13.12.2021 HAUSAUFGABENBLATT 8 WS 2021/22

MATHEMATISCHE METHODEN

Dr. Michael Czerner Abgabetermin 10.01.2022

Aufgabe 1: Transformation in kartesische Koordinaten

Gegeben sei das Vektorfeld $r\vec{e}_\theta + \vec{e}_\phi$ in Kugelkoordinaten. Formulieren Sie das Feld um in kartesische Koordinaten. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz in beiden Koordinatensystemen und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 2: Wegintegral 2. Art in 3D

Berechnen Sie das Wegintegral 2. Art für das Vektorfeld $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2xy - x^2 \\ x + y^2 \\ z \end{pmatrix}$ entlang des Weges $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ von $t = 0$ bis $t = 1$.

Aufgabe 3: Wegintegral 2. Art

Ein Kraftfeld in Zylinderkoordinaten sei gegeben durch $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\beta}{\sqrt{\rho}}\vec{e}_\varphi$. Ein Teilchen bewege sich entlang einer Spiralbahn $\rho(\varphi) = \rho_0 \mathrm{e}^{-\lambda\varphi}$.

a) Skizzieren Sie die Bahn des Teilchens.

b) Berechnen Sie die Arbeit $W(\varphi_1)$, welche das Kraftfeld auf dem Weg von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_1$ an dem Teilchen verrichtet. Welche Strecke $L(\varphi_1)$ legt das Teilchen dabei zurück? Bilden Sie den Grenzwert $\varphi_1 \to \infty$ und zeigen Sie, dass sowohl die Arbeit, als auch der Weg des Teilchens endlich bleiben.

c) Betrachten Sie nun ein Skalarfeld der Form $\Phi(\vec{r}) = -\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$. Bestimmen Sie Lage und Art der Extrema von Φ indem Sie den Gradienten von Φ null setzen und dann die Definitheit der Hessematrix betrachten. Interpretieren Sie $\Phi(\vec{r})$ als potentielle Energie. Welche physikalische Größe beschreibt dann das Vektorfeld $\vec{F} = -\nabla\Phi$? Was bedeutet es demnach physikalisch, wenn der Gradient von Φ verschwindet?

Aufgabe 4: Gegeben ist das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 y^2 z^3 - 6\alpha_2 x z^2 \\ 2\alpha_1 x y z^3 \\ 3\alpha_1 x y^2 z^2 - 6\alpha_2 x^2 z \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie, ob das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ ist.

b) Ein Massenpunkt werde in diesem Kraftfeld $\vec{F}$ längs des Weges $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ verschoben. Berechnen Sie die Arbeit, die bei dieser Verschiebung geleistet wird.

c) Hat $\vec{F}$ ein Potential? Wenn ja, welches?

Aufgabe 5: Gegeben seien die Potentiale

a) $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$,

b) $V(\vec{r}) = \frac{m}{2}\left[(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 - \omega^2 r^2\right]$
($\vec{\omega}$ ist ein konstanter Vektor).

Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$, die von dem jeweiligen Potential erzeugt wird. Welche physikalische Bedeutung haben die angegebenen Potentiale? Handelt es sich um Zentralkräfte?