ตรรกศาสตร์

2 May 2018

สารบัญ

ประพจน์

ในเรื่องตรรกศาสตร์นี้ เราจะสนใจหาว่า ประโยคต่างๆ เป็นจริง หรือ เท็จ
แต่ก่อนอื่น ต้องรู้ว่า ไม่ใช่ทุกประโยค ที่จะเอามาหาความจริงได้
เช่น ถ้าอยากรู้ว่าประโยค "กินอะไรดี" เป็น จริง หรือ เท็จ คงตอบลำบาก

"ประพจน์" คือ ประโยคที่เป็นจริง หรือ เท็จ ได้อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว

เช่น ประเทศไทยอยู่ในทวีปเอเชีย → เป็นประพจน์ เพราะบอกได้ว่าเป็นจริง

$3 > 5$ → เป็นประพจน์ เพราะบอกได้ว่าเป็นเท็จ

ขณะนี้ มีผู้หญิง $3{,}674{,}196$ คน ใน กทม. → เป็นประพจน์ ถึงจะไม่รู้ว่าจริงหรือเท็จ แต่ถ้าช่วยกันนับดูก็จะรู้ว่าจริงหรือเท็จซักอย่าง แน่นอน

ประโยคที่ไม่ใช่ประพจน์ คือ ประโยคที่ทำยังไงก็บอกไม่ได้ว่าจริงหรือเท็จ
เช่น ประโยคคำถาม คำสั่ง คำขอร้อง คำอุทาน สุภาษิต รวมถึงประโยคที่มีตัวแปร

เช่น กินอะไรดี → ไม่ใช่ประพจน์ เพราะเป็นประโยคคำถาม

$x > 5$ → ไม่ใช่ประพจน์ เพราะมีตัวแปร (ถ้า x เป็น 8 จะจริง แต่ถ้า x เป็น 1 จะเท็จ)

ในเรื่องตรรกศาสตร์นี้ เราจะสนใจศึกษาเฉพาะประโยคที่เป็นประพจน์เท่านั้น
โดยเรานิยมใช้ ตัวอักษร p, q, r เป็นสัญลักษณ์แทนประโยคที่เป็นประพจน์

เช่น ให้ p แทนประพจน์ "เมื่อวานฝนตก"

ให้ q แทนประพจน์ "ประเทศไทยมี 76 จังหวัด" เป็นต้น

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงพิจารณาว่า ข้อใดต่อไปนี้เป็นประพจน์
    1. ปิดหน้าต่างให้หน่อย
    2. $4 + 7 = 12$
    3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์
    4. เชียงใหม่ ไม่ใช่เมืองหลวงของไทย
    5. สุนัขปกติ มี 4 ขา
    6. สุนัขปกติมี 3 ขา
    7. เขาเป็นคนดี
    8. หนึ่งวัน มี 30 ชั่วโมง

การเชื่อมประพจน์

เราสามารถนำประพจน์ต่างๆ มา "เชื่อม" กันได้ เช่น "เมื่อวานฝนตก และ ประเทศไทยมี 76 จังหวัด"
คำเชื่อมที่จะได้เรียนในบทนี้ ได้แก่

- ...... และ ......
- ...... หรือ ......
- ถ้า ...... แล้ว ......
- ...... ก็ต่อเมื่อ ......
- ไม่ ......

และ

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย "และ" จะเป็นจริงเมื่อ ทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง

เช่น $2 > 1$ และ $4 < 5$ เป็นจริง เพราะ ทั้ง $2 > 1$ กับ $4 < 5$ เป็นจริง

ประเทศไทยมี 76 จังหวัด และ เชียงใหม่อยู่ภาคใต้ เป็นเท็จ เพราะ เชียงใหม่อยู่ภาคใต้ เป็นเท็จ

$2+2 = 5$ และ คนปกติมี 6 ขา เป็นเท็จ เพราะ $2+2 = 5$ เป็นเท็จ

เราจะแทนตัวเชื่อม "และ" ด้วยสัญลักษณ์ $\wedge$

เช่น ถ้าให้ p แทนประพจน์ "$2 > 1$" ให้ q แทนประพจน์ "$4 < 5$"

"$2 > 1$ และ $4 < 5$" จะเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $p \wedge q$

จะเห็นว่า $p \wedge q$ จะเป็นจริง เมื่อ p กับ q เป็นจริงทั้งคู่นั่นเอง

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

หรือ

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย "หรือ" จะเป็นจริงเมื่อ อย่างน้อยหนึ่งประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริง

เช่น ประเทศไทยอยู่ในทวีปยุโรป หรือ $2+5 > 4$ เป็นจริง เพราะ $2+5 > 4$ เป็นจริง

1 วันมี 24 ชั่วโมง หรือ เมื่อวานฝนตก เป็นจริง เพราะ 1 วันมี 24 ชั่วโมง เป็นจริง

$2+2 = 5$ หรือ คนปกติมี 6 ขา เป็นเท็จ เพราะ ทุกประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นเท็จ

เราจะแทนตัวเชื่อม "หรือ" ด้วยสัญลักษณ์ $\vee$

เช่น ถ้าให้ p แทนประพจน์ "$2 > 1$" ให้ q แทนประพจน์ "$4 < 5$"

"$2 > 1$ หรือ $4 < 5$" จะเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $p \vee q$

จะเห็นว่า $p \vee q$ จะเป็นจริง เมื่อ p กับ q เป็นจริงอย่างน้อย 1 ประพจน์นั่นเอง

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ถ้า แล้ว

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย "ถ้า ...... แล้ว ......" จะมีความหมายในลักษณะของ ถ้า (เงื่อนไข) แล้ว (ผลลัพธ์)

ถ้าเงื่อนไข เป็นจริง ผลลัพธ์ต้องจริง แต่ถ้าเงื่อนไขเป็นเท็จ ผลลัพธ์จะเป็นยังไงก็ได้

ดังนั้น ประพจน์ที่เชื่อมด้วย "ถ้า ...... แล้ว ......" จะเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียว คือ เมื่อข้างหน้าเป็นจริง แต่ข้างหลังเป็นเท็จ

กรณีที่ประพจน์หน้าเป็นเท็จ เราไม่ต้องสนใจประพจน์หลัง ให้ตอบได้เลยว่าผลลัพธ์เป็นจริง

หรือกรณีที่ประพจน์หลังเป็นจริง ก็ไม่ต้องสนใจประพจน์หน้า ให้ตอบได้เลยว่าผลลัพธ์เป็นจริง

เช่น ถ้า ฉันเป็นคนปกติ แล้ว ฉันมี 6 ขา เป็นเท็จ เพราะ ประพจน์หน้าเป็นจริง ประพจน์หลังเป็นเท็จ

ถ้า ฉันเป็นคนปกติ แล้ว ฉันมี 2 ขา เป็นจริง เพราะ ประพจน์หลังเป็นจริง

ถ้า หมูบินได้ แล้ว ฉันสอบได้ที่หนึ่ง เป็นจริง เพราะ ประพจน์หน้าเป็นเท็จ

ถ้า หมูบินได้ แล้ว ฉันมี 2 ขา เป็นจริง เพราะ ประพจน์หน้าเป็นเท็จ

เราจะแทนตัวเชื่อม “ถ้า ...... แล้ว ......” ด้วยสัญลักษณ์ $\rightarrow$ (หรือ $\Rightarrow$ ก็ได้)

เช่น ถ้าให้ p แทนประพจน์ “$2 > 1$” ให้ q แทนประพจน์ “$4 < 5$”

“ถ้า $2 > 1$ แล้ว $4 < 5$” จะเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $p \rightarrow q$

จะเห็นว่า $p \rightarrow q$ จะเป็นเท็จเพียงกรณีเดียว คือ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

<u>ก็ต่อเมื่อ</u>

ประพจน์ที่เชื่อมด้วย “ก็ต่อเมื่อ” จะเป็นจริงเมื่อ ทั้งสองประพจน์ที่มาเชื่อม เป็นจริงหรือเท็จเหมือนๆกัน

เช่น ไทยเป็นแชมป์บอลโลก ก็ต่อเมื่อ หมูบินได้ เป็นจริง เพราะ ทั้งสองประพจน์ เป็นเท็จเหมือนกัน

$2 < 9$ ก็ต่อเมื่อ $6 + 8 = 14$ เป็นจริง เพราะ ทั้งสองประพจน์ เป็นจริงเหมือนกัน

ช้างออกลูกเป็นไข่ ก็ต่อเมื่อ ช้างกินกล้วย เป็นเท็จ เพราะ ประพจน์หน้าเป็นเท็จ แต่ประพจน์หลังเป็นจริง

เราจะแทนตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ” ด้วยสัญลักษณ์ $\leftrightarrow$

เช่น ถ้าให้ p แทนประพจน์ “$2 > 1$” ให้ q แทนประพจน์ “$4 < 5$”

“$2 > 1$ ก็ต่อเมื่อ $4 < 5$” จะเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $p \leftrightarrow q$

จะเห็นว่า $p \leftrightarrow q$ จะเป็นจริง เมื่อ p กับ q เป็นจริงหรือเท็จเหมือนกันนั่นเอง

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

<u>ไม่</u>

“ไม่” หรือ บางคนนิยมเรียกสั้นๆว่า “not” หรือมีอีกชื่อว่า “นิเสธ” จะทำกับประพจน์แค่ประพจน์เดียว

โดย ประพจน์ ที่เติม “ไม่” เข้าไป จะเปลี่ยนจากจริงเป็นเท็จ เท็จเป็นจริง

เช่น หมูบินไม่ได้ เป็นจริง เพราะ ประพจน์ “หมูบินได้” เป็นเท็จ

2 ไม่น้อยกว่า 3 เป็นเท็จ เพราะ ประพจน์ “2 น้อยกว่า 3” เป็นจริง

เราจะแทน “ไม่” ด้วยสัญลักษณ์ $\sim$

เช่น ถ้าให้ p แทนประพจน์ “2 มากกว่า 1”

“2 ไม่มากกว่า 1” จะเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $\sim p$

จะเห็นว่า p กับ $\sim p$ จะมีค่าความจริงตรงข้ามกันเสมอ

p	$\sim p$
T	F
F	T

ก่อนอื่น ต้องจำตารางผลลัพธ์ $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\sim$ ทั้ง 5 ตารางให้ได้ก่อน

$\mathrm{T} \wedge \mathrm{F}$ เป็น	$\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{T}$ เป็น	$\mathrm{F} \vee \mathrm{F}$ เป็น	$\mathrm{T} \leftrightarrow \mathrm{T}$ เป็น ....
$\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{T}$ เป็น	$\mathrm{T} \wedge \mathrm{T}$ เป็น	$\sim\mathrm{F}$ เป็น	$\mathrm{T} \leftrightarrow \mathrm{F}$ เป็น ....
$\mathrm{T} \vee \mathrm{F}$ เป็น	$\mathrm{F} \wedge \mathrm{T}$ เป็น	$\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{F}$ เป็น	$\mathrm{T} \vee \mathrm{T}$ เป็น ....
$\mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{F}$ เป็น	$\sim\mathrm{T}$ เป็น	$\mathrm{F} \wedge \mathrm{F}$ เป็น	$\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F}$ เป็น ....

อย่างไรก็ตาม โจทย์มักจะนำ ตัวเชื่อมหลายๆแบบมาถามผสมๆกัน เช่น $\sim\mathrm{T} \rightarrow (\sim\mathrm{F} \wedge \mathrm{T})$ เป็น ....

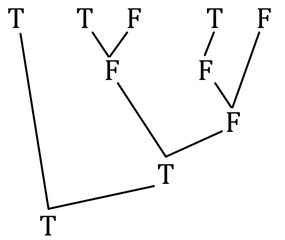
ลำดับการทำคือ ถ้ามีวงเล็บ ให้ทำในวงเล็บก่อน

ถ้ามี “ไม่” ให้ทำ “ไม่” เป็นลำดับถัดมา

ตามด้วย “และ” , “หรือ” , “ถ้า แล้ว” , “ก็ต่อเมื่อ” ตามลำดับ

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ p เป็นจริง , q เป็นเท็จ , r เป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ $p \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow {\sim} r \vee q)$

<u>วิธีทำ</u> $p \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow {\sim} r \vee q)$ แทนค่าความจริงให้กับประพจน์แต่ละตัว แล้วค่อยๆหาผลลัพธ์ ตามลำดับ ดังรูป



จะได้ $p \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow {\sim} r \vee q)$ เป็นจริง #

บ่อยครั้ง เรา<u>ไม่</u>จำเป็นต้องรู้ p, q, r ครบทุกตัว ก็ยังสามารถหาค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจาก p, q, r ได้

เช่น ไม่ว่า q เป็นอะไรก็ตาม $\mathrm{T} \vee q$ เป็นจริงเสมอ $\mathrm{F} \wedge q$ เป็นเท็จเสมอ
$\mathrm{F} \rightarrow q$ เป็นจริงเสมอ $q \rightarrow \mathrm{T}$ เป็นจริงเสมอ

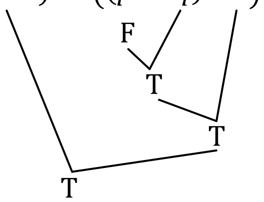
ไม่ว่า p จะเป็นอะไร $p \wedge {\sim} p$ เป็นเท็จเสมอ $p \vee {\sim} p$ เป็นจริงเสมอ $p \rightarrow p$ เป็นจริงเสมอ
$p \leftrightarrow p$ เป็นจริงเสมอ $p \leftrightarrow {\sim} p$ เป็นเท็จเสมอ

และบางครั้ง ถ้าเรารู้ค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจาก p, q, r เราอาจย้อนกลับไปหา p, q, r ได้

เช่น ถ้า $p \wedge q$ เป็นจริง แปลว่า ทั้ง p กับ q ต้องเป็นจริง
ถ้า $p \vee q$ เป็นเท็จ แปลว่า ทั้ง p กับ q ต้องเป็นเท็จ
ถ้า $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ แปลว่า p ต้องเป็นจริง , q ต้องเป็นเท็จ

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ p เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(q \rightarrow r) \rightarrow \big((p \rightarrow q) \vee r\big)$

<u>วิธีทำ</u> $(q \rightarrow r) \rightarrow \big((p \rightarrow q) \vee r\big)$

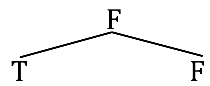


ข้อนี้ บอกแค่ p ตัวเดียว แต่โชคดีที่ยังพอจะทำได้
เพราะ $\mathrm{F} \rightarrow ?$ ได้ T เสมอ
$\mathrm{T} \vee ?$ ได้ T เสมอ
$? \rightarrow \mathrm{T}$ ได้ T เสมอ
ดังนั้น จะได้ $(q \rightarrow r) \rightarrow \big((p \rightarrow q) \vee r\big)$ เป็นจริง #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $(p \leftrightarrow {\sim} q) \rightarrow ({\sim} p \vee r)$ เป็นเท็จ จงหา p, q, r

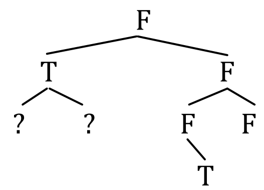
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้รู้ผลลัพธ์สุดท้าย โจทย์ให้เราสืบกลับไปหา p, q, r
การที่ $(p \leftrightarrow {\sim} q) \rightarrow ({\sim} p \vee r)$ จะเป็นเท็จได้
เป็นไปได้กรณีเดียว คือ $(p \leftrightarrow {\sim} q)$ ต้องเป็นจริง
และ $({\sim} p \vee r)$ ต้องเป็นเท็จ

$(p \leftrightarrow {\sim} q) \rightarrow ({\sim} p \vee r)$



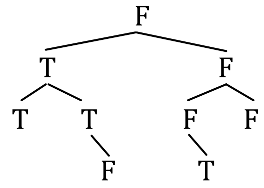
การที่ $(p \leftrightarrow {\sim} q)$ จะเป็นจริง มีได้หลายกรณี
คือ $\mathrm{T} \leftrightarrow \mathrm{T}$ กับ $\mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{F}$ ดังนั้น อันนี้ยังไปต่อไม่ได้
ข้ามมาอีกฝั่ง $({\sim} p \vee r)$ เป็นเท็จ จะมีได้กรณีเดียว
คือ ${\sim} p$ เป็นเท็จ และ r เป็นเท็จ
ดังนั้น จะได้ว่า p ต้องเป็นจริง และ r ต้องเป็นเท็จ

$(p \leftrightarrow {\sim} q) \rightarrow ({\sim} p \vee r)$



กลับมาที่ $(p \leftrightarrow {\sim}q)$ ใหม่ คราวนี้เรารู้แล้วว่า p เป็นจริง
ดังนั้น $(\mathrm{T} \leftrightarrow {\sim}q)$ ต้องเป็นจริง
จะได้ ${\sim}q$ ต้องเป็นจริง ซึ่งทำให้ q ต้องเป็นเท็จ
ดังนั้น p เป็นจริง q เป็นเท็จ และ r เป็นเท็จ

$(p \leftrightarrow {\sim}q) \rightarrow ({\sim}p \vee r)$



#

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนดให้ p เป็นเท็จ , q เป็นจริง , r เป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   1. ${\sim}p \wedge (q \vee {\sim}r)$
   2. ${\sim}(p \rightarrow r) \rightarrow ({\sim}q \rightarrow p)$
   3. $({\sim}q \wedge {\sim}p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$
   4. ${\sim}\Big(({\sim}p \vee {\sim}r) \rightarrow \big(p \rightarrow (q \wedge r)\big)\Big)$

2. กำหนดให้ p เป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   1. $({\sim}p \wedge q) \rightarrow ({\sim}q \vee r)$
   2. $(p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge {\sim}q)$
   3. $(q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow p)$
   4. $({\sim}p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \vee {\sim}q)$

3. จงหาค่าความจริงของ p, q, r เมื่อกำหนดให้

   1. $(q \to \sim p) \wedge \sim(p \to r)$ เป็นจริง
   2. $\big(p \to (p \to r)\big) \vee (r \leftrightarrow \sim q)$ เป็นเท็จ
   3. $(p \wedge \sim r) \to (\sim p \vee \sim q)$ เป็นเท็จ
   4. $p \leftrightarrow (p \wedge q)$ เป็นเท็จ

4. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $ab > 0$

   ให้ p แทนประพจน์ "ถ้า $a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ " และ q แทนประพจน์ "$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ "

   ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง [PAT 1 (มี.ค. 57)/2]

   1. $(p \Rightarrow q) \vee (q \wedge \sim p)$
   2. $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$
   3. $(p \wedge \sim q) \wedge (q \Rightarrow p)$
   4. $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$

5. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ที่ ประพจน์ $(p \vee q) \Rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็น<u>เท็จ</u> และประพจน์ $p \Leftrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็น<u>จริง</u> ประพจน์ในข้อใดมีค่าความจริงเป็น<u>จริง</u> [PAT 1 (ก.ค. 53)/1]

   1. $(q \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow r)$
   2. $q \Rightarrow [p \vee (q \wedge \sim r)]$
   3. $(p \Rightarrow s) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow q)$
   4. $(r \Leftrightarrow s) \wedge [q \Rightarrow (p \wedge r)]$

6. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใดๆ โดยที่ $\sim p \to q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ข้อสรุปใดถูกต้อง [PAT 1 (ธ.ค. 54)/1]
   1. $(p \leftrightarrow r) \to [(p \vee r) \to q]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
   2. $(p \to r) \to (\sim q \to p)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

7. กำหนดให้ p, q, r, s และ t เป็นประพจน์ ซึ่ง $p \to (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็น <u>เท็จ</u>
   $p \leftrightarrow (s \vee t)$ มีค่าความจริงเป็น <u>จริง</u>

   ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น <u>จริง</u> [PAT 1 (เม.ย. 57)/3]
   1. $(q \wedge s) \to (p \wedge q)$
   2. $(s \wedge t) \to \sim q$
   3. $(q \vee s) \leftrightarrow p$
   4. $(p \to r) \to s$

ตารางค่าความจริง

เราเรียกตารางที่บอกค่าความจริงในทุกๆกรณี ของประพจน์ที่สนใจ ว่า "ตารางค่าความจริง"
ในหัวข้อที่แล้ว เราได้เห็นตารางค่าความจริงของ $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ และ $\sim p$ มาแล้ว

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	$\sim p$
T	F
F	T

ในเรื่องนี้ เราจะหัดสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์อื่นๆ ที่ซับซ้อนมากขึ้น
เนื่องจาก ตารางค่าความจริง จะต้องคลุมทุกกรณีของตัวแปร p, q, r
ดังนั้น จำนวนแถวในตาราง จะเป็นทวีคูณ ของจำนวนตัวแปร
โดย สูตรในการหาจำนวนแถว คือ จำนวนแถว $= 2^{\text{จำนวนตัวแปร}}$

1 ตัวแปร

p	
T	
F	

2 ตัวแปร

p	q	
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

3 ตัวแปร

p	q	r	
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

4 ตัวแปร

p	q	r	s	
T	T	T	T	
T	T	T	F	
T	T	F	T	
T	T	F	F	
T	F	T	T	
T	F	T	F	
T	F	F	T	
T	F	F	F	
F	T	T	T	
F	T	T	F	
F	T	F	T	
F	T	F	F	
F	F	T	T	
F	F	T	F	
F	F	F	T	
F	F	F	F	

และเรามักนิยมเพิ่มช่องสำหรับ "ทดค่า" ลงในตาราง เพื่อช่วยให้การคิดง่ายขึ้น อีกด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $\sim q \rightarrow (\sim q \wedge p)$
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\sim q \rightarrow (\sim q \wedge p)$ มี 2 ตัวแปร คือ p กับ q ดังนั้น จะมีกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด 4 กรณี
และ เนื่องจากประพจน์นี้ มีความซับซ้อน เราจะสร้างช่อง $\sim q$ กับ $\sim q \wedge p$ สำหรับทดค่า ดังนี้

p	q	$\sim q$	$\sim q \wedge p$	$\sim q \rightarrow (\sim q \wedge p)$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

โดยเราจะ ใช้ช่อง q หาค่าของ $\sim q$
ใช้ช่อง $\sim q$ และช่อง p หาค่าของ $\sim q \wedge p$
ใช้ช่อง $\sim q$ และช่อง $\sim q \wedge p$ หาค่าของ $\sim q \rightarrow \sim q \wedge p$

และจะได้ตารางที่เติมเสร็จสมบูรณ์ ดังนี้

p	q	$\sim q$	$\sim q \wedge p$	$\sim q \rightarrow (\sim q \wedge p)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	F

#

<u>ตัวอย่าง</u> จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $(p \rightarrow \sim q) \vee \sim(r \leftrightarrow \sim p)$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้มี p, q, r รวมเป็น 3 ตัวแปร ดังนั้น จะมีทั้งหมด 8 กรณี ดังนี้

p	q	r	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim p$	$r \leftrightarrow \sim p$	$\sim(r \leftrightarrow \sim p)$	$(p \rightarrow \sim q) \vee \sim(r \leftrightarrow \sim p)$
T	T	T	F	F	F	F	T	T
T	T	F	F	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	F	T
F	T	T	F	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T

#

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $\sim p \rightarrow q$

2. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow q)$

สมมูล

"สมมูล" แทนด้วยสัญลักษณ์ "≡" แปลว่า "มีค่าความจริงเหมือนกัน"
เราจะใช้เครื่องหมาย "≡" กับประพจน์ คล้ายๆกับที่เราใช้เครื่องหมาย "="
เช่น "p เป็นจริง" จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \equiv \mathrm{T}$
"q เป็นเท็จ" จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $q \equiv \mathrm{F}$
"p มีค่าความจริงเหมือน q" จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \equiv q$

ในกรณีที่ประพจน์สองประพจน์ มีตารางค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี เราจะกล่าวว่า สองประพจน์นั้น สมมูลกัน
ในกรณีที่ประพจน์สองประพจน์ มีตารางค่าความจริงตรงข้ามกันทุกกรณี เราจะกล่าวว่า สองประพจน์นั้น เป็นนิเสธกัน

ตัวอย่าง จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $\sim p \to \sim q$ กับ $p \vee \sim q$ สมมูล หรือ เป็นนิเสธกันหรือไม่
วิธีทำ เราจะเขียนตารางค่าความจริง ของ $\sim p \to \sim q$ กับ $p \vee \sim q$ ลงในตารางเดียวกัน

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \to \sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

จะเห็นว่าช่อง $\sim p \to \sim q$ กับ $p \vee \sim q$ มีค่าเหมือนกันทุกกรณี ดังนั้น $\sim p \to \sim q \equiv p \vee \sim q$ #

ตัวอย่าง จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $\sim p \wedge \sim q$ กับ $p \to \sim q$ สมมูล หรือ เป็นนิเสธกันหรือไม่
วิธีทำ เราจะเขียนตารางค่าความจริง ของ $\sim p \to \sim q$ กับ $p \vee \sim q$ ลงในตารางเดียวกัน

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$p \to \sim q$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

จะเห็นว่าช่อง $\sim p \wedge \sim q$ กับ $p \to \sim q$ มีค่าเหมือนบ้าง ไม่เหมือนบ้าง
ดังนั้น $\sim p \wedge \sim q$ กับ $p \to \sim q$ ไม่มีความเกี่ยวข้องกัน (ไม่สมมูล และ ไม่เป็นนิเสธกัน) #

ตัวอย่าง จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $p \wedge (q \to p)$ กับ $(q \to p) \to \sim p$ สมมูล หรือ เป็นนิเสธกันหรือไม่
วิธีทำ เราจะเขียนตารางค่าความจริง ของ $p \wedge (q \to p)$ กับ $(q \to p) \to \sim p$ ลงในตารางเดียวกัน

p	q	$q \to p$	$p \wedge (q \to p)$	$\sim p$	$(q \to p) \to \sim p$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

จะเห็นว่าช่อง $p \wedge (q \to p)$ กับ $(q \to p) \to \sim p$ มีค่าตรงข้ามกันทุกกรณี
ดังนั้น $p \wedge (q \to p)$ เป็นนิเสธของ $(q \to p) \to \sim p$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $p \wedge (p \vee q)$ สมมูล หรือเป็นนิเสธกับ $p \vee (p \wedge q)$ หรือไม่

2. จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $p \to (q \to r)$ สมมูล หรือเป็นนิเสธกับ $(p \to q) \to r$ หรือไม่

3. จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $p \wedge (q \to p)$ สมมูล หรือเป็นนิเสธกับ $(q \to p) \to \sim p$ หรือไม่

4. กำหนดให้ p, q และ r แทนประพจน์ใดๆ ให้ $S(p,q,r)$ แทนประพจน์ที่ประกอบด้วยประพจน์ p, q และ r และค่าความจริงของประพจน์ $S(p,q,r)$ แสดงดังตารางต่อไปนี้

p	q	r	ค่าความจริงของ $S(p,q,r)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

ประพจน์ $S(p,q,r)$ สมมูลกับประพจน์ใดต่อไปนี้ [PAT 1 (พ.ย. 57)/1]

1. $(q \rightarrow p) \vee (q \wedge r)$
2. $(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$
3. $(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \wedge r)$
4. $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$

การทำประพจน์เป็นรูปอย่างง่าย

ในเรื่องนี้ โจทย์จะให้ประพจน์ที่มีความซับซ้อนมา แล้วให้เราทำเป็นรูปที่ง่ายขึ้น
ในการทำเป็นรูปอย่างง่าย เราต้องรู้สมบัติต่างๆของ $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$, $\leftrightarrow$ ซึ่งจะมีทั้งสมบัติง่ายๆ และสมบัติยากๆ

สมบัติพื้นฐานทั่วๆไป ที่ควรรู้ (โดยไม่ต้องท่อง) ได้แก่

1. สมบัติการตัดตัวซ้ำ

   $p \wedge p \equiv p$ $\qquad$ $p \vee p \equiv p$

   แต่ระวังให้ดี $p \rightarrow p \not\equiv p$ $\qquad$ $p \leftrightarrow p \not\equiv p$

2. สมบัติสลับที่

   $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $\qquad$ $p \vee q \equiv q \vee p$ $\qquad$ $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

   แต่ระวังให้ดี $p \rightarrow q \not\equiv q \rightarrow p$

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้

   $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge q \wedge r$

   $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv p \vee q \vee r$

   $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$

   แต่ระวังให้ดี $(p \rightarrow q) \rightarrow r \not\equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

4. สมบัติการหักล้างกันของนิเสธ

   $\sim(\sim p) \equiv p$

สมบัติต่อไปนี้ เป็นสมบัติที่ต้องท่อง

1. สูตรกระจาย $\sim$ เข้าไปใน $\wedge$, $\vee$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{array}}$$

2. สูตรกระจาย $\wedge, \vee$ เข้าไปใน $\vee, \wedge$

$$\boxed{\begin{array}{l} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array}}$$

3. สูตร $\rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \\ p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \end{array}}$$

*** สูตรแรก จำยากหน่อย แต่ใช้บ่อยสุดๆ

4. สูตร $\leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\ \sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q \end{array}}$$

และเนื่องจาก $\wedge$ กับ $\vee$ เป็นเครื่องหมายที่เราเจอเกือบทุกข้อ จึงควรจำสมบัติพิเศษของ $\wedge$ กับ $\vee$ เพิ่ม ดังนี้

1. T หรือ กับอะไรก็ตาม จะได้ T F และ กับอะไรก็ตาม จะได้ F

   เช่น $\mathrm{T} \vee p \equiv \mathrm{T}$ $\quad q \vee \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$ $\quad \mathrm{T} \vee \big(p \wedge (q \to r)\big) \equiv \mathrm{T}$

   $\mathrm{F} \wedge p \equiv \mathrm{F}$ $\quad q \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$ $\quad \mathrm{F} \wedge \big(p \wedge (q \to r)\big) \equiv \mathrm{F}$

2. T และ กับอะไรก็ตาม จะได้เท่าเดิม F หรือ กับอะไร จะได้เท่าเดิม

   เช่น $\mathrm{T} \wedge p \equiv p$ $\quad q \wedge \mathrm{T} \equiv q$ $\quad \mathrm{T} \wedge \big(p \wedge (q \to r)\big) \equiv p \wedge (q \to r)$

   $\mathrm{F} \vee p \equiv p$ $\quad q \vee \mathrm{F} \equiv q$ $\quad \mathrm{F} \vee \big(p \wedge (q \to r)\big) \equiv p \wedge (q \to r)$

3. ตัวตรงข้ามกัน และกัน ได้ F เสมอ ตัวตรงข้ามกัน หรือกัน ได้ T เสมอ

   เช่น $p \wedge {\sim}p \equiv \mathrm{F}$ $\quad {\sim}p \wedge p \equiv \mathrm{F}$ $\quad (p \vee q) \wedge ({\sim}p \wedge {\sim}q) \equiv \mathrm{F}$

   $p \vee {\sim}p \equiv \mathrm{T}$ $\quad {\sim}p \vee p \equiv \mathrm{T}$ $\quad (p \vee q) \vee ({\sim}p \wedge {\sim}q) \equiv \mathrm{T}$

เราจะใช้สูตรที่กล่าวมาทั้งหมด เพื่อเปลี่ยนรูปประพจน์ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

โดยเรามักจะพยายามกำจัด ( ) , $\to$, $\leftrightarrow$ ให้กลายเป็น $\wedge , \vee , \sim$

เช่น

$$\begin{aligned} {\sim}p \to q &\equiv {\sim}({\sim}p) \vee q \\ &\equiv p \vee q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \to (q \vee r) &\equiv {\sim}p \vee (q \vee r) \\ &\equiv {\sim}p \vee q \vee r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \to (q \wedge r) &\equiv {\sim}p \vee (q \wedge r) \\ &\equiv ({\sim}p \vee q) \wedge ({\sim}p \vee r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \to r &\equiv {\sim}(p \wedge q) \vee r \\ &\equiv ({\sim}p \vee {\sim}q) \vee r \\ &\equiv {\sim}p \vee {\sim}q \vee r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \to q) \to r &\equiv ({\sim}p \vee q) \to r \\ &\equiv {\sim}({\sim}p \vee q) \vee r \\ &\equiv (p \wedge {\sim}q) \vee r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \vee q) \to p &\equiv {\sim}(p \vee q) \vee p \\ &\equiv ({\sim}p \wedge {\sim}q) \vee p \\ &\equiv ({\sim}p \vee p) \wedge ({\sim}q \vee p) \\ &\equiv \quad \mathrm{T} \quad \wedge ({\sim}q \vee p) \\ &\equiv {\sim}q \vee p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \to {\sim}(p \wedge q) &\equiv p \to ({\sim}p \vee {\sim}q) \\ &\equiv {\sim}p \vee ({\sim}p \vee {\sim}q) \\ &\equiv {\sim}p \vee {\sim}p \vee {\sim}q \\ &\equiv {\sim}p \vee {\sim}q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \vee (p \wedge q) &\equiv (p \wedge \mathrm{T}) \vee (p \wedge q) \\ &\equiv p \wedge (\mathrm{T} \vee q) \\ &\equiv p \wedge \mathrm{T} \\ &\equiv p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \leftrightarrow p &\equiv \big((p \wedge q) \to p\big) \wedge \big(p \to (p \wedge q)\big) \\ &\equiv ({\sim}(p \wedge q) \vee p) \wedge \big({\sim}p \vee (p \wedge q)\big) \\ &\equiv \big(({\sim}p \vee {\sim}q) \vee p\big) \wedge \big(({\sim}p \vee p) \wedge ({\sim}p \vee q)\big) \\ &\equiv ({\sim}p \vee {\sim}q \vee p) \quad \wedge \big(\quad \mathrm{T} \quad \wedge ({\sim}p \vee q)\big) \\ &\equiv \quad \mathrm{T} \quad \wedge \quad (\quad {\sim}p \vee q \quad) \\ &\equiv {\sim}p \vee q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\sim}p \to \mathrm{F} &\equiv {\sim}({\sim}p) \vee \mathrm{F} \\ &\equiv p \vee \mathrm{F} \\ &\equiv p \end{aligned}$$

โจทย์ยอดนิยมในเรื่องนี้ คือ การตรวจสอบว่าประพจน์สองอันที่กำหนด สมมูล / เป็นนิเสธ กันหรือไม่

คำศัพท์ที่ควรรู้ คือ "p มีค่าความจริงเหมือนกับ q" แปลว่า "p สมมูลกับ q" แปลว่า $p \equiv q$

"p มีค่าความจริงตรงข้ามกับ q" แปลว่า "p เป็นนิเสธของ q" แปลว่า $p \equiv {\sim}q$

วิธีทำคือ เราต้องแปลงประพจน์ทั้งสองฝั่ง ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย แล้วดูว่าได้รูปอย่างง่ายเหมือนกันหรือไม่

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

<u>วิธีทำ</u> เราจะใช้สูตร เพื่อแปลงประพจน์ทั้งสองข้าง ให้เป็นรูปอย่างง่าย ดังนี้

$$p \to ({\sim}q \vee r) \equiv {\sim}(p \wedge q) \vee r$$

$${\sim}p \vee ({\sim}q \vee r) \equiv ({\sim}p \vee {\sim}q) \vee r$$

$${\sim}p \vee {\sim}q \vee r \equiv {\sim}p \vee {\sim}q \vee r$$

จะเห็นว่าแปลงแล้ว ได้เหมือนกันเลย ดังนั้น $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า $p \wedge (q \to p)$ เป็นนิเสธของ $(q \to p) \to {\sim}p$

<u>วิธีทำ</u> ประพจน์ จะเป็นนิเสธกันเมื่อ ประพจน์หนึ่ง สมมูลกับ ~(อีกประพจน์หนึ่ง)

$$p \wedge (q \to p) \equiv {\sim}\big((q \to p) \to {\sim}p\big)$$

$$p \wedge ({\sim}q \vee p) \equiv {\sim}({\sim}({\sim}q \vee p) \vee {\sim}p)$$

$$\equiv ({\sim}q \vee p) \wedge p$$

ดังนั้น $p \wedge (q \to p)$ เป็นนิเสธของ $(q \to p) \to {\sim}p$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่าข้อความ "ถ้า สมชายไป แล้ว สมหญิงไปแต่สมศรีไม่ไป" เหมือนกันกับข้อความ "ถ้า สมหญิงไม่ไปหรือสมศรีไป แล้ว สมชายไม่ไป"

<u>วิธีทำ</u> เราจะแปลงข้อความให้เป็นสัญลักษณ์ก่อน

ให้ p แทน "สมชายไป" ให้ q แทน "สมหญิงไป" ให้ r แทน "สมศรีไป"

ดังนั้น "ถ้า สมชายไป แล้ว สมหญิงไปแต่สมศรีไม่ไป" จะกลายเป็น $p \to (q \wedge {\sim}r)$

"แต่" ในประโยคนี้ จะเหมือนกับ "และ"

"ถ้า สมหญิงไม่ไปหรือสมศรีไป แล้ว สมชายไม่ไป" จะกลายเป็น $({\sim}q \vee r) \to {\sim}p$

ตรวจสอบว่าข้อความเหมือนกัน ต้องตรวจสอบว่า $p \to (q \wedge {\sim}r) \equiv ({\sim}q \vee r) \to {\sim}p$ หรือไม่

$$p \to (q \wedge {\sim}r) \equiv ({\sim}q \vee r) \to {\sim}p$$

$${\sim}p \vee (q \wedge {\sim}r) \equiv {\sim}({\sim}q \vee r) \vee {\sim}p$$

$${\sim}p \vee (q \wedge {\sim}r) \equiv (q \wedge {\sim}r) \vee {\sim}p$$

ดังนั้น ข้อความทั้งสอง เหมือนกัน #

อีกจุดที่ต้องระวัง คือ การนำ "มากกว่า" กับ "น้อยกว่า" มาใช้ร่วมกับคำว่า "ไม่"

เด็กส่วนใหญ่ มักคิดว่า "ไม่มากกว่า" ก็คือ "น้อยกว่า" ซึ่งเป็นความคิดที่ผิดอยู่นิดหน่อย

จริงๆแล้ว "ไม่มากกว่า" จะแปลว่า "น้อยกว่า<u>หรือเท่ากับ</u>"

ดังนั้น ถ้าให้ p แทน "$3 > 2$" จะได้ $\sim p$ คือ "$3 \leq 2$"

ถ้าให้ p แทน "$4 \geq 6$" จะได้ $\sim p$ คือ "$4 < 6$"

ถ้าให้ p แทน "$1 < 5$" จะได้ $\sim p$ คือ "$1 \geq 5$" เป็นต้น

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงเติมประโยคต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

1. $p \wedge p \equiv$	2. $\sim(\sim(\sim p)) \equiv$
3. $\sim(p \wedge q) \equiv$	4. $p \vee (q \wedge r) \equiv$
5. $p \to q \equiv$	6. $\sim p \to \sim q \equiv$
7. $p \leftrightarrow q \equiv$	8. $p \wedge \mathrm{T} \equiv$
9. $p \vee \mathrm{T} \equiv$	10. $p \wedge \sim p \equiv$
11. $p \vee \sim p \equiv$	12. $\mathrm{F} \vee p \equiv$
13. $p \wedge \mathrm{F} \equiv$	

2. จงทำประพจน์ต่อไปนี้เป็นรูปอย่างง่าย

1. $\sim(p \wedge q)$	2. $p \to \sim q$
3. $\sim(p \to q)$	4. $(p \vee q) \to r$
5. $p \to (q \to r)$	6. $p \to \mathrm{T}$
7. $\sim p \to (q \wedge \sim q)$	8. $\mathrm{F} \to p$

9. $(p \vee \mathrm{T}) \rightarrow ((p \wedge F) \leftrightarrow p)$

10. $(p \wedge q) \rightarrow p$

11. $p \rightarrow (p \wedge q)$

12. $\sim p \rightarrow (p \vee q)$

13. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

14. $\sim(\sim(p \wedge \sim q) \wedge r)$

15. $\sim(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge p)$

16. $p \wedge (p \vee q)$

3. ประพจน์ในข้อใด สมมูลกัน

1. $p \vee q$ กับ $\sim q \rightarrow p$

2. $p \leftrightarrow q$ กับ $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

3. $(p \wedge q) \rightarrow r$ กับ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

4. $p \rightarrow (q \wedge r)$ กับ $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

5. $p \rightarrow (q \vee r)$ กับ $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

6. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ กับ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

7. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ กับ $(p \wedge q) \rightarrow r$

8. $\sim p \wedge (q \vee p)$ กับ $\sim (q \rightarrow p)$

9. "ถ้า ฉันไม่ทำการบ้าน แล้ว ฉันจะโดนแม่ดุ" กับ "ฉันทำการบ้าน หรือ ฉันโดนแม่ดุ"

10. "ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $xy > 0$" กับ "ถ้า $xy \leq 0$ แล้ว $x \leq 0$ และ $y \leq 0$"

11. “วันนี้ฝนไม่ตก ก็ต่อเมื่อ เมื่อวานหุ้นขึ้น” กับ
“วันนี้ฝนตกหรือเมื่อวานหุ้นขึ้น และ วันนี้ฝนไม่ตกหรือเมื่อวานหุ้นตก”

4. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้ เป็นนิเสธกันหรือไม่

1. $\sim p \rightarrow q$ กับ $\sim q \rightarrow p$

2. $p \rightarrow q$ กับ $p \wedge \sim q$

3. $\sim q \rightarrow p$ กับ $\sim p \wedge \sim q$

4. p กับ $\sim(\sim p)$

5. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ กับ $p \wedge q \wedge r$

6. $\sim p \wedge (q \rightarrow \sim r)$ กับ $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$

7. “ฉันไปดูหนัง หรือไปช้อปปิ้ง” กับ “ฉันไม่ไปดูหนัง และไม่ไปช้อปปิ้ง”

8. “ถ้า $a > b$ หรือ $a \geq b$ แล้ว $a < b$” กับ “$a \leq b$ หรือ $a \geq b$”

9. "ถ้า หมูมีปีก แล้ว หมูบินได้" กับ "หมูมีปีก แต่หมูบินไม่ได้"

5. กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ [PAT 1 (มี.ค. 53)/1]
   1. $(p \Rightarrow q) \vee p$
   2. $(\sim p \wedge p) \Rightarrow q$
   3. $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
   4. $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

6. กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-2]
   1. ถ้า $q \wedge r$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว p และ $p \vee [(q \wedge r) \Rightarrow p]$ มีค่าความจริงเหมือนกัน
   2. ถ้า p มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว r และ $(p \Rightarrow q) \wedge r$ มีค่าความจริงเหมือนกัน

7. กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ ข้อใดต่อไปนี้ถูก [PAT 1 (มี.ค. 52)/1]
   1. ประพจน์ $p \rightarrow \big(p \rightarrow (q \vee r)\big)$ สมมูลกับประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$
   2. ประพจน์ $p \wedge (q \rightarrow r)$ สมมูลกับประพจน์ $(q \rightarrow p) \vee \sim(p \rightarrow \sim r)$

8. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใดๆ ข้อความใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 57)/3]

   1. ถ้าประพจน์ $(p \vee q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$ และประพจน์ p มีค่าความจริงเป็นจริง แล้วสรุปได้ว่าประพจน์ s มีค่าความจริงเป็นจริง
   2. ประพจน์ $(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$ สมมูลกับ ประพจน์ $[q \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \wedge [p \Rightarrow (q \Rightarrow s)]$

9. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใดๆ
ประพจน์ $[(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \Rightarrow [(r \vee s) \wedge (r \vee \sim s)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้
[PAT 1 (มี.ค. 55)/2]

   1. $p \Rightarrow r$
   2. $q \Rightarrow r$
   3. $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
   4. $(q \vee r) \wedge (q \vee s)$

10. ให้ $p,\ q,\ r$ เป็นประพจน์ ถ้าประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $p \vee (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น<u>เท็จ</u> [A-NET 49/10]

   1. $\sim q \vee (p \rightarrow r)$
   2. $\sim p \rightarrow (\sim p \vee q)$
   3. $(q \vee r) \rightarrow \sim p \vee (q \wedge r)$
   4. $[(\sim q) \vee (\sim r)] \rightarrow [p \wedge (q \vee r)]$

11. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์โดยที่ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, $r \vee \sim p$ และ p มีค่าความจริงเป็นจริง ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ [PAT 1 (มี.ค. 54)/1]

1. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim r)] \Leftrightarrow \sim(q \wedge r)$
2. $[p \Rightarrow (r \Rightarrow \mathrm{q})] \Leftrightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow q]$
3. $[p \Rightarrow \sim(r \wedge q)] \Leftrightarrow [r \Rightarrow (p \wedge q)]$
4. $[p \vee \sim(q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [r \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$

12. ถ้า p, q และ r เป็นประพจน์โดยที่ $p \Rightarrow (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว จงหาค่าความจริงของ $r \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r)]$ [PAT 1 (ต.ค. 55)/3*]

สัจนิรันดร์

สัจนิรันดร์ คือ ประพจน์ที่เป็นจริงในทุกกรณี

เช่น ถ้าพิจารณาตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

จะเห็นว่า $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นจริงในทุกกรณี ไม่ว่า p กับ q จะเป็นอะไรก็ตาม

ในกรณีนี้ เราจะกล่าวว่า $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

<u>ตัวอย่าง</u> จงใช้ตารางค่าความจริง เพื่อตรวจสอบว่า $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \sim q)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \sim q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	F

จะเห็นว่า $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \sim q)$ สามารถเป็นเท็จได้ ในกรณีที่ $p \equiv \mathrm{F}$ และ $q \equiv \mathrm{F}$

ดังนั้น $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \sim q)$ <u>ไม่</u>เป็นสัจนิรันดร์ #

อย่างไรก็ตาม เราไม่ค่อยชอบสร้างตารางค่าความจริง เพราะใช้แรงเยอะ

วิธียอดนิยมในการตรวจสอบสัจนิรันดร์ คือ ใช้วิธี “ยัดเยียดความเท็จ” ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

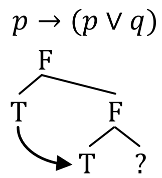
1. กำหนดให้ประพจน์ที่ต้องการตรวจสอบ เป็นเท็จไปก่อนเลย
2. ลุยย้อนกลับ หา p, q, r เพื่อดูว่ามันยอมรับความเท็จที่เรายัดเยียดให้ได้ไหม
   - ถ้าหา p, q, r ได้<u>สำเร็จ</u> แปลว่า ยัดเยียดความเท็จสำเร็จ ดังนั้น <u>ไม่ใช่</u>สัจนิรันดร์
   - ถ้าเกิดข้อ<u>ขัดแย้ง</u>ตอนลุยย้อนหา p, q, r แปลว่า ยัดเยียดความเท็จไม่สำเร็จ ดังนั้น <u>เป็น</u>สัจนิรันดร์

จะใช้วิธีนี้ ต้องระวังให้ดี เพราะข้อสรุปมันจะสวนทางกันกับผลลัพธ์ที่เราทำได้

กล่าวคือ “สำเร็จ แปลว่า <u>ไม่เป็น</u>สัจนิรันดร์” แต่ “ไม่สำเร็จ แปลว่า <u>เป็น</u>สัจนิรันดร์”

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่า $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

<u>วิธีทำ</u>



กำหนดให้ $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นเท็จไปก่อนเลย แล้วลุยกลับหา p, q

จะเห็นว่า $p \rightarrow (p \vee q)$ เป็นเท็จได้กรณีเดียว คือ p เป็นจริง กับ $p \vee q$ เป็นเท็จ

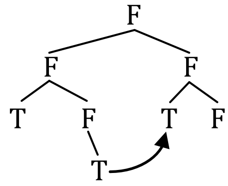
แต่จะเห็นว่า การที่ p เป็นจริง จะไม่สามารถหา q มาทำให้ $p \vee q$ เป็นเท็จได้

เพราะ จริง $\vee$ กับอะไร จะได้จริงหมด ไม่ว่า q เป็นอะไรก็ตาม

เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $p \rightarrow (p \vee q)$ <u>เป็น</u>สัจนิรันดร์ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่า $(p \rightarrow \sim q) \vee (q \wedge r)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

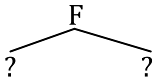
<u>วิธีทำ</u> $(p \rightarrow \sim q) \vee (q \wedge r)$



ยัดเยียดความเท็จให้ก่อน แล้วลุยหา p, q, r
จะเห็นว่า ได้ p เป็นจริง , q เป็นจริง , r เป็นเท็จ
ดังนั้น หา p, q, r ได้สำเร็จ
แปลว่า $(p \rightarrow \sim q) \vee (q \wedge r)$ เป็นเท็จได้
ดังนั้น $(p \rightarrow \sim q) \vee (q \wedge r)$ <u>ไม่ใช่</u>สัจนิรันดร์ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่า $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

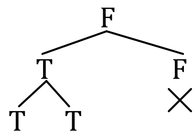
<u>วิธีทำ</u> $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$



กำหนดให้ประพจน์เป็นเท็จก่อน
แต่คราวนี้มีปัญหา เพราะ ก็ต่อเมื่อ เป็นเท็จได้ 2 แบบ
คือ $\mathrm{T} \leftrightarrow \mathrm{F}$ กับ $\mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{T}$

เราจะแยกคิดเป็น 2 กรณี ถ้ามีซักกรณีที่ลุยหา p, q ได้สำเร็จ แปลว่า ประพจน์นี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$



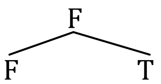
<u>กรณี</u> $\mathrm{T} \leftrightarrow \mathrm{F}$
$p \wedge q$ เป็นจริง มีได้กรณีเดียว คือ p เป็นจริง และ q เป็นจริง
แต่ถ้า p เป็นจริง และ q เป็นจริง จะไม่ทำให้ $p \vee q$ เป็นเท็จ
ดังนั้น กรณี $\mathrm{T} \leftrightarrow \mathrm{F}$ เกิดข้อขัดแย้ง ยัดเยียดความเท็จไม่สำเร็จ

ถึงตรงนี้ เรายังสรุปไม่ได้ ว่า $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ ย้ำอีกเที่ยวว่า

- จะเป็นสัจนันดร์ได้ ต้องยัดเยียดความเท็จไม่สำเร็จ ใน<u>ทุกกรณี</u>
- ถ้ายัดเยียดความเท็จสำเร็จ แค่เพียงซักกรณี จะไม่เป็นสัจนิรันดร์ ทันที

ถ้ากรณีแรก ยัดเยียดความเท็จสำเร็จ ข้อนี้ตอบได้เลยว่าไม่เป็นสัจนิรันดร์
แต่โชคร้าย กรณี $\mathrm{T} \leftrightarrow \mathrm{F}$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น ต้องทำกรณี $\mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{T}$ ต่อ

$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$



<u>กรณี</u> $\mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{T}$
จะได้ $p \wedge q$ เป็นเท็จ กับ $p \vee q$ เป็นจริง
$p \wedge q$ เป็นเท็จ แปลว่า ใน p กับ q ต้องมี เท็จซักตัว (หรือทั้งคู่)
$p \vee q$ เป็นจริง แปลว่า ใน p กับ q ต้องมี จริงซักตัว (หรือทั้งคู่)

ดังนั้น ถ้า ใน p กับ q มีจริงหนึ่งตัว เท็จหนึ่งตัว (เช่น p เป็นจริง q เป็นเท็จ หรือ p เป็นเท็จ q เป็นจริง)
ก็จะทำให้ $p \wedge q$ เป็นเท็จ กับ $p \vee q$ เป็นจริง ได้สำเร็จ นั่นคือ กรณีนี้ ยัดเยียดความเท็จสำเร็จ
ดังนั้น $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$ <u>ไม่เป็น</u>สัจนิรันดร์ #

จะเห็นว่าข้อที่แล้ว วุ่นวายมาก เพราะ "ก็ต่อเมื่อ เป็นเท็จได้หลายแบบ" ทำให้ต้องแบ่งกรณีคิด
โดยปกติ เราจะต้องแบ่งกรณีคิด ในกรณีต่อไปนี้

$\square \wedge \square \equiv \mathrm{F}$ $\square \vee \square \equiv \mathrm{T}$

$\square \rightarrow \square \equiv \mathrm{T}$ $\square \leftrightarrow \square \equiv \mathrm{T}, \mathrm{F}$

ถ้าเจอกรณีเหล่านี้ ให้ข้ามไปทำท่อนอื่นก่อน เผื่อจะได้ข้อมูลอื่นเพิ่มเติมในการลุยประโยคเหล่านี้ได้โดยไม่ต้องแบ่งกรณี

ในกรณีที่เป็นประพจน์ในรูป ▧ ↔ ▨ เราจะมีอีกวิธีที่ง่ายกว่า ในการตรวจสอบสัจนิรันดร์
ถ้าโจทย์ถามว่า ▧ ↔ ▨ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ ให้เราพิจารณาว่า ▧ กับ ▨ สมมูลกันหรือไม่

- ถ้า ▧ ≡ ▨ ให้สรุปว่า ▧ ↔ ▨ เป็นสัจนิรันดร์
- ถ้า ▧ ≢ ▨ ให้สรุปว่า ▧ ↔ ▨ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

หมายเหตุ: วิธีนี้ ง่ายกว่าวิธียัดเยียดความเท็จ แต่ใช้ได้กับประพจน์ในรูป ▧ ↔ ▨ เท่านั้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่า $(p \to {\sim}q) \leftrightarrow {\sim}(p \wedge q)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า ข้อนี้ ประพจน์อยู่ในรูป ▧ ↔ ▨ ดังนั้น เราใช้วิธีเช็คสมมูลได้

นั่นคือ ถ้า $(p \to {\sim}q)$ กับ ${\sim}(p \wedge q)$ สมมูลกัน จะสรุปได้ทันทีว่า $(p \to {\sim}q) \leftrightarrow {\sim}(p \wedge q)$ เป็นสัจนิรันดร์

$$(p \to {\sim}q) \equiv {\sim}(p \wedge q)$$
$${\sim}p \vee {\sim}q \equiv {\sim}p \vee {\sim}q$$

จะเห็นว่าแปลงเป็นรูปอย่างง่ายได้เหมือนกันเลย ดังนั้น $(p \to {\sim}q) \equiv {\sim}(p \wedge q)$
ดังนั้น $(p \to {\sim}q) \leftrightarrow {\sim}(p \wedge q)$ เป็นสัจนิรันดร์ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่า $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เราเคยทำด้วยวิธียัดเยียดความเท็จมาแล้ว แต่ยุ่งยาก เพราะ ก็ต่อเมื่อ เป็นเท็จได้หลายแบบ

จะเห็นว่า ข้อนี้ ประพจน์อยู่ในรูป ▧ ↔ ▨ ดังนั้น เราใช้วิธีเช็คสมมูลได้
เนื่องจาก $p \wedge q \not\equiv p \vee q$ ดังนั้น $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

   1. ${\sim}p \vee (q \to p)$
   2. $(p \wedge q) \to (p \vee q)$
   3. $(p \to {\sim}q) \vee (q \to {\sim}p)$
   4. ${\sim}(((p \wedge q) \to r) \wedge {\sim}(q \to r))$
   5. $(p \vee q) \to ({\sim}p \to q)$
   6. $(p \vee q) \to (p \wedge q)$

7. $\big(p \vee (q \rightarrow r)\big) \leftrightarrow \big(q \vee (p \rightarrow r)\big)$

8. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

9. $\big((p \wedge q) \rightarrow p\big) \wedge \sim\!\big(p \wedge (q \rightarrow p)\big)$

2. กำหนดให้ A , B และ C เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้<u>ถูกต้อง</u> [PAT 1 (ต.ค. 53)/1]
   1. ถ้า $A \Leftrightarrow B$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $(B \wedge C) \Rightarrow (\sim A \Rightarrow C)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
   2. ประพจน์ $A \Rightarrow [(A \wedge B) \vee (B \vee C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
   3. ประพจน์ $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
   4. ประพจน์ $(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$ สมมูลกับประพจน์ $(A \wedge B) \Rightarrow C$

3. กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ [PAT 1 (ต.ค. 55)/2]
   1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
   2. $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
   3. $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
   4. $[(p \wedge q) \Rightarrow \sim q] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล คือ การหาผลสรุป จากเหตุที่กำหนด

เช่น ถ้ากำหนดเหตุคือ 1. ถ้าฉันช่วยแม่กวาดบ้าน แล้ว แม่จะพาฉันไปเที่ยว 1. $p \to q$

2. ฉันช่วยแม่กวาดบ้าน 2. p

เราจะได้ผลสรุปคือ แม่จะพาฉันไปเที่ยว ผลสรุป คือ q

เรามีวิธีทำโจทย์ในเรื่องนี้ได้ 2 วิธี คือ "วิธีโยงรูปแบบพื้นฐาน" และ "วิธีตรวจสอบด้วยสัจนิรันดร์"

<u>วิธีโยงรูปแบบพื้นฐาน</u> จะใช้ "รูปแบบพื้นฐาน" มาสรุปต่อกันเป็นทอดๆ เพื่อได้ผลสรุปที่ซับซ้อนมากขึ้น

รูปแบบการสรุปเหตุผลพื้นฐาน ที่ควรทราบ มีดังนี้

- <u>การรวมเหตุ - แตกเหตุ</u>

  ถ้าเหตุหนึ่ง คือ p อีกเหตุหนึ่งคือ q เราสามารถสรุป $p \wedge q$ ได้ (Conjunction)

  ถ้าเหตุ อยู่ในรูป $p \wedge q$ เราสามารถสรุป p ได้ (Simplification)

  เราสามารถสรุป q ได้

- <u>ตัดตัวเลือก - เพิ่มตัวหลอก</u>

  ถ้าเหตุ อยู่ในรูป $p \vee q$ ถ้าเรามี $\sim p$ เราสามารถสรุป q ได้ (Disjuctive Syllogism)

  ถ้าเรามี $\sim q$ เราสามารถสรุป p ได้

  ถ้าเหตุ อยู่ในรูป p เราสามารถสรุป $p \vee q$ ได้ (Addition)

- <u>คำสัญญา</u>

  ถ้าเหตุ อยู่ในรูป $p \to q$ เราสามารถสรุป $p \to (p \wedge q)$ ได้ (Absorption)

  ถ้าเรามี p เราสามารถสรุป q ได้ (Modus Ponens)

  ถ้าเรามี $\sim q$ เราสามารถสรุป $\sim p$ ได้ (Modus Tollens)

  ถ้าเรามี $q \to r$ เราสามารถสรุป $p \to r$ ได้ (Hypothetical Syllogism)

  ถ้าเหตุ อยู่ในรูป $p \to q$ และ $r \to s$

  ถ้าเรามี $p \vee r$ เราสามารถสรุป $q \vee s$ ได้ (Constructive Dilemma)

- <u>การเหมือนกัน</u>

  ถ้าเหตุ อยู่ในรูป $p \leftrightarrow q$ ถ้าเรามี p เราสามารถสรุป q ได้ ถ้าเรามี q เราสามารถสรุป p ได้

  ถ้าเรามี $\sim p$ เราสามารถสรุป $\sim q$ ได้ ถ้าเรามี $\sim q$ เราสามารถสรุป $\sim p$ ได้

<u>ตัวอย่าง</u> ข้อใด<u>ไม่ใช่</u>ผลสรุปที่สมเหตุสมผล ของเหตุต่อไปนี้

เหตุ 1. $\sim p$ 2. $r \to p$ 3. $q \vee r$

ผล ....

1. q 2. $\sim r$ 3. $p \to r$ 4. $p \vee r$

<u>วิธีทำ</u> จากเหตุข้อ 1 กับ 2 เราใช้ Modus Tollens สรุป $\sim r$ ได้ ดังนั้น ข้อ 2 ไม่ใช่คำตอบ

จาก $\sim r$ กับ เหตุข้อ 3 เราใช้การตัดตัวเลือก สรุป q ได้ ดังนั้น ข้อ 1 ไม่ใช่คำตอบ

ตัวเลือกข้อ 3 คือ $p \rightarrow r$ ซึ่งแปลงให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น $\sim p \vee r$

จากเหตุข้อ 1 เราใช้การเพิ่มตัวหลอก จะสรุป $\sim p \vee r$ ได้ ดังนั้น ข้อ 3 ไม่ใช่คำตอบ

และจะเห็นว่า ทำยังไงก็สรุปออกมาเป็นข้อ 4 ไม่ได้ ดังนั้น ข้อ 4 คือเป็นผลสรุปที่ไม่สมเหตุสมผล #

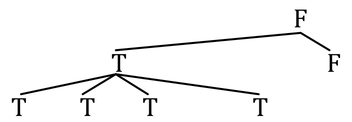
<u>วิธีตรวจสอบด้วยสัจนิรันดร์</u> จะใช้เทคนิคยัดเยียดความเท็จในเรื่องสัจนิรันดร์มาช่วย

เนื่องจาก “สมเหตุสมผล” หมายความว่า “ถ้า เหตุทุกเหตุเกิดขึ้น แล้ว ผลสรุปต้องเกิดตาม”

ดังนั้น การอ้างเหตุผล จะสมเหตุสมผล เมื่อ “(เหตุ $\wedge$ เหตุ $\wedge$ เหตุ $\wedge \ldots \wedge$ เหตุ) $\rightarrow$ ผล” เป็นจริงในทุกกรณี

พูดง่ายๆก็คือ ให้ไปตรวจสอบว่า “(เหตุ $\wedge$ เหตุ $\wedge$ เหตุ $\wedge \ldots \wedge$ เหตุ) $\rightarrow$ ผล” เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ นั่นเอง

(เหตุ $\wedge$ เหตุ $\wedge$ เหตุ $\wedge \ldots \wedge$ เหตุ) $\rightarrow$ ผล



จะเห็นว่า เมื่อยัดเยียดความเท็จให้ เราจะลงเอยที่การสมมติให้เหตุทั้งหมดเป็นจริง แต่ยัดเยียดให้ผลเป็นเท็จ

<u>สรุป</u> การตรวจสอบความสมเหตุสมผลด้วยวิธีสัจนิรัดร์ จะมีขั้นตอนดังนี้

1. ยัดเยียดให้ “เหตุทุกเหตุเป็นจริง” แต่ “ผลเป็นเท็จ”
2. ลุยย้อนกลับ หา p, q, r
   - ถ้าหา p, q, r ได้<u>สำเร็จ</u> แปลว่า ยัดเยียดสำเร็จ ดังนั้น <u>ไม่</u>สมเหตุสมผล
   - ถ้าเกิดข้อ<u>ขัดแย้ง</u>ตอนลุยย้อนหา p, q, r แปลว่า ยัดเยียดไม่สำเร็จ ดังนั้น สมเหตุสมผล

หมายเหตุ: จะใช้วิธีนี้ ต้องระวังตอนสรุป เหมือนที่ต้องระวังในเรื่องสัจนิรันดร์

กล่าวคือ “สำเร็จ แปลว่า <u>ไม่</u>สมเหตุสมผล” แต่ “ไม่สำเร็จ แปลว่า สมเหตุสมผล”

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่า การอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผล หรือไม่

เหตุ 1. $p \rightarrow r$ 2. $r \rightarrow q$ 3. $\sim q$

ผล $\sim(p \vee q)$

<u>วิธีทำ</u> ยัดเยียดให้เหตุทุกเหตุเป็นจริง แต่ผลเป็นเท็จ

จาก เหตุ (3) $\sim q$ ต้องเป็นจริง จะได้ $q \equiv \mathrm{F}$

แทน $q \equiv \mathrm{F}$ ใน เหตุ (2) จะได้ $r \rightarrow \mathrm{F}$ ต้องเป็นจริง ดังนั้น $r \equiv \mathrm{F}$

แทน $r \equiv \mathrm{F}$ ใน เหตุ (1) จะได้ $p \rightarrow \mathrm{F}$ ต้องเป็นจริง ดังนั้น $p \equiv \mathrm{F}$

แทน $p \equiv \mathrm{F}$ และ $q \equiv \mathrm{F}$ ในผล จะได้ ผล $\equiv \sim(\mathrm{F} \vee \mathrm{F}) \equiv \mathrm{T}$ ขัดแย้ง กับที่ต้องยัดเยียดให้ผลเป็นเท็จ

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้ สมเหตุสมผล #

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่า การอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผล หรือไม่

เหตุ 1. ถ้า สมชาย เป็นคนไทย แล้ว สมชายรักสงบ

2. สมชาย ไม่ใช่คนไทย

ผล สมชายชอบความรุนแรง

<u>วิธีทำ</u> ให้ p แทน “สมชายเป็นคนไทย” และให้ q แทน “สมชายรักสงบ”

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า

เหตุ 1. $p \to q$ 2. $\sim p$

ผล $\sim q$

ยัดเยียดให้เหตุทุกเหตุเป็นจริง แต่ผลเป็นเท็จ

เหตุ 1. $p \to q \equiv \mathrm{T}$ 2. $\sim p \equiv \mathrm{T}$

ผล $\sim q \equiv \mathrm{F}$

จาก เหตุ (2) $\sim p$ ต้องเป็นจริง จะได้ $p \equiv \mathrm{F}$

จาก ผล $\sim q$ ต้องเป็นเท็จ จะได้ $q \equiv \mathrm{T}$

แทน $p \equiv \mathrm{F}$ และ $q \equiv \mathrm{T}$ ใน เหตุ (1) จะได้ $\mathrm{F} \to \mathrm{T}$ ซึ่งเป็นจริงตามการยัดเยียด

จะเห็นว่า ได้ $p \equiv \mathrm{F}$ และ $q \equiv \mathrm{T}$ สำเร็จ ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้ <u>ไม่</u>สมเหตุสมผล #

<u>ตัวอย่าง</u> ข้อใด<u>ไม่ใช่</u>ข้อสรุปที่สมเหตุสมผล ของเหตุต่อไปนี้

เหตุ 1. $\sim p$ 2. $r \to p$ 3. $q \vee r$

ผล ....

1. q 2. $\sim r$ 3. $p \to r$ 4. $p \vee r$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เราเคยทำด้วยวิธีโยงรูปแบบพื้นฐานไปแล้ว คราวนี้ เราจะทำด้วยวิธีสัจนิรันดร์

จะเห็นว่าเรายังไม่รู้ข้อสรุป แต่ไม่เป็นไร ทำไปแบบไม่รู้ข้อสรุปก่อนก็ได้

ยัดเยียดให้เหตุทุกเหตุเป็นจริง แต่ผลเป็นเท็จ

จาก เหตุ (1) $\sim p$ ต้องเป็นจริง จะได้ $p \equiv \mathrm{F}$

แทน $p \equiv \mathrm{F}$ ใน เหตุ (2) จะได้ $r \to \mathrm{F}$ ต้องเป็นจริง ดังนั้น $r \equiv \mathrm{F}$

แทน $r \equiv \mathrm{F}$ ใน เหตุ (3) จะได้ $q \vee \mathrm{F}$ ต้องเป็นจริง ดังนั้น $q \equiv \mathrm{T}$

ถัดมา ลองไล่แทน $p \equiv \mathrm{F}$, $q \equiv \mathrm{T}$, $r \equiv \mathrm{F}$ ไปที่ผลในตัวเลือกแต่ละข้อ เพื่อดูว่าข้อไหนยอมรับความเท็จ

ข้อ 1. ถ้าผลสรุปคือ q จะทำให้ผลสรุปเป็นเท็จ<u>ไม่ได้</u> (เพราะ q เป็นจริง) เกิดข้อขัดแย้ง

ข้อ 2. ถ้าผลสรุปคือ $\sim r$ จะทำให้ผลสรุปเป็นเท็จ<u>ไม่ได้</u> (เพราะ r เป็นเท็จ) เกิดข้อขัดแย้ง

ข้อ 3. ถ้าผลสรุปคือ $p \to r$ จะทำให้ผลสรุปเป็นเท็จ<u>ไม่ได้</u> (เพราะ p เป็นเท็จ) เกิดข้อขัดแย้ง

ข้อ 4. ถ้าผลสรุปคือ $p \vee r$ จะทำให้ผลสรุปเป็นเท็จ<u>ได้</u> (เพราะ p เป็นเท็จ , r เป็นเท็จ)

จะเห็นว่าข้อ 1, 2, 3 เกิดข้อขัดแย้ง จึงเป็นข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

แต่ข้อ 4 สามารถยัดเยียดความเท็จได้สำเร็จ จึงเป็นข้อสรุปที่<u>ไม่</u>สมเหตุสมผล #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. การอ้างเหตุผลในข้อใดต่อไปนี้ สมเหตุสมผล

   1. เหตุ 1. $p \rightarrow (q \vee r)$
      2. $\sim q \wedge \sim r$
      ผล $p \rightarrow r$

   2. เหตุ 1. $(q \wedge r) \rightarrow \sim p$
      2. $q \rightarrow r$
      ผล $p \rightarrow \sim q$

   3. เหตุ 1. $p \rightarrow (q \wedge r)$
      2. $\sim r \wedge (s \rightarrow q)$
      3. $\sim s \wedge (r \rightarrow p)$
      ผล r

   4. เหตุ 1. $p \rightarrow (q \vee r)$
      2. $r \rightarrow s$
      3. $p \vee r$
      ผล $q \vee s$

   5. เหตุ 1. ถ้า ฉันสนิทกับเพื่อน แล้ว ฉันจะไม่เกรงใจเพื่อน
      2. ฉันไม่เกรงใจเพื่อน
      ผล ฉันไม่สนิทกับเพื่อน

   6. เหตุ 1. ถ้า ฉันกินกล้วย แล้ว ฉันหน้าเหมือนลิง
      2. ถ้า ฉันกินปลา แล้ว ฉันฉลาด
      3. ถ้า ฉันหน้าเหมือนลิง แล้ว ฉันไม่ฉลาด
      ผล ถ้า ฉันกินกล้วย แล้ว ฉันไม่กินปลา

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดต่อไปนี้<u>ถูก</u>ต้องบ้าง [A-NET 51/1-1]
   1. ถ้า $(p \vee q) \rightarrow r$ และ $(q \rightarrow r) \rightarrow s$ ต่างมีค่าความจริงเป็น<u>เท็จ</u>
      แล้ว $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็น<u>จริง</u>
   2. การอ้างเหตุผลข้างล่างนี้<u>สมเหตุสมผล</u>
      เหตุ 1) $\sim p \rightarrow \sim(q \vee r)$ 2) $q \wedge s$ 3) $\sim r$
      ผล $s \rightarrow p$

ตัวบ่งปริมาณ

หัวข้อนี้ มีคำศัพท์ใหม่ 2 คำ คือ "ประโยคเปิด" กับ "ตัวบ่งปริมาณ"

ประโยคเปิด คือ ประโยคที่มีตัวแปร เช่น $2x+3>5$, $x^2 \geq 0$, เขาขายกล้วยปิ้ง

ตัวบ่งปริมาณ คือ คำที่แปะหน้าประโยคเปิด เพื่อระบุว่าอยากให้มี x กี่ตัวที่ต้องทำให้ประโยคเป็นจริง

ในหัวข้อนี้ จะมีตัวบ่งปริมาณอยู่ 2 ชนิด คือ "สำหรับ x ทุกตัว" กับ "มี x บางตัวที่"

- สำหรับ x ทุกตัว เช่น "สำหรับ x ทุกตัว $2x+3>5$" , "สำหรับ x ทุกตัว $x^2 \geq 0$"
  ถ้าแปะ "ทุกตัว" แปลว่า ทุกค่าต้องแทนใน x แล้วจริงหมด ถึงจะทำให้ประโยคเป็นจริง
  ถ้ามีบางค่า ที่แทนใน x แล้วเป็นเท็จ จะทำให้ประโยคเป็นเท็จทันที
  เช่น "สำหรับ x ทุกตัว $2x+3>5$" เป็นเท็จ เพราะ ถ้าแทน $x=0$ จะได้ $3>5$ ซึ่งเป็นเท็จ
  "สำหรับ x ทุกตัว $x^2 \geq 0$" เป็นจริง เพราะ ไม่ว่า x เป็นอะไร ก็จะทำให้ $x^2 \geq 0$ เสมอ

- มี x บางตัวที่ เช่น "มี x บางตัวที่ $2x+3>5$" , "มี x บางตัวที่ $x^2 \geq 0$"
  ถ้าแปะ "บางตัว" แปลว่า ขอให้มีซักค่า ที่แทน x แล้วเป็นจริง ก็จะทำให้ประโยคเป็นจริงทันที
  ถ้าไม่มีซักค่า ที่แทน x แล้วเป็นจริง จึงจะทำให้ประโยคเป็นเท็จ
  เช่น "มี x บางตัวที่ $2x+3>5$" เป็นจริง เพราะ ถ้าแทน $x=10$ จะได้ $23>5$ เป็นจริง
  "มี x บางตัวที่ $x^2 \geq 0$" เป็นจริง เพราะ ถ้าแทน $x=1$ จะได้ $1 \geq 0$ เป็นจริง
  "มี x บางตัวที่ $x^2=-1$" เป็นเท็จ เพราะ ไม่มี x ค่าไหน ที่ยกกำลังสองแล้วติดลบ

จะเห็นว่าตัวบ่งปริมาณ "สำหรับ x ทุกตัว" จะเป็นจริงยากกว่า "มี x บางตัว"
เพราะ "สำหรับ x ทุกตัว" ต้องจริงหมดทุกตัว แต่ "มี x บางตัว" ขอแค่จริงซักตัว (หรือทุกตัวก็ได้)
กล่าวคือ ถ้าประโยคเปิดไหนใช้ "สำหรับ x ทุกตัว" แล้วจริง ก็มักจะใช้กับ "มี x บางตัว" แล้วจริงด้วย

เรานิยมแทน ประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร ด้วยสัญลักษณ์ $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$
ตัวบ่งปริมาณ "สำหรับ x ทุกตัว" แทนด้วยสัญลักษณ์ $\forall x[\quad]$
"มี x บางตัวที่" แทนด้วยสัญลักษณ์ $\exists x[\quad]$
เช่น ถ้าให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด $2x+3>5$, ให้ $Q(x)$ แทนประโยคเปิด $x^2 \geq 0$
สำหรับ x ทุกตัว $2x+3>5$ เขียนได้เป็น $\forall x[P(x)]$
มี x บางตัวที่ $x^2 \geq 0$ เขียนได้เป็น $\exists x[Q(x)]$

สรุป $\forall x[P(x)]$ เป็นจริง เมื่อ x ทุกตัว ทำให้ $P(x)$ เป็นจริงหมด
เป็นเท็จ เมื่อ มี x ซักตัว ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ

$\exists x[P(x)]$ เป็นจริง เมื่อ มี x ซักตัว (หรือทุกตัวก็ได้) ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง
เป็นเท็จ เมื่อ x ทุกตัว ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จหมด

เรื่องตัวบ่งปริมาณ มักใช้ "เอกภพสัมพัทธ์" หรือ $\mathcal{U}$ จากเรื่องเซต เพื่อบอกขอบเขตของตัวแปร
ถ้าโจทย์กำหนด $\mathcal{U}$ มาให้ หมายความว่าตัวแปรในข้อนั้นๆ มีสิทธิ์เป็นได้เฉพาะภายใน $\mathcal{U}$
เช่น ถ้ากำหนดให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\forall x[4 - x \geq 0]$ เป็นจริง เพราะ ถ้าไล่แทน $x = 1, 2, 3, 4$ จะจริงหมด (ไม่ต้องแทน 5 เพราะไม่อยู่ใน $\mathcal{U}$)
$\forall x[x^2 - 1 > 0]$ เป็นเท็จ เพราะ แทน $x = 1$ ปุ๊บ เท็จเลย
$\exists x[x - 4 > 0]$ เป็นเท็จ เพราะ ไล่แทน $x = 1, 2, 3, 4$ แล้ว ไม่จริงซักตัว
$\exists x[x^2 > 0]$ เป็นจริง เพราะ แทน $x = 1$ ปุ๊บ จริงเลย

ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนด $\mathcal{U}$ มาให้ แปลว่าโจทย์ละขอบเขตไว้ในฐานที่เข้าใจ (ขอบเขต = จำนวนจริงอะไรก็ได้)
นอกจากนี้ เรายังสามารถเอาขอบเขตมาแปะหลังตัวแปรในตัวบ่งปริมาณได้
เช่น $\forall x \in \{1, 2, 3, 4\}\,[4 - x \geq 0]$ เป็นจริง เพราะ ไล่แทน $x = 1, 2, 3, 4$ แล้วจริงหมด
$\forall x \in \mathrm{N}\,[x + 1 > 0]$ เป็นจริง เพราะ จำนวนนับ (N) ทุกตัว บวก 1 แล้วมากกว่า 0 หมด
$\exists x \in \{-1, 1\}[x^2 > 1]$ เป็นเท็จ เพราะ ทั้ง -1 และ 1 ยกกำลังสองได้ $= 1$ ไม่ถือว่า > 1
$\exists x[2x + 3 = 2]$ เป็นจริง เพราะ มี $x = -0.5$ ที่แทนแล้วจริง
(ไม่บอกขอบเขต แปลว่า x เป็นจำนวนจริงอะไรก็ได้)

ในกรณีที่ประโยคเปิดด้านหลัง เป็นประโยคที่ซับซ้อน เราจะเริ่มหาค่าความจริงลำบาก
ถ้าไม่รู้จะเริ่มยังไง ให้ลองแทนค่า x หลายๆแบบ (บวก , ลบ , ศูนย์, ทศนิยม) ดู
พอได้ไอเดียคร่าวๆของประโยคเปิดนั้นๆ แล้วค่อยเจาะลงไปหากรณีที่ต้องการ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าความจริงของประพจน์ $\forall x\,[x > 1 \rightarrow x > 0]$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ไม่กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ ดังนั้น x เป็นจำนวนจริงอะไรก็ได้
เราจะลองสุ่ม x หลายๆค่ามาแทนดู ว่าจะทำให้ $x > 1 \rightarrow x > 0$ เป็นจริงหรือไม่

$x = -3$ $\quad -3 > 1 \rightarrow -3 > 0 \equiv \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F} \equiv \mathrm{T}$
$x = 0$ $\quad 0 > 1 \rightarrow 0 > 0 \equiv \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F} \equiv \mathrm{T}$
$x = 0.5$ $\quad 0.5 > 1 \rightarrow 0.5 > 0 \equiv \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$
$x = 2$ $\quad 2 > 1 \rightarrow 2 > 0 \equiv \mathrm{T} \rightarrow \mathrm{T} \equiv \mathrm{T}$

ได้จริงหมดเลย ดังนั้น ประโยคนี้ มีแนวโน้มว่าจะเป็นจริง
เมื่อวิเคราะห์ดู จะเห็นว่าต้องแทนได้เป็น $\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{F}$ เท่านั้น ประโยคนี้ถึงจะเป็นเท็จ
แต่ ถ้า $x > 1$ เป็นจริง จะเห็นว่า $x > 0$ ไม่มีทางเป็นเท็จได้ ดังนั้น จึงไม่มีทางเกิดกรณี $\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{F}$ ได้
ดังนั้น $\forall x\,[x > 1 \rightarrow x > 0]$ เป็นจริง #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าความจริงของประพจน์ $\exists x \in \mathrm{R}^-\,[x \geq 0 \rightarrow x^2 < 0]$
<u>วิธีทำ</u> เราจะลองสุ่ม x หลายๆค่าที่เป็นจำนวนจริงลบ (R^-) มาแทนดู

$x = -3$ $\quad -3 \geq 0 \rightarrow (-3)^2 < 0 \equiv \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F} \equiv \mathrm{T}$

ไม่ต้องทำต่อแล้ว เพราะมี $x = -3$ ที่แทนแล้วจริง ดังนั้น $\exists x \in \mathrm{R}^-[x \geq 0 \rightarrow x^2 < 0]$ เป็นจริง #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าความจริงของประพจน์ $\exists x[x \geq 0] \rightarrow \exists x[x^2 < 0]$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้มี $\exists x$ สองเที่ยว จึงต้องหาค่าความจริงจากตัวบ่งประมาณ 2 เที่ยว

คือหา $\exists x[x \geq 0]$ ว่าจริงหรือเท็จหนึ่งครั้ง และหา $\exists x[x^2 < 0]$ ว่าจริงหรือเท็จอีกหนึ่งครั้ง แล้วค่อยมา $\rightarrow$ กัน

$\exists x[x \geq 0]$ เป็นจริง เช่น $x = 1$

$\exists x[x^2 < 0]$ เป็นเท็จ เพราะ ผลยกกำลังสองจะไม่มีทางติดลบ

ดังนั้น $\exists x[x \geq 0] \rightarrow \exists x[x^2 < 0] \equiv \mathrm{T} \rightarrow \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง
   1. $\forall x[x > 0]$ เมื่อ $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \{1, 2, 3, 4\}$
   2. $\exists x[x$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ x เป็นจำนวนคู่$]$
   3. $\exists x[x^2 + x - 2 = 0]$ เมื่อ $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \{-1, 0, 1\}$
   4. $\forall x \in \mathrm{I}^-[x > 2x]$
   5. $\forall x \in \mathrm{N}[2x \geq x + 1]$
   6. $\exists x \in \mathrm{I}[x^2 + 1 = 0]$
   7. $\forall x[x \neq 0 \vee x^2 = 0]$
   8. $\forall x[x \neq 0] \vee \forall x[x^2 = 0]$
   9. $\exists x[x \neq 0 \leftrightarrow x^2 = 0]$
   10. $\exists x[x \neq 0] \leftrightarrow \exists x[x^2 = 0]$
   11. $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[P(x)]$ เมื่อ $\mathcal{U} \neq \emptyset$

2. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง และ

$P(x)$ แทน $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$

$Q(x)$ แทน $\sqrt{x+1} > 2$

ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์ $\exists x[P(x)] \Rightarrow \forall x[Q(x)]$ [PAT 1 (ต.ค. 53)/2]

1. $\exists x[\sim P(x)] \Rightarrow \forall x[\sim Q(x)]$
2. $\exists x[P(x)] \Rightarrow \exists x[Q(x)]$
3. $\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow \forall x[P(x)]$
4. $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \forall x[Q(x)]$

3. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด ถ้า $\forall x[P(x)] \wedge \forall x[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้วประพจน์ในข้อใดมีค่าความจริงเป็นเท็จ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/2]

1. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
2. $\exists x[\sim P(x) \vee \sim Q(x)]$
3. $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$
4. $\forall x[P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$

4. กำหนด<u>เหตุ</u>ให้ดังนี้ [A-NET 50/1-3]

   1. เอกภพสัมพัทธ์ไม่เป็นเซตว่าง
   2. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
   3. $\forall x[Q(x) \vee R(x)]$
   4. $\exists x[\sim R(x)]$

ข้อความในข้อใดต่อไปนี้เป็น<u>ผล</u>ที่ทำให้การอ้างเหตุผล สมเหตุสมผล

1. $\exists x[P(x)]$
2. $\exists x[Q(x)]$
3. $\forall x[P(x)]$
4. $\forall x[Q(x)]$

ประโยคเปิดสองตัวแปร

ประโยคเปิดที่ผ่านๆมา จะมีแค่ตัวแปรเดียว หัวข้อนี้ จะพูดถึงประโยคเปิดที่มีสองตัวแปร
ตัวอย่างประโยคเปิดสองตัวแปร เช่น $x + y < 5$, $x^2 + y^2 \geq 0$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$
เรานิยมแทนประโยคเปิดที่มี x กับ y เป็นตัวแปร ด้วยสัญลักษณ์ $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$

ประโยคเปิดสองตัวแปร จะมีตัวบ่งปริมาณได้ 4 แบบ ดังนี้

- $\forall x \forall y[P(x, y)]$ เป็นจริง เมื่อ x ทุกตัว y ทุกตัว แทนแล้วต้องจริงหมด
  เป็นเท็จ เมื่อ มี x กับ y ซักคู่ ที่แทนแล้วเป็นเท็จ
- $\exists x \exists y[P(x, y)]$ เป็นจริง เมื่อ มี x กับ y ซักคู่ ที่แทนแล้วจริง
  เป็นเท็จ เมื่อ มี x ทุกตัว y ทุกตัว แทนแล้วเป็นเท็จหมด
- $\exists x \forall y[P(x, y)]$ เป็นจริง เมื่อ มี x บางตัว ที่จับคู่กับ y ได้ทุกตัว ($\exists$ ต้องเป็นตัวเดียวกันสำหรับ $\forall$ แต่ละตัว)
  เป็นเท็จ เมื่อ ไม่ว่า x ตัวไหนก็ตาม จะมี y บางตัวที่คู่กับมันไม่ได้
- $\forall x \exists y[P(x, y)]$ เป็นจริง เมื่อ x ทุกตัว มี y บางตัวมาคู่ด้วยได้ ($\exists$ ไม่ต้องเป็นตัวเดียวกัน สำหรับ $\forall$ แต่ละตัว)
  เป็นเท็จ เมื่อ มี x บางตัว ที่ไม่สามารถหา y ตัวไหนมาคู่กับมันได้เลย

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$ จงพิจารณาว่าประพจน์ต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

1. $\forall x \forall y[x + y \geq 0]$
2. $\exists x \exists y[x + y \geq 0]$
3. $\exists x \forall y[x + y \geq 0]$
4. $\forall x \exists y[x + y \geq 0]$

<u>วิธีทำ</u> ข้อ 1. $\forall x \forall y$ ต้องลองแทนดูว่า x ทุกตัว y ทุกตัว จะทำให้ $x + y \geq 0$ เป็นจริงหมดไหม
จะเห็นว่ามีกรณี $x = -1$, $y = -1$ ซึ่งได้ $(-1) + (-1) \geq 0$ เป็นเท็จ
ดังนั้น $\forall x \forall y[x + y \geq 0]$ เป็นเท็จ

ข้อ 2. $\exists x \exists y$ ต้องหาว่ามี x กับ y ซักคู่ ที่ทำให้ $x + y \geq 0$ เป็นจริงไหม
จะเห็นว่า มีหลายแบบเลย เช่น $x = 0$, $y = 1$ ซึ่งได้ $0 + 1 \geq 0$ จริง
ดังนั้น $\exists x \exists y[x + y \geq 0]$ เป็นจริง

ข้อ 3. $\exists x \forall y$ ลองหาว่ามี x ซักตัว ที่จับคู่กับ y ได้ทุกตัวไหม โดยที่ x ต้องเป็นตัวเดียวกัน สำหรับ y แต่ละตัว

$$
\begin{array}{ccccc}
\exists x & & \forall y & & \\
1 & + & -1 & \geq & 0 \\
1 & + & 0 & \geq & 0 \\
1 & + & 1 & \geq & 0
\end{array}
$$

จะเห็นว่า มี $x = 1$ ที่จับคู่กับ y ทุกตัว ดังนั้น $\exists x \forall y[x + y \geq 0]$ เป็นจริง

ข้อ 4. $\forall x \exists y$ ลองหาว่า x ทุกตัว หา y มาจับคู่กับมันได้ไหม โดยที่ x แต่ละตัว <u>ไม่</u>จำเป็นต้องคู่กับ y ตัวเดียวกัน

$$
\begin{array}{ccccc}
\forall x & & \exists y & & \\
-1 & + & 1 & \geq & 0 \\
0 & + & 0 & \geq & 0 \\
1 & + & 0 & \geq & 0
\end{array}
$$

จะเห็นว่า x ทุกตัว มี y มาคู่กับมันได้ ดังนั้น $\forall x \exists y[x + y \geq 0]$ เป็นจริง #

$\forall\forall$ กับ $\exists\exists$ จะค่อนข้างเข้าใจง่าย อย่างไรก็ตาม เด็กส่วนใหญ่ มักสับสนระหว่าง $\exists\forall$ กับ $\forall\exists$

- ถ้าเรียง $\exists$ ไว้ก่อน $\forall$ จะได้ว่า $\exists$ ต้องเป็นตัวเดียวกัน สำหรับ $\forall$ ทุกตัว
- ถ้าเรียง $\forall$ ไว้ก่อน $\exists$ จะได้ว่า $\exists$ ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวเดียวกัน สำหรับ $\forall$ ทุกตัว

สังเกตว่า $\forall\forall$ จะเป็นจริงยากที่สุด เพราะ ต้องแทนทุกตัวแล้วเป็นจริงเท่านั้น
ส่วน $\exists\forall$ จะจริงยากกว่า $\forall\exists$ เพราะ $\exists$ ใน $\exists\forall$ ต้องเป็นตัวเดียวกัน แต่ใน $\forall\exists$ ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวเดียวกัน
และ $\exists\exists$ จะจริงง่ายที่สุด เพราะ ขอแค่ซักคู่จริงก็พอ

ตัวอย่าง จงหาค่าความจริงของประพจน์ $\forall x\forall y[x^2+y^2\geq 0]$
วิธีทำ ข้อนี้ไม่บอกเอกภพสัมพัทธ์มาให้ แปลว่า x กับ y เป็นจำนวนจริงอะไรก็ได้
$\forall x\forall y$ ต้องพิจารณาว่า x ทุกตัว y ทุกตัว แทนแล้วจริงหมดไหม
เนื่องจากผลการยกกำลังสอง จะเป็นลบไม่ได้ ดังนั้น $x^2+y^2\geq 0$ เสมอ ไม่ว่า x กับ y จะเป็นอะไร
ดังนั้น $\forall x\forall y[x^2+y^2\geq 0]$ เป็นจริง #

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\mathcal{U}=\mathrm{I}^-$ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $\exists x\exists y[xy\leq 0]$
วิธีทำ ข้อนี้ เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนเต็มลบ ดังนั้น x กับ y ต้องเป็นจำนวนเต็มลบเท่านั้น
เนื่องจากจำนวนเต็มลบสองตัวคูณกัน จะเป็นบวกเสมอ ดังนั้น จะไม่มี x กับ y ไหนเลย ที่ทำให้ $xy\leq 0$
ดังนั้น $\exists x\exists y[xy\leq 0]$ เป็นเท็จ #

ตัวอย่าง จงหาค่าความจริงของประพจน์ $\exists x\forall y[y-2x\neq 0]$
วิธีทำ $\exists x\forall y$ ต้องหาว่ามี x ซักตัว ที่จับคู่กับ y ได้ทุกตัวหรือไม่ โดยที่ x ต้องเป็นตัวเดียวกัน สำหรับ y แต่ละตัว
ถ้า $x=1$ จะคู่กับ y ได้หมด ยกเว้น $y=2$
ถ้า $x=5$ จะคู่กับ y ได้หมด ยกเว้น $y=10$
ถ้า $x=-0.2$ จะคู่กับ y ได้หมด ยกเว้น $y=0.4$
จะเห็นว่า ไม่ว่า x เป็นอะไรก็ตาม จะมี y ที่จับคู่กับมันไม่ได้อยู่ตัวหนึ่งเสมอ
ดังนั้น $\exists x\forall y[y-2x\neq 0]$ เป็นเท็จ #

ตัวอย่าง จงหาค่าความจริงของประพจน์ $\forall x\exists y[x\geq y\rightarrow x+y>xy]$
วิธีทำ $\forall x\exists y$ ต้องหาว่า x ทุกตัว สามารถหา y มาคู่กับมันได้ไหม โดยที่ x แต่ละตัว ไม่จำเป็นต้องคู่กับ y ตัวเดียวกัน
ประโยคนี้อยู่ในรูป ถ้า … แล้ว … ซึ่งจะจริงได้ 2 แบบใหญ่ๆ คือ เมื่อข้างหน้าเป็นเท็จ ในรูป $\mathrm{F}\rightarrow ?$
กับ เมื่อข้างหลังเป็นจริง ในรูป $?\rightarrow \mathrm{T}$
จะเห็นว่า $x\geq y$ ข้างหน้า ซับซ้อนน้อยกว่า $x+y>xy$ ข้างหลัง
ดังนั้น เราจะพยายามทำให้ $x\geq y$ เป็นเท็จ เพื่อให้ประโยคนี้เป็นจริง

	$\forall x\exists y$		$x\geq y$	$\rightarrow$	$x+y>xy$	
$x=0$	มีคู่ $y=1$	ที่	$0\geq 1$	$\rightarrow$	....	$\equiv \mathrm{F}\rightarrow ?\equiv \mathrm{T}$
$x=3$	มีคู่ $y=4$	ที่	$3\geq 4$	$\rightarrow$	....	$\equiv \mathrm{F}\rightarrow ?\equiv \mathrm{T}$
$x=-2$	มีคู่ $y=-1$	ที่	$-2\geq -1$	$\rightarrow$	....	$\equiv \mathrm{F}\rightarrow ?\equiv \mathrm{T}$

สังเกตว่า ไม่ว่า x เป็นอะไร จะหา y ที่ทำให้ $x \geq y$ เป็นเท็จได้ ทำให้ประโยคอยู่ในรูป $\mathrm{F} \rightarrow ?$ ซึ่งเป็นจริง
ดังนั้น x ทุกตัว สามารถหา y มาคู่กับมัน เพื่อทำให้ $x \geq y \rightarrow x + y > xy$ เป็นจริงได้
ดังนั้น $\forall x \exists y[x \geq y \rightarrow x + y > xy]$ เป็นจริง #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง
   1. $\forall x \forall y[x + y = 0]$
   2. $\exists x \exists y[x + y = 0]$
   3. $\exists x \forall y[x + y = 0]$
   4. $\forall y \exists x[x + y = 0]$
   5. $\forall x \forall y[x + y < xy]$
   6. $\exists x \exists y[x + y = xy]$
   7. $\exists x \forall y[x + y > xy]$
   8. $\forall y \exists x[x + y = xy]$
   9. $\forall x \forall y[x + y \geq x]$
   10. $\exists x \forall y[x + y \geq x]$
   11. $\exists y \forall x[x + y \geq x]$
   12. $\forall x \exists y[x + y \geq x]$
   13. $\forall y \exists x[x + y \geq x]$
   14. $\exists x \exists y[x + y < x]$
   15. $\exists x \forall y[x^2 y \geq 0]$
   16. $\exists y \forall x[x^2 y > 0]$
   17. $\forall y \exists x[x^2 y < 5]$
   18. $\forall x \exists y[x^2 y \geq 0]$
   19. $\exists x \forall y[x^2 + 3x + 4 = y]$

2. กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง
   1. $\forall x \forall y[x > y \rightarrow |x + y| \leq 3]$
   2. $\exists x \forall y[x = y \leftrightarrow |x| = |y|]$

3. $\exists x \exists y[x = y \wedge |x| \neq |y|]$

4. $\forall x \exists y[x + y = 0 \wedge xy = 0]$

3. ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

1. $\forall x \forall y[x > y \vee y > x]$

2. $\exists x \exists y[x > y \wedge xy \leq 1]$

3. $\exists x \forall y[xy = 1] \vee \forall y \exists x[xy = 1]$

4. $\forall x \exists y[x \neq y \wedge |x| = |y|]$

4. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (ก.ค. 53)/2]

1. $\forall x \forall y[x + y + 2 > 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. $\forall x \exists y[x + y \geq 0]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
3. $\exists x \forall y[x + y = 1]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
4. $\exists x \exists y[x + y > 1]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

5. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathcal{U} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3\}$ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ [A-NET 49/1-9]

1. $\exists x \forall y[x + y < y]$

2. $\exists x \forall y[x - y^2 < x]$

3. $\exists x \forall y[xy^2 = x]$

4. $\exists x \forall y[x^2 y = y]$

6. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ $\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง
[PAT 1 (พ.ย. 57)/2]
   1. ประพจน์ $\exists x \forall y\, [\, x^2 - y^2 < y - x \,]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
   2. ประพจน์ $\forall x \forall y\, [\, |x - y| < 1 - xy \,]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

7. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซต $\{-2, -1, 1, 2\}$ ประโยคในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ
[PAT 1 (ต.ค. 52)/1-1]
   1. $\exists x \exists y [x \le 0 \ \wedge\ |x| = y + 1]$
   2. $\exists x \forall y [x \le y \ \wedge\ -(x + y) \ge 0]$
   3. $\forall x \exists y [x + y = 0 \ \vee\ x - y = 0]$
   4. $\forall x \forall y [|x| < |y| \ \vee |x| > |y|]$

8. กำหนดให้ $\boldsymbol{\mathcal{U}} = \{n \in I^+ \mid n \leq 10\}$ ประโยคในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ [PAT 1 (ก.ค. 52)/2]

1. $\forall x \forall y[(x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)]$
2. $\forall x \exists y[(x \neq 1) \rightarrow (x > y^2)]$
3. $\exists x \forall y[xy \leq x + y]$
4. $\exists x \exists y[(x - y)^2 \geq y^2 + 9xy]$

9. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathcal{U} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก [PAT 1 (มี.ค. 52)/2]

1. $\forall x \forall y[x \cap y \neq \emptyset]$
2. $\forall x \forall y[x \cup y = \mathcal{U}]$
3. $\forall x \exists y[y \neq x \land y \subset x]$
4. $\exists x \forall y[y \neq x \land y \subset x]$

นิเสธของตัวบ่งปริมาณ

เรื่องสุดท้าย เป็นเรื่องเบาๆ เกี่ยวกับสูตรการใส่ นิเสธ ($\sim$) ให้ตัวบ่งปริมาณ

หลักคือ ให้กลับตัวบ่งปริมาณ (เปลี่ยน $\forall$ เป็น $\exists$ เปลี่ยน $\exists$ เป็น $\forall$) แล้วลุยแจกนิเสธไปที่ประโยคเปิด ได้เลย

กล่าวคือ $\sim\forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$ $\quad$ $\sim\exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$

$\sim\forall x\forall y[P(x,y)] \equiv \exists x\exists y[\sim P(x,y)]$ $\quad$ $\sim\exists x\exists y[P(x,y)] \equiv \forall x\forall y[\sim P(x,y)]$

$\sim\exists x\forall y[P(x,y)] \equiv \forall x\exists y[\sim P(x,y)]$ $\quad$ $\sim\forall x\exists y[P(x,y)] \equiv \exists x\forall y[\sim P(x,y)]$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหานิเสธของ $\forall x[x > 0 \vee x + 1 \leq 0]$

<u>วิธีทำ</u> $\sim\forall x[x > 0 \vee x + 1 \leq 0] \equiv \exists x[\sim(x > 0 \vee x + 1 \leq 0)]$

$\equiv \exists x[x \leq 0 \wedge x + 1 > 0]$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหานิเสธของ $\exists x[x > 2] \rightarrow \forall x\exists y[x + y \leq 0]$

<u>วิธีทำ</u> $\sim(\exists x[x > 2] \rightarrow \forall x\exists y[x + y \leq 0]) \equiv \sim(\sim\exists x[x > 2] \vee \forall x\exists y[x + y \leq 0])$

$\equiv \exists x[x > 2] \wedge \sim\forall x\exists y[x + y \leq 0]$

$\equiv \exists x[x > 2] \wedge \exists x\forall y[x + y > 0]$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหานิเสธของข้อความ "ลูกๆทุกคน รักพ่อที่ทำดีกับแม่"

<u>วิธีทำ</u> ประโยคนี้ เขียนใหม่ได้เป็น "สำหรับลูกๆทุกคน ถ้า พ่อทำดีกับแม่ แล้ว ลูกจะรักพ่อ"

เนื่องจากประโยคนี้ ใช้ตัวบ่งปริมาณกับลูก ดังนั้น เราจะให้ x แทนลูก

- "ลูกๆทุกคน" แทนด้วย $\forall x$
- "พ่อของ x ทำดีกับแม่ของ x" แทนด้วย $P(x)$
- "x รักพ่อของ x" แทนด้วย $Q(x)$

ดังนั้น ประโยคนี้ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

ซึ่งจะหานิเสธได้ $\sim\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \equiv \exists x[\sim(P(x) \rightarrow Q(x))]$

$\equiv \exists x[\sim(\sim P(x) \vee Q(x))]$

$\equiv \exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$

แปลง $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$ กลับเป็นข้อความ

จะนิเสธของข้อความ "ลูกๆทุกคน รักพ่อที่ทำดีกับแม่" คือ "มีลูกบางคน ที่พ่อทำดีกับแม่ แต่ก็ยังไม่รักพ่อ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

   1. $\forall x[|x| = 0]$ $\quad$ 2. $\exists x\exists y[x \neq y]$

3. $\exists x[x+1>0 \wedge x \leq 0]$

4. $\exists x[x \neq 1] \rightarrow \forall y[y$ เป็นจำนวนตรรกยะ$]$

5. ลูกทุกคนรักพ่อ

6. ลูกทุกคนไม่รักพ่อ

7. นักเรียนบางคน ไม่ตั้งใจเรียน หรือ ชอบเล่น

8. นักเรียนบางคน จะทำการบ้าน ถ้าแม่ไม่ให้เล่นเกม

2. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด
   ประโยค $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[\sim Q(x)]$ สมมูลกับประโยคในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ก.ค. 52)/1]
   1. $\forall x[\sim P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$
   2. $\forall x[Q(x)] \rightarrow \exists x[\sim P(x)]$
   3. $\exists x[P(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]$
   4. $\exists x[\sim Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)]$

3. ข้อใดต่อไปนี้ถูก [A-NET 50/1-2]
    1. ให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเฉพาะบวก ข้อความ $\forall x \exists y[x^2 + x + 1 = y]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
    2. นิเสธของข้อความ $\forall x\big[P(x) \to [Q(x) \vee R(x)]\big]$ คือ $\exists x[P(x) \wedge {\sim}Q(x) \wedge {\sim}R(x)]$

4. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (มี.ค. 53)/2*]
    1. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$ ค่าความจริงของ $\forall x \exists y[x^2 + x = y^2 + y]$ เป็นเท็จ
    2. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง นิเสธของข้อความ $\forall x \exists y[(x > 0 \wedge y \leq 0) \wedge (xy < 0)]$ คือ $\exists x \forall y[(xy < 0) \Rightarrow (x \leq 0 \vee y > 0)]$
    3. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเต็ม นิเสธของข้อความ $\forall x[x > 0 \Rightarrow x^3 \geq x^2]$ คือ $\exists x[(x \leq 0) \wedge (x^3 < x)]$