Лекция 4. Нелинейные уравнения и системы

Вычислительная математика,

Весенний семестр 2022

Ольга Вячеславовна Перл

План лекции

- Решение нелинейных уравнений
- Решение нелинейных систем

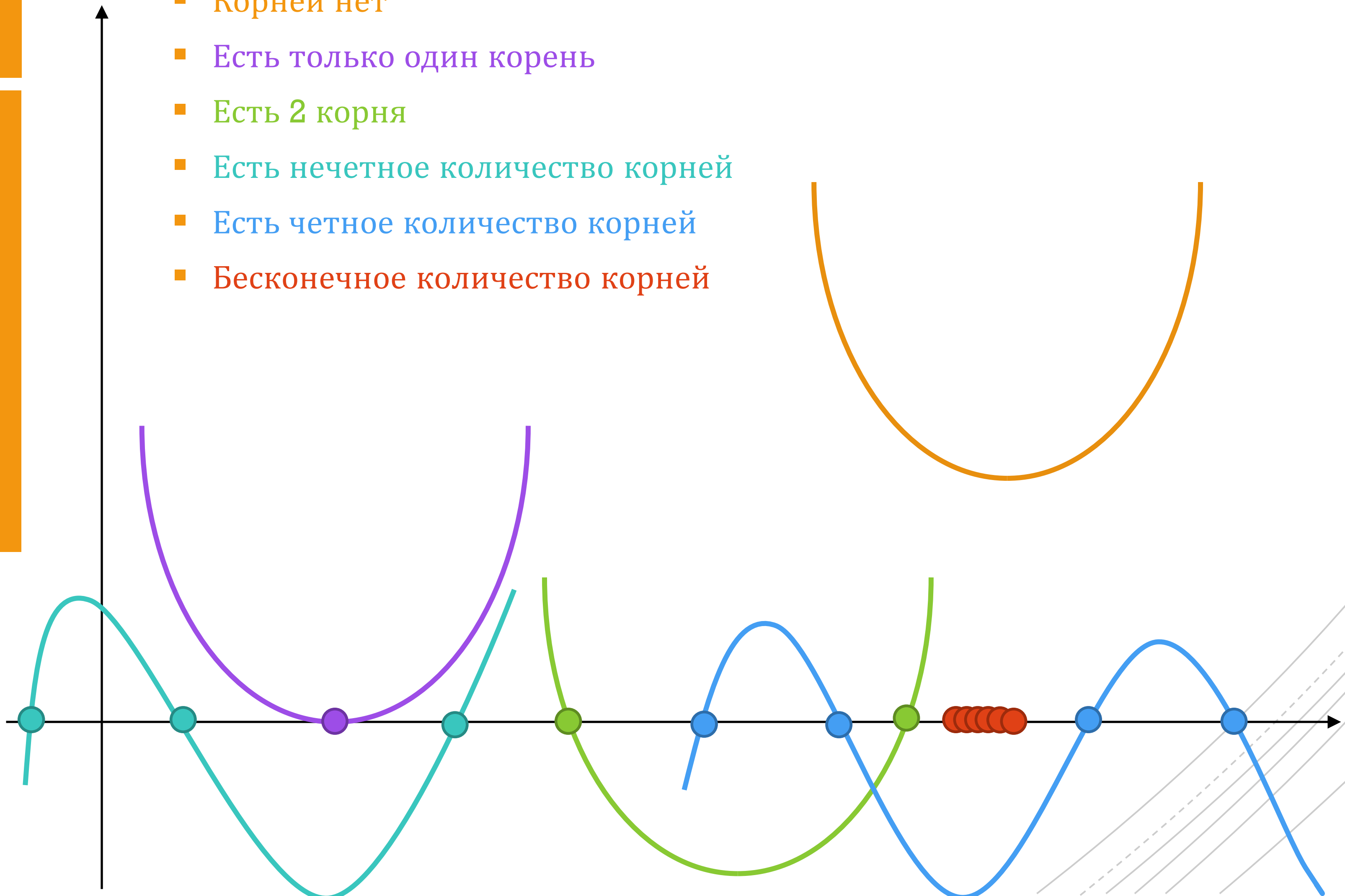
Решение нелинейных уравнений

Нелинейные и трансцендентальное уравнение Non-linear and Transcendental equation

- **Трансцендентное** уравнение — уравнение, не являющееся алгебраическим. Обычно это уравнения, содержащие показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические функции, например:
- $x = e^{-x}$
- $x = \cos(x)$
- $2^x = x^2$
- $\lg(x) = x - 5$
- $2^x = \lg(x) + x^5 + 40$
- Более строгое определение:
- Трансцендентное уравнение — это уравнение вида $f(x) = g(x)$, где функции f и g являются аналитическими функциями, и по крайней мере одна из них не является алгебраической.

Решить уравнение?

- Означает найти корни
- Корни уравнения – это нули функции, там где функция пересекается с осью **x** (**y**=0).
- Возможные случаи:
  - Корней нет
  - Есть только один корень
  - Есть 2 корня
  - Есть нечетное количество корней
  - Есть четное количество корней
  - Бесконечное количество корней

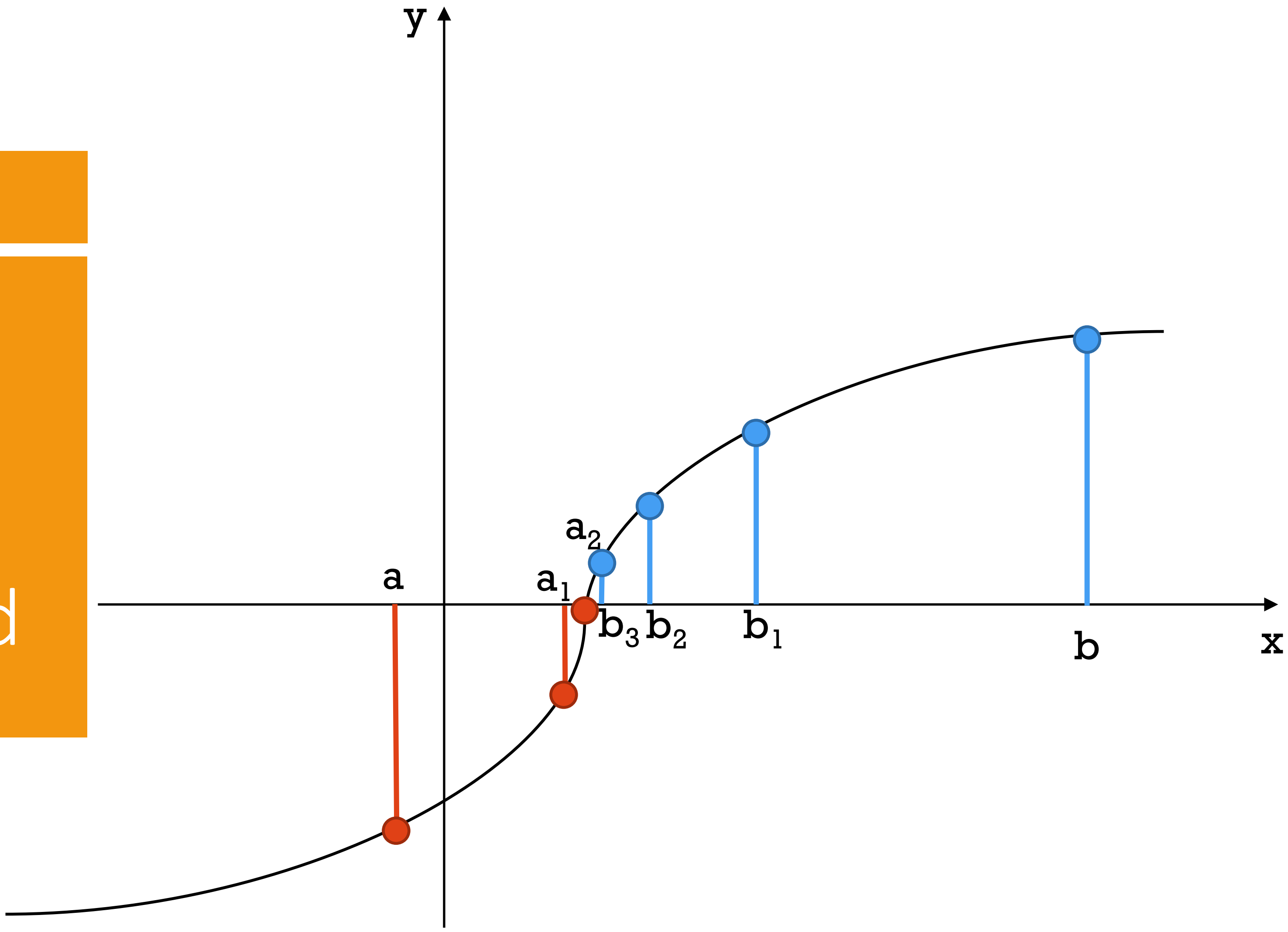


Метод половинного деления Bisection method

- Пусть имеем уравнение $f(x) = 0$ и функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) * f(b) < 0$.
- Чтобы найти корень, мы будем делить отрезок пополам. Если $f((\mathrm{a}+\mathrm{b})/2) = 0$, тогда $\xi = \frac{a+b}{2}$ - это корень, иначе выбираем ту половину, которая удовлетворяет условию $f(a_1) * f(b_1) < 0$.
- В терминах пределов: $\xi = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$, тогда:

$$0 \leq \xi - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$$

Метод половинного деления Bisection method



Метод хорд Secant method

- Пусть имеем уравнение $f(x) = 0$ и функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) * f(b) < 0$.
- Положим $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Тогда вместо деления пополам интервал $[a, b]$ более естественно делить пополам отношение – $f(a): f(b)$. Оно возвращает приближенное значение корня $x_1 = a + h_1$, где:

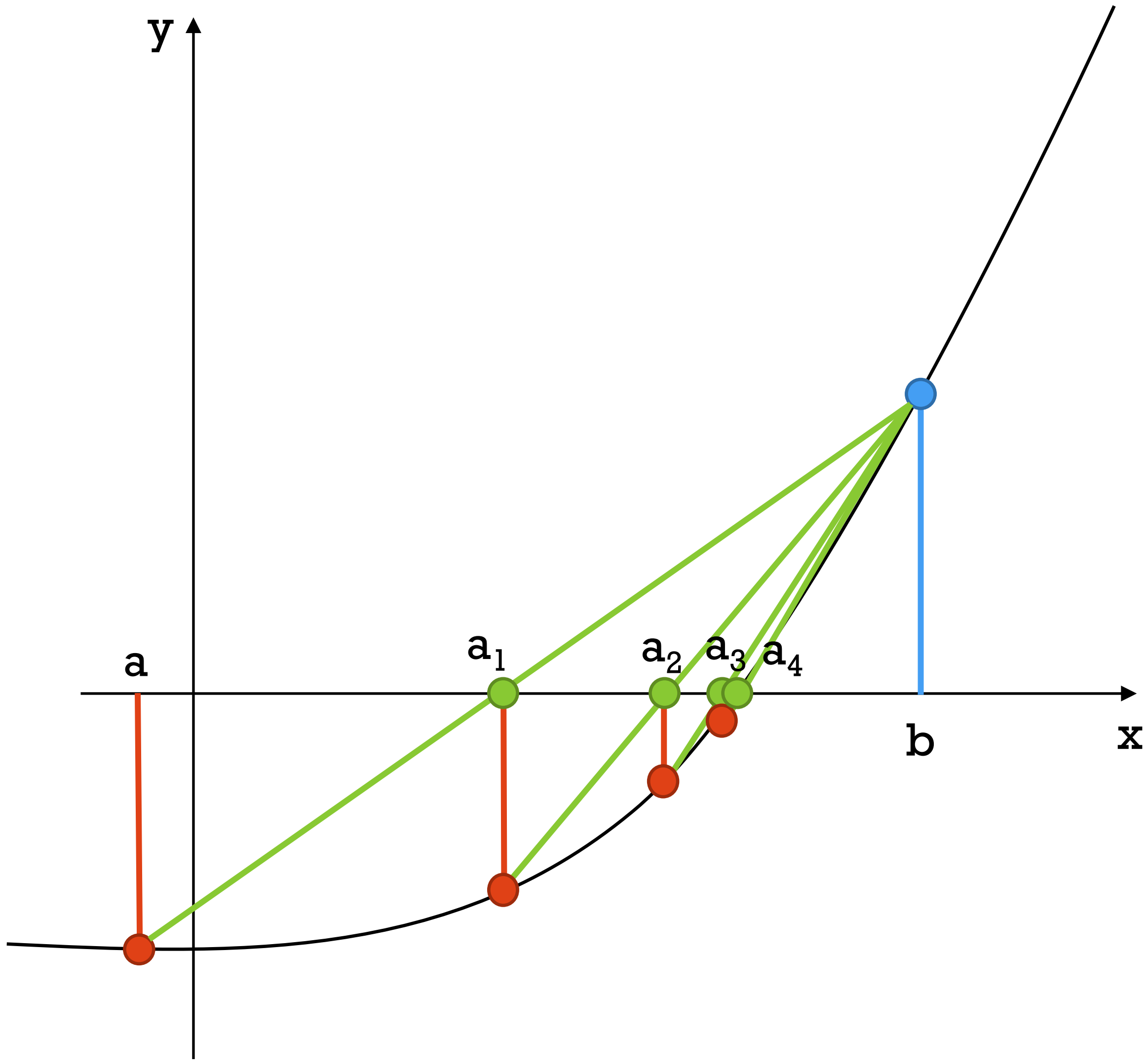
$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a) + f(b)}(b - a) = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

- Тогда:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

- Если $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, где ε заданная предельная абсолютная погрешность, тогда $|\xi - x_n| < \varepsilon$

Метод хорд
Secant method



Метод Ньютона (касательных) Newton`s method (tangent)

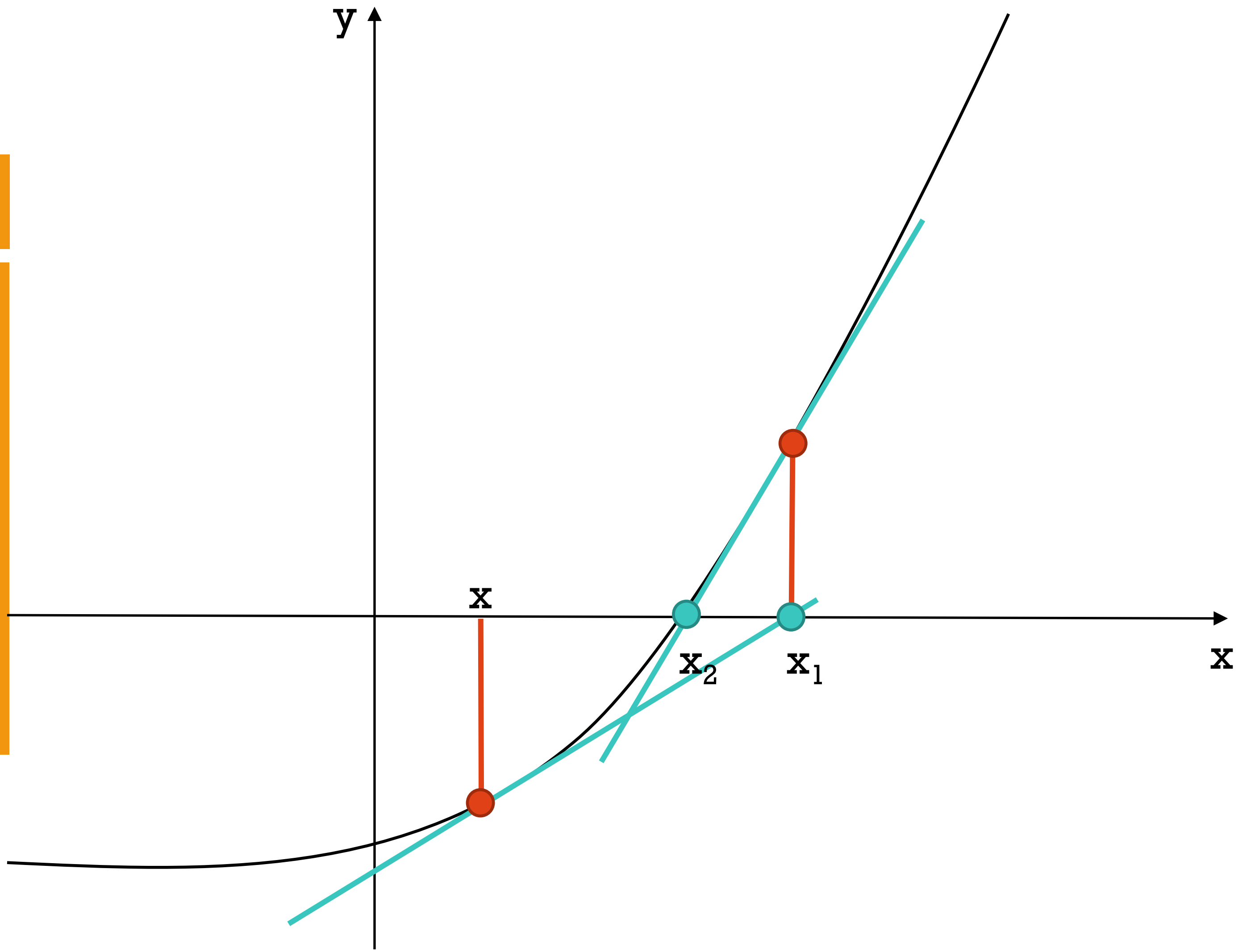
- Полезен для повышения точности приближённых корней.
- Геометрически, метод Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y = f(x)$ касательной линией, проведённой к точке на кривой. Действительно, предположим для определённости, что $f''(x) > 0$ для $a \leq x \leq b$ и $f(b) > 0$.
- Выберем, например, $x_0 = b$ для которого $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Проведём касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B_0[x_0, f(x_0)]$.
- Для первого приближения x_1 корня ξ возьмём абсциссу точки пересечения этой касательной с осью X.
- Полагая $y = 0,\ x = x_{n+1}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Если точка x_1 лежит за пределами интервала [a, b], то тогда метод Ньютона не практичный для выбора на заданных начальных условиях. Таким образом, “хорошее” начальное приближение x_0 это такое, для которого неравенство справедливо с пределом :

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

Метод Ньютона (касательных) Newton`s method (tangent)



Метод простой итерации Fixed-point iteration

- Пусть имеем уравнение $f(x) = 0$ и функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и требуется найти вещественные корни. Заменим на эквивалентное уравнение:

$$x = \varphi(x)$$

- Каким-то образом выберем начальное приблизительное значение корня x_0 и заменим его в правой части уравнения (1).

$$x_1 = \varphi(x_0) \qquad (1)$$

- Теперь вставляем x_1 в правую часть уравнения (1). Повторяя этот процесс, получаем последовательность чисел:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), (n = 1, 2, \dots) \qquad (2)$$

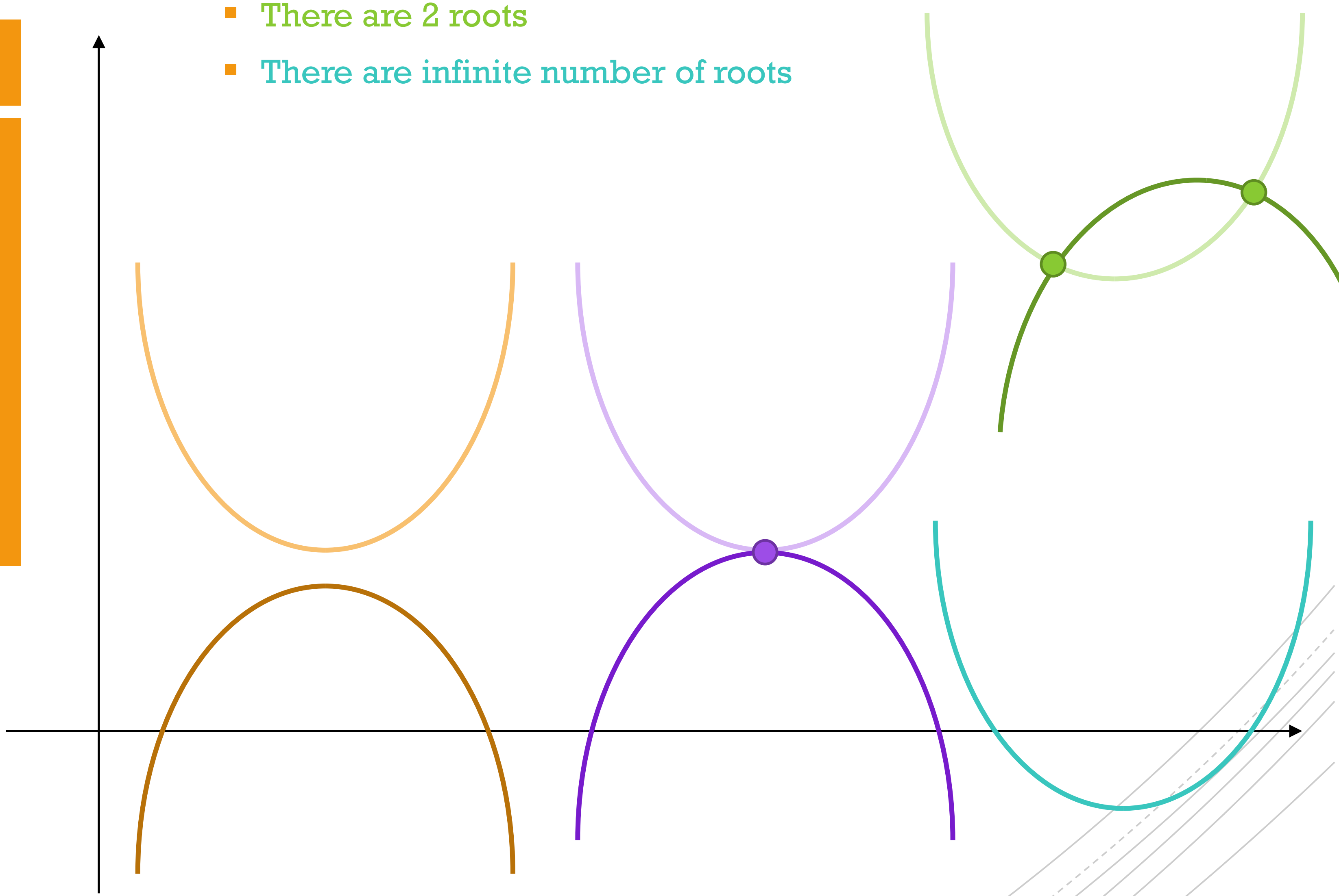
- Если итерационный процесс (последовательность) сходится, то есть, если существует предел $\xi = \lim_{n\to} x_n$, то затем перейдя к пределу (2) и предполагая, что функция $\varphi(x)$ непрерывна, мы найдём:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})$$

Решение систем нелинейных уравнений

Решить систему?

- Means to find point of intersection of all equations. Possible cases:
  - There are no roots
  - There is only one root
  - There are 2 roots
  - There are infinite number of roots



Функции многих переменных Multivariable functions

- Общий вид:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

- Векторная запись:

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Системы могут быть записаны как $F(x) = 0$
- $\tilde{F} = Jx + c$, где **J** это матрица размера $n \times n$ и $\boldsymbol{c}$ **–** это некоторый вектор длины n и $lim|x_{i+1} - x_i|^2 \to 0$.

$$F(x_{i+1}) \approx F(x_i) + \nabla F(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

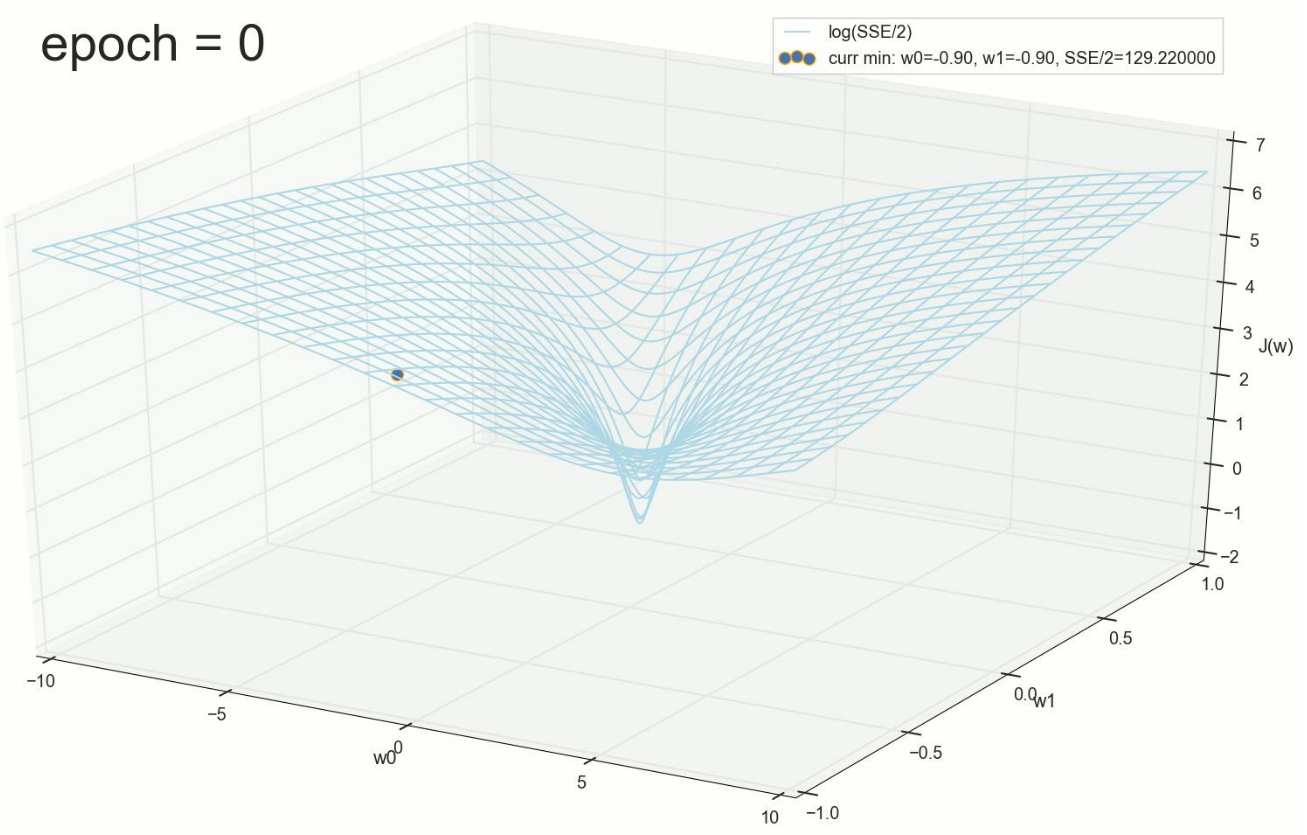
- Выражение ∇F это матрица частных производных F**.** Компонент (i, j) в ∇F есть $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$**.** Матрица ∇F называется Якобианом (матрицей Якоби) F и обозначается J**.**

$$\nabla F = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x_0} & \frac{\partial F_0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \end{vmatrix}$$

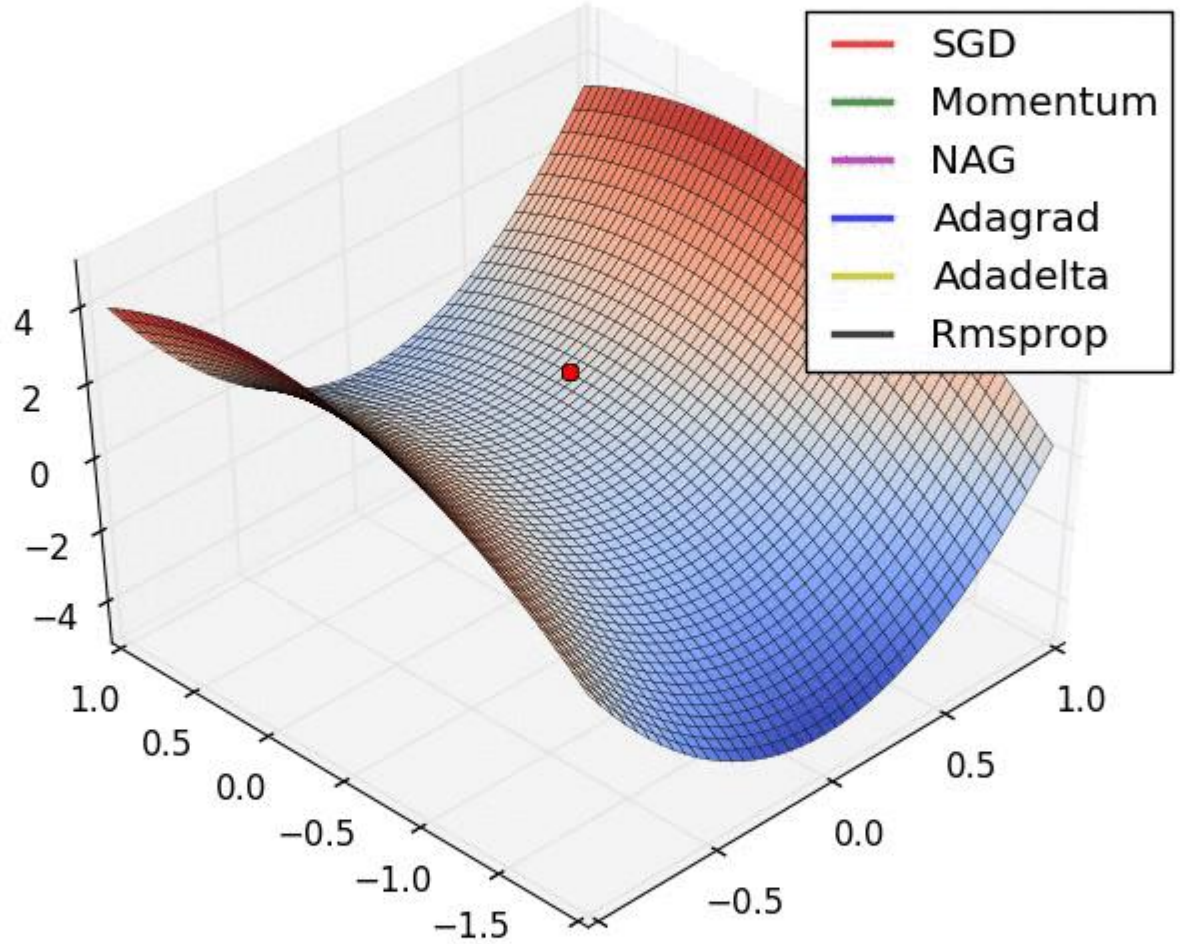
Метод Ньютона и метод итераций Newton`s method and fixed-point iteration

- $F(x_i) + J(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$
- Equivalent if $\lambda \neq 0$

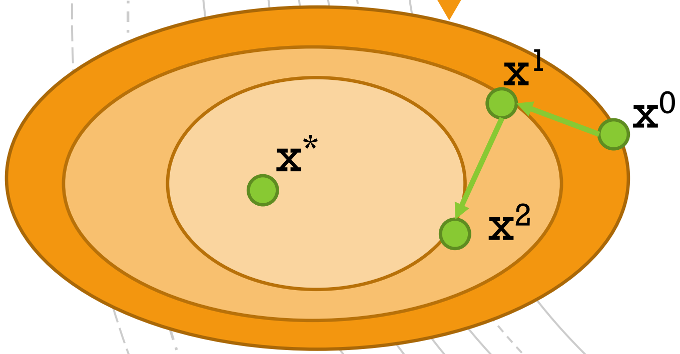
Градиентный спуск
Gradient descent



Градиентный спуск
Gradient descent



Градиентный спуск Gradient descent



- Пусть $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Система уравнений с $n \geq 2$ эквивалентна:
  $\Psi(x) = 0,$ где: $\Psi(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x) + \cdots + f_n^2(x)$
- Тогда корни таких уравнений – это минимальные значения функции $\Psi(x) = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Пусть функция $\Psi(x)$ это дважды дифференцируемая область, где содержится изолированное решение x^*. Если начальное значение x^0 мы можем найти минимум функции $\Psi(x^0 - \lambda \operatorname{grad}\Psi(x^0))$. Таким образом мы находим минимальный неотрицательный корень $\lambda = \lambda_0$ уравнения посредством следующего метода:

$$\frac{d}{d\lambda}\Psi\big(x^0 - \lambda \operatorname{grad}\Psi(x^0)\big) = 0$$

- Сходимость не гарантируется, потому что мы можем получить только локальный минимум.

Спасибо за внимание!

В случае вопросов по лекции задавайте их через форму:
https://forms.yandex.ru/u/61ffab0425b437e0e3410e9b/

Мы обязательно обсудим их на следующем занятии.