

Physikalisches Grundpraktikum Teil I

(Mechanik und Thermodynamik)

Versuch 6 Innendruck eines Luftballons

Finn Wagner

7.03.2022

1 Versuchsziel und Versuchsmethode

In diesem Versuch wird mit Hilfe der Ausströmgeschwindigkeit der Luft eines Luftballons über die Bernoulligleichung sein Innendruck bestimmt. Also der Druck, der durch die Dehnung des Gummis entsteht.

2 Grundlagen

Die Bernoulligleichung beschreibt Druck und Strömung von Gasen und Flüssigkeiten.

$$p + \rho gh + \frac{\rho}{2}v^2 = p_t = \text{const} \quad (1)$$

Diese Form der Bernoulligleichung nennt man auch Druckgleichung. Sie setzt den totalen Druck p_t in Verbindung mit dem dynamischen Druck $p_{dyn} = \frac{\rho}{2}v^2$, dem statischen Druck p und dem aus der Erdbeschleunigung entstehenden Druck ρgh . Wichtig anzumerken ist hier, dass die Bernoulligleichung eine ideale Strömung voraussetzt. Also dass das Fluid laminar fließend, es inkompressibel ist und es keine innere Viskosität besitzt. Außerdem muss die Dichte ρ des Fluids, sowie der Druck entlang aller möglichen Stromlinie konstant sein. Vereinfachend nehmen wir auch an, dass die Geschwindigkeit entlang aller Stromlinien identisch ist. [3] Außerdem wird die Reibung des Fluids an Oberflächen vernachlässigt. Für genauere Berechnung könnten Korrekturterme für Luft aus der Fachliteratur entnommen werden.

In unserem Versuch verwenden wir einen aufgeblasenen Luftballon, aus welchem Luft (auf Grund von Druckdifferenzen) mit v_a ausströmt.

Für unseren Versuch spielt der Druck, der aus der Schwerkraft entsteht keine Rolle. Der Versuch kann mit dem Luftballon und Mundstück horizontal zum Boden (Siehe Abbildung 3, a horizontal) durchgeführt werden. Damit spielt die Schwerkraft bei der Bewegung des Gases keine Rolle. Aber auch bei Messungen bei denen der Luftballon z.B. einfach losgelassen wird, ist der Effekt zu vernachlässigen.

Beispielhaft berechnen wir den maximalen Druckbeitrag (hydrostatischer Druck [2]). Die Länge des Luftballons sei $h = 0.25 \text{ m}$, die Dichte der Luft $\rho = 1.2041 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ [3] und die Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$0.25 \text{ m} \cdot 1.2041 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2.95 \text{ Pa} \quad (2)$$

Es ergeben sich 2.95 Pa ein, wie wir später in der Auswertung sehen werden, vernachlässigbarer Beitrag.

Wir wissen dass der Innendruck des Luftballons p_i größer ist als der Außendruck p_a und sich nur um den dynamischen Anteil mit der Ausströmungsgeschwindigkeit v_a unterscheidet. Mit der Dichte des strömenden Mediums Luft ρ folgt:

$$p_i = p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 \quad (3)$$

Weiterhin nehmen wir den Innendruck des Luftballons als während des Versuchs konstant an. Ziel des Versuches ist es die Druckdifferenz $(p_i - p_a) := p_b$ also den Überdruck des Ballons ([1]) zu bestimmen.

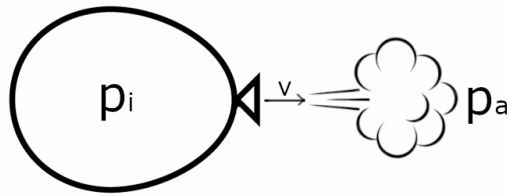


Abbildung 1: Veranschaulichung des Versuchs und Gleichung 3

3 Versuchsaufbau und Durchführung

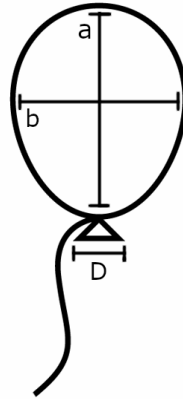


Abbildung 2: Messgrößen am Luftballon

3.1 Aufbau und Material

- Maßband mit mindestens ± 5 Millimetergenauigkeit, am besten ein weiches Rollbandmaß
- Stoppuhr (Genauigkeit mindestens $\frac{1}{10} s$)
- Smartphone zur Videoaufnahme

3.2 Durchführung

1. Bestimmen sie den Durchmesser D des Mundstückes.
2. Blasen sie den Luftballon auf. Halten sie das Ende zu. Bestimmen Sie den Umfang mithilfe des Maßband. Messen Sie den Umfang von Mundstück bis zum obersten Punkt (Umfang a), sowie den Umfang der „Tallie“ (Umfang b) TODO:Ref Schematik.
3. Lassen Sie die Luft aus dem Ballon ausströmen. Der Luftballon muss nicht festgehalten werden. Messen Sie die Zeit, in welcher die Luft aus dem Luftballon entweicht. Nutzen Sie die Stoppuhr oder werten sie die Zeit am Video aus. Für Videoaufnahmen empfiehlt es sich den Ballon festzukleben.10.2
4. Wiederholen Sie die Messung (Schritt 2 & 3) drei mal und notieren Sie ihre Ergebnisse.

4 Formeln

Die direkt gemessenen Größen sind der Umfang des Luftballons, die Ausströmzeit, sowie der Durchmesser des Mundstücks. Für unsere Auswertung brauchen wir die durchströmte Fläche des

Mundstücks (Querschnittsfläche). Die Fläche also, durch die die Luft im Luftballon entweicht. Mit der Formel für die Fläche eines Kreises $A = \pi r^2$ und der Beziehung $\frac{D}{2} = r$ folgt:

$$A = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \quad (4)$$

Weiterhin berechnen wir das Volumen V des Luftballons. Wir nähern den Luftballon als kugelsymmetrisch und vernachlässigen das Volumen des Mundstücks. Der Umfang U einer Kugel (2 Dimensionen) ist der eines Kreises mit $U = 2\pi r$. Umgeformt nach r ergibt sich $\frac{U}{2\pi} = r$. Wir berechnen den Durchschnitt der gemessenen Umfänge a und b um das Volumen besser als Kugel zu approximieren. Die Formel für das Volumen einer Kugel ist $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Um das Volumen aus dem Umfang zu berechnen setzen wir für den Radius ein:

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{U}{2\pi} \right)^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{U^3}{8\pi^3} = \frac{1}{6} \frac{U^3}{\pi^2} \quad (5)$$

Im nächsten Schritt stellen wir die im Skript gegebene Gleichung nach v_a um.

$$V = A \cdot v_a \cdot t_a \Rightarrow v_a = \frac{V}{A \cdot t_a}$$

TODO: Wo kommt die Formel her? Hier setzen wir nun die Formel für das Volumen (5) und die durchströmte Fläche (4) ein.

$$v_a = \frac{V}{A \cdot t_a} = \frac{\frac{1}{6} \frac{U^3}{\pi^2}}{\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \cdot t_a} = \frac{2}{3} \frac{U^3}{\pi^3 D^2 t_a} \quad (6)$$

Umstellungsprobe durch Einheitenrechnung:

$$\frac{m^3}{m^3 \cdot s} = \frac{m}{s}$$

5 Auswertung

Wir berechnen aus den drei Versuchen jeweils die Ausströmgeschwindigkeiten v_1 bis v_3 . Zuerst berechnen wir den Innendurchmesser des Mundstücks aus den drei gemessenen Werten
 TODO: Ref Messwerte 1.15 cm, 1.1 cm, 1.2 cm. Das ergibt

$$\frac{(1.15 \text{ cm} + 1.1 \text{ cm} + 1.2 \text{ cm})}{3} = 1.15 \text{ cm} = 0.0115 \text{ m} \quad (7)$$

Die Fläche A des Mundstücks beträgt $\pi \left(\frac{0.0115 \text{ m}}{2} \right)^2 = 1.03869 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

5.1 Durchführungen

Für alle Durchführungen wurde ein Wert für a und ein Wert für b gemessen, sowie 2 bis 3 Zeitmessungen. Aus a und b wird der Durchschnitt U als Umfang verwendet. Als Zeit t_a wurde ebenso der Durchschnitt der gemessenen Ausströmzeiten verwendet.

5.1.1 Durchführung 1

Luftballonumfang: $a = 0.584 \text{ m}$, $b = 0.511 \text{ m}$. Durchschnitt: $U = 0.5475 \text{ m}$

Ausströmzeit $\frac{1.34 \text{ s} + 1.04 \text{ s}}{2} = 1.19 \text{ s}$

Einsetzen der Werte in Formel (6):

$$v_a = \frac{2}{3} \frac{(0.5475 \text{ m})^3}{\pi^3 (0.0115 \text{ m})^2 \cdot 1.19 \text{ s}} = 22.4217 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.1.2 Durchführung 2

Luftballonumfang: $a = 0.589 \text{ m}$, $b = 0.548 \text{ m}$. Durchschnitt: $U = 0.5685 \text{ m}$

Ausströmzeit $\frac{1.32 \text{ s} + 1.08 \text{ s}}{2} = 1.2 \text{ s}$

Einsetzen der Werte in Formel (6):

$$v_a = \frac{2}{3} \frac{(0.5685 \text{ m})^3}{\pi^3 (0.0115 \text{ m})^2 \cdot 1.2 \text{ s}} = 24.8928 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.1.3 Durchführung 3

Luftballonumfang: $a = 0.615 \text{ m}$, $b = 0.564 \text{ m}$. Durchschnitt: $U = 0.5895 \text{ m}$

Ausströmzeit $\frac{1.45 \text{ s} + 1.61 \text{ s} + 1.64 \text{ s}}{3} = 1.57 \text{ s}$

Einsetzen der Werte in Formel (6):

$$v_a = \frac{2}{3} \frac{(0.5859 \text{ m})^3}{\pi^3 (0.0115 \text{ m})^2 \cdot 1.57 \text{ s}} = 21.2136 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5.2 Mittlere Geschwindigkeit

$22.4217162 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $24.8927916 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $21.25877656 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Wir berechnen den Mittelwert der Ausströmgeschwindigkeiten:

$$\frac{(22.4217162 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 24.8927916 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 21.25877656 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{3} = \bar{v}_a 22.85776145 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (8)$$

TODO: Kommastellen TODO Updaten

5.3 Umrechnen zum Überdruck

Wir verwenden Formel 3 mit p_i als Innendruck des Luftballons und p_a als Außen-/Umgebungsdruck. Zu bestimmen ist der Überdruck, also die Differenz zwischen Außen- und Innendruck $p_i - p_a$.

Wir formen 3 um zu:

$$(p_i - p_a) = \frac{1}{2} \rho v_a^2 \quad (9)$$

Gegeben ist in der Aufgabenstellung [3] für $P_a = 101325 \text{ Pa}$ und $\rho = 1.2041 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ bei 20° Celsius auf Meereshöhe. Eingesetzt für die mittlere Geschwindigkeit: TODO: Kommastellen

$$(p_i - p_a) = \frac{1}{2} \cdot 1.2041 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (22.85776145 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 314.557 \text{ Pa} \quad (10)$$

6 Fehlerrechnung

6.1 Messunsicherheit

Wir bestimmen zunächst die Messunsicherheiten für den Versuch. Direkt gemessen wurde der Umfang, daraus ergibt sich die Messunsicherheit ΔU und die Zeit für das entweichen der Luft, hier die Messunsicherheit Δs

Die Längenmessungen wurden mit einem handelsüblichen Maßband mit einer Genauigkeit von 1 mm gemacht. Die Unsicherheit ΔU könnte man naiv als $\approx 0.1 \text{ cm}$ annehmen, aus der Genauigkeit des Maßbandes. Beim Durchführen des Versuches wird jedoch schnell klar, dass es gar nicht so einfach ist ein Maßband an einen Ballon anzulegen. Das Maßband kann seitlich verrutschen und so den gemessenen Weg vergrößern oder man zieht zu stark und drückt den Ballon ein. Um den Messfehler für die Umfangsmessung besser abschätzen zu können wurden 6 weitere Messungen bei einem aufgepusteten Ballon gemacht. Es wurde wiederholt der gleiche Umfang gemessen, um abschätzen zu können um wie viel die Werte von einander abweichen. Die Standardabweichung der 6 Messungen beträgt $\approx 0.9 \text{ cm}$ und wird hier als Abweichung angesetzt.

Die Auflösung der für den Versuch verwendeten Stoppuhr (Handstoppuhr) ist eine 1 ms . Die menschliche Reaktionszeit beträgt aber bereits $\approx 180 \text{ ms}$ [6]. Um den abklingenden Ton oder den sich nicht mehr verändernden Ballon zu reagieren verstreicht also bereits eine ganze Weile.

Bis dann die Stoppuhr gedrückt wurde sind dann bereits $\approx 0.2\text{s}$ vergangen. Da die gleiche Verzögerung auch beim Beginn der Messung entsteht schätzen wir den Messfehler auf 0.25s . Bei unseren Durchführungen stoppten mehrere Personen gleichzeitig nach einem Countdown die Zeit. Die Messungen der Person die den Ballon selber losließ war $\approx 0.2\text{s}$ länger als die der anderen Messenden. Was sich ebenfalls auf die Reaktionszeit zurückführen lässt. Deutlich genauere Messwerte sind mit Hilfe von Videoanalyse zu bekommen, wobei der Messfehler hier die Framerate des Videos ist. Nicht einfach zu beurteilen, ist aber auch hier, wann der Ballon wirklich „leer“ ist. Was das Ergebnis weiter verfälscht.

Nach eingien weiteren Experimenten mit dem Luftballon zeigte sich außerdem das die Spannkraft nachließ und das Volumen nicht zu seiner Ausgangsgröße zurückkehrte, sich also der Innendruck des Luftballons änderte. Die hier verwendeten Messungen fanden am selben Ballon, mit den ersten drei Aufpustvorgängen statt, womit der Effekt noch vernachlässigbar ist.

Die durchströmte Fläche A wird als fehlerlos angenommen.

TODO: Alle Größen erklären! TODO: Sonstiges hochladen?

TODO: Ausströmgeschwindigkeit konstant berücksichtigt???

6.2 Fehlerfortpflanzung

Den Fehler für die berechnete Geschwindigkeit bekommen wir mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung (0.2.1.14 aus[4]) Wir setzen die Funktion zur Berechnung von v_a durch die beiden (fehlerbehafteten, D ist fehlerlos) direktgemessenen Größen, in die Fehlerfortpflanzungsformel ein und berechnen den Messfehler für die Ausströmgeschwindigkeit.

$$\Delta v_a = \sqrt{\left(\frac{\partial v_a}{\partial t_a} \cdot \Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial v_a}{\partial U} \cdot \Delta U\right)^2} \quad (11)$$

Wir berechnen die in der Formel benötigten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial v_a}{\partial t_a} = \frac{2}{3} \frac{U^3}{\pi^3 D^2} \frac{-1}{t_a^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_a}{\partial U} = \frac{2}{3} \frac{1}{\pi^3 D^2 t_a} 2U^2 \quad (13)$$

Einsetzen:

$$\Delta v_a = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \frac{U^3}{\pi^3 D^2} \frac{-1}{t_a^2} \cdot \Delta t\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{1}{\pi^3 D^2 t_a} 2U^2 \cdot \Delta U\right)^2} \quad (14)$$

Vereinfachen:

$$\Delta v_a = \sqrt{\frac{4}{9} \frac{(\Delta t)^2 U^6}{\pi^6 D^4 t_a^4} + 4 \frac{U^4 (\Delta U)^2}{\pi^6 D^4 t_a^2}} \quad (15)$$

6.3 Fehler der Durchführungen

6.3.1 Durchführung 1

Aus den Werten für U , t , Δt und ΔU folgt mit Formel 15

$$U = 0.5475 \text{ m}, t = 1.19 \text{ s}, \Delta t = 0.25 \text{ s}, \Delta U = 0.009 \text{ m} \Rightarrow 4.83588 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (16)$$

6.3.2 Durchführung 2

Aus den Werten für U , t , Δt und ΔU folgt mit Formel 15

$$U = 0.5685 \text{ m}, t = 1.2 \text{ s}, \Delta t = 0.25 \text{ s}, \Delta U = 0.009 \text{ m} \Rightarrow 5.31905 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (17)$$

6.3.3 Durchführung 3

Aus den Werten für U , t , Δt und ΔU folgt mit Formel 15

$$U = 0.5859 \text{ m}, t = 1.57 \text{ s}, \Delta t = 0.25 \text{ s}, \Delta U = 0.009 \text{ m} \Rightarrow 3.45255 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (18)$$

TODO: Werte falsch!!!

6.4 Mittlere Geschwindigkeitsfehler

TODO: Idee Fehler über mittelwerte der gemessenen Größen TODO: Darf man das? TODO: Update Der mittlere Fehler der Geschwindigkeiten liegt bei

$$\frac{4.835\,88\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 5.319\,05\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 3.452\,55\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3} = 4.536\,747\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (19)$$

6.5 Fehler umrechnen auf Überdruck

Den Fehler des Überdrucks erhält man durch einsetzen des Ergebnisses für den Fehler der mittleren Geschwindigkeit¹⁹ in die Gleichung zur Berechnung des Überdrucks⁹:

$$\Delta(p_i - p_a) = \quad (20)$$

7 Versuch mit verkleinerter Öffnung

TODO: ?

7.1 Weltall

Wir berechnen $t_a^{Weltall}$ über den gesamten Druck im Luftballon p_i Umformungen TODO: Faktor wie viel länger!!!

8 Ergebnis

TODO: Formel für Druck in Abhängigkeit in von Umfang und Zeit TODO: Diagramm mit Werten und Druckfunktion von Zeit und Umfang, in zwei Grafen mit jeweils einer Variable. TODO: Geschwindigkeitsdiagramm mit Fehlerbalken

Hier die korrigierten Werte? TODO: Kommastellen wegmachen

9 Diskussion

Ergebnis gut für Größenordnung sonst nichts, nicht veralgemeinerbar auf verschiedene Luftballons, Größe, Spannkraft etc.

Den Fehler, der entsteht, da das Mundstück nicht Teil des Luftballonvolumens ist und der Luftballon keine Kugel ist wird hier nicht berücksichtigt. Hätte aber einen erheblichen Einfluss auf die Ungenauigkeit. Sehr schwache Annahme. TODO: Abhängig von Ballonbeschaffenheit TODO: Abhängig wie doll aufgepustet? Weggemittelt TODO: Bernoullifehler Luft 2.95Pa TODO: FOTOS !!! TODO: Pascal in Verbindung mit Bar vergleichen. Sinnvolles Ergebnis?

10 Messfehler Abschätzung

Wir führen einen weiteren kleinen Versuch durch um die Messungenauigkeit des Umfangs bei einem Luftballon zu bestimmen. Dazu messen wir wiederholt den Umfang und untersuchen wie weit die Werte voneinander abweichen. Der Versuch wird an einem zugeknoteten Ballon durchgeführt, der sich deutlich leichter handhaben lässt als ein zugehaltener. Es wurde versucht diesen

10.1 Durchführung

1. Luftballon aufpusten und zuknoten.
2. Mit Messmethode nach Wahl den Umfang (hier Umfang a) des Luftballons wiederholt messen.

10.2 Auswertung

Der Umfang a des Luftballons wurde 6 mal gemessen.

Messung	1	2	3	4	5	6
Messwert	71.5cm	69cm	71.25cm	71.7cm	71.2cm	71.6cm

Wir berechnen den Durchschnitt der Messwerte:

$$d = \frac{71.5 \text{ cm} + 69 \text{ cm} + 71.5 \text{ cm} + 71.7 \text{ cm} + 71.2 \text{ cm} + 71.6 \text{ cm}}{6} = 71.04 \text{ cm}$$

Die Varianz:

$$V = \frac{1}{6} ((71.5 \text{ cm} - 71.04 \text{ cm})^2 + (69 \text{ cm} - 71.04 \text{ cm})^2 + (71.25 \text{ cm} - 71.04 \text{ cm})^2 + (71.7 \text{ cm} - 71.04 \text{ cm})^2 + (71.2 \text{ cm} - 71.04 \text{ cm})^2 + (71.6 \text{ cm} - 71.04 \text{ cm})^2) = 0.86535 \text{ cm}^2$$

Und zuletzt die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{0.86535 \text{ cm}^2} = 0.90242 \text{ cm}$$

Die Messungen lagen im Abstand von ca. 0.9 cm vom Mittelwert. Es ist also begründet anzunehmen, dass die Messunsicherheit ungefähr bei 0.9 cm liegt.[5]

Quellen

- [1] Chemie.de. *Überdruck*. 2022. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/%C3%9Cberdruck.html> (Abruf vom 09.03.2022).
- [2] Lexas Geographie. *Luftdruck*. 2022. URL: <https://www.lexas.de/klima/klimaelemente/luft/luftdruck.aspx> (Abruf vom 09.03.2022).
- [3] Dr. Jens Sören Lange. “Anleitung zum Physikalischen Grundpraktikum Teil I (Mechanik und Thermodynamik)”. Version 1.3. In: (28. Feb. 2022).
- [4] Dr. Jens Sören Lange. “Physikalisches Grundpraktikum für Physik BSc, Physik Lehramt (L3), Materialwissenschaften BSc und Physik und Technologie für Raumfahrtanwendungen BSc. Versuchsanleitung Teil 1: Mechanik, Thermodynamik”. In: (1. Feb. 2020).
- [5] Studienkreis: Die Nachhilfe. *Standardabweichung und Varianz berechnen einfach erklärt*. 2022. URL: <https://www.studienkreis.de/mathematik/varianz-standardabweichung/> (Abruf vom 09.03.2022).
- [6] www.bussgeldkatalog.org. *Reaktionszeit: Rechtzeitig gebremst?* 2022. URL: <https://www.bussgeldkatalog.org/reaktionszeit/#https://www.bussgeldkatalog.org/reaktionszeit/> # (Abruf vom 09.03.2022).

TODO: Messungen überarbeiten und anhängen

TODO: Aufgabenstellung nochmal genau lesen. TODO: Update .gitignore Datei mit sonstigem Output hier im Ordner

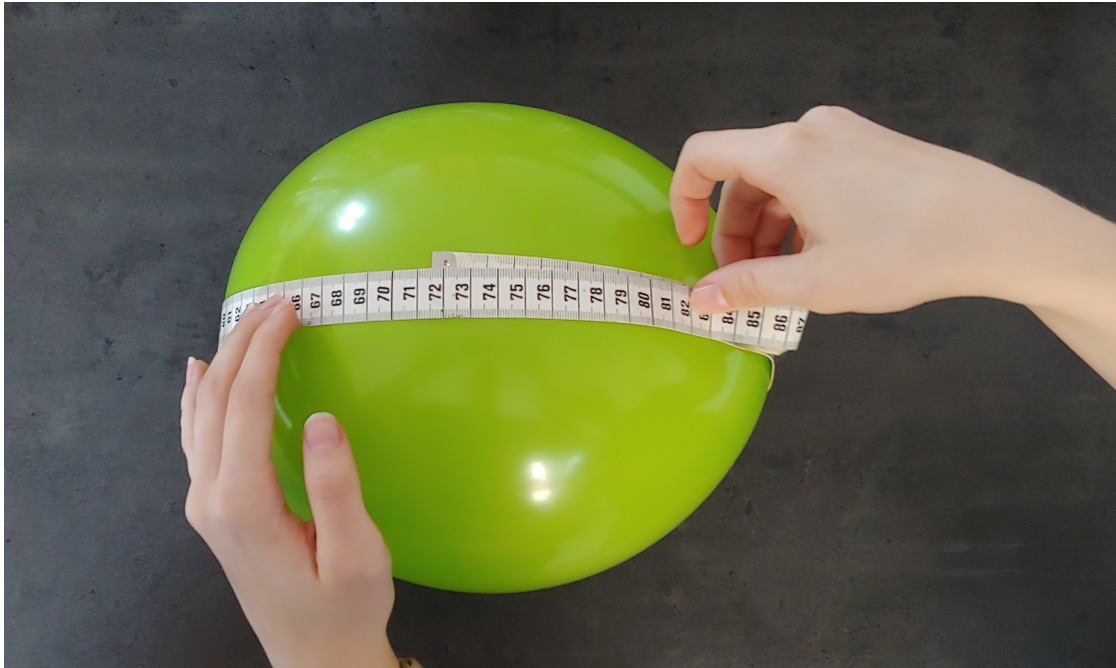


Abbildung 3: Messen des Luftballonumfangs a

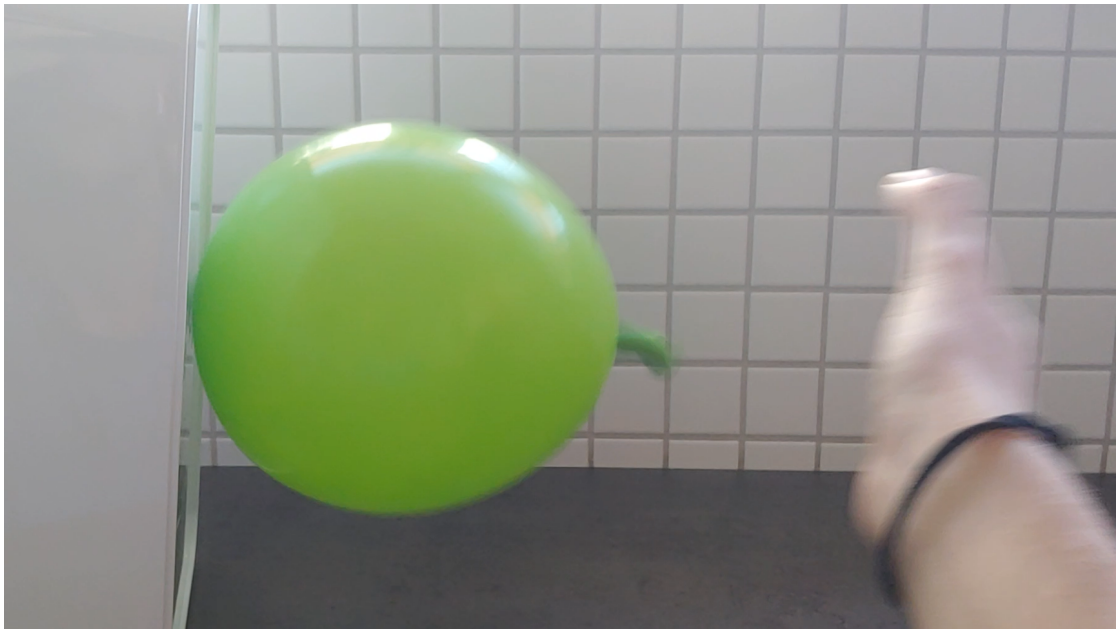


Abbildung 4: Standbild der Videoaufnahme der Ausstömungszeitmessung