10.01.2022 HAUSAUFGABENBLATT 9 WS 2021/22

MATHEMATISCHE METHODEN

Dr. Michael Czerner Abgabetermin 17.01.2022

Aufgabe 1: Taylorentwicklung in einer Dimension

Eine glatte Funktion $f(x)$ kann in einer Umgebung um einen Punkt x_0 durch eine unendliche Reihe dargestellt werden. Diese unendliche Reihe kann je nach Forderung an die Genauigkeit der genäherten Funktion nach n Gliedern abgebrochen werden. Das resultierende Polynom wird als „Taylorreihe von f um x_0 (in n-ter Ordnung)" bezeichnet. Für die Taylorreihe gilt folgender Ausdruck:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n} \, (x - x_0)^n$$

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ bis zur jeweils 6. Ordnung um den Punkt $x_0 = 0$

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $\exp(x)$ bis zur 4. Ordnung um den Punkt $x_0 = 0$

c) Können Sie für die drei oben genannten Funktionen eine allgemeine Darstellung durch eine Summe, eine sogenannte Reihendarstellung, finden?

d) Entwickeln Sie $\ln(1 + x)$ bis zur 3. Ordnung um den Punkt $x_0 = 0$

e) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $\sin(x)^2$ um $x_0 = 0$ bis zur vierten Ordnung. Nutzen Sie diese um den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)^2}{x^2}$ zu bestimmen.

Aufgabe 2: Taylorpolynome

Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen um $x_0 = 1$ von $\sqrt{x}$ und $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ jeweils bis zur dritten Ordnung. Integrieren Sie dann das Taylorpolynom von $\sqrt{x}$ und vergleichen sie es mit dem Taylorpolynom von $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.

Aufgabe 3: Potential

Gegeben ist das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2x + 2y + az \\ bx - 3ay \\ 4x + c + 2z + yd \end{pmatrix}$.

Wie muss man die Konstanten a, b, c und d wählen, damit $\vec{F}(\vec{r})$ als Gradientenfeld ausgedrückt werden kann? Berechnen Sie für diesen Fall das zugehörige Potential.

Aufgabe 4: Konservative Kräfte und Wegintegrale

Gegeben seien zwei Vektorfelder $\vec{F_1} = 2x\vec{e}_x - 2yz\vec{e}_y - y^2\vec{e}_z$ und $\vec{F_2} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$, die Kraftfelder beschreiben.

a) Sind diese Kräfte konservativ?

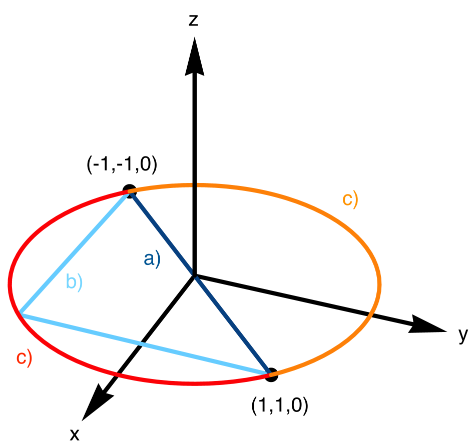
b) Bestimmen Sie das Potential zu allen Kräften, die konservativ sind.

c) Berechnen Sie für beide Kraftfelder die Arbeit, die man verrichten muss, um ein Teilchen vom Punkt $(-1,-1,0)^T$ zum Punkt $(1,1,0)^T$ zu bewegen, für vier verschiedene Wege:

   (a) entlang der direkten Verbindung;

   (b) entlang der direkten Pfade von $(-1,-1,0)^T$ nach $(1,-1,0)^T$ und dann von $(1,-1,0)^T$ nach $(1,1,0)^T$;

   (c) entlang der zwei Halbkreise die in der x-y-Ebene liegen und die beiden Punkte verbinden (siehe Abbildung).



Aufgabe 5: Konservative Kräfte und Potentiale

Prüfen Sie, ob die folgenden Kraftfelder konservativ sind, und berechnen Sie falls möglich das dazugehörige Potential:

a) $\vec{F_1}(\vec{r}) = \rho^2\vec{e_\phi} + z\vec{e_z}$

b) $\vec{F_2}(\vec{r}) = \sin^2(x)\vec{e_x} + y^2\vec{e_y} + 4\vec{e_z}$

c) $\vec{F_3}(\vec{r}) = \cos(\theta)\vec{e_r}$