激光物理 *(Fall 2022)* October 14, 2022

第三次作业：3个证明题

张豪
202221050516
Z_Howe94@163.com

证明题

证明 1

证明Bloch矢量满足$\boldsymbol{r} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\boldsymbol{\sigma})$，其中$\boldsymbol{\sigma}$是泡利矩阵矢量。

证明：

由于$\hat{\rho}$是2×2的一个密度矩阵，由于其每个矩阵元都是一个复变量，因此总共对应着8个实变量。但由于密度矩阵的迹等于1，且密度矩阵是厄米矩阵，即$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \rho^{+} = \rho$，它们一共对应着5个方程（约束条件），因此密度矩阵ρ的8个变量中，只有3个变量是独立的。

于是密度矩阵ρ可以用3个2×2的Pauli矩阵（常数矩阵）展开，其中三个展开系数r_1, r_2, r_3，可以完全地承载密度矩阵的三个独立变量（自由度）。因此，可以令（第一个等号中的1理解为2×2的单位矩阵）

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1 - r_3 \end{pmatrix} \tag{.1.1}$$

其中r_1, r_2, r_3是三个独立变量，而$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$称为Bloch矢量，$\boldsymbol{\sigma}$是Pauli矩阵矢量：

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{.1.2}$$

通过式(.1.1)和(.1.2)可以得到以下推导：

$$\begin{aligned} \hat{\rho}\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1 - r_3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] && (.1.3) \\ &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} r_1 - ir_2 & 1 + r_3 \\ 1 - r_3 & r_1 + ir_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 + ir_1 & -i - ir_3 \\ i - ir_3 & r_2 - ir_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_3 + 1 & -r_1 + ir_2 \\ r_1 + ir_2 & r_3 - 1 \end{pmatrix}\right] && (.1.4) \end{aligned}$$

于是，有：

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2}(r1 - ir_2 + r_1 + ir_2, r_2 + ir_1 + r_2 - ir_1, r_3 + 1 + r_3 - 1) && (.1.5) \\ &= (r_1, r_2, r_3) && (.1.6) \\ &= \boldsymbol{r} && (.1.7) \end{aligned}$$

综上所述，我们可以得到，Bloch矢量满足$\boldsymbol{r} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\boldsymbol{\sigma})$。

证明 2

证明下式：

$$\begin{cases} \dot{r_1} = -\omega_0 r_2 + \dfrac{i}{\hbar}(H'_{ab} - H'_{ba})r_3 \\ \dot{r_2} = \omega_0 r_1 - \dfrac{1}{\hbar}(H'_{ab} + H'_{ba})r_3 \\ \dot{r_3} = -\dfrac{i}{\hbar}(H'_{ab} - H'_{ba})r_1 + \dfrac{1}{\hbar}(H'_{ab} + H'_{ba})r_2 \end{cases}$$

证明：

由证明1中的式(.1.1)可得：

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1 - r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} \tag{.2.1}$$

对应矩阵元相等，我们可以得到：

$$\begin{cases} r_1 = \rho_{ab} + \rho_{ba} \\ r_2 = i(\rho_{ab} - \rho_{ba}) \\ r_3 = \rho_{aa} - \rho_{bb} \end{cases} \tag{.2.2}$$

对式(.2.2)两边对时间求导，得到：

$$\begin{cases} \dot{r_1} = \dot{\rho}_{ab} + \dot{\rho}_{ba} \\ \dot{r_2} = i(\dot{\rho}_{ab} - \dot{\rho}_{ba}) \\ \dot{r_3} = \dot{\rho}_{aa} - \dot{\rho}_{bb} \end{cases} \tag{.2.3}$$

对式(.2.3)右边，代入密度矩阵的运动方程：

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{aa} = (H'_{ab}\rho_{ba} - H'_{ba}\rho_{ab})/i\hbar \\ \dot{\rho}_{bb} = -(H'_{ab}\rho_{ba} - H'_{ba}\rho_{ab})/i\hbar \\ \dot{\rho}_{ab} = -i\omega_0\rho_{ab} - H'_{ab}(\rho_{aa} - \rho_{bb})/i\hbar \\ \dot{\rho}_{ba} = i\omega_0\rho_{ba} + H'_{ba}(\rho_{aa} - \rho_{bb})/i\hbar \end{cases} \tag{.2.4}$$

可以求到$\dot{r_1}$为：

$$\dot{r_1} = \dot{\rho}_{ab} + \dot{\rho}_{ba} \tag{.2.5}$$
$$= -i\omega_0\rho_{ab} - H'_{ab}(\rho_{aa} - \rho_{bb})/i\hbar + i\omega_0\rho_{ba} + H'_{ba}(\rho_{aa} - \rho_{bb})/i\hbar \tag{.2.6}$$
$$= [\hbar\omega_0(-ir_2) - H'_{ab}(r_3) + H'_{ba}(r_3)]/i\hbar \tag{.2.7}$$
$$= -\omega_0 r_2 + \frac{i}{\hbar}(H'_{ab} - H'_{ba})r_3 \tag{.2.8}$$

可以求到$\dot{r_2}$为：

$$\dot{r_2} = i(\dot{\rho}_{ab} - \dot{\rho}_{ba}) \tag{.2.9}$$
$$= i[-i\omega_0\rho_{ab} - H'_{ab}(\rho_{aa} - \rho_{bb})/i\hbar - i\omega_0\rho_{ba} - H'_{ba}(\rho_{aa} - \rho_{bb})/i\hbar] \tag{.2.10}$$
$$= \omega_0\rho_{ab} - H'_{ab}(\rho_{aa} - \rho_{bb})/\hbar + \omega_0\rho_{ba} - H'_{ba}(\rho_{aa} - \rho_{bb})/\hbar \tag{.2.11}$$
$$= \omega_0 r_1 - \frac{1}{\hbar}(H'_{ab} + H'_{ba})r_3 \tag{.2.12}$$

可以求到$\dot{r_3}$为：

$$\begin{aligned}\dot{r_3} &= \dot{\rho}_{aa} - \dot{\rho}_{bb} &(.2.13)\\ &= (H'_{ab}\rho_{ba} - H'_{ba}\rho_{ab})/i\hbar + (H'_{ab}\rho_{ba} - H'_{ba}\rho_{ab})/i\hbar &(.2.14)\\ &= H'_{ab}(\rho_{ba} + \rho_{ba})/i\hbar - H'_{ba}(\rho_{ab} + \rho_{ab})/i\hbar &(.2.15)\\ &= H'_{ab}(r_1 + ir_2)/i\hbar - H'_{ba}(r_1 - ir_2)/i\hbar &(.2.16)\\ &= -\frac{i}{\hbar}(H'_{ab} - H'_{ba})r_1 + \frac{1}{\hbar}(H'_{ab} + H'_{ba})r_2 &(.2.17)\end{aligned}$$

综上，证得Bloch矢量的三个分量所满足的运动方程为：

$$\begin{cases}\dot{r_1} = -\omega_0 r_2 + \frac{i}{\hbar}(H'_{ab} - H'_{ba})r_3\\ \dot{r_2} = \omega_0 r_1 - \frac{1}{\hbar}(H'_{ab} + H'_{ba})r_3\\ \dot{r_3} = -\frac{i}{\hbar}(H'_{ab} - H'_{ba})r_1 + \frac{1}{\hbar}(H'_{ab} + H'_{ba})r_2\end{cases} \tag{.2.18}$$

证明 3

假设$\boldsymbol{\omega}$与时间无关，证明$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{r}$之间的夹角与时间无关。

证明：

为了便于直观研究，定义三维矢量：

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(H'_{ab} + H'_{ba})/\hbar\\ i(H'_{ab} + H'_{ba})/\hbar\\ \omega_0\end{pmatrix} \tag{.3.1}$$

则Bloch矢量的运动方程(.2.18)可以整理写成：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix}\dot{r_1}\\ \dot{r_2}\\ \dot{r_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2\\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3\\ \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1\end{pmatrix} \tag{.3.2}$$

式(.3.2)是矢量的矩阵形式，显然，它对应以下矢量方程：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{.3.3}$$

$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{r}$之间的夹角余弦值可以表示为：

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{\omega}| \cdot |\boldsymbol{r}|} \tag{.3.4}$$

由于$|\boldsymbol{r}| = 1$，故式(.3.4)可以简化为：

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{\omega}|} = \boldsymbol{\omega}_n \cdot \boldsymbol{r} \tag{.3.5}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}_n$为$\boldsymbol{\omega}$的单位矢量。

对式(.3.5)两边对时间求导，可以得到(由于$\boldsymbol{\omega}$与时间无关，故$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_n/\mathrm{d}t = 0$)：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{\omega}_n \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_n}{\mathrm{d}t} &(.3.6)\\ &= \boldsymbol{\omega}_n \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + 0 &(.3.7)\\ &= 0 + 0 = 0 &(.3.8)\end{aligned}$$

即：

$$\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{.3.9}$$

由于θ是一个变化值，所以在式(.3.9)中只能有$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$成立，即说明$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{r}$之间的夹角与时间无关。