Panagiotis Konstantis *Justus-Liebig Universität Gießen*
Tim Fiernkranz *Wintersemester 2021/2022*

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER 1
Aufgabenblatt 2

Abgabe: 02.11.2021 bis 14:00 Uhr
in der Übungsgruppe

Hausaufgaben (20 Punkte)

A2.1 i) Zeigen Sie, dass die Abbildung aus Bsp. 1.15 b)

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n, m) \mapsto 2^{n-1}(2m - 1)$$

eine Bijektion ist. (3)

ii) Zeigen Sie, dass für zwei abzählbare Mengen M_1 und M_2 auch $M_1 \times M_2$ abzählbar ist. (2)

A2.2 i) Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ injektiv. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f$ injektiv ist. (3)

ii) Zeigen Sie, dass die Umkehrung falsch ist, indem Sie eine injektive Funktion $g \circ f$ angeben, bei der f oder g nicht injektiv ist. (2)

A2.3 Zeigen sie, mithilfe der folgende Beweisskizze, die Überabzähbarkeit des Intervalls $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ in sauberer mathematischer Notation. (5)

1. Nehme an, es gäbe eine Abzählung $\varphi : \mathbb{N} \to (0, 1)$.
2. Konstruiere eine Zahl z die nicht aufgezählt werden kann, indem z an der n-ten Nachkommastelle von $\varphi(n)$ abweicht.
3. Es gilt $z \in (0, 1)$ aber $z \notin Bild(\varphi)$ was ein Widerspruch zur Surjektivität von φ ist. Also war die Annahme falsch $\square$.

Hinweis: Für jede Zahl $z \in (0, 1)$ gibt es $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ für $i \in \mathbb{N}$, sodass $z = 0, a_1a_2a_3a_4 \ldots$. Also entspricht a_i der $i - ten$ Nachkommastelle von z.

A2.4 i) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$. (1)

ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_n$ kein Körper ist, falls $n \in \mathbb{N}$ keine Primzahl ist. (2)

iii) Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$m\mathbb{Z} := \{m \cdot z \,|\, z \in \mathbb{Z}\} .$$

Zeigen Sie dass $(m\mathbb{Z}, +)$ mit der von $\mathbb{Z}$ induzierten Addition eine abelsche Gruppe ist. Zeigen Sie weiter, dass für alle $z \in \mathbb{Z}$ und $a \in I$ gilt, dass $az \in m\mathbb{Z}$. (2)