理论准备

1）能级跃迁的半经典理论：基本思路

◆对激光介质的描述，采用二能级原子模型；介质与外场之间的相互作用，一般取电偶极矩近似；

◆介质原子的一般量子力学状态，对应上下能级本征态的相干叠加状态，即上下能级本征态的线性展开，其中展开系数模的平方，是原子处于上下能级的概率；

◆在前面我们只给出受激吸收和受激辐射的定性解释。下面研究初始时刻处于下能级(或上能级)的原子，在外场的微扰下，从初始能级跃迁到另一个能级的概率，从而为受激吸收和受激辐射提供半经典的定量解释。

2）电磁理论备忘录

介质中Maxwell方程组
$$\begin{cases}\nabla\cdot \boldsymbol{D}=\rho_f\\ \nabla\times \boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}\\ \nabla\cdot \boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times \boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_f+\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}\end{cases}$$

边值关系
$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_f\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0\\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{\alpha}_f\end{cases}\quad \text{or}\quad \begin{cases}\boldsymbol{D}_{2n}-\boldsymbol{D}_{1n}=\sigma_f\\ \boldsymbol{E}_{2t}-\boldsymbol{E}_{1t}=0\\ \boldsymbol{B}_{2n}-\boldsymbol{B}_{1n}=0\\ \boldsymbol{H}_{2t}-\boldsymbol{H}_{1t}=\boldsymbol{\alpha}_f\end{cases}$$

本构关系
$$\begin{cases}\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{j}_f=\sigma\boldsymbol{E}\end{cases}$$

连续性方程 $\dfrac{\partial\rho_f}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}_f=0$

说明

1）连续性方程不是独立的；

2）边值关系具体推导可参考相关教材；

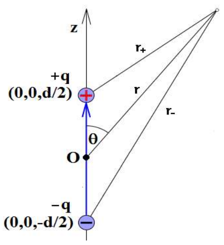
3）这里不包含电磁辐射与带电粒子运动规律的内容；

4）引入电位移矢量**D**和磁场强度**H**，可以让方程中只包含自由电荷和自由电流密度，而束缚电荷和束缚流密度不出现；

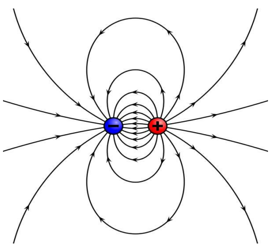
5）当进入介质的外加电磁场足够强，使得介质的非线性效应不可忽略时，介电系数和磁导率与场强有关。

6）当进入介质的外场频率足够高时，介质的反应跟不上外场变化，此时还要考虑不同步的问题，本构关系需要表达为对时间的积分形式

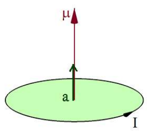
基本概念回顾



电偶极矩***p*=*qd***

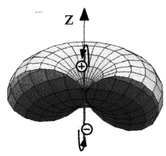


静态电偶极矩的电场分布

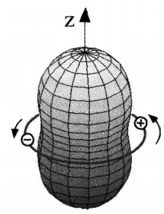


磁偶极矩 ***μ*=*Ia***

偶极矩又可以称为偶极子



线极化的电偶极子振荡时产生的辐射电场分布（也是线极化的）



圆极化的电偶极子振荡时产生的辐射电场分布（椭圆极化的）

以电偶极辐射为例（利用对偶关系可以得到磁偶极辐射场）

$$\vec{\mathcal{B}}=\frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^3 r}|\ddot{\vec{p}}|\sin\theta\ \hat{e}_\phi,\quad \vec{\mathcal{E}}=\frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}|\ddot{\vec{p}}|\sin\theta\ \hat{e}_\theta,$$

讨论

(1) 磁场沿纬线，电场沿经线，$\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{n}$ 两两垂直，$\vec{E}\times\vec{B}$ 沿 $\vec{n}$ 方向

(2) e^{ikr} 为相位滞后因子，表明辐射场以有限速度传播

(3) $e^{ikr-i\omega t}$ 表明辐射场是沿径向外传的球面波。等相面为球面，但等相面上振幅不相等。

（2）电偶极辐射能流与功率（后者等于前者的面积积分）

平均辐射能流：$\langle\vec{S}\rangle=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{B}}^*\right]=\dfrac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3}\dfrac{\sin^2\theta}{r^2}\vec{n}$

平均辐射功率：$\langle\vec{P}\rangle=\displaystyle\int\vec{n}\cdot\langle\vec{S}\rangle r^2\,\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4|\vec{p}_0|^2}{3c^3}$

3）介质中的电磁理论模型

线性介质中的Maxwell方程组与本构方程分别为:

$$(1)\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{H}-\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{j}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases},\quad (2)\begin{cases}\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}=\mu\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}\\ c=1\big/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\end{cases}$$

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z},\quad \nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

对第一个方程两边同时求时间偏微分

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j}\\&\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}\\&\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})=\frac{\partial^2\boldsymbol{D}}{\partial t^2}+\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\\&=\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned}\right.$$

即有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})=\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\quad(3)$$

再利用第二个方程（非磁性介质$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$）

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\\&\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})=\frac{-1}{\mu_0}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})$$

考虑无自由电荷的均匀介质（介电常数与空间位置无关），有

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon\\&\nabla\varepsilon=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

故有 $$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})=\frac{-1}{\mu_0}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\frac{1}{\mu_0}\nabla^2\boldsymbol{E}\quad(4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})=\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\quad(3)$$

由 (3) 和 (4)给出 $$\nabla^2\boldsymbol{E}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}+\mu_0\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

令介质电导率$\sigma=0$，$c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ 是真空中光速，上式变为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{c^2\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}\quad(5)$$

注：如果用介质中的光速取代真空中的光速c来表达（5）式，则方程右边为零

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{c^2\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}\quad(5)$$

方程(5)的一般解，是相应齐次方程的通解$\boldsymbol{E}_i$与(5)的特解$\boldsymbol{E}_p$之和：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_p$，

$$\nabla^2\boldsymbol{E}_i-\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_i}{c^2\partial t^2}=0\quad(6\text{-}1)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{E}_p-\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_p}{c^2\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}\quad(6\text{-}2)$$

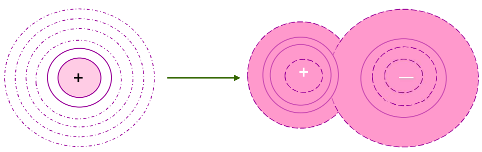
物理上，$\boldsymbol{E}_i$是入射到介质中的原始场；(6-2) 右边(时变的电极化强度$\boldsymbol{P}$)，可以看作是产生左边场$\boldsymbol{E}_p$的源。

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{c^2\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}\quad(5)$$

即：介质被外来入射场$\boldsymbol{E}_i$感应, 产生电偶极矩$\boldsymbol{p}$（单位体积中的电偶极矩之和即是电极化强度$\boldsymbol{P}$），电偶极矩$\boldsymbol{p}$随外场$\boldsymbol{E}_i$一起振荡而产生电偶极辐射，偶极辐射产生的新场$\boldsymbol{E}_p$叠加在原来的场$\boldsymbol{E}_i$上，一起构成介质中的场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_p$。

假设外场随时间呈正弦变化，由它感应出来的电极化强度$\boldsymbol{P}$也随时间呈正弦变化，于是电极化强度$\boldsymbol{P}$取极大值时，它对时间的二阶导数也取极大值，从而产生极大辐射强度$|\boldsymbol{E}|^2$ (在后面讲到相干相互作用要用到这一结论)。

注：当光照射物质时，电磁场将对物质中的带电粒子产生作用，即在外电场的作用下，原来整体上呈电中性的介质原子，正负电荷中心产生分离，产生电偶极矩。电偶极矩将随电磁场的振荡而振荡，从而反过来产生偶极辐射。



原子的电极化：负电荷中心与正电荷中心产生偏离的状态。

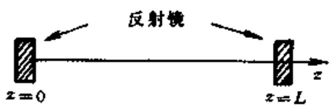
由于外场作周期性振荡，它在介质中感应出来的电偶极矩，其方向也随之作周期性振荡。

若单位体积中有N个电偶极矩，它们的矢量和为电极化强度$\boldsymbol{P}$ (由于每个电偶极矩的极化方向与外场电场强度方向平行，也对应代数和)

$$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{P}=Nq\boldsymbol{r}$$

这里假定正负电荷中心产生的相对位移为 $\boldsymbol{r}$。

举例：现在考虑一个在$z=0$和$z=L$处分别放一个平面反射镜的激光腔，如下图



在垂直于激光轴的方向上，场强的变化和光学波长相比是缓慢的，可以略去波场在X和Y方向上的导数，于是方程(5)可简化为

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{c^2\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}\quad(7)$$

已知电场强度$\boldsymbol{E}$和它在介质中引起的电极化强度$\boldsymbol{P}$满足

$$\varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P},\ v=c\big/\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}=c\big/\sqrt{\varepsilon_r}$$

1) $\boldsymbol{P}$的实部如果使得ε_r与频率有关，则介质中电磁波相速v与频率有关，导致电磁波在介质中传播时发生色散效应；

2) $\boldsymbol{P}$存在虚部，让ε_r和v有了虚部，结果让场在传播过程中有了衰减因子$\exp[-k\mathrm{Im}(v)t]$，即场的能量被介质吸收了。

总之，Re($\boldsymbol{P}$)对应介质色散，Im($\boldsymbol{P}$)对应介质吸收

（见第一章第二讲2.2）

重点部分

2. 2. 半经典理论下的电偶极矩近似

2.2.1 量子电偶极矩

设经典力学中的电偶极矩为$\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{R}$. 在量子力学中，位置矢量要换成相应的量子力学算符 $\hat{\boldsymbol{R}}$ (即位置算符)，得到电偶极矩算符：

$$\hat{\boldsymbol{P}}=e\hat{\boldsymbol{R}} \qquad (1)$$

设$|\boldsymbol{R}>$是位置算符的本征矢，即有$\hat{\boldsymbol{R}}\left|\boldsymbol{R}\right\rangle=\boldsymbol{R}\left|\boldsymbol{R}\right\rangle$ ，在以 $\{|\boldsymbol{R}>\}$ 为基的希尔伯特空间中，即在位置表象下，有

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}=(x,y,z)$$

需要注意的是，此时的$\boldsymbol{R}$，在一般的状态矢量面前，是量子力学算符，而不是普通的变量。

一般地，二能级原子处在上下能级本征态 $|u_a\rangle$与$|u_b\rangle$ 的叠加态，即原子的状态矢量，在能量表象(H_0表象)下，可以表示为

$$|\varphi(t)\rangle=C_a(t)|u_a\rangle+C_b(t)|u_b\rangle$$

$$\hat{H}_0|u_a\rangle=E_a|u_a\rangle,\ \hat{H}_0|u_b\rangle=E_b|u_b\rangle$$

在二维Hilbert空间，算符有2×2矩阵表示

为了便于后面的求解，将原子的状态矢量重新写成

$$|\varphi(t)\rangle=C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_at/\hbar)|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_bt/\hbar)|u_b\rangle \quad (2)$$

即在系数中分离出一个时谐因子，定义新的展开系数 C_{a0}和C_{b0}

思考：如何求解展开系数 C_{a0}和C_{b0} ？

概念回顾：在能量表象(H_0表象)下，以能量算符$\hat{H}_0$ 的本征态集合，作为Hilbert空间的基

满足薛定谔方程，就可求解出来了.

假设外加场沿z方向线极化，它与介质原子相互作用，在介质中感应出来的电偶极矩也沿z方向，故（即此时有$\boldsymbol{R}$=(0, 0, z)）

$$\hat{P}_z=e\hat{Z}\quad(\hat{Z}\left|z\right\rangle=z\left|z\right\rangle)$$

由原子的状态矢量：

$$|\varphi(t)\rangle=C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_at/\hbar)|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_bt/\hbar)|u_b\rangle$$

$$\langle\varphi(t)|=C_{a0}^*(t)\exp(\mathrm{i}E_at/\hbar)\langle u_a|+C_{b0}^*(t)\exp(\mathrm{i}E_bt/\hbar)\langle u_b|$$

可知电偶极矩的期待值为 期望 期望

$$\begin{aligned}\langle\hat{P}_z\rangle=\langle\varphi|e\hat{Z}|\varphi\rangle&=|C_{a0}(t)|^2\langle u_a|e\hat{Z}|u_a\rangle+|C_{b0}(t)|^2\langle u_b|e\hat{Z}|u_b\rangle\\&+C_{a0}^*(t)C_{b0}(t)\exp[-\mathrm{i}(E_b-E_a)t/\hbar]\langle u_a|e\hat{Z}|u_b\rangle\\&+C_{a0}(t)C_{b0}^*(t)\exp[\mathrm{i}(E_b-E_a)t/\hbar]\langle u_b|e\hat{Z}|u_a\rangle\end{aligned} \quad (3)$$

注：一般函数和变量可以提到态矢外面进行乘积和组合，但是位置算符对态矢有运算作用，态矢与态矢之间有内积运算，不能随意交换次序。

定义 $\omega_0=(E_a-E_b)/\hbar$ ，它是两个能级间的$\boxed{\text{共振频率}}$，令

$$D_{ij}=\langle u_i|e\hat{Z}|u_j\rangle=D_{ji}^*,\ i,j=a,b \quad (4)$$

它是电偶极矩算符在能量表象下的矩阵元。由于介质原子能量本征态对应的位置波函数，具有确定的宇称，使得固有电偶极矩为零(see later)，即 |u_a>在位置表象下的投影

$$D_{aa}=\langle u_a|e\hat{Z}|u_a\rangle=D_{bb}=\langle u_b|e\hat{Z}|u_b\rangle=0 \quad (5)$$

将上式代入(3)式得到

$$\langle P_z\rangle\equiv\langle\hat{P}_z\rangle=C_{a0}^*C_{b0}D_{ab}\exp(\mathrm{i}\omega_0t)+C_{a0}C_{b0}^*D_{ba}\exp(-\mathrm{i}\omega_0t) \quad (6)$$

若适当选取$|u_a>$和$|u_b>$的相位，使D_{ab}为实数，这样就有$D_{ab}=D_{ba}^*=D$，将此结果代入式(6), 得到

$$\langle P_z\rangle=D[C_{b0}(t)C_{a0}^*(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0t)+\mathrm{c.c}]=D[C_b(t)C_a^*(t)+\mathrm{c.c}] \quad (7)$$

其中c.c表示前一项的复共轭(h.c表示前一项的厄米共轭)

2.2.2 电偶极矩近似 (只考虑电场，而磁场忽略不计)

当有沿z轴极化的外场$\boldsymbol{E}$与原子相互作用时，原子系统总的哈密顿量为两项之和，即

$$\hat{H}=\underbrace{\hat{H}_0}_{\text{自由粒子作用}}+\hat{H}' \quad (8)$$

其中：

$$\hat{H}_0=\frac{1}{2m}\hat{p}^2+V=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V \quad (9)$$

$$\hat{H}'=-\hat{\boldsymbol{P}}\cdot\boldsymbol{E}(t)=-e\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{E}(t)=-e\hat{Z}E_z(t) \quad (10)$$

其中V包含原子核的库仑势 半经典理论

原子用量子描述.

电场用经典描述

2.2.3. 辐射场与原子系统之间的相互作用

在电偶极近似下，处于外电场中的原子系统的哈密顿算符可以写成以下两项之和

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}' \quad (11)$$

其中 $\hat{H}_0=-\hbar^2\nabla^2/2m+V$ 是除开电偶极矩与外场相互作用以外的部分，而电偶极矩与外场相互作用为（以下都省略电偶极矩算符和位置算符顶上的尖角号）

$$\hat{H}'=-\hat{P}\cdot\boldsymbol{E}(t)=-e\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{E}(t)=-e\hat{Z}E_z(t) \quad (12)$$

其中已经假定外电场沿z轴线极化

简化考虑

长波近似

- ◆ 作用于原子系统的外电磁场，假定其（电场）波长远大于原子半径，以至于对于原子中的电子而言，外场可以看作是在空间中均匀分布的，即近似地看做仅仅只是时间的函数。
- ◆ 在电偶极矩近似下，对外电磁场只需考虑其电场分量。
- ◆ 对于沿z轴方向极化的单色平面波，电场可以用复指数函数表达为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(t)&=\boldsymbol{e}_zE_z=\boldsymbol{e}_zE_0\cos\omega t=\\&=\boldsymbol{e}_z(E_0/2)[\exp(\mathrm{i}\omega t)+\exp(-\mathrm{i}\omega t)]\end{aligned} \quad (13)$$

· 一般用复指数函数表达

定义原子频率（又叫共振频率）约化$\hbar = \frac{h}{2\pi}$普朗克常数

$$\omega_0 = (E_a - E_b)/\hbar \quad (14)$$

外场频率ω与原子频率ω_0不一定相等，假定满足

$$|\omega - \omega_0| \ll \omega, \omega_0 \quad (15)$$

近共振近似

在电偶极矩近似下，假定在 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ 中，满足

$$\langle \hat{H}' \rangle \ll \langle \hat{H}_0 \rangle$$

从而电偶极矩与外场之间的相互作用项，可以当做微扰项处理。

$$\hat{H}' = -\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{E}(t) = -e\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{E}(t) = -eZE_z(t) \quad (12)$$

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{e}_z E_z = \boldsymbol{e}_z (E_0/2)[\exp(\mathrm{i}\omega t) + \exp(-\mathrm{i}\omega t)] \quad (13)$$

将(13)式代入(12)式，即

$$\left.\begin{aligned} E_z &= (E_0/2)[\exp(\mathrm{i}\omega t) + \exp(-\mathrm{i}\omega t)] \\ P_z &= eZ \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= -P_z E_z = -eZE_z(t) \\ &= -(eE_0 Z/2)[\exp(\mathrm{i}\omega t) + \exp(-\mathrm{i}\omega t)] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}', \ \hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$

不存在外电场时，原子系统的哈密顿算符$\hat{H} = \hat{H}_0$，考虑二能级原子系统，原子上下能级本征态用$|u_a\rangle$和$|u_b\rangle$表示，对应的能量本征值分别为E_a和E_b，即有以下能量本征方程和本征矢的正交归一化关系 正交归一定义

$$\hat{H}_0 |u_a\rangle = E_a |u_a\rangle, \ \hat{H}_0 |u_b\rangle = E_b |u_b\rangle \quad (17)$$

$$\text{with} \ \langle u_a | u_a \rangle = \langle u_b | u_b \rangle = 1,$$
$$\langle u_a | u_b \rangle = \langle u_b | u_a \rangle = 0$$

一般情形下，原子处于上下能级的相干叠加状态，存在外电磁场时，其量子状态可以一般地表达为：

$$|\varphi(t)\rangle = C_a(t)|u_a\rangle + C_b(t)|u_b\rangle \quad (18)$$

存在外场时，展开系数一般而言是时间的函数。**其中**$|C_a|^2$和$|C_b|^2$分别表示原子处于上能级和下能级的概率，满足归一化条件$|C_a|^2+|C_b|^2=1$.可以把系数重新写成(即为了求解方便，分别提出一个时谐因子)

$$\begin{cases} C_a(t) = C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar) \\ C_b(t) = C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar) \end{cases} \quad (19)$$

将(19)代入(18)，有

$$|\varphi(t)\rangle = C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)|u_a\rangle + C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)|u_b\rangle \quad (18')$$

将(18')代入Schrödinger方程（实际求解时，把左边对时间的偏微分改为常微分）

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{H}')|\varphi(t)\rangle \quad (20)$$

再对上式两边同时左乘以$\langle u_a|$，利用(17)以及正交归一化关系，得到（后面的作业，在这个地方要写出具体推导过程）

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar \dot{C}_{a0}(t) = C_{a0}(t)&\langle u_a|\hat{H}'|u_a\rangle \\ &+ C_{b0}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)\langle u_a|\hat{H}'|u_b\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

$$\dot{C}_{a0} = \mathrm{d}C_{a0}/\mathrm{d}t, \text{ and so on}, \ \omega_0 = (E_a - E_b)/\hbar$$

电偶极矩和相互作用哈密顿算符的非零矩阵元，满足如下关系：$D_{aa} = D_{bb} = 0$

$$D_{ab} = \langle u_a|eZ|u_b\rangle, \ D_{ba} = \langle u_b|eZ|u_a\rangle \ (\Rightarrow D_{ab} = D_{ba}^*),$$

$$H'_{ab} = \langle u_a|\hat{H}'|u_b\rangle = H'^*_{ba} = \langle u_b|\hat{H}'|u_a\rangle^*,$$

$$\because \ \hat{H}' = -eZE_z(t), \ E_z(t)\text{不含坐标}Z \Rightarrow$$

$$\begin{cases} H'_{ab} = -E_z(t)\langle u_a|eZ|u_b\rangle = -E_z(t)D_{ab} \\ H'_{ba} = -E_z(t)\langle u_b|eZ|u_a\rangle = -E_z(t)D_{ba} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar \dot{C}_{a0}(t) &= C_{a0}(t)\langle u_a|\hat{H}'|u_a\rangle + C_{b0}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)\langle u_a|\hat{H}'|u_b\rangle \\ &= -C_{a0}(t)E_z(t)\langle u_a|eZ|u_a\rangle - C_{b0}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)E_z(t)\langle u_a|eZ|u_b\rangle \\ &= -C_{a0}(t)E_z(t)D_{aa} - C_{b0}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)E_z(t)D_{ab} \end{aligned} \quad (21)$$

原子能级本征态，用位置波函数描述时，具有确定的宇称（即要么为空间位置的奇函数，要么为空间位置的偶函数），因此原子的固有电偶极矩为零，故上式中的对角项为零，即

$$D_{aa} = \langle u_a|eZ|u_a\rangle = 0, \ D_{bb} = \langle u_b|eZ|u_b\rangle = 0$$

$$\Rightarrow H'_{aa} = \langle u_a|\hat{H}'|u_a\rangle = H'_{bb} = \langle u_b|\hat{H}'|u_b\rangle = 0$$

例如，在位置表象$\{|z\rangle\}$下，上能级本征态$|u_a\rangle$对应位置波函数$\langle z|u_a\rangle$，有如下论证：

$$\text{位置波函数}: \psi_a(z) = \langle z|u_a\rangle, \ \psi_a^*(z) = \langle u_a|z\rangle,$$

$$Z|z\rangle = z|z\rangle, \ \langle z'|z\rangle = \delta(z - z'), \ \int_{-\infty}^{+\infty}|z\rangle\langle z|\mathrm{d}z = 1,$$

$$\text{位置波函数有确定的宇称(奇偶性)}: \ \psi_a(-z) = \pm\psi_a(z),$$

$$\text{于是}: \ D_{aa} = \langle u_a|eZ|u_a\rangle = e\langle u_a|Z\int_{-\infty}^{+\infty}|z\rangle\langle z|\mathrm{d}z|u_a\rangle$$

$$= e\int_{-\infty}^{+\infty}\langle u_a|z\rangle z\langle z|u_a\rangle\mathrm{d}z = e\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_a^*(z)z\psi_a(z)\mathrm{d}z = 0,$$

$$\Rightarrow \langle u_a|\hat{H}'|u_a\rangle = -E_z(t)\langle u_a|eZ|u_a\rangle = -E_z(t)D_{aa} = 0$$

总之，考虑到

$$\hat{H}' = -eZE_z,\ D_{ab} = \langle u_a | eZ | u_b \rangle,\ D_{aa} = \langle u_a | eZ | u_a \rangle = 0$$

$$\Rightarrow H'_{ab} = \langle u_a | \hat{H}' | u_b \rangle = -E_z \langle u_a | eZ | u_b \rangle$$

$$\Rightarrow H'_{ab} = -E_z D_{ab}$$

(21)重新表达为

$$i\hbar \dot{C}_{a0}(t) = H'_{ab} \exp(i\omega_0 t) C_{b0}(t) \quad (22)$$

同理可得（作业，需写出详细推导过程，但“固有电偶极矩为零”直接作为结论引用）

$$i\hbar \dot{C}_{b0}(t) = H'_{ba} \exp(-i\omega_0 t) C_{a0}(t) \quad (23)$$

$$\begin{cases} i\hbar \dot{C}_{a0}(t) = H'_{ab} \exp(i\omega_0 t) C_{b0}(t), & (22) \\ i\hbar \dot{C}_{b0}(t) = H'_{ba} \exp(-i\omega_0 t) C_{a0}(t), & (23) \end{cases}$$

一般情况下，外场作用比较微弱，所产生的$C_{a0}(t)$和$C_{b0}(t)$的变化也很小，可以对上式使用迭代法近似求解。假定原子初始处于下能级$|u_b>$，即有初始条件

$$|\varphi(t)\rangle = C_{a0}(t)\exp(-iE_a t/\hbar)|u_a\rangle + C_{b0}(t)\exp(-iE_b t/\hbar)|u_b\rangle$$

$$\Rightarrow C_{a0}(0) = 0,\ \ C_{b0}(0) = 1. \quad (24)$$

(24)式可看做是零阶近似下的解，它满足(23)。将$C_{b0}(0)=1$代入(22)右端，得到一阶近似下的$C_{a0}(t)$, 即

$$i\hbar \dot{C}_{a0}(t) = H'_{ab} \exp(i\omega_0 t) \Rightarrow C^{(1)}_{a0}(t) = (1/i\hbar)\int H'_{ab} \exp(i\omega_0 t) dt$$

再把上面得到的一阶近似下的$C_{a0}(t)$，代入(23)右端，再对时间积分，得到二阶近似下的$C_{b0}(t)$，即

$$i\hbar \dot{C}_{b0}(t) = H'_{ba} \exp(-i\omega_0 t) C^{(1)}_{a0}(t) \Rightarrow$$

$$C^{(2)}_{b0}(t) = (1/i\hbar)\int H'_{ba} C^{(1)}_{a0}(t) \exp(-i\omega_0 t) dt$$

进一步把上面得到的二阶近似下的$C_{b0}(t)$代入(22)右端，得到三阶近似下的$C_{a0}(t)$，即

$$i\hbar \dot{C}_{a0}(t) = H'_{ab} \exp(i\omega_0 t) C^{(2)}_{b0}(t) \Rightarrow$$

$$C^{(3)}_{a0}(t) = (1/i\hbar)\int H'_{ab} \exp(i\omega_0 t) C^{(2)}_{b0}(t) dt$$

依此类推。近似阶数越高，越逼近准确的结果。

注：如果微扰近似的前提不成立，上述迭代过程不收敛，会得到错误结果。

现在计算一阶近似下的$C_{a0}(t)$，即

$$C^{(1)}_{a0}(t) = (1/i\hbar)\int_0^t H'_{ab} \exp(i\omega_0 t') dt',$$

$$H'_{ab} = -E_z D_{ab},\ E_z = (E_0/2)[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t),$$

$$C^{(1)}_{a0}(t) = -\frac{D_{ab}E_0}{2\hbar}\{\frac{1-\exp[i(\omega_0-\omega)t]}{\omega_0-\omega} + \frac{1-\exp[i(\omega_0+\omega)t]}{\omega_0+\omega}\}$$

使用旋转波近似，即略去上式{}中的第二项，得到初始时刻t=0处于下能级$|u_b>$、而t时刻原子处于上能级$|u_a>$的几率，即

$$P^{(1)}_a(t) = |C^{(1)}_{a0}(t)|^2 = (\frac{D_{ab}E_0}{2\hbar})^2\{\frac{\sin[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)/2}\}^2 \quad (25)$$

讨论　令 $\Delta\omega = (\omega_0 - \omega)/2$，(25) 写成

$$P^{(1)}_a(t) = (\frac{D_{ab}E_0}{2\hbar})^2(\frac{\sin\Delta\omega t}{\Delta\omega})^2 \quad (25')$$

$$\xrightarrow{\Delta\omega\to 0} \max P^{(1)}_a(t) = (\frac{D_{ab}E_0}{2\hbar})^2 t^2$$

1）在单色场下(即外场频率ω给定)，初始处于下能级的原子，向上能级跃迁的几率随时间t呈周期性的起伏变化。书上P.95图5-2

2）越是接近共振时，$\Delta\omega$越小，跃迁几率变化的幅度$\propto 1/(\Delta\omega)^2$越大，周期$\propto 1/\Delta\omega$越长；越是远离共振作用，$\Delta\omega$越大，跃迁几率变化的幅度越小，周期越短。因此，在共振下，场与原子之间的相互作用是最强的(发生跃迁的几率最大)。

3）对(25)求时间导数，得到原子在外场作用下，单位时间内从初始的下能级跃迁到上能级的跃迁速率

$$W^{(1)}_{b\to a}(t) = 2(\frac{D_{ab}E_0}{2\hbar})^2\frac{\sin(\omega_0-\omega)t}{\omega_0-\omega} \quad (26)$$

4）若假设原子初始处于上能级，也可以做类似推导。

(作业：即从C_a=1和C_b=0出发，在一阶近似下，推导出与(25)或(25')类似的表达式来)

5）单色场与原子系统相互作用的结果，是使得原子发生能级跃迁（跃迁的几率不为零）。下能级向上能级跃迁代表受激吸收；上能级向下能级跃迁代表受激辐射，外场频率ω等于原子频率ω_0时（共振时），受激跃迁几率最大。

以上是激光的半经典理论解释

2.2.4. 单色场对有衰减系统的作用

由于原子存在自发辐射，其它能级与两工作能级之间也存在跃迁，等等。这些因素使原子存在能量衰减。原子态矢仍然用两工作能级本征态$|u_a>$和$|u_b>$展开

$$|\varphi(t)\rangle = C_a(t)|u_a\rangle + C_b(t)|u_b\rangle \quad (27)$$

$$\langle u_a|u_a\rangle = \langle u_b|u_b\rangle = 1,\ \langle u_a|u_b\rangle = \langle u_b|u_a\rangle = 0 \quad (28)$$

令
$$\begin{cases} C_a(t) = C_{a0}(t)\exp(-iE_a t/\hbar) \\ C_b(t) = C_{b0}(t)\exp(-iE_b t/\hbar) \end{cases} \quad (29)$$

注：存在衰减时，处于两个能级的概率之和不等于1，此时两个能级不形成封闭的体系，因为存在能量向二能级以外的地方转移。

唯象地引入能量衰减算符 $\hat{\Gamma}$，它满足以下本征方程

$$\hat{\Gamma}|u_a\rangle = \gamma_a|u_a\rangle,\ \hat{\Gamma}|u_b\rangle = \gamma_b|u_b\rangle \quad (30)$$

其中已经定义上下能级本征态

$$\hat{H}_0|u_a\rangle = E_a|u_a\rangle,\ \hat{H}_0|u_b\rangle = E_b|u_b\rangle$$

此时原子系统的总哈密顿算符(非厄米算符)可以写成

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' - i\hbar\hat{\Gamma}/2,\ \hat{H}' = -eZE_z(t) \quad (31)$$

$$E_z(t) = (E_0/2)[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)]$$

原子系统满足的Schrödinger方程为

$$\hat{H}|\varphi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi(t)\rangle$$

回顾：外场与原子相互作用项，取电偶极矩近似，且对外场取长波近似

将 $|\phi(t)\rangle$ 及哈密顿算符的表达式代入到薛定谔方程中，利用(28)-(30)，可以得到

$$\begin{cases}\dot{C}_{a0}(t)=\dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}H'_{ab}C_{b0}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)-\dfrac{\gamma_a}{2}C_{a0}(t)\\ \dot{C}_{b0}(t)=\dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}H'_{ba}C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)-\dfrac{\gamma_b}{2}C_{b0}(t)\end{cases}\qquad(32)$$

其中 $\omega_0=(E_a-E_b)/\hbar$, $D=\langle u_a|eZ|u_b\rangle=D^*$

$$\hat{H}'=-eZE_z\Rightarrow\begin{cases}H'_{ab}=\langle u_a|\hat{H}'|u_b\rangle=-E_zD\\ H'_{ba}=\langle u_b|\hat{H}'|u_a\rangle=-E_zD\end{cases}$$

2.3 拉比强信号解

在2.2.3节里，我们使用微扰近似求解，迭代求解到一阶近似。但是这种办法只适用于外场较弱的情形（此时跃迁几率比较小）。当外场很强时，微扰法不再适用。此时，我们只能使用拉比（Rabi）强信号法求解。在后面全量子化理论中，我们还会回到这个问题上来。

前面我们给出了存在能量衰减时的方程(32),即

$$\begin{cases}\dot{C}_{a0}(t)=\dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}H'_{ab}C_{b0}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)-\dfrac{\gamma_a}{2}C_{a0}(t)\\ \dot{C}_{b0}(t)=\dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}H'_{ba}C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)-\dfrac{\gamma_b}{2}C_{b0}(t)\end{cases}\qquad(32)$$

算符

其中：$H'_{ab}=H'_{ba}=\langle u_a|\hat{H}'|u_b\rangle=-E_zD$,

沿z方向极化 $E_z=(E_0/2)[\exp(\mathrm{i}\omega t)+\exp(-\mathrm{i}\omega t)]$, 于是　矩阵元

偶极近似

$$\begin{cases}\dot{C}_{a0}(t)=\dfrac{\mathrm{i}E_0D}{2\hbar}C_{b0}(t)\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]-\dfrac{\gamma_a}{2}C_{a0}(t)\\ \dot{C}_{b0}(t)=\dfrac{\mathrm{i}E_0D}{2\hbar}C_{a0}(t)\exp[-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]-\dfrac{\gamma_b}{2}C_{b0}(t)\end{cases}\qquad(33)$$

其中已经取旋转波近似，省略了带因子 $\exp[\pm\mathrm{i}(\omega_0+\omega)t]$ 的项

$$\begin{cases}\dot{C}_{a0}(t)=\dfrac{\mathrm{i}E_0D}{2\hbar}C_{b0}(t)\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]-\dfrac{\gamma_a}{2}C_{a0}(t)\\ \dot{C}_{b0}(t)=\dfrac{\mathrm{i}E_0D}{2\hbar}C_{a0}(t)\exp[-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]-\dfrac{\gamma_b}{2}C_{b0}(t)\end{cases}\qquad(33)$$

令 $\gamma_a=\gamma_b=\gamma$，并且进一步令

$$\begin{cases}C_{a0}(t)=C'_{a0}(t)\exp(-\gamma t/2)\\ C_{b0}(t)=C'_{b0}(t)\exp(-\gamma t/2)\end{cases}\qquad(34)$$

将(33)第二式两端对时间求导，有

$$\ddot{C}_{b0}(t)=\frac{\mathrm{i}E_0D}{2\hbar}\dot{C}_{a0}(t)\exp[-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]+(\omega_0-\omega)\frac{E_0D}{2\hbar}C_{a0}(t)\exp[-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]-\frac{\gamma}{2}\dot{C}_{b0}(t)$$

将(33)第一式、(34)代入，有

$$\ddot{C}'_{b0}(t)+[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)+\gamma]\dot{C}'_{b0}(t)+(E_0D/2\hbar)^2C'_{b0}(t)=0\qquad(35)$$

这是一个二阶常数系数齐次微分方程，它有 $\exp(\mathrm{i}\mu t)$ 这种形式的 解。令

$$C'_{b0}(t)=\exp(\mathrm{i}\mu t)\qquad(36)$$

将(34)、(36)代入(33)第二式，有

$$(\mathrm{i}\mu-\frac{\gamma}{2})\exp(\mathrm{i}\mu t-\frac{\gamma}{2}t)=-\frac{1}{2}\gamma\exp(\mathrm{i}\mu t-\frac{\gamma}{2}t)+\frac{\mathrm{i}E_0D}{2\hbar}C'_{ao}(t)\exp[-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]\exp(-\frac{\gamma}{2}t)\Rightarrow$$

$$C'_{a0}(t)=\frac{2\hbar}{E_0D}\mu\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega+\mu)t]$$

(34)-(36)以及上式代入(33)第一式，得到

$$[\frac{2\hbar}{E_0D}\mathrm{i}\mu(\omega_0-\omega+\mu)-\frac{\mathrm{i}DE_0}{2\hbar}]\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega+\mu)t]=0$$

$$\Rightarrow\frac{2\hbar}{E_0D}\mathrm{i}\mu(\omega_0-\omega+\mu)-\frac{\mathrm{i}DE_0}{2\hbar}=0$$

即　$$\mu=(\frac{DE_0}{\hbar})^2\frac{1}{\omega_0-\omega+\mu}\qquad(37)$$

其解为

$$\mu_{1,2}=\frac{1}{2}[(\omega-\omega_0)\pm\sqrt{(\omega-\omega_0)^2-(DE_0/\hbar)^2}]\qquad(38)$$

于是可以给出 $C'_{a0}(t)$ 与 $C'_{b0}(t)$ 的通解：

$$C'_{a0}(t)=\frac{2\hbar}{E_0D}\mu\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega+\mu)t]=\frac{2\hbar}{E_0D}\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]\mu\exp(\mathrm{i}\mu t)\Rightarrow$$

$$C'_{a0}(t)=\frac{2\hbar}{E_0D}\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t][A\mu_1\exp(\mathrm{i}\mu_1t)+B\mu_2\exp(\mathrm{i}\mu_2t)]$$

$$C'_{b0}(t)=\exp(\mathrm{i}\mu t)\Rightarrow C'_{bo}(t)=A\exp(\mathrm{i}\mu_1t)+B\exp(\mathrm{i}\mu_2t)$$

$$C'_{a0}(t)=\frac{2\hbar}{E_0D}\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t][A\mu_1\exp(\mathrm{i}\mu_1t)+B\mu_2\exp(\mathrm{i}\mu_2t)],$$

$$C'_{bo}(t)=A\exp(\mathrm{i}\mu_1t)+B\exp(\mathrm{i}\mu_2t)$$

- 假定初始时刻原子处于下能级 $|\varphi(t=0)\rangle=|u_b\rangle$

$$C'_{a0}(0)=0,\quad C'_{b0}(0)=1$$

得到　$$A\mu_1+B\mu_2=0,\ A+B=1\qquad(39)$$

于是由初始条件确定系数A和B：　$$A=-\mu_2/\mu,\quad B=\mu_1/\mu\qquad(40)$$

其中：$$\mu=\mu_1-\mu_2=\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+(DE_0/\hbar)^2}\qquad(41)$$

电偶极矩

$$\mu_{1,2}=\frac{1}{2}[(\omega-\omega_0)\pm\sqrt{(\omega-\omega_0)^2-(DE_0/\hbar)^2}]\Rightarrow \mu_1\mu_2=\frac{1}{4}(\frac{DE_0}{\hbar^2})^2,$$

$$\mu_1+\mu_2=\omega-\omega_0,\ \mu=\mu_1-\mu_2=\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+(DE_0/\hbar)^2},$$

$$\begin{cases}\cos\theta_1-\cos\theta_2=-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\\ \sin\theta_1-\sin\theta_2=2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\exp(\mathrm{i}\mu_1 t)-\exp(\mathrm{i}\mu_2 t)=\mathrm{i}2\sin(\mu t/2)\exp[-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t/2]$$

$$C'_{a0}(t)=-\frac{2\hbar}{E_0D}\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]\frac{\mu_1\mu_2}{\mu}[\exp(\mathrm{i}\mu_1 t)-\exp(\mathrm{i}\mu_2 t)]$$

$$=-\frac{2\hbar}{E_0D}\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]\frac{1}{4\mu}(\frac{DE_0}{\hbar})^2[\exp(\mathrm{i}\mu_1 t)-\exp(\mathrm{i}\mu_2 t)]$$

$$=-\frac{\mathrm{i}DE_0}{\mu\hbar}\exp[\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t/2]\sin(\mu t/2) \qquad (42)$$

初始时刻t=0原子处于下能级($|u_b>$态)，在辐射场的作用下，t时刻原子的状态矢量为：

$$|\varphi(0)\rangle=|u_b\rangle\rightarrow|\varphi(t)\rangle=C_a(t)|u_a\rangle+C_b(t)|u_b\rangle$$

于是在t时刻跃迁到上能级($|u_a>$)态的几率为

$$P_a(t)=|C_a(t)|^2=|C_{a0}(t)|^2 \qquad \boxed{C_a=C_{a0}\exp(-\mathrm{i}E_at/\hbar)}$$

$$\text{Eq.}(42)\Rightarrow P_a(t)=(E_0D/\hbar\mu)^2\sin^2(\mu t/2)\exp(-\gamma t) \qquad (43)$$

其中 $\mu=\mu_1-\mu_2=\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+(DE_0/\hbar)^2}$

这就是拉比强信号解的结果

$$P_a(t)=(\frac{E_0D}{\hbar})^2\frac{\sin^2(\mu t/2)}{\mu^2}\exp(-\gamma t) \qquad (43)$$

- 跃迁几率的变化将包括在exp(-γt)指数衰减曲线包络内。如教材p. 102 图(5-4)

无阻尼的情况 $P_a(t)=\frac{E_0^2D^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2(\mu t/2)}{\mu^2}$

此时，在强信号作用下，初始时刻处于下能级$|u_b>$态的原子，跃迁到上能级$|u_a>$态的几率是等幅周期性变化的。如教材P. 102 图(5-3)

跃迁几率周期性变化时，等于1时明确地处于上能级，等于0时，明确地回到下能级。存在衰减时，跃迁几率小于1，此时不能以概率1的可能性完全跃迁到上能级，但可以完全回到下能级。

$$P_a(t)=(\frac{E_0D}{\hbar})^2\frac{\sin^2(\mu t/2)}{\mu^2}\exp(-\gamma t) \qquad (43)$$

$$\mu=\sqrt{(\omega-\omega_0)^2+(E_0D/\hbar)^2}\longrightarrow \text{Rabi频率}$$

(44)

由于存在衰减，原子能级图上原来是具有固定频率的、用线宽为0的一条谱线表示的上能级，变成频率按洛伦兹型分布的若干子能级的叠加，即谱线展宽成一个宽度大于零的带。

即可以给出频谱的线型函数为洛仑兹型的

$$g(\omega)=\frac{\gamma/\pi}{(\omega_0-\omega)^2+(DE_0/\hbar)^2+\gamma^2} \qquad (45)$$

$$|\omega_0-\omega|=\sqrt{(DE_0/\hbar)^2+\gamma^2}\Rightarrow g(\omega)=\frac{1}{2}g(\omega_0)$$

半高全宽度不仅与损耗(γ)有关，还与外场(E_0)有关

$$\Delta\omega=2\sqrt{(DE_0/\hbar)^2+\gamma^2}$$

$$\Delta\nu=\frac{\Delta\omega}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\gamma^2+(E_0D/\hbar)^2} \qquad (46)$$

外场$|E_0|$越大，$\Delta\nu$越大，称为功率加宽

概念回顾：单色功率密度，除以单色功率密度对频率的积分，得到归一化的线型函数(描述信号强度随频率的分布情况)