Лабораторна робота № 3

Тема: Моделювання просторово-розподілених процесів.

Мета: Засвоїти основні поняття про моделі просторово-розподілених процесів та про їхні властивості, навчитися будувати і досліджувати такі моделі за допомогою чисельних методів. Оволодіння навичками моделювання систем, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, методом приведення до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Порядок виконання роботи:

1. Вивчення теорії та прикладів.
2. Виконня завдання 1.
3. Виконня завдання 2.
5. Складання звіту по лабораторній роботі, в якому представляється:
- опис побудови моделі *теплопровідності*;
- комп'ютерна програми реалізації завдань 1 і 2;
- 3D графіки числового та аналітичного розв'язків відповідної задачі теплопровідності та числові значення обчислених похибок між ними.
- висновки з лабораторної роботи.

Загальні теоретичні відомості.

Більшість відомих у природі явищ і процесів поширюються в часі та просторі. Фізичні закони, що визначають їхню поведінку, мають безупинний характер та описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. Це електричні і магнітні поля, поширення тепла і дифузійні процеси, теорія пружності й ін.

Прикладами таких диференціальних рівнянь є:

- рівняння Пуассона

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} = f(x, y); \tag{1}$$

- рівняння теплового потоку

$$\nabla^2 V = K \frac{\partial V}{\partial t}; \tag{2}$$

- хвильове рівняння

$$\nabla^2 V = \alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 t}. \tag{3}$$

Розглянемо одну методику розв'язання рівняння Лапласа, яке є частковим випадком рівняння Пуассона та має вигляд

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} = 0; \tag{4}$$

Формулюємо задачу таким чином. Необхідно знайти в якійсь області (ділянці) Ω на площині xy безперервну функцію $V(x, y)$, яка задовольняє рівнянню (4) та приймає на межі Γ області задані значення $V_\Gamma = \varphi(x, y)$.

Така задача відома під назвою задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Ця задача є класичною та часто використовується для демонстрації переваг її розв'язування паралельними методами, наприклад, в дисципліні "Паралельні та розподілені обчислення".

В загальному випадку межа Γ може бути довільною, однак будемо розглядати задачу Діріхле на прямокутній ділянці Ω, сторони якої дорівнюють a і b.

Для розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних частіше використовують кінцево-різницеві методи, в яких частинні похідні апроксимуються різницевими операторами.

Отже, розглянемо прямокутну ділянку Ω на площині xy з рівномірною (для спрощення) сіткою з кроком h (рис. 1).

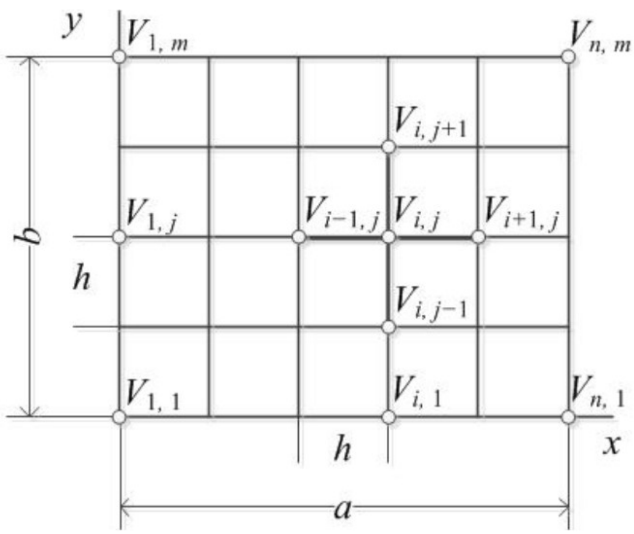

Рис. 1. Прямокутна ділянка Ω та позначення $V_{i,j}$ функції в вузлах рівномірної сітки.

Позначимо значення функції в вузлах сітки через $V_{i,j}$. Тоді часткові похідні в рівнянні Лапласа можна апроксимувати центральними кінцевими різницями другого порядку

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} \approx \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} + O\left(h^2\right); \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} \approx \frac{V_{j,i+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2} + O\left(h^2\right); \tag{6}$$

де $O(h^2)$ – члени другого порядку малості; $i = 1, 2, \ldots, n$ – індекси точок уздовж осі x; $j = 1, 2, \ldots, m$ – індекси точок уздовж осі y.

Вузли сітки (i, j) внутрішньої області Ω будемо називати внутрішніми, вузли на межі Γ – граничними. Таким чином, індекси внутрішніх вузлів сітки мають значення $i = 2, \ldots, n-1$ та $j = 2, \ldots, m-1$. Якщо вирази (5) та (6) підставити в рівняння (4), то, нехтуючи членами другого порядку малості, рівняння Лапласа для кожного внутрішнього вузла можна записати у вигляді

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}\right). \tag{7}$$

Позначимо задану граничну функцію нижньої грані області Ω як φ_{1x} на межі $[0, a]$, верхньої грані φ_{2x} – на межі $[0, a]$, лівої грані φ_{1y} – на межі $[0, b]$, правої грані φ_{2y} – на межі [0, b]. При цьому повинні виконуватися *граничні умови* $\varphi_{1x}(0) = \varphi_{1y}(0)$, $\varphi_{1x}(a) = \varphi_{2y}(0)$, $\varphi_{2x}(0) = \varphi_{1y}(b)$, $\varphi_{2x}(a) = \varphi_{2y}(b)$.

Таким чином, нам відомі значення функції $V_{i,j}$ на граничних вузлах, тобто відомі значення $V_{i,1}$, $V_{i,m}$, $V_{1,j}$, $V_{n,j}$ для усіх i та j.

Після введених вище визначень та позначень можна для кожного внутрішнього вузла сітки записати рівняння виду (7). Отримаємо систему з $(n - 2)\times(m - 2)$ лінійних алгебраїчних рівнянь. Приклад такого рівняння для вузла (2, 2)

$$V_{2,2} = \frac{1}{4}\left(V_{3,2} + V_{1,2} + V_{2,3} + V_{2,1}\right).$$

Значення функції $V_{i,j}$ в кожному вузлі є середнім врівноваженим чотирьох сусідніх вузлів. Така форма апроксимації виникла завдяки обраному способу апроксимації других похідних рівняння Лапласа центральними різницями другого порядку та зветься чотирьох точковим (або хрестоподібним) шаблоном (рис. 1). В залежності від способу апроксимації можна отримати інші шаблони, наприклад, 6-точковий, 8-точковий.

Одним з методів знаходження значень $V_{i,j}$ на внутрішніх вузлах сітки області Ω є ітераційний метод Якобі, який для кожного рівняння (7) можна записати так

$$V_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j}^{k} + V_{i-1,j}^{k} + V_{i,j+1}^{k} + V_{i,j-1}^{k}\right), \tag{8}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$ – номер ітерації.

Щоб розпочати ітераційний процес (першу ітерацію) необхідно задати початкові значення функції $V_{i,j}^{0}$ на внутрішніх вузлах сітки. Якщо нам нічого невідомо про передбачуваний розв'язок, то ці начальні значення можна обирати довільними.

Ітераційний процес закінчується, коли результати обчислення значень функції $V_{i,j}$ у всіх внутрішніх вузлах сітки на даній ітерації відрізняються від значень функції попередньої ітерації не більш ніж припустима похибка ε. Умова закінчення ітераційного процесу визначається за формулою

$$\max\left|V_{i,j}^{k+1} - V_{i,j}^{k}\right| < \varepsilon, \tag{9}$$

де ε – деяке мале, попередньо задане, додатне число.

У практичних додатках важливу роль відіграє моделювання розповсюдження тепла в деякому середовищі в часі. Швидкість зміни температури в точках середовища описується за допомогою рівняння теплопровідності, яке для одновимірного випадку має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \tag{10}$$

де $a = \lambda c/\rho$ ($м^2/с$) – коефіцієнт температуропровідності матеріалу середовища, який характеризує швидкість зміни у ньому температури;

λ (Вт/(м·град)) – коефіцієнт теплопровідності речовини;

c (Дж /(кг·°С)) – питома теплоємність; (для довідки: Дж = Вт·с);

ρ ($кг/м^3$) – щільність речовини.

Розроблено безліч методів розв'язування рівняння теплопровідності, таких як метод Фур'є, метод розділення змінних, метод кінцевих різниць, метод скінченних елементів та ін. У випадку методу кінцевих різниць, одновимірна задача розв'язується на двовимірній сітці, один вимір якої являє товщину простору поширення тепла, а інший – час. У даній лабораторній роботі використовується метод, в якому зміна температури в часі обчислюється за допомогою чисельного інтегрування.

Розглянемо стінку, що складається з однорідної речовини, яка розділяє два середовища з різними температурами. Стінка має товщину L (рис. 2). Припустимо, що ширина і висота стінки нескінченні. Температура середовища зліва від стінки може змінюватися в часі за деяким законом $\varphi_1(t)$, а справа – за законом $\varphi_2(t)$. Функції $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ назвемо *граничними умовами*. Початкове розподілення температури в точках стінки задається функцією $\varphi(y)$, яку будемо називати *початковими умовами*.

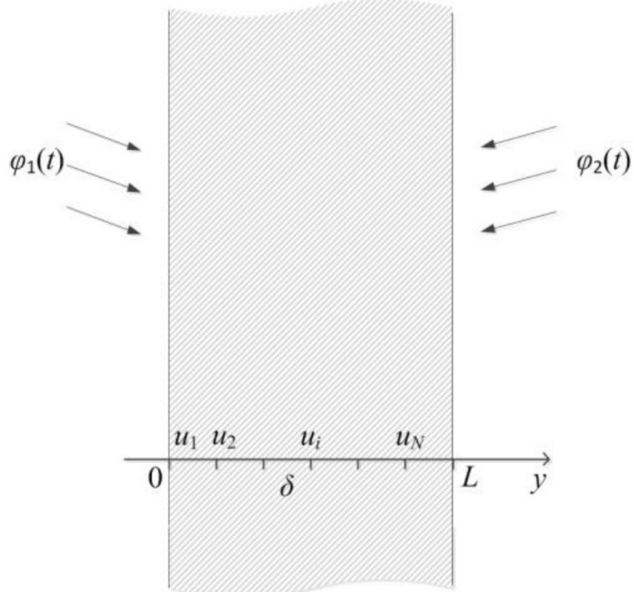

Рис. 2. Схема розбиття товщини стінки на шари.

Будемо позначати температуру в точках стінки через $u(t, y)$. Припускаємо, що площа стінки нескінченна, а речовина стінки однорідна, отже точки стінки, що знаходяться на одній вертикалі, мають однакову температуру. З урахуванням введених позначень, процес поширення температури в стінці буде описуватися рівнянням теплопровідності у вигляді

$$\frac{\partial u(t,y)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2}, \tag{11}$$

та умовами $$u(0, y) = \varphi(y),\ u(t, 0) = \varphi_1(t),\ u(t, L) = \varphi_2(t). \tag{12}$$

Для отримання системи звичайних диференціальних рівнянь, що апроксимують рівняння теплопровідності, розділимо стінку вертикальними лініями на N шарів однакової товщини δ. На перетині цих прямих з віссю y утвориться ряд точок, які пронумеруємо від $i = 1$ до $N + 1$. Тепер для кожної з позначених точок можна записати рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u(t, y_i)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(t, y_i)}{\partial y_i^2}, \qquad (13)$$

Позначимо $u(t, y_i)$ через $u_i(t)$. Частинну похідну $\frac{\partial^2 u(t, y_i)}{\partial y_i^2}$ в кожній i-й точці можна апроксимувати за допомогою різниці другого порядку

$$\frac{\partial^2 u(t, y_i)}{\partial y_i^2} \approx \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{\delta^2} + O(\delta^2). \qquad (14)$$

Введемо позначення $\mu = a/\delta^2$. Нехтуючи членами другого порядку малості $O(\delta^2)$ та врвховуючи введені вище позначення, отримаємо звичайні диференціальні рівняння для кожної внутрішньої осі y_i

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \mu(u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)). \qquad (15)$$

Таких рівнянь буде стільки, скільки точок було визначено на осі y. Якщо кількість точок N, то всі рівняння разом складуть систему з N диференціальних рівнянь. Наприклад, для чотирьох точок система рівнянь буде виглядати наступним чином

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \mu(u_2(t) - 2u_1(t) + \varphi_1(t)), \\ u_2'(t) &= \mu(u_3(t) - 2u_2(t) + u_1(t)), \\ u_3'(t) &= \mu(u_4(t) - 2u_3(t) + u_2(t)), \\ u_4'(t) &= \mu(\varphi_2(t) - 2u_4(t) + u_3(t)) \end{aligned} \qquad (16)$$

за початкових умов $u_i(0) = \varphi(y_i)$ та граничних умов $u(t, 0) = \varphi_1(t)$, $u(t, L) = \varphi_2(t)$.

Таку систему рівнянь можна розв’язати за допомогою будь-яких методів чисельного інтегрування (наприклад, Рунге-Кутта).

Для випадку, коли границях стінки підтримується стала температура, а початкова температура у стінці є нульовою, тобто $\varphi_1(t) = \alpha$, $\varphi_2(t) = \beta$ і $\varphi(y) = 0$, відомо аналітичний розв’язок задачі теплопровідності (11) – (12) у вигляді

$$u(t, y) = \frac{\beta - \alpha}{L} y + \alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\beta(-1)^n - \alpha\right) e^{-\left(\frac{\pi n}{L} a\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} y\right). \qquad (17)$$

Завдання 1

- змоделюйте процес зміни температури в стінці із заданого матеріалу методом приведення до системи звичайних диференціальних рівнянь задачі теплопровідності (11) – (12). Вихідні дані для віповідної задачі теплопровідності представлені у таблиці 1;
- на мові Python напишіть програму реалізації методу Рунге-Кутта для числового інтегрування із кроком h та тривалістю T, отриманої в попередньому пункті системи звичайних диференціальних рівнянь із відповідними початковими та граничними умовами;

Таблиця 1. Вихідні дані для моделювання задачі теплопровідності (11) – (12).

Варіант	Матеріал	a, 10^{-6} м^2/с	L, м	T, год.	N	h	$\varphi_1(t)=\alpha$, °C	$\varphi_2(t)=\beta$, °C	$\varphi(y)$, °C
1	Дерево	0,082	0,3	72	100	3	1	20	0
2	Цегла	0,52	0,5	120	100	1	2	21	0
3	Скло	0,34	0,01	1	100	0,15	3	22	0
4	Мідь	111,0	0,07	1	100	0,15	4	23	0
5	Повітря	19,0	1,0	3	100	0,15	5	24	0
6	Вода	0,143	0,75	10	100	0,3	6	25	0
7	Алюміній	84,18	0,02	0,1	100	0,015	7	26	0
8	Нейлон	0,09	0,001	0,1	100	0,03	8	27	0
9	Гума	0,13	0,025	0,1	100	0,015	9	28	0
10	Свинець	23,6	0.6	1	100	0,3	10	29	0
11	Дерево	0,082	0,5	140	100	3	11	30	0
12	Цегла	0,52	1,0	240	100	1	12	31	0
13	Скло	0,34	0,02	2	100	0,15	13	32	0
14	Мідь	111,0	0,15	2	100	0,15	14	33	0
15	Повітря	19,0	1,5	4,5	100	0,15	15	34	0
16	Вода	0,143	1,5	20	100	0,3	16	35	0
17	Алюміній	84,18	0,05	0,25	100	0,015	17	36	0
18	Нейлон	0,09	0,005	0,5	100	0,03	18	37	0
19	Гума	0,13	0,05	0,2	100	0,015	19	38	0
20	Свинець	23,6	1.2	2	100	0,3	20	39	0

Завдання 2

- на мові Python напишіть програму для візуалізації у вигляді 3D графіка отриманого в попередньому завданні числового розв'язку задачі теплопровідності;
- зобразіть на отриманому 3D графіку також і аналітичний розвязок (17) відповідної задачі теплопровідності, обмежившись 30-ма доданками нескінченного ряду у формулі (17);
- на основі формул (18) обчисліть максимальну абсолютну (MAE) та середньостатистичну (MSE) похибки отриманого числового розв'язку у порівнянні із відповідним аналітичним розв'язком (17).

$$MAE = \max_{\substack{1\le i\le M \\ 1\le j\le N}} \left| u(t_i, y_j) - \hat{u}(t_i, y_j) \right|, \quad MSE = \frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\Big(u(t_i, y_j) - \hat{u}(t_i, y_j)\Big)^2, \quad (18)$$

де $\hat{u}(t_i, y_j)$, $u(t_i, y_j)$ – відповідно числовий та аналітичний (17) розв'язки задачі теплопровідності; $M = (T/h) - 1$.