激光物理

LASER PHYSICS

光电科学与工程学院 王智勇

第二讲 激光的经典理论简介

- 激光器的物理基础是电磁场与物质的相互作用(特别是共振相互作用)。
- 激光器的严格理论是建立在量子电动力学基础上的全量子理论。但是在描述激光器的某些特性时，无需使用这种最精确的理论，也能获得所需要的结果。
- 正确的做法是：根据激光器的不同具体问题，选择不同近似程度的理论去描述。每种近似理论都能揭示出激光器的某些规律，但也会掩盖某些更深层次的信息。

2.1 激光理论的分类及概述

(1) 经典理论—经典原子发光模型

用经典电磁场理论 描述光；

用经典原子模型（偶极谐振子）描述介质原子。

可以近似描述介质的吸收、色散，可以唯象地描述自发辐射和自发辐射谱线加宽等物理现象，但不能描述非线性物理过程（饱和，非线性极化等）。

(2)半经典理论—兰姆理论（*Lamb*,1964)

用经典电磁场理论描述光；用量子力学模型描述介质原子

可处理与光的波动性相关的物理现象(包括非线性现象)，但不能处理与光的粒子性(量子光学)有关的问题，例如光的量子起伏、光子统计等。

(3) (全)量子理论—量子电动力学理论处理方法

辐射场与原子都作量子化处理

电磁场的量子化理论+原子的量子力学模型

这是最严格最完整的理论（但也因此最艰深最复杂），是现代量子光学的基础。原则上能够揭示出与电磁相互作用有关的所有物理现象。

(4) 速率方程理论—量子理论的简化形式

电磁场（光子）& 介质原子的相互作用

不考虑光子数的量子起伏和光的相位，只讨论光子数(光强)

(1) **经典理论**

电磁场：经典麦克斯韦方程组

介质原子：原子中的电子描述为带阻尼的经典简谐振子

例子：介质的吸收与色散(第一章)

(2) **半经典理论**

电磁场：经典麦克斯韦方程组

介质原子：量子力学描述

例子：激光振荡的振幅和频率所满足的自恰方程(第三章)

(3) **全量子理论：量子电动力学**

电磁场：量子麦克斯韦方程组

介质原子：量子力学描述

例子：激光自激振荡，相干态，压缩态(第五章)

(4) **速率方程理论**

电磁场：光子（不考虑相位和量子涨落）

介质原子：量子力学描述

例子：各能级原子数和光子数满足的速率方程(第一章)

激光理论的分类及概述

理论	对电磁场的处理	对介质原子的处理	适应范围与特点
经典理论	经典电磁场	阻尼振动的经典简谐振子	能描述介质中电磁波的吸收和色散现象、能从经典角度解释自发辐射和谱线宽度。简单，直观
半经典理论	经典电磁场	量子力学	能成功描述诸如烧孔效应、增益饱和效应等等
全量子理论	对电磁场和物质原子都作量子化处理		能描述真空涨落和其他与量子起伏相关的问题，可严格地确定激光的相干性、噪声以及线宽极限等
速率方程理论	简化量子理论（忽略场的相位特性和光子数起伏）		只能给出激光强度特性，不能揭示诸如色散效应

- 以上四种理论是相互联系的
- 在全量子化理论中，对泵浦和驰豫过程取平均，就能简化为半经典理论
- 忽略所有的相位关系的半经典理论，就是速率方程理论

符号与约定

斜黑体符号表示三维空间矢量，例如 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$；

一般斜体符号表示变量，例如 x, y, z；

直体符号表示数学常数和微分符号，例如π=3.1415…., $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z=(x,y,z),\ \int(\sin x/x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}),\ \nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\hat{x}|x\rangle=x|x\rangle,\{|x\rangle\}\xleftrightarrow{\text{类比}}\text{坐标系1: }\{\boldsymbol{e}_i\}$$

$$\hat{p}|p\rangle=p|p\rangle,\{|p\rangle\}\xleftrightarrow{\text{类比}}\text{坐标系2: }\{\boldsymbol{e}_i'\}$$

$$\text{状态矢量(态矢)}|\psi\rangle\xleftrightarrow{\text{类比}}\text{三维空间矢量}\boldsymbol{r}$$

$$\text{位置波函数}\,\psi(x)=\langle x|\psi\rangle\leftrightarrow\text{坐标系1中的坐标分量}r_i=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{r}$$

$$\text{动量波函数}\,\psi(p)=\langle p|\psi\rangle\leftrightarrow\text{坐标系2中的坐标分量}r_i'=\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{r}$$

2.2 经典理论简介

- 介质原子所带的核外电子，在其平衡位置附近做简谐振动。不考虑辐射阻尼时，电子简谐振动的固有频率为$\omega_0=\sqrt{\kappa/m}$，其中m是电子质量，κ为倔强系数(此处只是形式上的概念)，设位移矢量为$\boldsymbol{x}$，则电子所受的恢复力为（胡克定律+牛顿第二力学定律）：

$$\boldsymbol{f}=-\kappa\boldsymbol{x}=m\ddot{\boldsymbol{x}}\Rightarrow\ddot{\boldsymbol{x}}=\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t^2=-\omega_0^2\boldsymbol{x},\ (\omega_0=\sqrt{\kappa/m})\quad(2\text{-}1)$$

$$\text{势能}:V(\boldsymbol{x})=V(\boldsymbol{x}_0)+V'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}V''(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2+\ldots$$

$$\text{平衡位置}\boldsymbol{x}_0\text{处满足}:V'(\boldsymbol{x}_0)=0,\ \text{令}\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\right|\ll 1,\ \ \boldsymbol{x}_0=0,\ V(\boldsymbol{x}_0)=0,$$

$$\text{平衡位置附近：}\ V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}V''(0)\boldsymbol{x}^2=\frac{1}{2}\kappa\boldsymbol{x}^2,\ f(\boldsymbol{x})=-\nabla V(\boldsymbol{x})=-\kappa\boldsymbol{x}.$$

进一步考虑到辐射阻尼.....

- 带电粒子振动时产生电磁辐射，辐射的光子对带电粒子产生反作用力，从而对带电粒子形成辐射阻尼力。由经典电动力学可以计算出，平均辐射阻尼力(the Abraham–Lorentz force)为：

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{\boldsymbol{x}} \quad (2\text{-}2) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{f} + \bar{\boldsymbol{F}} = m\ddot{\boldsymbol{x}}$$

其中电子电荷为$-e$，真空光速为c， 真空介电常数为ε_0

通常这个阻尼力远小于电子振动时的恢复力，因此可近似把不考虑辐射阻尼时的 $\ddot{\boldsymbol{x}} = -\omega_0^2 \boldsymbol{x}$ 代入(2-2)式，即

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\omega_0^2 \boldsymbol{x} \Rightarrow \dddot{\boldsymbol{x}} = -\omega_0^2 \dot{\boldsymbol{x}}$$

$$\Rightarrow \bar{\boldsymbol{F}} = \frac{e^2 \dddot{\boldsymbol{x}}}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = -\frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \dot{\boldsymbol{x}} \quad (2\text{-}3)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f} + \bar{\boldsymbol{F}} = -\kappa \boldsymbol{x} - \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \dot{\boldsymbol{x}} = m\ddot{\boldsymbol{x}}$$

考虑辐射阻尼力之后，电子同时受到恢复力和阻尼力的作用，因此有

$$\bar{\boldsymbol{F}} = -\frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{f} = -\kappa\boldsymbol{x} = -m\omega_0^2\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{f} + \bar{\boldsymbol{F}} = m\ddot{\boldsymbol{x}}$$

$$\Rightarrow m\ddot{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dot{\boldsymbol{x}} + m\omega_0^2\boldsymbol{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\boldsymbol{x}}(t) + 2\gamma\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \omega_0^2\boldsymbol{x}(t) = 0 \qquad (2\text{-}4)$$

其中$\gamma = \dfrac{e^2\omega_0^2}{12\pi\varepsilon_0 mc^3}$是一个常数

上方程的解为（阻尼振动）

阻尼振子的振幅逐渐衰减，衰减到初始振幅的exp(-1)时所花的时间，定义为振子的寿命

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+2\gamma\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\omega_0^2\boldsymbol{x}(t)=0\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0\exp(-\gamma t)\cos(\omega_0 t+\varphi) \qquad (2\text{-}5)$$

电子阻尼振动所辐射的电场为(电偶极近似，且考虑到 $\gamma\ll\omega_0$)

$$\boldsymbol{E}_{\text{rad}}(t)=\boldsymbol{E}_{\text{rad}0}\exp(-\gamma t)\cos(\omega_0 t+\varphi) \qquad (2\text{-}6)$$

$$\gamma=e^2\omega_0^2/12\pi\varepsilon_0 mc^3=1/\tau$$

磁场分量类推。上式指数衰减因子的存在，可以定义振子能级寿命 τ，由于时间能量测不准关系，电子振动存在阻尼时，所辐射的电磁场，将围绕振子固有频率存在一个频谱分布。

$$\Delta E\Delta t=h/2\pi=\hbar,\ \Delta t=\tau,\ \Delta E=\hbar\Delta\omega\Rightarrow\Delta\omega=1/\tau=\gamma$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 \exp(-\gamma t)\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (2\text{-}5)$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{rad}}(t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{rad}0} \exp(-\gamma t)\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (2\text{-}6)$$

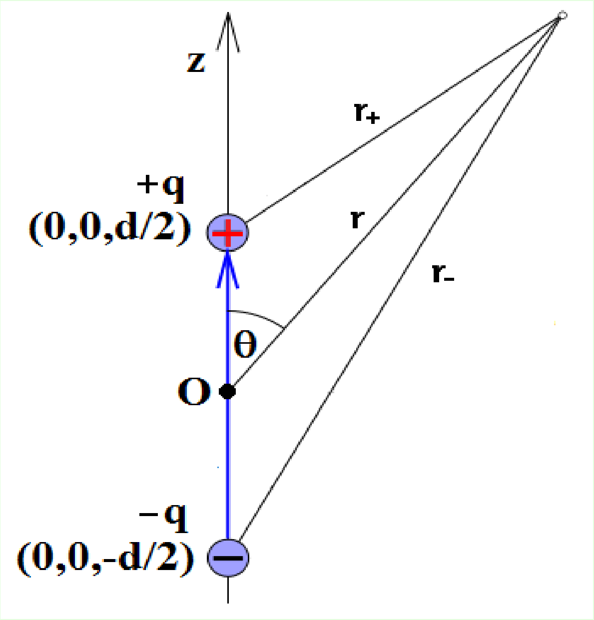
备注：

1) 所谓电偶极近似下的电磁场，是指只考虑电偶极矩振荡产生的电磁场，而忽略高阶电偶极矩和磁矩振荡产生的电磁场；

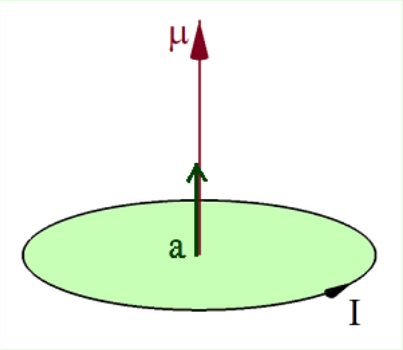
2) 电子偏离平衡位置的位移为$\boldsymbol{x}$时，产生电偶极矩$\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{x}$．这里的平衡位置，对应正负电荷重合的位置;

3) 电偶极近似下，电磁场产生于随时间变化的电偶极矩$\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{x}$，正比于电偶极矩的二阶导数。正弦函数的二阶导数仍然是自己（多出一些乘性因子）。当阻尼因子γ远小于无阻尼时简谐振子的固有频率ω_0时，便能获得(2-6)

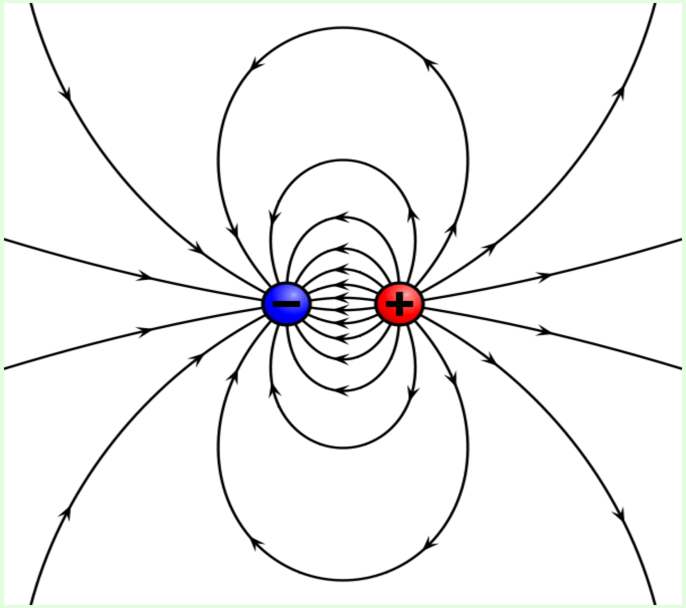
课外复习：电偶极辐射与磁偶极辐射



电偶极矩$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$



磁偶极矩 $\boldsymbol{\mu}=I\boldsymbol{a}$



静态电偶极矩的电场分布

以电偶极辐射为例（利用对偶关系可以得到磁偶极辐射场）

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^3 r}|\ddot{\vec{p}}|\sin\theta\ \hat{e}_\phi, \quad \vec{\mathcal{E}} = \frac{e^{ikr}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}|\ddot{\vec{p}}|\sin\theta\ \hat{e}_\theta,$$

讨论

(1) 磁场沿纬线，电场沿经线，$\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{n}$ 两两垂直，$\vec{E}\times\vec{B}$ 沿 $\vec{n}$ 方向

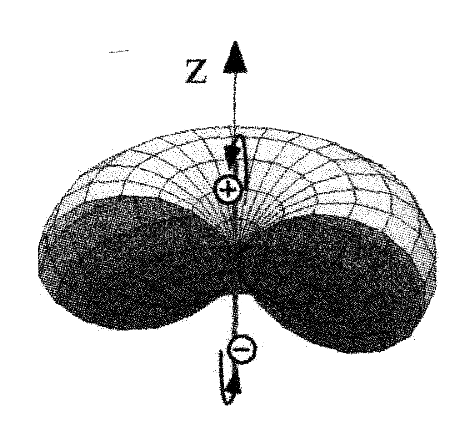
(2) e^{ikr} 为相位滞后因子，表明辐射场以有限速度传播

(3) $e^{ikr-i\omega t}$ 表明辐射场是沿径向外传的球面波。等相面为球面，但等相面上振幅不相等。

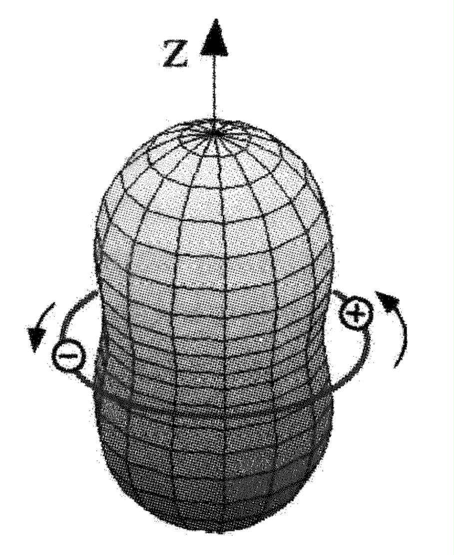
（2）电偶极辐射能流与功率（后者等于前者的面积积分）

平均辐射能流：$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{B}}^*\right] = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\vec{n}$

平均辐射功率：$\langle\vec{P}\rangle = \int \vec{n}\cdot\langle\vec{S}\rangle\, r^2\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4|\vec{p}_0|^2}{3c^3}$



线极化的电偶极
子振荡时产生的
辐射电场分布
（也是线极化的）



圆极化的电偶极
子振荡时产生的
辐射电场分布
（椭圆极化的）

（接前面）通过电场分量的Fourier变换，给出频谱信息(功率谱)

$$F(\omega)=(1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}E_{rad}(t)\exp(-i\omega t)dt \qquad (2\text{-}7)$$

$$\Rightarrow I(\omega)=|F(\omega)|^2=\frac{1}{4\pi^2}\frac{|E_{rad0}|^2}{\gamma^2+(\omega-\omega_0)^2} \qquad (2\text{-}8)$$

由(2-8)给出的谱线线型是洛仑兹线型，它表明辐射存在以$\omega=\omega_0$为中心频率的谱线宽度；自发辐射的强度是频率的函数，在$\omega=\omega_0$处呈现极大值，偏离此处越远，强度越小。

换言之，存在阻尼时，即使$\omega\neq\omega_0$，强度$I(\omega)$也不为零。可见存在阻尼时电磁辐射包含多种频率成分，并且频率ω等于固有振荡频率ω_0时的辐射成分最强。

由(2-6)可知，当阻尼因子$\gamma=0$时，辐射频率是单频ω_0

备注

- 前面讲的是在无外场时，振子自身作阻尼振动时产生的电磁辐射，这是自发辐射。由于振子存在零点振动，因此自发辐射总存在（但此时的自发辐射只能在全量子化理论中出现，在经典和半经典理论中无法揭示）；
- 接下来要讲的是在有外场时，振子作强迫振动时产生的辐射，此时对应受激辐射。

进一步考虑到外场激励.....

如果没有外场对振动电子补充能量，电磁辐射导致电子作衰减振动，由(2-5)知电子振动的位移幅度很快就会衰减至零。但如果介质中存在频率为ω的外加电磁场，

$$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{E}_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

让电子在其中做受迫振动，则可以证明(2-4)变为

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+2\gamma\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\omega_0^2\boldsymbol{x}(t)=-\frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)\quad(2\text{-}9)$$

$\omega_0\rightarrow$简谐振子本征(固有)频率，$\omega\rightarrow$外场频率

(2-9)的来历：在恢复力、辐射阻尼力之外，再加上外电场对电荷的力$-eE$，等于质量乘以加速度，由此推得

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+2\gamma\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\omega_0^2\boldsymbol{x}(t)=-\frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0\exp(-\mathrm{i}\omega t) \quad (2\text{-}9)$$

由上式给出的解，是以(2-5)为齐次方程的通解与上面非齐次方程的特解之和，由于通解很快衰减至零，因此我们只考虑其特解如下

$$\boldsymbol{x}(t)=-\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}2\gamma\omega}\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m}\exp(-\mathrm{i}\omega t) \quad (2\text{-}10)$$

我们为什么要辛辛苦苦求解电子偏离平衡位置的位移矢量呢？因为我们需要求解电偶极矩，进而给出电极化强度、极化系数、介电常数等，最后给出介质的吸收与色散特征(吸收与色散系数)。

一个原子感应出的电偶极矩为（假设围绕每个原子做这种振动的电子只有一个）

$$\boldsymbol{p} = -e\boldsymbol{x}(t) = \frac{e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}2\gamma\omega}\boldsymbol{E}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t) \quad (2\text{-}11)$$

外场在介质中感应出的电极化强度$\boldsymbol{P}$，等于单位体积介质中感应出的电偶极矩之和，设N为介质的原子数密度，则（由于感应电偶极矩都沿外场方向，所以可以直接相加)

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}(t) = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

(回忆一下公式：$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$)

得到介质的极化系数 $\chi = \chi_{\mathrm{Re}} + \mathrm{i}\chi_{\mathrm{Im}}$，其中实部$\chi_{\mathrm{Re}}$和虚部$\chi_{\mathrm{Im}}$分别为

$$\begin{cases} \chi_{\mathrm{Re}} = -\dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\dfrac{\omega^2-\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \\ \chi_{\mathrm{Im}} = \dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\dfrac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \end{cases} \qquad (2\text{-}12)$$

非磁性介质中的复折射率为（注意极化系数$\chi<<1$)

$$n=\sqrt{\varepsilon_r}=\sqrt{1+\chi}\approx 1+\chi/2=\eta+\mathrm{i}\beta=\eta+\mathrm{i}\,\alpha c/2\omega$$

实部η为介质的折射率，由虚部β定义介质的吸收系数$\alpha=2\beta\omega/c$，可以求得(取近似 $\omega+\omega_0\approx 2\omega_0$)：

$$\begin{cases} \eta = 1 - \dfrac{Ne^2}{4m\omega_0\varepsilon_0\gamma} \cdot \dfrac{(\omega-\omega_0)/\gamma}{1+[(\omega-\omega_0)/\gamma]^2} \\ \alpha = \dfrac{2\beta\omega}{c} = \dfrac{\omega Ne^2}{2m\omega_0\varepsilon_0\gamma} \cdot \dfrac{1}{1+[(\omega-\omega_0)/\gamma]^2} \end{cases} \qquad (2\text{-}13)$$

由电动力学知，在各向同性介质中，沿z轴传播均匀平面波的电场分量可表达为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp[-\mathrm{i}(\omega t - kz)] = \boldsymbol{E}_0 \exp[-\mathrm{i}(\omega t - \omega n z/c)],$$

$$n = \eta + \mathrm{i}\beta = \eta + \mathrm{i}\,\alpha c/2\omega \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp[-\mathrm{i}\omega(t - \eta z/c)]\exp(-\alpha z/2) \qquad (2\text{-}14)$$

波在传播过程中，其振幅随距离呈指数衰减，这意味着什么？

$$
\begin{cases}
\eta = 1 - \dfrac{N_v e^2}{4m\omega_0\varepsilon_0\gamma} \cdot \dfrac{(\omega-\omega_0)/\gamma}{1+[(\omega-\omega_0)/\gamma]^2} \\
\alpha = \dfrac{\omega N_v e^2}{2m\omega_0\varepsilon_0\gamma} \cdot \dfrac{1}{1+[(\omega-\omega_0)/\gamma]^2}
\end{cases} \quad (2\text{-}13)
$$

$$
\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(-\alpha z/2)\exp[\mathrm{i}\omega(t-\eta z/c)] \quad (2\text{-}14)
$$

因此 $n=\eta+\mathrm{i}\alpha c/2\omega$的实部$\eta$决定了介质中的传播速度，即对应介质的折射率，它随频率ω而变，描写了介质的色散特性；虚部α导致介质中传播的电磁波沿传播方向指数衰减，描述了介质的吸收特性。

注：以上内容，也是纳米光子学中涉及的理论基础之一

$$\begin{cases} \eta = 1 - \dfrac{N_{\mathrm{v}} e^2}{4m\omega_0 \varepsilon_0 \gamma} \cdot \dfrac{(\omega - \omega_0)/\gamma}{1 + [(\omega - \omega_0)/\gamma]^2} \\ \alpha = \dfrac{\omega N_{\mathrm{v}} e^2}{2m\omega_0 \varepsilon_0 \gamma} \cdot \dfrac{1}{1 + [(\omega - \omega_0)/\gamma]^2} \end{cases} \quad (2\text{-}13)$$

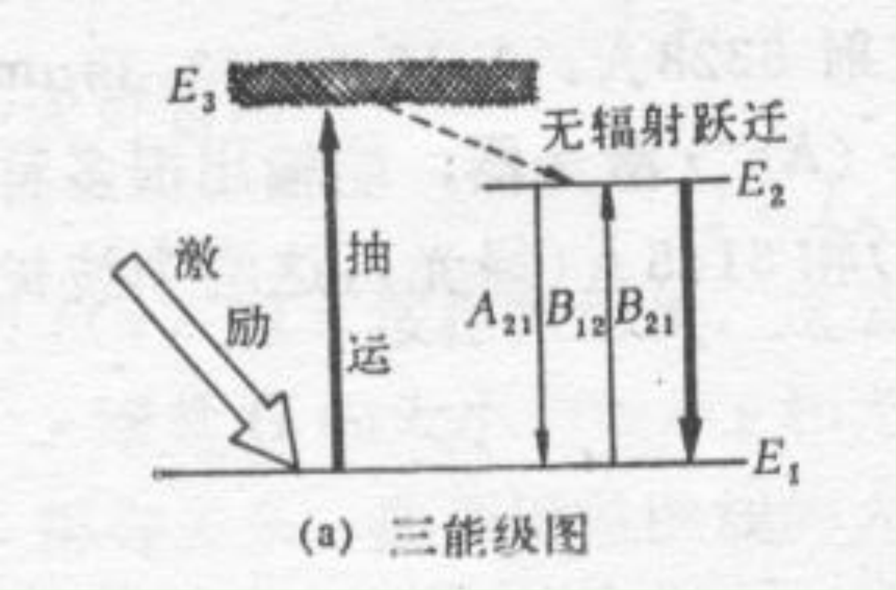
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(-\alpha z/2) \exp[\mathrm{i}\omega(t - \eta z/c)] \quad (2\text{-}14)$$

当外场频率ω等于介质原子固有振动频率ω_0时，衰减最大，对应共振吸收。位置空间中的电磁波包，是由不同频率成分的电磁波叠加而成。不同频率成分的传播速度不同时，波包在传播过程中会逐渐弥散开来，称之为色散，因为这种色散与频率有关，而光波颜色也跟频率有关，名之以“色散”。

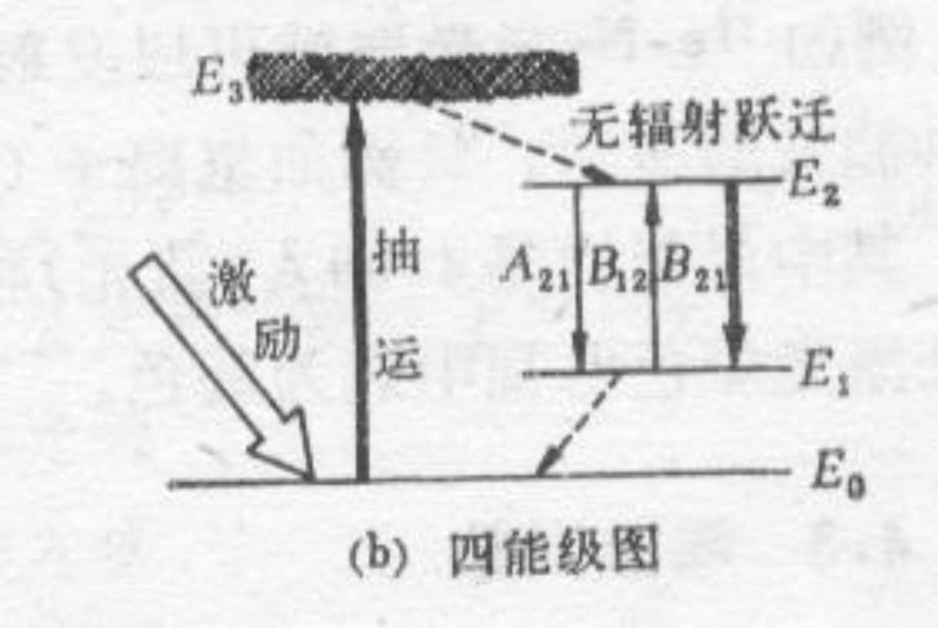
2.3 速率方程理论

当增益介质中同时存在抽运、自发辐射、受激辐射、受激吸收以及非辐射跃迁等诸多物理过程时，速率方程描述激光工作物质中处于各能级粒子数密度随时间的变化规律.

- 光场的相位变化被忽略。
- 是量子理论的简化模型。
- 是讨论激光器的反转粒子数与增益的基础。



(a) 三能级图



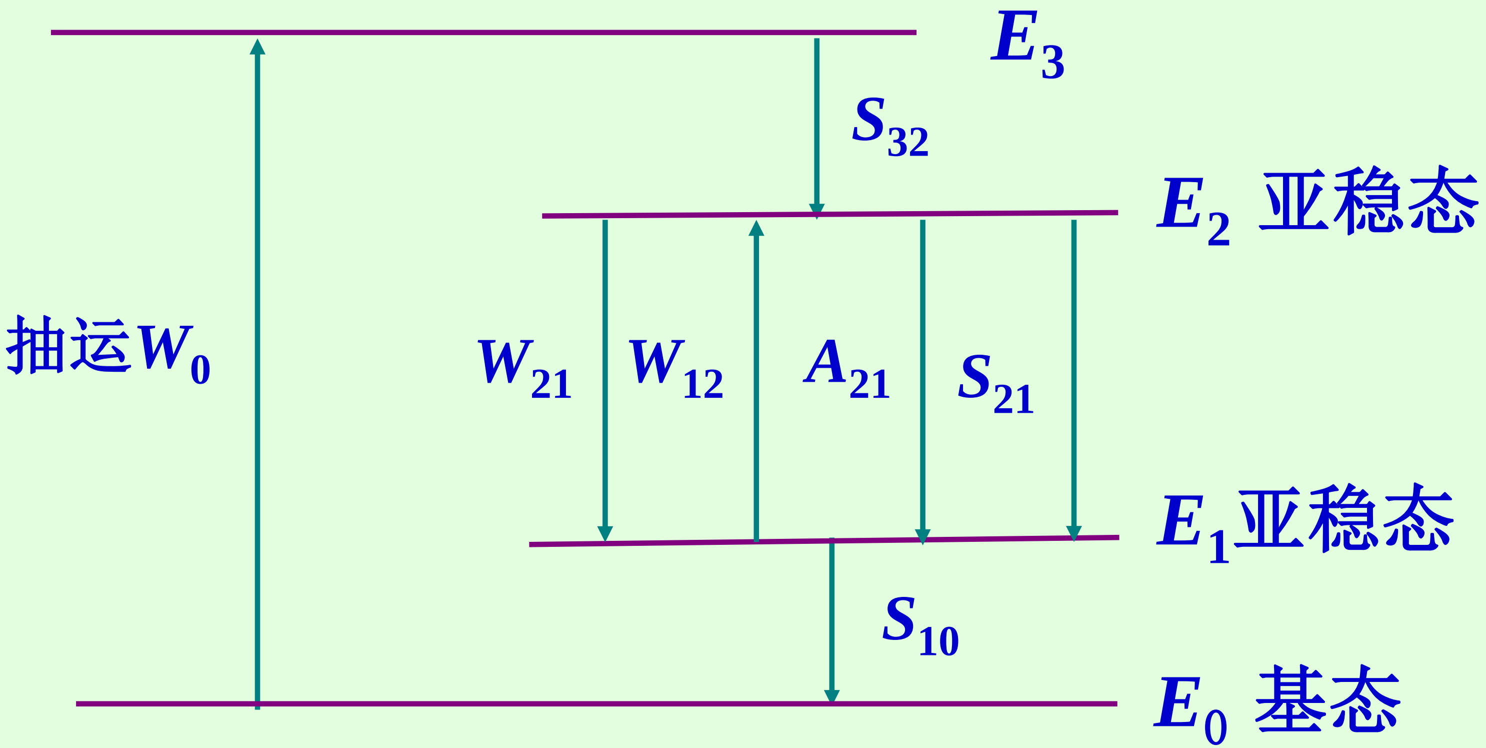
(b) 四能级图

上图中A_{21}是自发跃迁爱因斯坦系数，B_{12}和B_{21}分别是受激吸收和受激辐射爱因斯坦系数（后面速率方程中将分别改用跃迁几率W_{12}和W_{21}来描述）

无辐射跃迁，能量转化为晶格热振动等

下面以四能级系统为例

四能级系统



- YAG激光器Nd^{3+}离子的能级图

对于四能级系统

1. 在激励源的作用下，基态E_0上的粒子被抽运到能级E_3上，其跃迁几率用W_0表示。

2. 到达E_3能级的粒子将主要以非辐射跃迁的形式极为迅速地转移到激光上能级E_2，其跃迁几率用S_{32}表示。

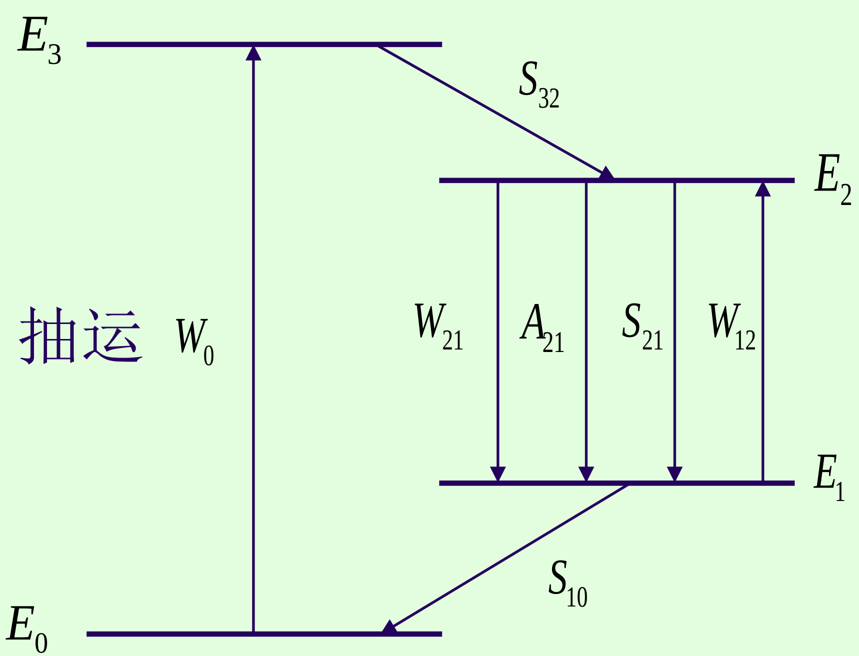
3. 处在E_2能级的粒子，能通过自发辐射、受激辐射和非辐射跃迁到下能级E_1，其跃迁几率分别用A_{21}、 W_{21} 和S_{21}表示。

4. 处在E_1能级的粒子，能通过受激吸收到达E_2，或非辐射跃迁到E_0，其跃迁几率分别用 W_{12}和S_{10}表示。

问题：介质中处于各个能级上的粒子数密度$\boldsymbol{n_0}$，$\boldsymbol{n_1}$，$\boldsymbol{n_2}$，$\boldsymbol{n_3}$如何变化？光子数密度$\boldsymbol{N}$如何变化？

- 在给定的跃迁概率下，处于出发能级的初始粒子数越多，单位时间内向目标能级跃迁的粒子数就越多，单位时间内处于目标能级粒子数增加就越多
- 某个量随时间的导数，正表示增加，负表示减少

简化四能级系统



速率方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}n_3}{\mathrm{d}t} = n_0 W_0 - S_{32} n_3 \\
\dfrac{\mathrm{d}n_2}{\mathrm{d}t} = n_3 S_{32} + n_1 W_{12} - n_2 W_{21} - n_2 A_{21} - n_2 S_{21} \\
\dfrac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}t} = n_2 W_{21} + n_2 A_{21} + n_2 S_{21} - n_1 W_{12} - n_1 S_{10} \\
\dfrac{\mathrm{d}n_0}{\mathrm{d}t} = n_1 S_{10} - n_0 W_0 \\
n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = n \\
\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = n_2 W_{21} + n_2 A_{21} - n_1 W_{12}
\end{cases}
$$

增加为正，减少为负；与跃迁几率成正比，与出发的能级原子数成正比。处于各个能级的总原子数为n。光子数为N.

- 以上前四个方程一同描述了：当增益介质中同时存在抽运、自发辐射、受激辐射、受激吸收以及非辐射跃迁等诸多物理过程时，激光工作物质中处于各能级粒子数密度随时间的变化规律。由此，我们给出了速率方程理论。