06.12.2021 HAUSAUFGABENBLATT 7 WS 2021/22

MATHEMATISCHE METHODEN

Dr. Michael Czerner Abgabetermin 13.12.2021

Aufgabe 1: Extrema

Gegeben ist die Funktion $f(x, y, z) = x + x^2 + y^2 z^3 + z - z^3 - 1$.

a) Berechnen Sie $\nabla f(x, y, z)$.

b) Berechnen Sie alle Extrema der Funktion $f(x, y, z)$ und untersuchen Sie um welche Art von Extrema es sich handelt.

Aufgabe 2: Volumenintegral

Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y, z) = x^2$ über dem Volumen

a) einer Kugel mit Radius R.

b) eines Zylinders der Höhe H und Radius R.

c) ein Prisma mit dreieckiger Grundfläche, dessen Eckpunkte bei
(0|0|0), (0|1|0), (1|0|0) und
(0|0|4), (0|1|4), (1|0|4) liegen.

(Hinweise: Benutzen Sie geeignete Koordinaten,

partielle Integration: $\int \sin(x)^3 \, \mathrm{d}x = \int \overbrace{\sin(x)}^{f'} \overbrace{\sin(x)^2}^{g})$

Aufgabe 3: Gauß-Integral

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

in Polarkoordinaten. Nutzen Sie das Ergebnis um das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$ zu berechnen.

Aufgabe 4: Dichteverteilung

Berechnen Sie den Schwerpunkt für die Dichteverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \alpha(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} & \text{falls } z \geq 0 \quad \wedge \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. (*Hinweis*: Rechnen Sie in geeigneten Koordinaten, die die Symmetrie des Problems berücksichtigen.)

Aufgabe 5: Transformation von Vektorfeldern

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 3x \\ -z \\ 2y \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds in Zylinder- und Kugelkoordinaten.

b) Zeigen Sie explizit, dass beide Ergebnisse äquivalent sind zum entsprechenden Ausdruck in kartesischen Koordinaten.