Aufgabenblatt 3, Mathematik für Physiker 1

Florian Adamczyk, Finn Wagner

5.10.2021

A 3.1

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(a)

$$\begin{aligned}
ab &\leq \frac{1}{2}(a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\
\Leftrightarrow ab &\leq \frac{a^2x^2}{2} + \frac{b^2}{2x^2} \mid \cdot 2 \\
\Leftrightarrow 2ab &\leq a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} \mid -2ab \\
\Leftrightarrow 0 &\leq a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2} - 2ab \mid \text{mit } x^2 \text{ erweitert} \\
\Leftrightarrow 0 &\leq \frac{a^2x^4}{x^2} + \frac{-2abx^2}{x^2} + \frac{b^2}{x^2} \\
\Leftrightarrow 0 &\leq \frac{1}{x^2}(a^2x^4 - 2abx^2 + b^2) \mid \cdot x^2 \text{ Binomische Formel} \\
\Leftrightarrow 0 &\leq (ax^2 - b)^2 \\
&\text{Ein Quadrat ist immer größer gleich Null}
\end{aligned}$$

(b)

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2 \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ac \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$
$$\text{Umformen mit: } -2ab - 2bc - 2ac \text{ und Umsortieren}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2)$$
$$\text{2.te Binomische Formel anwenden:}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2$$
$$\text{Ein Quadrat ist immer größer gleich Null.}$$
$$\text{Eine Summe aus Quadraten ist ebenfalls immer größer gleich Null}$$

(c)

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \overset{!}{\Leftrightarrow} \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Vordere Ungleichung

$$\frac{a}{b} \overset{!}{<} \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a \cdot (b+d) < b \cdot (a+c)$$
$$\Leftrightarrow ab + ad < ba + bc \mid -ab$$
$$\Leftrightarrow ad < bc \mid /b\ /d$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Hintere Ungleichung

$$\frac{a+c}{b+d} \overset{!}{<} \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c) \cdot d < (b+d) \cdot c$$
$$\Leftrightarrow ad + cd < bc + dc \mid -cd$$
$$\Leftrightarrow ad < bc \mid /b\ /d$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

(d) Zu zeigen:
$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} :\ a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Summen ausmultiplizieren:

$$a^n - b^n = a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k} - b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}$$

Vorfaktoren in Summen ziehen:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}\, b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-k}$$

Indexshift bei der hinteren Summe: $z = k - 1 \Leftrightarrow k = z + 1$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}\, b^{n-1-k} - \sum_{z+1=0}^{n-2} a^{z+1}\, b^{n-(z+1)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}\, b^{n-1-k} - \sum_{z=-1}^{n-2} a^{z+1}\, b^{n-z-1}$$

Variable ersetzen: $z = k$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}\, b^{n-1-k} - \sum_{k=-1}^{n-2} a^{k+1}\, b^{n-k-1}$$

ersten und letzten Summanden aus den Summen ziehen:

$$= a^{n-1+1} \cdot b^{n-1-(n-1)} + \sum_{k=0}^{n-2} a^{k+1}\, b^{n-1-k} - \left(a^{-1+1} \cdot b^{n-1+1} + \sum_{k=0}^{n-2} a^{k+1}\, b^{n-k-1} \right)$$

umsortieren und Minusklammer auflösen:

$$= a^n \cdot b^0 - a^0 \cdot b^n + \sum_{k=0}^{n-2} a^{k+1}\, b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-2} a^{k+1}\, b^{n-k-1}$$

Die Summen kürzen sich weg:

$$= b^0 \cdot a^n - a^0 \cdot b^n = 1 \cdot a^n - 1 \cdot b^n = a^n - b^n$$

$\square$

A 3.2

(a)

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > -1$ gilt die Bernoullische Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Induktionsanfang mit $n = 0$:

$$1 + x^0 \geq 1 \geq 1 + 0x$$

Induktionsschritt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \Rightarrow^! (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^n \cdot (1+x) \geq 1 + nx + x$$

Anwenden der Inuktionsvorraussetzung

$$\Leftrightarrow (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x)$$

Ausmultiplizieren

$$= 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + nx + x \mid -x - nx - 1$$

$$\Leftrightarrow nx^2 \geq 0$$

Ein Quadrat ist immer größer gleich Null

Da Induktionsanfang und Schritt gelten,
ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gültig

(b)

$$q \in \mathbb{R}, q \neq 1;\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Induktionsanfang mit $n = 0:$

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

Induktionsschritt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow! \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$$\Leftrightarrow q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}\cdot q}{1-q} \mid -q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}\cdot q}{1-q} - q^{n+1} \mid \text{Letzten Summanden erweitern}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}\cdot q}{1-q} - \frac{q^{n+1}\cdot(1-q)}{1-q}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}\cdot q}{1-q} - \frac{q^{n+1}-q^{n+1}\cdot q}{1-q}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}\cdot q - q^{n+1} + q^{n+1}\cdot q}{1-q}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Da Induktionsanfang und Schritt gelten,
ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gültig

(c)

$$n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ n! \leq 4 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$$

Induktionsanfang mit $n = 1:$

$$1! = 1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = 1$$

Induktionsschritt

$$n! \leq 4 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow^{!} (n+1)! \leq 4 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+2}$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Verwenden der Induktionsannahme

$$\Rightarrow n! \cdot (n+1) \leq 4 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \cdot (n+1)$$

Als Hilfsterm: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 2\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Da gilt: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq^{\text{Bernoulli Ungleichung}} 1 + \frac{n+1}{n}$

$\frac{n+1}{n}$ ist immer größer gleich 1 für $n \in \mathbb{N}$. Dieser Wert +1 ist also größer gleich 2

$$\Rightarrow \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{2} \geq 1$$

Abschätzen nach oben mit Faktor größer gleich 1

$$4 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \cdot (n+1) \leq 4 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{2}$$

Vereinfachen

$$= 4 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \cdot \frac{(n+1)}{2}$$

Vereinfachen

$$= 4 \cdot \left(\frac{n}{2} \cdot (1 + \frac{1}{n})\right)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)}{2}$$

Ausmultiplizieren

$$= 4 \cdot \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)}{2}$$

Vereinfachen

$$= 4 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)}{2}$$

Faktor einklammern

$$= 4 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+2}$$

Damit gilt der Induktionsschritt

Da Induktionsanfang und Schritt gelten,
ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen gültig

A 3.3

(a)

$$M_1 = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

Zu zeigen: 1 ist eine obere Schranke von M_1

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 \, \forall n \in \mathbb{N} \text{ Es folgt } 0 \leq \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ 1 ist eine obere Schranke von M_1

Zu zeigen: 1 ist die kleinste obere Schranke von M_1

Angenommen 1 wäre nicht die kleinste obere Schranke,

so gäbe es eine kleinere im Abstand ϵ

Sei $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$

$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \epsilon \Rightarrow \epsilon \leq \frac{1}{n} \, \forall n \in \mathbb{N}$$

Nach Lemma 2.18 gilt aber $\epsilon \leq 0$ Das ist aber ein Widerspruch, da $\epsilon > 0$

$\Rightarrow$ Somit war die Annahme falsch, es gibt keine kleinere obere Schranke.

1 ist das Supremum von M_1

Zu zeigen: 1 ist Maximum von M_1

$$1 - \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow 1 = 0$$

Die Annahme war falsch M_1 hat kein Maximum

Zu zeigen: 0 ist eine untere Schranke von M_1

$$0 \leq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq n$$

Alle natürliche Zahlen sind größer gleich 1

0 ist eine untere Schranke von M_1

Zu zeigen: 0 ist die größte untere Schranke von M_1

Angenommen 0 wäre nicht die größte untere Schranke,

so gäbe es eine größere im Abstandϵ

Sei $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$

$$0 + \epsilon \leq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \epsilon + \frac{1}{n} \leq 1$$

Sei $n = 1$

$$\Rightarrow \epsilon + 1 = 1 \Rightarrow \epsilon = 0$$

Da ϵ größer als Null sein muss ist dies ein Widerspruch

$\Rightarrow$ Somit war die Annahme falsch, es gibt keine größere untere Schranke.

0 ist das Infimum von M_1

Zu zeigen: 0 ist Minimum von M_1

$$0 = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow n = 1$$

0 ist Minimum von M_1

Die Menge M_1 ist nach oben beschränkt und hat in 1 ein Supremum, jedoch kein Maximum. Die Menge ist außerdem nach unten beschränkt und hat in 0 ein Infimum und Minimum

(b)

$$M_2 = \{t \in \mathbb{R}, \text{t ist obere Schranke von } M_1\}$$

In (a) haben wir das Supremum von M_1 als 1 festgestellt. Jede weitere obere Schranke muss also größer sein als 1. Die Menge lässt sich umschreiben als:

$$M_2 = \{x \geq 1,\ x \in \mathbb{R}\}$$

Und das wiederum als:

$$[1, \inf)$$

Die Menge M_2 ist also nach Definition nach unten beschränkt mit dem Supremum von M_1, 1 ist damit Infimum und da es in der Menge liegt auch Minimum von M_2. M_2 ist aber nicht nach oben beschränkt, da eine obere Schranke beliebig viel größer sein kann als das Supremum. Oder trivial abzulesen aus der Intervallschreibweise.

(c)

$$M_3 = \{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{Zu zeigen: 1 ist eine obere Schranke von } M_3$$
$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1\, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow 0 < 1$$
$$\Rightarrow \text{1 ist eine obere Schranke von } M_3$$

$$\text{Zu zeigen: 1 ist die kleinste obere Schranke von } M_3$$
$$\text{Angenommen 1 wäre nicht die kleinste obere Schranke,}$$
$$\text{so gäbe es eine kleinere im Abstand} \epsilon$$
$$\text{Sei } \epsilon > 0 \in \mathbb{R}$$
$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 - \epsilon$$
$$\text{Anwenden der Bernoulli-Ungleichung}$$
$$1 - \epsilon \geq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow 1 - \epsilon \geq 1 - \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n} \geq \epsilon\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$\text{Nach Lemma 2.18 gilt aber } \epsilon \leq 0 \text{ Das ist aber ein Widerspruch, da } \epsilon > 0$$
$$\Rightarrow \text{Somit war die Annahme falsch, es gibt keine kleinere obere Schranke.}$$
$$\text{1 ist das Supremum von } M_3$$

$$\text{Zu zeigen: 1 ist Maximum von } M_3$$
$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} = 1$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n^2 = 0 \Rightarrow n = 0$$
$$\text{n kann nicht null sein da in der Definition von } M_3 \text{ durch n geteilt wird.}$$
$$\text{Die Annahme war falsch } M_3 \text{ hat kein Maximum}$$

Zu zeigen: 0 ist eine untere Schranke von M_3

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq n^2 \Rightarrow 1 \leq n$$

Alle natürliche Zahlen sind größer gleich 1

0 ist eine untere Schranke von M_1

Zu zeigen: 0 ist die größte untere Schranke von M_3

Angenommen 0 wäre nicht die größte untere Schranke,

so gäbe es eine größere im Abstandϵ

Sei $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$

$$0 + \epsilon \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \text{Sei } n = 1$$

$$\Rightarrow 0 + \epsilon \leq \left(1 - \frac{1}{1^2}\right)^1$$

$$\Rightarrow \epsilon \leq 0^1 \Rightarrow \epsilon \leq 0$$

Da ϵ größer als Null sein muss ist dies ein Widerspruch

$\Rightarrow$ Somit war die Annahme falsch, es gibt keine größere untere Schranke.

0 ist das Infimum von M_3

Zu zeigen: 0 ist Minimum von M_3

$$0 = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \Rightarrow 0 = 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} = 1 \Rightarrow 1 = n^2 \Rightarrow n = 10 \text{ ist Minimum von } M_3$$

Die Menge M_3 ist nach oben beschränkt und hat in 1 ein Supremum, jedoch kein Maximum.
Die Menge ist außerdem nach unten beschränkt und hat in 0 ein Infimum und Minimum

A 3.4

Die Türme von Hanoi. Die drei Türme sind T_1, T_2, T_3. Zu Beginn sind auf Turm T_1 $n \in \mathbb{N}$ Scheiben und auf T_2 und T_3 0 Scheiben. Die Scheiben sind von der kleinsten bis zur größten (n.ten) Scheiben nummeriert.
Für 1 Scheibe ist die Lösung trivial. Es braucht nur genau einen Schritt (s).
Für 2 Scheiben bewegt man die erste Scheibe auf Turm T_2, die zweite auf T_3 und dann die erste hinterher. Also ist $s = 3$

Nter Schritt
Zu zeigen ist: Kann man einen Stapel von n Scheiben bewegen, so folgt daraus, dass man einen Stapel von $n + 1$ Scheiben bewegen kann. Dazu bewege man die obersten n Scheiben des ersten Turmes auf einen zweiten Turm, dann die $n + 1$te Scheibe auf einen dritten Turm. Dann bewegt man die n Scheiben vom zweiten Turm auf den dritten.
Somit hat man einen Stapel mit $n + 1$ Scheiben bewegt.

Die oben gegebene Lösung folgt dem Prinzip der vollständigen Induktion. Der Induktionsanfang mit $n = 1$ ist angegeben. In der allgemeinen Lösung ist gezeigt, wie, wenn man einen Stapel mit n Scheiben hat, man einen Turm mit $n + 1$ Scheiben bewegt. Somit lässt sich ein belieg großer Stapel von einem auf einen anderen Turm bewegen.

Beim eigentlichen Ausführen sind jedoch noch einige Dinge zu berücksichtigen.
Beim bewegen von m großen Teilstapeln darf die $m+1$ Scheibe nicht direkt mit der 1sten Scheibe bedeckt werden.

Die minimale Zugzahl lässt sich genauso rekursiv ermitteln. Um die unterste Scheibe eines n Scheiben hohen Stapels zu bewegen, muss man alle darüber liegenden Scheiben auf einen anderen Turm legen. Angenommen man tut dies mit der minimalen Zuganzahl für $n-1$ Scheiben s_{n-1}. Erst dann lässt sich die unterste Scheibe auf einen anderen Turm bewegen, wofür man genau einen Zug braucht. Um die restlichen Scheiben nun wieder darauf zu legen, braucht man wieder s_{n-1} Züge. Für einen Stapel von n Scheiben gilt also: $s_n = s_{n-1} + 1 + s_{n-1}$. Führt man dies fort, so kommt man zu $n = 1$ für das man nur genau einen Schritt braucht. Somit gilt mit vollständiger Induktion diese minimale Anzahl an Zügen. Diese rekursive Formel lässt sich von $s_n = s_{n-1} + 1 + s_{n-1}$ umschreiben zu $s_n = 2^n - 1$