Aufgabenblatt 1, Mathematik für Physiker 1

Finn Jannik Wagner

21.10.2021

Aufgabe 1

Aufgabe 1.1 i)

Es ist zu zeigen das $(M\Delta N)\Delta(N\Delta P) = M\Delta P$ gilt. $A := (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, $B := M\Delta P$

Hierzu eine Fallunterscheidung:

1. Fall $x \notin M, N, P$ Ist x in keiner der drei Menge, so ist es weder in A noch B
2. Fall $x \in M \wedge x \notin N, P$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es weder in N noch in P ist.
   $\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.

   Damit gilt $x \in A, B$
3. Fall $x \in P \wedge x \notin M, N$
   Dieser Fall ist equivalent zu Fall 2
4. Fall $x \in N \wedge x \notin M, N$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \notin (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es weder in M noch P ist.

   Damit gilt $x \notin A, B$
5. Fall $x \in M, N \wedge x \notin P$
   $\Rightarrow x \notin M\Delta N$, weil es in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nicht in beiden Mengen ist.
   $\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nur in $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nur in M ist.

   Damit gilt $x \in A, B$

6. Fall $x \in M, P \wedge x \notin N$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nur in M ist.
   $\Rightarrow x \in N\Delta P$, weil es nur in P ist.
   $\Rightarrow x \notin (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es in $M\Delta N$ und $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \notin M\Delta P$, weil es in M und P ist.

   Damit gilt $x \notin A, B$

7. Fall $x \in N, P \wedge x \notin M$
   $\Rightarrow x \in M\Delta N$, weil es nur in N ist.
   $\Rightarrow x \notin N\Delta P$, weil es in N und P ist.
   $\Rightarrow x \in (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es nur in $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \in M\Delta P$, weil es nur in P ist.

   Damit gilt $x \in A, B$

8. Fall $x \in M, P, N$
   $\Rightarrow x \notin M\Delta N$, weil es in M und N ist.
   $\Rightarrow x \notin N\Delta P$, weil es in N und P ist.
   $\Rightarrow x \notin (M\Delta N)\Delta(N\Delta P)$, weil es weder in $M\Delta N$ noch in $N\Delta P$ ist.
   $\Rightarrow x \notin M\Delta P$, weil es in M und P ist.

   Damit gilt $x \notin A, B$

$\Rightarrow$ Da in allen acht möglichen Fällen, wie ein Element x in den Mengen verteilt sein kann, die Operationen A und B zum gleichen Ergebnis kommen, sind sie gleich.

Aufgabe 1.1 ii)

Hilfslemma 1: Weitere Definition der symmetrischen Differenz Δ

Zu zeigen: $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$
Füge beiden Seiten $A \cap B$ hinzu.
$\Rightarrow (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \cup (A \cap B) = (A \cup B)\backslash(A \cap B) \cup (A \cap B)$
$\Rightarrow (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \cup (A \cap B) = (A \cup B)$
Mit Assoziativgesetz $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$
$\Rightarrow (A\backslash B) \cup (B\backslash(A\backslash A)) = (A \cup B)$
$\Rightarrow (A\backslash B) \cup B = (A \cup B)$
$\Rightarrow (A \cup B) = (A \cup B)$

Eigentliche Aufgabe Finn

Zu zeigen: $M \cap (N\Delta P) = (M \cap N)\Delta(M \cap P)$
$M \cap (N\Delta P)$
$\Downarrow$ Hilfslemma 1

$$= M \cap ((N \cup P)\backslash(N \cap P))$$

$\Downarrow$ Anwenden des Distributivgesetzes $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$
$= (M \cap (N \cup P)) \backslash (M \cap N \cap \ P)$
$\Downarrow$ Anwenden des Distributivgesetzes $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$= (M \cap N) \cup (M \cap P) \backslash (M \cap N) \cap (M \cap P)$
$\Downarrow$ Hilfslemma 1 rückwärts
$= (M \cap N) \Delta (M \cap P)$

Aufgabe 1.2 i)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Die Spalten vier und sieben sind für alle Wertekombinationen von A und B gleich.
$\Rightarrow \neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ sind equivalent.

Aufgabe 1.2 ii)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Die Spalten vier und sieben sind für alle Wertekombinationen von A und B gleich.
$\Rightarrow \neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ sind equivalent.

Aufgabe 1.4

Gegeben $M \neq \emptyset$, $S := \{x \in M |$x hat Sorgen$\}$, $L := \{x \in M |$x trinkt Likör$\}$ und Likörproduzent $\in M$

(a) Wer Sorgen hat, trinkt Likör $= S \subset L$

(i) Wer Likör trinkt, hat Sorgen $= L \subset S$ Falsch

(ii) Wer keiene Likör trinkt, hat keine Sorgen $= M \backslash L \subset M \backslash S$ Wahr

(iii) Niemand hat Sorgen und trinkt keinen Likör $= S \cap (M \backslash L) = \emptyset$ Wahr

(iv) Jemand hat Sorgen und trinkt keinen Likör $= S \cap (M \backslash L) \neq \emptyset$ Falsch

(v) Jemand trinkt Likör $= L \neq \emptyset$ Unbestimmt

(b) Wer Likör trinkt, hat keine Sorgen $= L \subset (M \backslash S)$

(i) Jeder hat Sorgen $= S = M$ Falsch

(ii) Jemand hat Sorgen $= S \neq \emptyset$ Falsch

(iii) Niemand hat Sorgen $= S = \emptyset$ Wahr

(c) Trinkt niemand Likör, so haben Likörproduzenten Sorgen $= L = \emptyset \Rightarrow$ **Likörproduzent** $\in S$

(i) Jeder trinkt Likör $= L = M$ Unbestimmt

(ii) Jemand trinkt Likör $= L \neq \emptyset$ Wahr

(iii) Niemand trinkt Likör $= L = \emptyset$ Falsch