ГЛАВА 3 РЯДЫ

§24 Числовые ряды. Сходимость - расходимость

Определение: Числов. ряд - это бесконечная сумма вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \qquad (1)$$

где слагаемые - это числа, a_n - общий член

Сокращенная запись: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (2)

Частичная сумма S_n - это сумма n первых членов, т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \qquad (3)$$

Сходимость: ряд сходится, если существ. конечный предел последовательности частичных сумм, т.е. существ. $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ (4)

Сам этот предел наз. суммой сходящегося ряда.

Ряд расходится, если $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ или $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует.

Пр1 Рассм. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{a_n}$.

Исследуем его на сходимость - расходимость

Реш: Имеем $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (легко проверить)

Тогда $S_n = \underbrace{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)}_{a_1} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)}_{a_2} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{n-1}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)}_{a_{n-1}} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)}_{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Ответ: Ряд сход. Его сумма $S=1$

Пр2 $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+\dots+n+\dots$

Члены образуют арифм. прогрессию.

$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{(1+n)n}{2} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim \frac{(1+n)n}{2} = \infty$

От. Ряд расходится

Пр3: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\dots$

Имеем: $S_1 = 1$; $S_2 = 0$; $S_3 = 1$; ...

Очевидно: $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует

Отв. Ряд расходится.

Итак: сумма сходящегося ряда - это конечный предел последовательности частичных сумм.

Основн. свойства рядов

Св-во 1: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход. и его сумма равна S^1, то сход. и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n$ и его сумма $S^2 = c\cdot S^1$.

Док-во: Для второго ряд $S_n^2 = c\,a_1 + \dots c\cdot a_n$

$$= c\cdot \sum_n a_n = c\cdot S_n^1 \xrightarrow[n\to\infty]{} c\cdot S^1.$$

Т.е. $S_2 = c\cdot S_1$.

Все остальные св-ва доказываются аналогично на основании св-в пределов.

Св-во 2: Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сход. и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$

Св-во 3: Добавление или отбрасывание конечного числа членов не меняет факта сходимости или расходимости ряда.

Необходимый признак сходимости:

Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Док-во: $a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$ (ч.т.д.)

Предостережение: этот признак не явл. достаточн. т.е. из стремления a_n к 0 не вытекает сх-ть ряда.

Достаточный признак расх-ти:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ ряд расходится.

Пр 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$

Очевидно! $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Итак: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но ряд расходится.

Пр 5. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n}$, исследуем на сходимость.

Реш. $a_n = \frac{n+1}{2n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

Итак: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$

Ряд расходится.

§25 Ряды с положит. членами. Достаточные признаки их сходимости

1° Первый признак сравнения

Пусть даны 2 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (2)

и $\forall n$ выполн. нер-во $a_n \leq b_n$.

Ряд $\sum a_n$ называют минорантным, а ряд $\sum b_n$ мажорантным. Тогда:

1) из сходимости мажорантного вытекает сх-ть минорантного, а

2) из расходимости минорантного вытекает расх-ть мажорантного.

Док-во 1) Пусть мажорантный, т.е. $\sum b_n$ сходится. Тогда из $a_n \leq b_n \Rightarrow S_n^a \leq S_n^b < S^b$. Получаем: последовательность (S_n^a) возр. и ограничена сверх. Значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n^a = S^a < \infty$.

Док-во 2) Пусть теперь минорантный, т.е. $\sum a_n$ расход., т.е. $\lim S_n^a = \infty$ при $n \to \infty$.

Тогда из $S_n^b \geq S_n^a$ вытекает:

$\lim S_n^b = \infty$. Т.е. мажорантный $\sum b_n$ расходится (ч.т.д.)

Пр1 Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$

сходится (см §24, пример1)

Очевидно, он явл. мажорантным для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$, т.к

$\frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^2}$. Значит $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ сх

и сход ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$

2° Второй (предельный) признак сравнения

Пусть даны 2 ряда $\sum a_n$ (1) и $\sum b_n$ (2)

и $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q$

Тогда ряды (1) и (2) или оба сходятся, или оба расходятся.

Док-во: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q \Rightarrow$ при $n > N_\varepsilon$ $\left|\frac{a_n}{b_n} - q\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - q < \varepsilon \Rightarrow q - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < q + \varepsilon$ (*)

1) пусть $\sum b_n$ сход $\Rightarrow \sum (q+\varepsilon) b_n$ сход.

При $n > N_\varepsilon$ из (*): $a_n < b_n(q+\varepsilon)$. по 1-му признаку сходится $\sum a_n$

2) Пусть $\sum a_n$ сход. Из $(*)$ $(q-\varepsilon)b_n < a_n$ по 1-му признаку сход $\sum(q-\varepsilon)b_n$, а значит и $\sum b_n$

$\sum b_n$ расх $\Rightarrow$ $(q-\varepsilon)b_n$ $b_n < a_n$; $\sum a_n$ расх

Замечание: предыдущие рассуждение справедливы для $n > N_\varepsilon$. Но добавление конечного числа членов не меняет факта сходимости (ч.т.д).

Пр2 Исследовать на сх-ть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+1} = \sum a_n$$

Решение Сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum b_n$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$.

Значит ряды ведут себя одинаково. Но $\sum \frac{1}{n^2}$ сход. (см. пример 1). Значит и данный ряд тоже сход.

3° Признак Даламбера

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и пусть сущ. предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$.

Тогда при $q<1$ ряд сход
при $q>1$ ряд расх

Док-во. При $n > N_\varepsilon$ выполнено:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon \Leftrightarrow q-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon \quad (*)$$

а) Пусть $q<1$. Тогда можно подобрать ε так, что $q+\varepsilon<1$. Из $(*)$ имеем $a_{n+1} < a_n(q+\varepsilon)$

Т.е. имеем геом. прогрессию со знамен. меньше, чем 1. Такой ряд сход. по 1-му признаку сход $\sum a_n$.

2) Пусть $q>1$. Тогда можно подобрать ε так, что $q-\varepsilon>1$. Из $(*)$: $a_{n+1} > (q-\varepsilon)a_n$, т.е. члены возрастают. Ряд расх.

Опять: док-во справедливо для $n > N_\varepsilon$. Но добавление конечного числа членов не меняет факта сх-ти — расход-ти.

Замечание: 1) При $q=1$ признак не работает.
2) Признак удобно применять для рядов, содержащих выражение a^n и $n!$

Пр 3 Исследовать на сх-ть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Решение $a_n = \frac{n}{2^n}$; $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2\cdot n} = \frac{1}{2} < 1$$

Отв. Сходится

4° Радикальный признак Коши.

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

при $q<1$ ряд сход, при $q>1$ расх.

(Примем без док-ва).

Пр 4 Исследовать на сх-ть $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Реш $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} =$

$$\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

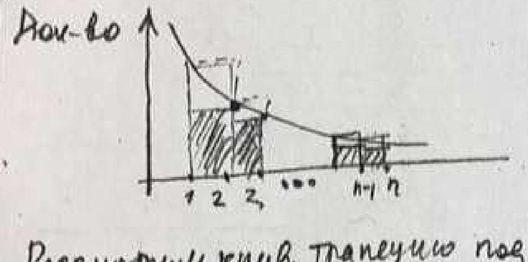
Отв: сходится. Замечание $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1$.

5° Интегральный признак Коши.

Пусть $f(x)$ — производящая ф-я для ряда $\sum a_n$, т.е. $f(n)=a_n$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобств. инт-л $\int_1^{\infty} f(x)dx$ или оба сход., или оба расходятся

Док-во



Рассмотрим крив. трапецию под графиком $f(x)$ и последовательность вписан. и описан. прямоугольников.

Очевидно:

$$f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \dots f(n)\cdot 1 < \int_1^n f(x)\,dx <$$
$$< f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \dots + f(n-1)\cdot 1$$

или: $a_2+a_3+\dots a_n < \int_1^n f(x)dx < a_1+a_2+\dots+a_{n-1}$

или $S_n - a_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - a_n \quad (*)$

Случай 1 интеграл сходится, т.е $\int_1^{\infty} f(x)dx = A$

Т.к. $\int_1^n < \int_1^{\infty} = A$, то из $(*)$ имеем

$S_n - a_1 < A \Rightarrow S_n < A + a_1$.

Имеем: пос-ть (S_n) возраст. и ограничена сверху. Значит $\exists$ конечн. предел $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

т.е. ряд сход.

Случай 2. Интеграл расходится.

Тогда интеграл $\int_1^n f(x)dx$ неограниченно возрастает при $n\to\infty$. Учитывая, что $S_n > \int_1^n f(x)dx + a_n$, получаем:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расх.

Пр5 Гармонич. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$

По интегр. признаку: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{\infty} = \infty$

Вывод: гармонич. ряд расходится

Пр6 Обобщ. гармон. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. $(p\neq 1)$

По интегр признаку:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^{\infty}.$$

Очевидно: интеграл сход. при $1-p<0$ т.е. $p>1$

интеграл расх. при $1-p>0$ т.е. $p<1$

Вывод: обобщ. гарм. ряд:

при $p>1$ сход

при $p<1$ расх

§26 Признак Лейбница для знакочередующихся рядов.

Знакочеред. ряд — это ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$$

где $a_n>0$

Признак Лейбница: Если в знакочеред. ряде: 1) члены по модулю убывают и 2) общий член $a_n\to 0$ при $n\to\infty$

То: 1) ряд сходится

2) сумма $S < a_1$

Док-во 1) Рассм. сначала S_{2m} — сумму четного числа слагаемых:

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2m-1} - a_{2m} =$$
$$= (a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\dots(a_{2m-1}-a_{2m}) > 0$$

Итак, $S_{2m} > 0$ и возрастает с ростом номера $2m$.

Запишем теперь S_{2m} так:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \quad (*)$$

Очевидно: $S_{2m} < a_1$

Последовательность (S_{2m}) возр. и ограничена сверху. Значит сущ. конечн. предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$.

Рассм. теперь част. суммы S_{2m+1}:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1} \Longrightarrow$$

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S + 0 = S$$

Итак, при любом n: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

и $S < a_1$ (ч.т.д)

<u>Следствие</u>. Если в знакочеред. ряде ограничиться частичн. суммой S_n, то погрешность $|S - S_n| < |a_{n+1}|$

т.е. погрешность меньше 1-го отброшен. члена.

<u>Пр</u> Рассм. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (0,1)^n$

Если вместо полной суммы S взять $S_3 = 0,1 - 0,01 + 0,001$, то погрешность

$|S - S_3| < |a_4| = 0,0001$

§ 27 <u>Абсолютная и условная сходимость знакоперем. рядов.</u>

① <u>Абсолютная сх-ть</u>: Опр. $\sum a_n$ сход. абсолютно, если сходится ряд из модулей.

Доказано: из абсолютной сх-ти следует сходимость знакопеременного.

② <u>Условная сх-ть</u>: Если ряд из модулей расходится, а сам ряд сходится, то он называется условно сходящимся.

<u>Пр 1</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$ (1)

сходится абсолютно. В самом деле, расм. ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

т.е. $\sum \frac{1}{n!}$ сх. Значит исходный ряд (1) сх. абсолютно.

<u>Пр 2</u> Расм. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

Он сходится по признаку Лейбница, т.к. члены убывают и $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Ряд из модулей: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

по интегральному признаку:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty \text{ — расходится}$$

<u>Отв.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ сходится условно (неабсолютно)

§28 Функциональные ряды

Определ: Функцион. ряд — это ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots \quad (1)$$

Обл. сх-ти: совокупн. всех значений x, при которых ряд сходится

В области сход-ти: $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$

Пр1 Рассм. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$ (2)

Члены образуют геом. прогрессию со знаменат. $q=x$. Очевидно, при $|q|=|x|<1$ имеем беск. убывающую геом прогрессию. Значит ряд сх. и его сумма $S=\frac{1}{1-x}$.

***

Равномерная сх-ть

Подмечено: не всегда бескон. суммы ф-ий (т.е. функцион. ряды) ведут себе так же, как и конечные суммы. Например, беск. сумма непр. ф-ий может оказаться разрывной. Не всегда функц. ряды можно почленно дифф-ть и интегрировать.

Встает вопрос: как выделить те функц. ряды, которые ведут себе аналогично конечн. суммам. Их выделили: это **равномерно** сходящиеся ряды.

Определение: Ряд наз. **равномерно** сходящимся в некоторой области D, если для $\forall\varepsilon>0$ $\exists N>0$ такое, что при всех $n>N$ выполн. нер-во $|R_n(x)|<\varepsilon$ для любого x из обл. D. ($R_n(x)$ — остаток ряда)

Признак Вейерштрасса равномерной сход-ти:

Если для ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ можно найти сходящийся числовой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k>0)$ такой, что $|u_k(x)|\le a_k$ в области D, то в этой обл. функц. ряд сх. равномерно

Пр2 Рассм. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{2^n}$.

Очевидно $\left|\frac{(\sin x)^n}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$. Числ. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится (члены образуют геом прогр со знамен $q=1/2<1$. **Вывод:** данный ряд сх. равномерно на всей числ. оси.

Осн. св-ва равномерно сход. рядов.

① **Непрерывность суммы**

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сход равномерно в обл D, его ф-ии **непр.**, то его сумма $S(x)$ **тоже непрерывна.**

② Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сход **равномерно** в обл. D, его ф-ии **непрер.** и ряд имеет сумму $S(x)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b u_k(x)\,dx\right)=\int_a^b S(x)\,dx.$$

③ **Почленное дифференцирование**

Пусть члены ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ непрерывны, имеют непр. производные $u_k'(x)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x) = \left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right\}'_x$

Замечание: Требуется равном. сх-ть не исходного ряда, а ряда из производных.

Пр3 Дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{x}{k}$

Можно ли его почленно дифф-ть?

Решение Рассм. ряд из производных: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\cdot\cos\frac{x}{k}$. Очевидно $\left|\frac{1}{k^3}\cos\frac{x}{k}\right|\le\frac{1}{k^3}$, $|x|<\infty$

Очевидно: ряд $\sum\frac{1}{k^3}$ сходится (обобщен. гармонич при $k>1$). **ОТВЕТ:** да, на всей числ. оси

§29 Степенные ряды.

Это ряды вида: $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot X^n = C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n + \ldots$ (1)

Числа $C_0, C_1, C_2, \ldots$ наз. коэффициентами ряда

Рассм. Также ряды по степеням $(y-y_0)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (y-y_0)^n = C_0 + C_1(y-y_0) + \ldots + C_n(y-y_0)^n + \ldots \quad (2)$$

Заменой $(y-y_0)=X$ эти ряды сводятся к виду (1)

Теорема Абеля: Если ряд (1) сходится в точке $X=X_0 \neq 0$, то он сходится и при всех X, удовл. нер-ву $|X|<|X_0|$.
(Примем без док-ва).

Из этой теоремы вытекает, что область сходимости есть симм. интервал с центром в начале коорд: $(-R, +R)$

Он находится из нер-ва:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}\cdot x^{n+1}}{C_n \cdot x^n}\right| < 1 \text{ или } |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$$

Радиус абс. сх-ти: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$

Пр1 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ Найдём радиус сх-ти

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| =$$

$= \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$ Отв. сходится на всей числ. оси

Пр2 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ найдём радиус сх-ти.

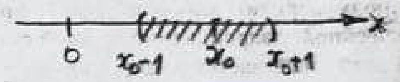
$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} : \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$. Отв $R=1$

$(-1; +1)$ - интервал сх-ти

Заметим: для ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, где $z = x+iy$, обл. сходимости будет круг: $x^2+y^2<1$ (внутрен. круга).

Пр3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n}$ Очевидно: $R=1$ (см. пр.2)

Интервал сх-ти: $(x_0-1,\ x_0+1)$



Осн. свойства

Отметим: члены ряда $u_n = C_n \cdot x^n$ являются непрер. дифференцируемыми ф-ями. В силу теор. Абеля на любом замкн. интервале внутри интервала сх-ти степ. ряд сход. равномерно.

Отсюда вытекает: в интерв. $|x|<R$

1) Сумма степ. ряда непрерывна
2) Степ. ряды можно почленно интегрировать.
2) Степ. ряд можно почленно дифф-ть.

Пример 4 Найти сумму ряда

$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$, если $|x|<1$.

Реш Обозначим $S(x)$ – сумма ряда.

Заметим $\int_0^x S(t)dt = t+t^2+t^3+\ldots\Big|_0^x =$

$= x+x^2+x^3+x^4+\ldots$

Члены образуют геом. прогрессию со знамен. $|x|<1$. Значит $\int_0^x S(t)dt = \frac{x}{1-x}$

Тогда $S(x) = \left(\int_0^x S(t)dt\right)'_x = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2}$

$= \frac{1}{(1-x)^2}$. Ответ $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ при $|x|<1$.

§30 Ряды Тейлора и Маклорена.

Как рассматривалось на 1-ом курсе, если $f(x)$ в (·)x_0 имеет производные всех порядков, то имеет место формула Тейлора

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{многочлен Тейлора}}+\underbrace{R_n(x)}_{\text{остаточн. член}} \quad (1)$$

При $n\to\infty$ получаем ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \text{ – ряд Тейлора.} \quad (2)$$

При $x_0=0$ имеем частн. случай:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \text{ – ряд Маклорена} \quad (3)$$

Замечено: не всегда ряд Тейлора сходится к своей ф-ии $f(x)$.

Доказано: для того, чтобы ряд Тейлора сходился к своей ф-ии $f(x)$, необх. и достаточно, чтобы остаточн. член $R_n(x)$ в ф-ле Тейлора (1) стремился к 0. (Без док-ва).

На практике пользуются следующим условием: Если модули всех производных ф-ии $f(x)$ ограничены в окрестности (·)x_0 одним и тем же числом $M>0$, то в окрестности (·)x_0 ряд Тейлора ф-ии $f(x)$ сходится к $f(x)$.

§31 Разложение ф-ий в ряд Маклорена

① $\boxed{f(x)=e^x}$

Имеем для $\forall n$: $f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(0)=e^0=1$

Тогда: $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ (1)

$x\in(-\infty,+\infty)$

② $\boxed{f(x)=\sin x} \longrightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\cos x \longrightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x \longrightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x \quad f'''(0)=-1$

$f^{IV}(x)=\sin x \quad f^{IV}(0)=0$

и т.д. и т.д.

получаем

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \quad (2)$$

$x\in(-\infty;+\infty)$

③ $\boxed{f(x)=\cos x=(\sin x)'}$

Диф ф-я ряд (2), получаем

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad (3)$$

$x\in(-\infty;+\infty)$

④ $\boxed{f(x)=(1+x)^\alpha} \longrightarrow f(0)=1$

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1} \longrightarrow f'(0)=\alpha$

$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \longrightarrow f''(0)=\alpha(\alpha-1)$

и т.д.

Получаем:

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (4)$$

$x\in(-1;+1)$

⑤ $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \quad (5)$$

$x\in(-1;1)$

⑥ $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n\cdot x^n+\ldots \quad (6)$$

$x(-1,1)$

⑦ $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots \quad (7)$$

$x\in(-1,1)$

(8) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$ (8)

$x \in (-1; 1)$

(9) $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$ (9)

$x \in (-1; 1)$

§32 Применение рядов к приближенным вычислениям.

Рассмотрим на конкретных примерах.

Пр1 $\sin 0{,}1 = ?$ 0,1 – угол в радианах.

Имеем $\sin 0{,}1 = 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^3}{3!} + \frac{(0{,}1)^5}{5!} - \dots$

Имеем: $\sin 0{,}1 = 0{,}1$ с погрешностью

$\frac{0{,}001}{3} = 0{,}0033\dots$, т.е. $|\sin 0{,}1 - 0{,}1| < 0{,}0034 < 0{,}01$

Пр2 Вычислить $\sqrt[5]{1{,}1}$ с точностью до 0,0001

Решение:

$\sqrt[5]{1{,}1} = (1+0{,}1)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}1 + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{2!}\cdot 0{,}01 + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)}{3!}\cdot 0{,}001 + \dots = 1 + 0{,}02 - 0{,}008 + 0{,}000048 -$

Четвертый и след. члены отбрасываем, т.к. четвертый меньше 0,0001

Ответ $\sqrt[5]{1{,}1} \approx 1 + 0{,}2 - 0{,}008 = 1{,}0192$

Пр3 Вычислить $\ln(1{,}04)$ с точн. до 0,0001

Решение $\ln(1{,}04) = \ln(1 + 0{,}04) =$

$= 0{,}04 - 0{,}0008 + \underbrace{0{,}000021}_{<0{,}0001} \approx 0{,}0392$

Пр4 Вычислить $I = \int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

с точностью до 0,0001.

Реш Раскладываем $\cos x$ в степен. ряд.

Получаем: $I = \int_0^{1/2} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}{x^2}\,dx =$

$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots\right) dx =$

$= \left(\frac{1}{2!}x - \frac{x^3}{4!\cdot 3} - \frac{x^5}{5\cdot 6!} - \dots\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{1}{2!\cdot 2} - \frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5} - \dots =$

$= 0{,}25 - 0{,}0017 = 0{,}2483$; $\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 32} < 0{,}0001$

§33 Применение рядов к решению диф. уравнений

Рассмотрим на конкретных примерах.

Пр1 Дано ур-е $y' + xy = 0$

Ищем общее решение в виде степенного ряда: $y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n + \dots$

Тогда $y' = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + \dots + n\cdot C_n x^{n-1}$

Запишем исходное ур-е так $y' = -xy$,

т.е. тождественно равны 2 ряда:

$C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + \dots + n\cdot C_n x^{n-1} + \dots \equiv$

$\equiv 0 - C_0 x - C_1 x^2 - C_2 x^3 - \dots - C_{n-2} x^{n-1} + \dots$

Приравнивая коэф-ты при одинаковых степенях x, получаем систему равенств

$C_1 = 0$; $C_2 = -\frac{C_0}{2}$; $C_3 = -\frac{C_1}{3} = 0$; $C_4 = -\frac{C_2}{4} = +\frac{C_0}{2\cdot 4}$;

$C_5 = -\frac{C_3}{5} = 0$; $C_6 = -\frac{C_4}{6} = \frac{C_0}{2\cdot 4\cdot 6}$

Т.е. $C_{нечет} = 0$. $C_{чет} \neq 0$.

Ответ: $y(x) = C_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \dots\right) =$

$= C_0 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty < x < +\infty)$

Пр2 Найти решение задачи Коши для ур-я $\boxed{y'=2y^2}$; $y(0)=1$

Решение. Ищем решение методом разложения в ряд Тейлора:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots$$

При $x_0=0$ имеем ряд Маклорена:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\dots \quad (1)$$

Для нашего ур-я имеем: $\boxed{y(0)=1}$

Из $y'=2y^2$ имеем $y'(0)=2\cdot 1^2=2$, т.е. $\boxed{y'(0)=2}$

Продолжаем $y''=4y\cdot y' \Rightarrow y''(0)=4\cdot 1\cdot 2=8$ $\boxed{y''(0)=8}$

$y'''=(4y\cdot y')'=(y')^2+4y\cdot y'' \Rightarrow \boxed{y'''(0)=\dots 48}$

$y^{IV}=2y'\cdot y''+4y'\cdot y''+4y\cdot y''=12y'\cdot y''+4y\cdot y'''$;

Подставляя в ряд (1), получим: $\boxed{y^{IV}(0)=384}$

$y(x)=1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+\dots$

Справа имеем геом. прогрессию со знамен. $q=2x$. Она сход при $|2x|<1$, т.е. $|x|<1/2$

Её сумма: $S=\frac{a_0}{1-q}=\frac{1}{1-2x}$. Ответ: $y(x)=\frac{1}{1-2x}$

§34 Ортогональные системы функций. Ряд Фурье.

Опр1 функции $f(x)$ и $g(x)$ назыв. ортогональными на промежутке (a,b), если $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=0$

Опр2 Система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x)$ наз. ортогональной на (a,b) если $\int_a^b \varphi_m(x)\cdot\varphi_n(x)\,dx=0$ при $m\neq n$

Основная Тригоном. система:

Это система ф-ий:

$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx \dots$ (1)

Легко показать, что эта система ортогональна на промежутке длиной 2π. В частности на промежутке $(-\pi;\pi)$:

$$\underset{-\pi\qquad 0\qquad \pi}{\longrightarrow x}$$

Общая Тригоном. система

$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \dots$ (2)

Она ортогональна промежутке длиной $2l$. В частности на промежутке $(-l,l)$:

$$\underset{-l\qquad 0\qquad l}{\longrightarrow x}$$

Ряд Фурье для ф-ии $f(x)$ по основной системе (на промеж. $(-\pi,\pi)$).

Это ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$

коэф. которого вычисл. по ф-лам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx$$

$$n=1,2,\dots \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (*)$$

Ряд Фурье по общей системе: $(-l,l)$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

где $a_0=\int_{-l}^{l} f(x)\,dx \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \quad (**)$$

§35 Разложение функций в ряд Фурье.

Выясним условие, при которых ряд Фурье сходится к самой функции, заданной на промежутке $[-l, l]$. Ответ на этот вопрос даёт теорема Дирихле:

Пусть $f(x)$ кусочно непрерывна и кусочно монотонна на промежутке $[-l, l]$. Тогда ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1) $S(x)=f(x)$ в точках непрерыв. $f(x)$

2) $S(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$; x_0 — т. разрыва

3) $S(-l)=S(l) = \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$

Пр1 $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } -1\le x\le 0 \\ 2 & \text{при } 0<x\le 1\end{cases}$

Построить ряд Фурье для $f(x)$ и изобразить их графики

Решение

1) $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{1} 2\,dx = 2$

2) $a_n = \int_{-1}^{0} 0\cdot \cos n\pi x\, dx + \int_{0}^{1} 2\cdot \cos n\pi x\, dx =$

$= 0 + \dfrac{2}{n\pi}\sin n\pi x \Big|_0^1 = 0$

$b_n = \int_{-1}^{0} 0\cdot \sin n\pi x\, dx + \int_{0}^{1} 2 \sin n\pi x\, dx =$

$= 0 = -\dfrac{2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 = -\dfrac{2}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0)$

$= -\dfrac{2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \dfrac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$

Имеем $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n)\cdot \cos n\pi x$

Графики $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$ на $[-1,1]$ изображены на рисунках

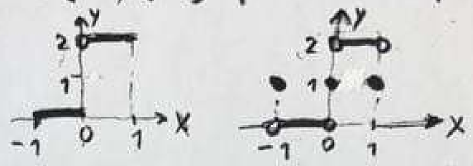
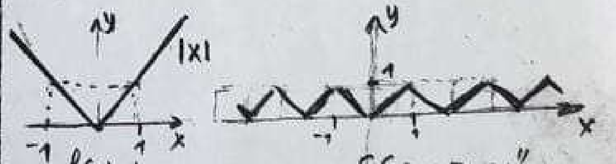


График $f(x)$ График $S(x)$ на $[-1;1]$

Замечание. Заметим: ф-я $f(x)$ задана только на $[-1,1]$, а график $S(x)$ задан на всей числ. оси (периодическая ф-я).

Пр 2 Пусть $f(x)=|x|$ (задана на $(-\infty,\infty)$). На $[-1,1]$ она разложена в ряд Фурье. Изобразим их графики.



$f(x)=|x|$ $S(x)$ „пила"

Как видим, если рассматривать их на всей числ. оси, то это совершенно разные ф-ии. Они совпадают только на $[-1,+1]$ — на промежутке разложения.

§36 Разложение на симметричн. промежутке чётн. и нечётн. ф-ий.

① Если $f(x)$ чётная, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

где $a_0 = \dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)dx$; $a_n = \dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx$

② Если $f(x)$ нечетная, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot \sin\frac{n\pi}{x}$$

где $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

§ 37 Компл. форма ряда Фурье.

Вспомним ф-лы Эйлера:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi;\quad e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$$

Тогда $\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$

$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

Тогда на $[-\pi,\pi]$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\cdot\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)=\dots$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n-ib_n)}{2}e^{inx}+\frac{(a_n+ib_n)}{2i}\cdot e^{-inx}$$

Или $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot e^{inx}+C_n e^{-inx}$

где $C_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$, $C_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$

Окончательно, можно записать

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\cdot e^{inx}$$

где $C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}\,dx$

$n=0,\pm1,\pm2,\dots$

Пр $f(x)=\begin{cases}0 & x\in[-1;0)\\ 1 & x\in[0;1]\end{cases}$ **33**

Построить ряд Фурье в компл. форме.

Решение. Имеем $l=1$

Тогда $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\cdot e^{\frac{in\pi x}{l}}$

где $C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot e^{-\frac{in\pi x}{l}}\,dx$ $\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$

В примере: $l=1$

Тогда $C_n=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-i\pi nx}\,dx=$

$$=\frac{e^{-inx}}{2\pi ni}\Big|_0^1=\frac{-1}{2\pi ni}\left(e^{-i\pi n}-1\right)=$$

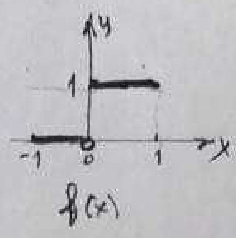
$$=\dots=\frac{(-1)^n-1}{2\pi n}\quad n\neq0;\quad \boxed{C_0=\frac{1}{2}\int_0^1dx=\frac{1}{2}}$$

Ответ: $f(x)=\frac{1}{2}+i\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{2\pi n}e^{in\pi x}=$

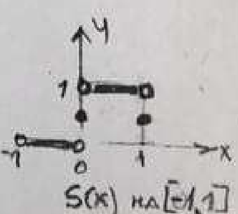
$$=\frac{1}{2}-i\left(\frac{e^{i\pi x}}{\pi}-\frac{e^{-i\pi x}}{\pi}+\frac{e^{3i\pi x}}{3\pi}+\frac{e^{-3i\pi x}}{3\pi}+\dots\right)$$

Заметим: $S(0)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\neq f(0)$

$S(\pm1)=\frac{1+1}{2}=\frac{1}{2}\neq f(0)\neq f(1)$



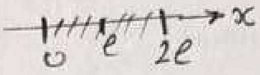
$f(x)$



$S(x)$ на $[-1,1]$

§ 34 Разложение в несимметр. промежутке

Пусть $f(x)$ задана в промежутке $[0, 2l]$



① Построение общего тригоном. ряда:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

② Разложение по синусам.

Для этого продолжаем $f(x)$ симм. влево нечётным образом на промежутке $[-2l, 2l]$. Обозначим $L = 2l$. Все $a_k = 0$.

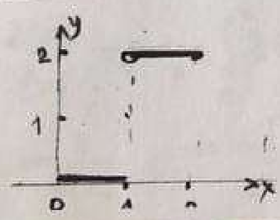
$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

③ Разложение по косинусам.

Продолжаем $f(x)$ симметрично влево четным образом. Тогда все $b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{l} f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Пример. Пусть $f(x)$ имеет вид



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0;1] \\ 2 & x \in (1;2] \end{cases}$$

① Разложение в общий ряд Фурье

Имеем $2l = 2 \Rightarrow l = 1$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\,dx = \int_1^2 2\,dx = 2x\Big|_1^2 = 4 - 2 = 2$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_1^2 2\cdot\cos n\pi x\,dx =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_1^2 = \frac{2}{n\pi}(\underbrace{\sin 2n\pi}_{0} - \underbrace{\sin n\pi}_{0}) =$$

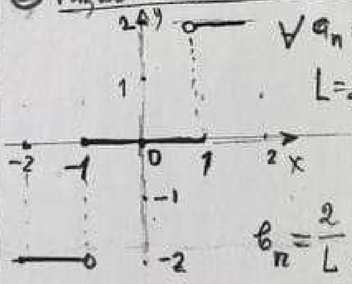
?

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_1^2 2\cdot\sin n\pi\,dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_1^2 = -\frac{2}{n\pi}(\cos 2n\pi - \cos n\pi).$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

② Разложение по синусам



$\forall a_n = 0$

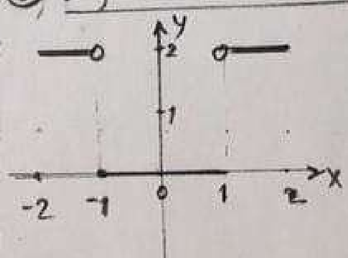
$L = 2l = 2$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx =$$

$$= \frac{2}{2}\int_1^2 2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = -2\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

③ Разложение по косинусам



$\forall b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^2 f(x)\cdot \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx =$$

$$= \frac{2}{2}\int_1^2 2\cdot \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \quad ?$$

$$= 2\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot \sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{n\pi}\left(\underset{\overset{\parallel}{0}}{\sin n\pi} - \sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\cdot \sin\frac{n\pi}{2} \quad (n\neq 0)$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_1^2 2\,dx = 2x\Big|_1^2 = 4-2 = 2.$$

$$\frac{a_0}{2} = 1$$

Замечание:

а) При разложении в общий тригон ряд сумма ряда $S(x)$ совпад. с $f(x)$ во всех точках непрерывн., кроме границ интервалов:

$$S(0) = S(1) = 1.$$

б) При разложе. по синусам

$$S(-1) = -1;\ S(1) = 1.$$

В остальных точках $S(x) = f(x)$.

в) При разложении по косинусам

$$S(-2) = S(-1) = S(1) = S(2) = 1$$

В остальн. точках $S(x) = f(x)$.

④ Разложение в ряд Фурье в компл. форме на $(0, 2\ell)$

Имеем (см §37)

$$C_n = \frac{1}{2\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\cdot e^{-\frac{i n\pi x}{\ell}}\,dx$$

$2\ell=2$, $\ell=1$ т.е. $C_n = \int_1^2 2e^{-in\pi x}\,dx =$

$$= \frac{2}{-in\pi}\, e^{-in\pi x}\Big|_1^2 = \frac{2i}{n\pi}\left(e^{-2n\pi i} - e^{-n\pi i}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\cdot e^{-in\pi x}$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_1^2 2\,dx = \frac{1}{2}\,2x\Big|_1^2 = x\Big|_1^2 = 2-1 = 1$$