

却不能这样做)。尽管如此,这两种表示式还是很相似的。我们将会看到,由于符号的不同,把空-时看成是一个实在的普通几何空间确实是不可能的。实际上,虽然我们不强调这一点,但可以证明,一个正在运动的人必须选用一组与光线成相同倾角的坐标轴,它的 x' 和 t' 如图17-2(b)所示,须用平行于 x' 轴与 t' 轴的一种特殊投影得出。我们将不讨论这种几何,因为它用处不大,而用方程式来研究则更容易一些。

§ 17-2 时 空 间 隔

虽然时空几何不是通常意义上的欧几里得几何,但是存在一种与欧氏几何非常相似的几何学,不过它在某些方面有其特殊之处。如果这种几何概念是正确的,就应存在一些与坐标系无关的坐标和时间的函数。例如,通常在转动时,如果取两点,为了简单起见,一点取在原点,另一点取在任何地方,两个系统具有同一原点,则从一点到另一点的距离在这两个系统中是相同的。这一性质与测量距离的特定方法无关。距离的平方是 $x^2 + y^2 + z^2$ 。那么,时空的几何情况如何呢?不难证明,这里也有一个量是不变的,即在变换前后组合 $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$ 不变

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (17.3)$$

因此就某种意义来说,这个量像距离一样,是“实在”的。我们把它称为两个时空点之间的间隔,在此例中,一个时空点取在原点(当然,实际上它是间隔的平方,就像 $x^2 + y^2 + z^2$ 是距离的平方一样)。由于是在不同的几何学中,所以我们给它起了个不同的名称,但值得注意的只是式中有几个符号相反,而且其中含有一个因子 c 。

让我们把 c 去掉;如果我们找到一个 x 和 y 可以互换的奇妙空间,那似乎是荒唐的。没有经验的人可能会引起的混淆之一是,比方说,用眼睛的张角测量宽度,而用另一种方法,如用聚焦时眼肌肉的紧张程度来测量深度,从而以英尺计量深度,以公尺计量宽度。这样,人们在做像式(17.2)这类变换时,会感到方程式极为复杂,并且由于用了两种不同的单位去计量同一事物这样一个非常简单的技巧上的原因,使人们不能看到事物的鲜明性和简易性。现在方程式(17.1)和(17.3)的性质告诉我们,时间和空间是等价的;时间变成了空间;它们应该用相同的单位计量。什么是1 s 的距离?从式(17.3)很容易算出1 s 的距离是 3×10^8 m,也就是光在1 s 内所走过的距离。换句话说,如果我们用同一单位,如秒,来计量所有的距离和时间,则距离的单位就是 3×10^8 m,这样,方程式就比较简单了。使单位一致起来的另一个办法是用米来计量时间。什么是1 m 的时间呢?1 m 的时间就是光走过1 m 所用的时间,也就是 $1/3 \times 10^{-8}$ s,或者是1 s 的十亿分之三点三!换句话说,我们希望用 $c = 1$ 的单位系统来写出所有的方程式。如果时间和空间真如我们设想的那样用同一单位来计量,那么方程式就会明显地大为简化。它们是

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}}, \end{aligned} \quad (17.4)$$

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (17.5)$$

如果在采用 $c = 1$ 的单位系统后, 我们担心或害怕再也不能使这些方程式成立, 答案完全相反。这些没有 c 的方程式更容易记, 并且通过考虑量纲, 很容易把 c 又放回去。例如, 在 $\sqrt{1-u^2}$ 中, 我们知道不可能从纯粹的数目中减去一个有单位的速度平方, 因此, 必须用 c^2 去除 u^2 以保证它没有单位。这就是我们采用的办法。

时空空间和普通空间之间的区别, 以及与距离相应的间隔的特性是很有趣的。按照式 (17.5), 如果我们考虑在一给定坐标系中时间为零, 只有空间的一个点, 则它的间隔平方为负值, 于是我们就得到一个虚的间隔, 即一个负数的平方根。在相对论中, 间隔可以是实数, 也可以是虚数。间隔的平方可以是正的, 也可以是负的, 不像距离只有正的平方值。当间隔为虚数时, 我们说这两点之间有一个类空间隔(而不说虚数), 因为这个间隔比较更像空间而不像时间。另一方面, 如果两个物体在一给定坐标系中的同一地方, 仅是时间不同, 这时时间的平方是正的, 距离为零, 间隔的平方为正值; 这个间隔称为类时间隔。因此, 在时空图中, 应有某种类似于这样的表示: 在 45° 角处, 有两条线(实际上, 在四维空间中, 这些线构成“圆锥”, 称为光锥), 这些线上的点与原点的间隔均为零。正如在式(17.5)中看到的那样, 从某一给定点出发的光线, 与原来出发点之间的间隔总是零。顺便说一下, 我们刚才已经证明了若光在一个坐标系中以速度 c 传播, 它在另一个坐标系中也将以速度 c 传播, 因为, 如果间隔在两个坐标系中是相同的, 亦即, 在一个坐标系中的间隔为零, 在另一个坐标系中的间隔也为零, 那么, 光的传播速度不变的说法与间隔为零的说法是相同的。

§ 17-3 过去, 现在和将来

如图 17-3 所示, 在一给定时空点周围的时空区可以分成三个区域。在一个区域内具有类空间隔, 在另两个区域内具有类时间隔。从物理意义上来看, 由一给定点周围的时空分成的这三个区域与该点有一种有趣的物理联系: 一个物理客体或信号可以低于光速的速率从区域 2 的一点到达事件 O 处。因此, 在此区域里的事件能够影响 O 点, 也能从过去来影响它。当然事实上, 在负 t 轴上 P 点处的客体相对于 O 点正处在“过去”, 它与 O 是同样的空间点, 只是较早而已。在那里那时发生过的事件, 现在正影响着 O (遗憾的是, 生活正是如此)。在 Q 点处的另一个客体能以低于 c 的某一速率运动到 O 点, 因而如果这是正在运动着的宇宙飞船中的物体, 它也会是同一空间点的过去。也就是说, 在另一坐标系中, 时间轴可以同时通过 O 和 Q 两点。因此, 在区域 2 内的所有点都是处在 O 点的“过去”, 在此区域内发生的任何事件都能影响 O 点。所以区域 2 有时称为可感知的过去或有影响的过去; 所有能以任何方式影响 O 点的事件都位于这个区域。

另一方面, 区域 3 是受 O 点影响的一个区域, 在这个区域中, 以低于光速 c 的速率射出的“子弹”能够“击中”物体。因此, 在这个世界里, 我们能影响它的未来, 所以我们称它为可感知的未来或有影响的未来。现在, 时空剩下的部分就是区域 1, 关于这个区域令人感兴趣

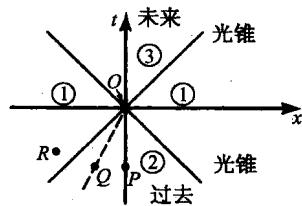


图 17-3 在原点周围的时空区域

的是,我们既不能从现在的 O 点影响它,它也不能影响我们现在的 O 点,因为没有任何东西能跑得比光速更快。当然,在 R 处发生的事件还是能在较晚的时候影响我们的;比如说,如果太阳“此刻”正在爆炸,我们得在八分钟以后才能知道,在这之前,它不可能对我们有所影响。

我们所说的“此刻”是一个很神秘的东西,我们既不能对它加以定义,也不能对它施加影响,但它却能在较晚的时候影响我们,或者如果我们在足够遥远的过去完成某些事情,我们已经能影响它了。当我们观察半人马座 α 星时,看到的是四年前的它;我们也许想知道它“现在”是什么样子。“现在”意味着,从我们这个特定的坐标系来看是在同一时刻的意思。我们只能从我们的过去,即四年前,从半人马座 α 星发出的光线来看它,而并不知道它的“现在”,它“现在”发生的情况要能影响到我们,那已经是四年以后了。半人马座 α 星的“现在”仅是我们头脑中的一个概念或想象,它并不是此刻在物理上真正可以定义的,因为我们必须等待着去观察它;我们甚至不能就在“现在”定义它。还有“现在”是取决于坐标系的。例如,假定半人马座 α 星在运动,它上面的观察者将和我们的看法不同,因为他必须使他的坐标轴处在某一个角度,他的“现在”应是另一个时间。我们已经讲过,同时性并不是唯一的。

有些江湖术士、占卜算命之流告诉我们,他们能知道未来,而且还杜撰了许多某人突然发现他有预知未来的本领等荒诞无稽的故事。显然,此中充满了很多似是而非的悖理,因为如果我们知道将发生什么事,那么,我们就肯定能够在适当时间采取适当措施来避免它,等等。但是,实际上甚至没有任何一个占卜算命之流能告诉我们现在! 没有任何一个人能够告诉我们在任何适当的距离刚好在现在正在发生什么事情,因为那是不能观察的。我们可以向自己提出这样一个问题,我们把它留给同学们去试作回答:如果在区域 1 的类空间隔中发生的事情突然变为可知的,那么将会产生什么样的佯谬?

§ 17-4 四维矢量的进一步讨论

现在我们再回过来讨论洛伦兹变换和空间轴转动的类比。我们已经知道了把一群与坐标具有同样变换性质的其他量合在一起,以构成我们称之为矢量的有向线段的用处。在通常的转动情况下,有很多量的变换方式与在转动情况下的 x , y 和 z 的变换方式一样,例如,速度有三个分量,即 x , y 和 z 分量;当在另一个坐标系观察时,这些分量没有一个保持相同,它们都转换成新的值。但是,不管怎样,速度“本身”要比它的特殊分量具有更大的实在性,我们用一根有向线段来表示它。

因此,我们要问:是否也存在着这样一些量,它们在运动坐标系和静止坐标系中的变换方式,或者它们之间的相互关系与 x , y , z 和 t 相同? 从我们关于矢量的经验,我们知道,其中的三个量类似于 x , y , z 将构成一个普通的空间矢量的三个分量,但是第四个量,在空间转动下看起来像一个普通的标量,因为只要我们不是处于运动坐标系中,它总是不变的。那么,是否可以把我们称之为“时间分量”的第四个量与某些我们已知的“三维矢量”以一定方式联系起来,而使这四个量一起按照在时空中的位置和时间同样的方式“转动”呢? 我们现在将证明,的确存在着这样的一种情况(实际上有许多种这样的情况):动量的三个分量和作为时间分量的能量一起变换,就构成一个所谓“四维矢量”。在论证这一点时,因为到处都带有 c 书写起来很不方便,所以我们将采用在式(17.4)中用过的同样技巧来处理能量、质量和动量的单位。例如,能量和质量只相差一个因子 c^2 ,这仅仅是单位的问题,所以我们可以说

能量就是质量。我们令 $E = m$, 而不是写出 c^2 。当然, 在遇到麻烦时, 我们可以把正确的 c 代入, 以便使单位在最后的方程式中得到纠正而直接出现, 但在中间步骤中则略去 c 。

因此, 能量和动量的方程式可以写成

$$\begin{aligned} E &= m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ p &= mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned} \quad (17.6)$$

在这种单位中, 有

$$E^2 - p^2 = m_0^2. \quad (17.7)$$

例如, 如果我们以电子伏(eV)来计量能量, 那么 1 eV 的质量是什么意思呢? 它是指静止能量为 1 eV 的质量, 即 $m_0 c^2$ 是 1 eV。又如一个电子的静止质量为 0.511×10^{-6} eV。

那么, 动量和能量在新的坐标系中是什么样子呢? 为了找出它们, 我们就要对方程组(17.6)作一变换。我们之所以能这样做, 是因为知道了速度是如何变换的。假设, 我们在测量时, 一个物体具有速度 v , 但是, 我们是从以速度 v 运动的宇宙飞船上观察这一物体的, 所以我们把在宇宙飞船坐标系中测得的相应量都打上一撇。为了使问题简化起见, 在开始时我们将研究速度 v 和 u 在同一方向的情况(以后我们可以研究更一般的情况)。那么在宇宙飞船上看到的速度 v' 是什么呢? 这是一个合速度, 即 v 和 u 之“差”。根据我们前面得出的定律

$$v' = \frac{v - u}{1 - uv}. \quad (17.8)$$

现在, 我们来计算在宇宙飞船中的人看到的新的能量 E' 。当然, 他应该采用同样的静止质量, 但是应该用 v' 作为速度。我们必须计算 v' 的平方, 算出 $1 - v'^2$ 的值, 再将 $1 - v'^2$ 开方并算出其倒数值

$$v'^2 = \frac{v^2 - 2uv + u^2}{1 - 2uv + u^2 v^2},$$

$$1 - v'^2 = \frac{1 - 2uv + u^2 v^2 - v^2 + 2uv - u^2}{1 - 2uv + u^2 v^2} = \frac{1 - v^2 - u^2 + u^2 v^2}{1 - 2uv + u^2 v^2} = \frac{(1 - v^2)(1 - u^2)}{(1 - uv)^2}.$$

因此

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v'^2}} = \frac{1 - uv}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{1 - u^2}}. \quad (17.9)$$

能量 E' 就是 m_0 乘上式。但是, 我们要求的是用不带撇的能量和动量来表示 E' , 我们注意到

$$E' = \frac{m_0 - m_0 uv}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{1 - u^2}} = \frac{(m_0 / \sqrt{1 - v^2}) - (m_0 v / \sqrt{1 - v^2}) u}{\sqrt{1 - u^2}}$$

或

$$E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (17.10)$$

这个式子与下式

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}}$$

的形式完全一样。其次,我们必须找出新动量 p'_x 。这正是能量 E' 和 v' 的乘积,也可以简单地用 E 和 p 来表示,即

$$p'_x = E'v' = \frac{m_0(1 - uv)}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{v - u}{(1 - uv)} = \frac{m_0v - m_0u}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - u^2}}.$$

因此

$$p'_x = \frac{p_x - uE}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (17.11)$$

此式又和下式

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2}}$$

的形式完全一样。

由此可见,用原来的能量和动量来表示新的能量和动量的变换与用 t 和 x 来表示 t' 及用 x 和 t 来表示 x' 的变换完全一样:我们需要做的是将式(17.4)中的 t 换成 E , x 换成 p_x , 这样,式(17.4)就变得与式(17.10)和(17.11)完全相同。如果这一切都是完全正确的,就应该包含着另一条规则: $p'_y = p_y$, 和 $p'_z = p_z$ 。要证明这一点,就需要我们回过头来研究上下运动的情况。实际上,在上一章中我们已经研究过上下运动的情况。我们分析过一个复杂的碰撞,并且注意到,事实上,从运动的坐标系来看,动量的横向分量是不变的;因此,我们就证明了 $p'_y = p_y$, 和 $p'_z = p_z$ 。而整个变换为

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - uE}{\sqrt{1 - u^2}}, \\ p'_y &= p_y, \\ p'_z &= p_z, \\ E' &= \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - u^2}}. \end{aligned} \quad (17.12)$$

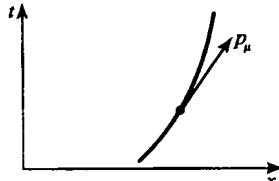


图 17-4 一个质点的四维动量矢量

因此,在这些变换中,我们发现了四个和 x , y , z 和 t 的变换相同的量,我们称它为四维动量矢量。既然动量是一个四维矢量,那么在运动质点的时空图上,可以用一个与轨道相切的箭头来表示,如图 17-4 所示。这个箭头的时间分量等于能量,空间分量代表它的三维动量矢量;这个箭头要比能量或者动量都更为“实在”,因为能量和动量与我们观察这个图的方式有关。

§ 17-5 四维矢量代数

四维矢量的表示法与三维矢量的表示法不同。在三维矢量中,我们用 \mathbf{p} 表示通常的三

维动量矢量,如果说得更明确一些,我们可以说对于所研究的坐标轴,它具有三个分量 p_x , p_y 和 p_z ,或者简单地用 p_i 来表示一般分量, i 既可以是 x , y , 也可以是 z , 这样就得出了三个分量;也就是说,设想 i 是 x , y 或 z 三个方向中的任何一个。四维矢量的表示法与此类似; p_μ 表示四维矢量, μ 代表四个可能方向 t , x , y 或 z 中的任何一个。

当然,我们可以用我们所需要的任何符号;但不要轻视这些符号,要看到它们的出现是很有用的。实际上,数学在很大程度上就在于找出日益完善的符号。事实上,四维矢量的整个观念就在于改进符号的表示法,使得变换易于记住。 A_μ 是一个一般的四维矢量,但对动量这个特殊的例子来说, p_t 被确定为能量, p_x 是 x 方向的动量, p_y 是 y 方向的动量, p_z 是 z 方向的动量。使四维矢量相加,也就是把它们的相应分量加起来。

如果有一个四维矢量的方程式,那么这个方程式对每一个分量都是正确的。例如,如果在粒子碰撞中三维动量矢量的守恒定律是正确的,也就是说,如果大量相互作用或碰撞的粒子的动量之和是一个常数,那么,这就必然意味着,所有粒子在 x , y 和 z 的每一个方向上的动量之和都应分别为常数。在相对论中,单独这条定律是不成立的,因为它不完全;这就像对一个三维矢量只讲它的两个分量一样。说它不完全是因为如果我们转动坐标轴,就把各个分量混合起来了,因而,在我们的定律中,必须包括所有的三个分量。同样,在相对论中,我们必须推广动量守恒定律使它包括时间分量,以保持完整。把它和其他三个分量合在一起是绝对必要的,否则,就不可能有相对论不变性。能量守恒是第四个方程式,它和动量守恒一起在时空几何中构成了一个正确的四维矢量关系式。这样,在四维表示方式中能量和动量守恒定律为

$$\sum_{\text{进来的粒子}} p_\mu = \sum_{\text{出去的粒子}} p_\mu \quad (17.13)$$

或写成一个稍微不同的表示形式

$$\sum_i p_{i\mu} = \sum_j p_{j\mu}, \quad (17.14)$$

这里 $i = 1, 2, \dots$ 表示即将发生碰撞的粒子, $j = 1, 2, \dots$ 表示碰撞后离开的粒子,而 $\mu = x, y, z$ 或 t 。也许你要问,“这是相对于什么坐标轴?”这没有关系,因为采用任何坐标轴,这条定律对每一个分量都是适用的。

在矢量分析中,我们曾讨论过另一个问题,即两个矢量的点积。现在我们来考虑在时空中相应的情形。在一般的转动问题中,我们发现,有一个不变量 $x^2 + y^2 + z^2$ 。在四维问题中,我们发现相应的量是 $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ (式 17.3)。如何把它表示出来呢?一种方法是在两个矢量之间加一个中间带点的四边形,如 $A_\mu \diamond B_\mu$;实际采用的一种表示法是

$$\sum'_{\mu} A_\mu A_\mu = A_t^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2. \quad (17.15)$$

在 \sum 上加一撇表示第一项,即“时间”项为正的,而其他三个项都带有负号。这样,在任何坐标系中这个量都一样,我们称它为四维矢量长度的平方。例如,一个质点的四维动量矢量长度平方是什么呢?它等于 $p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$,或者换一种形式为 $E^2 - p^2$,因为我们知道 p_t 就是 E 。什么是 $E^2 - p^2$ 呢?它必须是在每一个坐标系中都不变的量。特别是,对于一个始终随着粒子一起运动的坐标系,即粒子在其中保持静止的坐标系,这个量应该保持不变。如果粒子是静止的,它就不会有动量。因此,在这种坐标系中,它只有纯粹的能量,并与它的

静止质量相同。这就是说, $E^2 - p^2 = m_0^2$ 。由此可知, 四维动量矢量长度的平方等于 m_0^2 。

从一个矢量的平方出发, 我们可以进而定出“点积”, 即它的乘积是一个标量的积: 如果 a_μ 是一个四维矢量, b_μ 是另一个四维矢量, 则标积是

$$\sum' a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \quad (17.16)$$

在所有坐标系中, 它都是一样的。

最后, 我们还要提一下某些静止质量 m_0 为零的情形。例如, 光子。光子就像一个粒子, 带有一定的能量和动量。光子的能量是一个确定的常数(称为普朗克常数)乘以光子的频率: $E = h\nu$ 。这种光子也带有一定的动量, 光子(实际上, 任何粒子)的动量等于波长除以普朗克常数: $p = h/\lambda$ 。但是, 对于光子来说, 频率和波长之间有一个确定的关系: $\nu = c/\lambda$ (每秒钟的波数乘上每个波的波长就是光在 1 s 内走过的距离, 显然就是 c)。因此, 我们立即可以看出, 光子的能量一定是动量乘 c , 或者, 如果 $c = 1$, 能量和动量就相等。这就是说, 静止质量为零。让我们再来看一看, 这是非常奇怪的。如果一个粒子的静止质量为零, 当它停止时, 会发生什么情况呢? 它永远不会停止! 它总是以速度 c 运动着。能量的一般公式是 $m_0 \sqrt{1-v^2}$ 。那么, 我们能否说, 因为 $m_0 = 0$, $v = 1$, 所以能量也是零? 我们不能说它等于零; 尽管光子没有静止质量, 它实际上能够(而且也确实)具有能量, 不过这是因为它永远以光速运动才具有能量!

我们还知道, 任何粒子的动量都等于它的总能量乘它的速度: 如果 $c = 1$, $p = vE$, 或者在通常单位中 $p = vE/c^2$ 。对于任何以光速运动的粒子来说, 如果 $c = 1$, 则 $p = E$ 。从运动坐标系来看, 光子的能量公式显然是由式(17.12)给出, 对于动量, 我们应该用能量乘 c 来代替(或在这种情况下乘以 1)。经过变换后不同的能量意味着具有不同的频率。这叫做多普勒效应, 用 $E = p$ 和 $E = h\nu$, 我们就能很容易从式(17.12)算出它来。

正如闵可夫斯基所说的: “空间本身和时间本身将消失在完全的阴影之中, 只有它们之间的某种结合才将得以生存。”

第 18 章 二维空间中的转动

§ 18-1 质 心

在前面几章中,我们研究了点或者是小粒子的力学,在那里不涉及它们的内部结构。在下面几章,我们将研究牛顿定律对较为复杂问题的应用。当世界变得更复杂时,它也就变得更有趣了,而且,我们将发现与较复杂物体的力学相联系的现象比起只是一个点来说确实要吸引人得多。当然,这些现象除了牛顿定律的组合之外并不包含其他任何东西,有时却难于使人置信,只有 $F = ma$ 在起作用。

我们研究的较为复杂物体可以分为如下几类:流动的水,旋转着的星系,等等。在开始时,要分析的最简单的“复杂”物体是所谓的刚体,也就是在运动时会发生转动的固体。然而,尽管是这样一个简单的物体,也可能具有非常复杂的运动。因此,首先我们将研究这种运动的最简单形式,即一个伸展的物体绕固定轴的转动。该物体上的某一给定点在与这根轴垂直的平面里运动。这样一种物体绕固定轴的转动称为平面转动,或在二维空间中的转动。以后我们将把结果推广到三维空间,但在这样做的时候我们将发现,它不像通常的质点力学那样易于推广,如果我们不首先在二维空间中打好坚实的基础,则三维空间中的转动是难于理解和难以捉摸的。

如果把一个由弦线联在一起的许多木块和木条所组成的物体抛到空中,我们就可以在这个过程中观察到第一个有趣的有关复杂物体运动的定理在起作用。当然,我们知道,如果我们研究的是一个质点,它将沿一条抛物线运动。但是,现在我们的物体不是一个质点,它将摇摆和翻滚等。尽管如此,人们仍能看到,它还是沿抛物线运动。但究竟是什么沿抛物线运动呢?当然不是木块边角上的点,因为它在上下翻滚;也不是木条的端点和木块或木条的中间部分。但是,确实有某个东西沿抛物线运动,那就是有效“中心”。因而第一个关于复杂物体的定理就是要表明:存在着一个在数学上可以定义的平均位置,但不一定是物体上的一个点沿抛物线运动。这就叫做质心定理,下面就来证明这一个定理。

我们可以把任何物体都看成由大量微小的粒子,即原子所组成的,在这些粒子之间存在着各种力。用 i 来表示某一个粒子的标记(它们的数目极大,比方说, i 可以大到 10^{23})。那么,作用在第 i 个粒子上的力当然是质量乘这个粒子的加速度

$$\mathbf{F}_i = \frac{m_i d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}. \quad (18.1)$$

在下面几章中,运动物体的各个部分都是以远小于光速的速率运动,所以对所有的量我们将用非相对论近似。在这种情况下,质量是常数,因此

$$\mathbf{F}_i = \frac{d^2 (m_i \mathbf{r}_i)}{dt^2}. \quad (18.2)$$

如果我们把作用在所有粒子上的力都加起来,也就是说,假如对所有不同标记的 \mathbf{F}_i 求和,我们就得到总的力 \mathbf{F} 。在等式的另一端,我们在微分之前先相加

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = \frac{d^2(\sum_i m_i \mathbf{r}_i)}{dt^2}. \quad (18.3)$$

因此,总的力就等于各个质量与位置乘积之和的二阶微商。

现在作用在所有粒子上的总的力与外力相同。为什么呢?虽然由于弦线的存在,作用在粒子上有各种各样的力,如摆动力、推力、拉力、原子力以及天知道还有什么形式的力,我们应该把所有这些力都加起来,但牛顿第三定律却帮助了我们。由于在任何两个粒子之间的作用和反作用是相等的,因而当我们把所有的方程式加起来时,如果任何两个粒子之间有力作用着,那么在求和时这些力将相互抵消。因此,最后的结果是只剩下那些来自其他粒子的作用力,这些粒子不包含在我们所要求和的那个物体里面。因此,假如式(18.3)是对一定数量的粒子求和,这些粒子一起构成了所谓“物体”,那么作用在整个物体上的外力就等于作用在组成它的各个粒子上的所有力的和。

如果我们能够把式(18.3)写成总质量和某一个加速度的乘积,那么问题就好办多了。这是可以做到的。我们用 M 来代表所有质量的总和,也就是总质量。如果我们定义一个矢量 \mathbf{R} 为

$$\mathbf{R} = \sum_i \frac{m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad (18.4)$$

由于 M 是常数,则式(18.3)将简化成

$$\mathbf{F} = \frac{d^2(M\mathbf{R})}{dt^2} = \frac{Md^2\mathbf{R}}{dt^2}. \quad (18.5)$$

于是我们得出,外力等于总质量和某一位于 \mathbf{R} 的假想点的加速度的乘积。这个点称为物体的质心。它是位于物体“中间”某处的一个点,是 \mathbf{r} 的一种平均值。在这种平均值中,各个不同的 \mathbf{r}_i 的权重(即重要性)与其质量成正比。

在下一章中我们将更详细地讨论这个定理,这里我们只限于指出两点:第一,假如外力为零,物体在真空中漂移,它可以以旋转、晃动、扭转等形式做各种运动。但是它的质心——这个人为地创造和计算出来、位于其中的某一位置——将以一个恒定的速度运动。特别是,假如它原来是静止的,它将保持静止。因此,假如有某种容器,比方说载人的宇宙飞船,我们算出它的质心位置,并且发现这个质心是静止的,那么,如果没有外力作用在这个容器上,它将一直保持静止。当然,由于人在内部来回走动,宇宙飞船可以作某种微小的运动;当人向前走的时候,飞船就向后退,以保持所有质量的平均位置严格处于同一点。

那么,由于人们不能使质心运动,是不是就绝对不可能发射火箭呢?显然不是。但是,我们当然也会发现要想推动火箭中的有用部分,就要把一些无用部分抛掉。换句话说,如果开始时火箭的速度为零,我们让气体从它的尾部喷出,那么,当这股小气流向一个方向喷出时,火箭飞船就向另一个方向运动,但是它们的质心仍旧严格地处于原来的位置。因此,我们只是使有用的那部分相对于无用的另一部分作运动而已。

关于质心的第二点,也就是我们在这个时候要引进它的原因,在于质心的运动可以和物体“内部”的运动分开来处理,因此,我们在讨论转动时可以不去考虑它。

§ 18-2 刚体的转动

现在我们来讨论物体的转动。当然，一般物体不仅会转动，还会晃动，摇动和弯曲。为了使问题简化起见，我们将讨论一种称为刚体——但实际上并不存在的理想物体——的运动。刚体的意思是说这个物体的原子之间的作用力非常强，由于这种特性，使它运动所需的很小的力，不会使它发生形变。当刚体运动的时候，它的形状实质上是保持不变的。如果我们希望研究这种物体的运动，并且不去考虑它的质心的运动，那么就只剩下转动了。我们怎样来描写转动呢？假如在物体上有一条线保持不动（它可以穿过质心，也可以不穿过），物体就以这根特殊的线为轴转动。如何来确定转动呢？这很容易，在物体上除轴线以外的任何一个地方记下一点，只要知道这个点运动到什么地方，我们就能够准确地说出物体的位置。描述这个点的位置，只要用一个角度就够了。所以转动就是研究这个角度随时间的变化。

为了研究转动，我们来观察一个物体转过的角度。当然，我们并不是指物体本身内部的某一特定的角度；也不是说我们在物体上画出某一角度。我们指的是从某一时刻到另一时刻整个物体位置的角变化。

首先，我们来研究转动运动学。角度随着时间而变化，就像我们在一维情况下讨论位置和速度那样，在平面转动中可以讨论角位置和角速度。实际上，在二维转动和一维位移之间存在着一个非常有趣的联系，几乎每一个量都有它的对应的量。首先，这里有一个确定物体转过多远的角度 θ ，它代替了确定物体移动多远的距离 y 。同样，正如在一维空间中有一个表示物体运动得多快，或者在一秒钟内走了多远的速度 $v = ds/dt$ 那样，这里也有一个表示一秒钟内角度的变化多大的转动速度， $\omega = d\theta/dt$ 。假如用弧度来测量角度，那么角速度 ω 就是每秒多少弧度。角速度越大，物体转动得越快，角度变化也越快。再继续下去，我们可以把角速度对时间微分，并称 $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$ 为角加速度。它与通常的加速度相对应。

当然，我们还应该把转动动力学和构成物体的质点动力学规律联系起来，因此，我们应求出，当角速度为某一值时，某一特定质点是如何运动的。为此，通常的做法是，我们在离开轴的距离为 r 处取一质点，在一给定时刻它处于某一位置 $P(x, y)$ ，如图(18.1)所示。假如经过 Δt 时间后，整个物体转过 $\Delta\theta$ 角，这个质点也和物体一起运动。它离开 O 点的距离和以前一样，但被带到了 Q 点。我们要知道的第一件事是它在 x 方向上的距离变化了多少，在 y 方向上的距离又变化了多少。令 OP 为 r ，那么根据角度的定义， PQ 的长度为 $r\Delta\theta$ 。这样， x 值的变化就正好是 $r\Delta\theta$ 在 x 方向上的投影

$$\Delta x = PQ \sin \theta = -r\Delta\theta \cdot \frac{y}{r} = -y\Delta\theta. \quad (18.6)$$

同样

$$\Delta y = +x\Delta\theta. \quad (18.7)$$

假如物体是以一个给定的角速度 ω 转动，用 Δt 去除式(18.6)和(18.7)的两边后，我们发现

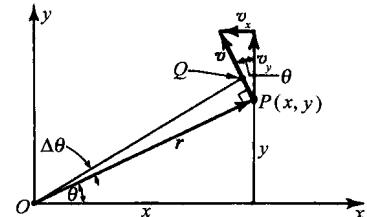


图 18-1 二维转动动力学图示

质点的速度为

$$v_x = -\omega y \text{ 和 } v_y = +\omega x. \quad (18.8)$$

当然,如果要求出速度的大小,则可写成

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega r. \quad (18.9)$$

这个速度的大小为 ωr ,这并不是不可思议的;实际上,这应当是不证自明的,因为它走过的距离是 $r\Delta\theta$,而每秒钟走过的距离就是 $r\Delta\theta/\Delta t$,即 $r\omega$ 。

现在我们转向研究转动动力学。这里必须引进一个力的新的概念。我们要考察一下是否能够找到某个量,它对转动的关系就像力对线性运动的关系那样,我们称它为转矩(转矩的英文名称 torque,这个字起源于拉丁文 torquere,即扭转的意思)。力是产生线性运动所必须的,而要使某一物体转动就需要有一个“旋转力”或“扭转力”,即转矩。定性地说,转矩就是“扭转”;但定量地说,转矩又是什么呢?因为定义力的一个最好的办法是看在力作用下通过某一给定的位移时,它做了多少功,所以通过研究转动一个物体时做了多少功就能定量地得出转矩的理论。为了保持线性运动和角运动的各个量之间的对应关系,我们让在力作用下物体转过一个微小距离时所做的功等于转矩与物体转过的角度的乘积。换句话说,我们是这样来定义转矩,使得功的定理对两者完全相同:力乘距离是功,转矩乘角度也是功。这就告诉了我们转矩是什么。例如,我们来考虑一个有几种不同的力同时作用在上面的刚体,它绕一根轴转动。首先,我们集中注意观察一个力,并假定这个力作用于某一点(x, y)上。那么,如果物体转过一个很小的角度,它做了多少功呢?这很容易,所做的功是

$$\Delta W = F_x \Delta x + F_y \Delta y. \quad (18.10)$$

我们只要用式(18.6)和式(18.7)两者来代替 Δx 和 Δy 就得出

$$\Delta W = (xF_y - yF_x) \Delta\theta. \quad (18.11)$$

这就是说,所做的功的大小实际上等于物体转过的角度乘上一种看上去很奇特的力和距离的组合。这个“奇特的组合”正是我们所说的转矩。由于功的变化定义为转矩乘角度,所以我们就得出了用力表示的转矩公式(显然,转矩并不是一个与牛顿力学完全无关的新的概念,转矩必须有一个明确的借助于力的定义)。

当有几个力同时作用时,当然,所做的功应等于各个力所做的功之和,因此, ΔW 将包括很多项,即把对应于所有力的各项加到一起,而每一项都与 $\Delta\theta$ 成正比。我们可以把 $\Delta\theta$ 提出来,因此可以说,功的改变等于各个不同的作用力产生的所有转矩之和与 $\Delta\theta$ 的乘积。这个和称为总转矩 τ 。因而,转矩能用一般的代数规律相加,但以后会看到,这仅仅适用于在一个平面里的运动。就像在一维的动力学中,力可以用简单的代数法相加一样,但这只是因为它们都处在同一个方向上。在三维空间中情况就比较复杂。对于二维转动有

$$\tau_i = x_i F_{yi} - y_i F_{xi} \quad (18.12)$$

和

$$\tau = \sum \tau_i. \quad (18.13)$$

必须强调指出,转矩是相对于某一给定轴而言的。假如选取不同的轴,则所有的 x_i 和 y_i 都

改变了,转矩的值(一般说来)也要改变。

现在我们稍微注意一下,在前面从功的概念引出转矩时,也给出了物体在平衡时的一个很重要的结果:如果作用在一个物体上的所有的力对平动和转动而言都是平衡的,则不仅净力为零,而且总转矩也为零,因为假如一个物体处于平衡,那么对于微小的位移外力不做功。因此既然 $\Delta W = \tau \Delta \theta = 0$, 则所有转矩之和也应为零。这样对平衡来说就有两个条件:力的和是零,转矩的和也是零。读者可以证明,在平衡时,必须保证绕任何一根轴(在二维空间中)的转矩之和都为零。

现在我们来考虑单个力,并试图用几何法来画出奇特的项 $xF_y - yF_x$ 。在图 18-2 中,我们看到一个力 F 作用在点 P 上。当物体转过一个小的角度 $\Delta\theta$ 时,所做的功应该等于力在位移方向上的分量和位移的乘积。换句话说,需要计算的只是力的切向分量和距离 $r\Delta\theta$ 。因此,我们看到转矩也等于力的切向分量(垂直于半径)和半径的乘积。根据转矩的一般概念就能了解,假如力完全是径向的,它就不能使物体“扭转”;很明显,扭转效应仅与不是把它从中心拉出来的那部分力有关,这部分力就是切向分量。此外,显然,一个给定的力作用在长臂上要比接近轴线时效果更大。实际上,如果我们正好推在轴上,根本不会发生扭转。因此,这就使我们了解到,扭转或转矩的大小是与径向距离和力的切向分量成正比的。

转矩还有第三个非常有趣的公式。我们刚刚在图 18-2 中已经看到转矩等于力乘半径再乘 $\sin \alpha$ 。但是,假如我们延长力的作用线,并画一条与力的作用线垂直的直线 OS (即力臂),我们发现这个力臂相对于 r 之比等于力的切向分量相对于总力之比。因此,转矩公式还可以写成力的大小乘力臂的长度。

转矩通常也叫力矩。这个字的来源不很清楚,但是 moment 是从拉丁语中的 momentum 衍生出来的,而且一个力移动物体的能力(力作用在一个杠杆或一根撬棒上)是随力臂长度的增加而增加的,因此,它的来源可能与此有关。在数学上“矩”(“moment”)的意思是用离开轴的距离多少来加权的。

§ 18-3 角 动 量

虽然到目前为止我们只考虑了刚体这一特殊情况,但是转矩的性质和它的数学关系式即使对非刚体也是有意义的。实际上,我们可以证明一个非常值得注意的定理:就像外力是一群质点的总动量 p 的变化率一样,外转矩是一群质点的角动量 L 的变化率。

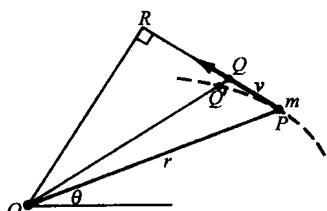


图 18-3 一个围绕轴 O 运动的质点

为了证明这一点,我们假设有某些力作用在一个由许多质点组成的系统上,并观察在这些力产生的转矩的作用下,系统会发生什么变化。当然,首先我们只考虑一个质点。图 18-3 所示的是一个质量为 m 的质点和一根轴 O ;这个质点不一定绕 O 作圆周运动,它可以像行星绕太阳一样沿一个椭圆运动,或者沿某个其他曲线运动,反正它在运动,而且有力作用在上

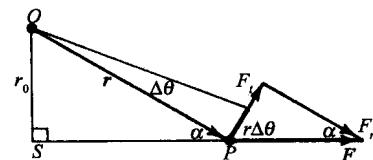


图 18-2 一个力产生的转矩

面,并且按照通常的公式,即力的 x 分量等于质量乘加速度 x 的分量,等等。但是我们再来看一下转矩是什么呢? 转矩等于 $xF_y - yF_x$,而在 x 或 y 方向上的力是质量乘上在 x 或 y 方向上的加速度

$$\tau = xF_y - yF_x = xm \frac{d^2y}{dt^2} - ym \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (18.14)$$

虽然,看来这个式子不是一个简单的量的微商,但实际上它是量 $xm(dy/dt) - ym(dx/dt)$ 的微商

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[xm \left(\frac{dy}{dt} \right) - ym \left(\frac{dx}{dt} \right) \right] &= xm \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right) + \left(\frac{dx}{dt} \right) m \left(\frac{dy}{dt} \right) - ym \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) - \left(\frac{dy}{dt} \right) m \left(\frac{dx}{dt} \right) \\ &= xm \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right) - ym \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (18.15)$$

因此,转矩确实是某个量随时间的变化率,所以“某个量”引起了我们的注意,我们给它一个名称,叫角动量,并用 L 来表示

$$L = xm \frac{dy}{dt} - ym \frac{dx}{dt} = xp_y - yp_x. \quad (18.16)$$

虽然,我们目前的讨论是非相对论的,但 L 的第二种形式对相对论也是正确的。因此,我们发现对于动量也有一个转动的对应量,这就是角动量,它是用线动量的分量来表示的,就像转矩公式是用力的分量来表示的一样! 这样,假如我们要知道一个质点相对于某一个轴的角动量,只要用动量的切向分量和半径相乘就行了。换句话说,计算角动量并不是看它离开原点有多快,而是看它围绕原点转动有多快。在角动量中只计及动量的切向部分。而且,动量作用线伸展得越远,角动量就越大。此外,由于不管这个量记为 p 还是 F ,其几何图象相同,因此,必定存在着一个动量臂(与作用在质点上的力臂不一样),只要延长动量的作用线,再找出到轴的垂直距离就可以求出它。因此,角动量就是动量的大小和动量臂的乘积。像转矩有三个公式一样,角动量也有三个公式

$$L = xp_y - yp_x = rp_{\text{切向}} = p \cdot \text{动量臂}. \quad (18.17)$$

与转矩一样,角动量与所要计算的轴的位置有关。

在我们着手处理一个以上的质点问题之前,先让我们应用上面的结果来讨论行星围绕太阳旋转的问题。力在什么方向? 力是指向太阳的。那么作用在物体上的转矩是什么? 当然,这与我们把轴取在哪里有关。但是,因为转矩是力和力臂的乘积,或者说是力垂直于 r 的分量与 r 的乘积,所以如果以太阳本身作为轴,就可以得到很简单的结果。因为这时没有切向力,所以相对于在太阳处的轴的转矩为零。因此,围绕太阳转动的行星的角动量不变。我们来看看这意味着什么。速度的切向分量乘质量再乘半径将是一个常数,因为它就是角动量,而角动量的变化率是转矩,在这个问题中,转矩为零。当然,既然质量也是一个常数,这必然意味着切向速度乘半径是一个常数。对行星运动而言,这正是某种我们早已知道的结果。假设,我们考虑一个微小的时间增量 Δt 。当行星从 P 点运动到 Q 点(图 18-3)时,它将走多远? 它将扫过多大的面积? 因为面积 $QQ'P$ 与面积 OPQ 相比非常小,可以略去,所以只要用基线 PQ 的一半乘高 OR 就可求出扫过的面积。换句话说,单位时间内所扫过的面积等于速度乘速度臂(再乘以 $1/2$)。这就是说,面积的变化率正比于角动量,而角动量是

一个常数。因此,当力产生的转矩为零时,在相等的时间内扫过相等的面积的开普勒定律正是角动量守恒定律的一种文字表述。

§ 18-4 角动量守恒

现在我们继续讨论当有大量质点存在以及一个物体由很多部分组成,各部分之间有很多力相互作用,同时它们还受到外力作用时,会发生什么情况?当然,我们已经知道,相对于任何一个固定轴,作用在第*i*个质点上的转矩(也就是作用在第*i*个质点上的力乘该力的力臂),等于这个质点的角动量的变化率,而第*i*个质点的角动量就是它的动量和动量臂之积。假设我们把所有质点的转矩 τ_i 相加,并把它们的和称为总转矩 τ ,那么这就是所有质点角动量 L_i 之和的变化率, L_i 之和定义一个新的量,我们称它为总角动量 L 。就像一个物体的总动量是它所有各部分的动量之和一样,总角动量是所有各部分的角动量之和。于是总角动量 L 的变化率就是总转矩

$$\tau = \sum \tau_i = \sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{dL}{dt}. \quad (18.18)$$

总转矩似乎是很复杂的。这里的所有内力和所有外力都必须考虑。但是,假如考虑到牛顿的作用和反作用定律,作用和反作用不仅大小相等,而且在同一条直线上,方向完全相反(不管牛顿是否真正这样说过,但他确是默认了这一点),那么,在两个相互作用的物体上,因为相互作用对于任一转轴的力臂都相等,由它们产生的两个转矩相等、方向相反。因此,内转矩成对地抵消掉,从而得出一个值得注意的定理:相对于任何轴的总角动量的变化率等于相对于该轴的外转矩!

$$\tau = \sum \tau_i = \tau_{\text{外}} = dL/dt. \quad (18.19)$$

这样,关于大量质点的集合的运动,我们就有了一个十分有用的定理,它使我们研究整体运动时不需要考虑其内部的详细机制。对于任何物体的集合,不管它们是否组成刚体,这个定理都是适用的。

上述定理的一个极其重要的情况是角动量守恒定律:如果一个质点系统不受外转矩作用时,其角动量保持不变。

一个非常重要的特例是刚体,即具有确定形状且只作转动的物体。现在来考虑一个几何大小一定,且绕一个固定轴转动的物体。在任何时刻,物体的各个部分彼此间的关系都相同。现在来求这个物体的总角动量。假如该物体中某个质点的质量为 m_i ,它的位置是(x_i , y_i),那么问题就是要求出这个质点的角动量,因为总角动量就是在物体中所有这些质点的角动量之和。当然,对于作圆周运动的物体来说,它的角动量等于质量乘速度再乘离开轴的距离,而速度等于角速度乘以离开轴的距离

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega, \quad (18.20)$$

对所有的质点之求和,则得

$$L = I\omega, \quad (18.21)$$

这里

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (18.22)$$

这与动量等于质量乘速度的定律相对应。速度被角速度代替,而且我们看到,质量被一个新的量所代替,这个新的量称为转动惯量 I ,它与质量相当。式(18.21)和(18.22)指出一个物体所具有的转动惯量不仅与物体各质点的质量有关,还与它们离轴的距离有关。因此,如果我们具有两个质量相同的物体,当把这两个物体放得离轴较远时,转动惯量将变大。这很容易用图 18-4 所示的装置来演示,在那里重物 M 不能很快地落下是因为它必须转动一根有重量的长杆。首先把质量为 m 的两个物体放置在靠近轴处, M 就以某一变化率加速运动。但当把这两个质量为 m 的物体移到距轴较远处以改变转动惯量时,我们看到 M 的加速度比先前小得多,因为这时物体阻碍转动的惯量要大得多。转动惯量是阻碍转动的惯量,它等于各个质量与它们离轴距离平方的乘积之和。

质量和转动惯量之间有一个重要的和非常引人注意的区别。物体的质量是永远不变的,而它的转动惯量可以改变。假如我们站在一个无摩擦的转台上,把手臂伸开,并在缓慢转动时手里拿着一些重物,只要我们把手臂收拢就可以改变转动惯量,但质量并没有改变。当我们这样做时,按照角动量守恒定律,会发生各种奇妙的事情:假如外转矩为零,那么角动量,即转动惯量乘 ω 将保持不变。开始时,我们以一个较大的转动惯量 I_1 和较低的角速度 ω_1 转动,这时的角动量为 $I_1\omega_1$ 。接着,由于把手臂收拢而使转动惯量变为一个较小的值 I_2 。这样, $I\omega$ 的乘积 $I_2\omega_2$ 将保持不变,因为总角动量应该守恒。因此 $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, 这就是说,如果转动惯量减少,则角速度必然增大。

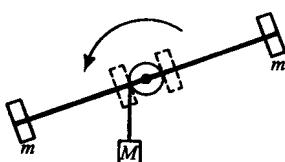


图 18-4 转动惯量与质量臂有关

第 19 章 质心、转动惯量

§ 19-1 质心的性质

在前一章中, 我们发现假如有许多力作用在一个由粒子组成的复合体上, 不管这些粒子构成刚体或者非刚体, 还是星云或者其他任何东西, 我们总能求出所有这些力的和(当然, 这里是指外力, 因为内力已相互抵消)。如果我们把这个物体看成是一个整体, 具有总质量 M , 并且在物体“内部”有一个称为质心的点, 那么整个物体的质量就可以看成正好集中在该点上, 外力的合力使这个点产生一个加速度。现在我们来较详细地讨论质心问题。

质心(缩写成 CM)的位置由下式给出

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}. \quad (19.1)$$

当然, 这是一个矢量式, 实际上是三个式子, 在 x , y , z 三个方向上每个方向一个。我们将只考虑 x -方向, 因为这个方向搞清楚了, 其他两个方向也就清楚了。 $X_{CM} = \sum m_i x_i / \sum m_i$ 表示什么呢? 先假设物体被分成一些小块, 每一小块都有相同的质量 m ; 因此, 总质量简单地就等于块数 N 乘每块的质量, 比方说 1 克, 或其他单位。这样, 这个式子就可以简单地写成所有 x 量的总和除以小块的数目: $X_{CM} = m \sum x_i / (mN) = \sum x_i / N$ 。换句话说, 假如每块质量相等, X_{CM} 就是所有 x 的平均值。但是, 如果其中有一块的重量是其他块重量的两倍, 则在求和时, 相应的 x 应出现两次。这是很容易理解的, 我们可以设想把这两倍的质量分开成相等的两块, 每块刚好和其他小块一样, 这样, 在求平均值时, 因为那里有两个质量, x 当然应计算两次。因此 X 是所有质量在 x 方向上的平均位置, 其中每个质量所计算的次数都正比于这个质量的大小, 就好像它已分为“小粒”一样。由此出发, 容易证明 X 一定在最大的 x 和最小的 x 之间, 即在包住整个物体的包络之内。它并不一定就在组成物体的材料中, 因为物体可以是一个圆环, 如一个铁罐, 它的质心就是铁罐的中心, 并不是在铁罐自身上面。

当然, 如果一个物体具有某种对称性, 例如矩形, 它有一个对称面, 其质心就处在对称面上, 在矩形特例中, 有两个对称面, 这就唯一地确定了质心。假如是一个具有任何对称性的物体, 它的重心位于对称轴上, 因为在这种情况下, 有多少个负 x 就有多少个正 x 。

下面来讨论一个非常有趣而又奇妙的问题, 假如我们设想一个物体由 A 和 B 两部分组成(图 19-1)。整个物体的质心可用如下办法求出: 首先求出 A 的质心, 然后求出 B 的质心, 再求出每一部分的总质量 M_A 和 M_B 。接着考

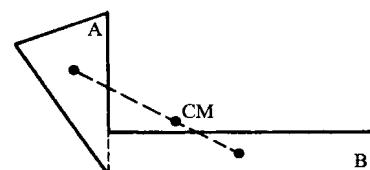


图 19-1 一个复合体的质心在两个组成部分的各自质心的连线上

虑一个新的问题，在物体 A 的质心处有一个质量为 M_A 的点，在物体 B 的质心处有一个质量为 M_B 的点。这两个质点的质心也就是整个物体的质心。换句话说，假如已经求出一个物体的各部分的质心，我们就不需要再从头开始来找出整个物体的质心，只需要把每一部分都当作位于其质心的一个质点，再把各个部分放在一起处理就行了。我们来看看为什么可以这样做。假设我们要计算整个物体的质心，而这个物体的一部分粒子可看成是包含在物体 A 内，另一些粒子包含在物体 B 内。总的和 $\sum m_i x_i$ 可以分成两个部分： $\sum_A m_i x_i$ 只对物体 A 求和， $\sum_B m_i x_i$ 只对物体 B 求和。现在来单独计算物体 A 的质心，这正是总和的第一部分。我们知道这一部分本身就是 $M_A X_A$ ，即在 A 中的所有粒子的总质量乘 A 的质心位置，因为这正是对物体 A 应用质心定理的结果。同理，对于物体 B，有 $M_B X_B$ ，当然，两者相加就得到 $M X_{CM}$

$$M X_{CM} = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A X_A + M_B X_B . \quad (19.2)$$

显然，由于 M_A 和 M_B 之和为 M ，所以式(19.2)可以看成是两个点状物体：一个质量为 M_A ，位于 X_A ，另一个质量为 M_B ，位于 X_B ——质心公式的一个特例。

关于质心运动的定理是非常有趣的，而且它在我们了解物理学的发展过程中具有很重要的作用。假设牛顿定律对于一个比较大的物体的各个较小的组成部分都成立，那么这个定理表明，即使我们不去研究这个大的物体的细节，而只研究作用在它上面的总的力和它的质量，牛顿定律对这个大的物体也是适用的。换句话说，牛顿定律有这样一种独特的性质，如果它在某一小尺度范围内是正确的，那么在大尺度范围内也将是正确的。假如我们不考虑棒球是由无数相互作用的粒子组成的极端复杂的结构，而只研究它的质心运动和作用在棒球上的外力，我们得到 $F = ma$ ，这里 F 是作用在棒球上的外力， m 是它的质量， a 是它的质心的加速度。因此， $F = ma$ 是一个在较大的尺度范围内也能重现其自身的定律（也许应有一个来源于希腊文的较好的字来描述在大尺度范围内也能重现同样规律的那种定律）。

当然，人们可以猜想人类最初能够发现的定律应该是能在较大的尺度范围内重现的。为什么呢？因为宇宙基本齿轮的实际尺度是原子的尺度，而它比我们观察到的尺度要小得多，因而在通常的观察中离这种尺度很远。所以我们最初得以发现的定律对于这种非原子尺度那样特殊大小的物体必定是正确的。如果有关小粒子的定律不能在较大尺度范围内重现，我们就不能那么容易地发现它们。那么，反过来问题又会怎样呢？小尺度范围内适用的定律必须和大尺度范围的定律相同吗？当然，适用于原子范围的定律在本质上并不一定要与在大尺度范围内适用的定律相同。假设原子运动的真正规律由某种奇特的方程确定，这个方程并不具有当我们研究大尺度问题时重现同样规律的性质，而是具有这样的性质：当我们处理大尺度问题时，我们可以用某种表示式作为近似，以致如果我们一步一步地推广这个表示式，它就能在越来越大的尺度下不断重现。这是可能的，而且正符合实际情况。牛顿定律就是推广至非常大的尺度范围的原子规律的“末端”。在微观尺度下粒子运动的真正规律是非常特殊的，但是如果取大量的粒子，把它们组合起来，它们就近似于而且也仅仅是近似于牛顿定律。牛顿定律使我们能够继续处理尺度越来越大的问题，而且看来仍然是同一定律。实际上，随着尺度的不断变大，牛顿定律也就越来越精确。牛顿定律这种自我重现的因素并不真正是自然界的根本特色，而是一个重要的历史特色。在最初的观察中，我们决不会发现原子微粒的基本规律，因为最初的观察太粗糙了。实际上，现在知道，基本的原子规律，

即所谓的量子力学,与牛顿力学非常不同,而且很难理解,因为我们所有的直接经验都与大尺度的物体有关,而尺度很小的原子的行为与我们在大尺度上所见到的根本不一样。因此,我们不能讲:“一个原子就像一个围绕太阳运转的行星”,或诸如此类的话。它不像我们所熟悉的任何东西,因为没有任何东西与之相似。当我们把量子力学应用到越来越大的物体上时,关于许多原子集合在一起的行为的规律并不是原子行为规律的再现,而是产生一些新的规律,即牛顿定律,至于牛顿定律本身则不断地重现,比如说从小至微微克的物体——它已经包含有数以兆亿计的原子——到大至地球,甚至更大的物体都适用。

现在,我们再回到质心问题上来。质心有时也叫重心,因为在许多情况下,重力可以看成是均匀的。假设有一个尺度相当小的物体,其重力不仅与质量成正比,而且到处都与某一固定线段平行。然后考虑一个物体,在这个物体的每一个组成部分上都有重力作用。用 m_i 表示某一部分的质量,作用于这一部分的重力是 m_i 乘 g 。现在要问,应在何处加一个力,使它和作用在整个物体上的重力相平衡,从而使得整个物体,如果它是一个刚体的话,不发生转动?答案是这个力必须通过质心,我们将用下面的方法来说明这个问题。要使物体不转动,所有力产生的转矩之和应为零,因为假如转矩不为零,就会有角动量的变化,也就必然会有转动。因此,我们必须算出作用在所有粒子上的总转矩,看一下它相对于任一给定轴有多大;如果轴通过质心,则总转矩必定为零。现在以水平方向表示 x 轴,竖直方向表示 y 轴,我们知道转矩就是在 y 方向的力乘力臂 x (也就是说,力乘我们所要量度的转矩的力臂)。整个转矩是

$$\tau = \sum m_i g x_i = g \sum m_i x_i, \quad (19.3)$$

因此,如果总转矩为零,则和 $\sum m_i x_i$ 必为零。但是 $\sum m_i x_i = MX$, 即等于总质量乘质心与轴的距离。这就是说,质心离开轴的距离 x 为零。

当然,这里我们只对 x 距离验证了结果,但是如果我们将真正的质心,物体将在任何位置上都平衡,因为假如把物体转过 90° , y 就取代了原来的 x 。换句话说,当一个物体的支点在质心上时,由于作用在物体上的一个平行的重力场,因而转矩为零。在物体很大,以致重力明显不平行的情况下,我们必须在那上面施加平衡力的中心就很难简单地描述,它与质心略有偏离。这就是人们为什么必须把质心和重心区别开来的原因。物体的支点在质心上将在所有位置上都能平衡的事实具有另一个有趣的结果。如果用加速度引起的惯性力来代替万有引力,我们可以用完全相同的数学程序来求出支撑物体的某个位置,使得加速度的惯性力不产生任何转矩。假设把物体以某种方式放在一个盒子内,这个盒子和盒子内的一切物体都作加速运动。我们知道,在和加速盒子相对静止的人看来,有一个由惯性产生的有效力。这就是说,要使物体和盒子一起运动,我们必须推它,使之加速,而这个推力被“惯性力”所“平衡”,这个“惯性力”是一种惯性力,其大小等于质量乘盒子的加速度。对于在盒子里的人来说,就像物体处于一个均匀重力场的情况一样,不过这里“ g ”的值等于加速度 a 。因此,由于加速一个物体所引起的惯性力对质心的转矩为零。

这一事实产生了一个非常有趣的结论。在没有加速度的惯性参照系中,转矩始终等于角动量的变化率。然而,对于穿过正在加速的物体质心的轴来说,其转矩等于角动量的变化率仍然成立。即使质心在作加速运动,我们仍可找出一根特殊的通过质心的轴,使转矩等于绕这根轴的角动量的变化率的结论仍然成立。因此,转矩等于角动量的变化率这个定理,在两个普通的情况下都是正确的:(1)惯性空间中一根固定轴;(2)一根轴通过质心,即使物体可能在作加速运动。

§ 19-2 质心位置的确定

计算质心的数学技巧属于数学课的范围,这类问题为积分计算提供了很好的练习。然而在学过积分后,要想知道如何求质心位置,了解一些用以处理这类问题的技巧还是大有好处的。其中一个技巧是利用所谓帕普斯(Pappus)定理。它是这样的:假如在一个平面上取任一闭合区域,并使它在空间运动而形成一个立体,在运动时,令各点的运动方向始终垂直于该区域的平面,这样形成的立体的总体积就等于它的横截面乘质心在运动过程中所经过的距离!假如我们使这个区域沿着一条与它本身垂直的直线运动,毫无疑问,这个定理是成立的,但是假如使它沿着一个圆或某种其他曲线运动,就得出一个相当特殊的体积。对于曲线路径来说,其外部走得较远,内部走得较近,而这种效果正好相互抵消。因此,假如要求出一个密度均匀的薄板的质心位置,我们可以记住,薄片绕某一轴旋转形成的体积就等于其质心走过的距离乘薄板的面积。

例如,我们要求出底边为 D ,高度为 H (如图 19-2)的直角三角形的质心,可用如下的办法解这个问题。想象一根沿 H 的轴,使三角形绕轴旋转整整

360° 。这就形成了一个锥体。质心的 x 坐标走过的距离是 $2\pi x$ 。被移动的面积就是三角形的面积,为 $HD/2$ 。因此,质心的 x 距离乘上三角形的面积就是所扫过的体积,这个体积当然应是 $\pi D^2 H / 3$ 。这样就有 $(2\pi x)(HD/2) = \pi D^2 H / 3$, 即 $x = D/3$ 。用类似的方法使它绕另一轴转动,或根据对称性,可以求出 $y = H/3$ 。实际上,任何均匀三角形面积的质心都是在三条中线,即从顶点到对边中点的连线的交点上。这一点在每条中线的 $1/3$ 处。线索是:把三角形分成许多小片,每一片都和底边平行。可以看到中线平分每一小片,因此质心一定在中线上。

现在来研究一个较为复杂的图形。假设要求出一个均匀半圆盘——把一个圆盘一分为二的质心的位置。质心在何处?对整个圆盘来说,它无疑是在中心,但是,一个半圆盘要困难一些。用 r 表示圆盘半径, x 为质心到半圆盘直边的距离。以直边为轴,使半圆盘旋转,得到一个球体。这样,质心走过了 $2\pi x$,半圆盘的面积是 $\pi r^2 / 2$ (因为只有圆的一半)。当然,形成的体积应为 $4\pi r^3 / 3$,由此可得

$$(2\pi x) \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) = \frac{4\pi r^3}{3},$$

即

$$x = \frac{4r}{3\pi}.$$

帕普斯还有另一个定理,它是上述例子的一个特殊情况,因此同样是正确的。假设,用一段质量密度均匀的半圆形的导线来代替实心的半圆盘,我们要求出它的质心。在这种情况下,内部没有质量,质量都在导线上。结果表明一条平面曲线按上述方式运动时扫过的面积等于质心运动的距离乘线的长度(可以把导线看成是一个非常窄的面,因而对它也能应用上述定理)。

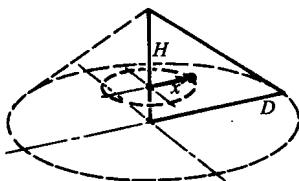


图 19-2 旋转三角形后产生的直角三角形和正圆锥体

§ 19-3 转动惯量的求法

现在我们来讨论求出各种物体转动惯量的问题。一个物体对 z 轴的转动惯量的公式是

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

或

$$I = \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + y^2) \rho dV. \quad (19.4)$$

这就是说, 必须让每一个质量乘以它离开轴的距离的平方 ($x_i^2 + y_i^2$), 然后求和。必须注意, 这不是三维距离, 而只是二维距离的平方, 对三维的物体也是如此。在大多数情况下, 我们将仅限于研究三维物体, 但是在三维情况下绕 z 轴转动的公式是完全相同的。

作为一个简单的例子, 我们考虑一根木棒绕穿过其一端的垂直轴转动的情况(图 19-3)。现在应该对所有质量与 x 距离平方的乘积求和(在此例中 y 为零)。“求和”指的是什么呢? 当然是指 x^2 乘小质量元的积分。假如我们把木棒分成很小的长度元 dx , 相应的质量元和 dx 成比例, 并用 L 表示整个棒的长度, M 表示总质量。因此有

$$dm = \frac{Md\mathbf{x}}{L},$$

于是

$$I = \int_0^L x^2 \frac{Md\mathbf{x}}{L} = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{ML^2}{3}. \quad (19.5)$$

转动惯量的量纲总是质量乘长度平方, 因此, 我们真正需要求出的是因子 $1/3$ 。

假如转轴取在棒的中心, 那么 I 是什么呢? 我们可以重做一次积分, 将 x 的范围取为从 $-L/2$ 到 $+L/2$ 。但是我们注意关于转动惯量的几个特点。可以把这根棒设想成两根棒, 每根棒的质量为 $M/2$, 长度为 $L/2$, 则两根小棒的转动惯量相等, 且都由式(19.5)给出。因此, 转动惯量为

$$I = \frac{2(M/2)(L/2)^2}{3} = \frac{ML^2}{12}. \quad (19.6)$$

由此可见, 绕中心转动的一根棒要比绕它的端点转动容易得多。

当然, 我们可以继续计算各种其他有关物体的转动惯量。但是, 尽管这种计算为积分运算提供了一定数量的重要练习机会, 但从根本上对我们来说并不是太感兴趣的。然而, 这里有一个十分有用的有趣定理。假设有这样一个物体, 我们要求出它绕某个轴的转动惯量。这意味着我们要求出使它对某个轴转动时所需要的惯性。假如支撑这个物体的支点就在质心处, 使物体绕轴旋转时, 本身并不转动(因为惯性力的效果对它不产生转矩作用, 因此当我们使它运动时, 它本身不会转动), 那么它绕轴旋转所需要的力就像把它的所有质量都集中在质心上的情况一样, 转动惯量可以简单地写成 $I_1 = MR_{CM}^2$, 式中 R_{CM} 为轴到质心的距离。当然这不是在绕轴旋转时本身打转的物体的转动惯量的正确公式, 因为这时不仅因为质心作圆周运动而对转动惯量有一个贡献 I_1 , 而且它还要绕质心转动。因此, 有理由在 I_1 上还要

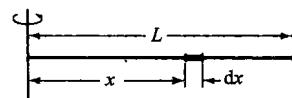


图 19-3 长度为 L , 绕穿过其一端的垂直轴线转动的直棒

加上相对于质心的转动惯量 I_c 。所以可以推测,相对于任何一个轴的总转动惯量应为

$$I = I_c + MR_{CM}^2. \quad (19.7)$$

这个定理叫做平行轴定理,它很容易证明。相对于任何轴的转动惯量都是质量乘 x_i 的平方和 y_i 的平方之和: $I = \sum (x_i^2 + y_i^2)m_i$ 。我们着重研究 x 项,当然 y 项的情况也完全一样。这里 x 是某一特定质点离开原点的距离,但是如果用它到质心 CM 的距离 x' 来代替它到原点的距离 x ,将会出现什么情况呢?为了分析方便起见,可写成

$$x_i = x'_i + X_{CM}$$

然后,将两端平方,得

$$x_i^2 = x'^2 + 2X_{CM}x'_i + X_{CM}^2.$$

那么,当此式乘以 m_i 再对所有 i 求和,会得到什么情况呢?把常数提到求和符号外边,得到

$$I_x = \sum m_i x'^2 + 2X_{CM} \sum m_i x'_i + X_{CM}^2 \sum m_i.$$

第三项求和很简单,就是 MX_{CM}^2 。在第二项求和中有两部分,一部分为 $\sum m_i x'_i$,是总质量乘质心的坐标 x' 。但是这部分没有贡献,因为 x' 是从质心量起的,在这些轴中,以粒子质量为权重的所有粒子的平均位置为零。第一求和项,当然就是 I_c 的 x 分量。因此,我们就得到了式(19.7),和我们推测的完全一样。

让我们举一个例子来验证式(19.7)。我们来看一下它是否适用于木棒的情形。对于通过一个端点的轴,转动惯量为 $ML^2/3$,我们已经算过了。棒的质心当然就在它的中点,在 $L/2$ 距离处。因此,应该有 $ML^2/3 = ML^2/12 + M(L/2)^2$ 。既然 $1/4$ 加 $1/12$ 是 $1/3$,所以我们没有犯根本的错误。

附带提一下,我们并不真正需要积分去求式(19.5)的转动惯量。只要假定它等于 ML^2 乘一个未知系数 γ ,然后利用分为两半的论证法去得出式(19.6)的系数为 $\gamma/4$,再根据平移轴线的论证,就能得到 $\gamma = \gamma/4 + 1/4$,因此 γ 一定是 $1/3$ 。求转动惯量常常有不同的方法。

在应用平行轴定理时,记住 I_c 的轴必须平行于要求的那个转动惯量所对应的轴,显然是十分重要的。

转动惯量还有一个性质值得一提,因为它对求某些形式物体的转动惯量非常有用。这就是:假如有一个平面图形和一组原点就在此平面上, z 轴垂直于此平面的坐标轴,那么这个图形对 z 轴的转动惯量等于相对于 x 轴和 y 轴的转动惯量之和。这是很容易证明的,只需注意

$$I_z = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i y_i^2$$

(由于 $z_i = 0$)。同样

$$I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum m_i x_i^2,$$

$$I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = I_x + I_y.$$

举一个例子,有一质量为 M ,宽为 w ,长为 L 的均匀矩形板,对于穿过平板中心且与之垂直的轴线来说,平板的转动惯量为

$$I = \frac{M(w^2 + L^2)}{12},$$

因为相对于一根在平面内并且平行于它的边长的轴来说,就像长为 w 的棒一样,它的转动惯量是 $Mw^2/12$;而相对于平面内的另一根轴,也像长为 L 的棒一样,它的转动惯量是 $ML^2/12$ 。

概括地说,一个物体对某一给定轴(我们称之为 z 轴)的转动惯量具有如下性质:

(1) 转动惯量是

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2) dm.$$

(2) 假如一个物体由很多部分组成,每一部分的转动惯量已知,则总转动惯量就是各部分转动惯量之和。

(3) 相对于任一给定轴的转动惯量等于相对于通过质心的平行轴的转动惯量再加上总质量与给定轴到质心距离平方的乘积。

(4) 假如物体是一个平面图形,它相对于与平面垂直的轴的转动惯量等于相对于在平面内两根相互垂直且与前述垂直轴相交的任意两根轴的转动惯量之和。

表 19-1 列出了一些质量密度均匀的基本图形的转动惯量。应用上述性质,可以从表 19-1 推导出一些其他物体的转动惯量,我们将它列于表 19-2 中。

表 19-1

物 体	z 轴	I_z
细棒,长为 L	与棒垂直,通过中心	$ML^2/12$
细同心圆环,半径为 r_1 和 r_2	与环垂直,通过中心	$M(r_1^2 + r_2^2)/2$
球,半径为 r	穿过球心	$2Mr^2/5$

表 19-2

物 体	z 轴	I_z
矩形薄片,边长为 a, b	与 b 平行,通过中心	$Ma^2/12$
矩形薄片,边长为 a, b	与薄片垂直,通过中心	$M(a^2 + b^2)/12$
薄圆环,半径为 r_1 和 r_2	任一直径	$M(r_1^2 + r_2^2)/4$
长方形平行六面体,边长为 a, b, c	与 c 平行,通过中心	$M(a^2 + b^2)/12$
圆柱体,半径 r ,长度 L	与 L 平行,通过中心	$Mr^2/2$
圆柱体,半径 r ,长度 L	与 L 垂直,通过中心	$M(r^2/4 + L^2/12)$

§ 19-4 转 动 动 能

现在我们来进一步讨论动力学问题。在第 18 章中我们讨论直线运动和角运动之间的类比关系时,应用了功的原理,但没有谈到动能。一个绕某一给定轴以角速度 ω 转动的刚体的动能是什么呢?通过类比,我们可以马上猜出正确的答案。转动惯量相当于质量,角速度相当于速度,因此,动能应该是 $I\omega^2/2$ 。正是这样,下面就来证明:假设物体绕一个轴转动,因而它上面的每一点都有一个速度,其大小为 ωr_i ,这里 r_i 是特定点到轴的半径,假如 m_i 为这个点的质量,则整个物体的总动能是所有小块的动能之和

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (r_i \omega)^2.$$

因为 ω^2 是常数, 对各个点都是一样, 所以

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (19.8)$$

在第18章末, 我们指出了某种物体的一些有趣现象, 这种物体不是刚体, 但它可以从具有一定转动惯量的一种刚体状况变成另一种刚体状况。例如, 在我们的转台实验中, 当手伸开时, 我们有一定的转动惯量 I_1 和一定的角速度 ω_1 。当把手缩回时, 我们有另一个转动惯量 I_2 和角速度 ω_2 , 但是, 我们还是“刚体”。因为相对于转台的竖直轴没有转矩, 所以角动量应守恒。这就是说, $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$ 。但能量的情况如何呢? 这是一个很有趣的问题。当手缩回时, 我们转得更快了, 但转动惯量变小了, 这样看来好像能量应该相等。但并非如此, 因为保持守恒的是 $I\omega$, 而不是 $I\omega^2$ 。假如我们比较一下前后的动能, 开始的动能是 $I_1 \omega_1^2 / 2 = L \omega_1 / 2$, 这里 $L = I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$ 是角动量。后来, 根据同样的论证, 有 $T = L \omega_2 / 2$, 由于 $\omega_2 > \omega_1$, 所以转动动能比开始时大了。因此, 当手伸开时, 我们有一定的能量, 当手缩回时, 我们转得更快, 并有更大的动能。这与能量守恒定律矛盾吗? 一定有某人做了功。这就是我们自己! 什么时候我们做了功呢? 当我们水平移动一个重物时, 我们没有做任何功。假如我们拿着一个东西, 把手伸出去再缩回来, 我们没有做任何功。但这是我们不作转动的情况! 当我们在转动时, 就有一个离心力作用在重物上, 并且重物有飞开的趋势, 因此我们必须拉着它以克服离心力。所以, 我们克服离心力所做的功应该与转动能量之差相一致, 确实是这样。这就是额外动能的来源。

还有一个有趣的特征, 我们把它作为一个普遍关心的问题, 作一些说明, 这个特征要更深奥一点, 但值得一提, 因为它非常奇特而且能产生很多有趣的效果。

再来看一下转台实验。从转动着的人的观点来分别考虑身体和手臂。在重物拉回来以后, 整个物体旋转加快, 不过请注意, 身体的中心部分没有变化, 但它也比以前转得快了。假如我们围绕身体这部分画一个圆, 只考虑圆内的物体, 它们的角动量必将变化; 它们运动得更快了。因此, 当我们把手缩回时, 一定有一个转矩作用在身体上。离心力不会有转矩作用, 因为它是沿径向的。这就是说, 出现在转动系统的力中, 不仅有离心力, 还有其他力。这另一个力叫做科里奥利力, 它具有非常奇怪的性质, 即当我们在转动系统中移动一个物体时, 它似乎被推向侧面。和离心力一样, 它是一个表观上的力。但是假如我们生活在转动着的系统中, 要沿径向移动某个物体时, 我们将发现要从侧面推它才能使它沿径向运动。我们必须施加的这个侧向推力正是使我们身体转动的原因。

现在我们引进一个公式来表示科里奥利力的实际作用。假如莫坐在旋转木马上, 在他看来木马是静止的。但是对站在地面上, 并对力学规律有很好了解的乔来说, 旋转木马在转动。假设我们在旋转木马上画一条径向线, 莫正在沿这条径向线移动某个有质量的物体。我们将证明要这样做需要有一个侧向作用力。为了证明这一点, 只要注意物体的角动量。因为它一直以同一角速度 ω 转动, 所以角动量是

$$L = mv_{\text{切向}} r = m\omega r \cdot r = m\omega r^2,$$

因此, 当物体靠近中心时, 它具有相对较小的角动量。但是假如把它移到一个较远的新的位

置,即增大 r ,则 m 具有较大的角动量,因此一定要施加一个转矩,才能使物体沿径向移动(要沿着旋转木马的径向行走,你就必须把身子斜过来,向旁边作用一个推力。有机会时试试看)。在 m 沿径向移动时,所需要的转矩等于 L 随时间的变化率。如果 m 只沿径向运动, ω 保持恒定,那么转矩就是

$$\tau = F_c r = \frac{dL}{dt} = \frac{d(m\omega r^2)}{dt} = 2m\omega r \frac{dr}{dt},$$

这里 F_c 是科里奥利力。我们真正想要知道的是莫必须作用一个怎样的侧向力,才能使 m 以速率 $v_r = dr/dt$ 向外移动。这个力就是 $F_c = \tau/r = 2m\omega v_r$ 。

这样,我们就得出了科里奥利力的公式,让我们再仔细地观察一下,看看是否能从更基本的观点来理解这个力的来源。我们注意到科里奥利力在各个径向上都是一样的,甚至在原点也明显地存在。但在原点处特别容易理解这个力,只要从站在地面上的乔的惯性系中来观察所发生的情况就行了。图 19-4 表示物体 m 的三个连续位置,在 $t = 0$ 时,正好通过原点。由于旋转木马在转动,我们看到 m 不是沿一条直线运动,而是沿一条曲线运动,这条曲线在 $r = 0$ 处与旋转木马的直径相切。要使物体 m 沿曲线运动,在绝对空间中必须有一个力使它加速。这就是科里奥利力。

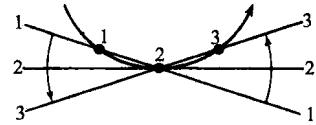


图 19-4 在旋转转台上作径向移动的一个点的三个连续位置

这并不是发生科里奥利力的唯一情况。我们还可以证明,假如一个物体作匀速圆周运动,也有科里奥利力。为什么? 莫看到沿圆周运动的速度是 v_M ,而另一方面,在乔看来, m 是以速度 $v_J = v_M + \omega r$ 绕圆周运动,因为 m 正被旋转木马带着一起运动。因此,我们认识到,这个力实际上就是速度 v_J 产生的总的向心力,即 mv_J^2/r ;这是实际存在的力。现在,从莫看来,这个向心力有三个部分。我们可以把它全部写出

$$F_r = -\frac{mv_J^2}{r} = \frac{mv_M^2}{r} - 2mv_M\omega - m\omega^2 r.$$

这里, F_r 是莫应该看到的力。我们试试看来理解它。莫会感觉到第一项吗? 他一定会说,“是的,即使在我不转动的时候,假如我以速度 v_M 沿圆周跑,也一定会有一个向心力”。这就是莫一定会预料到的向心力,它与转动无关。此外,莫也十分清楚,还有另外一个向心力,甚至当物体静止在他的旋转木马上时,这个力也要对它发生作用。这就是第三项。除此两项外,还有一项,即第二项,它又是 $2m\omega v$ 。当速度是径向时,科里奥利力 F_c 是沿切向的,而当速度沿切向时,它是径向的。实际上,这个式子与另一个式子差一个负号,不管速度的方向如何变,这个力相对于速度的方向总是一样的。它与速度方向垂直,大小为 $2m\omega v$ 。

第 20 章 空 间 转 动

§ 20-1 三 维 空 间 中 的 转 矩

在本章中我们将讨论转轮的行为,这是力学中最引人注目和最有趣的成果之一。为此,我们必须首先把转动的数学公式、角动量原理、转矩等概念推广到三维空间中去。我们不准备使用这些公式的最一般的形式,也不准备研究它们的全部结果,因为这可能要花几年的时间,而我们必须很快转向讨论其他课题。在一门导论课程中,我们只能介绍一些基本定律,并把它们应用到少数几个特别有趣的情况中。

首先,我们注意到,对于在三维空间中的转动,无论转动体是刚体或其他任何系统,在二维空间中导出的定理仍然是正确的。也就是说, $xF_y - yF_x$ 仍是在“ xy 平面”的转矩,或“相对于 z 轴”的转矩。而且这个转矩也仍然等于 $xp_y - yp_x$ 的变化率,因为假如重温一下从牛顿定律推导式(18.15)的过程,我们就可以看到毋须假设运动是在平面内进行的;当我们对 $xp_y - yp_x$ 微分时,就得到 $xF_y - yF_x$, 所以,这个定理仍然是正确的。于是,量 $xp_y - yp_x$ 称为属于 xy 平面的角动量,或相对于 z 轴的角动量。这一点既然成立,我们可以采用其他任何一对轴,并得出另一个公式。例如,我们可以采用 yz 平面,很明显,根据对称性,只要用 y 代替 x ,用 z 代替 y ,我们就可以找到转矩 $yF_z - zF_y$, 以及与 yz 平面相联系的角动量 $yp_z - zp_y$ 。当然,我们还可以采用 zx 平面,对这个平面,将有 $zF_x - xF_z = d(zp_x - xp_z)/dt$ 。

十分清楚,对于单个粒子的运动可以推导出这三个公式。而且,假如把许多粒子的诸如 $xp_y - yp_x$ 这样的量加在一起,并称之为总角动量,那么对于 xy , yz , zx 的三个平面,我们可以得到三类表示式。用同样的办法处理力,我们也可以得到在 xy , yz , zx 平面上的转矩。因此,可以得出这样的定律,即与任一平面相联系的外转矩等于与此平面相联系的角动量的变化率。这正是二维空间中我们曾经写出的表示式的推广。

但是,也许有人会说:“噢,不过平面不只三个,还有许多平面,难道我们不能在某一角度上取某一平面,并由力来计算出在这个平面上的转矩吗? 对于每一个这样的平面,我们都可以说出一组不同的方程式,这样,我们将有多少方程式啊!”十分有趣的是,结果表明,假如我们对另一个平面测出 x' , F_y 等等,从而得出关于该平面的表示式 $x'F_y - y'F_x$, 那么结果可以写成对于 xy , yz , zx 三个平面的三个表示式的某种组合。这里毫无新的东西。换句话说,假如我们知道在 xy , yz , zx 平面上的三个转矩,则在任何其他平面上的转矩和相应的角动量总可以写成这三个转矩的某种组合:比如其中一个的 6% 加另一个的 92%, 等等。现在,我们将要分析这个性质。

假如,在 xyz 这组轴中,乔得出了他的三个平面的所有转矩和角动量,但莫具有在另一方向的轴 x' , y' , z' 。为了使问题简单一些,我们将假定只是 x 和 y 轴转了一个角度。莫的

x' 和 y' 是新的,但是他的 z' 正好和 z 相同。这就是说他具有新的 yz 和 zx 平面。因此,他得求出新的转矩和角动量。例如,在 $x'y'$ 平面内,他的转矩应该是 $x'F_y - y'F_{x'}$,等等。现在,我们要做的是求出新转矩和旧转矩之间的关系,从而使我们能够建立从一组坐标轴到另一组坐标轴之间的联系。可能又有人会说:“这看起来正和处理矢量的问题一样。”确实如此,我们就是要那样做。然后他可能还会问:“那么,转矩不正是一个矢量吗?”结果表明,它是一个矢量,但是如果不去分析,我们就不能立即明白这一点。因此,下面来作分析。我们将不打算详细地讨论每一步骤,因为我们只需要说明如何处理问题。计算出的转矩为

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= xF_y - yF_x, \\ \tau_{yz} &= yF_z - zF_y, \\ \tau_{zx} &= zF_x - xF_z.\end{aligned}\quad (20.1)$$

这里我们离题插一句,请注意,在类似于这样的情况下,如果坐标处理不当,人们可能会把某些量的符号搞错。为什么不写成 $\tau_{yz} = zF_y - yF_z$?问题在于:一个坐标系既可以是“右旋的”,也可以是“左旋的”。一旦对它们(任意地)选定一种符号,如 τ_{xy} ,则其他两个量的正确表达式总可以根据下面任何一种次序中 xyz 字母的互换而求出



莫在他的坐标系中算出的转矩为

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= x'F_y - y'F_{x'}, \\ \tau_{y'z'} &= y'F_z - z'F_{y'}, \\ \tau_{z'x'} &= z'F_x - x'F_{z'}.\end{aligned}\quad (20.2)$$

现在假设某一个坐标系转过了一个固定角度 θ ,从而使得 z 和 z' 相同(这个角度 θ 与物体的转动无关,也与坐标系内发生什么情况无关。它仅仅是一个人所采用的坐标轴与另一个人采用的坐标轴之间的联系,我们假定它是常数)。因此,两个坐标系中的坐标之间的关系为

$$\begin{aligned}x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \\ z' &= z.\end{aligned}\quad (20.3)$$

同样,因为力是矢量,所以它以与 x , y , z 相同的方式变换到新的坐标系,这是由于当且仅当一个量的各个分量以与 x , y , z 同样的方式变换时,才是矢量

$$\begin{aligned}F_{x'} &= F_x\cos\theta + F_y\sin\theta, \\ F_{y'} &= F_y\cos\theta - F_x\sin\theta, \\ F_{z'} &= F_z.\end{aligned}\quad (20.4)$$

现在,只要把式(20.3)的 x' , y' 和 z' 与式(20.4)的 $F_{x'}$, $F_{y'}$ 和 $F_{z'}$ 统统代入式(20.2),我

们就能求出转矩的变换。这样,我们就得出 $\tau_{x'y'}$ 的包含有一长串项的表达式,而结果(乍一看来,颇觉惊讶)它正好简化成 $xF_y - yF_x$, 这正是 xy 平面内的转矩

$$\begin{aligned}
 \tau_{x'y'} &= (x\cos\theta + y\sin\theta)(F_y\cos\theta - F_x\sin\theta) \\
 &\quad - (y\cos\theta - x\sin\theta)(F_x\cos\theta + F_y\sin\theta) \\
 &= xF_y(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - yF_x(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\
 &\quad + xF_x(-\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta) + yF_y(\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta) \\
 &= xF_y - yF_x = \tau_{xy}.
 \end{aligned} \tag{20.5}$$

这个结果是很清楚的,因为假如我们仅在平面上转动轴,则在那个平面内对 z 轴的扭转与以前不会有什不同,因为这是同一个平面! 我们更感兴趣的是 $\tau_{yz'}$ 的表达式,因为这是一个新的平面。现在在 $y'z'$ 平面来进行完全相同的变换,结果如下

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz'} &= (y\cos\theta - x\sin\theta)F_z - z(F_y\cos\theta - F_x\sin\theta) \\
 &= (yF_z - zF_y)\cos\theta + (zF_x - xF_z)\sin\theta \\
 &= \tau_{yz}\cos\theta + \tau_{zx}\sin\theta.
 \end{aligned} \tag{20.6}$$

最后,对 $z'x'$ 平面有

$$\begin{aligned}
 \tau_{z'x'} &= z(F_x\cos\theta + F_y\sin\theta) - (x\cos\theta + y\sin\theta)F_z \\
 &= (zF_x - xF_z)\cos\theta - (yF_z - zF_y)\sin\theta \\
 &= \tau_{zx}\cos\theta - \tau_{yz}\sin\theta.
 \end{aligned} \tag{20.7}$$

我们需要求出借助于旧坐标轴的转矩来表示新坐标轴转矩的规则,现在已经有了这条规则。我们怎样才能记住它呢? 仔细观察一下式(20.5), (20.6)和(20.7),就可以看出这些等式与 x , y 和 z 的等式之间有一个密切的关系。如果我们把 τ_{xy} 叫做某个量的 z 分量,例如称它为 τ 的 z 分量,那就好了,因为 z 分量应该不变,而式(20.5)正是如此,所以可以把式(20.5)理解为一个矢量变换。同样,如果我们把新引入的矢量的 x 分量和 yz 平面联系起来;把 y 分量和 zx 平面联系起来,则这些变换的表示式可以写成

$$\begin{aligned}
 \tau_z &= \tau_z, \\
 \tau_x &= \tau_x\cos\theta + \tau_y\sin\theta, \\
 \tau_y &= \tau_y\cos\theta - \tau_x\sin\theta,
 \end{aligned} \tag{20.8}$$

这正是矢量变换的法则!

因此,这就证明了我们可以把组合式 $xF_y - yF_x$ 与矢量的 z 分量等同起来。虽然转矩是在一个平面上的扭转,并不具有先验的矢量特征,但在数学上它的确就像一个矢量。这个矢量垂直于扭转平面,它的大小与扭转强度成正比。这样一个量的三个分量就像真正的矢量一样变换。

因此,我们就用矢量来表示转矩;假设转矩作用在一个平面上,用尺画一条垂直于该平面的直线。但是仅仅说“垂直”于平面,还没有规定符号。为了正确确定符号,我们必须采用

一个规则,使得利用这个规则,能够告诉我们假如转矩以某种方式作用在 xy 平面上,那么与之相联系的轴是沿 z 的正方向。也就是说,人们必须规定“左”和“右”。假设坐标系是右旋系统中的 x, y, z ,那么这个法则可以描述如下:如果我们把扭转想象为旋转一个具有右旋螺纹的螺钉,那么与扭转有关的那个矢量的方向就是螺钉前进的方向。

为什么转矩是一个矢量呢?我们能够把一个平面和单一的一根轴联系起来,从而能把矢量和转矩联系起来是十分幸运的奇迹;这是三维空间的一个特性。在二维空间中,转矩是一个普通的标量,没有规定方向的必要。在三维空间中,它是一个矢量。假如是四维空间,困难就很大,因为(例如我们取时间为第四维)不仅有 xy, yz 和 zx 平面,还有 tx, ty 和 tz 平面。这里有 6 个面,人们不能把 6 个量表示为四维空间中的一个矢量。

我们长期地生活在三维空间中,因此值得指出,前面的数学处理与 x 代表位置, F 代表力这些事实无关,它只依赖于矢量的变换规律。因此,如果用某个其他矢量的 x 分量来代替 x ,结果将毫无差别。换句话说,假如我们要计算 $a_x b_y - a_y b_x$ (这里 a 和 b 是矢量),并把它称为某一新的量 c 的 z 分量,那么这些新的量组成了矢量 c 。我们需要找出一个数学表达式来表示具有三个分量的这个新的矢量与矢量 a 和 b 之间的关系。为此而设想的表示方法是 $c = a \times b$ 。这样,除了在矢量分析理论中通常的标积之外,又有一种新的乘法,称为叉积。因而假如 $c = a \times b$,就等于写成下面的形式

$$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y, \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z, \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \tag{20.9}$$

假如把 a 和 b 的次序颠倒一下,即把 a, b 改为 b, a ,则 c 的符号也必须颠倒一下,因为 c_z 应该是 $b_x a_y - b_y a_x$ 。因此,叉积与一般的乘法不一样,在一般的乘法中 $ab = ba$,而对叉积 $b \times a = -a \times b$ 。由此我们立即可以证明,假如 $a = b$,其叉积为零,即 $a \times a = 0$ 。

叉积对表达转动的特性十分重要,因此,掌握三个矢量 a, b, c 的几何关系是很重要的。当然,分量之间的关系已由式(20.9)给出,从那里也可以确定它们在几何上的关系。结果是首先矢量 c 同时垂直于 a 和 b (试计算 $c \cdot a$,看它是否为零)。其次, c 的大小可以证明等于 a 的大小乘 b 的大小再乘两者之间夹角的正弦。 c 指向什么方向呢?设想把 a 转过一个小于 180° 的角到 b ;用这样的方法转动一个右旋螺纹的螺钉,螺钉前进的方向就是 c 的方向。我们用右旋螺钉而不用左旋螺钉,这是一个习惯问题,而且它不断提醒我们,假如 a 和 b 是一般意义上的“真正的”矢量,那么由 $a \times b$ 创造的新的“矢量”是人为的,它的性质与 a 和 b 略有差别,因为它是由一个特殊法则构成的。假如 a 和 b 是所谓的普通矢量,我们给它们取一个专门的名称叫做极矢量。例如坐标 r 、力 F 、动量 p 、速度 v 、电场 E 等等都是这种矢量,这些都是通常的极矢量。在它们的定义中只包含一次叉积的矢量叫做轴矢量或赝矢量。转矩 τ 和角动量 L 当然就是赝矢量的例子。还可以发现角速度 ω 和磁场 B 也是赝矢量。

为了使矢量的数学性质完整,我们应该知道关于矢量的点积和叉积的所有规则。在目前的应用中,我们只需要知道很少一点就够了,但是为了完整起见,我们将写出所有矢量乘法的规则,便于今后应用。它们是

- (a) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$,
 (b) $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$,
 (c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$,
 (d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,
 (e) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$,
 (f) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.
- (20.10)

§ 20-2 用叉积表示的转动方程式

现在我们要问,是否在物理学中的任何方程都可以写成叉积的形式呢?回答是大多数的方程都可以这样写。例如,我们立即可以看出转矩等于位置矢量和力的叉积

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (20.11)$$

这是包含 $\tau_x = yF_z - zF_y$, 等三个方程式的一个矢量。根据同样的想法,假如只有一个粒子时,角动量矢量就是离原点的距离乘以动量矢量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (20.12)$$

对于三维空间转动来说,与牛顿的 $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ 定律相类似的动力学定律是:转矩矢量等于角动量矢量随时间的变化率

$$\tau = d\mathbf{L}/dt. \quad (20.13)$$

假如把式(20.13)对很多粒子求和,那么作用在一个系统上的外转矩是总角动量的变化率

$$\tau_{\text{外}} = d\mathbf{L}_{\text{总}}/dt. \quad (20.14)$$

另一个定理是:若总的外转矩为零,则这个系统的总角动量矢量不变。这称为角动量守恒定律。假如没有转矩作用在一个给定系统上,它的角动量就不会改变。

角速度情况如何呢?它是矢量吗?我们已经讨论过固体绕一个给定轴的转动,现在假定我们使它同时绕两根轴转动。它可以一方面绕盒子内部的一根轴转动,同时整个盒子再绕另一个轴转动。这种组合运动的结果是物体简单地围绕某一个新的轴转动。这个新的轴的奇特之处可以这样来描写:假如以 z 方向上的一个矢量来表示在 xy 平面内的转动率,并令其长度等于在该平面内的转动率,再在 y 方向上画出另一个矢量,以表示在 zx 平面内的转动率,则按照平行四边形法则把它们加起来,得出的矢量其大小就表示物体转动的快慢,其方向则代表转动是在哪个平面中进行的。简言之,角速度是一个矢量,而在三个平面内转动的快慢,就是该矢量在垂直于各个平面的方向上的投影*。

作为角速度矢量的一个简单应用,我们可以计算一下作用在一个刚体上的转矩所消耗的功率。功率当然是功随时间的变化率,在三维空间中,可以证明功率是 $P = \tau \cdot \omega$ 。

* 这一点的正确性也可以通过把无限小时间 Δt 内物体所有粒子的位移合在一起的办法推导出来。它本身不是自明的,留给有兴趣的读者自己证明。

所有平面转动的公式都可以推广到三维空间。例如,假定一个刚体以角速度 ω 绕某一轴转动,我们可以问,“在矢径 r 处的一个点的速度是什么?”可以证明刚体上一个粒子的速度是 $v = \omega \times r$, 这里 ω 是角速度, r 是矢径, 我们把它作为一个问题留给学生去证明。又积的又一个例子是: 科里奥利力的公式也可以把它写成叉积的形式: $F_c = 2mv \times \omega$ 。即假如一个坐标系以角速度 ω 转动, 一个粒子以速度 v 在这个坐标系内运动, 在这个转动坐标系中考虑问题, 就必须加上惯力 F_c 。

§ 20-3 回转仪

现在再来讨论角动量守恒定律。这个定律可以用快速旋转的轮子或下面的回转器来演示(见图 20-1)。假如我们站在一个转椅上, 并拿着绕水平轴转动的轮子, 这个轮子绕水平轴有一个角动量。绕竖直轴的角动量不会因为椅子的支轴(无摩擦)而改变, 假如我们把轮子的轴转到竖直方向, 那么轮子就具有绕竖直轴的角动量, 因为这时它在绕竖直轴转动。但是, 这个系统(轮子, 我们自己和椅子)不可能有竖直分量的角动量, 因此, 我们和椅子必须沿与轮子自旋相反的方向转动, 以与轮子的转动平衡。

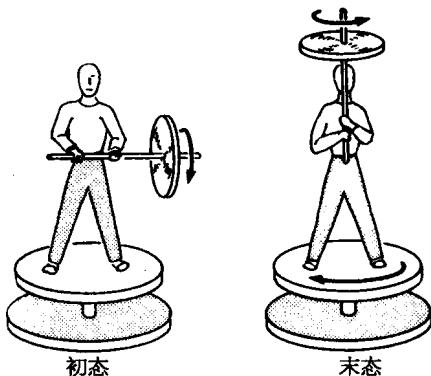


图 20-1 起先: 轴是水平的, 绕竖直轴的转矩等于 0; 后来: 轴在竖直方向, 绕竖直轴的角动量仍然为零, 人和椅子的转动方向与轮子的转动方向相反

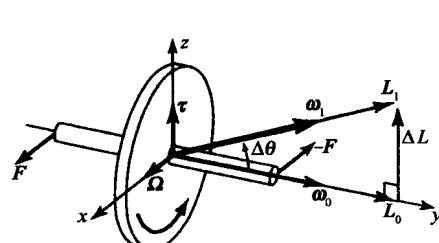


图 20-2 回转仪

首先我们来较详细地分析一下刚才叙述的事情。使我们感到惊奇和需要理解的是, 当我们把回转仪的轴转向竖直方向时, 从哪里来的力使我们和椅子转动的。图 20-2 表示轮子绕 y 轴快速转动。因此, 它的角速度是沿着绕它转动的轴, 结果表明它的角动量也同样在 y 方向上。现在假如我们想使轮子以很小的角速度 Ω 绕 x 轴转动, 那么需要多大的力呢? 在经过一个很短的时间 Δt 之后, 轴转到一个新的位置, 与水平方向成 $\Delta\theta$ 角。因为角动量的主要部分是由绕轴旋转而产生的(很小一部分是由慢慢转动引起的), 所以我们看到角动量矢量发生了变化。角动量发生了什么变化呢? 角动量的大小没有变, 但是它的方向改变了 $\Delta\theta$ 。这样, 矢量 ΔL 的大小为 $\Delta L = L_0 \Delta\theta$, 因此, 转矩, 即角动量随时间的变化率是

$$\tau = \Delta L / \Delta t = L_0 \Delta\theta / \Delta t = L_0 \Omega.$$

考虑到各个量的方向,我们知道

$$\tau = \Omega \times L_0. \quad (20.15)$$

由此可见,如果 Ω 和 L_0 如图所示,都在水平方向, τ 就在竖直方向。为了产生这个转矩,一定要有水平方向的力 F 和 $-F$ 作用在轴的两端。这些力是如何作用的呢?在我们试图使轮子的轴往竖直方向转动时,通过我们的手施加了这种作用力。但是,牛顿第三定律要求有大小相等、方向相反的力(和大小相等、方向相反的转矩)作用在我们身上。这就使我们绕竖直轴 z 沿相反方向转动。

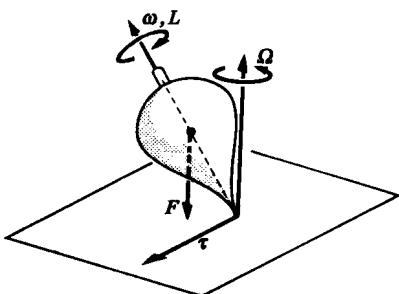


图 20-3 一个快速旋转的陀螺
注意:转矩矢量的方向就是进动的方向

这个结果可以推广到快速旋转的陀螺上去。对于常见的旋转陀螺,作用在它质心上的重力提供了一个相对于与地板接触点的转矩(见图 20-3)。这个转矩在水平方向,它使陀螺的轴绕竖直方向在一个圆锥上进动。假如 Ω 是(竖直方向的)进动角速度,我们再次发现

$$\tau = dL/dt = \Omega \times L_0.$$

因此,当我们对快速旋转着的陀螺施加转矩时,其进动方向就在转矩的方向上,也就是与产生转矩的力垂直的方向。

现在我们可以说是理解了回转仪的进动,实际上,我们是从数学上去理解的。然而,这只是数学上的事情,而且在某种意义上简直是“奇迹”。当我们深入到越来越高级的物理学时,将会看到很多简单的东西用数学的方法来推导要比从基本的或简单的意义上去真正理解它们来得快一些。这是一个很奇怪的特性,而且在我们接触越来越高深的研究工作时,就会遇到这些情况,其中数学导出了结果,但这些结果没有一个人能以任何直接的方式真正理解它。狄喇克方程就是一个例子,它的形式非常简单而优美,但是它的结论却很难理解。对于我们所讨论的特殊情形,陀螺的进动看上去像是包含有直角和圆周,扭转和右手螺旋的一类奇迹。我们要做的是怎样用更符合物理的方式去理解它。

怎样用实际的力和加速度来说明转矩呢?我们注意到,当轮子进动时,在轮子上的质点并不是真正在一个平面内运动,因为轮子正在进动(见图 20-4)。正如我们在前面(图 19-4)所解释过的那样,穿过进动轴的质点沿曲线路径运动,从而要求有一个侧向作用力。这个力是通过我们推轴时施加的,它通过轮子的辐条传到轮子的边缘。“等一等”,也许有人要问,“在轮子的另一侧往相反方向运动的粒子的情况如何呢?”不难确定必须有一个沿反方向的力作用在那一边。因此,我们所应施加的合力为零。这些力相互抵消,但是其中的一个力必须作用在轮子的一边,另一个力作用在轮子的另一边。我们可以在轮子上直接用力,但是因为轮子是固体,它的辐条可以传递力,这就使我们可以通过推轴而施加力。

到目前为止,我们已经证明了,假如轮子在进动,它就能够与重力转矩或某种其他转矩相平衡。但是,我们所证明的这一切只是方程式的一个解。即,假如有转矩作用,并且恰当地

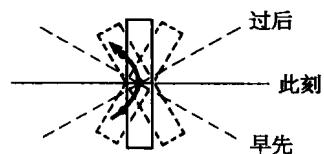


图 20-4 当图 20-2 的自旋轮子的轴在转动时,轮子上的质点是沿曲线运动的

地使轮子开始旋转,那么它将平稳地和均匀地进动。但是我们并没有证明(而且这是不对的),由于一个给定转矩的作用,自旋物体可能进行的最一般运动就是均匀进动。一般运动还包含有相对于平均进动的“晃动”。这个“晃动”称为章动。

有人喜欢说,当人们在回转仪上施加一个转矩时,它就转动,并进动,即这个转矩产生了进动。非常奇怪的是,当突然把回转器放开的时候,它不是在重力的作用下下落,而是向旁边运动!为什么我们所知道并感觉到的向下的重力会使它侧向运动呢?世界上像式(20.15)之类的所有公式都不能回答这个问题,因为式(20.15)是一个特殊方程,仅在回转仪正常进动时才适用。说得详细一点,所发生的真实情况如下:假如我们紧紧抓住轴使其不能以任何方式进动(但是陀螺在自旋),这样就没有转矩作用着,甚至连重力转矩都没有,因为它被我们的手指平衡了。但是,在我们突然把手放开的一瞬间,立即就有一个重力转矩。任何头脑正常的人都会认为陀螺将掉下来,确实如此,当陀螺自转不太快时,确实看到它在开始时是在下落。

正如我们预期的那样,回转器确实是在下落。但当它一旦下降时,它就开始转动,假如要使这个转动继续下去,就需要有一个转矩。由于在这个方向上没有转矩,回转仪就沿与失去的力相反的方向“落下”。这就使回转仪有一个绕竖直轴运动的分量,就像在稳定进动时一样。但是,实际运动要“超过”稳定的进动速度,实际上轴又再升回到原来开始时的水平位置。轴的一端所走的路径是一条摆线(即像粘在汽车轮胎上的石子所走过的路径)。通常这种运动很快,以致眼睛无法跟踪,而且由于滚珠轴承的摩擦力,使它很快衰减下来,变成稳定的进动(图20-5)。轮子旋转得越慢,章动就越明显。

当运动稳定之后,回转仪的轴要比开始时略低一点。为什么呢(这里有更复杂的细节,我们所以要进行讨论是为了不使读者产生回转仪是绝对不可思议的奇迹的想法。它确实是很奇特的,但绝非不可思议的奇迹)?假如我们绝对水平地抓住回转仪的轴,然后突然放开,那么简单的进动方程就可以告诉我们,它是在水平面内进动的。然而这是不可能的!轮子对于进动轴有一定的转动惯量,这一点尽管前面忽略了,但确是存在的,如果它相对于这个轴转动,即使很慢,它对这个轴也有一个比较弱的角动量。这个角动量是从哪里来的呢?如果支轴很理想,相对于竖直轴就没有转矩。如果角动量不变,进动是怎么来的呢?回答是轴端的摆线运动衰减为等效的滚动圆中心的平均和稳定的运动。也就是说,它处于略为低一点的位置上。因为它较低,自旋角动量就有一个微小的竖直分量,这正是进动所需要的。这样,你就明白,为了继续保持转动,必须使它低一些,同时向重力作一点让步;通过把它的轴放低一些来保持其绕竖直轴的转动,这就是回转器的旋转过程。

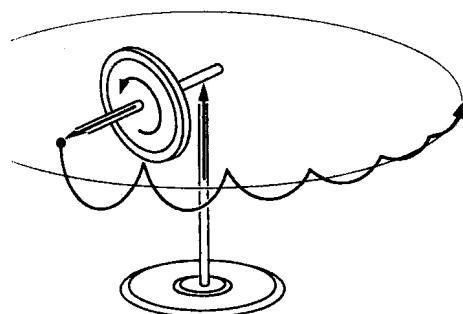


图20-5 原来被紧紧抓住的回转器刚刚放开之后,在重力的作用下,其轴端的实际运动情况

§ 20-4 固体的角动量

在我们结束三维空间转动的课题之前,我们至少还要定性地讨论几个在三维转动中发

生的效应,这些效应本身不是自明的。一般说来,主要的效应是一个刚体的角动量并不一定必须和角速度在同一个方向上。我们来考虑一个轮子,这个轮子倾斜地固定在一根杆上,但轴通过其重心,如图 20-6 所示。当我们使轮子绕轴旋转时,任何人都知道,因为轮子倾斜地安装着,轴承将发生震动。定性地说,我们知道在转动系统中有一个离心力作用在轮子上,试图把轮子上的物体抛到离轴尽可能远的地方。这趋向于使轮子的平面排成与轴相垂直。为了反抗这种趋势,轴承就要施加一个转矩。如果轴承施加了转矩,必然会有个角动量的变化率。当我们仅使轮子绕轴旋转时,怎么会有角动量的变化率呢?假使我们把角速度 ω 分成 ω_1 和 ω_2 , ω_1 垂直于轮子的平面, ω_2 平行于轮子的平面。什么是角动量呢?相对于这两个轴的转动惯量是不同的,因此,角动量的两个分量(只在这两个特殊的轴上)等于转动惯量乘相应的角速度分量,它们的比值与角速度分量之比值不一样。因而角动量矢量在空间的方向不是沿着轴的方向。当我们转动物体时,我们也在空间中转动了角动量矢量,这就必须在轴上施加一个转矩。

转动惯量有一个非常重要而有趣的性质,很容易叙述,也很容易应用,它是上述分析的基础,但它太复杂,难于在这里证明。这个性质叙述如下:任何刚体,即使是像马铃薯之类不规则的物体,都有通过质心的三根互相垂直的轴,使得相对于这三根轴中某一根轴的转动惯量与通过质心的任何轴相比具有最大可能值;相对于这三根轴中另一根轴的转动惯量则具有最小可能值;而对于第三根轴的转动惯量则处于两者之间(或等于其中之一)。这三根轴称为物体的主轴,它们具有一个很重要的性质——如果物体绕其中一个轴转动,它的角动量与角速度的方向相同。对于具有对称轴的物体来说,它的主轴就是对称轴。

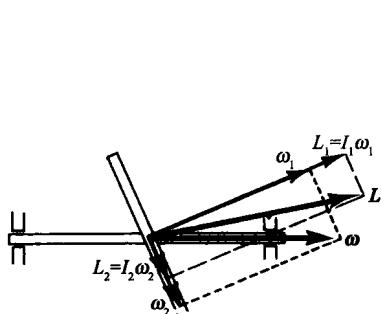


图 20-6 一个转动物体的角动量
并不一定平行于角速度

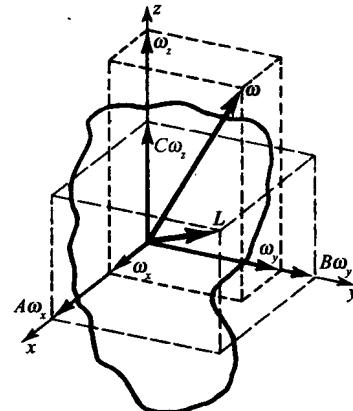


图 20-7 一个刚体的角速度和
角动量 ($A > B > C$)

假如我们用 x , y 和 z 轴来表示主轴,并称相应的主转动惯量为 A , B 和 C ,我们就能很容易算出以任一角速度 ω 转动的物体的角动量和动能(图 20-7)。如果将 ω 沿 x , y , z 方向分解成 ω_x , ω_y , ω_z 分量,并在 x , y , z 轴上取单位矢量 i , j , k ,我们就可以把角动量写成

$$\mathbf{L} = A\omega_x \mathbf{i} + B\omega_y \mathbf{j} + C\omega_z \mathbf{k}. \quad (20.16)$$

转动动能是

$$\text{K. E.} = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) = \frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot \mathbf{\omega}. \quad (20.17)$$

第 21 章 谐 振 子

§ 21-1 线性微分方程

在学习物理学时,通常是把课程分成一系列的科目,如力学、电学、光学,等等,并且总是一门课程接着一门课程地学习。例如,到目前为止本门课程主要讨论的是力学。但是,有一件奇怪的事情却一再出现:即在物理学的不同领域中,甚至在其他的学科中,出现的方程式几乎往往是完全一样的,因此在这些不同领域中很多现象都有其类似之处。举一个最简单的例子,声波的传播在很多方面就与光波的传播相类似。如果我们深入地研究声学,就会发现要做的很多工作与我们深入研究光学时相同。所以,对一个领域中某种现象的研究可以扩展我们对另一个领域的知识。最好从一开始就认识到这种扩展是可能的,否则,人们就可能对为什么要花这么多的时间和精力来研究仅仅是力学中的很小一部分,感到不可理解。

我们将要学习的谐振子,在许多其他领域中都有相类似的东西,虽然我们从力学的例子,如挂在弹簧上的重物,小振幅的摆,或者某些其他的力学装置出发,但实际上我们是在学习某一种微分方程。这种方程在物理学和其他学科中反复出现,而且事实上它是许多现象中的一部分,是值得我们认真研究的。包含这个方程式的现象有:挂在弹簧上的一个具有质量的物体的振动;在电路中电荷的来回振荡;正在产生声波的音叉的振动;电子在原子中产生光波的类似振动;描写调节温度的恒温器之类的伺服系统的操作方程;化学反应中一些复杂的相互作用;在养料供给和细菌产生的毒素共同作用下菌落的繁殖和生长;狐狸吃兔子,兔子吃青草等等;所有这些现象遵循一些彼此非常相似的方程式,这就是为什么我们要这样详细地研究机械振子的原因。这些方程称为常系数线性微分方程。一个常系数线性微分方程包含几项之和,每一项都是因变量对自变量的微商再乘以某一个常数。如

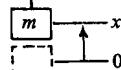
$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (21.1)$$

称为 n 阶常系数线性微分方程(每一个 a_i 都是常数)。

§ 21-2 谐 振 子

遵循常系数线性微分方程的最简单的力学系统大概要算是挂在弹簧上的一个具有质量的物体的运动:先是弹簧伸长以和重力平衡,待其达到平衡后,我们来讨论物体离开其平衡位置的垂直位移(图 21-1)。我们称这个向上的位移为 x ,并假设弹簧是完全线性的,因此,当弹簧伸长时,弹簧往回拉的力严格地正比于它的伸长的量。即力为 $-kx$ (负号提醒我们

这个力是往回拉的)。这样,质量乘加速度应等于 $-kx$



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (21.2)$$

为了简单起见,假设碰巧(或改变时间的量度单位)比值 $k/m = 1$ 。我们先来研究方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -x, \quad (21.3)$$

图 21-1 挂在
弹簧上的物
体:谐振子的
一个简单例子

然后再回过头来研究明显含有 k 和 m 的式(21.2)。

我们已经对式(21.3)作过详细的数值分析;在最初引进力学课题时,为了寻求运动规律,我们解过这个方程[见式(9.12)]。利用数值积分,我们得出了一条曲线(图 9-4),该曲线表明,假如质量为 m 的物体在开始时就有位移,但处于静止状态,它将向下运动并通过零点;当时我们没有进一步讨论下去,但我们当然知道它一定在继续上下运动——即作振动。当我们对这个运动进行数值计算时,曾发现,在 $t = 1.570$ 时它通过平衡点。而整个周期是这个量的四倍,即 $t_0 = 6.28$ “秒”。这还是在我们对微积分不怎么理解的时候,用数值计算得出的。同时,我们设想数学系已经发表了一个函数,它的两次微商等于它本身再加上一个负号(当然也有直接得出这个函数的方法,但是这些方法比已经知道了答案再来讨论要复杂得多)。这个函数就是 $x = \cos t$ 。对此式求微分得出: $dx/dt = -\sin t$ 和 $d^2 x/dt^2 = -\cos t = -x$ 。函数 $x = \cos t$ 在 $t = 0$ 时从 $x = 1$ 开始,也没有初速度;这就是我们以前进行数值计算时的初始状态。现在知道了函数 $x = \cos t$, 我们就能算出通过 $x = 0$ 处的时间的准确值。答案是 $t = \pi/2$, 即 1.571 08, 由于数值计算有误差,所以我们以前得出的最后一位数字是错的,但它是非常接近的!

现在进一步研究原来的问题,我们把时间的单位恢复为真正的秒。这时方程的解又是什么呢?首先,我们也许会认为可以用 $\cos t$ 乘上某个量的形式引入常数 k 和 m 。因此,我们来试一下方程式 $x = A \cos t$;于是得到 $dx/dt = -A \sin t$ 和 $d^2 x/dt^2 = -A \cos t = -x$ 。令人惊讶的是我们发现,我们并没有解出式(21.2),而是又一次得到了式(21.3)。这个事实说明了线性微分方程的一个极其重要的性质:如果用任意常数乘方程的一个解,所得结果仍是方程的解。关于这一点的数学含义是很清楚的。假如 x 是一个解,如果在方程两边同时乘上 A ,可以看到所有微商也同样乘上了 A ,所以 Ax 就像 x 一样正好是原方程的解。它的物理含义如下:假如我们在弹簧上挂上一个重物,并把它拉下两倍远的距离,则作用力就为两倍,由此产生的加速度也为两倍,在某一给定时间内得到的速度也为两倍,在给定的时间内走过的距离也为两倍;但是它回到原点要走的距离也是两倍,因为它被拉下了两倍。因此,它回到原点所花的时间是一样的,与初始位移无关。换句话说,对于遵循线性方程的运动来说,不管运动有多“强”,都具有同样的时间图像。

上面的做法是错误的,它仅仅告诉我们线性方程的解乘任意常数后,仍满足同样的方程,而不是另一个方程。经过小小的挫折和一番尝试后,我们发现要得到 x 项前有不同系数的方程,必须改变时间的标度,换句话说,式(21.2)的解应取如下的形式

$$x = \cos \omega_0 t. \quad (21.4)$$

(必须注意,这里的 ω_0 不是旋转物体的角速度,但是,如果不准用同一个字母表示一个以上

事物的话,字母就不够用了。)在 ω 下角写一个“0”的原因是因为不久我们将要遇到更多的 ω ;我们记住 ω_0 与这个振子的固有运动有关。现在来试一下式(21.4),这次比较成功,因为 $dx/dt = -\omega_0 \sin \omega_0 t$ 及 $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 x$ 。这样,终于解出了我们真正要解的方程。若取 $\omega_0^2 = k/m$,那么方程式 $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 x$ 就和式(21.2)相同。

接下来我们要研究的是 ω_0 的物理意义,我们知道,当角度改变 2π 时,余弦函数就自行重复,所以,当“角度”改变 2π 时, $x = \cos \omega_0 t$ 将重复原来的运动,它将经历一个完整的循环。通常把 $\omega_0 t$ 这个量称为运动的相位。要使 $\omega_0 t$ 改变 2π ,时间必须改变一个量 t_0 , t_0 就叫做一次完全振动的周期;显然, t_0 必须满足 $\omega_0 t_0 = 2\pi$ 。这就是说, $\omega_0 t_0$ 应该是振动一周的角度,如果使 t 增加 t_0 ,相位就增加 2π ,各个量都将自行重复。因此

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (21.5)$$

由此可见,物体的质量越大,在弹簧上来回振动一次所花的时间就越长。这是因为它有更大的惯性,所以当作用力相同时,要花较长的时间才能使它运动。另外,如果弹簧的弹性越强,它就运动得越快,因此得出:弹簧的弹性越强,周期就越短。

必须注意,挂在弹簧上的物体的振动周期与它的初始运动状态以及弹簧被拉下的长度都毫无关系。运动方程式(21.2)能确定周期,但不能确定振幅。实际上,振幅是由我们如何放开物体,即由所谓初始条件或起始条件来决定的。

实际上,我们还没有真正找到方程式(21.2)的最一般的可能解。它还有别的解。其原因很清楚:因为 $x = a \cos \omega_0 t$ 所概括的情况都是以一定的初始位移而无初速度开始的运动。但是,物体从 $x = 0$ 处开始振动是可能的,例如,我们可以冲击它一下,使它在 $t = 0$ 时具有一定的速度。这种运动不能用余弦表示,而要用正弦来表示。换个方式讲,假如 $x = \cos \omega_0 t$ 是一个解,那么如果我们在某一时刻(可以把它叫做 $t = 0$)突然走进房间,正好看到物体通过 $x = 0$ 处,它将照样运动下去,这种情况难道不是明显存在的吗?因此, $x = \cos \omega_0 t$ 不可能是最一般的解;应该说时间的起点必须是可以移动的。例如,我们可以把解写成这样的形式: $x = a \cos \omega_0(t - t_1)$, 其中 t_1 是某一常数。这相当于把时间的起点移到某一新的时刻。进一步,我们可以展开下式

$$\cos(\omega_0 t + \Delta) = \cos \omega_0 t \cos \Delta - \sin \omega_0 t \sin \Delta,$$

并写成

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

其中 $A = a \cos \Delta$, 而 $B = -a \sin \Delta$ 。这些形式中的任何一个都是描写式(21.2)完整的通解的可能形式:即微分方程 $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 x$ 的每一个解都可以写成

$$(a) x = a \cos \omega_0(t - t_1)$$

或

$$(b) x = a \cos(\omega_0 t + \Delta) \quad (21.6)$$

或

$$(c) x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

式(21.6)中的一些量的名称如下: ω_0 称为角频率;它是 1 s 内相位变化的弧度数,由微分方程所决定。其他常数不是由方程式,而是由运动的初始条件来决定的。其中 a 表征物

体能达到的最大位移,称为振幅。常数 Δ 有时称为振动的相位,但是这样的叫法有点混乱,因为有些人把 $\omega_0 t + \Delta$ 称为相位,并且说相位是随时间而变化的。我们或许可以说, Δ 是相对于某一确定零点的相移。让我们各有各的说法吧!不同的 Δ 对应于不同相位的运动,这是确定无疑的,至于是否要把 Δ 称作相位,这是另一个问题。

§ 21-3 简谐运动和圆周运动

方程式(21.2)的解中含有余弦项这一事实使我们想到:这种运动可能与圆有某种关系。当然这是人为的,因为实际上在直线运动中并不涉及到圆——物体仅作上下运动。不过可以指出,事实上在研究圆周运动力学的时候,我们就已解过这个微分方程。假如一个粒子以恒定的速度 v 沿一圆周运动,从圆心指向粒子的矢径所转过的角度的大小与时间成正比。如果令此角度为 $\theta = vt/R$ (图 21-2),那么 $d\theta/dt = \omega_0 = v/R$ 。我们知道还有一个向心加速度 $a = v^2/R = \omega_0^2 R$;同时我们还知道,在某一给定时刻的位置 x 是圆的半径乘 $\cos \theta$,位置 y 是半径乘以 $\sin \theta$

$$x = R \cos \theta, y = R \sin \theta.$$

那么加速度将怎样呢?加速度的 x 分量 $d^2 x/dt^2$ 是什么?我们已经用几何方法得出:它等于加速度的大小乘投影角的余弦,再加上负号,因为它是指向圆心的

$$a_x = -a \cos \theta = -\omega_0^2 R \cos \theta = -\omega_0^2 x. \quad (21.7)$$

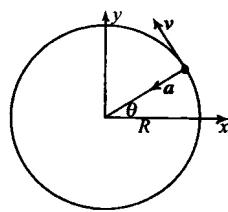


图 21-2 以恒速在一圆形轨道上运动的粒子

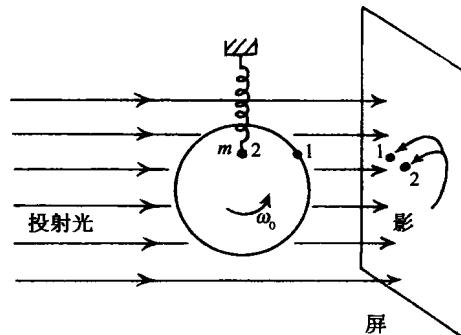


图 21-3 演示简谐运动和匀速圆周运动之间等同性的实验

换句话说,当一个粒子作圆周运动时,它的运动的水平分量具有的加速度与离圆心的水平位移成正比。显然,对于圆周运动也有解: $x = R \cos \omega_0 t$ 。式(21.7)与圆的半径无关,因此,当 ω_0 给定时,对于任何半径的圆都得到同样的方程。这样,我们就有种种理由预计,挂在弹簧上的物体的位移最终将与 $\cos \omega_0 t$ 成正比,而且实际上,与我们在观察以角速度 ω_0 作圆周运动的物体的位置的 x 分量时所看到的运动完全一样。为了验证这一点,我们可以设计一个实验来证明挂在弹簧上的物体的上下运动和一个点作圆周运动完全一样。在图 21-3 中,一束弧光把装在转动轴上的曲柄销和一个作垂直振动的物体的影子并排地投射到屏上。如果我们使物体在一个适当的时刻和适当的位置开始运动,并且小心地调节转轴的转速,使两者的频率相匹配,则每一个将严格地跟着另一个运动。此外,还可以验证前面用余弦函数求得

的数值解,看看是否很好地符合。

这里我们要指出,因为匀速圆周运动与上下振动在数学上有很密切的联系,假如把振动看成是某物作圆周运动的投影,我们就能用比较简单的方法来分析振动。换句话说,虽然距离 y 在振子问题中完全是多余的,我们仍然可以人为地给式(21.3)再补充一个用 y 表示的方程式,并把这两个方程放在一起。如果这样做,我们就可以用圆周运动来分析一维振子,这比解微分方程要容易得多。解这种问题的技巧是应用复数,在下一章中我们将介绍这个方法。

§ 21-4 初 始 条 件

现在我们来考虑是什么确定了常数 A 和 B ,或 a 和 Δ 的。当然,这些是由我们怎样使运动开始来决定的。如果我们仅仅是以一个很小的位移开始运动,这是振动中的一种类型;如果开始时有一初始位移,并在放手时再推一下,我们就得到另一种运动。常数 A 和 B ,或 a 和 Δ ,或用其他任何形式表达的常数,都是由运动的初始状态来决定的,而与这种情况下任何其他特征无关。这些就叫初始条件。我们希望把初始条件和这些常数联系起来。虽然采用式(21.6)中的任一形式都能做到这一点,不过用式(21.6c)最为方便。假如在 $t = 0$ 时,物体从初始位移 x_0 处以一定速度 v_0 开始运动,这是开始运动的最一般的方式(我们不能指定开始运动的加速度,因为在 x_0 给定之后,加速度要由弹簧的性质来决定)。现在来计算 A 和 B 。从 x 的方程式着手

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

因为后面还要用到速度,我们对 x 求微商,得到

$$v = -\omega_0 A \sin \omega_0 t + \omega_0 B \cos \omega_0 t.$$

这些式子对所有的 t 都适用,但是我们已经知道了在 $t = 0$ 时的 x 和 v 。因此,假如把 $t = 0$ 代入这些方程,在式子左边就得到 x_0 和 v_0 ,因为这是在 $t = 0$ 时的 x 和 v 的值。另外,我们知道 $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ 。因此得到

$$x_0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A$$

和

$$v_0 = \omega_0 A \cdot 0 + \omega_0 B \cdot 1 = \omega_0 B.$$

所以,对于这种特殊情况,我们求得

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

如果需要的话,我们就能从这些 A 和 B 的值求出 a 和 Δ 。

我们的解就到此为止,但是还有一个在物理上很有意义的问题,即能量守恒的问题需要验证。既然没有摩擦耗损,能量就应该守恒。应用公式

$$x = a \cos(\omega_0 t + \Delta),$$

于是

$$v = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \Delta).$$

现在来求动能 T 和势能 U 。势能在任何时刻都是 $kx^2/2$,这里 x 是位移, k 是弹性系数。如

果把上面 x 的式子代入, 则有

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t + \Delta).$$

显然, 势能不是常数; 它也不会是负值, 这是很自然的——弹簧上总是有些势能, 但是它的数值是随 x 而变化的。另一方面, 动能是 $mv^2/2$, 把 v 的式子代入, 就得到

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2a^2\sin^2(\omega_0 t + \Delta).$$

当 x 取最大值时, 动能为零, 因为这时的速度为零; 另一方面, 当 x 为零时, 动能取最大值, 因为这时速度最大。动能的这种变化正好与势能相反。但是, 总能量应为常数。注意到 $k = m\omega_0^2$, 我们就会看到

$$T + U = \frac{1}{2}m\omega_0^2a^2[\cos^2(\omega_0 t + \Delta) + \sin^2(\omega_0 t + \Delta)] = \frac{1}{2}m\omega_0^2a^2.$$

能量与振幅的平方有关; 如果振幅是原来的两倍, 那么振动的能量就是原来的四倍。势能的平均值是最大值的一半, 也就是总能量的一半, 同样, 动能的平均值也是总能量的一半。

§ 21-5 受迫振动

下面我们将要讨论受迫谐振子, 即有外策力作用的谐振子。此时的方程式如下

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t). \quad (21.8)$$

我们要求出在这种条件下会出现什么情况。外策力可以与时间有各种函数关系, 我们将要分析的第一个函数非常简单——假设力是振动的

$$F(t) = F_0 \cos \omega t. \quad (21.9)$$

然而必须注意, 这里的 ω 不一定等于 ω_0 。 ω 是在我们控制之下的, 可以用不同频率的外力迫使物体振动。我们试以作用力为式(21.9)的特殊力来解式(21.8)。式(21.8)的解是什么呢? 它的一个特解(更一般的情况将在以后讨论)是

$$x = C \cos \omega t, \quad (21.10)$$

其中常数 C 待确定。换句话说, 可以设想, 假如我们不断地来回推动物体, 物体必将与力同步地来回运动。是否如此, 我们总可试一下。因此, 把式(21.9)和(21.10)代入式(21.8), 则得到

$$-m\omega^2 C \cos \omega t = -m\omega_0^2 C \cos \omega t + F_0 \cos \omega t, \quad (21.11)$$

其中也代入了 $k = m\omega_0^2$, 以便我们最后能更好地理解这个式子。现在, 因为各项中都有余弦因子, 可以消去, 这样就可以看出, 只要 C 取得适当, 式(21.10)确是一个解。 C 必须取为

$$C = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (21.12)$$

这就表明, 质量为 m 的物体以与力相同的频率振动, 但是它的振幅不仅与力的频率有关, 而

且还与振子的固有运动频率有关。这就是说：首先，假如 ω 远小于 ω_0 ，则位移和力就在同一方向上。另一方面，如果使物体来回摆动得非常快， ω 大于谐振子的固有频率 ω_0 ，那么式(21.12)告诉我们， C 是负值（我们称 ω_0 为谐振子的固有频率， ω 为外加频率）。当频率很高时，分母变得很大，振幅也就不会太大。

显然，我们所得出的解只是物体在适当的初始条件下开始运动的解，否则还有一部分，这部分是转瞬即逝的，称为 $F(t)$ 的瞬变响应，式(21.10)和(21.12)则称为稳态响应。

根据我们的公式(21.12)，还会出现一个非常值得注意的情况：如果 ω 几乎和 ω_0 完全一样，那么 C 应趋于无穷大。因此，如果调整力的频率，使它与固有频率“合拍”，就应该得到很大的位移。凡是推过小孩荡秋千的人，对此都有体会。如果闭着眼睛，随便用某一速度乱推，秋千就不可能荡得很好。如果推得恰到好处，秋千就能荡得很高，但是，如果推得不合适时，在应该拉的时候，你反而去推，等等，它就荡不起来。

如果使 ω 严格等于 ω_0 ，我们发现它应以无限大的振幅振荡，这显然是不可能的。其原因是方程式有问题，式(21.8)没有把一些实际存在的摩擦力以及其他力考虑进去。因此，由于某种原因振幅不会达到无限大；它可能是弹簧的断裂！

第 22 章 代 数 学

§ 22-1 加 法 和 乘 法

在研究振动系统时,我们将有机会用到一个在全部数学中最值得注意,而且几乎令人惊奇的公式。从物理学家的观点来说,可以在二三分钟内写出这个公式,然后应用下去。但是科学不仅具有它的实际用途,而且也是一种理智上的享受。因此,对于这种令人惊异的珍宝,我们不是只花几分钟时间写出算了事,而是围绕这个珍宝精心设计出一个数学分支,这个数学分支就称为初等代数学。

也许你要问,“在物理课上,讲数学干什么?”可能有几个原因:首先,当然数学是一种重要的工具,但这只能成为我们花上两分钟写出公式的原因。另一方面,在理论物理中,我们发现所有定律都能写成数学形式,从而使它们变得简单而优美。所以,从根本上说,为了了解自然界,就得对数学关系式有深刻的理解。但是,真正原因还在于研究这个课题本身就是一种乐趣,虽然我们人类把自然界划分为各种不同的领域,而且在不同的系科中设有不同的课程,但是这种划分完全是人为的,我们既然发现了这种理智上的乐趣,就应享受这种乐趣。

我们在这个时候更详细地来研究代数学,还有另一个原因;那就是尽管我们大多数人在高中学过代数,但那毕竟是第一次接触,所有的公式都是陌生的,学起来就像现在学物理一样吃力。经常回顾一下我们曾经学过的领域,看一下整个事物的概貌和图像,常常会引起我们的无穷的乐趣。也许有一天,数学系的人会用和我们说明在物理课上要学数学的同样方式,在他们的课程中开出一门力学课来。

我们将不去严格按照数学家的观点来讲代数学,因为数学家的主要兴趣是如何证明数学上的各种命题,并有多少假定是绝对必需的,那些则不需要。他们对已经证明的结果不那么感兴趣,我们则不然。例如,我们会发现毕达哥拉斯定理,即直角三角形两边平方之和等于斜边的平方是十分有趣的;这是一个很有意义的事实和一件奇妙而简单的事情,无需讨论它是怎样证明的、在证明过程中用到哪些公理,就可以正确判断它的价值。因此,本着同样的精神,如果可能,我们将定性地叙述初等代数体系。我们说初等代数,是因为存在着另一个称为现代代数的数学分支,在那里有些规律,如 $ab = ba$, 被抛弃了,它仍然称为代数,但我们不准备进行讨论。

我们将从中间开始讨论这门学科。假定大家已经知道了什么是整数,什么是零,以及把一个数增加一个单位是什么意思。你也许会说:“这不是中间!”但是,从数学观点来看,这确实是中间,因为我们还可以进一步追溯,为了导出整数的某些性质而叙述集合论。但是我们不向这个数理哲学和数理逻辑的方向探讨,而是向另一个假定我们已经知道整数是什么以及它是如何计算的方向去进行研究。

假如开始时有某一个整数 a , 我们一个单位接一个单位地共数了 b 次, 这样得到的一个

数,我们称之为 $a + b$,这就定义了整数的加法。

一经定义了加法,我们就能考虑下面的问题:假如开始时什么都没有,然后加上 a ,接连加 b 次,所得结果就叫整数的乘法,并称之为 b 乘 a 。

现在,我们也能进行连乘:假如开始时是 1,连续用 a 乘 b 次,我们称之为乘方或幂: a 的 b 次方即 a^b 。

根据这些定义,很容易证明,所有下述关系式都成立

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| (a) $a + b = b + a$, | (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$, |
| (c) $ab = ba$, | (d) $a(b + c) = ab + ac$, |
| (e) $(ab)c = a(bc)$, | (f) $(ab)^c = a^c b^c$, |
| (g) $a^b a^c = a^{(b+c)}$, | (h) $(a^b)^c = a^{(bc)}$, |
| (i) $a + 0 = a$, | (j) $a \cdot 1 = a$, |
| (k) $a^1 = a$. | |
- (22.1)

这些结果是众所周知的,我们只是把它们列出,不再多加说明。当然,1 和 0 具有一些特殊性质;例如 $a + 0 = a$, $a \times 1 = a$, a 的一次方还是 a 。

在上面的讨论中,我们还必须假定其他一些性质,如连续性和有序性,对这些性质是很难下定义的,这里就把它留给严格的理论去探讨吧!此外,我们写下的“法则”肯定太多了,其中有一些是可以从另一些推导出来的,但是我们不考虑这些了。

§ 22-2 逆 运 算

除了进行加法、乘法和幂的直接运算外,还有逆运算,其定义如下:设 a 和 c 为已知,我们要求出满足等式 $a + b = c$, $ab = c$, $b^a = c$ 这些方程的 b 的值。假如 $a + b = c$, b 就定义为 $c - a$,这就叫减法。称为除法的运算也很清楚:如果 $ab = c$, 则 $b = c/a$ 定义了除法——它是等式 $ab = c$ 的一个反过来的解。再如有一个幂 $b^a = c$, 我们要问“ b 是什么?”, b 称为 c 的 a 次方根: $b = \sqrt[a]{c}$ 。例如,假使问“什么整数自乘到 3 次幂等于 8?”答案是 8 的立方根,即 2。因为 b^a 和 a^b 不等,就有两个与幂有关的逆问题,另一个逆问题是:“2 的几次幂等于 8?”这叫取对数。如果 $a^b = c$, 我们写作 $b = \log_a c$ 。这种与其他运算相比,较为繁琐的表示方法并不意味着它已超出初等范围,至少对于整数来说是如此。虽然,对数在代数课程中出现较晚,实际上,它和开方问题一样简单,不过是同一代数方程的另一类解而已。直接运算和逆运算可归纳如下

- | | |
|-------------|-------------------|
| (a) 加法 | (a') 减法 |
| $a + b = c$ | $b = c - a$ |
| (b) 乘法 | (b') 除法 |
| $ab = c$ | $b = c/a$ |
| (c) 幂 | (c') 根 |
| $b^a = c$ | $b = \sqrt[a]{c}$ |
| (d) 幂 | (d') 对数 |
| $a^b = c$ | $b = \log_a c$ |
- (22.2)

这就是整个概念。这些关系式或法则对整数来说是正确的,因为它们是由加法、乘法与幂的定义推得的。我们打算讨论一下是否能使 a, b, c 所代表的客体的范围扩大,而又使它们同样遵循这些法则,虽然在那种情况下 $(a+b)$ 之类的运算已经不能直接应用,比方说通过加 1 或整数连乘等运算方式来定义了。

§ 22-3 抽象和推广

当我们用所有这些定义去解简单的代数方程时,很快就会发现下述这些不可解的问题。假使我们要解等式 $b = 3 - 5$,根据减法的定义,我们必须找一个数,加上 5 之后得到 3。当然,找不出这个数,因为我们只考虑正整数;这是一个不可解的问题。然而,有一个方法,这就是加以抽象和推广,这是一个伟大的设想。我们在包括整数和那些运算法则的整个代数结构中抽象出加法和乘法的原始定义,保留式(22.1)和式(22.2)的法则,并认为它们对更广泛的一类数一般也是正确的,尽管这些法则原来是从一小部分数(正数)中得出的。这样,不是用符号化的整数来定义法则,而是用法则作为符号的定义,从而使符号代表了更一般的数类。例如,只从运算法则出发,我们就能说明 $3 - 5 = 0 - 2$ 。实际上,不难证明,只要定义一组新的数列: $0-1, 0-2, 0-3, 0-4, \dots$, 并称之为负整数,我们就能做所有的减法。然后,我们也可以应用所有其他法则,如 $a(b+c) = ab+ac$ 等,来找出负整数相乘的法则,并将发现,实际上对负整数来说,所有法则仍和正整数相同。

于是,我们扩大了这些法则的适用范围,但符号的含义不同了。

人们不能说 -2 乘 5 的真正含义是把 5 连续相加 -2 次,这是毫无意义的。但尽管如此,根据这些法则所做的一切事情仍然都是正确的。

在取幂时出现了一个有趣的问题。假如我们希望找出 $a^{(3-5)}$ 的含义,我们只知道 $3 - 5$ 是方程式 $(3 - 5) + 5 = 3$ 的一个解。由于知道了这一点,也就知道了 $a^{(3-5)} \cdot a^5 = a^3$ 。因此,根据除法的定义, $a^{(3-5)} = a^3 / a^5$ 。稍加整理,就可简化成 $1/a^2$ 。因此,我们发现,负幂是正幂的倒数,但 $1/a^2$ 是一个没有意义的符号,因为假如 a 是一个正整数或负整数,它的平方大于 1,而我们仍然不知道 1 被大于 1 的数去除是什么意思!

前进!伟大的构思在于继续进行推广;当我们发现另一个不能解决的问题时,就延拓数的领域。考虑除法:我们找不出这样一个整数,即使是负整数,它等于 3 除以 5 所得出的结果。但是,如果假定所有的分数也满足这些法则,我们就能够讨论分数乘法和加法,而且一切运算都能像前面一样顺利进行。

再举一个幂的例子: $a^{3/5}$ 是什么? 我们只知道 $(3/5) \cdot 5 = 3$, 因为这是 $3/5$ 的定义。于是我们也可以知道 $(a^{(3/5)})^5 = a^{(3/5) \cdot 5} = a^3$, 因为这是法则之一。然后,根据根的定义,我们得出 $a^{(3/5)} = \sqrt[5]{a^3}$ 。

按照这种方式,利用运算法则本身来帮助我们下定义,我们就能够解释在各种符号中引进分数的含义——这些并不是任意的。值得注意的是所有这些法则对于正整数和负整数以及分数都同样适用!

我们继续进行推广。还有什么不能解的方程吗? 是的,还有。例如,下面一个方程就不能解: $b = 2^{1/2} = \sqrt{2}$, 找不到一个有理数(一个分数),它的平方等于 2。当然现在这个问题

是很容易回答的。我们懂得十进位制，因此不难理解可以用一个无穷尽的小数作为 2 的平方根的一种近似。在历史上，这个想法给古希腊人带来了很大困难。为了真正严格地对此下定义，就需要引进与连续性和有序性有关的内容，而在推广的过程中，这一点恰恰是最困难的一步。戴德金(Dedekind)正式和严格地解决了这个问题。但是，如果不考虑问题的数学严格性，也很容易理解我们意思是要找出一个近似的分数，或理想的分数数列（因为任何十进小数，在某一处中断的时候，肯定是一个有理数），这个数列一直继续下去，就越来越接近所要求的结果。我们所要讨论的问题到此已经足够了，它使我们能够处理无理数的问题，只要功夫深，我们就能计算像 2 的平方根之类的数，并准确到任何需要的精度。

§ 22-4 无理数的近似计算

下一个问题是研究幂为无理数的情形。例如，我们想定义 $10^{\sqrt{2}}$ 。在原则上答案是很简单的。假如我们把 2 的平方根近似计算到某一位小数，那么幂就成了有理数，我们利用上面的办法取这个近似根，就能得出 $10^{\sqrt{2}}$ 的近似值。然后，我们还可以多取几位小数（它仍为有理数），找出它相应的根，这是更高次方的根，因为分数的分母更大，这样就得到一个比较好的近似式。当然，这里包含要求出某种开很高次方的根，然而这项工作是相当困难的，那么，怎样来对付这个问题呢？

在计算平方根、立方根和其他低次方根时，我们可以采用一种算术方法，一位小数接着一位小数地求出根来。但是计算无理数幂以及随同出现的对数（逆问题）时，所需的劳动量极大，而且不能用简单的算术方法得出。因此，有人作了一些帮助我们计算这些幂的表——对数表或幂指数表，分别视表的制作方式而定。这仅仅是为了节省时间，如果我们要计算某个数的无理数幂，只要查一下表，而无需去计算它。当然，这种计算只是一个技术问题，但也是一个有意义的问题，而且具有重大的历史价值。首先，我们不仅要解 $x = 10^{\sqrt{2}}$ ，而且要解 $10^x = 2$ ，即 $x = \log_{10} 2$ 的问题。这不是一个对所得结果要定义一类新的数的问题，而仅仅是一个计算问题。答案就是一个普通的无理数，一个无穷尽的小数，而不是一类新的数。

现在我们就来讨论这类方程求解的问题。整个概念实际上是非常简单的。假如我们能计算 $10^1, 10^{4/10}, 10^{1/100}, 10^{4/1000}$ 等等，并把它们乘在一起，我们就能得到 $10^{1.414\dots}$ ，即 $10^{\sqrt{2}}$ ，这就是计算这类问题的一般想法。但是，代替计算 $10^{1/10}$ 等等，我们将计算 $10^{1/2}, 10^{1/4}$ 等等。在开始计算之前，应该解释一下，为什么用 10 做这么多工作，而不用其他数。当然，我们知道，对数表具有很大的实用价值，完全不限于开方的数学问题，因为对于任何底，都有

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c. \quad (22.3)$$

这个关系我们都很熟悉，只要有一张对数表，就可以用这个关系式来实际计算几个数相乘。唯一的问题是我们将取什么样的底 b 来进行计算？用什么作底都无关紧要，在任何时候都可应用同样的公式；如果我们采用某一特定底的对数，那么，只要改变一下尺度，即乘上一个因子就可以求得任何其他底的对数。假如用 61 乘等式(22.3)，这个等式仍然是千真万确的，又如果我们有一张以 b 为底的对数表，某个人用 61 去乘表上的所有数，这不会引起任何本质差别。假使我们已经知道以 b 为底的所有数的对数，也就是说，因为我们已经有了一个表，我们就能解方程 $b^a = c$ ，不管 c 取什么数值。现在的问题是要求出同一个数 c 对别的

底,比如说 x 的对数。我们想要解方程 $x^{a'} = c$ 。这是很容易的,因为我们总可以写出 $x = b^t$, 知道了 x 和 b , 就可以确定 t 。实际上, $t = \log_b x$ 。如果把 $x = b^t$ 代入前式, 再对 a' 求解, 我们看到 $(b^t)^{a'} = b^{ta'} = c$ 。换句话说, ta' 是以 b 为底的 c 的对数。这样 $a' = a/t$, 因而以 x 为底的对数正好等于一个常数 $1/t$ 乘以 b 为底的对数。因此, 只要乘上一个常数 $1/\log_b x$, 任何对数表就与其他底的对数表相等。这就允许我们选择一个特殊的底, 而为了方便起见, 我们就取 10 为底(可能有人还会提出这样的问题, 是否存在某一个自然数, 以它为底时, 所有事情会变得更简单一些, 以后我们会找出这个问题的答案。目前, 我们仅采用以 10 为底)。

现在就来看一看如何计算对数。开始时我们曾用尝试法来逐次计算 10 的平方根。其结果如表 22-1 所示。10 的幂指数列在第一行, 而 10^s 的值列在第三行。于是 $10^1 = 10$ 。10 的 $1/2$ 次方很容易得出, 因为这是 10 的平方根, 对计算任何一个数的平方根有一个众所周知的简单办法*。用这个办法得出的第一个平方根是 3.162 28。这有什么用呢? 它已经告诉我们一件事, 即如何求 $10^{0.5}$, 因此我们现在至少已经知道了一个对数。假如我们要想知道 3.162 28 的对数, 那么答案是接近 0.500 00。但是, 这还不够, 很清楚, 我们需要知道更多的知识。因此, 我们再次求平方根, 得出 $10^{1/4}$ 是 1.778 28。现在我们有了比以前更多的对数, 1.250 是 17.78 的对数。附带说一句, 如果碰巧有人问到 $10^{0.75}$, 这个值可以求出, 因为它就是 $10^{(0.5+0.25)}$, 因此, 它就是表中第二个数和第三个数的乘积。如果在第一行中 s 的数目足够多, 使得可以由它们构成几乎任何数, 那么在第三栏中取适当的数相乘后, 我们就能求出 10 的任何次幂。这就是我们的打算。这样, 我们依次求出了 10 个 10 的平方根, 这就是计算过程中的主要工作。

表 22-1 10 的逐次平方根

幂指数 s	1 024 s	10^s	$(10^s - 1)/s$
1	1 024	10.000 00	9.00
1/2	512	3.162 28	4.32
1/4	256	1.778 28	3.113
1/8	128	1.333 52	2.668
1/16	64	1.154 78	2.476
1/32	32	1.074 607	2.387 4
1/64	16	1.036 633	2.344 5
1/128	8	1.018 152	2.323 4 ²¹¹
1/256	4	1.009 035 0	2.313 0 ¹⁰⁴
1/512	2	1.004 507 3	2.307 7 ⁵³
1/1 024	1	1.002 251 1	2.305 1 ²⁶
$\Delta/1 024 (\Delta \rightarrow 0)$		$1 + .002 248 6\Delta$	$\leftarrow 2.302 5$

为什么我们不把表继续做下去, 以求得越来越精确的值呢? 因为我们开始注意到一些事情。当求 10 的一个非常小的幂时, 我们得到 1 加上一个很小的数值, 这个道理很清楚, 如

* 有一个确定的算术方法可以求出任何数 N 的平方根, 但是最简单的办法是选择某一个相当接近的数 a , 求出 N/a 及平均值 $a' = [a + (N/a)]/2$, 用这个平均值 a' 作为下一次选用的 a 值。收敛是很快的——每次有效数字的个数要加倍。

果要从 $10^{1/1000}$ 得到 10, 就必须取它的 1 000 次方, 因此, 我们最好不从一个太大的数入手, 它应该接近于 1。我们还注意到加在 1 后面的小数初看起来好像只是每次被 2 去除, 我们看到从 1.815 变成 0.903, 再变成 0.450, 0.225 等; 因此, 很清楚, 假如要求出下一个根, 我们将取 1.001 12 左右, 作为一种很好的近似。这里我们不是真正求出所有平方根, 而只是猜测最后的极限。我们取一个很小的分数 $\Delta/1024$ 作幂时, 当 Δ 接近于 0, 那么答案是什么呢? 当然, 它一定是某一个接近于 0.002 251 1 Δ 的数。它不严格等于 0.002 251 1 Δ , 然而, 利用下面的技巧, 可以得到一个更好的值: 从 10^s 中减去 1, 再用幂指数 s 去除。这应当把所有超过的数量修正到同一数值, 我们看到它们都近似相等。在表的上端, 它们并不相等, 但越到下面, 它们越接近一个常数。这个常数的值是什么? 我们再来看一看这个数列是怎么进行的, 它是如何随 s 而变化的。它的改变分别为 211, 104, 53, 26。很明显, 这些变化中的每一个量都非常接近前一个量的一半, 越到下面越是如此。因此, 如果继续下去, 下面的变化量应是 13, 7, 3, 2 和 1, 略有上下, 或总和为 26。因此, 只不过多出了 26, 这样, 我们就求出了真正的数目是 2.302 5(实际上, 以后我们会看到准确的数应是 2.302 6, 但是为了保持真实起见, 我们将不改动算术上的任何东西)。根据这张表, 通过把幂化为以 1024 为分母的分数的组合, 就能算出 10 的任何次幂。

我们来实际计算一个对数, 因为我们将采用的过程就是实际制作对数表的过程。运算程序如表 22-2 所示, 数值取自于表 22-1(第二和第三栏)。

表 22-2

对数的计算: $\log_{10} 2$

$$\begin{aligned} 2 \div 1.77828 &= 1.124682 \\ 1.124682 \div 1.074607 &= 1.046598, \text{ 等等} \\ \therefore 2 &= (1.77828)(1.074607)(1.036633)(1.0090350)(1.000573) \\ &= 10 \left[\frac{1}{1024} (256 + 32 + 16 + 4 + 0.254) \right]^* = 10 \left[\frac{308.254}{1024} \right] = 10^{0.30103} \\ \therefore \log_{10} 2 &= 0.30103. \end{aligned}$$

假设我们要求 2 的对数, 也就是要知道 10 的几次幂等于 2。能用 10 的 $1/2$ 次幂吗? 不能, 太大了。换句话说, 我们可以看出答案应比 $1/4$ 大, 而比 $1/2$ 小。让我们把因子 $10^{1/4}$ 去掉, 用 1.778...去除 2, 得到 1.124..., 等等。我们知道应从对数中减去 0.250 000。现在我们要求出 1.124... 的对数, 最后, 我们再加回 $1/4$, 即 $256/1024$ 。然后在表中找出刚好低于 1.124... 的数, 那是 1.074 607。所以我们再用 1.074 607 去除, 得 1.046 598。从这里, 我们发现 2 可以写成表 22-1 中如下几个数字的连乘积

$$2 = (1.77828)(1.074607)(1.036633)(1.0090350)(1.000573).$$

剩下来还有一个因子 (1.000 573), 自然, 它已超出了我们表中的范围。要求出这个因子的对数, 我们采用已有的结果 $10^{\Delta/1024} \approx 1 + 2.3025\Delta/1024$, 求得 $\Delta = 0.254$ 。因此, 我们的答案就是 10 的如下次幂: $(256 + 32 + 16 + 4 + 0.254)/1024$, 加起来就得到 $308.254/1024$ 。除得的结果是 0.301 03, 因此, 我们求出 $\log_{10} 2 = 0.30103$, 这正好精确到五位数字!

* 这里方括号内的数字应是 10 的幂。——译者注

这就是 1620 年哈利法克斯(Halifax)的布里格斯(Briggs)先生原来计算对数的方法。他说：“我连续计算了 10 的 54 个平方根。”我们知道他只是真正计算了前面 27 个，因为其余的可以利用 Δ 的技巧得出。他的工作包括计算了 27 次 10 的平方根，就次数来说，并不比我们做的 10 次超过很多。然而他的工作量要比我们的大得多，因为他计算到 16 位小数，而且在发表时，把结果减到 14 位小数，所以没有四舍五入的误差。他用这个方法列出了一个 14 位小数的对数表，这是十分冗长单调的工作。但是 300 年来所有的对数表都借用了布里格斯先生的表，只是减少了几位小数。直到现在，由于有了计算机，才有独立计算出来的新对数表。今天，利用某些级数的展开，已成为计算对数更有效的办法。

在上述过程中，我们发现了一些相当有趣的事情，即对于一个非常小的幂指数 ϵ 来说，我们可以很容易算出 10^ϵ ；通过单纯的数值分析，我们发现 $10^\epsilon = 1 + 2.3025\epsilon$ 。当然，这也意味着如果 n 非常小的话， $10^{n/2.3025} = 1 + n$ 。现在任何其他底的对数只是以 10 为底的对数的倍数。我们以 10 为底仅仅是由于我们有 10 个手指头，用在算术上(十进制)比较方便，但是假如我们要找出一个数学上自然的底，这就与人的手指头的数目毫无关系了，我们可以试用某种方便而自然的方式来改变对数的标度。人们已经采用的方法是利用 $2.3025\dots$ 去乘所有的以 10 为底的对数来重新定义对数。这相当于采用了另外的底，叫做自然底或以 e 为底。注意当 $n \rightarrow 0$ 时， $\log_e(1+n) \approx n$ ，或 $e^n \approx 1+n$ 。

很容易求出 $e:e = 10^{1/2.3025}$ 或 $10^{0.434294\dots}$ ，是一个无理数幂。我们那张 10 的逐次平方根表不仅可以用来计算对数，还能用来计算 10 的任何次幂，现在我们用它来计算这个自然底 e 。为了方便起见，我们把 $0.434294\dots$ 改写成 $444.73/1024$ 。这里， $444.73 = 256 + 128 + 32 + 16 + 8 + 4 + 0.73$ 。既然它是一个和的指数，因此 e 将是下面几个数的乘积

$$(1.77828)(1.33352)(1.074607)(1.036633)(1.018152)(1.009035)(1.001643) \\ = 2.7184.$$

(唯一的问题是最后一个数 0.73，表上没有，但是我们知道，假如 Δ 足够小，则结果是 $1 + 2.3025\Delta/1024$)。把各个数相乘就得到 2.7184(它应该是 2.7183，但这已经相当好了)。这个表提供了计算所有的无理数幂和无理数对数的方法。处理无理数时就可应用这个表。

§ 22-5 复 数

到目前为止，尽管做了上面的全部工作，我们仍不能解出所有的方程！例如， -1 的平方根是什么？假设我们要求出 $x^2 = -1$ 。没有一个有理数，一个无理数，或我们迄今所发现的任何一个数的平方等于 -1 。因此，我们又得把数推广到更为广泛的范畴。假设 $x^2 = -1$ 有一个特定的解，我们称之为 i ，根据定义， i 具有这种性质，它的平方等于 -1 。这几乎是我们对它所能讲的全部东西。当然，方程 $x^2 = -1$ 的根不只是这一个。有人会写出 i ，但别的人也可能说：“不，我宁愿写 $-i$ ，我的 i 是你的 i 的负值。”实际上这也正是一个解。由于 i 具有唯一的一个定义是 $i^2 = -1$ ，在我们所能写出的任何方程中，如果所有 i 都改变符号，则方程同样成立。这个过程称为取共轭复数。现在，我们可以根据所有的法则，把 i 依次递加，用其他数乘 i ，使 i 和其他数相加等等，以此来构成种种数。以这种方式得出的数，我们发现它们全部都可以写成 $p+iq$ 的形式，这里 p 和 q 称为实数，也就是直到现在为止我们曾定义过

的数。数 i 称为虚数单位。 i 的任何实数倍称为纯虚数。最一般的取 $p+iq$ 的形式的数 a 称为复数。应用过去的法则,比方说,把两个这样的数相乘,即 $(r+is)(p+iq)$, 不会出现任何差错。因而我们有

$$\begin{aligned}(r+is)(p+iq) &= rp + r(iq) + (is)p + (is)(iq) \\&= rp + i(rq) + i(sp) + (ii)(sq) \\&= (rp - sq) + i(rq + sp),\end{aligned}\tag{22.4}$$

因为 $i \cdot i = i^2 = -1$ 。所以,属于法则式(22.1)的所有数,一定具有这种数学形式。

现在,也许你还会说:“这样下去就没有底了! 我们定义了虚数的幂和所有其他数,但当我们把这一切都做完了之后,又会有人提出另一个不能解的问题,如 $x^6 + 3x^2 = -2$ 。于是,我们又得重新推广!”但是,结果表明,有了-1 平方根这个发明,任何代数方程都能解了!这是一个奇妙的事实,我们留给数学系的人去证明。证明非常漂亮,也非常有趣,但当然不是自明的。实际上,最自然的推测是我们必须一次又一次地发明。但最使人惊讶的是我们并不需要这样做。这是最后一次发明。在发明复数之后,我们发现,运算法则对复数仍然适用,我们不需要再发明新东西了。借助于这些数目有限的符号,我们能求出任何复数的复指数幂和能够解任何写成代数形式的方程。我们再也找不到新的数了。例如, i 的平方根具有确定的结果,它不是新的量;而 i^i 也是某一个量。我们现在就来讨论这一点。

我们已经讨论过乘法,加法也很容易;假如我们把两个复数相加, $(p+iq)+(r+is)$, 结果是 $(p+r)+i(q+s)$ 。现在,我们能做复数的加法和乘法了。但是,真正的问题当然在于计算复数的复指数幂。事实证明,这个问题实际上并不比计算实数的复指数幂困难。因此,现在我们着重研究计算 10 的复指数幂的问题,这不只是一个无理数幂,而且是 $10^{(r+is)}$ 。当然,在任何时候我们都要用到式(22.1)和(22.2)的法则。于是

$$10^{(r+is)} = 10^r \cdot 10^{is} \tag{22.5}$$

我们已经知道如何计算 10^r ,而且总可以把某个数和其他某个数相乘,因此问题仅在于计算 10^{is} 。我们令它为某一个复数 $x+iy$ 。于是问题成为,已知 s ,求出 x 和 y 。现在假如有

$$10^{is} = x + iy.$$

这个等式的共轭复数也一定成立,即有

$$10^{-is} = x - iy.$$

(这里我们看到,利用我们的法则,无需进行任何实际计算,就能推导出一些结果)。把两式相乘,就能推导出另一些有趣的结果

$$10^{is} \cdot 10^{-is} = 10^0 = 1 = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2. \tag{22.6}$$

由此可见,如果求出 x ,也就有了 y 。

现在的问题是如何计算 10 的一个虚指数幂。有什么窍门没有? 我们可以应用所有的法则,直到碰壁为止,但是这里有一条合理的途径:假如对任一特定的 s 我们能够计算,那么对所有其他的数我们也能计算。如果对某一个 s 我们知道了 10^{is} 的值,那么要求出与两倍 s 所对应的幂,可以把前一个数平方,依此类推。但是,即使对一个特殊的 s 值,我们怎样来

求 10^i 呢? 为此, 我们将再作一个补充假定, 它不完全属于所有其他法则的范畴, 但是它能导出一个合理的结果, 并帮助我们前进: 当幂很小时, 我们将认为, 只要 ϵ 很小, 不管是实数 ϵ 还是复数 ϵ , $10^\epsilon = 1 + 2.3025\epsilon$, 这个“定律”都正确。于是从这个定律是普遍正确的假定出发, 它告诉我们, 当 $s \rightarrow 0$ 时, $10^s = 1 + 2.3025 \cdot is$ 。因此, 我们确信当 s 很小时, 比如说 s 是 $i/1024$, 就能得到 10^i 的一个相当好的近似值。

现在, 我们来列出一个表, 根据这个表我们能够算出 10 的所有虚指数幂, 即算出 x 和 y 。具体过程如下: 开始的第一个幂是指数幂 $i/1024$, 我们认为它非常接近于 $(1 + 2.3025i)/1024$ 。这样, 我们在开始时有

$$10^{i/1024} = 1.0000 + 0.0022486i, \quad (22.7)$$

取这个数自乘, 我们就能得出更高一级的虚指数幂。实际上, 我们可以把计算对数表的步骤反过来, 计算式(22.7)的平方, 4 次方, 8 次方等, 从而建立表 22-3 中的值。我们发现一件有趣的事, x 的值开始时是正的, 然后转为负。等一会儿我们将稍微详细地研究这个问题。但首先我们非常想找出对于怎样的 s 值, 10^s 的实部为零。此时, y 值将是 i , 因此, 应该有 $10^{is} = i$, 或 $is = \log_{10} i$ 。作为应用这个表的一个例子, 就像前面计算 $\log_{10} 2$ 一样, 现在我们利用表 22-3 来计算 $\log_{10} i$ 。

表 22-3 $10^{i/1024} = 1 + 0.0022486i$ 的逐次平方值

幂指数 is	$1024s$	10^s
$i/1024$	1	$1.00000 + 0.00225i^*$
$i/512$	2	$1.00000 + 0.00450i$
$i/256$	4	$0.99996 + 0.00900i$
$i/128$	8	$0.99984 + 0.01800i$
$i/64$	16	$0.99936 + 0.03599i$
$i/32$	32	$0.99742 + 0.07193i$
$i/16$	64	$0.98967 + 0.14349i$
$i/8$	128	$0.95885 + 0.28402i$
$i/4$	256	$0.83872 + 0.54467i$
$i/2$	512	$0.40679 + 0.91365i$
$i/1$	1024	$-0.66928 + 0.74332i$

* 应该是 $0.0022486i$ 。

表 22-3 中的哪些数相乘才会得到一个纯虚数呢? 经过稍加采取尝试法之后, 我们发现, 要想最大程度地减小 x , 最好是用“128”乘“512”。相乘的结果是 $0.13056 + 0.99144i$ 。接着我们发现, 应该用一个数来乘这个结果, 这个数的虚部差不多等于我们想消去的实部的大小。因此, 我们选“64”, 它的 y 值是 0.14349 , 最接近 0.13056 。第二次乘的结果是 $-0.01350 + 0.99993i$ 。现在我们走过头了, 必须用 $0.99996 + 0.00900i$ 去除。我们该如何来做这一步呢? 通过改变 i 的符号, 用 $(0.99996 - 0.00900i)$ 去乘(假如 $x^2 + y^2 = 1$, 就能这样做)即可。继续这样做下去, 我们求出要给出 i 所需的 10 的整个幂数是

$$i(512 + 128 + 64 - 4 - 2 + 0.20)/1024, \quad \text{即 } 698.20i/1024.$$

如果 10 取这个指数幂, 就能得出 i 。因此, $\log_{10} i = 0.68226i$ 。

§ 22-6 虚 指 数

为了进一步研究取复数虚指数幂的问题, 我们来观察一下 10 的幂。为了进一步按照表 22-3 的方式来看一下其中的负号会出现什么情况, 我们逐次取 10 的幂, 但不是每次将幂增加一倍。这些都列在表 22-4 上, 其中我们取 $10^{i\theta}$, 并每次乘上 $10^{i\theta}$ 这个数。我们看到 x 不断减小, 经过 0, 又几乎达到 -1 (如果我们能够求出 $p = 10$ 和 $p = 11$ 之间的值, 那么很明显它就趋近于 -1), 接着又向回摆。 y 的值也是在来回变化。

在图 22-1 中, 黑点表示在表 22-4 中出现的数, 画出线来只是为了帮助你更加形象化。因此, 我们可以看到数 x 和 y 在振动; 10^i 在不断重复, 这是一个周期性变化的量, 这一点是相当容易解释的, 因为假如 10 的某次幂是 i , 那么它的 4 次方就是 i^2 的平方。这必将又是 $+1$, 因此, 既然 $10^{0.68i}$ 等于 i , 取它的 4 次方后, 我们发现 $10^{2.72i}$ 等于 $+1$ 。所以, 如果要求出 $10^{3.00i}$, 我们可以把它写成 $10^{2.72i}$ 乘 $10^{0.28i}$ 。换句话说, 它有一个周期, 并且不断重复出现。当然, 我们可以辨认这条曲线的形状像什么! 它们看上去就像正弦和余弦曲线, 我们暂且称它们为代数正弦和代数余弦。然而, 我们将不用 10 为底, 而是把它换成自然底, 这只是变一下水平标度; 因此, 我们用 t 来表示 $2.3025s$, 并写出 $10^i = e^{it}$, 这里 t 是一个实数。现在 $e^{it} = x + iy$, 我们将把此式写成 t 的代数余弦加上 i 乘 t 的代数正弦。即

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \quad (22.8)$$

$\cos t$ 和 $\sin t$ 有哪些性质呢? 首先, 比如说, 我们知道 $x^2 + y^2$ 必须等于 1; 这一点以前证明过, 这对以 e 为底和以 10 为底都同样正确。因此有 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ 。我们还知道, 当 t 很小时, $e^{it} = 1 + it$, 因此, $\cos t$ 接近于 1, 而 $\sin t$ 接近于 t , 如此等等, 这些从取虚指数幂得来的值得注意的函数的所有各种性质都和三角学中的正弦和余弦的性质相同。

表 22-4 $10^{i\theta}$ 的逐次幂

$p = -\text{指数} \cdot 8i$	$10^{ip/8}$	$p = -\text{指数} \cdot 8i$	$10^{ip/8}$
0	$1.000\ 00 + 0.000\ 00i$	10	$-0.965\ 96 + 0.258\ 80i$
1	$0.958\ 85 + 0.284\ 02i$	11	$-0.999\ 69 - 0.026\ 20i$
2	$0.838\ 67 + 0.544\ 65i$	12	$-0.951\ 04 - 0.309\ 05i$
3	$0.649\ 44 + 0.760\ 42i$	14	$-0.629\ 28 - 0.777\ 17i$
4	$0.406\ 72 + 0.913\ 56i$	16	$-0.104\ 47 - 0.994\ 53i$
5	$0.130\ 50 + 0.991\ 46i$	18	$+0.454\ 54 - 0.890\ 98i$
6	$-0.156\ 47 + 0.987\ 70i$	20	$+0.866\ 48 - 0.499\ 67i$
7	$-0.430\ 55 + 0.902\ 60i$	22	$+0.998\ 84 + 0.052\ 87i$
8	$-0.669\ 17 + 0.743\ 15i$	24	$+0.808\ 90 + 0.588\ 36i$
9	$-0.852\ 68 + 0.522\ 49i$		

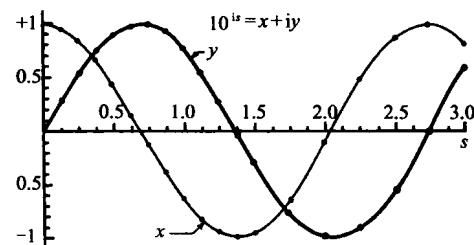


图 22-1

周期也一样吗？我们来求求看。 e 的几次方等于 i ？以 e 为底的 i 的对数是什么？前面已经得出，以 10 为底时它是 0.682 26i，但是当把对数的标量改为 e 时，我们必须乘上 2.302 5，由此得出 1.570 9。这就是“代数的 $\pi/2$ ”。但是，我们看到，它与正规的 $\pi/2$ 仅在最后一位数上不同，那当然是我们算术运算的误差所造成的！这样，我们用纯粹代数的方法创造了两个新的函数，余弦和正弦，它们属于代数学，而且也仅仅属于代数学。最后，我们终于领悟到这些所发现的函数当然也是几何学的。因此，我们看到在代数和几何之间最终是有联系的。

由此我们总结出数学上最值得注意的公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (22.9)$$

这就是我们的无价之宝！

我们可以用在一个平面上表示复数的办法把几何和代数联系起来，平面上一个点的水

平位置是 x ，垂直位置是 y （图 22-2）。我们用 $x + iy$ 表示任何复数。假如这个点的径向距离是 r ，角度为 θ ，根据代数定律， $x + iy$ 可写成 $re^{i\theta}$ 的形式，其中 x ， y ， r 和 θ 之间的几何关系如图所示。这就是代数和几何的统一。

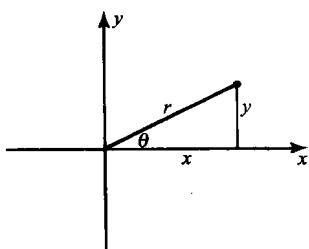


图 22-2 $x + iy = re^{i\theta}$

在本章开始时，我们只懂得整数的基本概念以及如何计算，还不大知道抽象过程和推广过程的威力。由于采用了一组代数“定律”，像式(22.1)所表示的数的性质和式(22.2)所表达的逆运算的定义，我们在这里不仅能依靠自己创造出一些数，而且能制作一些有用的东西，如对数表、指数表和三角函数表（因为这些函数就是实数的虚指数组），所有这些都只要用到 10 的 10 个逐次平方根而已！

第 23 章 共 振

§ 23-1 复数和简谐运动

本章我们将继续讨论谐振子,特别是受迫谐振子,但在分析时将采用一种新的技巧和方法。在前一章中我们引进了复数的概念,它具有实部和虚部,可以在一个图上表示,图的纵坐标表示虚部,横坐标表示实部。如果 a 是一个复数,就可写成 $a = a_r + ia_i$, 其中下标 r 表示 a 的实部, i 表示 a 的虚部。参看图 23-1, 我们看到一个复数 $a = x + iy$, 还可以写成 $x + iy = re^{i\theta}$ 的形式, 这里

$$r^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = a \cdot a^*.$$

(a 的共轭复数写成 a^* , 它由改变 a 中 i 的符号而得到)。因此, 我们可以把一个复数表示成两种形式: 一个实部加一个虚部, 或一个模 r 和一个叫做辐角的 θ 。给定 r 和 θ , x 和 y 显然是 $r\cos\theta$ 和 $r\sin\theta$, 反过来, 给定一个复数 $x + iy$, 则 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $\tan\theta = y/x$, 即虚部和实部之比。

我们通过下述技巧用复数来分析物理现象。我们以物体的振动为例子, 振动可以具有一个其大小等于某一个常数乘 $\cos\omega t$ 的策动力。现在可以把这种力 $F = F_0 \cos\omega t$ 写成复数 $F = F_0 e^{i\omega t}$ 的实部, 因为 $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ 。我们这样做的原因是因为用指数函数运算要比用余弦函数容易。所以整个技巧就是把振动函数表示成某个复函数的实部。我们这样定义的复数 F 不是实际的物理力, 因为在物理中没有一个力会是复数; 实际的力没有虚部, 只有实部。但是, 我们将要以 $F_0 e^{i\omega t}$ 表示“力”, 当然实际力是这个表示式的实部。

再来举一个例子。假设我们要表示一个力, 它是余弦波, 但相位滞后为 Δ 。当然, 这个力是 $F_0 e^{i(\omega t - \Delta)}$ 的实部, 但根据指数函数本身的性质, 我们可以写成 $e^{i(\omega t - \Delta)} = e^{i\omega t} e^{-i\Delta}$ 。由此可见, 指数的代数运算要比正弦和余弦的运算容易得多, 这就是我们选用复数的原因。我们以后将经常用这样的写法

$$F = F_0 e^{-i\Delta} e^{i\omega t} = \hat{F} e^{i\omega t}. \quad (23.1)$$

我们在 F 上写上小符号(\wedge)是为了提醒我们, 这个量是复数, 即在上式中

$$\hat{F} = F_0 e^{-i\Delta}.$$

现在我们用复数来解方程, 看看是否能解决实际问题。例如, 试解

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} \cos\omega t, \quad (23.2)$$

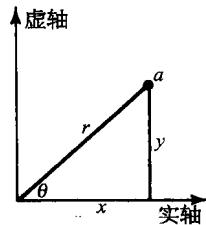


图 23-1 一个复数可以用“复平面”上的一个点来表示

这里 F 是策动振动的外力, x 是位移。我们假定 x 和 F 是真正的复数, 尽管这样做似乎有些荒谬, 但这仅仅是为了数学上的目的。这就是说, x 有一个实部和一个虚部乘 i , F 也有一个实部和一个虚部乘 i 。假如式(23.2)有一个复数解, 把这个复数代入方程, 就得

$$\frac{d^2(x_r + ix_i)}{dt^2} + \frac{k(x_r + ix_i)}{m} = \frac{F_r + iF_i}{m}$$

或 $\frac{d^2x_r}{dt^2} + \frac{kx_r}{m} + i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{kx_i}{m}\right) = \frac{F_r}{m} + \frac{iF_i}{m}.$

因为若两个复数相等, 则它们的实部必须相等, 并且虚部也必须相等, 由此可以推知, x 的实部满足只有实部的方程。然而, 我们必须强调指出, 这种把实部和虚部分开的方法不是普遍正确的, 只有对线性方程才适用, 亦即只对那些每一项中只出现 x 的一次幂或零次幂的方程才适用。例如, 假如在方程中有一项 λx^2 , 当把 $x_r + ix_i$ 代入之后, 将得到 $\lambda(x_r + ix_i)^2$, 但在分离实部和虚部时, 得到实部为 $\lambda(x_r^2 - x_i^2)$, 虚部为 $2i\lambda x_r x_i$ 。因此, 可以看到方程的实部不仅包含 λx_r^2 , 还有一 λx_i^2 。在这种情况下, 我们得到了一个与我们要解的方程不一样的方程, 在这个方程中混有 x_i , 而 x_i 是我们在分析问题时完全人为引进的一个量。

现在试用我们的新方法来解受迫振子的问题, 这个问题怎么解我们已经知道了。像先前那样, 我们可以解式(23.2), 但在这里我们打算解下面的方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \hat{F} e^{i\omega t} / m, \quad (23.3)$$

这里 $\hat{F} e^{i\omega t}$ 是一个复数。当然, x 也是复数, 但要记住一个规则: 取实部作为真正发生的解。我们先来求受迫振动式(23.3)的解, 以后再讨论其他解。受迫振动的解和所加的策动力具有相同的频率, 而且也具有某个振幅和相位, 因此, 它也可以用一个复数 \hat{x} 来表示, 它的大小表示 x 的摆幅, 它的相位表示时间上的延迟, 与力的相位含义相同。指数函数有一个很奇妙的特征, 即 $d(\hat{x} e^{i\omega t})/dt = i\omega \hat{x} e^{i\omega t}$ 。当对一个指数函数求微商时, 只要取指数作为一个简单的乘数。二级微商的情况也一样, 再取另一个 $i\omega$, 因此, 观察一下就很容易立即写出 \hat{x} 的方程: 每微分一次, 就简单地乘上 $i\omega$ (微分现在就像乘法一样容易! 在线性微分方程中应用指数的想法几乎与发明对数同样伟大, 在对数中乘法被加法所代替, 这里微分被乘法代替)。这样, 我们的方程变成

$$(i\omega)^2 \hat{x} + \frac{k\hat{x}}{m} = \frac{\hat{F}}{m}, \quad (23.4)$$

(我们已经消去了公因子 $e^{i\omega t}$)。看, 多么简单! 通过观察就立即把微分方程变成了纯粹的代数方程; 实际上就能得出解, 即

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}/m}{(k/m) - \omega^2},$$

因为 $(i\omega)^2 = -\omega^2$ 。把 $k/m = \omega_0^2$ 代入, 将此式略加简化, 即得

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (23.5)$$

当然, 这就是我们前面得出的解; 由于 $m(\omega_0^2 - \omega^2)$ 是实数, 故 \hat{F} 和 \hat{x} 的辐角相同(或者, 当

$\omega^2 > \omega_0^2$ 时, 可能相差 180°), 所以就像前面说的一样, \hat{x} 的模——它量度振动有多远——与 \hat{F} 的大小差一个因子 $1/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]$, 当 ω 接近 ω_0 时, 这个因子变得非常大。因此, 当适当选择外加频率 ω 时, 我们会得到一个非常强的响应。(假如在弦的一端悬挂一个摆, 用一个适当的频率使它摆动, 可以摆得很高。)

§ 23-2 有阻尼的受迫振子

上面, 我们用比较优美的数学技巧分析了振动。但是对于那种易于用其他方法解决的问题, 这个技巧的优越性是丝毫也显示不出来的。要显示它的优越性, 只有把它应用到较复杂的问题上。因此, 我们来解另一个更困难的、但也比前一个更具有现实意义的问题。式(23.5)告诉我们, 如果频率 ω 严格等于 ω_0 , 我们应得到一个无限大的响应。当然, 实际上, 不会有这种无限大的响应出现, 因为到目前为止, 我们略去了像摩擦等一类使响应受到限制的其他东西。所以让我们在方程式(23.2)上加一个摩擦项。

由于摩擦这一项的特征和复杂性, 这个问题通常是非常困难的。但是, 在很多情况下, 摩擦力与物体的运动速度成正比。一个物体在油或很浓的液体中作低速运动时的摩擦就是这种摩擦的一个例子。在物体静止时, 没有作用力, 但物体运动得越快, 油必须让物体尽快通过, 产生的阻力也就越大。因此, 除了式(23.2)中几项外, 我们认为还应加上一个与速度成正比的阻力项: $F_f = -c dx/dt$ 。把常数 c 改写为 m 乘 γ 可使方程略为简化。这样, 在我们的数学分析中就会方便一些。这和我们用 $m\omega_0^2$ 代替 k 使代数运算简化的技巧完全相同。这样, 方程变成

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F, \quad (23.6)$$

或取 $c = m\gamma$ 和 $k = m\omega_0^2$, 再用质量 m 去除式(23.6)就得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}. \quad (23.6a)$$

现在我们已经把方程写成了最便于求解的形式。如果 γ 非常小, 就表示摩擦很小; 如果 γ 很大, 则表示有很大的摩擦力。我们怎么来解这个新的线性微分方程呢? 假设, 策动力等于 $F_0 \cos(\omega t + \Delta)$; 我们可以把它代入式(23.6a)去试着求解, 但是我们不这样做而改用新的方法来解此方程。为此我们把 F 写成 $\hat{F} e^{i\omega t}$ 的实部, x 写成 $\hat{x} e^{i\omega t}$ 的实部, 并把它们代入方程(23.6a)中。其实, 连这种代换也不必要, 因为通过观察我们就能看出方程将变成

$$[(i\omega)^2 \hat{x} + \gamma(i\omega) \hat{x} + \omega_0^2 \hat{x}] e^{i\omega t} = (\hat{F}/m) e^{i\omega t}. \quad (23.7)$$

[事实上, 如果试用我们老的直接求解的方法去解方程式(23.6a), 我们就会真正体会到“复数法”的妙处]。两边除以 $e^{i\omega t}$, 就能得出对给定的力 \hat{F} 的响应 \hat{x} , 即

$$\hat{x} = \hat{F}/m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega). \quad (23.8)$$

于是又得出了 \hat{x} 等于 \hat{F} 乘上一个确定的因子。这个因子没有专门术语, 也没有专门符号, 但是为了讨论方便起见, 我们令它为 R

$$R = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)},$$

于是

$$\hat{x} = \hat{F}R. \quad (23.9)$$

(虽然字母 γ 和 ω_0 被广泛采用,但 R 没有特别名称)。这个因子 R 可以写成 $p + iq$, 或某个模 ρ 乘 $e^{i\theta}$ 。如果写成某个模乘 $e^{i\theta}$ 的形式,让我们来看看它表示什么意思。这里 $\hat{F} = F_0 e^{i\Delta}$, 而实际的力是 $F_0 e^{i\Delta} e^{i\omega t}$ 的实部,即 $F_0 \cos(\omega t + \Delta)$ 。其次,式(23.9)告诉我们 \hat{x} 等于 $\hat{F}R$ 。因此,作为 R 的另一个表示法,写出 $R = \rho e^{i\theta}$, 我们就有

$$\hat{x} = R\hat{F} = \rho e^{i\theta} F_0 e^{i\Delta} = \rho F_0 e^{i(\theta+\Delta)}.$$

最后,追溯得更远一些,我们看到作为复数 \hat{x} 的实数部分的物理量 x ,等于 $\rho F_0 e^{i(\theta+\Delta)} e^{i\omega t}$ 的实部。但 ρ 和 F_0 是实数,而 $e^{i(\theta+\Delta+\omega t)}$ 的实部就是 $\cos(\omega t + \Delta + \theta)$ 。因此

$$x = \rho F_0 \cos(\omega t + \Delta + \theta). \quad (23.10)$$

由此可知,响应的振幅是力 F 的幅值与某一放大因子 ρ 的乘积;它给出了振动的幅度。但是,它还告诉我们, x 的振动与力不是处于同一相位的,力的初始相位是 Δ ,而 x 则还要再移过一个额外的量 θ 。因此, ρ 和 θ 表示响应的大小和响应的相移。

现在,我们来计算 ρ 。我们知道一个复数模的平方等于这个复数乘它的共轭复数,即

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} = \frac{1}{m^2 [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}. \quad (23.11)$$

此外,相角 θ 也容易求出。因为如果写出

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \left(\frac{1}{\rho}\right) e^{-i\theta} = m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega),$$

我们看到

$$\tan \theta = -\gamma\omega / (\omega_0^2 - \omega^2). \quad (23.12)$$

故 θ 是负值,因为 $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ 。对所有的 ω ,所得的 θ 均为负值,这相应于位移 x 落后于力 F 。

图 23-2 表示 ρ^2 作为一个频率的函数变化的情况(ρ^2 在物理上比 ρ 更有用,因为 ρ^2 与振幅的平方成正比,或多或少与力加到振子上产生的能量成正比)。我们看到,若 γ 很小,则 $1/(\omega_0^2 - \omega^2)^2$ 是最重要的项,当 ω 等于 ω_0 时,响应趋于无限大。这里的“无限大”不是真正的无限大,因为如果 $\omega = \omega_0$,那么 $1/\gamma^2 \omega^2$ 依然存在。相移的变化如图 23-3 所示。

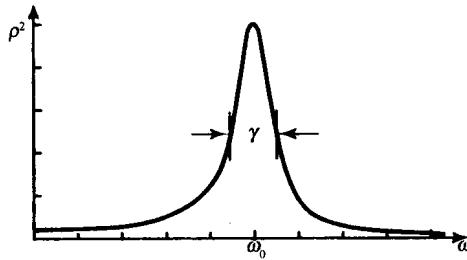


图 23-2 ρ^2 对 ω 的关系图

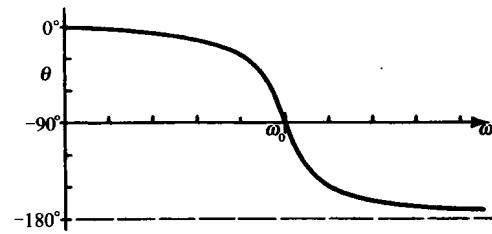


图 23-3 θ 对 ω 的关系图

在某些情况下, 我们得到一个与式(23.8)略有不同的公式, 它也称为“共振”公式, 人们可能会认为它代表另一种现象, 但实际上并非如此。原因是, 如果 γ 很小, 曲线的最有意义的部分是 $\omega = \omega_0$ 附近的部分, 因此我们可以用一个近似公式来代替式(23.8), 当 γ 很小且 ω 接近 ω_0 时, 这个近似公式是非常正确的。因为 $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$, 如果 ω 接近 ω_0 , 上式接近于 $2\omega_0(\omega_0 - \omega)$, 而 $\gamma\omega$ 又接近于 $\gamma\omega_0$ 。把这些关系用到式(23.8), 我们看到 $\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega + i\gamma/2)$, 因此

$$\hat{x} \approx \hat{F}/2m\omega_0(\omega_0 - \omega + i\gamma/2) \quad (\text{如果 } \gamma \ll \omega_0 \text{ 和 } \omega \approx \omega_0). \quad (23.13)$$

很容易求出 ρ^2 的相应公式。它是

$$\rho^2 \approx \frac{1}{4m^2\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4]}.$$

我们将留给读者去证明如下事实: 如果将 $\rho^2 - \omega$ 曲线的最大高度称为 1 个单位, 我们要求出在最大高度一半处曲线的宽度 $\Delta\omega$; 假定 γ 很小时, 曲线最大高度一半处的全宽度是 $\Delta\omega = \gamma$ 。当摩擦的影响越来越小时, 共振越来越尖锐。

有人用一个定义为 $Q = \omega_0/\gamma$ 的量 Q 作为宽度的另一种量度。共振越窄, Q 就越高; $Q = 1000$ 的意思是说, 这个共振的宽度只有频率的千分之一。在图 23-2 所示的共振曲线中 Q 是 5。

共振现象的重要性在于它在很多其他情况中也会出现, 因此, 本章的其余部分将描述其他一些共振情况。

§ 23-3 电 共 振

共振的最简单和最广泛的技术应用是在电学方面。在电学世界中, 有很多能够连接成电路的装置。通常所说的无源电路元件有三种主要类型, 虽然其中的每一种都混有少量的另外两种元件。在详细叙述它们之前, 我们必须注意由悬挂在弹簧一端的物体构成的机械振子的整个概念只是一种近似。所有的质量并不真正集中在“物体”上, 有些质量表现为弹簧的惯性。同样, 全部弹性也并不集中在“弹簧”上, 物体本身也有点弹性, 虽然它看来很像一个刚体, 但不是绝对刚性的, 当它上下运动时, 在弹簧拉力的作用下会有一点弯曲。在电学中情况也一样。作为一种近似, 我们可以将一些东西归结为“电路元件”, 并假定它们具有纯粹的理想特性。现在讨论这种近似还不是时候, 我们先简单地承认在目前的情况下它是正确的。

三种主要的电路元件如下: 第一种是电容器(图 23-4), 将两块金属平板用绝缘物质分开一个很小的距离就是一个例子。当金属板充电后, 在两块板之间就有一定的电压降, 亦即有一定的电位差。在端点 A 和 B 之间出现相同的电位差, 因为如果沿着相连的导线有任何电位差的话, 电荷会立即流动。因此, 如果两块板分别具有电荷 $+q$ 和 $-q$, 它们之间就有一定的电位差 V 。于是两块板之间将存在某一电场, 对此我们已经得出过一个公式(见第 13 章和第 14 章)

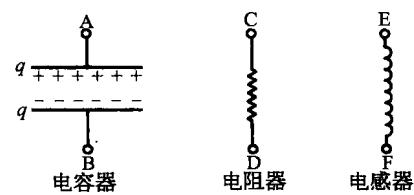


图 23-4 三个无源电路元件

$$V = \sigma d / \epsilon_0 = qd / \epsilon_0 A, \quad (23.14)$$

这里 d 是两块板的间距, A 是板的面积。注意, 电位差是电荷的线性函数。如果不是平行板, 而是任意形状的绝缘电极, 其电位差仍然严格地和电荷成正比, 不过比例常数可能不容易计算。但是, 我们需要知道的只是电容器两端的电位差与电荷成正比: $V = q/C$; 比例常数是 $1/C$, 这里的 C 就是物体的电容。

第二种电路元件叫做电阻器, 它起着阻碍电流流动的作用。已经证明金属导线和许多其他物质都以如下方式阻碍电荷流动: 如果某段物质的两端有一电压差, 就有电流 $I = dq/dt$, 它与电压差成正比

$$V = RI = R dq/dt. \quad (23.15)$$

比例系数叫做电阻 R 。可能你对这个关系式已经很熟悉, 它就是欧姆定律。

假如我们把电容器上的电荷 q 类比为力学系统的位移 x , 可以看到, 电流 $I = dq/dt$, 它相当于速度, $1/C$ 相当于弹性系数 k , R 相当于电阻系数 γ 。十分有趣的是还存在另一个与质量相对应的电路元件! 这是一个线圈, 当线圈内有电流时, 在它内部就建立了磁场。变化的磁场在线圈内产生电压, 电压的大小与 dI/dt 成正比(实际上, 这就是变压器的工作原理)。磁场与电流成正比, 在这种线圈内的(所谓)感生电压与电流的变化率成正比

$$V = L dI/dt = L d^2 q/dt^2. \quad (23.16)$$

系数 L 是自感, 它与机械振动回路系统中的质量相对应。

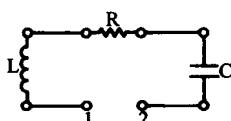


图 23-5 由电阻、电容和电感组成的振荡电路

假设我们把这三个电路元件串联成一个电路(图 23-5), 则加在从 1 到 2 整个回路两端的电压就是在回路中移动单位电荷所做的功, 它等于几部分电压之和: 在电感器两端的 $V_L = L d^2 q/dt^2$; 在电阻两端的 $V_R = R dq/dt$; 在电容器两端的 $V_C = q/C$ 。它们的和等于外加电压 V

$$L d^2 q/dt^2 + R dq/dt + q/C = V(t). \quad (23.17)$$

这个方程式与力学方程式(23.6)完全一样, 当然可以用完全相同的方式解。假设 $V(t)$ 是振荡的: 我们用一个纯正弦波振荡发生器来驱动电路。于是就能把 $V(t)$ 写成一个复数 \hat{V} , 只须理解为若要求真正的 V , 则最后必须乘上 $e^{i\omega t}$, 再取它的实部即可。同样, 电荷 q 也能这样分析, 于是完全和处理式(23.8)的方法一样, 我们写出相应的方程式: \hat{q} 的两次微商是 $(i\omega)^2 \hat{q}$, 一次微商是 $(i\omega) \hat{q}$ 。这样, 方程式(23.17)就变成

$$\left[L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C} \right] \hat{q} = \hat{V}$$

或

$$\hat{q} = \frac{\hat{V}}{L(i\omega)^2 + R(i\omega) + 1/C},$$

还可以把它写成如下形式

$$\hat{q} = \hat{V} / L(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega), \quad (23.18)$$

这里 $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $\gamma = R/L$ 。式(23.18)中的分母与力学的情况完全相同, 因而具有完全相同的共振性质! 电学和力学情况的对应关系列于表 23-1 中。

表 23-1

一般特征	力学性质	电学性质
自变量	时间(t)	时间(t)
因变量	位置(x)	电荷(q)
惯性	质量(m)	电感(L)
阻抗	曳力系数($c = \gamma m$)	电阻($R = \gamma L$)
刚性	刚性(k)	电容的倒数($1/C$)
共振频率	$\omega_0^2 = k/m$	$\omega_0^2 = 1/(LC)$
周期	$t_0 = 2\pi \sqrt{m/k}$	$t_0 = 2\pi \sqrt{LC}$
品质因素	$Q = \omega_0 / \gamma$	$Q = \omega_0 L/R$

我们必须指出一个小的技术性问题。在电学文献中，常采用不同的符号(从一个领域到另一个领域，课题实际上没有任何不同，但是书写符号的方式常常不同)。首先在电工中常用 j 代替 i 来表示 $\sqrt{-1}$ (这是因为 i 必须用以表示电流)。此外，工程师喜欢利用 \hat{V} 和 \hat{I} 的关系式，而不大采用 \hat{V} 和 \hat{q} 的关系式，这是因为他们对前一种方式更习惯一些。因为 $\hat{I} = d\hat{q}/dt = i\omega \hat{q}$ ，所以我们可以用 $\hat{I}/i\omega$ 代替 \hat{q} ，并得出

$$\hat{V} = \left(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C} \right) \hat{I} = \hat{Z} \hat{I}. \quad (23.19)$$

另一个做法是改写式(23.17)，使它变成更熟悉的形式。即可写为

$$\frac{LdI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t Idt = V(t). \quad (23.20)$$

无论如何，我们找到的电压 \hat{V} 和电流 \hat{I} 之间的关系式(23.19)，除了被 $i\omega$ 去除之外，和式(23.18)完全一样，这样就得出了式(23.19)。量 $R + i\omega L + 1/(i\omega C)$ 是一个复数，在电工上应用得很多，以致有一个名称，叫做复阻抗 \hat{Z} 。于是我们就可以写成 $\hat{V} = \hat{Z} \hat{I}$ 。工程师喜欢这样做的原因是因为在他们年轻时，只知道电阻和直流电，对于电阻他们学过 $V = RI$ 。现在，他们受到更多的教育，知道了交流电路，然而还想看到同样的等式。因此，他们写出 $\hat{V} = \hat{Z} \hat{I}$ ，唯一的区别是电阻被一个更复杂的复数的量所代替。因此，他们坚持不能采用世界上其他人都采用的表示虚数的形式，而要用一个 j 来表示，但奇怪的是他们并没有坚持把字母 Z 也写成 R (于是在讨论电流密度时，他们就遇到了麻烦，因为电流密度也用 j 表示。科学的困难在很大的程度上不是来自于自然界，而是来自于符号、单位和所有其他人们所发明的人为事物造成的困难)！

§ 23-4 自然界中的共振现象

虽然我们详细讨论的是电学的情况，但也能够在很多领域里举出一个又一个例子，用来说明其共振方程的确是何等的一致。在自然界中存在着很多发生“振动”和共振的情况。在前面某一章中我们曾讲起过这类情况，现在我们来加以证明。如果我们在书房里踱步，从书架上取出一些书，去找找看有没有一个来自相同的方程，且能画出像图 23-2 那样曲线的例子，我们会发现什么呢？只要查阅五六本书，就能找到一系列显示共振的现象，这些少量的现象足够说明共振所涉及的范围之广。

最初两个例子来自于力学,第一个现象是大规模的,即整个地球的大气层。我们认为整

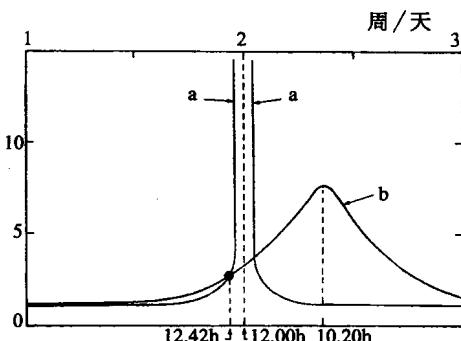


图 23-6 大气层对外来激发的响应,如果大气层 S_2 -潮汐是由万有引力引起的,a 就是这种条件下所需的响应;峰值的放大率是 100 : 1。b 是从 M_2 -潮汐观察的倍数和相位导出的

(转载自 Munk W H, MacDonald G J F. *Rotation of the Earth*. London: Cambridge University Press, 1960)

个数得出两个数,再从那两个数画出一条漂亮的曲线,它当然正好通过决定曲线的那个点。除非我们能够测量某些其他量,否则这条曲线是毫无用处的,而对地球物理学来说,这通常又是非常困难的。但在这个特殊情况下,可以从理论上证明,一定还有与固有频率 ω_0 同样计时的东西:那就是,如果能扰动大气层,它就会以频率 ω_0 振动。1883 年曾发生过一次激烈的扰动,喀拉喀托^{*} 火山爆发时,将半个岛屿掀掉了,在大气中造成了一次如此可怕的爆炸,使得能够测量出大气的振动周期。得出的结果是 10.5 h,从图 23-6 得出的 ω_0 是 10.20 h,于是我们至少找到了一个验证对大气潮汐理解真实性的数据。

下面我们将研究小尺度的机械振动。这次我们取氯化钠晶体,在前面的一章中我们曾描述过,氯化钠晶体中,钠离子和氯离子是一个接一个地排列着的。钠离子带正电,氯离子带负电。现在有可能存在一种有趣的振动。假定我们把所有的正电荷赶到右边,把所有的负电荷赶到左边,然后任其运动,这样钠晶格相对氯晶格就会来回振动。怎样才能造成这种情况呢? 这很容易,如果在晶体上外加一个电场,电场会把正电荷推向一边,而把负电荷推向另一边。因此,通过引进外加电场,我们或许能够使晶体振动。但是所要求的电场频率很高,它相当于红外辐射! 因此,我们可以通过测量氯化钠对红外光的吸收来找出一条共振曲线。图 23-7 所示就是这样的一条曲线。横坐标不是频率,而是波长,但这仅仅是一个技术问题,因为对于波来说,频率和波长之间有确定的关系,因而它实际上也是一种频率的标度,而某一个确定频率与共振频率相对应。

但是,宽度有多大? 由什么来确定宽度呢? 在很多情况下,曲线上所看到的宽度实际上并不是理论上应有的固有宽度 γ 。为什么会有较理论曲线更宽的曲线呢? 这有两个原因。

* 靠近印度尼西亚爪哇岛西端的海中火山。——译者注

个地球由大气层均匀地包围着,如果大气被月亮吸引到一边,或更确切地说,被拉扁成双潮汐,那么让它这样下去,它就会继续上下涨落,这就是一个振子。这个振子是由月亮驱动的,实际上月亮绕着地球转动,策动力的任何一个分量,比如说,在 x 方向上的分量,是一个余弦分量,因此地球的大气层对月亮的潮汐拉力的响应是一个振子的响应。预期的大气响应如图 23-6 中曲线 b 所示(曲线 a 是所引的那本书中讨论过的另一条理论曲线)。现在,人们可能会认为,在这条共振曲线上只有一点,因为与在月亮作用下的地球的转动相应的频率只有一个,它转动的周期为 12.42 h—12 h 是由于地球的转动(潮汐是两个隆起部分)。由于月亮也在转动,还要加上一点。但是从大气潮汐的大小和相位(即推迟的数量)来看,我们能同时得出 ρ 和 θ 。由此又可得出 ω_0 和 γ ,从而画出整条曲线! 这是一个非常蹩脚的科学例子。我们从两个

第一,如果晶体的某个区域发生应变,则晶体的不同部分可能不都具有相同的频率,因此,在这些区域中振动频率与其他区域相比略有不同,这时我们就具有许多彼此靠得很近的共振曲线,于是,看上去曲线就比较宽。第二个原因是这样的:或许我们不能足够精确地测量出频率——假如我们把分光计的狭缝开得相当宽,尽管我们认为只有一种频率,实际上则有一个范围 $\Delta\omega$,于是我们并没有足够的分辨率去观察一条窄的曲线。因此,我们不能随便讲图 23-7 的宽度是否是自然的,还是由晶体中的不均匀性或分光计狭缝的一定宽度所引起的。

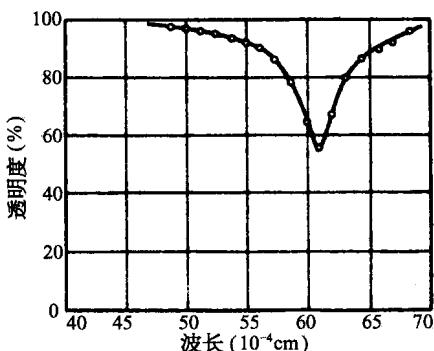


图 23-7 通过一个薄氯化钠膜($0.17 \mu\text{m}$)的红外辐射透射

(转载自 Barnes R B. *Z Physik*, 1932, **75**:723;
Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*.
New York: Wiley, 1956)

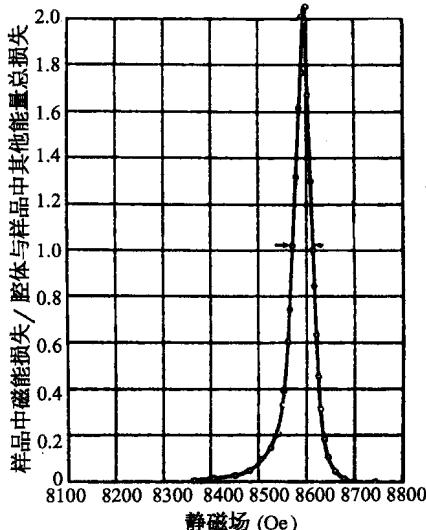


图 23-8 在顺磁有机化合物中,磁能损失与外加磁场强度的关系

(转载自 Holden A N, et al. *Phys Rev*,
1949, **75**:1614)

现在转而研究一个比较深奥的例子,这就是磁铁的振动。如果把一个带有南、北极性的磁铁放在一个恒定的磁场内,磁铁的 N 端将被推向一方,而 S 端则被推向另一方,一般说来有转矩作用在磁铁上,因此,它将在平衡位置附近振动,就像罗盘的指针那样。但是,我们所说的磁铁指的是原子。这些原子具有一个角动量,转矩并不产生沿着场的方向的简单运动,而显然会产生进动。现在,从旁边来观察时,可以看到任何一个分量都在“摆动”,我们可以扰动或驱动这种摆动,并测量吸收。图 23-8 中的曲线表示一个典型的这类共振曲线。这里所做的在技术上稍有差别。现在,用以驱动这种摆动的横向场的频率总是保持不变,虽然我们曾预料研究者们会改变它而画出曲线来。他们可以这样做,但是在技术上更容易做的是让频率 ω 固定,改变恒定磁场的强度,这相当于在我们的公式中改变 ω_0 。他们画出相对于 ω_0 的共振曲线。不管怎样,这是具有某一确定的 ω_0 和 γ 的典型共振。

现在我们再进一步讨论下去。下一个例子与原子核有关。原子核中的质子和中子以某种方式作振动,这可以用下面的实验来证实。我们用质子轰击一个 Li 原子,发现产生 γ 射线的某种反应,实际上是具有一个非常尖锐的极大的典型共振。但是,在图 23-9 中,我们看

到和其他情况有一个不同：水平标度不是频率，而是能量！原因是在量子力学中，经典能量的含义实际上与波振动的频率有关。如果我们分析某个在一般宏观物理学中与频率有关的事物时，我们发现在用原子物质做量子力学实验时，得到的是相应的作为能量函数的曲线。实际上，从某种意义上来说，这条曲线就是这种联系的一个证明。它表明频率和能量之间有某种深刻的内在联系，当然，事实上也是如此。

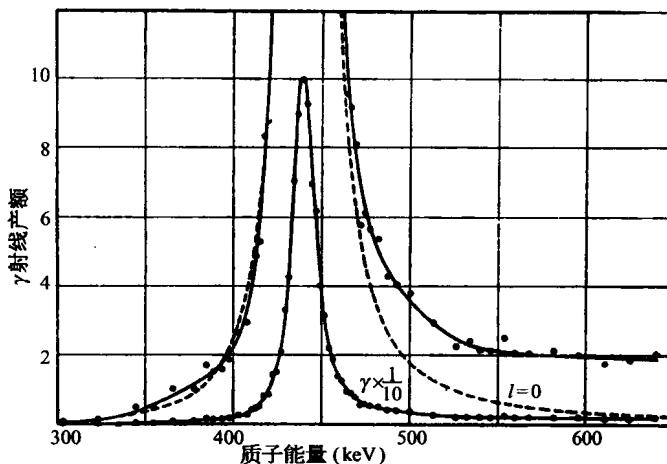


图 23-9 从 Li 原子中射出的 γ 射线强度与轰击质子能量的关系。虚线是对角动量 $l = 0$ 的质子进行计算时得出的理论曲线

(转载自 Bonner T W, Evans J E. *Phys Rev*, 1948, 73:666)

现在我们再来研究另一个与原子核能级有关的例子，不过它是很窄很窄的。在图 23-10 中， ω_0 相当于 100 000 eV 的能量，而宽度 γ 大致为 10^{-5} eV；换句话说， Q 为 10^{10} ！当这条曲线被测定时，它是所有已经测定的振子中 Q 值最大的。这是由穆斯堡尔博士测出的，这奠定了他获得诺贝尔奖的基础。在这里水平标度是速度，因为要获得相差很小的频率的技术是采用源相对于吸收体运动的多普勒效应。当我们知道所包含的速度只有每秒几厘米时，人们就会感到这个实验是多么精巧！在图中的实际标度下，零频率相当于左边约 10^{10} cm 处的一个点——有些超出纸面了！

最后，我们来看一下某一期《物理评论》(*Physics Review*)杂志，比方说是 1962 年 1 月 1 日出版的那一期，我们能看到共振曲线吗？每期中都有这条曲线，图 23-11 就是这一期里的共振曲线。这条曲线是很有趣的。这种共振是在一些奇异粒子间的某种反应中发现的，在这个反应中一个 K^- 介子和一个质子相互作用。这种共振是通过观察放出来的某种粒子数目的多少来探测的，它依赖于放出粒子的数目和放出的是什么粒子，我们得到不同的曲线，但是这些曲线有相同的形状，并且峰值出现在相同的能量处。因此，我们确认对 K^- 介子，在某确定能量时存在着共振。这可能意味着，有某种状态或条件相应于这种共振，把一个 K^- 和一个质子放在一起就能得到这种状态或条件。这是一种新的粒子或共振。今天，我们还不知道是否能称这样的突起部分为“粒子”，还是干脆就叫共振。当有一个非常尖锐的共振时，就相应于一个非常确定的能量，就好像有一个粒子以这种能量存在于自然界中一样。当共振变宽的时候，我们就不知道是否应该说存在一个寿命不长的粒子，或者仅仅说在反应

概率中存在着一个共振。在第2章中讲到粒子时,这一点已经提起过,但在写第2章时,还不知道这个共振,因此在我们的基本粒子表中还应该加上另一个粒子!

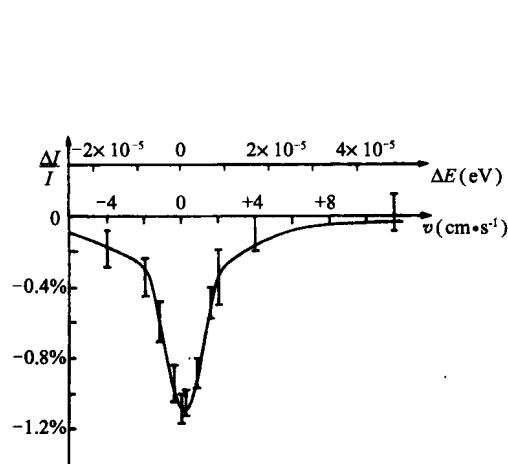


图 23-10
(承穆斯堡尔博士同意提供)

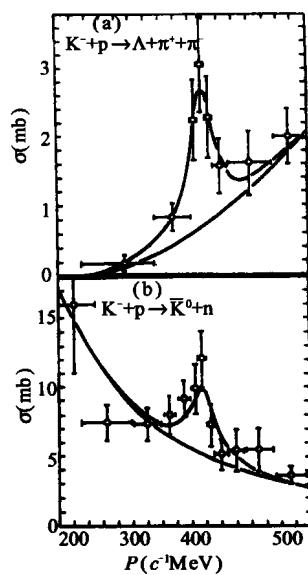


图 23-11 动量与反应截面的依赖关系
(a) $K^- + p \rightarrow \Delta + \pi^+ + \pi^-$ 和 (b) $K^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + n$ 。在 (a) 和 (b) 中下面的曲线代表假定的非共振背景,而上面的曲线是在背景上再叠加共振

(转载自 Ferro-Luzzi M, et al. Phys Rev Lett, 1962, 8:28)

第 24 章 瞬 变 态

§ 24-1 振子的能量

虽然本章的题目是“瞬变态”，但是从某种角度来看，本章的某些部分是上一章受迫振动的继续。受迫振动的特点之一是振动的能量，对此我们还没有讨论过。现在就来考虑这个问题。

一个机械振子的动能有多大？它与速度的平方成正比。现在我们谈到了一个重要问题。试考虑一个任意量 A ，它既可以是速度，也可以是我们要讨论的其他东西。当我们把 A 写成一个复数 $A = \hat{A} e^{i\omega t}$ 时，在物理世界中具有真实意义的 A 只是它的实部；因此，如果为了某种原因，我们要用 A 的平方时，把复数平方，然后取实部是不对的，因为一个复数平方的实部并不正好等于实部的平方，还包含有虚部。因此，当我们想要求出能量时，我们得暂时丢开复数表示，先去看看它的实在内容是什么。

真实的物理量 A 是 $A_0 e^{i(\omega t + \Delta)}$ 的实部，即 $A = A_0 \cos(\omega t + \Delta)$ ，这里复数 \hat{A} 可写成 $A_0 e^{i\Delta}$ 。现在，这个真实的物理量的平方是 $A^2 = A_0^2 \cos^2(\omega t + \Delta)$ 。因此，这个量的平方像余弦的平方一样，在最大值和零之间来回变化。余弦平方的最大值是 1，最小值是 0，它的平均值是 $1/2$ 。

在很多情况下，我们并不对振动过程中任何特定时刻的能量感兴趣。在大量的应用中，我们只需要 A^2 的平均值——即在一段比振动周期大得多的时间内 A 平方的平均值。在这些情况下，可用余弦平方的平均值，因此，我们有如下的定理：如果用一个复数表示 A ，那么 A^2 的平均值等于 $A_0^2 / 2$ 。这里 A_0^2 是复数 \hat{A} 的模的平方（它可以写成很多形式——有些人喜欢写 $|\hat{A}|^2$ ；也有些人写 $\hat{A} \hat{A}^*$ ，即 \hat{A} 乘它的共轭复数）。我们将要多次用到这个定理。

现在来考虑受迫振子的能量。受迫振子的方程是

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma m \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F(t). \quad (24.1)$$

在我们的问题中，当然， $F(t)$ 是 t 的余弦函数。现在我们来分析一下这个问题：外力 F 做了多少功？每秒钟外力做的功，即功率，等于力乘速度（我们知道在时间 dt 内的元功是 $F dx$ ，功率是 $F dx/dt$ ），即

$$P = F \frac{dx}{dt} = m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + \omega_0^2 x \left(\frac{dx}{dt} \right) \right] + \gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (24.2)$$

但是，等式右端的前两项也可写成 $\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\frac{dx}{dt})^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right]$ ，只要对此式微分一下就能立即证实。也就是说，在方括号里的表示式是另外容易理解的两项之和的微商——一项是运动的动能，另一项是弹簧的势能。我们把这个量称为储能，即贮藏在振动中的能量。假如振子作受迫振动，并已运动了很长时间后，我们要求多次振动的平均功率。从长时间来

看,储能不变——对它微商后得出的平均效果是零。换句话说,如果我们求功率的长时间平均值,则所有能量最终将被阻尼项 $\gamma m(dx/dt)^2$ 全部吸收。确定有些能量贮存在振动中,但是如果对多次振动取平均,它不随时间而变化。因此,平均功率 $\langle P \rangle$ 是

$$\langle P \rangle = \langle \gamma m(dx/dt)^2 \rangle. \quad (24.3)$$

用写成复数的方法和定理 $\langle A^2 \rangle = A_0^2 / 2$,我们可以求出这个平均功率。如果 $x = \hat{x} e^{i\omega t}$,那么 $dx/dt = i\omega \hat{x} e^{i\omega t}$ 。因此,在这些情况中,平均功率可以写成

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \gamma m \omega^2 x_0^2. \quad (24.4)$$

在电路的符号中, dx/dt 被电流 I (I 是 dq/dt ,这里 q 对应于 x)所代替,而 $m\gamma$ 则对应于电阻 R 。因此,能量耗损率——强迫力函数消耗的功率——是电路中的电阻乘电流平方的平均值

$$\langle P \rangle = R \langle I^2 \rangle = R \frac{1}{2} I_0^2. \quad (24.5)$$

当然,这个能量使电阻变热;它有时被称为热耗损或焦耳热。

另一个需要讨论的有意义的特点是贮存了多少能量。这与功率不同,因为虽然在开始时要用功率贮存一些能量,但是在这以后系统只在所具有的热耗损(电阻)的限度内继续吸收功率。在任何时刻,都有一定量的贮能,因此我们想计算一下平均贮能 $\langle E \rangle$ 。我们已经计算出 $(dx/dt)^2$ 的平均值,因此得出

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} m (\omega^2 + \omega_0^2) \frac{1}{2} x_0^2. \quad (24.6)$$

当一个振子非常有效,而且 ω 接近 ω_0 时,则 $|\hat{x}|$ 很大,贮能就很高——我们能从一个比较小的力得到较大的储能。力在引起振动时做了大量功,但此后为了保持振动稳定,它所要做的这一切就只是克服摩擦力。如果摩擦力很小,振子可以具有很大的能量,即使振动很强,能量的损失也很少。一个振子的效率可以由所贮存的能量与每振动一次力所做的功相比较来量度。

储能怎样与每振动一周力所做的功相比较呢?这称为系统的 Q 值, Q 值的定义是 2π 乘平均储能,再除以每周所做的功(如果用的是每弧度所做的功,而不是每周做的功,那就没有 2π)

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m (\omega^2 + \omega_0^2) \cdot \langle x^2 \rangle}{\gamma m \omega^2 \langle x^2 \rangle \cdot 2\pi/\omega} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2\gamma\omega}. \quad (24.7)$$

除非 Q 很大,否则它不是一个十分有用的数据。当 Q 比较大时,它可以作为表征振子好坏的一种量度。人们企图用最简单和最有用的方式来定义 Q ;不同的定义之间略有差异,但当 Q 很大时,所有的定义都趋于一致。最普遍采用的定义是式(24.7),它与 ω 有关。对于一个好的接近共振的振子,可令 $\omega = \omega_0$,而使式(24.7)再简化一些,于是可得 $Q = \omega_0/\gamma$,这正是我们以前所用的 Q 的定义。

什么是电路的 Q 值呢?要求出它,我们只需把 m , $m\gamma$ 和 $m\omega_0^2$ 分别换成 L , R 和 $1/C$ (见表 23-1)。在共振时, Q 是 $L\omega/R$,这里 ω 是共振频率。如果我们考虑一个具有高 Q 值的电路,这意味着在振动中所贮存的能量比起每振动一周驱使振动的机械所做的功的数量大得多。

§ 24-2 阻尼振动

现在我们回到讨论的主题：瞬变态。瞬变态是指当没有作用力存在，且系统不是简单地处于静止时，微分方程的一个解（当然，如果没有力的作用，又静止于原点时，那就再好没有了——它就停止在那里）。假设振动以另一种方式开始：比如说，它被力驱动了一会儿，然后把力去掉，那么会发生什么情况呢？让我们首先对一个 Q 值很高的系统将发生什么情况得出一个大致的看法。只要有力在作用，储能就保持不变，就有一定量的功来维持它不变。现在假定去掉力，就不会再做更多的功，这时再也没有额外的能量供消耗——驱动者不复存在。这时可以说损耗就得消耗所贮存的能量。假设 $Q/(2\pi) = 1000$ ，那么每周所做的功就是储能的 $1/1000$ 。由于这是没有策动力的振动，因而系统振动一周时将消耗它的能量 E 的千分之一，这个能量通常是由外界提供的，并且在它继续振动时，每周总是消耗它的能量的 $1/1000$ ，这难道是不合理的吗？所以，可以猜测，对于 Q 值相当高的系统，可以假定下面的方程大体上是正确的（以后我们将要严格证明它是正确的）

$$\frac{dE}{dt} = -\omega E / Q. \quad (24.8)$$

说它大体上正确是因为它只适用于大的 Q 值。每经过一个弧度，系统就损失储能 E 的 $1/Q$ 。这样，在给定的时间 dt 内，能量将改变 $\omega dt / Q$ 数量，因为在 dt 时间内改变的弧度数是 ωdt 。什么是频率呢？我们假定系统在几乎没有力作用时运动得很好，如果让它自己运动下去，它将基本上按自身同样的频率振动。因而我们可以推测 ω 就是共振频率 ω_0 。这样，从式 (24.8)，就可推出储能将按

$$E = E_0 e^{-\omega_0 t / Q} = E_0 e^{-\gamma t} \quad (24.9)$$

变化。这将是任何时刻的能量的量度。对于作为时间函数的振幅，公式将大致如何呢？完全一样吗？不会！比方说，弹簧上位能的大小随位移的平方而变化；动能则随速度的平方而变化；因此，总能量按位移的平方而变化。因而，由于平方关系，位移，即振幅减小的速率只有能量减小的速率的一半。换句话说，我们猜测阻尼瞬变运动的解将是频率接近于共振频率 ω_0 的振动，其中正弦波运动的振幅将按 $e^{-\gamma t/2}$ 衰减

$$x = A_0 e^{-\gamma t/2} \cos \omega_0 t. \quad (24.10)$$

这个等式和图 24-1 表达了我们所预期的一些想法，现在我们打算通过解运动微分方程本身来精确地分析这种运动。

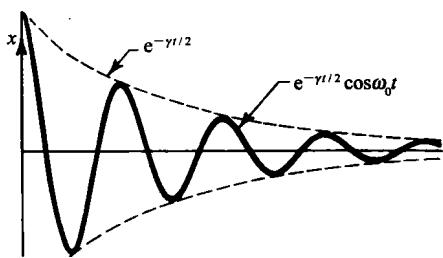


图 24-1 一个阻尼余弦振动

那么，从式 (24.1) 出发，在不存在外力时，如何解这个方程呢？作为物理学家，我们对解题方法并不像对求出的解大致是什么样子那样操心。根据前面的经验，我们把指数曲线 $x = A e^{i\omega t}$ 作为一个试解（为什么要这样试呢？因为这最容易微分），把它代入式 (24.1) [其中 $F(t) = 0$] 并用 x 对 t 每微分一次，就是乘上一个 $i\omega$ 的规则。因而这种代换确实是

很简单的。这样我们的公式就变成

$$(-\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2)Ae^{i\omega t} = 0. \quad (24.11)$$

要使上式的结果在任何时候都等于0，则除非(a) $A = 0$ ，但这根本不是解——因为它静止不动；或(b)

$$-\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0, \quad (24.12)$$

否则，式(24.11)就不能满足。假如能解此式，并求出 α ，我们将得到一个 A 不必为零的解

$$\alpha = i\gamma/2 \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}. \quad (24.13)$$

我们暂且假设 γ 与 ω_0 相比极其小，所以 $\omega_0^2 - \gamma^2/4$ 肯定是正值，求它的平方根是不会有问题的。麻烦的事情在于我们得到了两个解，即

$$\alpha_1 = i\gamma/2 + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = i\gamma/2 + \omega\gamma \quad (24.14)$$

和

$$\alpha_2 = i\gamma/2 - \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = i\gamma/2 - \omega\gamma. \quad (24.15)$$

假定我们没有注意到平方根有两个可能值，而来考虑第一个解。我们知道对于 x 的一个解是 $x_1 = Ae^{i\alpha_1 t}$ ，这里 A 是任意常数。现在，将 α_1 代入，因为出现的次数很多，写起来又很长，所以我们令 $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = \omega_\gamma$ 。这样， $i\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + i\omega_\gamma$ ，我们就得到 $x_1 = Ae^{(\gamma/2+i\omega_\gamma)t}$ ，因为指数具有奇妙的性质，所以此式还可写成

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2} e^{i\omega_\gamma t}. \quad (24.16)$$

首先，我们看出这是一个振动，振动频率是 ω_γ ，并非正好等于频率 ω_0 ，但如果它是一个良好的系统， ω_γ 可以相当接近于 ω_0 。其次，振动的振幅按指数衰减！举例说，如果我们取式(24.16)的实部，就有

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2} \cos \omega_\gamma t. \quad (24.17)$$

这非常像我们推测的解式(24.10)，只是频率实际上是 ω_γ ，这是唯一的误差。因此，可以说是同一回事——我们的概念是正确的。但是并非所有的东西全部都正确！不对的地方是还存在另外一个解。

另一个解是 α_2 ，我们看到它与 α_1 的差别仅仅在于 ω_γ 的符号相反

$$x_2 = Be^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_\gamma t}. \quad (24.18)$$

这是什么意思呢？我们可以很快证明，如果 x_1 和 x_2 都是 $F = 0$ 时方程式(24.1)的一个可能解，那么， $x_1 + x_2$ 也是同一方程的解！所以 x 的通解的数学形式是

$$x = e^{-\gamma t/2} (Ae^{i\omega_\gamma t} + Be^{-i\omega_\gamma t}). \quad (24.19)$$

我们可能会感到奇怪，既然我们对得到的第一个解很满意，为什么还要给出另一个解。因为我们当然知道应当只取实部，那么这个多余的解到底是作什么用呢？我们知道应该取实部，但是利用数学方程怎么能够知道我们只需要实部呢？当策动力 $F(t)$ 不为零时，我们就加上

一个人为的力与之相匹配,而使方程的虚部以一种确定的方式被利用。但是,当今 $F(t) \equiv 0$ 时,我们关于 x 应当只取某个量的实部这一规定纯粹是自己的事,而利用数学方程并不知道这一点。物理世界有一个实数解,但是我们以前那么满意的答案却不是实数,而是复数。利用数学方程并不知道我们要任意地取实部,因此可以说,它总是要向我们提供一个复数共轭型的解,这样把这两个解放在一起,我们能够构成一个真正的实数解;这就是 α_2 对我们的用处。为了使 x 成为实数, $B e^{-\omega_r t}$ 必将是 $A e^{i\omega_r t}$ 的共轭复数,以便使虚部消失。因此,结果表明 B 是 A 的共轭复数,而实数解为

$$x = e^{-\gamma t/2} (A e^{i\omega_r t} + A^* e^{-i\omega_r t}). \quad (24.20)$$

所以,正如前面所说的,我们的实数解是一个具有相移和阻尼的振动。

§ 24-3 电 瞬 变 态

现在我们来看一看上述分析是否真正成立。我们构成一个如图 24-2 所示的电路,在此

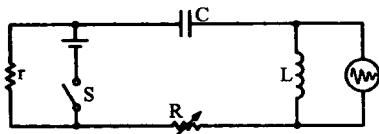


图 24-2 演示瞬变态的电路

电路中,我们通过闭合开关 S ,突然接通电源后,将电感 L 两端的电压加到示波器上。它是一个振荡电路,并产生某种类型的瞬变态。这相当于我们突然在某个系统上加上一个力,而使它开始振动的情况。这一电学情况与阻尼机械振子相类似,我们可在示波器上观察这个振荡,在那里可以看到所要分析的曲线(示波器的水平运动是以均匀速度驱动的,竖直运动由电感两端的电压控制。电路的其他部分仅是技术细节。因为视觉的住留不足以看清屏幕上的唯一的一条径迹,所以我们要多次重复这个实验。因此,我们每秒钟闭合开关 60 次来一再重复这个实验;每次闭合开关时,也就开始了示波器的水平扫描,于是就一遍又一遍地画出曲线)。在图 24-3 到 24-6 中,我们看到的是阻尼振荡的几个例子,这些图是从示波器屏幕上实际拍摄下来的。图 24-3 所示的是在一个 Q 值很高, γ 很小的电路上的阻尼振荡。它消失得不很快,并且在衰减过程中振荡了好多次。

均匀速度驱动的,竖直运动由电感两端的电压控制。电路的其他部分仅是技术细节。因为视觉的住留不足以看清屏幕上的唯一的一条径迹,所以我们要多次重复这个实验。因此,我们每秒钟闭合开关 60 次来一再重复这个实验;每次闭合开关时,也就开始了示波器的水平扫描,于是就一遍又一遍地画出曲线)。在图 24-3 到 24-6 中,我们看到的是阻尼振荡的几个例子,这些图是从示波器屏幕上实际拍摄下来的。图 24-3 所示的是在一个 Q 值很高, γ 很小的电路上的阻尼振荡。它消失得不很快,并且在衰减过程中振荡了好多次。

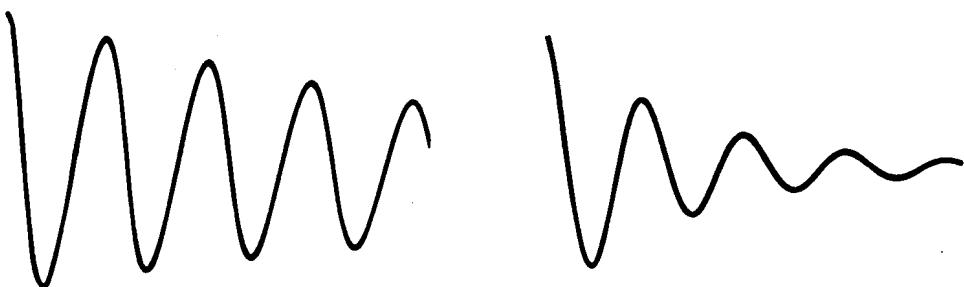


图 24-3

图 24-4

现在我们来看看当 Q 值减小,使振荡较快消失时将发生什么情况。增加电路中的电阻 R 就能减小 Q 值。当我们增加电路中的电阻时,它就消失得较快(图 24-4)。当电路中的电阻增加得更多时,它就消失得更快(图 24-5)。但当电阻增加到超过某一个数值时,我们就

根本看不到任何振荡了！问题在哪里呢？是不是因为我们的眼睛不够好？如果我们再继续增大电阻，就得出一条像图24-6所示的曲线，除了可能有一次之外，在这根曲线上根本看不出有任何振荡。那么如何用数学来解释这种现象呢？

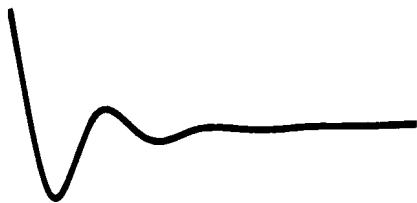


图 24-5



图 24-6

电阻当然与力学装置中的 γ 项成正比。明确地说， γ 就是 R/L 。如果在我们以前认为满意的解(24.14)和(24.15)中，使 γ 增大，那么当 $\gamma/2$ 大于 ω_0 时，将会出现混乱，我们必须把它写成另一种形式，如

$$i\gamma/2 + i\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2} \quad \text{和} \quad i\gamma/2 - i\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}.$$

这就是现在的两个解，按照上述同样的数学推理过程，我们又得出两个解： $e^{i\alpha_1 t}$ 和 $e^{i\alpha_2 t}$ 。如果现在把 α_1 代入，就有

$$x = Ae^{-(\gamma/2 + \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2})t},$$

这是一个无振荡的有规则的指数衰减。同样，另一个解是

$$x = Be^{-(\gamma/2 + \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2})t}.$$

注意，平方根不能超过 $\gamma/2$ ，因为即使 $\omega_0 = 0$ ，平方根也只不过刚好等于 $\gamma/2$ 。现在要从 $\gamma^2/4$ 中减去 ω_0^2 ，因此平方根小于 $\gamma/2$ ，所以括号里的项总是正数。为什么？因为如果它是负值，我们将得到 e 的指数是一个正因子乘 t ，这意味着要发生爆炸！在电路中逐步增大电阻时，我们知道，不会发生爆炸——而是正好相反。因此，我们现在有两个解，每一个本身都作指数衰减，不过一个的“衰减率”比另一个快得多。当然，通解是这两个解的组合，组合系数由运动是如何开始——即问题的初始条件而定。如果在一个特殊的条件下接通电路，使 A 为负值， B 为正值，那么我们就得到这两个指数曲线的差。

现在我们来讨论，在知道了运动的初始状态后，如何求出这两个系数 A 和 B (或 A 和 A^*)。

设在 $t = 0$ 时，已知 $x = x_0$ 和 $dx/dt = v_0$ 。若我们在表示式

$$x = e^{-\gamma t/2}(Ae^{i\omega_\gamma t} + A^* e^{-i\omega_\gamma t}),$$

$$dx/dt = e^{-\gamma t/2} [(-\gamma/2 + i\omega_\gamma)Ae^{i\omega_\gamma t} + (-\gamma/2 - i\omega_\gamma)A^* e^{-i\omega_\gamma t}]$$

中令 $t = 0$ ， $x = x_0$ 和 $dx/dt = v_0$ ，因为 $e^0 = e^{i0} = 1$ ，得

$$x_0 = A + A^* = 2A_R,$$

$$v_0 = (-\gamma/2)(A + A^*) + i\omega_\gamma(A - A^*) = -\gamma x_0/2 + i\omega_\gamma(2iA_I),$$

这里 $A = A_R - iA_I$, 而 $A^* = A_R + iA_I$, 因此得到

$$A_R = x_0/2$$

和

$$A_I = -(v_0 + \gamma x_0/2)/2\omega_y. \quad (24.21)$$

这完全确定了 A 和 A^* 。因此, 根据它是如何开始的, 就完全确定了瞬变态解的整根曲线。附带说一下, 如果注意到

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\omega_y \theta \quad \text{和} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin \theta,$$

我们就可以用另一方式写一下这个解。

我们还可以把这个完整的解写成

$$x = e^{-\gamma t/2} \left[x_0 \cos \omega_y t + \frac{v_0 + \gamma x_0/2}{\omega_y} \sin \omega_y t \right], \quad (24.22)$$

这里 $\omega_y = +\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ 。这就是振动衰减方式的数学表达式。我们将不直接采用这个表达式, 但有几点我们想强调一下, 它适用于更一般的情况。

首先, 这种没有外力作用的系统的行为可表示为纯时间指教函数(我们写成 $e^{i\alpha t}$)的和或叠加。在这种情况下, 这是一个很好的解。 α 的值在一般情况下可以是复数, 其虚部表示阻尼。最后, 当某个物理参数(在此例中, 是阻力 γ)超过某一临界值时, 我们在第 22 章中讨论过的正弦函数和指教函数之间的密切的数学关系, 在物理上就表现为从振动到指教行为的变化。

第 25 章 线性系统及其综述

§ 25-1 线性微分方程

在本章中我们将讨论振动系统的某些方面, 它比我们曾在特定的振动系统中讨论过的更具有普遍性。我们已经解过的特殊系统的微分方程是

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma m \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F(t). \quad (25.1)$$

这种施加在变量 x 上的特殊的“运算”组合有一个重要的性质, 即如果用 $(x + y)$ 代替 x , 则得出的是分别作用在 x 上和 y 上同样的运算之和; 或者如果用 a 乘 x , 则得到的正好是 a 乘原先的组合。这很容易证明。因为把式(25.1)中的所有字母都写出来很麻烦, 我们将采用符号 $\underline{L}(x)$ 作为一种“速写”记法。当我们看到这个符号, 就知道它的意思是以 x 代入后的式(25.1)的左边各项。按照这种书写方法, $\underline{L}(x + y)$ 的含义如下

$$\underline{L}(x + y) = m \frac{d^2(x + y)}{dt^2} + \gamma m \frac{d(x + y)}{dt} + m\omega_0^2(x + y). \quad (25.2)$$

(我们在 L 下面加一短划是为了提醒我们, 它不是一个普通函数。) 我们有时称这是算符记法, 但是把它叫做什么, 这无关紧要, 反正它仅仅是一种“速写”记法。

我们首先要说明的是

$$\underline{L}(x + y) = \underline{L}(x) + \underline{L}(y), \quad (25.3)$$

当然, 这是由 $a(x + y) = ax + ay$, $d(x + y)/dt = dx/dt + dy/dt$ 等事实得出的。

其次我们要说明的是, 当 a 为常数时

$$\underline{L}(ax) = a \underline{L}(x). \quad (25.4)$$

实际上, 式(25.3)和(25.4)有着非常密切的关系, 因为如果我们用 $(x + x)$ 代入式(25.3), 这就与式(25.4)中令 $a = 2$ 相同, 依此类推。

对于更复杂的问题, 在 \underline{L} 中可能有更多的导数和更多的项, 我们所关心的问题是式(25.3)和式(25.4)是否仍然成立。如果它们成立, 我们就称这类问题为线性问题。在本章中我们将讨论线性系统所具有的一些性质, 以了解我们在特殊方程的特殊分析中曾得出的某些结果所具有的普适性。

现在我们来研究线性微分方程的某些特性, 这些特性我们曾在仔细研究特殊方程式(25.1)时说明过了。第一个有趣的性质是: 假设我们需要解的是微分方程的某个瞬变态, 即没有策动力的自由振动, 也就是说我们需要解的是

$$\underline{L}(x) = 0. \quad (25.5)$$

假设我们用某种方法求出了一个特解，并称此解为 x_1 ，也就是说，对于 x_1 有 $\underline{L}(x_1) = 0$ 。现在，我们注意到 αx_1 也是同一方程的一个解；也就是说我们能用任意常数去乘这个特解；并得到一个新的解。换句话说，如果我们有某一个一定“大小”的运动，那么它的两倍“大”的运动也是一个解。证明： $\underline{L}(\alpha x_1) = \alpha \underline{L}(x_1) = \alpha \cdot 0 = 0$ 。

其次，假设用某种方法不仅求出了一个解 x_1 ，还求出了另一个解 x_2 （回忆一下，当我们代入 $x = e^{i\omega t}$ 来求瞬变态时，我们求出了两个 α 的值，那就是 x_1 和 x_2 两个解），现在我们来证明组合 $(x_1 + x_2)$ 也是一个解。换句话说，若令 $x = x_1 + x_2$ ， x 也是方程的一个解。为什么？因为，如果 $\underline{L}(x_1) = 0$ 和 $\underline{L}(x_2) = 0$ ，则 $\underline{L}(x_1 + x_2) = \underline{L}(x_1) + \underline{L}(x_2) = 0 + 0 = 0$ 。因此，如果我们求出一个线性系统运动的几个解，我们可以把它们加在一起。

把这两个想法结合起来，显然我们可以把一个解的六倍加上另一个解的两倍，这也是解；因为如果 x_1 是一个解，则 αx_1 也是一个解。因此，这两个解的任何形式的和，如 $(\alpha x_1 + \beta x_2)$ 也是一个解。如果我们碰巧能够求出三个解，那么我们发现这三个解的任意组合也是一个解，如此等等。可以证明，对于振子问题，我们已经求得的称为独立解* 的数目只有两个。在一般情况下，人们求得的独立解的数目与所谓自由度有关。现在我们不准备详细讨论这个问题，但是，对于一个二阶微分方程，只有两个独立解，这两个解我们都已经找到，因此我们有了最一般的解。

现在我们继续讨论另一个命题，它适用于有外力作用于系统时的情况。假设方程是

$$\underline{L}(x) = F(t), \quad (25.6)$$

并假设我们已求出了它的一个特解。设乔的解是 x_j ，则 $\underline{L}(x_j) = F(t)$ 。现在我们要求出另一个解；设想把自由方程式(25.5)的一个解，比如说 x_1 加到乔的解上去，那么根据式(25.3)，我们得到

$$\underline{L}(x_j + x_1) = \underline{L}(x_j) + \underline{L}(x_1) = F(t) + 0 = F(t). \quad (25.7)$$

因此，我们可以把任何“自由”解加到“受迫”解上去，这仍然是一个解。自由解称为瞬变态解。

如果起先在一个系统上没有力的作用，然后突然加上作用力，我们不能立即得到以正弦波表示的稳定解，而是在一段时间内存在着瞬变态，但只要等待的时间足够长，瞬变态迟早总会消失。“受迫”解是不会消失的，因为它始终受力的作用。最后，经过了一段较长的时间后，解变成唯一的，但是在不同情况下初始运动是不同的，它取决于系统开始时如何运动。

§ 25-2 解的叠加

现在我们来讨论另一个有趣的命题。假设我们有一个特定的策动力 F_a （比如说是一个具有一定的频率 $\omega = \omega_a$ 的振动，但我们的结论对 F_a 的任何函数形式都正确），并且我们已经解出这个受迫运动（具有或者没有瞬变态；这没有差别）。现在假定又有某一个其他的力作用着，比如说 F_b ，对 F_b 我们也解同样的问题，但只是对这一不同的力。再假定又来了一个人，他说：“我有一个新问题要你去解，我用的力是 $F_a + F_b$ 。”我们能解吗？当然，我们能，

* 不能用彼此之间的线性组合来表示的解称为独立解。

因为这个解就是分别取这两个力时的解 x_a 和 x_b 之和。这的确是一个非常值得注意的情况。如果用式(25.3), 我们看出

$$\underline{L}(x_a + x_b) = \underline{L}(x_a) + \underline{L}(x_b) = F_a(t) + F_b(t). \quad (25.8)$$

这就是所谓线性系统叠加原理的一个例子, 它非常重要。其含义是: 假如我们有一个复杂的力, 它可以按任何方便的方式分解成几个分力之和, 每个分力就某种意义而言都是简单的, 也就是说, 对于由复杂的力分解出的每一个特定的分力, 我们都能解它的方程, 这样得出的结果可用来解整个力的方程, 因为我们可以把各个分力的解简单地再加回到一起, 就像整个力是由各个分力合成的一样(图 25-1)。

我们再来举一个叠加原理的例子。在第 12 章中, 我们讲过一条重要的电学规律: 如果给定一组电荷 q_a 的某种分布, 并算出由这些电荷在某一给定位置 P 处产生的电场 E_a 。另一方面, 假如还有一组电荷 q_b , 我们也算出了 q_b 在相应的位置所产生的电场 E_b , 那么, 如果这两组电荷分布同时存在, 在 P 点的电场 E 就是由第一组电荷产生的电场 E_a 与另一组电荷产生的电场 E_b 之和。换句话说, 假如我们知道由一定的电荷所产生的场, 那么由许多电荷产生的场只是各个电荷单独产生的场的矢量和。这与上述的命题完全相似: 如果已知在某一时刻两个给定的力作用的结果, 那么, 倘若把一个力看成是这两个力之和, 则合力产生的响应就是这两个分力产生的响应之和(图 25-2)。

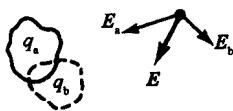


图 25-2 静电学中的叠加原理

为什么这种情况在电学中也成立呢? 原因在于确定电场的伟大电学定律——麦克斯韦方程组事实上是线性微分方程, 也就是说, 它们具有式(25.3)的性质。与力相应的是产生电场的电荷, 由电荷来确定电场的方程是线性的。

作为这个命题的另一个有意义的例子, 我们可以问, 当所有的电台同时广播时, 怎么有可能“调谐”到一个特定的电台。无线电台实质上发送的是一个频率非常高的作用在我们的无线电天线上的振荡电场。为了传送声音的信号, 电场的振幅是变化的和经过调制的, 这是真的。但它变化得很慢, 我们不会去关心它。当我们听到: “本台以 780 kHz 的频率广播”, 这表明电台天线发射的电场频率为每秒振动 780 000 次, 正是这个电场驱动我们天线里的电子以同样的频率上下运动。如果同时在同一个城市里还有另一个电台以不同频率, 比如说以每秒 550 kHz 广播, 那么天线里的电子也被这个频率驱动。现在的问题是, 我们怎么能够把来自 780 kHz 的电台的信号与来自 550 kHz 电台的信号分开? 当然我们不能同时收听两个电台。

按叠加原理, 收音机电路(它的第一部分是线性电路)对电场引起的作用力 $F_a + F_b$ 的响应是 $x_a + x_b$ 。因此, 看上去好像我们永远不能把它们分开。实际上, 正是叠加原理使得我们

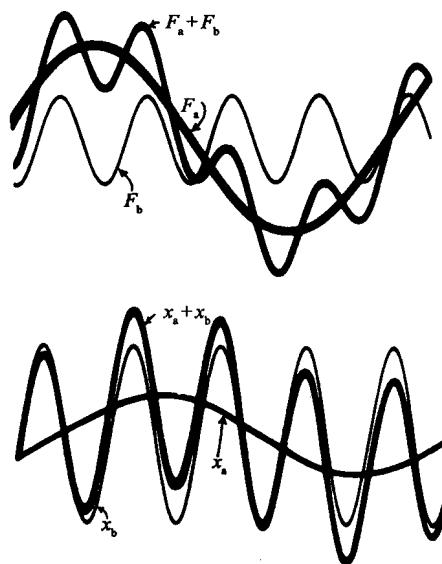


图 25-1 线性系统叠加原理的一个例子

的系统不可避免地要同时受到这两个信号的影响。但记住,对于共振电路来说,响应曲线,

即每单位 F 的 x 值与频率的关系如图 25-3 所示。

如果电路的 Q 值很高,响应将显示出一个非常尖锐的极大值。假设这两个电台强度可相比较,也就是说,这两个力的数量级相当,我们得到的响应是 x_a 和 x_b 的和。但是,在图 25-3 中, x_a 非常大,而 x_b 很小。因此,尽管两个信号强度相等,但当它们通过调谐到一个电台的发射频率 ω_a 的收音机的尖锐共振电路时,则这个电台的响应要比另一个电台强得多。因此,这两个信号所产生的整个响应几乎完全由 ω_a 构成,从而我们就选出了所需要的电台。

什么是调谐?怎样进行调谐呢?我们通过改变电路的 L 或 C 来改变 ω_0 ,因为电路的频率与 L 和 C 的组合有关。特别是,大多数收音机做得使它的电容可以改变。我们调制收音机时,就是把刻度盘转到一个新的位置,而使电路的固有频率,比如说,移到 ω_c ,假如没有一个电台的频率是 ω_c ,那么在这种情况下,我们既不能听到这个电台,也不能听到那个电台,也就是没有声音。如果我们继续改变电容,直到共振曲线处在 ω_b 的位置,那么我们当然就收到了另一个电台。这就是收音机的调谐过程,也是叠加原理和共振响应共同在起作用*。

在结束这一部分讨论的时候,我们来定性地描述一下,如果给定的力相当复杂,那么在深入分析这个力的线性问题时会遇到什么情况。在许多可能采用的方法中,对解这类问题有两个特别有用的一般方法。一个是:假设我们能对一些特殊的已知力,如不同频率的正弦波求解。我们已知求解正弦波的问题如同“儿戏”一般容易。因此我们称此为“儿戏”的情况。现在的问题是能否把十分复杂的力表示成两个或多个“儿戏”式的力之和。在图 25-1 中,已有一条相当复杂的曲线,当然,如果我们加入更多的正弦波,可以使它变得更加复杂。因此,肯定可以得到非常复杂的曲线。反之亦然:实际上每一条曲线都可由无数波长(或频率)不同的正弦波相加得出,而它们中间每个正弦波的解我们都已知道。我们只要知道有多少个正弦波构成这个已知力 F ,则我们的答案 x 就是相应的 F 正弦波之和,其中每一个都要乘上 x 对 F 的有效比。这个解法叫作傅里叶变换,或傅里叶分析法。现在我们并不打算实际进行这种分析,只是想描述一下它所包含的想法。

下面是能解这类复杂问题的另一个非常有趣的方法。假设,经过冥思苦想以后,可以对一个特殊的名为冲力的问题求解。力很快加上去,又很快去掉,就此结束。实际上,我们只要解强度为某个单位的冲力的问题,其他强度可以通过乘上一个适当因子而得出。我们知道对于冲力的响应 x 是阻尼振动。那么我们又怎样来处理其他力,如像图 25-4 那样的力呢?

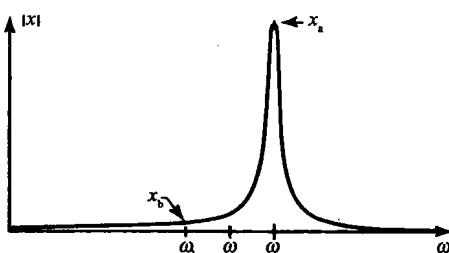


图 25-3 尖锐的谐振曲线

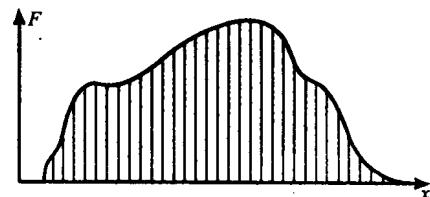


图 25-4 一个复杂的力可以当作
一连串强烈的冲力来处理

* 在现代超外差式收音机中,实际操作要更复杂一些。所有放大器都调谐到一个固定频率[叫作中周(IF)频率],一个可变调谐频率的振子与一个输入信号在非线性电路中组合产生一个新的频率(信号和振子频率之差),它等于中周频率,然后再加以放大。这将在第 50 章中讨论。

这种力可以比喻成一个铁锤的连续打击。开始时没有力,接着突然有一个稳定的力——冲力,冲力,冲力……然后停止。换句话说,我们可以把连续的力想象成是一连串紧靠在一起的冲力。现在,我们知道了一个冲力的结果,因而,整个一串冲力的结果将是整个一串阻尼振动:它将是第一个冲力的曲线,接着(稍晚一点)再加上第二个冲力的曲线,再加上第三个冲力的曲线,如此等等。因此,如果知道了一个冲力的答案,我们就能用数学表示出任意函数的完全的解。我们只要用积分,就能得出任何其他力的答案。这个方法称为格林函数法。一个格林函数就是对一个冲力的响应,通过把各个冲力的响应放在一起分析任何力的方法称为格林函数法。

这两个方法所包括的物理原理非常简单,仅涉及线性方程,因而很容易理解,但是它们所包含的数学问题,如复杂的积分等等,如果我们现在就学的话则显得太高深了一点。当你有了更多的数学实践之后,有朝一日你多半会再回到这个问题上来。但是,这个概念确实是非常简单的。

最后,对于线性系统为什么如此重要我们再来作一些说明。答案很简单:因为我们能够解它们!因此,在绝大部分时间里我们解的都是线性问题。其次(也是最重要的),实际情况表明物理基本定律常常是线性的。例如,电学规律的麦克斯韦方程组就是线性的。就我们所知,量子力学的伟大定律也是线性方程。这就是我们要花如此多的时间来研究线性方程的理由。因为,如果我们了解线性方程,原则上,就可了解许多事物。

我们再举另一个也是线性方程的情况。当位移很小时,很多函数都近似地是线性的。例如,假如有一个单摆,它的运动的正确方程是

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \left(\frac{g}{L}\right) \sin \theta. \quad (25.9)$$

这个方程可以用椭圆函数求解,但是解它最容易的办法是用如在第 9 章讨论牛顿运动定律时用过的数值解法。一般说来,一个非线性方程除去用数值方法外,没有别的方法可解。但当 θ 很小时, $\sin \theta$ 实际上等于 θ ,这样,我们就得到一个线性方程。事实表明存在着很多这样的情况,当效应很小时显示出线性的性质:摆通过很小一段弧度的振动就是一个例子。再举一个例子,如果我们稍微拉一下弹簧,弹簧的力就和伸长成正比。如果拉得很厉害,把弹簧拉断了,这时的力是距离的完全不同的函数!线性方程很重要。事实上,它是如此重要,以致在物理和工程中大概有百分之五十的时间要花在解线性方程上。

§ 25-3 线性系统中的振动

现在我们来回顾一下前几章所讨论的内容。有关振子的物理内容很容易被数学弄得难以理解。实际上它的物理内容是很简单的。如果暂时忘记数学,我们将会看到,我们能理解在振动系统中所发生的几乎每一件事。首先,如果只有弹簧和重物,那么很容易理解这个系统为什么会振动——这是惯性的结果。我们把物体拉下来,弹力又把它向上拉回去,当它经过通常所处的位置——零点时,它不可能突然停下来,因为它具有动量,故要继续运动而向另一边摆动,从而不断来回振动。因此,如果没有摩擦力,无疑我们可以预见到这个振动,事实上也确是这样。但是,如果有摩擦力存在,即便是一点点,那么在往回摆动的一周里,摆动

就没有第一次那样高了。

像这样一周一周地下去,会出现什么情况呢?这与摩擦力的种类和大小有关。假设我们能够找出一种摩擦力,当振幅变化时,它总是和其他力——惯性和弹簧中的力——保持相同的比例。换句话说,对于较小的振动,这个摩擦力比作大振动时弱。通常的摩擦力并没有这种性质,因此,为了得到一种与速度成正比的理想的摩擦力,必须细心地找出一种特殊的摩擦——对于大振动,摩擦力强,对于小振动,摩擦力弱。如果我们恰好找到这种摩擦力,那么,除了一点点小的差别外,在每个相继循环的最后,系统所处的条件和开始时一样。所有的力都按同样的比例变小:弹力减小,惯性作用变低,因为加速度变弱,而由于我们精心的设计,摩擦力也变小了。当我们确实找到这种摩擦力后,我们将发现,每次振动,除了振幅减小外,和第一次振动完全一样。如果第一周振幅下降为开始时的90%,第二次振幅下降为开始时90%的90%,如此等等:在每周中振动的大小都减小了它本身的同样的百分比。指数函数就是一个具有这样性质的曲线。在每一相同的时间间隔内,它改变同一个因子。也就是说,若相对于前一周,这一周的振幅为 a ,则下一周的振幅是 a^2 ,再下一周是 a^3 。因此,振幅是某个常数的指数幂,其幂指数等于振动的周数

$$A = A_0 a^n. \quad (25.10)$$

当然 n 正比于 t ,因此,非常清楚,通解将是某种振动—— $\sin \omega t$ 或 $\cos \omega t$ ——乘上一个大致按 b^t 而变化的振幅。但是,如果 b 是正值且小于1时,则 b 可写成 e^{-c} 。因此,这就是为什么解看上去像 $e^{-ct} \cos \omega t$ 的原因。这是很简单的。

如果摩擦不是像这样人为的,而是例如通常在桌子上的摩擦,则摩擦力是一个确定的常数,它与在每个半周内方向相反的振动的大小无关,这时会发生什么情况?此时,方程不再是线性的了,它变得很难求解,必须用第9章讲的数值方法,或者分别考虑每个半周才能求解。数值法是所有方法中最有效的方法,它能解任何方程。只有当遇到简单问题时,我们才能用数学分析法求解。

数学分析法并不如所说的那么富有成效,它只能解一些最简单的方程。只要方程稍微复杂一点,真正是一点点,就不能用分析方法求解。但是在本课程开始所介绍的数值方法,却能够应用于任何物理上感兴趣的方程。

其次,对共振曲线又如何呢?为什么有共振?我们先设想不存在摩擦时,一个物体本身振动的情况。假如单摆在摆动时,我们每次都在恰当的时候轻轻地推它一下,当然可以使它

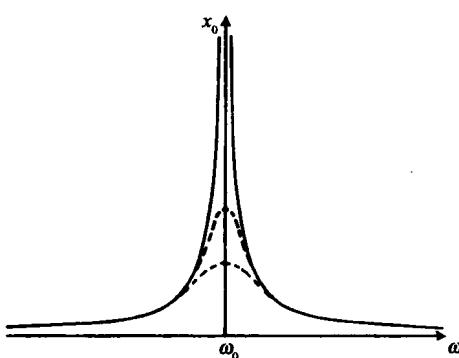


图 25-5 对应不同摩擦力的共振曲线

发生激烈运动。但是,如果我们闭上眼睛,不去看它,而在任意相等的时间间隔内轻轻地推它,将会发生什么情况?有时我们会发现,我们推得不是时候。当我们推得对头,并且每次推得都很适合时,那么,它就摆动得越来越高。因此,在没有摩擦力时,我们得出的曲线,其形状就像图 25-5 中对不同频率画出的实线。我们可以定性地理解共振曲线,但要求出曲线的准确的形状,大概就只好求助于数学了。当 $\omega = \omega_0$ 时,曲线趋于无穷大,这里 ω_0 是振子的固有频率。

现在假设只有很小的摩擦，当振子的位移很小时，摩擦力对振子没有多大影响，除了在接近共振处外，其共振曲线是一样的。在接近共振时，振幅不是无限大，曲线只是上升到这么高，使得每次轻轻地推它所做的功足够补偿一周内摩擦力消耗的能量。因此，曲线的顶部是圆的——不会变得无穷大。摩擦力越大，曲线的顶部变得越圆。现在，有人可能会说：“我想曲线的宽度应与摩擦力有关。”这是因为通常画曲线时，总是画得使曲线的顶部作为一个单位。但是，如果把所有曲线都按同一尺度画出，则数学表达式就变得更易于理解；这时可以看出摩擦力使曲线顶部变低。当摩擦力较小时，在摩擦使运动停止之前，曲线已经达到比较尖细的部分，因此看上去比较窄。这就是说，曲线的峰值越高，在最大高度一半处的宽度也就越窄。

最后，我们考虑摩擦力很大的情况。事实表明，如果摩擦力过大，系统根本就振动不起来。弹簧的能量仅能使系统作克服摩擦力的运动，因此，系统慢慢地在平衡位置停下来。

§ 25-4 物理学中的类比

我们要说明的下一个问题是物体和弹簧不是唯一的线性系统，还有其他系统。特别是，还有称作线性电路的电学系统，我们发现它和力学系统完全类似。我们还没有严格研究过电路中每个元件为什么~~会~~按照各自具有的方式起作用——现在没有必要去了解这些；我们只把它们的行为作为实验证明的事实而接受下来。

我们举一个最简单的情况作为例子。取一段金属线，它相当于一个电阻，我们在上面加一个电位差 V 。电位差 V 的含义是：如果把电荷 q 从导线的一端移动到另一端，所做的功就是 qV 。电位差越高，电荷从高电位的一端“跌落”到低电位的一端所做的功就越多。因此，电荷从一端运动到另一端时要释放能量。但是电荷不是简单地从一端直接飞到另一端，导线中的原子对电流有阻碍作用，对于几乎所有通常的物质来说，这种阻力遵循如下的规律：如果有电流 I ，这就是说，每秒钟有这么多的电荷跌落下去，则每秒钟通过导线跌落下去的数目与我们给它们的推力多大成正比例——换句话说，与电压的大小成正比

$$V = IR = R \frac{dq}{dt}. \quad (25.11)$$

系数 R 称为电阻，这个方程就叫欧姆定律。电阻的单位是欧姆，它等于每安培一伏。在力学中，要得出与速度成比例的这种摩擦力是很困难的，但在电学系统中却很容易，对于绝大多数金属来说，这个定律是极其精确的。

我们通常感兴趣的是，当电荷在导线里跌落下去时，每秒钟所做的功，功率耗损或电荷释放的能量有多少。当我们通过电压 V 移动电荷 q 时，所做的功就是 qV ，因而每秒所做的功是 $V(dq/dt)$ ，也就是 VI 或 $IR \cdot I = I^2 R$ 。这叫热损失，根据能量守恒定律，这就是每秒钟在电阻上产生的热量。正是这种热量使普通的白炽灯泡发光。

当然，力学系统还有其他的重要性质，如质量（惯性），可以证明，惯性也有一个电学类比。我们可以制造某种称为电感器的东西，它有一种性质叫电感，以至当电流一旦开始通过电感时，就不想停下来。要改变电流就要有电压！如果电流不变，在电感上就没有电压。在直流电路上没有电感的概念，只有当电流改变时，电感的作用才显示出来，其方程为

$$V = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2 q}{dt^2}, \quad (25.12)$$

电感的单位叫亨利,它的意思是,在1 H 的电感上加1 V 的电压将使电流产生 $1 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$ 的变化。如果你乐意的话,可以作如下的类比: V 相当于 F , L 相当于 m , I 相当于速度,这样方程式(25.12)就像是电学中的牛顿定律!由这两种系统得出的所有方程都具有相同的推导,因为在所有的方程中,我们可以把任何一个字母换成与它相应的字母,而得到同样的方程,我们推得的每一件事情在这两个系统中都具有对应性。

那么,电学中有什么东西与力学的弹簧(在弹簧中力与其伸长成比例)相对应呢?如果从 $F = kx$ 开始,并作如下代换: $F \rightarrow V$ 和 $x \rightarrow q$,就得到 $V = \alpha q$,事实证明确有此事,实际上,它是三个电路元件中我们能够真正理解的唯一的一个,因为我们曾研究过一对平行板,并发现如果在每块板上有一大小相等、符号相反的电荷时,它们之间的电场必与电荷的大小成正比。因此,使单位电荷穿过空隙从一块板移到另一块板上所做的功正好与板上电荷成正比。这个功就是电位差的定义,它是电场从一块板到另一块板的线积分。由于历史上的原因,结果比例常数不称作 C ,而是 $1/C$ 。当然也可以把它叫作 C ,但是没有这样做。因此有

$$V = \frac{q}{C}. \quad (25.13)$$

电容 C 的单位是法拉,在一法拉的电容器的每块板上有一库仑电荷时,就产生一伏特的电位差。

这就是我们的类比,如果直接作 $L \rightarrow m$, $q \rightarrow x$ 等代换,就得到如下的相应于振荡电路的方程

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \gamma m\left(\frac{dx}{dt}\right) + kx = F, \quad (25.14)$$

$$L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + R\left(\frac{dq}{dt}\right) + \frac{q}{C} = V. \quad (25.15)$$

因此,我们从式(25.14)学到的一切东西都能转而用于式(25.15),每个结果都相同,而且是如此地相同,以致我们能作出一项很出色的工作。

假设有一个相当复杂的力学系统,它并不仅仅是一个具有质量的物体悬挂在一根弹簧上,而是几个具有质量的物体悬挂在几根弹簧上,并且全都钩在一起。我们能做些什么呢?求解它?也许能,但是等一下,我们可以设计一个电路,使它具有与我们将要分析的事情相同的方程!比方说,如果我们要分析悬挂在一根弹簧上的物体,为什么我们不能建立一个电路,在这个电路中,使电感正比于质量,电阻正比于相应的 $m\gamma$, $1/C$ 正比于 k ,而且都具有同样的比例呢?当然,这个电路将与我们的力学系统完全类似,这就是说,无论 q 随 V (V 与作用力相对应)如何变化, x 就随力这样变化!因此,如果有一个由大量彼此互相联结的部件组成的复杂力学系统,我们就可以把很多电阻,电感和电容彼此互相联结在一起以仿造这个力学上很复杂的系统。这样做有什么好处?这两个问题的难易程度是完全相同的,因为它们完全等价。其优点并不在于找出一个电路之后,解数学方程会变得稍为容易一些(尽管这是电气工程师采用的方法),而是考虑这种类比的真正原因在于电路容易建立,而且也容易改变这个系统中的某些东西。

假如我们设计了一辆汽车,并想知道,当它走过某种崎岖不平的道路时,它要摇动多少次。可以建立一个电路,用电感代表轮子的惯性,电容代表轮子的弹性系数,电阻代表减震器,对汽车的其他部件也同样处理。现在需要一条崎岖不平的道路。好!我们从发电机那

里引出一个电压来代表某种路的崎岖不平,然后用测量某个电容器上的电荷来观察左轮的跳动。测量后(这是容易做到的)我们发现颠簸得太厉害了。是否需要增加或减少减振器?对于像汽车这类复杂的东西,我们是否真正要改变减振器,再重新做一遍呢?不!我们只需要转动标度盘,标度盘读数 10 对应于减震器数 3,这样我们就增加了减震器。颠簸得更厉害了——没关系,那就减少一点试试看。颠簸还是厉害,我们改变弹簧的硬度(标度盘读数 17),所有这一切都按电学方法来调节,只要转动转盘。

这就叫模拟计算机。这是一种通过构成另一个问题来模仿我们需要解的问题的装置,这另一个问题与我们要解的问题具有相同的方程式,但是,它是在自然界的另一种情况下得到的。它易于建立,易于测量,易于调节,也易于破坏。

§ 25-5 串联和并联阻抗

最后,还有一个并不完全属于复习性质的重要项目。这与具有一个以上的电路元件的电路有关。例如,当我们把一个电感器,电阻器和电容器像图 24-2 那样联接起来后,我们看到所有电荷都经过这三个元件中的每一个,因此在这个单独相联接的电路里导线各处的电流都相同。既然在每个元件的电流都一样,那么加在电阻 R 上的电压是 IR , L 上的电压是 $L(dI/dt)$, 等等。因此,总的电压降是各部分之和,这就得出了式(25.15)。应用复数,我们能够解由正弦力引起的稳定态的运动方程。并且发现, $\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}$. \hat{Z} 称为这个特定电路的阻抗。它告诉我们,如果加上一个正弦电压 \hat{V} ,就得到一个电流 \hat{I} 。

现在假设有一个由两部分组成的更复杂的电路,它们各有一定的阻抗 \hat{Z}_1 和 \hat{Z}_2 ,我们把它们串联起来[图 25-6(a)],并加上一个电压。此时,会发生什么情况呢?现在的问题要稍微复杂一些了,但是,如果 \hat{I} 是流过 \hat{Z}_1 的电流,那么加在 \hat{Z}_1 上的电压是 $\hat{V}_1 = \hat{I}\hat{Z}_1$;同样,加在 \hat{Z}_2 上的电压是 $\hat{V}_2 = \hat{I}\hat{Z}_2$ 。流过两者的电流相同。因此,总电压是加在这两部分的电压之和,即 $\hat{V} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2 = (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)\hat{I}$ 。这意味着加在整个电路上的电压可以写成 $\hat{V} = \hat{I}\hat{Z}_s$,这里串联电路的复合系统的 \hat{Z}_s 是各部分 \hat{Z} 的和

$$\hat{Z}_s = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2. \quad (25.16)$$

这并不是唯一的联接方法,我们还可以用另一种称为并联的方法来联结[图 25-6(b)]。我们看到,如果联接导线是理想导体,则加在其两端的给定电压就有效地作用于两个阻抗上,并在每个阻抗上独立地产生电流。因此,流过 Z_1 的电流等于 $\hat{I}_1 = \hat{V}/\hat{Z}_1$ 。在 \hat{Z}_2 上的电流是 $\hat{I}_2 = \hat{V}/\hat{Z}_2$ 。这时电压相同。对两端提供的总电流是这两部分电流之和: $\hat{I} = \hat{V}/\hat{Z}_1 + \hat{V}/\hat{Z}_2$ 。这可写成

$$\hat{V} = \frac{\hat{I}}{\frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}} = \hat{I}\hat{Z}_p.$$

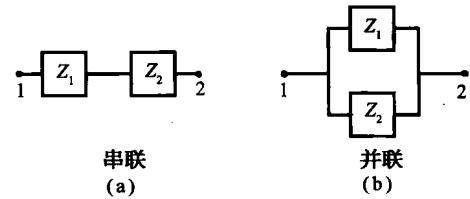


图 25-6 两个阻抗的串联和并联
(a) 串联
(b) 并联

因此

$$\frac{1}{\hat{Z}_p} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}. \quad (25.17)$$

通过把电路分成一些小段,计算出每一小段的阻抗,再用上述法则把各个部分的电路一步一步联接起来,有时可使较复杂的电路简化。如果有某种电路,包含有很多用各种方式联接起来的阻抗,并用无阻抗的小发电机引入电压(当有电荷通过它时,发电机加上一个V)时,那么可以用如下的原则:(1)在任何一个结点,流入结点的电流之和为零。也就是说,所有流进来的电流必须再流出去。(2)如果使电荷沿着一个回路运动,再回到开始时的位置,所做的净功等于零。这些法则称为电路的基尔霍夫定律。对复杂的电路系统地应用这些定律常常可以简化对这种电路的分析。在这里,我们把这些定律与式(25.16)和式(25.17)并提,是因为你们在实验室工作中可能已经遇到过需要分析这种电路。以后我们还要更详细地讨论这些法则。

第 26 章 光学：最短时间原理

§ 26-1 光

这是关于电磁辐射主题诸章中的第一章。我们看到的光，在同为辐射的宽广谱系中只占一小部分，这个谱系的各个部分是以某一个变量的不同数值来区分的。这个变量可以叫做“波长”。当它在可见光谱中变化时，光明显地从红色变到紫色。如果我们要系统地从长波长到短波长来考察这个谱系，那么就要从通常所谓的无线电波开始。工程技术上所能得到的无线电波，其波长很宽，有的甚至比通常广播上所用的波长还长；通常广播用的波长大约为 500 m。接着是所谓“短波”，即雷达波、毫米波等等。在一个波长范围与另一个波长范围之间并没有实际的界线，因为大自然没有为我们提供明确的边界。与某一波段名称相联系的波长数值只是近似的，因而我们给不同波段所取的名字当然也是近似的。

在通过相当长一段毫米波之后，我们就来到了所谓的红外区，接着进入到可见光谱区。朝波长更短的方向走去，就进入所谓的紫外区。紫外区终止处，就开始出现 X 光区。但我们不能精确地确定这个分界处在哪；它大致在 10^{-8} m 即 10^{-2} μm 处。这些是“软”X 射线；随着所谓波长这一值的越来越小，接着是一般 X 射线和硬 X 射线；再就是 γ 射线等等。

在这个宽广的波长范围内，有三个或更多个大致的范围特别令人感兴趣。其中的一个区域满足这样的条件，即所涉及的波长比用来研究它们的仪器的尺度要小得多；而且，用量子论来说，其光子的能量比仪器的能量灵敏度要小，在这些条件下，我们可以用一种叫做几何光学的方法来作粗略的一级近似。另一区域是，如果波长与仪器的尺度可以相比拟（这对可见光虽然难以实现，但对无线电波却比较容易做到），而光子的能量仍小得可以忽略不计，那么只要研究波的行为，就可以得到一种很有用的近似，仍然不必去考虑量子力学。这一方法是建立在电磁辐射经典理论的基础之上的。这一理论将在较后的一章中讨论。下一个，如果我们考察很短的波长，这里波的特性可以忽略，但光子却具有比仪器的灵敏度大得多的能量，那么事情又变得很简单了。这时就得用简单的光子图像，对此我们只能十分粗糙地加以描述。把整个事物统一于一个模型的完整图像，在相当长一段时间内我们将用不到。

在本章中我们的讨论将限于几何光学范围，在这里我们不去顾及光的波长和粒子特征，而这些都将在适当的时候再作解释。我们甚至不必操心去问光是什么，而只是要找出在与有关的尺度相比很大的范围内光的行为如何。所有这些都必须事先加以说明，以便强调这一事实，即我们打算讲述的内容仅仅是一种十分粗糙的近似；这是我们以后必须重新“忘掉”的几章之一。而且我们将会很快忘掉它，因为我们几乎马上就要讲到一个更精确的方法。

虽然几何光学只是一种近似的方法，但它在技术上非常重要，历史上也令人极感兴趣。为了使读者对物理理论或物理概念的发展获得一些知识，我们将把这个课题比别的一些课题更多地从历史上来加以叙述。

首先,光无疑是每个人所熟悉的,而且从无法回忆的时间起就早已熟悉了。现在的问题是,我们凭什么作用看见光?关于这个问题曾经提出过许多理论,但最后可归结到一个,即认为有某种东西进入眼睛——它是从物体上弹出而进入眼睛的。这种想法我们已听了这么久,以致习以为常,因而几乎不可能相信会有某一个十分聪明的人会提出相反的理论——比方说有什么东西由眼睛里射出而感触到了物体。另外一些观察到的重要事实是,当光从一处射到另一处时,如果途中没有障碍物,它就沿直线行进,并且光线之间似乎不会发生相互干扰。这就是说,虽然光在房间里在各个方向上相互交叉地射来射去,但横穿过我们视线的光并不影响从某一物体向我们射来的光。这曾经是惠更斯一度用来反对微粒说的一个最有力的证据。你想,如果光像许许多多飞逝着的箭,那么其他的箭怎么能如此容易地穿过它们?但这样的哲学论据并不具有很大的说服力。人们总是可以说光就是由可以相互贯穿的飞箭组成的!

§ 26-2 反射与折射

下面的讨论为几何光学提供了足够的基本概念,现在我们要稍微深入到定量一些的内容方向。到目前为止,我们只说明了光在两点之间沿直线行进;现在来研究一下光射向各种物质时的行为。最简单的物体是一面镜子,关于镜子的规律是,当光射到镜子时,就不再继续沿着原来的直线行进,而从镜子跳到一条新的直线中,这条直线将随镜子倾角的改变而改变。对于前人来说,他们所面临的问题就是其中两个角之间有什么关系?这是一种很简单的关系,并且很早就已发现了。射向镜子的光的行迹是这样的:两束光的每一束与镜面形成一个夹角,这两个夹角相等(图 26-1)。由于某种原因,通常是从镜面的法线来量度这些角的。因此,所谓的反射定律就是

$$\theta_i = \theta_r. \quad (26.1)$$

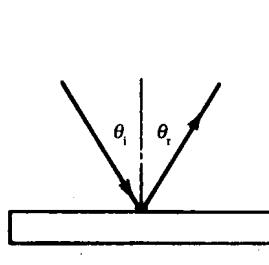


图 26-1 入射角等于反射角

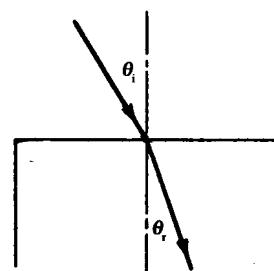


图 26-2 当光从一种介质进入另一种介质时发生折射

这是一个十分简单的命题,但是当光从一种介质进入另一种介质,例如从空气进入水中时,就碰到了一个较为困难的问题;这里与前面一样,我们也看到光不再沿原直线行进(图 26-2)。光在水中的路线偏离了它在空气中的路线;如果我们改变 θ_i 角使之更接近于垂直入射,那么“偏折”角就不大。但是如果使光束的倾角变得很大,那么所偏离的角度就很大。现在的问题是,一个角与另一个角的关系如何?这个问题使前人迷惑了很长一段时间,而且

对此他们从未找到过答案！然而，这正是人们在全部希腊物理学中可以发现的用表列出实验结果的少数场合之一。托勒玫把空气中若干个不同的角同与之一一对应的水中的角列成表。表 26-1 列出了以度为单位的空气中的角和在水中量得的相应的角。（一般认为希腊科学家从来不做任何实验。但是，如果不知道正确规律，则除了用实验外，要得到这张表是不可能的。然而必须指出，这些值并不表示对每个角度所作的独立和谨慎的测量，而只是从少数几个测量中用内插法得到的一些数值而已，因为它们与一条抛物线完全相符合。）

表 26-1

空气中的角	水中的角	空气中的角	水中的角
10°	8°	50°	35°
20°	15.5°	60°	40.5°
30°	22.5°	70°	45.5°
40°	29°	80°	50°

我们首先观察一个效应，接着进行测量并把它列成表；然后试图找出可以把一事物与另一事物联系起来的规律；这是物理定律在发展过程中的重要步骤之一。上面的数值表是公元 140 年作的，但是直到 1621 年才有人终于找到了这个联系两个角的规律！这个由荷兰数学家斯涅耳所发现的规律可叙述如下：如果 θ_i 表示空气中的角， θ_r 表示水中的角，则 θ_i 的正弦等于某一常数乘上 θ_r 的正弦

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r \quad (26.2)$$

对于水，常数 n 约为 1.33。等式(26.2)称为斯涅耳定律；它使我们能预言光从空气进入水中时将如何弯折。表 26-2 列出了根据斯涅耳定律得到的空气中的角和水中的角。注意它与托勒玫那张表非常一致。

表 26-2

空气中的角	水中的角	空气中的角	水中的角
10°	7.5°	50°	35°
20°	15°	60°	40.5°
30°	22°	70°	45°
40°	29°	80°	48°

§ 26-3 费马最短时间原理

随着科学的进一步发展，我们所要知道的是比仅仅一个公式更多的东西。首先我们作了观察，接着有了通过测量得到的数值，然后有了概括所有这些数值的定律。但是科学的真正光荣在于我们能够找到一种思想方法，使得定律成为明显的。

使得有关光的行为的那个定律成为明显事实的第一个思想方法是费马于 1650 年左右发现的，它称为最短时间原理或费马原理。他的想法是这样的：在从一点行进到另一点的所有可能的路径中，光走的是需时最短的路径。

首先我们来证明这对镜子的情况是正确的，这个简单原理既包含了直线传播定律又包

括了镜面反射定律。这样，我们的理解就加深了！我们来试着求下列问题的解。在图 26-3 中画了 A、B 两点和一平面镜 MM'。哪一条是在最短时间内从 A 走到 B 的路径呢？回答

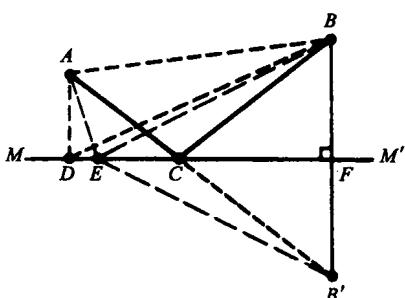


图 26-3 最短时间原理的说明

是从 A 笔直走到 B 的那条！但是如果我们附加一条规定，即光必须在最短时间内碰到镜面再返回到 B，那么回答就不会这么容易了。一个方法是沿着 ADB 路径尽快到达镜子然后再走到 B。当然，这时要走一条很长的路程 DB。如果让 D 略向右偏移到 E，虽然稍稍增加了第一段距离，但却大大减少了第二段距离，这样就使总的路程减少，从而使传播的时间也相应地减少。那么怎样来找到需要时间最短的 C 点呢？回答是：可以很巧妙地用几何技巧来找到它。

在 MM' 的另一边作一个人为的点 B' ，使它在镜面 MM' 以下的距离跟 B 点在镜面上的距离相同。然后作 EB' 线。由于 BFM 是直角，且 $BF = FB'$ ，所以 EB 等于 EB' 。于是两段距离之和 $AE + EB$ （光以不变速度传播时，它与光的传播时间成正比）即为两段长度 AE 与 EB' 之和。因此，问题就变为何时这两段长度之和最短？回答很简单：当线段经过 C 点使从 A 到 B' 成为一直线！换句话说，我们必须找出这个点，通过它能直达人为的点，那么这个点就是所要求的正确的点。现在 ACB' 既为一条直线，则角 BCF 等于角 $B'CF$ ，因而也等于角 ACM 。因此，入射角等于反射角的这种说法与光射向镜面沿着需时最短的路径返回到 B 的说法是等效的。这一命题最初由亚历山大的希罗(Hero)所述：光走到镜面然后射向另一点时所取的是尽可能短的一段距离，因而这并不是一个新的理论。但正是这一点启发了费马，使他联想到光的折射也许是在同一基础上进行的。但在折射中，光显然不取最短距离的路径，所以费马试用了光取最短时间的思想。

在我们对折射进行分析之前，应就镜子再说几句话。如果在 B 点有一光源，它朝镜子发光，那么我们将看到自 B 点射到 A 点的光恰好好像没有镜子时在 B' 点有一物体把光射到 A 点一样。眼睛当然只觉察到实际射进它的光，所以如果在 B 点有一物体，并有一面镜子，它使光进入眼睛完全好像物体是在 B' 处而把光射入眼睛一样，那么在视觉-大脑系统不太知道其他情况的假定下，它就会将此解释为有一物体在 B' 处。所以，认为有物体位于镜子后面的这种错觉，仅仅是由于这样的事实，即进入眼睛的光实际上完全好像来自镜子后面的一个物体一样（除了镜面上有灰尘，以及我们知道镜子的存在等等这些可在大脑中被校正的因素外）。

现在我们来证明最短时间原理将导出斯涅耳折射定律。但必须就光在水中的速率作一个假定。我们假定光在水中的速率比在空气中小一个因子 n 。

在图 26-4 中，我们的问题仍然是在最短时间内从 A 走到 B。为了说明最好的办法并不是沿着直线走这一事实，设想有一个漂亮的少女从船上掉了下去，她正在水中的 B 点向人们呼救。以 X 标出的线表示河岸。我们是在陆地上的 A 点看到了这件事；我们既能跑步又能游泳，但跑得比游得更快。那么我们怎么办？笔直过去吗（是的，毫无疑问）？但只要稍加思索，就会领悟到在陆地上稍微多跑一些路以减少在水中的路程是有利的，因为我们在水中的速度要慢得多（按此推理，我们将会说正确的做法是要十分仔细地算出应该怎么办）。不论如何，我们来证明问题的最终解答是路径 ACB，并证明这是所有可能的路径中需时最

短的一条。如果它是这样,那就意味着若取任何别的路径,需时就要较长。所以,如果我们以所需的时间对 X 点的位置作图,那么将会得到一条如图 26-5 所示的曲线,其中对应于 C 点的时间是所有可能的时间中最短的。这就是说如果我们将 X 点移到邻近 C 的各点,在一级近似下时间基本不变,因为曲线底部的斜率为零。所以,我们寻找这条规律的方法,就是设想把位置作很小的移动而要求时间基本不变(当然有一个二级无穷小的改变;对于从 C 点向两旁任何一个方向的移动来说,都应有一正的增量)。因此我们考察邻近的一点 X ,并算出从 A 到 B 沿这两条路径所需的时间各有多长,再将新路径的时间与旧路径的时间相比较。这很容易做到。当距离 XC 很短时,我们当然要求这个时间之差接近于零。先看岸上的路程。如果作垂线 XE ,就可看出这段路程比 AC 短了一段 EC 。我们说因为没有走这一段额外的距离而得到好处。另一方面,在水中,在作了相应的垂线 CF 后,发现必须多走一段额外的距离 XF ,而使我们有所损失。或者说,在时间上,我们赢得了走过距离 EC 所需要的时间,但失掉了走过距离 XF 所需要的时间。这两段时间必须相等,因为在一级近似下,总的时间应该不变。假定在水中的速率是空气中速率的 $1/n$,则必须有

$$EC = n \cdot XF. \quad (26.3)$$

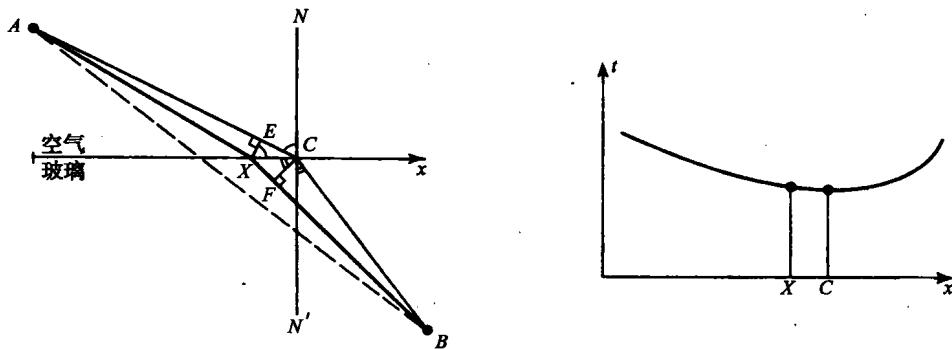


图 26-4 费马原理对折射的说明

图 26-5 C 点相应于最短时间,但其附近各点相应于几乎与之相同的时间

可见,当我们选择了正确的点时,就有 $XC \sin \angle EXC = n XC \sin \angle XCF$, 消去公共斜边 XC , 并注意到

$$\angle EXC = \angle ECN = \theta_i \quad \text{及} \quad \angle XCF = \angle BCN' = \theta_r,$$

就有

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r. \quad (26.4)$$

所以,当速率之比为 n 时,为了在最短时间内从一点到达另一点,光应以这样的角入射,使得角 θ_i 和 θ_r 的正弦之比等于光在两种介质中的速率之比。

§ 26-4 费马原理的应用

现在我们来讨论最短时间原理的一些有趣的结果。首先是倒易原理。如果从 A 到 B

我们找到了需时最短的路径,那么沿相反方向走的(假定光沿任一方向行进的速率相等)需时最短的路径将是同一条路径。因此,如果光可以沿一条路径行进,也就可以倒转过来行进。

另一个有趣的例子是一块具有平行平面的玻璃板,它与光束成一角度。当光从 A 点经过玻璃板走到 B 点时(图 26-6),并不沿一直线通过,而代之以在玻璃板中使倾角较小的路径,以减少它在玻璃板中所花的时间,虽然这样使它在空气中所花的时间略有增加。光束只是本身平移了一下,因为入射角与出射角是相等的。

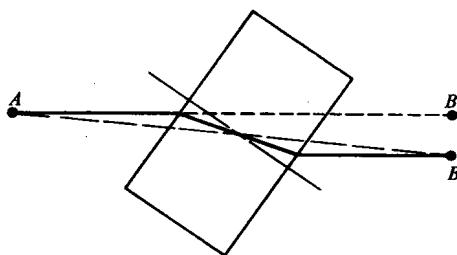


图 26-6 当一束光通过一块透明板时,
它被偏移了

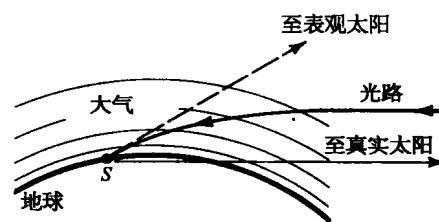


图 26-7 地平线附近,表观太阳比真实太阳
高出约 $1/2$ 度

第三个有趣的现象是这样一个事实:当我们看见落日时,它其实已在地平线以下了!它看起来似乎并不在地平线以下,但实际上确是如此(图 26-7)。地球的大气高处稀薄而底部稠密。光在真空中传播得比空气中快,因而,如果太阳光不沿地平线行进,而从地平线以上以较陡的倾斜度通过稠密区,以尽量减少光在其中行进得慢的这一区域中的路程的话,它就能较快地到达 S 点。当太阳看来要落到地平线以下时,其实它已落到地平线以下好些时候了。这个现象的另一个例子是当人们在炎热的道路上驾车时,常常会见到的海市蜃楼现象。人们在路上见到“水”,但当他到达那里时,却干燥得像沙漠一样!这一现象可说明如下。其实我们真正见到的乃是从路上“反射”上来的天上的光,如图 26-8 所示。来自天空投射到道路上的光,能朝上到达眼睛。为什么呢?紧靠地面之上的空气很热,但越往高处则越冷。热空气比冷空气膨胀得多一些,因而更稀薄一些,这就使光的速率减小得少一些。也就是说,光在热的区域跑得比冷的区域快。这样一来,为了节省时间,光就选定不沿直线直接过来,而取了费时最短的路径,因而暂时走进它跑得快一些的区域。所以,光能沿着曲线行进。作为最短时间原理的另一个重要例子,假定我们设想一种装置,使所有发自一点 P 的光重新汇集到另一点 P'(如图 26-9)。这当然意味着光能够沿一直线从 P 到达 P' 点。这完全对。但是,我们如何设法使光不仅能沿直线行进到达 P' 点,而且也能使从 P 点朝 Q 点发出的光终止于 P' 点呢?

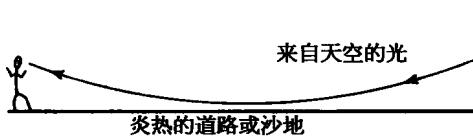


图 26-8 海市蜃楼现象

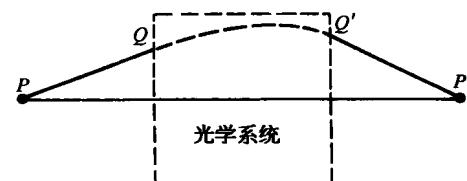


图 26-9 光学“暗箱”

我们要把所有的光引回到所谓的“焦点”。怎么引呢？如果光老是走需时最短的路径，那么它当然不会沿所有其他的路径走。唯一使光能很好地做到也能沿着邻近的一些路径行进的方法，是使这些路径所需的时间恰好相等！否则，光就会选择需时最短的一条路径走。所以造成一个聚焦系统的问题，仅仅在于设计一个器件，使得光沿着所有不同路径走时所花的时间相等。

这很容易做到。假定我们有一片玻璃，光在其中走得比空气中慢（图 26-10）。现在考察一条在空气中沿着 PQP' 路径走的光线。这是一条比直接从 P 点到 P' 点长的路径，无疑要花较长的时间。但是如果我们插入一片恰当厚度的玻璃（以后我们将算出它有多厚），它或许恰好能补偿因光倾斜着走而多花的时间！在这种情况下，我们就能使笔直通过的光所花的时间与沿着 PQP' 路径所花的时间相同。同样地，如果我们取一条稍为倾斜的光线 $PRR'P'$ （它不如 PQP' 那么长），对它的补偿虽然不必像笔直的一条那么多，但总得补偿一些。我们竖着放置一片形如图 26-10 那样的玻璃。利用这种形状，所有从 P 发射的光就会到达 P' 。当然，这对我们来说很熟悉，我们称这种器件为会聚透镜。在下一章中，我们将实际计算为了达到完善的聚焦点，透镜应具有什么形状。

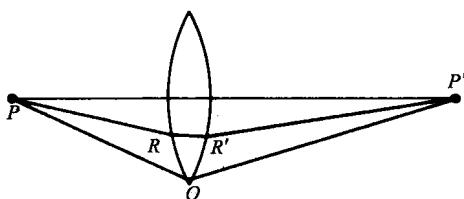


图 26-10 一种光学聚焦系统

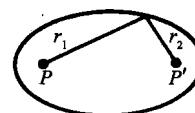


图 26-11 椭球面镜

再举一个例子：假如我们想要设置几面镜子，使从 P 发出的光总是到达 P' （图 26-11）。在任一路径上，光都射到某一面镜子然后返回到 P' ，而所有这些路径所花的时间必须相等。这里光一直在空气中行进，所以时间与距离成正比。于是所有时间都相同的说法跟所有距离都相同的说法完全一样。因而两段距离 r_1 与 r_2 之和必须是常数。椭圆就是具有这样一种性质的曲线，即从两个点到椭圆上任何一点的距离之和为一常数；这样我们就可保证从一个焦点发出的光都到达另一个焦点。

同样的原理适用于聚集来自一颗星的光。巨大的帕洛玛 200 in 望远镜就是用下述原理制成的。设想有一颗数 10^9 mi 远的星；我们希望能使所有射来的光线都到达焦点。当然我们不能把一直到星的整段光路画出，但仍要核对一下各条光线所需的时间是否相等。我们当然知道，当各条光线到达与光线垂直的某一平面 KK' 时，它们所花的时间是相等的（图 26-12）。于是所有光线必须在相等的时间内从这里射到镜面而再继续行进到 P' 。那就是说，我们必须找到一条曲线，它具有这种性质，不论 X 取在哪里，都能使距离之和 $XX' + X'P'$ 为一常数。寻找它的一个简便方法就是将 XX' 线延长到 LL' 平面。现在，如果我们把一条曲线安排得使 $A'A'' = A'P'$, $B'B'' = B'P'$, $C'C'' = C'P'$

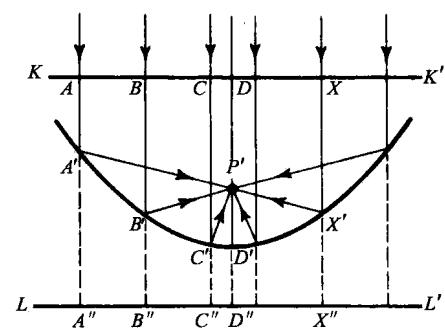


图 26-12 抛物面镜

等等,那么这就是我们所要求的曲线,因为这时 $AA' + A'P' = AA' + A'A''$ 显然是常数。因而我们的曲线就是所有与一点和与一直线等距离的点的轨迹。这样的曲线称为抛物线;镜面就被做成抛物线形状。

上述例子说明了这些光学器件赖以设计的原理。严格的曲线可用这样的原理计算得到,即为了能够完全聚焦,所有光线的传播时间必须精确相等,同时也必须小于邻近任何一条路径所花的时间。

我们将在下一章中进一步讨论这些聚焦用的光学器件;现在我们来讨论这个理论的进一步发展。当一种像最短时间原理那样的新的理论发展起来时,我们首先会倾向于说:“嗯,那很漂亮;令人高兴;但问题是,它最终是否会对理解物理有所帮助?”有人会回答:“有,你看我们现在能理解多少东西呀!”另一个则说:“很好,但我也能理解抛物面镜。我只需要这样一条曲线,使它的每一个切面跟两条光线构成相等的角度。我还能画一个透镜,因为射到它上面的任何一条光线都将按斯涅耳定律给定的角度折射。”显然,最短时间的说法和在反射中两角度相等的说法以及在折射中两角度的正弦成比例的说法都是相同的。所以这是否只是一个哲学问题,或者只是一个审美上的问题?两方面都有充分的论据。

然而,一个有效原理的重要性在于它能预言新的东西。

很容易说明费马原理预言了许多新的东西。首先,假定有三种介质——玻璃、水和空气,我们做一个折射实验以测量一种介质对另一种介质的折射率 n 。把空气(1)对水(2)的折射率叫做 n_{12} ;空气(1)对玻璃(3)的折射率叫做 n_{13} 。如果就水对玻璃的折射率进行测量,那么将会找到另一个我们称之为 n_{23} 的折射率。但并无先验的理由可以说明 n_{12} 、 n_{13} 和 n_{23} 之间应有什么联系。然而,根据最短时间的思想,它们之间确实存在着一个确定的关系。折射率 n_{12} 是两个量,即空气中的速率和水中的速率之比; n_{13} 是空气中的速率和玻璃中的速率之比; n_{23} 是水中的速率和玻璃中的速率之比。所以如果消去空气中的速率,就得到

$$n_{23} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1/v_3}{v_1/v_2} = \frac{n_{13}}{n_{12}}. \quad (26.5)$$

换句话说,我们可以预言一对新的介质的折射率可以从各个介质对空气或真空的折射率中求得。所以,如果对光在所有介质中的速率进行测量,并由此对每一种介质得到一个单一的数,即它相对于真空的折射率 n_i (例如 n_1 是真空中速率与空气中速率之比,等等),那么我们的公式就变得非常简单。于是任意两种介质 i 和 j 的折射率为

$$n_{ij} = \frac{v_i}{v_j} = \frac{n_j}{n_i}. \quad (26.6)$$

只用斯涅耳定律,就不存在作这类预言的基础*。但这一预言当然成立。关系式(26.5)很早就已知道,而且是最短时间原理的一个有力证据。

最短时间原理的另一证据即另一预言是,如果我们测量光在水中的速率,它定将比空气中的慢。这完全是另一种类型的预言。它是一个出色的预言,因为到此为止所有我们测得的量都是角度;而这里我们有了一个与观察十分不同的理论上的预言,费马则是由这些观察

* 虽然在作一个附加假定的条件下它可以推导出来。这个附加假定是:在一种物质的表面上加一层另一种物质,不会改变光在后一种物质中最终的折射角。

引出他的最短时间这个概念的。结果证明，光在水中的速率的确比空气中的速率慢，两者之比恰好等于折射率！

§ 26-5 费马原理的更精确表述

实际上，我们必须把最短时间原理表述得更正确一些。在前面，它并没有得到正确的表述。称它为最短时间原理是不正确的，我们只是为了方便起见，一直沿用着这个不正确的表述，但现在我们必须考虑正确的表述应该是怎样的。假如我们有如图 26-3 所示的一面镜子。是什么促使光一定要跑到镜面上来？最短时间的路径显然是 AB。所以有些人也许会说：“有时这是一条取时最长的路径。”但这里的时间并不是极大值，因为一条弯曲的路径需要的时间肯定要更长！正确的表述如下：在某一特定路径上行进的光具有这样的一种性质，那就是，如果我们不论用何种方式使光路作微小改变（比如说移动百分之一），例如改变它射到镜面上的路线的位置，或改变曲线的形状，或任何别的方式，都不会有时间的一级变化；而只有时间的二级变化。换句话说，这个原理是：光取的是这样一条路径，在它邻近有许多取时几乎与它完全相同的其他路径。

下面是最短时间原理的另一个困难，它也是那些不喜欢这种理论的人所永远不能忍受的一个困难。利用斯涅耳理论我们能够“理解”光。当光在行进中遇见一个表面时，会因为它与表面有相互作用而发生弯曲。光从一点跑到另一点，再到又一点等等的因果关系的思想是容易理解的。但最短时间原理却是关于自然界行为方式的完全另一种哲学原理。它不是把我们做了某件事后，又发生另一件事等等说成是因果关系，而是这样说：我们建立起一种装置，由光束判断哪一条是需时最短或最终的路径，从而选定由这条路径走。但它做了什么，又是如何找出这条路径的？它是否试探了邻近各条路径，并对它们进行了相互核对？回答是：是的，在某种程度上，它的确是这样做的。这个特征在几何光学中当然是无法知道的，但却包含在波长的概念之中；波长大致告诉我们，光必须在离开多远的地方“试探”这条路径以便进行核对。要在大尺度内用光来演示这一事实是困难的，因为光的波长实在太短。但对于无线电波，例如 3 厘米波，进行核对的距离就比较长了。如果我们有一个无线电波源，一个探测器和一条缝，如图 26-13 所示，光当然从 S 跑到 D，因为这是一条直线，而且当我们把缝关小时仍然如此——光仍沿此直线走。但如果把探测器移到旁边的 D' 点，波将不会通过宽缝从 S 跑到 D'，因为它们核对了邻近的几条路径，并且说：“不，我的朋友，那些路径都对应于不同的时间。”但是如果我们将缝关小到使之成一条很窄的缝隙，以阻止辐射波核对各条路径，那么只有一条路径可走，辐射波也就只好随着它走！用一条狭缝比起用宽缝来有更多的辐射能到达 D' 点！

用光也能作同样的实验，但要在大尺度上来演示是困难的。其效应可在下述简单情况下看到。找一小而亮的光源，比如说远处街灯的一个非乳白灯泡，或太阳在弯曲的汽车缓冲器上的反射光。将两只手指放在一只眼睛前面，以便通过指间狭缝进行观察，然后慢慢地并

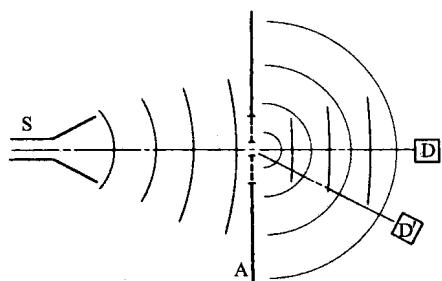


图 26-13 无线电波通过一个狭缝

拢手指使光减少到接近于零。此时,你将看到先前是一个小点的光源像变得相当长,甚至拉成一条长线。理由是手指靠得很近,原来认为沿直线过来的光散开成一个角度,因此当它进入眼睛时就从几个方向跑了进来。如果你很仔细的话,还会看到侧向极大,即许多与缝隙边缘平行的条纹,而且整个东西是彩色的。所有这些将在适当的时候加以解释,但就目前来说,它确是说明光并不总是沿着直线行进的一个演示实验,而且是一个很容易做的演示实验。

§ 26-6 最短时间原理是怎样起作用的

最后,从我们现在相信是正确的、量子力学上精确的观点出发,对实际发生的是什么以及整个事情是怎样起作用的提供一个粗略的概念,当然只能作定性的描述。在图 26-3 中,当我们随着光从 A 到 B 行进时,我们发现光似乎根本不具有波的形式。相反,光线倒是有点像由光子组成的,如果我们用一个光子计数器,它实际上会在其中产生咔哒声。光的亮度与每秒钟进入计数器的平均光子数成正比,而我们所计算的则是光子从 A(比如说碰到镜面后)到达 B 的机会。这种机会所遵循的是下述很奇怪的规律。取任一路径,并找出其相应的时间;然后写一复数或画一小的复矢量 $\rho e^{i\theta}$,令其角度 θ 正比于时间。复矢量每秒的旋转周数就是光的频率。再取另一路径,比如说它具有不同的时间,则其对应的矢量就转过不同的角度——角度总是与时间成正比的。取所有可取的路径,并为每一条路径加上一个小矢量;那么答案就是,光子到达的机会与从始端到末端的总矢量的长度平方成正比!

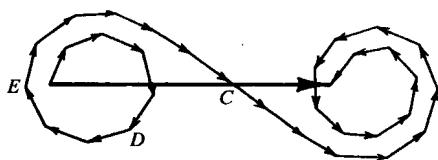


图 26-14 许多邻近路径的概率振幅总和

现在我们来说明对镜面来说这个结果如何隐含了最短时间原理。考虑图 26-3 中所有的光线和所有可能的路径 ADB , AEB , ACB 等等。路径 ADB 提供了某一小的贡献,但下一个路径 AEB 所花的时间就完全不同,故其角度 θ 也完全不同。设 C 点对应于时间的极小值,在它附近改变路径时,时间并不改变。因而,起初一会儿时间在改变,但当接近 C 点时,时间的变化就开始变得越来越小(图 26-14)。所以在靠近 C 点的片刻所添加的箭头几乎都达到完全相同的角度。然后时间又开始逐渐增加,相角又朝相反方向旋转,等等。最后,得到一个收紧的结。总的概率就是从一端到另一端距离的平方。几乎所有对于概率的积累都发生在所有箭头沿同一方向(即同相位)的区域。所有来自那些当改变路径时具有十分不同时间的路径的贡献,由于指向不同方向而相互抵消了。这就是为什么当我们遮去镜子的边缘部分时,它的反射几乎与以前相同的缘故,因为我们在这里所作的一切仅仅是抹去了位于图上的螺旋末端的一部分而已,它只引起光很少的改变。这就是最终的(其到达的概率取决于复矢量的累加)光子图像与最短时间原理之间的关系。

第 27 章 几何光学

§ 27-1 引言

本章将用所谓几何光学近似来讨论上一章的概念对许多实际装置和仪器的一些初步应用。这种近似是许多光学系统和仪器在其具体设计中最有用的一种方法。几何光学要么十分简单,要么非常复杂。这样说的意思是,或者我们只是很肤浅地学习它,使得我们利用它的一些规则就能粗糙地设计仪器,而这些规则又非常简单,以致在这里根本没有必要去讲述它们,因为它们实际上是中学水平的内容;或者如果我们想要知道透镜以及类似器件的微小误差,则题材又太复杂,以致在这里讨论它显得太深!如果有人想解决一个在透镜设计方面实际而详细的问题,包括像差分析在内,那么奉劝他去阅读有关著作,要不就利用折射定律找出光线通过各个表面的轨迹(这就是本书所要讲的做法),并求出它们从哪里射出以及是否形成一个满意的像。有人说这太麻烦了,但今天借助计算机,这是解决问题的一个正确的方法。人们可以提出问题,并且很容易一条光线接着一条光线地进行计算。因而问题最终确实变得十分简单,也用不到什么新的原理。而且事实证明,不论是初等还是高等光学,它们的规则对于别的领域来说,很少有什么特色,所以没有什么特殊的理由要把这一题材讲得太深,但有一个重要的例外。

几何光学最高深和抽象的理论是由哈密顿(W. R. Hamilton)完成的,结果证明,这种理论在力学中有很重要的应用。实际上它在力学中甚至比在光学中更为重要,所以我们把哈密顿理论作为高等分析力学课程的一部分放到高年级或研究班去讲。在估计到几何光学除了为本身的目的以外很少有贡献之后,现在我们就在上一章所概括的原理的基础上对简单光学系统的基本性质进行讨论。

为了进行讨论,就必须有一个几何公式,其内容如下:如果有一个高(h)很小而底边(d)很长的直角三角形,则斜边 s (我们在求两条不同路径之间的时间差时将用到它)比底边长(图 27-1)。长多少呢?其差值 $\Delta = s - d$ 可以用许多方法来求得。其中一种方法是这样:由图可见 $s^2 - d^2 = h^2$, 或 $(s - d)(s + d) = h^2$, 但 $s - d = \Delta$, 而 $s + d \approx 2s$, 于是

$$\Delta \approx \frac{h^2}{2s}. \quad (27.1)$$

这就是讨论曲面成像时所需要的全部几何学!

§ 27-2 球面的焦距

我们所要讨论的第一个而且最简单的情况,是把两种折射率不同的介质分开的那种单

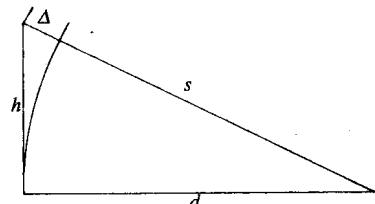


图 27-1

折射面(图 27-2)。我们把具有任意折射率的情况留给学生去做,因为最重要的往往是概念

而不是特殊情况,并且这样的问题在任何情况下解决起来都是很简单的。所以我们假定光在左方的速率为 1,在右方的速率为 $1/n$,这里 n 是折射率。光在玻璃中传播较慢,要小一个因子 n 。

现在假定有一 O 点在玻璃表面之前距离 s 处,另一点 O' 在玻璃之内距离 s' 处。我们想这样来设计一个曲面,使每条从 O 点射到表面上任何一点 P 处的光线经折射后都行进到 O' 点。

为了做到这一点,必须使表面具有这样的形状,使光从 O 走到 P 所花的时间,亦即距离 OP 除以光的速率(这里光速为 1),加上 $n \cdot O'P$,也就是光从 P 走到 O' 所花的时间,等于一个常数(与 P 点无关)。这一条件为我们决定表面的形状提供了一个方程。它的解告诉我们此表面是一个非常复杂的四次曲面,学生如有兴趣可用解析几何来进行计算。但是如果计算一个对应于 $s \rightarrow \infty$ 的特殊情况,那么事情就比较简单,因为这时的曲面是一个二次曲面,我们对它比较熟悉。如果将这个曲面与当光来自无穷远时我们所求得的聚焦镜的抛物面进行比较,则是令人十分感兴趣的。

因而正确的表面不易制造,因为要把光从一点聚焦到另一点需要相当复杂的表面。事实证明,我们在实践中一般并不试图去制造这种复杂的表面,而作一妥协。我们不想把所有的光线都聚焦到一点,而是这样做,使得只有相当靠近 OO' 轴的光线聚焦到一点。遗憾的是,离轴较远的光线即使想要聚焦到一点也会偏离,因为理想的表面很复杂,而我们只是用了一个在轴上具有适当曲率的球面来代替它的缘故。制造一个球面要比制造其他曲面容易得多,因此找出射到球面上的光线将会出现什么情况对我们是有用的,我们假定只有靠近轴的光线被完全聚焦。靠近轴的那些光线有时叫做傍轴光线,而我们所分析的就是傍轴光线聚焦的条件。以后我们还将讨论不是所有光线都是傍轴的情况下所导致的误差。

因此,假定 P 靠近轴,我们作垂线 PQ ,使 PQ 之高为 h ,并暂且设想表面是一个通过 P 的平面。在这种情况下,从 O 到 P 所需的时间将超过从 O 到 Q 的时间,同样,从 P 到 O' 的时间亦将超过从 Q 到 O' 的时间。但这正是玻璃所以必须弯曲的原因,因为所超过的总的时间必须由从 V 到 Q 所延迟的时间来补偿! 现在沿路径 OP 所超过的时间为 $h^2/2s$,而在 PO' 路径上所超过的时间为 $nh^2/2s'$ 。所超过的时间必须与沿 VQ 所延迟的时间相抵消,而此延迟时间与在真空中的不同,因为有介质存在。换句话说,光从 V 行进到 Q 的时间不是像它直接在空气中行进时一样,而是比之慢了 n 倍,所以在这段距离内剩余的延迟时间为 $(n-1)VQ$ 。但 VQ 有多长? 如果点 C 为球心, R 为其半径,那么由同一公式我们可以看到这段距离 VQ 等于 $h^2/2R$,因此我们发现联系距离 s 与 s' 而又给出所需表面的曲率半径 R 的规律为

$$\frac{h^2}{2s} + \frac{nh^2}{2s'} = \frac{(n-1)h^2}{2R} \quad (27.2)$$

或

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n-1}{R}. \quad (27.3)$$

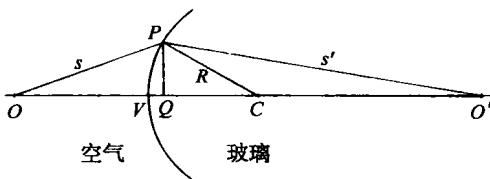


图 27-2 单折射面聚焦

如果我们有一点 O 及另一点 O' , 并且想把光从 O 点聚焦到 O' 点, 那么就可用此公式来计算所需表面的曲率半径 R 。

现在有趣的是, 结果表明: 具有同样曲率半径 R 的同一透镜对于其他距离也能聚焦, 也就是说, 对于任何两个倒数之和(其中一个乘上 n)为一常数的距离也能聚焦。因此, 一个给定透镜(只要限于傍轴光线)不仅能把光从 O 聚焦到 O' , 而且也能把光在无数对其他点之间聚焦, 只要这些成对的点满足 $1/s + n/s'$ 等于一个表征透镜特性的常数这个关系。

特别有趣的是 $s \rightarrow \infty$ 的情况。由公式可见, 当 s 一个增加时, 另一个则减少。换句话说, 若点 O 向外移动, 点 O' 就向内移动, 反之亦然。当点 O 移向无穷远时, 点 O' 在介质内也在移动, 直到离表面一定距离为止, 这段距离叫做焦距 f' 。如果平行光入射时, 它们将在距离 f' 处与轴相交。同样, 我们可以想象反方向的情况(请记住倒易规则: 若光可从 O 行进到 O' , 当然也可从 O' 行进到 O)。因此, 假定说玻璃内有一光源, 我们也许想知道其焦点在哪里。特别是, 如果光在玻璃内无穷远地方入射(同样的问题), 它将聚焦在外面的何处? 这个距离叫做 f 。当然我们也可使光反方向而行之。若在 f 处有一光源, 把光射进表面, 则它将以平行光束射出。我们很容易求出 f 与 f' 的数值为

$$\frac{n}{f'} = \frac{n-1}{R} \quad \text{或} \quad f' = \frac{Rn}{n-1}, \quad (27.4)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R} \quad \text{或} \quad f = \frac{R}{n-1}. \quad (27.5)$$

从以上两式可以看到一个有趣的情形: 如果把各焦距除以相应的折射率, 即得相同的结果! 事实上, 这个定理是普遍成立的。它对任何透镜系统都是正确的, 不论这一系统多么复杂, 因而记住它是很有意义的。我们在这里并没有证明过它普遍成立——只是指出了对于单独一个表面, 它是对的, 然而碰巧它却普遍成立, 以致系统的两个焦距就以这一方式互成关系。式(27.3)有时可写成下列形式

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (27.6)$$

这种形式比式(27.3)更为有用, 因为测量 f 比测量透镜的曲率和折射率容易得多: 如果我们对透镜的设计不感兴趣, 也不想知道它如何制成, 而只从架子上拿它来使用, 那么我们感兴趣的量是 f , 而不是 n 与 1 和 R !

如果 s 变得小于 f , 就会发生一种有趣的情况。那么发生什么情况呢? 若 $s < f$, 则 $(1/s) > (1/f)$, 于是 s' 为负; 方程指出光将只对负的 s' 值聚焦, 这究竟意味着什么! 它意味着一件很有趣和很确定的事。换句话说, 即使数值为负, 上式仍不失为一个有用的公式。它意味着什么已在图 27-3 中表示出。如果从 O 点画一些发散的光线, 无疑它们要在表面上偏折, 但它们不会聚焦成一点, 因为 O 太靠近表面, 以致“超过了折成平行光”的范围。然而, 它们却这样地发散出去, 好像是从玻璃外面一点 O' 发出的。 O' 是一个表观像, 有时叫做虚像。图 27-2 中的像 O' 叫做实像。如果光真的射向一点, 那么它就是一个实像。但是如果光看来好像来自一点(与原来的点不同的一个虚构的点), 那么它就是一个虚像。所以当 s' 变成负时, 就意味着 O' 在表面的另一边, 这样一切就妥当了。

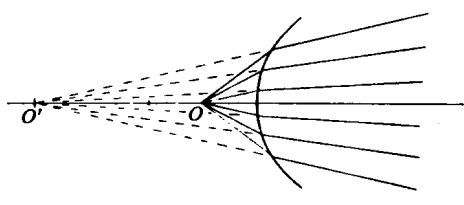
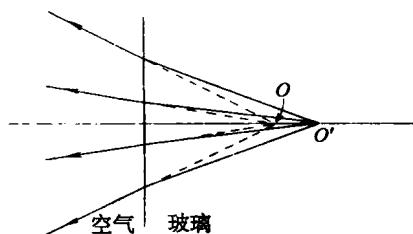


图 27-3 虚像

图 27-4 一平表面把发自 O' 的光重新成像为 O

现在我们来研究 R 等于无限大时的有趣情况;此时 $1/s + n/s' = 0$ 。换句话说 $s' = -ns$ 。这意味着当我们从密介质朝疏介质看其中一个点时,这个点看来好像深了 n 倍。同样,也可把同一个式子反过来用,因而当我们通过平表面看位于密介质内一定距离的物体时,它将看来好像光不是从那么深的地方射来的(图 27-4)。当我们从上面看一个游泳池的底时,它看起来不像真的那么深,而只有原来深度的 $3/4$,此即水折射率的倒数。

当然,我们可以继续来讨论球面镜。但是如果你理解了其中所包括的一些概念,那么你应能自己来解决这个问题。所以我们让学生自己去求出球面镜的公式,但我们指出,对于所涉及的一些距离,如果采用一定的习惯规则较为方便:

- (1) 若点 O 在表面左方,则物距 s 为正;
- (2) 若点 O' 在表面右方,则像距 s' 为正;
- (3) 若球面中心在表面右方,则表面曲率半径为正。

例如,在图 27-2 中, s , s' 和 R 皆为正;在图 27-3 中, s 和 R 为正,而 s' 为负。如果用一个凹表面,那么只要取 R 为负值,公式(27.3)仍然会给出正确结果。

在应用上述习惯规则求球面镜的相应公式时,你将发现,如果在整个公式(27.3)中都令 $n = -1$ (好像镜子后面的介质的折射率为 -1 一样),那么结果就得出了镜子的正确公式!

虽然利用最短时间原理来导出公式(27.3)既简单又优美,但用斯涅尔定律当然也能导出同一公式,只要记住一点,那就是这里角度很小,以致角度的正弦可用角度本身来代替。

§ 27-3 透镜的焦距

现在我们继续讨论另一种很实用的情况。我们所使用的大多数透镜具有两个表面,而不是只有一个表面。这将对事情产生什么影响呢?

假定有两个不同曲率的表面,它们之间的空间充满着玻璃(图 27-5)。我们想研究从点 O 向另一点 O'' 聚焦的问题。怎么做呢?回答是:首先,对第一个表面应用式(27.3)而不考虑第二个表面。这将告诉我们,从 O 点发出的光好像是向另外某一点(比如说 O')会聚的或者是从这一点散发出来的,完全依符号而定。现在我们来考虑一个新的问题,即在玻璃(光线在其中会聚到某一点 O')与空气之间有另一个表面。这时,光线实际上将向何处会聚呢?我们再应用同一

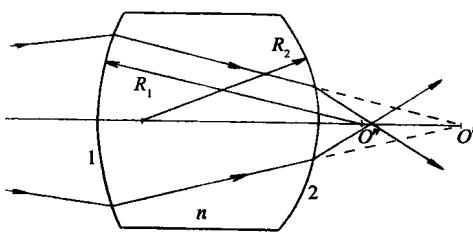


图 27-5 双面透镜成像

个公式！我们发现它们会聚在 O' 点。这样，如果需要，只要一个接一个地连续使用同一个公式，就是一共通过 75 个表面也行！

有一些相当高级的公式，在我们或许要追随光线通过 5 个表面时，将在有限的生命中给我们节省许多精力，但是当这种问题发生时，还是跟着光线通过 5 个表面，比之去记忆许多公式容易得多，因为说不定我们将根本不需要去跟着光线通过任何表面！

在任何情况下，我们的原则是，当通过一个表面时，找到一个新的位置，即一个新的聚焦点，然后把这个点当作下一个表面的出发点，如此等等。既然在第二个表面上我们是从 n 走到 1，而不是从 1 走到 n ，而且在许多系统中有不止一种玻璃，以致其折射率为 n_1, n_2, \dots ，那么为了实际做到这一点，我们的确需要把公式(27.3)普遍化，使之适用于两种不同折射率 n_1 与 n_2 的情况，而不是只有一种折射率 n 的情况。不难证明，公式(27.3)的普遍形式为

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (27.7)$$

特别简单的是两个表面靠得很近的特殊情况。靠得如此之近，可以忽略由于厚度引起的微小误差。如果把透镜画成如图 27-6 所示的那样，我们可以提出这样的问题：透镜必须怎样制成才能使光从 O 点聚焦到 O' 点？假定光正好到达透镜的边缘 P 点。暂且忽略折射率为 n_2 、厚度为 T 的玻璃的存在，则光从 O 行进到 O' 所超过的时间是 $(n_1 h^2 / 2s) + (n_1 h^2 / 2s')$ 。于是，为了使走直线路径的时间等于走路径 OPO' 的时间，必须用一片玻璃，它的中心厚度 T 应该这样，即足以使光通过这一厚度所引起的延迟时间补偿上述过量时间。因此，透镜的中心厚度必须由下列关系给出

$$\frac{n_1 h^2}{2s} + \frac{n_1 h^2}{2s'} = (n_2 - n_1) T. \quad (27.8)$$

我们也可以用两个表面的半径 R_1 与 R_2 来表示 T 。注意到习惯规则(3)，对于 $R_1 < R_2$ (凸透镜)，得到

$$T = \frac{h^2}{2R_1} - \frac{h^2}{2R_2}. \quad (27.9)$$

因而最后得到

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_1}{s'} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (27.10)$$

现在再记住当一点在无穷远时，另一点将在我门称之为焦距 f 的地方。焦距 f 由下式给出

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (27.11)$$

这里 $n = n_2 / n_1$ 。

如果现在取相反的情况，即 s 趋于无穷远，则 s' 等于焦距 f' 。这时两焦距相等(这是两

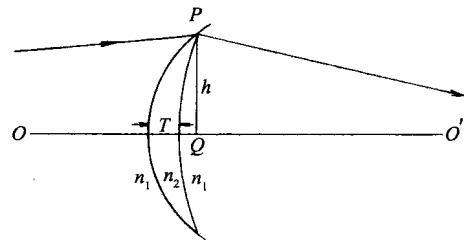


图 27-6 两个曲率半径都为正的薄透镜

焦距之比等于光在其中聚焦的两介质折射率之比这一普遍规则的又一特殊情况)。在这一特殊光学系统中,初始和最后两个折射率都相同,因而两焦距也相等。

我们暂且把焦距的实际公式忘掉,如果我们购到一个由某人设计、具有某种曲率半径和某种折射率的透镜,那么我们可以这样来测量焦距,比如说观察一下无穷远处的一点聚焦在何处。一旦有了焦距,最好是直接用焦距写出我们的等式,于是这一公式为

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}. \quad (27.12)$$

现在我们来看一下如何应用这个公式及其在不同情况下的含意。首先它指出,如果 s (或 s') 为无穷大,则 s' (或 s) 为 f 。这意味着平行光聚焦在距离 f 处,实际上它定义了 f 。它告诉我们的另一有趣事情是,两个点(物点和像点)都朝同一方向运动。如果一点朝右运动,另一点也朝右运动。此外它还告诉我们若 s 与 s' 都等于 $2f$,则它们两者相等。换句话说,如果要得到一种对称情况,则我们发现它们都聚焦在距离 $2f$ 处。

§ 27-4 放大率

到现在为止,我们只讨论了轴上点的聚焦作用。现在我们来讨论不完全在轴上而稍为

离开它一点的物体的成像,这样可以使我们了解放大率的性质。当我们装置一个透镜把来自灯丝的光聚焦在屏上一“点”时,我们注意到,在屏上得到同一灯丝的“图像”,只是其大小比实际的灯丝大一些或小一些而已。这必然意味着从灯丝上每一点发出的光都会聚到一焦点上。为了更好地理解这一点,我们来分析图 27-7 中所示的薄透镜系统。我们知道下列事实:

(1) 从一边射来的任一平行于轴的光线都朝着另一边称为焦点的某一特殊点行进,这个点与透镜相距 f 。

(2) 任一从一边的焦点发出而到达透镜的光线,都在另一边平行于轴射出。

这就是我们用几何方法建立公式(27.12)所需要的全部知识,具体步骤如下:假定离焦点某一距离 x 处有一物体,其高为 y 。于是我们知道光线之中有一条光线(如 PQ)将经透镜偏折而通过另一边的焦点 R 。如果现在这个透镜能完全使 P 点聚焦的话,那么只要找出另外一条光线的走向,就能找出这个焦点在哪里,因为新的焦点应在两条光线再次相交的地方。因此我们只要设法找出另外一条光线的实际方向,而我们记得平行的光线通过焦点,反之亦然:即通过焦点的光线将平行地射出!所以我们画出一条光线 PT 通过 U (诚然参与聚焦的实际光线可能比我们所画的两条光线的张角小得多,但它们画起来较为困难,所以我们假设能作这条光线)。既然它将平行射出,我们就画出 TS 平行于 XW 。交点 S 就是所要求的点。这个点决定了像的正确位置和正确高度。我们把高度称为 y' ,离焦点的距离称为 x' 。现在我们可以导出一个透镜公式。应用相似三角形 PVU 和 TXU ,得

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{x}. \quad (27.13)$$

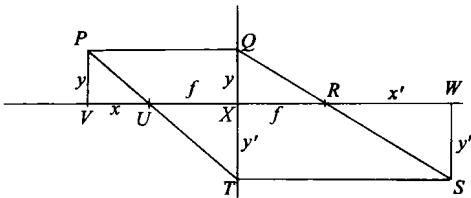


图 27-7 薄透镜成像的几何图

同样,从三角形 SWR 和 QXR ,得

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f}. \quad (27.14)$$

由此上两式各解出 y'/y 后,得

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f} = \frac{f}{x}. \quad (27.15)$$

式(27.15)是有名的透镜公式;其中包括了我们关于透镜所需要知道的一切;它告诉我们放大率 y'/y ,用距离和焦距表示。它也把两个距离 x 和 x' 与 f 联系起来

$$xx' = f^2, \quad (27.16)$$

这是一个用起来比式(27.12)简洁得多的形式。我们让同学自己去证明,若令 $s = x + f$, $s' = x' + f$, 则式(27.12)与式(27.16)相同。

§ 27-5 透 镜 组

当有许多透镜时,我们将简短地叙述一下其一般的结果,而不加实际推导。如果有一个由几个透镜组成的系统,那么我们怎样来分析它呢?这很容易。先从某个物体开始,并利用式(27.16)或(27.12)以及任何别的等效公式,或者用作图法,算出它被第一个透镜成像在哪里。这样就得到一个像。然后把这个像作为下一个透镜的光源,并用第二个透镜(不管它的焦距是多少)再找出一个像。我们就这样对一连串透镜一直追踪下去。这就是要做的一切。由于它原则上没有什么新的东西,所以我们不准备深入下去。但是,就任一序列的透镜对于在某一介质例如空气中发出而终止在同一介质中的光所产生的各效应却有一个很有趣的最后结果。任何一种光学仪器——包括任意数目的透镜和反射镜的望远镜或显微镜——都具有下列性质:它有两个平面,叫做系统的主平面(这些平面往往很接近第一个透镜的第一个表面和最后一个透镜的最后一个表面),它们具有下列性质:(1)如果光从第一边平行地射向系统,它就在一定的焦点射出,焦点位于离第二主平面的距离等于焦距处,就好像这个系统是置于这一平面的一个薄透镜一样。(2)如果平行光从相反方向射来,那么它将会聚到离第一主平面同一距离 f 处的焦点上,又好像有一个薄透镜位于主平面处一样(见图 27-8)。

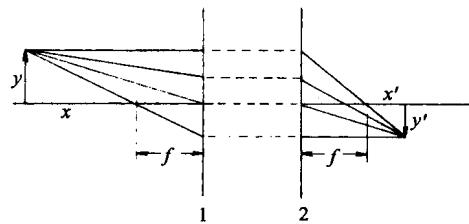


图 27-8 光学系统主平面示意图

当然,如果我们像以前一样测出距离 x 与 x' , y 与 y' ,那么对薄透镜所写的公式(27.16)在这里完全普遍适用,假定焦距从主平面而不是从透镜组中心算起的话。对薄透镜来说,两个主平面恰好重合。这种情况正像我们取来一个薄透镜,把它沿中间切开,再把它分开,而不去注意它已被分开一样。每一条射来的光线,会立即在第二个平面的另一边从光进入第一个平面的同一点突然射出!主平面与焦距可以用实验来求得,也可用计算来求得,于是光学系统的全部性质就此得到描述。当我们把这样巨大而复杂的光学系统处理完毕时,结果却并不复杂,这是一件很有趣的事。

§ 27-6 像 差

在我们不致因透镜如此奇妙而感到过于兴奋之前, 必须赶快补充一点, 即透镜也有其严重的局限性, 因为严格地说, 我们的讨论只限于那些靠近轴的近轴光线。一个具有一定大小的真实透镜一般说来将显示出像差。例如, 在轴上的一条光线当然会通过焦点; 一条很靠近轴的光线仍然也会很好地会聚到焦点上。但当光线离轴较远时, 就开始偏离焦点, 也许落到离透镜更近的地方, 射到靠近透镜边缘上的光向下折射时将偏离焦点相当宽一段距离。因此, 我们不是得到一个点像, 而是得到一个模糊的光斑。这一效应称为球面像差, 因为它是用以代替正确曲面的球面所具有的一种性质。对任一特定的物距来说, 用修正透镜表面的形状, 或者用几个透镜组合起来使各个透镜的像差趋于相互抵消的办法, 球面像差可以得到纠正。

透镜还有另一个缺点: 不同颜色的光在玻璃中具有不同的速率或不同的折射率, 因而一个给定的透镜的焦距对不同的颜色是不同的。所以, 如果我们把一个白的光点成像, 其像将会有颜色, 因为当我们使红光聚焦时, 蓝光就不聚焦, 或者反过来。这种性质叫做色像差或色差。

透镜还有其他一些缺点: 如果物体在轴之外, 那么当它离轴足够远时, 聚焦实际上已不再很完善。验证这一点的最容易的方法是把一块透镜聚焦, 然后把它偏转一下, 以使光线与轴成大角度地射来。这时所形成的像一般都很粗糙, 而且可能没有一个聚焦得很好的地方。因此, 透镜中有好几种像差, 以致光学设计者要用许多个透镜以补偿相互的像差的办法来加以校正。

要消除像差, 我们必须谨慎到何种程度? 是否可能构成一个绝对完善的光学系统? 假定我们已经构成一个光学系统, 并且认为它能把光正确地会聚到一点, 那么, 从最短时间的观点来论证, 能否找到一个关于系统必须完善到什么程度的条件? 这个系统总有某种形式的能使光进入的开孔。如果我们取离轴最远的光线, 而它也能到达焦点(当然假定系统是完善的), 那么对于所有光线, 时间是正确相等的。但完全完善的东西是不存在的, 所以问题在于, 这条光线的时间可以差多少才不需要对它作进一步校正? 这取决于我们所要成的像达到多么完善的程度而定。假定我们要使像做到尽可能地完善, 那么, 我们的想法当然是必须使每一条光线尽可能取几乎相同的时间。但结果证明这是不确切的, 我们想做的事过于精细, 以致超过了可能的限度, 因为此时几何光学理论已不再适用!

记住最短时间原理并非是一种精确的表述, 不像能量守恒原理和动量守恒原理那样。它只是一种近似, 而寻求允许多少误差仍不致造成明显偏差倒是颇有意义的。回答是, 如果我们作这样的安排, 使得位于最边缘的光线——即成像最差的光线, 也就是离轴最远的光线——与中心光线之间的时间差别小于与光的一次振动相应的周期, 那么再作进一步改进已经无益。光是一种以确定频率振动的东西, 这一频率与波长有关, 如果我们已把系统安排得使不同光线的时间差别小于约一个周期, 那么进一步改进系统已没有用处了。

§ 27-7 分 辨 本 领

另一个有趣的问题——一个对于所有光学仪器都很重要的技术问题——是它们的分辨

本领有多大。如果我们制造一架显微镜,就想看清楚所观察的物体,举例来说,这意味着,如果我们正在观察一个两端都有斑点的细菌,那么我们就要做到在把它们放大时能看清楚有两个小点。人们也许会想,这只要把它们放足够大就行——我们总是可以再加上一个透镜,放大了又放大,而且凭着设计者的智慧,所有的球差和色差都可消除,因而没有理由说为什么不能不断地把像放大。所以显微镜的限度不在于不可能制造一个径向放大率大于 2 000 倍的透镜。我们能够制造一个径向放大率为 10 000 倍的透镜系统,但由于几何光学的局限性,以及最短时间原理并非精确成立这一事实,我们仍然不能看清楚靠得太近的两个点。

要找出用以决定两个点应分得多么开才能使它们的像看起来好像是分开的两个点的规则,可以结合不同光线所需的时间用一种很美妙的方法来叙述。假定现在不考虑像差,并设想对某一特殊点 P 来说(图 27-9),所有从物到像 T 的光线所花的时间完全相同。(这是不确切的,因为它不是一个完善的系统,但那是另一个问题。)

现在取附近另一个点 P' ,并问其像是否能与 T 分清楚。换句话说,我们是否能辨认出它们之间的差别。按照几何光学,当然应该有两个点像,但我们看到的可能是一个比较模糊的斑点,以致无从辨认出那里有两个点。第二个点聚焦在与第一个点显著不同的另一地方的条件是,对于通过透镜大开孔的两个边缘的极端光线 $P'ST$ 与 $P'RT$,光从一端行进到另一端所花的两个时间,必须与从两个可能的物点到同一给定的像点所花的时间不同。为什么?因为,如果时间相同,两个物点当然都将聚焦在同一点上。所以这两个时间不应相同。但它们必须相差多少才可以说两个物点不都聚焦在同一点上,以致我们可以分清两个像点?对任何光学仪器,其分辨本领的一般规则是这样的:两个不同的点源,只有当一个点源聚焦在某一点,而从另一点源发出的两条极端光线到达这一点所花的时间与到达它自己的实际像点相比,相差大于一个周期时,才能被分辨。亦即顶端光线与底边光线到达非正确焦点的时间差别必须大于某一数值,这个数值近似地等于光的振动周期

$$t_2 - t_1 > \frac{1}{\nu}, \quad (27.17)$$

其中 ν 是光的频率(即每秒的振动次数,也就是速率除以波长)。如果两点源之间的距离为 D ,而透镜的张角为 θ ,那么可以证明式(27.17)与 D 必须大于 $\lambda/(n \sin \theta)$ 的说法是完全等效的。这里 n 是 P 处介质的折射率, λ 是波长。所以我们所能看清楚的最小物体,其线度大约等于光的波长。望远镜也有一个相应的公式,它告诉我们恰好能分辨的两颗星的最小角差该为多少*。

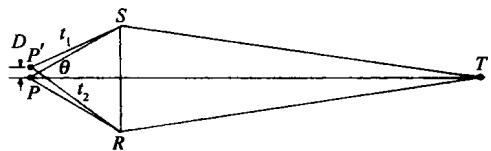


图 27-9 光学系统的分辨本领

* 这个角差约为 λ/D , 其中 D 是透镜的直径, 你能看出为什么是这样吗?

第 28 章 电 磁 辐 射

§ 28-1 电 磁 学

在物理学的发展中,最具戏剧性的时刻乃是不同现象得到高度综合的时刻,那时突然发现,以前看来似乎很不相同的现象,实际上只是同一事物的不同侧面而已。物理学史就是这种综合的历史,而物理科学所以能够取得成就,主要就是因为我们能够进行综合。

19世纪物理学发展中最具戏剧性的时刻,也许是在1860年的某一天当麦克斯韦把电与磁的规律与光的规律联系起来的时候。这样一来,光的性质就被部分地阐明了。光,这个司空见惯而又难以捉摸的东西,它是那么重要而又神秘,以致在写《创世纪》的时候就觉得需要专门安排一天来创造它。然而当麦克斯韦完成他的发现时,他就可以说:“只要有了电与磁,就会有光!”

但是,为了达到这一登峰造极的时刻,却有一个逐渐发现并阐明关于电和磁的规律的漫长准备过程。这个准备过程我们留待下一学年去详细研究,现在仅简述如下。关于电和磁、电的斥力和引力以及磁力等等这些已被逐渐发现的性质表明,虽然这些力都很复杂,但它们都与距离平方成反比地衰减。例如我们知道,关于静止电荷的简单的库仑定律就表明,电力场的变化与距离平方成反比。因此,当距离足够大时,一个电荷体系对另一个电荷体系的影响就很小。当麦克斯韦试图把当时已经发现的所有方程或定律汇集在一起时,他注意到它们之间是相互矛盾的;为了使整个方程体系不矛盾,就必须在他所建立的方程中加进另外一项。于是,他就从这个新的一项得出了一个惊人的预言,那就是电场与磁场的一部分随距离的衰减远比反平方关系来得慢,也就是与距离的一次方成反比!因而他认识到,一处的电流可以影响远处的电荷,并且预言了我们今天所熟悉的一些基本效应——无线电传输、雷达,等等。

一个人在欧洲讲话,仅仅借助于电的影响,就能够被几千英里以外的洛杉矶的人听到,这好像是个奇迹。这怎么可能呢?这是因为场不是按距离平方成反比地变化,而是按距离一次方成反比地变化。最后,连光本身也被认识到是原子中的电子以非常惊人的快速振荡所产生的电磁扰动在空间的传播。所有这些现象我们可以概括为一个词:辐射,或更加明确地叫做电磁辐射,因为还有一种其他辐射。但辐射一般都意味着电磁辐射。

这样一来,天地万物就被联系起来了。遥远星体上的原子运动仍能产生足够的影响以使我们眼睛中的电子运动,因而使我们看到了这些星星。如果这个规律不存在,我们就会对外部世界一无所知!甚至离我们50亿光年远的星系——这是我们至今所发现的最远的物体——中的电涌仍能影响射电望远镜前的大“圆盘”,使它产生足够大的、可以探测的电流。正因为如此,所以我们能够看到星体和星系。

这一值得注意的现象就是本章所要讨论的内容。在本物理课程开始的时候,我们曾给

自然界描绘了一幅广阔的图画,我们现在已有较好的基础知识去了解它的某些方面,因此我们就来较详细地讨论它的某些部分。我们从19世纪末物理学所处的地位开始叙述。那时已经知道的基本定律可概括如下。

首先,有关力的定律:一是万有引力定律,我们已几次写过,即质量为 M 的物体作用在质量为 m 的物体上的力由下式给出

$$\mathbf{F} = GmM \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}, \quad (28.1)$$

其中 \mathbf{e}_r 是由 m 指向 M 的单位矢量, r 为它们之间的距离。

其次,是关于电与磁的定律,在19世纪末所了解的情况是这样的:作用在电荷 q 上的电力可用两个称为 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的场及电荷 q 的速度 v ,以下列等式描述

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (28.2)$$

为使此定律完善,我们必须说明在给定情况下 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的表示式。如果存在许多电荷,则 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 各为来自每个单独的电荷的贡献的总和。所以,如果我们能够找到单个电荷产生的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ,只要将宇宙中所有电荷的效应加起来,就得到了总的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} !这就是叠加原理。

那么,由一个单独的电荷产生的电场与磁场的公式是怎样的呢?原来它很复杂,要懂得它必须做很多研究并花费许多精力。但这不要紧。我们现在写出这个公式来仅仅是为了使读者对大自然的美妙留下深刻的印象,我们之所以这样说,是因为我们可以用读者现在所熟悉的符号在一页内概括所有的基本知识。这一关于由单独的电荷产生的场的定律就我们所知(量子力学除外)是完善而正确的,但它看上去相当复杂。现在,我们不准备研究所有的细节;我们写出它来仅仅是给读者一个印象,以说明可以把它写出,而且这样可使我们预先看到它的大致面貌。其实,电与磁的正确规律的最有用的写法并不是我们现在的写法,而是包含所谓场方程的写法,我们将在下一学年学习这些方程。但由于这些方程的数学符号形式特别而且新颖,所以我们用现在所知道的符号,而对于计算并不方便的形式写出定律。

电场 \mathbf{E} 可表示为

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_{r'}}{dt^2} \right]. \quad (28.3)$$

式中各项告诉我们一些什么?拿第一项 $\mathbf{E} = -\frac{qe_{r'}}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$ 来说。这自然就是我们已经知道的库仑定律: q 是产生场的电荷, $\mathbf{e}_{r'}$ 是从测量 \mathbf{E} 的 P 点出发的单位矢量, r' 是从 P 到 q 的距离。但是,库仑定律是错误的。19世纪的发现揭示出任何作用不可能传播得比某个基本速度 c 更快,这个速度我们现在称为光速。说第一项是库仑定律是不对的,这不仅因为我们不可能知道电荷现在在哪里以及现在的距离是多少,而且还因为在给定的地点和时间能够影响场的仅仅是电荷过去的行为。过去多久?时间的延迟,或者称为延迟时间,是以速度 c 从电荷到场点 P 所需的时间,即延迟了 r'/c 。

考虑到这个时间延迟,我们在 r' 上加一小撇,以表示现在到达 P 点的信号在离开 q 时离 P 有多远。暂且假定电荷带有光,而光只能以速度 c 到达 P 点。这样,当我们朝 q 看时,当然看不见它现在在哪里,而只看见它若干时间以前曾在哪里。在我们的公式中出现的是表

观的方向 θ' ——曾经所处的方向,即所谓延迟方向,并处于延迟距离 r' 。这大概也是十分容易理解的,但这也是错误的。整个事情还要复杂得多。

还有另外几项。如果我们十分粗略地看,第二项就好像自然界试图考虑到推迟效应这一事实似的。它提示我们应计算延迟的库仑场,并附加一个改正项,即场的变化速率乘以所用的延迟时间。自然界似乎想用附加上变化速率乘以延迟时间这一项去推测现时的场要变成怎么样。但我们还没有完,还有第三项——在电荷方向上的单位矢量对时间的二次微商。现在公式总算完成了,这就是来自一个任意运动电荷的电场的所有成分。

磁场可表示为

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_r \times \frac{\mathbf{E}}{c}. \quad (28.4)$$

我们写下这些式子仅仅是为了显示自然界的美妙,或者在某种程度上,显示一下数学的威力。我们并不装作懂得怎么可能在这么小的篇幅写下这么多的东西,但式(28.3)、(28.4)的确包含了发电机如何工作,光如何作用,以及所有电与磁现象的道理。当然,为了使描述完善起见,我们还必须知道所包含的物质行为的某些知识——即物质性质,这在式(28.3)中并未得到适当的表述。

为了完成我们对19世纪世界的描述,必须提及发生在那一世纪的,麦克斯韦在其中也做过许多工作的另一个巨大的综合,这就是热现象与力学现象的综合。我们将很快地学习到这方面的内容。

在20世纪必须补充说明一下的是发现牛顿的力学定律完全错了。必须引进量子力学去修正它。当物体尺度充分大时牛顿定律才近似有效。直到最近,这些量子力学定律才与电的定律结合起来而形成一组称为量子电动力学的定律。另外,还发现了许多新的现象,其中首先是1898年*贝克勒尔发现的放射性现象——他只是在19世纪偷偷地把它带了进来。在发现这个放射性现象后,跟着就产生了关于原子核和新型力的知识,这些力不是引力,也不是电力,而是新的粒子间的另一种相互作用,这是至今仍未被阐明的一个课题。

对于那些知识渊博的咬文嚼字者(例如偶然读到此文的教授们),我们应补充一点:当我们说式(28.3)是电动力学知识的完整表述时,我们并不完全准确。有一个在19世纪末还没有完全解决的问题。当我们想计算来自所有电荷的场,包括来自此场所作用的电荷本身的场时,在寻找例如从电荷到该电荷本身的距离以及某一量除以该距离时遇到了麻烦,因为此距离为零。关于如何处理电场中由场所作用的电荷本身产生的这部分场的问题,至今还未解决。所以我们让它留着;既然对此难点尚无完善的解决办法,我们就尽可能地避开它。

§ 28-2 辐 射

以上就是世界面貌的概括。现在我们用它来讨论称为辐射的一些现象。为了讨论这些现象,我们必须从式(28.3)中选出跟距离成反比而不是跟距离平方成反比的那一项来。当

* 应是1896年。——译者注

我们终于找到那一项时,发现它的形式是那么简单,以致只要把它作为远处运动电荷产生电场的“定律”,就完全可以用初等方法去研究光学和电动力学。我们将暂且把它作为已知的定律,到下一学年再详细地学习它。

在式(28.3)的诸项中,第一项显然与距离的平方成反比,第二项只是因延迟而作的修正,所以容易证明它们两者都随距离的反平方而变化。所有我们感兴趣的效应来自第三项,它倒并不十分复杂。这一项讲的是:看着电荷,并注意单位矢量的方向(我们可以把矢量的尾端投射到单位球的球面上)。当电荷来回运动时,单位矢量开始摆动,而单位矢量的加速度就是我们所要求的。就这些。这样

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_r}{dt^2} \quad (28.5)$$

就是辐射定律的表述,因为当我们离得足够远时,它是唯一重要的项,这时场的变化与距离成反比(与距离平方成反比的部分已衰减为很小,以致我们对它们已不感兴趣)。

现在我们可以稍稍地深入一步来研究一下式(28.5),看看它的意义是什么。假定一电荷以任意方式运动,而我们在远处观察它。暂且想象在某种意义上它被“点亮”了(虽然我们想要解释的是光);我们把它想象为一个小的白点。于是我们将看到此白点在来回跑动。但是因为我们已经讲过的延迟的缘故,我们看不清楚它此刻究竟在如何跑。重要的是它以前怎么运动。单位矢量 \mathbf{e}_r 是指向电荷的表观位置的。显然, \mathbf{e}_r 的尾端沿着稍稍弯曲的路线运动,因此它的加速度有两个分量。一个是横向分量,因为其尾端在上下运动;另一个是径向分量,因为它停留在球面上。容易论证后者要小得多,并且当 r 很大时与 r 的平方成反比。这很容易看出的,因为当我们想象把一给定的源移到很远很远时, \mathbf{e}_r 的摆动就显得很小很小,并与距离成反比,但加速度的径向分量比距离的倒数变化得更快。所以对实际目的来说,我们只要将运动投射在单位距离的平面上就行。于是我们得到下述规则:想象我们看着运动电荷,并且我们所看到的一切都是被延迟的——就像一位画家想把风景画在单位距离远的屏上一样。当然,真的画家并不考虑光以一定速率行进这一事实,而是画下他所见到的世界。我们想看看他的画将会是什么样子的。于是我们看到代表电荷的一个点在画面上运动,这个点的加速度与电场成正比。这就是我们所需要的一切。

因而式(28.5)就是辐射的完整而正确的公式;甚至相对论效应也都包含在其中了。然而我们常常需要将它应用于电荷以比较慢的速度运动一段不大的距离这样更简单的情况。既然它们运动得较慢,它们就不会从始点移动太大的距离,所以延迟时间实际上不变。于是规律就更简单,因为延迟时间是固定的。因而我们想象电荷在实际上差不多不变的距离作很小的运动。在距离 r 上的延迟是 r/c 。这样我们的规则变为如下:如果带电物体作很小的运动,并横向位移了距离 $x(t)$,则单位矢量 \mathbf{e}_r 的角位移就是 x/r ,既然 r 实际上不变, $d^2 \mathbf{e}_r / dt^2$ 的 x 分量就是 x 本身在前一时刻的加速度*,最后我们得到所需的定律为

$$E_x(t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} a_x \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (28.6)$$

只有 a_x 的垂直于视线的分量是重要的。我们来看为什么是这样。显然,如果电荷笔直

* $d^2 \mathbf{e}_r / dt^2$ 的 x 分量应为 x 在前一时刻的加速度除以 r 。——译者注

朝着我们运动或背向我们运动,此方向上的单位矢量根本就不会摆动,于是它没有加速度。所以只有横向运动是重要的,即我们所看到的投影在屏上的加速度是重要的。

§ 28-3 偶极辐射子

作为电磁辐射的基本“定律”,我们打算假定式(28.6)是正确的,也就是说,由一个在很远距离 r 处作非相对论运动的加速电荷产生的电场近似取那个形式。此电场与距离 r 成反比,与投影到“视平面”上的电荷的加速度成正比,这个加速度不是现在的加速度,而是前一时刻所具有的加速度,延迟的量是时间 r/c 。在本章的其余部分我们将讨论这一定律,以使我们能更好地理解其物理意义,因为我们打算用它去理解光和无线电传播的所有现象,诸如反射、折射、干涉、衍射和散射等。这是主要的定律,而且是我们所要求的。我们写下式(28.3)的其余部分只是作为一个阶梯,使我们能够估计式(28.6)在哪里适用以及它是如何得出的。

下一学年我们将更深入地讨论式(28.3)。暂且我们当它是正确的,但不仅仅是在理论

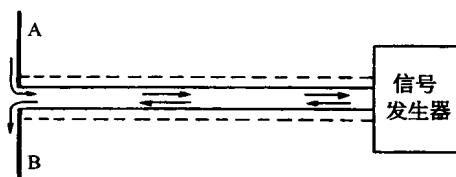
的基础上。我们可以设计许多实验来说明此定律的特征。为此,我们需要一个加速电荷。它应是单个电荷,但是如果我们使许多电荷一起作同样的运动,我们知道这时的场将是每个电荷单独产生的效果的总和,因而只要将它们加在一起就行了。作为一个例子,考虑两根与信号发生器相连接的导线,如图 28-1 所示。我们的想法是这样的:信号发生器产生一个电位差或电场,在某一瞬时它把电子从 A 拉出,推向 B,经过极短时间

图 28-1 高频信号发生器激励两根导线上
的电荷上下运动

以后,它又使过程反过来,把电子从 B 拉出而注回到 A! 所以可以说在这两根导线中的电荷一会儿在 A 线与 B 线上都向上加速,过一会儿在 A 线与 B 线上又都向下加速。我们之所以需要两根导线与一个发生器,只是因为那是做到这一点的一种方法。其净效果如同 A 和 B 是单根导线,只有一个电荷在其上下加速一样。一根长度比光在一个振动周期内传播的距离短得多的导线叫做电偶振子。这样我们就有了应用定律的条件,此定律告诉我们此电荷产生一个电场,因而我们需要用仪器去探测电场,而这类仪器就是同一个东西——像 A 和 B 一样的一对导线! 如果有电场作用在这样的装置上,电场将产生一个力把两根导线上的电子都拉上或拉下。此信号用接于 A 和 B 之间的整流器来探测,并用一根纤细导线将其输入一个放大器,信号在其中放大后,我们就能听到调制在无线电频率上的声音频调。当这一探头探到电场时,将会有个响亮的声音从喇叭中发出,当没有电场激励它时,就不会有声音。

由于我们测量波所在的房间里还有其他一些东西,电场也将扰动这些东西上的电荷;电场使这些其他的电子上下运动,在这个过程中,电子也会对探头产生作用。所以为了使实验获得成功,必须把仪器放得相当靠近,这样,来自墙上和我们自己身上的影响——反射波——就比较小了。所以测出的现象的结果不会精确而完全地与式(28.6)相符,但将接近得足以使我们能够验证定律。

现在我们接上发生器来听音频信号。当处于位置 1 的探测器 D 与发生器 G 平行时(图



28-2), 我们发现一个强电场。在环绕 G 的轴的其他任何方位角上我们也发现同样大小的场, 因为它没有方向性效应。另一方面, 当探测器在位置 3 时场为零。这是对的, 因为我们的公式表明场是由电荷的加速度对于视线的垂直投影引起的。当我们向下看 G 时, 电荷朝着 D 或背离 D 运动, 所以没有效应。因而它验证了第一个规则, 即当电荷直接朝我们的方向运动时没有效应。其次, 公式表明电场应垂直于 r , 并在 G 和 r 组成的平面内; 所以如果我们把 D 放在 1 处而转过 90° , 应得不到信号。这正是我们所发现的, 电场确实是竖直的, 而不是水平的。当我们把 D 移到中间某角度时, 我们看到最强的信号出现在 D 处如图所示的取向上, 因为虽然 G 是竖直的, 但它并不只简单地产生与 G 本身平行的场——起作用的是加速度在垂直于视线方向上的投影。在 2 处的信号比 1 处的弱, 因为此处投影较小。

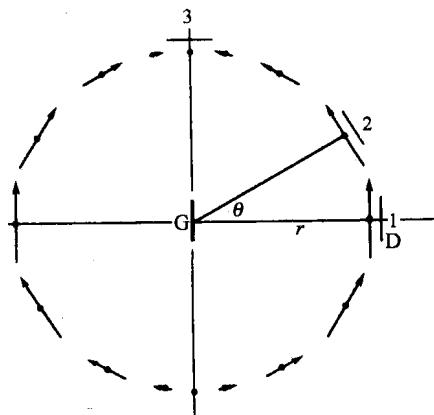


图 28-2 位于球心作线性振动的电荷
在球面上的瞬时电场

§ 28-4 干 涉

接下来, 我们试验一下当有两个源相距几厘米并排着时将发生什么现象(图 28-3)。它的规律是: 当两个源与同一发生器相联, 其上电子以同一方式一起上下运动时, 它们在 1 处的效应应当相加, 因而总电场是两个电场的和, 即为原来强度的两倍。

现在出现了一个有趣的可能性。假如使 S_1 和 S_2 中的电荷都上下加速运动, 但让 S_2 延迟一些时间, 使它们的相位差 180° 。这样, 在任一瞬时, 若 S_1 产生的场沿某一方向, S_2 产生的场就沿相反方向, 于是我们在 1 处就得到零效应。振荡的相位借助于将信号输送给 S_2 的一个管道可巧妙地加以调节。改变此管道的长度, 我们可以改变信号到达 S_2 的时间, 于是就改变了振荡的相位。调节这一长度, 我们确实能够找到没有什么信号的地方, 尽管 S_1 和 S_2 中的电子都在运动着! 它们的电子都在运动这一事实是可以验证的, 因为如果将一个源切断, 就可观察到另一个源是在运动。所以, 只要调节得恰当, 两个源在一起能够产生零效应。

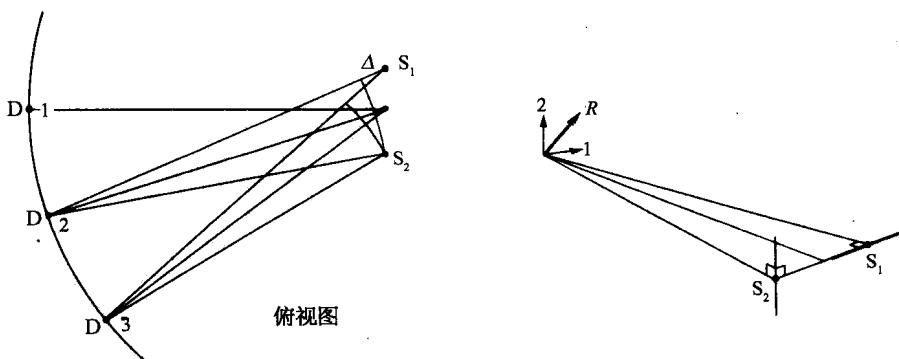


图 28-3 两个源的干涉的示意图

图 28-4 两个源叠加时的矢量特征示意图

证明两个场的叠加是矢量叠加这一点是十分有趣的。我们刚才已验证了源的上下运动,现在我们来验证两个运动方向不平行的源。首先,让 S_1 与 S_2 恢复为同相;这就是说,它们又一起运动了。但现在把 S_1 转过 90° ,如图 28-4 所示。那么在 1 处我们应得两个效应之和,一为竖直的,另一为水平的。电场为此两个同相信号——它们同时达到最强又一起通过零——的矢量和;总的场应为在 45° 方向上的信号 R 。如果我们转动 D 以听到最大声音,它应在约 45° 方位,而非竖直方向。若我们将 D 转至与该方向垂直的方位,应得到零,那是很容易测量的。诚然,我们确实观察到这样的现象!

那么,推迟效应在哪里?我们如何演示信号被推迟了?我们可以利用大量装置来测量到达的时间,但另有一个非常简单的方法。再参看图 28-3,假定 S_1 与 S_2 同相。它们一起振动,并在 1 处产生相等的电场。但是如果我们把 D 移到靠 S_2 较近,而离 S_1 较远的 2 处,那么,根据加速度应延迟一个 r/c 值的原理,如果两个延迟量不相等,两个信号就不再同相了。于是就能找到一个位置,使从 D 到 S_1 和到 S_2 的距离相差某一个量 Δ ,在此位置上没有净信号。那就是说,距离 Δ 即为光在发生器振荡半周期中所通过的距离。还可以把 D 再移过去一些,找到相差为一个整周的点;那就是说,信号从第一根天线 S_1 到达 3 处的延迟时间比第二根天线 S_2 到达 3 处的延迟时间正好长了电流振荡一次所需的时间,因此在 3 处产生的两个电场又同相了。在 3 处信号又是强的。

这样就完成了我们对式(28.6)的一些重要特征的实验证明的讨论。当然我们没有真正验证电场强度按 $1/r$ 变化这一点,也没有验证磁场伴随电场行进这一点。要做到这几点需要相当复杂的技术,而且几乎不会增加我们对该点的理解。总之,我们已验证了那些对我们以后应用最重要的特征,下一学年我们将回过来再研究电磁波的另外一些性质。

第 29 章 干 涉

§ 29-1 电 磁 波

在本章中我们将用较多的数学方法来讨论上一章的问题。我们已定性说明在两个源的辐射场中有极大与极小存在,现在的问题是用数学方法详细描述此辐射场,而不是只定性地描述它。

我们已经相当满意地分析了式(28.6)的物理意义,但尚有几点需要用数学方法分析一下。第一,如果一个电荷沿一直线作振幅很小的上下加速运动,在与运动轴成 θ 角的方位上的场就沿着与视线垂直的方向,并在包含加速度与视线的平面内(图 29-1)。如果把距离叫做 r ,那么在 t 时刻电场的大小为

$$E(t) = -\frac{qa(t-r/c)\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad (29.1)$$

其中 $a(t-r/c)$ 是 $(t-r/c)$ 时刻的加速度,叫做推迟加速度。

现在画出各种情况下电场的图像是很有意义的。当然,有趣的是因子 $a(t-r/c)$ 。为了理解它,可取最简单的情况,即 $\theta=90^\circ$,然后用图画出场来。我们以前所考虑的是站在某一位置上看该处的场如何随时间而变化,而现在我们来看一下在某一给定时刻,在空间不同位置上场是什么样的。所以,我们要的是能告诉我们在不同位置上电场如何的一幅“快照”。当然它取决于电荷的加速度。假如电荷起先作了某种特殊的运动:它原来静止着,突然以某种方式作加速运动,然后停止,如图 29-2 所示。过一会儿,我们就来测量不同地方的场。可以断言此场将如图 29-3 所示。每一点的场取决于前一时刻的加速度,而提前的时间即为延迟量 r/c 。越是远的点的场取决于越是提前的时刻的加速度。所以图 29-3 中的曲线在某种意义上其实就是“倒转”画的加速度作为时间函数的图;距离与时间以比例常数 c 联系起来,而 c 我们经常取作 1。只要想一下 $a(t-r/c)$ 的数学性质,这一点是容易理解的。显然,如果使时间增

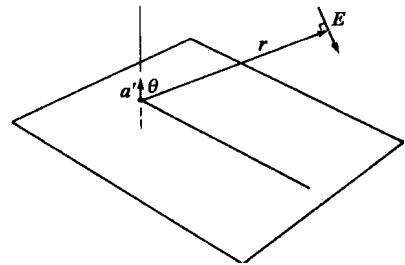


图 29-1 由推迟加速度为 a' 的正电荷产生的电场 E

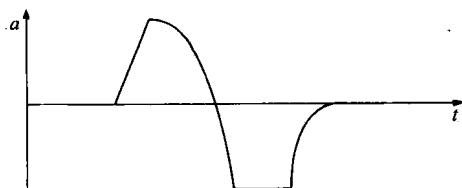


图 29-2 某电荷的加速度与时间的关系

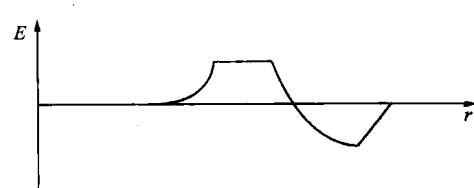


图 29-3 下一时刻的电场与位置的关系
(忽略 $1/r$ 引起的改变)

加一个小量 Δt , 那么此时 $a(t - r/c)$ 的值将与距离减少一个小量 $\Delta r = -c\Delta t$ 所得的值相同。

换一种说法: 如果时间增加一个小量 Δt , 只要距离增加一个小量 $\Delta r = c\Delta t$, 我们就能使 $a(t - r/c)$ 恢复到原来的值。那就是说, 随着时间的延续, 场像波一样从源点向外运动。这就是为什么我们有时说光像波一样传播的理由。说场被延迟了, 或说电场随着时间的延续而向外运动, 两者是等价的。

一个有趣的特殊情况是电荷 q 在那里以振荡方式作上下运动。我们在上一章中用实验方法研究过的就是这样一种情况, 其任一时刻的位移 x 等于某一常量 x_0 , 即振荡的幅值, 乘上 $\cos \omega t$ 。这样, 加速度就是

$$a = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = a_0 \cos \omega t, \quad (29.2)$$

其中 a_0 是最大加速度 $-\omega^2 x_0$ 。将此式代入式(29.1), 得

$$E = -q \sin \theta \frac{a_0 \cos \omega(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}. \quad (29.3)$$

现在, 我们忽略角度 θ 和常数因子, 来看一看它作为时间和位置的函数是什么样子。

§ 29-2 辐射的能量

首先, 在任一特定时刻和任一特定地点, 场的强度与距离 r 成反比, 正如我们以前所提及的。现在, 我们必须指出, 波所包含的能量, 或这样的电场所具有的能量效应, 与场的平方成正比。因为, 如果电场中有某种电荷或振子, 那么让电场作用于其上时, 它将使其运动。如果这是一个线性振子, 则由作用在电荷上的电场产生的加速度、速度和位移与场成正比。因此在电荷中出现的动能与场的平方成正比。所以我们就把场所能传递给系统的能量当作与场的平方成正比。

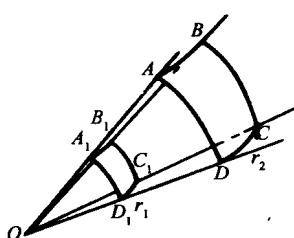
这意味着当我们远离源时, 源所能提供的能量减少了; 事实上, 它与距离的平方成反比。

这有一个很简单的解释: 如果我们想要在距离 r_1 处收集起包含在某一角锥中的波的全部能量(图 29-4), 同时又在另一距离 r_2 处收集之, 我们发现在任一处单位面积的能量与 r 的平方成反比, 但角锥所截的面积则直接与 r 的平方成正比。所以不论我们离得多远, 从给定锥角的波中所能获取的能量是相同的! 特别是, 若在四周放置一圈吸收振子, 则从整个波中所能获取的总能量是某一定值。因而, E 的振幅随 $1/r$ 而变化这一事实与存在一个永不散失的能流以及一个不断行进着的、散布在越来越大的有效面积中的能量这一说法是一样的。这样我们就看到, 当一电荷发生振荡以后, 它就损失了永远不能收回的若干能量;

图 29-4 包含在角锥 $OABCD$ 中的能流与测量的距离 r 无关

此能量不断地向越来越远的地方散失, 并不减少。因而, 如果我们离得足够远, 使我们的基本近似很好成立, 电荷就不可能收回它所辐射掉的能量。当然能量仍存在于某处, 并且可以被其他系统所收集。我们将在第 32 章中进一步研究这种能量“损失”。

现在我们来较仔细地考虑式(29.3)所表示的波在给定的地点如何随时间变化, 以及在给定时刻如何随位置变化。我们仍忽略常数及 $1/r$ 所引起的变化。



§ 29-3 正 弦 波

首先固定位置 r , 观察作为时间函数的场, 它以角频率 ω 振荡着。角频率可以定义为相位随时间的变化率(每秒弧度)。我们已学过这样的量, 因此现在我们对它应很熟悉。周期是振荡一次——即一整周所需的时间, 我们也已经得出过这个量, 它是 $2\pi/\omega$, 因为 ω 乘上周期是余弦的一周。

现在我们引入一个物理学中十分常用的新的量。这与相反的情况有关, 即固定 t 而观察波作为距离 r 的函数。当然我们注意到, 作为 r 的函数, 波(29.3)仍是振荡的。这就是说, 暂且不考虑所忽略的 $1/r$, 当我们改变位置时, 会看到 E 在振荡。因而, 与 ω 类似, 我们可以定义一个叫做波数的量, 记为 k 。它被定义为相位随距离的变化率(每米弧度)。这就是说, 当我们于一固定时刻在空间运动时, 相位在改变着。

另有一个与周期相应的量, 我们可以称之为空间的周期, 但它常被称为波长, 记为 λ 。波长是一个整周的波所占的距离。容易看出, 波长是 $2\pi/k$, 因为 k 乘以波长, 即每米弧度的改变值乘上一周中的米数, 应为一整周中相位改变的弧度数, 而一周中相位必须改变 2π 。所以 $k\lambda = 2\pi$ 与 $\omega t_0 = 2\pi$ 恰好类似。

在我们所要讨论的波中, 频率与波长之间有着确定的关系, 但上述 k 与 ω 的定义都十分一般。这就是说, 在其他物理条件下, 波长与频率的关系不一定一样。但在我们的情况下, 相位随距离的变化率容易决定, 因为, 如果把 $\phi = \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$ 叫做相位, 则 ϕ 对距离 r 的偏导数即变化率 $\frac{\partial\phi}{\partial r}$ 为

$$\left| \frac{\partial\phi}{\partial r} \right| = k = \frac{\omega}{c}. \quad (29.4)$$

同样的关系可以有许多表示法, 如

$$\lambda = ct_0, \quad (29.5)$$

$$\omega = ck, \quad (29.6)$$

$$\lambda\nu = c, \quad (29.7)$$

$$\omega\lambda = 2\pi c. \quad (29.8)$$

为什么波长等于 c 乘周期? 这很容易, 因为如果我们停着等一个周期过去, 以速度 c 传播的波将移动距离 ct_0 , 当然恰好移动了一个波长。

在除光以外的物理情况下, k 不一定与 ω 有这样简单的关系。若让距离沿 x 轴, 那么对于以波数 k 和角频率 ω 沿 x 方向运动的余弦波, 一般可将其公式写成 $\cos(\omega t - kx)$ 。

我们既已引进波长的概念, 就可以再讲一些式(29.1)成立的条件。我们记得场是由几部分组成的, 其中一部分与 r 成反比, 另一部分与 r^2 成反比, 其余的则衰减得更快。值得了解一下在什么情况下场的 $1/r$ 部分成为最重要的部分, 而其余部分则相对地很小。当然, 答案是“如果我们离得‘足够远’”, 因为与距离平方成反比的项跟 $1/r$ 项比较起来最终变得完全可以忽略。多远才是“足够远”? 答案是, 定性的讲, 其他的项要比 $1/r$ 项小 λ/r 的量级。

这样一来,只要我们超过几个波长,式(29.1)就是场的很好的近似了。有时把超过几个波长的区域称为“波区”。

§ 29-4 两个偶极辐射子

接下来我们来讨论两个振子的效应合成时的数学,以找出某一给定点的净场。在上一章所考虑的几种情况下,这是很容易的。我们将首先对效应作定性描述,然后作较定量的描述。我们考虑简单的情况,振子的中心与探测器位于同一水平面上,而振动沿铅直方向。

图 29-5(a)表示这样两个振子的俯视图,在此特例中它们位于南北方向,相距半个波长,并且同相位地一起振荡。我们称此相位为零相位。现在我们想知道在不同方向上的辐射强度。所谓强度,其意义就是每秒钟通过的场所携带的总能量,它与场的平方的时间平均值成正比。所以,当我们想要知道所看到的东西的光有多亮时,是指电场的平方,而不是电

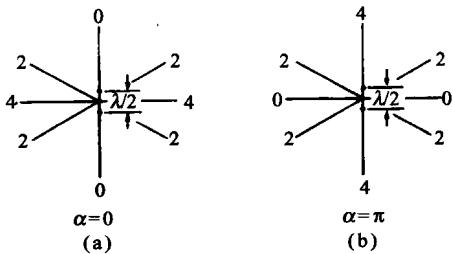


图 29-5 来自相距半个波长的两个偶极振子的场在不同方向上的强度

(a) 同相 ($\alpha = 0$); (b) 相位差半个周相 ($\alpha = \pi$)

场本身(电场告诉我们静止电荷所感受的力的强度,但所通过的能量,以每平方米瓦特为单位,则与场的平方成正比。我们将在下一章中导出此比例常数)。如果我们从西边看此装置,两个振子贡献相等并且同相位,所以电场为单个振子所产生的两倍。因而强度为只有单个振子时的四倍(图 29-5 中的数字代表在该处的强度与只有单个单位强度的振子时该处强度的比)。而在沿振子连线的无论是南还是北的方向上,由于它们相隔半波长,一个振子的效应与另一个振子的效应恰好相差半周,因而其场加起来为零。在某一特定的中间角度(其实是 30°)上强度是 2,然后逐渐衰减,强度依次为 4, 2, 0, 等等。我们必须学习如何找出其他角度上的这些数。这是叠加两个具有不同相位的振动问题。

我们立即来看一下其他有趣的情况。假如两个振子仍相距半波长,但一个振子振动的相位 α 比另一个落后半个周相[图 29-5(b)]。现在西边的强度是零,因为当一个振子正在“拉”时,另一个振子正在“推”。但在北边,来自较近一个振子的信号于某一时刻到达,来自另一振子的信号则在半个周期后到达。但后者在计时上原来就落后了半个周期,因而现在恰好与前者合拍(同时),所以在此方向上的强度为 4 个单位。在 30° 方向上的强度仍为 2,正如我们以后可以证明的那样。

现在我们得到一个可能比较有用的情况。我们指出,振子间的相位关系之所以有趣,其理由之一来自束状无线电发射机。例如,我们建造一个天线系统,并且想要发送无线电信号,比如说到夏威夷。我们就如图 29-5(a)那样装置天线,并用两根天线同相位地进行广播,因为夏威夷在我们的西面。而明天我们打算向加拿大阿尔伯塔(Alberta)广播。因为它在北面,不是西面,我们只要反转一根天线的相位,就能向北广播。因而我们可以建造具有各种排列方式的天线系统。我们所说的是最简单的方式之一;可以使它们更复杂,而且用改变各天线上的相位的办法就能把波束发送到各个方向,并把大部分功率发送到我们希望输送的方向上,而根本用不着移动天线!但在上述两种情况中,当我们朝阿尔伯塔广播时,

我们在复活节岛(Easter Island)上浪费了许多功率,因而问是否可能只朝一个方向发送信号是有意义的。乍看起来我们会认为,用一对这样的天线其结果似乎总是对称的。所以,我们考虑一种能得出不对称结果的情况,以证明有变化的可能。

如果两根天线相距 $1/4$ 波长,而且北边一根的振动在时间上比南边的一根落后 $1/4$ 周期,那么将会发生什么情况(图 29-6)?在西边我们得 2,就如我们以后将看到的。在南面我们得零,因为若来自南边天线的信号于某一时刻到达,则来自北边天线的信号在时间上就晚 90° 到达,但它在相位上本来已落后 90° ,因而它到达时相位总的相差 180° ,故没有效应。另一方面,在北面,北边天线的信号比南边天线的信号在时间上早 90° 到达,因为它近了 $1/4$ 波长,但它的振动相位被调整得在时间上落后 90° ,那就刚好补偿了延迟差,于是两个信号一起以同相位出现,使场的强度为原来的两倍,能量为原来的四倍。

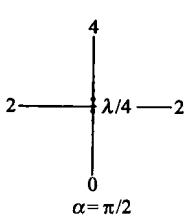


图 29-6 向一个方向
输送最大功率的一对
偶极子天线

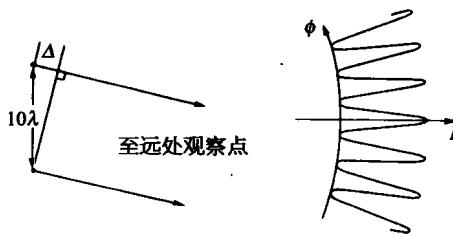


图 29-7 两个相距 10λ 的偶极子的强度分布图

这样,在天线的排列与相位配置上作一些巧妙的安排,能够把功率全部发送到一个方向上。但它仍然分布在一个很大的角度上。能否将它安排得使功率更尖锐地聚焦于某一特定方向上?我们再来考虑夏威夷的情形,在那里我们朝东和朝西发送波束,但它仍散播在很大的角度上,因为即使在 30° 方向上仍有一半的强度——我们在浪费功率。能不能做得更好一些?我们拿两根天线相距 10 个波长的情形来说(图 29-7),它更接近于我们在上一章做过实验的相距几个波长而不是不到一个波长的情况。此时图像就大不相同了。

如果两个振子相距 10 个波长(我们取同相位的情况使之易于理解),可以看到在东西向上它们同相,并得到很强的强度,为只有其中之一存在时的四倍。另一方面,在离开一个很小角度处,则到达时间相差 180° ,因而强度为零。精确地说,如果从每个振子画一直线到远处的一点,两距离之差 Δ 为 $\lambda/2$,即振动的半周,则它们将反相位。这时就出现第一个零点(图并没有按比例画出;它只是个草图)。这就意味着我们的确在所需要的方向上得到了一个尖锐的波束,因为只要方向稍稍移动一点儿,强度就没有了。但在实际应用时,比如我们正在设想建立一无线电广播装置,遗憾的是,如果在某一方向使程差 Δ 比原来的加倍,那么就得到一整周的相位差,这又恰好与同相位一样!于是就得到一系列的极大与极小,正像在第 28 章中用相距 2.5λ 的两个振子得到的情况一样*。

那么,怎样才能把振子安排得可以摆脱这些额外的极大,或者所谓的“波瓣”呢?可以用

* 第 28 章中并没有具体讲到两个振子相距 2.5λ 。——译者注

相当有趣的方法摆脱这些不需要的波瓣。假如我们在已有的两根天线之间再放置另外一组天线(图 29-8)。这就是说,最外边的两根天线仍相距 10λ ,但在它们之间,比如说每隔 2λ ,放置另一根天线,并都同相位地激励它们。现在有了六根天线,如果我们观察东西方向的强度,它们当然要比只有一根天线时强得多,场强将达六倍而强度将达三十六倍(场强的平方)。在这个方向上我们得到 36 个单位的强度。如果接着观察邻近的点,发现在大约以前强度是零的地方仍得到零,而再过去一些,在原来得到大“突起”的地方,现在得到一个很小的“突起”*。让我们看一看为什么这样。

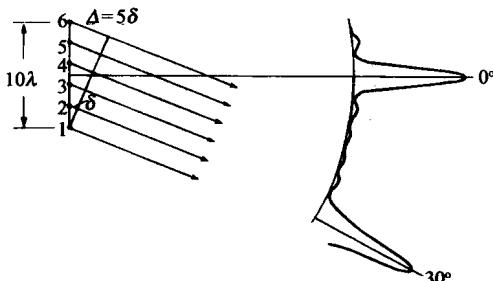


图 29-8 六个偶极子天线装置和它的强度分布图的一部分

其理由是,虽然当距离 Δ 恰好等于一个波长时我们可以预期得到一个大的突起,此时偶极子 1 和 6 的确同相位,并在该方向上正要一起加强,但 3 和 4 恰好与 1 和 6 在相位上差大约半个波长,因此虽然 1 和 6 一起推,3 和 4 也一起推,但两者反相。于是在该方向上只有很小的强度——但仍有一点儿;它们并没有完全抵消。此类情况继续发生,我们就有了许多很小的突起,而在我们需要的方向上得到很强的波束。但在此特例中,会发生另外的情况,即:既然相邻偶极子之间的距离是 2λ ,那就可能找到一个角度,使得相邻偶极子之间的程差 δ 恰为一个波长,这样,来自所有偶极子的效应又同相了。每个偶极子比下一个延迟了 360° ,因而它们都同相地到达观察点,这样在该方向上就得到另一个很强的波束!在实际中很容易避免这一点,因为我们可以把偶极子靠得比一个波长更近。如果我们放进更多的天线,每根相隔得比一个波长更近,这种情况就不会发生。但当间隔比一个波长大,这种情况能够在某一角度上发生这一事实,在另外的应用中——不是在无线电广播中,而是在衍射光栅中——却是十分有趣而有用的现象。

§ 29-5 干涉的数学

至此,我们已完成对于偶极辐射子现象的定性分析,但我们还得学习如何定量地分析它。为了求出在最一般情况下,两个相互间本来就具有相位差 α ,强度 A_1 与 A_2 不相等的振子的振动源在某个特定角度的方向上的总效应,我们发现必须将两个具有相同频率、但不同相位的余弦加起来。很容易求出两者的相位差;它是由距离差引起的延迟和本来就具有的振动相位差两部分组成的。数学上,我们必须求出两个波的和 R

$$R = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2).$$

怎样求呢?

其实很容易,我们假定大家早已知道了怎样去求。不过,我们仍将稍微详细地概述一下

* 其实零点在靠近原来的一级极大处,以后各级次极大也不在原来的各级极大处,而在靠近原来强度为零的诸位置上。——译者注

步骤。首先,如果我们擅长数学并熟悉余弦和正弦,就能方便地求得。最容易的是 A_1 与 A_2 相等的情况,假定它们都等于 A 。在这样的情况下,就有(这可以称为三角解法)

$$R = A[\cos(\omega t + \phi_1) + \cos(\omega t + \phi_2)]. \quad (29.9)$$

在三角课程中,我们可能学到过下列公式

$$\cos A + \cos B = 2\cos \frac{1}{2}(A+B)\cos \frac{1}{2}(A-B). \quad (29.10)$$

若知道此式,就能立即把 R 写为

$$R = 2A\cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)\cos \left(\omega t + \frac{1}{2}\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2\right). \quad (29.11)$$

可见我们得到了一个具有新的相位与新的振幅的波动。一般地说,其结果将是一个具有新的振幅(我们可以称之为合成振幅) A_R ,以同样频率振荡而产生相位(称为合成相位)为 ϕ_R 的波动。由此看来,我们的特例具有下列结果:合成振幅为

$$A_R = 2A\cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2), \quad (29.12)$$

而合成相位为两个相位的平均值,我们的问题就这样解决了。

现在假定我们记不起来两个余弦之和等于两角和之半的余弦乘以两角差之半的余弦的两倍。于是我们可以用另一个更带几何性质的分析方法。任一 ωt 的余弦函数可以看作一个旋转矢量的水平投影。假定有一长度为 A_1 的矢量 \mathbf{A}_1

随时间旋转着,因而它与水平轴的夹角为 $\omega t + \phi_1$ (我们不立即考虑 ωt ,并看出这不会带来什么影响)。假定我们在时刻 $t=0$ 拍摄快照,尽管图像实际上以角速率 ω 在旋转(图 29-9)。 \mathbf{A}_1 在水平轴上的投影正好是 $A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ 。现在,当 $t=0$ 时,第二个波可用另一个长为 A_2 ,与水平轴夹角为 ϕ_2 ,也在旋转着的矢量 \mathbf{A}_2 来代表。它们都以相同的角速度 ω 旋转着,因而两者的相对位置是固定的。系统像一个刚体一样旋转着。 \mathbf{A}_2 的水平投影为 $A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ 。但从矢量理论知道,如果我们用一般的平行四边形法则将两个矢量加起来,并画出合矢量 \mathbf{A}_R ,则

其 x 分量为其他两个矢量的 x 分量之和。这就解决了我们的问题。很容易验证这一方法为我们上面处理的 $A_1 = A_2 = A$ 这一特殊情况提供了正确的结果。在这一情况下,从图 29-9 可见 \mathbf{A}_R 位于 \mathbf{A}_1 与 \mathbf{A}_2 的中间,并与它们都构成 $(\phi_2 - \phi_1)/2$ 的角。从而可见 $A_R = 2A\cos[(\phi_2 - \phi_1)/2]$,与前述一样。从三角形也可看出,当 \mathbf{A}_1 与 \mathbf{A}_2 的幅度相等时,旋转着的 \mathbf{A}_R 的相位是 \mathbf{A}_1 与 \mathbf{A}_2 的相角的平均值。显然,我们也容易解出振幅不相等的情况。可以把此称为解决问题的几何方法。

还有另一种解此问题的方法,称为分析法。此方法是,写出一些能表达与图 29-9 同样意义的东西,而不是去真的作那样的图。即我们不去画矢量,而是写出代表每个矢量的复数。复数的实部就是实际物理量。这样,在我们的特殊情况下,波动可用这种方式来写:

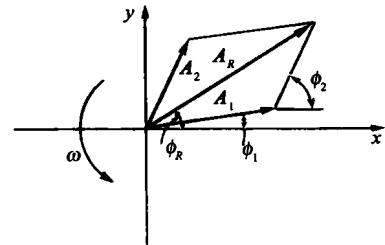


图 29-9 合成两个余弦波的几何方法。想象整个图以角频率 ω 逆时针旋转着

$A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)}$ [其实部为 $A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$] 和 $A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)}$ 。现在可将两者相加

$$R = A_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} = (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}) e^{i\omega t} \quad (29.13)$$

或

$$\hat{R} = A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2} = A_R e^{i\phi_R}. \quad (29.14)$$

这样就解决了我们要求解的问题,因为它代表叠加结果是模为 A_R 、相角为 ϕ_R 的复数。

为了明白这种方法是如何进行的,我们来求振幅 A_R , 它就是 \hat{R} 的“长度”。为了得到一个复量的“长度”,我们常用它的复共轭去乘它,这样得到长度的平方。复共轭具有同样的表示式,只是 i 前面的符号相反。这样我们得到

$$A_R^2 = (A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2})(A_1 e^{-i\phi_1} + A_2 e^{-i\phi_2}). \quad (29.15)$$

将此乘出,得 $A_1^2 + A_2^2$ (这里的 e 被消去了),而交叉项则为

$$A_1 A_2 [e^{i(\phi_1 - \phi_2)} + e^{i(\phi_2 - \phi_1)}],$$

因为

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta.$$

这就是说, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ 。最终结果就成为

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1). \quad (29.16)$$

可见,这与图 29-9 中用三角规则得到的 A_R 的长度一致。

这样,两效应的总和为只有一个源存在时所得的强度 A_1^2 , 加上只有另一个源存在时所得的强度 A_2^2 , 再加上一修正项。这个修正项称为干涉效应。它实际上就是把两个强度简单地加起来所得的结果与实际发生的情况两者之间的差别。不论它是正的还是负的,我们都称之为干涉(干涉* 在一般语言中意味着对抗或妨碍,但物理学上我们常不按语言原意来使用!)。如果干涉项是正的,我们就称之为相长干涉,尽管它在除物理学家以外的任何人听来是奇怪的**! 相反的情况则为相消干涉。

现在来看如何把适用于两个振子情况的一般公式(29.16)应用到我们作过定性讨论的特殊情况中去。为了应用这个一般公式,只要找出存在于到达给定点的两信号之间的相位差 $\phi_1 - \phi_2$ 就行了(它当然只依赖于相位差,而不依赖于相位本身)。所以,我

们来考虑两个具有相同振幅,相隔某一距离 d ,并有固有相对相位 α (当一个相位为零时,另一个相位为 α)的振子的情况。我们问与东西线成 θ 方位角的方向上强度是多少[注意这不是出现在图(29.1)中的同一个 θ]。我们也曾为究竟是用一个像 $\bar{\theta}$ 那样不常用的符号还是用常用的符号 θ 而举棋不定(图 29-10)]。相位关系可以这样来找到:注意到从 P 点到两个振子的程差是 $d \sin \theta$,因

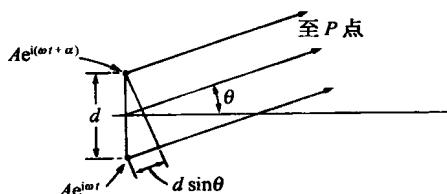


图 29-10 两个振幅相等、相互间有 α 相位差的振子

而由此提供的相位差是 $d \sin \theta$ 所含的波长数乘以 2π (内行人可能会用波数 k ,即相位随

* 这里指干涉的英语原文“interference”。——译者注

** “相长”原文为“constructive”,有“建设性的”之意,作者认为在一般人的心目中“干涉”是不含有“建设性的”,故说是“奇怪的”。——译者注

距离的变化率,乘以 $d \sin \theta$,其实一样)。这样,由程差引起的相位差就是 $\frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$,但由于两振子振动时间上的差,尚有附加的相位差 α 。所以到达时的相位差将是

$$\phi_2 - \phi_1 = \alpha + 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}. \quad (29.17)$$

此式适用于所有情况。接着只要将此表示式代入式(29.16)并使 $A_1 = A_2$,就能对两个强度相同的天线计算出所有不同的结果。

现在我们来看一看在各种情况下会出现什么结果。例如,图 29-5 中在 30° 方向上的强度为 2 的理由如下:两振子相隔 $\lambda/2$,故在 30° 方向上, $d \sin \theta = \lambda/4$,因而

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi\lambda}{4\lambda} = \frac{\pi}{2},$$

于是干涉项为零(我们是将两个互成 90° 角的矢量相加)。合矢量是 45° 直角三角形的斜边,是单位振幅的 $\sqrt{2}$ 倍;将它平方,就得到一个振子强度的两倍。其他所有情况可以用同样方法得出。

第 30 章 衍 射

§ 30-1 n 个相同振子的合振幅

本章是上一章的继续, 虽然名字由干涉变为衍射。至今没有人能令人满意地解释干涉与衍射之间的区别。这只是一个用法问题, 它们之间在物理上并没有明确的重大区别。粗略地讲, 我们能做的至多是说, 当只有几个(比如说两个)源干涉时, 其结果常称为干涉, 而当源很多时, 则衍射一词似乎更常用。因而, 我们将不去管它是干涉还是衍射, 而从上一章所述问题中断的地方继续下去。

我们现在要讨论这样的情形: 有 n 个等间距的振子, 振幅都相同, 但彼此间相位不同, 这或者是由于激励时不同相, 或者是由于从某一个角度去观察它们从而延迟时间有所不同所致。不管怎么样, 我们必须做这样的加法

$$R = A[\cos \omega t + \cos(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + 2\phi) + \cdots + \cos(\omega t + (n-1)\phi)], \quad (30.1)$$

其中 ϕ 是在某一特定方向上观察时, 一个振子与下一个振子的相位差。显然

$$\phi = \alpha + 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}.$$

现在必须把所有的项加起来。我们将用几何法来作。第一个矢量长为 A , 相位为零。下一个矢量长也是 A , 而相位等于 ϕ 。再下一个矢量长还是 A , 而相位等于 2ϕ , 等等。显然, 我们正在围成一个 n 边的等角多边形(图 30-1)。

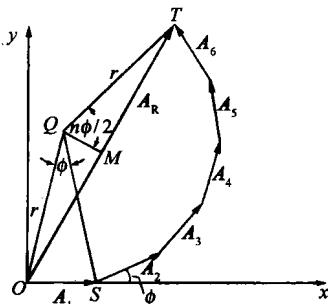


图 30-1 $n = 6$ 的等间距、相继净相位差为 ϕ 的源的合振幅

这些矢量的顶点当然都在圆周上, 于是只要求出这个圆的半径, 就很容易求得净振幅。假定 Q 是此圆的圆心, 可以看出角 OQS 正好就是相角 ϕ (这是因为半径 QS 跟 A_2 与 QO 跟 A_1 构成相同的几何关系, 所以它们之间构成的角也为 ϕ)。这样一来, 半径 r 必须满足 $A = 2r \sin \phi/2$, 于是 r 就确定下来了。但大角 OQT 等于 $n\phi$, 因而可得 $A_R = 2r \sin(n\phi/2)$ 。联立这两式以消去 r , 得到

$$A_R = A \frac{\sin(n\phi/2)}{\sin(\phi/2)}, \quad (30.2)$$

合强度就是

$$I = I_0 \frac{\sin^2(n\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}. \quad (30.3)$$

现在我们来分析这一表示式，并研究它的一些结果。首先，我们可用 $n = 1$ 来验证此式。结果是对的， $I = I_0$ 。接着用 $n = 2$ 来验证它：将 $\sin \phi$ 写为 $\sin \phi = 2 \sin \phi / 2 \cos \phi / 2$ ，可得 $A_R = 2A \cos \phi / 2$ ，与式(29.12)一致。

促使我们考虑 n 个源叠加的思想是，我们应该在某一方向得到比另一方向大得多的强度；即只有两个源存在时出现的一些邻近的极大，其强度将会变小。为了看出这一结果，作由式(30.3)得出的曲线，把 n 当作很大的数，并在 $\phi = 0$ 附近作图。首先，如果 ϕ 确实为零，就得到 $0/0$ ，但如果 ϕ 是无穷小，两个正弦平方之比就是 n^2 ，因为此时正弦与角度近似相等。这样，曲线极大值的强度就等于 n^2 乘以一个振子的强度。这很容易明白，因为如果它们都同相位，则各小矢量间没有相对的角度，并且所有 n 个矢量都相加，因而总振幅大了 n 倍，强度大了 n^2 倍。

当相位 ϕ 增加时，两个正弦之比开始下降，而当 $n\phi/2 = \pi$ 时，它第一次达到零，因为 $\sin \pi = 0$ 。换句话说， $\phi = 2\pi/n$ 对应于曲线中的第一个极小值(图 30-2)。按照图 30-1 中的箭头所发生的情形来说，第一个极小值发生在最后的箭头回到起点时；这意味着在所有箭头中累积起来的总角度，即第一个振子与最后一个振子之间总的相位差，必须是 2π ，以完成一个圆周。

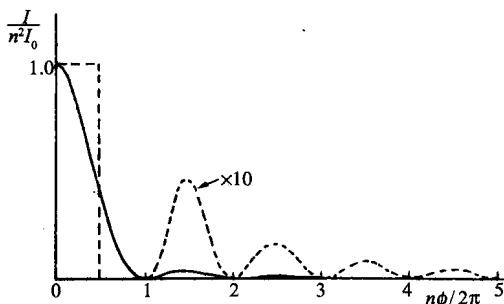


图 30-2 大量等幅度振子的总强度与相角的函数关系

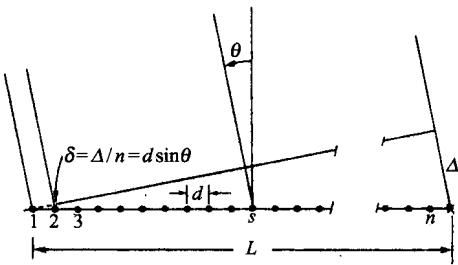


图 30-3 以相角 $\alpha_s = sa$ 方式激励的 n 个相同振子的直线状排列

接下来看下一个极大值，我们曾希望它比第一个极大值小得多。我们不准备精确地求出极大的位置，因为式(30.3)的分子与分母是变化的，但当 n 很大时， $\sin \phi/2$ 变化得比 $\sin(n\phi/2)$ 慢得多，所以当 $\sin(n\phi/2) = 1$ 时与极大值很接近。 $\sin^2(n\phi/2)$ 的下一个极大值出现在 $n\phi/2 = 3\pi/2$ ，或 $\phi = 3\pi/n$ 处。这对应于箭头已绕了一圈半。将 $\phi = 3\pi/n$ 代入公式以求得极大值的大小，发现分子中 $\sin^2(3\pi/2) = 1$ （因为这正是我们为什么取这一角度的原因），而分母中则有 $\sin^2(3\pi/2n)$ ，现在如果 n 足够大，则此角度很小，正弦就等于角度；因而对一切实际问题来说，可以令 $\sin(3\pi/2n) = 3\pi/2n$ 。这样我们求得这一极大的强度为 $I = 4n^2 I_0 / 9\pi^2$ 。但 $n^2 I_0$ 是主极大强度，因而 I 为 $4/9\pi^2$ 乘以主极大强度，它只有主极大强度的 0.047 倍左右，不到 5%！当然在更远处还有一些越来越小的强度。所以我们有了一个两边伴有很弱的次极大的中央极大的。

可以证明整个曲线包围的面积，包括所有小的突起在内，等于 $2\pi n I_0$ ，即图 30-2 中虚线所表示的矩形面积的两倍。

现在我们来进一步考虑在不同情况下如何应用式(30.3)，并试图理解所发生的情况。

设所有的源都在一直线上,如图 30-3 所示。有 n 个源,都相距 d ,并假定相邻源之间的固有相位差是 α 。当我们在与法线成 θ 角的方向上观察时,如以前所讨论的,由于每两个相继源之间在时间上的延迟,就有一个附加的相位差 $2\pi d \sin \theta / \lambda$ 。因而

$$\phi = \alpha + 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} = \alpha + kd \sin \theta. \quad (30.4)$$

首先来看 $\alpha = 0$ 的情形。这就是说,所有的振子同相位,而我们想知道强度与 θ 角的函数关系如何。为了找出它,只要将 $\phi = kd \sin \theta$ 代入公式(30.3),看看会发生什么情况就行。首先,当 $\phi = 0$ 时有一极大值。这意味着当所有的振子同相位时,在 $\theta = 0$ 的方向上有一很大的强度。另一方面,一个有趣的问题是,第一个极小值在哪里? 它出现在 $\phi = 2\pi/n$ 处。换句话说,当 $2\pi d \sin \theta / \lambda = 2\pi/n$ 时,我们得到曲线的第一个极小值。若去掉这些 2π 以使我们看得更清楚一些,则由它可得:

$$nd \sin \theta = \lambda. \quad (30.5)$$

现在我们来理解为什么在该处得一极小值的物理意义。 nd 是排列的总长度 L 。参照图 30-3,可得 $nd \sin \theta = L \sin \theta = \Delta$ 。式(30.5)所说的就是当 Δ 等于一个波长时,我们得到一个极小值。那么,为什么当 $\Delta = \lambda$ 时会得到极小值? 因为这时不同振子的贡献在相位上被均匀地分布在从 0° 到 360° 之间。图 30-1 中的箭头绕了一个整圈——我们在把所有方向上的相同的矢量加起来,所以总和为零。因而当我们处于使 $\Delta = \lambda$ 的角度时,就得到一个极小值。这是第一个极小值。

式(30.3)还有一个重要的特性,就是如果 ϕ 角增加 2π 的任意倍,其值不变。所以我们在 $\phi = 2\pi, 4\pi, 6\pi$ 等等处得到另一些主极大值。在这些主极大值附近又重复出现图 30-2 的图形。我们会自问,导致这另一些主极大值的几何条件是什么? 条件是 $\phi = 2\pi m$, 其中 m 是任意整数。那就是 $2\pi d \sin \theta / \lambda = 2\pi m$ 。除以 2π ,得到

$$d \sin \theta = m\lambda. \quad (30.6)$$

这看起来有点像另一个公式(30.5)。但并非如此,那个公式是 $nd \sin \theta = \lambda$ 。其区别是,在这里我们必须注视个别的源,当我们说 $d \sin \theta = m\lambda$ 时,就意味着我们处于使 $\delta = m\lambda$ 的角度 θ 。换句话说,此时每一个源都有一定贡献,而相邻源之间相位差为 360° 的整数倍,从而使贡献同相位,因为相位相差 360° 与同相位是一样的。所以它们的贡献都同相位,并产生上文讨论过的对应 $m = 0$ 的同样的极大值。次级凸起,即图形的整个形状,恰好与 $\phi = 0$ 附近的相同,两边也有同样的一些极小值,等等。这样一来,这种排列就会向不同的方向发射光束,每一束都有一个很强的主极大值和若干个弱的“边瓣”。这些不同的强光束按照 m 的值分别称为零级光束,一级光束,等等。 m 称为光束的级。

注意,如果 d 小于 λ ,式(30.6)除 $m = 0$ 外没有解,所以若间距太小的话,将只有一个可能的光束,即集中于 $\theta = 0$ 处的零级光束(当然,在反方向也有光束)。为了得到次级主极大值,必须使排列的间距 d 大于一个波长。

§ 30-2 衍射光栅

在技术上可以将天线与导线安排得使所有小振子(或天线)的相位相同。问题是对光

我们是否也能这样做,以及如何做。现时我们还不能真正地建立起一个光频无线电台,并将它们用无限小的导线连接起来,以给定的相位激励它们。但有一个与之等效的很方便的方法。

假如我们有许多平行导线,彼此间隔相同的间距 d ,并有一个很远(实际上是无限远)的无线电频源,它发射一个电场,此场以相同相位到达每一导线(源是那么远,以致对所有的导线来说时间的延迟都相同。有人会用曲线形排列来达到此点,但我们采用平面的情形)。于是外电场将驱使每一导线中的电子上、下运动。也就是说,从原来的源发射的场将激励电子上、下运动,这种运动电子就成了新的发射源。从某一个源发出的光波能激起一块金属中的电子运动,而这些运动又产生了它们自己的波,这一现象称为散射。因而我们只要架起许多导线,使之间隔相等,并以远处的无线电频源激励它们,就能得到所需的情况,无需许多特殊的布线。如果投射是法向的,相位就相同,我们将正好得到刚讨论过的情况。因此,若导线间隔大于波长,就可在法向得到很强的散射强度,而在另外的某些方向也能得到由式(30.6)给出的很强的散射强度。

这个方法对光也适用!用一块平玻璃片代替导线,在其上刻以凹槽,使光在每个刻痕处的散射与玻璃的其余部分略有不同。如果我们将光照射在玻璃上,每个刻痕就成为一个源,假如使刻痕的间距很小,但不小于波长(要小于波长在技术上几乎是不可能的),那么我们就会预期产生一个十分奇怪的现象:光不仅会笔直地通过去,而且按刻痕间隔的大小,在某一有限的角度上也会出现强光束!这类东西实际上已制造出来,并在普遍使用,——它们被称为衍射光栅。

有一种衍射光栅只是一片透明、无色的平板玻璃,其上刻有刻痕。每毫米常有几百条刻痕,它们被排列得非常仔细,使间距都相同。此光栅的效果可以用下述办法看出。用投影器将一竖直的光线(狭缝的像)投射到墙上。将光栅放进光束(使刻痕竖直),即可看到原来的光线仍在那里,但除此之外在两边还附加有另一个彩色的明亮光斑。这无疑是光缝在一宽广角度上散开的像,因为式(30.6)中的角度 θ 取决于 λ ,而我们知道,不同颜色的光是与不同的频率,亦即不同的波长对应的。最长的可见光波长是红色的。由于 $d \sin \theta = \lambda$, 它应有一较大的角度。事实上,我们确实发现红色在离开中心像较大的角度上! 在另一边应也有一束光,我们在屏幕上也的确看到了。再者,当 $m = 2$ 时,式(30.6)还应有另一个解。我们的确看到那里有一个模模糊糊的很弱的光束,再过去甚至还有一些光束。

我们刚才论证过,所有这些光束应该是等强度的,但如今它们并非如此,而且事实上即使是左、右两边的第一级光束都不相等! 原因是光栅被仔细地恰好做成这样。怎么做呢? 如果光栅由宽度无限小、间隔均匀、非常细的刻痕组成,那么所有的强度的确会相等。但是,事实上,虽然这只是最简单的情形,我们也可以考虑一个由一对对天线组成的阵列,并且一对天线中的每一根都有一定的强度和相对相位。假使这样的话,就可能对不同的级得出不同的强度。光栅常刻成小“锯齿”形,以代替对称的小凹槽。小心地安排“锯齿”,可以使投向光谱某一特定级的光比另外的级更多。在实际光栅中,我们总希望在某一级上的光尽可能多。这似乎是招徕麻烦的事情,但却是很聪明的做法,因为它使光栅更有用了。

至此,我们讨论了所有源的相位相等的情况。但我们也有一个相邻源的相位相差

α 时 ϕ 的公式。那需要将天线绕成彼此间有一小的相移。对光能这样做吗？可以，我们很容易做到这一点。假如在无限远处有一光源，它处在一定的倾角上使光以角 θ_{in} 入射，而我们想讨论以角 θ_{out} 出射的散射光。 θ_{out} 与上述的 θ 相同，但 θ_{in} 则只是借以使每个源的相位不同：来自远处激励源的光先投射到一个刻痕，接着投射到下一个刻痕，等等，一个与下一个之间有一相移，此相移即为 $\alpha = -d \sin \theta_{in} / \lambda$ 。因而，对于入射光与出射光都有倾角的光栅，就有公式

$$\phi = 2\pi \frac{d \sin \theta_{out}}{\lambda} - 2\pi \frac{d \sin \theta_{in}}{\lambda}. \quad (30.7)$$

我们来找找看，在这些情况下，在哪里能得到极强。当然，极强的条件是 ϕ 应为 2π 的整数倍。有几个有趣之点值得注意。

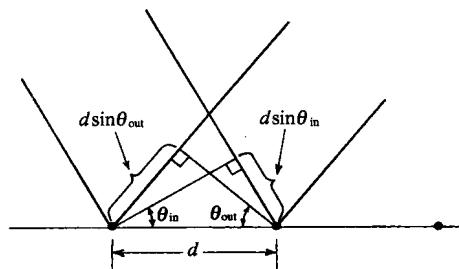


图 30-4 从光栅上相邻划线散射的光线的程差是 $d \sin \theta_{out} - d \sin \theta_{in}$

一个颇有趣的是与 $m = 0$ 对应的情况，其中 d 小于 λ ；实际上，这是唯一的解。在这种情况下，可得 $\theta_{out} = \theta_{in}$ ，这意味着光以与激励光栅的光同样的方向出射（图 30-4）。我们会认为光“直接透过去”了。不，我们所讲的是另一束光。直接透过的光是来自原来的光源；我们所讲的则是由散射产生的新的光。它说明散射光正沿着原来光的方向行进，事实上它会与之干涉——这是我们以后要研究的情形。

对同一情况还有另一个解。对于给定的 θ_{in} ， θ_{out} 可以是 θ_{in} 的补角。因此我们不仅可在与入射光束相同的方向上得到一光束，而且还可以在另一方向上得到一光束，如果仔细想一下，此光束位于入射角等于散射角的方向上。这个光束称为反射光束。

这样我们开始理解反射的基本机理：入射光使反射体中的原子发生运动，从而反射体就产生一束新的波，散射方向的一个解——当散射源的间距与波长相比很小时则为唯一的解——是使光出射的角度等于其入射的角度！

其次，我们来讨论当 $d \rightarrow 0$ 时的特殊情况。这就是说，比如我们刚好有一块固体，其长度是有限的。另外，我们要使从一个散射源到下一个散射源的相移趋近于零。换句话说，我们在两根天线间放进越来越多的天线，以至于每个相位差变得很小，但天线的数目却以这种方式增加，使一端至另一端之间总的相位差为常数。我们来看一看当保持一端至另一端的相位差 $n\phi$ 为常数（比如说 $n\phi = \Phi$ ），而让天线数目趋向无限多，从而每个相移 ϕ 趋近于零时，式 (30.3) 将怎么样。但现在 ϕ 很小，故 $\sin \phi = \phi$ ，若我们仍把 $n^2 I_0$ 当作光束中央的最大强度 I_m 的话，则

$$I = 4I_m \sin^2 \frac{1}{2}\Phi/\phi^2, \quad (30.8)$$

这一极限情况如图 30-2 中所示。

在这种情况下，我们看到了与有限间隔 $d > \lambda$ 同样类型的图；所有边瓣实际上与以前相同，只是没有较高级的极大值。如果散射源都同相，我们就在 $\theta_{out} = 0$ 的方向上得一极大值，

而在距离 Δ 等于 λ 时得一极小值, 同有限的 d 与 n 的情况正好一样。因而若用积分代替累加, 我们甚至可以分析散射源或振子连续分布的情况。

作为一个例子, 设有一长列振子, 其电荷沿着排列方向振动(图 30-5)。自这种排列发出的光的最大强度所在方向与直线垂直。在赤道平面的上、下有少量的强度, 但很微弱。利用这一结果, 我们就可以处理更复杂的情形了。假如我们有一系列这样的线, 每一条线只在与线垂直的平面上产生光束。寻求发自一系列长导线(而不是无限小导线)的光在不同方向上的强度, 与寻求发自无限小导线的光是同一个问题, 只要我们限于在与导线垂直的中心平面上观察; 因为这时我们所累加的正相当于来自每根长导线的贡献。这就是为什么我们实际上虽然只分析了小天线, 却也可用于具有狭长槽的光栅的缘故。每个长槽只在自己的方向^{*}产生效果, 上、下则没有, 但它们水平地相继排列, 故在水平方向产生干涉。

这样, 利用散射源在直线、平面和空间的不同分布, 就能构成更多的复杂情形。我们首先所做的是考虑直线上的散射源, 刚才我们已把分析推广到许多细长条; 只需作必要的累加, 将来自各散射源的贡献加起来, 就能求出结果。其中的原理往往是同样的。

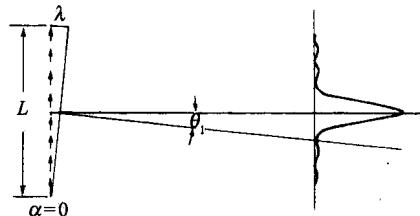


图 30-5 连续排列的振子的强度花样有一个单一的极大值和许多微弱的“边瓣”

§ 30-3 光栅的分辨本领

现在我们能够理解许多有趣的现象了。例如, 考虑利用光栅来分离波长的情况。我们已注意到光栅可以使整个光谱散布在屏幕上, 因而光栅可用作将光分成不同波长的仪器。其中有一个有趣的问题是: 假如有两个频率略有不同或波长略有不同的源, 问它们的波长要靠得多近才能使光栅不能分辨其中实际上有两个波长? 红色与蓝色分得很清楚。但当一个波是红色的而另一个波略微更红一些, 但非常接近, 那么它们可以靠得多近? 这叫做光栅的

分辨本领, 分析这个问题的一种方法如下。假定对某种颜色的光, 我们恰巧在某个角度上得到其衍射光束的极大值。如果改变波长, 相位 $2\pi d \sin \theta / \lambda$ 就不同, 当然极大值就出现在不同的角度上。这就是红色与蓝色为什么被散开的原因。为了使我们能够看清楚它, 角度必须差多少? 如果两个极大值刚好彼此重合, 我们当然不能看清楚它们。如果一个极大值与另一个极大值离得足够远, 那么我们就能看



图 30-6 瑞利判据的说明。一个花样的极大值落在另一个花样的第一极小值上

到在光的分布中有一双峰或两个突起部分。为了能够恰好辨认出双峰, 下述简单的判据(称为瑞利判据)是常用的, 那就是: 一个峰的第一极小值应位于另一个峰的极大值处。这样就很容易计算当一个极小值位于另一个极大值处时波长的差为多少。最好的计算方法是几何方法。

* 指与槽垂直的方向。——译者注

为了使波长 λ' 有一极大值, 距离 Δ (图 30-3) 必须是 $n\lambda'$, 若我们正观察第 m 级光束, 则它为 $mn\lambda'$ 。换句话说, $2\pi d \sin \theta / \lambda' = 2\pi m$, 故 $n \sin \theta$ (即 Δ) 为 $m\lambda'$ 乘上 n , 即 $mn\lambda'$ 。对另一波长为 λ 的光束, 我们希望在该角度上有一极小值。那就是说, 我们希望 Δ 恰好为比 $mn\lambda$ 多一个波长 λ 。即 $\Delta = mn\lambda + \lambda = mn\lambda'$ 。于是, 若 $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, 则得

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mn}. \quad (30.9)$$

比值 $\lambda / \Delta\lambda$ 叫做光栅的分辨本领; 我们看到它等于光栅的总线数乘以级数。不难证明这个公式与频率差等于相干光的两条极端路径间的时间差的倒数这一公式等效*

$$\Delta\nu = \frac{1}{T}.$$

事实上, 最好记住此式, 因为一般的公式不仅适用于光栅, 也适用于任何其他仪器, 而特殊公式(30.9)则只在用光栅时适用。

§ 30-4 抛物形天线

现在我们来考虑分辨本领中的另一个问题。这与用来测定天空中的无线电辐射源的位置也就是测定辐射源角度大小的射电望远镜的天线有关。显然, 如果使用任何一种老式天线, 并发现了信号, 我们并不能知道它们来自什么方向。我们很想知道辐射源在这里还是在那里。我们所能找到的一种方法是在澳大利亚草原上铺设一整列等间隔的偶极子天线。然后将引自这些天线的导线馈入同一接收器, 使所有馈线中的时间延迟相等。这样接收器就同相位地收到来自所有偶极子的信号。也就是说, 它将把来自每个偶极子的所有波同相位地加起来。那时将发生什么呢? 若源恰好在装置的上面, 处于无穷远或近乎无穷远, 那么它的无线电波将同相位地激励所有的天线, 因而它们将一起馈入接收器。

现在假设无线电辐射源从竖直方位略为偏过 θ 角, 则不同的天线收到的信号相位就略有不同。接收器将所有这些不同相位的信号加起来, 若 θ 角过大, 就得零信号。试问此角有多大? 答案是: 若角 $\Delta/L = \theta$ (图 30-3) 对应于 360° 的相移, 即若 Δ 等于波长 λ , 就得零信号。这是因为所有的矢量贡献在一起形成了一个完整的正多边形, 结果合矢量为零。故长为 L 的天线装置所能分辨的最小的角是 $\theta = \lambda/L$ 。注意, 这种天线的接收花样恰好与把接收器转过来使之成为发射器时所得的强度分布相同。这是所谓倒易原理的一个例子。事实上, 下面的说法证明对天线的任何排列、任何角度等等都是普遍正确的: 如果我们先以发射器来代替接收器得出在不同方向上所应有的相对强度, 那么具有同样的外部布线、同样的天线排列的接收器的相对定向灵敏度就与它是一个发射器时的相对发射强度相同。

有些无线电天线可用另一种方法制成。我们不是把全部偶极子排成一长条直线, 并附带许多馈送导线, 而是把它们不排成直线, 而排成曲线, 并把接收器放在能探察到散射波的

* 在我们的情况下, $T = \frac{\Delta}{c} = \frac{mn\lambda}{c}$, 其中 c 是光速, 频率 $\nu = \frac{c}{\lambda}$, 故 $\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$ 。

某一位置上。此曲线被巧妙地设计成这样：当无线电波从上面来时，被天线散射而形成新波，这些天线被排列成使散射波都同时到达接收器（图26-12）。换句话说，此曲线为抛物线；当源恰好在其轴上时，我们就在焦点处得到一个很强的强度。在这种情况下，我们就很清楚地了解到这种仪器的分辨本领是多少了。天线排成抛物线并非是主要的，那仅仅是使所有信号能无相对延迟地到达同一点而不必用馈线的一种方便的方法而已。这种仪器所能分辨的角仍为 $\theta = \lambda/L$ ，其中 L 为第一根天线与最后一根天线的距离。它并不取决于天线的间距，天线可以靠得很近，其实成一整块金属也行。当然这时我们是在描述望远装置的反射镜。我们居然找到了望远镜的分辨本领（有时分辨本领写成 $\theta = 1.22\lambda/L$ ，其中 L 是望远镜的直径。它不是恰好为 λ/L 的理由是这样：当得出 $\theta = \lambda/L$ 时，我们假定所有各排偶极子的强度是相等的，但当我们有一圆形的望远镜时——望远镜通常是这个形状——从外边缘来的信号就没有那么多，因为它不像一个方块，在方块中沿着每一边缘都得到同样的强度。这里在边上得到的稍少一些，因为我们只用了望远镜的一部分；于是可以估计到其有效直径比实际直径略小一些，而这就是 1.22 因子所告诉我们的。无论如何，把分辨本领公式搞得这么精确似乎有点学究式^{*}）。

§ 30-5 彩色薄膜、晶体

以上所述就是将各种波叠加起来得到的一些干涉效应。还有许多其他例子，尽管我们还不理解其基本机理，但总有一天，甚至就在现在，我们能够理解这些干涉是怎么发生的。例如，当一光波投射至折射率为 n 的材料表面时，比如说垂直入射，一部分光就被反射。反射的原因我们此刻还不能理解；我们将在以后讨论。但是假如我们知道当光进入和离开折射介质时都有一部分被反射，那么当我们注视一光源在薄膜上反射时，就看到两个波的叠加；如果厚度足够小，这两个波就会发生干涉，或为相长干涉或为相消干涉，取决于相位的符号。比如说可以是这样：对于红光得到增强的反射，对于蓝光（它有不同的波长），或许就得到相消干涉的反射，于是我们看到明亮的红色反射光。如果改变厚度，也就是说如果注视另一处膜较厚的地方，情况可以反过来，红光干涉掉，而蓝光没有干涉掉，故它呈明亮的蓝色，也可呈绿色、黄色或别的什么叫不出名称的颜色。因而当我们注视薄膜时会看到彩色，而且当我们从不同角度注视时颜色会改变，因为我们意识到在不同角度上的计时是不同的。这样我们就立即懂得了其他五花八门的情形，包括在诸如油膜、肥皂泡等上面从不同角度上看到彩色等。它们的原理都一样：我们只是在叠加不同相位的波而已。

作为衍射的另一个重要的应用，可以提一下下列情形。假设我们使用一光栅，并在屏幕上看到衍射像。如果用的是单色光，像就应在某个特定位置上，其后还有各个较高级次的像。如果知道光的波长，由像的位置能够知道光栅上的刻线分得多开。由各个像的强度的差别，可得出光栅刻痕的形状，例如此光栅是用金属丝做成的，还是锯齿形凹口的，还是什么别的形状的，尽管我们不可能看见它们。这一原理常被用来显示晶体中原子的位置。唯一

* 这首先是因为瑞利判据是一个粗略的概念，它告诉你识别一个像到底是由一颗星造成还是由两颗星造成的这一点，从哪里开始变得十分困难。实际上，如果能够对衍射像斑的实际强度分布作足够仔细的测量，那么即使当 θ 小于 λ/L 时也能判明像斑是由两个源造成的。

的复杂之点为晶体是三维的；它是原子的一种重复的三维排列。我们不能用普通的光，因为我们必须用波长小于原子间距的光，否则就得不到效应；所以必须用波长非常短的辐射，即X射线。因而，尽管我们绝不可能用肉眼看见原子，但借助于将X射线射入晶体并注意在不同级次反射有多强的办法，我们仍能决定内部原子的排列！正是用这种方法，我们知道了各种物质中的原子排列，这使我们可以在第1章中画出那些表示食盐等等的原子排列的图。我们以后将回到这一题目上来，并进行更详细的讨论，因此现在对这个最引人注意的概念就不再多说了。

§ 30-6 不透明屏的衍射

现在我们来看一个非常有趣的情况。假设有一张开孔的不透明薄片，在它的一边有一束光。我们希望知道另一边光的强度如何。大多数人会说，光将穿过开孔，并在另一边产生一种效应。结果将证明是这样：如果有人假定光源以均匀的密度分布在开孔上，而这些源的相位与假定不透明屏不存在时一样，他就将得出很好的近似解答。当然，在开孔处其实并没有源；事实上那是唯一无疑没有源的地方。虽然如此，但当我们把开孔看作唯一有源之处时，仍得到了正确的衍射花样；这是一个颇为奇怪的事实。以后我们将解释为什么这是正确的，但现在就让我们假定它是正确的。

在衍射理论中还有另一种衍射，我们要略加讨论。在基础课程中一般不这么早对它进行讨论，这仅仅是因为它所包含的累加小矢量的数学公式有点复杂。除此以外，它与我们一直所讨论的衍射完全相同。所有干涉现象都相同；其中并不包含什么高深的内容，只是情况比较复杂以及将矢量累加起来比较困难，如此而已。

假如有光从无穷远处射来，投射出一物体的影子。图30-7表示一个屏，其上投射有由

光源所造成的物体AB的影子，光源离AB的距离比一个波长大得多。我们会预期在影子外面强度是完全明亮的，在影子里面，则是完全黑暗的。而事实上，若把影子边缘附近的强度作为位置的函数作图，光强就先上升，接着超过预期的强度，然后以一种非常特殊的状态在边缘附近作摆动和振动（图30-8）。我们现在来讨论之所以如此的原因。如果应用上述到目前为止我们还未证明过的理论，就可以用一系列均匀分布于物体以外的空间上的有效光源来取代实际情况。

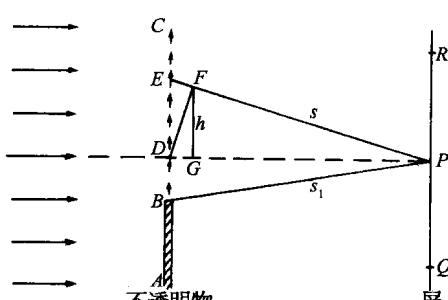


图30-7 远处光源将一不透明物的影子投射于屏上

想象有许许多多间距非常靠近的天线，我们要求某一点P的强度。这似乎很像我们所解过的问题。但不完全像，因为现在的屏不在无穷远处。我们不要求无穷远处的强度，而要求有限远处的强度。为了计算某一特定位置的强度，必须把所有天线的贡献加起来。首先，在恰好与P点相对的D点有一天线；若使角度稍增加一点，比如说高度增加h，那么时间延迟就有了增加（因为距离的改变，振幅也有变化，但若屏离得很远，此效应就很小，因而比相位的改变次要得多）。而今程差 $EP - DP$ 为 $h^2/(2s)$ ，故相位差跟我们与D点距离的平方成正比，但在以前的计算中s为无穷大，故相

位差就与 h 的一次方成正比。当相位与距离成线性比例时, 每个矢量以不变的角度加于下一个矢量上。我们现在所需要的则是这样的曲线, 它是由叠加许多无限小的矢量组成的, 这些矢量所构成的角度将不是以曲线长度的一次方关系增加, 而是以平方关系增加。作此曲线要涉及稍微深一些的数学, 但我们常可用实际画出箭头并计算角度的办法来作出。不论怎么样, 我们得到了如图 30-8 所示的奇形的曲线(称为考纽蜷线)。那么怎样使用这条曲线呢?

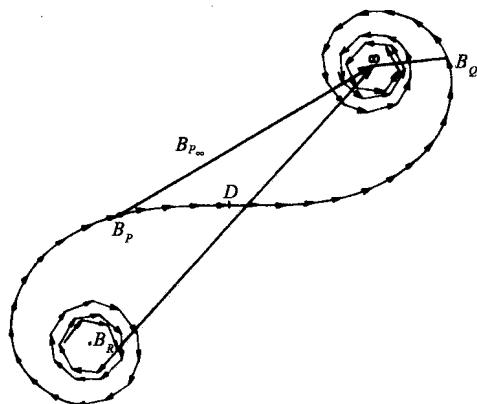


图 30-8 相位延迟与离上图 D 点的距离
平方成正比的许多同相振子振幅的叠加

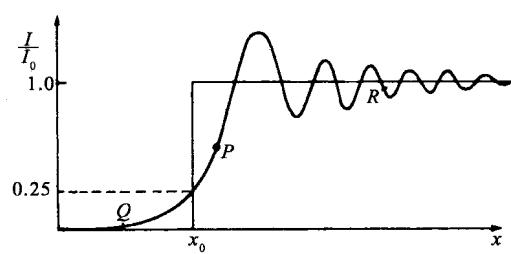


图 30-9 影子边缘附近的光强、几何阴影边缘在 x_0

比如说, 如果要求出 P 点的强度, 我们就把从 D 点向上至无穷远, 向下仅至 B_P 点的不同相位的许多贡献累加起来。因而我们从图 30-8 中的 B_P 点开始画一系列角度不断增加的箭头*。于是 B_P 点以上的所有贡献都沿着蜷线移动。如果我们打算在某处停止累加, 那么总振幅就是从 B_P 点到该点的矢量; 在现在的特殊问题中, 我们要累加到无穷远, 故总的答案是矢量 \mathbf{B}_{P_∞} 。在曲线上与物体上 B 点对应的位置取决于 P 点位于何处而定, 因为拐点 D 总是与 P 点的位置相对应。这样, 根据 P 点处在 B 点以上的位置, 起始点将落在曲线左下部分的不同位置上, 从而合矢量 \mathbf{B}_{P_∞} 就有许多极大值与极小值(图 30-9)。

另一方面, 如果观察点在 P 的另一边的 Q 点, 则我们只需用蜷线的一端, 而不需用另一端。换句话说, 我们甚至不必从 D 点出发, 而从 B_Q 点出发就行, 故在这一边得到一个随 Q 点深入阴影区而连续降低的强度。

我们很容易立即进行计算, 以证明我们真正懂得上述方法的, 就是恰好与边缘相对应之点的强度。此处的强度为入射光的 $1/4$ 。理由是: 在恰好为边缘处(故箭头的尾端 B 在图 30-8 中的 D 点), 我们所得的曲线为深入明亮区时所得曲线的一半。如果点 R 深深进入光束, 箭头就从曲线的一端到另一端, 即一完整的单位矢量; 但是如果处于影子的边缘, 则仅得幅度的一半——强度的 $1/4$ 。

在这一章中, 我们曾求得由光源的各种分布产生的在各个方向上的强度。作为最后一个例子, 我们将推导一个为下一章折射率理论所需要的公式。直到目前为止, 相对强度对于我们的目的来说已足够了, 但此刻我们将求出在下述情况下的场的完整表示式。

* 原文有误。实际上从 B_P 点到 D 点的箭头的角度是逐渐减小的。——译者注

§ 30-7 振荡电荷组成的平面所产生的场

假设有一充满源的平面,所有源都沿着平面方向一起振动,并有相同的振幅与相位。试问离平面有限远、但距离很大处的场如何(我们当然不能靠得很近,因为我们还没有获得对于靠近源的场的正确公式)?

如果把电荷平面作为 XY 面,则我们要求的是 z 轴上很远点 P 的场(图 30-10)。假定平面的单位面积上有 η 个电荷,每个电荷带有电量 q 。所有电荷作同方向、同振幅、同相位的简谐振动。假定每个电荷相对于各自的平衡位置的运动是 $x_0 \cos \omega t$,或者用复数符号,并记住其实部代表实际运动,则运动可写为 $x_0 e^{i\omega t}$ 。

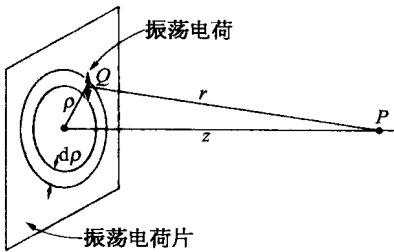


图 30-10 振荡电荷面的辐射场

现在我们求出来自每个电荷 q 的场,并把所有电荷的贡献叠加起来,从而求出 P 点的场。我们知道辐射场正比于电荷的加速度,此加速度为 $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$ (而且对每个电荷都相同)。点 Q 处的电荷在 P 点产生的电场正比于电荷 q 的加速度,但必须记住在时刻 t , P 点的场是由较早时刻 $t' = t - r/c$ 电荷的加速度给出的,其中 r/c 是波从 Q 传播到 P 的距离 r 所花的时间。因而 P 点的场就正比于

$$-\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}. \quad (30.10)$$

把这一量作为来自远处辐射电荷的电场表示式中从 P 点看到的加速度,我们得到

$$Q \text{ 处电荷在 } P \text{ 点产生的场} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \quad (\text{近似}). \quad (30.11)$$

现在,这一表示式并不十分正确,因为我们本来应该用的不是电荷的加速度,而是加速度垂直于直线 QP 的分量。不过我们假定对于所考虑的电荷来说,P 点离辐射源的距离比起 Q 点与轴线的距离(图 30-10 中的距离 ρ)来很远,以致可以舍去余弦因子(不管怎样它总近似于 1)。

为了得到 P 点的总场,现在把平面上所有电荷的效应加起来。当然我们应求矢量和。但既然对所有电荷来说,电场方向几乎都相同,那么,与我们已作的近似相应,可以只把场的大小加起来,按照我们的近似,P 点的场仅取决于距离 r ,故处于相同 r 处的所有电荷产生相同的场。所以我们首先把半径为 ρ ,宽为 $d\rho$ 的环中电荷的场加起来,然后对所有 ρ 积分,就可得到总场。

环中电荷的数目是环的表面积 $2\pi\rho d\rho$ 与单位面积电荷数 η 的乘积。这样,我们就有

$$P \text{ 点的总场} = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \cdot \eta \cdot 2\pi\rho d\rho. \quad (30.12)$$

我们要求此积分从 $\rho = 0$ 到 $\rho = \infty$ 的值。变量 t 在我们求积分时当然保持不变,故唯一的变量是 ρ 和 r 。暂时舍去所有常数因子,包括因子 $e^{i\omega t}$,要求的积分则成为

$$\int_{\rho=0}^{\rho=\infty} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \rho d\rho. \quad (30.13)$$

为了求此积分需应用 r 与 ρ 之间的关系

$$r^2 = \rho^2 + z^2. \quad (30.14)$$

因为 z 不取决于 ρ , 故当求此等式的导数时, 得到

$$2rdr = 2\rho d\rho.$$

幸而, 因为在积分中可以用 rdr 代替 $\rho d\rho$, 从而 r 与分母中的 r 消去。于是我们所要求的积分成为较简单的形式

$$\int_{r=z}^{r=\infty} e^{-i\omega r/c} dr. \quad (30.15)$$

对指数函数积分很容易。我们只要将它除以指数中 r 的系数, 并求出指数函数在上、下限的值就行。但 r 的上、下限与 ρ 的上、下限不同。当 $\rho=0$ 时, 有 $r=z$, 故 r 的积分限为从 z 到无穷大。我们得到积分值为

$$-\frac{c}{i\omega} [e^{-i\infty} - e^{-(i\omega/c)z}], \quad (30.16)$$

其中我们已将 $(r/c)_\infty$ 写为 ∞ , 因为它们都只不过表示一个很大的数而已!

现在 $e^{-i\infty}$ 是一个神秘的量。例如其实部为 $\cos(-\infty)$, 它从数学上讲是完全不定的[尽管我们可以想象它为介于 +1 与 -1 之间的某个值——或任何值(?)], 但在物理的情况下, 它可以包含十分合理的意义, 并且常常可看作为零。为了在我们的情形中看出这一点, 我们再回过来考虑原来的积分(30.15)。

可以把式(30.15)理解为许多小复数的和, 每个复数的模为 Δr , 在复平面内具有角 $\theta = -\omega r/c$ 。我们可以试用图解方法来求其和。在图 30-11 中画了此和的最先五小段。曲线的每一段具有长度 Δr , 并与前一小段成角度 $\Delta\theta = -\omega\Delta r/c$ 。此最先五小段的和用自起点至第五小段终点的矢量来表示。当继续一小段、一小段累加时, 我们将描绘出一多边形, 直至回到出发点(近似地), 接着又重新开始兜圈子。当累加更多的小段时, 我们只是在一圆周附近不断兜圈子, 此圆的半径很易证明为 c/ω 。现在我们可以明白为什么积分不能给出确定解的道理了!

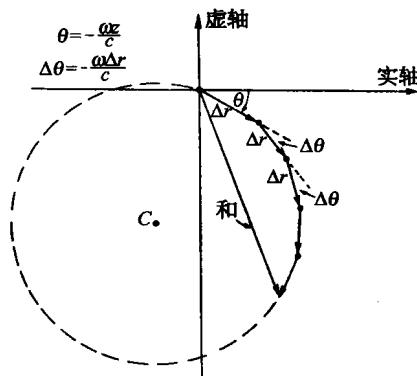
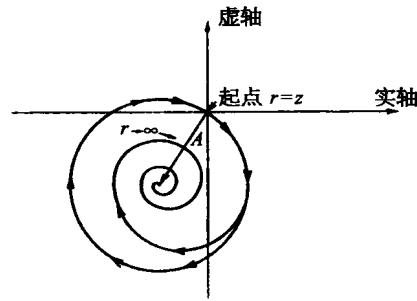
但是现在我们必须回到物理内容方面去。在任何实际情况中, 电荷平面的范围不可能无限大, 而必须在某处中断。如果它突然中断了, 而其形状恰好为圆形, 则积分将具有如图 30-11 所示的圆上的某一值。但是如果我们让平面上的电荷数目自远离中心某一较大距离开始逐渐减少(要不就使之突然中断, 但沿着不规则的形状中断, 使之对较大的 ρ , 宽为 $d\rho$ 的整个环不再都有贡献), 这样, 在实际积分中系数 η 将减少至零。因为我们现在累加的是越来越小的小段, 但每段仍转过相同的角度, 故积分图形变为一螺旋形曲线。此曲线显然中止于原先的圆的中心处, 如图 30-12 所示。在物理上正确的积分就是在图中自起点至圆心的线段所表示的复数 A , 它刚好等于

$$\frac{c}{i\omega} e^{-i\omega z/c}, \quad (30.17)$$

就同你自己能求得的那样。这正与设 $e^{-i\infty} = 0$ 从式(30.16)得到的结果相同。

(为什么对于较大的 r 值对积分贡献逐渐变小, 尚有另一个理由, 那就是我们所忽略的加速度应投影于与直线 PQ 垂直的平面上这一因素)。

我们当然只对物理情况有兴趣, 故取 $e^{-i\infty}$ 等于零。回到场的原始公式(30.12), 并重新

图 30-11 $\int_z^\infty e^{-i\omega r/c} dr$ 的图解图 30-12 $\int_z^\infty \eta e^{-i\omega r/c} dr$ 的图解

写上与积分在一起的所有系数, 结果得

$$P \text{ 处的总场} = -\frac{\eta q}{2\epsilon_0 c} i\omega x_0 e^{i\omega(t-z/c)} \quad (30.18)$$

(记住 $1/i = -i$)。

注意到 $(i\omega x_0 e^{i\omega t})$ 恰好等于电荷的速度这一点是有意义的, 故我们也可把场的表示式写为

$$P \text{ 处的总场} = -\frac{\eta q}{2\epsilon_0 c} [\text{电荷的速度}]_{t-z/c}. \quad (30.19)$$

这似乎有些奇怪, 因为这里时间的延迟恰好由距离 z 引起, 而 z 为 P 至电荷平面的最短距离。但得出的结果正是如此。幸好, 此表示式颇为简单[附带说一句, 虽然我们的推导仅对远离振荡电荷平面的地方有效, 但结果证明公式(30.18)或(30.19)对任意距离 z 都正确, 甚至对 $z < \lambda$ 也对]。

第 31 章 折射率的起源

§ 31-1 折 射 率

我们在前面曾指出,光在水中比在空气中走得慢,而在空气中又略比在真空中走得慢。这一效应用折射率 n 来描写。现在我们想了解这一较慢速度是怎么得出来的。特别是想弄明白以前所作的下列几点物理假设或物理陈述之间有什么关系:

- (a) 在任何物理条件下,总电场总是可以来自空间所有电荷的场的总和来表示;
- (b) 来自单个电荷的场总是由它的以速度 c 延迟而算得的加速度值给定(对辐射场来说)。

但对一片玻璃来说,你会想:“哦,不对,你对这些都应加修正。你应该说它以速度 c/n 延迟。”然而这是不对的,而且我们就是要了解这为什么不对。

光或任何电波通过折射率为 n 的物质时似乎以速度 c/n 传播这一点大致是正确的,但场仍然由所有电荷——包括在物质中运动着的电荷——的运动所产生,而场的这些基本贡献则以极限速度 c 传播。我们的问题是弄清楚这种表观上较慢的速度是怎么得出来的。

我们想从很简单的情况来理解这一效应。假设有一个我们称为“外源”的源置于远离一透明物质(例如玻璃)薄板之处。我们要问在板的另一边很远处的场如何。此情形可用图 31-1 来说明,图中 S 与 P 可想像为离板很远。根据以前所述原理,远离所有运动电荷的任何一点处的电场是外源(在 S 处)产生的场与玻璃板中每个电荷产生的场的(矢量)和,每个场都具有速度为 c 的适当延迟。记住每个电荷的贡献并不因其他电荷的存在而有所改变。这些是我们的基本原理。P 处的场可以写成这样

$$\mathbf{E} = \sum_{\text{所有电荷}} \mathbf{E}_{\text{每个电荷}} \quad (31.1)$$

或

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \sum_{\text{所有其他电荷}} \mathbf{E}_{\text{每个电荷}}, \quad (31.2)$$

其中 \mathbf{E}_s 是由源单独产生的场,它正好是没有物质存在时 P 处的场。如果有任何其他运动电荷存在的话,我们期望 P 处的场与 \mathbf{E}_s 不同。

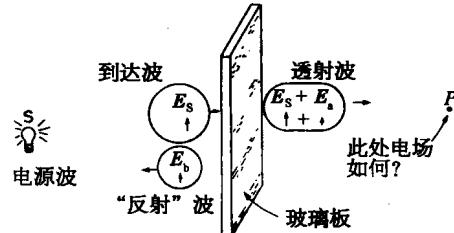


图 31-1 通过一层透明物质的电波

为什么玻璃中会有电荷的运动？我们知道所有物质都由包含电子的原子组成。当源的电场作用在这些原子上时，就驱动电子上、下运动，因为它对电子施加了作用力。而运动着的电子就产生场——它们成为新的辐射子。这些新的辐射子与源 S 有关，因为它们是由源的场驱动的。总的场并不只是源 S 的场，而是被来自其他运动电荷的附加贡献所修正过的场。这意味着此场并不是玻璃存在以前的那个场，而是经过修正的，并且结果是这样被修正的，即玻璃中的场似乎是以另一个速度运动。这就是我们想定性得出的概念。

严格地讲，这是相当复杂的，因为虽然我们说过所有其他运动电荷都由源场驱动，但这并不十分正确。如果我们考虑一特定电荷，它就不仅感受到源的影响，而且也像世界上其他东西一样，感受到所有运动电荷的影响。特别是，它感受到在玻璃中另外某处运动着的电荷的影响。所以作用在一特定电荷上的总场是来自其他电荷的场的合成，而这些电荷的运动则又取决于这一特定电荷的行为！你可以看出要得到完全而正确的公式就需要一系列复杂的方程式。这太复杂了，我们把这一问题推迟到下一章去讲。

为了能够十分清楚地理解所有的物理原理，我们将处理一个很简单的情况。我们取这样的情形，来自其他原子的影响比来自源的影响小得多。换句话说，我们取这样的材料，其中的总场被其他电荷的运动修改得不很多。这相当于材料的折射率非常接近于 1，例如原子密度很低时就会出现这种情形。我们的计算将对折射率不论因任何原因而很接近于 1 的任何情况有效。这样我们就避免了最一般和最完整的解的复杂性。

顺便提一句，你应注意到板中电荷的运动还会引起另一种效应。这些电荷也会朝后向源 S 辐射波。这一向后行进的场即我们所见到的从透明物质表面反射的光。它并非只从表面来。此朝后的辐射来自物质内部每个地方，但结果总的效果与一来自表面的反射等效。这些反射效应现时超出了我们的近似范围，因为我们将限于对折射率很接近于 1，只有很少的光被其反射的物质进行计算。

在我们继续研究折射率怎么来的之前，应该懂得，要理解折射就是要理解为什么在不同的材料中表观波速度不相同。光线发生弯曲正是因为波的有效速率在各种物质中不同所致。

为了提醒你这种弯曲是怎样发生的，我们在图 31-2 中画出了从真空射向玻璃板表面的电波的几个相继的波峰。垂直于波峰的箭头表示波传播的方向。波中所有的振动必须具有相同的频率（我们知道受迫振动具有与振源相同的频率）。这也意味着，表面两边的波的波峰沿表面必须具有相同的间隔，因为它们必须一起传播，这样才能使位于界面上的电荷只感受到一个频率。然而波峰间的最短距离就是波长，它是速度除以频率。若 $v = c/n$ 为波的速度的话，在真空一边波长是 $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ ，在另一边则是 $\lambda = 2\pi v/\omega$ 或 $2\pi c/\omega n$ 。由图可见，要使波完全“符合”边界情况的唯一办法是使物质中的波沿着与表面成另一个角度的方向传播。由图中几何关系可见，为使波“符合”边界情况，必须有 $\lambda_0 / \sin \theta_0 = \lambda / \sin \theta$ ，即 $\sin \theta_0 / \sin \theta = n$ ，此即斯涅耳定律。因而，在以下的讨论中，我们将只考虑为什么光在折射率为 n 的物质中具有 c/n 的有效速率，而不再在本章中讨论光的前进方向弯曲的问题。

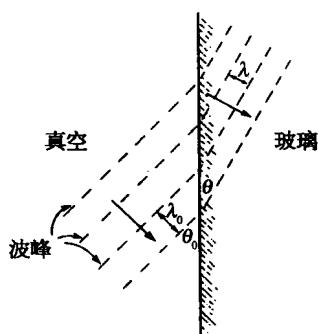


图 31-2 折射与速度改变之间的关系

现在回到图31-1所示的情形。我们看到我们所要做的就是计算玻璃板中的所有振荡电荷在P点产生的场。我们将称场的这一部分为 E_a ,它就是等式(31.2)中的第二项那个和。当我们把它和由源激起的场 E_s 加在一起时,就得到P点的总场。

这可能是我们今年要做的最复杂的事情了,但它仅仅在有许多部分相加在一起时才比较复杂;然而每个部分却是很简单的。这与其他的推导不同,在那些地方我们说,“不用管推导,只要看答案!”在这里,我们对答案的需要不比对推导来得多。换句话说,现在要了解的是折射率产生的物理机理。

为了弄清楚我们所讨论的问题,我们首先来找出“校正场” E_a 应是怎样的,假设P点的总场看起来好像是来自源的、在通过薄板时慢了下来的辐射的话。如果板对它没有影响,一个向右(沿着z轴)传播的波的场将是

$$E_s = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right), \quad (31.3)$$

或用指数符号

$$E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/c)}. \quad (31.4)$$

若波在通过板时传播得比较慢,那么,将发生什么情况呢?我们设板的厚度为 Δz 。如果那里不存在板,波将在时间 $\Delta z/c$ 内通过距离 Δz 。但是如果波以速度 c/n 传播,那么就需要较长的时间 $n\Delta z/c$,或附加时间 $\Delta t = (n-1)\Delta z/c$ 。在这以后它又继续以速度 c 传播。考虑到通过板的额外延迟,我们可以将等式(31.4)中的 t 以 $(t-\Delta t)$ 或 $[t-(n-1)\Delta z/c]$ 来代替。故插入板后的波应写成

$$E_{\text{板后}} = E_0 e^{i\omega[t-(n-1)\Delta z/c-z/c]}. \quad (31.5)$$

也可将此式写为

$$E_{\text{板后}} = e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}, \quad (31.6)$$

这说明板后的波可由不存在板时的波,即 E_s ,乘以因子 $e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c}$ 得到。但我们知道,以因子 e^{θ} 去乘 $e^{i\omega t}$ 这样的振荡函数,就等于把振动相位改变一相角 θ ,这当然是通过厚度 Δz 时的额外延迟所造成的结果。它将相位推迟了量 $\omega(n-1)\Delta z/c$ (因为指数前是负号故为推迟)。

我们在前面曾说过板的存在使得原来的场 $E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/c)}$ 上附加一个场 E_a ,但现在我们发现板的效果并非这样,而是相当于对场乘上一个改变相位的因子。然而,我们原先的说法确实是对的,因为我们可以用加上一个适当的复数的办法来得到同样的结果。在 Δz 小的情况下,特别容易找到正确的所加之数,因为你记得,如果 x 是小数,则 e^x 近似等于 $(1+x)$ 。这样,可得

$$e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} = 1 - i\omega(n-1) \frac{\Delta z}{c}. \quad (31.7)$$

在式(31.6)中用此等式,有

$$E_{\text{板后}} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_s} - \underbrace{\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_a}. \quad (31.8)$$

第一项正好是来自源的场,第二项必定恰好等于 E_s ,即板中振荡电荷在板的右方产生的场——在这里以折射率 n 表达,而且当然是取决于来自源的波的强度。

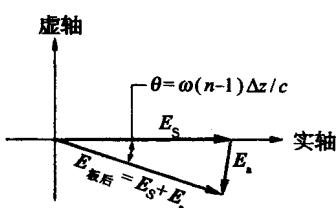


图 31-3 在某一特定的 t 和 z 时的透射波复矢量图

如果看一下图 31-3 所示的复数矢量图,那么我们上面所讲的就很容易想象了。先画出量 E_s (我们取 z 和 t 为某定值,使得得出的 E_s 在水平方向上,但这不是必要的)。由于板中速度慢下来所造成的延迟将使此量的相位落后,也就是说,将使 E_s 转过一个负的角度。但这与在和 E_s 大致垂直的方向上加上一个小矢量 E_a 等效。而这正是式(31.8)第二项中因子 $-i$ 所表示的意义。它说明若 E_s 是实数,则 E_a 为负的虚数,或一般地说, E_s 与 E_a 成直角。

§ 31-2 物质引起的场

现在我们要问:从式(31.8)第二项得到的场 E_a 是否就是我们预期从板中振荡电荷得到的那个场?如果我们能够证明它是的,那么我们就已算出折射率 n 应有的值了[因为 n 是式(31.8)中唯一的非基本量]!我们现在转而计算物质中的电荷将产生怎样的场 E_a (为了帮助你熟悉我们至今所用过的,以及在余下的计算中将要使用的许多符号,我们把它们一起列于表 31-1)。

表 31-1 计算中所用的符号

E_s = 来自源的场 E_a = 板中电荷产生的场 Δz = 板的厚度 z = 离板的垂直距离 n = 折射率 ω = 辐射的(角)频率	N = 板中单位体积的电荷数 η = 板上单位面积的电荷数 q_e = 电子电荷 m = 电子质量 ω_0 = 束缚于原子上的电子的共振频率
---	--

如果(图 31-1 中的)源 S 在左方很远处,则场 E_s 在板上任何一个地方将有相同的相位,所以我们在板的附近可将它写为

$$E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/c)}. \quad (31.9)$$

刚好在板上时, $z = 0$, 就有

$$E_s = E_0 e^{i\omega t} \quad (\text{在板上}). \quad (31.10)$$

板上原子中每个电子都将感受这个电场,并将在电场力 qE 的作用下作上、下运动(我们假定 E_s 的方向是垂直的)。为了求出我们预期的电子的运动是怎样的,我们假定原子是小振子,也就是说,电子被弹性地束缚在原子上,这意味着,如果有一个力施加于电子上,它离开正常位置的位移将与此力成正比。

如果你曾听说电子在轨道上旋转的话,你会认为这个原子模型是一个古怪的模型。但这只是一个过分简化的图像。由波动力学理论所提供的原子的正确图像指出,就有关光的

问题而论,电子的行为就如同它们被弹簧拴着一样。所以我们将假定电子具有线性恢复力,此力与电子的质量 m 一起,使电子的行为像一个具有共振频率 ω_0 的小振子。我们已经学过这样的振子,并知道它们的运动方程是这样写的

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x\right) = F, \quad (31.11)$$

式中 F 是驱动力。

对于我们的问题,驱动力来自源所发出的波的电场,所以应该用

$$F = q_e E_s = q_e E_0 e^{i\omega t}, \quad (31.12)$$

其中 q_e 是电子的电荷,而对 E_s 我们利用由式(31.10)得到的表示式 $E_s = E_0 e^{i\omega t}$,于是电子的运动方程为

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x\right) = q_e E_0 e^{i\omega t}. \quad (31.13)$$

我们以前已解过这一方程,并知道其解为

$$x = x_0 e^{i\omega t}, \quad (31.14)$$

代入式(31.13),得到

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (31.15)$$

所以

$$x = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}. \quad (31.16)$$

于是就得出了需要知道的东西——板中电子的运动。而且每个电子除平均位置(运动的“零”点)当然不同以外,其他运动完全相同。

现在我们可以立即求出这些电荷在 P 点所产生的场 E_a ,因为我们(在第30章末)已经求出由一片一起运动的电荷所产生的场。参考式(30.19),我们看到 P 处的场 E_a 正好是一负的常数乘上电荷在时间上被延迟了量 z/c 的速度。对式(31.16)中 x 进行微商以得出速度,再计入延迟[或把式(31.15)中的 x_0 代入式(30.18)],就得到

$$E_a = -\frac{\eta q_e}{2\epsilon_0 c} \left[i\omega \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t-z/c)} \right]. \quad (31.17)$$

正如我们所期望的,电子的受迫运动产生了一个额外的向右传播的波(这就是因子 $e^{i\omega(t-z/c)}$ 所表明的),而此波的振幅与板上单位面积的原子数(因子 η)成正比,也与源场的强度(因子 E_0)成正比。此外,还有一些依赖于原子性质的因子(q_e , m 和 ω_0),如我们所应预期的。

然而最重要的是,这个 E_a 的表示式(31.17)很像我们在式(31.8)中得到的表明原波在通过折射率为 n 的物质时被推迟的 E_a 的表达式。事实上,若

$$(n-1)\Delta z = \frac{\eta q_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (31.18)$$

则两个表示式将相同。注意等式两边都与 Δz 成正比, 因为 η (它是单位面积的原子数)等于 $N\Delta z$, 这里 N 是板中单位体积的原子数。以 $N\Delta z$ 代替 η 并消去 Δz , 得到我们的主要结果, 即以物质原子性质以及光的频率表示的折射率表示式为

$$n = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31.19)$$

这个等式给出了我们想得到的折射率的“解释”。

§ 31-3 色 散

注意在上述过程中我们已经得到了某些很有意义的东西。因为我们不仅有了一个可由基本的原子的量算得的折射率值, 而且还弄清楚了折射率如何随光的频率 ω 而变化。这是我们不可能从“光在透明物质中传播较慢”这样简单的叙述中了解到的东西。当然, 我们仍有必要知道每单位体积中有多少原子和它们的自然频率 ω_0 是什么的问题。我们眼下还不知道这一些, 因为它们对每种不同物质是不同的, 而且现在还不能得到关于它们的一般理论。只有用量子力学才能得到系统阐述各种物质性质——它们的自然频率, 等等——的一般理论。由于不同物质具有不同的性质和折射率, 所以我们怎么也不能期望得到一个可应用于所有物质的折射率的一般公式。

然而, 我们将就各种可能情况对上面得到的公式进行讨论。首先, 对大多数普通气体(例如空气、大多数无色气体、氢气、氯气, 等等), 其电子振荡的自然频率对应于紫外光。这些频率高于可见光的频率, 即是说, ω_0 远大于可见光的 ω , 作为一级近似, 与 ω_0^2 比较我们可忽略 ω^2 。这样我们发现折射率近似为常数。所以对气体, 折射率近似为常数。这一点对大多数其他透明物质(像玻璃)也成立。但是如果稍稍仔细地看一下我们的表示式, 就会注意到当 ω 增大时, 从分母中要减掉得多一些, 折射率也就增大。故折射率 n 缓慢地随频率而增大。对蓝光的折射率比对红光的大。这就是棱镜使蓝光弯折得比红光厉害的道理。

折射率取决于频率的现象称为色散现象, 因为它是光被棱镜“分散”成光谱这一事实的基础。折射率表示为频率函数的公式称为色散方程。所以我们已得到了色散方程(最近几年发现“色散方程”在基本粒子理论中有新的用途)。

色散方程还提示了其他有趣的效应。如果我们有一个位于可见区的自然频率, 或者如果我们在紫外区测量像玻璃那样的材料的折射率(在此区 ω 接近 ω_0), 我们看到在频率十分接近自然频率时, 折射率会变得非常大, 因为分母会趋向零。其次, 假定 ω 比 ω_0 大。例如当我们取玻璃那样的材料, 并在其上照以 X 射线时, 就会发生这种情况。实际上, 因为有许多对可见光不透明的材料, 比如像石墨, 对 X 射线是透明的, 所以我们也可以讲碳对 X 射线的折射率。碳原子的所有自然频率都将比我们在 X 射线中所用的频率低得多, 因为 X 射线具有很高的频率。如果令 ω_0 等于零, 则折射率就是色散方程给出的值(与 ω^2 比较我们忽略 ω_0^2)。

如果我们向自由电子气上发射无线电波(或光), 也会发生类似的情形。在大气层的上部, 来自太阳的紫外线将原子中的电子释放出来, 使之成为自由电子。对自由电子来说, $\omega_0 = 0$ (没有弹性恢复力)。在我们的色散公式中, 令 $\omega_0 = 0$ 就得出同温层中无线电波的折射率的正确公式, 这时 N 代表同温层中自由电子密度(单位体积中的自由电子数)。但是我

们再来看一看色散公式,如果我们向物体上发射 X 射线,或向自由电子上发射无线电波(或任何电波), $(\omega_0^2 - \omega^2)$ 项就变成为负的,于是得到 n 小于 1 的结果。这意味着物质中波的有效速度比 c 还快! 这会是正确的吗?

这是正确的。尽管人们说传送信号的速度不可能比光速还快,不过在特定频率下,物质的折射率可以大于 1 也可以小于 1 这一点是真的。这仅仅意味着散射光产生的相移可以是正的也可以是负的。然而可以证明你能用来传送信号的速率并不取决于一个频率上的折射率,而是取决于许多频率上的折射率是多少。折射率告诉我们的只是波的节(或峰)传播的速率。波的节本身并不是一个信号。一个完善的波,没有任何种类的调制,也就是说,是一个稳定的振动,在这样的波中,你不能确切说出它何时“开始”,所以你不能用它作计时信号。为了传送信号你必须多少改变一下这个波,或在其上造成一凹口,或使它稍阔些或稍狭些。这意味着你必须在波中有一个以上的频率,而信号传播的速率可以证明并不只是取决于折射率,而是取决于折射率随频率变化的情况。对这个问题的讨论我们也必须推迟(至第 48 章)。那时我们将给你们计算信号通过这样一片玻璃的实际速率,你们将看到此速率并不比光速快,尽管作为数学点的波节确实比光速传播得快。

稍微提示一下上述情况是如何发生的,你会注意到真正的困难与电荷的响应跟场相反,即符号反过来这一事实有关。这样,在我们的 x 表示式[等式(31.16)]中电荷的位移在与驱动场相反的方向上,因为 $(\omega_0^2 - \omega^2)$ 对小的 ω_0 来说是负的。公式说明当电场沿一个方向拉时,电荷却沿相反方向运动。

电荷怎么会沿相反方向运动呢? 当场刚加上时,它肯定不是沿相反方向起动的。当运动刚开始时有一暂态过程,过了一会儿此过程就稳定下来,只是在这以后电荷振动的相位才与策动场相反。而就在这时透射场的相位才显得比源的波超前。当我们说“相速度”或节的速度比 c 大时,所指的就是这个相位超前。在图 31-4 中我们就波突然起动(以造成一个信号)时会是什么样子提供了一个大致概貌。你从图上将看到,对于相位最终超前的波,信号(即波的起始)并没有提前到达。

现在我们再来看一下色散方程。我们应注意到上面对折射率的分析所得出的结果比你在自然界实际发现的要简单一些。为了使它完全精确,必须稍加改进。首先,应预期到我们的原子振子模型应具有一定的阻尼力(否则一旦开始振动就会永远振动下去,而我们并不希望发生这种情形)。以前我们曾求出(式 23.8)阻尼振子的运动,其结果是式(31.16)中[因而式(31.19)中]的分母由 $(\omega_0^2 - \omega^2)$ 变为 $(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$, 其中 γ 是阻尼系数。

我们所需要的第二个修正,要考虑到对一特定种类的原子有几个共振频率这一事实。只要想象有几种不同种类的振子,但每个振子独立地起作用,就很容易改写我们的色散方程,只要把所有振子的贡献简单地加起来就行了。假设单位体积中有 N_k 个自然频率是 ω_k 、阻尼系数是 γ_k 的电子。这样我们的色散方程就成为

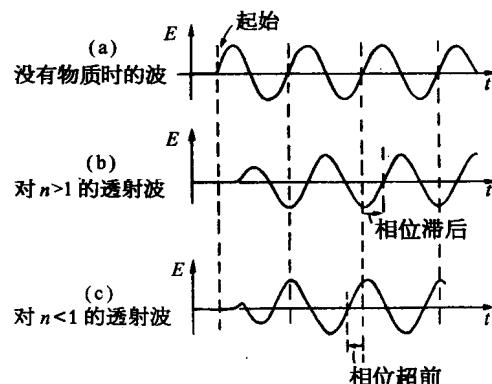


图 31-4 波“信号”

$$n = 1 + \frac{q_e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}. \quad (31.20)$$

我们终于有了一个描写在许多物质中观察到的折射率的完整表达式*。以此公式描写的折射率随频率的变化大致如图 31-5 中曲线所示。

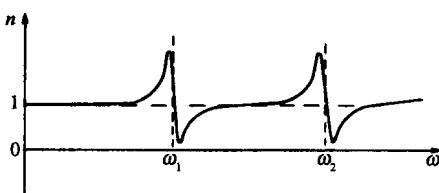


图 31-5 折射率与频率的关系

你将注意到,只要 ω 不太接近于一种共振频率,曲线的斜率总是正的。这种正的斜率称为“正常”色散(因为它显然是最通常发生的情况)。但当十分接近共振频率时,有一小段的 ω 其斜率是负的。常把这种负的斜率称为“反常”(意即不正常)色散,因为当它首次(远在人们连电子这样的东西也还不知道的时候以前)被观察到时,似乎是不平常的。从我们的观点看,两种斜率都十分“正常”!

§ 31-4 吸 收

也许你已经注意到,在我们所得到的色散方程的最后形式[式(31.20)]中,出现一点奇怪的东西。由于考虑到阻尼而加进量 $i\gamma$,折射率现在变成了复数! 这意味着什么? 求出 n 的实部与虚部后,可把 n 写为

$$n = n' - i n'', \quad (31.21)$$

其中 n' 和 n'' 是实数(我们在 $i n''$ 前用负号,因为这样 n'' 结果将是正数,你可以自己证明一下)。

回到式(31.6)(它是通过一块折射率为 n 的材料后的波的方程),我们就能明白这样一个复数折射率所包含的意义。如果把我们的复折射率 n 代入此方程,并作一些整理,就得到

$$E_{\text{板后}} = \underbrace{e^{-\omega n'' \Delta z / c}}_{A} \underbrace{e^{-i\omega(n'-1)\Delta z / c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{B}. \quad (31.22)$$

最后一个因子,在式(31.22)中记为 B 的,正是我们以前所得到的形式,它还是描写一个波,其相位在通过物质后推迟了角度 $\omega(n'-1)\Delta z / c$ 。第一项(A)是新的,并且是一个具有实指数的指数函数,因为有两个 i 消去了。加上指数是负的,故此因子为小于 1 的实数。它描写场的幅度的减少,而且,正如我们所预料的, Δz 越大减少得越多。当波通过物质时,被减弱了。物质“吸收”了一部分波。波从另一边出来时能量减少了。我们不应对此感到惊奇,因为我们为振子所加进的阻尼确实是一种摩擦力,它必定引起能量的损失。我们看到复折射率的虚部 n'' 代表波的吸收(或“衰减”)。实际上,有时把 n'' 称为“吸收率”。

还可指出,折射率 n 的虚部与图 31-3 中的箭头 E_a 朝原点弯折对应。于是透射场为什么会减弱的道理就清楚了。

* 虽然在量子力学中式(31.20)仍然有效,但对它的解释有些不同。在量子力学中,即使是只有一个电子的原子,像氢,也具有几个共振频率。因而 N_k 并非真的是具有频率 ω_k 的电子数,而要代之以 $N f_k$,其中 N 是单位体积的原子数,而 f_k (称为振子强度)是表示原子呈现某共振频率 ω_k 的强度的一个因子。

通常,例如在玻璃中,光的吸收是很少的。这可从等式(31.20)预期到,因为分母的虚部 $i\gamma_k\omega$ 远小于 $(\omega_k^2 - \omega^2)$ 项。但若光频 ω 十分接近 ω_k , 则共振项 $(\omega_k^2 - \omega^2)$ 与 $i\gamma_k\omega$ 比较变得很小, 折射率几乎完全变为虚部。光的吸收变为占优势的效应。正是这一效应产生了接收到的太阳光谱中的暗线。来自太阳表面的光通过太阳的大气(如同地球的大气一样), 而光就在太阳大气中原子的共振频率处被强烈吸收。

对太阳光中这种光谱线的观察,使我们了解到太阳大气原子的共振频率,从而能说出其化学成分。同类型的观察告诉我们关于星体中物质的成分。从这样的测量中我们知道,太阳和星体中的化学元素与我们在地球上所发现的相同。

§ 31-5 电波所携带的能量

我们已经看到折射率的虚部意味着吸收。我们现在利用这方面的知识去找出光波携带了多少能量。早先我们曾论证光携带的能量正比于 $\overline{E^2}$, 即正比于波中电场平方的时间平均值。由于吸收引起的 E 的减小, 应当意味着能量的损失, 这些损失的能量会参与电子的某种摩擦, 可以猜想, 它们最终会变为物质中的热。

如果我们考虑到达图 31-1 的板上单位面积中(比如说一平方厘米)的光,则可写出下列能量方程(若假定能量守恒,这是可以的)

$$\text{每秒钟流入能量} = \text{每秒钟流出能量} + \text{每秒钟所做的功.} \quad (31.23)$$

第一项可写为 $\alpha \overline{E_s^2}$, 其中 α 为现在尚不知道的比例常数, 它将 E^2 的平均值与所携带能量联系起来。第二项必须包括来自物质中辐射原子的部分, 故我们应当写为 $\alpha (\overline{E_s + E_a})^2$, 或(将平方展开) $\alpha (\overline{E_s^2} + 2 \overline{E_s E_a} + \overline{E_a^2})$ 。

我们所有的计算都是对折射率与 1 相差不大的薄层材料作出的, 所以 E_a 总是比 E_s 小得多(仅为使计算容易一些)。为了与我们所作出的近似保持一致, 我们应略去 $\overline{E_a^2}$, 因为它比 $\overline{E_s E_a}$ 小得多。你会说:“那么你也应略去 $\overline{E_s E_a}$, 因为它比 $\overline{E_s^2}$ 小得多。”诚然, $\overline{E_s E_a}$ 比 $\overline{E_s^2}$ 小得多, 但我们必须保留 $\overline{E_s E_a}$, 否则我们的近似就成为适用于完全略去物质存在的一种近似了! 核对我们的计算是否前后一致的一种方法是, 注意我们总是保留正比于 $N\Delta z$, 即物质中原子单位密度的项, 而略去正比于 $(N\Delta z)^2$ 或 $N\Delta z$ 的任何更高次的项。我们的近似就是所谓的“低密度近似”。

按照同样的理由, 我们不妨注意我们的能量方程已忽略了反射波中的能量。但这是可以的, 因为既然反射波的幅度正比于 $N\Delta z$, 此项能量也正比于 $(N\Delta z)^2$ 。

对于方程式(31.23)中的最后一项, 我们要计算进入的波在电子上做功的速率。我们知道功是力乘距离, 故做功的速率(亦称功率)是力乘速度。它实际上是 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$, 但当速度和力像这里一样沿同一方向时, 我们不必为点乘问题操心(除了可能有一个负号外)。所以对每个原子, 我们取 $\overline{q_e E_s v}$ 作为做功的平均速率。既然单位面积中有 $N\Delta z$ 个原子, 方程式(31.23)中最后一项就应是 $N\Delta z q_e \overline{E_s v}$ 。我们的能量方程现在成为

$$\alpha \overline{E_s^2} = \alpha \overline{E_s^2} + 2\alpha \overline{E_s E_a} + N\Delta z q_e \overline{E_s v}. \quad (31.24)$$

消去 $\overline{E_s^2}$ 项后, 有

$$2\alpha \overline{E_s E_a} = -N\Delta z q_e \overline{E_s v}. \quad (31.25)$$

现在我们回到式(30.19), 它告诉我们对大的 z 有

$$E_a = -\frac{N\Delta z q_e}{2\epsilon_0 c} v \quad \left(\text{推迟 } \frac{z}{c} \right). \quad (31.26)$$

(注意 $\eta = N\Delta z$)。把式(31.26)代入式(31.25)左边, 得到

$$-2\alpha \frac{N\Delta z q_e}{2\epsilon_0 c} \overline{E_s (\text{在 } z \text{ 处}) \cdot v (\text{推迟 } z/c)}.$$

但 E_s (在 z 处)就是 E_s (在原子处)推迟 z/c 的值。既然平均值与时间无关, 那么此式中推迟了 z/c 的值与 $\overline{E_s (\text{在原子处}) \cdot v}$ [即出现在式(31.25)右边的同一平均值]就是同样的。于是只要

$$\frac{\alpha}{\epsilon_0 c} = 1 \quad \text{或} \quad \alpha = \epsilon_0 c, \quad (31.27)$$

两端就相等。我们已发现若能量守恒, 则电波在单位面积和单位时间中所携带的能量(或我们所谓的强度)必然由 $\epsilon_0 c \overline{E^2}$ 给出。如果称强度为 \bar{S} , 则有

$$\bar{S} = \begin{cases} \text{强 度} \\ \text{或} \\ \text{能量 / 面积 / 时间} \end{cases} = \epsilon_0 c \overline{E^2}, \quad (31.28)$$

式中横线的意思是时间平均值。我们从折射率理论中得到了一个很好的额外结果!

§ 31-6 屏的衍射

现在是着手处理一件稍为有些不同的事情的好时机, 它可以用本章所叙述的方法来进行。在上一章中我们说过, 当你有一块不透光的屏, 而光可以通过一些小孔时, 强度分布——衍射花样——可以用想象这些小孔被均匀地分布于孔上的源(振子)所代替这一方法来得到。换句话说, 衍射波如同孔是新的源一样。我们必须解释其原因, 因为孔显然正是没有源, 即没有加速电荷的地方。

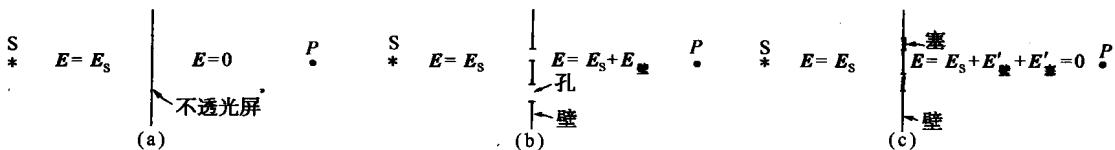


图 31-6 屏的衍射

我们先问:“何谓不透光屏?”设在源 S 和处于 P 点的观察者之间有一个完全不透光的屏, 如图 31-6(a)所示。如果屏是“不透光的”, P 处就没有场。为什么那里没有场? 根据基本原理, 我们应得 P 处的场等于推迟的源场 E_s , 加上来自周围所有其他电荷的场。但是, 正如我们在上面看到的, 屏上的电荷将被场 E_s 驱动, 这些运动产生新的场, 如果屏是不透光

的，新的场在屏的后面必须恰好抵消场 E_s 。你说：“恰好抵消，真令人惊奇！假如不是恰好抵消呢！”如果它不是恰好抵消（记住此不透光屏具有一定厚度），向屏的后面部分进行的场就不会恰好是零。既然不是零，它就会使屏材料中的其他一些电荷开始运动，这就造成稍为广大一些的场，试图把总场抵消掉。所以如果屏足够厚，就没有残留的场，因为有足够的机会使场最终稳定下来。根据上面的公式，我们可以说屏具有大而虚的折射率，所以当波通过时被指数地吸收。你们无疑知道，一片足够薄的最不透光的物质，即使是金，也是透明的。

现在我们来看一看，对于上面具有小孔的不透光屏，如图31-6(b)那样，会发生什么情况。在P处我们将得到怎样的场？P处的场可以表示为两部分之和——由源S引起的场加上由壁（即壁上电荷的运动）引起的场。我们可能想象壁上电荷的运动很复杂，但我们可以用相当简单的方法找出它们产生的是什么场。

假定我们取一个同样的屏，但将孔塞住，如图中(c)部分所示。想象塞子由与壁完全相同的材料做成。注意，塞子就放在(b)中的孔所在处。现在我们来计算P处的场。在(c)中P处的场无疑是零，但它同样等于来自源的场，加上由壁和塞子中的所有原子运动引起的场。我们可以写出下列等式

$$\text{情形(b)} \quad E_{P\text{处}} = E_s + E_{\text{壁}},$$

$$\text{情形(c)} \quad E'_{P\text{处}} = 0 = E_s + E'_{\text{壁}} + E'_{\text{塞}},$$

其中撇代表有塞子时的情况，但在两种情形中 E_s 当然是同样的。若把两式相减，得

$$E_{P\text{处}} = (E_{\text{壁}} - E'_{\text{壁}}) - E'_{\text{塞}}.$$

现在假设孔不太小（比如说直径为好几个波长），我们不会预期塞子的存在会改变到达壁上的场，除了可能稍微改变孔边缘附近的场以外。略去这一微小影响，我们可以取 $E_{\text{壁}} = E'_{\text{壁}}$ ，从而得

$$E_{P\text{处}} = -E'_{\text{塞}}.$$

我们得到了这样的结果，即当屏上有孔时[情形(b)]，P处的场与处于孔所在处的那一部分完全不透光屏所产生的场相同（除符号外）（符号并不太重要，因为我们一般对强度感兴趣，而强度与场的平方成正比）！这似乎是一个令人惊异的颠三倒四的论证。但它不仅正确（对不太小的孔近似正确），而且有用，并且是对普通的衍射理论的证明。

任何特定情况下的场 $E'_{\text{塞}}$ 都可这样来计算，即要记住屏上任何一处电荷的运动恰好抵消掉屏背后的场 E_s 。一旦知道了这些运动，只要把塞子上电荷在P处引起的辐射场加起来就行了。

我们再说一下，这个衍射理论只是近似的，而且只有当孔不太小时才有效。对于太小的孔， $E'_{\text{塞}}$ 项将变得很小，于是 $E'_{\text{塞}}$ 与 $E_{\text{壁}}$ 间的差（我们在上面把它看作零）会变得与小的 $E'_{\text{塞}}$ 项可以比拟或大于它，从而我们的近似将不再有效。

第 32 章 辐射阻尼、光的散射

§ 32-1 辐 射 电 阻

在上一章中我们知道,当一个系统振荡时,能量就被带走,我们还导出了被振荡系统所辐射掉的能量的表示式。如果知道了电场,那么电场平方的平均值乘以 $\epsilon_0 c$ 就是每秒钟通过垂直于辐射方向的平面每平方米的能量值

$$S = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle. \quad (32.1)$$

任何振荡电荷都辐射能量;例如,一受激天线就辐射能量。如果系统辐射能量,则为了说明能量守恒,我们必须认为沿着通往天线的导线有功率传输着。这就是说,对驱动电路来说,天线的作用像一个电阻或一个会“损失”能量的场所(能量并非真的损失掉,其实是辐射出去,但就电路来说,能量是损失了)。在一个普通电阻中,“损失”的能量转变成为热;在这里,所“损失”的能量跑到空间去了。但从电路理论的观点看,如果不考虑能量跑到哪里去了,则在电路中的净效果是同样的——能量从该电路“损失”掉了。于是对振荡器来说,天线好像有一个电阻,尽管它也许是由十分良好的铜制成的。事实上,如果天线制造得很好,它将几乎像个纯电阻,很少有电感或电容,因为我们希望从天线辐射出尽可能多的能量。这种天线所显现的电阻称为辐射电阻。

如果流向天线的电流为 I ,则传输给天线的平均功率是电流平方的平均值乘以电阻。天线所辐射的功率当然是正比于天线中电流的平方的,因为所有的场都正比于电流,而被释放的能量正比于场的平方。辐射功率与 $\langle I^2 \rangle$ 之间的比例系数就是辐射电阻。

一个令人感兴趣的问题是,这个辐射电阻是由什么引起的?我们来举一个简单的例子:设天线中有电流被激励着上、下流动。我们发现,如果天线要辐射能量的话,必须输入功。如果取一带电体并使之上下运动,它就辐射能量;如果它不带电,就不会辐射能量。从能量守恒算出能量损失是一回事,而回答反抗哪一个力做功的问题则是另一回事。那是一个有趣而又十分困难的问题,它对于电子来说从来没有得到过完全而满意的解答,虽然对天线来说,它已解决了。情况是这样的:在天线中,由一部分天线中的运动电荷产生的场对另一部分天线中的运动电荷有作用力。我们能够算出这些力,并求出它们做了多少功,从而得到关于辐射电阻的正确规则。当我们说“我们能够算出——”时并不完全对——我们不能,因为我们尚未学过近距离处电的规律;我们只知道远距离处的电场是什么。我们见过公式(28.3),但此刻它对我们来说是太复杂了,不能用来计算波带区内的场。当然,因为能量守恒是成立的,我们完全可以毋须知道近距离处的场而算出结果(事实上,利用这一论证反推,最后证明只要知道远距离处的场,运用能量守恒定律,可以求出近距离处力的公式,但我们这里不去讨论这个问题)。

在单个电子的情况下,问题是如果只有一个电荷,力究竟作用在哪里?在老的经典理论中曾假定电荷是一个小球,电荷的某一部分作用于另一部分。由于此作用穿过很小电子时的延迟效应,力并不恰好与运动同相位。这就是说,如果电子静止不动,我们得到“作用力等于反作用力”。因而各个内力相等,没有净力。但是如果电子在加速运动,则由于穿过它的时间的延迟,从后面作用在前面的力就不恰好与从前面作用在后面的力相同,因为效应上有延迟的缘故。这个计时上的延迟造成了不平衡,因而,作为净效应,电子被它自己的鞋带拉住了!这个由加速度引起电阻(即运动电荷的辐射电阻)的模型遇到了很多困难,因为我们现在对电子的观点是,它不是一个“小球”;这个问题根本没有解决。虽然如此,我们仍能正确地算出净辐射阻力应是多少,也就是当我们加速一个电荷时会有多少损耗,尽管不直接知道力如何作用的机理。

§ 32-2 能量辐射率

现在我们来计算加速电荷所辐射的总能量。为了使讨论不失一般性,假设电荷按非相对论性的任何方式作加速运动。比如说,当电荷加速度为竖直时,我们知道它产生的电场是电荷乘以推迟加速度的投影除以距离。因而可以知道任何一点的电场,从而知道电场的平方以及每秒钟通过单位面积的能量 $\epsilon_0 c E^2$ 。

量 $\epsilon_0 c$ 经常出现在与无线电波传播有关的表示式中。它的倒数称为真空阻抗,这是一个很容易记的数:其值为 $1/\epsilon_0 c = 377 \Omega$ 。所以以瓦特为单位的每平方米的功率等于电场平方的平均值除以 377。

应用电场表示式(29.1),我们发现

$$S = \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \quad (32.2)$$

就是在 θ 方向每平方米所辐射的功率。我们注意到它与距离平方成反比,如前面所说的那样。现在假如要求出向所有方向辐射的总能量,则必须将式(32.2)对所有方向积分。首先乘以面积,以求出在小角 $d\theta$ 内流过的功率(图 32-1)。为此要知道球面被 $d\theta$ 所截部分的面积。考虑的方法是这样的:若球半径为 r ,则环状球截形的宽度为 $rd\theta$,周长为 $2\pi r \sin \theta$,因为 $r \sin \theta$ 为该圆周的半径。故这一小片球面的面积为 $2\pi r \sin \theta$ 乘以 $rd\theta$

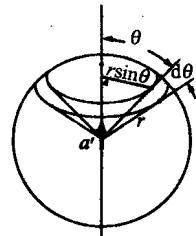


图 32-1 球截形的侧
面积为 $2\pi r \sin \theta \cdot rd\theta$

$$dA = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta. \quad (32.3)$$

以包含在小角 $d\theta$ 内的面积(以平方米为单位)乘能流[即式(32.2),每平方米的功率],即得到此方向上在 θ 与 $\theta + d\theta$ 之间所释放的能量值;然后将它从 0° 到 180° 对 θ 的所有角度积分

$$P = \int S dA = \frac{q^2 a'^2}{8\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta. \quad (32.4)$$

把 $\sin^3 \theta$ 写为 $(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta$, 不难证明 $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ 。利用这一点,最后得到

$$P = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (32.5)$$

这个表示式有几点应加注意。首先,因为矢量 a' 有确定的方向,式(32.5)中的 a'^2 应为矢量 a' 的平方,即 $a' \cdot a'$ ——矢量长度的平方。其次,能流(32.2)是用推迟加速度计算的;也就是说,用较早时刻的加速度计算,该时刻所辐射的能量现正通过球面。我们也许会说此能量事实上是在该较早时刻释放的。但这不完全正确;这只是近似的概念。能量释放的确切时间不可能精确定义。我们所能真正精确计算的只是在像一个振动或诸如此类的那样一种完整运动中所释放的能量,在那种运动里加速度最后为零。于是我们所得的是,每周总能流为加速度平方在一个整周中的平均值。这正是在式(32.5)中所应表示出来的。或者说,如果运动的加速度在开始与末了时都为零,则流出的总能量为式(32.5)对时间的积分。

当我们有一个振动系统时,为了说明公式(32.5)的结果,我们来看一下如果电荷的位移 x 在作振动,因而使加速度 a 为 $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$ 时,情况将怎么样。加速度平方在一周期中的平均值(记住,当我们对一个写为复数形式的量平方时,必须非常小心——它实在是余弦,而 $\cos^2 \omega t$ 的平均值是 $1/2$)从而为

$$\langle a'^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega^4 x_0^2,$$

这样

$$P = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (32.6)$$

我们现在所讨论的一些公式是比较高深的,或多或少是近代的,它们最初出现于 20 世纪初,而且是很有名的。由于它们的历史价值,能在老一些的书中读到它们对我们来说是很重要的。实际上,老一些的书中还使用一种与我们现在的 mks 制不同的单位制。但所有这些复杂性在最后与电子有关的公式中可用下述规则澄清:量 $q_e^2/(4\pi\epsilon_0)$ (其中 q_e 是电子电荷,以库仑为单位)在历史上被写为 e^2 。在 mks 制中很容易算出, e 在数值上等于 1.5188×10^{-14} , 因为我们知道 $q_e = 1.60206 \times 10^{-19}$, $1/(4\pi\epsilon_0) = 8.98748 \times 10^9$ 。因而我们将经常使用下列方便的缩写:

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (32.7)$$

如果在老的公式中用上述数值代替 e ,并把这些公式看作是用 mks 单位写的,就能得到正确的数值结果。例如,式(32.5)中老的形式是 $P = 2e^2 a^2 / (3c^3)$ 。再如,电子与质子在距离为 r 时的势能是 $q_e^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$ 或 e^2 / r ,其中 e 为 mks 制中的值,即 $e = 1.5188 \times 10^{-14}$ 。

§ 32-3 辐 射 阻 尼

振子损失一定能量的事实意味着,如果有一个电荷放在弹簧末端(或一个电子在原子中),其自然频率为 ω'_0 ,让它开始振动,然后放手,那么,即使它处在远离任何物体几百万里以外的真空中,它也不会永远振动下去。这里既没有通常意义上的油,也没有通常意义上的

电阻；也就是没有“黏滞性”。但它仍不会像我们也许曾经说过的那样“永远”振动下去，因为当它带电时，它在辐射能量，因而振动将慢慢停止。那么慢到怎样程度？由电磁效应，即由所谓振子的辐射电阻或辐射阻尼所引起的这种振子的 Q 值是多少？任何振动系统的 Q 是任一时刻振子所包含的总能量除以每弧度的能量损失

$$Q = \frac{W}{dW/d\phi},$$

或者（另一种写法），因为 $\frac{dW}{d\phi} = \frac{dW/dt}{d\phi/dt} = \frac{dW/dt}{\omega}$ ，故

$$Q = \frac{\omega W}{dW/dt}. \quad (32.8)$$

对给定的 Q ，此式告诉我们振子的能量是怎样衰减的，因为 $dW/dt = -\omega W/Q$ ，若 W_0 为起始 ($t = 0$ 时) 能量，则此式的解为 $W = W_0 e^{-\omega t/Q}$ 。

为了找出辐射子的 Q ，我们回到式(32.8)，并用式(32.6)作为 dW/dt 。

那么振子的能量 W 用什么？振子的动能是 $mv^2/2$ ，平均动能就是 $m\omega^2 x_0^2/4$ 。但我们记得振子的总能量中，平均讲一半是动能，一半是势能，故将上面的结果加倍，就得到振子的总能量

$$W = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2. \quad (32.9)$$

式中的频率用什么？就用自然频率 ω_0 ，因为实际上，它就是原子辐射的频率，而 m 就用电子质量 m_e 。这样，在作了必要的除法与消除后，公式变为

$$\frac{1}{Q} = \frac{4\pi e^2}{3\lambda m_e c^2}. \quad (32.10)$$

（为了更容易看清楚并迁就历史上的形式，我们用缩写 $q^2/4\pi\epsilon_0 = e^2$ 来写出此式，余下的因子 ω_0/c 已写为 $2\pi/\lambda$ ）。因为 Q 是无量纲的，组合量 $e^2/m_e c^2$ 必须仅仅是电子的电荷与质量的一种性质，即电子的固有特性，而且它必须是一个长度。我们给它取了一个名字，叫电子半径，因为被发明用来解释辐射电阻的，建立在电子的一部分对另一部分有力作用这一基础上的早期原子模型，都需要一个其线度一般为这一数量级的电子。但是，这一量现已不再表明我们相信电子确实具有这样一个半径。在数值上，此半径大小为

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (32.11)$$

现在我们来实际计算一个发光原子——比如说 Na 原子的 Q 。对 Na 原子，波长约为 6 000 Å，在可见光的黄色部分，这是一个典型波长。于是

$$Q = \frac{3\lambda}{4\pi r_0} \approx 5 \times 10^7, \quad (32.12)$$

故一个原子的 Q 为 10^8 数量级。这就是说，一个原子振子在其能量降为原来的 $1/e$ 以前，将振动 10^8 rad 或约 10^7 次。与 6 000 Å 对应的光的振动频率 ($\nu = c/\lambda$) 在 10^{15} Hz 的数量级，因此寿命，即辐射原子的能量衰减为原来的 $1/e$ 所花的时间，约为 10^{-8} s。在一般情况下，自由发光原子辐射时通常就需要这么长时间。这只要不受任何干扰的真空中的

原子有效。如果电子处在固体中,则它必定要撞击别的原子或电子,从而具有附加的电阻和不同的阻尼。

振子的阻力定律中的有效阻力项 γ 可以从关系 $1/Q = \gamma/\omega_0$ 中得到,我们记得 γ 的大小决定共振曲线的宽度(图 23-2)。这样,我们刚才计算的就是自由辐射原子的光谱线宽度!因为 $\lambda = 2\pi c/\omega$, 我们得到

$$\Delta\lambda = 2\pi c \frac{\Delta\omega}{\omega^2} = 2\pi c \frac{\gamma}{\omega_0^2} = \frac{2\pi c}{Q\omega_0} = \frac{\lambda}{Q} = \frac{4\pi r_0}{3} = 1.18 \times 10^{-14} \text{ m.} \quad (32.13)$$

§ 32-4 独立的辐射源

作为本章第二个题目——光的散射的准备,我们现在必须讨论一下在以前讨论中忽略的干涉现象的某种特征。这就是什么时候干涉不发生的问题。如果有两个源 S_1 和 S_2 , 振幅为 A_1 和 A_2 , 我们在某个方向上观察, 在该方向上两个信号到达时的相位是 ϕ_1 和 ϕ_2 (实际振动时间与延迟时间之和所产生的相位, 依观察位置而定), 则接收到的能量可由合成两个复矢量 A_1 和 A_2 得到, 一个与坐标轴成 ϕ_1 角, 另一个与坐标轴成 ϕ_2 角(如第 30 章中所做的那样)。我们得到合成能量正比于

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (32.14)$$

如果没有交叉项 $2A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$, 则在一给定方向上接收到的总能量将是分别由每个源所释放的能量的简单和 $A_1^2 + A_2^2$, 此即通常所预期的结果。这就是说, 两个源照射在某物体上, 光的合强度是两个光强度之和。另一方面, 如果安排得很好, 有交叉项存在, 它就不是这样的和, 因为还有一些干涉。如果在某些情况下, 此项并不重要, 则我们就说干涉表观上看来消失了。当然, 实质上干涉总是存在的, 只是我们不可能探测它而已。

我们来考虑几个例子。首先, 假定两个源相隔 7 000 000 000 个波长, 这是不可能的安排。于是在给定方向相位差具有非常确定的值, 这是无疑的。但是, 从另一方面, 只要我们沿一个方向移动一根头发丝的距离, 即移动几个波长(这根本谈不上什么距离; 我们的眼睛上有一个孔, 它已大到使我们在观察时已在比一个波长大得多的范围内取平均效应), 我们就改变了相对的相位, 余弦就变化很快。如果在一个很小的观察范围内取强度的平均值, 则余弦(它在此范围内一会儿正, 一会儿负)平均得零。

所以, 如果在相位随位置迅速变化的范围内取平均时, 我们将得不到干涉。

举另一个例子。假定两个源是两个独立的射电振子——不是由两条导线所馈的单个振子(这种振子将保证相位保持同步), 而是两个独立的源——并且它们没被精确地调谐在相同频率(若非实际上将两个振子连接起来, 要它们恰好处在同一频率是很困难的)。在这种情况下, 我们有了两个所谓独立的源。显然, 既然频率不恰好相等, 即使它们起始时同相位, 其中之一就开始稍稍超前于另一个, 一会儿它们就反相位, 然后超前更多, 一会儿它们又同相位。因而两个源的相位差随时间逐渐移动, 但是如果我们的观察很粗糙, 以致不能分辨这一小段时间, 而是在比它长得多的时间内取平均, 那么尽管强度具有像声音中所谓的“拍”那样的涨落, 但这些涨落太快, 使仪器不能跟随, 于是这一项又平均掉了。

换句话说, 在任何相移平均掉的情况下, 我们得不到干涉!

有许多书中说两个不同的光源决不会干涉。这不是物理学的表述，而仅是写书时实验技术灵敏度的表述。光源中所发生的情况是，一个原子先辐射，接着另一个原子辐射，等等，我们只看到原子辐射一列波的时间仅持续约 10^{-8} s； 10^{-8} s后，某个原子接下去辐射，接着另一个原子又辐射，等等。因而相位只能在约 10^{-8} s内保持不变。于是，如果我们在远比 10^{-8} s长的时间内取平均，就看不到来自两个不同源的干涉，因为比 10^{-8} s更长时，它们不能保持相位恒定。用光电池可以进行高速的探测，因而人们能够证明在 10^{-8} s内存在着随时间上、下变化的干涉。但大多数探测装置显然不能看到这样微小的时间间隔，因而看不到干涉。当然用具有十分之一秒平均时间的眼睛是无论如何也看不到两个不同的普通光源之间的干涉的。

最近已有可能制造一种光源，它使所有原子同时发光，从而克服了上述效应。具有这种作用的器件是一种很复杂的东西，必须用量子力学方法才能理解它。人们称它为激光，从激光可以产生一种光源，其干涉频率或相位保持恒定的时间远大于 10^{-8} s。它可以是 10^{-2} s， 0.1 s甚至 1 s的数量级，因而用普通光电池，人们就能够探测到两个不同的激光之间的拍频。人们很容易探测到两个激光源之间的拍的脉动。无疑不久将有人能演示这样的实验，把两个光源照射在墙上，它们的拍是这样慢，以致人们能够看见墙在明暗变化！

另一个干涉被平均掉的情况是，不是只有两个源，而是有许多个源。在这种情况下，要将 A_k^2 的表示式写成很多个复数振幅之和的平方，于是将得到每一项的平方的和，再加上每一对之间的交叉项，如果情况是使得后者平均掉，则将没有干涉效应。这种情况可以是这样，即各个源被置于杂乱无章的位置上，以致虽然 A_2 与 A_3 之间的相位差还是确定的，但它跟 A_1 与 A_2 等等之间的相位差很不同。因而我们将得到很多余弦项，有些为正，有些为负，加在一起平均掉了。

所以在许多情况下，我们看不到干涉效应，而只看到等于所有强度之和的合成的总强度。

§ 32-5 光的散射

上述讨论导致一种发生在空气中的效应，它是各原子的位置不规则所造成的结果。在讨论折射率时，我们曾看到入射光束使原子再辐射。入射光束的电场驱使电子上下运动，而电子由于有加速度而辐射。这些散射辐射合起来形成一个与入射光束同方向的光束，但相位略有不同，而这正是折射率的起源。

但对于在其他方向上的再辐射光的大小，我们将说些什么呢？通常，如果原子整齐地排列成有规则的花样，容易证明在其他方向得不到光，因为我们所叠加的是相位不断在变化的许多矢量，结果得零。但是如果原子杂乱地排列，则任一方向上的总强度为每个原子所散射的强度之和，正如我们刚才讨论过的。而且，气体中的原子实际上在运动，所以即使此刻两个原子的相对相位有一确定的值，但不久其相位会变得很不同，从而每个余弦项将平均掉。因此，要找出在给定方向上气体散射光的强度，只要研究一个原子散射的效应，再将其辐射强度乘以原子数就行。

以前，我们曾说这种性质的光的散射现象是天空呈现蓝色的起因。太阳光穿过空气，当我们朝太阳的一边——比如说与光束成 90° 方向上——观察时将看见蓝光；现在要计算的是，我们看见多少光以及它为什么是蓝色的。

如果在原子所在处,入射光束的电场 $E = E_0 e^{i\omega t}$, 我们知道原子中的电子将由于此电场 E 而作上、下振动(图 32-2)。由式(23.8),其振动幅度将是

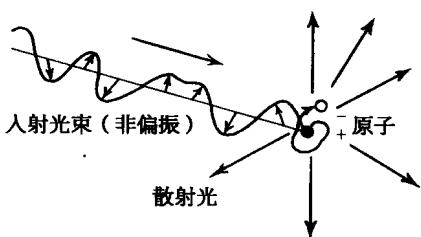


图 32-2 一束光射在原子上引起原子中的电荷(电子)运动。此运动电子接着又在各个方向上辐射光

$$\hat{x} = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}. \quad (32.15)$$

我们本来可以把阻尼以及原子表现为具有不同频率的几个振子的可能性也包括进去,并对各个频率求和,但为简单起见,我们只取一种振子,并忽略阻尼。于是对于外电场的响应(该式我们在计算折射率时已用过)就是

$$\hat{x} = \frac{q_e \hat{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (32.16)$$

利用式(32.2)及与上述 \hat{x} 相对应的加速度,我们现在可以很容易地计算出在各个方向上发射的光的强度。

然而为了节省时间,我们不这样做,而是径直计算在所有方向散射的光的总量。单个原子每秒在所有方向散射的光能量的总量显然由式(32.6)给出。所以,把各部分写在一起并加以整理,得到在所有方向上辐射的总散射功率为

$$\begin{aligned} P &= \left[\left(\frac{q_e^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \right) \frac{q_e^2 E_0^2}{m_e^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \right) \left(\frac{8\pi}{3} \right) \left(\frac{q_e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 c^4} \right) \left[\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \right) \left(\frac{8\pi r_0^2}{3} \right) \left[\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (32.17)$$

我们将结果写成上列形式,因为这样容易记:首先,散射的总能量正比于入射场的平方。这意味着什么? 显然,入射场的平方正比于每秒进入的能量。事实上,每平方米每秒入射的能量是 $\epsilon_0 c$ 乘以电场平方的平均值 $\langle E^2 \rangle$,而若 E_0 是 E 的最大值,则 $\langle E^2 \rangle = E_0^2/2$, 换句话说,散射的总能量正比于每平方米进入的能量;照射在天空上的太阳光越亮,天空看起来也将越亮。

其次,入射光散射的比例是多少? 试在光束中想象一个具有一定面积(比如说 σ)的“靶”(并非实际的物质的靶,因为这会引起光的衍射等等;我们的意思是指在空间画出的一块想象的面积)。在给定条件下,通过此表面 σ 的能量总量与入射强度和 σ 都成正比,而有

$$P = \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \right) \sigma. \quad (32.18)$$

现在我们来建立一种概念:设原子散射的总强度是落在某一几何面积上的全部强度,于是只要求出该面积,就给出了答案。这样,该答案与入射强度无关;它给出了散射能量与每平方米入射能量的比率。换句话说,比率

$$\frac{\text{每秒散射的总能量}}{\text{每平方米每秒的入射能量}}$$

是面积。此面积的意义是,如果射到该面积上的所有能量被射向所有方向,则它就是被原子

散射的能量的值。

这个面积称为散射截面；散射截面的概念是常用的，只要某一现象与光束的强度成正比。在这种情况下，人们常常这样来描述现象的强度，即说明为了收集那么多光束，有效面积必须是多少。这无论如何不是意味着此振子实际上具有这样一个面积。如果除了一个上、下振动的自由电子外再不存在别的什么，在物理上就不会有与之直接相联系的面积。它仅仅是表述某种类型问题的答案的一种方法；它告诉我们为了说明有这么一些能量散射掉，入射光束所碰到的面积必须是多少。这样，对我们的情形，有

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (32.19)$$

(下标 s 是指“散射”)。

我们来看一些例子。首先，讨论固有频率 ω_0 很低的情形，或讨论完全无束缚的电子，对它来说 $\omega_0 = 0$ ，则频率 ω 消去了，截面是一常数。此低频极限或自由电子截面，称为汤姆孙散射截面。它是每边线度约为 10^{-15} m 上下的面积，即 10^{-30} m²，那是相当小的！

其次，我们讨论光在空气中的情况。我们记得空气振子的固有频率比我们所用的光的频率高得多。这意味着，作为一级近似，我们可以略去分母中的 ω^2 ，于是得到散射正比于频率的四次方。这就是说，若光的频率提高两倍，其散射强度就大16倍，这个差别是十分大的。这意味着蓝光(它具有比光谱红端约高两倍的频率)散射得比红光多得多。因而当我们仰望天空时，它呈现出我们经常所见的那种蔚蓝色！

对于上述结果尚需说明几点。一个有趣的问题是，为什么我们看得见云？云是从哪里来的？人人都知道它是水蒸气凝聚而成的。但是，水蒸气显然在凝聚以前就已存在于大气中了，那么我们为什么看不见它呢？只在凝聚以后，它才成为完全可见的。它本来不在那里，现在却在那里了。因而云从哪里来的奥秘其实并不是像“水是从哪里来的，爸爸？”这样的孩子提问式的奥秘那样，而是须加解释的。

我们刚才指出每个原子都散射光，当然水蒸气也散射光，奥秘在于为什么当水凝聚成云时，它散射这么大量的光？

试考虑如果不是只有一个原子，而是有一个原子团，比如说有两个原子，彼此相对光的波长来说靠得很近，这时将发生什么。别忘了，原子直径只有 1 Å 左右，而光的波长约 5 000 Å，所以当它们形成块，即当几个原子在一起时，相对波长来说它们可以是靠得很近。那么当电场作用在上面时，两个原子将一起运动。从而散射的电场将是两个同相位的电场之和，即单个原子所具有的幅度的两倍，于是散射的能量是单个原子所散射的四倍，而不是两倍！所以原子团比它们成单个原子形状时散射或辐射更多的能量。我们关于相位彼此独立的论证是建立在任意两个原子间具有真正的、巨大的相位差的假设基础上的，这只有当它们相隔几个波长而且杂乱排列或在运动时才是对的。如果原子彼此紧靠着，它们必定同相位地散射光，因而它们具有相干的干涉效应，使散射增加。

如果在块团中有 N 个原子，它相当于一个微小水滴，则每个原子将按与上面大致相同的方式受电场驱动(一个原子对另一个原子的影响是不重要的，因为反正对于这个问题只要有一个概念就行了)，而从每个原子上散射的幅度是相同的，所以散射的总场增大了 N 倍。于是散射光的强度增大了平方倍，即 N^2 倍。如果原子散开在空间，我们预期会得到 N 倍，

而现在却得到了 N^2 倍！这就是说， N 个分子组成的水的块团中，每个分子的散射都比单个原子的散射强 N 倍。所以当水凝结时，散射增大了。那么，它会无限制地增大下去吗？不会！什么时候这种分析开始失效？我们最多可以聚集多少原子而仍可应用这个论证？答案是：当水滴大到从一端到另一端达一个波长左右时，原子辐射就不再都同相位了，因为这时原子相隔太远。所以当我们不断增大水滴的线度时，得到越来越大的散射，直到水滴的线度达到约一个波长，在这以后散射的增大就完全不像水滴增大那么快了。而且，蓝色消失了，因为对长波长来说，在达到这一极限以前的水滴可以比短波长的更大一些。虽然对每个原子来说，短波散射得比长波多，但当所有的水滴都比波长大时，光谱红端增长得比蓝端更多一些，所以颜色从蓝色向红色移动。

现在我们可以做一个实验来演示这一点。我们可以使粒子在开始时很小，然后线度逐渐增大。我们使用硫代硫酸钠（海波）的硫酸溶液，它能够沉淀很小的硫粒子。当硫沉淀时，开始粒子很小，散射光略带蓝色。当沉淀增多时，散射光增强，当粒子变大时遂成白色。此外，直接穿过溶液的光将缺少蓝色。这正是落日为什么呈红色的原因，当然，因为光穿过空气，到达眼睛时已有许多蓝光被散射掉，所以呈火红色。

最后，还有一个关于偏振的重要特性，它其实属于下一章的内容，但因很有趣，不妨现在就提出来。这就是散射光的电场趋向于沿一个特殊方向振动的性质。

入射光的电场沿某一方向振动，因而受激振子沿着与此相同的方向振动，如果我们位于与入射光束垂直的位置上，就会看到偏振光，即其电场仅沿一个方向振动的光。一般地说，原子可以沿与入射光束垂直的任一方向振动，但是如果它们受到激发而朝着我们或背离我们振动，我们就看不见它们所发的光。所以如果入射光的电场沿任一方向振动或变化（这种光称为非偏振光），则与入射光束成 90° 方向出来的散射光仅沿一个方向振动！（见图 32-3）

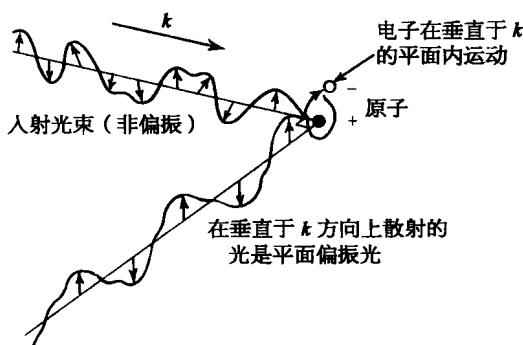


图 32-3 说明垂直于入射光束方向上散射的光的偏振化起因的图

有一种称为偏振片的东西，它具有这样的性质：当光通过时，只有沿一特殊轴的电场成分可以通过。我们可以用它来检验偏振化，从而果真发现由海波溶液所散射的光是强烈偏振的。

第 33 章 偏 振

§ 33-1 光的电矢量

本章将讨论这样一些现象，这些现象与描写光的电场是矢量这一事实有关。前几章中，我们除了注意到电矢量位于与传播方向垂直的平面内以外，并没有考虑到电场振动的方向。在那里，电矢量在该平面内的特定方向对我们关系不大。现在我们要讨论的则是以电场振动的特殊方向性为其主要特征的一些现象。

对理想的单色光，电场必须以确定的频率振动，但因 x 分量与 y 分量可按确定的频率相互独立地振动，所以应首先讨论两个相互成直角的独立振动的叠加产生的合成效应。以相同频率振动的 x 分量和 y 分量合成后会得到怎样的电场？如果在 x 振动上加上一定大小的同相位的 y 振动，结果就得到一个在 xy 平面内沿新方向的直线振动。图 33-1 表示不同振幅的 x 振动与 y 振动的叠加结果。但图 33-1 所示的合成结果并不包括各种可能情形；在图中所示的所有情况中，我们都假定 x 振动和 y 振动是同相的，但不一定要那样。 x 振动与 y 振动可以是不同相的。

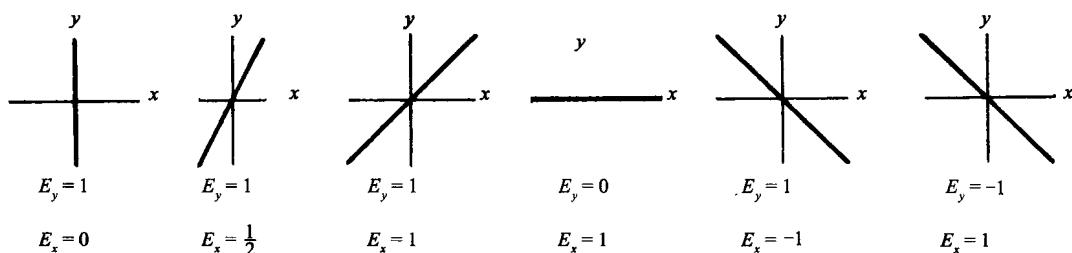


图 33-1 同相位的 x 振动与 y 振动的合成

当 x 振动与 y 振动不同相时，电场矢量沿一椭圆运动；我们可以用一种大家熟悉的方法来说明这一点。如果我们从支点用一根长线悬挂一个球，使它可在水平面内自由摆动，它将作正弦振动。若设想有一水平的 xy 坐标，原点取在球的静止位置上，球就既可在 x 方向，也可在 y 方向以相同的单摆频率摆动。选取适当的初位移和初速度，我们可使球或沿 x 轴振动，或沿 y 轴振动，或沿 xy 平面内的任一直线振动。球的这些运动与图 33-1 中所示的电场振动是类似的。在图上各种情况中，因为 x 振动与 y 振动都同时达到最大值与最小值，所以 x 振动与 y 振动是同相位的。但是我们知道，球的最一般的运动是沿椭圆的运动，它对应于 x 方向与 y 方向不同相的振动。图 33-2 画出了 x 振动与 y 振动不同相时的叠加，其中各图形所对应的 x 振动和 y 振动间的相位差角是不同的。一般的结果是电矢量沿一椭圆运动，沿直线运动相当于相位差为零(或 π 的整数倍)的特殊情况；沿圆运动则相当于

等振幅而有 90° 相位差(或 $\pi/2$ 的奇数倍)的情况。

在图 33-2 中, 我们把 x 方向与 y 方向的电场矢量标为复数, 用这种形式表示相位差很方便。不要把用这种符号表示的复数电矢量的实部与虚部和场的 x 坐标与 y 坐标混淆起来。图 33-1 与图 33-2 中的 x 坐标与 y 坐标是可以测量的实际电场, 而复数电场矢量的实部与虚部则仅仅是一种方便的数学形式, 并无物理意义。

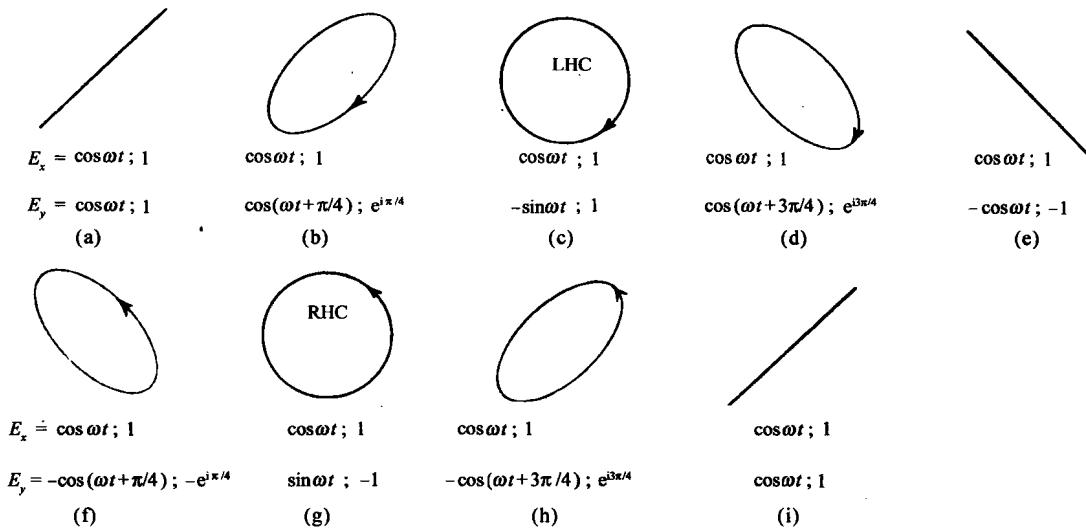


图 33-2 等振幅而相对相位不同的 x 振动与 y 振动的叠加。 E_x 与 E_y 两个分量用实数与复数两种符号表示

现在讲一些术语。电场沿直线振动的光叫做线偏振光(有时称为平面偏振光); 图 33-1 即表示线偏振光。电场矢量的末端沿一椭圆移动的光叫做椭圆偏振光。当电场矢量末端沿一圆移动时, 则为圆偏振光。当我们朝着迎面来的光观看时, 若电矢量末端沿逆时针方向旋转, 我们称它为右旋圆偏振光。图 33-2(g) 表示右旋圆偏振光, 而图 33-2(c) 则表示左旋圆偏振光。在两种情况中光都从纸面向外。我们标记左旋圆偏振与右旋圆偏振的约定与今天对物理学中所有其他显示偏振性的粒子(例如电子)所用的约定是一致的。然而, 在某些光学书中却用相反的约定, 所以读者必须小心。

我们考虑了线偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光, 除这些光以外, 剩下的只有非偏振光了。但是, 既然光总得沿这些椭圆之一振动, 它怎么可能是非偏振的呢? 如果光不是绝对单色的, 或者如果 x 相与 y 相不完全保持同步, 那么电矢量先沿某个方向振动, 然后沿另一个方向振动, 偏振性经常在改变。记住一个原子的发射只持续 10^{-8} s 时间, 若一个原子发射某种偏振光, 接着另一个原子发射另一种偏振光, 则偏振性将每隔 10^{-8} s 改变一次。如果偏振性改变得比我们所能探测的更快, 则我们称光为非偏振的, 因为所有的偏振效应都平均掉了。没有一个偏振光的干涉效应可以用非偏振光显示出来。但是, 从定义来看, 只有当我们无法断定光是否偏振的时候, 才称它为非偏振光。

§ 33-2 散射光的偏振性

我们已讨论过的偏振效应的第一个例子是光的散射。设有一束光(例如来自太阳的光

束)照射在空气上。电场将使空气中的电荷发生振动,而这些电荷的运动将辐射光,光的最大强度在与电荷振动方向垂直的平面内。从太阳来的光束是非偏振的,它的偏振方向不断改变,空气中电荷的振动方向也就不断改变。如果我们考察沿 90° 角散射的光,因为只有当带电粒子的振动垂直于观察者的视线时,它才向观察者辐射光,故光将是沿振动方向*偏振的。所以散射是产生偏振的方法的一例。

§ 33-3 双 折 射

另一个有趣的偏振效应是有些物质对沿一个方向的线偏振光的折射率与对沿另一方向的线偏振光的折射率不同。假定有一种物质由长形的、长度比宽度大的非球形分子所组成,并且这些分子的长轴在物质中排列得相互平行。那么,当振动着的电场通过这种物质时将发生什么现象?假定由于分子的结构,物质中的电子对于平行于分子轴的振动的响应比垂直于分子轴的振动的响应容易。在这种情形下,我们预期一个方向上的偏振和与之垂直的方向上的偏振将具有不同的响应。我们把分子轴的方向叫做光轴。偏振方向沿着光轴时的折射率与偏振方向与光轴成直角时的折射率不同。这样的物质称为双折射的。它具有两种可折射性,即两种折射率,按在物质中偏振的方向而定。哪种物质是双折射的?在双折射物质中,由于种种原因,必须有一定量排列整齐的非对称的分子。具有立方对称性的立方晶体,当然不可能是双折射的。但长针状晶体无疑包含不对称的分子,因而很容易在其中观察到这种效应。

现在我们来看当偏振光透过一片双折射物质时可以预期什么效应。如果偏振方向与光轴平行,光就以一种速度透过;如果偏振方向与光轴垂直,则光就以另一种速度透过。而当光沿着与光轴成 45° 角的方向偏振时,就会发生一种有趣的情况。我们曾注意到, 45° 偏振可表示为同相位等幅度的x方向偏振与y方向偏振的叠加,如图33-2(a)所示。既然x方向偏振的光与y方向偏振的光以不同的速度传播,则当光通过物质时,x方向与y方向的相位就以不同的速率改变。因而,虽然开始时x方向振动与y方向振动同相位,但在物质内部,x方向与y方向振动之间的相位差则与光进入物质中的深度成正比。当光通过物质时,其偏振情况按图33-2中所示一系列形状改变。如果薄片厚度恰使x方向偏振与y方向偏振产生 90° 的相移,如图33-2(c)那样,则光以圆偏振出射。这种厚度的薄片叫做四分之一波片,因为它使x方向偏振与y方向偏振之间产生四分之一周的相差。如果线偏振光通过两块四分之一波片,它将又以平面偏振光出射,但与原来的方向成直角,从图33-2(e)即可看出这一点。

用一张玻璃纸很容易说明这一现象。玻璃纸系由长形纤维分子组成,各向不同性,因为纤维朝某一方向的排列占优势。为了演示双折射,需要一束线偏振光,这很方便,只要把非偏振光通过一偏振片就行。偏振片(下面将对它作详细讨论)有一个有用的性质,即偏振方向与其轴平行的线偏振光透过它时,很少被吸收,而对偏振方向与其轴垂直的线偏振光则强烈吸收。当非偏振光通过偏振片时,只有振动方向平行于偏振片轴的那部分光可以通过,因而透射光束是线偏振的。偏振片的这一性质也可用来探测线偏振光束的偏振方向或确定一束光是否线偏振光,只要让光束通过偏振片,并在垂直于光束的平面内旋转偏振片。如果光束是线偏振光,则当偏振片的轴垂直于光束的偏振方向时,光束就透不过偏振片。当偏振片

* 指与入射方向和散射方向都垂直的方向。——译者注

的轴转过 90° 时,透射光束只衰减很少。如果透射强度与偏振片的取向无关,光束就不是线偏振的。

为了演示玻璃纸的双折射性,我们用两块偏振片,如图33-3所示。第一块给出一束线偏振光,让它通过玻璃纸,然后通过第二块偏振片,此片用来探测玻璃纸对通过它的偏振光所产生的效应。如果先让两块偏振片的轴互相垂直,并移去玻璃纸,没有光通过第二块偏振片。如果此时在两块偏振片之间插入玻璃纸,并以光束为轴线旋转玻璃纸,即可看到,总的来说玻璃纸使一部分光能通过第二块偏振片。但玻璃纸有两个互相垂直的取向不允许光通过第二块偏振片。当线偏振光通过玻璃纸时,其偏振方向不受影响的这两个玻璃纸的取向必为平行于玻璃纸光轴的方向或垂直于玻璃纸光轴的方向。

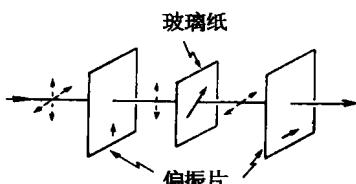


图33-3 玻璃纸双折射性的实验演示。光的电矢量用虚线表示。偏振片的通过轴与玻璃纸的光轴用箭头表示。入射光束是非偏振光

我们假定光在这两个取向上以两种不同的速度通过玻璃纸,但透过时偏振方向不变。当玻璃纸转到这两个取向的中间位置(如图33-3所示)时,我们看到透过第二块偏振片的光是亮的。

通常用于商业包装的玻璃纸对白光中的大多数色光来说,刚巧很接近于半波片厚度。如果入射偏振光束的偏振方向与光轴成 45° 角的话,这样的玻璃纸将使线偏振光的轴转过 90° ,因而自玻璃纸出射的光束正沿着可以通过第二块偏振片的方向振动。

如果在上述演示实验中用白光,则玻璃纸只对白光中的一个特定成分才正好是半波片厚度,故透射光束将具有此成分的颜色。透射光的颜色依赖于玻璃纸的厚度;我们可以用以下方法来改变玻璃纸的有效厚度,即倾斜一下玻璃纸,使光以一个倾角通过它,因此光在玻璃纸中通过一段较长路程。当玻璃纸倾斜时,透射光改变颜色。用不同厚度的玻璃纸,可以作成透过不同颜色的滤色片。这种滤色片具有这样一种有趣的性质,即当两块偏振片的轴互相垂直时,它们透过一种颜色,而当两块偏振片的轴互相平行时,则透过其互补色。

整齐排列的分子的另一个有趣的应用很实用。某些塑料由缠绕在一起的很长和很复杂的分子组成。当很小心地凝固这种塑料时,所有分子卷成一团,使沿一个方向排列的分子与沿另一个方向排列的分子一样多,故这样的塑料没有显著的双折射性。通常,当塑料凝固时,会引进一些应变和应力,因而不是完全均匀的。但是如果在这种塑料片上施加张力,就像拉一团乱麻那样,则沿张力方向排列的麻绳将比沿别的方向多。因而当给某种塑料施加应力时,塑料就变为双折射的,让偏振光通过塑料,就能看到双折射效应。如果通过偏振片观察透射光,将看到明暗的条纹(如用白光,则为彩色条纹)。当在样品上加应力时,条纹会移动,计数条纹数目,并注意哪里条纹最多,就可确定应力。工程师们把这一现象用作为求形状古怪、难以计算的物体上应力的一种方法。

另一种得到双折射的有趣方法是用液体。设想有一种由长形非对称分子组成的液体,让在近分子的两端带有正或负的平均电荷,使分子成为一偶极子。由于碰撞,液体中分子一般将混乱取向,朝某一方向的分子与朝另一方向的分子一样多。如果加上电场,分子就会趋向于整齐排列,而一旦分子排列整齐,液体就变成双折射的。用两块偏振片和一个装有这种极化液体的透明盒,就可构成一种装置,它具有一种性质,只有加上电场时光才能通过。这

样,我们就有了一个光的电开关,叫做克尔盒。这种对某些液体加上电场就会产生双折射的效应,叫做克尔效应。

§ 33-4 起偏振器

至此我们只讨论了在不同方向偏振的光其折射率不同的这类物质。很有实用价值的是那样一些晶体和材料,它们对不同方向偏振的光不仅折射率不同,而且吸收系数也不同。用证实双折射概念的同样论证,可以理解,在各向异性物质中吸收会随电荷受迫振动的方向而变化。电气石是这种物质的古老而有名的例子,偏振片则是另一个例子。偏振片系由碘硫酸奎宁小晶体(一种碘和奎宁的盐类)的薄片组成,所有晶体的轴排列成相互平行。当(光)振动沿一个方向时,这些晶体吸收光,当振动沿别的方向时,则吸收不明显。

假定让偏振方向与偏振片的通过方向成 θ 角的线偏振光射入偏振片,通过的光的强度将是多少?此入射光可以分解为两个分量:一个与通过方向垂直,它正比于 $\sin \theta$;另一个沿着通过方向,它正比于 $\cos \theta$ 。从偏振片出来的幅度仅为 $\cos \theta$ 部分; $\sin \theta$ 部分被吸收了。通过偏振片的振幅小于进来的振幅,两者相差一个因子 $\cos \theta$ 。透过偏振片的能量,即光的强度,正比于 $\cos \theta$ 的平方,于是当入射光的偏振方向与通过方向成 θ 角时,透射光强度就是 $\cos^2 \theta$ 。吸收强度当然是 $\sin^2 \theta$ 。

在下述情况下会出现一个有趣的佯谬。我们知道,不可能使一束光通过两块轴互相正交的偏振片。但是如果在原先两块偏振片之间放上第三块偏振片,使其轴与正交轴成 45° 角,就有些光透过去了。我们知道偏振片只会吸收光,而不会创造什么东西。然而,加进成 45° 角的第三块偏振片却使较多的光得以通过。这一现象的分析留给学生作为练习。

最有趣的偏振例子之一并不发生在复杂的晶体或难以获得的材料中,倒是发生在最简单和最熟悉的情况之一——光从表面的反射之中。不管你是否相信,当光从玻璃表面反射时,它可以是偏振化的,而这一现象的物理解释很简单。布儒斯特从实验中发现,如果从表面反射的光束与进入物质中的折射光束成直角,则反射光为完全偏振光。图33-4说明这一情况。如果入射光束在入射面内偏振,就将完全没有反射光。只有当入射光束垂直于入射面偏振时,才会被反射。理由很容易懂。在反射材料中光是横向偏振的,而我们知道产生出射光束的是材料中电荷的运动,此出射光束我们叫做反射光。这种所谓反射光的来源并非简单地是入射光束的反射而已;对此现象的更深入的理解告诉我们,入射光束驱动材料中的电荷振动,接着产生反射光束。从图33-4可知,显然只有垂直于纸面的振动可以朝反射方向辐射光,因此反射光束将垂直于入射面偏振。如果入射光束在入射面内偏振,就根本没有反射光。

让一束线偏振光在一块平玻璃板上反射,很容易演示上述现象。如果转动玻璃板,使偏振光束呈现不同的入射角,则当入射角通过布儒斯特角时,可观察到反射强度的急剧衰减。这种衰减只有当偏振面在入射面内时才能观察到。如果偏振面垂直于入射面,则在所有角

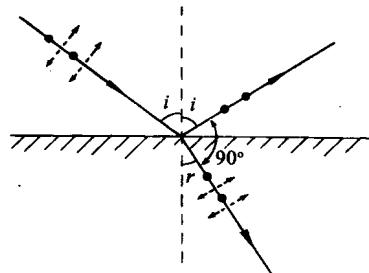


图33-4 在布儒斯特角下线偏振光的反射。虚线箭头表示偏振方向;圆点表示偏振方向垂直纸面

度都观察到通常的反射强度。

§ 33-5 旋光性

另一个最值得注意的偏振效应是在由不具有反射对称性的分子所组成的材料中观察到的。这种分子的形状有些像螺丝，或者戴手套的手，或者别的其形状通过镜子看会反过来的东西，就像左手手套会在镜子中反射成为右手手套一样。假定物质中的所有分子都一样，即没有一个分子是另一个分子的镜像。这样一种物质会显示出一种叫做旋光性的有趣效应，当线偏振光通过该种物质时，偏振方向就绕光束的轴旋转。

为了理解旋光现象需要一些计算，但我们可以不必去实际进行计算而定性地看出此效应是怎样发生的。设想有一螺旋状非对称分子，如图 33-5 所示。为了显示旋光性，分子形状不需要真正像个螺丝。但我们将把这种简单形状作为无反射对称性形状的典型例子。当沿 y 方向偏振的线偏振光照射在此分子上时，电场将驱动电荷沿螺旋线上、下运动，于是产

生在 y 方向上的电流，并辐射沿 y 方向偏振的电场 E_y 。但是，如果电子被约束在螺旋线上运动，则当它们被驱动作上、下运动的同时，也必作 x 方向的运动。当电流沿螺旋线向上流动时，电流也同时在 $z = z_1$ 点向纸面流入，在 $z = z_1 + A$ 点从纸面流出，如果 A 是分子螺旋的直径的话。人们也许会设想 x 方向的电流不会产生净辐射。因为在螺旋的两边电流反方向。但是，如果考虑到 $z = z_2$ 点的电场的 x 分量，我们看到，由 $z = z_1 + A$ 点的电流所辐射的场与由 $z = z_1$ 点的电流所辐射的场，在到达 z_2 点时相差一段时间 A/c ，于是相位相差 $\pi + \omega A/c$ 。既然相位差不恰好是 π ，两个场就不恰好抵消，于是由分子中电子的运动产生的电场就剩下一个小的 x 分量，而驱动电场却只有 y 分量。此小的 x 分量加在大的 y 分量上，产生一个合电场，此合电场对于 y 轴（即原来的辐射方向）稍稍倾斜了一点。当光通过物质行进时，偏振方向绕光束的轴旋转。稍画几个图例，并考察由入射电场所引起的电流，人们就能确信旋光性的存在，而且旋转方向与分子的取向无关。

玉米糖浆是一种常见的具有旋光性的物质。玉米糖浆的旋光现象很容易演示，只要用一块偏振片，以产生线偏振光束，一个盛有玉米糖浆的透明盒，以及另一块偏振片，以检测当光通过玉米糖浆时偏振方向的旋转。

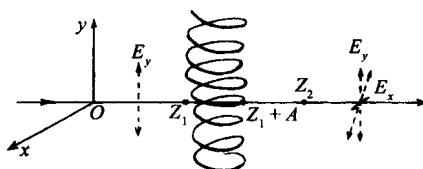


图 33-5 一个不具有镜像对称性形状的分子。一束沿 y 方向偏振的光照射在该分子上

§ 33-6 反射光的强度

现在我们来定量讨论反射系数与角度的关系。图 33-6(a)表示一光束投射在玻璃表面上，一部分被反射，一部分折射入玻璃。假定入射光束（振幅为 1）垂直于纸面偏振。我们将称反射波的振幅为 b ，折射波的振幅为 a 。折射波和反射波当然是线偏振的，而且入射波、反射波和折射波的电场矢量都相互平行。图 33-6(b)表示同一种情况，但假定入射波（振幅为 1）在纸面内偏振。此时反射波和折射波的振幅分别称为 B 和 A 。

现在要计算在图33-6(a)和(b)所示的两种情况中反射有多强。我们已知道,当反射光束和折射光束之间的夹角为直角时,则图33-6(b)中将没有反射波,但我们来看一看,是否能得到一个定量的答案——即B和b作为入射角i的函数的正确表示式。

我们必须懂得下述原理:玻璃中引起的电流产生两个波。首先,它们产生反射波。再者,我们知道,如果没有玻璃中引起的电流,入射波就会继续不偏折地进入玻璃。须知凡源都产生净场。入射光束的源产生振幅为1的场,它将会沿图中虚线进入玻璃。但此场未观察到,因而在玻璃中引起的电流必须产生一个振幅为-1的场,它也沿虚线行进。我们将利用这一事实来计算折射波的振幅a与A。

在图33-6(a)中我们看到,幅度为b的场系玻璃内之电荷运动所辐射,而这些电荷的运动则是玻璃内的场a所引起,因而b正比于a。既然两个图除偏振方向外实际上相同,我们也许会假定,比值B/A将与比值b/a相同。但这并不十分正确,因为图33-6(b)中的偏振方向不像图33-6(a)中那样都互相平行。只有A中垂直于B光束的分量Acos(i+r)在产生B中才是有效的。于是正确的比例表示式为

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A \cos(i+r)}. \quad (33.1)$$

现在我们来利用一个诀窍。我们知道在图33-6(a)和(b)中,玻璃中的电场都必须产生这样的电荷振动,它产生振幅为-1,偏振方向与入射光束平行,而沿着虚线方向行进的场。但从图33-6(b)部分可见,只有A中垂直于虚线的分量才与产生此场的偏振方向一致,而在图33-6(a)中却是整个幅度a都有效,因为a波的偏振方向与振幅为-1的波的偏振方向平行。于是可得

$$\frac{A \cos(i-r)}{a} = \frac{-1}{-1}, \quad (33.2)$$

因为式(33.2)左端的两个幅度都产生振幅为-1的波。

用式(33.2)除式(33.1),得

$$\frac{B}{b} = \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)}, \quad (33.3)$$

此结果可用已知的情况来检验。若令*i+r=90°*,式(33.3)给出*B=0*,与布儒斯特定律要求的一样,所以至此我们的结果至少无明显错误。

前面已假定入射波的振幅为1,所以|B|^2/1^2即在入射面内偏振的波的反射系数,而|b|^2/1^2为垂直于入射面偏振的波的反射系数。此两反射系数之比由式(33.3)决定。

现在我们来完成一个奇迹,即不只是计算此比值,而且要计算每个系数|B|^2与|b|^2本身!由能量守恒定律可知,折射波的能量必定等于入射波的能量减去反射波的能量,一为1-|B|^2,一为1-|b|^2。此外,图33-6(b)中进入玻璃的能量与图33-6(a)中进入玻璃的能量之比为折射波振幅平方之比,即|A|^2/|a|^2。也许有人会问,我们是否真的知道如何计

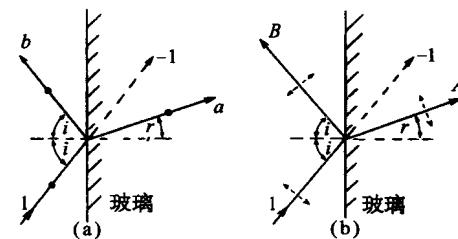


图33-6 振幅为1的入射波在玻璃表面的反射与折射。

(a) 入射波垂直于纸面偏振;(b) 入射波的线偏振方向用虚线电矢量表示

算玻璃中的能量,因为除电场能量之外,毕竟还得加上原子运动的能量。但是显然对总能量的所有各种贡献,都将与电场振幅的平方成正比。于是可得

$$\frac{1 - |B|^2}{1 - |b|^2} = \frac{|A|^2}{|a|^2}. \quad (33.4)$$

现在将式(33.2)代入上式,以消去 A/a ,并借助于式(33.3)用 b 表示 B

$$\frac{1 - |b|^2 \frac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}}{1 - |b|^2} = \frac{1}{\cos^2(i-r)}. \quad (33.5)$$

此式只包含一个未知振幅 b 。解出 $|b|^2$,得

$$|b|^2 = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}, \quad (33.6)$$

借助于式(33.3),并可得

$$|B|^2 = \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}. \quad (33.7)$$

因而我们已求得了垂直于入射面偏振的入射波的反射系数 $|b|^2$,也求得了在入射面内偏振的入射波的反射系数 $|B|^2$!

这种性质的论证还可继续进行下去,并推得 b 是实数。为此,必须考虑光从玻璃表面的两边同时射来的情况,这种情况在实验上并不容易安排,但在理论上分析起来却很有趣。如果分析这种一般情况,可以证明 b 必须是实数,因而,实际上 $b = \pm \sin(i-r)/\sin(i+r)$ 。若考虑很薄很薄的薄片情况(此时从前表面与后表面都有反射),并且计算出光反射了多少后,甚至可以决定 b 的符号。我们知道薄片应反射多少光,因为我们知道产生了多少电流,甚至求出了这种薄层电流所产生的场。

由这些论点可以证明

$$b = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad B = -\frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}. \quad (33.8)$$

这些反射系数作为入射角与折射角函数的表示式,叫做菲涅耳(Fresnel)反射公式。

若考虑角 i 和 r 趋向于零的极限情况,发现在正入射情况下对两种偏振都有 $B^2 \approx b^2 \approx (i-r)^2/(i+r)^2$,因为此时正弦差不多等于角度,正切亦然。但我们知道 $\sin i / \sin r = n$,而当角度很小时, $i/r \approx n$,因而很容易证明对正入射的反射系数为

$$B^2 = b^2 = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}.$$

作为例子,求出在正入射情况下从水表面反射了多少光是有意思的。对水, n 是 $4/3$,所以反射系数为 $(1/7)^2 \approx 2\%$ 。即在正入射情况下,从水表面只反射 2% 的入射光。

§ 33-7 反常折射

我们将要讨论的最后一个偏振效应其实是最早发现的效应:反常折射。水手们在游历

冰岛后带回了一些冰洲石晶体(CaCO_3)到欧洲,它有一个有趣的性质,通过晶体看起来,任何东西都成了两个,即呈现两个像。此现象引起了惠更斯的注意,并在偏振的发现中起了重要的作用。事情往往是这样,最早发现的现象最终最难解释。只有当我们透彻理解了物理概念以后,我们才能仔细地挑选出那些最简单、最清晰地说明此概念的现象。

反常折射是前面讨论的同一个双折射现象的特殊情况。反常折射系当光轴,即非对称分子的长轴不平行于晶体表面时所发生的现象。图33-7中画了两块双折射晶体,其光轴如图所示。在上图中,投射在晶体上的入射光束的线偏振方向垂直于晶体的光轴。当此光束投射到晶体表面时,表面上每一点都成为一个波源,这些波以速度 v_{\perp} (即当偏振面垂直于光轴时光在晶体中的速度)在晶体中传播。其波前正好是所有这些小球面波的包络或轨迹,并且不偏折地通过晶体行进,从另一面出射。这正是我们所预期的正常行为,因而这种光线叫做寻常光线。

下图中投射在晶体上的线偏振光的偏振方向转了 90° ,因而光轴位于偏振平面内。当考虑晶体表面上任一点发出的小波时,我们看到它们并不以球面波形状扩展。沿着光轴方向传播的光以速度 v_{\perp} 传播,因为其偏振方向垂直于光轴,而垂直于光轴方向传播的光却以速度 v_{\parallel} 传播,因为其偏振方向平行于光轴。在双折射物质中, $v_{\parallel} \neq v_{\perp}$,在图中 $v_{\parallel} < v_{\perp}$ 。更全面的分析证明波以椭球面形状扩展,光轴为椭球的长轴。所有这些椭球面波的包络即为波前,它沿图中所示方向通过晶体行进。在后表面,光束的偏折情况恰与在前表面上相仿,因而光以平行于入射束方向出射,但相对于入射束平移了。显然,此光束不遵循斯涅耳定律,而沿反常方向行进。于是称它为非常光线。

当非偏振光投射在反常折射晶体上时,分裂为一束寻常光线(它以正常形式不偏折地通过晶体传播)和一束非常光线(当它通过晶体时平移了)。这两束出射光线以相互垂直的方向偏振。这一点的正确性很容易演示,只要用一块偏振片分析出射光线的偏振状态即可。把线偏振光射入晶体,我们还能演示对此现象的解释是正确的。只要适当选定入射光束的偏振方向,可以使这束光线不分裂、不偏折地通过晶体,也可使它不分裂地通过晶体,但有一位移。

我们已在图33-1和图33-2中把所有不同的偏振状态表示成两种特殊的偏振状态,即不同大小和不同相位的 x 振动与 y 振动的叠加。其他的偏振对也同样可用来表示各种偏振状态。沿着任意倾斜于 x 、 y 的相互垂直的轴 x' 、 y' 的偏振状态同样可用来表示各种偏振状态[例如,任一偏振状态可以由图33-2中的状态(a)和状态(e)叠加而成]。但有趣的是,这一概念还可推广到其他状态。例如,任一线偏振状态可以由适当大小和适当相位的右旋圆偏振和左旋圆偏振状态[图33-2的状态(c)和(g)]叠加而成,因为两个反向旋转的相等矢量相加后得到一个沿直线振动的单一矢量(图33-8)。如果其中一个的相位相对另一个移动了,此直线即倾斜。于是图33-1中所有图形都可标成“相等大小的右旋圆偏振光与左旋圆偏振光在各种不同相对相位下的叠加”。当左旋的相位落后于右旋时,线偏振状态的方

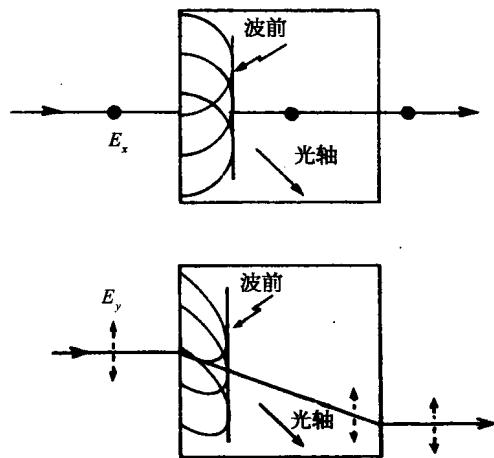


图33-7 上图表示通过双折射晶体的寻常光线路径。非常光线路径画于下图中。光轴位于纸面上

向会改变。因而在一定意义上,旋光材料是双折射的。它们的性质可以描述成对右旋圆偏振光和左旋圆偏振光具有不同的折射率。不同强度的右旋圆偏振光和左旋圆偏振光的叠加,则产生椭圆偏振光。

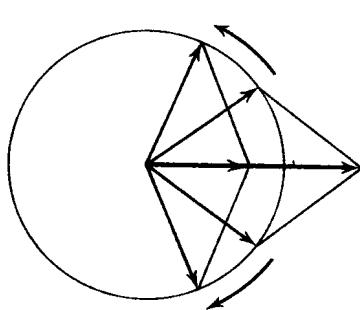


图 33-8 两个反向旋转的等幅矢量相加
产生一方向固定但幅度振荡的矢量

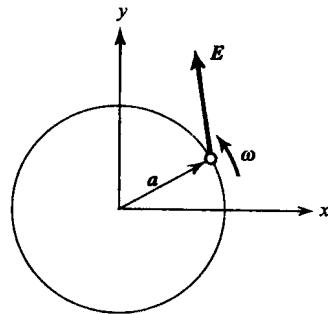


图 33-9 作为对圆偏振光的响应,
电荷沿圆周运动

圆偏振光具有另一个有趣的性质——它带有角动量(对传播方向)。为了说明这一点,假定圆偏振光投射在一个可用简谐振子来代表的原子上,该振子能在 xy 平面内沿任意方向相同地位移。于是,作为对场的 E_x 分量的响应,电子将有 x 方向的位移,作为对大小相同的场的 E_y 分量的响应,有大小相同的 y 方向的位移,但相位落后 90° 。这样一来,作为对光的旋转电场的响应,电子以角速度 ω 沿一圆周运动(图 33-9)。电子位移矢量 a 的方向和作用在电子上的力 $q_e E$ 的方向不一定要相同,视振子响应的阻尼特性而定,但它们一起旋转。 E 可以有与 a 成直角的分量,所以对系统做功,并作用有力矩 τ 。每秒钟做的功为 $\tau\omega$ 。在一个周期 T 内,吸收的能量为 $\tau\omega T$,而 τT 即传递给吸收此能量的物质的角动量。因而我们看到,一束带有总能量 \mathcal{E} 的右旋圆偏振光具有角动量 \mathcal{E}/ω (矢量指向传播方向)。因为当此束光被吸收时,该角动量就传递给吸收物质。左旋圆偏振光带有符号相反的角动量 $-\mathcal{E}/\omega$ 。

第 34 章 辐射中的相对论性效应

§ 34-1 运动辐射源

本章将叙述与辐射有关的各种效应,从而结束关于光传播的经典理论的讨论。我们对光的分析已相当深入而详尽。唯一未加讨论的与电磁辐射有关的重要现象是,当无线电波被四周具有反射壁的盒子(盒子的线度与波长差不多)所包围时,或当它沿着一个长的管道传输时所发生的现象,即所谓谐振腔现象和波导现象。这些现象我们将在以后讨论;我们先用另一种物理现象——声——作为例子来进行讨论,然后再回到这个题目上来。除此以外,本章是我们最后一次考虑光的经典理论。

我们可以把现在要讨论的效应概括为与运动辐射源有关的效应。因此,我们不再假设辐射源局限在某固定点附近以比较低的速率运动。

我们记得,电动力学的基本定律表明,在远离运动电荷的地方,电场由下式给出

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_{R'}}{dt^2}. \quad (34.1)$$

单位矢量 $\mathbf{e}_{R'}$ 的方向指向电荷的表观方向,它的二阶微商是电场的决定因素,当从电荷到观察者的信号仅以有限速率 c 传播时,此单位矢量当然并不指向电荷现在的位置,而指向电荷看起来所在的位置。

与电场相联系的还有磁场,方向始终与电场垂直,也与源的表观方向垂直,而由下式给出

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_{R'} \times \mathbf{E}/c. \quad (34.2)$$

至此我们只考虑了运动速率为非相对论性的情况,结果在源所在的方向上没有明显的运动要去考虑。现在我们要更一般地研究以任意速度而运动的情况,看一看在这种情况下会有什么其他效应发生。虽然我们假设运动速率是任意的,但是当然仍将假定探测器离源很远。

由第 28 章的讨论已经知道,在 $d^2 \mathbf{e}_{R'}/dt^2$ 中唯一要算的是 $\mathbf{e}_{R'}$ 的方向的变化。设电荷的坐标是 (x, y, z) , z 沿着观察方向(图 34-1)。在给定时刻,比如时刻 τ ,位置的三个分量是 $x(\tau)$, $y(\tau)$ 和 $z(\tau)$ 。距离 R 很接近等于 $R(\tau) = R_0 + z(\tau)$ 。这样,矢量 $\mathbf{e}_{R'}$ 的方向主要取决于 x 和 y ,而几乎根本与 z 无关,因为单位矢量的横向分量是 x/R 与 y/R ,当对这些分量求微商时,在分母上得到 R^2 之类的量

$$\frac{d(x/R)}{dt} = \frac{dx/dt}{R} - \frac{dz}{dt} \frac{x}{R^2}.$$

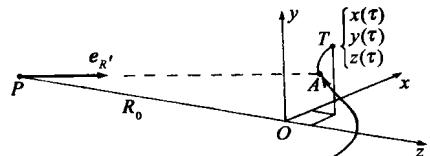


图 34-1 运动电荷的路径。在时刻 τ 电荷的真正位置在 T ,但其推迟位置在 A

所以,当离源足够远时,需要考虑的项只有 x 和 y 的变化。将因子 R_0 提出微商号外,于是得到

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 x'}{dt^2}, \\ E_y &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 y'}{dt^2}, \end{aligned} \quad (34.3)$$

式中 R_0 大体上是到电荷 q 的距离;不妨取 R_0 为观察者到坐标系(x , y , z)原点的距离 OP 。于是电场就是一个常量乘以一个很简单的量,即 x 坐标与 y 坐标的二阶微商(本来可以更数学化一些,把 x 与 y 叫做电荷的位置矢量 r 的横向分量,但这样并不会使问题更清楚多少)。

当然,我们认识到坐标必须在推迟时刻度量。这里我们发现 $z(\tau)$ 要影响推迟。推迟时间是多少?若观察时刻叫做 t (即 P 处的时刻),则与之对应的在 A 处的时刻 τ 并不是 t ,而是要延迟一段时间,这段时间即光必需走过的总距离除以光的速率。在一级近似下,此延迟为 R_0/c ,为一常量(此项我们不感兴趣),但在二级近似下,必须包括电荷于时刻 τ 在 z 方向所在位置所产生的效应,因为如果 q 稍微移后一些,推迟就得稍微多一些。这是我们以前所忽略的效应,也正是为了使结果对所有运动速率都成立唯一需要考虑的效应。

现在我们要做的是选定某一 t 值,由它计算 τ 的值,从而求出该时刻 τ 的 x 值与 y 值。这些就是推迟的 x 和 y ,我们称之为 x' 和 y' ,它们的二次微商决定了场。这样, τ 由下列公式决定

$$t = \tau + \frac{R_0}{c} + \frac{z(\tau)}{c}$$

和

$$x'(t) = x(\tau), \quad y'(t) = y(\tau). \quad (34.4)$$

这些方程很复杂,但很容易用几何图形来描述它们的解。这样的图使我们对事情是如何进行的过程有一个很好的定性的感性认识,但对一个复杂的问题要导出精确的结果,则仍需要应用详细的数学方法。

§ 34-2 求“表现”运动

上述方程有一种有趣的简化形式。若我们忽略不感兴趣的延迟常量 R_0/c (这仅仅意味着时间 t 的原点改变一个常量),上述方程即可化为

$$ct = c\tau + z(\tau), \quad x' = x(\tau), \quad y' = y(\tau). \quad (34.5)$$

现在我们要求出 x' 和 y' 作为 t 的函数,而不是作为 τ 的函数,我们可以用下述方法来求:方程式(34.5)表明,我们应取实际的运动再加上一个常数(光速)与 τ 的乘积,这句话所表达的意思如图 34-2 所示。画出电荷的实际运动(如图中左边所示),并想象在电荷运动的同时它又以速率 c 从 P 点被拉走(这只是数学上加 ct 的一种表述,并不存在相对论性收缩之类的问题)。用这个方法得到一种新的运动,其中沿视线的坐标是 ct ,如图右边所示(图中表示对平面内相当复杂的运动所得的结果,但运动当然可以不在一个平面内——它可以比平面运动更复杂)。主要之点是现在水平方向(即视线方向)的距离不再是原来的 z ,而是 $z + ct$,

因而就是 ct 。这样,我们就得到了 x' (和 y')与 t 关系的曲线图!为了求电场,只要看一下这条曲线的加速度,也就是只要对它微分二次就行了。所以最后的回答是:为了求运动电荷的电场,先画电荷的运动,然后将该运动以速率 c 逐点向后平移,以便“将它展开”;这样画出来的曲线,就是位置 x' 和 y' 作为 t 的函数的曲线。此曲线的加速度给出作为时间 t 的函数的电场。如果我们愿意,也可这样来想象,即整个“刚性”曲线以速率 c 通过视平面向前运动,从而曲线与视平面的交点坐标就是 x' 和 y' 。由该点的加速度得出电场。这个解正与起初的公式一样确切——它只是一种几何表述方法。

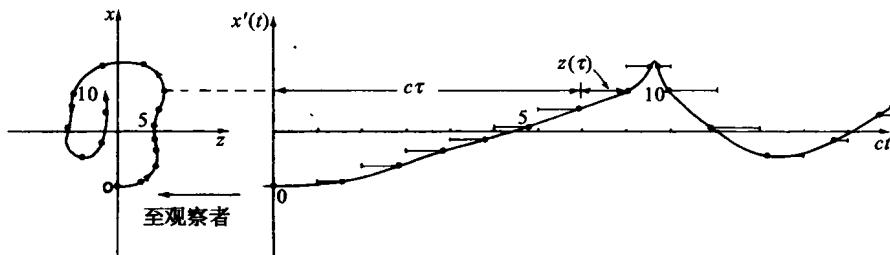


图 34-2 由方程式(34.5)求 $x'(t)$ 的几何解法

如果运动比较慢,例如是一个正在作上、下缓慢运动的振子,那么,当将该运动以光速展开时,显然会得到一条简单的余弦曲线,这样就给出了我们一直看到的公式,它给出振荡电荷所产生的场。但更有意思的例子是电子快速(很接近于光速)沿圆周运动。如果在圆平面内观察,则推迟的 $x'(t)$ 如图 34-3 所示。这是一条什么曲线?设想有一条从圆心到电荷的矢径,将它穿过电荷稍微延长一些,如果电荷运动得很快,只要稍微延长一点,使延长线到达以光速旋转的圆周上就行。于是,当我们把电荷运动以光速向后逐点平移时,整个过程就相当于一个带有电荷的轮子以光速无滑动地向后滚动;这样电荷在空间就画出一条曲线,它很接近于摆线——称为内摆线。如果电荷以很接近于光速的速率运动,曲线的“尖点”的确很尖;如果电荷恰好以光速运动,它们将成为无限尖的真正的尖点。“无限尖”很有意思;它意味着在尖点附近二阶微商非常大。电荷每走一圈就得到一个电场的尖脉冲。这是从非相对论性运动根本得不到的结果,在电荷作非相对论性运动时,每走一圈得到一次振动,此振动在所有时刻的“强度”大致相同。而现在,电场每隔 T_0 时间出现一个尖脉冲,这里 T_0 是电荷转动的周期。这些强电场在沿着电荷运动方向的一个狭窄锥角内发射。当电荷离开 P 点运动时,曲线的曲率很小,这时沿 P 的方向只有很小的辐射电场。

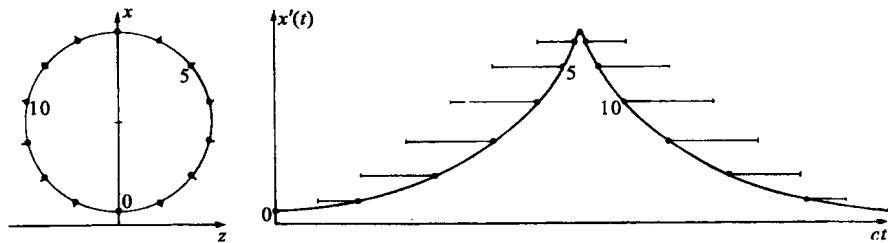


图 34-3 以恒定速率 $v = 0.94c$ 沿圆周运动的质点的 $x'(t)$ 曲线

§ 34-3 同步辐射

在同步加速器中有沿着圆形轨道运动的高速电子；它们以很接近于光速的速率运动，因此有可能以实际的光的形式观察到上述辐射。我们来更详细地讨论这一问题。

在同步加速器中，电子在均匀磁场中沿圆形轨道运动。首先我们来看一下电子为什么沿圆周运动。根据式(12.10)，在磁场中运动的粒子所受的力由下式给出

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (34.6)$$

此力与场和速度都垂直。像通常一样，力等于动量对时间的变化率。如果场的方向由纸面向上，则粒子的动量和作用在粒子上的力如图 34-4 所示。

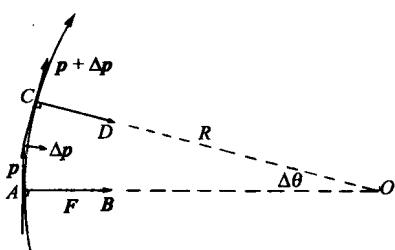


图 34-4 带电粒子在均匀磁场中沿圆周(或螺旋线)运动

既然力与速度垂直，则粒子的动能，进而其速率，保持不变。磁场的作用只是改变运动的方向。在一个短时间 Δt 内，动量矢量的改变量 $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t$ 在其垂直方向上，因而 \mathbf{P} 转过一个角度 $\Delta\theta = \Delta p / p = qvB \Delta t / p$ ，因为 $|F| = qvB$ 。但在同一时间内，粒子走过距离 $\Delta s = v \Delta t$ 。显然，直线 AB 和 CD 将在某一点 O 相交，而使 $OA = OC = R$ ，其中 R 满足 $\Delta s = R \Delta\theta$ 。将此关系与前一个表示式相结合，可得 $R \Delta\theta / \Delta t = R\omega = v = qvBR / p$ ，由此可得

$$p = qBR \quad (34.7)$$

和

$$\omega = \frac{qvB}{p}. \quad (34.8)$$

因为同样的论证也适用于下一瞬时，再下一瞬时，等等，故可得出结论，粒子必然作沿半径为 R 的圆周运动，角速度为 ω 。

粒子的动量等于电荷乘以半径再乘以磁场这一结果十分重要，并且用得很多。此关系在实用上很重要，因为当存在一些带相同电荷的基本粒子时，可在磁场中对它们进行观察，测得它们的轨道的曲率半径，在已知磁场的情况下，就可决定粒子的动量。若在式(34.7)两边同乘以 c ，并将 q 用电子电荷表示，就可以用电子伏为单位来量度粒子的动量值。使用这些单位，该式变为

$$pc(\text{eV}) = 3 \times 10^8 (q/q_e) BR, \quad (34.9)$$

式中 B 、 R 及光速皆用 mks 制表示，在 mks 制中，光速的数值为 3×10^8 。

磁场的 mks 制单位叫做韦伯每平方米 ($\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$)。磁场还有一个较老的但仍常用的单位，叫做高斯 (Gs)。 $1 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$ 等于 10^4 Gs 。为了给读者一个磁场大小的概念，我们指出通常在铁中能达到的最强的磁场约为 $1.5 \times 10^4 \text{ Gs}$ ；超过此值，使用铁的优越性就没有了。目前，绕有超导体导线的电磁体可以产生 10^5 Gs 以上强度的稳定磁场，此强度在 mks 单位制中即为 10 mks 单位。赤道处的地磁场约为十分之几高斯。

回到式(34.9)，我们可以设想同步加速器中的粒子以吉电子伏量级的能量运行，对 1 GeV ， pc 为 10^9 (我们将很快回过来讲能量)。那么，若 B 相当于 10000 Gs ，即 1 mks 单位

(这是很强的磁场),则 R 应为 3.3 m。加利福尼亚理工学院的同步加速器的实际半径是 3.7 m,磁场也稍强一些,能量是 1.5 GeV,但属于同一数量级。这样,我们对于同步加速器为什么具有这种尺寸就有体会了。

我们已计算了粒子的动量,但我们知道粒子的总能量,包括静能在内的,由

$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

给出,对于电子,与 mc^2 相应的静能为 0.511×10^6 eV,当 pc 为 10^9 eV 时,可略去 mc^2 ,故对所有实用目的来说,当粒子速率达到相对论性速率时, $W = pc$ 。说电子能量为 1 GeV 与说电子动量乘以 c 为 1 GeV 实际上相同。若 $W = 10^9$ eV,很容易证明粒子的速率与光速之差只有八百万分之一!

现在我们再回到这样的粒子所发出的辐射上来。粒子在半径为 3.3 m,即周长为 20 m 的圆周上运动,绕行一周的时间约等于光走 20 m 所需的时间。故这样的粒子所应辐射的波长将为 20 m——处在无线电短波范围。但由于刚才讨论过的堆积效应(图 34-3),以及使矢径端点达到光速 c 所需的延长量只有半径的八百万分之一,因而内摆线的尖点与相邻两尖点之间的距离比较起来,显得非常尖。故加速度(它包含对时间的二次微商)两次得到“压缩因子” 8×10^6 ,因为在尖点附近时间标度两次缩短 8×10^6 倍。于是可以预期有效波长要短得多,即短到 20 m 的 $(1/64) \times 10^{-12}$ 的程度,相当于 X 射线区域。(实际上,尖点本身并不是全部决定因素;必须把尖点附近的一定区域包括进去。这使因子变为 $3/2$ 次方,而不是平方,但波长仍在比可见光区短的区域内。)因此,尽管缓慢运动的电子会辐射波长为 20 m 的无线电波,而相对论性效应却使波长缩短到使我们能看见它!显然,光应是偏振的,其电场方向垂直于均匀磁场。

为了进一步领会所观察到的现象,假设将这种光(由于这些脉冲的时间间隔很大,为了简单起见,我们将只取一个脉冲)投射在衍射光栅上,这种光栅就是许多条散射线。当这个脉冲自光栅射出后,我们将看到什么(如果我们果真看见光,就应看见红光、蓝光,等等)?脉冲迎面打在光栅上,光栅上的所有振子都强烈地向上运动,然后再向下运动,而且只是上、下运动一次。于是这些振子就在各个方向上产生效应,如图 34-5 所示。但 P 点离光栅的一端比离另一端近一些,所以来自 A 线的电场先到达 P 点,其次是来自 B 线的到达,等等;最后到达的是来自最后一条线的脉冲。简言之,来自所有相继的光栅线的反射的总和如图 34-6(a)所示;这是一个由一系列脉冲所组成的电场,它很像一个波长等于脉冲间距的正弦波,正像单色光打在光栅上所发生的现象一样!因而,我们确实得到了彩色的光。但是,应用同样的论证,我们会从任何一种“脉冲”得不到光吗?会的。若曲线很平坦,则我们将把所有彼此相隔很短时间间隔的散射波相加在一起[图 34-6(b)]。从而可见,场根本不振动,而是一条很平坦的曲线,因为在两个

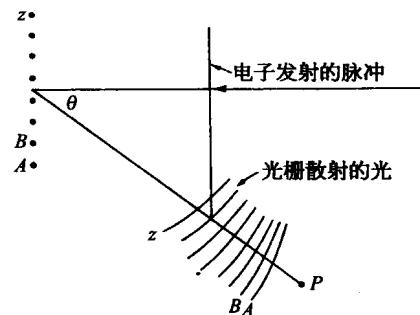


图 34-5 单个尖脉冲光打在光栅上,沿各不同方向散射为不同颜色的光

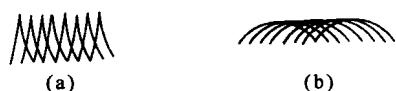


图 34-6 由一系列(a)尖脉冲和(b)平坦脉冲所造成的总电场

脉冲之间的时间间隔内,每个脉冲的变化不大。

由在磁场中循环运行的相对论性带电粒子所发出的电磁辐射叫做同步辐射。它之所以这样命名,理由很明显,但这种辐射并不只限于同步加速器,甚至也不限于地球上的实验室。令人兴奋而有趣的是,它也发生在自然界中!

§ 34-4 宇宙中的同步辐射

在公元 1054 年,中国和日本的文明在世界上处于领先地位;他们知道地球以外的宇宙万物,并在那一年十分卓越地记录了一颗发生爆炸的亮星(奇怪的是那些写下了中世纪全部著作的欧洲僧侣们,竟然没有一个费心记下天空中一颗星的爆炸)。今天我们可以拍摄那颗星的照片,其形状如图 34-7 所示。星的外缘是一大片红色纤维状丝,这是稀薄气体原子按其固有频率“鸣叫”所产生的;它造成不同频率的明亮线光谱。这里出现的红色是氮造成的。另一方面,星的中心部分则是一块神秘而模糊的光斑,其频率是连续分布的,这就是说,不存在与特定原子相联系的特殊频率。但这并不是被邻近的星体所“照亮”的尘埃(这是得到连续光谱的一种可能途径)。我们透过它可以看见别的星体,所以它是透明的,但它却发射光。



图 34-7 蟹状星云的全色照片(不用滤色片)

万物,并在那一年十分卓越地记录了一颗发生爆炸的亮星(奇怪的是那些写下了中世纪全部著作的欧洲僧侣们,竟然没有一个费心记下天空中一颗星的爆炸)。今天我们可以拍摄那颗星的照片,其形状如图 34-7 所示。星的外缘是一大片红色纤维状丝,这是稀薄气体原子按其固有频率“鸣叫”所产生的;它造成不同频率的明亮线光谱。这里出现的红色是氮造成的。另一方面,星的中心部分则是一块神秘而模糊的光斑,其频率是连续分布的,这就是说,不存在与特定原子相联系的特殊频率。但这并不是被邻近的星体所“照亮”的尘埃(这是得到连续光谱的一种可能途径)。我们透过它可以看见别的星体,所以它是透明的,但它却发射光。

在图 34-8 中我们看到的是同一个星体,所用的是不含明亮光谱线的光谱区中的光,所以我们只看到中心区。但这时望远镜前仍放有偏振片,两幅照片对应的偏振方向相差 90° 。我们看到两幅图像是不同的! 这就是说,光是偏振的。其原因大概是有一个局部的磁场,以及有许多高能电子在该磁场中旋转着。



(a)



(b)

图 34-8 通过蓝滤色片和偏振片所拍摄的蟹状星云照片

(a) 电场方向竖直; (b) 电场方向水平

我们刚才已经说明电子在磁场中怎么会沿圆周运动的。当然我们还可以在磁场方向上加上任何匀速运动,因为力 $qv \times \mathbf{B}$ 没有沿该方向的分量,而且我们已讲过,同步辐射显然是偏振的,其方向垂直于磁场在视平面内的投影。

把这两个事实结合在一起,可知在一幅照片上明亮而在另一幅照片上黑暗的那些区域,其光的电场方向必定沿一个方向完全偏振。这就意味着存在着一个与该方向相垂直的磁场;而在另一幅照片上有强烈辐射的那些区域,其磁场方向必定有另一种取向。如果仔细观察图34-8,会注意到图上大致有一组“线”,在一幅照片上沿一种走向,在另一幅照片上则沿着与之垂直的走向。照片显示出一种纤维状结构。推测起来,大概磁力线想尽量沿本身的方向扩展伸长,于是就有了长长的磁场区域,在这种区域内所有电子以一种方式作螺旋运动,而在另一个区域,磁场沿另一个方向,电子也以另一种方式作螺旋运动。

是什么东西使电子在这么长时间内维持这么高的能量?要知道,自从这颗星爆炸以来已经过了900年——它们怎么能始终运动得这么快?电子是怎么保持其能量的,以及整个过程是怎样进行的,至今仍没有彻底弄明白。

§ 34-5 韧致辐射

接着我们来简短地叙述一下辐射能量的高速运动粒子的另一个有趣的效应。这个概念与刚才所讨论的现象十分相似。假定在一块物体中有带电粒子,并设有一高速电子通过物质(图34-9)。于是,由于原子核周围的电场对电子有拉力作用,电子被加速,使电子的运动曲线有一个小的扭转或弯曲。若电子以十分接近于光速的速率运动,则沿 c 方向将产生怎样的电场?请记住我们的规则:将实际运动以速率 c 向后平移,从而得到一条曲线,此曲线的曲率量度电场。电子正以速率 v 朝着我们运动,所以我们得到一个朝后的运动,但整个图形的横向尺寸按 $c-v$ 与 c 的比例缩小。所以,若 $(1-v/c) \ll 1$,在 B' 点就有一个变化很快和很尖的曲率,当取二次微商时就在运动方向上得到一个很强的电场。所以,当高能电子通过物质时,它们沿前进方向发出辐射。这种现象叫做韧致辐射。实际上,同步加速器用作产生高能电子,没有用作产生高能光子—— γ 射线——的多(如果我们真的能够较方便地从加速器中取出电子的话,我们就不这么说了),只要让高能电子通过固体钨“靶”,即可由上述韧致辐射效应辐射光子。

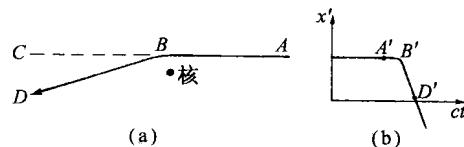


图34-9 高速电子在核附近通过时,
沿其运动方向辐射能量

§ 34-6 多普勒效应

接着我们继续讨论有关运动源的效应的另外一些例子。假设源是一个静止原子,它正以某一固有频率 ω_0 振荡。于是我们知道观察到的光的频率就是 ω_0 。现在举另一个例子,

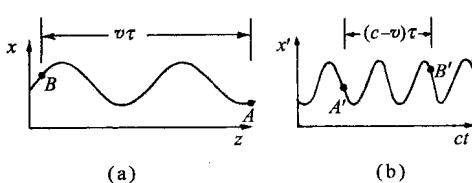


图34-10 运动振子的 $x-z$ 与 $x'-t$ 曲线

有一个类似的振子正以频率 ω_1 振荡,同时整个原子即整个振子以速度 v 沿着趋向观察者的方向运动。显然,实际上在空间的运动状况如图34-10(a)所示。现在我们再来故伎重施,即加上 $c\tau$;这就是说,将整个曲线向后平移,于是发现它的振动如图34-10(b)所示。在给定的时间间隔 τ

内,振子将走过距离 $v\tau$,而在 x' 对 ct 的图内它走了距离 $(c-v)\tau$ 。因而原来在时间间隔 $\Delta\tau$ 内发生的频率为 ω_1 的所有振荡,现在出现在时间间隔 $\Delta\tau' = (1-v/c)\Delta\tau$ 内;即它们被压缩在一起,而当此曲线以速率 c 通过我们身旁时,我们将看到较高频率的光,恰好高了一个压缩因子 $(1-v/c)$ 的倒数。于是得到

$$\omega = \frac{\omega_1}{1-v/c}. \quad (34.10)$$

当然,我们还可以用其他各种方法来分析此现象。假定原子不是发射正弦波,而是以一定频率 ω_1 发射脉冲,嘟,嘟,嘟,嘟,……我们收到的将是什么频率?第一个脉冲到达观察者有一定延迟,但下一个脉冲延迟得要少一些,因为其时原子离观察者更近了一些。于是,“嘟”与“嘟”之间的时间因原子运动而减少了。如果我们分析这种情况的几何图形,可以得到脉冲频率增加了因子 $1/(1-v/c)$ 。

那么,当我们取一个固有频率为 ω_0 的正常原子,并让它以速率 v 趋近观察者运动时,其频率是否为 $\omega = \omega_0/(1-v/c)$?不,我们知道得很清楚,由于时间流率的相对论性膨胀,运动原子的固有频率 ω_1 与原子静止时量得的不同。这样一来,如果真正的固有频率为 ω_0 ,则修正后的固有频率 ω_1 将是

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (34.11)$$

于是观察到的频率 ω 为

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}. \quad (34.12)$$

上述情况下观察到的频率移动现象叫做多普勒效应;如果物体朝我们运动,它所发射的光就显得偏紫一些,如果它离开我们运动,则显得偏红一些。

现在我们对刚才提到的这个有趣而重要的结果再提供两种推导方法。假设源固定不动,发射频率为 ω_0 的波,而观察者却以速率 v 朝源运动。经过一定时间 t 后,观察者将运动到一个新的位置,离 $t=0$ 时他所在位置的距离为 vt 。那么他将看见通过了多少弧度的相位?应为通过任一固定点的弧度值 $\omega_0 t$,加上观察者由于自身运动而扫过的弧度值,即 vtk_0 (每米弧度数乘以距离)。所以在时间 t 内通过的总弧度值,或者说观察到的频率,应为 $\omega_1 = \omega_0 + k_0 v$ 。我们系从一个静止着的人的观点分析了这一情形;我们想知道从运动着的人看起来情况会怎么样。这里又要考虑到两个观察者的时钟快慢上的差异,这一次这种差异意味着必须把结果除以 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。因而,若 k_0 为波数,即沿运动方向上每米的弧度数, ω_0 为原来的频率,则运动着的人观察到的频率为

$$\omega = \frac{\omega_0 + k_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (34.13)$$

对于光, $k_0 = \omega_0/c$ 。因而,对此特例,上式变为

$$\omega = \frac{\omega_0 (1 + v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34.14)$$

此式看起来与式(34.12)完全不同!当我们朝源运动时所观察到的频率,与当源朝我们运动

时所观察到的频率，两者会不同吗？当然不会！相对论告诉我们这两者必须完全相同。如果我们将数学相当熟练，就可能会认识到这两个数学表示式的确完全相同！其实，这两个表示式必定相同这一点正是有人喜欢用来证明相对论需要时间膨胀的一种方法，因为如果式中没有那些平方根因子，两者就不再相同。

既然我们懂得相对论，让我们再用第三种方法来分析这一现象，这种方法看来似乎更一般一些（其实是一回事，因为这与我们如何处理问题没有关系）。根据相对论，一个观察者看到的位置与时间跟另一个相对他运动的观察者看到的位置与时间之间有一个关系。我们很早以前（第16章）就写出了这些关系式。这就是洛伦兹变换及其逆变换^{*}

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & x &= \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\t' &= \frac{t + ux/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & t &= \frac{t' - ux'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}\quad (34.15)$$

如果我们站在地面上不动，波的形式就是 $\cos(\omega t - kx)$ ；所有的波节、极大和极小将按此方式变化。但在对同一物理波进行观察的正在运动的观察者看来，情况会怎么样？场为零的所有波节的位置不变（当场为零时，任何人测得的场均为零）；这是相对论不变性。所以波的形式对另一个观察者也相同，只是要把它变换到他的参照系中

$$\cos(\omega t - kx) = \cos\left[\omega \frac{t' - ux'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - k \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right].$$

只要对括号内的项重新整理，即可得

$$\begin{aligned}\cos(\omega t - kx) &= \cos\left[\underbrace{\frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} t'}_{\omega'} - \underbrace{\frac{k + v\omega/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x'}_{k'}\right] \\&= \cos[\omega' t' - k' x'].\end{aligned}\quad (34.16)$$

这仍是一个波，一个余弦波，它有确定的频率 ω' ，即乘在 t' 上的常数，以及某一个另外的常数，即乘在 x' 上的 k' 。我们把 k' 叫做对另一个观察者的波数，即每 2π 米所含的波的数目。因此另一个观察者将看见由下式给出的新频率与新波数

$$\omega' = \frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34.17)$$

$$k' = \frac{k + v\omega/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (34.18)$$

看一下式(34.17)，可知它与我们用更具有物理意义的论证得到的式(34.13)相同。

§ 34-7 ω, k 四元矢量

式(34.17)和(34.18)所表示的关系很有意义，因为它们指出新频率 ω' 是老频率 ω 和老波

* 注意：与式(16.2)不同，式(34.15)不带撇系 (x, t) 相对于带撇系 (x', t') 向右运动。——译者注

数 k 的组合,新波数是老波数和老频率的组合。波数是相位对距离的变化率,频率是相位对时间的变化率,在这些表示式中可以看出与位置和时间的洛伦兹变换有十分相似的地方:如果把 ω 设想为 t' ,把 k 设想为 x' 除以 c^2 ,则新的 ω' 与 t' 相仿,而新的 k' 与 x'/c^2 相仿。这就是说,在洛伦兹变换下, ω 和 k 的变换关系与 t 和 x 的变换关系相同。它们都构成所谓四元矢量;当一个量有四个分量,其变换关系与时间和空间一样时,它就是一个四元矢量。至此似乎一切都很圆满,然而还有一个小问题:我们说四元矢量必须有四个分量;那么另外两个分量在哪里? 我们看到, ω 和 k 在一个空间方向上与时间和空间相仿,而不是在所有方向上,所以下一步必须研究光在三维空间的传播问题,而不是只在一维空间,因为我们至今只讨论了光在一维空间的传播。

设有一个坐标系 x, y, z ,一个波在其中传播,其波前如图 34-11 所示。波的波长为 λ ,但波的运动方向不是正好沿着某一轴的方向。这样一个波的表示式是什么? 回答无疑是 $\cos(\omega t - ks)$, 其中 $k = 2\pi/\lambda$, 而 s 是沿着波的运动方向的距离——即空间位置沿运动方向的分量。我们这样来处理:设空间一点的位置矢量是 r , 则 s 就是 $r \cdot e_k$, 这里 e_k 是运动方向上的单位矢量。这就是说, s 正好是 $r \cos(r, e_k)$, 即在运动方向上的距离分量。因此上述波的表示式就是 $\cos(\omega t - ke_k \cdot r)$ 。

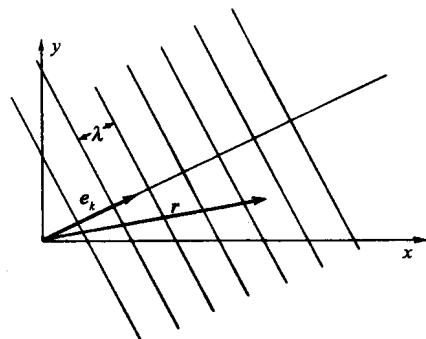


图 34-11 沿倾斜方向传播的平面波

结果表明定义一个矢量 k 是很方便的,叫做波矢,它的大小等于波数 $2\pi/\lambda$,并且指向波的传播方向

$$k = 2\pi e_k / \lambda = k e_k. \quad (34.19)$$

利用这一矢量,上述波可以写成 $\cos(\omega t - k \cdot r)$, 或写成 $\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$ 。 k 的一个分量,比如说 k_x ,它的意义是什么? 显然, k_x 是相位对 x 的变化率。参照图 34-11 可知,当改变 x 时,相位跟着改变,正像有一个波沿 x 方向传播一样,但其波长较长。“在 x 方向的波长”比自然的真实波长长了角 α 的正割这一因子, α 是波的实际传播方向与 x 轴的夹角

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \alpha}. \quad (34.20)$$

因此相位对距离的变化率(它正比于 λ_x 的倒数)小了因子 $\cos \alpha$;这正是 k_x 变化的大小——它等于 k 的大小乘上 k 与 x 轴夹角的余弦!

这就是我们用来表示三维空间波的波矢的性质。四个量 ω, k_x, k_y, k_z 在相对论中像四元矢量一样变换,其中 ω 对应于时间, k_x, k_y, k_z 则对应于四元矢量中的 x, y, z 分量。

在以前对于狭义相对论的讨论(第 17 章)中,我们曾知道有一些与四元矢量构成相对论点积的方法。若把位置矢量记为 x_μ ,其中 μ 用来表示四个分量(时间和三个空间分量),并把波矢叫做 k_μ ,其中 μ 也有四个值,时间和三个空间分量,则 x_μ 与 k_μ 的点积可写成 $\sum' k_\mu x_\mu$ (见第 17 章)。此点积是与坐标系无关的不变量;它等于什么? 由这种四维点积的定义,它是

$$\sum' k_\mu x_\mu = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z. \quad (34.21)$$

由对矢量的讨论可知, $\sum' k_\mu x_\mu$ 在洛伦兹变换下是一个不变量,因为 k_μ 是一个四元矢量。

但此量正好是出现在平面波的余弦符号内的宗量，在洛伦兹变换下它理应不变。我们不可能有一个使余弦符号内的量改变的公式，因为我们知道当坐标系改变时，波的相位不可能改变。

§ 34-8 光 行 差

在推导式(34.17)和(34.18)时，我们曾取 k 刚巧沿运动方向这一简单例子，但无疑也可以把它推广到其他情况。例如，假设有一个光源，从静止的观察者看来，它沿某一方向发出光，但我们跟着地球一起在运动(图 34-12)。在我们看来，光来自什么方向？为了求出此方向，我们必须写下 k_μ 的四个分量，并应用洛伦兹变换。但答案可以用下列论证求得：为了看见来自光源的光，我们必须把望远镜偏过一定角度来对准它。为什么？因为光以速率 c 下来，而我们以速率 v 向侧向运动，所以望远镜必须朝前倾斜，以便当光下来时可“笔直地”朝下通过镜筒。很容易看出，当竖直距离为 ct 时，水平距离为 vt ，于是，若设倾角为 θ' ，则 $\tan \theta' = v/c$ 。这个结果多好！的确很好——但还有一点小问题： θ' 不是望远镜相对地球所应取的角，因为我们是从“固定”观察者的观点进行分析的，当我们说水平距离是 vt 时，在地球上的观察者将得出另一个距离，因为他是用“缩短了的”尺来度量的。由于收缩效应，结果证明

$$\tan \theta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34.22)$$

此式相当于

$$\sin \theta = v/c. \quad (34.23)$$

读者试用洛伦兹变换导出这一结果，这对你们将是有益的。

这一望远镜必须倾斜的效果，叫做光行差，它已被观察到。我们怎么能观察到呢？谁能说出某一颗星应该在哪里？假定我们的确沿着一个错误的方向去看才能看见某颗星；但我们怎么知道这是一个错误的方向呢？原来因为地球绕太阳旋转，今天我们要把望远镜向某一方向倾斜；六个月以后，我们又必须把望远镜向相反的方向倾斜。这就是我们能够说有这种效应的原因。

§ 34-9 光 的 动 量

现在我们转向另一个题目。在前几章的讨论中，从未提及过与光相联系的磁场的任何效应。一般地说，磁场的效应是很小的，但有一个有趣而重要的效应是磁场造成的。设光自源发出，作用在电荷上，驱使电荷上、下运动。再设电场沿 x 方向运动，故电荷也沿 x 方向运动；电荷的位置为 x ，速度为 v ，如图 34-13 所示。磁场与电场垂直。当电场作用在电荷上使之上、下运动时，磁场起了什么作用？磁场只在电荷（比如说电子）运动时才对电荷有作用；但电子是在运动，它由电场所驱动，所以两个场一起起作用：当电子上、下运动时具有速

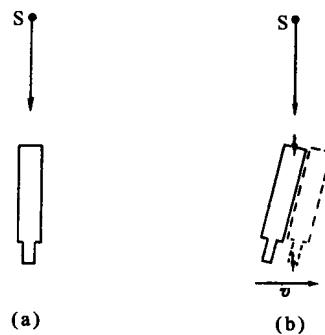


图 34-12 用(a)固定不动的望远镜和(b)横向运动的望远镜观察远处的光源 S

度,于是在它上面有磁力作用,磁力大小等于 B 乘以 v 再乘以 q ;但此力沿什么方向?此力沿着光的传播方向。因此,当光照射在电荷上引起电荷振荡时,在光束的方向上有一个策动力。这叫做辐射压力或光压。

现来决定辐射压力的大小。显然它是 $F = qvB$,或者,因为各量都在振荡,它是该量的时间平均值 $\langle F \rangle$ 。由式(34.2),磁场的强度与电场强度除以 c 相同,故只要求出电场的平均值,乘以速度和电荷,再乘以 $1/c$,即得 $\langle F \rangle: \langle F \rangle = q\langle vE \rangle/c$ 。但电荷 q 乘电场 E 是作用在电荷上的电力,而作用在电荷上的电力乘以速度是对电荷所做的功 $d\omega/dt$! 于是力,即光在每秒钟所传递的“推进动量”,等于 $1/c$ 乘以每秒钟从光所吸收的能量! 这是一个一般规则,因为我们没有说明振子有多强,也没有说明是否有些电荷彼此抵消。在任何情况下,凡在光被吸收的地方,就有光压。光所传递的动量总是等于所吸收的能量除以 c

$$\langle F \rangle = \frac{d\omega}{dt}. \quad (34.24)$$

光携带有能量,这一点我们早已知道。现在我们知道它还带有动量,而且知道所带的动量总是等于 $1/c$ 乘以能量。

当光自源发出时,就有反冲效应;这是同一件事的反面。若一原子沿某一方向发射能量 W ,就有反冲动量 $p = W/c$ 。若光从镜面正反射,则得到两倍的此力。

我们用光的经典理论所要讲的就到此为止。当然我们还知道有量子论,并且知道光在许多方面的行为像粒子。光粒子的能量为一常量乘以频率

$$W = h\nu = \hbar\omega. \quad (34.25)$$

现在我们知道了光还带有动量,它等于能量除以 c ,所以这些实际的粒子,即光子,确实也带有动量

$$p = W/c = \hbar\omega/c = \hbar k. \quad (34.26)$$

动量的方向当然沿着光的传播方向。故写成矢量式,有

$$W = \hbar\omega, \quad p = \hbar k. \quad (34.27)$$

我们无疑还知道,粒子的能量与动量应构成四元矢量。刚才我们发现 ω 与 k 构成四元矢量。因此式(34.27)对两种情况具有同一常数是一件好事;它意味着量子论与相对论是相互协调的。

式(34.27)可以更优美地写成 $p_\mu = \hbar k_\mu$,这是一个与波相联系的粒子的相对论性等式。尽管我们仅就光子讨论了这一等式(对光子, k 的大小 k 等于 ω/c ,即 $p = W/c$),但此关系式要更加一般得多。在量子力学中不仅光子,而且所有粒子都显示波动性,并且波的频率和波数跟粒子的能量和动量用式(34.27)(称为德布罗意关系)联系起来,即使当 p 不等于 W/c 时也是如此。

在上一章中我们看到,一束右旋或左旋圆偏振光还带有角动量,其大小正比于波的能量 ϵ 。在量子模型中,一束圆偏振光被看成光子流,每个光子带有沿着传播方向的角动量 $\pm \hbar$ 。这就是从粒子观点来看的偏振的意义——光子带有角动量,就像自转着的步枪子弹一样。但这个“子弹”模型其实也像“波”模型一样是不完全的,我们将在后面关于光的量子行为的一章中更详细地讨论这些概念。

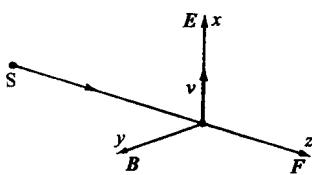


图 34-13 作用在受电场驱动的电荷上的磁力沿着光束方向

第 35 章 色 视 觉

§ 35-1 人 眼

颜色的现象部分地依赖于物理世界。我们讨论肥皂膜等等的颜色时,认为它们是由干涉所产生。但颜色当然也取决于眼睛,以及在眼睛后面大脑中所发生的过程。物理学描述进入眼睛的光的特性,但在进入以后,我们的感觉是光化学神经过程和心理反应的结果。

有许多有趣的现象往往和视觉联系在一起,这些现象是物理现象与生理过程的一种混合,而要完全理解各种自然现象,像我们所看到的那样,则必定超出了通常意义上的物理学范围。我们不需要为离开正题去讨论其他领域的内容提出辩解,因为各个领域的划分,正如我们已经强调的,仅仅是由于人们的方便,而且也是一种很不自然的事。自然界对我们的这种划分并不感兴趣,而许多有趣的现象就在各个领域之间的沟壑上架起了一座座桥梁。

在第 3 章中我们已经一般地讨论过物理学和其他科学的关系,但现在我们将稍微详细地研究一下一个特殊的领域,在这个领域里物理学和其他科学是非常紧密地互相联系着的。这个领域就是视觉。我们特别要讨论色视觉。在这一章中将讨论视觉的生理方面,包括人和其他动物的。

一切都是从眼睛开始;所以,为了要理解我们所看到的是一些什么现象,就需要某些有关眼睛的知识。在下一章中,我们将比较详细地讨论眼睛的各个部分是怎样工作的,以及它们和神经系统怎样相互连结。但在目前,我们只想简单地描述一下眼睛是怎样起作用的(图 35-1)。

光通过角膜进入眼睛。我们已经讨论过它如何被弯曲而成像在眼睛背后叫做视网膜的薄膜上,从而视网膜的不同部分接收到从外界视场不同部分射来的光。视网膜不是绝对均匀的:在我们的视场中心有一个地方,即一个斑点,当我们试图非常仔细地观察物体时就使用这个斑点,在这里我们有最大的视觉敏锐度,这个斑点叫做中央凹或黄斑。眼睛的旁边部分,正像我们注视物体时所获得的经验立刻促使我们意识到的那样,对于看清楚物体上的细节不像眼睛中央部分来得有效。视网膜上还有另一个斑点,输送各种信息的神经就是从这里延伸出去的,那是盲点。这里没有视网膜的敏感部分,并且可以这样来证明:如果我们闭上比如说左眼,用右眼对直观察某一物体,然后把一个手指或者一个小的物体慢慢地从视场中央向外移开,那么在某个地方它会突然消失不见。关于这个事实,我们所知道的唯一的实际用处就是,某个生理学家因为向法国国王指出了这一点而成了宫廷中的宠臣,在国王和他的大

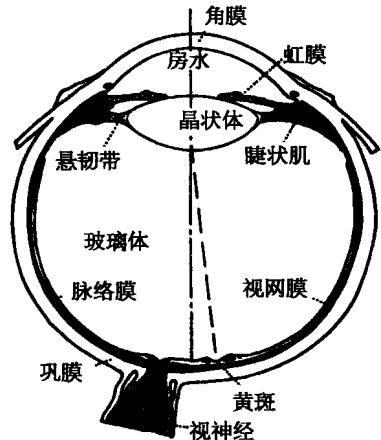


图 35-1 眼睛

臣们举行的令人厌倦的例行朝会上,国王可以用“砍掉他们的头”,即盯着一个头而看着另一个头消失来自我消遣。

图 35-2 以比较简单的形式显示视网膜内部的放大图像。视网膜的不同部分具有不同的结构。

密集在视网膜外周的那些感光细胞叫做视杆细胞,而靠近中央凹处,除了这些视杆细胞外,我们还看到视锥细胞。关于这些细胞的结构,我们将放到以后去讲。越接近中央凹处视锥细胞的数目越多,而在中央凹处,事实上别无他物,只有视锥细胞,它们靠拢得非常紧密,以致这些视锥细胞比任何其他地方都细小得多。所以我们必须意识到,我们是使用位于视场正中的视锥细胞来观看的,但是在外围地方,则有另一种细胞,即视杆细胞。现在有趣的是,视网膜中每一个对于光敏感的细胞不是通过一根纤维直接与视神经相连结,而是与许多细胞交错连结联系在一起的。此外,还

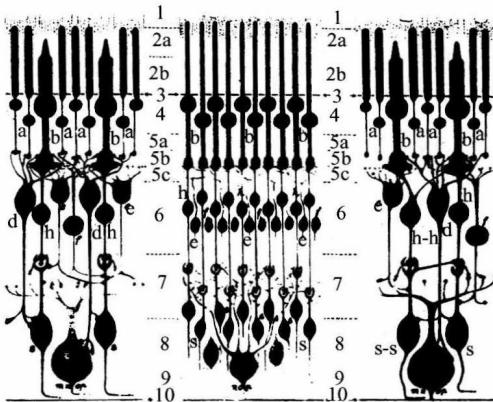


图 35-2 视网膜的结构(光从下面进入)

有好多种细胞:有向视神经输送信息的细胞,也有主要是“水平地”相互连结在一起的其他细胞。实质上有四种细胞,但是我们现在不预备深入讨论这些细节。我们要强调的主要一点就是光信号已被“考虑”过了。这就是说,来自各种细胞的信息不是一点一点地直接通往大脑,而是在视网膜中,把来自几个视觉接收器的信息组合起来,将一定数量的信息整理汇编。这里重要的是应理解到,有些大脑功能现象是在眼睛本身中发生的。

§ 35-2 颜色依赖于光的强度

最令人惊奇的视觉现象之一是眼睛对黑暗的适应性。假如我们从明亮的房间走进黑暗中去,开始有一段时间什么也看不清楚,但是渐渐地物体变得越来越清晰,终于在我们以前看不到东西的地方能够看到一些东西。如果光的强度非常弱,我们看到的东西是没有颜色的。我们知道,这种适应黑暗的视觉几乎应完全归功于视杆细胞,而适应亮光的视觉则应归功于视锥细胞。作为这方面的一个结果,有好些现象我们可以很容易把它们解释为由于功能的这种转换,即视锥细胞和视杆细胞的共同作用转换为只有视杆细胞作用所引起。

在许多情形中,如果光的强度比较强,我们就能看到颜色,而且还会发现这些东西极其美丽。一个例子是,通过望远镜观察微弱的星云时,我们几乎总是看到它的“黑白”像,但是威尔逊山天文台帕洛玛天文台的米勒先生却耐心地给某些星云拍摄了彩色图像。从来没有人曾经真正用肉眼看到过这些颜色,然而这些颜色并不是人为的颜色,只是光的强度还不足以使我们眼睛中的视锥细胞能够看到它们。这些星云中比较壮丽的有环状星云和巨蟹座星云。前者呈现美丽的蓝色内核,并带有亮红色的外晕,后者呈现蓝色的云雾,并带有明亮橘红色的细丝渗入其中。

在亮光中,视杆细胞的灵敏度显然非常低,但在黑暗中,随着时间的流逝,它们逐渐获得了能够看到光的本领。人们所能适应的光的强度变化超过了一百万比一的范围。大自然并

不是只用一种细胞来完成所有这一切,而是把她的职能从看到亮光的细胞,即看到颜色的细胞,也就是视锥细胞转移到看到低光强的细胞,即适应黑暗的细胞,也就是视杆细胞。在这一转移所产生的有趣的结果之中,首先是没有颜色,其次是颜色不同的物体其相对亮度也不同。这是因为视杆细胞对蓝色的感光比视锥细胞要好,而视锥细胞能看到的光的颜色如深红色,视杆细胞却绝对不可能看到。所以对视杆细胞来说,红光是黑色的。因此,两张颜色纸,比如说一蓝一红的,在明亮的光线下,红色甚至可能比蓝色更亮一些,可是在黑暗中却看上去完全相反。这是一个非常惊人的效应。如果我们在黑暗中能找到一本杂志或者有颜色的某种东西,在我们能确切知道它们是什么颜色之前,先判断一下哪些是较亮,哪些是较暗的区域,然后把杂志带到亮光中去,那么,我们就会看到这种在最亮和不是最亮的颜色之间发生明显的转移。这种现象叫做普尔基涅效应。

在图35-3中,虚线表示眼睛在黑暗中的灵敏度,也就是它用的是视杆细胞;实线表示在亮光中的灵敏度。我们看到,视杆细胞的峰值灵敏度在绿色区域,而视锥细胞的峰值灵敏度更多的在黄色区域。如果有一页红纸(红光波长大约650 nm),在明亮的光线下,我们能够看到它,但在黑暗中就几乎看不见它。

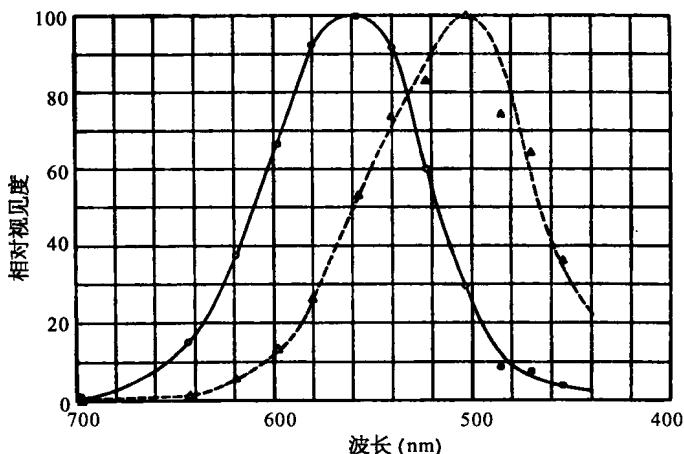


图35-3 眼睛的光谱灵敏度。虚线——视杆细胞;实线——视锥细胞

在黑暗中由视杆细胞来承担责任以及在中央凹处没有视杆细胞这一事实的另一效应是,当我们在黑暗中直接观察某一物体时,我们的视觉不如向一边看时来得敏锐。对弱的星或星云,当我们稍微偏向一边注视时,有时会比直接对着它注视更为清楚,因为在中央凹处的中心没有灵敏的视杆细胞。

越往视场旁边视锥细胞的数目越是减少这个事实的另一有趣的效应是,当物体往一边移去时,即使在明亮的亮光中颜色也会消失。试验它的方法是朝着某一特定不变的方向看去,请一位朋友拿着一些有颜色的卡片从一边走进来,在这些卡片到你面前之前先试试看判定它们是什么颜色。人们发现,在他能够看见这些卡片在哪里之后很久,才能确定它们的颜色。在做这项试验时,建议最好从与盲点相反的一边走进来,因为不然的话,就会被搞糊涂,一会儿几乎看见了颜色,一会儿(当经过盲点时)什么也看不见,然后又重新看到了颜色。

另一个有趣的现象是视网膜的外围对于运动非常敏感。虽然从我们的眼角去看时不可

能看得很清楚,但是如果有一个小虫在爬动,而且我们原来未料想到那里有某一种东西在移动,我们就会立即对它很敏感。我们都会“紧张起来”去寻找正在爬到视场边上的那个东西。

§ 35-3 色感觉的测量

现在我们转到视锥细胞视觉,即亮光中的视觉上来,所涉及的问题是视锥细胞视觉最主要的特征是什么,那就是颜色。我们知道,白光可以用棱镜分解成具有各种波长的整个光谱,而光谱的不同波长在我们就看到不同的颜色;当然这就是我们能看到的各种颜色。任何光源都可用光栅或棱镜加以分析,并且可以确定它的光谱分布,也就是每一波长的“份量”。某一种光可以包含有大量的颜色,相当数量的红色,以及一点点黄色,等等。这在物理的意义上是非常精确的。但问题是它看起来是什么颜色?很明显,各种不同的颜色在一定程度上依赖于光的光谱分布,但是问题在于要去找出产生各种不同感觉的是光谱分布的哪些特征。例如,我们必须怎样去做才能获得绿色?大家知道,我们可以简单地从光谱中取绿色的那部分。但这是否是得到绿色,橙色或任何其他一种颜色的唯一方法呢?

能够产生同样表现视觉效应的光谱分布是否不止一种呢?答案是完全肯定的。视觉效应的数目非常有限,而且事实上正如我们下面就要看到的那样,它们正好是一个三维流形。但是对于不同光源发出的光,我们所能画出的不同曲线数目是无限的。现在我们要讨论的问题是,在什么情况下光谱的不同分布对于眼睛会显示出完全相同颜色?

在判断颜色方面,一个最有力的心理-物理技术是把眼睛用作衡消仪器。这就是说,我们并不试图去定义究竟是什么造成绿色的感觉,或者去测量在什么情况下我们得到绿色的感觉,因为很清楚要这样做是非常复杂的。我们代之以研究在什么条件下两个刺激是不可区分的。这样,我们就无需判定在不同情况下两个人是不是会得到同样的感觉,而只去判定如果两种感觉对于一个人是相同的话,对于另一个人是否也相同。我们并不需要去判定,当一个人看到某个绿色的物体时,在他内心深处引起的感觉和另外某个人在他看到某个绿色的物体时是否也相同,关于这一点我们什么也不知道。

为了说明这种可能性,我们可以用一组四盏各带有滤色片的投影灯,它们的亮度可以在一个较宽的范围内连续调节:一盏灯带有红色滤色片,在屏幕上映出一个红色光斑。另一盏灯带有绿色滤色片,在屏幕上映出一个绿色光斑。第三盏灯带有蓝色滤色片。第四盏灯在屏幕上映出一个白色圆环形光圈,它的中央有一个黑斑。现在如果我们开亮红光,并且靠近它加上一些绿光,我们看到,在两种光重叠的区域里所产生的并不是我们所说的那种绿色带红的感觉,而是一种新的颜色,在我们这个特例中是黄色。改变红光和绿光的比例,我们可以得出各种深浅不同的橙色,等等。如果我们已把它配成某一种黄色,那么我们不通过这两种颜色的混合而是把另外的一些颜色混合起来也能得到同样的黄色,也许用黄色滤色片和白光,或者诸如此类的东西混合起来,可以得到同样的感觉。换句话说,可以用不止一种方法把通过各种滤色片的光混合起来以形成各种颜色。

我们刚才发现的这种情况可以用解析方法表述如下。例如,一种特定的黄色可以用某一符号 Y 表示,它是某一数量的红色滤色光(R)和绿色滤色光(G)的“和”。在用两个数字比如 r 和 g 描写(R)和(G)有多亮,我们可以写下这种黄色的一个公式

$$Y = rR + gG. \quad (35.1)$$

现在的问题在于,是否通过把两种或三种固定的不同颜色相加在一起,就能做成所有各种不同的颜色? 我们来看一看,在这方面可以得到什么结论。只把红色和绿色混合起来,肯定是不是能得到所有各种不同的颜色的,因为比如说在这样的混合物中决不会出现蓝色。然而在加进一点点蓝色后,可以使所有三个斑点重叠的中央区域看来像是一种十分美妙的白色。把这三种不同的颜色混合起来,并且观察这个中央区域,我们会发现,通过改变颜色的比例,可以在这个区域中得到范围相当宽广的不同颜色,所以所有的颜色可以用这三种色光的混合来做成并非不可能。我们要讨论一下这在多大程度上是真实的。事实上这一点基本上是正确的,不久我们将看到怎样把这个命题定义得更加完善一些。

为了说明我们的观点,在屏幕上移动各个光斑,使它们彼此都落在其他光斑的上面,然后试着去配制出一种特殊的颜色使它落在第四只灯映出的圆环中央并使内外颜色相同。从第四盏灯射出的以前我们曾经认为它是“白色”的光现在却呈现出淡黄色。我们可以借助于尝试法尽可能适当地调节红色、绿色和蓝色以配制那种颜色,并且发现,我们能够相当接近于这种特殊浓淡的“奶油”色。所以不难相信,我们能够配制出所有的颜色。我们不久就要试制黄色,但是在这以前,必须指出:有一种颜色可能很难制成。教颜色这门课程的人都只制成所有“鲜明的”颜色,但从来没有制成过棕色,而且人们很难回忆起曾经看见过棕色的光。事实上,为了增加任何舞台效果,这种光从来没有被使用过,人们也从来没有看到使用棕色光的聚光灯。所以我们想,或许不可能制成棕色光。为了弄清楚是否可以制成棕色光,我们指出,棕色光仅仅是这样一种光,如果没有背景的衬托,我们就不习惯于看它。事实上,我们能够把一些红光和黄光混合起来而制成棕色光。为了证明我们看到的是棕色光,只要增加圆环背景的亮度,相对于这个背景,我们看到的正是这种光,它就是我们所说的棕色! 棕色在靠近比较明亮的背景时,总是一种深暗的颜色。棕色的特征很容易改变。比方说,如果我们从中取出一些绿色,就得到略带红的棕色,这显然是一种巧克力似的红棕色。如果加进更多的绿色,那么我们就相应得到那种令人讨厌的所有的军队制服都由它染成的颜色。但是来自这种颜色的光本身并不那样令人讨厌,它是略带黄的绿色,但是在明亮的背景的衬托下就显得非常可憎了。

现在我们在第四盏灯的前面放置一片黄色滤色片,并试图配制出这种颜色(光的强度当然必须限于各灯的范围之内,我们不可能去配制太亮的光色,因为我们的灯没有足够的功率)。然而我们能够配制出黄色,为此只要把绿色和红色混合起来,甚至加上一点点蓝色,使它更加完美。或许我们已经相信,在恰当的条件下,能够完美地配制出任何给定的颜色。

现在我们来讨论颜色混合的定律。第一,我们曾发现不同光谱分布的光能够产生同样的颜色;其次,我们曾看到“任何”颜色可以通过把三种特殊的颜色:红、蓝和绿加在一起而配制出来。混合的颜色最有趣的特点是:设有某一种光,我们把它叫做 X ,又设从眼睛看来它和 Y 没有什么区别(它可以是一种与 Y 不同的光谱分布,但它看起来与 Y 是不可区别的),那么我们称这些颜色是“相等”的,这是从这个意义上来说,即眼睛看到它们是相等的,并且可以写成

$$X = Y. \quad (35.2)$$

颜色的主要定律之一是:如果两个光谱分布是不可区别的,我们给每一个加上某一种光,比如说 Z (如果我们写成 $X + Z$,就意味着把这两种光照射在同一个斑点上),然后再取 Y 并加上同样数量的另一种光 Z ,那么这些新的混合物也是不可区别的

$$X + Z = Y + Z. \quad (35.3)$$

我们刚才已经配制出黄色，如果现在把粉红色的光照射到全部物体上，它们仍然能够匹配。所以对已经匹配的光，加上任何其他的光，留下的仍然是相匹配的光。换句话说，我们可以把所有这些颜色现象总结起来：两种色光在相同情况下彼此靠近观察时，如果一经匹配，那么这种匹配将继续保持下去，而且在任何其他颜色混合情形中，一种光可以用另一种光来代替。事实上，这证明了一个非常重要和有趣的情况，即色光的这种匹配不依赖于眼睛在观察那个时刻的特性：我们知道，如果我们长时间地注视一个明亮的红色表面或者明亮的红光，然后去看一张白纸，那么它看上去略带绿色，而且其他颜色也会因我们长时间地注视着明亮的红色而走样。如果我们现在把两种颜色，例如黄色相匹配，我们注视它们，然后长时间地去注视一个明亮的红色表面，然后再回过来看黄色，这时它看上去不是黄色的了。我不知道它看上去是什么颜色，但看来不会是黄色。虽然如此，这些黄色看上去仍然是匹配的，因此，由于眼睛能适应光的不同强度，颜色的匹配仍然发生作用，除非一个明显的例外，那就是当我们进入一个领域，在那里光的强度如此之弱，以致我们必须从视锥细胞转移到视杆细胞的时候，这时原来相匹配的颜色不是相匹配的了，因为我们运用了不同的系统。

颜色混合的第二个原理是：任何一种颜色都可以用三种颜色组成，在我们的情况下，就是红、绿和蓝三种色光。适当地把这三种颜色混合在一起，我们就能够配制出任何一种颜色，正像我们在前面两个例子中所表明的那样。此外，这些定律在数学上也非常有趣。对那些对于事物的数学感兴趣的人来说，情况是这样：假设我们取红、绿和蓝三种颜色，用 A 、 B 和 C 来标记，并且把它们叫作原色。于是任何一种颜色都可以由这三种颜色的一定数量配成：比如由颜色 A 的数量 a ，颜色 B 的数量 b 和颜色 C 的数量 c 配成 X

$$X = aA + bB + cC. \quad (35.4)$$

现在假设另一种颜色 Y 由同样这三种颜色配制成

$$Y = a'A + b'B + c'C. \quad (35.5)$$

于是我们发现这两种光的混合物（这是我们在前面已经提到过的那些定律的结论之一）可以通过取 X 和 Y 的分量之和来求得

$$Z = X + Y = (a + a')A + (b + b')B + (c + c')C. \quad (35.6)$$

这正好像数学中的矢量加法，其中 (a, b, c) 是一个矢量的分量，而 (a', b', c') 是另一矢量的分量，这时新的光 Z 就是这些矢量的“和”。这个问题一直在引起物理学家和数学家们的注意。事实上，薛定谔曾经写过一篇有关色视觉的精彩论文，他在这篇论文中发展了这个可用于颜色混合的矢量分析理论。

现在的问题是，哪些可正确地用作原色？就光的混合来说，是没有正确的原色这类东西的。对于实用的目的，可能有三种颜色在得到比较多的混合色方面比其他颜色更为有用，但是我们现在不讨论这个问题。无论哪三种不同的颜色^{*}，总能用正确的比例混合起来以产生无论哪种颜色。我们是不是能够证明这一奇妙的事实呢？若我们在投影灯中改用红色、蓝

* 当然，除了这种情况，如果三者之一可以用混合其他两种颜色配制出来的话。

色和黄色来代替红色、绿色和蓝色。我们是否能用红色、蓝色和黄色配制出比如说绿色呢？

以各种比例把这三种颜色混合起来，我们得到范围相当大的一系列不同颜色，它们几乎遍及整个光谱。但是事实上，经过大量的尝试和失败，我们发现没有什么东西曾经看上去有点像绿色。问题在于我们是否能配制出绿色？回答是肯定的。那么如何配制呢？把一些红色光投射到所要配制的绿色上，我们就能用黄色和蓝色的某一混合色来与之相匹配！就这样，我们确实把它们匹配了，只是除去一点，那就是我们不得不欺骗自己一下，把红色放到另一边去。但是既然我们掌握了某种数学技巧，那就能理解到我们实际上所证明的并不是说 X 总能从比如红色、蓝色和黄色配制，而是在把红色放在另一边之后，我们发现红色加上 X 可以从蓝色和黄色中配制出来。把它放在等式的另一边，这可以解释为它是一个负的数量，所以如果我们允许像式(35.4)那样的等式中的系数既可以是正的也可以是负的，以及把负的数量解释为把它加到另一边，那么任何颜色都可以用任何三种颜色来配制，因而并没有像“这种”基本的原色这样的东西。

我们可以问，是不是有三种颜色，它们对于所有混合只有正的数量。回答是否定的。每一组三原色都对某些颜色要求负的数量，因而也就没有用以定义一种原色的唯一方法。在初等教材中，它们被说成是红色、绿色和蓝色，但那只是因为用这些原色对有些组合无需用负号即可得到较宽的颜色范围而已。

§ 35-4 色 品 图

我们现在从数学的层面上作为一个几何学的命题来讨论颜色的组合。假如任何一种颜色能用等式(35.4)来表示，那么我们可以把它当作一个空间矢量来作图，沿着三根坐标轴画出 a 、 b 和 c 的数值，于是一种颜色就是一个点。如果另一种颜色是 a' 、 b' 、 c' ，那么这种颜色就处在图中别的什么地方。我们知道，这两者之和就是把它们作为矢量相加而得到的颜色。我们可以把这个图解简化一下，并且通过如下的观察把所有东西表示在一个平面上：如果我们有某种颜色的光，而且仅仅把 a 、 b 和 c 都加倍，也就是说，使它们都以同样的比例增强，那么它还是同一种颜色，只是更亮了一些。所以如果我们约定把所有东西都化为同样的光强，那么我们就能把所有东西都投影到一个平面上，这在图 35-4 中就已这样做了。由此可知，由给定的两种颜色以某一比例混合而成的任何颜色，将处在联结这两点的直线上某一点。例如，50 比 50 的混合色将处在它们之间的中点，一种色的 $1/4$ 和另一种色的 $3/4$ 将出现在从一点到另一点的 $1/4$ 处，依此类推。如果我们以蓝色、绿色和红色作为原色，那么我们看到所有能用正的系数配制而成的颜色都处在虚线三角形之内，这几乎包含了所有我们能够看到的颜色，因为这些颜色都包围在以曲线为边界的钟形面积之中。这个面积是从哪里来的呢？有人曾经把所有我们能够看到的颜色与三种特殊颜色非常仔细地比较过。但是我们不必核对所能看见的所有颜色，而只要核对纯光谱色，即光谱线。任何一种光都可以认为是各种纯光谱色的各种正的数量之和——所谓纯是从物理观点来说的。一个给定的光包含有一定数量的红、黄、蓝等等这些光谱色。所以如果我们知道了要获得每一种纯成分需要多少所选定的每一种三原色，那么就能算出要配制我们所给定的颜色每一种需要多少。所以，如果对任意给定的三原色，我们找出了所有光谱色的色系数，那么我们就能制订出整个的颜色混合表。

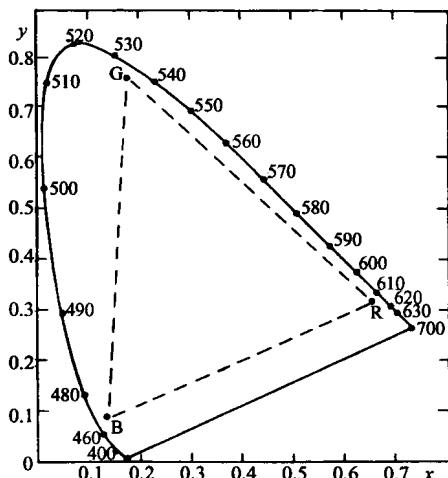


图 35-4 标准色品图

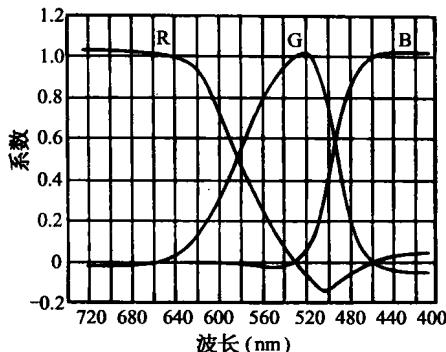


图 35-5 以某组标准原色表示的纯光谱色的色系数

把三种光混合起来这类实验的结果的一个例子如图 35-5 所示。这个图表明,要用红、绿、蓝三种不同的特殊原色配制出每一种光谱色时每一种的数量需要多少。红色在光谱的左端,黄色次之,依此类推,一直到蓝色。但应注意,有些地方必须用负的符号。只是从这样一些数据才可能在一张其 x 和 y 坐标和所用各原色的数量有关的图上确定所有颜色的位置。这是找出两条弯曲边界线的方法。它是纯光谱色的轨迹。任何其他颜色当然都可通过光谱线的相加得到,因而我们发现,把曲线的一个部分和另一部分联结起来所能产生的任何颜色都是自然界中可以得到的一种颜色。图中的直线把光谱中紫色的最外一端和红色的最外一端联系起来。这是紫红色的轨迹。在边界之内是那些可以用各种光配制的颜色,而在它之外是不能用光配制的颜色,这些颜色从来没有看到过(除非在余像中可能看到)。

§ 35-5 色视觉的机制

谈到现在,下一步就提出这样的问题:为什么颜色的行为竟是如此?由杨和亥姆霍兹提出的最简单的理论,假设眼睛中有三种不同的感光的色素,它们有不同的吸收光谱,因此一种色素比如说在红色区吸收很强,另一种色素在蓝色区吸收很强,再一种色素在绿色区吸收很强。当我们把光照射到它们上面时,就会在三个区域内得到不同数量的吸收,而这三部分信息在大脑中、眼睛中、或某个地方以某种方式调节,以确定这是什么颜色。很容易证明,所有颜色的混合法则都符合这一假说的结果。关于这个问题曾经有过相当多的争论,因为接下来的问题当然就是要找出这种色素各自的吸收特性曲线。遗憾的是,我们发现,由于我们能以任何愿意的方式变换颜色坐标,所以用混合颜色的实验只能找到吸收曲线的各种线性组合,而不是个别色素的吸收曲线。人们曾用各种方法试图获得一条特殊的曲线,用它确实能够描述眼睛的某种特殊的物理性质。这种曲线之一是图 35-3 所示的亮度曲线。在这张图上有两条曲线:一条是对于处在黑暗中的眼睛,另一条是对于处在亮光中的眼睛;后者是视锥细胞的亮度曲线。它是这样测得的,即一种色光,其最小数量应是多少才能使眼睛恰好看到它。这条曲线表明眼睛在不同光谱区内的灵敏度有多高。另外,还有一个非常有趣的方法可以测量这条曲线。假如我

们取两种颜色，并使它们显示在同一区域内，再把它们一个变到另一个交换闪变，那么如果闪变频率过低，我们就能看到颜色交替地闪现。然而，随着频率的增加，这种闪变终于会在某一频率消失，这个频率依赖于光的亮度，例如说：每秒来回16次。现在，如果我们相对于这一种颜色调节另一种颜色的亮度或强度，那么到达某一强度时16 Hz频率闪变就会消失。在这样调节出来的亮度下再得到闪变，就必须回到低得多的频率，才能够看到颜色的闪变。所以我们得到频率较高时的所谓亮度闪变以及频率较低时的颜色闪变。利用这种闪变技术可以使两种颜色在“亮度相等”上相匹配。所得结果几乎与测量眼睛时使用视锥细胞观察微弱光线的灵敏度阈值所得的一样，但不是完全相同。大多数研究工作者在这方面都用闪变系统作为亮度曲线的定义。

现在，如果眼睛中有三种对颜色敏感的色素，那么问题就是要确定每一种色素的吸收光谱的轮廓。怎样做呢？我们知道，有些人——男性人口中的百分之八，女性人口中的百分之零点五——是色盲。大多数色盲或色视觉不正常的人对颜色的变化与其他正常人相比具有不同程度的灵敏度，但他们仍需要用三种颜色来进行匹配。然而，有一些人被称为二色性色盲者(dichromats)，对于这种人任何颜色只要用两种原色就可以匹配。于是一个明显的设想是他们缺少三种色素中的一种。如果我们能够找到三种具有不同颜色混合法则的二色性色盲者，那么一种应是缺少红色，另一种应是缺少绿色，再一种应是缺少蓝色的色素沉积。因而通过对所有这些色盲类型的测量，我们就能确定三条曲线！结果发现果然有三种类型的二色性色盲，两种是一般的类型，第三种是极稀少的类型，从这三种类型就可以推断出色素的吸收光谱。

图35-6表示一种特殊类型的称为患绿色盲者的颜色混合。对他来说，相同颜色的轨迹不是一个一个点，而是一条一条直线，沿着每一条直线，颜色是相同的。如果像这种理论所说的，他缺少三部分信息中之一是正确的话，那么所有这些直线应该相交于一点。如果我们在这张图上仔细地进行测量，那么它们确实完全相交。因此，很明显，这是数学家设想出来的，并不表示真实的数据！事实上，如果我们看一下具有真实数据的最新文献，就会发现，图35-6中所有直线的焦点并不准确地位于恰当的位置上。利用上图中的直线不可能找出合理的光谱；在不同区域内，我们需要用负的和正的吸收。但是如果用余斯托伐(Yustova)的新的数据，那么就会发现每一条吸收曲线到处都是正的。

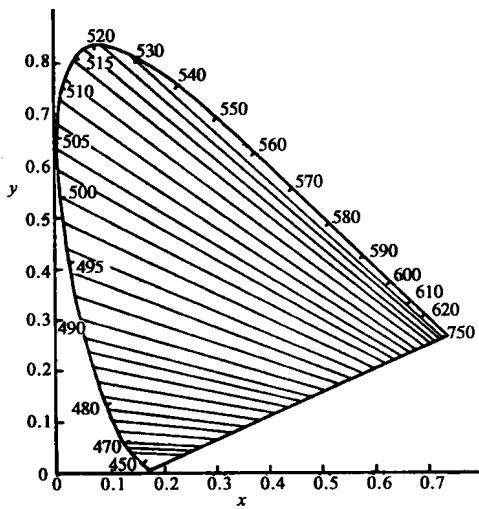


图35-6 被患绿色盲的人搞混乱的颜色轨迹

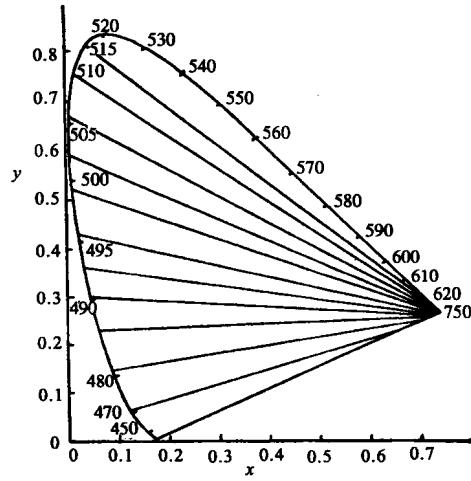


图35-7 被患红色盲的人搞混乱的颜色轨迹

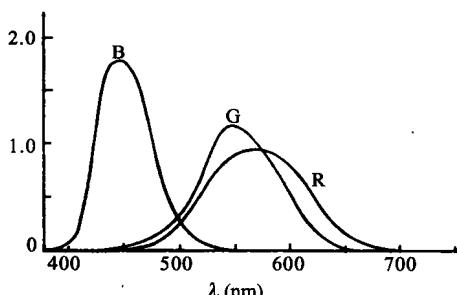


图 35-8 正常三色者的接收器的光谱
灵敏度曲线

图 35-7 表示另一种色盲，即患红色盲的人的情况，它在靠近边界曲线的红端有一个焦点。在这种情况下，余斯托伐近似地得到了同一个位置。利用三种不同的色盲，三种色素的响应曲线最后被确定了下来，如图 35-8 所示。这是最终的结果吗？或许是，但对下列各点还是有一些问题，那就是三种色素的想法是否正确、色盲是否由于缺少一种色素所引起的结果，甚至关于色盲的颜色混合数据是否正确。不同的研究工作者得出不同的结果。这个领域仍在不断发展中。

§ 35-6 色视觉的生理化学

现在，怎样根据眼睛中的真实色素来核对一下这些曲线？从视网膜获得的色素主要是由一种叫做视紫质的色素组成的。它最突出的特性是：第一，它几乎存在于每一种脊椎动物的眼睛中；第二，它的响应曲线和眼睛的灵敏度完美地相适合，像从图 35-9 中可以看到的那样符合得非常好。图中我们用同样的比例画出了视紫质的吸收曲线和适应黑暗的眼睛的灵敏度。这种色素显然是我们在黑暗中用来观察的色素：视紫质是视杆细胞所用的色素，它和色视觉毫无关系。这一事实是 1877 年发现的。即使在今天，还是可以说视锥细胞的色素从来没有在试管中获得过。1958 年人们还是可以说，色素从来没有被看到过。但是从那时候起，拉什顿(Rushton)曾经用非常简单而又巧妙的技术探测到两种这样的色素。

由于眼睛对明亮的光比之对强度弱的光非常不灵敏，所以困难大概在于需要用很多视紫质来观察弱光，但不必用许多色素来观察颜色。拉什顿的想法是：让色素留在眼睛内，并用不论何种方法来测量它。他是这样做的。有一种仪器叫检眼镜，它把光通过眼球的晶状体送进眼睛，然后把反射回来的光聚焦在一起。使用这种仪器人们可以测量出有多少光被反射回来。这样，我们对两次通过色素的光（被眼球的背层所反射，并且再次通过视锥细胞的色素出来的）测量了它的反射系数。自然界并不总是设计得这样美妙的。但视锥细胞有趣地被设计成这样，使得进入视锥细胞的光被来回反射，最后向下钻进顶端处的微小的灵敏点中。光一直往下进入灵敏点，在其底部被反射，而在穿过相当数量的色视觉色素后重新反射回来；而且，通过观察中央凹，那里没有视杆细胞，这样人们就不会被视紫质所搞混。但是视网膜的颜色很早以前就已被人们观察到：它是一种带橙色的粉红色。然后又看到了所有的血管和背后物质的颜色，等等。我们怎么知道看到的就是这种色素呢？回答：首先，我们找一个患有色盲的人，他的色素较少，因此很容易对他进行分析。其次，各种色素像视紫质

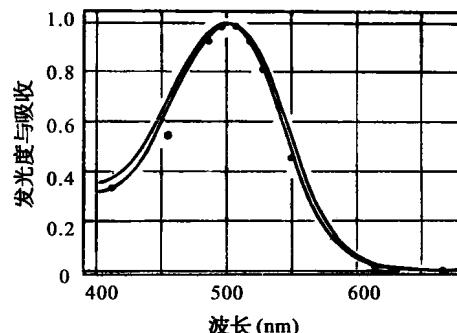


图 35-9 暗适应眼睛的灵敏度曲线和
视紫质的吸收曲线的比较

一样,当被光漂白后强度就有所改变。当我们把光照射它们时,它们就改变浓度。所以,在观察眼睛的吸收光谱时,拉什顿用另一束光照射整个眼睛,使它改变色素的浓度,同时,他测量了光谱的变化,这个差别当然与血液的数量或者反射层的颜色等等无关,而只与色素有关。拉什顿用这种方式获得了患红色盲的人的眼睛的色素曲线,如图35-10所示。

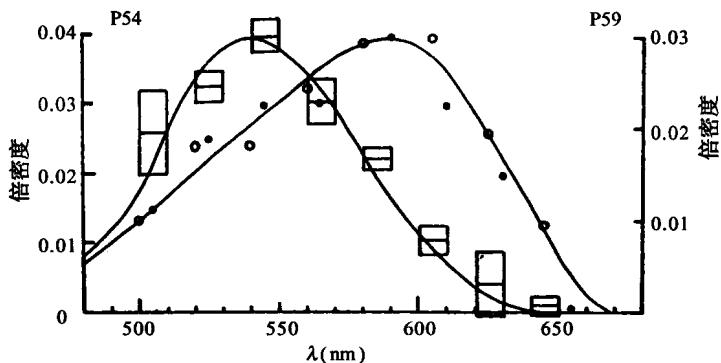


图35-10 患红色盲的人的眼睛(方块)和正常眼睛(点)的色素吸收光谱

图35-10中的第二条曲线是用正常眼睛得到的曲线。并且是在已经确定这种色素是什么色素,而把另一种用对第一种不灵敏的红色漂白之后得到的。红光对患红色盲的人的眼睛没有影响,但对正常眼睛却有影响。这样人们就能对所缺少的色素得到一条曲线。一条曲线的形状和余斯托伐的绿色曲线符合得很好,但红色曲线有少许位移。或许我们抓住了正确的线索,或许没有——最近对患绿色盲的人所进行的工作并没有显示出缺少什么确定的色素。

颜色不是光本身的物理学问题。颜色是感觉,不同颜色的感觉在不同情况中是不同的。举例来说,假如我们有一种由白光和红光叠加而成的粉红色光(用白色和红色所能配制的显然总是粉红色),我们就可以证明白光可以显示为蓝色。如果我们把一个物体放在光束中,它投射两个影子——一个单独为白光所照亮,而另一个为红光所照亮。对大多数人来说,物体的“白色”影子看上去是蓝色,但是如果我们将影子不断扩大,直到它遮盖住整个屏幕,那么我们将看到它突然显示为白色,而不是蓝色!将红光、黄光和白光混合时,我们能够得到性质与此相同的其他效应。红光、黄光和白光只能产生橙黄色,等等。所以如果我们把这些光大致等量地混合在一起,我们只能得到橙色光。然而,当在这束光中投射出不同种类的影子时,那么由于颜色的各种叠加,人们得到一连串美丽的颜色,这些颜色并不存在于光本身之中(它只是橙色),而只存在于我们的感觉之中。我们清楚地看到许多颜色完全与光束中的“物理”颜色不同。重要的是要意识到视网膜已经在“思考”光,它正在把一个区域中所能看到的东西同另一个区域中所看到的东西进行比较,虽然是不自觉的。至于它是怎样进行的,我们在这方面所知道的一切将在下一章中进行讨论。

参 考 文 献

Company, New York, 1953.

Hecht, S., S. Shlaer, and M. H. Pirenne, "Energy, Quanta and Vision", *Journal of General Physiology*, 1942, 25, 819~840.

Morgan, Clifford and Eliot Stellar, *Physiological Psychology*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1950.

Nuberg, N. D. and E. N. Yustova, "Researchs on Dichromatic Vision and the Spectral Sensitivity of the Receptors of Trichromats," presented at Symposium No. 8 *Visual Problems of Colour*, Vol. II, National Physical Laboratory, Teddington, England, September, 1957. Published by Her Majesty's Stationery Office, London, 1958.

Rushton, W. A., "The Cone Pigments of the Human Fovea in Colour Blind and Normal", presented at Symposium No. 8, *Visual Problems of Colour*, Vol. I, National Physical Laboratory, Teddington England, September 1957. Published by Her Majesty's Stationery Office, London, 1958.

Woodworth, Robert S, *Experimental Psychology*, Henry Holt and Company, New York, 1938. Revised edition, 1954, by Robert S. Woodworth and H. Schlosberg.

第 36 章 视觉的机制

§ 36-1 颜色的感觉

在讨论视觉时,我们必须理解(在近代艺术陈列室以外的地方!)人们所看到的不是杂乱的色斑或光斑。当我们注视某一对象时,我们看到一个人或者一个物体;换句话说,大脑解释了我们所看到的是什么。这是怎样做到的,谁也不知道,但无疑这是在很高的水平上做到的。虽然很明显,在有了许多经验之后,我们确实学会了认识人是什么样子的,但是有许多更基本的视觉特征也涉及到从我们所看到的东西的不同部分来的信息的组合。为了帮助我们理解怎样解释整个图像,在这里值得研究一下将不同的视网膜细胞来的信息的组合起来的最初阶段。在这一章中我们将主要集中在视觉方面,虽然在讨论过程中也将提到一些枝节问题。

同一时刻将眼睛几个部分来的信息在十分初等的水平上积累起来,这个过程不是我们能随意控制的也不是能够通过学习得到的本领。这个事实的一个例子是当白光和红光一起照射在同一屏幕上时,白光产生的蓝色阴影。这个效应至少涉及到眼睛对屏幕的背景是粉红色的知识,即使如此,当我们注视着蓝色阴影时,只有“白”光到达眼睛中的某一特殊点上;所以各种信息一定在某个地方已经集中在一起。周围环境愈是完备和熟悉,眼睛对独特的东西进行校正就愈多。事实上,兰德(Land)已经证明,如果用两块能吸收光的透明照相底片以不同比例放在红色和白色前面,并以各种比例来混合表观蓝色和红色,那么就能使之相当好地显示出与真实物体一致的真实景象。在这种情况下,我们也会得到许多表观的中间颜色,这和我们把红色和蓝色、绿色混合时所得到的相似,它们看上去几乎是完整的一套连续分布的颜色。但是如果我们将它们看时,则又不是那么完美。即使如此,只用红色和白色就可以得到这么多的颜色还是令人惊讶的。景象看上去愈是像真实的情况一样,人的眼睛对所有的光实际上不过是粉红色的这一事实,就愈能得到补偿。

另一个例子是在黑白转盘中“颜色”的出现,这种转盘的黑色和白色面积如图 36-1 所示。当盘转动时,在盘的任一半径上亮和暗的变化完全相同,所不同的只是两种类型的“带”的背景。但是两个“环”中的一个看上去好像涂上一种颜色,另一个涂上另一种颜色*。直到现在还没有人知道呈现这些颜色的原因,但是很清楚,最可能的情况是信息在眼睛本身中就已在十分初等的水平上被组合在一起了。

几乎所有现代的色视觉理论都一致认为,颜色混合的数据表

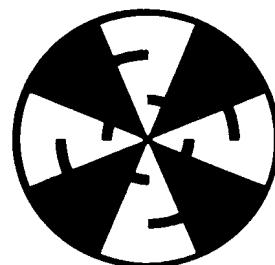


图 36-1 像上面这样的盘子转动时,两个较黑的“环”中只有一个呈现颜色。如果转动方向反过来,则在另一个环上呈现颜色

* 这些颜色与旋转的速率和照明的亮度有关,同时也多少取决于谁在看它们以及他对它们的注视的程度。

明,眼睛的视锥细胞中只有三种色素,而色感觉的产生,基本上是由于这三种色素对光谱的吸收作用。但是当这三种色素共同作用时,与其吸收特性有关的总的感觉不一定是各单独感觉的总和。我们都同意黄色看上去决不是带红的绿色。事实上对于大多数人来说,发现光实际上是许多颜色的一种混合,可能觉得极其惊讶,因为光的感觉大概是由于其他某种混合过程,它不同于音乐中的和弦那样的一种简单混合。在和弦中同时发出三个音符,如果我们仔细倾听,就能分别听出它们。但是我们不能通过仔细注视而看出红色和绿色。

最早的视觉理论表明:有三种色素和三种类型的视锥细胞,每一种视锥细胞包含一种色素。从每一个细胞有一条神经通往大脑,所以有三部分信息被送到大脑,然后各种事情在大脑中都能发生。当然,这是一个不完全的想法:发现信息是怎样沿着视神经送到大脑并没有说明什么,因为我们甚至还没有开始来解决这个问题。我们必须提出一些更为基本的问题,如信息在不同地方组合起来是否会产生任何不同结果?重要的是,它是在视神经中直接送到大脑,或者还是视网膜可能首先对它进行了某种分析?我们已经看到视网膜的简图,它是一种极端复杂的东西,有着许许多多的相互连接的结(图 35-2),因此或许可以对它进行某种分析。

事实上,研究解剖学和眼睛进化的人已经证明,视网膜实际上就是大脑:在胚胎的发育过程中,一部分大脑向前伸出,长的纤维向后生长,将眼睛和大脑连接起来。视网膜正是按照大脑的组织方式组织起来的,就像某个人曾美妙地说过的那样:“大脑发展了一个向外观察世界的方法。”眼睛好比是大脑在外面接触光的一个部分。所以在视网膜中已经进行了颜色的某种分析并不是完全不可能的。

这个猜想为我们提供了一个非常有趣的机会,因为可以说此外没有其他一种感官在把信号送进可以对之进行测量的神经之前,已经包含有这样大量的分析。所有其他感觉的分析通常是在大脑本身中进行的。在大脑中很难在一些特定的部位进行测量,因为这里有如此多的相互连接。但在视觉的情况下就不同,这里我们有的是光以及对之进行分析的三层细胞,分析结果可以通过视神经传递出去。所以我们或许得到了第一次机会从生理上来观察大脑的第一层在第一步是怎样工作的。因此,这就引起了双重的兴趣,不只是对视觉的兴趣,并且是对整个生理学问题的兴趣。

存在三种色素这个事实并不意味着一定要有三种不同的感觉。另外有一种色视觉理论

认为:存在着实际上有各种对抗的颜色系统(图 36-2)。这就是说,如果看到了黄色,就有一条神经纤维传送大量的脉冲,而对蓝色它就传送得比通常的少。其中一条神经纤维以同样的方式传送绿色和红色信息,另一条神经纤维传送白色和黑色。换句话说,在这一理论中,有些人已经就神经的连接系统也就是分析的方法开始进行猜测。

我们想通过这些初步的分析猜测试图解决的问题是那些关于在粉红色背景上所看到的表观颜色的问题,眼睛在适应了不同的颜色以后出现的问题,以及所谓的心埋现象。心埋现象具有这样的性质,比如说白色并不使人“觉得”像红色、黄色和蓝色一样,而且这个理论已经过时,因为心理学家说有四种表观纯色:“有四种刺激,它们具有心理上分别引起简单蓝色、黄

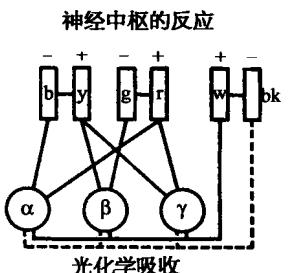


图 36-2 根据色视觉“拮抗”理论的神经连接

色、绿色和红色感觉的显著能力。和赭色、洋红、紫色或大多数可辨别的颜色不一样,这些简单的颜色一点也不含有其他颜色的性质,从这个意义上说它们不是混合而成的,例如,蓝色不带黄色,不带红色,也不带绿色,等等,这些是心理上的原色。”这是一个所谓的心理学事实。要找出所以会得出这个心理学事实的论据,我们确实必须非常认真地查阅所有文献。我们找到的所有有关这个论题的近代文献,都重复同样的说法,也就是一个德国心理学家的说法,他把里奥纳多·达·芬奇(Leonardo da Vinci)作为他所引的权威之一。当然,我们都知道达·芬奇是一个伟大的艺术家。这位心理学家说:“里奥纳多认为有五种颜色。”于是我们进一步查找,终于在一本更古老的书中找到了这个论题的根据。在这本书中讲了这样的一些话:“紫色是带红的蓝色,橙色是带红的黄色,但是红色是否可以看成是带紫的橙色呢?红色和黄色不是比紫色或橙色更加单一吗?要一般的人回答什么颜色是单一的,他就会说出红色、黄色和蓝色三种颜色,而有些观察者再加上第四种——绿色。心理学家习惯于接受四种为显色。”所以这个问题在心理学的分析中是这样的情形:如果人人都说有三种,而某些人说有四种,只要他们要的是四种,那么就是四种颜色。这表明了心理学研究的困难。当然很清楚,我们有这样的感觉,但是要从这些心理学研究中得到许多资料是很困难的。

所以可以进行的另一个方向是生理学的方向,在这里是用实验来弄清楚大脑、眼睛、视网膜或别的地方实际上发生的是什么,而且或许会发现来自不同细胞的脉冲的某些组合沿着某些神经纤维运动。附带说一下,基本色素并不必须分别存在于不同的细胞中,其中可能具有包含各种色素混合物的细胞,含红色素和绿色素的细胞,以及所有三种色素(所有三种都有的信息就是白色信息)的细胞,等等。有许多能把系统连接起来的方法,而我们要找出的是自然界所用的那一种方法。最后,我们期望,在了解生理学上的连接之后,我们就会获得心理学方面的某些知识,所以我们将从这个方向来进行研究。

§ 36-2 眼睛的生理学

我们现在不仅讨论色视觉,而且要讨论一般的视觉,为的是使我们回忆一下图 35-2 中所示的视网膜中的相互连接。视网膜确实像大脑的表面。虽然通过显微镜看到的实际图像,比之这张多少简化了的图画要稍微复杂一些,但是经过仔细分析之后,人们还是可以看到所有这些相互连接。毫无疑问,视网膜表面的每一部分是和其他部分相连接的,而从产生视神经长的轴突传出的信息,是来自许多细胞的信息的组合。在一系列功能中有三层细胞:视网膜细胞,它直接受光的刺激作用;中间细胞,它从一个或少数几个视网膜细胞取得信息,再交给第三细胞层中的几个细胞,然后输送到大脑。各层中的细胞之间还有着各种各样的交叉连接。

我们现在转到眼睛的结构和性能的某些方面(见图 35-1)。光线的聚焦作用主要由角膜来完成,这是由于它有使光线“弯曲”的曲面这一事实。这是我们在水中所以不能看得很清楚的原因,因为这时角膜的折射率 1.37 与水的折射率 1.33 之间相差不是足够大。在角膜后面实际上是折射率为 1.33 的水,而在水后面是一个具有非常有趣结构的水晶体。水晶体具有像洋葱那样的一层一层结构,所不同的只是它完全是透明的,中间部分的折射率是 1.40,外面部分的折射率是 1.38(如果我们能够制造折射率可以调节的眼镜片,那该多好。因为这时我们就可以不必像只有单一折射率的眼镜片那样把它弯曲那么多了)。再则,角膜的

形状并不是球形的。一个球面透镜具有一定数量的球面像差。角膜的边缘部分比球面要“扁平一些”，正是由于这种方式，使得角膜的球面像差比之我们在那里放一个球面透镜时要小一些！光线被角膜-水晶体系统聚焦到视网膜上。当我们注视着较近或较远的物体时，水晶体张紧或放松来改变焦距以适应不同的距离。调节光线总量的是虹膜。虹膜的颜色就是我们所谓的眼睛的颜色，有棕色或蓝色，随人而定。当光量增加和减少时，虹膜就分别向里或向外移动。

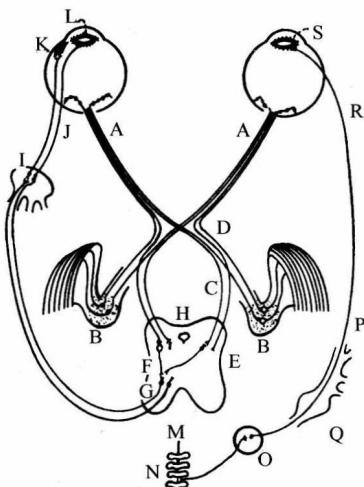


图 36-3 眼睛的机械动作的神经内部连接

放松，这些径向肌肉就向外拉，使虹膜张开。这里像身体中许多其他地方一样，有一对功能相反的肌肉，而且几乎在每一个这类情况中，控制这两种肌肉的神经系统是调节得非常精巧的，所以当信号传出以收紧一种肌肉时，放松另一种肌肉的信号也就自动地传了出来。但虹膜是一个独特的例外；使虹膜收缩的神经是我们已经描述的那些神经，但是使虹膜扩展的神经却无人确切知道从何而来，它们向下进入胸部后面的脊髓，再离开脊髓进入胸部，然后又向上通过颈神经节，这样绕了整个一圈再向上回到头部，以便控制虹膜的另一端。事实上，这个信号是经过一个完全不同的神经系统运行的，它根本不是一个中枢神经系统，而是一个交感神经系统，所以这是使事物运行的一个非常奇特的方式。

我们已经着重指出过关于眼睛的另一件奇特的事情，这就是光敏细胞位于错误的一边，以致光线在到达接收器之前要通过好几层其他的细胞——这些细胞是里外倒置的！所以有些特征是奇妙的，有些则显然是愚蠢的。

图 36-4 表示眼睛和大脑中最直接参与视觉过程的那一部分的连接。视觉神经纤维进入正好在 D 点外面的某一区域，这个区域叫做外侧膝状体，它们从这里再进入大脑中叫做视觉皮层的那一部分。人们应该注意到，来

我们现在如图 36-3 所简略地显示的那样，来看一看控制水晶体的调节，眼睛的运动，使眼球在眼窝里转动的肌肉以及虹膜的运动的神经机构。从视神经 A 输送出来的所有信息，绝大部分被分配到两束神经中的一束（以后我们还要谈到它），然后再从这里送到大脑。但是我们现在感兴趣的只有少数几根神经纤维，它们并不直接通到大脑视觉皮层（这里是“看到”图像的地方），而是通到中脑 H。这些就是用以测量平均光强和调节虹膜的神经纤维，或者，如果像看上去模糊，它们就会设法调节水晶体，或者，如果出现双重像，它们就会设法调节眼睛，使之适合双眼视觉。无论在何种情况下，它们都通过中脑并反馈回到眼睛。K 是调节水晶体的肌肉，L 是另一块伸入到虹膜内的肌肉。虹膜有两个肌肉系统。一个是圆形肌肉 L，当它受到刺激时就会向里拉，使虹膜关闭。它的动作非常快，神经从大脑通过短的轴突直接连接到虹膜。与圆形肌肉相对的肌肉是径向肌肉，这样当物体变暗时，圆形肌肉

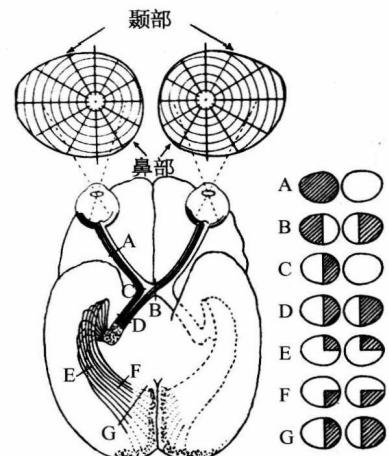


图 36-4 眼睛到视皮层的神经连接

自每只眼睛的纤维其中有一些被送到大脑的另一边,因此所形成的图像是不完全的。从右眼的左边来的视觉神经穿过视神经交叉B,而从左眼的左边来的视觉神经则在这里弯转,沿着同样的途径通过。所以大脑的左边接收到来自每一只眼睛的眼球左边,也就是视场右边的所有信息,而大脑的右边则看到视场的左边部分。以这种方式把分别来自两只眼睛中的各只的信息合并在一起是为了告诉我们物体有多远。这是双目视觉系统。

视网膜和视皮层之间的连接是非常有趣的。如果视网膜上一点被切除或以任何方式被破坏,那么整个纤维就会失去作用,从而我们就能找出它与何处相连接。我们发现这种连接本质上是一对一的——视网膜上每一点在视皮层上就有一点与之对应——视网膜上非常靠近的点在视皮层上也非常靠近。所以视皮层仍然代表视杆细胞和视锥细胞的空间排列,当然有很大的变形。在视场中心占据视网膜非常小一部分的物体在视皮层中扩展到许许多多的细胞。显然,原来靠得很近的物体仍旧靠得很近,这是很有用的。不过,事物最显著的特点在于:通常认为物体相互靠近的最重要的地方应当在视场中央。但不管你相信与否,当我们注视着某一物体时,在视场中央画一条上下直线具有这样的性质:来自直线右边所有的点的信息传送到大脑的左边,来自左边所有的点的信息传送到大脑的右边,这个区域是这样划分的,从中间一直向下切开时,视场中央靠得非常近的物体在大脑中却分开得很远!信息必定以某种方式通过某些其他渠道从大脑的一边传送到另一边,这是十分奇怪的。

这个网状结构究竟是如何“连接”的,是一个非常有趣的问题。有多少是本来已被连接的,有多少是通过学习而连接的,这是一个老生常谈的问题。很久以前人们总是这样想,或许它根本用不到仔细地连接起来,只要粗糙地连接一下就可以。幼儿通过经验学会,当物体“在那里”时,它在大脑中就产生了某种感觉(医生常常告诉我们幼儿“感觉到”什么,但他们怎么能够知道幼儿在一岁时感觉到的是什么呢)。假定说一个一岁的幼儿看见一个物体“在那里”,得到某种感觉,并学会了走到那里,因为当他到达“那里”时却什么也得不到。这个想法或许是不正确的,因为我们已经知道在许多情况下本来就存在着这些特别精细的相互连接。更有启发性的是用蝶螈做的一些最值得注意的实验(附带说一下,蝶螈有直接的交叉连接,而没有视神经交叉。因为蝶螈的眼睛在头部的两边,既没有共同的视场,也没有双眼视觉)。实验是这样做的:我们可以把蝶螈的视神经割断,但视神经又会重新从眼睛中生长出来,成千上万的细胞纤维就这样自己重新建立起来。现在,在视神经中,纤维不再相互靠得很紧——它好像粗大而扎得很松的电话电缆,所有纤维都扭绞和缠绕着,但当视神经到达大脑后,它们又重新被加以整理。当我们割断蝶螈的视神经时,一个有趣的问题是,它是否总会恢复原状?答案是肯定的,这是非常值得注意的。假如我们割断蝶螈的视神经,它就会长回来,并且重新获得了良好的视觉敏锐性。然而,假如我们割断蝶螈的视神经,并把它的眼睛上下倒转,再让它重新长回来,这时它有良好的视觉敏锐性是毫无问题的,但却犯了一个严重的错误,即当它看见一只苍蝇在“这边”时,却扑到“那边”去了,并且永远学不会去改正。因此,一定有一种神秘的方法,使千千万万的神经纤维能够找到它们在大脑中的正确位置。

有多少神经纤维原来就是连接的,有多少是不连接的,这个问题是生物发展理论中的重要问题。答案还不知道,但是在深入细致的研究之中。

对金鱼所做的同样的实验表明,在我们切断视神经的地方,会长出一个可怕的瘤,像一个大疤或伤痕,但即使如此,神经纤维还是长回到它们在大脑中的正确位置。

为了做到这一点,在神经纤维长入原来视神经的通道时,它们必须多次作出判断应当向

哪个方向生长。它们是怎样做到这一点的呢？看来似乎有某种化学诱导物质使不同的纤维对它们有不同的反应。试想一下正在生长的纤维的数目是如此之大，其中每一条都是一个个体，多少与其旁邻有所不同。无论它与哪种化学诱导物质起反应，总能以唯一的方式找到它在大脑中的恰当位置以完成最终的连接！这是一件有趣而又奇妙的事情，也是近年来生物学的重大发现之一，而且毫无疑问，是与许多古老而尚未解决的问题如生长、组织、有机体特别是胚胎的发育有关的。

另一个有趣的现象是关于眼睛的运动。为了在各种情况中都能使两个像符合一致，眼睛必须运动。这里有几种不同的运动：一种是使眼睛追随物体而运动，这要求两只眼睛必须在同一方向运动，即一起向右或向左运动。另一种是使它们指向不同距离上的同一位置，这要求它们作反方向的运动。进入眼睛肌肉的神经都是为了这些目的原先已连接好的。有一组神经能够牵动一只眼睛里面一边的肌肉和另一只眼睛外面一边的肌肉，而同时使各自相反的肌肉放松，这样两只眼睛就能一起运动。另外，还有一个神经中心，当它受到刺激时会使眼睛从平行位置彼此相向运动。每一只眼睛都能向外转向眼角，只要另一只眼睛向着鼻子运动，但是不论自觉或不自觉都不可能使两只眼睛同时转向外面，这不是因为没有肌肉，而是因为没有一个方法能发送一个使两只眼睛都转向外面的信号，除非发生了一种偶然情况或者诸如此类的事，比如说一根神经被切断了。虽然一只眼睛的肌肉确实能够操纵这只眼睛的运动，但即使是一个瑜伽修行者(Yogi)也不可能在主观意志的控制下自由地使两只眼睛同时向外运动，因为看来没有任何方法可以这样做。我们的视神经原先在一定程度上已经连接起来了。这是重要的一点，因为大多数早期的解剖学和心理学等方面的书籍不重视或者不强调我们的视神经原先已经完全连接在一起这个事实——他们说每样东西都是通过学习才知道的。

§ 36-3 视杆细胞

现在我们来更详细地研究在视杆细胞中发生的事情。图 36-5 表示视杆细胞中间一段

的电子显微镜图像（整个视杆细胞还要超出图示区域向上伸展）。图像中有一层一层的平面结构，右边是它的放大图。这种结构中含有视紫质，它使视杆细胞产生视觉效应。视紫红质是一种色素，它是巨大的蛋白质分子，其中含有称做视黄醛的一组特殊物质，这种物质可以从蛋白质中分离出来，而且毫无疑问是吸收光的主要因素。我们不了解形成这些平面的理由何在，但是很可能有某种原因要把所有视紫红质分子保持平行。这些现象的化学方面已经研究得相当深入，但其中或许还要加上一些物理方面的东西。可能是这样：所有分子所以排成某种横列是为了当一个分子受到激发时所产生的电子或者诸如此类的东西能够一直向下跑到终端的某个地方，并把信号发送出去。这是一个非常重要的问题，而且现在还没有研究出来。在这个领

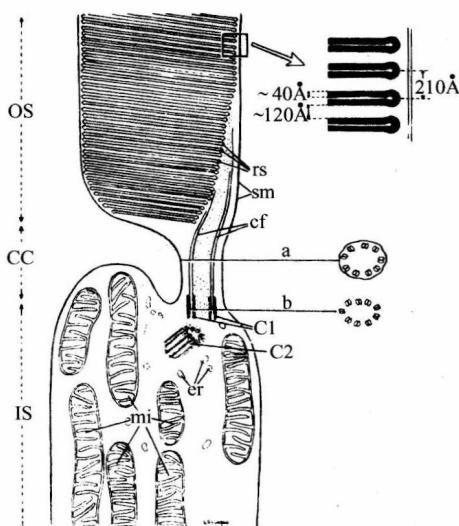


图 36-5 视杆细胞的电子显微镜图像

域中最终总要用到生物化学和固体物理或与之类似的一些学科。

这种层状结构在光起重要作用的其他情况中也出现,例如在植物的叶绿体中,光在这里产生光合作用。假如我们把叶绿体放大,就会发现与上面一样有几乎同样类型的层状结构,当然这里所含的是叶绿素,而不是视黄醛。视黄醛的化学结构式如图36-6所示。沿着边链它有一连串交替出现的双键,这几乎是所有吸收作用强的有机物质像叶绿素、血液等等的特征。人类不可能在自己的细胞中制造这种物质——我们必须从食物中摄取它,因此要吃一种特殊形式的物质。这种物质除了有一个氢原子联接在右端以外,和视黄醛完全相同,它叫做维生素A,如果我们不摄取足够的维生素A,就得不到视黄醛的供应,眼睛就要变成通常所说的夜盲,因为在这种情况下晚上用视杆细胞看东西时,视紫红质中就没有足够的色素。

这样的一连串双键为什么能够非常强烈地吸收光呢,其原因现在也已经知道了。我们可以在这里作一提示:这一连串交替的双键叫做共轭双键,一个双键意味着它有一个额外的电子,而这个额外的电子很容易向左或向右移动。当光线击中这个分子时,每个双键的电子都向同一方向移过一步。整个键中所有电子的移动,好像一连串骨牌倒下来一样。虽然每一个电子只移动很小一段距离(我们应该预料到在单个原子中只能使电子运动一小段距离),但是其总的效果就好像一个电子从一端走到另一端一样!这好像和一个电子通过整个距离作来回运动一样,也就是这样,在电场的影响下,我们所得到的吸收作用比之使电子只移动和一个原子相联系的距离所得到的要强得多。由于很容易使电子来回运动,视黄醛就非常强烈地吸收光,这就是视黄醛的物理-化学的最终机理。

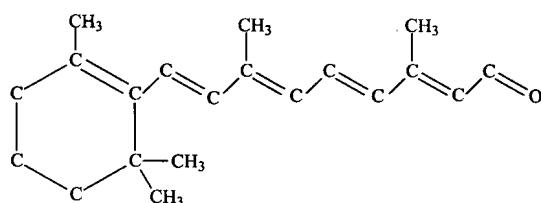


图36-6 视黄醛的结构

§ 36-4 (昆虫的)复眼

我们现在回到生物学上来。人眼并不是仅有的一种眼睛。在脊椎动物中,几乎所有眼睛本质上都和人的眼睛相似。然而,在低等动物中有许多其他种类的眼睛,如眼点、各种眼杯,以及其他灵敏度不高的东西,我们没有时间来一一讨论它们。但是在非脊椎动物中有另一种高度发展的眼睛,这就是昆虫的复眼(大多数具有巨大复眼的昆虫也还有各种附加的单眼)。蜜蜂是一种昆虫,它的视觉有人已经非常详细地研究过了。研究蜜蜂视觉的性质比较容易,是因为它们受到蜜的吸引。我们可以做这样的实验:把同样的蜜放在蓝纸或红纸上,看一看它们会飞到哪一种纸上去。用这个方法曾经揭露了有关蜜蜂视觉的一些非常有趣的事情。

在测试蜜蜂能够看出两张“白”纸之间的颜色差别有多敏锐这个问题上,有些研究者发现它的辨色本领不十分好,而另一些人则发现它出奇地好。甚至在这两张白纸几乎完全一样的情况下,蜜蜂仍然能够辨别出它们的差别。实验者在一张纸上涂锌白,在另一张纸上涂铅白,虽然在我们看来这两张纸完全相同,但是蜜蜂却能够容易地区别它们,因为它们在紫外区域反射不同数量的光线。用这个方法发现了蜜蜂眼睛灵敏的光谱范围比我们自己的要宽。我们的眼睛能看到7 000~4 000 Å的光,也就是从红光到紫光,但是蜜蜂的眼睛能一直

往下看到 $3\,000 \text{ \AA}$ 的光, 即进入到了紫外区! 这就产生了许多有趣的效应。首先, 蜜蜂能够区别在我们看来相似的许多花朵。当然, 我们必须理解到, 花的颜色并不是由于我们的眼睛而设计的, 而是为了蜜蜂, 这些颜色是把蜜蜂吸引到某一特定花朵的信号。我们都知道有许多“白”花。但是非常明显, 蜜蜂对于白色并不很感兴趣, 因为结果证明, 所有白花反射紫外线的本领各不相同。它们并不像真正的白色那样能够百分之百地反射紫外线。既然并不是所有的光都被反射回去, 那么当缺少紫外线时, 白就成了一种颜色, 正像对于我们来说, 如果缺少了蓝色, 白就显示为黄色。因此, 所有的花对于蜜蜂都是有颜色的。然而, 我们也知道蜜蜂看不见红色。所以, 我们也许认为所有的红色在蜜蜂看来应该是黑色。但事实并非如此! 对红花所作的仔细研究表明, 甚至用我们自己的眼睛也可以看出绝大多数红花带有蓝的色彩, 因为它们主要反射一些额外的蓝色, 这就是蜜蜂所看到的那部分。此外, 实验还表明, 花瓣的不同部分对紫外线的反射也是不同的, 等等。所以如果我们能像蜜蜂看到花朵那样看到它们, 它们甚至将更加美丽并有更多的差异。

不过, 已经证明, 有少数红花既不反射蓝色, 也不反射紫外线, 因此对于蜜蜂来说将呈现黑色! 对于关心这件事的人们, 这已引起他们的某种忧虑, 因为他们担心这种事情: 黑色看来不像是一种使蜜蜂感兴趣的色彩, 因为很难把它与脏的和旧的阴影区别开来。实际上蜜蜂确实不来拜访这些红花, 这些是蜂鸟常来拜访的花, 因为蜂鸟能够看见红色!

蜜蜂视觉的另一个有趣的方面是, 蜜蜂通过观察一小片蓝天, 而不用看到太阳本身, 就能明确知道太阳的方向。我们不容易做到这一点。如果我们通过窗户看天空时, 看到它是蓝色的, 能够知道太阳在哪个方向吗? 蜜蜂能够知道, 因为蜜蜂对偏振光相当敏感, 而天空中的散射光是偏振的*。至于这种敏感性是怎样起作用的, 这个问题仍在争论之中。是否因为在不同的情况下光的反射不同, 或者是因为蜜蜂的眼睛有直接的感觉力, 到现在为止都还不清楚**。

也有人说, 蜜蜂能够看到快至每秒振动 200 次的闪光, 而我们只能看到每秒 20 次。蜜蜂在蜂巢中的运动是非常敏捷的, 它们的脚在不停地移动, 翅膀在不停地振动, 但是用我们的眼睛很难看到这些运动。然而, 如果我们能够看得更快一点, 那么我们就能看到这种运动。眼睛有这样快的反应, 对于蜜蜂可能是非常重要的。

现在我们来讨论预计的蜜蜂的视敏度。蜜蜂的眼睛是复眼, 它由大量叫做小眼的特殊细胞所构成, 这些小眼呈圆锥形地排列在蜜蜂头部外边的球面上(大体而言)。图 36-7 表示这样一个小眼的图像。在顶端有一个透明的区域, 类似于一种“水晶体”, 但实际上它更像一个滤光镜或导光管, 使

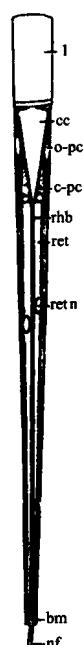


图 36-7 小眼的构造(复眼中的一个单细胞)

* 人眼对于光的偏振也有点敏感性, 而且也能学会辨别太阳的方向! 这里所涉及的一个现象叫做海丁格刷(Haidinger's brush): 当一个人用偏振镜注视着宽广的无特征的苍穹时, 在视场的中央可以看到一个微弱略带黄色的沙漏状图案。如果不用偏振镜, 而把他的头绕着视轴前后转动, 这时在蓝色的天空中也能看到这一现象。

** 在做完这一讲演以后所获得的证据表明, 这是眼睛直接感觉到的。

光沿着细长的纤维射入,这种纤维可能就是发生吸收的地方。从另一端引出的是神经纤维。中心纤维被旁边六个细胞所包围,实际上它们把中心纤维掩藏了起来。就我们的目的来说,这些叙述已经足够了,重要的一点是:这种小眼是圆锥状的东西,而且许多小眼一个挨一个地安放在蜜蜂眼睛的整个表面上。

我们现在来讨论蜜蜂眼睛的分辨率。假如我们画一条直线(图36-8)表示表面上的小眼,并且假定这个表面是一个半径为 r 的球面。那么运用我们的大脑,并且假设进化像我们一样聪明,就能准确算出每个小眼该有多宽!如果小眼非常之大,就不会有很大的分辨率。这就是说,一个细胞从一个方向得到一部分信息,而其相邻的细胞从另一个方向得到一部分信息,等等,但蜜蜂不可能清楚地看见这两个方向之间的东西。所以眼睛视敏度的不确定性肯定和一个角度有关,这个角度就是小眼的端面相对于眼睛的曲率中心所张之角(眼睛细胞当然只存在于球面上;球面的里边是蜜蜂的头部)。从一个小眼到下一个眼之间的角度就是小眼的直径除以眼睛表面的半径

$$\Delta\theta_g = \delta/r. \quad (36.1)$$

所以我们可以说:“ δ 愈小,视敏度就愈高。那么为什么蜜蜂不用非常非常小的小眼呢?”回答是:我们懂得足够的物理学,所以能够理解到,假如我们试图让光线进入一条很细的狭缝,那么由于衍射效应我们就不能在一个给定的方向上看得很清楚。从几个方向来的光都能进入小眼,而且由于衍射,从角度 $\Delta\theta_d$ 射来的光线也能被它接收到

$$\Delta\theta_d = \lambda/\delta. \quad (36.2)$$

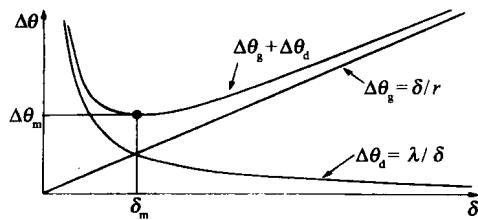


图36-9 小眼的最佳大小为 δ_m

现在我们可以看出,如果 δ 太小,那么每个小眼就会由于衍射而不只看到来自一个方向的光,如果 δ 太大,那么每一小眼只能看到来自一定方向的光,但是没有足够多的小眼以获得清晰的全景。所以我们调节距离 δ ,以使这两者的总效应变为最小值。如果我们把两者相加,并找出其总和为最小的那个位置(图36-9),我们发现

$$\frac{d(\Delta\theta_g + \Delta\theta_d)}{d\delta} = 0 = \frac{1}{r} - \frac{\lambda}{\delta^2}, \quad (36.3)$$

从这个式子得出距离

$$\delta = \sqrt{\lambda r}. \quad (36.4)$$

如果我们估计 r 大约是3 mm,取4 000 Å作为蜜蜂能够看见的光,把两者相乘并取平方根后,求出

$$\delta = (3 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-7})^{1/2} \text{ m} = 3.5 \times 10^{-5} \text{ m} = 35 \mu\text{m}. \quad (36.5)$$

书本上说直径是30 μm,可见符合得相当好!所以很明显,上面提出的理论确实成立,而且

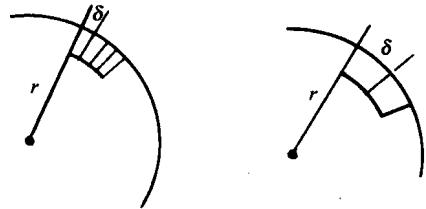


图36-8 蜜蜂眼睛内小眼排列略图

使我们懂得了是什么因素决定蜜蜂眼睛的大小！很容易把上面的数字代回到前面式子中去，以求出蜜蜂眼睛的角分辨率实际有多大；与我们的相比它真是太可怜了。我们可以看清楚的物体，其表观大小比蜜蜂所能看清楚的要小30倍；与我们所看到的相比，蜜蜂只是看到一个不在焦点上的模糊像。虽然如此，这还是不错的，因为这是它们所可能做到的最好的了。我们也许会问，为什么蜜蜂不发展一只像我们那样好的眼睛，例如具有水晶体等等。这里有几个有趣的原因。首先是蜜蜂太小了；如果它有像我们那样的眼睛，那么若与它的整个身体相比，其开口的大小大约是 $30\text{ }\mu\text{m}$ ，这时衍射将变得如此重要，以致它无论如何都不能看得很清楚。所以如果眼睛太小，它就不好。其次，如果它像蜜蜂的头一样大，那么眼睛将占据蜜蜂的整个头部。复眼的妙处就在于它不占空间，而只是蜜蜂头部很薄的一层表面。所以当我们争辩说它们应当按照我们的方式去做时，我们必须牢记，它们有自己的问题！

§ 36-5 其他的眼睛

除了蜜蜂之外，许多其他的动物也能看见颜色。鱼、蝴蝶、鸟和爬虫都能看见颜色，但是人们一般认为大多数哺乳动物却不能。灵长类能够看见颜色。鸟无疑能够看见颜色，这说明了鸟的不同颜色。如果雌鸟不能看见颜色，那么带有这样光彩夺目的颜色的雄鸟就没有意思！这就是说，鸟在性别方面的“无论哪种”进化都是因为雄鸟能够看见颜色的结果。所以以后我们看到雄孔雀，并且想到它显示出一种多么灿烂和华丽的彩色，所有颜色又是多么优美，欣赏所有这些会使我们得到多么美妙的审美感觉时，我们不应当赞美雄孔雀，而应当赞美雌孔雀的视觉敏锐性和审美感觉，因为这才是产生这种美丽景象的起因。

所有无脊椎动物只有进化很差的眼睛或复眼，但是所有脊椎动物都有与我们非常相似的眼睛，除去一个例外。当我们考虑动物中的最高级形式时，我们通常会说：“这就是我们！”但是如果我们将偏见少一点的观点，并且限于讨论无脊椎动物，而不把自己包括在内，这时再问什么是最高级的无脊椎动物，那么大多数动物学家会一致同意章鱼是最高级的动物！非常有趣的是，除了它具有一个对于无脊椎动物来说发展得相当好的大脑及其反应等等以外，还独立地发展了一种与众不同的眼睛。它不是复眼或眼点——它有角膜，眼睑，

虹膜和水晶体，以及两个含水状液的区域，并且在后面还有视网膜。它与脊椎动物的眼睛基本上相同！这是在进化中殊途同归的一个明显的例子，在这里大自然对同一个问题两次发现了同样的解答，只是作了少许改进。令人惊异的是，在章鱼中也发现它的视网膜是大脑的一部分，并且是以和脊椎动物同样的方式在胚胎发育过程中分离出来的，但是有趣的一个不同之点是，对于光灵敏的细胞是长在里边，而进行思考的细胞则长在它们的背后，不像我们的眼睛那样是“里外倒置”的。所以我们至少可以看到，把里面放在外面是没有特别理由的。在大自然作另一次试验的时候就把它改正过来了（参见图36-10）！世界上最大的眼睛是大

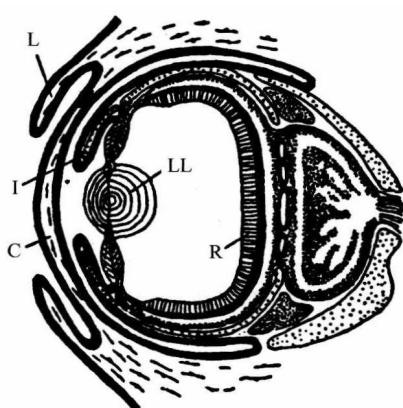


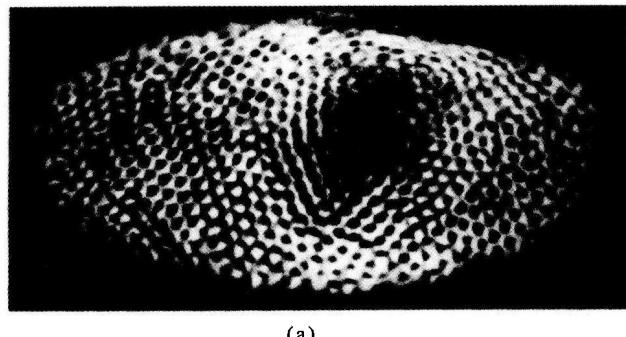
图 36-10 章鱼的眼睛

鸟贼的眼睛；曾经发现过它的直径可达 15 in。

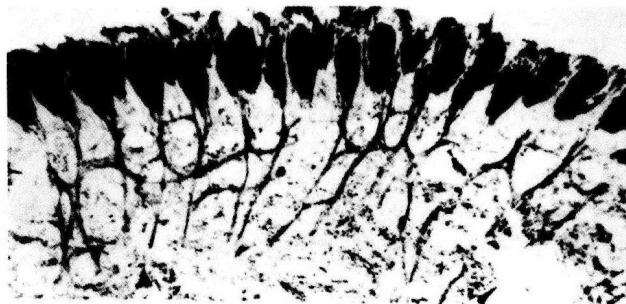
§ 36-6 视觉的神经学

我们论题的要点之一是信息从眼睛的一部分到另一部分的相互连接。我们来讨论鲎的复眼，对于它已经做过不少的实验。第一，我们必须鉴别哪一种信息可以沿着神经传送。神经携带一种扰动，它具有电的效应且易于探测。这是一种类似于波的扰动，它顺着神经传递而在其另一端产生一个效应：神经细胞上细长的一段叫做轴突的能传送信息，如果它的一端受到刺激，则有一种叫做“峰”的电脉冲沿着它传送过去。当一个峰在神经中传送时，另一个就不可能立刻跟着而来。所有的峰大小相等，所以当物体受到较强的刺激时，我们不是得到较高的峰，而是每秒钟内得到较多的峰。峰的大小取决于神经纤维的种类。弄清楚这一点对于要知道其后将发生什么是很重要的。

图 36-11(a)表示鲎的复眼；它只有大约一千个小眼，对于一只复眼来说，这并不算是很多的。图 36-11(b)是这个系统的横截面。人们可以看到许多小眼，神经纤维从它们出来而进入大脑。但要注意到，即使在鲎中还是有少量的相互连接，只是与人眼相比，它们远远没有那样精致复杂，但却为我们提供了研究一个比较简单的例子的机会。



(a)



(b)

图 36-11 鲎的复眼

(a) 正视图；(b) 横截面

现在我们来看看实验。这些实验是这样做的：把细的电极插进鲎的视神经中，并把光只照射到其中一个小眼上，这用一组透镜很容易做到。如果在某一时刻 t_0 把灯光开亮，并测

量神经放出的电脉冲,那么我们发现在经过一个短暂的延迟后才产生一系列快速的放电,这种放电逐渐缓慢下来终于到达一个均匀的速率,如图 36-12(a)所示。当灯光熄灭时,放电也就停止。非常有趣的是,当我们把放大器联接到同一条神经纤维上,而把光照射在另一个小眼上时,结果什么也没有发生,也没有出现什么信号。

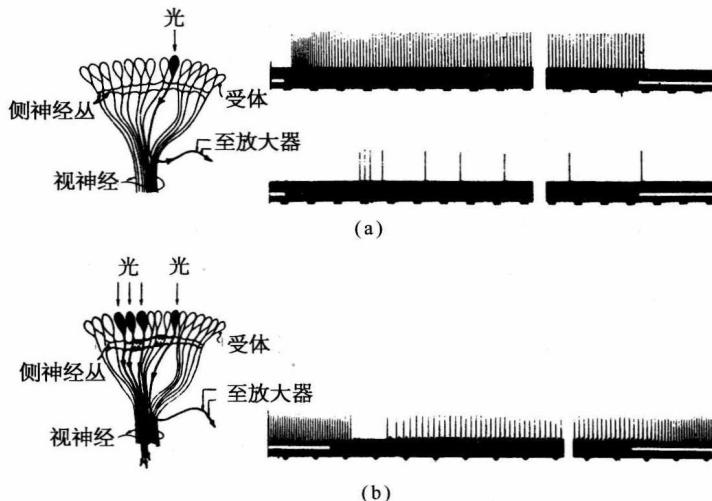


图 36-12 鲨的眼睛的神经纤维对于光线的反应

我们现在来做另一个实验:把光照射在原来的那个小眼上,并得到与前同样的反应,但是如果我们现在把光同时也照射到其邻近的一个小眼上,脉冲就会中断一个短暂的时间,然后以缓慢得多的速率放出[图 36-12(b)]。这表明一条神经内的脉冲的速率将被从另一条神经内放出的脉冲所抑制!换句话说,每一条神经纤维都携带着与其相连的一个小眼传出的信息,但是它所携带的信息量将为来自其他小眼的信号所抑制。所以,举例来说,如果整个眼睛或多或少被均匀照射,那么来自每一个小眼的信息都将变得比较微弱,因为它受到了这么多的抑制作用。事实上这种抑制作用是叠加性的——如果我们把光照射到几个相邻的小眼上,抑制作用就非常之强。小眼靠得愈近,抑制作用也愈强,如果小眼相互之间离得足够远,则抑制作用实际上等于零。所以它是相加的,并与距离有关;这就是来自眼睛不同部分的信息在眼睛本身中组合起来的第一个例子。稍加思索,或许我们可以看出这是为了加强物体边界的反差所作的一种设计.因为假如景色的一部分是亮的,另一部分是暗的,那么

在明亮区域中的小眼所放出的脉冲被邻近的所有其他的光所抑制,因而它比较弱。另一方面,在亮暗边界上的一个发生“有亮光”脉冲的小眼也受到邻近其他小眼的抑制,但是没有那么多,因为有一边没有受到光的照射;因而总的信号就比较强。其结果将是像图 36-13 所示的那样一条曲线。鲨将看到一个边缘加强了的轮廓。

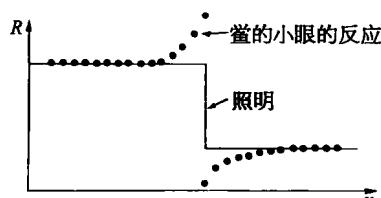


图 36-13 鲨的小眼在突然改变照
明的边界附近的净反应

轮廓被加强这个事实,很早就为人们所知道:事实上,这是曾被心理学家们所多次讨论过的一件值得注意

的事情。要描绘一个物体，我们只要画出它的轮廓即可。我们是多么习惯于看到只有轮廓的图画啊！什么是轮廓？轮廓只是明与暗或是一种颜色与另一种颜色之间差异的边界而已。它并不是什么确定的东西。无论你相信与否，并不是每个物体都有一条线围绕着它！实际上是没有这样一条线的。它只是我们自己心理上虚构出来像是有一条线存在。现在我们开始懂得了为什么这一条“线”是为了获得整个物体而提供的足够的线索这个道理。我们自己的眼睛大概也是以同样的方式工作的——只是复杂得多，但是十分相似。

最后，我们将简略地描述一下对青蛙所做的一项更精细、美妙和高级的研究工作。在把一根非常精细的、做得很巧妙的探针插进青蛙的视神经，对青蛙做相应的实验时，人们可以得到沿着一根特定的轴突引出的信号，而且像在鲎的情况下一样，我们发现这种信息并不仅与眼睛中的一个点有关，而是几个点的信息的总和。

青蛙眼睛的作用的最新描述如下：人们能够找到四种不同的视神经纤维，也就是说有四种不同的反应。这些实验不是用照亮或关掉光脉冲来做的，因为这不是青蛙所能看得见的东西。青蛙只是蹲在那里，它的眼睛一动也不动，除非旁边的睡莲的叶子前后摇摆，在这种情况下，它的眼睛就会跟着晃动，以使叶子在它眼中的像正好保持不动。青蛙并不转动它的眼睛。如果在它的视场中有什么东西，如一只小虫在移动（它必须看得见在固定背景上移动的微小物体），那么就会发现有四种不同类型的能放电的神经纤维，它们的性质列在表36-1中。所谓不能消除的持续边界探测，意见是说如果我们把有边界的物体放进青蛙的视场中，那么当物体移动时，在这种特定的神经纤维中就放出大量的脉冲，但是它们会逐渐减弱下来变为持续不变的脉冲，而且只要边界存在，即使物体保持静止不动，这种脉冲仍能继续下去。如果我们把灯熄灭，脉冲就停止。如果我们再把灯开亮，那么只要边界仍在视场中，脉冲就会重新开始。所以说它们是不能消除的。另一种纤维与此非常相似，只是如果边界是直线，它就不起作用。对它来说，必需是凸出的边界，暗的背景！为了要知道凸面移近，青蛙眼睛的视网膜中的内部联接系统需要多么复杂啊！此外，虽然这种神经纤维能使脉冲持续一段时间，但它不像前一种那样能持续那么久，而且如果把灯熄灭然后再开亮，脉冲就不会重新建立起来。这取决于凸面是否移入。青蛙的眼睛看到有凸面进来，并且记住了它在那里，但是如果我们只把灯光熄灭片刻，青蛙就把它完全忘了，并且再也看不见它。

表36-1 青蛙视神经纤维中反应的类型

类 型	速 率	视场角度
1. 持续的边界探测(不能消除的)	$0.2 \sim 0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	1°
2. 凸出边界的探测(能消除的)	$0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$2^\circ \sim 3^\circ$
3. 反差变化的探测	$1 \sim 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$7^\circ \sim 10^\circ$
4. 变暗探测	高到 $0.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	大到 15°
5. 黑暗探测	?	非常大

另一个例子是反差变化的探测。如果有一个边界正在移入或移出，就会在这种神经纤维里产生脉冲，但是如果物体静止不动，则就什么脉冲都没有。

此外，还有一种变暗探测器。如果光的强度下降，它就产生脉冲，但是如果光的强度一直保持较低或者较高，脉冲就停止；它只在光线变暗时起作用。

最后，还有一些神经纤维，它们是暗探测器——这是一件最令人惊异的事——并且任何

时刻都在激发！如果我们使光增强，它们激发得慢一些，但仍然随时都在激发。如果我们使光减弱，它们激发得较快，并且同样也随时都在激发。在黑暗中，它们则激发得像发狂一样，好像永远在说“好暗呀！”“好暗呀！”“好暗呀！”

现在看来要把这些反应加以分类似乎比较复杂，以致我们也许觉得这些惊奇的实验是否会被解释错了。但非常有趣的是，在青蛙的解剖学中同样的这些分类也是区别得非常清楚的！在这些反应被分类之后，通过其他的测量（这在以后对于这种分类是重要的）发现在不同纤维上信号的传送速率是不同的，所以这是另一种可以核实我们找到的是哪一种纤维的独立的方法。

另一个有趣的问题是：一条特定的纤维其作用所涉及的区域有多大？答案是对不同类型的纤维是不同的。

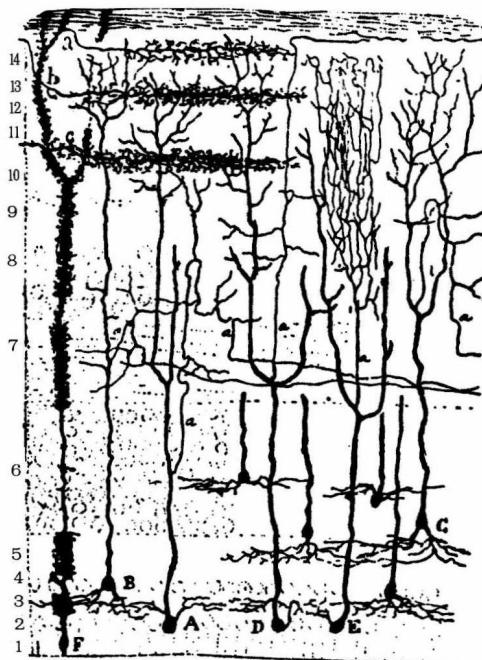


图 36-14 青蛙的大脑覆盖层

图 36-14 表示所谓青蛙的大脑覆盖层的表面，这里是神经纤维从视神经始进入大脑的地方。从视神经来的所有神经纤维在大脑覆盖层的不同层中连接在一起。这种层状结构和视网膜很相似；这是我们所以知道大脑和视网膜非常相似的部分原因。现在我们用一个电极依次向下插到各层中去，从而可以找出哪一种视神经终止在哪个地方。我们所得到的一个美妙而惊人的结果是，不同种类的纤维终止在不同的层中！第一种纤维终止于第 1 层，第二种纤维终止于第 2 层，第三种和第五种纤维终止于同一层，第四种纤维终止于最深的层（这符合得多好啊！它们几乎是按正确的次序编号的！不，这就是为什么人们要按这个次序编号的原因，第一篇论文却不是按这个次序编号的）。

我们可以简略地把刚才所学到的东西总结如下：人的眼睛里大概有三种色素。可能有许多不同种类的感受细胞，其中各以不同比例含有这三种色素；但是有许多交叉联接可以通过神经系统中的增强和叠加来进行相加或相减。所以在我们真正懂得色视觉之前，必须先懂得什么是最后的感觉。目前这还是一个尚未解决问题，但是用微电极等等方法进行的研究，或许最终能为我们提供更多有关如何看见颜色的知识。

参 考 文 献

Committee on Colorimetry, Optical Society of America. *The Science of Color*. Thomas Y. Crowell Company, New York, 1953.

“Mechanisms of Vision”, 2nd Supplement to *Journal of General Physiology*, Vol. 43, No. 6, Part 2, July 1960, Rockefeller Institute Press.

Specific Articles:

DeRobertis, E. , "Some Observations on the Ultrastructure and Morphogenesis of Photoreceptors", pp. 1~15.

Hurvich, L. M. and D. Jameson, "Perceived Color, Induction Effects and Opponent-Response Mechanisms", pp. 63~80.

Rosenblith, W. A. , ed. , *Sensory Communication*, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, Mass. , 1961.

"Sight, Sense of", *Encyclopedia Britannica* , Vol. 20, 1957, pp. 628~635.

第 37 章 量子 行 为

§ 37-1 原 子 力 学

在前面几章中,我们讨论了一些基本概念,这些概念对理解光——或一般说电磁辐射——的大多数重要现象是必须的(我们将少数几个特殊的论题,明确地说即光密介质折射率的理论和全反射的理论,留到下一年去讲)。我们所讨论的这些内容称作电磁波的“经典理论”。这个理论非常恰当地描述了自然界的许多现象。当时我们还不必去为光的能量总是以颗粒即“光子”的形式出现这一事实而操心。

我们打算研究的下一个论题是包含着大量物质的物体的性质,比方说,它们的力学与热学性质问题。在讨论这些性质时,我们将发现,“经典”(或者旧的)理论几乎立即失效,因为物质实际上是由原子大小的微粒所构成的。然而,我们要处理的仍然只是其中的经典部分,因为这是我们能够应用所学过的经典力学来理解的仅有部分。但是我们不会获得很大的成功。我们将发现,与讨论光不同,讨论物质时很快就会遇到困难。当然,我们也可以一直回避原子效应。不过在这里我们却要插进一段关于物质量子性质的基本观念,即原子物理的量子观念的简短叙述,以便对所略去的是一些什么有一个概念。因为我们必须略去一些不可避免地要接触到的重要题材。

所以,我们现在就来简单介绍一下量子力学,但真正深入的讨论只能留待以后再进行。

“量子力学”详细描述物质的行为,特别是发生在原子尺度范围内的事件。在极小尺度下的事物的行为与我们有着直接经验的任何事物都不相同。它们既不像波动,又不像粒子,也不像云雾,或弹子球,或悬挂在弹簧上的重物,总之不像我们曾经见过的任何东西。

牛顿曾认为,光是由微粒构成的,但是,正如我们已经知道的那样,当时发现光的行为像一种波动。然而,后来(在 20 世纪初叶)人们发现,光的行为有时确实又像粒子。又比如,在历史上,电子起先被认为像粒子,后来发现它在许多方面的性质像波。所以实际上它表现得两者都不像。现在我们已放弃了这些说法,我们干脆说:“它两者都不像”。

然而,有一点是幸运的:电子的行为恰好与光相似。原子客体(电子、质子、中子、光子等等)的量子行为都是相同的,它们都是“粒子波”或者随便什么你愿意称呼的名称。所以,我们所学的关于电子(我们将用它作为例子)的性质也可应用到所有的“粒子”,包括光子。

在本世纪的前 25 年中,人们逐渐积累了有关原子与其他小尺度粒子行为的知识,得以知道极小物体是如何活动的一些线索,由此也引起了更多的混乱,到 1926~1927 年间,薛定谔、海森伯与波恩终于解决了这些问题,他们最后对小尺度物质的行为作出了协调一致的描述。在这一章中我们将开始研究这种描述的主要特点。

因为原子的行为与我们的日常经验不同,所以很难令人习惯,而且对每个人——不管是新手,还是有经验的物理学家——来说都显得奇特而神秘。甚至专家们也不能以他们所希

望的方式去理解原子的行为,而且这是完全有道理的,因为一切人类的直接经验和所有的人类的直觉都只适用于大的物体,我们知道大物体的行为将是如何,但是在小尺度下事物的行为却并非如此。所以我们必须用一种抽象的或想象的方式来学习它,而不是把它与我们的直接经验联系起来。

在本章中,我们将直接讨论以最奇特的方式出现的神秘行为的基本特征。我们选择用来考察的一种现象不可能以任何经典方式来解释——绝对不可能——但它却包含了量子力学的要点。事实上,它包含的只是奥秘,从“解释”它是如何起作用的这个意义上来说,我们还不能解释这个奥秘。我们将告诉你们,它是怎样起作用的。在告诉你它是怎样起作用的同时,我们将把所有量子力学的基本特性都告诉你。

§ 37-2 子弹实验

为了试图理解电子的量子行为,我们将在一个特制的实验装置中,把它们的行为和我们较为熟悉的子弹那样的粒子的行为以及如水波那样的波的行为作一比较和对照。首先考虑子弹在图 37-1 所示的实验装置中表现的行为。我们有一挺机枪射出一连串子弹,但它不是一挺很好的机枪,因为它发射的子弹(无规则地)沿着相当大的角度散开,如图所示。在机枪的前方有一堵用铁甲制成的板墙,墙上开有两个孔,其大小正好能让一颗子弹穿过,墙的后面是一道后障(比如说一道厚木墙),它能“吸收”打上去的子弹。在后障前面,有一个称为子弹“检测器”的物体,它可以是一个装着沙子的箱子,任何进入检测器的子弹就被留在那里聚集起来。需要时可以出空箱子,清点射到箱子里面的子弹数。检测器可以(沿我们称为 x 的方向)上下移动。利用这个装置,我们可以通过实验找出下列问题的答案:“一颗子弹通过墙上的孔后到达后障上离中心的距离为 x 处的概率是多少?”首先,你们应当认识到我们所谈的应该是几率,因为不可能明确地说出任何一颗子弹会打到什么地方。一颗碰巧打到孔上的子弹可能从孔的边缘弹开,最终打到不知什么地方。所谓概率,我们指的是子弹到达检测器的机会,这可以用以下方式来量度,数一下在一定时间内到达检测器的子弹数,然后算出这个数与这段时间内打到后障上的子弹总数的比值。或者,如果在测量时机枪在单位时间内始终发射同样数量的子弹,那么我们所要知道的概率就正比于在某个标准时间间隔内到达检测器的子弹数。

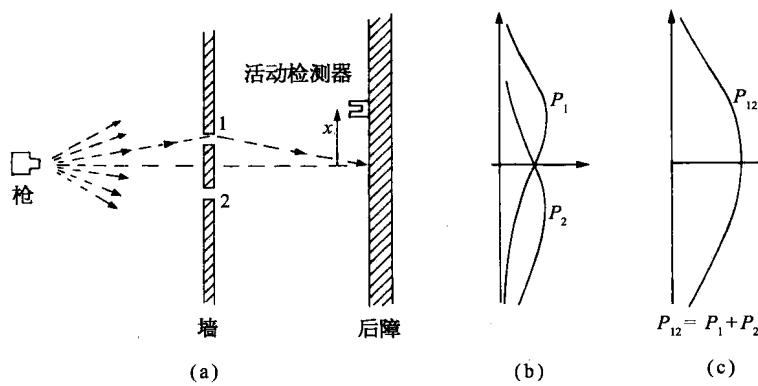


图 37-1 子弹的干涉实验

眼下,我们愿意设想一个多少有点理想化的实验,其中子弹不是真正的子弹,而是不会裂开的子弹,即它们不会分裂成两半。在实验中,我们发现子弹总是整颗整颗地到达,我们在检测器中找到的总是一颗一颗完整的子弹。如果机枪射击的射率十分低,那么我们发现在任何给定时刻,要么没有任何东西到达,要么有一颗,并且只有一颗——不折不扣的一颗——子弹打到后障上,而且,整颗的大小也必定与机枪射击的射率无关。我们可以说:“子弹总是以完全相同的颗粒状到达。”在检测器中测得的就是整颗子弹到达的概率。我们测量的是概率作为 x 的函数。用这样的仪器测得的结果画在图 37-1(c)上(我们还不曾做过这种实验,所以这个结果实际上是想象的而已),在图上,向右的水平轴表示概率的大小,垂直轴表示 x ,这样 x 的坐标就对应于检测器的位置。我们称图示的概率为 P_{12} ,因为子弹可能通过孔 1,也可能通过孔 2。你们不会感到奇怪, P_{12} 的值在接近图中心时较大,而在 x 很大时则变小。然而,你们可能感到惊奇的是:为什么 $x=0$ 的地方 P_{12} 具有极大值。假如我们先遮住孔 2 作一次实验,再遮住孔 1 作一次实验的话,就可以理解这一点。当孔 2 被遮住时,子弹只能通过孔 1,我们就得到(b)图上标有 P_1 的曲线。正如你们会预料的那样, P_1 的极大值出现在与枪口和孔 1 在一条直线上的 x 处。当孔 1 关闭时,我们得到图中所画出的对称的曲线 P_2 。 P_2 是通过孔 2 的子弹的概率分布。比较图 37-1 的(b)与(c),我们发现一个重要的结果

$$P_{12} = P_1 + P_2. \quad (37.1)$$

概率正好相加。两个孔都开放时的效果是每个孔单独开放时的效果之和。我们称这个结果为“无干涉”的观测,其理由不久就会明白。关于子弹我们就讲这些,它们整颗地出现,其到达的概率不显示干涉现象。

§ 37-3 波的实验

现在我们要来考虑一个水波实验。实验的仪器如图 37-2 所示。这里有一个浅水槽,一个标明为“波源”的小物体由马达带动作上下振动,产生圆形的波。

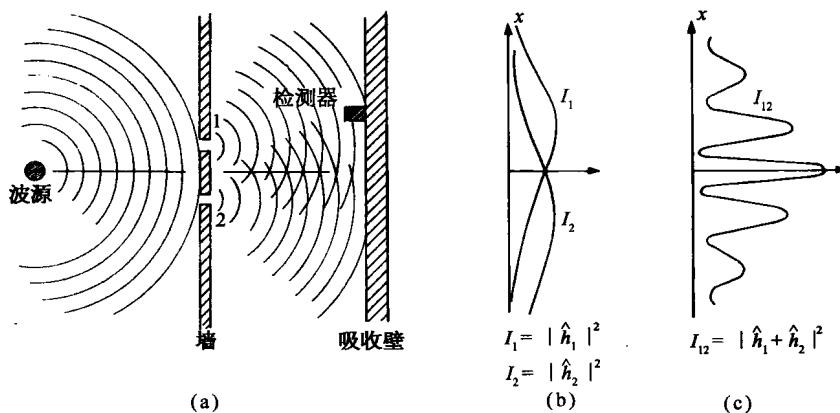


图 37-2 水波的干涉实验

在波源的后面也有一堵带两个孔的墙,墙以外又是一堵墙。为了简单起见,设这堵墙是

一个“吸收器”，因而波到达这里后不会反射。吸收器可以用逐渐倾斜的“沙滩”做成，在沙滩前，放置一个可以沿 x 方向上下移动的检测器，和先前一样。不过现在这个检测器是一个测量波动的“强度”的装置。你们可以设想一种能测量波动高度的小玩意儿，但其刻度则定标成与实际高度的平方成比例，这样读数正比于波的强度。于是，我们的检测器的读数正比于波携带的能量，或者更确切地说，正比于能量被带至检测器的速率。

在我们这个波动实验中，第一件值得注意的事是强度的大小可以是任意值，如果波源正好振动得很弱，那么在检测器处就只有一点点波动。当波源的振动较强时，在检测器处的强度就较大。波的强度可以为任意值。我们不会说在波的强度上能显示出任何“颗粒性”。

现在，我们来测量不同 x 处的波的强度（保持波源一直以同样的方式振动）。我们得到图 37-2(c) 上标有 I_{12} 的有趣的曲线。

在我们研究电磁波的干涉时，已经知道怎么会产生这种图样。在现在情况下，我们将观察到原始波在小孔处发生衍射，新的圆形波从每一个小孔向外扩展。如果我们一次遮住一个小孔，并且测量吸收器处的强度分布，则得到如图 37-2(b) 所示的相当简单的强度曲线。 I_1 是来自孔 1 的波的强度（在孔 2 被遮住时测得）， I_2 是来自孔 2 的波的强度（在孔 1 被遮住时测得）。

当两个小孔都开放时所观察到的强度 I_{12} 显然不是 I_1 与 I_2 之和。我们说，两个波有“干涉”。在某些位置上（在那里曲线 I_{12} 有极大值）两列波“同相”，其波峰相加就得到一个大的幅度，因而得到大的强度。我们说，在这些地方，两列波之间产生“相长干涉”。凡是检测器到一个小孔之间的距离与到另一个小孔的距离之差为波长整数倍的那些地方，都会产生这种相长干涉。

在两列波抵达检测器时相位差为 π （称为“反相”）的那些地方，合成波的幅度是两列波的波幅之差。这两列波发生“相消干涉”，因而得到的波的强度较低。我们预料这种低的强度值出现在检测器到小孔 1 的距离与到小孔 2 的距离之差为半波长的奇数倍的那些地方。图 37-2 中 I_{12} 的低值对应于两列波相消干涉的那些位置。

你们一定会记得 I_1 ， I_2 与 I_{12} 之间的定量关系可以用以下方式来表示：来自孔 1 的水波在检测器处的高度瞬时值可以写成 $\hat{h}_1 e^{i\omega t}$ （的实部），这里“振幅” \hat{h}_1 一般来说是复数。波动强度则正比于方均高度，或者利用复数写出时，则正比于 $|\hat{h}_1|^2$ 。类似地，对来自孔 2 的波，高度为 $\hat{h}_2 e^{i\omega t}$ ，强度正比于 $|\hat{h}_2|^2$ 。当两个孔都开放时，由两列波的高度相加得到总高度 $(\hat{h}_1 + \hat{h}_2)e^{i\omega t}$ 以及强度 $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$ 。就我们目前的要求来说，可略去比例常数，于是对于干涉波适用的关系就是

$$I_1 = |\hat{h}_1|^2, I_2 = |\hat{h}_2|^2, I_{12} = |\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2. \quad (37.2)$$

你们将会注意到，这个结果与在子弹的情况下所得到的结果（式 37.1）完全不同。如果将 $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$ 展开，就可以看到

$$|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2 = |\hat{h}_1|^2 + |\hat{h}_2|^2 + 2 |\hat{h}_1| |\hat{h}_2| \cos \delta. \quad (37.3)$$

这里 δ 是 \hat{h}_1 与 \hat{h}_2 之间的相位差。用强度来表示时，我们可以写成

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (37.4)$$

式(37.4)中最后一项是“干涉项”。关于水波就讲这一些。波的强度可以取任意值，而且显