

Aufgabenblatt 2, Mathematik für Physiker 1

Finn Jannik Wagner

28.10.2021

A 2.1

(i)

Zeigen Sie, dass die Abbildung aus Bsp. 1.15 (b) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (n, m) \mapsto 2^{n-1}(2m-1)$ eine Bijektion ist.

Hierzu sei die Umkehrfunktion (Inverse) g definiert als:

Verfahren für $x \in \mathbb{N}$ beliebig: Man suche für x die größte Zweierpotenz die es restlos teilt. Nun nehme man den Logarithmus zur Basis 2 dieser Potenz. Hierzu addiere man 1. Dieser Wert ist n . Für m teile man x durch n , addiere 1 hinzu und teile durch 2.

Es folgt das f , auf Grund der Existenz der Umkehrfunktion, bijektiv ist.

(ii)

Zeigen Sie für M_1, M_2 injektiv das auch $M_1 \times M_2$ injektiv ist. Aus der Vorlesung ist bekannt das eine Teilmenge einer abzählbaren Menge wieder abzählbar ist.

Lemma 1 Jede Vereinigung von abzählbaren Mengen ist wieder abzählbar

Seien M_1, M_2 sind abzählbare Mengen. Zu zeigen ist das $M_1 \cup M_2$ abzählbar ist.

Dafür muss eine bijektive Abbildung $\phi(n) : \mathbb{N} \rightarrow M_1 \times M_2$ existieren. Sei

$$\phi(n) = \begin{cases} m_1 \in M_1 & \text{für } n = 1 \\ m_{(n-1)/2} \in M_1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ m_{n/2} \in M_2 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist surjektiv da alle Elemente $m_1, m_2, m_3, m_4, \dots \in M_1$ und alle Elemente $m_1, m_2, m_3, m_4, \dots \in M_2$ angenommen werden. Diese Abbildung ist außerdem injektiv, da jeder natürlichen Zahl nach Definition nur ein Mengenelement zugewiesen wird.

$M_1 \times M_2$ lässt sich auch schreiben als $\bigcup_{m \in M_1} m \times M_2$
 $m \times M_2$ ergibt $|M_2|$ 2er-Tupel bei denen das erste Element m ist. Die Menge dieser Tupel ist gleich groß zu M_2 und ist damit auch abzählbar. Vereinigt man nun alle abzählbaren Tupelmengen so erhält man, da eine Vereinigung von abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist, das $M_1 \times M_2$ abzählbar ist.

A 2.2

(i) Es seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ injektiv. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f$ injektiv ist.

f injektiv: $\forall a_1, a_2 \in A \ f(a_1) = f(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$

g injektiv: $\forall b_1, b_2 \in B \ g(b_1) = g(b_2) \Leftrightarrow b_1 = b_2$
 Zu zeigen ist: $\forall a_1, a_2 \in A \ g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Leftrightarrow a_1 = a_2$
 $\forall a_1, a_2 \in A \ g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, da g injektiv ist, folgt $f(a_1) = f(a_2)$. Da
 aber auch f injektiv ist, folgt $a_1 = a_2$
 Die linke Richtung gilt auch, da f und g Funktionen sind.
 Damit ist $g \circ f$ injektiv

- (ii) Zeigen Sie dass die Umkehrung falsch ist, indem Sie eine injektive Funktion $g \circ f$ angeben, bei der f oder g nicht injektiv ist.
- $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : a \mapsto a$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : a \mapsto a^2$
 $g \circ f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : a \mapsto a^2$
 f ist injektiv, g ist nicht injektiv, aber $g \circ f$ ist wieder injektiv.

A 2.3

- Annahme: $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ ist abzählbar. Es folgt die Existenz einer surjektiven Abbildung $\phi: \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$
 Sei $\phi(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$
 $\phi(n) = 0, a_1^n a_2^n a_3^n a_4^n \dots$ mit $a_i^n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Sei nun $z = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$ mit

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{für } a_i^n \neq 1 \\ 2 & \text{alle anderen Fälle} \end{cases}$$

Diese Zahl weicht an der n-ten Nachkommastelle von allen $\phi(n)$ ab. Sie ist somit anders als alle $\phi(n)$, weil sie sich immer an der n-ten Nachkommastelle unterscheidet.

- Es gilt $z \in (0, 1)$ aber $z \notin \text{Bild}(\phi)$ was ein Widerspruch zur Surjektivität von ϕ ist. Also war die Annahme falsch. *q.e.d*

A 2.4

- (i) Es sei K ein Körper. Zeigen sie, dass $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$
 Zu zeigen ist das das neutrale Element der Addition bei der Multiplikation mit einem anderen Element des Körpers sich selbst ergibt.

$$0 = \overset{\text{Erweitert mit } 0 \cdot a}{=} 0 \cdot a - 0 \cdot a = (0+0) \cdot a - 0 \cdot a = \overset{\text{mit Distributivgesetz}}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a - 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a$$

- (ii) Zeigen sie das \mathbb{F}_n kein Körper ist falls $n \in \mathbb{N}$ keine Primzahl ist.
 mit $\mathbb{F}_n: (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$
 und $\mathbb{Z}_m: (\{0, \dots, m-1\}, +, \cdot)$
 wobei für \mathbb{Z}_m $+, \cdot$ definiert sind als:

$$\begin{aligned} + &:= \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m \ (z_1 + z_2) \mod m \\ \cdot &:= \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m \ (z_1 \cdot z_2) \mod m \end{aligned}$$

Ist n keine Primzahl, so lässt sie sich in ihre Primfaktoren zerlegen. Ein Primfaktor von n ist immer kleiner als n. Nun teilt man die Menge der

Primfaktoren in zwei P_1, P_2 mit $P_1, P_2 \neq \emptyset$. Seien q_1, q_2 das Produkt aller Zahlen der Mengen P_1 und P_2 . Setzt man nun q_1 und q_2 in \cdot ein. So ergibt $q_1 \cdot q_2$ wieder n. $n \bmod n = 0$. Da in diesem Ausdruck aber weder q_1 noch q_2 die Null waren ist die Multiplikation nicht nullteilerfrei. Somit ist \mathbb{F}_n kein Körper.

(iii) Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$m\mathbb{Z} := \{m \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

Zeigen Sie dass $(m\mathbb{Z}, +)$ mit der von \mathbb{Z} induzierten Addition eine abelsche Gruppe ist.

Wir überprüfen die Gruppen Axiome:

- (a) Assoziativgesetz \rightarrow Assoziativ mit $+$ aus \mathbb{Z}
- (b) Existenz eines neutralen Elements: Die 0 ist immer in $m\mathbb{Z}$, weil $0 \in \mathbb{Z}$ und $m \cdot 0 = 0$
- (c) Existenz eines inversen Elements: $\forall x \in m\mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{Z} : x = m \cdot z \Rightarrow (-x) = m \cdot (-z)$ Mit $(-x) \in m\mathbb{Z}$, da $(-z) \in \mathbb{Z}$
- (d) Abgeschlossenheit von $+$ auf \mathbb{Z} : $+: m\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z} \rightarrow^! m\mathbb{Z}$
 $\forall a, b \in m\mathbb{Z} \exists x, y \in \mathbb{Z} \ a := mx, b := my \Rightarrow a + b = mx + my = m(x + y)$
 Weil $(x + y) \in \mathbb{Z}$ ist $+$ auf $m\mathbb{Z}$ abgeschlossen.
- (e) Abelsche Gruppe: $a + b = mx + my = m(x + y) = m(y + x) = my + mx = b + a$

Zeigen Sie weiter, dass für alle $z \in \mathbb{Z}$ und $a \in I$ (I ist die Menge der Vielfachen von m) gilt, dass $az \in m\mathbb{Z}$:

Für beliebige $a \in I$ und $z \in \mathbb{Z}$

$a := m \cdot b$ mit $b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot z = m \cdot b \cdot z \Rightarrow az \in m\mathbb{Z}$ weil $b \cdot z \in \mathbb{Z}$