Лекция 2.1. Погрешности

Вычислительная математика,

Весенний семестр 2022

Ольга Вячеславовна Перл

План части лекции

- Погрешности и приближённые числа
- Общая формула погрешностей
- Число верных знаков
- Источники погрешностей

Погрешности и приближённые числа

Приближённые числа

- Приближённым числом a называется число, незначительно отличающееся от точного A и заменяющее его при вычислениях. Это записывают $a \approx A$.
- Если $a < A$, то это приближённое число по недостатку.
- Если $a > A$, то это приближённое число по избытку.
- Под ошибкой или погрешностью понимается $\Delta_a = A - a$
- $A = a + \Delta_a$

Типы погрешностей

Существует несколько видов погрешностей:

- Абсолютная;
- Предельная абсолютная;
- Относительная;
- Предельная относительная.

Абсолютная погрешность

- Абсолютной погрешностью Δ приближённого числа a называется абсолютная величина разницы между соответствующим точным числом A и числом a:
- $\Delta = |\Delta_a| = |A - a|$
- Если точное число A известно, то легко рассчитать Δ по формуле.
- Если точное число **A** не известно, то полезно оценить величину погрешности.

Предельная абсолютная погрешность

- Под предельной абсолютной погрешностью приближённого числа понимается всякое число, не меньше абсолютной погрешности этого числа.
- Тогда если Δ_a - предельная абсолютная погрешность, то:

$$\Delta = |A - a| \le \Delta_a$$

- Что означает:

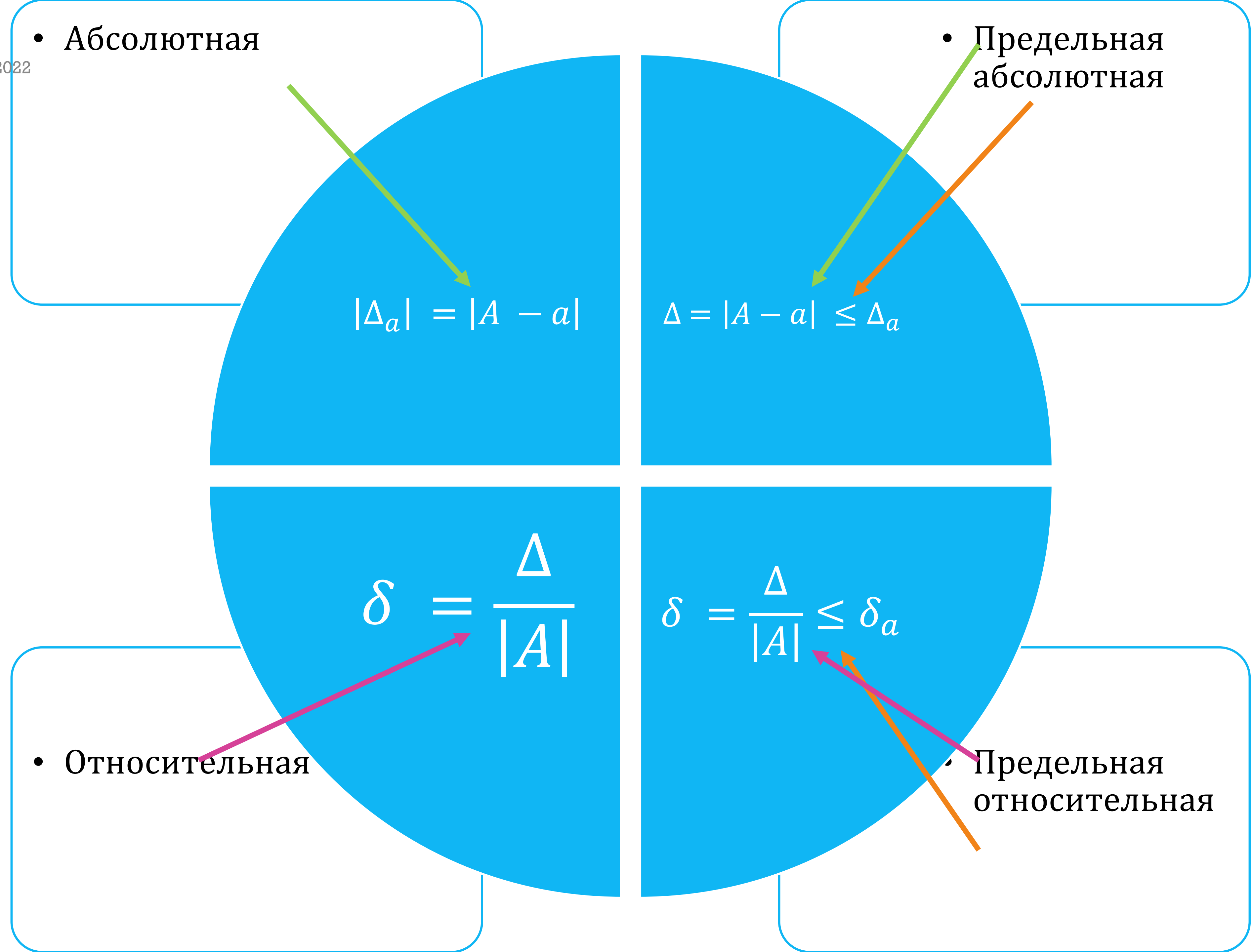
$$a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a$$

Относительная погрешность

- Абсолютная погрешность не достаточна для оценки качества измерений.
- Например: $a_1 = 100.8 \pm 0.1$ и $a_2 = 1.8 \pm 0.1$.
- Тогда мы работаем с относительными погрешностями.
- Относительная погрешность δ приближённого числа a есть отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю соответствующего точного числа A ($A \neq 0$).
- $\delta = \frac{\Delta}{|A|}$

Предельная относительная погрешность

- $\delta = \frac{\Delta}{|A|} \le \delta_a$



• Абсолютная
$|\Delta_a| = |A - a|$
• Предельная абсолютная
$\Delta = |A - a| \le \Delta_a$
• Относительная
$\delta = \frac{\Delta}{|A|}$
• Предельная относительная
$\delta = \frac{\Delta}{|A|} \le \delta_a$

Общая формула погрешности

Общая формула погрешности

- Основная задача теории погрешности заключается в следующем: известны погрешности некоторой системы величин, требуется определить погрешность данной функции от этих величин.
- Пусть дана дифференцируемая функция:

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (1)$$

и пусть $|\Delta x_i|$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ - абсолютные погрешности аргументов функции.

- Тогда абсолютная погрешность функции:

$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \quad (2)$$

Общая формула погрешности

- Обычно на практике, $|\Delta x_i|$ малые величины, произведениями, квадратами и высшими степенями которых можно пренебречь.
- Поэтому мы можем положить:

$$|\Delta u| \approx |df(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i| \qquad (3)$$

- Итак:

$$|\Delta_u| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i| \qquad (4)$$

Общая формула погрешности

- Отсюда, обозначая $\Delta_{x_i} (i = 1, 2, \dots, n)$ абсолютные предельные погрешности аргументов x_i и через Δ_u предельную погрешность функции u, мы получим для малых Δx_i:

$$|\Delta_u| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta_{x_i} \qquad (5)$$

- Разделив обе части неравенства на u, будем иметь оценку для относительной погрешности функции u:

$$\delta \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{u}\right| |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, \dots, x_n)\right| |\Delta x_i| \qquad (6)$$

- Следовательно, за предельную относительную погрешность функции u можно принять:

$$\delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln u\right| \Delta x_i \qquad (7)$$

Обратная задача теории погрешностей

- На практике важна также обратная задача: каковы должны быть абсолютные погрешности аргументов функции, чтобы абсолютная погрешность функции не превышала заданной величины?
- Задача математически не определена, так как заданную предельную погрешность Δ_u функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно обеспечить, устанавливая по-разному предельные абсолютные погрешности Δ_{x_i} её аргументов.
- Простейшее решение обратной задачи даётся принципом равных влияний. Согласно этому принципу предполагается, что все частные дифференциалы

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \ (i = 1, 2, \dots, n) \tag{8}$$

одинаково влияют на образование абсолютной огрешности Δ_u функции $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Обратная задача теории погрешностей

- Пусть величина предельной абсолютной погрешности Δ_u задана. Тогда:

$$|\Delta_u| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta_{x_i} \qquad (9)$$

- Полагая, что все слагаемые между собой равны, будем иметь:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \Delta_{x_1} = \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right| \Delta_{x_2} = \cdots = \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right| \Delta_{x_n} \qquad (10)$$

отсюда

$$\Delta_{x_i} = \frac{\partial u}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|} \ (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (11)$$

Значащая цифра и число верных знаков

Десятичная запись числа. Значащая цифра. Число верных знаков.

- Всякое положительное число a может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:
- $a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \alpha_{m-2} 10^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1}$, (12)
- α – цифры числа a $(\alpha_i = 0, 1, \cdots, 9)$, причём старшая цифра $a_m \neq 0$ и m – некоторое целое число.
- Например:
- $3141.59 \cdots = 3 * 10^3 + 1 * 10^2 + 4 * 10^1 + 1 * 10^0 + 5 * 10^{-1} + 9 * 10^{-2} + \cdots$

- На практике преимущественно приходится иметь дело с приближёнными числами, представляющими собой конечные десятичные дроби:
- $b = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + \beta_{m-2} 10^{m-2} + \cdots + \beta_{m-n+1} 10^{m-n+1}, (\beta_m \neq 0)$ (13)
- Например:
- $b = 7 * 10^{-3} + 0 * 10^{-4} + 1 * 10^{-5} + 0 * 10^{-6} = \underline{0.007}010$
- $b = 2 * 10^9 + 0 * 10^8 + 0 * 10^7 + 3 * 10^6 + 0 * 10^5 = 2{,}003{,}\underline{000{,}000}$

Десятичная запись числа. Значащая цифра. Число верных знаков.

- Значащей цифрой приближённого числа является всякая цифра в его десятичном отображении, отличная от нуля, и ноль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохранённого десятичного разряда.
- Все остальные нули, входящие в состав десятичного числа и служащие лишь для обозначения десятичных разрядов его, не причисляются к значащим цифрам.
- Пример:

0.002080

≠0.00208

Количество верных знаков

- Говорят, что **n** первых значащих цифр (десятичных знаков) приближённого числа являются верными, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого n-й значащей цифрой, считая слева направо.
- Таким образом, если для приближённого числа a, заменяющего точное число A известно, что:

$$\Delta = |A - a| \leq \frac{1}{2} * 10^{m-n+1} \qquad (14)$$

то по определению **n** первых знаков $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \cdots, \alpha_{m-n+1}$ являются верными.

- Пример: точное число $A = 35.97$, приближённое число $a = 36.00$ является приближённым с тремя знаками, так $|A - a| = 0.03 < \frac{1}{2} * 0.1$

Правила округления

- Чтобы округлить число до n значащих знаков, отбрасывают все цифры справа от n-й значащей цифры или, если необходимо для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом (обозначим первую отброшенную цифру как α_{n+1}):
- Если $\alpha_{n+1} < 5$, оставляем оставшиеся цифры без изменения.
- Если $\alpha_{n+1} > 5$, добавляем 1 к последней оставшейся цифре.
- Если $\alpha_{n+1} = 5$ и есть ненулевая цифра среди отброшенных, добавить единицу к последней оставленной цифре.
- Однако, если $\alpha_{n+1} = 5$ и все другие отброшенные цифры являются нулями, то единицу не добавляют, если последняя оставшаяся цифра четная и добавляют единицу, если она нечетная (правило чётной цифры).

Источники погрешностей

Основные источники погрешностей

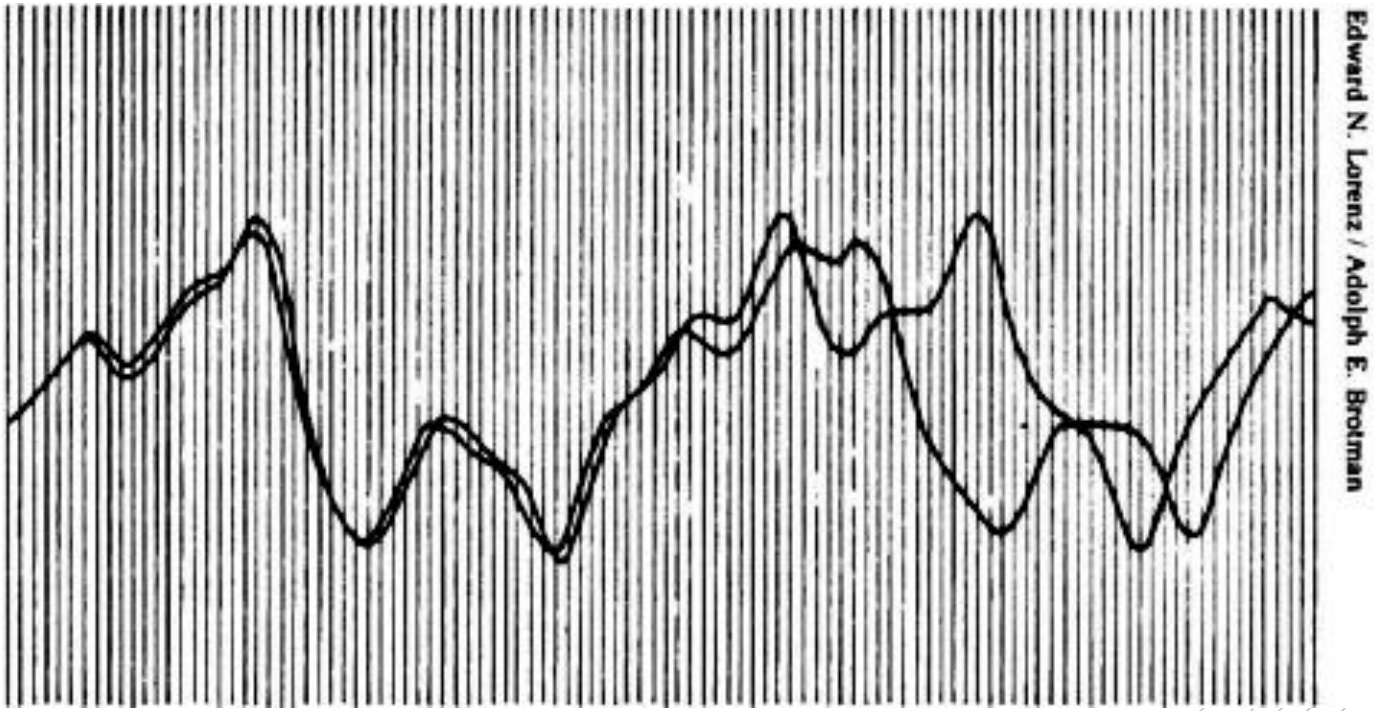
- Погрешности, связанные с постановкой проблемы.
- Погрешности метода.
- Остаточные погрешности.
- Начальная погрешность.
- Погрешности округления.
- Погрешности действий.

Свойства алгоритма

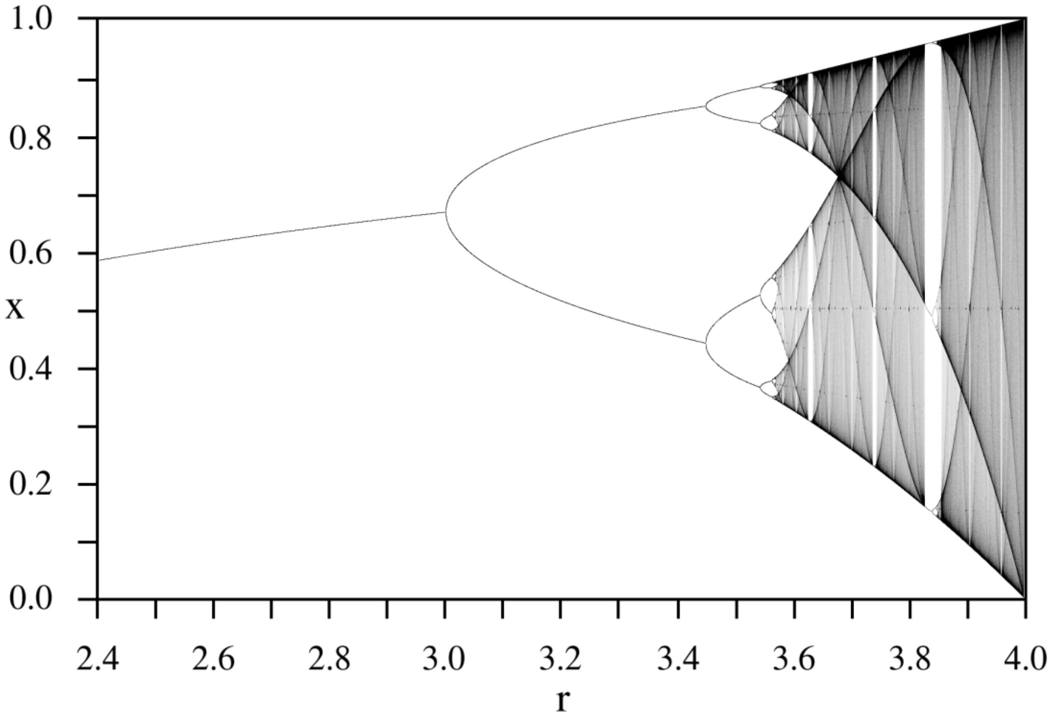
1. **Массовость**
   может выполняться любое количество раз для разных входных данных.
2. **Определённость**
   Для одного и того же ввода должна каждый раз давать один и тот же результат.
3. **Дискретность**
   Должен состоять из отдельных шагов или команд.
4. **Корректность**
   Должен возвращать правильное решение для всех допустимых входных данных.
5. **Конечность**
   Процесс должен быть завершен после конечного числа шагов.
6. **Ясность**
   Должен включать только такие команды, которые известны исполнителю алгоритма.

Предсказание погоды

- Эдвард Нортон Лоренц был математиком и метеорологом.
- В 1960 году он создал компьютерную программу для прогнозирования погоды, и она работала.



Теория хаоса



Спасибо за внимание!

В случае вопросов по лекции задавайте их через форму:

https://forms.yandex.ru/u/61ffab0425b437e0e3410e9b/

Мы обязательно обсудим их на следующем занятии.