Panagiotis Konstantis
Tim Fiernkranz

Mathematik für Physiker 1
Aufgabenblatt 14

Abgabe: 15.02.2022 bis 15:00 Uhr
in der Übungsgruppe. **Bitte in 2-3er Gruppen abgeben**.

Hausaufgaben (20 Punkte)

A14.1 Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$, dass die Abbildung

$$S_n \to S_n, \qquad \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

bijektiv ist. (4)

A14.2 Beweisen Sie Proposition 10.9. Also, dass für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Abbildung (4)

$$\mathbb{R}^{n\times n} \ni B \mapsto \det(AB) \in \mathbb{R}$$

eine Multilinearform ist.

A14.3 Zeigen Sie, dass für eine bijektive lineare Abildung $L : V \to W$ gilt, dass L^{-1} linear ist. (4)

A14.4 Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar, mit

$$S^{-1}AS = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Weiter sei $S = (v_1|\ldots|v_n)$. Der Vektor v_i entspricht also der i-ten Spalte von S. Zeigen Sie, dass v_i ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_i ist. (4)

A14.5 Beweisen Sie Korollar 11.5. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte zu einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Weiter sei N_{λ_i} der Eigenraum zu λ_i und $\mathcal{B}_i$ zugehörige Basis. Zeigen Sie, dass die Menge (4)

$$\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{B}_i$$

linear unabhängig ist.

A14.6 Diagonalisieren Sie die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$