

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER 1

Aufgabenblatt 6

Abgabe: 30.11.2021 bis 15:00 Uhr
in der Übungsgruppe. **Bitte in 2-3er Gruppen abgeben.**

Hausaufgaben (20 Punkte)

A6.1 Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte (6)

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Hinweis: Sie dürfen (ohne Beweis) benutzen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

A6.2 Beweisen Sie Satz 3.1. Also, dass \mathbb{C} ein Körper ist. (6)

A6.3 Beweisen Sie Satz 3.6. Also die folgenden Gleichungen für $w, z \in \mathbb{C}$. (6)

- a) $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ und $\overline{wz} = \overline{w}\overline{z}$.
- b) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
- c) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.
- d) $|\overline{z}| = |z|$ und $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
- e) $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$.
- f) $|w + z| \leq |w| + |z|$ und $|w - z| \geq ||w| - |z||$.

A6.4 Beweisen Sie die Konvergenz der folgenden Folgen und bestimmen Sie deren Grenzwert. (2)

$$\begin{aligned} i) z_n &:= \frac{i^n}{3^n}, & ii) z_n &:= \sum_{k=0}^n \frac{i^k}{3^k}, \\ iii) z_n &:= \frac{3n^2 - 4n + in^2}{4in^2 - in + 1}, & iv) z_n &:= \frac{3n-1}{9n+100} + \frac{n^2}{n^2+n+1}i. \end{aligned}$$

A6.5 Bonusaufgabe: Im folgenden wird die Konstruktion eines Fraktals beschrieben. Für $n = 1$ sei D_1 das gleichseitige Dreieck mit Kantenlänge 1. Nun entsteht D_n aus D_{n-1} , indem man an jeder Kante von D_{n-1} das mittlere Drittel entfernt und ein gleichseitiges Dreieck mit einem Drittel der ursprünglichen Kantenlänge einhängt.

- i) Skizzieren Sie D_1 , D_2 und D_3 (2)
- ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt A_n und Umfang U_n von D_n . (2)
- iii) Beweisen oder Widerlegen Sie die Konvergenz von A_n bzw. U_n , geben Sie im Konvergenzfall den Grenzwert an. (2)