

Aufgabenblatt 4, Mathematik für Physiker 1

Florian Adamczyk, Finn Wagner

14.11.2021

A 4.1

Zeigen sie mit Hilfe von Definition 2.24, dass die folgenden Folgen konvergieren. Definition 2.24 ist das Epsilonkriterium:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon |x_n - x| < \epsilon \text{ mit } \epsilon \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

(i) $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$

Behauptung: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert 0, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Es soll also gelten: $|a_n - 0| < \epsilon$ mit $\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$ beliebig.

Da $(-1)^n$ als Folge immer zwischen -1 und 1 wechselt ist ihr Betrag 1. Damit lässt sich die linke Seite wie folgt umformen.

$$|a_n - 0| = |a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$$

Es gilt nun also:

$$\frac{1}{n} < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

Das ist eine wahre Aussage. Diese ist equivalent zum Supremumsaxiom (Folgerungen aus dem Supremumsaxiom (c)) Also war die Behauptung wahr. 0 ist der Grenzwert und die Folge konvergiert.

(ii) $b_n := \frac{3n+1}{2n-1}$

Behauptung: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert $\frac{3}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

Es soll also gelten: $|b_n - \frac{3}{2}| < \frac{5}{2}\epsilon$ mit $\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$ beliebig.

Wir formen die linke Seite wie folgt um:

$$\left| b_n - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right|$$

Erweitere $\frac{3}{2}$ mit $n - \frac{1}{2}$ und vereinfache:

$$= \left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3(n-\frac{1}{2})}{2(n-\frac{1}{2})} \right| = \left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3n-\frac{3}{2}}{2n-1} \right| = \left| \frac{3n+1-(3n-\frac{3}{2})}{2n-1} \right| = \left| \frac{\frac{5}{2}}{2n-1} \right|$$

Die Betragsstriche sind nicht notwendig, da $2n-1 > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

$$= \left| \frac{\frac{5}{2}}{2n-1} \right| = \frac{\frac{5}{2}}{2n-1}$$

Wir schätzen nun nach oben ab. $2n-1$ ist immer größer gleich als n . Damit ist $\frac{1}{2n-1}$ immer kleiner gleich als $\frac{1}{n}$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{2n-1} \leq \frac{\frac{5}{2}}{n}$$

Setzt man nun wieder in die Behauptung ein, so ergibt sich:

$$\frac{\frac{5}{2}}{n} \leq \frac{5}{2}\epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

Das ist eine wahre Aussage. Diese ist equivalent zum Supremumsaxiom (Folgerungen aus dem Supremumsaxiom (c)) Also war die Behauptung wahr. $\frac{3}{2}$ ist der Grenzwert und die Folge konvergiert.

- (iii) $c_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ Behauptung: Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert 0, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
 Es soll also gelten: $|c_n - 0| < \epsilon$ mit $\mathbb{R} \ni \epsilon > 0$ beliebig.
 Wir wissen das $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert. Also

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon^2 \text{ mit } \epsilon \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Nehmen wir nun diese Ungleichung und ziehen auf beiden Seiten die Wurzel, erhalten wir auf Grund der Monotonie der Wurzelfunktion:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon^2 &= \left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon^2 = \frac{1}{n} < \epsilon^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n}} < \sqrt{\epsilon^2} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}} < \epsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 < \epsilon = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \epsilon \end{aligned}$$

Was zu beweisen war. Damit ist der Grenzwert 0 und die Folge konvergiert.

A 4.2

Sei $M \in \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, und sei $s \in \mathbb{R}$.

- (a) Zeigen Sie: Genau dann ist $s = \sup M$, wenn s eine obere Schranke von M ist und wenn eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M existiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$.

Beweisen der Äquivalenz durch Folgerung der Aussagen in beide Richtungen.

Es gilt s ist Supremum von M .

Es folgt das s insbesondere auch eine obere Schranke von M ist.

- Fall s ist ein Element von M , also s ist das Maximum von M .
 So existiert immer die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} := s$, deren Elemente in M liegen und die gegen s konvergiert.
- Fall s ist kein Element von M .
 Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} := s - \frac{1}{n}$. Die Folge (y_n) ist immer kleiner als s und konvergiert gegen s . Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die gesuchte Folge. Für alle Elemente von x_n gelte $x_n \in M$ und $x_n > y_n$ für ein bestimmtes n .

Zu zeigen: x_n ist immer definiert.

Angenommen es gäbe kein Element in M das größer als y_n für ein bestimmtes n ist, so wäre y_n eine obere Schranke der Menge M . Da aber y_n gegen s konvergiert und damit immer kleiner als s ist, kann y_n keine obere Schranke sein, weil es kleiner ist als das Supremum s . Es folgt, dass x_n immer definiert ist.

Nun schätze man $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten und nach oben ab. Es gilt $x_n \geq y_n$ da x_n per Konstruktion immer größer gewählt wurde. Außerdem ist x_n immer kleiner als s , da s kein Element der Menge M ist. Es folgt:

$$y_n \leq x_n \leq s$$

Wendet man nun Satz 2.27(f) (Sandwichtheorem) an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s - \frac{1}{n} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s \\ &\Rightarrow s \leq x \leq s \end{aligned}$$

Die Folge (x_n) konvergiert gegen s .

Es folgt, dass s eine obere Schranke ist, und es eine Folge in der Menge gibt, die gegen s konvergiert.

Nun in die andere Richtung.

Es gilt s ist eine obere Schranke von M und es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$

Angenommen s ist kein Supremum. So muss es eine obere Schranke geben die kleiner als s ist. Dieses Supremum nennen wir k .

$$k < s \Rightarrow k + \epsilon_0 = s \text{ mit } \epsilon_0 > 0$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_0 = s - k$$

Da es eine Folge gibt deren Folgenglieder in M liegen und diese Folge gegen s konvergiert gilt:

$$\exists N_{\epsilon_0} \in \mathbb{N} \forall n \geq N_{\epsilon_0} |x_n - s| < \epsilon_0$$

Setzen wir nun unser festes ϵ_0 ein, so folgt:

$$|x_n - s| < \epsilon_0 \Leftrightarrow |x_n - s| < s - k$$

1. Fall x_n ist größer als s
Das ist ein Widerspruch, da k als Supremum angenommen wurde ($s > k$), ein Element der Menge kann nicht größer als das Supremum sein.
2. Fall x_n ist kleiner gleich s
Man ersetze die Betragsstriche mit einem Minus.

$$\begin{aligned} |x_n - s| < s - k &\Leftrightarrow -(x_n - s) < s - k \\ \Leftrightarrow -x_n + s < s - k &\Leftrightarrow -x_n < -k \\ &\Leftrightarrow x_n > k \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, da k als Supremum angenommen wurde, ein Element der Menge kann nicht größer als das Supremum sein.

Es folgt, dass es keine kleinere Schranke als geben kann. s ist also das Supremum.

- (b) Wenn die Menge unendlich viele Elemente hat, können Sie dann die Folge aus (a) so wählen, dass $x_n < x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?
Angenommen, eine solche Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ würde existieren. Wähle die Menge $M = [0, 1] \cup 2$
Angenommen die 2 ist ein Folgenglied von (x_n) . Nach Folgen definition muss aber das nächste Element der Folge echt größer sein als 2. Diese Element läge nicht mehr in der Menge. Die 2 ist also kein Folgenglied.
Alle Folgenglieder sind also kleiner gleich 1.
Die Folge (x_n) konvergiert gegen das Supremum von M , hier 2. In mathematischer Notation:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\epsilon : |x_n - 2| < \epsilon$$

Wähle $\epsilon = 0,5$:

$$|x_n - 2| < \epsilon \Rightarrow |x_n - 2| < 0,5$$

Da alle x_n kleiner gleich 1 sind, lässt sich der Betrag durch ein Minus umschreiben:

$$-(x_n - 2) < 0,5 \Leftrightarrow -x_n - 2 < 0,5 \Leftrightarrow -x_n < 2,5 \Leftrightarrow x_n > 2,5$$

Da alle x_n kleiner gleich 1 sind kann x_n nicht größer sein als 2,5. Nein, man kann die Folge nicht streng monoton wachsend wählen.

A 4.3

- (i) Konvergieren die folgenden Folgen. Wenn ja berechnen Sie auch den Grenzwert.

$$a_n = \frac{5n^5 + 4n^3 - n + 5}{10n^5 + n^2 - n + 100}$$

Ausklammern von n^5

$$\frac{5n^5 + 4n^3 - n + 5}{10n^5 + n^2 - n + 100} = \frac{n^5}{n^5} \left(\frac{5 + 4\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + 5\frac{1}{n^5}}{10 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + 100\frac{1}{n^5}} \right) = \frac{5 + 4\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + 5\frac{1}{n^5}}{10 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + 100\frac{1}{n^5}}$$

Wir wissen das $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert. Mit Satz 2.27(e) folgt daraus dass auch $\frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$ gegen 0 konvergiert. Ebenso alle weiteren Folgen n^{-x} . Mit Satz 2.27(c) und Satz 2.27(e) folgt das eine Summe von λn^{-x} ebenfalls gegen Null konvergiert. Bildet man nun den Grenzwert von a_n so gehen alle Terme außer der 5 und der 10 gegen Null. Der Grenzwert ist also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 4\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4} + 5\frac{1}{n^5}}{10 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + 100\frac{1}{n^5}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Die Folge konvergiert gegen ein Halb.

$$b_n := \frac{n^2}{2^n}$$

Die Folge b_n lässt sich nach unten abschätzen gegen 0, da sowohl Nenner als auch Zähler immer größer als 0 sind. Außerdem lässt sie sich nach oben abschätzen. Nach Lemma 2 ist 2^n immer größer als n^3 für n genügend groß. $\frac{1}{2^n}$ ist also immer kleiner als $\frac{1}{n^3}$. Schätzt man also nach oben ab ergibt sich.

$$\frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

Die Folge $\frac{1}{n}$ geht gegen 0. Nach dem Sandwichtheorem Satz 2.27(f) gilt also:

$$0 \leq b_n \leq \frac{1}{n}$$

b_n konvergiert also gegen 0.

- (ii) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge, also $a_1 = a_2 := 1$ und für $n \geq 3$ ist $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$. Wir definieren nun

$$u_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $u \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie u .

Wir fangen an und formen die Definition der Folge um. Wir setzen die Definition für a_{n+1} ein und vereinfachen.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Wir wollen nun die Definition von u_n wieder einsetzen um u_n rekursiv zu definieren.

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}$$

Da u_n gegen u konvergiert, konvergiert auch u_{n-1} gegen u . Wir bilden auf beiden Seiten den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{u_{n-1}} \\ \Leftrightarrow u &= 1 + \frac{1}{u} \quad | \cdot u \\ \Leftrightarrow 0 &= -u + 1 + \frac{1}{u} \quad | \cdot u \\ \Leftrightarrow 0 &= -u^2 + u + 1 \quad | \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow 0 &= u^2 - u - 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich mit der pq-Formel lösen.

$$\begin{aligned} u_1, u_2 &= -\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)} \\ \Leftrightarrow u_1, u_2 &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \\ \Leftrightarrow u_1, u_2 &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Da $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ negativ ist, die Folge aber aus Konstruktion nicht negativ werden kann, ist der Grenzwert $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

A 4.4

Gibt es Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass:

- (i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) , sodass $x_{n_k} \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$. Wähle x_n als Folge von rationalen Zahlen nach dem Cantorsches Diagonalargument. Bilde die Teilfolge von (x_n) die gegen x konvergiert wie folgt: Wähle für das k .te Folgenglied ein Folgenglied aus x_n das hinter dem $(k-1)$.ten Folgenglied in x kommt. Für das erste Folgenglied wähle beliebig. Zusätzlich muss jedes Folgenglied von (x_{n_k}) die Bedingung $x - \frac{1}{k} < x_{n_k} < x + \frac{1}{k}$ erfüllen.

Zu zeigen x_{n_k} ist immer definiert

Da es nach Lemma 4 unendlich viele rationale Zahlen gibt, mit denen man mit beliebig Genauigkeit x_{n_k} approximieren kann, liegt auch immer einer dieser Zahlen im gegebenen Intervall um x_{n_k} . Diese Zahl oder eine ihrer unendlich vielen besseren Approximation liegt damit auch in (x_n) nach der $(k-1)$.ten Stelle. Da es vor $x_{n_{(k-1)}}$ nur endlich viele Zahlen in (x_n) gibt.

Jedes Folgenglied von (x_{n_k}) liegt nach Konstruktion zwischen den beiden Werten der Folgen $(x - \frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(x + \frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$. Beide Folgen konvergieren, da sie nur eine Summe aus Konstante und der Folge $\frac{1}{n}$ sind gegen x .

Wendet man nun Satz 2.27(f) (Sandwichtheorem) an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x - \frac{1}{k} &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x + \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow x \leq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq x \end{aligned}$$

Die Folge (x_{n_k}) konvergiert gegen x . Somit gibt es eine Folge deren Teilfolgen gegen jeden Wert $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.

- (ii) Für alle $x \in (0, 1)$ gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) , sodass $x_{n_k} \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$, aber für $y \notin (0, 1)$ existiert keine solche Teilfolge.

Angenommen es gäbe eine solche Folge x_n . Sei $M := \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$

Analog zur Aufgabe A 4.2 (a) lässt sich die Aussage $s = \inf M \Leftrightarrow s$ ist unter Schranke und es existiert eine Folge x_n in M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ zeigen.

Zu zeigen 0 ist Infimum von M : Untere Schranke trivial, die Null ist immer kleiner gleich dem Betrag eines Wertes.

Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $m \in M$, sodass gilt $|m - 0| < \epsilon$

Das gilt, da es immer eine Teilfolge von (x_n) gibt die gegen einen Wert $\frac{\epsilon}{2}$ konvergiert. Daraus folgt:

$$\exists N_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_{\frac{\epsilon}{2}} : |m - \frac{\epsilon}{2}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Also ist $|m - \frac{\epsilon}{2}| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |m| < \epsilon$

Lemma 1

$$2n - 1 \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Die Aussage beweisen wir mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang $n = 1$

$$2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = n$$

Induktionsannahme:

$$2n - 1 \geq n \Rightarrow 2(n + 1) - 1 \geq (n + 1)$$

Induktionsschritt:

Wir zeigen, dass die Aussage für $n + 1$ gilt, indem wir sie zu einer wahren Aussage führen.

$$\begin{aligned} 2(n + 1) - 1 &\geq n + 1 \\ \Leftrightarrow 2n + 2 - 1 &\geq n + 1 \\ \Leftrightarrow 2n + 1 &\geq n + 1 \\ \Leftrightarrow 2n &\geq n \\ \Leftrightarrow 2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Durch Umformungen erhalten wir eine wahre Aussage. Damit ist bewiesen das $2n - 1$ immer größer gleich als n ist.

Lemma 2

$$n^3 \leq 2^n \quad \text{für } n \geq 10$$

Die Aussage beweisen wir mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang $n = 10$

$$10^3 = 1000 \leq 1024 = 2^{10}$$

Induktionsannahme:

$$n^3 \leq 2^n \Rightarrow (n + 1)^3 \leq 2^{n+1} \quad \text{für } n \geq 10$$

Induktionsschritt:

Klammern auflösen

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 &\leq 2^{n+1} \\ \Leftrightarrow (n + 1)^3 &\leq 2 \cdot 2^n \\ \Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\leq 2 \cdot 2^n \end{aligned}$$

Nach Lemma 3 lässt sich $3n^2 + 3n + 1$ nach oben gegen n^3 abschätzen.

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + n^3$$

Nach Induktionsannahme kann man n^3 nach oben gegen 2^n abschätzen.

$$n^3 + n^3 = 2n^3 \leq 2 \cdot 2^n \leq 2^{n+1}$$

Es gilt also insgesamt:

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + n^3 = 2n^3 \leq 2 \cdot 2^n \leq 2^{n+1}$$

Was zu beweisen war. Damit gilt die Anfangsausagen nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Lemma 3

$$n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1 \quad \text{für } n \geq 10$$

Die Aussage beweisen wir mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang $n = 10$

$$10^3 = 1000 \geq 331 = 300 + 30 + 1 = 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$$

Induktionsannahme:

$$n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1 \Rightarrow (n + 1)^3 \geq 3(n + 1)^2 + 3(n + 1) + 1 \quad \text{für } n \geq 10$$

Induktionsschritt:*Klammern auflösen:*

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 &\geq 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 \\
\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\geq (n^2 + 2n + 1) + (3n + 1) + 1 \\
\Leftrightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &\geq n^2 + 5n + 3 \mid -3n^2, -3n, -1 \\
&\Leftrightarrow n^3 \geq -3n^2
\end{aligned}$$

Weil $n \in \mathbb{N}$ ist $3n^2$ immer größer 0. Und $-3n^2$ immer kleiner 0. $n^3 \geq -3n^2$ ist also eine wahre Aussage. Somit gilt die Induktion.

Lemma 4 Zu zeigen: jede reelle Zahl lässt sich beliebig nah durch beliebig viele verschiedene rationale Zahlen immer besser approximieren.

Es gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} \exists q_{\epsilon, x} \in \mathbb{Q} : |q_{\epsilon, x} - x| < \epsilon$$

Eine reelle Zahl lässt sich beliebig nah durch eine rationale Zahl approximieren.

Aus dieser Aussage folgt die Existenz einer reellen Zahl q_1

Nun sei der Abstand von q_1 zu x : $|q_1 - x| =: \epsilon_1$

Setzt man dieses Epsilon nun in die Aussage ein, so erhält man: $|q_2 - x| < \epsilon_1$

Dieses q_2 ist echt kleiner als q_1 , da gilt: $|q_2 - x| < \epsilon_1 \Leftrightarrow |q_2 - x| < |q_1 - x|$

Durch beliebig oft wiederholtes Anwenden dieser zwei Schritte, erhält man eine Folge von $q \in \mathbb{Q}$ die sich x immer weiter annähert.