

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER 1

Aufgabenblatt 3

Abgabe: 09.11.2021 bis 15:00 Uhr
in der Übungsgruppe. **Bitte in 2-3er Gruppen abgeben.**

Hausaufgaben (20 Punkte + 5 Bonuspunkte)

A3.1 Zeigen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

(a) $ab \leq \frac{1}{2} \left(a^2 x^2 + \frac{b^2}{x^2} \right)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (2)

(b) $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$ (2)

(c) Sind $a, b, c, d > 0$ und ist $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so folgt $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. (2)

(d) Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $a^n - b^n = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ (2)

Hinweis: Binomische Formeln für (a) und (b). Für (d) kann eine Indexverschiebung nützlich sein.

A3.2 Beweisen Sie die folgenden Aussagen mithilfe vollständiger Induktion.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > -1$ gilt die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$. (2)

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (2)$$

(c) Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$n! \leq 4 \cdot \left(\frac{n}{2} \right)^{n+1}. \quad (2)$$

A3.3 Beantworten Sie für die nachfolgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}$ die Fragen:

- ist M nach oben oder unten beschränkt? Wenn ja, dann geben Sie $\sup M$ und $\inf M$ an und begründen Sie ihre Antwort.
- Hat M ein Maximum oder ein Minimum? Wenn ja, welches? Begründen Sie auch hier ihre Antwort.

(a) $M_1 = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, (1)

(b) $M_2 = \{t \in \mathbb{R} : t \text{ ist obere Schranke von } M_1\}$, (2)

(c) $M_3 = \{(1 - \frac{1}{n^2})^n : n \in \mathbb{N}\}$. *Hinweis: Bernoulli-Ungleichung.* (3)

A3.4 Bonusaufgabe: Die Türme von Hanoi. (5)

Die Türme von Hanoi sind ein beliebtes Rätsel. Gegeben sind 3 Türme T_1, T_2, T_3 . Auf dem Turm T_1 sind $n \in \mathbb{N}$ verschiedene Holzscheibe der Größe nach geordnet (unten befindet sich die größte und oben die kleinste). Ziel ist es die Holzscheiben auf einen anderen Turm zu verschieben. Dabei sind die folgenden beiden Regeln zu beachten:

- Es darf immer nur eine Holzscheibe gleichzeitig bewegt werden.
- Eine Holzscheibe darf nicht auf eine kleinere Holzscheibe gelegt werden.

Zeigen Sie, dass es für jedes n eine Lösung gibt und bestimmen Sie die minimale Zugzahl.

Hinweis: Spiele Sie ein wenig herum und testen es selbst, wobei Sie z.B. Geldmünzen als Holz-scheiben verwenden.