01.11.2021 HAUSAUFGABENBLATT 3a WS 2021/22

MATHEMATISCHE METHODEN

Dr. Michael Czerner Abgabetermin 08.11.2021

Aufgabe 1: Indexkalkül

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Für die verwendeten Indizes gilt immer $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie durch vollständiges Ausschreiben der Summen folgende Ausdrücke:

a) $\sum_{i,j} a_i \, b_j \, \delta_{ij}$

b) $\sum_{i,j,k} (b_j)^i \, a_k \, \delta_{kj}$

c) $\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \, \delta_{kj}$

d) $\frac{1}{2} \sum_{k,l,m} (k \, a_l \, \delta_{km} + l \, a_k \, \delta_{lm}) \, \delta_{kl} \, b_m$

e) $\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ij1} \, a_i \, b_j \, \vec{e}_k$ mit $i \to j \to k$ zyklisch

f) $\sum_{i,j,k} \varepsilon_{jik} \, a_i \, b_j \, \vec{e}_k \, \delta_{k3}$ mit $i \to j \to k$ zyklisch

Im Folgenden seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ (n-dimensionale Vektoren) definiert als:

$$\vec{a} = \sum_i a_i \, \vec{e}_i \quad \text{und} \quad \vec{b} = \sum_i b_i \, \vec{e}_i.$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke allgemein (Summenschreibweise):

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

c) $\vec{e}_k \cdot \vec{a}$ und $\vec{e}_j \cdot \vec{b}$

Aufgabe 2: Indexkalkül

a) Zeigen Sie die Epsilon-Delta-Relation:
$\sum_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj} = \delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}$

b) Zeigen Sie die Jacobi-Identität mit Hilfe des Indexkalküls:
$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$
(*Hinweis*: Verwenden Sie die Epsilon-Delta-Relation aus Aufgabenteil a))

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Indexkalküls, dass gilt:
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$.
(*Hinweis*: Verwenden Sie die Epsilon-Delta-Relation aus Aufgabenteil a))