А. Е. Абилқасимова, В.Е. Корчевский,
З. А. Жумағулова

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ

11

Умумтаълим мактабларининг
табиий-математик йўналишдаги
11-синфи учун дарслик

*Қозоғистон Республикаси
Таълим ва фан министрлиги тасдиқлаган*

Алмати "Мектеп" 2020

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72
А17

Таржимон: ***М.Ю. Зайниддинова***

ШАРТЛИ БЕЛГИЛАР:

— янги мавзуни ўзлаштиришга қўйиладиган таълим мақсадлари

— мустақил бажариш учун топшириқлар

— мустаҳкамлаш учун саволлар

— теорема ёки хоссалар исботининг якуни

— қўшимча материаллар

— ҳамма ўқувчилар бажариши керак бўлган топшириқлар

— ўртача даражали мураккабликдаги топшириқлар

— юқори даражали мураккабликдаги топшириқлар

— электрон ресурслардан фойдаланиш учун топшириқлар

ТАКРОРЛАШ — ўтилганларни такрорлашга доир машқлар

Абилқасимова А.Е. ва бошқ.
А17 **Алгебра ва анализ асослари.** Умумтаълим мактабларининг табиий-математик йўналишдаги 11-синфи учун дарслик. — Алмати: Мектеп, 2020. — 256 б., расм.

ISBN 978–601–07–1524—0

А $\dfrac{4306020503-156}{404(05)-20}$ 68(1)–20

УДК 373.167.1
ББК 22.14я72

ISBN 978–601–07–1524—0

КИРИШ

Азиз ўқувчилар! Сизларга тавсия қилинаётган дарслик 10-синф табиий-математик йўналишдаги “Алгебра ва анализ асослари” курсининг давоми ҳисобланади.

11-синфда *бошланғич функция, аниқ ва аниқмас интеграллар, рационал ва иррационал кўрсаткичли даражалар, n-даражали илдиз, логарифм, даражали, кўрсаткичли ва логарифмик функциялар, комплекс сонлар, дифференциал тенглама, дискрет ва интервал вариацион қатор* тушунчалари билан танишиб, ушбу тушунчалар хоссаларини ўзлаштирасиз.

Шу билан бирга иррационал, кўрсаткичли, логарифмик тенгламалар ва тенгсизликлар ҳамда уларнинг системаларини, дифференциал тенгламаларни ечишни, даражали, кўрсаткичли ва логарифмик функцияларнинг ҳосилаларини топишни ўрганасиз.

Юқорида кўрсатилганларни ўзлаштириб, ясси фигураларнинг юзларини ва жисмларнинг ҳажмини аниқ интеграл ёрдамида топишни ўрганиб оласиз.

Дарслик 8 та бўлим, 28 та параграфдан ташкил топган.

Ҳар бир параграфдаги ўқув материалларининг охирида ўқувчиларга мустақил бажариш учун савол ва топшириқлар берилган.

Дарслик билан ишлаш давомида ҳар бир параграфдаги машқларнинг олдида берилган саволларга эътибор бериш керак. Ҳар бир бўлимнинг охирида бўлим материали ва математик саводхонликка доир тест топшириқлари берилган.

Дарсликда берилган материалларни ўзлаштириш жараёнини осонлаштириш учун ҳар бир параграфнинг бошида таянч тушунчалар, шунингдек, мисолларни ечиш йўллари кўрсатилган.

Ҳар бир мавзуни чуқур ўзлаштириш учун: А — ҳамма учун мажбурий топшириқлар; В — ўрта мураккабликдаги топшириқлар; С — юқори мураккабликдаги топшириқлар берилган. Шу билан бирга дарсликда * белгиси билан ажратиб кўрсатилган топшириқлар бор. Улар ижодий ёндашишни талаб этади. В гуруҳдаги топшириқларни бажаришга А гуруҳ топшириқларини бажариш малакаларини ўзлаштиргандан кейин киришган маъқул. С гуруҳдаги алоҳида топшириқларни бажариш давомида математика фанини чуқур ўзлаштириш қобилиятларингизни ривожлантира оласиз.

Шунингдек, дарсликда 10-11-синф алгебра ва анализ асослари курсини такрорлашга доир топшириқлар ва амалиётга йўналтирилган топшириқлар берилган.

Дарслик материалини ўзлаштириш давомида мустақил ишлашга, яъни матнни мустақил тушуниш, машқларни мустақил бажаришга доир топшириқлар берилган.

Баъзи тушунчаларни ёдга тушириш учун дарслик охирида глоссарий берилган.

Машқларнинг тўғри бажарилганлигини текшириш учун дарслик охирида жавоблар келтирган.

10-СИНФ АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

Ҳисоблашлар

1. Ҳисобланг:

1) $\dfrac{\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}30^\circ - \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}}{2\,\mathrm{tg}45^\circ - \cos 2\pi}$; 2) $\dfrac{\mathrm{tg}30^\circ + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{5\pi}{2} - 4\,\mathrm{ctg}45^\circ}$;

3) $6\cos 400^\circ - 8\cos^3 40^\circ$; 4) $\dfrac{4\sin 25^\circ \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$.

2. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\arcsin 0,5 + \arccos(-1) - \arccos 0 - \mathrm{arctg}1$;

2) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{arcctg}1$;

3) $\mathrm{arctg}\sqrt{3} + \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin 1$;

4) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\dfrac{1}{2} - \arccos 0 - \mathrm{arcctg}(-1)$.

3. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; 2) $\mathrm{ctg}\left(\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; 3) $\mathrm{tg}\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $\arccos\left(\sin\dfrac{27\pi}{7}\right)$; 5) $\arcsin\left(\sin\dfrac{10\pi}{3}\right)$; 6) $\arcsin(\sin 7)$;

7) $\arcsin(\cos 8)$; 8) $\arccos(\cos 12)$.

Функциянинг ҳосиласи

4. x_0 нуқтада $f(x)$ функция ҳосиласининг қийматини топинг:

1) $f(x) = 3\sqrt{2x} - \dfrac{5}{x} + 3x - 2$ ва $x_0 = 1$;

2) $f(x) = (3x + 4)^2 + \dfrac{6}{x+1}$ ва $x_0 = -2$;

3) $f(x) = \sin(3x - 2\pi) + 3\pi$ ва $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

4) $f(x) = \cos(2x - \pi) - 2\pi$ ва $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

5. Абсциссаси x_0 бўлган нуқтада $y = f(x)$ функциянинг графигига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг:

1) $y = 1 - \dfrac{2x+1}{x-1}$ ва $x_0 = 2$; 2) $y = 3 + \dfrac{x}{x+1} + \sqrt{3 - x}$ ва $x_0 = 2$.

6. x_0 нуқтада $f''(x)$ қийматини топинг:

1) $f(x)=4x+\sin 3x$ ва $x_0=\frac{\neq}{2}$;   2) $f(x)=2x+\cos 4x$ ва $x_0=\frac{\neq}{4}$;

3) $f(x)=x+\sin^2 3x$ ва $x_0=-\frac{\neq}{2}$;   4) $f(x)=3x+\sqrt{1+x^2}$ ва $x_0=2$.

7. Берилган оралиқда $y = f(x)$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ ва $[-1; 3]$;   2) $y = 2 + 3x^5 - 5x^3$ ва $[2; 3]$;

3) $y = \sqrt{x} - x$ ва $[0; 4]$;   4) $y = \frac{1}{x} + x$ ва $[0,5; 4]$.

8. $f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 2x - \sqrt{2x}$;   2) $f(x) = \sin^3 2x + \cos 3x - \frac{2}{x}$;

3) $f(x) = \mathrm{tg}^2 2x + \mathrm{ctg} 3x + \sqrt{\neq}$;   4) $f(x) = \mathrm{arctg} 2x + \arccos x + \sqrt{x}$;

5) $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2} + 3x - 2$;   6) $f(x) = x\sin 2x + \sqrt{2-3x}$.

9. $f'(x) = 0$ тенгламани ечинг:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3 - 2$;   2) $f(x) = 4 + 2x^2 - x^4$;

3) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 2$;   4) $f(x) = \sin^2 2x + 2x - \pi$.

Тенгламалар ва тенгсизликлар

10. $f'(x) < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи энг катта бутун сонни топинг:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$;   2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x$;

3) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x$;   4) $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

11. 1) $\frac{x-2}{2} \geqslant \frac{(\sqrt{x-6})^2}{x-7}$ тенгсизликнинг энг кичик бутун ечимини топинг;

2) $\frac{6-x}{\sqrt{x^2-8x+7}} \geqslant 0$ тенгсизликнинг энг катта бутун ечимини топинг;

3) $(x^2 + 4x - 12) \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} \leqslant 0$ тенгсизликни ечинг.

12. $f'(x) \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг:

1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x - x$;   2) $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}x$;

3) $f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x + 3x$;   4) $f(x) = \sin^2 3x - \frac{1}{12}\cos 6x + x$;

5) $f(x) = 1 + \arccos 3x + 2x$;   6) $f(x) = \mathrm{arcctg} 2x + 2x$.

13. $f'(x) = 0$ тенгламани ечинг:

1) $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$;   2) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$;

3) $f(x) = 2x - \mathrm{tg} x$;   4) $f(x) = x + \mathrm{ctg} x$.

14. Тенгламани ечинг:

1) $\sin^4\frac{x}{2} = \cos^4\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$;   2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$;

3) $\cos^2 x - \cos^2 2x = \cos^2 4x - \cos^2 3x$;   4) $5\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x \cdot \sin x + 6\cos^2 x = 5$;

5) $(x-1)^2(x^2-2x)=12$; 6) $(x-3)^2(x^2-6x)+16=4$;
7) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)-3=0$; 8) $(x^2+3x-4)(x^2+3x-2)+1=0$;
9) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0$; 10) $\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-\left(x-\frac{2}{x}\right)-16=0$.

15. Тригонометрик тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}\sin x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\operatorname{ctg} x \leqslant 1, \\ \operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}, \\ \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

Функция ва унинг графиги

16. $y=f(x)$ функцияни жуфтликка текширинг:

1) $f(x)=|x^3|\cos x$; 2) $f(x)=x^5\operatorname{arctg} x$; 3) $f(x)=|x\cos^3 x|+x$;
4) $f(x)=\cos x\cdot\sqrt{x+1}$; 5) $f(x)=\frac{\arcsin x}{x^2-1}$; 6) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x-2}$.

17. Функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг:

1) $y=2\cos\pi x$; 2) $y=\cos 3x\cos x+\sin x\sin 3x$;
3) $y=\frac{2}{3}\sin\frac{x}{2}+1$; 4) $y=2-3\cos 4\pi x$;
5) $y=\cos 4x\cos x-\sin x\sin 4x$; 6) $y=\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{4}$.

18. $f(x)$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

1) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$; 2) $f(x)=\frac{3x}{x^2-9}$; 3) $f(x)=\frac{x}{25-x^2}$; 4) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}$.

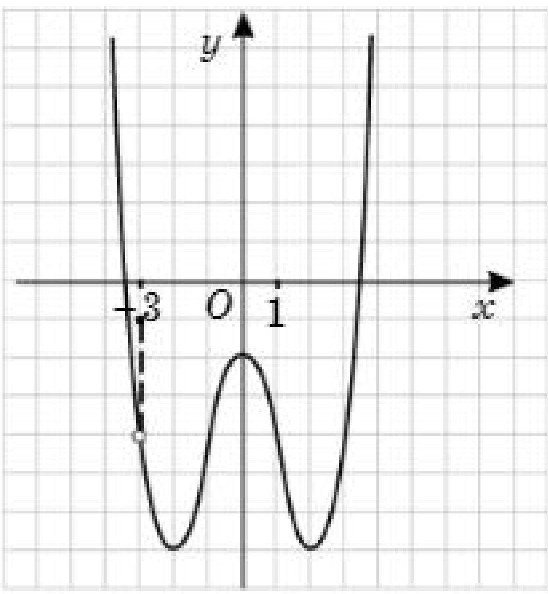
19. а) $x_0=0$ нуқтада $y=f(x)$ функциянинг графигига ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

1) $y=2x+\sqrt{x+1}$; 2) $y=\sqrt{3x+1}$; 3) $y=1+\frac{1}{x+2}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

б) Берилган тўғри чизиққа параллел бўладиган $y=f(x)$ функциянинг графигига ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

1) $f(x)=\sqrt{3x+1}$, $y=\frac{3}{4}x+1$; 2) $f(x)=\sqrt{3-2x}$, $y=2-x$.

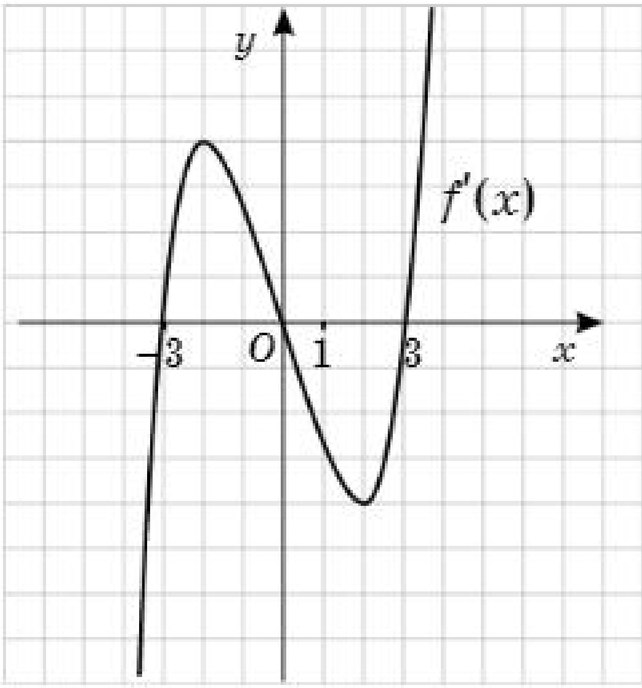
20. 1-расмда берилган функциянинг графиги бўйича:



1-расм

1) минимум нуқталарни;
2) максимум нуқталарни;
3) эгилиш нуқталари координаталарини;
4) функциянинг экстремум нуқталарини топинг.

21. 2-расмда $f'(x)$ функциянинг графиги берилган.



2-расм

Функциянинг максимум ва минимум нуқталарини топинг.

22. Функцияни текширинг ва графигини ясанг:

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 2$;

3) $y = 2x + \frac{2}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x} - \frac{x}{4}$.

Ҳосиланинг татбиқи

23. Нуқта тўғри чизиқли $s(t) = 4t^2 - \frac{1}{2}t$ қонун бўйича ҳаракатланади ($s(t)$ — метрларда, t — вақт орқали ифодаланган). [1; 8] оралиқдаги вақтнинг қандай моментида тезлик энг катта қийматга эга бўлади?

24. 1) Тўғри тўртбурчак шаклидаги спорт майдончасининг юзи 3600 м^2. "Рабиц" тўрининг энг кичик сонини қўллаш учун майдонча юзасининг ўлчовларини топинг.

2) Трапециянинг битта асоси ва иккита ён томонларининг узунлиги 15 см га тенг. Трапециянинг юзи энг катта бўладиган иккинчи асосининг узунлигини топинг.

25. Бир томони дарё билан чегараланган тўғритўртбурчак шаклидаги ер майдонини уч томонидан қўршаб олиш учун 600 м сим берилган. Юзи энг катта бўладиган ер майдонининг ўлчовларини топинг.

26. Тўғрибурчакли трапеция шаклидаги ер майдонининг ўткир бурчаги 30°, периметри 96 м. Ер майдонининг энг катта юзини топинг.

27. Катети $4\sqrt{2}$ см бўлган тенгёнли тўғри бурчакли учбурчакка юзи энг катта бўлган тўғри тўртбурчак ички чизилган. Тўғри тўртбурчакнинг икки учи гипотенузада, қолган икки учи катетларда ётади. Тўғри тўртбурчак томонлари узунликларининг йиғиндисини топинг.

28. 1) Йиғиндининг қиймати энг катта бўладиган 484 сонини иккита мусбат соннинг кўпайтмаси кўринишида ёзинг.
2) Иккита мусбат соннинг йиғиндиси 98 га тенг. Уларнинг кўпайтмаси энг катта бўладиган иккита сонни топинг.

29. $M(0; 3)$ нуқтага энг яқин жойлашган $y = 0{,}5x^2$ функция графигига тегишли K нуқтанинг координаталарини топинг.

Кўпҳад

30. $f(z)$ ва $h(z)$ кўпҳадлар айнан тенг бўладиган a параметрнинг барча қийматларини топинг:
1) $f(z) = (a^2 - 2)z^3 - 2z^2 + (2a + 1)z - 4$ ва $h(z) = 2z^3 - 2z^2 + (a - 1)z - a - 6$;
2) $f(z) = (a^2 - 2a)z^4 - 2z^2 + (3a - 2)z - 4 + a$ ва $h(z) = -z^4 - 2z^2 + (2a - 1)z - a - 2$.

31. $P(z) = z^5 - 2z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 7$ кўпҳадни $z - 2$ иккиҳадга бўлинг. Бўлинма ва қолдиқни топинг.

32. Кўпҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратинг:
1) $y^4 - 10y^2 + 9$; 2) $y^3 + 3y^2 - 4y - 12$.

33. a ва c нинг қандай қийматларида $P(y)$ ва $K(y)$ кўпҳадлар тенг бўлади:
1) $P(y) = 2y^3 - 5y^2 + (a - c)y - 11$, $K(y) = 2y^3 + (a + c)y^2 + 3y - 11$;
2) $P(y) = y^3 + 10y^2 + 3y + a - 3c$, $K(y) = y^3 + (a + 2c)y^2 + 3y - 5$?

34. a нинг қандай қийматларида $Q(y)$ кўпҳаднинг битта илдизи 1 га тенг бўлади:
1) $Q(y) = 2y^3 - 3y^2 + 3y + 2a^2 - 3a - 7$;
2) $Q(y) = y^3 + 7y^2 - 2y + a^2 - 5a$?

35. 1) $P(x)$ кўпҳадни $x^2 - 5x + 6$ учҳадга бўлганда $2x - 5$ қолдиқ ҳосил бўлади. $P(2) - 3P(3)$ ифоданинг қийматини топинг;
2) $P(x)$ кўпҳадни $x^2 - x - 6$ учҳадга бўлганда $5x - 7$ қолдиқ ҳосил бўлади. $P(3) - 2P(-2)$ ифоданинг қийматини топинг.

36. Симметрик тенгламани ечинг:
1) $y^4 + 2y^3 - y^2 + 2y + 1 = 0$;
2) $3y^4 - 2y^3 + 4y^2 - 4y + 12 = 0$.

Комбинаторика ва эҳтимоллар назарияси элементлари

37. 1) Мактаб ошхонасининг таомномасида 3 та биринчи, 3 та иккинчи ва 4 та учинчи таом бор. Учта таомдан (биринчи, иккинчи ва учинчи) ташкил топган тушликни неча усул билан танлаш мумкин?
2) Рақамлари такрорланмайдиган 2, 3, 6, 9 рақамлардан ташкил топган нечта тўрт хонали сон тузиш мумкин?
3) Сариқ, қизил ва қора ранглардан фойдаланиб, учбурчак, ромб ва квадратни неча усул билан бўяш мумкин?

38. Тengламанинг илдизларини топинг:
1) $A_{2x+1}^{x-1} : A_{2x}^{x-1} = 31$; 2) $C_x^3 : A_x^3 = \frac{1}{24}$.

39. Бином ёйилмасидаги x^n кўпайтувчининг коэффициентини топинг:
1) $(x + 3)^6$, $n = 3$; 2) $(1 - 3x)^7$, $n = 4$.

40. 1) Қутида 4 та яшил ва 2 та сариқ шар бор. Қутидан иккита шар олинган. Олинган иккита шарнинг яшил рангли бўлиш эҳтимолини топинг.
2) Деталь тайёрлаш уч жараёндан ташкил топади. Биринчи ва иккинчи жараёнлардан ўтиш давомида деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли 0,01 га, учинчи жараёндан ўтишда яроқсиз бўлиш эҳтимоли 0,02 га тенг. Учта жараёндан кейин деталнинг яроқли бўлиш эҳтимолини топинг.

41. 200 та лотерея билетининг 10 тасида ютуқ бор.
1) Тасодифий олинган учта лотерея билетида ютуқ бўлиш эҳтимолини топинг.
2) Тасодифий олинган иккита лотерея билетидан бирида ютуқ бўлиши эҳтимолини топинг.

Амалиётга йўналтирилган топшириқлар

42. 1-жадвалда 11-синф ўқувчиларининг 200 м га югуриш натижалари берилган.

1-жадвал

Югуриш натижаларининг интервали (секундларда)	24-25	26-27	28-29	30-31	32-33
Натижаларни кўрсатган ўқувчилар сони	4	9	11	10	6

1) Мусобақага нечта ўқувчи қатнашган?
2) Югуриш натижалари қандай интервалларда ўзгарган?
3) Нечта ўқувчи 28 с дан 33 с гача бўлган натижаларни кўрсатган?
4) Нечта ўқувчи 27 с дан ортиқ бўлмаган натижаларни кўрсатган?

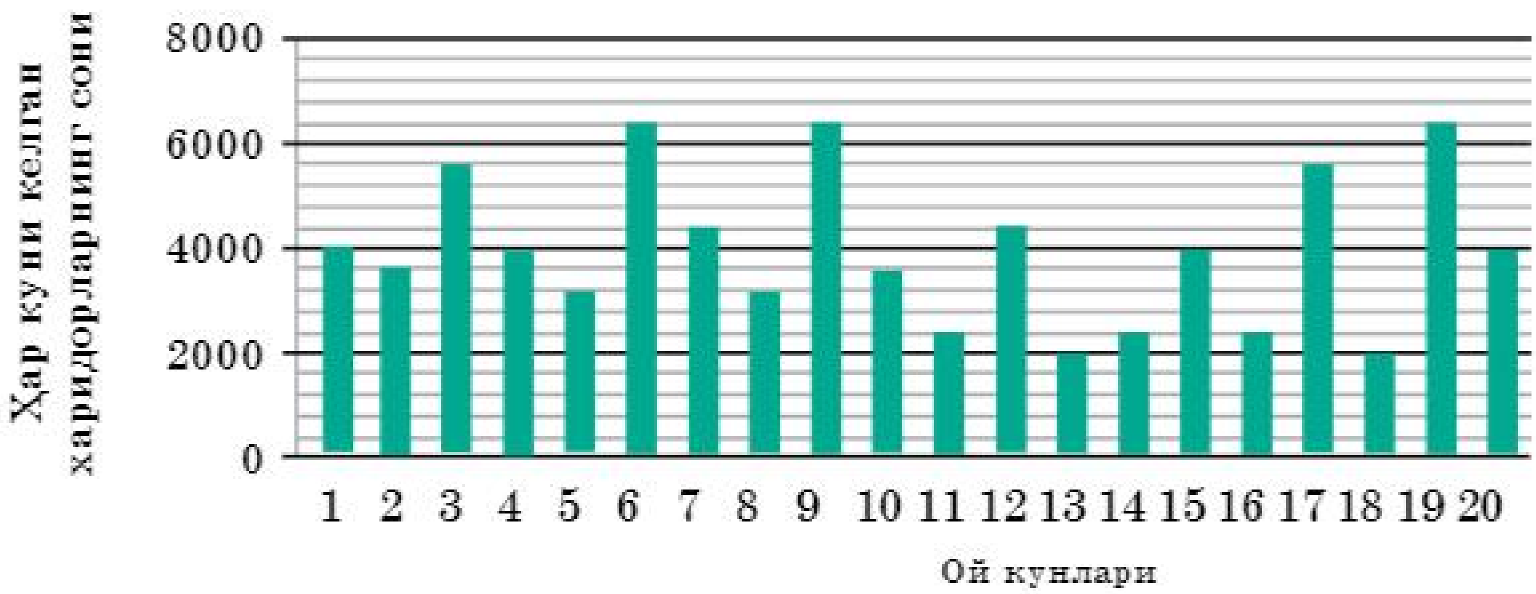
43. Уй қурилиши учун керак бўлган 25 т ғиштни учта фирманинг биридан харид қилиш мумкин. Битта ғиштнинг массаси 5 кг га тенг. Ғиштнинг баҳоси билан етказиб бериш баҳоси 2-жадвалда кўрсатилган.

2-жадвал

Фирма	1 дона ғиштнинг баҳоси (тенге)	Етказиб бериш баҳоси (тенге)	Қўшимча шартлар
X	254	190 000	Йўқ
Y	260	150 000	500000 тг дан ортиқ баҳога буюртма бўлганда етказиб бериш баҳоси 10% чегирма билан берилади
Z	270	145 000	500000 тг дан ортиқ баҳога буюртма бўлганда етказиб бериш баҳоси 20% чегирма билан берилади

1) Харид қилишнинг энг арзон баҳоси неча тенге бўлади?
2) Агар 30 т ғишт харид қилинадиган бўлса, у ҳолда энг кам сарф-харажат қилиш учун қайси фирмани танлаш керак?

44. 3-расмда 2018 йилнинг 1—20 март оралиғида дўконга келган харидорлар сони келтирилган.

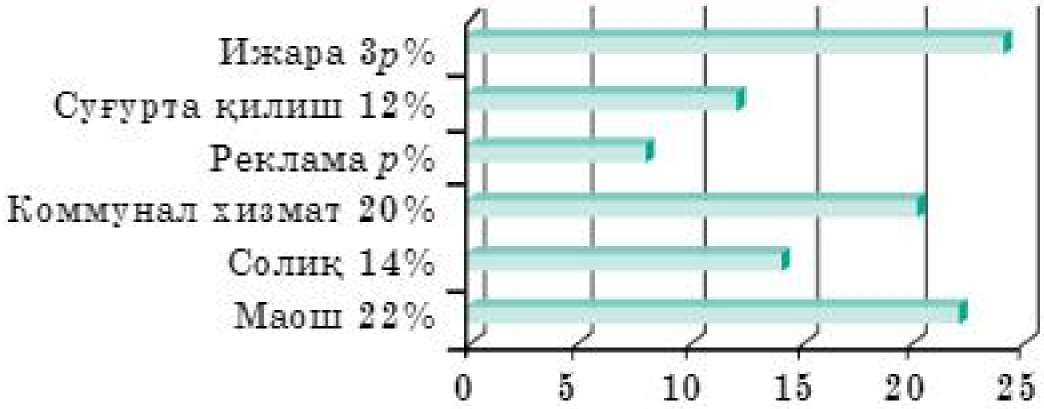


3-расм

1) Берилган оралиқда бир кунда харидорларнинг энг катта ва энг кичик сонлари айирмасини топинг.
2) Бир кунда харидорларнинг ўртача сонини топинг.
3) Агар бир харидор ўрта ҳисобда 2540 тг га харид қилган бўлса, у ҳолда дўкондаги бир кунлик даромадни топинг.

45. A, B, C — турли хил тоқ рақамлар. $\overline{ABC} \cdot \overline{ABC} = 32\ 041$ экани маълум. $(C + B) : (4A)$ ифоданинг қийматини топинг.

46. 4-расмда фирманинг бир ойлик сарф-харажати кўрсатилган. Сарф-харажатнинг умумий миқдори 2 500 000 тенге.



4-расм

1) Фирманинг ижара учун сарфлаган харажати қандай?
2) Ижара учун тўланган пул умумий харажатнинг неча фоизини ташкил этади?

47. Ўқувчи мактаб ошхонасида ҳар куни овқатланиш учун бўтқа, бир стакан чой ёки компот ва битта ширинлик олади. Бўтқа 60 тг, ширинлик 45 тг, чой 35 тг, компот 50 тг туради. Ўқувчининг шаҳар транспортига тўлайдиган йўл ҳақи 40 тг.
1) Ҳар куни ўқувчига неча тенге керак?
2) Мактабда беш кунлик ўқиш ҳафтаси. Агар оилада иккита фарзанд ва улар уч кун чой, икки кун компот сотиб оладиган бўлса, у ҳолда ота-она ҳар бир фарзандига кунига неча тенгедан бериши керак?

48. 1) Қутида қизил, кўк, яшил рангли жами 32 та шар бор. Қизил шарлар сони яшил рангли шарлар сонидан 18 марта ортиқ. Қутида кўк рангли шар нечта?
2) Қутида 14 та кўк ва 12 та қизил шар бор. Бир хил рангли олтита шар олиш учун қутидан нечта шарнинг энг кичик сонини олиш керак?

49. 3-жадвалдан фойдаланиб, функциянинг формуласини ёзинг ва $z = 10$ бўлганда қийматини топинг.

3-жадвал

z	-2	-1	0	1	2	3	4
y	1	-2	-3	-2	1	6	13

50. Тўғри параллелепипед шаклидаги идишга 1700 см^3 сув қуйилди. Бунда идишдаги сувнинг сатҳи 10 см га тенг бўлди. Сўнгра идишга деталь солинди. Натижада сувнинг баландлиги 5 см кўтарилди.
1) Деталнинг ҳажми нимага тенг?
2) Агар сувнинг сатҳи 15 см бўлса, у ҳолда идишдаги сувнинг ҳажми қанча?
3) Агар идишга солинган деталнинг ҳажми 1700 см^3 бўлса, идишдаги сувнинг сатҳи неча сантиметр кўтарилади?

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг лимити, функциянинг ҳосиласи, мураккаб функциянинг ҳосиласи, ҳосилани ҳисоблаш қоидалари, ҳосиланинг геометрик ва физик маъноси, функциялар ҳосилаларининг жадвали.

I БОБ

БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА ИНТЕГРАЛ

1-§. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛНИНГ ХОССАЛАРИ

Сиз *бошланғич функция* тушунчаси билан танишасиз ва бошланғич функцияни топишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, аниқланиш соҳаси, ўзгармас сон, ҳосила, функциянинг графиги

СИЗ БИЛАСИЗ:

Агар $f(x) = 3x^2$ функция берилса, унинг ҳосиласи $f'(x) = 6x$ бўлади.

Исталган функциянинг ҳосиласи функция (ўзгармас ёки ўзгарувчига боғлиқ) эканлиги маълум.

Энди "Ҳосиласи маълум бўлган ҳолда функцияни қандай топиш мумкин?" деган савол туғилади.

$f(x) = 4x^3$ функция қандай функциянинг ҳосиласи эканлигини аниқлайлик, яъни ҳосиласи $f(x) = 4x^3$ бўлган функцияни қандай топиш мумкин?

Агар бундай функцияни шартли равишда $F(x)$ деб белгиласак, у ҳолда изланаётган функция $F(x) = x^4$ бўлади, чунки $F'(x) = (x^4)' = 4x^3$.

Исталган X тўпламда ўзгарувчи x учун $F'(x) = f(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда берилган тўпламда $f(x)$ функция учун $F(x)$ функция ***бошланғич функция*** *деб аталади.*

Исталган функция каби бошланғич функцияни ҳам барча ҳақиқий сонлар тўпламида ёки маълум бир оралиқда кўриб чиқиш мумкин.

Юқорида келтирилган мисолда $F(x) = x^4$ функция $(-\infty; +\infty)$ оралиқда, яъни барча ҳақиқий сонлар тўпламида $f(x) = 4x^3$ функция учун бошланғич функция бўлиб ҳисобланади.

МИСОЛ

1. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида $F(x) = \cos 5x$ функция $f(x) = -5\sin 5x$ функция учун бошланғич функция бўлади, чунки $F'(x) = (\cos 5x)' = -5\sin 5x$, бунда $x \in (-\infty; +\infty)$.

МИСОЛ

2. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ интервалда $F(x) = -\dfrac{1}{x} + 2$ функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ функция учун бошланғич функция бўлади, чунки $F'(x) = \left(-\dfrac{1}{x} + 2\right)' = \dfrac{1}{x^2}$.

МИСОЛ

3. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида $F(x) = \frac{1}{x}$ функция $(-\infty; +\infty)$ оралиқда $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ функциянинг бошланғич функцияси бўлмайди, чунки $x = 0$ нуқтада $F'(x) = f(x)$ тенглик бажарилмайди. Бироқ $F(x)$ функция $(-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$ интервалларда $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўлади.

Функциянинг битта эмас, чексиз кўп бошланғич функцияси мавжуд. Масалан, $f(x) = 4x^3$ функция учун бошланғич функция сифатида $F(x) = x^4$ функциянигина эмас, $G(x) = x^4 - 5$; $P(x) = x^4 + \frac{\sqrt{2}}{3}$; $Q(x) = x^4 + 7$ ва бошқа функцияларни ҳам олиш мумкин. Чунки бу функциялардан ҳар бирининг ҳосиласи $4x^3$ га тенг, яъни улар ҳосиласи нолга тенг бўлган маълум бир сон билангина фарқланади.

Теорема. *Агар маълум бир оралиқда $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўлса, у ҳолда шу оралиқда бу функциялар бир-биридан фақат ўзгармас сонгагина фарқланади.*

Исботи. Бунинг учун

$$\phi(x) = \Phi(x) - F(x) \qquad (*)$$

деб оламиз. Теорема бўйича берилган оралиқда $F'(x) = f(x)$ ва $\Phi'(x) = f(x)$ тенгликлар бажарилади. У ҳолда $\phi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Маълумки, ҳосилани ҳисоблаш қоидасига кўра фақат ўзгармас соннинг ҳосиласи нолга тенг. Демак, $\phi(x) = C = const$. Энди $\phi(x)$ нинг қийматини (*) тенгликка қўйсак,

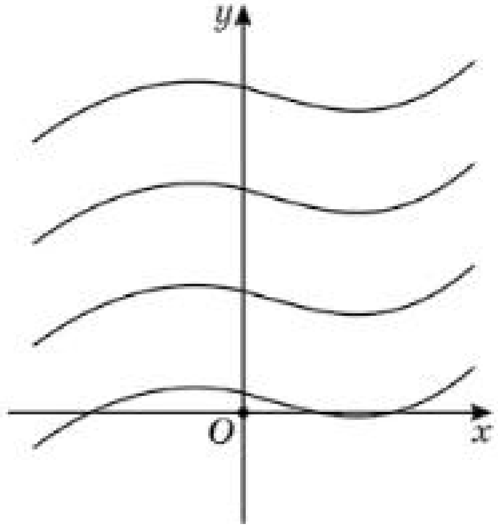
$$\Phi(x) = F(x) + C. \qquad (1)$$

Шундай қилиб, агар $F'(x) = f(x)$ ва C — исталган ўзгармас сон бўлса, у ҳолда $F(x) + C$ ифода ҳам $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади. ■

$\Phi(x) = F(x) + C$ тенглик бошланғич функциянинг асосий хоссаси ҳисобланади.

Сиз бошланғич функциянинг геометрик маъносини билиб оласиз.

$f(x)$ функция бошланғич функцияларининг умумий кўринишини кўрсатувчи (1) формуладаги ўзгармасни нолга тенг деб олиб, $y = F(x)$ функциянинг графигини ясаймиз. Қолган бошланғич функ-



5-расм

циялардаги фарқ ўзгармас C нинг қийматига боғлиқ бўлгани учун, уларнинг графикларини $y = F(x)$ функциянинг графигини Oy ўқи бўйича C бирликка параллел кўчириш орқали ҳосил қиламиз. Демак, *бошланғич функциянинг геометрик маъноси графиклари ўзаро параллел бўлган эгри чизиқлар тўплами бўлади* (5-расм).

Энди баъзи функцияларнинг бошланғич функциялари жадвалини кўриб чиқамиз (4-жадвал):

4-жадвал

Функция	Бошланғич функциянинг умумий кўриниши
$f(x) = k$ (k — ўзгармас)	$F(x) = kx + C$
$f(x) = x^n$, $n \in Z$, $n \neq -1$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \mathrm{tg}\, x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\mathrm{ctg}\, x + C$

Сиз *аниқмас интеграл* тушунчаси билан танишасиз ва аниқмас интегрални топишни ўрганасиз.

$f(x)$ функциянинг барча бошланғич функциялари тўплами $F(x) + C$ берилган $f(x)$ функциянинг ***аниқмас интеграли*** *деб аталади.*

Белгиланиши:

$$\int f(x)\, dx, \qquad (2)$$

бунда $f(x)$ — интеграл белгиси остидаги функция, $f(x)dx$ — интеграл белгиси остидаги ифода, x — интеграллаш ўзгарувчиси, $\int$ — интеграл белгиси.

Таърифга кўра $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, бу ерда C ўзгармаснинг ўрнига исталган сонни олиш мумкин, яъни унинг қиймати аниқланмаган. Шу сабабли $\int f(x)\,dx$ аниқмас интеграл бўлиб ҳисобланади.

Аниқмас интегралнинг қийматини топиш операцияси *функцияни интеграллаш* дейилади.

Бошланғич функция ва аниқмас интегралнинг таърифларига кўра

$$(\int f(x)dx)' = f(x). \tag{3}$$

Маълумки, мактаб математика курсида тўғри ва унга тескари бўлган амаллар мавжуд, яъни қўшиш ва айириш, кўпайтириш ва бўлиш, даражага кўтариш ва илдиз чиқариш. Худди шу каби ҳосилани ҳисоблаш (дифференциаллаш)га ўзаро тескари амал бошланғич функцияни топиш (интеграллаш) эканлигига ишонч ҳосил қилдик.

СИЗ БИЛАСИЗ: Берилган ҳаракат тенгламаси бўйича ҳосила ёрдамида берилган вақт моментида моддий нуқта ҳаракатининг тезлигини топиш мумкин. Моддий нуқта тезлигини топиш учун ҳаракат тенгламасидан вақт бўйича ҳосилани топиш керак, яъни $s'(t) = v(t)$, тезликдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила эса жисм ҳаракатининг тезланишини беради:

$$v'(t) = a(t).$$

“$v'(t)$ ҳосила бўйича $v(t)$ ни, сўнгра $s'(t)$ ҳосила бўйича $s(t)$ ни қандай топиш мумкин?” деган савол туғилади. Бундай мисолларни ечиш учун интеграллаш амалидан фойдаланилади.

Сиз аниқмас интеграл хоссаларини билиб оласиз.

1-қоида. *Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг, $P(x)$ функция эса $p(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $F(x) + P(x)$ функция $f(x) + p(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади.*

Исботи. $F(x)$ ва $P(x)$ функциялар мос равишда $f(x)$ ва $p(x)$ функцияларнинг бошланғич функциялари бўлгани учун, $F'(x) = f(x)$ ва $P'(x) = p(x)$. Йиғиндининг ҳосиласини топиш қоидасига кўра $(F(x) + P(x))' = F'(x) + P'(x) = f(x) + p(x)$ тенгликка эга бўламиз.

2-қоида. *Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси, k — ўзгармас сон бўлса, у ҳолда $kF(x)$ функция $kf(x)$ функция учун бошланғич функция бўлади.*

2-қоидани мустақил исботланг.

3-қоида. *Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси, k ва b — ўзгармаслар (бунда $k \neq 0$) бўлса, у ҳолда $\frac{1}{k}F(kx + b)$ функция $f(kx + b)$ функция учун бошланғич функция бўлади.*

Исботи. Мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш теоремасидан фойдаланамиз: $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b)\cdot k =$
$= F'(kx+b) = f(kx+b).$

Сиз баъзи аниқмас интегралларнинг формулаларини билиб оласиз (5-жадвал).

5-жадвал

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

Аниқмас интегралнинг хоссалари:
1) $\int(f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;
2) $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, бунда k — ўзгармас;
3) $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

3-*хоссанинг исботини кўриб чиқамиз.* Ушбу хоссадаги тенгликнинг иккала томонидан ҳосила оламиз. У ҳолда (3) тенгликка мос равишда $(\int f(kx+b)\,dx)' = f(kx+b)$; мураккаб функция ҳосиласини топиш қоидасига кўра эса $\left(\frac{1}{k}F(kx+b) + C\right)' = \frac{1}{k}(F(kx+b))' + C' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot$
$\cdot\ (kx+b)' + 0 = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b)$.

Тенгликнинг ўнг ва чап томонларининг ҳосилалари ўзаро тенг, у ҳолда функциялар бир-биридан С ўзгармас билангина фарқланади:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

1- ва 2- хоссаларни мустақил исботланг.

Берилган қоидалар ва интегралнинг хоссаларидан фойдаланишга доир мисоллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ 4. Аниқмас интегрални топамиз:

1) $\int 3\sin x dx$; 2) $\int\left(\frac{1}{x^2} + x^4\right)dx$; 3) $\int\cos(5x+1)\,dx$.

Ечиш. 1) $-\cos x$ функция $\sin x$ функция учун бошланғич функциялардан бири бўлиб ҳисобланади. У ҳолда иккинчи қоидага кўра

$$\int 3\sin x dx = -3\cos x + C.$$

2) $\frac{1}{x^2}$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири $-\frac{1}{x}$ функция, x^4 функция учун эса $\frac{x^5}{5}$ бошланғич функция бўлади. Биринчи қоидадан фойдалансак,

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+x^4\right)dx=-\frac{1}{x}+\frac{x^5}{5}+C$$

келиб чиқади.

3) $\sin x$ функция $\cos x$ функция учун бошланғич функциялардан бири. Учинчи қоидадан фойдаланиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\cos(5x+1)\,dx=\frac{1}{5}\sin(5x+1)+C.$$

Жавоб: 1) $-3\cos x+C$; 2) $-\frac{1}{x}+\frac{x^5}{5}+C$; 3) $\frac{1}{5}\sin(5x+1)+C$.

МИСОЛ

5. Графиги $M(-2;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи $f(x)=x^2$ функциянинг бошланғич функциясини топамиз.

Ечиш. $f(x)=x^2$ функциянинг исталган бошланғич функциясини $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ кўринишда ёзиш мумкин. Мисолнинг шартига кўра $F(x)$ функциянинг графиги $M(-2;\ 3)$ нуқтадан ўтади: $F(-2)=3$.

У ҳолда $\frac{(-2)^3}{3}+C=3$, бундан $C=\frac{17}{3}$.

Демак, изланаётган бошланғич функция $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{17}{3}$.

Жавоб: $\frac{x^3}{3}+\frac{17}{3}$.

?

1. *Ҳосила* ва *бошланғич функция* тушунчалари орасида қандай боғланиш мавжуд?
2. Жуфт (тоқ) функциянинг бошланғич функцияси жуфт (тоқ) функция бўладими? Мисол келтиринг.
3. Бошланғич функцияни топишнинг учала қоидасидан бир вақтда фойдаланишга аниқ мисол келтиринг.
4. 1) $[a;\ b]$ кесмада $f'(x)=p'(x)$; 2) $[a;\ b]$ кесмада $\int f(x)dx=\int p(x)dx$ бўлиши маълум. Бундан берилган кесмада $f(x)=p(x)$ тенглик бажариладими?

Машқлар

А

Функцияларнинг бошланғич функциясини топинг (**1.1-1.2**):

1.1. 1) $f(x) = 3x$; 2) $f(x) = 4x^2 + x - 2$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1.2. 1) $f(x) = 2\sin x$; 2) $f(x) = 5\cos x$;

3) $f(x) = 3\cos x - 4\sin x$; 4) $f(x) = 5\sin x + 2\cos x$;

5) $f(x) = x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}$; 6) $f(x) = x^3 - \frac{4}{\sqrt{x}}$;

7) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; 8) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

1.3. Аниқмас интегрални топинг:

1) $\int\left(3x^5 + \frac{7}{2\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int\left(3\cos 5x - \frac{1}{x^2}\right)dx$;

3) $\int\left(8\sin x - \frac{2}{\sin^2 2x}\right)dx$; 4) $\int(2\sin 3x - 5x^7 + 3)dx$;

5) $\int\left(\frac{3}{x^7} - \frac{7}{\cos^2 x}\right)dx$; 6) $\int\left(7 - \frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$.

1.4. $y = f(x)$ функция учун графиги координаталар бошидан ўтувчи бошланғич функцияни ёзинг:

1) $f(x) = (x + 1)(x + 3)$; 2) $f(x) = (1 - x)(3 + x)$;

3) $f(x) = \frac{x^2}{3} + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $f(x) = -\frac{x^3}{2} + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.5. $y = f(x)$ функция учун графиги $M(a;\ b)$ нуқтадан ўтувчи $F(x)$ бошланғич функцияни топинг ва $F(x)$ функциянинг графигини ясанг:

1) $f(x) = x + 1$, $M(-2;\ 3)$; 2) $f(x) = 4 + x$, $M(-2;\ 3)$;

3) $f(x) = \sin x$, $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$; 4) $f(x) = \cos x$, $M(\pi;\ -1)$.

1.6. $y = f(x)$ функция учун графиги $M(a;\ b)$ нуқтадан ўтувчи $F(x)$ бошланғич функцияни топинг:

1) $f(x) = x^{-2}$, $M(1;\ -1)$;

2) $f(x) = x^{-3}$, $M(-1;\ 0)$;

3) $f(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $f(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1$, $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$.

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) \cdot \sin(4\pi - 2\alpha) \cdot \cos(-2\alpha)}{\operatorname{ctg}(6\pi - 4\alpha) \cdot \left(\cos^2 2\alpha - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)\right)} - 0{,}5\operatorname{tg}4\alpha = 0.$

1.19. "Жонли геометрия" ёки "GeoGebra" дастуридан фойдаланиб функция графигини ясанг:

1) $f(x) = 3 - \sqrt{3-x}$; 2) $f(x) = 1 + \sqrt{4-x}$;

3) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$; 4) $f(x) = -\sqrt{x-1} + 2$.

1.20. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5x}$; 2) $f(x) = x^2 - \sqrt{x^2+4x+4}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$; 4) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{16-x^2}$.

1.21. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $y = (2x-7)^5 + 4x^2$; 2) $y = 3(3x^2 - 5x)^4 - x^6$;

3) $y = \sin^2 3x + 2x$; 4) $y = \cos^2 3x - x^3 + \sqrt{3}$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, даражали функция, тригонометрик функция, узлуксиз функция, бошланғич функция, аниқмас интеграл.

2-§. ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ

Сиз ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб интегрални топишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, бошланғич функция, интеграл, интеграл белгиси остидаги функция

Баъзи ҳолларда интеграл остидаги ифоданинг интегралини жадвал ёрдамида топиш мумкин бўлмайди. Бундай ҳолларда янги ўзгарувчи киритиш усулидан фойдаланиб, берилган интегрални жадвал орқали топишга келтириш мумкин. Бундай усул *ўзгарувчини алмаштириш* ёки *янги ўзгарувчи киритиш усули* деб аталади.

Интеграл остидаги ифода эркли ўзгарувчи ва:

— шу ўзгарувчига боғлиқ бўлган кўпҳаднинг кўпайтмасига;

— шу ўзгарувчига боғлиқ бўлган тригонометрик функция кўпайтмасига;

— шу ўзгарувчига боғлиқ бўлган даражали функция ёки илдиз кўпайтмасига тенг бўлган ҳолда аниқмас интеграл янги ўзгарувчи киритиш усули билан топилади.

СИЗ БИЛАСИЗ:

1. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, у холда $F'(x) = f(t)$.

2. Агар $y = f(g(t))$ мураккаб функция бўлса, у холда унинг хосиласи $y' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$ формула билан топилади.

$F(g(t))$ функция берилган бўлсин.

Мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш формуласидан фойдаланиб, $F(g(t))$ функциянинг ҳосиласини топамиз, у ҳолда $[F(g(t))]' = F'(g(t)) \cdot g'(t)$. Энди $F'(g(t)) = f(g(t))$ эканини назарга олсак, ушбуга эга бўламиз: $[F(g(t))]' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$. Агар

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (1)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C. \qquad (2)$$

$g'(t)dt = d(g(t))$ бўлгани учун (2) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$\int f(g(t))d(g(t)) = F(g(t)) + C. \qquad (3)$$

(3) формулани x ўзгарувчини $g(t)$ билан алмаштириш орқали (1) формуладан ҳам олиш мумкин.

Масалан, агар $g(t) = kt + b$ бўлса, у ҳолда $d(g(t)) = d(kt + b) = kdt$, жумладан (3) формула бундай кўринишга келади: $\int kf(kt + b)) \cdot dt = F(kt + b) + C$. Бундан $\int f(kt + b)) \cdot dt = \frac{1}{k}F(kt + b) + C$ формула ҳосил бўлади.

МИСОЛ

1. $\int x \cdot (2 + x)^5\, dx$ аниқмас интегрални топамиз.

Ечиш. Берилган интегрални топиш учун $t = 2 + x$ ўзгарувчи киритамиз.

$t = 2 + x$ тенгликнинг иккала томонини дифференциаллаймиз. Бунда $dt = d(2 + x)$ ёки $dt = dx$. $t = 2 + x$ тенгликдан x ўзгарувчини топамиз: $x = t - 2$. Демак,

$$\int x \cdot (2 + x)^5 dx = \int (t - 2) \cdot t^5 dt = \int (t^6 - 2t^5)dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{3} + C.$$

Энди x ўзгарувчига ўтамиз. Бундан $\int x \cdot (2 + x)^5 dx = \frac{(2 + x)^7}{7} - \frac{(2 + x)^6}{3} + C.$

Жавоб: $\frac{(2 + x)^7}{7} - \frac{(2 + x)^6}{3} + C.$

МИСОЛ

2. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ аниқмас интегрални топамиз.

Ечиш. Берилган интегрални топиш учун $t = \sqrt{x}$ ўзгарувчи киритамиз.

Бундан $x = t^2$. Сўнгра охирги тенгликни дифференциаллаймиз. Бунда $dx = (t^2)'dt$ ёки $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin t}{t} \cdot 2t\ dt = \int 2\sin t dt = -2\cos t + C.$$

Энди x ўзгарувчига ўтамиз. У ҳолда $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2\cos\sqrt{x} + C.$

Жавоб: $-2\cos\sqrt{x} + C.$

Сиз бўлакларга бўлиб интеграллаш усулидан фойдаланиб интегрални топишни ўрганасиз.

Кўпайтувчилари интеграллар орқали ифодаланган дифференциалланувчи функцияларнинг ҳосиласидан интегрални топиш формулалари мавжуд эмас. Ҳосиладан фарқли ўлароқ элементар функцияларнинг интеграли ҳамма вақт элементар функция бўлмайди. Масалан, $\int \cos x dx$, $\int x^5 dx$ интегралларни жадвал ёрдамида топиш мумкин, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ интеграл остидаги функцияни эса элементар функциялар орқали ифодалаш мумкин эмас.

$[a;\ b]$ кесмада узлуксиз $u = f(x)$, $v = g(x)$, $u' = f'(x)$ ва $v' = g'(x)$ функциялар берилсин.

Аниқмас интегрални топишнинг бўлакларга бўлиб интеграллаш формуласи:

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (4)$$

Исботи. $(uv)' = uv' + vu'$ формуланинг иккала томонини интеграллаймиз. Бунда $\int (uv)'\ dx = \int (uv' + vu')dx$. Бундан $uv + C = \int (uv' + vu')dx$ ёки $uv + C = \int uv'dx + \int vu'dx$. Энди $v'dx = dv$ ва $u'dx = du$ бўлгани учун $uv + C = \int udv + \int vdu$ ёки $\int udv = uv - \int vdu + C$.

(4) формула *бўлакларга бўлиб интеграллаш формуласи* дейилади. Ушбу формуладан фойдаланиб интеграл остидаги функцияни иккита кўпайтувчига ажратиш мумкин. Жумладан, u ва v', улардан бири дифференциалланади, иккинчиси интегралланади. Яъни, u ифоданинг ўрнида u', v' ифоданинг ўрнида эса v берилган. Бундай шакл алмаштиришлардан кейин жадвал ёрдамида топиш мумкин бўлган интеграл ҳосил бўлади.

Бўлакларга бўлиб интеграллаш формуласи кўп ҳолларда қуйидаги интеграллар учун қўлланилади: $\int P_n(x) \sin ax\, dx$ ёки $\int P_n(x) \cos ax\, dx$, $\int P_n(x) \arcsin ax\, dx$, $\int P_n(x) \arccos ax\, dx$, $\int P_n(x) \mathrm{arctg}\, ax\, dx$.

$\int P_n(x) \sin ax\, dx$ ёки $\int P_n(x) \cos ax\, dx$ интегрални топишда u сифатида $P_n(x)$ кўпҳад олинади. Бунда мос равишда $dv = \sin ax\, dx$ ёки $dv = \cos ax\, dx$ бўлиб, бўлакларга бўлиб интегралллаш формуласи n марта қўлланилади.

$\int P_n(x) \arcsin ax\, dx$, $\int P_n(x) \arccos ax\, dx$, $\int P_n(x) \mathrm{arctg}\, ax\, dx$ интегрални топишда u сифатида $\arcsin ax$ ёки $\arccos ax$, ёки $\mathrm{arctg}\, ax$ олинади. У ҳолда $dv = P_n(x)\, dx$ бўлади. Яъни $v = P_{n+1}(x)$ ҳосил бўлади.

МИСОЛ

3. $\int (5x + 2)\cos 2x dx$ аниқмас интегрални топинг.

Ечиш. $\int (5x + 2)\cos 2x dx = \left| u = 5x + 2,\ dv = \cos 2x dx \Rightarrow du = 5dx,\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \right| =$

$= (2{,}5x + 1)\sin 2x - \frac{5}{2}\int \sin 2x dx = (2{,}5x + 1)\sin 2x + \frac{5}{4}\cos 2x dx + C.$

Жавоб: $(2{,}5x + 1)\sin 2x + \frac{5}{4}\cos 2x dx + C.$

МИСОЛ

4. $\int x \operatorname{arctg} x dx$ аниқмас интегрални топинг.

Ечиш. $\int x \operatorname{arctg} x dx = \Big| u = \operatorname{arctg} x,\ dv = x dx$, у ҳолда $du = \dfrac{dx}{1 + x^2}$, $v = \dfrac{x^2}{2} \Big| = \dfrac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \int \dfrac{x^2}{1 + x^2} dx = \dfrac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \int \left(1 - \dfrac{1}{1 + x^2}\right) dx = \dfrac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - $
$- \dfrac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C.$

Жавоб: $\dfrac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C.$

1. Қандай ҳолларда аниқмас интегрални топиш учун янги ўзгарувчи киритиш усули қўлланилади?
2. Қандай ҳолларда бўлакларга бўлиб интеграллаш усули қўлланилади?

Машқлар

A

Аниқмас интегрални топинг (**2.1—2.4**):

2.1. 1) $\int x \cdot (1 + x)^4 dx$; 2) $\int (x - 3)^5 x dx$.

2.2. 1) $\int \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int \dfrac{5\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

2.3. 1) $\int x \cdot \cos x dx$; 2) $\int 2x \cdot \sin x dx$.

2.4. 1) $\int x \cdot \cos 2x dx$; 2) $\int x \cdot \sin 3x dx$.

B

Аниқмас интегрални топинг (**2.5—2.7**):

2.5. 1) $\int x \cdot (2x - 1)^7 dx$; 2) $\int x \cdot (3x + 1)^3 dx$.

2.6. 1) $\int x \cdot \sqrt{4 + x}\, dx$; 2) $\int x \cdot \sqrt{x - 3}\, dx$; 3) $\int \sin x \cdot \sqrt{\cos x}\, dx$.

2.7. 1) $\int x^2 \cos 4x dx$; 2) $\int x \cos(x + 2) dx$; 3) $\int (x^2 - 3x) \sin 2x dx$.

C

Аниқмас интегрални топинг (**2.8-2.11**):

2.8. 1) $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$; 2) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

2.9. 1) $\int x \cdot \sin^2 x dx$; 2) $\int x \cdot \cos^2 x dx$.

2.10. 1) $\int x \arcsin x dx$; 2) $\int x \arccos x dx$.

2.11. 1) $\int x \operatorname{arcctg} x dx$; 2) $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$.

ТАКРОРЛАШ

2.12. “Жонли геометрия” ёки “GeoGebra” дастуридан фойдаланиб, функциянинг графигини ясанг ва аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; 2) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$;

3) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$; 4) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$.

2.13. Функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x) = 2x + \sin 2x$; 2) $f(x) = \sin 2x \cos 2x$;

3) $f(x) = 1 + \sqrt{x^2+2x-3}$; 4) $f(x) = \mathrm{tg}\, 2x\, \mathrm{ctg}\, 2x$.

2.14. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $y = \mathrm{tg}^5 x + x^{-2}$; 2) $y = \cos^2 2x - 2x$;

3) $y = x^3 \sin 2x$; 4) $y = (x^{-2} - 1)\sin^2 x^2$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тўғри тўртбурчак, трапеция, ясси фигуранинг юзи, тўғри бурчакли координаталар системаси, функция, функциянинг узлуксизлиги, функциянинг графиги, функциянинг лимити, ҳосила, бошланғич функция, аниқмас интеграл.

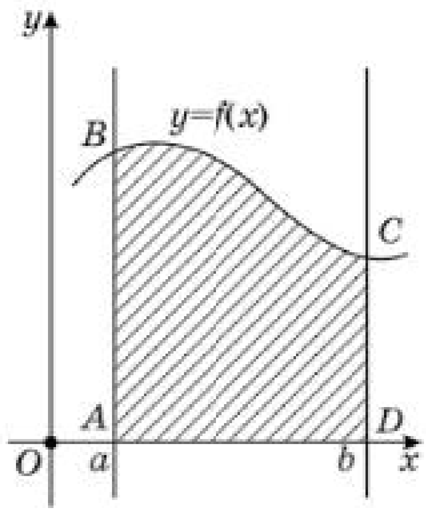
3-§. ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ТРАПЕЦИЯ ВА УНИНГ ЮЗИ

Сиз *эгри чизиқли трапеция* тушунчаси билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР
Функция, бошланғич функция, аниқмас интеграл, интеграл остидаги функция, трапеция, юза, координаталар текислиги

СИЗ БИЛАСИЗ: Томонлари тўғри чизиқ кесмаси бўлган учбурчак, тўғри тўртбурчак, трапеция ва бошқа кўпбурчакларнинг юзларини топиш формулалари сизга геометрия курсидан маълум.

Амалиётда бир томони эгри чизиқ (чизиқли бўлмаган функция графигининг қисми) бўлган фигураларнинг юзини топишга доир мисоллар учрайди.



6-расм

Бундай фигураларнинг юзини маълум бир формулалар орқали топиш мумкин эмас. Бунинг учун бошқа усул қўлланилади.

Юқоридан $y = f(x)$ функция графиги, ён томонларидан $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар, қуйидан Ox ўқи билан чегараланган ясси $ABCD$ фигура берилсин (6-расм).

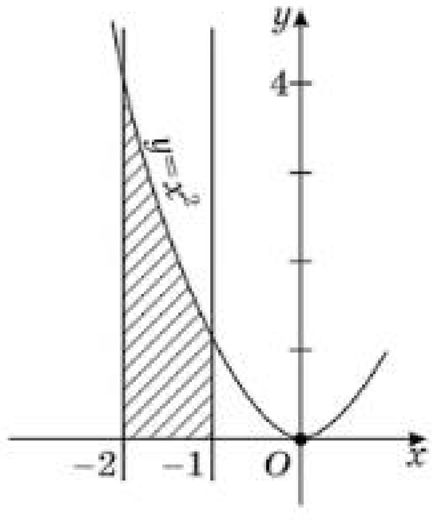
Бу ҳолда $y = f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз деб ҳисобланади.

Эгри чизиқли трапеция тушунчасини киритайлик.

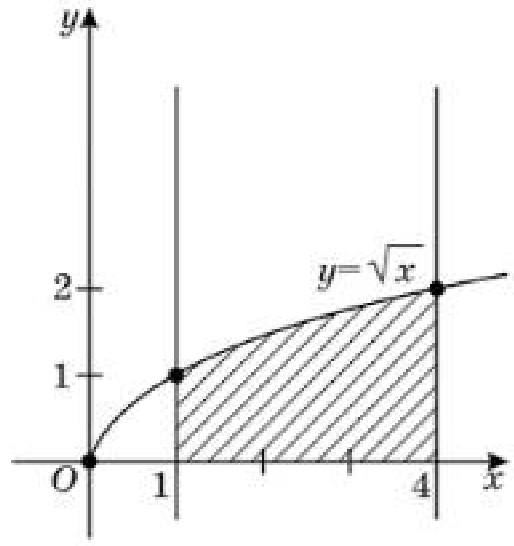
Узлуксиз номанфий $y = f(x)$ функциянинг графиги, Ox ўқи ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ясси фигура ***эгри чизиқли трапеция*** *деб аталади.*

Эгри чизиқли трапециянинг асоси сифатида $[a; b]$ кесма олинади.

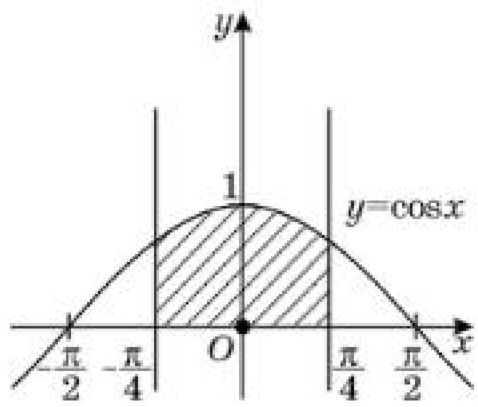
Сизга таниш бўлган $f(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \cos x$ функцияларнинг графиклари билан чегараланган эгри чизиқли трапецияларга 7-,8-,9-расмларда мисоллар келтирилган.



7-расм

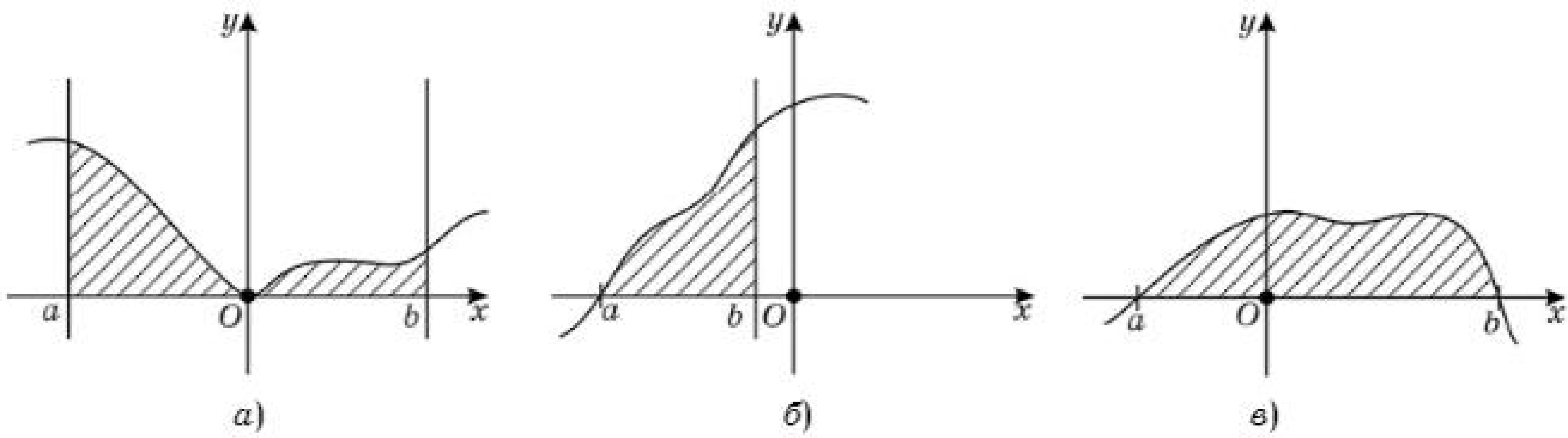


8-расм



9-расм

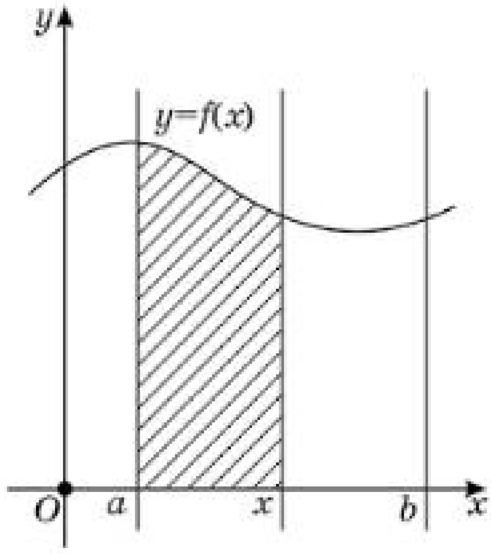
Эгри чизиқли трапеция турли хил функцияларнинг графикларидан ҳам тузилиши мумкин. Бундай эгри чизиқли трапецияларнинг баъзи турлари 10-расмда кўрсатилган.



10-расм

Сиз эгри чизиқли трапеция юзини топиш формуласи билан танишасиз.

Энди эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш формуласини келтириб чиқарайлик. 6-расмда тасвирланган эгри чизиқли трапециянинг юзини S ҳарфи билан белгилайлик. Агар $[a; b]$ кесмага тегишли x нуқтани олсак, у ҳолда $S(x)$ функция $x = a$ тўғри чизиқ ва $(x; 0)$ нуқта орқали ўтувчи абсцисса ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодалайди (11-расм).



11-расм

$S(a) = 0$, $S(b) = S$ эканлиги маълум.

Энди $[a; x]$ кесмада $f(x)$ функция учун $S(x)$ барча бошланғич функциялар тўплами бўлишини исботлайлик, яъни $S'(x) = f(x)$.

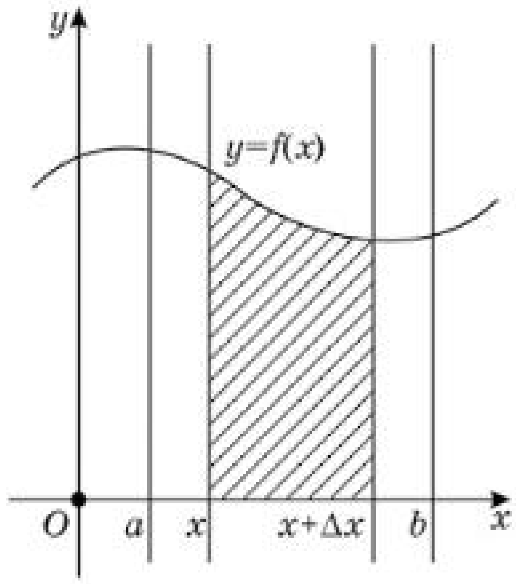
СИЗ БИЛАСИЗ: Маълумки, аргумент орттирмаси нолга интилганда функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатининг лимити шу функциянинг ҳосиласини аниқлайди.

Демак, кўриб чиқилаётган ҳолда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x) = f(x)$ тенгликни исботлаш керак.

$\Delta S(x)$ нинг геометрик маъносини билиб оласиз.

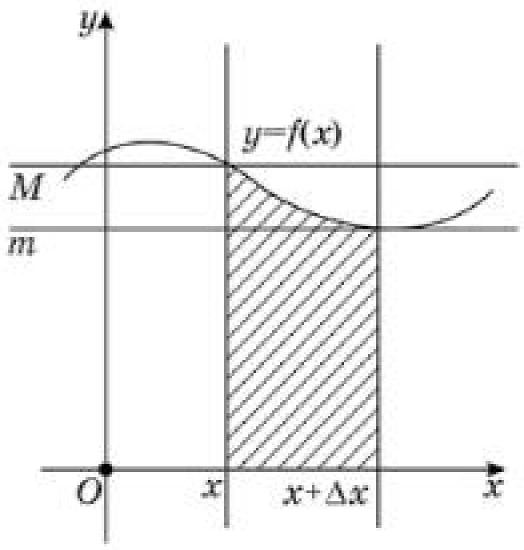
$\Delta x > 0$ ҳолни кўриб чиқамиз. $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ эканлигидан, $\Delta S(x)$ катталик эгри чизиқли трапециянинг штрихланган қисмининг юзини беради (12.1-расм).

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x}.$$



12.1-расм

Исботи. $S(x + \Delta x) - S(x)$ айирма эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг. $y = f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун, у $[x; x + \Delta x] \subset [a; b]$ кесмада ҳам узлуксиз бўлади. Демак, $f(x)$ функциянинг Вейерштрасс теоремасига кўра $[x; x + \Delta x]$ кесмада ўзининг энг катта ва энг кичик қиймати мавжуд. $[x; x + \Delta x]$ кесмадаги $f(x)$ функциянинг энг катта қиймати M, энг кичик қиймати эса m бўлсин.



12.2-расм

У ҳолда эгри чизиқли трапециянинг юзи узунликлари m ва M, эни умумий $[x;\ x+\Delta x]$ кесмаси бўлган тўғри тўртбурчаклар юзларининг орасида ётади (12.2-расм).

Демак, ушбу қўш тенгсизликни ёзамиз:

$m\cdot\Delta x \leqslant S(x+\Delta x) - S(x) \leqslant M\cdot\Delta x$, бунда $\Delta x > 0$, m ва M қийматлар эса Δx ни танлаб олишга боғлиқ бўлган қийматлар. $\Delta x > 0$ бўлганда, $m \leqslant \dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} \leqslant M$. $f(x)$ функция x нуқта ва $[x;\ x+\Delta x]$ кесмада узлуксиз эканлигидан, $\Delta x\to 0$ ҳолда $f(x)$ функциянинг $[x;\ x+\Delta x]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматлари умумий лимитга интилади, яъни $\lim\limits_{\Delta x\to 0} m = \lim\limits_{\Delta x\to 0} M = f(x)$. Жумладан, уларнинг орасида жойлашган $\dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}$ қиймат ҳам $f(x)$ га интилади. У ҳолда, $S'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} = f(x)$. Бу тенглик $\Delta x < 0$ ҳол учун ҳам ўринли.

Шундай қилиб, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$. Бундан $S'(x) = f(x)$ эканлиги келиб чиқади, яъни $[a;\ b]$ кесмада $S(x)$ функция $f(x)$ функция учун бошланғич функция бўлади.

Агар $f(x)$ функция учун бошланғич функциялардан бирини $F(x)$ деб белгиласак,

$$S(x) = F(x) + C$$

ҳосил қиламиз, бунда C — исталган сон.

C нинг қийматини топиш учун x нинг ўрнига a ни қўямиз. У ҳолда $S(a) = F(a) + C$ ва $S(a) = 0$, бундан $F(a) + C = S(a) = 0$, $C = -F(a)$. Демак, $S(x) = F(x) - F(a)$. Юқорида $S(b) = S$ деб кўрсатилди, шу сабабли эгри чизиқли трапециянинг юзини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S = S(b) = F(b) - F(a)$$

ёки

$$S = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

(1) — *эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш формуласи.* Бу ерда $F(x)$ функция $S(x)$ функция учун бошланғич функциялардан бири, S — эгри чизиқли трапециянинг юзи.

АЛГОРИТМ

Эгри чизиқли трапеция юзини топиш алгоритми:

1) битта координаталар текислигида берилган эгри чизиқларнинг графикларини ясаш;

2) графиги эгри чизиқли трапецияни юқоридан чегараловчи функциянинг бошланғич функциясини топиш;

3) эгри чизиқли трапециянинг пастки асоси бўлган кесманинг чекка нуқталари координаталарини топиш;

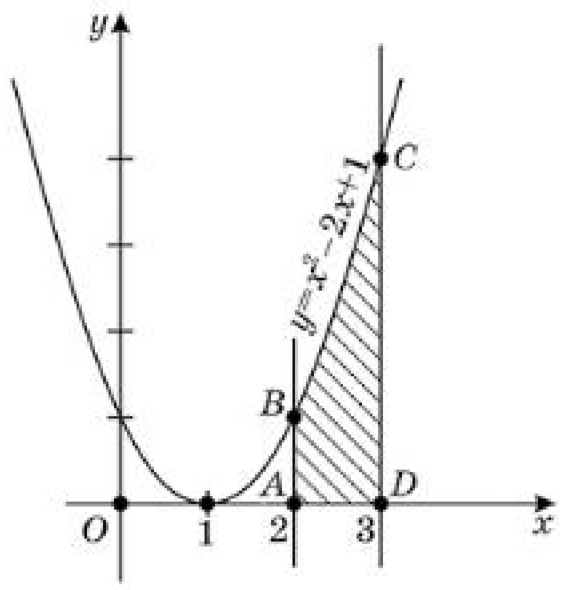
4) (1) формула бўйича эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш

МИСОЛ

1. $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$ ва $f(x) = x^2 - 2x + 1$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топамиз.

Ечиш. Дастлаб учларининг координатаси (1; 0) нуқта бўлган ва тармоқлари юқорига йўналган $f(x) = x^2 - 2x + 1$ функциянинг графиги параболани ясаймиз.

Сўнгра Oy ўқига параллел мос равишда $A(2;\ 0)$ ва $D(3;\ 0)$ нуқталардан ўтувчи $x = 2$ ва $x = 3$ тўғри чизиқларни ўтказамиз, $y = 0$ тўғри чизиқ Ox ўқи билан устма-уст тушади (13-расм). Натижада юқоридан $f(x) = x^2 - 2x + 1$ функциянинг графиги, икки ён томонидан $x = 2$, $x = 3$ тўғри чизиқлар ва қуйидан Ox ўқи билан чегараланган $ABCD$ эгри чизиқли трапецияни ҳосил қиламиз. Энди $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияларидан бирини 1- ва 2-қоидалар бўйича топамиз:



13-расм

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x.$$

$a = 2$ ва $b = 3$ эканини эътиборга олиб, (1) формула бўйича эгри чизиқли трапециянинг юзини топамиз:

$$S = F(3) - F(2) = \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 + 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2\right) = 3 - \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

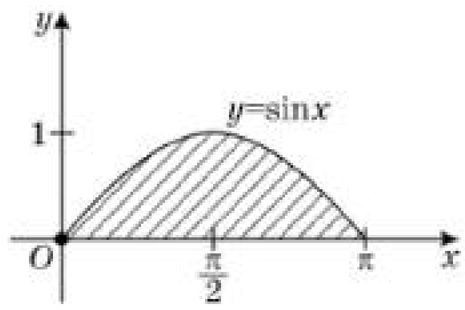
Жавоб: $2\frac{1}{3}$ кв. бирл.

МИСОЛ

2. Абсциссалар ўқи, $x = 0$, $x = \pi$ тўғри чизиқлар ва $y = \sin x$ функциянинг графиги билан чегараланган эгри чизиқли эгри чизиқли трапециянинг юзини топамиз.

Ечиш. Берилган чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция 14-расмда кўрсатилган. $y = \sin x$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири $F(x) = -\cos x$. $a = 0$ ва $b = \pi$, у ҳолда $S = F(\pi) - F(0) = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$.

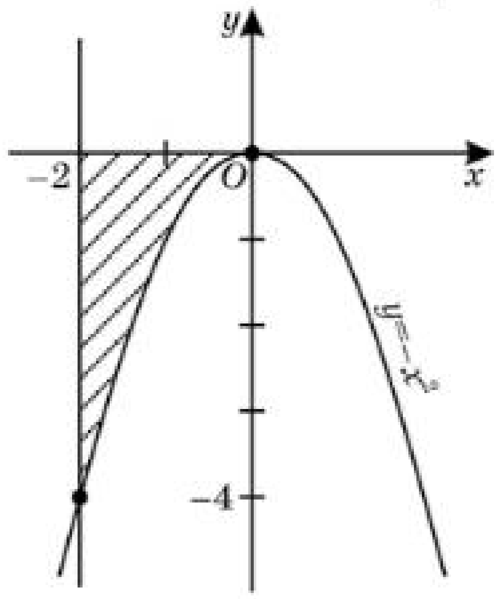
Жавоб: 2 кв. бирл.



14-расм

МИСОЛ

3. $y = -x^2$, $y = 0$, $x = -2$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топамиз (15-расм).



15-расм

Ечиш. 15-расмдан эгри чизиқли трапеция тўлиғи билан абсциссалар ўқининг пастки қисмида жойлашганини кўриш мумкин. Бундай ҳолларда (1) формуладаги $F(b) - F(a)$ ифодани минус ишора билан оламиз.

$y = -x^2$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири $F(x) = -\dfrac{x^3}{3}$ ва $a = -2$, $b = 0$.

Бундан

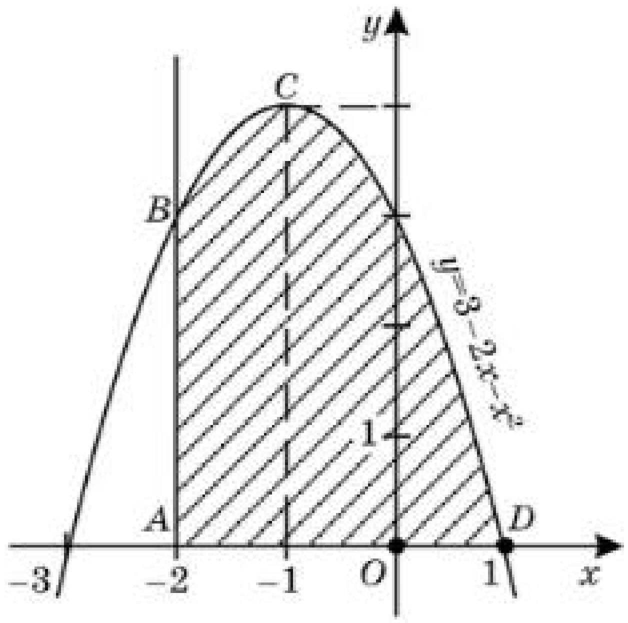
$$S = -(F(b) - F(a)) = F(a) - F(b) = -\frac{(-2)^3}{3} + 0 = 2\frac{2}{3}.$$

Жавоб: $2\dfrac{2}{3}$ кв. бирл.

МИСОЛ

4. $y = 0$, $x = -2$ (бунда $x \geqslant -2$), $y = 3 - 2x - x^2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топамиз.

Ечиш. $y = 0$, $x = -2$ ва $y = 3 - 2x - x^2$ чизиқларнинг графикларини координаталар текислигида ясаймиз (16-расм). $x = -2$ тўғри чизиқ эгри чизиқли трапецияни икки қисмга бўлади. Масаланинг шартига кўра $x \geqslant -2$. Демак, $x = -2$ тўғри чизиқнинг ўнг томонида жойлашган қисмини оламиз. Энди $ABCD$ эгри чизиқли трапециянинг юзини топамиз.



16-расм

Юзини топиш керак бўлган фигура юқоридан $y = 3 - 2x - x^2$ парабола, қуйидан эса $y = 0$ тўғри чизиқ, ён томонларидан $x = -2$ ва $x = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган. У ҳолда $S_ф = S_{ABCD}$.

$y = 3 - 2x - x^2$ функция учун бошланғич функция $F(x) = 3x - x^2 - \dfrac{x^3}{3}$ ва $a = -2$, $b = 1$. S_{ABCD} фигуранинг юзини топиш учун (1) формуладан фойдаланамиз:

$$S_{ABCD} = F(1) - F(-2) = \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-6 - 4 + \frac{8}{3}\right) = 1\frac{2}{3} + 7\frac{1}{3} = 9.$$

Жавоб: 9 кв. бирл.

1. Эгри чизиқли трапециянинг геометрия курсидан маълум бўлган трапециядан қандай фарқи бор?
2. Эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш формуласини келтириб чиқаришда қандай тушунчалардан фойдаланилди?
3. Трапеция юзини эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш формуласи ёрдамида ҳисоблаш мумкинми?

Машқлар

A

Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг (**3.1—3.4**):

3.1. 1) $y=x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$; 2) $y=x^2$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$; 3) $y=2x^2-1$, $y=0$, $x=1$, $x=3$; 4) $y=2x^2+1$, $y=0$, $x=2$, $x=3$.

3.2. 1) $y=x^2-2x+3$, $y=0$, $x=1$, $x=2$; 2) $y=x^2-2x+8$, $y=0$, $x=-1$, $x=3$; 3) $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\neq}{3}$, $x=\frac{\neq}{3}$; 4) $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\neq}{2}$.

3.3. 1) $y=x^2$, $y=0$, $x=2$; 2) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$.

3.4. 1) $y=1-x^2$, $y=0$; 2) $y=-x^2+4$, $y=0$; 3) $y=3x-x^2$, $y=0$; 4) $y=6x-x^2$, $y=0$.

3.5. 1) $y=\cos x$ функция графиги, $x=-\frac{\neq}{4}$, $x=\frac{\neq}{4}$ ва $y=0$ тўғри чизиқлар билан;
2) $y=\sin x$ функция графиги, $x=\frac{\neq}{4}$, $x=\frac{\neq}{3}$ ва $y=0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

B

3.6. 1) $x=\frac{\neq}{18}$, $x=\frac{\neq}{12}$ тўғри чизиқлар, $y=\sin 6x$ функциянинг графиги ва абсциссалар ўқи билан;
2) $y=0$, $x=\frac{\neq}{24}$, $x=\frac{\neq}{12}$ тўғри чизиқлар ва $y=\cos 4x$ функция графиги билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

3.7. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:
1) $y=-x^3$, $x=-3$, $y=0$; 2) $y=-2x^3$, $x=-2$, $y=0$; 3) $y=1-x^3$, $x=0$, $y=0$; 4) $y=1-x^2$, $y=0$;
5) $y=-x^2+2x+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;
6) $y=-x^2-2x+2$, $y=0$, $x=-1$, $x=0$;
7) $y=\frac{16}{x^2}$, $y=2x$, $x=4$; 8) $y=-\frac{3}{x^3}$; $y=-3x$, $x=-4$.

3.8. Агар $0 \leqslant x \leqslant \frac{\neq}{6}$ бўлса, у ҳолда $y=\sin 6x$ ва $y=0$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи нимага тенг?

C

3.9. $[a; b]$ ва $[b; c]$ кесмаларда мос равишда $y=f(x)$ ва $y=g(x)$ функцияларнинг графиклари, $x=a$, $x=c$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:
1) $f(x)=x^2+2x+3$, $[-2; 1]$ ва $g(x)=x^2-2x+7$, $[1; 2]$;
2) $f(x)=-x^2-4x-1$, $[-3; -1]$ ва $g(x)=-x^2+2x+5$, $[-1; 1]$.

3.10. Ox ўқи ва берилган функциянинг графиги билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y = -x^2 + x + 6$; 2) $y = -x^2 + 2x + 3$;

3.11. d нинг қандай қийматда $y = \cos 5x$, $y = 0$, $x = \frac{\neq}{30}$ ва $x = d$ $\left(d < \frac{\pi}{30}\right)$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи 0,2 га тенг бўлади?

3.12. $y = f(x)$ функция графигига абсциссаси x_0 нуқтада ўтказилган уринма, $x = a$ тўғри чизиқ ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $f(x) = 4{,}5 - 0{,}5x^2$, $x_0 = 1$, $x = -2$; 2) $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $x = 1$.

3.13. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y^2 = x$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $y < 0$;
2) $y^2 = x$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y > 0$;
3) $y = 2\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $x = 9$.

3.14. $y = x^3$ функциянинг графиги, абсциссаси $x = 1$ бўлган нуқтада ўтказилган уринма ва Oy ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

2) $y = x^3$ функциянинг графиги, абсциссалари $x = 1$ ва $x = 0$ бўлган нуқталарда ўтказилган уринмалар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

МАТЕМАТИК ОЛИМЛАР ҲАҚИДА АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

3.15. $\int$ белгисини Готфрид Вильгельм Лейбниц, "интеграл" атамасини Иоганн Бернулли таклиф қилган. "Интеграл" атамаси дастлаб Якоб Бернулли меҳнатларида учрайди. $\int_a^b f(x)dx$ белги француз математиги ва физиги Жан-Батист Жозеф Фурьенинг меҳнатларидан кейин кенг қўлланила бошлади.

Г.В Лейбниц
(1646—1716)

Я. Бернулли
(1655—1705)

Ж. Фурье
(1768—1830)

ТАКРОРЛАШ

3.16. Берилган функцияларнинг графиклари билан чегараланган фигурани координаталар текислигида ясанг:

1) $y = x^2 - 2x$ ва $y = x$; 2) $y = x + 1$ ва $y = \sqrt{x+1}$.

3.17. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $y = \mathrm{arctg}2x + \frac{1}{x}$; 2) $y = \sqrt{2x+1} - \mathrm{tg}x^3$;

3) $y = \cos^{-1}x - x$; 4) $y = \frac{\sin 2x}{x} + \frac{1}{3x}$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг узлуксизлиги, функциянинг лимити, функциянинг графиги, эгри чизиқли трапеция, ҳосила, бошланғич функция, аниқмас интеграл, бошланғич функцияни топиш қоидалари, эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш формуласи.

4-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛ. НЬЮТОН-ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСИ

Сиз *аниқ интеграл* тушунчаси билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, бошланғич функция, аниқ интеграл, интеграл остидаги функция

СИЗ БИЛАСИЗ: Эгри чизиқли трапециянинг юзини топишни биласиз.

“Эгри чизиқли трапециянинг юзини бошқа йўл билан топиш мумкинми?” –деган савол туғилиши мумкин. Бу саволга жавоб бериш учун $[a; b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функцияни оламиз. Бунинг учун юқоридан $f(x)$ функциянинг графиги, қуйидан абсциссалар ўқи ва ён томонларидан $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган трапецияни кўриб чиқамиз.

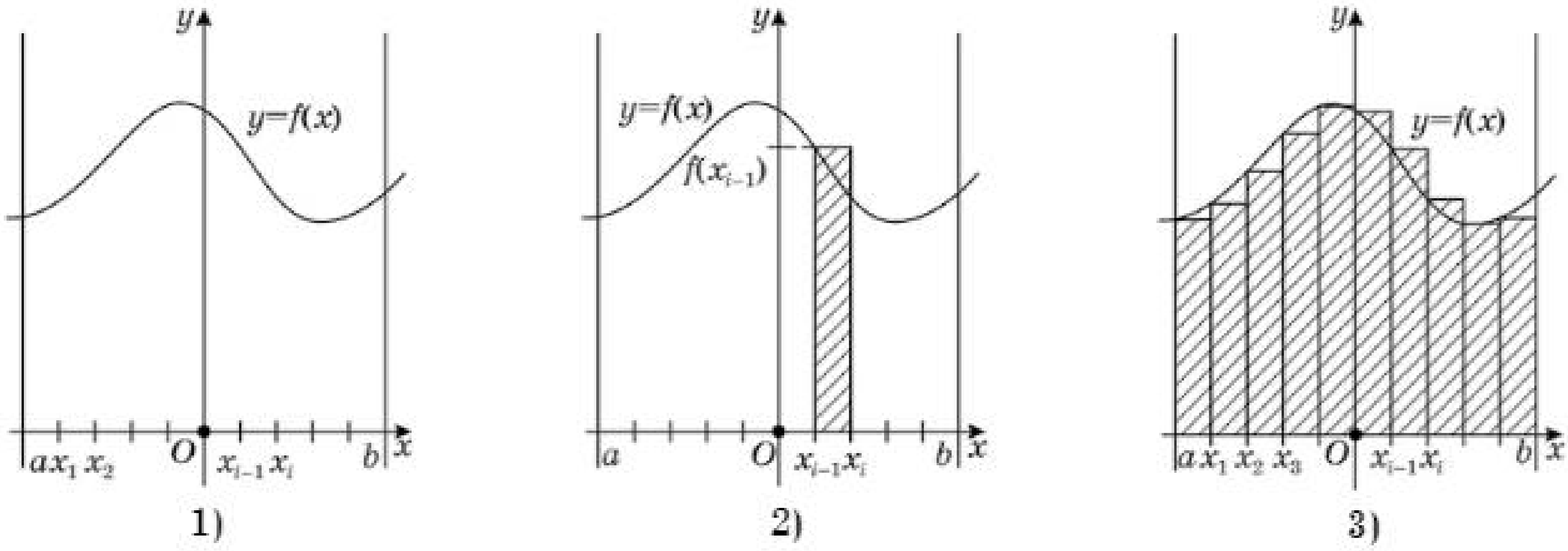
Қурилаётган эгри чизиқли трапециянинг S юзини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарайлик.

Координаталари $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_{n-1}$ бўлган нуқталар орқали $[a; b]$ кесмани ўзаро тенг бўлакларга бўламиз (17.1-расм).

У ҳолда $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b$ келиб чиқади.

$[a; b]$ кесманинг ҳар бир бўлагининг узунлигини Δx деб белгилаймиз.

У ҳолда $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = ... = x_i - x_{i-1} = ... = x_n - x_{n-1}$.



17-расм

Энди асоси $[x_{i-1}; x_i]$ кесма, баландлиги эса узунлиги $f(x_{i-1})$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчак ясаймиз (17.2-расм). Ҳосил бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи $S_{i-1} = f(x_{i-1}) \cdot \Delta x = f(x_{i-1}) \cdot \dfrac{b-a}{n}$ бўлади.

Бундай тўғри тўртбурчакларнинг сони n га тенг (17.3-расм). Демак, ҳамма шундай тўғри тўртбурчаклар юзларининг йиғиндисини бундай бериш мумкин:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\,(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})).$$

Берилган $f(x)$ функция узлуксиз, шунинг учун $[a; b]$ кесмани бўлакларга бўлиш сонини орттирганда, яъни n нинг етарлича катта қийматида (Δx кесма жуда кичик катталикка камаяди) ясалган ҳамма тўғри тўртбурчаклар юзларининг тўплами қурилаётган эгри чизиқли трапециянинг юзи билан устма-уст тушади деб ҳисоблаш мумкин.

Бундан n нинг энг катта қийматида S_n юзанинг қиймати тахминан S га (эгри чизиқли трапециянинг юзи) тенг, бундан n чексизликка интилганда S_n нинг қиймати маълум бир S сонига интилади:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Келиб чиққан хулоса $[a; b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функция учун тўғри ва $n \to \infty$ бўлганда S_n берилган трапециянинг S юзига интилади. Бу сон a дан b гача $f(x)$ функциянинг *аниқ интеграли* дейилади.

Белгиланиши: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ўқилиши: “a дан b гача интеграл иксдан эф де икс”. Бунда a ва b сонлар — интеграллаш чегаралари: a — *қуйи чегара*, b — *юқори чегара*.

Шундай қилиб, $[a; b]$ кесмада $f(x)$ узлуксиз функция $f(x) \geqslant 0$ бўлса, кўриб чиқилган эгри чизиқли трапециянинг S юзини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

СИЗ БИЛАСИЗ: Эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = F(b) - F(a) \tag{2}$$

формула ёрдамида топилиши сизга олдинги параграфдан маълум.

Сиз Ньютон-Лейбниц формуласи билан танишасиз.

Агар $[a; b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функция учун $F(x)$ бошланғич функция бўлса, у ҳолда (1) ва (2) формулаларни таққослаш орқали қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{3}$$

(3) формула *Ньютон-Лейбниц формуласи* деб аталади.

Бундан буён $F(b) - F(a)$ айирмани ($[a; b]$ кесмадаги $F(x)$ функциянинг орттирмасини) $F(x)\Big|_a^b$ кўринишда ёзамиз. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Сиз аниқ интегрални топишни ўрганасиз.

МИСОЛ

1. 1) $\int_0^2 x^3\,dx$; 2) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$; 3) $\int_{-1}^{1} (9x^2 - 24x + 16)\,dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

Ечиш. 1) $f(x) = x^3$ функция учун бошланғич функциялардан бири $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Энди Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

2) $F(x) = -\cos x$ функция $f(x) = \sin x$ функция учун бошланғич функциялардан бири. У ҳолда Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб, интегралнинг қийматини топиш мумкин:

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

3) Интеграл белгиси остидаги функциянинг бошланғич функцияларидан бири $F(x) = 3x^3 - 12x^2 + 16x$.

Демак, $\int_{-1}^{1} (9x^2 - 24x + 16)\,dx = (3x^3 - 12x^2 + 16x)\Big|_{-1}^{1} = (3 - 12 + 16) - (-3 - {}$ $- 12 - 16) = 38$.

Жавоб: 1) 4; 2) 2; 3) 38.

МИСОЛ

2. $\int\limits_x^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Ньютон-Лейбниц формуласи бўйича аниқ интегралнинг ифодасини топамиз: $\int\limits_x^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_x^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{x} = 4 - 2\sqrt{x}$. Энди берилган тенгламани қуйидагича ёзамиз: $4 - 2\sqrt{x} = 2$ ёки $\sqrt{x} = 1$. Демак, $x = 1$.

Жавоб: 1.

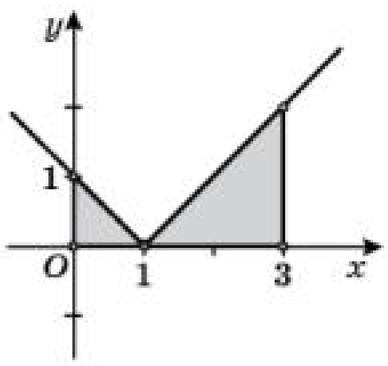
МИСОЛ

3. $\int\limits_0^3 |x - 1|dx$ интегрални топамиз.

Ечиш. **1-усул.** Дастлаб интеграл остидаги функцияни шакл алмаштирамиз: $y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1, \\ 1 - x, & x < 1. \end{cases}$ У ҳолда берилган аниқ интегрални бундай кўринишда ёзамиз. $\int\limits_0^3 |x - 1|dx = \int\limits_0^1 (1 - x)dx + \int\limits_1^3 (x - 1)dx.$

Биринчи интеграл учун бошланғич функция $F_1(x) = x - \frac{x^2}{2}$, иккинчи интеграл учун бошланғич функция $F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x$ бўлади. Жумладан, $\int\limits_0^1 (1 - x)dx + \int\limits_1^3 (x - 1)dx =$

$= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} - 3 + 1\right) = 2{,}5.$



18-расм

2-усул. Берилган интегрални топиш учун аниқ интегралнинг геометрик маъносини қўллаш мумкин. Бунинг учун $y = |x - 1|$ функциянинг графигини ясаймиз (18-расм). Аниқ интегралнинг қиймати фигуранинг юзига тенг бўлгани учун, берилган аниқ интегралнинг қиймати расмда бўялган учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг.

Жумладан, $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2{,}5.$

Жавоб: 2,5.

МИСОЛ

4. Интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб $\int\limits_3^6 \sqrt{6x - x^2}\,dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги ифодани қуйидагича белгилаймиз: $y = \sqrt{6x - x^2}$. Бундан $y^2 = 6x - x^2$, бунда $y \geq 0$ ёки $x^2 - 6x + y^2 = 0$. Иккиҳаднинг тўла квадратини ажратиш учун тенгликнинг иккала томонига 9 сонини қўшамиз. У ҳолда $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9$ ёки $(x - 3)^2 + y^2 = 9$, бунда $y \geq 0$. Ҳосил бўлган тенглама радиуси 3 га тенг ва маркази $A(3;\ 0)$ бўлган айланани беради. Бунда $y \geq 0$. Интегралнинг геометрик маъноси функциянинг графиги билан чегараланган фигуранинг юзи ва интеграллаш чегаралари 3 дан 6 гача бўлгани учун, радиуси 3 га тенг бўлган доира юзининг тўртдан бир қисми бўлади. Доиранинг юзи 9π га тенг. Демак, $\int\limits_3^6 \sqrt{6x - x^2}\,dx = \frac{9\pi}{4}$.

Жавоб: $\frac{9\pi}{4}$.

СИЗ БИЛАСИЗ: Эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = F(b) - F(a) \tag{2}$$

формула ёрдамида топилиши сизга олдинги параграфдан маълум.

Сиз Ньютон-Лейбниц формуласи билан танишасиз.

Агар $[a; b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функция учун $F(x)$ бошланғич функция бўлса, у ҳолда (1) ва (2) формулаларни таққослаш орқали қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{3}$$

(3) формула *Ньютон-Лейбниц формуласи* деб аталади.

Бундан буён $F(b) - F(a)$ айирмани ($[a; b]$ кесмадаги $F(x)$ функциянинг орттирмасини) $F(x)\Big|_a^b$ кўринишда ёзамиз. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Сиз аниқ интегрални топишни ўрганасиз.

МИСОЛ

1\. 1) $\int_0^2 x^3\,dx$; 2) $\int_0^\pi \sin x\,dx$; 3) $\int_{-1}^1 (9x^2 - 24x + 16)\,dx$ интегрални ҳисоблаймиз.

Ечиш. 1) $f(x) = x^3$ функция учун бошланғич функциялардан бири $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Энди Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

2) $F(x) = -\cos x$ функция $f(x) = \sin x$ функция учун бошланғич функциялардан бири. У ҳолда Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб, интегралнинг қийматини топиш мумкин:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

3) Интеграл белгиси остидаги функциянинг бошланғич функцияларидан бири $F(x) = 3x^3 - 12x^2 + 16x$.

Демак, $\int_{-1}^1 (9x^2 - 24x + 16)\,dx = (3x^3 - 12x^2 + 16x)\Big|_{-1}^1 = (3 - 12 + 16) - (-3 - - 12 - 16) = 38$.

Жавоб: 1) 4; 2) 2; 3) 38.

МИСОЛ

2. $\int_x^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Ньютон-Лейбниц формуласи бўйича аниқ интегралнинг ифодасини топамиз: $\int_x^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_x^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{x} = 4 - 2\sqrt{x}$. Энди берилган тенгламани қуйидагича ёзамиз: $4 - 2\sqrt{x} = 2$ ёки $\sqrt{x} = 1$. Демак, $x = 1$.

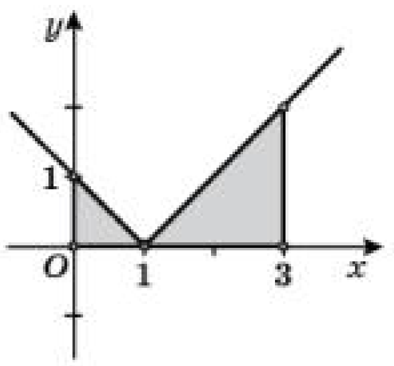
Жавоб: 1.

МИСОЛ

3. $\int_0^3 |x-1|dx$ интегрални топамиз.

Ечиш. **1-усул.** Дастлаб интеграл остидаги функцияни шакл алмаштирамиз: $y = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geqslant 1, \\ 1-x, & x < 1. \end{cases}$ У ҳолда берилган аниқ интегрални бундай кўринишда ёзамиз. $\int_0^3 |x-1|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$.

Биринчи интеграл учун бошланғич функция $F_1(x) = x - \frac{x^2}{2}$, иккинчи интеграл учун бошланғич функция $F_2(x) = \frac{x^2}{2} - x$ бўлади. Жумладан, $\int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx =$
$= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^3 = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} - 3 + 1\right) = 2{,}5.$



18-расм

2-усул. Берилган интергални топиш учун аниқ интегралнинг геометрик маъносини қўллаш мумкин. Бунинг учун $y = |x-1|$ функциянинг графигини ясаймиз (18-расм). Аниқ интегралнинг қиймати фигуранинг юзига тенг бўлгани учун, берилган аниқ интегралнинг қиймати расмда бўялган учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг.

Жумладан, $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2{,}5.$

Жавоб: 2,5.

МИСОЛ

4. Интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб $\int_3^6 \sqrt{6x - x^2}\,dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги ифодани қуйидагича белгилаймиз: $y = \sqrt{6x - x^2}$. Бундан $y^2 = 6x - x^2$, бунда $y \geqslant 0$ ёки $x^2 - 6x + y^2 = 0$. Иккиҳаднинг тўла квадратини ажратиш учун тенгликнинг иккала томонига 9 сонини қўшамиз. У ҳолда $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9$ ёки $(x-3)^2 + y^2 = 9$, бунда $y \geqslant 0$. Ҳосил бўлган тенглама радиуси 3 га тенг ва маркази $A(3;\ 0)$ бўлган айланани беради. Бунда $y \geqslant 0$. Интегралнинг геометрик маъноси функциянинг графиги билан чегараланган фигуранинг юзи ва интеграллаш чегаралари 3 дан 6 гача бўлгани учун, радиуси 3 га тенг бўлган доира юзининг тўртдан бир қисми бўлади. Доиранинг юзи 9π га тенг. Демак, $\int_3^6 \sqrt{6x - x^2}\,dx = \frac{9\pi}{4}$.

Жавоб: $\frac{9\pi}{4}$.

1. Аниқ интегралнинг аниқмас интегралдан қандай фарқи бор?
2. Интеграл остидаги функция берилган кесмада узлуксиз функция бўлса, аниқ интегрални топиш мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.
3. $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ экани маълум. Бундан $[a;\ b]$ кесмада $f(x) = 0$ бўладими? Жавобингизни тушунтиринг.

Машқлар

A

Интегрални ҳисобланг (**4.1-4.2**):

4.1. 1) $\int_{-3}^{2}(2x-3)\,dx$; 2) $\int_{-2}^{1}(5-4x)\,dx$;

3) $\int_{-2}^{0}(3x^2+10)\,dx$; 4) $\int_{0}^{2}(6x^2-2x+5)\,dx$;

5) $\int_{2}^{4}|x-3|\,dx$; 6) $\int_{0}^{2}(x+|x-1|)\,dx$.

4.2. 1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\cos x\,dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin x\,dx$;

3) $\int_{-1}^{1}\left(5x^4+6x^2\right)dx$; 4) $\int_{-2}^{1}\left(4x^3+6x\right)dx$.

Интеграл белгиси остидаги функцияни шакл алмаштириб, интегрални ҳисобланг (**4.3-4.4**):

4.3. 1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{x}{2}\,dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int_{0}^{1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}\,dx$; 4) $\int_{3}^{5}\frac{x^2-5x+6}{x-2}\,dx$.

4.4. 1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{18}}(\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x)\,dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{16}}(\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x)\,dx$;

3) $\int_{0,3}^{1,5}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{x^2}\right)dx$; 4) $\int_{-2}^{-1}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)dx$.

B

Интегрални ҳисобланг (**4.5–4.7**):

4.5. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \sin 3x dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx$.

4.6. 1) $\int\limits_{1}^{1,5} (1 - 2x)^3 dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} (3x + 1)^3 dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{4} \frac{(2 - x)^3}{8} dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{(1 - x)^4}{7} dx$.

4.7. 1) $\int\limits_{1}^{4} \frac{5\sqrt{x}}{x} dx$; 2) $\int\limits_{-8}^{-3} \frac{1}{\sqrt{1 - x}} dx$;

3) $\int\limits_{4}^{11} \frac{1}{\sqrt{x + 5}} dx$; 4) $\int\limits_{14}^{47} \frac{4}{\sqrt{x + 2}} dx$.

Интеграл белгиси остидаги функцияни шакл алмаштириб, интегрални ҳисобланг (**4.8-4.9**):

4.8. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\cos^2 x) dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\sin 2x - 1) dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \mathrm{tg} x \ \mathrm{ctg} x) dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tg}\frac{x}{5} \ \mathrm{ctg}\frac{x}{5} - \cos x\right) dx$.

4.9. 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} 12\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} - x\right) dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \sin 2x dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos 2x dx$.

4.10. Тенгламани ечинг:

1) $\int\limits_{1}^{x} (3 - 2t) dt = 4 - 2x$; 2) $\int\limits_{1}^{x} (1 - 4t) dt = 12 - 9x$;

3) $\int\limits_{x}^{-1} (3t - 2) dt = 5 - x$; 4) $\int\limits_{x}^{-2} (5t + 1) dt = 6 + x$.

4.11. Тенгсизликни ечинг:

1) $\int\limits_0^x 5dt > 1;$ 2) $\int\limits_x^{x^2} 5dt < 0;$

3) $\int\limits_x^1 3dt > 9;$ 4) $\int\limits_x^2 (2t - 3)\, dt > 0.$

C

Интегрални ҳисобланг (**4.12–4.14**):

4.12. 1) $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \cos 3x dx;$ 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx;$

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos dx}{1 - \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}};$ 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x d x}{2\sin x + 1}.$

4.13. 1) $\int\limits_0^1 (2 + 5x)^3 dx;$ 2) $\int\limits_0^1 (2x + 3)^3 dx;$

3) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{(6x - 1)^4};$ 4) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{(1 - 2x)^5}.$

4.14. 1) $\int\limits_2^{12} \frac{dx}{\sqrt{3x - 1}};$ 2) $\int\limits_4^{12} \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}};$

3) $\int\limits_2^3 \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 1}{1 + x^2} dx;$ 4) $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 1} dx.$

4.15. Тенгсизликни тўғри тенгсизликка айлантирувчи x нинг қийматларини топинг:

1) $\int\limits_x^3 (t + 1)dt < 0;$ 2) $\int\limits_x^2 (1 - t)dt > 0;$

3) $\int\limits_{-2}^x (2 - 3t)dt > 0;$ 4) $\int\limits_{-3}^x (4t - 1)dt < 0.$

4.16. 1) $\int\limits_x^{2x} \sin 2t dt = \frac{1}{2}$ тенглик бажариладиган x нинг энг кичик мусбат қийматини;

2) $\int\limits_x^{x-1} \sin 2t dt < 0$ тенгсизлик бажариладиган x нинг энг кичик бутун мусбат қийматини топинг.

4.17. Интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб, интегрални ҳисобланг:

1) $\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx;$ 2) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx;$

3) $\int\limits_0^2 \sqrt{2x - x^2}\, dx;$ 4) $\int\limits_2^4 \sqrt{4x - x^2}\, dx.$

ТАКРОРЛАШ

4.18. $f(x)$ функция берилган. $f'(x)$ ни топинг:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & x \geq 3, \\ -x^2 + 2, & x < 3; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} 5x - x^2, & x \geq 2, \\ -\sqrt{2-x}, & x < 2. \end{cases}$

4.19. Берилган функцияларнинг графиклари билан чегараланган фигурани координаталар текислигида ясанг:

1) $y = 2 + \sin x$ ва $y = x^2 - x$; 2) $y = \cos x + 1$ ва $y = \sqrt{4-x}$.

4.20. Функциянинг бошланғич функциясини топинг:

1) $f(x) = 2x + 6x^3$; 2) $f(x) = \sqrt{2x+1} - 4x^3$;

3) $f(x) = 6\cos 3x - 4x$; 4) $f(x) = 2\sin 2x - 2x$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Текисликда ва фазода координаталар системаси, функция, функциянинг графиги, тўғри чизиқ, парабола, кўпёқлар, айланма жисмлар, эгри чизиқли трапеция, ҳосила, бошланғич функция, интеграл, ҳаракат тезлиги ва тезланиши.

5-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ГЕОМЕТРИК ВА ФИЗИК МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШДА ҚЎЛЛАНИШИ

Сиз берилган чизиқлар билан чегараланган ясси фигура юзини ҳисоблашни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, бошланғич функция, аниқ интеграл, ясси фигура, айланма жисм, юза, ҳажм

СИЗ БИЛАСИЗ:

$\int_a^b f(x)dx$ аниқ интеграл юқоридан $f(x)$ функциянинг графиги, пастки томонидан Ox ўқига тегишли $[a; b]$ кесма, икки ён томонидан $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини бериши маълум.

Баъзи бир ҳолларда юқоридан ҳам,қуйидан ҳам турли хил функцияларнинг графиклари (ҳар хил эгри чизиқлар) билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топишга тўғри келади (19.1-расм).

19.1-расмда тасвирланган ясси фигуранинг юзини ҳисоблаш учун юқоридан $y = f_1(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзидан қуйидан $y = f_2(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини айириш керак.

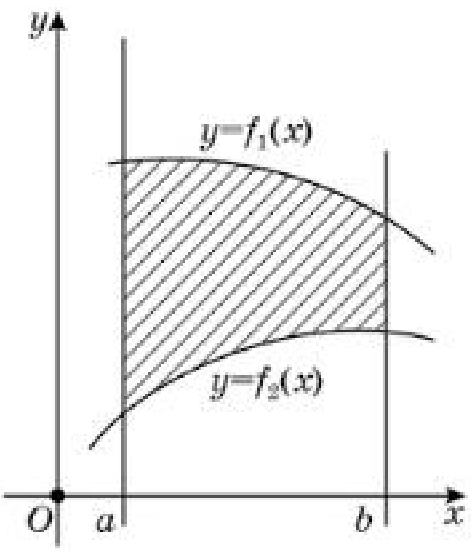
У ҳолда изланаётган юзани қуйидагича топамиз:

$$S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

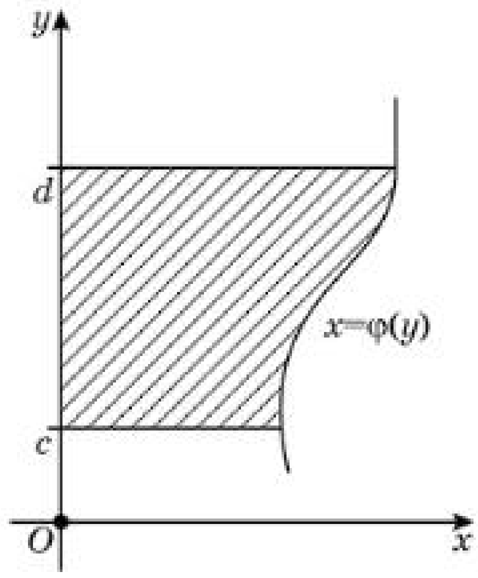
ёки

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx. \qquad (1)$$

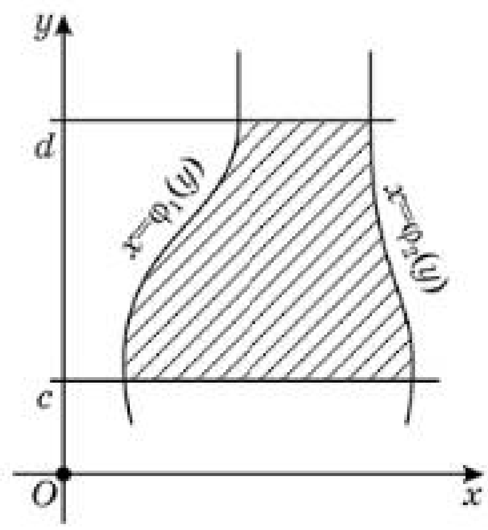
Баъзи хусусий ҳолларда Ox ўқига параллел $y = c$ ва $y = d$ тўғри чизиқлар, $x = 0$ тўғри чизиқ ва битта ён томонидан эгри чизиқ ($x = \phi(y)$ функциянинг графиги) билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблаш керак бўлади (19.2-расм).



19.1-расм



19.2-расм



20-расм

Бундай фигуранинг юзи

$$S = \int_c^d \phi(y)dy \qquad (2)$$

формула билан (бунда y — интеграллаш ўзгарувчиси) ҳисобланади. Агар фигура ён томонларидан $x = \phi_1(y)$ ва $x = \phi_2(y)$ эгри чизиқлар билан чегараланган бўлса (20-расм), у ҳолда фигуранинг юзи қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S = \int_c^d (\phi_2(y) - \phi_1(y))dy. \qquad (3)$$

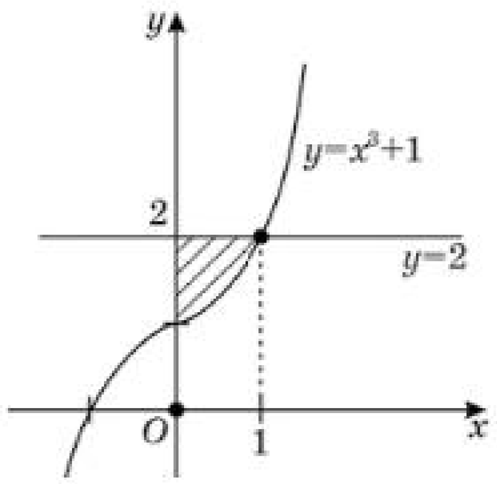
МИСОЛ

1. $y = x^3 + 1$ эгри чизиқ, $y = 2$ тўғри чизиқ билан ва Oy ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топамиз (21-расм).

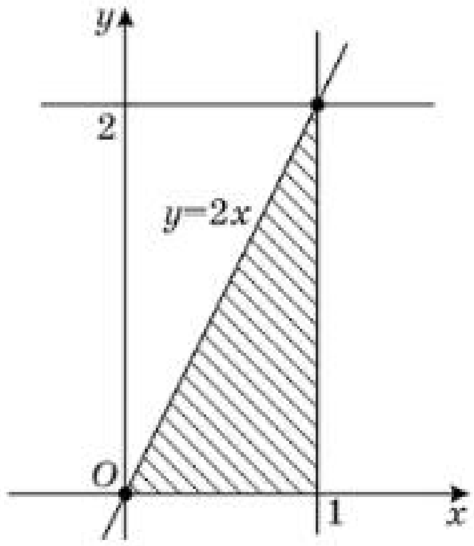
Ечиш. 21-расмда берилган ясси фигуранинг юзини (1) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$S = \int_0^1 (2 - x^3 - 1)\,dx = \int_0^1 (1 - x^3)\,dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

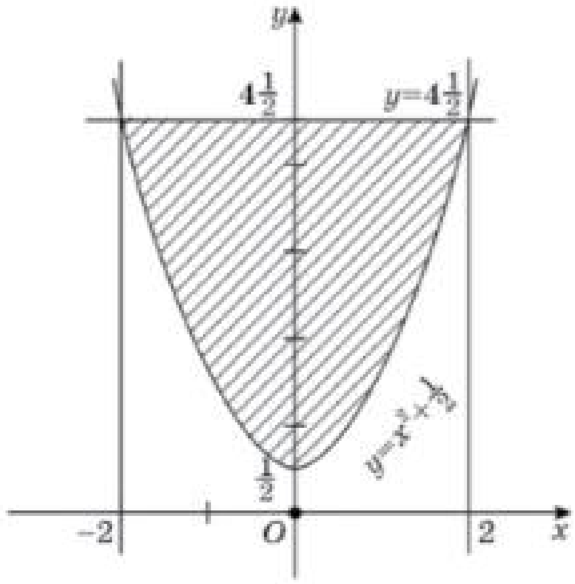
Жавоб: $\frac{3}{4}$ кв. бирл.



21-расм



22-расм



23-расм

МИСОЛ

2. $y = 2x$, $x = 1$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисоблаймиз (22-расм).

Ечиш. 22-расмда берилган учбурчакнинг юзини (1) формула ёрдамида топамиз:

$$S = \int_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$$

Худди шундай хулосани тўғри бурчакли учбурчакнинг юзини топиш формуласи $S = \frac{1}{2}ab$ орқали ҳам олиш мумкин. Бу ҳолда $a = 1$, $b = 2$. Демак,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Жавоб: 1 кв. бирл.

МИСОЛ

3. $y = \int\limits_{x^2}^{x^2+1} t\,dt$ интеграл кўринишида берилган функциянинг графиги ва $y = 4\frac{1}{2}$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топамиз.

Ечиш. Аввал интегрални ҳисоблаймиз:

$$y = \int\limits_{x^2}^{x^2+1} t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_{x^2}^{x^2+1} = \frac{1}{2}((x^2+1)^2 - x^4) = x^2 + \frac{1}{2}.$$

Сўнгра мисолни ечиш учун $y = x^2 + \frac{1}{2}$ парабола ва $y = 4\frac{1}{2}$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топиш керак бўлади (23-расм).

Дастлаб интеграллаш чегараларини топамиз. Бунинг учун $x^2 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ тенгламани ечамиз. Тенгламанинг илдизлари $x_1 = -2$ ва $x_2 = 2$.

23-расмда берилган ясси фигура Oy ўқига нисбатан симметрик. Бундан эгри чизиқли трапециянинг юзини [0; 2] кесмада ҳисоблаб, иккига кўпайтириш етарли.

$$S = 2 \cdot \int_0^2 \left(4\frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}\right) dx = 2 \cdot \int_0^2 (4 - x^2)dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

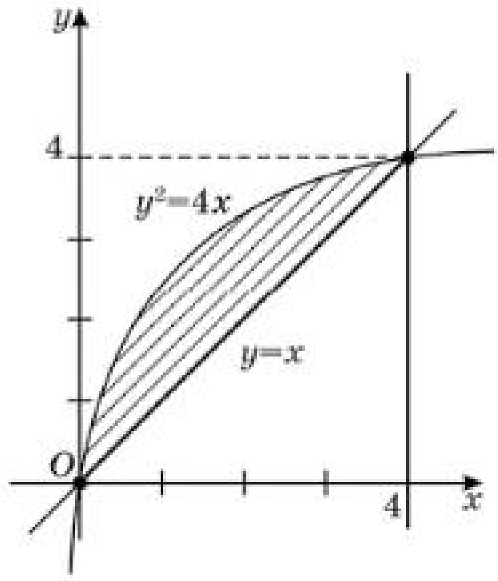
Жавоб: $\frac{32}{3}$ кв. бирл.

МИСОЛ

4. $y^2 = 4x$ парабола ва $y = x$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топамиз.

Ечиш. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзи 24-расмда тасвирланган. Ушбу ясси фигуранинг юзини топиш учун аввал берилган парабола билан тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталари координаталарини топамиз. Бунинг учун иккита тенгламадан ташкил топган тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = x \end{cases} \text{ ёки } \frac{y^2}{4} = y, \text{ бундан } y_1 = 0,\ y_2 = 4.$$



24-расм

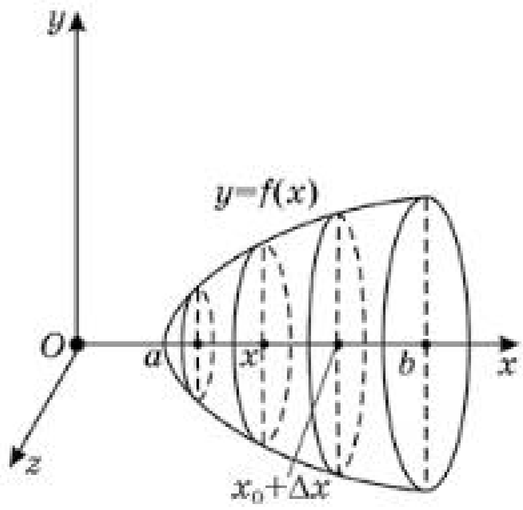
Демак, изланаётган фигуранинг юзини (3) формула ёрдамида топамиз:

$$S = \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{12} = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Жавоб: $\frac{8}{3}$ кв. бирл.

Сиз айланма жисмлар ҳажмини аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш формуласи билан танишасиз.

$[a; b]$ кесмада узлуксиз $y = f(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган эгри чизиқли трапеция берилсин. Ушбу эгри чизиқли трапецияни Ox ўқи атрофида айлантирганда ҳосил бўладиган геометрик жисмнинг ҳажмини топиш керак бўлсин (25-расм).



25-расм

$[a; b]$ кесмадан исталган x нуқтани олайлик. Агар шу нуқта орқали Ox ўқига перпендикуляр текислик ўтказсак, у ҳолда текислик айланма жисмни айлана бўйича кесиб ўтади (кесимда доира пайдо бўлади). Ҳосил бўлган доиранинг радиуси y га тенг. Демак, кесимнинг юзи $Q(x) = \pi y^2$.

$[a; b]$ кесмада $Q(x)$ кесимнинг юзи узлуксиз эканлиги маълум. $[a; x]$ кесмага мос бўлган жисм қисмининг ҳажмини $V(x)$ орқали белгилайлик (25-расм).

$V(x)$ функциянинг ҳосиласини топамиз. Бунинг учун бирор бир x_0 қийматни олиб, унга Δx орттирма берайлик. Δx қиймат нолдан катта ёки нолдан кичик бўлиши мумкин. $\Delta x > 0$ деб олсак, $V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)$ айирма Ox ўқидан олинган x_0 ва $x_0 + \Delta x$ нуқталар орқали ўтувчи текисликлар орасида жойлашган жисмнинг ҳажми бўлади (25-расм). Расмдан қуйидаги тенглик бажарилади:

$$Q(x_0) \cdot \Delta x \leqslant V(x_0 + \Delta x) - V(x_0) \leqslant Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Бунда $Q(x_0) \cdot \Delta x$ — олинган қават ичига тамомила тегишли бўлган цилиндрик жисмнинг ҳажми, $Q(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$ — шу қаватни ўз ичига олган жисмнинг ҳажми $\Delta x > 0$ бўлгани учун

$$Q(x_0) \leqslant \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} \leqslant Q(x_0 + \Delta x).$$

$Q(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз. Шу сабабли у x_0 нуқтада ҳам узлуксиз. Демак, агар Δx қиймат нолга интилса, у ҳолда $Q(x_0 + \Delta x)$ қиймат $Q(x_0)$ қийматга интилади. Бундан $\Delta x \to 0$ бўлганда $\dfrac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x}$ қиймат $Q(x_0)$ қийматга интилади. Шундай қилиб, $V'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = Q(x_0)$. Жумладан, $V(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада $Q(x)$ функция учун бошланғич функция бўлади. У ҳолда

$$\int_a^b Q(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a).$$

Демак, айланма жисмнинг ҳажмини топиш учун a дан b гача оралиқда $Q(x) = \pi y^2$ функцияни интеграллаш етарли:

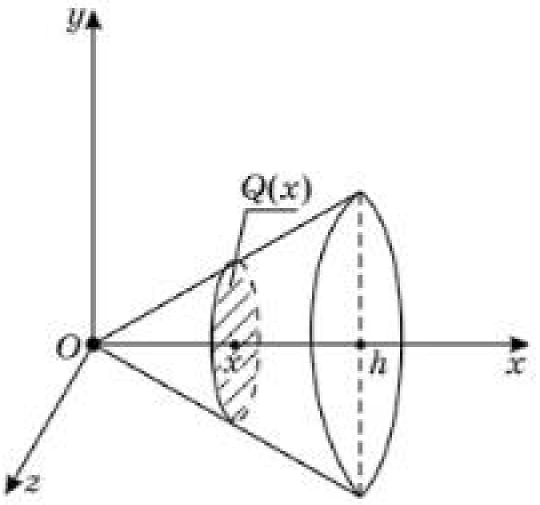
$$V = \int_a^b Q(x)\ dx = \pi \int_a^b y^2 dx. \qquad (4)$$

МИСОЛ

5. Асосининг юзи S га, баландлиги h га тенг бўлган конуснинг ҳажмини топайлик.

Ечиш. Конуснинг учини координаталар бошига тушадиган қилиб, баландлигини Ox ўқи бўйича йўналтирайлик (26-расм).

Исталган x нуқта орқали Ox ўқига перпендикуляр текислик ўтказамиз. Бу текислик конусдан юзи $Q(x)$ бўлган доирани кесиб ўтади.



26-расм

Конуснинг параллел кесимлари юзларининг нисбати шу кесимлардан конуснинг учигача бўлган масофалар квадратларининг нисбатига тенг эканлиги геометрия курсидан маълум: $\dfrac{Q(x)}{S} = \dfrac{x^2}{h^2}$, бунда $Q(x)$ — конуснинг x нуқтадан ўтувчи Ox ўқига перпендикуляр текислик билан кесимининг юзи, S — конус асосининг юзи, h — конуснинг баландлиги, x катталик x нуқта орқали ўтувчи кесимдан конуснинг учигача бўлган масофа.

Охирги тенгликдан $Q(x) = \dfrac{S}{h^2}\ x^2$.

Энди интеграл ёрдамида конуснинг ҳажмини топамиз:

$$V = \int_0^h Q(x)dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh.$$

Шундай қилиб, конуснинг ҳажмини ҳисоблайдиган $V = \frac{1}{3}Sh$ формулага эга бўлдик.

Сиз аниқ интегралдан физик масалаларни ечишда фойдаланишни ўрганасиз.

СИЗ БИЛАСИЗ: Моддий нуқтанинг тезлиги унинг босиб ўтган s йўлидан t вақт бўйича олинган ҳосила $v = s'(t)$, тезланиши эса тезликдан t вақт бўйича олинган ҳосила $a = v'(t)$ эканлиги маълум.

Тезлиги бўйича жисмнинг босиб ўтган йўлини топиш учун Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб ушбу тенгликни оламиз:

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = s(t_1) - s(t_0) \text{ ёки } s(t_1) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt, \qquad (5)$$

бунда t_0 — бошланғич вақт.

Худди шундай жисмнинг тезланиши бўйича тезлигининг катталигини ҳам аниқлаш мумкин:

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)dt = v(t_1) - v(t_0) \text{ ёки } v(t_1) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt.$$

Бунда $v(t_0)$ бошланғич тезликни аниқлайди ва v_0 орқали белгиланади. Бундан охирги тенглик қуйидагича ёзилади:

$$v(t_1) = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt. \qquad (6)$$

(6) формула орқали моддий нуқтанинг тезланиши бўйича тезликни, (5) формула орқали моддий нуқтанинг тезлиги бўйича босиб ўтган йўлини топиш мумкин.

МИСОЛ

6. Тезлиги $v = 9{,}8t - 0{,}003t^2$ қонуният бўйича ўзгарган моддий нуқтанинг $t_0 = 0$ дан $t = 5$ гача вақт оралиғида босиб ўтган йўлини топамиз.

Ечиш. Мисолни ечиш учун (5) формуладан фойдаланамиз:

$$s(t) = s(t_0) + \int_0^5 (9{,}8t - 0{,}003t^2)dt.$$

Мисолнинг шартига кўра $t_0 = 0$ $(s(t_0) = 0)$. Бундан

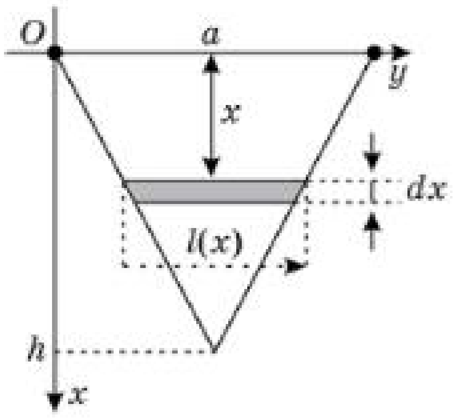
$$s(t) = \int_0^5 (9{,}8t - 0{,}003t^2)dt = \left(9{,}8 \cdot \frac{t^2}{2} - 0{,}003 \cdot \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^5 = (4{,}9t^2 - 0{,}001t^3)\Big|_0^5 =$$

$$= 4{,}9 \cdot 25 - 0{,}001 \cdot 125 = 122{,}5 - 0{,}125 = 122{,}375.$$

Жавоб: 122,375.

МИСОЛ

7. Асоси a га, баландлиги h га тенг бўлган учбурчаксимон пластина берилган. Шу пластинага (пластинанинг асоси сув сиртига жойлашган) таъсир қилувчи сувнинг босимини топамиз.



27-расм

Ечиш. 27-расмда кўрсатилган x чуқурликда жойлашган баландлиги чексиз кичик dx га тенг бўлган йўлакчани кўриб чиқамиз. Учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\frac{l(x)}{a} = \frac{h-x}{h}, \text{ бундан } l(x) = \frac{a(h-x)}{h}.$$

Демак, йўлакчанинг юзи $dS = \frac{a(h-x)}{h} \cdot dx$. Унга таъсир қилувчи сувнинг босими $dp = x \cdot dS = \frac{x \cdot a(h-x)}{h}\, dx$.

Пластинага таъсир этувчи сувнинг босимини топиш учун dp ни x ўзгарувчи бўйича $x = 0$ дан $x = h$ гача интеграллаш керак:

$$p = \int_0^h \frac{x(h-x)a}{h}\, dx = \frac{a}{h}\int_0^h (xh - x^2)dx = \frac{a}{h}\left(\frac{hx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h = \frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{a}{h} \cdot \frac{h^3}{6} = \frac{ah^2}{6}.$$

Демак, пластинага таъсир этувчи сувнинг босими $\frac{1}{6}ah^2$ Па.

Жавоб: $\frac{1}{6}ah^2$ Па.

1. Қандай ҳолларда фигураларнинг юзини ва ҳажмини ҳисоблаш фақатгина аниқ интеграл орқали олиб борилади?
2. Тўғри чизиқнинг кесмалари билангина эмас, эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини аниқ интегралдан фойдаланиб топиш нима учун асосий усуллардан бири ҳисобланади?
3. Баъзи бир кўпёқлар ва айланма жисмларнинг (пирамида, кесик пирамида, конус, кесик конус) ҳажмини топиш формулаларининг исботини аниқ интеграл орқали бериш нима учун оқилона йўл бўлиб ҳисобланади?
4. Ҳаракатга доир масалаларни ечиш учун аниқ интеграл қандай қўлланилади?

Машқлар

А

5.1. 1) $y = 2x + 2$, $y = 0$, $x = 2$; 2) $y = x + 2$, $y = 0$, $x = 2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг. Жавобингизни геометрия фанида маълум бўлган формулалар билан текширинг.

5.2. 1) $y = (x - 2)(2x - 3)$, $y = 0$; 2) $y = (3x + 2)(x - 1)$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи нимага тенг?

5.3. Берилган чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:
1) $y = x^2 - 4x + 4,\ y = 0,\ x = 0$;
2) $y = x^2 + 6x + 9,\ y = 0,\ x = 0$;
3) $y = 4x^2 + 12x + 9,\ y = 0,\ x = 0$;
4) $y = 9x^2 - 6x + 1,\ y = 0,\ x = 0$.

5.4. $y = f(x)$ функциянинг графиги ва координаталар ўқлари билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:
1) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$; 2) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

5.5. Берилган чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:
1) $y = 2x^2,\ y = 4x$; 2) $y = x^2,\ y = -2x$.

5.6. Берилган чизиқлар билан чегараланган фигурани ясанг ва унинг юзини топинг:
1) $y = \sin x,\ y = x + 1,\ x = 0,\ x = 2$ ва $\cos 2 \approx -0{,}41$;
2) $y = \cos x,\ y = 3 - x,\ x = 0,\ x = -1$ ва $\sin 1 \approx 0{,}84$.

5.7. 1) $y = x^2$ параболани $x = 0$ дан $x = 2$ гача абсцисса ўқига нисбатан айлантирганда ҳосил бўладиган жисм ҳажмини топинг.
2) $y = x^2$ параболани ординаталар ўқи атрофида айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг $x = -2$ нуқтадан $x = 2$ нуқтагача оралиқдаги ҳажмини топинг.

5.8. Маълум бир баландликдан тушган жисмнинг тезлиги $v = 9{,}8t + 0{,}01t^2$ қонун бўйича ўзгаради. Жисмнинг тушиш вақти $t = 4$ с бўлса, у қандай баландликдан тушган?

B

5.9. Берилган функцияларнинг графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:
1) $y = x^2 - 4x - 4,\ y = -x$; 2) $y = 3x^2,\ y = 2x$.

5.10. 1) $y = 4x - x^2$ парабола, (4; 0) ва (0; 4) нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ билан чегараланган;
2) $y = 3x^2$ ($x \leqslant 0$) парабола, абсциссалар ўқи ва (–3; 0), (0; 4,5) нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5.11. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:
1) $y = \frac{1}{8}x^3,\ y = 0{,}5x$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^3,\ \ y = -x$.

5.12. 1) $y = 4x - x^2$; 2) $y = x^2 - 6x$ парабола ва шу параболанинг учи билан координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5.13. Берилган функцияларнинг графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y = x^2$ ва $y = 3 - 2x$;
2) $y = x^2$ ва $y = 2x - x^2$;
3) $y = x^2 + 1$ ва $y = -x^2 + 3$;
4) $y = 2x^2 + 1$ ва $y = x + 2$, $y = 1{,}5$.

5.14. $y = \dfrac{1}{x}$ гиперболани абсциссалар ўқига нисбатан айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг $x = 1$ нуқтадан $x = 3$ нуқтагача бўлган оралиқдаги ҳажмини топинг.

5.15. Агар моддий нуқта $v = Rt + a\sqrt{t}$ қонун бўйича ҳаракатланса, у $t = 0$ дан $t = 4$ гача бўлган вақт оралиғида қандай йўл юради?

5.16. Юзи: 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$ аниқ интегралнинг қийматига тенг бўлган фигура тасвирини ясанг.

C

5.17. $y = x^2 - 2x + 1$ функциянинг графиги ва унинг ҳосиласи графиги билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5.18. $F(x)$ функция $f(x) = 2x - 4$ функциянинг бошланғич функцияси. Агар $F(x)$ функциянинг графиги $A(0; 4)$ нуқта орқали ўтса, у ҳолда $f(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5.19. Учбурчак узунлиги a га тенг бўлган томони атрофида айлантирилган. Агар шу томонига қўшни бўлган бурчаклар α ва β га тенг бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажмини топинг.

5.20. $y = \big||x - 1| - 2\big|$, $y = 0$, $x = 0$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни абсциссалар ўқи атрофида айлантирганда ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

5.21. $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3$ функция графиги ва Oy ўқида ётган нуқтадан ўтувчи ҳамда ўзаро тўғри бурчак ҳосил қилувчи берилган функциянинг графигига уринма иккита тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5.22. $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 1$ функциянинг графиги ва шу графикка унинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқталари орқали ўтказилган уринмалар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5.23. $y = -x^2 + 4x$ функциянинг графиги ва шу графикка унинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқталари орқали ўтказилган уринмалар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5.24. $y = \int\limits_{x}^{x+1} 3t^2\, dt$ функциянинг графиги ва $y = 1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5.25. Учлари $A(-4;\ 0)$, $B(-2;\ 4)$, $C(2;\ 4)$, $D(4;\ 0)$ бўлган $ABCD$ тўртбурчакнинг юзини $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ парабола қандай нисбатда бўлади?

5.26. 1) Асоси 18 м, баландлиги 6 м бўлган тўғри тўртбурчакли шлюзга юборилган сувнинг босимини топинг.
2) Ариқнинг кўндаланг кесими асослари a ва b (a — юқори асоси) ҳамда баландлиги h га тенг бўлган тенг ёнли трапеция шаклида. Ариқни тўлдирадиган сув тўғонга қандай куч билан босим беради?

5.27. Моддий нуқтанинг тўғри чизиқ бўйича ҳаракат тезлиги $v(t) = \sin t \cos t$ тенглама билан аниқланади. Агар нуқта $t = \frac{\neq}{4}$ вақт ичида 3 м йўл юрса, унинг ҳаракат тенгламаси қандай бўлади?

5.28. Графиги $y = 6x + 3$ тўғри чизиққа уринувчи $f(x) = 2x + 4$ функциянинг бошланғич функциясини топинг. Топилган бошланғич функциянинг графиги, $y = 6x + 3$ ва $y = 0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

ТАКРОРЛАШ

5.29. Берилган кесмада функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $y = \frac{x}{2x^2 - 1}$, $[-4;\ -2]$; 2) $y = x \cdot \sqrt{3 - x}$, $[-1;\ 3]$.

5.30. Интегралнинг геометрик маъносидан фойдаланиб интегрални ҳисобланг:

1) $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$;

3) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{4x - x^2}\, dx$; 4) $\int\limits_{1}^{2} \sqrt{2x - x^2}\, dx$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

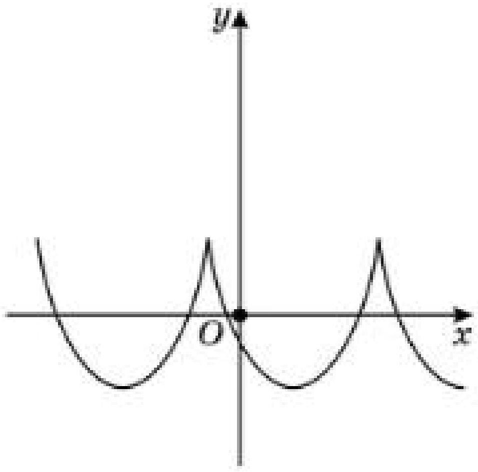
1. Бошланғич функцияси $F(x) = 2 - \cos x$ бўлган функцияни топинг:
A) $2x + \sin x$; B) $\sin x$;
C) $-\sin x$; D) бундай функция мавжуд эмас.

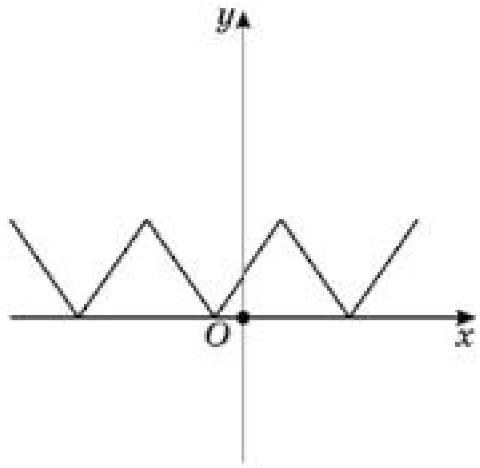
2. $f(x) = 5x^4 - 2x$ функциянинг бошланғич функциясини топинг:

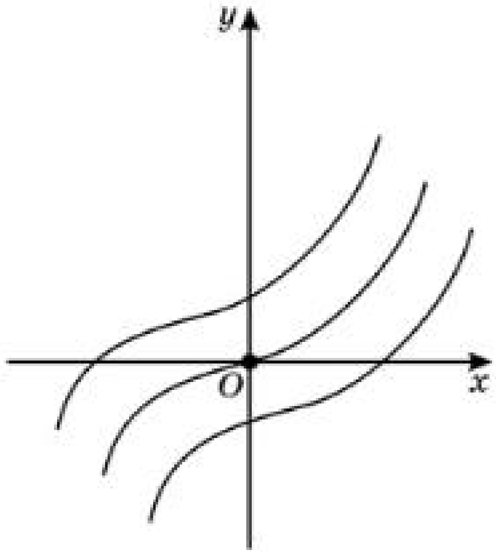
A) $F(x) = 20x^4 + 8$;   B) $F(x) = x^5 + x^2$;

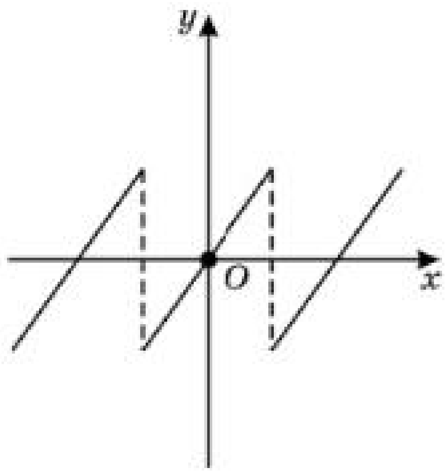
C) $F(x) = 20x^4 - 8$;   D) $F(x) = x^5 - x^2$.

3. Бошланғич функциянинг графиги қайси расмда тасвирланган?

A) 

B) 

C) 

D) 

4. $F(x) = \frac{3}{x-2}$ функция $f(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$ функциянинг бошланғич функцияси бўлмайдиган оралиқни топинг:

A) $(-\infty; 0)$;   B) $(2; +\infty)$;

C) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$;   D) $(-\infty; -2) \cup (-2; 4)$.

5. $A(-1; 1)$ нуқта орқали ўтувчи $y(x) = x^2 - 2x$ функциянинг бошланғич функциясини топинг:

A) $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{1}{3}$;   B) $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{3}$;

C) $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{1}{3}$;   D) $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{4}{3}$.

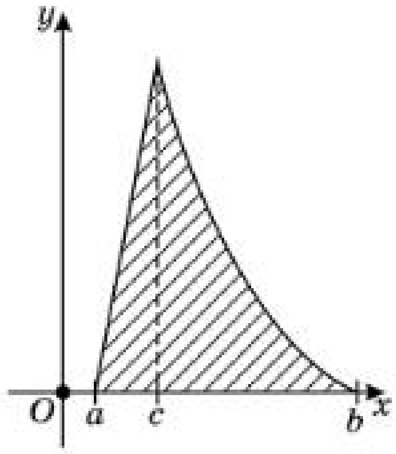
6. Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб, $\int 2x(x^2 + 1)^3dx$ аниқмас интегрални топинг:

A) $(x^2+1)^4+C$;   B) $2(x^2+1)^4+C$;   C) $\frac{(x^2+1)^4}{4}+C$;   D) $\frac{(x^2+1)^4}{2}+C$.

7. Бўлакларга бўлиб интеграллаш усулидан фойдаланиб, $\int x\sin 3x dx$ аниқмас интегрални топинг:

A) $x\cos 3x + C$; B) $\frac{x\cos 3x}{2} - \frac{1}{9}\sin 3x + C$;

C) $\frac{x\cos 3x}{2} + \frac{1}{9}\sin 3x + C$; D) $-\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C$.



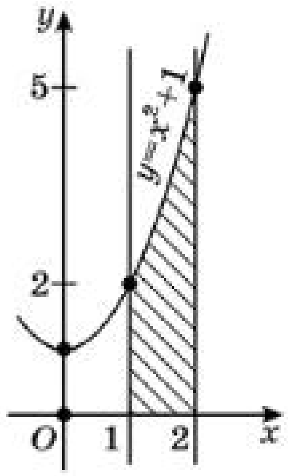
8. Расмда тасвирланган фигуранинг юзини топиш формуласини аниқланг:

A) $S = S_{\text{э.трап}} - S_{\Delta}$; B) $S = S_{\text{э.трап}} + S_{\Delta}$;

C) $S = 2S_{\text{э.трап}} - S_{\Delta}$; D) $S = S_{\text{э.трап.}}$

9. Расмда тасвирланган фигуранинг юзини топинг:

A) $\frac{3}{10}$; B) 8; C) 10; D) $3\frac{1}{3}$.



10. $\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ интегрални ҳисобланг:

A) 2; B) 3; C) 1; D) 4.

11. $\int_1^b 8dx = 8$ тенглик бажариладиган b нинг қийматини топинг:

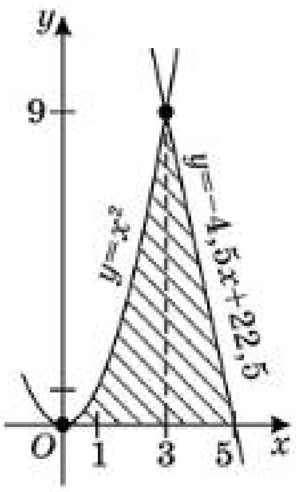
A) 4; B) 8; C) 2; D) 5.

12. $y = x^2 - 4x + 5$ ва $y = 5$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

A) $10\frac{2}{3}$; B) $\frac{3}{32}$; C) 11; D) 10.

13. Расмда тасвирланган фигуранинг юзини топинг:

A) 18; B) 9; C) 27; D) 54.



14. $\int_0^4 \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1} dx$ интегрални ҳисобланг:

A) 8; B) 12; C) 6; D) −4.

15. $\int_0^2 14 \cdot |x - 1| dx$ интегрални ҳисобланг:

A) −14; B) 1; C) 14; D) 0.

16. $\int_0^6 \frac{x^4 - 1}{x + 1} dx$ интегрални ҳисобланг:

A) 212; B) 264; C) 210; D) 320.

17. $\int_0^x 12t^2 dt = 4$ тенгламани ечинг:

A) −1; B) 1; C) 2; D) −2.

18. $\int\limits_{-2}^{x} 4dt > 0$ тенгсизликни ечинг:

A) $(-2; +\infty)$; B) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$;
C) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; D) $(-\infty; 0)$.

19. Жисм $v(t) = 0,5t^3 + t$ (м/мин) тезлик билан тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланади. Жисмнинг дастлабки икки минутда босиб ўтган йўлини топинг:

A) 8 м; B) 2 м; C) 3 м; D) 4 м.

20. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқ атрофида айлантирганда ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг:

A) 243π; B) $5,4\pi$; C) 27π; D) $48,6\pi$.

Математик саводхонлик бўйича тест топшириқлари

21. Ҳар хил a ва b сонлар c сонига бўлинади. Ёлғон мулоҳазани кўрсатинг:

A) $\dfrac{a-b+1}{a+b}$ сони c сонига бўлинади;

B) $\dfrac{2a-b}{a+b}$ қисқарадиган каср;

C) ab сони c сонига бўлинади;
D) $3a + 2b$ сони c сонига бўлинади;
E) $ab - 2c$ сони c сонига бўлинади.

22. Битта ўрамда А4 форматли 500 та варақ бор. Фирма бир ҳафтада 1400 варақ сарфлайди. Фирманинг олти ҳафтада оладиган ўрамлар сонининг энг кичик сонини топинг:

A) 15; B) 14; C) 16; D) 17; E) 18.

23. Учта апельсин ва битта нокнинг массаси 10 та мандариннинг массасига, олтита мандарин ва битта апельсиннинг массаси битта нокнинг массасига тенг. Массаси битта нокнинг массасига тенг бўладиган мандаринлар сонини топинг:

A) 8; B) 7; C) 6; D) 5; E) 9.

24. Ўйин коптогини 27 м баландликдан ташлаганда, копток баландликнинг учдан бир қисмига кўтарилади. Копток тўлиқ тўхташи учун неча метрга учишини топинг:

A) 44; B) 56; C) 54; D) 52; E) 60.

25. Томонларининг узунлиги 6 см бўлган квадратдан бўйи 4 см ва эни 3 см бўлган бир хил нечта тўғри тўртбурчак кесиб олиш мумкинлигини топинг:

A) 2; B) 4; C) 6; D) 3; E) 5.

ТАРИХИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Интеграл тушунчаси исталган ясси фигуранинг юзини, шу билан биргаликда исталган жисм сиртининг юзини ва ҳажмини ҳисоблаш эҳтиёжидан пайдо бўлди.

Масалан, Қадимги Юнонистон ва Римда математик олимлар исталган ясси фигуранинг квадратурасини (тенг ўлчовли квадрат ясаш усули билан юзани топиш) ва исталган жисмнинг кубатурасини (тенг ўлчовли куб ясаш усули билан ҳажмни ҳисоблаш) топишга доир масалалар ечиш билан шуғулланган. Улар ўз ҳисоблашларида Евдокс Книдский (тахминан э.а.408-358 йиллар) таклиф қилган якунлаш (тамомлаш, тугатиш) усулидан фойдаланган. Масалан, бу усулни фойдаланиш орқали Евдокс иккита доира юзларининг нисбати уларнинг диаметрлари квадратларининг нисбатига, асосларидаги айланалари билан баландлиги цилиндрнинг асосидаги айланаси билан баландлигига мос равишда тенг бўладиган конуснинг ҳажми цилиндр ҳажмининг $\frac{1}{3}$ қисмига тенг эканлиги исботланган.

Архимед ўзининг “Парабола квадратураси” асарида Евдокс усулини такомиллаштириб, доиранинг юзини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарди. Архимед усулининг асосий мазмуни:

1) Доиранинг юзи унга ташқи чизилган исталган мунтазам кўпбурчакнинг юзидан кичик, бироқ унга ички чизилган исталган мунтазам кўпбурчакнинг юзидан катта эканлиги исботланади;

2) Ички ва ташқи чизилган мунтазам кўпбурчаклар томонларининг сонини икки баравардан чексиз орттирганда уларнинг юзаларининг айирмаси жуда кичик қиймат бўлиши (нолга яқинлашиши) исботланади;

3) Ташқи (ички) чизилган мунтазам кўпбурчак томонларининг сонини икки мартадан чексиз орттирганда унинг юзининг интиладиган катталиги доира юзининг катталиги сифатида олинади.

$\int$ интеграл белгисини Г.Лейбниц (1675 й.) киритган. Бу белги “summa” сўзидаги S лотин ҳарфига ўхшаш қилиб олинган. *Интеграл* тушунчасини эса дастлаб Я.Бернулли (1690 й.) фойдаланди. Бу таржимаси *дастлабки шакли, шаклига келтириш* тушунчасини билдирувчи “integro” деган лотин сўзидан келиб чиққан. У *туташ* деган маънони англатувчи “integer” сўзидан келиб чиқиши ҳам мумкин.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Варианта, вариацион қатор, тақсимот қатори, полигон, частоталар полигони.

II БОБ

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

6-§. АСОСИЙ ТЎПЛАМ ВА ТАНЛАНМА

Математик статистиканинг асосий атамалари билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Танланма, асосий тўплам, статистик қатор, частота, гистограмма

Аниқ ўлчовларни ёки экспериментларни ўтказиш давомида катта ҳажмдаги ахборотлар олинади. Масалан, фирма ходимларининг туғилган куни ҳақида маълумотлар, маълум бир шаҳар ёки райондаги ЯМТ балининг натижалари, Қозоғистон банкларидаги халқнинг омонатлари миқдори, ҚР муайян вилоятларидан ҳарбий хизматга чақирилганларнинг тана вазни ва сони, кун давомида супермаркетдан сотиб олинган товарлар баҳосининг рўйхати ва бошқалар.

Статистикада ахборотни тўплаш ва сақлаш, турли хил тахминларни тайёрлаш , уларнинг хаққонийлигини баҳолаш ва бошқа ҳисоблашлар олиб борилади. Бироқ, математик статистиканинг асосий масалаларидан бири — олинган ахборотни тўғри қайта ишлаш, шунда қолган масалаларнинг натижасига эришишга имкон яратилади.

Дастлаб олинган ахборотни қайта ишлаш тартиби тахминан қуйидагича:

— ўлчов (тажриба) натижалари тартибга келтирилади ва гуруҳларга ажратилади;

— гуруҳлашдан кейин натижаларни ўлчаш жадваллари қурилади;

— бўлиш жадвали бўйича маълумотларни бўлиш графиги қурилади;

— олинган ўлчовларнинг асосий сонли тавсифларининг кичик сони тўпланган шу ўлчовнинг паспорти тузилади.

Амалиётда бу қадамларни амалга ошириш маълумотларни қайта ишлаш ва таҳлил қилишнинг компьютер дастурларидан биридан амалга оширилади. Масалан, “MatLab”, “Microsoft Excel”, “Statistica” .

Баъзи бир объектлар ва уларнинг хоссалари ўрганиб чиқилсин. Ўрганиш учун тажрибалар (ўлчовлар) катта ҳажмда олиб борилади.

Ўрганиладиган барча объектларнинг ёки бир объектга бир хил шароитда ўтказиладиган барча кузатишларнинг мумкин бўлган натижалари тўплами ***асосий*** (бош) ***тўплам*** *деб аталади.*

Асосий тўпламдан тасодифан танлаб олинган объектлар тўплами ёки объектни кузатиш натижалари тўплами ***танланган тўплам*** *ёки* ***танланма*** *деб аталади.*

Танланмадаги объектлар ёки кузатишлар сони ***танланма ҳажми*** *деб аталади.*

Танланма қийматлари деб тасодифий X катталикнинг кузатиладиган қийматларига айтилади.

Аниқ, ишончли натижалар олиш учун танланма ҳажми бўйича етарли бўлиши шарт. Катта танланма — тартибланмаган сонлар тўплами. Ўрганиш учун танланма кўргазмали турда тартибланган кўринишга келтирилади.

СИЗ БИЛАСИЗ:

Вариацион қатор иккита элементдан: частота ва вариантадан ташкил топади.

Тақсимот қаторида қабул қилинадиган белгининг индивидуал қиймати *варианта* деб аталади.

Идивидуал варианта ёки вариацион қаторнинг ҳар бир гуруҳининг сони *частота* деб аталади.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ қаторни кўриб чиқамиз. Бунда x_1 варианта n_1 марта, x_2 варианта n_2 марта, x_3 варианта n_3 марта берилсин ва ҳоказо.

У ҳолда n сони (бунда $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$) варианта ҳажми бўлиб ҳисобланади.

n_i қиймат — x_i вариантанинг частотаси, $\frac{n_1}{n}$ — нисбий частоталар сони.

СИЗ БИЛАСИЗ:

Қуйидаги жадвал частотанинг статистик қаторини беради:

6-жадвал

Варианта	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Варианта частотаси	n_1	n_2	n_3	...	n_k

СИЗ БИЛАСИЗ:

Частоталар полигони (кўпбурчак) координаталари гуруҳлаш интервалларининг ўртача қийматларига ва шу интервалнинг частотасига мос келувчи нуқталарни туташтирувчи эгри чизиқни беради.

Полигон (polygon) сўзи юнон тилидан тажима қилинганда кўпбурчак деган маънони англатади.

Нисбий частотаси берилган варианта жадвалини тузамиз:

7-жадвал

x_i варианта	x_1	x_2	x_3	....	x_k
$\frac{n_i}{n}$ нисбий частота	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

7-жадвал *нисбий частотанинг вариацион қатори* деб аталади.

Координаталари гуруҳлаш интервалларининг ўртача қийматлари билан шу интервалларнинг нисбий частотасига мос бўлган нуқталарни бирлаштирувчи синиқ чизиқ ***нисбий частота полигони*** *деб аталади.*

Яъни нисбий частота полигонини координаталар текислигида ясаш учун $(x_1; \frac{n_1}{n})$, $(x_2; \frac{n_2}{n})$, ... , $(x_k; \frac{n_k}{n})$ нуқталарни белгилаб, кесмалар ёрдамида туташтирилади.

МИСОЛ **1.** 8, 9, 4, 8, 6, 8, 8, 9, 4, 4, 4, 9, 6, 9, 9, 4, 8, 8, 8, 9 сонлар қатори берилган. Танланма ҳажмини, танланма варианталарини топинг, частота ва нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг, частоталар полигонини ясанг.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра танланма ҳажми 20 га тенг. Берилган қаторда 4, 6, 8, 9 сонлар учрайди. Улар танланма варианталари бўлиб ҳисобланади. Частотанинг вариацион қаторини тузамиз:

8-жадвал

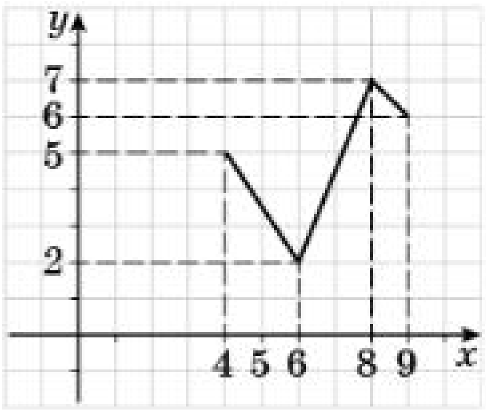
x_i варианта	4	6	8	9
n_i варианта частотаси	5	2	7	6

Нисбий частотанинг вариацион қаторини тузамиз:

9-жадвал

x_i варианта	4	6	8	9
$\frac{n_i}{n}$	0,25	0,1	0,35	0,3

Частота полигонини ясаймиз (28-расм).



28-расм

1. Математик статистиканинг асосий атамаларини айтинг.
2. Асосий тўпламнинг танланмадан қандай фарқи бор?
3. Частота полигони, нисбий частота полигони нимани кўрсатади?
4. Танланма учун абсолют ва нисбий частота жадваллари қандай тузилади?

Машқлар

A

6.1. 1, 3, 4, 2, 1, 3, 5, 3, 4, 4, 5, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 3, 5, 2, 1 сонлар қатори берилган. Танланма ҳажмини, танланманинг варианталарини топинг, частотанинг вариацион қаторини ва нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг.

6.2. 5, 9, 4, 8, 6, 8, 5, 9, 4, 4, 5, 4, 9, 8, 6, 6, 8, 9, 4, 8, 5, 8, 5, 8, 9 сонлар қатори берилган. Танланма ҳажмини, танланманинг варианталарини топинг, частотанинг вариацион қаторини ва нисбий частота вариацион қатори билан нисбий частотанинг фоизларда берилган қаторини тузинг.

6.3. 11-синф ўқувчиларининг I чорак бўйича жамловчи баҳоларининг натижалари жадвалда кўрсатилган (9.1-жадвал).

9.1-*жадвал*

4	3	2	3	4	3	3	5	3	4
3	4	3	4	3	3	5	4	3	3
4	2	4	4	4	3	4	4	4	5
3	3	4	3	3	4	3	5	2	4
3	4	3	3	4	4	4	4	5	4

1) Натижаларнинг вариацион қаторини тузинг ва танланма ҳажмини топинг;
2) нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг;
3) нисбий частотанинг фоизларда берилган қаторини тузинг.

B

6.4. 11-синф ўқувчиларига алгебра ва анализ асосларидан I чоракда қандай баҳолар кутилишини кўрсатиш таклиф қилинди. Натижалар жадвалда кўрсатилган (9.2-жадвал).

9.2-*жадвал*

4	3	3	3	4	3	3	5	3	4
3	4	3	4	3	4	5	4	5	3
4	4	4	4	4	3	4	4	4	5
3	3	4	3	3	4	3	5	3	4
3	4	3	5	4	3	4	4	5	4

1) Натижаларнинг вариацион қаторини тузинг ва танланма ҳажмини топинг;
2) нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг;
3) нисбий частотанинг фоизларда берилган қаторини тузинг.

6.5. Частотанинг вариацион қатори бўйича танланма ҳажмини топинг ва частота полигонини ясанг (9.3-9.4-жадваллар).

9.3-*жадвал*

1)

x_i	2	6	10	14
n_i	5	8	6	6

9.4-*жадвал*

2)

x_i	4	6	8	10	12
n_i	5	8	8	5	4

C

6.6. Жадвалда болаларнинг бўйларининг узунликлари (см) берилган (9.5-жадвал).

9.5-*жадвал*

55	56	57	56	54
57	59	56	58	58
56	58	59	59	57
55	55	54	57	59
58	57	54	60	56

Жадвалдаги маълумотлар бўйича:
1) натижаларнинг вариацион қаторини тузинг ва танланма ҳажмини топинг;
2) нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг;
3) нисбий частотанинг фоизларда берилган қаторини тузинг.
4) фоизларда берилган нисбий частота полигонини ясанг.

6.7. Чорва хўжалигида картошка йиғиш давомида баъзи бир картошкаларнинг массаси ўлчанди. Картошкалар массаларининг натижаси (граммларда берилган) жадвалда кўрсатилган (9.6-жадвал).

9.6-*жадвал*

60	59	61	56	62
57	59	58	58	58
56	58	59	59	57
61	61	59	57	59
58	56	62	60	60

Жадвалдаги маълумотлар бўйича:
1) натижаларнинг вариацион қаторини тузинг ва танланма ҳажмини топинг;
2) нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг;
3) нисбий частотанинг фоизларда берилган қаторини тузинг.
4) фоизларда берилган нисбий частота полигонини ясанг.

ТАКРОРЛАШ

6.8. Аниқмас интегрални топинг:

1) $\int(1+\sqrt{x+1})dx$; 2) $\int(x+\frac{2}{(x-1)^2})dx$;

3) $\int(\sin 2x+x^{-3})dx$; 4) $\int(2-\frac{1}{\cos^2 2x})dx$.

6.9. Функцияни жуфтликка текширинг:

1) $f(x) = x \cdot \arcsin 2x$; 2) $f(x) = x \cdot \mathrm{arctg}\, 2x$;

3) $f(x) = x \cdot \arccos x$; 4) $f(x) = x^2 \cdot \cos 2x + \sqrt{|x|}$.

6.10. Аниқ интегралнинг қийматини топинг:

1) $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 3\sqrt{2x})dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (18x^2 - \sin 2x)dx$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Варианта, вариацион қатор, тақсимот қатори, полигон, частота полигони, танланма, асосий тўплам, статистик қатор, частота, гистограмма.

7-§. ДИСКРЕТ ВА ИНТЕРВАЛЛИ ВАРИАЦИОН ҚАТОРЛАР

Дискрет вариацион қатор тушунчаси билан танишасиз; дискрет вариацион қаторни тузиш учун маълумотларни таҳлил қилишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Қатор, гуруҳ, дискрет вариацион қатор, интервалли вариацион қатор

СИЗ БИЛАСИЗ: Ҳар бир аломати, аломатлар тўплами ёки аломатлар синфи бўйича гуруҳдаги бирликларнинг сони ёки умумий натижадаги шу соннинг хусусий оғирлиги маълум бўлган ўзига хос турдаги гуруҳлар *тақсимот қатори* дейилади.

Тақсимот қатори сонли ёки ўзига хос аломатларига кўра тузилади.

Сонли аломатлари бўйича тузилган тақсимот қатори *вариацион қатор* дейилади.

Вариацион қаторлар дискрет ва интервалли бўлади. Тақсимот қатори узлуксиз ўзгариб турувчи аломат бўйича (аломат маълум бир интервал доирасида исталган қийматларни қабул қила олганда) ва дискрет ўзгарувчи аломат бўйича (қатъий аниқланган бутун қийматларни қабул қилади) ясалиши мумкин.

Дискрет вариацион қаторнинг тарқалиши (тақсимоти) *деб мос келувчи частоталари ёки бўлинмалари бўйича варианталарнинг бўлиниш тўпламига айтилади.*

Дискрет қаторнинг варианталари — аломатнинг дискрет узлуксиз ўзгарувчи қийматлари, одатда, у ҳисоблаш натижасидир.

Дискрет вариацион қаторлар, одатда, кузатиладиган аломатнинг қийматлари бир-биридан камида маълум бир чекли катталикка фарқлангандагина тузилади.

Дискрет қаторда аломатнинг нуқтадаги қийматлари берилади.

МИСОЛ

1. 20 та корхона ишчиларининг тариф разрядлари ҳақида маълумотлар берилган. 2, 3, 2, 4, 4, 5, 5, 4, 6, 3, 1, 4, 4, 5, 5, 6, 4, 3, 2, 3 тариф разряди билан ишчиларни бўлишнинг дискрет вариацион қаторини тузинг.

Ечиш. Дастлаб жадвални тузамиз.Тақсимот қатори иккита элементдан ташкил топганлиги сабабли жадвал икки қатордан ташкил топади.

Биринчи қатор — варианта, шартга кўра — ишчиларнинг тариф разряди, иккинчи қатор — частота, яъни варианталарнинг учрашиш частотаси, масалада маълум бир разряд бўйича ишчилар сони.

Масала шартини инобатга олиб, камида бир марта учрайдиган қийматларни аниқлаймиз. Улар қуйидаги сонлар: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сўнгра вариантанинг ҳар бир қиймати неча марта учрашини санаймиз ва қуйидаги жадвални тузамиз:

10-*жадвал*

Тариф разряди (x_i)	1	2	3	4	5	6
Ишчилар сони (n_i)	1	3	4	6	4	2

Натижада тариф разряди бўйича ишчиларни бўлишнинг дискрет вариацион қатори олинди.

Шундай қилиб, ўлчаш натижасида олинган маълумотларнинг ўсиш тартиби бўйича қатори берилган.

Барча маълумотларнинг n сони ўлчаш маълумотлари қаторининг ҳажми бўлиб ҳисобланади.

$x_n - x_1$ айирма *ўлчаш қулочи* ёки *энг катта* ва *энг кичик вариантанинг айирмаси* деб аталади. Маълумотлар қаторининг модаси — ўлчашлар қаторида кўп учрайдиган варианта. Мода карралиси энг катта бўлган вариантага тенг.

Тоқ маълумотлар $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2k} \leqslant x_{2k+1}$ *сонлар қаторининг медианаси* деб $m = x_{k+1}$ сонига, жуфт маълумотлар $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2k-1} \leqslant x_{2k}$ *сонлар қаторининг медианаси* деб $m = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ сонига айтилади.

Ўлчаш маълумотларининг кўп учрайдиган тавсифи уларнинг ўртача арифметик қиймати ёки ўртача қиймати M бўлиб ҳисобланади.

Ўртача қийматни топиш учун:
1) барча ўлчов натижалари йиғиндисининг қийматини топиш;
2) ҳосил бўлган йиғиндининг қийматини натижалар сонига бўлиш (танланма ҳажми), яъни $M = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ керак.

Ўртача қиймат, мода ва медиана маълумотлар қатори сонли тавсифларининг бир тури ҳисобланади. Баъзида улар *марказий жараённинг ўлчови* деб аталади. Ушбу сонларнинг ҳар бири маълумотлар қаторининг ўртача қийматини тавсифлайди.

1-мисолдаги қийматларнинг модаси, медианаси ва ўртача қийматини топинг.

Интервалли вариацион қатор тушунчаси билан танишасиз, интервалли вариацион қаторни тузиш учун маълумотларни таҳлил қилишни ўрганасиз.

***Интервалли вариацион қатор** деб тасодифий катталик қийматларини мос частоталари билан ёки уларнинг ҳар бирига катталик қийматларининг тушиш частоталари билан тартибланган интерваллари тўпламига айтилади.*

Қиймати ўлчаш ёки ўлчаш йўли билан ҳисобга олинадиган интервалли қаторлар узлуксиз ўзгарувчан аломатнинг тарқалишини таҳлил қилишга йўналтирилган. Бундай қаторнинг вариантаси — гуруҳлаш.

Агар дискрет вариацион қаторда частота тавсиф қаторининг вариантасига тўғридан-тўғри боғлиқ бўлса, у ҳолда интервалли вариация гуруҳига тегишли бўлади.

Интервални тузишнинг бир неча йўллари мавжуд:

1) маълумотларни мантиқий таҳлил қилиш асосида қўшимча ҳисоблашларсиз кўз билан чамалаш усули; агар шартга кўра тенг оралиқларда ясаш талаб қилинса, у ҳолда формула ёрдамида ҳисоблаш;

2) қўшимча ҳисоблашлар усули. Интервал катталигини ҳисоблаш учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$i = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}, \qquad (1)$$

бунда i — катталик ёки интервал узунлиги; x_{max} — энг катта катталик; x_{min} — энг кичик катталик; n — масала шартига кўра лозим бўлган гуруҳлар сони.

Биринчи интервални ясаш энг кичик қийматдан бошланади, унга интервалнинг катталиги қўшилади ва биринчи интервалнинг юқори чегараси олинади. Сўнгра биринчи интервалнинг юқори чегараси иккинчи интервалнинг қуйи чегарасига айланади, унга интервалнинг катталиги қўшилиб, иккинчи интервал ҳосил қилинади. Сўнгра шартга кўра нечта интерваллар ясаш керак бўлса, шунча марта интерваллар аниқланади.

МИСОЛ

2. Банкда 10 та омонатчининг омонат миқдори ҳақида маълумотлар берилган — 300, 380, 480, 350, 450, 560, 250, 400, 500, 200 (минг тг.). Омонат ҳажмини тенг оралиқли 3 та гуруҳга бўлиб, омонатчиларни бўлишнинг интервалли вариацион қаторини тузинг. Ҳар бир гуруҳ бўйича омонатларнинг умумий миқдорини ҳисобланг.

Ечиш. Аввал жадвални тузамиз. Тақсимот қаторида иккита элемент бўлганлигидан, жадвал иккита қатордан ташкил топади.

Биринчи қатор — варианта, масалада банкдаги омонатлар миқдори; иккинчи қатор — частота, яъни интервалга тушган омонати бор бўлган омонатчилар сони.

(1) формуладан фойдаланиб, интервалнинг катталигини топамиз. Масала шартига кўра энг катта қиймат 560 минг тг, энг кичик қиймат 200 минг тг, гуруҳлар сони — 3. У ҳолда $i = \frac{560000 - 200000}{3} = 120\,000$.

11.1-*жадвал*

Банкдаги омонат миқдори (x)	200 000— 320 000	320 000— 440 000	440 000— 560 000
Омонатчилар сони (n)	3	3	4

Энди ҳар бир интервал бўйича ва умумий олганда омонатларнинг барча ҳажмларининг ҳисобини оламиз. Бунинг учун ҳар бир интервал бўйича омонат миқдорларини қўшамиз ва омонатларнинг умумий ҳажмининг қийматига эга бўламиз:

- Биринчи интервал бўйича: 200 000 + 300 000 + 250 000 = 750 000;
- иккинчи интервал бўйича: 350 000 + 380 000 + 400 000 = 1 130 000;
- учинчи интервал бўйича: 450 000 + 480 000 + 500 000 + 560 000 = 1 990 000.

11.2-*жадвал*

банкдаги омонатлар миқдори (x)	200 000—320 000	320 000—440 000	440 000—560 000	Жами
Омонатчилар сони (n)	3	3	4	10
Омонатнинг умумий ҳажми	750 000	1 130 000	1 990 000	3 870 000

Берилган шартга кўра вариацион қатордаги маълумотларни таҳлил қилишни ўрганасиз.

Тақсимот қаторларини улар графикларининг тасвири ёрдамида таҳлил қилиш қулай.

Дискрет қатор графикда синиқ чизиқ — тақсимот полигони кўринишида тасвирланади. Уни тўғри бурчакли координаталар текислигида ясаш учун абсциссалар ўқи бўйича координаталари бир хил масштабга ўзгарадиган аломатнинг тартибланган қийматлари қўйилади, ординаталар ўқи бўйича эса частоталарни кўрсатиш учун шкала ясалади.

1-мисолга дискрет вариацион қаторни мустақил тузинг.

Интервалли қаторлар гистограмма (яъни диаграмма устунлари) шаклида тасвирланади. Гистограммани ясаганда абсциссалар ўқига интервалларнинг катталиги ёзилади, частоталар эса тегишли оралиқларда ясалган тўғри тўртбурчаклар билан тасвирланади. Интерваллар тенг бўлганда устунларнинг баландлиги частотага пропорционал бўлиши керак.

2-мисолга интервалли вариацион қаторни мустақил тузинг.

1. Дискрет вариацион қатордан қандай маълумотлар олиш мумкин?
2. Интервалли қатордан қандай маълумотлар олиш мумкин?

Машқлар

А

7.1. Мактаб ўқитувчиларининг тоифаси ҳақида маълумотлар берилган: 2, 3, 2, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 0, 2, 3, 2, 1, 0, 0, 3, 2, 3, 0, 1, 2, 2, 1, 2. Ўқитувчиларнинг тоифа бўйича бўлинишининг дискрет вариацион қаторини тузинг (0 — модератор педагог, 1 — эксперт педагог, 2 — тадқиқотчи педагог, 3 — моҳир педагог).

7.2. Мактабдаги 50 та ўқувчидан ҳар бири доскага исталган рақамни ёзди. Натижада қуйидаги маълумотлар олинди (12.1-жадвал):

12.1-*жадвал*

2	1	3	5	3	5	3	8	7	1
5	7	1	5	3	8	0	4	3	7
9	3	6	9	1	9	6	2	1	3
8	9	0	7	5	1	3	1	3	9
2	6	5	3	9	2	5	1	7	5

Берилган сонларнинг такрорланишининг тақсимот жадвалини тузинг ҳамда танланма ҳажмини ва модасини топинг.

7.3. 7.2-машқда берилган ўлчашлар маълумотларининг ўртача қийматини топинг.

B

7.4. 7.3-машқдаги маълумотлар полигонини ясанг.

7.5. 9-синф ўқувчиларининг вазнлари (кг ларда) — 30, 38, 48, 35, 44, 46, 30, 50, 40, 54, 36, 40, 42, 52, 39. Вазнлари бўйича ўқувчиларни бир хил интервалли 3 та гуруҳга бўлиб, интервалли вариацион қатор ясанг. Ҳар бир гуруҳнинг умумий массасини ҳисобланг.

C

7.6. 7.5-машқдаги маълумотлар асосида:
1) нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг;
2) нисбий частотанинг фоизларда берилган вариацион қаторини тузинг;
3) сонларнинг карралиси бўйича полигонини (тақсимот кўпбурчагини) ясанг.

7.7. Махсус дўконда спорт пойафзалининг 50 та тури сотилади. Улар баҳосига кўра 12.2-жадвалда берилган.

12.2-*жадвал*

Баҳоси (минг тг.)	[2 — 3)	[3 — 6)	[6 — 9)	[9 — 12)	[12 — 15)	[15 — 18]
Турларининг сони	3	8	19	(*)	11	2

1) Жадвалдаги (*) ни топинг;
2) Нисбий частотанинг фоизларда берилган вариацион қаторини тузинг.

ТАКРОРЛАШ

7.8. Функциянинг монотон оралиқларини топинг:

1) $y = 2 + 2x^2 - x^4$;   2) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;   3) $y = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$.

7.9. Функция графигининг асимптоталарини топинг:

1) $y = x^2 - x^4$;   2) $y = \frac{2x^3}{1 - x^2}$;

3) $y = \frac{5}{x} - \frac{x}{5}$;   4) $y = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$.

7.10. 1) Ox ўқи ва $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ бўлганда $y = \sin x$ синусоида билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.
2) Фигурани Ox ўқ атрофида айлантирганда ҳосил бўлган ҳамда $y = x^2$ ва $y = 2x$ нинг графиклари билан чегараланган жисмнинг ҳажмини топинг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Варианта, вариацион қатор, тақсимот қатори, полигон, частота полигони, танланма, асосий тўплам, статистик қатор, частота, гистограмма, дискрет вариацион қатор, интервалли вариацион қатор.

8-§. ТАСОДИФИЙ КАТТАЛИКНИНГ СОНЛИ ТАВСИФЛАРИНИ ТАНЛАНМАЛАР АСОСИДА БАҲОЛАШ

Танланма асосида тасодифий катталикларнинг сонли тавсифларини баҳолашни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Статистика, ўртача қиймат, танланма дисперсияси, танланманинг ўртача квадратик четлашиши

Баъзида тасодифий катталикни (асосий тўпламни) ўрганишда танлаб олинган маълумотлар асосида тақсимотнинг баъзи бир сонли (нуқтадаги) тавсифларини баҳолашни ҳисоблаш етарли. Сонли тавсифлар танлаб олинган маълумотлар асосида назарий тақсимот параметрларини аниқлашда ҳисобланади.

Нуқтадаги баҳо деб, битта сон орқали берилган мумкин бўлган баҳога айтилади. Нуқтадаги баҳолар асосий тўпламнинг мос параметри катталиги ҳақида тахминий тушунча беради.

Танлаб олинган маълумотлар асосида тасодифий катталикнинг сонли тавсифларини баҳолашни кўриб чиқамиз.

Нисбий частотанинг вариантаси кўрсатилган жадвал берилсин, бунда $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ (13-жадвал).

13-*жадвал*

x_i варианта	x_1	x_2	x_3	…	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	…	$\frac{n_k}{n}$

Танлаб олинган ўртача қиймат билан баҳоланувчи математик кутилма қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(x_1n_1 + x_2n_2 + \ldots + x_kn_k). \qquad (1)$$

$\bar{X}$ ўртача қиймат атрофидаги x_1, x_2, x_3, …, x_k сонларнинг тарқалишини тавсифловчи катталик *дисперсия* деб аталади ва $\bar{D}$ каби белгиланади.

Танланма дисперсиясини ҳисоблаш формуласи:

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\left[\left(x_1 - \bar{X}\right)^2 \cdot n_1 + \left(x_2 - \bar{X}\right)^2 \cdot n_2 + \ldots + \left(x_k - \bar{X}\right)^2 \cdot n_k\right]. \qquad (2)$$

Танланманинг ҳажми камайган сайин хатоликлар пайдо бўлади. Шу сабабли $n \leqslant 30$ бўлганда тўғирланган танланма дисперсияси топилади:

$$\bar{\bar{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \bar{D} \qquad (3)$$

(2) ва (3) формулаларни эътиборга олиб, танланманинг ўртача квадратик четлашиши мос равишда

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{D}} \qquad (4)$$

ва

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sqrt{\bar{\bar{D}}} \qquad (5)$$

формулалар билан ҳисобланади.

Одатда, танланма дисперсияси

$$\bar{D} = \overline{X^2} - \bar{X}^2, \qquad (6)$$

формула орқали ҳисобланади, бунда $\overline{X^2} = \frac{1}{n}\left(x_1^2n_1 + x_2^2n_2 + \ldots + x_k^2n_k\right)$.

Дисперсияни ва ўртача квадратик четлашишни ҳисоблаш жуда қийин. Шу сабабли уларни ҳисоблаш учун маълум бир компьютер дастуридан (масалан, Microsoft Office Excel) фойдаланган маъқул. Агар ҳисоблашлар бевосита олиб борилса, у ҳолда хатоликларни кузатиш учун натижаларни жадвал кўринишида кўрсатиш керак.

Узлуксиз тасодифий катталиклар учун нисбий частота вариантасининг интервалли жадвали берилсин (14-жадвал):

14-жадвал

Интерваллар	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	...	$[x_{k-1}; x_k]$
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

У ҳолда $x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2}$, $x_2^* = \frac{x_1 + x_2}{2}$, ..., $x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ эътиборга олсак, танланманинг нисбий частотаси жадвалига эга бўламиз (15-жадвал):

15-жадвал

x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	...	x_k^*
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\frac{n_3}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

МИСОЛ

1. Интервалли нисбий частота жадвалидан фойдаланиб, танланма дисперсиясини ва танланманинг ўртача квадратик четлашишини топамиз (16-жадвал).

16-жадвал

Интерваллар	[1;4)	[4;8)	[8;12)	[12;16]
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

Ечиш.

Танланманинг нисбий частотаси жадвалини тузамиз. Бунинг учун интерваллардаги ўртасини топамиз:

$x_1^* = (1+4) : 2 = 2,5$; $x_2^* = (4+8) : 2 = 6$; $x_3^* = (8+12) : 2 = 10$; $x_4^* = (12+16) : 2 = 14$.

Бундан қуйидаги жадвалга эга бўламиз (17-жадвал):

17-жадвал

x_i^*	2,5	6	10	14
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

Энди қуйидаги катталикларни ҳисоблаймиз:

$$\bar{X} = 2,5 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,3 + 14 \cdot 0,2 = 8,1;$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{10} \cdot (2,5^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 3 + 10^2 \cdot 3 + 14^2 \cdot 2) = 81,25;$$

$$\bar{D} = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = 81,25 - 8,1^2 = 81,25 - 65,61 = 15,64.$$

$n = 10$ ва у 30 дан кам, шу сабабли тўғирланган танланма дисперсиясини топамиз:

$$\bar{\bar{D}} = \frac{10}{9} \cdot 15,64 \approx 17,3778.$$

Мос равишда танланманинг ўртача квадратик четлашишини ҳисоблаймиз:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sqrt{\bar{\bar{D}}} \approx \sqrt{17,3778} \approx 4,1687.$$

Жавоб: $\approx 17,3778$; $\approx 4,1687$.

1. Танланма дисперсияси билан тўғирланган танланма дисперсиясининг ўхшашлиги ва фарқи нимада?
2. Ўртача квадратик четлашишни ҳисоблаш формуласини танлаш нимага боғлиқ?
3. Танланма дисперсияси билан ўртача квадратик четлашиш формуласини ёзинг.

Машқлар

A

8.1—8.3-машқларда бир хил ўлчовларнинг натижалари кўриб чиқилади (17.1-жадвал). Мустақил кузатиш натижалари бўйича асосий тўплам қийматлари олинган.

17.1-*жадвал*

9	13	10	10	12	8	11	14
11	12	11	8	13	11	14	13
12	11	10	10	9	9	10	12
9	13	14	11	11	12	11	11
12	13	9	13	8	12	8	11

8.1. 1) Кузатиш натижасининг вариацион қаторини тузинг ва танланма ҳажмини топинг;
2) нисбий частотанинг вариацион қаторини тузинг;
3) нисбий частотанинг фоизларда берилган вариацион қаторини тузинг.

8.2. 1) Модани, медианани, математик кутилмани топинг;
2) фоизларда берилган нисбий частотанинг полигонини ясанг.

8.3. Дисперсияни ва ўртача квадратик четлашишни топинг.

B

8.4. “Математик статистика элементлари” мавзуси бўйича дарсдан кейин доскада “ўртача қиймати 12 га тенг” деган ёзув ва қуйидаги жадвал қолди (17.2-жадвал).

17.2-*жадвал*

Варианта	5	8	18	x
Каррралилик	15	11	19	5

1) x сонини топинг;
2) тарқалишнинг қулочини, модасини ва медианасини ҳисобланг;
3) тарқалишнинг нисбий частотасининг вариацион қаторини тузинг;
4) тарқалишнинг дисперсиясини топинг.

8.5. “Математик статистика элементлари” мавзуси бўйича дарсдан кейин доскада “ўртача қиймати 9 га тенг” деган ёзув ва қуйидаги жадвал қолди (17.3-жадвал).

17.3-*жадвал*

Варианта	4	8	12
Карралилик	5	2	x

1) x сонини топинг;
2) тарқалишнинг қулочини, модасини ва медианасини ҳисобланг;
3) тарқалишнинг нисбий частотасининг вариацион қаторини тузинг;
4) тарқалишнинг дисперсиясини топинг.

C

8.6. Варианталарнинг интервалли нисбий жадвалидан фойдаланиб, танланма дисперсиясини ва танланманинг ўртача квадратик четлашишини топинг (17.4-жадвал):

17.4-*жадвал*

Интерваллар	[0;6)	[6;12)	[12;18)	[18;24]
n_i	4	6	6	4
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

8.7. Жадвалда 25 та фирманинг активлари ҳақида маълумотлар берилган (млрд.тг) (17.5-жадвал):

17.5-*жадвал*

54,2	55,2	64,7	90,0	85,3
74,0	85,4	75,3	68,4	78,4
82,3	40,0	64,9	48,8	68,9
58,4	65,2	54,6	80,0	45,3
64,0	75,8	77,4	63,2	75,2

Фирманинг активларини тенг интервалли 5 та гуруҳга бўлиб, активнинг катталиклари бўйича интервалли вариацион қатор тузинг.
1) Нисбий частотанинг вариацион қаторини ёзинг;
2) вариантанинг интервалли нисбий частотаси жадвалидан фойдаланиб, танланма дисперсиясини ва танланманинг ўртача квадратик четлашишини топинг.

МАТЕМАТИК ОЛИМЛАР ҲАҚИДА АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

8.8. Ҳозирги математик статистиканинг асосчиларидан бири — инглиз математиги Карл Пирсон. Турли хил статистик маълумотлар орасидан корреляция (боғлиқлик)нинг сонли баҳолашнинг ривожланиши шу олимнинг исми билан боғлиқ. Математик статистиканинг бўлимлари турли хил. Уларнинг ичида тавсифлаш статистикасини, баҳолаш назариясини, гипотезаларни (тахмин) текшириш назариясини, монотон статистик таҳлилни алоҳида кўрсатиш мумкин.

Карл Пирсон
(1857—1936)

ТАКРОРЛАШ

8.9. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\frac{97^3 + 23^3}{120} + 97 \cdot 23;$ 2) $\frac{83^3 + 27^3}{110} - 83 \cdot 27;$

3) $\frac{71^2 - 51^2}{122} + 21;$ 4) $\frac{85^2 - 44^2}{41} + \frac{136^2 - 128^2}{264}.$

8.10. Иккита ўйин суяги ташланди. Тушган очколар кўпайтмаларининг қийматлари: 1) 4; 2) 5. Нисбий частотани топинг.

8.11. Тенгламанинг илдизини топинг:

1) $x + 4\sqrt{x} = 12;$ 2) $x - 13\sqrt{x} = -42;$

3) $x - 2 + 3\sqrt{x-2} = 28;$ 4) $x - 3 = 2\sqrt{x+4} + 1.$

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. X тасодифий катталикнинг тақсимот қатори берилган.

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	?	0,15	?	0,15	?

Номаълум нисбий частота 2 : 3 : 2 сонларга пропорционал. У ҳолда нисбий частотанинг вариацион қаторининг тўлдирилган жадвалини кўрсатинг:

A)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,3	0,15	0,2

B)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,25	0,15	0,2

C)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,15	0,15	0,25	0,15	0,25

D)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,1	0,15	0,3	0,15	0,2

E)

X	5	8	11	14	17
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,15	0,2	0,15	0,3

2. Нисбий частотанинг вариацион қатори бўйича ўртача қийматини топинг:

X	2	4	5	7	8
$\frac{n_i}{n}$	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

A) 5,2; B) 4,95; C) 5,1; D) 5,3; E) 5,15.

3. Нисбий частотанинг вариацион қатори бўйича дисперсияни топинг:

X	2	4	6	8	10
$\frac{n_i}{n}$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

A) 5,3; B) 4,9; C) 5,1; D) 4,6; E) 4,8.

4. 3-топшириқдаги нисбий частотанинг вариацион қатори бўйича ўртача квадратик четлашишни топинг:

A) 2,292; B) 2,191; C) 2,189; D) 2,176; E) 2,138.

5. Жадвалда фирма дўконидаги аёллар пальтосининг баҳоси (минг тг.) ҳақида маълумотлар келтирилган:

34,2	35,2	34,7	50,0	25,3
24,0	25,4	25,3	28,4	18,4
32,3	40,0	34,9	18,8	48,9
18,4	25,2	24,6	30,0	25,3
10,0	35,8	17,4	23,2	35,2

Маълумотларни нархи бўйича тенг 4 та интервалга тўплаб, аёллар пальтосининг тақсимот интервалининг вариацион қаторини тузинг:

A)

Интерваллар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	9	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,36	0,32	0,12

B)

Интерваллар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	9	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,22	0,34	0,32	0,12

C)

Интерваллар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	6	8	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,24	0,32	0,32	0,12

D)

Интерваллар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	8	8	4
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,32	0,32	0,16

E)

Интерваллар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
n_i	5	8	9	3
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,32	0,36	0,12

6. Нисбий частотанинг вариацион қатори бўйича ўртача қиймати билан дисперсиясини топинг:

Интерваллар	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
x_i^*	15	25	35	45
n_i	5	9	8	3
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,36	0,32	0,12

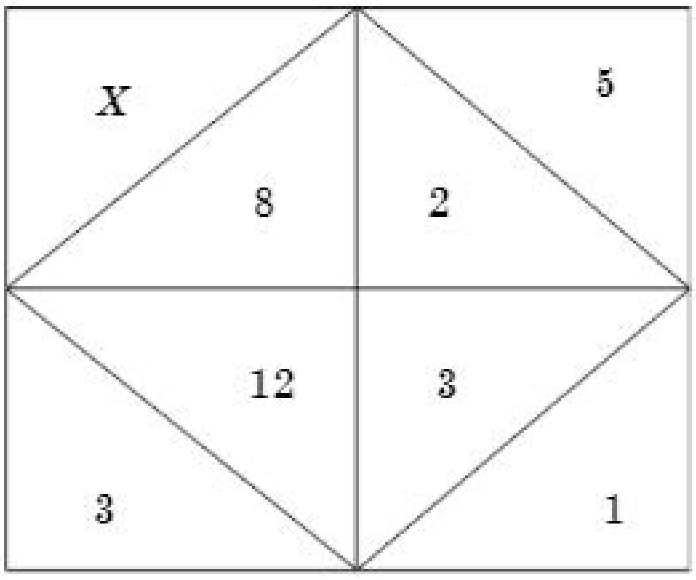
A) $\bar{X} = 28{,}2$; $\bar{D} = 87{,}4$;
B) $\bar{X} = 28{,}6$; $\bar{D} = 87{,}04$;
C) $\bar{X} = 26{,}6$; $\bar{D} = 85{,}4$;
D) $\bar{X} = 27{,}4$; $\bar{D} = 87{,}24$;
E) $\bar{X} = 28{,}6$; $\bar{D} = 85{,}24$.

7. 6-топшириқдаги нисбий частотанинг вариацион қаторининг ўртача квадратик четлашишини топинг:

A) $\bar{\sigma} \approx 9{,}3488$;
B) $\bar{\sigma} \approx 9{,}3509$;
C) $\bar{\sigma} \approx 9{,}2412$;
D) $\bar{\sigma} \approx 9{,}3295$;
E) $\bar{\sigma} \approx 9{,}2326$.

Математик саводхонлик бўйича тест топшириқлари

8. Жадвал бўйича X нинг қийматини топинг:



A) 4;
B) 6;
C) 15;
D) 2;
E) 12.

9. Жадвалдан фойдаланиб, функциянинг формуласини ёзинг:

18-*жадвал*

x	1	2	3	4	5	...
y	5	2	−1	−4	−7	...

A) $y = -3x + 4$;
B) $y = x^2 + 1$;
C) $y = x^2 - 2$;
D) $y = -x^2 + 2$;
E) $y = -3x + 8$.

10. Графикда турли хил ҳароратдаги сув буғининг 1 м^3 ҳаводаги миқдори кўрсатилган:

19-*жадвал*

A устун	*B устун*
10°С бўлганда сув буғининг миқдори	8 г

Рост мулоҳазани кўрсатинг:

A) $A = B$; B) $A > B$; C) A устуннинг қиймати 3 г ортиқ;
D) $A < B$; E) B устуннинг қиймати 2 г ортиқ.

11. Девор соати суткада 3 мин ортда қолади. Бугун тушда соат тўғри вақтни кўрсатиб турди. Неча кундан кейин соат яна қайтадан тўғри вақтни кўрсатишини топинг:

A) 440; B) 460; C) 354; D) 240; E) 480.

12. Агар ғиштнинг ўлчами 25 см · 12 см · 8 см бўлса, у ҳолда ўлчами 4 м · 1,2 м · 3 м бўлган хонага нечта ғишт сиғади:

A) 3000; B) 4800; C) 5600; D) 6000; E) 7500?

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Ифода, соннинг даражаси, даражанинг асоси, даража кўрсаткичи, соннинг квадрат илдизи, арифметик илдиз, илдизнинг хоссалари, рационал ва иррационал сонлар.

III БОБ

ДАРАЖА ВА ИЛДИЗ. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯ

9-§. n-ДАРАЖАЛИ ИЛДИЗ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

Сиз *n-даражали илдиз* ва *n-даражали арифметик илдиз тушунчалари* билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даража кўрсаткичи, илдиз, квадрат илдиз, арифметик квадрат илдиз, илдизнинг қиймати

СИЗ БИЛАСИЗ:

a сонининг квадрат илдизи квадрати a сонига тенг бўлган сон эканлиги маълум.

Худди шундай a нинг 3-даражали илдизи таърифини бериш мумкин. Куби (3-даражаси) a сонига тенг бўлган сон *a сонининг 3-даражали илдизи* дейилади.

a сонининг n-даражали илдизи таърифини берамиз (бунда n — исталган натурал сон).

*a сонининг **n-даражали илдизи** деб n-даражаси a га тенг бўлган b сонига айтилади.*

Таърифга кўра

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ бунда } b^n = a. \tag{1}$$

Бунда n — илдиз кўрсаткичи ва бирдан фарқли исталган натурал сон, a — илдиз белгиси остидаги сон.

8 сонининг 3-даражали илдизи 2 га тенг, чунки $2^3 = 8$, яъни $\sqrt[3]{8} = 2$.

a сонининг n-даражали илдизини топишни *илдиз чиқариш* деб атаймиз.

a сонининг n-даражали илддизи x бўлсин. У ҳолда таърифга кўра $x^n = a$ тенгламани ҳосил қиламиз.

$x^n = a$ (бунда $a > 0$, $n \in N$, $n > 1$) тенгламанинг n жуфт бўлганда $-\sqrt[n]{a}$ ва $\sqrt[n]{a}$ га тенг бўлган иккита илдизи, n тоқ бўлганда эса $\sqrt[n]{a}$ га тенг бўлган битта илдизи мавжуд бўлади.

3 ва -3 сонлари $x^4 = 81$ тенгламанинг илдизлари бўлади, чунки $3^4 = 81$ ва $(-3)^4 = 81$.

*a сонининг **n-даражали арифметик илдизи** деб n-даражаси a га тенг бўлган номанфий b сонга айтилади.*

Сиз *n*-даражали илдиз хоссаларини ўрганасиз.

СИЗ БИЛАСИЗ: Иккинчи даражали арифметик илдизнинг хоссалари сизга маълум.

Бу хоссалар $n > 2$ бўлганда ҳам бажарилади.

Агар n ва m — исталган натурал сонлар, a ва b — исталган номанфий ҳақиқий сонлар бўлса, у ҳолда илдизнинг асосий хоссаларини кўрсатувчи қуйидаги тенгликлар бажарилади.

1. *Кўпайтмадан илдиз чиқариш учун ҳар бир кўпайтувчидан илдиз чиқариб, олинган натижаларни кўпайтириш керак (кўпайтмадан илдиз чиқариш қоидаси)*:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \qquad (1)$$

МИСОЛ

1. $\sqrt[3]{1000 \cdot 64 \cdot (-27)}$ ҳисоблаймиз.

Ечиш. (1) формуладан фойдаланамиз:

$\sqrt[3]{1000 \cdot 64 \cdot (-27)} = \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{-27} = 10 \cdot 4 \cdot (-3) = -120.$

Жавоб: -120.

(1) тенгликни ўнгдан чапга томон ўқиб, хулоса чиқаринг.

2. *Каср (нисбат)дан илдиз чиқариш учун сурат ва махражидан илдиз чиқариб, биринчи натижани иккинчи натижага бўлиш керак (касрдан илдиз чиқариш қоидаси)*:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (2)$$

(2) тенгликни ўнгдан чапга томон ўқиб, хулоса чиқаринг.

МИСОЛ

2. 1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ илдизларнинг қийматларини топамиз.

Ечиш. (2) формуладан фойдаланамиз:

1) $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$.

Жавоб: 1) $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{2}{5}$.

3. *Илдизнинг даража кўрсаткичи билан илдиз белгиси остидаги ифоданинг кўрсаткичини қисқартириш қоидаси:*

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}. \qquad (3)$$

(3) қоидани хулосаланг.

МИСОЛ

3. 1) $\sqrt[6]{8}$; 2) $\sqrt[12]{b^8}$ илдизларнинг қийматларини соддалаштирамиз.

Ечиш. (3) формуладан фойдаланамиз:

1) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$; 2) $\sqrt[12]{b^8} = \sqrt[3]{b^2}$.

Жавоб: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[3]{b^2}$.

4. *Илдизни даражага кўтариш учун илдиз белгиси остидаги ифодани шу даражага кўтариш керак* (*илдизни даражага кўтариш қоидаси*):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (4)$$

МИСОЛ

4. 1) $\left(\sqrt{3}\right)^4$; 2) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5$ илдизларни соддалаштирамиз.

Ечиш. (4) формуладан фойдаланамиз:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9$;

2) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5 = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8\cdot 4} = 2\sqrt[3]{4}$.

Жавоб: 1) 9; 2) $2\sqrt[3]{4}$.

5. *Илдиздан илдиз чиқариш учун илдиз белгиси ичидаги ифодани ўзгаришсиз қолдириб, кўрсаткичлари берилган иккита илдиз кўрсаткичларининг кўпайтмасига тенг бўлган илдиздан чиқариш керак* (*илдиздан илдиз чиқариш қоидаси*):

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}. \qquad (5)$$

МИСОЛ

5. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ илдизнинг қийматини топамиз.

Ечиш. (5) формуладан фойдаланамиз:

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Жавоб: 2.

$\sqrt[n]{a}$ ва $\sqrt[m]{b}$ илдизларнинг қайси бири катта эканлигини аниқлаш учун берилган иккита илдизни бир хил кўрсаткичга келтирамиз:

$$\sqrt[nm]{a^m} \text{ ва } \sqrt[mn]{b^n}.$$

Энди илдиз остидаги ифодаларни, яъни a^m билан b^n нинг қийматларини таққослаш етарли.

МИСОЛ

6. 1) $\sqrt{3}$ ва $\sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt{5}$ ва $\sqrt[5]{2}$ сонларни таққослаймиз.

Ечиш. 1) Таққослаш учун $\sqrt{3}$ ва $\sqrt[3]{4}$ илдизларни олтинчи даражага кўтарамиз: $\sqrt{3} = \sqrt[2\cdot3]{3^3} = \sqrt[6]{27}$ ва $\sqrt[3\cdot2]{4^2} = \sqrt[6]{16}$. Энди 27 ва 16 сонларини таққослаймиз: $27 > 16$. Демак, $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$.

2) Таққослаш учун $\sqrt{5}$ ва $\sqrt[5]{2}$ илдизларни ўнинчи даражага кўтарамиз:

$\sqrt{5} = \sqrt[2\cdot5]{5^5} = \sqrt[10]{3125}$ ва $\sqrt[5]{2} = \sqrt[2\cdot5]{2^2} = \sqrt[10]{4}$. У холда $3125 > 4$. Демак, $\sqrt{5} > \sqrt[5]{2}$.

Жавоб: 1) $\sqrt{3} > \sqrt[3]{4}$; 2) $\sqrt{5} > \sqrt[5]{2}$.

Юқорида берилган (1) — (5) хоссалардан тескари йўналишда ҳам, яъни ўнгдан чапга томон ҳам фойдаланилади.

?

1. Илдиз белгиси остидаги ифодалар қандай қийматларни қабул қилиши мумкин. Мисол келтиринг.
2. Исталган ҳақиқий сондан ҳамма вақт n-даражали илдиз топиладими? Жавобингизни тушунтиринг.

Машқлар

А

9.1. Кўпайтмадан илдиз чиқаринг:

1) $\sqrt{49\cdot64\cdot100}$; 2) $\sqrt[3]{8\cdot27\cdot125}$;

3) $\sqrt{a^4\cdot b^2\cdot c^6}$; 4) $\sqrt[4]{m^8\cdot k^{12}\cdot t^4}$.

9.2. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\sqrt{\dfrac{49}{225}}$; 2) $\sqrt[3]{\dfrac{8\cdot125}{343}}$;

3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}\cdot5\dfrac{1}{16}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{2}}$.

9.3. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt[5]{32\cdot a^{10}}$; 2) $\sqrt[6]{128\cdot a^{12}b^{18}c^6}$;

3) $\sqrt[3]{64\cdot m^6n^9p^3}$; 4) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}x^8y^{12}}$.

9.4. Соддалаштиринг:

1) $\sqrt{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$; 4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{11}}$;

5) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; 6) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^5}}$; 7) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{mn}}$; 8) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$.

Амалларни бажаринг **(9.5-9.6)**:

9.5. 1) $\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{486}}+\sqrt[3]{27\cdot 2^6}$; 2) $\sqrt[3]{216\cdot 7^3}-\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$;

3) $\sqrt[3]{27\cdot 4^3}-\sqrt{\frac{81}{256}}$; 4) $5-\left(3\cdot\sqrt[4]{\frac{16}{81}}+\sqrt[3]{0,125}\right)$.

9.6. 1) $1-\sqrt{2\frac{7}{9}}+0,3\cdot\sqrt[4]{256}$;

2) $2\cdot\sqrt{1\frac{11}{25}}-1\frac{2}{5}+0,7\cdot\sqrt[3]{0,216}$;

3) $11:(0,15\cdot\sqrt[3]{64000}-0,29\cdot\sqrt[3]{8000})$;

4) $2,5\cdot\sqrt[4]{10000}+\frac{3}{4}\sqrt{1,44}-2,09:\sqrt[3]{1,331}$.

B

Амалларни бажаринг **(9.7-9.8)**:

9.7. 1) $\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}$;

2) $\sqrt[3]{7-\sqrt{41}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{41}}$;

3) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2\cdot 0,2^{-2}$;

4) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}-\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$.

9.8. 1) $2\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{-125}+\sqrt[6]{64}$;

2) $5\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{16}-\sqrt[6]{729}$;

3) $\sqrt[3]{375}-\frac{2}{7}\cdot\sqrt[3]{1029}+0,75\sqrt[3]{192}-0,2\sqrt[3]{3000}$;

4) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{162}-0,2\sqrt[4]{1250}+0,75\sqrt[4]{512}-7\sqrt[4]{2}$.

9.9. Айниятни исботланг:

1) $\left(2\sqrt{175}-3\sqrt{28}+2\sqrt{63}\right)^2-60\sqrt[3]{1000}=100$;

2) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{150}+3\sqrt{24}-5\sqrt{54}\right)^2+15\sqrt[4]{625}=77$;

3) $\left(\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=-2$;

4) $\sqrt{20,25}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[4]{0,1296}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{375}+\frac{1}{3}\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}=4,4$.

9.10. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{47-4\sqrt{33}}+\sqrt{47+4\sqrt{33}}$; 2) $\sqrt{31-6\sqrt{26}}-\sqrt{31+6\sqrt{26}}$;

3) $\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{189}+\sqrt[3]{56}\right):\sqrt[3]{7}$; 4) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

C

9.11. Соддалаштиринг:

1) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$; 2) $\sqrt[4]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt[3]{b^2\sqrt[4]{b}}$;

3) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{a}{b}}}$; 4) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}\cdot\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$.

9.12. Ҳисобланг:

1) $\sqrt{\frac{67^2-58^2}{\sqrt{53^2-28^2}}}$;

2) $\sqrt{\frac{\sqrt{113^2-112^2}}{19^2-11^2}}$;

3) $\left(3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{24}+\sqrt{6}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

4) $\left(\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{54}\right)\cdot\left(5\sqrt[3]{4}-3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

9.13. Ҳисобланг:

1) $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}-\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{\sqrt{5}}:\left(\sqrt{5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{200}\right)$; 4) $\sqrt{3\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{1125}:\left(\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5\sqrt[3]{5}}\right)$;

5) $\sqrt{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[4]{3}}\right)^2$; 6) $\sqrt{5\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}}$;

7) $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{4\ldots}}}}$; 8) $\sqrt[5]{3\cdot\sqrt[5]{9\cdot\sqrt[5]{3\cdot\sqrt[5]{9\ldots}}}}$.

9.14. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{\sqrt[9]{a^{-2}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\frac{\sqrt[4]{a^{-1}b^2\sqrt{ab}}}{\sqrt[3]{a^2b^{-2}\sqrt[4]{a^3b}}}$; 4) $\frac{\sqrt[5]{x^{-2}y\sqrt{xy^{-1}}}}{\sqrt[3]{xy^{-1}\sqrt[5]{x^2y^{-4}}}}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y}}}}$; 6) $\sqrt{\sqrt[4]{x}}\cdot x^{-1}\cdot y:(y^2x)$;

7) $\dfrac{\sqrt{b^2\cdot\sqrt[4]{ab^2}}}{\sqrt[4]{\left(ab^{-2}\right)^3}}:(a\cdot b^{-2})^{-2}$; 8) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{b}}}{\sqrt[4]{\left(a^{-1}b^2\right)^{-3}}}\cdot\sqrt[12]{ab^{16}}$.

9.15. Айниятни исботланг:

1) $\dfrac{\sqrt[10]{27^4}\cdot\sqrt[5]{9}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{3^4}\cdot\sqrt{27}}-\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{1\dfrac{91}{125}}=-1$; 2) $\dfrac{\sqrt{5\sqrt[4]{80}}}{\sqrt[8]{20}\cdot\sqrt[4]{50}}+\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{1\dfrac{61}{64}}=1{,}5$.

ТАКРОРЛАШ

9.16. Тенгламанинг графигини ясанг:

1) $2y-2+x^2=0$; 2) $y^2+x^2=4$;

3) $x^2-2x+y^2=0$; 4) $y-\sqrt{9-x^2}=0$.

9.17. 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{2}$; 4) $-\sqrt{2}$ сони $x^3+2x^2-2x-4=0$ тенгламанинг илдизи бўладими?

9.18. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $4^3\cdot2^{-3}\cdot32:8^3$; 2) $9^3\cdot3^{-2}\cdot243:27^2$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даражанинг асоси, даража кўрсаткичи, натурал кўрсаткичли даража, бутун кўрсаткичли даража, бутун кўрсаткичли даражанинг хоссалари, рационал сон, иррационал сон, соннинг тақрибий қиймати, даврий ва даврий бўлмаган ўнли касрлар, n-даражали илдиз ва унинг хоссалари.

10-§. РАЦИОНАЛ ВА ИРРАЦИОНАЛ КЎРСАТКИЧЛИ ДАРАЖАЛАР

Сиз *рационал кўрсаткичли даража* тушунчаси билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даража кўрсаткичи, n-даражали илдиз, рационал сон, ифода

СИЗ БИЛАСИЗ:

Исталган сонни натурал даражага кўтариш усули, шу билан бирга нолдан фарқли исталган сонни ($a\neq0$) нолинчи ва бутун манфий даражага кўтариш мумкинлиги маълум.

Энди исталган номанфий сонни ($a\geqslant0$) мусбат ва манфий каср кўрсаткичли даражага, яъни исталган рационал даражага қандай кўтариш мумкинлигини аниқлаймиз.

a — номанфий сон ва уни $\frac{m}{n}$ каср кўрсаткичли даражага кўтариш керак бўлсин. Сизга $(a^m)^n = a^{mn}$ тенглик, яъни даражани даражага кўтариш қоидаси маълум.

Юқорида берилган тенгликда $m = \frac{1}{n}$ деб олсак,

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан $a^{\frac{1}{n}}$ даража a сонининг n-даражали илдизи деган хулосага келамиз: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

У ҳолда $\left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a$.

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ ва $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ ифодаларнинг қийматлари тенг эканлигини эътиборга оламиз.

Ҳақиқатан ҳам, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ ва $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Демак, $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Шундай қилиб, қуйидаги тенглик тўғри: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

a мусбат сонинг $\frac{m}{n}$ (бунда $\frac{m}{n}$ — қисқармас каср) ***рационал кўрсаткичли даражаси*** деб *a^m сонидан олинган n-даражали илдизнинг қийматига айтилади.*

Демак, таърифга кўра $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, бунда $a > 0$.

МИСОЛ

1. 1) $5^{\frac{2}{3}}$; 2) $3{,}7^{-0{,}7}$; 3) $\left(\frac{10}{19}\right)^{\frac{13}{8}}$ рационал кўрсаткичли даражани n-даражали илдиз орқали ифодалаймиз.

Ечиш. 1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$; 2) $3{,}7^{-0{,}7} = 3{,}7^{-\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{3{,}7^{-7}}$; 3) $\left(\frac{10}{19}\right)^{\frac{13}{8}} = \sqrt[8]{\left(\frac{10}{19}\right)^{13}}$.

Жавоб: 1) $\sqrt[3]{25}$; 2) $\sqrt[10]{3{,}7^{-7}}$; 3) $\sqrt[8]{\left(\frac{10}{19}\right)^{13}}$.

Асоси нолга тенг бўлган даража фақат мусбат каср кўрсаткич учунгина аниқланган, яъни $\frac{m}{n} > 0$ бўлса, у ҳолда $0^{\frac{m}{n}} = 0$. Манфий асосли каср кўрсаткичли даража мактаб курсида ўрганилмайди.

Сиз рационал кўрсаткичли даражанинг хоссаларини ўрганасиз.

Бир хил асосли рационал кўрсаткичли даражалар учун ҳам кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш ва илдиз чиқариш қоидаларини бажариш мумкин, яъни 1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$; 2) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$; 3) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$; 4) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$, бунда n, q — натурал, m, p — бутун сонлар.

Биринчи ва иккинчи қоидаларни исботлаймиз.

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ хоссани исботлайлик.

Исботи. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$, яъни бутун кўрсаткичли даража каби рационал кўрсаткичли даража учун ҳам асослари бир хил бўлганда даража кўрсаткичлари қўшилади. ■

$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ хоссани исботлаймиз.

Исботи. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$, яъни бутун кўрсаткичли даража каби асослари бир хил бўлганда даражаларнинг кўрсаткичлари айирилади. ■

МИСОЛ

2. $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}$; 2) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}}$; 3) $81^{\frac{3}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}}$ қийматларни ҳисоблаймиз.

Ечиш. 1) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5$; 2) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}} = 16^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{16^9} = \sqrt[4]{2^{36}} = 2^9 = 512$; 3) $81^{\frac{3}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}} = 81^{\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$.

Жавоб: 1) 5; 2) 512; 3) 3.

Сиз рационал кўрсаткичли даража хоссаларини алгебраик ифодаларни шакл алмаштиришда фойдаланишни ўргансиз.

МИСОЛ

3. 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$; 3) $(0,15)^{\frac{8}{5}} : (0,15)^{-\frac{2}{5}}$ қийматларни топамиз.

Ечиш. 1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 5^1 = 5$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}} : \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{4}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; 3) $(0,15)^{\frac{8}{5}} : (0,15)^{-\frac{2}{5}} = (0,15)^{\frac{8}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)} = (0,15)^2 = 0,0225$.

Жавоб: 1) 5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0,0225.

Иррационал кўрсаткичли даража тушунчаси билан танишасиз.

СИЗ БИЛАСИЗ:

$\sqrt{2}$ иррационал сон эканлиги ва уни чексиз ўнли каср кўринишда $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ ... кўрсатиш мумкинлиги маълум.

Исталган рационал сонни чексиз даврий ўнли каср кўринишида, исталган иррационал сонни эса чексиз даврий бўлмаган ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин.

Энди *иррационал кўрсаткичли даража* тушунчасига тўхталамиз.

Маълум бир α мусбат иррационал сон ($\alpha > 0$) ва a мусбат рационал сон ($a > 0$) берилсин. a^{α} ёзув (даражаси) нимани билдиришини аниқлайлик.

Бунинг учун учта ҳолни кўриб чиқамиз: $a = 1$, $a > 1$ ва $0 < a < 1$.

1) Агар $a = 1$ бўлса, у ҳолда $1^{\alpha} = 1$;

2) $a > 1$ бўлганда $r_1 < \alpha$, $r_2 > \alpha$ ёки $r_1 < \alpha < r_2$ бўлган исталган иккита r_1 ва r_2 рационал сонларни олсак, $a^{r_1} < a^{r_2}$ бўлади.

Бу ҳолда a^{α} сони a^{r_1} ва a^{r_2} сонлар орасида жойлашади: $a^{r_1} < a^{\alpha} < a^{r_2}$, бунда r_1 — α сонининг ками билан олинган исталган рационал тақрибий қиймати, r_2 — α сонининг ортиғи билан олинган исталган рационал тақрибий қиймати. У ҳолда a^{α} даража исталган a^{r_1} даражадан катта, бироқ исталган a^{r_2} даражадан кичик. Бундай сон мавжуд ва у ягона эканлигини исботлаш мумкин.

3) $0 < a < 1$ бўлсин ($r_1 < r_2$ ёки $r_1 < \alpha < r_2$). Бу ҳолда a^{α} даража исталган a^{r_1} даражадан катта, бироқ исталган a^{r_2} даражадан кичик, яъни $a^{r_2} < a^{\alpha} < a^{r_1}$.

Юқорида кўриб чиқилган учта ҳолдан фойдаланиб, қуйидаги қоидаларни берамиз.

Агар $a > 1$ бўлса, у ҳолда ***a сонининг*** α ***мусбат иррационал кўрсаткичли даражаси*** *деб кўрсаткичи α сонининг ками билан олинган ўнли яқинлашиши бўлган барча a сонининг даражаларидан катта, бироқ кўрсаткичи α сонининг ортиғи билан олинган ўнли яқинлашиши бўлган барча a сонининг даражаларидан кичик сонга айтилади.*

Агар $0 < a < 1$ бўлса, у ҳолда ***a сонининг*** α ***мусбат иррационал кўрсаткичли даражаси*** *деб кўрсаткичи α сонининг ками билан олинган ўнли яқинлашиши бўлган барча a сонининг даражаларидан кичик, бироқ кўрсаткичи α сонининг ортиғи билан олинган ўнли яқинлашиши бўлган барча a сонининг даражаларидан катта сонга айтилади.*

Юқорида мусбат иррационал кўрсаткичли даража кўриб чиқилди.

Энди α манфий иррационал сон, асоси a эса исталган мусбат сон бўлсин.

У ҳолда a^{α} ифода манфий рационал кўрсаткичли даражанинг маъносига эга бўлади, чунки $a^{\alpha} = \dfrac{1}{a^{-\alpha}}$.

МИСОЛ 4. $10^{-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{10^{\sqrt{2}}}$.

Эслатма. Рационал кўрсаткичли даражанинг хоссалари иррационал кўрсаткичли даража учун ҳам бажарилади.

1. Бутун кўрсаткичли ва каср кўрсаткичли даражаларнинг қандай ўхшашлиги ва фарқи бор?
2. Каср кўрсаткичли даражанинг аниқ қийматини ҳамма вақт топиш мумкинми?
3. "Исталган ҳақиқий сонни чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин" деган мулоҳаза тўғрими? Жавобингизни тушунтиринг.
4. Иррационал кўрсаткичли даражанинг рационал кўрсаткичли даражадан қандай фарқи бор?

Машқлар

А

10.1. Каср кўрсаткичли даражани илдиз кўринишида ёзинг:

1) $11^{\frac{2}{3}}$; 2) $0,7^{-\frac{5}{4}}$; 3) $\left(\frac{3}{10}\right)^{0,75}$; 4) $(-21)^{1\frac{1}{5}}$;

5) $a^{-2,5}$; 6) $(b+1)^{1,5}$; 7) $(a-2b)^{3\frac{1}{2}}$; 8) $\left(x-y^2\right)^{-\frac{7}{4}}$.

10.2. Ҳисобланг:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $16^{\frac{3}{4}}$; 3) $64^{-\frac{1}{2}}$; 4) $0,25^{-\frac{1}{2}}$;

5) $0,36^{\frac{1}{2}}$; 6) $(-27)^{-\frac{4}{3}}$; 7) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; 8) $32^{-\frac{1}{5}}$.

10.3. Илдизни каср кўрсаткичли даража кўринишида ёзинг:

1) $\sqrt[3]{a^2}$; 2) $\sqrt[5]{b^3}$; 3) $\sqrt[3]{a^2+b^2}$; 4) $\sqrt[3]{x-y}$;

5) $\sqrt[5]{a^2b^3}$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$; 7) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$; 8) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{a-b}}$.

10.4. Ҳисобланг:

1) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{-\frac{3}{4}} \cdot 32^{-\frac{4}{5}} \cdot 2^3$; 2) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$;

3) $64^{\frac{2}{3}} : 64^{\frac{1}{2}}$; 4) $729^{\frac{1}{2}} : 729^{\frac{1}{3}}$.

10.5. Соддалаштиринг:

1) $a^{1\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}}$; 2) $(x+y)^{\frac{4}{5}} : (x+y)^{\frac{2}{5}}$;

3) $a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$; 4) $b^{\frac{7}{12}} \cdot y^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{4}}$.

10.6. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $4^{1,5} - 9^{-0,5} + \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 2) $8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{4}\right)^{1,5}$;

3) $\left(125^{-\frac{1}{3}} - 36^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(16^{\frac{1}{4}} + 216^{\frac{1}{3}}\right)^0$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \cdot \left(6\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

10.7. Соддалаштиринг:

1) $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{6}}$; 2) $\left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{10}}$; 3) $\left((a+x)^{\frac{2}{5}}\right)^{1\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

10.8. Ҳисобланг:

1) $\left(49^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; 2) $\left(625^{-\frac{3}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(64^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

4) $\left(\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$; 5) $\left(\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{15}}$; 6) $\left(\left(3\frac{6}{25}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

10.9. Таққосланг:

1) $12^{\frac{3}{4}}$ ва $12^{\frac{3}{2}}$; 2) $8^{\frac{3}{2}}$ ва $8^{\frac{4}{3}}$;

3) $\left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{5}{4}}$ ва $\left(\frac{1}{18}\right)^{\frac{6}{5}}$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,5}$ ва $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$.

B

Ҳисобланг **(10.10-10.11):**

10.10. 1) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$; 2) $\left(\left(\sqrt[3]{6}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{-3\sqrt{3}}$;

3) $8^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{9}\right)^{1,5}$; 4) $\left(64^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}\right)^0 \cdot \left(343^{\frac{1}{3}} - 81^{\frac{1}{2}}\right)$.

10.11. 1) $-0,027^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} - 3^{-1} + (5,5)^0$;

2) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0\right)^{-0,5} - 7,5 - \left(\sqrt[4]{4^3}\right)^2 - 2 \cdot (-2)^4$;

3) $(0,008)^{\frac{2}{3}} \cdot (0,64)^{0,5} : (0,04)^{-0,5} : (0,25)^{-1,5}$;

4) $0,125^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0,75} + (1,2)^0$.

10.12. Соддалаштиринг:

1) $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}\sqrt{a^3}}{a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{7}{6}}}$; 2) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{4}{3}}}$; 3) $\dfrac{a - 16a^{0,5}}{5a^{0,25} + 20}$; 4) $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}y + xy^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$.

10.13. Айниятни исботланг:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 16^3 = \left(4^{\sqrt{3}}\right)^{-4}$;

2) $\dfrac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}} \cdot \dfrac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}} = \left(6 \cdot 2^{19}\right)^{\sqrt{3}}$.

C

10.14. Ҳисобланг:

1) $\left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} + 198^0 - \left(9^{-0,4} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{5}}\right)^{-2} + (0,0081)^{\frac{1}{4}}$;

2) $\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + 27^{-\frac{2}{3}} \cdot (9^{0,5})^5 \cdot 3^{-2} + \left(\left(\frac{7}{9}\right)^3\right)^0 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

3) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{10}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$;

4) $\left(9^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} - \left(25^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{10}} + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{6}{7}}\right)^0 : (36)^{-\frac{1}{2}}$;

5) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\dfrac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)$;

6) $\left(\dfrac{1}{3}\left(0,027^{\frac{2}{3}}+15\cdot 0,0016^{\frac{3}{4}}+0,1\cdot 243^{\frac{3}{5}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

10.15. Таққосланг:

1) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{\sqrt{5}}$ ва $\left(\dfrac{2}{8}\right)^{\sqrt{5}}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$ ва $\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{4}\right)^{-\sqrt{3}}$;

3) $\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^{1,2}$ ва $\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{1,2}$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{2}}{3}\right)^{-2,8}$ ва $\left(\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}\right)^{-2,8}$.

Соддалаштиринг **(10.16-10.17)**:

10.16. 1) $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)^{2}\cdot\left(\dfrac{b}{a^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b}+1\right)}{\dfrac{b^{2}}{a^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{b}{a^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{2}}-\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{b}}$;

2) $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}+1}+\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}+1}-\dfrac{2\sqrt[4]{a}-2}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}+1}$.

10.17. 1) $\dfrac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-3a^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a+1}{a^{2}-4a+3}$;

2) $\left(\dfrac{x^{\frac{4}{3}}+8x^{\frac{1}{3}}y}{x^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}}-2\sqrt[3]{xy}\right)^{6}$.

10.18. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\left(x^{-2}+a^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-2}+a^{-\frac{4}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, бунда $x=\left(1-a^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

2) $\left(\dfrac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$, бунда $x=\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$ ва уни

а) $n>m>0$; б) $m>n>0$; в) $m=n=1$ ҳоллар учун кўриб чиқинг.

10.19. Айниятни исботланг:

1) $\dfrac{x^{\frac{3}{p}}-x^{\frac{3}{q}}}{\left(x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}\right)^2-2x^{\frac{1}{q}}\left(x^{\frac{1}{q}}+x^{\frac{1}{p}}\right)}+\dfrac{x^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{q-p}{pq}}+1}=\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}$;

2) $\left(\dfrac{9-4a^{-2}}{3a^{-\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{3}{2}}}-\dfrac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{3}{2}}}\right)^4-16a^2=0.$

ТАКРОРЛАШ

10.20. $f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & x\geqslant 2,\\ -x^2+2x, & x<2\end{cases}$ функциянинг:

1) -1; 2) 0; 3) 2; 4) 5 нуқтадаги ҳосиласининг қийматини топинг.

10.21. Тенгсизликни ечинг:

1) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}\geqslant 0$; 2) $(x-2)^2(x+3)(x-4)<0$.

10.22. Аниқ интегрални ҳисобланг:

1) $\int_0^4 |x-2|dx$; 2) $\int_2^6 |x-4|dx$;

3) $\int_{-6}^0 |x+2|dx$; 4) $\int_0^2 |x^2-2x|dx$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Ифода, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, ифодаларни айнан шакл алмаштириш, тўла квадрат, айният, айниятни исботлаш, n-даражали илдиз ва унинг хоссалари, рационал кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари.

11-§. ИРРАЦИОНАЛ ИФОДАЛАРНИ ШАКЛ АЛМАШТИРИШ

Сиз n-даражали илдиз хоссаларидан иррационал ифодаларни шакл алмаштиришда фойдаланишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даража, n-даражали илдиз, иррационал ифода, хосса, шакл алмаштириш

СИЗ БИЛАСИЗ:

Кўпайтувчини илдиз олдига чиқариш, кўпайтувчини илдиз остига киритиш, касрнинг махражини иррационалликдан қутқариш шакл алмаштиришлари 8-синф "Алгебра" курсидан маълум.

Олдинги параграфда n-даражали илдиз, рационал кўрсаткичли даража ва унинг хоссалари кўриб чиқилди. Энди иррационал ифодаларни айнан шакл алмаштиришларни кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

1. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$ кўпайтиришни бажарамиз.

Ечиш. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3} = 21\cdot 2 - 14\sqrt{6} + 15\sqrt{6} - 10\cdot 3 = 12 + \sqrt{6}$.

Жавоб: $12 + \sqrt{6}$.

МИСОЛ

2. $\left(2ab\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx}$ бўлишни бажарамиз.

Ечиш. $\left(2ab\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx} = 2ab\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{b}} : \sqrt[3]{bx} - x\sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{bx} = 2ab\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{b^2x}} - x\sqrt[3]{\dfrac{b}{bx}} = 2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

Жавоб: $2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

Иррационал ифодаларни шакл алмаштиришда қиймати мусбат ҳам, манфий ҳам бўладиган ифоданинг n-даражали илдизини чиқариш керак бўлади.

Ифоданинг *n-даражали илдизини чиқарганда қуйидаги қоидаларга амал қилиш лозим*:

— агар n жуфт сон бўлса, у ҳолда илдизнинг қиймати модуль белгиси билан;

— агар n тоқ сон бўлса, у ҳолда илдизнинг қиймати модулсиз олинади.

МИСОЛ

3. $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ ифоданинг қийматини топамиз.

Ечиш. $27+10\sqrt{2}=(\sqrt{2}+5)^2$; $27-10\sqrt{2}=(\sqrt{2}-5)^2$ эътиборга олсак,
$\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+5)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}=|\sqrt{2}+5|+|\sqrt{2}-5|=$
$=\sqrt{2}+5+5-\sqrt{2}=10$ ҳосил бўлади.

Жавоб: 10.

МИСОЛ

4. $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$ ифоданинг қийматини топамиз.

Ечиш. **Биринчи усул.** Берилган ифодани иккинчи даражага кўтарамиз:
$\left(\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}\right)^2=29-12\sqrt{5}-2\sqrt{(29-12\sqrt{5})(29+12\sqrt{5})}+29+12\sqrt{5}=$
$=58-2\sqrt{841-144\cdot5}=58-2\sqrt{121}=58-22=36.$

Берилган ифоданинг қиймати 6 ёки -6 бўлиши мумкин.

$\sqrt{29+12\sqrt{5}}>\sqrt{29-12\sqrt{5}}$ эканлигини эътиборга олсак, берилган ифоданинг қиймати манфий бўлиши керак. Демак, ифоданинг қиймати -6 га тенг.

Иккинчи усул. Илдиз остидаги ифодалар тўла квадратни беради.

$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot6\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot3\cdot2\sqrt{5}}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2\cdot3\cdot2\sqrt{5}+3^2}=$
$=\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}=|2\sqrt{5}-3|=2\sqrt{5}-3$. У ҳолда $\sqrt{29-12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}+3$.

У ҳолда $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3-(2\sqrt{5}+3)=-6.$

Жавоб: -6.

МИСОЛ

5. $x=3$ бўлганда $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}$ ифоданинг қийматини топамиз.

Ечиш. Ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами $(2\sqrt{2};+\infty)$. Аввал берилган ифодани соддалаштирамиз:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2}}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{|x-2\sqrt{2}|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{|x+2\sqrt{2}|}.$$

Ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламида $x-2\sqrt{2}>0$, $x+2\sqrt{2}>0$ тенгсизликларнинг иккаласи ҳам бажарилади. Бундан $|x-2\sqrt{2}|=$ $=x-2\sqrt{2}$ ва $|x+2\sqrt{2}|=x+2\sqrt{2}$ деб олиш мумкин. Демак,

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{|x-2\sqrt{2}|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{|x+2\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{x-2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{x+2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}.$$

$x = 3$ сони ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламига тегишли бўлгани учун, x ўзгарувчининг ўрнига 3 ни қўйиб, ифоданинг қийматини топамиз:

$$\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1} = 2.$$

Жавоб: 2.

МИСОЛ

6. $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$ ифодани кўпайтувчиларга ажратамиз.

Ечиш. $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) =$

$= 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \cdot$

$\cdot (2 - \sqrt{b})$.

Жавоб: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

МИСОЛ

7. $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$ касрни қисқартирамиз.

Ечиш. $$\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(x+1-2\sqrt{x}\right)} = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}.$$

Жавоб: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$.

МИСОЛ

8. $\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\dfrac{a\sqrt{a-2}\sqrt{a+2}}{4}\right)^{-1}$ ифодаг a ўзгарувчининг қийматига боғлиқ эмаслигини исботлаймиз.

Ечиш. $$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}} - \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\left(\frac{a\sqrt{a-2}\sqrt{a+2}}{4}\right)^{-1} = \frac{\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)^2 - \left(a-\sqrt{a^2-4}\right)^2}{a^2-\left(a^2-4\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{4}{a\sqrt{a^2-4}} = \frac{\left(a^2+2a\sqrt{a^2-4}+a^2-4-a^2+2a\sqrt{a^2-4}-a^2+4\right)\cdot 4}{\left(a^2-a^2+4\right)\cdot a\sqrt{a^2-4}} = \frac{4a\sqrt{a^2-4}\cdot 4}{4a\sqrt{a^2-4}} = 4,$$

яъни, $a > 2$ ва $a < -2$ бўлганда берилган ифоданинг қиймати ўзгарувчига боғлиқ эмас.

Айрим ҳолларда иррационал ифодаларни шакл алмаштиришда *янги ўзгарувчи киритиш* усулидан ҳам фойдаланилади.

МИСОЛ

9. $\sqrt{\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)^2-8\left(a+\frac{2}{a}\right)^2+48}=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$ айният ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларида бажарилишини кўрсатамиз.

Ечиш. $a+\frac{2}{a}=t$ янги ўзгарувчи киритамиз: $a^2+\frac{4}{a^2}=t^2-4$.

Бу ҳолда айниятнинг чап томони қуйидаги кўринишга келади:

$$\sqrt{\left(t^2-4\right)^2-8t^2+48}=\sqrt{t^4-8t^2+16-8t^2+48}=\sqrt{t^4-16t^2+64}=\sqrt{\left(t^2-8\right)^2}=\left|t^2-8\right|.$$

Энди дастлабки ўзгарувчига ўтамиз. У ҳолда

$$\left|\left(a+\frac{2}{a}\right)^2-8\right|=\left|a^2+4+\frac{4}{a^2}-8\right|=\left|a^2-4+\frac{4}{a^2}\right|=\left|\left(a-\frac{2}{a}\right)^2\right|=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2.$$

Жавоб: $\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$.

Сиз таркибида $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ кўринишдаги илдизи бўлган иррационал ифодаларни шакл алмаштиришни ўрганасиз.

Иррационал ифодаларни шакл алмаштиришда $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ (бу ерда A, B — мусбат рационал сонлар, B сони маълум бир соннинг тўла квадрати эмас) кўринишдаги *мураккаб илдизлар* (*мураккаб радикаллар*) учрайди. Бу $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ мураккаб илдиз қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (1)$$

Исботи. (1) тенгликда ҳамма илдизлар арифметик илдизлар бўлгани учун, тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз.

Чап томонининг квадрати: $\left(\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)^2=A+\sqrt{B}$.

Ўнг томонининг квадрати: $\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2=$

$$=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}+2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}=$$

$$=A+\sqrt{A^2-\left(A^2-B\right)}=A+\sqrt{B}.$$

(1) тенгликнинг иккала томонини ҳам иккинчи даражага кўтарганда бир хил ифода ҳосил бўлди. Демак, (1) тенглик тўғри.

Худди шундай

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad (2)$$

тенгликни олиш мумкин.

(2) тенгликнинг тўғрилигини мустақил исботланг.

МИСОЛ **10.** $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ифоданинг қийматини топамиз.

Ечиш. (1) формуладан фойдаланиш учун илдиз остидаги иккинчи қўшилувчини шакл алмаштирамиз: $2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{8}$. Бунда берилган ифода $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ кўринишга келади. У ҳолда $A = 3$, $B = 8$. Энди (1) формуладан фойдаланиш мумкин:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2}+1.$$

Жавоб: $\sqrt{2}+1$.

1. Иррационал ифодаларни шакл алмаштириш усулларидан қандай ҳолларда қўлланган маъқул?
2. Рационал ва иррационал ифодаларни шакл алмаштиришда ўзаро фарқ борми?
3. (1) формулани исботлашда эгалланган қандай билимлардан фойдаландингиз?

Машқлар

A

Амалларни бажаринг (**11.1-11.2**):

11.1. 1) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 2) $\frac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}} + \frac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$;

3) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}} - \frac{1}{11+2\sqrt{30}}$; 4) $\frac{5}{3+2\sqrt{2}} + \frac{5}{3-2\sqrt{2}}$.

11.2. 1) $\sqrt[4]{6+\sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6-\sqrt{20}}$; 2) $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt[4]{4-\sqrt{15}}$;

3) $\left(\sqrt{14}-3\sqrt{2}\right)^2 + 6\sqrt{28}$; 4) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)^2 - 10\sqrt{27}$.

11.3. Мураккаб илдиз формулаларидан фойдаланиб, ифодани соддалаштиринг:

1) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; 3) $\sqrt{7-\sqrt{13}}$; 4) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$;

5) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$; 6) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$; 7) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; 8) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

11.4. $\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-3}-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+3}\right):\frac{2m}{m-6\sqrt{m}+9}$ ифодани соддалаштиринг.

11.5. Берилган касрнинг махражини иррационалликдан қутқаринг:

1) $\frac{7}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{11}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{5}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 4) $\frac{6}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+5-\sqrt{15}}$.

B

11.6. Амалларни бажаринг:

1) $\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[3]{12+\sqrt{19}}$; 2) $\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}$;

3) $\left(2\sqrt{27}-\frac{1}{2}\sqrt{6}+4\sqrt{3}\right):\frac{1}{2}\sqrt{3}$; 4) $\left(5\sqrt{8}-\frac{1}{3}\sqrt{10}-2\sqrt{18}\right):\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

11.7. Мураккаб илдиз формулаларидан фойдаланиб, $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+$ $+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ ифодани соддалаштиринг.

11.8. Мураккаб илдиз формулаларидан фойдаланиб, $x\geqslant 2$ бўлганда $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ ифоданинг қиймати x ўзгарувчига боғлиқ эмаслигини исботланг.

C

11.9. 1) $a\geqslant 2$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}=\frac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$;

2) $x>1$ бўлса, у ҳолда $\left(\sqrt[3]{(x^2+1)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)^2=$ $=\frac{\sqrt[3]{x^{-2}}\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)}{2^{-1}}$ ифодани исботланг.

11.10. Ўзгарувчининг исталган ҳақиқий қийматларида $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\left(\frac{x+\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}-\sqrt[4]{xy}\right)\cdot\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ ифоданинг қиймати номанфий ва x ўзгарувчига боғлиқ бўлмаслигини исботланг.

11.11. Соддалаштиринг:

1) $\left(\frac{2\sqrt{x}}{x^2}\right)^{-3}-\left(\left(x\sqrt{x}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{\sqrt{x^3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{6}{5}}-\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

3) $\left(\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{-\frac{4}{5}}-\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{6}{7}}$; 4) $\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}:\left(\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x}\right)$.

ТАКРОРЛАШ

11.12. 1) Дарё соҳили бўйлаб икки шаҳар орасидаги масофа 90 км. Теплоход бир шаҳардан иккинчи шаҳарга бориб келиши учун 7,5 соат вақт сарфлайди. Агар дарё оқимининг тезлиги теплоходнинг турғун сувдаги тезлигининг 20% ини ташкил этса, у ҳолда теплоходнинг турғун сувдаги тезлигини топинг.

2) Катер ярим соатда дарё оқими бўйича босиб ўтган йўлни дарё оқимига қарши 40 минутда , дарё оқимига қарши 2 км йўлни 10 минутда босиб ўтади. Катернинг турғун сувдаги тезлиги ва дарё оқимининг тезлигини топинг.

11.13. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\frac{3x^3}{5y^3} : \frac{27x^5}{4y^4} \cdot \frac{45}{8y^2x^{-3}}$; 2) $\frac{25a(b-1)}{81d} : \frac{5cd^2}{27ab} : \frac{a^3(b-1)}{2c^3d^3}$.

11.14. Функциянинг даврини топинг:

1) $y = \cos 4\pi x + \mathrm{ctg}\, 2\pi x$; 2) $y = \mathrm{ctg}\, 6x - 2\sin 3x$;

3) $y = \mathrm{tg}\, \pi x - 3\cos 2\pi x$; 4) $y = 4 - \cos\frac{\pi x}{3} + 5\mathrm{tg}\frac{\pi x}{3}$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг аниқланиш соҳаси, жуфт ва тоқ функциялар, уларнинг графиклари, монотон функциялар, даврий функция, ўзгармас функция, чизиқли функция, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ кўринишдаги функциялар ва уларнинг хоссалари, кўрсаткичи ҳақиқий сон бўлган даража, n-даражали илдиз ва унинг хоссалари.

12-§. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИГИ

Сиз *ҳақиқий кўрсаткичли даражали функция* тушунчаси билан танишасиз; даража кўрсаткичига боғлиқ бўлган даражали функциянинг графигини ясашни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, график, даражали функция, даража кўрсаткичи, ҳақиқий сон

$$y = x^r$$

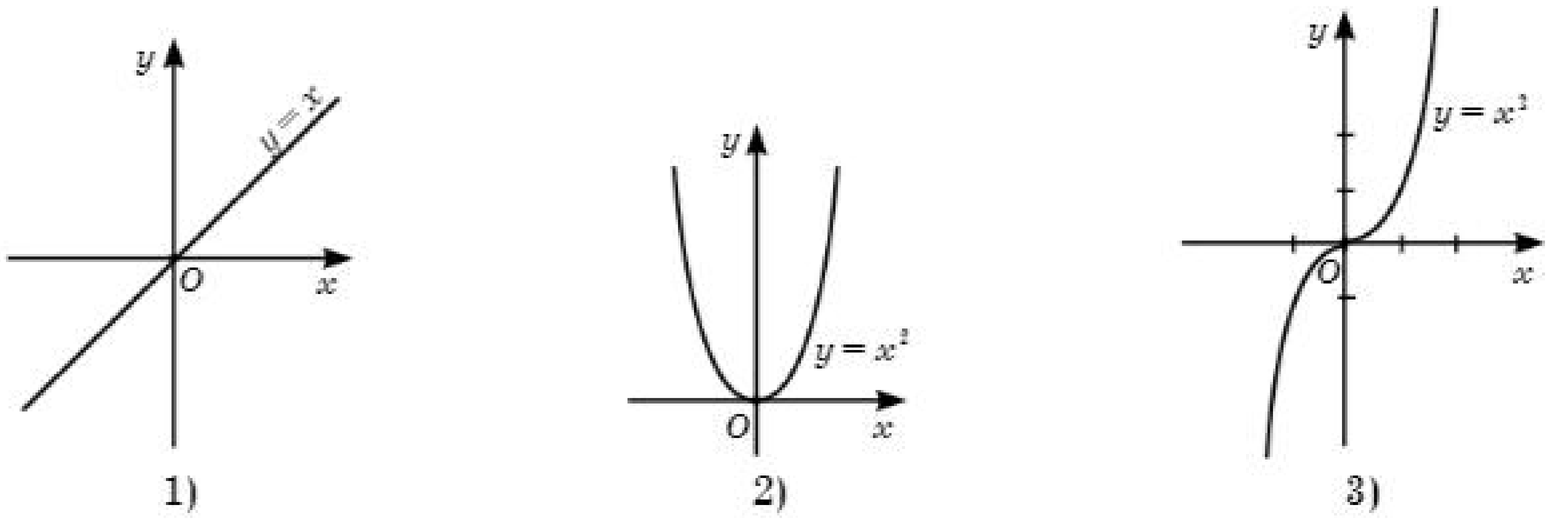
кўринишда берилган функция ***даражали функция*** *дейилади.*

Бунда x — эркли ўзгарувчи, r — исталган рационал сон. r га боғлиқ бўлган даражали функция турли хил бўлади.

Кўрсаткичига боғлиқ бўлган даражали функциянинг турларини кўриб чиқамиз.

1. Агар r — натурал сон бўлса, у ҳолда $y = x^n$ *натурал кўрсаткичли даража* бўлади. $n = 1$ бўлганда функциянинг графиги тўғри чизиқ бўлиши, $n = 2$ бўлганда $y = x^2$ функциянинг графиги парабола,

$n = 3$ бўлганда ҳосил бўлган функциянинг графиги кубик парабола бўлиши сизларга маълум (29-расм).



29-расм

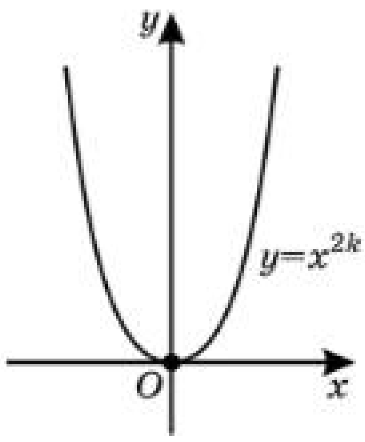
$y = x^{2n}$ функциянинг графиги схематик равишда $y = x^2$ функция графигининг шаклини, $y = x^{2n+1}$ функциянинг графиги эса кубик параболани беради.

Ушбу маълумотларга суянган ҳолда $n = 2k$ ва $n = 2k + 1$ бўлганда $y = x^n$ $(n \in N)$ функциянинг хоссаларини бериш мумкин (20.1-жадвал).

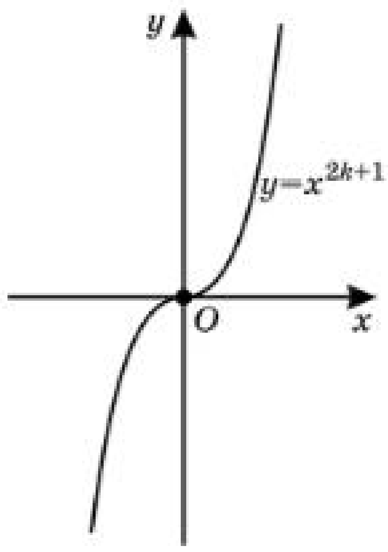
20.1-*жадвал*

Функциянинг хоссалари	$y = x^n,\ n \in N$	
	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
Аниқланиш соҳаси	R	R
Қийматлар тўплами	$[0; +\infty)$	R
Жуфтлиги, тоқлиги	жуфт	тоқ
Функциянинг ноллари	$x = 0$	$x = 0$
Ўсиш оралиқлари	$[0; +\infty)$	R
Камайиш оралиқлари	$(-\infty; 0]$	—
Энг катта қиймати	—	—
Энг кичик қиймати	$f(0) = 0$	—
Ўзгармас ишорали оралиқлари	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ оралиқларда $f(x) > 0$	$(-\infty; 0)$ оралиқда $f(x) < 0$; $(0; +\infty)$ оралиқда $f(x) > 0$

$y = x^n$ $(n \in N)$ функциянинг $n = 2k$ ва $n = 2k + 1$ бўлгандаги графиклари мос равишда 30- ва 31-расмларда кўрсатилган.



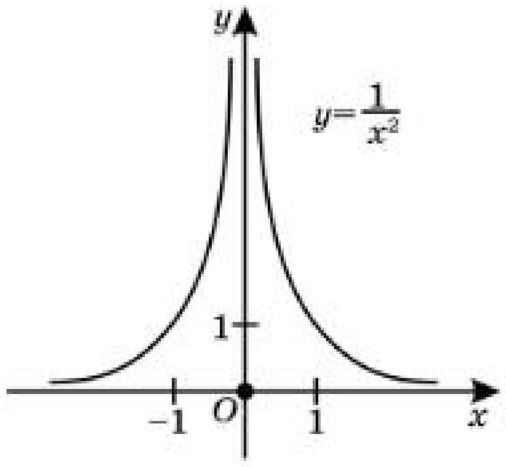
30-расм



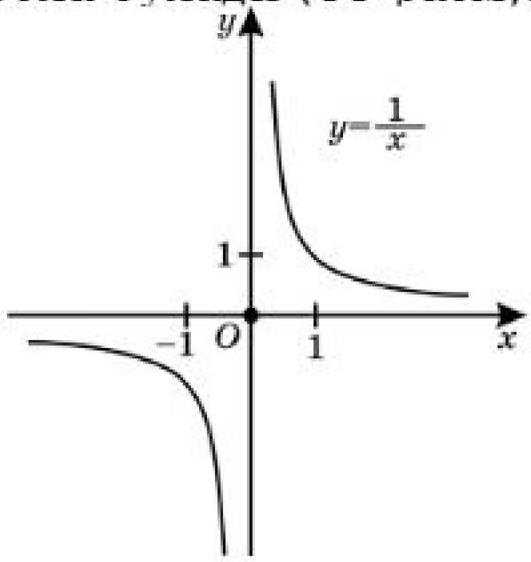
31-расм

2. Агар r — бутун манфий сон бўлса ($r = -n$, бунда n — натурал сон), у ҳолда $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ — *бутун манфий кўрсаткичли даражали функцияни* оламиз.

n — жуфт ва n — тоқ сон бўлган ҳолларга мисоллар кўриб чиқамиз. $n = 2$ бўлса, у ҳолда $y = \frac{1}{x^2}$ функцияга эга бўламиз. Бу функциянинг графиги 32-расмда тасвирланган. $n = 1$ бўлса, у ҳолда $y = \frac{1}{x}$ функцияни оламиз. Бу функциянинг графиги гипербола бўлади (33-расм).



32-расм



33-расм

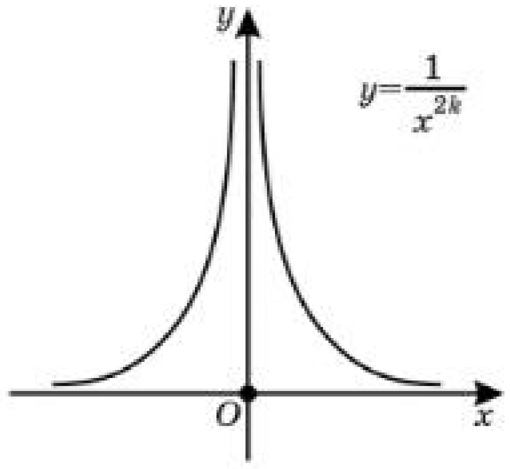
Энди $y = \frac{1}{x^2}$ ва $y = \frac{1}{x}$ функцияларнинг графикларидан фойдаланиб, $n = 2k$ ва $n = 2k + 1$ ҳоллар учун $y = \frac{1}{x^n}$ функциянинг хоссаларини бериш мумкин (20.2-жадвал).

20.2-жадвал

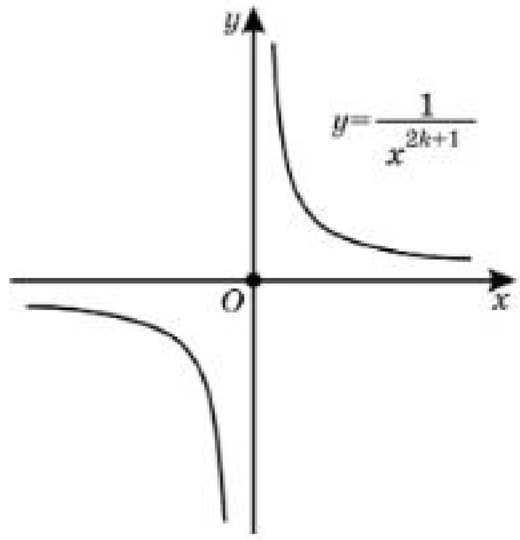
Функциянинг хоссалари	$y = x^{-n}$, $n \in N$	
	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
Аниқланиш соҳаси	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Қийматлар тўплами	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Жуфтлиги, тоқлиги	жуфт	тоқ
Функциянинг ноллари	—	—
Ўсиш оралиқлари	$(-\infty; 0)$	—
Камайиш оралиқлари	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$
Энг катта қиймати	—	—
Энг кичик қиймати	—	—
Ўзгармас ишорали оралиқлари	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ оралиқларда $f(x) > 0$	$(-\infty; 0)$ оралиқда $f(x) < 0$; $(0; +\infty)$ оралиқда $f(x) > 0$

$y = x^{-n}$ ($n \in N$) функциянинг $n = 2k$ ва $n = 2k + 1$ бўлгандаги графиклари мос равишда 34- ва 35-расмларда кўрсатилган.

3. Агар $r = \frac{1}{n}$ (бунда $n > 1$ — натурал сон) бўлса, у ҳолда каср кўрсаткичли $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ даражали функцияга эга бўламиз.



34-расм

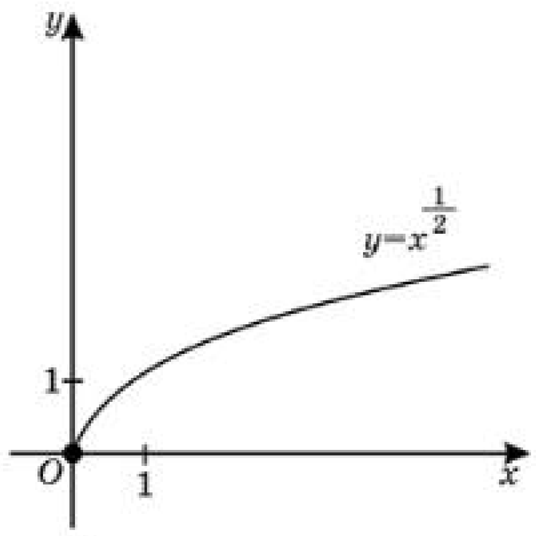


35-расм

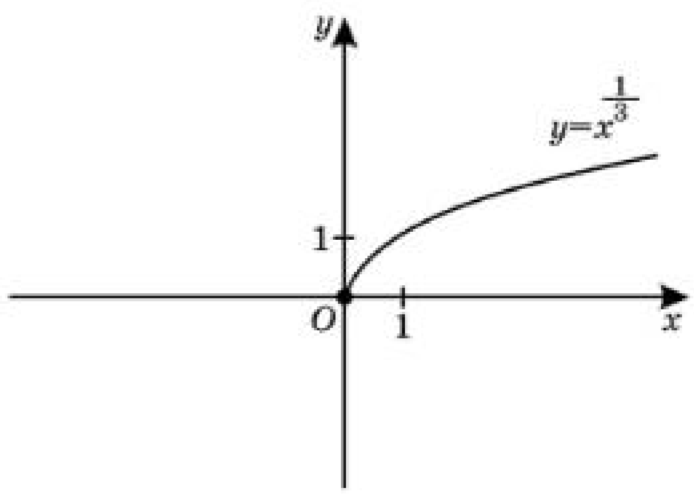
Мисол тариқасида $n=2$ ва $n=3$ ҳолларни кўриб чиқамиз. $y=x^{\frac{1}{2}}$ ва $y=x^{\frac{1}{3}}$ функцияларнинг графиклари мос равишда 36.1- ва 36.2-расмларда кўрсатилган. Ушбу функцияларнинг графиклари ёрдамида $n=2k$ ва $n=2k+1$ бўлганда $y=x^{\frac{1}{n}}$ функциянинг хоссаларини аниқлаймиз (21-жадвал).

21-жадвал

Функциянинг хоссалари	$y=x^{\frac{1}{n}}$, $n>1$
	$n=2k$ ёки $n=2k+1$
Аниқланиш соҳаси	$[0; +\infty)$
Қийматлар тўплами	$[0; +\infty)$
Жуфтлиги, тоқлиги	Жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас
Функциянинг ноллари	$x=0$
Ўсиш оралиқлари	$[0; +\infty)$
Камайиш оралиқлари	—
Энг катта қиймати	—
Энг кичик қиймати	$f(0)=0$
Ўзгармас ишорали оралиқлари	$(0; +\infty)$ оралиқда $f(x)>0$



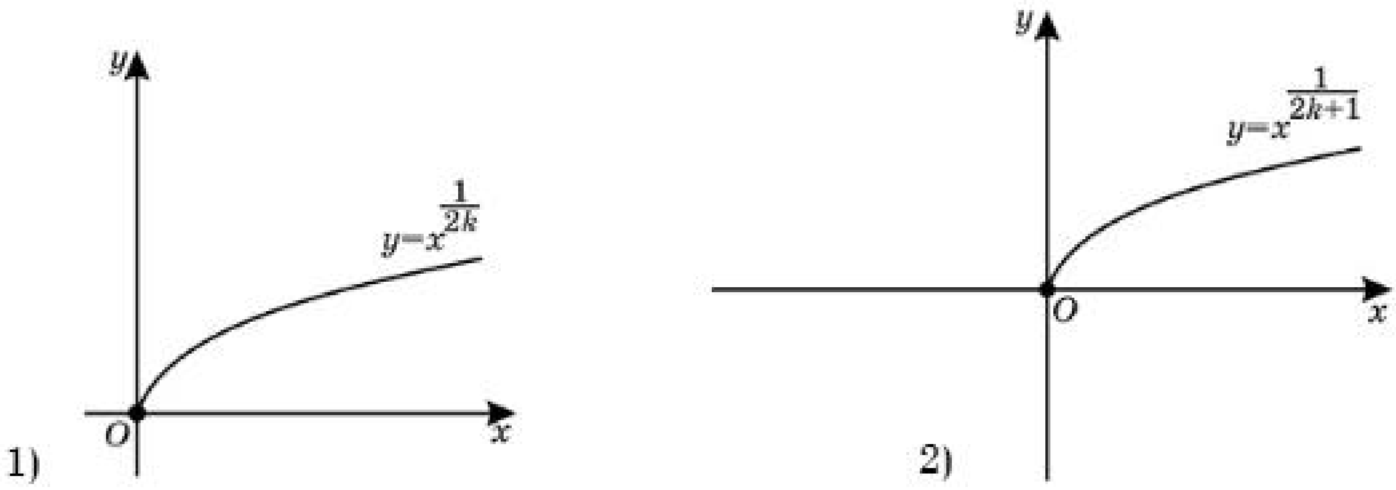
1)



2)

36-расм

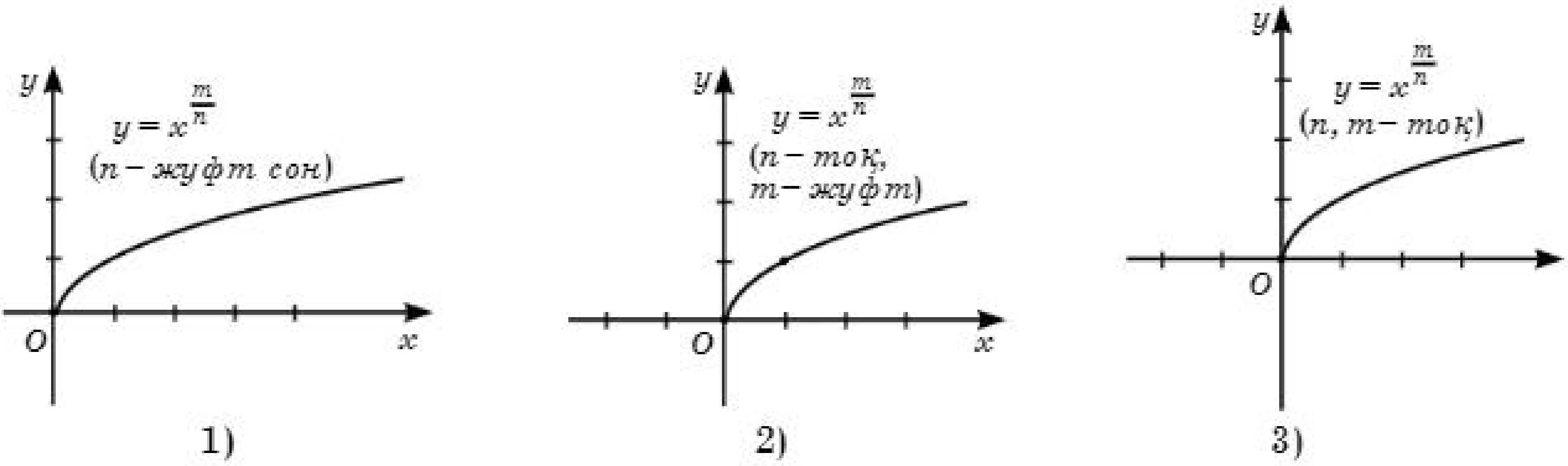
$y=x^{\frac{1}{n}}$ $(n>1)$ функциянинг $n=2k$ ва $n=2k+1$ бўлганда графиклари мос равишда 37.1- ва 37.2-расмларда кўрсатилган.



37-расм

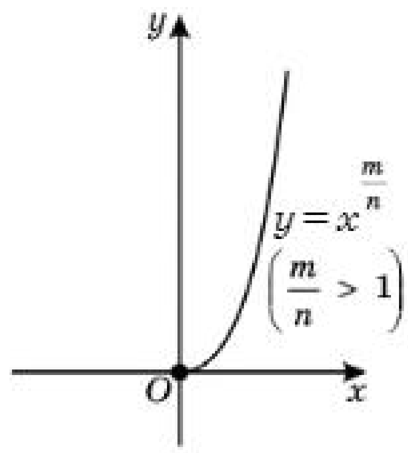
4. Агар $r=\frac{m}{n}$ (бунда n, m — натурал сонлар) ва $m<n$ бўлса, у ҳолда *мусбат каср кўрсаткичли* $y=x^{\frac{m}{n}}$ $\left(0<\frac{m}{n}<1\right)$ *даражали функцияни* ҳосил қиламиз.

Бу функция графигининг умумий кўриниши 38.1-, 2-, 3-расмда тасвирланган.



38-расм

5. $r=\frac{m}{n}$ (бунда n, m — натурал сонлар) ва $\frac{m}{n}>1$ ҳолда мусбат каср кўрсаткичли даражали функцияни оламиз. Бу функциянинг графиги 39-расмда берилган.

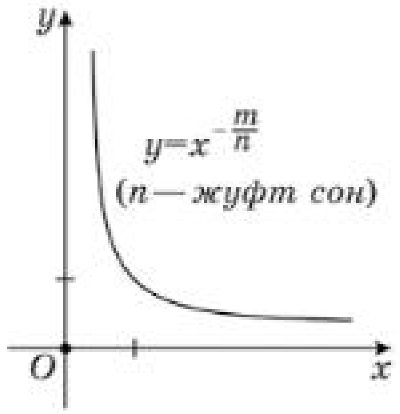


39-расм

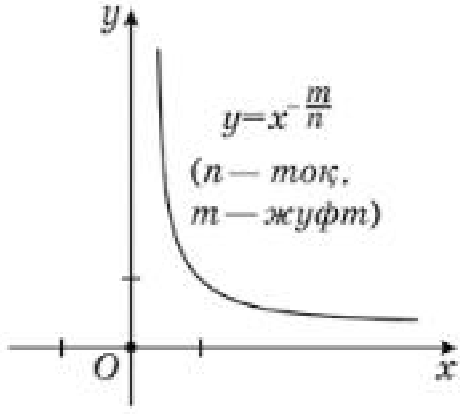
6. Агар $r=-\frac{m}{n}$, бунда n, m ўзаро туб натурал сонлар бўлса, у ҳолда манфий каср кўрсаткичли $y=x^{-\frac{m}{n}}$ даражали функцияни оламиз.

$y=x^{-\frac{m}{n}}$ функция графигининг тури n, m қийматларнинг жуфт ва тоқ бўлишига боғлиқ бўлганлигидан, 3-банддаги каби бунда ҳам учта ҳол кўриб чиқилади.

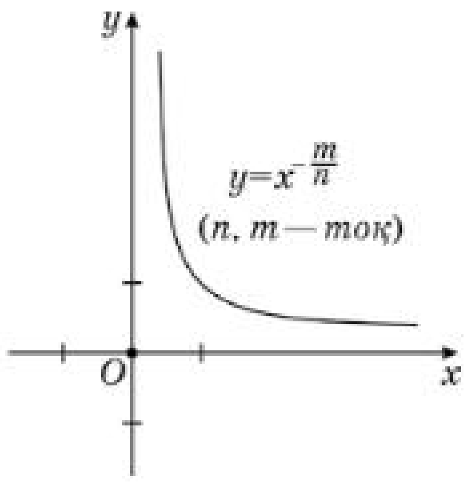
$y=x^{-\frac{m}{n}}$ функция графигининг умумий кўриниши ҳар бир ҳол учун мос равишда 40 (1,2,3)-расмда кўрсатилган.



1)



2)



3)

40-расм

МИСОЛ 1. $y = x^5$ натурал кўрсаткичли функциянинг аниқланиш соҳасини, функциянинг нолларини, жуфтлиги ёки тоқлигини, ўсиш ва камайиш оралиқларини, энг катта ва энг кичик қийматларини аниқлаймиз.

Ечиш. Аввал берилган функция даражали функциянинг қайси турига киришини аниқлаймиз. Бунда $n = 5$, яъни натурал сон. Демак, $y = x^5$ функция — натурал кўрсаткичли функция. Шунинг учун хоссаларини аниқлаш учун 1-жадвалдаги n тоқ бўлган ҳолни фойдаланамиз.

Функциянинг аниқланиш соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами; функциянинг ноли — $x = 0$ нуқта; функция — тоқ, барча ҳақиқий сонлар тўпламида ўсувчи; функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари мавжуд эмас.

МИСОЛ 2. $y = x^{-4}$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топамиз.

Ечиш. $y = x^{-4}$ функция — бутун манфий кўрсаткичли даражали функция. Бундан 20.2-жадвалдаги $n = 2k$ ҳолга мос равишда берилган функция $(-\infty; 0)$ оралиқда ўсади, $(0; +\infty)$ оралиқда камаяди.

$y = x^{-4}$ функциянинг қолган хоссаларини мустақил аниқланг.

МИСОЛ 3. $y = x^{\frac{1}{7}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини, энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз.

Ечиш. Берилган функция каср кўрсаткичли даражали функция. Демак, $y = x^{\frac{1}{n}}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $[0; +\infty)$ оралиқ бўлади ва функция юқоридан чегараланмаганлиги учун, унинг энг катта қиймати мавжуд эмас, энг кичик қиймати нолга тенг.

МИСОЛ 4. $y = x^{\frac{4}{9}}$ функциянинг жуфт ёки тоқ бўлишини аниқлаймиз.

Ечиш. $y = x^{\frac{4}{9}}$ функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас, чунки $[0; +\infty)$ тўпламда аниқланган.

$y = x^{\frac{4}{9}}$ функциянинг қолган хоссаларини мустақил аниқланг.

МИСОЛ

5. $y = x^{-\frac{5}{7}}$ функциянинг ўзгармас ишорали оралиқларини топамиз.

Ечиш. $y = x^{-\frac{5}{7}}$ функция — манфий каср кўрсаткичли даражали функция. Кўрсаткичи $-\frac{5}{7}$ сони бўлганлигидан, берилган функция $(0; +\infty)$ оралиқда аниқланган ва $(0; +\infty)$ оралиқда мусбат қийматларни қабул қилади.

$y = x^{-\frac{5}{7}}$ функциянинг қолган хоссаларини мустақил аниқланг.

?

1. Даражали функцияларнинг турли хил бўлишининг сабаби нимада?
2. Қандай ҳолларда даражали функция юқоридан ёки қуйидан чегараланган бўлади?
3. $y = x^{\frac{m}{n}}$ функциядаги $\frac{m}{n}$ каср нима учун қисқармайдиган каср бўлиши керак?

Машқлар

A

12.1. $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = x^5$; 2) $f(x) = x^{-7}$; 3) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$;
4) $f(x) = x^{\frac{9}{10}}$; 5) $f(x) = x^{\frac{4}{7}}$; 6) $f(x) = x^{\frac{11}{13}}$;
7) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$; 8) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$; 9) $f(x) = x^{-\frac{5}{7}}$.

12.2. $y = f(x)$ функциянинг жуфт ёки тоқ бўлишини текширинг:

1) $f(x) = x^{11}$; 2) $f(x) = x^{\frac{1}{9}}$; 3) $f(x) = x^{-8}$;
4) $f(x) = x^{\frac{11}{12}}$; 5) $f(x) = x^{\frac{12}{13}}$; 6) $f(x) = x^{\frac{15}{17}}$;
7) $f(x) = x^{-\frac{7}{10}}$; 8) $f(x) = x^{-\frac{8}{13}}$; 9) $f(x) = x^{-\frac{11}{13}}$.

B

12.3. $y = f(x)$ функциянинг ўзгармас ишорали оралиқларини аниқланг:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = x^{-4}$; 3) $f(x) = x^{\frac{1}{7}}$;
4) $f(x) = (1 + x)^{\frac{7}{9}}$; 5) $f(x) = x^{\frac{5}{8}} + 2$; 6) $f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 1$;

7) $f(x) = (3 - x)^{-\frac{5}{6}}$; 8) $f(x) = 1 - x^{-\frac{4}{7}}$; 9) $f(x) = (x + 2)^{-\frac{3}{5}}$.

12.4. $y = f(x)$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

1) $f(x) = 1 + x^7$; 2) $f(x) = 2 - x^{-10}$; 3) $f(x) = 3 + x^{\frac{1}{9}}$;

4) $f(x) = 4 - x^{\frac{11}{16}}$; 5) $f(x) = 5 - x^{\frac{13}{15}}$; 6) $f(x) = (-x)^{\frac{11}{13}}$;

7) $f(x) = (-x)^{-\frac{7}{8}}$; 8) $f(x) = (-x)^{-\frac{8}{11}}$; 9) $f(x) = (-x + 0,5)^{-\frac{11}{17}}$.

12.5. $y = f(x)$ функциянинг графигини ясанг ва монотон оралиқларини топинг:

1) $f(x) = x^4 + 2$; 2) $f(x) = x^3 - 3$;

3) $f(x) = 1 - x^{\frac{1}{2}}$; 4) $f(x) = -1 + x^{-\frac{1}{3}}$.

C

12.6. 1) Натурал сонга тескари; 2) мусбат каср; 3) манфий каср кўрсаткичли жуфт ва тоқ даражали функцияларга иккитадан мисол келтиринг.

12.7. 1) $x \in [0; +\infty)$; 2) $x \in (0; +\infty)$; 3) $x \in R$ оралиқларда ўсувчи каср кўрсаткичли даражали функцияларга мисоллар келтиринг.

12.8. 1) $x \in R$; 2) $x \in [0; +\infty)$; 3) $x \in (0; +\infty)$ оралиқларда камаювчи каср кўрсаткичли даражали функцияларга мисоллар келтиринг.

МАТЕМАТИК ОЛИМЛАР ҲАҚИДА АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

12.9. $\sqrt{\ }$ ва $\sqrt[n]{\ }$ белгиларни француз математиги Альберт Жирар, немис философи ва математиги Готфрид Вильгельм Лейбниц биридан кейин бири қўллай бошлади. Швейцариялик математик Иоганн Бернулли x^r функциядан аниқланган интегрални топиш формуласини келтириб чиқарган.

А. Жирар
(1595—1632)

И. Бернулли
(1667—1748)

ТАКРОРЛАШ

12.10. Тенгсизликни ечинг:

1) $\cos 3 \cdot (2x - 8) < 0$; 2) $\sin 2 \cdot \cos 6 \cdot (x^2 - 9) < 0$.

12.11. Тенгсизликни даражани пасайтириш усули билан ечинг:

1) $\cos^2 x \geqslant 0{,}5$; 2) $\sin^2 x \geqslant 1$; 3) $\cos^2 x < 1$; 4) $\sin^2 2x < 1$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Ҳосила, интеграл, даражали функция, дифференциаллаш формулалари, бошланғич функциялар жадвали.

13-§. ҲАҚИҚИЙ КЎРСАТКИЧЛИ ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ ВА ИНТЕГРАЛИ

Сиз ҳақиқий кўрсаткичли даражали функциянинг ҳосиласини топиш қоидаларидан фойдаланишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, даражали функция, ҳосила, бошланғич функция, интеграл

СИЗ БИЛАСИЗ: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (1) формула маълум, бунда n — натурал сон.

Исталган n бутун сон учун

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (1)$$

формуланинг тўғри эканлигини математик индукция усули билан исботлаш мумкин.

Исботи. 1) $n = 1$ бўлганда (1) формула $x' = 1$ кўринишга келади. Бу тенглик тўғри. Чунки $f(x) = x$ функциянинг ҳосиласини аниқласак, $f(x) = x$, $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x$.

Демак, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, бундан $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$ келиб чиқади. Жумладан $n = 1$ бўлганда (1) формула тўғри.

2) $n = k$ учун (1) формула тўғри деб олайлик, яъни $(x^k)' = kx^{k-1}$.

3) $n = k + 1$ учун $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$ эканлигини исботлайлик. Бунинг учун x^{k+1} ифодани кўпайтма кўринишида ёзиб $(x^k \cdot x)$, сўнгра кўпайтманинг ҳосиласини топиш қоидасидан фойдаланамиз:

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)'.$$

$x' = 1$ тўғри ва $(x^k)' = kx^{k-1}$ тўғри деб қабул қилганимизни эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз: $(x^{k+1})' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)x^k$.

Демак, (1) формула $n = k + 1$ учун ҳам тўғри. ◻

Шундай қилиб, (1) формула исталган n бутун сон учун тўғри.

α исталган сон бўлса, у ҳолда $y = x^\alpha$ даражали функциянинг ҳосиласи

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad (2)$$

формула орқали топилади.

МИСОЛ

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ функциянинг ҳосиласини топамиз.

Ечиш. $y' = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} =$
$= -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

Жавоб: $-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

МИСОЛ

2. Абсциссаси $x = -1$ нуқтада $y = x^{-4}$ функциянинг графигига ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзамиз.

Ечиш. Абсциссаси x_0 бўлган нуқтада функция графигига ўтказилган уринманинг тенгламаси $y = y_0 + y_0'(x - x_0)$. Бундан қуйидагиларни топамиз:

$y(-1) = (-1)^{-4} = 1;$
$y' = (x^{-4})' = -4x^{-5};$
$y'(-1) = -4 \cdot (-1)^{-5} = 4.$

Уринманинг тенгламаси: $y = 1 + 4(x + 1) = 4x + 5$.

Жавоб: $y = 4x + 5$.

Сиз ҳақиқий кўрсаткичли даражали функциянинг интегралини топишни ўрганасиз.

СИЗ БИЛАСИЗ:

$f(x) = x^k$ функциянинг бошланғич функцияси

$$F(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \tag{3}$$

бунда k — исталган бутун сон ва $k \neq -1$ эканлиги маълум.

Бошланғич функцияни топишнинг (3) формуласи ҳақиқий кўрсаткичли даражали функция учун ҳам тўғри эканлигини ҳосиланинг формуласини исботи каби кўрсатиш мумкин, яъни исталган ҳақиқий сон учун даражали функциянинг интеграли қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\int x^{\beta}\,dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C,\ \beta \neq -1. \tag{4}$$

МИСОЛ

3. $y = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ функциянинг 1 дан 4 гача аниқ интегралини ҳисоблайлик.

Ечиш. $\int\limits_1^4 \left(\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\right)dx = -\dfrac{1}{2}\int\limits_1^4 x^{-\frac{3}{2}}\,dx = -\dfrac{1}{2}\left.\dfrac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right|_1^4 = -\dfrac{1}{2}\left.\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_1^4 = \left.\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right|_1^4 =$
$= \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$.

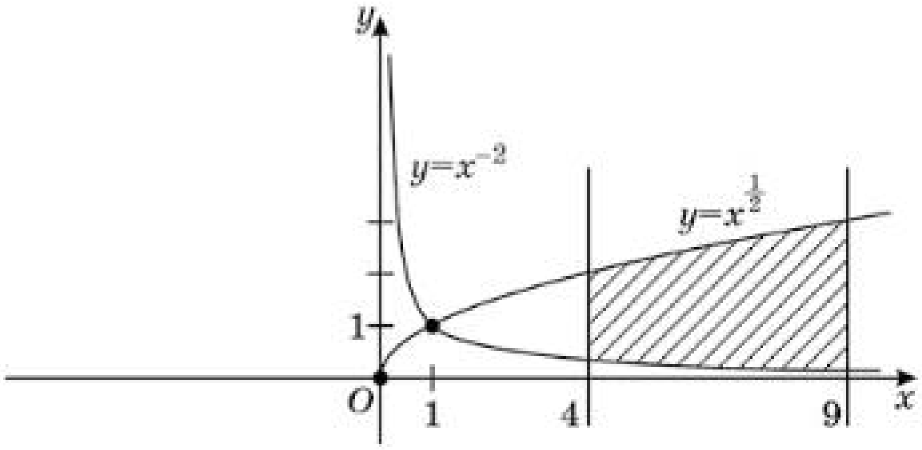
Жавоб: $-\dfrac{1}{2}$.

МИСОЛ

4. $y = x^{-2}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $x = 4$, $x = 9$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топамиз.

Ечиш. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигура 41-расмда тасвирланган.

Бунда $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $g(x) = x^{-2}$, $a = 4$, $b = 9$.



41-расм

$$S_ф = \int_4^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-2}\right) dx = \left(\frac{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_4^9 = \frac{2 \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{9} - \frac{2 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{4} =$$

$$= 18 + \frac{1}{9} - \frac{16}{3} - \frac{1}{4} = 12\frac{19}{36}.$$

Жавоб: $12\frac{19}{36}$ кв. бирл.

1. Агар α ва β рационал сонлар ҳамда $\alpha = \frac{m}{n}$ ёки $\beta = \frac{m}{n}$ бўлса, у ҳолда $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$ ва $\int x^{\beta}\, dx = \frac{x^{\beta+1}}{\beta + 1} + C$ формулалардаги $\frac{m}{n}$ нима учун қисқармайдиган каср бўлиши керак?

2. 1—4-мисолларда даражанинг қандай хоссалари қўлланилган?

Машқлар

А

13.1. $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = x^9$; 2) $f(x) = x^{-1}$; 3) $f(x) = \frac{1}{7}x^7$; 4) $f(x) = x^{-\frac{11}{6}}$.

13.2. $y = f(x)$ функция ҳосиласининг $x = 1$ нуқтадаги қийматини топинг:

1) $f(x) = 2x^4$; 2) $f(x) = x^{-3}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^{-3}}$; 4) $f(x) = x^{-2,5}$.

13.3. $y = f(x)$ функциянинг аниқмас интегралини топинг:

1) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = \frac{2}{3\sqrt{x^3}}$; 3) $f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{5}}$; 4) $f(x) = x^{-\frac{7}{8}}$.

13.4. $y = f(x)$ функция ҳосиласининг x_0 нуқтадаги қийматини топинг:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 9$;

3) $f(x) = -\frac{3}{x^2}$, $x_0 = 6$; 4) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$, $x_0 = 1$.

13.5. Абсциссаси x_0 бўлган нуқтада $y = f(x)$ функциянинг графигига ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

1) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$, $x_0 = -1$.

13.6. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 9$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -2$.

B

13.7. $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = x\sqrt{x}$; 2) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$;

4) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$; 5) $f(x) = x\sqrt[3]{x^2}$; 6) $f(x) = \frac{x+5}{x^4}$.

13.8. $y = f(x)$ функциянинг аниқмас интегралини топинг ва дифференциаллаш орқали тўғрилигини текширинг:

1) $f(x) = 5x^{-\frac{4}{5}}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$;

3) $f(x) = \frac{2x^{-1} + 3x}{4x^3}$; 4) $f(x) = (x^5 + x)^2$.

13.9. Ҳисобланг:

1) $\int\limits_1^9 (\sqrt{x} + x)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} (0{,}25x + 3)^3 dx$.

13.10. $F(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{6} \cdot \cos\frac{x}{6}$ функция $f(x) = \frac{1}{12}\cos\frac{x}{3}$ функциянинг бошланғич функцияси бўлишини исботланг.

13.11. $f(x) = \left(\frac{x+3}{2}\right)^3$ функциянинг $M(0;\ 0)$ нуқта орқали ўтувчи бошланғич функциясини топинг.

13.12. Интегрални ҳисобланг:

1) $\int\limits_{-3}^{-2} 3x^{-2}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{32} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$; 3) $\int\limits_{1}^{3} \left(x^3 + x\right)^2 dx$.

13.13. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y = -x^2 + 2x$, $y = -3$; 2) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$.

C

13.14. $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{1}{x\sqrt[3]{2x}}$; 3) $y = \frac{1 + 2x - x^4}{x\sqrt{x}}$; 4) $y = x^{-\sqrt{7}}$.

13.15. Абсциссаси $x = 32$ бўлган нуқтада $f(x) = x^{-\frac{3}{5}} + 2x^2$ функциянинг графигига ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

13.16. $y = f(x)$ функция учун бошланғич функциянинг умумий кўринишини ёзинг:

1) $f(x) = \sqrt[3]{2x\sqrt{3x}} + \pi$; 2) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} - \sqrt{2}$.

13.17. Аниқмас интегрални топинг:

1) $\int \frac{dx}{7\cos^2(3 - x)}$; 2) $\int \frac{\cos^2 x dx}{1 - \sin x}$.

13.18. $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$ функциянинг $M(1;\ 1{,}5)$ нуқта орқали ўтувчи бошланғич функциясини топинг.

13.19. Аниқ интегрални топинг:

1) $\int\limits_{1}^{8} \frac{5dx}{2x^{\frac{2}{3}}}$; 2) $\int\limits_{4}^{9} \frac{3}{x^{-\frac{1}{2}}}dx$; 3) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt[4]{2x - 1}dx$.

13.20. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 5$, $y = \frac{1}{x^2}$ $(x \geqslant 0)$;

2) $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, $x = -1$, $x = 0$.

13.21. $a \in [1;\ 2]$ бўлганда $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи a нинг қандай қийматларида $x = a$ тўғри чизиқ билан тенг иккига бўлинади?

ТАКРОРЛАШ

13.22. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}-\frac{8}{x^2-4}=0$; 2) $\frac{2}{x}+\frac{x^2+8}{x^2-4x}+\frac{6}{4-x}=0$;

3) $\frac{4x-14}{x-3}=x-2$; 4) $\frac{x^2-2x}{x-1}-2=\frac{2x-1}{1-x}$.

13.23. 1) $2x+\frac{1}{2x}=3$; 2) $2x-\frac{1}{2x}=5$; 3) $2x+\frac{1}{2x}=2$; 4) $2x-\frac{1}{2x}=4$ бўлса, у ҳолда $4x^2+\frac{1}{4x^2}$ ифоданинг қийматини топинг.

13.24. $y=|x^2-2x-8|$ функциянинг графигини ясанг. Графикдан фойдаланиб:

1) функциянинг ўзгармас ишорали оралиқларини аниқланг;
2) функция графиги симметрия ўқининг тенгламасини ёзинг;
3) $p=|x^2-2x-8|$ тенгламанинг тўртта илдизи бўладиган p параметрнинг қийматини топинг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!!

1. $\left(\frac{125}{512}\right)^{-\frac{1}{3}}$ ифоданинг қийматини топинг:

A) 0,8; B) $\frac{5}{8}$; C) $\frac{5}{4}$; D) 1,6.

2. $\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}}$ ифодани соддалаштириб, $x=0{,}008$ бўлгандаги қийматини топинг:

A) $\frac{3}{2}$; B) $\frac{1}{6}$; C) $\frac{2}{3}$; D) $\frac{3}{4}$.

3. $\left(\frac{b^{\frac{1}{3}}}{b-1}+\frac{b}{b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}\right)\cdot\left(b^{\frac{1}{3}}-1\right)\cdot\frac{b-1}{b^{\frac{1}{3}}}$ ифодани соддалаштиринг:

A) b; B) $-b$; C) $b^{\frac{2}{3}}+b-2$; D) $b^{\frac{1}{3}}-1$.

4. $\left(k^{\frac{1}{3}}+q^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(k^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}-(kq)^{\frac{1}{3}}\right)$ ифодани йиғинди кўринишида ёзинг:

A) $k-q$; B) $k+q$; C) k^3-q^3; D) k^3+q^3.

5. $\frac{27^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{625^{-\frac{1}{4}}}$ ифоданинг қийматини топинг:

A) 10; B) $\frac{1}{5}$; C) 5; D) $-\frac{1}{5}$.

6. Агар $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 5$ бўлса, у ҳолда функция ҳосиласининг $x = 8$ нуқтадаги қийматини топинг:

A) $-\frac{1}{3}$; B) $6\frac{1}{3}$; C) $\frac{16}{3}$; D) $\frac{1}{3}$.

7. Абсциссаси $x = \frac{1}{27}$ бўлган нуқтада $y = x^{-\frac{1}{3}} + 1$ функциянинг графигига ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

A) $y = 27x + 5$; B) $y = -27x + 5$;
C) $y = -27x + 4$; D) $y = -9x + 5$.

8. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x$ функциянинг экстремумларини топинг:

A) $x_{min} = 1$; B) $x_{min} = 1$; $x_{max} = -1$;
C) экстремум мавжуд эмас; D) $x_{max} = 1$.

9. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

A) $[0; 4]$ оралиқда ўсади, $[4; +\infty)$ оралиқда камаяди;
B) $(-\infty; 4)$ оралиқда ўсади, $(4; +\infty)$ оралиқда камаяди;
C) $[0; 4]$ оралиқда камаяди, $[4; +\infty)$ оралиқда ўсади;
D) $(-\infty; 4)$ оралиқда камаяди, $(4; +\infty)$ оралиқда ўсади.

10. $y = x^{\frac{5}{2}}$ функциянинг $[1; 4]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

A) 1; 0; B) 32; 0; C) 16; 32; D) 32; 1.

11. $y = \frac{1}{x^4}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

A) $\frac{28}{81}$; B) $\frac{26}{81}$; C) $\frac{8}{27}$; D) $\frac{29}{81}$.

12. $\int\limits_0^{64}\left(\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)dx$ ифоданинг қийматини топинг:

A) 578; B) 576; C) 656; D) 568.

13. $y = \frac{3}{\sqrt{10}}x^{\frac{1}{3}}$ функциянинг графигини Ox ўқига нисбатан айлантирганда ҳосил бўладиган жисмнинг $x = 0$ нуқтадан $x = 1$ нуқтагача бўлган оралиқдаги ҳажмини топинг:

A) π; B) $\frac{9}{10}\pi$; C) $\frac{10}{9}\pi$; D) $\frac{27}{50}\pi$.

14. Ўқувчилар сумкасининг баҳоси 80 тенгега арзонлашди. Агар сумканинг дастлабки баҳоси 800 тг бўлса, янги баҳони неча фоизга кўтарганда сумканинг дастлабки баҳосини олиш мумкин (жавобингизни бутунларгача яхлитланг):

A) 10%; B) 11%; C) 12%; D) 13%; E) 15%.

15. Яшил рангга бўялган куб 64 та бир хил кубчаларга бўлинди. Ҳамма ёқлари бўялмаган кубчалар сонини топинг:

A) 6; B) 18; C) 16; D) 24; E) 8.

16. Азамат, Даврон ва Абай баскетбол ўйнади. Ҳар бири коптокни 16 мартадан улоқтирди. 22-жадвалдаги маълумотлардан фойдаланиб X билан Y нинг қийматларини топинг:

22-жадвал

	Саватга туширишлар сони	Тушириш фоизи
Азамат	8	50%
Даврон	12	Y%
Абай	X	25%

A) $X=4$, $Y=75$; B) $X=4$, $Y=65$; C) $X=6$, $Y=75$;
D) $X=4$, $Y=50$; E) $X=8$, $Y=50$.

17. Официантнинг маоши мижоз буюртмасининг 15%ини ташкил этади. Официантнинг бир кунда мижозга хизмат кўрсатиш жадвалини тўлдиринг (23-жадвал).

23-жадвал

Мижоз	Буюртма нархи	Официантнинг маоши
Биринчи мижоз	9 400 тг	
Иккинчи мижоз	10 200 тг	
Учинчи мижоз	5 400 тг	
Тўртинчи мижоз	7 600 тг	
Бешинчи мижоз	9 200 тг	
Олтинчи мижоз	12 200 тг	

Официантнинг бир кунлик маошини топинг:

A) 7941 тг; B) 8461 тг; C) 7351 тг; D) 8240 тг; E) 8271 тг.

18. $M(1;\ 0)$ нуқта орқали $y = x^2 - 2x + 2$ функциянинг графигига уринмалар ўтказилган. Уриниш нуқталарининг координаталарини топинг:

A) (0; 1) ва (2; 2); B) (0; 2) ва (2; 0);
C) (0; 3) ва (2; 3); D) (0; 2) ва (2; 2);
E) (1; 1) ва (3; 3).

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, тенгламанинг илдизи, тенгламани ечиш, тенгламалар системаси, тенгламалар системасини ечиш, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, ифодаларни айнан шакл алмаштириш, тенг кучли тенгламалар, тенг кучли тенгламалар системаси, n-даражали илдиз ва унинг хоссалари.

IV БОБ

ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

14-§. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА УЛАРНИНГ СИСТЕМАЛАРИ

Сиз *иррационал тенгламалар* тушунчаси билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, иррационал тенглама, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, чет илдиз, тенгламани ечиш

СИЗ БИЛАСИЗ: Рационал тенгламалар ва уларнинг системаларини ечиш усулларини ўргангансиз.

***Иррационал тенгламалар** деб ўзгарувчиси илдиз белгиси остида ёки каср кўрсаткичли даражанинг асоси бўлган тенгламаларга айтилади.*

Масалан:

$$\sqrt{x+3} = 2x - 1; \qquad \sqrt{x-1} - 12\sqrt[3]{x} = 3;$$

$$2x^{\frac{1}{3}} - 5 = 0; \qquad (2x - x)^{\frac{1}{3}} = (x + 6)^{\frac{1}{4}} + 7x.$$

Иррационал тенгламаларни ечишдан аввал берилган тенгламанинг турига эътибор бериш лозим. У “Берилган тенгламанинг илдизи мавжудми, агар тенглама ечилса, у ҳолда уни қандай усул билан ечиш керак?” деган саволга жавоб олишга имконият яратади. Масалан, $\sqrt[4]{x+3} = -2$ тенгламани ечиш шарт эмас, чунки арифметик илдизнинг қиймати фақатгина мусбат сон бўлади.

Сиз ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами бўйича олган билимингизни чуқурлаштирасиз.

Иррационал тенгламаларни ечишда тенгламага тегишли бўлган илдизлар *арифметик илдизлар* деб қаралади. Бунинг учун илдиз белгиси остидаги ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топиш керак.

Сиз тенгламанинг иккала томонини бир хил n-даражага кўтариш усули орқали иррационал тенгламаларни ечишни ўрганасиз.

Иррационал тенгламаларни ечишнинг умумий усули:

1) агар иррационал тенгламанинг биттагина илдизи мавжуд бўлса, у ҳолда илдиз белгиси тенгламанинг бир томонида қоладиган қилиб

шакл алмаштирамиз. Сўнгра тенгламанинг иккала томонини ҳам бир хил даражага кўтариш орқали рационал тенгламага эга бўламиз;

2) агар иррационал тенгламада икки ёки ундан ортиқ илдиз белгиси бўлса, у ҳолда аввал илдизлардан биттасини тенгламанинг бир томонида қолдириб, тенгламанинг иккала томонини бир хил даражага кўтарамиз. Сўнгра рационал тенглама ҳосил бўлгунга қадар шу усулни такрорлаймиз.

Иррационал тенгламанинг иккала томонини бир хил даражага кўтарганда ҳосил бўлган тенглама баъзи ҳолларда берилган тенгламага тенг кучли бўлмайди. Шу сабабли ўзгарувчининг топилган қийматларини албатта текшириб чиқиш керак. Текшириш иррационал тенгламани ечишнинг таркибий қисми бўлиб ҳисобланади, чунки топилган ўзгарувчининг қийматлари берилган тенгламани қаноатлантирмаслиги мумкин. Ўзгарувчининг бундай қийматлари *чет илдизлар* деб аталади.

Иррационал тенгламаларни ечишга мисолллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

1. $\sqrt{x+2} = x$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $\sqrt{x+2} = x$ иррационал тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз: $x+2=x^2$ ёки $x^2-x-2=0$, охирги тенгламанинг илдизлари: $x_1=2, x_2=-1$.

Текшириш. 1) $x = 2$, у ҳолда $\sqrt{2+2} = 2$; $2 = 2$ тўғри.

2) $x = -1$, у ҳолда $\sqrt{-1+2} = -1$; $1 = -1$ нотўғри.

Демак, $x = -1$ чет илдиз. Берилган иррационал тенгламанинг илдизи фақат 2 сони бўлади.

Жавоб: 2.

МИСОЛ

2. $(x - 5)(x + 2)\sqrt{x-7} = 0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топамиз. $x - 7 \geqslant 0$ ёки $x \geqslant 7$. У ҳолда $x \in [7; +\infty)$. Берилган тенгламани $x - 5 = 0$, $x + 2 = 0$, $\sqrt{x-7} = 0$ тенгламалар тўплами билан алмаштирамиз. Ҳар бирини ечиб, қуйидаги қийматларни оламиз: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 7$.

x_1 ва x_2 қийматлар ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламига тегишли эмас. Шу сабабли берилган иррацонал тенгламанинг илдизи 7 сони бўлади.

Жавоб: 7.

МИСОЛ

3. $\sqrt{x^2+5x+1} + 1 = 2x$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Берилган тенгламада биттагина радикал белгиси бор. Тенгламанинг чап томонидаги 1 сонини ўнг томонга ўтказиш орқали радикал белгисини ажратиб оламиз: $\sqrt{x^2+5x+1} = 2x - 1$. Энди тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2$ ёки $x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$.

Бундан $3x^2 - 9x = 0$ ёки $x^2 - 3x = 0$, ёки $x(x - 3) = 0$ ни оламиз, у ҳолда $x_1 = 0$ ва $x_2 = 3$.

Текшириш. $\sqrt{0^2 + 5 \cdot 0 + 1} + 1 \neq 2 \cdot 0$. Демак, $x = 0$ илдиз тенгламани қаноатлантирмайди, яъни бу — чет илдиз. Худди шундай $x = 3$ учун текширсак, у берилган тенгламани қаноатлантиради. Демак, берилган иррационал тенгламанинг илдизи 3 сони бўлади.

Жавоб: 3.

Сиз ўзгарувчини алмаштириш усули орқали иррационал тенгламаларни ечишни ўрганасиз.

Баъзи бир ҳолларда иррационал тенгламаларни ечишда *янги ўзгарувчи киритиш усули* мураккаб иррационал тенгламаларни содда кўринишга келтириш мақсадида қўлланилади.

МИСОЛ

4. $\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0$ тенгламанинг илдизларини топамиз.

Ечиш. Берилган тенгламани ечиш учун $y = \sqrt[8]{x}$ белгилаш киритиб, $y^2 + y - 2 = 0$ тенгламани оламиз. Тенгламанинг илдизлари: $y_1 = 1$, $y_2 = -2$. У ҳолда $\sqrt[8]{x} = 1$ ва $\sqrt[8]{x} = -2$. $\sqrt[8]{x} = 1$ тенгламанинг илдизи $x = 1$ сони, иккинчи тенгламанинг илдизи мавжуд эмас, чунки $\sqrt[8]{x} \geqslant 0$. Демак, берилган тенгламанинг илдизи 1 сони бўлади.

Жавоб: 1.

МИСОЛ

5. $\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$ тенгламанинг илдизларини топамиз.

Ечиш. Берилган тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$1 - x\sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 2x + 1 \text{ ёки } -x\sqrt{x^2 - 1} = x(x - 2).$$

Ҳосил бўлган тенгламани x га қисқартириш мумкин эмас, чунки бу ҳолда тенгламанинг битта илдизи йўқолади. У ҳолда охирги тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$-x\sqrt{x^2 - 1} - x(x - 2) = 0 \text{ ёки } -x\left(\sqrt{x^2 - 1} + (x - 2)\right) = 0,$$
$$-x = 0 \text{ ёки } \sqrt{x^2 - 1} + x - 2 = 0,$$
$$x = 0 \text{ ёки } \sqrt{x^2 - 1} = -x + 2.$$

Охирги тенгламанинг иккала томонини иккинчи даражага кўтарамиз:

$$x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ бундан } x = \frac{5}{4}.$$

Текширишлар олиб бориб, $x = 0$ қиймат берилган тенгламани қаноатлантирмаслигига, $x = \frac{5}{4}$ қиймат эса берилган тенгламани тўғри тенгликка айлантиришига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, берилган тенгламанинг илдизи $\frac{5}{4}$.

Жавоб: $\frac{5}{4}$.

МИСОЛ

6. $(x+34)^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{x-3} = 1$ тенгламанинг илдизларини топамиз.

Ечиш. Берилган тенгламани ечиш учун унинг чап томондаги даражани илдиз кўринишида ёзсак, $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$ тенглама ҳосил бўлади. Охирги тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз: $\sqrt[3]{x+34} = 1 + \sqrt[3]{x-3}$. Ҳосил бўлган тенгламанинг иккала томонини учинчи даражага кўтарамиз:

$$x + 34 = 1 + 3\sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{(x-3)^2} + x - 3,$$

$$36 = 3\sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{(x-3)^2} \text{ ёки } \sqrt[3]{(x-3)^2} + \sqrt[3]{x-3} - 12 = 0.$$

$y = \sqrt[3]{x-3}$ ўзгарувчи киритиб, $y^2 + y - 12 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Охирги тенгламанинг илдизлари: $y_1 = 3, y_2 = -4$. Шундай қилиб, берилган тенглама $\sqrt[3]{x-3} = 3$ ёки $\sqrt[3]{x-3} = -4$ тенгламаларга тенг кучли бўлади. Тенгламаларнинг иккала томонини учинчи даражага кўтариб, $x - 3 = 27$ ёки $x - 3 = -64$ тенгламаларни оламиз.

Демак, $x = 30$ ёки $x = -61$. $y = (x+34)^{\frac{1}{3}}$ функция учун $x + 34 \geqslant 0$ ёки $x \geqslant -34$ бўлгани учун, тенгламанинг ечими 30 сони бўлади.

Жавоб: 30.

Сиз иррационал тенгламалар системасини ечишни ўрганасиз.

Таркибида иррационал тенгламалари бўлган система ***иррационал тенгламалар системаси*** *дейилади.*

Иррационал тенгламалар системасини ечганда рационал тенгламаларни ва рационал тенгламалар системасини ечиш усулларидан фойдаланилади.

Мисоллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

7. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ x + y = 35 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз.

Ечиш. $\sqrt[3]{x} = a$, $\sqrt[3]{y} = b$ белгилашлар киритамиз. У ҳолда берилган тенгламалар системаси қуйидаги системага ўтади:

$$\begin{cases} a + b = 5, \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} a + b = 5, \\ a^2 - ab + b^2 = 7. \end{cases}$$

Охирги тенгламалар системасига алмаштириш усулини қўллаб, $a = 2$, $b = 3$ ва $a = 3$, $b = 2$ қийматларни оламиз. Энди $\sqrt[3]{x} = a$ ва $\sqrt[3]{x} = b$ белгилашларни инобатга олиб, x ва y ўзгарувчиларнинг қийматларини топамиз:

$\sqrt[3]{x} = 2$ ва $\sqrt[3]{y} = 3$, бунда $x_1 = 8$, $y_1 = 27$;

$\sqrt[3]{x} = 3$ ва $\sqrt[3]{y} = 2$, бунда $x_2 = 27$, $y_2 = 8$.

Текшириш: 1) $x = 8$ ва $y = 27$ бўлса, у холда $\begin{cases} \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 5, \\ 8 + 27 = 35; \end{cases}$

2) $x = 27$ ва $y = 8$ бўлса, у холда $\begin{cases} \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{8} = 5, \\ 27 + 8 = 35. \end{cases}$

x ва y ўзгарувчиларнинг топилган қийматларининг ҳаммаси берилган тенгламалар системасини қаноатлантиради.

Жавоб: (8; 27) ва (27; 8).

1. Иррационал тенгламани ечишда қандай тенгламалар чиқиши мумкин?
2. Иррационал тенгламаларни ечишда нима учун ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламига эътибор берилади?

Машқлар

A

Тенгламаларни ечинг (**14.1—14.4**):

14.1. 1) $\sqrt{x} = 3$; 2) $\sqrt{x-3} = 2$;
3) $\sqrt{x} = 2 - x$; 4) $\sqrt{x-2} = \frac{x}{3}$.

14.2. 1) $\sqrt[3]{x+2} = 3$; 2) $\sqrt[4]{x-3} = 2$;
3) $3 + \sqrt{x+3} = x$; 4) $5 + \sqrt{x+1} = x$.

14.3. 1) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$; 2) $x + \sqrt{2x} - 4 = 0$;
3) $(x^2 - 4) \cdot \sqrt{x+5} = 0$; 4) $(x^2 - 9) \cdot \sqrt{x+5} = 0$.

14.4. 1) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0$; 2) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$;
3) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 10 = 0$; 4) $\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} - 18 = 0$.

14.5. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ x + y = 13. \end{cases}$

B

Тенгламаларни ечинг **(14.6—14.10):**

14.6. 1) $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$; 2) $\sqrt{x+2}=2+\sqrt{x-6}$;

3) $\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-2}+2$; 4) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$.

14.7. 1) $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$; 2) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;

3) $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-16}=1$; 4) $\sqrt{3x+1}-2-\sqrt{x+1}=0$.

14.8. 1) $\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=1$; 2) $\sqrt[3]{5-\sqrt{x+15}}=1$;

3) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$; 4) $\dfrac{2x-5}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{x+2}$.

14.9. 1) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=x+2$; 2) $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}=27-x$;

3) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}=(2x-1)^{\frac{1}{2}}$; 4) $\dfrac{x+6}{(x-6)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{3x+2}$.

14.10. 1) $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$; 2) $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2$;

3) $\sqrt{3x^2+13}-\sqrt[4]{3x^2+13}=2$; 4) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

Тенгламалар системасини ечинг **(14.11-14.12):**

14.11. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=72,\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6.\end{cases}$

14.12. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2,\\ xy=27;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4.\end{cases}$

C

Тенгламаларни ечинг **(14.13—14.15):**

14.13. 1) $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$; 2) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$;

3) $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x+17}=1$; 4) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

14.14. 1) $\sqrt[5]{\frac{x-3}{5-x}} + \sqrt[5]{\frac{5-x}{x-3}} = 2;$

2) $\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}} = 4;$

3) $\sqrt[5]{(5x+2)^3} - \frac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}} = 6;$

4) $\frac{(5-x)^{1,5}+(x-3)^{1,5}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}} = 2.$

14.15. 1) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \frac{36}{\sqrt{x-9}};$ 2) $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}};$

3) $\sqrt{2+x} + \sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{2+x}};$ 4) $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$

Тенгламалар системасини ечинг **(14.16–14.18):**

14.16. 1) $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ x \cdot y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 10. \end{cases}$

14.17. 1) $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 0. \end{cases}$

14.18. 1) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 2$ ва $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = 2;$

2) $\sqrt{x^2-3x+2} = 4$ ва $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-1} = 4;$

3) $\sqrt{x-5} = x$ ва $x - 5 = x^2;$

4) $\sqrt[3]{2x+1} = x$ ва $2x + 1 = x^3$

тенгламалар тенг кучли тенгламалар бўладими?

ТАКРОРЛАШ

14.19. Бир жинсли тенгламани ечинг:

1) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0;$

2) $3\sin^2 x - 14\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$

14.20. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 - 16}$;

2) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 8}}$.

14.21. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 \leqslant 0, \\ |x| > 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ |x| < 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 > 0, \\ |x| \geqslant 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2 + 5x - 8 \geqslant 0, \\ |x| \leqslant 5. \end{cases}$

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенгсизликлар, тенгсизликларнинг хоссалари, тенг кучли тенгсизликлар, тенгсизликлар системаси, функция, функциянинг хоссалари, функциянинг графиги, ҳақиқий соннинг n-даражали илдизи, иррационал тенглама, иррационал тенгламани ечиш усуллари.

15-§. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Сиз *иррационал тенгсизлик* тушунчаси билан танишасиз; иррационал тенгсизликларни ечишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенгсизлик, иррационал тенгсизлик, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, тенгсизликлар системаси, тенг кучлилик, тенгсизликни ечиш

Ўзгарувчиси илдиз белгиси остида ёки каср кўрсаткичли даражанинг асоси бўлган тенгсизликлар ***иррационал тенгсизликлар*** *дейилади.*

МИСОЛ

1. $\sqrt{x+3} > x + 1$; $\sqrt{x^2 - 5x + 3} < \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$; $x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{3}} \leqslant 2$.

Иррационал тенгсизликларни ечишда иррационал тенгламаларни ечиш каби жуфт даражали илдиз арифметик илдиз сифатида, тоқ даражали илдиз эса барча сонлар ўқида кўриб чиқилади.

Аслида иррационал тенгсизликларни ечиш даражага кўтариш усули билан бажарилади. Даражага кўтаришда қуйидаги иккита қоидани билиш ва қўллаш керак:

1) агар тенгсизликнинг иккала томони ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар соҳасида номанфий бўлса, у ҳолда унинг ишорасини сақлаган ҳолда иккинчи даражага (ёки исталган жуфт даражага) кўтарамиз, шундай қилиб берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик оламиз.

Бошқача айтганда, $f_1(x) > f_2(x)$ тенгсизлик берилиб, x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар соҳасида $f_1(x) \geqslant 0$, $f_2(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $(f_1(x))^{2n} > (f_2(x))^{2n}$ тенгсизлик берилган тенгсизликка тенг кучли бўлади.

2) Агар тенгсизликнинг ишорасини сақлаган ҳолда тоқ даражага кўтарсак, у ҳолда берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизликлар оламиз. Агар $f_1(x) > f_2(x)$ бўлса, у ҳолда $(f_1(x))^{2n+1} > (f_2(x))^{2n+1}$ тенгсизликлар берилган тенгсизликка тенг кучли бўлади.

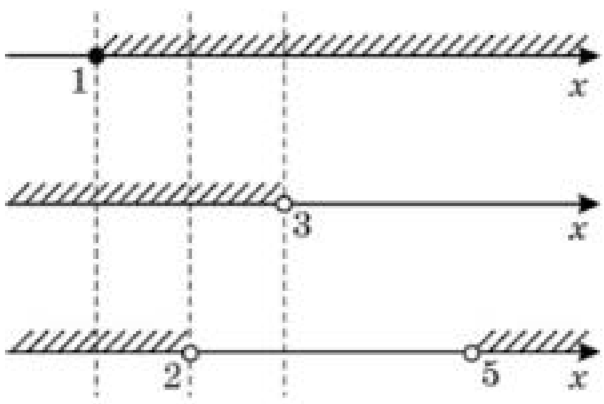
Ушбу иккита тасдиқни қўллаб, иррационал тенгсизликни ечишни рационал тенгсизликка ёки рационал тенгсизликлар системасини ечишга келтириш мумкин.

МИСОЛ

2. $\sqrt{x-1} < 3 - x$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $x - 1 \geqslant 0$ тенгсизлик билан аниқланади. Тенгсизликнинг чап томони арифметик илдиз бўлгани учун, берилган тенгсизлик $3 - x > 0$ бўлгандагина бажарилиши керак. Ушбу икки ҳолда тенгсизлик номанфий, шу сабабли унинг иккала томонини иккинчи даражага кўтарамиз. Кўрсатилган шартларга амал қилган ҳолда тенгсизликнинг иккала томонини квадратга оширсак, у ҳолда қуйидаги тенгсизликлар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - x > 0, \\ x - 1 < (3 - x)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < 3, \\ (x - 2)(x - 5) > 0. \end{cases}$$



42-расм

Тенгсизликлар системасининг ҳар бир тенгсизлигини координаталар тўғри чизиғида тасвирласак, тенгсизликлар системасининг ечими $1 \leqslant x < 2$ тенгсизликни қаноатлантиради. Берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами [1; 2) оралиқ (42-расм).

Жавоб: [1; 2).

МИСОЛ

3. $\sqrt{x-1} > 3 - x$ иррационал тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $x - 1 \geqslant 0$, яъни $x \geqslant 1$ шартни қаноатлантиради. Тенгсизликнинг ўнг томони $x = 3$ бўлганда нолга тенг ва $x > 3$ бўлганда манфий қийматга эга бўлади. Ушбу шартларни инобатга олиб, берилган тенгсизликни иккита системанинг тўпламига тенг кучли деб оламиз:

$$1)\ \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x - 1 > (3 - x)^2; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x-1} > 3 - x. \end{cases}$$

Биринчи системани ечамиз:

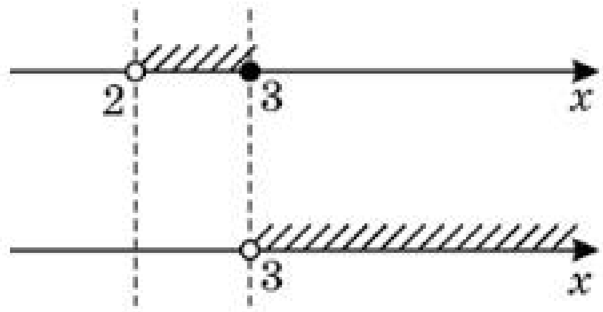
$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x - 1 > (3 - x)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ (x - 2)(x - 5) < 0. \end{cases}$$

Системанинг ечимлар тўплами (2; 3] кесма.

Иккинчи системани ечамиз: $\begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x - 1} > 3 - x. \end{cases}$

Системадаги иккинчи тенгсизликнинг ўнг томонидаги $(3 - x)$ ифоданинг қиймати манфий, чап томони $\sqrt{x - 1}$ мусбат бўлганлигидан, иккинчи системанинг ечимлар тўплами $(3; +\infty)$ интервал бўлади.

Биринчи ва иккинчи тенгсизликлар системасининг ечимлар тўпламини бирлаштирсак, берилган иррационал тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(2; +\infty)$ интервал бўлади (43-расм).



43-расм

Жавоб: $(2; +\infty)$.

Иррационал тенгсизликларни ечиш учун қўлланиладиган асосий муносабатлар:

1. $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

2. $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

3. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$

4. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$

5. $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < [g(x)]^{2n+1}.$

6. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > [g(x)]^{2n+1}.$

7. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < [g(x)]^{2n}. \end{cases}$

8. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > [g(x)]^{2n}. \end{cases} \end{array} \right.$

9. $\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}}{g(x)} > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) > 0, \\ \sqrt[n]{f(x)} > a \cdot g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ \sqrt[n]{f(x)} < a \cdot g(x). \end{cases} \end{array} \right.$

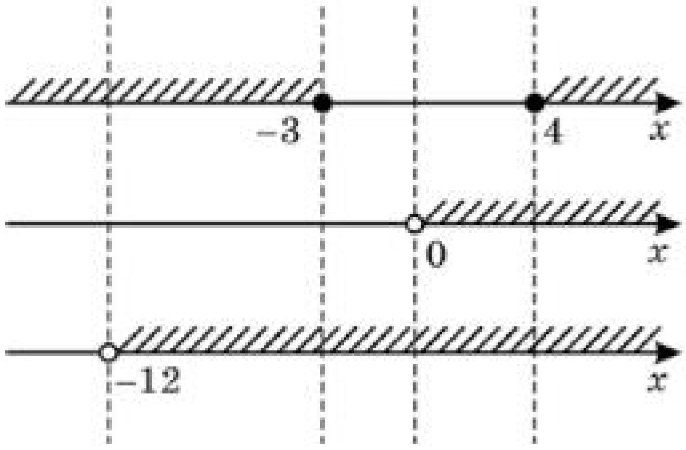
Ушбу кўрсатилган муносабатлардан фойдаланиб иррационал тенгсизликларни ечишга мисоллар кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

4. $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. (7) муносабатдан фойдаланиб,

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)(x+3) \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x > -12 \end{cases}$$



44-расм

Тенгсизликлар системасини оламиз. Тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами 44-расмда кўрсатилган.

Жавоб: $[4; +\infty)$.

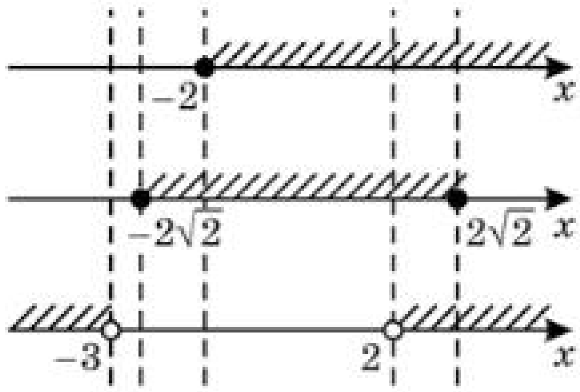
МИСОЛ

5. $\sqrt{x+2} > \sqrt{8 - x^2}$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. (2) муносабатни қўлласак,

$$\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ 8 - x^2 \geqslant 0, \\ x + 2 > 8 - x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2 - 8 \leqslant 0, \\ x^2 + x - 6 > 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ \left(x - 2\sqrt{2}\right)\left(x + 2\sqrt{2}\right) \leqslant 0, \\ (x-2)(x+3) > 0 \end{cases}$$



45-расм

Тенгсизликлар системаси ҳосил бўлади. Тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами 45-расмда кўрсатилган.

Жавоб: $(2; 2\sqrt{2}]$.

МИСОЛ

6. $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. (8) формуладан фойдалансак, у ҳолда берилган тенгсизлик иккита тенгсизликлар системасига келтирилади:

$$\begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geqslant 0, \\ 8 - 2x < 0 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} 8 - 2x \geqslant 0, \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2. \end{cases}$$

Ҳар бир тенгсизликлар системасини алоҳида ечамиз.

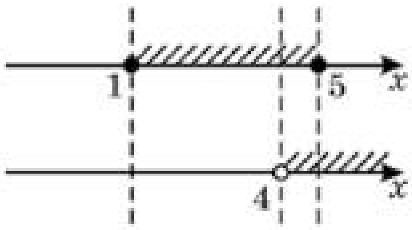
1) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geqslant 0, \\ 8 - 2x < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \leqslant 0, \\ 2(4 - x) < 0, \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-5) \leqslant 0, \\ 4 - x < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 5, \\ x > 4. \end{cases}$

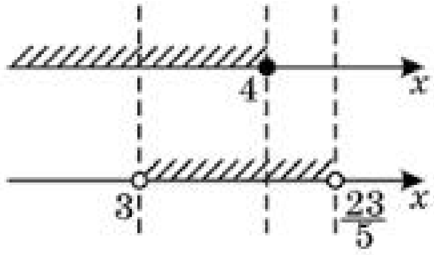
Тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами (4; 5] оралиқ бўлади (46-расм).

$$2)\ \begin{cases} 8 - 2x \geqslant 0, \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - x \geqslant 0, \\ 5x^2 - 38x + 69 < 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 4, \\ 5(x-3)\left(x - \dfrac{23}{5}\right) < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 4, \\ 3 < x < \dfrac{23}{5}. \end{cases}$$



46-расм



47-расм

Тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами (3; 4] оралиқ бўлади (47-расм). Энди тенгсизликлар системаларининг чиққан ечимларини бирлаштирсак, қўрилаётган иррационал тенгсизликнинг ечимлар тўплами (3; 5] оралиқни беради.

Жавоб: (3; 5].

МИСОЛ

7. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 7 - x^2 - 2x$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. **Биринчи усул.** (8) формулани қўлласак, у ҳолда тўртинчи даражали тенгсизликка эга бўламиз. Шу сабабли берилган тенгсизликни $\sqrt{5(x^2 + 2x) + 1} > 7 - (x^2 + 2x)$ кўринишда ёзиб, $y = x^2 + 2x$ белгилаш киритамиз. Натижада охирги тенгсизлик $\sqrt{5y + 1} > 7 - y$ кўринишга келади.

Энди (8)-формуладан фойдаланиб, охирги тенгсизликдан иккита тенгсизликлар системасини оламиз:

$$1)\ \begin{cases} 5y + 1 \geqslant 0, \\ 7 - y < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y \geqslant -1, \\ y > 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geqslant -\dfrac{1}{5}, \\ y > 7. \end{cases}$$

Бундан $y > 7$ чиқади. Бинобарин, биринчи тенгсизликлар системасининг ечими $(7; +\infty)$ интервал бўлади.

$$2)\ \begin{cases} 7 - y \geqslant 0, \\ 5y + 1 > (7 - y)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leqslant 7, \\ y^2 - 19y + 48 < 0, \end{cases} \Rightarrow$$

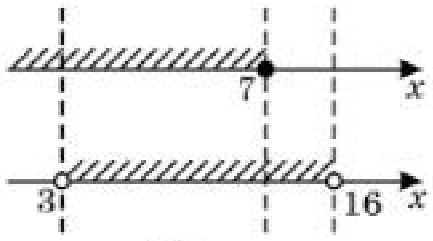
$$\Rightarrow \begin{cases} y \leqslant 7, \\ (y - 3)(y - 16) < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leqslant 7, \\ 3 < y < 16. \end{cases}$$

Иккинчи тенгсизликлар системасининг ечимлар тўплами (3; 7] оралиқ бўлади (48-расм).

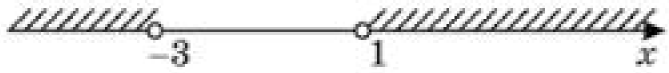
Иккита тенгсизликлар системасининг ечимларини бирлаштирсак, $y > 3$ келиб чиқади.

y нинг ўрнига $x^2 + 2x$ ифодани қўйсак, $x^2 + 2x > 3$ ни ҳосил қиламиз.

Охирги тенгсизликни ечамиз: $x^2 + 2x - 3 > 0$ ёки $(x - 1)(x + 3) > 0$. Тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ (49-расм).



48-расм



49-расм

Иккинчи усул. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 7 - 2x - x^2$ тенгсизликнинг иккала томонини 5 сонига кўпайтирсак, берилган тенгсизликка тенг кучли $5\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 35 - 10x - 5x^2$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Ҳосил бўлган тенгсизликни $5\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 36 - (5x^2 + 10x + 1)$ кўринишга келтирамиз. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = a$ $(a \geqslant 0)$ янги ўзгарувчи киритиб, охирги тенгсизликдан $5a > 36 - a^2$ ёки $a^2 + 5a - 36 > 0$ тенгсизликни оламиз. Охирги тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty; -9) \cup (4; +\infty)$ бўлади.

$a \geqslant 0$ эканлигидан $(4; +\infty)$ оралиқни кўриб чиқамиз.

$a > 4$, демак, $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} > 4$. Ушбу тенгсизликнинг иккала томонини иккинчи даражага кўтарамиз: $5x^2 + 10x + 1 > 16$ ёки $5x^2 + 10x - 15 > 0$. Охирги тенгсизликнинг иккала томонини 5 га бўлиб, $x^2 + 2x - 3 > 0$ тенгсизликни оламиз. Ҳосил бўлган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Жавоб: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

МИСОЛ

8. $\dfrac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, бунда $x > 0$, $y > 0$ тенгсизликни исботлайлик.

Исботи. Исботлашнинг иккита усулини кўриб чиқамиз.

Биринчи усул. $x + y$ йиғиндини шакл алмаштирамиз:

$$x + y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}.$$

У ҳолда $\dfrac{x + y}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \sqrt{xy}$.

Демак, охирги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи номанфий, иккинчи қўшилувчи эса берилган тенгсизликнинг ўнг томонини ташкил этади.

Бундан $\dfrac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, тенглик $x = y$ бўлганда бажарилади.

Иккинчи усул. $\dfrac{x + y}{2} - \sqrt{xy}$ айирмани шакл алмаштирамиз ва унинг ишорасини аниқлаймиз: $\dfrac{x + y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{x + y - 2\sqrt{xy}}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2}{2}$.

$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geqslant 0$ тенгсизлик x ва y нинг исталган номанфий қийматида тўғри.

Демак, $\dfrac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

$\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$ тенгсизликни қуйидагича тушунтириш мумкин: *иккита номанфий соннинг ўрта арифметиги уларнинг ўрта геометригидан кичик эмас*. Бу тенгсизлик **Коши тенгсизлиги** деб аталади.

Коши тенгсизлигидан $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ тенгсизлик келиб чиқади.

Ҳақиқатан, $\dfrac{x+\frac{1}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}}$ ёки $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Эслатма. Исталган номанфий сонларнинг ўрта арифметиги уларнинг ўрта геометригидан кичик бўлмайди, яъни $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ сонлар номанфий сонлар бўлса, у ҳолда

$\dfrac{x_1 + x_3 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$ ва тенглик $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ ҳолдагина бажарилади.

МИСОЛ

9. $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1, n > 1$ тенгсизликни исботлаймиз.

Исботи. Исталган $\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$\dfrac{1}{\sqrt{m}} = \dfrac{2}{2\sqrt{m}} = \dfrac{2}{\sqrt{m}+\sqrt{m}} < \dfrac{2}{\sqrt{m}+\sqrt{m-1}}$, яъни $\dfrac{1}{\sqrt{m}} < \dfrac{2}{\sqrt{m}+\sqrt{m-1}}$.

У ҳолда ушбу ҳоллар тўғри:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{2}{\sqrt{2}+1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} < \frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{3}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

Ушбу тенгсизликларни ҳадлаб қўшсак,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right).$$

Қавс ичидаги ҳар бир касрнинг сурати ва махражини махражининг ўзаро қўшма ифодасига кўпайтириб, иррационалликдан қутқарсак, охирги тенгсизлик қуйидагича ёзилади:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \ldots + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-(n-1)}\right)$$

ёки

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right),$$

ёки

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(-1+\sqrt{n})$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Агар охирги тенгсизликнинг иккала томонига бир хил сонни қўшсак, у ҳолда

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(-1+\sqrt{n})+1$$

ёки

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

1. Нима учун иррационал тенгсизликнинг иккала томонини ҳам номанфий деб олиш керак?
2. Иррационал тенгсизликларни ечишда қўлланиладиган иккита мулоҳазанинг параграфнинг бошида берилган мулоҳазадан қандай фарқи бор?
3. Иррационал тенгсизликларни ечишда қўлланиладиган мулоҳазалар функциянинг қандай хоссаларига асосланган?

Машқлар

А

Тенгсизликни ечинг (**15.1—15.3**):

15.1. 1) $\sqrt{x}\geqslant 2$; 2) $\sqrt{x}<5$; 3) $\sqrt[3]{x}>3$; 4) $\sqrt[3]{x}\leqslant 2$.

15.2. 1) $\sqrt{x+1}>2$; 2) $\sqrt{1-x}\leqslant 4$; 3) $\sqrt{3x+1}\geqslant 1$; 4) $\sqrt{2x-1}<3$.

15.3. 1) $\sqrt[3]{3x-8}<-2$; 2) $\sqrt[3]{x+2}\leqslant -5$;
3) $\sqrt{2x+1}>8$; 4) $(x-12)\sqrt{x-3}\leqslant 0$.

В

Тенгсизликни ечинг (**15.4—15.6**):

15.4. 1) $\sqrt{x^2+x-2}<2$; 2) $\sqrt{x^2+x+1}<1$;
3) $\sqrt{x^2+3x}>4$; 4) $\sqrt{x^2-5x}>3$.

15.5. 1) $\sqrt{2x-1}>x-2$; 2) $\sqrt{2x+1}<x-1$;
3) $x+2<\sqrt{x+14}$; 4) $x-3<\sqrt{x+27}$.

15.6. 1) $\sqrt{x-6} \cdot \sqrt{x-12} < x - 1$; 2) $\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} < 0$;

3) $\sqrt{x^2 - x - 2} < x$; 4) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$.

C

Тенгсизликни ечинг **(15.7-15.8):**

15.7. 1) $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x+4} > 0$.

15.8. 1) $\sqrt{5x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$;

2) $\sqrt{x^2 - 8x + 15} > \sqrt{4x^2 - 18x + 18} - \sqrt{x^2 + 2x - 15}$.

15.9. 1) Берилган мусбат сонни кўпайтмаси энг катта бўладиган қилиб иккита мусбат қўшилувчиларга ажратинг (*Кўрсатма.* Коши теоремасидан фойдаланинг).

2) a, b ва c номанфий сонлар бўлса, у ҳолда $(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$ бўлишини исботланг;

3) x, y, a ва b номанфий сонлар бўлса, у ҳолда $\frac{x+y+a+b}{4} \geqslant$ $\geqslant \sqrt[4]{xyab}$ бўлишини исботланг.

15.10. $\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2}$ $(x > 0,\ y > 0)$ тенгсизликни исботланг.

***15.11.** $\sqrt{x^2 - 9x + 20} \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2 - 13}$ қўш тенгсизликни ечинг.

***15.12.** $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} > 4 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг.

ТАКРОРЛАШ

15.13. Тенгламани ечинг:

1) $\mathrm{arctg}\,4x = \frac{3\neq}{4}$; 2) $\arcsin\left(4 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{\neq}{6}$;

3) $\arcsin\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{\neq}{4}$; 4) $\arccos(2 - 3x) = \pi$.

15.14. Ҳисобланг:

1) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\,\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\,\mathrm{arctg}(-1)$;

2) $3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\,\mathrm{arcctg}(-1) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\,\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})$;

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) - \arcsin(-1) - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{3}$.

15.15. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = \text{arctg}2x + x^3$; 2) $f(x) = \arccos 4x - x^{-4} + 2$.

15.16. Функция графигини ясанг ва график ёрдамида функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x) = 2x + x^2$; 2) $f(x) = 1 - \sqrt{4+x}$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $y = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 6x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

A) $(-\infty; 0] \cup [2; 3]$; B) $[0; 2) \cup (3; +\infty)$;
C) $[0; 2] \cup [3; +\infty)$; D) $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$.

2. $\sqrt{6x - x^2} + \frac{1}{x-5}$ ифодадаги ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топинг:

A) $[0; 6]$; B) $[0; 5) \cup (5; 6]$;
C) $(-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$; D) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

3. $\sqrt{x^2 + 5} = x + 2$ тенгламани ечинг:

A) 2; B) ± 2; C) -2; D) $\varnothing$.

4. $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{4x}$ тенгламанинг энг катта илдизини топинг:

A) -5; B) 5; C) -1; D) 1.

5. $\sqrt{\frac{x}{x-2}} + 6\sqrt{\frac{x-2}{x}} = 5$ тенгламани ечинг:

A) 2; 3; B) 1; 6; C) $\frac{9}{4}$; $\frac{8}{3}$; D) $\frac{4}{9}$; $\frac{3}{8}$.

6. $\sqrt{4 - 3x} < 2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи энг катта бутун сонни топинг:

A) бундай бутун сон мавжуд эмас; B) 1;
C) -1; D) 0.

7. $\begin{cases} \sqrt{x + y} = 4, \\ x^2 - y + 5x = 0 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечинг:

A) (2; 14), (8; -24); B) (-2; 18), (8; -24);
C) (2; 14), (-8; 24); D) (2; -18), (-8;24).

8. $\sqrt{x - 3} \leqslant 4$ тенгсизликни қаноатлантирувчи энг кичик натурал сонни топинг:

A) 3; B) 5; C) 19; D) 18.

9. $(x - 5)\sqrt{9 - x^2} = 0$ тенгламани ечинг:

A) ± 3; 5; B) ± 3; C) 3; 5; D) ± 3; -5.

10. $\begin{cases}\sqrt{x-1} < 2,\\ 10 - x \leqslant 8\end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг:

A) (1; 5); B) (1; 2]; C) [2; 5); D) [2; 5].

Математик саводхонлик бўйича тест топшириқлари

11. Сотувчининг бир кунлик маоши 8000 тг. Сотувчи адашиб 5000 тг турадиган бир жуфт пойафзал сотаётганда 10% нинг ўрнига 20% чегирма қилди. Сотувчининг ўша кунги маошини топинг:

A) 7800 тг; B) 7920 тг; C) 7850 тг; D) 7900 тг; E) 7950 тг.

12. Кинотеатр соат 10.00 дан 22.00 гача ишлайди ва сеанслар ҳар икки соатдан кейин бошланади. Кинотеатрга келувчилар сонининг ўзгариши $N(t) = 24t - t^2$ тенглама билан берилган. t — киносеанснинг бошланиш вақти, $N(t)$ — томошабинлар сони. Кинотеатрга келган энг кўп томошабинлар сонини ва бир кунда келган томошабинлар сонини топинг:

A) 144 ва 740; B) 146 ва 780; C) 140 ва 720;
D) 144 ва 720; E) 140 ва 740.

13. Асал сузиш билан шуғулланади. Биринчи машғулотда у 15 мин сузди. Ҳар келаси машғулотда сузиш вақтини 5 мин га орттириб борди. Асалнинг 1 соатдаги машғулотлари сонини топинг:

A) 20 та машғулот; B) 8 та машғулот; C) 6 та машғулот;
D) 10 та машғулот; E) 12 та машғулот.

14. Даврон велосипедда уйидан соҳилгача бўлган 6 км масофани 12 минутда босиб ўтди. Уйга у қисқа йўл билан юриб, 3 км ни 8 мин да босиб ўтди. Давроннинг соҳилгача ва қайтиб келган вақтдаги ўртача тезлигини топинг:

A) 25 км/соат; B) 27 км/соат; C) 24 км/соат;
D) 24,5 км/соат; E) 28 км/соат.

15. Функция графигига $(x; y)$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти $f'(x) = 6x - 4$ формула билан топилади. $f(x)$ функциянинг графиги $M(1; 2)$ нуқта орқали ўтади. $f(x)$ функцияни топинг:

A) $f(x) = 3x^2 - 4x$; B) $f(x) = x^2 - 4x$; C) $f(x) = 3x^2 + 4x$;
D) $f(x) = 3x^2 - 4x + 3$; E) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Натурал сонлар тўплами, бутун сонлар тўплами, ҳақиқий сонлар тўплами, соннинг модули, координаталар текислиги, нуқтанинг координаталари.

V БОБ КОМПЛЕКС СОНЛАР

16-§. МАВҲУМ СОНЛАР. КОМПЛЕКС СОННИНГ ТАЪРИФИ

Сиз комплекс сон ва унинг модулининг таърифини ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Комплекс сон, мавҳум сон, соннинг модули, комплекс текислик, ўзаро қўшма комплекс сонлар, комплекс соннинг алгебраик шакли

СИЗ БИЛАСИЗ:

Натурал сонлар, бутун сонлар, рационал сонлар, ҳақиқий сонлар таърифларини ва улар устида амаллар бажаришни биласиз.

Ҳақиқий сонлар тўпламида квадрат тенгламанинг $D \geqslant 0$ бўлганда иккита илдизи мавжуд бўлади, $D = 0$ бўлганда битта илдизи мавжуд, $D < 0$ бўлганда илдизи мавжуд бўлмайди.

Сонлар тўпламининг ушбу тури *комплекс сонлар тўпламини* кўриб чиқамиз.

$z = x + iy$ кўринишдаги сонлар ***комплекс сонлар*** *дейилади. Бунда x, y — ҳақиқий сонлар, i сони $i^2 = -1$ муносабатни қаноатлантирувчи мавҳум сон.*

x — z комплекс соннинг ҳақиқий қисми ва $x = \mathrm{Re}z$ каби белгиланади. y — z комплекс сонинг мавҳум қисми ва $y = \mathrm{Im}z$ каби белгиланади.

Комплекс сонлар *комплекс сонлар тўпламини ташкил этади.*

Комплекс сонлар тўпламининг белгиланиши: C.

$z = x + iy$ кўринишда ёзилган комплекс сон ифодаси ***комплекс соннинг алгебраик шакли*** *деб аталади.*

МИСОЛ

1. $z = 4 + 7i$ — комплекс сон, $x = \mathrm{Re}z = 4$ — комплекс соннинг ҳақиқий қисми, $y = \mathrm{Im}z = 7$ — комплекс соннинг мавҳум қисми.

Жадвални тўлдиринг:

24-жадвал

Комплекс сон	Ҳақиқий қисми	Мавҳум қисми
$z = -2 + 9i$		

Давоми

$z = 15 - 13i$		
$z = -6 - 10i$		
$z = -25i$		
$z = 20$		

Жадвалдан $z = -25i$ соннинг ҳақиқий қисми $x = \text{Re}z = 0$, мавҳум қисми $y = \text{Im}z = -25$ эканлигини кўрамиз.

Агар комплекс соннинг ҳақиқий қисми нолга тенг бўлса, яъни $x = \text{Re}\,z = 0$, *у ҳолда комплекс сон* ***мавҳум сон*** *дейилади.*

МИСОЛ

2. $z = -25i$ мавҳум сон ҳисобланади.

24-жадвални тўлдириш давомида $z = 20$ комплекс сон учун ҳақиқий қисми $x = \text{Re}z = 20$, мавҳум қисми $y = \text{Im}z = 0$ деб ёзилди. У ҳолда 20 сони — ҳақиқий сон.

Демак, исталган ҳақиқий сонни $z = x + 0i$ комплекс сон кўринишида ёзиш мумкин.

Шундай қилиб, комплекс сонлар тўплами ҳақиқий сонлар тўпламини кенгайтириш ҳисобланади. Яъни, $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

МИСОЛ

3. $z = -7 + 0i$, $z = -7 - 0i$ комплекс сонлари -7 ҳақиқий сонни беради.

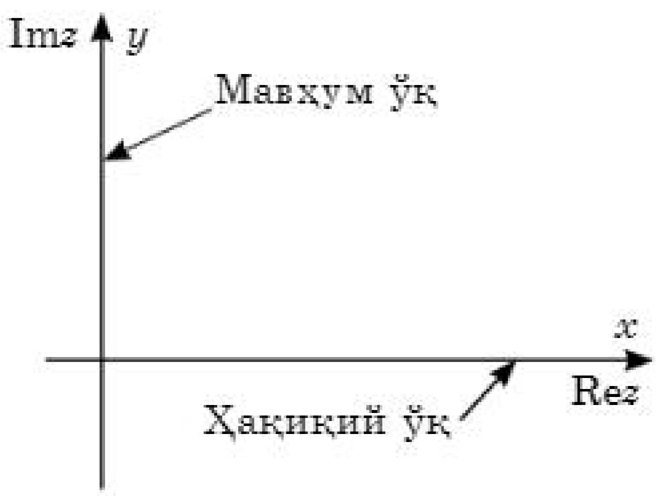
Комплекс сонни комплекс текисликда тасвирлашни ўрганасиз.

Комплекс сонларни комплекс текисликда белгилаш мумкин. Бунинг учун комплекс соннинг ҳақиқий қисмини горизонтал ўқда, мавҳум қисмини вертикал ўқда белгилаймиз (50-расм).

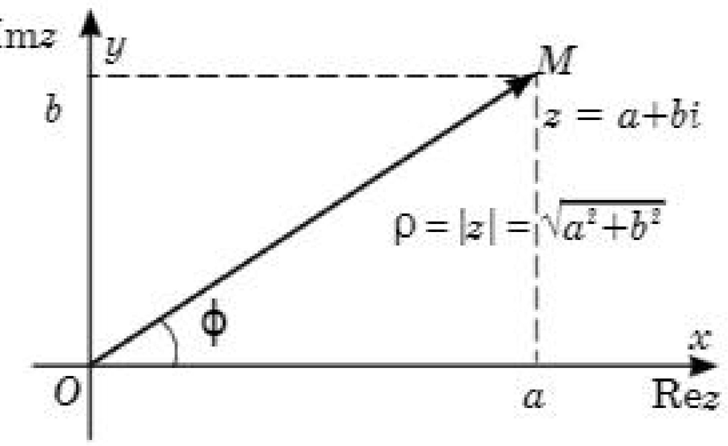
Текисликдаги ҳар бир $M(x; y)$ нуқтага $z = x + iy$ комплекс сон тўғри келади. Комплекс сонлар тўплами билан текислик нуқталари орасида ўзаро мослик ўрнатилади.

Векторларнинг белгиланиши: r ёки $|z|$ ёки ρ (51-расм).

Берилган текислик *комплекс текислик* деб аталади.



50-расм

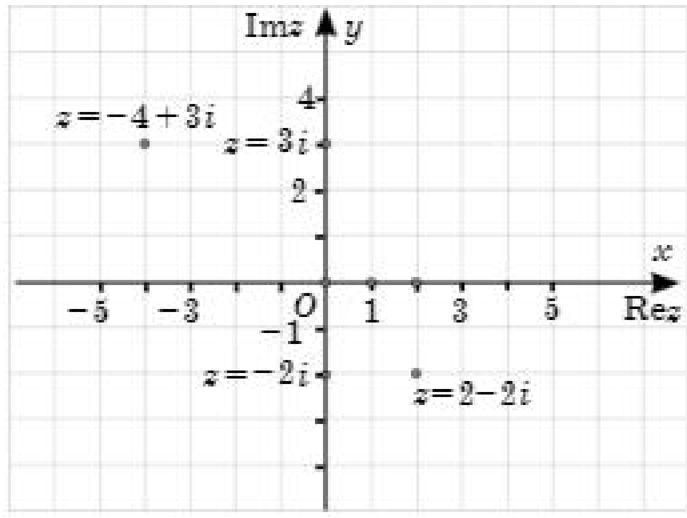


51-расм

мисол

4. Координаталар текислигида:

1) $z = -4 + 3i$; 2) $z = 2 - 2i$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -2i$ сонларни белгилаймиз (52-расм).



52-расм

Комплекс соннинг модули таърифи билан танишасиз.

***$z = x + iy$ комплекс соннинг модули** деб $z = \sqrt{x^2+y^2}$ кўринишдаги ифодага айтилади.*

мисол

5. 1) $z = -4 + 3i$; 2) $z = 9 - 2i$ сонларнинг модулини топамиз.

Ечиш.

1) $z = -4 + 3i$ комплекс соннинг ҳақиқий қисми $x = \text{Re}z = -4$, мавҳум қисми $y = \text{Im}z = 3$. У холда $|z| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$;

2) $z = 9 - 2i$ комплекс соннинг ҳақиқий қисми $x = \text{Re}z = 9$, мавҳум қисми $y = \text{Im}z = -2$. Демак, $|z| = \sqrt{9^2 + (-2)^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$.

Жавоб: 1) 5; 2) $\sqrt{85}$.

Ўзаро қўшма комплекс соннинг таърифи билан танишасиз.

*$z = x + iy$ ва $\bar{z} = x - iy$ кўринишдаги комплекс сонлар **ўзаро қўшма комплекс сонлар** дейилади.*

МИСОЛ **6. 1)** $z = 5 + 4i$ комплекс сонга ўзаро қўшма комплекс сон $\overline{z} = 5 - 4i$, $z = 5 - 4i$ комплекс сонга ўзаро қўшма комплекс сон $\overline{z} = 5 + 4i$ бўлади.

Қуйидаги жадвални тўлдиринг:

25-жадвал

Комплекс сон	Берилган комплекс сонга ўзаро қўшма комплекс сон
$z = -2 + 9i$	
	$z = 15 - 13i$
$z = -6 - 10i$	
	$z = -25i + 6i$
$z = 25 + 6i$	

1. Комплекс сон билан ҳақиқий соннинг фарқи нимада?
2. Комплекс соннинг модули нимани билдиради?
3. Комплекс текислик нима?
4. Комплекс текисликда иккита ўзаро қўшма z ва $\overline{z}$ сонлар қандай жойлашади?
5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ тенглик тўғрими?

Машқлар

A

16.1. Жадвални тўлдиринг:

26-жадвал

Комплекс сон	Ҳақиқий қисми (Rez)	Мавҳум қисми (Imz)
$z = -3 + 19i$		
$z = 12 - 7i$		
$z = -5 - 1{,}6i$		
$z = -23i$		
$z = 40$		

16.2. Жадвални тўлдиринг:

27-жадвал

Комплекс сон	Ҳақиқий қисми (Rez)	Мавҳум қисми (Imz)
$z = -1{,}2 + 0{,}9i$		
$z =$	13	14
$z = x - 10i$	8	
$z =$	0	-2
$z =$	13	0

16.3. Жадвални тўлдиринг:

28-жадвал

Комплекс сон	Ҳақиқий қисми (Rez)	Мавҳум қисми (Imz)
$z = -2\sqrt{3} + i(\sqrt{2} + 3)$		
$z = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\,i$		
$z = x - 21i$	$1 - 3\sqrt{3}$	
$z =$	0	$2 - 5\sqrt{3}$
$z =$	$\pi + 1$	$\sqrt{2} - 1$

16.4. Комплекс соннинг модулини топинг:

1) $2 + 3i$; 2) $-2 + 4i$; 3) $-2{,}5 + 1{,}5i$; 4) $2 + i\sqrt{3}$.

16.5. Жадвални тўлдиринг:

29-жадвал

Комплекс сон (z)	Ўзаро қўшма сон ($\bar{z}$)
$z = \sqrt{3} - \sqrt{2}\,i$	
$z = -\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\,i$	
$z = -4 - \sqrt{2}\,i$	
$z = -4\sqrt{2}\,i$	
$z = -5\sqrt{2}$	

B

16.6. Жадвални тўлдиринг:

30-жадвал

Комплекс сон (z)	Ўзаро қўшма сон ($\bar{z}$)
$z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}\,i$	
$z = 3 + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\,i$	
$z = -4 - (1 - \sqrt{2})i$	
$z = -2\sqrt{3} - i(\sqrt{2} + 3)$	
$z = (1 - 4\sqrt{2})i$	
$z = -5\sqrt{2} + 2$	

16.7. Комплекс сонга ўзаро қўшма соннинг модулини топинг:

1) $z = 2 - 5i$; 2) $z = -4 - 2i$;

3) $z = -\sqrt{5} + i\sqrt{3}$; 4) $z = -2\sqrt{5} - i\sqrt{3}$;

16.8. Координаталар текислигида z ва $\bar{z}$ комплекс сонларга мос келувчи нуқталарни белгиланг:

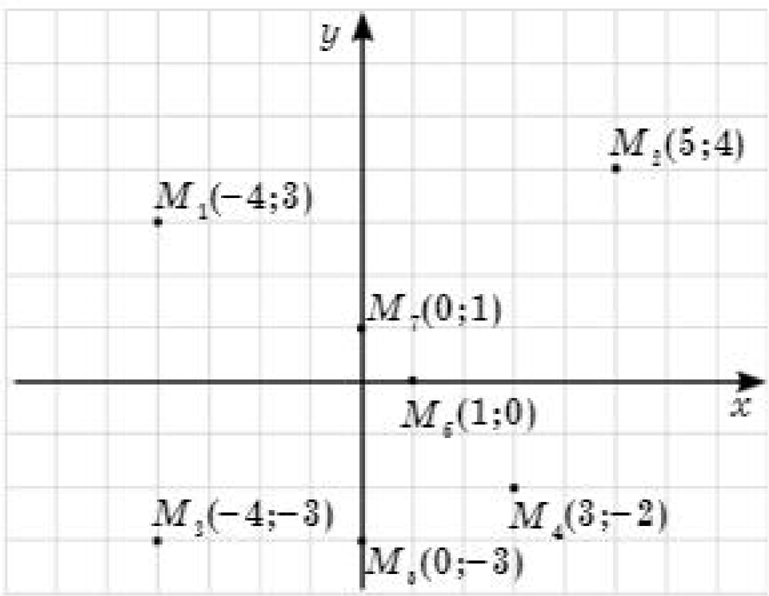
1) $z = -1 - 3i$; 2) $z = -3 - i$;

3) $z = -\sqrt{5} + i\sqrt{3}$; 4) $z = -2 - i\sqrt{8}$.

16.9. Координаталар текислигида $M(a;\ b)$ нуқтанинг координаталари берилган (53-расм).

1) Нуқтага мос келувчи комплекс сонни ёзинг ва унинг модулини топинг.

2) Агар $a = 2$, $b = -3$ бўлса, у ҳолда $M_8(a + 1;\ b - 1)$ ва $M_9(a - 3;\ b - 2)$ нуқталарга мос келувчи комплекс сонларни ёзинг.



53-расм

16.10. z сонига ўзаро қўшма $\bar{z}$ комплекс соннинг модулини топинг:

1) $z = 2 + \sqrt{2} - 3i$;
2) $z = -4 + \sqrt{5} - 2\sqrt{5}\,i$;
3) $z = -\frac{2}{3} + i\sqrt{3}$;
4) $z = -\sqrt{2} - \frac{3-\sqrt{2}}{2}i$.

C

16.11. x ва y нинг қандай ҳақиқий қийматларида берилган комплекс сонлар ўзаро қўшма бўлади:

1) $24 - yi$ ва $2x - 3\sqrt{5}i$;
2) $-8 + yi$ ва $\sqrt{2}x - 4i$.
3) $3 + \sqrt{2}yi$ ва $2x + (4 + \sqrt{2})i$;
4) $3 - \sqrt{3} - \sqrt{2}yi$ ва $3x + 4i$?

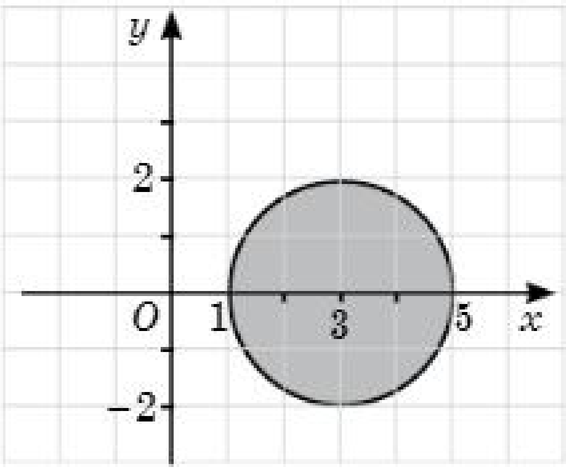
16.12. Комплекс соннинг модулини топинг:

1) $\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha$;
2) $1 + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$;
3) $\sin 4\alpha - (1 + \cos 4\alpha)i$;
4) $\sin 6\alpha - (1 - \cos 6\alpha)i$.

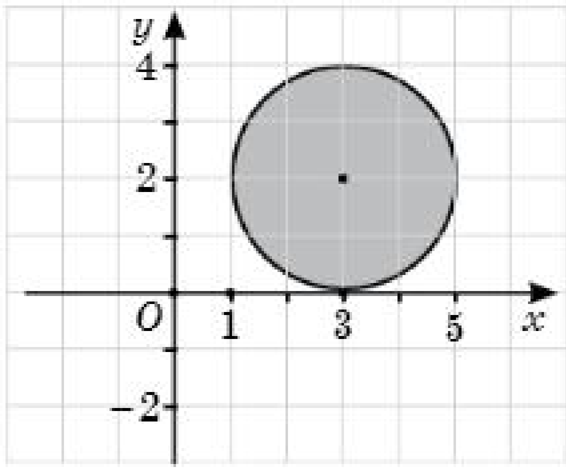
16.13. Комплекс текисликда нуқталар тўпламини тасвирланг:

1) $|z| < 2$;
2) $|z - 4i| < 3$;
3) $|z - 2 - i| \leqslant 2$;
4) $\mathrm{Re}z > -2$;
5) $\mathrm{Im}z < 1$;
6) $\mathrm{Im}z > -2$.

16.14. 54-расмда берилган доиранинг ички қисмини тенгсизлик орқали ёзинг:



1)



2)

54-расм

ТАКРОРЛАШ

16.15. $f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини ёзинг:

1) $f(x) = x^3 - 2x + 2$;
2) $f(x) = \sin(1 - x)$;
3) $f(x) = x + \cos(1 - 4x)$;
4) $f(x) = 2 - \frac{1}{\cos^2 3x}$.

16.16. Функциянинг графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $f(x) = 3 - x^2$ ва $f(x) = 1 + |x|$;
2) $f(x) = x^2$ ва $f(x) = 2 - |x|$.

16.17. $f'(x) \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг:

1) $f(x) = 2\cos 3x + 3x$;
2) $f(x) = -x^3 + 12x + 1$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Сон, комплекс сон, мавҳум сон, соннинг модули, комплекс тексислик, ўзаро қўшма комплекс сон, комплекс соннинг алгебраик шакли.

17-§. АЛГЕБРАИК ШАКЛДАГИ КОМПЛЕКС СОНЛАР УСТИДА АМАЛЛАР БАЖАРИШ

Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар орасидан тенг сонларни аниқлашни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Комплекс сон, даража, квадрат илдиз, алгебраик шакли, арифметик амаллар

Алгебраик шаклда ёзилган иккита комплекс сонни кўриб чиқамиз.

Иккита комплекс соннинг ҳақиқий қисмлари ва мавҳум қисмлари тенг, яъни $x_1 = x_2$ ва $y_1 = y_2$ бўлса, у ҳолда $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сонлар ўзаро тенг деб аталади.

$z_1 = -2 + 9i$; $z_2 = -2 - 9i$; $z_3 = 2 + 9i$; $z_4 = -9 + 2i$; $z_5 = -2 + 9i$; $z_6 = -2i + 9$; $z_7 = 9 - 2i$ сонлар орасидан ўзаро тенг комплекс сонларни кўрсатинг.

"Катта", "кичик" тушунчалари комплекс сонлар учун аниқланмаган.

МИСОЛ 1. x ва y нинг қандай қийматларида $z_1 = -4 + yi$ ва $z_2 = x - 2i$ комплекс сонлар тенг бўлишини топамиз.

Ечиш. Таърифга кўра иккита комплекс соннинг ҳақиқий қисмлари ва мавҳум қисмлари тенг бўлса, у ҳолда у сонлар тенг бўлади. Масаланинг шартига кўра $x = -4$ ва $y = -2$ қийматларда берилган комплекс сонлар ўзаро тенг бўлади.

Жавоб: $x = -4$, $y = -2$.

Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар устида арифметик амаллар бажаришни ўрганасиз.

Алгебраик шаклдаги комплекс сонлар устида арифметик амаллар бажаришни кўриб чиқамиз.

Алгебраик шаклдаги комплекс сонларни қўшиш, айириш, кўпайтириш кўпҳадларга қўлланиладиган қоидалар бўйича бажарилади.

I. *Комплекс сонларнинг йиғиндиси*

$z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ ***комплекс сонларнинг йиғиндиси*** *деб* $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ *сонга айтилади.*

МИСОЛ 2. $z = -4 + 5i$ ва $z = 3 - 2i$ сонларнинг йиғиндисини топамиз.

Ечиш. Мисолнинг шартига кўра $x_1 = -4$; $y_1 = 5$; $x_2 = 3$; $y_2 = -2$. У ҳолда

$$z = z_1 + z_2 = (-4 + 3) + i(5 - 2) = -1 + 3i.$$

Жавоб: $-1 + 3i$.

$z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ ***комплекс сонларнинг айирмаси*** *деб $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ комплекс сонга айтилади.*

$(-x - yi)$ комплекс сон $z = x + yi$ комплекс сонга ***қарама-қарши комплекс сон*** *деб аталади.*

z комплекс сонга қарама-қарши комплекс соннинг белгиланиши: $(-z)$. z ва $-z$ комплекс сонларнинг йиғиндиси нолга тенг: $z + (-z) = 0$.

Комплекс сонларни қўшиш хоссалари:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
3. $z + 0 = z$.

$z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ ***комплекс сонларнинг кўпайтмаси*** *деб $z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ комплекс сонга айтилади.*

Комплекс сонларни кўпайтириш хоссалари:

1. $z_1z_2 = z_2z_1$;
2. $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$;
3. $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.

$z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ ***комплекс сонларнинг бўлинмаси*** *деб*

$$z = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$ *комплекс сонга айтилади.*

Комплекс сонларнинг бўлинмаси яна комплекс сон бўлиб ифодаланади.

МИСОЛ 3. $z = -4 + 5i$ ва $z = 3 - 2i$ сонларнинг бўлинмасини топамиз.

Ечиш. Шартга кўра $x_1 = -4$; $y_1 = 5$; $x_2 = 3$; $y_2 = -2$.

У холда

$$z = \frac{-4 \cdot 3 + 5 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2} + \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2}i = \frac{-12 - 10}{9 + 4} + \frac{15 - 8}{9 + 4}i = -\frac{22}{13} + \frac{7}{13}i.$$

Жавоб: $-\frac{22}{13} + \frac{7}{13}i$.

Иккита комплекс соннинг бўлинмасини касрнинг сурат ва махражини махражга ўзаро қўшма сонга кўпайтириш орқали топиш мумкин. У холда 3-мисолни ечишнинг иккинчи усули:

$$\frac{-4 + 5i}{3 - 2i} = \frac{(-4 + 5i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{-12 - 8i + 15i - 10}{3^2 - (2i)^2} = \frac{-22 + 7i}{13} = -\frac{22}{13} + \frac{7}{13}i.$$

Комплекс соннинг алгебраик шаклини бутун даражага кўтарганда i^n қийматнинг қонуниятидан фойдаланишни ўрганасиз.

$i^2 = -1$ эканлиги маълум.
$n > 2$ бўлганда i^n даражанинг қийматини топамиз.

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i;$
$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1;$
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i;$
$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1;$
$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$ ва ҳоказо.

i^n алгебраик шаклдаги комплекс сонни бутун даражага кўтариш қонуни 31-жадвалда берилган:

31-*жадвал*

n	2	3	4	5	6	7	8	9
i^n	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i

Комплекс соннинг квадрат илдизини топишни ўрганасиз.

СИЗ БИЛАСИЗ:

Ҳақиқий сонлар тўпламида манфий сонларнинг квадрат илдизини топиш мумкин эмас.

Комплекс сонлар тўпламида $-1 = i^2$ эканлигидан, комплекс сонлар тўпламида манфий соннинг квадрат илдизини топиш мумкин.

МИСОЛ

4. 1) $\sqrt{-1} = \sqrt{i^2} = \pm i$, яъни $\sqrt{-1} = \pm i;$
2) $\sqrt{-16} = \pm 4i;$
3) $\sqrt{-81} = \pm 9i.$

Комплекс соннинг илдизини топиш формуласини келтириб чиқарамиз.

Фараз қилайлик, $\sqrt{a+bi} = x + yi$. Тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз.

У ҳолда $a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Бундан $\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$ (1)

Ушбу тенгсизликлар системасидан x ва y ни топамиз. Тенгликнинг иккала томонини ҳам квадратга кўтариб, қўшамиз.

$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$ ёки $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ келиб чиқади.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \quad (2)$$

тенгламалар системасини кўриб чиқамиз.

(2) системадаги тенгламаларни қўшамиз ва айирамиз:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \text{ ва } x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \text{ ва } y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

(1) системанинг иккинчи тенгламасидан, $b > 0$ бўлганда x ва y нинг ишоралари бир хил, $b < 0$ бўлганда x ва y нинг ишоралари ҳар хил бўлишини кўрамиз:

$b > 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$,

$b < 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$ ёки

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot\operatorname{sign}b\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \text{ бунда}$$

$$\operatorname{sign}b = \begin{cases} 1, \text{ агар } b > 0, \\ 0, \text{ агар } b = 0, \\ -1, \text{ агар } b < 0. \end{cases}$$

МИСОЛ

5. $\sqrt{3-4i}$ илдизнинг қийматини топамиз.

Ечиш. Мисолнинг шартига кўра $a = 3$, $b = -4$. Комплекс соннинг квадрат илдизини топиш формуласидан фойдаланамиз:

$$\sqrt{3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}+3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}-3}{2}}\right)$$

ёки $\sqrt{3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{25}+3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{25}-3}{2}}\right)$, ёки $\sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$.

Жавоб: $\pm(2 - i)$.

1. Комплекс сонларнинг алгебраик шакли устида қандай амаллар бажариш мумкин?
2. Иккита комплекс сонни бўлишни исботлаш учун қандай тушунчалар, формулалар, шакл алмаштиришлардан фойдаланилади?
3. $\sqrt{a+bi}$ комплекс соннинг илдизини топишда b нинг ишораси инобатга олинадими?

Машқлар

A

17.1. Амалларни бажаринг:

1) $2(2-3i)-3(3-i)$; 2) $4(1-3i)-(2-5i)$;
3) $(4{,}1-i)-(6{,}1-7i)$; 4) $3(2+3i)-4(2+5i)$;
5) $2(1-3i)-3(2-5i)$; 6) $2(2{,}2-i)-(6{,}4-7i)$.

17.2. Комплекс сонлар устида амаллар бажаринг:

1) $(1+3i)(3-i)$; 2) $(1-3i)(2+2i)$;
3) $(2-i)^2$; 4) $(2+3i)^2-5i$.

17.3. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\frac{3-i}{2+i}$; 2) $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$; 3) $\frac{2-3i}{1+2i}$;
4) $\frac{3-5i}{5-2i}$; 5) $\frac{3-2i}{-1-2i}$; 6) $\frac{-3-7i}{-3+2i}$.

B

17.4. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\frac{3+i}{2-i}+(5-2i)^2$; 2) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-(\sqrt{3}-2i)^2$; 3) $2+3i-\frac{2-3i}{1+2i}$;
4) $\frac{3-4i}{3-2i}-\frac{4-i}{2+3i}$; 5) $\frac{3-2i}{1-2i}+\frac{5-2i}{2-i}$; 6) $\frac{7-i}{5i}+\frac{3-7i}{2i-1}$.

17.5. Амалларни бажаринг:

1) $\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^2+(1-2i)^3$; 2) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}-(\sqrt{3}+2i)^3$;
3) $(2+3i)^4-\frac{2-3i}{1+i}$; 4) $\frac{3-i}{1-2i}-(1-2i)^4$.

17.6. Квадрат илдизни ҳисобланг:

1) $\sqrt{-7-24i}$; 2) $\sqrt{24+70i}$; 3) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$;
4) $\sqrt{2-i\sqrt{2}}$; 5) $\sqrt{16i}$; 6) $\sqrt{-24i}$.

C

17.7. Ифодани соддалаштиринг ва ҳосил бўлган комплекс соннинг модулини топинг:

1) $\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^3+(2i)^5$; 2) $\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^5-(2+i)^3$;

3) $(2+i)^4-\left(\frac{2-3i}{1+i}\right)^2$; 4) $\left(\frac{3+i}{1-2i}\right)^3-(1-2i)^4$.

17.8. Тенглик бажариладиган x ва y нинг ҳақиқий қийматларини топинг:

1) $(x+3i)(2-i)=3x+3yi$; 2) $(1-yi)(5+2i)=3x-2yi$;

3) $(3+i)x+y(2-i)^2=3-2i$; 4) $(2+3i)^2-5yi=5x-3xyi$.

17.9. Комплекс сонлар устида амаллар бажаринг:

1) $(2+i)^4+(2-i)^4-i^{18}+\frac{3-i}{2+i}$;

2) $(1-i)^4-(2+i)^3-2(3+32i)-(2i)^7$;

3) $(3+i)^3+(2-i)^2-(2i)^6$;

4) $3(1-5i)+(2+i)^4-5i^{15}$.

ТАКРОРЛАШ

17.10. $y=\cos 2x$, $y=0$, $x=-\frac{\neq}{3}$, $x=\frac{\neq}{3}$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

17.11. Интеграл белгиси остидаги функцияни шакл алмаштириб, интегралнинг қийматини топинг:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2 x)dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos 3x dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}10\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)dx$.

17.12. Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб, аниқмас интегрални топинг:

1) $\int(2x-3)\cos 2x dx$; 2) $\int(x^2+2x)\sin x dx$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Квадрат тенглама, комплекс сон, даража, квадрат илдиз, алгебраик шакли, арифметик амаллар.

18-§. КВАДРАТ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ КОМПЛЕКС ИЛДИЗЛАРИ. АЛГЕБРАНИНГ АСОСИЙ ТЕОРЕМАСИ

Сиз комплекс сонлар тўпламида квадрат тенгламаларни ечишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Комплекс сон, комплекс сонлар тўплами, алгебранинг асосий теоремаси, квадрат тенглама

СИЗ БИЛАСИЗ:

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ квадрат тенгламанинг:
— $D > 0$ бўлганда ҳар хил илдизлари мавжуд бўлади;
— $D = 0$ бўлганда ўзаро тенг иккита ҳақиқий илдизлари мавжуд бўлади;
— $D < 0$ бўлганда ҳақиқий илдизлари мавжуд бўлмайди.

$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ квадрат тенгламанинг $D < 0$ бўлганда комплекс сонлар тўпламида иккита илдизи мавжуд бўлади.

СИЗ БИЛАСИЗ:

Комплекс сонлар тўпламида манфий соннинг квадрат илдизини топиш мумкин. Чунки комплекс сонлар тўпламида $-1 = i^2$.

МИСОЛ

1. $5x^2 - 8x + 5 = 0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш: $D = (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 64 - 100 = -36$.

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{36 \cdot i^2}}{10} = \frac{8 \pm 6i}{10} = \frac{4 \pm 3i}{5}.$$

Жавоб: $\frac{4 \pm 3i}{5}$.

$D < 0$ бўлганда $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ тенгламанинг илдизлари

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{(-b)^2 + 4ac}}{2a}$$ формула ёрдамида топилади.

Алгебранинг асосий теоремаси ва унинг натижалари билан танишасиз.

Алгебранинг асосий теоремаси. *Комплекс сонлар тўпламида константага тенг бўлмаган кўпҳаднинг камида битта комплекс илдизи мавжуд бўлади.*

1-*натижа.* Константага тенг бўлмаган кўпҳадни комплекс сонлар тўпламида чизиқли кўпайтувчиларга ажратиш мумкин.

2-*натижа.* Агар комплекс (ҳақиқий эмас) сон ҳақиқий коэффициентлари бўлган кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда унга ўзаро қўшма сон шунча каррали илдизи бўлиб ҳисобланади.

1-мисолда тенгламанинг илдизлари $\frac{4}{5}+\frac{3i}{5}$ ва $\frac{4}{5}-\frac{3i}{5}$ комплекс сонлар бўлади. Уларнинг ўзаро қўшма сонлар эканлигини кўриш мумкин.

МИСОЛ **2.** Илдизларидан бири $-4 + 5i$ комплекс сон бўлган тенгламани тузамиз.

Ечиш. Агар тенгламанинг илдизларидан бири $-4 + 5i$ комплекс сон бўлса, у ҳолда унинг иккинчи илдизи унга ўзаро қўшма комплекс сон $-4 - 5i$ бўлади.

Квадрат тенглама тузиш учун $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, бунда x_1 ва x_2 — илдизлари, формуладан фойдаланамиз.

У ҳолда $(x-(-4+5i))(x-(-4-5i)) = x^2-(-4-5i)x-(-4+5i)x+(-4+5i)(-4-5i) =$ $= x^2 + 4x + 5ix + 4x - 5ix + 16 - 25i^2 = x^2 + 8x + 16 + 25 = x^2 + 8x + 41 = 0.$

Жавоб: $x^2 + 8x + 41 = 0$.

1. Қандай тўпламда исталган соннинг квадрат илдизини топиш мумкин?
2. Квадрат тенгламанинг илдизлари ҳамма вақт ўзаро қўшма бўладими?
3. Қандай нуқталар тўплами комплекс текисликда $|z| < 2$ тенгсизликни қаноатлантиради?

Машқлар

А

18.1. Квадрат тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $x^2 + 81 = 0$; 3) $x^2 + 11 = 0$;
4) $x^2 - 5x + 14 = 0$; 5) $x^2 + 4x + 9 = 0$; 6) $x^2 + 2x + 18 = 0$;
7) $2x^2 + x + 11 = 0$; 8) $3x^2 - 6x + 14 = 0$.

18.2. Илдизларидан бири берилган сон бўлган ҳақиқий коэффициентли квадрат тенглама тузинг:

1) $3i$; 2) $2 - 3i$; 3) $-3 + 2i$; 4) $5 - 7i$.

18.3. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x^2 + 2x + 10$; 2) $x^2 - 4x + 5$;
3) $x^2 - 4x + 16$; 4) $2x^2 - 6x + 9$.

В

18.4. Квадрат тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $9x^2 + 14 = 0$; 2) $4x^2 + 31 = 0$;
3) $2x^2 + 11 = 0$; 4) $3x^2 + 13\sqrt{2} = 0$;
5) $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 11 = 0$; 6) $3x^2 - \sqrt{5}x + 14 = 0$.

18.5. Илдизларидан бири берилган комплекс сон бўлган ҳақиқий коэффициентли квадрат тенглама тузинг:

1) $\sqrt{15}i$; 2) $\sqrt{3} - 2i$; 3) $-3\sqrt{5} + 2i$; 4) $2 - 3\sqrt{2}i$.

18.6. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $x^4 + 2x^2 - 8$; 2) $x^4 - 4x^2 - 5$;
3) $x^4 - 4x^2 + 12$; 4) $x^4 - 6x^2 + 8$.

18.7. Тенгламанинг илдизларини топинг:

1) $x^2 - 4i = 0$; 2) $x^2 - 9i = 0$; 3) $x^2 + 7i = 0$;
4) $x^2 + 13i = 0$; 5) $z^4 - 16 = 0$; 6) $z^6 - 1 = 0$.

C

18.8. Квадрат тенгламани ечинг:

1) $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$; 2) $z^2 - (2 - i)z - 2i = 0$;
3) $z^2 - (3 + 2i)z + 6i = 0$; 4) $z^2 + (6 - 2i)z - 6i = 0$;
5) $z^2 - (5 + 2i)z + 5 + 5i = 0$; 6) $z^2 - 2(5 - 2i)z + 12 - 20i = 0$.

18.9. Тенгламани ечинг:

1) $z = \bar{z}^2$; 2) $2z = \bar{z}^2$, бунда $z = x + yi$.

АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

18.10. Комплекс сонларнинг ривожланиш тарихи ҳамда уларнинг фан ва техникадаги аҳамияти ҳақида ахборот тайёрланг.

ТАКРОРЛАШ

18.11. p параметрнинг қандай қийматларида квадрат тенгламанинг ҳақиқий иккита илдизи мавжуд эмас:

1) $x^2 + (2 - p)x + 2 + p = 0$; 2) $x^2 - 4(p - 2)x + 2p - 2 = 0$;
3) $x^2 + (3 - p)x + 7 - p = 0$; 4) $x^2 - 2(p - 2)x - 2p + 7 = 0$?

18.12. Ифодани соддалаштиринг:

1) $(x^2 - x^{0,5}) : \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x}{1 + \sqrt{x}}$; 2) $\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x}+1} : \dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1} + \dfrac{2}{x^{-0,5}}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$; 4) $\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} - \dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{a^{-2} - a}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}$.

18.13. Тенгсизликни ечинг:

1) $\sqrt{x^2 - 16} \leqslant x - 2$; 2) $\sqrt{x^2 - x - 6} \leqslant x + 5$.

18.14. Функциянинг графигини ясанг:

1) $f(x) = (x - 2)^{-2}$; 2) $f(x) = (x + 1)^{-2}$;

3) $f(x) = -1 + \sqrt{x-2}$; 4) $f(x) = 2- \sqrt{2+x}$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $(3 + i)(3 - i) - 2(3 - 2i)$ ифодани соддалаштиринг ва ҳосил бўлган соннинг модулини топинг:

A) $\sqrt{74}$; B) $2\sqrt{2}$; C) $4\sqrt{2}$; D) $\sqrt{58}$; E) $\sqrt{42}$.

2. $(1 - 5i)^2 + \frac{5(1-i)}{2+i} + 4 + 12i^9$ ифодани соддалаштиринг:

A) $20 - i$; B) $-19 - i$; C) $-20 + 2i$; D) $-20 - 2i$; E) $19 + i$.

3. $x^2 - 6x + 25 = 0$ квадрат тенгламанинг илдизлари:

A) $-3 \pm 3i$; B) $3 \pm 2i$; C) $-3 \pm 4i$; D) $-3 \pm 2i$; E) $3 \pm 4i$.

4. $x^2 + 4x + 13$ квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратинг:

A) $(x - 3i)(x + 3i)$; B) $(x + 2 - 3i)(x + 2 + 3i)$;

C) $(x - 2 + 3i)(x + 3i)$; D) $(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)$;

E) $(x - 1 - 3i)(x + 1 + 3i)$.

5. $\sqrt{4+2\sqrt{5}i}$ илдизнинг қийматини топинг:

A) $\pm(\sqrt{5} + i)$; B) $\pm(2\sqrt{5} + i)$;

C) $\pm(\sqrt{5} + 2i)$; D) $\pm(\sqrt{5} - 2i)$;

E) $\pm(\sqrt{5} - i)$.

6. Комплекс текисликда $|z - 3 - 2i| \leqslant 2$ тенгсизлик:

A) радиуси 3 га тенг ва маркази $M(3; 2)$ бўлган доиранинг нуқталар тўпламини;

B) радиуси 2 га тенг ва маркази $M(0; 3)$ бўлган доиранинг нуқталар тўпламини;

C) радиуси 2 га тенг ва маркази $M(0; 0)$ бўлган доиранинг нуқталар тўпламини;

D) радиуси 2 га тенг ва маркази $M(3; 2)$ бўлган доиранинг нуқталар тўпламини;

E) радиуси 1 га тенг ва маркази $M(2; 3)$ бўлган доиранинг нуқталар тўпламини береді.

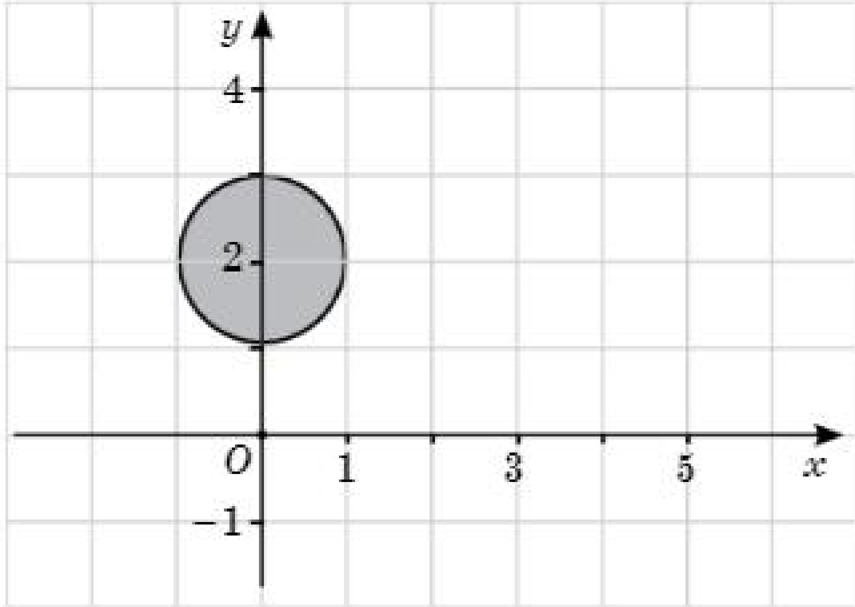
7. Агар квадрат тенгламанинг илдизларидан бири $5 - 4i$ сонига тенг бўлса, у ҳолда ушбу тенгламанинг умумий кўриниши:

A) $x^2 + 10x + 41 = 0$; B) $x^2 - 5x + 41 = 0$;

C) $x^2 + 10x + 42 = 0$;   D) $x^2 - 5x - 41 = 0$;

E) $x^2 - 10x + 41 = 0$.

8. Расмда тасвирланган доиранинг ички қисмини кўрсатувчи тенгсизлик:



A) $|z + 2i| < 1$;   B) $|z - 2i| < 1$;   C) $|z - i| < 2$;

D) $|z + i| < 2$;   E) $|2z - 2i| < 1$.

9. $x^2 - 5i = 0$ тенгламанинг илдизлари:

A) $\pm(\sqrt{5} + i)$;   B) $5 \pm 2i$;   C) $\pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}i\right)$;

D) $\pm\left(2\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}i\right)$;   E) $\pm\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}i\right)$.

10. $x^2 + 11i = 0$ тенгламанинг илдизлари:

A) $\pm(\sqrt{11} + i)$;   B) $11 \pm 2i$;   C) $\pm\left(\sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{11}{2}}i\right)$;

D) $\pm\left(2\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{11}{2}}i\right)$;   E) $\pm\left(\sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{11}{2}}i\right)$.

Математик саводхонлик бўйича тест топшириқлари

11. Омонатчи 8% йиллик ўсим билан банкка 100 минг тг пул депозитга солди. Уч йилдан кейин депозитда тўпланган пулнинг миқдорини топинг:

A) 124 400,2 тг;   B) 124 260 тг;   C) 125 971,2 тг;

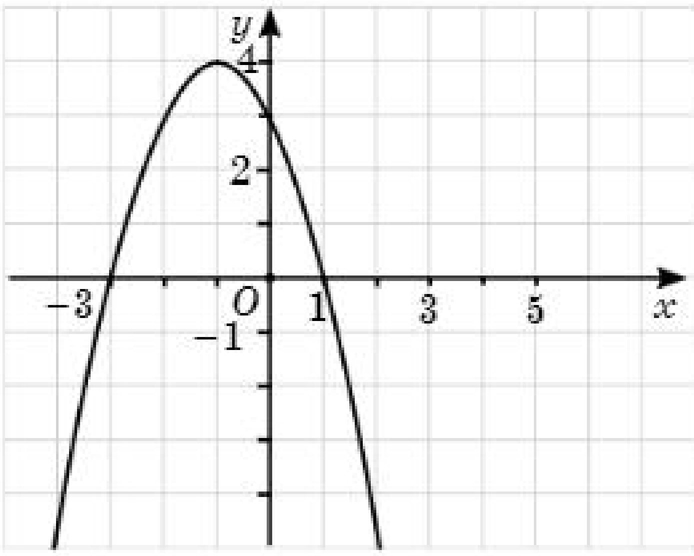
D) 125 520,2 тг;   E) 126 122,2 тг.

12. Қуйида бешта тенгдошнинг тасдиқлари берилган. Агар Олия ҳақиқатни айтса, унинг тенгдошларидан қайси бири ҳақиқатни айтганини топинг:

Олия: “Агар копток ховлида бўлса, у ҳолда у саватда бўлади”;
Асал: “Копток ҳовлида эмас”;
Анора: “Агар копток ҳовлида бўлса, у ҳолда у саватда эмас”;
Нозим: “Агар копток ҳовлида бўлмаса, у ҳолда у саватда эмас”;
Галия: “Агар копток саватда бўлмаса, у ҳолда у ҳовлида эмас”.

A) Асал; B) Анора; C) Нозима;
D) Галия; E) тенгдошлардан ҳеч қайсиси ҳақиқатни айтмади.

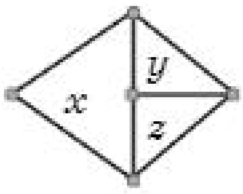
13. $x \in [-2; 2]$ бўлса, $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ функциянинг графигидан фойдаланиб, $M = 2f(-4) + 5f(0) + 2f(-1) + 2f(2)$ ифоданинг қийматини ва функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

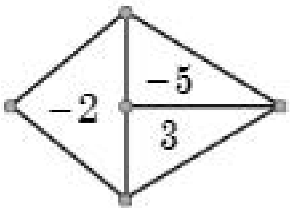


A) $M = 3$; $[-4; 4]$; B) $M = 3$; $[-4; 3]$; C) $M = 3$; $[-5; 3]$;
D) $M = 4$; $[-5; 4]$; E) $M = 3$; $[-5; 4]$.

14. Тўрт хонали сонларнинг ёзувида иккита рақами 2 бўлган, битта рақами 0 ва 5 бўлган ўзаро тенг тўрт хонали сонлар сони:

A) 7; B) 8; C) 9; D) 10; E) 12.

15. Агар 

чизма 

чизмани берса, у ҳолда $5x \cdot \frac{z}{y}$ ифоданинг қиймати:

A) $3\frac{1}{3}$; B) 6; C) 3; D) −6; E) $-3\frac{1}{3}$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даражанинг асоси ва кўрсаткичи, функция, функциянинг хоссалари, функциянинг графиги.

VI БОБ

КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛАР

19-§. КЎРСАТКИЧЛИ ФУНКЦИЯ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИГИ

Сиз *кўрсаткичли функция* тушунчаси билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг графиги, кўрсаткичли функция, аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, функциянинг хоссалари

Фан ва техниканинг кўпгина соҳаларида турли хил ҳодиса ва жараёнларни тавсифловчи икки ўзгарувчили катталик орасидаги функционал боғланиш кузатилади. Бунга бир нечта мисоллар келтирайлик:

1) Денгиз сатҳига нисбатан h баландликнинг ортиши билан p атмосфера босими $p = p_0a^h$ қонун бўйича ўзгаради, бунда p_0 — денгиз сатҳидаги босим, a — ўзгармас катталик;

2) ёғочдан ишлаб чиқаришда фойдаланиш катталиги $A = A_0a^{kt}$ қонунга мувофиқ ўсиб боради, бунда t — вақт, A_0 — ёғочнинг бошланғич сони, A — вақт ўтиши билан м^3 ларда ифодаланган ёғоч сонининг ўзгариши;

3) радийнинг парчаланиши $x = x_0\,a^{kt}$ қонуниятга мувофиқ боради, бунда x_0 сони $t = 0$ бўлганда радий атомларининг бошланғич сони, a ва k — ўзгармас сонлар.

Келтирилган мисоллардаги жараёнлар *органик ўсиш* жараёнига тегишли. Органик ўсиш жараёнини тавсифловчи ўзгарувчиларнинг физик маъносидан четлашиб, уларни x ва y ҳарфлари билан белгиласак, у ҳолда исталган органик ўсиш ушбу функцияни беради:

$$y = Ca^{kx}.$$

Бундай функциянинг $C = k = 1$ бўлгандаги содда кўринишини, яъни $y = a^x$ функцияни кўриб чиқамиз.

$y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$ *кўринишда берилган функция* ***кўрсаткичли функция*** *деб аталади.*

Таърифда берилган қуйидаги ҳолларга эътибор қаратиш лозим:

1) a асос 1 сонига тенг бўлмаслиги керак $(a \neq 1)$, чунки $a = 1$ бўлганда a^x даражанинг қиймати 1 сонига тенг бўлиб, x ўзгарувчига боғлиқ бўлмайди;

2) a асос мусбат сон бўлиши керак ($a > 0$), чунки $a < 0$ бўлганда x нинг исталган қиймати учун a^x ҳақиқий сон бўлмайди. Масалан, $a = -3$ ва $x = \frac{1}{2}$ бўлганда a^x қуйидаги кўринишга келади: $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$, бу эса ҳақиқий сон эмас;

3) a асос каср бўлган ҳолда a^x даража маълум бир даражали илдизни билдиради. Бунда илдизнинг қийматлари сифатида номанфий сон олинади.

Сиз кўрсаткичли функциянинг графигини ясашни ўрганасиз.

Таърифга кўра $a \neq 1$ ва $a > 0$, у ҳолда x нинг ҳақиқий қийматида $a^x > 0$, бундан кўрсаткичли функциянинг графиги абсциссалар ўқининг юқори қисмида жойлашган. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $y = a^x$ функциянинг графигини $a > 1$ ва $0 < a < 1$ ҳоллар учун кўриб чиқиш мумкин.

1) $a > 1$ бўлганда $a = 2$ ва $a = 10$ деб олиб, $y = 2^x$ ва $y = 10^x$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (55.1-расм).

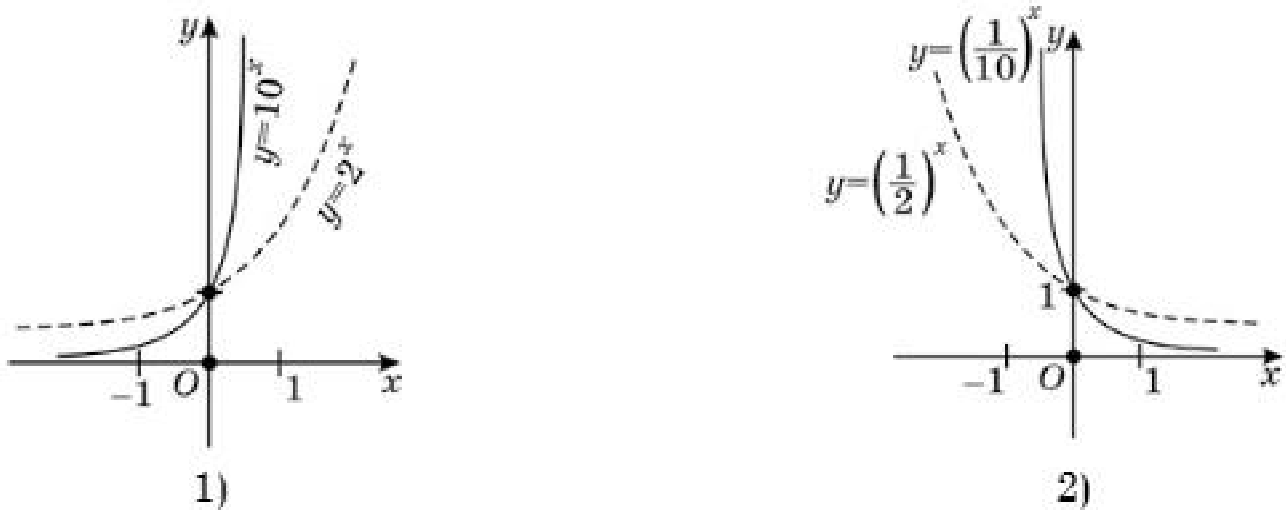
2) $0 < a < 1$ бўлганда $a = \frac{1}{2}$ ва $a = \frac{1}{10}$ деб оламиз ҳамда $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ва $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (55.2-расм).

Ушбу графиклардан кўрсаткичли функцияларнинг қуйидаги хоссаларини кўриш мумкин:

1) $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$ функциянинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами; қийматлар тўплами — $(0; +\infty)$;

2) барча $y = a^x$ кўрсаткичли функцияларнинг ($a > 1$ ёки $0 < a < 1$ эканлигига боғлиқ эмас) графиклари $(0; 1)$ нуқтадан ўтади, чунки $a^0 = 1$;

3) $a > 1$ бўлганда кўрсаткичли функция барча ҳақиқий сонлар тўпламида ўсувчи ва $x > 0$ бўлса, у ҳолда $a^x > 1$, $x < 0$ бўлса, у ҳолда $a^x < 1$;

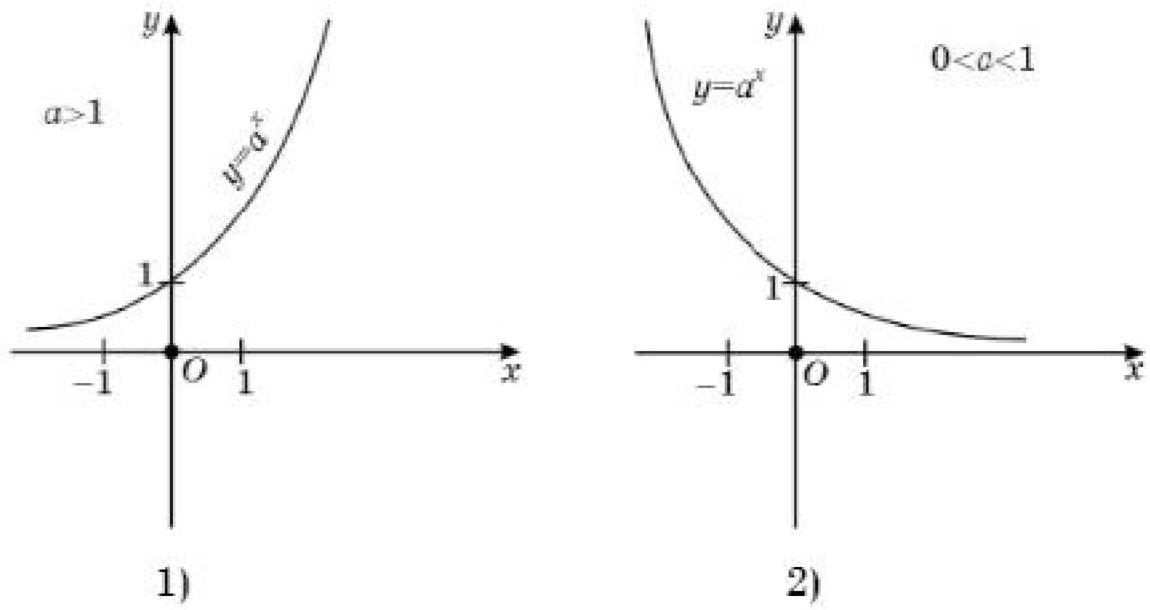


55-расм

$0 < a < 1$ бўлганда кўрсаткичли функция барча ҳақиқий сонлар тўпламида камаювчи ва $x < 0$ бўлса, у ҳолда $a^x > 1$, ал $x > 0$ бўлса, у ҳолда $a^x < 1$;

4) агар $a > 1$ бўлса, у ҳолда a нинг ортишига боғлиқ равишда $y = a^x$ фунциянинг графиги тез ўсади ($y = 2^x$ ва $y = 10^x$ функциялар-нинг графикларини таққослаганда); агар $0 < a < 1$ бўлса, у ҳолда a-нинг камайишига боғлиқ равишда $y = a^x$ функциянинг графиги тез камаяди ($y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ва $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ функцияларнинг графикларини таққослаганда).

$a > 1$ ва $0 < a < 1$ ҳоллар учун $y = a^x$ функция графикларининг умумий кўриниши мос равишда 56.1-, 2-расмларда берилган.



56-расм

Сиз кўрсаткичли функциянинг хоссаларидан мисоллар ечишда фойдаланишни ўрганасизлар.

МИСОЛ

1. $y = 2^{\frac{1}{x}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз.

Ечиш. $y = a^x$ кўрсаткичли функция R барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланганлиги маълум. Бироқ берилган ҳолда даража кўрсаткичининг махражи нолга тенг бўлиши мумкин эмас. Шу сабабли $y = 2^{\frac{1}{x}}$ функциянинг аниқланиш соҳаси иккита оралиқнинг бирлашмаси бўлади: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Жавоб: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

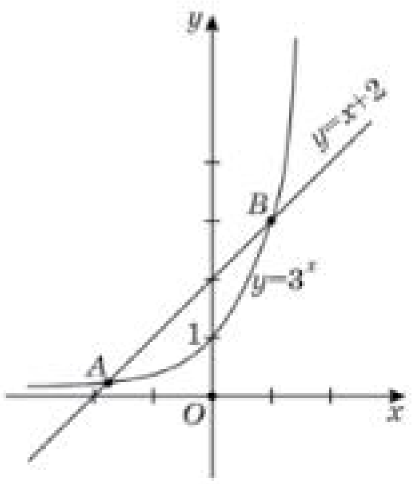
МИСОЛ

2. Кўрсаткичли функциянинг монотонлик хоссасидан фойдаланиб $\left(\frac{5}{7}\right)^{2,6} < \left(\frac{5}{7}\right)^{2,5}$ тенгсизликнинг тўғрилигини исботлаймиз.

Ечиш. Берилган тенгсизлик тўғри, чунки $a = \frac{5}{7}$, $0 < a < 1$ бўлганда аргументнинг қиймати ортган сайин $y = a^x$ кўрсаткичли функциянинг қиймати камаяди.

МИСОЛ 3. $y = 3^x$ ва $y = x + 2$ функциялар графикларининг кесишиш нуқталари сонини топамиз.

Ечиш. Битта координаталар текислигида $y = 3^x$ ва $y = x + 2$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (57-расм). Расмда кўриб турганимиздек, берилган функцияларнинг графиклари A ва B нуқталарда кесишади.



57-расм

Жавоб: иккита нуқтада кесишади.

1. Кўрсаткичли функциянинг асоси ёрдамида шу функциянинг қандай хоссалари аниқланади?
2. “Исталган кўрсаткичли функциянинг графиги (0; 1) нуқтадан ўтади” деган мулоҳаза нимага асосланган?
3. Қандай кўрсаткичли функцияларнинг графиклари ординаталар ўқига нисбатан симметрик бўлади?
4. 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$ ҳоллар учун x нинг қиймати барча ҳақиқий сонлар тўпламида ўсса, $y = a^x$ кўрсаткичли функциянинг қиймати қандай ўзгаради?

Машқлар

A

19.1. Битта координаталар текислигида $y = 3^x$ ва $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функцияларнинг графикларини ясанг.

19.2. $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = 4^{\frac{1}{x}}$; 2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 3) $f(x) = \frac{1}{7^x}$; 4) $f(x) = 0{,}35^x$.

19.3. $y = f(x)$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2$; 2) $f(x) = 6^{x+2} + \frac{1}{4}$;

3) $f(x) = 2{,}5^x + 3$; 4) $f(x) = 0{,}7^{x-1} - 1$.

19.4. Агар x:

1) 0; 1; 2; 3; 4; ... ; 2) –1; –2; –3; –4; ... ;

3) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; ...

қийматлар кетма-кет қабул қилинса, у ҳолда $y = 3^x$ функция қандай қийматларни қабул қилади?

19.5. Берилган кўрсаткичли функцияларнинг қайси бир ўсувчи, қайси бири камаювчи бўлади:

1) $y = 4^x$; 2) $y = 10^x$; 3) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 4) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$?

19.6. x аргументнинг қиймати ортганда:

1) $y = 2^x$ ёки $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ функциялардан қайси бири тезроқ ўсади;

2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ёки $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функциялардан қайси бири тезроқ камаяди?

B

19.7. Кўрсаткичли функциянинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидаги сонларни 1 сони билан таққосланг:

1) 11^{-5}; 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $(0{,}15)^{-3}$; 4) $(1{,}2)^{-2}$.

19.8. Таққосланг:

1) $(3{,}5)^{-\sqrt{2}}$ ва $\left(\frac{1}{3{,}5}\right)^{-\sqrt{2}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{1+\sqrt{3}}$ ва $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$;

3) $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ ва $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{3}-2}$; 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2\sqrt{3}}$ ва $3^{\sqrt{3}}$.

19.9. Қуйидаги кўрсаткичли функцияларнинг графиклари ўзаро қандай жойлашган:

1) $y = 9^x$ ва $y = 4^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ва $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$?

Ҳар бир функцияни $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$ ҳоллар учун кўриб чиқинг.

19.10. $y = f(x)$ ва $y = g(x)$ функцияларнинг графиклари нечта нуқтада кесишади:

1) $y = 2^x$ ва $y = 4^x$; 2) $y = 2^x$ ва $y = x^4$;

3) $y = 2^x$ ва $y = x^2$; 4) $y = 2^x$ ва $y = -3x^2$?

19.11. x аргументнинг 1; 2; 3; 4; ... қийматларга мос $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ кўрсаткичли функциянинг қийматлари қандай сонлар кетма-кетлигини ташкил этади?

19.12. Содда шакл алмаштиришлардан фойдаланиб, функциянинг графикларини ясанг: 1) $y = 2^{x+3} - 3$; 2) $y = 2 - 3^{x-1}$.

19.13. Агар: 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$ бўлса, у ҳолда x нинг ҳар хил қийматларида a^x нинг қийматини 1 билан таққосланг.

C

19.14. $y = a^x$ функциянинг графигидан фойдаланиб, $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ функциянинг графигини қандай ясаш мумкин?

19.15. Кўрсаткичли функциянинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидаги мулоҳазаларнинг тўғри ёки нотўғрилигини исботланг:

1) $a^x > a^3$ ва $x > 3$ тенгсизликлар тенг кучли;

2) $7^{x^2} > 7^x$ тенгсизликдан $x^2 < x$ тенгсизлик келиб чиқади;

3) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ ва $2x < x - 1$ тенгсизликлар тенг кучли.

19.16. $y = 3^{|x|}$ функциянинг барча қийматлари орасидан:

1) энг катта қийматни; 2) энг кичик қийматни кўрсатиш мумкинми?

19.17. x аргументнинг қандай қийматларида $y = 2^{2x}$ функциянинг мос қийматлари $\frac{1}{4}$ дан катта бўлади?

19.18. 1; 3; 9; 27; 81; ... геометрик прогрессия берилган. Аргументнинг қандай қийматларида ушбу прогрессиянинг ҳадлари қандай кўрсаткичли функциянинг қийматларини беради?

ТАКРОРЛАШ

19.19. Тенгламани ечинг:

1) $\sin^2 x - \cos x = 1$; 2) $\sin^2 x + 2\cos x = 0$.

19.20. $f'(x) \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг:

1) $f(x) = 2\cos 3x + 3x$; 2) $f(x) = -x^3 + 9x$.

19.21. Аниқмас интегрални топинг:

1) $\int\left(5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$; 2) $\int(\cos 2x - (2x + 1)^3)dx$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Даража, даражанинг асоси, даража кўрсаткичи, тенглама, тенгламанинг илдизи, даражага кўтариш, идиз чиқариш, кўрсаткичли функция ва унинг хоссалари.

20-§. СОННИНГ ЛОГАРИФМИ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

Сиз *соннинг логарифми* тушунчаси билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

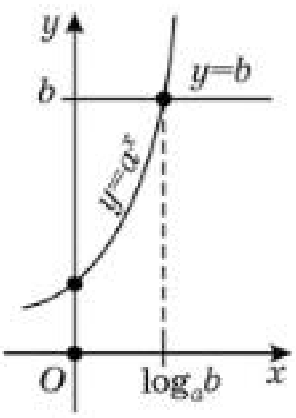
Сон, логарифм, ўнли логарифм, натурал логарифм, *e* сони

Маълум бир a сонни x даражага кўтариш орқали ҳосил бўлган b сонни олсак, уни

$$a^x = b \tag{1}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда a ва b — берилган сонлар, x — номаълум катталик.

Бу тенгламанинг ҳамма вақт ҳам илдизи мавжуд бўлавермайди.



58-расм

Масалан, a сони мусбат, b сони эса манфий бўлса, у ҳолда (1) тенглама ечимга эга эмас, чунки кўрсаткичли функция ҳамма вақт нолдан катта: $a^x > 0$. Агар a ва b мусбат сонлар ва $a \neq 1$ бўлса, у ҳолда (1)-тенгламанинг биттагина илдизи мавжуд.

(1) тенгламани график усулда ечамиз. Тенгламанинг чап томони кўрсаткичли функцияни, ўнг томони $y = b$ чизиқли функцияни беради. Бу функцияларнинг графиклари битта нуқтада кесишади (58-расм).

Кесишиш нуқтасининг абсциссаси (1) тенгламанинг илдизи бўлади. Тенгламанинг илдизини $\log_a b$ белги билан ёзиш келишилган (белгининг ўқилиши: *асоси a бўлган b соннинг логарифми*).

Мусбат ва 1 дан фарқли a асоси бўйича ***b мусбат соннинг логарифми*** *деб b сони ҳосил бўладиган a сони кўтариладиган даража кўрсаткичига айтилади.*

$\log_a b = x$ ёзув *асоси a бўлган b сонининг логарифми x га тенг* деб ўқилади.

МИСОЛ

1. Асоси 5 га тенг 25, 625 ва $\frac{1}{125}$ сонларининг логарифмини топамиз.

Ечиш. Асоси 5 бўлган 25 сонининг логарифми 2 га тенг, чунки $5^2 = 25$ ёки $\log_5 25 = 2$.

Асоси 5 бўлган 625 сонининг логарифми 4 га тенг, чунки $5^4 = 625$ ёки $\log_4 625 = 5$.

Асоси 5 бўлган $\frac{1}{125}$ сонининг логарифми -3 га тенг, чунки $5^{-3} = \frac{1}{125}$ ёки $\log_5 \frac{1}{125} = -3$.

Жавоб: 2; 4; -3.

Сонинг логарифми таърифидан

$$a^{\log_a b} = b \qquad (2)$$

тенглик келиб чиқади.

(2) тенглик *логарифмнинг асосий айнияти* деб аталади.

МИСОЛ

2. 1) $3^{\log_3 27} = 27$; 2) $5^{\log_5 125} = 125$; 3) $10^{\log_{10}\frac{1}{100}} = \frac{1}{100}$.

Энди берилган иккита сон бўйича учинчи сонни топишни, яъни 1) $a^x = b$; 2) $x^a = b$; 3) $a^c = x$ кўринишдаги тенгламаларни ечишни кўриб чиқамиз.

МИСОЛ

3. Асоси 9 бўлган 27 сонининг логарифмини топамиз.

Ечиш. $\log_9 27 = x$ бўлсин. У ҳолда логарифмнинг таърифига кўра $9^x = 27$ ёки $(3^2)^x = 3^3$, бундан $2x = 3$ ёки $x = \frac{3}{2}$.

Жавоб: $\frac{3}{2}$.

МИСОЛ

4. 16 сонининг логарифми қандай асосда 4 га тенг бўлишини топамиз.

Ечиш. Логарифмнинг асоси номаълум бўлганидан, $\log_x 16 = 4$ деб ёзиш мумкин. Логарифмнинг таърифига кўра $16 = x^4$ ёки $2^4 = x^4$, бундан $x = 2$.

Жавоб: 2.

МИСОЛ

5. Асоси 81 бўлганда $-\frac{3}{4}$ га тенг бўлган логарифмни топамиз.

Ечиш. Номаълум сонни x деб белгиласак, $\log_{81} x = -\frac{3}{4}$ ҳосил бўлади. Логарифмнинг таърифига кўра $x = 81^{-\frac{3}{4}}$ ёки $x = \frac{1}{\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3^{12}}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$, бундан $x = \frac{1}{27}$.

Жавоб: $\frac{1}{27}$.

МИСОЛ

6. 1) Асоси 2 бўлганда 0,125 сонининг; 2) асоси $\frac{1}{2}$ бўлганда $\sqrt{2}$ сонининг; 3) асоси 3 бўлганда $\frac{1}{\sqrt{3}}$ сонининг логарифмини топамиз.

Ечиш. 1) $\log_2 0{,}125 = -3$, чунки $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$;

2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$, чунки $\sqrt{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 3) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$, чунки $\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-\frac{1}{2}}$.

Жавоб: 1) -3; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$.

Сиз логарифмнинг хоссаларини ўрганасиз.

Логарифмнинг хоссалари:

1) *Асоси а (а — исталган сон) бўлган а сонининг логарифми* 1 *га тенг*:

$$\log_a a = 1;$$

2) *асоси а бўлган* 1 *сонининг логарифми* 0 *га тенг*:

$$\log_a 1 = 0;$$

3) *икки ёки бир нечта мусбат сонларнинг кўпайтмасининг логарифми кўпайтувчилар логарифмларининг йиғиндисига тенг*:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c;$$

4) *нисбатнинг ёки касрнинг логарифми суратининг логарифми билан махражи логарифмининг айирмасига тенг*:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c;$$

5) *даражанинг логарифми даража кўрсаткичини даража асосидан олинган логарифмга кўпайтмасига тенг*:

$$\log_a b^n = n \log_a b;$$

6) *янги асосга ўтиш формуласи*:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Кўрсатилган хоссалардан баъзиларининг исботини келтирамиз.

$\log_a b^n = n\log_a b$ хоссани исботлайлик.

Исботи. $b = a^{\log_a b}$ асосий айниятни n-даражага кўтарамиз. У ҳолда $b^n = a^{n\log_a b}$. Демак, логарифмнинг таърифига кўра $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$.

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ хоссани исботлаймиз.

Исботи. b ва c мусбат сонлар бўлсин, у ҳолда логарифмнинг асосий хоссасига кўра $b = a^{\log_a b}$, $c = a^{\log_a c}$. Ушбу икки тенгликни ҳадма-ҳад кўпайтирсак, $bc = a^{\log_a b + \log_a c}$ тенгликка эга бўламиз. Энди логарифмнинг таърифидан фойдалансак, $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Қолган хоссаларни мустақил исботланг.

Сиз логарифмнинг хоссаларини билиб, улардан логарифмик ифодаларни шакл алмаштиришда фойдаланишни ўрганасиз.

МИСОЛ

7. 1) $\log_3 (243 \cdot 729)$; 2) $\log_5 \dfrac{0,008}{125}$; 3) $\log_3 \log_4 \sqrt[9]{4}$ логарифмларнинг қийматини топамиз.

Ечиш. 1) $\log_3 (243 \cdot 729) = \log_3 243 + \log_3 729 = 5 + 6 = 11$;

2) $\log_5 \dfrac{0,008}{125} = \log_5 0,008 - \log_5 125 = -3 - 3 = -6$;

3) $\log_3 \log_4 4^{\frac{1}{9}} = \log_3 \left(\dfrac{1}{9} \log_4 4\right) = \log_3 \left(\dfrac{1}{9} \cdot 1\right) = \log_3 3^{-2} = -2.$

Жавоб: 1) 11; 2) –6; 3) –2.

Кўриб чиқилган мисолларнинг ечиш йўлларини мустақил тушунтириб кўринг.

МИСОЛ

8. Асоси a^k бўлган N сонининг логарифми берилган. Шу соннинг a асос бўйича логарифмини топамиз.

Ечиш. Логарифмнинг янги асосга ўтиш формуласидан фойдаланамиз:

$$\log_{a^k} N = \frac{\log_a N}{\log_a a^k} = \frac{\log_a N}{k} = \frac{1}{k} \cdot \log_a N.$$

Юқорида берилган барча хоссалар “Логарифмни топиш” амалини бажаришда, яъни исталган алгебраик ифодани логарифмлашда фойдаланилади.

Ифодани логарифмлай олиш логарифмлаш натижасига кўра шу натижани берувчи ифодани топишга имкон яратади. Масалан, агар $\log_a x = \log_a b + 3\log_a c - 4\log_a d$ тенглама берилса, у ҳолда $x = \dfrac{bc^3}{d^4}$.

Бундай амал *потенциаллаш* деб аталади.

Агар a ва b — мусбат сонлар ва $a \neq 1$ бўлса, у ҳолда исталган $k \neq 0$ сони учун $\log_a b = \log_{a^k} b^k$ тенглик бажарилади.

Масалан, $\log_3 4 = \log_{3^2} 4^2 = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{4}$ ва ҳоказо.

Сиз *ўнли логарифм* ва *натурал логарифм* тушунчалари билан танишасиз.

Амалиётда логарифмнинг хусусий ҳоллари қўлланилади.

Асоси 10 *бўлган соннинг логарифми* ***ўнли логарифм*** *дейилади.*

Ўнли логарифмни ёзиш учун lg белгидан фойдаланилади.

Масалан, $\log_{10}217$ нинг ўрнига lg217; $\log_{10}9$ нинг ўрнига lg9 деп ёзилади.

Ўнли логарифмнинг ўзига хос учта хоссаси мавжуд:

1) 1 сони ва ундан кейинноллардан ташкил топган мусбат соннинг ўнли логарифми ноллар сонига тенг бўлган бутун мусбат сон бўлади, яъни $a = 10^n$ бўлса, у ҳолда $\lg a = \lg 10^n = n$;

2) 1 сони ва унинг олдидаги ноллардан ташкил топган мусбат ўнли касрнинг ўнли логарифми n бўлади (бунда n ноль бутунни қўшиб олгандаги нолларнинг сонига тенг), яъни $a = 10^{-n}$ бўлса, у ҳолда $\lg a = \lg 10^{-n} = -n$;

3) бутун ёки нолинчи даражага тенг бўлмаган рационал соннинг ўнли логарифми иррационал сон бўлади.

Масалан, $\lg 3$, $\lg 7$, $\lg 0{,}34$, $\lg 15$ — иррационал сонлар.

Ҳисоблашларни осонлаштириш учун ўнли логарифмларни қўлланган маъқул. Шу билан бир қаторда асоси $e = 2{,}7182818289...$ (e иррационал сон чексиз даврий бўлмаган ўнли каср кўринишида ёзилади) бўлган логарифм ҳам фойдаланилади.

Асоси e бўлган соннинг логарифми ***натурал логарифм*** *деб аталади.*

Натурал логарифмни ёзиш учун ln белгисидан фойдаланилади.

Масалан, $\log_e 13$ нинг ўрнига $\ln 13$ деб ёзилади.

Натурал логарифмдан ўнли логарифмга ўтиш формуласини мустақил ёзиб кўринг.

1. Бир хил асосли ўзаро тескари сонлар логарифмларида қандай фарқ бор? Жавобингизни тушунтиринг.
2. Йиғиндининг логарифми логарифмлар йиғиндисига тенг деган мулоҳаза тўғрими? Нима учун?
3. Ҳақиқий сонлар тўпламида манфий соннинг логарифми мавжудми? Жавобингизни тушунтиринг.
4. $\lg e$ нинг қиймати маълум бўлса, $\ln 10$ нинг қийматини қандай топиш мумкин?
5. Берилган N сонининг ўнли логарифми каттами, натурал логарифми каттами?
6. Логарифмнинг умумий хоссаларидан қайси бири натурал логарифмга тегишли?

Машқлар

А

20.1. 1; 9; 81; 243; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{27}$ сонларнинг асоси 3 бўлган логарифмини топинг.

Ҳисобланг **(20.2-20.3)**:

20.2. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_{0,2} 0{,}04$; 3) $\log_3 \frac{1}{81}$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; 5) $\log_{23} 1$; 6) $\log_5 \frac{1}{125}$.

20.3. 1) $\log_5 22 - \log_5 11 - \log_5 10$; 2) $\log_2 7 - \log_2 63 + \log_2 36$;

3) $\log_3 8 - \log_3 4 + \log_3 \frac{9}{2}$; 4) $\log_7 64 - \log_7 256 + \log_7 28$.

20.4. Қуйидаги кўрсаткичли тенгликларни логарифм орқали ёзинг:

1) $3^6 = 729$; 2) $4^5 = 1024$; 3) $10^4 = 10\ 000$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; 6) $10^{-3} = 0{,}001$.

20.5. Қуйидаги логарифмик тенгликларни кўрсаткичли тенглик кўринишида ёзинг:

1) $\log_2 64 = 6$; 2) $\log_3 81 = 4$; 3) $\log_5 125 = 3$;

4) $\lg 100000 = 5$; 5) $\lg 0{,}01 = -2$; 6) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{27}{64} = 3$.

20.6. Асоси 10 бўлганда қуйидаги сонларнинг логарифмларини топинг:

1) 100; 2) 0,001; 3) 10^n;

4) $\sqrt{10}$; 5) $\sqrt[3]{10^2}$; 6) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$.

20.7. Ўнли логарифмни ҳисобланг:

1) $\lg 10000$; 2) $\lg 0{,}1$; 3) $\lg 0{,}0001$; 4) $\lg \sqrt{10}$.

20.8. Натурал логарифмни ҳисобланг:

1) $\ln e$; 2) $\ln e^{\frac{1}{3}}$; 3) $\ln \sqrt{e}$; 4) $\ln(\lg 10)$.

20.9. Агар: 1) $\lg 5 \approx 0{,}699$ бўлса, у ҳолда $\lg \frac{1}{5}$; $\lg 0{,}05$; $-\lg 0{,}005$;
2) $\lg 29 \approx 1{,}462$ бўлса, у ҳолда $\lg 29000$; $\lg 2{,}9$; $\lg 0{,}29$ сонларнинг логарифмини топинг.

B

20.10. Ҳисобланг:

1) $\log_{\frac{1}{5}} 9 + 2\log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{3}$; 2) $\log_3 8 + 3\log_3 \frac{9}{2}$;

3) $\log_7 196 - 2\log_7 2$; 4) $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{3}$.

20.11. Ифодани логарифмланг:

1) $\lg(a^2 b^3)$; 2) $\lg(5a^2 x^2)$; 3) $\lg(mn)^3$;

4) $\lg \sqrt[3]{7a^3 b}$; 5) $\lg\left(4\sqrt[5]{2ab^3}\right)$; 6) $\lg\left(7a^8 b \sqrt[8]{c}\right)$.

20.12. Ушбу тенгликлардан логарифмнинг таърифи бўйича номаълумни топинг:

1) $x = \log_3 27$; 2) $y = \log_2 16$; 3) $z = \log_5 625$;
4) $x = \log_2 0{,}125$; 5) $\log_{\frac{3}{2}} y = 2$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} z = -3$.

Ифоданинг қийматини топинг **(20.13-20.14)**:

20.13. 1) $\dfrac{25^{\log_5 2}+1}{49^{\log_7 4}}$; 2) $\dfrac{16^{0,5\log_4 10}}{10^{\lg 4}+1}$;

3) $25^{2-\log_5 2} + 7^{-\log_7 3}$; 4) $\log_4 \dfrac{1}{5} + \log_4 36 + \dfrac{1}{2}\log_4 \dfrac{25}{81}$.

20.14. 1) $\log_2 12 + \log_2 \dfrac{5}{3} + \log_2 \dfrac{4}{5}$; 2) $(\log_5 128)\left(\log_2 \dfrac{1}{125}\right)$;

3) $3^{2-\log_3 5} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_3 5}$; 4) $9^{3-\log_3 54} + 7^{-\log_7 4}$.

20.15. Таққосланг:

1) $9^{\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{2}{3}\right)}$ ва $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt[3]{3}$ ва $\left(\dfrac{1}{36}\right)^{\log_6 2}$.

20.16. Қуйидаги тенгликда x нинг қийматини топинг:

1) $\log_x 36 = 0{,}5$; 2) $\log_x 27 = \dfrac{3}{2}$;

3) $\log_x 64 = 1{,}2$; 4) $\log_x 2 = -0{,}5$.

20.17. lg2 ва lg3 маълум бўлганда 100 дан катта бўлмаган қандай натурал сонларнинг логарифмини топиш мумкин?

20.18. Ўнли логарифмларининг айирмаси: 1) 1; 2) 2; 3) 3 га тенг бўлган иккита соннинг нисбатини топинг.

C

20.19. Агар: 1) $\lg 2 = a$ бўлса, у ҳолда $\lg 25$;

2) $\lg 5 = a$ ва $\lg 2 = c$ бўлса, у ҳолда $\log_{50} 8$;

3) $\log_b a = 3$ бўлса, у ҳолда $3\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} b$;

4) $\log_a b = 4$ бўлса, у ҳолда $\log_{\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}}\right) + \log_{\sqrt{ab}}(a\sqrt{a})$ ни ифодаланг.

Ҳисобланг **(20.20-20.21)**:

20.20. 1) $343^{2\log_{49} 2}$; 2) $4^{2\log_{32} 10}$; 3) $\sqrt{5}^{\,2\log_5 3}$;

4) $9^{\log_{27}\sqrt{5}}$; 5) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\log_{\frac{1}{9}} 4}$; 6) $4^{\log_8 125}$.

20.21. 1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$; 2) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$; 3) $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$;

4) $\log_{\sqrt{3}} \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$; 5) $\log_{\frac{8}{27}} \log_{25} 125$; 6) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

20.22. 1) Асоси 2 бўлганда 7; 30; 120; 495;
2) асоси 10 бўлганда 3; 18; 134; 1782 сонларнинг логарифми қандай иккита манфий сонлар орасида жойлашади?

20.23. 1) Асоси 10 бўлганда 0,07; 0,018; 0,00125; 0,00005;
2) асоси 2 бўлганда $\frac{1}{15}$; $\frac{3}{80}$; $\frac{1}{120}$ сонларнинг логарифми қандай иккита манфий сонлар орасида жойлашган?

20.24. 1) Асоси 2; $\frac{1}{2}$; 4; 16; 64 бўлганда $\sqrt[5]{8}$ соннинг логарифми нимага тенг?
2) Қандай асосда $\log_a \sqrt{27}$ нинг қиймати $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$ сонига тенг бўлади?

20.25. Агар сонлар кетма-кетлиги мусбат ҳадли геометрик прогрессияни берса, у ҳолда уларнинг логарифми арифметик прогрессияни ташкил этишини умумий ҳолда кўрсатинг.

Ифоданинг қийматини топинг **(20.26—20.28)**:

20.26. 1) $0{,}25(1 + 4^{\log_2 5})^{\log_{26} 4}$; 2) $10^{2 - \lg 2} - 25^{\log_5 4}$;

3) $81^{\log_9 2 - 0{,}25\log_3 2}$; 4) $81^{-\log_{0,5} 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 4 + 2{,}5}$;

5) $\dfrac{\log_2^2 14 + (\log_2 14)(\log_2 56) - 2\log_2^2 56}{\log_2 14 - \log_2 56}$;

6) $\dfrac{\log_5^2 7\sqrt{5} + 2\log_5^2 7 - 3\left(\log_5 7\sqrt{5}\right)(\log_5 7)}{\log_5 7\sqrt{5} - \log_5 49}$;

7) $\dfrac{\log_4^2 12 + 3\log_4^2 \frac{1}{3} + 4(\log_4 12)\left(\log_4 \frac{1}{3}\right)}{\log_4 12 + 3\log_4 \frac{1}{3}}$;

8) $\dfrac{2\log_2^2 3 - \log_2^2 12 - \log_2 3 \cdot \log_2 12}{2\log_2 3 + \log_2 12}$.

20.27. 1) $27^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{3}} + 4 \cdot 5^{\log_{0,04} 9} - 2^{\log_8 125} \cdot \log_{32} 16$;

2) $7^{\frac{2}{\log_2 7}} \cdot 4^{\log_4 6} + 4 \cdot 6^{\frac{1}{\log_4 6}} + \left(\sqrt[3]{5}\right)^{\log_3 27}$;

3) $\left(3^{\log^2_{\sqrt{3}} 2} - 4^{\log^2_{\sqrt{3}} 2}\right)^2 - 3^{\frac{1}{\log_5 3}}$;

4) $\left(3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}} - 5^{\frac{1}{\log_5 3}} + 0{,}008^{\log_{343} 49}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

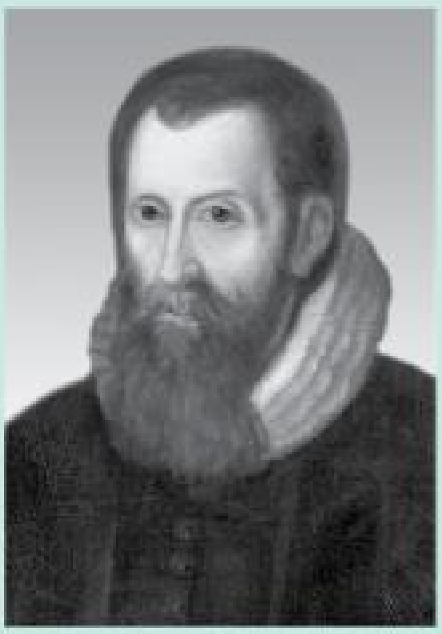
5) $\left(2^{\frac{\log_2 5}{\log_5 2}} - 5^{\frac{1}{\log_5 2}} + 5^{\log_5 25}\right)^{\frac{1}{2}}$.

20.28. 1) $(\log_3 2 + \log_2 81 + 4)(\log_3 2 - 2\log_{18} 2) \log_2 3 - \log_3 2$;
2) $(\log_2 7 + \log_7 16 + 4)(\log_2 7 - 2\log_{28} 7) \log_7 2 - \log_2 7$;
3) $(\log_6 3 + \log_3 1296 + 4)(\log_6 3 - \log_{108} 9) \log_3 6 - \log_6 3$;
4) $(\log_5 7 + 9\log_7 5 + 6)(\log_5 7 - 3\log_{875} 7) \log_7 5 - \log_5 7$;
5) $(\log_2 5 + 16\log_5 2 + 8)(\log_2 5 - 4\log_{80} 5) \log_5 2 - \log_2 5$;
6) $(\log_4 6 + \log_6 4 + 2)(\log_4 6 - \log_{24} 6) \log_6 4 - \log_4 6$.

МАТЕМАТИК ОЛИМЛАР ҲАҚИДА АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

20.29. 1) *Соннинг логарифми* тушунчасининг ривожланиш тарихи бўйича ахборот тайёрланг.

2) Математик олим Жон Непер ва унинг "Логарифмларнинг ажойиб жадвали" ҳақида ахборот тайёрланг.



Ж. Непер
(1550—1617)

ТАКРОРЛАШ

20.30. Абсциссаси x_0 бўлган нуқтада $y = f(x)$ функциянинг графигига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти қийматини топинг:

1) $y = x^2 - x$, $x_0 = 2$; 2) $y = \sqrt{4 - x}$, $x_0 = 3$;
3) $y = \dfrac{3x}{x + 1}$, $x_0 = 2$.

20.31. 1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$; 2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$;
3) $f(x) = x - 2\sin x$ бўлса, у ҳолда $f'(x) < 0$ тенгсизликни ечинг.

20.32. "Жонли геометрия" ёки "GeoGebra" дастурларидан фойдаланиб, функциянинг графигини ясанг ва қийматлар тўпламини топинг:

1) $f(x) = 2^{x+1}$; 2) $f(x) = 2^{x-2}$;
3) $f(x) = -e^x$; 4) $f(x) = -e^{2x}$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг графиги, тескари функция, кўрсаткичли функция, унинг графиги ва хоссалари, соннинг логарифми, логарифмни топиш, асосий логарифмик айният, логарифмнинг хоссалари.

21-§. ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИГИ

Сиз *логарифмик функция* тушунчаси билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, функциянинг графиги, логарифмик функция, аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, функциянинг хоссалари

СИЗ БИЛАСИЗ: Агар исталган $y = y_0$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ функциянинг графигини биттагина нуқтада кесиб ўтса, у ҳолда $y = f(x)$ функцияга тескари функция бўлади (агар y_0 қиймат $y = f(x)$ функциянинг қийматлар тўпламига тегишли бўлмаса, у ҳолда $y = y_0$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ функциянинг графигини кесиб ўтмайди. Демак, $y = f(x)$ дастлабки кўринишга келадиган функция).

Агар $y = f(x)$ функция ўсувчи ёки камаювчи бўлса, у ҳолда у — дастлабки кўринишига келадиган функция. Демак, унинг тескари функцияси мавжуд.

$y = a^x$ кўрсаткичли функция — монотон функция, демак, унга тескари функция мавжуд.

Агар $y = a^x$ (бунда $0 < a \neq 1$) бўлса, у ҳолда логарифмнинг таърифига кўра $x = \log_a y$. Охирги тенгликдаги x ва y ўзгарувчиларнинг ўринларини алмаштирсак, $y = \log_a x$ функцияни ҳосил қиламиз. Бу функция кўрсаткичли функцияга тескари функция бўлади.

Кўрсаткичли функцияга тескари функция ***логарифмик функция*** *деб аталади.*

Логарифмик функциянинг кўриниши $y = \log_a x$, бунда $a > 0$ ва $a \neq 1$.

Логарифмик функциялар орқали илмий-амалий аҳамиятга эга кўпгина боғланишлар ифодаланади.

Масалан,

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p}$$

формула денгиз сатҳидан юқори баландликни аниқлаш учун фойдаланилади. Бунда p_0 — денгиз сатҳидаги атмосфера босими, k — маълум бир ўзгармас, $e \approx 2{,}718$, h — денгиз сатҳидан юқори баландлик, p — денгиз сатҳидан h баландликдаги атмосфера босими.

Бу ерда p — эркли ўзгарувчи ёки аргумент, h — эрксиз ўзгарувчи ёки функция. Юқорида берилган формула билан p атмосфера босими бўйича денгиз сатҳидан юқори h баландликни аниқлаш мумкин. Тенгламани h га нисбатан ечиб,

$$p = p_0\, e^{-kh}$$

формулани ҳосил қилиш мумкин.

$$t = \frac{100}{p}\ \ln\frac{A}{a}$$

формулани кўриб чиқамиз.

Бунда a — дастлабки омонатни билдиради, p — йиллик фоиз сони, A — йил ўтгандан кейинги омонатнинг ўсиши бўйича йиғилган пул.

Бу ерда A — эркли ўзгарувчи, t ни эса эрксиз ўзгарувчи деб қараб, A нинг қиймати бўйича t ни топиш мумкин. Бу боғланишни қуйидагича ёза оламиз:

$$A = ae^{\frac{pt}{100}}.$$

$y = \log_a x$ логарифмик функциянинг хоссалари:

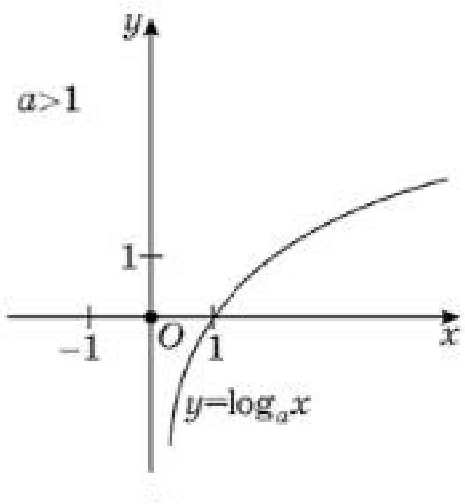
1) аниқланиш соҳаси мусбат сонлар тўплами, яъни R_+;

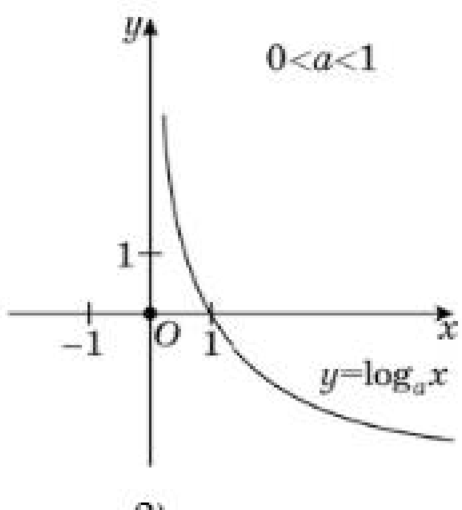
2) қийматлар тўплами ҳақиқий сонлар тўплами, яъни R;

3) $a > 1$ бўлганда функция ўсади; $0 < a < 1$ бўлганда камаяди;

4) функция ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиз.

5) логарифмик функция графигининг умумий кўриниши 59.1-, 2-расмларда берилган.

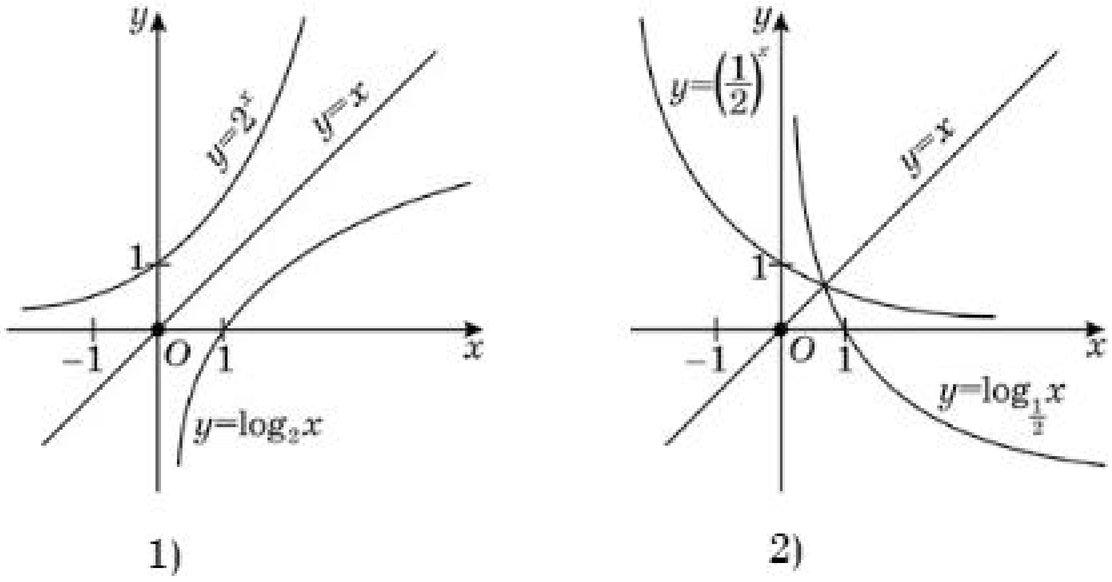




59-расм

60.1-расмда $y = 2^x$ кўрсаткичли функциянинг ва унга тескари $y = \log_2 x$ логарифмик функциянинг графиклари ($a = 2$), 60.2-расмда эса $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

кўрсаткичли функциянинг ва унга тескари $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ логарифмик функциянинг графиклари $\left(a = \frac{1}{2}\right)$ берилган.



60-расм

60.1, 60.2-расмлардан фойдаланиб, $y = \log_a x$ логарифмик функциянинг графигини унга мос кўрсаткичли функция графиги билан таққослаш мумкин. Логарифмик функция билан унга мос кўрсаткичли функциянинг графикларини таққослаб, уларнинг $y = x$ тўғри чизиққа нисбатин симметрик эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

МИСОЛ

1. Битта координаталар текислигида $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ ва $y = \lg x$ функцияларнинг графикларини ясаб, уларнинг ўзаро қандай жойлашганини аниқлаймиз.

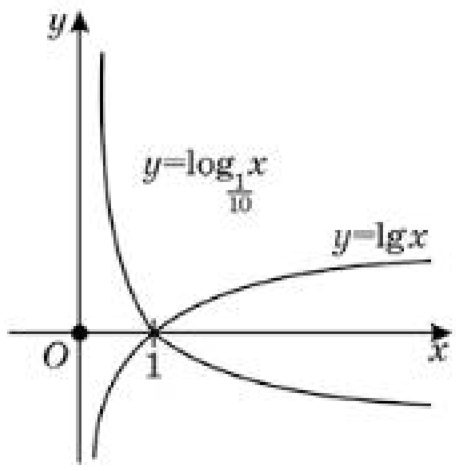
Ечиш. Қўрилаётган функцияларнинг жойлашувини аниқлаш учун аввал уларнинг тақрибий қийматлари жадвалини тузамиз:

32-жадвал

x	0,1	1	10	...
$\lg x$	–1	0	1	...

33-жадвал

x	0,1	1	10	...
$\log_{\frac{1}{10}} x$	1	0	–1	...



60.3-расм

Топилган нуқталарнинг координаталари бўйича битта координаталар текислигида берилган ҳар икки функциянинг ҳам графигини ясаймиз (60.3-расм). Асослари ўзаро тескари сонлар бўлган логарифмик функцияларнинг графиги Ox ўқига нисбатан симметрик, уни 60.3-60.3-расмдан кўриш мумкин.

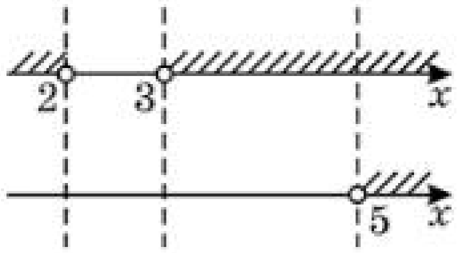
Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳасини топишни ўрганасиз.

МИСОЛ

2. $y = \lg(x^2 - 5x + 6) + \dfrac{\log_2 \sqrt{x-5}}{17}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз.

Ечиш. Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси фақатгина мусбат сонлар эканлигини эътиборга олиб, ушбу тенгсизликлар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x - 5 > 0. \end{cases}$$



60.4-расм

Тенгсизликлар системасининг ҳар бир тенгсизлиги ечимини координаталар тўғри чизиғида тасвирлаймиз (60.4-расм). Ушбу тенгсизликларнинг ечимлар тўпламининг кесишмаси, яъни $(5; +\infty)$ оралиқ берилган функциянинг аниқланиш соҳаси бўлади.

Жавоб: $(5; +\infty)$.

1. Логарифмик функция билан кўрсаткичли функциянинг хоссаларида қандай ўхшашлик ва фарқ бор?
2. Кўрсаткичли функциянинг ($y = a^x$) графигидан қандай ҳаракатдан (геометрик шакл алмаштиришдан) фойдаланиб, логарифмик функциянинг ($y = \log_a x$) графигини ҳосил қилиш мумкин?
3. Барча логарифмик функцияларнинг графиклари қандай нуқта орқали ўтади? Жавобингизни тушунтиринг.

Машқлар

А

21.1. $y = f(x)$ функция графигининг тасвирини ясанг:

1) $f(x) = \log_5 x$; 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$;

3) $f(x) = \log_{12,4} x$; 4) $f(x) = \log_{0,9} x$.

21.2. $y = f(x)$ функциянинг ўсувчи ёки камаювчи бўлишини аниқланг:

1) $f(x) = \log_3 x$; 2) $f(x) = \log_{0,1} x$;

3) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; 4) $f(x) = \lg x$.

21.3. Аргументнинг қандай қийматларида $y = \log_2 x$ функциянинг мос қийматлари мусбат ва қандай қийматлари манфий бўлади? 1) $0 < a < 1$; 2) $a > 1$ ҳоллар учун кўриб чиқинг.

21.4. 1) $\lg 7 > \lg 5$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 7 < \log_{\frac{1}{3}} 5$ тенгсизлик тўғри бўлишини логарифмик функциянинг қандай хоссасига суяниб айтиш мумкин?

$y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг **(21.5–21.7)**:

21.5. 1) $f(x) = \log_2(x + 1)$; 2) $f(x) = \log_{0,7}(x - 8)$;
3) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3x + 4)$; 4) $f(x) = \log_5(2x - 1)$.

21.6. 1) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(2 - x)$; 2) $f(x) = \log_{2,5}(5 - 2x)$;
3) $f(x) = \log_6(11 - 4x)$; 4) $f(x) = \log_7(6 - 5x)$.

21.7. 1) $f(x) = \lg(3x - 1) + \lg(x^2 + x + 1)$;
2) $f(x) = \lg(x - 5) + \lg(x^2 + x + 2)$;
3) $f(x) = \log_3(x - 1) + \log_2(x + 5)$;
4) $f(x) = \log_7(3 - x) - \log_{0,3}(x + 2)$.

B

21.8. $y = f(x)$ функциянинг графигини ясаб, хоссаларини айтинг:
1) $f(x) = \log_3 x + 2$; 2) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x - 4$;
3) $f(x) = -\log_2 x$; 4) $f(x) = 2 - \log_4(x + 3)$.

21.9. $y = f(x)$ функцияга тескари бўлган функциянинг графигини ясанг:
1) $f(x) = 4^x$; 2) $f(x) = 0,2^x$; 3) $f(x) = 2^{x+1}$; 4) $f(x) = 3^x - 2$.

$y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг **(21.10—21.12)**:

21.10. 1) $f(x) = \sqrt{x + 2} - \log_{1,1}(6 - 2x)$;
2) $f(x) = \sqrt{3 - x} + \log_5(9 + 4x)$;
3) $f(x) = \log_2(x^2 - 1) + \sqrt{5 - x}$;
4) $f(x) = \log_{0,8}(1 - x^4) - \sqrt{x - 0,7}$.

21.11. 1) $f(x) = \log_3(x(x - 3)) - \log_3(x + 4)$;
2) $f(x) = \ln(3 + 5x) - \ln(4 - 9x^2)$;
3) $f(x) = \log_{0,5}(x^2 + x) + \sqrt{2 - x}$;
4) $f(x) = \sqrt{1 - x} + \ln(9 - x^2)$.

21.12. 1) $f(x) = \dfrac{\lg\left(3 + 2x - x^2\right)}{2 - x}$; 2) $f(x) = \dfrac{\ln\left(x^2 + 5x\right)}{x - 7}$;
3) $f(x) = \lg|x - 3| + \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$; 4) $f(x) = 10\lg|x + 4| - \dfrac{3}{\sqrt{8 - x}}$.

C

21.13. Геометрик прогрессияни ташкил этувчи 1; 2; 4; 8; ... аргументнинг қийматлари учун $y = \log_{\sqrt{2}} x$ логарифмик функциянинг қийматлари қандай сонлар кетма-кетлигини ташкил этади? Кетма-кетликни ёзинг. Хулоса чиқаринг.

21.14. $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = \log_{x-2}\left(\frac{2x}{x+1} - 1\right)$; 2) $f(x) = \log_{x+5}\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)$;

3) $f(x) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{9-x^2}\right)$; 4) $f(x) = \log_{3-x}\frac{x^2-4}{x}$.

21.15. $y = f(x)$ функциянинг графигини ясанг:

1) $f(x) = \lg|x^2 - 1|$; 2) $f(x) = \lg|x - 3|$;

3) $f(x) = |\lg|x||$; 4) $f(x) = 4 - |\log_3|x - 1||$.

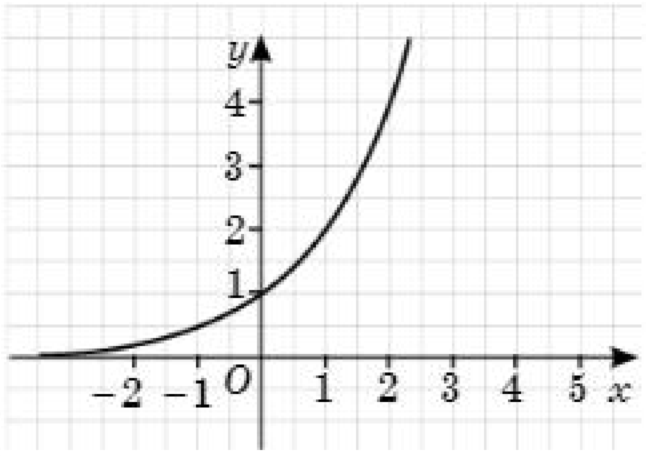
ТАКРОРЛАШ

21.16. Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг:

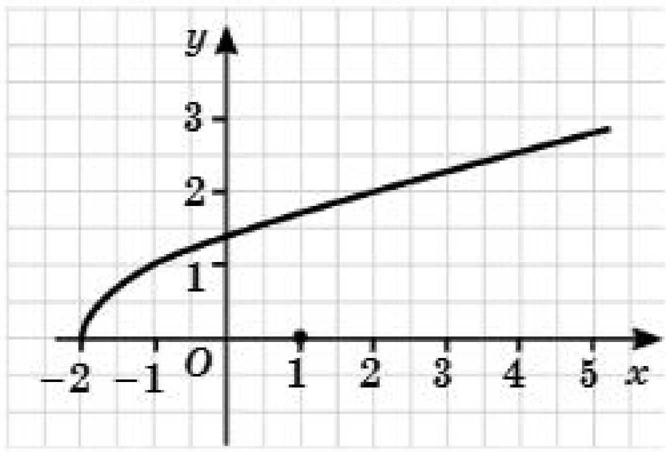
1) $z^4 - z^2 - 12 = 0$; 2) $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$;

3) $z - 3 + 2\sqrt{z-3} = 8$; 4) $(z + 1)^2(z^2 + 2z) = 12$.

21.17. Графиги 61-расмда тасвирланган функциянинг аналитик формуласини ёзинг:



1)



2)

61-расм

21.18. Иккита ўйин суяги ташланди. Тушган очколарнинг кўпайтмаси қиймати 1) 6; 2) 3 сонига тенг бўлиш эҳтимолини топинг.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Функция, тескари функция, ўзаро тескари функцияларнинг графиклари, функциянинг графигига ўтказилган уринма, бурчак коэффициенти, узлуксиз функция, функциянинг ҳосиласи, кўрсаткичли функция, унинг хоссалари ва графиги, логарифмик функция, унинг хоссалари ва графиги.

22-§. КЎРСАТКИЧЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ ВА ИНТЕГРАЛИ. ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

Сиз кўрсаткичли функциянинг ҳосиласини топишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Кўрсаткичли функция, логарифмик функция, ҳосила, бошланғич функция, аниқ интеграл

СИЗ БИЛАСИЗ: $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ функциянинг графиги исталган нуқтадан уринма ўтказиш мумкин бўлган узлуксиз эгри чизиқни бериши сизларга маълум. Функция графигининг исталган нуқтасида уринманинг мавжуд бўлиши эса функциянинг исталган нуқтада дифференциалланишига тенг кучли тушунча. Шу сабабли кўрсаткичли функция дифференциалланади деб айтиш мумкин. Исталган кўрсаткичли функциянинг графиги (0; 1) нуқта орқали ўтиши маълум.

$y = a^x$ функция графигига (0; 1) нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этадиган бурчакни кўриб чиқамиз. Бу бурчакнинг катталиги a нинг қийматига боғлиқ. Масалан, $a = 2$ бўлса, у ҳолда у бурчак тахминан 34° га, $a = 3$ бўлса, у ҳолда 48° га тенг. Бошқача айтганда, a нинг қиймати 2 дан 3 гача ортганда $y = a^x$ функциянинг графигига (0; 1) нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти $\mathrm{tg}34^\circ$ дан $\mathrm{tg}48^\circ$ гача ўсади.

Шу сабабли уринмаси Ox ўқи билан 45° бурчак ҳосил қиладиган кўрсаткичли функциянинг графиги мавжуд деб ҳисоблаймиз. Бу функциянинг асоси — e сони. У ҳолда $y = e^x$ кўрсаткичли функцияга эга бўламиз (62.1-расм).

Шундай қилиб, $y = a^x$ функция графигининг қуйидаги хоссага эга бўлган a асоси мавжуд деб ҳисоблаймиз. (1; 0) нуқта орқали шу функцияга ўтказилган уринма Ox ўқининг мусбат йўналиши билан 45° бурчак ясайди.

(0; 1) нуқтада $y = e^x$ функцияга ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти $\mathrm{tg}45^\circ$, яъни 1 сонига тенг. У бошқача ҳам ифодаланиши мумкин. Бунинг учун x_0 нуқтада x қийматга Δx орттирма берамиз. У ҳолда y мос равишда $e^{\Delta x}$ қийматни қабул қилади. $A(0;\ 1)$ ва $B(\Delta x;\ e^{\Delta x})$ нуқталар орқали кесувчи ўтказамиз. Бу кесувчи билан Ox ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчакни β деб белгилаймиз (62.2-расм).

У ҳолда $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

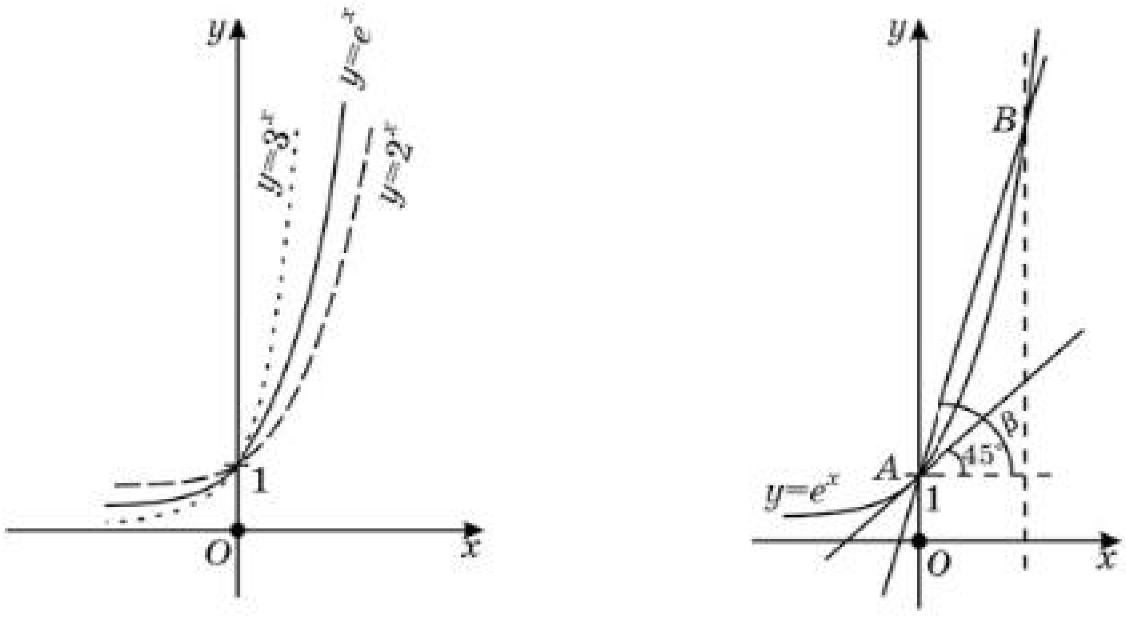
$\Delta x \to 0$ бўлганда кесувчи $A(0;\ 1)$ нуқтада $y = e^x$ функциянинг графигига ўтказилган уринмага ўтади.

Демак, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \mathrm{tg}45^\circ = 1.$

Шундай қилиб,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1 \text{ ёки } \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1 \qquad (1)$$

тенгликка эга бўламиз.



1) 2)

62-расм

1-теорема. *$y = e^x$ функция аниқланиш соҳасининг исталган нуқтасида дифференциалланувчи ва*

$$y' = (e^x)' = e^x. \qquad (2)$$

Исботи. Аввал $y = e^x$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1).$$

(1) тенгликдан фойдаланиб

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}$$

эга бўламиз. Ҳосиланинг таърифига кўра

$$y' = e^x \text{ ёки } (e^x)' = e^x.$$

МИСОЛ

1. $f(x) = e^{5x}$ функциянинг ҳосиласини топамиз.

Ечиш. Берилган функциянинг ҳосиласини топиш учун (2) формулани ва мураккаб функция ҳосиласини топиш формуласидан фойдаланамиз: $f(x) = (e^{5x})' = e^{5x} \cdot (5x)' = 5e^{5x}$.

Жавоб: $5e^{5x}$.

Натурал логарифм — асоси e бўлган логарифм эканлиги маълум: $\ln x = \log_e x$. Асосий логарифмик айният бўйича $e^{\ln a} = a$, чунки $e^{\ln a} = e^{\log_e a} = a$. Бундан исталган $y = a^x$ кўрсаткичли функцияни қуйидагича ёза оламиз: $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$ ёки

$$a^x = e^{x \ln a}. \qquad (3)$$

2-теорема. *Исталган a мусбат сон учун $y = a^x$ функция аниқланиш соҳасининг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи ва*

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (4)$$

Исботи. $y = a^x$ функцияни $a^x = e^{x\ln a}$ кўринишда ёзиб ва (2) формуладан фойдаланиб, унинг ҳосиласини топамиз:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a. \ \square$$

МИСОЛ

2. $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топамиз:
1) $f(x) = 7^x$; 2) $f(x) = 4^{-3x}$.

Ечиш. Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласини топиш формуласи (4) ва мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш формуласидан фойдаланамиз:

1) $(7^x)' = 7^x\ln 7$; 2) $(4^{-3x})' = 4^{-3x} \cdot \ln 4 \cdot (-3x)' = -3 \cdot 4^{-3x}\ln 4$.

Жавоб: 1) $7^x\ln 7$; 2) $-3 \cdot 4^{-3x} \ln 4$.

МИСОЛ

3. $y = xe^x$ функциянинг ўсувчи (камаювчи) бўлишини аниқлаб, экстремумга текширамиз.

Ечиш. Бунинг учун функциянинг ҳосиласини топамиз:
$y' = (xe^x)' = x' \cdot e^x + x\,(e^x)' = e^x + xe^x = e^x\,(1 + x)$ ёки $y' = e^x\,(1 + x)$.

$e^x > 0$ эканлигидан, исталган x учун y' нинг ишораси $1 + x$ ифоданинг ишораси билан бир хил. Демак, $(-1; +\infty)$ оралиқда $y' > 0$. $y = xe^x$ функция R тўпламда узлуксиз бўлганлигидан, у $x = -1$ нуқтада узлуксиз. У ҳолда $[-1; +\infty)$ оралиқда функция ўсади. $(-\infty; -1)$ оралиқда эса $y' < 0$, у ҳолда $(-\infty; -1]$ оралиқда функция камаювчи. Ҳосила $x_0 = -1$ нуқтада нолга тенг ва шу нуқтадан ўтганда ишорасини минусдан плюсга алмаштиради. Шу сабабли $x_0 = -1$ нуқта минимум нуқта бўлади.

Жавоб: $[-1; +\infty)$ — ўсади, $(-\infty; -1]$ — камаяди, $x = -1$ минимум нуқтаси.

Сиз логарифмик функциянинг ҳосиласини топишни ўрганасиз.

$y = a^x$ кўрсаткичли функция графигининг исталган нуқтасида уринма ўтказиш мумкин. Уринма эса функциянинг исталган нуқтада дифференциалланувчи эканлигини кўрсатади. $y = a^x$ ва $y = \log_a x$ функциялар ўзаро тескари. Шу сабабли логарифмик функциянинг графиги кўрсаткичли функция графигига $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик ва узлуксиз функция бўлади. У ҳолда логарифмик функция графигининг ҳар бир нуқтаси орқали уринма ўтказиш мумкин. Демак, логарифмик функция ўзининг аниқланиш соҳасидаги исталган нуқтада дифференциалланувчи.

Логарифмик функция ҳосиласини топиш формуласини бермасдан аввал ўзаро тескари функциялар ҳосилалари орасидаги муносабатни кўриб чиқамиз.

3-теорема. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ўзаро тескари функциялар бўлса ва шу функциялардан бири, масалан, $f(x)$ функция x_0 нуқтада нолдан фарқли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шу функцияга тескари функциянинг x_0 нуқтадаги нолдан фарқли ҳосиласи мавжуд, бу ҳосила $g(x)$ функция ҳосиласининг тескари катталигига тенг, яъни*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (5)$$

Исботи. Тескари функциянинг ҳосиласи

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

формула орқали аниқланади.

Логарифмик функциянинг ҳосиласи ушбу формула билан аниқланади:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (6)$$

Ўзаро тескари функциялар ҳосилалари орасидаги муносабатни кўрсатувчи (5)-формуладан фойдаланиб; (6) формуланинг тўғри бўлишини мустақил исботланг.

$\ln e = 1$ бўлгани учун $y = \ln x$ функциянинг ҳосиласини топиш формуласи қуйидагича аниқланади:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (7)$$

МИСОЛ

4. $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топамиз:
1) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$; 2) $f(x) = \ln(2 + 5x)$.

Ечиш. 1) Логарифмик функциянинг ҳосиласини топиш формуласи (6) бўйича $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)' = \frac{1}{x \ln \frac{1}{3}}$ ни ҳосил қиламиз.

2) (7) ва мураккаб функция ҳосиласини топиш формулаларидан фойдаланамиз. У ҳолда $(\ln(2 + 5x))' = \frac{5}{2 + 5x}$.

Жавоб: 1) $\frac{1}{x \ln \frac{1}{3}}$; 2) $\frac{5}{2 + 5x}$.

МИСОЛ

5. $y = x^2 \ln x$ функциянинг ўсувчи (камаювчи) бўлишини аниқлаб, экстремумга текширамиз.

Ечиш. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топиш алгоритмидан фойдаланамиз. Аввал функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = 2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right).$$

Функциянинг ҳосиласи нолга тенг бўладиган нуқталарни топамиз:

$$2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right) = 0, \text{ у ҳолда } x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$x > 0$ эканлигини эътиборга олиб $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ оралиқларни оламиз.
Ушбу оралиқларда ҳосиланинг ишорасини аниқлаймиз: $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ оралиқда $y' > 0$, у ҳолда берилган функция $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ оралиқда ўсади. $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ оралиқда $y' < 0$, демак, бу оралиқда функция камаювчи. У ҳолда $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ нуқтада функция ҳосиласининг ишораси минусдан плюсга алмашади. Шу сабабли бу нуқта функциянинг минимум нуқтаси бўлади.

Жавоб: $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ — ўсувчи, $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ — камаювчи, $x_{min} = 1$.

Сиз кўрсаткичли функциянинг интегралини топишни ўрганасиз.

Кўрсаткичли ва даражали функцияларнинг ҳосиласини топиш формулалари билан бир қаторда интегрални топиш формулалари қўлланилади:

$$\int e^x dx = e^x + C; \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

МИСОЛ

6. $y = -\frac{4}{x}$, $y = -1$, $x = 1$ ва $x = 3$ эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топамиз.

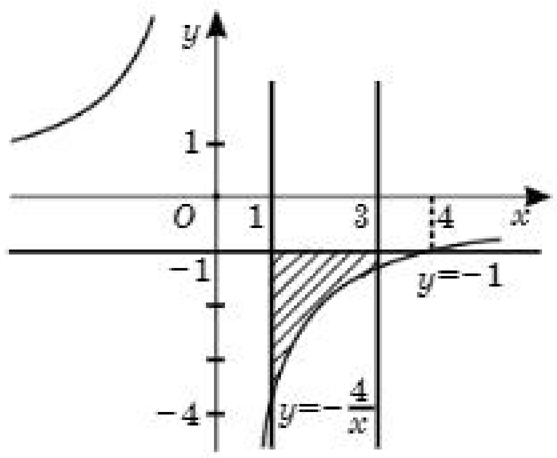
Ечиш. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигура 63-расмда тасвирланган.

Ушбу фигуранинг юзини топиш учун интеграллаш чегараларини аниқлаймиз. Бу чегаралар мисолнинг берилганида кўрсатилган: $a = 1$, $b = 3$.

Ясси фигура юқоридан $y = -1$ функция графиги, қуйидан эса $y = -\frac{4}{x}$ функциянинг графиги билан чегараланган. Бундан

$$S = \int_1^3 \left(-1 + \frac{4}{x}\right) dx = (-x + 4\ln|x|)\Big|_1^3 =$$

$$= -3 + 4\ln 3 + 1 - 4\ln 1 = 4\ln 3 - 2.$$



63-расм

Жавоб: $4\ln 3 - 2$ (кв. бирл.).

1. Нима учун кўрсаткичли функция ҳосиласини топиш формуласини келтириб чиқарганда $y = a^x$ функциядан $y = e^x$ функция алоҳида кўрсатилади?
2. Логарифмик функция ҳосиласининг формуласини келтириб чиқариш учун қандай шакл алмаштиришларга суянамиз?
3. $y = e^x$ ва $y = \ln x$ функциялар ҳосилалари орасида қандай боғланиш бор?

Машқлар

А

22.1. $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = 3^{x^2-7x}$; 2) $f(x) = 2^{x+3x^2}$;
3) $f(x) = 0{,}8^{1-x^3}$; 4) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{4-x}$.

22.2. $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласининг қийматини топинг:

1) $f(x) = 7 + x - 5\ln x$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = 4 + \frac{1}{8}\ln 2x$, $x_0 = 3$.

22.3. Агар:
1) $f(x) = \log_{0,5}(2 + x)$ бўлса, у ҳолда $f'(1)$;
2) $f(x) = \log_3(5 + x)$ бўлса, у ҳолда $f'(4)$;
3) $f(x) = 0{,}2^{x-3}$ бўлса, у ҳолда $f'(4)$;
4) $f(x) = 2{,}5^{x-1}$ бўлса, у ҳолда $f'(2)$ нинг қийматини ноль билан таққосланг.

22.4. $y = f(x)$ функциянинг графигига x_0 нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

1) $f(x) = x\ln x$, $x_0 = 0{,}5$; 2) $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$, $x_0 = 2$.

22.5. $y = f(x)$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

1) $f(x) = 2\ln x + x^{-2}$; 2) $f(x) = x^2 \cdot e^x$;
3) $f(x) = x^3 \cdot e^{-3x}$; 4) $f(x) = x^3 - 3\ln(2x)$.

22.6. $y = f(x)$ функциянинг берилган оралиқда камаювчи бўлишини исботланг:

1) $f(x) = x\ln x$ ва $\left(0; \frac{1}{e}\right)$;

2) $f(x) = x - \ln(2x - 1)$ ва $(0{,}5; 1{,}5)$.

22.7. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

2) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 10$;

Функциянинг ҳосиласи нолга тенг бўладиган нуқталарни топамиз:

$$2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right) = 0, \text{ у ҳолда } x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$x > 0$ эканлигини эътиборга олиб $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ оралиқларни оламиз. Ушбу оралиқларда ҳосиланинг ишорасини аниқлаймиз: $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ оралиқда $y' > 0$, у ҳолда берилган функция $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ оралиқда ўсади. $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ оралиқда $y' < 0$, демак, бу оралиқда функция камаювчи. У ҳолда $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ нуқтада функция ҳосиласининг ишораси минусдан плюсга алмашади. Шу сабабли бу нуқта функциянинг минимум нуқтаси бўлади.

Жавоб: $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$ — ўсувчи, $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ — камаювчи, $x_{min} = 1$.

Сиз кўрсаткичли функциянинг интегралини топишни ўрганасиз.

Кўрсаткичли ва даражали функцияларнинг ҳосиласини топиш формулалари билан бир қаторда интегрални топиш формулалари қўлланилади:

$$\int e^x dx = e^x + C; \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

МИСОЛ

6. $y = -\frac{4}{x}$, $y = -1$, $x = 1$ ва $x = 3$ эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топамиз.

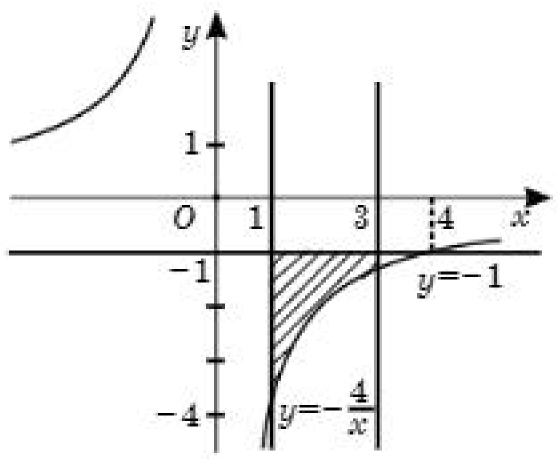
Ечиш. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигура 63-расмда тасвирланган.

Ушбу фигуранинг юзини топиш учун интеграллаш чегараларини аниқлаймиз. Бу чегаралар мисолнинг берилганида кўрсатилган: $a = 1$, $b = 3$.

Ясси фигура юқоридан $y = -1$ функция графиги, қуйидан эса $y = -\frac{4}{x}$ функциянинг графиги билан чегараланган. Бундан

$$S = \int_1^3 \left(-1 + \frac{4}{x}\right) dx = (-x + 4\ln|x|)\Big|_1^3 =$$

$$= -3 + 4\ln 3 + 1 - 4\ln 1 = 4\ln 3 - 2.$$



63-расм

Жавоб: $4\ln 3 - 2$ (кв. бирл.).

1. Нима учун кўрсаткичли функция ҳосиласини топиш формуласини келтириб чиқарганда $y = a^x$ функциядан $y = e^x$ функция алоҳида кўрсатилади?
2. Логарифмик функция ҳосиласининг формуласини келтириб чиқариш учун қандай шакл алмаштиришларга суянамиз?
3. $y = e^x$ ва $y = \ln x$ функциялар ҳосилалари орасида қандай боғланиш бор?

Машқлар

А

22.1. $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = 3^{x^2-7x}$; 2) $f(x) = 2^{x+3x^2}$;

3) $f(x) = 0{,}8^{1-x^3}$; 4) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{4-x}$.

22.2. $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласининг қийматини топинг:

1) $f(x) = 7 + x - 5\ln x$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = 4 + \frac{1}{8}\ln 2x$, $x_0 = 3$.

22.3. Агар:

1) $f(x) = \log_{0,5}(2 + x)$ бўлса, у ҳолда $f'(1)$;
2) $f(x) = \log_3(5 + x)$ бўлса, у ҳолда $f'(4)$;
3) $f(x) = 0{,}2^{x-3}$ бўлса, у ҳолда $f'(4)$;
4) $f(x) = 2{,}5^{x-1}$ бўлса, у ҳолда $f'(2)$ нинг қийматини ноль билан таққосланг.

22.4. $y = f(x)$ функциянинг графигига x_0 нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

1) $f(x) = x\ln x$, $x_0 = 0{,}5$; 2) $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$, $x_0 = 2$.

22.5. $y = f(x)$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

1) $f(x) = 2\ln x + x^{-2}$; 2) $f(x) = x^2 \cdot e^x$;
3) $f(x) = x^3 \cdot e^{-3x}$; 4) $f(x) = x^3 - 3\ln(2x)$.

22.6. $y = f(x)$ функциянинг берилган оралиқда камаювчи бўлишини исботланг:

1) $f(x) = x\ln x$ ва $\left(0; \frac{1}{e}\right)$;

2) $f(x) = x - \ln(2x - 1)$ ва $(0{,}5; 1{,}5)$.

22.7. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

2) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 4$, $x = 10$;

3) $y = -\frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -0{,}3$, $x = -1$;

4) $y = -\frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -2$.

B

22.8. $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласининг қийматини топинг:

1) $f(x) = \frac{5^x}{x^2+1}$, $f'(1)$; 2) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$, $f'(e)$;

3) $f(x) = e^{-x^2}$, $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

22.9. $y = f(x)$ функциянинг бошланғич функциясининг умумий кўринишини топинг:

1) $f(x) = \frac{2}{2x-1}$; 2) $f(x) = e^{3x+2}$.

22.10. Агар:

1) $f(x) = \frac{x^2}{0,5^{1-2x}}$ бўлса, у ҳолда $f'(1)$;

2) $f(x) = \frac{3^{1-2x}}{x^{-4}}$ бўлса, у ҳолда $f'(2)$;

3) $f(x) = \ln(1{,}5 - x) - e^{x-1}$ бўлса, у ҳолда $f'(1)$;

4) $f(x) = \ln(2 - 3x) + x$ бўлса, у ҳолда $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ нинг қийматини ноль билан таққосланг.

22.11. 1) $f(x) = x \cdot e^{2x-1}$ функциянинг $[-0{,}5; +\infty)$ оралиқда ўсишини;

2) $f(x) = \log_5(1 - 3x)$ функциянинг $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ оралиқда камайишини исботланг.

22.12. $y = f(x)$ функциянинг графигига x_0 нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

1) $f(x) = \ln(2x) + x^{-1}$, $x_0 = 0{,}5$;

2) $f(x) = e^{1+2x} - 4x^3$, $x_0 = -0{,}5$;

3) $f(x) = \ln(-0{,}5x) - x^2$, $x_0 = -2$;

4) $f(x) = e^{1-2x} - x^{-2}$, $x_0 = 0{,}5$.

22.13. $y = f(x)$ функциянинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг:

1) $y = x + \ln(-x)$, $[-4; 0{,}5]$; 2) $y = x + e^{-x}$, $[-\ln4; \ln2]$.

Бунда $\ln2 \approx 0{,}7$ деб олинг.

22.14. Берилган эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $y = 4$, $x = e$; 2) $y = 1 + e^x$, $x = 0$, $x = -4$, $y = 3$.

C

22.15. 1) $f(x) = e^{-1-x} + \ln(1 - e^x)$ бўлса, у ҳолда $f'(-1)$;
2) $f(x) = e^{1+2x}\ln(-x)$ бўлса, у ҳолда $f'(-0,5)$ нинг қийматини ноль билан таққосланг.

22.16. 1) $y = 0,4^{1-5x}$ функциянинг барча ҳақиқий сонлар тўпламида ўсишини;
2) $f(x) = 2^{1-2x}$ функциянинг барча ҳақиқий сонлар тўпламида камайишини;
3) $\varphi(x) = x^3 + e^{2+3x}$ функциянинг барча ҳақиқий сонлар тўпламида ўсишини;
4) $h(x) = e^{-x} - x^5$ функциянинг барча ҳақиқий сонлар тўпламида камайишини исботланг.

22.17. $y = f(x)$ функция графигига x_0 нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

1) $f(x) = e^{3x-6}$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = x^{-2} \cdot \ln(4x + 3)$, $x_0 = -0,5$;
3) $f(x) = x^{-3} \cdot \ln(2x - 3)$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = x^{-2} \cdot e^{1+2x}$, $x_0 = -0,5$.

22.18. $y = x + 2\ln x$ функциянинг ҳосиласи:
1) нолга тенг; 2) мусбат; 3) манфий; 4) номанфий бўладиган x нинг қийматларини топинг.

22.19. $[2; e^2]$ оралиқда $f(x) = x^2 - 2\ln x$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

22.20. $y = e^{2x}$ функция графиги, $(0; 1)$ нуқтада шу графикка ўтказилган уринма ва $x = 1$ тўғри чизиқ билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг.

АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

22.21. *Кўрсаткичли ва логарифмик функциялар* тушунчаларининг ривожланиш тарихи бўйича ахборот тайёрланг.

ТАКРОРЛАШ

22.22. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\left(\left(b^{-\frac{3}{7}} \cdot y^{-0,8}\right)^3 \cdot b^{\frac{3}{7}} \cdot y^{0,4}\right)^{-1}$; 2) $\left(\left(a^{-\frac{2}{7}} \cdot y^{\frac{3}{14}}\right)^{3,5} \cdot y^{\frac{7}{4}} \cdot a^{-3}\right)^{-1}$.

22.23. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $4^{1-\log_2 1,5-\log_2 \frac{1}{3}} - \log_3 243$; 2) $\log_9 27 + \dfrac{\log_3 6}{\log_{18} 3} - \dfrac{\log_3 2}{\log_{54} 3}$.

22.24. x_0 нуқтада $f(x)$ функция ҳосиласининг қийматини топинг:

1) $f(x) = (3x - 1)^2 - 2\sqrt{x^5}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = 6x^{\frac{7}{3}} - 5\sqrt[5]{x^2} - 3x + 1$, $x_0 = 1$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $y = \dfrac{x+2}{343 - 49^x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

A) $(-\infty; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$; B) $(-\infty; 1,5) \cup (1,5; 2) \cup (2; +\infty)$;
C) R; D) $(-\infty; -1,5) \cup (-1,5; +\infty)$.

2. $\log_{1,2}\left[\dfrac{25}{36} \cdot \left(\dfrac{6}{5}\right)^{3,2}\right]$ ифоданинг қийматини топинг:

A) $-1,2$; B) $1,2$; C) $-\dfrac{5}{6}$; D) $-5,2$.

3. $\left(\dfrac{1}{625}\right)^{-\log_5 a} - 49^{1+\log_7 a}$ ифодани соддалаштиринг:

A) $49a^2 - a^4$; B) $a^2 - 49a^4$; C) $a^4 - 49a^2$; D) $a^4 + 49a^2$.

4. $y = \log_{3,4}(-2x^2 + 3x - 1)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

A) $(-1; -0,5)$; B) $(-\infty; 0,5) \cup (1; +\infty)$;
C) $(0,5; 1)$; D) $(-\infty; 0,5] \cup [1; +\infty)$.

5. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; 1; $4^{-\sqrt{3}}$; 8 сонларни ўсиш тартибида жойлаштиринг:

A) $4^{-\sqrt{3}}$; 8; 1; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; B) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; $4^{-\sqrt{3}}$; 1; 8;

C) 8; 1; $4^{-\sqrt{3}}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$; D) $4^{-\sqrt{3}}$; 1; 8; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$.

6. $\log_{22} 9 = a$ ва $\log_{22} 46 = b$ эканлиги маълум. $\log_{81} 414$ ни топинг:

A) $\dfrac{a+b}{2a}$; B) $\dfrac{a+b}{2b}$; C) $\dfrac{b-a}{2b}$; D) $\dfrac{a+b}{b}$.

7. $y = \log_7(\cos 2x)$ функциянинг $x = \dfrac{\pi}{8}$ бўлганда ҳосиласининг қийматини топинг:

A) $-\dfrac{2}{\ln 7}$; B) $\dfrac{2}{\ln 7}$; C) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{\ln 7}$; D) $2\ln 7$.

8. Абсциссаси $x = -1$ бўлган нуқтада $y = xe^{-3x} + 4$ функция графигига ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

A) $y = 4e^3x + 3e^3 + 4$; B) $y = 2e^3x + 3e^3$;
C) $y = 4e^3x - 5e^3 + 4$; D) $y = e^3x + 3e^3 - 4$.

9. $y = x^3 - 3\ln x$ функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

A) R — ўсувчи;
B) $[1; +\infty)$ — ўсувчи, $(0; 1]$ — камаювчи;
C) $(0; 1]$ — ўсувчи, $[1; +\infty)$ — камаювчи;
D) $(0; +\infty)$ — ўсувчи.

10. $y = 0{,}5x^2 - 6x + 2\ln x^4$ функциянинг экстремум нуқталарини топинг:

A) $x_{max} = 4$, $x_{min} = 2$; B) экстремум нуқталари мавжуд эмас;
C) $x_{max} = 2$, $x_{min} = 4$; D) $x_{max} = 1$, $x_{min} = 8$.

11. $[-1; 2]$ кесмадаги $y = x^2e^x$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топинг:

A) $4e^2; \frac{1}{e}$; B) $\frac{1}{e}; 0$; C) $e; 0$; D) $4e^2; 0$.

12. $\int_1^2 \left(3^x - \frac{3}{x}\right)dx$ интегрални ҳисобланг:

A) $\frac{6}{\ln 3} + 3\ln 2$; B) $\frac{3}{\ln 3} - \ln 8$;
C) $\frac{6}{\ln 3} - 3\ln 2$; D) $\frac{9}{\ln 3} - 3\ln 2$.

13. $y = 0{,}5^x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ эгри чизиқлар билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

A) $2\ln 2 + 0{,}75$; B) $\frac{2\ln 2 + 1}{4\ln 2}$;
C) $\frac{1}{4\ln 2}$; D) $\frac{\ln 4 - 1}{4\ln 2}$.

Математик саводхонлик бўйича тест топшириқлари

14. Иш куни бошланганда Чўлпон, Ойгул ва Равшан салфетка ясашга буюртма олишди. Ойгул шу буюртмани 8 соатда, Чўлпон 9 соатда, Равшан 12 соатда бажаради. Уста буюртмаларни бирлаштириб, ишни 8 соатда бажариш кераклигини айтди. Уларнинг биргаликдаги иш унумдорлигини топинг. Улар шу ишни 8 соатда бажара оладими:

A) $\frac{25}{72}$, йўқ; B) $\frac{23}{72}$, йўқ; C) $\frac{23}{72}$, бажара олади;
D) $\frac{25}{72}$, бажара олади; E) $\frac{7}{36}$, йўқ?

15. Омонатчи депозитга 100000 тг солмоқчи бўлди. Биринчи банкда омонат йилига 12% га, иккинчи банкда эса ой сайин 1% га ўсади. Қайси банкда даромад ортиқ ва қанча ортиқ бўлади:
A) биринчи банк, 680 тг га ортиқ;
B) биринчи банк, 775 тг га ортиқ;
C) иккала банкда бир хил;
D) иккинчи банк, 682 тг га ортиқ;
E) иккинчи банк, 648 тг га ортиқ?

16. Марат, Даврон, Азамат ва Сардор математик олимпиадада дастлабки тўртта ўринни эгаллади. “Қайси бири қандай ўрин эгаллади?” деган саволга қуйидаги жавоблар берилди:
1) Даврон — иккинчи, Марат — учинчи;
2) Сардор — иккинчи, Даврон — биринчи;
3) Азамат — иккинчи, Марат — тўртинчи.
Агар ҳар бир жавобнинг бир қисми тўғри бўлса, у ҳолда ҳар бир боланинг эгаллаган ўринларини топинг:
A) Марат — III ўрин, Азамат — II ўрин, Даврон — I ўрин, Сардор — IV ўрин;
B) Марат — II ўрин, Азамат — I ўрин, Даврон — II ўрин, Сардор — IV ўрин;
C) Марат — IV ўрин, Азамат — I ўрин, Даврон — II ўрин, Сардор — III ўрин;
D) Марат — III ўрин, Азамат — I ўрин, Даврон — IV ўрин, Сардор — II ўрин;
E) Марат — IV ўрин, Азамат — II ўрин, Даврон — I ўрин, Сардор — III ўрин.

17. $f(x)$ — даврий функция, даври $T = 4$ ва $f(1) = 3$, $f(4) = 5$. $2f(0) - 3f(9)$ ифоданинг қиймати:

A) 4; B) −1; C) −3; D) 2; E) 1.

18. Инфузория туфелькаси иккига бўлиниш орқали кўпаяди. Агар олти марта бўлингандан кейин уларнинг сони 320 та бўлса, у ҳолда дастлабки инфузориялар сонини топинг:

A) 3; B) 4; C) 6; D) 5; E) 7.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Ифода, ифодаларни айнан шакл алмаштириш, кўрсаткичли функция ва унинг хоссалари, тенглама, тенгламалар системаси, тенг кучли тенгламалар, тенг кучли тенгламалар системаси.

VII БОБ

КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

23-§. КЎРСАТКИЧЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ВА УЛАРНИНГ СИСТЕМАЛАРИ

Сиз *кўрсаткичли тенглама* тушунчаси билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, кўрсаткичли тенглама, даражанинг асоси, даража кўрсаткичи, чет илдиз, тенгламани ечиш

Ўзгарувчиси даража кўрсаткичида бўлган тенглама ***кўрсаткичли тенглама*** *дейилади.*

$2^x = \frac{1}{16}$; $\sqrt[3]{5^x} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}}$; $3^{x+1} + 3^x = 108$ ва ҳоказо.

Кўрсаткичли тенгламалар уч хил усулда ечилади:

1) бир хил асосга келтириш;
2) янги ўзгарувчи киритиш;
3) график усул.

Сиз кўрсаткичли тенгламани бир хил асосга келтириш усули билан ечишни ўрганасиз.

АЛГОРИТМ

Кўрсаткичли тенгламаларни бир хил асосга келтириш усули билан ечиш алгоритми:

1) тенгламанинг иккала томонини бир хил асосга келтириш;
2) тенгламанинг чап томонидаги даража кўрсаткичини ўнг томонидаги даража кўрсаткичига тенглаштириб, тенг кучли тенглама ҳосил қилиш;
3) ҳосил бўлган тенгламани ечиш;
4) топилган илдизларни тенгламага қўйиб текшириш;
5) берилган тенгламанинг ечимини ёзиш.

МИСОЛ

1. $27^x = \frac{1}{81}$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. 1) Тенгламанинг иккала томонини ҳам бир хил асосга, яъни 3 асосга келтирамиз: $3^{3x} = 3^{-4}$;

2) даража кўрсаткичларини тенглаштирамиз: $3x = -4$;

3) ҳосил бўлган тенгламани ечиб, $x = -\frac{4}{3}$ ни оламиз;

4) ўзгарувчининг топилган қийматларини берилган тенгламани қаноатлантиришини аниқлаймиз: $27^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{81}$ ёки $\frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{81}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{3^{12}}} = \frac{1}{81}$; $\frac{1}{81} = \frac{1}{81}$. Топилган қиймат тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб: $-\frac{4}{3}$.

Сиз кўрсаткичли тенгламани янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечишни ўрганасиз.

АЛГОРИТМ

Кўрсаткичли тенгламаларни янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечиш алгоритми:

1) ўзгарувчиларни янги ўзгарувчи билан алмаштириш орқали алгебраик тенглама ҳосил қилиш;

2) ҳосил бўлган тенгламани ечиш;

3) алгебраик тенгламанинг топилган илдизларини алмаштирилган тенгликка қўйиб, дастлабки ўзгарувчининг қийматларини топиш;

4) топилган қийматларнинг берилган тенгламани қаноатлантиришини текшириш;

5) берилган тенгламанинг ечимини ёзиш.

МИСОЛ

2. $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$ тенгламанинг илдизларини топамиз.

Ечиш. Аввал тенгламаларнинг даражаларини шакл алмаштирамиз:

$3^{2x+5} = 3^{2x} \cdot 3^5 = 243 \cdot 3^{2x}$ ва $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$.

У ҳолда берилган тенглама $243 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 3^x - 2 = 0$ кўринишга келади.

$y = 3^x$, бу ерда $y > 0$, янги ўзгарувчи киритиб, охирги кўрсаткичли тенгламани қуйидагича ёзамиз: $243y^2 - 9y - 2 = 0$, бундан $y_1 = \frac{1}{9}$, $y_2 = -\frac{2}{27}$ илдизларга эга бўламиз.

$y_2 = -\frac{2}{27}$ манфий, $y > 0$ бўлгани учун, $y = \frac{1}{9}$ ҳолдагина x нинг қийматини топамиз.

Топилган $y = \frac{1}{9}$ қийматни $y = 3^x$ тенгликка қўямиз: $\frac{1}{9} = 3^x$ ёки

$3^{-2} = 3^x$, бундан $x = -2$.

Жавоб: -2.

Сиз кўрсаткичли тенгламани график усулда ечишни ўрганасиз.

График усул $a^x = b$ кўринишдаги тенгламалардаги b сонини a сонининг даражаси шаклида алмаштириш мумкин бўлмаган ҳолда қўлланилади. Бундай тенгламанинг илдизларини топиш учун $f(x) = a^x$ ва $g(x) = b$ функцияларнинг графикларини битта координаталар текислигида ясаб, кесишиш нуқталарини аниқлаймиз. Кесишиш нуқталарининг абсциссалари берилган кўрсаткичли тенгламанинг илдизлари бўлади.

Кўрсаткичли тенгламалар системасини ечишни кўриб чиқамиз.

Сиз кўрсаткичли тенгламалар системасини ечишни ўрганасиз.

МИСОЛ

3. $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \dfrac{11}{4}, \\ 2^x - 3^y = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз.

Ечиш. Иккинчи тенгламанинг иккала томонини ҳадлаб 2 га кўпайтирамиз:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = \dfrac{11}{4}, \\ 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -\dfrac{6}{4}. \end{cases}$$

Энди системанинг тенгламаларини ҳадлаб қўшамиз: $5 \cdot 2^x = \dfrac{5}{4}$ ёки $2^x = 2^{-2}$, бундан $x = -2$.

$x = -2$ қийматни системанинг иккинчи тенгламасига қўйиб, y ўзгарувчининг қийматини топамиз: $2^{-2} - 3^y = -\dfrac{3}{4}$, $3^y = 1$, $3^y = 3^0$, $y = 0$.

Жавоб: $(-2; 0)$.

МИСОЛ

4. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз.

Ечиш. 1-*усул.* Тенгламалар системасининг биринчи тенгламасини ҳадлаб иккинчи тенгламага кўпайтирамиз.

Бундан

$$2^x \cdot 3^y \cdot 2^y \cdot 3^x = 12 \cdot 18,$$
$$2^{x+y}\, 3^{x+y} = 216,$$
$$(2 \cdot 3)^{x+y} = (2 \cdot 3)^3$$

ёки

$$x + y = 3.$$

y ўзгарувчини x ўзгарувчи орқали ифодалаймиз: $y = 3 - x$.

Топилган y нинг ифодасини биринчи тенгламага қўямиз:

$$2^x \cdot 3^{3-x} = 12,\ \frac{2^x}{3^{x-3}} = 12,\ \frac{2^x}{3^x \cdot 3^{-3}} = 12,\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{12}{27},\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ ёки}$$

$x = 2$. У ҳолда, $y = 3 - 2 = 1$.

Тенгламалар системасининг ечими: $(2; 1)$.

2-*усул.* Системанинг биринчи тенгламасини ҳадлаб иккинчи тенгламага бўламиз:

$$\frac{2^x \cdot 3^y}{2^y \cdot 3^x} = \frac{12}{18},\ 2^x \cdot 3^y \cdot 2^{-y} \cdot 3^{-x} = \frac{2}{3},\ 2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{3},\ \frac{2^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \text{ ёки } x - y = 1.$$

Энди y ўзгарувчини x ўзгарувчи орқали ифодалаб, $y = x - 1$ ифодани тенгламалар системасидаги тенгламалардан бирига қўйиб, тенгламалар системасининг ечимини $(2; 1)$ оламиз.

Жавоб: $(2; 1)$.

1. Кўрсаткичли тенгламаларни бир хил асосга келтириб ечиш усули мусбат ва 1 га тенг бўлмаган даражанинг қандай хоссасига асосланган?
2. Кўрсаткичли тенглама ҳар доим бир хил асосга келтириш усули билан ечиладими? Жавобингизни тушунтиринг.
3. “Агар $a \neq 1$ ва p — исталган сон бўлса, у ҳолда $a^x = p$ тенгламанинг битта ва фақат битта ҳақиқий $a > 0$ (рационал ёки иррационал) илдизи мавжуд” деган мулоҳаза тўғрими? Жавобингизни тушунтиринг ва мисоллар келтиринг.
4. “x исталган ҳақиқий сон бўлганда a^x кўринишдаги ифодага қўлланиладиган амаллар бутун мусбат кўрсаткичли даражага қўлланиладиган қоидалар каби бажарилади” деган мулоҳаза тўғрими? Жавобингизни тушунтиринг.
5. Кўрсаткичли тенгламани янги ўзгарувчи киритиш орқали ечиш усулининг маъноси қандай?

Машқлар

А

Тенгламани ечинг **(23.1—23.4)**:

23.1. 1) $3^x = 81$; 2) $4^x = 256$; 3) $2^x = \frac{1}{32}$; 4) $5^{x+1} = 125$.

23.2. 1) $8^x = 16$; 2) $25^x = \frac{1}{5}$; 3) $4^{3-2x} = 4^{2-x}$; 4) $2^{x-2} = 1$.

23.3. 1) $2^x + 2^{x+1} = 12$; 2) $7^{x+2} - 7^x = 336$;
3) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$; 4) $5^{x-2} - 5^{x-1} + 5^x = 21$.

23.4. 1) $3^{2x+1} = 9^{2x}$; 2) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$;
3) $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 9 = 0$; 4) $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$.

Тенгламалар системасини ечинг **(23.5-23.6)**:

23.5. 1) $\begin{cases} 5^x + 5^y = 30, \\ 5^x - 5^y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x - y = 1. \end{cases}$

23.6. 1) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 12, \\ 2^x - 3^y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32, \\ x - y = 2. \end{cases}$

В

Тенгламани ечинг **(23.7–23.9)**:

23.7. 1) $(0,1)^{4x^2-2x-2} = (0,1)^{2x-3}$; 2) $(0,3)^{x^2-2x+2} = 0,09$;
3) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} = 5^{x+1} - 5^{x+2}$; 4) $3^{x+2} - 7^{x+2} = 0$.

23.8. 1) $(0,25)^{x^2-4} = 2^{x^2-1}$; 2) $27^{-1} \cdot 9^{2x} = 243$;

3) $\sqrt[4]{5} \cdot 5^{3x} = 125$; 4) $6^{x+1} \cdot \sqrt[3]{6} = 216$.

23.9. 1) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 0$; 2) $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} = 0$;

3) $x^3 \cdot 3^x + 3^{x+3} = 0$; 4) $x^3 \cdot 8^x - 8^{x+1} = 0$.

Тенгламалар системасини ечинг **(23.10-23.11)**:

23.10. 1) $\begin{cases} 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 5^y = 11, \\ 5 \cdot 4^x + 4 \cdot 5^y = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 1, \\ 2^{3x} - 2^{3y} = 7. \end{cases}$

23.11. 1) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648, \\ 3^x \cdot 2^y = 432; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ y - x = 4. \end{cases}$

C

Тенгламани ечинг **(23.12-23.15)**:

23.12. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$; 2) $\sqrt{6-x}\,(5^{x^2-7,2x+3,4} - 25) = 0$;

3) $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0$; 4) $\sqrt{x+3}\,(7^{x^2-6,5x+5} - 49) = 0$.

23.13. 1) $8^x + 3 \cdot 4^x = 12 + 2^{x+2}$;

2) $3^{1+3x} - 9^x = 3^{x+2} - 3$;

3) $16^x + 8^x - 4 \cdot 4^x + 2^x + 1 = 0$;

4) $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$.

23.14. 1) $5^x \cdot \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500$;

2) $x^2 + 4x + 2^{\sqrt{x+2}} + 3 = 0$;

3) $\sqrt{4^{2x} - 3 \cdot 2^{2x}} = 10 - 2^{2x+1}$;

4) $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 6$;

5) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x - \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 14$;

6) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2$.

23.15. 1) $9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{\left|1+\frac{1}{2}x\right|} = \frac{1}{81^x}$; 2) $2^{|x-1|} = 0,5^{1-x}$;

3) $27^{|x+2|} = 81^{x^2-1}$; 4) $(0,2)^{|x+3|} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$.

Тенгламалар системасини ечинг (**23.16-23.17**):

23.16. 1) $\begin{cases} \sqrt[x-1]{49} = \sqrt[y-1]{343}, \\ 3^y = 9^{2x-y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot 2^y = -1, \\ 3^{x+1} + 5 \cdot 2^{y-1} = 14. \end{cases}$

23.17. 1) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 16^y - 4^x = 12, \\ 2^{x+1} - 4^y = 0. \end{cases}$

ТАКРОРЛАШ

23.18. $f(x)$ функциянинг қийматини топинг:

1) $f(x) = \sin^2 3x + \cos^2 3x + e^{3x} - 3^{2x}$; 2) $f(x) = \sin^3 x + 2^{3x} - e^{3-x}$.

23.19. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = \ln\dfrac{x-1}{2x+1}$; 2) $f(x) = \ln\dfrac{(x-1)^2}{x+2}$;

3) $f(x) = \ln\dfrac{(2x-3)^3}{(x+1)^2}$; 4) $f(x) = x^3 + \ln\dfrac{(2x-5)^5}{(2x+3)^4}$.

23.20. Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб, интегрални ҳисобланг:

1) $\int (x-3)\sin x dx$; 2) $\int x^2 \sin x dx$;

3) $\int x e^{3x} dx$; 4) $\int x \sin^2 \dfrac{x}{2} dx$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, тенгламанинг илдизи, тенг кучли тенгламалар, тенгламалар системаси, тенг кучли тенгламалар системаси, алгебраик тенгламаларни ечиш усуллари, алгебраик тенгламалар системасини ечиш усуллари, кўрсаткичли тенгламалар ва уларни ечиш усуллари, соннинг логарифми ва унинг хоссалари, логарифмик функция, логарифмик функциянинг графиги ва хоссалари.

24-§. ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА УЛАРНИНГ СИСТЕМАЛАРИ

Сиз логарифмик тенглама тушунчаси билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, логарифмик тенглама, соннинг логарифми, логарифмнинг асоси, логарифм остидаги ифода, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, тенгламани ечиш

Ўзгарувчиси логарифм белгиси остида ёки логарифм асосида бўлган тенгламалар ***логарифмик тенгламалар*** *дейилади.*

Логарифмик тенгламаларга мисоллар:

1) $\log_2(9^{x-1} + 5) = 4 + \log_2(3^{x+1} + 2)$;

2) $\lg(x + 6) - \lg(x - 3) = 5 - \lg125$;

3) $\lg\sqrt{x} = 4 - \sqrt{\lg x}$;

4) $\ln x = 3\ln(x + 1)$;

5) $\log_x 5 = 7$.

Содда логарифмик тенгламанинг кўриниши:

$$\log_a x = b, \tag{1}$$

бунда a ва b — берилган сонлар, x — эркли ўзгарувчи.

Агар $a > 0$ ва $a \neq 1$ бўлса, у ҳолда бундай тенгламанинг

$$x = a^b$$

кўринишда биттагина илдизи мавжуд.

Мураккаб логарифмик тенгламаларни ечиш алгебраик тенгламаларни ёки (1) кўринишдаги тенгламани ечишга олиб келади.

Логарифмик тенгламани ечиш усулларини кўриб чиқамиз.

Сиз логарифмик тенгламани логарифмнинг таърифидан фойдаланиш орқали ечишни ўрганасиз.

1. *Логарифмнинг таърифидан фойдаланиш орқали ечиладиган тенгламалар*

МИСОЛ

1. $\log_x(x^3 - 5x + 10) = 3$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Логарифмнинг таърифига кўра $x^3 - 5x + 10 = x^3$, у ҳолда $x = 2$.

Топилган ўзгарувчининг қийматини тенгламага қўйиб текширамиз:

$$\log_2(2^3 - 5 \cdot 2 + 10) = \log_2 8 = 3.$$

Демак, $x = 2$ қиймат тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб: 2.

Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси мусбат ҳақиқий сонлар тўплами эканлиги маълум. Шунинг учун логарифмик тенгламаларни ечишда аввал ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами аниқланади. Сўнгра берилган тенглама ечилиб, топилган ўзгарувчи қийматларининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламига тегишлилиги текширилади.

Сиз логарифмик тенгламани бир хил асосга келтириш усули билан ечишни ўрганасиз.

2. *Потенциаллашни қўллаш учун логарифмик тенгламани* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *кўринишга келтириш.*

МИСОЛ

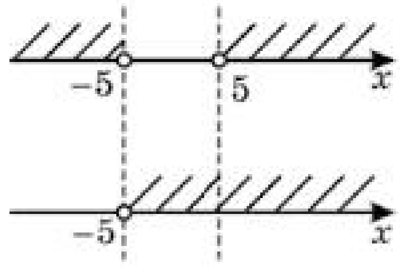
2. $\lg(x+5) - \lg(x^2-25) = 0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини топамиз. Бунинг учун система тузамиз:

$$\begin{cases} x+5>0, \\ x^2-25>0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} x+5>0, \\ (x-5)(x+5)>0. \end{cases}$$

$(5; +\infty)$ оралиқ — x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами (64-расм).

Берилган тенгламани шакл алмаштириб, $\lg(x+5) = \lg(x^2-25)$ тенгламани оламиз. Потенциаллаш орқали $x+5 = x^2-25$ ёки $x^2-x-30=0$ тенгламага келамиз. Бундан $x_1 = 6$ ва $x_2 = -5$. Энди ҳосил бўлган қийматларни $(5; +\infty)$ оралиққа тегишли бўлишини инобатга олиб, логарифмик тенгламанинг илдизи $x = 6$ эканлигини топамиз.



64-расм

Жавоб: 6.

Сиз логарифмик тенгламани янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечишни ўрганасиз.

3. *Янги ўзгарувчи киритиш усули*

МИСОЛ

3. $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. $\log_2 x$ ифодани y орқали ифодалаймиз. У ҳолда берилган тенгламанинг ўрнига $y^2 - y - 2 = 0$ тенгламани оламиз, тенгламанинг илдизлари: $y_1 = 2$; $y_2 = -1$.

Энди x ўзгарувчининг қийматларини аниқлаймиз:

$\log_2 x = 2$, $x_1 = 4$; $\log_2 x = -1$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами мусбат сонлар. У ҳолда ўзгарувчининг топилган иккала қиймати ҳам берилган тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб: 4; $\dfrac{1}{2}$.

Сиз логарифмик тенгламани ҳадлаб логарифмлаш усули билан ечишни ўрганасиз.

4. *Ҳадлаб логарифмлаш усули*

МИСОЛ

4. $x^{\log_2 x - 2} = 8$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Берилган тенгламани қуйидагича ёзамиз: $x^{\log_2 x} \cdot x^{-2} = 8$ ёки $x^{\log_2 x} = 8x^2$.

Ҳосил бўлган тенгламанинг асосини 2 га тенг қилиб логарифмлаймиз:

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2,$$

$$\log_2^2 x = 3 + 2\log_2 x,$$

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0.$$

Демак, 1) $\log_2 x = 3$, бундан $x_1 = 8$;

2) $\log_2 x = -1$, бундан $x_2 = \frac{1}{2}$.

Текшириш: 1) $8^{\log_2 8 - 2} = 8$ ёки $8^{3-2} = 8$, $8 = 8$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)-2} = 8$ ёки $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$, $8 = 8$.

Жавоб: 8; $\frac{1}{2}$.

Амалда асослари ҳар хил логарифмлардан тузилган логарифмик тенгламалар учрайди. Бундай ҳолларда янги асосга ўтиш формуласи қўлланилади.

МИСОЛ

5. $\log_2 x + \dfrac{4}{\log_x 2} = 5$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. x ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами $(0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ оралиқ эканлиги маълум. Янги асосга ўтиш формуласидан фойдаланиб, $\log_x 2$ ифодани асоси 2 бўлган логарифмга алмаштирамиз: $\log_x 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}$.

У ҳолда берилган тенглама ушбу кўринишга келади:

$\log_2 x + \dfrac{4}{\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}} = 5$ ёки $\log_2 x + 4\log_2 x = 5$. Демак, $5\log_2 x = 5$ ёки $\log_2 x = 1$, бундан $x = 2$; $2 \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ бўлгани учун 2 сони берилган тенгламанинг илдизи бўлади.

Жавоб: 2.

Агар ўзгарувчи даража кўрсаткичида ҳам, логарифм белгиси остида ҳам бўлса, бундай тенгламалар ***кўрсаткичли логарифмик тенгламалар*** *дейилади.*

Кўрсаткичли логарифмик тенгламаларни ечиш учун тенгламанинг иккала томонини логарифмлаш усули орқали логарифмик тенгламага келтирилади.

МИСОЛ

6. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. 1-*усул.* Тенгламани $\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$ кўринишда ёзамиз. $a^{\log_a b} = b$ айниятдан фойдаланиб, ушбу тенгламани оламиз: $x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$, бундан $x^{\log_3 x} = 81$.

3 асос бўйича тенгламанинг иккала томонини логарифмлаймиз. У холда $\log_3^2 x = 4$, бундан $\log_3 x = -2$ ва $\log_3 x = 2$ ёки $x_1 = \frac{1}{9}$ ва $x_2 = 9$.

Текшириш: 1) $3^{\log_3^2 \frac{1}{9}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \frac{1}{9}} = \left(3^{\log_3 \frac{1}{9}}\right)^{\log_3 \frac{1}{9}} + 3^{-2\log_3 \frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} + 3^{-2(-2)} = 81 + 81 = 162$;

2) $3^{\log_3^2 9} + 9^{\log_3 9} = (3^2)^2 + (3^2)^2 = 81 + 81 = 162$.

2-усул. x ўзгарувчини $x = 3^{\log_3 x}$ кўринишда ёзсак, берилган тенглама $3^{\log_3^2 x} + \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = 162$ ёки $3^{\log_3^2 x} + 3^{\log_3^2 x} = 162$ кўринишга келади. Бундан $2 \cdot 3^{\log_3^2 x} = 162$ ёки $3^{\log_3^2 x} = 81$, ёки $3^{\log_3^2 x} = 3^4$. Демак, охирги тенгламага тенг кучли $\log_3^2 x = 4$ тенглама ёки $\log_3 x = 2$ ва $\log_3 x = -2$ тенгламалар тўплами келиб чиқади.

У холда $x_1 = 3^2 = 9$ ва $x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Жавоб: $\frac{1}{9}$; 9.

Сиз логарифмик тенгламалар системасини ечишни ўрганасиз.

Логарифмик тенгламалар системасини ечиш учун алгебраик тенгламалар системасини ечиш усуллари (ўрнига қўйиш, алгебраик қўшиш, янги ўзгарувчи киритиш) фойдаланилади.

МИСОЛ

7. $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз.

Ечиш. Тенгламалар системасини ечиш учун янги ўзгарувчи киритамиз: $\lg x = a$, $\lg y = b$.

У холда қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases}$$

Охирги тенгламалар системасини ўрнига қўйиш усули билан ечиш орқали $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ ва $a_2 = -1$, $b_2 = -2$ оламиз. $\lg x = a$ ва $\lg y = b$ алмаштиришга кўчиб, x ва y ўзгарувчиларнинг қийматини топамиз: $\lg x = 2$, $\lg y = 1$ ва $\lg x = -1$, $\lg y = -2$. У холда $x_1 = 100$, $y_1 = 10$ ва $x_2 = 0{,}1$, $y_2 = 0{,}01$.

Жавоб: (100; 10) ва (0,1; 0,01).

7-мисолдаги жавобнинг тўғрилигини мустақил текширинг.

МИСОЛ

8. $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечамиз.

Ечиш. x ва y ўзгарувчиларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами мусбат сонлар, яъни $x > 0$ ва $y > 0$. Тенгламалар системасидаги биринчи тенгламага кўрсаткичли функциянинг хоссасини, иккинчи тенгламага эса потенциаллашни қўллаймиз. У ҳолда қуйидаги тенгламалар системаси келиб чиқади: $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$

$a = \sqrt{x}$ ва $b = \sqrt{y}$ янги ўзгарувчилар киритиб, рационал тенгламалар системасига келамиз: $\begin{cases} 2a - b = 4, \\ a \cdot b = 30. \end{cases}$

Бу тенгламалар системаснинг ечимлари $a = 5$ ва $b = 6$ бўлади. У ҳолда $\sqrt{x} = 5$, $\sqrt{y} = 6$ ёки $x = 25$ ва $y = 36$.

Ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўпламини эътиборга олиб, тенгламалар системасининг ечими (25; 36) сонлар жуфти эканини аниқлаймиз.

Жавоб: (25; 36).

1. Логарифмик тенгламаларни ечишда логарифмик функциянинг қандай хоссаси эътиборга олиниши шарт?
2. $\log_a x = b$ ва $\log_x a = b$ тенгламаларни ечишнинг энг қулай усулини аниқланг.

Машқлар

A

Тенгламаларни ечинг **(24.1—24.3)**:

24.1. 1) $\log_3(2x - 1) = 2$; 2) $\ln(3x - 5) = 0$;
3) $\log_7(4 - x) = 1$; 4) $\lg(2x - 1) = \lg 3$.

24.2. 1) $\lg(3 - x) = \lg(x + 2)$; 2) $\lg x + \lg(x - 1) = \lg 2$;
3) $\log_5(x + 1) = \log_5(4x - 5)$; 4) $\log_2(4 - x) = \log_2(1 - 2x)$.

24.3. 1) $\lg(5 - x) + \lg x = \lg 4$; 2) $\lg(x + 1) + \lg(x - 1) = \lg 3$;
3) $\ln(6 - x) + \ln x = \ln 5$; 4) $\lg x + \lg(x - 3) = 1$.

24.4. Тенгламанинг энг катта бутун илдизини топинг:
1) $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$; 2) $\log_6(x^2 - 2x) = 1 - \log_6 2$;
3) $2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0$; 4) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$.

Тенгламалар системасини ечинг (**24.5—24.7**):

24.5. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 80, \\ \log_2 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

24.6. 1) $\begin{cases} \log_2 (x + y) = 3, \\ \log_{15} x = 1 - \log_{15} y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 (xy) = 2 + \log_3 2, \\ \log_3 (x + y) = 2. \end{cases}$

24.7. 1) $\begin{cases} 2^{\log_2 (3x - y)} = 5, \\ \log_9 \left(x^2 - y^2\right) - \log_9 (x - y) = 0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{\log_3 (x - y)} = 1, \\ \log_3 (2x - 1) + \log_3 y = 1. \end{cases}$

B

Тенгламаларни ечинг (**24.8—24.11**):

24.8. 1) $\log_3 \sqrt{2x + 1} = 1;$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2x - 2} = -2;$

3) $\log_{\frac{3}{5}} \dfrac{2x + 3}{x - 2} = 1;$ 4) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{3x - 5} = 0.$

24.9. 1) $\lg \sqrt{3x + 1} + \lg \sqrt{x + 4} = \lg 12;$

2) $\lg(x - 2) - \lg \sqrt{x - 4} = \lg 3;$

3) $(x^2 - 4) \log_3 (1 - x^2 - 3x) = 0;$

4) $(x^2 - x - 2) \log_2 (x^2 - 4x + 4) = 0.$

24.10. 1) $\lg x + \lg x^2 + \lg x^3 = 6;$ 2) $\dfrac{\lg x}{1 - \lg x} = 3;$

3) $\log_2 \log_2 \log_2 x = 0;$ 4) $10^{x + \lg 2} = 20.$

24.11. 1) $\log_3 (5^{2x} - 2 \cdot 5^x) = 2 \cdot \log_9 15;$ 2) $\log_2 (2^{2(x+1)} + 2^{4x}) = 2\log_4 5;$

3) $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x;$ 4) $\log_7 (6 + 7^{-x}) = 1 + x.$

Тенгламалар системасини ечинг (**24.12—24.14**):

24.12. 1) $\begin{cases} \log_3 (y - x) = 1, \\ 3^{x+1} \cdot 2^y = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72. \end{cases}$

24.13. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}} (x - y) = 2. \end{cases}$

24.14. 1) $\begin{cases} 10^{2 - \lg(x - y)} = 25, \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 1 + 2\lg 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10^{1 + \lg(x + y)} = 50, \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

C

Тенгламаларни ечинг **(24.15—24.17)**:

24.15. 1) $x^{\log_3 x - 2} = 27$; 2) $x^{\log_2 x - 3} = 16$;

3) $x^{3 - \log_3 x} = 9$; 4) $x^{\log_5 x + 2} = 125$.

24.16. 1) $\log_{2x+3} \frac{1}{4} + 2 = 0$; 2) $\log_{\frac{2x-1}{x+2}} 3 - 1 = 0$;

3) $\log_{\sqrt{6-x}} 3 - 2 = 0$; 4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{x+2}}} 5 + 2 = 0$.

24.17. 1) $4^{\log_8(2x-2)} \cdot 0{,}5^{\log_8(2x-2)} = \sqrt[3]{16}$;

2) $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - \frac{9}{4} = \left(\log_x \sqrt{5}\right)^2$;

3) $\log_{x+4}(x^4 + x^2 + 2x)\log_{x+1}(x + 4) = 2$;

4) $(x + 1)^{\log_3(x-2)} + 2(x - 2)^{\log_3(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3$.

Тенгламалар системасини ечинг **(24.18—24.20)**:

24.18. 1) $\begin{cases} \log_8(x + y) + \log_8(7 - y) = 1 + \log_8 5, \\ 2^{\log_2(x-y)} = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3^{\log_3(3y-x+24)} = 27, \\ \log_2(2x - 2y) - \log_2(5 - y^2) = 1. \end{cases}$

24.19. 1) $\begin{cases} \log_2^2 y + \log_2 x \cdot \log_2 y - 2\log_2^2 x = 0, \\ 9x^2y - xy^2 = 64; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2\log_3^2 x + \log_3 x \cdot \log_3 y - \log_3^2 y = 0, \\ xy + \frac{x^2}{y} = 28. \end{cases}$

24.20. 1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 5, \\ 2\log_9 x - \log_3 y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_4 x = y - 1, \\ x^{\frac{y}{6}} = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y^{\frac{1}{x}} = 10, \\ \lg y = \frac{1}{x}. \end{cases}$

ТАКРОРЛАШ

24.21. Функциянинг графигини ясанг:

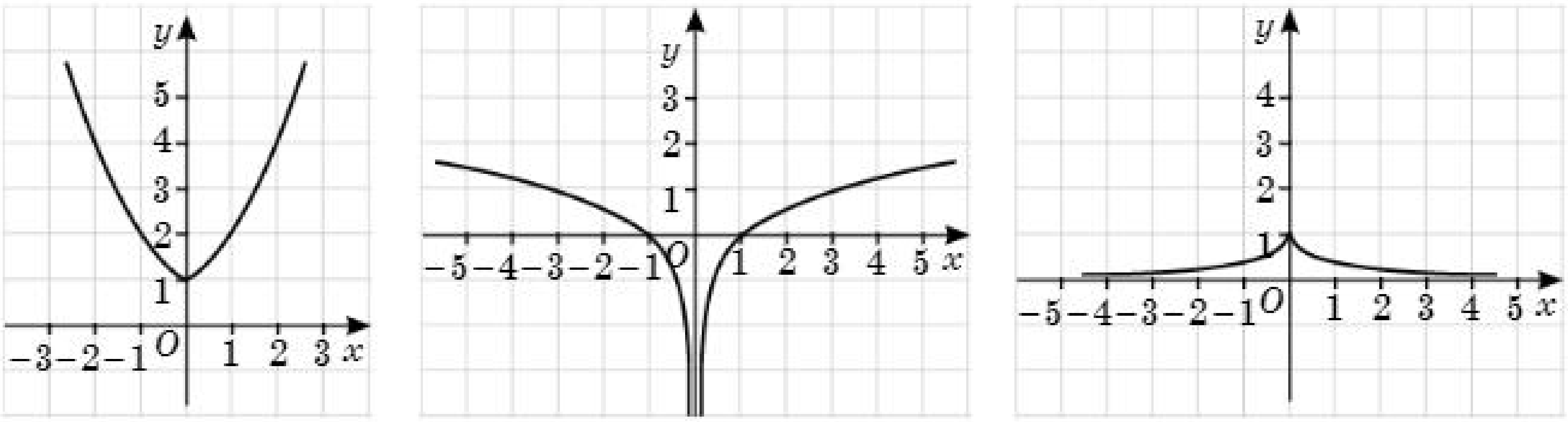
1) $y = \ln x - 1$; 2) $y = \ln|x - 1|$;

3) $y = \ln|2 - x|$; 4) $y = \ln|x + 2|$.

24.22. Берилган функцияларнинг графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y = 6 - x$, $x = 0$ ва $y = 2^x$; 2) $y = 5 - 2x$, $x = 0$ ва $y = 3^x$.

24.23. Графиги 65-расмда берилган функциянинг аналитик формуласини ёзинг:



1) 2) 3)

65-расм

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенгсизлик, тенгсизликнинг хоссалари, тенгсизликлар системаси, кўрсаткичли функция, кўрсаткичли функциянинг хоссалари, кўрсаткичли тенгламалар ва уларнинг системалари.

25-§. КЎРСАТКИЧЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Сиз кўрсаткичли тенгсизликларни ечишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенгсизлик, кўрсаткичли тенгсизлик, даражанинг асоси, даража кўрсаткичи, тенг кучлилик, ўзгарувчиларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, тенгсизликни ечиш

Ўзгарувчиси даража кўрсаткичида бўлган тенгсизлик ***кўрсаткичли тенгсизлик*** *дейилади.*

Кўрсаткичли тенгсизликларни ечиш $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$) ёки $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ($a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)}$) кўринишдаги тенгсизликларни ечишга келтирилади. Ундай тенгсизликларни ечиш учун қуйидаги тасдиқлардан фойдаланилади:

1) агар $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ бўлса, у ҳолда $a > 1$ бўлганда $f(x) > g(x)$ тенгсизликка эга бўламиз;

2) агар $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ бўлса, у ҳолда $0 < a < 1$ бўлганда $f(x) < g(x)$ тенгсизликка эга бўламиз.

Кўрсаткичли тенгсизликлар (ёки уларнинг системалари)ни ечишда тенгсизликларнинг хоссалари, кўрсаткичли функциянинг монотонлиги ва ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами эътиборга олинади.

МИСОЛ

1. $5^{3x-2} < 5^{x+3}$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. Кўрсаткичли функциянинг монотонлик хоссасига кўра асоси бирдан катта бўлганда функциянинг кичик қийматига аргументнинг, яъни кўрсаткичнинг кичик қиймати мос келади: $3x - 2 < x + 3$. Ушбу тенгсизликни ечамиз: $2x < 5$ ёки $x < 2{,}5$.

Жавоб: $(-\infty;\ 2{,}5)$.

МИСОЛ

2. $3^{\frac{x}{2}} < 9$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг катта бутун қийматини топамиз.

Ечиш. Шакл алмаштиришлардан фойдаланиб, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизликни ҳосил қиламиз: $3^{\frac{x}{2}} < 3^2$, бунда $3 > 1$ бўлгани учун, $\frac{x}{2} < 2$ ёки $x < 4$.

Берилган тенгсизликлар ечимларининг тўплами $(-\infty;\ 4)$ оралиқ бўлади. Демак, берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи ўзгарувчининг энг катта бутун қиймати $x = 3$.

Жавоб: 3.

МИСОЛ

3. $(x + 1)^{x^2-36} < 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг катта бутун қийматини топамиз.

Ечиш. Кўрсаткичли функциянинг таърифига кўра тенгсизликнинг чап томонидаги ифоданинг $x + 1 > 0$ бўлгандагина қиймати мавжуд ва даражанинг асоси 1 дан фарқли, яъни $x + 1 > 1$ ёки $0 < x + 1 < 1$. $x + 1 > 0$ бўлгани учун, $x > -1$ шарт бажарилиши керак.

$x + 1 > 1$ ва $0 < x + 1 < 1$ ҳолларни кўриб чиқамиз.

1) $x + 1 > 1$, яъни $x > 0$ бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases}(x+1)^{x^2-36} < 1,\\ x > 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x+1)^{x^2-36} < (x+1)^0,\\ x > 0.\end{cases}$$

$(x + 1)^{x^2-36} < (x + 1)^0$ тенгсизликдан кўрсаткичли функциянинг хоссасига кўра $x^2 - 36 < 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. $x^2 - 36$ ифодани кўпайтма кўринишида ёзсак: $x^2 - 36 = (x + 6) \cdot (x - 6)$. У ҳолда охирги тенгсизликлар системаси қуйидаги тенгсизликлар системасига алмашади:

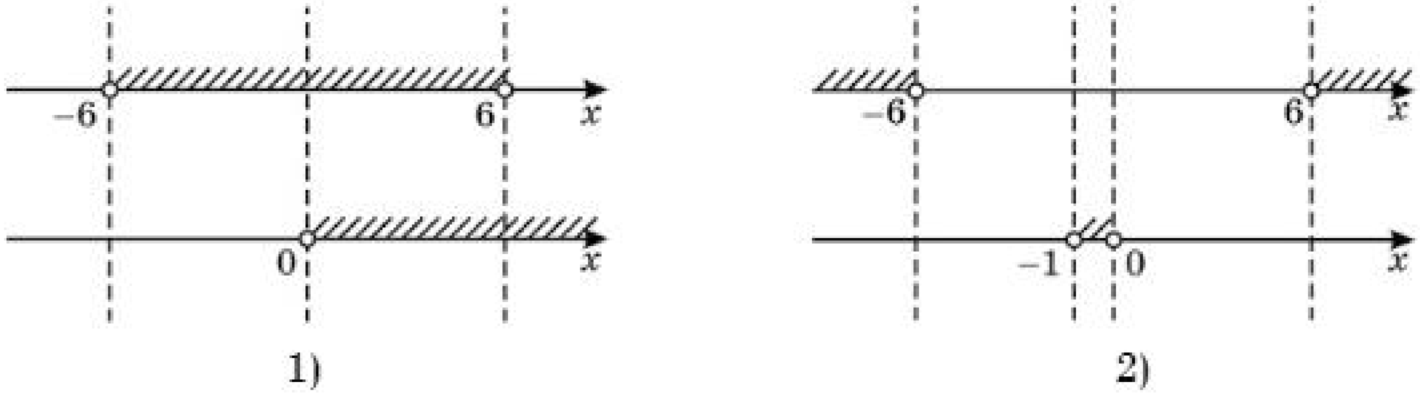
$$\begin{cases}x^2 - 36 < 0,\\ x > 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-6)(x+6) < 0,\\ x > 0.\end{cases}$$

Системадаги ҳар бир тенгсизликнинг ечимлар тўпламини координаталар тўғри чизиғида тасвирлаб, системанинг ечимлар тўплами $(0;\ 6)$ оралиқ бўлишини топамиз (66.1-расм).

2) $0 < x + 1 < 1$, бундан $-1 < x < 0$. Энди ушбу тенгсизликлар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} x^2 - 36 > 0, \\ -1 < x < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-6)(x+6) > 0, \\ -1 < x < 0. \end{cases}$$

Охирги тенгсизликлар системасини 1)-ҳол каби ечамиз (66.2-расм). Тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи x нинг бирорта ҳам қиймати йўқ эканлигини 66-расмдан кўриш мумкин.



66-расм

Шундай қилиб, берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг катта қиймати (0; 6) оралиқда бўлади ва у 5 сони.

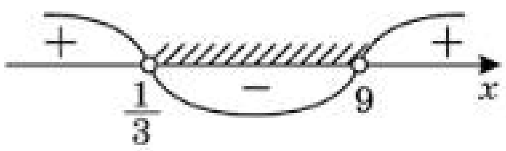
Жавоб: 5.

МИСОЛ

4. $3^{\sqrt{x+1}+1} - 28 + 3^{2-\sqrt{x+1}} < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг катта бутун қийматини топамиз.

Ечиш. $3^{\sqrt{x+1}} = y$ алмаштиришни бажарсак, берилган тенгсизлик $3y - 28 + \frac{9}{y} < 0$ кўринишга эга бўлади.

Охирги тенгсизликнинг иккала томонини y га кўпайтирамиз (бу ҳолда тенгсизликнинг ишораси ўзгармайди, чунки кўрсаткичли функция ҳамма вақт нолдан катта). У ҳолда $3y^2 - 28y + 9 < 0$ келиб чиқади. Тенгсизликни интераллар усули билан ечиш орқали $\frac{1}{3} < y < 9$ га эга бўламиз (67-расм).



67-расм

Демак, $3^{\sqrt{x+1}}$ ифода $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$ оралиқда жойлашади. Энди x ўзгарувчининг қийматини топиш учун $\frac{1}{3} < 3^{\sqrt{x+1}} < 9$ қўш тенгсизликни ечамиз ва $3^{-1} < 3^{\sqrt{x+1}} < 3^2$, $3 > 1$. $y = 3^x$ функциянинг ўсувчи эканлигини эътиборга олиб, $-1 < \sqrt{x+1} < 2$ тенгсизликка эга бўламиз. Арифметик илдиз хоссасига кўра $\sqrt{x+1} > -1$ тенгсизлик ҳамма вақт тўғри. Шунинг учун фақатгина $x + 1 < 4$ тенгсизликни ечиш керак. Бундан $x < 3$. Берилган тенгсизликнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами $x \geqslant -1$ эканлигини инобатга олсак, $-1 \leqslant x < 3$.

Ушбу оралиқда x нинг энг катта бутун қиймати 2.

Жавоб: 2.

?

1. Кўрсаткичли тенгсизликларни ечишда қўйиладиган асосий шартларни айтинг.
2. Кўрсаткичли тенгсизликларни ечиш йўли билан бир ўзгарувчили чизиқли тенгсизликларни ечиш йўлида қандай ўхшашлик мавжуд?

Машқлар

A

25.1. Тенгсизликни ечинг:

1) $3^x > \frac{1}{27}$; 2) $2^x < \frac{1}{8}$; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$;

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{16}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} < 25$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < 9$.

25.2. Тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг катта бутун қийматини топинг:

1) $5^{x-1} < 25$; 2) $3^{3-x} \geqslant 9$; 3) $6^{2x} \leqslant \frac{1}{36}$;

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \geqslant 4$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \leqslant 81$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

25.3. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 5^x > 25, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} < \frac{1}{27}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8 > \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}, \\ 3^{4x} > 81. \end{cases}$

B

Тенгсизликларни ечинг **(25.4-25.5)**:

25.4. 1) $3^{-2x} < \sqrt{3}$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}} > 25$; 3) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$;

4) $2^{\frac{3x}{2}+3} < 16$; 5) $5^{\frac{x+1}{3}} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$; 6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} > \frac{9}{4}$.

25.5. 1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} > \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1,5}$; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geqslant \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$;

3) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{-x^2+8x}$; 4) $(0,2)^{\frac{6x-1}{3-x}} < \left(\frac{1}{5}\right)^2$;

5) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{x}{4-x}} > 49$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} \geqslant 4$.

Тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг катта бутун қийматини топинг **(25.6-25.7)**:

25.6. 1) $2^{3x} < \sqrt[5]{2}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{x+1}{2}} > 4$; 3) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leqslant 7$; 4) $3^{\frac{2x+1}{5}} < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

25.7. 1) $5^{2x+1} - 5^{x+2} \leqslant 5^x - 5$; 2) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$;

3) $250 \cdot 5^{3-x} - 2 \cdot 5^{x-3} > 0$; 4) $147 \cdot 7^{x-2} - 3 \cdot 7^{2-x} \leqslant 0$.

25.8. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 7^{\frac{x-5}{2}} \leqslant 7\sqrt{7}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3} < 3\frac{3}{8}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+5x} > 1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-2} < 27. \end{cases}$

C

25.9. Тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг катта бутун қийматини топинг:

1) $9^{x+1} - 3^{x+3} < 3^x - 3$; 2) $13 \cdot 2^{x+4} - 208 \cdot 2^{-2x-3} < 0$;

3) $7 \cdot 3^{x-2} + 20 \cdot 3^{2-x} < \frac{41}{3^{x-2}}$; 4) $\frac{440}{6^x} - 2 \cdot 6^x > 8 \cdot 6^{-x}$.

Тенгсизликни қаноатлантирувчи x нинг энг кичик бутун қийматини топинг **(25.10-25.11)**:

25.10. 1) $7^{2x-1} - 7^{x+1} \leqslant 7^{x-1} - 7$; 2) $3^{2x+2} - 3^{x+4} < 3^x - 9$;

3) $2^{2x+1} - 2^{x+3} \leqslant 2^{x+1} - 8$; 4) $5^{2x} - 5^{x+2} < 5^x - 25$.

25.11. 1) $2^{x+3} + 3 \cdot 5^x < 3 \cdot 2^x + 5^{x+1}$; 2) $2^{2x+1} - 3^{2x+1} < 3^{2x} - 7 \cdot 2^{2x}$;

3) $5^{x+1} - 3^{x+2} > 2 \cdot 5^x - 2 \cdot 3^{x-1}$; 4) $3^x + 10^{x-2} > 19 \cdot 3^{x-2} + 10^{x-3}$.

Тенгсизликни ечинг **(25.12-25.13)**:

25.12. 1) $2^{\sqrt{x+1}} - 1 < 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}}$; 2) $2 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} - 5 > 3^{1-\sqrt{x+1}}$;

3) $5^{\sqrt{x-2}} > 5^{1-\sqrt{x-2}} + 4$; 4) $2 \cdot 7^{\sqrt{2x-3}} > 7^{1-\sqrt{2x-3}} + 13$.

25.13. 1) $(x-3)^{x^2-9} > 1$; 2) $(x-2)^{x^2-1} > 1$;

3) $(x-1)^{\frac{2x-7}{x+1}} \geqslant 1$; 4) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^{x^2-\frac{1}{4}} > 1$.

25.14. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 2^{x+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} > 1, \\ 0{,}2^x \leqslant 0{,}04^{x^2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)^{2x^2-11x+9} < 1, \\ (0{,}3)^{\sqrt{4x^2-3x+2}} > (0{,}3)^{\sqrt{x}}. \end{cases}$

ТАКРОРЛАШ

25.15. Тенгсизликни ечинг:

1) $\sqrt{x-2} > x - 2$; 2) $\sqrt{2x+1} > x - 2$;

3) $\sqrt{6x+16} > x$; 4) $\sqrt{4-x} < 2 - x$.

25.16. Функциянинг ўсиш оралиқларини топинг:

1) $y = xe^{2x}$; 2) $y = x\ln x$.

25.17. Абсциссаси $x_0 = 0$ бўлган нуқтадан ўтувчи $y = f(x)$ функциянинг графигига ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

1) $y = x - 2\sqrt{x+4}$; 2) $y = \sqrt{2x+1}$;

3) $y = (x + 1)e^{3x}$; 4) $y = (x + e)\ln(x + e)$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Логарифм, логарифмнинг хоссалари, логарифмик функция ва унинг хоссалари, логарифмик тенгламалар, логарифмик тенгламалар ва уларнинг системаларини ечиш, тенгсизлик, тенгсизликнинг асосий хоссалари, тенгсизликларни ечиш, тенг кучли тенгсизликлар.

26-§. ЛОГАРИФМИК ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Сиз логарифмик тенгсизликларни ечишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенгсизлик, логарифмик тенгсизлик, логарифмнинг асоси, даража кўрсаткичи, тенгкучлилик, ўзгарувчининг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами, тенгсизликни ечиш

Ўзгарувчиси логарифм белгиси остида ёки логарифмнинг асосида бўлган тенгсизлик ***логарифмик тенгсизлик*** *дейилади.*

Берилган логарифмик тенгсизликни тўғри сонли тенгсизликка айлантирадиган ўзгарувчининг исталган қиймати *логарифмик тенгсизликнинг ечими* деб аталади.

Логарифмик тенгсизликни ечиш — унинг барча ечимларини топиш ёки ечими бўлмаслигини исботлашдан иборат.

Ечимлари бир хил бўлган ёки ечимлари мавжуд бўлмаган бир ўзгарувчили иккита логарифмик тенгсизлик *тенг кучли тенгсизликлар* дейилади.

Логарифмик тенгсизликларни ечиш $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $(\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x))$ ва $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ $(\log_a f(x) \leqslant \log_a g(x))$ кўринишдаги тенгсизликларни ечишга олиб келинади. Бундай тенгсизликларни ечишда логарифмик функциянинг аниқланиш соҳасини ва хоссаларини эътиборга олиб, қуйидаги тасдиқлардан фойдаланамиз:

1) $a > 1$ бўлганда $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ тенгсизлик

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \qquad (1)$$

тенгсизликлар системаси билан тенг кучли;

2) $0 < a < 1$ бўлганда $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ тенгсизлик

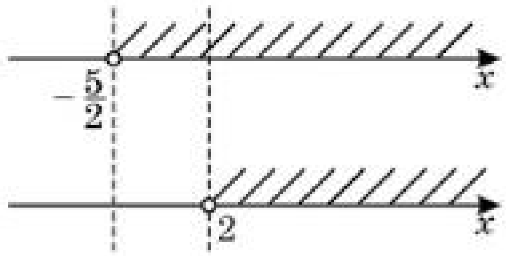
$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \qquad (2)$$

тенгсизликлар системаси билан тенг кучли бўлади.

МИСОЛ

1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < -2$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. Берилган логарифмик тенгсизликни ечиш учун аввал тенгсизликнинг ўнг томонидаги -2 сонини асоси $\frac{1}{3}$ бўлган логарифм орқали ёзамиз: $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$. Мос равишда берилган тенгсизлик қуйидаги кўринишга келади: $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < \log_{\frac{1}{3}} 9$. Бунда $a = \frac{1}{3}$, яъни $a \in (0; 1)$. Демак, (2) тенгсизликлар системасидан фойдаланиб қуйидаги тенгсизликлар системасига ўтамиз:



68-расм

$$\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 2x + 5 > 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$

Охирги тенгсизликлар системасининг ечими $(2; +\infty)$ оралиқ бўлади (68-расм).

Жавоб: $(2; +\infty)$.

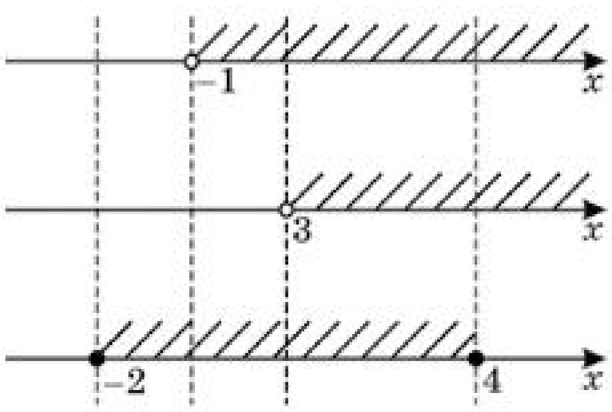
МИСОЛ

2. $\lg(x + 1) \leqslant 1 - \lg(2x - 6)$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. Тенгламада берилган логарифм $x + 1 > 0$ ва $2x - 6 > 0$ ҳолларда маънога эга бўлади.

Логарифмик функциянинг хоссаларидан фойдаланиб, берилган логарифмик тенгсизликни шакл алмаштирамиз: $\lg(x + 1) + \lg(2x - 6) \leqslant 1$, $\lg((x + 1)(2x - 6)) \leqslant \lg 10$.

Ҳосил бўлган тенгсизликда $a = 10$, демак, берилган тенгсизлик ушбу тенгсизликлар системасига тенг кучли:



69-расм

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ 2x - 6 > 0, \\ (x + 1)(2x - 6) \leqslant 10, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x > 3, \\ (x - 4)(x + 2) \leqslant 0. \end{cases}$$

Тенгсизликлар системасидаги ҳар бир тенгсизликнинг ечимини координаталар тўғри чизиғида тасвирлаб, уларнинг умумий қисмини топамиз (69-расм). Шундай қилиб, берилган логарифмик тенгсизликнинг ечими $(3; 4]$ оралиқдан иборат.

Жавоб: $(3; 4]$.

МИСОЛ

3. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$ тенгсизликни ечамиз.

Ечиш. Логарифмик функциянинг таърифига кўра x ва $2x$ асослар мусбат ва 1 га тенг бўлмаслиги керак. Демак, $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$.

Ҳамма логарифмларни бир хил 2 асосга келтирамиз:

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x};\ \log_{2x} 2 = \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{1 + \log_2 x}.$$

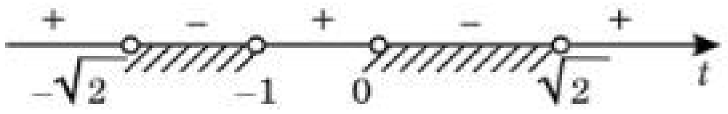
Энди охирги иккита тенгликни эътиборга олиб берилган тенгсизликни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} \cdot (2 + \log_2 x) > 1.$$

Чунки $\log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$.

$\log_2 x = t$ ўзгарувчи киритамиз: $\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t} \cdot (2 + t) > 1$, бундан

$$\frac{-t^2 + 2}{t(t+1)} > 0 \text{ ёки } \frac{t^2 - 2}{t(t+1)} < 0.$$



70-расм

Охирги тенгсизликни интерваллар усули билан ечсак, $-\sqrt{2} < t < -1$ ёки $0 < t < \sqrt{2}$ ҳосил қиламиз (70-расм).

t ни $\log_2 x$ билан алмаштирсак:

1) $-\sqrt{2} < \log_2 x < -1$ ёки $\log_2 2^{-\sqrt{2}} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$, бундан $2^{-\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}$;

2) $0 < \log_2 x < \sqrt{2}$ ёки $\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2^{\sqrt{2}}$, бундан $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$.

Жавоб: $\left(2^{-\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right)$.

МИСОЛ

4. $y = \dfrac{\sqrt{10 + 3x - x^2}}{\log_3\left(x^2 - 2x\right) - 1}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз.

Ечиш. Берилган функция алгебраик каср бўлганлигидан, $\log_3(x^2 - 2x) - 1 \neq 0$.

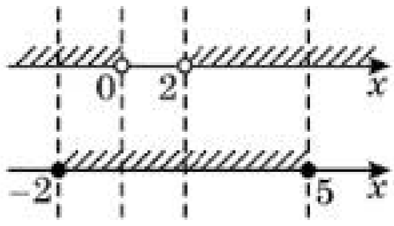
$10 + 3x - x^2$ ифода квадрат илдиз белгиси остида жойлашган. Шу сабабли $10 + 3x - x^2 \geqslant 0$ ёки $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$.

Шу билан бир қаторда логарифмик функциянинг аниқланиш соҳасини эътиборга олиб, қуйидаги тенгсизликлар системасини оламиз:

$$\begin{cases} \log_3\left(x^2 - 2x\right) - 1 \neq 0, \\ x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 3x - 10 \leqslant 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \neq 0, \\ x(x-2) > 0, \\ (x+2)(x-5) \leqslant 0. \end{cases}$$

Биринчи тенгсизликдан $x \neq -1$ ва $x \neq 3$ келиб чиқади.

Охирги тенгсизликлар системасининг иккинчи ва учинчи тенгсизликларини интерваллар усули билан ечиб, ечимларининг кесишмасини аниқлаймиз: $x \in [-2;\ 0) \cup (2;\ 5]$ (71-расм).



71-расм

Ҳосил бўлган оралиқлардан $x = 3$ ва $x = -1$ қийматларни олиб, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси бўладиган оралиқларни аниқлаймиз.

Жавоб: $[-2;-1) \cup (-1;\ 0) \cup (2;\ 3) \cup (3;\ 5]$.

1. Логарифмик тенгсизликни ечиш учун асосий эътиборни нимага қаратиш керак?
2. Нима учун кўп ҳолларда логарифмик тенгсизликни ечиш тенгсизликлар системасини ечишга олиб келади?

Машқлар

A

Логарифмик тенгсизликни ечинг **(26.1—26.4)**:

26.1. 1) $\log_5(3 + 8x) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > -2$;

3) $\log_2(x - 3) \leqslant 3$; 4) $\lg(4x - 1) \leqslant 1$.

26.2. 1) $\log_2(2x + 5) > \log_2(x - 7)$; 2) $\log_5(3x - 2) > \log_5(x + 6)$;

3) $\log_3(3x - 1) < \log_3(2x + 3)$; 4) $\log_{\frac{1}{9}}(4x - 3) \geqslant \log_{\frac{1}{9}}(x + 3)$.

26.3. 1) $\log_2(2x - 1) > \log_2(x + 1)$; 2) $\log_5(3x + 1) > \log_5(x - 2)$;

3) $\log_{\frac{1}{7}}(12 - x) \geqslant -2$; 4) $\log_{0,2}(x - 2) > \log_{0,2}(3 - x)$.

26.4. 1) $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leqslant 0$; 2) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$;

3) $\log_{0,1}^2 x + 3\log_{0,1} x > 4$; 4) $2 - \lg^2 x \geqslant \lg x$.

26.5. Қайси тенгсизликда шакл алмаштириш тўғри бажарилмаганини кўрсатинг:

1) $\log_{0,5}(x - 2) > 1$ бўлса, у ҳолда $x - 2 < 0,5$;

2) $\log_{0,2}(x - 2) > \log_{0,2}3$ бўлса, у ҳолда $x - 2 < 3$;

3) $\ln(x + 5) > \ln 5$ бўлса, у ҳолда $x + 5 > 5$;

4) $\ln^2(x - 3) < 4$ бўлса, у ҳолда $-2 < \ln(x - 3) < 2$.

26.6. $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x - 1}}$; 2) $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{x - 1}{x + 5}}$.

B

Логарифмик тенгсизликларни ечинг **(26.7—26.9)**:

26.7. 1) $\lg(x^2 + 2x + 2) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) > -2$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 1) < -1$; 4) $\log_2(x^2 + 10) < 4$.

26.8. 1) $2^{\log_3 \frac{x-1}{3x+3}} \leqslant \frac{1}{4}$; 2) $3^{\log_2 \frac{x-1}{x+1}} < \frac{1}{9}$;

3) $(5x + 1)\lg(4 - x) \leqslant 0$; 4) $(3 - x)\lg(2x - 1) \geqslant 0$.

26.9. 1) $\log_{\frac{1}{6}}\left(\log_2 \sqrt{6 - x}\right) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right) \geqslant 0$;

3) $\log_{0,5}\log_5 \frac{x-2}{x+2} \geqslant \log_{0,5}1$; 4) $\log_{2,5}(\log_3(9^x - 6)) \geqslant 0$.

26.10. $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{2,1}\frac{3x-1}{5-x}} + \sqrt{x-4}$;

2) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \sqrt{\ln(x + x^2)}$;

3) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x - 2)} + \sqrt[4]{x+1}$.

26.11. Қайси мисолда шакл алмаштиришнинг тўғри бажарилмаганлигини кўрсатинг:

1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(x - 2) > -2$ бўлса, у ҳолда $\begin{cases}(x-1)(x-2) > 0,\\(x-1)(x-2) < 5;\end{cases}$

2) $3^{3x} - 4 \cdot 3^x \leqslant 0$ бўлса, у ҳолда $0 < x \leqslant \log_9 4$;

3) $\sqrt{\log_5(x - 2)} > 2$ бўлса, у ҳолда $x - 2 > 625$.

C

26.12. Логарифмик тенгсизликни ечиб, ечими бўладиган x нинг иккита қийматини кўрсатинг:

1) $\log_{0,1}(x - 2) - \lg x > \log_{0,1}3$; 2) $\log_{0,5}x - \log_2(x - 3) < \log_{0,5}4$;

3) $\log_{0,2}x - \log_5(x - 2) < \log_{0,2}3$; 4) $\lg x - \log_{0,1}(x - 1) > \log_{0,1}0,5$.

Логарифмик тенгсизликни ечинг **(26.13—26.15)**:

26.13. 1) $(\log_2 x - 4)(5x^2 + x - 6) \geqslant 0$; 2) $(\log_3 x + 3)(x^2 + 2x - 8) \geqslant 0$;

3) $\frac{2 - x}{(x + 4)\log_{0,3}(2x^2 + 6x + 5)} \leqslant 0$; 4) $\log_7\left(3 - \frac{1}{x-1}\right) + \log_7 \frac{1}{x} \geqslant 0$.

26.14. 1) $\log_{1-x}(2x+3) \geqslant 1$; 2) $\log_{x-1}(x-8) \leqslant 1$;
3) $2\log_{2x}\sqrt{x+1} < 0$; 4) $\log_{3x}(2{,}5x+1) \geqslant 0$.

26.15. 1) $8^{\log_2 x} - 2x^2 > x - 2$; 2) $x^{\frac{1}{\lg x}} \cdot \lg x < 1$;
3) $x^3 > 2^{15\log_{2\sqrt{2}} 3} \cdot 3^{\frac{1}{\log_{\sqrt{2}} 3}}$; 4) $x^{-64\log_5^3 x + 5\log_5 x^4} \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{2+\log_{0,5} 8}$;
5) $x \cdot \log_2 x - \dfrac{4}{\log_x 2} < 0$; 6) $x \cdot \log_5 x < \dfrac{5-x}{\log_x 5}$.

$y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг (**26.16-26.17**):

26.16. 1) $f(x) = \lg(4 - x^2) + \sqrt{\dfrac{1+\lg^2 x}{\lg x^2} - 1}$;

2) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 (x-3)} + \sqrt{x^2 - 25}$.

26.17. 1) $f(x) = \dfrac{15 + x^2}{\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(5x - x^2\right) - 1}}$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{17 + 15x - 2x^2}}{\log_x (x+3)}$.

ТАКРОРЛАШ

26.18. "Жонли геометрия" ёки "GeoGebra" дастуридан фойдаланиб функциянинг графигини ясанг ва асимптоталари тенгламасини ёзинг:

1) $f(x) = x\ln(x + 2e)$; 2) $f(x) = (2x - 3) \cdot \ln(x + 3)$;
3) $f(x) = (2x - 3) \cdot 2^x$; 4) $f(x) = (2x + 1) \cdot 3^x$.

26.19. Тенгламани комплекс сонлар тўпламида ечинг:
1) $z^4 + 4z^2 - 12 = 0$; 2) $z^4 - 5z^2 - 14 = 0$.

26.20. Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг:
1) $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$; 2) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{-x}$;
3) $f(x) = x \cdot \ln x$; 4) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $11^{x-1} - 11^{x+2} + 1330 = 0$ тенгламани ечинг:
A) 4; B) −1; C) 3; D) 1.

2. $0{,}25^{2+0{,}5x^2} > 32^x$ тенгсизликни қаноатлантирувчи энг катта бутун сонни топинг:
A) −1; B) −2; C) 3; D) 4.

3. $y = \log_6(x^2 + 6x) - 3$ функция манфий қийматини қабул қилувчи x нинг қийматини топинг:

A) $(-6; 0)$; B) $(-\infty; -18) \cup (12; +\infty)$;
C) $(-18; 12)$; D) $(-18; -6) \cup (0; 12)$.

4. $\begin{cases} 3^y = 27^x, \\ \log_2(y - x^2) = 1 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечинг:

A) $(-1; -3)$, $(-2; -6)$; B) $(1; 3)$;
C) $(2; 6)$; D) $(1; 3)$, $(2; 6)$.

5. $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geqslant 0, \\ \log_4^2 x - \log_4 x - 6 < 0 \end{cases}$ тенгсизликлар системасини ечинг:

A) $(2; 64)$; B) $[2; 64)$;
C) $(-\infty; -3] \cup (64; +\infty)$; D) $\left(\frac{1}{16}; 2\right]$.

6. $\frac{1}{125} \leqslant 5^{-x+5} < 3125$ тенгсизликнинг ечимлари сонини топинг:

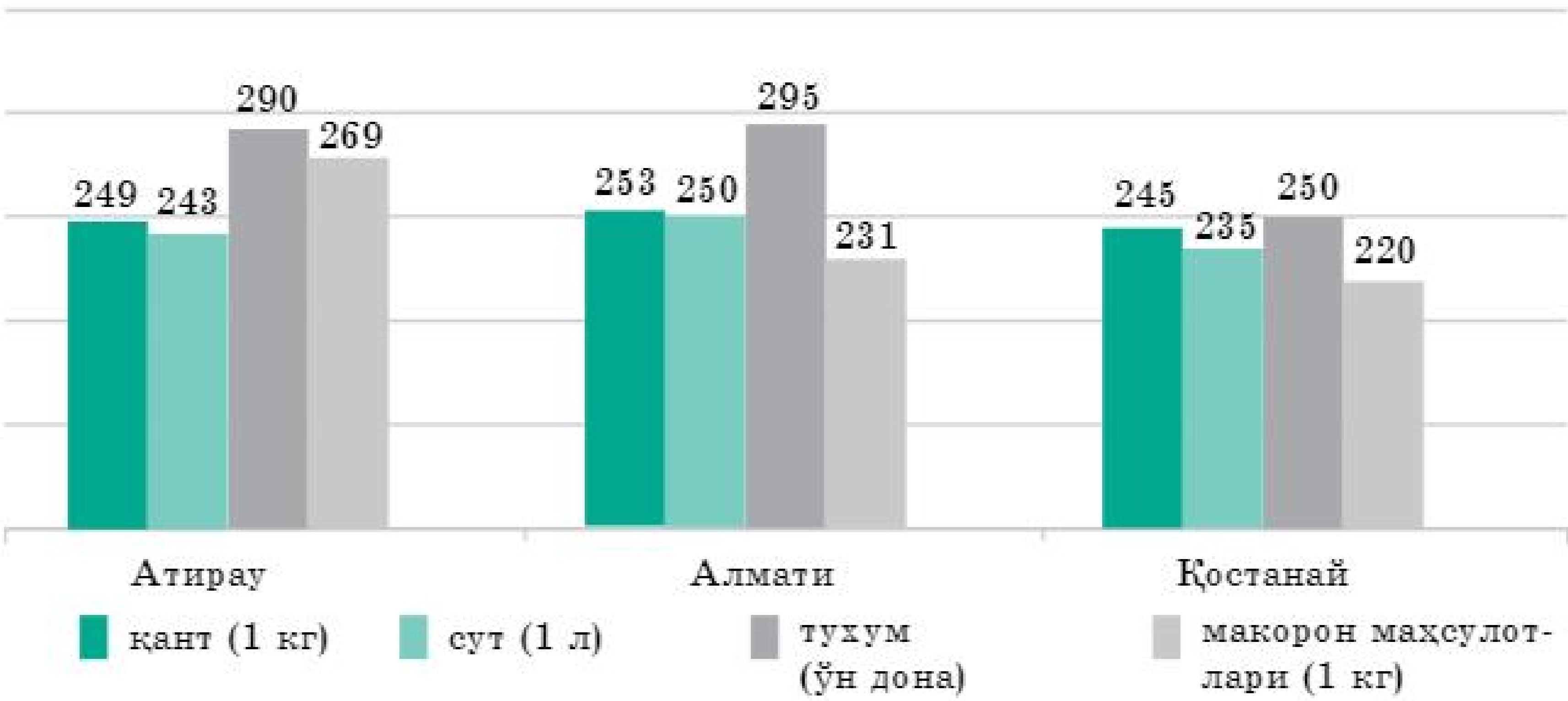
A) 7; B) 9; C) 8; D) 6.

7. $\lg(x^2 - 15x) \leqslant 2$ тенгсизликнинг бутун ечимлари сонини топинг:

A) 10; B) 12; C) 8; D) 26.

Математик саводхонлик бўйича тест топшириқлари

8. Диаграммада учта шаҳар бўйича озиқ-овқат маҳсулотларининг ўртача баҳоси (тенгеда) берилган:



72-расм

Алмати шаҳри бўйича 2 кг қант, 1 л сут, 3 дона тухум, 2 кг макарон маҳсулотларига қўйилган баҳони топинг:

A) 2297 тг; B) 2023 тг; C) 2103 тг; D) 2263 тг; E) 2193 тг.

9. Ёқилғи қуйиш станциясида дисконт картаси орқали бензинга 5% чегирма берилди. Ҳайдовчининг пули 57 л бензинга етади. Дисконт картаси ёрдамида сотиб олинган бензин миқдорини топинг:

A) 61 л; B) 59 л; C) 58 л; D) 60 л; E) 62 л.

10. Рустам 7 қадам олдинга ва 3 қадам ортга юриб, ҳаммаси бўлиб 259 қадам юрди. Рустам олдинга қанча қадам юрганини топинг:

A) 110; B) 108; C) 107; D) 106; E) 105.

11. Иккита сондан бири 50% га камайтирилиб, иккинчиси 20% га орттирилди. Шу сонларнинг кўпайтмасини неча фоизга ўзгарганини топинг:

A) 40% камаяди; B) 30% камаяди; C) 20% камаяди;
D) 50% камаяди; E) 10% ортади.

12. Бемор 8 кун давомида дорини кунига 0,5 г дан 3 марта ичиши керак. Битта қадоқда 0,25 г дан 10 та дори бор. Бемор камида неча қадоқ олиши керак эканлигини топинг:

A) 4; B) 5; C) 6; D) 7; E) 8.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, чизиқли тенглама, тенгламани ечиш, ҳосила, шакл алмаштириш, интеграл, бошланғич функцияни топиш қоидалари, интегралнинг хоссалари, дифференциал тенглама, дифференциал тенгламанинг тартиби, дифференциал тенгламани ечиш, умумий ечим, хусусий ечим.

VIII БОБ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

27-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ҲАҚИДА УМУМИЙ МАЪЛУМОТ. ЎЗГАРУВЧИЛАРИ АЖРАТИЛАДИГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Дифференциал тенгламалар ҳақидаги асосий тушунча билан танишасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенгламалар, дифференциал тенгламалар, дифференциал тенгламанинг тартиби, дифференциал тенгламанинг ечими, умумий ечим, хусусий ечим

Аргументни, шу аргументнинг номаълум функциясини ва шу функциянинг ҳосилаларини боғловчи тенгламалар ***дифференциал тенгламалар*** дейилади.

Дифференциал тенгламага кирувчи ҳосиланинг энг катта тартиби ***дифференциал тенгламанинг тартиби*** дейилади.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши:

$$F(x;\ y;\ y') = 0 \text{ ёки } y' = f(x;\ y). \qquad (1)$$

МИСОЛ 1. 1) $x^2y' + 2xy = y$ — биринчи тартибли дифференциал тенглама;
2) $y'' - 2xyy' = x$ — иккинчи тартибли дифференциал тенглама;
3) $y^{(IV)} - xy'' + 2y' = 1 - x$ — тўртинчи тартибли дифференциал тенглама.

Дифференциал тенгламанинг ечими *деб эркли y ўзгарувчининг ўрнига $y = f(x)$ ни қўйганда тўғри тенгликни ҳосил қиладиган $y = f(x)$ дифференциалланувчи функцияга айтилади.*

МИСОЛ 2. $y = x^2$ функция, бунда $x \in (-\infty; +\infty)$, $2y - xy' = 0$ дифференциал тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, берилган тенгламага функциянинг қиймати қўйилганда, $2 \cdot x^2 - x \cdot (x^2)' = 0$ тенглик ёки $2x^2 - 2x^2 = 0$ келиб чиқади.

Дифференциал тенгламанинг ечимини топиш жараёни дифференциал тенгламани *интеграллаш* дейилади.

Шу сабабли биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг ечимини топишда битта параметрга боғлиқ бўлган фақат битта функцияга эмас, бир нечта функциялар тўпламига эга бўламиз.

МИСОЛ

3. $y' = \cos x$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Аввал ҳосилани қуйидаги кўринишда ёзамиз: $y' = \frac{dy}{dx}$. У ҳолда берилган тенглама ушбу кўринишга келади: $\frac{dy}{dx} = \cos x$ ёки $dy = \cos x dx$. Энди охирги тенгликнинг иккала томонини интеграллаймиз.

$\int dy = \int \cos x dx$. У ҳолда $y = \sin x + C$ ни оламиз.

Жавоб: $y = \sin x + C$.

ЁДДА САҚЛАНГ!

$\int y' dx = \int dy$.

Дифференциал тенгламаларнинг умумий ва хусусий ечимларининг таърифлари билан танишасиз.

1-мисолда $y' = \cos x$ тенгламанинг умумий ечими $y = \sin x + C$ бўлади.

C ўзгармаснинг исталган қийматида (1) тенгламанинг ечими бўлган x ва исталган C ўзгармасга боғлиқ $y = f(x; C)$ функция ***дифференциал тенгламанинг умумий ечими*** *дейилади.*

МИСОЛ

4. $y' = x$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

Ечиш. $y' = \frac{dy}{dx}$ эканлиги маълум. Бундан берилган тенглама қуйидаги кўринишга ўтади: $\frac{dy}{dx} = x$ ёки $dy = x dx$. Охирги тенгликнинг иккала томонини интеграллаймиз. У ҳолда $\int dy = \int x dx$ ёки $y = \frac{x^2}{2} + C$.

Жавоб: $y = \frac{x^2}{2} + C$.

Ўзгармаснинг $C = C_0$ ҳақиқий қийматида $y = f(x; C)$ тенгламанинг умумий ечимидан олинадиган $y = f(x; C_0)$ функция (1) ***дифференциал тенгламанинг хусусий ечими*** *дейилади.*

МИСОЛ

5. $y(2) = 3$ бўлганда $y' = x^2$ тенгламанинг хусусий ечимини топамиз.

Ечиш. Тенгламанинг иккала томонини интеграллаймиз ва $\int y' dx = \int dy$ тенгликдан фойдаланиб, умумий ечимни топамиз:

$$\int y' dx = \int x^2 dx \text{ ёки } \int dy = \int x^2 dx, \text{ ёки } y = \frac{x^3}{3} + C.$$

Энди $y(2) = 3$ шартни инобатга олиб берилган тенгламанинг хусусий ечимини топамиз:

$3 = \frac{2^3}{3} + C$ ёки $C = \frac{1}{3}$.

У ҳолда берилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$.

Жавоб: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$.

Агар $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ бўлса, у ҳолда $y' = \cos x$ тенгламанинг хусусий ечими $y = \sin x + \frac{3}{2}$ бўлишини мустоқил исботланг.

Ўзгарувчилари ажратилган дифференциал тенгламаларни ечишни ўрганасиз.

$$f(y)dy = g(x)dx \tag{2}$$

*кўринишдаги **тенглама ўзгарувчилари ажратилган дифференциал тенглама** деб аталади.*

(2) тенгламадаги x ва y ўзгарувчилардан тузилган ифодалар тенглик белгисининг иккала томонида жойлашади, бунда $f(y)$ ва $g(x)$ функциялар — узлуксиз функциялар.

Ўзгарувчилари ажратиладиган тенгламанинг умумий интеграли $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ кўринишдаги ифода ҳисобланади.

Агар шу тенгликнинг интеграллари элементар функциялар орқали ифодаланса, у ҳолда аниқланмаган $\Phi(x;\, y) = 0$ функция кўринишида, баъзи ҳолларда аниқланган y функция кўринишида дифференциал тенгламанинг умумий ечимини олиш мумкин.

МИСОЛ

6. $ydy = x^3dx$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Берилган тенглама ўзгарувчилари ажратиладиган дифференциал тенглама ҳисобланади. Бундан тенгламанинг иккала томонини интеграллаймиз:

$$\int ydy = \int x^3dx.$$

Аниқмас интегрални топамиз:

$\int ydy = \frac{y^2}{2} + C_1$ ва $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C_2$.

У ҳолда $\frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{x^4}{4} + C_2$. Бундан $y^2 = \frac{x^4}{2} + C$ ёки $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + C}$.

Жавоб: $y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + C}$.

Ўзгарувчилари ажратиладиган дифференциал тенгламаларни ечишни ўрганасиз.

$$f_1(x) \cdot g_1(y)dx + f_2(x) \cdot g_2(y)dy = 0 \tag{3}$$

*кўринишдаги тенглама **ўзгарувчилари ажратиладиган дифференциал тенгламалар** дейилади.*

Ўзгарувчилари ажратиладиган дифференциал тенгламаларни ечиш учун (3) тенгламанинг иккала томонини $f_2(x) \cdot g_1(y) \neq 0$ ифодага бўламиз:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \text{ ёки } \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy. \tag{4}$$

МИСОЛ

7. $x(y-6)dx = dy$ тенгламани ечамиз.

Ечиш. Берилган тенглама ўзгарувчилари ажратиладиган дифференциал тенглама бўлгани учун, тенгламанинг иккала томонини $y - 6 \neq 0$ ифодага бўламиз.

У ҳолда берилган тенглама $xdx = \dfrac{dy}{y-6}$ кўринишга келади. Охирги тенгламанинг иккала томонини интеграллаймиз: $\int xdx = \int \dfrac{dy}{y-6}$.

Бундан $\dfrac{x^2}{2} = \ln|y-6| + C$ ёки $\ln|y-6| = \dfrac{x^2}{2} - C$. Бунда C ўзгармас манфий ва мусбат қийматларни қабул қилгани сабабли, $\ln|y-6| = \dfrac{x^2}{2} + C$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу дифференциал тенгламанинг умумий интеграли, унинг умумий ечими эса $y = 6 + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$.

Жавоб: $y = 6 + C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$.

МИСОЛ

8. $y' + (2y+1)\text{ctg}x = 0$ дифференциал тенгламани ечамиз.

Ечиш. Берилган тенгламадаги ҳосилани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)\text{ctg}x = 0.$$

Олинган дифференциал тенгламага ўзгарувчиларни ажратиш амалини қўллаймиз. Бунинг учун иккинчи қўшилувчини тенгликнинг ўнг томонига ўтказамиз:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)\text{ctg}x.$$

Дифференциал тенгламаларни ўзгарувчилари ажратилган тенгламалар кўринишида ёзамиз: $\dfrac{dy}{2y+1} = -\text{ctg}x\,dx$.

Охирги тенгламанинг иккала томонини интеграллаймиз: $\int \dfrac{dy}{2y+1} = -\int \text{ctg}x\,dx$.

Ҳар бир интегрални янги ўзгарувчи киритиш усули билан ечамиз:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \left| \begin{array}{l} 2y+1=t, \text{ бундан } d(2y+1)=dt \text{ ёки} \\ 2dy=dt, \text{ ёки } dy=0{,}5dt \end{array} \right| = \int \frac{0{,}5dt}{t} = 0{,}5\ln|t| = 0{,}5\ln|2y+1|.$$

$$-\int \text{ctg}x\,dx = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \text{ бундан } d(\sin x) = dt \\ \text{ёки } \cos x dx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + \ln|C| =$$
$$= -\ln|\sin x| + \ln|C|.$$

У ҳолда $0{,}5\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$ ҳосил қиламиз. Логарифм хоссаларидан фойдаланиб, тенгламанинг иккала томонини шакл алмаштирамиз:

$\ln|2y+1|^{0,5} = -\ln|\sin x| + \ln|C|$, яъни $\ln\sqrt{|2y+1|} = \ln\left|\dfrac{C}{\sin x}\right|$ ёки $\sqrt{|2y+1|} = \left|\dfrac{C}{\sin x}\right|$.

Демак, умумий интеграл $\sqrt{|2y+1|} \cdot \sin x = C$, бунда C — ўзгармас.

Натижада умумий интеграл кўринишидаги дифференциал тенгламанинг ечимини топдик.

Жавоб: $\sqrt{|2y+1|} \cdot \sin x = C$, бунда C — ўзгармас.

Физик масалаларни ечишда дифференциал тенгламалардан фойдаланишни ўрганасиз.

мисол

9. Радийнинг парчаланиш тезлиги унинг массасига пропорционал. Агар 1600 йилдан кейин радий массасининг ярми қоладиган бўлса, у ҳолда радийнинг парчаланиш қонунини топинг.

Ечиш. x — радийнинг массаси ва t — вақт (йиллар билан ҳисоблаганда) бўлсин. $x = f(t)$ қонуниятни топамиз.

Масаланинг шартига кўра $x' = kx$ ёки $\frac{dx}{dt} = kx$ дифференциал тенгламаларни кўриб чиқамиз. Ҳосил бўлган тенглама ўзгарувчилари ажратилган дифференциал тенглама ҳисобланади. Демак, $\frac{dx}{x} = kdt$ тенгламага эга бўламиз.

Бундан $\ln x = kt + C$. Дастлаб $t = 0$ бўлганда радийнинг массаси x_0. Мос равишда C нинг қийматини топамиз. У ҳолда $\ln x_0 = k \cdot 0 + C$ ёки $C = \ln x_0$. Бундан $\ln x - \ln x_0 = kt$, яъни $\ln\frac{x}{x_0} = kt$ келиб чиқади. Энди 1600 йилдан кейин k шарт бўйича ярми камайишини аниқлаймиз, яъни $\ln\frac{1}{2} = 1600k$ ёки $k = -\frac{\ln 2}{1600} \approx -0{,}00043$.

У ҳолда $\ln\frac{x}{x_0} = -0{,}00043t$ ёки $\frac{x}{x_0} = e^{-0{,}00043t}$.

Бундан $x = x_0 \cdot e^{-0{,}00043t}$.

Жавоб: $x = x_0 \cdot e^{-0{,}00043t}$.

1. Дифференциал тенгламаларнинг алгебраик тенгламалардан қандай фарқи бор?
2. Дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини қандай ҳолларда топиш мумкин?
3. Қандай дифференциал тенгламалар ўзгарувчилари ажратилган дифференциал тенгламалар деб аталади?
4. Қандай дифференциал тенгламалар ўзгарувчилари ажратиладиган дифференциал тенгламалар деб аталади?

Машқлар

А

27.1. Жадвални тўлдиринг:

34-жадвал

Дифференциал тенглама	Дифференциал тенгламанинг тартиби
$y''' - 3xyy' = x - y$	
$xy'' + xy' = 2x - y$	
$4y'''' - 3xy'' = x^3 - y$	
$y - x^2y' = 2x - 1$	

27.2. Жадвални тўлдиринг:

35-жадвал

Дифференциал тенглама	Ўзгарувчилари ажратилган дифференциал тенглама	Ўзгарувчилари ажратиладиган дифференциал тенглама
$yy' = x - 1$		
$xy' = (x^2 + x)y$		
$ydy = (2x^2 - x + 3)dx$		
$x^2dy = 2dx$		
$ydy = (x^2 - x)(1 + y^2)dx$		
$(y + 1)dy = (3x^2 - 2x)dx$		
$dy = xe^x dx$		

27.3. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ёзинг:

1) $y' = y$;
2) $y' = 2x \cdot y$;
3) $y' = 2x - 3$;
4) $y' = 3x^2 + 2x - \pi$.

27.4. 1) $y(2) = 3$ шарт бўйича $y' = 2x - 1$;
2) $y(1) = 2$ шарт бўйича $y' = 3x^2 - 4$;
3) $y(0) = -2$ шарт бўйича $y' = 3x^2 - 4x$;
4) $y(-1) = 4$ шарт бўйича $y' = 2x - 3x^2$ дифференциал тенгламанинг хусусий ечимларини топинг.

B

27.5. 1) $y(1) = -2$ шарт бўйича $y' = \dfrac{x}{y}$;
2) $y(1) = 1$ шарт бўйича $y' = 3yx^2$;
3) $y(0) = 2$ шарт бўйича $2y' = y^{-1}\cos x$;
4) $y(1) = \pi$ шарт бўйича $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ дифференциал тенгламанинг хусусий ечимларини топинг.

27.6. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

1) $y' = 2x\cos^2 y$;
2) $y' = 4x\sin^2 y$;
3) $y' = e^{2x} + 4x$;
4) $y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}$.

27.7. 1) $y = 5e^{3x}$ функция $y' = -2y$ тенгламанинг ечими бўлишини исботланг.

2) $y = 1{,}7e^{-2x}$ функция $y' = -2y$ тенгламанинг ечими бўлишини исботланг.

3) $y = \pi e^{-5x}$ функция $y' = -5y$ тенгламанинг ечими бўлишини исботланг.

27.8. 3000 аҳолиси бўлган мажмуада грипп эпидемияси $\frac{dy}{dt} = 0{,}001y(3000 - y)$ тенглама билан кўрсатилган, бунда y — t вақтда касалга чалинганлар, t — ҳафта сони. Дастлаб мажмуада грипп эпидемиясига чалинган одамлар сони 3 тага тенг бўлса, у ҳолда икки ҳафтадан кейин грипп эпидемиясига чалинганлар сони нечтага етади ($e \approx 2{,}72$)?

C

27.9. Қаттиқ жисмнинг ҳарорати 20°C ли хонада 100°C дан 60°C гача бўлган ҳароратда 20 мин да совийди. Жисмнинг совиш қонуниятини топинг. Хона ҳарорати ўзгармас. Ньютон қонуни бўйича совиш тезлиги ҳароратлар фарқига тенг. Қанча вақтда жисм 30°C гача совийди?

27.10. 1) Моторли қайиқ кўлда 20 км/соат тезлик билан ҳаракатланди. Ҳаракат давомида қайиқнинг мотори ўчиб қолади ва 40 с дан кейин қайиқнинг тезлиги 8 км/соатгача камаяди. Сувнинг оқим қаршилиги қайиқнинг ҳаракат тезлигига тўғри пропорционал. Мотор тўхтагандан 2 с ўтгандан кейинги қайиқнинг тезлигини топинг.

2) Моторли қайиқ 30 км/соат тезлик билан ҳаракатланади. Агар сувнинг қаршилиги қайиқнинг ҳаракат тезлигига тўғри пропорционал ва пропорционаллик коэффициенти $\left(-1\frac{2}{3}\right)$ га тенг бўлса, мотор тўхтагандан 3 с ўтгандан кейинги қайиқнинг тезлигини топинг.

27.11. Сиғими C бўлган конденсатор U кучланишли ва қаршилиги R бўлган тармоққа уланган. Тармоққа улангандан кейин t вақтдаги конденсаторнинг q зарядини топинг.

27.12. 1) m мг ли С радиоактив моддадан 20 минутлик радиоактив парчаланишдан кейин n мг қолди. C модданинг ярим парчаланиш даврини топинг.

2) A радиоактив жисмнинг бир грами бор. А жисмнинг ярим парчаланиш даври 3 мин га тенг бўлса, у ҳолда неча минутдан кейин унинг массаси 0,125 г бўлади?

АХБОРОТ ТАЙЁРЛАНГ

27.13. Биология (химия, физика) бўйича амалий масалаларни ечишда дифференциал тенгламалар назариясидан фойдаланиш ҳақида ахборот тайёрланг.

ТАКРОРЛАШ

27.14. Функциянинг бошланғич функциясини топинг:

1) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} + 2x$;   2) $f(x) = \dfrac{4}{\sin^2 2x} + e^{4x}$;

3) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1} + e^{-x}$;   4) $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x} - 2e^{-x}$.

27.15. 1) $M(4;5)$ нуқта орқали ўтувчи параболага уринма, $y = x^2 - 4x + 5$ функциянинг графиги ва ординаталар ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

2) Функциянинг графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

$y = \sin^2 x$, $y = \cos^2 x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

27.16. Тенгсизликни ечинг:

1) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0$;   2) $\log_3(3x + 5) \leqslant 3$;

3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-3x+2} > 1$;   4) $7^{x^2} < \left(\dfrac{1}{49}\right)^{x-4}$.

ЯНГИ МАВЗУНИ ЎЗЛАШТИРИШ УЧУН ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, чизиқли тенглама, тенгламанинг ечими, ҳосила, бошланғич функция, интеграл, бошланғич функцияни топиш қоидалари, интегралнинг хоссаси, дифференциал тенгламалар, дифференциал тенгламаларнинг тартиби, дифференциал тенгламаларнинг ечими, умумий ечим, хусусий ечим.

28-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ БИР ЖИНСЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламаларни ($ay'' + by' + cy = 0$, бунда a, b, c — ўзгармас катталиклар) ечишни ўрганасиз.

ТАЯНЧ ТУШУНЧАЛАР

Тенглама, дифференциал тенглама, дифференциал тенгламанинг тартиби, дифференциал тенгламанинг ечими, умумий ечим, хусусий ечим

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ *кўринишдаги тенглама* ***иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенглама*** *дейилади.*

Бу ерда y — изланаётган функция, $p(x)$, $q(x)$ ва $f(x)$ функциялар эса бирор $(a; b)$ интервалда узлуксиз функциялар.

Агар $f(x) = 0$ *бўлса, у ҳолда* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ *кўринишдаги тенглама* ***иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама*** *дейилади.*

Агар $p(x)$ ва $q(x)$ ўзгармас сон бўлса, у ҳолда иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама қуйидаги кўринишга ўтади:

$y'' + py' + qy = 0$ ёки $ay'' + by' + cy = 0$, (1)

бу ерда a, b, c, p, q — ўзгармаслар.

(1) *тенглама иккинчи тартибли ўзгармас коэфициентли* ***бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама*** *дейилади.*

$ay'' + by' + cy = 0$ кўринишда берилган чизиқли дифференциал тенгламаларни қараб чиқамиз, бу ерда a, b, c — ўзгармаслар.

Дифференциал тенгламанинг ечими ҳосилалари берилган функцияга ўхшаш функция бўлиши лозим. Бундай хусусият кўрсаткичли функцияда мавжуд. Масалан, $y(x) = e^{kx}$ функция.

Теорема. Агар k_0 сони

$$ak^2 + bk + c = 0 \tag{2}$$

тенгламанинг илдизи бўлса, у ҳолда $y(x) = e^{k_0x}$ функция (1) тенгламанинг ечими бўлади.

Исботи. $y(x) = e^{k_0x}$ бўлсин. Ҳосилаларни топамиз: $y'(x) = (e^{k_0x})' = k_0 \cdot e^{k_0x}$ ва $y''(x) = (k_0e^{k_0x})' = k_0^2 \cdot e^{k_0x}$. Энди y'', y' ва y ифодаларни (1) тенгламага қўямиз. У ҳолда $ak_0^2 \cdot e^{k_0x} + bk_0 \cdot e^{k_0x} + c \cdot e^{k_0x} = 0$ ёки $e^{k_0x} \cdot (ak_0^2 + bk_0 + c) = 0$.

k_0 сони (2) тенгламанинг илдизи бўлгани боис, $e^{k_0x} \cdot (ak_0^2 + bk_0 + c)$ ифода нолга тенг. Демак, $y(x) = e^{k_0x}$ функция (1) тенгламанинг ечими бўлади.

$ak^2 + bk + c = 0$ тенглама (1) дифференциал тенгламанинг *тавсифий тенгламаси* деб аталади.

Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $ak^2 + bk + c = 0$ тавсифий тенгламанинг илдизларига боғлиқ. Берилган тавсифий тенглама квадрат тенглама бўлгани учун, унинг илдизи турли иккита ҳақиқий сон ёки бир хил иккита ҳақиқий сон ёки комплес сонлар бўлиши мумкин.

(1) иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламанинг умумий ечимининг мумкин бўлиши 36-жадвалда кўрсатилган (тасдиқларнинг исботи олий математикада ўрганилади).

36-жадвал

Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар		
$ak^2 + bk + c = 0$ тавсифий тенгламанинг илдизлари	$ak^2 + bk + c = 0$ тавсифий тенгламанинг дискриминанти	Умумий ечим
k_1, k_2 илдизлар ҳақиқий сонлар ва турли хил	$D > 0$	$y(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
k_1, k_2 илдизлар ҳақиқий сонлар ва тенг	$D = 0$	$y(x) = (C_1x + C_2)e^{k_1x}$
k_1, k_2 илдизлар комплекс сонлар	$D < 0$	$y(x) = e^{\alpha x}[C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)]$

МИСОЛ

1. $y'' - 7y' + 6y = 0$ дифференциал тенгламани ечамиз.

Ечиш. Аввал мос тавсифий тенгламани ёзамиз: $k^2 - 7k + 6 = 0$. Тенгламанинг иккита илдизи мавжуд: $k_1 = 1$ ва $k_2 = 6$. Бундан умумий ечим $y(x) = C_1e^x + C_2e^{6x}$, бунда C_1 ва C_2 — исталган ўзгармаслар.

Жавоб: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

МИСОЛ

2. $y'' + 4y' + 4y = 0$ дифференциал тенгламани ечамиз.

Ечиш. Аввал мос тавсифий тенгламани ёзамиз: $k^2 + 4k + 4 = 0$. Тенгламанинг битта илдизи мавжуд: $k_1 = -2$. Бундан умумий ечим: $y(x) = (C_1x + C_2)e^{-2x}$, бунда C_1 ва C_2 — исталган ўзгармаслар.

Жавоб: $y(x) = (C_1x + C_2)e^{-2x}$.

МИСОЛ

3. $y'' + 6y' + 58y = 0$ дифференциал тенгламани ечамиз.

Ечиш. Аввал мос тавсифий тенгламани ёзамиз: $k^2 + 6k + 58 = 0$.

Тенгламанинг иккита комплекс илдизи мавжуд: $k_{1,2} = -3 \pm 7i$. Бундан умумий ечим: $y(x) = e^{-3x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x)$, бунда C_1 ва C_2 — исталган ўзгармаслар.

Жавоб: $y = e^{-3x}(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x)$.

Гармоник тебранишлар тенгламасини тузишни ва ечишни ўрганасиз.

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

функция s тебраниш катталигининг t вақтга боғлиқлигини беради. Яъни (3) тенглама — эркин гармоник тебранишлар тенгламаси.

Одатда *тебранишлар тенгламаси* деб шу тенгламанинг дифференциал кўринишдаги ёзилиши қабул қилинади.

(3) функцияни вақт бўйича икки марта дифференциаллайлик:

$$\frac{ds}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) \text{ ёки } \frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0. \quad (4)$$

(4) тенглама *эркин гармоник тебранишларнинг дифференциал тенгламаси* дейилади.

(3) функция (2) дифференциал тенгламанинг ечими бўлади.

(4) тенглама — иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар бўлганлигидан, тўлиқ ечим олиш учун дастлабки иккита шарт ло-

зим. Яъни (3) формуланинг тартибига кирувчи A ва φ_0 ўзгармаслар бўлиши лозим. Масалан, $t = 0$ бўлгандаги тебранишлар амплитудаси ва фазаси.

1. Иккинчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимининг қандай мумкин бўлган ҳоллари мавжуд?
2. Иккинчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимининг кўриниши нимага боғлиқ бўлади?
3. Қандай ҳолларда ўзгармас коэффициентлари бўлган иккинчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламанинг ечими гармоник тебранишлар тенгламаси бўлади?

Машқлар

А

28.1. Жадвални тўлдиринг:

37-жадвал

Дифференциал тенглама	Тавсифий тенгламаси
$y'' - 4y = 0$	
$y'' - 23y = 0$	
$y'' + 25y = 0$	
	$k^2 + 8k = 0$
$y'' + 6y' - 16y = 0$	
	$2k^2 - 8k + 24 = 0$
$2y'' + 4y' + 19y = 0$	
$3y'' - 8y' + 28y = 0$	

28.2. Дифференциал тенгламани ечинг:

1) $y'' - 4y = 0$; 2) $y'' - 16y = 0$;
3) $y'' + 25y = 0$; 4) $y'' + 36y = 0$.

28.3. Дифференциал тенгламани ечинг:

1) $y'' - 6y' + 9y = 0$; 2) $y'' + 8y' + 16y = 0$;
3) $y'' - 2y' - 8y = 0$; 4) $y'' + 4y' - 12y = 0$.

28.4. Дифференциал тенгламани ечинг:

1) $y'' - 2y' + 10y = 0$; 2) $y'' + 8y' + 25y = 0$;
3) $y'' + 6y' + 45y = 0$; 4) $y'' - 4y' + 53y = 0$.

28.5. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли дифференциал тенгламани ечинг:

1) $y'' + 5y' - 6y = 0$; 2) $y'' - 3y' - 10y = 0$;
3) $y'' - 4y' + 12y = 0$; 4) $y'' + 8y' + 36y = 0$.

B

28.6. 1) $y(0) = 1$, $y(1) = 2$ шарт бўйича $y'' - 6y' + 9y = 0$;
2) $y(0) = 3$, $y(1) = 4$ шарт бўйича $y'' + 2y' + y = 0$;
3) $y(0) = 2$, $y(1) = 1$ шарт бўйича $y'' - y' - 2y = 0$;
4) $y(0) = 2$, $y(1) = 0$ шарт бўйича $y'' - 2y' - 8y = 0$ дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топинг.

28.7. 1) $y(0) = 1$, $y(\frac{\neq}{2}) = 2$ шарт бўйича $y'' + y = 0$;
2) $y(0) = 2$, $y(\frac{\neq}{8}) = -1$ шарт бўйича $y'' + 16y = 0$ дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топинг.

C

28.8. Ечими:
1) $y = e^{-3x}(C_1\cos2x + C_2\sin2x)$; 2) $y = e^{-x}(C_1\cos4x + C_2\sin4x)$;
3) $y = e^{x}(C_1\cos5x + C_2\sin5x)$; 4) $y = e^{2x}(C_1\cos2\sqrt{3}x + C_2\sin2\sqrt{3}x)$
бўлган иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама тузинг.

28.9. Ечими гармоник тебранишлар тенгламаси бўладиган иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламани ёзинг:

1) $y = \cos(2x - 1)$; 2) $y = 2\sin(2x - 3)$;
3) $y = e^{2x} \cdot \sin(\sqrt{3}x - 5)$; 4) $y = e^{-x} \cdot \sin(2\sqrt{2}x - 1)$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГИНГ!

1. $y' = 3 - 2x - 3x^2$ дифференциал тенгламанинг ечими:
A) $y = 3x - x^2 - 3x^3 + C$; B) $y = 3x - 2x^2 - x^3 + C$;
C) $y = 3x - x^2 - x^3 + C$; D) $y = 3x^{-1} - x^2 - x^3 + C$;
E) $y = x - 2x^2 - x^3 + C$.

2. $y' = 5y$ дифференциал тенгламанинг ечими:

A) $y = 5x$; B) $y = e^{5x+C}$; C) $y = 3 - e^{5x}$;
D) $y = C - e^{5x}$; E) $y = x - e^{5x}$.

3. $y' = y\cos x$ дифференциал тенгламанинг ечими:

A) $y = xe^{\sin x}$; B) $y = e^{2\sin x + C}$; C) $y = e^{-\sin x}$;
D) $y = C \cdot e^{\sin x}$; E) $y = C \cdot e^{\cos x}$.

4. $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ бўлганда $\frac{dy}{dx} = 4xe^{-y}$ дифференциал тенгламанинг хусусий ечими:

A) $y = 4e^{x}$; B) $y = 2e^{2x}$; C) $y = \ln x$;
D) $y = \ln x^2$; E) $y = \ln 2x^2$.

5. $y'' - 5y' + 20y = 0$ иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг тавсифий тенгламаси:

A) $2k^2 - 5k - 20 = 0$; B) $2k^2 - 5k + 20 = 0$;
C) $k^2 - 5k + 20 = 0$; D) $2k^2 - 5k + 10 = 0$;
E) $k^2 + 5k - 20 = 0$.

6. $y'' + 32y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

A) $y = C_1\cos 4\sqrt{2}x + C_2\sin 4\sqrt{2}x$; B) $y = C_1\cos 2\sqrt{2}x + C_2\sin 2\sqrt{2}x$;
C) $y = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x$; D) $y = C_1\cos 8\sqrt{2}x + C_2\sin 8\sqrt{2}x$;
E) $y = e^{x}(C_1\cos 4\sqrt{2}x + C_2\sin 4\sqrt{2}x)$.

7. Умумий ечими $y = e^{5x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$ бўлган иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама:

A) $y'' - 10y' + 25y = 0$; B) $y'' - 10y' + 41y = 0$;
C) $y'' - 10y' + 42y = 0$; D) $y'' + 10y' + 41y = 0$;
E) $y'' - 10y' + 45y = 0$.

8. $y'' - 6y' + 34y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

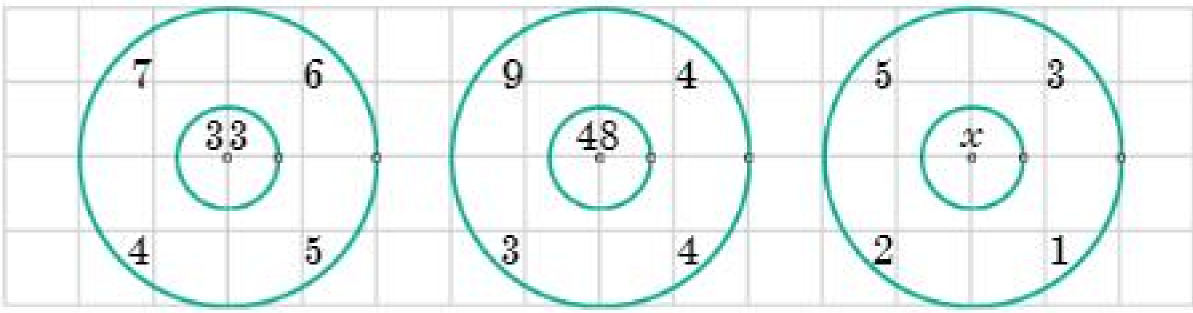
A) $y = e^{-2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$; B) $y = e^{3x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$;
C) $y = e^{3x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$; D) $y = e^{-3x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$;
E) $y = e^{6x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x)$.

Математик саводхонлик бўйича тест топшириқлари

9. Иморатнинг олдига 8,5 м · 4,5 м тўғри тўртбурчак шаклида гулзор солинган. Кўчатлар орасидаги масофа — 50 см. Гулзорнинг периметри бўйича ўтқазилган атиргул кўчатларининг сонини топинг:

A) 50; B) 56; C) 54; D) 53; E) 52.

10. Расмда кичик доира ичидаги сонлар маълум бир қонуният билан жойлашган (73-расм). x нинг қийматини топинг:



73-расм

A) 13; B) 10; C) 16; D) 12; E) 14.

11. 1 дан 10 000 гача бўлган натурал сонларни ёзиш учун керак бўладиган барча рақамлар сонини топинг:

A) 39 884; B) 38 894; C) 38 584; D) 38 694; E) 38 889.

12. Китобнинг ўртасидан бир нечта варақ тушиб қолган. Унинг чап бетининг тартиб рақами 62, ўнг бетининг тартиб рақами 87. Китобнинг охирги бетининг тартиб рақамини топинг:

A) 144; B) 146; C) 148; D) 152; E) 150.

13. Азиза ва Қодир битта мактабда ўқишади. Қодир мактабдан 2 км узоқликда яшайди, Азиза эса 1 км узоқликда яшайди. Агар Қодир билан Азиза битта кўчада яшашса, у ҳолда уларнинг уйлари орасидаги масофани топинг:

A) 2 км; B) 1 км ёки 3 км; C) 1 км;
D) 3 км; E) 4 км.

10-11-СИНФЛАР АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

Ҳисоблашлар

1. Ифоданинг қийматини топинг:

1) $\frac{1}{2\sqrt{30}+11} - \frac{1}{2\sqrt{30}-11}$; 2) $(\sqrt{15}+\sqrt{45})^2 - 30\sqrt{3}$;

3) $\left(\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-1} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \cdot ((\sqrt{2})^{-1} - (2\sqrt{2})^{-1})^2$;

4) $5^{\log_2 4 - \lg 20 - \lg 5}$;

5) $9^{2-\log_3 4,5 - \log_3 2} + \log_3 243$;

6) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[256]{2}$;

7) $\log_9 3 + \frac{\log_3 6}{\log_{18} 3} - \frac{\log_3 2}{\log_{54} 3}$;

8) $\log_6 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 - \log_6 2$.

9) $\arcsin(-1) + 2\arccos(-1) - 2\mathrm{arcctg}1$;

10) $\mathrm{tg}(\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}))$;

11) $3\arcsin(-0,5) + 3\arccos(-1) - 2\mathrm{arctg}(-1)$;

12) $\arccos(\cos 11)$.

2. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласининг қийматини топинг:

1) $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = (2x-1)^2 - 4\sqrt{x^5}$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = 3x^{\frac{7}{3}} - 5\sqrt[5]{x^2} + 2x$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = (3x+4) \cdot e^{2x}$, $x_0 = -1$.

5) $f(x) = \arcsin x + \mathrm{arctg}2x$, $x_0 = 0$;

6) $f(x) = \arccos 2x + \mathrm{arcctg}3x$, $x_0 = 0$.

3. Абсциссаси x_0 бўлган нуқтада $y = f(x)$ функция графигига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентининг қийматини топинг:

1) $y = e^{2x}$, $x_0 = 2$; 2) $y = \frac{x}{x+1} - \sqrt{6-x}$, $x_0 = 2$;

3) $y = \ln\frac{x}{x+1}$, $x_0 = 3$; 4) $y = e^{2x^2-x}$, $x_0 = 1$.

5) $y = \cos^2 2x$, $x_0 = 1$; 6) $y = \mathrm{ctg}2x$, $x_0 = 0,25\pi$.

4. x_0 нуқтада $f''(x)$ функциянинг қийматини топинг:

1) $f(x) = e^{2x-1}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \ln 4x$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \sin^2 3x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$. 4) $f(x) = \sin 4x$, $x_0 = \frac{\neq}{2}$.

5. Берилган оралиқда $y = f(x)$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $y = xe^x$, $[0; 3]$; 2) $y = x\ln x$, $[2; 3]$;

3) $y = \sqrt{x} - x$, $[0; 4]$; 4) $y = \frac{1}{x} + x$, $[0,5; 4]$.

Айниятлар

Ифодани соддалаштиринг (**6—10**):

6. 1) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} + \frac{\sqrt{a}}{3+\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{a + 6\sqrt{a} + 9}{a}$;

2) $\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$.

7. 1) $\left(\frac{\sqrt{1+a^2}}{1+b+a^2} - \frac{\sqrt{b}\cdot(\sqrt{1+a^2}-\sqrt{b})^2}{(1+a^2)^2-b^2}\right)^{-1} - 10^{\log_{100}(1+a^2)}$;

2) $2^{\log_2 x} + \sqrt{\frac{4}{x} - 2 + \frac{1}{4x^{-1}}} + \sqrt{\frac{x}{4} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{2}}$.

8. 1) $((a^{-\frac{3}{7}} \cdot y^{-0,4})^3 \cdot a^{\frac{3}{7}} \cdot y^{0,2})^{-1}$; 2) $((a^{-\frac{2}{7}} \cdot y^{\frac{1}{14}})^{3,5} \cdot y^{\frac{5}{4}} \cdot a^{-1})^{-1}$.

3) $\sin^2(\mathrm{arctg}3 - \mathrm{arcctg}(-0,5))$; 4) $\cos(2\mathrm{arctg}2) - \sin(4\mathrm{arctg}3)$.

9. 1) $\frac{x-y}{x^{0,5}-y^{0,5}} - \frac{x^{1,5}-y^{1,5}}{x-y}$; 2) $\frac{\sqrt{y}}{x^{0,5}-y^{0,5}} + \frac{\sqrt{x}}{x^{0,5}+y^{0,5}}$.

10. 1) $(\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}})^2 - 2a$; 2) $(\sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}})^2 + 2\sqrt{y^2-x}$.

Ифоданинг қийматини топинг (**11-12**):

11. 1) $2\log_{\frac{a^2}{b}}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\frac{a^2}{b}} b$, агар $\log_a b = -2$;

2) $\log_{\sqrt{ab}}\left(\frac{a}{b}\right) + \log_{a^2b^2} b + \log_{ab}\sqrt{a}$, агар $\log_a b = 2$.

12. 1) $\log_7 12$, агар $\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$;

2) $\log_{12} 14$, агар $\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$;

3) $\log_5 60$, агар $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$;

4) $\log_3 1500$, агар $\log_3 5 = a$, $\log_3 2 = b$.

Функциянинг лимити ва ҳосиласи

13. Функциянинг лимитини ҳисобланг:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\mathrm{tg}2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{4x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\ln(1+4x^2)}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\ln^2(1+2x)}$.

14. $y = f(x)$ функция узлуксиз бўладиган a параметрнинг қийматини топинг:

1) $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x\leqslant 2,\\ ax-6, & x>2;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}4+x, & x\leqslant 1,\\ 2x^2-a, & x>1;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{2x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

15. $f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = 2x(|x|-1)$; 2) $f(x) = x^2|x-2| + 2x^2$.

16. $f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 2x - 2^{2x}$; 2) $f(x) = \sin^3 2x + \cos 3x - e^{2-x}$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{ctg} 3x + e^x$; 4) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x + \arccos x + \sqrt{x}$.

17. $x = 2$ бўлганда $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласининг қийматини топинг.

18. $f(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x) = \ln\dfrac{2x-1}{3x+2}$; 2) $f(x) = \ln\dfrac{(x-1)^3}{x+3}$;

3) $f(x) = \ln\dfrac{(x+3)^4}{(x-1)^2}$; 4) $f(x) = x + \ln\dfrac{(x-5)^5}{(x+1)^4}$.

19. $f'(x) = 0$ бўладиган нуқталарни топинг:

1) $f(x) = \sqrt{3} + 3x^2 - x^3$; 2) $f(x) = (x^2 - x)\cdot e^{2x}$;

3) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 2\pi$; 4) $f(x) = \pi + x + \sin^2 2x$.

Интеграл

20. $y = f(x)$ функциянинг координаталар бошидан ўтувчи бошланғич функциясини ёзинг:

1) $f(x) = 2x - 3$; 2) $f(x) = -3x^2 + 1$;

3) $f(x) = 5 - 3\sin x$; 4) $f(x) = 2\cos x - 3x^2$.

21. Аниқмас интегрални топинг:

1) $\int(2x-1)^4dx$; 2) $\int(5-2x)^{-3}dx$; 3) $\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx$;

4) $\int(x+e^{2x})dx$; 5) $\int\sin(2-3x)dx$; 6) $\int\cos^2(x-3)dx$;

7) $\int\dfrac{3}{\cos^2 3x}dx$; 8) $\int\dfrac{2x}{3+x^2}dx$.

22. Бўлаклаб интеграллаш усули билан интегрални топинг:

1) $\int(x+1)e^x dx$; 2) $\int x^5 e^{x^2} dx$; 3) $\int x\sin x dx$;

4) $\int xe^{2x} dx$; 5) $\int x^2\sin x dx$; 6) $\int x\cos^2\frac{x}{2} dx$.

23. Аниқ интегрални ҳисобланг:

1) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$; 2) $\int\limits_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos 5x dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx$; 5) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^2}$; 6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx$.

24. а) Функциялар графиклари билан чегараланган ясси фигуранинг юзини топинг:

1) $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$;

2) $y = 2^x - 1$, $y = 0$, $x = 2$, $y = \frac{1}{x^2}$;

3) $y = 3 - x^2$, $y = 1 + |x|$.

б) Ox ўқи атрофида айлантирганда ҳосил бўладиган айланма жисмнинг ҳажмини топинг:

1) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$; 2) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$.

Тенгламалар ва тенгсизликлар

25. Тенгламани ечинг:

1) $(x+1)^{x^2-x} = (x+1)^2$; 2) $(x-1)^{x^2+x} = (x-1)^6$;

3) $|x-3|^{3-x} = |3-x|^2$; 4) $\log_{x+2}(3x^2-12) = 2$;

5) $\log_{5-x^2}(2x^2-8x-2) = 1 + \log_{5-x^2}$; 6) $\log_{\frac{x-3}{x+1}} 2 = 1$.

7) $\sin^2 3x + \cos^2 x = 1$;

8) $\cos^2 3x + \cos^2 x = \cos^2 4x + \cos^2 2x$.

26. Тенгсизликни ечинг:

1) $x^{4x^2} < x$, $x > 0$; 2) $|x+5|^{x^2-4x+3} > 1$;

3) $\log_{2x-3} x > 1$; 4) $\log_{x^2}(3x+4) \geqslant 1$.

27. Тенгсизликни ечинг:

1) $\sqrt{2x-1} > x-2$; 2) $\sqrt{x+1} > x-1$;

3) $\sqrt{9x-20} > x$; 4) $\sqrt{14-x} > 2-x$;

5) $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$; 6) $\sqrt{x^2-10x+24} > x-4$.

28. 1) $\frac{x-3}{2} \geqslant \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{x-6}$ тенгсизликнинг энг кичик бутун қийматини топинг;

2) $\frac{4-2x}{\sqrt{x^2-8x+7}} \geqslant 0$ тенгсизликнинг энг катта бутун қийматини топинг;

3) $(x^2 + 2x - 8) \cdot \sqrt{x^2 + x - 2} \leqslant 0$ тенгсизликни ечинг;

4) $5^{0,5\log_5^2 x} \geqslant 5 \cdot x^{0,25\log_5 x}$ тенгсизликни ечинг.

29. $f'(x) \geqslant 0$ тенгсизликни ечинг:

1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 3x + \sin x$;
2) $f(x) = 2\sin\frac{1}{2}x - \sqrt{3x}$;
3) $f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin^2 x - x$;
4) $f(x) = \sin^2 3x - \frac{1}{12}\cos 6x + x$;
5) $f(x) = \arccos 3x + 2x + 3$;
6) $f(x) = \operatorname{arcctg} 2x + 2x - 1$.

30. $f'(x) = a$ тенгламани ечинг:

1) $f(x) = 3e^{x+4}$, $a = \frac{3}{e}$;
2) $f(x) = 4 + \frac{1}{3}e^{-6x-13}$, $a = -2$;
3) $f(x) = 2e^{-7x+9}$, $a = -14$;
4) $f(x) = 7 - e^{0,1x-3}$, $a = 0,1$.

Функция ва унинг графиги

31. Функция графигининг асимптоталарини топинг:

1) $y = \frac{x - 2}{x - 1}$;
2) $y = \frac{5 - x}{x + 3}$;
3) $y = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$;
4) $y = \frac{2x^2 - x}{x + 2}$.

32. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

1) $y = x^2 + 10x - 10\sqrt{3}$;
2) $y = \lg(x^2 - 4x)$;
3) $y = x^3 - 6x^2 + 9$;
4) $y = xe^x$.

33. Функцияни жуфтликка текширинг:

1) $y = 2 + |x| - 2x^2$;
2) $y = |x + 2| - |x - 2|$;
3) $y = |x - 1| + |x + 1|$;
4) $y = 1 - \frac{1}{x^3}|x|$;
5) $y = \sqrt{x+9} - \sqrt{9-x}$;
6) $y = \sqrt{x+8} - \sqrt{8-x}$.
7) $y = |x| + \cos 3x$;
8) $y = \operatorname{arctg} 2x + \sin 2x$;
9) $y = 2^{|x|} + \ln|3x|$.

34. “Жонли геометрия” ёки “GeoGebra” дастуридан фойдаланиб функциянинг графигини ясанг, монотон оралиқларини ёзинг, минимум ва максимум нуқталарини топинг:

1) $f(x) = ||x - 1| - 2|$;
2) $f(x) = ||x + 3| - 3|$;
3) $f(x) = ||x + 1| - 4|$;
4) $f(x) = \operatorname{arctg}|x|$;
5) $f(x) = \sin x + |\sin x|$;
6) $f(x) = \cos x - |\cos x|$.

35. Абсциссаси $x_0 = 0$ бўлган нуқтада $y = f(x)$ функция графигига ўтказилган уринма тенгламасини тузинг:

1) $y = x - 2\sqrt{x+1}$; 2) $y = \sqrt{3x+1}$;
3) $y = xe^{2x}$; 4) $y = x\ln(x+e)$.

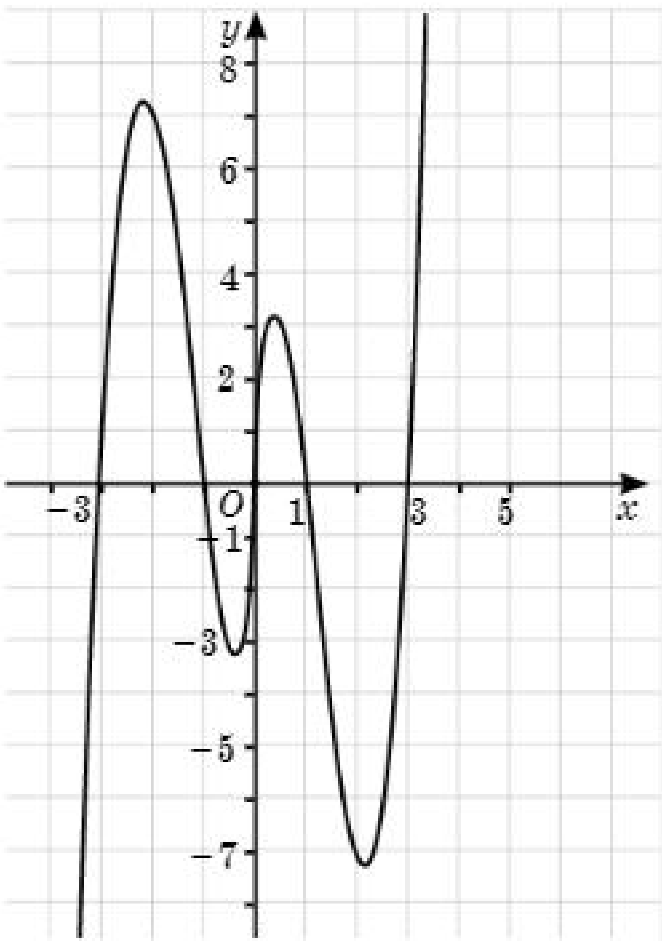
36. Функциянинг критик нуқталарини топинг:
1) $f(x) = x - 2\sin x$; 2) $f(x) = x + \cos 2x$;
3) $f(x) = (x+2)e^{1-x}$; 4) $f(x) = \cos x \cdot e^{2x}$.

37. "Жонли математика" ёки "GeoGebra" дастурларидан фойдаланиб $f(x)$ функциянинг графигини ясанг ва асимптоталарини топинг:
1) $y = \dfrac{\sqrt{x+4}}{x-1}$; 2) $f(x) = x \cdot \ln(x+2)$.

38. Берилган тўғри чизиққа параллел бўлган $f(x)$ функциянинг графигига ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:
1) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $y = \dfrac{3}{4}x + 2$ тўғри чизиқ;
2) $f(x) = \sqrt{3-2x}$, $y = -x - 6$ тўғри чизиқ.

39. Функцияни текшириб, графигини ясанг:
1) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$; 2) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$;
3) $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^x$; 4) $f(x) = (x+1) \cdot \ln x$.

40. $y = f'(x)$ функциянинг графиги берилган (74-расм).

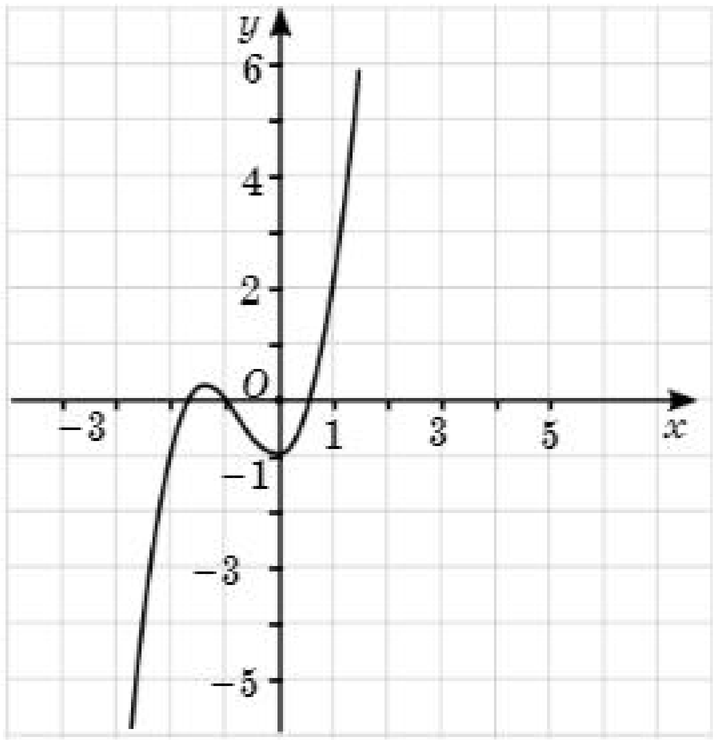


74-расм

График бўйича:
1) $f'(x)$ қиймат 0 га тенг бўладиган нуқталарни;

2) $f(x)$ функциянинг ўсиш оралиқларини;
3) $f(x)$ функциянинг камайиш оралиқларини;
4) $f(x)$ функциянинг минимум нуқталарини топинг.

41. $y = f'(x)$ функциянинг графиги берилган (75-расм).



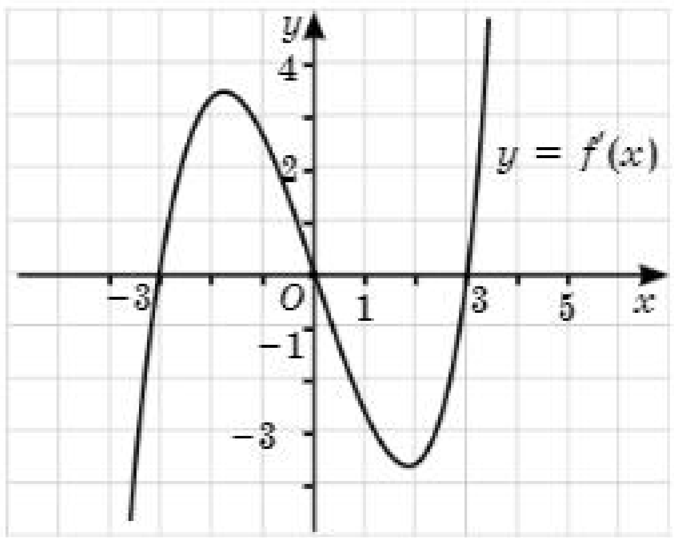
75-расм

График бўйича:
1) минимум нуқталарини; 2) максимум нуқталарини; 3) функциянинг экстремумларини топинг.

42. Функцияни текширинг ва "Жонли математика" ёки "GeoGebra" дастурларидан фойдаланиб, графигини ясанг:

1) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $y = x + \frac{2}{x}$; 4) $y = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$;
5) $y = (x + 3) \cdot e^{x-1}$; 6) $y = (x^2 + 2x) \cdot \ln x$.

43. $y = f'(x)$ функциянинг графиги берилган (76-расм).



76-расм

Функциянинг максимум ва минимум нуқталарини топинг.

44. Нуқта тўғри чизиқли $s = 3t^2 - \frac{3}{2}t$ қонун бўйича ҳаракатланади, бунда $s(t)$ — метрларда, t — секундларда берилган. [1; 5] вақт оралиғининг қайси моментида тезлик энг катта қийматига эга бўлади ва тезликнинг катталиги қандай?

45. 1) Узунлиги 120 см бўлган симдан юзи энг катта бўладиган тўғри тўртбурчак ясаш керак. Шу тўғри тўртбурчак томонларининг узунликларини топинг.

2) Юзи энг катта бўладиган ва периметри a га тенг тўғри тўртбурчакнинг томонлари узунликларини топинг.

46. 1) Квадратларининг йиғиндиси энг кичик бўладиган 12 сонини иккита мусбат қўшилувчиларга ажратинг.

2) Кўпайтмасининг қиймати энг катта бўладиган 18 сонини иккита мусбат қўшилувчиларга ажратинг.

3) Квадратларининг йиғиндиси энг кичик бўладиган 16 сонини иккита мусбат қўшилувчиларнинг кўпайтмаси кўринишида ёзинг.

47. 1) Нуқта тўғри чизиқли $x(t) = t^2 + 2t + 5$ қонун билан ҳаракатланади. Нуқтанинг 5 секунддаги тезлигини топинг.

2) Нуқта тўғри чизиқли $x(t) = 5t + 6t^2 - t^3$ қонун билан ҳаракатланади. $t = 2$ с пайтдаги нуқтанинг тезланишини топинг.

48. Юзи 800 м² бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги ер майдони уч томонидан ўралган. Қуршовнинг узунлигини топинг.

49. Юзи 12,5 м² бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги деразанинг бир томони ярим айлана шаклида. Деразанинг периметри энг кичик бўладиган ярим айлананинг радиуси қандай бўлиши керак?

50. $f(x) = \sqrt{2 - x}$ функция графигига ўтказилган уринма ва координата ўқлари билан чегараланган учбурчакнинг юзи энг кичик бўлиши учун уринма графикнинг қандай нуқтасидан ўтиши керак?

Дифференциал тенгламалар

51. Тенгламани ечинг:

1) $y' = \frac{x^4 - 2}{x^3}$; 2) $y' = (1 + x^2)(1 + y^2)$;

3) $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$; 4) $y\cos y \cdot y' = -2x$.

52. Берилган шартни қаноатлантирувчи дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топинг:

1) $x^2y' = -y^2$, $y(-1) = 1$; 2) $(1 + e^x)yy' - 0{,}5e^x = 0$, $y(0) = 0$;

3) $ydx + \text{ctg}xdy = 0$, $y(\frac{\pi}{3}) = -1$; 4) $\cos^2 x \cdot \ln ydy = ydx$, $y(\pi) = 1$.

53. Дифференциал тенгламани ечинг:

1) $y' - y \cdot \operatorname{ctg}x = \sin x$; 2) $yy' = 1 + 3x\ln x$;
3) $y' - y = e^x$; 4) $(1 + x^2)y' + 4xy = 3$.

54. Ўзгармас коэффициентлари бўлган иккинчи даражали чизиқли бир жинсли тенгламани ечинг:

1) $y'' - 5y' - 6y = 0$; 2) $y'' - 2y' - 8y = 0$;
3) $y'' + 3y' - 10y = 0$; 4) $y'' + 4y' - 12y = 0$.

55. 1) Тўғри чизиқли йўл бўйидаги поезднинг тезлиги 72 км/соат. Агар поезд тўхтай бошлагандан бошлаб ҳаракатнинг қаршилик кучи поезд массасининг 0,2 ига тенг бўлса, у ҳолда у қанча вақтдан кейин ва қандай масофада тўхтайди?

2) Коррдинаталар ўқлари орасида жойлашган уринма кесмаси уриниш нуқтасида тенг иккига бўлинса, у ҳолда шу нуқта орқали ўтувчи эгри чизиқ тенгламасини ёзинг.

3) Ҳарорати 20°С бўлган сувда жисм 10 минут ичида 100°С дан 60°С гача совийди. Ньютон қонуни бўйича совиш тезлиги жисм билан совитадиган муҳит ҳароратининг айирмасига пропорционал бўлса, у ҳолда жисм қанча вақтда 30°С гача совийди?

Комплекс сонлар

56. Амалларни бажаринг:

1) $3(2 + 3i) - (3 - 5i)$; 2) $4(1 + 3i) - (2 + 5i)$;
3) $(2,1 - i) - (3,1 - 5i)$; 4) $6(2 + 3i) - 2(2 + 5i)$.

57. Комплекс сонлар устида амаллар бажаринг:

1) $(2 + 3i)(3 - i)$; 2) $(1 - 3i)(3 - 2i)$;
3) $(1 - 2i)^2$; 4) $(2 - i)^2 + 5i$.

58. Комплекс сонларга ўзаро қўшма бўладиган x ва y нинг ҳақиқий қийматларини топинг:

1) $5 - yi$ ва $x + 2i$; 2) $3 + 2yi$ ва $2x + 4i$.

59. Ифодани кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $25 + 9x^2$; 2) $4x^2 + 16y^2$;
3) $x^2 - 4x + 5$; 4) $x^2 - 6x + 25$.

60. Берилган битта илдизи бўйича коэффициентлари ҳақиқий сонлар бўладиган квадрат тенглама тузинг:

1) $2i$; 2) $2 - i$; 3) $3 - 2i$; 4) $-2 + 4i$.

Комбинаторика ва эҳтимоллар назарияси элементлари

61. 1) 2, 6, 7 рақамлардан 10 000 сонидан кичик бўлган нечта сон тузиш мумкин? Уларнинг нечтаси тоқ?
2) 4, 5, 9 рақамлардан 10 000 сонидан кичик нечта сон тузиш мумкин? Уларнинг нечтаси жуфт?

62. 1) 3, 5, 5, 7 рақамларни мумкин бўлган алмаштиришларни қўллаш орқали тузилган тўрт хонали сонларнинг йиғиндиси қийматини топинг;
2) 3, 3, 4, 8 рақамларни мумкин бўлган алмаштиришлардан фойдаланиш орқали тузилган тўрт хонали сонларнинг йиғиндиси қийматини топинг.

63. 20 та деталнинг тўрттасида нуқсон бўлади. Ҳамма деталларнинг сифатини текшириш учун уларнинг орасидан тасодифан учтаси олинди. Танланган деталлар ичида нуқсони бор деталлар сонининг тоқсимот қаторини тузинг.

64. 1) Рақамлари такрорланмайдиган 2, 3, 4 рақамлардан нечта уч хонали сон тузиш мумкин?
2) Рақамлари такрорланмайдиган 0, 2, 3, 5 рақамлардан нечта уч хонали сон тузиш мумкин?
3) 100 та совғалар тўпламининг элликтасида конфет, қирқ бештасида олма, ўттиз бештасида мандарин, йигирматасида конфет, олма ва мандарин, йигирма бештасида конфет ва олма, ўн бештасида олма ва мандарини бор. Конфет ва мандарини бўлган совғалар сонини топинг.

65. Тенгламани ечинг:

1) $C_{2n+1}^{n-1} : C_{2n}^{n+1} = 1\frac{2}{3}$; 2) $A_{2x}^{x-1} : A_{2x}^{x+1} = \frac{1}{30}$; 3) $C_n^3 : A_n^2 = 2$.

66. $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ формуладан фойдаланиб, ифоданинг қийматини топинг:

1) $1{,}02^8$; 2) $1{,}002^{15}$; 3) $0{,}998^{10}$; 4) $0{,}97^{11}$.

67. 200 та лотерея билетининг 25 тасида ютуқ бор. Битта билет сотиб олинган. Сотиб олинган билетда: 1) ютуқ бўлишининг; 2) ютуқ бўлмаслигининг эҳтимолини топинг.

68. 200 та лотерея билетининг 20 тасида ютуқ бор. Бешта билет сотиб олинган. Сотиб олинган билетларнинг иккитасида ютуқ бўлиши эҳтимолини топинг.

69. Ўт олдириш давомида двигателнинг ишлаб кетиш эҳтимоли 0,95. Машинани юргизиш учун уч мартадан ортиқ ўт олдириш эҳтимолини топинг.

70. Еттита варақчада *а, а, б, е, г, р, л* ҳарфлар ёзилган. Ҳарфларни биттадан олиб, биридан кейин бири қўйилди. Ҳосил бўлган сўзнинг "алгебра" сўзи бўлиши эҳтимолини топинг.

71. 1) Радиуси 4 см га тенг бўлган доирада нуқта белгиланган. Белгиланган нуқтанинг радиуси 2 см бўлган ички чизилган доирага тегишли бўлмаслигининг эҳтимолини топинг.
2) [–3; 11] оралиқда тасодифий битта сон олинди. Олинган сон $x^2 - 5x - 6 < 0$ тенгсизликнинг ечими бўлиши эҳтимолини топинг.
3) [–4; 11] оралиқда тасодифий битта сон олинди. Олинган сон $x^2 - 2x - 8 \leqslant 0$ тенгсизликнинг ечими бўлиши эҳтимолини топинг.
4) [–3; 10] оралиқда тасодифий битта сон олинди. Олинган сон $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$ тенгсизликнинг ечими бўлиши эҳтимолини топинг.

Амалиётга йўналтирилган топшириқлар

72. Агар машинага ўқувчилар олтитадан ўтқазилса, у ҳолда тўртта ўқувчига ўриндиқ етмайди, еттитадан ўтқазилганда эса учта ўриндиқ бўш қолади. Жами нечта ўқувчи бор ва машиналардаги ўриндиқлар сони нечта?

73. Тўртта одамдан иборат оила Алмати шаҳрига йўл олди. Алматига поездда ёки шахсий машинада бориш мумкин. Бир кишига поезд чиптаси 3460 тг. Машина ҳар бир 100 км йўлга 11 л бензин сарфлайди. Йўлнинг узунлиги 600 км, 1 л бензин 176 тг туради.
1) Тўрт киши Алматига машинада бориб келиши учун камида неча тенге сарфлайди?
2) Оила аъзолари поездда борадиган бўлса, у ҳолда йўлга неча тенге сарфлайди ва машинага қараганда қанча ортиқ бўлади?

74. Даврон "Агебра ва анализ асослари" дарслигини очганда чап ва ўнг бетларидаги тартиб рақамларининг йиғиндиси 49 га тенг бўлишини кўрди. Шу тартиб рақамларининг кўпайтмаси нимага тенг?

75. Олия озиқ-овқат ва уларнинг миқдорини жадвалга ёзди. Бешта дўкондаги ҳар бир озиқ-овқатнинг бир килограмининг баҳолари жадвалга ёзилган.
1) Қайси дўкондан озиқ-овқат олган фойдали ва неча тенге сарфланади?
2) Қайси дўконда озиқ-овқат баҳолари қиммат ва неча тенге ортиқ?

38-жадвал

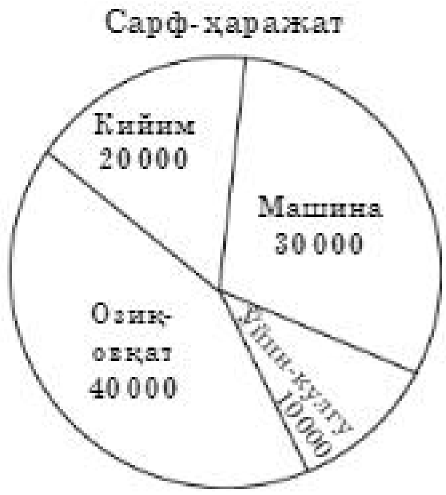
	1	2	3	4	5
Колбаса (200 г)	1250	1280	1250	1200	1300
Помидор (2 кг)	590	540	570	590	560

Давоми

Бодринг (1 кг)	660	670	720	680	700
Картошка (2 кг)	120	140	110	130	130
Сабзи (0,5 кг)	90	100	80	100	90

76. Гимназиянинг ижтимоий-гуманитар йўналишдаги синфида ўқувчилар немис, француз ва инглиз тилларида ўқийди. Инглиз тилини ҳамма ўқувчилар, немис тилини 22 ўқувчи, француз тилини 13 ўқувчи, немис ва француз тилларини 9 ўқувчи ўқийди. Синфда нечта ўқувчи бор?

77. 77-расмда Давлатнинг тенгеларда олинган сарф-ҳаражати кўрсатилган. Давлат машинага умумий ҳаражатнинг неча фоизини сарфлаган?



77-расм

Олимпиада масалалари

78. Исталган a, b, c мусбат сонлар учун $a(1 - b) > \frac{1}{4}$; $b(1 - c) > \frac{1}{4}$; $c(1 - a) > \frac{1}{4}$ тенгсизликнинг тўғри бўлишини исботланг.

***79.** Агар $a > 0$, $b > 0$, $ay + bx > 0$ ва $x \uparrow y$ бўлса, у ҳолда $\frac{(a + b)xy}{ay + bx} < \frac{ax + by}{a + b}$ тенгсизликнинг тўғри бўлишини исботланг.

80. Агар $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$ бўлса, у ҳолда $\frac{a + c}{a - c} + \frac{b + c}{b - c} = -2$ бўлишини исботланг.

81. Ўқитувчи бир варақ қоғозга 100 сонини ёзди. Синфдаги 25 та ўқувчидан ҳар бири ёзилган сонга 1 ни қўшди ёки айирди. Натижада 80 сони чиқиши мумкинми?

***82.** $n \geqslant 2$ бўлганда $n! < \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n$ тенгсизликни ечинг.

***83.** 1) a параметрнинг қандай ҳақиқий қийматларида $(a - 2)\sin 2x - 3 > 0$ тенгсизлик x нинг барча ҳақиқий қийматларида тўғри бўлади?

2) a параметрнинг қандай қийматларида $(a - 1)\cos(x - 2) < 2$ тенгсизлик x нинг барча ҳақиқий қийматларида тўғри бўлади?

*84. a параметрнинг қандай ҳақиқий қийматларида $\log_{3x^2+2}(x^2 - 3x + 7) \geqslant 1$ тенгсизликнинг ечими $(x + 1)^2 - 4a^2(x + 1) + 3a^4 \geqslant 0$ тенгсизликнинг ҳам ечими бўлади?

85. $\log_{x+1}\log_3\log_{x+2}(x^3 + 10x^2 + 8x - 1) = 0$ тенгламани ечинг.

86. a параметрнинг қандай ҳақиқий қийматларида $\log_{a-3}(|x| + 4) \geqslant 2$ тенгсизлик x нинг барча ҳақиқий қийматларида тўғри бўлади?

87. Геометрик маъносидан фойдаланиб, аниқ интегрални ҳисобланг:

1) $\int_0^2 \left||x - 1| - 1\right| dx$; 2) $\int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\,dx$; 3) $\int_3^6 \sqrt{6x - x^2}\,dx$.

ГЛОССАРИЙ

Аниқ интеграл	$\int_a^b f(x)dx$ ифода a дан b гача $f(x)$ функциянинг *аниқ интеграли* деб аталади
Аниқмас интеграл	$f(x)$ функциянинг барча бошланғич функциялари тўплами $F(x) + C$ берилган $f(x)$ функциянинг *аниқмас интеграли* деб аталади
Бошланғич функция	Исталган X тўпламда ўзгарувчи x учун $F'(x) = f(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда берилган тўпламда $f(x)$ функция учун $F(x)$ функция *бошланғич функция* деб аталади
Асосий тўплам	Ўрганилиши керак бўлган барча объектларнинг ёки бир объектга бир хил шароитда ўтказилган барча текширишларнинг мумкин бўлган натижалари тўплами *асосий тўплам* деб аталади.
Даражали функция	$y = x^r$ кўринишда берилган функция *даражали функция* дейилади. Бунда x — эркли ўзгарувчи, r — исталган рационал сон
Жисмнинг ҳажмини топиш формуласи	$V = \pi\int_a^b y^2dx$ — *жисмнинг ҳажмини топиш формуласи*
Дискрет вариацион қатор	*Дискрет вариацион қатор* деб мос келадиган частоталар ва бўлинмалари бўйича варианталарнинг бўлиниш тўпламига айтилади.
Дифференциал тенглама	Аргументли, шу аргументнинг номаълум функциясини ва шу функциянинг ҳосилаларини боғловчи тенгламалар *дифференциал тенгламалар* дейилади
Дифференциал тенгламанинг тартиби	*Дифференциал тенгламаларга кирувчи ҳосиланинг энг катта тартиби дифференциал тенгламанинг тартиби дейилади*
Дифференциал тенгламанинг ечими	*Дифференциал тенгламанинг ечими деб* эркли y ўзгарувчининг ўрнига $y = f(x)$ ни қўйганда тўғри айниятни берадиган $y = f(x)$ дифференциалланувчи функцияга айтилади
e сони	$e = 2{,}7182818289...$
Мавҳум сон	Агар комплекс соннинг ҳақиқий қисми нолга тенг бўлса, яъни $x = \text{Re } z = 0$ бўлса, у ҳолда комплекс сон *мавҳум сон* дейилади
Интеграллаш	Аниқмас интегралнинг қийматини топиш амали функцияни *интеграллаш* дейилади
Иррационал тенглама	*Иррационал тенглама* деб ўзгарувчиси илдиз белгиси остида ёки каср кўрсаткичли даражанинг асоси бўладиган тенгламага айтилади
Иррационал тенгламалар системаси	Таркибида иррационал тенгламаси бўлган система иррационал *тенгламалар системаси* дейилади
Иррационал тенгсизлик	Ўзгарувчиси илдиз белгисининг остида ёки каср кўрсаткичли даражанинг асоси бўлган тенгсизлик *иррационал тенгсизлик* дейилади.

Давоми

Интервалли вариацион қатор	*Интервалли вариацион қатор* деб тасодифий катталик қийматларини мос частоталар ёки улардан ҳар бирига катталик қийматларининг тушиш частоталари билан шакл алмаштиришнинг тартибланган интерваллари тўпламига айтилади
Комплекс сон	*Комплекс сонлар* деб $z = x + iy$ кўринишдаги сонларга айтилади. Бунда x, y — ҳақиқий сонлар, i сони $i^2 = -1$ тенгликни қаноатлантирувчи мавҳум сон
Комплекс соннинг алгебраик шакли	$z = x + iy$ кўринишда ёзилган комплекс сон ифодаси *комплекс соннинг алгебраик шакли* дейилади
Эгри чизиқли трапеция	Узлуксиз номанфий $y = f(x)$ функциянинг графиги, Ox ўқи ва $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ясси фигура *эгри чизиқли трапеция* дейилади
Кўрсаткичли тенглама	Ўзгарувчиси даража кўрсаткичида бўлган тенглама *кўрсаткичли тенглама* дейилади
Кўрсаткичли тенгсизлик	Ўзгарувчиси даража кўрсаткичида бўлган тенгсизлик *кўрсаткичли тенгсизлик* дейилади
Кўрсаткичли функция	$y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$ кўринишда берилган функция *кўрсаткичли функция* дейилади
Соннинг логарифми	Мусбат ва 1 дан фарқли a асоси бўйича b мусбат *соннинг логарифми* деб b сони олинидиган a сони кўтариладиган даража кўрсаткичига айтилади
Логарифмик тенглама	Ўзгарувчиси логарифм белгиси остида ёки логарифмнинг асосида бўлган тенглама *логарифмик тенглама* дейилади
Логарифмик тенгсизлик	Ўзгарувчиси логарифм белгиси остида ёки логарифмнинг асосида бўлган тенгсизлик *логарифмик тенгсизлик* дейилади
Логарифмик функция	Кўрсаткичли функцияга тескари функция *логарифмик функция* дейилади
Натурал логарифм	Асоси e бўлган соннинг логарифми *натурал логарифм* дейилади
Ньютон – Лейбниц формуласи	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
n-даражали арифметик илдиз	a сонининг *n-даражали арифметик илдизи* деб n-даражаси a сонига тенг бўлган номанфий b сонига айтилади
n-даражали илдиз	a сонининг *n-даражали илдизи* деб n-даражаси a сонига тенг бўлган b санын айтады
Ўнли логарифм	Асоси 10 бўлган соннинг логарифми *ўнли логарифм* дейилади

Давоми

Ўзаро тенг комплекс сонлар	Иккита комплекс соннинг ҳақиқий қисмлари ва мавҳум қисмлари тенг, яъни $x_1 = x_2$ ва $y_1 = y_2$ бўлса, у ҳолда $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ комплекс сонлар *ўзаро тенг* деб аталади
Рационал кўрсаткичли даража	a мусбат соннинг $\frac{m}{n}$ (бунда $\frac{m}{n}$ — қисқармас каср) *рационал кўрсаткичли даражаси* деб a^m сонидан олинган n-даражали илдизнинг қийматига айтилади
Танланма	Асосий тўпламдан тасодифан танлаб олинган объектлар тўплами ёки объектни кузатиш натижаларининг тўплами *танланган тўплам* ёки *танланма* дейилади.
Танланма ҳажми	Танланмадаги объектлар ёки кузатишлар сони *танланма ҳажми* дейилади
Ўзаро қўшма коплекс сонлар	$z = x + iy$ ва $z = x - iy$ кўринишдаги комплекс сонлар *ўзаро қўшма комплекс сонлар* дейилади

ЖАВОБЛАР

10-СИНФ АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

1. 1) 4; 2) $-\frac{5\sqrt{3}}{18}$; 3) 1; 4) 2. **2.** 1) $\frac{5\neq}{12}$; 2) $\frac{2\neq}{3}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}$; 4) $-\frac{5\pi}{4}$. **3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{9\neq}{14}$; 5) $-\frac{\pi}{3}$; 6) $7-2\pi$; 7) $\frac{5\neq}{2}-8$; 8) $4\pi-12$. **4.** 1) $\frac{3\sqrt{2}}{2}+8$; 2) -18; 3) -3; 4) 2. **5.** 1) 3; 2) $-\frac{7}{18}$. **6.** 1) 9; 2) 16; 3) -18. 4) $\frac{\sqrt{5}}{25}$. **7.** 1) $y_{\text{энг катта}}(3)=0$; $y_{\text{энг кичик}}(2)=-25$; 2) $y_{\text{энг катта}}(3)=596$; $y_{\text{энг кичик}}(2)=58$; 3) $y_{\text{энг кичик}}(4)=-2$; $y_{\text{энг катта}}(0)=0$; 4) $y_{\text{энг кичик}}(1)=2$; $y_{\text{энг катта}}(4)=4{,}25$. **8.** 1) $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2x}}$; 2) $f'(x)=6\sin^2 2x\cdot\cos 2x-3\sin 3x+\frac{2}{x^2}$; 3) $f'(x)=4\mathrm{tg}2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}-\frac{3}{\sin^2 3x}$; 4) $f'(x)=\frac{2}{1+4x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 5) $f'(x)=\frac{7}{(3x+2)^2}+3$; 6) $f'(x)=\sin 2x+2x\cos 2x-\frac{3}{2\sqrt{2-3x}}$. **9.** 1) 0; 2; 2) -1; 0; 1; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$. **10.** 1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) -3. **11.** 1) 6; 2) 0; 3) $[-6; -3]\cup[1; 2]$. **12.** 1) $-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; 2) $\varnothing$; 3) R; 5) $\varnothing$; 6) R. **13.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 3) $\frac{\neq}{4}+0{,}5\pi n, n\in Z$; 4) $\frac{\neq}{2}+\pi n, n\in Z$. **14.** 1) $\left\{\pm\arccos\frac{1}{4}+(2n\mp 1)\pi,\ n\in Z\right\}$; 3) $\left\{\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\right\}$; 5) $\{-1; 3\}$; 6) $\varnothing$; 7) $\{0; 3\}$; 8) $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$; 9) $\left\{-1;\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$; *Кўрсатма*: $y=x+\frac{1}{x}$ алмаштириш бажарилади, у ҳолда $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$; 10) $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2};\ 2\pm\sqrt{6}\right\}$. **15.** 1) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; 2) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$; 3) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **16.** 1) жуфт; 2) жуфт; 3) умумий кўриниши; 4) умумий кўриниши; 5) тоқ; 6) жуфт. **17.** 1) 2; 2) π; 3) 4π; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{2\neq}{5}$; 6) 24π.
18. 1) $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$ — ўсувчи, камайиш оралиқлари йўқ; 2) ўсиш оралиқлари йўқ, $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; +\infty)$ — ўсувчи; 3) $(-\infty; -5)$, $(-5; 5)$, $(5; +\infty)$ — ўсувчи, камайиш оралиқлари йўқ; 4) $(-\infty; -2)$; $(-2; 0]$ — камаювчи; $[0; 2)$, $(2; +\infty)$ — ўсувчи. **19.** а) 1) $y=2{,}5x+1$; 2) $y=1{,}5x+1$; 3) $y=-\frac{1}{4}x+1{,}5$, $y=4x+1{,}5$; 4) $y=\frac{1}{2}x+1$. ә) 1) $y=\frac{3}{4}x+1\frac{1}{4}$; 2) $y=-x+2$.
20. 1) $\approx\pm 2$; 2) -3 ва 0; 3) $M(-1; -3{,}8)$, $T(1; -3{,}8)$; 4) -7; -2; -1. **21.** min — (-3); 3, max — 0. **23.** $t=8$ с, $v=63{,}5$ м/с. **24.** 1) $a=60$ м; 2) 30 см. **25.** 150 м; 300 м. **26.** 384 м². **27.** 4 см; 2 см. **28.** 1) 22; 22; 2) 49; 49. **29.** $K(-2; 2)$ ёки $K(2; 2)$. **30.** 1) $a=-2$; 2) $a=1$. **31.** z^4-3z^2-4z-8 — бўлинма; (-9) — қолдиқ. **32.** 1) $(y-3)(y+3)(y-1)(y+1)$; 2) $(y-2)(y+2)(y+3)$; **33.** 1) $a=-1$; $c=-4$; 2) $a=4$; $c=3$. **34.** 1) -1; 2,5; 2) 2; 3. **35.** 1) -4; 2) 42. **36.** 1) $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$; *Кўрсатма*: тенгламанинг иккала томонини $y^3\neq 0$ бўлиш ва гуруҳлаш; сўнгра $z=y+\frac{1}{y}$ алмаштириш киритиш керак. У ҳолда $y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2$;

2) $\varnothing$. **37.** 1) $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$; 2) 24; 3) 27. **38.** 1) 15; 2) 14. **39.** 1) $27 \cdot C_6^3 = 540$; 2) 2835. **40.** 1) $\frac{C_4^2}{C_6^2} = 0{,}4$; 2) $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}99 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}98 = 0{,}990\,498$. **41.** 1) $\frac{10}{200} \cdot \frac{9}{199} \cdot \frac{8}{198} = \frac{1}{55 \cdot 199} = \frac{1}{10\,945}$; 2) $\frac{10}{200} \cdot \frac{190}{199} + \frac{90}{200} \cdot \frac{10}{199} = \frac{19}{2 \cdot 199} + \frac{9}{2 \cdot 199} = \frac{14}{199}$.
42. 1) 40; 2) 24 с — 33 с; 3) 27; 4) 13. **43.** 1) 1 450 000 тг; 2) Y, 1 695 000 тг. **45.** 4. **46.** 1) 600 000 тг; 2) 24%. **47.** 1) 220 тг ёки 235 тг; 2) 2260 тг. **48.** 1) 13 та кўк шар; 2) 11 та шар. **49.** $y = z^2 - 3$, $y(10) = 97$. **50.** 1) 850 см²; 2) 2550 см²; 3) 10 см-га.

I боб. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА ИНТЕГРАЛ

1.1. 1) $1{,}5x^2 + C$; 2) $\frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$; 3) $\frac{x^4}{12} + x + C$; 4) $-\frac{1}{x} + C$. **1.2.** 1) $-2\cos x + C$; 3) $3\sin x + 4\cos x + C$; 4) $-5\cos x + 2\sin x + C$; 5) $\frac{x^3}{3} + 6\sqrt{x} + C$; 6) $\frac{x^4}{4} - 8\sqrt{x} + C$; 7) $-\frac{1}{3}\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + C$; 8) $\frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C$. **1.3.** 1) $\frac{1}{2}x^6 + 7\sqrt{x} + C$; 2) $\frac{3}{5}\sin 5x + \frac{1}{x} + C$; 3) $-8\cos x + \operatorname{ctg} 2x + C$; 5) $-\frac{1}{2x^6} - 7\operatorname{tg} x + C$. **1.5.** 1) $\frac{x^2}{2} + x + 3$; 2) $\frac{x^2}{2} + 4x + 9$; 3) $-\cos x + 1$; 4) $\sin x - 1$. **1.6.** 1) $-\frac{1}{x}$. **1.8.** 3) $\frac{1}{2}\sin 2x - \sqrt{2x - 3} + 2x + C$; 4) $-\sqrt{5 - 2x} - \frac{1}{5}\cos 5x + x + C$. **1.11.** 1) $\frac{(x-1)^4}{4} + C$; 2) $-\frac{1}{6}(1 - 2x)^3 + C$. **1.12.** 1) $\frac{x^2}{2} - \operatorname{tg} x + 1$. **1.14.** 2) $x^5 - x^4 - x^2 + 5$; 3) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$. **1.15.** 1) $\frac{1}{4}\sin(4x - 5) - \frac{1}{3}x^{-6} + 3x + C$; 2) $\cos(2 - x) + \frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + C$; 4) $\sqrt{2x} + 1{,}5\operatorname{ctg} 2x - 0{,}5x^2 + C$. **1.20.** 1) $(-\infty; -5] \cup [0; +\infty)$; 2) R; 3) $(-\infty; -3] \cup [1; 4)$; 4) $[-4; -1) \cup (1; 4]$. **1.21.** 1) $10(2x - 7)^4 + 8x$; 2) $12(3x^2 - 5x)^3(6x - 5) - 6x^5$; 3) $2 + 3\sin 6x$; 4) $-3\sin 6x - 3x^2$. **2.1.** 1) $\frac{(1 + x)^6}{6} - \frac{(1 + x)^5}{5} + C$; 2) $\frac{(x - 3)^7}{7} + \frac{(x - 3)^6}{2} + C$. **2.2.** 1) $2\sin\sqrt{x} + C$; 2) $-10\cos\sqrt{x} + C$. **2.3.** 1) $x\sin x + \cos x + C$; 2) $-2x\cos x + 2\sin x + C$. **2.4.** 1) $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$; 2) $-\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C$. **2.5.** 1) $\frac{(2x - 1)^9}{36} + \frac{(2x - 1)^8}{32} + C$; 2) $\frac{(3x + 1)^{10}}{90} - \frac{(3x + 1)^9}{81} + C$. **2.6.** 1) $\frac{2}{5}\sqrt{(4 + x)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(4 + x)^3} + C$; 2) $\frac{2}{5}\sqrt{(x - 3)^5} + 2\sqrt{(x - 3)^3} + C$. **2.7.** 1) $\frac{x^2}{4}\sin 4x + \frac{x}{8}\cos 4x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$; 2) $x\sin(x + 2) + \cos(x + 2) + C$; 3) $-\frac{1}{2}(x^2 - 3x)\cos 2x + \frac{1}{4}(2x - 3) \cdot \sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$. **2.8.** 1) $\frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$; 2) $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$. **2.9.** 1) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$; 2) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$. **2.10.** 1) $0{,}5 \cdot (x^2 - 1) \cdot \arcsin x + \frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{4} + C$; 2) $0{,}5 \cdot (x^2 - 1) \cdot \arccos x - \frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{4} + C$. **2.11.** 1) $\frac{\pi x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C$. 2) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x + C$. **2.13.** 1) R; 2) $[-0{,}5; 0{,}5]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) 1. **2.14.** 1) $5\operatorname{tg}^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 2x^{-3}$; 2) $-2\sin 4x - 2$; 3) $3x^2\sin 2x + 2x^3\cos 2x$; 4) $2x(x^{-2} - 1)\sin 2x^2 - 2x^{-3}\sin^2 x^2$. **3.1.** 1) $2\frac{1}{3}$ кв.бирл. **3.2.** 3) $\sqrt{3}$ кв.бирл. **3.3.** 2) 4 кв.бирл. **3.4.** 2) $10\frac{2}{3}$ кв.бирл. **3.5.** 1) $\sqrt{2}$ кв.бирл. **3.6.** 1) $\frac{1}{12}$ кв.бирл. **3.7.** 1) $20\frac{1}{4}$ кв. бирл; 7) 8 кв.бирл; 8) $21\frac{3}{32}$ кв.бирл.

3.9. 1) $15\frac{1}{3}$ кв.бирл. **3.10.** 1) 27 кв.бирл.; 2) 6 кв.бирл. **3.12.** 1) 24,5 кв.бирл; 2) 36 кв.бирл. **3.13.** 1) $4\frac{2}{3}$ кв.бирл; 2) $2\sqrt{3}$ кв.бирл.; 3) 54 кв.бирл. **3.17.** 1) $\frac{2}{1+4x^2} - x^{-2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$; 3) $\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 1$; 4) $\frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2} - \frac{1}{3x^2}$. **4.1.** 1) -20; 2) 21; 3) 28. **4.3.** 1) $\frac{\pi-2}{4}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 2. **4.4.** 1) $\frac{1}{6}$. **4.5.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.6.** 1) $-\frac{15}{8}$; 4) $\frac{31}{35}$. **4.7.** 1) 10; 4) 24. **4.9.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) $-\frac{2}{3}$. **4.12.** 1) $-\frac{4}{5}$. **4.13.** 1) 119,25; 4) $\frac{10}{81}$. **4.14.** 4) $-3{,}5$. **4.15.** 4) $(-3; 3{,}5)$. **4.16.** 1) $\frac{\neq}{6}$; 2) 2

4.17. 1) π; 2) $\frac{\neq}{2}$; 3) $\frac{\neq}{2}$; 4) π. **4.18.** 1) $f'(x) = \begin{cases} 4x, & x > 3, \\ -2x, & x < 3; \end{cases}$ 2) $f'(x) = \begin{cases} 5-2x, & x > 2, \\ \frac{1}{2\sqrt{2-x}}, & x < 2. \end{cases}$

4.20. 1) $F(x) = x^2 + 1{,}5x^4 + C$; 2) $F(x) = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(2x+1)^3} - x^4 + C$; 3) $F(x) = 2\sin 3x - 2x^2 + C$; 4) $F(x) = -\cos 2x - x^2 + C$. **5.1.** 1) 9 кв.бирл; 2) 8 кв.бирл. **5.3.** 1) $\frac{8}{3}$ кв.бирл; 4) $\frac{1}{9}$ кв.бирл. **5.5.** 1) $\frac{8}{3}$ кв.бирл. **5.6.** 1) $\approx 2{,}59$ кв.бирл; 2) $\approx 2{,}66$ кв.бирл. **5.7.** 1) $\frac{32\neq}{5}$ куб бирл. **5.9.** 2) $\frac{4}{27}$ кв.бирл. **5.10.** 1) 4,5 кв.бирл. **5.13.** 2) $\frac{1}{3}$ кв.бирл. **5.14.** $\frac{2\pi}{3}$ куб бирл. **5.15.** $8R + \frac{16}{3}a$. **5.17.** $\frac{4}{3}$ кв.бирл. **5.18.** $\frac{4}{3}$ кв.бирл. **5.20.** 5π куб. бирл. **5.24.** 0,5 кв.бирл. **5.25.** 2 : 7. **5.26.** 1) 324 т; 2) $\frac{a+2b}{6}h^2$ т. **5.29.** 1) $y_{\text{энг катта}} = -\frac{2}{7}$; $y_{\text{энг кичик}} = -\frac{4}{31}$; 2) $y_{\text{энг катта}} = 2$; $y_{\text{энг кичик}} = -2$. **5.30.** 1) $\frac{9\neq}{4}$; 2) 2π; 3) 2π; 4) $\frac{\neq}{4}$. *Кўрсатма.* 4) Интеграл остидаги функцияни қуйидагича белгилаймиз: $y = \sqrt{2x - x^2}$. Бундан $y^2 = 2x - x^2$, бунда $y \geqslant 0$, ёки $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Энди тengламанинг иккала томонига 1 сонини қўшиб, иккиҳаднинг квадратини айирамиз. $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$ ёки $(x-1)^2 + y^2 = 1$, бунда $y \geqslant 0$. Ҳосил бўлган тенглама радиуси 1 га тенг ва маркази $A(1; 0)$ нуқтада бўлган айлана, бунда $y \geqslant 0$. Интеграллаш чегаралари 1 дан 2 гача бўлгани учун, бу радиуси 1 га тенг доиранинг тўртдан бир қисми бўлади. Демак, $\int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

II боб. МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

6.1. $n = 25$;

Варианта	1	2	3	4	5
Варианта частотаси	6	4	6	5	4
Солиштирма частота	0,24	0,16	0,24	0,2	0,16

6.2. $n = 25$;

Варианта	4	5	6	8	9
Варианта частотаси	5	5	3	7	7
Солиштирма частота	0,2	0,2	0,12	0,28	0,2
% ларда берилган частота	20%	20%	12%	28%	20%

6.3. 1) 3; 4; 5, танланма ҳажми — 50.

2) Частотанинг тоқсимот жадвалини тузамиз, сўнгра солиштирма частотанинг фоизларда олинган вариацион қаторини тузамиз.

Варианта	2	3	4	5	Жами: 4
Варианта частотаси	3	20	22	5	Йиғиндиси: 50
Солиштирма частота	0,06	0,40	0,44	0,1	Йиғиндиси: 1

6.4. 1) 3; 4; 5, танланма ҳажми — 50.

2) Частотанинг тоқсимот жадвалини тузамиз, сўнгра солиштирма частотанинг фоизларда олинган вариацион қаторини тузамиз

Варианта	3	4	5	Жами: 4
Варианта частотаси	20	23	7	Йиғиндиси: 50
Солиштирма частота	0,40	0,46	0,14	Йиғиндиси: 1
% ларда берилган частота	40%	46%	14%	Йиғиндиси: 100%

6.5. 1) $n = 25$; 2) $n = 30$.

6.6. 1) 54; 55; 56; 57; 58; 59; 60, танланма ҳажми — 25.

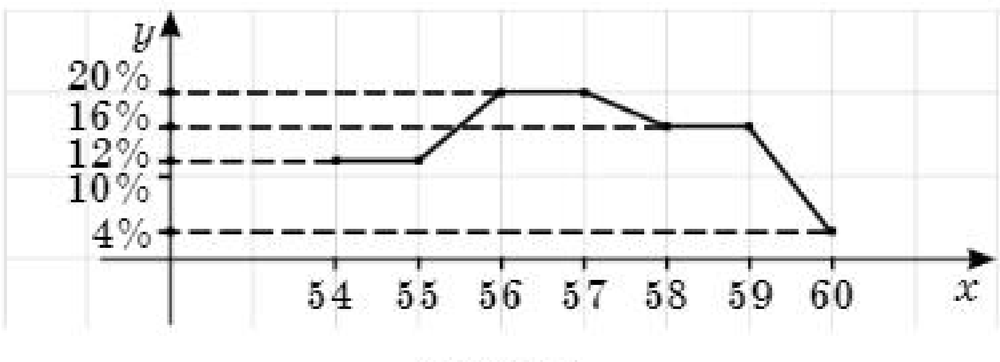
2) Частотанинг тоқсимот жадвалини тузамиз, сўнгра солиштирма частотанинг фоизларда олинган вариацион қаторини тузамиз.

Варианта	54	55	56	57	58	59	60	Жами: 7
Варианта частотаси	3	3	5	5	4	4	1	Йиғиндиси: 25
Солиштирма частота	0,12	0,12	0,2	0,2	0,16	0,16	0,04	Йиғиндиси: 1
% ларда берилган частота	12%	12%	20%	20%	16%	16%	4%	Йиғиндиси: 100%

Солиштирма частоталарнинг вариацион қатори: 0,04; 0,12; 0,16; 0,2.

3) Фоизларда берилган соиштирма частоталарнинг вариацион қатори: 4%; 12%; 16%; 20%.

4) Фоизларда берилган соиштирма частоталар полигони (тоқсимот кўпбурчаги) 78-расмда тасвирланган.



78-расм

6.7. 1) 56; 57; 58; 59; 60; 61; 62, танланма ҳажми — 25.

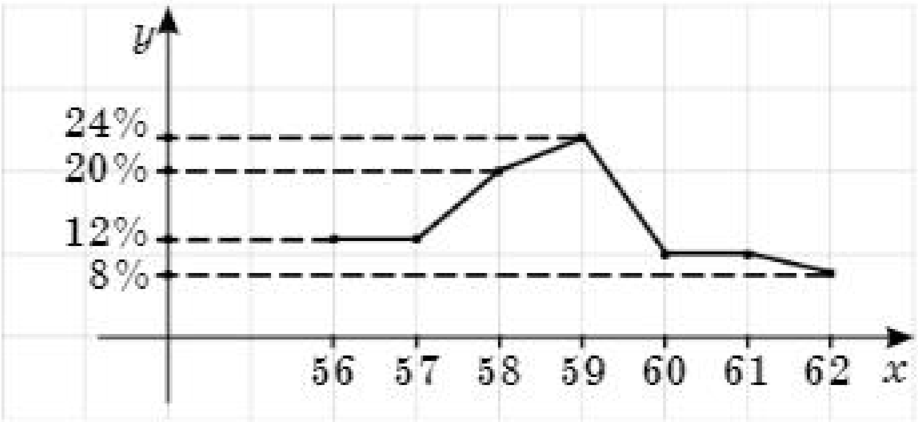
2) Частотанинг тоқсимот жадвалини тузамиз, сўнгра солиштирма частоталарнинг фоизларда олинган вариацион қаторини тузамиз.

Варианта	56	57	58	59	60	61	62	Жами: 7
Варианта частотаси	3	3	5	6	3	3	2	Йиғиндиси: 25
Солиштирма частота	0,12	0,12	0,2	0,24	0,12	0,12	0,08	Йиғиндиси: 1
% ларда берилган частота	12%	12%	20%	24%	12%	12%	8%	Йиғиндиси: 100%

Солиштирма частоталарнинг вариацион қатори: 0,08; 0,12; 0,2; 0,24.

3) Фоизларда берилган соиштирма частоталарнинг вариацион қатори: 8%; 12%; 20%; 24%.

4) Фоизларда берилган солиштирма частоталар полигони (тоқсимот кўпбурчаги) 79-расмда тасвирланган.



79-расм

6.8. 1) $x + \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$; 2) $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x-1} + C$; 3) $-\frac{x^{-2}}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + C$; 4) $x^2 - \frac{\operatorname{tg} 2x}{2} + C$.

6.9. 1) жуфт; 2) жуфт; 3) жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас; 4) жуфт. **6.10.** 1) $12 - 2\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi^3}{36} - \frac{1}{4}$.

7.1.

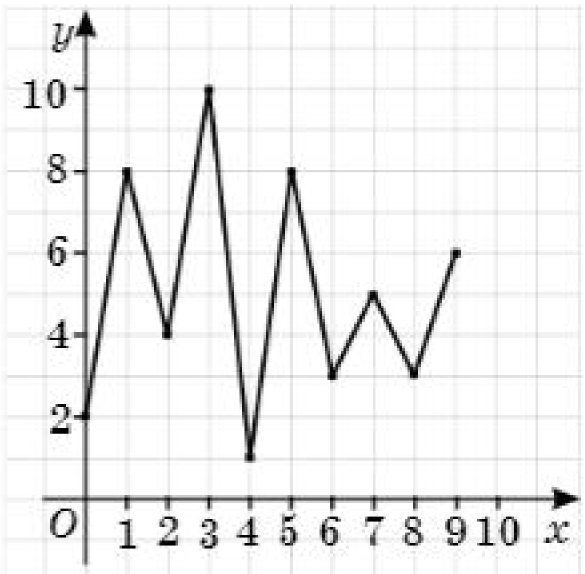
Ўқитувчиларнинг тоифаси (x)	0	1	2	3
Ўқитувчилар сони (n)	6	5	9	5

7.2. $n = 50$. Мода — 3.

Варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Жами: 10
Частота	2	8	4	10	1	8	3	5	3	6	Йиғиндиси: 50

7.3. 4.42.

7.4. 80-расм.



80-расм

7.5. Интервал қадамининг узунлигини топамиз: $i = \frac{54 - 30}{3} = 8$.

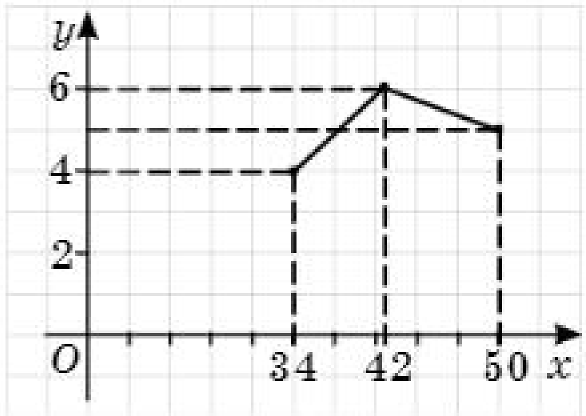
Ўқувчининг вазни	[30 ; 38)	[38; 46)	[46; 54]
Ўқувчилар сони (n)	4	6	5

Ҳар бир интервал ва умумий олгандаги ўқувчиларнинг вазнини топамиз. У ҳолда
биринчи интервал бўйича: 30 + 30 + 35 + 36 = 131;
иккинчи интервал бўйича: 38 + 44 + 40 + 42 + 39 + 46 = 249;
учинчи интервал бўйича: 46 + 48 + 50 + 52 + 54 = 250.

Ўқувчининг вазни	[30; 38)	[38; 46)	[46; 54]
Ўқувчилар сони (n)	4	6	5
Умумий масса	131	249	250

7.6.

Ўқувчининг вазни	[30; 38)	[38; 46)	[46; 54]	Жами: 3
Ўқувчилар сони (частотаси) (n)	4	6	5	Йиғиндиси: 15
Солиштирма частота	$\frac{4}{15} \approx 0{,}27$	$\frac{6}{15} = 0{,}4$	$\frac{5}{15} \approx 0{,}33$	Йиғиндиси: 1
% ларда берилган частота	27%	40%	33%	Йиғиндиси: 100%



81-расм

7.7.

Баҳо (минг тг)	[2—3)	[3—6)	[6—9)	[9—12)	[12—15)	[15—18]
Турларининг сони	3	8	19	7	11	2
Солиштирма частота	0,06	0,16	0,38	0,14	0,22	0,04
% ларда берилган солиштирма частота	6%	16%	38%	14%	22%	4%

7.8. 1) $(-\infty; -1]$ ва $[0; 1]$ — ўсувчи, $[1; +\infty)$ ва $[-1; 0]$ — камаювчи.

7.9. 1) Асимптоталари мавжуд эмас; 2) $x = -1$, $x = 1$, $y = -2x$; 3) $y = -\frac{1}{5}x$, $x = 0$; 4) $y = -\frac{1}{4}x$, $x = 0$.

7.10. 1) 4 кв. бирл.; 2) $\frac{64}{15}\pi$ куб бирл.

8.1. Частотанинг тақсимот жадвалини тузамиз, сўнгра солиштирма частотанинг фоизларда олинган вариацион қаторини тузамиз.

Варианта	8	9	10	11	12	13	14	Жами: 7
Варианта частотаси	4	5	5	10	7	6	3	Йиғиндиси: 40
Солиштирма частота	0,1	0,125	0,125	0,25	0,175	0,15	0,075	Йиғиндиси: 1
% ларда берилган частота	10%	12,5%	12,5%	25%	17,5%	15%	7,5%	Йиғиндиси: 100%

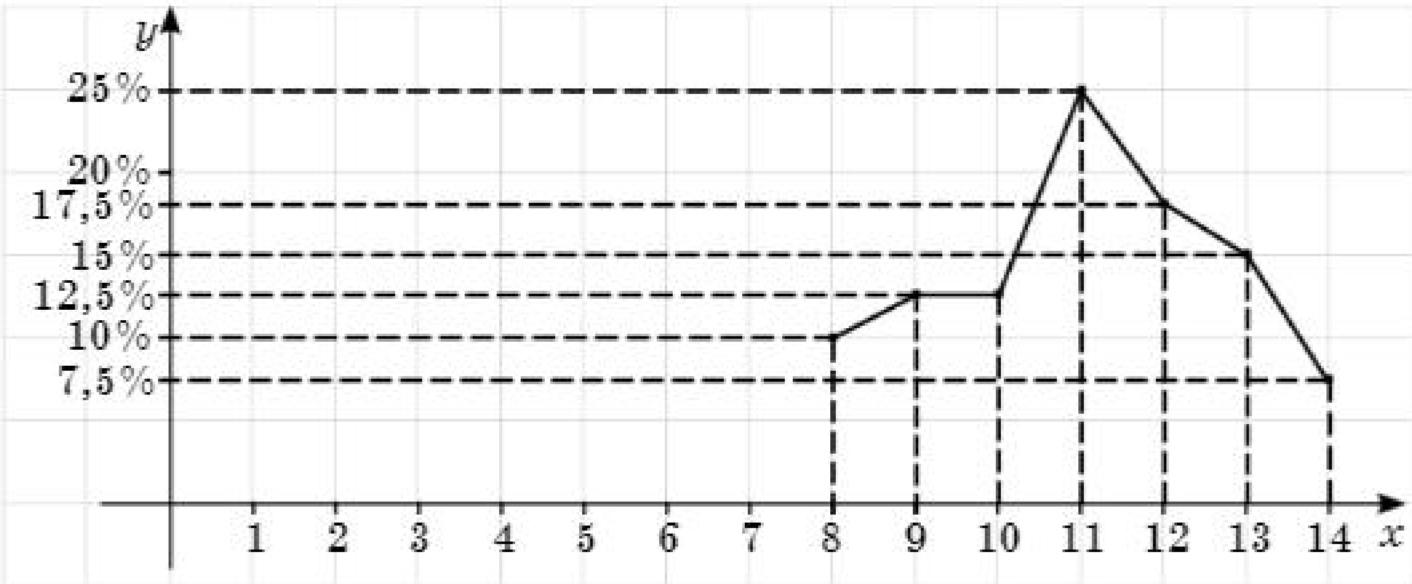
Танланма ҳажми — 40.

8.2. Частотанинг тақсимот жадвалини тузамиз, сўнгра солиштирма частоталарнинг фоизларда олинган вариацион қаторини тузамиз.

Варианта	8	9	10	11	12	13	14	Жами: 7
Варианта частотаси	4	5	5	10	7	6	3	Йиғиндиси: 40
Солиштирма частота	0,1	0,125	0,125	0,25	0,175	0,15	0,075	Йиғиндиси: 1
% ларда берилган частота	10%	12,5%	12,5%	25%	17,5%	15%	7,5%	Йиғиндиси: 100%

4) мода — 11; медиана — 11; математик кутиш — $\overline{X}$ = 11,025.

5) Фоизларда берилган солиштирма частота полигони (тақсимот кўпбурчаги) 82-расмда берилган.



82-расм

8.3. $\overline{D} \approx 2,9744$; $\overline{\sigma} \approx 1,7246$. *Кўрсатма.* Вариантанинг солиштирма частотаси жадвалидан фойдаланиб, дисперсия билан ўртача квадратик четлашишни топамиз:

Варианта	8	9	10	11	12	13	14
Варианта частотаси	4	5	5	10	7	6	3
Солиштирма частота	0,1	0,125	0,125	0,25	0,175	0,15	0,075

$\overline{X} = 8 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,125 + 10 \cdot 0,125 + 11 \cdot 0,25 + 12 \cdot 0,175 + 13 \cdot 0,15 + 14 \cdot 0,075 =$
$= 11,025.$

$\overline{X^2} = \frac{1}{40}(8^2 \cdot 4 + 9^2 \cdot 5 + 10^2 \cdot 5 + 11^2 \cdot 10 + 12^2 \cdot 7 + 13^2 \cdot 6 + 14^2 \cdot 3) =$

$= 64 \cdot 0,1 + 81 \cdot 0,125 + 100 \cdot 0,125 + 121 \cdot 0,25 + 144 \cdot 0,175 + 169 \cdot 0,15 +$
$+ 196 \cdot 0,075 \approx 124,525.$

Формулага кўра

$\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 124,525 - 11,025^2 = 124,525 - 121,5506 \approx 2,9744.$

$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = 1,7246.$

8.4. 1) 19; 2) кулоч — 14; мода — 18; медиана — 8;

3) $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 \approx 36,8$. *Кўрсатма.* Тақсимот жадвалини тузамиз.

Варианта	5	8	18	19
Варианта частотаси	15	11	19	5
Солиштирма частота	0,3	0,22	0,38	0,1

$\overline{X} = 5 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,22 + 18 \cdot 0,38 + 19 \cdot 0,1 = 12.$

$\overline{X^2} = \frac{1}{50}(5^2 \cdot 15 + 8^2 \cdot 11 + 18^2 \cdot 19 + 19^2 \cdot 5) = 25 \cdot 0,3 + 64 \cdot 0,22 + 324 \cdot 0,38 +$
$+ 361 \cdot 0,1 = 180,8.$

У ҳолда $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 180,8 - 12^2 \approx 36,8.$

8.5. 1) 9; 2) танланма ҳажми — 16; кулоч — 8; мода — 12; медиана — 12;
3) $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 13.$ $\overline{\sigma} \approx 3,61.$ *Кўрсатма.* Тоқсимот жадвалини тузамиз.

Варианта	4	8	12
Варианта частотаси	5	2	9
Солиштирма частота	0,3125	0,125	0,5625

$\overline{X} = 4 \cdot 0,3125 + 8 \cdot 0,125 + 12 \cdot 0,5625 = 9.$

$\overline{X^2} = \frac{1}{16}(4^2 \cdot 5 + 8^2 \cdot 2 + 12^2 \cdot 9) = 16 \cdot 0,3125 + 64 \cdot 0,125 + 144 \cdot 0,5625 =$
$= 5 + 8 + 81 = 94.$

У ҳолда $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 94 - 9^2 = 13.$ $\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = \sqrt{13} \approx 3,61.$

8.6. $\approx 39,8034$; $\approx 6,0309$. *Кўрсатма.* Ўртача қийматни ҳисоблаб, солиштирма частоталарнинг вариацион қаторини тузамиз:

$$x_1^* = \frac{0 + 6}{2} = 3,\ x_2^* = \frac{6 + 12}{2} = 9,\ x_3^* = \frac{12 + 18}{2} = 15,\ x_4^* = \frac{18 + 24}{2} = 21.$$

Ўртача қиймат	3	9	15	21
$\frac{n_i}{n}$	0,2	0,3	0,3	0,2

$\overline{X} = 3 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,3 + 15 \cdot 0,3 + 21 \cdot 0,2 = 12.$

$\overline{X^2} = \frac{1}{20}(3^2 \cdot 4 + 9^2 \cdot 6 + 15^2 \cdot 6 + 21^2 \cdot 4) = 9 \cdot 0,2 + 81 \cdot 0,3 + 225 \cdot 0,3 + 441 \cdot 0,2$
$= 181,8.$

У ҳолда $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 181,8 - 12^2 = 37,8.$

$n = 20 < 30$ бўлгани учун, $\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} = \frac{20}{19} \cdot 37,8 \approx 39,8034.$

Демак, $\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} = \sqrt{39,8034} \approx 6,0309.$

8.7. $\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} \approx 169,054$; $\approx 13,0021$. *Кўрсатма.* Интервалли частота жадвалини тузамиз.

Интерваллар	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90]
n_i	3	4	7	6	5
$\frac{n_i}{n}$	0,12	0,16	0,28	0,24	0,2

Ўртача қийматни ҳисоблаб, солиштирма частотанинг вариацион қаторини тузамиз:

$$x_1^* = \frac{40 + 50}{2} = 45,\ x_2^* = \frac{50 + 60}{2} = 55,\ x_3^* = \frac{60 + 70}{2} = 65,$$

$$x_4^* = \frac{70 + 80}{2} = 75,\ x_5^* = \frac{80 + 80}{2} = 85.$$

Ўртача қиймат	45	55	65	75	85
$\frac{n_i}{n}$	0,12	0,16	0,28	0,24	0,2

$\overline{X} = 45 \cdot 0{,}12 + 55 \cdot 0{,}16 + 65 \cdot 0{,}28 + 75 \cdot 0{,}24 + 85 \cdot 0{,}2 = 67{,}4.$

$\overline{X^2} = 2025 \cdot 0{,}12 + 3025 \cdot 0{,}16 + 4225 \cdot 0{,}28 + 5625 \cdot 0{,}24 + 7225 \cdot 0{,}2 = 4705.$

У ҳолда $\overline{D} = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 4705 - 4542{,}76 = 162{,}24.$

$n = 25 < 30$ бўлгани учун, $\overline{\overline{D}} = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{D} = \frac{25}{24} \cdot 162{,}24 = 1{,}042 \cdot 162{,}24 \approx 169{,}054.$

Демак, $\overline{\overline{\sigma}} = \sqrt{\overline{\overline{D}}} = \sqrt{169{,}054} \approx 13{,}0021.$

8.9. 1) 9938; 2) 3136; 3) 41; 4) 137. **8.10.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{18}$. **8.11.** 1) 4; 2) 36 ва 49; 3) 18; 4) 12.

III боб. ДАРАЖА ВА ИЛДИЗ. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯ

9.1. 1) 560; 2) 30; 3) $a^2|bc^3|$; 4) $m^2|k^3 t|$. **9.2.** 1) $\frac{7}{15}$; 2) $1\frac{3}{7}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) 3. **9.3.** 1) $2a^2$; 2) $2\sqrt[6]{2}\, a^2|b^3c|$; 3) $4m^2n^3p$; 4) $\frac{2}{3}x^2|y^3|$. **9.4.** 1) $\sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt[3]{2}$; 3) $\sqrt[6]{7}$; 4) $\sqrt[15]{11}$; 5) $\sqrt[4]{a^3}$; 6) $\sqrt[12]{a^5}$; 7) $\sqrt[15]{mn}$; 8) $\sqrt[6]{\frac{a}{b}}$. **9.5.** 1) $12\frac{1}{3}$; 2) $41\frac{1}{3}$; 3) $11\frac{7}{16}$; 4) 2,5. **9.6.** 1) $\frac{8}{15}$; 2) 1,42; 3) 55; 4) 24. **9.7.** 1) 3; 2) 2; 3) 250; 4) 3. **9.8.** 1) 3; 2) -11; 3) $4\sqrt[3]{3}$; 4) $-\sqrt[4]{2}$. **9.10.** 1) $4\sqrt{11}$; 2) $-2\sqrt{13}$; 3) 0; 4) 1. **9.11.** 1) $a\sqrt[6]{a}$; 3) $\frac{a}{b}$. **9.12.** 1) 5; 2) 0,25; 3) 0; 4) 84. **9.13.** 1) $2\sqrt{5}$; 2) 4; 3) 0,5; 4) 3; 7) $2^{\frac{5}{8}}$; 8) $3^{\frac{7}{24}}$. **9.14.** 1) $\sqrt[3]{a}$; 2) $\sqrt{x}$; 8) b^3. **9.17.** 1) Ҳа; 2) йўқ; 3) йўқ; 4) ҳа. **9.18.** 1) 0,5; 2) 9. **10.4.** 1) 1; 2) 16; 3) 2; 4) 3. **10.6.** 1) $23\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{29}{5}$. **10.8.** 1) 7; 2) 0,2; 3) 0,5; 4) 0,4; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{5}{9}$. **10.10.** 2) $\frac{1}{216}$. **10.11.** 1) $\frac{10}{3}$; 2) $-46{,}5$; 4) 31. **10.12.** 1) $\sqrt[12]{a}$; 4) xy. **10.14.** 1) 1,74; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 0. **10.16.** 1) $a^{\frac{2}{3}}b$; 2) $\frac{4}{a + \sqrt{a} + 1}$. **10.17.** 1) 0; 2) x^4. **10.20.** 1) 4; 2) 2; 3) бўлмайди; 4) 6. **10.21.** 1) $(0; 1) \cup (2; 4]$; 2) $(-3; 2) \cup (2; 4)$. **10.22.** 1) 4; 2) 4; 3) 10; 4) $1\frac{1}{3}$. **11.1.** 1) 8; 2) $\frac{71}{25}$; 4) 30. **11.2.** 1) 2; 3) 32; 4) 60. **11.3.** 2) $\sqrt{5} - 1$; 4) $1 + \sqrt{7}$; 7) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$; 8) $-1 + \sqrt{10}$. **11.5.** 1) $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$; 3) $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{10} - 2)}{12}$. **11.6.** 1) 5; 2) 2. **11.12.** 1) 25 км/соат; 2) 14 км/соат ва 2 км/соат. **11.13.** 1) $\frac{x}{2y}$; 2) $\frac{10bc^2}{3a}$. **11.14.** 1) 0,5; 2) $\frac{2\neq}{3}$; 3) 1; 4) 6. **12.10.** 1) $(4; +\infty)$; 2) $(-3; 3)$. **12.11.** 1) $[-\frac{\neq}{4} + \Pi n; \frac{\neq}{4} + \Pi n]$, $n \in Z$; 2) $\frac{\neq}{2} + \Pi n$, $n \in Z$; 3) $(\Pi n; \pi + \Pi n)$, $n \in Z$. **13.6.** 2) $\frac{5}{6}$. **13.8.** 2) $-3x^{-\frac{1}{3}} + C$; 3) $-\frac{1}{6x^3} - \frac{3}{4x} + C$. **13.13.** 2) $\frac{8}{3}$ кв.бирл. **13.16.** 1) $\frac{2\sqrt[6]{12}}{3} x^{1,5} + \Pi x + C$. **13.20.** 1) $\frac{17}{15}$ кв.бирл; 2) 0,5 кв.бирл. **13.21.** $a = \frac{4}{3}$. **13.22.** 1) $\{3\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\{4; 5\}$; 4) $\varnothing$. **13.23.** 1) 7; 2) 27; 3) 2; 4) 18. **13.24.** 1) $x \in (-\infty; -2]$; $x \in [1; 4]$ — камаяди, $x \in [-2; 1]$; $x \in [4; +\infty]$ — ўсади; 2) $x = 1$; 3) $p \in (0; 9)$.

IV боб. ИРРАЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

14.1. 3) 1; 4) 3; 6. **14.2.** 3) 6; 4) 8. **14.3.** 1) 9; 2) 2. **14.4.** 2) 1; 3) 625. **14.5.** 1) (4; 1); 2) (4; 9); (9; 4). **14.6.** 1) 3; 2) 7; 3) 2; 6; 4) 6. **14.7.** 1) $\varnothing$; 2) 6; 9; 3) 25. **14.8.** 2) 1; 3) 5; 4) 7. **14.9.** 1) 0; 1; 4) $7+\sqrt{73}$. **14.10.** 2) $\frac{125}{27}$; -1; 3) ±1; 4) 64. **14.11.** 1) (1; 27), (27; 1). **14.12.** 2) (1; 81); (81; 1). **14.13.** 1) 3; 2) 1024; 3) $\varnothing$; 4) 9. **14.14.** 1) 4; 4) 3; 5. **14.15.** 1) 25. **14.16.** 2) (2; 8); (8; 2). **14.17.** 1) (5; 7); 2) (3; 1,5); $\left(\frac{24}{23}; 24\right)$. **14.19.** 1) $-\frac{\neq}{4}+\text{Т}n$, $\text{arctg}3+\text{Т}n$, $n\in Z$; 2) $\text{arctg}5+\text{Т}n$, $-\text{arctg}\frac{1}{3}+\text{Т}n$, $n\in Z$. **14.20.** 1) $(-\infty; -4]\cup[4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2)\cup[3; +\infty)$. **14.21.** 1) $[-3; -2)$; 2) $[-2; 3)$; 3) $(-\infty; -2,5)\cup(1; +\infty)$; 4) $\left[-5; -2\frac{2}{3}\right]\cup[1; 5]$. **15.1.** 1) $[4; +\infty)$; 3) $(27; +\infty)$. **15.2.** 2) $[-15; 1]$; 4) $[0,5; 5)$. **15.3.** 1) $(-\infty; 0)$; 3) $(-0,5; 2)$; 4) $[3; 12]$. **15.4.** 1) $(-3; -2]\cup[1; 2)$. **15.5.** 2) $(4; +\infty)$; 4) $[-27; 9)$. **15.6.** 1) $[12; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; -\frac{7}{9}\right)$. **15.7.** 2) $\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{34}-1\right); +\infty\right)$. **15.8.** 1) $[2,5; 15)$; 2) $\left(5\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **15.11.** $\{4\}\cup[5; 7]$. **15.12.** $\left[\frac{7}{9}; 4\right)$. **15.13.** 1) $-0,25$; 2) 9; 3) $\sqrt{2}-2$; 4) 1. **15.14.** 1) $-\frac{4\neq}{3}$; 2) $-\frac{9\neq}{4}$; 3) $\frac{\neq}{3}$. **15.15.** 1) $f'(x)=\frac{2}{1+4x^2}+3x^2$; 2) $f'(x)=-\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}+4x^{-5}$. **15.16.** 1) $[-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1]$.

IV боб. КОМПЛЕКС СОНЛАР

16.4. 1) $\sqrt{11}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{8,5}$; 4) $\sqrt{7}$. **16.7.** 1) $\sqrt{29}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{23}$. **16.9.** 1) $z_1=-4+3i$, $|z_1|=5$; $z_2=5+4i$, $|z_2|=\sqrt{41}$; $z_3=-4-3i$, $|z_3|=5$; $z_4=3-2i$, $|z_4|=\sqrt{13}$; $z_5=-3i$, $|z_5|=3$; $z_6=1$, $|z_6|=1$; $z_7=i$, $|z_7|=1$. 2) $z_8=3-4i$; $z_9=-1-5i$. **16.10.** 1) $\sqrt{16+4\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{41-8\sqrt{5}}$; 3) $\frac{\sqrt{31}}{3}$; 4) $0,5\sqrt{19-6\sqrt{2}}$. **16.11.** 1) $x=12$, $y=-3\sqrt{5}$; 2) $x=-4\sqrt{2}$, $y=4$; 3) $x=1,5$, $y=-2\sqrt{2}-1$; 4) $x=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$, $y=2\sqrt{2}$. **16.12.** 1) 1; 2) $2\cdot|\cos\alpha|$; 3) $2\cdot|\cos2\alpha|$; 4) $2\cdot|\sin3\alpha|$. **16.14.** 1) $|z-3|<2$; 2) $|z-3-2i|<2$. **16.15.** 1) $\frac{x^4}{4}-x^2+2x+C$; 2) $\cos(1-x)+C$; 3) $\frac{x^2}{2}-\frac{\sin(1-4x)}{4}+C$; 4) $2x-\frac{\text{tg}\,3x}{3}+C$. **16.16.** 1) $2\frac{1}{3}$ кв.бирл.; 2) $2\frac{1}{3}$ кв.бирл. **16.17.** 1) $\left[-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$; 2) $[0; 4]$. **17.1.** 1) $-5-3i$; 2) $2-7i$; 3) $-2+6i$; 4) $-2-11i$; 5) $-4+9i$; 6) $-2+5i$. **17.2.** 1) $6+8i$; 2) $8-4i$; 3) $3-4i$; 4) $-5+7i$. **17.3.** 1) $\frac{7-5i}{5}$; 2) $\frac{1}{3}\cdot(1-2\sqrt{2}i)$; 3) $\frac{-7+7i}{5}$; 4) $\frac{25-19i}{29}$; 5) $\frac{1+8i}{5}$; 6) $\frac{-5+27i}{13}$. **17.4.** 1) $22-9i$; 2) $1,5+\frac{9\sqrt{3}}{2}i$; 3) $\frac{14}{5}+\frac{22}{5}i$; 4) $\frac{12+8i}{13}$; 5) $\frac{19+5i}{5}$; 6) $\frac{-18-6i}{5}$. **17.5.** 1) -11; 2) $\frac{1+63\sqrt{3}}{7}-\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}+10\right)i$. **17.6.** 1) $\pm(3-4i)$; 2) $\pm(7+5\sqrt{2}i)$; 3) $\pm(\sqrt{1,5}+\sqrt{0,5}i)$; 4) $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2}}\right)$; 5) $\pm(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)$; 6) $\pm(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i)$. **17.7.** 1) $\sqrt{1160}$; 2) $\sqrt{148}$. **17.8.** 1) $x=3$, $y=1$; 2) $x=\frac{19}{9}$, $y=\frac{2}{3}$; 3) $x=0,4$,

$y = 0{,}6$; 4) $x = -1, y = 1{,}5$. **17.9.** 1) $-14 - i$; 2) $-12 + 53i$; 4) $-4 + 14i$. **17.10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ кв.бирл.; **17.11.** 1) $-0{,}5$; 2) -1; 4) $\frac{1}{4}(1-\sqrt{3})$. **17.12.** 1) $\frac{(2x-3)\sin 2x + \cos 2x}{2} + C$;
2) $(2 - x^2 - 2x)\cos x + (2x+2)\sin x + C$. **18.1.** 1) $\pm 2i$; 3) $\pm\sqrt{11}\,i$; 7) $\frac{-1 \pm \sqrt{87}i}{4}$; 8) $\frac{3 \pm \sqrt{33}i}{3}$.
18.2. 1) $x^2 + 9 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 13 = 0$; 3) $x^2 + 6x + 13 = 0$; 4) $x^2 - 10x + 74 = 0$.
18.3. 1) $(x + 1 - 3i)(x + 1 + 3i)$; 2) $(x - 2 - i)(x - 2 + i)$; 4) $(x - 1{,}5 - 1{,}5i)(x - 1{,}5 + 1{,}5i)$.
18.4. 1) $\pm\frac{\sqrt{14}}{3}i$; 2) $\pm\frac{\sqrt{31}}{2}i$; 3) $\pm\sqrt{5{,}5}\,i$; 4) $\frac{\pm\sqrt{13\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}i$; 6) $\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{163}i}{6}$. **18.5.** 1) $x^2 + 15 = 0$;
2) $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 7 = 0$; 3) $x^2 + 6\sqrt{5}\,x + 49 = 0$; 4) $x^2 - 4x + 22 = 0$. **18.6.** 1) $(x + 2i)(x - 2i)\cdot(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$; 2) $(x + i)(x - i)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$. **18.7.** 1) $\pm(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$; 2) $\pm\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{9}{2}}i\right)$;
3) $\pm\left(\sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}}i\right)$; 4) $\pm\left(\sqrt{\frac{13}{2}} - \sqrt{\frac{13}{2}}i\right)$; 5) ± 2; $\pm 2i$; 6) ± 1; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. *Кўрсатма.*
6) Тенгламанинг чап томонида турган ифодани кўпайтувчиларга ажратамиз: $(z^3 - 1)\cdot(z^3 + 1) = 0$ ёки $(z - 1)(z^2 + z + 1)(z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$. Ҳар бир кўпайтувчини нолга тенглаштириб, тенгламанинг комплекс сонлар тўпламидаги илдизларини топамиз.
18.8. 1) $\{2; i\}$; 2) $\{2; -i\}$; 3) $\{3; 2i\}$; 4) $\{-3 \pm 2\sqrt{2} + i\}$; 5) $\{3 + i; 2 + i\}$; 6) $\{8 - 2i; 2 - 2i\}$.
18.9. 1) $\{0; 1; -0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{3}\,i\}$; 2) $\{0; 2; -1 \pm i\sqrt{3}\}$. *Кўрсатма.* 1) Тенглама тузамиз $x + iy = (x - iy)^2$ ёки $x + iy = x^2 - 2xyi - y^2$. Ҳақиқий ва мавҳум қисмлари тенг бўлса, у ҳолда иккита комплекс соннинг тенг бўлишини эътиборга олиб, қуйидаги тенгламалар системасини оламиз: $\begin{cases} x = x^2 - y^2, \\ y = -2xy. \end{cases}$ Системани ечиб, $y = 0$ ва $x = 0$ ёки $x = 1$ экани келиб чиқади.

Агар $y \neq 0$ бўлмаса, у ҳолда иккинчи тенгламани y га қисқартирамиз. У ҳолда $1 = -2x$ ёки $x = -0{,}5$ келиб чиқади.

Ҳосил бўлган x нинг қийматини системадаги биринчи тенгламага қўйиб, $-0{,}5 = 0{,}25 - y^2$ тенгламани оламиз. Бундан $y = \pm 0{,}5\sqrt{3}$. Демак, берилган тенгламанинг илдизлари: $-0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{3}\,i$. **18.11.** 1) $(4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3})$; 2) $(1{,}5; 3)$; 3) $(1 - 2\sqrt{5}; 1 + 2\sqrt{5})$. **18.12.** 1) $x - 1$; 2) $x + 1$; 3) $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$; 4) $-a^{0,5} - 2a^{-1,5}$. **18.13.** 1) $[4; 5]$; 2) $\left[-2\frac{9}{11}; -2\right] \cup [3; +\infty)$.

VI боб. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛАР

19.2. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$. **19.3.** 1) $(-2; +\infty)$; 2) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$;
3) $(3; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$. **19.4.** 1) 1; 3; 9; 27; 81; ...; 2) $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}$; ...; 3) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{27}$; ... . **19.5.** 1) ўсувчи; 2) ўсувчи; 3) камаювчи; 4) ўсувчи. **19.6.** 1) $y = 2^x$;
2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. **19.19.** 1) $\{\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + 2\pi n\}$; $n \in Z$; 2) $\{\pm\arccos(1 - \sqrt{2}) + 2\pi n\}$, $n \in Z$.
19.20. 1) $\left[-\frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in Z$; 2) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. **19.21.** 1) $x^5 - x^3 + \mathrm{arctg}\,x + C$;
2) $\frac{\sin 2x}{2} - \frac{(2x+1)^4}{8} + C$. **20.2.** 4) -2; 6) -3. **20.3.** 3) 2; 4) 1. **20.4.** 5) $\log_{\frac{2}{3}}\frac{8}{27} = 3$; 6) $\lg 0{,}001 = -3$.

20.5. 4) $10^5 = 100000$; 6) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$. **20.6.** 3) n; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $-\frac{3}{2}$. **20.7.** 2) -1; 4) 0,5. **20.8.** 3) 0,5; 4) 0. **20.9.** 1) $\approx -0{,}699$; $\approx -1{,}301$; $\approx 2{,}301$. **20.10.** 1) -2; 2) 6; 3) 2; 4) 1. **20.11.** 3) $3(\lg|m| + \lg|n|)$; 6) $\lg 7 + 8\lg|a| + \lg b + \frac{1}{8}\lg c$. **20.12.** 4) -3; 5) $\frac{9}{4}$; 6) 8. **20.13.** 1) $\frac{5}{16}$; 2) 2; 4) 1. **20.14.** 1) 4; 2) -21; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$. **20.16.** 2) 9; 4) 0,25. **20.19.** 1) $2 - 2a$; 2) $\frac{3c}{2a+c}$. **20.20.** 1) 8; 4) $\sqrt[3]{5}$; 5) 8; 6) 25. **20.21.** 1) -3; 3) 0,5; 5) $-\frac{1}{3}$. **20.26.** 1) 1; 4) 9; 7) 1. **20.27.** 1) $\frac{1}{3}$; 4) 5. **20.28.** 1) 2; 3) 2; 4) 3; 5) 4. **20.30.** 1) $k = 3$; 2) $k = -0{,}5$; 3) $k = \frac{1}{3}$. **20.31.** 1) $(0; 4)$; 2) $(-3; -1)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$. **21.5.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(8; +\infty)$; 3) $\left(-\frac{4}{3}; +\infty\right)$; 4) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **21.6.** 1) $(-\infty; 2)$; 2) $(-\infty; 2{,}5)$; 3) $\left(-\infty; \frac{11}{4}\right)$; 4) $(-\infty; 1{,}2)$. **21.7.** 1) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) $(5; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $(-2; 3)$. **21.10.** 1) $[-2; 3)$; 2) $(-2{,}25; 3]$; 3) $(-\infty; -1)\cup(1; 5]$; 4) $[0{,}7; 1)$. **21.11.** 1) $(-4; 0)\cup(3; +\infty)$; 2) $\left(-\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right]$; 3) $(-\infty; -1)\cup(0; 2]$; 4) $(-3; 1]$. **21.12.** 1) $(-1; 2)\cup(2; 3)$; 2) $(-\infty; -5)\cup(0; 7)\cup(7; +\infty)$; 3) $(2; 3)\cup(3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4)\cup(-4; 8)$. **21.14.** 1) $(2; 3)\cup(3; +\infty)$. **21.16.** 1) $\{\pm 2; \pm i\sqrt{3}\}$; 2) $\{\pm 3; \pm 2i\}$; 3) $\{7\}$; 4) $\{-3; 1; -1 \pm i\sqrt{3}\}$. **21.17.** 1) $y = 2^x$; 2) $y = \sqrt{x+2}$. **21.18.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{18}$. **22.1.** 1) $3^{x^2-7x}(2x - 7)\ln 3$. **22.2.** 2) $\frac{1}{24}$. **22.4.** 2) $y = \frac{3}{4}x - 1{,}5 + \ln 8$. **22.5.** 1) $(0; 1]$ — камаювчи, $[1; +\infty)$ — ўсувчи; 2) $(-\infty; -2]$ ва $[0; +\infty)$ — ўсувчи; $[-2; 0]$ — камаювчи. **22.7.** 3) $\ln\frac{10}{3}$ кв.бирл. **22.8.** 1) $2{,}5(\ln 5 - 1)$; 2) $-\frac{2}{e^4}$. **22.9.** 2) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$. **22.10.** 4) $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$. **22.12.** 2) $y = -x + 1$. **22.14.** 1) $4e - 5$ кв.бирл; 2) $7 + \frac{1}{e^4}$ кв.бирл. **22.17.** 2) $y = 16x + 8$. **22.20.** $\frac{e^2}{2} - 2{,}5$ кв.бирл. **22.22.** 1) $y^2 b^{\frac{6}{7}}$; 2) $a^4 y^{-2,5}$. **22.23.** 1) 11; 2) 3,5. **22.24.** 1) $f'(1) = 7$; 2) $f'(1) = 9$.

VII боб. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

23.1. 1) 4; 2) 4; 3) -5; 4) 2. **23.2.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 2. **23.3.** 1) 2; 2) 1; 3) 2; 4) 2. **23.4.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 1; 4) 0; 2. **23.5.** 1) $(2; 1)$; 2) $(3; 2)$. **23.6.** 1) $(1; 1)$; 2) $(3; 1)$. **23.7.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 2; 3) 0; 4) -2. **23.8.** 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) 2; 3) $\frac{11}{12}$; 4) $1\frac{2}{3}$. **23.9.** 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) ± 5; 3) -3; 4) 2. **23.10.** 1) $(1; 0)$; 2) $(1; 0)$. **23.11.** 1) $(3; 4)$; 2) $(2; 6)$. **23.12.** 1) 0; 2) 6; 0,2; 3) -2; 4) -3; 0,5; 6. **23.13.** 3) 0; 4) 1. **23.14.** 1) 3; 3) 1; $\log_4\frac{25}{3}$; 4) ± 2. **23.15.** 1) 0,4; 2) $[1; +\infty)$; 3) $-\frac{5}{4}$; 2; 4) $\varnothing$. **23.16.** 1) $(3; 4)$; 2) $(1; 1)$. **23.17.** 1) $(3; 2)$; 2) $(1; 1)$. **23.18.** 1) $f'(x) = 3e^{3x} - 2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3$; 2) $f'(x) = 3\sin^2 x\cos x + 3\cdot 2^{3x}\ln 2 + e^{3-x}$. **23.19.** 1) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+1}$; 2) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$; 3) $\frac{6}{2x-3} - \frac{2}{x+1}$; 4) $3x^2 + \frac{10}{2x-5} - \frac{8}{2x+3}$. *Кўрсатма.* Логарифмнинг хоссаларидан фойдаланиб, логарифмик функцияни шакл алмаштирамиз, функциянинг ҳосиласини топамиз. 3) $f'(x) = \ln\frac{(2x-3)^3}{(x+1)^2} = 3\ln(2x-3) - 2\ln(x+1)$ ва функциянинг ҳосиласини топамиз. **23.20.** 1) $(3-x)\cos x + \sin x + C$; 2) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$; 3) $\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + C$; 4) $\frac{x^2}{2} - x\sin x - \cos x + C$. **24.2.** 1) 0,5; 2) 2; 3) 2; 4) −3. **24.3.** 1) 1; 4; 2) −1; 2; 3) 1; 5; 4) 5. **24.4.** 1) 2; 2) 3; 4) 9. **24.5.** 1) (8; 4); (4; 8); 2) (1; 2); (2; 1). **24.6.** 1) (5; 3); (3; 5); 2) (6; 3); (3; 6). **24.7.** 1) (2; 1); 2) (2; 1). **24.8.** 1) 4; 2) 33; 3) −3; 4) 2. **24.9.** 1) 5; 2) 5; 8. **24.10.** 1) 10; 2) $\sqrt[4]{1000}$; 3) 4; 4) 1. **24.11.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 0. **24.12.** 1) (0; 3); 2) (3; 1). **24.13.** 1) (2; 6); 2) (5; 2). **24.14.** 1) (7; 3); 2) (4,5; 0,5). **24.15.** 1) $\frac{1}{3}$; 27; 2) $\frac{1}{2}$; 16; 3) 3; 9; 4) $\frac{1}{125}$; 5. **24.16.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) −7; 3) 3; 4) 3. **24.17.** 1) 9; 2) $\sqrt[5]{5}$; 5; 3) 1; 4) 11. **24.18.** 1) (6; 2); (7; 3); 2) (3; 2). **24.19.** 1) (2; 2); 2) (3; 9). **24.20.** 1) (4; 16); 2) (27; 81); 4) (1; 10); (−1; 0,1). **24.22.** 1) $10 - \frac{3}{\ln 2}$; 2) $4 - \frac{2}{\ln 3}$. **24.23.** 1) $y = 2^{|x|}$; 2) $y = \ln|x|$; 3) $y = 2^{-|x|}$. **25.1.** 1) $(-3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3)$; 3) $(-\infty; -3)$; 4) $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 5)$; 6) $(-4; +\infty)$. **25.2.** 1) 2; 2) 1; 3) −1; 4) 0; 5) 3; 6) 2. **25.3.** 1) $(11; +\infty)$; 2) (1; 9). **25.4.** 1) $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 2) $(3; +\infty)$; 3) $\left(\frac{5}{12}; +\infty\right)$; 4) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; 5) $[-2; +\infty)$; 6) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. **25.5.** 1) (−1; 3); 2) [−3; 2]; 3) $\left(\frac{1}{5}; 3\right)$; 4) $\left(\frac{7}{8}; 3\right)$; 5) (4; 8); 6) (−2; −1]. **25.6.** 1) 0; 2) −3; 3) 1; 4) −2. **25.7.** 1) 1; 2) 1; 3) 4; 4) 1. **25.8.** 1) $(-\infty; 3)$; 2) (−5; 0). **25.9.** 1) 0; 2) −2; 3) 2; 4) 1. **25.10.** 1) 0; 2) −1; 3) 0; 4) 1. **25.11.** 1) 2; 2) 2; 3) 3; 4) 5. **25.12.** 1) [−1; 3); 3) $(3; +\infty)$; 4) $(2; +\infty)$. **25.13.** 3) $(1; 2]\cup[3{,}5; +\infty)$; 4) $(-0{,}5; 0{,}5)\cup(0{,}5; +\infty)$. **25.14.** 1) (0; 0,5]; 2) ∅. **25.15.** 1) (2; 3); 2) $[-0{,}5; 3 + \sqrt{6})$; 3) $[-2\frac{2}{3}; 8)$; 4) $(-\infty; 0)$. **25.16.** 1) $[-0{,}5; +\infty)$; 2) $[\frac{1}{e}; +\infty)$. **25.17.** 1) $y = 0{,}5x - 4$; 2) $y = x + 1$; 3) $y = 4x + 1$; 4) $y = 2x + e$. **26.1.** 1) $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 2) (−2; 7); 3) (3; 11]; 4) $\left(\frac{1}{4}; \frac{11}{4}\right]$. **26.2.** 3) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$; 4) $\left(\frac{3}{4}; 2\right]$. **26.3.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$; 3) [−37; 12); 4) (2; 2,5). **26.4.** 1) $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$; 2) (0,008; 0,04); 4) [0,01; 10]. **26.6.** 1) [−1; 0); 2) $(-\infty; -5)$. **26.7.** 1) (−4; 2); 2) $(-2; -1) \cup (2; 3)$; 4) $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. **26.8.** 1) (1; 2]; 2) $\left(1; \frac{5}{3}\right)$. **26.9.** 1) (2; 5); 2) $[2; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $[1; +\infty)$. **26.10.** 1) [4; 5); 2) [1; 2]. **26.13.** 1) $(0; 1] \cup [16; +\infty)$; 3) $(-4; -2) \cup (-1; 2)$. **26.14.** 1) $\left[-\frac{2}{3}; 0\right)$. **26.15.** 1) $(0; 1)\cup(2; +\infty)$; 2) $(0; 1) \cup [1; \sqrt[10]{10})$; 5) (1; 4); 6) (1; 2,5). **26.16.** 1) (1; 2); 2) [5; 6]. **26.18.** 1) $x = -2e$; 2) $x = -3$; 3) $y = 0$; 4) $y = 0$. **26.19.** 1) $\{\pm\sqrt{2}; \pm i\sqrt{6}\}$; 2) $\{\pm\sqrt{7}; \pm i\sqrt{2}\}$. **26.20.** 1) $f''(x) = 2e^{2x}(2x^2 + 4x + 1)$; 2) $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 5x + 4)$; 3) $f''(x) = \frac{1}{x}$; 4) $f''(x) = 2\ln x + 3$.

VIII боб. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

27.3. 1) $y = C \cdot e^x$; 3) $y = x^2 - 3x + C$; 4) $y = x^3 + x^2 - \pi x + C$. **27.4.** 1) $y = x^2 - x + 1$; 2) $y = x^3 - 4x + 5$; 3) $y = x^3 - 2x^2 - 2$; 4) $y = x^2 - x^3 + 2$. **27.5.** 1) $y = \pm\sqrt{3 + x^2}$; 2) $y = e^{x^3 - 1}$; 3) $y = \pm\sqrt{\sin x + 4}$; 4) $y = \mathrm{arctg}\, x + \frac{3\pi}{4}$. **27.6.** 1) $y = \mathrm{arctg}(x^2 + C)$; 2) $y = \mathrm{arcctg}(C - 2x^2)$;

3) $y = 0,5e^{2x} + 2x^2 + C$; 4) $y = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x + C)$. **27.8.** 865. **27.9.** $T = 20^\circ + 80^\circ \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, 60 мин. *Кўрсатма.* Ньютон қонуни бўйича $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$ ёки $\frac{dT}{T-20} = kdt$, бунда t — вақт, T — жисмнинг ҳарорати.

Бундан $\ln(T - 20) = k \cdot t + \ln C$.

$t = 0, T = 100^\circ$ бўлганда $\ln(100 - 20) = k \cdot 0 + \ln C$, у ҳолда $C = 80$. $t = 20, T = 60^\circ$ бўлганда $\ln(60 - 20) = k \cdot 20 + \ln 80$, у ҳолда, $k = -\frac{1}{20}\ln 2$. Демак, $T - 20 = 80 \cdot e^{-\frac{1}{20}t \cdot \ln 2} = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ ёки $T = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. $T = 30^\circ$ бўлганда $30 = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ ёки $10 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, яъни $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Унда $\frac{t}{20} = 3$ ёки $t = 60$ мин. **27.10.** 1) $\approx 1,28$ км/соат. 2) $500 \cdot e^{-5}$ м/мин $\approx$ $\approx 3,37$ м/мин.

Кўрсатма. 1) Қайиққа таъсир қилувчи сувнинг қаршилик кучи $F = -kv$, бунда k — пропорционаллик коэффициенти. Иккинчи томондан Ньютон қонуни бўйича $F = ma$, бунда $a = v'$ — тезланиш.

Демак, $ma = -kv$ ёки $v' = -\frac{k}{m}v$. Коэффициентлари ажратиладиган тенгламани ечамиз: $\ln v = -\frac{kt}{m} + C$ ёки $v = e^{-\frac{kt}{m}+C}$.

$t = 0$ ҳолда $v_0 = 20$ км/соат бўладиган дастлабки шартни эътиборга оламиз. Бунда $C = \ln 20$ ёки $v = 20e^{-\frac{kt}{m}}$.

$t = 40c = \frac{40}{3600} = \frac{1}{90}$ соат бўлганда қўшимча шартни инобатга олсак, қайиқнинг тезлиги $v = 8$ км/соат. Бунда $8 = 20e^{-\frac{k \cdot 1}{m \cdot 90}}$ ёки $e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}$.

У ҳолда $v = 20 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-90t}$ км/соат. Мотор тўхтагандан 2 мин ўтгандан кейинги тезликни топамиз. $t = 2$ мин$= \frac{2}{60}$ соат$= \frac{1}{30}$с. $v = 20 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-90 \cdot \frac{1}{30}} = 20 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{3} = 20 \cdot \frac{8}{125} = \frac{32}{25} \approx$ $\approx 1,28$ км/соат.

27.11. $q = UC \cdot (1 - e^{-\frac{t}{CR}})$. *Ечиш.* Физикадан I ток кучи ўтказгич орқали ўтувчи q электр миқдоридан t вақт бўйича олинган ҳосила эканлиги маълум. Яъни, $I = q'$. t вақт моментида q конденсаторнинг зарядига U занжир кучланиши билан $\frac{q}{C}$ конденсатор кучланиши орасидаги айирмага тенг E электр юритувчи кучи таъсир қилади, бунда I — ток кучи.

Демак, $E = U - \frac{q}{C}$.

Ом қонунига кўра $I = \frac{E}{R}$. У ҳолда $q' = \frac{U - \frac{q}{C}}{R}$ ёки $q' = \frac{1}{CR} \cdot (UC - q)$. $x = UC - q$ белгилаб, яъни $-q' = x'$, $x' = -\frac{1}{CR} \cdot x$ тенгламани оламиз.

$t_0 = 0$ ҳолда $x = UC$ бўлган дастлабки шарти бўлган ўзгарувчилари ажратиладиган дифференциал тенгламага эга бўламиз.

Ҳосил бўлган дифференциал тенгламани ечиб, $\ln x = \frac{1}{CR} \cdot t$ оламиз, яъни $x = UCe^{-\frac{t}{CR}}$ ёки $UC - q = UCe^{-\frac{t}{CR}}$. Демак, $q = UC(1 - e^{-\frac{t}{CR}})$.

27.12. 1) $T = \dfrac{20\ln 2}{\ln\dfrac{m}{n}}$; 2) 9 мин. **27.14.** 1) $F(x) = 2\text{tg}x + x^2 + C$; 2) $F(x) = -2\text{ctg}2x + \frac{1}{4}e^{4x} + C$; 3) $F(x) = 2\ln(x^2+1) - e^{-x} + C$; 4) $F(x) = \ln^2 x + 2e^{-x} + C$. **27.15.** 1) $21\frac{1}{3}$ кв.бирл.; 2) 1 кв.бирл. **27.16.** 1) $(1;\ \sqrt[3]{5})$; 2) $\left(-1\frac{2}{3};\ 7\frac{1}{3}\right]$; 3) $(1;\ 2)$; 4) $(-4;\ 2)$. **28.2.** 1) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$; 2) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$; 3) $y = C_1\cos5x + C_2\sin5x$; 4) $y = C_1\cos6x + C_2\sin6x$. **28.3.** 1) $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$; 2) $y = (C_1 + C_2x)e^{-4x}$; 3) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x}$; 4) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$. **28.4.** 1) $y = e^x(C_1\cos3x + C_2\sin3x)$; 2) $y = e^{-4x}(C_1\cos3x + C_2\sin3x)$; 3) $y = e^{-3x}(C_1\cos6x + C_2\sin6x)$; 4) $y = e^{2x}(C_1\cos7x + C_2\sin7x)$. **28.5.** 1) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{x}$; 2) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-2x}$; 3) $y = e^{2x}(C_1\cos2\sqrt{2}x + C_2\sin2\sqrt{2}x)$; 4) $y = e^{-4x}(C_1\cos2\sqrt{5}x + C_2\sin2\sqrt{5}x)$. **28.6.** 1) $y = e^{3x}(1 + (2e^{-3} - 1)x)$; 2) $y = e^{-x}(3 + (2e - 3)x)$; 3) $y = \dfrac{2e^3 - e}{e^3 - 1}e^{-x} + \dfrac{2 - e}{1 - e^3}e^{2x}$; 4) $y = \dfrac{2}{1 - e^6}e^{4x} + \dfrac{2e^6}{e^6 - 1}e^{-2x}$. **28.7.** 1) $y = \cos x + 2\sin x$; 2) $y = 2\cos4x - \sin4x$. **28.8.** 1) $y'' + 6y' + 13y = 0$; 2) $y'' + 2y' + 17y = 0$; 3) $y'' - 2y' + 26y = 0$; 4) $y'' - 4y' + 16y = 0$. **28.9.** 1) $y'' + 4y = 0$; 2) $y'' + 2y = 0$; 3) $y'' - 4y' + 7y = 0$; 4) $y'' - 2y' + 9y = 0$.

Кўрсатма. 4) $y = e^{-x}\cdot\sin(2\sqrt{2}x - 1)$ гармоник тебранишда $\sin(2\sqrt{2}x - 1)$ ифодани $\sin(\alpha - \beta)$ формула бўйича кўпайтувчиларга ажратамиз.

У ҳолда $y = e^{-x}\cdot\sin(2\sqrt{2}x - 1) = e^{-x}(\sin2\sqrt{2}x\cdot\cos1 - \sin1\cdot\cos2\sqrt{2}x)$. Бундан $C_1 = -\sin1$, $C_2 = \cos1$ оламиз ва тавсифий тенгламанинг илдизлари $(-1 \pm 2\sqrt{2}i)$.

Демак, дифференциал тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади: $y'' - 2y' + 9y = 0$.

10-11-СИНФЛАР АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШГА ДОИР МАШҚЛАР

1. 1) 22; 2) 60; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 1; 5) 6; 6) $2^{\frac{255}{256}}$; 7) 2,5; 8) 0. 9) π; 10; -1; 11) 3π; 12) $4\pi - 11$. **2.** 1) $f'(1) = 2$; 2) $f'(1) = -6$; 3) $f'(1) = 7$; 4) $f'(-2) = 5\cdot e^{-2}$. 5) 3; 6) -5. **3.** 1) $2e^4$; 2) $\frac{13}{36}$; 3) $\frac{1}{12}$. 4) $3e$; 5) $-2\sin4$; 6) -2. **4.** 1) $4e$; 2) -1; 3) -18; 4) 0. **5.** 1) $y_{\text{энг катта}}(3) = 3e^3$; $y_{\text{энг кичик}}(0) = 0$; 2) $y_{\text{энг кичик}}(2) = 2\ln2$; $y_{\text{энг катта}}(3) = 3\ln3$; 3) $y_{\text{энг кичик}}(4) = -2$; $y_{\text{энг катта}}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$. **6.** 1) $\dfrac{2\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} - 3}$; 2) 2. **7.** 1) $\sqrt{b}$; 2) $x + \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x}}$, $x \in [4;\ +\infty)$, $x + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0;\ 4)$. **8.** 1) $ya^{\frac{6}{7}}$; 2) $a^2y^{-1,5}$. 3) 0,5; 4) 0,36. **9.** 1) $\dfrac{\sqrt{xy}}{x^{0,5} + y^{0,5}}$; 2) $\dfrac{x + y}{x - y}$. **10.** 1) $2\sqrt{a^2 - x}$; 2) $2y$. **11.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $-\frac{1}{6}$. **12.** 1) $2a + b$; 2) $\dfrac{a + 1}{2a + b}$; 3) $1 + 2a + b$; 4) $1 + 3a + 2b$. **13.** 1) 1; 2) 2,5; 3) 2; 4) 4,5; 5) 1,5; 6) -1; 7) 2; 8) 0,5. **14.** 1) $a = 3$; 2) $a = -3$; 3) $a = 0$; 4) $a = 0,5$. **15.** 1) $f'(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x > 0, \\ -4x - 2, & x < 0; \end{cases}$ 2) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 2, \\ -3x^2 + 8x, & x < 2. \end{cases}$ **16.** 1) $f'(x) = -2\cdot2^{2x}\cdot\ln2$; 2) $f'(x) = 6\sin^2 2x\cdot\cos2x - 3\sin3x + e^{2-x}$; 3) $f'(x) = 4\text{tg}2x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 2x} - \dfrac{3}{\sin^2 3x} + e^x$; 4) $f'(x) = \dfrac{2}{1 + 4x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **17.** $-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$. **18.** 1) $\dfrac{2}{2x - 1} - \dfrac{3}{3x + 2}$; 2) $\dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 3}$;

3) $\frac{4}{x+3} - \frac{2}{x-1}$; 4) $1 + \frac{5}{x-5} - \frac{4}{x+1}$. **19.** 1) 0; 2; 2) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$; $n \in Z$. **20.** 1) $x^2 - 3x$; 2) $x - x^3$; 3) $5x + \cos x - 3$; 4) $2\sin x - x^3$. **21.** 1) $\frac{(2x-1)^5}{10}+C$; 2) $\frac{(5-2x)^{-2}}{4}+C$; 3) $\frac{2\sin x\sqrt{\sin x}}{3}+C$; 4) $\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2x}}{2}+C$; 5) $\frac{\cos(2-3x)}{3}+C$; 6) $\frac{2x+\sin(2x-6)}{4}+C$; 7) $\mathrm{tg}3x+C$; 8) $\ln(3+x^2)+C$. **22.** 1) xe^x+C; 2) $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4-2x^2+2)+C$; 3) $-x\cos x+\sin x+C$; 4) $\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{e^{2x}}{4}+C$; 5) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$; 6) $0,25x^2 + 0,5x\sin x+0,5\cos x+C$. **23.** 1) $\frac{\neq}{8}$; 2) 0; 3) $\frac{31}{80}$; 4) $\ln\frac{\neq}{2}$; 5) $\ln\frac{4}{3}$; 6) $0,5(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$. **24.** а) 1) $2+\frac{1}{\ln 2}$; 2) $\frac{1}{\ln 2}-0,5$; 3) $2\frac{1}{3}$; б) 1) $\frac{2\neq}{3}$ куб. бирл.; 2) 21,6П куб. бирл. **25.** 1) {−1; 0; 2}; 2) {−3; 0; 2}; 3) {1; 2; 4}; 4) {4}; 5) {−1}; 6) {−5}. 7) $\{\frac{\neq n}{4}, n \in Z\}$; 8) $\{\frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z\}$.
26. 1) (0,5; 1); 2) (−∞; −6) ∪ (3; +∞); 3) (2; 3); 4) (−1; 0) ∪ (0; 1) ∪ (1; 4].
27. 1) [0,5; 5); 2) [−1; 3); 3) (4; 5); 4) (−2; 14]; 5) $(-\infty; -2] \cup \left[5; \frac{74}{13}\right)$; 6) (−∞; 4).
28. 1) 5; 2) 0; 3) [−4; −2] ∪ [1; 2]; 4) (0; 0,4) ∪ [25; +∞). **29.** 2) ∅; 3) $-\frac{\neq}{4}+\Pi n$; $n \in Z$; 5) ∅; 6) R. **30.** 1) −5; 2) $-\frac{13}{6}$; 3) $\frac{9}{7}$; 4) ∅. **31.** 1) $y = 1$, $x = 1$; 2) $y = -1$, $x = -3$; 3) $x = 2$, $y = x + 2$; 4) $x = -2$, $y = 2x - 5$. **32.** 1) $M(0; 0)$; 2) эгилиш нуқталари йўқ; 3) $M(0; 0)$; 4) $M(0; 2)$. **35.** 1) $y = -2$; 2) $y = 1,5x + 1$; 3) $y = x$; 4) $y = x$.
36. 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z$; 3) −1; 4) $\mathrm{arctg}2+\Pi n, n \in Z$. **37.** 1) $y = 0$, $x = 1$; 2) $x = -2$. **38.** 1) $y = \frac{3}{4}x + 1\frac{1}{4}$; 2) $y = -x + 2$. **40.** 1) −3, −1, 0, 1, 3; 2) [−3; −1], [0; 1], [3; +∞); 3) (−∞; −3], [−1; 0], [1; 3]; 4) −3, 0, 3. **43.** *min* — (−3), 3, *max* — 0.
44. $t = 5$ с, $v = 28,5$ м/с. **45.** Квадрат, $a = 30$ см; 2) томони $\frac{a}{4}$ бўлган квадрат.
46. 1) 6; 6; 2) 9; 9; 3) 16 = 4 · 4. **47.** 1) 12 м/с; 2) $a = 0$. **48.** 80 м. **49.** $\frac{5}{\sqrt{4+\pi}}$ м². **50.** $M\left(\frac{4}{3}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.
51. 1) $y = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x^2}+C$; 2) $\mathrm{arctg}y = x + \frac{x^3}{3}+C$; 3) $\mathrm{arctg}y = \mathrm{arctg}x + C$; 4) $x^2 + y\sin y + \cos y = C$. **52.** 1) $x + y = 0$; 2) $2e^{y^2} = 1 + e^x$; 3) $y = -2\cos x$; 4) $\ln^2 y = 2\mathrm{tg}x$.
53. 1) $y = (C+x)\sin x$; 2) $\frac{y^2}{2} = x + \frac{3}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C$; 3) $y = (C+x)e^x$; 4) $y(1+x^2)^2 = x^3+3x+C$.
54. 1) $y = C_1e^{6x} + C_2e^{-x}$; 2) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x}$; 3) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x}$; 4) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$.
55. 1) $t \approx 10,2$ с; 2) $xy = 12$; 3) 30 мин. **56.** 1) $3 + 14i$; 2) $2 + 7i$; 3) $-1 + 4i$; 4) $8 + 8i$.
57. 1) $9 + 7i$; 2) $-3 - 8i$; 3) $-3 - 4i$; 4) $3 + i$. **58.** 1) $x = 5$, $y = 2$; 2) $x = 1,5$, $y = -2$.
59. 1) $(5-3xi)(5+3xi)$; 2) $(2x+4yi)(2x-4yi)$; 3) $(x-2-i)(x-2+i)$; 4) $(x-3-4i)(x-3+4i)$.
60. 1) $x^2+4=0$; 2) $x^2-4x+5=0$; 3) $x^2-6x+13=0$; 4) $x^2+4x+20=0$. **61.** 1) 120, 40 тоқ. *Кўрсатма.* 2, 6, 7 рақамлардан тузилган 10^4 сонидан кичик сонларга барча бир хонали, икки хонали, уч хонали, тўрт хонали сонлар киради. Уларнинг сони — $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$. Тоқ сонлар сони — $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$; 2) 120, жуфт сонлар сони — 40. **62.** 1) 73 326. *Кўрсатма.* $P(1; 2; 1) = \frac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!} = 12$. 3 ва 5 рақамлари $P(2; 1) = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ марта, 7 рақами эса $P_3 = 3! = 6$ марта учрайди. Бундан барча тўрт хонали сонларнинг йиғиндиси: $1111 \cdot (3\cdot 3 + 3\cdot 5 + 7\cdot 6) = 73\ 326$. 2) 59 994.

63.

X	0	1	2	3
P	$\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\approx 0,491$	0,421	0,084	$\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}=\frac{1}{285}\approx 0,004$

64. 1) 6; 2) 18; 3) 10. **65.** 1) 7; 2) 5; 3) 14. **66.** 1) ≈1,16; 2) ≈1,03; 3) ≈0,98; 4) ≈ 0,67. **67.** 1) $P(A)=\frac{25}{C_{200}^{1}}=\frac{25\cdot 1!\cdot 199!}{200!}=\frac{25}{200}=\frac{1}{8}$; 2) $P(B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. **68.** $P(A)=\frac{C_{180}^{3}\cdot C_{20}^{2}}{C_{200}^{5}}=$ $=\frac{5!\cdot 195!}{200!}\cdot\frac{180!}{3!\cdot 177!}\cdot\frac{20!}{2!\cdot 18!}=\frac{178\cdot 179\cdot 180\cdot 19}{199\cdot 198\cdot 197\cdot 196}=0{,}072$. **69.** 1) $P(A)=0{,}95+0{,}05\cdot 0{,}95+$ $+\,0{,}05\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95=0{,}999\,875$; **70.** $\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2520}$. **71.** 1) 0,75; 2) 0,5; 3) 0,4; 4) $\frac{9}{14}$. **72.** 46 та ўқувчи, 7 та машина. **73.** 1) 23 232 тг; 2) 4448 тг. **74.** 600. **75.** 1) Иккинчисида, 2336 тг керак; 2) тўртинчисида, 74 тг га. **76.** 22 + 13 – 9 = 26 киши. **77.** 30%. **78.** *Ечиш.* a, b, c мусбат сонлар ва кўпайтмаси $\frac{1}{4}$ дан катта, у ҳолда $0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$. $x(1-x)=x-x^2=-(x^2-x)=-\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$; чунки $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$. У ҳолда қуйидаги тенгсизликлар тўғри: $a(1-a)\leqslant\frac{1}{4}$; $b(1-b)\leqslant\frac{1}{4}$; $c(1-c)\leqslant\frac{1}{4}$.

Агар тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўпайтирсак, у ҳолда $a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)\leqslant\frac{1}{64}$. Ёки $a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a)\leqslant\frac{1}{64}$. Демак, $a(1-b)\cdot b(1-c)\cdot c(1-a)>\frac{1}{64}$ тенгсизлик тўғри эмас. Яъни $a(1-b)>\frac{1}{4}$; $b(1-c)>\frac{1}{4}$; $c(1-a)>\frac{1}{4}$ тенгсизликлар бир вақтда бажарилмайди. **79.** *Ечиш.* $x^2+y^2\geqslant 2xy$ (1) тўғри, бироқ $x\neq y$, у ҳолда $x^2+y^2>2xy$. (1)-тенгсизликнинг иккала томонини $ab(ab>0)$ га кўпайтирамиз, у ҳолда $ab(x^2+y^2)>2abxy$ (2). Энди (2)-тенгсизликнинг иккала томонига $(a^2+b^2)xy$ ифодани қўшамиз. $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)>(a^2+b^2)xy+2abxy$ ёки $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=a^2xy+b^2xy+abxy^2\ aby^2=ax(ay+bx)+by(bx+ay)=$ $=(ay+bx)(ax+by)$. У ҳолда $(a^2+b^2)xy+2abxy=(a+b)^2xy$ тенглик бажарилади. Демак, $(ay+bx)(ax+by)>(a+b)^2xy$ (3). Чунки $a+b>0$ ва $ay+bx>0$, у ҳолда (3) тенгсизликни $(a+b)(ay+bx)>0$ га бўламиз, у ҳолда $\frac{(a+b)xy}{ay+bx}<\frac{ax+by}{a+b}$. **80.** *Ечиш.*

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$ эканлигидан $c=\frac{2ab}{a+b}$. У ҳолда $\frac{a+c}{a-c}=\frac{a+\frac{2ab}{a+b}}{a-\frac{2ab}{a+b}}=\frac{a^2+3ab}{a^2-ab}=\frac{a+3b}{a-b}$. Яъни $\frac{a+c}{a-c}=\frac{a+3b}{a-b}$. (1)

Худди шундай $\frac{b+c}{b-c}=\frac{b+\frac{2ab}{a+b}}{b-\frac{2ab}{a+b}}=\frac{b^2+3ab}{b^2-ab}=\frac{b+3a}{b-a}$, яъни $\frac{b+c}{b-c}=\frac{b+3a}{b-a}$. (2)

(1) ва (2) тенгликларни қўшамиз. У ҳолда $\frac{a+c}{a-c}+\frac{b+c}{b-c}=\frac{a+3b}{a-b}+\frac{b+3a}{b-a}=$ $=\frac{2a-2b}{b-a}=-2$. **81.** Йўқ. *Ечиш.* Бир сонни қўшиш ёки айириш соннинг жуфтлигини ўзгартиради. Бундан 100 сонини 25 марта ўзгартирганда тоқ

сон ҳосил бўлади. Демак, натижада 80 сони чиқмайди. **82.** *Ечиш.* Мусбат сонларнинг ўрта геометриги уларнинг ўрта арифметигидан катта бўлмагани учун $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} < \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2}$. Охирги тенгсизликни n-даражага кўтарсак, $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n \geqslant 2$. **83.** 1) $\varnothing$; 2) $(1; 3)$. **84.** $(-\infty; -\sqrt{2}\,] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$. *Ечиш.* $3x^2 + 2 > 1$ эътиборга олиб, $x^2 - 3x + 7 \geqslant 3x^2 + 2$ тенгсизликни ечамиз: $2x^2 + 3x - 5 \leqslant 0$. Яъни $-2{,}5 \leqslant x \leqslant 1$. $(x+1)$ боғлиқ бўлган иккинчи тенгсизликни ечамиз. $(x+1)^2 - 4a^2(x+1) + 3a^4 = 0$ тенгламаларнинг илдизлари a^2 ва $3a^2$. Демак, $x + 1 \leqslant a^2$ ёки $x + 1 \geqslant 3a^2$. Шу сабабли $x \leqslant a^2 - 1$ ёки $x \geqslant 3a^2 - 1$. Биринчи тенгсизликнинг ечими иккинчи тенгсизликнинг ечимига киради. Демак, $a^2 - 1 \geqslant 1$ ёки $3a^2 - 1 \leqslant -2{,}5$. Иккинчи тенгсизликнинг ечими бўш тўплам, биринчи тенгсизликнинг ечими: $(-\infty; -\sqrt{2}\,] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$. **85.** $\frac{1+\sqrt{10}}{2}$. **86.** $4 < a \leqslant 5$. **87.** 1) 1; 2) 2π; 3) $2{,}25\pi$.

МУНДАРИЖА

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Корчевский Владимир Евгеньевич
Жумагулова Зауре Абдыкеновна

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебник для 11 классов естественно-математического направления
общеобразовательных школ

(*на узбекском языке*)

Муҳаррир *В. Мусаева*
Бадиий муҳаррир *А. Сланова*
Техник муҳаррир *И. Тарапунец*
Мусаҳҳиҳ *Г. Абдрахимов*
Компьютерда саҳифалаган *Н. Сейдахметова*

Нашриётга 7 июль 2003 йилда Қозоғистон Республикаси
Таълим ва фан министрлигининг № 0000001 давлат лицензияси берилган

ИБ № 6258

Нашрга 25.08.20 рухсат этилди. Ҳажми 70·100 $^{1}/_{16}$.
Офсет қоғози. Ҳарф тури “SchoolBook Kza”. Офсет нашри.
Шартли босма табоғи 20,64 + 0,32 форзац. Шартли бўёқ тамғаси 40,04.
Нашр босма табоғи 9,65 + 0,54 форзац. Адади 5000 нусха. Буюртма №

“Мектеп” нашриёти, 050009, Алмати шаҳри, Абай проспекти 143-уй
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz