MATHEMATISCHE METHODEN

Dr. Michael Czerner Abgabetermin 07.02.2022

Aufgabe 1: Betrachten Sie die komplexwertige Matrix $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & c + id \\ c - id & b \end{pmatrix}$$

a) Die komplexe Adjugation ist definiert als:

$$\begin{aligned} {}^\dagger : \mathbb{C}^{n\times n} &\to \mathbb{C}^{n\times n} \\ A &\to A^\dagger = (A^T)^* \end{aligned}$$

Berechnen Sie $A^\dagger$.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A. Was fällt Ihnen auf?

c) Seien nun $a = b = 1$ und $c = d = 2$. Berechnen Sie die Eigenvektoren von A. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 2: Gedämpfter linearer harmonischer Oszillator mit äußerer Kraft

Im Falle einer externen harmonischen Anregung lautet die DGL für den harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \tfrac{\tilde{F}}{m}\cos\tilde{\omega}t.$$

Zeigen Sie, dass *nach* dem Einschwingvorgang der Ansatz $x_s(t) = A\cos(\tilde{\omega}t + \tilde{\phi})$ eine spezielle Lösung dieser DGL ist.

Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator mit Dämpfung
Für den Fall kritischer Dämpfung (aperiodischer Grenzfall) lautet die Lösung des harmonischen Oszillators

$$x(t) = e^{-\beta t}(c_1 + tc_2).$$

Diskutieren Sie die Möglichkeit eines Nulldurchgangs in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen. Bei welchen Anfangsbedingungen ist ein Nulldurchgang möglich?

Aufgabe 4: Gedämpfter Oszillator

Ein linearer harmonischer Oszillator ($\omega_0^2 = \frac{k}{m}$) unterliege Stokes'scher Reibung ($F_R = -\alpha\dot{x}$).

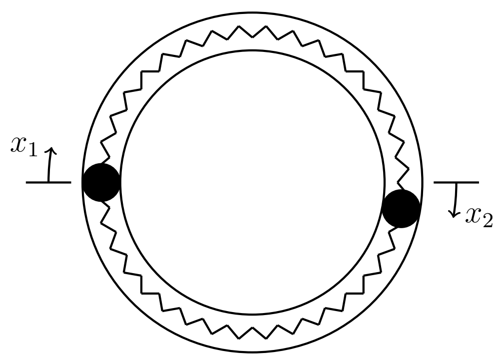
a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung wie im Skript mithilfe komplexer Zahlen.

c) Nun greift zusätzlich die konstante Kraft F_0 von außen an, die also als Inhomogenität in die DGL eingeht. Finden Sie in diesem Fall eine spezielle Lösung und die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Aufgabe 5: Zwei Massen m_1 und m_2 ($m_1 = m_2 = m$) können sich in einem kreisförmig gebogenen Rohr (Radius des Kreises R) reibungsfrei bewegen. Sie sind durch zwei Federn (Federkonstanten $K_1 = K_2 = K$, Ruhelängen $l_{10} = l_{20} = \pi R$) verbunden (siehe Abbildung, dort in ausgelenktem Zustand).

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung in Matrixform auf.
- Entkoppeln Sie die Bewegungsgleichungen wie bei den gekoppelten Schwingern im Skript.
- Wie lautet ein Fundamentalsystem dieser DGL? Interpretieren Sie die Lösungen physikalisch.



Zusatz

Die folgende Aufgabe wird nicht bewertet.

Aufgabe 6: Kraftstoß auf Oszillator (**schwierig**)

Ein linearer harmonischer Oszillator ($\omega_0^2 = \frac{k}{m}$) unterliege Stokes'scher Reibung ($F_R = -\alpha\dot{x}$) und erhalte in der Ruhelage ($x = 0, \dot{x} = 0$) zur Zeit $t = 0$ einen Kraftstoß

$$F(t) = \begin{cases} \frac{mv_0}{t_0}, & \text{für } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Auslenkung $x(t)$ für $0 \leq t \leq t_0$.

b) Die Kraft $F(t)$ macht bei $t = t_0$ einen endlichen Sprung. Überlegen Sie sich, welche Randbedingungen daraus für die Lösung $x(t)$ für $t > t_0$ folgen. Legen Sie damit $x(t)$ für $t > t_0$ fest.

c) Diskutieren Sie den extrem kurzen Kraftstoß: $t_0 \to 0$.

d) Was ergibt sich für den lang andauernden Kraftstoß $t_0 \gg \frac{m}{\alpha}$?