Aufgabenblatt 4, Mathematik für Physiker 1

Florian Adamczyk, Finn Wagner

14.11.2021

A 5.1

Sei $c_n := \sqrt[n]{n} - 1$, zu zeigen:

$$n = (1 + c_n)^n \geq^! 1 + \frac{n(n-1)}{2} {c_n}^2$$

Einsetzen der allgemeinen binomischen Formel

$$(1 + c_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} {c_n}^k$$

Ausklammern der ersten drei Terme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} {c_n}^k = \binom{n}{0} 1^n {c_n}^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} {c_n}^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} {c_n}^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} {c_n}^k$$

Es gilt $n \in \mathbb{N}$ und damit $n \geq 1$. Die n.te Wurzel von n ist größer gleich 1. Somit $c_n \geq 0$. Ein Binomialkoeffitient kann ebenfalls nicht negativ werden. Alle Terme auf der rechten Seite der Gleichung sind also positiv, als Produkt von 1 und c_n. Wir schätzen nun nach unten ab, indem wir Terme weglassen.

$$\binom{n}{0} 1^n {c_n}^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} {c_n}^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} {c_n}^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} {c_n}^k \geq \binom{n}{0} 1^n {c_n}^0 + \binom{n}{2} 1^{n-2} {c_n}^2$$

Vereinfachen:

$$\binom{n}{0} 1^n {c_n}^0 + \binom{n}{2} 1^{n-2} {c_n}^2 = 1 + \frac{n!}{(n-2)! * 2!} {c_n}^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} {c_n}^2$$

Die Aussage ist bewiesen.

Nun ist zu zeigen, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$ Es gilt:

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} {c_n}^2 \mid -1 \ /n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n(n-1)} \geq \frac{{c_n}^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{{c_n}^2}{2}$$

Da c_n immer größer ist als 0, ist auch $\frac{{c_n}^2}{2}$ immer größer als 0. Es gilt insgesamt:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{{c_n}^2}{2} \geq 0$$

Mit dem Sandwichtheorem folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{{c_n}^2}{2} \geq \lim_{n\to\infty} 0$$

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{{c_n}^2}{2} \geq 0$$

Es folgt, dass der Grenzwert von c_n 0 ist. $\sqrt[n]{n}$ konvergiert damit gegen 1.

Zu zeigen: Für $a > 0$ gilt $\sqrt[n]{a} \to 1$ für $n \to \infty$

Ab einem n groß genug, $N \in \mathbb{N}$ $n \geq N$ gilt:

$a \leq n$ für alle n, daraus folgt $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$

1. Fall a = 1

   Ist a = 1, so konvergiert $\sqrt[n]{1}$ trivialler Weise gegen 1.

2. Fall $1 < a$

   Da die n.te Wurzel einer Zahl a größer als 1 auch immer größer gleich 1 sein muss gilt:

   $$1 \leq \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$$

   Mit dem Sandwichtheorem folgt:

   $$\lim_{n\to\infty} 1 \leq \sqrt[n]{a} < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

   $$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1$$

   Die Folge $\sqrt[n]{a}$ konvergiert gegen 1.

3. Fall $1 > a > 0$

   Wie von Aufgabenblatt 4 bekannt, lässt sich eine reele Zahl a beliebig nah durch eine rationale Zahl q nähern. Für alle unendlich viele, immer besser werdende Näherungen von a gilt:

   $$q = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

   Der Grenzwert aller Folgen $(q_n)_n$ ist gleich 1, als Bruch aus zwei konvergenten Folgen, die beide nicht Null werden.

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \frac{1}{1}$$

   Da der Grenzwert der Folge $\sqrt[n]{a}$ für alle Näherungen von a gleich 1 ist, konvergiert die Folge gegen 1.

Es gilt für $a > 0$ konvergiert $\sqrt[n]{a} \to 1$ wenn $n \to \infty$

A 5.2

Wir definieren die Folgen

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \; b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Zu zeigen: $(a_n)_n$ ist monoton wachsend: Es muss gelten:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

Definition einsetzen:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

FEHLT! Macht man den Nenner kleiner, so Es gilt also insgesamt:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$$

$(a_n)_n$ ist damit monoton wachsend

Zu zeigen: $(b_n)_n$ ist monoton fallend: Es muss gelten:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1$$

Definition einsetzen:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}$$

Es gilt weitere Abschätzung:

$$\left(\frac{1}{n+1}\right) < \left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right) > \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

Schätzt man damit ab gilt:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}}$$

Macht man den Nenner k, indem man die Potenz kleiner macht folgt:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = 1$$

Es gilt also insgesamt:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$$

$(b_n)_n$ ist damit monoton fallend

Zu zeigen $(b_n)_n$ ist nach unten beschränkt: Abschätzen nach unten mit Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+(n+1)\frac{1}{n} = 1+\frac{n}{n}+\frac{1}{n} = 2+\frac{1}{n} > 2 > 0$$

Damit ist $(b_n)_n$ nach unten beschränkt und da auch monoton fallend, konvergent.

Zu zeigen $(a_n)_n$ ist nach unten beschränkt:
Dafür $a_n < b_n$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Da $(b_n)_n$ nach unten beschränkt und monoton fallend ist, ist $a_n < b_0$. Damit ist $(a_n)_n$ nach oben beschränkt und da auch auch monoton wachsend, konvergent.

Zu zeigen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergieren gegen den gleichen Grenzwert.
Equivalent ist: Zu zeigen die Folge $(c_n)_n$ $c_n = a_n - b_n$ ist eine Nullfolge.

$$\begin{aligned} c_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right) \\ &= a_n\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Da wir wissen, dass $(a_n)_n$ konvergiert und $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert, folgt, dass $(c_n)_n$ eine Nullfolge ist. $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergieren also gegen den gleichen Wert.

A 5.3

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$

$$\text{Zu zeigen: } \sqrt[n]{|x_n|} < q \Leftrightarrow \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|} < q$$

Wurzel umformen:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n*n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

Bruch umformen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{e} = q < 1$$

Weil $\sqrt[n]{|x_n|} < q$ gegen $\frac{1}{e}$ konvergiert, folgt daraus, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{|x_n|} < q$ gilt. Die Vorraussetzungen für das Wurzelkriterium sind also erfüllt. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ konvergiert.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3n+1}{n^3+n^2-n}$
Es gelte $x_n \neq 0 \;\forall\, n \geq n_0$ Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$

$$\text{Zu zeigen: } \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq q \;\forall\, n \geq N$$

Geht nicht mit dem Quotientenkriterium

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$ Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$

$$\text{Zu zeigen: } \sqrt[n]{|x_n|} < q \Leftrightarrow \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^n}\right|} < q$$

Wurzel umformen, x_n ist immer positiv:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0 < q$$

Weil $\sqrt[n]{|x_n|} < q$ gegen 0 konvergiert, folgt daraus, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{|x_n|} < q$ gilt. Die Vorraussetzungen für das Wurzelkriterium sind also erfüllt. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$ konvergiert.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$
Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$

$$\text{Zu zeigen: } \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < q \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n!}{n^n}\right|} < q$$

Betragsstriche wegglassen, da alle Terme immer positiv sind und vereinfachen:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n!}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+1)}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Bruch umformen

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{e} = q < 1$$