Лабораторна робота № 2

Тема: Моделювання динамічних систем.

Мета: Оволодіння методами комп’ютерного моделювання динамічних систем, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Набути навички застосування чисельних методів Рунге-Кутта для розв’язування систем ЗДР.

Порядок виконання роботи:

1. Вивчення теорії та прикладів.
2. Виконня завдання 1.
3. Виконня завдання 2.
4. Складання звіту по лабораторній роботі, в якому представляється:

- опис побудови моделі *екологічної системи* “жертва-хижак”;
- опис побудови моделі *процесу розповсюдження епідемії*;
- комп’ютерні програми реалізації методів Рунге-Кутта у завданнях 1 і 2;
- графіки часових залежностей шуканих параметрів досліджуваних динамічних систем.
- висновки з лабораторної роботи.

Загальні теоретичні відомості.

Моделювання – це заміщення одного об’єкту (оригіналу) іншим (моделлю) та фіксація або вивчення властивостей оригіналу шляхом дослідження властивостей моделі з метою спрощення, здешевлення, прискорення фіксації або вивчення властивостей оригіналу.

Модель – це система, що заміщує оригінал. Оригінал та модель схожі за деякими одними властивостями і параметрами та відрізняються за іншими.

Одна з *класифікацій моделей технічних систем*

- *за призначенням*: імітаційні, оптимізаційні, прогнозуючі;
- *за ступенем збігу фізичних властивостей*: фізичні (натурні), математичні, напівнатурні;
- *за принципом побудови*: стохастичні, детерміновані;
- *за способом подання інформації*: дискретні, безперервні, дискретно-безперервні;
- *за темпом часу*: реального часу, прискорені та уповільнені;
- *за пристосуванням*: адаптивні, неадаптивні.

Система – це сукупність взаємопов’язаних об’єктів, що має чотири наступні властивості.

Цілісність та частковість. Система – це цілісна сукупність окремих елементів. Зібрані разом елементи можуть створювати систему, а можуть й не створювати. Крім того, система може зруйнуватися без якогось елемента;

Наявність зв’язків. Системі притаманна наявність суттєвих стійких зв’язків (відношень) між елементами або властивостями, які перевищують за потужністю (силою) зв’язки цих елементів з елементами, що не входять в дану систему. За фізичним наповненням зв’язки можна розділити на дійсні, енергетичні, інформаційні, змішані. За напрямком розрізняють зв’язки прямі, зворотні, нейтральні;

Наявність визначеної організації. Це формування зв’язків елементів, упорядковане розподілення зв’язків та елементів в часі та просторі. При цьому складається визначена структура системи, а властивості елементів трансформуються в функції (дії, поведінку). Організація проявляється у зменшенні ентропії, у порівнянні з ентропією, системоформуючих факторів (*елементів* та *зв’язків*), які визначають можливість створення системи;

Наявність інтегративних якостей. Це якості, які притаманні системі в цілому, але не властиві жодному з її елементів окремо. Отже, властивості системи хоча й залежать від властивостей елементів системи, але не визначаються ними повністю.

Складну систему неможливо охопити, зрозуміти, вивчити повністю та детально. Для рішення цієї проблеми використовується стратифікований підхід до опису (представлення) системи.

Система задається сімейством моделей, кожна з яких описує систему на своєму рівні абстрагування. Для кожного рівня є ряд характерних особливостей, параметрів, законів та принципів. Слід намагатися найбільшої незалежності цих моделей. Таке представлення складних систем називається стратифікованим описом, а рівні абстрагування називають стратами.

У складних системах виокремлюють три рівні ієрархії:

- *страта* (*рівень опису, або абстрагування*). Мається на увазі, що властивості реального складного об’єкта описуються у формі сукупності, де окремі описи упорядковані за рівнем значущості. Такі ієрархічні системи називаються стратифікованими, тобто розділеними на страти за технологічними, інформаційними або економічними аспектами;
- *шар* (*рівень складності рішення, що приймається*). Механізм прийняття рішення охоплює дві проблеми: рішення повинне прийматися швидко, та рішення повинне прийматися після детального аналізу ситуації. Щоб задовольнити ці вимоги, складна проблема поділяється на сімейство підпроблем, вирішення яких призводить до вирішення всієї проблеми загалом;
- *ешелон* (*організаційний рівень*). Передбачається, що система має елементи, які знаходяться під керуванням інших вирішальних елементів.

За допомогою моделювання можна відтворити поведінку будь-якої фізичної або технічної системи. Це дозволить отримати знання про характеристики оригіналу. Одним з різновидів моделей є математична модель – математичне уявлення реальності для вилучення необхідної інформації щодо системи. При цьому дослідження базується на використанні диференціальних рівнянь, які допомагають описати стан системи на кожному етапі вивчення її поведінки в залежності від часу. ЗДР першого порядку має вигляд (1)

$$y'(x) = f(x\ ,\ y), \tag{1}$$

де $y'(x)$ – перша похідна змінної $y(x)$, x – незалежна змінна.

Розв’язати диференціальне рівняння – означає знайти множину функцій, які задовольняють даному рівнянню. Найбільш поширеним підходом до розв’язання ЗДР є його чисельне інтегрування на комп’ютерах. Одним із найпростіших методів чисельного інтегрування є метод прямокутників (Ейлера), що реалізується за допомогою рекурентного співвідношення:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n\ , y_n), \tag{2}$$

де y_n – значення змінної y на n-му кроці, x_n – значення змінної x на n-му кроці, h – крок інтегрування, отриманий шляхом поділу часової осі на рівні інтервали.

Для розв’язання рівняння на практиці часто використовують метод чисельного інтегрування *Рунге-Кутта* четвертого порядку $O(h^4)$. Порядок вказує на точність апроксимації розв’язку.

Оскільки розв’язок рівняння – сукупність точок, що графічно формують криву, яка відповідає поведінці системи, то для кожного значення x необхідно обчислити y.

Для обчислення використовується формула

$$y_{n+1} = y_n + (h/6)\ (k_1 + 2\ k_2 + 2\ k_3 + k_4), \tag{3}$$

де значення k_1, k_2, k_3, k_4 обчислюються за допомогою формул

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n\ , y_n), \\ k_2 &= f(x_n + (h/2), y_n + (h/2)\ k_1), \\ k_3 &= f(x_n + (h/2), y_n + (h/2)\ k_2), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + h\ k_3). \end{aligned}$$

Дослідження екологічної системи. Для деяких екологічних систем характерним є наявність хижаків та жертв. Наприклад, досліджується компонент біосфери – ліс. Він є системою, оскільки містить багато складових: рослини різних ярусів, тварини. Розглядається закрите середовище, де існують тільки два види тварин: вовки та зайці. Тварини і рослини взаємодіють між собою. Рослини (редуценти) – їжа для рослиноїдних тварин (консументів першого порядку, наприклад, зайців). Рослиноїдні тварини – їжа для хижаків (консументів другого порядку, наприклад, вовків). Таким чином, зайці – жертви, а вовки – хижаки. Введемо наступні позначення

x – кількість зайців в системі у момент часу t;

y – кількість вовків в системі у момент часу t;

x', y' – похідні за часом змінних, відповідно, x і y, тобто швидкості зміни цих видів.

За умови відсутності вовків приріст чисельності зайців описується рівнянням (4), де a_{11} – коефіцієнт приросту зайців

$$x' = a_{11}x. \tag{4}$$

У випадку, якщо зайців немає, вовки вимирають і процес зменшення чисельності вовків відповідає рівнянню (5), де a_{22} – коефіцієнт зменшення вовків за відсутності зустрічей із жертвами

$$y' = a_{22}y. \tag{5}$$

Якщо припустити, що в початковий момент спостереження за системою $t = 0$ число зайців дорівнює $x(0) = x_0$, а число вовків дорівнює $y(0) = y_0$, то аналітичні рішення рівнянь (4) і (5) матимуть вигляд

$$x = x_0 \cdot \exp(a_{11}t), \quad y = y_0 \cdot \exp(-a_{11}t).$$

Змоделюємо систему, в якій територіальні ресурси розподілені між зайцями та вовками. При зустрічі з хижаками кількість зайців буде зменшуватися, а кількість вовків – навпаки, збільшуватися. Цей процес описує система рівнянь Лотки-Вольтери

$$\begin{cases} x' = a_{11}x - a_{12}xy, \\ y' = a_{21}xy - a_{22}y. \end{cases} \tag{6}$$

Перший член кожного рівняння системи (6) відповідає стану моделі за рівняннями (4) та (5). Елемент $a_{12}xy$ системи (6) описує зменшення зайців при зустрічі з вовками, а елемент $a_{21}xy$ – збільшення вовків, якщо зайців для цього достатньо. Таким чином, можна сказати, що a_{12} і a_{21} – коефіцієнти, що характеризують частоту зустрічей жертв з хижаками і, очевидно, що вони рівні.

Завдання 1. *Моделювання екологічної системи.*

а) змоделювати екосистему в якій територіальні ресурси розподілені між жертвами та хижаками за наступних вихідних даних

- коефіцієнти взаємодії між видами: $a_{11} = 0.01 \cdot N$, $a_{12} = 0.0001 \cdot N$, $a_{21} = 0.0001 \cdot N$, $a_{22} = 0.04 \cdot N$ (де N – номер варіанту, який є порядковим номером студента у списку його групи);
- вектор початкових умов з початковими значеннями кількості жертв $x = 1000 - 10 \cdot N$ та хижаків $y = 700 - 10 \cdot N$;
- час початку спостереження за системою – $t_0 = 0$, крок інтегрування $h = 0.1$ дня, тривалість спостереження в днях – $T = 150$;

б) методом чисельного інтегрування *Рунге-Кутта* четвертого порядку розв’язати, отриману у попередньому пункті (*а*) систему рівнянь Лотки-Вольтери із вказаними початковими умовами та побудувати графіки залежностей $x(t)$, $y(t)$ і $y(x)$. Для цього написати код відповідної комп’ютерної програми на мові програмування Python.

Дослідження процесу розповсюдження епідемії. Нехай є віддалений населений пункт, у якому знаходиться H людей, та почалася епідемія. Позначимо через x – кількість людей, які ще здорові, через y – кількість людей, які захворіли, а через z – кількість людей, які вже перехворіли і в них виробився імунітет.

У момент виявлення епідемії $y(0)$ людей уже хворіли, будучи носіями інфекції; $x(0)$ – людей були ще здорові, але потенційно схильні до захворювання; а кількість перехворілих людей обчислюється з співвідношення: $z(0) = H - x(0) - y(0)$.

Відповідно до гіпотези захворювання передається «контактно», тобто при зустрічі, тоді швидкість захворювання здорових людей x пропорційна частоті їх зустрічей із хворими y. Характер захворювання й умови життя в населеному пункті такі, що кожний хворий щодня в середньому передає інфекцію β здоровим людям із кількості H. Захворіла людина через γ днів видужує, набуваючи імунітет.

Тоді диференціальні рівняння розглянутої системи мають вид

$$\begin{cases} x' = -\beta/H \cdot xy, \\ y' = \beta/H \cdot xy - 1/\gamma \cdot y, \\ z' = 1/\gamma \cdot y. \end{cases} \tag{7}$$

Завдання 2. *Моделювання процесу розповсюдження епідемії.*

а) змоделювати процес розповсюдження епідемії за наступних вихідних даних

– кількість людей в населеному пункті $H = 1000 - N$, інтенсивність розповсюдження епідемії 1-а людина за день передає інфекцію N здоровим людям $\beta = 25 - N$, кількість днів, необхідних на одужання $\gamma = N$ (де N – номер варіанту, який є порядковим номером студента у списку його групи);
– вектор початкових умов, елементи якого: $x = 900 - N$ – кількість здорових людей, $y = 90 - N$ – кількість хворих, $z = H - x - y$ – кількість людей, які одужали;
– час початку спостереження за системою – $t_0 = 0$, крок інтегрування $h = 0.1$ дня, тривалість спостереження в днях – $T = 40$;

б) методом чисельного інтегрування *Рунге-Кутта* четвертого порядку розв’язати, отриману у попередньому пункті (*а*) систему рівнянь типу (7) із вказаними початковими умовами та побудувати графіки залежностей $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$. Для цього написати код відповідної комп’ютерної програми на мові програмування Python.