Aufgabenblatt 1, Mathematik für Physiker 1

Finn Jannik Wagner

21.10.2021

Aufgabe 1

Aufgabe 1.1 (i)

Es ist zu zeigen das $(M\Delta N)\Delta(N\Delta P) = M\Delta P$ gilt. $A := (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, $B := M\Delta P$
Hierzu eine Fallunterscheidung:

1. Fall $x \notin M, N, P$ Ist x in keiner der drei Menge, so ist es weder in A noch B

2. Fall $x \in M \wedge x \notin N, P$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es weder in N noch in P ist.
   $\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.

   Damit gilt $x \in A, B$

3. Fall $x \in P \wedge x \notin M, N$
   Dieser Fall ist equivalent zu Fall 2

4. Fall $x \in N \wedge x \notin M, N$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \notin (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es weder in M noch P ist.

   Damit gilt $x \notin A, B$

5. Fall $x \in M, N \wedge x \notin P$
   $\Rightarrow x \notin M\Delta N$, weil es in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nur in $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nur in M ist.

   Damit gilt $x \in A, B$

6. Fall $x \in M, P \wedge x \notin N$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nur in M ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nur in P ist.
   $\Rightarrow x \notin (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es in $M\Delta N$ und $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \notin M\Delta P$, weil es in M und P ist.

   Damit gilt $x \notin A, B$

7. Fall $x \in N, P \wedge x \notin M$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nur in N ist.
   $\Rightarrow x \notin N\Delta P$, weil es in N und P ist.
   $\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nur in $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nur in P ist.

   Damit gilt $x \in A, B$

8. Fall $x \in M, P, N$
   $\Rightarrow x \notin M \Delta N$, weil es in M und N ist.
   $\Rightarrow x \notin N \Delta P$, weil es in N und P ist.
   $\Rightarrow x \notin (M \Delta N)\Delta(N \Delta P)$, weil es weder in $M \Delta N$ noch in $N \Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \notin M \Delta P$, weil es in M und P ist.

   Damit gilt $x \notin A, B$

$\Rightarrow$ Da in allen acht möglichen Fällen, wie ein Element x in den Mengen verteilt sein kann, die Operationen A und B zum gleichen Ergebnis kommen, sind sie gleich.

Aufgabe 1.1 (ii)

Hilfslemma 1: Weitere Definition der symmetrischen Differenz Δ

Lemma 1

$$\begin{aligned} \textit{Zu zeigen: } A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) &= (A \cup B) \backslash (A \cap B) \\ \textit{Füge beiden Seiten } A \cap B \textit{ hinzu.} \\ \Rightarrow (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B) &= (A \cup B) \backslash (A \cap B) \cup (A \cap B) \\ \Rightarrow (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B) &= (A \cup B) \\ \textit{Mit Assoziativgesetz } A \backslash (B \backslash C) &= (A \backslash B) \cup (A \cap C) \\ \Rightarrow (A \backslash B) \cup (B \backslash (A \backslash A)) &= (A \cup B) \\ \Rightarrow (A \backslash B) \cup B &= (A \cup B) \\ \Rightarrow (A \cup B) &= (A \cup B) \end{aligned}$$

Eigentliche Aufgabe

Zu zeigen: $M \cap (N \Delta P) = (M \cap N)\Delta(M \cap P)$

$M \cap (N \Delta P)$

$\Downarrow$ Hilfslemma 1

$= M \cap ((N \cup P) \backslash (N \cap P))$

$\Downarrow$ Anwenden des Distributivgesetzes$A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$

$= (M \cap (N \cup P)) \backslash (M \cap N \cap \ P)$

$\Downarrow textAnwendendesDistributivgesetzes A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$= (M \cap N) \cup (M \cap P) \backslash (M \cap N) \cap (M \cap P)$

$\Downarrow$ Hilfslemma 1 rückwärts

$= (M \cap N)\Delta(M \cap P)$

Aufgabe 1.2 (i)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Die Spalten vier und sieben sind für alle Wertekombinationen von A und B gleich.
$\Rightarrow \neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ sind equivalent.

Aufgabe 1.2 (ii)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Die Spalten vier und sieben sind für alle Wertekombinationen von A und B gleich.
$\Rightarrow \neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ sind equivalent.

Aufgaben 1.3

Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B, g : B \to C$ Abbildungen

Aufgabe 1.3 (i)

Zu zeigen: $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv
Definition der Surjektivität:
Sei $f : A \to B \wedge$ f ist surjektiv $\Leftrightarrow \forall b \in B\ \exists a \in A\ f(a) = b$
g ist surjektiv:
$\forall c \in C\ \exists b \in B : g(b) = c$
$g \circ f$ ist surjektiv:
$\forall c \in C\ \exists a \in A\ g : g \circ f(a) = c$
Man setze für $b = f(a)$ mit $a \in A$ ein. Es gilt nach Vorraussetzung $f(a) \in B$.

Aufgabe 1.3 (ii)

Zu zeigen: $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv
$\forall a_1, a_2 \in A : g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$
$\Rightarrow \forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = b_1\ f(a_2) = b_2\ g(b_1) = c_1\ g(b_2) = c_2 : a_1 = a_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2$
Angenommen für $a_1 = a_2 \wedge b_1 \neq b_2$
$\Rightarrow c_1 \neq c_2$
Das ist ein Wiederspruch da $g \circ f$ injektiv ist
Es folgt f ist injektiv:
$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) = b_1 = b_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$

Aufgabe 1.4

Gegeben $M \neq \emptyset$, $S := \{x \in M | \text{x hat Sorgen}\}$, $L := \{x \in M | \text{x trinkt Likör}\}$ und Likörproduzent $\in M$

(a) Wer Sorgen hat, trinkt Likör $= S \subset L$

(i) Wer Likör trinkt, hat Sorgen $= L \subset S$ Falsch

(ii) Wer keiene Likör trinkt, hat keine Sorgen $= M \backslash L \subset M \backslash S$ Wahr

(iii) Niemand hat Sorgen und trinkt keinen Likör $= S \cap (M \backslash L) = \emptyset$ Wahr

(iv) Jemand hat Sorgen und trinkt keinen Likör $= S \cap (M \backslash L) \neq \emptyset$ Falsch

(v) Jemand trinkt Likör $= L \neq \emptyset$ Unbestimmt

(b) Wer Likör trinkt, hat keine Sorgen $= L \subset (M \backslash S)$

(i) Jeder hat Sorgen $= S = M$ Falsch

(ii) Jemand hat Sorgen $= S \neq \emptyset$ Falsch

(iii) Niemand hat Sorgen $= S = \emptyset$ Wahr

(c) Trinkt niemand Likör, so haben Likörproduzenten Sorgen $= L = \emptyset \Rightarrow$ Likörproduzent $\in S$

(i) Jeder trinkt Likör $= L = M$ Unbestimmt

(ii) Jemand trinkt Likör $= L \neq \emptyset$ Wahr

(iii) Niemand trinkt Likör $= L = \emptyset$ Falsch