

Aufgabenblatt 1, Mathematik für Physiker 1

Finn Jannik Wagner

21.10.2021

Aufgabe 1

Aufgabe 1.1 (i)

Es ist zu zeigen das $(M\Delta N)\Delta(N\Delta P) = M\Delta P$ gilt. $A := (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, $B := M\Delta P$

Hierzu eine Fallunterscheidung:

1. Fall $x \notin M, N, P$ Ist x in keiner der drei Menge, so ist es weder in A noch B

2. Fall $x \in M \wedge x \notin N, P$

$\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nicht in beiden Mengen ist.

$\Rightarrow x \notin N\Delta P$, weil es weder in N noch in P ist.

$\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nicht in beiden Mengen ist.

$\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.

Damit gilt $x \in A, B$

3. Fall $x \in P \wedge x \notin M, N$

Dieser Fall ist equivalent zu Fall 2

4. Fall $x \in N \wedge x \notin M, P$

$\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nicht in beiden Mengen ist.

$\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.

$\Rightarrow x \notin (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es in beiden Mengen ist.

$\Rightarrow x \notin M\Delta P$, weil es weder in M noch P ist.

Damit gilt $x \notin A, B$

5. Fall $x \in M, N \wedge x \notin P$

$\Rightarrow x \notin M\Delta N$, weil es in beiden Mengen ist.

$\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.

$\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nur in $N\Delta P$ ist.

$\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nur in M ist.

Damit gilt $x \in A, B$

6. Fall $x \in M, P \wedge x \notin N$

$\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nur in M ist.

$\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nur in P ist.

$\Rightarrow x \notin (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es in $M\Delta N$ und $N\Delta P$ ist.

$\Rightarrow x \notin M\Delta P$, weil es in M und P ist.

Damit gilt $x \notin A, B$

7. Fall $x \in N, P \wedge x \notin M$

$\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nur in N ist.

$\Rightarrow x \notin N\Delta P$, weil es in N und P ist.

$\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nur in $N\Delta P$ ist.

$\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nur in P ist.

Damit gilt $x \in A, B$

8. Fall $x \in M, P, N$

$\Rightarrow x \notin M \Delta N$, weil es in M und N ist.

$\Rightarrow x \notin N \Delta P$, weil es in N und P ist.

$\Rightarrow x \notin (M \Delta N) \Delta (N \Delta P)$, weil es weder in $M \Delta N$ noch in $N \Delta P$ ist.

$\Rightarrow x \notin M \Delta P$, weil es in M und P ist.

Damit gilt $x \notin A, B$

\Rightarrow Da in allen acht möglichen Fällen, wie ein Element x in den Mengen verteilt sein kann, die Operationen A und B zum gleichen Ergebnis kommen, sind sie gleich.

Aufgabe 1.1 (ii)

Hilfslemma 1: Weitere Definition der symmetrischen Differenz Δ

Lemma 1

Zu zeigen: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Füge beiden Seiten $A \cap B$ hinzu.

$\Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \cup (A \cap B)$

$\Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = (A \cup B)$

Mit Assoziativgesetz $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus (A \setminus A)) = (A \cup B)$

$\Rightarrow (A \setminus B) \cup B = (A \cup B)$

$\Rightarrow (A \cup B) = (A \cup B)$

Eigentliche Aufgabe

Zu zeigen: $M \cap (N \Delta P) = (M \cap N) \Delta (M \cap P)$

$M \cap (N \Delta P)$

\Downarrow Hilfslemma 1

$= M \cap ((N \cup P) \setminus (N \cap P))$

\Downarrow Anwenden des Distributivgesetzes $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

$= (M \cap (N \cup P)) \setminus (M \cap N \cap P)$

\Downarrow Anwenden des Distributivgesetzes $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$= (M \cap N) \cup (M \cap P) \setminus (M \cap N) \cap (M \cap P)$

\Downarrow Hilfslemma 1 rückwärts

$= (M \cap N) \Delta (M \cap P)$

Aufgabe 1.2 (i)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Die Spalten vier und sieben sind für alle Wertekombinationen von A und B gleich.

$\Rightarrow \neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ sind equivalent.

Aufgabe 1.2 (ii)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Die Spalten vier und sieben sind für alle Wertekombinationen von A und B gleich.
 $\Rightarrow \neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ sind equivalent.

Aufgaben 1.3

Seien A, B, C Mengen und $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ Abbildungen

Aufgabe 1.3 (i)

Zu zeigen: $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv

Es gilt $g \circ f$ ist surjektiv: $\forall c \in C \exists a \in A : g \circ f(a) = c$

Sei $c \in C$ dann existiert mit $b := f(a)$ ein Element aus B so dass $g(b) = c$

Es folgt g ist surjektiv:

$\forall c \in C \exists b \in B : g(b) = c$

Aufgabe 1.3 (ii)

Zu zeigen: $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv

$\forall a_1, a_2 \in A : g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$

Angenommen f wäre nicht injektiv: $\exists a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2, f(a_1) = f(a_2)$
 $\Rightarrow g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$

Das ist ein Widerspruch da $g \circ f$ injektiv ist

Es folgt f ist injektiv:

$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) = b_1 = b_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$

Aufgabe 1.4

Gegeben $M \neq \emptyset, S := \{x \in M \mid x \text{ hat Sorgen}\}, L := \{x \in M \mid x \text{ trinkt Likör}\}$ und Likörproduzent $\in M$

(a) Wer Sorgen hat, trinkt Likör $= S \subset L$

(i) Wer Likör trinkt, hat Sorgen $= L \subset S$ Falsch

(ii) Wer keine Likör trinkt, hat keine Sorgen $= M \setminus L \subset M \setminus S$ Wahr

(iii) Niemand hat Sorgen und trinkt keinen Likör $= S \cap (M \setminus L) = \emptyset$ Wahr

(iv) Jemand hat Sorgen und trinkt keinen Likör $= S \cap (M \setminus L) \neq \emptyset$ Falsch

(v) Jemand trinkt Likör $= L \neq \emptyset$ Unbestimmt

(b) Wer Likör trinkt, hat keine Sorgen $= L \subset (M \setminus S)$

(i) Jeder hat Sorgen $= S = M$ Falsch

(ii) Jemand hat Sorgen $= S \neq \emptyset$ Falsch

(iii) Niemand hat Sorgen $= S = \emptyset$ Wahr

(c) Trinkt niemand Likör, so haben Likörproduzenten Sorgen $= L = \emptyset \Rightarrow \text{Likörproduzent} \in S$

(i) Jeder trinkt Likör $= L = M$ Unbestimmt

(ii) Jemand trinkt Likör $= L \neq \emptyset$ Wahr

(iii) Niemand trinkt Likör $= L = \emptyset$ Falsch