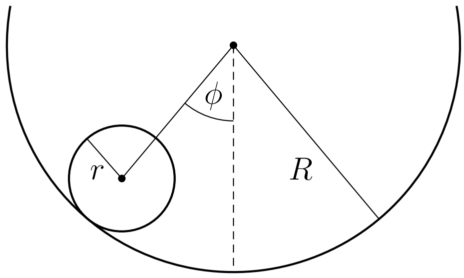
29.11.2021 HAUSAUFGABENBLATT 6 WS 2021/22

MATHEMATISCHE METHODEN

Dr. Michael Czerner Abgabetermin 06.12.2021

Aufgabe 1: Rollender Zylinder

Ein kleiner Zylinder mit Radius r und Masse m rolle ohne Schlupf, d.h. nicht gleitend, aber mit ansonsten vernachlässigbarer Reibung, auf der Innenseite eines größeren, liegenden, Hohlzylinders mit Radius R.
Auf der Seite des kleineren Zylinders befinde sich ein Punkt. Parametrisieren Sie die Raumkurve des Punkts, wenn der kleine Zylinder auf der Innenseite des größeren entlang rollt.



Aufgabe 2: Totales Differential

Geben Sie die totalen Differentiale der folgenden beiden Funktionen an:

a) $g(x, y) = y\mathrm{e}^x + x\ln(y)$

b) $h(x, y, z) = axy + bxz + cyz$

Aufgabe 3: Ableitungen und Vektorfelder

a) (i) Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{A} = \frac{1}{r}(\alpha \vec{e_z} \times \vec{r})$. Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial x}\vec{A}$ und skizzieren Sie $\vec{A}$ in der x-y-Ebene.

(ii) Handelt es sich bei folgendem Ausdruck um ein totales Differential?
$\mathrm{d}f = \frac{2y^3}{x}\mathrm{d}x + 3y^2\ln(x^2)\mathrm{d}y$

(iii) Bilden Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ für
$f(x, y) = \sin(x)\sqrt{x^4 + 3x^2 + 7} + x^2 y$.

(iv) Eine physikalische Größe ist gegeben als $f(x, y) = ax^2y + by + ct^2$ mit $x(t) = 2t$ und $y(t) = 3t^2$. Wie müssen a, b und c gewählt werden, damit $f(x, y)$ eine Erhaltungsgröße ist?

(v) Bilden Sie $\nabla(x^2 + 2yz)$.

b) Gegeben sei das Coulomb-Potential eines Elektrons

$$\phi(\vec{r}) = \phi(x, y, z) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Es sei weiter $r > 0$.

(i) Berechnen Sie $\vec{\nabla}\phi$.

(ii) Berechnen Sie nun $\Delta\phi$.

(iii) Es sei eine Bahnkurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\theta(t)) \\ a\sin(\theta(t)) \\ ht \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ und $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ (*Hinweis*: Betrachten Sie die totale Ableitung nach der Zeit).

Aufgabe 4: Nützliche Relationen

$\vec{A}$ sei ein Vektorfeld und ϕ ein skalares Feld. Zeigen Sie die folgenden Relationen mit Hilfe des Indexkalküls:

a) $\nabla \times (\phi\vec{A}) = \phi\nabla \times \vec{A} + (\nabla\phi) \times \vec{A}$

b) $\nabla \times (f(r)\vec{r}) = 0$

c) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Aufgabe 5: Gradient, Divergenz und Rotation

Berechnen Sie den Gradienten des Feldes $\dfrac{xy}{z^2+1}$.
Berechnen Sie nun jeweils die Rotation und die Divergenz der folgenden drei Felder:

a) $\vec{A}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin(2y) \\ \cos(2x) \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{A}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{A}_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + 4z^3 \\ 2x^2y \\ 12xz^2 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie das skalare Feld $f_3(x,y,z)$, zu dem das Vektorfeld $\vec{A}_3$ den Gradienten bildet.