Panagiotis Konstantis
Tim Fiernkranz

Justus-Liebig Universität Gießen
Wintersemester 2021/2022

Mathematik für Physiker 1
Aufgabenblatt 10

Abgabe: 18.01.2022 bis 15:00 Uhr
in der Übungsgruppe. **Bitte in 2-3er Gruppen abgeben**.

Hausaufgaben (20 Punkte)

A10.1 Zeigen Sie, dass die Funktion (4)

$$G : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad G(x) := \begin{cases} x\sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist. Zeigen Sie dann, dass $g := G'$ nicht stetig ist.
Anmerkung: Man kann sogar zeigen, dass g nicht mal Riemann-integrierbar ist.

A10.2 Beweisen Sie Satz 6.11. Zeigen Sie also, dass für stetige Funktionen $f, g : I \to \mathbb{C}$ und $a, b \in I$ gelten die folgenden Eigenschaften: (5)

a) $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
b) $\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$ für $\lambda \in \mathbb{C}$
c) $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ für alle $a < c < b$
d) $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$
e) $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b Re(f)(t)\,dt + i\int_a^b Im(f)(t)\,dt$

A10.3 Berechnen Sie die folgenden Integrale (8)

$$i)\ \int_0^1 t^2\,dt \qquad ii)\ \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dx$$

$$iii)\ \int_1^2 \ln(t)\,dx \qquad iv)\ \int_0^\pi \sin(t)^2\,dt$$

$$v)\ \int_0^{\pi/4} \arctan(t)\,dt \qquad vi)\ \int_1^2 \frac{1+2t}{t+t^2}\,dt$$

$$vii)\ \int_0^2 \frac{-2-2t}{8+6t+t^2}\,dt$$

A10.4 Für $\mathbb{R} \ni a < b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und eine Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, sodass für alle $a < r < b$ die Funktion $f|_{[a,r]}$ Riemann integrierbar ist, ist das uneigentliche Riemann-Integral definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{r\to b}\int_a^r f(x)\,dx,$$

falls der Grenzwert existiert. Existiert der Grenzwert, so heißt f (uneigentlich) Riemann-integriebar.
Sei nun $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ stetig und monoton fallend.

a) Zeigen Sie, dass f genau dann uneigentlich integrierbar ist, falls die Reihe (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergent ist.

b) Untersuchen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Reihe (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha$$

konvergent ist.