Aufgabenblatt 5, Mathematik für Physiker 1

Florian Adamczyk, Finn Wagner

22.11.2021

A 5.1

(a) Sei $c_n := \sqrt[n]{n} - 1$, zu zeigen:

$$n = (1 + c_n)^n \geq^! 1 + \frac{n(n-1)}{2} {c_n}^2$$

Es gilt $n = (1 + (\sqrt[n]{n}) - 1)^n$
Einsetzen in die allgemeine binomischen Formel:

$$\Leftrightarrow (1 + c_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} {c_n}^k$$

Ausklammern der ersten drei Terme:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} {c_n}^k = \binom{n}{0} 1^n {c_n}^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} {c_n}^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} {c_n}^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} {c_n}^k$$

Es gilt $n \in \mathbb{N}$ und damit $n \geq 1$. Die n.te Wurzel von n ist größer gleich 1. Somit $c_n \geq 0$. Ein Binomialkoeffitient kann ebenfalls nicht negativ werden. Alle Terme auf der rechten Seite der Gleichung sind also positiv, als Produkt von 1 und c_n. Wir schätzen nun nach unten ab, indem wir Terme weglassen.

$$\binom{n}{0} 1^n {c_n}^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} {c_n}^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} {c_n}^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} {c_n}^k \geq \binom{n}{0} 1^n {c_n}^0 + \binom{n}{2} 1^{n-2} {c_n}^2$$

Vereinfachen:

$$\binom{n}{0} 1^n {c_n}^0 + \binom{n}{2} 1^{n-2} {c_n}^2 = 1 + \frac{n!}{(n-2)! * 2!} {c_n}^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} {c_n}^2$$

Die Aussage ist bewiesen.

Nun ist zu zeigen, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$
Es gilt wie oben bewiesen:

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} {c_n}^2 \mid -1 \mid : n(n-1) > 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)}{n(n-1)} \geq \frac{{c_n}^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{{c_n}^2}{2}$$

Da c_n immer größer ist als 0, ist auch $\frac{{c_n}^2}{2}$ immer größer als 0. Es gilt insgesamt:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{{c_n}^2}{2} \geq 0$$

Mit dem Sandwichtheorem folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{{c_n}^2}{2} \geq \lim_{n\to\infty} 0$$

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{{c_n}^2}{2} \geq 0$$

Es folgt, dass der Grenzwert von c_n 0 ist. $\sqrt[n]{n}$ konvergiert damit gegen 1.

(b) Zu zeigen: Für $a > 0$ gilt $\sqrt[n]{a} \to 1$ für $n \to \infty$
Ab einem n groß genug, $N \in \mathbb{N}$ $n \geq N$ gilt:
$a \leq n$ für alle n, daraus folgt $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$

1. Fall a = 1
   Ist a = 1, so konvergiert $\sqrt[n]{1}$ trivialler Weise gegen 1.
2. Fall $1 < a$
   Da die n.te Wurzel einer Zahl a größer als 1 auch immer größer gleich 1 sein muss gilt:
   $$1 \leq \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$$
   Mit dem Sandwichtheorem folgt:
   $$\lim_{n\to\infty} 1 \leq \sqrt[n]{a} < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$
   $$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1$$
   Die Folge $\sqrt[n]{a}$ konvergiert gegen 1.
3. Fall $1 > a > 0$
   Wie von Aufgabenblatt 4 bekannt, lässt sich eine reele Zahl $a \in \mathbb{R}^+$ beliebig nah durch eine rationale Zahl q mit $x, y \in \mathbb{N}$ nähern. Für alle unendlich viele, immer besser werdende Näherungen von a gilt:
   $$q = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$
   Der Grenzwert aller Folgen $(q_n)_n$ ist gleich 1, als Bruch aus zwei konvergenten Folgen, die beide nicht Null werden.
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \frac{1}{1}$$
   Da der Grenzwert der Folge $\sqrt[n]{a}$ für alle Näherungen von a gleich 1 ist, konvergiert die Folge gegen 1.

Es gilt für $a > 0$ konvergiert $\sqrt[n]{a} \to 1$ wenn $n \to \infty$

A 5.2

Wir definieren die Folgen

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Zu zeigen: $(a_n)_n$ ist monoton wachsend: Es muss gelten:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

Definition einsetzen:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

//

$$= \left(\frac{\frac{n+1+1}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} + \frac{-1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(1+\frac{-1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \geq \left(1+\frac{-n}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Mit der Bernoulli-Ungleichung nach unten abschätzen, da gilt $\frac{-1}{(n+1)^2} \geq -1$:

$$\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+}\right) \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}\right) > 1$$

$(a_n)_n$ ist damit monoton wachsend

Zu zeigen: $(b_n)_n$ ist monoton fallend: Es muss gelten:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1$$

Definition einsetzen und umformen:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Nach oben abschätzen mit der Bernoulli-Ungleichung $\frac{1}{n+1} > 0$

$$\leq \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n^2+2n+2}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}$$

$$a = (n+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{(a-1)\cdot(a+1)}{a^2} = \frac{a^2+a-a-1}{a^2} = \frac{a^2-1}{a^2} \leq 1$$

$(b_n)_n$ ist damit monoton fallend

Zu zeigen $(b_n)_n$ ist nach unten beschränkt: Abschätzen nach unten mit Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+(n+1)\frac{1}{n} = 1+\frac{n}{n}+\frac{1}{n} = 2+\frac{1}{n} > 2 > 0$$

Damit ist $(b_n)_n$ nach unten beschränkt und da auch monoton fallend, konvergent.

Zu zeigen $(a_n)_n$ ist nach unten beschränkt:
Dafür $a_n < b_n$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Da $(b_n)_n$ nach unten beschränkt und monoton fallend ist, ist $a_n < b_0$. Damit ist $(a_n)_n$ nach oben beschränkt und da auch auch monoton wachsend, konvergent.

Zu zeigen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergieren gegen den gleichen Grenzwert.
Equivalent ist: Zu zeigen die Folge $(c_n)_n$ $c_n = a_n - b_n$ ist eine Nullfolge.

$$\begin{aligned} c_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= a_n\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Da wir wissen, dass $(a_n)_n$ konvergiert und $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert, folgt, dass $(c_n)_n$ eine Nullfolge ist. $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergieren also gegen den gleichen Wert.

A 5.3

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$

$$\text{Zu zeigen: } \sqrt[n]{|x_n|} < q \Leftrightarrow \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|} < q$$

Wurzel umformen:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n*n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Bruch umformen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{e} = q < 1$$

Weil $\sqrt[n]{|x_n|} < q$ gegen $\frac{1}{e}$ konvergiert, folgt daraus, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{|x_n|} < q$ gilt. Die Vorraussetzungen für das Wurzelkriterium sind also erfüllt. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ konvergiert.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n+1}{n^3+n^2-n}$
Sei x_k die Folge der Reihe.

$$x_k = \frac{n^2 - 3n + 1}{n^3 + n^2 - n}$$

Mit Partialbruchzerlegung folgt:

$$\frac{2n-2}{n^2+n-1} - \frac{1}{n}$$

Durch umschreiben erhält man:

$$\frac{2n-2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} - \frac{1}{n}$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$

$$\text{Zu zeigen: } \sqrt[n]{|x_n|} < q \Leftrightarrow \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^n}\right|} < q$$

Wurzel umformen, x_n ist immer positiv:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < q$$

Weil $\sqrt[n]{|x_n|} < q$ gegen 0 konvergiert, folgt daraus, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{|x_n|} < q$ gilt. Die Vorraussetzungen für das Wurzelkriterium sind also erfüllt. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ konvergiert.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$

$$\text{Zu zeigen: } \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < q \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n!}{n^n}\right|} < q$$

Betragsstriche weggelassen, da alle Terme immer positiv sind und vereinfachen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n!}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^n (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Bruch umformen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{e} = q < 1$$

Weil $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ gegen $\frac{1}{e}$ konvergiert, folgt daraus, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq \mathbb{N}$ $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < q$ gilt. Die Vorraussetzungen für das Quotientenkriterium sind also erfüllt. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{9^{n-2}}$
Umformen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{9^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}2}{9^n \frac{1}{9^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n 2}{9^n \frac{1}{9^2}} + = \sum_{n=1}^{\infty} 162 \frac{4^n}{9^n} = 162 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{9^n}$$

Hierbei handelt es sich um die geometrische Reihe, diese Reihe konvergiert für hier $q = \frac{4}{9}$ gegen $\frac{1}{1-q} = 291{,}6$. Da diese Reihe aber nicht bei 0, sondern bei 1 startet müssen wir noch den ersten Term abziehen $291,6 - 162 * 1 = 129,6$ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{9^{n-2}}$ konvergiert also gegen $129,6$