Panagiotis Konstantis
Tim Fiernkranz

Justus-Liebig Universität Gießen
Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Physiker 1
Aufgabenblatt Weihnachten

Abgabe: 11.01.2022 bis 15:00 Uhr
in der Übungsgruppe. **Bitte in 2-3er Gruppen abgeben**.

Hausaufgaben (34 Bonuspunkte)

AWeihnachten.1 Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ (2)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

AWeihnachten.2 (a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. (2)

Hinweis: Binomialformel

(b) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, gilt: (2)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{n-m}{n}\right)^k \frac{1}{k!}$$

(c) Folgern Sie die Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. (2)

AWeihnachten.3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen für $\alpha > 0$ auf (absolute) Konvergenz (2)

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! n^n}$$

$$iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^\alpha} \qquad iv) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n \sqrt{n} - 1}$$

AWeihnachten.4 Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen (absolut) Konvergent? (2)

$$i) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)} \qquad ii) \sum_{k=1}^{\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k.$$

AWeihnachten.5 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 und $f(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, sodass (2)

$$f(x) \neq 0 \qquad \forall |x - x_0| < \delta.$$

AWeihnachten.6 Beweisen Sie Korollar 5.27. Also, dass für $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist und es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass (2)

$$||f^{(k)}||_\infty := \sup_{x \in I} |f^{(k)}(x)| \leq M,$$

dann wird f auf I durch ihre Taylorreihe dargestellt.

AWeihnachten.7 Wir definieren die Landau-Notation. Für Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ ($x_0 = \pm\infty$ sind erlaubt) schreibt man

$$f = o(g) \text{ (für } x \to x_0) \qquad :\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
$$f = O(g) \qquad :\Leftrightarrow \exists R, C > 0 : |f(x)| \leq Cg(x)\, \forall |x| \geq R.$$

Zeigen Sie (2)

i) $ln = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$ und $\alpha > 0$.

ii) $e^x = o\left(|x|^\alpha\right)$ für $x \to -\infty$.

iii) $f = o(g)$ für $x \to \infty$, dann auch $f = O(g)$.

iv) $x^\alpha = O(x^\beta)$ für $\beta \geq \alpha > 0$.

AWeihnachten.8 Beweisen Sie Satz 5.3, also eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann in $x_0 \in I$ differenzierbar ist, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für (2)

$$R(x, x_0) := f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$$

gilt, dass $R(x, x_0) = o\left(x - x_0\right)$ für $x \to x_0$.

AWeihnachten.9 Sei $t > 0$ gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$L_n := \sum_{k=1}^{n} |e^{ikt/n} - e^{i(k-1)t/n}|.$$

Zeigen Sie:

(a) $L_n = 2n|\sin(\frac{t}{2n})|$ für $n \in \mathbb{N}$. (2)

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} L_n = |t|$. (2)

Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

AWeihnachten.10 Wir definieren die Hyperbelfunktionen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Sinus hyperbolicus bzw. Cosinus hyperbolicus) durch (4)

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Skizzieren Sie die Graphen und entwickeln Sie $\sinh$ und $\cosh$ in Potenzreihen, das heißt finden Sie $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Skizzieren Sie auch die Menge

$$H := \left\{ \big(\cosh(t), \sinh(t)\big) : t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Hinweis: $\cosh$ und $\sinh$ erfüllen eine quadratische Gleichung.

AWeihnachten.11 Zeigen Sie, dass (2)

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Hinweis:

$$\frac{d}{dx}(1 + x)^\alpha = \binom{\alpha}{k} k!(1 + x)^{\alpha - k}.$$

AWeihnachten.12 Zeigen Sie $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ und folgern Sie (2)

$$\pi = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Anmerkung: Zur tatsächlichen Berechnung von π eignet sich die Reihe nicht wirklich, da die Konvergenz zu langsam ist.

AWeihnachten.13 Entwickeln Sie $\arccos$ in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$. Folgern Sie eine Reihendarstellung für π . (2)
Hinweis: Folgen Sie der Methode für die Reihendarstellung von $\arctan$. Also leiten Sie $\arccos$ ab, finden Sie eine Reihendarstellung. Eine Stammfunktion der Reihendarstellung erhalten Sie dann durch die Gliedweisen Stammfunktionen.

AWeihnachten.14 Beweisen Sie Bemerkung 5.21. Also, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^k |x|$$

k-mal stetig differenzierbar, aber nicht $(k+1)$-mal.

Wir wünschen euch

$$y = \frac{\ln\left(\frac{x}{m} - sa\right)}{r^2}$$

und einen guten Rutsch ins neue Jahr. Bleibt gesund und verbringt ein paar schöne Tage mit Familie und Freunden :).