17.01.2022 HAUSAUFGABENBLATT 10 WS 2021/22

MATHEMATISCHE METHODEN

Dr. Michael Czerner Abgabetermin 24.01.2022

Aufgabe 1: Harmonische Näherung

Ein Teilchen befinde sich im Minimum des folgenden Potentials:

$$V(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

Finden Sie eine geeignete Näherung für das Potential in der lokalen Umgebung des Teilchens.

Aufgabe 2: Taylor-Entwicklungen einfacher Felder

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung bis zur 2. Ordnung um den Punkt $\vec{r} = 0$ für die folgenden Funktionen. ($\vec{a}$ ist ein konstanter Vektor, $\vec{r}$ ist der Ortsvektor.)

a) $\varphi(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$

b) $\vec{\phi}(\vec{r}) = \vec{r} - \vec{a}$

c) $\vec{\phi}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{a}$

Unbewerteter Zusatz:

d) $\vec{\phi}(\vec{r}) = \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{a})$

e) $\varphi(\vec{r}) = \mathrm{e}^{\vec{a} \cdot \vec{r}}$

Aufgabe 3: Oberflächenintegral

Gegeben ist das Rechteck mit den Eckpunkten bei $\left(b, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(0, 0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(b, 0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

a) Berechnen Sie das vektorielle Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$.

b) Berechnen Sie die Gesamtfläche A mit Hilfe des Oberflächenintegrals.

c) Berechnen Sie den Fluss durch die Fläche des Vektorfeldes $\vec{f} = (y^2, 2xy, 3z^2 - x^2)$.

Aufgabe 4: Oberflächenintegral 1. Art
Berechnen Sie die Oberfläche des Paraboloids, der durch $z(x,y) = 25 - x^2 - y^2$ und $z \geq 0$ gegeben ist.
(*Hinweis:* Finden Sie zunächst eine geeignete Parametrisierung der Oberfläche $\vec{\gamma}$ und damit den Flächennormalenvektor.)

Aufgabe 5: Klassifizierung von Differentialgleichungen

- Bei welchen der folgenden Differentialgleichungen handelt es sich um gewöhnliche- bzw. partielle Differentialgleichungen? Handelt es sich um lineare oder nicht-lineare Differentialgleichung? Ist die Differentialgleichung separierbar?
- Welche Ordnung haben jeweils die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen?
- Wieviele freie Parameter haben die allgemeinen Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen?
- Formen Sie die gewöhnlichen Differentialgleichungen um in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung.

a) $y'' - 6y' + 25y = 0$

b) $y''' = \sin(y \cdot y') + y''$

c) $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

d) $x'(t) = 2t \cdot x(t)$