Hausaufgabenblatt 3a Finn Wagner

1.)

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad ijk \in \{1,2,3\}$$

a) $\sum_{i,j} a_i b_j \underbrace{\delta_{ij}}_{i=j}$

$= \sum_i a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

b) $\sum_{i,j,k} (b_j)^i a_k \underbrace{\delta_{kj}}_{k=j}$

$= \sum_{i,j} (b_j)^i a_j$

$= a_1 (b_1 + b_1^2 + b_1^3) + a_2 (b_2 + b_2^2 + b_2^3)$
$+ a_3 (b_3 + b_3^2 + b_3^3)$

c) $\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \underbrace{\delta_{kj}}_{\text{Nur 1 wenn } k=j}$

Nur $\neq 0$ wenn $k \neq j$

$\Rightarrow 0$

d) $\frac{1}{2} \sum_{k,l,m} (k a_l \delta_{km} + l a_k \delta_{lm}) \delta_{kl} b_m$

$= \frac{1}{2} \sum_{k,l,m} k a_l \underbrace{\delta_{km}}_{k=m} \underbrace{\delta_{kl}}_{k=l} b_m + l a_k \underbrace{\delta_{lm}}_{l=m} \underbrace{\delta_{kl}}_{k=l} b_m$

$k = m = l$

$= \frac{1}{2} \sum_k k a_k b_k + k a_k b_k$

$= \frac{1}{2} \sum_k 2 k a_k b_k = \sum_k k \cdot a_k b_k$

$= 1 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 + 3 a_3 b_3$

e) $\sum_{i,j,k} \underbrace{\varepsilon_{i,j,1}}\, a_i b_j \underline{e}_k$ mit $i \to j \to k$ zyklisch

damit $\neq 0$ und damit i, j, k zyklisch
ist $[2,3,1]$ die einzige Mögl
(Für antizyklisch $[3,2,1]$, aber $i \to$ [illegible]

$= a_2 b_3 \underline{e}_1$

f) $\sum_{i,j,k} \varepsilon_{jik}\, a_i b_j \underline{e}_k \underbrace{\delta_{k3}}_{k=3}$ mit $i \to j \to k$ zyklisch

Damit ist $[j, i, 3]$ mit $i \to j$ immer 0 oder antizyklisch $[2,1,3]$

$= -a_1 b_2 \underline{e}_3$

(ii) $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$

$\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i \qquad \underline{b} = \sum_i b_i \underline{e}_i$

a) $\underline{a} + \underline{b} = \sum_i a_i \underline{e}_i + \sum_i b_i \underline{e}_i$

$= \sum_i a_i \underline{e}_i + b_i \underline{e}_i = \sum_i (a_i + b_i) \underline{e}_i$

b) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_i a_i \underline{e}_i \sum_j b_j \underline{e}_j$

$= \sum_{i,j} a_i \underbrace{\underline{e}_i b_j \underline{e}_j}$

In Orthonormalbasis $\to \delta_{ij}$

$= \sum_{i,j} a_i b_j \delta_{ij}$ (Vergleiche a))

$= \sum_i a_i b_i$

c)

$\underline{e}_k \cdot \underline{a}$

$= e_k \cdot \sum_i a_i \underline{e}_i = \sum_i a_i \underbrace{\underline{e}_i \underline{e}_k}$

→ In ON-Basis δ_{ik}

Nur 1 wenn i = k

$= a_k$

$\underline{e}_j \cdot \underline{b} = \underline{e}_j \cdot \sum_i b_i \underline{e}_i = \sum_i b_i \underline{e}_i \underline{e}_j$

$= b_j$

2)

$\sum_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj} \overset{!}{=} \delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}$

1. Fall $i = k$

Damit ist immer $\varepsilon_{ijk} = 0$

und damit auch $\sum_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj}$

$= \sum_j 0 \cdot \varepsilon_{lmj} = 0$

Die rechte Seite ist auch immer 0,

da $\delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}$

Ersetze k mit i: $\delta_{kl} \to \delta_{il}$, $\delta_{km} \to \delta_{im}$

$\Rightarrow \delta_{im} \delta_{il} - \delta_{im} \delta_{il} = 0$

Beide Seiten sind 0 ✓

2. Fall $l = m$

Ähnlich zum ersten Fall.

Ist $l=m \Rightarrow \varepsilon_{lmj} = 0 \Rightarrow \sum_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj}$
$= \sum_j \varepsilon_{ijk} \cdot 0 = 0$

$\underset{\downarrow \atop \delta_{il}}{\delta_{im}} \delta_{kl} - \delta_{il} \underset{\downarrow \atop \delta_{kl}}{\delta_{km}} \xRightarrow[\text{m mit l}]{\text{Ersetze}} \delta_{il}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kl} = 0$

Beide Seiten sind gleich 0 ✓

3. Fall $(\neg 1.\text{Fall} \land \neg 2.\text{Fall}) \land l,m \notin \{i,k\}$
$(i \neq k \land l \neq m) \land l,m \notin \{i,k\}$

Die Summe $\sum_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj}$ ist nur dann nicht 0 wenn beide ε mind. 1 mal nicht null sind (für 1 bestimmtes j)
Ist OBDA $j=1$, so gilt
$\varepsilon_{i1k} \varepsilon_{lm1}$. Für eine zyklische oder antizyklische Konfiguration ist es notwendig das die beiden anderen Indexvariablen (nicht j) 2 und 3 sind.
Gilt aber $l,m \in \{i,k\}$ ist dies unmöglich. Es folgt $\sum_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj} = 0$
Genauso für andere j.
Für $\delta_{im}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{km}$ folgt, da mit $l,m \notin \{i,k\}$, $i \neq l$, $i \neq m$, $k \neq m$, $k \neq l$ gelten:

$$\underset{\substack{i \neq m \\ \Downarrow \\ 0}}{\delta_{im}} \cdot \underset{\substack{k \neq l \\ \Downarrow \\ 0}}{\delta_{kl}} - \underset{\substack{i \neq l \\ \Downarrow \\ 0}}{\delta_{il}} \cdot \underset{\substack{k \neq m \\ \Downarrow \\ 0}}{\delta_{km}} = 0$$

Beide Seiten sind 0 ✓

4. Fall. $(i \neq k \wedge l \neq m) \wedge l, m \in \{i, k\}$

Sei hier wie im 3. Fall OBdA $j = 1$.

Für die beiden ε gibt es nun folgende Indexkombinationen

	$i1k$	$lm1$
(i)	$i = m = 2$	$k = l = 3$
(ii)	$i = m = 3$	$k = l = 2$
(iii)	$i = l = 2$	$k = m = 3$
(iv)	$i = l = 3$	$k = m = 2$

Wählt man i, k gibt es nur ein j das sie zyklisch oder antizyklisch sind und damit $\varepsilon \neq 0$

(i) (a)ntizyklisch

$$\varepsilon_{213}\,\overset{a}{\varepsilon_{321}} = 1$$

$$\underset{1}{\delta_{22}}\,\underset{1}{\delta_{33}} - \underset{0}{\delta_{23}}\,\underset{0}{\delta_{32}} = 1 \quad ✓$$

(ii) (z)yklisch

$$\overset{z}{\varepsilon_{312}}\,\varepsilon_{231} = 1$$

$$\underset{1}{\delta_{33}}\,\underset{1}{\delta_{22}} - \underset{0}{\delta_{23}}\,\underset{0}{\delta_{23}} = 1 \quad ✓$$

(iii)

$$\overset{a}{\varepsilon_{213}}\,\overset{z}{\varepsilon_{231}} = -1$$

$$\underset{0}{\delta_{23}}\,\underset{0}{\delta_{32}} - \underset{1}{\delta_{22}}\,\underset{1}{\delta_{33}} = -1 \quad ✓$$

(iv)

$$\overset{z}{\varepsilon_{312}}\,\overset{a}{\varepsilon_{321}} = -1$$

$$\underset{0}{\delta_{32}}\,\underset{0}{\delta_{23}} - \underset{1}{\delta_{33}}\,\underset{1}{\delta_{22}} = -1 \quad ✓$$

Genauso für andere j. Stimmen i oder k mit j überein, so sind beide ε gleich 0

Alle Fälle sind gleich. Die Aussage gilt.

b)

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\underline{b} \times \underline{c} = \sum_{lmn} \varepsilon_{lmn} \, b_l \, c_m \, \underline{e}_n$$

$$a \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \, a_i \left(\sum_{lmn} \varepsilon_{lmn} \, b_l \, c_m \, \underline{e}_n \right)_j \underline{e}$$

$$\Rightarrow \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \, a_i \left(\sum_{lmn} \varepsilon_{lmn} \, b_l \, c_m \, \underline{e}_n \underline{e}_j \right) \underline{e}_k$$

$$\Rightarrow \quad '' \quad \left(\sum_{lmn} \varepsilon_{lmn} \, b_l \, c_m \, \delta_{nj} \right) \underline{e}_k$$

Ersetze n mit j

$$\Rightarrow \quad '' \quad \left(\sum_{lmj} \varepsilon_{lmj} \, b_l \, c_m \right) \underline{e}_k$$

$$\Rightarrow \sum_{ijklm} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj} \, a_i \, b_l \, c_m \, \underline{e}_k$$

Äquivalent mit den anderen beiden Termen

Variablen umbenennen.

$$\sum_{ijklm} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj} \, a_i \, b_l \, c_m \, \underline{e}_k$$

$$+ \sum_{ijklm} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj} \, b_i \, c_l \, a_m \, \underline{e}_k \qquad m \to i,\ i \to l,\ l \to m$$

$$+ \sum_{ijklm} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj} \, c_i \, a_l \, b_m \, \underline{e}_k \qquad l \to i,\ m \to l,\ i \to m$$

Es ergibt sich:

$$\sum_{ijklm} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj} \, a_i \, b_l \, c_m \, \underline{e}_k$$

$$+ \sum_{ijklm} \varepsilon_{ljk} \varepsilon_{mij} \, a_i \, b_l \, c_m \, \underline{e}_k$$

$$+ \sum_{ijklm} \varepsilon_{mjk} \varepsilon_{ilj} \quad a_i b_l c_m \underline{e}_k$$

Ausklammern

$$= \sum_{ijklm} \left(\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmj} + \varepsilon_{ljk} \varepsilon_{mij} + \varepsilon_{mjk} \varepsilon_{ilj} \right)$$
$$a_i b_l c_m \underline{e}_k$$

Ersetzen mit δs

$$= \sum_{ijklm} a_i b_l c_m \underline{e}_k \cdot$$

$$\underbrace{\left(\cancel{\delta_{im} \delta_{kl}} - \cancel{\delta_{il} \delta_{km}} + \cancel{\delta_{ll} \delta_{km}} - \cancel{\delta_{lm} \delta_{ki}} + \cancel{\delta_{ml} \delta_{ki}} - \cancel{\delta_{mi} \delta_{kl}} \right)}_{0}$$

$$= \sum_{ijklm} a_i b_l c_m \underline{e}_k \cdot 0 = 0 \quad \square$$

c) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d})$

$$= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \underline{e}_k \cdot \sum_{lmn} \varepsilon_{lmn} c_l d_m \underline{e}_n$$

$$= \sum_{ijklmn} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} a_i b_j \underline{e}_k c_l d_m \underline{e}_n$$

$\delta_{kn} \Rightarrow k = n$

$$= \sum_{ijklm} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} a_i b_j c_l d_m$$

Das zyklische Vertauschen der Index-variablen beim ε ändert das Ergebnis nicht. $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \varepsilon_{jki} \varepsilon_{lmk}$

Einsetzen von a)

$$= \sum_{ijlm} (\delta_{jm}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{im})\, a_i b_j c_l d_m$$

$$= \sum_{ijlm} \delta_{jm}\delta_{il}\, a_i b_j c_l d_m - \delta_{jl}\delta_{im}\, a_i b_j c_l d_m$$

$$= \sum_{ijlm} (\delta_{jm}\, b_j d_m)(\delta_{il}\, a_i c_l) - (\delta_{jl}\, b_j c_l)(\delta_{im}\, a_i d_m)$$

$$= \sum_{jm} b_j d_m\, \underline{e}_j \underline{e}_m \sum_{il} a_i c_l\, \underline{e}_i \underline{c}_l - \sum_{jl} b_j c_l\, \underline{e}_j \underline{e}_l \sum_{im} a_i d_m\, \underline{e}_i \underline{e}_m$$

$$= (\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{b}\cdot d) - (\underline{a}\cdot d)(\underline{b}\cdot c)$$

$\square$