Aufgabenblatt 3, Mathematik für Physiker 1

Florian Adamczyk, Finn Wagner

28.10.2021

A 3.1

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(a)

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\ 0$$
$$\Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2x^2}{2} + \frac{b^2}{2x^2} \mid * 2$$
$$\Leftrightarrow 2ab \leq a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} \mid -2ab$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} - 2ab \mid \text{mit } x^2 \text{ erweitert}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{a^2x^4}{x^2} + \frac{-2abx^2}{x^2} + \frac{b^2}{x^2}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{x^2}(a^2x^4 - 2abx^2 + b^2) \mid * x^2 \text{ Binomische Formel}|$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq (ax^2 - b)^2$$

Ein Quadrat ist immer größer gleich Null

(b)

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2 \mid *!2$$
$$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ac \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

Umformen mit: $-2ab - 2bc - 2ac$ und Umsortieren

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2)$$

2.te Binomische Formel anwenden:

$$\Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2$$

Ein Quadrat ist immer größer gleich Null.

Eine Summe aus Quadrate ist ebenfalls immer größer gleich Null

(c)

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow^{!} \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

1. Richtung

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a * (b+d) < b * (a+c)$$
$$\Leftrightarrow ab + ad < ba + bc \mid -ab$$
$$\Leftrightarrow ad < bc \mid /b \,/d$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

2. Richtung

$$\frac{a+c}{b+d} <^{!} \frac{ad}{cb} \Leftrightarrow (a+c) * d < (b+d) * c$$
$$\Leftrightarrow ad + cd < bc + dc \mid -cd$$
$$\Leftrightarrow ad < bc \mid /b \,/d$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

(d) Summe macht Flo

A 3.2

(a)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > -1$ gilt die Bernoulische Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Induktionsanfang mit $n = 0$:

$$1 + x^0 \geq 1 \geq 1 + 0x$$

Induktionsschritt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$
$$\Rightarrow (1+x)^n * (1+x) \geq 1 + nx + x$$

Anwenden der Inuktionsvorraussetzung

$$\Rightarrow (1+x)^n * (1+x) \geq (1+nx) * (1+x)$$

Ausmultiplizieren

$$\Rightarrow (1+nx) * (1+x) = 1 + nx + nx^2$$
$$\Rightarrow 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + nx + x \mid -x - nx - 1$$
$$\Rightarrow nx^2 \geq 0$$

Ein Quadrat ist immer größer gleich Null

Da Induktionsanfang und Schritt gelten,
ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gültig

(b)

$$q \in \mathbb{R}, q \neq 1;\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Induktionsafang mit $n = 0:$

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

Induktionsschritt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$$\Leftrightarrow q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}*q}{1-q} \mid -q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}*q}{1-q} - q^{n+1} \mid \text{Letzten Summand erweitern}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}*q}{1-q} - \frac{q^{n+1}*(1-q)}{1-q}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}*q}{1-q} - \frac{q^{n+1}-q^{n+1}*q}{1-q}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}*q-q^{n+1}+q^{n+1}*q}{1-q}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Da Induktionsanfang und Schritt gelten,
ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gültig

(c)

$$n \in \mathbb{N}\{0\}\ n! \leq 4 * \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$$

Induktionsafang mit $n = 1:$

$$1! = 1 = 4 * \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1} = 4 * \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = 1$$

Induktionsschritt

$$n! \leq 4 * \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow (n+1)! \leq 4 * \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+2}$$

$$(n+1)! = n! * (n+1)$$

Verwenden der Induktionsannahme

$$\Rightarrow n! * (n+1) \leq 4 * \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} * (n+1)$$

Als Hilfsterm: $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \geq 2\ \forall n \in \mathbb{N}$

Da gilt: $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \Rightarrow^{\text{Bernoulli Ungleichung}} 1 + \frac{n+1}{n}$

$\frac{n+1}{n}$ ist immer größer gleich 1 für $n \in \mathbb{N}$. Dieser Wert +1 ist also größer als 2

$$\Rightarrow \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{2} \geq 1$$

Abschätzen nach oben mit Faktor größer gleich 1

$$4 * \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} * (n+1) \leq 4 * \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} * (n+1) * \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{2}$$

Vereinfachen

$$= 4 * \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} * (1 + \frac{1}{n})^{n+1} * \frac{(n+1)}{2}$$

Vereinfachen

$$= 4 * \left(\frac{n}{2} * (1 + \frac{1}{n})\right)^{n+1} * \frac{(n+1)}{2}$$

Ausmultiplizieren

$$= 4 * \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n+1} * \frac{(n+1)}{2}$$

Vereinfachen

$$= 4 * \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} * \frac{(n+1)}{2}$$

Faktor einklammern

$$= 4 * \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+2}$$

Damit gilt der Induktionsschritt

Da Induktionsanfang und Schritt gelten,
ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gültig

A 3.3

(a)

$$M_1 = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

Zu zeigen: 1 ist eine obere Schranke von M_1

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 \; \forall n \in \mathbb{N} \text{ Es folgt} 0 \leq \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ 1 ist eine obere Schranke von M_1

Zu zeigen: 1 ist die kleinste obere Schranke von M_1

Angenommen 1 wäre nicht die kleinste obere Schranke,

so gäbe es eine kleinere im Abstandϵ

Sei $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \epsilon \Rightarrow \epsilon \leq \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Nach Lemma 2.18 gilt aber $\epsilon \leq 0$ Das ist aber ein Wiederspruch, da $\epsilon > 0$

$\Rightarrow$ Somit war die Annahme falsch, es gibt keine kleinere obere Schranke.

1 ist das Supremum von M_1

Zu zeigen: 1 ist Maximum von M_1

$$1 - \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow 1 = 0$$

Die Annahme war falsch M_1 hat kein Maximum

Zu zeigen: 0 ist eine untere Schranke von M_1

$$0 \leq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq n$$

Alle natürliche Zahlen sind größer gleich 1

0 ist eine untere Schranke von M_1

Zu zeigen: 0 ist die größte untere Schranke von M_1

Angenommen 0 wäre nicht die größte untere Schranke,

so gäbe es eine größere im Abstandϵ

Sei $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$

$$0 + \epsilon \leq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \epsilon + \frac{1}{n} \leq 1$$

Sei $n = 1$

$$\Rightarrow \epsilon + 1 = 1 \Rightarrow \epsilon = 0$$

Da ϵ größer als Null sein muss ist dies ein Wiederspruch

$\Rightarrow$ Somit war die Annahme falsch, es gibt keine größere untere Schranke.

0 ist das Infimum von M_1

Zu zeigen: 0 ist Minimum von M_1

$$0 = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow n = 1$$

0 ist Minimum von M_1

Die Menge M_1 ist nach oben beschränkt und hat in 1 ein Supremum, jedoch kein Maximum.
Die Menge ist außerdem nach unten beschränkt und hat in 0 ein Infimum und Minimum

(b)

$$M_2 = \{t \in \mathbb{R}, \text{t ist obere Schranke von } M_1\}$$

In (a) haben wir das Supremum von M_1 als 1 festgestellt. Jede weitere obere Schranke muss also größer sein als 1. Die Menge lässt sich umbschreiben als:

$$M_2 = \{x \geq 1,\ x \in \mathbb{R}\}$$

Und das wiederum als:

$$[1, \inf)$$

Die Menge M_2 ist also nach Definition nach unten beschränkt mit dem Supremum von M_1, 1 ist damit Infimum und da es in der Menge liegt auch Minimum von M_2. M_2 ist aber nicht nach oben beschränkt, da eine obere Schranke beliebig viel größer sein kann als das Supremum. Oder trivial abzulesen aus der Intervallschreibweise.

(c)

$$M_3 = \{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n : n \in \mathbb{N}\}$$

Zu zeigen: 1 ist eine obere Schranke von M_3

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1\,\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow 0 < 1$$

$\Rightarrow$ 1 ist eine obere Schranke von M_3

Zu zeigen: 1 ist die kleinste obere Schranke von M_3

Angenommen 1 wäre nicht die kleinste obere Schranke,

so gäbe es eine kleinere im Abstandϵ

Sei $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 - \epsilon$$

Anwenden der Bernoulli-Ungleichung

$$1 - \epsilon \geq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n * \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 1 - \epsilon \geq 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \geq \epsilon\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Nach Lemma 2.18 gilt aber $\epsilon \leq 0$ Das ist aber ein Wiederspruch, da $\epsilon > 0$

$\Rightarrow$ Somit war die Annahme falsch, es gibt keine kleinere obere Schranke.

1 ist das Supremum von M_3

Zu zeigen: 1 ist Maximum von M_3

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} = 1$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n^2 = 0 \Rightarrow n = 0$$

n kann nicht null sein da in der Definition von M_3 durch n geteilt wird.

Die Annahme war falsch M_3 hat kein Maximum

Zu zeigen: 0 ist eine untere Schranke von M_3

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq n^2 \Rightarrow 1 \leq n$$

Alle natürliche Zahlen sind größer gleich 1

0 ist eine untere Schranke von M_1

Zu zeigen: 0 ist die größte untere Schranke von M_3

Angenommen 0 wäre nicht die größte untere Schranke,

so gäbe es eine größere im Abstandϵ

Sei $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$

$$0 + \epsilon \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \text{Sei } n = 1$$

$$\Rightarrow 0 + \epsilon \leq \left(1 - \frac{1}{1^2}\right)^1$$

$$\Rightarrow \epsilon \leq 0^1 \Rightarrow \epsilon \leq 0$$

Da ϵ größer als Null sein muss ist dies ein Wiederspruch

$\Rightarrow$ Somit war die Annahme falsch, es gibt keine größere untere Schranke.

0 ist das Infimum von M_3

Zu zeigen: 0 ist Minimum von M_3

$$0 = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \Rightarrow 0 = 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} = 1 \Rightarrow 1 = n^2 \Rightarrow n = 10 \text{ ist Minimum von } M_3$$

Die Menge M_3 ist nach oben beschränkt und hat in 1 ein Supremum, jedoch kein Maximum. Die Menge ist außerdem nach unten beschränkt und hat in 0 ein Infimum und Minimum