

Mathematische MethodenDr. Michael Czerner

Name:**Aufgabe 1:** Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

- ☐ Für die Determinante eines Produktes zweier Matrizen gilt $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$
- ☐ Das Spatprodukt lässt sich über die Determinante $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ darstellen.
- ☐ Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} \neq \vec{0}$ hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\det A \neq 0$.
- ☐ Zu jeder Matrix A existiert eine Matrix A^{-1} , sodass $A \cdot A^{-1} = E$
- ☐ Das Produkt einer $(n \times m)$ und einer $(m \times k)$ Matrix ergibt eine $(k \times n)$ Matrix.

Aufgabe 2: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

- ☐ $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = 0$
- ☐ $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = 0$
- ☐ Falls die Hesse-Matrix $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ semidefinit ist, liegt ein Sattelpunkt vor.
- ☐ das infinitesimale Volumenelement lautet in Kugelkoordinaten $dV = r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$, wobei r der Radius, θ der Polarwinkel und φ der Azimutalwinkel ist.
- ☐ Der Azimutalwinkel φ in Kugelkoordinaten lässt sich eindeutig über $\varphi = \arctan y/x$ bestimmen.

Aufgabe 3: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

- ☐ Wenn eine Zentralkraft in kartesischen Koordinaten vorliegt, ist diese auch eine Zentralkraft in Kugelkoordinaten.
- ☐ Für die Berechnung der Kraft \vec{F} aus dem Potential U gilt: $-\nabla \cdot \vec{F} = U$
- ☐ Für eine konservative Kraft \vec{F} gilt immer: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$
- ☐ Bei konservativen Kräften ist die Arbeit nicht abhängig von der Wahl des Weges.
- ☐ Der Weg ist geschlossen, wenn für eine konservative Kraft \vec{F} gilt: $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Aufgabe 4: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

- ☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- ☐ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- ☐ $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$
- ☐ $-1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \leq 1$
- ☐ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

Aufgabe 5: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

- ☐ Eine Menge von Vektoren im \mathbb{R}^3 ist genau dann linear unabhängig, wenn alle Vektoren in verschiedene Richtungen zeigen.
- ☐ m Vektoren bilden eine Basis des \mathbb{R}^n genau dann, wenn die Vektoren linear unabhängig sind.
- ☐ n Vektoren bilden eine Basis des \mathbb{R}^n genau dann wenn die Vektoren linear unabhängig sind.
- ☐ Wenn die Spalten in einer quadratischen Matrix A linear unabhängig sind, ist $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ eindeutig lösbar.
- ☐ Wenn die Spalten in einer quadratischen Matrix A linear abhängig sind, ist $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{0}$ lösbar.

Aufgabe 6: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

- ☐ Das Volumenintegral hängt von den verwendeten Koordinaten ab.
- ☐ Die Funktionaldeterminante in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) ist $r^2 \cot(\theta)$.
- ☐ Die Funktionaldeterminante in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) ist ρ .
- ☐ Die Funktionaldeterminante in kartesischen Koordinaten (x, y, z) ist 1.
- ☐ Der Einheitsvektor \vec{e}_r in Kugelkoordinaten ist: $(\cos(\varphi) \sin(\theta), \sin(\varphi) \sin(\theta), \cos(\theta))^T$.

Aufgabe 7: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

Für zwei diagonalisierbare Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $AB - BA = 0$ gilt

- ☐ A und B kommutieren
- ☐ A und B besitzen die selben Eigenwerte
- ☐ A und B haben immer eine gemeinsame Eigenbasis, in der sie diagonalisiert werden können

Aufgabe 8: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

Der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ einer Punktmasse ist eine Erhaltungsgröße, wenn

- ☐ Alle wirkenden Kräfte senkrecht auf \vec{r} stehen
- ☐ \vec{r} senkrecht auf \vec{p} steht und $|\vec{p}|$ eine Erhaltungsgröße ist
- ☐ Alle wirkenden Kräfte zeitunabhängig sind

Aufgabe 9: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle := \sum_k^n x_k^m y_k^m$$

ist ein Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n , falls

- ☐ $m = \frac{\pi}{3}$
- ☐ $m \approx \frac{\pi}{3}$
- ☐ m gerade ist
- ☐ m ungerade ist

Aufgabe 10: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

- ☐ Ein allgemeiner Vektor ist immer darstellbar durch einen Pfeil.
- ☐ Die Basisvektoren sind immer rechtwinklig zueinander.
- ☐ Die Komponente a_i eines Vektors \vec{a} in Richtung eines Einheitsvektors \vec{e}_i lässt sich durch $a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$ gewinnen.
- ☐ Wenn 3 Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 in einer Ebene liegen, sind sie linear unabhängig.
- ☐ Für normierte Vektoren \hat{r} gilt immer $|\hat{r}| = 1$

Aufgabe 11: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

- ☐ Ein Axiom ist ein Grundsatz einer Theorie, der innerhalb dieses Systems weder begründet noch deduktiv abgeleitet wird.
- ☐ Die träge Masse und die schwere Masse sind in der Newtonschen Mechanik zwei unterschiedliche Größen. Erst die allgemeine Relativitätstheorie zeigt deren Äquivalenz.
- ☐ Die Newtonschen Axiome gelten in jedem Bezugssystem.

Aufgabe 12: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

- ☐ Das Standard-Skalarprodukt lässt sich in jeder Basis mit Hilfe der Komponenten ganz einfach durch $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i$ berechnen
- ☐ Das Kreuzprodukt ist kommutativ
- ☐ $\vec{r} \cdot \vec{r} > 0 \Leftrightarrow r_i > 0 \forall i \in \{1, 2, 3\}$
- ☐ Es gibt mindestens einen Spezialfall in dem die Dreiecksungleichung $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ nicht erfüllt ist.

Aufgabe 13: Multiple Choice

Welche der Aussagen trifft/treffen zu?

- ☐ Wenn zwei Matrizen vertauschen, also $AB - BA = 0$ gilt, dann sind sie quadratisch.
- ☐ Für eine Kreisbewegung ergibt sich die Krümmung κ durch den Radius R des Kreises, $\kappa = 1/R$.
- ☐ Die Parametrisierung einer Kurve ist immer eindeutig.
- ☐ Für eine 2-fach stetig differenzierbare Funktion f ist die Hesse-Matrix $H_f(\vec{x})$ symmetrisch.
- ☐ Eine Funktion f ist explizit von der Zeit t abhängig, wenn gilt: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$