Лекция 2.2. Матричная алгебра

Вычислительная математика,

Весенний семестр 2022

Ольга Вячеславовна Перл

Основные определения

- Множество mn чисел (вещественных или комплексных) записанных в виде прямоугольного массива из m строк и n столбцов

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется <u>матрицей</u>.

- Числа $a_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$, которые составляют матрицу, называются элементами матрицы.
- Если $m = n$, тогда это <u>квадратная</u> матрица порядка n, иначе - <u>прямоугольная</u>.

Основные определения

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Называется диагональной и короче записывается как вектор $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$.

- Если $\alpha_i = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, матрица называется <u>единичной</u> и обозначается буквой E (или I).

Основные определения

- **Треугольная (супер-диагональная)** если и только тогда, когда при $i > j$ $a_{ij} = 0$
- **Строго треугольная** если и только тогда, когда при $i \geq j$ $a_{ik} = 0$
- **Диагональная** если и только тогда, когда при $i \neq j$ $a_{ij} = 0$
- **Мономиальная** тогда и только тогда, когда каждая строка и столбец содержат один и только один элемент, отличный от нуля.
- **Нулевая** матрица – матрица, все элементы которой равны 0. Обозначается как 0 или 0_{mn}.

Определитель

- С квадратной матрицей $A = \left[a_{ij}\right]_{n,n}$ связано понятие определителя.
- $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$
- Это два разных понятия: матрица - это упорядоченный набор чисел, записанный в виде прямоугольного массива; его определитель, $\det A$.

Определитель

- Определитель - это специальное число, которое определяется только для квадратных матриц (множественное число для матрицы). Квадратная матрица имеет одинаковое количество строк и столбцов.
- Определитель используется для определения того, может ли матрица быть инвертирована или нет, он полезен при анализе и решении одновременных линейных уравнений (правило Крамера), используется в исчислении, используется для определения площади треугольников (если заданы координаты) и многое другое. Определитель матрицы A обозначается $|\boldsymbol{A}|$ или $\det(A)$.
- Неравенство Адамара:

$$|D|^2 \le \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

Свойства определителя

1. Определитель, вычисляемый в любой строке или столбце, одинаков.
2. Если все элементы строки (или столбца) равны нулям, то значение определителя равно нулю.
3. Определитель единичной матрицы $(I_n) = 1$
4. Если строки и столбцы меняются местами, то значение определителя остается прежним (значение не меняется). Следовательно, $\det A = \det A^T$, где $\det A^T$ транспонированная матрица **A**.
5. Если любые две строки (или два столбца) определителя меняются местами, значение определителя умножается на -1.

Свойства определителя

6. Если все элементы строки (или столбца) определителя умножить на некоторое скалярное число **k**, значение нового определителя равно **k** раз данного определителя. Следовательно, если A квадратная матрица с n рядами и K – любой скаляр, то $|KA| = K^n|A|$.
7. Если две строки (или столбцы) определителя идентичны, значение определителя равно нулю.
8. Пусть **A** и **B** две матрицы, тогда $det(AB) = det(A) * det(B)$.
9. Если **A** матрица, то $|A^n| = (|A|)^n$
10. Определитель обратной матрицы может быть определен как $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
11. Определитель диагональной матрицы, треугольная матрица (верхняя треугольная или нижняя треугольная матрица) является произведением элемента основной диагонали.

Свойства определителя

12. В определителе каждый элемент в любой строке (или столбце) состоит из суммы двух членов, тогда определитель может быть выражен как сумма двух определителей одного и того же порядка. Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + x_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

13. Если **B** получается путём сложения **c**-кратной строки **A** с другой строкой, то $\det B = \det A$

14. Если **A** матрица, то,

$$|adj(A)| = (|A|)^{n-1}$$

$$|adj(adj(A))| = |A|^{(n-1)*(n-1)}$$

где **adj(A)** является сопряжённой матрицей A.

Свойства определителя

15. Если значение определителя Δ становится равным нулю путем замены $x = \alpha$, то $x - \alpha$ коэфициент Δ .

16. Обозначим c_{ij} кофактор элементов a_{ij} в Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \Delta^2$$

17. В определителе сумма произведения элементов любой строки (или столбца) с коэффициентами соответствующих элементов любой другой строки (или столбца) равна нулю. Например, $d = a_{i1} * Aj1 + a_{i2} * Aj2 + a_{i3} * Aj3 + \cdots \ldots + a_{in} * Ajn$, где $Aj1, Aj2, Aj3 \ \ldots Ajn$ - кофакторы вдоль элементов **j-й** строки.

18. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - собственные значения A (квадратная матрица порядка n). Тогда $\det(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 * \lambda_2 * \cdots * \lambda_n$ произведение собственных чисел.

Элементарные матричные преобразования

- Две матрицы называются эквивалентными, если одна получается из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований.
- Они не равны, но имеют одинаковый ранг.

Элементарные матричные преобразования

1. Замена двух строк или столбцов.
2. Умножение всех элементов одной строки (столбца) на одно и то же ненулевое число (скаляр).
3. Добавление кратных элементов строки (столбца) к элементам другой строки (столбца).

Спасибо за внимание!

В случае вопросов по лекции задавайте их через форму:
https://forms.yandex.ru/u/61ffab0425b437e0e3410e9b/

Мы обязательно обсудим их на следующем занятии.