Physikalisches Grundpraktikum Teil I
(Mechanik und Thermodynamik)
Versuch 6 Innendruck eines Luftballons

Anselm Maibaum (8104524), Finn Wagner (8102237)

7.03.2022

1 Versuchsziel und Versuchsmethode

In diesem Versuch wird mit Hilfe der Ausströmgeschwindigkeit der Luft eines Luftballons über die Bernoulligleichung sein Innendruck bestimmt. Also der Druck, der durch die Dehnung des Gummis entsteht.

2 Grundlagen

Die Bernoulligleichung beschreibt Druck und Strömung von Gasen und Flüssigkeiten.

$$p + \rho g h + \frac{\rho}{2} v^2 = p_t = const \tag{1}$$

Diese Form der Bernoulligleichung nennt man auch Druckgleichung. Sie setzt den totalen Druck p_t in Verbindung mit dem dynamische Druck $p_{dyn} = \frac{\rho}{2} v^2$, dem statischen Druck p und dem aus der Erdbeschleunigung entstehenden Druck $\rho g h$. Wichtig anzumerken ist hier, das die Bernoulligleichung eine ideale Strömung voraussetzt. Also dass das Fluid laminar fließend und inkompressibel ist und es keine innere Viskosität besitzt. Außerdem muss die Dichte ρ des Fluids, sowie der Druck entlang aller möglichen Stromlinien konstant sein. Vereinfachend nehmen wir auch an, das die Geschwindigkeit entlang aller Stromlinien identisch ist [3]. Außerdem wird die Reibung des Fluids an Oberflächen vernachlässigt. Für genauere Berechnung könnten Korrekturterme für Luft aus der Fachliteratur entnommen werden.

In unserem Versuch verwenden wir einen aufgeblasenen Luftballon, aus welchem Luft (auf Grund von Druckdifferenzen) mit v_a ausströmt. Für unseren Versuch spielt der Druck, der aus der Schwerkraft entsteht keine Rolle (siehe Fehlerrechnung (7)). Wir nehmen die Ausströmgeschwindigkeit während des Versuchs als konstant an.

Wir wissen, dass der Innendruck des Luftballons p_i größer ist als der Außendruck p_a und sich nur um den dynamischen Anteil mit der Ausströmungsgeschwindigkeit v_a unterscheidet. Mit der Dichte des strömenden Mediums Luft ρ folgt:

$$p_i = p_a + \frac{1}{2} \rho v_a^2 \tag{2}$$

Weiterhin nehmen wir den Innendruck des Luftballons als während des Versuchs konstant an.

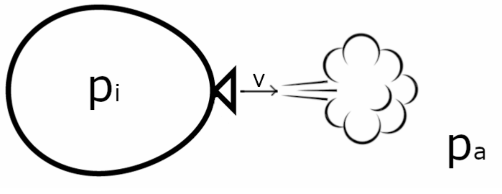

Abbildung 1: Veranschaulichung des Versuchs und Gleichung (2)

Ziel des Versuches ist es die Druckdifferenz $(p_i - p_a)$ also den Überdruck des Ballons [1] zu bestimmen. Wir messen dafür den Umfang des Luftballons und die Zeit, in der die Luft aus dem Ballon ausströmt. Daraus berechnen wir über das Volumen des Luftballons, die Öffnung, durch die Luft entweicht, sowie der Zeit die sie dazu braucht die Ausströmgeschwindigkeit. Diese können wir dann mit der Formel (2) in den Innendruck des Luftballons umrechnen.

3 Versuchsaufbau und Durchführung

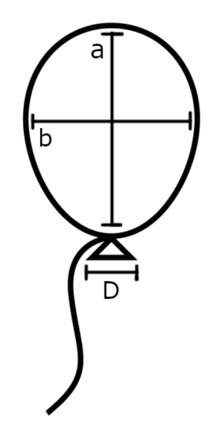

Abbildung 2: Messgrößen am Luftballon

3.1 Aufbau und Material

- Maßband mit mindestens Millimetergenauigkeit, am besten ein weiches Rollbandmaß
- Stoppuhr (Genauigkeit mindestens $\frac{1}{10}$s)
- Smartphone zur Videoaufnahme

3.2 Durchführung

1. Bestimmen Sie den Durchmesser D des Mundstückes.
2. Blasen Sie den Luftballon auf. Halten Sie das Ende zu. Bestimmen Sie den Umfang mithilfe des Maßbands. Messen Sie den Umfang von Mundstück bis zum obersten Punkt (Umfang a), sowie den Umfang der „Taille" (Umfang b) wie in Abbildung (3)
3. Lassen Sie die Luft aus dem Ballon ausströmen. Der Luftballon muss nicht festgehalten werden. Messen Sie die Zeit, in welcher die Luft aus dem Luftballon entweicht. Nutzen Sie die Stoppuhr oder werten Sie die Zeit am Video aus. Für Videoaufnahmen empfiehlt es sich den Ballon festzukleben. Siehe (11.2)
4. Wiederholen Sie die Messung (Schritt 2 & 3) drei mal und notieren Sie Ihre Ergebnisse.

4 Formeln

Die direkt gemessenen Größen sind der Umfang des Luftballons, die Ausströmzeit, sowie der Durchmesser des Mundstücks. Für unsere Auswertung brauchen wir die durchströmte Fläche des Mundstücks (Querschnittsfläche). Die Fläche also, durch die die Luft im Luftballon entweicht. Mit der Formel für die Fläche eines Kreises $A = \pi r^2$ und der Beziehung $\frac{D}{2} = r$ folgt:

$$A = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \tag{3}$$

Weiterhin berechnen wir das Volumen V des Luftballons. Wir nähern den Luftballon als kugelsymmetrisch und vernachlässigen das Volumen des Mundstücks. Der Umfang U einer Kugel (zwei Dimensionen) ist der eines Kreises mit $U = 2\pi r$. Umgeformt nach r ergibt sich $\frac{U}{2\pi} = r$. Wir berechnen den Durchschnitt der gemessenen Umfänge a und b um das Volumen besser als Kugel zu approximieren. Die Formel für das Volumen einer Kugel ist $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Um das Volumen aus dem Umfang zu berechnen setzen wir für den Radius ein:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{U}{2\pi}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{U^3}{8\pi^3} = \frac{1}{6}\frac{U^3}{\pi^2} \tag{4}$$

Nun stellen wir eine weitere Formel auf. In der Ausströmzeit t_a fließt das gesamte Volumen des Luftballons V mit der Geschwindigkeit v_a durch die Fläche des Mundstücks A. Wir formen nach v_a um:

$$V = A \cdot v_a \cdot t_a \Rightarrow v_a = \frac{V}{A \cdot t_a} \tag{5}$$

Hier setzen wir nun die Formel für das Volumen (4) und die durchströmte Fläche (3) ein.

$$v_a = \frac{V}{A \cdot t_a} = \frac{\frac{1}{6}\frac{U^3}{\pi^2}}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot t_a} = \frac{2}{3}\frac{U^3}{\pi^3 D^2 t_a} \tag{6}$$

Umstellungsprobe durch Einheitenrechnung:

$$\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

5 Versuchsergebnisse

Die gemessenen Werte (11.2) sind:
Für den Durchmesser des Mundstücks D wurden mit einem Geodreieck die folgenden drei Werte gemessen 1,15 cm, 1,1 cm, 1,2 cm.
Für die Umfänge und die Ausströmzeit wurden folgende Werte gemessen:

5.1 1. Messung

Umfang Luftballon	Umfang a 58,4 cm	Umfang b 51,1 cm
Ausströmzeit t_a	t_{a1} 1,34 s	t_{a2} 1,04 s

5.2 2. Messung

Umfang Luftballon	Umfang a 58,9 cm	Umfang b 54,8 cm
Ausströmzeit t_a	t_{a1} 1,32 s	t_{a2} 1,08 s

5.3 3. Messung

<table>
<tr><td>Umfang
Luftballon</td><td>Umfang a
61,5 cm</td><td colspan="2">Umfang b
56,4 cm</td></tr>
<tr><td>Ausströmzeit
t_a</td><td>t_{a1}
1,34 s</td><td>t_{a2}
1,04 s</td><td>t_{a3}
1,64 s</td></tr>
</table>

6 Auswertung

Wir berechnen aus den drei Versuchen jeweils die Ausströmgeschwindigkeiten v_1 bis v_3.
Zuerst berechnen wir den Innendurchmesser des Mundstücks aus den drei gemessenen Werten (11.2) 1,15 cm, 1,1 cm, 1,2 cm. Das ergibt

$$\frac{(1{,}15\,\mathrm{cm} + 1{,}1\,\mathrm{cm} + 1{,}2\,\mathrm{cm})}{3} = 1{,}15\,\mathrm{cm} = 0{,}0115\,\mathrm{m} \tag{7}$$

Die Fläche A des Mundstücks beträgt: $\pi\left(\frac{0{,}0115\,\mathrm{m}}{2}\right)^2 = 1{,}038\,69 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \approx 1{,}04\,\mathrm{cm}^2$.

6.1 Durchführungen

Für alle Durchführungen wurde ein Wert für a und ein Wert für b gemessen, sowie 2 bis 3 Zeitmessungen. Aus a und b wird der Durchschnitt U als Umfang verwendet. Als Zeit t_a wurde ebenso der Durchschnitt der gemessenen Ausströmzeiten verwendet.

6.1.1 Berechnen der 1. Ausströmgeschwindigkeit

Luftballonumfang: $a = 0{,}584\,\mathrm{m}, b = 0{,}511\,\mathrm{m}$. Durchschnitt: $U = 0{,}5475\,\mathrm{m}$
Ausströmzeit $\frac{1{,}34\,\mathrm{s}+1{,}04\,\mathrm{s}}{2} = 1{,}19\,\mathrm{s}$
Einsetzen der Werte in Formel (6):

$$v_a = \frac{2}{3}\frac{(0{,}5475\,\mathrm{m})^3}{\pi^3(0{,}0115\,\mathrm{m})^2 \cdot 1{,}19\,\mathrm{s}} = 22{,}4217\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

6.1.2 Berechnen der 2. Ausströmgeschwindigkeit

Luftballonumfang: $a = 0{,}589\,\mathrm{m}, b = 0{,}548\,\mathrm{m}$. Durchschnitt: $U = 0{,}5685\,\mathrm{m}$
Ausströmzeit $\frac{1{,}32\,\mathrm{s}+1{,}08\,\mathrm{s}}{2} = 1{,}2\,\mathrm{s}$
Einsetzen der Werte in Formel (6):

$$v_a = \frac{2}{3}\frac{(0{,}5685\,\mathrm{m})^3}{\pi^3(0{,}0115\,\mathrm{m})^2 \cdot 1{,}2\,\mathrm{s}} = 24{,}8928\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

6.1.3 Berechnen der 3. Ausströmgeschwindigkeit

Luftballonumfang: $a = 0{,}615\,\mathrm{m}, b = 0{,}564\,\mathrm{m}$. Durchschnitt: $U = 0{,}5895\,\mathrm{m}$
Ausströmzeit $\frac{1{,}45\,\mathrm{s}+1{,}61\,\mathrm{s}+1{,}64\,\mathrm{s}}{3} = 1{,}57\,\mathrm{s}$
Einsetzen der Werte in Formel (6):

$$v_a = \frac{2}{3}\frac{(0{,}5859\,\mathrm{m})^3}{\pi^3(0{,}0115\,\mathrm{m})^2 \cdot 1{,}57\,\mathrm{s}} = 21{,}2136\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

6.2 Mittlere Geschwindigkeit

$22{,}4217\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, 24{,}8928\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, 21{,}2136\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Wir berechnen den Mittelwert der Ausströmgeschwindigkeiten:

$$\frac{(22{,}4217\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 24{,}8928\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 21{,}2136\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})}{3} = \bar{v}_a = 22{,}8427\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{8}$$

6.3 Umrechnen zum Überdruck

Wir verwenden Formel (2) mit p_i als Innendruck des Luftballons und p_a als
Außen-/Umgebungsdruck. Zu bestimmen ist der Überdruck, also die Differenz zwischen Außen- und Innendruck $p_i - p_a$. Wir formen Formel (2) um zu:

$$(p_i - p_a) = \frac{1}{2}\rho v_a^2 \tag{9}$$

Gegeben ist in der Aufgabenstellung [3] für $P_a = 101\,325\,\mathrm{Pa}$ und $\rho = 1{,}2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ bei 20° Celsius auf Meereshöhe. Eingesetzt für die mittlere Geschwindigkeit:

$$(p_i - p_a) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot (22{,}8427\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 314{,}143\,\mathrm{Pa} \tag{10}$$

7 Fehlerrechnung

7.1 Theoriefehler

Um auf die in der Einleitung aufgestellte Bernoulligleichung (1) zu kommen wurden bereits sehr viele Annahmen gemacht. Wir betrachten nun noch den Fehler des aus der Schwerkraft erzeugten

Druckes. Der Versuch kann mit dem Luftballon und Mundstück horizontal zum Boden (Siehe Abbildung (3), a horizontal) durchgeführt werden. Damit spielt die Schwerkraft bei der Bewegung des Gases keine Rolle. Aber auch bei Messungen bei denen der Luftballon z.B. einfach losgelassen wird, ist der Effekt guten Gewissens zu vernachlässigen.

Beispielhaft berechnen wir den maximalen Druckbeitrag (hydrostatischer Druck [2]). Die Länge des Luftballons sei $h = 0{,}25\,\mathrm{m}$, die Dichte der Luft $\rho = 1{,}2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ [3] und die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$$0{,}25\,\mathrm{m} \cdot 1{,}2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}95\,\mathrm{Pa} \tag{11}$$

Es ergibt sich ein Fehler von $\pm 2{,}95\,\mathrm{Pa}$. Je nachdem wie der Luftballon orientiert ist, schwankt der Wert zwischen diesen Grenzen. Wie wir weiter unten sehen werden, ein vernachlässigbar kleiner Anteil am Gesamtfehler.

7.2 Messunsicherheit

Wir bestimmen zunächst die Messunsicherheiten für den Versuch. Direkt gemessen wurde der Umfang, daraus ergibt sich die Messunsicherheit ΔU und die Zeit für das entweichen der Luft, hier die Messunsicherheit Δs

Die Längenmessungen wurden mit einem handelsüblichen Maßband mit einer Genauigkeit von 1mm gemacht. Die Unsicherheit ΔU könnte man naiv als $\approx 0{,}1\,\mathrm{cm}$ annehmen, aus der Genauigkeit des Maßbands. Beim Durchführen des Versuches wird jedoch schnell klar, dass es gar nicht so einfach ist, ein Maßband an einen Ballon anzulegen. Das Maßband kann seitlich verrutschen und so den gemessenen Weg vergrößern oder man zieht zu stark und drückt den Ballon ein. Um den Messfehler für die Umfangsmessung besser abschätzen zu können, wurden sechs weitere Messungen bei einem aufgepusteten Ballon gemacht. Es wurde wiederholt der Umfang des selben Ballons gemessen, um abschätzen zu können um wie viel die Werte voneinander abweichen. Die Standardabweichung der sechs Messungen beträgt $\approx 0{,}9\,\mathrm{cm}$ (Berechnung in Abschnitt (11)) und wird hier als Abweichung angesetzt.

Die Auflösung der für den Versuch verwendeten Stoppuhr (Handystoppuhr) ist eine 1 cs. Die menschliche Reaktionszeit beträgt aber bereits $\approx 180\,\mathrm{ms}$ [7] Um auf den abklingenden Ton oder den sich nicht mehr verändernden Ballon zu reagieren, verstreicht also bereits eine ganze Weile. Bis dann die Stoppuhr gedrückt wurde sind bereits $\approx 0{,}2\,\mathrm{s}$ vergangen. Da die gleiche Verzögerung auch beim Beginn der Messung entsteht, schätzen wir den Messfehler auf $0{,}25\,\mathrm{s}$. Bei unseren Durchführungen stoppten mehrere Personen gleichzeitig nach einem Countdown die Zeit. Die Messungen der Person, die den Ballon selber losließ, war $\approx 0{,}2\,\mathrm{s}$ länger als die der anderen Messenden, was sich ebenfalls auf die Reaktionszeit zurückführen lässt. Deutlich genauere Messwerte sind mit Hilfe von Videoanalyse zu bekommen, wobei der Messfehler hier die Framerate des Videos ist. Nicht einfach zu beurteilen ist aber auch hier, wann der Ballon wirklich „leer“ ist, was die Messung weiter verfälscht.

Nach einigen weiteren Experimenten mit dem Luftballon zeigte sich außerdem, dass die Spannkraft nachließ und das Volumen nicht zu seiner Ausgangsgröße zurückkehrte, sich also der Innendruck des Luftballons änderte. Die hier verwendeten Messungen fanden am selben Ballon, mit den ersten drei Aufpustvorgängen statt, womit der Effekt noch vernachlässigbar ist.

Die durchströmte Fläche A wird als fehlerlos angenommen.

7.3 Fehlerfortpflanzung

Den Fehler für die berechnete Geschwindigkeit bekommen wir mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung (0.2.1.14 aus [4]) Wir setzen die Funktion zur Berechnung von v_a (6) durch die beiden fehlerbehafteten (D ist fehlerlos), direkt gemessenen Größen, in die Fehlerfortpflanzungsformel ein und berechnen den Messfehler für die Ausströmgeschwindigkeit.

$$\Delta v_a = \sqrt{\left(\frac{\partial v_a}{\partial t_a} \cdot \Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial v_a}{\partial U} \cdot \Delta U\right)^2} \tag{12}$$

Wir berechnen die in der Formel benötigten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial v_a}{\partial t_a} = \frac{2}{3}\frac{U^3}{\pi^3 D^2}\frac{-1}{t_a^2} \tag{13}$$

$$\frac{\partial v_a}{\partial U} = \frac{2}{3}\frac{1}{\pi^3 D^2 t_a} 3U^2 \tag{14}$$

Einsetzen:

$$\Delta v_a = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\frac{U^3}{\pi^3 D^2}\frac{-1}{t_a^2}\cdot \Delta t\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{1}{\pi^3 D^2 t_a} 3U^2 \cdot \Delta U\right)^2} \tag{15}$$

Vereinfachen:

$$\Delta v_a = \sqrt{\frac{4}{9}\frac{(\Delta t)^2 U^6}{\pi^6 D^4 t_a^4} + 4\frac{U^4 (\Delta U)^2}{\pi^6 D^4 t_a^2}} \tag{16}$$

7.4 Fehler der Geschwindigkeitsberechnung

7.4.1 Geschwindigkeitsfehler 1

Aus den Werten für U, t, Δt und ΔU folgt mit Formel (16)

$$U = 0{,}5475\,\mathrm{m},\ t = 1{,}19\,\mathrm{s}, \Delta t = 0{,}25\,\mathrm{s}, \Delta U = 0{,}009\,\mathrm{m} \Rightarrow 4{,}838\,48\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{17}$$

7.4.2 Geschwindigkeitsfehler 2

Aus den Werten für U, t, Δt und ΔU folgt mit Formel (16)

$$U = 0{,}5685\,\mathrm{m},\ t = 1{,}2\,\mathrm{s},\ \Delta t = 0{,}25\,\mathrm{s},\ \Delta U = 0{,}009\,\mathrm{m} \Rightarrow 5{,}319\,05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{18}$$

7.4.3 Geschwindigkeitsfehler 3

Aus den Werten für U, t, Δt und ΔU folgt mit Formel (16)

$$U = 0{,}5859\,\mathrm{m},\ t = 1{,}57\,\mathrm{s}, \Delta t = 0{,}25\,\mathrm{s}, \Delta U = 0{,}009\,\mathrm{m} \Rightarrow 3{,}452\,55\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{19}$$

7.5 Mittlerer Geschwindigkeitsfehler

Der mittlere Fehler der Geschwindigkeiten liegt bei

$$\frac{4{,}838\,48\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 5{,}319\,05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 3{,}452\,55\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3} = 4{,}536\,694\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{20}$$

7.6 Fehler umrechnen auf Überdruckfehler

Den Fehler des Überdrucks erhält man durch Einsetzen der mittleren Geschwindigkeit plus/minus ihren Fehler (20) in die Gleichung zur Berechnung des Überdrucks (9) mit $\rho = 1{,}2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$: Obere Schranke:

$$\Delta(p_i - p_a) = \frac{1}{2}\cdot\rho(v_a + \Delta v_a)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot\left(22{,}8427\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 4{,}536\,694\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 451{,}3155\,\mathrm{Pa} \tag{21}$$

Untere Schranke:

$$\Delta(p_i - p_a) = \frac{1}{2}\cdot\rho(v_a + \Delta v_a)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot\left(22{,}8427\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 4{,}536\,694\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 201{,}7529\,\mathrm{Pa} \tag{22}$$

Um nun den Fehler des Drucks aus dem errechneten Maximal- und Minimalwert zu erhalten ziehen wir den in Formel (10) berechneten Druck ab. Der Fehler des Drucks ist:

$$\begin{gathered} 451{,}3155\,\mathrm{Pa} - 314{,}143\,\mathrm{Pa} = 137{,}1725\,\mathrm{Pa} \\ 314{,}3155\,\mathrm{Pa} - 201{,}7529\,\mathrm{Pa} = 112{,}3901\,\mathrm{Pa} \end{gathered} \tag{23}$$

Wir wählen hier für den Fehler unserer Druckberechnung den Durchschnitt der beiden Fehler:

$$\frac{137{,}1725\,\mathrm{Pa} + 112{,}3901\,\mathrm{Pa}}{2} = 124{,}7813\,\mathrm{Pa} \tag{24}$$

Der Fehler für den Druck ist also $\pm 124{,}78\,\mathrm{Pa}$

8 Weltall

Wir betrachten nun den Fall, das wir den auf der Erde aufgepusteten Luftballon ins Weltall mitnehmen und dort die Luft entweichen lassen. Wir nehmen dabei an, dass sich die Größe des Ballons sich dabei nicht ändert. Die Temperatur des Luftballons nehmen wir als die gleiche Temperatur wie auf der Erde an, da sie im Weltall nicht abgegeben werden kann. Weiterhin nehmen wir an, dass die Dichte von Luft im Weltall konstant bleibt, was in der Realität natürlich nicht zutrifft, da im Weltall kein Atmosphärendruck die Luftmoleküle zusammen drückt.
Wir berechnen $t_a^{Weltall}$ über den gesamten Druck im Luftballon p_i auf der Erde. Wir setzen die Beziehung $(p_i - p_a) + p_a = p_i$ in Formel (2) ein. Hierbei ist p_a der Außendruck auf der Erde, p_i der Innendruck des Luftballons und $(p_i - p_a)$ der Überdruck und das Ergebnis unseres Versuches. p_w ist der Druck im Weltall und wir nähern ihn hier auf 0 bar (Druck außerhalb des Sonnensystems).

$$\begin{aligned} p_i &= p_w + \frac{1}{2}\rho v_a^2 \Leftrightarrow \\ (p_i - p_a) + p_a &= p_w + \frac{1}{2}\rho v_a^2 \Leftrightarrow \\ \frac{2((p_i - p_a) + p_a)}{\rho} &= v_a^2 \end{aligned} \tag{25}$$

Für die mittlere Geschwindigkeit v_a setzen wir die Beziehung (5) ein:

$$\begin{aligned} \frac{2((p_i - p_a) + p_a)}{\rho} &= \left(\frac{V}{A \cdot t_a}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \sqrt{\frac{2((p_i - p_a) + p_a)}{\rho}} &= \left(\frac{V}{A \cdot t_a}\right) \Leftrightarrow \\ t_a &= \frac{V}{A \cdot \sqrt{\frac{2((p_i - p_a) + p_a)}{\rho}}} \end{aligned} \tag{26}$$

Einheitenkontrolle:

$$\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^2 \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{Pa}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}} = \frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\frac{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s^2}}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}} = \frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}} = \mathrm{s} \tag{27}$$

Für das Volumen des Luftballons nehmen wir den Mittelwert der Umfänge und setzen Sie in die Formel für das Kugelvolumen (4) ein:

$$\frac{0{,}5475\,\mathrm{m} + 0{,}5685\,\mathrm{m} + 0{,}5895\,\mathrm{m}}{3} = 0{,}5685\,\mathrm{m} \Rightarrow \frac{1}{6}\frac{(0{,}5685\,\mathrm{m})^3}{\pi^2} = 0{,}003\,102\,70\,\mathrm{m}^3 \tag{28}$$

Wir setzen unser berechnetes Ergebnis für den Druck $(p_i - p_a) = 314{,}14\,\mathrm{Pa}$, Luftdruck auf der Erde $p_a = 101\,325\,\mathrm{Pa}$, das Volumen des Luftballons (28) $V = 0{,}003\,102\,70\,\mathrm{m}^3$, die Fläche des Mundstücks (6) $A = 1{,}038\,69 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$, sowie die Dichte von Luft $\rho = 1{,}2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ (Werte aus der Aufgabenstellung [4])

$$t_a^{Weltall} = \frac{0{,}003\,102\,70\,\mathrm{m}^3}{1{,}038\,69 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \cdot \sqrt{\frac{2(314{,}14\,\mathrm{Pa} + 101\,325\,\mathrm{Pa})}{1{,}2041\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}} = 0{,}0727\,\mathrm{s} = 72{,}7\,\mathrm{ms} \tag{29}$$

Wir berechnen im letzten Schritt den Faktor um den die Zeit $t_a^{Versuch}$ aus unserer Versuchsdurchführung länger ist als die Zeit $t_a^{Weltall}$. Wir setzen hier für die Ausströmzeit in unseren Versuchen auch den Durchschnitt der gemessenen Ausströmzeiten an:

$$t_a^{Versuch} = \frac{1{,}19\,\mathrm{s} + 1{,}2\,\mathrm{s} + 1{,}57\,\mathrm{s}}{3} = 1{,}32\,\mathrm{s} = t_a^{Versuch} \tag{30}$$

$$\frac{t_a^{Versuch}}{t_a^{Weltall}} = \frac{1{,}32\,\mathrm{s}}{0{,}0727\,\mathrm{s}} = 18,1568 \tag{31}$$

Die Ausströmzeit auf der Erde ist ≈ 18 mal länger als im Weltall.
Dass die Ausströmzeit im Weltall größer ist als auf der Erde ist logisch, da die Druckdifferenz

zwischen dem Balloninneren und der Umgebung im Weltall deutlich größer ist als auf der Erde. Fehlerbehaftet sind bei dieser Rechnung das Volumen des Luftballons, sowie der durch das Experiment bestimmte Innendruck des Luftballons. Wobei der Fehler des Drucks hier keine Rolle spielt, da der Atmosphärendruck auf der Erde drei Größenordnungen größer ist und als genau angenommen wird. Das Volumen ist aber durchaus sehr ungenau und hat den Hauptanteil am Fehler dieses Ergebnisses.

9 Ergebnis

Wir haben in diesem Experiment für den Überdruck eines Luftballons $p_i - p_a$ einen Wert von

$$314{,}14\,\mathrm{Pa} \pm 124{,}78\,\mathrm{Pa}$$

bestimmt. Das sind $0{,}003\,141\,4\,\mathrm{bar} \pm 0{,}001\,247\,8\,\mathrm{bar}$.
Der Überdruck des Luftballons sind also

$$\frac{314{,}4\,\mathrm{Pa}}{101\,325\,\mathrm{Pa}} \cdot 100 = 0,31\%$$

des Atmosphären Luftdrucks auf der Erde.

10 Diskussion

Das Ergebnis dieses Versuches ist auf Grund der sehr einfachen Messmethoden sehr ungenau. Der Fehler beträgt $\frac{124{,}78\,\mathrm{Pa}}{314{,}14\,\mathrm{Pa}} \cdot 100 = 39,72\%$ des gemessenen Wertes und ist eigentlich nur zum Einschätzen der Größenordnung zu gebrauchen. Zum Vergleich wurde der Ballon mit einer Handelsüblichen Fahrradpumpe mit Manometer aufgepumpt. Bei vollständig aufgepustetem Ballon war kein Ausschlag auf der Skala des Barometers (Werte von 1 bis 5 bar) zu sehen, was der bestimmten Größenordnung Glaubwürdigkeit verleiht.

Auch wenn man hier den Druckfehler des Schweredrucks durch geschickten Aufbau vermeiden kann (11.2), ist er im Vergleich zum Fehler der Messwerte verschwindend gering.

Außerdem ist das Ergebnis weder vergleichbar noch verallgemeinerbar, da die Ballonbeschaffenheiten unterschiedlich sind; jeder Luftballon unterschiedlich groß und schwer ist, aber auch verschieden schwer aufzupusten ist, sich die Spannkraft also auch zwischen gleich großen Luftballons stark unterscheiden kann. Weiterhin gilt für Gummi und damit für einen Luftballon nicht immer das Hook'sche Gesetz [6], was nicht berücksichtigt wurde. Das heißt, wie stark der Luftballon zum Start des Experiments aufgepustet war, hat einen Einfluss, der hier nicht berücksichtigt wurde. Damit ist auch die Annahme, das die Ausströmgeschwindigkeit gleich bleibt nicht korrekt. Bemerkbar macht sich dieser Umstand auch beim Aufpusten eines Luftballons. Am Anfang ist es deutlich schwerer als am Ende.

Das Experiment ließe sich durch mehrere Veränderungen deutlich genauer machen. Natürlich könnte man den Überdruck mit einem sehr genauen Manometer direkt messen. Man könnte, um näher an den echten Wert zu kommen, den Luftballon nicht als Kugel (ohne Mundstück), sondern als Ellipsoid (mit Mundstück) approximieren oder noch besser: das Volumen des Luftballons direkt über verdrängtes Wasser in einem Becken messen.

Um den Fehler in der Zeitmessung zu minimieren, ließe sich auch die Ausströmfläche verkleinern, sodass die Luft deutlich länger braucht, um aus dem Luftballon auszuströmen. So kommt man bereits mit Hilfe eines Strohhalms, mit dem das Mundstück erweitert wird, bereits auf Ausströmzeiten von über 10 Sekunden, womit die Messfehler nicht mehr so ins Gewicht fallen.

Das Ergebnis dieses Versuches war für uns sehr überraschend, da die Größenordnung des Überdrucks nur einige Millibar beträgt. Im Alltag begegnet man meist Drücken von 1 bar oder mehr, so dass die Ergebnisse auf den ersten Blick erstaunlich klein schienen. Abgewandelte Experimente, sowie der Versuch mit der Luftpumpe, bestätigen, dass ein Luftballon nur einen geringen Überdruck hat.

11 Messfehlerabschätzung

Wir führen einen weiteren kleinen Versuch durch, um die Messungenauigkeit des Umfangs bei einem Luftballon zu bestimmen. Dazu messen wir wiederholt den Umfang und untersuchen wie weit die Werte voneinander abweichen. Der Versuch wird an einem zugeknoteten Ballon durchgeführt, der sich deutlich leichter handhaben lässt als ein zugehaltener.

11.1 Durchführung

1. Luftballon aufpusten und zuknoten.
2. Mit Messmethode nach Wahl den Umfang (hier Umfang a) des Luftballons wiederholt messen.

11.2 Auswertung

Der Umfang a des Luftballons wurde 6 mal gemessen.

Messung	1	2	3	4	5	6
Messwert	71,5 cm	69 cm	71,25 cm	71,7 cm	71,2 cm	71,6 cm

Wir berechnen den Durchschnitt der Messwerte:

$$d = \frac{71{,}5\,\mathrm{cm} + 69\,\mathrm{cm} + 71{,}5\,\mathrm{cm} + 71{,}7\,\mathrm{cm} + 71{,}2\,\mathrm{cm} + 71{,}6\,\mathrm{cm}}{6} = 71{,}04\,\mathrm{cm}$$

Die Varianz:

$$V = \frac{1}{6}((71{,}5\,\mathrm{cm} - 71{,}04\,\mathrm{cm})^2 + (69\,\mathrm{cm} - 71{,}04\,\mathrm{cm})^2 + (71{,}25\,\mathrm{cm} - 71{,}04\,\mathrm{cm})^2$$
$$+(71{,}7\,\mathrm{cm} - 71{,}04\,\mathrm{cm})^2 + (71{,}2\,\mathrm{cm} - 71{,}04\,\mathrm{cm})^2 + (71{,}6\,\mathrm{cm} - 71{,}04\,\mathrm{cm})^2) = 0{,}865\,35\,\mathrm{cm}^2$$

Und zuletzt die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{0{,}865\,35\,\mathrm{cm}^2} = 0{,}902\,42\,\mathrm{cm}$$

Die Messungen lagen im Abstand von ca. 0,9 cm vom Mittelwert. Es ist also begründet anzunehmen, dass die Messunsicherheit ungefähr bei 0,9 cm liegt. [5]

Quellen

[1] Chemie.de. *Überdruck*. 2022. URL: `https://www.chemie.de/lexikon/%C3%9Cberdruck.html` (Abruf vom 09. 03. 2022).

[2] Lexas Geographie. *Luftdruck*. 2022. URL: `https://www.lexas.de/klima/klimaelemente/luft/luftdruck.aspx` (Abruf vom 09. 03. 2022).

[3] Dr. Jens Sören Lange. „Anleitung zum Physikalischen Grundpraktikum Teil I (Mechanik und Thermodynamik)“. Version 1.3. In: (28. Feb. 2022).

[4] Dr. Jens Sören Lange. „Physikalisches Grundpraktikum für Physik BSc, Physik Lehramt (L3), Materialwissenschaften BSc und Physik und Technologie für Raumfahrtanwendungen BSc. Versuchsanleitung Teil 1: Mechanik, Thermodynamik“. In: (1. Feb. 2020).

[5] Studienkreis: Die Nachhilfe. *Standardabweichung und Varianz berechnen einfach erklärt*. 2022. URL: `https://www.studienkreis.de/mathematik/varianz-standardabweichung/` (Abruf vom 09. 03. 2022).

[6] Leifi Physik. *Dehnung eines Gummibandes*. 2022. URL: `https://www.leifiphysik.de/mechanik/kraft-und-das-gesetz-von-hooke/aufgabe/dehnung-eines-gummibandes` (Abruf vom 12. 03. 2022).

[7] www.bussgeldkatalog.org. *Reaktionszeit: Rechtzeitig gebremst?* 2022. URL: `https://www.bussgeldkatalog.org/reaktionszeit/#` (Abruf vom 09. 03. 2022).

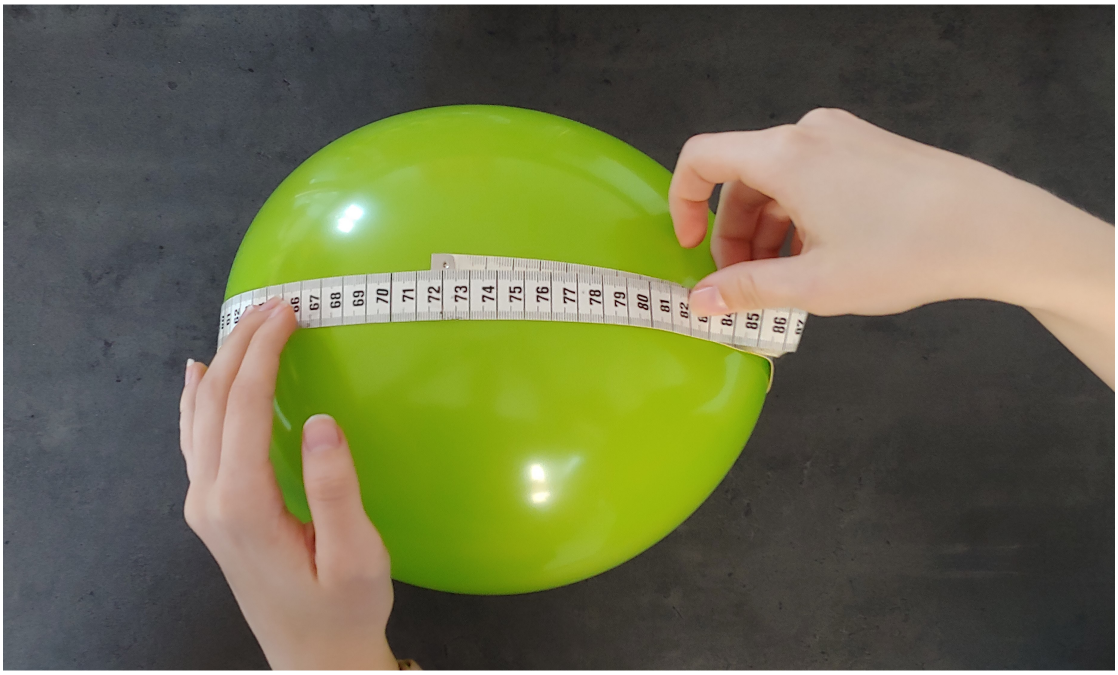

Abbildung 3: Messen des Luftballonumfangs a

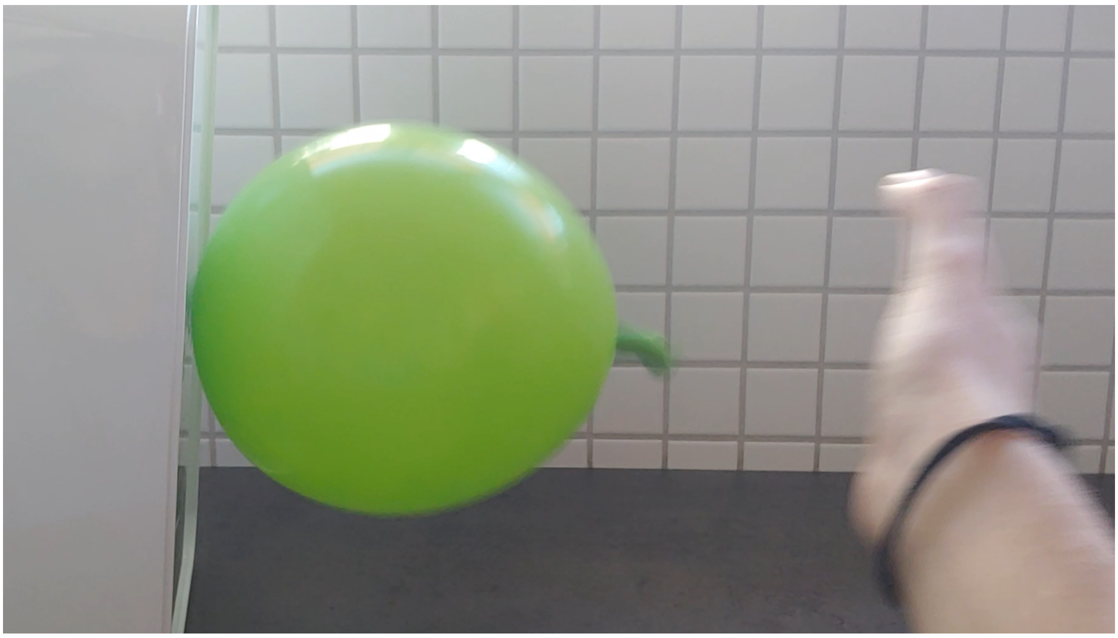

Abbildung 4: Standbild der Videoaufnahme der Ausstömungszeitmessung

Messungen Versuch 6, Innendruck eines Luftballons

3 Messungen

Durchmesser Mundstück D=	1,15cm; 1,1cm; 1,2cm

Geodreieck an Luftballonöffnung

Messungen

Zeit in der die Luft aus dem Luftballon entweicht

Umfang Luftballon	a = 58,4cm	b = 51,1cm
t_1	Person 1 1,34s	Person 2 1,04s

Umfang Luftballon	a = 58,9cm	b = 54,8cm
t_2	1,32s	1,08s

Umfang Luftballon	a = 61,5cm		b = 56,4cm
t_3	1,45s	1,61s	1,64s

Die Person die den Ballon losgelassen hat, hat die längste Zeit gestoppt.

Abbildung 5: Messwerte der drei Versuchsdurchführungen