Лекция 5. Интегрирование

Вычислительная математика,

Весенний семестр 2022

Ольга Вячеславовна Перл

План лекции

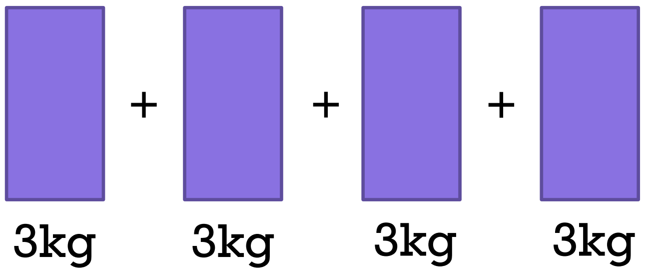
- Значение понятий интегрирования и дифференцирования
- Когда возможно посчитать интеграл
- Численные методы интегрирования

Что такое интеграл?

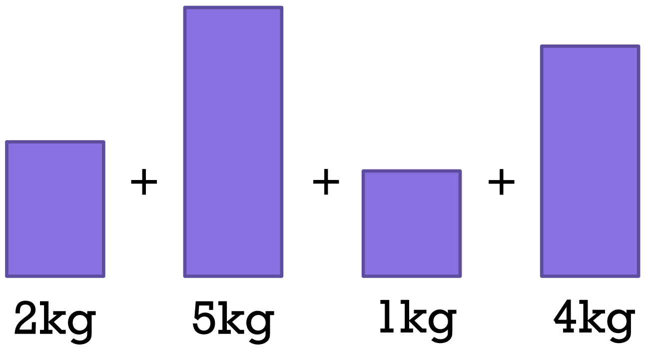
Значение понятий интегрирования и дифференцирования

Операции интегрирования и дифференцирования

- Интеграл – это логическое продолжение идеи умножения.
- Дифференцирование – это логическое продолжение идеи деления.



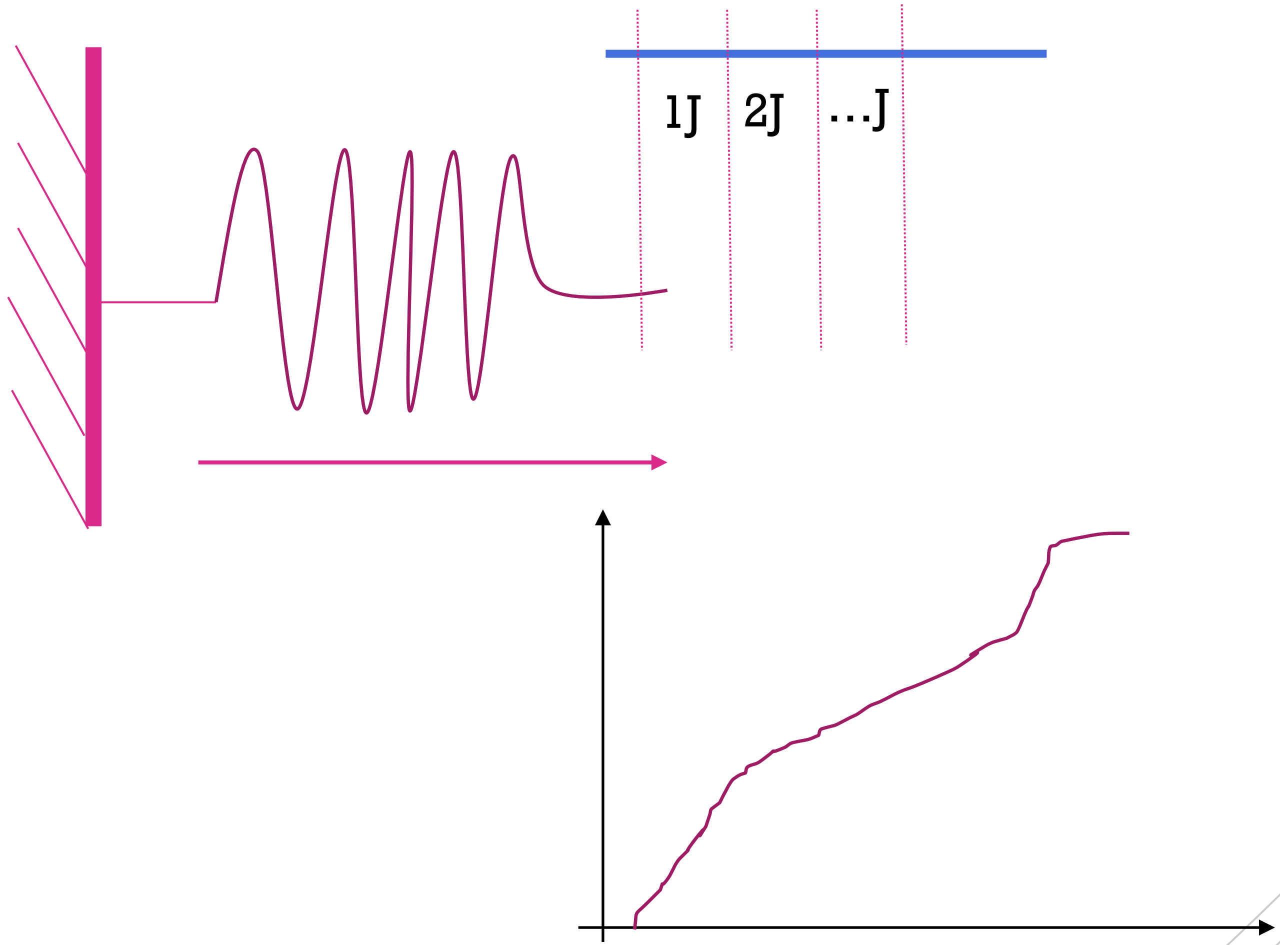
= 3kg+3kg+3kg+3kg=
=3kg*4 = 12kg



=2kg+5kg+1kg+4kg
$= \int_{x_1}^{x_4} m\,(x) =$ 12kg

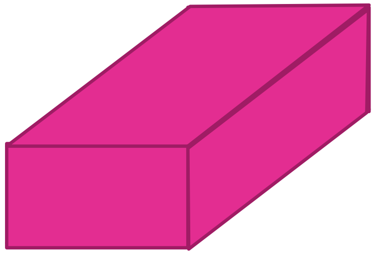
Операции интегрирования и дифференцирования

- Операция интегрирования – это <u>перемножение изменяющейся величины.</u>
- Дифференцирование – это <u>деление изменяющейся величины</u>.



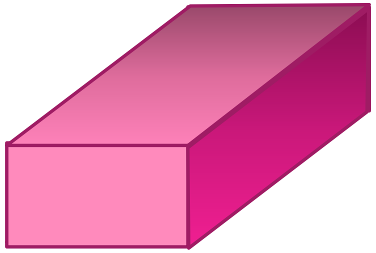
- Операция интегрирования – это перемножение изменяющейся величины.
- Дифференцирование – это деление изменяющейся величины.

Операции интегрирования и дифференцирования



$$m = \rho V$$

Масса объекта при равномерной плотности, где:
m – масса
ρ – плотность
V - объем

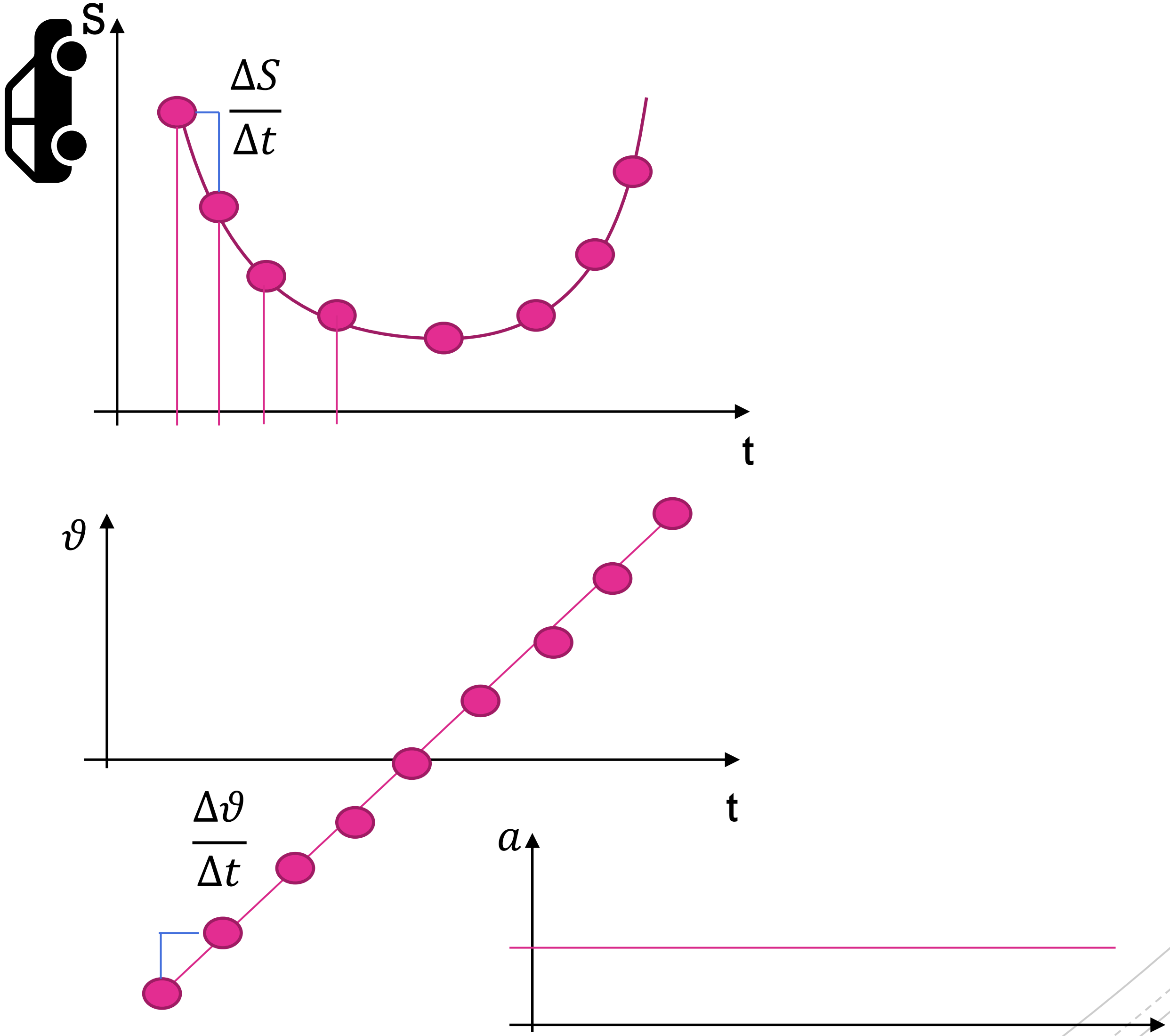


$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$$

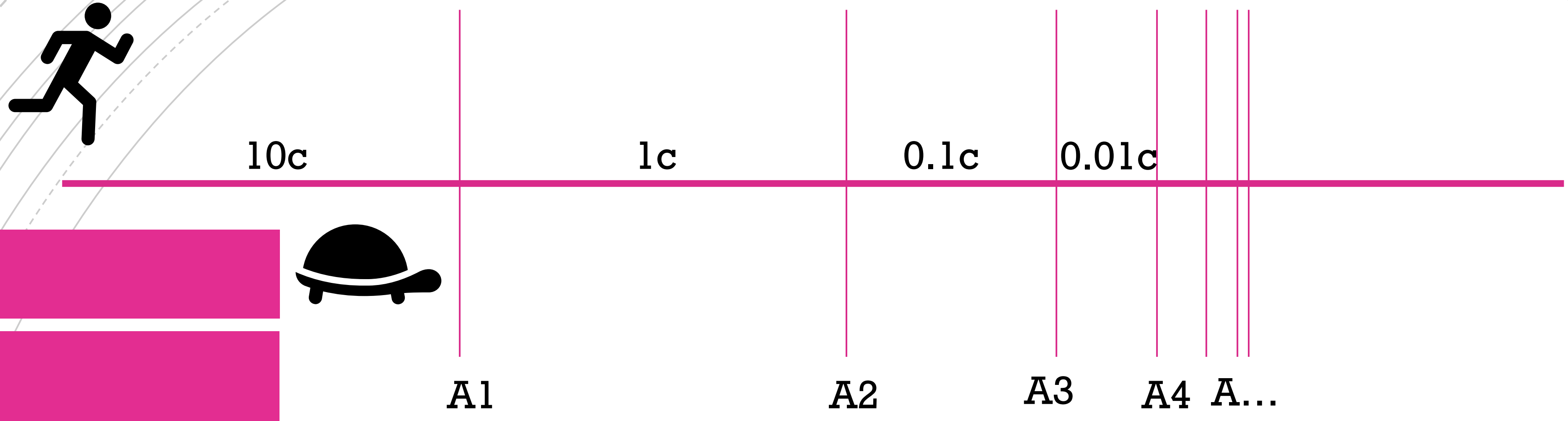
Масса объекта при неравномерной плотности

Операции интегрирования и дифференцирования

- Операция интегрирования – это перемножение изменяющейся величины.
- Дифференцирование – это деление изменяющейся величины.



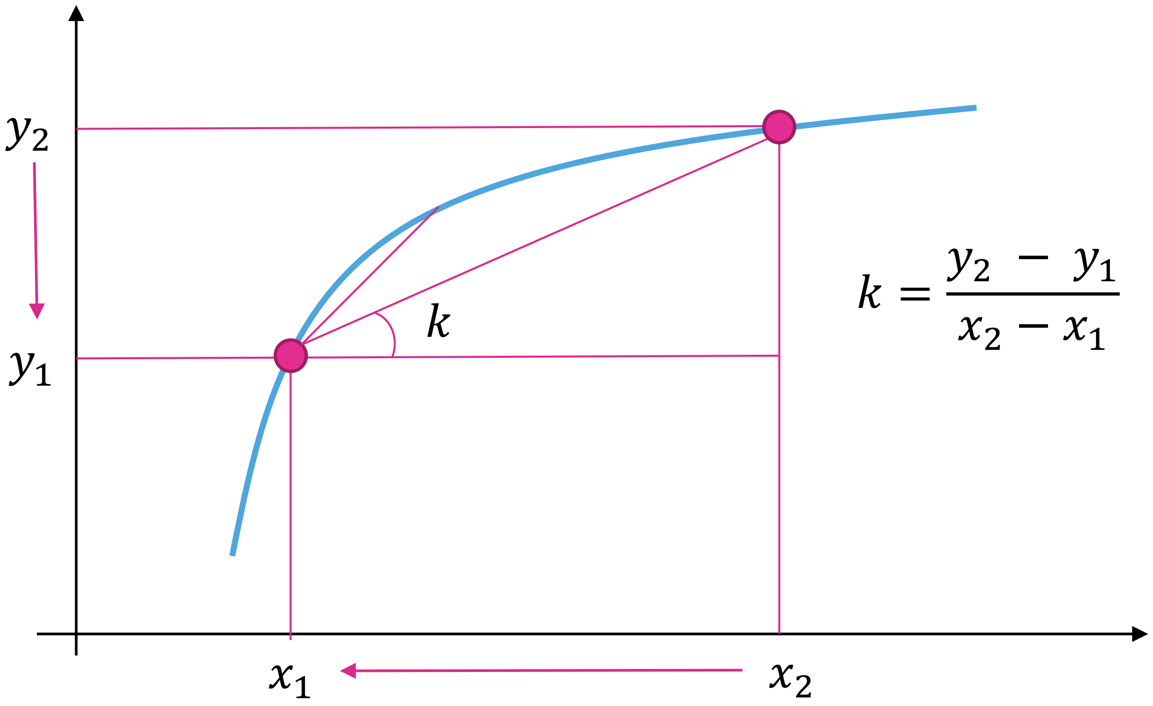
Пределы



$$t = 10c + 1c + 0.1c + 0.01c + \cdots = 11.11111\ldots c$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N\ n > N\ \rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

Пределы



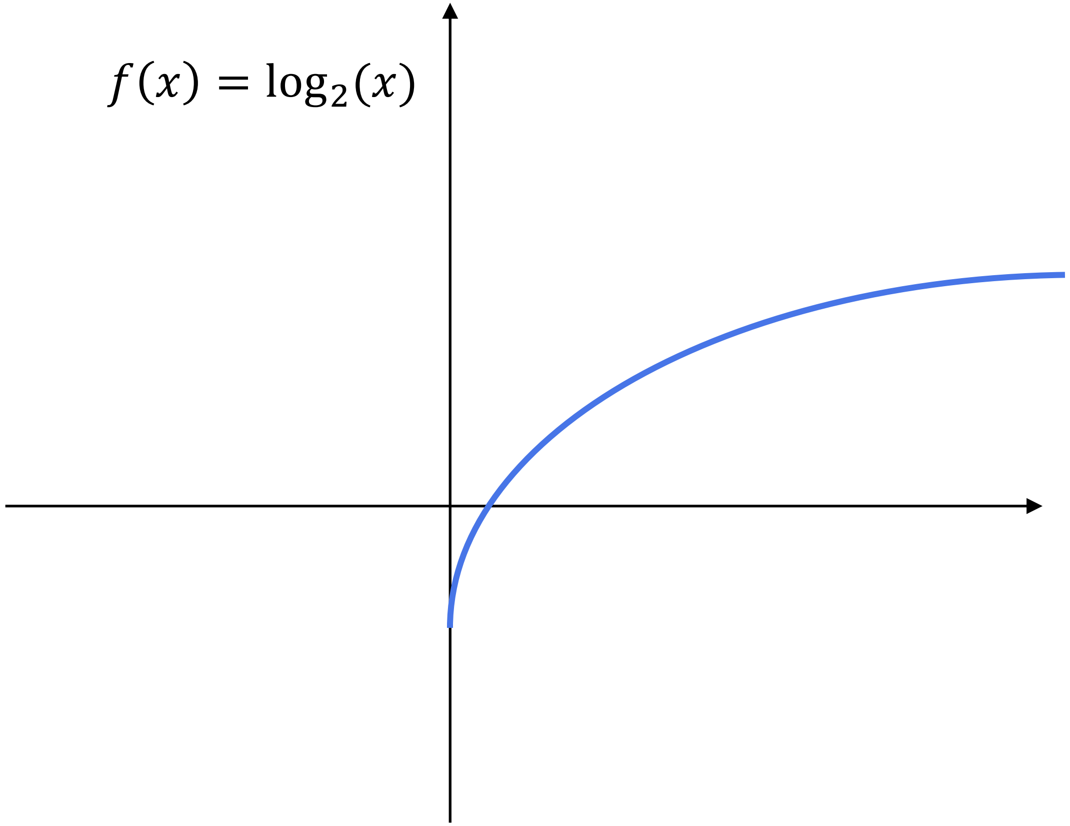
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N\ n > N\ \rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

Когда возможно посчитать интеграл

Когда возможно посчитать интеграл

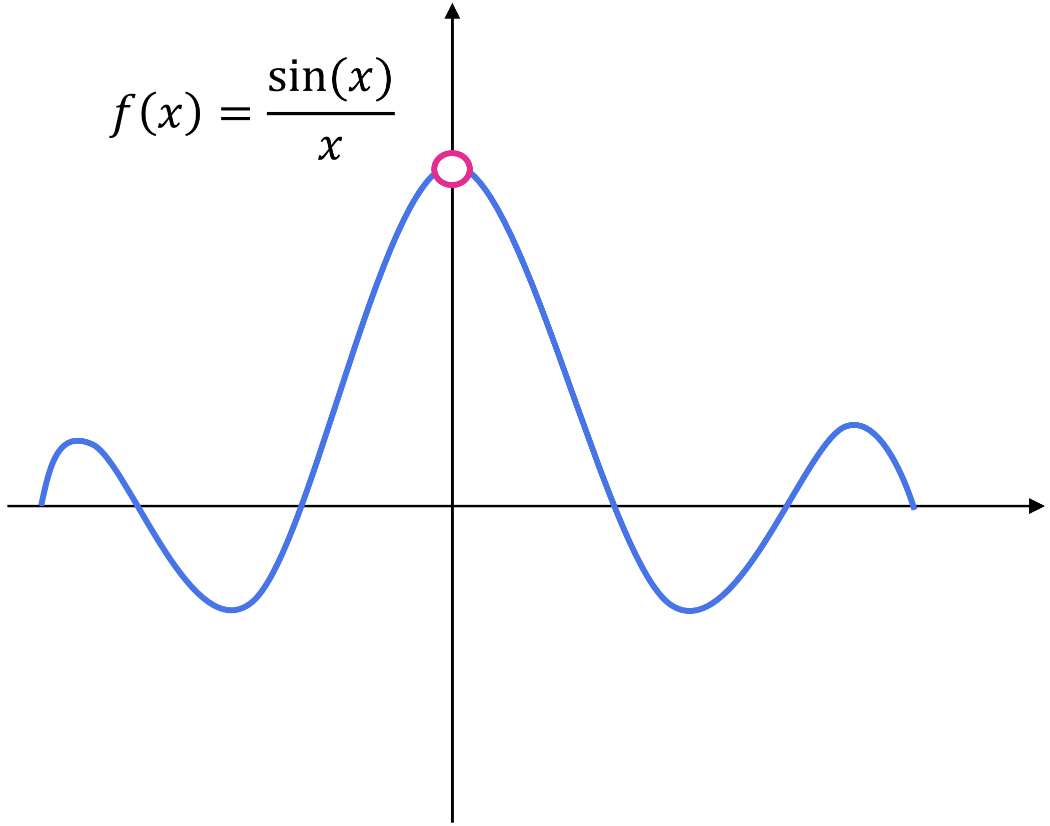
- Необходимое (**Necessary**) условие: функция определена и непрерывна на интервале $[a, b]$
- Достаточное (**Sufficient**) условие: конечное число точек разрыва первого рода.
- Существует **2** типа разрывов функций(**discontinuity**):
  - Первого рода:
    - устранимый
    - “скачок”
  - Второго рода:
    - Бесконечность (полюс)
    - Существенно особые точки / **essential singularity**, например колебания / **oscillating**

Функция не определена



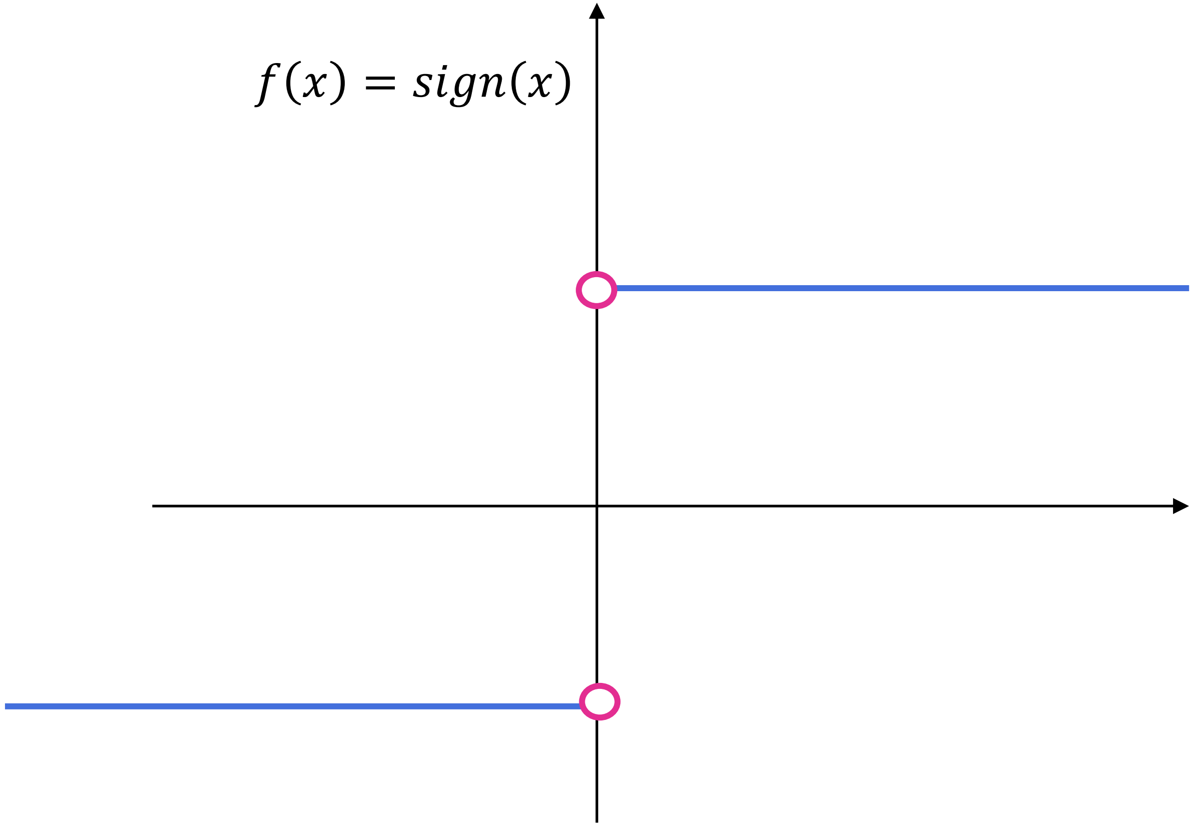
Функция не определена для **x** меньше 0.

Точка разрыва



Точка разрыва первого рода: устранимый разрыв

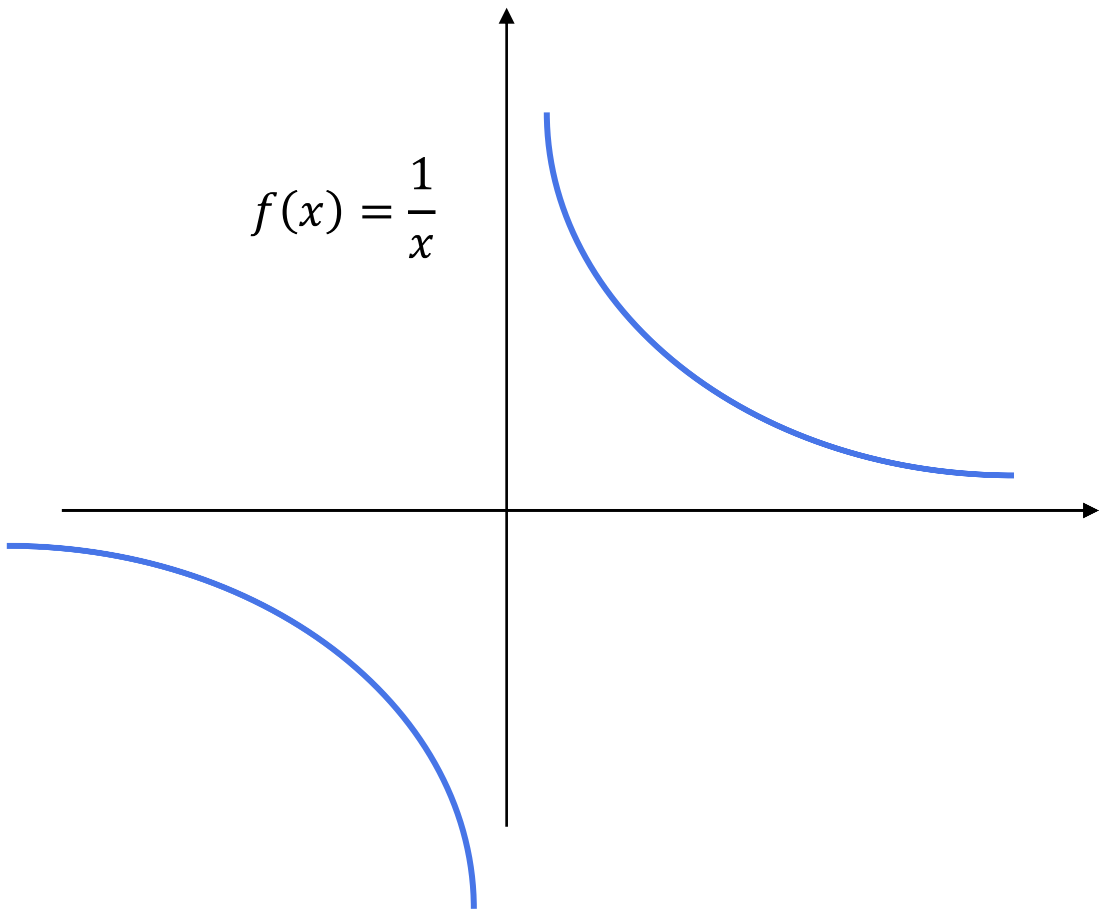
Точка разрыва



Точка разрыва первого рода: скачок

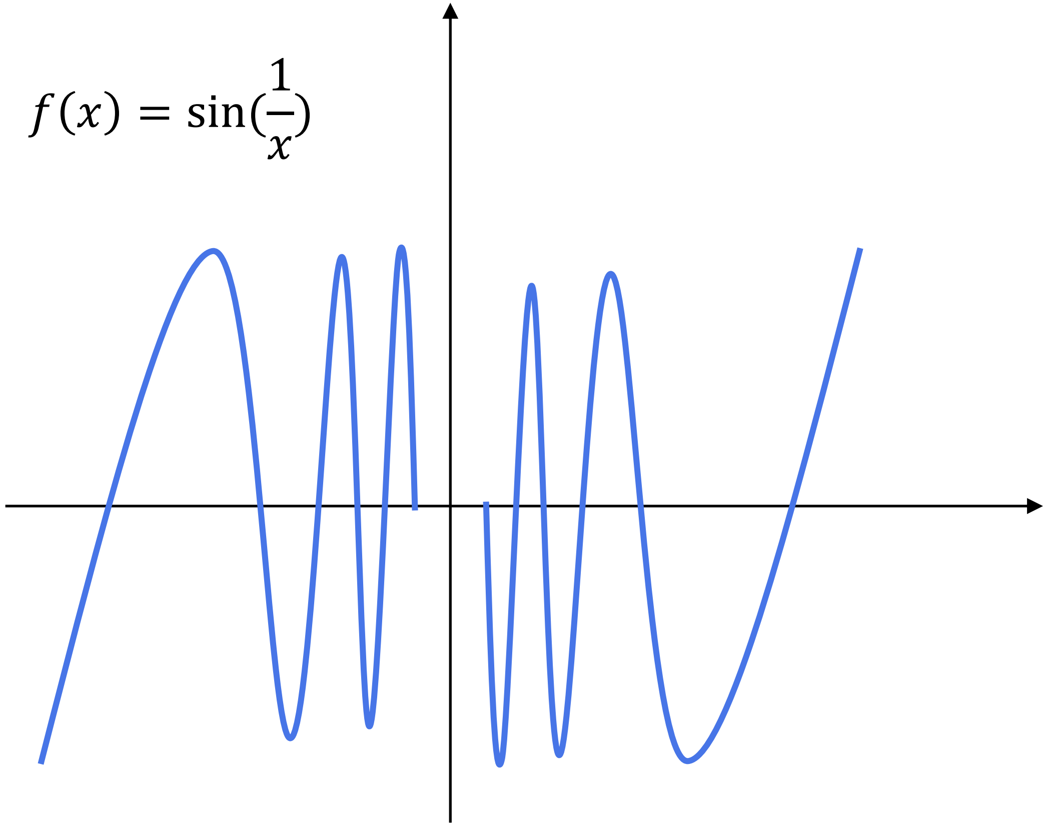
16.03.2022

Точка разрыва



Точка разрыва второго рода: бесконечность (полюс)

Точка разрыва



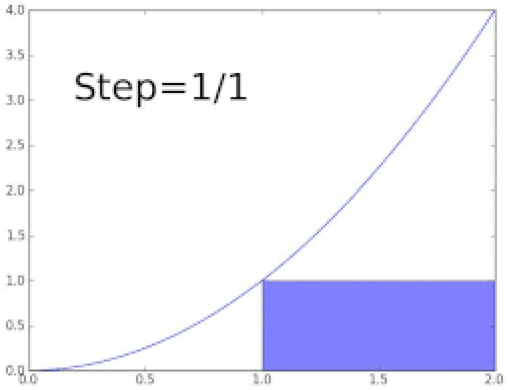
Точка разрыва второго рода: колебания

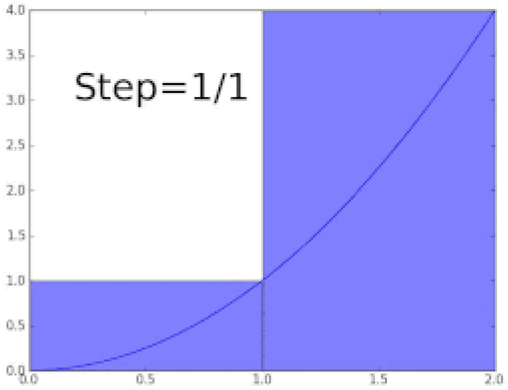
Методы численного интегрирования

Интеграл

$$I(f,a,b) = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i$$

- Где $A_i \ (i = 0, 1, \ldots, n)$ - постоянные коэффициенты интегрирования из полинома Лагранжа. Это аппроксимирующие (приближающие) квадратуры.





Формулы Ньютона-Котеса

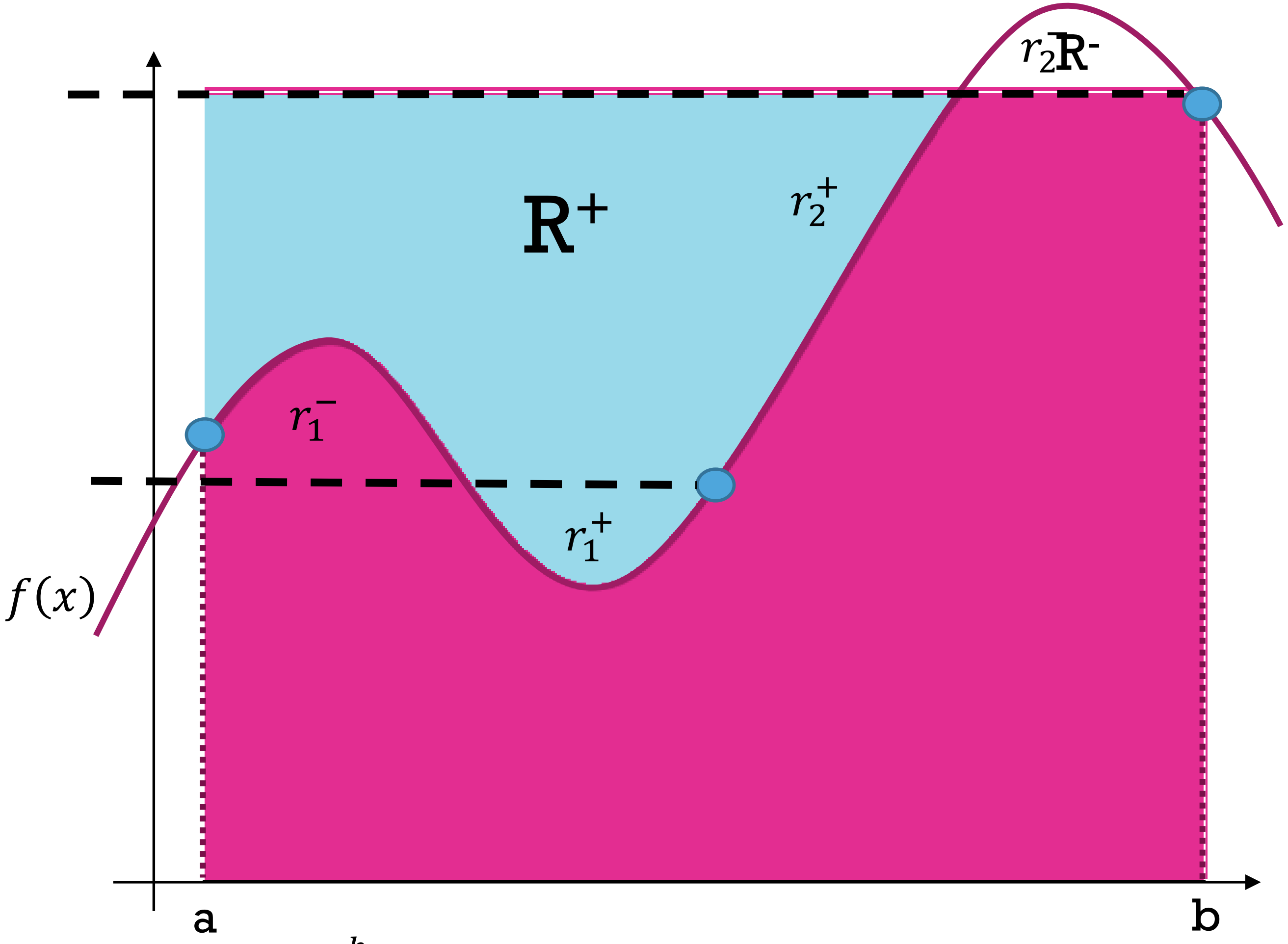
CLOSED (WHEN $x_0 = a$ AND $x_n = b$)

n	Step size h	Common name	Formula	Error term
1	$b-a$	Trapezoidal rule	$\frac{h}{2}(f_0+f_1)$	$-\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$
2	$\frac{b-a}{2}$	Simpson\`s rule	$\frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)$	$-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{b-a}{3}$	Simpson\`s 3/8 rule	$\frac{3h}{8}(f_0+3f_1+3f_2+f_3)$	$-\frac{1}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$
4	$\frac{b-a}{4}$	Boole\`s rule	$\frac{2h}{45}(7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4)$	$-\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$

OPEN (WHEN $x_0 > a$ AND $x_n < b$)

n	Step size h	Common name	Formula	Error term
0	$\frac{b-a}{2}$	Rectangle rule	$2hf_1$	$\frac{1}{3}h^3 f^{(2)}(\xi)$
1	$\frac{b-a}{3}$	Trapezoidal rule	$\frac{3h}{2}(f_1+f_2)$	$\frac{1}{4}h^3 f^{(2)}(\xi)$
2	$\frac{b-a}{4}$	Milne\`s rule	$\frac{4h}{3}(2f_1-f_2+2f_3)$	$\frac{28}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{b-a}{5}$		$\frac{5h}{24}(11f_1+f_2+f_3+11f_4)$	$\frac{95}{144}h^5 f^{(4)}(\xi)$

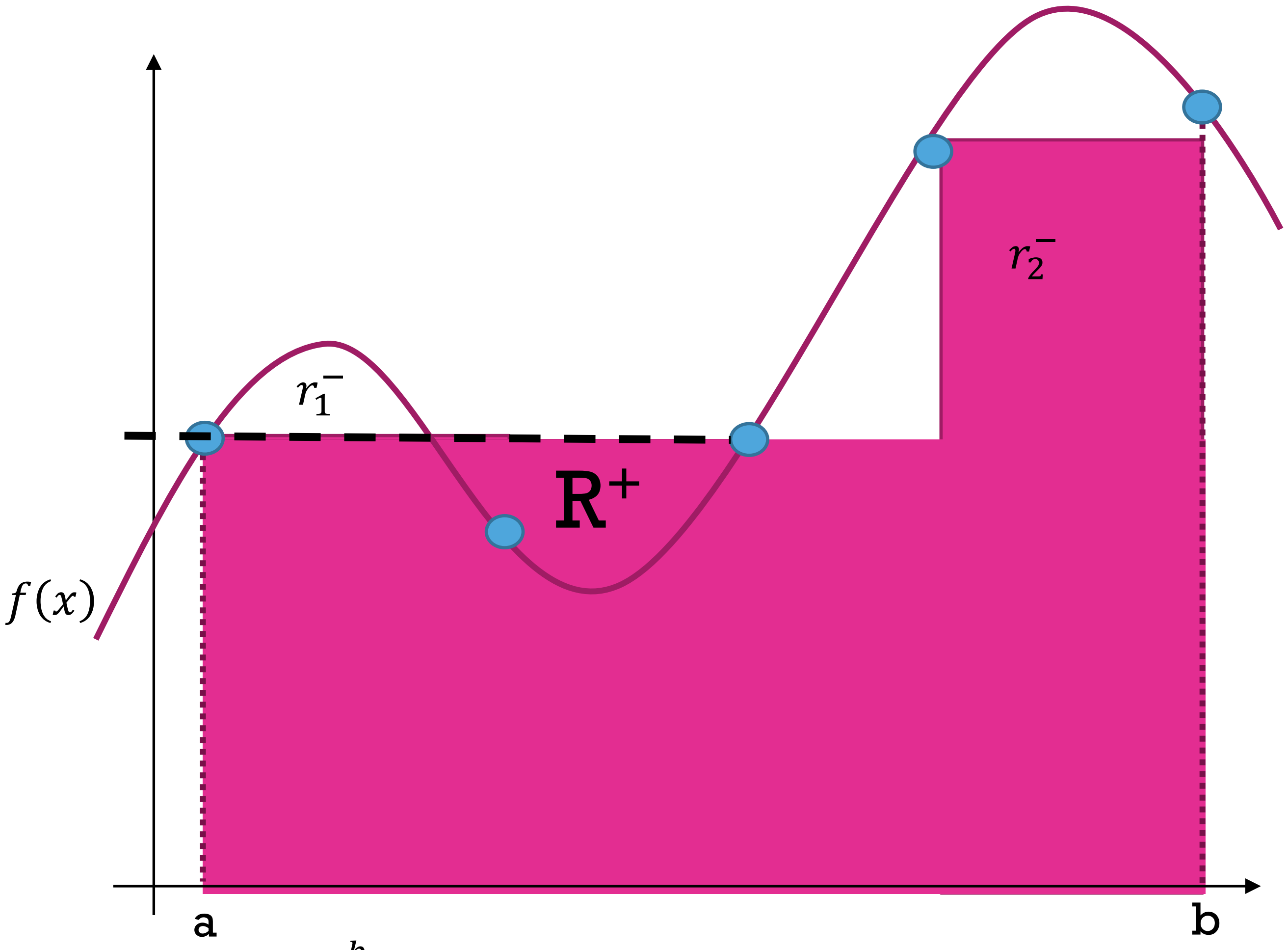
Метод правых прямоугольников



$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{(b-a)*f(b)} - R^+ + R^-$$

$$R = R^+ - R^-$$

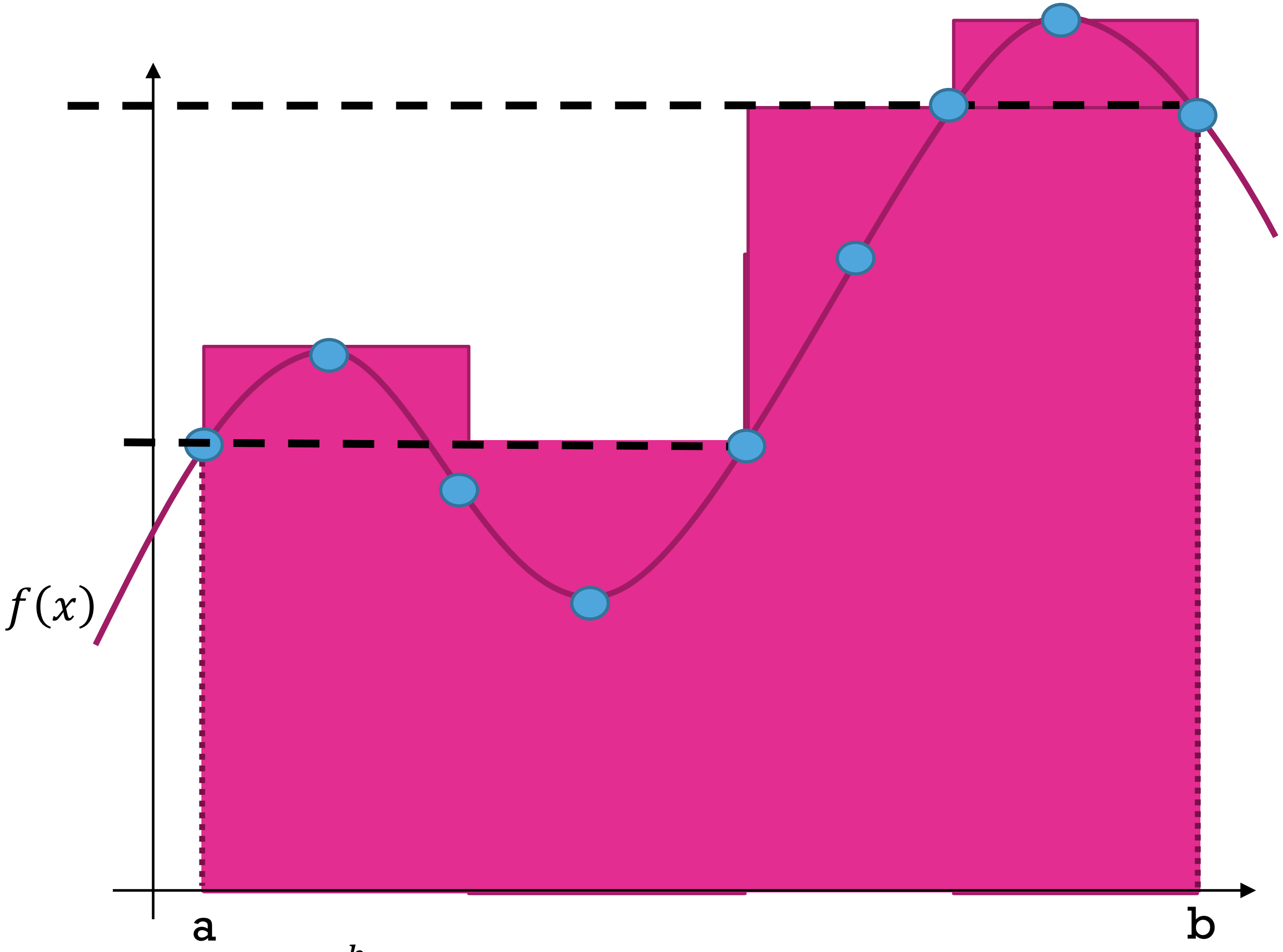
Метод левых прямоугольников



$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{(b-a) * f(a)} - R^+ + R^-$$

$$R = R^+ - R^-$$

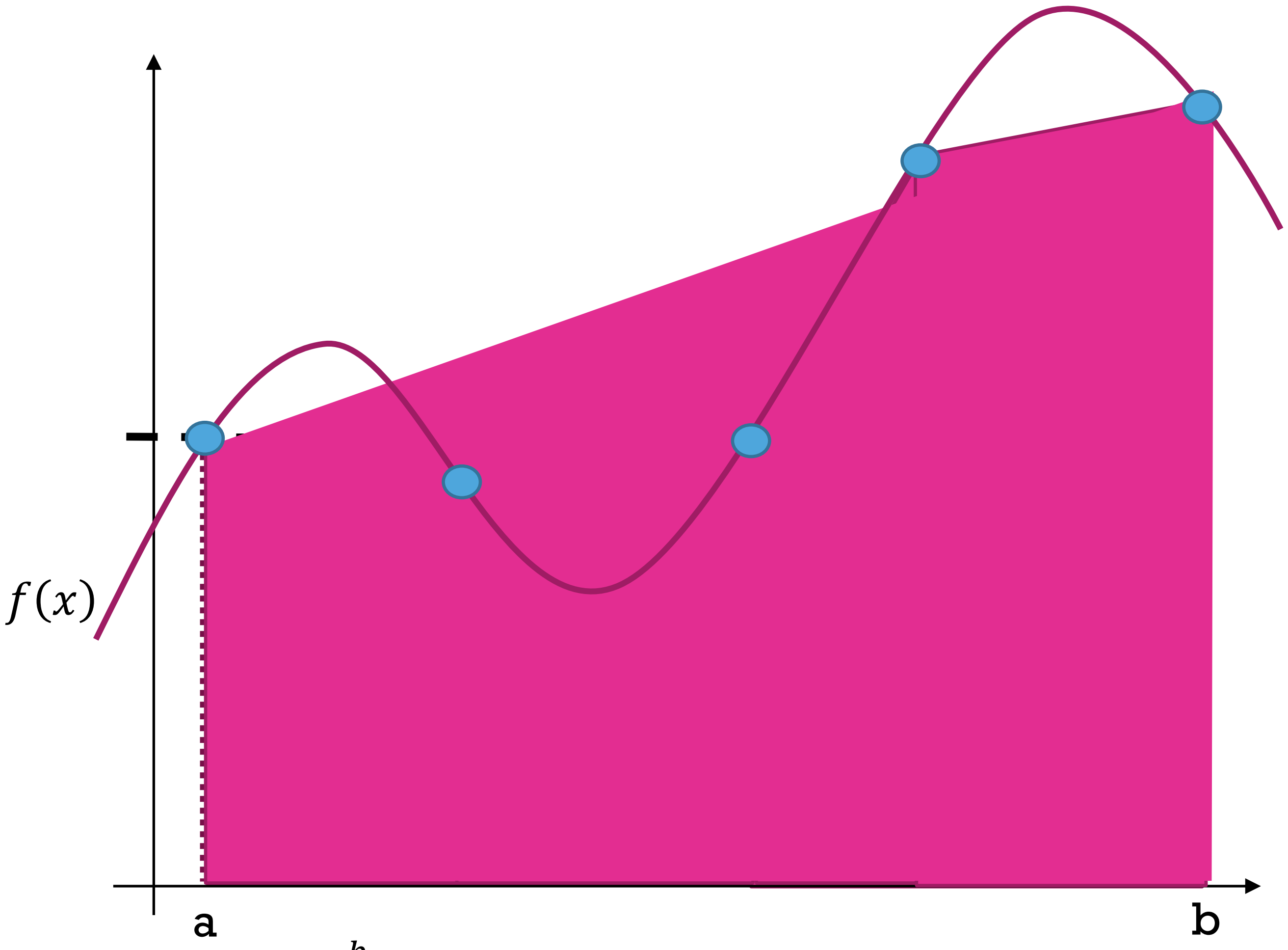
Метод средних прямоугольников



$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{(b-a) * f\left(\frac{b-a}{2}\right)} - R^{+} + R^{-}$$

$$R = R^{+} - R^{-}$$

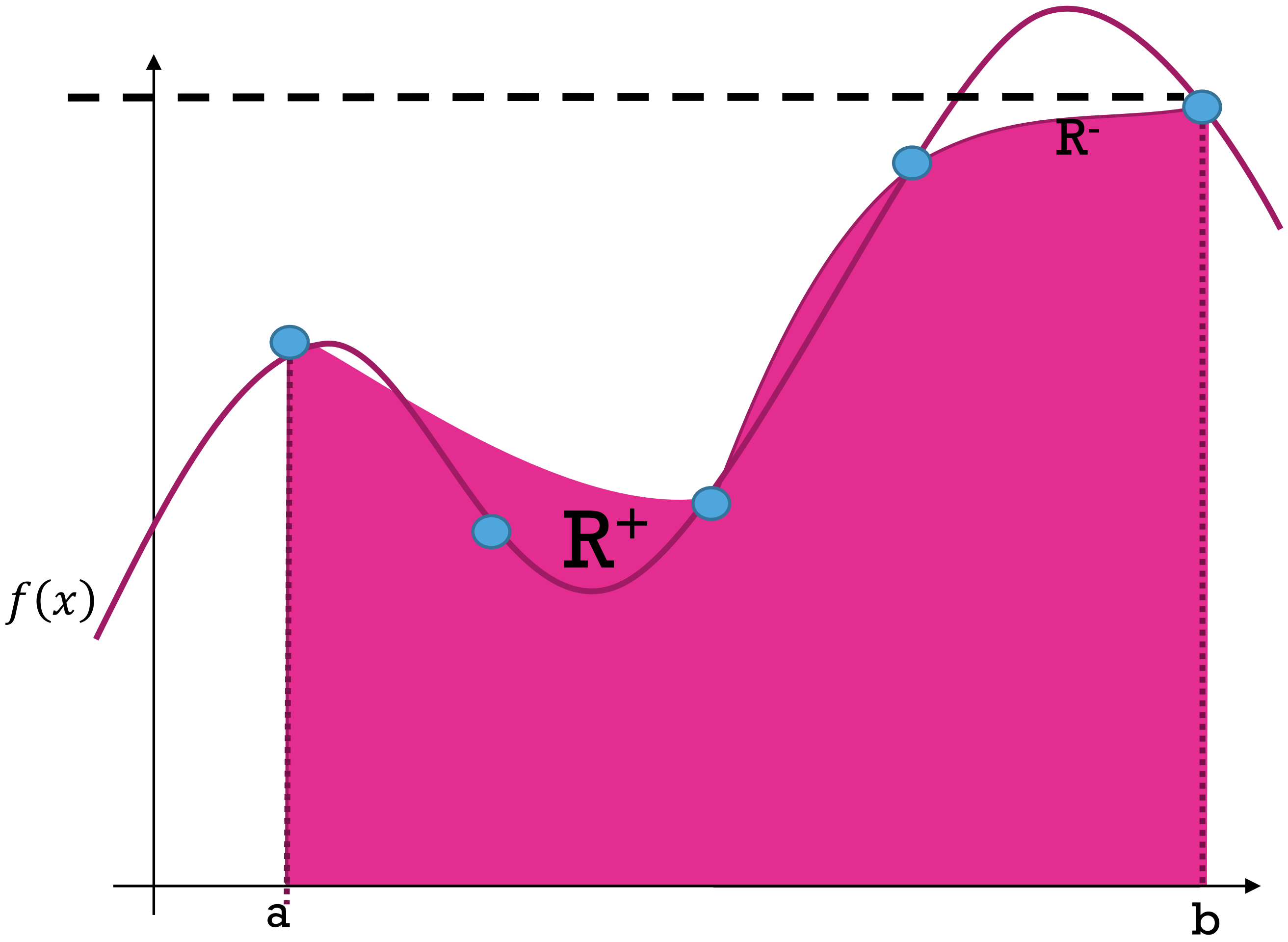
Метод трапеций



$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{\frac{h}{2}(f(b) + f(a))} - R^+ + R^-$$

$$R = R^+ - R^-$$

Метод Симпсона



$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{\frac{h}{3}\left(f(a)+4f\left(\frac{b-a}{2}\right)+f(b)\right)} - R^+ + R^-$$

$$R = R^+ - R^-$$

Спасибо за внимание!

В случае вопросов по лекции задавайте их через форму:

https://forms.yandex.ru/u/61ffab0425b437e0e3410e9b/

Мы обязательно обсудим их на следующем занятии.