МАТЕМАТИКА (III семестр).

Глава 1: Линейная алгебра

Лин. алгебра — это раздел матем., который изучает объекты, для которых выполнимы 2 операции:

1) Сумма объектов
2) Умножение объекта на действ. числа

В результате получаем объект исходного множества.

Такими объектами могут быть: числа, функции, векторы и матрица (см. дальше).

§1 Прямоугольная матрица.

— Это таблица элементов, имеющая m строк и n столбцов

Запись: $$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

a_{ij} — элементы матрицы (обычно числа).

номер строки, номер столбца

Пр1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$, $m=2;\ n=3$; $a_{11}=1$ и $a_{13}=3$, $a_{23}=0$ и т.п.

Пр2 $A = (1\ 2\ 4)$ — матрица-строка $m=1;\ n=3$

Пр3 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ — матрица-столбец $m=3;\ n=1$

Пр4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ — квадр. матрица.

Осн. операции над матрицами:

① Сложение.

Матрицы одного типа можно складывать. При сложении соответств. элементы складываются.

Пр5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 1+0 \\ 3+0 & 0+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

② Умнож. на число. λ

При этом кажд. элемент умнож. на это число

Пр6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

③ Транспонирование

Если в матр $A_{m\times n}$ строки расположить в виде столбцов, то получаем транспонированную матрицу $A^T_{n\times m}$

Пр7 $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Осн. св-ва транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$ 2) $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda \cdot A^T + \mu B^T$

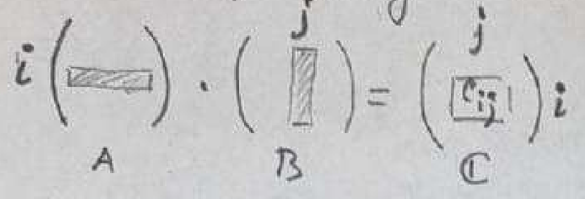
④ Умножение матриц

Две матрицы можно перемножить, если число столбцов 1-ой равно числу строк второй.

Т.е. $A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = C_{m\times n}$.

Матрицы умножаются по правилу: „строка на столбец".

Это значит: элемент c_{ij} матрицы $\mathbb{C}$ равен сумме попарн. произведений эл-ов i-ой строки на j-ый столбец:



Т.е $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Пр 8 $A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{C} = A\cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot4 & 2\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot0+1\cdot2 \\ 3\cdot1+0\cdot4 & 3\cdot2+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

Пр 9 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{C}_1 = A\cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot1 & 1\cdot1 \\ 2\cdot2 & 2\cdot1 & 2\cdot1 \\ 1\cdot2 & 1\cdot1 & 1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пр 10 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{C}_2 = B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2\cdot1+1\cdot2+1\cdot1) = (5)$$

Получили матрицу, содержащую только один элемент $C_{11} = 5$.

Как показывают примеры 9 и 10, умножение матриц неперестановочно, т.е. $\boxed{A\cdot B \neq B\cdot A}$

Осн. св-ва умножения:

1) $A\cdot B \neq B\cdot A$
2) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$
3) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
4) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

§2 Квадратные матрицы

Они обладают дополнительными св-ми по сравнению с прямоугольными.

① Диагональная

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Все эл-ты равны 0, кроме эл-ов с совпад. индексами. Она образует главн. диагональ

② Степень матрицы

$A^2 = A\cdot A$; $A^n = A^{n-1}\cdot A$

Пр $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ Многочлен от матрицы.

Пусть $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Тогда $P_n(A) = a_0 E + a_1 A + \dots + a_n A^n$

где E – единичная матр., т.е. диаг. матрица, по главн. диаг. стоят единицы.

Пр 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $P_2(x) = 2 + 3x + x^2$

Тогда $P_2(A) = 2\cdot E + 3\cdot A + A^2 =$

$$= 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

④ Обратная матрица. Её вычисление.

Для каждой кв. матрицы A можно НАЙТИ число, которое наз. определитем матрицы.

Обозначения:

Если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то $\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

прямые скобки

Не путать: матрица – это ТАБЛИЦА,
опр-ль – это число.

Матрица наз. невырожденной (неособенной), если её определитель отличен от 0.

Доказано: всякая невырожд матрица имеет обратную A^{-1}.

Матр A^{-1} наз. обратной по отношению к A, если $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$

Единичн. матрица E – это матрица вида: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Т.е. это диагон. матрица, по главн. диаг. которой стоят единицы.

Алгоритм вычисления A^{-1}

① Вычисляем $\Delta=\det A$. Если $\Delta\neq 0$ то A^{-1} существует

② Кажд. элемент a_{ij} заменяем на алгебр. дополнение A_{ij}

③ Полученную матрицу транспонируем

④ Каждый элемент полученной матр. делим на определитель Δ. Получаем A^{-1}!

⑤ Делаем проверку: $A\cdot A^{-1}=E$ (так должно быть).

Пример $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1}=?$

Решение: ① $\Delta=\det A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}=$

$=3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=$

$=3\cdot 9-2\cdot(-1)+2\cdot(-12)=29-24=5\neq 0$

A^{-1} существует

②③
$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=9$ | $A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2$ | $A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4$

$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=1$ | $A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2$ | $A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$

$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-12$ | $A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=1$ | $A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7$

④ $A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

⑤ $A^{-1}\cdot A=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}=$

$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

Верно!

§3 Решение линейн. систем методом обратной матрицы

Пусть дана линейная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

Лин. система порядка $n=3$

Обозначим:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ – матрица коэф-ов

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ – столбец своб. членов

В матричном виде сист. имеет вид:

$$A \cdot X = B$$

Откуда: $\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} X = A^{-1} \cdot B$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Пример Решить систему матричным способом

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Решение. Имеем $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot B.$

Матрица A^{-1} найдена в §2

$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Имеем:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9+4-8 \\ 1-4-2 \\ -12-2+14 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

§4 Элементарные преобразования и ранг матрицы.

4

Элементарные преобразования матрицы:

1) перестановка 2-х строк или столбцов;
2) Умножение строки или столбца на число, отличное от нуля;
3) Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умножен. на некоторое число.

Матрицы, полученные одна из другой с помощью этих преобразований назыв. эквивалентными

Обозначение: $A \sim B$ или $A \Rightarrow B$

Пример 1 Найти треугольную матрицу, эквивалентную данной

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение: Прибавляем к 3-ей строке 1-ю, умноженную на -3

Получаем: $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

* **

Минор порядка k – это определитель порядка k, элементы которого лежат на пересечении любых k строк и k столбцов

Ранг матрицы – наибольший порядок отличного от нуля минора

обозначение: rgA или r

Базисный минор – это любой, отличный от нуля минор порядка $r = rgA$.

Пример 1 $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} \end{pmatrix}_{3\times 4}$

Очевидно: Все определители 3-го порядка равны нулю (содержат одинаковые строки). Но минор

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. **Ответ:** $rg A = 2$

На практике ранг матрицы вычисляют с помощью элемент. преобразований, приведя её к трапециевидной форме.

Пример 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \end{matrix}$$

$rg A = ?$

Решение. Добиваемся нулей во 2-ой, 3-ей и 4-ой строках в 1-ом столбце. Для этого:

1) вычитаем 1-ю строку из 2-ой
2) умножаем 1-ю строку на 2 и вычитаем из 3-ей
3) умножаем 1-ю на 3 и вычитаем из 4-ой

Получаем матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Теперь работаем 2-ой строкой:

1) Умножаем её на 2 и складываем с 3-ей
2) Складываем 2-ю с 4-ой

Получаем $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix}$

Вычитаем 3-ю из 4-ой

Получаем матрицу A_3 трапециевидной формы!

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В левом верхнем углу стоит опред-ль:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 3 = 3 \neq 0$$

Ответ: $r = rg A = 3$

§5 Метод Гаусса решения и исследования систем

Рассмотрим на конкретных системах

Пример 1. Дана система

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

Найти решение методом Гаусса

Решение: Составляем расширенную матрицу (в качестве последнего столбца берём столбец свободн. членов)

$$A_{расш} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & 1 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \end{matrix}$$

Приводим её к трапециевидной форме:

$$A_{расш} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & -3 & -5 \end{array}\right) :(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot 5 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Обратный ход:

$$\begin{cases} -3z = 0 \\ y + 0\cdot z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Получаем: $z=0$, $y=1$, $x=1$

Ответ $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

<u>Пример 2</u> $\left.\begin{array}{l} x+y+2z=3 \\ x-2y+z=2 \\ 2x-y+3z=0 \end{array}\right\}$

Найти решение методом Гаусса.

<u>Решение</u>: $A_{расш} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & 1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & 1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \end{array}$

$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=-5 \Rightarrow 0=-5$

Очевидно: система несовместна

<u>Ответ</u> Нет решений (система несовместна)

<u>Пр 3</u> $\left.\begin{array}{l} x+y+2z=3 \\ x-2y+z=2 \\ 2x-y+3z=5 \end{array}\right\}$

<u>Решение</u> $A_{расш} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & 1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{l} x+y+2z=3 \\ -3y-z=-1 \end{array}\right\}$ система имеет бесчисл. множ. решений

Полагаем: $z=c=const$

Тогда $-3y=c-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}c$

$x=3-y-2c=3+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}c-2c$

<u>Ответ</u>. Общее решение

$\begin{cases} x=\frac{10}{3}-\frac{7}{3}c \\ y=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}c \\ z=c\in\mathbb{R} \end{cases}$

Как видим, метод Гаусса позволяет не только найти решение, но и исследовать систему.

Ответ на совместность лин. системы даёт: Теорема

<u>Теорема Кронекера-Капелли</u>

Для того, чтобы лин. система была совместной, необх. и достат., чтобы ранг матр. коэфф-ов равнялся рангу расшир. матрицы

Короче: сист. совместна $\Leftrightarrow rg A = rg A_{расш}$

§ 6 <u>Линейное пространство</u>

<u>Определение</u>: Лин. пр-во — это множ-во элементов любой природы, для которых выполнены 2 операции:
1) Сумма эл-ов 2) Умнож. эл-та на действ. число.

В результате получаем эл-т исходного множ-ва

При этом выполнены след. аксиомы

1) $A+B=B+A$ 2) $(A+B)+C=A+(B+C)$
3) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha A+\beta\cdot A$
4) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
5) Существ. нейтр. эл-т 0: $A+0=A$ (A любой эл-т)
6) $A\cdot 1=1\cdot A=A$
7) Сущест. противоп. эл-т $(-A)$: $A+(-A)=0$

<u>Примеры лин. пр-в</u>:
1) Множ-во действит. и компл. чисел
2) Множ-во векторов
3) Множ. непрер. ф-ий и т.п.

<u>Не яв. лин пр-вом</u>:
1) Множ-во натур. чисел
2) Множ. разрывных ф-ий
3) Множ. расходящихся последоват-ей

Элементы линейн. пр-ва наз. <u>векторами</u> (абстракт. векторами).

Размерность лин. пр-ва

Число n наз. размерностью пр-ва, если в нём сущ. n лин. независ. векторов, а любые $n+1$, $n+2$ и т.д. векторы уже лин. зависимы.

Базис Любые n лин. независ. векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ образуют базис пр-ва, т.е для $\forall \vec{x}$ имеем:

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n$$

Т.е. при выбр. базисе вектору $\vec{x}$ соотв. столбец координат X:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Множ. n-мерных столбцов образует координатное пр-во.

В пр-ве трёхмерн. столбцов в качестве базиса обычно берут столбцы:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

§7 Линейный оператор, его матрица.

Определ. Лин. оператором A лин. пр-ва наз правило, по которому каждому вект. $\vec{x}$ сопоставл. единств. вектор $\vec{y}$ того же пр-ва

Запись: $\vec{y} = A\vec{x}$

При этом выполнены 2 условия

1) $A(\lambda \vec{x}) = \lambda \cdot A\vec{x}$
2) $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2$

Пусть выбран базис лин. пр-ва $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ $(n=2)$

Тогда $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2$

$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2$

Тогда вектору $\vec{x}$ соотв. столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, вектору $\vec{y}$ соотв. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Действие оператора A на $\vec{x}$ соотв. умнож. столбца X на матр. A, т.е. $\vec{y} = A\vec{x} \Leftrightarrow Y = A \cdot X$

§8 Собственные векторы лин. оператора

Определ. Отличный от 0 вектор $\vec{x}$ наз. собств. вектором оператора A, если выполнено рав-во

$$A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \quad (1)$$

где λ – некотое действ. число.

При выбранном базисе имеем рав-во $A \cdot X = \lambda \cdot X$ (2)

При этом число λ то же самое, что и в (1) и не зависит от выбора базиса.

Пример Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Тогда $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

или $\begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 = 0 \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 = 0 \end{cases}$$

Однородная сист. имеет ненулевое решение, если опр-ль этой сист равен 0.

Т.е. для нахожд. λ имеем ур-е

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Оно наз. характеристическим ур-ем матрица A (и оператора A).

Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$. Тогда

Характеристич. ур-е

$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)^2-4=0$

$\lambda_1=-1\quad \lambda_2=3$

В базисе из собств. векторов (корни действ. и разные) матрица имеет вид $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

Для нашей матрицы $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$:

$\begin{cases}y_1=\lambda_1\cdot x_1\\ y_2=\lambda_2\cdot x_2\end{cases} \Rightarrow \Gamma=($

§8 Геометрические приложения

1° Квадратичная форма и её матрица

Опр: Квадратичная форма — это однородный многочлен 2-ой степени от n переменных.

При $n=3$ она имеет вид (треугольная форма записи):

$$F(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2$$

Квадратн. форма:

$$F(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3^2$$

Её матрица:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

Матричная форма записи:

$$F(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Обозначим $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

Сокращенная форма записи:

$$F(x_1,x_2,x_3)=X^T\cdot A\cdot X$$

2° Приведение квадр. формы к диагон. виду.

Рассмотрим на примере конкретной поверхн. 2-го порядка.

Пр Дано ур-е поверхности

$$x^2+4xz+6y^2+z^2=0$$

Определить её тип и изобразить в канонич. системе координат.

Решение: 1) В матричн. виде имеем ур-е $X^T\cdot A\cdot X=0$

где $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $X^T=(x,y,z)$, $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&6&0\\2&0&1\end{pmatrix}$

2) Находим корни характерист. ур-я:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&6-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$(6-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)^2-4\right)=0$

$\lambda_1=3\quad \lambda_2=6\quad \lambda_3=-1$

В канонич. системе коорд $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ имеем ур-е

$$3\bar{x}^2+6\bar{y}^2-\bar{z}^2=0$$

Это конус.