Aufgabenblatt 6, Mathematik für Physiker 1

Florian Adamczyk, Finn Wagner

26.11.2021

A 7.1

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n-4}}(x+1)^{n+2} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+4n^2-4)x^n$$

konvergiert und berechnen Sie für die erste Reihe auch eine geschlossene Formel in Abhängigkeit von x.

Der Konvergenzradius R der Potenzreihe ist $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.
Die Summe lässt sich umformen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n-4}}(x+1)^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n} \cdot 2^{-4}}(x+1)^n \cdot (x+1)^2 =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} 16\frac{1}{2^{3n}}(x+1)^n \cdot (x+1)^2 = 16(x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{3n}} =$$
$$16(x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2^3}\right)^n = 16(x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{8}\right)^n$$

Wir ersetzen nun $x+1 = y$ damit ergibt sich:

$$16y^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{8}\right)^n$$

Damit ist $a_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n$ Berechnen wir nun den Konvergenzradius unserer Reihe:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{8}\right)^n\right|}} =$$
$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{8}\right)^n\right|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left(\frac{1}{8}\right)^n}} =$$
$$\frac{1}{\limsup \left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right) = 8}$$