В.А.Смирнов, Е.А.Туяқов

ГЕОМЕТРИЯ 10

Умумтаълим мактабларининг ижтимоий-гуманитар йўналишдаги 10-синфи учун дарслик

Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан министрлиги тасдиқлаган

Алмати "Мектеп" 2019

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72
С53

Шартли белгилар:

? — янги билимни ўзлаштириш давомида ечиладиган масала

— назарий материалларни мустақил ўрганиш учун мўлжалланган топшириқлар

— теорема исботланишининг якуни

A — ҳамма учун мажбурий бўлган топшириқлар

B — ўрта даражали топшириқлар

Смирнов В.А., Туяқов Е.А.
С53 **Геометрия.** Умумтаълим мактабларининг ижтимоий-гуманитар йўналишидаги 10-синфи учун дарслик. — Алмати: Мектеп, 2019. — 144 б., расм.

ISBN 978—601—07—1336—9

С $\frac{4306020502—122}{404(05)—19}$ 110(1)—19

ӘОЖ 373.167.1
КБЖ 22.1я72

ISBN 978—601—07—1336—9

КИРИШ

Сизлар геометриянинг энг қизиқарли ва муҳим бўлимларидан бири бўлган стереометрия курсини ўрганасизлар. Бу бўлим нима учун керак? Биринчидан, бўлим ҳар хил фазовий фигуралар, фазовий фигураларни текисликлар билан кесимлари ва уларнинг хоссалари билан таништиради,керакли фазовий тушунчаларни шакллантиради. Иккинчидан, стереометрия илми таниқли усулларни ўргатиб мантиқий фикрлаш қобилиятини оширишга имконият яратади.

Шу билан бирга стереометрияни ўқиш, фазовий фигураларни тасаввур қилиш, моделлаш асосий геометрик ўлчовларни (узунликлар, бурчаклар, юзалар, (ҳажмлар) ўлчашга керакли амалий машғулотларни уюштиришга имконият яратади.

Ахборот технологияларининг ривожланиши фақат геометриянинг ролини кучайтиради, яъни материални график кўринишда компьютерда моделлаштириш имкониятларини етарли даражада кенгайтирилади.

Дарсликдаги барча материаллар боблар билан параграфларга бўлинган. Улар назарий материалларни, мустақил бажарии учун топшириқларни, мустаҳкамлаш учун саволларни, турли хил мураккаб даражадаги топшириқларни ўз ичига олади.

Теоремани исботлашнинг якуни (□) белгиси билан белгиланган.

Дарсликда турли мураккаб масалалар: **A** (бажарилиши мажбурий ўқув материали), **B** (ўртача мураккаб) берилган.

(*) юлдузча билан белгиланган параграф ўқув дастурига кирмайдиган илмий — тадқиқа ва амалий йўналишдаги қўшимча материални ўз ичига олади. Улардан асосий дарсларда ёки қўшимча дарсларда (тўгаракларда, танлов курсларида ва ҳоказо) фойдаланиш мумкин.

Дарсликнинг охирида масалаларнинг жавоблари берилган.

Геометрияни ўқишда омад тилаймиз!

7–9 СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

Планиметриянинг асосий тушунчалари

Планиметриянинг (текисликдаги геометрия) асосий геометрик фигуралари **нуқта** ва **тўғри чизиқ**. Уларни ўзаро жойлашишининг асосий хоссалари (аксиомалари) қуйидагилардир:

1. *Ҳар қандай икки нуқтадан фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.*

2. *Бир тўғри чизиққа тегишли бўлмаган камида учта нуқта мавжуд.*

Нур ёки *ярим тўғри чизиқ* деб, берилган нуқтадан ва шу нуқтанинг бир томонида ётувчи барча нуқталаридан иборат тўғри чизиқнинг қисмига айтилади. Кесма деб, берилган икки нуқтадан ва шу нуқталарнинг орасида ётувчи барча нуқталардан иборат тўғри чизиқнинг қисмига айтилади. Бу ерда берилган нуқталар кесманинг учлари деб аталади.

Кесманинг узунлиги — берилган кесмадаги бирлик кесма ва унинг бўлаклари неча марта жойлашганини кўрсатувчи мусбат сон.

AB кесманинг узунлигини A ва B нуқталарнинг орасидаги масофаси деб ҳам айтиш мумкин. Умумий бошланғич нуқтага эга бўлган икки турли ярим тўғри чизиқдан иборат фигура бурчак дейилади. Бу бошланғич умумий нуқта бурчакнинг учи, ярим тўғри чизиқлар эса бурчакнинг томонлари дейилади.

Бурчакнинг градус ўлчови бир градусга тенг бурчак ва унинг қисмлари шу бурчакка неча марта жойлашишини кўрсатади.

Агар бурчакнинг томонлари бир тўғри чизиқнинг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлар бўлса, бундай бурчак ёйиқ бурчак дейилади. Акс ҳолда, ёйиқ эмас бурчак дейилади.

Агар иккита бурчакнинг битта томони умумий, қолган томонлари тўлдирувчи ярим тўғри чизиқ бўлса, улар қўшни бурчаклар дейилади.

Агар икки бурчакдан бирининг томонлари иккинчи бурчак томонларининг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлари бўлса, бу икки бурчак вертикал *бурчаклар* дейилади.

Ўзининг қўшни бурчагига тенг бўлган бурчак тўғри бурчак дейилади. Тўғри бурчакдан кичик бўлган бурчак ўткир бурчак дейилади. Тўғри бурчакдан катта, лекин ёйиқ бурчакдан кичик бўлган бурчак *ўтмас бурчак* дейилади.

Берилган бурчакнинг учидан чиқиб, шу бурчакни тенг икки бурчакка бўлувчи нур биссектриса дейилади.

Кесишувчи икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб, шу тўғри чизиқларни кесишиш нуқтаси орқали ҳосил бўлган нурларнинг орасидаги энг кичик бурчакка айтилади. Агар иккита тўғри чизиқ тўғри бурчак остида кесишса, бу тўғри чизиқлар перпендикуляр тўғри чизиқлар дейилади.

Агар иккита тўғри чизиқ кесишмаса, яъни умумий нуқтага эга бўлмаса, у ҳолда бундай тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқлар дейилади. Параллел тўғри чизиқларнинг асосий хоссаси қуйидагидан иборат: Берилган тўғри чизиқда ётмайдиган бир нуқта орқали шу тўғри чизиққа параллел бўлган битта ва фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Ихтиёрий бир тўғри чизиқ A нуқта орқали ўтиб, b тўғри чизиғига перпендикуляр бўлсин ва B — шу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин. AB кесма A нуқтадан b тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр дейилади. B нуқта перпендикулярнинг асоси дейилади. Перпендикулярнинг узунлиги деб, A нуқтадан b тўғри чизиққача бўлган масофага айтилади. b тўғри чизиқда ётган B нуқтадан бошқа C нуқта учун AC кесма A нуқтадан b тўғри чизиққа туширилган оғма дейилади. C нуқта оғманинг асоси дейилади. BC кесма b тўғри чизиқдаги оғманинг проекцияси дейилади. Икки параллел тўғри чизиқларнинг орасидаги масофа деб,бир тўғри чизиқда ётувчи нуқтадан иккинчи тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлигига айтилади.

Пропорционал кесмалар ҳақида теорема. Бурчакнинг томонларини кесиб ўтувчи параллел тўғри чизиқлар бурчакнинг томонларидан пропорционал кесмалар ажратади.

Масалалар

1. Жуфт-жуфти билан олганда ўнта кесишиш нуқтаси бўладиган бешта тўғри чизиқ ясанг.
2. Тўғри чизиқда: а) 3 та нуқта; б) 4 та нуқта; в) 5 та нуқта; г) n та нуқта белгиланган. Учлари шу нуқталарда бўлган нечта кесмалар мавжуд?
3. Тўғри чизиқда AB = 3см, BC = 5 см, $CД$ = 4 см бўлган кетма-кет учта кесма жойлаштирилган. AB ва $CД$ кесмалар ўрталари орасидаги масофани топинг.
4. Бир нуқтада кесишувчи n та тўғри чизиқ текисликни нечта бўлакка бўлади?
5. Икки тўғри чизиқ кесишганда ҳосил бўлган бурчаклардан учтасининг йиғиндиси 306° га тенг. Уларнинг ичидаги энг катта бурчакнинг градус ўлчовини топинг.
6. OC нур AOB бурчакнинг ичида жойлашган ва AOB бурчак 120° га тенг. Агар AOC бурчак BOC бурчакдан 30° га кам бўлса, унинг градус ўлчовини топинг.

7. Агар қўшни бурчакларнинг бири иккинчисидан икки марта ортиқ бўлса, уларнинг градус ўлчовларини топинг.
8. Бурчаклари мос равишда 60° ва 90° бўлган AOB ва COD бурчакларининг орасидаги BOC бурчакнинг ўлчови 30° га тенг. OC нур AOB бурчак ичида жойлашган бўлса, AOD бурчакни топинг.
9. Ғилдиракнинг: а) 10 та сими; б) 12 та сими мавжуд. Икки қўшни симларнинг орасидаги бурчакнинг ўлчовини топинг.
10. Соатнинг минут мили: а) 20 минут; б) 10 минут; в) 50 минутда неча градусга бурилади?
11. Икки параллел тўғри чизиқларни кесувчи тўғри чизиқ ҳосил қилган икки ички алмашинувчи бурчакларнинг йиғиндиси 150° га тенг. Шу бурчакларни топинг.
12. Агар ихтиёрий бир тўғри чизиқ икки параллел тўғри чизиқлардан бирини кесиб ўтса, у ҳолда иккинчисини ҳам кесиб ўтишини исботланг.

Учбурчаклар

Бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтани кетма-кет бирлаштирувчи учта кесмадан ҳосил бўлган фигура *учбурчак* дейилади. Нуқталар учбурчакнинг *учлари*, кесмалар эса *томонлари* дейилади.

Агар учбурчакнинг ҳамма бурчаклари ўткир бўлса, бундай *учбурчак ўткир бурчакли* учбурчак дейилади.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги қаршисида ётган томони *гипотенуза*, қолган икки томонлари *катетлари* дейилади.

Агар учбурчакнинг ўтмас бурчаги мавжуд бўлса, бундай учбурчак *ўтмас бурчакли учбурчак* дейилади.

Учбурчакнинг учлари, томонлари ва бурчакларидан бошқа элементлари қуйидагилар:

- учбурчакнинг *медианаси* — учбурчакнинг бир учи билан унинг қаршисидаги томонининг ўртасини туташтирувчи кесма;
- учбурчакнинг *биссектрисаси* — учбурчакнинг бурчагини тенг иккига бўлувчи ва қаршисидаги томон билан туташтирувчи кесма;
- учбурчакнинг *баландлиги* — учбурчакнинг учидан унинг қаршисидаги томонига ёки унинг тўлдирувчисига туширилган перпендикуляр.

Учбурчакнинг *периметри* деб, учбурчакнинг барча томонлари узунликларининг йиғиндисига айтилади.

Томонларининг орасидаги нисбатига қараб учбурчаклар: а) турли томонли; б) тенг ёнли; в) тенг томонли бўлган турларга бўлинади.

Агар учбурчакнинг томонлари бир-бирига тенг бўлмаса, у ҳолда бу *турли томонли учбурчак* дейилади.

Иккита томони ўзаро тенг бўлган учбурчак *тенг ёнли учбурчак* дейилади. Тенг бўлган томонлари учбурчакнинг *ён томонлари*, учинчи томони эса учбурчакнинг асоси дейилади.

Агар учбурчакнинг барча томонлари ўзаро тенг бўлса, бундай учбурчак тенг томонли учбурчак дейилади.

Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги иккинчи учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*

Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган бурчаклари бошқа учбурчакнинг мос томони ва унга ёпишган бурчакларига тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*

Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг учта томони иккинчи учбурчакнинг учта томонига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*

Тенг ёнли учбурчакнинг аломати. *Учбурчакнинг иккита бурчаги тенг бўлса, бу учбурчак тенг ёнли бўлади.*

Планиметриянинг асосий теоремаларидан бири — учбурчакнинг бурчаклари ҳақидаги теорема.

Теорема. ***Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг.***

Учбурчакнинг икки томони ўрталарини туташтирувчи кесмага учбурчакнинг ўрта чизиғи дейилади.

Теорема. ***Учбурчакнинг ўрта чизиғи унинг томонларининг бирига параллел ва шу томон ярмига тенг.***

Учбурчакнинг ажойиб нуқталари қуйидагилардан иборат:

а) биссектрисаларнинг кесишиш нуқтаси (ички чизилган айлананинг маркази);

б) учбурчак томонларининг ўрталаридан ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси (ташқи чизилган айлананинг маркази);

в) медианаларнинг кесишиш нуқтаси (центроид);

г) баландликларнинг ёки уларнинг тўлдирувчиларининг кесишиш нуқтаси (ортоцентр).

Теорема (Пифагор). ***Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати катетлари квадратларининг йиғиндисига тенг.***

Шунингдек, агар тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a ва b, гипотенузаси эса c га тенг бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Учбурчаклар ўхшашлигининг биринчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг иккита бурчаги иккинчи учбурчакнинг иккита бурчагига мос равишда тенг бўлса,бундай учбурчаклар ўхшаш бўлади.*

Учбурчаклар ўхшашлигининг иккинчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг икки томони иккинчи учбурчакнинг икки томонига пропорционал бўлса ва бу томонлар ҳосил қилган бурчаклар тенг бўлса, бундай иккита учбурчаклар ўхшаш бўлади.*

Учбурчаклар ўхшашлигининг учинчи аломати. *Агар бир учбурчакнинг томонлари иккинчи учбурчакнинг томонларига пропорционал бўлса, бундай иккита учбурчак ўхшаш бўлади.*

Масалалар

13. а) ABC ўткир бурчакли учбурчак; б) ABC тўғри бурчакли учбурчак; в) ABC ўтмас бурчакли учбурчак чизинг. Шу учбурчакларнинг медианаси, биссектрисаси ва баландлигини ўтказинг.

14. Учбурчакнинг периметри 54 см. Унинг томонларининг нисбати $2 : 3 : 4$ бўлса, уларнинг узунликларини топинг.

15. Тенг учбурчакларнинг: а) медианалари; б) биссектрисалари; в) баландликлари тенг бўлишини исботланг.

16. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 15,6 м. Агар: а) асоси ён томонидан 3 м га қисқа; б) асоси ён томонидан 3 м га узун бўлса, у ҳолда унинг томонларини топинг.

17. Агар ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, CM медиана C_1M_1 медианага тенг бўлса, ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар тенг эканлигини исботланг.

18. ABC учбурчакда A бурчаги 40° га тенг ва $AC = BC$ бўлса, C бурчагини топинг.

19. Учбурчакнинг бурчаклари $1 : 2 : 3$ каби нисбатда. Уларнинг энг кичигини топинг.

20. ABC учбурчакда $AB = BC$. B учидаги ташқи бурчаги 138°. C бурчагини топинг.

21. Учбурчакнинг периметри 15 см. Шу учбурчакнинг бир ўрта чизиғи кесиб ўтганда ҳосил бўлган учбурчакнинг периметрини топинг.

22. Томонининг узунлиги 1 га тенг бўлган тенг томонли учбурчакнинг баландлигини топинг.

23. Биринчи учбурчакнинг томонлари 16 см, 8 см ва 10 см. Шу учбурчакка ўхшаш иккинчи учбурчакнинг энг кичик томони 6 см га тенг. Иккинчи учбурчакнинг қолган томонларини топинг.

24. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига туширилган баландлиги уни дастлабки учбурчакка ўхшаш иккита учбурчакка бўлишини исботланг.

Синиқ чизиқлар ва кўпбурчаклар

Синиқ чизиқ деб биринчисининг охири ва иккинчисининг боши, иккинчисининг охири учинчисининг боши ва ҳоказо бўлиб жойлашган чекли сондаги кесмалардан иборат фигурага айтилади. Кесмалар синиқ *чизиқнинг бўғинлари* деб аталади. Уларнинг учлари *синиқ чизиқнинг учлари* дейилади.

Синиқ чизиқ бўғинларининг узунликларининг йиғиндиси синиқ *чизиқнинг узунлиги* деб аталади. Синиқ чизиқ унинг учларини кетма-кет кўрсатиш орқали белгиланади. Масалан, $ABCDE$, $A_1A_2...A_n$ синиқ чизиқлар.

Агар синиқ чизиқнинг бўғинлари ўз-ўзи билан кесишмаса, бундай синиқ чизиққа *содда синиқ чизиқ* дейилади.

Қўшни бўғинлари бир тўғри чизиқда ётмаган содда ёпиқ синиқ чизиқ ва унинг ички соҳаси билан чегараланган фигурага *кўпбурчак* дейилади.

Синиқ чизиқнинг учлари *кўпбурчакнинг учлари*, синиқ чизиқнинг бўғинлари *кўпбурчакнинг томонлари*, қўшни томонлари орасидаги бурчак *кўпбурчакнинг бурчаклари* деб аталади. Кўпбурчакнинг томонларида ётмайдиган нуқталари *ички нуқталари* дейилади.

Кўпбурчакнинг периметри деб, унинг барча томонлари узунликларининг йиғиндисига айтилади.

Кўпбурчаклар *учбурчакли* (учта бурчаги мавжуд), *тўртбурчакли* (тўртта бурчаги мавжуд) ва ҳоказо турларга бўлинади. n та бурчаги мавжуд бўлган кўпбурчакка n бурчакли кўпбурчак дейилади.

Ҳамма томонлари тенг ва ҳамма бурчаклари тенг бўлган қаварик кўпбурчак *мунтазам кўпбурчак* дейилади.

Агар кўпбурчакнинг учлари ихтиёрий томони орқали ўтказилган тўғри чизиқнинг бир томонида ётса, у холда бундай кўпбурчак *қаварик кўпбурчак* деб аталади.

Теорема. ***Қаварик n бурчакли кўпбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси $180^\circ(n-2)$ га тенг.***

Масалалар

25. Содда ёпиқ синиқ чизиқнинг 20 та бўғини мавжуд бўлса, унинг учлари нечта бўлади?

26. а) икки марта ўзини-ўзи кесувчи; б) уч марта ўзини-ўзи кесувчи; в) беш марта ўзини-ўзи кесувчи синиқ чизиқ ясанг.

27. Мунтазам учбурчак; тўртбурчак; бешбурчак; олтибурчак ясанг. Чизғич ва транспортир ёрдамида ясалган кўпбурчакларнинг тўғрилигини текширинг.

28. Қаварик: а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчак г) n бурчакнинг бир учидан ўтказилган диагоналлари орқали нечта учбурчакка бўлинади?

29. а) тўртбурчакнинг: б) бешбурчакнинг; в) олтибурчакнинг нечта диагонали мавжуд?

30. Қаварик; а) тўртбурчакнинг; б) бешбурчакнинг; в) олтибурчакнинг г) еттибурчакнинг; д) саккизбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндисини топинг

31. Қавариқ кўпбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 900° га тенг. Унинг томонлари сонини топинг.

32. Мунтазам а) тўртбурчак; б) бешбурчак; в) олтибурчак; г) саккизбурчакнинг ташқи бурчакларини градус ўлчовини топинг.

Тўртбурчаклар

Қарама-қарши томонлари параллел бўлган, яъни параллел тўғри чизиқларда ётадиган тўртбурчак параллелограмм дейилади.

Параллелограммнинг биринчи аломати. *Агар тўртбурчакнинг икки томони тенг ва параллел бўлса, у ҳолда бундай тўртбурчак параллелограмм бўлади.*

Параллелограммнинг иккинчи аломати. *Агар тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда бундай тўртбурчак параллелограмм бўлади.*

Барча бурчаклари тўғри бўлган параллелограмм тўғри тўртбурчак деб аталади.

Тўғри тўртбурчакнинг аломати. *Агар параллелограммнинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда бундай параллелограмм тўғри тўртбурчак бўлади.*

Барча томонлари тенг бўлган параллелограмм ромб деб аталади.

Ромбнинг аломати. *Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр ва улар мос равишда бурчакларининг биссектрисалари бўлади.*

Барча томонлари тенг бўлган тўғри тўртбурчак квадрат деб аталади.

Квадратнинг аломати. *Агар тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари перпендикуляр бўлса, у ҳолда бундай тўғри тўртбурчак квадрат бўлади.*

Иккита қарама-қарши томонларигина параллел бўлган тўртбурчак *трапеция* деб аталади.

Трапециянинг параллел томонлари унинг *асослари*, параллал бўлмаган томонлари ён томонлари деб аталади.

Трапециянинг учидан унга қарама-қарши ётган томонига ёки томонининг давомига туширилган перпендикуляр унинг *баландлиги* деб аталади.

Агар трапециянинг ён томонлари тенг бўлса, у ҳолда бундай трапецияга *тенг ёнли трапеция* дейилади.

Агар трапециянинг бир бурчаги тўғри бўлса, у ҳолда бундай трапецияга *тўғри бурчакли трапеция* деб аталади.

Трапеция ён томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесма *трапециянинг ўрта чизиғи* дейилади.

Теорема. ***Трапециянинг ўрта чизиғи асосларига параллел ва уларнинг йиғиндисининг ярмига тенг бўлади.***

Масалалар

33. Параллелограммнинг диагонали унинг икки томони билан 25° ли ва 35° ли бурчак ҳосил қилади. Параллелограммнинг бурчаклари топинг.
34. Агар параллелограмм бурчакларидан иккитасини йиғиндиси: а) 80°; б) 100°; в) 160° бўлса, параллелограммнинг ҳамма бурчакларини топинг.
35. Параллелограммнинг периметри 48 см. Агар параллелограмнинг: а) бир томони иккинчи томонидан 2 см узун; б) икки томонининг айирмаси 6 см; в) бир томони иккинчи томонидан икки марта узун бўлса, у ҳолда унинг томонларини топинг.
36. Параллелограммнинг икки томонининг нисбати 3 : 4 га тенг, периметри эса 2,8 м га тенг. Параллелограммнинг томонларини топинг.
37. Тўғри тўртбурчак диагоналлари орасидаги ўткир бурчак 50° га тенг. Диагоналининг томонлари билан ҳосил қилган бурчакларини топинг.
38. Тўғри тўртбурчакнинг кичик томони 5 см, диагоналлари эса кесишганда 60° ли бурчак ҳосил қилади. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналларини топинг.
39. Агар тўғри тўртбурчакнинг периметри 34 см, диагонали билан бўлинганда ҳосил бўлган учбурчакнинг периметри 30 см бўлса, шу тўғри тўртбурчакнинг диагоналларини топинг.
40. Параллелограммнинг ўзаро тенг эмас қўшни томонлари орасидаги бурчакларнинг биссектрисалари тўғри тўртбурчак ҳосил қилишини исботланг.
41. Тўғри тўртбурчак томонларининг ўрталари ромбнинг учлари эканини исботланг.
42. Тенг ёнли трапециянинг қарама-қарши бурчакларининг айирмаси 40° бўлса, у ҳолда унинг бурчаклари нимага тенг?
43. Трапециянинг 3 см га тенг кичик томонининг учи орқали унинг ён томонига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқ трапециядан периметри 15 см га тенг учбурчакни ҳосил қилади. Трапециянинг периметрини топинг.
44. Трапециянинг асослари 4 см ва 10 см. Диагоналларининг бири ўрта чизиғини қандай кесмаларга ажратади.

Тригонометрик функциялар

C бурчаги тўғри ва A бурчаги ўткир бўлган ABC тўғри бурчакли учбурчакни кўриб чиқайлик.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг *ўткир бурчагининг синуси* деб, шу бурчак қаршисида ётган катетнинг гипотенузага нисбатига айтилади. A бурчакнинг синуси $\sin A$ орқали белгиланади. Таъриф бўйича,

$$\sin A = \frac{BC}{AB}.$$

Тўғри бурчакли учбурчакнинг *ўткир бурчагининг косинуси* деб, шу бурчакка ёпишган катетнинг гипотенуза нисбатига айтилади. A бурчакнинг косинуси $\cos A$ орқали белгиланади. Таъриф бўйича,

$$\cos A = \frac{AC}{AB}.$$

Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчагининг тангенси деб, шу бурчак қаршисида ётган катетнинг ёпишган катетга нисбатига айтилади. A бурчакнинг тангенси $\mathrm{tg}\,A$ орқали белгиланади. Таъриф бўйича,

$$\mathrm{tg}\,A = \frac{BC}{AC}.$$

Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчагининг котангенси деб, шу бурчакка ёпишган катетнинг қаршисида ётган катетга нисбатига айтилади. A бурчакнинг котангенси $\mathrm{ctg}\,A$ орқали белгиланади. Таъриф бўйича,

$$\mathrm{ctg}\,A = \text{[illegible]} .$$

Шу таърифлардан қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$$\mathrm{tg}\,A = \frac{\sin A}{\cos A}, \ \mathrm{ctg}\,A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Синус, косинус, тангенс ва котангенслар ўткир бурчакнинг *тригонометрик функциялари* деб аталади.

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \mathrm{ctg}\,30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \ \mathrm{tg}\,60^\circ = \sqrt{3}, \ \mathrm{ctg}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \mathrm{tg}\,45^\circ = \mathrm{ctg}\,45^\circ = 1.$$

Асосий тригонометрик айниятлар. A ўткир бурчагининг синуси ва косинуси қуйидаги асосий тригонометрик айният билан ўзаро боғлиқ:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

A ўткир бурчагининг тангенси билан косинуси қуйидаги айният билан ўзаро боғлиқ:

$$\mathrm{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

A ўткир бурчагининг котангенси билан синуси қуйидаги айният билан ўзаро боғлиқ:

$$\mathrm{ctg}^2 A + 1 = \frac{1}{\sin^2 A}.$$

Теорема (Синуслар теоремаси) ***Учбурчакнинг томонлари қаршисидаги бурчакларнинг синусларига пропорционал. Учбурчак томони унинг қаршисидаги бурчаги синусига нисбати учбурчакка ташқи чизилган айлананинг диаметрига тенг бўлади.***

Шунинг билан, агар ABC учбурчакда $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ ва R — унга ташқи чизилган айлананинг радиуси бўлса, унда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Косинуслар теоремаси Пифагор теоремасининг умумий кўриниши бўлиб ҳисобланади.

Теорема. (Косинуслар теоремаси) ***Учбурчак исталган томонининг квадрати қолган икки томони квадратлари йиғиндисидан шу икки томон билан улар орасидаги бурчак косинусининг иккиланган кўпайтмасини айириш натижасига тенг.***

Шунингдек, агар ABC *учбурчакда* $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ *бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Масалалар

45. ABC тенг ёнли учбурчакнинг ($AC = BC$) асоси 6 га, ён томони 5 га тенг. A бурчагининг тригонометрик функцияларининг қийматларини топинг.

46. ABC учбурчакда C бурчаги 90°, A бурчаги 30°, $AC = 2$ га тенг. CH баландлигини топинг..

47. ABC учбурчакда $AC = BC = 2$, C бурчаги 120° га тенг. AH баландлигини топинг.

48. Агар: а) $\sin A = \frac{1}{3}$; б) $\sin A = \frac{3}{5}$ бўлса, у ҳолда $\cos A$ нинг қийматини топинг.

49. Агар: а) $\cos A = \frac{2}{3}$; б) $\cos A = \frac{5}{13}$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} A$ нинг қийматини топинг.

50. Агар: а) $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} A = 2$ бўлса, у ҳолда $\operatorname{ctg} A$ нинг қийматини топинг.

51. Агар бурчакнинг градус ўлчови: а) 120°; б) 135°; в) 150° бўлса, у ҳолда бурчакнинг синусини топинг.

52. Агар бурчакнинг градус ўлчови: а) 120°; б) 135°; в) 150° бўлса, у ҳолда бурчакнинг косинусини топинг.

53. Учбурчак бир бурчагининг қандай қийматида шу бурчакка қарши ётган томонининг квадрати: а) қолган икки томонининг квадратларининг йиғиндисидан кичик; б) қолган икки томонининг квадратларининг йиғиндисига тенг; в) қолган икки томонининг квадратларининг йиғиндисидан катта бўлади?

54. ABC учбурчакда $AB = 12$, $AC = 8$, $\angle A = 60^\circ$. Учинчи томонини топинг.

55. ABC учбурчакда $AC = BC = 1$, C бурчаги 150°. AB томонининг узунлигини топинг.

56. Учбурчакнинг учта томони берилган: $BC = 2$, $AC = 3$, $AB = 4$. A, B, C бурчакларнинг косинусларини топинг.

Юза

Фигуранинг юзаси текисликдаги шу фигура жойлашган бўлакнинг катталигини аниқлайди.

Фигуранинг юзасини ўлчаш текисликдаги кесманинг узунлигини ўлчаш каби шу фигурани юза бирлиги бўладиган фигура билан таққослашга асосланади.

Юзанинг ўлчов бирлиги сифатида томони ўлчов бирлигига тенг квадрат олинади. У *бирлик квадрат* деб аталади.

Фигуранинг юзаси деб ўлчаш натижасида олинган ва берилган фигурада неча марта бирлик квадратлар билан унинг бўлаклари жойлашганлигини кўрсатувчи сонга айтилади.

Агар икки фигуранинг юзалари бир хил бўлса, улар *тенгдош* деб аталади.

Томонлари a, b бўлган тўғри тўртбурчакнинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = a \cdot b.$$

Теорема. ***Параллелограмнинг юзи унинг томонини шу томонга туширилган баландлигига кўпайтирилганига тенг.***

Шунингдек, томони a ва шу томонига туширилган h баландлиги бўлган параллелограмнинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = a \cdot h.$$

Теорема. ***Параллелограмнинг юзи унинг икки қўшни томони билан улар орасидаги бурчак синусининг кўпайтмасига тенг.***

Шунингдек, қўшни томонлари a, b ва уларнинг орасидаги C бурчаги бўлган параллелограмнинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = ab \cdot \sin C.$$

Теорема. ***Учбурчакнинг юзаси унинг томони билан шу томонга туширилган баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг.***

Шунингдек, томони c ва шу томонига туширилган h баландлиги бўлган учбурчакнинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = \frac{1}{2}c \cdot h.$$

Теорема. ***Учбурчакнинг юзи унинг икки томони билан улар орасидаги бурчак синусининг кўпайтмасининг ярмига тенг.***

Шунингдек, томонлари a, b ва уларнинг орасидаги C бурчаги бўлган учбурчакнинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

Теорема. ***Трапециянинг юзи унинг асослари йиғиндисининг ярми билан баландлиги кўпайтмасига тенг.***

Шунингдек, асослари a, b ва баландлиги h бўлган трапециянинг S юзаси қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h.$$

Теорема. ***Қаварик тўртбурчакнинг юзаси унинг диагоналлари билан улар орасидаги бурчак синуси кўпайтмасининг ярмига тенг.***

Шунингдек, диагоналлари d_1, d_2 ва улар орасидаги бурчак C бўлганда қаварик тўтбурчакнинг S юзаси қуйидаги формула билан хисобланади:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin C.$$

Кўпбурчакнинг юзасини уни учбурчакларга ажратиш орқали топиш мумкин. Шунда кўпбурчакнинг юзаси шу учбурчаклар юзаларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Масалалар

57. Томони 6 га, диагонали 10 га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзасини топинг.

58. Диагонали a га тенг квадратнинг юзасини топинг.

59. Квадратнинг юзаси 1 га тенг. Учлари шу квадрат томонлари ўрталарида бўлган янги квадрат юзасини топинг.

60. Томонлари 8 см, 10 см ва улар орасидаги бурчак: а) 30°; б) 45°; в) 60° бўлган параллелограммнинг юзасини топинг.

61. Параллелограммнинг юзи 40 см^2, томонлари 5 см ва 10 см га тенг. Унинг баландлигини топинг.

62. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 5 га, асоси 6 га тенг. Шу учбурчакнинг юзасини топинг.

63. Учбурчакнинг юзи 30 га, бир томони 10 га тенг. Шу томонга туширилган баландлигини топинг.

64. Икки томони 3 см ва 8 см, улар орасидаги бурчак 30° бўлган учбурчак юзасини топинг.

65. Трапециянинг ўрта чизиғи 3 га, баландлиги 2 га тенг. Унинг юзасини топинг.

66. Трапециянинг асоси 10 см ва 35 см, юзаси 225 см^2 га тенг. Унинг баландлигини топинг.

67. Трапециянинг баландлиги 20 см, юзаси 400 см^2 га тенг. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.

68. Трапециянинг юзаси 200 см^2, асосидан бири 26 см, баландлиги 10 см га тенг. Трапециянинг иккинчи асосини топинг

69. Томони 1 га тенг мунтазам олтибурчакнинг юзасини топинг.

70. Каварик тўртбурчакнинг диагоналлари 6 ва 8, улар орасидаги бурчак эса 30° га тенг. Шу тўртбурчак юзасини топинг.

Векторлар

Вектор деб, йўналтирилган кесмага айтилади.

Агар икки вектор бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, бундай векторлар *коллинеар векторлар* деб аталади.

Агар AB ёки CD нурларнинг бири иккинчисида ётса у ҳолда бир тўғри чизиқда ётган $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторлар *бир хил йўналган* деб аталади.

Акс ҳолда улар *қарама-қарши йўналган* деб аталади.

Агар бир тўғри чизиқда ётмайдиган икки вектор параллел тўғри чизиқларда ётиб бир томонга (турли томонга) йўналса, унда улар *бир хил йўналган* (қарама-қарши йўналган) деб аталади.

Бир хил йўналган ёки қарама-қарши йўналган икки вектор *коллинеар векторлар* деб аталади.

Векторнинг узунлиги ёки модули деб, шу векторни тасвирловчи кесманинг узунлигига айтилади. $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ векторнинг узунлиги мос равишда $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ деб белгиланади.

Агар икки векторнинг йўналишлари ва узунликлари бир хил бўлса, у ҳолда бундай векторлар *тенг векторлар* деб аталади.

Боши ва охири устма-уст тушувчи вектор ноль вектор деб қаралади ва $\vec{0}$ деб белгиланади.

Узунлиги эса ноль га тенг деб ҳисобланади.

Барча ноль векторлар бир-бирига тенг деб ҳисобланади.

Векторлар учун кесмаларга ўхшаш қўшиш амали аниқланган. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни қўшиш учун $\vec{b}$ векторни унинг боши $\vec{a}$ векторнинг охири билан устма-уст тушадиган қилиб жойлаштириш керак.

Боши $\vec{a}$ векторининг боши билан, охири $\vec{b}$ векторининг охири билан устма-уст тушувчи вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларининг *йиғиндиси* деб аталади $\vec{a} + \vec{b}$ деб белгиланади.

$\vec{a}$ векторнинг t сонига *кўпайтмаси* деб, узунлиги $|t|\cdot|\vec{a}|$ бўлган ва йўналиши $t > 0$ да ўзгаришсиз, $t < 0$ да қарама-қарши йўналишда бўлган векторга айтилади. $\vec{a}$ векторнинг t сонига кўпайтмаси $t\vec{a}$ деб белгиланади. Таъриф бўйича, $|t\vec{a}| = |t|\cdot|\vec{a}|$.

$\vec{a}$ векторнинг -1 сонига кўпайтмаси $-\vec{a}$ деб белгиланади ва у $\vec{a}$ векторга *қарама-қарши вектор* деб аталади.

Таърифга кўра $-\vec{a}$ векторнинг йўналиши $\vec{a}$ векторнинг йўналишига қарама-қарши бўлади ва $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$.

Теорема. ***Агар икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ нолдан фарқли коллинеар эмас векторлар бўлса, унда ихтиёрий $\vec{c}$ вектор учун $\vec{c} = t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ тенглик ўринли бўладиган битта ва фақат битта t ва s сонлари мавжуд.***

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ноль эмас векторлар бўлсин. Уларни O нуқтадан $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$ векторларни ясаймиз. Агар шу векторлар бир хил йўналган бўлмаса, унда OA ва OB нурларнинг орасидаги бурчак $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларининг *орасидаги бурчак* деб аталади.

Бир хил йўналган векторлар орасидаги бурчак 0°га тенг деб ҳисобланади.

Орасидаги бурчак тўғри бурчак бўлган икки вектор перпендикуляр вектор деб аталади.

Берилган тўғри чизиққа перпендикуляр вектор шу тўғри чизиқнинг *нормал вектори* деб аталади.

Иккита нолдан фарқли векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* деб, уларнинг узунликлари билан орасидаги бурчакнинг косинуси кўпайтмасига айтилади.

Агар бир вектор ноль вектор бўлса, у ҳолда шу векторларнинг скаляр кўпайтмаси нольга тенг деб ҳисобланади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *векторларининг скаляр* кўпайтмаси $\vec{a} \cdot \vec{b}$ деб белгиланади. Таъриф бўйича

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos j ,$$

бу ерда j бурчак — $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлари орасидаги бурчак.

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ кўпайтма *скаляр квадрат* деб аталади ва $\vec{a}^2$ деб белгиланади. Скаляр кўпайтманинг таърифидан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ келиб чиқади.

Масалалар

71. Томонлари 1 га тенг ва диагоналлари O нуқтада кесишадиган $ABCDEF$ мунтазам олтибурчак берилган. а) $\overline{DE}$; б) $\overline{OF}$; в) $\overline{BE}$; г) $\overline{FC}$ векторларни топинг.

72. $ABCD$ параллелограммда қуйидаги векторларни кўрсатинг: а) $\overline{AB}$ + + ; б) $\overline{AC} + \overline{CD}$; в) $+ \overline{CB} + \overline{DC}$.

73. $ABCD$ тўғри тўртбурчакда $AB = 4$, $BC = 3$. AC ва BD диагоналлари O нуқтада кесишади ва улар 5 га тенг. а) $|\overline{AB} + \quad |$; б) $|\overline{AO} + \overline{BO}|$; в) $|\overline{OB} + \overline{OC}|$; г) $|\overline{AC} + \overline{BD}|$ топинг.

74. $ABCD$ ромбнинг O нуқтасида кесишувчи AC ва BD диагоналлари мос равишда 14 га ва 10 га тенг. Қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overline{AB} -$; б) $\overline{AB} - \overline{BC}$; в) $2\overline{AB} - \overline{AC}$; г) $\overline{BC} - \overline{OC}$.

75. Томонлари 1 га тенг ва диагоналлари O нуқтасида кесишувчи $ABCDEF$ мунтазам олтибурчак берилган. Қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{OE}$; в) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{FE}$.

76. $ABCD$ тўғри тўртбурчакда $AB=4$, $AD=3$, AC ва BD диагоналлари 5 га тенг. Қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

77. $ABCDEF$ мунтазам олтибурчак учун қуйидаги векторларнинг орасидаги бурчакни топинг: а) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AF}$; б) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{EF}$; в) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{DC}$; д) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{BE}$; е) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{DE}$.

78. Томонлари $AB=8$, $AD=6$ бўлган $ABCD$ тўғри тўртбурчак учун қуйидаги скаляр кўпайтмани топинг. а) $\overrightarrow{AB}\cdot$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Координаталар

O нуқта ва мусбат йўналишни кўрсатадиган OE бирлик кесмаси танлаб олинган тўғри чизиқ — *координаталар тўғри чизиғи* ёки *координаталар ўқи* деб аталади. O нуқта *координаталар боши* дейилади.

Координата тўғри чизиғидаги *A нуқтанинг координатаси* деб, A нуқтадан O координаталар бошигача бўлган x масофага айтилади. Агар A нуқта мусбат ярим ўқда ётса, у “+” ишора билан, агар A нуқтаси манфий ярим ўқда ётса, у “–” ишора билан олинади.

Теорема. ***Координата тўғри чизиғидаги координаталари мос равишда x_1, x_2 бўлган A_1, A_2 нуқталар орасидаги масофани топиш ушбу формула бўйича ифодаланади:***

$$A_1A_2=|x_2-x_1|.$$

Текисликдаги тўғри бурчакли координаталар системаси деб, умумий координаталар бошига эга бўлган ўзаро перпендикуляр координаталар тўғри чизиғининг жуфтига айтилади.

Координаталар боши O ҳарфи билан, координаталар тўғри чизиғи эса Ox, Oy орқали белгиланади ва улар мос равишда *абцисса ўқи* ва *ордината ўқи* деб аталади.

Тўғри бурчакли координаталар системаси билан берилган текислик *координаталар текислиги* деб аталади.

Координаталар текислигидаги A нуқтани олайлик. Шу нуқта орқали Ox ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз ва Ox ўқи билан кесишиш нуқтасини A_x орқали белгилаймиз. Нуқтанинг Ox ўқидаги координатасини A нуқтанинг *абциссаси* деб аталади ва x орқали белгиланади. Шунга ўхшаш A нуқта орқали Oy ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз ва Oy ўқи билан кесишиш нуқтасини A_y орқали белгилаймиз. Шу нуқтанинг Oy ўқидаги координатаси A нуқтанинг ординатаси деб аталади ва y орқали белгилайди.

Шунингдек координаталар текислигидаги ҳар бир A нуқтага $(x;\,y)$ жуфти тўғри келади ва у берилган координаталар системасига тегишли текисликдаги нуқтанинг координаталари деб аталади. $(x; y)$ координаталари бўлган A нуқта A $(x; y)$ орқали белгиланади.

Координаталар текислигидаги $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ нуқталарнинг орасидаги масофани топиш формуласи қуйидагича ифодаланади:

$$A_1A_2 = \quad .$$

Маркази $(x_0;\ y_0)$ нуқта ва радиуси R бўлган айлана қуйидаги тенглама билан берилади:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Тўғри чизиқ $ax + by + c = 0$ тенглама билан берилади, бунда a ва b — бир вақтда нолга тенг эмас сонлар.

Боши координаталар боши билан тўғри келадиган ихтиёрий бир вектор ясайлик. Шунда унинг учининг координаталари *векторнинг координаталари* деб аталади.

Координаталари мос равишда (1; 0), (0; 1) бўлган векторларни $\vec{i}$, $\vec{j}$ деб белгилайлик. Бу векторларни координатали векторлар деб атаймиз ва бошлари координаталар бошига мос тушадиган қилиб ясаймиз.

Теорема. ***$\vec{a}$ векторни $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ кўринишда тасвирлагандагина унинг координаталари $(x; y)$ бўлади.***

$A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ нуқталар билан берилган $\overline{A_1A_2}$ векторнинг узунлиги қуйидаги формула бўйича ифодаланади:

$$|\overline{A_1A_2}| = \quad .$$

$\vec{a}_1(x_1;\ y_1)$ ва $\vec{a}_2(x_2;\ y_2)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги формула бўйича ифодаланади:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Нормал векторлари $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ бўлган тўғри чизиқларнинг орасидаги j бурчагининг косинуси векторларнинг скаляр кўпайтмасининг формуласи бўйича ҳисобланади:

$$\cos j = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Хусусий ҳолда, агар $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, яъни

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

тенглик бажарилса, у ҳолда икки тўғри чизиқ перпендикуляр бўлади.

Масалалар

79. AB кесма ўртасининг координаталарини топинг, агар: а) $A(-2;\ 1)$, $B(6;\ 5)$; б) $A(4;\ -3)$, $B(2;\ 1)$; в) $A(7;\ 5)$, $B(-5;\ -3)$.

80. $O(0;\ 0)$, $A(6;\ 2)$, $C(0;\ 6)$ ва B нуқталар $OABC$ паралелограммнинг учлари бўлса, B нуқтанинг координаларини топинг.

81. $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 2)$, $B(10;\ 8)$, $C(2;\ 6)$ нуқталар паралелограммнинг учлари. Шу параллелограммнинг диагоналларининг кесишиш нуқтаси бўлган P нуқтанинг координаларини топинг.

82. Қуйидаги нуқталар орасидаги масофани топинг: а) $A_1(2;\ 1)$ ва $A_2(1;\ -1)$; б) $B_1(4;\ 3)$ ва $B_2(-1;\ 3)$.

83. $A(3;\ 2)$ нуқтадан қуйидаги ўқларгача бўлган масофани топинг: а) Ox; б) Oy.

84 $A(1;\ 2)$ ёки $B(1;\ -2)$ нуқталарнинг қайси бири координаталар бошига яқин жойлашган?

85. Қуйидаги тенглама билан берилган айлананинг C марказининг координаталарини ва R радиусини топинг: а) $(x+5)^2+(y-2)^2=16$; б) $x^2+(y-3)^2=9$.

86. а) маркази $O(0;\ 0)$ нуқта ва радиуси 1 га тенг; б) маркази $C(-2;\ 1)$ нуқта ва радиуси 3 га тенг бўлган айлана тенгламасини ёзинг.

87. Маркази координаталар боши бўлган ва $A(3;\ 3)$ нуқта орқали ўтувчи айлана тенгламасини ёзинг.

88. Қуйидаги тенгламалар айлана тенгламалари бўлишини исботланг: а) $x^2-8x+y^2=0$; б) $x^2+2x+y^2-6y+4=0$. Унинг радиуси ва марказининг координатасини топинг.

89. $\vec{a}_1(2;\ -1)$ ва $\vec{a}_2(-1;\ 2)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

90. Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг: а) $2x+y-1=0$, $x-2y+3=0$; б) $x+y+1=0$, $x-y-1=0$.

91. $A_0(2;\ 1)$ нуқта орқали ўтувчи ва нормал вектори $\vec{n}(1;\ -1)$ бўлган тўғри чизиқ тенгламасини топинг.

92. $M(-1;\ 3)$, $N(1;\ 4)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг. Шу тўғри чизиқ нормал вектори координаталарини топинг.

93. Қуйидаги тўғри чизиқлар жуфтининг қайсиси: а) параллел; б) перпендикуляр эканини аниқланг

1) $x+y-2=0$, $x+y+3=0$;
2) $x+y-2=0$, $x-y-3=0$;
3) $-7x+y=0$, $7x-y+4=0$;
4) $4x-2y-8=0$, $-x-2y+4=0$.

94. Қуйидаги тўғри чизиқлар кесишиш нуқтаси координаталарини топинг:

а) $x-y-1=0$, $x+y+3=0$;
б) $x-3y+2=0$, $2x-5y+1=0$.

95. $\vec{a}(-1;\ 2)$ ва $\vec{b}(2;\ -4)$ векторлар берилган. $3\vec{a}-2\vec{b}$ векторнинг координаталарини топинг.

96. $\vec{a}_1(1;\ 3)$ ва $\vec{a}_2(3;\ -1)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

97. $\vec{a}_1(3;\ 4)$ ва $\vec{a}_2(4;\ 3)$ векторларнинг орасидаги бурчак косинусини топинг.

I боб

СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРИ. ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР БИЛАН ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШИШИ

1-§. Стереометриянинг асосий тушунчалари

Стереометрия ёки фазодаги геометрия — турли фазовий фигураларнинг ўрнини, шаклини, ўлчамларини ва хоссаларини ўргатадиган геометриянинг бўлими.

“Стереометрия” — грекча сўз бўлиб, “стереос” — фазо, “метрео” — ўлчайман деган маъноларни ифодалайди. “Стереометрия” сўзи жисмларни ўлчаш маъносини билдиради.

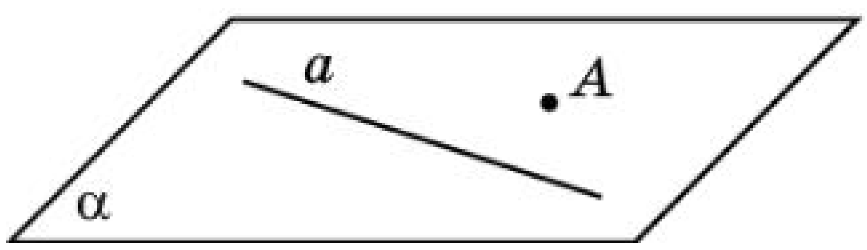
Стереометриянинг асосий тушунчалари фазодаги шаклларни тасвирловчи *нуқта, тўғри чизиқ ва текислик* бўлиб ҳисобланади.

Нуқта жуда кичкина яъни ўлчамини ҳисобга олмаса бўладиган шакл. Евклид ўзининг “Асослар” китобида нуқтанинг бўлаклари йўқ деб таърифлади.

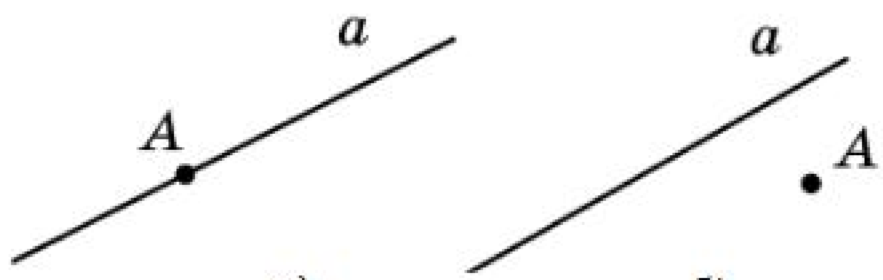
Тўғри чизиққа тўғри тўртбурчак шаклидаги столнинг қирраси, ёйилган ипнинг кўриниши мисол бўлади. Тўғри чизиқ бўйича ёруғлик нури тарқалади.

Текислик — сувнинг текис юзаси, стол, доска, ойна ва бошқалар юзаси.

Нуқта, тўғри чизиқ ва текисликни 1.1-расмда кўрсатилгандай тасвирлаймиз.



1.1-расм



а) б)

1.2-расм

Нуқталар A, B, C, ... лотин алифбосининг бош ҳарфлари билан белгиланади.

Нуқта берилган тўғри чизиқда ётиши мумкин (1.2, а-расм) ёки ётмаслиги ҳам мумкин (1.2, б-расм).

Агар нуқта тўғри чизиқда ётса, унда тўғри чизиқ нуқта орқали ўтади деб айтилади.

Тўғри чизиқлар a, b, c, ... лотин алифбосининг кичик ҳарфлари билан белгиланади, шунингдек ушбу тўғри чизиқда ётадиган икки нуқтани тасвирловчи икки лотин алифбосининг ҳарфлари билан белгиланади, масалан: AB тўғри чизиғи, C_1D_1 тўғри чизиғи ва ҳ.з.

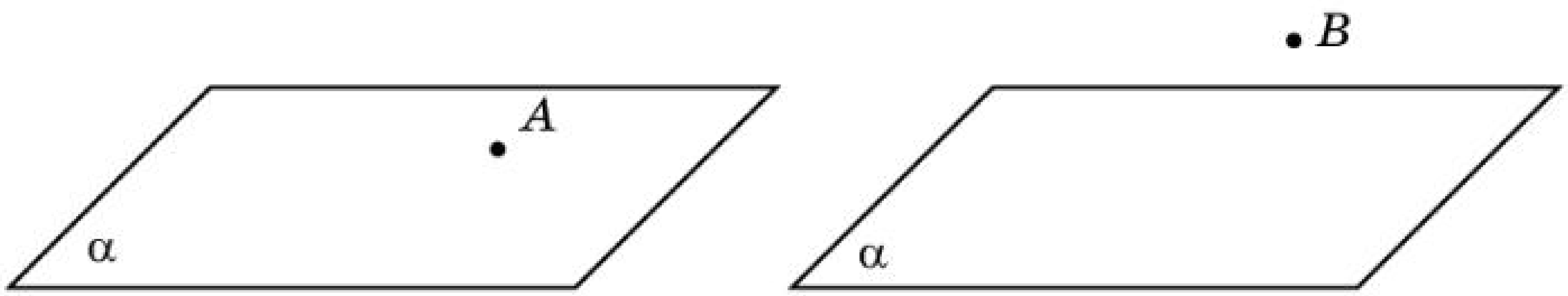
Математикада тегишлилик нисбати $\in$ белгиси билан белгиланади. Масалан, A нуқтанинг a тўғри чизиғига тегишлилиги $A \in a$ деб, B нуқтани a тўғри чизиғига тегишли эмаслиги $B \notin a$ деб белгиланади.

Фазода икки тўғри чизиқнинг биргина умумий нуқтаси мавжуд бўлса, унда улар *кесишувчи тўғри чизиқлар* дейилади.

C нуқта a ва b тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси $C = a \cap b$ кўринишида белгиланади.

Нуқта берилган текисликда ётиши ҳам ётмаслиги ҳам мумкин (1.3, б-расм).

Агар нуқта текисликда ётса, унда текислик шу нуқта орқали ўтади деб айтилади.



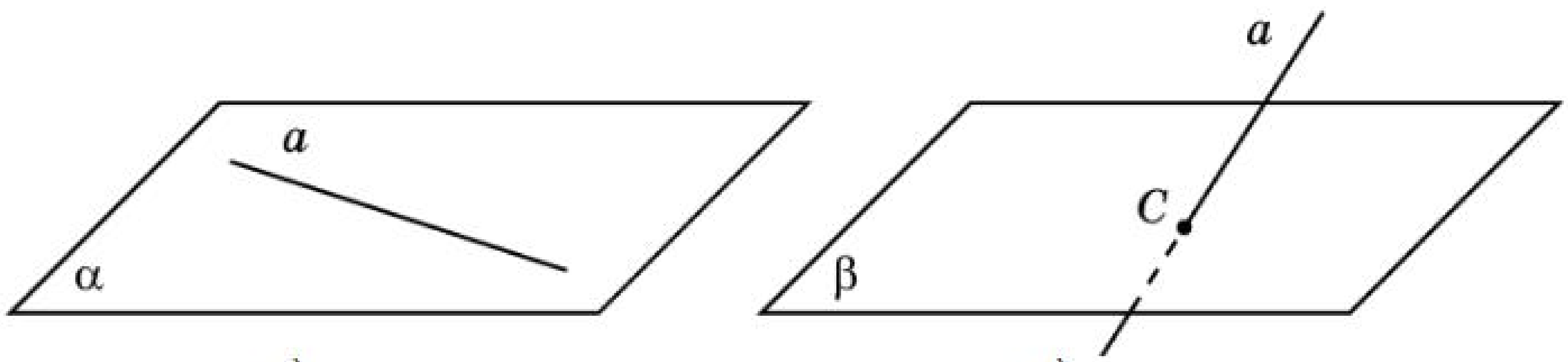
а) ә)

1.3-расм

Текислик a, b, g, ... грек алифбосининг ҳарфлари билан, шу билан бирга шу текисликда бир тўғри чизиқда ётмайдиган уч нуқтани тасвирловчи лотин алифбосининг уч ҳарфи билан белгиланади, масалан: ABC текислиги, $D_1E_1F_1$ текислиги ва ҳоказо.

A нуқтанинг a текислигида ётиши $A \in$a деб, B нуқтани a текислигида ётмаслиги $B \notin$a деб белгиланади.

Агар тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси текисликда ётса, унда тўғри чизиқ текисликда ётади ёки текислик тўғри чизиқ орқали ўтади деб айтилади (1.4, а-расм).



а) ә)

1.4-расм

a тўғри чизиқинг a текислигида ётиши $a \in$ a деб белгиланади.

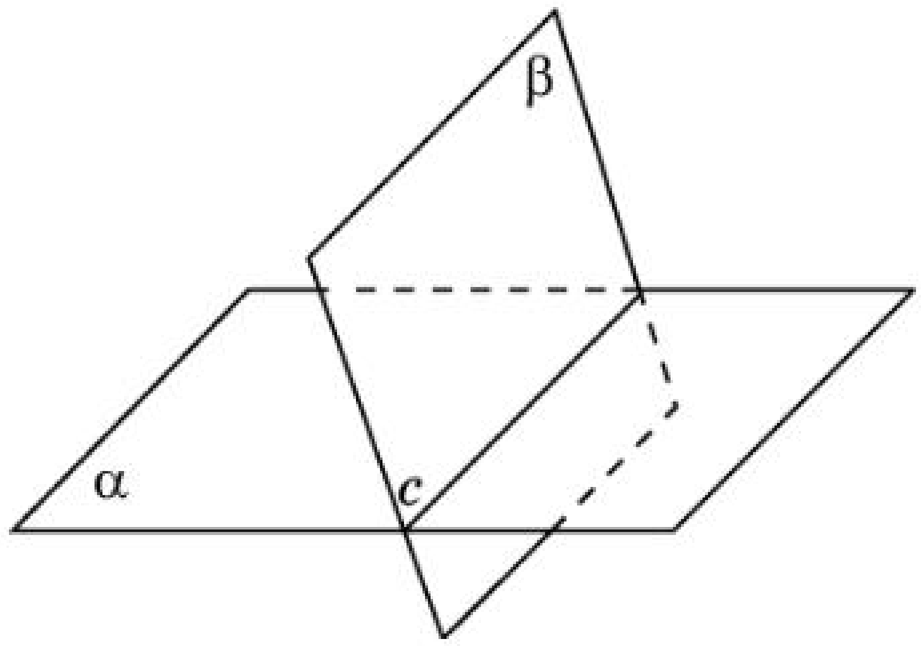
Агар тўғри чизиқ билан текисликнинг биргина умумий нуқтаси мавжуд бўлса, унда тўғри чизиқни кесиб ўтади дейилади. (1.4, б-расм).

C нуқта a тўғри чизиқ билан b текислигининг кесишиш нуқтаси бўлиши $C = a \cap$ b деб белгиланади.

Текисликни кесиб ўтмайдиган тўғри чизиқ чизиб кўринг.

Агар икки текисликнинг умумий нуқталари бир тўғри чизиқнинг нуқталари бўлса, у холда бундай текисликлар шу тўғри чизиқ билан кесишади деб айтамиз. (1.5-расм).

c тўғри чизиғи a текислик билан b текисликнинг кесишиш чизиғи бўлиши $c = a \cap b$ деб белгиланади.



1.5-расм

Икки кесишмайдиган текисликларни чизиб кўринг.

Тарихий маълумотлар

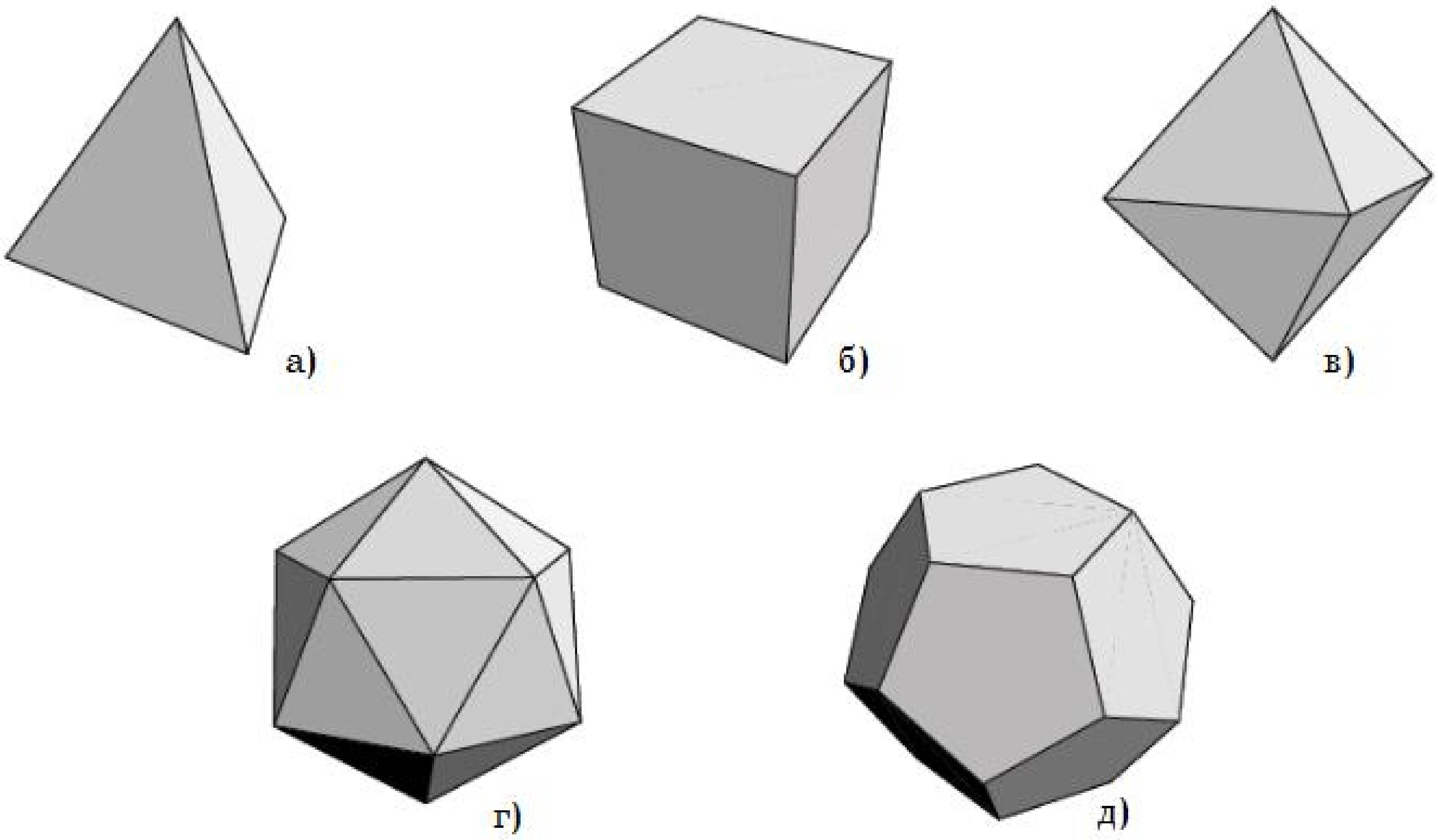
Стереометрия планиметрия курсига ўхшаб одамнинг амалий иш-ҳаракатига боғлиқ холда келиб чиқади. Қадимги Мисрда геометриянинг келиб чиқиши ҳақида э.а. 2000 йил аввал Қадимги Грек олими Геродот "Мисрли фараон Сеозоострис ҳар бир мисрликка ер майдонини куръа ташлаш орқали бўлиб бериб, ҳар бир ер майдонидан солиқ олиб турган. Нил дарёси тошиб, ерни сув босган вақтда азият чекканлар подшоҳнинг олдига боради, шу вақтда подшоҳ солиқни камайтириш учун ер майдонини қанчага камайганини аниқлаш мақсадида ер ўлчовчиларни юборади. Шу билан Мисрда геометрия пайдо бўлди, кейин Грецияга алмашди"

Оддий биноларни қуриш вақтида ҳам қурилишга қанча материал кераклигини ҳисоблаш, фазода нуқталар арасидаги масофани, тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни ҳисоблаш, оддий геометрик фигураларнинг хоссаларини қўллаш керак бўлди. Э.а. 2,3 ва 4 минг йил аввал қурилган Миср пирамидалари ўзининг метрик нисбати билан лол қолдирди, яъни қурувчиларнинг стереометрияни яхши ўзлаштирганини кўрсатади.

Денгизда сузиш ва савдони ривожлантириш вақт билан фазода йўлланма бериш тажрибасини талаб этди, яъни йил фаслларининг алмашиш вақтини билиш, картада ўзининг турган жойини аниқлаш, ҳаракат йўналишини топиш ва масофани ўлчаш. Қуёш, ой, юлдузларни текшириш ва фазодаги тўғри чиқизлар билан текисликларнинг ўзаро жойлашиш қонунларини текшириш шу мисолларни ечишга имконият берди ва янги илмнинг бошланиши — астрономияга йўл очди.

Э.а. VII асрдан Қадимги Грецияда амалий геометриядан назарий геометрияга алмашиши аста-секин амалга ошувчи фалсафий мактаблар очилди. Шу мактабларда ҳар хил қарашлар ўрин олиб, уларнинг ёрдами билан янги геометрик маълумотлар олишга имконият яратилди.

Илк машҳур мактабларнинг бири Пифагор мактаби ва унинг асосчиси Пифагорнинг номи билан аталган (э.а. VI—V асрларда). Пифагорчилар ўзларининг философик назарияларига мунтазам кўпёқларни қўллаган, улар фигураларнинг шаклларини ҳаётдаги элементлар билан таққослаган, яъни олов — мунтазам тетраэдр (1.6, а-расм), ер — гексаэдр (1.6, б-расм); ҳаво — октаэдр (1.6, в-расм); сув — икосаэдр (1.6, г-расм); Ер юзи — додекаэдр (1.6, д-расм).



1.6-расм

Кўпёқларнинг номларини грек тилидан таржима қилганда: "тетра" — тўрт, тетраэдрнинг ёқлари — тўрт мунтазам учбурчаклар; "гекса" — олти, гексаэдрнинг (куб) олтита квадрат ёқлари мавжуд; "окто" — саккиз, октаэдрнинг ёқлари — саккизта мунтазам учбурчаклар; "икоси" — йигирма, икосаэдрнинг ёқлари — йигирмата мунтазам учбурчаклар, "додека" — ўн икки, додекаэдрнинг ёқлари — ўн иккита мунтазам бешбурчаклар, "эдра" грек тилидан таржимаси — "ёқ" деган маънони англатади.

Кейингини фалсафий мактаб — Александрия мактабини — эрамиздан аввалги 300 йил аввал дунёга таниқли олим Евклид олиб келган. Бироқ унинг ҳаёти хақида маълумотлар кам. Ўзининг асарларида Папп математик (э.а. III аср) Евклидни обрўли, ҳақиқатгўй, сабрли ва мулойим инсон сифатида таърифлаган. Евклид таниқли "Асослар" китобини ёзди, унда геометрия дастлабки илмий асосда таърифланди ва геометриянинг тўғри аксиоматик шаклланиши тафсия этилди. Икки минг йилдан буён бу китоб геометрия курсини системали ўқишга асос бўлди.

Евклид хақидаги бу ривоятда Птоломей подшоси Евклиддан “геометрияни унинг “Асослар”дан бошқа қисқа ўрганиш усули борми” деган саволига Евклид “Геометрияда подшоликка йўл йўқ” деб жавоб берди” деб такидланади.

Сўнгги юз йилликда янги усуллар, унинг ичида геометрик масалаларни алгебраик усулда ва аксинча кўчиришга имконият берувчи координата ва вектор тушунчалари пайдо бўлди. Геометрик тадқиқотларнинг янги йўналишлари ривожланиб келяпти: Лобачевский геометрияси, проектив геометрия, топология, компьютерли геометрия ва бошқалар. Геометрик усуллар бошқа илмларда масалан: солиштирма назарияси, квант механикаси, кристаллография ва бошқа кўплаган соҳаларда қўлланилади.

Саволлар

1. Стереометрия нимани ўргатади?
2. “Стереометрия” сўзининг грек тилидан таржимаси қандай?
3. а) нуқта; б) тўғри чизиқ; в) текислик қандай шаклларнинг ўрни бўлади?
4. а) нуқта; б) тўғри чизиқ; в) текислик қандай белгиланади?
5. A нуқтанинг a тўғри чизиғига тегишли бўлиши қандай белгиланади?
6. B нуқтанинг a тўғри чизиғига тегишли эмаслиги қандай белгиланади?
7. Фазода қандай икки тўғри чизиқ кесишувчи тўғри чизиқлар деб аталади?
8. C нуқта a ва b тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлиши қандай белгиланади?
9. A нуқтанинг a текислигида ётиши қандай белгиланади?
10. B нуқтанинг a текислигида ётмаслиги қандай белгиланади?
11. Қандай ҳолатда тўғри чизиқ: а) текисликда ётади; б) текисликни кесиб ўтади деб айтилади?
12. a тўғри чизиғининг a текисликда ётиши қандай белгиланади?
13. C нуқта a тўғри чизиғи ва b текислигининг кесишиш нуқтаси бўлиши қандай белгиланади?
14. Қандай ҳолатда икки текислик тўғри чизиқ бўйича кесишади деб айтилади?
15. c тўғри чизиқ a ва b текислигининг кесишиш чизиғи бўлиши қандай белгиланади?
16. Геометрия қачон ва қаерда пайдо бўлди?
17. 1.6-расмда тасвирланган кўпёқлар қандай аталади? Уларнинг нечта ёғи бор?

Масалалар

А

1.1. Синфнинг деворлари — текисликнинг бўлаклари деб ўйланг.
а) кесишувчи икки текисликни;
б) кесишмайдиган икки текисликни;
в) текисликни ва у билан кесишмайдиган тўғри чизиқни;
г) кесишувчи икки тўғри чизиқни;
д) кесишмайдиган икки тўғри чизиқни кўрсатинг.

1.2. Тасвирланг:

а) кесишувчи икки тўғри чизиқни;

б) текисликни ва у билан кесишмайдиган тўғри чизиқни;

в) кесишмайдиган икки текисликни.

1.3. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётмайди. Шу нуқталарнинг турли жуфтлари орқали ўтувчи тўғри чизиқларни ёзинг.

1.4. A, B, C, D нуқталари бир текисликда ётмайди. Шу нуқталарнинг турли учтаси орқали ўтувчи текисликларни ёзинг.

B

1.5. A, B, C, D нуқталар бир текисликда ётмайди. AD тўғри чизиқ билан: а) ABC; б) BCD текисликнинг кесишиш нуқтасини кўрсатинг.

1.6. A, B, C, D нуқталар бир текисликда ётмайди. ABC текислик билан: а) ABD; б) BCD; в) ACD текисликнинг кесишиш чизиғини кўрсатинг.

1.7. Бир тўғри чизиқда учтаси ётмайдиган қуйидаги: а) учта нуқтанинг; б) тўртта нуқтанинг; в) бешта нуқтанинг хар хил жуфтлари орқали нечта тўғри чизиқ ўтади?

1.8. Бир текисликда ётмайдиган тўртта нуқтанинг ҳар хил учтаси орқали нечта текислик ўтади?

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

1.9. Текисликдаги геометриянинг аксиомаларини келтириб чиқаринг.

2-§. Стереометрия аксиомалари

Планиметрия курсидаги каби текисликда нуқталарнинг, тўғри чизиқлар ва текисликларнинг айрим хоссалари исботсиз қабул қилинади, улар аксиомалар деб аталади. Грек тилидан таржима қилинганда “аксиома” — “шубха қилинмайдиган” яъни исботлашни талаб қилмайдиган тасдиққа айтилади.

Стереометриянинг қуйидаги аксиомаларини қарайлик.

1. *Фазодаги икки нуқта орқали битта ва фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.* Белгилашлардан фойдаланиб бу аксиомани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

Фазодаги ихтиёрий A_1, A_2 нуқталар учун $A_1 \in a$ ва $A_2 \in a$ бўладиган биргина a тўғри чизиғи топилади.

2. *Фазода бир тўғри чизиқда ётмайдиган ихтиёрий учта нуқта орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.*

Белгилашлардан фойдаланиб бу аксиомани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

Фазодаги бир тўғри чизиқда ётмайдиган ихтиёрий A_1, A_2, A_3 нуқталар учун $A_1 \in \alpha$ ва $A_2 \in \alpha$, $A_3 \in \alpha$ бўладиган биргина α текислиги топилади.

3. *Агар икки турли текислик умумий нуқтага эга бўлса, улар шу нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ бўйича кесишади.*

Белгилашларни фойдаланиб, бу аксиомани ўзингиз келтириб чиқаринг.

4. *Бир текисликда ётмайдиган камида тўртта нуқта мавжуд.*

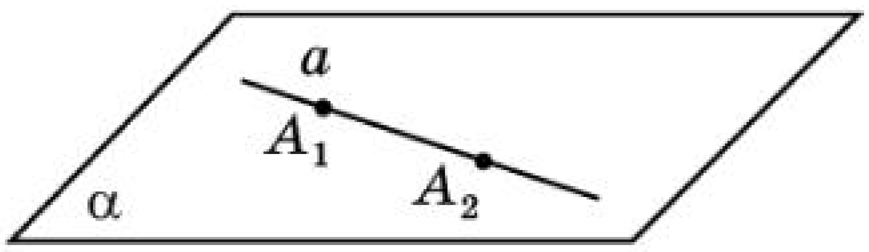
Белгилашларни фойдаланиб, бу аксиомани ўзингиз келтириб чиқаринг.

5. *Фазодаги тўғри чизиқлар ва текисликлар учун планиметриянинг барча аксиомалари ўринли.*

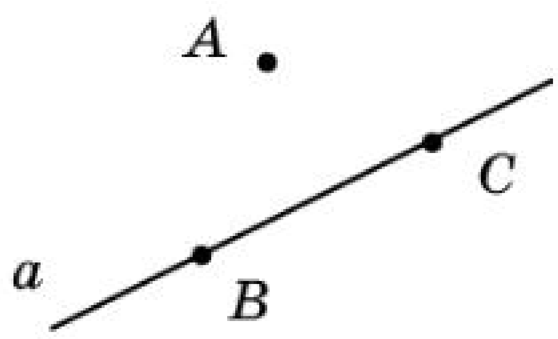
Стереометрия аксиомаларини қўллаб мантиқий мулоҳазалар ёрдамида бошқа хоссаларнинг тўғрилиги исботланади. Уларнинг айримларини кўриб чиқайлик.

1-хосса. *Агар тўғри чизиқ билан текисликнинг иккита умумий нуқтаси мавжуд бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ шу текисликда ётади.*

Исботи. a тўғри чизиғининг α текислиги билан A_1 ва A_2 умумий нуқталари мавжуд бўлсин (2.1-расм).



2.1-расм



2.2-расм

α текислигида планиметриянинг аксиомалари бажарилганлигидан шу текисликда A_1, A_2 нуқталари орқали биргина тўғри чизиқ ўтади. Агар у a тўғри чизиғи билан мос келмаса, унда биз берилган икки нуқта орқали ўтувчи икки тўғри чизиқ олар эдик. Бу биринчи аксиомага зид, демак, бу тўғри чизиқлар устма-уст тушади. Бундан a тўғри чизиғи α текислигида ётади.

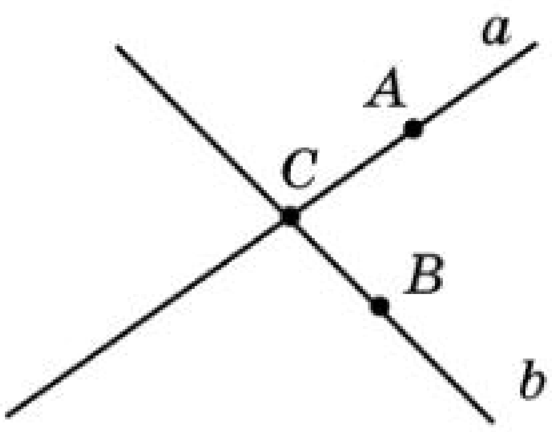
2-хосса. *Тўғри чизиқ ва шу тўғри чизиқда ётмайдиган нуқта орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкин.*

Исботи. A нуқта a тўғри чизиқда ётмайди. a тўғри чизиқда планиметрия аксиомалари бажарилганлиги сабабли унда ётувчи B, C нуқталар топилади (2.2-расм.) Иккинчи аксиома бўйича бир тўғри чизиқда A, B, C нуқталар орқали фақат битта α текислик ўтади.

Шу текисликнинг фақат битта бўлишини исботлайлик. Ҳақиқатан ҳам a тўғри чизиқ ва A нуқта орқали ўтувчи текислик A, B, C нуқталари орқали ҳам ўтади. Иккинчи аксиома бўйича у α текислик билан устма-уст тушади.

Фазодаги икки нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

3-хосса. Кесишувчи икки тўғри чизиқ орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкин.



2.3-расм

Исботи. a ва b тўғри чизиқлар C нуқтада кесишсин. a ва b тўғри чизиқларда планиметриянинг аксиомалари бажарилганлигидан уларга тегишли C нуқтадан бошқа мос равишда A ва B *нуқталар топилади* (2.3-расм).

A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётмайди, бундан 2-аксиома бўйича улар орқали фақат битта текислик ўтади. A ва C нуқталар шу текисликда ётганлигидан 1-хосса бўйича a тўғри чизиқ шу текисликда ётади. Шунга ўхшаш B ва C нуқталар шу текисликда ётганлигидан 1-хосса бўйича b *т*ўғри чизиқ шу текисликда ётади. Демак, текислик берилган икки тўғри чизиқ орқали ўтади.

Шу текисликнинг фақат битта бўлишини исботлайлик. Ҳақиқатан ҳам, a ва b тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текислик бир тўғри чизиқда ётмайдиган A, B, C нуқталар орқали ўтади. 2-аксиома бўйича бундай текислик биттагина бўлади. ◻

Ихтиёрий текислик учун унда ётмайдиган нуқта топилишини ўзингиз исботланг.

Саволлар

1. “Аксиома” сўзининг маъноси нима?
2. Стереометриянинг аксиомаларини айтиб беринг.
3. Белгилашлардан фойдаланиб, стереометриянинг аксиомаларини айтинг.
4. Тўғри чизиқ билан текисликнинг икки умумий нуқтаси мавжуд бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ билан текислик қандай жойлашади?
5. Тўғри чизиқ билан унда ётмайдиган нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?
6. Кесишувчи икки тўғри чизиқ орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

Масалалар

А

2.1. Бир нуқта орқали нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

2.2. Бир нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

2.3. Берилган учта нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин? Учта нуқта қандай жойлашганда улар орқали чексиз кўп текисликлар ўтказиш мумкин?

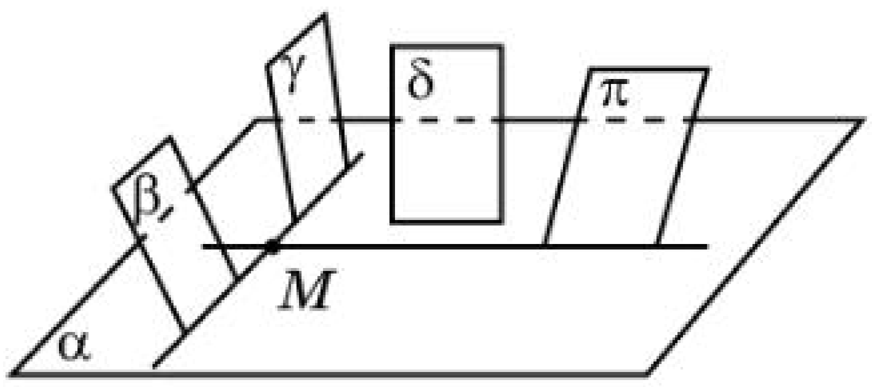
2.4. Бир текисликда ётмайдиган тўртта нуқта берилган. Уларнинг учтаси бир тўғри чизиқда ётиши мумкинми?

2.5. Икки текисликнинг: а) битта умумий нуқтаси; б) иккита умумий нуқтаси бўлиши мумкинми?

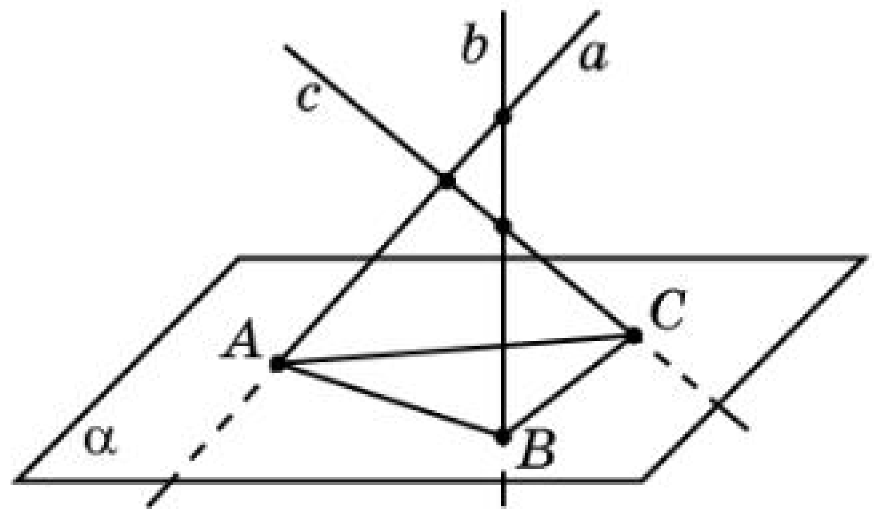
2.6. Икки текисликнинг иккита умумий чизиғи бўлиши мумкинми?

B

2.7. M нуқта α текисликда ётибди. 2.4-расмдан M нуқта қандай текисликларда ётишини аниқланг.



2.4-расм



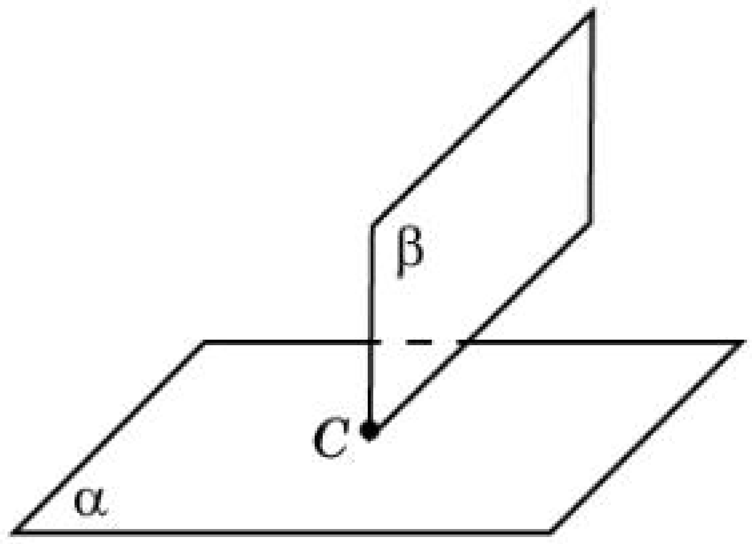
2.5-расм

2.8. 2.5-расмда жуфт-жуфтдан кесишувчи a, b, c тўғри чизиқлар текисликни мос равишда A, B, C нуқталарда кесиб ўтади. Расм тўғри чизилганми?

2.9. Параллелограммнинг икки учи ва диагоналларининг кесишиш нуқтаси бир текисликда ётибди. Параллелограммнинг бошқа икки учи ҳам шу текисликда ётиши мумкинми?

2.10. 2.6-расмда тасвирланган икки текисликнинг кесишишидан нима ҳосил бўлади?

2.11. Кесишувчи икки текислик фазони неча бўлакка бўлади?



2.6-расм

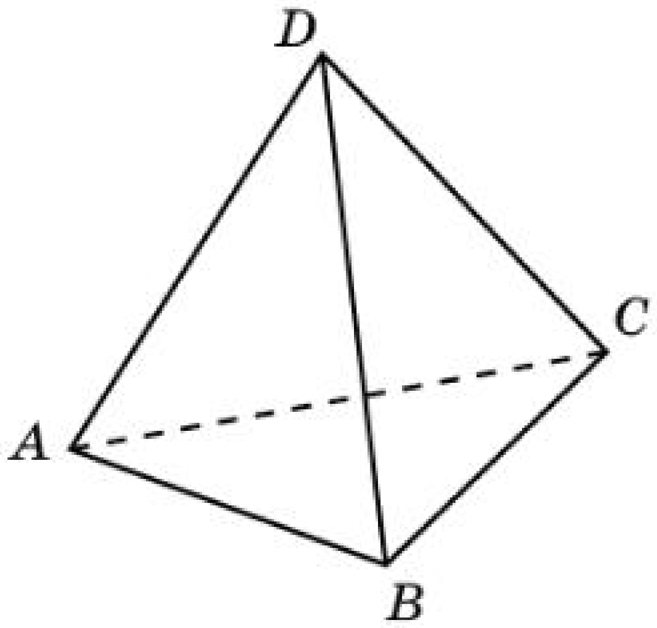
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

2.12. Кўпбурчак тушунчасини такрорланг.

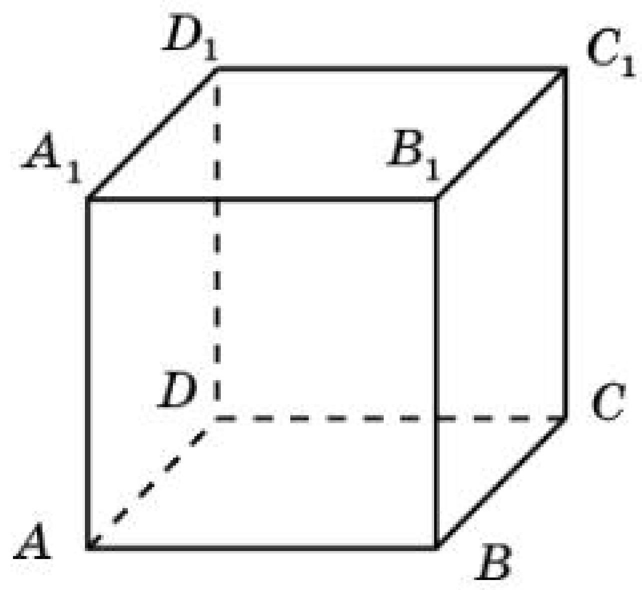
3-§*. Фазода фигуралар. Тетраэдр, куб, параллелепипед

Фазовий фигураларнинг ичида *кўпёқлар* — чекли сондаги кўпбурчаклардан ташкил топган жисм. Шу кўпбурчаклар кўпёқнинг ёқлари, кўпбурчакнинг томонлари ва учлари мос равишда кўпёқнинг *қирралари ва учлари* деб аталади.

Кўпёқнинг бир ёғида ётмайдиган икки учини туташтирувчи кесма диагонали деб аталади. Содда кўпёқларнинг бири — ёқлари мунтазам тўртта учбурчакдан ташкил топган тетраэдрдир (3.1-расм). Одатда тетраэдр унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади масалан, $ABCD$.



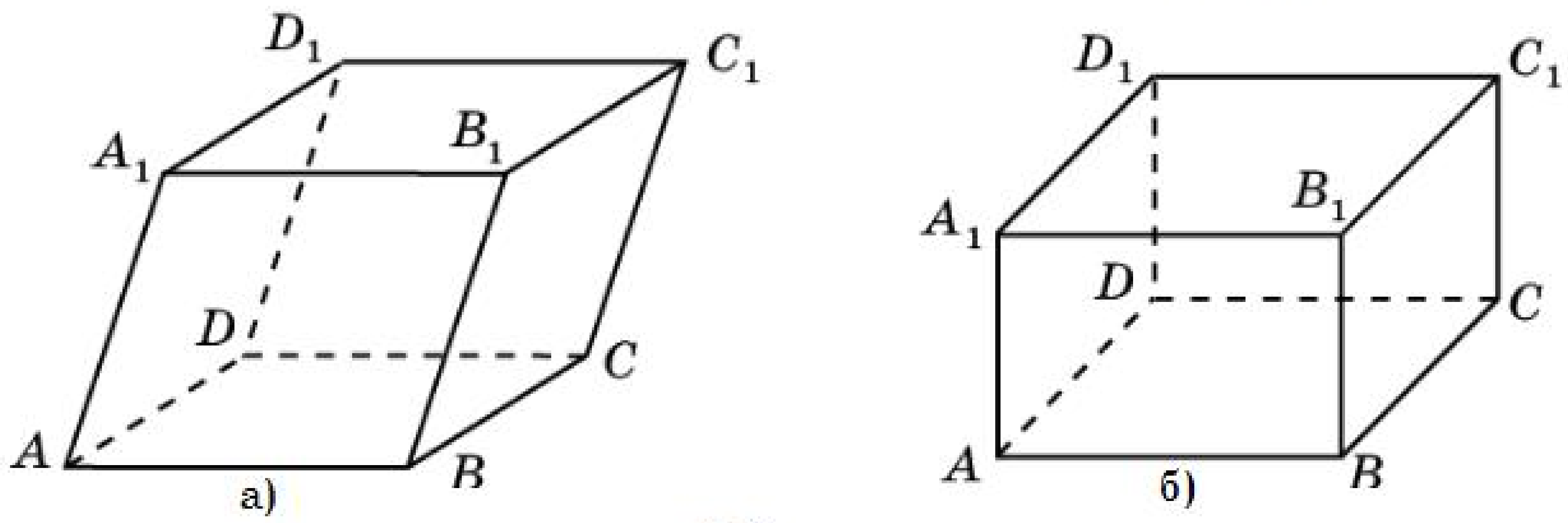
3.1-расм



3.2-расм

Куб деб, олти ёғи ҳам квадратдан иборат бўлган кўпёққа айтилади. (3.2-расм) Одатда куб унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади, масалан $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Қирраси 1 га тенг куб *бирлик куб* деб аталади.

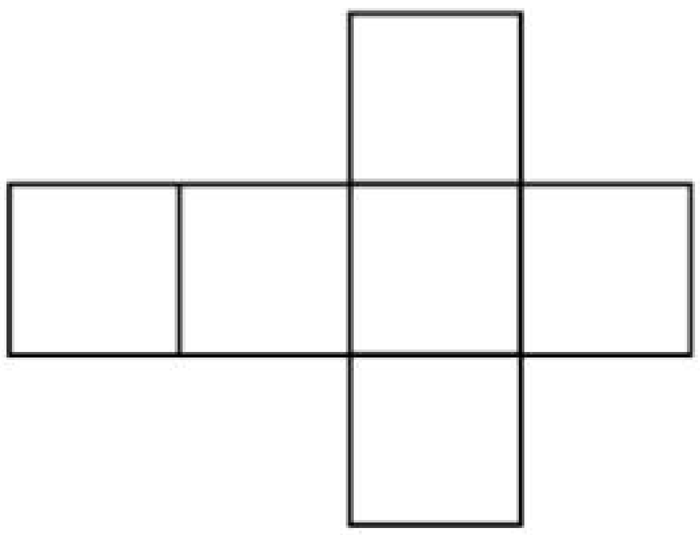
Параллелепипед деб, қарама-қарши ёқлари ўзаро параллел бўлган кўпёққа (олтиёқ) айтилади (3.3-расм). Параллелепипед унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



3.3-расм

Барча ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат бўлган параллелепипед *тўғри бурчакли параллелепипед* деб аталади (3.3, б-расм). Акс ҳолда у *оғма параллелепипед* деб аталади (3.3, а-расм).

Сиз қандай ўйлайсиз, куб параллелепипед бўла оладими?

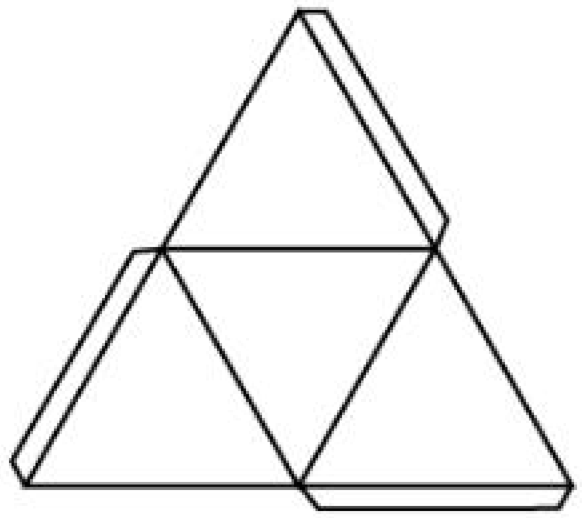


3.4-расм

Агар кўпёқнинг ёқларини барча кўпбурчаклари бир текисликда ётадиган қилиб айрим қирралари бўйича кесиб, текисликка ёйса, унда ҳосил бўлган фигура *кўпёқнинг ёйилмаси* деб аталади, масалан: 3.4-расмда кубнинг ёйилмаси кўрсатилган.

Қаттиқ қоғоздан, картондан ёки бошқа кўпёқнинг моделини ясаш учун, дастлаб унинг ёйилмасини тайёрлаб, кейин мос қирраларини елимлаб ёпиштириш керак.

Осонроқ бўлиши учун кўпёқнинг ёйилмасини елимлаш учун махсус қалпоқчалар ясалади. 3.5-расмда тетраэдрнинг ёйилмаси қалпоқчалари билан кўрсатилган.



3.5-расм

Текисликдаги сингари фазо учун хам кўчириш, тенглик ва ўхшашлик тушунчалари аниқланади.

Ҳаракат деб, нуқталар орасидаги масофа сақланадиган фазодаги акслантиришга айтилади.

Яъни, агар харакат ихтиёрий икки A, B нуқталарини A', B' нуқталарга кўчирса, у ҳолда $A'B' = AB$ бажарилади.

Агар фазода бир фигурани иккинчи фигурага кўчирадиган ҳаракат мавжуд бўлса, у ҳолда шу *икки фигура тенг* деб аталади.

Ўхшашлик деб, нуқталар орасидаги масофа маълум бир сонгагина ўзгарадиган фазодаги акслантиришга айтилади.

Яъни харакат ихтиёрий икки A, B нуқталарни A', B' нуқталарга кўчирса, у ҳолда $A'B' = kAB$ бажарилади, бу ерда k — ўхшашлик коэффиценти деб аталувчи мусбат сон.

Агар фазода бир фигурани иккинчи фигурага кўчирадиган ўхшашлик мавжуд бўлса, у ҳолда у икки фигура ўхшаш деб аталади.

Қандай ўйлайсиз, а) иккита куб; б) иккита параллелепипед ўхшаш бўладими?

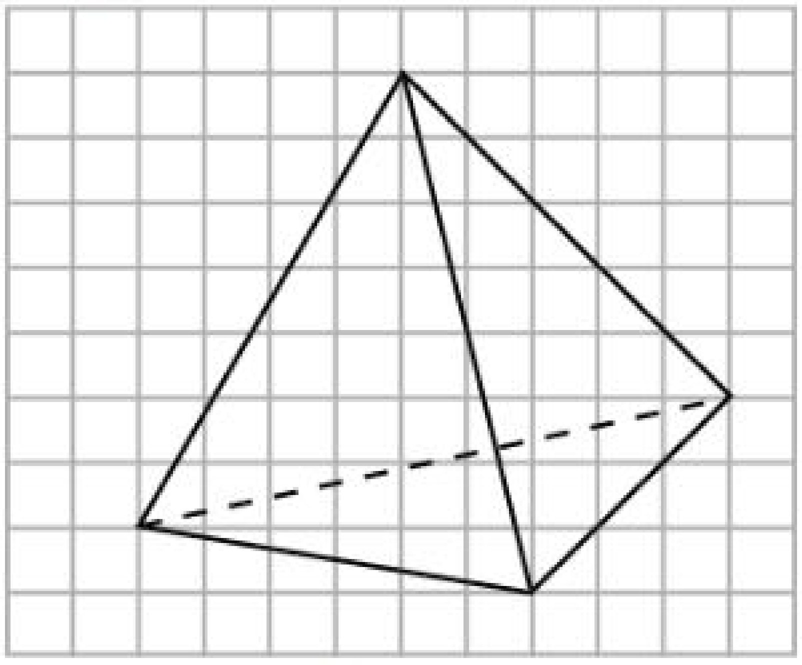
Саволлар

1. Фазодаги қандай фигурага кўпёқ деб аталади?
2. Кўпёқнинг диагонали деганимиз нима?
3. Қандай кўпёқ: а) куб; б) параллелепипед; в) тетраэдр деб аталади?
4. Қандай параллелепипед тўғри бурчакли деб аталади?
5. а) Куб; б) параллелепипед; в) тетраэдр қандай белгиланади?
6. Атрофимиздаги оламдан: а) куб; б) параллелепипед; в) тетраэдр шаклидаги жисмларга мисоллар келтиринг.
7. Кўпёқнинг ёйилмаси деганимиз нима?
8. Фазодаги қандай алмаштириш ҳаракат деб аталади?
9. Фазодаги қандай фигуралар тенг деб аталади?
10. Фазодаги қандай фигуралар ўхшаш деб аталади?

Масалалар

A

3.1. а) Қуйидаги: а) куб; б) параллелепипеднинг нечта учи (У), қирраси (Қ) ва ёғи (Ё) бўлади?



3.6-расм

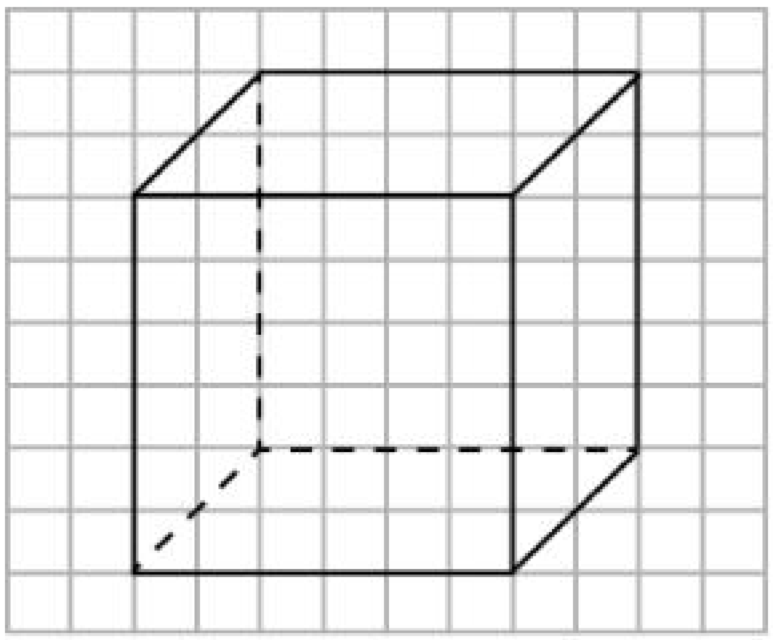
3.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдан унинг қирраси ётадиган ва ABC текислигини кесиб ўтувчи тўғри чизиқларни кўрсатинг.

3.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдан унинг ёғи ётадиган ва BCC_1 текислик билан кесишадиган текисликни кўрсатинг.

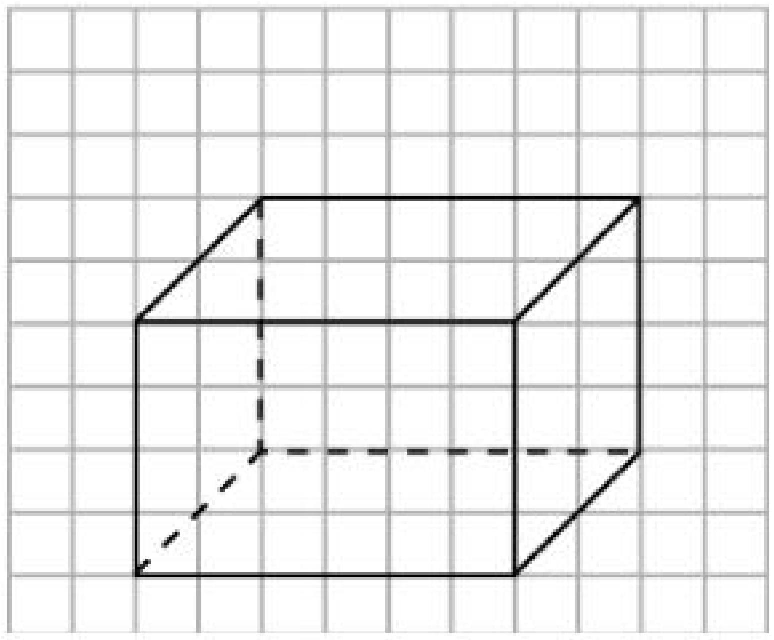
3.4. Катак қоғозда 3.6-расмдагига ўхшаш тетраэдр чизинг.

3.5. Катак қоғозда 3.7-расмдагига ўхшаш куб чизинг.

3.6. Катак қоғозда 3.8-расмдагига ўхшаш тўғри бурчакли параллелепипед чизинг.



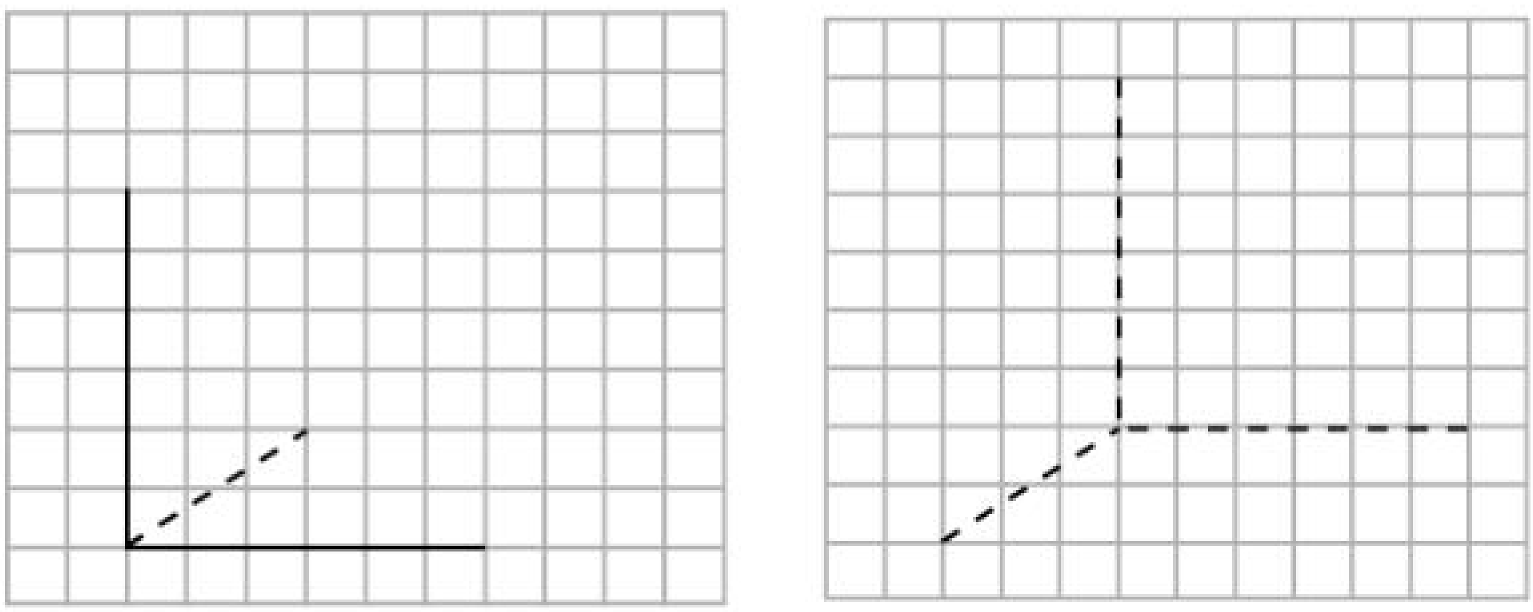
3.7-расм



3.8-расм

B

3.7. Катак қоғозда кубнинг уч қирраси тасвирланган (3.9-расм). Кубнинг тўлиқ расмини чизинг.

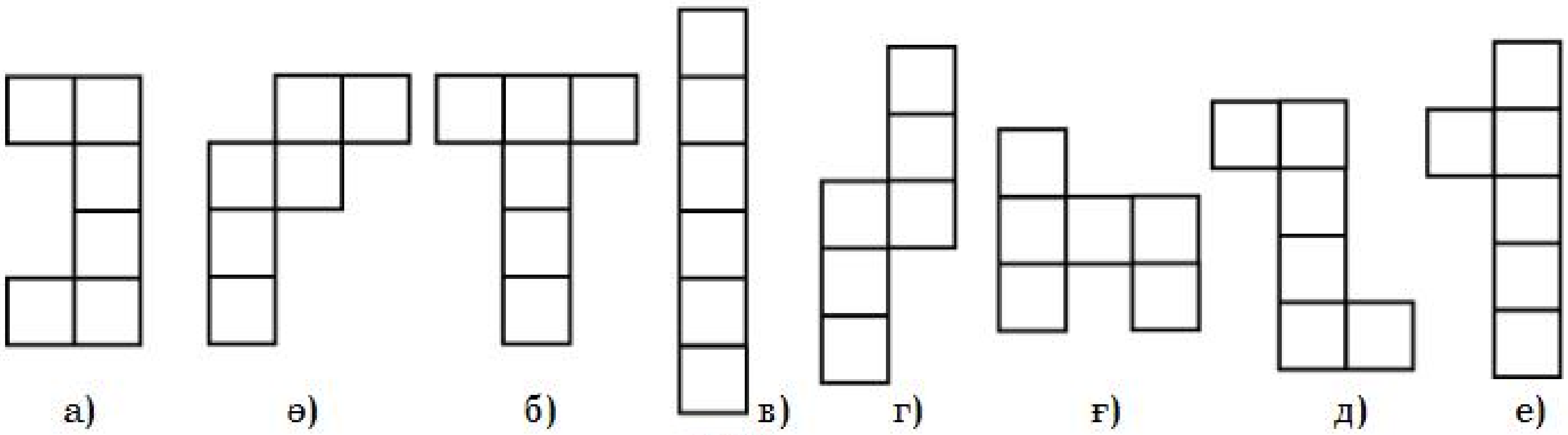


а) ә)

3.9-расм

3.8. а) Тетраэдрнинг; б) кубнинг; в) параллелепипеднинг диагоналлар сони нечта бўлади?

3.9. 3.10-расмда тасвирланган фигураларнинг қайси бири кубнинг ёйилмаси бўлади?



3.10-расм

3.10. Тетраэдрнинг ва тўғри бурчакли параллелепипеднинг ёйилмаларини чизинг.

3.11. Тетраэдрнинг кубнинг ва параллелепипеднинг ёйилмаларини тайёрлаб, уларнинг моделини ясанг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

3.12. Атрофимиздаги оламдан: а) Тетраэдр б) куб в) параллелепипед шаклидаги жисмларга мисоллар келтиринг.

4-§*. Фазода фигуралар. Призма. Пирамида

Призма деб, параллел кўчириш билан устма-уст тушувчи иккита ясси кўпбурчакдан ва бу кўпбурчакларнинг мос нуқталарини туташтирувчи ҳамма кесмалардан иборат кўпёқка айтилади. Кўпбурчаклар призманинг *асослари*, параллелограммлар призманинг *ён ёқлари* деб аталади. Призманинг асосларида ётмайдиган қирралари унинг *ён қирралари* деб аталади.

Призмалар асосларида ётган кўпбурчакларга (учбурчаклар, тўртбурчаклар, бешбурчаклар ва ҳоказо) боғлиқ мос равишда учбурчакли, тўртбурчакли, бешбурчакли ва ҳоказо бўлиб бўлинади.

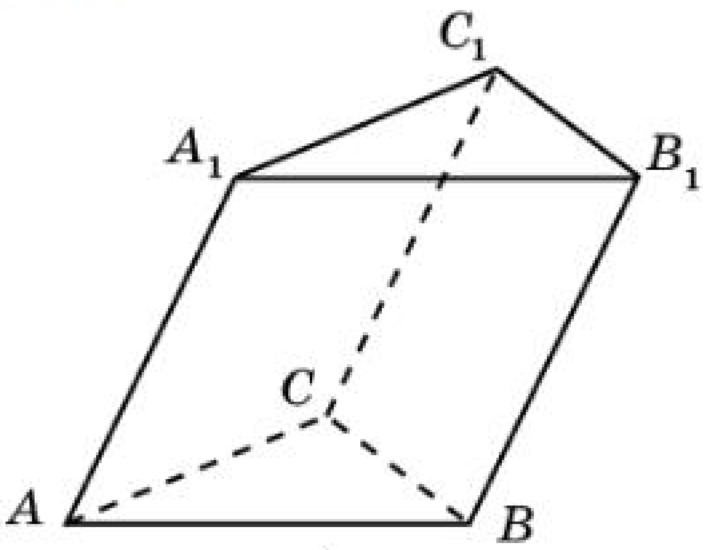
Агар призманинг асослари n бурчаклардан иборат бўлса, у ҳолда *n бурчакли призма* деб айтилади.

Призма унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади, масалан: $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призма, $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ олтибурчакли призма.

4.1-расмда учбурчакли ва олтибурчакли призмалар тасвирланган.

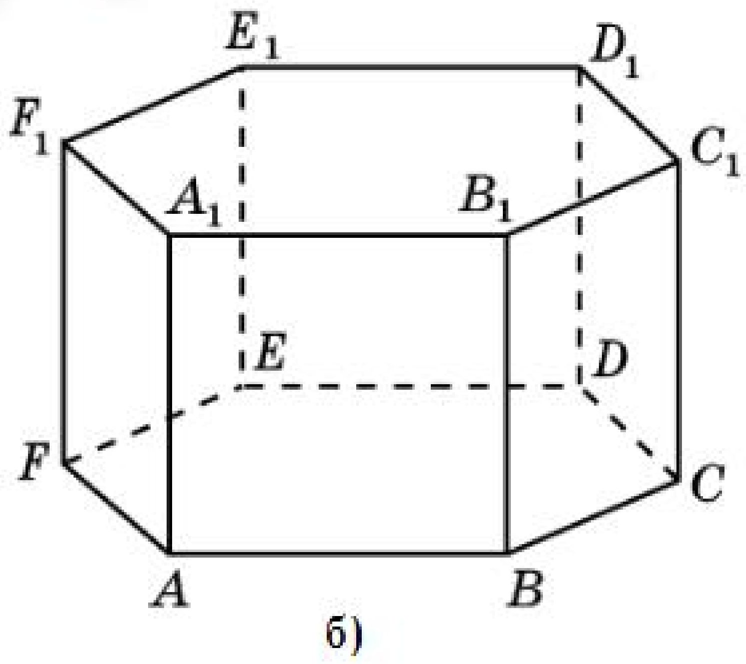
Ён ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат бўлган призма *тўғри призма* деб аталади. Бошқа ҳолатда у *оғма призма* деб аталади. 4.1, а-расмда учбурчакли оғма призма тасвирланган. 4.1, б-расмда тўғри олтибурчакли призма тасвирланган.

4.1, б-расмда олтибурчакли тўғри призма тасвирланган.



а)

4.1-расм



б)

4.1-расм

Асослари мунтазам кўпбурчаклардан иборат бўлган тўғри призма *мунтазам призма* деб аталади. 4.1, б-расмда мунтазам олтибурчакли призма тасвирланган.

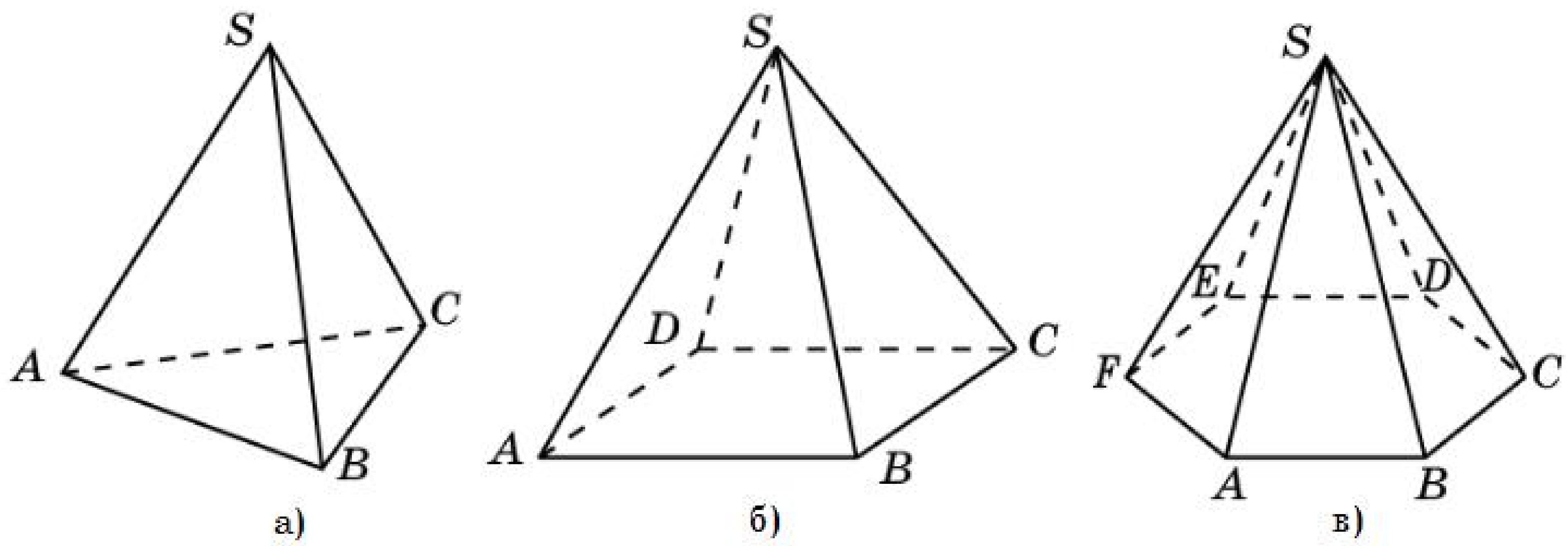
Қандай ўйлайсиз, параллелепипед тўртбурчакли призма бўла оладими?

Пирамида деб, ясси кўпбурчак ва унда ётмаган бир нуқтани шу кўпбурчак учлари билан туташтирувчи кесмалардан ташкил топган кўпёққа айтилади. Кўпбурчак *пирамиданинг асоси*, учбурчак лар эса *пирамиданинг ён ёқлари* деб аталади. Ён ёқларининг умумий нуқтаси *пирамиданинг учи* дейилади.

Пирамиданинг учини асосининг учлари билан туташтирувчи кесмалар пирамиданинг *ён қирралари* дейилади. Пирамидалар асосида ётган кўпбурчакларга (учбурчаклар, тўртбурчаклар, бешбурчаклар ва ҳоказо) боғлиқ мос равишда учбурчакли, тўртбурчакли, бешбурчакли ва ҳоказо бўлиб бўлинади.

Агар пирамиданинг асоси n бурчакдан иборат бўлса, у ҳолда *n бурчакли* пирамида деб аталади.

4.2-расмда учбурчакли, тўртбурчакли, олтибурчакли пирамидалар тасвирланган.



4.2-расм

Пирамида унинг учларини кўрсатиш орқали белгиланади, масалан: $SABC$ учбурчакли пирамида (4.2, а-расм), $SABCD$ тўртбурчакли пирамида (4.2, б-расм), $SABCDEF$ олтибурчакли пирамида (4.2, в-расм).

Асосида мунтазам кўпбурчак ва барча ён қирралари ўзаро тенг бўлган пирамида — *мунтазам пирамида* деб аталади.

Қандай ўйлайсиз, тетраэдр учбурчакли пирамида бўла оладими?

Саволлар

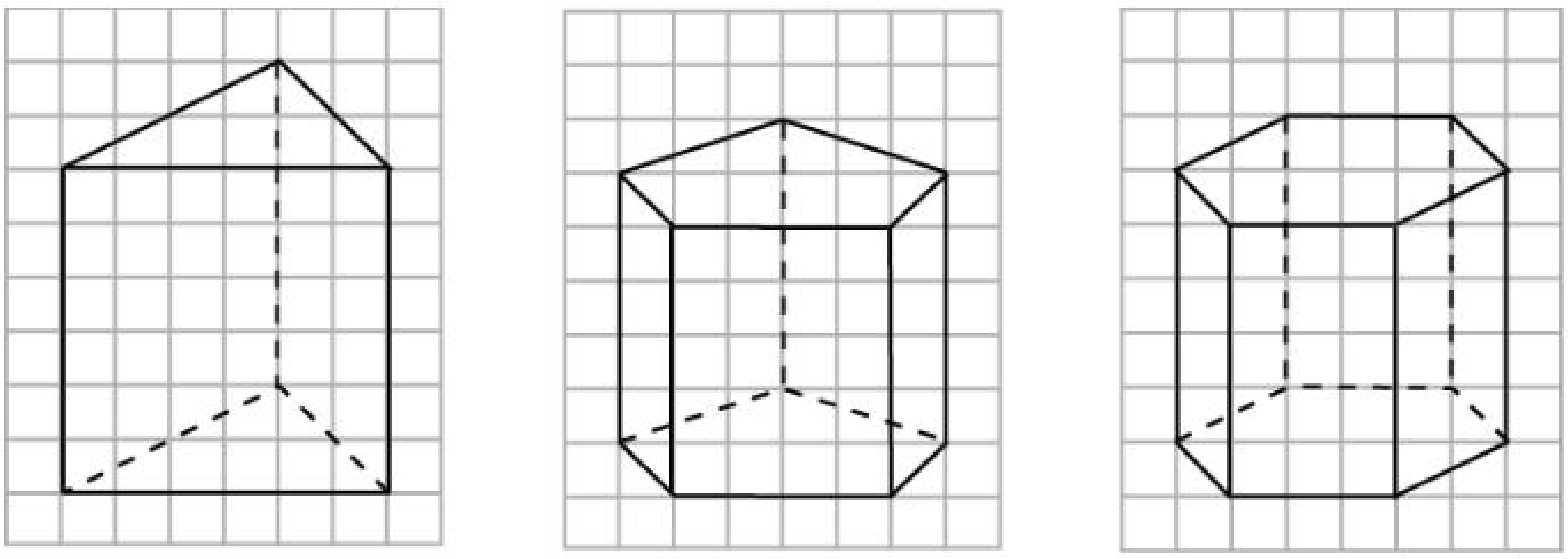
1. Қандай кўпёқ призма деб аталади?
2. Қандай призма тўғри призма деб аталади?
3. Қандай призма мунтазам призма деб аталади?
4. Призма қандай белгиланади?
5. Қандай кўпёқ пирамида деб аталади?
6. Қандай пирамида мунтазам пирамида деб аталади?
7. Пирамида қандай белгиланади?

Масалалар

А

4.1. а) n бурчакли призманинг; б) n бурчакли пирамиданинг нечта учи (У), қирраси (Қ) ёғи (Ё) бўлади?

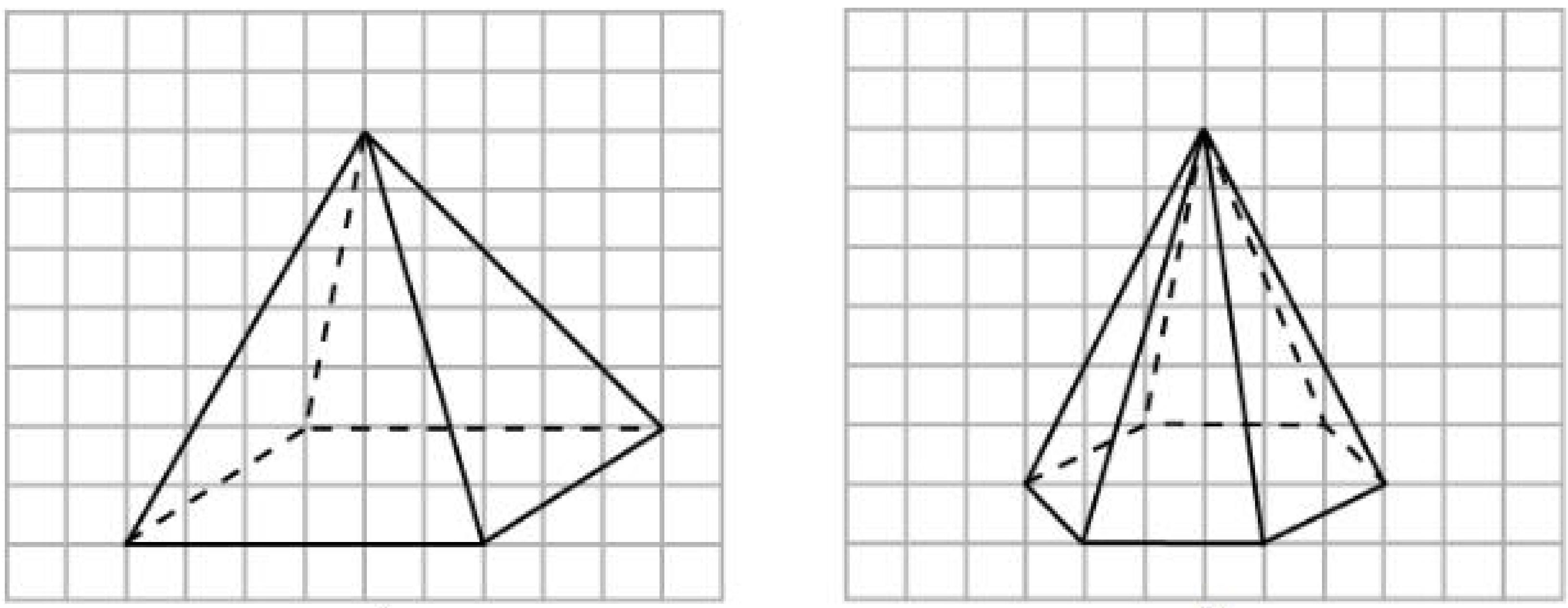
4.2. Катак қоғозда 4.3-расмдагига ўхшаш призмаларни чизинг.



а) б) в)

4.3-расм

4.3. Катак қоғозда 4.4-расмдагига ўхшаш пирамидаларни чизинг.



а) б)

4.4-расм

B

4.4. Призманинг: а) 9 та учи; б) 16 та учи бўлиши мумкинми?

4.5. а) 20 та учи; б) 10 та учи мавжуд призманинг асосида қандай кўпбурчак бўлади?

4.6. а) 10 та учи; б) 18 та қирраси; в) 8 та ёғи мавжуд призманинг турини аниқланг.

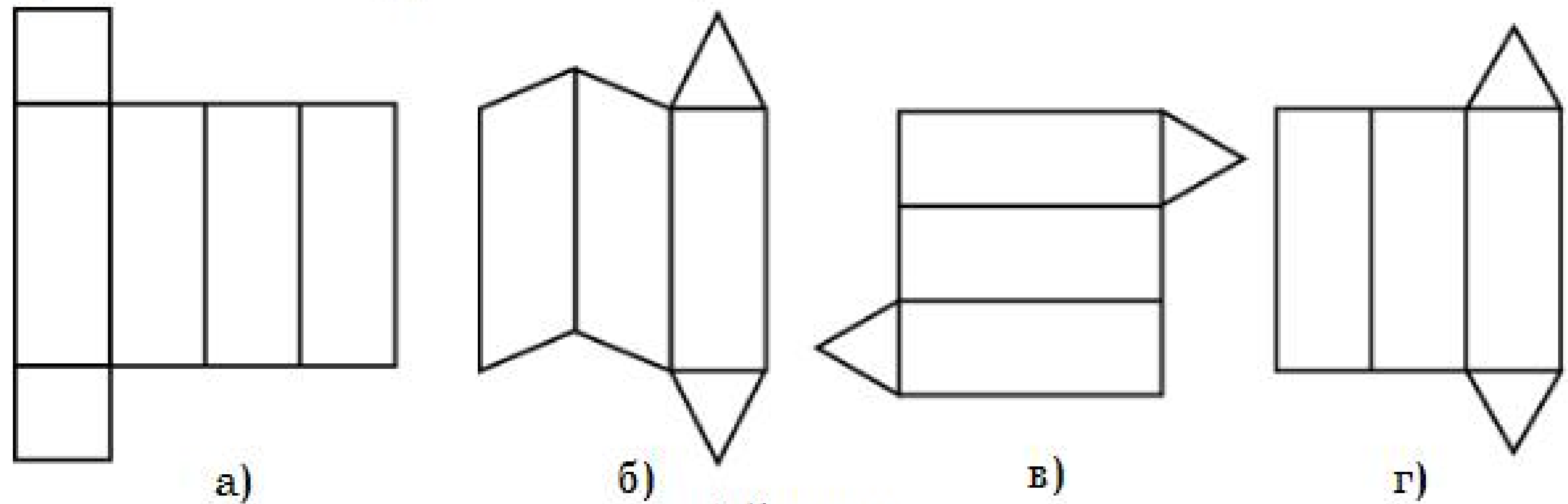
4.7. Пирамиданинг: а) 9 та қирраси; б) 16 та қирраси бўлиши мумкинми?

4.8. а) 32 та қирраси; б) 15 та ёғи мавжуд пирамиданинг асосида қандай кўпбурчак ётади?

4.9. а) 10 та учи; б) 18 та қирраси; б) 8 та ёғи мавжуд пирамиданинг турини аниқланг.

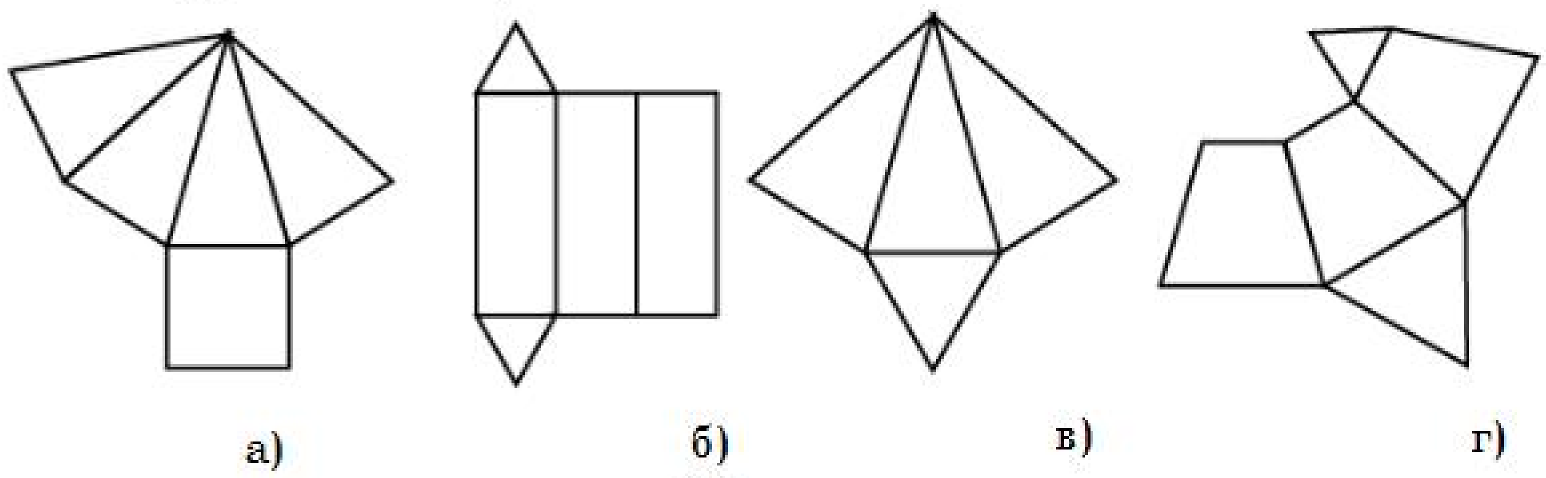
4.10. *SABCD* тўртбурчакли пирамиданинг ёқлари ётган текисликларнинг кесишган жуфтларини кўрсатинг (4.2, б-расм).

4.11. 4.5-расмдан призманинг ёйилмаси бўладиган фигураларни топинг. Шу призманинг турини аниқланг.



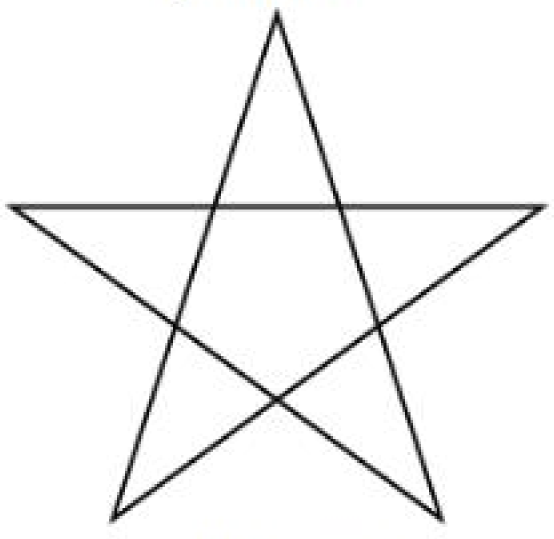
4.5-расм

4.12. 4.6-расмдаги ёйилмалардан пирамиданинг ёйилмаларини топинг. Уларнинг турини аниқланг.



4.6-расм

4.13. 4.7-расмда тасвирланган фигура қандай кўпёқнинг ёйилмаси бўлади?

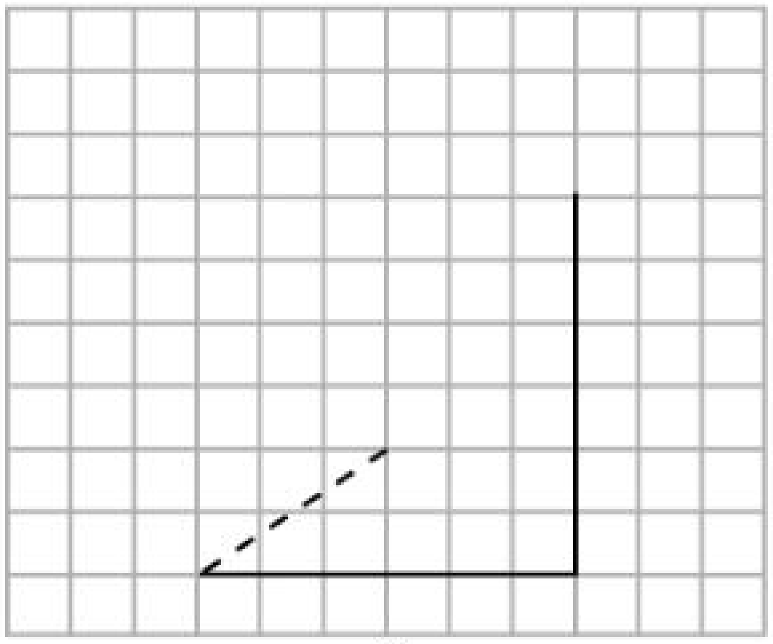


4.7-расм

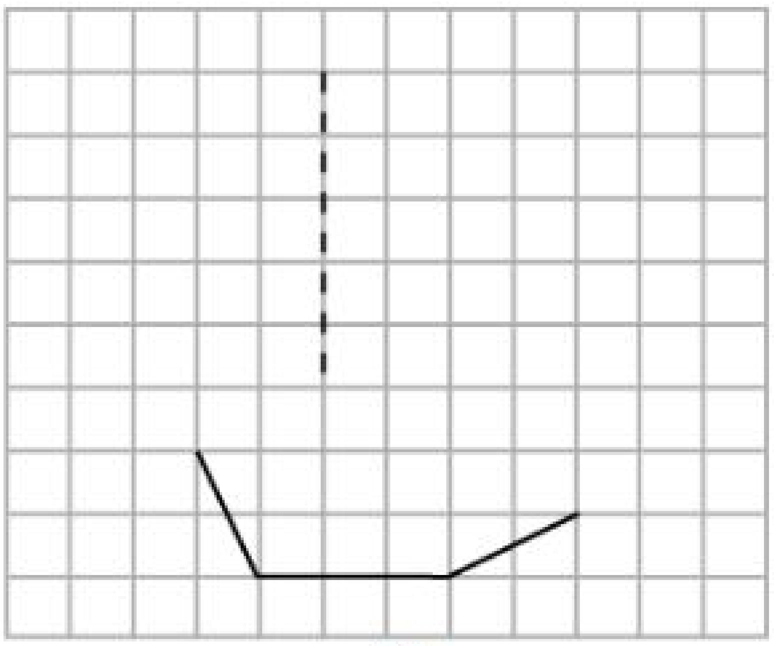
4.14. Мунтазам олтибурчакли: а) призманинг; б) пирамиданинг ёйилмасини чизинг ва уларнинг моделини ясанг.

4.15. Катак қоғозда: а) учбурчакли; б) олтибурчакли призманинг қирралари тасвирланган (4.8-расм). Призмани чизинг.

4.16. Катак қоғозда: а) тўртбурчакли; б) олтибурчакли пирамиданинг қирралари тасвирланган (4.9-расм). Пирамидани чизинг.

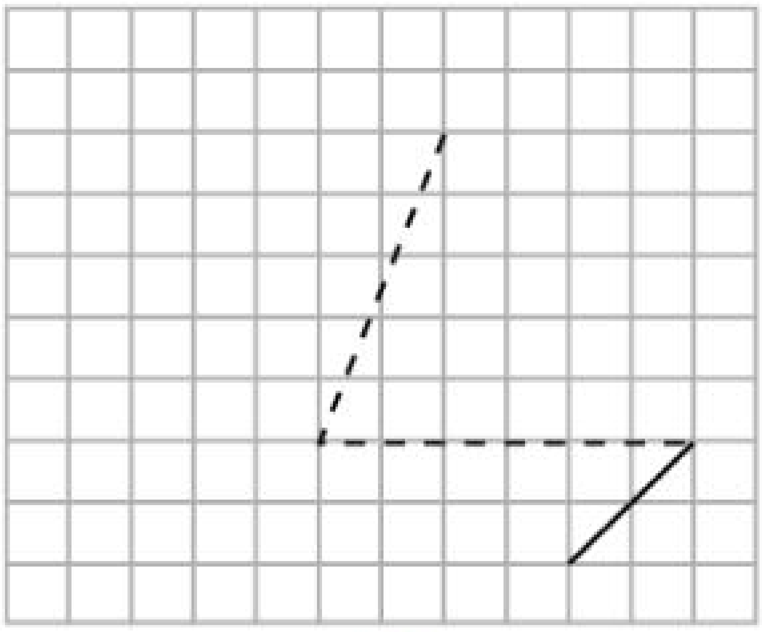


а)

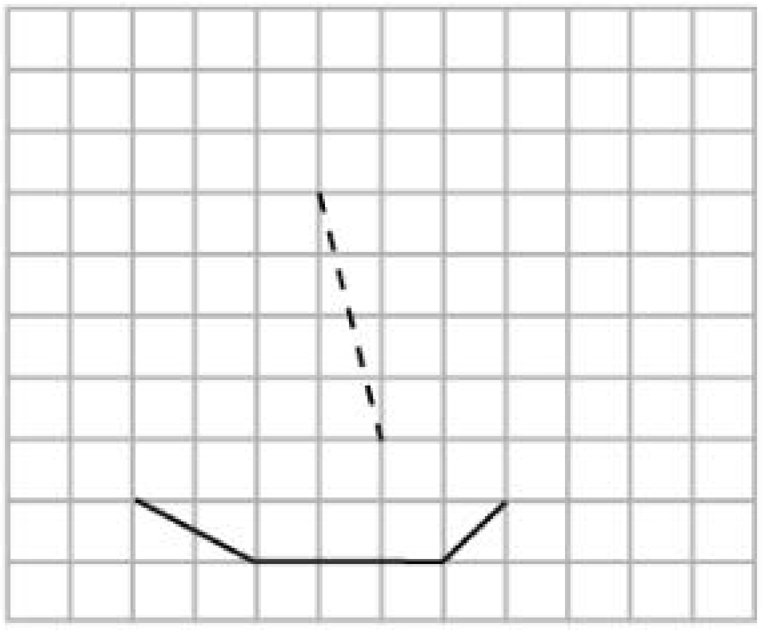


ә)

4.8-расм



а)



ә)

4.9-расм

4.17. а) n бурчакли пирамиданинг; б) n бурчакли призманинг диагоналлар сони нечта бўлади?

4.18. Атрофимиздаги оламдан: а) призма; б) пирамидага шаклдош жисмларга мисоллар келтиринг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

4.19. Текисликдаги икки тўғри чизиқ параллелигининг таърифини такрорланг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. Фазодаги бир нуқта орқали нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

A. Ўтказиш мумкин эмас. B. Битта.
C. Иккита. D. Чексиз кўп.

2. Фазодаги бир нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Ўтказиш мумкин эмас. B. Битта.
C. Иккита. D. Чексиз кўп.

3. Фазодаги икки нуқта орқали нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

A. Ўтказиш мумкин эмас. B. Битта.
C. Иккита. D. Чексиз кўп.

4. Фазода бир тўғри чизиқда ётмайдиган уч нуқтанинг ҳар хил жуфтлари орқали нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

A. Ўтказиш мумкин эмас. B. Учта.
C. Олтита. D. Чексиз кўп.

5. Фазода бир тўғри чизиқда ётмайдиган уч нуқтанинг ҳар хил жуфтлари орқали нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

A. Тўртта. B. Бешта. C. Олтита. D. Саккизта.

6. Кесишувчи икки текисликнинг нечта умумий нуқтаси бўлади?

A. Битта. B. Иккита. C. Учта. D. Чексиз кўп.

7. Фазодаги икки нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Ўтказиш мумкин эмас. B. Битта.
C. Иккита. D. Чексиз кўп.

8. Фазода бир тўғри чизиқда ётмайдиган уч нуқта орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Ўтказиш мумкин эмас. B. Битта.
C. Иккита. D. Чексиз кўп.

9. Кубнинг учта учи орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?

A. Битта. B. Учта. C. Олтита. D. Чексиз кўп.

10*. Тўғрибурчакли параллелепипед диагоналларининг сонини топинг.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

11*. Олтибурчакли призма диагоналларининг сонини топинг.

A. 6. B. 12. C. 9. D. 18.

12*. 12 та қиррали пирамиданинг асоси қандай фигура?

A. Учбурчак. B. Тўртбурчак.
C. Олтибурчак. D. 12 бурчак.

13*. 36 та қиррали призманинг асоси қандай фигура?

A. Олтибурчак. B. Тўққизбурчак.
C. 12 бурчак. D. 36 бурчак.

14*. 18 та қиррали призманинг асоси қандай фигура?

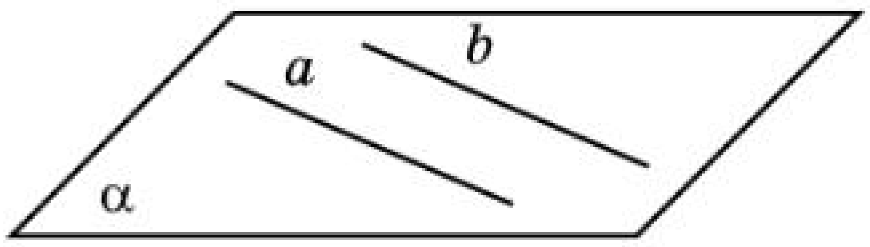
A. Учбурчак. B. Олтибурчак.
C. Тўққизбурчак. D. 18 бурчак.

15*. 10 та қиррали пирамиданинг асоси қандай фигура?

A. Бешбурчак. B. Олтибурчак.
C. Саккизбурчак. D. Тўққизбурчак.

5-§. Фазода тўғри чизиқларнинг параллелиги

Текисликда кесишмайдиган, яъни умумий нуқтаси бўлмаган икки тўғри чизиқ параллел тўғри чизиқ бўлишини эслатиб ўтайлик. Шунга ўхшаш фазодаги бир текисликда ётувчи ва ўзаро кесишмайдиган икки тўғри чизиқ *параллел тўғри чизиқлар* дейилади (5.1-расм).



5.1-расм

a ва b тўғри чизиқларнинг параллеллиги $a \parallel b$ каби белгиланади.

Фазодаги икки тўғри чизиқ параллел бўлиши учун улар кесишмаслиги керак деган талабдан бошқа уларнинг бир текисликда ётиши кераклигини ҳам айтиб ўтиш керак.

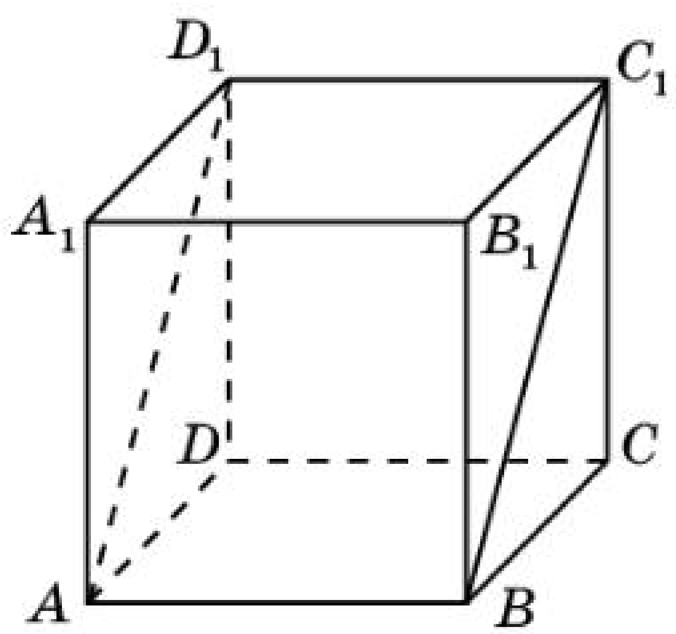
Параллел тўғри чизиқларда ётувчи икки кесмани, параллел кесмалар деб атаймиз.

Фазода тўғри чизиқлар учун текисликдаги тўғри чизиқларнинг параллелик аломатига ўхшаш қуйидаги параллеллик аломати бажарилади.

Агар икки тўғри чизиқнинг ҳар бири учинчи тўғри чизиққа параллел бўлса, унда бу икки тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлади.

Масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB ва C_1D_1 тўғри чизиқлар A_1B_1 тўғри чизиғига параллел бўлади. Демак, AB ва C_1D_1 ўзаро параллел (5.2-расм).

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD_1 ва BC_1 тўғри чизиқлар параллел эканлигини исботлайлик. Ҳақиқатан, юқорида кўрсатилгандай AB ва C_1D_1 тўғри чизиқлар параллел ва тенг бўлади. Демак ABC_1D_1 тўртбурчак — параллелограмм. Бундан AD_1 ва BC_1 тўғри чизиқлари параллел бўлади.



5.2-расм

Фазодаги берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқта орқали шу тўғри чизиққа параллел фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини ўзингиз исботланг.

Тарихий маълумотлар

Берилган нуқта орқали ўтувчи ва берилган тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқларнинг сони тўғрисидаги масалани қадимдан келаётган тарихи мавжуд. Евклиднинг “Асослар” китобидаги бешинчи постулат ўзининг мазмуни бўйича 7-синфда ўтилган параллеллик аксиомаси билан мос келади, яъни “Берилган тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқтадан шу тўғри чизиққа битта параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин”.

Евклиддан кейин икки минг йил давомида математиклар шу постулатни исботлашга ҳаракат қилди, бироқ уларнинг барча уринишлари зое кетди. Эртами, кечми уларнинг мулоҳазаларида хатоликлар аниқланди. Фақат 1926 йили Қозон университетининг профессори буюк математик Н.И. Лобачевский (1792—1856) шу постулатни Евклиднинг бошқа постулатларидан(аксиомаларидан) мантиқий йўл билан чиқариб олишга яъни исботлашга бўлмаслигини тушунди. Шунинг учун уни аксиома сифатида қабул қилиш керак, ёки бўлмаса аксиома сифатида берилган нуқта орқали шу тўғри чизиққа параллел бир неча тўғри чизиқ мавжуд бўлиши тушунчасини қабул қилиш кераклигини айтган. Геометриянинг асоси сифатида шу паралеллик аксиомани олиб Лобачевский янги Евклид эмас геометрияни тузди ва у Лобачевский геометрияси деб аталди.

Лобачевскийнинг тушунчалари шу давр етук математикларининг ҳам тушунишига анча қийинлик туғдирди. Шунга қарамасдан Лобачевский ўз тушунчаларидан бош тортмади. У янги геометриянинг мантиқий қарама-қаршиликларига ишонибгина қолмай, бу геометрияни ҳақиқий физикавий фазода таҳлил қилишга ишонч билдирди. Шу мақсадда Лобачевский мураккаб астрономик текширув ва ўлчов ишларини ўтказди, ўлчов асбобларининг етарли бўлмаганлиги сабаб унинг ихтиросини тўғрилигини исботлашга имконият бермади.

Лобачевский геометриясининг тўғрилигини тан олиш, у дунёдан ўтгандан кейин юзага чиқди. Лобачевскийнинг меҳнатлари кўплаган тилларга таржима қилиниб, бутун олам математиклари билан қараб чиқилди. Ҳозирги вақтда Лобачевский геометрияси замонавий математиканинг ажралмас бўлаги ва одамзот билимининг кўплаган соҳаларида қўлланилиб, атроф оламни кенгроқ билишга имконият яратиб келмоқда.

Саволлар

1. Фазодаги қандай икки тўғри чизиқ параллел деб аталади?
2. Фазодаги қандай икки кесма параллел деб аталади?
3. Фазодаги параллел тўғри чизиқларнинг хоссаларини айтинг

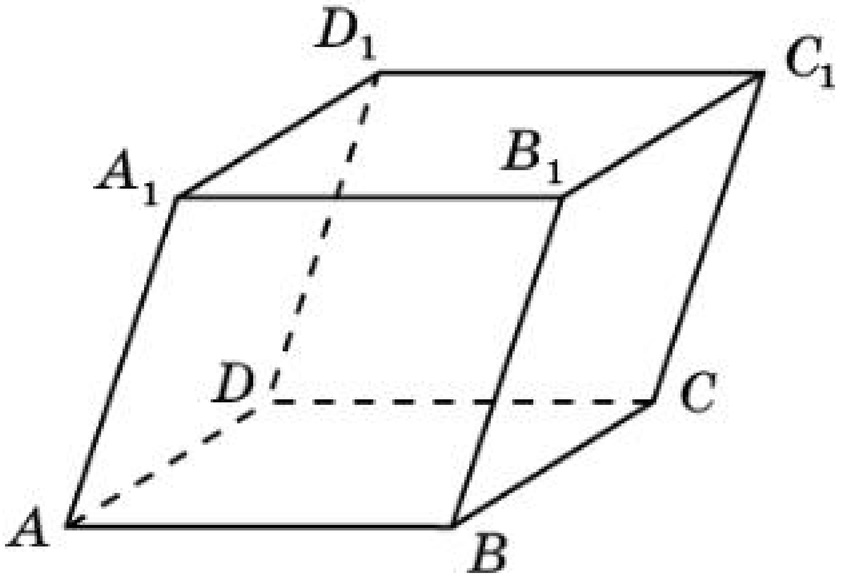
Масалалар

А

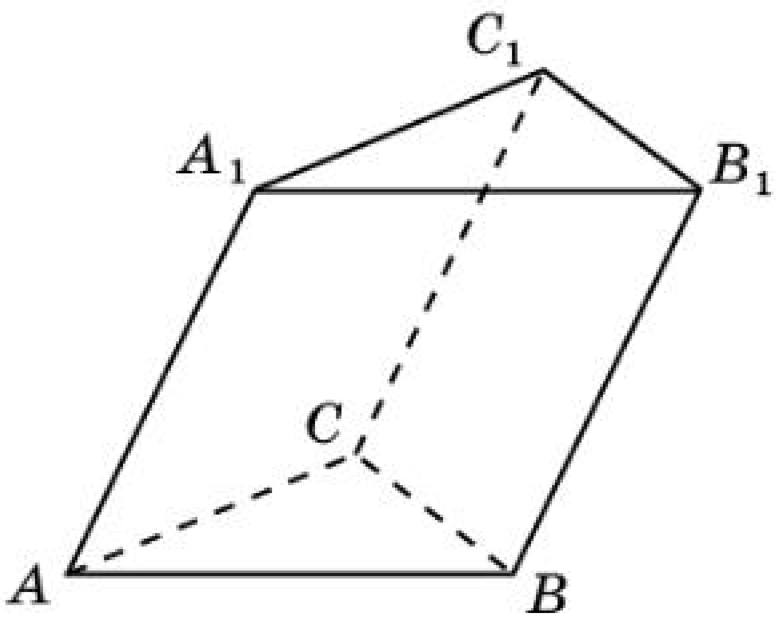
5.1. Текисликда параллел тўғри чизиқларнинг бирини кесиб ўтувчи тўғри чизиқ иккинчисини хам кесиб ўтиши маълум. Шу мулоҳаза фазо учун ҳам тўғрими?

5.2. Текисликда берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқта орқали шу тўғри чизиқни кесмайдиган фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Ушбу мулоҳаза фазо учун ҳам тўғрими?

5.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг: а) AB; б) AA_1 қирраларига параллел бўлган қирраларини ёзинг (5.3-расм).



5.3-расм



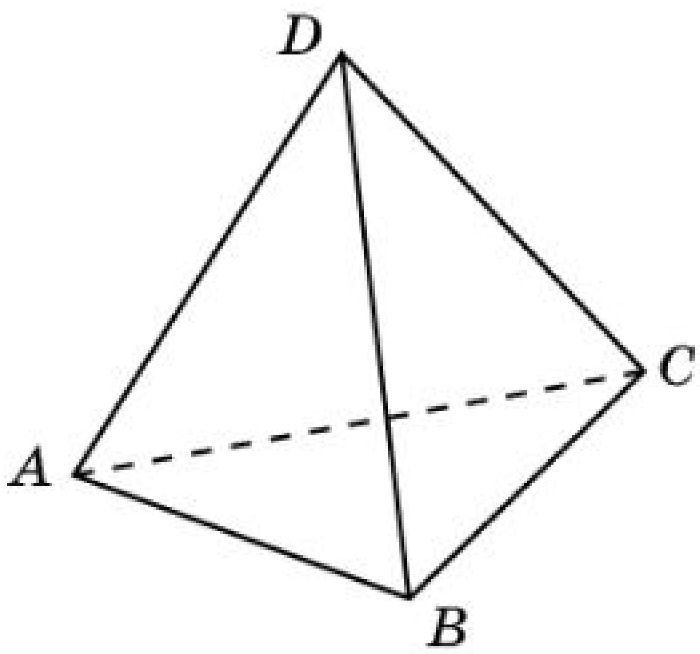
5.4-расм

5.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг AB ва B_1C_1 қирраларига параллел бўладими (5.3-расм)?

5.5. $ABCA_1B_1C_1$ призманинг параллел қирралари жуфтини ёзинг (5.4-расм).

5.6. $ABCA_1B_1C_1$ призманинг AB ва CC_1 қирралари параллел бўладими (5.4-расм)?

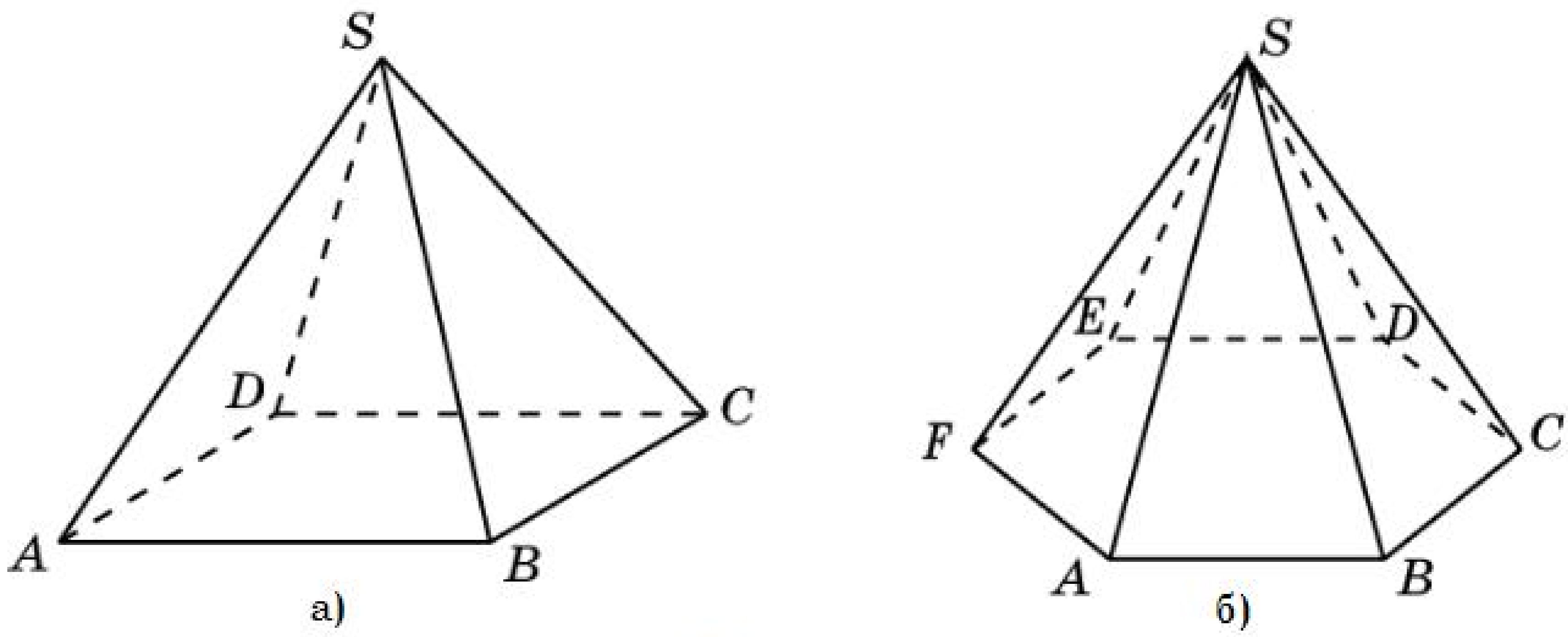
5.7. $ABCD$ тетраэдрнинг қарама-қарши ётган AB ва CD қирралари параллел бўладими (5.5-расм)?



5.5-расм

B

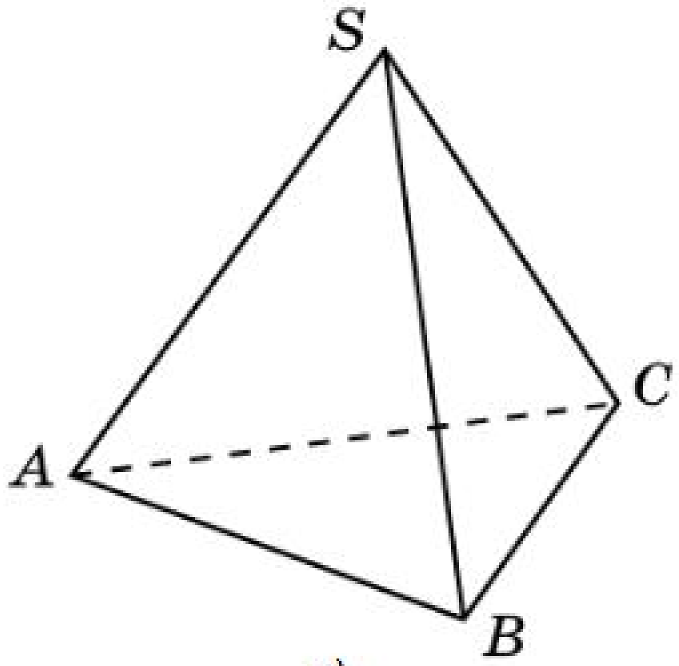
5.8. а) $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг (5.6, а-расм); б) $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг (5.6, б-расм) параллел қирраларининг жуфтини ёзинг.



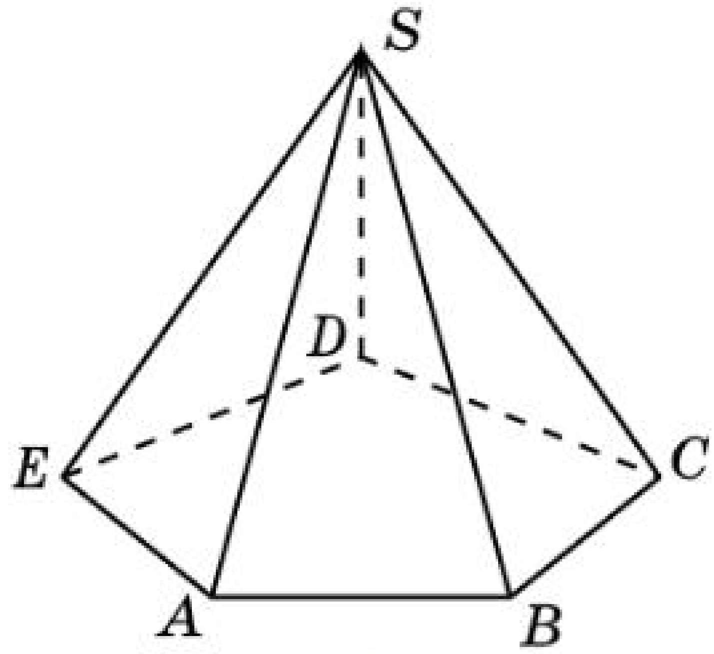
5.6-расм

5.9. Қуйидаги: а) $SABCD$ пирамиданинг (5.6, а-расм); б) $SABCDEF$ пирамиданинг (5.6, б-расм) AB ва SC қирралари параллел бўладими?

5.10. а) Мунтазам учбурчакли пирамиданинг (5.7, а-расм), мунтазам бешбурчакли пирамиданинг (5.7, б-расм) параллел қирралари мавжудми?



а)

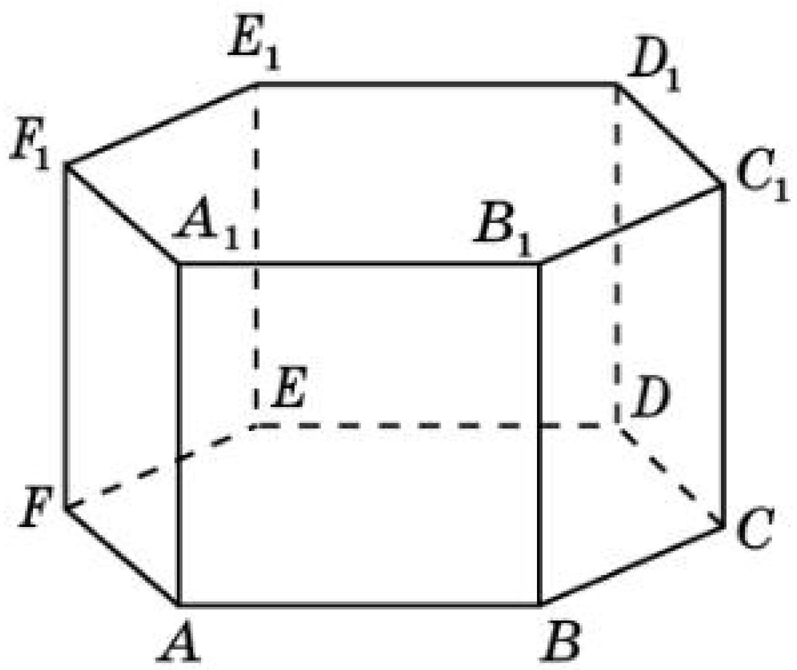


б)

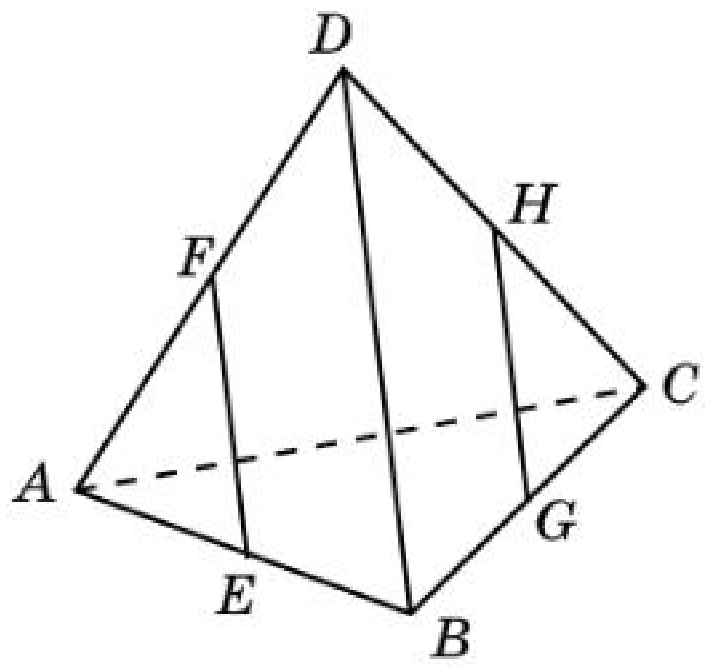
5.7-расм

5.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ олтибурчакли призма учун қуйидаги тўғри чизиқлар параллел эканлигини исботланг: а) AA_1 ва CC_1; б) AA_1 ва DD_1 (5.8-расм).

5.12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг қуйидаги қирраларига параллел қирраларини ёзинг: а) AA_1; б) AB (5.8-расм).



5.8-расм



5.9-расм

5.13. $ABCD$ тетраэдрда E, F, G, H нуқталари мос равишда AB, AD, BC, CD қирраларининг ўрталари (5.9-расм). EF ва GH тўғри чизиқлари параллел эканини исботланг.

5.14. Атроф оламдан параллел тўғри чизиқларни кўрсатувчи буюмларга мисоллар келтиринг.

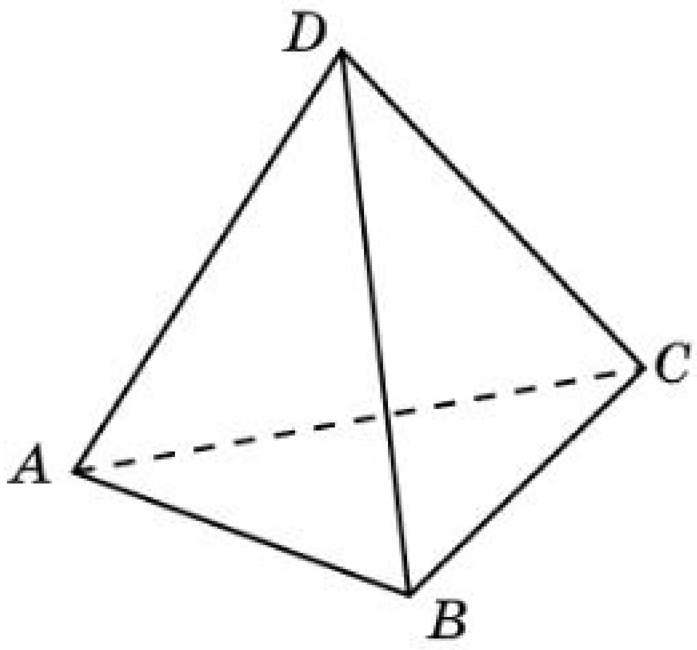
6-§. Фазода тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашиши

Фазода икки тўғри чизиқ кесишиши ёки параллел бўлишини биламиз. Текисликка нисбатан фазода тўғри чизиқларнинг жойлашишининг яна бир тури мавжуд: улар кесишмайди ва бир-бирига параллел эмас.

Фазода бир текисликда ётмайдиган ва кесишмайдиган икки тўғри чизиқлар *айқаш тўғри чизиқлар* дейилади.

Шунингдек икки кесма айқаш тўғри чизиқларда ётса, уларни *айқаш кесмалар* деб атайди.

Масалан, $ABCD$ тетраэдрда AB ва CD қирралари айқаш (6.1-расм).

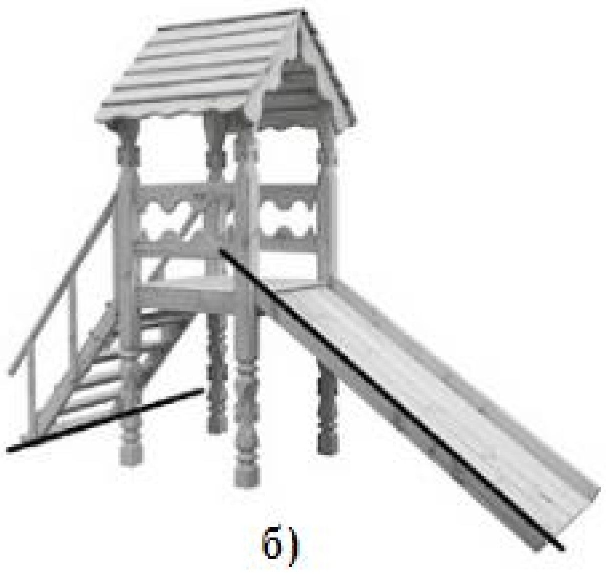


6.1-расм

Шуни ўзингиз исботлаб кўринг.

Айқаш тўғри чизиқларнинг кўргазмали кўриниши сифатида бири йўл кўприги бўйидан иккинчиси унинг остидан ўтадиган йўлларни (6.2, а-расм); Болалар сирпанчиғи бунда айқаш тўғри чизиқларнинг бири зинапоянинг энг пастки қавати, иккинчиси эса сирпанчиқ ёғинининг қиррасини айтиш мумкин (6.2, б-расм).


а)

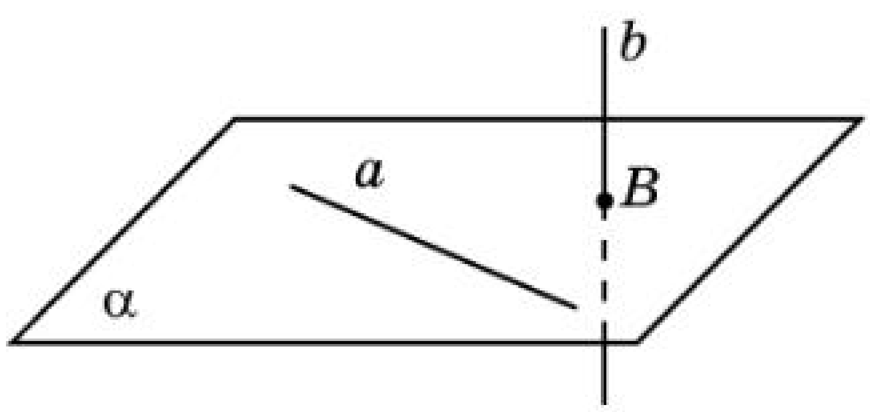

б)

6.2-расм

Шу билан бирга айқаш тўғри чизиқларни масалан хонанинг ёқлари билан асосининг кесишиш чизиқларида кўриш мумкин.

Теорема. (Айқашлик аломати) ***Агар тўғри чизиқларнинг биттаси берилган текисликда ётса, иккинчиси эса шу текисликни биринчи тўғри чизиққа тегишли бўлмаган нуқтада кесиб ўтса, у ҳолда бу икки тўғри чизиқ айқаш бўлади.***

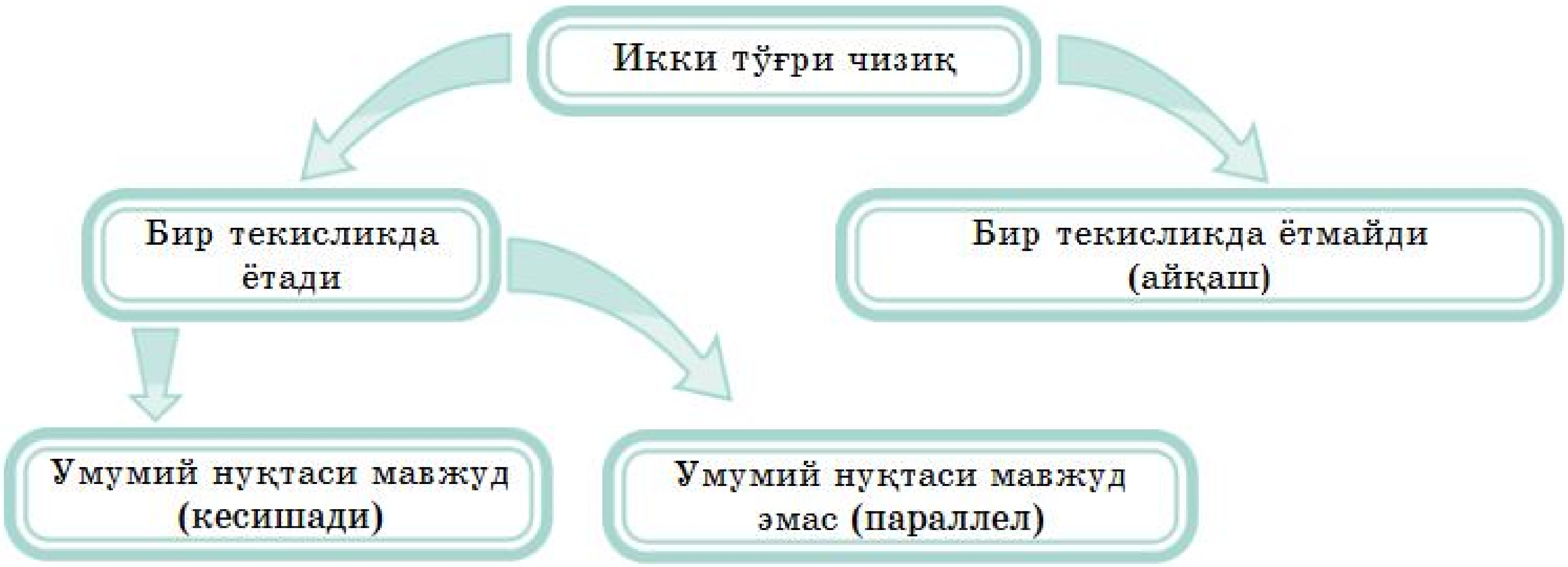
Исбот. a тўғри чизиқ α текисликда ётсин, b тўғри чизиқ эса α текисликни a тўғри чизиққа тегишли бўлмаган B нуқтада кесиб ўтсин (6.3-расм). Агар a ва b тўғри чизиқлар бир текисликда ётадиган бўлса, унда бу текисликда a тўғри чизиғи билан B нуқта ҳам ётган бўлар эди. Тўғри чизиқ ва шу тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқта орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкинлигидан бу текислик α текислиги бўлади. Бундай ҳолатда b тўғри чизиғи α текислигига тегишли бўлар эди. Бу эса масала шартига зид. Демак a ва b тўғри чизиқлар бир текисликда ётмайди, яъни улар айқаш бўлади. ◻



6.3-расм

Фазодаги икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашишини турли ҳолатларини қуйидаги схема турида кўрсатайлик.

6.1-схема



Учинчи тўғри чизиқ билан айқаш икки тўғри чизиқ айқаш бўлиши мумкинми? Мисол келтиринг.

Саволлар

1. Фазодаги қандай икки тўғри чизиқ айқаш тўғри чизиқ деб аталади?
2. Фазодаги қандай икки кесма айқаш кесма деб аталади?
3. Айқаш тўғри чизиқлар аломатини келтириб чиқаринг.

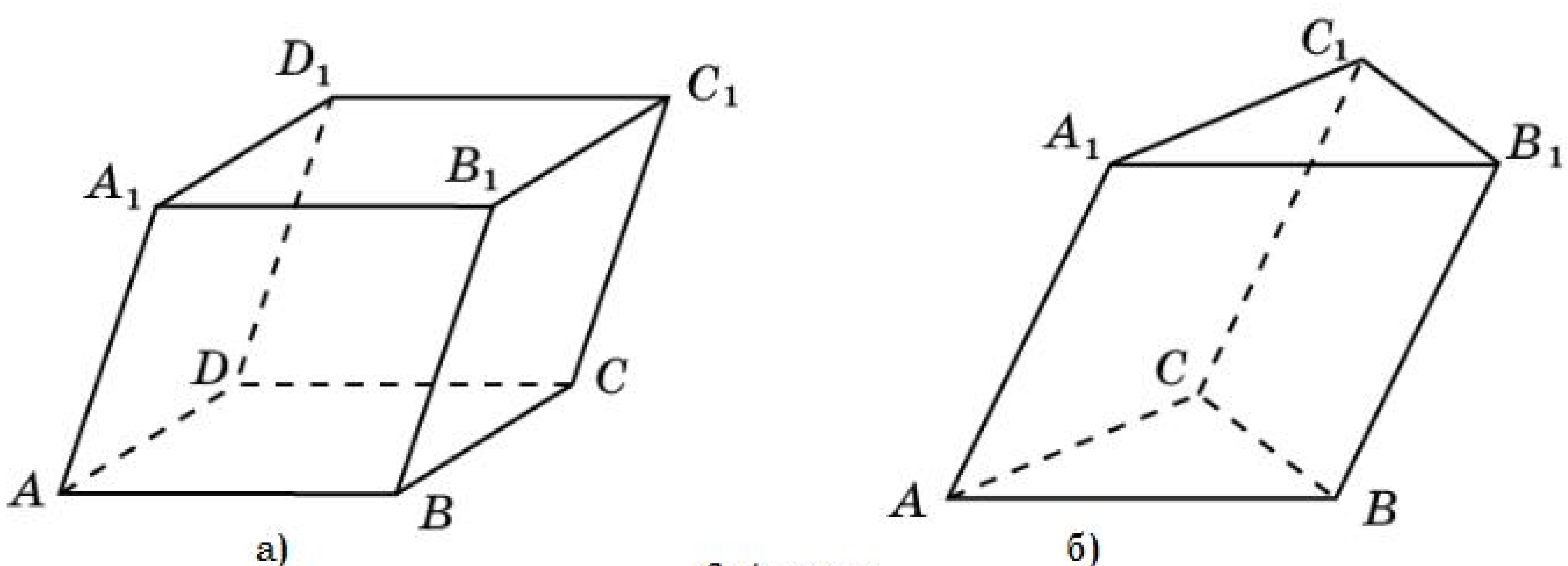
Масалалар

А

6.1. Агар икки тўғри чизиқ турли текисликларда ётса, у ҳолда улар айқаш эканлиги тўғрими?

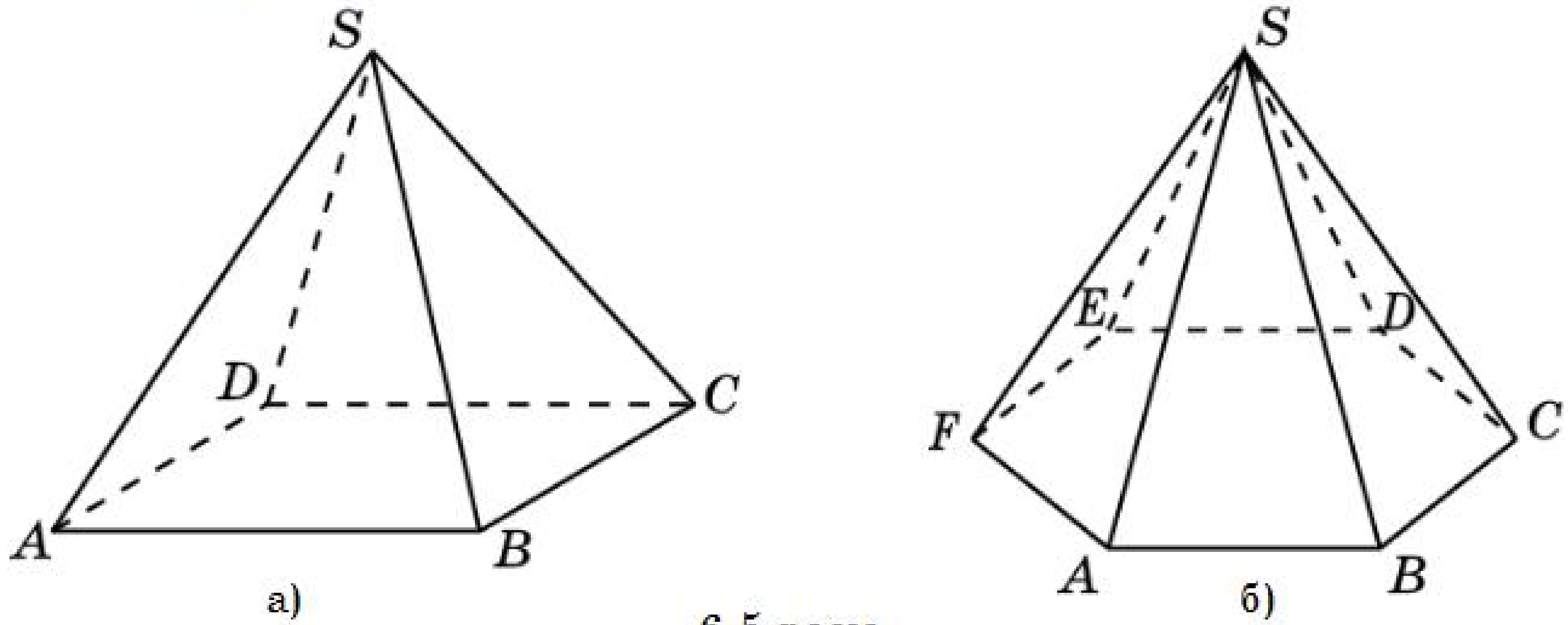
6.2. Берилган тўғри чизиқдан ташқарида ётган нуқта орқали шу тўғри чизиқ билан айқаш бўладиган нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

6.3. а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед; б) $ABCA_1B_1C_1$ призма учун AB қирраси билан айқаш қирраларини ёзинг (6.4, а, б-расмдар).



6.4-расм

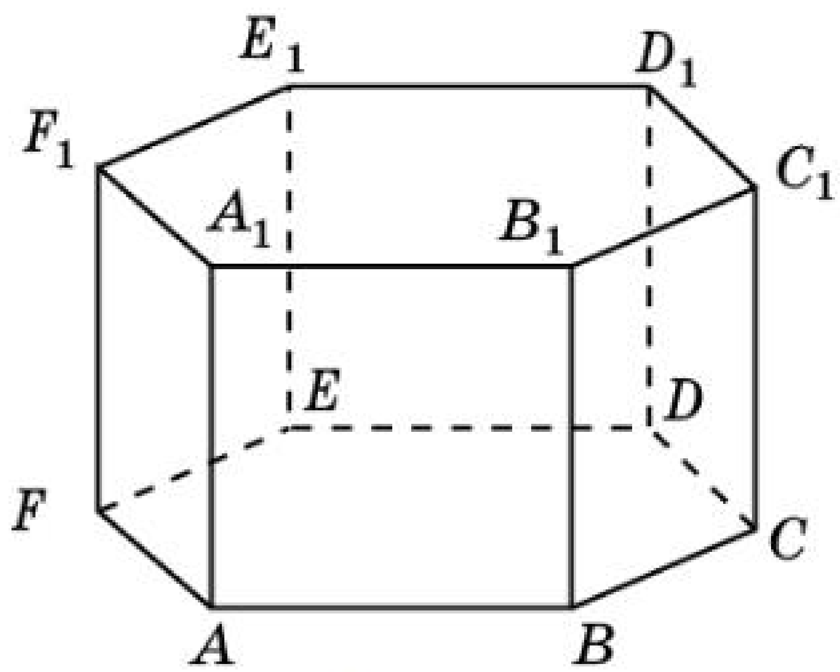
6.4. а) $SABCD$ тўртбурчакли пирамида (6.5, а-расм); б) $SABCDEF$ олтибурчакли пирамида (6.5, б-расм) учун SA қирраси билан айқаш қирраларини ёзинг.



6.5-расм

6.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ олтибурчакли призманинг: а) AA_1; б) AB қирралари билан айқаш қирраларини ёзинг (6.6-расм).

6.6. Тетраэдрнинг айқаш қирралари жуфти нечта бўлади?

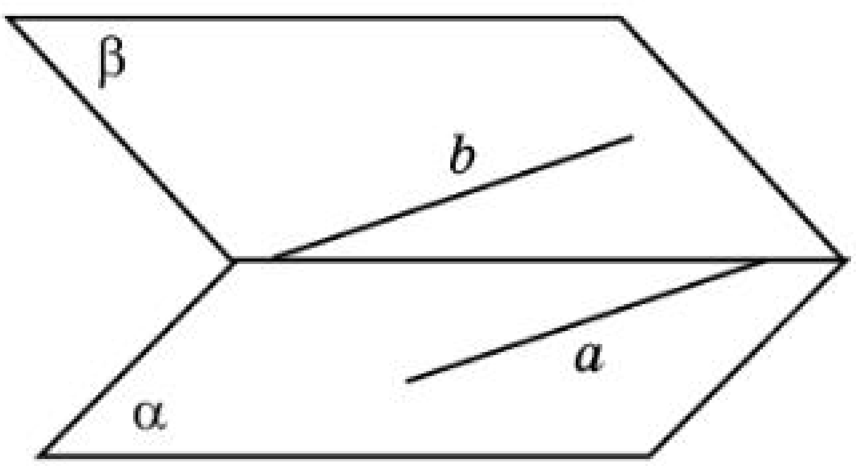


6.6-расм

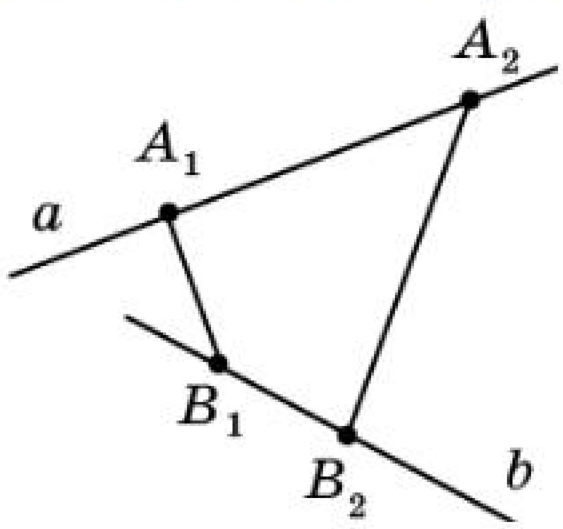
B

6.7 a тўғри чизиқ b тўғри чизиқ билан, b тўғри чизиқ c тўғри чизиқ билан айқаш. Шундан a тўғри чизиқ билан c тўғри чизиқ айқаш бўладими?

6.8. Фазодаги a ва b текисликларда жойлашган a ва b тўғри чизиқлар ўзаро қандай жойлашган (6.7-расм)? Жавобингизни тушунтиринг.



6.7-расм

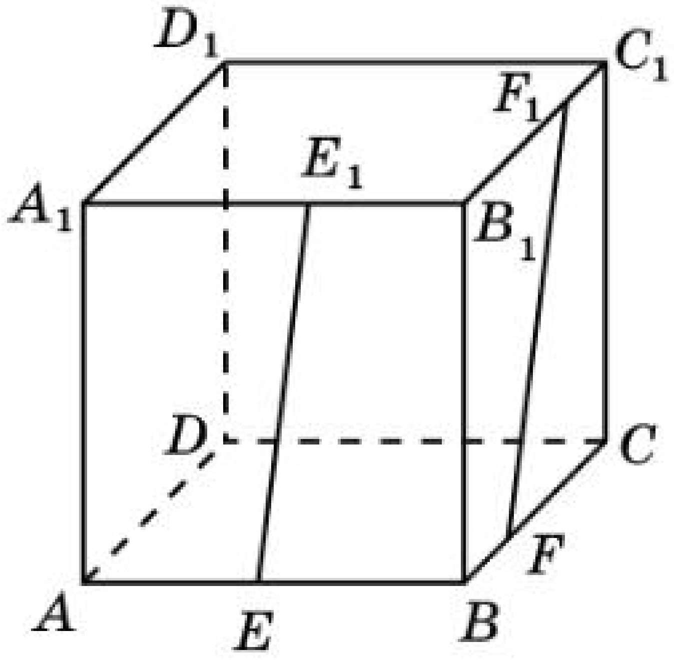


6.8-расм

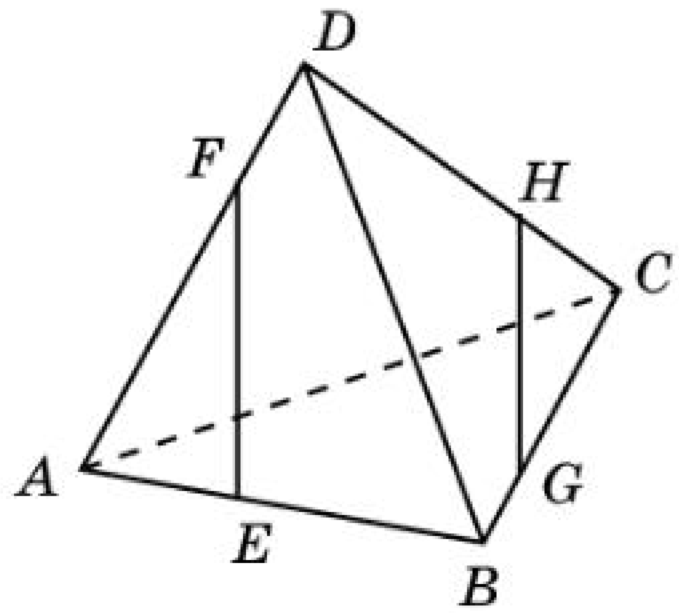
6.9. a ва b айқаш тўғри чизиқлар бўлсин (6.8-расм). A_1B_1 ва A_2B_2 тўғри чизиқлар a ва b тўғри чизиқларини кесиб ўтади. A_1B_1 ва A_2B_2 тўғри чизиқлари айқаш ёки параллел бўлиши мумкинми?

6.10. Тўртбурчакли пирамиданинг айқаш қирралари жуфти нечта бўлади?

6.11. EE_1 ва FF_1 тўғри чизиқлар ўзаро қандай жойлашган (6.9-расм)? Жавобингизни тушунтиринг.



6.9-расм

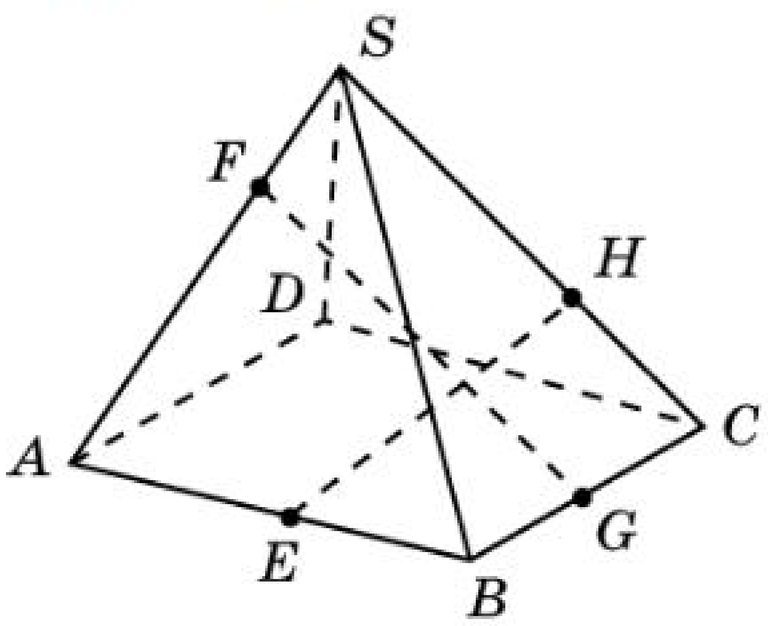


6.10-расм

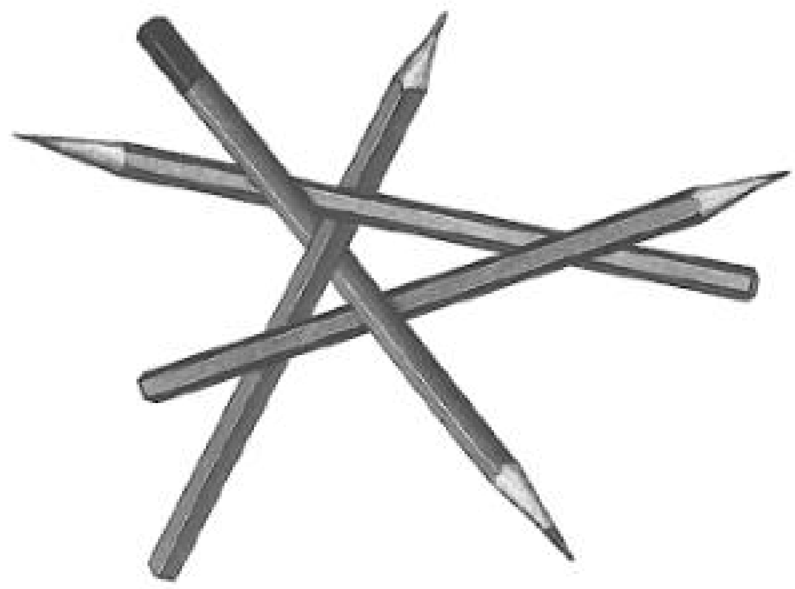
6.12. EF ва GH тўғри чизиқлар ўзаро қандай жойлашган (6.10-расм)? Жавобингизни тушунтиринг.

6.13. EH ва FG кесмалар кесишадими (6.11-расм)? Жавобингизни тушунтиринг.

6.14. Қаламлар 6.12-расмдагидай жойлашиши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.



6.11-расм



6.12-расм

6.15. Атрофимиздаги оламда айқаш тўғри чизиқларни кўрсатувчи буюмларга мисоллар келтиринг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

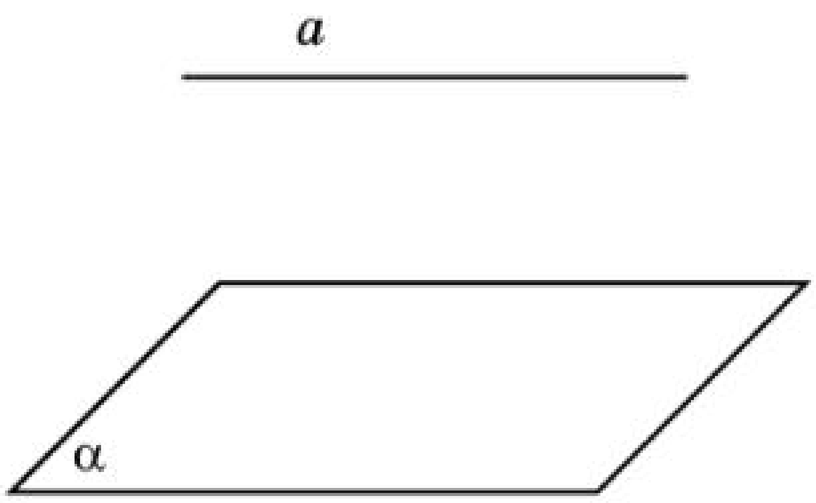
6.16. Тўғри чизиқ билан текисликнинг параллелиги тушунчасини аниқлаб кўринг.

7-§. Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашиши

Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашишини кўриб чиқайлик.

Тўғри чизиқ текисликда ётади, яъни тўғри чизиқнинг барча нуқталари текисликка тегишли бўлади. Тўғри чизиқ текисликни кесиб ўтади яъни тўғри чизиқ билан текисликнинг битта умумий нуқтаси мавжуд бўлади. Тўғри чизиқ билан текислик кесишмайди, яъни тўғри чизиқнинг текислик билан битта ҳам умумий нуқтаси бўлмайди.

Агар тўғри чизиқ текислик билан битта ҳам умумий нуқтага эга бўлмаса, унда бу тўғри чизиқ текисликка *параллел* деб айтилади (7.1-расм).



7.1-расм

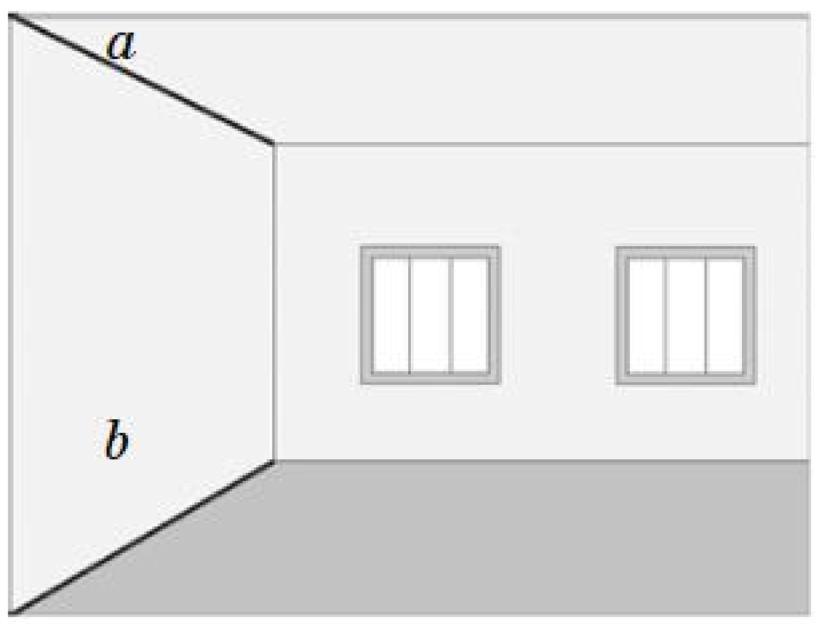
a тўғри чизиғи билан α текислигинининг параллелиги $a \parallel \alpha$ каби белгиланади.

Текисликка параллел тўғри чизиқларнинг кўргазмали кўринишлари сифатида троллейбуснинг ёки трамвайнинг тортилган симларини айтиш мумкин (7.2-расм).

а) б)

7.2-расм

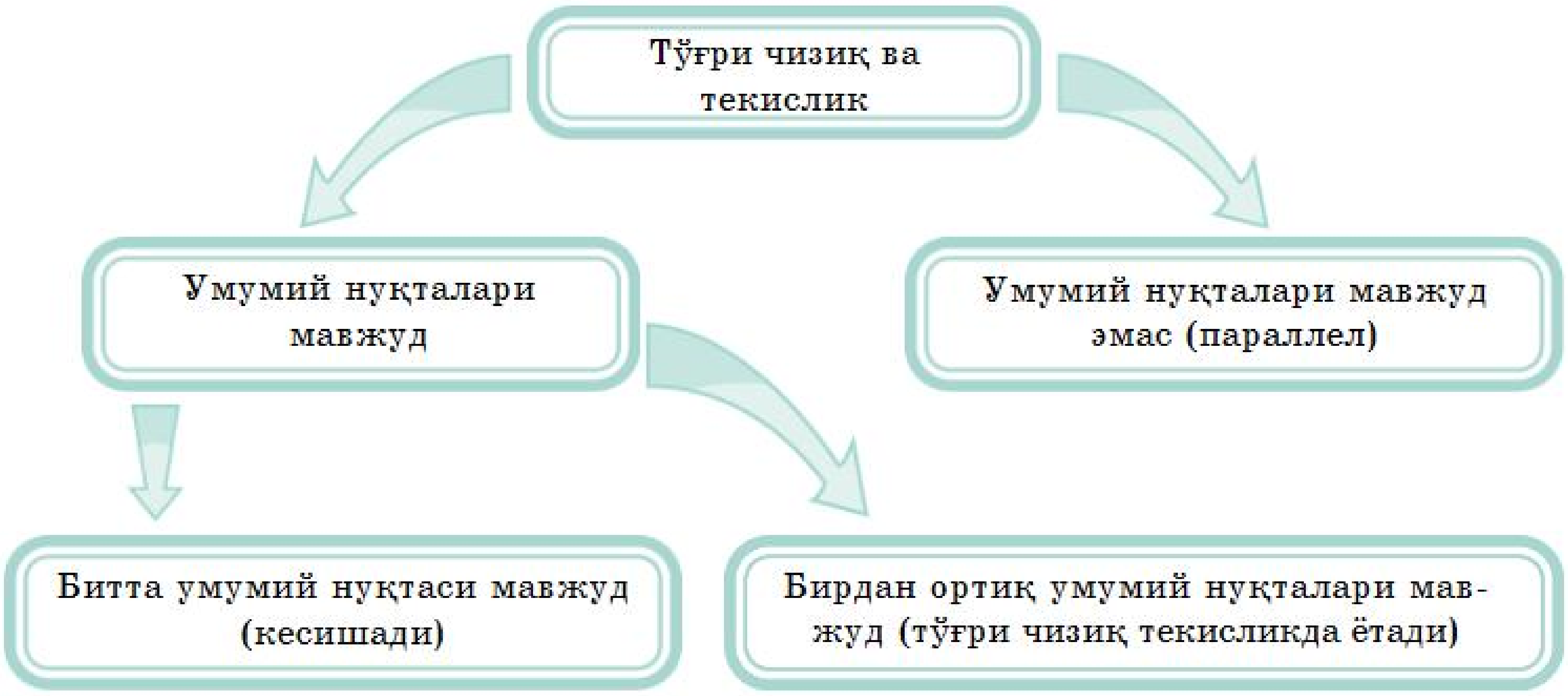
Шу билан бирга хонанинг қирралари билан асосининг кесишиш чизиқлари пол текислигига параллел бўлади (7.3-расм). Пол текислигида шу чизиққа параллел тўғри чизиқ мавжуд бўлишини кўрамиз. Бу тўғри чизиқ полнинг шу қирраси билан кесишиш чизиғи бўлиб ҳисобланади.



7.3-расм

Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашишининг турли ҳолатларини қуйидаги схема ёрдамида кўрсатайлик.

7.1-схема

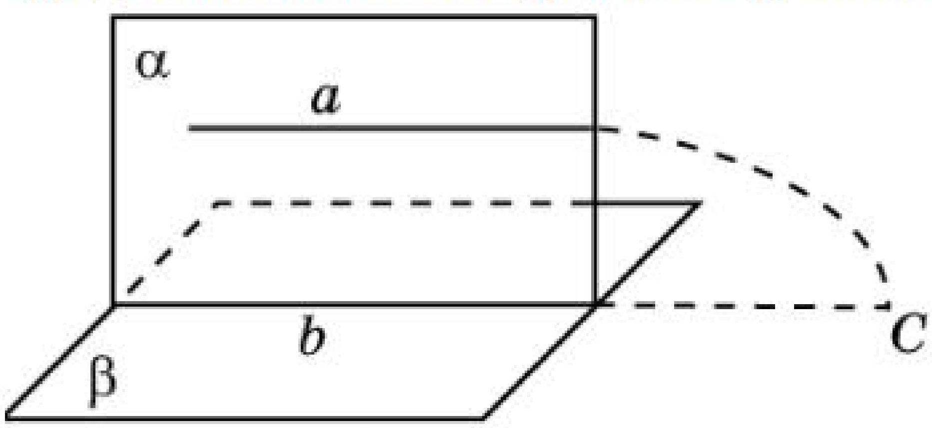


Агар кўпёқнинг қирраси кўпёқ ёғининг текислигига параллел тўғри чизиқда ётса, унда шу қирра кўпёқнинг шу ёғига параллел деб аталади.

Қуйидаги теорема тўғри чизиқ билан текисликнинг етарлилик шартини беради.

Теорема (тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик аломати). ***Агар текисликка тегишли бўлмаган тўғри чизиқ ана шу текисликдаги қандайдир бир тўғри чизиққа параллел бўлса, у ҳолда ушбу тўғри чизиқ текисликка ҳам параллел бўлади.***

Исбот. a тўғри чизиқ α текислигида ётсин ва шу текисликдаги b тўғри чизиғига параллел бўлсин (7.4-расм).



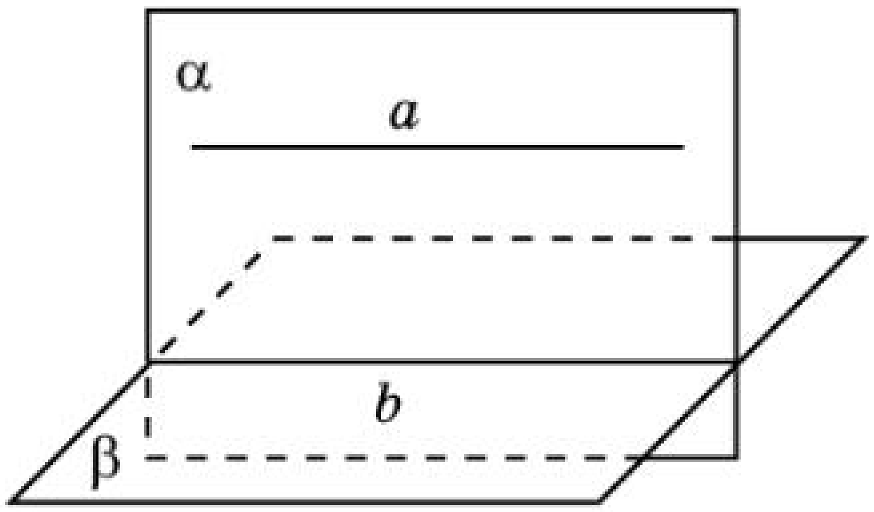
7.4-расм

a тўғри чизиқ b текислигига параллел эканлигини исботлайлик. Аксинча a тўғри чизиқ b текислигини қандайдир бир C нуқтада кесиб ўтсин дейлик. a ва b тўғри чизиқлари орқали ўтувчи а текислигини кўриб чиқайлик (шарт бўйича $a \parallel b$). C нуқта b текислигига ҳам, а текислигига ҳам тегишли, яъни уларнинг кесишиш чизиғи b тўғри чизиғига тегишли. Демак, a ва b тўғри чизиқлари кесишади. Бу эса шартга зид. Шундай қилиб $a \parallel$ b. ☐

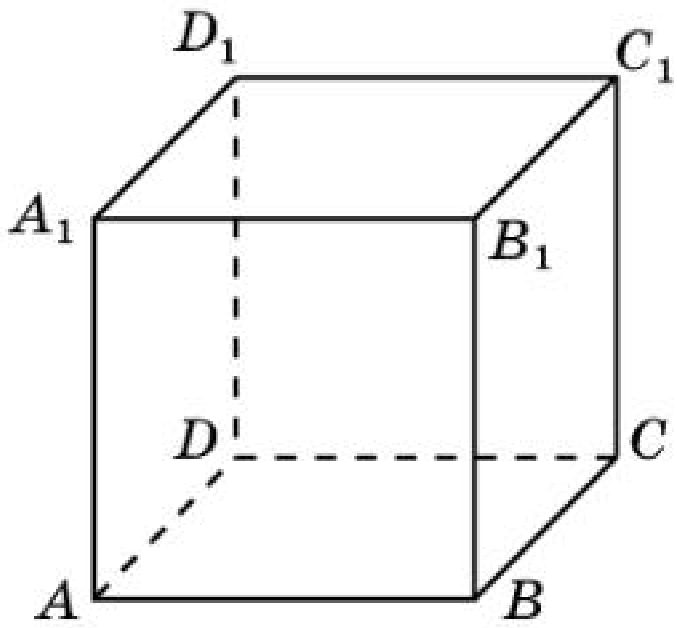
Берилган текисликда ётмайдиган нуқта орқали шу текисликка параллел нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

Теорема. ***Агар бир текислик иккинчи текисликка параллел тўғри чизиқ орқали ўтса ва у текислик билан кесишса, у ҳолда текисликларнинг кесишиш тўғри чизиғи биринчи тўғри чизиққа параллел бўлади.***

Исбот. α текислик β текисликка параллел a тўғри чизиқ орқали ўтсин ва шу текисликни b тўғри чизиқ орқали кесиб ўтсин (7.5-расм). a тўғри чизиқ билан β текисликнинг умумий нуқталари бўлмаганликдан, a ва b тўғри чизиқларнинг ҳам умумий нуқталари бўлмайди. Бу тўғри чизиқлар бир текисликда ётганлигидан улар параллел ҳисобланади. □



7.5-расм



7.6-расм

Масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб (7.6-расм) учун AA_1 тўғри чизиқ BCC_1 текисликка параллел эканлигини исботланг.

Ечиш. AA_1 тўғри чизиқ BCC_1 текисликдаги BB_1 тўғри чизиғига параллел ва шу текисликда ётмайди. Демак, AA_1 тўғри чизиқ BCC_1 текисликка параллел бўлади. □

Саволлар

1. Тўғри чизиқ билан текислик ўзаро қандай жойлашиши мумкин?
2. Қандай тўғри чизиқ текисликка параллел деб аталади?
3. Тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллик аломатини айтиб беринг?

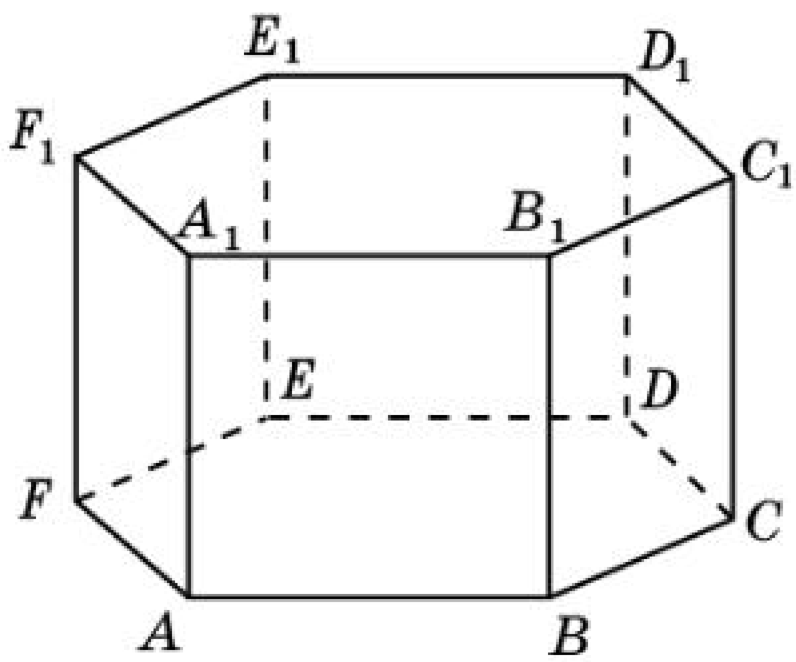
Масалалар

A

7.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг $ABCD$ ёғига параллел қирраларини кўрсатинг (7.6-расм).

7.2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг қуйидаги қирраларига параллел ёқларини кўрсатинг: а) AB; б) AA_1 (7.7-расм).

7.3. Бир текисликка параллел икки тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлиши тўғрими?



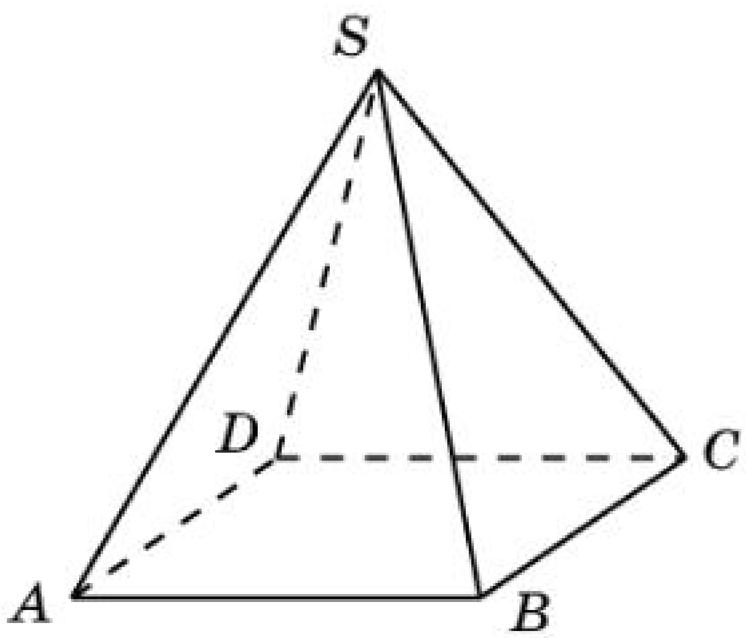
7.7-расм

7.4. Агар тўғри чизиқ текисликда ётган қандайдир бир тўғри чизиққа параллел бўлса, унда бу тўғри чизиқ текисликнинг ўзига ҳам параллел бўлиши тўғрими?

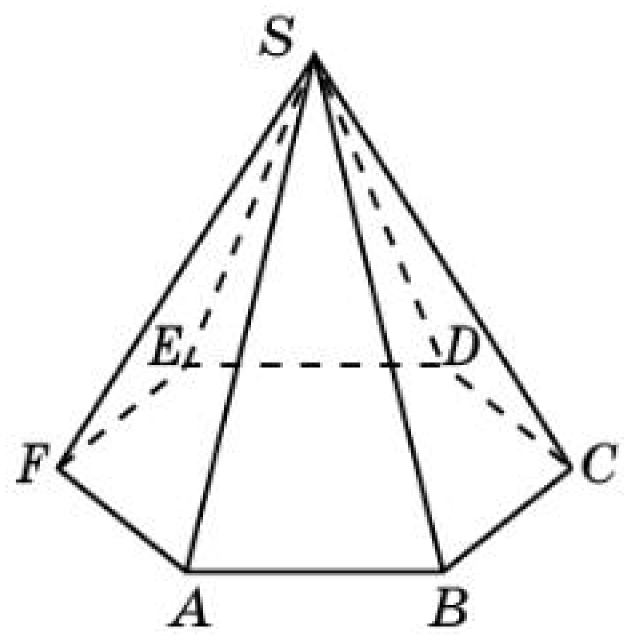
7.5. Икки параллел тўғри чизиқнинг бири текисликка параллел. Иккинчи тўғри чизиқ шу текисликка параллел бўлиши тўғрими?

B

7.6. *SABCD* мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг параллел қирралари билан ёқларини кўрсатинг (7.8-расм).



7.8-расм



7.9-расм

7.7. *SABCDEF* мунтазам олтибурчакли пирамиданинг параллел қирралари билан ёқларини кўрсатинг (7.9-расм).

7.8. *ABCD* параллелограмм берилган. *AB* қирраси орқали параллелограмм текислиги билан кесишмайдиган α текислик ўтказилган. $CD \parallel \alpha$ эканлигини исботланг.

7.9. *ABCDEF* мунтазам олтибурчакнинг *AF* қирраси олтибурчак текислиги билан кесишмайдиган α текислигида ётибди. α текислик билан параллел бўлган олтибурчакнинг томонини кўрсатинг.

7.10. Учбурчак икки томонининг ўрталари орқали учбурчак текислиги билан устма-уст тушмайдиган текислик ўтказилган. Шу текислик учбурчакнинг учинчи томонига параллел бўлишини исботланг.

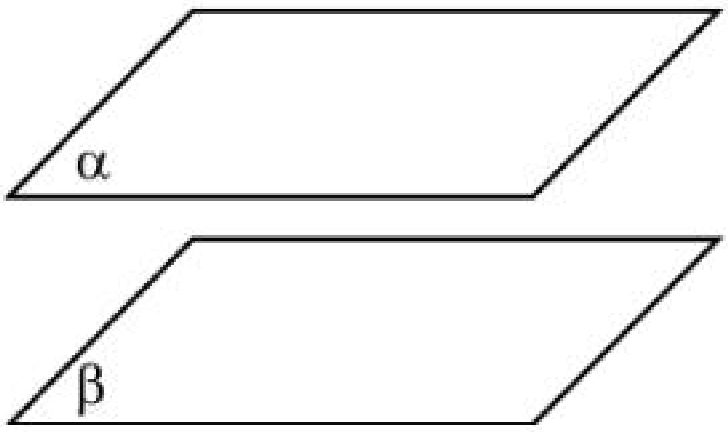
7.11. Атрофимиздаги оламдан ўзаро параллел тўғри чизиқ билан текисликни кўрсатувчи буюмларга мисол келтиринг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

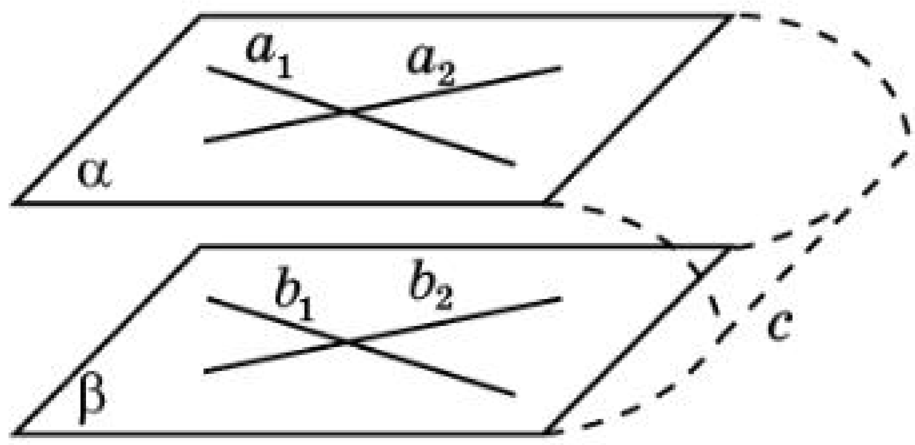
7.12. Икки текисликнинг параллеллиги тушунчасини аниқлаб кўринг.

8-§. Текисликларнинг параллеллиги

Кесишмайдиган, яъни битта ҳам умумий нуқтаси бўлмаган икки текислик *параллел текисликлар* деб аталади (8.1-расм).



8.1-расм



8.2-расм

Икки текисликнинг ўзаро жойлашишини турли ҳолатларини схема ёрдамида кўрсатайлик.

8.1-*схема*

Қуйидаги теорема икки текисликнинг параллеллигининг етарлилик шарти.

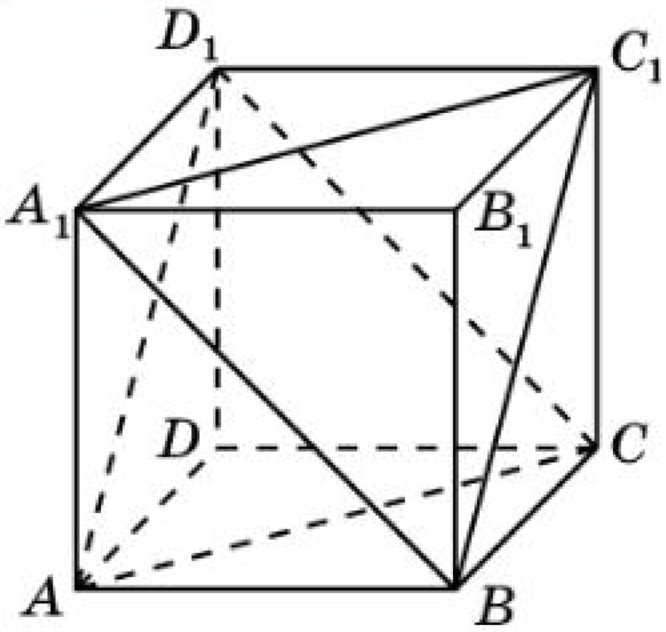
Теорема. (Икки текисликнинг параллеллик аломати) ***Агар бир текисликда ётадиган кесишувчи икки тўғри чизиқнинг ҳар бири иккинчи текисликка параллел бўлса, у ҳолда бу текисликлар параллел бўлади.***

Исбот. α текисликда кесишган a_1, a_2 тўғри чизиқлар β текисликдаги мос равишда b_1, b_2 тўғри чизиқларга параллел бўлсин (8.2-расм). α ва β текисликлар параллел бўлишини исботлайлик.

Аксинча α ва β текисликлар c тўғри чизиқ бўйича кесишади деб ҳисоблайлик. Тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик аломати бўйича a_1 тўғри чизиқ β текислигига параллел бўлади. Демак, у c тўғри чизиғига ҳам параллел (a_1 ва c тўғри чизиқлар бир текисликда ётади ва кесишмайди). Шунга ўхшаш a_2 тўғри чизиқ c тўғри чизиғига ҳам параллел бўлади. Шу билан α текисликда бир тўғри чизиққа параллел бўлган кесишувчи икки тўғри чизиқни ҳосил қиламиз. Бундай бўлиши мумкин эмас. Олинган зидлик бизнинг α ва β текисликлар кесишиши тўғрисидаги тушунчанинг тўғри эмаслигини кўрсатади. У ҳолда, улар параллел текисликлар.

Берилган текисликда ётмайдиган нуқта орқали шу текисликка параллел нечта текислик ўтказиш мумкин?

Кўпёқнинг икки ёғи параллел текисликларда ётса, у ҳолда улар параллел деб айтилади.



8.3-расм

Масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ACD_1 ва BA_1C_1 текисликлар параллел бўлишини исботланг (8.3-расм).

Ечиш. AC тўғри чизиқ A_1C_1 тўғри чизиқ ва CD_1 тўғри чизиқ BA_1 тўғри чизиқ параллел бўлади. Шу билан ACD_1 текислигида ётган кесишувчи икки тўғри чизиқ BA_1C_1 текислигидаги мос икки тўғри чизиққа параллел бўлади. Демак, ACD_1 ва BA_1C_1 текисликлар параллел бўлади.

Саволлар

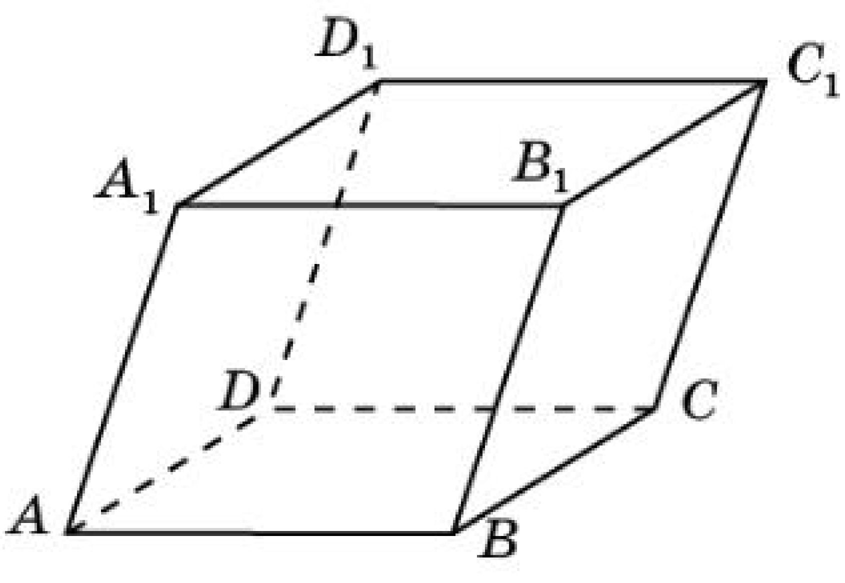
1. Қандай икки текислик параллел деб аталади?
2. Икки текисликнинг ўзаро жойлашиш ҳолатларини айтинг.
3. Икки текисликнинг параллеллик аломатини айтиб беринг

Масалалар

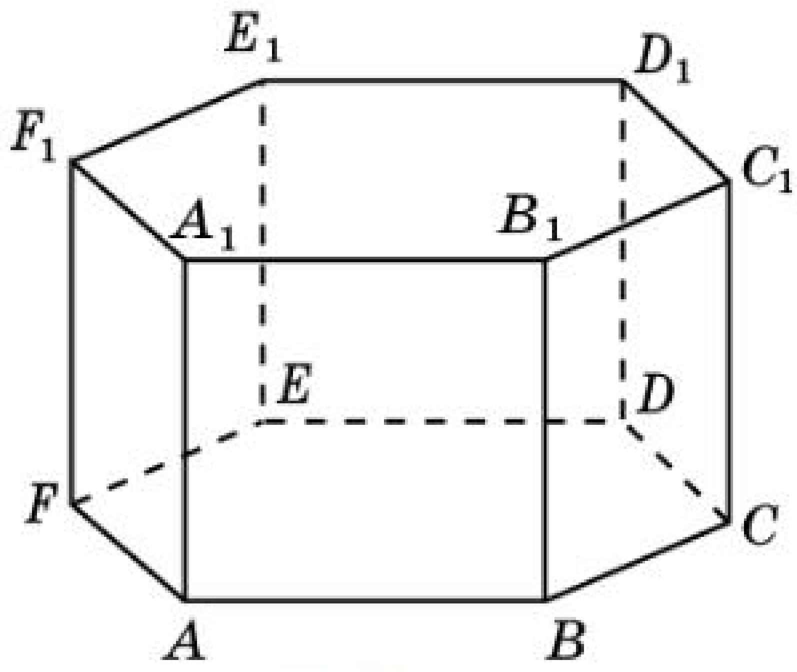
A

8.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг ёқлари ётган параллел текисликларни кўрсатинг (8.4-расм).

8.2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ёқлари ётган параллел текисликларни кўрсатинг (8.5-расм).



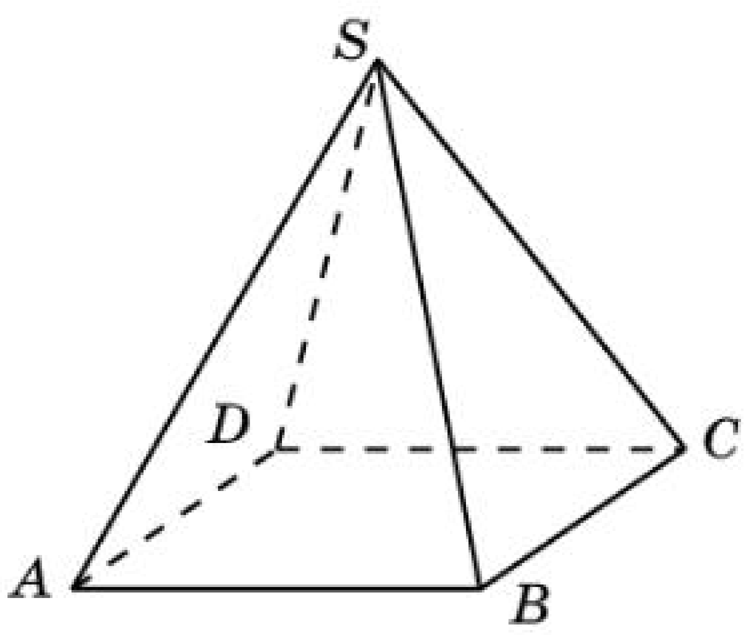
8.4-расм



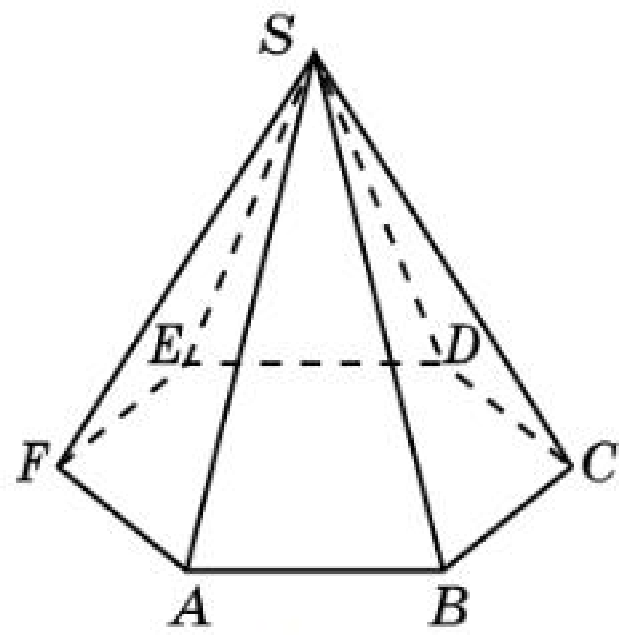
8.5-расм

8.3. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг параллел ёқлари бўладими (8.6-расм)?

8.4. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг параллел ёқлари бўладими (8.7-расм)?



8.6-расм



8.7-расм

В

8.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедда қуйидаги текисликлар параллел бўлишини исботланг: а) ABB_1 ва CDD_1; б) AB_1D_1 ва BDC_1.

8.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада қуйидаги текисликлар параллел бўлишини исботланг: а) ABC ва $A_1B_1C_1$; б) ABB_1 ва DEE_1; в) ABB_1 ва CFF_1; г) ACC_1 ва DFF_1.

8.7. Қуйидаги мулоҳаза тўғрими: “Агар бир текисликда ётган тўғри чизиқ иккинчи текисликдаги тўғри чизиққа параллел бўлса, унда бу текисликлар параллел бўлади?

8.8. Қуйидаги мулоҳаза тўғрими: “Агар бир текисликда ётган икки тўғри чизиқ иккинчи текисликдаги икки тўғри чизиққа параллел бўлса, унда бу текисликлар параллел бўлади”?

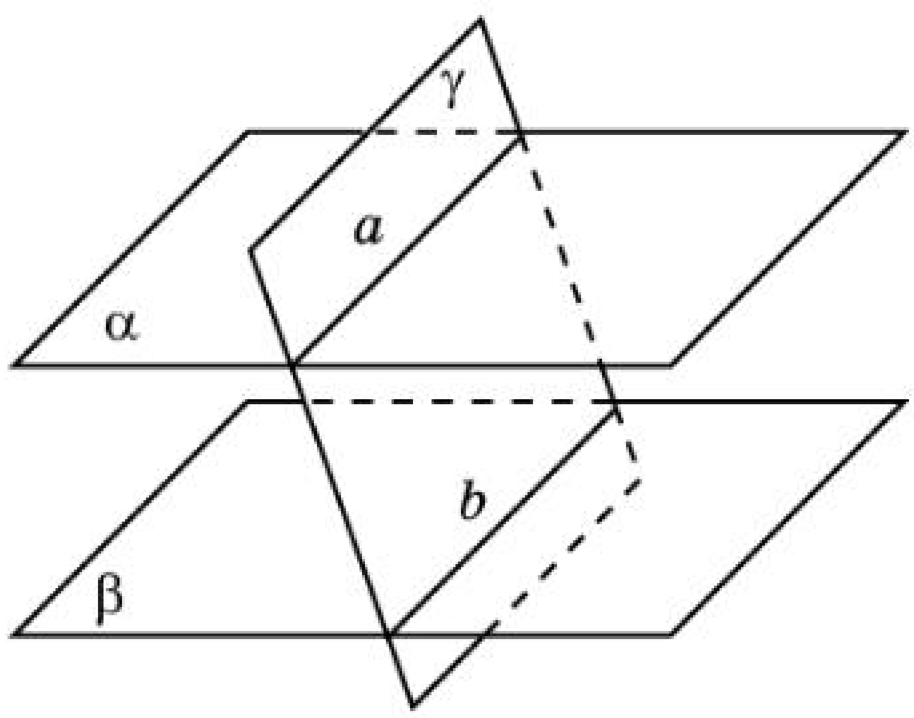
8.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ABC_1 ва BCD_1 текисликларнинг кесишиш чизиғини кўрсатинг.

8.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада ABC_1 ва BCD_1 текисликларнинг кесишиш чизиғини кўрсатинг.

8.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада ABC_1 ва CD_1E_1 текисликларнинг параллел бўлишини исботланг.

8.12. Агар параллел икки текислик учинчи текислик билан кесишса, унда уларнинг кесишиш тўғри чизиқлари параллел бўлади (8.8-расм).

8.13. Атрофимиздаги оламдан параллел текисликларни кўрсатувчи буюмларга мисоллар келтиринг.



8.8-расм

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

8.14. Текисликдаги бурчакнинг таърифини такрорланг.
8.15. Фазодаги бурчак тушунчасини аниқлаб кўринг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. a ва b тўғри чизиқлар берилган. a тўғри чизиқ орқали берилган тўғри чизиқлар ётган текисликдан бошқа a текислиги ўтади. b тўғри чизиқ билан a текислиги ўзаро қандай жойлашади?
   A. b тўғри чизиқ a да ётади. B. b тўғри чизиқ a ни кесиб ўтади.
   C. b тўғри чизиқ a га параллел. D. Аниқлаш мумкин эмас.
2. Бир текисликда ётмайдиган учта параллел тўғри чизиқларнинг турли жуфтлари орқали нечта текислик ўтказиш мумкин?
   A. Битта. B. Иккита.
   C. Учта. D. Олтита.
3. Икки параллел тўғри чизиқнинг ҳар бири орқали текисликлар ўтказилган. Бу икки текислик кесишади. Уларнинг кесишиш чизиғи берилган тўғри чизиқларга нисбат қандай жойлашган?
   A. Уларга параллел.
   B. Уларни кесади.
   C. Уларнинг бири билан устма-уст тушади.
   D. Уларга айқаш.
4. Айқаш a, b тўғри чизиқлар ва a тўғри чизиқда ётадиган A нуқта берилган. a тўғри чизиқ билан A нуқта ва b тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик ўзаро қандай жойлашган?
   A. a тўғри чизиқ текисликни кесади.
   B. a тўғри чизиқ текисликка параллел.
   C. a тўғри чизиқ текисликда ётади.
   D. Аниқлаш мумкин эмас.
5. a текислиги b текислигига параллел бўлган a тўғри чизиқ билан кесишади. a ва b текисликлар ўзаро қандай жойлашган?
   A. Параллел. B. Устма-уст тушади.
   C. Кесишади. D. Аниқлаш мумкин эмас.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб учун AB қиррасига параллел бўлган қиррасини кўрсатинг.
   A. CC_1. B. DD_1.
   C. B_1C_1. D. C_1D_1.

7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призма учун B_1C_1 қиррасига параллел бўлган қиррасини кўрсатинг.

A. AA_1. B. EF.
C. C_1D_1. D. DE.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб учун AA_1 қиррасига айқаш бўлган қиррасини кўрсатинг.

A. BC. B. BB_1.
C. AB. D. A_1D_1.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призма учун AB қиррасига айқаш бўлган қиррасини кўрсатинг.

A. CD. B. EF.
C. DD_1. D. D_1E_1.

10. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамида учун SA қиррасига айқаш бўлган қиррасини кўрсатинг.

A. AB. B. SC.
C. SD. D. BC.

11. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида учун BC қиррасига айқаш бўлган қиррасини кўрсатинг.

A. DE. B. SB.
C. SA. D. AF.

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб учун CC_1 қиррасига параллел бўлган текисликни кўрсатинг.

A. ABC. B. ABC_1.
C. BDA_1. D. BDD_1.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб учун BC_1 қиррасига параллел бўлган текисликни кўрсатинг.

A. ACD_1. B. ACB_1.
C. ADB_1. D. CDA_1.

14. Ихтиёрий $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ олтибурчакли призма учун AF қиррасига параллел бўлган текисликни кўрсатинг.

A. BEE_1. B. BDD_1.
C. BCC_1. D. CEE_1.

15. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида учун CD қиррасига параллел бўлган текисликни кўрсатинг.

A. SAB. B. SAF.
C. SBC. D. SEF.

II боб

ФАЗОДА БУРЧАК. ФАЗОДА МАСОФА

9-§. Фазода тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

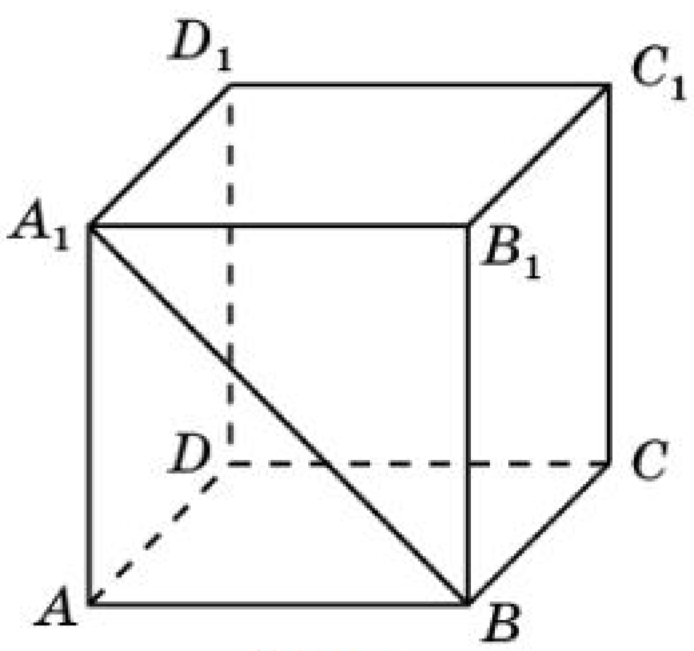
Фазода бурчак тушунчаси текисликдаги бурчак тушунчасига ўхшаш аниқланади.

Фазодаги бурчак деб, учлари умумий икки нурдан ва улар билан чегараланган текисликнинг бир бўлагидан (шу нурлар ётган) тузилган фазодаги фигурага айтилади.

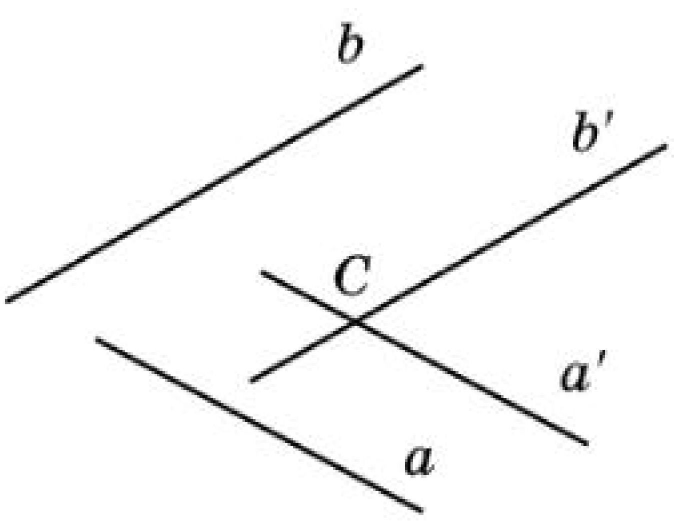
Фазода кесишувчи икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб, учлари кесишиш нуқтасидаги шу тўғри чизиқларнинг нурларидан ясалган бурчакларнинг кичигига айтилади.

Фазода тўғри бурчак ясаб, кесишувчи икки тўғри чизиқ *перпендикуляр тўғри чизиқлар* деб аталади.

Кесишувчи икки кесма перпендикуляр тўғри чизиқларда ётса, уларни перпендикуляр кесмалар дейилади. Кесишувчи икки кесма орасидаги бурчак деб, уларга мос тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка айтилади.



9.1-расм



9.2-расм

Масалан, кубнинг кесишувчи қирралари ўзаро перпендикуляр, кубнинг ёғининг диагонали шу ёқнинг қирралари билан 45° бурчак ясайди (9.1-расм).

Текисликдаги каби агар фазода бири иккинчисини тўлдирса, ёки уларнинг учларидан ўтувчи тўғри чизиққа қараганда бир томонда(ёғида) параллел тўғри чизиқларда ётса, унда улар *бир хил йўналган*(*йўналишдош*) деб аталади.

Текисликдаги бурчакнинг хоссасига ўхшаш фазодаги бурчакнинг қуйидаги хоссалари ўринли бўлади.

1-хосса. *Мос томонлари йўналишдош икки бурчак тенг бўлади.*

2-хосса. *Мос параллел тўғри чизиқлардан ясалган икки бурчак тенг бўлади.*

Мос томонлари параллел бўлган икки бурчак ҳар доим тенг бўладими? Мисол келтиринг.

Энди айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак тушунчасини аниқлаймиз.

a ва b — айқаш тўғри чизиқлар бўлсин (9.2-расм). Фазода қандайдир бир C нуқтани олиб, шу нуқта орқали a ва b тўғри чизиқларга параллел мос a', b' тўғри чизиқларини ўтказамиз.

Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб, уларга мос параллел кесишувчи тўғри чизиқларнинг орасидаги бурчакка айтилади.

Параллел томонларнинг орасидаги бурчаклар тенг бўлганликдан бу таъриф C нуқтани танлашга боғлиқ эмас. Хусусий ҳолда C нуқта a ёки b тўғри чизиқда ётиши ҳам мумкин. Бундай ҳолатда a' ёки b' тўғри чизиқ учун мос равишда a ёки b тўғри чизиқни ўзини олиш мумкин.

Агар икки айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак тўғри бўлса, унда улар *перпендикуляр* деб аталади.

Берилган тўғри чизиқда: а) ётадиган; б) ётмайдиган нуқта орқали берилган тўғри чизиққа перпендикуляр нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

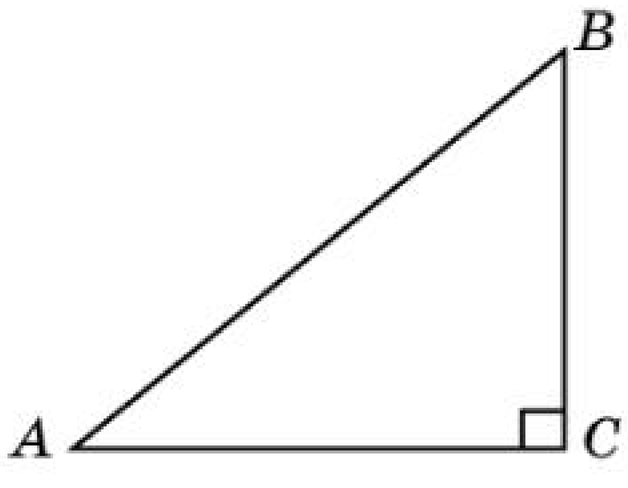
Агар икки кесма перпендикуляр тўғри чизиқларда ётса, унда уларни перпендикуляр деб аталади.

Фазодаги *икки кесма орасидаги бурчак* деб, шу кесмалар ётган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка айтилади.

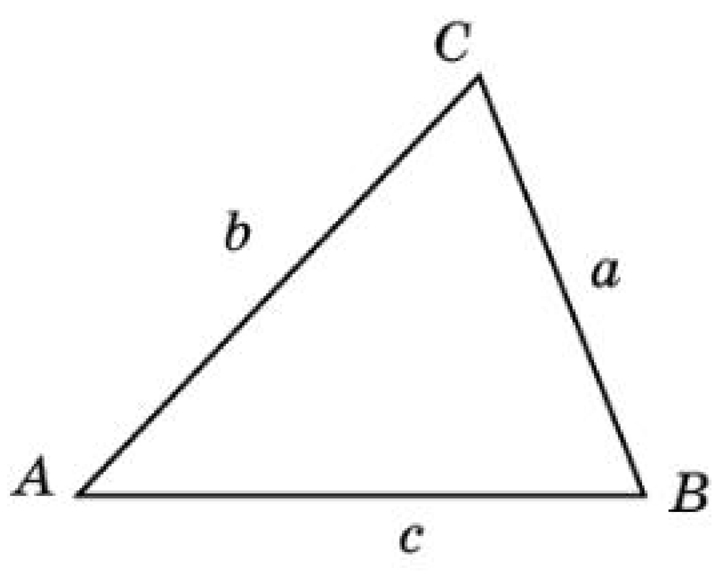
Учбурчакнинг бурчакларини топиш учун тригонометрик функциялардан фойдаланиш мумкинлигини эсга солайлик.

Масалан, C тўғри бурчаги бўлган ABC учбурчакнинг томонлари маълум бўлса (9.3-расм), унда унинг A ўткир бурчагини қуйидаги тригонометрик функцияларнинг бирини қўллаб топиш мумкин:

$$\sin A = \frac{BC}{AB},\ \cos A = \frac{AC}{AB},\ \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC},\ \operatorname{ctg} A = \ .$$



9.3-расм



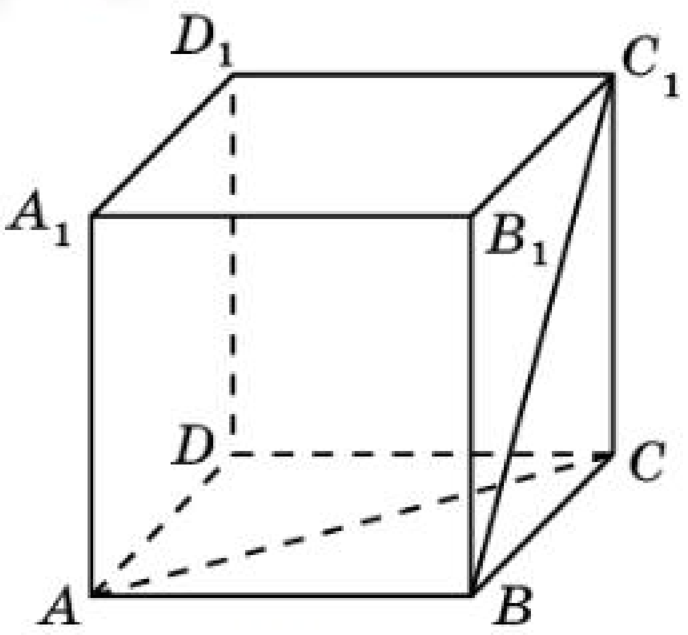
9.4-расм

Томонлари $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ бўлган ихтиёрий ABC учбурчакнинг C бурчагини топиш учун косинуслар теоремасини қўллаш мумкин (9.4-расм):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

У ҳолда,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

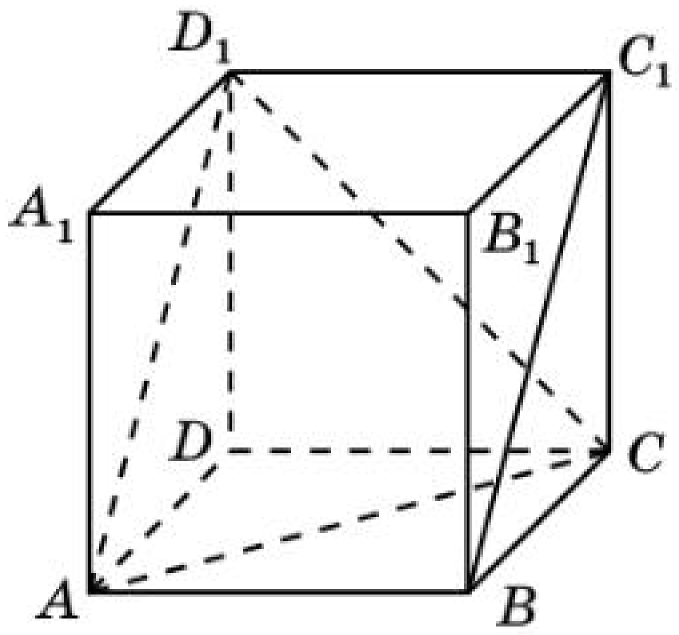


9.5-расм

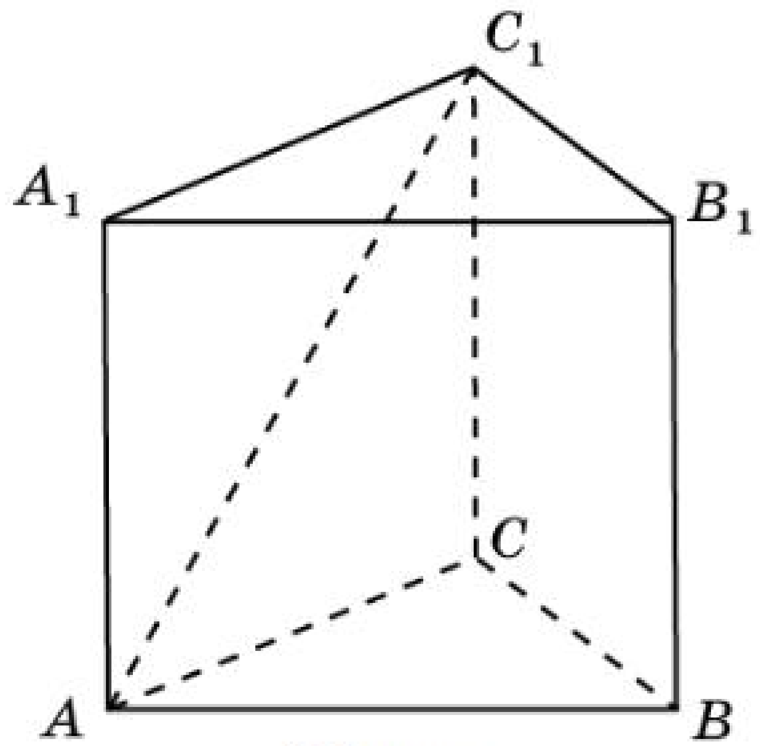
1-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC ва BC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг (9.5-расм).

Ечиш. BC_1 тўғри чизиққа параллел AD_1 тўғри чизиқни ўтказамиз. AC ва BC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак. AC ва AD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка тенг бўлади. Шу бурчакни топиш учун ACD_1 учбурчакни кўриб чиқайлик (9.6-расм). У тенг томонли учбурчак бўлади. Демак, изланган CAD_1 бурчак 60° га тенг.

2-мисол. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (9.7-расм). AC_1 ва A_1B_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.



9.6-расм



9.7-расм

Ечиш. A_1B_1 тўғри чизиқ AB тўғри чизиққа параллел бўлганликдан, изланаётган бурчак BAC_1 бурчагига тенг бўлади. ABC_1 учбурчакда $AB = 1$, $AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$. Косинуслар теоремаси бўйича

$$BC_1^2 = AB^2 + AC_1^2 - 2AB \cdot AC_1 \cdot \cos\angle BAC_1.$$

AB, AC_1, BC_1 узунликларининг қийматларини қўйиб, қуйидагини топамиз: $\cos\angle BAC_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Саволлар

1. Фазода бурчак деганимиз нима?
2. Фазодаги кесишувчи икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деганимиз нима?
3. Икки айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деганимиз нима?
4. Фазодаги қандай икки тўғри чизиқ перпендикуляр деб аталади?
5. Фазодаги бурчаклар учун қандай хоссалар ўринли бўлади?
6. Томонлари берилган тўғри бурчакли учбурчакнинг бурчакларини қандай топиш мумкин?
7. Томонлари берилган ихтиёрий учбурчакнинг бурчакларини қандай топиш мумкин?

Масалалар

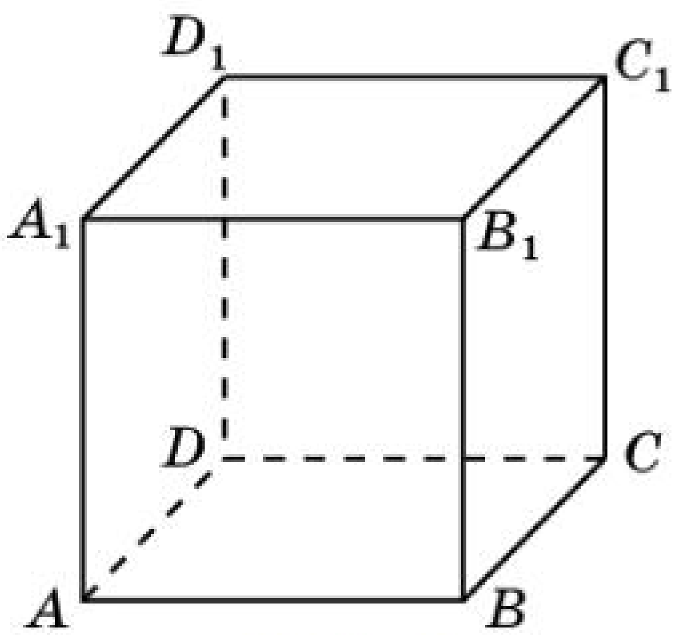
A

9.1. Фазода тўғри чизиқ ва унда ётувчи нуқта олинган. Шу нуқта орқали ўтиб, берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

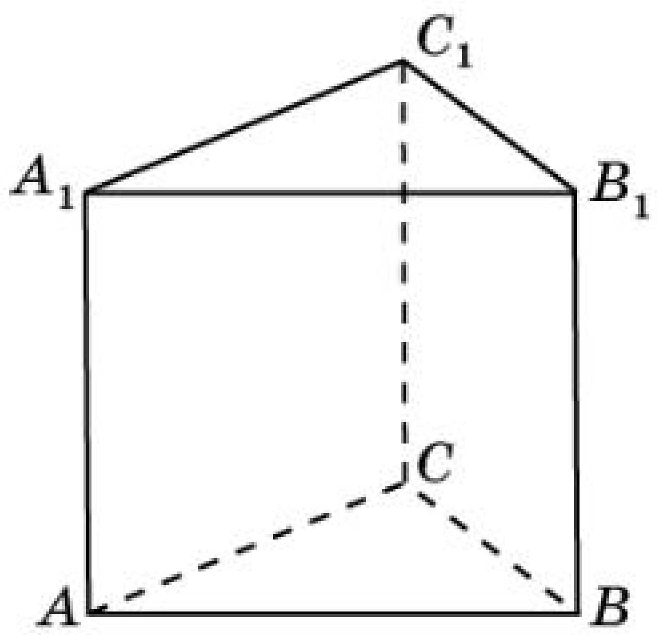
9.2. Тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта берилган. Шу нуқта орқали ўтиб, берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган нечта тўғри чизиқ ясаш мумкин?

9.3. Текисликда учинчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ параллел бўлади. Шу мулоҳаза фазо учун тўғрими?

9.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг AB қиррасига перпендикуляр бўлган қирраларни кўрсатинг (9.8-расм).



9.8-расм



9.9-расм

9.5. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг BB_1 қиррасига перпендикуляр бўлган қирраларини кўрсатинг (9.9-расм).

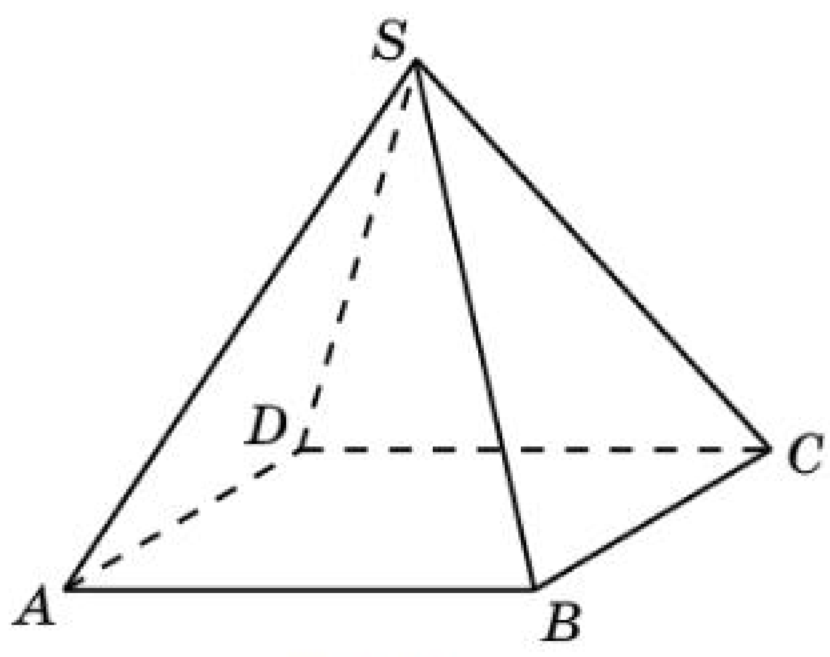
B

9.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда қуйидаги тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни топинг: а) AC ва B_1D_1; б) AB ва B_1C_1; в) AB_1 ва BC_1.

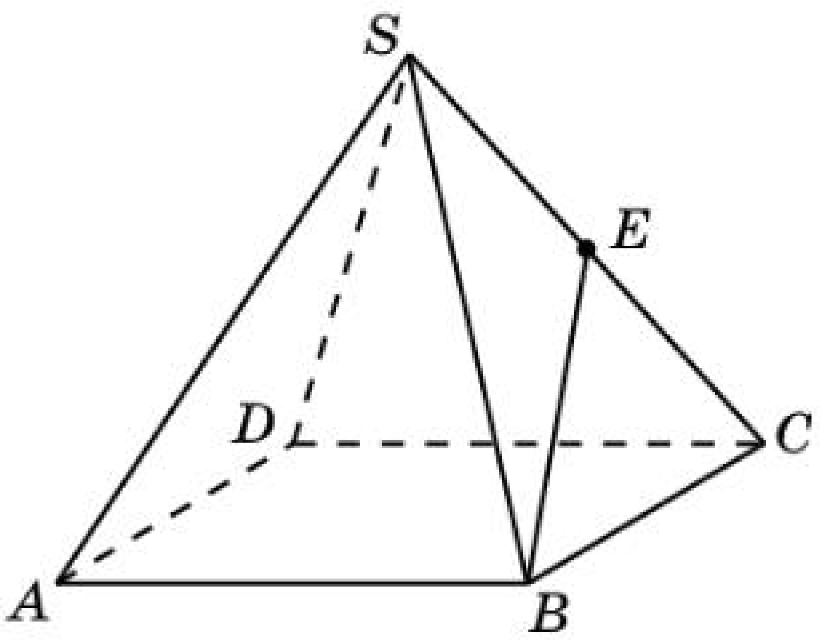
9.7. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призмада қуйидаги тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни топинг: а) AB ва CC_1; б) AB ва B_1C_1.

9.8. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг (9.10-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг: а) AB ва SC; б) SB ва SD.

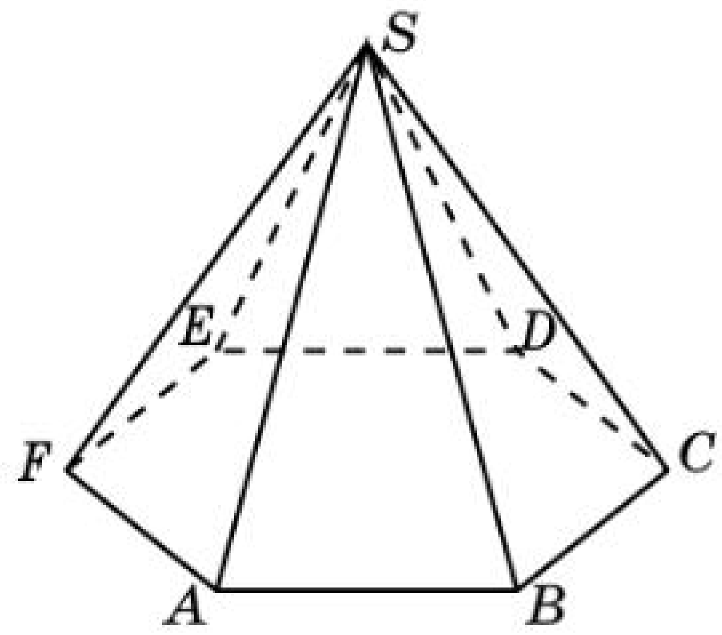
9.9. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг ва E нуқта — SC қиррасининг ўртаси (9.11-расм). AD ва BE тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.



9.10-расм

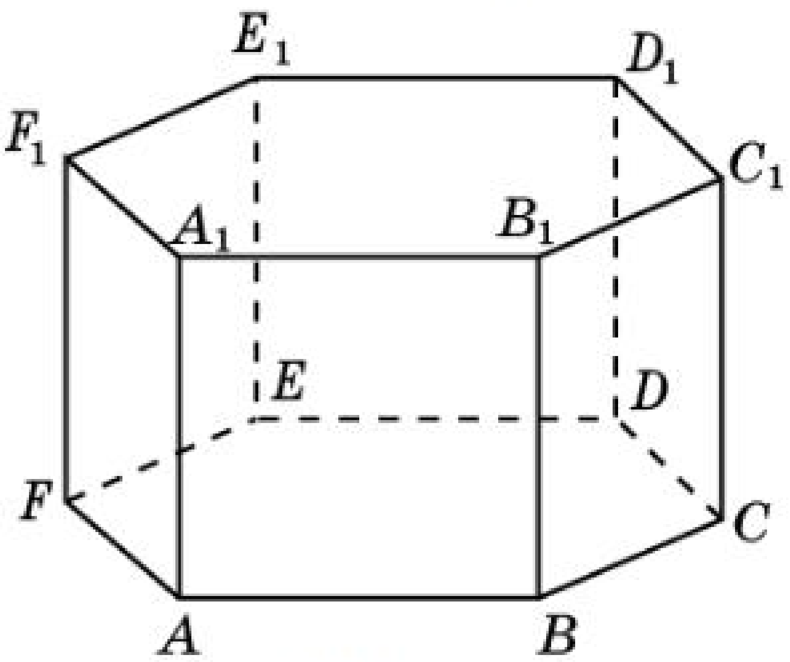


9.11-расм



9.12-расм

9.10. *SABCDEF* мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (9.12-расм). *SA* ва *BC* тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.



9.13-расм

9.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (9.13-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг: а) AA_1 ва BC_1; б) AA_1 ва DE_1; в) AB ва B_1C_1; г) AB ва C_1D_1; д) AC ва B_1C_1; е) AC ва B_1D_1; ж) AC ва B_1E_1.

9.12. *SABCDEF* мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (9.12-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг: а) *SA* ва *CD*; б) *SA* ва *BD*.

9.13. Атрофимиздаги оламдан перпендикуляр тўғри чизиқларни кўрсатадиган буюмларга мисоллар келтиринг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

9.14. Берилган нуқтадан текисликкача бўлган масофа таърифини такрорланг.

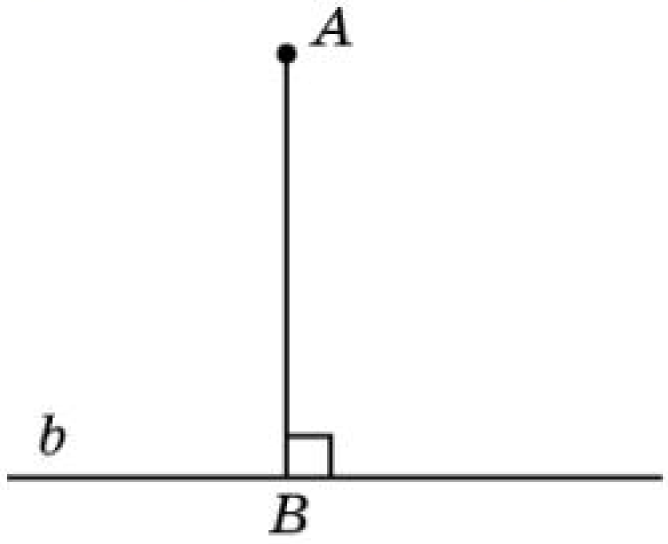
9.15. Фазодаги нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа тушунчасини аниқланг.

10-§. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа

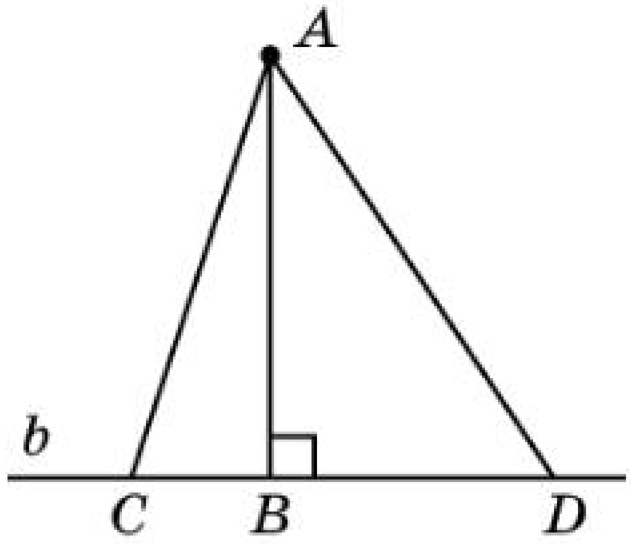
Текисликдаги *нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа* деб берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узинлигига айтилишини эсга солайлик.

Нуқта билан тўғри чизиқ бир текисликда ётганлигидан нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа таърифи фазо учун ҳам ўринли бўлади.

Фазодаги *нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа* деб, берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлигига айтилади (10.1-расм).



10.1-расм



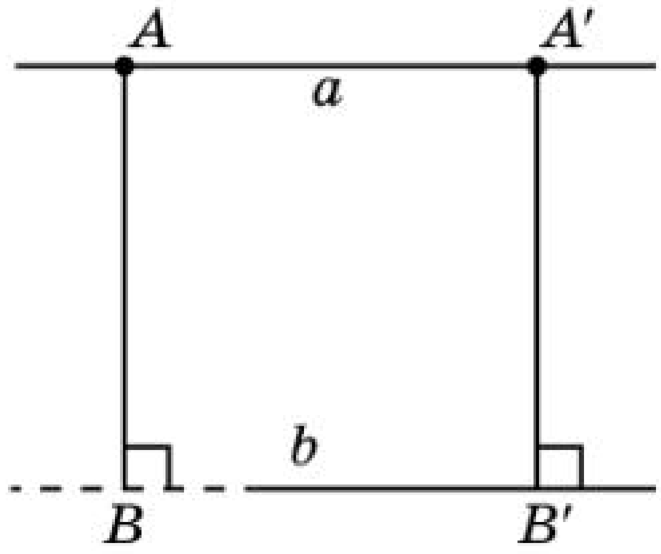
10.2-расм

Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққача бўлган масофа шу нуқтадан берилган тўғри чизиқнинг ихтиёрий бошқа нуқтасигача бўлган масофадан кичик бўлишини исботланг.

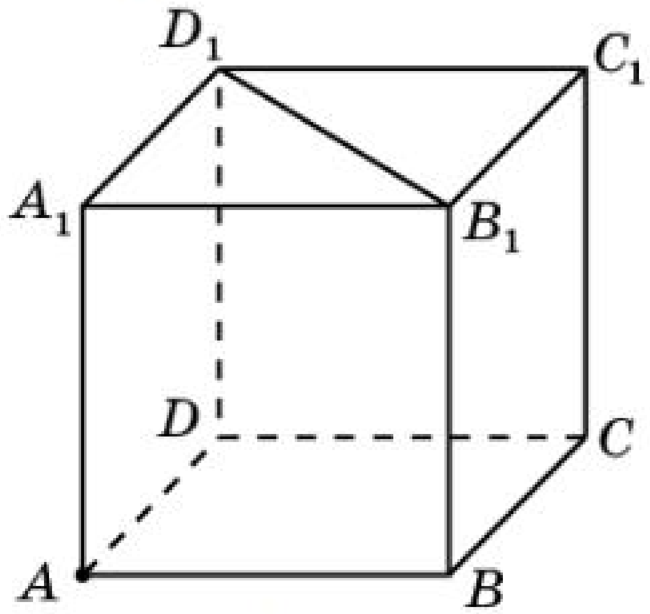
A нуқтадан b тўғри чизиққача бўлган масофани топиш учун, дастлаб A нуқтадан b тўғри чизиғига туширилган перпендикулярнинг B асосини топамиз. Агар AB перпендикулярнинг узунлигини топиш масаланинг шартидан тўғридан — тўғри келиб чиқмаса, унда b тўғри чизиғидан қандайдир C, D нуқталарни олиб, баландлиги AB бўлган ACD учбурчакни кўриб чиқамиз (10.2-расм). AB баландлигини топиш учун Пифагор теоремаси ёки бошқа муҳим теоремалар ва формулалар қўлланилади.

Агар перпендикулярнинг B асоси 10.3-расмдагидай b тўғри чизиғидан ташқарида ётса, унда A нуқта орқали b тўғри чизиғига параллел a тўғри чизиғини ўтказамиз ва ундан перпендикулярнинг B' асоси b тўғри чизиғида ётадиган A' нуқтани танлаб оламиз. $A'B'$ кесманинг узунлиги изланган A нуқтасидан b тўғри чизиғигача бўлган масофага тенг бўлади.

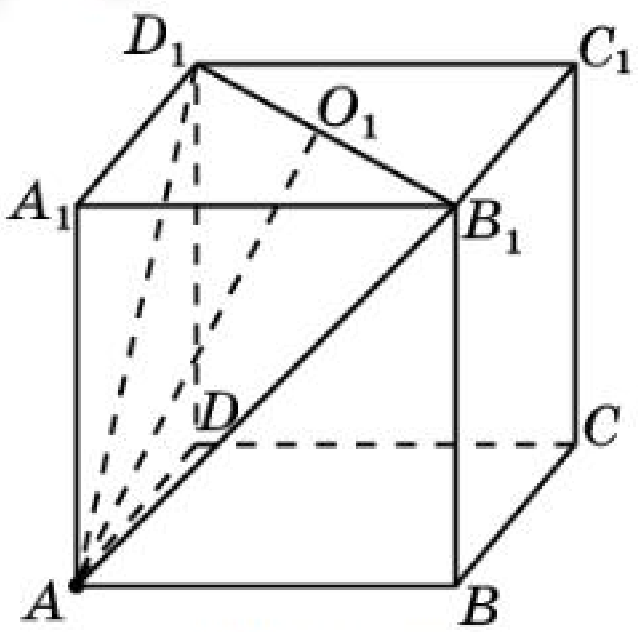
Масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан B_1D_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг (10.4-расм).



10.3-расм



10.4-расм



10.5-расм

Ечиш. AB_1D_1 учбурчагини кўриб чиқайлик. У томони $\sqrt{2}$ га тенг бўлган тенг томонли учбурчак. A учидан B_1D_1 тўғри чизиғига туширилган перпендикулярнинг асоси B_1D_1 кесманинг O_1 ўртаси бўлади (10.5-расм). AO_1 перпендикуляр $\frac{\sqrt{6}}{2}$ га тенг.

Шунингдек, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан B_1D_1 тўғри чизиғигача бўлган масофа $\frac{\sqrt{6}}{2}$ га тенг бўлади.

Саволлар

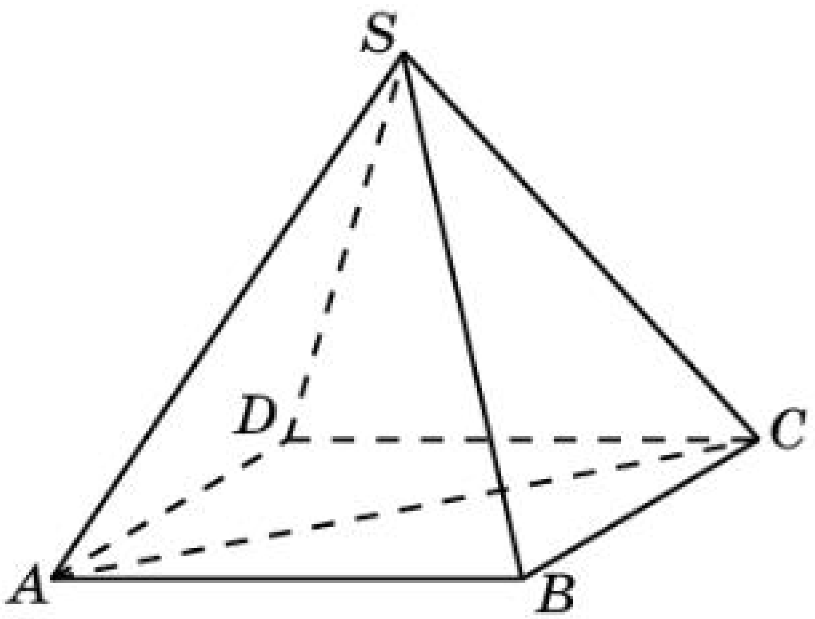
1. Фазодаги нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа деганимиз нима?
2. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа қандай топилади?

Масалалар

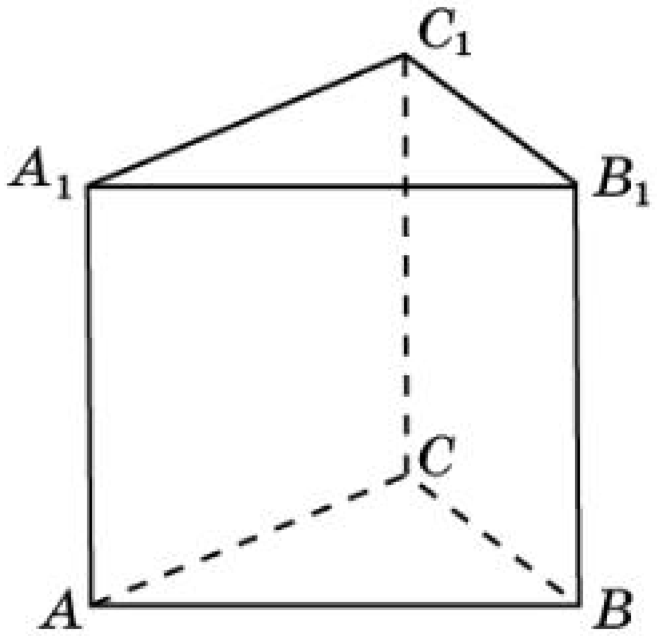
A

10.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан қуйидаги тўғри чизиққача бўлган масофани топинг: а) CD; б) BD; в) C_1D_1.

10.2. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари бирга тенг (10.6-расм). S учидан қуйидаги тўғри чизиққача бўлган масофани топинг: а) AB; б) AC.



10.6-расм

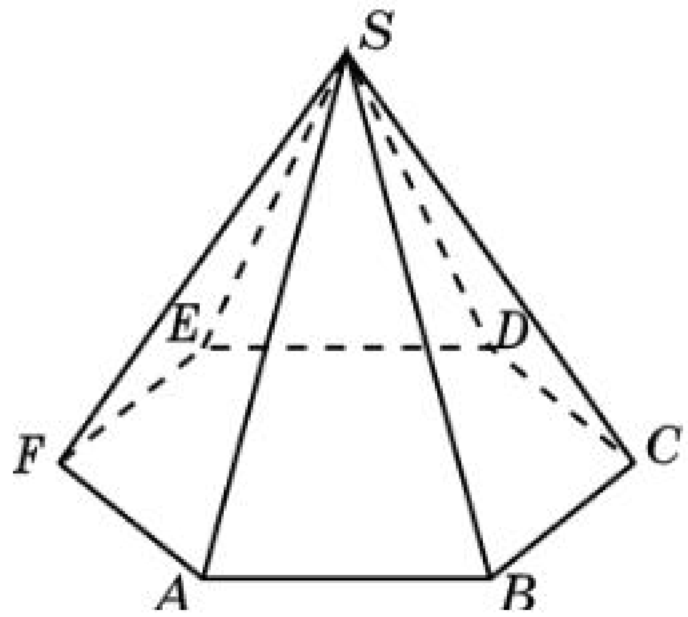


10.7-расм

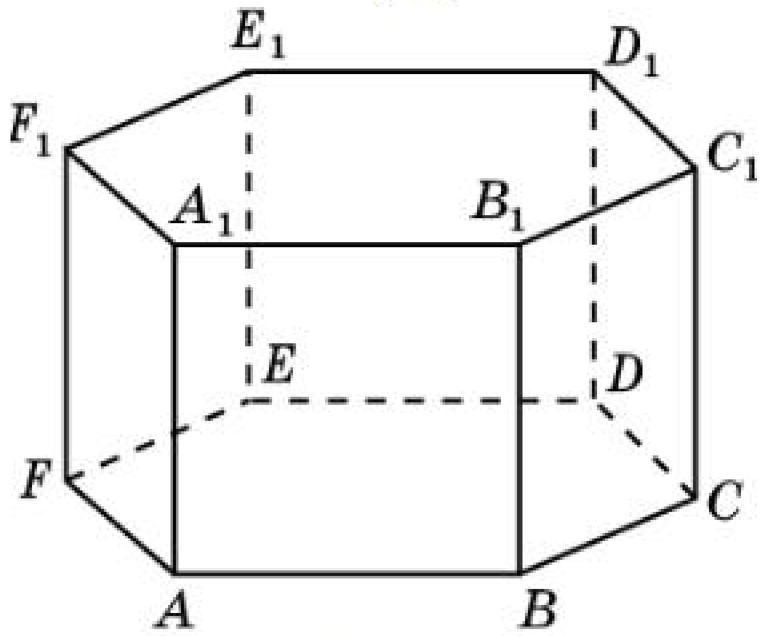
10.3. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари бирга тенг (10.7-расм). A нуқтадан қуйидаги тўғри чизиққача бўлган масофани топинг: а) BB_1; б) BC; в) BA_1.

10.4. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (10.8-расм). S учидан AD тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

10.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (10.9-расм). A нуқтадан қуйидаги тўғри чизиққача бўлган масофани топинг: а) BB_1; б) BA_1; в) BC; г) CD; д) DE; е) BD; ж) BE; з) BF; и) CE; к) CF; л) A_1B_1.



10.8-расм

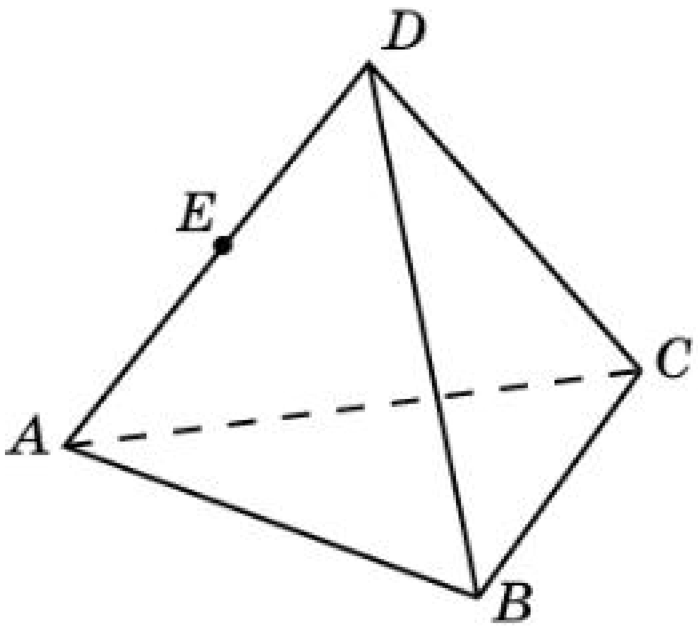


10.9-расм

B

10.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A нуқтасидан CB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

10.7. $ABCD$ тетраэдрининг барча қирралари 1 га тенг (10.10-расм). Унинг AD қиррасининг E ўртасидан BC тўғри чизиғигача бўлган масофа топинг.



10.10-расм

10.8. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (10.7-расм). A нуқтадан B_1C_1 тўғри чизиғигача бўлган масофа топинг.

10.9. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асоси 1 га, ён қирралари 2 га тенг (10.8-расм). S учидан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

10.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (10.9-расм). A нуқтадан B_1F_1 тўғри чизиққача бўлган масофа топинг.

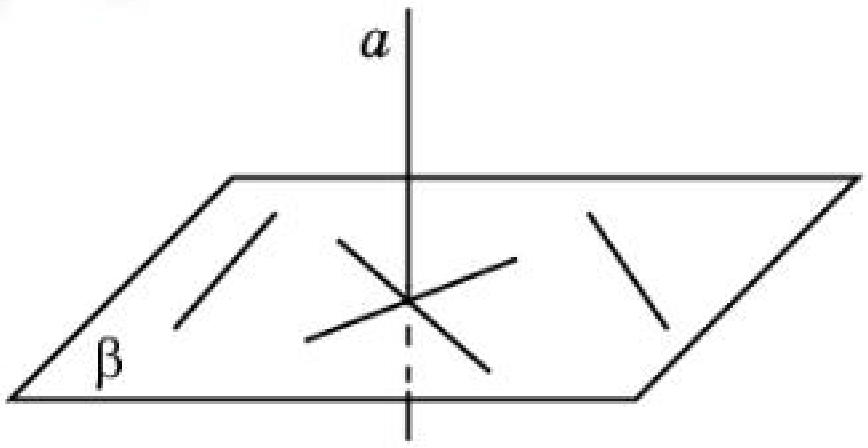
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

10.11. Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлигини таърифлаб кўринг.

11-§. Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикуляриги

Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлиги тушунчасини аниқлайлик.

Агар тўғри чизиқ текисликдаги ихтиёрий бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, унда шу *тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр* деб аталади (11.1-расм).



11.1-расм

a тўғри чизиқ билан β текисликнинг перпендикулярлиги $a \perp β$ орқали белгиланади.

Текисликка перпендикуляр тўғри чизиқнинг ёки кесманинг кўргазмали кўриниши сифатида “Қазақ Елі” монументини (11.2, а-расм), Қозоғистон мустақиллиги монументи (11.2, б-расм), телекўрсатувлар минорасини (11.2, в-расм) айтиш мумкин, улар ер юзидаги текисликка перпендикуляр бўлади. Шу билан бирга хона бурчагининг қирраси полга перпендикуляр бўлади. Полнинг бурчагидан пол бўйлаб ўтказилган ихтиёрий тўғри чизиқ унинг қиррасига перпендикуляр бўлади.

а)

б)

в)

11.2-расм

Текисликка перпендикуляр тўғри чизиқда ётадиган кесма ҳам шу текисликка перпендикуляр бўлади.

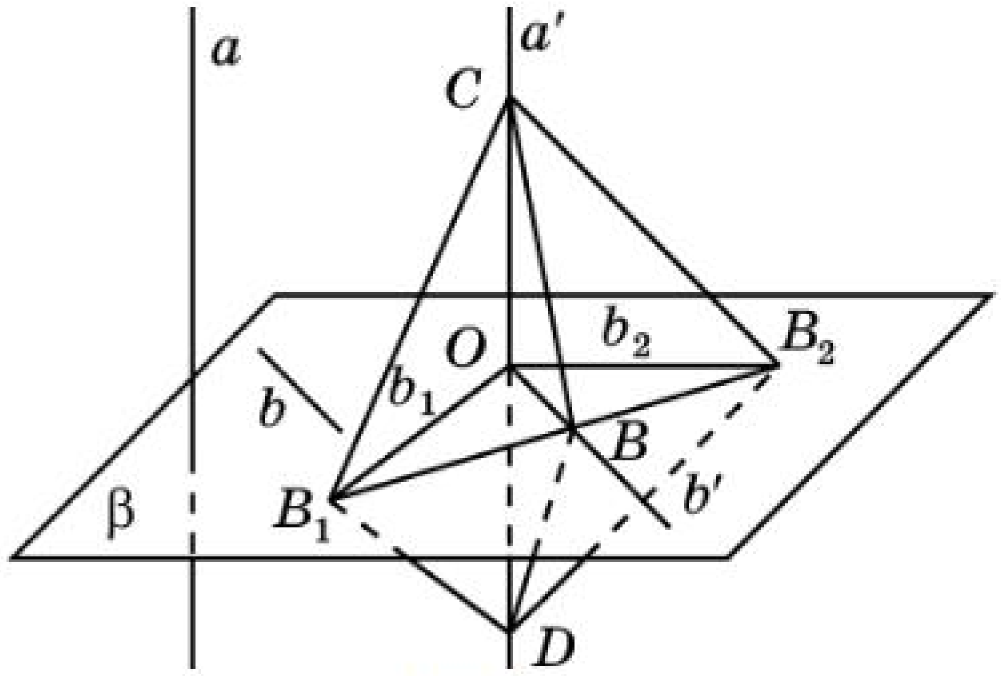
Текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ шу текисликни кесиб ўтиши маълум. Ҳақиқатан, агар тўғри чизиқ текисликда ётса ёки унга параллел бўлса, у ҳолда шу текисликда унга параллел бўлган тўғри чизиқ мавжуд. Бундан, дастлабки тўғри чизиқ берилган текисликка перпендикуляр эмаслиги келиб чиқади.

? Берилган текисликда: а) ётадиган; б) ётмайдиган нуқта орқали берилган текисликка перпендикуляр нечта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?

Қуйидаги теорема тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлигининг етарлилик шартини беради.

Теорема. (Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлик аломати). *Агар тўғри чизиқ текисликда ётган ўзаро кесишувчи икки тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, унда бу тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлади.*

Исбот. a тўғри чизиқ β текислигида ётган O нуқтада кесишувчи b_1, b_2 тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлсин (11.3-расм).



11.3-расм

β текислигининг ихтиёрий b тўғри чизиғини кўриб чиқамиз. O нуқта орқали a, b тўғри чизиқларга параллел мос равишда a', b' тўғри чизиқларни ўтказамиз. a, b тўғри чизиқларининг перпендикулярлигини исботлаш учун a', b' тўғри чизиқларнинг перпендикулярлигини исботлаш етарли.

Бунинг учун β текислигида b_1, b_2, b' тўғри чизиқларни мос равишда B_1, B_2, B нуқталарда кесиб ўтувчи тўғри чизиқ ўтказамиз. a' тўғри чизиғидаги O нуқтадан OC, OD тенг кесмаларини оламиз ва C, D нуқталарни B_1, B_2, B нуқталар билан туташтирамиз. OB_1C ва OB_1D тўғри бурчакли учбурчаклари тенг (катетлари бўйича) бўлади. Демак, $B_1C = B_1D$.

Шунга ўхшаш, OB_2C ва OB_2D тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглигидан $B_2C = B_2D$ келиб чиқади. B_1B_2C ва B_1B_2D учбурчаклар тенг (уч томони бўйича) бўлади. Демак, $\angle CB_1B = \angle DB_1B$.

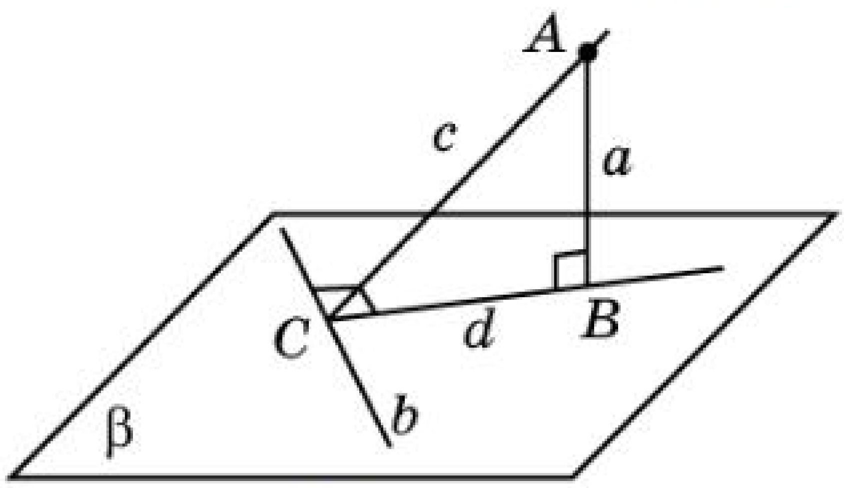
B_1BC ва B_1BD учбурчаклар тенг (икки томони ва уларнинг орасидаги бурчаги бўйича) бўлади. Шунинг билан $BC = BD$. OBC ва OBD учбурчаклар тенг (учта томони бўйича), унда $\angle BOC = \angle BOD = 90^\circ$, яъни a' билан b' тўғри чизиқлари ўзаро перпендикуляр.

Демак, a тўғри чизиқ β текислигига перпендикуляр бўлади.

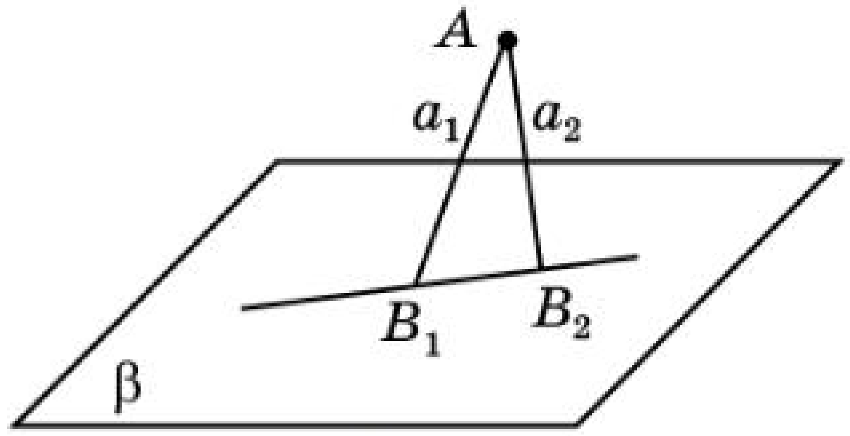
Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлигининг айрим хоссаларини кўриб чиқайлик.

1-хосса. *Берилган текисликдан ташқарида ётган нуқта орқали шу текисликка перпендикуляр фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.*

Исботи. A нуқта ва β текисликни кўриб чиқайлик (11.4, а-расм). β текисликда ихтиёрий b тўғри чизиқни ўтказамиз.



а)



ә)

11.4-расм

A нуқта ва b тўғри чизиқ билан берилган текисликда b тўғри чизиғига перпендикуляр c тўғри чизиқни ўтказамиз. b ва c тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини C нуқта орқали белгилайлик. β текислигида C нуқта орқали b тўғри чизиғига перпендикуляр d тўғри чизиғини ўтказамиз. b тўғри чизиқ c ва d тўғри чизиқлари билан берилган β текислигига перпендикуляр бўлиши келиб чиқади.

A нуқта ва d тўғри чизиқ билан берилган текисликда d тўғри чизиғига перпендикуляр a тўғри чизиқни ўтказамиз. Шу тўғри чизиқ β текислигига перпендикуляр изланган тўғри чизиқ бўлади. Ҳақиқатан, a тўғри чизиқ d тўғри чизиғига перпендикуляр бўлади. Шундай қилиб, у β текислигида ётади, энди b тўғри чизиғига перпендикуляр бўлади. Шунинг билан a тўғри чизиқ β текислигидаги кесишувчи икки b ва d тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлади, Демак, у шу текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.

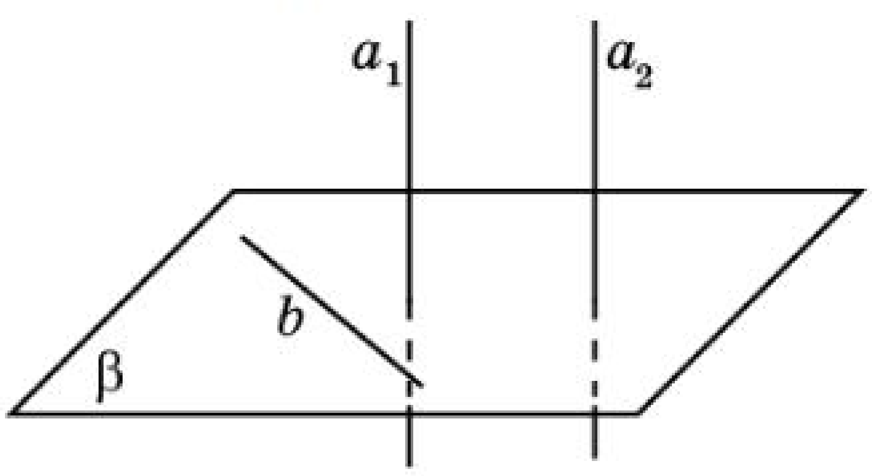
Ягоналигини исботлайлик. A нуқта орқали β текислигига перпендикуляр икки a_1 ва a_2 тўғри чизиқлари мавжуд, деб фараз қилайлик (11.4, б-расм). Уларнинг β текислиги билан мос равишда кесишувчи нуқталарини B_1, B_2 деб белгилайлик. Шунда AB_1B_2 текислигида A нуқтаси орқали ўтувчи ва B_1B_2 тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ мавжуд бўлади. Бу эса текисликдаги перпендикуляр тўғри чизиқларнинг мос хоссасига зид келади. Энди β текислигига перпендикуляр биттадан ортиқ тўғри чизиқ ўтиши мумкин эмас. Демак, бундай тўғри чизиқ фақат битта бўлади. ◻

2-хосса. *Агар тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлса, унда бу тўғри чизиққа параллел бўлган ихтиёрий тўғри чизиқ шу текисликка перпендикуляр бўлади.*

Исбот. a_1 тўғри чизиқ β текислигига перпендикуляр ва a_2 тўғри чизиқ a_1 тўғри чизиғига параллел бўлсин (11.5-расм). a_1 тўғри чизиқ β текислигида ётган ихтиёрий тўғри чизиққа перпендикуляр бўлганлигидан, a_1 тўғри чизиғига параллел a_2 тўғри чизиқ ҳам шу текисликда ётган ихтиёрий тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади. Демак, у β текислигига перпендикуляр бўлади. ◻

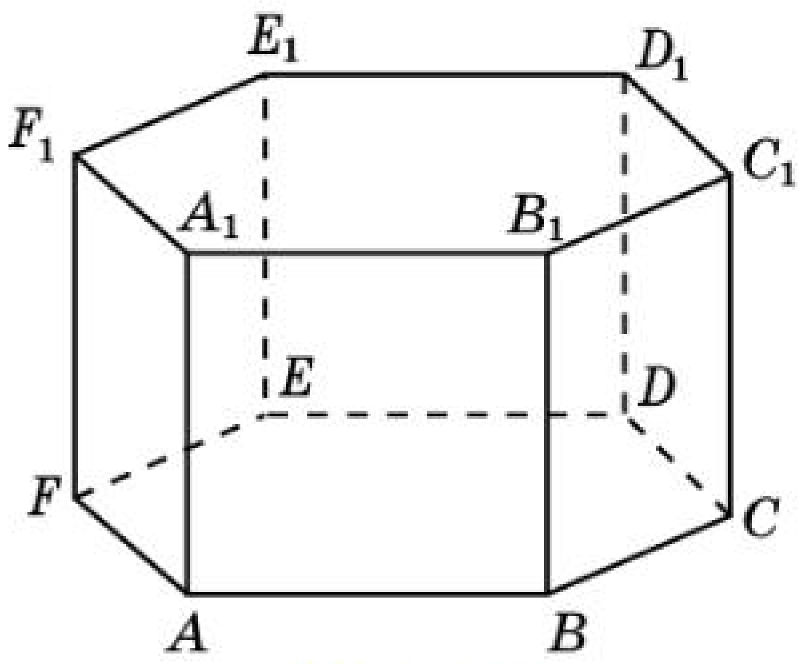
3-хосса. *Бир текисликка перпендикуляр икки тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлади.*

Исбот. a_1 ва a_2 тўғри чизиқлар β текислигига перпендикуляр бўлсин. a_2 тўғри чизиқда ётган ихтиёрий бир A_2 нуқта орқали a_1 тўғри чизиғига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. 2-хосса бўйича у β текислигига перпендикуляр бўлади. 1-хосса бўйича у a_2 тўғри чизиқ билан мос келади. Демак, a_2 тўғри чизиқ a_1 тўғри чизиғига параллел бўлади. ◻

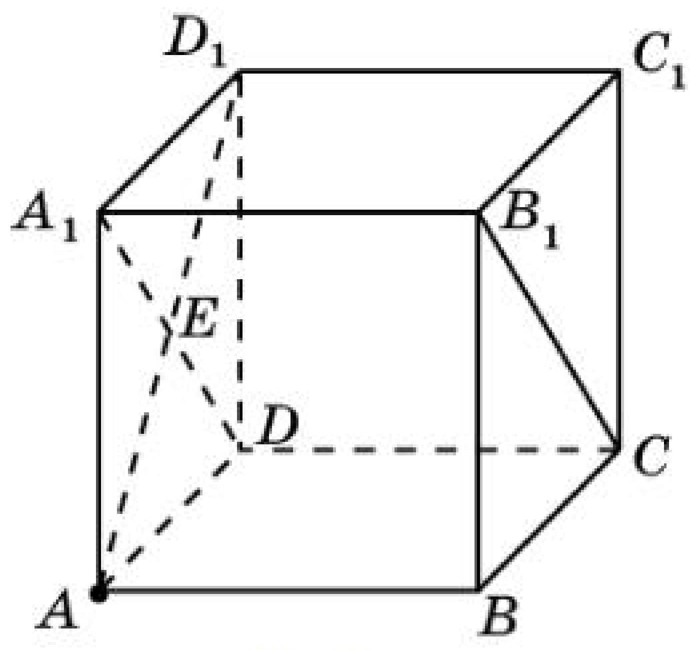


11.5-расм

1-мисол. Тўғри призманинг ён қирралари унинг асосига перпендикуляр бўлишини исботланг (11.6-расм).



11.6-расм



11.7-расм

Ечиш. Тўғри призманинг ён ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат. Шу туфайли ҳар бир ён қирраси призманинг асосининг ёпишган томонларига перпендикуляр бўлади. Демак, асосига перпендикуляр бўлади.

2-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD_1 тўғри чизиқ CDA_1 текислигига перпендикуляр бўлишини исботланг.

Ечиш. AD_1 тўғри чизиқ DA_1 тўғри чизиғига перпендикуляр бўлади (11.7-расм). Шу билан бирга, у CD тўғри чизиқ перпендикуляр бўлган ADD_1 текислигида ётади. Демак, AD_1 тўғри чизиқ CDA_1 текислигига перпендикуляр бўлади.

Саволлар

1. Қандай тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр деб аталади?
2. Қандай кесма текисликка перпендикуляр деб аталади?
3. Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлик аломатини келтириб чиқаринг.

Масалалар

A

11.1. Тўғри чизиқ текисликка параллел. У шу текисликда ётган ихтиёрий бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиши мумкинми?

11.2. Учбурчакнинг икки томонига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ учбурчак текислиги билан қандай жойлашади?

11.3. Агар тўғри чизиқ доиранинг: а) диаметрига; б) иккита диаметрига перпендикуляр бўлса, у ҳолда уларнинг марказидан ўтувчи шу тўғри чизиқ доира текислигига перпендикуляр бўлиши ростми?

11.4. a тўғри чизиқ α текислигини перпендикуляр бўлмаган ҳолда кесиб ўтади. a тўғри чизиқ билан перпендикуляр бўлган тўғри чизиқлар мавжудми?

11.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (11.8-расм) қуйидаги тўғри чизиқ билан текислик перпендикуляр бўлишини исботланг: а) AA_1 ва ABC; б) AB ва BCC_1; в) AB_1 ва BCD_1.

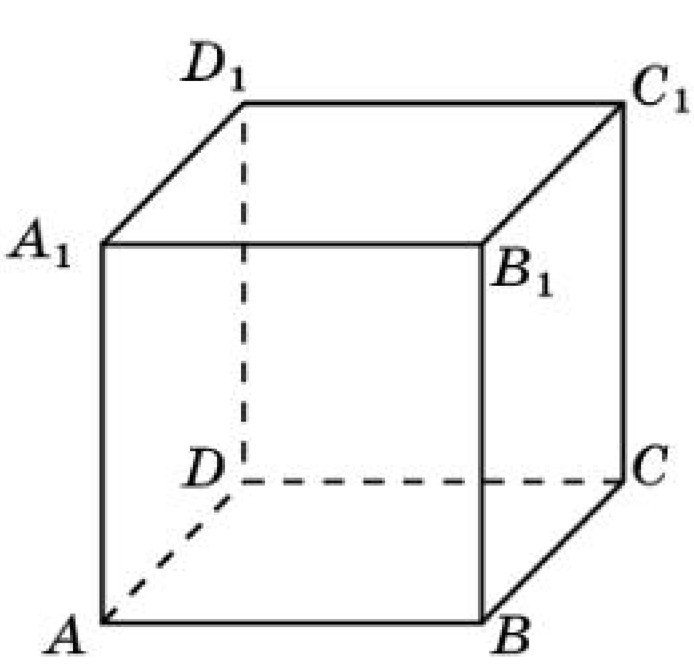
B

11.6. Агар тўғри чизиқ текисликнинг ихтиёрий икки тўғри чизиғига перпендикуляр бўлса, унда тўғри чизиқ шу текисликка перпендикуляр бўлиши мумкинми?

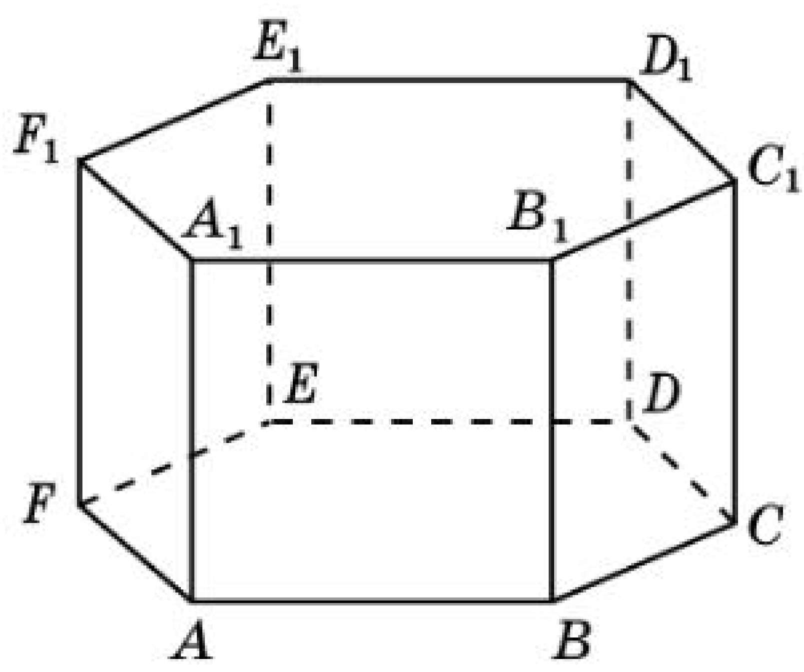
11.7. Икки тўғри чизиқ қандай жойлашганда биринчиси орқали иккинчисига перпендикуляр бўлган текисликни ўтказиш мумкин?

11.8. Учбурчакнинг бир томони орқали иккинчи томонига перпендикуляр текислик ўтказилган бўлса, унда учбурчакнинг турини аниқланг.

11.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (11.8-расм) қуйидаги тўғри чизиқларнинг перпендикулярлигини исботланг: а) AA_1 ва AC; б) AA_1 ва BD; в) AB ва BC_1.



11.8-расм



11.9-расм

11.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада (11.9-расм) қуйидаги тўғри чизиқ билан текислик перпендикуляр бўлишини исботланг: а) AA_1 ва ABC; б) AB ва BDD_1; в) AC ва CDD_1; г) AC ва BEE_1; д) AD ва CEE_1; е) AB_1 ва BDE_1.

11.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада қуйидаги тўғри чизиқларнинг перпендикуляр бўлишини исботланг (11.9-расм): а) AA_1 ва AC; б) AA_1 ва AD; в) AA_1 ва AE; г) AA_1 ва BF; д) AB ва BD_1; е) AB ва EA_1; ж) AC ва DC_1.

11.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC ва AB_1 тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлишини исботланг.

11.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BD_1 тўғри чизиқ ACB_1 текислигига перпендикуляр бўлишини исботланг.

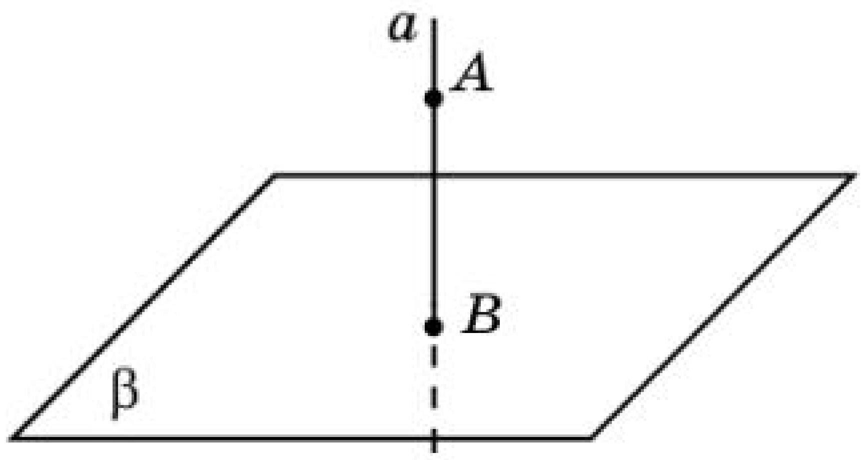
11.14. Атрофимиздаги оламда ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқ билан текисликка мисоллар келтиринг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

11.15. Нуқтадан текисликкача бўлган масофани таърифланг.

12-§. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа

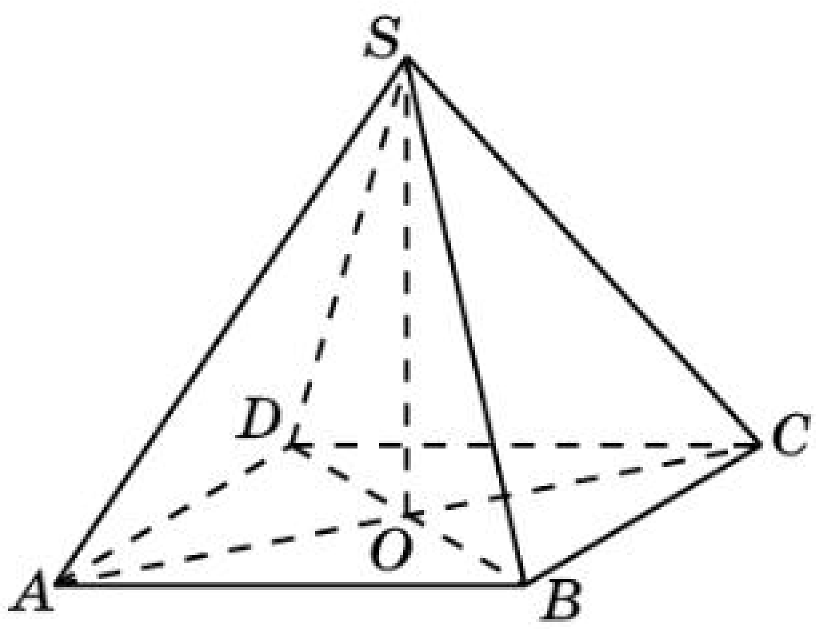
b текислигида ётмайдиган A нуқта орқали шу текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг текислик билан кесишиш нуқтасини B деб белгилайлик (12.1-расм). AB кесма A нуқтадан b текислигига туширилган перпендикуляр деб аталади. Бу кесма узунлиги *A нуқтадан* b *текисликкача бўлган масофа деб аталади*.



12.1-расм

Масалан, кўчадаги чироқ устунларининг лампаси ердан бир хил баландликда жойлашсин. Шунда лампадан ер юзигача бўлган масофа шу лампадан ерга туширилган перпендикуляр орқали ўлчанади (12.2-расм).

12.2-расм



12.3-расм

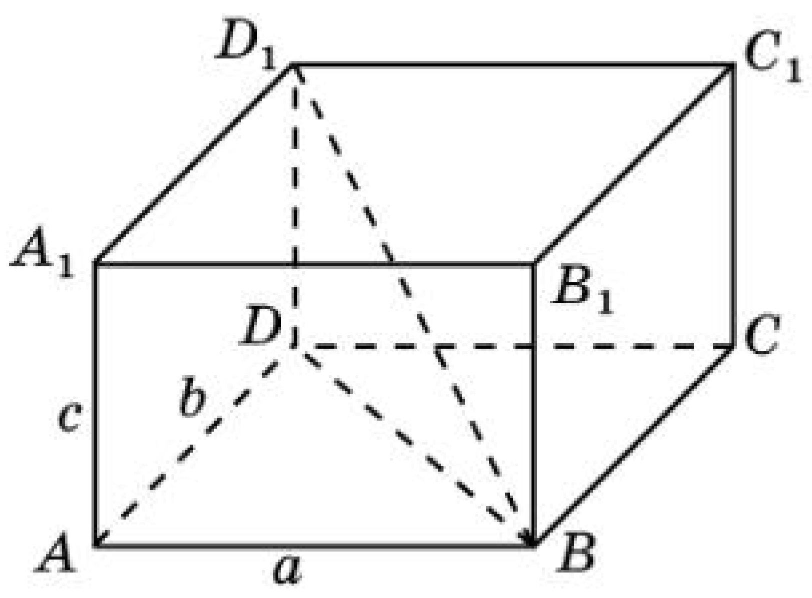
Берилган нуқтадан берилган текисликкача бўлган масофа шу нуқтадан берилган текисликнинг ихтиёрий бошқа нуқтасигача бўлган масофадан кичик бўлишини исботланг.

Пирамиданинг учидан унинг асос текислигига туширилган *перпендикуляр пирамиданинг баландлиги* деб аталади.

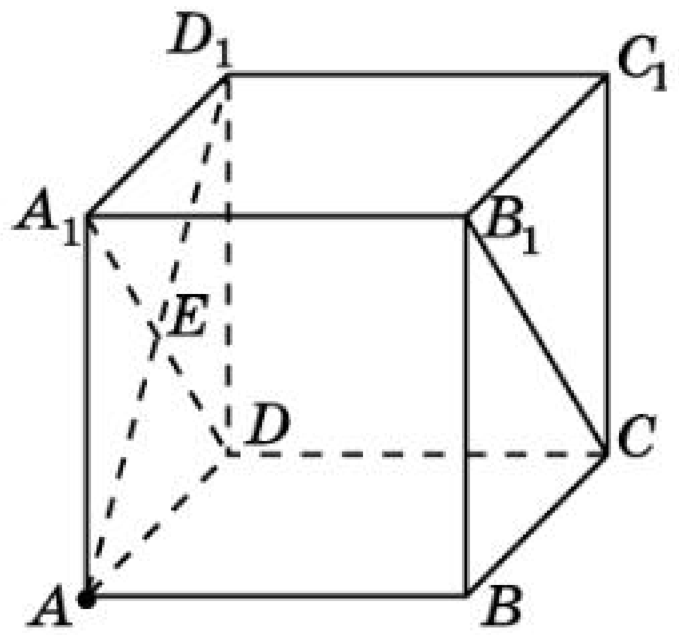
12.3-расмда $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг SO баландлиги кўрсатилган.

Масофаларни топишга доир мисолларни қарайлик.

1-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипединг B ва D_1 учлари орасидаги (диагонали) масофани топинг (12.4-расм), бунда $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.



12.4-расм



12.5-расм

Ечиш. DD_1 тўғри чизиқ DA ва DC тўғри чизиқларига перпендикуляр. У эса ABC текислигига перпендикуляр. Демак, у тўғри чизиқ DB тўғри чизиғига ҳам перпендикуляр бўлади.

BDD_1 тўғри бурчакли учбурчакда $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, $DD_1 = c$. Пифагор теоремаси бўйича гипотенузасини топамиз: $BD_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубнинг A учидан CDA_1 текислигигача бўлган масофани топинг (12.5-расм).

Ечиш. AD_1 кесмани ўтказамиз. Унинг DA_1 кесма билан кесишиш нуқтасини E деб белгилайлик. AE тўғри чизиқ DA_1 ва DC тўғри чизиқларга перпендикуляр. Демак, у CDA_1 текислигига ҳам перпендикуляр бўлади. AE кесма A нуқтадан CDA_1 текислигига туширилган изланган перпендикуляр бўлади. Унинг узунлиги $\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг. Демак, бирлик кубнинг A учидан CDA_1 текислигигача бўлган масофа $\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг бўлади.

Саволлар

1. Нуқтадан текисликка туширилган перпендикуляр деб нимага айтилади?
2. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа деб нимага айтилади?
3. Оғма деб нимага айтилади?

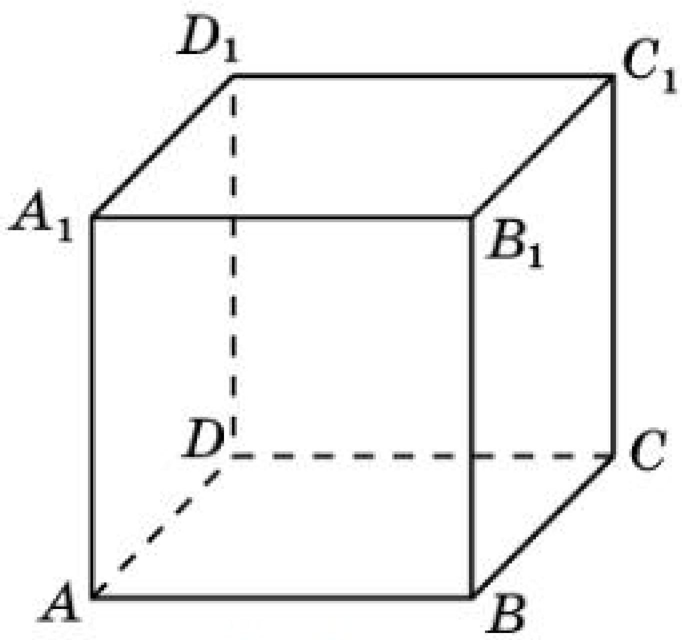
Масалалар

A

12.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедда $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. AC_1 диагонални топинг.

12.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги A учидан қуйидаги текисликларгача бўлган масофани топинг: а) BCC_1; б) BCD_1 (12.6-расм).

12.3. Барча қирралари 1 га тенг $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг баландлигини топинг (12.3-расм).



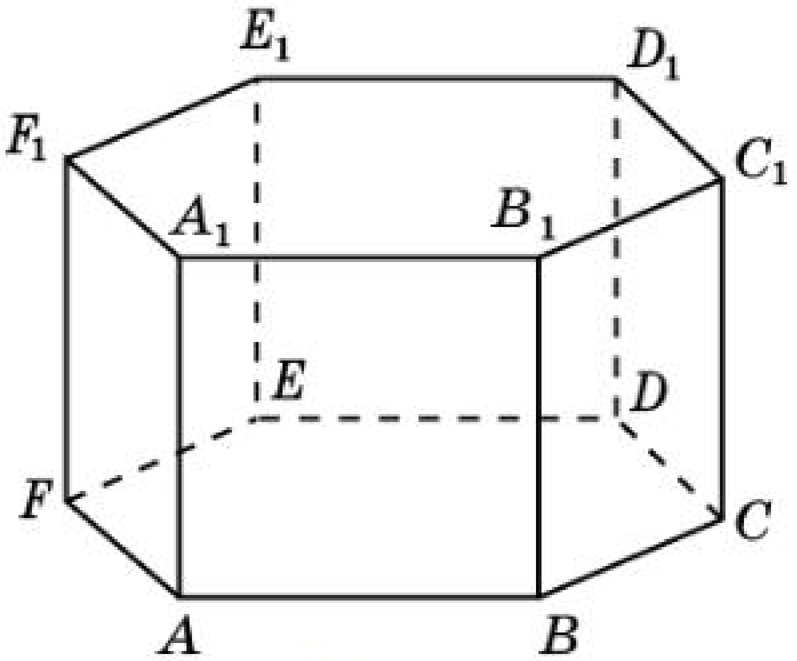
12.6-расм

B

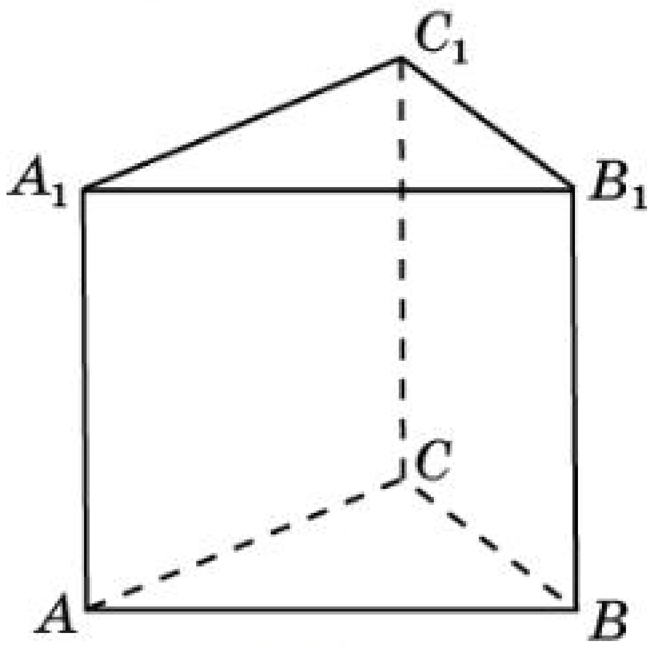
12.4. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олти бурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (12.7-расм). A учидан қуйидаги текисликларгача бўлган масофани топинг: а) BDD_1; б) BEE_1; в) BFF_1; г) BCC_1; д) CDD_1; е) CEE_1; ж) CFF_1.

12.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (12.7-расм). Икки учи орасидаги масофани топинг: а) A ва C_1; б) A ва D_1.

12.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (12.7-расм). A учидан қуйидаги чизиқларгача бўлган масофани топинг: а) BE_1; б) CE_1.



12.7-расм



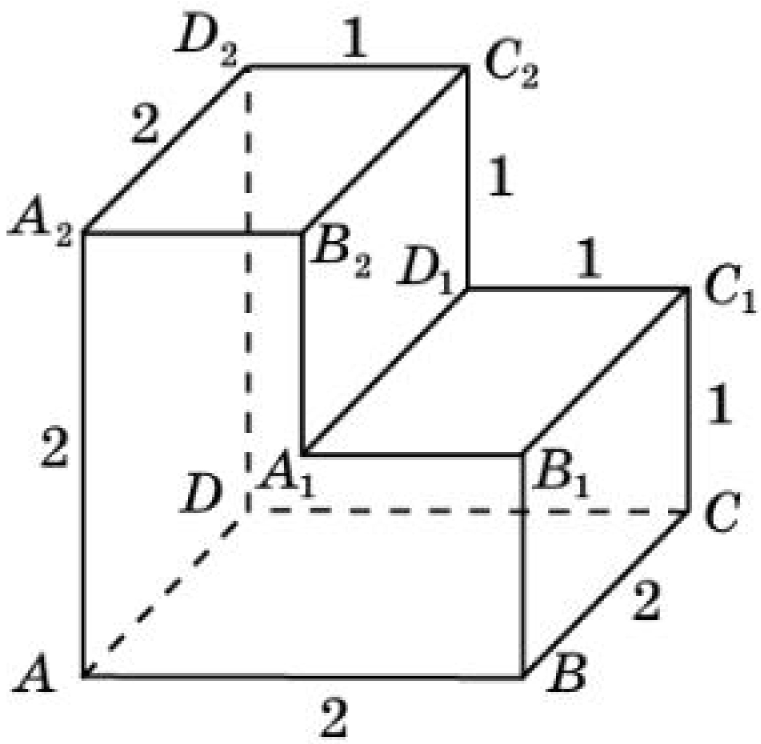
12.8-расм

12.7. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг асосининг томонлари 1 га тенг (12.8-расм). Шу призманинг A учидан BCC_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

12.8. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар бўлади (12.9-расм). Қуйидаги учлари орасидаги масофани топинг: а) A ва C_1; б) A ва D_1; в) A ва C_2; г) B ва D_1; д) B ва D_2.

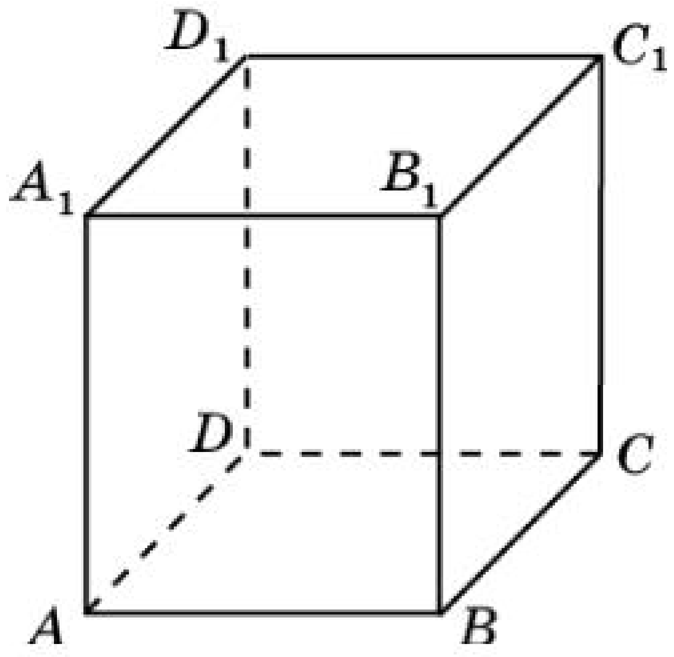
12.9. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар бўлади (12.9-расм). A учидан қуйидаги чизиққача бўлган масофани топинг: а) B_1C_1; б) A_1D_1; в) B_2C_2.

12.10. Тўғри тўртбурчакли призманинг асоси ромб. Унинг томони 3 га ва



12.9-расм

ўткир бурчаги 60° тенг. Призманинг ён қирраси 4 га тенг. Призманинг кичик диагоналини топинг (12.10-расм).

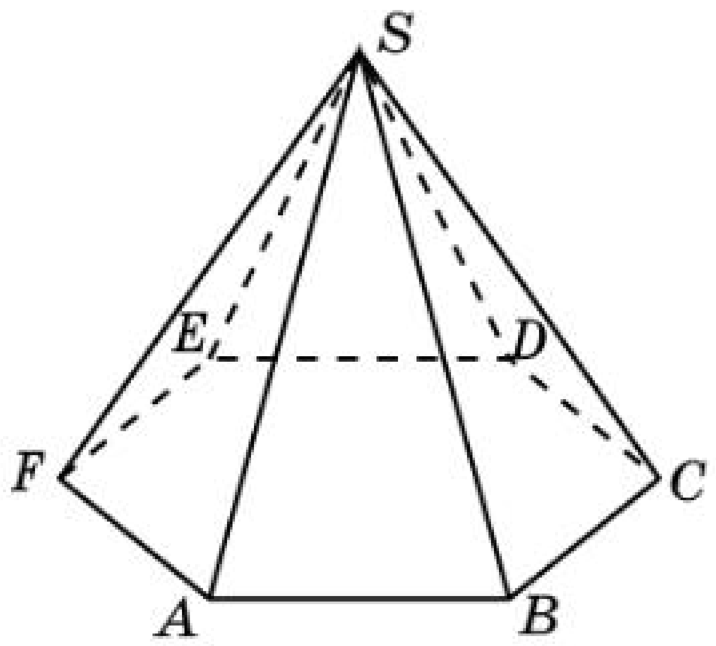


12.10-расм

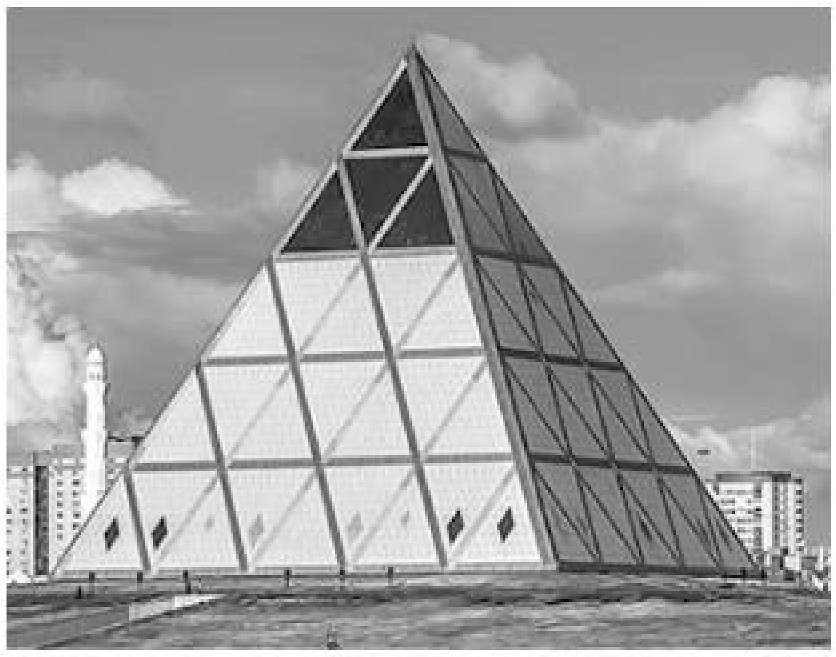
12.11. *SABCDEF* мунтазам олтибурчакли пирамиданинг баландлигини ясанг (12.11-расм).

12.12. Мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. Унинг баландлигини топинг (12.11-расм).

12.13. Астана шаҳридаги мустақиллик саройи мунтазам тўртбурчакли пирамидага ўхшаш (12.12-расм). Унинг баландлиги асосининг томонига, яъни 62 м га тенг. Шу пирамиданинг ён қиррасининг узунлигини топинг.



12.11-расм



12.12-расм

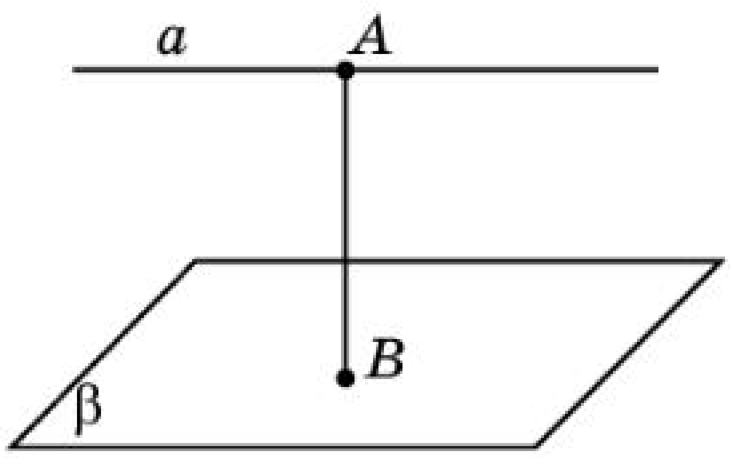
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

12.14. Ўзаро параллел тўғри чизиқ ва текислик орасидаги масофани топинг.

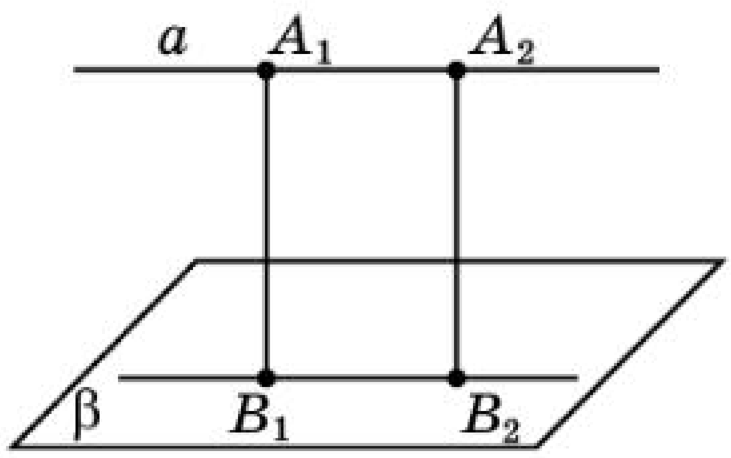
13-§. Ўзаро параллел тўғри чизиқ билан текислик ва параллел икки текислик орасидаги масофа

Тўғри чизиқ ва унга параллел текислик берилсин. *Ўзаро параллел тўғри чизиқ билан текислик орасидаги масофа деб*, тўғри чизиқнинг ихтиёрий бир нуқтасидан текисликкача бўлган масофага айтилади (13.1-расм).

Теорема. ***Ўзаро параллел тўғри чизиқ билан текислик орасидаги масофа тўғри чизиқдан олинган нуқтанинг танлаб олинишига боғлиқ эмас.***



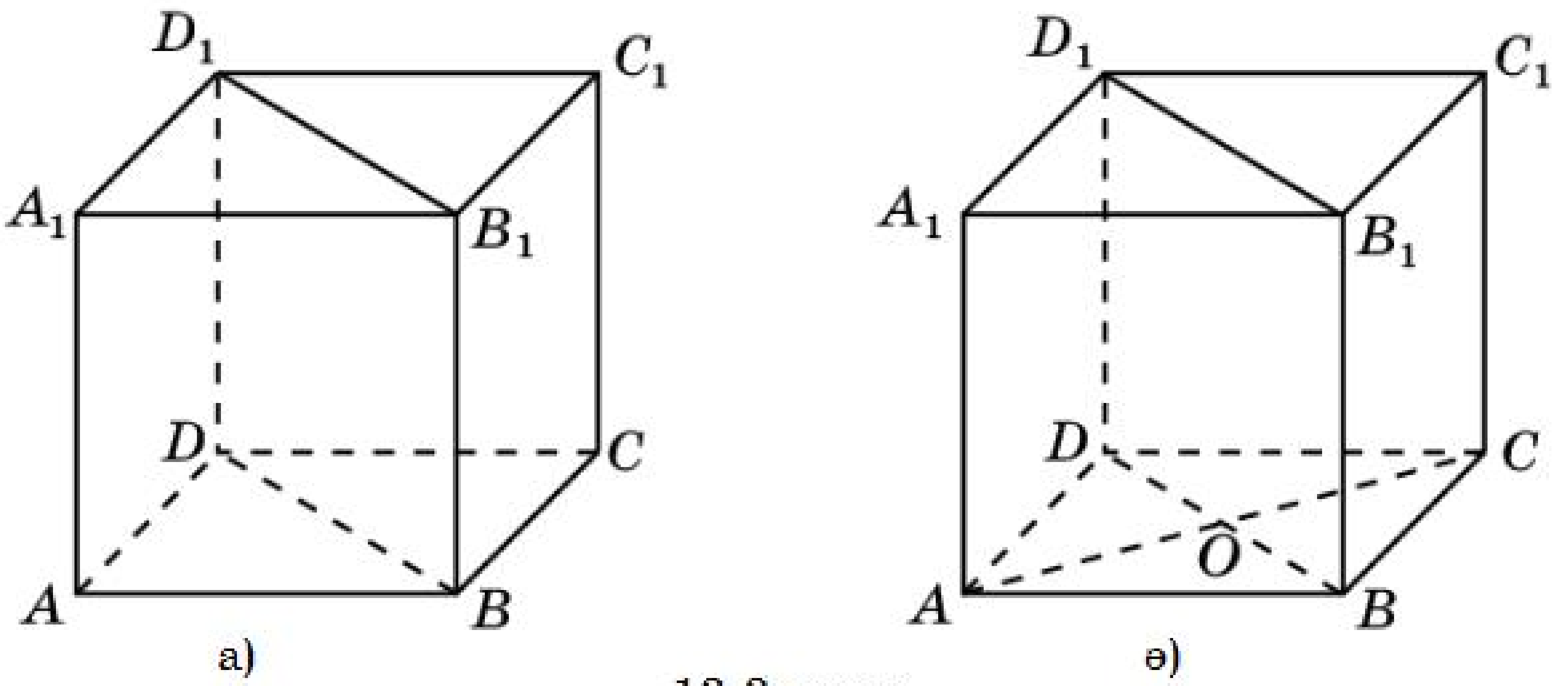
13.1-расм



13.2-расм

Исбот. A_1, A_2 нуқталар — b текислигига параллел бўлган a тўғри чизиқда ётган нуқталар (13.2-расм), B_1, B_2 нуқталар — шу нуқталардан текисликка туширилган перпендикулярларнинг асослари бўлсин. 11-параграфдаги 3-хосса бўйича A_1B_1 ва A_2B_2 перпендикулярлар ўзаро параллел бўлади. B_1B_2 тўғри чизиқ b текислигининг шу перпендикулярлар ва берилган текислик билан кесишиш чизиғи бўлади. Шунга ўхшаш A_1A_2 тўғри чизиқ а текислиги билан ўзаро параллел A_1B_1 ва A_2B_2 тўғри чизиқлари ва берилган текисликнинг кесишиш чизиғи бўлади. Энди B_1B_2 тўғри чизиқ a тўғри чизиғига параллел. Бундан $A_1A_2B_2B_1$ тўртбурчак — параллелограмм (тўғри тўртбурчак). Демак, $A_1B_1 = A_2B_2$ бўлади.

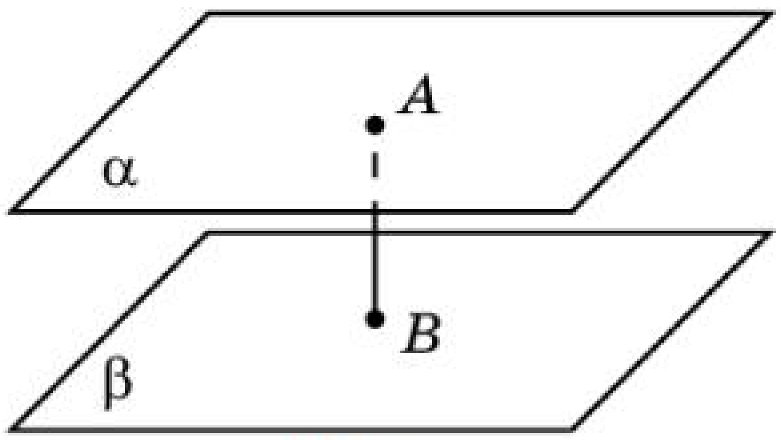
1-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AA_1 тўғри чизиқ ва BDD_1 текислиги орасидаги масофани топинг (13.3, а-расм).



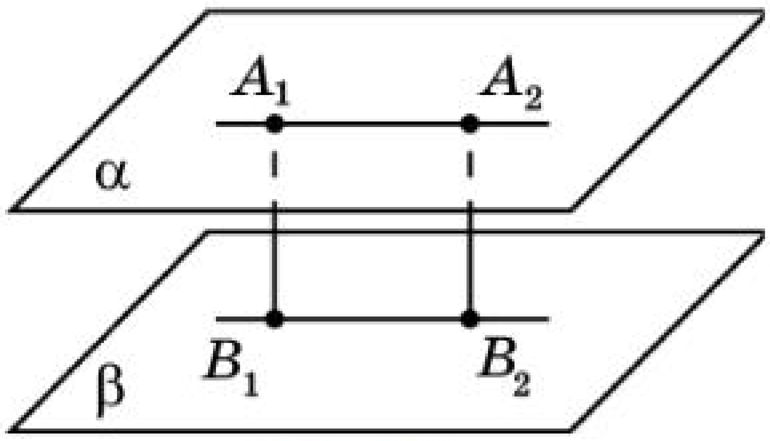
13.3-расм

Ечиш. Кубнинг $ABCD$ ёғининг AC диагонали BDD_1 текислигига перпендикуляр. AC диагоналининг BDD_1 текислиги билан кесишиш нуқтасини O текислиги билан кесишиш нуқтасини (13.3, б-расм). AA_1 тўғри чизиқ ва BDD_1 текислигининг орасидаги масофа AO кесманинг узунлигига, яъни $\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг бўлади.

Параллел икки текислик орасидаги масофа деб, уларнинг бирининг ихтиёрий нуқтасидан иккинчи текисликка туширилган перпендикулярга айтилади (13.4-расм).



13.4-расм

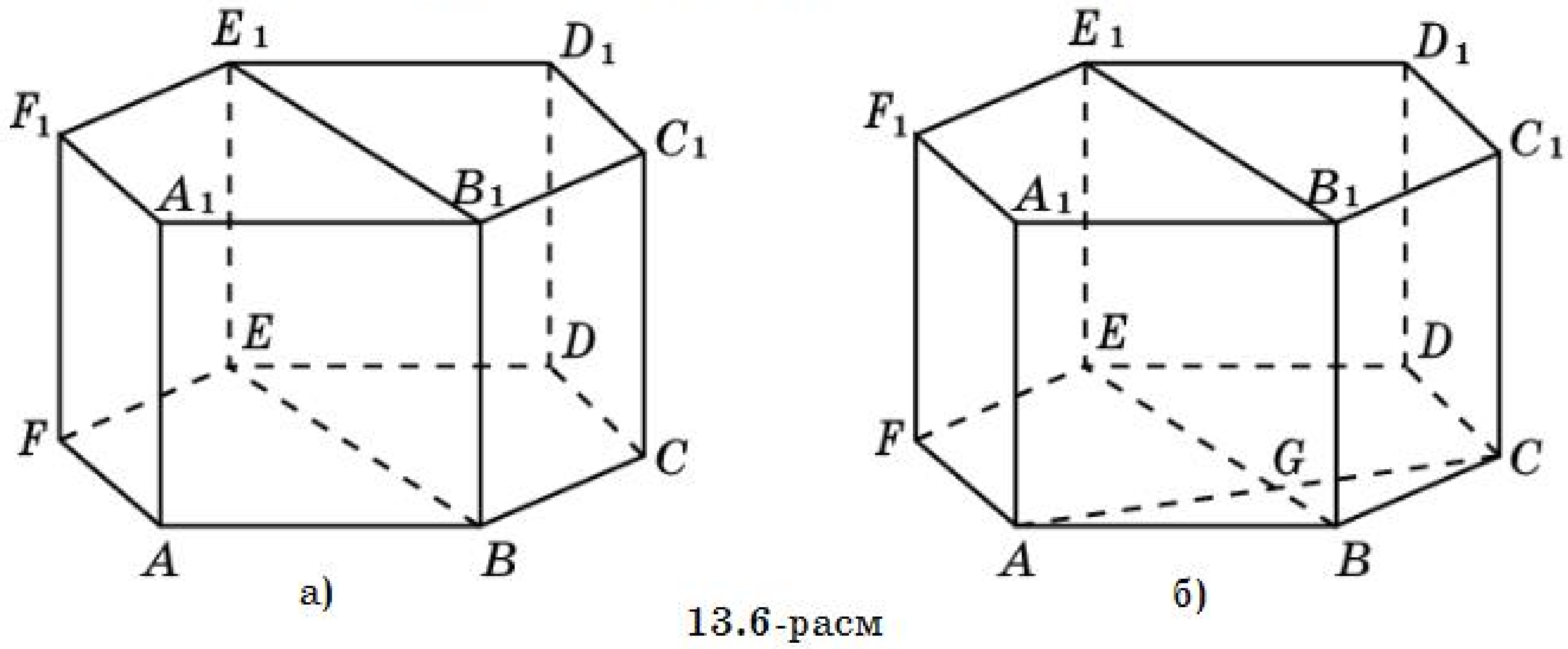


13.5-расм

Теорема. ***Параллел икки текислик орасидаги масофа текисликдаги нуқтани танлаб олишга боғлиқ эмас.***

Исбот. A_1, A_2 — b текислигига параллел бўлган a текислигидаги нуқталар (13.5-расм), B_1, B_2 шу нуқталардан b текислигига туширилган мос перпендикулярларнинг асослари бўлсин. 11-параграфдаги 3-хосса бўйича A_1B_1 ва A_2B_2 перпендикулярлар параллел бўлади. B_1B_2 тўғри чизиқ b текислигининг шу перпендикулярлар ва берилган текислик билан кесишиш чизиғи бўлади. Энди B_1B_2 тўғри чизиқ A_1A_2 тўғри чизиғига параллел. Бундан $A_1A_2B_2B_1$ тўртбурчак — параллелограмм (тўғри тўртбурчак). Демак, $A_1B_1 = A_2B_2$ бўлади. ◻

2-мисол. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AFF_1 ва BEE_1 мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (13.6, а-расм).



13.6-расм

Ечиш. Призманинг $ABCDEF$ ёғининг AC диагонали BEE_1 текислигига перпендикуляр. Шу диагоналнинг BEE_1 текислик билан кесишиш нуқтасини G деб белгилайлик (13.6, б-расм). AFF_1 ва BEE_1 текисликлар орасидаги масофа AG кесманинг узунлигига, яъни $\frac{\sqrt{3}}{2}$ га тенг бўлади.

Саволлар

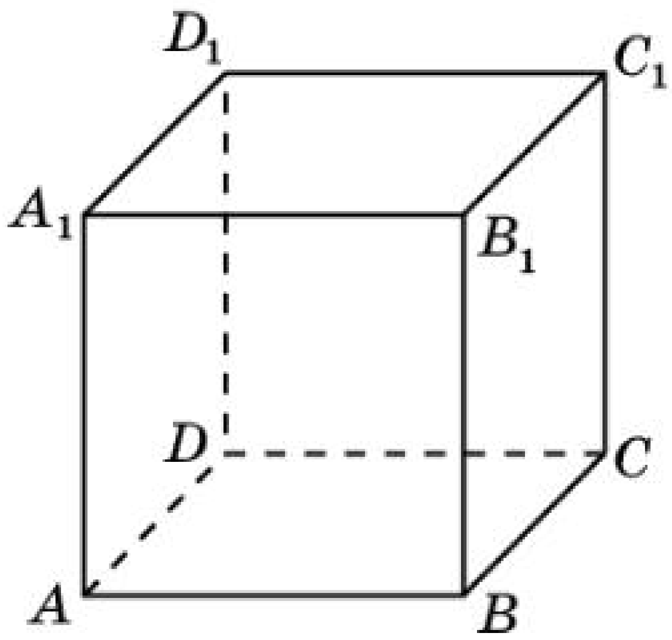
1. Параллел тўғри чизиқ билан текислик орасидаги масофа деганда нимани тушунасиз?
2. Параллел тўғри чизиқ билан текислик орасидаги масофани қандай топиш мумкин?
3. Параллел икки текислик орасидаги масофа деганда нимани тушунасиз?

Масалалар

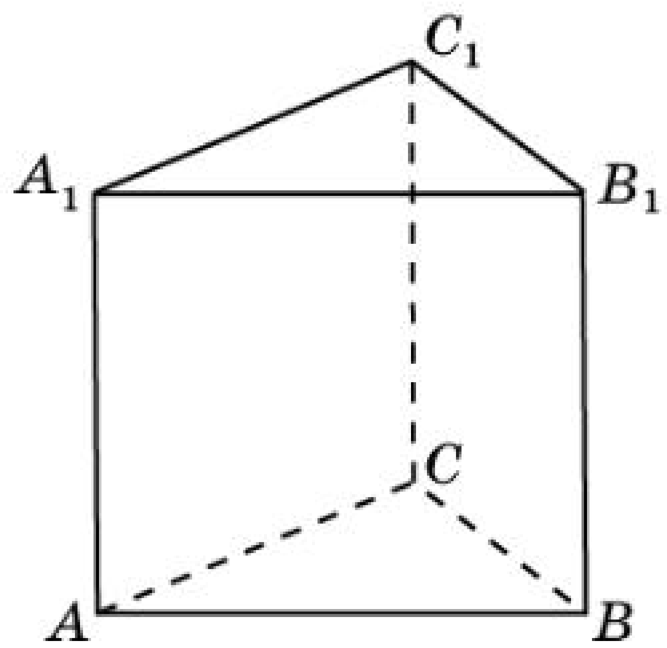
А

13.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда: а) AA_1 тўғри чизиқ билан BCC_1 текислик орасидаги масофани; б) AB_1 тўғри чизиғи билан CDD_1 текислик орасидаги масофани топинг (13.7-расм).

13.2. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари бирга тенг (13.8-расм). AA_1 тўғри чизиқ билан BCC_1 текислик орасидаги масофани топинг.

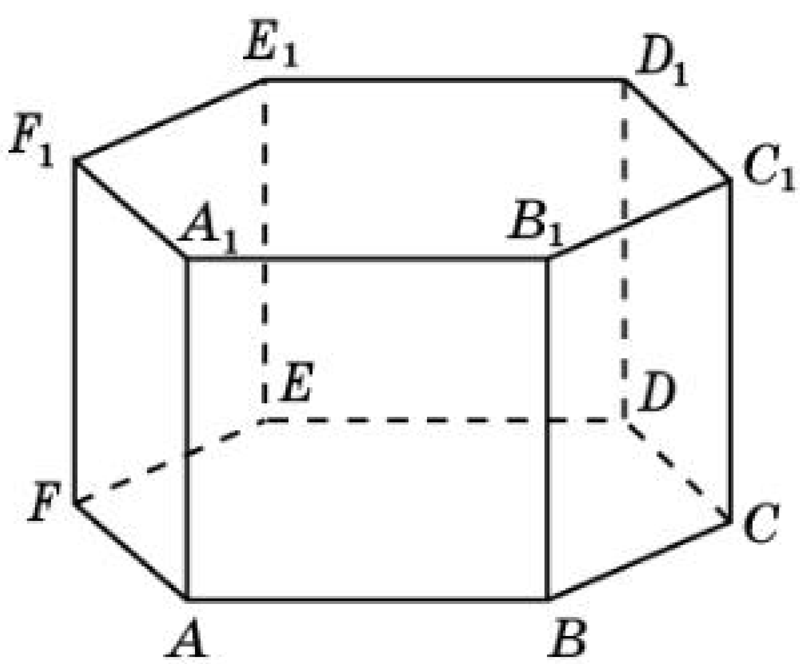


13.7-расм

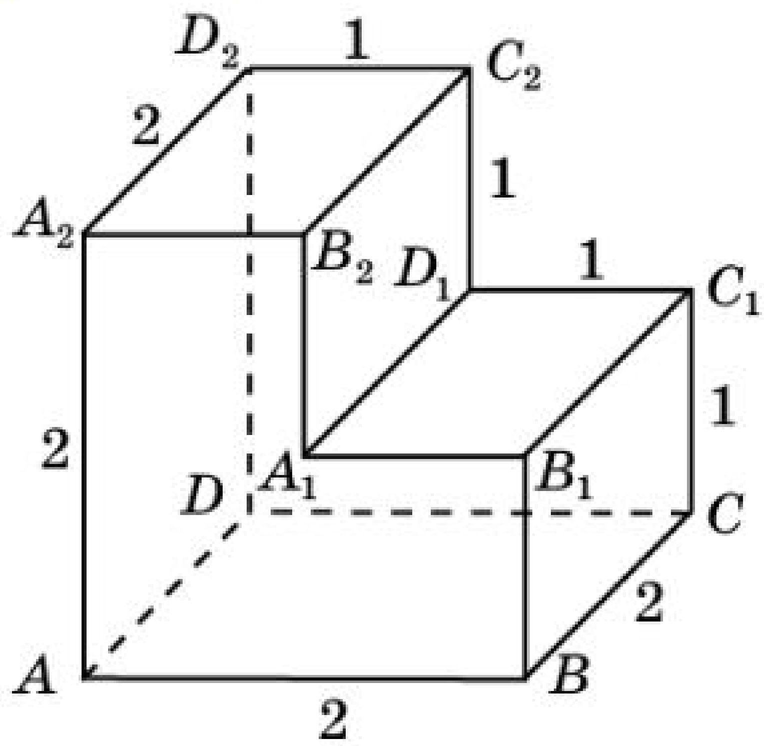


13.8-расм

13.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (13.9-расм). AA_1 тўғри чизиқ билан қуйидаги текислик орасидаги масофани топинг: а) BCC_1; б) CDD_1; в) DEE_1; г) BDD_1; д) BEE_1; е) BFF_1; ж) CEE_1; з) CFF_1.



13.9-расм



13.10-расм

13.4. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар (13.10-расм). Қуйидаги текисликлар орасидаги масофани топинг: а) ABB_1 ва CDD_2; б) ADD_2 ва BCC_1; в) ADD_2 ва $A_1D_1C_2$; г) ABC ва $A_1B_1C_1$.

B

13.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда: а) BB_1 тўғри чизиқ билан ACC_1 текислиги орасидаги масофани; б) AB тўғри чизиқ билан CDA_1 текислиги орасидаги масофани топинг.

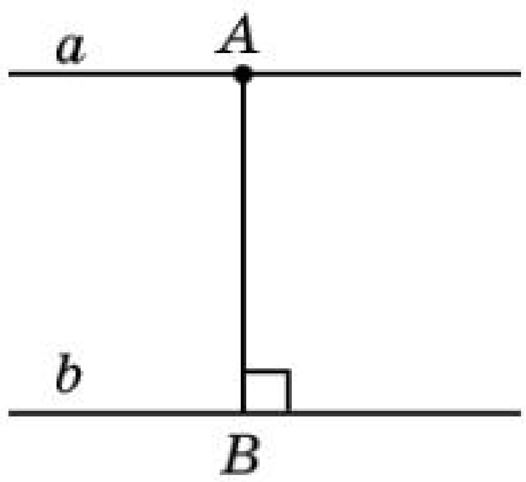
13.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Қуйидаги текисликлар орасида масофани топинг: а) ABB_1 ва DEE_1; б) ABB_1 ва CFF_1; в) ACC_1 ва FDD_1.

14-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги масофа

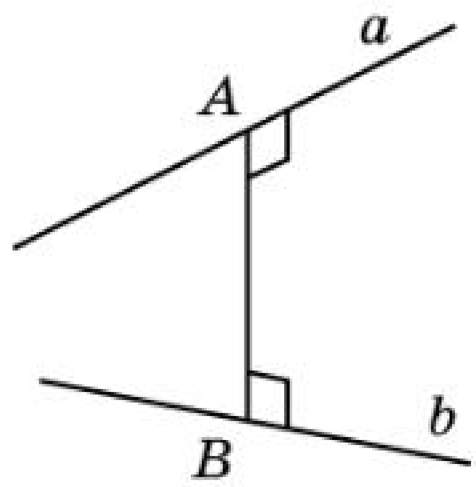
Планиметрия курсида параллел икки тўғри чизиқ орасидаги масофа деб, улардан бирининг ихтиёрий бир нуқтасидан иккинчи тўғри чизиққача бўлган масофанинг айтилишини эслайлик.

Параллел икки тўғри чизиқ бир текисликда ётганлиги учун бу тушунча фазо учун ҳам ўринли бўлади.

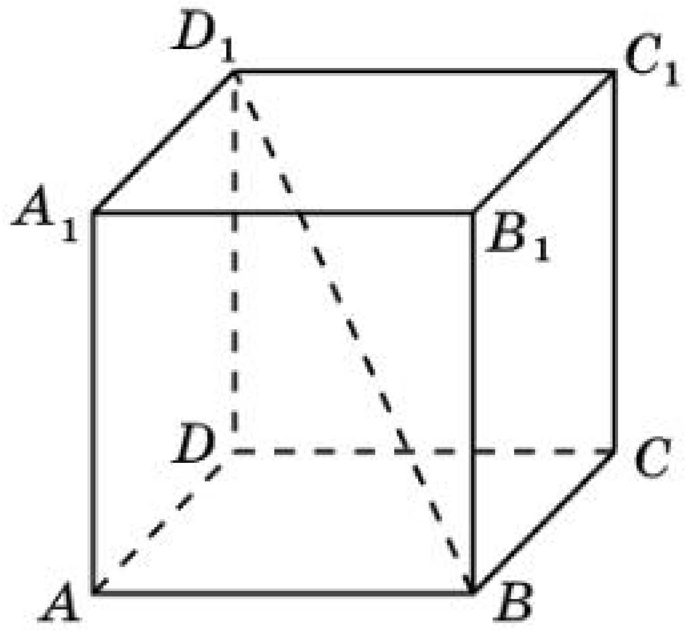
Фазодаги параллел икки тўғри чизиқ орасидаги масофа деб, улардан бирининг ихтиёрий бир нуқтасидан иккинчи тўғри чизиққача бўлган масофага айтилади (14.1-расм).



14.1-расм



14.2-расм



14.3-расм

Энди текисликдаги айқаш икки тўғри чизиқ орасидаги масофа тушунчасини қарайлик.

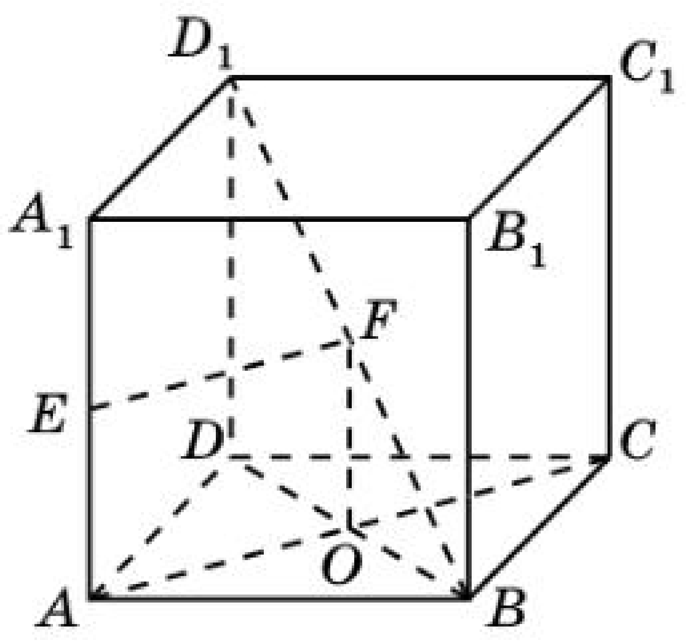
Айқаш тўғри чизиқларнинг умумий перпендикуляри деб, шу тўғри чизиқларнинг ҳар бирига перпендикуляр бўлиб, учлари шу тўғри чизиқларда ётувчи кесмага айтилади. Умумий перпендикулярнинг узунлиги айқаш тўғри чизиқларнинг орасидаги масофа деб аталади (14.2-расм).

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AA_1 ва BC айқаш тўғри чизиқларга умумий перпендикуляр тўғри чизиқни кўрсатинг (14.3-расм).

1-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AA_1 ва BD_1 айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг (14.3-расм).

Ечиш. Берилган тўғри чизиқлар учун умумий перпендикуляр AA_1 ва BD_1 кесмаларининг ўрталарини туташтирувчи EF кесма бўлади (14.4-расм).

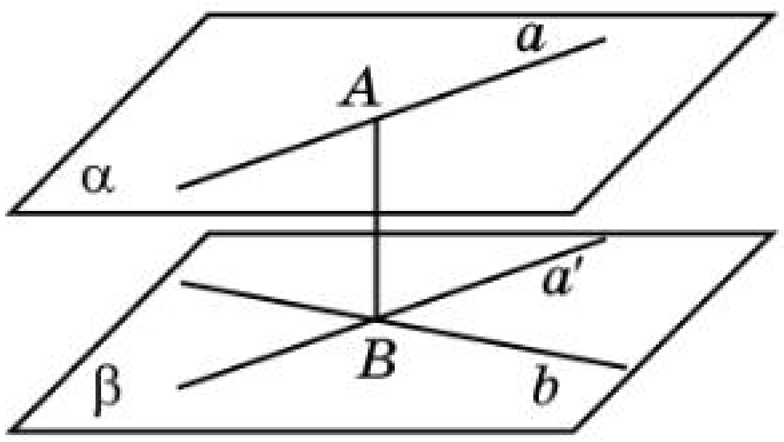
EF кесма AA_1 тўғри чизиқ ва BDD_1 текислигига перпендикуляр бўлган AC тўғри чизиққа параллел бўлади. EF кесма шу текисликда ётган BD_1 тўғри чизиққа ҳам перпендикуляр EF умумий перпендикуляр AO кесмага тенг, демак, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг бўлади.



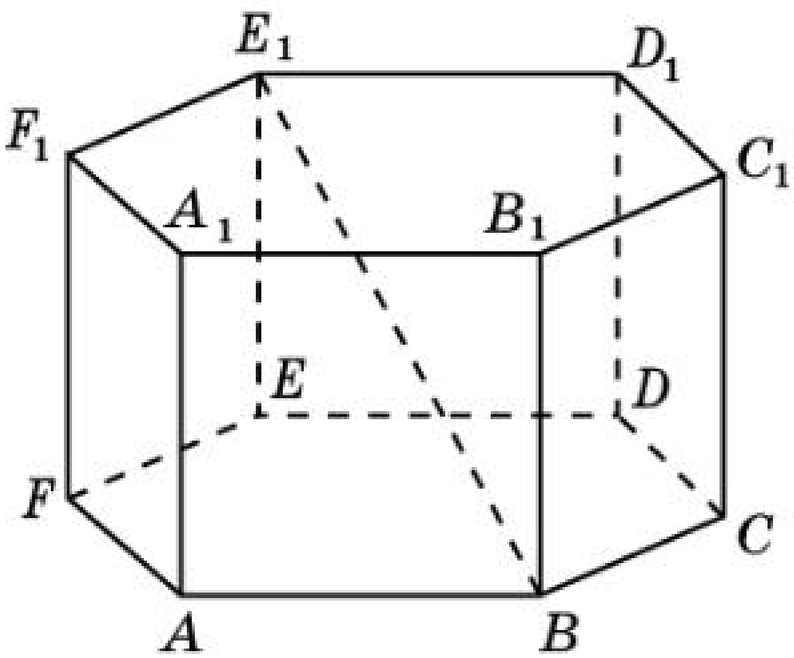
14.4-расм

Паралел тўғри чизиқ билан текислик орасидаги масофа тушунчасини айқаш икки тўғри чизиқ орасидаги масофани топишда қўллаш мумкин.

a ва b — айқаш икки тўғри чизиқ бўлсин. b тўғри чизиқнинг ихтиёрий бир нуқтаси оркали a тўғри чизиққа паралел a' тўғри чизиқ ўтказамиз. a' ва b тўғри чизиғи a тўғри чизиғига паралел бўлган b текислигини ифодалайди (14.5-расм). Берилган айқаш тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлган AB перпендикуляр b текислигига перпендикуляр бўлади. Демак, унинг узунлиги a тўғри чизиқ билан b текислиги орасидаги масофага тенг бўлади.



14.5-расм



14.6-расм

2-мисол. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.6-расм). AA_1 ва BE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. AA_1 тўғри чизиқ BEE_1 текислигига паралел. Энди, AA_1 ва BE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофа AA_1 тўғри чизиқ билан BEE_1 текислиги орасидаги масофага тенг. Аввалги параграфда кўрсатилгандек, бу масофа $\frac{\sqrt{3}}{2}$ га тенг бўлади.

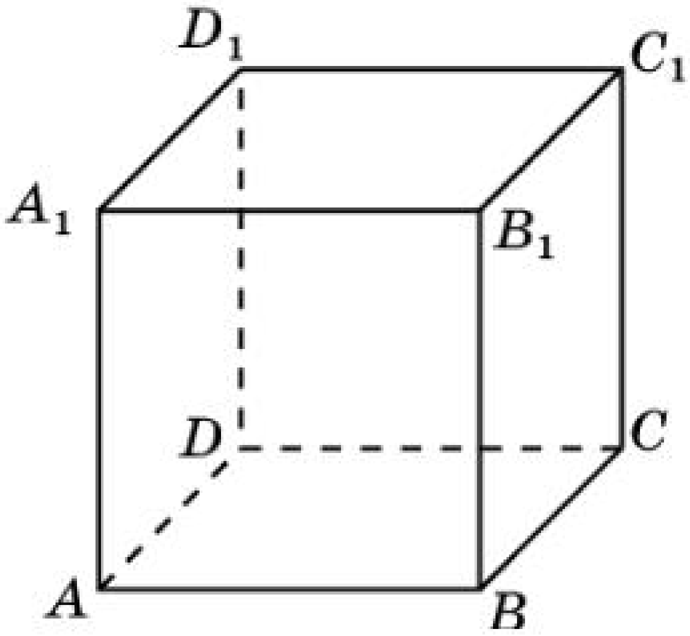
Саволлар

1. Параллел икки туғри чизиқ орасидаги масофа деганда нимани тушунасиз?
2. Айқаш икки тўғри чизиқнинг умумий перпендикуляри деганда нимани тушунасиз?
3. Айқаш икки тўғри чизиқ орасидаги масофа деганда нимани тушунасиз?

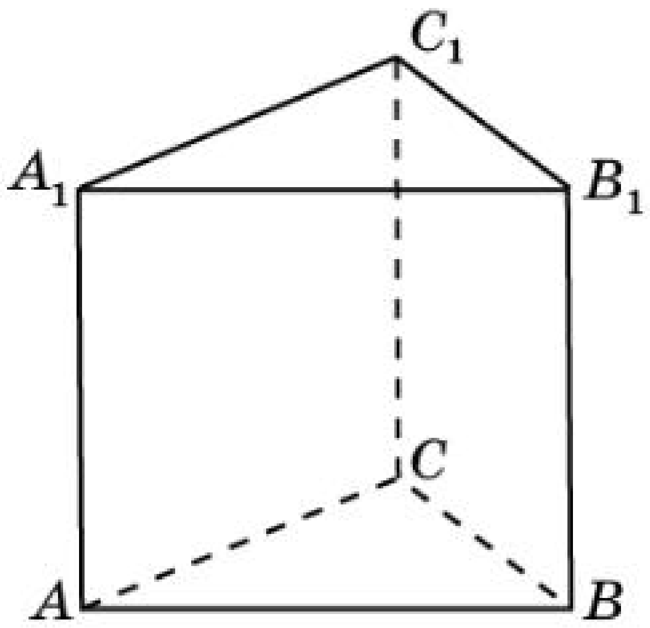
Масалалар

A

14.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AA_1 ва BB_1; б) AA_1 ва CC_1; в) AA_1 ва BC; г) AA_1 ва CD; д) AA_1 ва BC_1; е) AA_1 ва CD_1; ж) AA_1 ва BD; з) AB_1 ва CD_1 (14.7-расм).



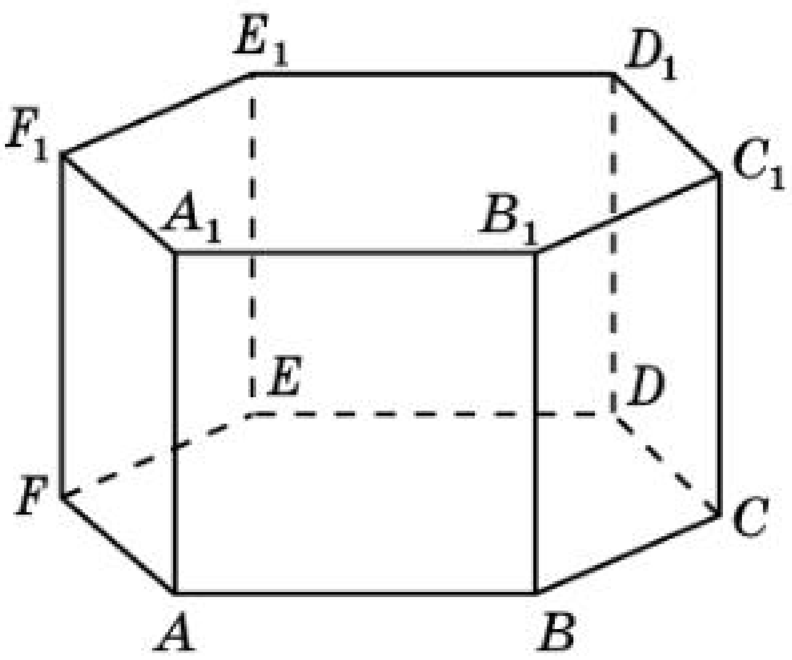
14.7-расм



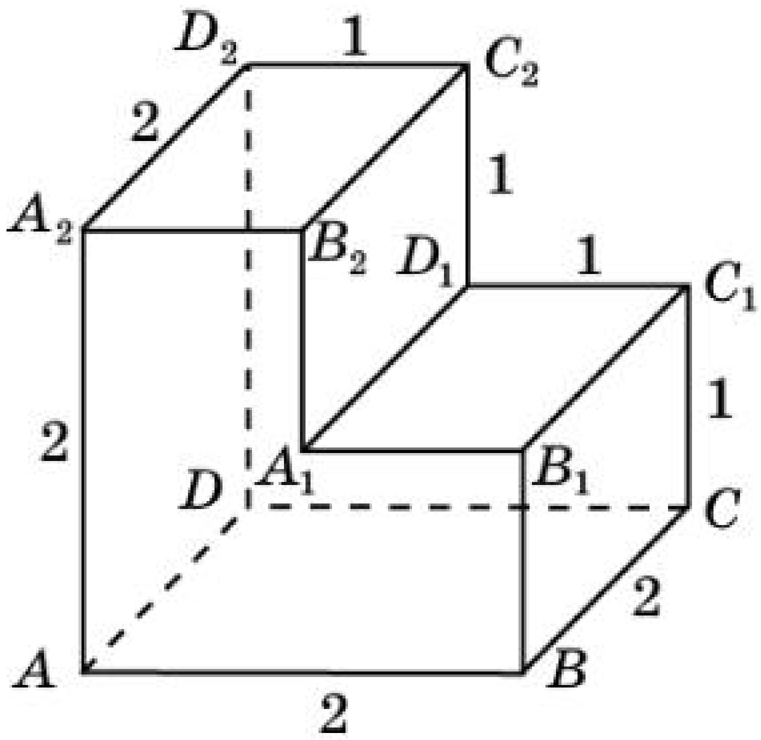
14.8-расм

14.2. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.8-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орсидаги масофани топинг: а) AA_1 ва BC; б) AB ва A_1C_1.

14.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.9-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AB ва A_1B_1; б) AB ва B_1C_1; в) AA_1 ва CC_1; в) AA_1 ва DD_1.



14.9-расм



14.10-расм

14.4. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар бўлсин (14.10-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AB ва C_1D_1; б) AB ва C_2D_2; в) AA_2 ва CC_1; г) AA_2 ва D_1C_2.

B

14.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги AC_1 ва BC тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг (14.7-расм).

14.6. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.8-расм). AA_1 ва BC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

14.7. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (14.9-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AA_1 ва B_1C_1; б) AA_1 ва C_1D_1; в) AA_1 ва CD_1; г) AA_1 ва DE_1; д) AA_1 ва BD_1.

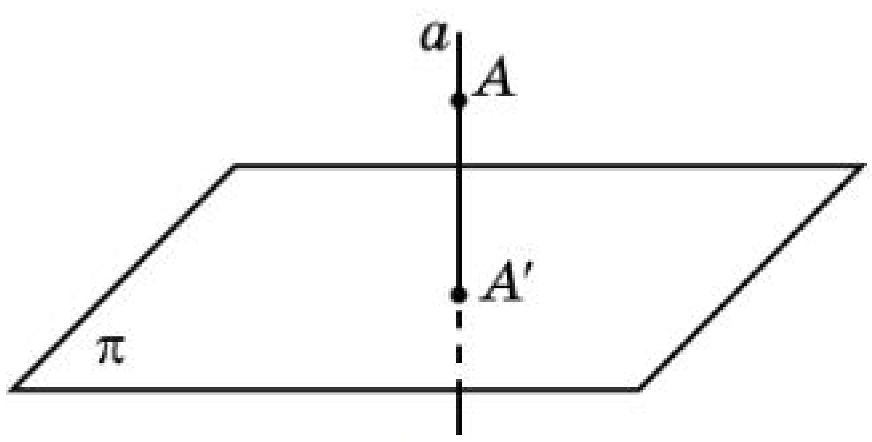
14.8. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар бўлсин (14.10-расм). Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг: а) AA_2 ва B_1C_1; б) AA_2 ва A_1D_1; в) AB_1 ва CC_1; г) AB ва D_1C_2; д) A_2B_2 ва CC_1.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

14.9. Текисликдаги тўғри чизиққа туширилган оғма тушунчасига ўхшаш фазодаги текисликка туширилган оғма тушунчасини таърифланг.

15-§. Ортогонал проекциялаш

Ихтиёрий бир π текислиги берилсин. Текисликнинг ихтиёрий A нуқтаси орқали шу текисликка перпендикуляр a тўғри чизиғини ўтказамиз. Шу тўғри чизиқнинг берилган текислик билан кесишувчи A' нуқтаси A нуқтасининг текисликдаги ортогонал проекцияси деб аталади (15.1-расм).



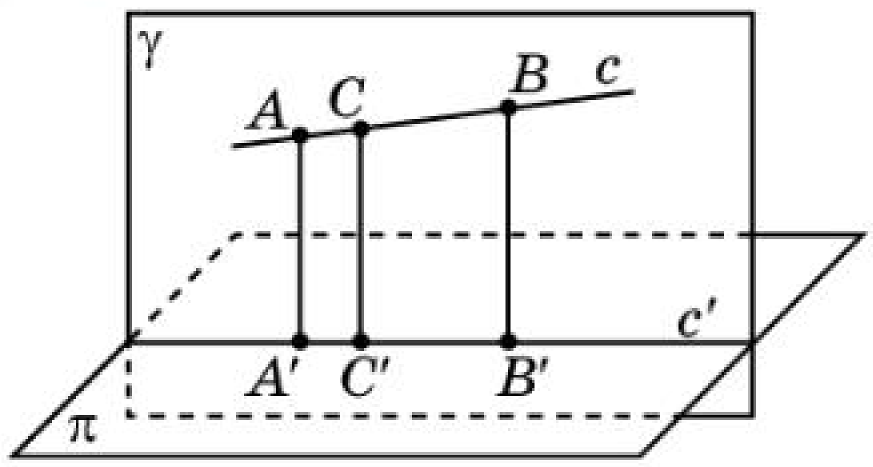
15.1-расм

Фазодаги нуқталарга уларнинг берилган текисликдаги ортогонал проекцияларини мослаштиришни шу *текисликка ортогонал проекциялаш* деб атайди. Текисликнинг ўзи проекциялаш текислиги деб аталади.

Ортогонал проекциялашнинг баъзи хоссаларини қарайлик.

1-хосса. *Ортогонал проекциялаш текисликка перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқларни тўғри чизиқларга, перпендикуляр чизиқларни эса нуқталарга кўчиради.*

Исбот. c тўғри чизиқ ρ проекциялаш текислигига перпендикуляр *бўлмасин* (15.2-расм). c тўғри чизиғига тегишли ихтиёрий бир A, B нуқталарни қараймиз. Шу нуқталар орқали ρ текислигига перпендикуляр тўғри чизиқлар ўтказайлик. Уларнинг ρ текислиги билан кесишиш нуқталарини мос равишда A', B' белгилаймиз. Ўтказилган



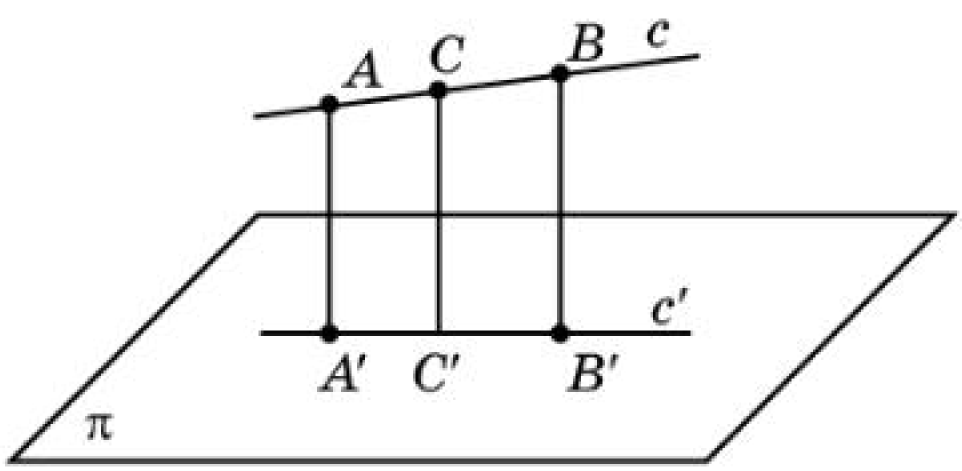
15.2-расм

тўғри чизиқлар параллел бўлганлиги сабабли улар бир текисликда ётади. Бу текисликни ꞡ деб белгилайлик. c' — тўғри чизиғи шу текисликнинг ρ текислиги билан кесишиш чизиғи бўлсин. c' тўғри чизиғи c тўғри чизиғининг ортогонал проекцияси эканини исботлайлик.

Ҳақиқатан ҳам, c тўғри чизиғида ётувчи ихтиёрий C нуқта учун шу нуқта орқали ўтувчи ва ρ текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ ꞡ текислигида ётади. Демак, унинг ρ текислиги билан кесишиш нуқтаси c' тўғри чизиғига тегишли бўлади. Бундан C нуқтасининг ортогонал проекцияси c' тўғри чизиғида ётади. Аксинча, агар C' нуқта c' тўғри чизиғига тегишли бўлса, унда шу нуқта орқали ўтувчи ва ρ текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ ꞡ текислигида ётадиган бўлади. Демак, у c тўғри чизиғини қандайдир бир C нуқтасида кесиб ўтади. Унинг ортогонал проекцияси C' нуқта бўлади. Агар тўғри чизиқ ρ текислигига перпендикуляр бўлса (15.1-расм), унда унинг ортогонал проекцияси нуқта бўлиши аниқ. □

Қандай ўйлайсиз, ортогонал проекциялашда кесмаларнинг узунликлари сақланадими?

2-хосса. Ортогонал проекциялаш текисликка перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқда ётувчи кесмалар нисбатини сақлайди. Хусусий ҳолда кесманинг ўртаси шу кесманинг проекциясининг ўртасига проекцияланади.



15.3-расм

Исботи. A, B, C нуқталар π текислигига перпендикуляр бўлмаган c тўғри чизиғига тегишли бўлсин. A', B', C' уларнинг мос равишда c тўғри чизиғининг текисликдаги c' ортогонал проекциясида ётувчи ортогонал проекциялари бўлсин (15.3-расм). AA', BB', CC' тўғри чизиқлар параллел бўлганликдан, пропорционал кесмалар тўғрисидаги теорема бўйича қуйидаги нисбатлар тенглиги бажарилади:

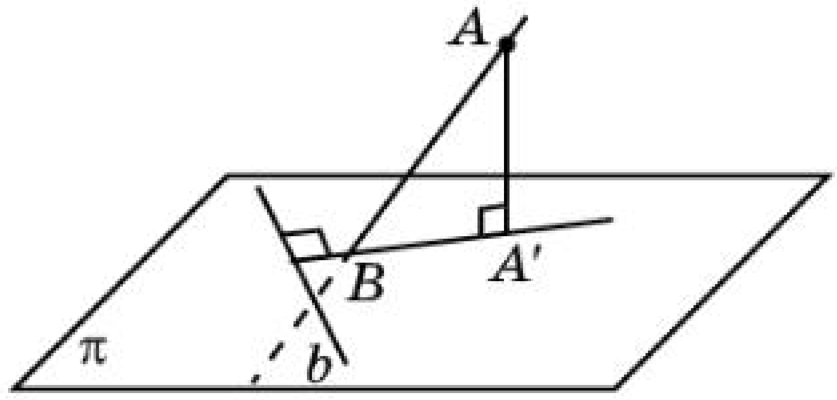
$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}. \ \square$$

Текисликка перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқ *оғма* деб аталади.

Шу билан бирга *оғма* деб текисликдан ташқарида ётган нуқтани шу текисликдаги нуқта билан туташтирувчи ва перпендикуляр бўлмаган кесмани айтамиз.

Теорема (уч перпендикуляр ҳақида). ***Текисликда оғманинг асосидан унинг проекциясига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикуляр бўлади.***

Исботи. AA' — ρ текислигига перпендикуляр, AB — оғма, $A'B$ оғманинг ортогонал проекцияси бўлсин (15.4-расм).

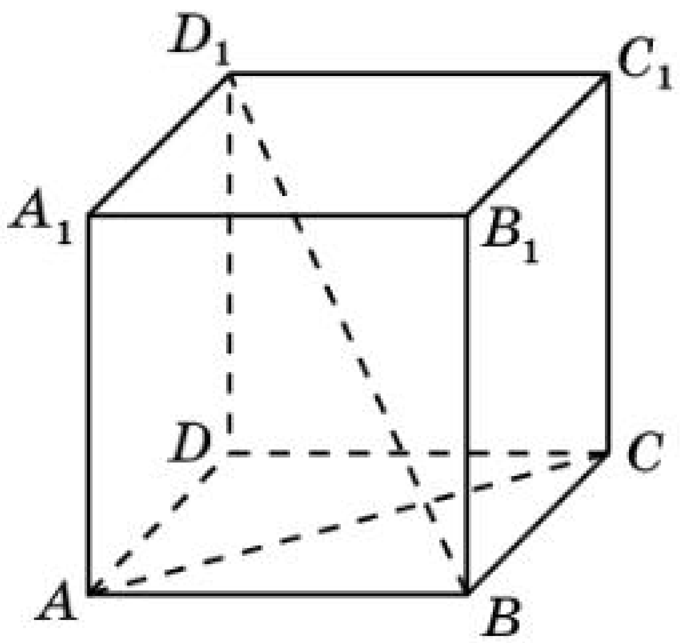


15.4-расм

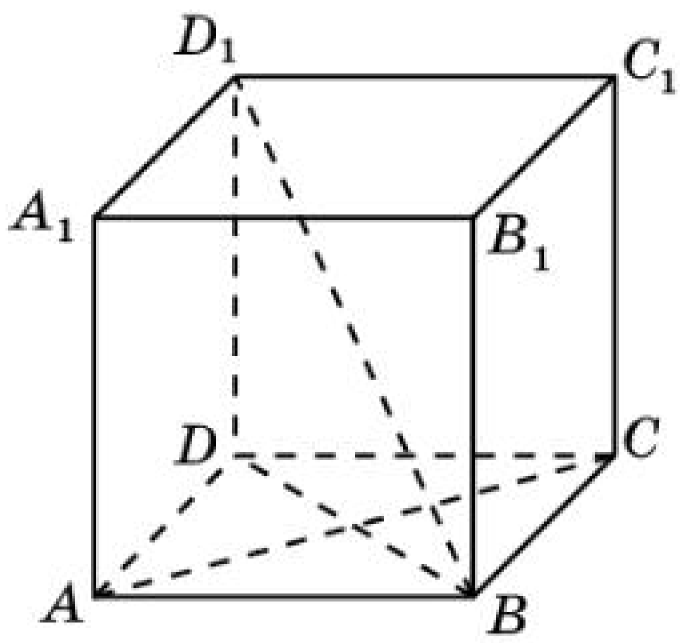
AA' тўғри чизиқ ρ текислигига перпендикуляр бўлганлигидан, ρ текислигида ётувчи ихтиёрий b тўғри чизиқ AA' тўғри чизиғига перпендикуляр бўлади. Агар шу билан бирга, b тўғри чизиқ $A'B$ тўғри чизиғига перпендикуляр бўлса, унда у тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлик аломати бўйича $AA'B$ текислигига перпендикуляр бўлади. Демак, у ўша текисликда ётган ихтиёрий тўғри чизиққа, яъни AB оғмага ҳам перпендикуляр бўлади.

Тескари теорема ҳам тўғри. Яъни агар текисликдаги тўғри чизиқ оғмага перпендикуляр бўлса, у ҳолда шу тўғри чизиқ оғманинг проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади. Буни ўзингиз исботланг.

Мысал. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC ва BD_1 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлишини исботланг (15.5-расм).



15.5-расм



15.6-расм

Ечиш. BD_1 тўғри чизиқнинг ABC текислигидаги ортогонал проекцияси BD тўғри чизиқ бўлади (15.6-расм). AC тўғри чизиқ BD тўғри чизиғига перпендикуляр, демак у BD_1 тўғри чизиғига ҳам перпендикуляр бўлади.

Саволлар

1. Нуқтанинг текисликдаги ортогонал проекцияси деб нимага айтилади?
2. Текисликка ортогонал проекциялаш нима?

3. Ортогонал проекциялаш хоссаларини айтинг.
4. Оғма деб нимага айтилади?
5. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремани айтинг.

Масалалар

А

15.1. A нуқтадан берилган текисликкка AA' перпендикуляр ва AB оғма ўтказилган ва $AB = 37$ см, $AA' = 35$ см бўлса, унда AB кесманинг ортогонал проекциясини топинг.

15.2. A нуқтадан берилган текисликкка AA' перпендикуляр ва AB оғма ўтказилган. Агар $AA' = 6$ см, $\angle A'AB = 60^\circ$ бўлса, унда AB кесманинг узунлигини топинг.

15.3. A нуқтадан берилган текисликкка AA' перпендикуляр ва AB оғма ўтказилган. Агар $AB = 2\sqrt{10}$ см, $A'B = 3AA'$ бўлса, унда AA' кесманинг узунлигини топинг.

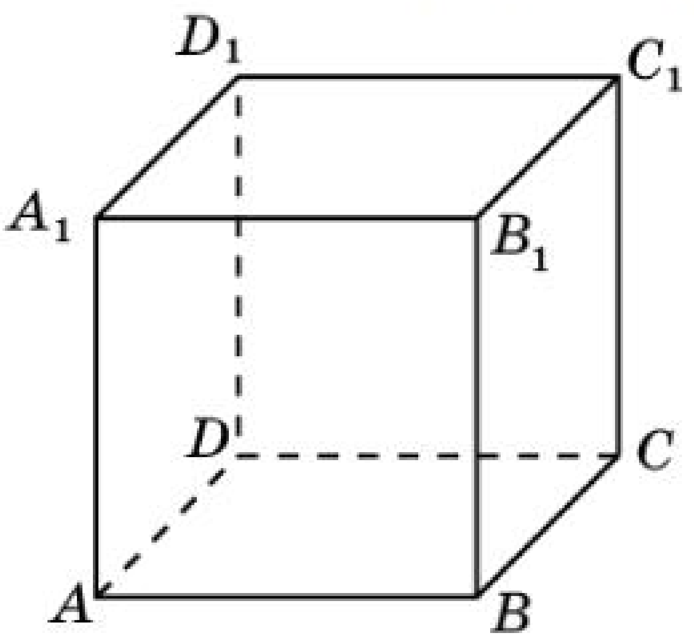
15.4. Узунлиги 13 м бўлган нарвоннинг юқори учи ердан 12 м баландликда жойлашиши учун унинг пастки учини уй қиррасидан қандай узоқликда жойлаштириш керак?

15.5. Нарвоннинг пастки учи уйдан 6 м узоқликда бўлиб, юқориги учи ердан 8 м баландликдаги уй деразасига етиш учун қандай узунликда бўлиш керак?

В

15.6. Бир нуқтадан текисликка ўтказилган икки оғманинг кесмаларининг узунликлари 15 см ва 20 см. Шу кесмаларнинг биттасининг ортогонал проекцияси 16 см. Иккинчи кесманинг ортогонал проекциясини топинг.

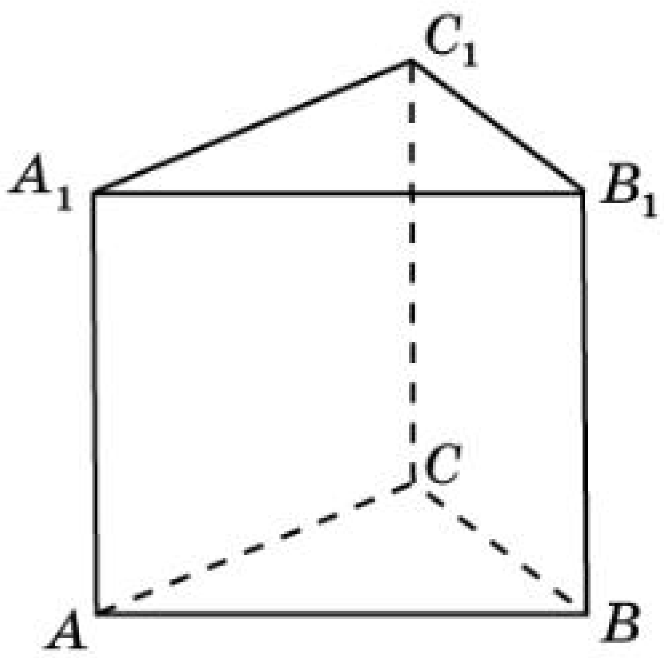
15.7. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда жойлашган ва A', B', C' — шу нуқталарнинг мос равишда ортогонал проекциялари, $AB = 5$, $BC = 10$, $A'C' = 12$. $A'B'$ ва $B'C'$ кесмаларнинг узунликларини топинг.



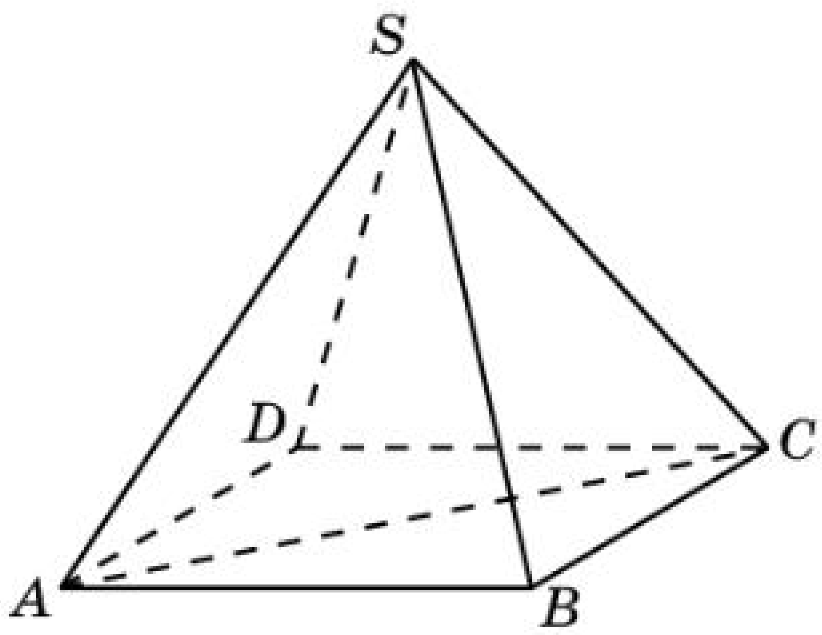
15.7-расм

15.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг (15.7-расм) ACC_1 текислигига қуйидаги кесмаларнинг ортогонал проекцияларини чизинг: а) BB_1; б) BC_1; в) BD_1.

15.9. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг (15.8-расм) ACC_1 текислигига қуйидаги кесмаларнинг ортогонал проекцияларини чизинг: а) BB_1; б) BC; в) BC_1.



15.8-расм

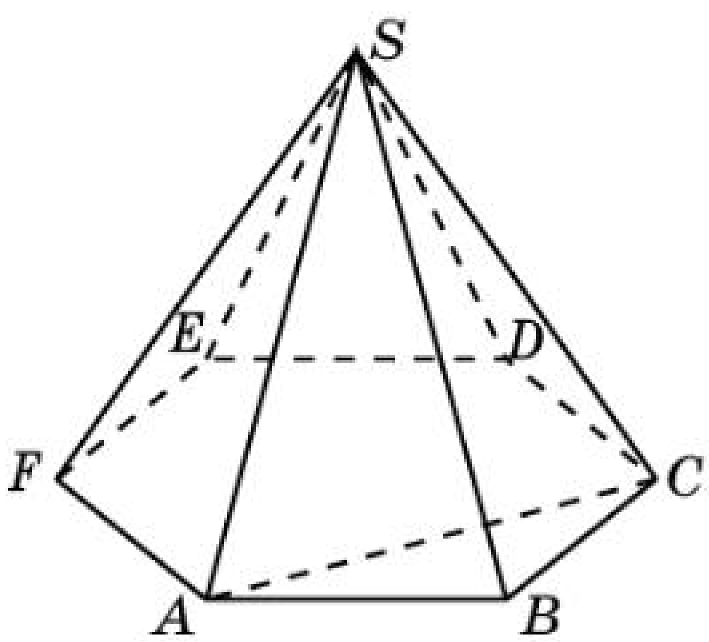


15.9-расм

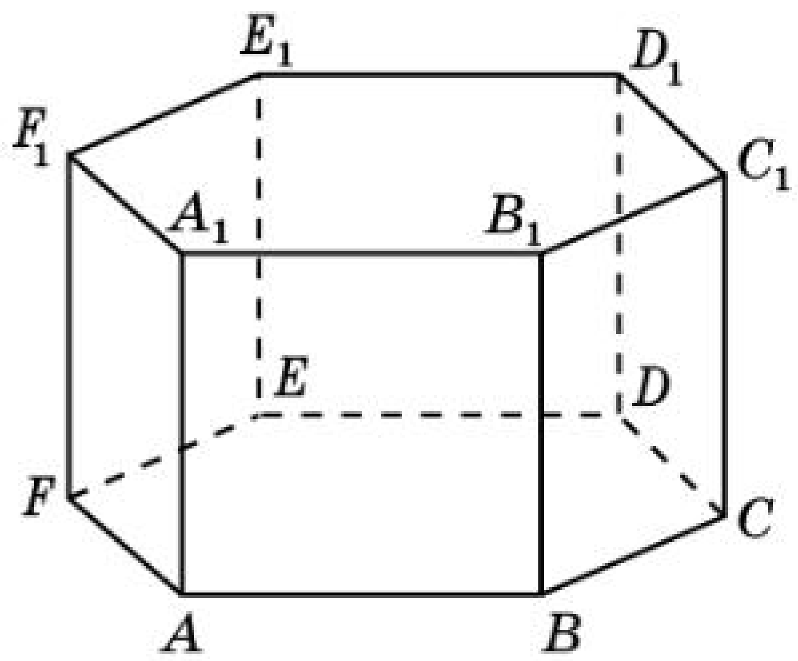
15.10. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг асосининг AC диагонали у билан айқаш SB қиррасига перпендикуляр эканлигини исботланг (15.9-расм).

15.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (15.7-расм) қуйидаги тўғри чизиқлар перпендикуляр эканлигини исботланг: а) AB_1 ва BD_1; б) AC_1 ва BD; в) AD_1 ва CA_1.

15.12. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг AC диагонали у билан айқаш SB қиррасига перпендикуляр эканини исботланг (15.10-расм).



15.10-расм



15.11-расм

15.13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада (15.11-расм) қуйидаги чизиқлар перпендикуляр эканини исботланг: а) AC_1 ва BE; б) AD_1 ва CE; в) AB_1 ва BE_1.

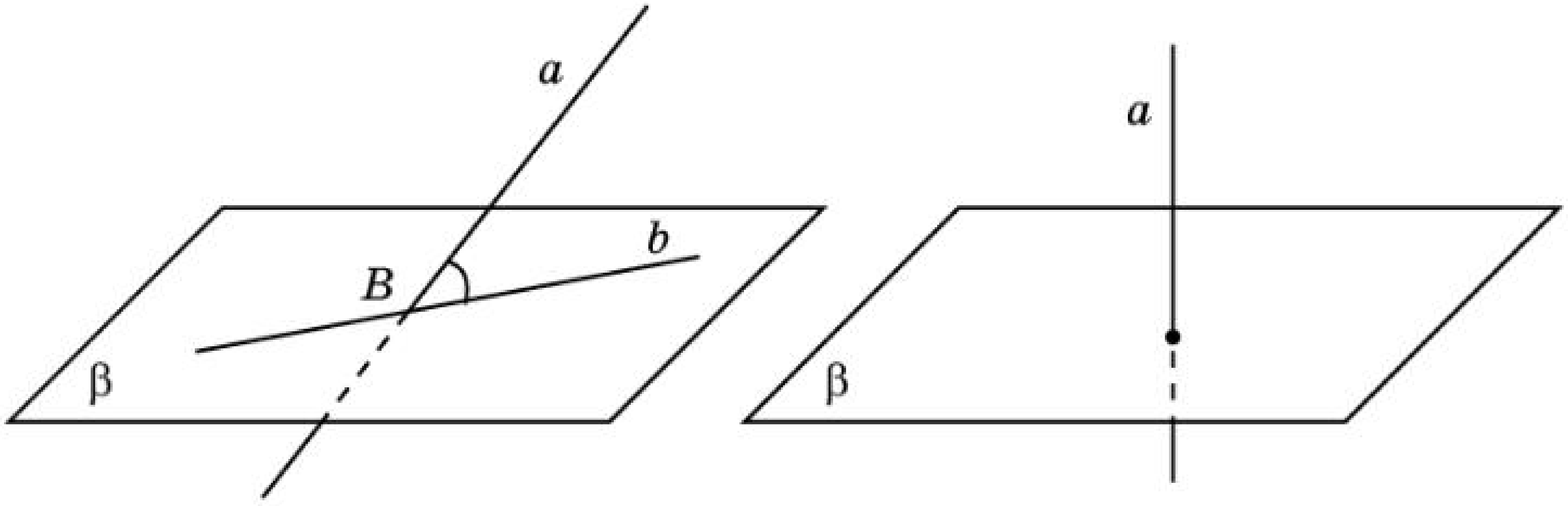
15.14. Берилган икки нуқтадан бир хил узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

15.15. Оғма ва текислик орасидаги бурчак тушунчасини таърифланг.

16-§. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак.

Ортогонал проекциялаш проекция текислигига перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқларни (оғмалар) тўғри чизиқларга, текисликка перпендикуляр тўғри чизиқларни эса нуқталарга кўчиришига тўхтайлик (16.1-расм).



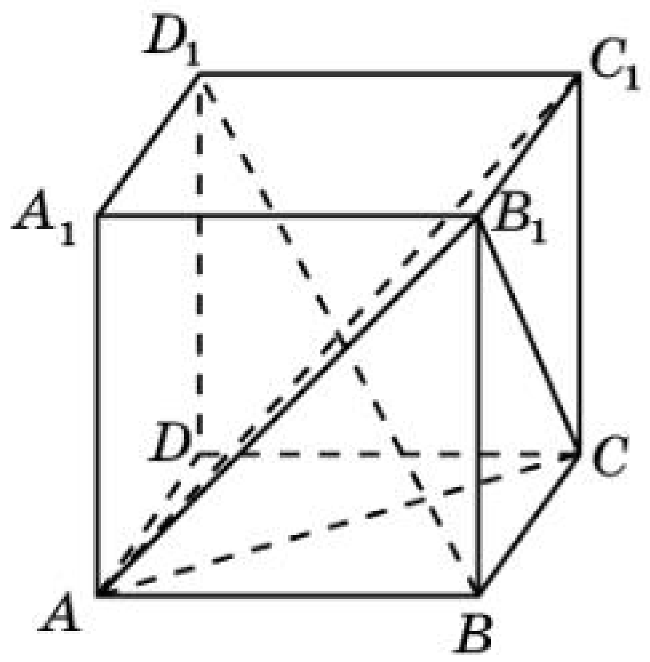
16.1-расм

Текислик ва оғма орасидаги бурчак деб, оғма ва унинг текисликдаги ортогонал проекцияси орасидаги бурчакка айтилади (16.1, а-расм).

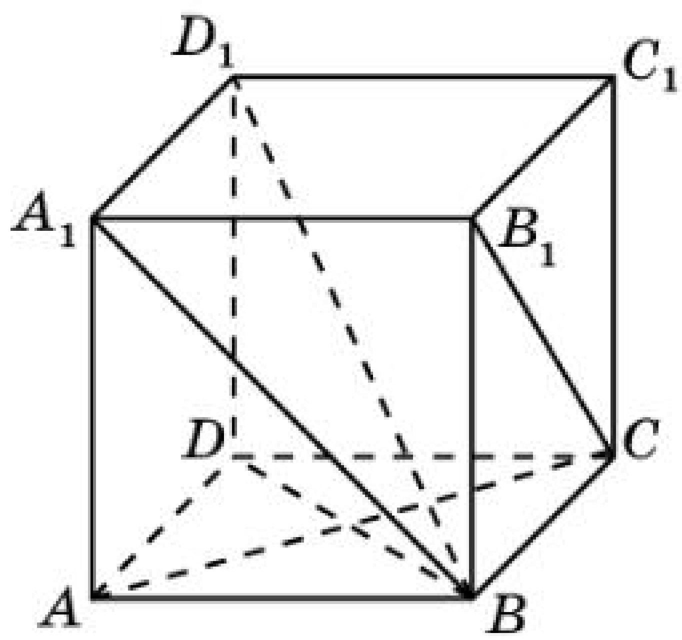
Текислик ва унга перпендикуляр тўғри чизиқ орасидаги бурчак 90° га тенг деб ҳисобланади (16.1, б-расм).

Кесма ва текислик орасидаги бурчак деб, шу кесмани ўз ичига олувчи тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчакка айтилади.

Масала. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BD_1 тўғри чизиқ ACB_1 текислигига перпендикуляр бўлишини исботланг (16.2-расм).



16.2-расм



16.3-расм

Ечиш. BD_1 тўғри чизиқнинг ABC текислигидаги ортогонал проекцияси AC тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган BD тўғри чизиқ бўлади (16.3-расм).

Шундай қилиб BD_1 тўғри чизиқ ACB_1 текислигидаги кесишувчи AC ва AB_1 тўғри чизиқларига перпендикуляр бўлади. Демак, BD_1 тўғри чизиқ ACB_1 текислигига перпендикуляр бўлади.

Саволлар

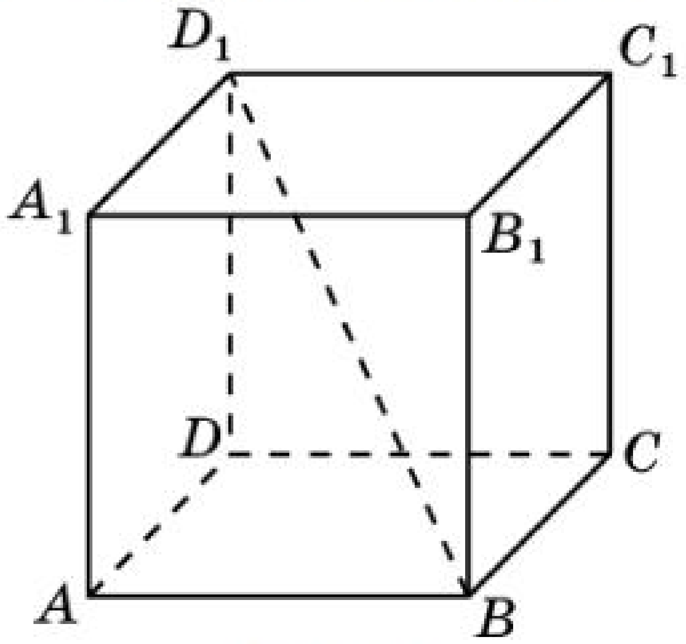
1. Оғма билан текислик орасидаги бурчак деб нимага айтилади?
2. Текислик билан унга перпендикуляр тўғри чизиқ орасидаги бурчак нимага тенг?
3. Кесма билан текислик орасидаги бурчак деб нимага айтилади?

Масалалар

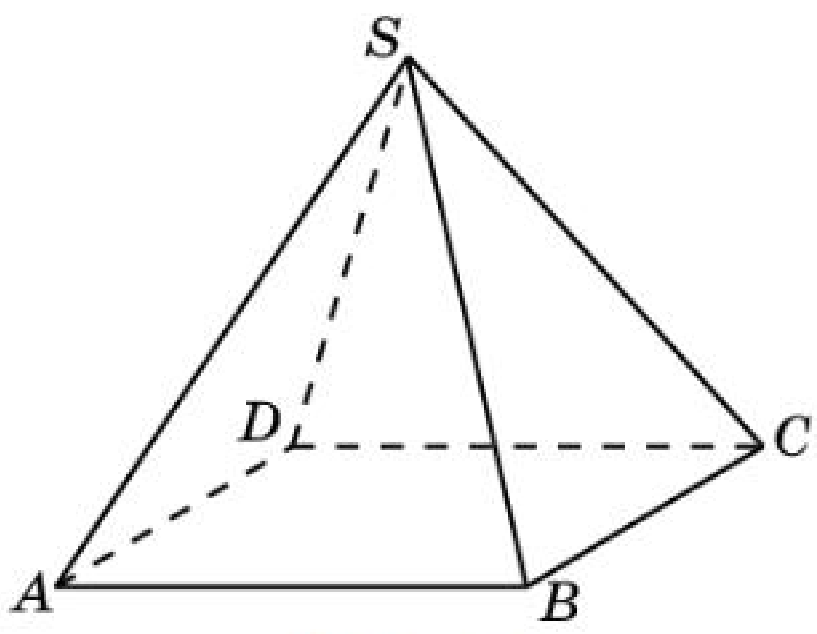
A

16.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги (16.4-расм) AB_1 тўғри чизиқ билан қуйидаги текисликнинг орасидаги бурчакни топинг: а) ABC; б) BCC_1; в) BCD_1.

16.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги BD_1 тўғри чизиқ билан ABC текислигининг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг (16.4-расм).



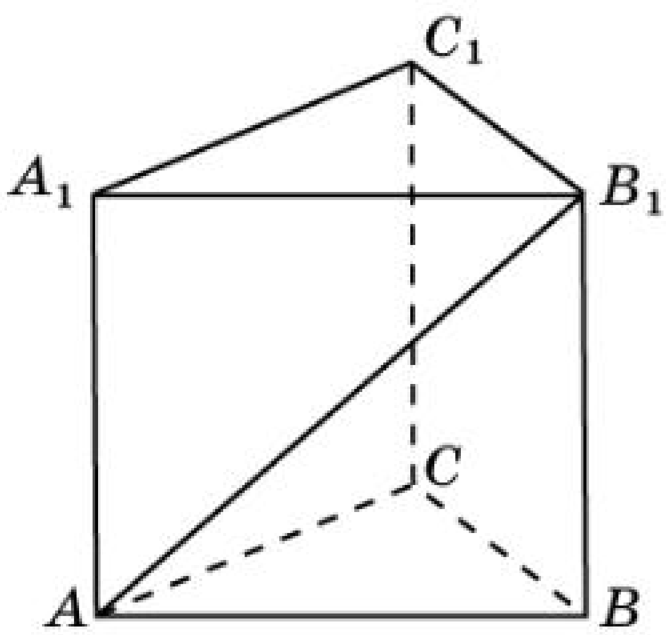
16.4-расм



16.5-расм

16.3. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг (16.5-расм). SA тўғри чизиқ билан ABC текислиги орасидаги бурчакни топинг.

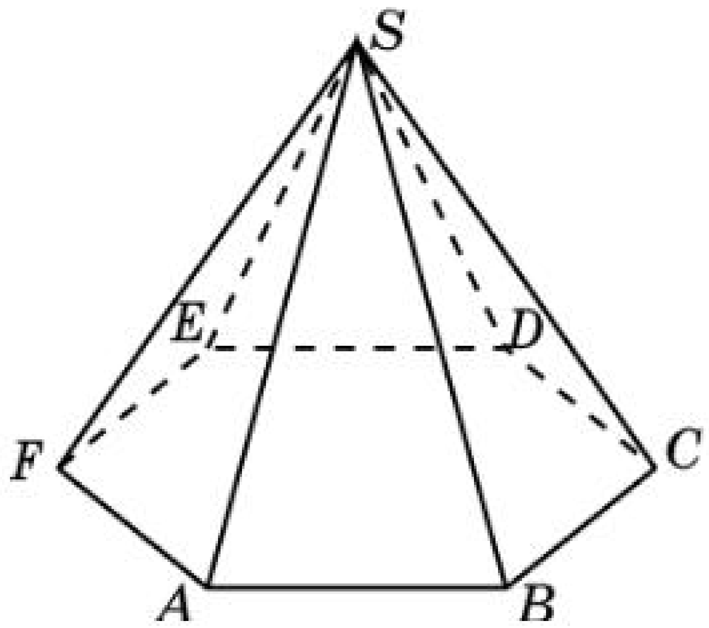
16.4. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (16.6-расм). а) AB_1 тўғри чизиқ билан ABC текислигининг; б) AB тўғри чизиқ билан BCC_1 текислигининг орасидаги бурчакни топинг.



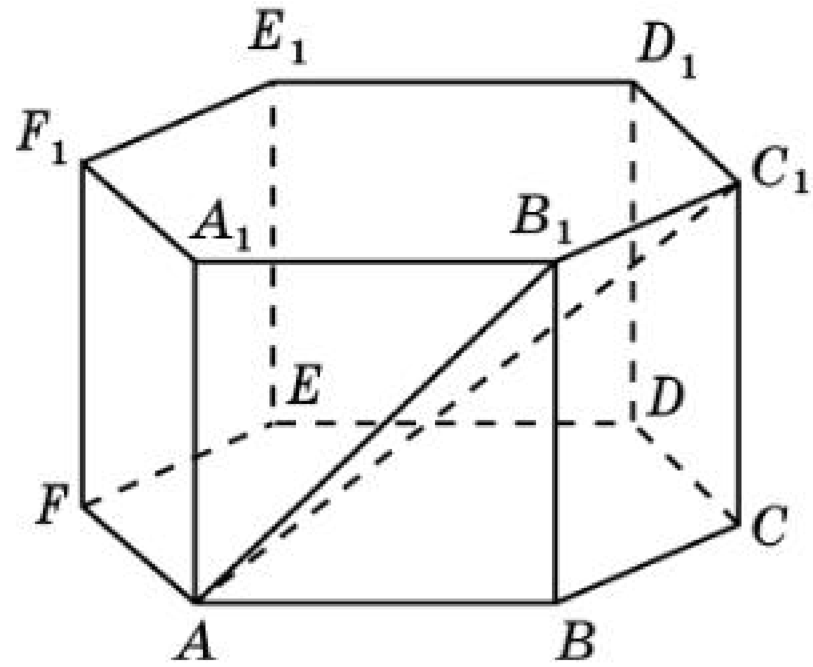
16.6-расм

16.5. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари 1 га тенг. Ён қирралари 2 га тенг (16.7-расм). SA тўғри чизиқ билан ABC текислигининг орасидаги бурчакни топинг.

16.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (16.8-расм). а) AB_1 Қуйидаги ABC тўғри чизиқ билан; б) AC_1 текислигининг ABC тўғри чизиқ билан; в) AA_1 текислигининг ACD_1 текислигининг орасидаги бурчакни топинг.



16.7-расм



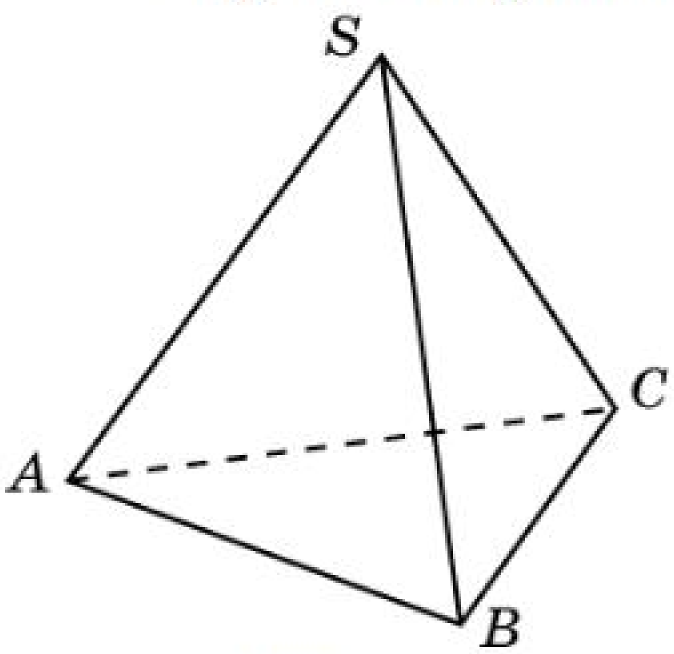
16.8-расм

B

16.7. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг (16.5-расм). AB тўғри чизиқ билан SBC текислигининг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

16.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги CC_1 тўғри чизиқ билан AB_1D_1 текислигининг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

16.9. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB_1 тўғри чизиқ билан BCC_1 текислигининг орасидаги бурчак синусини топинг.



16.9-расм

16.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB_1 тўғри чизиқ билан қуйидаги текислик орасидаги бурчак синусини топинг: а) BCC_1; б) CDD_1.

16.11. $SABC$ мунтазам учбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг (16.9-расм). SA тўғри чизик билан ABC текислигининг орасидаги бурчак косинусини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

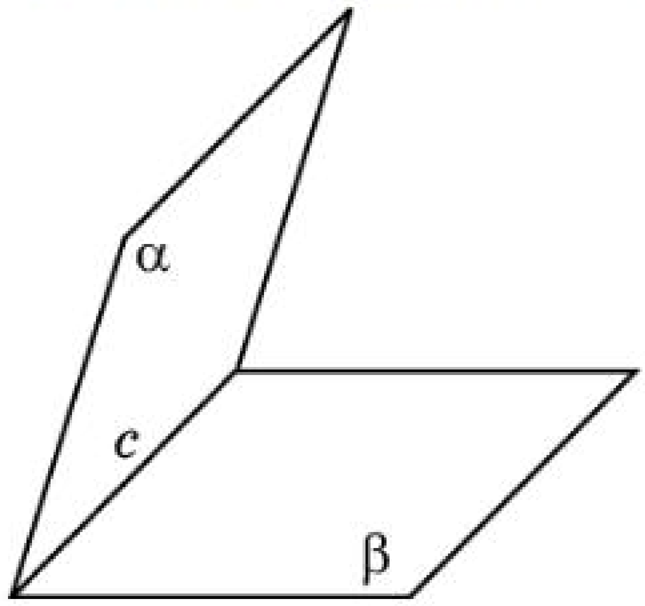
16.12. Кесишувчи икки текислик орасидаги бурчак тушунчасини таърифланг.

17-§. Икки ёқли бурчак. Икки текислик орасидаги бурчак

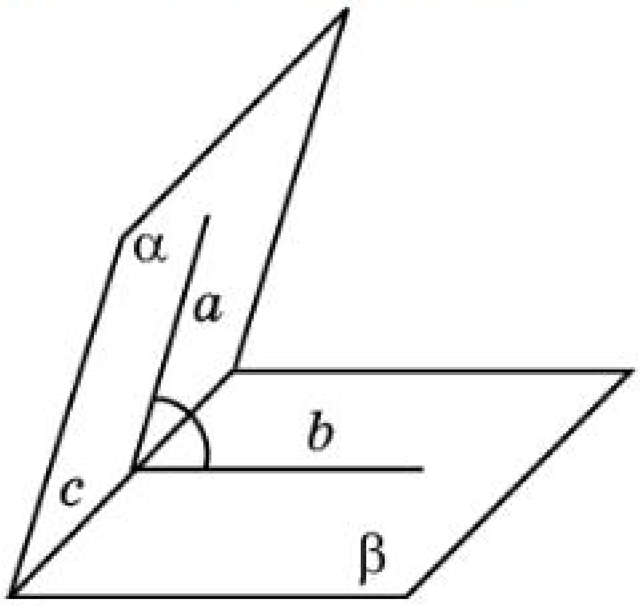
Фазода ярим текисликни текисликдаги нурга ўхшатиш мумкин. Бунда бурчакка фазода иккиёқли бурчак деб аталувчи фигура мос келади.

Иккиёқли бурчак деб, умумий битта тўғри чизиқ билан чегараланган иккита ярим текисликдан ва фазонинг ўша ярим текисликлар билан чегараланган қисмидан ташкил топган фигурага айтилади (17.1-расм).

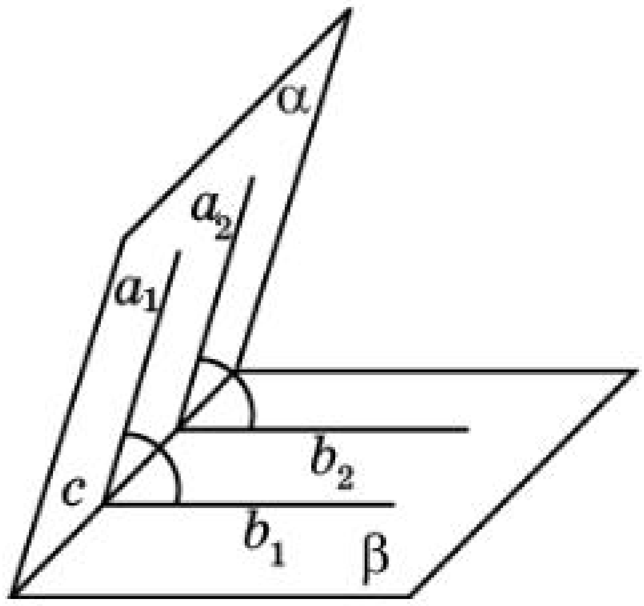
Ярим текисликлар иккиёқли бурчакнинг ёқлари, уларни чегараловчи тўғри чизиқни *эса қирралари* деб атаймиз.



17.1-расм



17.2-расм



17.3-расм

a ва b — умумий тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликлар (17.2-расм). c тўғри чизиғига перпендикуляр қилиб g текислигини олайлик ва унинг a ва b ярим текисликлар билан кесишиш чизиқларини мос равишда a ва b деб белгилайлик. Ушбу нурлардан ҳосил бўладиган бурчак иккиёқли бурчакнинг *чизиқли бурчаги* деб аталади.

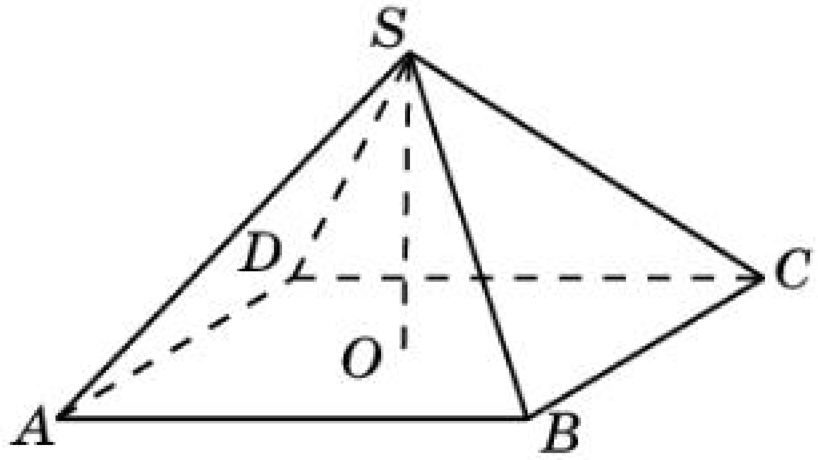
Чизиқли бурчакнинг катталиги g текисликни танлаб олинишига боғлиқ эмаслигини исботлаймиз.

Ҳақиқатан g_1, g_2 текисликлар c тўғри чизиққа перпендикуляр ва улар a мен b ярим текисликларни мос равишда a_1, a_2 ва b_1, b_2 нурлар бўйича кесиб ўтсин (17.3-расм). c тўғри чизиғига перпендикуляр бўлганлиги туфайли, a_1 билан a_2 ва b_1 билан b_2 нурлар йўналишдош. Шу сабабдан ҳам улардан ясалган бурчаклар тенг.

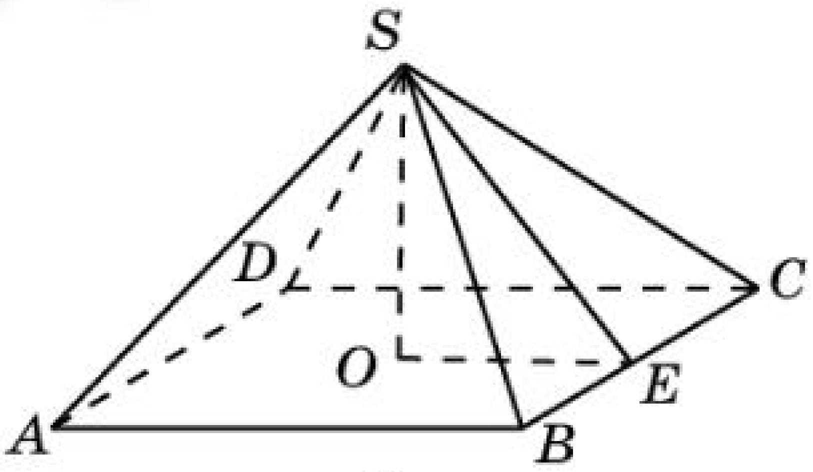
Иккиёқли бурчакнинг катталиги деб, унинг чизиқли бурчагининг катталигига айтилади. Агар чизиқли бурчак тўғри бурчак бўлса, у ҳолда улар тўғри бурчак деб аталади (17.2-расм).

1-мисол. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 2 га, SO баландлиги 1 га тенг (17.4-расм). Пирамиданинг ён ёғи билан асосининг орасидаги икки ёқли бурчакни топинг.

Ечиш. SBC учбурчакнинг SE баландлигини ўтказамиз (17.5-расм).



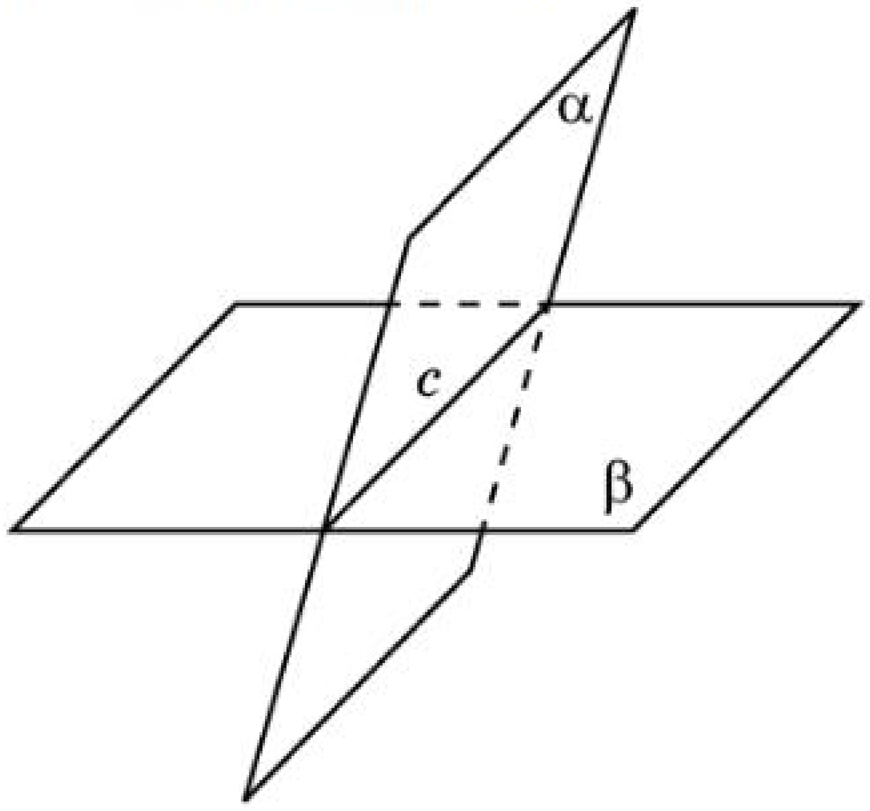
17.4-расм



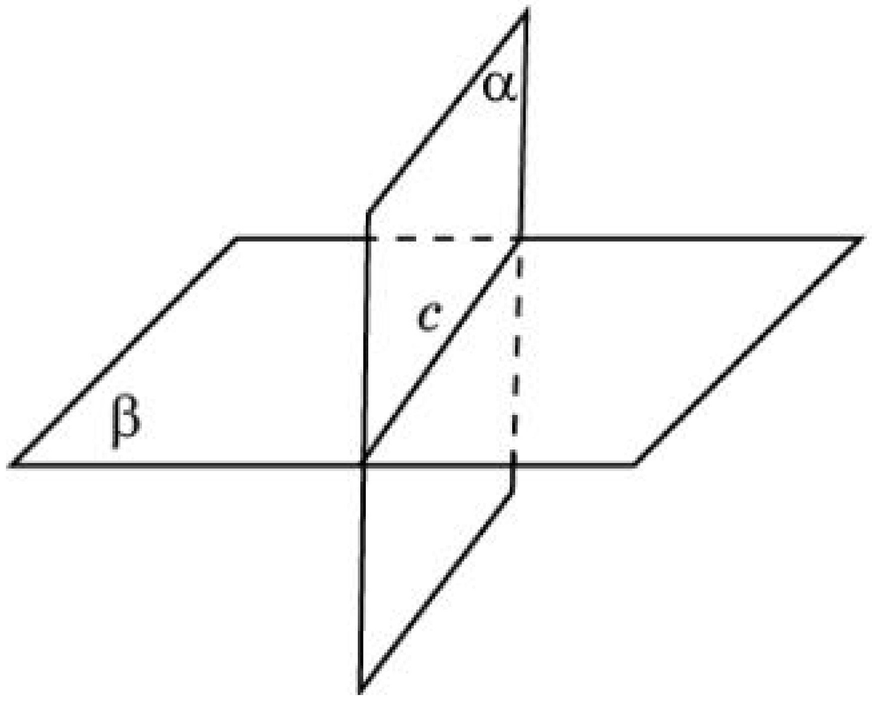
17.5-расм

SEO бурчак изланаётган иккиёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлади. SEO тўғри бурчакли учбурчакда SO ва EO катетлари 1 га тенг. Бундан SEO бурчаги 45°. Демак, изланган иккиёқли бурчак 45° га тенг бўлади.

Кесишувчи икки текислик орасидаги бурчак деб, мос иккита ярим текисликлар ёрдамида ясалган иккиёқли бурчаклар энг кичигининг катталигига айтилади (17.6-расм).



17.6-расм

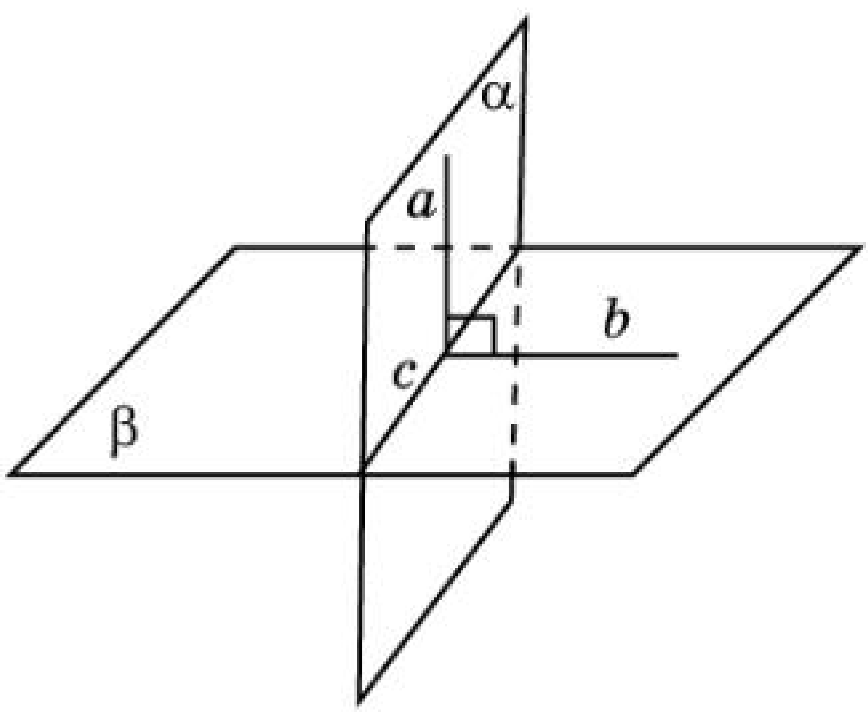


17.7-расм

Икки текислик тўғри иккиёқли бурчак ҳосил қилса, у ҳолда улар перпендикуляр текисликлар деб аталади (17.7-расм).

Қуйидаги теорема икки текислик перпендикулярлигининг етарлилик шарти ҳисобланади.

Теорема (Текисликларнинг перпендикулярлик аломати) ***Агар икки текисликнинг бири иккинчисига перпендикуляр тўғри чизиқ орқали ўтса, у ҳолда бундай текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади.***

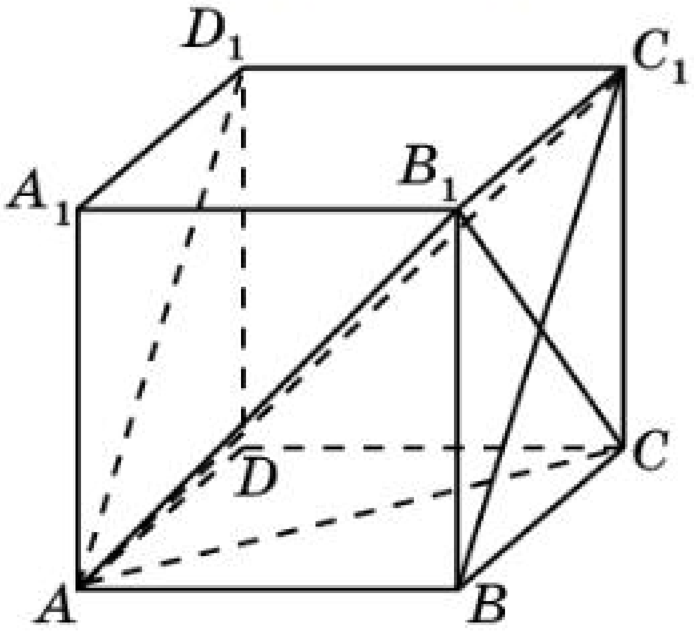


17.8-расм

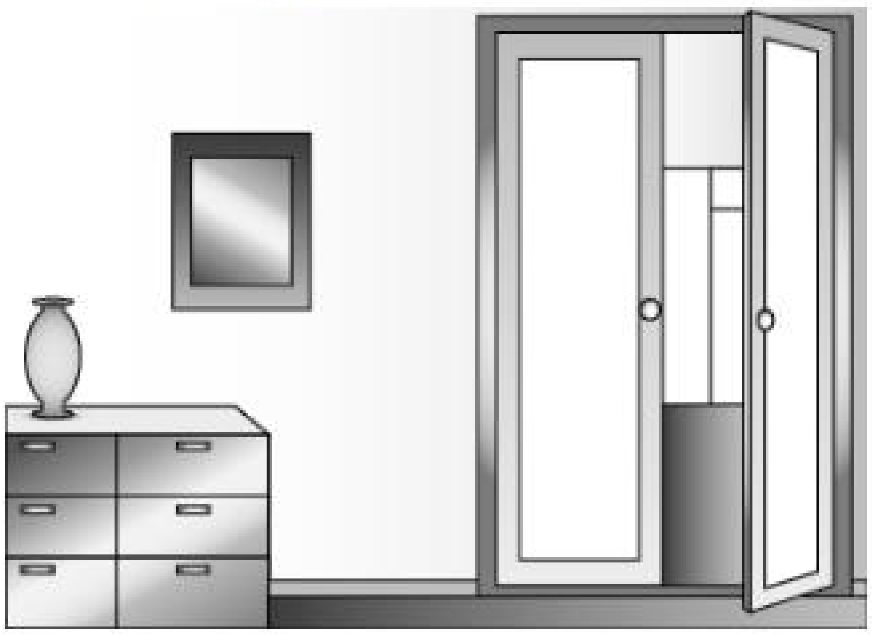
Исбот. a текислик b текисликка перпендикуляр a тўғри чизиғи орқали ўтсин. c — a ва b текисликларининг кесишиш чизиғи (17.8-расм).

a ва b текисликларининг перпендикуляр эканлигини исботлаймиз. b текислигида a тўғри чизиқ билан b текислигининг кесишиш нуқтаси орқали c тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган b тўғри чизиқни ўтказамиз. a тўғри чизиқ b текислигига перпендикуляр бўлганлиги учун у шу текисликда ётган ихтиёрий тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади, a ва b тўғри чизиқлари орасидаги бурчак тўғри. У мос равишда иккиёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлади. Бундан a ва b текисликлари перпендикулярлиги келиб чиқади. ◻

2-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ABC_1 ва ACB_1 текисликларининг перпендикуляр эканлигини исботланг (17.9-расм).



17.9-расм



17.10-расм

Ечиш. ACB_1 текислигида BC_1 тўғри чизиғи билан ABC_1 текислигининг AB тўғри чизиғига перпендикуляр CB_1 тўғри чизиғи ётади. Демак, ABC_1 ва ACB_1 текисликлари перпендикуляр бўлади.

Текисликларнинг перпендикулярлик аломати оддий амалиётда муҳим аҳамиятга эга. Масалан, ерга перпендикуляр ўрнатилган эшикнинг текислиги унинг барча очилиш ва ёпилиш шароитларида ер текислигига перпендикуляр бўлади (17.10-расм); ишчи қандайдир бир плитани темир ёки бошқа ричаг билан кўтариб тик ҳолатта ўрнатиш учун ричагни плита ётган ерга перпендикуляр бўлиб тургунга қадар кўтаради.

? Берилган текисликда: а) ётадиган; г) ётмайдиган нуқта орқали берилган текисликка нечта перпендикуляр текислик ўтказиш мумкин?

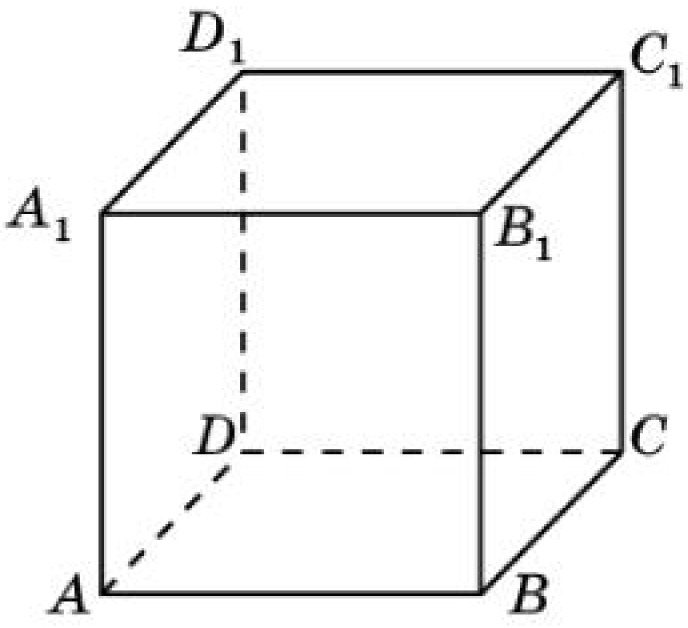
Саволлар

1. Иккиёқли бурчак деб нимага айтилади?
2. а) Иккиёқли бурчакнинг ёғи; г) иккиёқли бурчакнинг қирраси деб нимага айтилади?
3. Иккиёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги деб нимага айтилади?
4. Иккиёқли бурчакнинг катталиги деб нимага айтилади?
5. Қандай иккиёқли бурчак тўғри деб аталади?
6. Кесишувчи икки текислик орасидаги бурчак деб нимага айтилади?
7. Қандай кесишувчи икки текислик перпендикуляр деб аталади?
8. Икки текисликнинг перпендикулярлик аломатини айтинг.

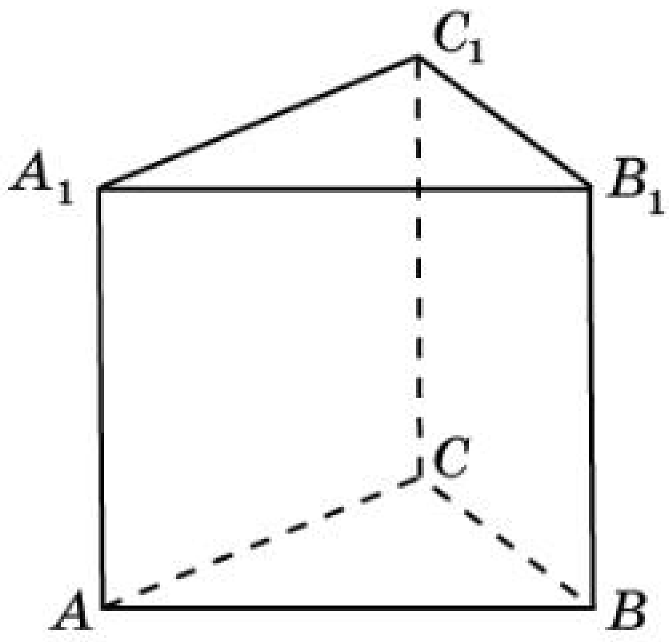
Масалалар

A

17.1. Кубнинг қўшни ёқлари билан ясалган иккиёқли бурчакларни топинг (17.11-расм).

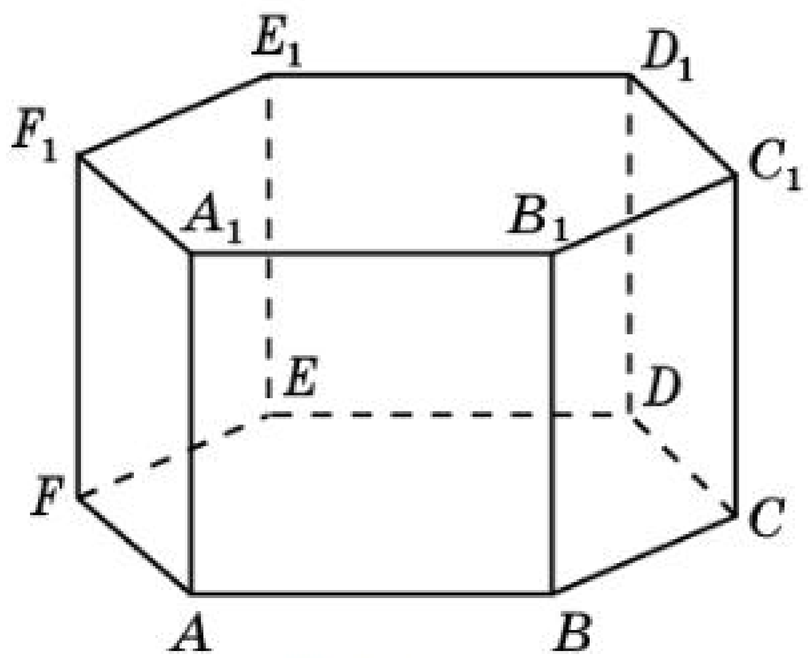


17.11-расм



17.12-расм

17.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда а) ABC ва BDD_1; б) ACC_1 ва BDD_1 текисликларнинг перпендикуляр эканлигини исботланг.



17.13-расм

17.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ABC ва CDA_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

17.4. Мунтазам учбурчакли призманинг қўшни икки ён ёқлари орасидаги иккиёқли бурчакни топинг (17.12-расм).

17.5. Мунтазам олти бурчакли призманинг қўшни икки ён ёқлари орасидаги иккиёқли бурчакни топинг (17.13-расм).

B

17.6. Учинчи текисликка перпендикуляр икки текислик ўзаро перпендикуляр бўлиши тўғрими?

17.7. Берилган нуқта орқали берилган текисликка перпендикуляр нечта текислик ўтказиш мумкин?

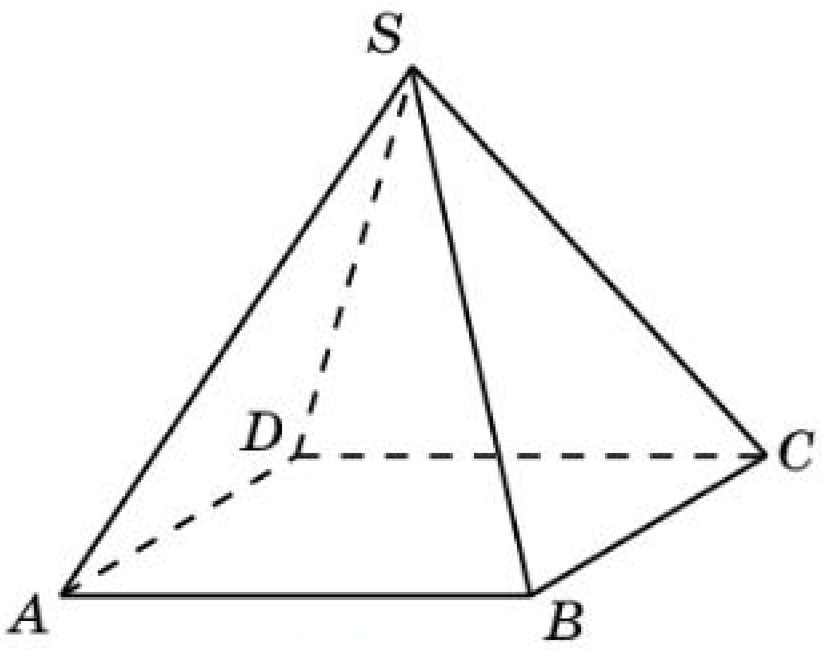
17.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда қуйидаги текисликларнинг орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг: а) ABC ва AB_1D_1; б) ABC ва ACB_1.

17.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ACB_1 ва ACD_1 текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

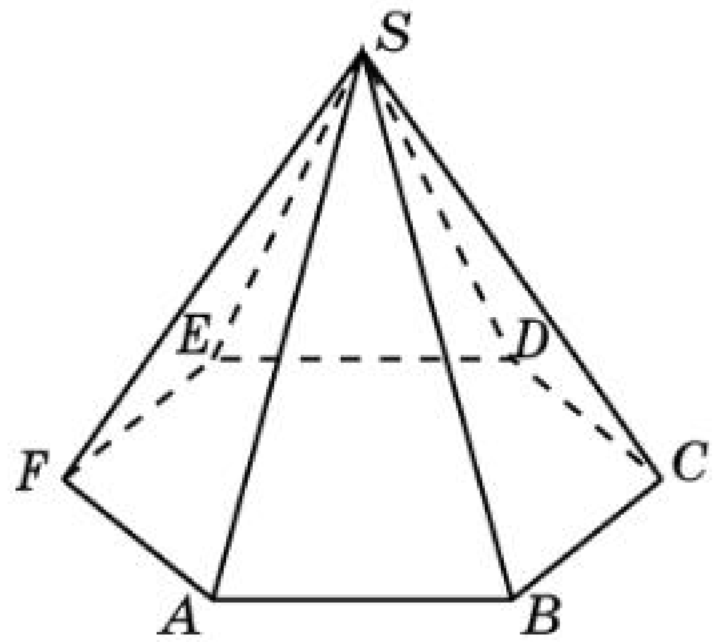
17.10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. Қуйидаги текисликлар орасидаги бурчакни топинг: а) ABB_1 ва CDD_1; б) ACC_1 ва CDD_1; в) ACC_1 ва DEE_1; г) ACC_1 ва CEE_1; д) ABC ва BDE_1; е) CDF_1 ва AFD_1.

17.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг қуйидаги текисликлари перпендкуляр эканини исботланг: а) ABC ва ABB_1; б) ABC ва ACC_1; в) ABC ва ADD_1; г) ACC_1 ва BEE_1; д) ADD_1 ва BFF_1.

17.12. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари тенг (17.14-расм). Пирамиданинг ён ёғи билан асосининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг тангенсини топинг.



17.14-расм

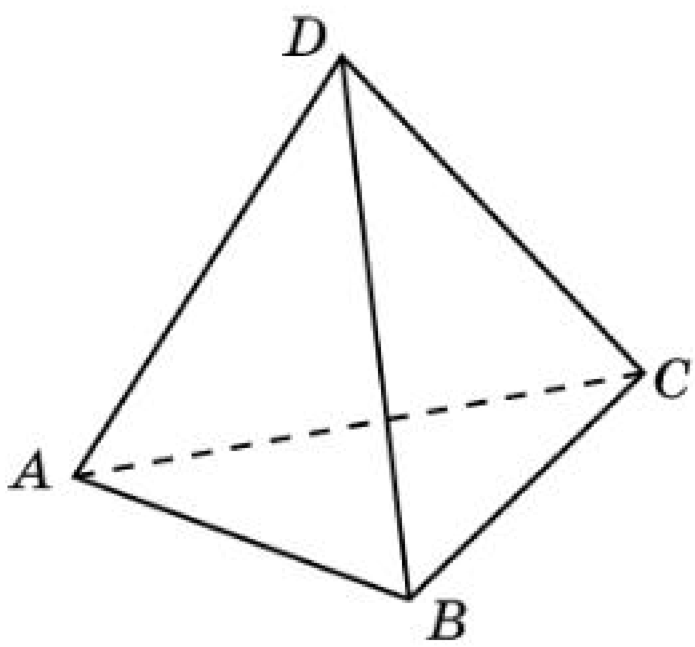


17.15-расм

17.13. Мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (17.15-расм). Пирамиданинг ён ёғи билан асосининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг тангенсини топинг.

17.14. Хеопс пирамидаси асосининг томонлари 230 м, баландлиги тахминан 138 м бўлган мунтазам тўртбурчакли пирамида (17.16-расм). Унинг ён ёғи билан асосининг орасидаги икки ёқли бурчакнинг тангенсини топинг. Тригонометрик функцияларнинг жадвалидан фойдаланиб, бурчакнинг тахминий қийматини топинг.


17.16-расм



17.17-расм

17.15. Мунтазам тетраэдрнинг қўшни икки ёғининг орасидаги иккиёқли бурчакнинг косинусини топинг (17.17-расм).

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги AD_1 ва CB_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни топинг:

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги AA_1 ва DB_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Мунтазам учбурчакли пирамиданинг айқаш қирралари орасидаги бурчакни топинг:

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

4. Барча қирралари 1 га тенг бўлган мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг айқаш қирралари орасидаги бурчакни топинг:

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг BC ва C_1D_1 тўғри чизиқлари орасидаги бурчакни топинг:

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 120°.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубдаги BD_1 тўғри чизиғи билан BCC_1 текислигининг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

7. Текисликка ўтказилган оғманинг ортогонал проекциясининг узунлиги оғмадан икки марта кам бўлганда улар орасидаги бурчакни топинг.

A. 30°. B. 45°. C. 60°. D. 90°.

8. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. SAD ва SBC текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1га тенг. A ва D_1 учлари орасидаги масофани топинг.

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{5}$.

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубдаги B_1 учидан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B учидан E_1F_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг:

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

12. Текисликда ётмайдиган бир нуқта орқали текисликка перпендикуляр ва оғма ўтказилган. Агар перпендикуляр 12 см, оғма 15 см бўлса, унда оғманинг проекцияси узунлигини топинг:

A. 3 см. B. 9 см. C. 27 см. D. 81 см.

13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда CC_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. $ABCD$ бирлик тетраэдрда AD ва BC тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B учидан ACC_1 текислигигача бўлган масофани топинг:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

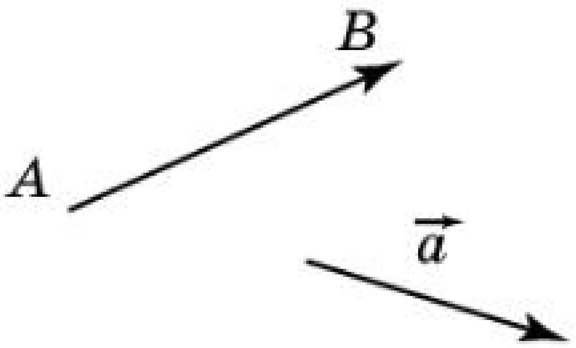
III боб ФАЗОДА ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ ВА ВЕКТОРЛАР

18-§. Фазодаги векторлар.

Фазодаги векторнинг таърифи текисликдаги векторнинг таърифига ўхшаш бўлади.

Фазода ҳам текисликдаги каби *вектор* деб йўналтирилган кесмага, яъни, боши ва охири кўрсатилган кесмага айтилади.

Боши ва охири устма-уст тушувчи *ноль векторлар* ҳам қаралади.



18.1-расм

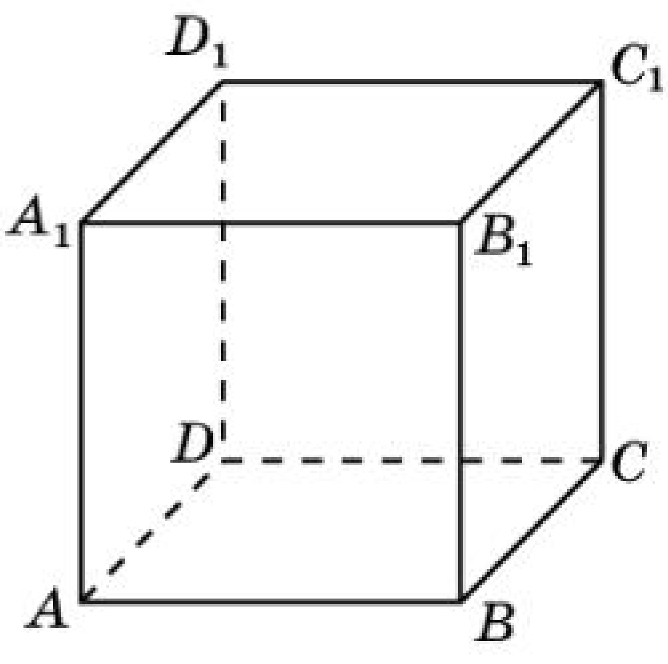
Боши A нуқтада ва охири B нуқтада бўлган вектор $\overline{AB}$ деб белгиланади ва чизмада векторларнинг йўналиши стрелка билан кўрсатилади (18.1-расм). Шу билан бир қаторда вектор лотин алифбосининг кичик ҳарфларининг устига стрелка қўйиб белгиланади. Масалан $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва каби. Ноль вектор $\vec{0}$ деб белгиланади.

Агар ноль бўлмаган иккита вектор битта тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, у ҳалда улар *коллинеар векторлар* деб аталады.

Агар фазода иккита вектор битта текисликда ётса ва шу текисликда бир хил (қарама-қарши) йўналса, у ҳолда улар бир хил йўналган ёки йўналишдош (қарама-қарши йўналган) векторлар деб аталади.

Агар фазодаги нолдан фарқли икки векторни бир нуқтадан ясаганда бир тўғри чизиқда ётса, у ҳолда улар коллениар векторлар бўлишини исботланг.

Коллинеар векторлар бир хил йўналган ёки қарама-қарши йўналган бўлиши мумкин.



18.2-расм

Векторнинг узунлиги ёки *модули* деб, шу векторни тасвирлаб турган кесманинг узунлигига айтилади. Уни $|\overline{AB}|$ ёки $|\vec{a}|$ деб белгиланади. Ноль векторнинг узунлиги нолга тенг.

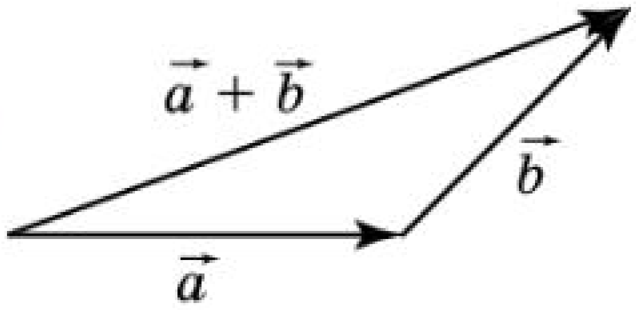
Агар икки вектор йўналишдош ва узунликлари тенг бўлса, улар тенг векторлар деб аталади.

Барча ноль векторлар ўзаро тенг бўлади.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда учлари орқали $\overline{AA_1}$ векторга тенг бўлган векторларни кўрсатинг (18.2-расм).

Текисликдаги векторлар сингари фазодаги векторлар учун ҳам векторларни қўшиш, сонга кўпайтириш амаллари бажарилади.

Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни қўшиш учун $\vec{b}$ векторини унинг боши $\vec{a}$ векторининг охири билан устма уст тушадиган қилиб қўйиш керак (18.3-расм).



18.3-расм

Боши $\vec{a}$ векторнинг боши билан, охири эса $\vec{b}$ векторнинг охири билан устма-уст тушадиган вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси деб аталады.

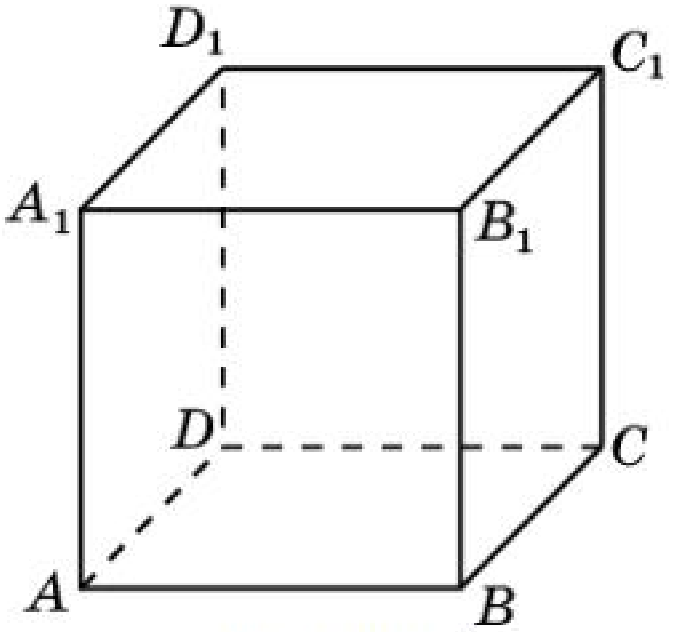
Векторларни қўшиш амали учун сонларни қўшиш хоссаларига ўхшаш қуйидаги хоссалар ўринлидир:

1-хосса. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*ўрин алмаштириш қонуни*).

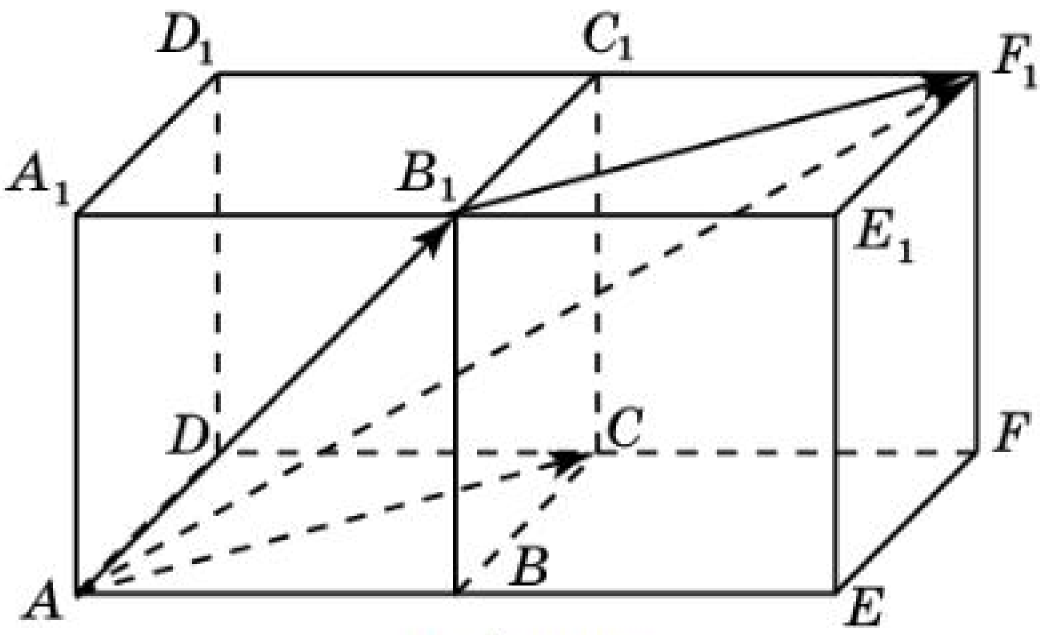
2-хосса. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (*группалаш қонуни*).

Бу хоссаларнинг исботлари текисликдаги векторларга ўхшаш бўлади.

2-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}$ векторнинг узунлигини топинг (18.4-расм).



18.4-расм



18.5-расм

Ечиш. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубга $BEFCB_1E_1F_1C_1$ бирлик кубни қўшиб, $AEFDA_1E_1F_1D_1$ тўғри бурчакли паралеллепипед ясаймиз (18.5-расм). $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}$ йиғинди $\overrightarrow{AF_1}$ векторга тенг. Унинг узунлиги $\sqrt{6}$ га тенг бўлади.

$\vec{a}$ векторнинг t сонга кўпайтмаси деб узунлиги $|t|\cdot|\vec{a}|$ бўладиган ва йўналиши $t>0$ бўлганда ўзгаришсиз қоладиган, $t<0$ бўлганда қарама-қарши йўналишда бўладиган векторга айтилади. Векторнинг нолга кўпайтмаси ноль вектор бўлиб ҳисобланади.

$\vec{a}$ векторнинг t сонга кўпайтмаси $t\vec{a}$ деб белгиланади. Таъриф бўйича, $|t\vec{a}|=|t|\cdot|\vec{a}|$.

$\vec{a}$ векторнинг -1 сонига кўпайтмаси $-\vec{a}$ деб белгиланади ва у $\vec{a}$ векторга *қарама-қарши йўналган вектор* деб аталади.

Таъриф бўйича, $-\vec{a}$ векторнинг йўналиши $\vec{a}$ векторнинг йўналишига қарама-қарши бўлади. Яъни, $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$.

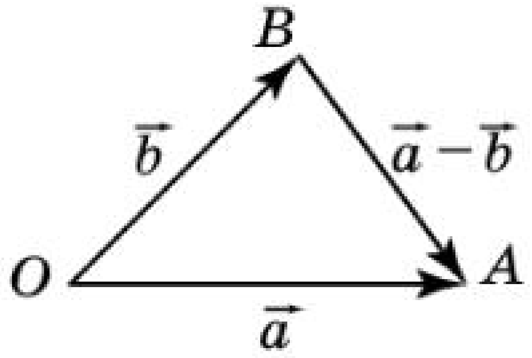
$\vec{b} = t\vec{a}$ тенглиги тўғри бўладиган t ҳақиқий сон топилсагина нолдан фарқли $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлади.

Векторни сонга кўпайтириш амали учун сонларни кўпайтиришнинг хоссаларига ўхшаш қуйидаги хоссалар ўринли бўлади:

1-хосса. $(ts)\vec{a} = t(s\vec{a})$.

2-хосса. $(t + s)\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$.

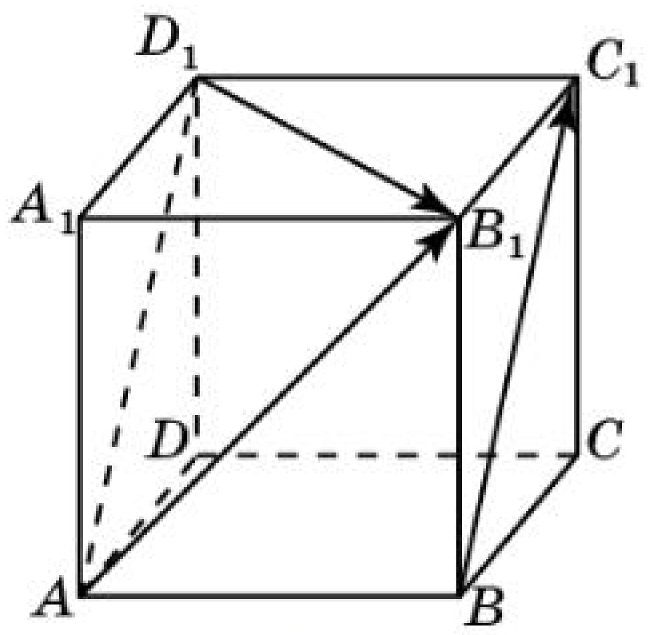
3-хосса. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.



18.6-расм

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмаси деб $\vec{a} + (-\vec{b})$ векторга айтилади. Яъни, $\vec{a} - \vec{b}$ деб белгиланади. $\vec{a} - \vec{b}$ айирмани топиш учун $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг бошланғич нуқталари мос келадиган қилиб ясаш кифоя (18.6-расм).

Боши $\vec{b}$ векторнинг охири билан, охири эса $\vec{a}$ векторнинг охири билан устма-уст тушувчи вектор изланган векторларнинг айирмаси бўлади.



18.7-расм

2-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$ векторнинг узунлигини топинг (18.7-расм).

Ечиш. $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{D_1B_1}$. $\overrightarrow{D_1B_1}$ векторнинг узунлиги $\sqrt{2}$ га тенг.

Саволлар

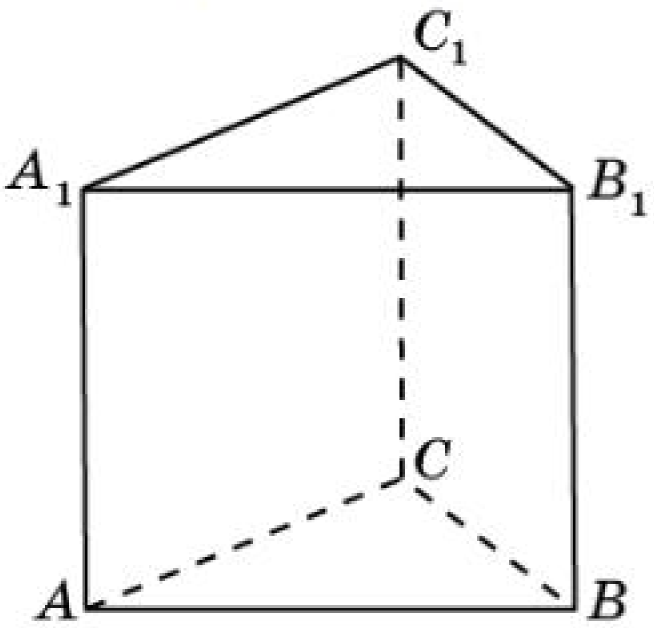
1. Вектор деб нимага айтилади?
2. Қандай вектор ноль вектор деб аталади?
3. Векторнинг узунлиги(модули) деб нимага айтилади?
4. Қандай икки вектор тенг деб аталади?
5. Векторларнинг қўшиш амали қандай аниқланади?
6. Векторларнинг қўшишнинг ўрин алмаштириш қонунини айтинг.
7. Векторларни қўшишнинг группалаш қонунини айтинг.
8. Векторни сонга кўпайтириш амали қандай аниқланади?
9. Векторни сонга кўпайтириш қандай белгиланади?
10. Қандай вектор берилган векторга қарама-қарши вектор деб аталади? У қандай белгиланади?
11. Икки векторнинг айирмаси деб нимага айтилади? У қандай белгиланади?
12. Векторни сонга кўпайтиришнинг группалаш қонунини айтинг.
13. Векторни сонга кўпайтиришнинг 1- тақсимот қонунини айтинг.
14. Векторни сонга кўпайтиришнинг 2- тақсимот қонунини айтинг.

Масалалар

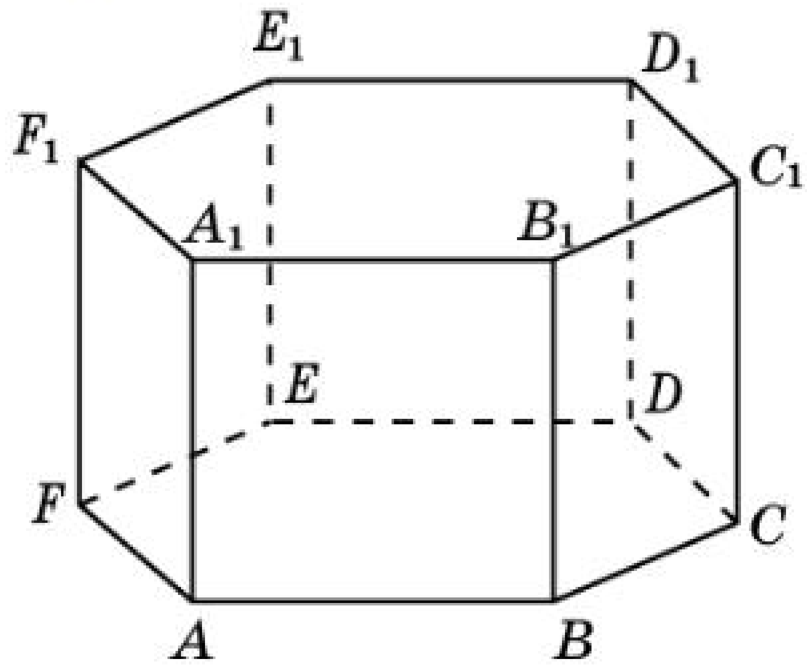
A

18.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда учлари орқали $\overrightarrow{AB}$ векторга тенг векторларни кўрсатинг (18.4-расм).

18.2. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призмада учлари орқали $\overrightarrow{AA_1}$ векторга тенг векторларни кўрсатинг (18.8-расм).



18.8-расм



18.9-расм

18.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада (18.9-расм) учлари орқали қуйидаги векторларга тенг векторларни кўрсатинг: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{AB_1}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$.

18.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB_1}$; в) $\overrightarrow{AC_1}$.

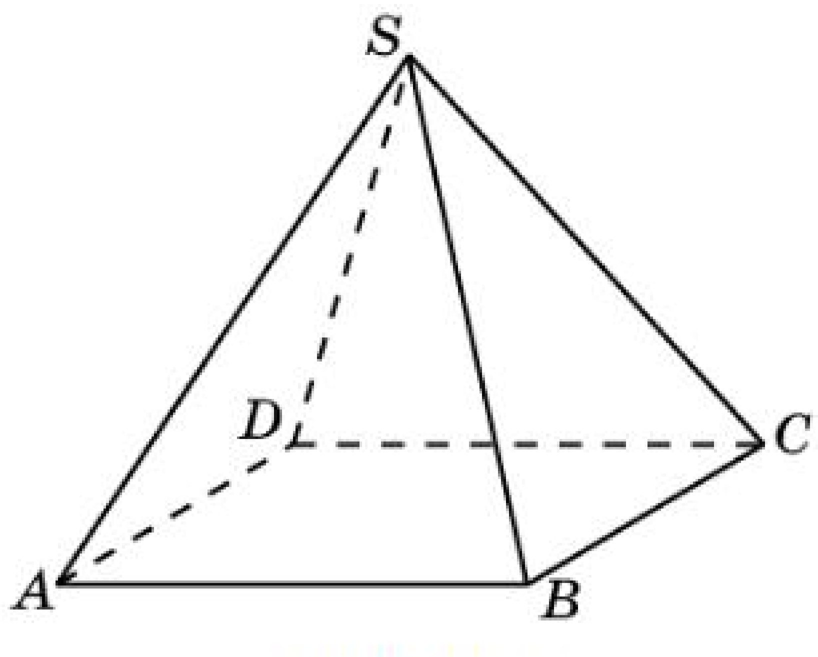
18.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (18.9-расм). Қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{AB_1}$; д) $\overrightarrow{AC_1}$; е) $\overrightarrow{AD_1}$.

18.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда учлари орқали қуйидаги векторларга тенг векторларни топинг: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}$; д) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

B

18.7. Қуйидаги кўпёқларнинг қирралари неча турли векторларни беради: а) куб; б) учбурчакли призма; в) мунтазам тўртбурчакли пирамида (18.10-расм).

18.8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада учлари орқали қуйидаги векторларга тенг векторларни кўрсатинг: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE_1}$.



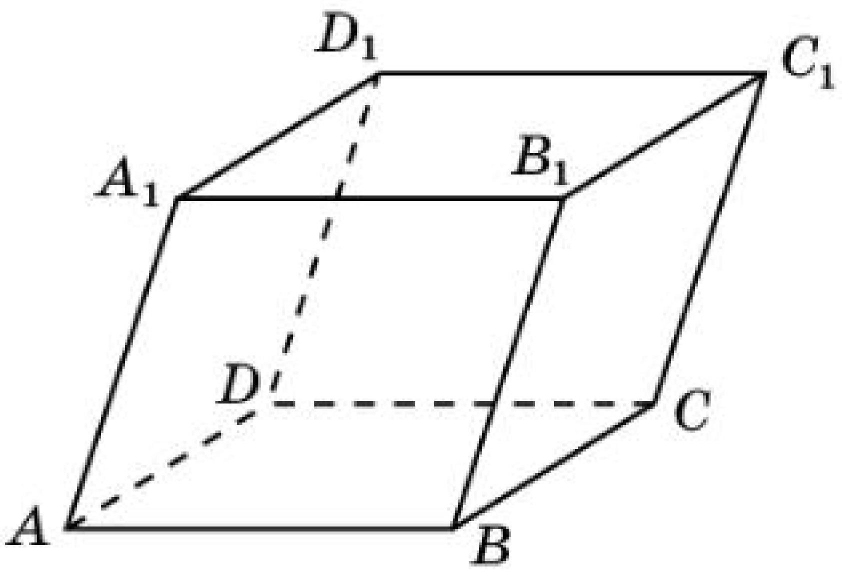
18.10-расм

18.9. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (18.8-расм). $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$ векторнинг узунлигини топинг.

18.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда қуйидаги векторларнинг узунлигини топинг: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}$; д) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

18.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призминнинг барча қирралари 1 га тенг. Қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE_1}$.

18.12. Қандай ҳолларда векторларнинг йиғиндисининг узунлиги қўшилувчиларнинг узунликларининг йиғиндисига тенг бўлади?



18.11-расм

18.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедда (18.11-расм) қуйидаги векторларни кўрсатинг: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$; г) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}$.

18.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда қуйидаги векторларнинг узунликларини топинг: а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$; г) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}$.

19-§. Компланар векторлар

Агар фазодаги уч вектор бир текисликда ёки паралел текисликларда ётса у ҳолда улар *компланар векторлар* деб аталади. Масалан, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$ векторлар компланар бўлади.

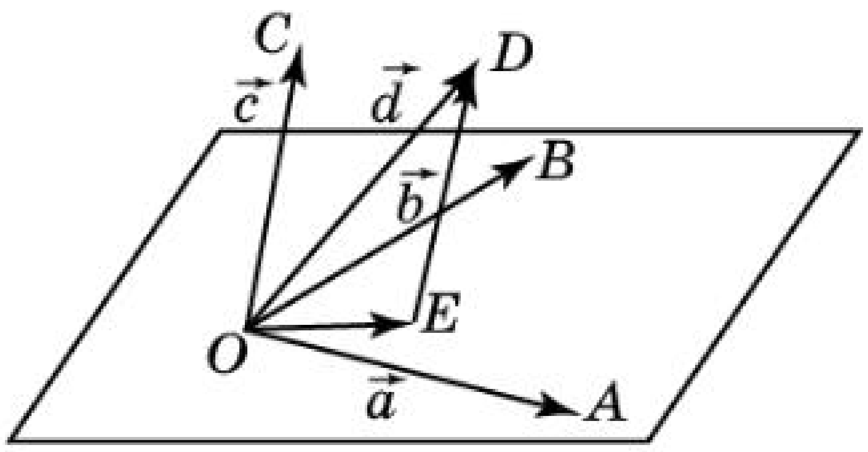
Агар фазодаги нолдан фарқли уч векторни бир нуқтадан чизганда бир текисликда ётса, у ҳолда улар компланар векторлар бўлишини исботланг.

Планиметрия курсида “агар текисликдаги $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар коллинеар бўлмаса, унда шу текисликдаги ихтиёрий $\vec c$ векторни биттагина $\vec c = x\vec a + y\vec b$ кўринишида ёзиш мумкин. Бу ерда x ва y — қандайдир бир ҳақиқий сонлар” деган таъриф исботланган бўлади.

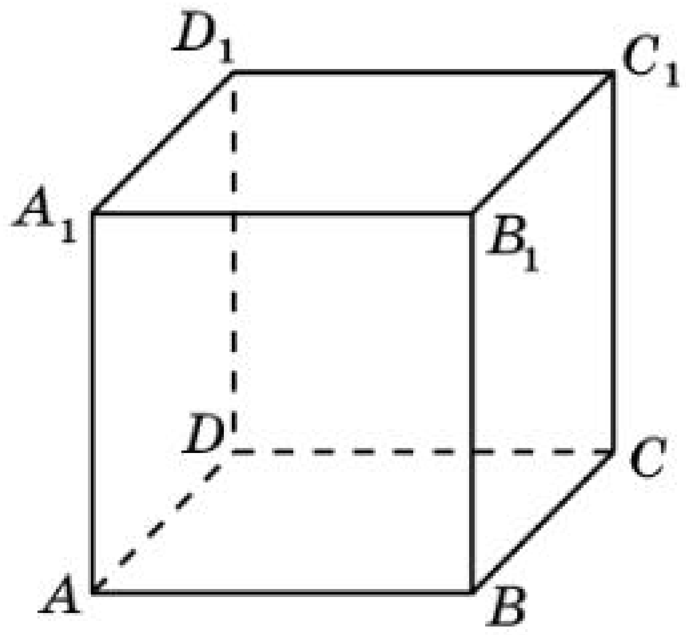
Фазода шунга ўхшаш векторни уч компланар эмас векторлар бўйича ёйилмаси тўғрисидаги теорема келиб чиқади.

Теорема. ***Агар , $\vec b$, ва $\vec c$ векторлар компланар бўлмаса, у ҳолда ихтиёрий $\vec d$ вектор биргина $\vec d = x \quad + y\vec b + z\vec c$ кўринишида ифодаланади. Бу ерда x, y, z — ҳақиқий сонлар.***

Исбот. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{d}$ векторларни O нуқтадан бошлаб чизамиз ва уларнинг учларини мос равишда A, B, C, D деб белгилаймиз. D нуқта орқали OC тўғри чизиғига паралел тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг AOB текислиги билан кесишиш нуқтасини E деб белгилаймиз (19.1-расм).



19.1-расм



19.2-расм

Агар D нуқта OC тўғри чизиғида ётса, унда E нуқта сифатида O нуқтани оламиз. $\overline{OE}$, $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ векторлари компланар. Энди $\overline{OE} = x\overline{OA} + y\overline{OB}$ тенглиги ўринли бўладиган x ва у сонлари мавжуд. $\overline{ED}$ ва $\overline{OC}$ векторлари коллинеар. Энди $\overline{ED} = z\overline{OC}$ тенглиги ўринли бўладиган z сони мавжуд. $\overline{OD} = \overline{OE} + \overline{ED}$ бўлганликдан, $\overline{OD} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}$ тенглиги ўринли бўлади, яъни $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Энди шу тенгликнинг ягона эканлигини исботлайлик. Агар олинган тенгликдан бошқа $\vec{d} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$ тенглиги ўринли бўлса, бунда x' сони x дан фарқли ёки y' сони y дан фарқли, у ҳолда $\vec{0} = (x' - x)\vec{a} + (y' - y)\vec{b} + (z' - z)\vec{c}$ сони y дан фарқли. Унда $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ тенглик ўринли бўлар эди, бу ерда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ нолдан фарқли сонлар. Демак, вектор компланар бўлади, бу шартга зид келади. □

$ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призманинг учларида боши ва охири бўладиган учта компланар бўлмаган векторларга мисол келтиринг.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $\overline{BD_1}$ векторни $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ ва $\overline{AA_1}$ векторлар орқали ифодаланг (19.2-расм).

Саволлар

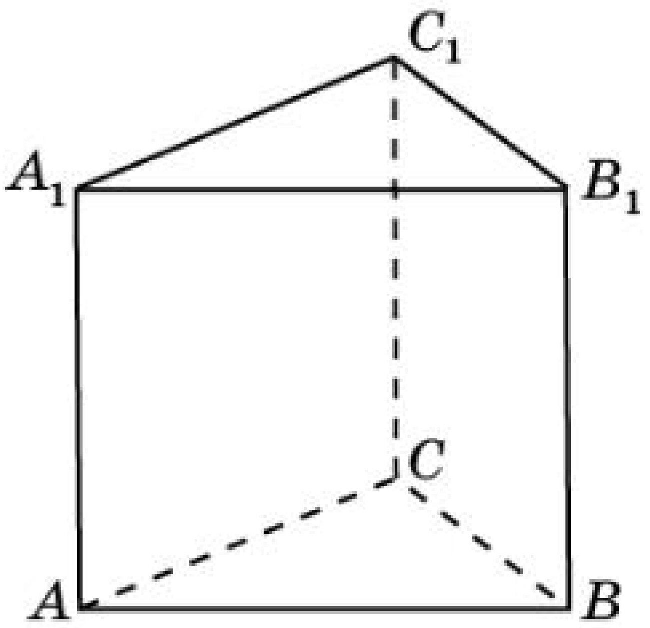
1. Фазодаги қандай учта вектор коллинеар деб аталади?
2. Фазодаги қандай учта вектор компланар деб аталади?
3. Векторни учта компланар эмас векторлар бўйича ёйиш тўғрисидаги теоремани айтиб беринг.

Масалалар

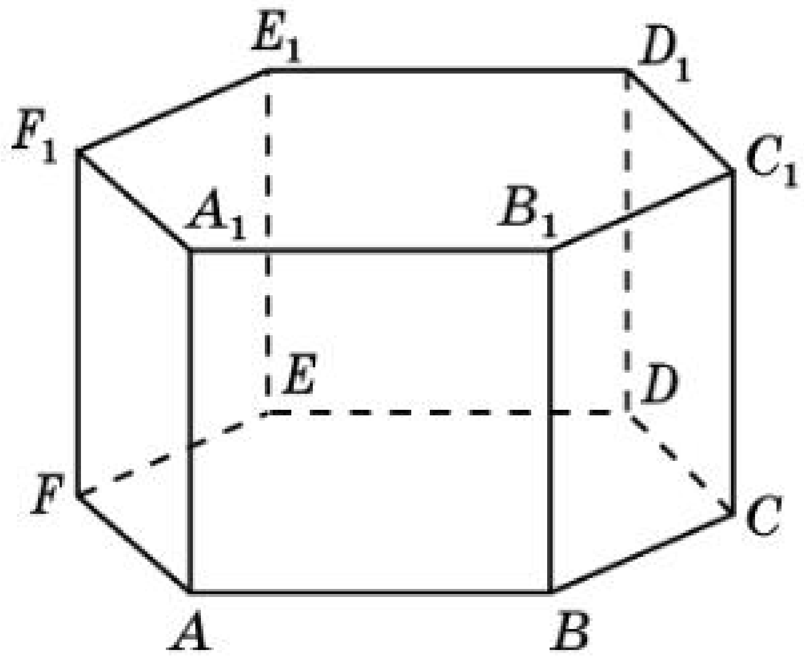
A

19.1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (19.2-расм) учлари орқали $\overrightarrow{AB}$ векторга коллинеар векторларни кўрсатинг (19.2-расм).

19.2. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призмада (19.3-расм) учлари орқали $\overrightarrow{AA_1}$ векторга коллинеар векторларни кўрсатинг (19.3-расм).



19.3-расм



19.4-расм

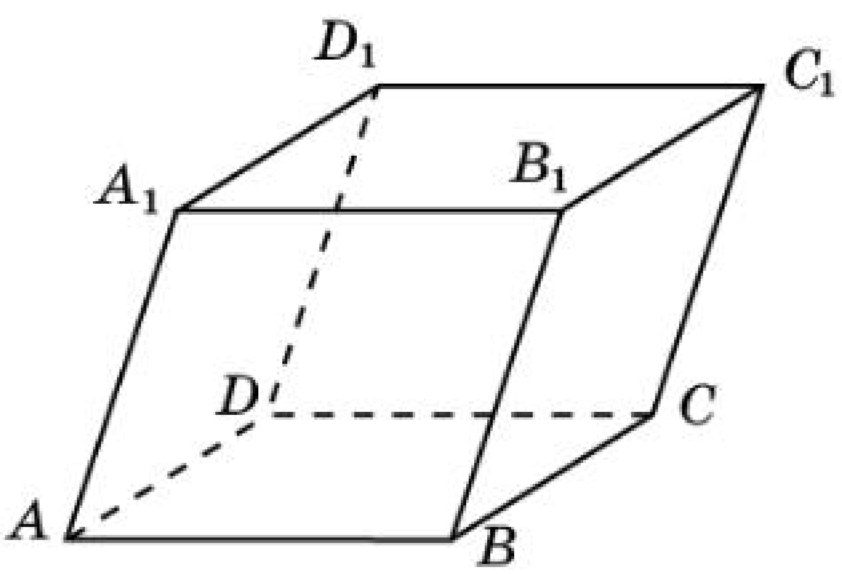
19.3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада (19.4-расм) учлари орқали $\overrightarrow{AB_1}$ векторга коллинеар векторларни кўрсатинг.

19.4. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар коллинеар. $\vec{a}$ ва $\vec{c}$ векторлар коллинеар бўладими?

19.5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада $\overrightarrow{AD_1}$ ва $\overrightarrow{BC_1}$ коллинеар бўладими (19.4-расм)?

B

19.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеддан (19.5-расм) қандайдир бир учликни кўрсатинг: а) компланар векторларни; г) компланар эмас векторларни.



19.5-расм

19.7. $ABCA_1B_1C_1$ учбурчакли призмада (19.3-расм) қандайдир бир учликни кўрсатинг: а)компланар векторларни; г) компланар эмас векторларни

19.8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{AA_1}$ векторлар орқали қуйидаги векторларни ифодаланг: а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$ (19.2-расм).

19.9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призмада $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ ва $\overrightarrow{AA_1}$ ввекторлар орқали қуйидаги векторларни ифодаланг: а) $\overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$ (19.4-расм).

19.10. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар. $\vec{a}+\vec{b}$ ва $\vec{a}-\vec{b}$ векторлар коллинеар бўладими?

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

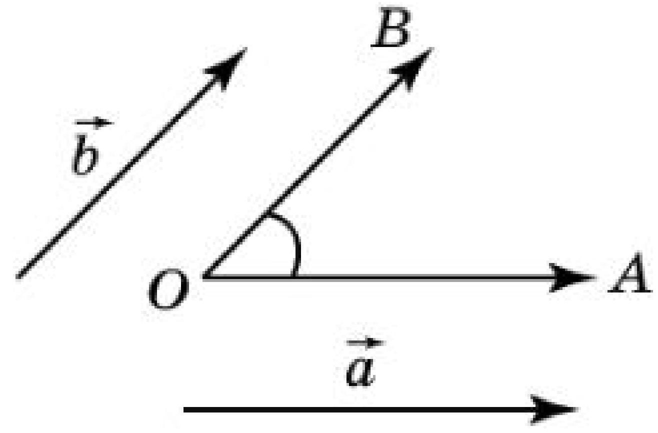
19.11. Текисликдаги векторлар орасидаги бурчак таърифини такрорланг.

19.12. Текисликдаги векторлар орасидаги бурчак таърифига мос фазодаги векторлар орасидаги бурчак тушунчасини таърифланг.

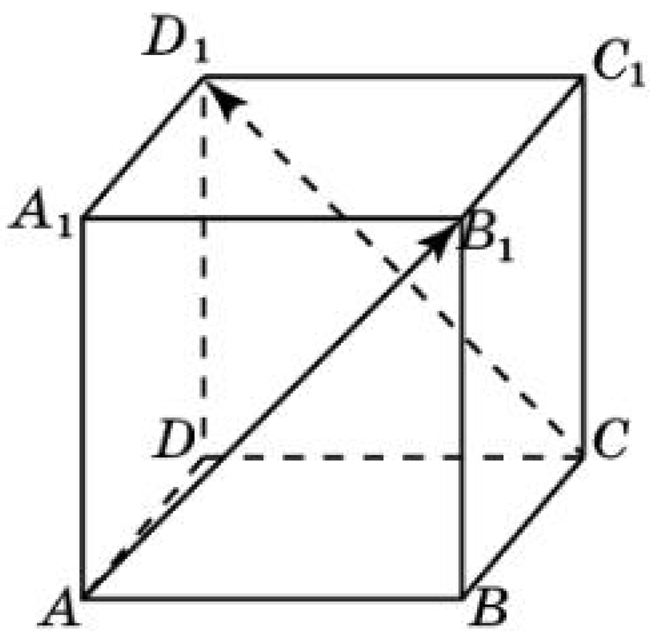
20-§. Векторлар орасидаги бурчак. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Фазода векторлар орасидаги бурчак текисликдаги каби таърифланади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ — иккита нолдан фарқли векторлар бўлсин. Уларни O нуқтадан $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ бўладиган қилиб ясаймиз (20.1-расм). OA ва OB нурларнинг орасидаги бурчак $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *векторларнинг орасидаги бурчак* деб аталади.



20.1-расм



20.2-расм

Бир хил йўналган векторларнинг орасидаги бурчак 0 га тенг деб ҳисобланади.

Агар икки векторнинг орасидаги бурчак тўғри бўлса, унда *икки вектор перпендикуляр* деб аталади.

1-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда (20.2-расм) $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\overrightarrow{CD_1}$ векторлар берилган. Векторларнинг орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\overrightarrow{CD_1}$ векторлар орасидаги бурчак $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\overrightarrow{BA_1}$ векторлар орасидаги бурчакка тенг. Демак, 90° га тенг деб ҳисобланади.

Фазодаги векторларнинг скаляр кўпайтмаси текисликдаги сингари аниқланади.

Нолдан фарқли икки векторнинг *скаляр кўпайтмаси* деб, уларнинг узунликлари билан орасидаги бурчакнинг косинусини кўпайтмасига айтилади.

Агар бир вектор ноль вектор бўлса, у ҳолда шу векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг деб ҳисобланади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларининг скаляр кўпайтмасини $\vec{a}\cdot\vec{b}$ деб белгиланади. Таъриф бўйича,

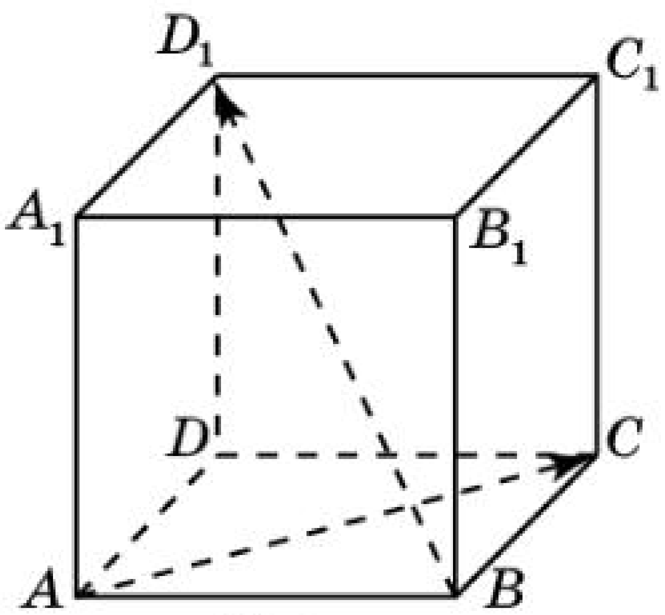
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi ,$$

Бунда φ бурчаги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак.

$\vec{a}\cdot\vec{a}$ кўпайтма *скаляр квадрат* деб аталади ва $\vec{a}^2$ деб белгиланади. Скаляр кўпайтманинг таърифидан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ кели чиқади.

Нолдан фарқли икки вектор орасидаги бурчак 90°га тенг бўлса, унда уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши аниқ, сабаби бу ҳолатда шу векторларнинг орасидаги бурчакнинг косинуси нолга тенг бўлади.

Қарама-қарши йўналган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларининг скаляр кўпайтмасини уларнинг узунликлари орқали ифодаланг.



20.3-расм

Векторларнинг скаляр кўпайтмасининг содда физикавий маъноси мавжуд. Яъни иш кучнинг ўрин алмаштиришга скаляр кўпайтмасига тенг:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{a} = |\vec{F}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\varphi .$$

2-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда (20.3-расм) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{BD_1}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Ечиш. $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{BD_1}$ векторлар перпендикуляр. Демак, уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади.

Саволлар

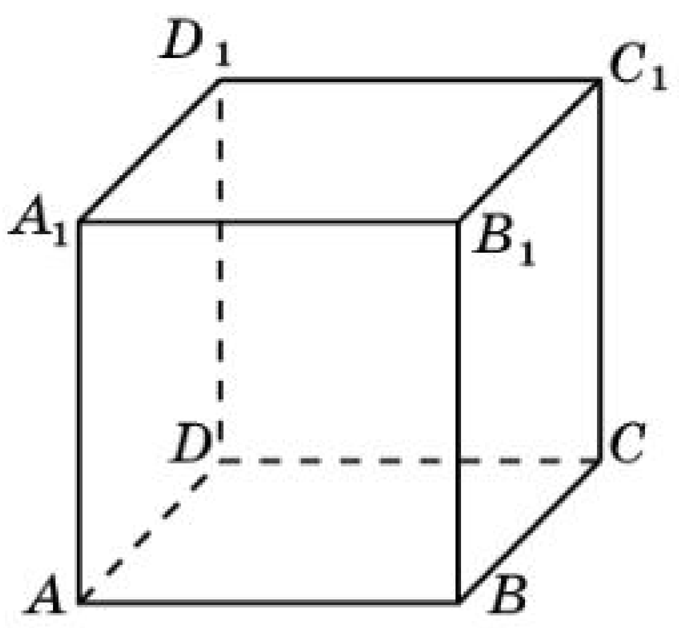
1. Векторлар орасидаги бурчак деб нимага айтилади?
2. Қандай икки вектор перпендикуляр деб аталади?
3. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси деб нимага айтилади?
4. Скаляр кўпайтма қандай белгиланади?
5. Скаляр квадрат деб нимага айтилади?
6. Қандай шароитда икки векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади?
7. Скаляр кўпайтманинг физикавий маъноси қандай?

Масалалар

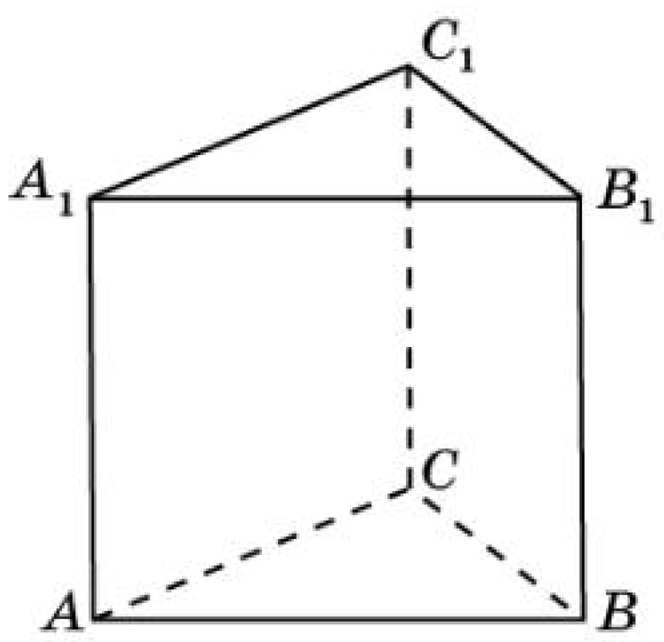
А

20.1. Векторларнинг орасидаги бурчак: а) ўткир; б) ўтмас бўлса, уларнинг скаляр кўпайтмасининг ишораси қандай бўлади.

20.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни топинг (20.4-расм): а) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\overrightarrow{BC_1}$.



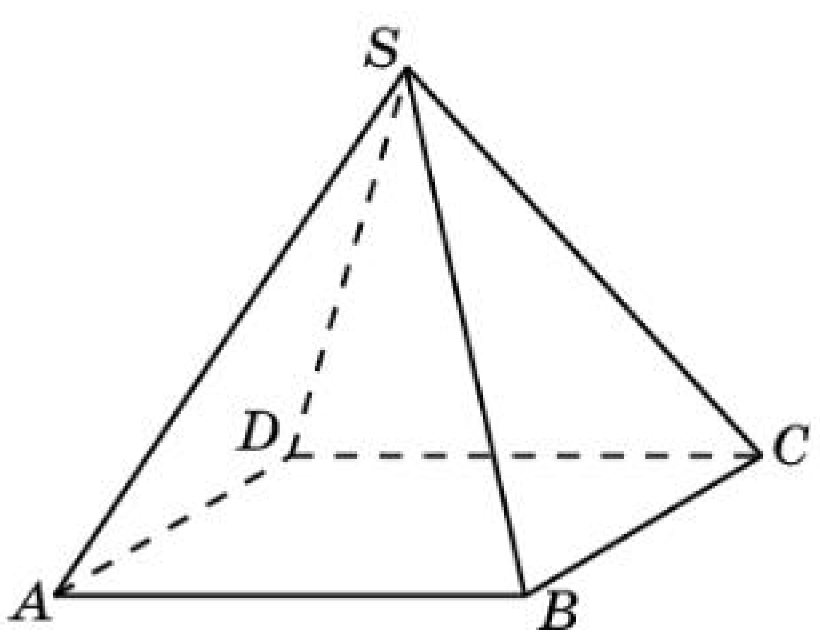
20.4-расм



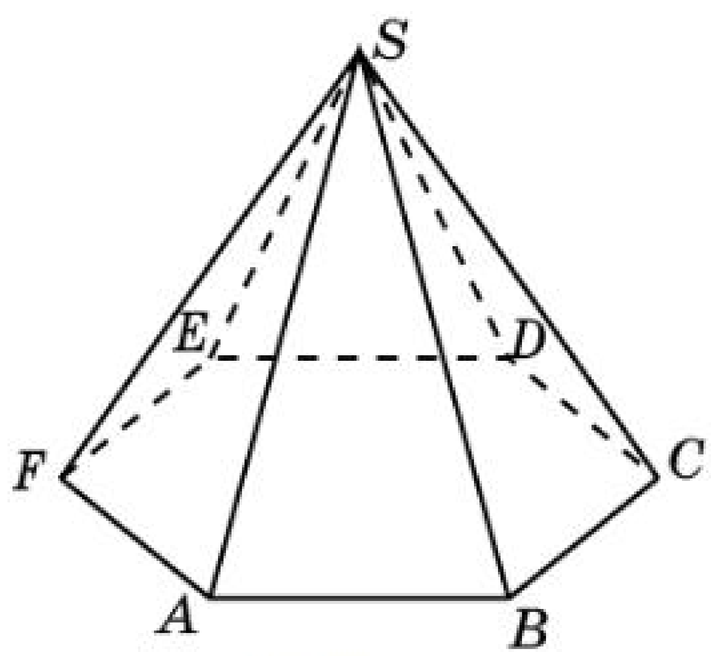
20.5-расм

20.3. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призмада (20.5-расм) қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни топинг: а) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$.

20.4. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари бирга тенг (20.6-расм). Қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни топинг: а) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{SC}$; б) $\overrightarrow{SB}$ ва $\overrightarrow{SD}$.

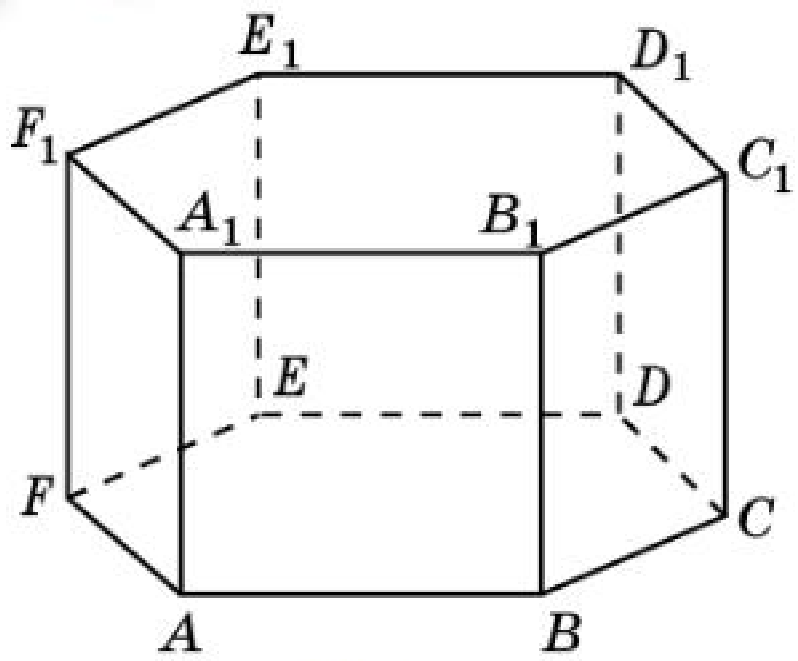


20.6-расм



20.7-расм

20.5. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг томонлари бирга тенг, ён қирралари иккига тенг (20.7-расм). Қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни топинг: а) $\overrightarrow{SA}$ ва $\overrightarrow{SD}$; б) $\overrightarrow{SA}$ ва $\overrightarrow{BC}$.



20.8-расм

20.6. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (20.8-расм). Қуйидаги векторларнинг орасидаги бурчакни топинг: а) $\overrightarrow{AA_1}$ ва $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$ ва $\overrightarrow{DE_1}$; в) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{C_1D_1}$; д) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; е) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1D_1}$; ж) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1E_1}$.

B

20.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда (20.4-расм) қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\overrightarrow{BC_1}$.

20.8. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (20.5-расм). Қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$.

20.9. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг (20.6-расм). Қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{SC}$; б) $\overrightarrow{SB}$ ва $\overrightarrow{SD}$.

20.10. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг (20.7-расм). Қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{SA}$ ва $\overrightarrow{SD}$; б) $\overrightarrow{SA}$ ва $\overrightarrow{BC}$.

20.11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг (20.8-расм). Қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг: а) $\overrightarrow{AA_1}$ ва $\overrightarrow{BC_1}$; б) $\overrightarrow{AA_1}$ ва $\overrightarrow{DE_1}$; в) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{C_1D_1}$; д) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1C_1}$; е) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1D_1}$; ж) $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{B_1E_1}$.

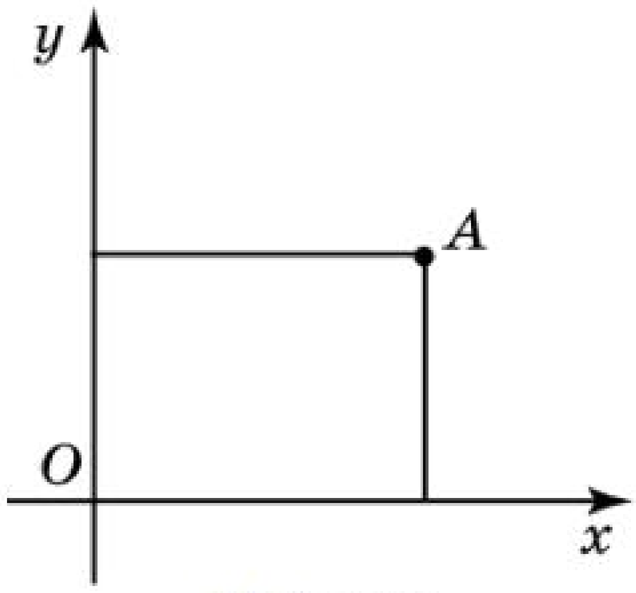
Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

20.12. Текисликдаги тўғри бурчакли координаталар системаси тушунчасини такрорланг.

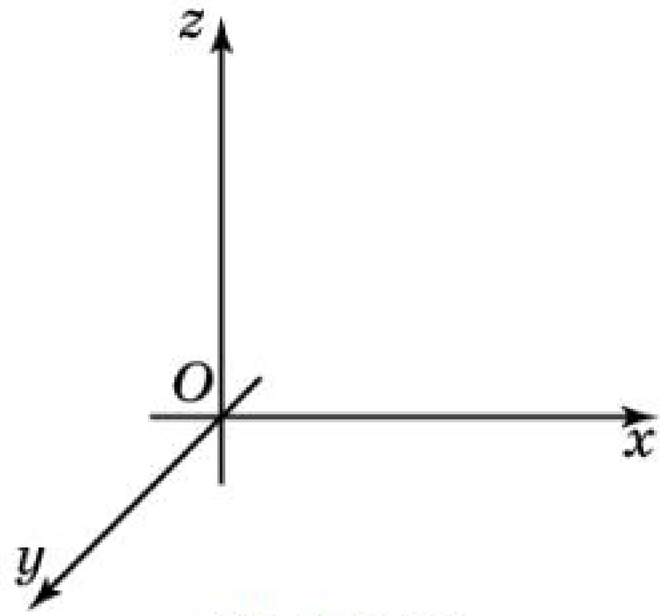
21-§. Фазода тўғри бурчакли координаталар системаси

Планиметрия курсида биз текисликдаги тўғри бурчакли координаталар системаси билан танишдик. Координаталар боши деб аталган O нуқта ва мусбат йўналишни кўрсатувчи $\overrightarrow{OE}$ бирлик вектор орқали танлаб олинган тўғри чизиқ *координата тўғри чизиғи* деб аталишини эслайлик.

Текисликдаги тўғри бурчакли координаталар системаси деб, умумий координаталар бошига эга бўлган ўзаро перпендикуляр координата чизиқлари жуфтига айтилади. Координаталар боши O ҳарфи билан координата тўғри чизиқлари Ox, Oy орқали белгиланади ва улар мос равишда *абсциссалар ўқи, ординаталар ўқи* деб аталади (21.1-расм).



21.1-расм



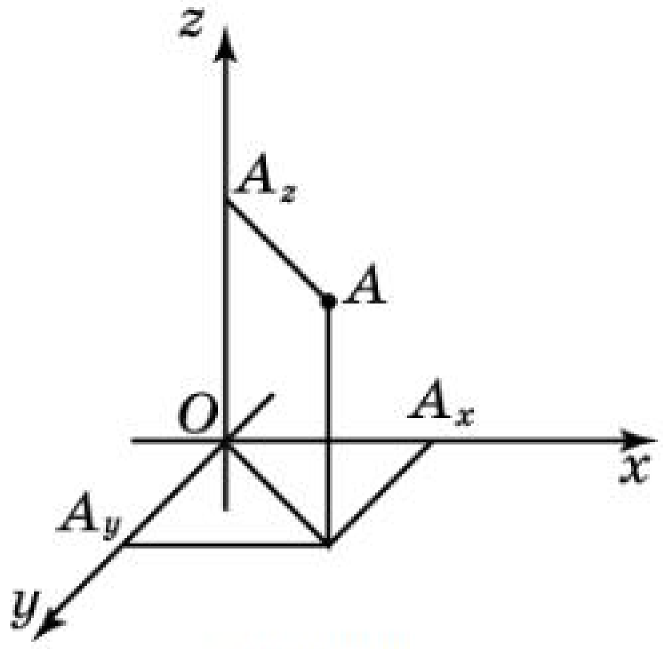
21.2-расм

Координата тўғри чизиғидаги ҳар бир нуқтага шу нуқтанинг координатаси деб аталган сон мос келади. Текисликдаги координаталар системасидаги ҳар бир нуқтага шу нуқтанинг координаталари деб аталувчи $(x; y)$ сонлар жуфти мос келади.

Тўғри бурчакли координаталарни дастлаб Р.Декарт (1596—1654) киритган. Шунинг учун тўғри бурчакли координаталар системаси декарт координаталар системаси, координаталарни эса *декарт координаталар* деб атайди.

Текисликдаги ва фазодаги тўғри бурчакли координаталарни киритиш кўплаган геометрик масалаларни алгебраик масалаларга, аксинча, алгебраик масалаларни геометрик масалаларга алмаштиришга имконият берди. Шунга асосланган усул *координаталар усули* деб аталади.

Фазодаги тўғри бурчакли координаталар системаси деб умумий координаталар боши бўлган ўзаро перпендикуляр координаталар чизиқлари учлигига айтилади. Координаталар боши O ҳарфи билан, координата тўғри чизиқлари эса Ox, Oy, Oz орқали белгиланади ва улар мос равишда *абсцисса ўқи, ордината ўқи, аппликата ўқи* деб аталади (21.2-расм). Координата тўғри чизиқлари жуфти орқали ўтувчи текисликлар координата текисликлари деб аталади. Яъни, Oxy, Oxz, Oyz деб белгиланади.



21.3-расм

Фазодаги тўғри бурчакли координаталар системасида ихтиёрий A нуқтани қараб чиқайлик. Шу нуқта орқали Ox ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз ва Ox ўқи билан кесишиш нуқтасини A_x орқали белгилаймиз (21.3-расм). Шу нуқтанинг Ox

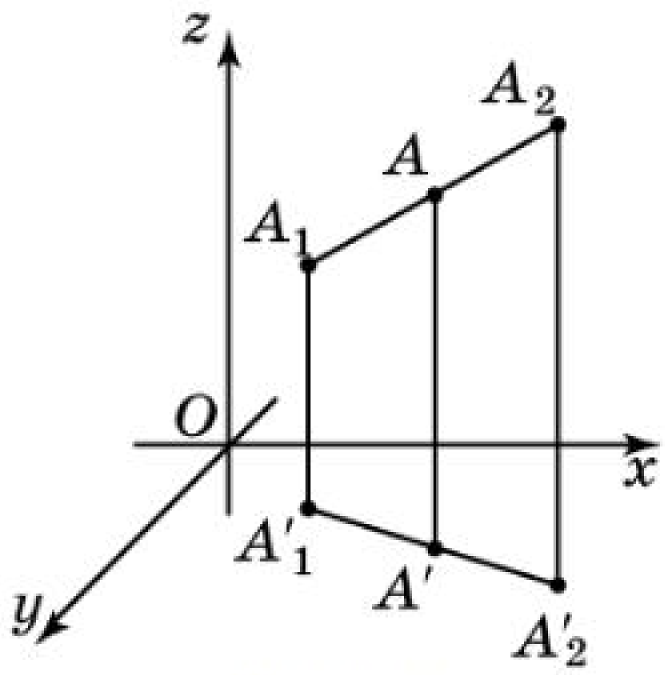
ўқидаги координатаси A нуқтанинг *абсциссаси* деб аталади ва x орқали белгиланади. Шунга ўхшаш Oy, Oz ўқларида A_y ва A_z нуқталари аниқланади. Улар мос равишда A ннуқтанинг ординатаси билан аппликатаси деб аталади ва мос равишда y ва z орқали белгиланади. $(x; y; z)$ сонлар учлиги фазодаги A нуқтанинг координаталари деб аталади.

$A(x; y; z)$ нуқтанинг Oxy, Oxz, Oyz координа текислигидаги ортогонал проекцияларининг координаталари мос равишда $(x; y; 0)$, $(x; 0; z)$, $(0; y; z)$ бўлишини сезамиз.

Планиметрияда $A_1(x_1; y_1)$ ва $A_2(x_2; y_2)$ нуқталарни туташтирувчи кесма ўртасининг координаталари $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ эканлиги исботланган эди. Фазода шунга ўхшаш қуйидаги теорема ўринли бўлади.

Теорема. ***$A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нуқталарни туташтирувчи кесма ўртасининг координаталари $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ бўлади.***

Исботи. $A(x; y; z)$ нуқта A_1A_2 кесманинг ўртаси бўлсин. Шу кесмани Oxy текислигига проекциялаймиз, яъни, A_1, A_2 нуқталар орқали Oxy текислигига перпендикуляр тўғри чизиқлар ўтказамиз (21.4-расм). Oxy текислигида мос равишда $A'_1(x_1; y_1; 0)$, $A'(x; y; 0)$, $A'_2(x_2; y_2; 0)$ нуқталарни оламиз. Ортогонал проекциялаш бир тўғри чизиқда ётган кесмаларнинг нисбатини сақлаганликдан, A' нуқта — $A'_1A'_2$ кесманинг ўртаси бўлади. Текисликдаги геометриянинг мос теоремаси бўйича унинг координаталари $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; 0\right)$ бўлади. Шунга ўхшаш A_1A_2 кесманинг Oxz (ёки Oyz) текислигидаги ортогонал проекциясини кўриб чиқиб, қуйидагини оламиз: $z = \frac{z_1+z_2}{2}$. Шу билан A_1A_2 кесманинг ўртаси бўлган A нуқтанинг координаталари $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ бўлади.



21.4-расм

Шу теоремага мос расмни ўзингиз чизинг.

Тарихий маълумотлар

Рене Декарт — XVII асрнинг таниқли математик олимларидан бири. Унинг тадқиқот олиб борган соҳаларининг кенглиги ҳаммани лол қолдиради. Р.Декарт фалсафа, математика, физика, биология, медицина ва бошқа фан соҳаларидан татқиқот натижаларига эришган. У фалсафанинг реал оламдаги кўпгина ҳодисаларга жавоб берадиган, табиат ва инсоннинг идрокини бошқарувчи қонуниятларни яратувчи оммабоп фан сифатида ўрганди.

Декарт ғарбнинг замонавий фалсафий-илмий мулоҳазаларининг асосини яратувчи шахс сифатида тўлиқ фалсафий система яратди. У фалсафада дуализм (қўшасос) ва рационализм йўналишини ривожлантирди.

Декарт картезиан фалсафий фанларининг (Картезий Декартнинг лотинча исми) асосини яратувчи бўлди. У бунда табиий фанлар назариясини ривожлантиришга шахсий кўзқарашларини таклиф қилган. Бинобарин, у Қуёш системасининг пайдо бўлишини илмий томондан тушунтириш масаласини ўрганиб, шахсий мулоҳазаларини таклиф қилди.

1637 йили чоп этилган китоби Р.Декартни таниқли қилиб, таниқли номга эга бўлди (Декарт у вақтда 41 ёшда эди). Шу вақтнинг урф-одатларига кўра унинг номи узун бўлган, яъни “Ақлни йўналтиришга ва фандаги ҳақиқатни топишга имконият яратувчи усуллар ҳақида ўйлар. Шу билан бир қаторда ушбу усулнинг қўшимчаси бўлган Диоптрика, Метеорлар ва Геометрия”. Бу асарда Декарт “Усулнинг асосий қоидаларини” ёзган, жумладан:

Биринчидан, исталган нарсанинг ҳақиқат эканлигига ишонч хосил қилмай, ҳақиқат деб қабул қилиш керак эмас, яъни тезкор қарор қабул қилишдан ва нотўғри тушунчалардан йироқ бўл, ва ўз фикрингни фақатгина ўйланиб, шубҳа туғдирмайдиган қилиб аниқ баён эт.

Иккинчидан, кўриладиган шахсий масалаларни самарали хал қилиш учун уларни кераклигича турли хил бўлакларга бўлиб хал қилиш таклиф қилинади.

Учинчидан, шахсий ўйлаш малакасини назорат қилиш, яъни соддадан бошлаб босқичма-босқич мураккаб билиш даражасигача кўтарилиш, ўз фикрларининг йўналишини бошқаришга, ҳатто бир-бирларига қарши бўлмайдиганлар орасида тартибни сақлашга имконият яратиш.

Тўртинчидан, кундалик муаммоларнинг тўлиқ рўйҳатини ва умумий обзорларнинг барчасини қолдирмай ҳеч нарса йўқ эканлигига ишончли қилиб ясаш.

Декарт “Илмий назариянинг асосида аниқ ва содда қоидалар бўлиши керак. Табиат ҳодисаларини ўрганиш, тавсифлаш, гуруҳлаш, тажрибалар ва математик ҳисоблашлар олиб бориш керак. Табиатни ўрганишда ўзгалардан ёрдам кутмай, фақат ўзининг кучига ишониш керак”, — деб айтган.

Р.Декарт замонавий математиканинг ривожланишига катта хисса қўшган. Унинг геометрияга қўшимча бўлган “... усуллар ҳақида ўйлар” илмий мақоласи шу вақтга қадар геометрия фанига янгиликлар киритди. Қисқа муддатли “Геометрия” тўртта нашрдан ўтиб, XVII асрдаги ҳар бир математикнинг ён китобчаси бўлди. У геометрик координаталар системасини формулага айлантириш орқали “Аналитик геометриянинг отаси” деб аталди.

XVIII—XIX асрларда Декартнинг координаталар усули асосида кўпўлчовли, кейинчалик чексиз ўлчовли геометрия пайдо бўлди. Ҳозирги кунда координаталар усулисиз математикани ҳам, физикани ҳам тасаввур қилиш мумкин эмас.

Саволлар

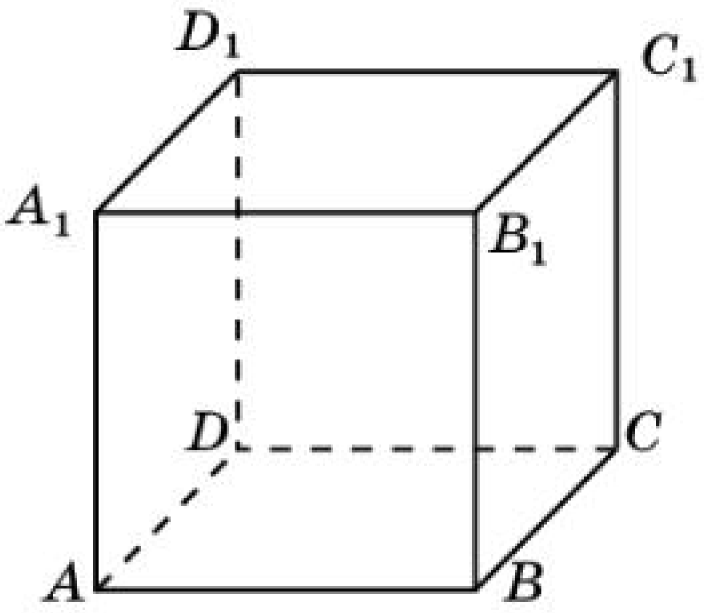
1. Қандай тўғри чизиқ координата тўғри чизиғи деб аталади?
2. а) текисликдаги; г) фазодаги тўғри бурчакли координаталар системаси деб нимага айтилади?
3. а) Абсцисса; г) ордината; д) аппликата ўқи деб нимага айтилади?
4. Қандай текисликлар координата текисликлари деб аталади?

Масалалар

А

21.1. Фазодаги тўғри бурчакли координаталар системасида координаталари берилган қуйидаги нуқталарни тасвирланг: (1; 2; 3), (2; −1; 1), (−1; 3; 2).

21.2. $A(1;\ 3;\ 4)$ ва $B(5;\ -6;\ 2)$ нуқталарнинг: а) Oxy; ә) Oxz; б) Oyz текисликлардаги ортогонал проекцияларининг координаталарини топинг.

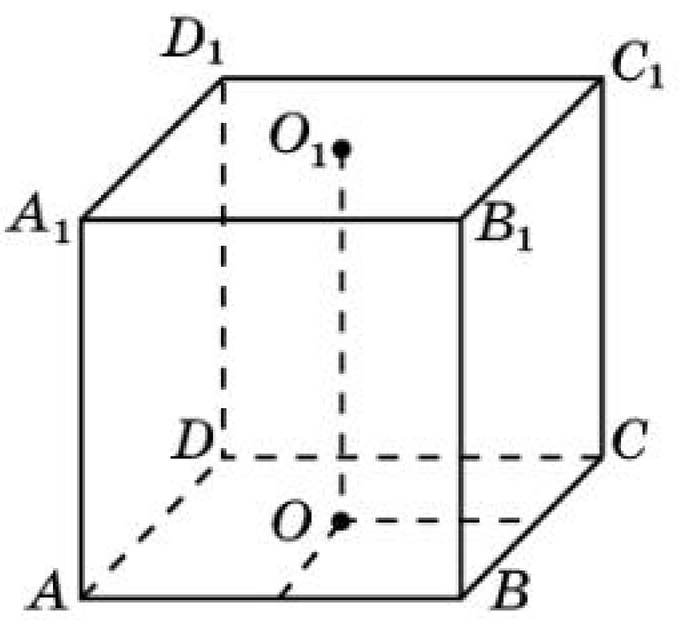


21.5-расм

21.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик куб берилган (21.5-расм). Координаталар боши D нуқтада ётибди. Координаталар ўқининг мусбат нурлари мос равишда DC, DA ва DD_1. Кубнинг барча учларининг координаталарини топинг.

21.4. Қуйидаги кесмаларнинг ўрталарининг координаталарини топинг: а) AB, бу ерда $A(1;\ 2;\ 3)$ ва $B(-1;\ 0;\ 1)$; б) CD, ерда $C(3;\ 3;\ 0)$ ва $D(3;\ -1;\ 2)$.

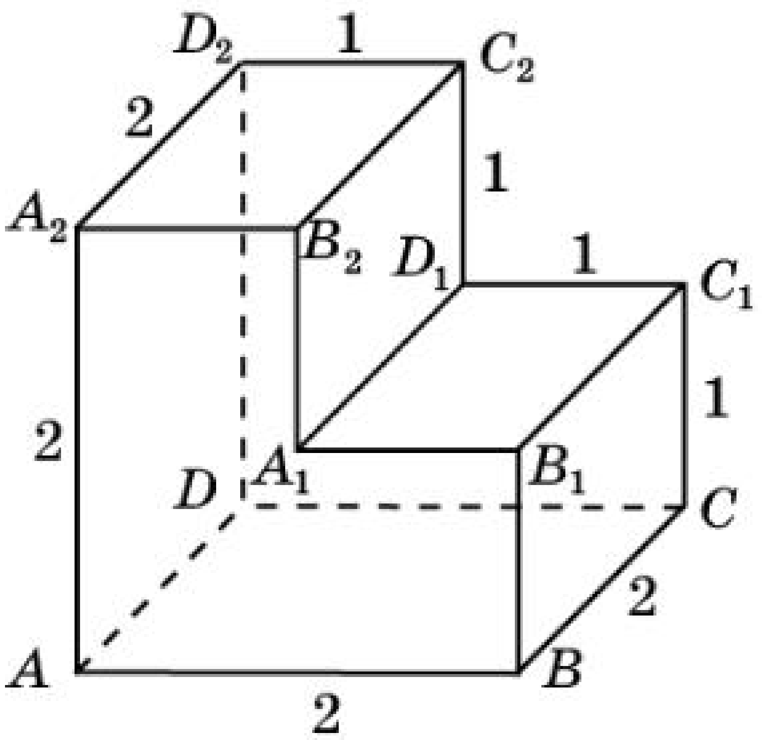
B



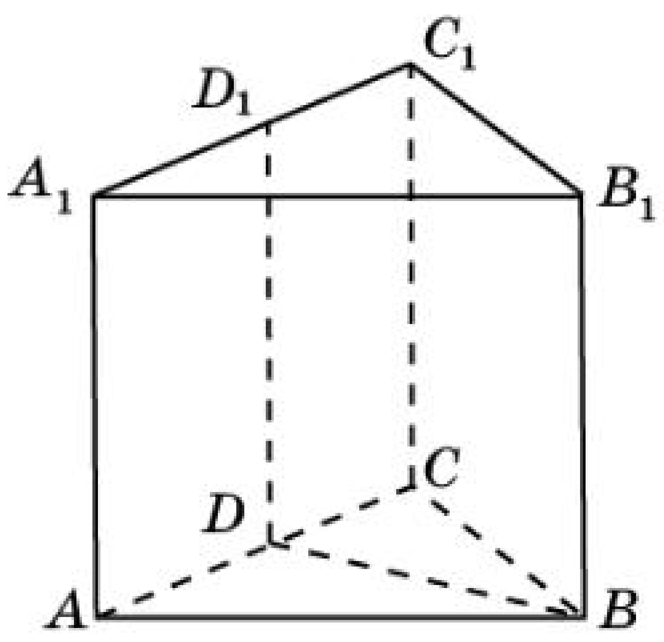
21.6-расм

21.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб тўғри бурчакли координаталар системасида чизилган ва $ABCD$ ёғининг маркази координаталар боши (21.6-расм), қирралари мос равишда координаталар ўқига паралел, A учининг координаталари $(-1;\ 1;\ 0)$. Кубнинг қолган учларининг координаталарини топинг.

21.6. Кўпёқнинг ёқлари тўғри бурчакли кўпбурчаклар бўлади (21.7-расм). D учи — координаталар боши, DC, DA, DD_2 кесмалари мос равишда Ox, Oy ва Oz координаталар ўқида ётади. Кўпёқ учларининг координаталарини топинг.



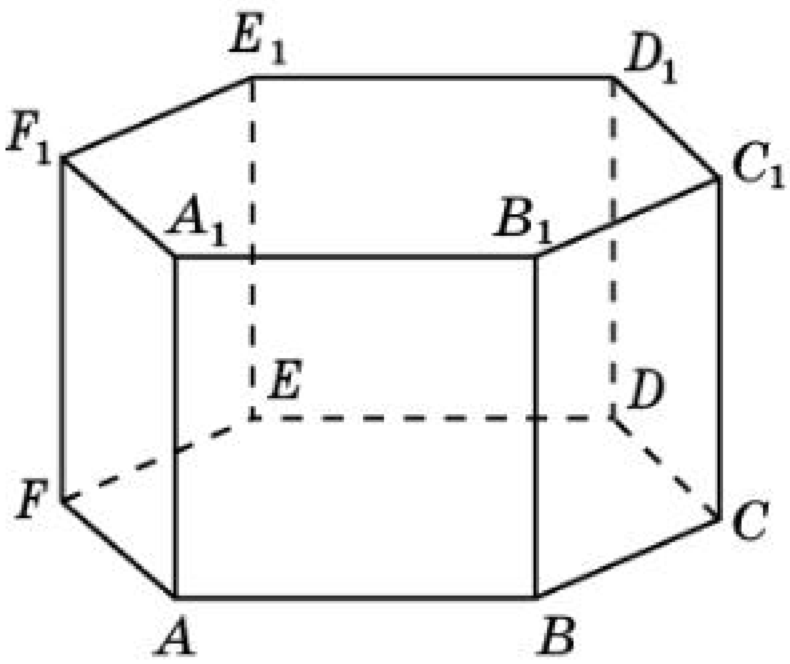
21.7-расм



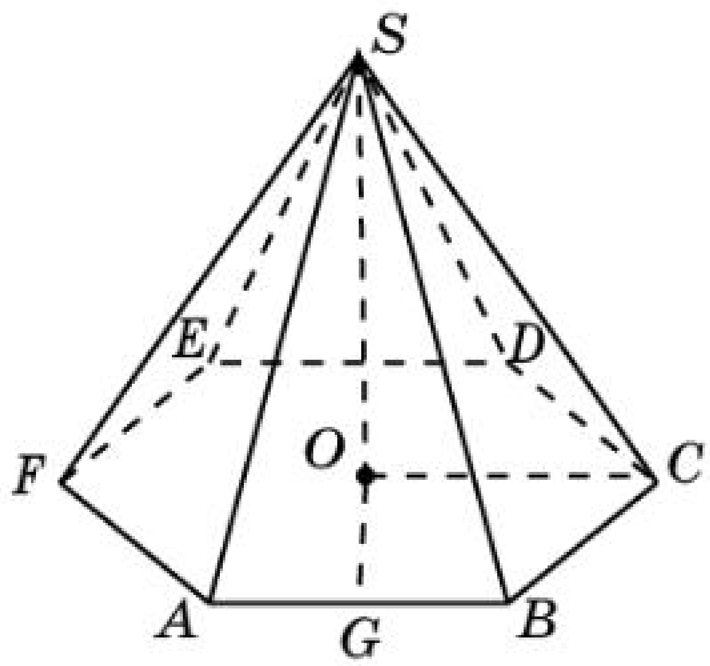
21.8-расм

21.7. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. D ва D_1 — мос равишда AC ва A_1C_1 қирраларининг ўрталари (21.8-расм). D — координаталар боши. DB, DA, DD_1 кесмалари мос равишда Ox, Oy ва Oz координата ўқларида ётади. Призманинг учларининг координаталарини топинг.

21.8. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. E учи — координаталар боши, ED, EA, EE_1 кесмалари мос равишда Ox, Oy ва Oz координата ўқларида ётади (21.9-расм). Призманинг учларининг координаталарини топинг.



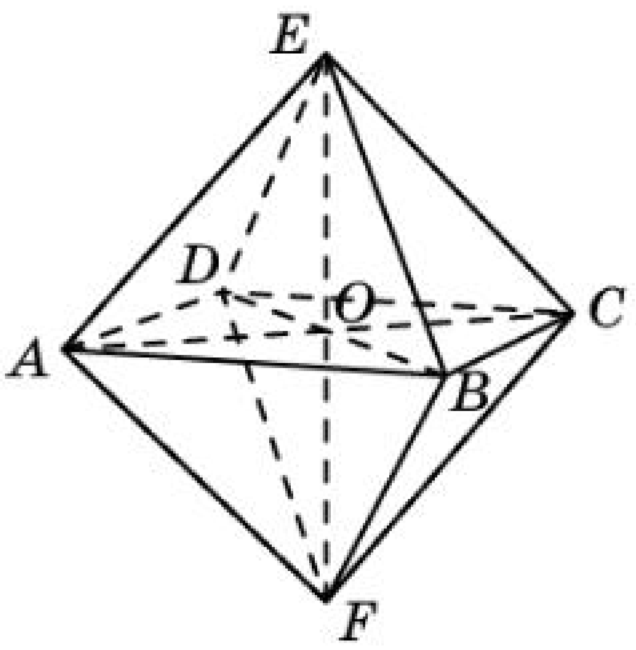
21.9-расм



21.10-расм

21.9. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамида асосининг томонлари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. O нуқта — асосининг маркази, G нуқта — AB қиррасининг ўртаси, OC, OG, OS кесмалар мос равшида Ox, Oy ва Oz координаталар ўқларида ётади (21.10-расм). Пирмаданиг учларининг координаталарини топинг.

21.10. Фазода жойлашган қуйидаги нуқталарнинг геометрик ўрнининг маъноси қандай: а) биринчи координатаси нолга тенг; б) иккинчи координатаси нолга тенг; в) учинчи координатаси нолга тенг; г) биринчи ва иккинчи координаталари нолга тенг; д) биринчи ва учинчи координаталари нолга тенг; е) иккинчи ва учинчи координаталри нолга тенг; к) барча координаталари нолга тенг?



21.11-расм

21.11. $A(-1;\ 2;\ 3)$ нуқтадан қуйидаги текисликларгача бўлган масофаларни топинг: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

21.12. Октаэдрнинг O маркази координаталар боши бўлади. Унинг икки учининг координаталари $A(0;\ 1;\ 0)$ ва $B(1;\ 0;\ 0)$ (21.11-расм). Октаэдрнинг қолган учларининг координаталарини топинг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

21.13. Координата текислигидаги нуқталар орасидаги масофани топиш формуласини такрорланг.

21.14. Координаталар текислигидаги нуқталар орасидаги масофани топиш формуласидан фойдаланиб, фазодаги $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар орасидаги масофа формуласини ёзинг.

22-§. Икки нуқта орасидаги масофа. Сфера тенгламаси

Планиметрия курсида текисликдаги $A_1(x_1;\ y_1)$ ва $A_2(x_2;\ y_2)$ нуқталар орасидаги масофа қуйидаги формула билан ифодаланганлиги исботланган эди:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

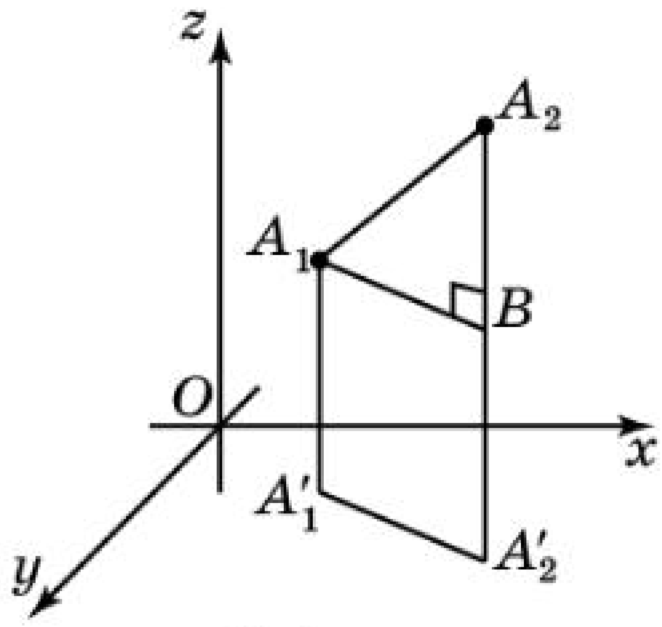
Фазода ҳам шунга ўхшаш формула мавжуд.

Теорема. ***Фазода*** $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ***нуқталар орасидаги масофа қуйидаги формула билан ифодаланади:***

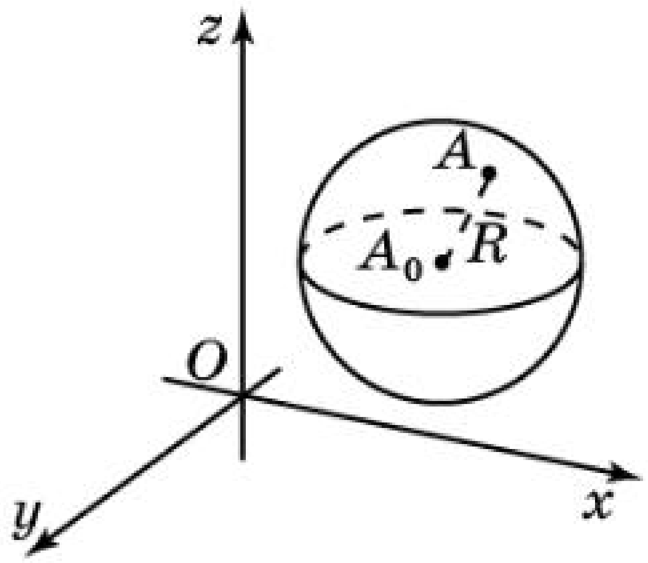
$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Исбот. Фазодаги $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталар учун A_1A_2 тўғри чизиқни кўриб чиқайлик. У барча координата ўқларига бир вақтта паралел бўла олмайди.

Масалан, у Oz ўқига паралел эмас дейлик, яъни, A_1', A_2' — Oxy текислигидаги мос A_1, A_2 нуқталарга ортогонал проекциялари бўлсин (22.1-расм).



22.1-расм



22.2-расм

Бу проекцияларнинг мос $(x_1;\ y_1;\ 0)$, $(x_2;\ y_2;\ 0)$ координаталари мавжуд. A_1', A_2' нуқталар орасидаги масофа қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$A_1'A_2' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

A_1 нукта орқали $A_1'A_2'$ тўғри чизиғига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг $A_2'A_2$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасини B деб белгилаймиз. Шунда A_1A_2B учбурчак – тўғри бурчакли бўлади, яъни, $A_1B = A_1'A_2'$, $A_2B = |z_2 - z_1|$. Пифагор теоремаси бўйича:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .\ \square$$

Бу тенглик маркази $A\ (x;\ y;\ z)$ нуқтада ва радиуси R бўладиган сфера нуқталарининг координаталари қуйидаги тенгликни қаноатлантириши келиб чиқади:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Бу тенглик маркази $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада ва радиуси R бўлган *сферанинг тенгламаси деб* аталади (22.2-расм).

Шу жумладан, шарнинг нуқталарининг координаталари қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2.$$

Маркази $A_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтада ва радиуси R бўлган шарга тегишли бўлмаган нуқталарнинг координаталарини қаноатлантирувчи тенгсизлик ёзинг.

Саволлар

1. Фазодаги икки нуқта орасидаги масофа қандай формула билан ифодаланади?
2. Сфера нуқталарининг координаталари қандай тенгсизликни қаноатлантиради?
3. Қандай тенглама сферанинг тенгламаси деб аталади?
4. Шар нуқталарининг координаталари қандай тенгсизликни қаноатлантиради?

Масалалар

A

22.1. Қуйидаги нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофани топинг: а) $A(3;\ 4;\ 0)$; б) $B(1;\ -2;\ 2)$.

22.2. $A(3;\ 1;\ 5)$ ёки $B(1;\ -1;\ 6)$ нуқталарнинг қайси бири координаталар бошига яқинроқ жойлашган?

22.3. Қуйидаги нуқталар орасидаги масофани топинг: а) $A_1(1;\ 2;\ 3)$ ва $A_2(-1;\ 1;\ 1)$; б) $B_1(3;\ 4;\ 0)$ ва $B_2(3;\ 1;\ -4)$.

22.4. Қуйидаги тенглама билан берилган сферанинг C марказининг координаталарини ва R радиусини топинг: а) $(x-2)^2+(y+5)^2+z^2=9$; б) $x^2+(y-6)^2+(z+1)^2=4$.

22.5. Сферанинг тенгламасини ёзинг: а) маркази $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқтада ва радиуси 1 га тенг; б) маркази $O(1;\ -2;\ 3)$ нуқтада ва радиуси 4 га тенг.

B

22.6. Учбурчак учларининг координаталари берилган: $A(0;\ 0;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(2;\ 0;\ 0)$. Унинг турини аниқланг.

22.7. $A(1;\ -2;\ 3)$ нуқта: а) Ox; б) Oy; б) Oz координата тўғри чизиғидан қандай масофада жойлашган?

22.8. Қуйидаги координата текислигига уриниб ўтадиган маркази $O(1;\ 2;\ -1)$ нуқтадаги сферанинг тенгламасини ёзинг: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

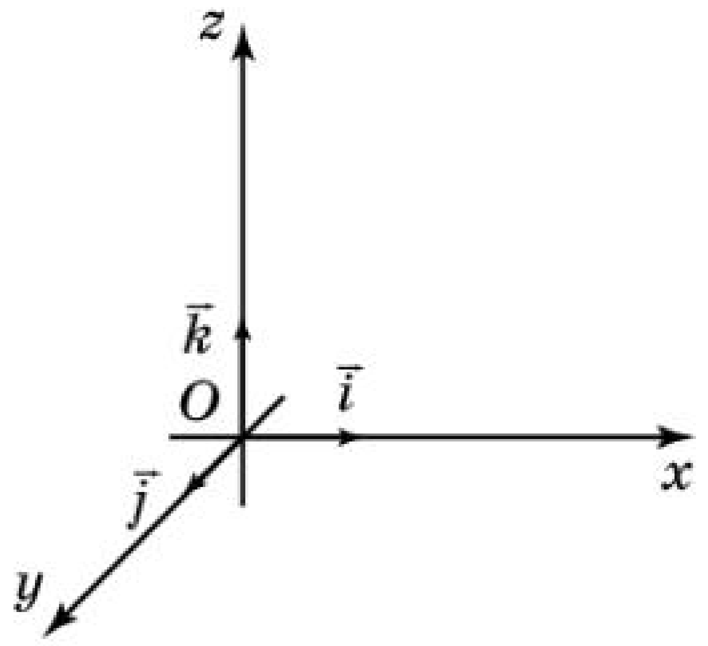
22.9. Координата текислигидаги векторнинг координаталари таърифини такрорланг.

22.10. Координата текислигидаги векторнинг координаталари тушунчаси таърифига ўхшаш фазодаги вектор координаталари тушунчасини аниқланг.

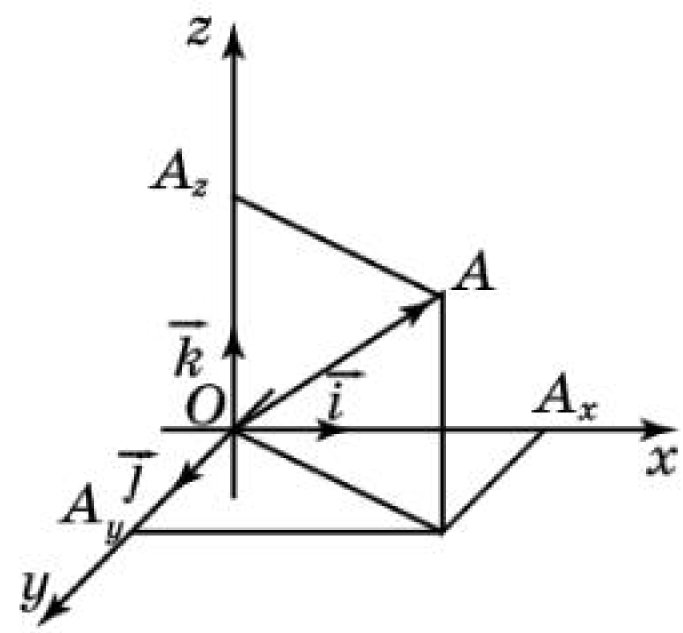
23-§. Векторнинг координаталари

Тўғри бурчакли координаталар системасида берилган фазодаги векторнинг координаталари тушунчасини аниқлайлик. Бунинг учун векторнинг бошланғич нуқтасини координаталар бошига мос келадиган қилиб ясаймиз. Шунда унинг учининг координаталари *векторнинг координаталари* деб аталади.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторларни мос равишда $(1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 1)$ координаталари билан белгилайлик. Уларнинг узунликлари 1 га тенг, йўналишлари эса мос координаталари ўқларининг йўналишига мос келади. Бу векторларни координаталари бошидан бошлаб чизамиз ва уларни *бирлик координата векторлари* деб атаймиз (23.1-расм).



23.1-расм



23.2-расм

Теорема. $\vec{a}$ ***векторни*** $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ***кўринишида ёзиш мумкин бўлгандагина унинг координаталари*** $(x;\ y;\ z)$ ***бўлади.***

Исботи. $\vec{a}$ векторни координаталар бошидан бошлаб чизамиз ва унинг учун A нуқта орқали белгилаймиз. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$ тенглик бажарилади (23.2-расм). Шунда A нуқта $\overrightarrow{OA_x} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z} = z\vec{k}$ тенглик бажарилган ҳолатдагина $(x;\ y;\ z)$ координаталарга эга бўлади. Демак, $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. □

Теорема. $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ***ва*** $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ ***векторларнинг*** $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ***йиғиндисининг координаталари*** $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$ ***бўлади.***

Исботи. $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторларни координата векторлари бўйича ёзамиз:

$$\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\quad \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Бунда $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ йиғинди учун қуйидаги тенглик бажарилади:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

бундан $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$ сонлар учлиги $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ векторнинг координаталари бўлиб ҳисобланади. □

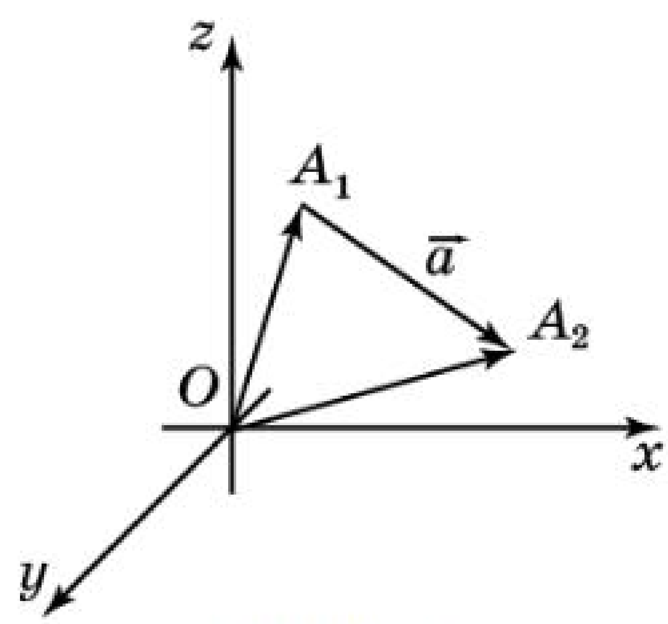
Шундай қилиб векторларни қўшиш давомида уларнинг мос координаталари қўшилади.

Векторни сонга кўпайтирганда унинг барча координаталари шу сонга кўпайтирилишини ўзингиз исботланг.

Шу хоссалардан $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ векторларнинг $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ айирмасининг координаталари $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ бўлади.

Боши билан охирининг координаталари берилган векторнинг координаталари қандай топилишини кўриб чиқайлик.

$\vec{a}$ векторнинг боши $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ охири $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталарда бўлсин (23.3-расм).



23.3-расм

Шунда уни $\vec{a} = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_2} - \overline{OA_1}$ векторларнинг айирмаси сифатида кўрсатиш мумкин, яъни, координаталари: $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

$\vec{a}(x;\ y;\ z)$ векторнинг узунлиги координаталари орқали қуйидаги формула билан аниқланади:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Агар $\overline{A_1A_2}$ векторнинг боши ва охирининг координаталари $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқталарда берилса, у ҳолда унинг узунлиги қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Нолдан фарқли *икки векторнинг скаляр кўпайтмаси* деб, уларнинг узунликлари билан орасидаги бурчакнинг косинуси кўпайтмасига айтилишини эсга соламиз.

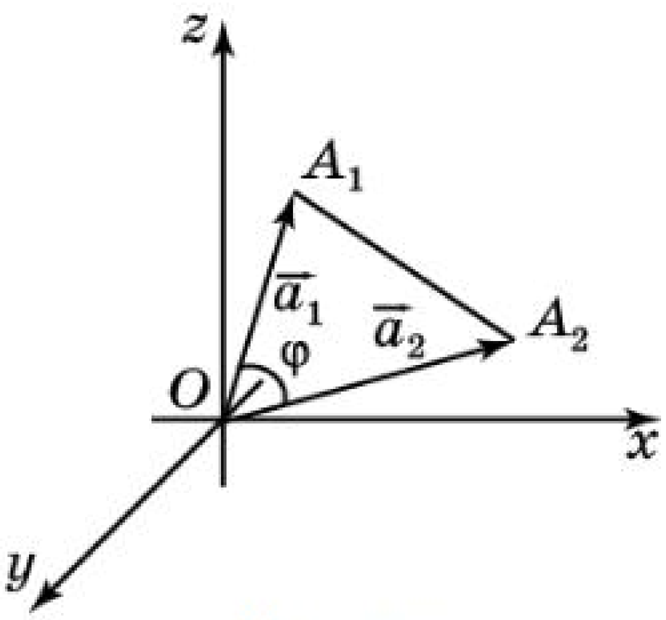
Агар бир вектор ноль вектор бўлса, унда шу векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг деб ҳисобланади.

$\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$ деб белгиланади. Таъриф бўйича,

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos j\ ,$$

бу ерда j бурчак $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторлар орасидаги бурчак.

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ кўпайтмаси *скаляр квадрат* деб аталади ва $\vec{a}^2$ деб белгиланади.



23.4-расм

Скаляр кўпайтманинг таърифидан $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ келиб чиқади.

Векторларнинг скаляр кўпайтмасини уларнинг координаталари орқали ифодалайлик. $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ векторлар берилсин. Векторнинг бошини координаталар бошидан бошлаб чизамиз, охирини A_1, A_2 деб белгилаймиз (23.4-расм).

Косинуслар теорема бўйича қуйидаги тенгликни оламиз:

$$(A_1A_2)^2 = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos j\ ,$$

яъни $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = \vec{a}_1^{\,2} + \vec{a}_2^{\,2} - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Сўнги тенгликдан скаляр кўпайтмани ифодалаймиз ва қуйидаги тенгликларни фойдаланамиз:

$$\vec{a}_1^{\,2} = |\vec{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;\ \vec{a}_2^{\,2} = |\vec{a}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

$$(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 = |\vec{a}_1 - \vec{a}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Бунда

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - $$
$$- (z_1 - z_2)^2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Шундай қилиб қуйидаги формула хосил бўлади:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Олинган скаляр кўпайтманинг формуласи координаталари берилган $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ векторлар орасидаги бурчакни топишга имконият беради. Яъни,

$$\cos j = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Саволлар

1. Векторнинг координаталари деб нимага айтилади?
2. Қандай векторлар координата векторлари деб аталади?
3. Векторнинг узунлиги координаталар орқали қандай ифодаланади?
4. Векторнинг узунлиги унинг боши ва охирининг координаталари орқали қандай ифодаланади?
5. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси қандай белгиланади?
6. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси қандай аниқланади?
7. Векторнинг скаляр квадрати деб нимага айтилади?
8. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси уларнинг координаталари орқали қандай ифодаланади?
9. Векторларнинг орасидаги бурчак уларнинг координаталари орқали қандай ифодаланади?

Масалалар

А

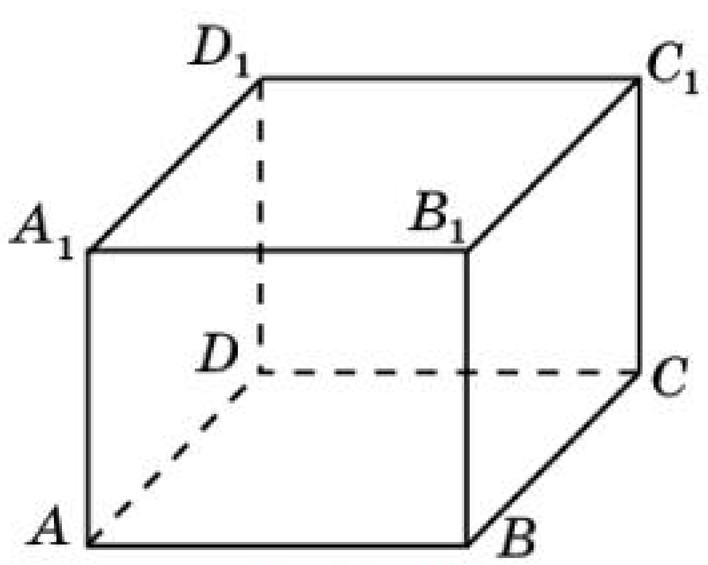
23.1. Қуйидаги векторларнинг координаталарини топинг: а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$; в) $\vec{c} = -3\vec{j} + \vec{k}$; г) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{k}$.

23.2. $\overline{AB}$ векторнинг координаталари топинг: а) $A(2;\ -3;\ 4)$, $B(-5;\ 2;\ -6)$; б) $A(1;\ 3;\ -4)$, $B(6;\ -5;\ -8)$; в) $A(-3;\ 1;\ -10)$, $B(5;\ 2;\ -1)$.

23.3. $\overline{AB}$ векторнинг координаталари $(a;\ b;\ c)$. $\overline{BA}$ векторнинг координаталари топинг.

23.4. $\vec{a}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $\vec{a}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ векторлар коллинеар, уларнинг координаталарининг ўзаро қандай боғлиқлиги бор?

23.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедда D учи — координаталар боши, DC, DA, DD_1 қирралари мос равишда Ox, Oy, Oz координаталар ўқларида жойлашган ва $DC = 4$, $DA = 3$, $DD_1 = 2$ (23.5-расм). Қуйидаги векторнинг координаталарини топинг: а) $\overrightarrow{DB}$; ә) $\overrightarrow{DA_1}$; б) $\overrightarrow{DC_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$; г) $\overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{AB_1}$; е) $\overrightarrow{AD_1}$; ж) $\overrightarrow{AC_1}$.



23.5-расм

23.6. Векторнинг координаталарини топинг: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$, бу ерда $\vec{a}(1; 0; 3)$, $\vec{b}(0; -2; 4)$.

23.7. Агар $\overline{MN}$ векторнинг координаталари $(2; -1; 0)$ ва $M(1; -3; -5)$ бўлса, у ҳолда N нуқтанинг координаталарини топинг.

23.8. Қуйидаги векторнинг узунлигини топинг: а) $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; б) $3\vec{j} + \vec{k}$; б) $-\vec{i} + 2\vec{k}$.

23.9. $\vec{a}_1(-1; 2; 3)$ ва $\vec{a}_2(2; -1; 4)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

В

23.10. $\vec{a}(-1; 2; 5)$, $\vec{b}(2; -3; 4)$ векторлар берилган. Қуйидаги векторларнинг координаталарини топинг: а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $-\vec{a} + 3\vec{b}$.

23.11. Векторнинг а) Oxy координата текислигига перпендикуляр; б) Ox координата тўғри чизиғига паралел бўлиши учун координаталари қандай шартни қаноатлантириши керак?

23.12. Векторнинг узунлиги 3 га тенг. Векторнинг координаталари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда уларни аниқланг.

23.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедда D учи — координаталар боши, DC, DA, DD_1 қирралари мос равишда Ox, Oy, Oz координаталар ўқларида жойлашган ва $DC = 4$, $DA = 3$, $DD_1 = 2$ (23.5-расм). Қуйидаги векторнинг координаталарини топинг: а) $\overline{DB}$; б) $\overline{DA_1}$; в) $\overline{DC_1}$; г) $\overline{DB_1}$; д) $\overline{AB}$; е) $\overline{AC}$; ж) $\overline{AB_1}$; з) $\overline{AD_1}$; к) $\overline{AC_1}$.

23.14. $\vec{a}_1(-1; 2; 2)$ ва $\vec{a}_2(3; 0; 4)$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

23.15. $\vec{e}(1; 1; 1)$ векторнинг координата векторлари билан ясовчи бурчакларининг косинусларини топинг.

23.16. Жисм $M(5; -1; 2)$ жойдан $N(2; 1; 3)$ жойга тўғри чизиқли ҳаракат қилиб, жой алмаштирганда $\vec{F}(-3; 4; 7)$ кучини бажарувчи A ишини ҳисобланг.

Янги мавзуни ўзлаштиришга тайёргарлик

23.17. Координата текислигидаги тўғри чизиқ тенгламасини такрорланг.

23.18. Координата текислигидаги тўғри чизиқ тенгламасига ўхшаш фазосидаги тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

24-§*. Фазода текислик тенгламаси

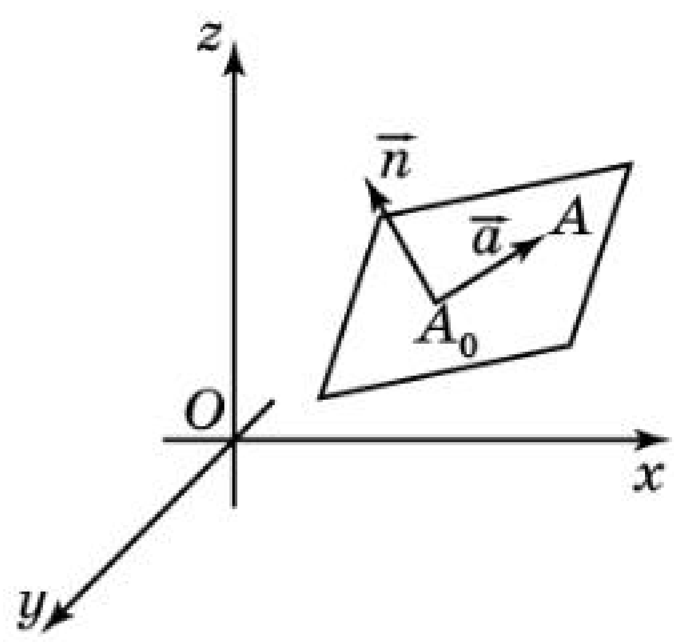
Планиметрия курсида текисликдаги тўғри чизиқ $ax + by + c = 0$ тенгламаси билан берилиши исботланган, бу ерда a, b, c — ҳақиқий сонлар ва a, b сонлар бир вақтда нолга тенг эмас. Фазода шунга ўхшаш теорема мавжуд.

Теорема. ***Фазода текислик***

$$ax + by + cz + d = 0$$

тенглама билан берилади. Бу ерда a, b, c, d — ҳақиқий сонлар. a, b, c сонлар бир вақтда нолга тенг эмас ва улар шу текисликка перпендикуляр $\vec{n}$ векторнинг координаталари бўлади. Бу вектор нормал вектор деб аталади.

Исботи. $A_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқта орқали ўтувчи ва $\vec{n}(a; b; c)$ векторга перпендикуляр текисликни кўриб чиқайлик (24.1-расм). Шу текисликда ётган ихтиёрий $A(x; y; z)$ нуқта учун $\overline{A_0A}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ вектор $\vec{n}$ векторга перпендикуляр бўлади. Яъни $\vec{n} \cdot \overline{A_0A}$ скаляр кўпайтма нолга тенг бўлади. Скаляр кўпайтмани бу векторларнинг координаталари орқали ёзиб берилган текисликни ифодаловчи қуйидаги тенгламани оламиз:



24.1-расм

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

$-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ деб белгилаб, тенгламани шакл алмаштириш орқали текисликнинг тенгламасини оламиз:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Фазодаги текисликларнинг ўзаро жойлашишини уларнинг тенгламалари орқали кўриб чиқайлик. Фазодаги икки текисликнинг $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормал векторлари коллинеар бўлса, у ҳолда улар параллел ёки устма-уст тушади. Шу билан қандайдир бир t сони учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади: $\vec{n}_2 = t \cdot \vec{n}_1$.

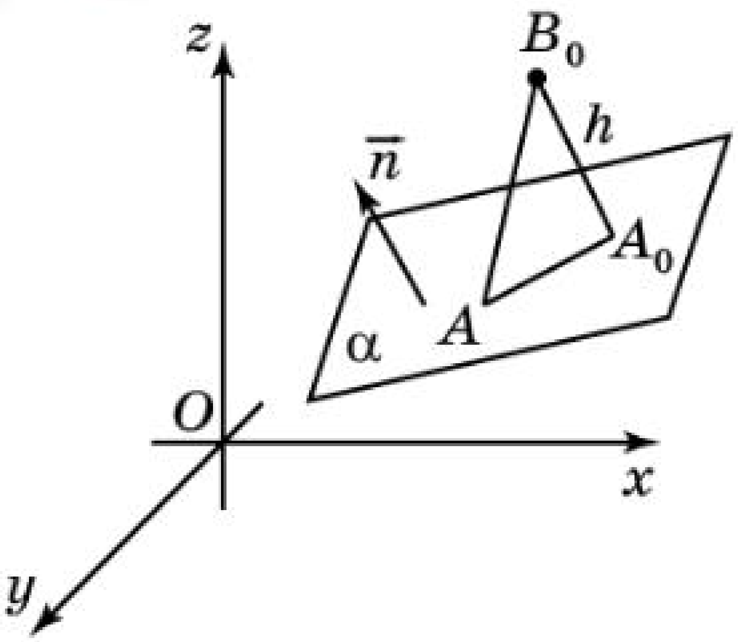
Энди,

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\ (*)$$

тенгламалар билан текисликларнинг нормал векторларининг координаталари $(a_1; b_1; c_1)$, $(a_2; b_2; c_2)$ бўлади. Демак, қандайдир бир t сони учун $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$, $c_2 = tc_1$ тенгликлар бажарилса, у ҳолда бу текисликлар параллел ёки устма-уст тушувчи бўлади.

Агар $d_2 = td_1$ бўлса, у ҳолда (*) тенгламалари бир текисликни таърифлайди. $d_2 \neq td_1$ бўлса, у ҳолда бу тенгламалар параллел текисликларни таърифлайди. Агар текисликлар параллел бўлмаса, у ҳолда улар тўғри чизиқ бўйича кесишади ва улар орасидаги бурчакни нормал векторлар орасидаги бурчак орқали ҳисоблаш мумкин.

Агар нормал векторлар орасидаги бурчак ўткир ёки тўғри бўлса, у ҳолда бу текисликлар орасидаги бурчакка тенг, агар нормал векторлар орасидаги бурчак ўтмас бўлса, у ҳолда у 180° билан текисликлар орасидаги бурчакнинг айирмасига тенг бўлишини ўзингиз текширинг.



24.2-расм

Шу билан бирга, текисликлар орасидаги j бурчак косинусини нормал векторларнинг скаляр кўпайтмаси формула орқали ҳисоблаш мумкин:

$$\cos j = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Хусусий ҳолларда текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади, агар $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторларининг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, яъни қуйидаги тенглик ўринли бўлса,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

$B_0(x_0; y_0; z_0)$ нуқтадан $ax + by + cz + d = 0$ тенглама билан берилган текисликкача бўлган масофани топишга доир формулани чиқарайлик.

B_0 нуқтадан *текисликкача бўлган масофа* деб, берилган нуқтадан берилган текисликка туширилган B_0A_0 перпендикулярнинг узунлигига айтамиз. $\overline{A_0B_0}$ вектор $\vec{n}(a; b; c)$ нормал векторга коллинеар (24.2-расм).

$A(x; y; z)$ — а текислигининг қандайдир бир нуқтаси бўлсин. У ҳолда

$$\cos\angle AB_0A_0 = \frac{\vec{n} \cdot \overline{B_0A}}{|\vec{n}| \cdot |\overline{B_0A}|} = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot |\overline{B_0A}|}.$$

$-ax - by - cz = d$ эканлиги ва изланаётган h масофа $|\overline{B_0A}| \cdot \cos\angle AB_0A_0$ тенг экалигини эслатиб, қуйидагини оламиз:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Саволлар

1. Фазодаги текислик қандай тенглама билан берилади?
2. Қандай вектор текисликнинг нормал вектори деб аталади?
3. Қандай ҳолатда икки тенглама фазодаги паралел текисликларни аниқлайди?
4. Қандай ҳолатда икки тенглама фазодаги бир текисликни аниқлайди?
5. Қандай ҳолатда икки тенглама фазодаги перпендикуляр текисликларни аниқлайди?
6. Тенгламалар берилган икки текисликнинг орасидаги бурчакни қандай топиш мумкин?

Масалалар

А

24.1. Текисликнинг нормал векторининг координаталарини топинг:
а) $5x - y - 1 = 0$;
ә) $3x + 18z - 6 = 0$;

б) $15x + y - 8z + 14 = 0$;
в) $x - 3y + 15z = 0$.

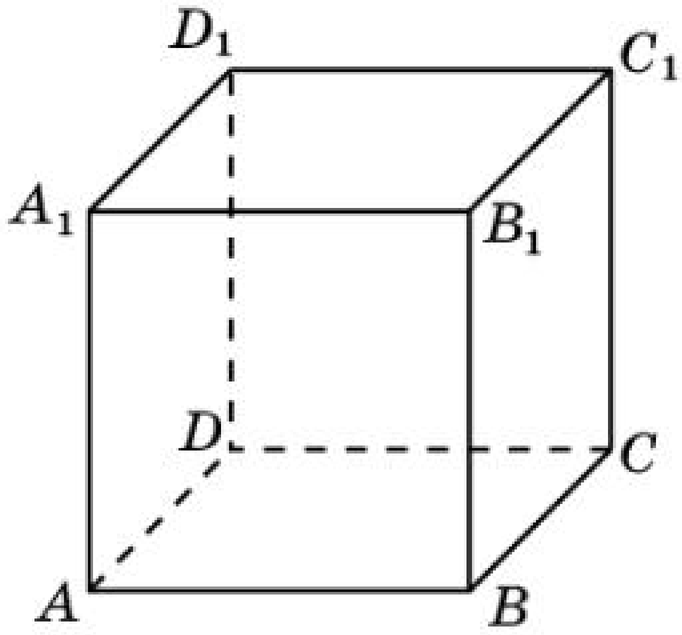
24.2. Координата текислигининг тенгламасини ёзинг: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

24.3. $A(3; 2; 5)$, $B(-1; -2; 2)$, $C(7; 0; -9)$ нуқталар берилган. $2x - 3y + z - 5 = 0$ текислигига тегишли нуқталарни аниқланг.

24.4. $x + 2y - 3z - 1 = 0$ текислик берилган. Унинг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг.

24.5. $M(-1; 2; 1)$ нуқта орқали ўтувчи ва $\vec{n}$ нормал векторининг координаталари берилган текисликнинг тенгламасини топинг: а) $(0; -5; 2)$; б) $(6; -1; 3)$; в) $(-4; -2; -1)$; г) $(-3; -8; 0)$.

24.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда D учи — координаталар боши, DC, DA, DD_1 қирралари мос равишда Ox, Oy, Oz координата ўқларида ётади (24.3-расм). Кубнинг ёқлари ётувчи текисликларнинг тенгламаларини ёзинг.



24.3-расм

B

24.7. $M(1; -2; 4)$ нуқта орқали ўтувчи ва қуйидаги координата текислигига параллел текисликнинг тенгламасини ёзинг: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

24.8. Қуйидаги текисликларнинг қайсилари ўзаро параллел эканини аниқланг:
а) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$;
б) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
в) $-7x + y + 2z = 0$, $7x - y - 2z - 5 = 0$;
г) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 4 = 0$.

24.9. Қуйидаги текисликлар ўзаро перпендикуляр бўладими:
а) $y + z + 1 = 0$ ва $y - z + 1 = 0$;
б) $2x - 5y + z + 4 = 0$ ва $3x + 2y + 4z - 1 = 0$;
в) $7x - y + 9 = 0$ ва $y + 2z - 3 = 0$?

24.10. Тенгламалар билан берилган текисликларнинг орасидаги бурчакнинг косинусини топинг:
а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;
ә) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИНГ!

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ векторнинг узунлигини топинг.

A. 1. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

2. $A(-5;\ 6;\ -7)$ нуқтанинг Oyz текислигидаги ортогонал проекциясининг координаталарини топинг.

A. $(0;\ 6;\ -7)$. B. $(-5;\ 0;\ -7)$.
C. $(-5;\ 6;\ 0)$. D. $(-5;\ 0;\ 0)$.

3. $B(3;\ -8;\ -11)$ нуқтадан Oxy текислигигача бўлган масофани топинг.

A. -11. B. 11. C. 3. D. 8.

4. Oz ўқи билан $C(1;\ -5;\ 6)$ нуқтанинг орасидаги масофани топинг.

A. 5. B. $2\sqrt{13}$. C. 6. D. $\sqrt{26}$.

5. $E(-1;\ 0;\ 4)$ билан $F(2;\ -5;\ 1)$ нуқталарнинг орасидаги масофани топинг.

A. $5\sqrt{18}$. B. $\sqrt{51}$. C. $\sqrt{43}$. D. $\sqrt{59}$.

6. Агар $G(3;\ -2;\ 0)$ ва $H(0;\ -12;\ 5)$ бўлса, у ҳолда GH кесма ўртасининг координаталарини топинг.

A. $(\frac{3}{2};\ -5;\ 5)$. B. $(3;\ -7;\ -\frac{5}{2})$.
C. $(\frac{3}{2};\ -7;\ \frac{5}{2})$. D. $(-3;\ 7;\ -\frac{5}{2})$.

7. $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z + 1 = 0$ тенглама билан берилган сфера марказининг координаталарини топинг.

A. $(1;\ -1;\ 2)$. B. $(1;\ 2;\ -1)$.
C. $(0;\ -1;\ 2)$. D. $(0;\ 1;\ -2)$.

8. Агар $I(5;\ -1;\ 2)$ ва $J(3;\ -2;\ 0)$ бўлса $\overrightarrow{IJ}$ векторнинг координаталарини топинг.

A. $(2;\ -1;\ 2)$. B. $(-2;\ -1;\ 2)$.
C. $(2;\ -3;\ 2)$. D. $(-2;\ -1;\ -2)$.

9. Агар $K(0;\ -1;\ 2)$ ва $L(-3;\ 5;\ 0)$ бўлса, $\overrightarrow{KL}$ векторнинг узунлигини топинг.

A. $\sqrt{29}$. B. 7. C. 5. D. $2\sqrt{7}$.

10*. $5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ векторнинг узунлигини топинг:

A. 36. B. 6. C. $\sqrt{30}$. D. $2\sqrt{7}$.

11*. $\vec{a}(-5;\ 6;\ 1)$ ва $\vec{b}(0;\ -9;\ 7)$ векторларининг скаляр кўпайтмасини топинг.

A. -52. B. 47. C. -47. D. -56.

12*. Агар $\vec{a}(0;\ 1;\ -2)$ ва $\vec{b}(2;\ 0;\ 1)$ бўлса, у ҳолда k нинг қандай қийматида $2\vec{a} - k\vec{b}$ ва $\vec{a} + \vec{b}$ векторлар перпендикуляр бўлади?

A. 2. B. $3\frac{1}{2}$.

C. $-3\frac{1}{2}$. D. ечими йўқ.

13*. $M(2;\ 1;\ m)$ нуқта $3x - y + 2z - 1 = 0$ текисликда ётади. m ни топинг.

A. 3. B. -3. C. 2. D. -2.

14*. $P(3;\ -2;\ -4)$ нуқта орқали ўтувчи $4x - 5y + 2z + 11 = 0$ текислигига параллел бўлган текислик тенгламасини топинг.

A. $4x - 5y + 2z - 10 = 0$. B. $8x - 10y + 4z + 22 = 0$.

C. $4x - 5y + 2z + 14 = 0$. D. $4x - 5y + 2z - 14 = 0$.

15*. Фазода қандай фигура $y^2 + z^2 = 0$ тенглама билан берилади?

A. Oyz текислиги. B. Ox ўқи.

C. Oy ва Oz ўқлари. D. Oxy ва Oxz текисликлари.

10-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB ва CB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB ва DA_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва CB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва B_1D_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва AC тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва AD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC ва BD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BC_1 ва CA_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BC_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда CA_1 ва DC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BD_1 ва DC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва AC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BA_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD_1 ва CA_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда A_1C_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда A_1C_1 ва BD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

19. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда AB ва CD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
20. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда AC ва BD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
21. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда E ва F F нуқталар — мос равишда BC ва BD қирраларнинг ўртаси. AB ва EF тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакни топинг.
22. $ABCD$ мунтазам тетраэдрнинг E ва F нуқталари — мос равишда BD ва CD қирраларининг ўрталари. AD ва EF тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
23. $ABCD$ мунтазам тетраэдрнинг E, F, G нуқталар — мос равишда BC, BD, AD қирраларининг ўрталари. EFG бурчакни топинг.
24. $ABCD$ мунтазам тетраэдрнинг E, F, G нуқталар — мос равишда AB, AD, CD қирраларининг ўрталари. EFG бурчакни топинг.
25. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. D нуқта — BC қиррасининг ўртаси BB_1 ва AD тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакни топинг.
26. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. D нуқта — BC қиррасининг ўртаси. A_1C_1 ва AD тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакни топинг.
27. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. D нуқта — BC қиррасининг ўртаси. B_1C_1 ва AD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
28. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. D нуқта — BC қиррасининг ўртаси. CB_1 ва AD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
29. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC_1B бурчагининг косинусини топинг.
30. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. SB ва AC тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
31. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E, F нуқталари — мос равишда AB, BC қирраларининг ўрталари. SA ва EF тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
32. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — SC қиррасининг ўртаси. AD ва BE тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакни топинг.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABD_1 бурчагини топинг.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABE_1 бурчагининг тангенсини топинг.

35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC ва B_1F_1 тўғри чизиқларининг орасидаги бурчакни топинг.

36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC ва B_1D_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB ва CF_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ACD_1 бурчакни топинг.

39. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC_1D_1 бурчакни топинг.

40. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. CC_1 ва BE_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

41. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BF_1 ва CC_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

42. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва B_1E тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

43. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AC ва DF_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

44. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA ва BC тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

45. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. G нуқта — SD қиррасининг ўртаси. AG ва BC тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

46. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA ва BF тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

47. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SA ва CE тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

48. Октаэдрнинг айқаш қирралари орасидаги бурчакни топинг.

Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC тўғри чизиқ билан BCD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BD тўғри чизиқ билан BCD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда DA_1 тўғри чизиқ билан BCD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AD_1 тўғри чизиқ билан BCD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда A_1C_1 тўғри чизиқ билан BCD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BC_1 тўғри чизиқ билан BCD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB_1 тўғри чизиқ билан ABC_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC тўғри чизиқ билан ABC_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубида AB_1 тўғри чизиқ билан BDD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BC_1 тўғри чизиқ билан BDD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда CA_1 тўғри чизиқ билан AB_1D_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда BD_1 тўғри чизиқ билан ACB_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
13. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — AD қиррасининг ўртаси. AD тўғри чизиқ билан BCE текислик орасидаги бурчакни топинг.
14. $ABCD$ тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — AD қиррасининг ўртаси. AB тўғри чизиқ билан BCE текисли орасидаги бурчакни топинг.
15. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. SA тўғри чизиқ билан SBD текислик орасидаги бурчакни топинг.
16. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиқ билан SBD текислик орасидаги бурчакни топинг.
17. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. SH — баландлиги. SH

тўғри чизиқ билан SBC текислик орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.

18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BE_1 тўғри чизиқ билан ABC текислик орасидаги бурчакнинг тангенсини топинг.
19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BD_1 тўғри чизиқ билан ABC текислик орасидаги бурчакни топинг.
20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиқ билан BCC_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AF тўғри чизиқ билан BCC_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
22. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BF тўғри чизиқ билан BCC_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BE тўғри чизиқ билан BCC_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BD тўғри чизиқ билан BCC_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. FB_1 тўғри чизиқ билан BCC_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиқ билан BDD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 тўғри чизиқ билан BDD_1 текислиги орасидаги бурчакни топинг.
28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1-га тенг. FB тўғри чизиқ билан BDD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AF тўғри чизиқ билан BDD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.

30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиқ билан BEE_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AD тўғри чизиқ билан BEE_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 тўғри чизиқ билан BCE_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BF тўғри чизиқ билан BCE_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. CC_1 тўғри чизиқ билан BDE_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB тўғри чизиқ билан BDE_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.

Текисликлар орасидаги бурчак

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ABC_1 ва BCC_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда CDD_1 ва BCD_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB_1C_1 ва BCD_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.
4. $ABCD$ мунтазам тетраэдрда E нуқта — AD қиррасининг ўртаси. ACD ва BCE текисликлар орасидаги бурчакни топинг.
5. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — SC қиррасининг ўртаси. ABC ва BDE текисликлар орасидаги бурчакни топинг.
6. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг SAD ва SBE текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.
7. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг AFF_1 ва ACC_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.
8. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг ABB_1 ва AEE_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.
9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ACC_1 ва AEE_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.

10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг AFF_1 ва BCC_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.

11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг AFF_1 ва DEE_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.

12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг AFF_1 ва BDD_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.

13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва BDE_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ACC_1 ва BFF_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.

15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг ADD_1 ва BFF_1 текисликларининг орасидаги бурчакни топинг.

16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. ABC ва BCE_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BCE_1 ва BCC_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан AB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан CB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан A_1D_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан C_1D_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан DD_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан A_1C_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубида B нуқтасида DA_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан DC_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

10. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

11. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

12. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан A_1C_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

13. $ABCD$ мунтазам тетраэдрнинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CD тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

14. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. S нуқтадан BC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

15. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан SA тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

16. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан SC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

17. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

18. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан SD тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

19. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. S нуқтадан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

20. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. S нуқтадан AB тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

21. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан AF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

22. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. B нуқтадан EF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

23. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

24. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CB_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

25. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг B нуқтадан AF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

26. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан FE тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

27. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DE тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
28. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан EE_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
29. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан E_1F_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
30. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан D_1E_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
31. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AE тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
32. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CE тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
33. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AC тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
34. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
35. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AD тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
36. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CF тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
37. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AE_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.
38. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CE_1 тўғри чизиғигача бўлган масофани топинг.

Нуқтадан текисликкача бўлган масофа

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан ACC_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан AB_1C_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда B нуқтадан CDA_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
4. $ABCD$ мунтазам тетраэдрнинг E нуқтаси — CD қиррасининг ўртаси. D нуқтадан ABE текисликкача бўлган масофани топинг.
5. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ACC_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
6. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. S нуқтадан ABC текисликкача бўлган масофани топинг.
7. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан SAC текисликкача бўлган масофани топинг.
8. $SABCD$ мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг барча қирралари 1 га тенг. E нуқта — SB қиррасининг ўртаси. B нуқтадан ACE текисликкача бўлган масофани топинг.
9. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DEE_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
10. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан EFF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
11. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CDD_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AFF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CFF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ADD_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан ACC_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан DFF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан AED_1 текисликкача бўлган масофани топинг.
18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. B нуқтадан CEF_1 текисликкача бўлган масофани топинг.

Тўғри чизиқлар орасидаги масофа

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва CD_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва DC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва A_1C_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва B_1D_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва C_1D_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва CB_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда AB ва DA_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бирлик кубда BA_1 ва DC_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
9. $SABCDEF$ мунтазам олтибурчакли пирамиданинг асосининг қирралари 1 га, ён қирралари 2 га тенг. BC ва EF тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
10. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. AB ва B_1C_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
11. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам учбурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва A_1C_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
12. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва C_1D_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.
13. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва D_1E_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

14. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва E_1F_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

15. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва A_1F_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

16. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва A_1B_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

17. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC ва EF тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

18. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва DD_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

19. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BB_1 ва EE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

20. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BA_1 ва DE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

21. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ мунтазам олтибурчакли призманинг барча қирралари 1 га тенг. BC_1 ва FE_1 тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

ФАНГА ОИД ТУШУНЧАЛАР КЎРСАТКИЧИ

ЖАВОБЛАР

7—9 СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

2. а) 3; б) 6; б) 10; в)* $\frac{n(n-1)}{2}$. **3.** 8,5 см. **4.** $2n$. **5.** 126°. **6.** 45°. **7.** 120° ва 60°. **8.** 120°. **9.** а) 36°; б) 30°. **10.** а) 120°; б) 60°; б) 300°. **11.** 75°. **14.** 12 см, 18 см ва 24 см. **16.** а) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; ә) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **18.** 100°. **19.** 30°. **20.** 69°. **21.** 7,5 см. **22.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **23.** 7,5 см ва 12 см. **25.** 20. **28.** а) 2; б) 3; в) 4; в) $n-2$. **29.** а) 2; б) 5; б) 9. **30.** а) 360°; б) 540°; в) 720°; г) 900°; д) 1080°. **31.** 7. **32.** а) 90°; б) 72°; в) 60°; г) 45°. **33.** 60°, 60°, 120°, 120°. **34.** а) 40°, 40°, 140°, 140°; б) 50°, 50°, 130°, 130°; б) 80°, 80°, 100°, 100°. **35.** а) 11 см ва 13 см; ә) 9 см ва 15 см; б) 8 см ва 16 см. **36.** 60 см ва 80 см. **37.** 25° ва 65°. **38.** 10 см. **39.** 13 см. **42.** 70° ва 110°. **43.** 21 см. **44.** 2 см ва 5 см. **45.** $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; $\operatorname{tg} A = 1\frac{1}{3}$; $\operatorname{ctg} A = 0{,}75$. **46.** 1. **47.** $\sqrt{3}$. **48.** а) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; ә) 0,8. **49.** а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; ә) 2,4. **50.** а) 2; ә) 0,5. **51.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ә) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **52.** а) $-\frac{1}{2}$; ә) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **53.** а) 90°-дан кичик; б) 90°га тенг; б) 90°дан катта. **54.** $4\sqrt{7}$. **55.** $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **56.** $\cos A = \frac{7}{8}$, $\cos B = \frac{11}{16}$, $\cos C = -\frac{1}{4}$. **57.** 48. **58.** $\frac{a^2}{2}$. **59.** 0,5. **60.** а) 40 см²; б) $40\sqrt{2}$ см²; в) $40\sqrt{3}$ см². **61.** 8 см ва 4 см. **62.** 12. **63.** 6. **64.** 6 см². **65.** 6. **66.** 10 см. **67.** 20 см. **68.** 14 см. **69.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **70.** 12. **71.** а) 1; б) 1; в) 2; г) 2. **72.** а) $\overline{AC}$; б) $\overline{AD}$; в) $\overline{AB}$. **73.** а) 5; б) 3; в) 4; г) 6. **74.** а) 10; б) 14; в) 10; г) 5. **75.** а) 1; б) 1; в) 0. **76.** а) 2,5; б) 1,5. **77.** а) 120°; б) 120°; в) 120°; г) 60°; д) 90°; е) 150°. **78.** а) 0; б) 64; в) 0; г) 36. **79.** а) (2; 3); б) (3; −1); в) (1; 1). **80.** $B(6; 8)$. **81.** (5; 4). **82.** а) $\sqrt{5}$; б) 5. **83.** а) 2; б) 3. **84.** Нуқталар координаталар бошидан бир хил масофада ётган. **85.** (−5; 2), 4; б) (0; 3), 3. **86.** а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $(x+2)^2 + (x-1)^2 = 9$. **87.** $x^2 + y^2 = 18$. **88.** а) 4, (4; 0); б) $\sqrt{6}$, (−1; 3). **89.** −4. **90.** а), б) 90°. **91.** $x - y - 1 = 0$. **92.** $x - 2y + 7 = 0$, $\vec{n}(1; -2)$. **93.** а) 1, 3; б) 2, 4. **94.** а) (−1; −2); б) (7; 3). **95.** (−7; 14). **96.** 0. **97.** 0,96.

I боб. СТЕРЕОМЕТРИЯНИНГ БОШЛАНҒИЧ ТУШУНЧАЛАРИ

1-§

3. AB, AC, BC. **4.** ABC, ABD, ACD, BCD. **5.** а) A; б) D. **6.** а) AB; б) BC; в) AC. **7.** а) 3; б) 6; в) 10. **8.** 4.

2-§

1. Чексиз кўп. 2. Чексиз кўп. 3. Агар уч нуқта бир тўғри чизиқда ётса, унда шу нуқталар орқали чексиз кўп текисликлар ўтказиш мумкин; агар уч нуқта бир тўғри чизиқда ётмаса, унда шу нуқталар орқали фақат биргина текислик ўтказишга бўлади. 4. Йўқ, бундай холда нуқталар бир текисликка тегишли бўлар эди. 5. а), в) йўқ. 6. Йўқ. 7. b, g, p. 8. Йўқ. 9. Йўқ. 10. Тўғри чизиқ. 11. 4.

3-§

1. а) Т = 4, Қ = 6, Ж = 4; б) Т = 8, Қ = 12, Ж = 6; в) Т = 8, Қ = 12, Ж = 6. **2.** AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. **3.** ABC, ABB_1, CDD_1, $A_1B_1C_1$. **8.** а) 0; б) 4; б) 4. **9.** б), г), д). **12.** ABC, BCD_1, ABB_1, BDD_1, CDD_1, ACC_1, $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, ABC_1, CDA_1.

4-§

1. а) Т = $2n$, Қ = $3n$, Ж = $n + 2$; б) Т = $n + 1$, Қ = $2n$, Ж = $n + 1$. **4.** а) Йўқ; б) ҳа. **5.** а) Ўнбурчак; б) бешбурчак. **6.** а) бешбурчакли; б), в) олтибурчакли. **7.** а) Йўқ; б) ҳа. **8.** а) 16 бурчак; б) 14 бурчак. **9.** а), б) 9 бурчакли; в) 7 бурчакли. **10.** ABC ва SAB, ABC ва SBC, ABC ва SCD, ABC ва SAD, SAB ва SBC, SAB ва SAD, SAB ва SCD, SBC ва SCD, SBC ва SAD, SAD ва SCD. **11.** а) Тўртбурчакли;

б), в), г) учбурчакли. **12.** а) – Тўртбурчакли; б) – учбурчакли пирамида. **13.** Бешбурчакли пирамида. **17.** а) 0; б) $n(n - 3)$.

Ўзингизни текширинг!

Савол номери	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Тўғри жавоби	D)	D)	B)	B)	C)	D)	D)	B)	A)	B)	D)	C)	C)	C)	D)

5-§

1. Йўқ. **2.** Йўқ. **3.** а) CD, A_1B_1, C_1D_1; б) BB_1, CC_1, DD_1. **4.** Йўқ. **5.** AB ва A_1B_1, AC ва A_1C_1, BC ва B_1C_1, AA_1 ва BB_1, AA_1 ва CC_1, BB_1 ва CC_1. **6.** Йўқ. **7.** Йўқ. **8.** а) AB ва CD, AD ва BC; б) AB ва DE, BC ва EF, AF ва CD. **9.** а), б) Йўқ. **10.** а), б) Йўқ. **12.** а) BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1; б) DE, D_1E_1.

6-§

1. Йўқ. **2.** Чексиз кўп. **3.** а) CC_1, DD_1, A_1D_1, B_1C_1; б) CC_1, A_1C_1, B_1C_1. **4.** а) BC, CD; б) BC, CD, DE, EF. **5.** а) BC, CD, DE, EF, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1; б) CC_1, DD_1, EE_1, FF_1, B_1C_1, C_1D_1, E_1F_1, F_1A_1. **6.** 3. **7.** Йўқ. **8.** Айқаш бўлади. **9.** Йўқ. **10.** 8. **11.** Айқаш бўлади. **12.** Айқаш бўлади. **13.** Йўқ. **14.** Йўқ.

7-§

1. A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1. **2.** а) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$; ә) BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1, EFF_1E_1. **3.** Йўқ. **4.** Ха. **5.** Йўқ. **6.** AB ва SCD, BC ва SAD, CD ва SAB, AD ва SBC. **7.** AB ва SDE, BC ва SEF, CD ва SAF, DE ва SAB, EF ва SBC, AF ва SCD. **9.** AB, BC, DE ва EF тўғри чизиқлар текислик билан кесишади, CD тўғри чизиғи текисликка параллел булади.

8-§

1. ABC ва $A_1B_1C_1$, BCC_1 ва ADD_1, CDD_1 ва ABB_1. **2.** ABC ва $A_1B_1C_1$, ABB_1 ва DEE_1, BCC_1 ва EFF_1, CDD_1 ва AFF_1. **3.** Йўқ. **4.** Йўқ. **7.** Йўқ. **8.** Йўқ. **9.** BD_1. **10.** BO_1.

Ўзингизни текширинг!

Савол номери	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Тўғри жавоби	C)	C)	A)	A)	C)	D)	B)	A)	C)	D)	C)	D)	A)	A)	B)

II боб. ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ВА ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШУВИ

9-§

1. Чексиз кўп. **2.** Чексиз кўп. **3.** Йўқ. **4.** AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AD, BC, A_1D_1, B_1C_1. **5.** AB, BC, AC, A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1. **6.** а), б) 90°; б) 60°. **7.** а) 90°; б) 60°. **8.** а) 60°; б) 90°. **9.** 30°. **10.** 60°. **11.** а), б) 45°; в), г), д) 60°; е) 30°; ё) 90°. **12.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

10-§

1. а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{2}$. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{3}$; е) 1; ё) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) $\frac{3}{2}$; и) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; й) 1. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

11-§

1. Йўқ. **2.** Перпендикуляр. **3.** а) Йўқ; б) ҳа. **4.** Ҳа. **6.** Йўқ. **7.** Тўғри чизиқлар перпендикуляр. **8.** Тўғрибурчакли.

12-§

1. $5\sqrt{2}$. **2.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\sqrt{3}$; е) $\frac{3}{2}$; ё) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** а) 2;

б) $\sqrt{5}$. **6.** а) 1; б) $\sqrt{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** а) 3; б) $\sqrt{6}$; в) 3; г) $\sqrt{6}$; д) $2\sqrt{3}$. **9.** а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}$. **10.** 5. **12.** $\sqrt{3}$.

13-§

1. а), б) 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}$; г) 1; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{1}{2}$; ё) $\frac{3}{2}$; ж) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** а) 2; б) 2; в) 1; г) 1. **5.** а), б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1.

14-§

1. а) 1; б) $\sqrt{2}$; в), г), д), е) 1; ё) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) 1. **2.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1. **3.** а), б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) 2. **4.** а) $\sqrt{5}$; б), в) $2\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б), в), г) $\sqrt{3}$; д) 1. **8.** а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{2}$; в), г), д) 2.

15-§

1. 12 см. **2.** 12 см. **3.** 2 см. **4.** 5 м. **5.** 10 м. **6.** 9 см. **7.** $A'B' = 4$, $B'C' = 8$. **14.** **Берилган нуқталарни туташтирувчи кесманинг ўртасидан ўтувчи ва шу кесмага перпендикуляр бўлган текислик.**

16-§

1. а), б) 45°; в) 90°. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** 45°. **4.** а) 45°; б) 60°. **5.** 60°. **6.** а) 45°; б) 30°; в) 45°. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **8.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **10.** а) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17-§

1. 90°. **3.** 45°. **4.** 60°. **5.** 120°. **6.** Йўқ. **7.** Чексиз кўп. **8.** а), б) $\sqrt{2}$. **9.** $\frac{1}{3}$. **10.** а) 60°; б) 90°; в) 30°; г) 60°; д) 45°; е) 60°. **12.** $\sqrt{2}$. **13.** 2. **14.** 1,2; ≈ 50°. **15.** $\frac{1}{3}$.

Ўзингизни текширинг!

Савол номери	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Тўғри жавоби	D)	B)	D)	C)	C)	B)	C)	A)	D)	C)	A)	B)	A)	A)	A)

III боб. ФАЗОДА ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ ВА ВЕКТОРЛАР

18-§

1. $\overline{DC}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{D_1C_1}$. **2.** $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$. **3.** а) $\overline{A_1B_1}$, $\overline{ED}$, $\overline{E_1D_1}$; б) $\overline{A_1C_1}$, $\overline{FD}$, $\overline{F_1D_1}$; в) $\overline{A_1D_1}$; г) $\overline{ED_1}$; д) $\overline{FD_1}$. **4.** а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}$. **5.** а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{2}$; д) 2; е) $\sqrt{5}$. **6.** а) $\overline{AB_1}$; б) $\overline{AC}$; в) $\overline{AC_1}$; г) $\overline{AA_1}$; д) $\overline{AC_1}$. **7.** а) 6; б) 8; в) 12. **8.** а) $\overline{AC}$; б) $\overline{FB}$; в) $\overline{AC_1}$; г) $\overline{AF_1}$. **9.** 2. **10.** а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}$; г) 1; д) $\sqrt{3}$. **11.** а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{2}$. **12.** Агар векторлар бир хил йўналган бўлса. **13.** а) $\overline{A_1B}$; б) $\overline{A_1C}$; в) $\overline{DB}$; г) $\overline{AC_1}$. **14.** а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}$.

19-§

1. $\overline{BA}$, $\overline{DC}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{D_1C_1}$, $\overline{CD}$, $\overline{B_1A_1}$, $\overline{C_1D_1}$. **2.** $\overline{A_1A}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{B_1B}$, $\overline{C_1C}$. **3.** $\overline{B_1A}$, $\overline{ED_1}$, $\overline{D_1E}$. **4.** Ха. **5.** Йўқ. **6.** а) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{A_1C_1}$; б) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AA_1}$. **7.** а) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{B_1C_1}$; б) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AA_1}$. **8.** а) $\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AA_1}$; б) $\overline{BD_1} = -\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$. **9.** а) $\overline{AD_1} = 2\overline{AB} + 2\overline{AF} + \overline{AA_1}$; б) $\overline{AC_1} = 2\overline{AB} + \overline{AF} + \overline{AA_1}$.

20-§

1. а) Плюс; б) минус. **2.** а), б) 90°; б) 60°. **3.** а) 90°; б) 120°. **4.** а) 60°; б) 60°. **5.** а) 60°; б) 120°. **6.** а), б) 45°; в) 60°; г) 120°; д) 30°; е) 60°; ё) 90°. **7.** а), б) 0; в) 1. **8.** а) 0; б) $\frac{1}{2}$. **9.** а) $\frac{1}{2}$; б) 0. **10.** а) 2; б) -1. **11.** а), б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; е) $1\frac{1}{2}$; ё) 0. **12.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $-\frac{1}{4}$; е) 0. **14.** 1.

21-§

2. а) (1; 3; 0) ва (5; -6; 0); б) (1; 0; 4) ва (5; 0; 2); в) (0; 3; 4) ва (0; -6; 2). **3.** $A(0; 1; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(0; 1; 1)$, $B_1(1; 1; 1)$, $C_1(1; 0; 1)$, $D_1(0; 0; 1)$. **4.** а) (0; 1; 2); б) (3; 1; 1). **5.** $A(-1; 1; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; -1; 0)$, $D(-1; -1; 0)$, $A_1(-1; 1; 2)$, $B_1(1; 1; 2)$, $C_1(1; -1; 2)$, $D_1(-1; -1; 2)$. **6.** $A(0; 2; 0)$, $B(2; 2; 0)$, $C(2; 0; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $A_1(1; 2; 1)$, $B_1(2; 2; 1)$, $C_1(2; 0; 1)$, $D_1(1; 0; 1)$, $A_2(0; 2; 2)$, $B_2(1; 2; 2)$, $C_2(1; 0; 2)$, $D_2(0; 0; 2)$. **7.** $A(0; \frac{1}{2}; 0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$, $C(0; -\frac{1}{2}; 0)$, $A_1(0; \frac{1}{2}; 1)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1)$, $C_1(0; -\frac{1}{2}; 1)$. **8.** $A(0; \sqrt{3}; 0)$, $B(1; \sqrt{3}; 0)$, $C(1,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $D(1; 0; 0)$, $E(0; 0; 0)$, $F(-0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $A_1(0; \sqrt{3}; 1)$, $B_1(1; \sqrt{3}; 1)$, $C_1(1,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$, $D_1(1; 0; 1)$, $E_1(0; 0; 1)$, $F_1(-0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$. **9.** $A(-0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $B(0,5; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $D(0,5; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $E(-0,5; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $F(-1; 0; 0)$, $S(0; 0; \sqrt{3})$. **10.** а) Oyz текислиги; б) Oxz текислиги; в) Oxy текислиги; г) Oz ўқи; д) Oy ўқи; е) Ox ўқи; ё) координаталар боши. **11.** а) 3; б) 2; в) 1. **12.** $C(0; -1; 0)$, $D(-1; 0; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(0; 0; -1)$.

22-§

1. а) 5; б) 3. **2.** A. **3.** а) 3; б) 5. **4.** а) $C(2; -5; 0)$, $R = 3$; б) $C(0; 6; -1)$, $R = 2$. **5.** а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$. **6.** Тенг томонли. **7.** а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. **8.** а) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$; б) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 4$; в) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$.

23-§

1. а)(-2; 6; 1); б) (1; 0; 2); в) (0; -3; 1); г) (5; 0; -4). **2.** а) (-7; 5; -10); б) (5; -8; -4); в) (8; 1; 9). **3.** $(-a; -b; -c)$. **4.** $x_2 = tx_1$, $y_2 = ty_1$, $z_2 = tz_1$. **5.** а) (4; 3; 0); б) (0; 3; 2); в) (4; 0; 2); г) (4; 3; 2); д) (4; 0; 0); е) (4; -3; 0); ё) (4; 0; 2); ж) (0; -3; 2); з) (4; -3; 2). **6.** а) (1; -2; 7); б) (1; 2; -1). **7.** (3; -4; -5). **8.** а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{5}$. **9.** 8. **10.** а) (1; 0; 23); б) (7; -11; 7). **11.** а) векторларнинг координатаси $(0; 0; z)$; б) векторларнинг координатаси $(x; 0; 0)$. **12.** $(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -\sqrt{3})$. **13.** а) 5; б) $\sqrt{13}$; в) $2\sqrt{5}$; г) $\sqrt{29}$; д) 4; е) 5; ё) $2\sqrt{5}$; ж) $\sqrt{13}$; з) $\sqrt{29}$. **14.** $\frac{1}{3}$. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **16.** 24.

24-§*

1. а) (5; -1; 0); б) (3; 0; 18); в) (15; 1; -8), г) (1; -3; 15). **2.** а) $z = 0$; б) $y = 0$; в) $x = 0$. **3.** A ва C. **4.** (1; 0; 0), $(0; \frac{1}{2}; 0)$, $(0; 0; -\frac{1}{3})$. **5.** а) $-5y + 2z + 8 = 0$; ә) $6x - y + 3z + 5 = 0$; б) $-4x - 2y - z + 1 = 0$; в) $-3x - 8y + 13 = 0$. **6.** $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$. **7.** а) $z = 4$; б) $y = -2$; в) $x = 1$. **8.** а), б), в). **9.** а), б) Ҳа; в) Йўқ. **10.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{16}{21}$.

Ўзингизни текширинг!

Савол номери	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Тўғри жавоби	D)	C)	B)	D)	C)	C)	C)	D)	B)	C)	C)	A)	D)	D)	B)

10-СИНФ ГЕОМЕТРИЯ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ

Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

1. 90°. 2. 90°. 3. 60°. 4. 60°. 5. 60°. 6. 60°. 7. 90°. 8. 90°. 9. 90°. 10. 90°. 11. 90°. 12. 90°. 13. 90°. 14. 90°. 15. 90°. 16. 90°. 17. 90°. 18. 90°. 19. 90°. 20. 90°. 21. 90°. 22. 90°. 23. 90°. 24. 90°. 25. 90°. 26. 30°. 27. 90°. 28. 90°. 29. 0,75. 30. 90°. 31. 45°. 32. 30°. 33. 90°. 34. 2. 35. 60°. 36. 60°. 37. 0,5. 38. 90°. 39. 90°. 40. 2. 41. 60°. 42. 90°. 43. 30°. 44. 60°. 45. 30°. 46. 90°. 47. 90°. 48. 60°.

Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

1. 30°. 2. 30°. 3. 30°. 4. 30°. 5. 30°. 6. 30°. 7. 30°. 8. 30°. 9. 30°. 10. 30°. 11. 90°. 12. 90°. 13. 90°. 14. 30°. 15. 45°. 16. 45°. 17. 0,5. 18. 0,5. 19. 30°. 20. 60°. 21. 60°. 22. 90°. 23. 60°. 24. 30°. 25. 60°. 26. 90°. 27. 45°. 28. 60°. 29. 30°. 30. 60°. 31. 60°. 32. 60°. 33. 30°. 34. 45°. 35. 45°.

Икки текислик орасидаги бурчак

1. 90°. 2. 90°. 3. 90°. 4. 90°. 5. 45°. 6. 60°. 7. 90°. 8. 90°. 9. 60°. 10. 60°. 11. 60°. 12. 30°. 13. 45°. 14. 60°. 15. 90°. 16. 30°. 17. 60°.

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4. $\sqrt{2}$. 5. $\sqrt{2}$. 6. $\sqrt{2}$. 7. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 8. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 9. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 10. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 11. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 12. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. 13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 16. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 17. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 18. 1. 19. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 20. $\frac{\sqrt{15}}{2}$. 21. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 22. $\sqrt{3}$. 23. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 24. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 25. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 26. $\sqrt{3}$. 27. $\sqrt{3}$. 28. 2. 29. 2. 30. 2. 31. 1. 32. 1. 33. 0,5. 34. 1,5. 35. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 36. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 37. 1. 38. 1.

Нуқтадан текисликкача бўлган масофа

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4. 0,5. 5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 8. 0,5. 9. $\sqrt{3}$. 10. $\sqrt{3}$. 11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 12. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 15. 0,5. 16. 1,5. 17. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 18. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тўғри чизиқлар орасидаги масофа

1. 1. 2. 1. 3. 1. 4. 1. 5. $\sqrt{2}$. 6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 8. 1. 9. $\sqrt{3}$. 10. 1. 11. 1. 12. 1. 13. 1. 14. 2. 15. 1. 16. 1. 17. $\sqrt{3}$. 18. $\sqrt{3}$. 19. 2. 20. $\sqrt{3}$. 21. $\sqrt{3}$.

МУНДАРИЖА

Учебное издание

Смирнов Владимир Алексеевич
Туяков Есенкельды Алыбаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 10 классов общественно-гуманитарного направления
общеобразовательных школ

(*на узбекском языке*)

Муҳаррир *М. Зайниддинова*
Бадиий муҳаррир *Л. Уралбаева*
Техник муҳаррир *Л. Садикова*
Компьютерда саҳифалаган *Б. Нокер*

Нашриётга 2003 йил 7-июлда Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан
министрлигининг № 0000001 рақамли давлат лицензияси берилган

ИБ № 6070

Нашрга 26.08.19 рухсат этилди. Ҳажми 70×100 $^1/_{16}$. Офсет қоғози. Ҳарф тури «SchoolBook Kza». Офсет нашри. Шартли босма табоғи 11,61 + 0,32 форзац. Шартли бўёқ тамғаси 24,51. Нашр ҳисоб табоғи 7,10 + 0,54 форзац. Адади 2 500 дона. Буюртма №

«Мектеп» нашриёти, 050009, Алмати шаҳри, Абай шоҳ кўчаси, 143-уй
Факс: 8(727) 394-37-58, 394-42-30
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz