Aufgabenblatt 4, Mathematik für Physiker 1

Florian Adamczyk, Finn Wagner

14.11.2021

A 4.1

Zeigen sie mit Hilfe von Definition 2.24, dass die folgenden Folgen konvergieren. Definition 2.24 ist das Epsilonkriterium:

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon\ |x_n - x| < \epsilon \text{ mit } \epsilon \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

(i) $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$
Behauptung: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert 0, $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.
Es soll also gelten: $|a_n - 0| < \epsilon$ mit $\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$ beliebig.
Da $(-1)^n$ als Folge immer zwischen -1 und 1 wechselt ist ihr Betrag 1. Damit lässt sich die die linke Seite wie folgt umformen.

$$|a_n - 0| = |a_n| = |\frac{(-1)^n}{n}| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$$

Es gilt nun also:

$$\frac{1}{n} < \epsilon\, \forall\, \epsilon > 0$$

Das ist eine wahre Aussage. Diese ist equivalent zum Supremumsaxiom (Folgerungen aus dem Supremumsaxiom (c)) Also war die Behauptung wahr. 0 ist der Grenzwert und die Folge konvergiert.

(ii) $b_n := \frac{3n+1}{2n-1}$
Behauptung: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert $\frac{3}{2}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.
Es soll also gelten: $|b_n - \frac{3}{2}| < \frac{5}{2}\epsilon$ mit $\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$ beliebig.
Wir formen die linke Seite wie folgt um:

$$|b_n - \frac{3}{2}| = |\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}|$$

Erweitere $\frac{3}{2}$ mit $n - \frac{1}{2}$ und vereinfache:

$$= \left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3(n-\frac{1}{2})}{2(n-\frac{1}{2})}\right| = \left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3n-\frac{3}{2}}{2n-1}\right| = \left|\frac{3n+1-(3n-\frac{3}{2})}{2n-1}\right| = \left|\frac{\frac{5}{2}}{2n-1}\right|$$

Die Betragsstriche sind nicht notwendig, da $2n - 1 > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$= \left|\frac{\frac{5}{2}}{2n-1}\right| = \frac{\frac{5}{2}}{2n-1}$$

Wir schätzen nun nach oben ab. $2n - 1$ ist immer größer gleich als n. Damit ist $\frac{1}{2n-1}$ immer kleiner gleich als $\frac{1}{n}$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{2n-1} \leq \frac{\frac{5}{2}}{n}$$

Setzt man nun wieder in die Behauptung ein, so ergibt sich:

$$\frac{\frac{5}{2}}{n} \leq \frac{5}{2}\epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

Das ist eine wahre Aussage. Diese ist equivalent zum Supremumsaxiom (Folgerungen aus dem Supremumsaxiom (c)) Also war die Behauptung wahr. $\frac{3}{2}$ ist der Grenzwert und die Folge konvergiert.

(iii) $c_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ Behauptung: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert 0, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
Es soll also gelten: $|c_n - 0| < \epsilon$ mit $\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$ beliebig.
Wir wissen das $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert. Also

$$\forall\, \epsilon > 0\; \exists\; N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon\; |\frac{1}{n} - 0| < \epsilon^2 \text{ mit } \epsilon \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Nehmen wir nun diese Ungleichung und ziehen auf beiden Seiten die Wurzel, erhalten wir auf Grund der Monotonie der Wurzelfunktion:

$$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon^2 = |\frac{1}{n}| < \epsilon^2 = \frac{1}{n} < \epsilon^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n}} < \sqrt{\epsilon^2} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}} < \epsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 < \epsilon = |\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| < \epsilon$$

Was zu beweisen war. Damit ist der Grenzwert 0 und die Folge konvergiert.

A 4.2

Sei $M \in \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, und sei $s \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Genau dann ist $s = \sup M$, wenn s eine obere Schranke von M ist und wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M existiert mit $\lim_{n\to\infty} x_n = s$.

Beweisen der Äquivalenz durch Folgerung der Aussagen in beide Richtungen.

Es gilt s ist Supremum von M.

Es folgt das s insbesondere auch eine obere Schranke von M ist.

1. Fall s ist ein Element von M, also s ist das Maximum von M.
   So existiert immer die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := s$, deren Elemente in M liegen und die gegen s konvergiert.

2. Fall s ist kein Element von M.
   Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := s - \frac{1}{n}$. Die Folge (y_n) ist immer kleiner als s und konvergiert gegen s. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gesuchte Folge. Für alle Elemente von x_n gelte $x_n \in M$ und $x_n > y_n$ für ein bestimmtes n.
   Zu zeigen: x_n ist immer definiert.
   Angenommen es gäbe kein Element in M das größer als y_n für ein bestimmtes n ist, so wäre y_n eine obere Schranke der Menge M. Da aber y_n gegen s konvergiert und damit immer kleiner als s ist, kann y_n keine obere Schranke sein, weil es kleiner ist als das Supremum s. Es folgt, dass x_n immer definiert ist.

   Nun schätze man $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten und nach oben ab. Es gilt $x_n \geq y_n$ da x_n per Konstruktion immer größer gewählt wurde. Außerdem ist x_n immer kleiner als s, da s kein Element der Menge M ist. Es folgt:

   $$y_n \leq x_n \leq s$$

   Wendet man nun Satz 2.27(f) (Sandwichtheorem) an, so ergibt sich:

   $$\lim_{n\to\infty} s - \frac{1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} s$$
   $$\Rightarrow s \leq x \leq s$$

   Die Folge (x_n) konvergiert gegen s.

Es folgt, dass s eine obere Schranke ist, und es eine Folge in der Menge gibt, die gegen s konvergiert.

Nun in die andere Richtung.

Es gilt s ist eine obere Schranke von M und es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = s$

Angenommen s ist kein Supremum. So muss es eine obere Schranke geben die kleiner als s ist. Dieses Supremum nennen wir k.

$$k < s \Rightarrow k + \epsilon_0 = s \text{ mit } \epsilon_0 > 0$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_0 = s - k$$

Da es eine Folge gibt deren Folgenglieder in M liegen und diese Folge gegen s konvergiert gilt:

$$\exists\, N_{\epsilon_0} \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N_{\epsilon_0} |x_n - s| < \epsilon_0$$

Setzen wir nun unser festes ϵ_0 ein, so folgt:

$$|x_n - s| < \epsilon_0 \Leftrightarrow |x_n - s| < s - k$$

1. Fall x_n ist größer als s
   Das ist ein Wiederspruch, da k als Supremum angenommen wurde ($s > k$), ein Element der Menge kann nicht größer als das Supremum sein.
2. Fall x_n ist kleiner gleich s
   Man ersetze die Betragsstriche mit einem Minus.

$$|x_n - s| < s - k \Leftrightarrow -(x_n - s) < s - k$$
$$\Leftrightarrow -x_n + s < s - k \Leftrightarrow -x_n < -k$$
$$\Leftrightarrow x_n > k$$

   Das ist ein Wiederspruch, da k als Supremum angenommen wurde, ein Element der Menge kann nicht größer als das Supremum sein.

Es folgt, dass es keine kleinere Schranke als geben kann. s ist also das Supremum.

(b) Wenn die Menge unendlich viele Elemente hat, können Sie dann die Folge aus (a) so wählen, dass $x_n < x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?
Angenommen, eine solche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ würde existieren. Wähle die Menge $M = [0,1] \cup 2$
Angenommen die 2 ist ein Folgenglied von (x_n). Nach Folgendefintion muss aber das nächste Element der Folge echt größer sein als 2. Diese Element läge nicht mehr in der Menge. Die 2 ist also kein Folgenglied.
Alle Folgenglieder sind also kleiner gleich 1.
Die Folge (x_n) konvergiert gegen das Supremum von M, hier 2. In mathematischer Notation:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N_\epsilon \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N_\epsilon : |x_n - 2| < \epsilon$$

Wähle $\epsilon = 0,5$:

$$|x_n - 2| < \epsilon \Rightarrow |x_n - 2| < 0,5$$

Da alle x_n kleiner gleich 1 sind, lässt sich der Betrag durch ein Minus umschreiben:

$$-(x_n - 2) < 0,5 \Leftrightarrow -x_n - 2 < 0,5 \Leftrightarrow -x_n < 2,5 \Leftrightarrow x_n > 2,5$$

Da alle x_n kleiner gleich 1 sind kann x_n nicht größer sein als 2,5. Nein, man kann die Folge nicht streng monoton wachsend wählen.

A 4.3

(i) Konvergieren die folgenden Folgen. Wenn ja berechnen Sie auch den Grenzwert.

$$a_n = \frac{5n^5 + 4n^3 - n + 5}{10n^5 + n^2 - n + 100}$$

Ausklammern von n^5

$$\frac{5n^5+4n^3-n+5}{10n^5+n^2-n+100} = \frac{n^5}{n^5}\left(\frac{5+4\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}+5\frac{1}{n^5}}{10+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}+100\frac{1}{n^5}}\right) = \frac{5+4\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}+5\frac{1}{n^5}}{10+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}+100\frac{1}{n^5}}$$

Wir wissen das $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert. Mit Satz 2.27(e) folgt daraus dass auch $\frac{1}{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}$ gegen 0 konvergiert. Ebenso alle weiteren Folgen n^{-x}. Mit Satz 2.27(c) und Satz 2.27(e) folgt das eine Summe von $\lambda\, n^{-x}$ ebenfalls gegen Null konvergiert. Bildet man nun den Grenzwert von a_n so gehen alle Terme außer der 5 und der 10 gegen Null. Der Grenzwert ist also:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+4\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}+5\frac{1}{n^5}}{10+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}+100\frac{1}{n^5}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Die Folge konvergiert gegen ein Halb.

$$b_n := \frac{n^2}{2^n}$$

Die Folge b_n lässt sich nach unten abschätzen gegen 0, da sowohl Nenner als auch Zähler immer größer als 0 sind. Außerdem lässt sie sich nach oben abschätzen. Nach Lemma 2 ist 2^n immer größer als n^3 für n genügend groß. $\frac{1}{2^n}$ ist also immer kleiner als $\frac{1}{n^3}$ Schätzt man also nach oben ab ergibt sich.

$$\frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

Die Folge $\frac{1}{n}$ geht gegen 0. Nach dem Sandwichtheorem Satz 2.27(f) gilt also:

$$0 \le b_n \le \frac{1}{n}$$

b_n konvergiert also gegen 0.

(ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge, also $a_1 = a_2 := 1$ und für $n \ge 3$ ist $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$. Wir definieren nun

$$u_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $u \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie u.

Wir fangen an und formen die Definition der Folge um. Wir setzen die Definition für a_{n+1} ein und vereinfachen.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Wir wollen nun die Definition von u_n wieder einsetzen um u_n rekursiv zu definieren.

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$$

Da u_n gegen u konvergiert, konvergiert auch u_{n-1} gegen u. Wir bilden auf beiden Seiten den Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{u_{n-1}}\\ \Leftrightarrow u &= 1 + \frac{1}{u} \mid -u\\ \Leftrightarrow 0 &= -u + 1 + \frac{1}{u} \mid \cdot u\\ \Leftrightarrow 0 &= -u^2 + u + 1 \mid \cdot(-1)\\ \Leftrightarrow 0 &= u^2 - u - 1\end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich mit der pq-Formel lösen.

$$\begin{aligned} u_1, u_2 &= -\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)} \\ \Leftrightarrow u_1, u_2 &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \\ \Leftrightarrow u_1, u_2 &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Da $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ negativ ist, die Folge aber aus Konstruktion nich negativ werden kann, ist der Grenzwert $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

A 4.4

Gibt es Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass:

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), sodass $x_{n_k} \to x$ für $k \to \infty$ Wähle x_n als Folge von rationalen Zahlen nach dem Cantorsches Diagonalargument. Bilde die Teilfolge von von (x_n) die gegen x konvergiert wie folgt: Wähle für das k.te Folgenglied ein Folgenglied aus x_n das hinter dem (k-1).ten Folgenglied in x kommt. Für das erste Folgenglied wähle beliebig. Zusätzlich muss jedes Folgenglied von (x_{n_k}) die Bedingung $x - \frac{1}{k} < x_{n_k} < x + \frac{1}{k}$ erfüllen.

Zu zeigen x_{n_k} ist immer definiert
Da es nach Lemma 4 unendlich viele rationale Zahlen gibt, mit denen man mit beliebig Genauigkeit x_{n_k} approximieren kann, liegt auch immer einer dieser Zahlen im gegebenen Intervall um x_{n_k}. Diese Zahl oder eine ihrer unendlich vielen besseren Approximation liegt damit auch in (x_n) nach der (k-1).ten Stelle. Das es vor $x_{n_{(k-1)}}$ nur endlich viele Zahlen in (x_n) gibt.

Jedes Folgenglied von (x_{n_k}) liegt nach Konstruktion zwischen den beiden Werten der Folgen $(x - \frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(x + \frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$. Beide Folgen konvergieren, da sie nur eine Summe aus Konstante und der Folge $\frac{1}{n}$ sind gegen x.

Wendet man nun Satz 2.27(f) (Sandwichtheorem) an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} x - \frac{1}{k} \leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} x - \frac{1}{k} \\ \Rightarrow x \leq \lim_{k\to\infty} \qquad x_{n_k} \leq x \end{aligned}$$

Die Folge (x_{n_k}) konvergiert gegen x. Somit gibt es eine Folge deren Teilfolgen gegen jeden Wert $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.

(ii) Für alle $x \in (0,1)$ gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), sodass $x_{n_k} \to x$ für $k \to \infty$, aber für $y \notin (0,1)$ existiert keine solche Teilfolge.
Angenommen es gäbe eine solche Folge x_n. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := \frac{1}{n}$. Die Folge (y_n) ist immer größer als 0 und konvergiert gegen 0. Sei nun $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (x_n). Für das erste Element von z_n wähle man ein beliebiges Element aus dem Intervall $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, dass ein Folgenglied von (x_n) ist. Für alle weiteren Elemente wähle man so, dass $z_n < y_n$ für ein bestimmtes n und dass $0 < z_{n+1} < z_n$.
Zu zeigen, x_n ist immer definiert:
(x_n) hat Teilfolgen, so dass diese für alle $x \in (0,1)$ konvergieren. Es existiert also auch eine Teilfolge die gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert. Nach der Definition der Konvergenz eine Folge(Teilfolge) gilt:

$$|x_{n_k} - \frac{1}{2}| < \epsilon \ \forall \epsilon > 0$$

Dies gilt also insbesondere auch für $\epsilon = \frac{1}{4}$. Damit gilt:

$$|x_{n_k} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}$$

Der Abstand von x_{n_k} zu $\frac{1}{2}$ ist also kleiner als $\frac{1}{4}$. Damit liegt x_{n_k} im Intervall $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, also liegt ein Folgenglied von (x_n) im Intervall was man für z_1 wählen kann.

Jedes z_n soll kleiner als y_n sein. Da (y_n) gegen 0 konvergiert, liegen alle Folgenglieder von (z_n) also im Intervall $I := (0, \frac{3}{4})$, weil z_n immer kleiner als z_{n-1} ist und größer Null. Es existiert im Intervall I immer ein Wert $b \in I$ der echt kleiner ist als z_n und damit auch echt kleiner als y_n. Weiterhin existiert auch immer ein Folgenglied in (x_n) das echt kleiner ist als z_n, weil es (analog wie für das erste Folgenglied) immer eine Folge gibt, die gegen b konvergiert und sich ihre Elemente b immer mehr annähern.

Es gilt somit:

$$0 < z_n < y_n$$

Nach dem Sandwichtheorem Satz 2.27(f) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty} z_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\Rightarrow 0 < z < 0$$

Die hier konstruierte Folge (z_n) konvergiert gegen 0. Dies ist aber ein Wiederspruch zu der Annahme, dass alle Teilfolgen von (x_n) nur im Intervall $0, 1$ konvergieren. Somit gibt es keine Folge (x_n) die diese Eigenschaft hat.

Lemma 1

$$2n - 1 \geq n \, \forall \, n \in \mathbb{N}$$

Die Aussage beweisen wir mit vollständiger Induktion.
Induktionsanfang $n = 1$

$$2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = n$$

Induktionsannahme:

$$2n - 1 \geq n \Rightarrow 2(n+1) - 1 \geq (n+1)$$

Induktionsschritt:
Wir zeigen, dass die Aussage für $n + 1$ *gilt, indem wir sie zu einer wahren Aussage führen.*

$$\begin{aligned} 2(n+1) - 1 &\geq n + 1 \\ \Leftrightarrow 2n + 2 - 1 &\geq n + 1 \\ \Leftrightarrow 2n + 1 &\geq n + 1 \\ \Leftrightarrow 2n &\geq n \\ \Leftrightarrow 2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Durch Umformungen erhalten wir eine wahre Aussage. Damit ist bewiesen das $2n - 1$ *immer größer gleich als* n *ist.*

Lemma 2

$$n^3 \leq 2^n \text{ für } n \geq 10$$

Die Aussage beweisen wir mit vollständiger Induktion.
Induktionsanfang $n = 10$

$$10^3 = 1000 \leq 1024 = 2^{10}$$

Induktionsannahme:

$$n^3 \leq 2^n \Rightarrow (n+1)^3 \leq 2^{n+1} \text{ für } n \geq 10$$

Induktionsschritt:
Klammern auflösen

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &\leq 2^{n+1} \\ \Leftrightarrow (n+1)^3 &\leq 2 \cdot 2^n \\ \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\leq 2 \cdot 2^n \end{aligned}$$

Nach Lemma 3 lässt sich $3n^2 + 3n + 1$ *nach oben gegen* n^3 *abschätzen.*

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + n^3$$

Nach Induktionsannahme kann man n^3 *nach oben gegen* 2^n *abschätzen.*

$$n^3 + n^3 = 2n^3 \leq 2 \cdot 2^n \leq 2^{n+1}$$

Es gilt also insgesamt:

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + n^3 = 2n^3 \leq 2 \cdot 2^n \leq 2^{n+1}$$

Was zu beweisen war. Damit gilt die Anfangsausagen nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Lemma 3

$$n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1 \text{ für } n \geq 10$$

Die Aussage beweisen wir mit vollständiger Induktion.
Induktionsanfang $n = 10$

$$10^3 = 1000 \geq 331 = 300 + 30 + 1 = 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$$

Induktionsannahme:

$$n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1 \Rightarrow (n+1)^3 \geq 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 \text{ für } n \geq 10$$

Induktionsschritt:
Klammern auflösen:

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 &\geq 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 \\
\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\geq (n^2 + 2n + 1) + (3n + 1) + 1 \\
\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\geq n^2 + 5n + 3 \,|- 3n^2, -3n, -1 \\
\Leftrightarrow n^3 &\geq -3n^2
\end{aligned}
$$

Weil $n \in \mathbb{N}$ *ist* $3n^2$ *immer größer 0. Und* $-3n^2$ *immer kleiner 0.* $n^3 \geq -3n^2$ *ist also eine wahre Aussage. Somit gilt die Induktion.*

Lemma 4 *Zu zeigen: jede reelle Zahl lässt sich beliebig nah durch beliebig viele verschiedene rationale Zahlen immer besser approximieren.*
Es gilt:

$$\forall\, \epsilon > 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R} \,\exists\, q_{e,x} \in \mathbb{Q} : |q_{e,x} - x| < \epsilon$$

Eine reele Zahl lässt sich beliebig nah durch eine rationale Zahl approximieren.

Aus dieser Aussage folgt die Existenz einer reelen Zahl q_1
Nun sei der Abstand von q_1 *zu x:* $|q_1 - x| =: \epsilon_1$
Setzt man dieses Epsilon nun in die Aussage ein, so erhält man: $|q_2 - x| < \epsilon_1$
Dieses q_2 *ist echt kleiner als* q_1*, da gilt:* $|q_2 - x| < \epsilon_1 \Leftrightarrow |q_2 - x| < |q_1 - x|$
Durch beliebig oft wiederholtes Anwenden dieser zwei Schritte, erhält man eine Folge von $q \in \mathbb{Q}$ *die sich x immer weieter annähert.*