Panagiotis Konstantis
Tim Fiernkranz
Justus-Liebig Universität Gießen
Wintersemester 2021/2022

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER 1
Aufgabenblatt 12

Abgabe: 01.02.2022 bis 15:00 Uhr
in der Übungsgruppe. **Bitte in 2-3er Gruppen abgeben**.

Hausaufgaben (20 Punkte)

A12.1 Es sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung, $\mathcal{B}$ sei eine Basis von V. Zeigen Sie, dass (4)

$$span\,\{L(b) : b \in \mathcal{B}\} = Im(L).$$

A12.2 Lösen Sie das linearen Gleichungssystem (4)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0\\ 2x - 2y + z &= 1\\ x + y + z &= 2. \end{aligned}$$

A12.3 Es seien $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ und $a_{1,1} \cdot \dots \cdot a_{n,n} \neq 0$. Wir definieren die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n}\\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n}\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & \dots & a_{1,m}\\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & \dots & a_{2,m}\\ \vdots & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass (6)

$$Rang(A) = Rang(B) = n.$$

A12.4 Invertieren Sie die folgenden Matrizen: (6)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } ac \neq b^2, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1\\ \vdots & \iddots & \vdots\\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

A12.5 Für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ist die Vandermonde-Matrix definiert durch

$$V := \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & & & \dots & \vdots\\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass (4)

$$\det(V) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

A12.6 (Bonus) Für $\varphi \in \mathbb{R}$ sind die Drehung $R_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ um den Winkel φ (entgegen dem Uhrzeigersinn) und die Spiegelung $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an der x-Achse definiert durch:

$$R_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren jetzt

$$SO(2) := \{R_\varphi \,:\, \varphi \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad O(2) := SO(2) \cup \{TR_\varphi \,:\, \varphi \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass $SO(2)$ und $O(2)$ Gruppen sind und dass gilt: (5)

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \qquad \text{für alle } A \in O(2),\ x, y \in \mathbb{R}^2.$$