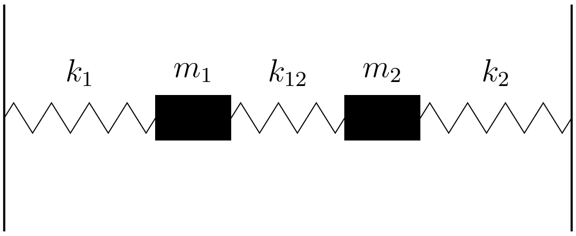
22.11.2021 HAUSAUFGABENBLATT 5 WS 2021/22

MATHEMATISCHE METHODEN

Dr. Michael Czerner Abgabetermin 29.11.2021

Aufgabe 1: Gekoppelte Schwinger

Zwei Massen seien wie in der Abbildung gezeigt über drei Federn miteinander und mit zwei festen Wänden verbunden:



Diese zwei gekoppelten harmonischen Schwinger werden durch das folgende Gleichungssystem beschrieben:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_{12} - m_1\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} - m_2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenfrequenzen ω des Gesamtsystems entsprechen dabei genau den Werten, bei denen die Determinante verschwindet (den Wert 0 annimmt). Die entsprechenden Eigenvektoren sind dann die Eigenmoden oder Eigenschwingungen.
Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenmoden für den Fall des symmetrischen gekoppelten Schwingers, also für $m_1 = m_2 =: m$ und $k_1 = k_2 =: k$.

Aufgabe 2: Bahnkurve 2

Gegeben ist die Bahnkurve $\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die natürliche Parametrisierung $\vec{r}(s)$.

b) Berechnen Sie Tangenteneinheitsvektor $\hat{\vec{t}}(s)$.

c) Berechnen Sie die Krümmung κ und den Krümmungsradius ρ der Kurve.

d) Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\hat{\vec{t}}, \hat{\vec{n}}, \hat{\vec{b}})$.

e) Berechnen Sie die Torsion τ.

f) Wie lauten die Frenetsche Formeln in Matrixform für die Bahnkurve $\vec{r}(s)$?

g) Berechnen Sie $\vec{a}(t)$. Geben Sie den Tangential- und Radialteil von $\vec{a}(t)$ an.

h) Um was für eine Kurve handelt es sich?

Aufgabe 3: Wegintegral 1. Art

Berechnen Sie das Wegintegral 1. Art der Funktion $f(x, y, z) = (6x + 2y)z$ entlang des durch $\vec{r}(t)$ beschriebenen Wegs .

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t - 1 \\ 2t + 3 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}, 1 \leq t \leq 2$$

Aufgabe 4: Parametrisierungen
Finden Sie eine Parametrisierung für eine Aufwärtsschraube mit Radius a und einem Höhengewinn von h pro Umlauf, mit folgenden Randbedingungen:

a) Die Schraube startet am Punkt $\vec{r}_0 = (a, 0, 0)^T$ in positive y-Richtung.

b) Die Schraube startet im Punkt $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)^T$ in positive y-Richtung.

Aufgabe 5: 35. jähriges Jubiläum
Mario muss sich auf seinem Weg durch das Level (siehe Abbildung) vor dem Gumba in Acht nehmen und will dabei möglichst viele Münzen einsammeln. Helfen Sie ihm, indem Sie seinen Weg parametrisieren.

Mario startet im Koordinatenursprung. Von dort springt er in einem Halbkreis auf den bei $(0.7, 0)$ stehenden Gumba, wodurch er die Münzen auf dem Kreis einsammeln und den Gumba unschädlich machen kann. Dann läuft er geradeaus weiter bis zu $(1.3, 0)$, also bis kurz vor die Plattform. Nun springt er in einem Viertelkreis auf die erste Plattform in der Höhe 0.5 und von dort direkt weiter in einem weiteren Viertelkreis auf die zweite Plattform in der Höhe 1.0. Berechnen Sie dazu die x-Koordinaten der Stellen, an denen er auf den Plattformen landet.

Zeichen sie sich den Weg zuerst genau auf. Bestimmen Sie dann die Parametrisierung. Ist die resultierende Bahnkurve glatt?

Nun noch eine physikalische Frage zum Nachdenken: Kann der Parameter in Ihrer Parametrisierung als Zeit interpretiert werden?