Aufgabenblatt 10, Mathematik für Physiker 1

Florian Adamczyk, Finn Wagner

15.1.2022

A 10.1

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$G : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad G(x) := \begin{cases} x\sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist. Zeigen Sie dann, dass $g := G'$ nicht stetig ist.

Die Funktion G ist nach Satz 5.6 für alle $x \neq 0$ differenzierbar als Komposition von differenzierbaren Funktionen. Wir überprüfen nun die Differenzierbarkeit bei 0:

$$G'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x}) = 0$$

Analog zum Grenzwert in Aufgabe 9.2 konvergiert der Funktionswert von beiden Seiten gegen 0. Wir leiten nun die Funktion G ab, da die Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, leiten wir in Teilen ab.

$$\begin{gathered} g := G' \\ \text{Ableitung für } x = 0: \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}0 = 0 \\ \text{Ableitung für } x \neq 0: \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 \cdot \sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x}) + x\frac{d}{dx}(\sqrt{|x|}) \cdot \sin(\frac{1}{x}) + x\sqrt{|x|} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos(\frac{1}{x}) \\ &= \sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x}) + x\frac{d}{dx}(|x|) \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \frac{\sqrt{|x|}}{x}\cos(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

Die Ableitung von $|x|$ lässt sich nicht geschlossen darstellen. Sie ist an der Stelle 0 nicht definiert.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Zur besseren Übersicht teilen wir die Ableitung für $x \neq 0$ in $x > 0$ und $x < 0$ auf. Insgesamt ergibt sich:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x}) + \frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \frac{\sqrt{|x|}}{x}\cos(\frac{1}{x}), & x > 0 \\ \sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{x}) - \frac{x}{2}\frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \frac{\sqrt{|x|}}{x}\cos(\frac{1}{x}), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Wir können weiter vereinfachen, indem wir die Betragsfunktion auflösen.

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\sin(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \frac{\sqrt{x}}{x}\cos(\frac{1}{x}), & x > 0 \\ \sqrt{-x}\sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{-x}} \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \frac{\sqrt{-x}}{x}\cos(\frac{1}{x}), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Wir wollen nun überprüfen, ob g stetig ist. g ist für alle positiven und für alle negativen x stetig als Komposition von stetigen Funktionen nach Satz 4.13. Wir müssen also noch überprüfen, ob g an der Stelle 0 stetig ist. Dafür muss gelten

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = g(0) = \lim_{x\to 0+} g(x)$$

Wir bilden nun den rechtsseitigen Grenzwert

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} g(x) &= \sqrt{x}\sin(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \frac{\sqrt{x}}{x}\cos(\frac{1}{x}) \\
&= \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\sin(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\frac{1}{x}) \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{3}{2}\sqrt{x} \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\frac{1}{x})
\end{aligned}$$

Nach Definition 4.19 muss der Grenzwert für alle Folgen $f(x_n)$ existieren und zum selben Wert konvergieren, dann konvergiert die Funktion.
Wir definieren nun zwei Folgen

$$\begin{aligned}
(x_n)_{n\in\mathbb{N}} &= \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{4}} \\
(y_n)_{n\in\mathbb{N}} &= \frac{1}{2\pi n + \frac{5\pi}{4}}
\end{aligned}$$

Beide Folgen konvergieren für $n \to \infty$ von oben gegen 0 Wir können also den Grenzwert mit x_n umformulieren:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\sqrt{x_n} \cdot \sin(\frac{1}{x_n}) - \frac{1}{\sqrt{x_n}}\cos(\frac{1}{x_n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{4}}} \cdot \sin(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{4}}}) - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{4}}}}\cos(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{4}}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{4}}} \cdot \sin(2\pi n + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{4}}\cos(2\pi n + \frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{3}{2} \cdot 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \infty \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Ebenso mit y_n

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\sqrt{y_n} \cdot \sin(\frac{1}{y_n}) - \frac{1}{\sqrt{y_n}}\cos(\frac{1}{y_n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi n + \frac{5\pi}{4}}} \cdot \sin(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n+\frac{5\pi}{4}}}) - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2\pi n+\frac{5\pi}{4}}}}\cos(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n+\frac{5\pi}{4}}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi n + \frac{5\pi}{4}}} \cdot \sin(2\pi n + \frac{5\pi}{4}) - \sqrt{2\pi n + \frac{5\pi}{4}}\cos(2\pi n + \frac{5\pi}{4}) \\
&= \frac{3}{2} \cdot 0 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} - \infty \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Da der Grenzwert der beiden Folgen nicht der selbe ist existiert der Grenzwert von $\lim_{x\to 0+} g(x)$ nicht. Er ist somit insbesondere nicht gleich Null. Die Funktion ist also im Punkt Null nicht stetig, da $\lim_{x\to 0-} g(x) \neq g(0)$ ist, damit auch nicht auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

A 10.2

Beweisen Sie Satz 6.11. Zeigen Sie also, dass für stetige Funktionen $f, g : I \to \mathbb{C}$ und $a, b \in I$ die folgenden Eigenschaften gelten:

(a) $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
Wir betrachten zunächt die uneigentlichen Integrale

$$\int (f+g)(t)dt = \int f(t)dt + \int g(t)dt$$

Wir leiten nun auf beiden Seiten nach t ab

$$\frac{d}{dt}\left(\int (f+g)(t)dt\right) = \frac{d}{dt}\left(\int f(t)dt + \int g(t)dt\right)$$

Nach Satz 5.6 (a) können wir die Ableitung auf der rechten Seite auf die Summanden aufteilen

$$\frac{d}{dt}\left(\int (f+g)(t)dt\right) = \frac{d}{dt}\left(\int f(t)dt\right) + \frac{d}{dt}\left(\int g(t)dt\right)$$

Es ergibt sich

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$

Was eine wahre Aussage ist.
Nun betrachten wir noch die Grenzen. Da f, g stetig sind besitzen sie die Stammfunktionen F, G. Die Stammfunktion von $(f+g)(t)$ ist nach dem oben gezeigten also

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = F(t) + G(t)|_a^b$$

Wir setzen nun die Grenzen ein und formen um

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(t)dt &= (F(t)+G(t))|_a^b = (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) \\ &= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt\end{aligned}$$

(b) $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$ für $\lambda \in \mathbb{C}$
Wir leiten hier wieder beide Seiten nach t ab und lassen zuerst die Grenzen weg

$$\frac{d}{dt}\left(\int \lambda f(t)dt\right) = \frac{d}{dt}\left(\lambda \int f(t)dt\right)$$

Auf der rechten Seite leiten wir nach Produktregel ab, $p(t) = \lambda$ und $q(t) = \int f(t)dt$

$$\begin{aligned}\lambda f(t) &= 0 \cdot \int f(t)dt + \lambda f(t) \\ &\Leftrightarrow \lambda f(t) = \lambda f(t)\end{aligned}$$

Was eine wahre Aussage ist. Nun betrachten wir noch die Grenzen. Da f, g stetig sind besitzen sie die Stammfunktionen F, G.

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda F(t)|_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda(F(b) - F(a)) = \lambda(F(t)|_a^b) = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

(c) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ für alle $a < b < c$ Da f stetig ist besitzt sie die Stammfunktion F. Wir setzen die Grenzen ein und formen um

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \\ &\Leftrightarrow F(t)|_a^b = F(t)|_a^c + F(t)|_c^b \\ &\Leftrightarrow F(t)|_a^b = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &\Leftrightarrow F(t)|_a^b = (F(c) - F(c)) + (F(b) - F(a)) \\ &\Leftrightarrow F(t)|_a^b = F(b) - F(a) \\ &\Leftrightarrow F(t)|_a^b = F(t)|_a^b\end{aligned}$$

(d) $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$
Da f stetig ist besitzt sie die Stammfunktion F. Wir setzen die Grenzen ein und formen um

$$\int_a^b f(t)dt = (F(b) - F(a)) = -(F(b) - F(a)) = (F(a) - F(b)) = \int_b^a f(t)dt$$

(e) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \Re(f)(t)dt + i\int_a^b \Im(f)(t)dt$

$$\begin{aligned} &\int_a^b \Re(f)(t)dt + i\int_a^b \Im(f)(t)dt \\ =^{\text{mit (b)}} &\int_a^b \Re(f)(t)dt + \int_a^b i\Im(f)(t)dt \\ =^{\text{mit (a)}} &\int_a^b \Re(f)(t) + i\Im(f)(t)dt \\ = &\int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

A 10.3

Auf handgeschriebenem Beiblatt

A 10.4

Für $\mathbb{R} \ni a < b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und eine Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, sodass für alle $a < r < b$ die Funktion $f|_{[a,r]}$ Riemann integrierbar ist, ist das unegentliche Riemann-Integral definiert durch

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{r\to b}\int_a^r f(x)dx$$

falls der Grenzwert existiert. Exsistiert der Grenzwert, so heißt f (uneigentlich) Riemann-integrierbar.
Sei nun $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ stetig und monoton fallend.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann unegentlich integrierbar ist, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent ist.

1. Die Reihe konvergiert $\Rightarrow$ f ist uneigentlich integrierbar
Da f stetig ist, ist f integrierbar und besitzt eine Stammfunktion F.
Seien $c, d \in \mathbb{R} \subset [a, b)$. Dann existiert das Integral

$$\int_c^d f(x)dx$$

und ist endlich. Wir wollen nun diesen endlichen Integral nach oben abschätzen. Da f monoton fallend ist, ist der erste Wert in einem Intervall immer das Maximum des Intervalls und der letzte Wert das Minimum. Auf einem Intervall $[n, n+1]$, mit $n \in \mathbb{N}$. Ist also $f(n)$ das Maximum. Die Summe

$$\int_c^d f(x)dx \leq \int_{\lfloor c\rfloor}^{\lfloor d+1\rfloor} f(x)dx = \sum_{n=\lfloor c\rfloor}^{\lfloor d\rfloor}\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{n=\lfloor c\rfloor}^{\lfloor d\rfloor} f(n)\cdot((n+1)-n)$$

ist also immer größer gleich dem Integral. Da f nur auf die 0 und positive Zahlen abbildet ist das Integral über f monoton steigend und größer gleich 0. Wir bilden nun den Grenzwert von $d \to \infty$

$$\lim_{d\to\infty}\int_c^d f(x)dx \leq \lim_{d\to\infty}\sum_{n=\lfloor c\rfloor}^{\lfloor d\rfloor} f(n)$$

Da der Wert des Integrals monoton steigend ist mit größerem d und nach oben durch die Reihe beschränkt ist, konvergiert er.

2. f ist uneigentlich integrierbar $\Rightarrow$ die Reihe konvergiert
Da der Wertebereich von f, $[0, \infty)$ ist, ist jedes einzelne Element der Reihe größer gleich Null. Deswegen ist die Reihe monoton steigend.

$$0 \leq \sum_{n=\lceil 2 \rceil}^{\lceil d \rceil}$$

Analog zu oben ist diese Reihe eine Abschätzung nach unten für das Integral

$$\int_2^d f(x)dx$$

Zusammen

$$0 \leq \sum_{n=\lceil 2 \rceil}^{\lceil d \rceil} \leq \int_2^d f(x)dx$$

Wir bilden nun den Grenzwert von $d \to \infty$

$$\lim_{d\to\infty} 0 \leq \lim_{d\to\infty} \sum_{n=\lceil 2 \rceil}^{\lceil d \rceil} \leq \lim_{d\to\infty} \int_2^d f(x)dx$$

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \leq \int_2^{\infty} f(x)dx$$

Da wir gegeben haben, dass f uneigentlich integrierbar ist, ist die Reihe nach oben und unten gegen einen reellen Wert begrenzt. Sie muss also konvergieren. $f(1) \in \mathbb{R}$

$$f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

(f) Untersuche Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konvergent ist.
Nach (a) muss, damit die Reihe konvergiert das uneigentliche Integral exestieren.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt \\
&= \lim_{x\to\infty} \int_1^x t^{\alpha} dt \\
&= \lim_{x\to\infty} (F(x) - F(1)) \\
&= \lim_{x\to\infty} (\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} 1^{\alpha+1}) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1} - 1)
\end{aligned}$$

Wir überprüfen nun die Konvergenz von $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1} - 1)$
1. Fall $\alpha > -1$
$\alpha+1$ ist in diesem Fall positiv. x hoch eine positive Zahl konvergiert also gegen undendlich. Da das uneigentliche Integral aber nicht unendlich werden kann sind diese α Werte nicht erlaubt.
2. Fall $\alpha = -1$
In diesem Fall ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gerade die Harmonische Reihe. Diese Reihe konvergiert nicht.

3. Fall $\alpha < -1$
$\alpha + 1$ ist in diesem Fall negativ. x hoch eine negative Zahl konvergiert also gegen 0. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1} - 1) = 0$

Die Reihe konvergiert also für alle $\alpha < -1$. Sonst divergiert sie.
Aus dieser Rechnung lässt sich auch das uneigentliche Integral von 1 bis ∞ einer Funktion der Form x^α als Formel von α (für $\alpha < -1$) darstellen. Das Integral existiert nur, wenn $x^{\alpha+1}$ im Grenzwertprozess 0 wird. $\int_1^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1}-1) = \frac{1}{\alpha+1}(0-1) = \frac{-1}{\alpha+1}$