

# **Vorlesungsskript: Einführung in die mathematischen Methoden der Physik**

**Michael Czerner, Christian Heiliger**

Gießen, WS 2021/22

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Newtonsche Axiome</b>	<b>3</b>
1.1	Axiome . . . . .	3
1.2	Diskussion und Begriffsklärung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Kinematik</b>	<b>5</b>
2.1	Vektoren . . . . .	5
2.1.1	Definitionen . . . . .	5
2.1.2	Skalarprodukt . . . . .	7
2.1.3	Vektorprodukt . . . . .	14
2.1.3.1	Grundlagen . . . . .	14
2.1.3.2	Komponentendarstellung des Vektorprodukts . . . . .	16
2.1.4	Höhere Vektorprodukte . . . . .	19
2.1.4.1	Spatprodukt . . . . .	19
2.1.4.2	Doppeltes Vektorprodukt . . . . .	20
2.2	Matrizen . . . . .	21
2.2.1	Transformation von Vektoren . . . . .	21
2.2.2	Rechenregeln für Matrizen . . . . .	23
2.2.3	Determinante . . . . .	27
2.2.4	Rechenregeln für Determinanten . . . . .	31
2.2.5	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	33
2.2.6	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	36
2.2.7	Orthogonale Transformationen - Drehungen . . . . .	38
2.3	Bahnkurve (Trajektorie) . . . . .	40
2.3.1	Ableitung vektorwertiger Funktionen . . . . .	40
2.3.2	Integration . . . . .	44
2.3.3	Begleitendes Dreibein . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Dynamik</b>	<b>54</b>
3.1	Felder . . . . .	54
3.1.1	Definition . . . . .	54
3.1.2	Ableitungen . . . . .	56
3.1.2.1	Totale und partielle Ableitungen . . . . .	56
3.1.2.2	Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace . . . . .	60
3.1.2.3	Extremwerte in mehreren Dimensionen . . . . .	64
3.2	Massepunkt . . . . .	66
3.2.1	Volumenintegral . . . . .	66
3.2.2	Koordinatentransformation . . . . .	67
3.2.2.1	Allgemeine Betrachtungen . . . . .	67

3.2.2.2	Zylinderkoordinaten . . . . .	71
3.2.2.3	Kugelkoordinaten . . . . .	74
3.2.3	Schwerpunkt . . . . .	77
3.3	Arbeit, Energie, Potential . . . . .	80
3.3.1	Arbeit und Leistung . . . . .	80
3.3.2	kinetische Energie . . . . .	82
3.3.3	Konservative Kräfte und Potentiale . . . . .	83
3.3.4	Erhaltungssätze . . . . .	86
3.3.4.1	Energiesatz . . . . .	86
3.3.4.2	Impulserhaltung . . . . .	87
3.3.4.3	Drehimpulserhaltung . . . . .	88
3.4	Taylorreihe . . . . .	90
3.4.1	Taylorentwicklung skalarer Funktionen . . . . .	90
3.4.2	Taylorentwicklung von Feldern . . . . .	93
3.5	Oberflächenintegrale . . . . .	98
3.5.1	Oberflächenintegral 1. Art . . . . .	98
3.5.2	Oberflächenintegral 2. Art . . . . .	100
3.6	Bewegungsgleichung . . . . .	102
3.6.1	Klassifikation von Differentialgleichungen . . . . .	102
3.6.2	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	103
3.6.3	Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	105
3.6.3.1	Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten . . . . .	106
3.6.3.2	Spezielle Lösungen der inhomogenen linearen DGL . . . . .	108
3.6.4	Separierbare DGL . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Schwingungen</b>	<b>112</b>
4.1	Fadenpendel . . . . .	112
4.2	Komplexe Zahlen . . . . .	116
4.2.1	Definition und Rechenregeln . . . . .	116
4.2.2	Komplexe Zahlenebene . . . . .	118
4.2.3	Euler'sche Formel . . . . .	119
4.3	Linearer Oszillator . . . . .	123
4.3.1	Freier linearer harmonischer Oszillator . . . . .	123
4.3.2	Freier gedämpfter linearer Oszillator . . . . .	125
4.3.2.1	Schwache Dämpfung . . . . .	126
4.3.2.2	Starke Dämpfung . . . . .	127
4.3.2.3	Aperiodischer Grenzfall (kritische Dämpfung) . . . . .	129
4.3.3	Gedämpfter linearer Oszillator mit äußerer Kraft . . . . .	130
4.4	Gekoppelte Schwinger . . . . .	136
<b>5</b>	<b>Zentralkräfte</b>	<b>140</b>
5.1	Koordinatentransformation . . . . .	140
5.2	Erhaltungssätze . . . . .	141
5.3	Kepler-Problem . . . . .	142
5.3.1	Qualitative Analyse . . . . .	142
5.3.2	Quantitative Analyse . . . . .	143
5.3.3	Absolute Koordinaten . . . . .	148

# Kapitel 1

## Newtonsche Axiome

### 1.1 Axiome

- I) Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird seinen Bewegungszustand zu ändern.
- II) Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional und geschieht längs jener geraden Linie, nach welcher die Kraft wirkt.
- III) Die Reaktion auf eine Aktion ist immer entgegengesetzt und gleich, d.h. die Aktion (Kraftwirkung) zweier Körper aufeinander sind immer gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

### 1.2 Diskussion und Begriffsklärung

- Inertialsystem:
  - ein Bezugssystem, in dem das 1. Axiom gilt
  - Näherung, da die Gravitationskraft sich nicht abschirmen lässt
- Massepunkt:
  - idealisiert, möglich wenn Ausdehnung des Körpers viel kleiner als das betrachtete System ist
  - starrer Körper: Schwerpunkt
- Kraft:
  - ist durch das 2. Axiom definiert
  - ist durch Richtung und einen Betrag gegeben  $\Rightarrow$  muss ein Vektor sein:  $\vec{F}$  (andere Schreibweisen:  $\mathbf{F}$ ,  $\underline{F}$ )
  - entspricht unserer Wahrnehmung
  - Superpositionsprinzip

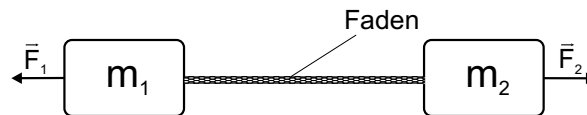
Bahnkurve:  $\vec{r}(t)$

Zustand in Ruhe:  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 = \text{konstant}$

gleichf. Bew.: Geschwindigkeit  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}_0 = \text{konstant}$   
 $\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$

- Änderung Bew.:
- Beschleunigung:  $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$
  - aus 2. Axiom folgt:  $\vec{a}(t) \propto \vec{F}(t)$   
 $\Rightarrow m\vec{a}(t) = m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(t)$  (Bewegungsgleichung)  
 $\Rightarrow m \dots$  Proportionalitätsfaktor
  - aus 1. Axiom folgt:  $\vec{a}(t) = 0 \Leftrightarrow \sum \vec{F}_i = 0$

- Masse:
- ist definiert als der Proportionalitätsfaktor im 2. Axiom
  - betrachten folgendes System:



- System ist zunächst in Ruhe:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$
- jetzt den Faden durchschneiden:

- Festlegung einer Referenzmasse notwendig: Urkilogramm
- die Masse ist in diesem Fall ein Maß, wie sich der Körper einer Kraft widersetzt, also wie träge er ist  $\Rightarrow m$  wird als **träge Masse** bezeichnet
- $m$  ist eine Eigenschaft des Körpers
- weitere Masse ist im Gravitationsgesetz enthalten:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

- diese Masse ist ein Maß für das Gravitations- beziehungsweise Schwerefeld  $\Rightarrow$  wird als **schwere Masse** bezeichnet
- in Newtonscher Mechanik sind dies unterschiedliche Massen
- die allgemeine Relativitätstheorie zeigt: **träge Masse = schwere Masse**

- Impuls:
- $\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = \dot{\vec{p}}$
  - auch gültig innerhalb der speziellen Relativitätstheorie

Drehimpuls:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

Drehmoment:  $\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$

Kinematik: Lehre der Bewegung von Massepunkten und Körpern im Raum ohne Berücksichtigung der Ursache (Kräfte).

Dynamik: Lehre der Bewegung von Massepunkten und Körpern im Raum unter Einfluss von Kräften.

# Kapitel 2

## Kinematik

### 2.1 Vektoren

#### 2.1.1 Definitionen

**Definition 2.1:** Physikalische Größen, die durch die Angabe einer Zahl bestimmt sind, nennt man **Skalar**.

Beispiele:

**Definition 2.2:** Physikalische Größen, die neben einer Zahl noch eine Richtung benötigen, nennt man **Vektoren**.

Beispiele:

Darstellung: Tripel reeller Zahlen  $a_1, a_2, a_3$ :

$$\vec{a} = \underline{a} = \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: später in Analysis und in der Quantenmechanik Erweiterung auf abstrakten Vektorbegriff

**Definition 2.3:** Ein **linearer Vektorraum**  $\mathcal{H}$  ist eine Sammlung von Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \dots$  für die

- i) eine Regel für die Vektorsumme  $\vec{a} + \vec{b}$  definiert ist.
- ii) eine Regel für die Multiplikation mit Skalaren  $\alpha, \beta, \dots$ , also  $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \dots$  definiert ist.
- iii) die folgenden Axiome erfüllt sind:
  - $\mathcal{H}$  ist abgeschlossen:  $\vec{a} + \vec{b} \in \mathcal{H}$  und  $\alpha\vec{a} \in \mathcal{H}$
  - Multiplikation ist distributiv:  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$  und  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
  - Multiplikation mit Skalaren ist assoziativ:  $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$
  - Addition ist assoziativ:  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
  - Addition ist kommutativ:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

- es existiert ein Nullelement  $\vec{0}$ :  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- es existiert ein inverses Element der Addition:  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Beispiel: alle 3D-Vektoren:

**Definition 2.4:** Sind für die Vektoren eines linearen Vektorraums eine Länge sowie zwischen zwei Vektoren ein Winkel definiert, so handelt es sich um einen **Euklidischen Vektorraum**.

Beispiel: 3D-Vektoren:

### 2.1.2 Skalarprodukt

**Definition 2.5:** Eine Vorschrift, die 2 Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  auf eine reelle Zahl abbildet und die folgenden Axiome erfüllt, heißt **Skalarprodukt** (oder Inneres Produkt) und wird als  $\vec{a} \circ \vec{b}$  (oder  $(\vec{a}|\vec{b})$  oder  $\langle \vec{a}|\vec{b} \rangle$ ) geschrieben.

- i)  $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- ii)  $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$  und 0 **nur** falls  $\vec{a} = \vec{0}$
- iii)  $(\alpha \vec{a}) \circ \vec{b} = \alpha (\vec{a} \circ \vec{b})$
- iv)  $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Beispiel: 3D-Vektoren:

Hinweise:     •  $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$  wird auch als Norm bezeichnet  
                  •



**Definition 2.6:** Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind **orthogonal** bzw. senkrecht zueinander, wenn  $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ .

Hinweise:

- für 3D-Vektoren klar, da  $\cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$
- für abstrakte Vektoren ist dies Definition

**Definition 2.7:** Ein Vektor der Länge (Norm) 1 heißt **Einheitsvektor** oder normalisierter Vektor.

Beispiel:  $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  ist Einheitsvektor in Richtung  $\vec{a}$

**Definition 2.8:** Eine Menge von  $n$  Vektoren heißt **linear unabhängig**, wenn

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

nur erfüllt werden kann, wenn alle  $\alpha_i = 0$  sind.

Hinweis: kein Vektor kann als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden

Beispiele:

**Definition 2.9:** Die maximale Anzahl  $n$  linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums wird als **Dimension** des Vektorraums bezeichnet.

Beispiel:

**Definition 2.10:** Ein Satz von  $n$  linear unabhängigen Vektoren eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums heißt **Basis**.

Hinweise: • jeder Vektor kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:  $\vec{a} = \sum_i \alpha_i \vec{e}_i$

• Basis ist nicht eindeutig:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Definition 2.11:** Die Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_i$  eines Vektors in einer Basis werden als **Komponenten** in dieser Basis bezeichnet.

Hinweise:     • in einer gegebenen Basis sind die  $\alpha_i$  eindeutig

- Addition zweier Vektoren

- Multiplikation mit Skalar

- Wechsel der Basis führt zu anderen  $\alpha_i$ , aber die Physik ändert sich nicht

**Definition 2.12:** Eine **orthonormale Basis** besteht aus normalisierten Basisvektoren, die paarweise orthogonal zueinander sind.

Hinweise: • es handelt sich dann um orthogonale Einheitsvektoren  $\vec{e}_i$  für die gilt:

- die orthogonale Projektion von  $\vec{a}$  entlang eines orthonormalen Basisvektors liefert die zugehörige Komponente:

- der große Vorteil einer orthonormalen Basis ist die Berechnung des Skalarprodukts mit Hilfe der Komponenten:

**Achtung:** Nur bei orthonormierter Basis möglich! Beispiel für nicht orthonormale Basis:

- Skalarprodukt unabhängig von Basis, aber deutlich einfacher für orthonormale Basis
- Das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren ist eine Vorschrift, um aus einer gegebenen Basis eine orthonormale Basis zu konstruieren
- Entwicklung eines Vektors in einer orthonormalen Basis:

- Schwarzsche Ungleichung:  $|\vec{a} \circ \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$
- Dreiecksungleichung:  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

## 2.1.3 Vektorprodukt

### 2.1.3.1 Grundlagen

**Definition 2.13:** Die Abbildung zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  auf einen anderen Vektor  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  wird **Vektorprodukt** (oder Äußeres Produkt) genannt, wobei  $\vec{c}$  die folgenden Eigenschaften hat:

- i)  $c = |\vec{c}| = ab \sin \gamma$ , wobei  $\gamma$  der Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist
- ii)  $\vec{c}$  ist senkrecht zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$
- iii)  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  bilden ein Rechtssystem (oder rechtshändiges System)

Hinweise: 

- Vektorprodukt ist nur für 3D-Vektoren definiert
- $|\vec{c}| = ab \sin \gamma$  ist die Fläche des durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms

Eigenschaften: 

- i)  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ; folgt aus der Forderung des Rechtssystems
- ii) falls  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}$  oder  $\vec{b}$  Nullvektor oder  $\sin \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \vec{a}$  parallel zu  $\vec{b}$   
speziell:  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- iii)  $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \alpha \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$

Beweis:

$$\mathbf{iv)} \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \text{ (distributiv)}$$



$$v) \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

This works, perfectly

**Definition 2.14:** Das Vektorprodukt ist ein **axialer** Vektor (Pseudovektor), der sich bei Rauminversion nicht ändert. Im Gegensatz dazu gehen **polare** Vektoren bei Rauminversion in ihr negatives über:

- Hinweise:
- Vektorprodukt ist weniger eine Richtung, sondern ein Drehsinn (wegen Rechtssystem)
  - Skalarprodukt aus zwei polaren oder axialen Vektoren ändert sich bei Inversion nicht, aber Mischung führt zu Vorzeichenwechsel  $\Rightarrow$  Pseudoskalar

### 2.1.3.2 Komponentendarstellung des Vektorprodukts

orthonormale Basis als Rechtssystem:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

This does work

I am just writing a few little words,  
the interesting part is

$$x^2 + 5 + 78 > 0 \quad \nabla \begin{pmatrix} x^2 + 3 \\ y - 2 \\ z^2 + 8 \end{pmatrix}$$

**Definition 2.15:** Der **total antisymmetrische Tensor dritter Stufe** ist durch die Komponenten  $\epsilon_{ijk} = \vec{e}_i \circ (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)$  gegeben.

**Definition 2.16:** Ein **Tensor**  $n$ -ter Stufe stellt eine lineare Abbildung von  $n$  Vektoren auf eine Zahl dar.

- Hinweise:
- Tensor 1. Stufe:  $T(\vec{a}) \rightarrow c$
  - Tensor 2. Stufe:  $T(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow c$
  - Tensor 3. Stufe:  $T(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \rightarrow c$
  - aus linearer Abbildung folgt:

$\Rightarrow$  Abbildung der Basisvektoren ist ausreichend und diese werden als Komponenten des Tensors bezeichnet

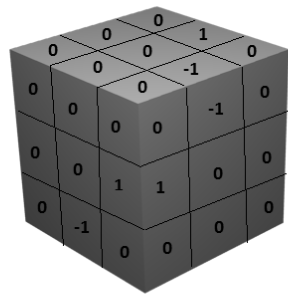
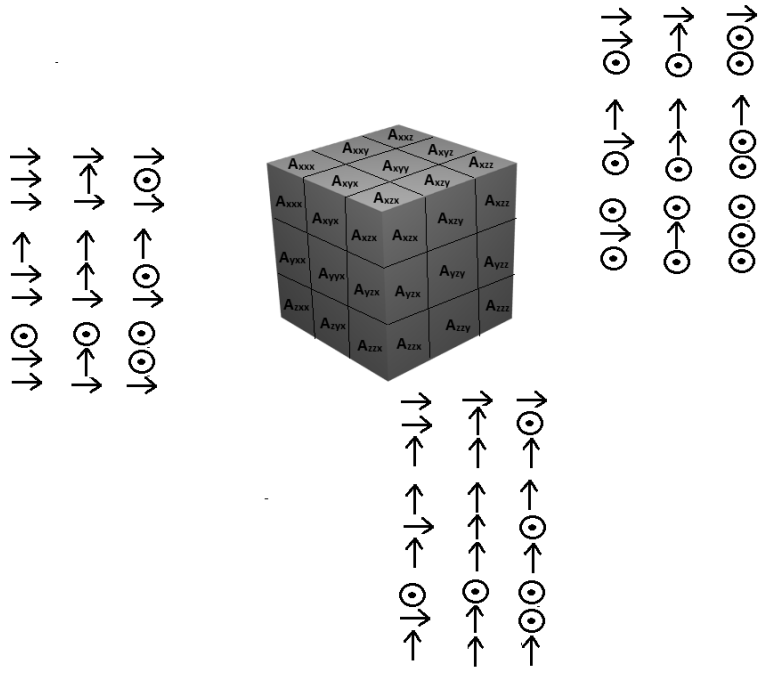
$\Rightarrow$  für 3D-Raum besitzt Tensor

1. Stufe: 3 Komponenten
2. Stufe:  $3 \cdot 3 = 9$  Komponenten
3. Stufe:  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  Komponenten

Beispiel in kartesischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \uparrow \\ \odot \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} A_{xx} \\ A_{yx} \\ A_{zx} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_{xy} \\ A_{yy} \\ A_{zy} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_{xz} \\ A_{yz} \\ A_{zz} \end{pmatrix}$
$\rightarrow \rightarrow$	$\rightarrow \uparrow$	$\rightarrow \odot$
$\uparrow \rightarrow$	$\uparrow \uparrow$	$\uparrow \odot$
$\odot \rightarrow$	$\odot \uparrow$	$\odot \odot$



11

## 2.1.4 Höhere Vektorprodukte

### 2.1.4.1 Spatprodukt

**Definition 2.17:** Das **Spatprodukt** dreier Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ist definiert durch

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$$

Hinweise: • das Spatprodukt ist das Volumen des von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannten Parallelepipeds

Bei einem Testflug, in der Größe

Ich sag euch Leute I think I like how this looks "   
 But writing everything here 🤔 I don't know   
 I can't zoom?

- welche Fläche als Grundfläche genommen wird, ist egal  $\Rightarrow$  keine Änderung bei zyklischer Vertauschung:

- bei antizyklischer Vertauschung ändert das Spatprodukt das Vorzeichen, weswegen es auch als Pseudoskalar bezeichnet wird
- Darstellung mit  $\epsilon_{ijk}$ :

### 2.1.4.2 Doppeltes Vektorprodukt

**Definition 2.18:** Das **doppelte Vektorprodukt** dreier Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ist definiert durch

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Entwicklungssatz:

•

Jacobi-Identität:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

Hinweis: noch höhere Produkte lassen sich leicht durch Eigenschaften des Spatprodukts und mit Hilfe des Entwicklungssatzes vereinfachen

## 2.2 Matrizen

### 2.2.1 Transformation von Vektoren

Betrachten Transformation eines Vektors (Spiegeln, Drehung, Skalierung, **ohne** Translation)

**Definition 2.19:** Ein rechteckiges Schema reeller Zahlen  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ )

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

heißt  $(m \times n)$ -**Matrix** und besteht aus  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.

Hinweis: 2 Matrizen  $A$  und  $B$  sind gleich, wenn  $a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, j$

spezielle Matrizen:

**Definition 2.20:** Als **Rang** einer Matrix bezeichnet man die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spalten- oder Zeilenvektoren einer Matrix

Hinweis: maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren = maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren

Beispiel:

**Definition 2.21:** Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten einer  $(m \times n)$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  erhält man die zugehörige **transponierte Matrix**  $A^T$ , die eine  $(n \times m)$ -Matrix ist:

$$A^T = (a_{ij}^T = a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

### 2.2.2 Rechenregeln für Matrizen

**Definition 2.22:** Die **Summe**  $C = A + B = (c_{ij})$  zweier Matrizen  $A = (a_{ij})$  und  $B = (b_{ij})$  ist gegeben durch

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall ij$$

**Definition 2.23:** Die **Multiplikation** einer Matrix  $A$  mit einem Skalar  $\lambda$  ist gegeben durch die Multiplikation jedes einzelnen Elements

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

**Definition 2.24:** Das **Produkt** einer  $(m \times n)$ -Matrix  $A$  mit einer  $(n \times r)$ -Matrix  $B$  ist gegeben durch

$$C = AB = (c_{ij}) \quad ((m \times r)\text{-Matrix})$$

mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$



Hinweise:

- $c_{ij}$  ist das Skalarprodukt aus dem  $i$ -ten Zeilenvektor von  $A$  mit dem  $j$ -ten Spaltenvektor von  $B$ :

- Produkt ist **nur** definiert, wenn Spaltenanzahl von  $A$  gleich Zeilenanzahl von  $B$  ist
- $AE = A$  (für  $(n \times n)$ -Matrix)
- Skalarprodukt zweier Vektoren

- i.A.  $AB \neq BA$  (nur für quadratische Matrizen überhaupt möglich)

**Definition 2.25:** Die zur  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  **inverse Matrix**  $A^{-1}$  ist definiert durch

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Hinweis:  $A^{-1}$  existiert nicht immer

Beispiele:



### 2.2.3 Determinante

**Definition 2.26:** Die **Determinante** einer  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  ist gegeben durch

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_P (\text{sign} P) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)}$$

- Hinweise:
- $P(1, 2, \dots, n) = (p(1), \dots, p(n))$  ist eine Permutation der natürlichen Folge  $(1, 2, \dots, n)$
  - $\text{sign} P$  ist positiv, wenn die Anzahl der paarweisen Vertauschungen, um zur Permutation zu kommen, gerade ist und negativ, wenn die Anzahl der Vertauschungen ungerade ist

Beispiele:

Entwicklungssatz:

$$\det A = a_{i1}U_{i1} + a_{i2}U_{i2} + \dots + a_{in}U_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}U_{ij}$$

$$\text{mit } U_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij} \quad \text{und}$$

$A_{ij}$  : **Unterdeterminante**, d.h. die Determinante der  $((n-1) \times (n-1))$ -Matrix, die aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte entsteht

Beispiele:



Satz (o.B.): Die Inverse einer Matrix  $A$  existiert genau dann, wenn  $\det A \neq 0$  ist und es gilt

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{U_{ji}}{\det A}$$

Hinweis: Anordnung der Indizes beachten

Beispiel:

### 2.2.4 Rechenregeln für Determinanten

Die Determinante hat eine Reihe von wichtigen Eigenschaften, von denen die meisten direkt aus der Definition folgen:

- i) Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einem Skalar  $\alpha$ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- ii) aus i) folgt  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

iii)

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- iv) durch das Vertauschen zweier benachbarter Zeilen (Spalten) ändert sich das Vorzeichen der Determinante
- v) aus iv) folgt, dass die Determinante einer Matrix mit 2 gleichen Zeilen (Spalten) gleich 0 ist
- vi)  $\det A = \det A^T \Rightarrow$  Entwicklungssatz auch nach Spalte möglich
- vii) wird zur  $i$ -ten Zeile (Spalte) die mit einem Skalar  $\alpha$  multiplizierte  $j$ -te Zeile (Spalte) addiert, so ändert sich die Determinante nicht:

- viii) aus v) und vii) folgt, dass die Determinante einer Matrix 0 ist, wenn die Zeilen (Spalten) linear abhängig sind



**ix)**  $\det(AB) = \det A \det B$  (o.B.)

**x)** Falls die Matrix  $A$  Dreiecksgestalt hat:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad \det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \quad \Rightarrow \det E = 1$$

Darstellung von Vektorprodukten:

### 2.2.5 Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sind  $n$  lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{b} = A\vec{x}$$

Cramersche Regel: (o.B.) Das lineare Gleichungssystem  $\vec{b} = A\vec{x}$  hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn

$$\det A \neq 0$$

und die Lösung lautet

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

wobei  $A_k$  die Matrix ist, die entsteht, wenn die  $k$ -te Spalte durch  $\vec{b}$  ersetzt wird:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:





### 2.2.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Häufig werden bei physikalischen Problemen die sogenannten Eigenwerte und Eigenvektoren benötigt (z.B. gekoppelte Differentialgleichungen)

**Definition 2.27:** Die **Eigenwerte**  $\lambda$  und die zugehörigen **Eigenvektoren**  $\vec{v}$  sind durch die Eigenwertgleichung

$$A\vec{v}_\lambda = \lambda\vec{v}_\lambda$$

definiert.

Hinweis:  $A\vec{v}_\lambda = \lambda E\vec{v}_\lambda \Rightarrow (A - \lambda E)\vec{v}_\lambda = 0$

$\Rightarrow$  homogenes Gleichungssystem  $\Rightarrow$  für nicht-triviale Lösung:  $\det(A - \lambda E) = 0$

**Definition 2.28:**  $\det(A - \lambda E) = 0$  wird **charakteristisches Polynom** der Matrix genannt.

Beispiel:



### 2.2.7 Orthogonale Transformationen - Drehungen

**Definition 2.29:** Eine **orthogonale Transformation** (später auch unitäre Transformation) ist eine Koordinatentransformation, die das Skalarprodukt invariant lässt.

Hinweis: d.h. Länge von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren bleiben gleich (z.B. Drehungen)

Eine orthogonale Transformation kann ein Rechtssystem in ein Linkssystem ändern, z.B. Spiegelung:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

⇒ Wann liegt eine reine Drehung vor?



## 2.3 Bahnkurve (Trajektorie)

### 2.3.1 Ableitung vektorwertiger Funktionen

**Definition 2.30:** Eine **vektorwertige Funktion** bildet eine reelle Zahl auf einen Vektor ab.

- Beispiele:
- $\vec{a}(u) = a_1(u)\vec{e}_1 + a_2(u)\vec{e}_2 + a_3(u)\vec{e}_3$
  - Bahnkurve mit kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

- allgemein:

$$\vec{r}(t) = r_1(t)\vec{e}_1(t) + r_2(t)\vec{e}_2(t) + r_3(t)\vec{e}_3(t)$$

**Definition 2.31:** Die **Ableitung einer vektorwertigen Funktion**  $\vec{a}(u)$  ist durch

$$\frac{d\vec{a}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(u + \Delta u) - \vec{a}(u)}{\Delta u}$$

gegeben.

Hinweis: falls die Basisvektoren  $\vec{e}_i$  unabhängig vom Parameter sind:

Folgende **Differentiationsregeln** sind leicht mit Hilfe der Definition zu zeigen:

- i)  $\frac{d}{du} [\vec{a}(u) + \vec{b}(u)] = \vec{a}'(u) + \vec{b}'(u)$
- ii)  $\frac{d}{du} [f(u)\vec{a}(u)] = f'(u)\vec{a}(u) + f(u)\vec{a}'(u)$  , wobei  $f(u)$  eine skalare Funktion ist
- iii)  $\frac{d}{du} [\vec{a}(u) \circ \vec{b}(u)] = \vec{a}'(u) \circ \vec{b}(u) + \vec{a}(u) \circ \vec{b}'(u)$
- iv)  $\frac{d}{du} [\vec{a}(u) \times \vec{b}(u)] = \vec{a}'(u) \times \vec{b}(u) + \vec{a}(u) \times \vec{b}'(u)$

Achtung: Reihenfolge beachten!

Satz: Die Ableitung eines Einheitsvektors steht orthogonal auf dem Einheitsvektor.

Beweis:

Anwendung auf Bahnkurve:



**Definition 2.32:** Eine Raumkurve  $\vec{r}(t)$  heißt **glatt**, wenn  $\vec{r}(t)$  stetig differenzierbar ist und

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0 \quad \forall t$$

Hinweis: d.h. es liegt immer eine Bewegung vor  $\Rightarrow$  zurückgelegte Strecke  $s(t)$  streng monoton steigend

**Definition 2.33:** Die **Bogenlänge**  $s$  ist die Länge der Raumkurve von einem Startpunkt aus gemessen.

**Definition 2.34:** Die Parametrisierung einer Raumkurve nach der Bogenlänge  $\vec{r}(s)$  wird **natürliche Parametrisierung** genannt.

Hinweis: es gibt unterschiedliche Parametrisierungen eines Weges:

Frage: Wie berechnet man  $s(t)$ ?

### 2.3.2 Integration

**Definition 2.35:** Die **Integration einer vektorwertigen Funktion** ist durch die Integration der Komponenten gegeben:

$$\int_{u_1}^{u_2} \vec{a}(u) du = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \int_{u_1}^{u_2} a_i(u) du = \begin{pmatrix} \int_{u_1}^{u_2} a_1(u) du \\ \int_{u_1}^{u_2} a_2(u) du \\ \int_{u_1}^{u_2} a_3(u) du \end{pmatrix}$$

- Hinweise:
- diese Integration wird nur selten verwendet
  - andere Integrationen: Wegintegrale, Volumenintegrale, Oberflächenintegrale

Berechnung der Bogenlänge  $s(t)$ :

- Zerlegung der Raumkurve in einen Polygonzug:









**Definition 2.36:** Das **Wegintegral** (oder Kurvenintegral oder Linienintegral) **1. Art** ist die Integration einer skalaren Funktion  $f(\vec{r})$  entlang eines Weges  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} f \, ds := \int_{t_a}^{t_b} f(\gamma(t)) \left| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right| dt$$

Hinweis: für  $f \equiv 1$  liefert das Wegintegral 1. Art die Länge des Weges  $\gamma$

Beispiel:

### 2.3.3 Begleitendes Dreibein

Betrachten orthonormale Basis, die an jedem Punkt der Raumkurve anders sein kann und somit eine Funktion der Bogenlänge  $s$  ist

**Definition 2.37:** Das **begleitende Dreibein** einer Raumkurve besteht aus den Einheitsvektoren

$\hat{t}$ : Tangenteneinheitsvektor

$\hat{n}$ : Normaleneinheitsvektor

$\hat{b}$ : Binormaleneinheitsvektor

die ein orthonormales Rechtssystem bilden:

$$\hat{t} = \hat{n} \times \hat{b}$$

**Definition 2.38:** Da  $\dot{\vec{r}}(t)$  tangential zur Bahnkurve orientiert ist, wird der **Tangenteneinheitsvektor** über  $\dot{\vec{r}}(t)$  definiert:

$$\hat{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \hat{t}(s)$$

Skizze:

**Definition 2.39:** Die **Krümmung**  $\kappa$  ist durch

$$\kappa = \left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right|$$

definiert. Der **Krümmungsradius**  $\rho$  ist dann

$$\rho = \kappa^{-1}$$

Hinweise:

- falls  $\hat{t}(s)$  konstant  $\forall s$  ist  
 $\Rightarrow$  Bahnkurve ist eine Gerade  
 $\Rightarrow \kappa = 0 \quad \rho = \infty$

- da  $\hat{t}(s)$  ein Einheitsvektor ist  
 $\Rightarrow \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \perp \hat{t}(s)$

**Definition 2.40:** Der **Normaleneinheitsvektor** ist durch

$$\hat{n} = \frac{\frac{d\hat{t}(s)}{ds}}{\left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{t}(s)}{ds} = \hat{n}(s)$$

definiert.

**Definition 2.41:** Die **Schmiegungebene** ist die Ebene, die von den Vektoren  $\hat{n}$  und  $\hat{t}$  aufgespannt wird.

**Definition 2.42:** Der **Binormaleneinheitsvektor** ist dann durch  $\hat{n}$  und  $\hat{t}$  definiert:

$$\hat{b}(s) = \hat{t}(s) \times \hat{n}(s)$$

- Hinweis:
- $\hat{b}$  steht senkrecht auf der Schmiegungebene
  - falls  $\hat{b}$  konstant ist  
 $\Rightarrow$  Bewegung in einer festen Ebene (in der Schmiegungebene)
  - falls  $\hat{b}$  sich mit  $s$  ändert, ist diese Änderung ein Maß dafür, wie sich die Bahnkurve aus der Schmiegungebene herausschraubt:

**Definition 2.43:** Die **Torsion**  $\tau$  der Raumkurve ist durch

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}$$

gegeben. Der **Torsionsradius**  $\sigma$  ist entsprechend

$$\sigma = \frac{1}{\tau}$$

betrachten jetzt noch die Änderung von  $\hat{n}$ :





# Kapitel 3

## Dynamik

### 3.1 Felder

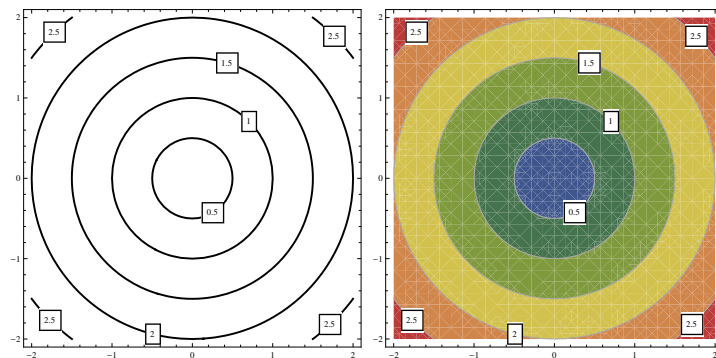
#### 3.1.1 Definition

**Definition 3.1:** Ein **skalares Feld** ist die Abbildung eines Vektors  $\vec{r}$  auf eine skalare physikalische Größe  $\varphi(\vec{r})$ .

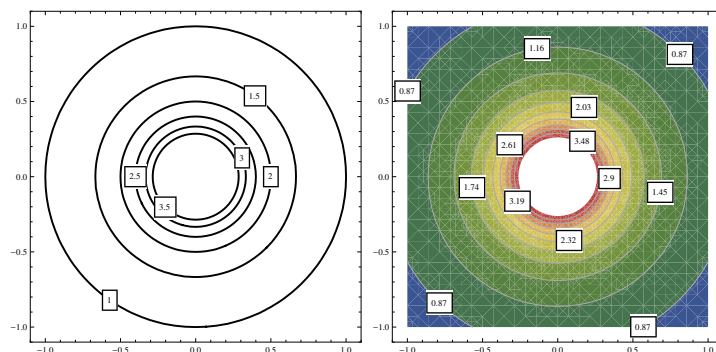
Beispiele: Temperaturfelder, Ladungsdichte, Massendichte, Potential

Graphische Darstellung: Schnitt durch eine Ebene und Darstellung mittels Höhenlinien, bei denen  $\varphi(\vec{r})$  konstant ist. Abstand zwischen zwei Höhenlinien entspricht Abstand zwischen den Konstanten.

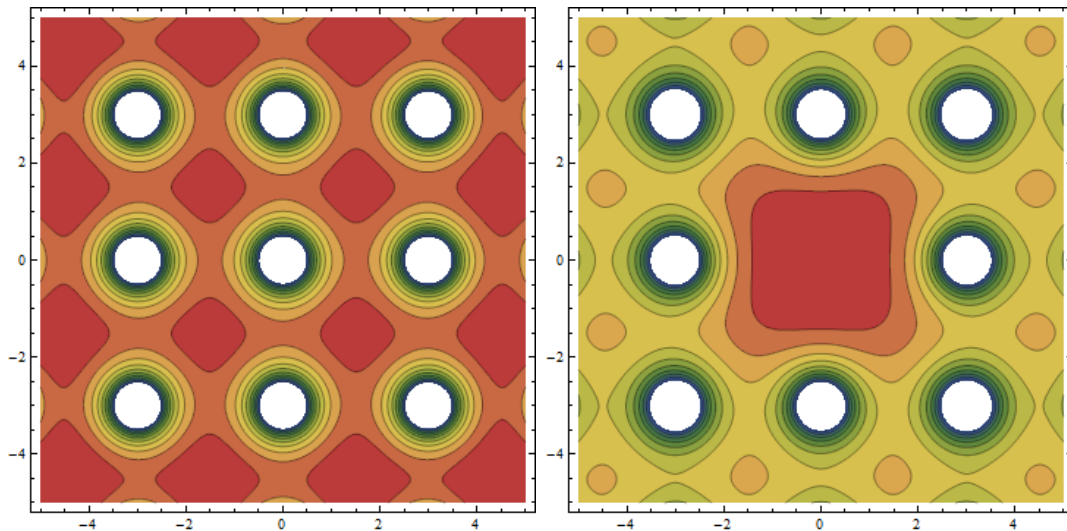
Beispiele:  $\varphi(\vec{r}) = r$       Schnitt durch  $(x, y)$ -Ebene ( $z = 0$ ):



$\varphi(\vec{r}) = 1/r$       Schnitt durch  $(x, y)$ -Ebene ( $z = 0$ ):



Potential im Festkörper (periodische  $1/r$ -Potentiale):

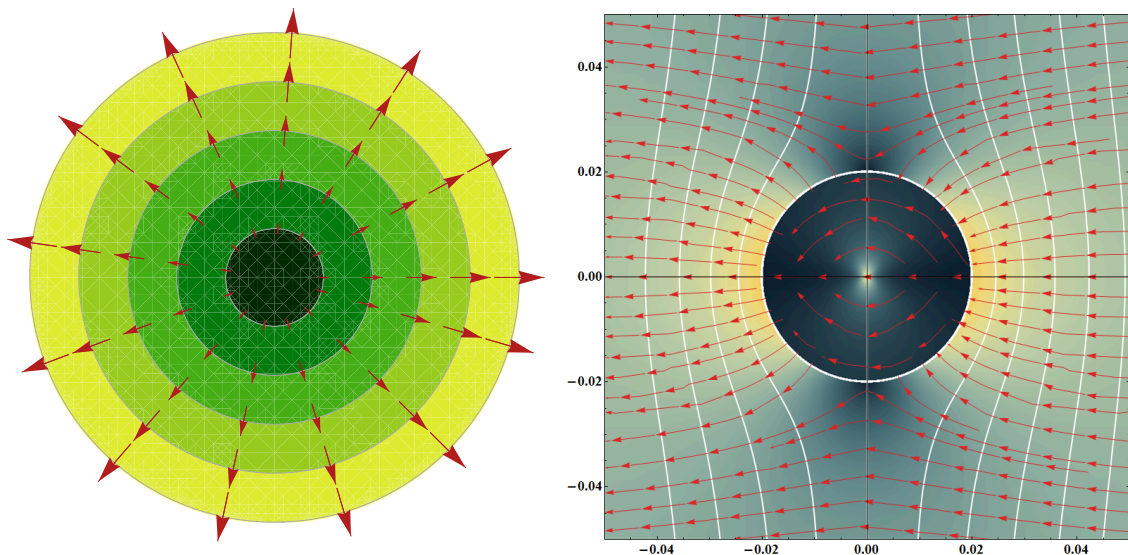


**Definition 3.2:** Ein **Vektorfeld** ist die Abbildung eines Vektors  $\vec{r}$  auf eine vektorielle physikalische Größe  $\vec{A}(\vec{r})$ .

Beispiele: Kraftfelder, elektrische Felder, magnetische Felder, Geschwindigkeitsfelder, Impulsfelder

Graphische Darstellung: Schnitt durch eine Ebene und Darstellung mittels Höhenlinien, bei denen  $|\vec{A}(\vec{r})|$  konstant ist. Zusätzlich werden Richtungspfeile gezeichnet.

andere Darstellung: **Feldlinien**: lokale Richtung der Feldlinien gibt Feldrichtung an und die Dichte der Feldlinien ist proportional zur Feldstärke.





## 3.1.2 Ableitungen

### 3.1.2.1 Totale und partielle Ableitungen

**Definition 3.3:** Die **partielle Ableitung** eines skalaren Feldes nach einer Variablen ist die Ableitung nach dieser Variablen, während alle anderen Variablen konstant gehalten werden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x}$$

Beispiele:

- Hinweis:
- falls es nur eine Unabhängige gibt:  $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{dx}{dt}$
  - partielle Ableitung von Vektorfeldern: Komponentenweise

Beispiel:

Satz von Schwarz: Wenn die ersten und zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} ,$$

d.h. das Ergebnis ist unabhängig von der Reihenfolge der partiellen Ableitungen.

Kettenregel:

**Definition 3.4:** Das **totale Differential** der Funktion  $\varphi(x, y, z)$  ist durch

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt$$

gegeben.

- Hinweise:
- falls  $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \varphi$  ist nicht explizit von der Zeit abhängig (sondern nur implizit)
  - aber: Zeitabhängigkeit einer physikalischen Größe ist durch die totale zeitliche Ableitung  $\frac{d\varphi}{dt}$  gegeben
  - $\frac{d\varphi}{dt} = 0 \Rightarrow \varphi$  ist Erhaltungsgröße

Beispiele:

Achtung: Substitution und Einsetzen

## 3.1.2.2 Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace

**Definition 3.5:** Der Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

ist ein Vektor-Differentialoperator.

**Definition 3.6:** Die Anwendung von  $\nabla$  auf ein skalares Feld liefert den **Gradienten**

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Bei  $\text{grad}\varphi$  handelt es sich um ein Vektorfeld, das sogenannte Gradientenfeld.

- Rechenregeln:
- $\nabla(\varphi_1 + \varphi_2) = \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2$
  - $\nabla(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_2\nabla\varphi_1 + \varphi_1\nabla\varphi_2$



**Definition 3.7:** Die **Divergenz** (Quellfeld) eines Vektorfeldes  $\vec{A}(\vec{r})$  ist gegeben durch

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \circ \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Hinweise:
- die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein skalares Feld
  - ist die Divergenz eines Vektorfeldes 0, so ist das Vektorfeld quellenfrei

- Rechenregeln:
- $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$
  - $\operatorname{div}(\alpha \vec{a}) = \alpha \operatorname{div} \vec{a}$
  - $\operatorname{div}(\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} \varphi = \varphi \nabla \circ \vec{a} + \vec{a} \circ \nabla \varphi$

Beispiele:

**Definition 3.8:** Der **Laplace-Operator**  $\Delta$  ist durch die Divergenz eines Gradientenfeldes definiert:

**Definition 3.9:** Die **Rotation** (Wirbelfeld) eines Vektorfeldes ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} a_j \right) \vec{e}_k\end{aligned}$$

- Hinweise:
- die Rotation eines Vektorfeldes ist wieder ein Vektorfeld
  - ist die Rotation eines Vektorfeldes 0, dann ist das Vektorfeld wirbelfrei

- Rechenregeln:
- i)  $\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b}$
  - ii)  $\operatorname{rot}(\alpha \vec{a}) = \alpha \operatorname{rot} \vec{a} \quad \alpha \in \mathbb{R}$
  - iii)  $\operatorname{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{a} + (\operatorname{grad} \varphi) \times \vec{a} \quad \varphi \dots \text{skalares Feld}$
  - iv)  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$   
(d.h. Gradientenfelder sind stets wirbelfrei)
  - v)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = 0$   
(d.h. Wirbelfelder sind stets quellenfrei)

- vi)  $\operatorname{rot}(f(r)\vec{r}) = 0 \quad f(r) \dots \text{skalare Funktion}$
- vii)  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$



## 3.1.2.3 Extremwerte in mehreren Dimensionen

**Definition 3.10:** Eine Matrix heißt

- **positiv definit**, wenn alle Eigenwerte positiv sind
- **positiv semidefinit**, wenn alle Eigenwerte  $\geq 0$  sind
- **negativ definit**, wenn alle Eigenwerte negativ sind
- **negativ semidefinit**, wenn alle Eigenwerte  $\leq 0$  sind
- **indefinit**, wenn positive und negative Eigenwerte existieren

**Definition 3.11:** Die **Hesse-Matrix** einer Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\vec{x})$  ist gegeben durch

$$H(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{x}=\vec{x}_0}$$

Extremwerte von  $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

- notwendige Bedingung:  $\text{grad} f(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{x}_E} = 0$
- hinreichende Bedingung: Untersuchung der Hesse-Matrix  $H_f(\vec{x}_E)$ :
  - ▶ lokales Minimum bei  $\vec{x}_E$ , falls  $H_f(\vec{x}_E)$  positiv definit
  - ▶ lokales Maximum bei  $\vec{x}_E$ , falls  $H_f(\vec{x}_E)$  negativ definit
  - ▶ Sattelpunkt bei  $\vec{x}_E$ , falls  $H_f(\vec{x}_E)$  indefinit
  - ▶ keine Aussage, falls  $H_f(\vec{x}_E)$  semidefinit

Beispiele:



## 3.2 Massepunkt

### 3.2.1 Volumenintegral

**Definition 3.12:** Das **Volumenintegral** in kartesischen Koordinaten ist gegeben durch

$$\int f(x, y, z) dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

- Hinweis:
- für  $f \equiv 1$  liefert das Integral das Volumen
  - falls  $f$  die Massendichteverteilung ist, liefert das Integral die Masse

Beispiele:

### 3.2.2 Koordinatentransformation

#### 3.2.2.1 Allgemeine Betrachtungen

betrachten Transformation von Koordinaten  $x_i$  nach  $y_i$  und zurück:

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

totales Differential:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_i}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial y_n} dy_n$$

**Definition 3.13:** Die **Funktionalmatrix** ist gegeben durch

$$F_{ij}^{(xy)} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \quad F^{(xy)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = F^{(xy)} \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_n \end{pmatrix}$$

**Definition 3.14:** Die **Funktionaldeterminante** ist gegeben durch

$$\det F^{(xy)} = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$  Eine Umkehrung der Transformation ist genau dann möglich, wenn

$$\det F^{(xy)} = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$$

Beispiel:

Volumenelement:





### 3.2.2.2 Zylinderkoordinaten





Zusammenfassung:

- Koordinaten:  $(\rho, \varphi, z)$   $0 \leq \varphi < 2\pi$

- Einheitsvektoren:  $\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$   $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$   $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Koordinatentransformation:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{x}{y} \\ z \end{pmatrix}$$

- Nabla:  $\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$
- Gradient:  $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$
- Divergenz:  $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
- Rotation:

$$\nabla \times \vec{F} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left( \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\varphi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

- Laplace:  $\nabla^2 U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$
- Volumenelement:  $dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$

### 3.2.2.3 Kugelkoordinaten



Zusammenfassung:

- Koordinaten:  $(r, \vartheta, \varphi)$   $0 \leq \vartheta < \pi$   $0 \leq \varphi < 2\pi$
- Einheitsvektoren:  $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$   $\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$   $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$
- Koordinatentransformation:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

- Nabla:  $\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$
- Gradient:  $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$
- Divergenz:  $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$
- Rotation:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_\varphi) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right) \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r F_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{e}_\varphi$$

- Laplace:  $\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$
- Volumenelement:  $dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$

### 3.2.3 Schwerpunkt

- betrachten zunächst  $N$  Massepunkte der Masse  $m_i$
- Gesamtmasse:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

**Definition 3.15:** Der **Schwerpunkt** (Massenmittelpunkt) der  $N$  Massenpunkte ist gegeben durch

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

Geschwindigkeit:

- für kontinuierliche Massenverteilung gilt:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

und

$$M = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Beispiele:





## 3.3 Arbeit, Energie, Potential

### 3.3.1 Arbeit und Leistung

**Definition 3.16:** Bewegt sich ein Massenpunkt in einem Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  auf einer Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  von Punkt  $\vec{a}$  zum Punkt  $\vec{b}$ , dann ist die dabei geleistete **Arbeit** durch das **Wegintegral 2. Art** gegeben:

$$W_{ab} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \circ d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \circ \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

- Hinweise:
- Beiträge zur Arbeit nur von der Komponente der Kraft in Richtung des Weges  $\Rightarrow \vec{F} \perp \dot{\vec{r}} \Rightarrow W = 0$
  - der Weg  $\vec{r}(t)$  kann auch durch andere Parametrisierungen dargestellt werden

Beispiele:

- Die **Leistung**  $P$  ist als Arbeit pro Zeit definiert:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \circ \dot{\vec{r}}(t') dt' \quad P = \vec{F} \circ \dot{\vec{r}}$$

### 3.3.2 kinetische Energie

**Definition 3.17:** kinetische Energie:

Die Änderung der kinetischen Energie ist gleich der von der Kraft  $\vec{F}$  längs des Weges von  $\vec{a}$  nach  $\vec{b}$  geleisteten Arbeit.

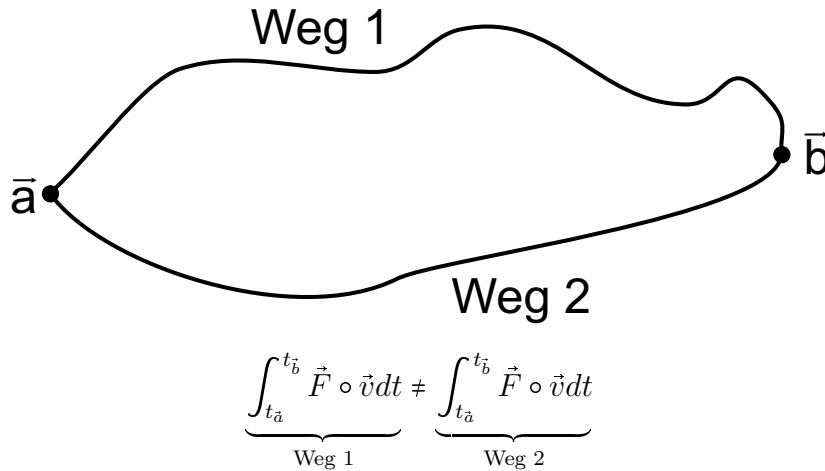
Hinweis: • für mehrere Teilchen gilt

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{und}$$

$$T_b - T_a = \sum_i W_{\vec{a}\vec{b}}^i = \sum_i \int_{t_{\vec{a}}}^{t_{\vec{b}}} \vec{F}_i \circ \vec{v}_i dt$$

### 3.3.3 Konservative Kräfte und Potentiale

die Arbeit hängt im Allgemeinen vom Weg ab:



**Definition 3.18:** **Konservative Kräfte** sind Kräfte, bei denen  $W_{\vec{a}\vec{b}}$  unabhängig vom Weg ist. Im mathematischen Sinn ist eine Kraft konservativ, wenn es eine skalare Funktion  $U(\vec{r})$  gibt mit

$$W_{\vec{a}\vec{b}} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \circ d\vec{r} = U(\vec{a}) - U(\vec{b})$$

d.h.  $W_{\vec{a}\vec{b}}$  hängt nur vom Ausgangs- und Endzustand ab.

**Definition 3.19:** Diese skalare Funktion  $U(\vec{r})$  wird **Potential** oder auch **potentielle Energie** genannt.

- Hinweise:
- $U(\vec{r})$  bis auf Konstante eindeutig bestimmt
  - Arbeit entlang eines beliebigen geschlossenen Wegs:  $\oint \vec{F} \circ d\vec{r} = 0$

Satz: für die Berechnung von konservativen Kräften gilt:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\text{grad } U = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Beweis:

Beispiel:

**Definition 3.20:** Eine **Zentralkraft** ist eine Kraft, die immer auf einen festen Punkt gerichtet ist. Im Koordinatensystem mit diesem Punkt als Zentrum lässt sich die Zentralkraft als  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r$  schreiben.

Satz: Eine konservative Kraft  $\vec{F}$  ist genau dann eine Zentralkraft, wenn  $V(\vec{r}) = V(r)$  ist.

Beweis:

- betrachten die Rotation einer konservativen Kraft:

$\Rightarrow$  das Verschwinden der Rotation einer Kraft ist eine notwendige Bedingung, aber nicht hinreichend

- damit dieses Kriterium auch hinreichend ist, muss das Definitionsgebiet der Kraft zusätzlich einfach zusammenhängend sein, also z.B. keine Definitionslücken enthalten:

### 3.3.4 Erhaltungssätze

#### 3.3.4.1 Energiesatz

für konservative Kräfte gilt:

- Hinweise:
- alle uns bekannten fundamentalen Kräfte sind konservativ  $\Rightarrow$  Energieerhaltung gilt in abgeschlossenen Systemen
  - Reibungskräfte:
    - ▶ entstehen mikroskopisch durch fundamentale konservative Kräfte (z.B. Wechselwirkungen zwischen Atomen)
    - ▶ aber in praktischer Beschreibung phänomenologische Ansätze:  
 z.B.  $\vec{F}_R = -\alpha \vec{v}$  mit  $\alpha > 0$   
 $\Rightarrow \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}_R \circ \vec{v} dt = -\alpha \int_{t_a}^{t_b} v^2 dt < 0 \Rightarrow$  Energieverlust  
 $\Rightarrow$  scheinbarer Widerspruch ; Ursache: Betrachtung von offenen System ; in der Summe (Universum) stimmt die Energiebilanz wieder
    - ▶ später: Darstellung durch zeitabhängiges Potential eventuell möglich  
 $\Rightarrow$  aus  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow$  Energieerhaltung

### 3.3.4.2 Impulserhaltung

Translation eines abgeschlossenen Systems:



### 3.3.4.3 Drehimpulserhaltung



## 3.4 Taylorreihe

### 3.4.1 Taylorentwicklung skalarer Funktionen

Idee: Entwicklung einer beliebig oft differenzierbaren skalaren Funktion um einen Punkt  $x_0$  in ein Polynom:

**Definition 3.21:** Die **Taylorentwicklung** einer beliebig oft differenzierbaren skalaren Funktion  $f(x)$  ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Hinweise:

- Abbruch der Entwicklung häufig nach 1. oder 2. Ordnung
- Gültigkeit der Näherung (Abbruch) häufig vorausgesetzt, aber schwer zu zeigen

Beispiele:





### 3.4.2 Taylorentwicklung von Feldern

**Definition 3.22:** Für ein skalares beliebig oft differenzierbares Feld ist die Taylorentwicklung gegeben durch

Hinweis: für Vektorfelder komponentenweise

Beispiele:









## 3.5 Oberflächenintegrale

### 3.5.1 Oberflächenintegral 1. Art

**Definition 3.23:** Das **Oberflächenintegral 1. Art** (oder skalaras Oberflächenintegral) ist gegeben durch

$$\int_F f(x, y, z) \, dF$$

mit

$$dF = \left| \frac{\partial \vec{\gamma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\gamma}}{\partial v} \right| du \, dv$$

wobei  $\gamma(\vec{u}, v)$  eine geeignete Parametrisierung von F darstellt.

Hinweis: für  $f \equiv 1$  liefert das Integral den Oberflächeninhalt

Beispiele:



### 3.5.2 Oberflächenintegral 2. Art

**Definition 3.24:** Das **orientierte Flächenelement** ist gegeben durch

$$d\vec{F} = \vec{n} dF \quad ,$$

wobei  $\vec{n}$  der Normaleneinheitsvektor auf der Fläche  $dF$  ist:

$$\vec{n} = \frac{\partial_u \vec{\gamma} \times \partial_v \vec{\gamma}}{|\partial_u \vec{\gamma} \times \partial_v \vec{\gamma}|}$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = \partial_u \vec{\gamma} \times \partial_v \vec{\gamma} du dv$$

Hinweis:  $\vec{n}$  ist durch Kreuzprodukt nicht eindeutig; Konvention: für geschlossene Oberfläche zeigt  $\vec{n}$  nach außen

Beispiel: Kugeloberfläche:

**Definition 3.25:** Der **Vektorfluss**  $\Phi$  eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  durch eine Fläche ist die Gesamtheit der durchströmenden Vektoren. Zur Berechnung werden die Normalkomponenten der Vektoren über die Fläche aufintegriert:

$$\Phi = \int_F \vec{A} \circ \vec{n} dF$$

Dies ist gerade das **Oberflächenintegral 2. Art**.

Beispiel:

## 3.6 Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

- Differentialgleichung zweiter Ordnung
- Komplexität hängt von der Gestalt von  $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  ab

### 3.6.1 Klassifikation von Differentialgleichungen

**Definition 3.26:** Eine **gewöhnliche Differentialgleichung (DGL)**  $n$ -ter Ordnung einer skalaren Funktion  $x(t)$  ist gegeben durch die stetige Abbildung

$$f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

Beispiele:    • radioaktiver Zerfall:

- $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$     2. Ordnung  
genauer: System von 3 gekoppelten DGLs:

- Riccatische DGL:

$$f'(x) = g(x)f^2(x) + h(x)f(x) + i(x)$$

nichtlineare DGL 1. Ordnung

- d'Alembertsche DGL, Bernoullische DGL, Jacobische DGL, ...

**Definition 3.27:** Eine **partielle DGL** einer skalaren Funktion mit mehreren Unabhängigen liegt vor, wenn nach mindestens 2 Unabhängigen partiell abgeleitet wird.

Beispiele:    • Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t) \right) \psi(\vec{r}, t)$$

- Maxwell-Gleichungen
- Wärmeleitungsgleichung

### 3.6.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Lösung einer DGL 1. Ordnung ist eindeutig bis auf einen Parameter:
- eine DGL  $n$ -ter Ordnung kann in ein DGL-System aus  $n$  DGLs erster Ordnung umgewandelt werden:



- Umkehrung nicht immer möglich

Satz (o.B.): Eine DGL  $n$ -ter Ordnung hat als **allgemeine Lösung** eine Lösungsschar

$$x(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

die von  $n$  unabhängigen Parametern  $c_1, c_2, \dots, c_n$  abhängen.

**Definition 3.28:** Ein fest vorgegebener Satz von  $c_1, c_2, \dots, c_n$  führt zu einer **speziellen** (oder **partikulären**) Lösung.

Beispiele:

**Definition 3.29:** Bei einem Anfangswertproblem werden die Parameter  $c_i$  durch

$$x(t_0), \dot{x}(t_0), \ddot{x}(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$$

bestimmt.

Satz (o.B.): Hängt die Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung von  $n$  unabhängigen Parametern ab, so handelt es sich um die allgemeine Lösung.

Hinweis: die Lösung kann z.B. auch geraten werden

### 3.6.3 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

**Definition 3.30:** Eine **lineare gewöhnliche DGL** ist eine DGL, bei der die Ableitungen nur linear eingehen:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(t) x^{(i)}(t) = f(t)$$

**Definition 3.31:** Falls  $f(t) = 0$  ist, dann handelt es sich um eine **homogene** lineare DGL, ansonsten um eine **inhomogene** lineare DGL

Beispiele: • Besselsche DGL

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

• Hermitesche DGL

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

• Laguerresche DGL

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

• Legendresche DGL

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Satz: Für eine homogene lineare DGL gilt das Superpositionsprinzip, d.h. falls  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  Lösungen sind, dann ist auch  $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$  eine Lösung

**Definition 3.32:** Die Lösungsfunktionen  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  heißen **linear unabhängig**, falls

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t) = 0$$

nur für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  erfüllt werden kann.

$\Rightarrow$  da die allgemeine Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung von  $n$  unabhängigen Parameter abhängen muss, kann man diese als Linearkombination von  $n$  linear unabhängigen Lösungsfunktionen schreiben:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t) \quad ,$$

wobei die  $\alpha_i$  die Rolle der unabhängigen Parameter übernehmen.

**Definition 3.33:** Ein Satz von  $n$  linear unabhängigen Lösungsfunktionen

$$x_1(t), \dots, x_n(t)$$

einer homogenen linearen DGL heißt **Fundamentalsystem**.

Hinweis: Lösungsfunktionen können auch durch Erraten oder Probieren gefunden werden und die allgemeine Lösung als Linearkombination dieser dargestellt werden

Satz: Die Lösung einer inhomogenen linearen DGL  $n$ -ter Ordnung ist durch die allgemeine Lösung  $x_h(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$  der zugehörigen homogenen DGL und einer speziellen Lösung  $x_s(t)$  der inhomogenen DGL gegeben:

$$x(t, c_1, c_2, \dots, c_n) = x_h(t, c_1, c_2, \dots, c_n) + x_s(t)$$

Beweis:

- $\Rightarrow$  Rezept:
- zunächst ein Fundamentalsystem der homogenen DGL finden
  - spezielle Lösung der inhomogenen DGL finden
  - allgemeine Lösung aus den beiden konstruieren

### 3.6.3.1 Homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

**Definition 3.34:** Eine **homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten** ist gegeben durch

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i x^{(i)}(t) = 0$$

**Definition 3.35:** Das zugehörige **charakteristische Polynom**  $P(\lambda)$  ist gegeben durch

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda^i$$

Satz: Das Fundamentalsystem wird über die Nullstellen  $\lambda_i$  des charakteristischen Polynoms bestimmt. Dabei gibt es  $k$  Nullstellen ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), wobei  $\mu_i$  die Vielfachheit der  $i$ -ten Nullstelle ist ( $\sum_{i=1}^k \mu_i = n$ ). Die  $i$ -te Nullstelle liefert dann die folgenden Funktionen zum Fundamentalsystem:

$$x_{i,1} = e^{\lambda_i t} \quad ; \quad x_{i,2} = t e^{\lambda_i t} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad x_{i,\mu_i} = t^{\mu_i-1} e^{\lambda_i t}$$

Beispiele:

**3.6.3.2 Spezielle Lösungen der inhomogenen linearen DGL**

- es existiert kein allgemeines Rezept zur Bestimmung einer speziellen Lösung
- oft wird auch physikalisch motiviert die spezielle Lösung gesucht

Beispiel:



- Verfahren, um die spezielle Lösung zu finden:
  - ▶ Ansätze je nach Struktur der Inhomogenität  $f(t)$ :
    - \*  $f(t)$  ist Polynom  $\Rightarrow x_s(t)$  Polynom
    - \*  $f(t)$  ist Exponentialfunktion  $\Rightarrow x_s(t)$  Exponentialfunktion
    - \*  $f(t)$  ist  $\sin / \cos$  Funktion  $\Rightarrow x_s(t)$   $\sin / \cos$
  - ▶ Variation der Konstanten:

$$x_s(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) x_i(t) \quad \text{mit } x_i(t) \dots \text{Fundamentalsystem}$$

- ▶ Potenzreihenansatz, Laplace-Transformation, ...

### 3.6.4 Separierbare DGL

**Definition 3.36:** Eine gewöhnliche DGL erster Ordnung ist eine **separierbare DGL**, wenn sie sich zu

$$\dot{x}(t) = f(x(t))g(t)$$

umformen lässt.

Eine solche DGL lässt sich mit der Methode **Trennung der Variablen** lösen:





# Kapitel 4

## Schwingungen

### 4.1 Fadenpendel



**Definition 4.37:** Die **Kreisfrequenz**  $\omega$  ist gegeben durch

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Hinweis: experimentell ist  $\omega$  unabhängig von der Masse  $\Rightarrow$  schwere Masse träge Masse, da  $\omega = \sqrt{\frac{m_s}{m_t} \frac{g}{l}}$

**Definition 4.38:** Die **Schwingungsdauer**  $T$  ist die Zeit, die für eine volle Schwingung notwendig ist:

$$\omega T = 2\pi \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

**Definition 4.39:** Die **Frequenz**  $\nu$  ist dann gegeben durch

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Umschreiben der Lösung:



## 4.2 Komplexe Zahlen

### 4.2.1 Definition und Rechenregeln

**Definition 4.40:** Die **Einheit der imaginären Zahlen** ist

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = -1$$

$\Rightarrow$  jede **imaginäre Zahl** lässt sich als

$$i b$$

schreiben, wobei  $b$  eine reelle Zahl ist

Beispiele:

**Definition 4.41:** Die Summe einer reellen und einer imaginären Zahl

$$z = a + i b$$

ist die **komplexe Zahl**  $z$ , wobei der Realteil von  $z$ ,  $Re\ z = a$  und der Imaginärteil von  $z$ ,  $Im\ z = b$  sind.

- Hinweis:
- $z = Re\ z + i\ Im\ z$
  - $z$  ist genau dann 0, wenn der Real- und Imaginärteil 0 sind
  - Relationen (größer, kleiner, ...) sind nicht mehr möglich
  - rein reelle und rein imaginäre Zahlen sind Spezialfälle komplexer Zahlen
  - komplexe Zahlen sind ein mathematisches Hilfskonstrukt, die Berechnungen vereinfachen, allerdings sind physikalische Größen (Messgrößen bzw. Observablen) **immer reell**

**Definition 4.42:** Die zu  $z$  **konjugierte Zahl** ist

$$z^* = a - i b$$

Rechenregeln:

### 4.2.2 Komplexe Zahlenebene

analog zu Polarkoordinaten:

**Definition 4.43:** Der **Betrag** einer komplexen Zahl  $z$  ist definiert durch

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und das Argument durch

$$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{b}{a}$$

- Hinweis:
- da  $z z^* = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{z z^*}$
  - $\arctan \frac{b}{a}$  hat im Intervall  $[0, 2\pi[$  immer 2 Lösungen  $\Rightarrow$  richtiges Argument muss durch Probe bestimmt werden

Beispiel:

### 4.2.3 Euler'sche Formel









## 4.3 Linearer Oszillator

### 4.3.1 Freier linearer harmonischer Oszillator

- betrachten idealen Federschwinger mit der Federkonstanten  $k$
- nach dem Hooke'schem Gesetz gibt es bei einer Auslenkung der Feder eine rückstellende Kraft, die proportional zur Auslenkung ist:

$$F = -k x$$

- die Frequenz ist unabhängig von der Amplitude  $\Rightarrow \omega_0$  ist eine reine Systemeigenschaft
- idealer elektrischer Schwingkreis zeigt ebenfalls das Verhalten eines linearen harmonischen Oszillators:

- Lösung der Schwingungsgleichung mittels komplexer Zahlen:

### 4.3.2 Freier gedämpfter linearer Oszillator

- betrachten zusätzlich Stokes'sche Reibung:

$$m\ddot{x} = -k x - \alpha \dot{x}$$

- elektrischer Schwingkreis mit Ohm'schen Widerstand:

- Lösung:

#### 4.3.2.1 Schwache Dämpfung

#### 4.3.2.2 Starke Dämpfung



- $\Rightarrow$  das System „kriecht“ zurück in die Ausgangslage; für  $\beta \rightarrow \infty$  dauert dies  $\infty$  lang
- $\Rightarrow$  der Fall starker Dämpfung wird deswegen auch Kriechfall genannt (oder auch überaperiodisch)

**4.3.2.3 Aperiodischer Grenzfall (kritische Dämpfung)**

### 4.3.3 Gedämpfter linearer Oszillator mit äußerer Kraft

- zusätzlich zum bisherigen Fall kommt eine externe periodische Kraft hinzu:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t)$$

mit

$$F(t) = \tilde{F} \cos(\tilde{\omega} t)$$

- im elektrischen Schwingkreis durch Anlegen einer Wechselspannung realisierbar:













## 4.4 Gekoppelte Schwinger







# Kapitel 5

## Zentralkräfte

- speziell: Wechselwirkung zwischen zwei Massepunkten ; Anwendung in der Himmelsmechanik, Atomphysik, Kernphysik
- abgeschlossenes System  $\Rightarrow$  keine äußeren Kräfte
- Zentralkraft:  $\vec{F}_{12} = -\nabla U(\vec{r}) = -f(r)\frac{\vec{r}}{r} = -\vec{F}_{21}$ , mit  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{r}_{21}$

### 5.1 Koordinatentransformation

- Bewegungsgleichungen:

- falls  $m_1 = m_2 = m \Rightarrow \mu = \frac{m}{2}$
- falls  $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \mu \approx m_2 \Rightarrow$  kleinere Masse ist entscheidend

Zusammenfassung:

- Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem reduziert
- ein virtuelles Teilchen mit der Masse  $\mu$  mit den Relativkoordinaten unter den Einfluss der Kraft  $\vec{F}_{12}$   
 $\Rightarrow$  Anstatt 6 nur noch 3 Freiheitsgrade

## 5.2 Erhaltungssätze

- Zentralkraft  $\Rightarrow$  Energieerhaltung + Drehimpulserhaltung  $\Rightarrow$  anstatt 3 nur noch 1 Freiheitsgrad
- da  $\vec{L}$  konstant ist  $\Rightarrow$  Bewegung in der Ebene  
 $\Rightarrow$  Wahl der Koordinaten:

- Energieerhaltung:

⇒ nur noch eine Gleichung mit einer Unabhängigen:  $r$

⇒ Gleichung hat die Form einer 1D Bewegung in einem effektiven Potential

$$U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

- der zusätzliche Potentialbeitrag  $U_z(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2}$  wird als **Zentrifugalpotential** bezeichnet

$$\Rightarrow \text{zugehörige Kraft: } \vec{F}_z = -\nabla U_z(r) = \frac{l^2}{\mu r^3} \vec{e}_r = \mu r \omega^2 \vec{e}_r$$

## 5.3 Kepler-Problem

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

Gravitation:  $\alpha = Gm_1m_2$

Coulomb:  $\alpha = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$

### 5.3.1 Qualitative Analyse

$\alpha > 0$ :

Minimum:

$\Rightarrow$  mögliche Bahnen:

- i)  $E = U_{eff}^{min} \Rightarrow r(t) = r_0 = \text{konstant} \Rightarrow$  Kreisbahnen
- ii)  $U_{eff} < E < 0$ :  $r(t)$  ist beschränkt  $\Rightarrow$  gebundene Bahn
- iii)  $E > 0 \Rightarrow r(t)$  ungebunden

falls  $\alpha < 0$ :

### 5.3.2 Quantitative Analyse











### 5.3.3 Absolute Koordinaten

- bei Planetenbahnen:  $m_{\text{Sonne}} \gg m_{\text{Planet}} \Rightarrow$  Sonne bewegt sich praktisch gar nicht

Zusammenfassung der Kepler-Gesetze:

1. Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Radiusvektor von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachse ihrer Ellipsenbahnen.