Aufgabenblatt 7, Mathematik für Physiker 1

Florian Adamczyk, Finn Wagner

26.11.2021

A 7.1

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n-4}}(x+1)^{n+2} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty}(3n^3+4n^2-4)x^n$$

konvergiert und berechnen Sie für die erste Reihe auch eine geschlossene Formel in Abhängigkeit von x.
Der Konvergenzradius R einer Potenzreihe ist $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n-4}}(x+1)^{n+2}$
Die Summe lässt sich umformen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n-4}}(x+1)^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n} \cdot 2^{-4}}(x+1)^n \cdot (x+1)^2$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 16 \frac{1}{2^{3n}}(x+1)^n \cdot (x+1)^2 = 16(x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{3n}}$$
$$= 16(x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2^3}\right)^n = 16(x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{8}\right)^n$$

Wir ersetzen nun $y := x+1$ ein, damit ergibt sich:

$$16(x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{8}\right)^n = 16y^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{8}\right)^n$$

Damit ist $a_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n$. Die Folgenglieder der Reihe (a_n) sind immer positiv, als positive Potenz von $\frac{1}{8}$.
Wir berechnen nun den Konvergenzradius der Reihe:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{8}\right)^n\right|}}$$
$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left(\frac{1}{8}\right)^n}} = \frac{1}{\limsup \left(\frac{1}{8}\right)}$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)} = 8$$

Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{8}\right)^n$ ist also 8. Damit gilt: $y \in (-8, 8)$. Setzten wir x wieder zurück ein erhalten wir: $x \in (-9, 7)$.

Da wir die Reihe bereits umgeformt haben, erkennen wir mit $q := \left(\frac{x+1}{8}\right)$ an der Form:

$$16(x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{8}\right)^n = 16(x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

die geometrische Reihe mit der Variablen q. Die Bedingung, dass die geometrische Reihe konvergiert ist, das $|q| < 1$. Hier $|\frac{(x+1)}{8}| < 1$. Setzen wir -9 ein erhalten wir $\frac{-9+1}{8} = -1$, für 7, $\frac{7+1}{8} = 1$. Da die geometrische Reihe nicht für -1 und 1 konvergiert, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n-4}}(x+1)^{n+2}$ für alle $x \in (-9, 7)$.

Von der umgeformten Reihe können wir auch den Grenzwert berechnen, sie konvergiert zu:

$$16(x+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n = 16(x+1)^2 \frac{1}{1-q}$$

Also:

$$16(x+1)^2 \frac{1}{1-\left(\frac{x+1}{8}\right)} = 16(x+1)^2 \frac{1}{\left(\frac{1-x}{8}\right)} = \frac{128(x+1)^2}{7-x}$$

Die Reihe lässt sich also als geschlossene Formel wie folgt angeben:

$$f : (-9, 7) \to \mathbb{R};\ x \to \frac{128(x+1)^2}{7-x}$$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(3n^3 + 4n^2 - 4)x^n$
a_n ist hier $(3n^3 + 4n^2 - 4)$.
Die Reihe (a_n) ist immer positiv. Der kubische Term von (a_n) ist nie negativ, da $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist der quadratische Term immer positiv und größer als 4. Da der quadratische Term wächst, ist $4n^2 - 4 \geq 0$.
Wir berechnen den Konvergenzradius der Reihe:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|3n^3 + 4n^2 - 4|}}$$
$$= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{3n^3 + 4n^2 - 4}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{(n^3)}\sqrt[n]{3 + \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3}}}$$
$$= \frac{1}{\limsup (\sqrt[n]{n})^3 \sqrt[n]{3 + \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3}}}$$

Nach Satz 2.27 können wir die beiden Grenzwerte seperat betrachten und dann zusammen multiplizieren:
Zuerst $\sqrt[n]{n}^3$. Dies können wir umschreiben als

$$\sqrt[n]{n}^3 = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}$$

Von Aufgabenblatt 5 wissen wir das $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergiert. Somit konvergiert auch $\sqrt[n]{n}^3$ gegen 1

Betrachten wir nun $\sqrt[n]{3 + \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3}}$
Den Term $3 + \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^3}$, können wir nach oben für $n > 4$ gegen n abschätzen. Weiterhin können wir $\frac{4}{n}$ nach unten gegen $\frac{4}{n^3}$ abschätzen, da wir den Nenner vergrößern. Es ergibt sich:

$$3 = 3 + \frac{4}{n^3} - \frac{4}{n^3} \leq 3 + \frac{4}{n} - \frac{4}{n^3} \leq n$$

Ziehen wir die n.te Wurzel folgt:

$$\sqrt[n]{3} \leq \sqrt[n]{3 + \frac{4}{n} - \frac{4}{n^3}} \leq \sqrt[n]{n}$$

Wir wenden nun das Sandwichkriterium an. Nach Aufgabenblatt 5 wissen wir das $\sqrt[n]{a}$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegen 1 konvergiert. Ebenso konvergiert $\sqrt[n]{n}$ gegen 1. Es ergibt sich:

$$1 \leq \sqrt[n]{3 + \frac{4}{n} - \frac{4}{n^3}} \leq 1$$

$\sqrt[n]{3+\frac{4}{n}-\frac{4}{n^3}}$ konvergiert also gegen 1.
Nun zurück zum Konvergenzradius:

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n}^3 \sqrt[n]{3+\frac{4}{n^2}-\frac{4}{n^3}}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist damit $R = 1$.
Setzen wir (1) ein, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3n^3+4n^2-4) \cdot 1^n = \sum_{n=0}^{\infty}(3n^3+4n^2-4)$$

Die Folge $(3n^3+4n^2-4)$ divergiert offensichtlich gegen ∞. Die Reihe divergiert nach Satz 2.34 (c) nicht, da ihre Folge keine Nullfolge ist.
Setzen wir -1 ein, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3n^3+4n^2-4) \cdot -1^n$$

Diese Reihe divergiert ebenfalls, weil $3n^3+4n^2-4$ gegen unendlich divergiert und die Folgenglieder wegen des Terms $(-1)^n$, für alle geraden n gegen ∞ und für alle ungeraden gegen $-\infty$ divergieren.
Die Reihe divergiert nach Satz 2.34 (c) ebenfalls nicht, da ihre Folge auch keine Nullfolge ist.
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(3n^3+4n^2-4)x^n$ konvergiert demnach für alle x im Intervall $x \in (-1, 1)$

A 7.2

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Finden Sie zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, sodass

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := -|x_0| + \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon}$
Zu zeigen $\delta > 0$:

$$-|x_0| + \sqrt{|x_0|^2+\varepsilon} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x_0|^2+\varepsilon} > |x_0| \Leftrightarrow^{\text{Quadrieren}} |x_0|^2 + \varepsilon > |x_0|^2$$

Was eine wahre Aussage ist, da $\varepsilon > 0$
Nun zur eigentlichen Stetigkeit:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| =^{\text{Dritte Binomische Formel}}$$
$$|(x+x_0)(x-x_0)| = |x+x_0||x-x_0|$$

Da $|x - x_0| < \delta$ schätzen wir nach oben ab:

$$|x+x_0||x-x_0| < \delta|x+x_0|$$

Wir addieren im Betrag 0 dazu, in der Form $+(x_0 - x_0)$

$$\begin{aligned} \delta|x+x_0| &= \delta|x+x_0+x_0-x_0| = \delta|(x-x_0)+(2x_0)| \\ &= \delta(|x-x_0|+|2x_0|) = \delta|x-x_0| + \delta|2x_0| \\ &< \delta^2 + \delta|2x_0| \end{aligned}$$

Nun setzen wir δ ein und vereinfachen:

$$\delta^2 + \delta|2x_0| = \left(-|x_0| + \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon}\right)^2 + \left(-|x_0| + \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon}\right)|2x_0|$$
$$= (-|x_0|)^2 - 2|x_0|\sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon} + \left(\sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon}\right)^2 - |x_0||2x_0| + |2x_0|\sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon}$$
$$= |x_0|^2 - 2|x_0|\sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon} + (|x_0|^2 + \varepsilon) - |x_0||2x_0| + 2|x_0|\sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon}$$
$$= |x_0|^2 + (|x_0|^2 + \varepsilon) - |x_0||2x_0|$$
$$= |x_0|^2 + |x_0|^2 - |x_0||2x_0| + \varepsilon$$
$$= 2|x_0|^2 - 2|x_0|^2 + \varepsilon$$
$$= \varepsilon$$

Es gilt also insgesamt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Was zu beweisen war. Die Funktion x^2 ist damit für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig.

A 7.4

(a) Zeigen Sie mithilfe der Potenzreihendarstellung, dass

$$e^{ix} = \cos(x) + i\ \sin(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Die Potenzreihe der e-Funktion ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Die Potenzreihen für Sinus und Kosinus

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Gegeben ist die komplexe e-Funktion e^{ix}. Ihre Potenzreihendarstellung ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, das die komplexe e-Funktion absolut konvergiert. Damit können wir den Riemannschen Umordnungssatz (Satz 2.42) anwenden. Wir fassen nun immer zwei aufeinanderfolgende Terme der Potenzreihe zu einem zusammen, einen Term mit geradem k und einen Term mit ungeradem k.
Wir beginnen mit $k = 0$ und $k = 1$. Weil wir bei der umgeordneten Reihe eine fortlaufende Indexvariable haben möchten, ändern wir das k in allen Termen. Da immer 2 Terme zusammengefasst werden müssen wir aus einem Wert der Indexvariable, zwei neue k berechnen. Wir ersetzen für Terme mit geradem k, $k \to 2k$ und für Terme mit ungeradem k, $k \to 2k{+}1$. Für den Wert 0 der neuen Indexvariable ergeben sich also 0 und 1, für den Wert 1: 2 und 3, und so weiter. Die umgeordnete Reihe sieht wie folgt aus:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Wir formen diese neue Darstellung nun um:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!} + \frac{i^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (i^2)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i(i^2)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Da $i^2 = -1$ gilt, können wir diese Reihe weiter vereinfachen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (i^2)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i(i^2)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Wir ziehen die beiden Terme nun in ihre eigenen Summen nach Satz 2.34 (b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

Wir setzen nun die oben gegebenen Potenzreihendarstellungen von Sinus und Kosinus ein:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(x) + i\ \sin(x)$$

Damit gilt $e^{ix} = \cos(x) + i\ \sin(x)$

(b) Folgern Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ die beiden Formeln

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \text{ und} \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

gelten.
Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) \mid -\cos(x+y) \ \ : i \\ \Leftrightarrow \sin(x+y) &= \frac{e^{i(x+y)} - \cos(x+y)}{i}\end{aligned}$$

Wir formen nun um:

$$\sin(x+y) = \frac{e^{i(x+y)} - \cos(x+y)}{i} = \frac{e^{ix+iy} - \cos(x+y)}{i} = \frac{e^{ix}e^{iy} - \cos(x+y)}{i}$$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ einsetzen

$$= \frac{(\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y)) - \cos(x+y)}{i}$$

Ausmultiplizieren

$$= \frac{(\cos(x)\cos(y) + i\cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y) + i^2\sin(x)\sin(y)) - \cos(x+y)}{i}$$

Auf Brüche aufteilen

$$= \frac{\cos(x)\cos(y)}{i} + \frac{i\cos(x)\sin(y)}{i} + \frac{i\sin(x)\cos(y)}{i} + \frac{i^2\sin(x)\sin(y)}{i} - \frac{\cos(x+y)}{i}$$

Kürzen

$$= \frac{\cos(x)\cos(y)}{i} + \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) + i\sin(x)\sin(y) - \frac{\cos(x+y)}{i}$$

Wir nehmen nun den Realteil:

$$Re(\sin(x+y)) = Re(\frac{\cos(x)\cos(y)}{i} + \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) + i\sin(x)\sin(y) - \frac{\cos(x+y)}{i})$$

$$\Rightarrow \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

Nun für die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) \mid -\sin(x+y) \\ \Leftrightarrow \cos(x+y) &= e^{i(x+y)} - i\sin(x+y)\end{aligned}$$

Wir formen nun um:

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y) &= e^{i(x+y)} - i\sin(x+y) = e^{ix+iy} - i\sin(x+y) = e^{ix}e^{iy} - i\sin(x+y) \\
& e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \text{ einsetzen} \\
&= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y)) - i\sin(x+y) \\
& \text{Ausmultiplizieren} \\
&= \cos(x)\cos(y) + i\cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y) + i^2\sin(x)\sin(y) - i\sin(x+y) \\
& \text{Vereinfachen} \\
&= \cos(x)\cos(y) + i\cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) - i\sin(x+y)
\end{aligned}
$$

Wir nehmen nun den Realteil:

$$
\begin{aligned}
&Re(\cos(x+y)) = Re(\cos(x)\cos(y) + i\cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) - i\sin(x+y)) \\
&\Rightarrow \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}
$$