Physikalisches Grundpraktikum Teil I (Mechanik und Thermodynamik) Versuch 5 Lufballon mit CO_2

Wafaa Al Nachawti, Finn Wagner

7.03.2022

1 Versuchsziel und Versuchsmethode

In diesem Versuch wird die Dichte von CO_2 über die Fallzeit eines mit CO_2 gefüllten Luftballons bestimmt. Der Fall des Luftballons wird als Bewegung eines kugelförmigen Körpers in einer Flüssigkeit (Luft oder Luft als Quasi-Flüssigkeit) mit laminarer Strömung approximiert.

2 Grundlagen

TODO: Co2 aus Wasser lösen, Druck Gleichgewicht etc.

3 Formeln

Auf jeden Körper wirkt im Schwerefeld der Erde eine Zentralkraft Richtung Erdmittelpunkt, proportional zur Masse des Körpers.

$$F_G = m \cdot g \tag{1}$$

Die Masse eines Körpers können wir auch über seine Dichte und sein Volumen ausdrücken mit der Beziehung:

$$m = \rho_K \cdot V \cdot g \tag{2}$$

Weiterhin wirkt auf Körper mit echter Ausdehnung (keine Punktmasse) in Flüssigkeiten/Gasen wie Luft eine Auftriebskraft, die durch Verdrengung des Mediums entsteht. Sie ist abhängig vom verdrengten Volumen und der Dichte des Mediums (Gases ρ_G) in dem sich der Körper befindet.

$$F_A = \rho_G \cdot V \cdot g \tag{3}$$

Als dritte Kraft wirkt bei unserem Versuch eine Reibungskraft gegen den Fall des Luftballons an. Die Stokes'sche Reibung ist proportional zur Geschwindigkeit v, dem Radius r des Luftballons, so wie der Viskosität η der Luft.

$$F_R = 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v \tag{4}$$

TODO: Wir setzen hier Stokes'sche Reibung an, da wir uns vollständig im Bereich laminarer Strömung aufgrund sehr kleiner Geschwindigkeiten befinden Der Luftballon wird als von der Schwerkraft nach unten beschleunigt, vom Auftrieb und von der Reibungskraft gebremst. Der Luftballon beschleunigt bis zu seiner maximalen Fallgeschwindigkeit (TODO:LINK Wikipedia Fall mit Reibung) und fällt ab dann mit einer konstanten Geschwindigkeit weiter, wird also nicht mehr weiter beschleunigt. (TODO: Methoden Skript Seite 109?), da auf den Ballon keine resultierende Kraft mehr wirkt5. Da für unsere Gegebenheiten (TODO: machen in Fehlerrechnung) die Zeit in der der Luftballon beschleunigt im Vergleich zur gesamten Fallzeit sehr gering ist, setzen wir für den gesamten Fall das Kräftegleichgewicht an:

$$F_G = F_A + F_R \tag{5}$$

Wir approximieren also, das der Luftballon auf der gesamten Strecke h mit der selben Geschwindigkeit v fällt. Er braucht dazu die Zeit t_{Fall}

$$v = \frac{h}{t_{Fall}} \tag{6}$$

Die Endgeschwindigkeit des Ballons lässt sich aus dem Kräftegleichgewicht5 durch einsetzen der Stokes'schen Reibung ausdrücken:

$$\begin{aligned} F_G = F_A + F_R \Rightarrow F_R = F_G - F_A \\ \Rightarrow 6\pi \cdot r \cdot \eta \cdot v = F_G - F_A \\ \Rightarrow v = \frac{F_G - F_A}{6\pi \cdot r \cdot \eta} \end{aligned} \tag{7}$$

Wir setzen nun Gleichung6 und Gleichung7 gleich.

$$\frac{h}{t_{Fall}} = \frac{F_G - F_A}{6\pi \cdot r \cdot \eta} \tag{8}$$

Im Experiment werden zwei Luftballons, einer gefüllt mit CO_2 und einer gefüllt mit Luft, aus der selben Höhe h fallengelassen. Die Masse m eines solchen gefüllten Luftballons setzt sich aus der Masses m_h des Ballons (der Ballonhülle aus Gummi), sowie dem in ihm enthaltenen Gas2 zusammen Wir setzen diese Masse in die Formel für die Schwerkraft1 ein:

$$F_G = m \cdot g = m_H \cdot g + \rho \cdot V \cdot g = (m_H + \rho \cdot V) \cdot g \tag{9}$$

Die Schwerkraft9, sowie die Auftriebskraft3 setzen wir in die Gleichung8 ein:

$$\frac{h}{t_{Fall}} = \frac{(m_H + \rho_{Füllung} \cdot V) \cdot g - \rho_{Medium} \cdot V \cdot g}{6\pi \cdot r \cdot \eta_{Medium}} \tag{10}$$

Zu unterscheiden sind die beiden Dichten. $\rho_{Füllung}$ ist die Dichte des Gases im Luftballon, rho_{Medium} die Dichte des Gases in der Atmosphäre. Für den Luftballon gefüllt mit Luft wird die Formel10 zu:

$$\frac{h}{t_{Luft}} = \frac{(m_H + \rho_{Luft} \cdot V) \cdot g - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g}{6\pi \cdot r \cdot \eta_{Luft}} \tag{11}$$

Und für den Luftballon gefüllt mit CO_2 wird die Formel10 zu:

$$\frac{h}{t_{\mathrm{CO}_2}} = \frac{(m_H + \rho_{\mathrm{CO}_2} \cdot V) \cdot g - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g}{6\pi \cdot r \cdot \eta_{Luft}} \tag{12}$$

Wir teilen nun die Formel für den Fall in $\mathrm{CO}_2$12 durch die für den Fall in Luft11 und vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{h}{t_{\mathrm{CO}_2}}}{\frac{h}{t_{Luft}}} = \frac{t_{Luft}}{t_{\mathrm{CO}_2}} = \frac{\frac{(m_H+\rho_{\mathrm{CO}_2} \cdot V)\cdot g - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g}{6\pi \cdot r \cdot \eta_{Luft}}}{\frac{(m_H+\rho_{Luft} \cdot V)\cdot g - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g}{6\pi \cdot r \cdot \eta_{Luft}}} = \\ \frac{(m_H + \rho_{\mathrm{CO}_2} \cdot V) \cdot g - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g}{(m_H + \rho_{Luft} \cdot V) \cdot g - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g} = \frac{(m_H + \rho_{\mathrm{CO}_2} \cdot V) \cdot g - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g}{m_H \cdot g + (\rho_{Luft} \cdot V \cdot g - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g)} = \\ \frac{(m_H + \rho_{\mathrm{CO}_2} \cdot V) - \rho_{Luft} \cdot V}{m_H} = \\ \frac{m_H + V \cdot (\rho_{\mathrm{CO}_2} - \rho_{Luft})}{m_H} = 1 + \frac{V}{m_H} (\rho_{\mathrm{CO}_2} - \rho_{Luft}) \end{aligned} \tag{13}$$

Gleichung13 formen wir im letzen Schritt noch nach ρ_{CO_2} auf:

$$\rho_{\mathrm{CO}_2} = \rho_{Luft} + \left(\frac{t_{Luft}}{t_{\mathrm{CO}_2}} - 1 \right) \frac{m_H}{V} \tag{14}$$

TODO: Luftballon Kugel approximieren. Ein kugelförmiger Körper mit Dichte ρ_K in einer Flüssigkeit mit Dichte ρ_{Fl} fällt in eben jener Flüssigkeit nach unten

4 Versuchsaufbau

4.1 Material

- 2 Luftballons

- 1 Flasche Mineralwasser Classic; Wasser mit viel Kohlensäure
- Smartphone zum Aufnehmen eines Videos
- Maßband mit Milimetergenauigkeit, am besten ein weiches Rollbandmaß
- 1 Stoppuhr oder Computerprogramm zum auswerten der Zeiten im Video

TODO: SCHEMATIK EINFÜGEN PFEILLÄNGEN ÄNDERN TODO: Schematik Ballonumfänge einfügen.

5 Durchführung

5.1 Ballon mit CO_2 aufpumpen

1. Stülpen Sie den Luftballon (d.h. das Mundstück des Luftballons) auf den Hals der Mineralwasserflasche (Abb TODO: Bild hinzufügen)
2. Schütteln Sie die Wasserflasche wiederholt, um die im Wasser gelöste Kohlensäure in CO_2-Gas umzuwandeln und den Luftballon dadurch auf zublasen. TODO: Achten Sie darauf das kein Wasser in den Ballon kommt, um die Masse des Ballons nicht zu verändern.
3. Der Ballon muss am Ende nicht vollständig aufgeblasen sein; etwa 15 cm sind bereits ausreichend.
4. Halten sie den Ballon zu und nehmen sie ihn vorsichtig von der Flasche, sodass kein CO_2 eintweicht und knoten Sie ihn zu.

5.2 Zweiten Ballon füllen

5. Bestimmen Sie die Umfänge des mit CO_2 gefüllten Ballons mithilfe des Maßbands. Messen Sie den Umfang vom Mundstück bis zum obersten Punkt (Umfang a), sowie die „Tallie“ (Umfang b) (TODO:ref Bild)
6. Pusten Sie einen zweiten Ballon (mit Luft) auf. Lassen sie in kleinen Schritten Luft aus dem Ballon und messen Sie wiederholt die Umfänge, bis die beiden Luftballons ein identisches Volumen haben.
7. Knoten Sie den Luftballon zu. TODO: Gekennzeichnet?

5.3 Fallversuch

8. Suchen Sie sich einen Ort als Referenzpunkt in gut 2 Metern Höhe (z.B. Oberkante eines Schranks, Türrahmen) und messen Sie den Abstand h zum Boden.
9. Starten Sie ein Video auf ihrem Handy mit Stativ oder lassen Sie sich von einer zweiten Person helfen. Nehmen Sie das Video von etwas weiter weg auf und achten Sie darauf das der Start, sowie das Aufkommen auf dem Boden im Video gut zu sehen sind.
10. Halten Sie die beiden Luftballons in Höhe h und lassen Sie sie gleichzeitig fallen. TODO: Ref Video
11. Wiederholen Sie den Fallversuch 3 mal, nehmen Sie also 2 weitere Videos auf.

TODO: Bilder, 1.Ballon auf Flasche, 2.Ballon auf Flasche geschüttelt, 3. Fallversuch

TODO: Video Auswertung mit wichitg kommentar aus Skript

TODO: Wiegen sie den Luftballon. TODO: Warum Fallhöhe messen? Für andere Berechnung für t_{Venus}?

TODO: (Wasser in Ballon?)

Fallen gelassen von Unterkante des Türrahmens

6 Auswertung

Umfänge mitteln zu von $a_1 = 0.475\,\mathrm{m} unda_2 = 0.477\,\mathrm{m}$ $a = 0.476\,\mathrm{m}$ und $b = 0.45\,\mathrm{m}$ Umfänge mitteln $\frac{0.476\,\mathrm{m}+0.45\,\mathrm{m}}{2} = 0.463\,\mathrm{m}$

Volumen ausrechnen:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{U}{2\pi}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{U^3}{8\pi^3} = \frac{1}{6}\frac{U^3}{\pi^2} \tag{15}$$

Eingesetzt und ausgerechnet: $1.676 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$

Dann Zeiten einsetzen:
rho luft aus 5.4

$$\rho_{CO_2} = 1.2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} + (\frac{t_{Luft}}{t_{CO_2}} - 1) + \frac{m_H}{V} \tag{16}$$

Berechnen Sie aus den drei Messungen die Mittelwerte und setzen sie ein.

Formel mit Volumenformel eingesetzt Ergebnis TODO: Trennen Formeln und Auswertung

7 Fehlerrechnung

Prallaxe von Video??? Nicht auf gleiche Höhe am Anfang. Luftstömungen?

TODO: Fehler Luftballon aufgepustet nicht Umgebungsluft? TODO: Fehler Luft im Co2 ballon, alternativ Sodastream? TODO: Schwer zu sehen wann Boden berührt TODO: Fehler Luftballon wiegt 2g TODO: Video aufgenommen ausgewertet mit Media Player Classic ausgewertet TODO: Beachten Vidoe nur mit 30fps aufgenommen Fehlerrechnung TODO: Umfangfehlerrechnung aus Versuch 6 klauen. Hier aber mehr auf schwierig Umfänge zu vergleichen eingehen. Volumenfehler TODO: Theoriefehler aus Herleitung???

8 Fall auf der Venus

Wir bestimmen nun, wie lang der Fall des mit $\mathrm{CO_2}$ gefüllten Luftballons auf der Venus dauern würde. Wir nehmen an, das die Atmosphäre der Venus zu 100% aus $\mathrm{CO_2}$ besteht. Die Schwerkraft auf der Venus beträgt $g_{Venus} = 8.87\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Die Atmosphäre auf der Venus ist mit mehr als $400\,°\mathrm{C}$ sehr heiß und die Viskosität ist abhängig von der Temperatur. Wir nehmen für diese Rechnung an, das es auf der Venus nur Raumtemparatur mit $T = 20\,°\mathrm{C}$ warm ist. Die Viskosität von $\mathrm{CO_2}$ ist dann $\eta_{\mathrm{CO_2}} = 14.73 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$

Wir gehen hier beim aufstellen der Formel ähnlich vor wie bei der Formel für die Dichte. Wir nehmen Formel10 und setzen die Werte für den Fall eines mit $\mathrm{CO_2}$ gefüllten Luftballons auf der Erde und auf der Venus ein:

$$v_{Erde} = \frac{(m_H + \rho_{\mathrm{CO_2}\cdot V}) \cdot g_{Erde} - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g_{Erde}}{6\pi \cdot r \cdot \eta_{Luft}} \tag{17}$$

$$v_{Venus} = \frac{(m_H + \rho_{\mathrm{CO_2}\cdot V}) \cdot g_{Venus} - \rho_{\mathrm{CO_2}} \cdot V \cdot g_{Venus}}{6\pi \cdot r \cdot \eta_{\mathrm{CO_2}}} \tag{18}$$

Wir bilden nun das Verhältnis der beiden Fallgeschwindigkeiten:

$$
\begin{aligned}
\frac{v_{Erde}}{v_{Venus}} = \frac{\frac{(m_H+\rho_{\mathrm{CO_2}}\cdot V)\cdot g_{Erde}-\rho_{Luft}\cdot V\cdot g_{Erde}}{6\pi\cdot r\cdot \eta_{Luft}}}{\frac{(m_H+\rho_{\mathrm{CO_2}}\cdot V)\cdot g_{Venus}-\rho_{\mathrm{CO_2}}\cdot V\cdot g_{Venus}}{6\pi\cdot r\cdot \eta_{\mathrm{CO_2}}}} &= \\
\frac{\eta_{\mathrm{CO_2}}}{\eta_{Luft}} \cdot \frac{(m_H + \rho_{\mathrm{CO_2}} \cdot V) \cdot g_{Erde} - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g_{Erde}}{(m_H + \rho_{\mathrm{CO_2}} \cdot V) \cdot g_{Venus} - \rho_{\mathrm{CO_2}} \cdot V \cdot g_{Venus}} &= \\
\frac{\eta_{\mathrm{CO_2}}}{\eta_{Luft}} \cdot \frac{(m_H + \rho_{\mathrm{CO_2}} \cdot V) \cdot g_{Erde} - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g_{Erde}}{m_H \cdot g_{Venus} + \rho_{\mathrm{CO_2}} \cdot V \cdot g_{Venus} - \rho_{\mathrm{CO_2}} \cdot V \cdot g_{Venus}} &= \\
\frac{\eta_{\mathrm{CO_2}}}{\eta_{Luft}} \cdot \frac{(m_H + \rho_{\mathrm{CO_2}} \cdot V) \cdot g_{Erde} - \rho_{Luft} \cdot V \cdot g_{Erde}}{m_H \cdot g_{Venus}} &=_{\text{Bruch aufteilen}} \\
\frac{\eta_{\mathrm{CO_2}}}{\eta_{Luft}} \cdot \left(\frac{g_{Erde}}{g_{Venus}} + \frac{g_{Erde}}{g_{Venus}} \cdot \frac{\rho_{\mathrm{CO_2}} \cdot V}{m_H} - \frac{g_{Erde}}{g_{Venus}} \cdot \frac{\rho_{Luft} \cdot V}{m_H} \right) &=_{\text{Ausklammern}} \\
\frac{\eta_{\mathrm{CO_2}}}{\eta_{Luft}} \cdot \frac{g_{Erde}}{g_{Venus}} \cdot \left(1 + \frac{\rho_{\mathrm{CO_2}} \cdot V}{m_H} - \frac{\rho_{Luft} \cdot V}{m_H} \right) &= \\
\frac{\eta_{\mathrm{CO_2}}}{\eta_{Luft}} \cdot \frac{g_{Erde}}{g_{Venus}} \cdot \left(1 + \frac{V}{m_H} \cdot (\rho_{\mathrm{CO_2}} - \rho_{Luft}) \right)
\end{aligned} \tag{19}
$$

Jetzt setzen wir für die Geschwindigkeiten die Beziehung zur Fallzeit und Geschwindigkeit6 ein:

$$
\frac{v_{Erde}}{v_{Venus}} = \frac{\frac{h}{t_{Erde}}}{\frac{h}{t_{Venus}}} = \frac{t_{Venus}}{t_{Erde}} \tag{20}
$$

Wir setzen das Geschwindigkeits-19 und Zeitverhältnis20 gleich und setzen die Werte für das Volumen $V = TODO : Einsetzen 1\,\mathrm{m}^3$ für die Beschleunigungen $g_{Erde} = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $g_{Venus} = 8.87\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, sowie die Viskositäten $\eta_{\mathrm{CO_2}} = 14.73 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa \cdot s}$, $\eta_{Luft} = 18.21 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa \cdot s}$ und die Dichte von Luft $\rho_{Luft} = 1.2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und die im vorherigen Experiment bestimmte Dichte von $\mathrm{CO_2}$ $\rho_{\mathrm{CO_2}} = TODO : Einsetzen 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ ein. TODO: cite Aufgabenstellung

$$
\frac{t_{Venus}}{t_{Erde}} = \frac{\eta_{\mathrm{CO_2}}}{\eta_{Luft}} \cdot \frac{g_{Erde}}{g_{Venus}} \cdot \left(1 + \frac{V}{m_H} \cdot (\rho_{\mathrm{CO_2}} - \rho_{Luft}) \right) = \frac{14.73 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa \cdot s}}{18.21 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa \cdot s}} \cdot \frac{8.87\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \cdot \left(1 + \frac{TODO : Volumen 1\,\mathrm{m}^3}{0.005\,\mathrm{kg}} \cdot \left(T \right.\right. \tag{21}
$$

TODO: Das Verhältnis ist, die Fallzeit auf der Venus ist länger/kürzer TODO: Aufgabe vergleichen Sie Fallzeiten! Warum länger/kürzer, Abhängigkeit Dichte, Viskosität, Gewichtskraft.

TODO: Plot, ort, zeit geschwindigkeit des Luftballons beim Fall? mit pgfplots

TODO: Prozent abweichung vom Literaturwert

TODO: Wie viel Co2 in Waserflasche gelöst. TODO:Literaturwert Quelle angeben

TODO: Bilder TODO: Aufgabenstellung nochmal genau lesen. TODO: Messergebnisse nochmal neu aufschreiben und anheften.