MATHEMATISCHE METHODEN

Dr. Michael Czerner Bearbeitungszeit: 180 min.

Name:

Matrikel-Nr.:

Studienfach:

Klausurnummer:

Platznummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe	100%	Note
max	6	6	10	12	8	14	8	14	8	14	100	95	

Aufgabe 1: Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + x^2}{4 \sin(3x) + 2x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

Aufgabe 2: Ableitungen

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen:

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \sin(u)^2$

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos(x)\, x^2\, \mathrm{e}^{3x}$

c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{3x^2}$

Aufgabe 3: Vektorrechnung

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des $\mathbb{R}^3$ mit den Einträgen $a_k = 2k - 4$ und $b_k = (k-1)^3$.

a) Wie lauten die Vektoren als Tripel reeller Zahlen $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$?

b) Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ und das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

c) Wie lässt sich der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen?

d) Berechnen Sie den Betrag von $\vec{a}$. Normieren sie $\vec{a}$ anschließend.

e) Berechnen Sie den Anteil von $\vec{b}$, der parallel zu $\vec{a}$ steht.

f) Berechnen Sie den Anteil von $\vec{b}$, der orthogonal zu $\vec{a}$ steht.

Aufgabe 4:

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ immer eindeutig lösbar ist. *(2 Punkte)*

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *(5 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren. *(5 Punkte)*

Aufgabe 5: Drehimpuls

Berechnen Sie den Drehimpuls $\vec{L}(t)$ eines Teilchens der Masse m und der Bahnkurve $\vec{r}(t)$, die gegeben ist als

$$\vec{r}(t) = l_0 \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ 0 \\ \sin\omega t \end{pmatrix}.$$

Dabei ist der Drehimpuls definiert als

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) \quad \text{mit dem Impuls} \quad \vec{p}(t) = m\dot{\vec{r}}(t).$$

Aufgabe 6: Lineare Algebra

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Konstruieren Sie einen Vektor $\vec{c}$, der orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht und normiert ist. Bilden diese drei Vektoren eine Basis?

b) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird?

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Indexschreibweise für beliebige Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$:
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{b})$

Hinweis: $\sum_j \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmj} = \delta_{im}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{km}$

Aufgabe 7: Orthogonale Transformation

Gegegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die Matrix $B = D^T AD$, wobei D eine $n \times n$ orthogonale Transformation beschreibt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) $\mathrm{Tr}\big[B\,\big] = \mathrm{Tr}\big[A\,\big]$

b) $\det(B) = \det(A)$

Dabei steht $\mathrm{Tr}\big[A\,\big]$ für die Spur der Matrix A, die definiert ist als die Summe der Diagonalelemente. Es gilt also: $\mathrm{Tr}\big[A\,\big] = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

Aufgabe 8:

Gegeben sei das folgende Kraftfeld:

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4\beta x^3 z^2 \\ \gamma y^2 + \alpha y z^3 \\ \beta x^4 + \frac{3}{2}\alpha y^2 z^2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $\nabla \times \vec{F}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Berechnen Sie die Arbeit entlang folgender Wege:

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Welche(n) Parameter muss man wie wählen, damit die Arbeit wegunabhängig wird?

d) Berechnen Sie für den Fall, dass $\vec{F}$ konservativ ist, das Potential ϕ so, dass $\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 42$.

Aufgabe 9:

Der Gradient eines Vektorfeldes $\vec{A}$ ergibt eine Matrix C mit den Einträgen $C_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} A_j$.
Für das Produkt dieser Matrix mit dem Vektorfeld gilt also folgende Relation (die hier gegeben sei):

$$\left(C \cdot \vec{A}\right)_i = \sum_j C_{ij} A_j = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} A_j\right) A_j$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$C \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\vec{A} \cdot \vec{A}\right)$$

Aufgabe 10: Volumenintegrale

Integrieren Sie:

a) Das Skalarfeld $\phi(x, y, z) = xz\sin(x + y)$ über einen Würfel der Kantenlänge 1 mit Eckpunkten in
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) Das Skalarfeld $\tau(\rho, \phi, z) = z + \phi \sin(\phi^2)$ über einen Zylinder mit Höhe und Radius 1, dessen Grundfläche in der x-y-Ebene liegt, wobei der Mittelpunkt der Grundfläche im Ursprung liegen soll.

c) Das Skalarfeld $\gamma(r, \theta, \phi) = \mathrm{e}^r \theta \sin\phi$ über eine im Ursprung zentrierte Kugel mit Radius 1.