Aufgabenblatt 1, Mathematik für Physiker 1

Finn Jannik Wagner

21.10.2021

1 A1.1

Es ist zu zeigen das $(M\Delta N)\Delta(N\Delta P) = M\Delta P$ gilt.
$A := (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, $B := M\Delta P$

1.1 Hierzu eine Fallunterscheidung:

1. Fall $x \notin M, N, P$ Ist x in keiner der drei Menge, so ist es weder in A noch B

2. Fall $x \in M \wedge x \notin N, P$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es weder in N noch in P ist.
   $\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.

   Damit gilt $x \in A, B$

3. Fall $x \in P \wedge x \notin M, N$
   Dieser Fall ist equivalent zu Fall 2

4. Fall $x \in N \wedge x \notin M, N$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \notin (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es weder in M noch P ist.

   Damit gilt $x \notin A, B$

5. Fall $x \in M, N \wedge x \notin P$
   $\Rightarrow x \notin M\Delta N$, weil es in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nur in $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nur in M ist.

   Damit gilt $x \in A, B$

6. Fall $x \in M, P \wedge x \notin N$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nur in M ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nur in P ist.
   $\Rightarrow x \notin (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es in $M\Delta N$ und $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \notin M\Delta P$, weil es in M und P ist.

   Damit gilt $x \notin A, B$

7. Fall $x \in N, P \wedge x \notin M$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nur in N ist.
   $\Rightarrow x \notin N\Delta P$, weil es in N und P ist.
   $\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nur in $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nur in P ist.

   Damit gilt $x \in A, B$

8. Fall $x \in M, P, N$
   $\Rightarrow x \notin M\Delta N$, weil es in M und N ist.
   $\Rightarrow x \notin N\Delta P$, weil es in N und P ist.
   $\Rightarrow x \notin (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es weder in $M\Delta N$ noch in $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \notin M\Delta P$, weil es in M und P ist.

   Damit gilt $x \notin A, B$

$\Rightarrow$ Da in allen acht möglichen Fällen wie ein Element x in den Mengen verteilt ist die Operationen A und B zum gleichen Ergebnis kommen sind sie gleich.

2 1.1

2.1 $M \cap (N\Delta P) = (M \cap N)\Delta(M \cap N)$

Zu zeigen: $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$
Füge beiden Seiten $A \cap B$ hinzu.
$\Rightarrow (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \cup (A \cap B) = (A \cup B)\backslash(A \cap B) \cup (A \cap B)$
$\Rightarrow (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \cup (A \cap B) = (A \cup B)$
Mit Assoziativgesetz $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$
$\Rightarrow (A\backslash B) \cup (B\backslash(A\backslash A)) = (A \cup B)$
$\Rightarrow (A\backslash B) \cup B = (A \cup B)$
$\Rightarrow (A \cup B) = (A \cup B)$

Zu zeigen: $M \cap (N\Delta P) = (M \cap N)\Delta(M \cap P)$
$\Rightarrow M \cap (N\Delta P) = ((M \cap N)\backslash(N \cap P)) \cup ((M \cap P)\backslash(M \cap P))$
Assoziativgesetz: Klammern bei Schnittmengen irrelevant
$\Rightarrow M \cap ((N \cup P)\backslash(N \cap P)) = M \cap (N\backslash P \cap P\backslash N)$
$\Rightarrow M \cap ((N \cup P)\backslash(N \cap P)) = M \cap N\backslash P \cap P\backslash N$
$\Rightarrow (M \cap N) \cup (M \cap P)\ ((M \cap N) \cap (N \cap P))$
$\Rightarrow (M \cap N) \cup (M \cap P)\ (M \cap N \cap P)$
Mit Distributivgesetz ?
$\Rightarrow M \cap (N \cup P\backslash N \cap P)$
Mit alternativer Definition der symmmetrischen Differenz
$\Rightarrow N\Delta P$

3 2.1

3.1 (i)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Die Spalten vier und sieben sind für alle Wertekombinationen von A und B gleich. $\Rightarrow \neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ sind equivalent.

3.2 (ii)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Die Spalten vier und sieben sind für alle Wertekombinationen von A und B gleich. $\Rightarrow \neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ sind equivalent.