

# Aufgabenblatt 4, Mathematik für Physiker 1

Florian Adamczyk, Finn Wagner

14.11.2021

## A 4.1

Zeigen sie mit Hilfe von Definition 2.24, dass die folgenden Folgen konvergieren. Definition 2.24 ist das Epsilonkriterium:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon \quad |x_n - x| < \epsilon \text{ mit } \epsilon \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

(i)  $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$

Behauptung: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert 0,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ .

Es soll also gelten:  $|a_n - 0| < \epsilon$  mit  $\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$  beliebig.

Da  $(-1)^n$  als Folge immer zwischen -1 und 1 wechselt ist ihr Betrag 1. Damit lässt sich die linke Seite wie folgt umformen.

$$|a_n - 0| = |a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$$

Es gilt nun also:

$$\frac{1}{n} < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

Das ist eine wahre Aussage. Diese ist equivalent zum Supremumsaxiom (Folgerungen aus dem Supremumsaxiom (c)) Also war die Behauptung wahr. 0 ist der Grenzwert und die Folge konvergiert.

(ii)  $b_n := \frac{3n+1}{2n-1}$

Behauptung: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert  $\frac{3}{2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$ .

Es soll also gelten:  $|b_n - \frac{3}{2}| < \frac{5}{2}\epsilon$  mit  $\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$  beliebig.

Wir formen die linke Seite wie folgt um:

$$\left| b_n - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right|$$

Erweitere  $\frac{3}{2}$  mit  $n - \frac{1}{2}$  und vereinfache:

$$= \left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3(n-\frac{1}{2})}{2(n-\frac{1}{2})} \right| = \left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3n-\frac{3}{2}}{2n-1} \right| = \left| \frac{3n+1-(3n-\frac{3}{2})}{2n-1} \right| = \left| \frac{\frac{5}{2}}{2n-1} \right|$$

Die Betragsstriche sind nicht notwendig, da  $2n-1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$= \left| \frac{\frac{5}{2}}{2n-1} \right| = \frac{\frac{5}{2}}{2n-1}$$

Wir schätzen nun nach oben ab.  $2n-1$  ist immer größer gleich als  $n$ . Damit ist  $\frac{1}{2n-1}$  immer kleiner gleich als  $\frac{1}{n}$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{2n-1} \leq \frac{\frac{5}{2}}{n}$$

Setzt man nun wieder in die Behauptung ein, so ergibt sich:

$$\frac{\frac{5}{2}}{n} \leq \frac{5}{2}\epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

Das ist eine wahre Aussage. Diese ist equivalent zum Supremumsaxiom (Folgerungen aus dem Supremumsaxiom (c)) Also war die Behauptung wahr.  $\frac{3}{2}$  ist der Grenzwert und die Folge konvergiert.

- (iii)  $c_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$  Behauptung: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert 0,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ .

Es soll also gelten:  $|c_n - 0| < \epsilon$  mit  $\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$  beliebig.

Wir wissen das  $\frac{1}{n}$  gegen 0 konvergiert. Also

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon^2 \text{ mit } \epsilon \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Nehmen wir nun diese Ungleichung und ziehen auf beiden Seiten die Wurzel, erhalten wir auf Grund der Monotonie der Wurzelfunktion:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon^2 &= \left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon^2 = \frac{1}{n} < \epsilon^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n}} < \sqrt{\epsilon^2} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}} < \epsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 < \epsilon = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \epsilon \end{aligned}$$

Was zu beweisen war. Damit ist der Grenzwert 0 und die Folge konvergiert.

## A 4.2

Sei  $M \in \mathbb{R}$  nichtleer und nach oben beschränkt, und sei  $s \in \mathbb{R}$ .

- (a) Zeigen Sie: Genau dann ist  $s = \sup M$ , wenn  $s$  eine obere Schranke von  $M$  ist und wenn eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $M$  existiert mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ .

Beweisen der Äquivalenz durch Folgerung der Aussagen in beide Richtungen.

**Es gilt  $s$  ist Supremum von  $M$ .**

Es folgt das  $s$  insbesondere auch eine obere Schranke von  $M$  ist.

1. Fall  $s$  ist ein Element von  $M$ , also  $s$  ist das Maximum von  $M$ .  
So existiert immer die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} := s$ , deren Elemente in  $M$  liegen und die gegen  $s$  konvergiert.
2. Fall  $s$  ist kein Element von  $M$ .  
Sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} := s - \frac{1}{n}$ . Die Folge  $(y_n)$  ist immer kleiner als  $s$  und konvergiert gegen  $s$ . Sei nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die gesuchte Folge. Für alle Elemente von  $x_n$  gelte  $x_n \in M$  und  $x_n > y_n$  für ein bestimmtes  $n$ .

**Zu zeigen:  $x_n$  ist immer definiert.**

Angenommen es gäbe kein Element in  $M$  das größer als  $y_n$  für ein bestimmtes  $n$  ist, so wäre  $y_n$  eine obere Schranke der Menge  $M$ . Da aber  $y_n$  gegen  $s$  konvergiert und damit immer kleiner als  $s$  ist, kann  $y_n$  keine obere Schranke sein, weil es kleiner ist als das Supremum  $s$ . Es folgt, dass  $x_n$  immer definiert ist.

Nun schätze man  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach unten und nach oben ab. Es gilt  $x_n \geq y_n$  da  $x_n$  per Konstruktion immer größer gewählt wurde. Außerdem ist  $x_n$  immer kleiner als  $s$ , da  $s$  kein Element der Menge  $M$  ist. Es folgt:

$$y_n \leq x_n \leq s$$

Wendet man nun Satz 2.27(f) (Sandwichtheorem) an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s - \frac{1}{n} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s \\ &\Rightarrow s \leq x \leq s \end{aligned}$$

Die Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen  $s$ .

Es folgt, dass  $s$  eine obere Schranke ist, und es eine Folge in der Menge gibt, die gegen  $s$  konvergiert.

Nun in die andere Richtung.

**Es gilt  $s$  ist eine obere Schranke von  $M$  und es existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$**

Angenommen  $s$  ist kein Supremum. So muss es eine obere Schranke geben die kleiner als  $s$  ist. Dieses Supremum nennen wir  $k$ .

$$k < s \Rightarrow k + \epsilon_0 = s \text{ mit } \epsilon_0 > 0$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_0 = s - k$$

Da es eine Folge gibt deren Folgenglieder in  $M$  liegen und diese Folge gegen  $s$  konvergiert gilt:

$$\exists N_{\epsilon_0} \in \mathbb{N} \forall n \geq N_{\epsilon_0} |x_n - s| < \epsilon_0$$

Setzen wir nun unser festes  $\epsilon_0$  ein, so folgt:

$$|x_n - s| < \epsilon_0 \Leftrightarrow |x_n - s| < s - k$$

1. Fall  $x_n$  ist größer als  $s$   
Das ist ein Widerspruch, da  $k$  als Supremum angenommen wurde ( $s > k$ ), ein Element der Menge kann nicht größer als das Supremum sein.
2. Fall  $x_n$  ist kleiner gleich  $s$   
Man ersetze die Betragsstriche mit einem Minus.

$$\begin{aligned} |x_n - s| < s - k &\Leftrightarrow -(x_n - s) < s - k \\ \Leftrightarrow -x_n + s < s - k &\Leftrightarrow -x_n < -k \\ &\Leftrightarrow x_n > k \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, da  $k$  als Supremum angenommen wurde, ein Element der Menge kann nicht größer als das Supremum sein.

Es folgt, dass es keine kleinere Schranke als geben kann.  $s$  ist also das Supremum.

- (b) Wenn die Menge unendlich viele Elemente hat, können Sie dann die Folge aus (a) so wählen, dass  $x_n < x_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt?  
Angenommen, eine solche Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  würde existieren. Wähle die Menge  $M = [0, 1] \cup 2$

Angenommen die 2 ist ein Folgenglied von  $(x_n)$ . Nach Folgendefinition muss aber das nächste Element der Folge echt größer sein als 2. Dieses Element läge nicht mehr in der Menge. Die 2 ist also kein Folgenglied.

Alle Folgenglieder sind also kleiner gleich 1.

Die Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen das Supremum von M, hier 2. In mathematischer Notation:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon : |x_n - 2| < \epsilon$$

Wähle  $\epsilon = 0,5$ :

$$|x_n - 2| < \epsilon \Rightarrow |x_n - 2| < 0,5$$

Da alle  $x_n$  kleiner gleich 1 sind, lässt sich der Betrag durch ein Minus umschreiben:

$$-(x_n - 2) < 0,5 \Leftrightarrow -x_n - 2 < 0,5 \Leftrightarrow -x_n < 2,5 \Leftrightarrow x_n > 2,5$$

Da alle  $x_n$  kleiner gleich 1 sind kann  $x_n$  nicht größer sein als 2,5. Nein, man kann die Folge nicht streng monoton wachsend wählen.

## A 4.3

- (i) Konvergieren die folgenden Folgen. Wenn ja berechnen Sie auch den Grenzwert.

$$a_n = \frac{5n^5 + 4n^3 - n + 5}{10n^5 + n^2 - n + 100}$$

Ausklammern von  $n^5$

$$\frac{5n^5 + 4n^3 - n + 5}{10n^5 + n^2 - n + 100} = \frac{n^5}{n^5} \left( \frac{5 + 4\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + 5\frac{1}{n^5}}{10 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + 100\frac{1}{n^5}} \right) = \frac{5 + 4\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + 5\frac{1}{n^5}}{10 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + 100\frac{1}{n^5}}$$

Wir wissen das  $\frac{1}{n}$  gegen 0 konvergiert. Mit Satz 2.27(e) folgt daraus dass auch  $\frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$  gegen 0 konvergiert. Ebenso alle weiteren Folgen  $n^{-x}$ . Mit Satz 2.27(c) und Satz 2.27(e) folgt das eine Summe von  $\lambda n^{-x}$  ebenfalls gegen Null konvergiert. Bildet man nun den Grenzwert von  $a_n$  so gehen alle Terme außer der 5 und der 10 gegen Null. Der Grenzwert ist also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 4\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + 5\frac{1}{n^5}}{10 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + 100\frac{1}{n^5}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Die Folge konvergiert gegen ein Halb.

$$b_n := \frac{n^2}{2^n}$$

Die Folge  $b_n$  lässt sich nach unten abschätzen gegen 0, da sowohl Nenner als auch Zähler immer größer als 0 sind. Außerdem lässt sie sich nach oben abschätzen. Nach Lemma 2 ist  $2^n$  immer größer als  $n^3$  für  $n$  genügend groß.  $\frac{1}{2^n}$  ist also immer kleiner als  $\frac{1}{n^3}$ . Schätzt man also nach oben ab ergibt sich.

$$\frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

Die Folge  $\frac{1}{n}$  geht gegen 0. Nach dem Sandwichtheorem Satz 2.27(f) gilt also:

$$0 \leq b_n \leq \frac{1}{n}$$

$b_n$  konvergiert also gegen 0.

- (ii) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Fibonacci-Folge, also  $a_1 = a_2 := 1$  und für  $n \geq 3$  ist  $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ . Wir definieren nun

$$u_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen ein  $u \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie  $u$ .

Wir fangen an und formen die Definition der Folge um. Wir setzen die Definition für  $a_{n+1}$  ein und vereinfachen.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Wir wollen nun die Definition von  $u_n$  wieder einsetzen um  $u_n$  rekursiv zu definieren.

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$$

Da  $u_n$  gegen  $u$  konvergiert, konvergiert auch  $u_{n-1}$  gegen  $u$ . Wir bilden auf beiden Seiten den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{u_{n-1}} \\ \Leftrightarrow u &= 1 + \frac{1}{u} \quad | \cdot u \\ \Leftrightarrow 0 &= -u + 1 + \frac{1}{u} \quad | \cdot u \\ \Leftrightarrow 0 &= -u^2 + u + 1 \quad | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow 0 &= u^2 - u - 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich mit der pq-Formel lösen.

$$\begin{aligned} u_1, u_2 &= -\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)} \\ \Leftrightarrow u_1, u_2 &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \\ \Leftrightarrow u_1, u_2 &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Da  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  negativ ist, die Folge aber aus Konstruktion nicht negativ werden kann, ist der Grenzwert  $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

## A 4.4

Gibt es Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass:

- (i) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gibt es eine Teilfolge  $(x_{n_k})$ , sodass  $x_{n_k} \rightarrow x$  für  $k \rightarrow \infty$ . Wähle  $x_n$  als Folge von rationalen Zahlen nach dem Cantorsches Diagonalargument. Bilde die Teilfolge von  $(x_n)$  die gegen  $x$  konvergiert wie folgt: Wähle für das  $k$ .te Folgenglied ein Folgenglied aus  $x_n$  das hinter dem  $(k-1)$ .ten Folgenglied in  $x$  kommt. Für das erste Folgenglied wähle beliebig. Zusätzlich muss jedes Folgenglied von  $(x_{n_k})$  die Bedingung  $x - \frac{1}{k} < x_{n_k} < x + \frac{1}{k}$  erfüllen.

**Zu zeigen  $x_{n_k}$  ist immer definiert**

Da es nach Lemma 4 unendlich viele rationale Zahlen gibt, mit denen man mit

beliebig Genauigkeit  $x_{n_k}$  approximieren kann, liegt auch immer einer dieser Zahlen im gegebenen Intervall um  $x_{n_k}$ . Diese Zahl oder eine ihrer unendlich vielen besseren Approximation liegt damit auch in  $(x_n)$  nach der  $(k-1)$ .ten Stelle. Das es vor  $x_{n_{(k-1)}}$  nur endlich viele Zahlen in  $(x_n)$  gibt.

Jedes Folgenglied von  $(x_{n_k})$  liegt nach Konstruktion zwischen den beiden Werten der Folgen  $(x - \frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(x + \frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Beide Folgen konvergieren, da sie nur eine Summe aus Konstante und der Folge  $\frac{1}{n}$  sind gegen  $x$ .

Wendet man nun Satz 2.27(f) (Sandwichtheorem) an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x - \frac{1}{k} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x + \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow x \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq x \end{aligned}$$

Die Folge  $(x_{n_k})$  konvergiert gegen  $x$ . Somit gibt es eine Folge deren Teilfolgen gegen jeden Wert  $x \in \mathbb{R}$  konvergieren.

- (ii) Für alle  $x \in (0, 1)$  gibt es eine Teilfolge  $(x_{n_k})$ , sodass  $x_{n_k} \rightarrow x$  für  $k \rightarrow \infty$ , aber für  $y \notin (0, 1)$  existiert keine solche Teilfolge.

Angenommen es gäbe eine solche Folge  $x_n$ . Sei  $M := \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$

Analog zur Aufgabe A 4.2 (a) lässt sich die Aussage  $s = \inf M \Leftrightarrow s$  ist unter Schranke und es existiert eine Folge  $x_n$  in  $M$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$  zeigen.

Zu zeigen: 0 ist Infimum von  $M$ :

0 ist untere Schranke ist trivial, die Null ist immer kleiner gleich dem Betrag eines Wertes.

Zu zeigen: Für jedes  $\epsilon > 0$  existiert ein  $m \in M$ , sodass gilt  $|m - 0| < \epsilon$

Es gibt nach Voraussetzung immer eine Teilfolge von  $(x_n)$  gibt die gegen einen Wert  $\frac{\epsilon}{2}$  konvergiert. Daraus folgt:

$$\exists N_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_{\frac{\epsilon}{2}} : |m - \frac{\epsilon}{2}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Also ist  $|m - \frac{\epsilon}{2}| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |m| < \epsilon$

1. Fall  $m \geq \frac{\epsilon}{2}$

In diesem Fall kann man die Betragsstriche weglassen.

$$m - \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} \Leftrightarrow m < \epsilon$$

2. Fall  $m < \frac{\epsilon}{2}$

$m \in M$ , damit ist  $m$  positiv. Deswegen ist  $m$  auch insbesondere kleiner als  $\epsilon$

Null ist also das Infimum von  $M$ .

Nach A 4.2 (a) existiert eine Folge  $(y_n)$  in  $M$  deren Grenzwert Null ist.

Daraus kann man eine Teilfolge  $(z_n)$  konstruieren.

$z_1 = y_1$  und  $z_{n+1} :=$  ist das erste Element von  $y_n$  das hinter  $z_n$  in den Folgengliedern von  $(x_n)$  ist.

Da es vor  $z_n$  nur endlich viele Elemente in  $(x_n)$  gab, muss es ein Element aus  $y_n$  geben, was den Kriterien entspricht.

Daraus folgt das es eine Teilfolge von  $(x_n)$  gibt, die gegen Null geht. Das ist eine Widerspruch.

### Lemma 1

$$2n - 1 \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Die Aussage beweisen wir mit vollständiger Induktion.

**Induktionsanfang**  $n = 1$

$$2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = n$$

**Induktionsannahme:**

$$2n - 1 \geq n \Rightarrow 2(n + 1) - 1 \geq (n + 1)$$

**Induktionsschritt:**

Wir zeigen, dass die Aussage für  $n + 1$  gilt, indem wir sie zu einer wahren Aussage führen.

$$\begin{aligned} 2(n + 1) - 1 &\geq n + 1 \\ \Leftrightarrow 2n + 2 - 1 &\geq n + 1 \\ \Leftrightarrow 2n + 1 &\geq n + 1 \\ \Leftrightarrow 2n &\geq n \\ \Leftrightarrow 2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Durch Umformungen erhalten wir eine wahre Aussage. Damit ist bewiesen das  $2n - 1$  immer größer gleich als  $n$  ist.

**Lemma 2**

$$n^3 \leq 2^n \text{ für } n \geq 10$$

Die Aussage beweisen wir mit vollständiger Induktion.

**Induktionsanfang**  $n = 10$

$$10^3 = 1000 \leq 1024 = 2^{10}$$

**Induktionsannahme:**

$$n^3 \leq 2^n \Rightarrow (n + 1)^3 \leq 2^{n+1} \text{ für } n \geq 10$$

**Induktionsschritt:**

Klammern auflösen

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 &\leq 2^{n+1} \\ \Leftrightarrow (n + 1)^3 &\leq 2 \cdot 2^n \\ \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\leq 2 \cdot 2^n \end{aligned}$$

Nach Lemma 3 lässt sich  $3n^2 + 3n + 1$  nach oben gegen  $n^3$  abschätzen.

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + n^3$$

Nach Induktionsannahme kann man  $n^3$  nach oben gegen  $2^n$  abschätzen.

$$n^3 + n^3 = 2n^3 \leq 2 \cdot 2^n \leq 2^{n+1}$$

Es gilt also insgesamt:

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + n^3 = 2n^3 \leq 2 \cdot 2^n \leq 2^{n+1}$$

Was zu beweisen war. Damit gilt die Anfangsausagen nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

**Lemma 3**

$$n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1 \text{ für } n \geq 10$$

Die Aussage beweisen wir mit vollständiger Induktion.

**Induktionsanfang**  $n = 10$

$$10^3 = 1000 \geq 331 = 300 + 30 + 1 = 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$$

**Induktionsannahme:**

$$n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1 \Rightarrow (n+1)^3 \geq 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 \text{ für } n \geq 10$$

**Induktionsschritt:**

Klammern auflösen:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &\geq 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 \\ \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\geq (n^2 + 2n + 1) + (3n + 1) + 1 \\ \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\geq n^2 + 5n + 3 \quad | -3n^2, -3n, -1 \\ \Leftrightarrow n^3 &\geq -3n^2 \end{aligned}$$

Weil  $n \in \mathbb{N}$  ist  $3n^2$  immer größer 0. Und  $-3n^2$  immer kleiner 0.  $n^3 \geq -3n^2$  ist also eine wahre Aussage. Somit gilt die Induktion.

**Lemma 4** Zu zeigen: jede reelle Zahl lässt sich beliebig nah durch beliebig viele verschiedene rationale Zahlen immer besser approximieren.

Es gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} \exists q_{\epsilon, x} \in \mathbb{Q} : |q_{\epsilon, x} - x| < \epsilon$$

Eine reelle Zahl lässt sich beliebig nah durch eine rationale Zahl approximieren.

Aus dieser Aussage folgt die Existenz einer reellen Zahl  $q_1$

Nun sei der Abstand von  $q_1$  zu  $x$ :  $|q_1 - x| =: \epsilon_1$

Setzt man dieses Epsilon nun in die Aussage ein, so erhält man:  $|q_2 - x| < \epsilon_1$

Dieses  $q_2$  ist echt kleiner als  $q_1$ , da gilt:  $|q_2 - x| < \epsilon_1 \Leftrightarrow |q_2 - x| < |q_1 - x|$

Durch beliebig oft wiederholtes Anwenden dieser zwei Schritte, erhält man eine Folge von  $q \in \mathbb{Q}$  die sich  $x$  immer weiter annähert.