24.01.2022 HAUSAUFGABENBLATT 11 WS 2021/22

MATHEMATISCHE METHODEN

Dr. Michael Czerner Abgabetermin 31.01.2022

Aufgabe 1: Federpendel
Die Differentialgleichung des Federpendels ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x(t)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung kann beschrieben werden durch

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

a) Verifizieren Sie diesen Lösungsansatz durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Wir betrachten ein Pendel, welches aus der Ruhelage um $|\Delta x| = h$ ausgelenkt und an diesem Ort losgelassen wird.

b) Wie lauten die Randbedingungen?

c) Bestimmen Sie die Konstanten A und B, indem Sie die Randbedingungen verwenden.

d) Drücken Sie die erhaltene Lösung in der Form $\tilde{A}\sin(\omega t + \phi)$ aus.

Aufgabe 2: Inhomogene DGL 2. Ordnung
Betrachten Sie die folgenden inhomogenen DGL'n 2. Ordnung:

a) $7\ddot{x} - 4\dot{x} - 3x = f(t)$ mit $f(t) = 6$

b) $\ddot{x} - 10\dot{x} + 9x = f(t)$ mit $f(t) = 9t$

c) $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = f(t)$ mit $f(t) = t^2 - 2t + 1$.

Bestimmen Sie die Lösung der entsprechenden homogenen DGL sowie die partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen Gleichung und konstruieren Sie daraus die allgemeine Lösung.

Hinweis: Beachten Sie die Struktur der Inhomogenität $f(t)$ und wählen Sie den Ansatz für die partikuläre Lösung entsprechend. Achten Sie auf die Besonderheiten bei mehrfachen Nullstellen des charakteristischen Polynoms!

Aufgabe 3: komplexe Zahlen

a) Berechnen Sie
$$(-i)^3, \quad i^{15}, \quad \sqrt{4(-25)}, \quad \ln(1+i), \quad e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}, \quad e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

b) Berechnen Sie die Summe $z = z_1 + z_2$ und das Produkt $z = z_1 z_2$:

   i) $z_1 = 1 + i; \quad z_2 = 1 - i,$

   ii) $z_1 = -3i; \quad z_2 = -1 + i$

   Was fällt Ihnen auf? Betrachten Sie dazu die Winkel und Beträge der Zahlen in der komplexen Zahlenebene.

c) Zeichnen Sie in der komplexen Zahlenebene die Punkte z_i und z_i^* ein:
$$z_1 = -1 - i, \quad z_2 = -3 + \frac{1}{2}i, \quad z_3 = 3 + 2i, \quad z_4 = \frac{3}{2}i$$
   Was fällt Ihnen auf?

d) Suchen Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen:
$$z_1 = i - 1, \quad z_2 = -(1+i), \quad z_3 = e^{3+2i}, \quad z_4 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2}, \quad z_5 = -i$$

e) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:
$$z_1 = e^{\frac{1}{2} + \pi i}, \quad z_2 = e^{-1 - i\frac{3}{2}\pi}, \quad z_3 = e^{3-i}$$

f) Berechnen Sie die Nullstellen von $p_4(z) = z^4 - 1$. Weiterhin seien $p_6(z) = z^6 - 1$ und $p_8(z) = z^8 - 1$. Sind die Nullstellen von p_4 auch Nullstellen von p_6 und p_8?

Aufgabe 4: Euler'sche Formel

Zeigen Sie mithilfe der Euler'schen Formel die folgenden Identitäten:

a) $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

b) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

c) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Aufgabe 5: $\sinh x$ und $\cosh x$
Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus sind definiert als:
$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \ \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$

a) Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Relationen:
   $\sinh x = -i\sin(ix), \ \cosh x = \cos(ix)$

b) Bilden Sie die Ableitungen dieser Funktionen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Ableitungen von $\sin x$ und $\cos x$.

c) Zeigen Sie, dass $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ gilt.

Zusatz

Die beiden folgenden Aufgaben werden nicht bewertet. Es ist aber hilfreich, die entsprechenden Inhalte der Vorlesung mit Hilfe der beiden Aufgaben weiter zu verinnerlichen.

Aufgabe 6: Lemmata zu komplexen Zahlen
Zeigen Sie für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (Das sind **beliebige** komplexe Zahlen):

a) $(z_1 \cdot z_1^*)^* = z_1 \cdot z_1^*$

b) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

c) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

d) $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$

e) $\left(\frac{1}{z}\right)^* = \frac{1}{z^*}$

f) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$

g) $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

Aufgabe 7: Separierbare Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen zu folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'(x) = x^2 y(x)$

b) $y'(x) = \sin^2(x) y(x)$

c) $\dot{y}(t) = \tanh^{-1}(\sec(x)) y(t)$

d) $x^2 y'(x) + y'(x) = y(x)$