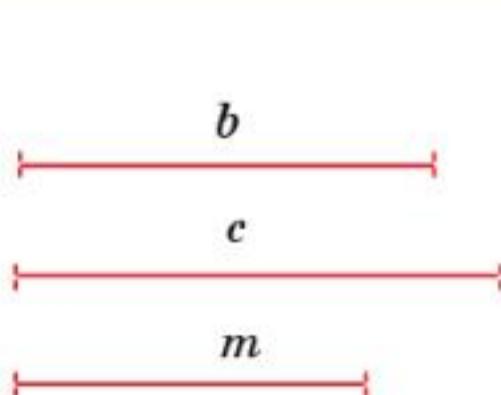
B

- 23.3. Берилган түғри чизиққа тегишли бўлган нукта орқали шу түғри чизиққа перпендикуляр түғри чизик ўтказинг.
- 23.4. Берилган икки томони ва улар орасидаги бурчаги бўйича ABC учбурчак ясанг.
- 23.5. Берилган бир томони ва унга ёпишган иккита бурчаги бўйича ABC учбурчак ясанг.
- 23.6. Берилган бурчакка teng бурчак ясанг.

C

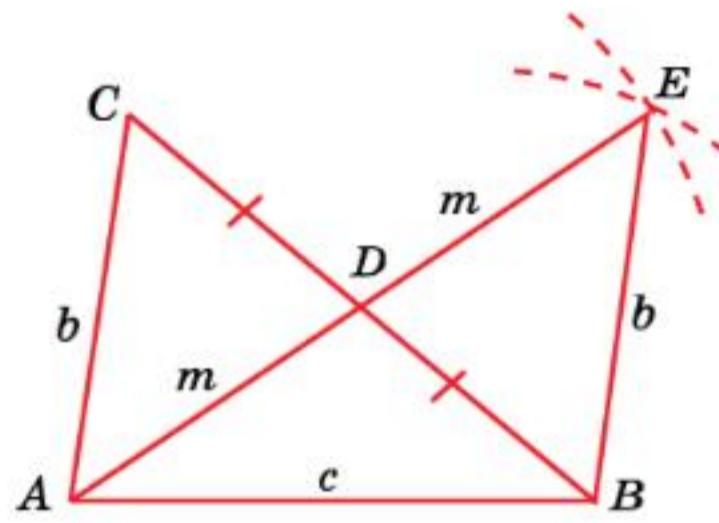
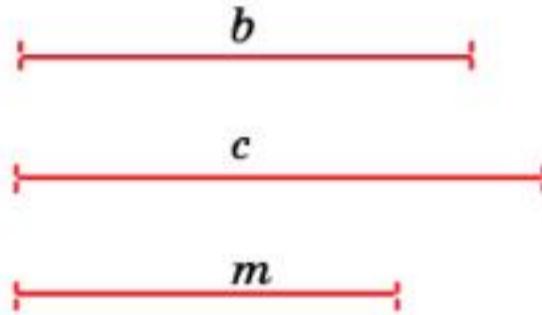
- 23.7. 23.8-расмда берилган $AB = c$, $AC = b$ иккита томони ва $CD = m$ медианаси бўйича ABC учбурчакни қандай ясаш мүмкин эканини тушунтириинг.





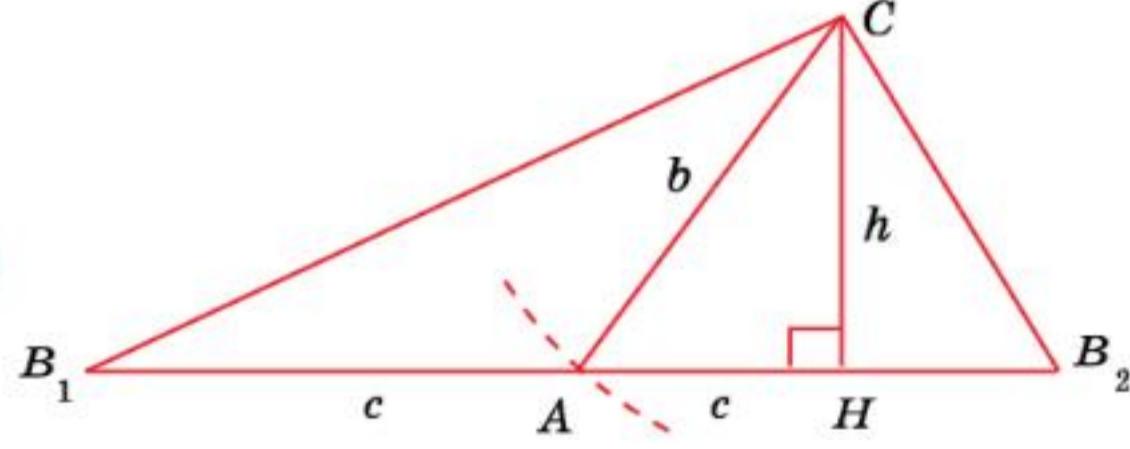
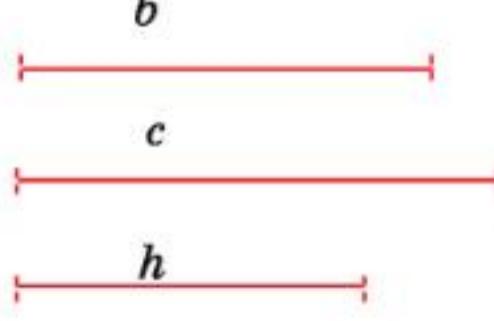
23.8-расм

23.8. 23.9-расмда берилган $AB = c$, $AC = b$ иккита томони ва $AD = m$ медианаси бўйича ABC учбурчакни қандай ясаш мумкин эканини тушунтиринг.



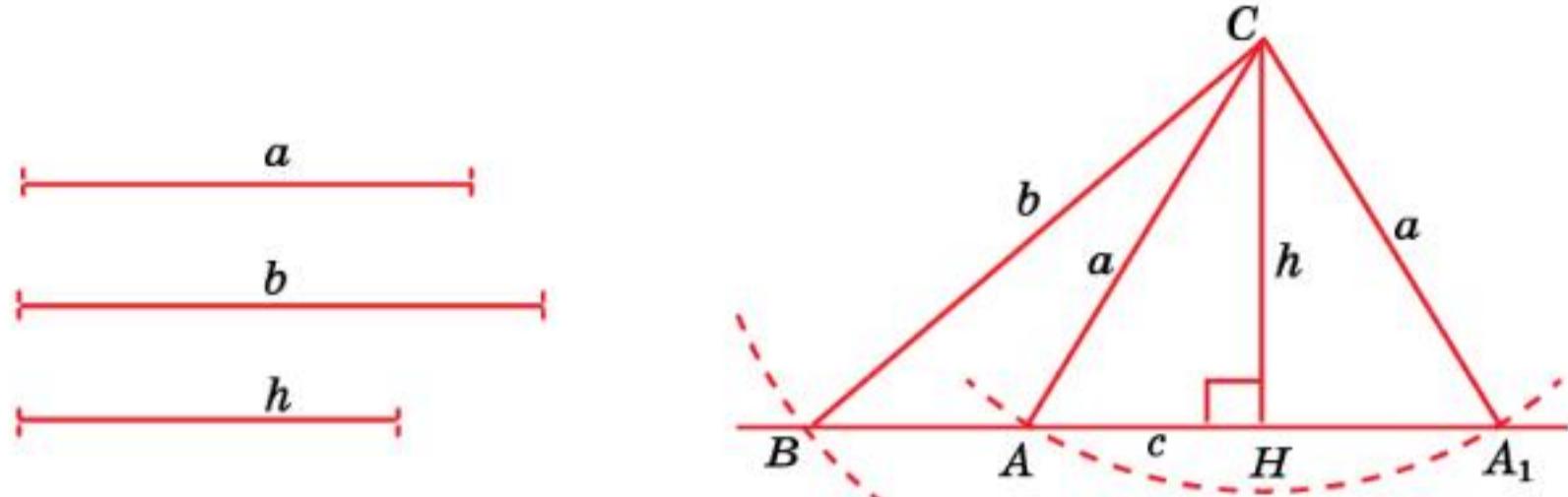
23.9-расм

23.9. 23.10-расмда берилган $AB = c$, $AC = b$ иккита томони ва $CH = h$ баландлиги бўйича ABC учбурчакни қандай ясаш мумкин эканини тушунтиринг.



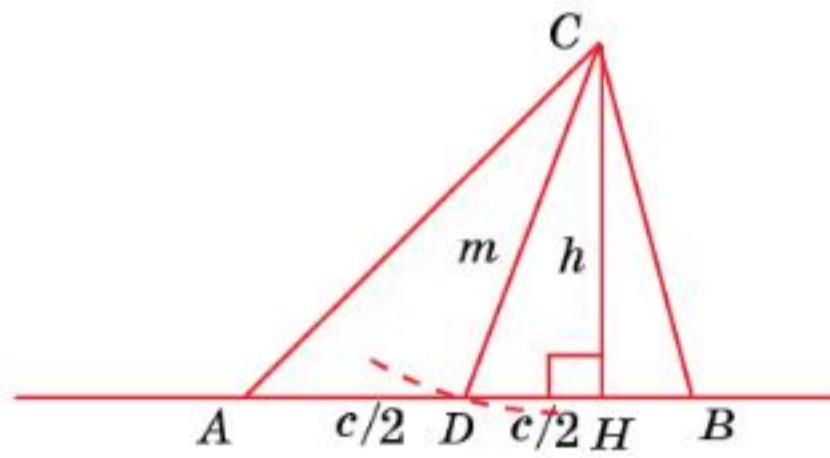
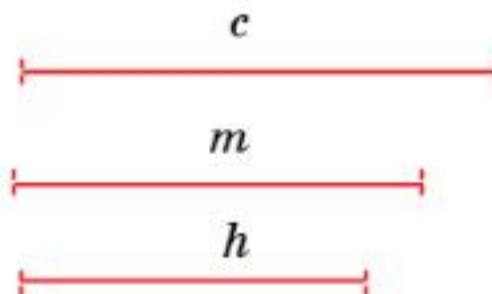
23.10-расм

23.10. 23.11-расмдан фойдаланиб, берилган $AC = a$, $BC = b$ иккита томони ва $CH = h$ баландлиги бўйича ABC учбурчакни ясанг.



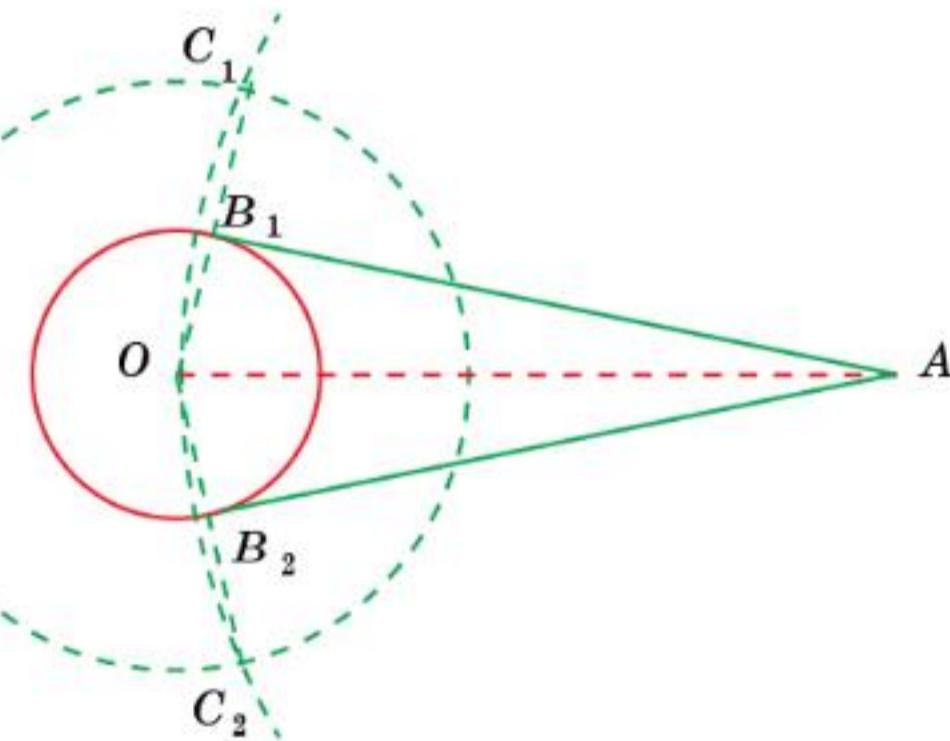
23.11-расм

23.11. 23.12-расмдан фойдаланиб, берилган $AB = c$ иккита томони, $CD = m$ медианаси ва $CH = h$ баландлиги бүйича ABC учбұрчакни ясанг.



23.12-расм

23.12. 23.13-расмдан фойдаланиб, берилган айланы сиртида ётган нүкта орқали үтувчи шу айланага уринма үтказинг.



23.13-расм

Ахборот тайёрланг

- 23.13.** Милоддан аввалги V асрда циркуль ва чизғич ёрдамида ясашга доир таниқли масала “кубни иккилантариш масаласи” — Делос масаласи.
- 23.14.** а) Парабола нима? Параболанинг оптик хоссаси.
 б) Эллипс нима? Эллипснинг оптик хоссаси.
 в) Гипербола нима? Гиперболанинг оптик хоссаси.

ҰЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

- 1.** Маркази берилган нүктада бўлган нечта айлана мавжуд?
 А) ҳеч қанча. В) Битта. С) Иккита. D) Чексиз кўп.
- 2.** Битта нүкта орқали нечта айлана ўтказиш мумкин?
 А) Битта. В) Иккита. С) Учта. D) Чексиз кўп.
- 3.** Иккита нүкта орқали нечта айлана ўтказиш мумкин?
 А) Ҳеч қанча. В) Битта. С) Иккита. D) Чексиз кўп.
- 4.** Маркази O нүктада ва радиуси R бўлган доирадан ташқарида ётган M нүкта қандай нисбатни қаноатлантиради?
 А) $OM \geq R$. В) $OM > R$. С) $OM \leq R$. D) $OM < R$.
- 5.** Маркази O нүктада ва радиуси R бўлган доиранинг ичидаги ётган M нүкта K нүктада қандай нисбатни қаноатлантиради?
 А) $OK \leq R$. В) $OK \geq R$. С) $OK < R$. D) $OK > R$.
- 6.** Айлананинг диаметри 10 см. Айлана марказидан 3 см узоқликда жойлашган тўғри чизик шу айланага нисбатан қандай жойлашади?
 А) Кесишмайди. В) Кесишади.
 С) Уринади. D) Аниқлаш мумкин эмас.
- 7.** Айлананинг диаметри 8 см. Айлана марказидан 4 см узоқликда жойлашган тўғри чизик шу айланага нисбатан қандай жойлашади?
 А) Кесишмайди. В) Кесишади.
 С) Уринади. D) Аниқлаш мумкин эмас.
- 8.** Айлананинг диаметри 6 см. Айлана марказидан 5 см узоқликда жойлашган тўғри чизик шу айланага нисбатан қандай жойлашади?

- A) Айлана билан умумий нүктага эга эмас.
 B) Кесишиди.
 C) Уринади.
 D) Аниқлаш мүмкін эмас.
- 9.** Икки айлананинг радиуслари 10 см ва 15 см. Уларнинг марказлари орасидаги масофа 20 см. Бу айланалар бир-бирларига нисбатан қандай жойлашади?
- A) Айлана билан умумий нүктага эга эмас.
 B) Кесишиди.
 C) Ички уринади.
 D) Ташқи уринади.
- 10.** Икки айлананинг радиуслари 6 см ва 8 см. Уларнинг марказлари орасидаги масофа 14 см. Бу айланалар бир-бирларига нисбатан қандай жойлашади?
- A) Айлана билан умумий нүктага эга эмас.
 B) Кесишиди.
 C) Ички уринади.
 D) Ташқи уринади.
- 11.** Икки айлананинг радиуслари 10 см ва 20 см. Уларнинг марказлари орасидаги масофа 10 см. Бу айланалар бир-бирларига нисбатан қандай жойлашади?
- A) Айлана билан умумий нүктага эга эмас.
 B) Кесишиди.
 C) Ички уринади.
 D) Ташқи уринади.
- 12.** Мос равишда марказлари O_1 , O_2 ва радиуслари R_1 , R_2 бўлган иккита айлана ички уринади. Улар учун қандай муносабат ўринли?
- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| A) $O_1O_2 < R_1 + R_2$. | B) $O_1O_2 = R_1 + R_2$. |
| C) $O_1O_2 > R_1 + R_2$. | D) $O_1O_2 = R_1 - R_2 $. |
- 13.** Умумий марказли икки айлана радиусларининг нисбати O_1 , O_2 , R_1 , R_2 каби. Улардан ясалган ҳалқанинг эни 5 см бўлса, диаметрларини топинг.
- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| A) $O_1O_2 = R_1 - R_2 $. | B) $O_1O_2 > R_1 - R_2 $. |
| C) $O_1O_2 < R_1 - R_2 $. | D) $O_1O_2 = R_1 + R_2$. |
- 14.** Умумий маркази иккита айлана радиусларининг нисбати 2:3 каби. Улардан ясалган ҳалқнинг эни 5 см бўлса, диаметрларини топинг.

- A) 2 см ва 3 см.
C) 10 см ва 15 см.
- B) 15 см ва 20 см.
D) 30 см ва 20 см.
- 15.** Айланадан ташқарыда ётган нүктадан унга иккита уринма үтказилған. Шу нүктадан айланагача бўлған энг қисқа масофа айлананинг радиусига teng. Уринмалар орасидаги бурчакни топинг.
A) 30° .
B) 45° .
C) 60° .
D) 120° .
- 16.** Айланадаги нүктадан иккита ватар үтказилған, уларнинг ҳар бири айлананинг радиусига teng. Ватарлар орасидаги бурчакни топинг:
A) 30° .
B) 45° .
C) 90° .
D) 120° .
- 17.** Айланадан ташқарыда ётган нүктадан айлана нүқталаригача бўлған энг узун ва энг қисқа масофалар мос равишида 50 см ва 30 см. Шу айланалар радиусларини топинг.
A) 10 см.
B) 20 см.
C) 30 см.
D) 40 см.
- 18.** Айлананинг ичида ётган нүктадан айлана нүқталаригача бўлған энг узун ва энг қисқа масофалар мос равишида 50 см ва 30 см. Шу айланалар радиусларини топинг.
A) 30 см.
B) 40 см.
C) 50 см.
D) 80 см.
- 19.** Берилган нүктадан радиуси 8 см бўлған айланага үтказилған уринмалар ўзаро тўғри бурчак ҳосил қиласи. Шу уринмаларнинг кесмаларини (берилган нүқта билан уриниш нүқтаси орасидаги масофа) топинг:
A) 4 см.
B) 8 см.
C) 12 см.
D) 16 см.
- 20.** Берилган нүктадан айланага үтказилған уринмалар ўзаро 60° ли бурчак ясайди. Берилган нүқта билан айлана марказигача бўлған масофа 24 см. Айлана радиусини топинг.
A) 6 см.
B) 8 см.
C) 12 см.
D) 24 см.

ГЛОССАРИЙ

Аксиома — исбот талаб құлмайдыган ҳақиқат.

Асосий түшунчалар — изоҳсиз қабул қилинадыган түшунчалар.

Бирлик кесма — узунлиги танлаб олинған үлчов бирлигига тенг бўлган кесма.

Бурчак — бир нуқтадан чиқадыган иккита нур билан чекланган текислик қисми.

Бурчак биссектрисаси — бурчак учидан чиқиб, уни тенг иккига ажратадыган нур.

Бурчак томонлари — бурчакни ташкил этадыган нурлар.

Бурчак учи — бурчакни ташкил этадыган нурларнинг нуқтаси.

Вертикал бурчаклар — бир бурчакнинг томонлари иккинчи бурчак томонларининг давоми бўладыган икки бурчак.

Гипотенуза — тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчигига қарши ётган томони.

Доира — берилган нуқтадан маълум масофадан ошмайдыган текисликнинг барча нуқталаридан иборат фигура.

Доира диаметри — доирани чеклаб ўтадыган доира диаметри.

Доиравий сектор — бурчак маркази ичидан жойлашган доира қисми.

Доира хордаси — доирани чеклаб ўтадыган айланана хордаси.

Ёйик бурчак — томонлари тўғри чизик ҳосил қиласынан ёки томонлари тўлдирувчи нур бўлган бурчак.

Изоҳ — янги түшунчалар маъносини олдиндан маълум бўлган түшунчалар орқали түшунтирадыган гап.

Катет — тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчак ҳосил қиласынан ёки томонлари.

Кесма — тўғри чизикнинг берилган икки нуқтаси ва улар ўртасида ётган барча нуқталардан иборат қисми.

Кесмалар ўрталари — кесмани тенг иккига бўладыган нуқта.

Кесманинг ўрта перпендикулярлари — кесмага перпендикуляр ва унинг ўртаси орқали ўтадыган тўғри чизик.

Кесма узунлиги — бирлик кесмани берилган кесма бўйи бўйлаб неча марта жойлаштириш мумкинлигини кўрсатадыган манфий сон.

Марказ бурчак — айлананинг икки радиуси ўртасидаги бурчак.

Мунтазам учбурчак — тенг томонли учбурчак.

Марказ айланалари — марказлари умумий бўлган айланалар.

Нур — ярим тўғри чизик.

Нуқтадан тўғри чизиккача бўлган масофа — перпендикулярнинг узунлиги.

Нуқталарнинг геометрик ўрни — берилган хоссаларни ёки бир неча хоссаларни таъминлайдыган барча нуқталардан иборат фигура.

Оғма — берилган нуқтадан берилган тўғри чизикка тортилган кесма.

Параллель тўғри чизиқлар — битта текисликда ётган ва умумий нуқтаси бўлмаган тўғри чизиқлар.

Перпендикуляр — берилган нүктадан берилган түғри чизикқа туширилган кесма.

Перпендикуляр түғри чизиклар — түғри бурчак ҳосил қилган ҳолда кесишигандык түғри чизик.

Тенг бурчаклар — икки бурчак кесишигандык мөс томонлари ва учлари түғри келадигандык бурчаклар.

Тенг кесмалар — кесишигандык учлари түғри келадигандык кесмалар.

Тенг учбурчаклар — мөс томонлари ва бурчаклари тенг бўлган учбурчаклар.

Тенг фигуralар — мөс нүкталари кесишидигандык иккита фигура.

Тенг ёнли учбурчак — икки томони тенг бўлган учбурчак.

Тенгтомонли учбурчак — барча томонлари ўзаро тенг бўлган учбурчак.

Теорема — аниқлиги исботланадигандык гап.

Түғри бурчак — ёйик бурчакнинг ярми ёки ўзининг қўшни бурчагига тенг бўлган бурчак.

Түғри бурчакли учбурчак — бир бурчаги түғри бўлган учбурчак.

Транспортир — бурчакларни ўлчашга мўлжалланган маҳсус қурол.

Турли томонли учбурчак — томонларининг узунликлари ҳар хил бўлган учбурчак.

Уриниш нүктаси — айланадан учбурчакнинг умумий нүктаси.

Учбурчак — битта түғри чизик бўйида ётмайдигандык уч нүктадан ва ушбу нүкталарни жуфт-жуфт қўшадигандык учта кесмадан иборат фигура.

Учбурчакнинг баландилиги — учбурчакнинг учидан унга қарши ётган томонни ўз ичига оладигандык түғри чизикқа тушурилган перпендикуляр кесма.

Учбурчакнинг биссектрисаси — учбурчак бурчаги биссектрисасининг учи ва унга қарши ётган томонини қўшадигандык кесма.

Учбурчакнинг бурчаги — учи учбурчакнинг учи, томонлари эса учбурчакнинг томонлари бўлган бурчак.

Учбурчакнинг медианаси — учбурчакнинг учи ва унга қарши ётган томони ўртасини бирлаштирадигандык кесма.

Учбурчакнинг ўрта чизиги — учбурчакнинг икки томони ўртасини бирлаштирадигандык кесма.

Учбурчакнинг периметри — учбурчакнинг барча томонлари узунликларининг йиғиндиси.

Учбурчакнинг ташқи бургачи — учбурчакнинг ички бургачи билан қўшни бурчак.

Учбурчакка ташқи чизилган айлана — учбурчакнинг барча учлари орқали ўтадигандык айланга.

Учбурчакка ички чизилган айлана — учбурчакнинг барча томонлари билан уринадигандык айланга.

Циркуль — айлана чизишга мүлжалланган қурол.

Ярим түғри чизик — түғри чизиқнинг берилған нүктадан бир томонда ётган барча нүкталардан иборат қисми.

Яримтекислик — түғри чизиқнинг бир томонда ётадиган ва ана шу түғри чизик ва нүкталардан тузилған текисликнинг қисми.

Ярим айлана — диаметрга уланадиган ёй.

Үткір бурчак — түғри бурчакдан кичик бурчак.

Үткір бурчаклы учбурчак — барча бурчаклари үткір бўлған учбурчак.

Ўтмас бурчак — түғри бурчакдан катта, ёйик бурчакдан кичик бурчак.

Ўтмас бурчаклы учбурчак — бир бургачи ёйсимон бўлған учбурчак.

Құшни бурчаклар — бир томони умумий, бошқа икки томони эса түғри чизик бўйида ётадиган икки бурчак.

ЖАВОБЛАР

1-бөб. ГОЕМЕТРИЯНИНГ БОШЛАНГИЧ ТУШУНЧАЛАРИ

1.2. A, B, C, D нүкталар битта түрі чизикқа тегишли. **1.3.** Учта. **1.4.** а) 6; в) 10; в) 15. **1.5.** а) 5 та түрі чизик, 10 та кесишиш нүктаси; в) 7 түрі чизик, 21 та кесишиш нүктаси. **1.7.** $b, c, d, e, g, h, p, q, r$. **1.8.** a, b, c, d түрі чизиклар битта нүктада кесишиди. **1.9.** Битта нүктада эмас, битта нүкта, иккита нүкта, учта нүкта. **1.13.** Онажон, Нурбек, Саида, Рамазон. **1.14.** а) 3; в) 6; в) 10; г) $\frac{n(n - 1)}{2}$. **1.15.** а) 3; в) 6; в) 10; г) $\frac{n(n - 1)}{2}$. **2.1.** Чексиз күп. **2.2.** Иккита. **2.3.** AB ва AC , BA ва BC . **2.6.** а) ва д), в) ва е), в) ва г). **2.7.** C ва D нүкталар A нүктанинг бир томонида ётади. **2.10.** 5, 4, 1, 6, 3, 2. **2.13.** а) 6; в) 8; в) 10; г) $*2n$. **2.14.** а) 3; в) 6; в) 10; г) $\frac{n(n - 1)}{2}$. **2.15.** AB ва CD кесмалари тенг. **3.3.** 6 см. **3.4.** 6 см. **3.5.** а) 5 см; в) 7 дм; в) 17 м. **3.6.** а) 8 см; в) 20,5 см; в) 4,5 см; г) 12,5 см. **3.7.** В нүкта A ва C нүкталари орасида ётади. **3.8.** Йүк. **3.9.** Йүк. **3.10.** Йүк. **3.11.** а) 15 см; в) 5 см. **3.12.** $AB = 2 CD$. **3.13.** 2 см ва 4 см. **3.14.** а) 9 см ва 6 см; в) 10 см ва 5 см; в) 6 см ва 9 см. **3.15.** 8,5 см. **3.16.** а) 40 мм; в) 80 мм; в) 20 мм. **3.17.** 3 км ёки 7 км. **3.18.** Тасмани иккі букланг, кейин яна иккі букланг. Хосил бўлган ярим тасмани кесиб олинг. Қолган қисмининг узунлиги 150 см бўлади. **3.19.** 16 см. **4.2.** а), б), в), г), д) йўқ. е) ха; **4.3.** 4. **4.4.** 6. **4.5.** 8. **4.7.** А нүкта бурчак томонига тегишли; D нүкта бурчак ичига тегишли. **4.8.** 12. **4.9.** 2. **4.10.** 1. **4.11.** а) 6; в) 4. **4.12.** 7. **4.13.** 11. **4.14.** 6. **4.15.** AOB ва BOD , AOB ва AOE , AOF ва AOC , AOF ва FOD , BOC ва BOF , BOC ва COE . **4.16.** AOB ва EOD , AOF ва DOC , BOC ва EOF , BOF ва COE . **4.17.** $2n$. **4.18.** а) 2; в) 3; в) 4; г)* n . **4.19.** а) 2; в) 3; г) 4; д)* n . **4.20.** $\frac{n(n + 1)}{2} + 1$. **5.1.** а), д) ва и); в), г) ва з); в), е) ва ж). **5.2.** PQR бурчаги. **5.3.** 3, 2, 5, 6, 1, 4. **5.5.** а) ха; в) йўқ. **5.6.** 30° , 150° , 150° . **5.7.** 6. **5.8.** а) 3; в) 2; в) 1. **5.9.** а), в) йўқ; в) ха. **5.14.** 70° . **5.17.** а) e ; в) f ; в) g ; г) h . **5.18.** Шарқ ёки ғарб. **5.19.** а) йўқ; в) ха кўрсатилган бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг. **5.22.** 80° ва 100° . **5.23.** 36° ва 144° . **5.24.** 126° . **5.25.** Йўқ. **6.1.** а) 90° ; в) 45° ; в) 135° ; г) 180° ; д) 90° ; е) 45° ; ж) 135° . **6.2.** 40° , 70° , 160° , 30° , 120° , 90° . **6.5.** 135° . **6.7.** 45° . **6.8.** 30° . **6.9.** 45° . **6.10.** 90° . **6.11.** 142° . **6.12.** 120° ва 60° . **6.13.** а) 105° ва 75° ; в) 110° ва 70° ; в) 36° ва 144° ; г) 90° ва 90° . **6.14.** а) 72° ва 108° ; в) 54° ва 126° ; в) 55° ва 125° ; г) 88° ва 92° . **6.15.** 120° . **6.16.** 180° . **6.17.** 40° , 120° , 140° , 80° , 100° , 20° . **6.18.** а) 36° ; в) 30° . **6.19.** а) 20° ; в) 18° . **6.20.** 5°. **6.21.** 3 марта айланиш. **6.22.** а) 90° ; в) 180° ; в) 150° . **6.23.** а) 120° ; в) 60° ; в) 300° . **6.24.** а) 30° ; в) 15° ; в) 10° . **6.25.** 120° . **6.26.** 6 соат. **6.27.** 0,5°.

2-бөб. УЧБУРЧАКЛАР

7.1. ABC , ADC , BDC , BDE , CDE . **7.2.** а), в), д) ва з); в) ва е). **7.3.** а), в), в) йўқ. **7.4.** а), в), в) 3. **7.5.** а), в) йўқ; в) ха. **7.7.** $EF = 5$ см, $FG = 6$ см, $EG = 7$ см. **7.8.** $E = 40^\circ$, $F = 60^\circ$, $G = 80^\circ$. **7.9.** $PQ = XY = 5$ см, $BC = YZ = 6$ см, $AC = PR = 7$ см. **7.14.** 75 см. **7.15.** 20 см ва 10 см. **7.16.** 12 см, 18 см ва 24 см. **7.17.** 30.

7.18. 35. 8.1. Ҳа. 8.2. Ҳа. 8.3. 3 см. 8.4. Ҳа. 8.5. 5 см. 8.6. ABD әз CBE . 8.7. Ҳа, EPH әз FPG , EPG әз FPH , EGH әз FHG , EFH әз FEG . 8.9. 4 см. 8.14. Масофалар тенг. 8.18. Йўқ. 9.1. Ҳа. 9.2. а) $AB = CD$, $BC = AD$; в) $AB = AD$, $CB = CD$. 9.3. а) ABC әз ADC ; в) ABD әз CDB ; в) ABD әз CBE ; г) AOD әз BOC , ACD әз BDC ; д) ACD әз BCE , ABE әз BAD ; AOE әз BOD ; е) AOD әз BOC , ABD әз BAC . 9.11. AHB әз CPD , ABC әз CDA , BHC әз DPA . 9.12. $AB = 11$ см, $BC = 19$ см. 9.15. 13 см. 9.16. 4 см. 9.17. 40° . 10.1. а) ABC , AOB , AOC , BOC ; в) MPN , PNQ , NQK , MNK . 10.5. а) иккита учурчак, $AO = AB$, $A_1O = A_1B_1$; в) иккита учурчак, $HG = HF$, $EG = EF$; в) уча учурчак, LMP , KLM , NLM . 10.11. а) 3,2 м, 6, 2 м, 6,2 м; в) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. 10.12. 6 см, 16 см, 16 см. 10.13. Ҳа. 10.14. а), в), в) Ҳа. 10.24. 15 м. 11.1. а) ADC әз BDC ; в) EFH әз GFH ; в) KLN әз MNL ; г) POR әз QOR , POS әз QOS , PRS әз QRS ; д) AOD әз BOC , ABD әз BAC , ACD әз BDC ; е) KLS әз NMS , KMS әз NLS ; ж) AOB , BOC , COD , AOD ; ABD , BCD , ADC , DAB . 11.3. 31° . 11.4. 59° . 12.1. а), в), в) Ҳа. 12.2. а), в) Ҳа. 12.3. Ўтмас. 12.4. а), в) йўқ; в) ҳа. 12.5. Ўтири, тўғри, ўтмас. 12.6. $\angle A > \angle C > \angle B$. 12.7. а) A ; в) B . 12.8. 1 бурчак 2 бурчакдан катта. 12.9. а) $BC > AC > AB$; в) $BC > AC = AB$. 12.15. $AB > BC$. 13.3. 1, 4, 5 әз 2, 3, 7. 13.4. а) Ҳа; в) йўқ. 13.5. Йўқ. 13.6. Ҳа. 13.7. 5 см.

3-боб. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ

14.1. битта. 14.2. иккита. 14.3. Йўқ. 14.4. Йўқ. 14.6. 0,5. 14.7. 3. 14.8. 4. 14.9. а), в) AB_1 . 15.1. 4. 15.2. Йўқ. 15.3. Ҳа. 15.4. Ҳа. 15.6. A әз f , b әз e , c әз g , d әз h , p әз q . 15.7. c әз d . 15.10. а) 118° ; в) 70° ; в) 65° . 15.11. а) 150° , 30° ; в) 55° , 125° . 15.12. 75° әз 105° . 16.1. 60° . 16.2. 45° . 16.3. 60° . 16.4. 61° . 16.5. 30° . 16.6. 54° . 16.7. 100° . 16.8. 30° . 16.9. а) 130° ; в) 120° ; в) 120° ; г) 18° . 16.10. 41° әз 41° . 16.11. 120° . 16.12. 30° . 16.13. 40° . 16.14. 64° . 16.15. 115° . 16.16. 69° . 16.17. 140° . 16.18. 51° . 16.19. 60° әз 30° . 16.20. 360° . 16.23. 180° . 16.24. 10° . 16.25. 38° . 16.26. 48° . 16.27. 52° . 16.28. 74° . 16.29. 48° . 16.30. 120° . 16.31. 45° . 16.32. 60° . 16.33. 15° . 16.34. 3 см. 17.1. а), в) Йўқ. 17.2. а), в), в) Йўқ. 17.3. 10 см. 17.4. а) 6 см; в) 8 см. 17.5. АВ кесма энг қисқа йўл бўлади. 17.6. 29 см. 17.7. 4 см, 8 см, 8 см. 17.16. AC әз BD кесмаларнинг кесишиш нуқтасида.

4-боб. АЙЛАНА. ГЕОМЕТРИК ЯСАШЛАР

18.1. а) $OA > R$; в) $OA > R$. 18.2. Айлана. 18.3. Чексиз кўп. 18.4. 110 мм. 18.5. 30 см. 18.6. а) 0,5 м, 0,6 м, 0,7 м, 1 м; в) 2,5 м, 3 м, 3,5 м, 5 м. 18.8. а) 5 м; в) 6 м; в) 7 м; г) 10 м. 18.10. 1 см. 18.12. Чексиз кўп. 18.14. 60° . 18.15. $d - R$, $d + R$. 18.16. 15 см. 18.17. $R - d$, $R + d$. 18.18. 12 см. 19.1. Ватар. 19.2. а) бирорта ҳам эмас; в) иккита; в) битта. 19.3. Чексиз кўп. 19.4. Иккита. 19.5. 90° . 19.6. а) кесишиади; в) уринади; в) умумий нуқталари йўқ. 19.9. Параллель. 19.10. 4. 19.11. а) 3; в) 4. 19.14. Иккита тенг бўлакка. 20.2. а) 2 см; в) 8 см. 20.3. а) ташки уринади; в) умумий нуқталари йўқ, бири иккинчисининг ичида ётади. 20.4. а) ички уринади; в) бири иккинчисининг ичида ётади. 20.5. а) 10 см; в) 2 см. 20.8. $d - R_1 - R_2$, $d + R_1 + R_2$. 20.9. $R_1 - d - R_2$, $R_1 + d + R_2$, 20.10. 50. 20.14. а), в), в) Ҳа. 20.15. Йўқ. 20.16. а) 2; в) 6; в) 12; г) $n(n - 1)$. 20.17. а) 4; в) 8; в) 14. 20.18. 378 млн. км ва 78 млн. км. 21.4. Ҳа. 21.6. Йўллар ёрдамида қурилган бурчак биссектрисасининг иккита дарахтни бирлаштирувчи кесманинг ўрта перпендикуляр билан кесишиш