Mathematik für Physiker 1*

Vorlesung im Wintersemeter 2021/2022
an der Justus-Liebig-Universität Gießen

Panagiotis Konstantis

14. Februar 2022

*Falls Fehler jeglicher Art gefunden werden, wäre ich dankbar über eine Nachricht.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Mengen, Schreibweisen und Aussagen

Was ist eine Menge? Georg CANTOR gab im Jahre 1895 in „Beiträge zur Begründung der Mengenlehre“ eine brauchbare „Definition“ an:

Unter einer Menge M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Beispiel 1.1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen* und $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ wird die Menge der *ganzen Zahlen* genannt.

Es folgen gängige Schreibweisen im Umgang mit Mengen:

1. Üblicherweise bezeichnen wir Mengen mit Großbuchstaben und Elemente mit Kleinbuchstaben. Ist also M eine Menge und m ein Element dieser Menge, so schreiben wir $m \in M$ für die Tatsache, dass m zu M gehört. Gehört ein Element m nicht zu einer Menge M, so schreiben wir $m \notin M$. Klarerweise ist $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$.

2. Ist $E(m)$ eine Aussageform für ein Element $m \in M$, so bezeichnet
$$\{m \in M : E(m)\}$$
die Menge aller Elemente von M mit der Eigenschaft $E(m)$.

3. Ist $f(m)$ ein Funktionsausdruck so ist,
$$\{f(m) : m \in M\}$$
die Menge aller Elemente der Form $f(m)$ mit $m \in M$.

4. Sind N, M Mengen, so besagt $N \subset M$, daß N eine *Teilmenge* von M ist. Präziser heißt das, dass wenn $n \in N$ ist, dann ist auch $n \in M$. N und M sind gleich in Zeichen $N = M$, falls $N \subset M$ und $M \subset N$.

5. Ist die Aussage $E(m)$ für kein $m \in M$ richtig, so nennen wir die Menge $\{m \in M : E(m)\}$ die *leere Menge* und bezeichnen sie mit $\emptyset$. Aus formalen Gründen bezeichnen wir die leere Menge immer mit $\emptyset$ und setzen fest, dass die leere Menge Teilmenge von jeder Menge ist.

Bevor wir zu weiteren Schreibweisen kommen, zunächst ein paar Beispiele dazu.

Beispiel 1.2. (a) Die Menge der *rationalen Zahlen* ist gegeben durch

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* ist schwieriger zu definieren eventuell im Repetitorium behandelt. Zu dieser Menge gehören alle rationale Zahlen, sowie $\sqrt{2}$, π und e. Wir wollen bis dahin aber mit den reellen Zahlen trotzdem rechnen und greifen hier auf unser Schulverständnis zurück.

(b) Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist eine einstellige Primzahl}\}$ ist gleich der Menge $\{2, 3, 5, 7\}$. Die Menge $\{z^2 : z \in \mathbb{Z}\}$ ist die Menge aller Quadratzahlen $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$.

(c) Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ sowie $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist eine negative Zahl}\} = \emptyset$.

Wir führen weitere Schreibweisen ein. Seien dazu N und M Mengen.

1. $M \setminus N = \{m \in M : m \notin N\}$ (sprich „M ohne N“)
2. $M \cup N = \{v : v \in M \text{ oder } v \in N\}$ (sprich „M vereinigt N“)
3. $M \cap N = \{v : v \in M \text{ und } v \in N\}$ (sprich „M vereinigt N“)
4. $M \times N = \{(m, n) : m \in M, n \in N\}$ (sprich „M kreuz N“)

Beispiel 1.3. (a) Die Menge $\mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\}$ ist gleich der Menge der ungeraden Zahlen.

(b) $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

(c) $\{1, 2\} \times \{1, 3\} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$.

1.2 Aussagenlogik

In der Mathematik sind Aussagen etweder *wahr* oder *falsch* („tertium non datur“). Zum Beispiel ist die Aussage „4 ist eine gerade Zahl“ eine *wahre* Aussage wohingegen „5 ist eine gerade Zahl“ eine *falsche* Aussage ist. Aussagen lassen sich auch verknüpfen.

Seien A und B Aussagen.

(a) $A \wedge B$ (sprich „A und B“) ist wahr, wenn A wahr ist und B wahr ist und sonst falsch. Diese Verknüpfung lässt sich auch durch eine *Wahrheitstafel* beschreiben:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

wobei 0 für falsch und 1 für wahr steht.

(b) $A \vee B$ (sprich „A oder B") ist wahr wenn A wahr ist oder B wahr ist:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(c) $A \implies B$ (sprich „A impliziert B") bedeutet, wenn A dann B:

A	B	$A \implies B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Man beachte: Ist A falsch, dann ist $A \implies B$ immer richtig.

(d) $A \Leftrightarrow B$ (sprich „A ist äquivalent zu B" oder „A gilt genau dann wenn B gilt")

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(e) $\neg A$ (sprich „nicht A") ist wahr, wenn A falsch ist:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Beispiel 1.4. Sei A die Aussage $n \in \mathbb{N}$ ist eine gerade Zahl und B die Aussage, dass $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl ist. Sei nun $n \in \mathbb{N}$.

(a) $A \wedge B$ ist für kein n wahr.

(b) $A \vee B$ ist für alle n wahr.

(c) Sei C die Aussage, dass eine natürliche Zahl durch 4 teilbar ist. Dann ist $C \implies A$ wahr, falls $n = 8$. Die Implikation ist auch wahr, wenn $n = 3$ ist.

(d) Es gilt $\neg A = B$. 18.10.2021

Bemerkung 1.5. Durch die Benutzung von *Quantoren* lassen sich Aussagen kurz und prägnant aufschreiben. Das Symbol $\forall$ bedeutet *für alle*, $\exists$ bedeutet *es gibt* oder *es existiert* und $\exists!$ bedeutet *es gibt genau ein*. Hier ein paar Beispiele:

(a) $\forall n \in \mathbb{Z} : 2n+1$ ist ungerade (wahre Aussage) bedeutet also: Für alle ganze Zahlen n ist $2n+1$ eine ungerade Zahl.

(b) $\exists n \in \mathbb{Z} : 2n+1$ ist gerade ist gleichbedeutend mit der Aussage: Es existiert eine ganze Zahl n, sodass $2n+1$ eine gerade Zahl ist (falsche Aussage).

(c) $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 = 0$ (wahre Aussage), es existiert genau eine reelle Zahl x mit $x^2 - 2x + 1 = 0$ (nämlich $x = 1$).

1.3 Abbildungen

M und N sollen stets Mengen bezeichnen. Wird jedem Element $m \in M$ **genau** ein $n \in N$ zugeordnet, so sprechen von einer *Abbildung* von M nach N. Oft wird auch das Wort *Funktion* benutzt, das behalten wir uns aber für Abbildung zwischen Mengen vor, die aus Zahlen bestehen. Die Zurodnung wird dabei mit $m \mapsto n$ gekennzeichnet. Wir können Abbildungen Namen geben, z.B. bezeichnet $f\colon M \to N$ eine Abbildung von M nach N und die Abbildung heißt f. Dabei nennen wir M den *Definitionsbereich* und N den *Wertebereich*. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ ist also festgelegt durch

(a) Angabe des Definitionsbereiches M und des Wertebereiches,

(b) Angabe der Vorschrift $m \mapsto f(m)$.

Beispiel 1.6. (a) Die Abbildung $f\colon M \to M$, $m \mapsto m$ nennt man die *identische Abbildung von M* und bezeichnet sie auch oft mit id oder gar id_M.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist die Abbildungsschrift einer *Parabel*.

(c) Wir bezeichnen mit E unsere Zeichenebene, welche wir mit $\mathbb{R}^2$ gleichsetzen können. Ist $p \in E$ ein Punkt, so betrachte die Drehung dieses Punktes um den Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$ (also um $90°$ im Gegenuhrzeigersinn) und bezeichnen den resultierenden Punkt mit $d(p)$. Dann definiert $d\colon E \to E$, $p \mapsto d(p)$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in sich.

Definition 1.7. Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. f heißt *injektiv* , wenn aus $m_1 \neq m_2$ folgt, dass $f(m_1) \neq f(m_2)$ ist. f heißt *surjektiv* falls für alle $n \in M$ ein $m \in M$ existiert, sodass $f(m) = n$ ist. Schließlich ist f eine *bijektive Abbildung* oder eine *Bijektion*, falls f injektiv und surjektiv ist. Ist $C \subset N$ eine beliebige Teilmenge, so heißt

$$f^{-1}(C) = \{m \in M : f(m) \in C\}$$

das *Urbild von C unter f* Ferner definieren wir, das *Bild* von f als

$$\mathrm{im}\,(f) = \mathrm{im}\, f = \{n \in N : \text{es existiert ein } m \in M \text{ mit } f(m) = n\}.$$

Mit anderen Worten ist also f surjektiv falls, $\mathrm{im}\, f = N$ ist und f ist injektiv falls für alle $n \in N$ das Urbild $f^{-1}(\{n\})$ höchstens ein Element besitzt. Ist $M' \subset M$ eine Teilmenge, so definiren wir *die Einschränkung von f auf M'* durch

$$f|_{M'} \colon M' \to N, \quad f|_{M'}(m) = f(m).$$

Der *Graph* einer Abbildung $f \colon M \to N$ ist die Menge

$$\mathrm{graph}(f) = \{(m, f(m)) \in M \times N : m \in M\}.$$

Beispiel 1.8. (a) Die Identität ist immer bijektiv.

(b) Die Abbildung $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ ist g injektiv: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Falls $g(n) = g(m)$ gelten würde, so wäre $2n = 2m$ und damit $n = m$, was nach Voraussetzung falsch ist. Also folgt $g(n) \neq g(m)$. g ist nicht surjektiv, da $1 \notin \mathrm{im}\,(g)$ ist. Setzen wir $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ (das ist die Menge aller gerade Zahlen), und $\tilde{g} \colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ so wäre $\tilde{g}$ injektiv und surjektiv, also bijektiv.

(c) $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto z^2$ ist weder injektiv noch surjektiv. Z.B. ist $g(1) = g(-1) = 1$ und $-1 \notin \mathrm{im}\, g$.

(d) Die Abbildung $f(x) = x^3$ ist ebenso bijektiv: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$. Wir wollen zeigen, dass f injektiv ist, d.h. man muss nachweisen, dass $f(x) \neq f(y)$ gilt. Wir rechnen

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = \frac{1}{2}(x - y)(x^2 + y^2 + (x + y)^2).$$

Definition 1.9. Seien $f \colon M_1 \to M_2$ and $g \colon M_2 \to M_3$ Abbildungen. Wir definieren eine neue Abbildung durch

$$g \circ f \colon M_1 \to M_3, \quad m_1 \mapsto g(f(m_1))$$

(sprich „g nach f"). Man nennt dann $g \circ f$ die *Verknüpfung* von g und f

Beispiel 1.10. (a) Für die Abbildung $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = 2n$ hat man $g \circ g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $g^2 = g \circ g(n) = 4n$ und allgemein $g^m(n) = 4mn$.

(b) Seien $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$ und $g(x) = 1 + x$, dann ist

$$g \circ f(x) = 1 + x^2 \quad \text{aber} \quad f \circ g(x) = (1 + x)^2.$$

Definition 1.11. Sind $f_1, f_2\colon M \to N$ zwei Abbildungen, so sehen wir als gleich an, also $f_1 = f_2$, falls für alle $m \in M$ gilt $f_1(m) = f_2(m)$. 21.10.2021

Satz 1.12. *Eine Abbildung $f\colon M \to N$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon N \to M$ gibt, sodass*

$$f \circ g = \mathrm{id}_N \quad \textit{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_M$$

gilt. g Abbildung ist eindeutig und heißt die Inverse Abbildung zu f *und wird üblicherweise mit f^{-1} bezeichnet.*

Beweis. Sei zunächst f bijektiv. Zu zeigen ist die Existenz eine Abbildung $g\colon N \to N$ wie im Satz beschrieben. Für jedes $n \in N$ existiert genau ein $m \in M$ mit $f(m) = n$. Daher können wir setzen

$$g\colon N \to M, \quad n \mapsto m, \quad \text{wobei } m \in f^{-1}\{n\}.$$

Man rechnet nun nach

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = f(m) = n = \mathrm{id}_N.$$

Analog rechnet man $g \circ f(m) = \mathrm{id}_M(m)$ für alle $m \in M$.

Sei nun $g\colon N \to M$ wie im Satz gegeben. Wir müssen zeigen, dass f bijektiv ist. Seien $m_1, m_2 \in M$ und angenommen $f(m_1) = f(m_2)$. Für die Injektivität muss bewiesen werden, dass $m_1 = m_2$ daraus folgt. Wenden wir auf beiden Seiten g an, erhalten wir

$$m_1 = g(f(m_1)) = g(f(m_2)) = m_2.$$

Hieraus folgt also, dass f injektiv ist. Für die Surjektivität sei $n \in N$ beliebig. Wir setzen $m = g(n)$. Es gilt $f(m) = f(g(n)) = n$ und daher ist $n \in \operatorname{im} f$. Folglich ist $N \subset \operatorname{im} f$ und da stets $\operatorname{im} f \subset N$ gilt, ist $\operatorname{im} f = N$, also mit anderen Worten ist f surjektiv. $\square$

Definition 1.13. Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine injektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to M$ gibt. M heißt *abzählbar unendlich*, falls M nicht endlich ist.

Bemerkung 1.14. Ist M eine abzählbare Menge, so lässt sich die Menge (nicht eindeutig) durch $\mathbb{N}$ indizieren. Man kann also schreiben

$$M = \{m_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beispiel 1.15. (a) $2\mathbb{N}$ und $(2n+1)\mathbb{N}$ sind abzählbar. Betrachte die bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$. Analoges gilt für $(2n+1)\mathbb{N}$ etwa durch die Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to (2n+1)\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n+1$. Auch $\mathbb{Z}$ ist abzählbar vermöge der Abbildung

$$h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, z \mapsto \begin{cases} 2(-z)+1, & \text{falls } z < 0, \\ 2z, & \text{falls } z \geq 0. \end{cases}$$

(b) Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzhählbar unendlich. Betrachte die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n, m) \mapsto 2^n(2m+1)$$

ist eine Bijektion (siehe Übungen) Allgemeiner gilt: Sind M_1 und M_2 abzählbar, so ist $M_1 \times M_2$ abzählbar (siehe Übungen)

Proposition 1.16. *Sei M eine abzählbare Menge. Dann ist jede Teilmenge abzählbar. Und falls eine surjektive Abbildung $f\colon M \to \widetilde{M}$ existiert, dann ist $\widetilde{M}$ ebenfalls abzählbar.*

Beweis. Sei $M' \subset M$ eine Teilmenge, welche nicht endlich ist und $f\colon M \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Da die Einschränkung einer injektiven Abbildung injektiv ist, folgt, dass M' abzählbar ist.

Wir nehmen nun an, f ist eine surjektive Abbildung. D.h. für alle $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$ ist $f^{-1}(\widetilde{m})$ nicht leer. Wir wählen für jedes solches $\widetilde{m}$ ein $m \in M$ mit $f(m) = \widetilde{m}$. Dies definiert eine Abbildung $g\colon \widetilde{M} \to M$, $\widetilde{m} \mapsto m$. Nach Konstruktion ist g eine injektive Abbildung. Und da die Verkettung von injektiven Abbildungen wieder injektiv ist, folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel 1.17. Die rationalen Zahlen sind abzählbar. Nach Beispiel 1.15 ist $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ abzählbar. Ferner ist die Abbildung

$$f\colon \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}, \quad (z, n) \mapsto \frac{z}{n}$$

surjektiv. Nach Proposition 1.16 ist damit $\mathbb{Q}$ abzählbar. Die reellen Zahlen sind hingegen nicht abzählbar. Ein Beweis davon ist für uns noch nicht in Reichweite. Wir versweisen auf XXX 25.10.2021

2 Reelle Zahlen

Wir werden in diesem Kurs die reellen Zahlen nicht kontruieren. Doch wir wollen trotzdem ein paar Worte darüber verliegen, was reelle Zahlen eigentlich sind. Wir zitieren aus einem Text vom Richard DEDEKIND mit dem Titel „Was sind und was sollen die Zahlen?“ (siehe auch [2, S. 13])

„Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellung von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlen-Reich beziehen.“

Wir zitieren weiter aus [2, S. 13]:

„Wir stellen uns also auf den Standpunkt, dass uns die reellen Zahlen zur Verfügung stehen. Da wir sie auf *Raum und Zeit* beziehen wollen, nehmen wir die geometrische Vorstellung zu Hilfe und denken uns die reellen Zahlen als Punjkte auf der *Zahlengerade*. Wegen der grundlegenden Bedeutung für die gesamte Mathematik müssen wir uns nur darüber verständigen, welche Eigenschaften wir den reellen Zahlen zuschreiben, und zwar mit Hinblick auf das Rechnen und die Anordnung (Größenvergleich)“

Diese Vorlesung nimmt hier den oben beschriebenen Standpunkt ein, was die reellen Zahlen betrifft.

2.1 Gruppen und Körper

Definition 2.1. Eine Menge G mit einer Abbildung (die man hier üblicherweise als *Verknüpfung* bezeichnet) $\circ\colon G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto a \circ b$ heißt *Gruppe*, wenn gilt:

(a) *Assoziativgesetz*:
$$\forall a,b,c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

(b) Existenz eines *neutralen Elementes*:
$$\exists e \in G : \forall a \in G : a \circ e = e \circ a = a.$$

(c) Existenz inverser Elemente:
$$\forall a \in G :\ \exists!\, b \in G : a \circ b = b \circ a = e.$$

Es kann gezeigt werden, dass so ein b eindeutig ist und wird daher meistens mit a^{-1} bezeichnet. Man nennt dieses Element das *Inverse zu a*.

Falls zusätlich noch gilt

(d) *Kommutativgesetz*
$$\forall a, b \in G : \ a \circ b = b \circ a,$$
dann heißt G *abelsch* bzw. *kommutativ*.

Beispiel 2.2. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind abelsche Gruppen. Statt $\circ$ schreibt man oft auch $+$ wie im Falle der eben genannten Gruppen. Dann schreibt man das Inverse zu einem Element a mit $-a$ bezeichnet, statt mit a^{-1}. Die Mengen $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ besitzen noch eine weitere Gruppenstruktur: Für $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definieren wir $x \circ y = x \cdot y$ (die gewöhnliche Mutliplikation zweier rationaler Zahlen). Man rechnet leicht nach, dass dies eine Gruppenstruktur definiert. Hier schrieben wir die Verknüpfung Multiplikativ und daher wird für das Inverse nicht $-x$ benutzt sondern x^{-1} oder $\frac{1}{x}$.

Beispiel 2.3. Sei M eine beliebige Menge und
$$G := \{f : M \to M : f \text{ ist bijektiv}\}.$$
Die Verkettung von Abbildung (siehe Definition 1.9) soll eine Verknüpfung auf G defieren. Somit wird G zu einer Gruppe: das neutrale Element ist die Identität, das Inverse zu f ist die Inverse Abbildung (siehe Satz 1.12) und wird mit f^{-1} bezeichnet. G ist im Allgemeinen nicht abelsch. Betrachten wir z.B. die Menge $M = \{1, 2, 3\}$ und betrachten die Abbildungen
$$f : M \to M, \quad f(1) = 1,\ f(2) = 3,\ f(3) = 2$$
und
$$g : M \to M, \quad g(1) = 3,\ g(2) = 1,\ g(3) = 2.$$
Dann ist $f \circ g(1) = 2$ aber $g \circ f(1) = 3$, also ist $f \circ g \neq g \circ f$.

Definition 2.4. Sei K eine Menge und $+, \cdot : K \times K \to K$ heißt *Körper*, wenn gilt:

(a) K ist bezüglich $+$ eine abelsche Gruppe (das neutrale Element wird hierbei mit 0 bezeichnet).

(b) $K \setminus \{0\}$ ist bezüglich $\cdot$ eine abelsche Gruppe, das neutrale Element wird mit 1 bezeichnet (oft wird $\cdot$ auch einfach weggelassen)

(c) Das Distributivgesetz gilt:
$$\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

Beispiel 2.5. (a) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Addition und der Multiplikation sind Körper.

(b) Sei $K = \{0, 1\}$. Wir definieren die Verknüpfung durch folgende zwei Tabellen

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Damit wir K zu einem Körper, der üblicherweise mit $\mathbb{F}_2$ oder mit $\mathbb{Z}_2$ bezeichnet wird.

(c) Sind n und m zwei natürliche Zahlen, dann schreiben wir $n \mod m$ für den Rest bei der Division von n durch m. Also ist $10 \mod 5 = 0$ und $10 \mod 4 = 2$. Betrachte nun für jede Primzahl p die Menge $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Wir definieren zwei Verknüpfungen durch $(q, r \in \mathbb{F}_p)$

$$q \tilde{+} r := q + r \mod p,$$

sowie

$$q * r := q \cdot r \mod p.$$

Diese beiden Operation machen $\mathbb{F}_p$ zu einem Körper. Ist p keine Primzahl, so ist $\mathbb{F}_p$ nie ein Körper.

Bemerkung 2.6. Sei K ein Körper. Dann gilt

(a) Für alle $a \in K$ gilt $a \cdot 0 = 0$. Denn

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 0 - a \cdot 0 = a(0 + 0) - a \cdot 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 a \cdot 0) \\ &= a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass aus $a \cdot b = 0$ entwerder $a = 0$ oder $b = 0$ folgt. Diese Eigenschaft von Köpern nennt man *Nullteilerfreiheit*. Weiter gilt

$$(-a) \cdot b = -(ab), \quad (-a) \cdot (-b) = ab.$$

und

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Hierbei ist $2 = 1 + 1$ und $a^m = a \cdot \ldots \cdot a$ (m-mal) für $m \in \mathbb{N}$.

Definition 2.7. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in K$ setzen wir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \ldots + a_n, \quad \prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot \ldots a_n.$$

Ferner wird definiert

$$\sum_{i=1}^{0} a_i := 0, \quad \prod_{i=1}^{0} a_i = 1$$

für $a_i \in K$. Weiter sei $a^0 = 1$ und $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ (sprich „n Fakultät") Für $0 \leq k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten* als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(sprich „n über k").

Proposition 2.8. *Es gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad (k+1)\binom{n}{k+1} = (n-k)\binom{n}{k}.$$

Beweis. Wir rechnen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Und weiter ist

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
(k+1)\binom{n}{k+1} &= (k+1)\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \\
&= (n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!} = (n-k)\binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

□

2.2 Vollständige Induktion

Die Menge der natürlichen Zahlen besitzt eine Anordnung, d.h. gegeben zwei natürliche Zahlen, so ist es möglich zu entscheiden welche der beiden Zahlen größer ist (falls sie nicht gleich sind). Diese so simple Beobachtung, zieht folgende Eigenschaft nach sich: *Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element.* D.h. ist $A \subset \mathbb{N}$ mit $A \neq \emptyset$, so gibt es ein $m \in A$ mit $m \leq n$ für alle $n \in A$.

Die obige Aussage hat nun das *Induktionsprinzip* zur Folge: Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

(a) $0 \in M$,

(b) auf $k \in M$ folgt auch $k+1 \in M$,

so folgt $M = \mathbb{N}$. Wäre nämlich $M \neq \mathbb{N}$, so wäre die Menge

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \notin M\}$$

nicht-leer. Sei $m \in A$ das kleinste Element. Wegen (a) muss $m > 0$ sein. Ferner muss nach Konstruktion $m - 1 \in M$ gelten. Dann müsste aber wegen (b) $m \in M$ was ein Widerspruch wäre. Daher ist die Annahme, dass A nicht-leer ist falsch, also $A = \emptyset$ und damit $M = \mathbb{N}$. 28.10.2021

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion. Sei $\mathcal{A}(n)$ eine Aussage über eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Wollen wir diese Aussage für alle natürliche Zahlen zeigen, so können wir uns dem Prinzip der vollständigen Induktion bedienen. Betrachten wir ein Beispiel: Wir wollen zeigen, dass die Summe der ersten n Quadratzahlen gleich $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ist. D.h.

$$\mathcal{A}(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{A}(1)$ richtig ist. Klarerweise gilt für die linke Seite $1^2 = 1$ und für die rechte $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$. Folglich ist $\mathcal{A}(1)$ wahr. Dann zeigen wir: Falls $\mathcal{A}(n)$ richtig ist, so muss auf $\mathcal{A}(n+1)$ richtig sein (*Induktionsschritt*). Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{A}(n)$ richtig ist (*Induktionsannahme*). Betrachte

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)((n+2)(2k+3)) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1).\end{aligned}$$

Also ist die Aussage auch für $\mathcal{A}(n+1)$ wahr. Nach dem Induktionsprinzip gilt aber nun: $\mathcal{A}(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ (*Induktionsschluß*), denn die Menge

$$M = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{A}(n) \text{ ist wahr}\}$$

erfüllt die Eigenschaften (a) und (b) des Induktionsprinzips. Daher muss $M = \mathbb{N}$ sein.

Bemerkung 2.9. Die vollständige Induktion muss nicht bei 1 beginnen. Genauso gilt: Eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ ist für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ richtig, falls gilt:

(a) $\mathcal{A}(n_0)$ ist richtig,

(b) für $n \geq n_0$ folgt aus der Richtigkeit von $\mathcal{A}(n)$ die von $\mathcal{A}(n+1)$.

Proposition 2.10. *In einem Körper K gilt die allgemeine binomische Formel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $a, b \in K$ ist*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir führen eine vollständige Induktion nach n durch. Für $n = 0$ ist die Aussage klar. Wir nehmen dann im Induktionsschritt an, dass für alle $a, b \in K$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

gilt. Wir rechnen mit Hilfe der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)(a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&\overset{2.8}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

2.3 Eigenschaften der reellen Zahlen

Die Rechenregeln für reelle Zahlen (wie z.B. Rechnen mit Brüchen, Potenzen) folgen aus den Körperaxiomen und gelten daher für alle Körper. Diese Regeln werden aus der Schule als bekannt vorausgesetzt.

Bemerkung 2.11. Die reellen Zahlen sind *angeordnet*, d.h. jede reelle Zahlen $a \neq 0$ ist entweder positiv oder negativ. Ferner gilt ist $a > 0$ und $b > 0$ dann ist auch $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$. Hieraus folgen nun eine Reihe von weiteren Eigenschaften

(a) Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$,

(b) Ist $a > 0$ und $b < 0$, so ist $a \cdot b < 0$, $\frac{1}{a} > 0$ und $\frac{1}{b} < 0$,

(c) $a < b$ genau dann wenn $-a > -b$,

(d) sei $c > 0$, dann gilt $a < b$ genau dann wenn $a \cdot c < b \cdot c$,

(e) sei $c < 0$, dann gilt $a < b$ genau dann wenn $a \cdot c > b \cdot c$,

(f) ist $0 < a < b$, so folgt $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ sowie $\frac{b}{a} > 1$,

(g) wenn $a \leq b$ und $b \geq a$ gilt, so folgt $a = b$.

Definition 2.12. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$. Wir definieren:

$\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\mathbb{R}_0^+ := \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\}$,

$\mathbb{R}^- := \{a \in \mathbb{R} : a < 0\}$, $\mathbb{R}_0^+ := \{a \in \mathbb{R} : a \leq 0\}$,

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (*abgeschlossene Intervall* oder auch *kompaktes Intervall*),

$(a, b] =]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (*halboffenes Intervall*),

$[a, b) = [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (*halboffenes Intervall*),

$(a, b) =]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (*offenes Intervall*),

$(-\infty, a] =]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$,

$(-\infty, a) =]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$,

$[b, \infty) = [b, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}$,

$(b, \infty) =]b, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$.

Ferner definieren wir den *Betrag von a* durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Weiter sei

$$\max\{a,b\} = \begin{cases} a, & \text{falls, } a \geq b, \\ b, & \text{falls, } a < b, \end{cases} \qquad \min\{a,b\} = \begin{cases} b, & \text{falls, } a \geq b, \\ a, & \text{falls, } a < b, \end{cases}$$

Satz 2.13. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $|-a| = |a|$,

(b) $|a| < b$ *genau dann wenn* $-b < a < b$,

(c) $|a+b| \leq |a| + |b|$ *und* $|a+b| \geq |a| - |b|$,

(d) $||a| - |b|| \leq \min\{|a-b|, |a+b|\}$,

(e) $\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a + b + |b-a|)$,

(f) $\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a + b - |b-a|)$.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus der Definition. Für die dritte Aussage gehen wir wie folgt vor: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq |a|$, also insbesondere $a + b \leq |a| + |b|$ und $-a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$ und damit insegesamt $|a+b| \leq |a| + |b|$. Die weiteren Aussagen zeigt man analog. □

Definition 2.14. (a) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl K gibt mit $x \leq K$ für alle $x \in M$. K heißt in diesem Fall eine *obere Schranke* für M. Ist K eine obere Schranke so ist jedes $K' \geq K$ eine obere Schranke. Analog werden die Begriffe *nach unten beschränkt* und *untere Schranke* definiert.

(b) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls es ein $K \geq 0$ gibt, sodass für alle $x \in M$ $|x| \leq K$ gilt. K heißt in diesem Fall eine *Schranke*.

01.11.2021

Beispiel 2.15. (a) $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt, z.B. durch 0.

(b) $\mathbb{R}^+$ ist nach unten durch die 0 beschränkt aber sie ist keine beschränkte Menge.

(c) Die Intervalle (a,b) und $[a,b)$ sowie $(a,b]$ sind nach unten durch a und nach oben durch b beschränkt. Sie sind allesamt beschränkte Mengen und eine Schranke ist $\max\{|a|,|b|\}$.

(d) Die Menge
$$W := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$$
hat 2 als obere Schranke und -2 als untere Schranke. Denn für jedes $x \in W$ gilt $x^2 < 2 < 2^2$. Hieraus folgt $0 < 4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$. Da beide Produkte positiv sein müssen folgt $-2 < x < 2$. Ferner zeigt dies, dass W beschränkt ist und 2 eine Schranke ist.

Nun kann man sich fragen, was $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$ unterscheidet? Bisher haben wir gesehen, dass beide Menge als Körper angesehen werden können. Aus Sicht der Analysis liegt der Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ in der *Vollständigkeit*.

Bemerkung 2.16. Es gibt keine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$[1]. Nehmen wir an, dass es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $r^2 = 2$. Schreibe r als Bruch $\frac{p}{q}$ wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ teilferfremd sind (d.h. sie besitzen keinen gemeinsamen Teiler; dies ist klarerweise immer möglich). Damit muss
$$p^2 = 2q^2$$
sein. Also ist p^2 durch 2 teilbar. Dann muss aber auch p gerade sein, weil das Produkt zweier ungeraden Zahlen sonst ungerade wäre. Wenn aber p durch 2 teilbar ist, dann ist p^2 durch 4 teilbar. Wegen $p^2 = 2q^2$, müsste dann q^2 durch 2 teilbar sein, also inbesondere wäre q gerade. Damit wäre sowohl p also q durch 2 teilbar, was unserer Annahme, dass p und q teilerfrem sind, wiederspricht! Daher müsste die Annahme, dass r rational ist falsch sein.

Das Supremumsaxiom. Jede nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke. Diese wird *Supremum* von M genannt und mit $\sup M$ bezeichnet.

$s = \sup M$ besitzt also folgende Eigenschaften:

(a) s ist klarerweise eine obere Schranke von M,

(b) Jede Zahl $r < s$ ist *keine* obere Schrank von M: Es gilt $r < x$ für mindestens ein $x \in M$.

Jede nach untern beschränkte, nichtleere Teilmenge M und $\mathbb{R}$ besitzt eine größte obere Schranke. Diese wird als *Infimum* von M bezeichnet und wir mit $\inf M$ notiert. Denn spiegelt man M am Nullpunkt, also betrachtet die Menge
$$\widetilde{M} = \{-x : x \in M\}$$
so ist $\widetilde{M}$ nach oben beschränkt und besitzt ein Supremum. Das Supremum von $\widetilde{M}$ ist das Infinum von M. Wie für das Supremum gilt auch hier: $t = \inf M$ bedeutet:

[1] Dieser Beweis stammt von Euklid (griechischer Mathematiker, 3. Jhdt. vor Christus) und ist niedergeschrieben in *Elemente*, Buch X, Proposition 117.

(a) t ist eine untere Schranke für M, also für alle $x \in M$ ist $t \leq x$ und

(b) jede Zahl $r > t$ ist keine untere Schranke für M; es gilt $r > x$ für mindestens ein $x \in M$.

Beispiel 2.17. Für $I =]a, b[$ gilt $b = \sup I$. Denn b ist eine obere Schranke für I und für $r < b$ gibt es ein $x \in I$ mit $r < x$, etwa

$$x = \frac{1}{2}(r' + b) \quad \text{für } r' = \max\{a, r\}.$$

Und analog zeigt man $a = \inf I$. Man beachte, dass I weder ein *Minimum* noch ein *Maximum* besitzt. Das Supremum und Infimum einer Menge muss also nicht in der Menge selbst enthalten sein. Besitzt allerdings eine Menge ein Maximum, so ist es gleichzeitig auch das Supremum.

Folgerungen aus dem Supremumsaxiom. Wir geben drei äquivalente Formulierungen des Supremumsaxioms an

(a) Für positive Zahlen a, b gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot a > b$.

(b) Zu jeder positiven Zahl r gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > r$.

(c) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Beweis. (Wird in der Vorlesung ausgelassen.) Zu (b): Sei $r > 0$. Angenommen es gäbe kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > r$. Dann wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt mit oberer Schranke r. Nach dem Supremumsaxiom existiert $s := \sup \mathbb{N}$ und es gilt für all $n \in \mathbb{N}$, dass $n + 1 \leq s$ ist. Damit wäre aber $n \leq s - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s - 1$ wäre eine kleinere obere Schranke als s, was aber ein Widerspruch zur Wahl von s ist. Teil (a) folgt aus (b) mit $r = \frac{b}{a}$ und (c) mit $r = \frac{1}{\varepsilon}$.

$\square$

Lemma 2.18. *Sei $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x \leq \frac{c}{n}$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt $x \leq 0$.*

Beweis. Angenommen $x > 0$. Nach (c) aus den Folgerungen aus dem Supremumsaxiom existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \frac{x}{2c}$. Wir können annehmen, dass $N \geq n_0$ ist. Dann gilt aber

$$x \leq \frac{c}{N} < \frac{x}{2}$$

was ein Widerspruch ist. $\square$

Satz 2.19. *Sei $0 \neq n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$. Die Gleichung $x^n = a$ hat genau eine Lösung $x > 0$. Diese bezeichnet man mit $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ und nennt sie die n-te Wurzeln von a.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jede Lösung von $x^n = a$ mit $x > 0$ eindeutig sein muss. Wäre y eine weitere Lösung der Gleichung, also $y^n = a$ und $y > 0$, so gilt nach Hausaufgabe **A3.1** (d)

$$0 = x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

Da die Summe positiv sein muss (weil $x, y > 0$) muss $x - y = 0$ sein, also $x = y$, was bedeutet, dass die Lösung eindeutig ist.

Als nächstes zeigen wir die Existenz einer Lösung. Betrachte

$$A = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0,\, y^n < a\}.$$

Dann ist $0 \in A$ also $A \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass A nach oben beschränkt ist durch $1 + a$. Dafür benötigen wir ein

Lemma 2.20. *Sind $a, b > 0$ so gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

$$a^n < b^n \text{ genau dann wenn } a < b.$$

Beweis. (von Lemma 2.20) Aus $a < b$ folgt klarerweise $a^n < b^n$, da $a, b > 0$. Sei nun $a^n < b^n$, wir wollen dann zeigen, dass $a < b$ gilt. Es gilt nach Hausaufgabe **A3.1** (d)

$$0 < b^n - a^n = (b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Da die Terme unter dem Summenzeichen alle positiv sind und die linke Seite der Gleichung auch, muss $b - a > 0$ gelten, also $b > a$. □

Wir behaupten, dass A beschränkt nach oben durch $1 + a$ ist. Dazu rechnen wir mit Hilfe der *Bernoulli-Ungleichung*

$$y^n - (1+a)^n < a - (1+a)^n < a - (1+na) = a(1-n) - 1 < 0$$

weil $a > 0$. Da $y \geq 0$, gilt nach Lemma 2.20 $y < 1 + a$ für alle $y \in A$. Folglich existiert $s = \sup A$. Wir behaupten, s ist eine Lösung der Gleichung $x^n = a$. 04.11.2021

Wir zeigen weiter, dass $a \leq s^n$ ist. Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $s + \frac{1}{m} \notin A$, also $a \leq \left(s + \frac{1}{m}\right)^n$ und nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$a \leq \left(s + \frac{1}{m}\right)^n = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{k} \frac{s^k}{m^{n-k}} < s^n + \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{k} s^k.$$

nach Lemma 2.18 folgt dann $a - s^n \leq 0$, also $a \leq s^n$.

Wir zeigen als nächstes, dass $s^n \leq a$ ist. Wegen $s^n \geq a > 0$ ist $s^n > 0$, also $s > 0$. Dann existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{M} < s$. Für $m \geq M$ gilt dann

$$0 < s - \frac{1}{M} < s - \frac{1}{m}.$$

Da $s - \frac{1}{m}$ keine obere Schranke von A ist, gibt es für jedes $m \geq M$ ein $x_m \in A$ mit $s - \frac{1}{m} < x_m$. Dann gilt aber

$$a > x_m^n > \left(s - \frac{1}{m}\right)^n = s^n \left(1 - \frac{1}{sm}\right)^n \geq s^n \left(1 - \frac{n}{sm}\right).$$

Bei der letzten Ungleichungen haben wir die Bernoullische Ungleichung benutzt (beachte, dass für m groß genug $-\frac{1}{sm} \geq -1$ ist). Insgesamt folgt damit

$$s^n - a \leq \frac{ns^{n-1}}{m}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ die groß genug ist. Folglich ist mit Lemma 2.18 $s^n \leq a$ und insgesamt erhalten wir $s^n = a$. □

Bemerkung 2.21. (a) Nach Definition gilt für $a > 0$ also $(a^{\frac{1}{n}})^n = a = (a^n)^{\frac{1}{n}}$. Damit ist die Funktion $\sqrt[n]{}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ die Umkehrfunktion von der Abbildung $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^n$.

(b) Für $a > 0$ und $m \in \mathbb{Z}$ sowie $n \in \mathbb{N}$, setzt man

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Damit ist a^r für $r \in \mathbb{Q}$ definiert. Es gelten die bekannten Potenzregeln

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}.$$

2.4 Folgen und Grenzwerte

Folgen sind ein grundlegender Bestandteil der Analysis. Durch Folgen lassen sich Zahlen approximieren (wie z.B. $\sqrt{2}$) und manche reelle Zahlen sind überhaupt nur durch Folgen definiert (wie z.B. die Eulersche Zahl e oder die Kreiszahl π).

Definition 2.22. *Eine Folge reeller Zahlen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto x_n$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und wird eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ ausgewählt, so heißt die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel 2.23. (a) Die ersten Folgeglieder der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sehen wie folgt aus

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Setzt man $n_k = 2k$, für $k \in \mathbb{N}$ so erhält man die Teilfolge

$$\left(\frac{1}{n_k}\right) = \left(\frac{1}{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

(b) Ein weiteres Beispiel ist die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $a \in \mathbb{R}$.

Definition 2.24. Eine Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$ falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

ist. Ist das der Fall, so nennt man x den *Grenzwert* von der Folge (x_n) und man schreibt dafür

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Ferner sagt man, dass eine Folge (x_n) gegen ∞ konvergiert, wenn für alle $c > 0$ ein $n_c \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_c$ gilt

$$x_n > c.$$

Hierfür schreibt man auch

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Und analog definiert man, dass eine Folge (x_n) gegen $-\infty$ konvergiert, wenn für alle $c < 0$ ein $n_c \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_c$ gilt

$$x_n < c.$$

Hierfür schreibt man auch

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Beispiel 2.25. (a) $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, da nach (c) aus **Folgerungen aus dem Supremumsaxiom** für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Dann gilt aber auch für alle $n \geq N$, dass $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

(b) Es gilt $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 1$ für $n \to \infty$. Denn nach dem Supremumsaxiom existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon^2$. Nach Lemma 2.20 folgt dann $\frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$ und damit ist für alle $n \geq N$

$$\left|1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Definition 2.26. Eine Folge (x_n) heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $c \geq 0$ gibt, sodass $|x_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit anderen Worten, falls die Menge

$$X = \{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$$

beschränkt ist.

(x_n) heißt nach *oben beschränkt* (*unten beschränkt*), wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $x_n \leq c$ ($x_n \geq c$) gilt.

Sie heißt *monoton wachsend* (*fallend*), wenn $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Ferner nennen wir eine Folge (x_n) welche gegen 0 konvergiert eine *Nullfolge*. Damit lässt sich die Konvergenz einer Folge auch umformulieren: Eine Folge (x_n) konvergiert gegen x, falls $x_n - x$ eine Nullfolge ist.

Satz 2.27. *Seien $(x_n), (y_n)$ und (z_n) Folgen. Dann gilt*

(a) Konvergente Folgen sind beschränkt.

(b) Es gelte $|x_n| \leq y_n$ für $n \geq n_0$ und $y_n \to 0$. Dann gilt auch $x_n \to 0$.

(c) Falls $x_n \to x$ für $n \to \infty$, dann auch $|x_n| \to |x|$ und $\lambda x_n \to \lambda x$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Falls $x_n \to x$ und $x \neq 0$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \neq 0$ für alle $n \geq N$.

(e) Falls $x_n \to x$ und $y_n \to y$, dann gilt auch

$$x_n + y_n \to x + y, \quad x_n \cdot y_n \to x \cdot y.$$

Falls $y \neq 0$ so gilt auch

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}.$$

(beachte, dass falls $y \neq 0$ ist, dann sind alle bis auf endlich viele Folgenglieder von y_n nicht 0. Die endliche vielen Folgenglieder welche Null sind, müssen wir dann dementsprechend fortlassen.)

(f) Falls $x_n \to x$, $y_n \to y$ und $x_n \leq y_n$ für alle n, dann ist $x \leq y$. Falls zusätzlich $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle n gilt mit $x = y$, dann ist $z_n \to x$.

(g) Gilt $x_n \to x$, so gilt für jede Teilfolge $x_{n_k} \to x$ für $k \to \infty$.

Beweis. Für (a) wähle $\varepsilon = 1$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x| \leq \varepsilon = 1$ für alle $n \geq N$. Aus Satz 2.13 (c) folgt nun

$$|x_n| \leq |x| + 1$$

für alle $n \geq N$. Damit ist aber

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, |x| + 1\}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für Aussage (b) sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt $|y_n| < \varepsilon$. Man beachte, dass nach Vorraussetzung $y_n \geq 0$ gilt. Damit gilt für alle $n \geq \max\{n_0, N\}$

$$|x_n| \leq y_n = |y_n| < \varepsilon,$$

was zu zeigen war.

(c) folgt aus Satz 2.13 (d) und Satz 2.27 (b), denn es gilt

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|,$$

und $x_n - x$ ist eine Nullfolge. Analog gilt $|\lambda x_n - \lambda x| = |\lambda| \cdot |x_n - x| \to 0$ für $n \to \infty$. 08.11.2021

Für die Aussage (d) setzen wir $\varepsilon := \frac{1}{2}|x|$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt

$$|x_n - x| \leq \varepsilon = \frac{1}{2}|x|.$$

Da $|x_n - x| = |x - x_n| \geq |x| - |x_n|$ folgt

$$|x_n| \geq \frac{1}{2}|x| > 0$$

für alle $n \geq N$.

Betrachten wir nun Aussage (d). Es gilt

$$|x_n + y_n - x - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Für $\varepsilon > 0$ existiert nun ein $N_x \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_x$ sowie ein $N_y \in \mathbb{N}$ mit $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_y$. Dann gilt aber für alle $n \geq \max\{N_x, N_y\}$

$$|x_n + y_n - x - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also $x_n + y_n \to x + y$. Für den zweiten Teil führen wir folgende Umformungen durch

$$\begin{aligned}
|x_n \cdot y_n - x \cdot y| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y + x_n \cdot y - x \cdot y| \\
&\leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x| \\
&\leq C \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x|.
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir Satz 2.27 (a) benutzt und die Schranke der Folge (x_n) C genannt. Ferner sehen wir, dass die rechte Seite der Ungleichung eine Nullfolge ist (benutze Satz 2.27 (c), (e) und dass $|y_n - y|$ sowie $|x_n - x|$ Nullfolgen sind). Damit ist aber nach Satz 2.27 (b) $|x_n y_n - xy|$ eine Nullfolge, was zu zeigen war. Analog zeigt man die Kovergenz von $\frac{x_n}{y_n}$ gegen $\frac{x}{y}$.

Wir wollen schließlich Aussage (f) beweisen. Für alle n gilt

$$0 \leq y_n - x_n = y_n - y + x - x_n + y - x$$

und damit

$$x - y \leq |y_n - y| + |x_n - x|.$$

Nun existiert in $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|y_n - y| < \frac{1}{2N}$ sowie $|x_n - x| < \frac{1}{2N}$, da $y_n \to y$ und $x_n \to x$. Folglich gilt für alle $n \geq n_0$, dass $x - y \leq 2 \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{N}$. Aus Lemma 2.18 folgt, $x - y \leq 0$ was $x \leq y$ impliziert. Für die letzte Aussage folgt aus den Vorraussetzungen

$$0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$$

also

$$|z_n - x_n| \leq |y_n - x_n|.$$

Und weiter ist $|z_n - x_n| = |z_n - x + x - x_n| \geq |z_n - x| - |x - x_n|$. Folglich

$$|z_n - x| \leq |y_n - x_n| + |x - x_n|.$$

Die rechte Seite ist eine Nullfolge, da $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x$. Das zeigt aber $z_n \to x$.

Aussage (g) folgt direkt aus der Erkenntniss, dass immer $n_k \geq k$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist also $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - x| < \varepsilon$ gilt für alle $n \geq N$, so gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq N$ für alle $k \geq K$. Also ist dann $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$ für alle $k \geq K$. $\square$

Beispiel 2.28. Wir werden im folgenden die Aussagen aus Satz 2.27 benutzen ohne sie explizit zu Kennzeichnen. Wir gehen davon aus, dass klar ist welche der Aussagen benutzt werden.

(a) $x_n = \frac{n+1}{n}$. Dann gilt $x_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1 + 0 = 0$.

(b) $x_n = \frac{n}{n^2+1}$. Es gilt

$$\left|\frac{n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} < \frac{1}{n}.$$

Da $\left(\frac{1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist, gilt auch $x_n \to 0$.

(c) Sei $|q| < 1$ und $x_n = q^n$. Wir behaupten (q^n) ist eine Nullfolge. Für $q = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei also $0 < |q| < 1$. Es gilt $|q| = \frac{1}{1+h}$ mit $h = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt dann

$$\frac{1}{|q^n|} = \frac{1}{|q|^n} = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh,$$

somit $|q^n| \leq \frac{1}{h \cdot n}$. Da $\left(\frac{1}{h \cdot n}\right)$ eine Nullfolge ist, folgt auch, dass q^n eine Nullfolge ist.

(d) $x_n = \frac{n^2-2n-3}{3n^2+7n+18}$. Dann gilt

$$\frac{n^2 - 2n - 3}{3n^2 + 7n + 18} = \frac{1 - \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{7}{n} + \frac{18}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-0-0}{3+0+0} = \frac{1}{3}$$

Satz 2.29. *Ist $(x_n)_{n\geq n_0}$ eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge, dann ist $(x_n)_{n\geq n_0}$ konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \geq n_0\} =: \sup_{n\geq n_0} x_n.$$

Ist $(x_n)_{n\geq n_0}$ eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge, dann ist $(x_n)_{n\geq n_0}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \geq n_0\} =: \inf_{n\geq n_0} x_n.$$

Beweis. Da (x_n) beschränkt ist, folgt, dass die Menge $\{x_n : n \geq n_0\}$ beschränkt ist. Sei x das Supremum dieser Menge. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N \geq n_0$, sodass $x - x_N < \varepsilon$ ist (ansonsten wäre $x - \varepsilon$ eine kleinere Schranke als x). Da (x_n) monoton wachsend ist, gilt $x - x_n < x - x_N$ für alle $n \geq N$. Da aber $x - x_n \geq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt, erhalten wir für alle $n \geq N$

$$|x - x_n| < \varepsilon.$$

Analog zeigt man die Aussage für nach unten beschränkte monoton fallende Folgen. □ 11.11.2021

Satz 2.30 (Der Satz von Bolzano-Weierstraß[2]). *Jede beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass jede Folge (x_n) eine monotone Teilfolge besitzt. Wir nennen $n \in \mathbb{N}$ eine *Spitze* der Folge (x_n), falls $x_n < x_N$ für alle $n \geq N$ ist. Falls eine Folge unendlich viele Spitzen besitzt, etwa $n_1 < n_2 < \ldots$, dann ist die Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach Konstruktion eine monoton fallende Folge. Gibt es hingegen nur endliche viele Spitzen, etwa N Stück (man beachte, dass N auch Null sein kann, d.h. die Folge hat keine Spitzen), so setze man $n_1 = N + 1$. Dann muss es ein $n_2 > n_1$ geben mit $x_{n_1} \leq x_{n_2}$, da x_{n_1} keine Spitze sein kann. Induktiv erhält man eine monoton wachsende Teilfolge (x_{n_k}), da es nach x_N keine Spitzen mehr geben kann.

Da jede beschränkte Folge nun eine monotone Teilfolge besitzt, welche ebenso beschränkt ist, muss nach Satz 2.29 die Teilfolge konvergieren. □

Beispiel 2.31. Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Klarerweise ist $s_n < s_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was bedeutet, dass die Folge monoton wachsend ist. Wir zeigen, dass sie auch beschränkt nach oben ist: Für alle $k \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 3 - \frac{1}{n} < 3 \end{aligned}$$

was bedeutet, dass (s_n) beschränkt ist.

Definition 2.32. Sei $(x_k)_{k\geq k_0}$ eine Folge. Dann bezeichnet man

$$s_n = \sum_{k=k_0}^{n} x_k$$

[2] *Bernadus Bolzano* (1781 – 1848), böhmischer Mathematiker; *Karl Weierstraß* (1815 – 1897), deutscher Mathematiker.

als die *k-te Partialsumme*. Falls die Folge (s_n) konvergiert, dann setzt man

$$s := \sum_{k=k_0}^{\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=k_0}^{n} x_n.$$

Die Folge (s_n) heißt dann *(unendliche) Reihe* mit den Gliedern x_n und s heißt der *Grenzwert* oder *Summe* der Reihe. Ist die Folge der Partialsumme (s_n) nicht konvergent, so sagt man, dass die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ *divergiert*.

Beispiel 2.33. (a) Betrachte $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt. Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Wir betrachten

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Es folgt $s_n \to 1$ also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

(b) Ist $|q| < 1$, dann ist $\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1}{1-q}$. Nach Hausaufgabe **A3.2** (b) gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

für $n \to \infty$ (bei der Konvergenz haben wir Beispiel 2.28 (c) benutzt). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^n$ heißt *geometrische Reihe*.

(c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert und man nennt sie die *harmonische Reihe*. Wenn $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ konvergiert, so muss s_{2l} für $l \to \infty$ ebenso konvergieren nach Satz 2.27 (g). Wir rechnen

$$\begin{aligned}
s_{2l} &= \sum_{k=1}^{2l} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{l} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{l} \frac{2}{2k} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{l} \\
&= \frac{1}{2} + s_l.
\end{aligned}$$

Da nun s_{2l} und s_l beide gegen den gleichen Grenzwert konvergieren müssen, etwa s, so würde $s \geq \frac{1}{2} + s$ gelten, was aber ein Widerspruch ist.

(d) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ konvergiert für $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 2$. Klarerweise ist die Summe der Partialfolgen $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$ monoton wachsend, somit genügt es für die Konvergenz eine obere Schranke anzugeben. Dafür schätzen wir für alle $k \geq 2$ und alle $r \geq 2$ wie folgt ab

$$\frac{1}{k^r} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Also

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^r} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Das beweist, dass s_n beschränkt ist und somit konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$.

Für die Berechnung dieser Reihen benötigt man etwas mehr Technologie. Mittels *Fourrierreihen* kann man zeigen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Satz 2.34. *(a) Eine Abänderung von endlich vielen Gliedern ändert das Konvergenzverhalten der Reihe nicht, d.h. konvergente Reihen bleiben konvergent und divergente Reihe bleiben divergent. Aber anders als bei den Folgen bewirkt eine Abänderung eines Reihengliedes auch eine Änderung des Grenzwertes.*

(b) Ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_n = x$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} y_n = y$, so gilt für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y.$$

(c) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_n$, so ist die Folge (x_n) eine Nullfolge.

Beweis. Durch eine Indexverschiebung, können wir immer $k_0 = 0$ annehmen. Wir setzen $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_n$ und $t_n = \sum_{k=0}^{n} y_n$.

Zu (a). Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_k = y_k$ für alle $k \geq N$. Also ist

$$s_n - \sum_{k=0}^{N} x_k = t_n - \sum_{k=0}^{N} y_k$$

für alle $n \geq N$. Nun konvergiert die rechte Seite genau dann wenn die linke Seite konvergiert und für ihre Grenzwerte gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k - \sum_{k=0}^{N} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k - \sum_{k=0}^{N} y_k.$$

Zu (b). Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda s_n + \mu t_n \to \lambda x + \mu y$$

für $n \to \infty$ nach Satz 2.27 (e).

Zu (c). Es gilt

$$|x_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n - x| + |s_{n-1} - x| \to 0$$

für $n \to \infty$.

□

Bemerkung 2.35. Man beachte, dass die Umkehrung von Satz 2.34 (c) nicht gilt, denn $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist eine Nullfolge, aber die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergiert nicht. Wir werden aber später sehen, dass anhand des *Leibniz-Kriteriums* die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

konvergiert und den Grenzwert $\ln(2)$ hat.

Definition 2.36. (a) Eine Folge (x_n) heißt *Cauchyfolge*[3] falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $m, n \geq N$ gilt

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

(b) Eine Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ heißt *Cauchyreihe*, wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ eine Cauchyfolge ist. D.h. für a alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right| < \varepsilon.$$

(c) Eine Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} |x_k|$ konvergiert.

Satz 2.37. *(a) Eine Folge (x_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

(b) Eine Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ konvergiert genau dann wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ eine Cauchyreihe ist.

(c) Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

(d) Eine Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ ist absolut konvergent genau dann wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=k_0}^{n} |x_k|$ beschränkt ist.

15.11.2021

[3] *Augustin-Louis Cauchy* (1789 - 1857) französischer Mathematiker.

Beweis. **Zu (a).** Angenommen (x_n) konvergiert gegen x. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Für alle $m \geq N$ gilt weiter

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sei nun (x_n) eine Cauchyfolge. Wir zeigen zunächst, dass (x_n) beschränkt ist. Setze $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq N$ $|x_n - x_m| < \varepsilon = 1$ gilt. Setze $K := N + 1$, dann gilt für alle $n \geq K$

$$|x_n| = |x_n - x_K + x_K| \leq |x_n - x_K| + |x_K| < 1 + |x_K|.$$

Folglich ist die Folge durch

$$\max\{|x_1|, \ldots, |x_K|, 1 + |x_K|\}$$

beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz Satz 2.30) hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Sei etwa x ihr Grenzwert. Wir zeigen $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq N$ und $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$. Damit ist

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was zu zeigen war.

Zu (b). Folgt direkt aus der Definition einer Cauchyreihe (siehe Definition 2.36) und Teil (a) wobei mal als Folge, die Folge der Partialsummen nimmt, $s_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$

Zu (c). Wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert per Definition $\sum_{k=k_0}^{\infty} |x_k|$. Nach (b) ist also $\sum_{k=k_0}^{\infty} |x_k|$ eine Cauchyreihe. Wir zeigen, dass hieraus folgt, dass $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ eine Cauchyreihe ist. Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n, m > N$

$$\sum_{k=m}^{n} |x_k| < \varepsilon$$

gilt. Folglich

$$\left| \sum_{k=m}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |x_k| < \varepsilon,$$

was zu zeigen war. Da nun $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ eine Cauchyreihe ist, konvergiert sie auch nach (b).

Zu (d). Falls die Reihe absolut konvergent ist, dann ist $s_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} |x_k|$ eine konvergente Folge und somit nach Satz 2.27 (a) beschränkt. Ist hingegen $s_n = \sum_{k=k_0}^{\infty} |x_k|$ eine beschränkte Folge, so konvergiert sie nach Satz 2.29, da sie offensichtlich monoton ist. □

Beispiel 2.38. (a) Wir haben notiert, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Allerdings ist diese Reihe nicht absolut konvergent, da nach Beispiel 2.33 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ die harmonische Reihe nicht konvergiert.

(b) Aber die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

ist absolut konvergent, siehe Beispiel 2.33 und sie konvergiert gegen $\frac{\pi^2}{12}$.

Satz 2.39. *Wir beweisen nun die wichtigsten Konvergenzkriterien für Reihen.*

(a) (Monotoniekriterium) Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ mit $x_k \geq 0$ konvergiert genau dann wenn die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

*(b) (Majorantenkriterium) Existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_k| \leq y_k$ ist für alle $k \geq N$ und ist die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} y_k$ konvergent, so ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ absolut konvergent. Man nennt dann $\sum_{k=k_0}^{\infty} y_k$ eine **Majorante** für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$.*

*(c) (Minorantenkriterium) Gibt es eine divergente Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} y_k$ mit $y_k \geq 0$ und $|x_k| \geq y_k$ für alle $k \geq N$ für ein bestimmtes $N \in \mathbb{N}$, dann ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ nicht absolut konvergent. Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} y_k$ nennt man dann eine **Minorante** von $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$.*

(d) (Quotientenkriterium) Sei $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ eine Reihe mit $x_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Gibt es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \leq q$$

für alle $k \geq N$, dann ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ absolut konvergent. Falls

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \geq 1$$

für alle $k \geq N$, dann ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ divergent.

(e) (Wurzelkriterium) Sei $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ eine Reihe. Ferner sei $0 < q < 1$ und $\sqrt[k]{|x_k|} \leq q$ für alle $k \geq N$ mit $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ absolut konvergent. Gilt hingegen $\sqrt[k]{|x_k|} \geq 1$ für alle $k \geq N$, dann ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ divergent.

Beweis. Wir nehmen an, dass $k_0 = 0$ ist (ansosten weden wir eine Indexverschiebung an um das zu erreichen). Wir setzen $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ und $t_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$.

Beweis von (a). Da $x_k \geq 0$ ist, ist die Folge der Partialsumme s_n monoton wachsend. Da zusätzlich s_n noch beschränkt nach oben ist, folgt aus Satz 2.29.

Beweis von (b). Wir beweisen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ eine Cauchyreihe ist. Für $n, m > N$ gilt

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |x_k| \leq \sum_{k=m}^{n} y_k.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da (t_n) eine Cauchyreihe ist, existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m+1}^{n} y_k < \varepsilon$$

für alle $n, m > K$. Folglich ist $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$ eine Cauchyreihe. Nach Satz 2.34 bedeutet das, dass (s_n) absolut konvergent ist.

Beweis von (c). Das ist der Umkehrschluss von (b). Wäre (s_n) konvergent, so müsste auch (t_n) konvergieren. Widerspruch.

Beweis von (d). Da $0 < |q| < 1$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ nach Beispiel 2.33. Aus den Vorraussetzungen folgt aber

$$|x_k| \leq |x_N| q^{k-N}.$$

Dies lässt sich durch vollständige Induktion nach k beweisen, welche bei $k = N$ beginnt. Der Induktionsanfang $k = N$ ist klar. Wir betrachten

$$|x_{k+1}| \leq |x_k| \cdot q \leq |x_N| q^{k-N} \cdot q = |x_N| q^{k+1-N},$$

wobei wir im letzten Ungleichheitszeichen die Induktionsvoraussetzung benutzt haben. Somit ist

$$\sum_{k=N}^{\infty} |x_N| q^{k-N} = \sum_{k=0}^{\infty} |x_N| q^n = \frac{|x_N|}{1-q}$$

eine konvergent Majorante. Ist $|x_{k+1}| \geq |x_k|$ für alle $k \geq N$, so gilt $|x_k| \geq |x_N|$ für alle $k \geq N$ und somit kann (x_k) keine Nullfolge sein. Nach Satz 2.34 (c) kann die Reihe nicht konvergieren.

Beweis von (e). Für alle $k \geq N$ gilt nach Vorraussetzung $|x_k| \leq q^k$. Somit ist $\sum_{k=K}^{\infty} q^n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$. Gilt hingegen $|x_k| \geq 1$ für $k \geq N$, so kann auch hier (x_k) keine Nullfolge sein. □

Beispiel 2.40. (a) Beim Quotientenkriterium und beim Wurzelkriterium genügt es nicht, dass

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < 1$$

statt

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \leq q < 1$$

für alle $k \geq N$ gilt. Für die Reihenglieder der harmonischen Reihe gilt

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1$$

und da die monoton wachsende Folge $\frac{n}{n+1}$ gegen 1 konvergiert, kann es so ein $q < 1$ nicht geben. Das gleiche gilt beim Wurzelkriterium, es reicht nicht eine Abschätzung der Form

$$\sqrt[k]{|x_k|} < 1$$

für alle $k \geq N$ zu haben, sondern $\sqrt[k]{|x_k|} \leq q < 1$.

(b) Man beachte, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist eine konvergent Reihe nach Beispiel 2.33. Für das Quotientenkriterium gilt aber

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \to 1$$

für $n \to \infty$. Das bedeutet, dass der Quotient beliebig nahe an 1 rankommt, wodurch es kein q geben kann mit $\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} \leq q < 1$. Das Quotientenkriterium wäre hier also nicht anwendbar. Aus analogen Gründen kann man das Wurzelkriterium auch nicht anwenden.

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die *Exponentialreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Wir benutzen hier das Quotientenkriterium und rechnen

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{x^k} = \frac{x}{k+1}.$$

Da dies eine Nullfolge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{|x|}{k+1} < \frac{1}{2} =: q < 1$ ist für alle $k \geq N$ ist. Daher konviergiert die Exponentialreihe nach dem Quotientenkriterium (man hätte auch $N \in \mathbb{N}$ so wählen können, dass $N > |x|$ ist, dann wäre $\frac{|x|}{k+1} < \frac{|x|}{|x|+1} =: q < 1$ für alle $k \geq N$.) Wir definieren

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(d) Betrachte

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^m q^k$$

für $m \in \mathbb{N}$ und $|q| < 1$. Wir untersuchen die Reihe nach dem Wurzelkriterium und rechnen

$$\sqrt[k]{k^m q^k} = \left(\sqrt[k]{k}\right)^m |q|$$

Da nach Hausaufgabe **A5.1**(a) $\sqrt[k]{k} \to 1$ gilt für $k \to \infty$, so konvergiert $(\sqrt[k]{k})^m|q|$ gegen $|q| < 1$. Somit existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$(\sqrt[k]{k})^m|q| \leq \frac{1+|q|}{2} < 1^{4}$$

[4] Denn man wähle $\varepsilon = \frac{1-|q|}{2}$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|(\sqrt[k]{k})^m|q| - 1| < \varepsilon = \frac{1-|q|}{2}$. Schätze nun ab $(\sqrt[k]{k})^m|q| - 1 \leq |(\sqrt[k]{k})^m|q| - 1| < \frac{1-|q|}{2}$, woraus die Behauptung folgt.

für alle $k \geq N$. Folglich konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium. Da wir nun wissen, dass diese Reihe konvergiert können wir sie auch für $m = 1$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kq^k &= \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)q^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} \\ &= \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{n+1} kq^k - \sum_{k=0}^{n} q^k.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} kq^k$ mit s, so erhalten, nachdem wir auf beiden Seiten den Limes bilden,

$$s = \frac{s}{q} - \frac{1}{1-q}$$

und folglich gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

(e) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^m}$$

divergiert. Denn nach dem Wurzelkriterium haben wir

$$\sqrt[k]{\frac{2^k}{k^m}} = \frac{2}{\sqrt[k]{k}^m}.$$

Diese Folge konvergiert gegen 2. Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq N$ $\sqrt[k]{\frac{2^k}{k^m}} > 1$ gilt.

18.11.2021

Bemerkung 2.41. In Reihen, kann man die Summationsfolge im Allgemeinen nicht beliebig verändern. Betrachten wir mal folgende Beispiele: Zum einem haben wir

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n.$$

Dann gilt $s_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, also alterniert diese Folge zwischen 0 und 1, daher konvergiert sie nicht. Wir können aber die Summationsreihenfolge wie folgt ändern

$$t_n = \sum_{k=0}^{n}((-1)^k + (-1)^{k+1})$$

und wir sehen, dass $t_n = 0$ für alle n und daher konvergiert die Reihe. D.h. durch Änderung der Summationsreihenfolge in einer Reihe ist es möglich das Konvergenzverhalten zu ändern. Daher ist es bei Reihen im Allgemeinen entscheidend, in welcher Reihenfolge summiert wird.

Ist allerdings die Reihe absolut konvergent, ist die Summantionsreihenfolge in irrelevant. Dies ist Gegendstand des nächsten Satzes, den wir hier nicht beweisen wollen.

Satz 2.42 (Riemmanscher Umordnungssatz[5]). *Ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ eine absolut konvergente Reihe, so ist es möglich die Reihenfolge der Sumannanden beliebig umzuordnen und die umgeordnete Reihe konvergiert gegen denselben Grenzwert. D.h. für jede bijektive Abbildung $\sigma\colon \{k \in \mathbb{N} : k \geq k_0\} \to \{k \in \mathbb{N} : k \geq k_0\}$ gilt*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} x_{\sigma(k)}.$$

Als nächstes wollen wir ein Konvergenzkriterium für alternierende Reihen vorstellen.

Satz 2.43 (Leibniz-Kriterium[6]). *Sei $(x_k)_{k \geq k_0}$ eine monotone fallende Nullfolge, dann konvergiert die* alternierende Reihe

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k x_k.$$

Beweis. Erneut können wir durch eine Indexverschiebung annehmen, dass $k_0 = 0$ ist. Setze $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k$. Dann ist die Teilfolge (s_{2l}) monoton fallend, denn es gilt

$$s_{2l+2} = s_{2l} - x_{2l+1} + x_{2l+2} \leq s_{2l}$$

da (x_k) monoton fallend ist. Zudem ist (s_{2l}) nach unten beschränkt, denn es gilt (zunächst für k_0 gerade)

$$s_{2l} = \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k x_k = \sum_{k=0}^{l} (x_{2k} - x_{2k+1}).$$

Da (x_k) monoton fallend ist, gilt, dass jeder Summand nicht-negativ ist und damit erhalten wir $(s_{2l}) \geq 0$ für alle l. Damit konvergiert die Teilfolge (s_{2l}). Analog zeigt man, dass die Teilfolge (s_{2l+1}) konvergiert. Nun gilt aber für alle $l \in \mathbb{N}$

$$s_{2l+1} = s_{2l} - x_{2l+1}.$$

Da (x_{2l+1}) eine Nullfolge ist (weil (x_k) eine Nullfolge ist), folgt, dass

$$\lim_{l \to \infty} s_{2l+1} = \lim_{l \to \infty} s_{2l} =: s$$

[5] Bernhard Riemann (1826 - 1866), deutscher Mathematiker

[6] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) deutscher Universalgelehrter.

gilt. Wir wollen nun zeigen, dass (s_n) gegen s konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $|s_{2l} - s| < \varepsilon$ für alle $l \geq N_0$ und ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|s_{2l+1} - s| < \varepsilon$ für alle $l \geq N_1$. Dann folgt aber für $n \geq \max\{2N_0, 2N_1 - 1\}$

$$|s_n - s| < \varepsilon.$$

□

Als letztes Thema über Reihen widmen wir uns dem Produkt von zwei Reihen.

Satz 2.44 (Cauchy-Produkt). *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Wir definieren eine neue Reihe durch*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} = \sum_{i+j=n} x_i y_j.$$

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe und es gilt

$$\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k \right) \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} y_k \right) = \sum_{n=k_0}^{\infty} c_n.$$

Auch diesen Satz beweisen wir nicht auf Grund seiner Komplexität. Wir fahren mit Beispielen zum Cauchyprodukt fort.

Beispiel 2.45. (a) Wir wissen für $|q| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^n$ absolut gegen $\frac{1}{1-q}$. Mit Hilfe des Cauchy-Produktes erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-q)^2} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n.
\end{aligned}$$

(b) Wir haben gesehen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Exponentialreihe absolut konvergiert.

Nach dem Cauchy-Produkt gilt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{(Binomischer Lehrsatz 2.10)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft der Exponentialfunktion bezeichnet man als *Funktionalgleichung*.

3 Komplexe Zahlen

Wir werden nun die rellen Zahlen um den Körper der komplexen Zahlen erweitern. Dadurch wird es möglich sein den Lösungsbereich von Gleichungen zu erweitern. Z.B. ist es klar, dass $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung für ein $x \in \mathbb{R}$ besitzt, aber in den komplexen Zahlen schon.

Satz 3.1. *Die Menge* $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R}\}$ *bildet mit der Addition*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

zu einem Körper. Das neutrale Element bezüglich der Addition ist $(0, 0)$*, das inverse Element von* (x, y) *bezüglich der Addition ist* $(-x, -y)$*. Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist* $(1, 0)$*, das inverse Element von* $(x, y) \neq (0, 0)$ *ist*

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

Beweis. Der Beweis ist Übungsaufgabe. □

Bemerkung 3.2. (a) Das neutrale Element wird in einem Körper in der Regel mit der 1 notiert. So setzen wir hier auch $1 := (1, 0)$. Ferner gilt

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1.$$

Folglich hat die Gleichung $z^2 = -1$ im oben definierten Körper zwei Lösungen, nämlich $(0, \pm 1)$.

(b) Statt (x, y) schreibt man $x + iy$ für (x, y). Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned} x &= x + i0 \quad \text{entspricht } (x, 0), \\ iy &= 0 + iy \quad \text{entspricht } (0, y), \\ i &= 0 + i1 \quad \text{entspricht } (0, 1). \end{aligned}$$

Mit dieser Notation gilt

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + y_1) + i(y_1 + y_2)$$

sowie

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2y_1y_2 + i(y_1x_2 + y_2x_1).$$

insobesondere ist $i^2 = -1$.

Definition 3.3. Die Menge

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

ist die Menge der *komplexen Zahlen*. Zusammen mit der in Bemerkung 3.2 definierten Addition und Multiplikation bildet sie einen Körper. Ist $z = x + iy$, so heißt $\mathrm{Re}\,(z) = x$ der *Realteil* von z und $\mathrm{Im}\,(z) = y$ der *Imaginärteil* von z. Die Zahl

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt der *Betrag* von z und $\bar{z} = x - iy$ die zu z *konjugierte komplexe Zahl*. Die reellen Zahlen sind in den komplexen Zahlen enthalten, denn $z \in \mathbb{C}$ ist eine reelle Zahl genau dann wenn $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ oder genau dann wenn $z = \bar{z}$. Zahlen der Form $z = iy$ für $y \in \mathbb{R}$, also $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ heißen *imaginär* und i heißt *imaginäre Einheit*.

Beispiel 3.4. Mit komplexen Zahlen rechnet man wie mit den reellen Zahlen mit der zusätzlichen Regel, dass $i^2 = -1$ ist. Ist z.B. $z = x + iy$, so gilt

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Ferner gilt, da $\mathbb{C}$ ein Körper ist, gilt die binomische Formel 2.10, also für $z, w \in \mathbb{C}$ ist

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^k z^{n-k}.$$

Mit dem gleichen Beweis wie reellen zeigt man auch

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Bemerkung 3.5. Komplexe Zahlen lassen sich geometrisch in der komplexen Ebene darstellen

22.11.2021

Satz 3.6. *Für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt*

(a) $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$, $\overline{wz} = \overline{w} \cdot \overline{z}$,

(b) $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,

(c) $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0$ *genau dann wenn* $z = 0$,

(d) $|\bar{z}| = |z|$ *und* $z \cdot \bar{z} = |z|^2$,

(e) $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$,

(f) $|w+z| \le |w| + |z|$ *und* $|w-z| \ge ||w| - |z||$.

Beweis. Siehe Übungsaufgaben. □

Bemerkung 3.7. Die Ungleichung $|w+z| \le |w|+|z|$, welche man von den reellen Zahlen kennt, nennt man auch die *Dreiecksungleichung* auf Grund folgender geometrischer Situation.

Die Ungleichung $|w-z| \ge ||w| - |z||$ nennt man hingegen *umgekehrte Dreiecksungleichung.*

Bemerkung 3.8. Die komplexen Zahlen lassen sich nicht anordnen, d.h. es gilt keine Relation $w < z$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

(a) Für alle $z \neq 0$ gilt entweder $z > 0$ oder $z < 0$,

(b) Aus $w > 0$, $z > 0$ folgt $w + z > 0$ und $wz > 0$.

Denn würde es eine solche Relation geben, würde $1^2 = 1 > 0$ gelten sowie $-1 = i^2 > 0$, was aber ein Widerspruch wäre. Insbesondere wäre dann auch weder $\max\{w, z\}$ noch $\min\{w, z\}$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ definiert. Schränkt man sich aber auf $w, z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ein, so lassen sich z und w als reelle Zahlen anordnen.

Wir übetragen nun alle Begriffe die wir für reelle Zahlen definiert haben auf komplexe Zahlen.

Definition 3.9. (a) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $C \ge 0$ und $|z| \le C$ für alle $z \in A$.

(b) Eine *Folge von komplexen Zahlen* ist eine Abbildung $z\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto z_n$ und wird mit $(z_n)_{n \ge n_0}$ notiert oder schlicht mit (z_n).

(c) Eine Folge von komplexen Zahlen (z_n) heißt *beschränkt*, falls es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $C > 0$ gibt, sodass $|z_n| < C$ ist für alle $n \ge n_0$.

(d) Eine Folge von komplexen Zahlen (z_n) konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$ wenn gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Man schreibt auch hier

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \quad \text{oder} \quad z_n \to z \text{ für } n \to \infty.$$

Man nennt z den *Grenzwert* bzw. *Limes* der Folge (z_n).

(e) Eine Folge von komplexen Zahlen (z_n) heißt *Cauchyfolge*, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n, m \ge N$ $|z_m - z_n| < \varepsilon$ gilt.

Satz 3.10. *Sei (z_n) eine Folge von komplexen Zahlen. Für jedes n schreiben wir $z_n = x_n + iy_n$ für $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Folglich erhalten erhalten wir durch die komplexe Folge (z_n) zwei reelle Folgen (x_n) und (y_n). Dann gilt*

(a) (z_n) ist beschränkt genau dann, wenn (x_n) und (y_n) beschränkt ist.

(b) $z_n \to z = x + iy$ für $n \to \infty$ genau dann, wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$.

(c) (z_n) ist Cauchyfolge genau dann, wenn (x_n) und (y_n) Cauchyfolgen sind.

Beweis. **Beweis von (a).** Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ etwas $|z_n| \leq C$, so ist folgt wegen $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ auch $|x_n|, |y_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt andererseits $|x_n| < C$ und $|y_n| \leq C'$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq \sqrt{C^2 + (C')^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis von (b). Sei $z_n \to z$, also gilt $|z_n - z| \to 0$ für $n \to \infty$. Weiter ist $|x_n - x| < \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = |z_n - z|$, also $x_n \to x$. Analog auch für $y_n \to y$.

Gilt $x_n \to x$ und $y_n \to x$, ist wegen

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$$

auch eine Nullfolge (man beachte, dass man hier benötigt, dass wenn $x_n \to 0$ gilt, so auch $\sqrt{x_n} \to 0$).

Beweis von (c). Sei (z_n) Cauchyfolge und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$ und $|z_n - z_m| < \varepsilon$. Wegen der Abschätzung $|x_n - x_m| < |z_n - z_m|$ folgt, dass (x_n) auch Cauchyfolge ist. Analog für (y_n).

Seien nun (x_n) und (y_n) Cauchyfolgen und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ und $|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ für alle $n, m \geq N$. Damit ist

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

$\square$

Korollar 3.11. *Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) (z_n) ist Cauchyfolge genau dann, wenn (z_n) konvergent ist.

(b) Ist (z_n) beschränkt, so hat (z_n) eine konvergente Teilfolge.

Beweis. **Beweis von (a).** Sei $z_n = x_n + iy_n$. Nach Satz 3.10 ist (z_n) genau dann Cauchyfolge, wenn (x_n) und (y_n) Cauchyfolgen sind. Aus Satz 2.37 folgt, dass (x_n) und (y_n) genau dann Cauchyfolgen sind wenn sie konvergieren. Und (x_n) sowie (y_n) konvergieren genau dannn wenn (z_n) konvergiert.

Beweis von (b). Aus Satz 3.10 folgt, dass (x_n) sowie (y_n) beschränkt sind. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß Satz 2.30 hat (x_n) eine konvergente Teilfolge etwa $(x_{n_k})_k$. Da die Teilfolge (y_{n_k}) weiterhin beschränkt ist, hat sie ebenso nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge, etwa $(y_{n_{k_l}})_l$. Nach Satz 2.27 ist die Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_l$ auch konvergent. Nach Satz Satz 3.10 ist also $(z_{n_{k_l}})_l$ eine konvergente Teilfolge. $\square$

Beispiel 3.12. Aus der Konvergenz bestimmter reeller Folgen ist es möglich auf die Konvergenz von komplexen Folgen zu schließen.

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann gilt $z^n \to 0$ für $n \to \infty$. Denn es gilt

$$|z^n| = |z|^n \to 0,$$

nach Beispiel 2.28 (c).

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Nach Beispiel 3.4 gilt auch im Komplexen

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Nach (a) gilt daher wie reellen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Auch im Komplexen nennt man sie die *geometrische Reihe*. Wir sehen, dass der Begriff einer Reihe auch auf die komplexen Zahlen übetragen werden kann.

Definition 3.13. Sei $(z_k)_{k\geq k_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.

(a) Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ heißt *konvergent* (bzw. *Cauchyreihe*), wenn die Folge der Partialsummen $w_n = \sum_{k=k_0}^{n} z_k$ konvergent (bzw. eine *Cauchyfolge*) ist.

(b) Die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} |z_k|$ in $\mathbb{R}$ konvergent ist.

Korollar 3.14. *(a)* $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ *ist konvergent genau dann, wenn* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ *eine Cauchyreihe ist.*

(b) $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ *ist (absolut) konvergent genau dann, wenn* $\sum_{k=k_0}^{\infty} \mathrm{Re}\,(z_k)$ *und* $\mathrm{Im}\,(z_k)$ *(absolut) konvergent ist.*

(c) $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ *ist absolut konvergent genau dann, wenn* $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ *konvergent.*

Beweis. **Beweis von (a).** Folgt direkt aus Satz 3.10 (c) angewandt auf die Folge der Partialsummen.

Beweis von (b). Wir schreiben zunächst $z_k = x_k + iy_k$. Sei zuerst $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ absolut konvergent. Ferner gilt $|x_k| \leq |z_k|$ sowie $|y_k| \leq |z_k|$ und folglich ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} |z_k|$ eine konvergente Majorante für $\sum_{k=k_0}^{\infty} |x_k|$ und für $\sum_{k=k_0}^{\infty} |y_k|$. Damit konvergieren $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$, $\sum_{k=k_0}^{\infty} y_k$ absolut.

Seien $\sum_{k=k_0}^{x_k}$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} y_k$ absolut konvergent. Dann konvergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} |x_k| + |y_k|$. Diese Reihe ist eine Majorante für $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$, da $|z_k| \leq |x_k| + |y_k|$ ist.

Ist hingegen $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ konvergent, so folgt aus Satz 3.10, dass das genau dann der Fall ist, wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} y_k$ konvergent sind.

Beweis von (c). Es gilt $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ absolut konvergent, genau dann wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} \operatorname{Re}(z_k)$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} \operatorname{Im}(z_k)$ konvergieren nach Teil (b). Das ist aber genau dann der Fall, wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} \operatorname{Re}(z_k)$ sowie $\sum_{k=k_0}^{\infty} \operatorname{Im}(z_k)$ konvergieren nach Satz 2.37. Nach Satz 3.10 ist das genau dann der Fall wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ konvergiert. □

Bemerkung 3.15. Alle Konvergenzkriterien aus Satz 2.39 gelten nun auch für komplexe Reihen. Denn ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ eine komplexe Reihe und existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \leq q < 1$$

für alle $k \geq N$, dann konvergiert nach dem Quotientenkriterium die reelle Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} |z_k|$. Folglich konvergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} z_k$ absolut. Analog für das Wurzelkriterium.

Beispiel 3.16. Wir betrachen die *komplexe Exponentialfunktion*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Die konvergiert nach dem Majorantenkriterium, denn $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ ist offensichtlich eine Majorante, welche konvergiert. Wir bezeichnen diese mit

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

25.11.2021

4 Stetigkeit von Funktionen

4.1 Elementare Funktionen und Potenzreihen

4.1.1 Polynome

Sind $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$, dann nennt man die Funktionen der Form

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Polynome n-ten Grades oder ein *Polynom vom Grad n*. Falls $a_k = 0$ für alle $0 \leq k \leq n-1$, also $f(x) = a_n x^n$ ist, dann nennt man diese Funktion ein *Monom*.

Wir erinnern an die Definition des *Graphen einer Abbildung* (siehe Definition 1.7). Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist der Graph von f gegeben als die Menge

$$\{(x, f(x) : x \in \mathbb{R})\}.$$

Hier ein paar Beispiele von Graphen von Polynomen.

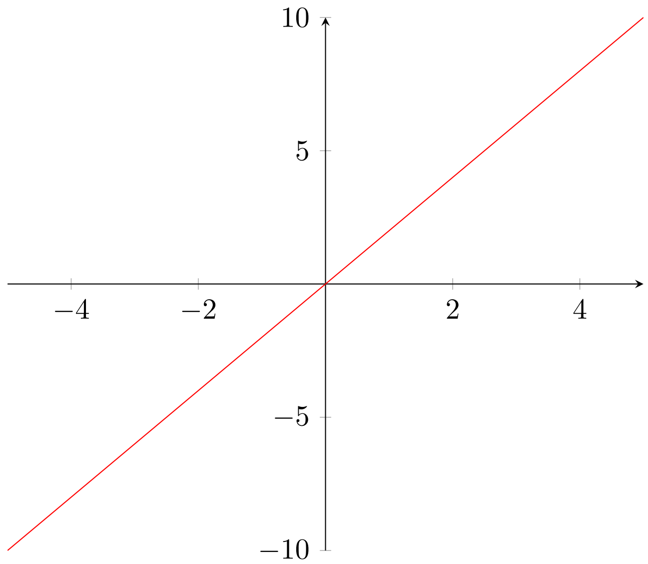

Abbildung 4.1: Der Graph des Monoms $f(x) = 2x$

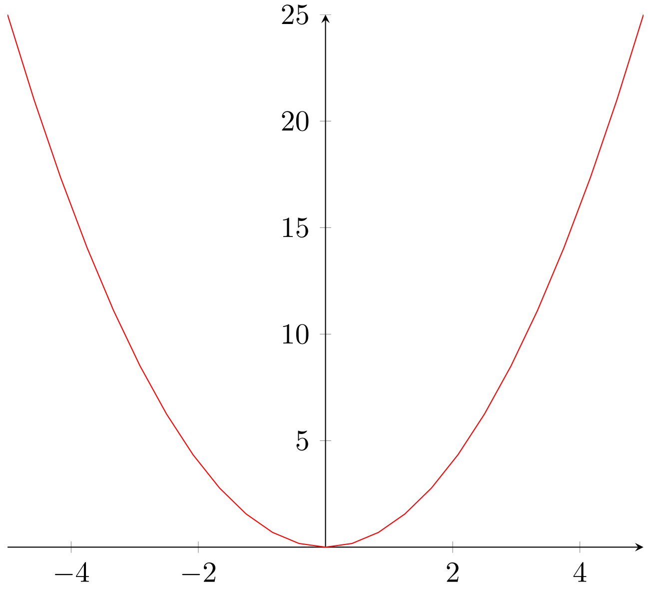

Abbildung 4.2: Der Graph des Monoms $f(x) = x^2$

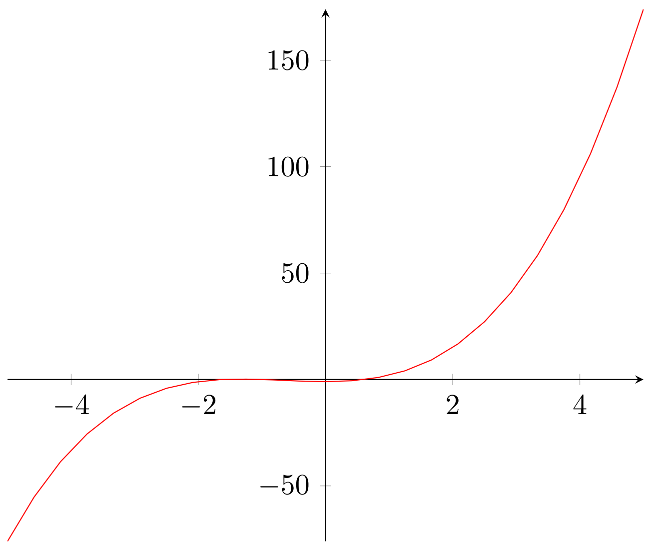

Abbildung 4.3: Der Graph des Polynoms $f(x) = x^3 + 2x^2 2 - 1$

4.1.2 Rationale Funktionen

Sind $p, q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome, dann nennt man

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine *rationale Funktion*. Der Definitionsbereich einer rationalen Funktionen ist gegeben durch

$$D := \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}.$$

Die Punkte $x \in \mathbb{R} \setminus D$ (also in denen $q(x) = 0$ gilt) heißen *Singularitäten* von f.

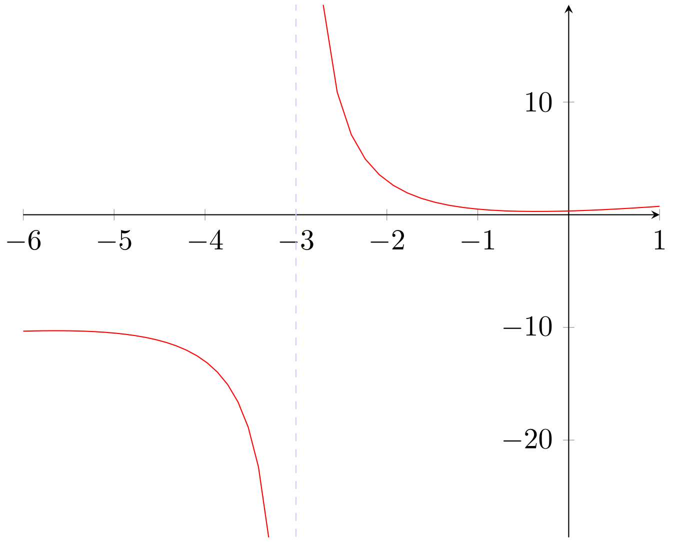

Abbildung 4.4: Der Graph der rationalen Funkion $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+3}$

4.1.3 Exponentialfunktion

In Beispiel 2.40 haben wir die Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

welche für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Wir wollen ein paar wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion auflisten.

- Klarerweise gilt $\exp(0) = 1$.
- exp ist monoton wachsend, d.h. ist $x < y$ so gilt $\exp(x) < \exp(y)$. Zunächst zeigen wir die Monotonie für $0 \leq x < y$. Dann gilt $\frac{x^k}{k!} < \frac{y^k}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \exp(y)$. D.h. die Abbildung ist monoton wachsend auf $\mathbb{R}_0^+$. mit $n \neq 0$.
- In Beispiel 2.45 haben wir nachgewiesen, dass

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also
$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(0) = 1.$$
Hieraus folgt
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$
Mehr noch gilt für $x < y \leq 0$ mit der Monotonie für $\mathbb{R}_0^+$:
$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} < \frac{1}{\exp(-y)} = \exp(y).$$
Das beweist, dass exp monoton auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

- $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x \geq 0$ folgt aus der Definition der Reihe, dass $\exp(x) > 0$ ist. Ist $x < 0$, so folgt aus dem gerade eben gezeigten, dass $\exp(-x) > 0$ ist. Und da $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$. folgt dass $\exp(x) > 0$ sein muss.

- Für $n \in \mathbb{N}$ gilt auf Grund der Funktionalgleichung
$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$
und
$$\exp(-nx) = \exp(-x)^n = \left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^n = \exp(x)^{-n}.$$
Da $\exp(\frac{x}{n})^n = \exp(x)$ gilt, ist also
$$\exp(x)^{\frac{m}{n}} = \exp\left(\frac{m}{n}x\right).$$
für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0$.

- Wir setzen
$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$
und nennen diese Zahl die *Eulersche Zahl*. Aus den vorigen Eigenschaften haben wir also
$$e^{\frac{m}{n}} = \exp\left(\frac{m}{n}\right),$$
also für alle $q \in \mathbb{Q}$ ist $e^q = \exp(q)$. Aus der Funktionalgleichung haben wir für $p, q \in \mathbb{Q}$
$$e^{p+q} = e^p \cdot e^q.$$
Es macht daher Sinn für $x \in \mathbb{R}$
$$e^x := \exp(x)$$
zu definieren. Und aus der Funktionalgleichung folgt für $x, y \in \mathbb{R}$ die bekannte Gleichung
$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

4.1.4 Potenzreihen

Wir haben gesehen, dass die Exponentialfunktion definiert ist durch eine Reihe. Wir verallgemeinern diesen Typ von Funktion in diesem Abschnitt.

Sei (a_k) eine Folge von komplexen Zahlen. Wir defieren für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ gegeben durch $I = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ konvergiert}\}$. Somit erhalten wir eine Funktion

$$f\colon I \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

die man *Potenzreihe* nennt.

Beispiel 4.1. (a) Für $I =]-1,1[$ ist die Potenzeihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ definiert (geometrische Reihe). Wir wissen, dass $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

(b) Die Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto e^x$ ist definiert durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

(c) Betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = e^{ix}.$$

Diese Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut nach Bemerkung 3.16.

(d) Die trigonometrischen Funktionen sind wie folgt definiert

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{(Sinusfunktion)}$$

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{(Kosinusfunktion).}$$

Es gilt dabei $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (siehe Übungsaufgaben).

Im Allgemeinen stellt sich also die Frage für welche x die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert.

Satz 4.2. *(a) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergent für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |x_0|$.*

(b) *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *divergent für ein* $x_0 \in \mathbb{R}$, *dann ist sie divergent für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| > |x_0|$.

Beweis. Wir beweisen zunächst (a). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ konvergent. Wir wissen, dass $a_k x_0^k$ eine Nullfolge sein muss. Daher ist die Folge beschränkt, d.h. es existiert ein $K > 0$ mit $|a_k| \cdot |x_0|^k < K$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $|x| < |x_0|$ gilt

$$|a_k x^k| = |a_k||x|^k = |a_k||x_0|^k \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^k \leq K \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^k.$$

Da nun $\frac{|x|}{|x_0|} < 1$ ist, ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} K \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^k = K \cdot \frac{1}{1 - \frac{|x|}{|x_0|}}$$

eine konvergente Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Teil (b) zeigt man direkt durch das Minorantenkriterium mit der Minorante

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k.$$

□

Definition 4.3. Die Zahl

$$R := \sup \left\{ |x_0| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k \text{ ist konvergent} \right\} \in [0, \infty]$$

heißt der *Konvergenzradius der Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Aus Satz 4.2 folgt direkt

Korollar 4.4. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe und* R *ihr Konvergenzradius. Dann konvergiert für alle* $x \in]-K, K[$ *die Reihe absolut und divergiert für* $x \in \mathbb{R} \setminus [-K, K]$. *Folglich erhält man eine Funktion*

$$f :]-R, R[\to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Satz 4.5 (Formel von Cauchy-Hadamard)**.** *Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *gilt*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

wobei

$$\limsup_{k\to\infty} x_k := \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n$$

ist, für eine reelle Folge (x_k)*. Man beachte, dass für jede konvergente Folge* $x_k \to x$ *gilt*

$$\limsup_{k\to\infty} x_k = x.$$

Beweis. Nach dem Quotientenkriterium gilt, dass die Reihe absolut konvergiert wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\sqrt[n]{|a_n x^n|} \leq q < 1$ für $n \geq N$. Insbesondere ist also $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{q}{|n|} < \frac{1}{|x|}$. Daher ist für alle $k \geq N$

$$\sup_{n\geq k} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{|x|}$$

und damit auch

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{|x|}.$$

Somit konvergiert die Reihe absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

□

Beispiel 4.6. (a) Die Potenzreihe definiert durch die geometrische Reihe hat Konvergenzradius 1 und daher konvergiert sie für alle $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Ferner ist auch klar, dass die Reihe für $x = \pm 1$ nicht konvergiert.

(b) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

hat wegen $\sqrt[k]{\frac{1}{k}} \to 1$ (für $k \to \infty$) den Konvergenzradius 1. Ferner divergiert die Reihe für $x = 1$ (harmonische Reihe) aber konvergiert für $x = -1$ (Leibniz-Kriterium Satz 2.43). Daher ist das maximale Definitionsintervall der Potenzreihe

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

gegeben durch $[-1, 1)$.

(c) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

hat nach der Cauchy-Hadamard-Formel Konvergernzradius 1, konvergiert aber für $x = 1$ (Bemerkung 2.33) aber auch für $x = -1$ (Leibniz-Kriterium). Daher ist $[-1, 1]$ das größte Intervall auf das die Funktion

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

definiert ist.

29.10.2021

Bemerkung 4.7. (a) Ist $R \in (0, \infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, dann definiert uns die Potenzreihe eine Funktion

$$f\colon (-R, R) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

(b) Ist (a_k) eine Folge komplexer Zahlen, dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

eine *Potenzreihe in x um (den Entwicklungspunkt)* x_0. Hat die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^n$$

den Konvergenzradius R, so konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < R$. Sie definiert also eine Funktion

$$f\colon (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Wenn man z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k$ betrachtet, so ist $R = 1$ (geometrische Reihe) und damit ist das Definitionsintervall gegeben durch $(0, 2)$.

4.2 Stetigkeit

In diesem Kapitel sei stets $I \subset \mathbb{R}$ (z.B. kann I in Intervall sein) und $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

Definition 4.8 ($\varepsilon - \delta -$ Kriterium)**.** f heißt *stetig in* $x_0 \in I$ falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in I$ mit $|x_0 - x| < \delta$

$$|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt. f heißt *stetig auf* I, falls f stetig in x ist, für alle $x \in I$.

Bemerkung 4.9. BILD

Bevor wir zu Beispielen kommen, wollen wir noch äquivalente Formulierungen für die Stetigkeit angeben.

Satz 4.10. *Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(a) f *ist in* $x_0 \in I$ *stetig.*

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$*, sodass für alle* $|h| < \delta$ *mit* $x_0 + h \in I$ *gilt:*

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(c) Für jede Folge $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ *mit* $x_n \to x_0$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Wir sagen, dass $f(x) \to z_0 \in \mathbb{C}$ *für* $x \to x_0$*, falls für alle Folgen* $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ *mit* $x_n \to x_0$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = z_0.$$

Wir schreiben dafür auch kurz $\lim_{x\to x_0} f(x) = z_0$*. Damit ist also* f *stetig in* x_0*, falls*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Bemerkung 4.11. Stetigkeit bedeutet, dass man den Limes mit der Funktion vertauschen kann, denn nach Satz 4.10 (c) gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Beweis des Satze Satz 4.10.

- Wir zeigen (a) ist äquivalent zu (b). Dazu zeigen wir zunächst, dass (a) (b) impliziert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x_0 - x| < \delta$. Sei nun $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$. Setze $x := x_0 + h$, dann gilt $|x - x_0| = |h| < \delta$ und daher

$$|f(x_0) - f(x_0 + h)| = |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dies zeigt (a) impliziert (b).

Wir fahren fort zu zeigen, dass (b) (a) impliziert. Sei $\varepsilon > 0$. Nach (b) existiert ein $\delta > 0$, sodass für $|h| < \delta$

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Für alle $x \in I$ mit $|x_0 - x| < \delta$ setzen wir $h := x - x_0$. Dann gilt $|h| < \delta$ und somit

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

was zu zeigen war.

- Wir zeigen (a) impliziert (c). Wir nehmen zunächst an, dass (a) gilt. Sei $\varepsilon > 0$ und (x_n) eine Folge in $I \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Nach (a) existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in I$ mit $|x_0 - x| < \delta$

$$|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt. Da $x_n \to x_0$ ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_0| < \delta$ für $n \geq N$. Damit gilt aber für alle $n \geq N$

$$|f(x_0) - f(x_n)| < \varepsilon$$

was gerade $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ bedeutet.

Wir nehmen nun an, dass (c) gilt. Angenommen (a) wäre falsch. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\delta > 0$ ein $x_\delta \in I$ existiert mit $|x_\delta - x_0| < \delta$ und

$$|f(x_\delta) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

Da dies für alle $\delta > 0$ gilt, wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in I$ mit $|x_n - x| < \frac{1}{n}$. Somit erhalten wir eine Folge (x_n) mit $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ und $x_n \to x_0$, aber $f(x_n)$ konvergiert nicht gegen $f(x_0)$, da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$$

gilt.

□

Beispiel 4.12. (a) Betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Dann ist f stetig. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x_0 - x| < \delta$, dass

$$|f(x_0) - f(x)| = |x_0 - x| < \delta = \varepsilon.$$

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass f stetig ist. Nach Definition muss gezeigt werden, dass f in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist. Sei also $x_0 \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge mit $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ und $x_n \to x_0$. Nach Satz 2.27 gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} ax_n^k = ax_0^k = f(x_0).$$

Nach Definition gilt also
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
was die Stetigkeit von f in x_0 zeigt. Da x_0 beliebig war, folgt, dass f stetig ist.

(c) Die Betragsabbildung ist stetig. Damit meinen wir die Abbildung $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = |x|$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $x_n \to x_0$ eine Folge mit $x_n \neq x_0$. Dann gilt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung
$$|f(x_n) - f(x_0)| = \big||x_n| - |x_0|\big| \leq |x_n - x_0| \to 0$$
für $n \to \infty$.

(d) Wir definieren die *Heaviside-Funktion*
$$\Theta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$
Wir behaupten, dass Θ in $x = 0$ nicht stetig ist. Dazu genügt es eine Folge (x_n) mit $x_n \to 0$ und $x_n \neq 0$ anzugeben, sodass $\Theta(x_n)$ nicht gegen $\Theta(0) = 1$ konvergiert. Dies ist der Fall mit $x_n = -\frac{1}{n}$. Denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\Theta(x_n) = \Theta\left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$
Folglich ist $\Theta(x_n)$ die konstante Folge 0, und daher auch
$$\lim_{n \to \infty} \Theta(x_n) = 0.$$

(e) Die Exponentialfunktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$ ist stetig. Hierfür benötigen wir die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, siehe Beispiel 2.45: für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$
Wir zeigen zunächst, dass f in $x = 0$ stetig ist. Aus der Definition folgt, dass $e^0 = 1$ ist. Sei x_n eine Nullfolge mit $x_n \neq 0$. Wir rechnen
$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(0)| = |e^{x_n} - e^0| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!}\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n|^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_n|^k. \end{aligned}$$

Sei nun N groß genug, dass $|x_n| < 1$ gilt, für alle $n \geq N$. Damit erhalten wir

$$|e^{x_n} - 1| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_n|^k = \frac{|x_n|}{1 - |x_n|}$$

für alle $n \geq N$. Die rechte Seite konvergiert nun für $n \to \infty$ gegen 0, woraus $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ folgt. Man beachte, dass wir oben bei einer Ungleichung folgende Abschätzung benutzt haben

Hilfslemma. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ eine Reihe welche absolut konvergiert. Dann gilt*

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$$

Beweis des Hilfslemmas. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |x_k|.$$

Dann gilt auf Grund der Stetigkeit der Betragsfunktion

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} x_k \right| = \left| \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} x_k \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} |x_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|.$$

□ 02.12.2021

Also ist f in $x = 0$ stetig. Sei nun $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir zeigen nun, dass f stetig in x ist. Wir benutzen dafür Satz 4.10 (b). Betrachte

$$|e^{x+h} - e^x| = e^x \cdot |e^h - 1|.$$

Da nun die Exponentialfunktion stetig in 0 ist existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|e^h - 1| < \frac{\varepsilon}{e^x}$$

ist, für $|h| < \delta$. Hieraus folgt aber

$$|e^{x+h} - e^x| = e^x |e^h - 1| < e^x \frac{\varepsilon}{e^x} = \varepsilon.$$

(f) Es ist auch möglich eine Funktion zu kontruieren, welche in keinem Punkt stetig ist:

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man nennt sie für gewöhnlich die *Dirichlet-Funktion* [1]

[1] *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, (1805 - 1859), deutscher Mathematiker.

Satz 4.13. *Seien $f, g \colon I \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, wobei $I \subset \mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) Die Abbildung $\lambda f + \mu g \colon I \to \mathbb{C}$, $(\lambda f + \mu g)(x) := \lambda f(x) + \mu g(x)$ ist stetig, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Hieraus folgt: Spaltet man f in $g + ih$ auf, wobei $g, h \colon I \to \mathbb{R}$ sind, so ist f stetig genau dann wenn g und h stetig sind.

(b) Die Abbildung $f \cdot g \colon I \to \mathbb{C}$, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ ist stetig.

(c) Gilt $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, dann ist $\frac{1}{f} \colon I \to \mathbb{C}$, $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ stetig.

(d) Ist $g \colon I \to J$ eine stetige Abbildung, wobei I und J Intervalle in $\mathbb{R}$ sind und $f \colon J \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung, so ist $f \circ g \colon I \to \mathbb{C}$ stetig.

Beweis. Folgt direkt aus der Folgenstetigkeit und Satz 2.27. Denn ist $x_0 \in I$ und (x_n) eine Folge mit $x_n \neq x_0$ und $x_n \to x_0$ gilt

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0),$$

da f und g stetig sind. Analog beweist man die Stetigkeit des Produktes und für $\frac{1}{f}$.

Für die Aussage I betrachten wir $x_n \to x$ mit $x_n \neq x$ für alle n. Nach Bemerkung 4.11 bedeutet Stetigkeit, dass man den Limes mit der Funktion vertauschen kann. Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f\left(\lim_{n\to\infty} g(x_n)\right) = f(g(\lim_{n\to\infty} x_n)) = f(g(x)).$$

□

Korollar 4.14. *Polynome und rationale Funktionen sind stetig.*

Beweis. Aus Beispiel Bemerkung 4.12 folgt, dass alle Monome $x \mapsto ax^k$ stetig sind und nach Satz 4.13 gilt damit, dass Polynome (also Summen von Monomen) und rationale Funktionen stetig sind. □

Auch Potenzreihen sind stetig

Satz 4.15. *Sei eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ gegeben und R ihr Konvergenzradius. Dann ist die Abbildung*

$$(-R, R) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

eine stetige Funktion.

Beweis. Setze für $x \in (-R, R) =: I$

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Wir zeigen zunächst folgende Eigenschaft. Für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $r < R$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $x \in [-r, r] \subset I$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ist, für $n \geq N$ (man beachte hierbei, dass die Wahl des $N \in \mathbb{N}$ nicht vom Punkt x im kompakten Intervall $[-r, r]$ abhängt.) Dazu betrachte

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{l\to\infty} |f_n(x) - f_l(x)|$$

und für $l > n$ ist die letzte Differenz gleich

$$\sum_{k=n+1}^{l} a_k x^k.$$

Hieraus

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{l\to\infty} \sum_{k=n+1}^{l} |a_k||x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k.$$

Da die rechte Reihe nun eine Cauchyreihe ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k < \varepsilon$$

ist, für $n > N$. Man beachte, dass die Wahl dieses N unabhängig von $x \in [-r, r]$ gewählt wurde (wohl aber abhängig von r).

Nun beweisen wir die Stetigkeit der Funktion f in $x_0 \in I$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wollen ein $\delta > 0$ finden, sodass aus $|h| < \delta$

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

folgt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \leq |f(x_0+h)-f_n(x_0+h)|+|f_n(x_0+h)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|. \quad (4.1)$$

Sei nun h so klein, dass ein $r < R$ existiert mit $x_0, x_0 + h \in [-r, r]$. Dann haben wir gesehen, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $x \in [-r, r]$ $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ ist. Damit können wir den ersten und letzten Term in Gleichung (4.1) durch $\varepsilon/3$ abschätzen. Für den Term $|f_N(x_0 + h) - f_N(x_0)|$ verwenden wir die Stetigkeit von f_N. Es existiert ein $\delta > 0$, sodass für $|h| < \delta$ $|f_N(x_0 + h) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$ wird. Insgesamt erhalten wir also

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

für $|h| < \delta$. □

Bemerkung 4.16. Falls $x_0 \notin I$, aber $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ existiert, dann kann man f in x_0 stetig fortsetzen durch

$$g\colon I \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in I, \\ y_0, & x = x_0. \end{cases}$$

Per Definition ist g stetig. Z.B. ist die Funktion $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir zeigen aber in Proposition 4.17, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Daher lässt sich f durch 1 in $x = 0$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

Ein weiteres Beispiel ist $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Wir zeigen in Proposition 4.18, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

gilt. Damit lässt sich f in $x = 0$ durch 1 fortsetzen.

Proposition 4.17. *Es gilt*

(a) $e^x \geq 1 + x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\frac{1}{1+|x|} \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-|x|}$ *für* $0 < |x| < 1$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Beweis. Für $x \geq 0$ gilt nach Definition $e^x \geq 1 + x$. Für $x \leq -1$ ist $1 + x \leq 0 < e^x$. Für $-1 < x < 0$ gilt $0 < -x < 1$ und damit

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}$$

woraus $1 + x \leq e^x$ folgt. Dies zeigt Teil (a).

Wir beweisen nun Teil (b). Die rechte Abschätzung haben wir im Prinzip in Beispiel 4.12 gezeigt. Für $0 < x < 1$ ist

$$e^x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

Für $-1 < x < 0$ gilt nach (a)

$$1 - e^x \leq -x = |x| < \frac{|x|}{1-|x|}.$$

Damit

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 - e^x}{-x} = \frac{1 - e^x}{|x|} < \frac{1}{1-|x|}.$$

Die linke Ungleichung beweisen wir zunächst für $0 < x < 1$. Nach Teil (a) gilt $1+x \leq e^x$ also

$$\frac{e^x - 1}{x} \geq 1 \geq \frac{1}{1+x}.$$

Für $-1 < x < 0$ gilt

$$e^x < \frac{1}{1-x} \quad \text{also} \quad 1 - e^x \geq \frac{-x}{1-x}$$

und damit

$$\frac{e^x - 1}{x} \geq \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+|x|}.$$

Teil (c) folgt direkt aus (b). Nach dem Sandwichsatz 2.27 (f) gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+|x|} \leq \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \leq \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-|x|}$$

was zu zeigen war. □

Proposition 4.18. *Es gilt*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Beweis. Wir rechnen für $x \neq 0$

$$\frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Letztere Summe konvergiert für $n \to \infty$ zu einer Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ (benutze das Quotientenkriterium z.B.). Daher gilt zunächst

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} =: P(x)$$

Da aber die Potenzeihe auf der rechten Seite auf ganz $\mathbb{R}$ eine stetige Funktion darstellt (siehe Satz 4.15) gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} P(x) = P(0) = 1.$$

(Man hätte genauso für den Grenzwert in Proposition 4.17 argumentieren, doch die Abschätzungen für die Exponentialfunktion sind im allgemeinen sehr hilfreich.) □

Definition 4.19. Falls für jede Folge $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ mit $x_n < x_0$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ konvergiert (etwa gegen $z_0 \in \mathbb{C}$), so schreibt man

$$\lim_{x \to x_0-} f(x_0) = z_0 \quad \text{oder kurz} \quad f(x_0-) = z_0$$

und man nennt diesen Grenzwert den *linksseitigen Grenzwert*. Für alle Folgen $x_n \in I$ mit $x_n \neq x_0$ und $x_n > x_0$ und so, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ etwa gegen $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert, so schreibt man

$$\lim_{x \to x_0+} f(x_0) = z_0 \quad \text{oder kurz} \quad f(x_0+) = z_0.$$

Man nennt diesen Grenzwert den *rechtsseitigen Grenzwert*.

Sei nun f definiert für alle $x \geq C$ für ein $C \in \mathbb{R}$, dann setzen wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) := \lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ist hingegen f definiert für alle $x \leq C$ für $C \in \mathbb{R}$, dann setzen wir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) := \lim_{x\to 0-} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Beispiel 4.20. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0.$$

Denn für $x > 0$ gilt nach Proposition 4.17 (a)

$$e^{\frac{1}{x}} \geq 1 + \frac{1}{x} > \frac{1}{x}$$

also

$$0 < e^{-\frac{1}{x}} < x$$

und damit ist

$$0 \leq \lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}} \leq \lim_{x\to 0+} x = 0$$

und nach Definition folgt $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$. Für den zweiten Grenzwert bemerken wir, dass für negative x gilt $e^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{|x|}}$ und somit

$$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0.$$

Ferner bemerken wir noch, dass

$$\lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty,$$

ist, denn es gilt $e^x \geq 1 + x$.

Proposition 4.21.

(a) Es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = z_0$ *genau dann, wenn* $f(x_0-) = z_0 = f(x_0+)$.

(b) f *ist stetig in* $x_0 \in I$ *genau dann, wenn*

$$f(x_0+) = f(x_0) = f(x_0-).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Als Anwendungsbeispiel für Proposition 4.21 betrachten wir die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

und behaupten, dass f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Dass f stetig in alle Punkten außer der Null ist, ist klar, was aus der Stetigkeit der Nullfunktion bzw. aus der Stetigkeit von $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ (als Komposition stetiger Funktionen). Daher bleibt nur die Stetigkeit in 0 zu testen. Der linksseitige Grenzwert ist

$$f(0-) = 0$$

da für jede Nullfolge (x_n) mit $x_n < 0$ folgt, dass $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Weiter gilt

$$\lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0,$$

nach Beispiel 4.20. Da $f(0-) = 0 = f(0+)$ folgt nach Proposition 4.21, dass f stetig in $x = 0$ ist.

4.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Für diesen Abschnitt verlangen wird, dass $f\colon I \to \mathbb{R}$ nur Werte in $\mathbb{R}$ annimmt und nicht in $\mathbb{C}$. Eine zentrale Eigenschaft stetiger Funktionen ist, dass sie, falls I kompakt ist, ihr Minimum und Maximum annehmen. Bevor wir den Satz formulieren benötigen wir noch die

Definition 4.22. Wir definieren

$$\inf_{x\in I} := \inf_I f := \inf f := \inf\{f(x) : x \in I\} \in \mathbb{R} \cap \{-\infty\}$$

sowie

$$\sup_{x\in I} := \sup_I f := \sup f := \sup\{f(x) : x \in I\} \in \mathbb{R} \cap \{\infty\}.$$

Falls es ein $x_0 \in I$ gibt mit $f(x_0) = \inf f$ $(= \sup f)$, dann sagt man, dass f sein *Minimum* (*Maximum*) annimmt und schreibt dann

$$f(x_0) = \min_{x\in I} f(x) = \min_I f \qquad \text{bzw.} \qquad f(x_0) = \max_{x\in I} f(x) = \max_I f$$

Satz 4.23. *Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Dann existieren x_0 und $y_0 \in I$ mit*

$$f(x_0) = \min_I f \qquad \textit{und} \qquad f(y_0) = \max_I f.$$

Insbesondere ist jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt.

Beweis. Es existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \in I$ mit $f(x_n) \to \inf f$ für $n \to \infty$. Da (x_n) beschränkt ist (weil $[a, b]$ kompakt) existiert nach Bolzano-Weierstraß (Satz 2.30) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x_0$ für $k \to \infty$. Dann muss aber auch wegen Satz 2.27 (g) $f(x_{n_k}) \to \inf f$ für $k \to \infty$. Auf Grund der Stetigkeit gilt aber dann

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \inf f,$$

also $f(x_0) = \min f$. Analog verfährt man für $\sup f$. □

Der *Zwischenwertsatz* ist wohl die wichtigste Eigenschaft reellwertiger Funktionen. Der folgende Satz wurde zuerst von B. Bolzano im Jahr 1817 bewiesen.

Satz 4.24 (Nullstellensatz)**.** *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so besitzt f eine Nullstelle $x_0 \in [a, b]$, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$ annehmen (ansonsten gehe zu $-f$ über). Wir betrachten

$$H := \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}.$$

Da $a \in H$ ist $H \neq \emptyset$. Daher existiert $c := \sup H$ und weil $[a, b]$ abgeschlossen ist, gilt $c \in [a, b]$. Wir wollen nun zeigen, dass $f(c) = 0$ ist.

Sei $x_n \in H$ eine Folge mit $x_n \to c$ (siehe Hausaufgabe **A4.2**). Wegen der Stetigkeit gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$ und weil $f(x_n) < 0$ ist gilt $f(c) \leq 0$. Weil $f(b) > 0$ und $f(c) \leq 0$ ist $c < b$. Betrachte daher die Folge $y_n := c + \frac{b-c}{n}$. Da $y_n > c$ für alle n ist, muss $f(y_n) > 0$ gelten. Da $y_n \to c$ gilt, gilt wegen der Stetigkeit $f(c) \geq 0$. Insgesamt ist damit

$$0 \leq f(c) \leq 0,$$

also $f(c) = 0$. □

Hieraus folgt

Satz 4.25 (Zwischenwertsatz)**.** *Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zu jedem Wert $y \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y < f(b)$ existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y$.*

Beweis. Betrachte $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - y$. Da f stetig ist auch g stetig. Da y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, gilt $f(a) < y < f(b)$, also

$$g(a) = f(a) - y < 0 \quad \text{und} \quad g(b) = f(b) - y > 0.$$

Nach dem Nullstellensatz 4.24 gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $g(x_0) = 0$, also $f(x_0) = c$. □

Korollar 4.26. *Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und I ein Intevall, so ist $f(I)$ wieder ein Intervall.*

Beweis. Ist f die konstante Funktion $f(x) = c$ für alle $x \in I$. Dann ist $f(I) = [c, c]$ also insbesondere ein Intervall. Ist f nicht konstant und $a, b \in J := f(I)$ beliebig mit $a < b$, so gilt nach dem Zwischenwertsatz, dass $[a, b] \subset J$ ist. Hieraus folgt, dass J ein Intervall ist.

Es genügt zu zeigen, dass $(\inf f, \sup f) \subset J$ ist, denn es können höchstens noch Randpunkt hinzukommen, mit denen J immer noch ein Intervall bleibt. Nach Hausaufgabe **A4.2** wählen wir Folgen $a_n \to \inf f$ und $b_n \to \sup f$ für $n \to \infty$. Nach dem Zwischenwertsatz muss $[a_n, b_n] \subset J$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ sein. Ist nun $x \in (\inf f, \sup f)$, so existiert auf Grund der Definition des Infimums und des Supremums ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in [a_n, b_n]$, also $x \in J$, was $(\inf J, \sup J) \subset J$ impliziert. $\square$

Definition 4.27. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion (nicht notwendigersweise stetig). f ist *monoton wachsend (fallend)* falls aus $x \leq y$ mit $x, y \in I$

$$f(x) \leq f(y) \quad (f(y) \leq f(x))$$

folgt. Die Funktion heißt *streng monoton wachsend (fallend)* wenn $\leq$ und $\geq$ durch $<$ und $>$ ersetzt werden.

Satz 4.28. *Sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig.*

(a) f ist injektiv genau dann, wenn f streng monoton wachsend oder fallend ist.

(b) Ist f streng monoton wachsend (fallend), dann ist $f^{-1}\colon f(I) \to I$ streng monoton wachsend (fallend)

(c) Ist f streng monoton wachsend (fallend), so ist $f^{-1}\colon f(I) \to I$ stetig.

Beweis. Wir beweisen (a). Falls f streng monoton wachsend (fallend) ist, so ist f klarerweise injektiv. Sei also nun f injektiv. Angenommen f ist weder streng monoton wachsend noch fallend. Dann müssen $x_1, x_2, x_3 \in I$ existieren mit

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2).$$

Wir wählen $c \in]f(x_1), f(x_2)[\cap]f(x_3), f(x_2)[$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es ein $y_1 \in]x_1, x_2[$ und ein $y_1 \in]x_3, x_2[$ geben mit $f(y_1) = c = f(y_2)$. Widerspruch zur Inkjektivität.

Es soll nun (b) bewiesen werden. Beachte, dass $f\colon I \to f(I)$ bijektiv ist, da f streng monoton wachsend (fallend) ist und nach (a) damit injektiv. Schränken wir f auf sein Bild ein, so wird f auch surjektiv, also bijektiv. Sei nun $y_1, y_2 \in f(I)$ mit $y_1 < y_2$. Angenommen $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Dann würde dies wegen der Monotonie von f implizieren

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$$

was aber ein Widerspruch wäre.

Als letztes beweisen wir (c). Sei $y_0 \in f(I)$, also es existiert ein $x_0 \in I$ mit $f(x_0) = y_0$. Falls x_0 kein Randpunkt von I ist, wähle ein $\varepsilon > 0$ mit $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. Setze $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ und $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ sowie $\delta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$. Dann folgt aus $|y - y_0| < \delta$

$$y_1 \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq y_2.$$

Da nun f monoton ist gilt

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon,$$

also

$$\left|f^{-1}(y) - x_0\right| < \varepsilon.$$

Falls x_0 ein Randpunkt ist schließen wir entsprechend. □

Beispiel 4.29. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ ist bijektiv und stetig. Die Inverse Abbilung ist $\sqrt{\ }\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$, welche nach Satz 4.28 ebenfalls stetig ist.

4.4 Der natürliche Logarithmus und verallgemeinerte Potenzfunktionen

In Bemerkung 4.20 haben wir gesehen, dass

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

gilt. Da ferner die Exponentialfunktion monoton wachsend ist (siehe 4.1.3) muss nach dem Zwischenwertsatz gelten, dass das Bild der Exponentialfunktion $(0, \infty) = \mathbb{R}^+$ ist. Nach Satz 4.28 ist daher die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto e^x$ bijektiv und die Umkehrabbildung ist stetig.

Definition 4.30. Wir definieren die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion als

$$\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$$

und nennen sie den *(natürlichen) Logarithmus.*

Wir geben nun die wichtigsten Eigenschaften des Logarithmus an

Proposition 4.31.

(a) $\ln$ *ist streng monton wachsend.*

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ *gilt* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

(c) $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ *und* $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$.

Beweis. (a) gilt, weil $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bijektiv ist. (b) ist Übungsaufgabe. Sei (x_n) eine Nullfolge. Weil die Exponentialfunktion bijektiv ist, existieren eine Folge (y_n) mit $x_n = e^{y_n}$ und $y_n \to -\infty$. Also

$$\lim_{n\to\infty} \ln(x_n) = \lim_{n\to\infty} \ln(e^{y_n}) = \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

Was $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ beweist. Analog rechnet man

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \lim_{y\to\infty} \ln(e^{y}) = \lim_{y\to\infty} y = \infty.$$

□

Der Graph des natürlichen Logarithmus ist gegeben durch

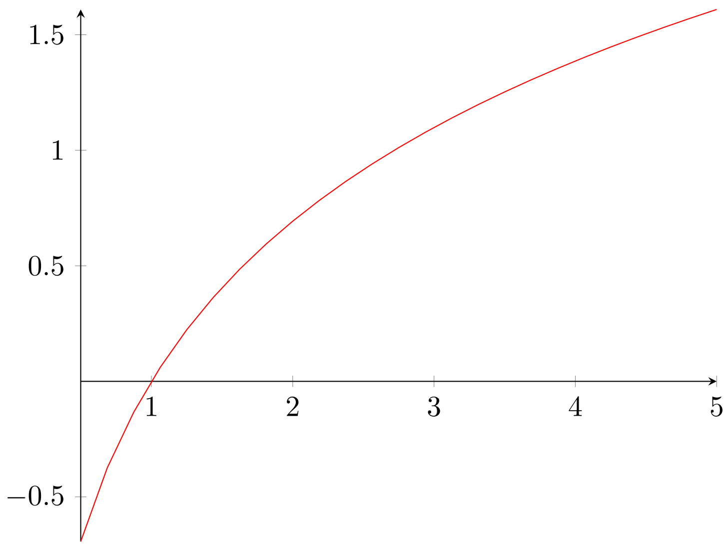

Abbildung 4.5: Der Graph des natürlichen Logarithmus.

Mithilfe der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus können weitere Funktionen definieren.

Definition 4.32. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die *verallgemeinerte Potenzfunktion*

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha := e^{\alpha\cdot\ln(x)}$$

sowie für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ die *verallgemeinerte Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha^x := e^{x\cdot\ln(\alpha)}.$$

Proposition 4.33.

(a) Die verallgemeinerte Potenzfunktion und Exponentialfunktion sind als Verkettung stetiger Funktionen stetig.

(b) *Es gilt für $\alpha \geq 0$*

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0.$$

und für $\alpha < 0$

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha = \infty$$

(c) *Es gilt*

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to\infty} \alpha^x = \infty$$

Beweis. (b) und (c) folgen direkt aus den entsprechenden Konvergenzen des ln und exp. □

4.5 Eigenschaften trigonometrischer Funktionen

Wir erinnern an die Definition des Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}
\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad .
\end{aligned}$$

4.5.1 Die Zahl π

Wir werden nun eine Definition der Kreiszahl π in diesem Abschnitt geben.

Lemma 4.34. *Für $x \in]0,2]$ gilt*

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} < 1.$$

Insbesondere ist

$$\cos 2 < -\frac{1}{3}$$

Beweis. Die Reihe für den Kosinus konvergiert absolut weil der Konvergenzradius ∞ ist. Daher können wir die Reihe nach dem Riemannschen Umordnungssatz (Satz 2.42) umordnen

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
&= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{2m+1}}{(4m+2)!} x^{4m+2} + \frac{(-1)^{2m+2}}{(4m+4)!} x^{4m+4} \right) \\
&= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!} \left(-1 + \frac{x^2}{(4m+3)(4m+4)} \right)
\end{aligned}$$

Beachte nun, dass alle Summanden in der letzen Summe negativ sind für $x \in]0,2]$, denn für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$-1 + \frac{x^2}{(4m+3)(4m+4)} \leq -1 + \frac{1}{(4m+3)}(m+1) \leq -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} < 0.$$

Da alle Summanden in der Summe negativ sind, ist die Summe sicherlich kleiner, wenn man nur den Sumannen für $m = 0$ behält, also

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!}\left(-1 + \frac{x^2}{(4m+3)(4m+4)}\right) \\ &< 1 + \frac{x^2}{2!}\left(-1 + \frac{x^2}{3 \cdot 4}\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} < 1.\end{aligned}$$

□

Lemma 4.35. *Die Kosinusfunktion* $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *besitzt eine kleinste positive Nullstelle. Sie liegt im Intervall* $]0,2[$.

Beweis. Es gilt $\cos 0 = 1 > 0$ und nach Lemma 4.34 $\cos 2 < -\frac{1}{3}$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es ein $x_0 \in]0,2[$ geben mit $\cos x_0 = 0$. Die Menge

$$A = \{x \in [0,2] : \cos x = 0\}$$

ist damit nicht leer und nach unten beschränkt. Folglich existiert $p := \inf A > 0$. Da es eine Folge mit $x_n \to p$ für $n \to \infty$ gibt, muss also auch wegen der Stetigkeit des Kosinus gelten $\cos p = 0$. □

Definition 4.36. Wir definieren die *Kreiszahl* als

$$\pi := 2 \cdot \min\{x \in [0,2] : \cos x = 0\}.$$

Ferner ist $\pi \in]0,4[$ und $\cos x > 0$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, wobei letzteres aus dem Zwischenwertsatz (Satz 4.25) folgt.

09.12.2021

4.5.2 Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Lemma 4.37. *Für* $x \in [0, \sqrt{6}]$ *gilt*

$$\sin(x) \geq 0.$$

Beweis. Man verfährt sich ähnlich zu Lemma 4.35. Man schreibt mit Hilfe des Riemannschen Umordnungssatzes

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)}\right).\end{aligned}$$

Der rechte Klammerausdruck ist nicht-negativ für alle $x \in [0, \sqrt{6}]$. $\square$

Proposition 4.38.

(a) *Es gilt* $\cos(-x) = \cos(x)$ *und* $\sin(-x) = -\sin(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(b) *Es gilt* $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$ *und* $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

(c) *Es gilt* $\cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\sin(x)$ *und* $\sin(x \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(d) *Es gilt* $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$ *und* $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$.

(e) *Es gilt* $\cos(2\pi k + x) = \cos(x)$ *sowie* $\sin(2\pi k + x) = \sin(x)$ *und alle* $k \in \mathbb{Z}$.

(f) *Die Nullstellen des Sinus in* $[0, 2\pi]$ *liegen bei* $0, \pi$ *und* 2π *und die vom Kosinus bei* $\frac{\pi}{2}$ *und* $\frac{3\pi}{2}$.

Beweis. Wir wissen, dass $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ferner gilt

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

Man rechnet nach, dass $|e^{ix}| = 1$ ist. Denn zunächst gilt

$$\overline{e^{ix}} = \cos(x) - i\sin(x) = \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix}.$$

Und somit $|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$. Andereseits ist aber $|e^{ix}|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Also

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

Folglich ist $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$. Nun ist aber der Sinus positiv auf $[0, \sqrt{6}]$ nach Proposition 4.37 und da $\frac{\pi}{2} < 2$ ist, kommt nur $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ in Frage, was (a) beweist.

Klarerweise gilt $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$. Damit ist

$$\cos(x \pm \tfrac{\pi}{2}) + i\sin(x \pm \tfrac{\pi}{2}) = e^{i(x \pm \frac{\pi}{2})} = \pm ie^{ix} = \mp\sin(x) \pm i\cos(x).$$

was (c).

Weiter ist $e^{i\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1$ und damit

$$\cos(x \pm \pi) + i\sin(x \pm \pi) = e^{i(x\pm\pi)} = -e^i x = -\cos(x) - i\sin(x)$$

was (d) impliziert. Für (e) betrachten wir $e^{2\pi i} = \left(e^{i\pi}\right)^2 = 1$, also

$$\cos(x + 2\pi k) + i\sin(x + 2\pi k) = e^{i(x+2\pi k)} = e^{ix} 1^k e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Wir untersuchen nun (f). Gäbe es eine Nullstelle $x \in (0, 2\pi)$ welche kleiner als π wäre, so ist $x - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ und es würde

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x) = 0$$

gelten. Aber nach Definition ist $\frac{\pi}{2}$ die kleinste positive Nullstelle des Kosinus. Also ein Widerspruch und damit ist π die kleinste Nullstelle des Sinus in $(0, 2\pi)$ (Beachte, dass wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ und $\cos\pi = -1$ folgt, dass $\sin\pi = 0$). Da $\sin 0 = 0$ gilt wegen der Periodizität $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$. Wegen $\sin(x - \pi) = -\sin(x)$ kann auch in $(\pi, 2\pi)$ keine Nullstelle des Sinus existieren. Wegen $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, folgt, dass die Nullstellen des Kosinus in $[0, 2\pi]$ gegeben sind durch $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$. □

Proposition 4.39. *Der Sinus ist auf* $(0, \pi)$ *positiv und auf* $(\pi, 2\pi)$ *negativ. Der Kosinus ist auf* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *positiv und* $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ *negativ.*

Beweis. Es gilt $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und da π die kleinste Nullstelle des Sinus ist in $(0, \pi]$ muss $\sin(x) > 0$ für $x \in (0, \pi)$ sein. Ferner gilt $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ und damit ist der Sinus auf $(\pi, 2\pi)$ negativ.

Auf $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ hat der Kosinus keine Nullstelle, Da $\cos\pi = -1$ muss der Kosinus nach dem Zwischenwertsatz negativ sein auf $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Wegen $\cos(x - \pi) = -\cos x$ ist der Kosinus auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ positiv.

□

5 Differentialrechnung

In der Physik spielen Änderungsraten oft eine zentrale Rolle. Bezeichnen wir mit $f(t)$ eine physikalische Größe zum Zeitpunkt t, so ist die Änderung pro Zeiteinheit h gegeben durch

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

Es liegt nahe, dass die *momentane Änderung* der physikalischen Größe f zum Zeitpunkt t dadurch ermittelt werden kann, wenn wir h so klein wie möglich wählen. Sprich wenn wir h gegen Null laufen lassen.

Geometrisch gesehen, stellt der obige Quotient, die *Steigung der Sekante* dar, welche durch die Punkte $(t, f(t))$ und $(t+h, f(t+h))$ des Graphen verläuft. Geht also $h \to 0$, so geht die Sekante zu einer *Tangente* über.

5.1 Differenzierbarkeit

Falls nichts anderes vereinbart wird, bezeichnet in die diesem Kapitel $I \subset \mathbb{R}$ stets ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

Definition 5.1. f heißt in x_0 *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. Wir setzen dann

$$f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

f heißt *differenzierbar (auf ganz I)*, falls f differenzierbar in x ist für alle $x \in I$. Den Bruch

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

nennt man den *Differenzenquotienten.*

Die *rechtsseitige Ableitung* von f in x_0 ist gegeben durch

$$f'_+(x_0) := \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

und die *linksseitige Ableitung* ist definiert durch

$$f'_-(x_0) := \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ist $I = [a, b]$, so bedeutet also Differnzierbarkeit in $x = a$, dass $f'_+(a)$ existiert. Analog muss für $x = b$ der Grenzwert $f'_-(x_0)$ existieren.

Beispiel 5.2.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ die konstante Abbildung. Dann ist f in differenzierbar, denn für jedes h gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0.$$

(b) Die Identität ist differenzierbar. Für den Differenzenquotienten erhält man

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$

was im Limes also $f'(x) = 1$ ergibt.

(c) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist differenzierbar denn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Also $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$.

(d) Wir betrachten nun die Exponentialfunktion. Es gilt

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Denn in Proposition 4.17 haben wir gesehen, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

was bedeutet $\frac{d}{dx}\big|_{x=0} e^x = 1 = e^0$. Für ein allgemeines $x_0 \in \mathbb{R}$ benutzen wir die Funktionalgleichung

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}.$$

(e) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$ ist in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, außer in $x_0 = 0$: Würde der Limes des Differenzenquotienten existieren (bezüglich $x_0 = 0$), so müsste nach Proposition 4.21 (a) die linksseitige und rechtsseitige Ableitung übereinstimmen. Man rechnet nun nach, dass

$$f'_-(0) = -1 \quad \text{und} \quad f'_+(0) = 1,$$

woraus folgt, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

nicht existieren kann.

Folgende Umformulierung der Definition der Differenzierbarkeit ist im Hinblick auf die Verallgemeinerung der Ableitung für Funktionen mehrerer Veränderlicher von zentraler Bedeutung.

Proposition 5.3. *f ist in x_0 differenzierbar genau dann, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass*

$$R(x, x_0) := f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$$

die Eigenschaft

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0.$$

besitzt. In diesem Fall ist $a = f'(x_0)$. Man nennt $R(x, x_0)$ das Restglied.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Proposition 5.4. *Ist f an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f dort stetig.*

Beweis. Es gilt für $x \neq x_0$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

also

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

□

Bemerkung 5.5. Die Umkehrung von Proposition 5.4 gilt nicht, wie man anhand der Betragsfunktion sehen kann. Es gibt sogar Funktionen die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, aber an keiner Stelle differenzierbar. Die wohl bekannteste ist die Weierstraß-Funktion, welche als *Fourierreihe* gegeben ist:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

mit $0 < a < 1$ und $ab \geq 1$.

Satz 5.6. *Seien $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ zwei differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

(a) $f + g$ und $f \cdot g$ sind differenziebar und es gilt

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \textit{sowie} \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Die Ableitung des Produktes nennt man auch Produktregel *oder* Leibniz-Regel. *Insbesondere gilt also für $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\lambda g)'(x) = \lambda g'(x)$, da die Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = \lambda$ verschwindet. Ferner gilt, falls $f = g + ih$ für $g, h\colon I \to \mathbb{R}$ ist, dann ist f genau dann differenzierbar, wenn h und g differenzierbar sind und es gilt $f' = g' + ih'$.*

(b) *Sei $J := \{x \in I : g(x) \neq 0\}$. Dann ist $\frac{f}{g} \colon J \to \mathbb{R}$ definiert, differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Diese Formel nennt man die Produktregel.

(c) *Sind $f \colon I \to \mathbb{R}$, $g \colon J \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $f(I) \subset J$, dann ist $g \circ f \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Diese Formel nennt man die Kettenregel. *Man nennt $g'(f(x))$ die* äußere Ableitung *und $f'(x)$ die* innere Ableitung.

(d) *Ist f bijektiv, differenzierbar und f' entweder positiv oder negativ auf I. Dann ist $f^{-1} \colon f(I) \to I$ differenzierbar, sowie*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

für $y \in f(I)$.

Beweis. Für die Summe gilt

$$\frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) + g'(x_0).$$

für $x \to x_0$. Für die Produktregel betrachten wir

$$\begin{aligned}\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \\ &\to f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

für $x \to x_0$. Für die Quotientenregel betrachten wir zunächst den Spezialfall $\frac{1}{g}$. Wir rechnen

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

für $x \to x_0$ (Beachte, dass g stetig in x_0 ist, da differenzierbar, siehe Proposition 5.4). Bezüglich der Produktregel für $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ gilt

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right)$$

was die Quotientenregel impliziert. Wir definieren die Abbildung

$$D(y, y_0) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, & \text{falls } y \neq y_0 \\ g'(y_0), & \text{falls } y = y_0. \end{cases}$$

Weil g differenziebar ist, ist D in y_0 stetig. Ferner gilt für alle $y \in J$

$$g(y) - g(y_0) = D(y, y_0)(y - y_0).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} D(g(f(x)), g(f(x_0))) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= g'(f(x_0))f'(x_0).
\end{aligned}$$

Als letztes beweisen wir (d). Es gilt $f^{-1} \circ f(x) = x$ für alle $x \in I$. Nach der Kettenregel gilt

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1.$$

Setzen wir $y_0 := f(x_0)$ gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

□

Korollar 5.7.

(a) Der natürliche Logarithmus ist differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$.

(b) Die verallgemeinerte Potenzfunktion ist differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis. Da die e-Funktion differenzierbar ist, muss der natürliche Logarithmus differenzierbar sein, als Umkehrabbildung. Wir benutzen Satz 5.6 (d) mit $f(x) = e^x$ und $f^{-1}(y) = \ln(y)$. Dann gilt

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}.$$

Weiter gilt $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ und nach der Kettenregel ist

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \cdot \alpha \frac{d}{dx} \ln(x) = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

□

Satz 5.8. *Sei* $f\colon (-R, R) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *eine Potenzreihe. Dann ist* f *differenzierbar mit Ableitung*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Beweis. Der Beweis ist etwas umfangreich und benötigt den *Identitätssatz für Potenzreihen.* Wir verweisen auf [4, Satz 13.B.1, S. 345]. □

Korollar 5.9. *Es gilt* $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ *und* $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$.

Beweis. Es gilt
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
und nach Satz 5.8 ist
$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x).$$
Und analog
$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2k)\frac{x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(x).$$
□

13.12.2021

5.2 Mittelwertsätze und Folgerungen

Definition 5.10. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Sei x_0 ein innerer Punkt, d.h. x ist kein Randpunkt des Intervalls. Die Stelle x_0 heißt *lokales Maximum* wenn ein $\delta > 0$ existiert, sodass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Die Stelle x_0 heißt *lokales Minimum*, falls es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Tritt einer der beiden Fälle ein, so sprechen wir von einem *lokalen Extremum*.

Satz 5.11. *Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum und ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Liegt in x_0 ein Maximum vor, so ist für $x_0 < x < x_0 + \delta$ (für ein $\delta > 0$)
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{also} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$
Für $x_0 - \delta < x < x_0$ ist
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{also} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$
woraus insgesamt $f'(x_0) = 0$ folgt. Wir verfahren analog im Falle eines Minimums. □

Satz 5.12 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit*
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$
Ist $f(b) = f(a)$, so ist $f'(x_0) = 0$. Dies ist der Satz von Rolle.

Beweis. Wir beweisen zunächst den Satz von Rolle. Da f stetig auf $[a,b]$ ist, muss auf $[a,b]$ ein Maximum und ein Minimum liegen, siehe Satz 4.23. Liegt ein Extrempunkt auf dem Rand, so existiert ein weiterer Extrempunkt im Inneren von $[a,b]$, d.h. es ist kein Randpunkt (wäre z.B. ein Maximum auf dem Rand und das Minimum auf dem anderen Rand, so wäre die Funktion konstant und $x_0 = \frac{b-a}{2}$ währe ein innerer Extrempunkt). In allen Fällen existiert ein $x_0 \in (a,b)$ welches entweder ein Maximum oder ein Minimum ist. Nach Satz 5.11 muss $f'(x_0) = 0$, was den Satz von Rolle beweist.

Die allgemeine Aussage beweisen mit durch eine Hilfsfunktion

$$h\colon I \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Wir sehen, dass $h(a) = f(a) = h(b)$ und nach dem Satz von Rolle muss es ein $x_0 \in (a,b)$ geben mit $h'(x_0) = 0$. Aber es gilt

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

also

$$0 = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Satz 5.13. *Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall und ist $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in I$, dann ist f streng monoton steigend (fallend). Demnach ist dann f bijektiv und $f^{-1}\colon f(I) \to I$ ist differenzierbar nach der Kettenregel.*

Beweis. Sei $x, y \in I$ mit $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $x_0 \in (x,y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0) > 0.$$

Da $y - x > 0$ folgt, dass $f(y) > f(x)$. Da x, y beliebig waren, so folgt, dass f streng monoton wachsend ist. Man verfährt analog für $f'(x) < 0$. □

Satz 5.14 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)**.** *Sind $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar und ist ferner $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$, so gibt es ein $x_0 \in]a,b[$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beweis. Aus dem Mittelwertsatz folgt zunächst, dass $g(b) - g(a) \neq 0$ ist, da $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$. Betrachte

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Dann erfüllt φ die Voraussetzungen des Satzes von Rolle (Satz 4.25), also gibt es ein $x_0 \in]a,b[$ mit

$$0 = \varphi'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0).$$

□

5.2.1 Umkehrabbildungen trigonometrischer Funktionen

Wir haben gesehen, dass sin und cos 2π-periodische Funktionen sind. D.h. wir müssen das Verhalten dieser Funktionen nur auf $[0, 2\pi]$ untersuchen.

Proposition 5.15.

(a) Auf dem Intervall $[0, \pi]$ *ist der Kosinus bijektiv.*

(b) Auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *ist der Sinus bijektiv.*

(c) Es gilt $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ *und* $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.

Beweis. Es gilt $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$. Nach Proposition 4.39 ist der Sinus auf $(0, \pi)$ positiv, also $\frac{d}{dx}\cos(x) < 0$. Damit ist der Kosinus auf $(0, \pi)$ monoton fallend und damit bijektiv. Wir wissen $\cos(0) = 1$ und $\cos(\pi) = -1$. In $(0, \pi)$ gibt es keine Stelle, wo der Kosinus den Wert 1 oder -1 annimmt, da sonst der Sinus dor eine Nullstelle haben müsste (wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). Insgesamt ist der Kosinus also auf $[0, \pi]$ bijektiv.

Analoges Argument verwendet man für den Sinus (mit Hilfe von Proposition 4.39)

Da der $\cos 0 = 1$ und $\cos \pi = -1$ muss nach dem Zwischenwertsatz $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. Und da $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$ sowie $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ folgt wieder nach dem Zwischenwertsatz $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$. ☐

Definition 5.16. Wir definieren die Umkehrfunktion des Kosinus auf $[0, \pi]$ als

$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi], \quad \arccos = \cos^{-1}$$

und nennen sie den *Arkuskosinus*. Wir definieren die Umkehrfunktion des Sinus auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ als

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \quad \arcsin = \sin^{-1}$$

und nennen sie den *Arkussinus*.

In Proposition 4.39 haben wir gesehen, dass die Nullstellen des Kosinus in den Punkten $k\pi + \frac{\pi}{2}$ für $k \in \mathbb{Z}$ liegen. Daher ist es möglich den *Tangens* wie folgt zu definieren

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Und analog der *Kotangens*

$$\cot\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Satz 5.17.

(a) $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *für* $-1 < x < 1$,

(b) $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *für* $-1 < x < 1$,

(c) $\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$,

(d) $\frac{d}{dx}\cot(x) = -\frac{1}{\sin(x)^2} = -1 - \cot(x)^2$.

Beweis. Es gilt nach Satz 5.6 (d) und weil $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Beachte, dass eigentlich $\sin(x) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x)}$ ist, aber da der arccos als Bild $[0,\pi]$ hat, muss man die positive Lösung wählen, da dort der Sinus positiv ist.)

Analog

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{-\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aus der Quotientenregel folgt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2.$$

Erneut aus der Quotientenregel folgt

$$\frac{d}{dx}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{-\sin(x)^2 - \cos(x)^2}{\sin(x)^2} = -\frac{1}{\sin(x)^2} = -1 - \cot(x)^2.$$

□

5.2.2 Weitere Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Satz 5.18. *Sei $I = (a,b)$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Sei $x, y \in I$ mit $x \neq y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi_0 \in [x,y] \subset (a,b)$ mit

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi_0) = 0$$

also $f(x) = f(y)$. Nun lassen wir y jeden Wert in I annehmen, woraus die Konstanz von f folgt. □

Beispiel 5.19. Es gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$$

für $|x| < 1$. Betrachte $f(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$. Wir können unter der Summe nach Satz 5.8 ableiten und erhalten

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k. = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 0.$$

Nach Satz 5.18 ist $f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Klarerweise ist aber $f(0) = 0$, also $f(x) = 0$. Ferner beachte man, dass nach dem Leibniz-Kriterium Satz 2.43 die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ konvergiert. D.h. die Potenzreihe ist linksseitig stetig in $x = 1$ und damit ist f linksseitig stetig, woraus $\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ folgt.

5.3 Höhere Ableitungen

Definition 5.20. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir die *k-te Ableitung* von f rekursiv durch

$$f^{(k)} = (f^{k-1})', \quad \text{mit } f^{(1)} = f'.$$

Aus formalen Gründen setzen wir $f^{(0)} = f$. Man beachte, dass $f^{(k)}$ wieder eine Funktion von I nach $\mathbb{R}$ ist. Man schreibt dafür auch

$$\frac{d^k}{dx^k} f \quad \text{oder} \quad \frac{d^k f}{dx^k} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^k f$$

f heißt *k-fach differenziebar* oder *k-mal differenzierbar*, falls $f^{(k)}$ existiert. Ist f für alle $k \in \mathbb{N}$ *k-fach* differenzierbar, so spricht man davon, dass f *unendlich oft differenzierbar* ist. Ist f n-mal differenzierbar und $f^{(k)}$ zu dem stetig, so sagt man, dass f *k-mal stetig differenzierbar* ist.

Weiter setzen wir

$$C^k(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} : f \text{ ist } k\text{-fach stetig differenzierbar}\}$$

und

$$C^\infty(I) = \bigcup_{k=0}^{\infty} C^k(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} : f \text{ ist unendlich oft differenzierbar}\}$$

Bemerkung 5.21. Es gilt $C^{k+1}(I) \subset C^k(I)$ für alle k und dabei liegt eine echte Inklusion vor, d.h. $C^{k+1}(I) \neq C^k(I)$. Man betrachte dafür die Abbildung

$$f\colon I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^k|x|.$$

Diese Funktion ist k-mal stetig differenzierbar, aber nicht $(k+1)$-mal (siehe Übung). Ferner betrachte man die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2\cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

f ist differenzierbar aber $f'\colon I \to \mathbb{R}$ ist nicht stetig.

Beispiel 5.22.

(a) Die e-Funktion ist unendlich oft differenzierbar mit $\frac{d^k}{dx^k}e^x = e^x$. Alle Polynome und rationale Funktionen sind unendlich oft differenzierbar, sowie alle Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius.

(b) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{cases}$$

ist ebenfalls unendlich oft differenzierbar und es gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (siehe Übung).

Satz 5.23. *Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ n-fach differnzierbar, so gilt*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Beweis. Siehe Übungsaufgabe; benutze Induktion. □

5.4 Taylorentwicklung

Wir haben bereits gesehen, dass viele Funktionen sich als Potenzreihe schreiben lassen. Prominentes Beispiel war $f(x) = e^x$ oder die Sinus- und Kosinusfunktion. Es stellt sich die Frage, ob das mit jeder differenzierbaren Funktion möglich ist. Wäre es möglich eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ in eine Potenzreihe zu entwickeln (der einfachheitshalber entwickeln wir um $x_0 = 0$) so wäre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Um die Potenzreihe zu ermitteln, müssen wir die Koeffizieten a_k ermitteln. Folgende Beobachtung ist hierbei entscheidend:

$$f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k.$$

Folglich wäre für eine beliebige Funktion f der folgender Ansatz für die Entwicklung von f in eine Potenzreihe sinnvoll

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Wir werden sehen, dass wir nicht jede unendlich oft differenzierbare Funktion so darstellen können. Aber folgende Approximation ist möglich

Satz 5.24 (Der Satz von Taylor)**.** *Jede Funktion $f \in C^{n+1}(I)$ auf einem offenen Intervall I lässt sich für $x, x_0 \in I$ auf folgende Weise nach Potenzen von $(x - x_0)$ entwickeln:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k + R_n(x). \end{aligned}$$

dabei ist das Restglied *$R_n(x)$ von der Form*

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

für ein ξ zwischen x und x_0. Man nennt das Polynom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k$$

das Taylorpolynom n-ter Ordnung *von f an der Stelle x_0. Folglich existiert zu jedem $x \in I$ ein ξ zwischen x und x_0 mit*

$$|f(x) - p_n(x)| \le \frac{|f^{(n+1)}(x_0)|}{(n + 1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Ist $f \in C^\infty(I)$, so heißt

$$T_f(x, x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)(a)}}{k!} (x - x_0)^k$$

die Taylor-Reihe *von f in x_0.*

Beweis. Für $x = x_0$ ist das Satz richtig. Sei nun $x \in I$ fest, mit $x \neq x_0$. Wir setzen

$$\begin{aligned} F_n(t) &:= f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - f^{(2)}(x - t)\frac{(x - t)^2}{2!} - \ldots - f^{(n)}(t)\frac{(x - t)^n}{n!} \\ G(t) &:= \frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)!} \end{aligned}$$

Wir zeigen mit einer Induktion nach n, dass

$$F_n'(t) = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x - t)^n}{n!}$$

gilt. Für $n = 0$ ist $F_0(t) = f(x) - f(t)$, also $F_0'(t) = f'(t)$, was die Behauptung für $n = 0$ beweist. Im Induktionsschritt sehen wir

$$F_{n+1}(t) = F_n(t) - f^{(n+1)}(t)\frac{(x - t)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

und es gilt

$$
\begin{aligned}
F'_{n+1}(t) &= F'_n(t) - f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} \\
&= -f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

was zu zeigen war. Klarerweise gilt

$$G'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Setzen wir nun $t = x_0$ ein, so folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 5.14), dass ein ξ zwischen x und x_0 existiert mit

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = f^{(n+1)}(\xi). \tag{5.1}$$

Für $t = x$ ist aber $F(x) = G(x) = 0$ und für $t = x_0$

$$F(x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \ldots - f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

sowie

$$G(x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Setzt man dies in (5.1) ein, so erhält man

$$F(x_0) = G(x_0)f^{(n+1)}(\xi)$$

was zu zeigen war. □

Beispiel 5.25. Wir wollen nun mit dem Satz von Taylor ein Polynom ermitteln, sodass wir die Exponentialfunktion auf $[-1, 1]$ bis auf zwei Stellen genau nach dem Komma approximieren. Nach dem Satz von Taylor 5.24 (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

mit ξ zwischen x und 0. Also ist

$$|e^x - p_5(x)| = \frac{x^6}{720}e^{\xi} < \frac{e}{720} < 0{,}0038$$

Folglich approximiert das Polynom

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

die e-Funktion auf dem Intervall $[-1, 1]$ bis auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Bemerkung 5.26. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *analytisch* in $x_0 \in I$, falls $T_f(x, x_0)$ einen positiven Konvergenzradius R besitzt und auf $(-R, R) \cap I$ gleich der Funktion f ist.

Z.B. ist die Exponentialfunktion per Definition analytisch in jedem Punkt aus $\mathbb{R}$. Genauso gilt dies für die trigonometrischen Funktionen. Die Funktion aus Beispiel 5.22 (b) ist unendlich oft differenzierbar, ihre Taylorreihe konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ (da sie konstant Null ist), aber sie stellt Klarerweise nicht die Funktion f dar.

Korollar 5.27. *Eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ wird auf I durch ihre Taylor-Reihe dargestellt, falls*

$$||f^{(k)}||_\infty := \sup_{x\in I} |f^{(k)}(x)| := \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in I\} \leq M$$

ist, für ein $M \in \mathbb{R}$.

Beweis. Siehe Übung. □

Beispiel 5.28. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

mit

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}.$$

Wir zeigen die nur für $x \geq 0$. Für den Fall $x < 0$ verweisen wir auf [2, §10, 3.3(c), S. 205].

Für $f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$ ergibt sich

$$f^{(k)}(x) = \binom{\alpha}{k} k!(1+x)^{\alpha-k}.$$

Nach dem Satz von Tayler Satz 5.24 gilt also

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

für ein $0 < \xi < 1$. Ist nun $x \in [0, 1[$ so gilt mit $a_k := \binom{\alpha}{k} x^k$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha - k}{k+1} x$$

und somit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = -x.$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, dass $|x| + \varepsilon < 1$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \alpha$ für $k \geq N$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k} + x\right| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < |x| + \varepsilon =: q$$

mit $0 < q < 1$. Für $n \geq N$ gilt dann wegen $(1 + \xi x)^{n+1-\alpha} \geq 1$

$$|R_n(x)| \leq |a_{n+1}| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| \cdot |a_N| < q^{n-N+1}|a_N|,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für jedes $x \in [0, 1[$.

5.4.1 Lokale Minima und Maxima

Wir beweisen hier den aus der Schule bekannten Sachverhalt, dass lokale Extrema durch das Verschwinden der Ableitung bestimmt sind.

Satz 5.29. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, also $f \in C^2(I)$, und $x_0 \in I$.*

(a) Wenn f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum besitzt, so muss

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \geq 0$$

gelten. Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, so folgt

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \leq 0.$$

(b) Wenn

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0$$

gilt, so liegt in x_0 ein lokales Minimum vor. Falls

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0.$$

gilt, so liegt in x_0 ein lokales Maximum vor.

Beweis. Wir beweisen zunächst (b). Ist $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, so existiert auf Grund der Stetigkeit von f'' ein $\delta > 0$ mit $f''(x) > 0$ für $|x - x_0| < \delta$. Für so ein x existiert nach dem Satz von Taylor 5.24 ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\xi)\frac{(x - x_0)^2}{2} \\ &= f(x_0) + f''(\xi)\frac{(x - x_0)^2}{2} > f(x_0), \end{aligned}$$

wegen $f''(\xi) > 0$. Nach Definition 5.10 liegt also in x_0 in lokales Minimum vor. Ist $f''(x_0) < 0$ so liegt nach dem gerade eben bewiesenen bei $-f$ ein lokales Minimum vor (da $(-f)'(x_0) = 0$ und $(-f)''(x_0) > 0$), also hat f ein lokales Maximum in x_0.

Nun zu Teil (a). f habe in x_0 ein lokales Maximum. Dann folgt $f'(x_0) = 0$ nach Satz 5.11. Wäre $f''(x_0) > 0$, so wäre nach (b) $f(x) > f(x_0)$ für ein x mit $|x - x_0| < \delta$, was absurd ist, da $f(x_0)$ ein lokales Maximum ist. Folglich muss $f''(x_0) \leq 0$ sein. Entsprechend argumentiert man bei lokalen Minima. □

Bemerkung 5.30. Ist also $f \in C^2[a, b]$, so hat f als stetige Funktion in $[a, b]$ ein Minimum, d.h. es existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Liegt x_0 nicht auf dem Rand von $[a, b]$, so folgt $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \geq 0$ nach Satz 5.11. Liegt x_0 auf dem Rand, so muss dort die Ableitung nicht verschwinden. Ob ein globales Minimum bei x_0 vorliegt muss mit den Randpunkten verglichen werden.

Korollar 5.31. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$.*

Beweis. Wir betrachten den Sinus zunächst auf $[0, 2\pi]$. Es gilt $\sin'(x) = \cos(x)$, daher verschwindet die Ableitung genau dann wenn der Kosinus eine Nulltstelle in $[0, 2\pi]$ hat. Das ist der Fall in $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$. Weiter ist $\sin''(x) = -\sin(x)$ und wir erhalten

$$\sin''(\tfrac{\pi}{2}) = -1 \quad \text{und} \quad \sin''(\tfrac{3\pi}{2}) = 1.$$

Daher liegt in $\frac{\pi}{2}$ ein lokales Maximum vor und in $\frac{3\pi}{2}$ ein lokales Minimum. Da keine weitere Extrema in $[0, 2\pi]$ vorliegen und $\sin(0) = 0 = \sin(2\pi)$ gilt, muss es hierbei um ein globales Maximum und ein globales Minimum handeln. Folglich muss

$$-1 = \sin(\tfrac{3\pi}{2}) \leq \sin(x) \leq \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

für alle $x \in [0, 2\pi]$ gelten. Auf Grund der 2π-Periodizität des Sinus gilt obige Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$. Für den Kosinus verfährt man analog mit dem Unterschied, dass man die Funktion auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ betrachtet. □

5.4.2 Die Regel von de l'Hospital

Satz 5.32 (Die Regel von de l'Hospital)**.** *Sind $f, g\colon]a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funkionen und ist*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0,$$

so gilt

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der letztere Grenzwert existiert. Ein entsprechender Satz gilt für linksseitige bzw. beidseitige Grenzwerte.

Beweis. Wir setzen $f(a) := 0 =: g(a)$. So erfüllen f und g die Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes 5.14. Also gibt es zu jedem $x \in]a,b]$ ein $\xi \in]a,x[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Ist (x_n) eine Folge mit $x_n \to a$, und sind ξ_n die zugehörigen Zwischenwerte, so gilt $\xi_n \in]a, x_n[$ und damit auch $\xi_n \to a$ von rechts. Also

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Beispiel 5.33.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^x}{\cos(x)} = 2.$

Satz 5.34. *Es gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

unter folgenden Voraussetzungen:

(a) Es gibt ein $M \in \mathbb{R}$, sodass f und g differenziebar sind für $x \geq M$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ oder $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

(c) der in der Behauptung rechtsstehende Grenzwert existiert.

Beweis. Der Fall $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ ist etwas aufwendig und wird daher weggelassen (für den Beweis siehe [3, S. 287/288]) Der andere Fall in (b) folgt aus Satz 5.32 durch Übergang von x zu $\frac{1}{x}$ und $x \to 0+$. □

Beispiel 5.35. Für $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Bemerkung 5.36. Es folgt ein Beispiel, an dem man sieht, dass die Voraussetzung, dass der Grenzwert der Quotienten der Ableitungen existiert. Betrachte $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x + \sin(x), \quad g(x) = x.$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

und die Voraussetzungen (a) und (b) des Satzes 5.34 sind erfüllt. Allerdings ist

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos(x)$$

was aber nicht konvergiert für $x \to \infty$. Trotzdem exstiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, denn

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + \sin(x)}{x} = 1 + \frac{\sin(x)}{x} \to 1$$

für $x \to \infty$. Man beachte, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ da

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \to 0$$

für $x \to \infty$.

16.12.2021

6 Integralrechnung

Das Integrieren besitzt zwei zentrale Eigenschaften. Zum einen das bestimmen von Kurvenlängen, Flächeninhalten oder Volumina und zum anderen zum Lösen von Differentialgleichungen. Wir werden in dieser Vorlesung das Integral nicht wie üblich über die geometrische Anschauung des Flächeninhalts zwischen einem Graphen einer Funktion und der x-Achse einführen, sondern axiomatisch. Der Vorteil bei dieser Vorgehensweise ist, dass die doch recht komplizierte Definiton über die *Riemannschen Summen* ausgelassen werden kann und somit schnell zur Berechnung von Integralen kommen kann. Wir werden jedoch anmerken, inwiefern das Integral einem Flächenhinhalt entspricht (siehe Abschnitt 6.3)

6.1 Stammfunktionen

Definition 6.1. Sei $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Funktion $F\colon I \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* oder ein *unbestimmtes Integral* zu f, wenn F differenzierbar in I ist und dort $F' = f$ gilt.

Wir bezeichnen eine solche Funktion $F\colon I \to \mathbb{C}$ generell mit

$$\int f(x)\,dx \quad \text{oder kurz mit} \quad \int f.$$

Statt der Variablen x kann man auch jedes andere Symbol benutzen. Wir schreiben weiter unten etwa

$$\int f(t)\,dt = F(x)$$

weil wir t hier als eine Art *Integrationsvariable* ansehen. Man beachte also, dass man mit $\int f$ stets eine Funktion meint und wir im obigen Beispiel für diese Funktion F die Variable x benutzt.

Proposition 6.2. *Sei $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine Funktion und F_1 sowie F_2 zwei Stammfunktionen von f. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$F_1 = F_2 + c.$$

Beweis. Es gilt für $h := F_1 - F_2$, dass h differenzierbar ist und $h' = F_1' - F_2' = 0$. Nach Satz 5.18 existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $h = c$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Unmittelbar aus den Differentiationsregeln folgt

Satz 6.3. *Seien $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ Funktionen und $F, G\colon \to \mathbb{C}$ Stammfunktionen von f und g. Ferner seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann ist*

$$\lambda F + \mu G$$

eine Stammfunktion von $\lambda f + \mu g$. Es gilt also

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g.$$

Ist $I = I_1 \cup I_2$ mit $I_1 \cap I_2 = \{x_0\}$ und sind $F_i\colon I_i \to \mathbb{C}$, Stammfunktionen von $f|_{I_i}$ mit $F_1(x_0) = F_2(x_0)$ (was man durch Addition einer Konstante immer erreichen kann) so ist die Funktion

$$F\colon I \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \begin{cases} F_1(x), & x \in I_1 \\ F_2(x), & x \in I_2 \end{cases}$$

eine Stammfunktion von f.

Hier eine Liste von Stammfunktionen, die der Leser kennen sollte

(1) $\displaystyle\int t^\alpha\, dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{t}\, dt = \ln(x)$ auf $\mathbb{R}^+$. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt also $\displaystyle\int \frac{1}{t} = \ln|x|$.

(3) $\displaystyle\int \sin(t)\, dt = -\cos(x)$ und $\displaystyle\int \cos(t)\, dt = \sin(x)$.

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(t)}\, dt = \tan(x)$.

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(t)}\, dt = -\cot(x)$.

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan(x)$.

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ auf $]-1, 1[$.

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \arcsin(x)$ auf $]-1, 1[$.

(9) Setze $q(t) = t^2 + 2ct + d = (t+c)^2 - \Delta$, wobei $\Delta = c^2 - d$ ist. Ist $\Delta < 0$ so hat die quadratische Gleichung $q(t) = 0$ keine Lösungen in $\mathbb{R}$ (Mitternachtsformel). Folglich ist $q(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ferner gilt

$$\int \frac{t+c}{q(t)^n}\, dt = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{1-n} q^{-n+1}, & \text{falls } n \neq 1, \\ \frac{1}{2} \ln q(x), & \text{falls } n = 1 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Und aus (6) folgt

$$\int \frac{dt}{q(t)} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}(x+c)\right).$$

Schließlich ist dann

$$\int \frac{dt}{q(t)^{n+1}} = \frac{1}{2n(-\Delta)} \left(\frac{x+c}{q(x)^n} + (2n-1)\int \frac{dt}{q(t)^n}\right)$$

für $n \geq 1$.

Beispiel 6.4. Betrachte

$$\int \frac{4t+2}{-t^3+2t+4}\, dt$$

Solche Stammfunktionen berechnet man am besten mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* (siehe auch Übungen). Dazu versuchen wir zunächst das Polynom im Nenner in Polynom erster und zweiter Ordnung zu zerlegen, wobei die Polynome zweiter Ordnung die Form $q(t)$ haben sollen, mit $\Delta < 0$. Das Polynom $f(t) = -t^3 + 2t + 4$ hat ganzzahlige Koeffizienten. Hier gilt stets folgende notwendige Bedingung für eine Nullstelle des Polynoms:

Hilfslemma. *Ist $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$ und ist $r \in \mathbb{Q}$ gegeben mit $f(r) = 0$, so gilt, dass p die Zahl a_0 teilt und q die Zahl a_n, wobei $r = \frac{p}{q}$ ist mit p und q teilerfremd.*

Beweis des Hilfslemmas. Die Gleichung $f(\frac{p}{q}) = 0$ ist äquivalent zu

$$\sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = 0$$

bzw. nach Multiplikation mit q^n

$$\sum_{k=0}^n a_k p^k q^{n-k} = 0.$$

Hieraus folgt

$$a_0 = -\sum_{k=1}^n a_k p^k q^{n-k}.$$

Auf der rechten Seite besitzt jeder Summand den Faktor p^k mit $k \geq 1$. Folglich ist die Summe durch p teilbar. Analog argumentiert man mit

$$a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k}.$$

□

Für $f(t) = -t^3 + 2t + 4$ ist $a_0 = 4$. Deren Teiler sind $1, 2$ und 4. Wir sehen, dass $f(2) = 0$ ist und durch eine Polynomdivision erhalten wir

$$f(t) = -(t^2 + 2t + 2)(t - 2).$$

Damit können wir die Partialbruchzerlegung wie folgt ansetzen

$$\frac{-4t-2}{(t^3+2t+2)(t-2)} = \frac{At+B}{t^2+2t+2} + \frac{C}{t-2}.$$

Für den Zähler erhalten wir den Ausdruck

$$(A+C)t^2 + (-2A+B+2C)t + 2C - 2B = -4t - 2$$

woraus sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -2A + B + 2C &= -4 \\ -2B + 2C &= -2 \end{aligned}$$

ergeben. Die Lösung ist gegeben durch $A = 1$, $B = 0$ und $C = -1$ und daher gilt

$$\frac{-4t-2}{(t^3+2t+2)(t-2)} = \frac{t}{t^2+2t+2} - \frac{1}{t-2}.$$

Aus (9) folgt

$$\int \frac{t}{t^2+2t+2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1)$$

und aus (2) gilt

$$\int \frac{1}{t-2} = \ln(x-2)$$

also

$$\int \frac{4t+2}{-t^3+2t+4}\,dt = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \ln(x-2) - \arctan(x+1).$$

Aus Satz 5.8 erhalten wir direkt folgenden

Satz 6.5. *Sei $f\colon]-R,R[\to \mathbb{C}$ eine Potenzreihe, also $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$. Dann besitzt f die Stammfunktion*

$$g\colon]-R,R[\to \mathbb{C}, \quad g(x) = c + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 6.6. Es ist bekannt, dass die Stammfunktion von $f(x) = e^{-x^2/2}$ nicht als geschlossener Ausdruck geschrieben werden kann (d.h. es ist keine Kombination von bekannten Funktionen wie sin, cos, ln, usw.) Allerdings können wir mit Satz 6.5 die Stammfunktion als Potenzreihe angeben

$$\int e^{-\frac{1}{t^2}}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Es stellt sich die Frage, welche Funktionen Stammfunktionen besitzen? Folgenden Satz werden wir nicht beweisen, da der Beweis zeitintensiv ist

Satz 6.7. *Jede stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion.*

Bemerkung 6.8. Man beachte, dass auch nicht stetige Funktionen Stammfunktionen besitzen können, wie z.B die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dafür betrachten wir die Funktion

$$G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Diese ist differenzierbar in $x = 0$ und es gilt für die Ableitung

$$G'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Da

$$x \mapsto \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ darstellt, hat sie nach Satz 6.7 eine Stammfunktion die wir H nennen. Dann ist aber $G - H$ eine Stammfunktion von f.

10.01.2022

6.2 Bestimmte Integrale

Definition 6.9. Sei $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Für $a, b \in I$ mit $a < b$ und F eine Stammfunktion von f setzen wir

$$\int_a^b f(t)\,dt := F|_a^b = F(a) - F(b)$$

und nennen es das *bestimmte Integral* von f zwischen a und b. Man beachte, dass man hier eine beliebige Stammfunktion wählen kann, da sich zwei nur durch eine Konstante unterscheiden, welche in der Differenz sich aufhebt.

Es gelten folgende Regeln für bestimmte Integrale, welche direkt aus der Definition folgen

Satz 6.10. *Seien $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen mit $a, b \in I$. Dann gilt*

(a) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$

(b) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$, *für* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(c) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ *für* $a, b, c \in I$.

(d) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$

(e) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt.$

Beweis. Siehe Übung. □

Für reellwertige Funktionen gilt zudem noch

Satz 6.11. *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $a \leq b$. Dann gilt*

(a) Ist $f \leq g$, d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so ist

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

Dies nennt man auch die Monotonie des Integrals

(b) Es gilt

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

(c) Es gibt ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a).$$

Das ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung.

(d) Ist $0 \leq g$, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f und G eine von g. Für $G-F$ gilt dann $(G-F)' = g - f \geq 0$. Daher ist $G-F$ nach Satz 5.13 monoton wachsend und da $a \leq b$ muss gelten

$$G(a) - F(a) \leq G(b) - F(b)$$

also nach Definition

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

Dies zeigt Teil (a). Für (b) benutzen wir, dass $-|f| \leq f \leq |f|$ gilt, aus (a) folgt dann

$$-\int_a^b |f(t)|\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

und damit nach Satz 2.13 (b) folgt

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Teil (c) folgt aus (d) mit $g(x) = 1$ für alle $x \in [a,b]$, daher beweisen wir nun (d). Da f stetig auf $[a,b]$ ist muss nach Satz 4.23 f sein Minimum und Maximum annehmen. Es gibt also $m, M \in \mathbb{R}$ mit

$$m \leq f(x) \leq M$$

für alle $x \in [a,b]$. Da $g(x) \geq 0$ ist folgt

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

für alle $x \in [a,b]$. Inbesondere gilt

$$m\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M\int_a^b g(t)\,dt.$$

Nach dem Zwischenwertsatz 4.25 muss es ein $c \in [a,b]$ geben, sodass die stetige Funktion

$$[a,b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)\int_a^b g(t)\,dt$$

den Wert $\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ animmt, was

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

bedeutet $\square$

Bemerkung 6.12. Ist $f: I \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die eine Stammfunktion besitzt, so ist für $a \in I$ die Abbildung

$$I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

eine differenzierbare Funktion und nach Proposition 5.4 insbesondere stetig. Denn es gilt

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Zur Berechnung von Stammfunktionen und damit von bestimmten Integralen sind die zwei folgenden Regeln grundlegend.

Satz 6.13 (Partielle Integration)**.** *Sind $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $f, g \in C^1[a,b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'.$$

Inbesondere gilt also

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

Beweis. Nach dem Haupsatz der Differential- und Integralrechnung und der Produktregel gilt

$$fg\Big|_a^b = \int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'.$$

□

Satz 6.14 (Substitutionsregel)**.** *Seien $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, $g: [a,b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Physiker würden es wohl eher so formulieren

$$u = g(t), \quad \frac{du}{dt} = g'(t), \quad du = g'(t)dt.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für $F \circ g: [a,b] \to \mathbb{R}$ nach Kettenregel

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Also

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t))\Big|_a^b = F(x)\Big|_{x=g(a)}^{x=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

□

Beispiel 6.15.

(a) (Partielle Integration)

$$\int_a^b \ln(t)\,dt = \int_a^b 1\cdot\ln(t)\,dt = \ln(t)\Big|_a^b - \int_a^b t\frac{1}{t}\,dt = (t\ln t - t)\Big|_a^b.$$

(b) (Partielle Integration)

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin^2(t)\,dt &= \sin(t)(-\cos(t))\Big|_a^b - \int_a^b \cos(t)(-\cos(t))\,dt\\ &= -\sin(t)\cos(t)\Big|_a^b + \int_a^b (1-\sin^2(t))\,dt.\end{aligned}$$

Wir *absorbieren* das $-\displaystyle\int_a^b \sin^2(t)\,dt$ von der rechten Seite in die linke Seite, also

$$2\int_a^b \sin^2(t)\,dt = (-\sin(t)\cos(t)+t)\Big|_a^b.$$

(c) (Substitutionsregel)

$$\int_a^b \frac{dt}{\sin(t)} = \int_a^b \frac{\sin(t)}{1-\cos^2(t)}\,dt$$

Wir setzen $g(t) = \cos(t)$ und $f(u) = \frac{1}{1-u^2}$. Dann gilt nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\sin(t)}{1-\cos^2(t)}\,dt &= -\int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{1-u^2}\,du = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\Big|_{\cos(a)}^{\cos(b)}\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)}\Big|_a^b = \ln\sqrt{\frac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)}}\Big|_a^b\\ &= \ln|\tan\tfrac{t}{2}|\Big|_a^b.\end{aligned}$$

6.3 Integration und Flächeninhalt

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass das Integral den Flächeninhalt der Fläche unter einem Graphen angibt. Sei dafür $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir unterteilen das Intervall $[a,b]$ durch eine Wahl von $t_0,\dots,t_m \in I$ mit der Eigenschaft

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b.$$

Für $i = 0,\dots,m-1$ seien

$$m_i := \min_{t\in[t_i,t_{i+1}]} f(t) \quad \text{und} \quad M_i := \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} f(t).$$

Damit gilt für jedes i

$$m_i(t_{i+t} - t_i) \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,dt \leq M_i(t_{i+1} - t_i).$$

und durch summieren erhalten wir also

$$\sum_{i=0}^{m-1} m_i(t_{i+t} - t_i) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \sum_{i=0}^{m-1} M_i(t_{i+1} - t_i). \tag{6.1}$$

Man nennt die linke Summe die *Untersumme* und die rechte Summe die *Obersumme* von f zur Unterteilung $(t_0, \ldots, t_m)$ des Intervalls $[a, b]$. Wir notieren diese Zerlegung mit $Z(t)$. Ferner setze

$$U(Z(t)) := \sum_{i=0}^{m-1} m_i(t_{i+t} - t_i) \quad \text{und} \quad O(Z(t)) := \sum_{i=0}^{m-1} M_i(t_{i+t} - t_i).$$

Wegen (6.1) existieren

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt := \sup_{Z(t)} U(Z(t)) \quad \text{sowie} \quad \overline{\int_a^b} f(t)\,dt := \inf_{Z(t)} O(Z(t))$$

wobei das Supremum und Infimum über alle Zerlegungen von $[a, b]$ genommen wird.

Definition 6.16. Eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *(Riemann-) integrierbar* falls

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt = \overline{\int_a^b} f(t)\,dt$$

gilt.

Es gilt nun

Satz 6.17 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. f ist genau dann integrierbar, wenn*

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \overline{\int_a^b} f(t)\,dt$$

gilt.

Beispiel 6.18. Wir betrachten die Funktion $f\colon [0, r] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt{r^2 - t^2}$ für ein $r > 0$. Der Graph von f ist ein Kreisbogen vom Radius r. Folglich erhalten wir die

Fläche des Kreises, wenn wir die Fläche zwischen dem Graphen von f und der t-Achse berechnen. Dazu betrachten wir das Integral

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2(t)\, dt.$$

Beim Gleichheitszeichen haben wir die Substitutionsregel *rückwärts* benutzt, mit $f(t) = \sqrt{r^2 - t^2}$ und $g(t) = r \sin t$. Mit Beispiel 6.15 (b) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))\, dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(-\sin(x)\cos(x) + x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Folglich ist der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r gegeben durch πr^2.

Beispiel 6.19. Es folgt ein Beispiel von einer nicht-stetigen Funktion, die trotzdem integrierbar ist. Betrachte hierfür

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Zunächst sieht man, dass für jede Unterteilung $Z(t)$ von $[-1,1]$

$$U(Z(t)) = 0$$

gilt, inbesondere also

$$\underline{\int_{-1}^{1}} f(t)\, dt = 0.$$

Weiter ist für jedes $Z(t)$

$$O(Z(t)) = t_{i+1} - t_i$$

wobei i so gewählt wird, dass $0 \in [t_i, t_{i+1}]$ gilt. Hieraus sehen wir $O(Z(t)) \geq 0$ für alle Unterteilungen $Z(t)$. Betrachten wir nun folgende Folge von Unterteilungen $Z_n(t) = (-1, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1)$ des Intervalls $[-1,1]$. Dann ist $O(Z_n(t)) = \frac{2}{n}$ womit

$$\lim_{n\to\infty} O(Z_n(t)) = 0$$

gilt. Demnach muss $\inf O(Z(t)) = 0$ sein, also

$$\underline{\int_{-1}^{1}} f(t)\, dt = 0 = \overline{\int_{-1}^{1}} f(t)\, dt.$$

Woraus folgt, dass f integrierbar ist.

Letztendlich geben wir noch ein Beispiel einer nicht-integrierbaren Funktion an. Betrachte die sogenannte *Dirichlet-Funktion*

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um dies einzusehen, muss man zunächst wissen, dass in jedem Intervall stets eine rationale als auch eine irrational enthalten ist. Somit ist für jede Zerlegung $Z(t)$ des Intervalls $[0,1]$ die Untersumme stets 0. Denn in jedem Intervall liegt eine irrationale Zahl womit $m_i = 0$ ist für alle i, also insbesondere

$$\underline{\int_{-1}^{1}} f(t)\,dt = 0.$$

Da aber in jedem Intervall auch eine rationale Zahl enthalten ist, ist $M_i = 1$ für alle i. Also

$$O(Z(t)) = \sum_{i=0}^{m-1} 1(t_{i+1} - t_i) = 1 - 0 = 1$$

für eine beliebige Unterteilung $Z(t)$. Also muss

$$\overline{\int_{-1}^{1}} f(t)\,dt = 1$$

sein. Demnach kann die Dirichlet-Funktion nicht intergrierbar sein.

13.01.2022

7 Vektorräume

7.1 Definition eines Vektorraumes

Definition 7.1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, etwa $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ein $\mathbb{K}$-*Vektorraum* ist eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +\colon V \times V \to V, &\quad (v,w) \mapsto v+w, \\ \cdot\colon \mathbb{K} \times V \to V, &\quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v, \end{aligned}$$

so, dass gilt

(a) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe mit Nullelement 0,

(b) für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und für alle $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned} (\lambda\mu)v &= \lambda(\mu v), \\ (\lambda+\mu)v &= \lambda v + \mu w \\ \lambda(v+w) &= \lambda v + \lambda w, \\ 1 \cdot v &= v, \quad 0 \cdot v = 0. \end{aligned}$$

Die Elemente von V heißen *Vektoren*, die von $\mathbb{K}$ *Skalare*.

Beispiel 7.2.

(a) Der wichtigste Vektorraum für diese Vorlesung wird der $\mathbb{R}^n$ sein. Wir notieren Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ als *Spaltenvektoren* etwa

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

In einer Zeile schreiben wir auch $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ wobei das T für *transponiert* steht. Sind $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ und $(w_1, \ldots, w_n)^T$ aus $\mathbb{R}^n$, dann definieren wir die Addition durch

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

und die skalare Multiplikation durch

$$\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$. Das neutrale Element von $(\mathbb{R}^n, +)$ ist der *Nullvektor* $0 = (0, \dots, 0)^T$. Man prüft nun nach, dass damit $\mathbb{R}^n$ zu einer $\mathbb{R}$-Vektorraum wird. (siehe Übungen).

(b) Betrachte

$$V = \{v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3 : v_1 - 2v_2 + v_3 = 0\}$$

stellt geometrisch eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ dar. V ist mit der gleichen Addition und skalaren Multiplikation wie aus (a) ein Vektorraum. Zunächst muss gezeigt werden, dass aus $v, w \in V$ auch $v+w \in V$ gilt. Da aber für $v+w = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)^T$ gilt

$$(v_1 + w_1) - 2(v_2 + w_2) + (v_3 + w_3) = (v_1 - 2v_2 + v_3) + (w_1 - 2w_2 + w_3) = 0.$$

Das gleiche nun mit λv. Es gilt $\lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)^T$ und

$$\lambda v_1 - 2(\lambda v_2) + \lambda v_3 = \lambda(v_1 - 2v_2 + v_3) = 0$$

also $\lambda v \in V$. Die Vektorraumaxiome nachzuprüfen ist wieder Übungsaufgabe.

(c) Nicht alle Vektorraume sehen wir ein $\mathbb{K}^n$ aus. Betrachte

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig } \}.$$

Wir definieren für $f, g \in C[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x). \end{aligned}$$

und neutrales Element $\nu : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\nu(x) = 0$ die Nullfunktion. In den Übungen werden wir sehen, dass dies auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(d) Betrachte

$$\mathcal{P}(n) = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \text{ ist ein Polynom vom Grad kleiner } n\}.$$

Dann ist $\mathcal{P}(n)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ferner sei

$$\mathcal{P} = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : p \text{ ist ein Polynom}\}.$$

Auch $\mathcal{P}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(e) $\mathbb{C}^n$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und die Definitionen von $+$ und $\cdot$ sind genauso wie für den $\mathbb{R}^n$ definiert.

Definition 7.3. Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\emptyset \neq W \subset V$ mit dem Eigenschaften

(a) $v_1 + v_2 \in W$ für alle $v_1, v_2 \in W$ und

(b) $\lambda v \in W$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$,

dann heißt W ein *Untervektorraum* von W. Man beachte, dass W selbst wieder eine $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, denn die Einschränkung von $+$ und $\cdot$ von V auf W machen $(W, +, \cdot)$ zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beispiel 7.4.

(a) Jeder Vektorraum hat sich selbst und den *Nullvektorraum* $\{0\}$ als Untervektorräume.

(b) Der Vektorraum V aus Beispiel 7.2 ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Im allgemeinen gilt: Die Menge aller Lösungen $v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = 0$$

bilden einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ (siehe Übung).

(c) Der Durchschnitt zweier Untervektorräume ist wieder ein Untervektorraum (siehe Übung).

(d) $\mathcal{P}$ ist ein Untervektorraum von $C^k[a, b]$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Klarerweise ist $\mathcal{P}$ eine Teilmenge von $C^k[a, b]$. Wir zeigen, dass $\mathcal{P}$ auch ein Untervektorraum ist. Denn sind

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{und} \quad p_2(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

zwei Polynome mit $n \leq m$. Wir ergänzen mit Nullen p_1 so, dass $p_1(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. Dann ist

$$(p_1 + p_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k.$$

wieder in $\mathcal{P}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda p)(x) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) x^k$ wieder in $\mathcal{P}$. Damit ist $\mathcal{P}$ ein Untervektorraum von $C^k[a, b]$.

7.2 Vektorraumeigenschaften des $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt betrachten wir vor allem geometrische Eigenschaften des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$. Alle Begriffe können für allgemeine Vektorräume definiert werden.

Definition 7.5. (a) Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\langle v, w \rangle := \sum_{k=1}^{n} v_k w_k \in \mathbb{R}$$

das *innere Produkt* von v und W oder auch *Skalarprodukt*.

(b) Für $v \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$|v| := \sqrt{\langle v, v\rangle} = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

die *euklidische Norm* von v oder die *Länge* von v.

(c) Den *Abstand* zwischen zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ definieren wir als

$$d(v, w) := |v - w|.$$

Proposition 7.6. *Man kann das euklidische Skalarprodukt als Abbildung*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$$

betrachten. Es gelten folgende Eigenschaften

(a) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$,

(b) $\langle v_1 + v_2, w_1\rangle = \langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_1\rangle$,

(c) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

Und es gilt $|v| = 0$ *genau dann, wenn* $v = 0$ *ist.*

Beweis. Siehe Übungen. □

Proposition 7.7 (Schwarzsche Ungleichung)**.** *Für* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\langle v, w\rangle^2 \leq |v|^2 \cdot |w|^2.$$

Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ *gibt mit* $w = \lambda v$.

Beweis. Für $v = 0$ ist die Ungleichung erfüllt. Sei also nun $v \neq 0$ und $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $|tv + w|^2 \geq 0$. Setze

$$t_0 = -\frac{\langle v, w\rangle}{|v|^2}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq |t_0 v + w|^2 &= t_0^2|v|^2 + 2t_0\langle v, w\rangle + |w|^2 \\ &= \frac{\langle v, w\rangle^2}{|v|^2} - 2\frac{\langle v, w\rangle^2}{|v|^2} + |w|^2 \\ &= -\frac{\langle v, w\rangle^2}{|v|^2} + |w|^2. \end{aligned}$$

Also

$$\langle v, w\rangle^2 \leq |v|^2|w|^2.$$

ist nun $w = \lambda v$ so gilt

$$\langle v, w\rangle^2 = \lambda^2 \langle v, v\rangle = |v|^2 \cdot |\lambda v|^2 = |v|^2 \cdot |w|^2.$$

sei umgekehrt $\langle v, w\rangle^2 = |v|^2|w|^2$. Dann sehen wir mit Hilfe der obigen Rechnung $|t_0 v + w|^2 = 0$, also $w = -t_0 v$. $\square$

Nach der Schwarzschen Ungleichung gilt also $|\langle v, w\rangle| \leq |v| \cdot |w|$ bzw.

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{|v| \cdot |w|} \leq 1.$$

Definition 7.8. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Da $-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{|v||w|} \leq 1$ existiert ein $\varphi \in [0, \pi]$ mit

$$\cos\varphi = \frac{\langle v, w\rangle}{|v||w|}.$$

Die Zahl φ nennt man *den Winkel zwischen v und w*. Wir sagen, dass v senkrecht zu w liegt, in Zeichen $v \perp w$, falls $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\langle v, w\rangle = 0$. Ferner definieren wir

(a) für $w \in \mathbb{R}^n$

$$w^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp w\}$$

und nennen diese Menge w *senkrecht*.

(b) Für $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$A^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp w \text{ für alle } w \in A\}$$

und nennen diese Menge A *senkrecht*.

Beispiel 7.9.

(a) Sei $\alpha \in [0, \pi]$ und $v(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Ferner sei $e_1 = (1, 0)$. Dann ist $|v(\alpha)| = |e_1| = 1$ und $\langle v(\alpha), \alpha\rangle = \cos\alpha$. Folglich ist der Winkel zwischen e_1 und $v(\alpha)$ gerade α.

(b) In Beispiel 7.2 (b) ist V gegeben durch $w^\perp$ mit $w = (1, -2, 1)^T$. Denn es gilt für $v = (v_1, v_2, v_3)^T$, dass

$$\langle v, w\rangle = v_1 - 2v_2 + v_3$$

ist.

(c) Andererseits ist $V^\perp = \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$, wobei wir V aus Beispiel (a) betrachten. (Siehe Übung). 17.01.2022

Proposition 7.10. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Dann ist $U^\perp$ auch ein Untervektorraum.*

Beweis. Siehe Übungen. $\square$

Bemerkung 7.11. Sei $x, v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$. Wir suchen nun auf der Ursprungsgeraden

$$G := \{tv : t \in \mathbb{R}\}$$

den Punkt mit dem kleinsten Abstand zu x. D.h. wir wollen die Abbildung

$$t \mapsto d(x, tv) = |x - vt|$$

minimieren. Dazu äquivalent ist es das Minimum der Abbildung $t \mapsto d(x, tv)^2 = |x - tv|^2$ zu bestimmen. Wir rechnen

$$\begin{aligned} |x - tv|^2 &= \langle x - tv, x - tv \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - 2t\langle x, v \rangle + t^2 \langle v, v \rangle \\ &= |x|^2 + 2t\langle x, v \rangle + t^2 |v|^2. \end{aligned}$$

Das Minimum dieser Abbildung liegt bei $t = \langle x, v \rangle$. Folglich hat der Vektor $\langle x, v \rangle v$ den kleinsten Abstand zu x. Ferner liegt $x - \langle x, v \rangle v$ sekrecht auf v, denn es gilt

$$\langle x - \langle x, v \rangle v, v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle x, v \rangle \langle v, v \rangle = 0,$$

weil $\langle v, v \rangle = |v|^2 = 1$.

7.3 Lineare Unabhängigkeit und Basen

Sei V stets ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 7.12. Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ beliebige Vektoren. Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ nennt man den Vektor

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \in V$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$. Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots v_k$ nennt man den *Aufspann* oder *lineare Hülle*. Dafür schreibt man auch

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Die Menge $v_1, \ldots, v_k$ heißt *Erzeugendensystem von V*, falls jeder Vektor aus V als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$ geschrieben werden kann.

Lemma 7.13. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_k \in V$ Vektoren. Dann ist*

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

ein Untervektorraum von V.

Beweis. Siehe Übungen. $\square$

Beispiel 7.14.

(a) Für jeden Vektor $v \in V$ ist $\operatorname{span}\{v\} = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(b) Sind $v, w \in V$, sodass es kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $v = \lambda w$ oder $w = \lambda v$ so ist $\operatorname{span}\{v, w\}$ die von v und w erzeugte Ebene welche durch den Ursprung verläuft.

(c) Setze $p_k(x) = x^k$ für $0 \leq k \leq n$. So ist $p_k \in P(n)$ und es gilt

$$P(n) = \operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n\}.$$

Definition 7.15. Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in V$ heißen *linear abhängig* wenn es Skalare $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{K}$ gibt die nicht alle Null sind, sodass

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0.$$

Andererseits heißen die Vektoren *linear unabhängig.* Mit anderen Worten: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig genau dann, wenn aus

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$$

notwendig $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ folgt.

Proposition 7.16. *Für $k \geq 2$ sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ genau dann linear abhängig, wenn wenigstens einer von ihnen eine Linearkombination der übrigen ist.*

Beweis. Gilt $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$ mit einem $\lambda_i \neq 0$, so gilt

$$v_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j.$$

Ist einer der Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ eine Linearkombination der übrigen, etwa $v_1 = \sum_{j=2}^{k} \lambda_j v_j$ so folgt

$$(-1) \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_k v_k = 0,$$

also lineare Abhängigkeit wegen $\lambda_1 = -1 \neq 0$. $\square$

Beispiel 7.17. (a) Im $\mathbb{K}^n$ betrachten wir die Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese sind linear unabhägig, denn aus $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$ folgt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

also $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

(b) Die Monome $p_j(x) = x^j$ für $0 \leq j \leq k$ sind linear unabhängig. Seien nämlich $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gegeben und

$$\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_k p_k = 0.$$

D.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{k} \lambda_j x^j = 0.$$

Hieraus folgt aber bereits $\lambda_j = 0$ für alle j. Denn betrachte $p(x) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j x^j$. Ist $p(x) = 0$ für alle x so gilt auch für jede Ableitung $p^{(j)}(x) = 0$ für alle x. Es folgt

$$0 = p^{(j)}(0) = j! \lambda_j.$$

für alle j, also $\lambda_j = 0$ für alle j.

Definition 7.18. Ein geordnetes Tupel $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V heißt eine *Basis von* V, wenn sich jeder Vektor $v \in V$ als eine Linearkombination

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k$$

mit eindeutig bestimmten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ darstellen läßt. Die obige Darstellung von v nennt man die *Basisdarstellung* von v in der Basis $\mathcal{B}$. Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ heißen die *Koordinaten* von v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und sie werden zu einem *Koordinatenvektor*

$$(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

zusammengefasst.

Eine Basis hat folgenden wichtige Umformulierung

Satz 7.19. *$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ ist genau dann eine Basis, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.*

Beweis. Wie nehmen zunächst an, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist und wir prüfen zunächst die lineare Unabhängigkeit nach. Sei

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0.$$

Aus der Eindeutigkeit der Basisdarstellung muss $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ sein, folglich ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. Ferner lässt sich nach Definition jeder Vektor aus V als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B}$ schreiben.

Nehmen wir nun an, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist und ein Erzeugendensystem. Da es ein Erzeugendensystem ist gibt es zu jedem $v \in V$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass die λ_k eindeutig ist. Angenommen es gäbe $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \sum_{k=1}^{n} \mu_k v_k.$$

Dann ist

$$0 = v - v = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) v_k.$$

Weil $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, müssen die Koeffizienten vor den v_k verschwinden, also $\lambda_k = \mu_k$ für alle k. □

Beispiel 7.20.

(a) Die *kanonische Basis* oder die *Standardbasis* von $\mathbb{K}^n$ ist gegeben durch

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

(b) Betrachte die Vektoren $b_1 = (1,1)^T$, $b_2 = (-1,1)^T$. Dann ist $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{B}$ linear unabhägig ist. Aus $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

woraus klarerweise $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ folgt. Weiter sehen wir

$$e_1 = \frac{1}{2}(b_1 - b_2), \quad e_2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2).$$

Da $\{e_1, e_2\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ ist, so auch ist es auch $\mathcal{B}$ auf Grund der obigen Gleichungen.

Man beachte, dass der Vektor $v = (4,2)^T$ die Koordinaten $(4,2)$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ hat. Bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ hat v die Koordinaten $(3,-1)$, denn
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3b_1 - b_2.$$

(c) Wir betrachten $P(n)$ den Vektorraum aller Polynome vom Rang $\leq n$, siehe 7.14 (c). Wir haben gesehen, dass die Monome $p_k(x) = x^k$ ein Erzeugendensystem von $P(n)$ ist. Und in Beispiel 7.17 (b) haben wir gesehen, das sie auch linear unabhängig sind. Folglich bilden die Monome $\{p_1, \ldots, p_n\}$ eine Basis von $P(n)$.

Als nächstes führen wir eine zentrale Invariante eines Vektorraumes ein. Dafür benötigen wir folgenden

Satz 7.21. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Besteht eine Basis aus n Vektoren, so besteht auch jede andere Basis aus n Vektoren.*

Beweis. Wir zeigen zunächst folgendes

Hilfslemma. *Ist $b_1, \ldots, b_n$ ein Erzeugendensystem für V und sind $v_1, \ldots, v_m \in V$ mit $m > n$, dann sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch eine Induktion nach n. Für $n = 1$ erzeugt b_1 den Vektorraum V. Folglich gibt es ein $\lambda_i \in \mathbb{K}$ mit $v_i = \lambda_i b_1$. Sei ein λ_i ungleich Null (sonst wären alle Vektoren die Nullvektoren und offensichtlich linear abhängig). Sei $j \neq i$, dann gilt
$$\lambda_j v_i - \lambda_i v_j = \lambda_j \lambda_i b_1 - \lambda_i \lambda_j b_1 = 0.$$
Da $\lambda_i \neq 0$, bedeutet das, dass v_i, v_j linear abhängig sind und damit ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig.

Die Behauptung sei nun für $n-1$ richtig und sei $V = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$. Ferner seien $v_1, \ldots, v_m \in V$ mit $m > n$ gegeben. Dann gibt es Zahlen $\lambda_{ik} \in \mathbb{K}$ mit
$$v_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} b_k$$
für $i = 1, \ldots, m$. Durch eine geeignete Umnumerierung können wir erreichen, dass $\lambda_{11} \neq 0$ ist (wäre alle $\lambda_{ik} = 0$, so wären alle $v_i = 0$, also wäre $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig). Betrachte nun die $m-1$ Vektoren
$$w_i := v_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} v_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{11}\lambda_{ik} - \lambda_{i1}\lambda_{1k}}{\lambda_{11}} b_k$$

mit $i = 2, \ldots, m$. Damit gilt $w_i \in \operatorname{span}\{b_2, \ldots, b_n\}$ für alle $i = 2, \ldots, m$, da der Koeffizient von b_1 in w_i Null ist. Nach Induktionvorraussetzung sind die $w_2, \ldots, w_m$ linear abhängig, es gibt also Zahlen $\mu_2, \ldots, \mu_m$, welche nicht alle gleichzeitig Null sind. Ferner gilt

$$0 = \sum_{i=2}^{m} \mu_i c_i = \sum_{i=2}^{m} \mu_i \left(v_i - \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{11}} v_1 \right) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i$$

mit $\mu_1 = -\frac{1}{\lambda_{11}} \sum_{i=2}^{m} \mu_i \lambda_{i1}$. Da nicht alle μ_i Null sind, folgt, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig sind. $\square$

Sind nun $b_1, \ldots, b_n$ und $b'_1, \ldots, b'_m$ zwei Basen von V, so sind nach 7.19 beide Basen linear unabhängig und demnach muss auf Grund des Hilfslemmas $m \geq n$ und $m \leq n$ gelten, also $m = n$. $\square$

Definition 7.22. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Gibt es eine Basis $b_1, \ldots, b_n$, so setzen wir $\dim V := n$ und nennen $\dim V$ die *Dimension von* V. Für den Nullvektorraum $V = \{0\}$ setzen wir $\dim V = 0$. In den obigen Fällen heißt V *endlich-dimensional*. Existiert keine Basis mit endlich vielen Vektoren, so nennt man V *unendlich-dimensional*.

Beispiel 7.23.

(a) Mit der Standardbasis sieht man, dass $\dim \mathbb{K}^n = n$ ist.

(b) Weiter gilt $\dim P(n) = n + 1$, da die Monome $1, x, x^2, \ldots, x^n$ eine Basis bilden.

(c) Der Vektorraum $\mathcal{P}$ ist unendlich-dimensional, denn die Vektoren

$$M_n := \{p_k : k \leq n\}$$

sind linear unabhängig für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daher kann es keine Basis geben, mit endlich vielen Elementen. Da $\mathcal{P} \subset C^k[a, b]$ folgt, dass auch $C^k[a, b]$ ein unendlich dimensionaler Vektorraum ist (für alle $k \in \mathbb{N}$)

20.01.2022

7.4 Orthonormalsysteme und Orthonormalbasen des $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt sei V stets der $\mathbb{R}^n$.

Definition 7.24. Seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Die Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$ heißt ein *Orthonormalsystem*, falls $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ ist, wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

das *Kronecker-Delta* ist.

Lemma 7.25. *Sei $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt*

(a) $v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig.

(b) Ist $k = n$ so ist das Orthonormalsystem eine Basis des $\mathbb{R}^n$, welche auch Orthonormalbasis *genannt wird.*

Beweis. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0.$$

Sei $1 \leq j \leq k$ und rechnen

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j.$$

Da diese für alle $1 \leq j \leq k$ gilt, folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Sei nun $k = n$. Es genügt zu zeigen, dass die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^n$ ist, da nach (a) die Vektoren linear unabhängig sind, siehe Satz 7.19. Da $\dim \mathbb{R}^n = n$ ist, ist $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ linear abhängig für jedes $v \in \mathbb{R}^n$. Dann existierten $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0.$$

Wir bemerken zunächst, dass $\lambda \neq 0$ ist, da sich sonst die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0.$$

ergeben würde, und somit $\lambda = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ folgen würde, was bedeutet, dass $v, v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sein würde. Ist also $\lambda \neq 0$, so gilt

$$v = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

also kann v als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$ dargestellt werden. $\square$

Bemerkung 7.26. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Basisdarstellung eines beliebigen $v \in \mathbb{R}^n$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Denn, da $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis ist, existieren $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Weiter gilt aber

$$\langle v, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v_j, v_i \rangle = \lambda_j,$$

was zu zeigen war.

Es ist nun möglich eine gegebene Basis in eine Orthonormalbasis umzuwandeln. Das Verfahren nennt sich das *Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren* und wir im Folgenden beschrieben.

Bemerkung 7.27 (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)**.** Seien $\{v_1, \ldots, v_m\}$ linear unabhängige Vektoren. Wir definieren

$$\begin{aligned}
e_1' &:= v_1, \quad e_1 := \frac{e_1'}{|e_1'|} \\
e_2' &:= v_2 - \langle e_1, v_2 \rangle e_1, \quad e_2 := \frac{e_2'}{|e_2'|} \\
e_3' &:= v_3 - \langle e_1, v_3 \rangle e_1 - \langle e_2, v_3 \rangle e_2, \quad e_3 := \frac{e_3'}{|e_3'|} \\
&\vdots \\
e_m' &:= v_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle e_k, v_m \rangle e_k, \quad e_m := \frac{e_m'}{|e_m'|}.
\end{aligned}$$

Man zeigt nun indunktiv, dass $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ein Orthogonalsystem darstellt. Als Beispiel betrachten wir

$$v_1 = (3,1)^T, \quad v_2 = (2,2)^T.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)^T \\
e_2' &= (2,2)^T - \frac{1}{\sqrt{10}}\langle (3,1)^T, (2,2)^T \rangle \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1))^T = \frac{1}{5}(-2,6)^T \\
e_2 &= \frac{1}{5}\sqrt{\frac{25}{40}}(-2,6)^T = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3)^T.
\end{aligned}$$

8 Lineare Abbildungen und Matrizen

V und W seien in diesem Kapitel stets $\mathbb{K}$-Vektorräume über dem gleichen Körper $\mathbb{K}$.

8.1 Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen sind Abbildungen zwischen Vektorräumen, welche die Vektorraumstruktur respektieren.

Definition 8.1. Eine Abbildung $L\colon V \to W$ heißt *linear*, wenn

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \quad \text{und} \quad L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

ist für $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Manchmal ist es auch üblich einfach Lv statt $L(v)$ für lineare Abbildungen zu schreiben. Lineare Abbildungen werden auch *lineare Operatoren* gennant, vor allem bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen. Ist $W = \mathbb{K}$, so nennt man lineare Abbildungen auch *Linearformen* oder *lineare Funktionale*.

Beispiel 8.2.

(a) Der *Nulloperator* ist definiert als $L\colon V \to W$, $L(v) = 0$ für alle $v \in V$.

(b) Die *Identität* auf V ist $\mathbf{1}\colon V \to V$, $v \mapsto v$.

(c) Sei $V = C^1(I)$ und $W = C(I)$ für ein reelles Intervall I. Dann ist

$$D\colon V \to W, \quad u \mapsto Du := u'$$

der *Ableitungsoperator*. Dass D linear ist, folgt aus Satz 5.6.

(d) Das Integral kann als lineare Funktional aufgefasst werden. Sei V der Vektorraum aller integrierbaren Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ (man überlege sich, warum V ein Vektorraum ist). Dann setzen wir

$$L\colon V \to \mathbb{R}, \quad Lf := \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dass L linear ist folgt aus Satz 6.3.

(e) Sei $w \in \mathbb{R}^n$ fest mit $|w| = 1$. Die orthogonale Projektion $P\colon \mathbb{R}^n \to G$, wobei $G = \operatorname{span}\{w\}$ gegeben durch $Pv := \langle v, w\rangle w$ ist eine lineare Abbildung.

(f) Sei $\alpha \in [0, 2\pi]$. Die Drehung eines Vektors $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel α in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) ist gegeben durch

$$R(\alpha)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha \\ v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$R(\alpha)$ is eine lineare Abbildung (siehe Übung).

(g) Der Differentialoperator der *Schwingungsgleichung* ist ein linearer Operator. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}), \quad u \mapsto Lu := \ddot{u} + a\dot{u} + bu.$$

8.2 Matrizen

Man erinnere daran, dass nach einer Basiswahl $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ in einem Vektorraum, so hat jeder Vektor $v \in V$ eine Koordinatenstellung definiert durch $(v)_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ wobei

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i.$$

Verfährt man analog mit linearen Abbildungen, so erhält man eine Matrix als Koordinatenstellung der linearen Abbildung.

Definition 8.3. Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Ferner sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Dann existieren eindeutige $a_{ij} \in \mathbb{K}$ mit

$$Lv_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i.$$

Wir ordnen die Zahlen a_{ij} in einer rechteckigen Schema an

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Und nennen dieses Schmema die *Matrix zu L in der bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$*. Wir kürzen die Matrix auch mit $(L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ ab.

Matrizen werden traditionell mit lateinischen Großbuchstaben abgekürzt. Übliche Schreibweisen sind

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n} = (a_{ij}).$$

Wir sprechen hier von einer $m \times n$- Matrix (m Zeilen und n Spalten). Die a_{ij} heißen *Einträge* oder *Komponenten* von A. Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ heißen *gleich* falls

$$a_{ij} = b_{ij}$$

für alle i, j. Die Menge aller $n \times m$-Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{K}^{n \times m}$.

Man merke sich folgenden Satz für die Bestimmung der Matrix zu einer linearen Abbildung: Die Spalten von $A = (L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ enthalten die Bilder der Basisvektoren in Koordinatendarstellung bezüglich $\mathcal{B}$; die die j-te Spalte von A gilt also

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (Lv_j)_{\mathcal{B}}.$$

Beispiel 8.4.

(a) Wir betrachten die lineare Abbildung $R(\alpha)$ aus Beispiel 8.2 und rechnen

$$R(\alpha)e_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad R(\alpha)e_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Folglich ist die Matrixdarstellung von $R(\alpha)$ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $w \in \mathbb{R}^n$ mit $w \neq 0$ und betrachte die lineare Abbildung $P\colon \mathbb{R}^n \to \operatorname{span}\{w\}$, $Pv = \langle v, w \rangle w$. Wir wählen $\mathcal{E}$ als die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{B} = \{w\}$ als Basis für $\operatorname{span}\{w\}$. Wir rechnen

$$P(e_i) = \langle e_i, w \rangle w.$$

Damit ist

$$(P)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \langle e_1, w \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, w \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

wobei $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$ ist.

(c) Wir betrachten $\mathcal{P}(n)$ mit der Basis $\mathcal{B}$ der Monome $p_k(x) = x^k$ $(0 \leq k \leq n)$. Ferner sei $D\colon \mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}(n)$, $Dp = p'$ der Differentialoperator. Dann gilt

$$D(p_k) = k \cdot p_{k-1}.$$

Zur besseren Veranschaulichung geben wir die Matrix für $n = 3$ an.

$$(D)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir wollen nun kurz einen kurzen Ausflug in die Matrizenrechnung machen. 24.01.2022

Definition 8.5. Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, so können wir x an A dranmultiplizieren und erhalten einen Vektor in $\mathbb{K}^m$

$$Ax := \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{mk} x_k \right).$$

Ist $B = (b_{ij})$ eine weitere $n \times r$-Matrix, so können wir A und B wie folgt addieren

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

und multiplizieren

$$AB = \left(\sum_{k=0}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{ij}$$

wobei $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq r$. Also ist AB eine $m \times r$-Matrix. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so definieren wir

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{ij}$$

Beispiel 8.6.

(a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$A = (i, -i, 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

Dann gilt $AB = (1, 3i)$ und BA macht aus Formatgründen keinen Sinn.

Proposition 8.7. *Seien U, V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume und $L, T\colon V \to W$ sowie $S\colon W \to U$ lineare Abbildungen. Dann gilt*

(a) *Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ sei $\lambda L + \mu T\colon V \to W$, $v \mapsto \lambda L(v) + \mu T(v)$ wieder eine lineare Abbildung.*

(b) *Die Abbildung $ST\colon V \to U$, $v \mapsto S(T(v))$ ist wieder linear.*

(c) *Sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Basen von V und W, so ist*

$$(T+L)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = (T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} + (L)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

(d) *Sind $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sowie $\mathcal{D}$ Basen von U, V und W. Dann gilt*

$$(ST)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} = (S)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \cdot (T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

Beweis. (a), (b) und (c) sind Übungsaufgaben. Seien $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ und $\mathcal{D} = (d_1, \ldots, d_r)$. Ferner sei $(T)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = (t_{ij})$ und $(S)^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} = (s_{ij})$, also gilt inbesondere

$$Tb_j = \sum_{k=1}^{m} t_{kj} c_k \quad \text{und} \quad Sc_j = \sum_{k=1}^{r} s_{kj} d_k.$$

Und damit rechnen wir

$$\begin{aligned} ST(b_j) &= S\left(\sum_{k=1}^{m} t_{kj} c_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} t_{kj} S(c_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} t_{kj} \left(\sum_{i=1}^{r} s_{ik} d_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{m} s_{ik} t_{kj}\right) c_r. \end{aligned}$$

Nach Definition ist dann $(ST)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = (\sum_{k=1}^{m} s_{ik} t_{kj})$, was gleich dem Matrixprodukt $(s_{ij})(t_{ij})$ ist. $\square$

Bemerkung 8.8. Jeder Matrix $A = (a_{ij})$ kann man eine lineare Abbildung $L_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ wie folgt zuordnen:

$$L_A(v) := A \cdot v.$$

Nach den Rechenregeln für die Vektor-Matrixmulitplikation (siehe Definition 8.5) ist die Abbildung tatsächlich linear.

Im Allgemeinen kann man jeder Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine lineare Abbildung $L_A\colon V \to W$ wobei $n = \dim V$ und $m = \dim W$. Dazu seien $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ Basen von V und W. Setze dann

$$L_A(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i.$$

für alle $j = 1, \ldots, n$. Somit ist L_A für alle $v \in V$ wie folgt definiert: Es gilt $v = \sum_{j=}^{n} \lambda_j b_j$ und damit

$$L_A(v) := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_A(b_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \lambda_j a_{ij} c_i.$$

Man prüft nun nach, dass L eine lineare Abbildung darstellt.

Definition 8.9. Eine *quadratische Matrix* ist eine Matrix $A = (a_{ij})_{m\times n}$ wo $m = n$ ist. Eine quadratische Matrix heißt *invertierbar* oder *regulär* wenn es eine Matrix $B = (b_{ij})_{n\times n}$ gibt mit

$$AB = BA = E_n,$$

dabei ist E_n die $n \times n$-Matrix mit $E_n = (\delta_{ij})_{ij}$ [1]. E_n wir auch als *Einheitsmatrix* bezeichnet.

Bemerkung 8.10. Wir definieren

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \left\{ A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \text{ ist invertierbar } \right\}.$$

Dann ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ eine Gruppe mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung und der Einheitsmatrix als neutrales Element. Das Inverse zu einer Matrix A wir mit A^{-1} bezeichnet. Ferner gilt für $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ so ist

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

denn es gilt

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E_n.$$

Als letztes Thema in diesem Kapitel fragen wir uns wie sich die Koordinatendarstellungen von Vektoren in verschiedene Basen umrechnen lassen.

Satz 8.11. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ seien zwei Basen. Wir definieren*

$$T = (\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

[1] Wir erinnern an das *Kronecker-Delta*, $\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$ und 0 sonst.

wobei id *die Identität auf* V *ist. D.h. es gilt* $T = (t_{ij})$ *mit*

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} c_i.$$

Ist nun $v \in V$*, dann gilt*

$$(v)^{\mathcal{C}} = T(v)^{\mathcal{B}} = (\mathrm{id})^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(v)^{\mathcal{B}}$$

Man nennt T *die* Basiswechselmatrix *von* $\mathcal{B}$ *nach* $\mathcal{C}$*.* 27.01.2022

Beweis. Es gibt eindeutige $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \quad \text{und} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i.$$

Andererseits gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} t_{ij} c_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \lambda_j \right) c_i$$

Da die μ_i eindeutig sind, muss $\mu_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \lambda_j$ gelten, was genau die behauptete Matrix-Vektor-Multiplikation ist. $\square$

Beispiel 8.12. Sei $\mathcal{E}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{C} = (2e_1 + e_2, 2e_2 - e_1)$. Dann ist die Basiswechselmatrix $(\mathbf{1})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Basen aus Beispiel 7.20 gilt

$$(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und wir rechnen

$$(v)^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Satz 8.13. *Sei* $L\colon V \to W$ *eine lineare Abbildung und* $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$*,* $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ *Basen von* V *sowie* $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ *und* $\mathcal{C}' = (c'_1, \dots, c'_m)$ *Basen von* W*. Dann gilt*

$$(L)^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'} = (\mathrm{id})^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}} \, (L)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \, (\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}.$$

Beweis. Wir definieren Matrizen $T = (t_{ij})$, $S = (s_{ij})$ und $A = (a_{ij})$ durch

$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} b_i$$
$$c_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} c'_i$$
$$L(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_i j c_i.$$

Also $T = (\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$, $S = (\mathrm{id})^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}$ und $(L)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = A$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} L(b'_j) &= L\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij} b_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} t_{ij} L(b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} t_{ij} a_{ki} c_k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} t_{ij} a_{ki} s_{lk} c'_l \\ &= \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} s_{lk} a_{ki} t_{ij}\right) c'_l. \end{aligned}$$

Die Summen in der Klammer sind genau das Matrixproduk SAT. □

Beispiel 8.14. Wir betrachten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachte $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung. Sei $\mathcal{E}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Dann gilt klarerweise $(L_A)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = A$. Wir betrachten eine weitere Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ mit $b_1 = (1,1)^T$ und $b_2 = (1,-1)^T$. Wir berechnen nach Satz 8.13 $(L_A)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$. Dazu müssen wir $(\mathrm{id})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ und $(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$ berechnen. Wir sehen sofort

$$(\mathrm{id})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ferner ist $e_1 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$ und $e_2 = \frac{1}{2}(b_1 - b_2)$, also

$$(\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$(L_A)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = (\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} (L_A)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} (\mathrm{id})^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9 Lineare Gleichungen

9.1 Problemstellung und Beispiele

Ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Gegeben sind hierbei die Koeffizienten $a_{ik} \in \mathbb{K}$ und die Zahlen $b_k \in \mathbb{K}$ auf der *rechten Seite*. Gesucht sind alle Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, welche diese Gleichungen erfüllen. Wir nennen ein solches LGS auch ein $(m \times n)$-Gleichungssystem.

Dies lässt sich wie folgt durch Matrizen umschreiben

$$Ax = b$$

für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Beispiel 9.1.

(a) Eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist durch die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

definiert. Daher ist der Schnitt zweier Ebenen im $\mathbb{R}^3$ durch ein 2×3- Gleichungssystem gegeben.

(b) Ist $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$ und $v \in \mathbb{K}^n$ ein Vektor, so ist die Bestimmung der Basisdarstellung von v bezüglich $\mathcal{B}$ äquivalent zur Lösung des $n \times n$-Gleichungssystems

$$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n.$$

(c) Das Nachprüfen der linearen Unabhängigkeit von m Vektoren im $\mathbb{K}^n$ führt auf ein *homogenes* $(m \times n)$-Gleichungssystem der Form $Ax = 0$.

Bemerkung 9.2. Im folgenden führen wir Terminologie über die Lösbarkeit von LGS ein. Angenommen wir haben ein LGS der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Definieren wir die lineare Abbildung $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $L_A(x) = Ax$, so kann das LGS also in der Form $L_A(x) = b$ geschrieben werden. Daher diskutieren wir die Lösungen der Gleichung $Lv = b$ für eine lineare Abbildung $L \colon V \to W$, $v \in V$ und $b \in W$.

(a) Wir sagen das Problem $Lv = b$ hat eine *eindeutige Lösung*, falls für jedes $b \in W$ entweder keine oder genau eine Lösung existiert. Dies äquivalent zu der Aussage, dass L injektiv ist. Denn sind $v_1, v_2 \in V$ zwei Lösungen so gilt

$$Lv_1 = Lv_2$$

Wenn L injektiv ist muss $v_1 = v_2$ gelten. Bei linearen Abbildungen ist äquivalent: L ist injektiv genau dann wenn $\ker L = \{0\}$. Wir erinnern

$$\ker L = \{v \in V : L(v) = 0\}.$$

Denn ist L injektiv so gilt für alle $v \in \ker L$, dass $Lv = L0$, also $v = 0$. Ist andererseits $\ker L = \{0\}$ und $L(v_1) = L(v_2)$, so folgt $L(v_1 - v_2) = 0$, also $v_1 - v_2 \in \ker L$ und damit $v_1 - v_2 = 0$ was $v_1 = v_2$ bedeutet.

(b) Ist L surjektiv, so hat die Gleichung $Lv = b$ für jedes $b \in W$ mindestens eine Lösung $v \in V$. Man sagt das Problem $Lv = b$ ist *universell lösbar.*

(c) Ist L bijektiv, so ist das Problem $Lv = b$ *universell und eindeutig lösbar*, d.h. die Gleichung $Lv = b$ besitzt für jedes $b \in W$ genau eine Lösung $v = L^{-1}b$.

9.2 Struktur Lösungsraumes

Proposition 9.3. *$L \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Man nennt die Gleichung $Lv = 0$ ein* homogene Gleichung. *Ist $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, so nennt man das LGS $Ax = 0$ ein* homogenes lineares Gleichungssystem. *Es gilt*

(a) Die Lösungsmenge einer homogenen Gleichung, also

$$\mathcal{L}_0 = \{v \in V : Lv = 0\}$$

ist ein Unterverktorraum von V.

(b) Ist v_0 eine spezielle Lösung *von $Lv_0 = b$, so ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}_b$ gegeben durch*

$$\mathcal{L}_b = v_0 + \mathcal{L}_0 = \{v_0 + v : v \in \mathcal{L}_0\}.$$

Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum und $v_0 \in V$, so nennt man die Teilmenge

$$v_0 + U = \{v_0 + u : u \in U\}$$

einen affinen Unterrraum *von V.*

Beweis. In den Übungen wurde bewiesen, dass der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist. $\mathcal{L}_0$ ist gerade der Kern von L. Ist nun $v_0 \in V$ eine speielle Lösung, so ist jede weitere Lösung $w \in V$ gegeben durch $Lw = b$. Damit ist aber $L(w - v_0) = 0$, also $w - v_0 \in \mathcal{L}_0$. Daher existiert ein $v \in \mathcal{L}_0$ mit

$$w = v_0 + v$$

insbesondere $w \in v_0 + \mathcal{L}_0$. □

9.3 Lösbarkeit von linearen Gleichungen

Wir führen den *Rang einer Matrix* ein.

Proposition 9.4. *Sei $A \in K^{m\times n}$ mit $A = (a_{ij})$. Folgende drei Zahlen sind gleich*

*(a) Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (*Zeilenrang*),*

*(b) die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (*Spaltenrang*),*

(c) die Dimension des Bildraumes der linearen Abbildung $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Diese Zahl nennen wir den Rang *der Matrix A. Letztere Definition lässt sich auf lineare Abbildungen verallgemeinern: Ist $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist* $\mathrm{Rang} L := \dim(im\, L)$*.*

Beweis. Wir beweisen hier nur, dass der Spaltenrang gleich der Dimension des Bildraumes ist. In den Übungen wird bewiesen, dass die Vektoren

$$Ae_1, \dots, Ae_n$$

ein Erzeugendensystem von $\mathrm{im}\, L_A \subset \mathbb{K}^m$ sind. Nach dem Basisauswahlsatz (den wir hier aus Zeitgründen nicht bewiesen haben, siehe [2, Satz 6.6]) lässt sich aus $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ eine Basis auswählen und klarerweise muss diese gleich dem Spaltenrang sein. □

Beispiel 9.5. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

hat Rang 2, denn die beiden ersten Zeilen sind linear unabhängig und ihre Summe ergibt die dritte.

Satz 9.6. *Sei* $n = \dim V$ *und* $m = \dim W$*, so ist die lineare Abbildung*

$$L \colon V \to W$$

genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Rang} L = n$ *und genau dann surjektiv wenn* $\mathrm{Rang} L = m$*. Demnach ist das lineare Gleichungssystem*

$$Ax = b$$

für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *eindeutig lösbar genau dann wenn* $\mathrm{Rang} A = n$ *und universell lösbar* $\mathrm{Rang} A = m$*. Das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung wenn* $\mathrm{Rang} A = n = m$*. Ferner ist die Dimension des Lösungsraumes der Gleichung* $Ax = 0$ *gegeben durch* $n - \mathrm{Rang} A$*.*

Beweis. Der Beweis basiert auf der Dimensionsformel, die wir ebenfalls aus Zeitgründen nicht behandelt haben, siehe [2, §15, 2.2]. □

31.01.2022

9.4 Gauß-Algorithmus

Es handelt sich um ein Verfahren, wie $Ax = b$ explizit gelöst werden kann, welches sich in Softwarepaketen implementieren lässt. Dabei wir $Ax = b$ in ein einfaches System $Bx = c$ umgewandelt, das dieselben Lösungen hat und das man einfach lösen kann. Wir demonstrieren das Verfahren an folgenden Beispielen.

LGS mit $m = n = 2$**.** Betrachte

$$\begin{array}{rl} (I) & 2x - 6y = 4 \\ (II) & x + 2y = -8 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Wir lassen (I) unverändert und ändern die zweite Zeile zu $(II) - \frac{1}{2}(I)$, also

$$\begin{array}{rl} 2x - 6y &= 4 \\ 5y &= -10 \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Löse nun die zweite Zeile und setze diese in die erste Zeile ein.

LGS mit $m = n = 3$**.** Betrachte

$$\begin{array}{rl} (I) & 2x - 6y + 2z = 4 \\ (II) & x + 2y - 4z = -8 \\ (III) & 3x + 0y + z = 3 \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir formen wieder um

$$\begin{array}{rl} (I') = (I) & 2x - 6y + 2z = 4 \\ (II') = (II) - \frac{1}{2}(I) & 0x + 5y - 5z = -10 \\ (III') = (III) - \frac{3}{2}(I) & 0x + 9y + 2z = -3 \end{array} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und schließlich erhalten wir

$$\begin{array}{rll} (I') & 2x - 6y + 2z & = 4 \\ (II') & 0x + 5y - 5z & = -10 \\ (III') - \frac{9}{5}(II') & 0x + 0y + 7z & = 15 \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Bevor zum nächsten Beispiel kommen, wollen wir kurz begründen, warum diese Umformungen den Lösungsraum eines LGS nicht verändern

Satz 9.7. *Jede der drei folgenden Umformungen nennt man auch eine* elementare Umformung

(a) Vertauschung zweier Zeilen

(b) Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl

(c) Addition ines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Elementare Umformungen erhalten

(i) die Lösungsmenge,

(ii) den Zeilenrang,

(iii) den Spaltenrang.

Beweis.

(i) Jede Lösung des ursprünglichen LGS erüfllt auch das umgeformte System. Da sich jede elementare Umformung durch eine entsprechende rückgängig machen läßt, ist das umgeformte Gleichungssystem also äquivalent zum ursprünglichen

(ii) Der Zeilenrang ist die Anzahl lineare unabhängiger Zeilen. Diese Anzahl wird durch die elementaren Umformungen aber nicht geändert.

(iii) Die Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$ bleibt offensichtlich unverändert unter den elementaren Umformungen. Daher bleibt auch die Dimension des Kernes von L_A unverändert. Nach Satz 9.6 ist aber $\text{Rang}A = n - \dim\ker L_A$. Und da $\text{Rang}(A)$ gleich dem Spaltenrang ist, bleibt dieser also unverändert unter elementaren Umformungen.

□

Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel

LGS mit $m = 4$ und $n = 5$. Betrachte

$$\begin{aligned} 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 16 \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= -2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 14 \\ 4x_1 - x_2 - 9x_3 - 2x_4 - x_5 &= -5 \end{aligned}$$

Also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenstufenform ergibt

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir können hier sofort den Rang der entsprechenden Matrix A ablesen, der gleich 3 ist. Daher ist die Dimension des homogenen LGS nach Satz 9.6 gleich $5 - 3 = 2$. Bei der entsprechenden Matrix in der Zeilen-Stufenform sieht man sofort, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen des homogenen LGS sind und zudem noch linear unabhängig. Daher ist

$$\operatorname{span}\{v_1, v_2\} = \mathcal{L}_0.$$

Man sieht nun, dass der Vektor

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung des LGS ist. Daher sind alle Lösungen der Form

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Invertieren von Matrizen. Wir können das Gauß-Verfahren auch zum invertieren von Matrizen verwenden. Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix so betrachten wir das Schema $A|E_n$. Wir wollen also mehrere LGSe gleichzeitig lösen. Wir betrachten folgendes Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 9.6 ist A genau dann invertierbar wenn $\mathrm{Rang}(A) = 3$ ist, bzw. die Lösung des homogenen LGS $Ax = 0$ nur den Nullvektor als Lösung besitzt. Bringt man $Ax = 0$ auf Zeilenstufenform so erhält man

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0. \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Hier sieht man sofort, dass entweder der Rang der Matrix gleich 3 ist oder, dass das homogene LGS nur den Nullvektor als Lösung besitzt. Daher ist die Matrix invertierbar. Wir wollen nun die Inverse zu A berechnen. Wir beginnen mit

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ziel ist es auf der linken Seite die Einheitsmatrix durch elementare Zeilenumformungen zu erhalten. Dann wird auf der rechten Seite die Inverse stehen. Wir bringen das System zunächst auf Zeilenstufenform

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}$$

Subtraktion der mit 3 multiplizierten zweiten Zeile von der ersten ergibt das Schema

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}$$

Addieren wir nun noch die dritte Zeile zur zweiten und subtrahieren wir anschließend ihr 5-faches von der ersten, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -38 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}.$$

Damit ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -38 & 11 & -5 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10 Determinanten

10.1 Determimantenformen

Die Determinante einer Matrix ist eine Größe welche Auskunft gibt ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht. Ferner gibt die Determinante an, wie sich das Volumen eines Quaders (oder allgemeiner eines Parallelotops) unter einer linearen Abbildung ändert.

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A = (a_{ij})$ ist durch das n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ ihrer Spalten gegeben (d.h. $a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T$). Wir werden die Determinante als Funktion $\det(a_1, \ldots, a_n)$ dieser Spalten beschreiben. Mit anderen Worten

$$\det\colon \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \det(a_1, \ldots, a_n).$$

Ferner soll det gewisse Eigenschaften erfüllen:

Definition 10.1. Eine Abbildung $F\colon \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ $(n \geq 2)$ heißt

(a) *Multilinearform* auf $\mathbb{K}^n$ (kurz *n-Form*), wenn F in jedem der n Argumente (Spalten) linear bei festegehaltenen restlichen Spalten ist:

$$F(\ldots, \lambda x + \mu y, \ldots) = \lambda F(\ldots, x, \ldots) + \mu F(\ldots, y, \ldots),$$

für $x, y \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(b) *alternierende Multilinearform* wenn (a) gilt und wenn d beim Vertauschen zweier Spalten das Vorzeichen ändert:

$$F(\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots) = -F(\ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots),$$

(c) *Determinantenform* wenn (a) und (b) erfüllt ist und $F(e_1, \ldots, e_n) = 1$ ür die kanonische Basis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{K}^n$ gilt.

Proposition 10.2. *Für eine alternierende Multilinearform F gilt: Sind $x_1, \ldots, x_n$ linear abhängig, so folgt $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Inbesondere ist $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, falls zwei Einträge gleich sind, etwa $x_i = x_k$ für $i \neq k$.*

Beweis. Da F alternierende ist ergibt sich durch Vertauschen von zwei gleichen Einträgen

$$F(\ldots, x, \ldots, x, \ldots) = -F(\ldots, x, \ldots, x, \ldots).$$

also

$$F(\ldots,x,\ldots,x,\ldots)=0.$$

Sind $x_1,\ldots,x_n$ linear abhängig, etwa

$$x_1=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i x_i,$$

so gilt

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i F(x_i,\ldots,x_n)=0.$$

Jeder Summand ist aber gleich Null, denn x_i tritt doppelt im Argument von F auf. □

Satz 10.3 (Hauptsatz über Determinanten)**.**

(a) Für jedes $n\geq 2$ gibt es genau eine Determinantenform auf $\mathbb{K}^n$. Wir bezeichnen sie mit $\det(x_1,\ldots,x_n)$ *für $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{K}^n$. Allgemeiner gilt: Für alle $c\in\mathbb{R}$ existiert genau eine alternierende Multilinearform $F\colon\mathbb{K}^n\times\ldots\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ mit $F(e_1,\ldots,e_n)=c$.*

(b) Hat die $n\times n$-Matrix $A=(a_{ij})$ die Spalten $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{K}^n$, so heißt $\det(a_1,\ldots,a_n)$ *die* Determinante von A *und wir auch wie folgt bezeichnet*

$$|A|=\det A=\left|\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\right|.$$

(c) Die Determinante einer $n\times n$-Matrix lässt sich mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz *auf $2n$ Weisen durch $(n-1)\times(n-1)$-Determinanten ausdrücken:*

$$\begin{aligned}|A|&=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| \quad \textit{(Entwicklung nach der i-ten Zeile)}\\ &=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{jk}|A_{jk}| \quad \textit{(Entwicklung nach der k-ten Spalte)}\end{aligned}$$

Dabei bedeutet A_{ij} diejenige $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, welche aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

Beweis. Wir verweisen aus Zeitgründen auf [2, §17, Abschnitt 2.5] für den Beweis. □

Beispiel 10.4. Zunächst wollen wir die Determinante einer 2×2-Matrix explizit angeben. Sei

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}.$$

Wir entwickeln nach dem Laplaceschen Enticklungssatz nach der ersten Zeile und erhalten

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Nun ein konkretes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und wollen die Determinante von A über den Laplaceschen Entwicklungssatz berechnen. Wir entwickeln nach der zweiten Spalte

$$|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante ist gleich Null, weil zwei Spalten gleich sind. Wir rechnen weiter

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -9.$$

Wir geben noch eine alternative Beschreibung der Determinante, doch davor benötigen wir noch eine

Definition 10.5. Die Menge

$$S_n = \{\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} : \sigma \text{ ist bijektiv}\}.$$

bildet bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen eine Gruppe, siehe Beispiel 2.2. Man nennt S_n die *symmetrische Gruppe* oder *Permutationsgruppe*. Elemente von S_n heißen *Permutationen*. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ nennt man das Paar (i, j) einen *Fehlstand* oder *Inversion*, falls $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ ist. Man setzt

$$\operatorname{inv}(\sigma) = \{(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 : i < j \text{ und } \pi(i) > \pi(j)\}$$

Die Anzahl der Fehlstände einer Permutation $|\operatorname{inv}(\sigma)|$ nennt man *Fehlstandszahl* oder *Inversionszahl*. Das *Signum* einer Permutation σ ist definiert als

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := (-1)^{|\operatorname{inv}|}.$$

Beispiel 10.6. Permutation werden üblicherweise in der Zweizeilenform angegeben

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ist $n = 4$, so ist

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

eine solche Zweizeilenform. Wir sehen, dass $\text{inv}(\sigma) = \{(1,2),(3,4)\}$, daher ist $|\text{inv}| = 2$ und $\text{sgn}(\sigma) = 1$. Betrachte weiter

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

so ist $\text{inv}(\pi) = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$, also $\text{sgn}(\pi) = -1$.

Proposition 10.7 (Leibniz-Formel)**.** *Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt*

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

wobei S_n die symmetrische Gruppppe in n Elementen ist, definiert als

Beweis. Eine Möglichkeit die Proposition zu beweisen, wäre zu zeigen, dass die Abbildung $(a_1,\dots,a_n) \mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ eine alternierende Multilinearform ist, welche ausgewertet in der Einheitsmatrix gleich 1 ist. Nach Satz 10.3 (a) muss diese Form gleich der Determinante sein. Details siehe Übungen. □

10.2 Eigenschaften von Determinanten

Definition 10.8. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Wir definieren die *transponierte Matrix zu A* als $A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$ durch

$$A^T = (a^T_{ij})_{ij} := (a_{ji})_{ij}.$$

Proposition 10.9. *Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt*

(a) $\det A^T = \det A$.

(b) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(c) A ist genau dann invertierbar, falls $\det(A) \neq 0$ *ist und in diesem Fall gilt* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage (a) mit Hilfe der Leibniz-Formel (siehe Proposition

10.7).

$$\begin{aligned}
\det A^T &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma^{-1}(i)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma^{-1}(i)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

Hierbei muss gezeigt werden, dass $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$ und dass die Abbildung $S_n \to \{\sigma^{-1} : \sigma \in S_n\}$, $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ bijektiv ist. Siehe Übungen.

Wir fahren mit dem Beweis der Aussage (b) fort. Sind $b_1, \dots, b_n$ die Spalten von B so sind die Spalten von AB nach der Definition der Matrixmultiplikation gegeben durch $Ab_1, \dots, Ab_n$. Wir betrachten die Abbildung

$$F\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}, \quad B \mapsto \det(Ab_1, \dots, Ab_n) = \det(AB).$$

Man prüft leicht nach, dass die Abbildung F alternierend und multilinear ist (siehe Übungen). Ferner gilt $F(E_n) = \det(A)$. Gleiches gilt für die Abbildung

$$G\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}, \quad B \mapsto \det(A)\det(B).$$

Hier gilt $G(E_n) = \det(A)$. Also muss nach Satz 10.3 (a) $G = F$ sein, woraus $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ folgt.

Aussage (c) wird nach der gleichen Technik wie Aussage (b) bewiesen: Nach Satz 9.3 ist eine Matrix genau dann invertierbar wenn $\operatorname{Rang}(A) = n$ ist. Das heißt, genau dann wenn die Spaltenvektoren linear unabhängig ist. Dies wiederum ist nur der Fall wenn $\det(A) \neq 0$ ist nach 10.2. Da $AA^{-1} = E_n$ ist gilt nach (b)

$$1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

also

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

□

Schließlich ist es möglich jeder lineare Abbildung eine Determinante zuzuordnen. Hierzu benötigen wir ein

Lemma 10.10. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B}$ sowie $\mathcal{C}$ Basen von V. Seien $T = (\mathrm{id})^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ und $S = (\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$. Dann gilt*

$$ST = TS = E_n$$

also $T^{-1} = S$.

Beweis. Nach Satz 8.7 gilt

$$E_n = (\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = (\mathrm{id} \circ \mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = (\mathrm{id})^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} (\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = TS.$$

Analog zeigt man $E_n = ST$. □

Proposition 10.11. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume und $L \colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann ist die Zahl*

$$\det L := \det (L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$$

unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ eine weiter Basis von V und sei $T = (\mathrm{id})^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$. Nach Lemma 10.10 ist $T^{-1} = (\mathrm{id})^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$. Damit ist nach Satz 8.13

$$(L)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = T (L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} T^{-1}.$$

Nach Proposition 10.9 ist daher

$$\det (L)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = \det T \cdot \det (L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot (\det T)^{-1} = \det (L)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}},$$

was beweise, dass $\det L$ nicht von der Wahl der Basis abhängt. □

03.02.2022

11 Eigenwerte und Eigenvektoren

11.1 Diagonalisiertbarkeit und Eigenwertproblem

Definition 11.1. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. A heißt *diagonalisierbar über* $\mathbb{K}$, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ gibt, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

mit $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$. Sind $v_1,\dots,v_n$ die (lineare unabhängigen) Spalten von S, so ist die Gleichung

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

äquivalent zu

$$Av_1 = \lambda_1 v_1,\ \dots,\ Av_n = \lambda_n v_n.$$

(siehe Übung). Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und existiert ein $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, sodass $S^{-1}AS = B$, so heißen A und B ähnlich. Die Bestimmung von S führt also auf folgendes *Eigenwertproblem*: Gesucht sind $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \mathbb{K}^n$ mit $v \neq 0$, sodass $Av = \lambda v$ gilt. Dabei nennt man λ einen *Eigenwert* und v einen *Eigenvektor*. Folglich gilt: A ist genau dann diagonalisierbar wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt.

Beispiel 11.2. Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir stellen um und erhalten

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Wir suchen also eine Lösung $x = (x_1, x_2)^T \neq (0,0)^T$ der obigen homogenen Gleichung. Das ist aber nur der Fall wenn die Matrix

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist. Folglich muss $\det A_\lambda = 0$ sein. Damit erhalten wir die Bedinung

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Demnach hat das homogene LGS $A_\lambda x = 0$ genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn $\lambda = \pm 1$ ist. Für $\lambda = 1$ betrachten wir

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

und sehen sofort, dass $x = (1,1)^T$ eine Lösung des homogenen LGS ist. Damit muss

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $(1,1)^T$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1. Für $\lambda = -1$ sieht man, dass $(1,-1)$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -1 ist. Damit ist A diagonalisierbar, denn schreibt man die Eigenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und schreibt man diese in die Spalten einer Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

so gilt $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(1,-1)$.

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist dagegen nicht diagonalisierbar, denn man findet für diese Matrix keine Basis aus Eigenvektoren. Für $\lambda \neq 0$ hat das homogene LGS

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

keine Lösung, denn der Rang dieser Matrix ist offensichtlich 2. Für $\lambda = 0$ hat die Gleichung die Lösungen $(\mu, 0)^T$ für $\mu \in \mathbb{R}$, womit keine Basis aus Eigenvektoren existieren kann.

Als letzte geben wir ein Beispiel einer Matrix an, welche über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar ist aber dafür über $\mathbb{C}$. Betrachte dazu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwertgleichung führt zum homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Determinante der Matrix ist gleich $\lambda^2 + 1$ welche für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ verschwindet. Daher existieren keine Eigenwert und Eigenvektoren über $\mathbb{R}$ für diese Matrix. Fasst man $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ auf, so hat die Gleichung

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

zwei Lösungen, nämlich $\lambda = \pm i$. Man rechnet aus, dass $(i, 1)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = i$ ist und $(-i, 1)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -i$. Daher gilt mit

$$S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dass $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(i, -i)$.

Definition 11.3. Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definieren wir

$$\ker A := \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n : L_A(x) = 0\} = \ker L_A.$$

wobei $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto L_A(x) = Ax$. $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenwert von A, falls

$$\ker(A - \lambda E_n)$$

nicht trivial ist. Wir nennen $N_\lambda := \ker(A - \lambda E_n)$ den *Eigenraum von A zum Eigenwert λ*.

Satz 11.4. *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig, d.h. sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte zu den Eigenvektoren $v_1, \dots, v_m$, so sind $\{v_1, \dots, v_m\}$ linear unabhängig.*

Beweis. Wir führen eine Induktion nach m durch. Für $m = 1$ ist die Aussage klar, da $v_1 \neq 0$ sein muss, weil v_1 ein Eigenvektor ist. Wir gehen nun davon aus, dass die Aussage für m verschiedene Eigenwerte gilt. Gegeben seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$ mit Eigenvektoren $v_1, \dots, v_{m+1}$. Wir betrachten die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m+1} \mu_i v_i = 0$$

und wollen beweisen, dass hieraus $\mu_1 = \ldots = \mu_{m+1} = 0$ folgt. Wir rechnen

$$\begin{aligned} 0 &= (A - \lambda_{m+1}E_n)(0) \\ &= (A - \lambda_{m+1}E_n)\left(\sum_{k=1}^{m+1} \mu_i v_i\right) \\ &= \underbrace{\mu_{m+1}(A - \lambda_{m+1}E_n)v_{m+1}}_{=0,\text{ da } v_{m+1}\in N_{\lambda_{m+1}}} + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(Av_i - \lambda_{m+1}v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\lambda_i - \lambda_{m+1})v_i \end{aligned}$$

Nach Induktionvvoraussetzung wissen wir, dass $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind, weil $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschieden sind. Ferner ist für jedes $i = 1, \ldots, m$ $\lambda_i - \lambda_{m+1} \neq 0$ und damit muss $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$ gelten. Damit muss aber $\mu_{m+1} v_{m+1} = 0$ sein und da $v_{m+1} \neq 0$, folgt $\mu_{m+1} = 0$. □

Korollar 11.5. *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte zu einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wähle zu jedem Eigenraum N_{λ_i} eine Basis $\mathcal{B}_i$. Dann ist die Menge*

$$\mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_m$$

linear unabhängig. Folglich ist eine Matrix aus $\mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisierbar, wenn sie n verschiedene Eigenwerte besitzt (da dann die n Eigenvektoren linear unabhängig sind).

Beweis. Siehe Übungen. □

11.2 Das charakteristischen Polynom

Satz 11.6. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.*

(a) Durch

$$p_A \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto p_A(x) := \det A - xE_n$$

ist ein Polynom n-ten Grades definiert, das charakteristische Polynom *von A. Es hat die Gestalt*

$$p_A(x) = (-x)^n + (\operatorname{tr} A)(-x)^{n-1} + \ldots + \det A.$$

Dabei ist die Spur $\operatorname{tr} A$ *von A definiert durch*

$$\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

wobei $A = (a_{ij})$.

(b) $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann Eigenwert von A, wenn λ eine Nullstelle von p_A ist.

Beweis. Wir beweisen zunächst Aussage (b). λ ist genau dann Eigenwert von A wenn ein $v \neq 0$ existiert mit $(A - \lambda E_n)v = 0$. Das ist genau dann der Fall, wenn $(A - \lambda E_n)$ nicht invertierbar ist (siehe Satz 9.6), was wiederum äquivalent zu $\det(A - \lambda E_n) = 0$ ist, siehe Satz 10.9, also genau dann wenn λ eine Nullstelle von $p_A(x)$ ist.

Wir beweisen nun Aussage (a) indem wir eine allgemeinere Aussage beweisen: Für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $x \in \mathbb{K}$ ist $\det(A - xB)$ ein Polynom in x vom Grad kleiner gleich n. Wir führen eine Induktion nach n durch. Die Aussage sei also wahr für alle Matrizen aus $\mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$. Seien also $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Wir setzen $C = A - xB$ und wollen die Determinanten dieser Matrix über den Laplaceschen-Entwicklungssatz berechnen. Die Matrix C_{ij} (es wird von C die i-te Spalte und die j-Spalte gestrichen) ist eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix stets von der Form $A' - \lambda B'$ mit $A', B' \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$. Nach

Induktionasvoraussetzung ist also $\det C_{ij}$ ein Polynom in x vom Grad $n-1$. Entwickeln wir $\det C$ nach der ersten Zeilen so erhalten wir

$$\det(A - xB) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(a_{1i} - xb_{1i})|C_{1i}|$$

Jeder Summand ist nach Induktionsvoraussetzung ein Polynom vom Grad kleiner gleich n.

Die restlichen Aussagen beweisen wir ebenso mit einer Induktion nach n. Für $n = 2$ rechnen wir

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - x \end{pmatrix} = x^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12} = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A,$$

was die Behauptung für $n = 2$ zeigt. Wir nehmen nun an, dass die Behauptung wahr ist für alle $k \times k$-Matrizen mit $k < n$. Sei nun $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $n \geq 3$. Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\det(A - xE_n) = (a_{11} - x)P_1(x) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_{1k} P_k(x).$$

Nach Induktionsannahme ist aber

$$P_1(x) = \det \begin{pmatrix} a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{pmatrix} = (-x)^{n-1} + \left(\sum_{k=2}^{n} a_{kk} \right) (-x)^{n-2} + \cdots$$

und die Polynome P_k sind vom Grad $\leq n-2$. Denn weiter oben haben wir gesehen, gesehen, dass P_k im Allgemeinen ein Polynom vom Grad $\leq n-1$ ist, aber Grad ist nur dann gleich $n-1$, wenn die Koeffizienten b_{ij} nicht Null sind, was sie aber in der letzten Gleichungskette sind. Daher ist der Grad von $P_k \leq n-2$ für $k > 1$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(A - xE_n) &= (a_{11} - x) \left((-x)^{n-1} + \left(\sum_{k=2}^{n} a_{kk} \right) (-x)^{n-2} \right) + q(x) \\ &= (-x)^n + (\operatorname{tr} A)(-x)^{n-1} + r(x) \end{aligned}$$

mit Restpolynomen q und r vom Grad $\leq n-2$.

Es verbleibt zu zeigen, dass der konstante Term des Polynoms gleich der Determinante von A ist, was aber wegen $p_A(0) = \det(A - 0E_n) = \det A$ sofort folgt. □

Aus Korollar 11.5 und dem obigen Satz folgt direkt

Korollar 11.7. *Falls das charakteristische Polynom einer Matrix aus $\mathbb{K}^{n \times n}$ n paarweise verschiedene Nullstellen besitzt, so ist die Matrix diagonalisierbar.*

Definition 11.8. Ein Eigenwert λ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hat die *algebraische Vielfachheit* k, wenn λ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, d.h. wenn es ein Polynom q gibt mit

$$p_A(x) = (x-\lambda)^k q(x)$$

und $q(\lambda) \neq 0$.

Die *geometrische Vielfachheit* eines Eigenwertes λ ist definiert als die Dimension des Eigenraumen N_λ.

Beispiel 11.9. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

gilt $p_A(x) = (x-\lambda)^2$, also ist $x = \lambda$ ein zweifacher Eigenwert. Der Eigenraum ist

$$N_\lambda = \ker(A - \lambda E_2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{e_1\},$$

woraus folgt, dass die geometrische Vielfachheit von λ gleich 1 ist.

07.02.2022

Allgemein gilt

Satz 11.10. *Die geometrische Vielfachheit ist höchstens gleich der algebraischen.*

Beweis. Siehe [1, S. 177]. □

Polynome über den Komplexen Zahlen haben noch eine besondere Eigenschaften. Im Gegensatz zu reellen Polynomen welche auch keine Nullstelle besitzen können (z.B. $x \mapsto x^2 + 1$) haben komplexe Polynome stets eine Nullstelle.

Satz 11.11 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ein nicht konstantes Polynom* $p(z) = \sum_{k=0}^n \lambda_k z^k$ *mit* $\lambda_k \in \mathbb{C}$ *hat stets eine komplexe Nullstelle, d.h. es existiert ein* $z_0 \in \mathbb{C}$ *mit* $p(z_0) = 0$*. Ferner gilt, dass der Grad des Polynoms gleich der Summe der algebraischen Vielfachheiten der Nullstellen ist.*

Beweis. Es existieren mehrere Beweise zu diesem Satz, welche auf verschiedenen Technologien beruhen. Aber alle gehen über unser derzeitiges Wissen hinaus. Der Leser wird auf eine Vorlesung oder Buch über *Funktionentheorie* verwiesen. □

Bemerkung 11.12. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra existiert also für Matrizen aus $\mathbb{C}^{n\times n}$ immer komplexe Eigenwerte. Insbesondere hat eine Matrix mit reellen Einträgen stets komplexe Eigenwerte, wenn sie als komplexe Matrix aufgefasst wird. Allerdings folgt hieraus nicht, dass jede komplexe Matrix diagonalisierbar ist, denn dafür muss eine Basis aus Eigenvektoren existieren.

Beispiel 11.13.

(a) Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
hat das charakteristiche Polynom $p_A(x) = (2-x)^3 - 3(2-x) + 2$. Wir substietuieren $y = 2 - x$ und suchen daher Nullstellen des Polynoms $y^3 - 3y + 2$. Man sieht, dass $y = 1$ eine Nullstelle ist und nach einer Polynomdivision erhalten wir $y^3 - 3y + 2 = (y-1)(y^2+y-2)$. Das quadratische Polynom hat die Nullstellen $y = 1$ und $y = -2$. Damit gilt
$$y^3 - 3y + 2 = (y-1)^2(y+2).$$
Demnach sind die Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 4$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist der Kern der Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Die Matrix hat Rang 1, daher muss der Kern 2-dimensional sein. Daher Sei v_1, v_2 eine Basis dieses Eigenraumes und v_3 ein Eigenvektor zu λ_2. Dann ist nach Satz 11.4 v_1, v_2, v_3 eine Eigenbasis und A ist ähnlich zur Matrix
$$\operatorname{diag}(1, 1, 4).$$
Wollen wir nun die Basiswechselmatrix S bestimmen, so müssen wir konkret eine Basis von N_1 und N_4 bestimmen. Für N_1 müssen wir das homogene LGS $A'x = 0$ für A' wie oben. Wir sehen, dass
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
Lösungen sind. Löst man das homogene LGS für
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
so sieht man, dass
$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
eine Lösung ist. Daher ist $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(1, 1, 4)$ für
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

11.3 Orthogonale und unitäre Matrizen

Wir diskturieren in diesem Abschnitt Klassen von Matrizen mit speziellen Eigenschaften.

Satz 11.14. *Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^m$ gilt*

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, A^T w\rangle.$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned}\langle Av, w\rangle &= \sum_{i=1}^m (Av)_i w_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j w_i \\ &= \sum_{j=1}^n v_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\ &= \sum_{j=1}^n v_j (A^T w)_j \\ &= \langle v, A^T w\rangle.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 11.15. Eine analoge Aussag gilt für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $v \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^m$

$$\langle A_v, w\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, A^* w\rangle_{\mathbb{C}}$$

wobei $A^* = \bar{A}^T$ ist (alle Einträge der Matrix A werden komplexe konjugiert und anschließend wird die Matrix transponiert). Ferner ist für $w, u \in \mathbb{C}^m$

$$\langle u, w\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^m \bar{u}_i w_i.$$

Definition 11.16. Für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ heißt A^* die *adjungierte Matrix*. Im Fall $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ stimmt die adjungierte Matrix mit der transponierten Matrix überein, also $A^* = A^T$.

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *hermitesch*[1] oder *selbstadjungiert*, wenn $A^* = A$. A heißt *symmetrisch* wenn $A = A^T$.

Eine reelle Matrix ist genau dann selbstadjungiert wenn sie symmetrisch ist.

Satz 11.17. *(a) Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent*

(i) Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$.

[1] nach Charles Hermite 1822 - 1901.

(ii) Die Spalten $a_1, \ldots, a_n$ von A sind eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

(iii) Es gilt $A^T = A^{-1}$.

(b) Falls (i) bis (iii) gilt, dann ist $|\det A| = 1$.

Beweis. Wir beweisen zunächst (a). Es gilt $a_i = Ae_i$, somit

$$\langle a_i, a_j \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Folglich ist $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Orthonormalbasis, das zeigt, dass (i) (ii) impliziert.

(ii) impliziert (i) wie folgt

$$\begin{aligned}
\langle Av, Aw \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n a_j w_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j \langle a_i, a_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^n v_i w_i = \langle v, w \rangle.
\end{aligned}$$

Schließlich impliziert (i) (iii), denn für $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle A^T Av, w \rangle = \langle Av, (A^T)^T w \rangle = \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Somit gilt

$$\langle (A^T A - E_n)v, w \rangle = 0$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Setzen wir

$$w = (A^T A - E_n)v$$

und setzen ein, erhalten wir $|(A^T A - E_n)v|^2 = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, also $(A^T A - E_n)v = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ (nach Proposition 7.6). Also muss $A^T A - E_n = 0$ sein, was $A^T A = E_n$ impliziert und damit gilt $A^T = A^{-1}$. Es bleibt die Implikation von (iii) nach (i) zu beweisen. Hier gilt

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, A^T Aw \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Der Beweis für (b) liefert folgende Argumentation. Nach Satz 10.9 gilt $\det A^T = \det A$. Und nach (iii) ist $A^T = A^{-1}$, also

$$\det(A)^2 = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A^T A) = \det(E_n) = 1.$$

Also $|\det A| = 1$. $\square$

Definition 11.18. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn einer der Fälle (i) bis (iii) aus 11.17 gelten. Wir setzen

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : A \text{ orthogonal}\} \quad \text{(orthogonale Gruppe)}$$
$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\} \quad \text{(spezielle orthogonale Gruppe)}$$

Bemerkung 11.19.

(a) Ist $A \in \mathrm{O}(n)$, dann erhält $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Längen und Winkel (A ist *isometrisch*). Denn für Längen gilt

$$|Av|^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle v, v\rangle = |v|^2,$$

also $|Av| = |v|$. Der Winkel zwischen Av und Aw ist bestimmt durch

$$\frac{\langle Av, Aw\rangle}{|Av|\cdot|Aw|} = \frac{\langle v, w\rangle}{|v|\cdot|w|}$$

und letzterer Ausdruck ist der Winkel zwischen v und w.

(b) $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ sind Untergruppen von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (siehe Übungen)

(c) Es gilt

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Und

$$\mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2) \cup \left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}.\right\}$$

Daher stellen Matrizen aus $\mathrm{SO}(2)$ Drehungen um den Ursprung dar und $\mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ sind Spiegelungen an Geraden durch die 0.

(d) $\mathrm{SO}(3)$ besteht aus Drehungen um Geraden durch 0 und $\mathrm{O}(3) \setminus \mathrm{SO}(3)$ sind Spiegelungen an Hyperebenen und Punktspiegelungen an 0.

Satz 11.20. *Für komplexe Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ist äquivalent*

(i) $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$ *für* $v \in \mathbb{C}^n$ *und* $w \in \mathbb{C}^m$.

(ii) $\langle a_i, a_j\rangle = \delta_{ij}$, *wobei* $a_1, \ldots, a_n$ *die Spalten von* A *sind.*

(iii) $A^* = A^{-1}$ *und* $|\det A| = 1$.

Beweis. Analog zu Satz 11.17 □

Definition 11.21. Falls für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (i) bis (iii) aus Satz 11.20 gilt, dann nennt man A *unitär*. Weiter definiert

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &:= \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : A \text{ unitär}\} \quad \text{(unitäre Gruppe)} \\ \mathrm{SU}(n) &:= \{A \in \mathrm{U}(n) : \det A = 1\} \quad \text{(spezielle unitäre Gruppe)} \end{aligned}$$

Bemerkung 11.22. Man sieht leicht, dass $\mathrm{U}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ Untergruppen von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sind. Die Gruppen $\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{U}(n)$ sowie $\mathrm{SU}(n)$ fallen unter dem Begriff der *Matrixgruppen*. Weiter Matrixgruppen sind

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) &= \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\} \\ \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) &= \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : \det A = 1\}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n) &= \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \\ \mathrm{SU}(n) &= \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \end{aligned}$$

11.4 Diagonalisieren von symmetrischen Matrizen

Definition 11.23.

(a) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, falls $A^T = A$ ist.

(b) Ist $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Dann ist U *invariant unter* L, falls für alle $u \in U$ gilt $Lu \in U$.

Satz 11.24. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die zugehörige lineare Abbildung. Dann gilt*

(a) alle Eigenwerte von A sind reell,

(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerte von A stehen senkrecht aufeinander, d.h. ist $Av = \lambda$ und $Aw = \mu w$ mit $\lambda \neq \mu$, dann gilt $\langle v, w\rangle = 0$.

(c) Ist v Eigenvektor von A, dann ist $v^\perp$ invariant unter L_A.

(d) Ist λ Eigenwert von A , dann ist $(\ker(A - \lambda E_n))^\perp$ invariant unter L_A.

(e) Es existiert eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A. Für die Matrix $B = (b_1 \cdots b_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt, dass $B \in \mathrm{O}(n)$ ist und

$$B^{-1}AB = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die (nicht notwedig verschiedenen) Eigenevektoren von A sind. B heißt Hauptachsentransformation *für A und $b_1, \ldots, b_n$ heißem* Hauptachsen.

Beweis. Wir betrachten das charakteristische Polynom p_A von A. Nach Satz 2.4 hat A komplexe Eigenwerte. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ einer davon. Für jedem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\begin{aligned}\lambda\langle v, v\rangle &= \langle v, \lambda v\rangle = \langle v, Av\rangle \\ &= \langle Av, v\rangle \\ &= \langle \lambda v, v\rangle \\ &= \bar{\lambda}\langle v, v\rangle,\end{aligned}$$

also $\lambda = \bar{\lambda}$, woraus folgt, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, da $\langle v, v\rangle = |v|^2 \neq 0$ ist (v ist Eigenvektor). Dies beweist (a).

Für Aussage (b) rechnen wir

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \mu\langle v, w\rangle.$$

Hieraus folgt $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$ und da $\lambda \neq \mu$ ist, muss $\langle v, w\rangle = 0$ gelten.

Sei $w \in v^\perp$ mit v Eigenvektor von A und Eigenwert λ. Dann gilt

$$\langle L_A w, v\rangle = \langle Aw, v\rangle = \langle w, Av\rangle = \lambda\langle w, v\rangle = 0.$$

Also $L_A w \in v^\perp$ woraus direkt folgt, dass $v^\perp$ invariant unter L_A ist.

Die letzte Behauptung beweisen wir wie folgt: Sei $v \in N_\lambda^\perp$. Für alle $w \in N_\lambda$ rechnen wir

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = 0.$$

□

10.02.2022

Literatur

[1] G. Fischer. *Lineare Algebra.* Fifth. Bd. 17. Grundkurs Mathematik. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1979, S. vi+248.

[2] H. Fischer und H. Kaul. *Mathematik für Physiker, Band 1.* Bd. 5. Auflage. Teubner, 2005.

[3] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Fourth. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1986, S. 643.

[4] U. Storch und H. Wiebe. *Lehrbuch der Mathematik. Band 1.* Second. Spektrum Lehrbuch. Analysis einer Veränderlichen. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, 1996, S. 608.