

§ 21-4 振荡偶极子的场

导出一个运动的点电荷的场公式(21.1)的这个诺言，我们迄今还未曾实现。即使是已有的一些结果，但要把它导出来仍是一件相当复杂的事情。除了在这本讲义的第1卷之外，我们从未在已经发表的文献的任何地方找到过式(21.1)*。因此，你可以看出它不容易导出（当然，一个运动电荷的场已经被写成许多种互相等价的其他形式）。这里，我们不得不把自己限制在几个例子中，这正是为了证实式(21.15)和(21.16)会给出与式(21.1)相同的结论。首先，将证明式(21.1)只在带电粒子的运动是非相对论性的条件下才给出正确的场（仅仅这一特殊情况就能处理我们过去关于光学方面所谈及的90%或更多的内容）。

我们考虑一小团电荷在一个小区域里以某种方式运动的情况，并将找出在远处的场。换一种说法，就是我们正在寻找距离点电荷任意远处的场，而该点电荷正以很小的幅度上下振动。由于光往往从诸如原子那种中性物体内发射出来，所以我们将认为摆动电荷 q 是处在一个静止不动的等值异号电荷附近。如果这两电荷中心间的距离为 d ，则这两电荷将具有偶极矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ ，这我们将认为是时间的函数。现在应该期待，如果靠近电荷对场进行观察，便无需担心那个推迟效应，电场将与我们以前对静电偶极子所算出的场完全相同——当然，要用到瞬时偶极矩 $\mathbf{p}(t)$ 。但若我们离开得很远，则应该在场中找到一项，它按 $1/r$ 下降而又依赖于与视线垂直的电荷加速度。让我们来看看是否会得到这样的结果。

利用式(21.16)由算出矢势 \mathbf{A} 开始。假设运动电荷处于一小团内，其中的电荷密度由 $\rho(x, y, z)$ 给出，而在任一时刻整团东西以速度 \mathbf{v} 运动，那么电流密度 $\mathbf{j}(x, y, z)$ 就等于 $v\rho(x, y, z)$ 。为了将来方便选取我们的坐标系使 z 轴指向 \mathbf{v} 的方向，这时问题的几何结构就如图21-2所示。现在要求下面的积分：

$$\int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.17)$$

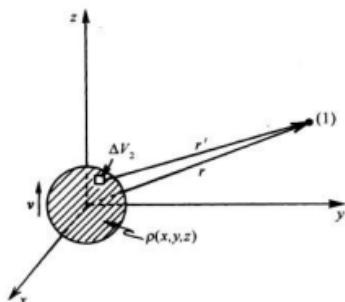


图 21-2 点(1)处的势由对电荷密度 ρ 的积分给出

若电荷小团的尺度比起 r_{12} 来确实很小，那么可令分母中的 r_{12} 等于 r ，即到该小团中心的距离，并把 r 取出积分符号之外。其次，也要令该式分子中 $r_{12} = r$ ，尽管这实际上并不完全正确。其所以

不对，是因为我们在小团的顶端取 \mathbf{j} 与在该小团的底部取 \mathbf{j} 在时间方面稍微有点不同。当在 $\mathbf{j}(t - r_{12}/c)$ 中令 $r_{12} = r$ 时，我们是在同一个时刻 $(t - r/c)$ 对整个小团取电荷密度。那只有当电荷的速度 v 远比 c 为小时才算是良好的近似。因此，我们正在做一种非相对论性计算，用 ρv 来代替 \mathbf{j} ，积分式(21.17)便变成

* 这一公式首先由 Oliver Heaviside 于 1902 年发表。约在 1950 年它由 R. P. 费恩曼独立导出，并作为对同步加速器辐射的一种优良想法在某些讲稿中曾经给出过。

$$\frac{1}{r} \int \psi(2, t - r/c) dV_2.$$

由于所有电荷都有相同的速度,这个积分正好是 v/r 乘以总电荷 q 。但 qv 恰好就是 $\partial p/\partial t$, 即电偶极矩的时间变化率——那当然必须是在推迟时刻 $(t - r/c)$ 算出来的。我们将把它写成 $\dot{p}(t - r/c)$ 。因此对于矢势来说就得到

$$\mathbf{A}(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{p}(t - r/c)}{r}. \quad (21.18)$$

上述结果表明:变化偶极子中的电流会产生一个矢势,这矢势具有源强度为 $\dot{p}/(c_0 c^2)$ 的球面波的形式。

现在就可以由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 得到磁场。由于 \dot{p} 完全在 z 方向上,所以 \mathbf{A} 只有一个 z 分量; 在它的旋度中只有两个不等于零的微商。因此, $B_z = \partial A_x / \partial y$ 及 $B_y = -\partial A_x / \partial x$ 。让我们首先来考察 B_z :

$$B_z = \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{p}(t - r/c)}{r}. \quad (21.19)$$

为了求得微商,必须想到 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 从而得出

$$B_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \dot{p}(t - r/c) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \dot{p}(t - r/c). \quad (21.20)$$

记住 $\partial r / \partial y = y/r$, 则第一项就给出

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y \dot{p}(t - r/c)}{r^3}, \quad (21.21)$$

这类似于一个静态偶极子的势,随 $1/r^2$ 而下降(因为对于给定的方向来说, y/r 是个常数)。

式(21.20)中的第二项为我们提供一些新的效应。在进行微商后得

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{cr^2} \dot{p}(t - r/c), \quad (21.22)$$

式中 \ddot{p} 当然是指 p 对时间的二次导数。这一项来自对式中分子的微商,它是造成辐射的主要原因。首先,它描述了一个仅按 $1/r$ 随距离下降的场。其次,它取决于电荷的加速度。你可能开始明白,我们是如何打算得到一个像式(21.1')那样的结果,而它是描述光辐射的。

让我们稍微详细一点检查一下这个辐射项是如何得来的——它是这么一个有趣而又重要的结果。由表示式(21.18)开始,它具有 $1/r$ 的依存关系,因而除了式中分子上的那个推迟项外就像一个库仑势了。那么,当我们为获得场而对空间坐标取微商时,为什么并不恰好得到 $1/r^2$ 的场——当然还会有那相应的时间推迟?

按照下述办法我们就能够看出其所以然:如让偶极子作正弦式上、下振动,那么就会有

$$p = p_0 \sin \omega t$$

和 $A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega p_0 \cos \omega(t - r/c)}{r}.$

若在某一给定时刻把作为 r 函数的 A_z 画成图,则可获得如图 21-3 所示的那种曲线。该峰

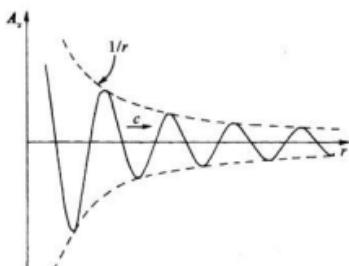


图 21-3 对来自一振荡偶极子的球面波, 在 t 时刻矢势 \mathbf{A} 的正分量作为 r 函数而画成的图

的振幅会随 $1/r$ 减小, 但除此之外在空间还有一受 $1/r$ 的包络线调制的振动。当我们对空间取微商时, 它们将与该曲线的斜率成正比。从图中我们看出有一些斜率比 $1/r$ 曲线本身的斜率要峻峭得多。事实上, 对于某一给定频率来说, 那些峰的斜率显然正比于随 $1/r$ 变化的波的振幅。因此, 这就说明了该辐射项的下降率。

事情的发生完全是由于当波向外传播时源对时间的变化已转换成在空间里的变化, 而磁场则是取决于势的空间微商。

让我们回过来完成对磁场的计算。关于 B_x 已有式(21.21)和(21.22)两项, 因而

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{y \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r^3} - \frac{y \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr^2} \right].$$

利用相同的数学, 得到

$$B_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{x \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{r^3} + \frac{x \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr^2} \right].$$

或者, 可将其集合在一个漂亮的矢量式中:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c) \ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (21.23)$$

现在让我们来看看这个公式。首先, 若 r 很大, 就只有那 $\ddot{\mathbf{p}}$ 项才重要。 \mathbf{B} 的方向由 $\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}$ 给出, 它既垂直于矢径 \mathbf{r} , 也垂直于加速度, 如图 21-4 所示。一切都表明不错, 那也是我们由式(21.1')所得到的结果。

现在, 让我们来看看以往不熟悉的东西——即在源附近所发生的事情。在 § 14-7 中我们曾求出关于电流元磁场的毕奥-萨伐尔定律。求得一个电流元 $j dV$ 对于磁场贡献的量为:

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (21.24)$$

若记得 $\dot{\mathbf{p}}$ 就是电流, 则你知道这个公式看来很像式(21.23)中的第一项。但有一点不同。在式(21.23)中, 电流必须在 $(t-r/c)$ 时刻被算出, 而这一点在式(21.24)中就没有出现。然而, 事实上, 对于小 r 来说式(21.24)还是十分精确的, 因为式(21.23)中的第二项有助于抵消掉第一项中的推迟效应。当 r 很小时这两项合起来给出的结果很接近于式(21.24)。

关于这一点我们可以这样来认识: 当 r 小时, $(t-r/c)$ 与 t 相差无几, 因而可以把式(21.23)中的方括号展开成泰勒级数。对于第一项,

$$\dot{\mathbf{p}}(t-r/c) = \dot{\mathbf{p}}(t) - \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{p}}(t) + \text{其他},$$

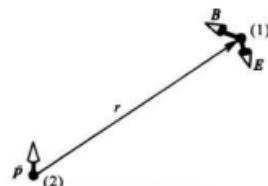


图 21-4 一个振荡偶极子的辐射场 \mathbf{B} 和 \mathbf{E}

而第二项展开至 r/c 的同一级，则为

$$\frac{r}{c} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c) = \frac{r}{c} \dot{\mathbf{p}}(t) + \text{其他}.$$

当求和时，含 $\dot{\mathbf{p}}$ 的两项互相抵消，而留给我们是非推迟电流 $\dot{\mathbf{p}}$ 即 $\dot{\mathbf{p}}(t)$ ——加上 $(r/c)^2$ 级的项或更高级的项 [如 $\frac{1}{2}(r/c)^2 \ddot{\mathbf{p}}$]，对于 r 足够小以致 $\dot{\mathbf{p}}$ 在时间 r/c 内没有显著改变的情况下，这些项的贡献将是十分微小的。

因此，式(21.23)给出的场很像瞬时理论中的场——比带有推迟的瞬时理论要接近得多，推迟的一级效应已被第二项所消除。该静态公式十分准确，其准确程度远比你可能想到的要高。当然，这补偿作用仅对接近源的点才有效。对于远离源的点这个修正变得十分差，因为时间延迟产生了很大的影响，所以我们得到重要的含 $1/r$ 的辐射项。

仍然存在这样的问题，即算出电场并证明它与式(21.1')相同。对于大的距离来说我们能够看出该答案将完全正确。我们知道，离源很远、有波传播的地方， \mathbf{E} 垂直于 \mathbf{B} (而且也垂直于 \mathbf{r})，如图 21-4 所示，并且 $c\mathbf{B} = \mathbf{E}$ 。因此， \mathbf{E} 与加速度 $\dot{\mathbf{p}}$ 成正比，正如式(21.1')所料到的那样。

要完全得到在所有距离上的电场，我们需要先解出静电势。当计算 \mathbf{A} 的电流积分以获得式(21.18)时，就曾做过这样一种近似，即把推迟项中 r 的微小变化忽略不计。这对于静电势来说将行不通，因为这样一来我们获得 $1/r$ 乘以电荷密度的积分，那将是一个常数。这种近似太粗糙了。我们需要达到一个较高级的近似，但又要避免直接在有关较高级近似的计算中找麻烦，我们还是能够做某一种其他事情的——可以利用已找到的矢势从式(21.6)确定标势。在我们的条件下， \mathbf{A} 的散度只是 $\partial A_z / \partial z$ ——因为 A_x 和 A_y 都恒等于零。用上面求 \mathbf{B} 的同样办法取微分，

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\dot{\mathbf{p}}(t - r/c) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{z\dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{r^3} - \frac{z\ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{c^2} \right].\end{aligned}$$

或者，采用矢量符号，

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c) \ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

应用式(21.6)，我们得到关于 ϕ 的方程：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\dot{\mathbf{p}} + (r/c) \ddot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

对于 t 的积分不过是从每一个 $\dot{\mathbf{p}}$ 或 $\ddot{\mathbf{p}}$ 中除去顶上的一点，因而

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\mathbf{p} + (r/c) \dot{\mathbf{p}}]_{t-r/c} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (21.25)$$

积分常数大概相当于某个叠加上去的静场，那当然是有可能存在的静场。但对于所考虑的振荡偶极子来说，却不存在静场。

现在我们能够按照

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

求出电场 \mathbf{E} 。由于计算冗长而不直截了当[只要你记住 $\mathbf{p}(t - r/c)$ 和它对时间的微商之所以与 x, y, z 有关, 是通过推迟时间 r/c 来的], 所以我们将仅仅给出结果:

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[3 \frac{(\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}^* + \frac{1}{c^2} [\dot{\mathbf{p}}(t - r/c) \times \mathbf{r}] \times \mathbf{r} \right], \quad (21.26)$$

式中

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}(t - r/c) + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c). \quad (21.27)$$

尽管看来它相当复杂, 但这个结果还是容易解释的。矢量 \mathbf{p}^* 就是已经被推迟、然后又对推迟“修正”的偶极矩, 因而带有 \mathbf{p}^* 的两项就恰恰给出当 r 很小时的静态偶极子场[见第 6 章式(6.14)]。当 r 大时, 含 $\dot{\mathbf{p}}$ 的项占了优势, 而电场正比于电荷的加速度, 且垂直于 \mathbf{r} , 事实上即是指向 $\dot{\mathbf{p}}$ 在垂直于 \mathbf{r} 的平面上的投影。

这一结果与我们应用式(21.1)所能得到的结果相符。当然, 式(21.1)会更加普遍, 它适用于任何运动, 而式(21.26)则仅仅适用于推迟时间 r/c 对于整个源都可以认为是一常数的那种小的运动。无论如何, 我们现在已提供了整个以前有关光学讨论的基础(除了某些在第 1 卷第 36 章中曾经讨论过的内容以外), 因为这种讨论全都与式(21.26)中的末项有关。接下来我们将讨论如何才能得到迅速运动的电荷的场(引导至第 1 卷第 34 章中的相对论性效应)。

§ 21-5 运动电荷的势; 李纳和维谢尔通解

在上一节, 由于我们仅仅考虑低速的情况, 所以在计算 \mathbf{A} 的积分时做了简化。但在这做时我们遗漏了一个要点, 而这一点也正是容易出错的地方。因此, 现在我们将对一个以任何方式——甚至以相对论性速度——运动的点电荷的势进行计算。一旦有了这个结果, 我们便将拥有关于电荷的整个电磁学。这时就连式(21.1)也可以通过取微商而推导出来。由于故事将是完整的, 所以请耐心听下去。

让我们尝试计算由一个不管以任何方式运动的点电荷(诸如一个电子)在点 (x, y, z) 上所产生的标势 $\phi(1)$, 所谓“点”电荷我们指的是一个十分微小的电荷球, 可以缩小到任意程度, 并带有电荷密度 $\rho(x, y, z)$, 我们可以由式(21.15)求得 ϕ :

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2, r_{12} - \dot{r}_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.28)$$

答案似乎应该是——而几乎每个人最初总会认为—— ρ 对整个这样一个“点”电荷的积分恰好就是其总电荷 q , 因而

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} (\text{错了}).$$

对于 r'_{12} , 我们指的是在推迟时刻 $(t - r_{12}/c)$ 从电荷所处位置点(2)至点(1)的矢径。但这个式子是错的。

正确的答案是

$$\phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} \frac{1}{1 - v_r/c}, \quad (21.29)$$

式中 v_r 为平行于 \vec{r}'_{12} ——即指向点(1)——的电荷速度分量。现在要向你们解释其中原因。为使论证易于接受, 我们将先对一个具有小立方体形状而以速率 v 朝向点(1)运动的“点”电荷进行计算, 如图 21-5(a) 所示。令该立方体的每边长度为 a , 我们假定它比 r_{12} (即从电荷中心至点(1)的距离) 要小很多很多。

现在计算式(21.28)的积分, 我们将回到基本原理上去; 将它写成求和式

$$\sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i}, \quad (21.30)$$

其中 r_i 是从点(1)至第 i 个体积元 ΔV_i 的距离, 而 ρ_i 则是在 $t_i = t - r_i/c$ 时刻 ΔV_i 处的电荷密度。由于始终 $r_i \gg a$, 因而把 ΔV_i 取为垂直于 r_{12} 的一个矩形薄片将是方便的, 正如图 21-5(b) 所示。

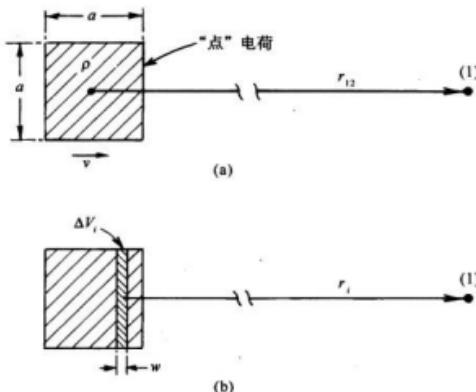


图 21-5 (a) “点”电荷——视作一个小立方体的电荷分布——以速率 v 朝着点(1)运动; (b) 用来计算势的体积元 ΔV_i

设我们事先假定每一体积元 ΔV_i 的厚度 w 远小于 a , 于是单独的体积元看来就像图 21-6(a) 所示的那样, 其中已放上了比完全覆盖电荷还要多的体积元。但我们却还没有把电荷表示出来, 而这是有充分理由的。我们应该把它画在哪里呢? 对于每一体积元 ΔV_i 来说, 必须在 $t_i = (t - r_i/c)$ 的时刻取 ρ , 但由于电荷正在运动, 因此对每个体积元 ΔV_i 来说它处在不同的位置!

让我们说, 我们从图 21-6(a) 中标明为“1”的体积元开始, 该体积元是这样选取的, 即在 $t_1 = (t - r_1/c)$ 时刻电荷的“后”端占据着 ΔV_1 , 如图 21-6(b) 所示。然后当我们计算 $\rho_1 \Delta V_1$ 时, 就必须用到在稍微迟一点的时刻 $t_2 = (t - r_2/c)$ 的电荷位置, 这时电荷所处位置如图 21-6(c) 所示。对于 ΔV_3 , ΔV_4 等等, 可依此类推, 现在就能算出那个和了。

由于每个 ΔV_i 的厚度为 w , 所以它的体积为 wa^2 。于是与电荷分布重叠的每个体积元

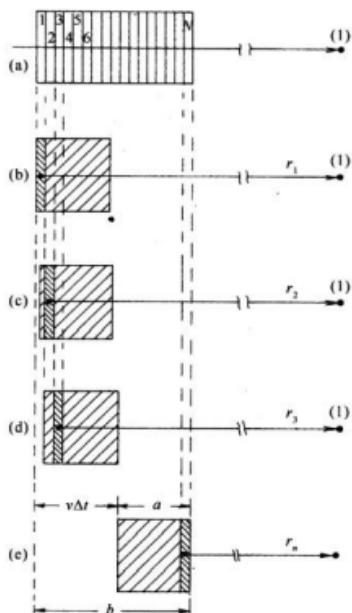


图 21-6 对一个运动电荷的 $\rho(t - r'/c) dV$ 进行积分

含有电量 $wa^2\rho$, 其中 ρ 为立方体内的电荷密度——我们认为它是均匀的。当电荷至点(1)的距离很大时, 通过令一切位于分母上的 r_i 都等于某一平均值, 如令等于该电荷中心的推迟位置 r' , 那么我们这样做造成的误差将是可以忽略的。于是式(21.30) 的总和便是

$$\sum_{i=1}^N \frac{\rho wa^2}{r'}.$$

在这里, ΔV_N 就是如图 21-6(e) 所示的、与电荷分布重叠的最后那一个 ΔV_i 。于是总和显然是

$$N \frac{\rho wa^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'} \left(\frac{Nw}{a} \right).$$

现在 ρa^3 恰好就是总电荷 q , 而 Nw 则是如图 21-6(e) 所示的那个长度 b 。因此我们有

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \left(\frac{b}{a} \right). \quad (21.31)$$

b 是什么? 它是立方体电荷的边长再加上 $t_1 = (t - r_1/c)$ 与 $t_N = (t - r_N/c)$ 之间电荷移动的距离——这就是在如下时间内

$$\Delta t = t_N - t_1 = (r_1 - r_N)/c = b/c$$

电荷所行经的距离。由于电荷的速率为 v , 所以经过的距离为 $v\Delta t = vb/c$, 但长度 b 却是这个距离加上 a ,

$$b = a + \frac{v}{c}b.$$

解出 b , 得

$$b = \frac{a}{1 - v/c}.$$

当然, 所谓 v , 我们指的是在推迟时刻 $t' = (t - r'/c)$ 的速度, 这可以通过写成 $(1 - v/c)_{\text{推迟}}$ 而指明出来, 因此关于势的方程式(21.31)就变成

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \frac{1}{(1 - v/c)_{\text{推迟}}}.$$

这一结果与我们上面的断言即式(21.29)相符。这里存在一个修正项, 它是由于积分“扫过该电荷”时电荷正在运动引起的。当电荷朝着点(1)运动时, 它对该积分的贡献增加了一个比值 b/a 。因此, 正确的积分就是 q/r' 乘以 b/a , 后者即是 $1/(1 - v/c)_{\text{推迟}}$ 。

如果电荷速度方向并非朝着观察点(1), 那就可以看出, 重要的只是朝着点(1)的速度分量。把这个速度分量称为 v_r , 则修正因子为 $1/(1 - v_r/c)_{\text{推迟}}$ 。并且, 对于任何形状——不一

定是立方体——的电荷分布，我们做过的分析按完全相同的方式进行。最后，由于电荷的“尺寸” a 并未进入最终的结果，所以当把电荷缩小至任何尺寸——甚至缩小成一点时，上述结果同样成立。对于一个以任意速度运动的点电荷，普遍的结果是标势为

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'(1 - v_r/c)_{\text{推迟}}}, \quad (21.32)$$

这个式子往往写成等效的形式：

$$\phi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r - v \cdot r/c)_{\text{推迟}}}, \quad (21.33)$$

式中 r 是从电荷指向正在计算 ϕ 的那个点(1)的矢量，而所有在括号内的量都必须是它们在推迟时刻 $t' = t - r'/c$ 的值。

当我们由式(21.16)计算有关一个点电荷的势 \mathbf{A} 时，同样的事情也会发生。电流密度为 $\rho\mathbf{v}$ ，而对 ρ 的积分与刚才求 ϕ 时相同。所以矢势为

$$\mathbf{A}(1, t) = \frac{q\vec{v}_{\text{推迟}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 (r - v \cdot r/c)_{\text{推迟}}}. \quad (21.34)$$

有关点电荷的势最初是由李纳和维谢尔导出的，因而被称为李纳-维谢尔势。

要把这一环节接回到式(21.1)上去，只需从这些势算出 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} （利用 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ）。现在这仅是个算术问题。然而，这项算术相当繁复，所以将不列出所有的细节。也许你会相信我们所说的话，式(21.1)就同上面所导出的李纳-维谢尔势相当*。

§ 21-6 匀速运动电荷的势；洛伦兹公式

下一步我们希望应用李纳-维谢尔势于一种特殊情况——即找出电荷沿一直线做匀速运动时所产生的场，以后再用相对论原理来求它。现在已经知道，当我们站在电荷的静止参照系中时势会怎样。当电荷在动时，则可以通过从一个参照系到另一个参照系的相对论性变换把每样东西都算出来。但相对论起源于电和磁的理论。洛伦兹变换式（第 1 卷第 15 章）是洛伦兹在研究电和磁的方程式时发现的。为了使你能够理解事情的由来，我们希望证明麦克斯韦方程组确会导致洛伦兹变换。我们从直接按照麦克斯韦方程组的电动力学来计算一个匀速运动电荷的势开始。我们已经证明，麦克斯韦方程组对一个运动电荷会导致曾在上一节中得到的势。因此，当我们引用这些势时，也就是在应用麦克斯韦理论。

设有一个沿 x 轴以速率 v 运动的电荷。我们要求出如图 21-7 所示的点 $P(x, y, z)$ 的势。如果 $t = 0$ 时电荷处在原点，则在时刻 t 该电荷已处于 $x = vt, y = z = 0$ 的点。可是，我们所必须知道的却是在推迟时刻

* 如果你有大量纸张和时间，就可以自己试试将它算出来。那么，我们要提出两个建议：首先，不要忘记对 r' 取微商很复杂，因为它是 t' 的函数。其次，不要试图导出式(21.1)，而是要算出其中所有各种微商，然后同你从式(21.33)和(21.34)的势所获得的 \mathbf{E} 比较。

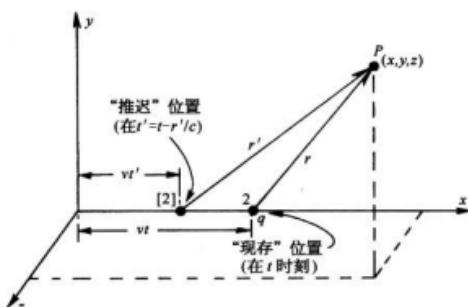


图 21-7 求出一个沿 x 轴以匀速运动的电荷在 P 点的势 r' 消去。然后对两边平方得到

$$c^2(t-t')^2 = (x-vt')^2 + y^2 + z^2,$$

这是关于 t' 的一个二次方程。把那些平方的二项式都展开，并把含 t' 的相似项收集起来，则可得

$$(v^2 - c^2)t'^2 - 2(xv - c^2t)t' + x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0.$$

由此解出 t' ，

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c}\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}. \quad (21.37)$$

为求得 r' ，就得把这个 t' 的表示式代入下式：

$$r' = c(t - t').$$

现在我们准备由式(21.33)来求 ϕ ，由于 v 是恒量，所以这个式子变成

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' - v \cdot r'/c}. \quad (21.38)$$

v 在 r' 方向的分量为 $v(x - vt')/r'$ ，因而 $v \cdot r'$ 正好是 $v(x - vt')$ ，而整个分母为

$$c(t - t') - \frac{v}{c}(x - vt') = c\left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t'\right].$$

代入来自式(21.37)中的 $(1 - v^2/c^2)t'$ ，对于 ϕ 我们获得

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}.$$

如果我们将上式重新写成下式，则更易于理解：

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (21.39)$$

$$t' = t - \frac{r'}{c} \quad (21.35)$$

电荷的位置，式中 r' 为从该推迟时刻的电荷位置至 P 点的距离。在这一较早时刻 t' ，电荷位于 $x = vt'$ 处，因而

$$r' = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}. \quad (21.36)$$

为求得 r' 或 t' ，得将这个方程同式(21.35)结合起来。首先，通过式(21.35)解出 r' 并代入式(21.36)中把

矢势 \mathbf{A} 是有附加因子 v/c^2 的相同的表示式：

$$\mathbf{A} = \frac{v}{c^2} \phi.$$

从式(21.39)中我们可以清楚地看到洛伦兹变换的起源。要是该电荷位于它本身的静止参照系中的原点，则它的势应该为

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}}.$$

由于我们是在一个运动参照系中对它进行观察的，因而好像坐标应该通过下列式子进行变换：

$$x \rightarrow \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$y \rightarrow y,$$

$$z \rightarrow z.$$

那正好就是洛伦兹变换，而我们刚才所做的实质上也还是洛伦兹发现它时所用过的方法。

不过，出现于式(21.39)前面的那个附加因子 $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 又是怎么一回事呢？另外，若在粒子的静止参照系中矢势 \mathbf{A} 处处为零，则它在运动坐标系中表现成什么？我们不久将要证明， \mathbf{A} 和 ϕ 在一起构成一个四元矢量，像粒子的动量 \mathbf{p} 和总能量 U 那样。式(21.39)中那个附加因子 $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 就是当人们在变换一个四元矢量的分量时总会出现同样的因子——就像电荷密度变成 $\rho/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 那样。事实上，由式(21.4)和(21.5)就几乎可以明显地看出， \mathbf{A} 和 ϕ 是一个四元矢量的分量，因为我们已在第 13 章中证明 \mathbf{j} 和 \mathbf{p} 是一个四元矢量的分量。

以后我们还将更详细地考虑有关电动力学方面的相对论；这里只希望向你们表明，麦克斯韦方程组如何自然地导致洛伦兹变换。这样，当你发现电和磁的规律已经符合爱因斯坦的相对论时，将不会感到诧异。我们无需像对牛顿力学定律所必须做的那样去加以“修补”。

第 22 章 交 流 电 路

§ 22-1 阻 抗

在本课程中，我们的大部分工作目的在于与完整的麦克斯韦方程组相联系。在以上两章中，曾讨论了这些方程的重要结果。我们已经清楚，那些方程含有以前所算出的一切静态现象，以及在第 1 卷中就已相当详尽地谈及的那些有关电磁波和光的现象。麦克斯韦方程组给出上述两方面的现象，这些现象取决于人们所计算的场是靠近电流和电荷还是远离它们。对于中间的区域则没有什么有意义的东西可说，那里并未出现什么特殊现象。

然而，在电磁学中还有几个课题有待我们去处理。我们将要讨论有关相对论和麦克斯韦方程组的问题——即当人们相对于运动坐标系而观望那麦克斯韦方程组时所发生的情况，以及关于在电磁系统中的能量守恒问题，还有关于材料电磁性质的广泛课题。迄今为止，除了对于电介质的特性有过一点研究以外，我们只讨论过自由空间中的电磁场。而且，尽管在第 1 卷中我们已相当详尽地谈及光学的课题，但还有几件事情我们很想从场方程的观点出发重新讨论。

特别是要重新考虑有关折射率的课题，尤其是关于稠密材料方面的问题。最后，还要考虑与局限于一有限空间区域里的波相联系的现象。我们过去曾在研究声波时简单接触过这类问题。麦克斯韦方程组也导致表示电场和磁场约束波的那些解。我们将在以后某些章节中考虑这一具有重要技术应用的课题。为了引导到该课题上去，我们将从考虑低频时的电路特性着手。然后就可对下述两种情况进行比较：一种是麦克斯韦方程组的准静态近似适用的情况，而另一种则是高效应占优势的情况。

因此，我们就将从上面几章中那巍峨而险峻的高峰降回到相对低水平的电路课题上来。然而将会见到，即使这么一个世俗课题，只要足够详细地加以考察，也能发现它包含极大的复杂性。

我们已在第 1 卷第 23 和 25 两章中讨论过电路的某些性质。现在再来重复其中某些内容，但会详细得多。我们将再度只同一些线性系统和全都按正弦形式变化的电压和电流打交道，这时，应用第 1 卷第 23 章中所描述的那种指数函数符号，就可应用复数来表示所有的电压和电流。于是，一个随时间变化的电压 $V(t)$ 就将被写成

$$V(t) = \hat{V} e^{i\omega t}, \quad (22.1)$$

式中 \hat{V} 代表一个与 t 无关的复数。当然，实际上随时间变化的电压 $V(t)$ 是由上式右边的复数函数的实部给出的。

同样，所有其他随时间变化的量也都将被视作以相同的频率 ω 按正弦形式变化。因此，我们写出

$$\begin{aligned} I &= \hat{I} e^{i\omega t} && (\text{电流}), \\ \mathcal{E} &= \hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t} && (\text{电动势}), \\ \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{E}} e^{i\omega t} && (\text{电场}), \end{aligned} \quad (22.2)$$

等等。

多半时间我们将用 V, I, \mathcal{E} … (而不是用 $\hat{V}, \hat{I}, \hat{\mathcal{E}}$ …) 来写出方程, 但得记住, 时间的变化是由式(22.2)给出的。

在以往的电路讨论中曾经假定, 像电感、电容和电阻这种东西你们都已熟悉。现在要来稍微详尽地看看这些所谓理想电路元件指的是什么。我们将从电感开始。

电感是这样制成的, 即把许多匝的导线绕成一个线圈形式, 并从其两端接至距离线圈相当远的接头上去, 如图 22-1 所示。我们要假定, 由线圈中电流所产生的磁场并未强烈地向外扩展到全部空间, 从而不会与电路的其他部分发生相互作用。通常可以这样安排, 把线圈绕成一个环形的式样, 或把线圈绕在某一块适当的铁芯上, 从而约束磁场, 或通过把线圈放在某一个适当的金属盒之内, 如图 22-1 所简略指明的那样。在任何情况下, 我们都假定, 在端点 a 和 b 附近的外部区域里仅有微不足道的磁场。我们也要假定, 可以忽略线圈导线里的任何电阻。最后, 还将假定, 那些出现在导线表面上用以建立电场的电荷量是可以忽略的。

具备了所有这些近似性, 就可以有一个所谓“理想”电感(以后我们还会回过头来讨论在实际电感中所发生的事情)。对于理想电感, 我们说它的端路电压等于 $L(dI/dt)$ 。现在来看看为什么会这样? 当有电流通过电感时, 正比于这个电流的磁场在线圈内部便建立了起来。若电流随时间变化, 则这磁场也会变化。一般说来, \mathbf{E} 的旋度等于 $d\mathbf{B}/dt$; 或者换句话说, \mathbf{E} 环绕任何闭合路径的线积分等于穿过该回路 \mathbf{B} 通量的变化率的负值。现在假设我们考虑下述路径: 由端点 a 开始沿线圈(总是保持在线圈之内)抵达端点 b , 然后在该电感外面的空间经过空气从端点 b 回到端点 a 。 \mathbf{E} 环绕这一闭合路径的线积分可以写成两部分之和:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (22.3)$$

正如以前已经了解的, 在一理想导体内部不可能有电场(最微小的场都可能产生无限大的电流)。因此, 从 a 至 b 经由线圈的积分等于零。 \mathbf{E} 线积分的整个贡献都是来自该电感外面从 b 至 a 的那一段路径。既然我们已经假定, 在该“盒子”外面的空间里不存在磁场, 则这部分积分就与所选取的路径无关, 因而我们可以对两端的电势下定义。这两端电势的差就是所谓的电压差或简称为电压 V , 因而我们有

$$V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

这整个线积分以前曾称为电动势 \mathcal{E} , 当然也就等于线圈里磁通量的变化率。我们早已

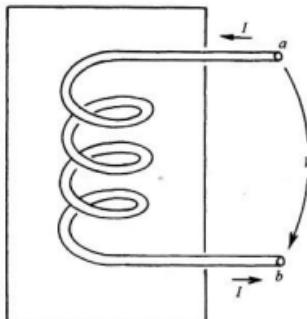


图 22-1 电感

明白,这一电动势与电流的负变化率成正比,因而就有

$$V = -\varepsilon = L \frac{dI}{dt},$$

式中 L 是线圈的自感。由于 $dI/dt = i\omega I$, 所以我们有

$$V = i\omega L I. \quad (22.4)$$

描述理想电感的方法,举例说明了解决其他理想电路元件——通常称作“集总”元件——的一般方法。这些元件的性质完全由出现在两端点处的电流和电压来描述。通过做些适当近似,就有可能忽略那些出现在物体内部的场的巨大复杂性,在内部与外部发生的事情之间划清了界限。

对于一切电路元件,我们都会找到一个像式(22.4)那样的关系式,其中电压正比于电流,而其比例常数一般说来都是一复数。这个复值比例系数称为阻抗,并通常写为 z (不要同 z 坐标混淆起来)。它一般是频率 ω 的函数。因此,对于任何集总元件来说就可以写出

$$\frac{V}{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = z. \quad (22.5)$$

对于电感则有

$$z(\text{电感}) = z_L = i\omega L. \quad (22.6)$$

现在让我们从同样观点来看看电容*。一个电容器包括两块导电板,并各自引出导线至适当的终端。这两块板可以有任何形状,并且通常由某种介电材料隔开。我们大略地把

这样一种情况画在图 22-2 上,再做出几个简化假定。首先,假定板和导线都是理想导体。其次,假定两板间的绝缘相当完美,以致不会有电荷能够通过该绝缘物质从一板流至另一板。再其次,假定这两块导体互相靠近但远离其他一切导体,以致所有离开其中一板的场线都将终结在另一板上。这样,在两板上的电荷就将永远等量异号,而在板上的电荷比起那些在接线表面上的要多得多。最后,我们假定在该电容器附近不会有磁场。

现在设想考虑 E 环绕下述回路的线积分,即从端点 a 开始,沿导线内部达到该电容器的上板,然后越过两板之间的空间,又从下板通过导线而到达端点 b ,并在电容器外面的空间返回到端点 a 。由

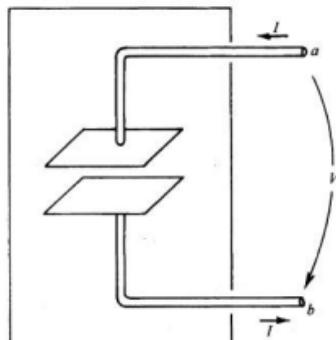


图 22-2 电容

* 有些人说,我们应该用“电感器”和“电容器”这种名称来称呼那些东西,而用“电感”和“电容”称呼它们的性质(与“电阻器”和“电阻”相类似)。但我们宁愿采用你将会在实验室里听到的那些名称。大多数人对于一个具体线圈及其自感 L 两者都仍说是“电感”。至于“电容器”(capacitor)一词似乎已很吃香——尽管仍相当经常地听到另外—个“电容器”名称(condenser)——而大多数人仍比较喜欢用“电容”(capacity),甚于用“电容”(capacitance)。

于没有磁场, 所以 E 绕这个闭合路径的线积分就是零。这个积分可以分成三部分:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{沿着导线}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{在两板间}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{外面空间}}^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (22.7)$$

沿导线的积分为零, 因为在理想导体里不存在电场。在电容器外面从 b 至 a 的积分等于在两端点间的电势差的负值。由于我们设想这两块板总是孤立于世界上其他部分的, 故在这两块板上的总电荷就必须为零; 如果上板有电荷 Q , 则在下板会有相等而相反的电荷 $-Q$ 。以前我们已知道, 若两导体拥有相等而相反的电荷, 即正负 Q , 这两板间的电势差就会等于 Q/C , 其中 C 称为这两个导体的电容。根据式(22.7), a 和 b 两端点间的电势差等于两板间的电势差。因而我们有

$$V = \frac{Q}{C}.$$

从端点 a 进入(并从端点 b 离开)电容器的电流 I 等于 dQ/dt , 即板上电荷的变化率。把 dV/dt 写成 $i\omega V$ 后, 便可按照如下方式写出电容器的电压与电流的关系:

$$i\omega V = \frac{I}{C},$$

亦即

$$V = \frac{I}{i\omega C}. \quad (22.8)$$

这样, 电容器的阻抗 z 为

$$z(\text{电容器}) = z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (22.9)$$

我们要考虑的第三种元件是电阻。可是, 由于还没有讨论过实际材料的电学性质, 所以我们不准备谈论在真实导体内部发生的事情。因此, 只好接受这样一个事实, 即在真实材料内部会有电场存在, 而这些电场能够引起电荷流动——也就是说, 产生了电流——并且这个电流与电场从导体的一端至另一端的积分成正比。然后, 我们设想一个按照简图 22-3 建立起来的理想电阻。两条被认为由理想导体构成的导线分别从 a 点与 b 点连接至一根电阻性材料棒的两端。根据我们常用的论证方法, 两端点 a 和 b 间的电势差等于外电场的线积分, 而这也等于通过电阻性材料棒的电场的线积分。从而得出通过该电阻的电流 I 与端电压 V 成正比:

$$I = \frac{V}{R},$$

式中 R 称为电阻。以后我们还将看到, 对于实际导电材料, 电流与电压间的关系只近似为线性。我们也将看到, 这一近似的正比性只有当频率不太高时才被预期与电流和电压的变化频率无关。于是, 对交变电流来说, 跨越电阻的电压与电流同相位, 这意味着该阻抗是实数:

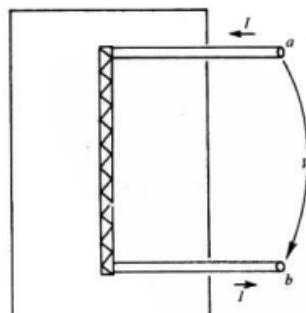


图 22-3 电阻

$$z(\text{电阻}) = z_R = R. \quad (22.10)$$

关于三种集总电路元件——电感、电容和电阻——的上述结果,我们将其概括在图22-4中。在该图中,以及在上面那些图中,我们都用一个从一端指向另一端的箭头来表明电压。

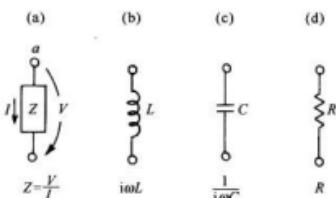


图 22-4 理想的集总电路元件
(被动的或无源的)

如果电压是正的——也就是说,端点 a 比端点 b 处于较高的电势——那么该箭头便指向一个正“电压降”的方向。

尽管我们现在所谈的是交流电,但当然也可通过取频率 ω 趋于零的极限而包括载有稳恒电流电路的特殊情况。对于零频率——也即对于直流——来说,电感的阻抗趋于零;它变成短路了。对于直流,电容器的阻抗趋于无限大;它变成断路了。由于电阻的阻抗与频率无关,所以它是分析一个直流电路时唯一遗留下来的元件。

迄今为止所描述过的那些电路元件中,电流与电压都是相互成比例的。倘若其中一个等于零,另一个也同时为零。我们往往会这样想:一个外加电压是造成电流的“原因”,或者电流会引起两端点间的电压,因此,在某种意义上,元件是会对所“施”的外部条件发生“响应”的。由于这一原因,这些元件便称为被动元件(或无源元件)。这样,与它们形成对照的是,即将在下节讨论的、作为电路中的交变电流或电压之源的、诸如发电机那一类的主动元件(或有源元件)。

§ 22-2 发电机

现在要来谈谈有源电路元件——一种电路中电流和电压的源——即发电机。

假定有一个像电感那样的线圈,只是它的匝数很少,以致可以忽略它本身电流的磁场。然而,这一线圈被置于或许由诸如旋转磁铁所产生的变化磁场之中,如图 22-5 所示(以前就知道,像这样的旋转磁场也可由通有交变电流的一组适当的线圈产生)。我们必须再做出几个简化假定,这些假定全都与上面对电感情况所描述的相同。特别是,我们将假定,该变化磁场被局限在线圈附近的确定区域而不会出现在发电机外面两端点之间的空间里。

仔细地按照我们曾对电感所做的分析,考虑环绕下一个闭合回路对 E 进行线积分,即从端点 a 开始,经过线圈到达端点 b ,并在两端点之间的时间里返回到起点。我们再次得出结论,两端点间的电势差等于 E 环绕该回路的总线积分:

$$\mathbf{V} = -\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

这个线积分等于该电路中的电动势,因而跨越发电机两端点的电势差 V 也就等于该线圈的匝连磁通量的变化率:

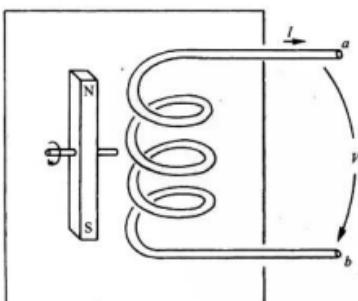


图 22-5 含有一个固定线圈和一个旋转磁场的发电机

$$V = -\dot{\epsilon} = \frac{d}{dt}(\text{磁通量}). \quad (22.11)$$

对于一部理想发电机来说, 我们假定该线圈的匝连磁通量是由一些外加条件——诸如旋转磁场的角速度——所确定的, 而无论如何不受流经发电机电流的影响。这样看来, 发电机——至少是我们现在所考虑的理想发电机——并不是一个阻抗, 跨越它两个端点的电势差由任意给定的电动势 $\epsilon(t)$ 所确定。这种理想发电机由图 22-6 所示的符号表示, 小箭头代表电动势取正值时的方向, 图中发电机的正电动势将产生一个 $V = \epsilon$ 的电压, 其中 a 端的电势比 b 端高。

还有另一种制造发电机的方法, 虽然内部很不相同, 但在两端点以外所发生的事态则与刚才所描述的无法加以区别。假设有一个金属线圈在一固定的磁场中旋转, 如图 22-7 所示。我们画出一个条形磁铁来表明有磁场存在; 当然, 它也可以由任何其他恒定磁场源、诸如一个载有恒定电流的附加线圈来代替。就像图中所示的那样, 利用滑动接触或“汇电环”就可把旋转线圈同外界的连接建立起来。我们仍然对出现在 a 与 b 两端点间的电势差感兴趣, 当然, 它就是沿着发电机之外一条路径从端点 a 至端点 b 的电场积分。

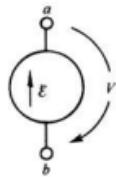


图 22-6 理想发电机的符号

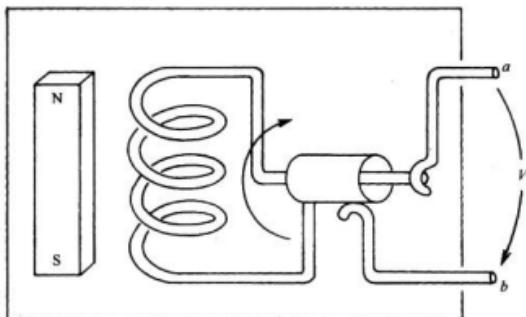


图 22-7 含有一个旋转于一固定磁场中的线圈的发电机

此刻在图 22-7 的系统中不存在变化着的磁场, 因而我们起初也许会怀疑怎么会有任何电压出现在发电机的两端。事实上, 在发电机内部的任何一处都没有电场。我们照常假定, 作为理想元件, 在其内部的导线是由理想的导电材料制成的, 而正如我们曾经多次说过的那样, 在一理想导体内部电场等于零。但那是不正确的。当导体在一磁场中运动时, 它就不正确了。正确的说法是, 在一理想导体内部作用于任一电荷上的合力必须为零, 否则就会有自由电荷无限大地流动。所以永远正确的是, 电场 E 加上导体速度与磁场 B 的叉积——那就是作用在单位电荷上的合力——在导体内部必须为零:

$$\mathbf{F}/\text{单位电荷} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{在理想导体中}), \quad (22.12)$$

式中 v 代表导体的速度。只要导体的速度 v 为零, 则我们以前关于理想导体内部没有电场

的说法是完全正确的,不然的话,正确的说法应由式(22.12)所提供。

回到图 22-7 的发电机上来,我们现在明白,通过发电机的导电路径从端点 a 至端点 b 电场 E 的线积分必定等于在相同路线上 $v \times B$ 的线积分,即

$$\int_a^b E \cdot ds = - \int_a^b (v \times B) \cdot ds. \quad (22.13)$$

在导体内 在导体内

可是,这仍然是正确的:即环绕一个包括该发电机外面从 b 至 a 的归途在内的那条完整的回路 E 的线积分仍必定为零,因为这里并不存在变化的磁场。因此,式(22.13)中的第一个积分也就等于 V ,即两端点间的电压。事实证明,式(22.13)右边的积分恰好就是穿过该线圈的通量匝连数的变化率,因而——根据通量法则——等于线圈中的电动势。因此,我们再度得到:跨越两端点间的电势差等于该电路中的电动势,它与式(22.11)相符。所以,无论是其内部磁场在一固定线圈附近变化着的发电机,还是其内部线圈在一固定磁场中运动的发电机,它们的外部性质都相同。有一个电势差跨越两端点之间,它与电路中的电流无关而仅仅取决于该发电机内部一些任意给定的条件。

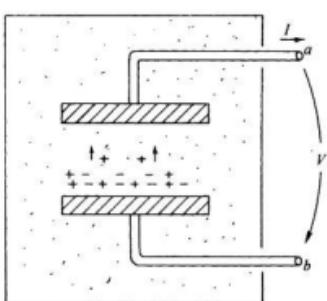


图 22-8 化学电池

只要我们试图从麦克斯韦方程组的观点来理解发电机的作用,我们也许会问及像手电筒电池那样的普通化学电池。这也是一种发电机,即是一个电压源,尽管它只出现在直流电路中。原理最简单的一种电池如图 22-8 所示。我们设想有两块浸没在某一种化学溶液中的金属板。假定该溶液含有正的和负的离子。也假定其中一种离子(如负离子)比那带有异号电荷的离子要重得多,以致它依靠扩散过程而通过溶液的运动慢得多。其次,我们还假定,用种种方法来安排使得溶液浓度从液体的一部分变化至另一部分,以致两种符号的离子在比方说下板附近的数目要远大于在上板附近。由于正离子的迁移

率较大,它们便将更快地漂移到浓度较低的那个区域里,使得有稍微超额的正离子到达上板。于是上板就将带有正电而下板则有一净负电荷。

当有越来越多的电荷扩散至上板时,这一块板的电势就将升高至这样一种程度,即在两板间所引起的电场对离子所施之力恰好抵偿其超额迁移率,因而电池中的两极板就迅速达到一个标志其内部结构性能的电势差。

正如上面对于一理想电容器所论证的那样,我们见到,当不再有任何离子扩散时, a 和 b 两端点间的电势差恰好等于两极板间的电场的线积分。当然,电容器与这样一个化学电池之间是有本质差别的。倘若把电容器的两端短路一会儿,电容器将会放电而不再有任何电势差跨越两端点之间。而在化学电池的情况下,电流却可以继续从端点引出而不致在电动势上有任何改变——当然一直到电池内的化学药品耗尽时为止。在一个实际电池中,会发现跨越端点的电势差随着从电池所引出的电流增大而降低。然而,在保持已做出的那种抽象化情况下,我们可以设想一个理想电池,跨越于端点间的电压与电流无关。这样,一个实际电池便可视作一个串联着一个电阻的理想电池。

§ 22-3 理想元件网络; 基尔霍夫法则

就像上一节中我们曾见到的, 利用元件外面所发生的事情来描述一个理想电路元件是十分简单的。电流与电压彼此线性地联系着。可是在元件内部真正发生的情况却是非常复杂的, 凭借麦克斯韦方程组来给出一个精确的描述十分困难。试想象对一部含有数以百计的电阻、电容和电感的收音机里面的电场和磁场设法提供精确描述。要对这样一件事情运用麦克斯韦方程组来加以分析, 那会是无法做到的。但通过做出曾在 § 22-2 中描述过的多种近似以及对实际电路元件的基本特点用理想化的办法加以概括, 对一个电路用相对直截了当的方法来分析就成为可能的了。现在我们要来说明那是怎样进行的。

设有一个电路, 含有一部发电机和几个互相连接在一起的阻抗, 如图 22-9 所示。按照我们的近似条件, 在各个电路元件的外部区域并没有磁场, 因此环绕任何未曾通过任何元件的曲线 E 的线积分为零。然后考虑由虚线所构成的曲线 Γ , 它完全围绕着图 22-9 中的电路。 E 环绕这一条曲线的线积分由好几部分构成, 每一部分就是从一个电路元件的一端至另一端的线积分。这个线积分已被我们称为跨越该电路元件的电压降, 于是整个线积分就恰好是跨越电路中所有元件的电压降之和:

$$\oint E \cdot ds = \sum V_n.$$

由于这一线积分为零, 所以我们得到: 环绕整个电路回路的电势差之和等于零, 即

$$\sum_{\text{环绕任一回路}} V_n = 0. \quad (22.14)$$

这一结果得自麦克斯韦方程组中的一个方程——即在没有磁场的区域里, 环绕任一闭合回路 E 的线积分为零。

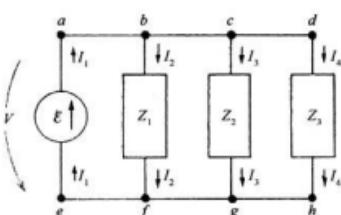


图 22-10 流入任一个分支点的电流之和为零

假设现在考虑一个像图 22-10 所示的电路。连接 a, b, c 和 d 各端点的那条水平线是为着表明这些端点都互相连接着, 或者它们都是由电阻可以忽略的导线连接着。无论如何, 这种画法的意思是: a, b, c 及 d 诸端点全都处于相同的电势; 同样地, e, f, g 及 h 诸端点也都处于共同的电势。于是横跨四个元件中每一个的电压降 V 都相同。

现在我们的理想化条件之一已经成为, 在各阻抗的端点上所积聚起来的电荷都可以忽略。现在

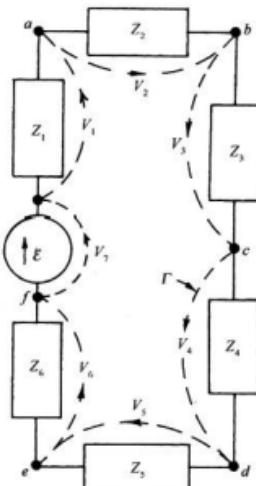


图 22-9 环绕任一闭合路径的电压降之和为零

再进一步假定,任何连接各端点的导线上的电荷也都可以忽略。于是电荷守恒律要求,任何离开某个电路元件的电荷都应立即进入另一个电路元件。或者,也同样可以说,我们要求流入任何分支点的电流之代数和必须为零。当然,所谓分支点我们指的是诸如 a, b, c, d 等互相连接着的任何一组端点。像这样互相连接的一组端点我们往往称之为“节点”。于是对于图 22-10 的电路,电荷守恒便要求

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (22.15)$$

进入由 e, f, g 和 h 四端点构成的那个节点的诸电流之和也是零:

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \quad (22.16)$$

当然,这和式(22.15)是一样的。这两个方程并非互相独立。普遍的法则是,流进任一个节点的电流之和必须为零。

$$\sum_{\text{流进一个节点}} I_n = 0. \quad (22.17)$$

上面关于环绕一个闭合回路的电压降之和为零的结论,在一个复杂电路中必须应用于其中任一回路。并且,有关流进一个节点的电流之和为零的结果对于任何一个节点也必然是正确的。这两个方程称为基尔霍夫法则。有了这两个法则,就能够在无论任何网络中解出其中的电流和电压。

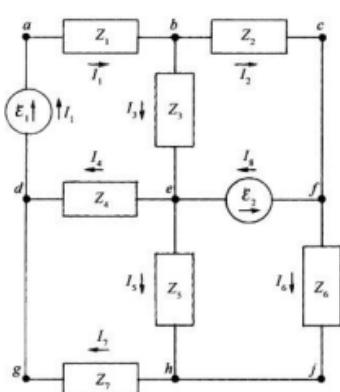


图 22-11 用基尔霍夫法则来分析电路

以上同类型的方程。

其次,对于该电路中每一个节点,还必须写出电流方程。例如,对那些流入节点 b 的电流求和时便会给出方程

$$I_1 - I_3 - I_2 = 0.$$

同理,对那个标明为 e 的节点则会有电流方程

现在假定考虑图 22-11 中那个更复杂的电路。在这一电路中我们将怎样找出其中的电流和电压呢?可以按照下述直截了当的办法把它们求出。分别考虑出现在该电路中的那四个附属闭合电路(例如,其中一个回路从端点 a 至端点 b 又至端点 e 和 d 而返回到端点 a)。对于每一个回路,我们写出基尔霍夫法则的第一个方程——环绕每一回路的电压之和为零。必须记住:若顺着电流的方向行进,则电压降就算作为正,但若在经过某一元件时与电流的方向相反,则电压降应算为负;并且还必须记住,跨越一部发电机的电压降是在该方向上电动势的负值。这样,若我们考虑那一个从端点 a 出发而又结束于其上的小回路,就会得出如下方程:

$$z_1 I_1 + z_3 I_3 + z_4 I_4 - \mathcal{E}_1 = 0.$$

应用相同的法则于其余的回路,我们便会获得三个

$$I_3 - I_4 + I_8 - I_5 = 0.$$

图上所表示的这个电路总共有五个这样的电流方程。但是，结果证明，这些方程中的任一个都可从其他四个导出来，因此就只有四个独立的电流方程。这样，我们总共有八个独立的线性方程：四个电压方程和四个电流方程。有了这八个方程，就可以解出八个未知电流。一旦这些电流求出，该电路便算是已经解决了。跨越每个元件的电压降由流经该元件的电流乘以其阻抗而给出（或者，在有电压源的情况下，电压降是已知的）。

我们已见到，当写出电流方程时，会获得一个与其他诸方程并不独立的方程。一般也可能写下太多的电压方程。例如，在图 22-11 的电路中，虽然我们只考虑那四个小回路，但还有大量的其他回路，对它们也可以写出电压方程。例如，有一个沿路径 $abcfeda$ 的回路，还有另一个回路是沿 $abcfehgda$ 路径。你能够看出，存在许多个回路。在分析一个复杂电路时极易于得到太多的方程。有一些法则会告诉你如何处理以便仅仅写下最低限度数目的方程，但往往只要略为思考一下便能看出该怎样去得到形式最简单的适当数目的方程。而且，写出一两个超额方程也没有什么妨碍。它们将不会导致任何错误的答案，只是或许要做一些不必要的代数运算罢了。

在第 1 卷第 25 章中，我们曾经证明过，若两阻抗 z_1 和 z_2 互相串联，则它们等价于由下式给出的一个单独阻抗 z_s ：

$$z_s = z_1 + z_2. \quad (22.18)$$

我们也曾证明过，若两阻抗并联，则它们等价于一个由下式给出的单独阻抗 z_p ：

$$z_p = \frac{1}{1/z_1 + 1/z_2} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}. \quad (22.19)$$

你如果回顾一下就将会看到，在导出这些结果时我们实际上已应用了基尔霍夫法则。往往可以通过反复运用关于阻抗串联和并联的公式来分析一个复杂电路。例如，图 22-12 中的电路就是可以这样分析的。首先， z_4 和 z_5 两阻抗可以由其并联等效阻抗来代替，而 z_6 和 z_7 两阻抗也是一样。然后，阻抗 z_2 可以同 z_6 和 z_7 的并联等效阻抗按串联法则结合起来。按照这样的方式进行下去，整个电路就可以简化成一部发电机同一个单独阻抗 Z 的串联。于是流经该发电机的电流就不过是 \mathcal{E}/Z 。然后反过来进行计算，人们就能求出通过每一阻抗的电流了。

然而，也有一些十分简单的电路不能用这种办法来分析，图 22-13 所示的电路就是一个例子。要分析这个电路，一定要按照基尔霍夫法则写出电流和电压的方程。让我们来做一做吧。这里只有一个电流方程：

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

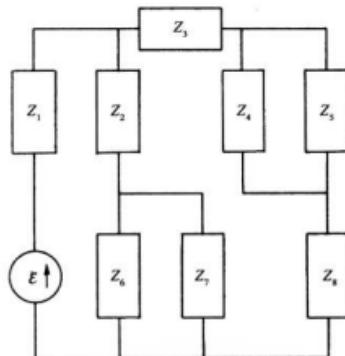


图 22-12 一个可以用串联和并联组合来分析的电路

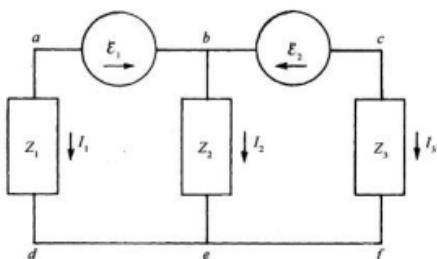


图 22-13 一个不能用串联和并联组合来加以分析的电路

$$I_1 = \frac{z_2 \epsilon_2 - (z_2 + z_3) \epsilon_1}{z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3} \quad (22.20)$$

和

$$I_2 = \frac{z_1 \epsilon_1 + z_3 \epsilon_2}{z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3}. \quad (22.21)$$

第三个电流可从这两个电流之和获得。

另一个不能利用阻抗的串联和并联法则加以分析的电路例子如图 22-14 所示。像这样的电路称为“电桥”，它出现在许多用来测量阻抗的仪器中。对这一电路人们感兴趣的问题往往是：各阻抗必须怎样联系，才能使通过阻抗 Z_3 的电流为零。符合这一要求的条件将留给你们去找。

§ 22-4 等效电路

假定把一部发电机 ϵ 连接到一个含有某种复杂的阻抗互连电路中，如图 22-15(a)所示。由于所有从基尔霍夫法则获得的方程都是线性的，因而当解出流经该发电机的电流 I 时，我们就会得出结论： I 与 ϵ 成正比。即可以写成

$$I = \frac{\epsilon}{z_{\text{有效}}},$$

现在式中 $z_{\text{有效}}$ 是某个复数，是该电路中所有元件的代数函数（如果该电路除了图中所示的那部发电机之外没有其他发电机，那么就不会有与 ϵ 无关的任何附加项）。但这恰好就是我们应写出的关于图 22-15(b)的电路方程。只要我们仅对 a 和 b 两端点左侧所发生的情况感兴趣，则图 22-15 的两个电路就是等效的。因此，我们能够做出一个普遍陈述：无源元件的任何二端网络都可以由一个单独阻抗 $z_{\text{有效}}$ 来代替而不改变电路中其余部分的电流和电压。当然，这个陈述的内容不过是来自基尔霍夫法则——而最终来自麦克斯韦方程组的线性性质的一种表示。

因而我们立即知道

$$I_3 = -(I_1 + I_2).$$

如果马上利用这一结果写出电压方程，便能节省一些代数运算。对于这个电路存在两个独立的电压方程，它们是

$$-\epsilon_1 + I_2 z_2 - I_1 z_1 = 0$$

和

$$\epsilon_2 - (I_1 + I_2) z_3 - I_2 z_2 = 0.$$

这里有两个方程和两个未知的电流。对这两个方程解出 I_1 和 I_2 ，便得

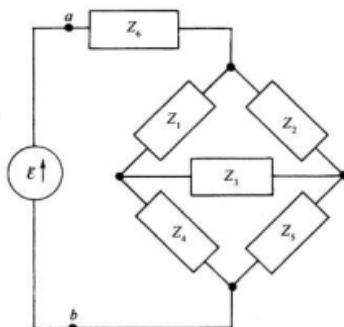


图 22-14 一个桥式电路

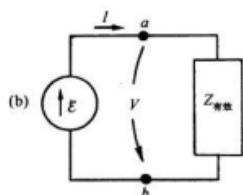
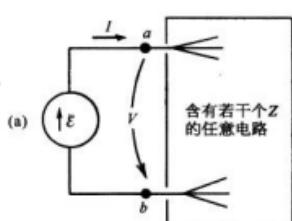


图 22-15 任何无源元件的二端网络都相当于一个有效阻抗

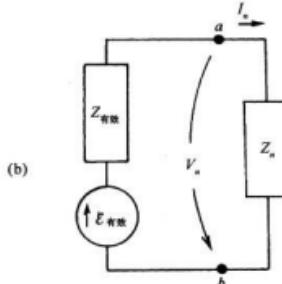
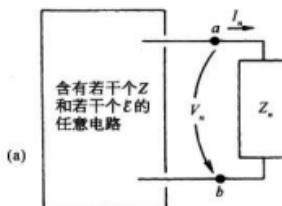


图 22-16 任何二端网络都可以由串联一个阻抗的发电机来代替

这一概念可推广至同时含有若干部发电机和若干个阻抗的电路。假定我们是“从其中某一阻抗的观点”来看这样一个电路，而这个阻抗被称为 z_n ，如图 22-16(a) 所示。要是必须对整个电路的方程求解，则会发现两端点 a 和 b 之间的电压 V_n 是 I_n 的线性函数，我们可以把它写成

$$V_n = A - BI_n, \quad (22.22)$$

式中 A 和 B 依赖于电路中端点左侧的发电机和阻抗。例如，对于图 22-13 的那种电路，我们求得 $V_1 = I_1 z_1$ 。这可以写成[通过对式(22.20)的重新布置]：

$$V_1 = \left[\left(\frac{z_2}{z_2 + z_3} \right) e_2 - e_1 \right] - \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} I_1. \quad (22.23)$$

于是，把这一方程与有关阻抗 z_1 的方程，即 $V_1 = I_1 z_1$ ，互相结合就可获得全部的解，或者在一般情况下，通过将方程式(22.22)与

$$V_n = I_n z_n$$

相结合而获得全部的解。

现在若考虑把 z_n 连接至由发电机和阻抗构成的简单串联电路，如图 22-16(b) 所示，则与式(22.22)相应的方程为

$$V_n = e_{\text{有效}} - I_n z_{\text{有效}},$$

只要我们令 $e_{\text{有效}} = A$ ，而 $z_{\text{有效}} = B$ ，上式与式(22.22)完全相同。因此，若我们只对于在 a 和

b 两端点右侧所发生的情况感兴趣，则图 22-16 的那个任意电路始终可以由发电机与阻抗串联而成的等效结合体来代替。

§ 22-5 能量

我们已经看到，要在一个电感中建立起电流 I ，能量 $U = \frac{1}{2}LI^2$ 必须由外电路供应；当电流下降到零时，这能量又交还给外电路。在一个理想电感中并没有能量损耗机制。当有一交变电流通过一电感时，能量在它与电路的其他部分之间来回流动，递交给电路的能量的平均速率为零。这样，我们便说电感是一个无耗元件，在其中没有电能被消耗掉——也就是“损失”掉。

同样，一个电容器的能量 $U = \frac{1}{2}CV^2$ ，当电容器放电时，会归还给外电路。当一电容器置于交流电路中时，能量在其中流进流出，但每一周期中的净能流为零。一个理想电容器也是一个无耗元件。

我们知道，电动势是一个能源。当电流 I 沿电动势的方向流动时，能量以 $dU/dt = \varepsilon I$ 的速率释放给外电路。如果电流是被电路中的其他发电机驱使——逆着电动势的方向流动，则这电动势将以速率 εI 吸收能量；由于 I 是负的，所以 dU/dt 也将是负的。

如果一部发电机与一个电阻 R 相接，则通过该电阻的电流为 $I = \varepsilon/R$ 。由发电机以速率 εI 供应的能量为该电阻所吸收。这一能量在电阻中变成热，从而使该电路的电能损失掉。这样，我们便说电能在电阻中耗散了。在电阻中能量被耗散的速率为 $dU/dt = RI^2$ 。

在交流电路中，能量消耗于电阻中的平均速率等于 RI^2 在一周中的平均值。由于 $I = \hat{I} e^{i\omega t}$ ——这我们实际指的是 I 正比于 $\cos \omega t$ ——所以在一周中 I^2 的平均值就是 $|\hat{I}|^2/2$ ，因为电流峰值为 $|\hat{I}|$ ， $\cos^2 \omega t$ 的平均值为 $1/2$ 。

当一部发电机接至任意一个阻抗 z 时，能量的损失又将如何呢（当然，所谓“损失”，我们指的是电能转变为热能）？任何阻抗 z 都可以写成它的实部及虚部之和。这就是说，

$$z = R + iX, \quad (22.24)$$

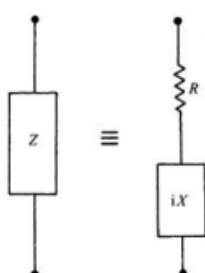


图 22-17 任何阻抗都与纯电阻及纯电抗的串联组合等效

我们以前就知道，任何仅由一些 L 和 C 组成的电路都具有纯虚数的阻抗。由于平均来讲没有任何能量会在某一个 L 和 C 中损失，因而仅含有一些 L 和 C 的纯电抗将不会有能量损失。我们可以看到，在一般情况下对于电抗来说这必定是正确的。

如果一部具有电动势 ε 的发电机被连接至图 22-17 的那个阻抗 z 上，则来自该发电机的电动势和电流便应有这样一个关系：

$$\mathcal{E} = I(R + iX). \quad (22.25)$$

要找出能量输出的平均速率, 就要求出乘积 $\mathcal{E}I$ 的平均值。此刻我们必须小心! 当处理这种乘积时, 应与实数值 $\mathcal{E}(t)$ 和 $I(t)$ 打交道(只有当我们具有线性方程时, 复变数函数的实部才会代表实际的物理量; 现在我们所关心的是一个乘积, 它肯定就不是线性的)。

假定我们选取 t 的原点以便使振幅 \hat{I} 是一实数, 比如 I_0 , 那么 I 的实际时间变化就由下式给出:

$$I = I_0 \cos \omega t.$$

式(22.25)的电动势是下式

$$I_0 e^{i\omega t} (R + iX)$$

的实部, 也即

$$\mathcal{E} = I_0 R \cos \omega t - I_0 X \sin \omega t. \quad (22.26)$$

式(22.26)中的两项分别代表跨越图 22-17 中 R 和 X 的电压降。我们看到, 那跨越电阻的电压降与电流同相, 而那跨越纯电抗部分的电压降则与电流异相。

由发电机供应的能量消耗的平均速率 $\langle P \rangle_{\text{平均}}$, 等于乘积 $\mathcal{E}I$ 在一周内的积分除以周期 T , 换句话说,

$$\langle P \rangle_{\text{平均}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}Idt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R \cos^2 \omega t dt - \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 X \cos \omega t \sin \omega t dt.$$

第一个积分为 $\frac{1}{2} I_0^2 R$, 而第二个积分为零。所以在一个阻抗 $z = R + iX$ 中的平均能量损失只取决于 z 的实部, 并且等于 $I_0^2 R / 2$ 。这同我们以往关于在电阻中的能量损失结果相符, 而在电抗部分并没有能量损失。

§ 22-6 梯形网络

现在我们来考虑一个可用串联和并联组合加以分析的有趣电路。假定从图 22-18(a)的那个电路开始。可以立刻看出, 从端点 a 至端点 b 的阻抗仅是 $z_1 + z_2$ 。现在让我们考虑一个稍微困难一点的电路, 如图 22-18(b)所示。本来可以利用基尔霍夫法则来分析这个电路, 但用串联和并联的组合也容易加以处理。可用一个单独阻抗 $z_3 = z_1 + z_2$ 来代替右端的两个阻抗, 如图 22-18(c)所示。然后, z_2 和 z_3 两阻抗又可以用它们的等效并联阻抗 z_4 来代替, 如图 22-18(d)所示。最后, z_1 和 z_4 与一个单独阻抗 z_5 等效, 如图 22-18(e)所示。

现在可以提出一个有趣的问题: 要是我们在图 22-18(b)的那个网络上永远保持增多一些节段——如图 22-19(a)中虚线所示——将会发生什么样的情况呢? 我们能否解出这样一个无限长的网络? 噢, 那并不怎么困难。首先, 我们注意到, 如果在这一无限长网络的“前”端再添加一节, 它仍不会改变。的确, 若我们添加一节于一无限长网络, 它仍然是同样的无限长网络。假设把在这个无限长网络两端点 a 和 b 之间的阻抗称为 z_0 , 则在 c 和 d 两端点右侧的所有东西的阻抗也将是 z_0 。因此, 就其前端来说, 可以将该网络表达成如图 22-19(b)所示。构成 z_2 与 z_0 的并联组合, 并将这个结果与 z_1 相串联, 我们便能立即写下这个组合的阻抗:

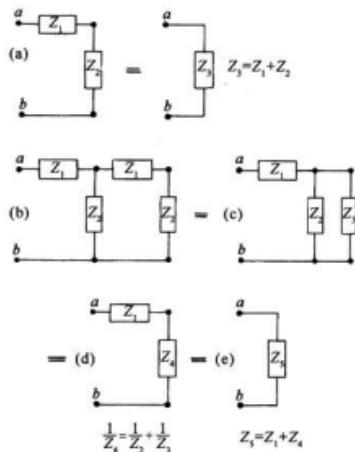


图 22-18 梯形网络的有效阻抗

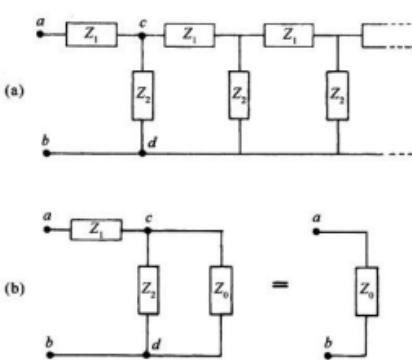


图 22-19 无限长梯形网络的有效阻抗

$$z = z_1 + \frac{1}{1/z_2 + 1/z_0} \text{ 或 } z = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

但这一阻抗也等于 z_0 , 因而得到这么一个方程:

$$z_0 = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

由此可以解出 z_0 :

$$z_0 = \frac{z_1}{2} + \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + z_1 z_2}. \quad (22.27)$$

因此, 我们已求得含有反复串联和并联阻抗的无限长梯形网络的阻抗的解。阻抗 z_0 被称为这样一个无限长网络的特性阻抗。

现在让我们来考虑一个特殊例子, 其中串联元件是一自感 L 而并联元件是一电容 C , 如图 22-20(a) 所示。在这种情况下, 通过令 $z_1 = i\omega L$ 和 $z_2 = 1/(i\omega C)$, 我们便可求得该无限长网络的阻抗。注意式(22.27)中的第一项正好是那头一个元件阻抗的一半。因此, 要是把该无限长网络画成像图 22-20(b) 所示的那样, 似乎就更为自然, 或至少较为简单。若从端点 a' 去观看该无限长网络, 则会知道该特性阻抗为

$$z_0 = \sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4}. \quad (22.28)$$

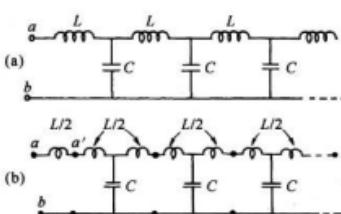


图 22-20 一个 L-C 梯形网络以两种等效方式画出

现在就有两种有趣的情况, 都取决于频率。如果 ω^2 小于 $4/(LC)$, 则根号内的第二项将比第一项小, 因而阻抗 z_0 将是一实数, 反之, 若 ω^2 大于

$4/(LC)$, 则阻抗 z_0 将是一个纯虚数, 并可写成

$$z_0 = i\sqrt{\omega^2 L^2 / 4 - L/C}.$$

我们以前就曾经说过, 一个仅含有诸如电感和电容那种虚数阻抗的电路, 将有一个纯虚数的阻抗。目前正在研究的电路——仅含有一些 L 和一些 C ——在频率低于 $\sqrt{4/(LC)}$ 时其阻抗怎么能够是纯电阻呢? 对于较高频率, 阻抗为一纯虚数, 这与我们以前的说法一致。对于较低频率, 阻抗是一纯电阻, 因而将吸收能量。该电路为什么会像电阻那样不断吸收能量, 要是它仅由电感和电容所构成呢? 答案: 由于有无数个电感和电容, 以致当源被连接到该电路上时, 它会对第一个电感和电容供应能量, 然后又供应那第二个、第三个, 等等。在这种电路中, 能量不断以一恒定速率被吸收, 即从发电机那里稳恒地流出并进入该网络中去, 所供应的这些能量被储存在下行线路中的那些电感和电容中去了。

这一概念暗示着在该电路中发生的情况有一个有趣的地方。我们预期, 如果把一个源接到其前端, 则这个源的效应将经由该网络向无限远的一端传播。波沿线向下的这种传播很像一根从它的驱动源吸收了能量的天线所发出的辐射。也就是说, 我们期望, 当阻抗是一实数、即 ω 比 $\sqrt{4/(LC)}$ 小时, 这样一种传播就会发生。但当阻抗是一纯虚数、亦即 ω 比 $\sqrt{4/(LC)}$ 大时, 就不该指望看到任何这种传播。

§ 22-7 滤 波 器

在上一节中, 我们看到图 22-20 中的无限梯形网络会不断地吸收能量, 如果它被低于某个临界频率 $\sqrt{4/(LC)}$ 的源所驱动, 这个频率将被称为截止频率 ω_0 。我们曾经建议, 这一效应可以用能量不断沿线向下传输来理解。另一方面, 在高频时, 即对于 $\omega > \omega_0$, 便没有这种能量的连续吸收, 这时我们应该期待, 电流或许不会沿线向下“透入”得很远。让我们来看看这些想法是否对头。

假设已把该梯形网络的起始端连接到某个交流发电机, 试问: 梯形网络第 754 节处电压的情况如何? 由于该网络无限长, 因而从一节至次一节电压所发生的任何变化总是一样, 所以就让我们只来看看当从某节、比如说第 n 节至下一节所发生的情况。我们将像图 22-21(a)所示的那样对电流 I_n 和电压 V_n 下定义。

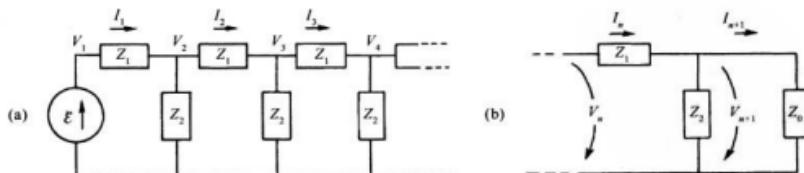


图 22-21 找出梯形网络的传播因子

记住在第 n 节之后, 我们总能用特性阻抗 z_0 来代替该梯形网络的其余部分, 这样就可以从 V_n 得到 V_{n+1} , 于是只需对图 22-21(b)中的那个电路进行分析。首先, 我们注意到, 由

于 V_n 是横跨 z_0 的电压, 因而它必须等于 $I_n z_0$, 并且 V_n 与 V_{n+1} 之差恰好是 $I_n z_1$:

$$V_n - V_{n+1} = I_n z_1 = V_n \frac{z_1}{z_0}.$$

因此, 便可得到比值

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{z_1}{z_0} = \frac{z_0 - z_1}{z_0}.$$

这个比值叫作梯形网络每节的传播因子, 我们将记为 α 。当然, 这对于所有的节都是相同的:

$$\alpha = \frac{z_0 - z_1}{z_0}. \quad (22.29)$$

这样, 在第 n 节之后的电压就是

$$V_n = \alpha^n \mathcal{E}. \quad (22.30)$$

现在你可以找出在第 754 节之后的电压, 它刚好就是 α 的 754 次幂乘以 \mathcal{E} 。

我们看看图 22-20(a) 中 LC 梯形网络的 α 大概是什么。利用式(22.27)的 z_0 以及 $z_1 = i\omega L$, 我们得

$$\alpha = \frac{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} - i(\omega L/2)}{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} + i(\omega L/2)}. \quad (22.31)$$

如果驱动频率低于截止频率 $\omega_0 = \sqrt{4/(LC)}$, 则平方根是一实数, 而在分子及分母中两个复数的大小值便相等, 因此, $|\alpha|$ 的量值为 1, 我们便可写成

$$\alpha = e^{i\delta},$$

这意味着在每节的电压大小都相同, 只是相位有变化。事实上, 这相位的改变 δ 是一负数, 并代表当沿网络从一节至下一节时电压的“延迟”。

对于比截止频率 ω_0 高的频率, 最好是把式(22.31)的分子和分母中的 i 消去而重新写成

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C} - \omega L/2}{\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C} + \omega L/2}. \quad (22.32)$$

现在该传播因子 α 是一实数, 而且是一个小于 1 的数目。这意味着在任一节上的电压比起其前一节上的电压总要小一个因子 α 。对于任一比 ω_0 高的频率, 当我们沿该网络下行时, 电压降落得很快。 α 的绝对值作为频率函数而画成的图看来就像图 22-22 中的那条曲线。

我们看到, 对高于和低于 ω_0 的频率, α 的行为都与我们的这种解释相一致, 即对于 $\omega < \omega_0$, 该网络会传播能量; 而对于 $\omega > \omega_0$, 则能量被阻塞。我们说, 这网络会“通过”低频而“舍弃”或“滤去”高频。任何一个其特性被设计成按某一规定方式随频率变化的网络都称为“滤波器”。我们刚才分析了一个“低通滤波器”。

你可能会觉得奇怪, 为什么要讨论一个显然不能够实现的无限长网络。重要的是, 同样的特性可以在一个有限网络

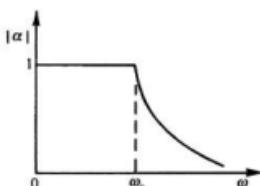


图 22-22 在 LC 梯形网络中每节的传播因子

中找到，只要我们用一个等于该特性阻抗 z_0 的阻抗接在其末端使它结束。虽然在实际上是不能够用几个像 R 、 L 和 C 那样的简单元件来严格地复制出该特性阻抗，但对于某个范围内的频率却往往能够以相当好的近似程度做到这一点。这样，就可以做成性质十分接近于一个无限长网络的一个有限长滤波器。例如，若用一纯电阻 $R = \sqrt{L/C}$ 来结束那个 LC 梯形网络，则它的表现就像上面对它所描述的那样。

如果在那个 LC 梯形网络中交换各个 L 和 C 的位置，以形成如图 22-23(a) 所示的那种梯形网络，就成为一种传播高频而抑制低频的滤波器。通过利用已有的结果，很容易看出在这一网络中发生的事情。你将会注意到，无论什么时候当把 L 变成 C 或倒过来时，也就由每一个 $i\omega$ 变成 $1/i\omega$ 。因此，过去在 ω 上所发生的事情现在在 $1/\omega$ 上发生了。特别是，可以通过利用图 22-22 并将其在横轴上的标记改成 $1/\omega$ ，就像图 22-23(b) 所表示的那样，我们可以看出 α 如何随频率而变化。

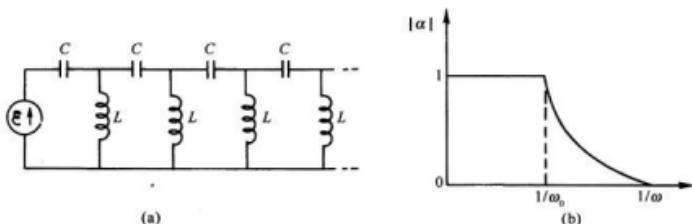


图 22-23 (a) 高通滤波器；(b) 它的传播因子作为 $1/\omega$ 的函数

刚才所描述的低通和高通滤波器具有各种技术应用。 LC 型低通滤波器常在直流动力供应单元中用作“平流”滤波器。如果要把一个交流电源制造成直流电源，那么先要用一个只允许电流单向流动的整流器。从整流器将会得到看来像图 22-24 所示的函数 $V(t)$ 那样的一系列脉冲，那是一种糟糕的直流，因为它上下摆动。假定想要一个漂亮的纯粹直流，像一个电池组所供应的那样，通过在整流器与负载之间放置一个低通滤波器，我们可以接近这一目标。

从第 1 卷第 50 章中我们知道，图 22-24 的那个时间函数可以表示为一个恒定电压加上一个正弦波、再加上一系列更高频率的正弦波的叠加——即由一个傅里叶级数来表示。如果滤波器是线性的（正如我们曾经假定的，只要那些 L 和 C 都不随电流或电压而变），那么从滤波器出来的就是对输入端每一成分的各项输出的叠加。如果安排得使滤波器的截止频率 ω_0 远低于函数 $V(t)$ 中的最低频率，则直流 ($\omega=0$) 便能够很好地通过，但第一谐波的振幅将被削弱得很厉害，而那些更高谐波的振幅被削弱得更多。所以我们能够获得一个想要的平滑输出，它只决定我们乐意购买多少节滤波器。

如果希望抑制某些低频波，则常用高通滤波器。例如，在一留声机的放大器中，高通滤波器可以用来让音乐通过，而避开那些来自转盘电动机的低调隆隆声。

也可能制成一种“带通”滤波器，它会抑制比某一频率 ω_1 低而比另一频率 ω_2 （大于 ω_1 ）

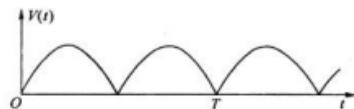


图 22-24 一个全波整流器的输出电压

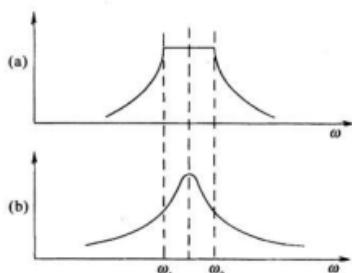


图 22-25 (a) 带通滤波器;(b) 简单的共振滤波器

高的一些频率,而却让 ω_1 与 ω_2 之间的那些频率通过。这可很容易地把一个高通与一个低通滤波器放在一起而做到,但更经常的却是通过制造一个梯形网络来实现的。在该网络中,其阻抗 z_1 和 z_2 更加复杂——每一个都是若干个 L 和 C 的组合。这样一个带通滤波器也许具有如图 22-25(a)所示的那种传播常数。这可能用来把一些仅占据一个频率间隔的信号——诸如在一高频电话电缆中的许多声音信道的每一个,或在无线电传递中受了调制的每一个载波——分开来。

在第 1 卷第 25 章中我们曾经见到,像这样的滤波作用也可利用一普通共振曲线的选择性来做到,

为了比较,我们已把该共振曲线画在图 22-25(b)上。但对于某些目的来说,这一种共振式滤波器不如带通滤波器那么优越。你会记得(第 1 卷第 48 章),当频率为 ω_0 的载波受到“信号”频率 ω_s 所调制时,整个讯号不仅含有载频,而且还含有两个边带频率 $\omega_s + \omega_c$ 和 $\omega_s - \omega_c$ 。采用共振式滤波器时,这些边带总多少会受到衰减,而且信号的频率越高则衰减越厉害,正如你可以从图上见到的。因此存在不良的“频率响应”,那些较高频的乐音通不过去。但若滤波作用是由一个设计得使宽度 $\omega_2 - \omega_1$ 至少两倍于最高信号频率的那种带通滤波器来完成的话,则该频率响应对于所需的那些信号来说就将是“平坦”的了。

关于梯式滤波器我们还要再强调一点:图 22-20 的 LC 梯形网络也是传输线的一个近似表示。如果有一长导体与另一导体平行并列——诸如在一根同轴电缆中的导线或一根悬挂在地面之上的导线——那么便会有某些电容存在于两导体之间,以及由于它们之间存在磁场所以还有某些电感。若我们设想该传输线被分割成众多小段 Δl ,每一段看起来就像在 LC 梯形网络中由串联电感 ΔL 和并联电容 ΔC 所构成的一节。然后,我们便能应用有关梯式滤波器的结果。若取 Δl 趋于零时的极限,则对于传输线就有一个极好描述。注意当 Δl 变得越来越小时, ΔL 和 ΔC 两者都会减少,但都在同一比例上,因而比值 $\Delta L / \Delta C$ 仍将保持不变。因此,若取 ΔL 和 ΔC 都趋于零时式(22.28)的极限,则我们发现该特性阻抗是一个大小为 $\sqrt{\Delta L / \Delta C}$ 的纯电阻。我们也可将比值 $\Delta L / \Delta C$ 写成 L_0 / C_0 ,其中 L_0 和 C_0 分别代表传输线每单位长度的电感和电容,于是我们得

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (22.33)$$

你也将会注意到,当 ΔL 和 ΔC 各趋于零时,截止频率 $\omega_0 = \sqrt{4 / (LC)}$ 会变成无限大,即对于一条理想的传输线来说不存在截止频率。

§ 22-8 其他电路元件

迄今我们仅仅定义了那些理想电路的阻抗——电感、电容和电阻——还有理想电压发生器。现在我们要来证明,诸如互感、晶体管或真空管等其他元件都可以仅利用同样的基本

元件来加以描述。假设有两个线圈，而有意或无意地使其中一个线圈的某些磁通量耦合到另一个线圈中去，如图 22-26(a)所示。此时这两个线圈会有互感 M ，使得当其中一个线圈的电流变化时，在另一个线圈中将有一电压产生。我们是否能够将这种效应算进等效电路中？按下述方法来做是能够的。我们已经知道，在两个相互作用线圈的每一个中感生电动势均可以写成两部分之和：

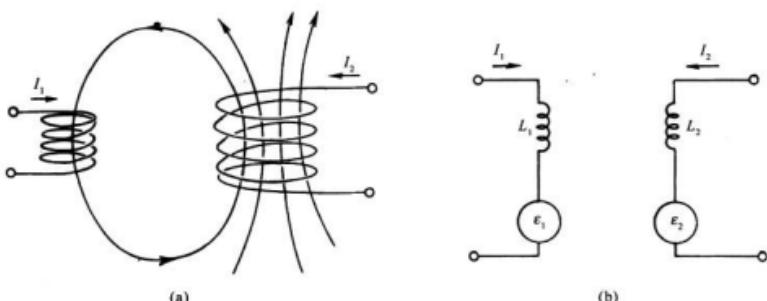


图 22-26 互感的等效电路

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt}, \\ \mathcal{E}_2 &= -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt}.\end{aligned}\quad (22.34)$$

第一项来自线圈的自感，而第二项则来自它与另一线圈间的互感。第二项的符号可正可负，取决于来自一个线圈的磁通量耦合到另一个线圈上去的方式。做了我们以前在描述理想电感时用过的同样的近似，我们便可以说，跨越每个线圈两端的电势差等于该线圈中的电动势。于是式(22.34)的两个方程将和我们从图 22-26(b)的电路中获得的方程相同，只是图示的每一电路中的电动势是按照下列关系式取决于对方电路中的电流：

$$\mathcal{E}_1 = \pm i\omega M I_2, \quad \mathcal{E}_2 = \pm i\omega M I_1. \quad (22.35)$$

因此我们所能做的是，以正常方式表示自感效应，但对于互感效应则由一个辅助的理想电压发生器来代替。当然，此外我们还应有关于这个电动势与电路某一部分中的电流的关系的方程式，但只要这一方程式是线性的，我们不过是在电路方程中加进了更多的线性方程，因而我们以前关于等效电路的所有结论仍然是正确的。

除了互感之外，也可能还有互容。迄今，当我们谈及电容器时总是想象只有两个电极，但在许多情况下，比如在一个真空管中，就有许多个彼此靠近的电极。如果把一电荷放在其中任何一个电极上，它的电场将会在其他每个电极上感生一些电荷并影响其电势。作为一例，试考虑如图 22-27(a)所示的那四块板。假定这四块板分别由 A, B, C 和 D 四根导线连接至外电路。只要我们所关心的仅限于静电效应，则像这样一种电极布置的等效电路就如同图 22-27(b)所示。任一电极对于其他每一电极的静电互作用相当于在这两电极之间的一个电容。

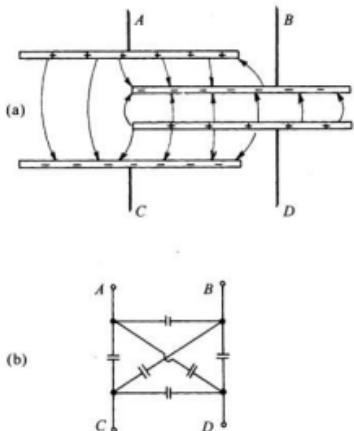


图 22-27 互感的等效电路

最后,让我们来考虑交流电路中像晶体管和真空管那么复杂的器件应该怎样来表示。本该一开始就指出,这种器件通常是这样运行的,其中电流与电压的关系是完全非线性的。在这种情况下,我们曾做出的有赖于方程线性的那些说法当然不再正确。另一方面,在许多种应用中,晶体管和真空管的运行特性曲线还是足够线性的,以致可把它们视作线性器件。这意味着例如在真空管中,板极内的交变电流与出现在其他各电极上的电压,诸如栅极电压和板极电压形成了线性正比关系。当我们具备这样的线性关系时,就能够将该器件纳入等效电路的表示之中。

正如在互感的情况那样,我们的表达方式将不得不包含一些辅助的电压发生器,用以描述在该器件一部分中的电压或电流对于其他部分中的电流或电压所产生的影响。例如,一个三极管的板极电路经常可表示为一个电阻串联于一个

其源强正比于栅极电压的理想电压发生器。我们便得到如图 22-28 所示的那个等效电路^{*}。同理,一个晶体管的集电极电路可以方便地表达成一个电阻串联于一理想电压发生器,这个源的强度正比于从该晶体管的发射极流向基极的电流。这时等效电路就像图 22-29 所示的那样。只要用来描写其运行的方程是线性的,便可以对电子管或晶体管引用这些表达方式。然后,当它们被归并入一个复杂网络中时,关于元件的任意一种连接方式的等效表示的一般结论都仍然有效。



图 22-28 真空管的低频等效电路

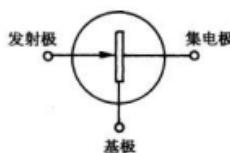
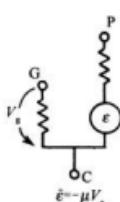


图 22-29 晶体管的低频等效电路

与仅含有阻抗的那种电路不同,关于晶体管和真空管电路有一件令人注目的事情:其有效阻抗 $z_{\text{有效}}$ 的实部可以变成负值。我们已明白 z 的实部代表能量损耗,可是晶体管和真空管的重要特性却是它们对电路供应能量(当然,它们并非在“创造”能量,不过从动力供应的

* 图上所示的这个等效电路只有在低频时才正确。对于高频来说,该等效电路变得复杂得多,而且将包括各种所谓“寄生”电容和电感。

直流电路中取得能量并将其转变成交变能量)。因此,就可能有一种具备负电阻的电路。这样的一个电路具有如下性质,即如果你把它接至一个具有正实部的阻抗,也就是具有正的电阻,并将材料布置成使该两实部之和恰恰等于零,则在该联合电路中将不会有能量耗散。如果没有能量损耗,则任何一个一经启动了的交变电压便将永远维持下去。这就是能够在任何想要的频率上用作交变电压源的振荡器或信号发生器的运行过程背后的基本概念。

第 23 章 空腔共振器

§ 23-1 实际电路元件

任何一个由一些理想阻抗和发电机所构成的电路，当从任一对端点看时，不论处在什么频率，它都相当于一部发电机 \mathcal{E} 和一个阻抗 z 的串联。之所以会这样，是因为若在那对端点上加一电压 V ，当解所有方程以求得电流 I 时，我们就一定会获得电流与电压之间的一个线性关系。由于所有方程都是线性的，因而对 I 所得的结果也就应该仅仅是线性地依赖于 V 。最普遍的这种线性形式可表示为

$$I = \frac{1}{z}(V - \mathcal{E}). \quad (23.1)$$

一般说来， z 和 \mathcal{E} 两者都可能以某种复杂方式依赖于频率 ω 。然而，如果两端点后面仅有发电机 $\mathcal{E}(\omega)$ 与一阻抗 $z(\omega)$ 相串联时，我们就应获得式(23.1)那样的关系。

也有与此相反的问题：若我们真有具备两个端点的任何电磁器件，并已测量了 I 与 V 的关系以确定 \mathcal{E} 和 z 作为频率的函数，那么我们能否找到一个与内阻抗 z 相等效的理想元件的组合呢？答案是，对于任一合理的——也就是说，物理上有意义的——函数 $z(\omega)$ ，这种情况可以用一个含有有限组理想元件的电路来近似，并可达到我们希望的高精确度。我们现在暂不考虑这个普遍问题，但只想对几种特殊情况看看从物理的论证方面会期待得到些什么。

若我们考虑的是一个实际的电阻，则知道电流通过它时会产生磁场。所以任何实际电阻也应有一些电感。并且，当有一电势差跨越电阻时，则在电阻两端必然有一些电荷以产生所必需的电场。当电压改变时，这些电荷也将按比例改变，从而该电阻也会有某些电容。我们期待一个实际电阻也许会有如图 23-1 所示的等效电路。在一个精心设计的电阻中，这里所谓的“寄生”元件 L 和 C 都很小，以致在那些预定用到的频率时， ωL 会比 R 小得多而 $1/(\omega C)$ 则比 R 大很多，因此就有可能把它们都忽略掉。然而，当频率升高时，它们最终会变得重要起来，因而一个电阻初看就像一个谐振电路。

一个实际电感也并非等于阻抗为 $i\omega L$ 的理想电感。一个实际导线线圈将有某些电阻，从而在低频时该线圈实际上就等效于一个电感与某个电阻的串联，如图 23-2(a) 所示。可是，你或许正在想，电阻和电感共同存在于一个实际线圈中——电阻完全分散于整条导线中，因而已和电感互相混合了。我们也许更应该采用一个像图 23-2(b) 那样的电路，它有几个小 R 和小 L 互相串联着。但这样一个电路的总阻抗正好是 $\sum R + \sum i\omega L$ ，这就等效于(a)那个较简单的图了。

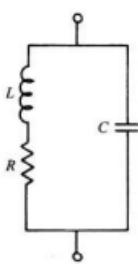


图 23-1 一个实际电阻的等效电路

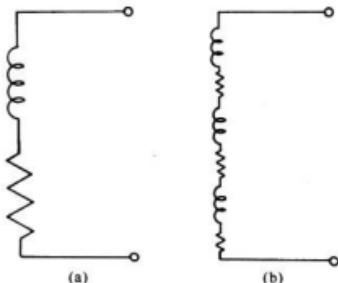
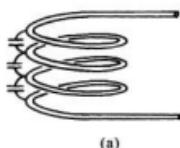


图 23-2 一个实际电感在低频时的等效电路

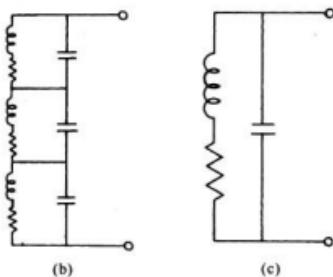
当对一实际线圈提高频率时,把它当成一个电感与一个电阻的串联就不再是很好的近似,在导线上积累起来以产生电压的电荷将会变得重要起来,就像有一些小电容器横跨于该线圈的各匝之间,如图 23-3(a)所示。也许我们试图对该实际线圈用图 23-3(b)中的电路来做近似。在低频时,这一电路可由图 23-3(c)那个较简单的电路很好地加以模拟(这仍然是我们上面对于一个电阻的高频模型所找到的相同的共振电路)。然而,对于较高频率,则图 23-3(b)的那个较复杂的电路将更好。事实上,你想要对一个真实的物理的电感的实际阻抗表达得越准确,在它的人为模型中你就得用越多的理想元件。

让我们稍微密切地注视在一个实际线圈中所发生的情况。一个电感的阻抗表现为 ωL ,因而在低频时它变为零——出现一个“短路”;我们见到的只是导线的电阻。当频率增高时, ωL 很快变得比 R 大得多,而该线圈看起来很像一个理想电感。然而,当频率增得更高时,电容变得重要起来,它的阻抗与 $1/(\omega C)$ 成正比,当 ω 小时数值很大。因此对于足够低的频率,电容是一个“断路”,而当它与别的东西并联时,不会抽取任何电流。但在高频时,电流更愿意流入各匝间的电容,而不是流经电感。所以在线圈里的电流从一匝跳跃至另一匝,而不必发愁要去转那些不得不在那里抵抗着电动势的圈子了。因此,尽管我们也许已经预定电流会环绕回路通过,但它却将选取较方便的路径——阻抗最小的路径。

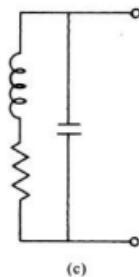
要是这一课题曾经为大众所感兴趣,则这一效应可能已经被赋予“高频频障”或其他类似名称了。同类事情在所有学科中都会出现。在气体动力学中,若你试图让原来是为低速设计的东西去跑得比声速还快,那就不行。这并不意味着确实存在一巨大的“障壁”,而只是指该东西必须重新加以设计罢了。因此,这一原来我们作为一“电感”而设计出来的线圈在十分高的频率上将不再作为一个良好的电感,而是作为某一种其他东西。对于高频,我们得



(a)



(b)



(c)

图 23-3 一个实际电感在高频上的等效电路

寻找一个新的设计。

§ 23-2 在高频时的电容器

现在我们要来详细讨论当频率变得越来越大时一个电容器——几何上的理想电容器——的行为，使我们能够看到其性质的转变（我们宁可采用电容而不采用电感，为的是对板的几何形状比一个线圈的几何形状要简单得多）。我们考虑图 23-4(a)所示的那个电容器，构成它的两块平行圆板用一对导线接至外界发电机上。如果用直流对电容器充电，则在其中一板上将有正电荷，在另一板上有负电荷，而在两板之间则有一匀强电场。

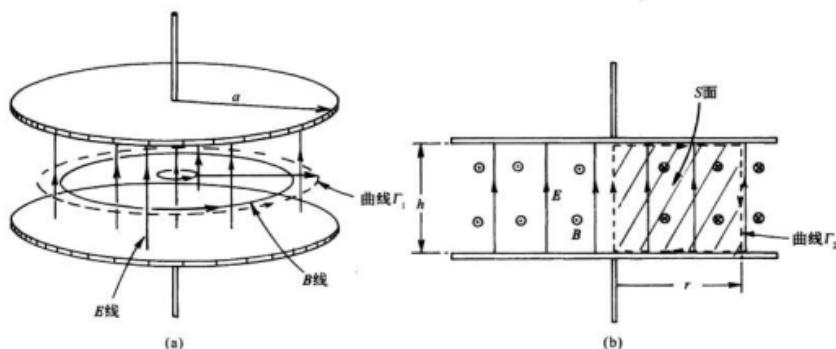


图 23-4 电容器两极板间的电场和磁场

现在假定不用直流，而是加一个低频交流电于两板上（往后我们将会知道什么是“低”频，什么是“高”频）。比方说，把电容器连接至一低频发电机上。当电压正在交变时，上板的正电荷会被取出而换上了负电荷。在这一事情发生时，电场会随之消失，然后又在相反的方向上建立起来。当电荷缓慢地来回涌动时，电场也跟着变化。除了一些我们将要加以忽略的边缘效应外，在每一瞬间电场是均匀的，如图 23-4(b)所示。可以把电场的大小写成

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \quad (23.2)$$

式中 E_0 是一常数。

现在，当频率升高时，这是否仍然正确呢？不，因为当电场增高和降低时就会有电通量穿过像图 23-4(a)中的任意回路 Γ_1 。而正如你所知的，一个变化的电场会起到产生磁场的作用。麦克斯韦方程组中一个方程讲，当有变化的电场时，犹如这眼前存在的那样，就一定有磁场的线积分。环绕某一闭合环的磁场积分乘以 c^2 之后，就等于穿过该环内面积的电通量的时间变化率（如果没有电流的话）：

$$c^2 \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{\text{在 } \Gamma \text{ 之内}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (23.3)$$

所以，到底磁场有多大呢？计算并不十分困难。假定考虑回路 Γ_1 ，它是一个半径为 r 的圆

周。我们能够从对称性看出,磁场会环绕图中所示的那种圆周转。这样 \mathbf{B} 的线积分就是 $2\pi rB$ 。而且由于电场是均匀的,所以电场通量简单地等于 E 乘以该圆周的面积 πr^2 :

$$c^2 B \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} E \cdot \pi r^2. \quad (23.4)$$

对于交变场来说, E 对时间的微商仅是 $i\omega E_0 e^{i\omega t}$ 。因此我们求得,该电容器具有磁场

$$B = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.5)$$

换句话说,磁场也在振动,而且具有正比于半径 r 的强度。

这种情况会产生什么影响呢?当有一个正在变化的磁场时,便将产生一些感生电场,而该电容器将开始有点像一个电感的作用了。当频率升高时,这磁场变得较强,它与 E 的变化率成正比,因而也与 ω 成正比。该电容器的阻抗将不再简单地等于 $1/(i\omega C)$ 。

让我们继续提高频率,并更仔细地分析将会发生的情况。我们有一个来回涌动的磁场。但这时的电场就不可能像我们所曾假定的那样是均匀的了!当有一正在变化的磁场时,就必然有一个电场的线积分——根据法拉第定律。所以,如果有一个相当大的磁场,正如在高频频时就开始发生的那样,则电场不可能在离开中心的所有距离处都相同。电场必须随 r 改变,才能使电场的线积分等于变化着的磁场通量。

让我们来看看能否算出正确的电场。通过算出我们原来对低频时假定的匀强场的“修正”,便能够完成此事。现在把该匀强场称作 E_1 ,它仍旧是 $E_0 e^{i\omega t}$,而把正确的场写成

$$E = E_1 + E_2,$$

其中 E_2 就是由于变化着的磁场所引起的修正。对于任意频率 ω ,我们将把在该电容器中心处的场写成 $E_0 e^{i\omega t}$ (因而定义了 E_0),使得在这中心处并不需要修正,即在 $r = 0$ 处 $E_2 = 0$ 。

为求得 E_2 可利用法拉第定律的积分形式:

$$\oint_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{B} \text{ 的通量}).$$

这些积分很简单,只要取积分回路像图 23-4(b)所示的曲线 Γ_2 那样,即沿轴上升,当达到上板时再沿半径向外伸展至距离 r 处、又垂直地到底板、然后又返回到轴上。 E_1 环绕这个曲线的线积分当然是零,所以就只有 E_2 做出贡献,而它的积分正好是 $-E_2(r) \cdot h$,其中 h 是两板间的距离(如果 E 指向上我们称为正)。这等于 B 通量的变化率,我们得通过对图 23-4(b)中 Γ_2 之内阴影面积的积分来获得。穿过宽度为 dr 的垂直狭条的通量为 $B(r)hdr$,因而总通量就是

$$h \int B(r) dr.$$

令这一通量的 $-\partial/\partial t$ 等于 E_2 的线积分,便有

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B(r) dr. \quad (23.6)$$

注意式中 h 已消去了,场与两板间的间距无关。

利用关于 $B(r)$ 的方程式(23.5),我们便有

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{i\omega r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}.$$

对于时间的微商只不过带来另一个因子 $i\omega$, 这样我们得

$$E_2(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.7)$$

正如所预期的, 这感生电场倾向于把远离中心的电场减弱。于是, 改正后的场 $E = E_1 + E_2$ 为

$$E = E_1 + E_2 = \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.8)$$

在电容器中的电场不再是均匀的, 它具有如图 23-5 中虚线所示的那种抛物线形状。你看, 我们的简单电容器已变得稍微复杂些了。

现在有可能利用所得结果来计算电容器在高频时的阻抗。知道了电场后, 理应能够算

出板上的电荷并求出通过电容器的电流如何依赖于频率 ω , 但目前我们对这个问题不感兴趣。更感兴趣的是要看当继续提高频率时会发生什么情况——看看在更高频率上所发生的事情。我们的工作是否结束了呢? 不, 因为已修正了电场, 这就意味着已算出来的磁场不再是正确的了。式(23.5)中的磁场也是近似正确的, 但它仅是一级近似, 所以就让我们叫它作 B_1 。这样应将式(23.5)重新写成

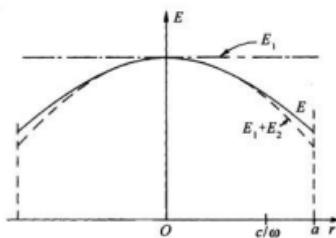


图 23-5 在高频时电容器两板间的电场
(边缘效应已被忽略)

$$B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.9)$$

你会记得, 这个场是由 E_1 的变化产生的。现在正确的磁场将是由总电场 $E_1 + E_2$ 所产生的。若把磁场写成 $B = B_1 + B_2$, 则其中第二项就恰好是由 E_2 所产生的附加场。为求出 B_2 , 可以通过我们求 B_1 时用过的相同论证来进行, B_2 环绕曲线 Γ_1 的线积分等于 E_2 穿过 Γ_1 的通量的变化率。我们将仍然有式(23.4), 其中用 B_2 代替 B 而用 E_2 代替 E :

$$c^2 B_2 \cdot 2\pi r = \frac{d}{dt} (E_2 \text{ 穿过 } \Gamma_1 \text{ 的通量}).$$

由于 E_2 随着半径变化, 因而要获得它的通量就得对 Γ_1 内的圆面积进行积分。用 $2\pi r dr$ 作为面积元, 这个积分就是

$$\int_0^r E_2(r) \cdot 2\pi r dr.$$

因此对于 $B_2(r)$ 我们得到

$$B_2(r) = \frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t} \int E_2(r) r dr. \quad (23.10)$$

利用来自式(23.7)的 $E_2(r)$, 我们需要对 $r^3 dr$ 进行积分, 而这当然为 $r^4 / 4$ 。对于磁场的修正变成

$$B_2(r) = -\frac{i\omega^3 r^3}{16c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.11)$$

可是事情还没有完成！如果磁场并不与我们最初所设想的相同，则刚才对 E_2 的计算便不能认为是正确的。我们必须对 E 进一步做出修正，它由额外磁场 B_2 产生。让我们把这个对电场的附加修正叫作 E_3 。它与磁场 B_2 的关系犹如 E_2 与 B_1 的关系一样。我们可以再一次利用式(23.6)，只不过改变其中的下脚标：

$$E_3(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B_2(r) dr. \quad (23.12)$$

利用上面关于 B_2 的结果，即式(23.11)，对电场新的修正为

$$E_3(r) = +\frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.13)$$

把经过了两次修正的电场写成 $E = E_1 + E_2 + E_3$ ，我们得

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{2^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^4 \right]. \quad (23.14)$$

电场随 r 的变化不再是我们在图 23-5 中画出来的那条简单抛物线，而是在较大的半径处略高于 $(E_1 + E_2)$ 曲线。

事情还未最后完成。新的电场对磁场产生一个新的修正，而这个被重新修正了的磁场又将对电场产生一个进一步的修正，如此等等。然而，我们已经有了所需的全部公式。对于 B_3 可以利用式(23.10)，把其中 B 和 E 的下脚标从 2 改成 3。

对电场的下一次改正是

$$E_4 = -\frac{1}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^6 E_0 e^{i\omega t}.$$

因此，在达到这一级时，整个电场就由下式给出：

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^6 + \cdots \right], \quad (23.15)$$

其中我们已把各数字系数写成这样一种形式，以便对该级数应如何继续下去看得更清楚。

我们的最后结果是：在该电容器两板间的电场，对于任一频率来说，都等于 $E_0 e^{i\omega t}$ 乘以仅含有变量 $\omega r / c$ 的一个无穷级数。如果我们乐意，就可以定义一个特殊函数，这函数将称为 $J_0(x)$ ，作为出现在式(23.15)中方括号内的无穷级数。

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^6 + \cdots \quad (23.16)$$

这样，就可以将我们的解写成 $E_0 e^{i\omega t}$ 乘以这个函数，其中 $x = \omega r / c$ ：

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0 \left(\frac{\omega r}{c} \right). \quad (23.17)$$

之所以叫这个特殊函数为 J_0 的原因是：自然，这并非是计算柱体中振动这一问题才开始用的，其实这一函数以前就已出现过而且经常被称为 J_0 。每当你求解具有柱对称的波动

问题时它总是发生。函数 J_0 对于柱面波就好像余弦函数对于沿直线传播的波一样，因此它是一个重要函数，发现已多时了，以后与一个叫贝塞尔(Bessel)的人的名字联系上了。那个下脚标零意味着贝塞尔曾经发现过整个一系列不同的函数，而这只是其中的第一个。

其他的贝塞尔函数 J_1, J_2 等等是处理与强度随着绕圆柱轴的角度而变的那些柱面波所必需的。

在我们的圆形电容器两板间，电场经过完全修正已由式(23.17)给出，它已被画成图 23-5 中那条实曲线。对于不太高的频率，我们的二级近似就已经很好。三级近似甚至会更好——事实上，好到要是我们把它画出来，你不可能会看出它与那条实线间的差别。然而，你将在下一节中见到，对于大的半径或高的频率，为获得一个准确描述，整个级数就是必需的了。

§ 23-3 共振空腔

现在我们要来看看，当继续把频率增加得越来越高时，对于在电容器两板间的电场给出怎样的解。对于大的 ω ，该参数 $x = \omega r/c$ 也变得大了，因而在 x 的级数 J_0 中的头几项便将增加得很快。这意味着，我们曾在图 23-5 中画出来的那条抛物线在较高频率处会更加急剧地下降。事实上，看来好像在某个高频频处场会完全降低至零，也许当 c/ω 近似等于 a 的一半时。让我们来看看， J_0 是否确实会通过零而变成为负的。尝试由 $x = 2$ 开始：

$$J_0(2) = 1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = 0.22.$$

函数仍未等于零。因此，就让我们尝试一个更大的 x 值，比如说 $x = 2.5$ 。代入数字之后，可得

$$J_0(2.5) = 1 - 1.56 + 0.61 - 0.11 = -0.06.$$

函数 J_0 在达到 $x = 2.5$ 时就已经通过了零点。对 $x = 2$ 和 $x = 2.5$ 的结果进行比较，看来似乎 J_0 在从 2.5 至 2 的五分之一路程处通过零点。我们应该猜测零发生在 x 大约等于 2.4 的地方。现在看看对于这个 x 值会给出的结果：

$$J_0(2.4) = 1 - 1.44 + 0.52 - 0.08 = 0.00.$$

在精确到小数点后两位时得到零。若再计算得精确些（或者由于 J_0 是一个著名函数，所以只要查一查书本），我们会发现它在 $x = 2.405$ 处通过零，我们用手就已经把它算出，这表明你们本来也可以发现这些东西的，而不一定要从书本上查出来。

只要在书中查阅到了 J_0 ，则注意它在 x 值较大时如何表现，是十分有趣的。它看来像图 23-6 中的那条曲线，当 x 增大时， $J_0(x)$ 在正值与负值之间振动，振幅逐渐减小。

我们已经得到下面的有趣结果：若频率足够高，则在电容器中心处电场将指向一个方向，而在靠近边缘处电场又指向相反方向。例如，假设取一

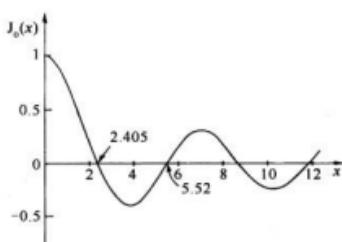
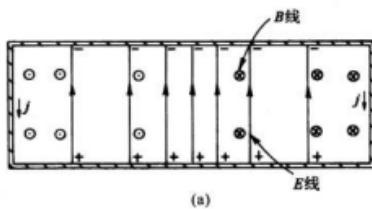


图 23-6 贝塞尔函数 $J_0(x)$

一个足够高的 ω 使得在该电容器的外缘处 $x = \omega r / c$ 的值为4,那么该电容器的边缘就相当于图23-6中横坐标 $x = 4$ 的地方。这意味着我们的电容器是在 $\omega = 4c/a$ 时工作的。在极板的边缘处,电场将有相当大的值而方向与我们所期待的相反。这就是在高频时电容器所能发生的令人感到惊异的事情。若把频率增得很高,则当从电容器中心向外移动时电场的方向会来回振动多次,而且还存在与这些电场联系着的磁场。因此,对于高频来说,我们的电容器看来并不像一个理想电容,就不足为怪了。甚至有可能开始怀疑:它看来更像一个电容还是更像一个电感呢?应该强调,还有一些发生于该电容器边缘上的更加复杂的效应已经被我们忽略了。例如,会有经过边缘向外的波辐射,因而场甚至比我们已算出来的还要复杂。但眼前我们不会对那些效应操心。

本来我们也可尝试做出一个有关电容器的等效电路,但或许更好的是直接承认,曾为低频而设计的那种电容器当频率太高时就不再令人满意了。若要来处理像这样的对象在高频时的运行情况,我们就必须放弃在处理电路时曾经做过的那种关于麦克斯韦方程组的近似方法,而返回到能够完全描述空间中场的完整的方程组。不要去同一些理想的电路元件打交道,而是必须处理那些实际存在的真实导体,把在导体之间空间里的一切场都算进去。例如,若想要有一个高频共振电路,则不会试着用线圈与平行板电容器去设计它。

我们已经提到,刚才正在分析的那个平行板电容器具有电容和电感两方面的某些特征。既然有电场,就会在两板的表面上聚积电荷;既然有磁场,就会产生反电动势。是否有可能我们已有了一个共振电路呢?确实得到了。假设挑选这样一个频率,它能使该电场图样在盘的边缘以内的某个半径上降低至零,也就是说,我们选取一个比 2.405 大些的 $\omega a/c$ 。在这个与两板共轴的圆周上,电场处处都将是零。现在假定取一块薄金属片,并把它剪成其宽度恰好足以安装在该电容器的两板之间,然后把它在电场等于零的那个半径上弯成一个圆筒。由于那里没有电场,所以当我们放进这个导体圆柱时,就不会有电流流过它,而且,在电场和磁场方面也将不会有什么变化。在该电容器中间,我们已经能够放置一个直接短路器件而不致引起任何变化。而且,看看现在我们有的东西吧,已经有一个闭合柱形盒,其中存在电场和磁场,但完全不和外界联系。即使丢掉那些伸到盒外的两板边缘部分以及对电容器的接线,盒里的场仍不会变化。我们留下来的一切就是一个其中藏有电场和磁场的封闭盒子,如图23-7(a)所示。电场以频率 ω 来回振动



(a)

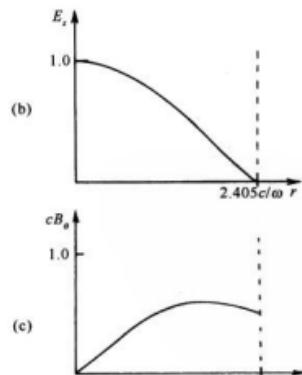


图23-7 在一个封闭的圆筒盒内的电场和磁场

着——不要忘记, ω 确定了盒子的直径。振动 E 场的振幅随着从盒轴向外伸出的距离而变化, 如图 23-7(b) 的曲线所示。这一曲线不过是零级贝塞尔函数的第一个极大。此外, 还有一个磁场环绕着轴转, 并以在时间上与电场相差 90° 的相位振动。

我们也可对磁场写出一个级数, 并把它描绘出来, 如图 23-7(c) 中的曲线所示。

我们怎样才能把电场和磁场贮藏在一个盒子里而与外界没有任何联系? 这是因为, 电场和磁场会维持它们本身: 正在改变的 E 产生一个 B , 而正在改变的 B 又产生一个 E ——所有过程都按照麦克斯韦方程组进行。磁场具有电感的性质, 而电场则具有电容的性质, 两者合在一起才构成像共振电路那样的某种东西。注意刚才所描述的这些情况仅仅当盒子的半径恰好等于 $2.405c/\omega$ 时才发生。对于半径已经给定的盒子, 这些振动着的电场和磁场只有在那些特定频率才会——按照我们所描述的那种方式——维持它们本身。因此, 一个半径为 r 的柱形盒子在如下的频率处就会发生共振:

$$\omega_0 = 2.405 \frac{c}{r}. \quad (23.18)$$

我们曾说, 在盒子完全封闭之后场仍将继续照样振动。那并非完全正确。假如盒子的壁是理想导体, 那就会有可能。然而, 对于一个实际盒子, 存在于内壁上的振动电流会由于材料中的电阻而损耗能量。因而场的振动将逐渐衰减下去。从图 23-7 可以看到, 与该空腔内部的电场和磁场相伴随必然存在一些强电流。因为垂直方向的电场会突然在盒子的顶板和底板上停顿下来, 所以它在那里就有巨大散度, 因而也就一定有正、负电荷出现在该盒子的内表面, 如图 23-7(a) 所示。当电场倒转时, 电荷也会倒转过来, 因而在盒子的顶板和底板之间就一定形成交变电流。这些电荷将在盒子的侧壁内流动, 如图所示。通过对磁场所发生的情况的考虑, 我们也能够明白, 必然会有电流通过该盒子的侧壁。图 23-7(c) 中的曲线告诉我们, 磁场在该盒子的边缘处会突然下降至零。像这样的磁场突变只有当壁中存在电流时才能发生, 这一电流就是向该盒子的顶板和底板提供那些交变电荷的。

你可能对于在盒子的垂直方向的侧壁中发现有电流会感到奇怪。关于以前讲到在电场为零的地方引进这些侧壁不会改变任何东西, 又是怎么回事呢? 然而, 要记住, 当我们起初放进该盒子的侧壁时, 顶板和底板还伸出于壁之外, 因而在盒子外面也就还有磁场。只有当我们丢掉了伸出于盒子边缘之外的那一部分电容器极板之后, 净电流才不得不出现在该垂直壁的内表面上。

虽然在完全封闭的盒子内的电场和磁场将会由于能量损失而逐渐减弱, 但我们还是能够

阻止这一事情发生, 只要在盒子旁边挖开一个小洞而输入一点点电能以补充其损失。试取一根小导线, 插进盒子旁边的这一小洞中, 并把它粘牢在内壁上以便形成一个小回路, 如图 23-8 所示。如果现在把这一段导线接至一高频交变电源, 则电流将会把能量耦进空腔里, 而使其中的电场和磁场振动能够持续进行。当然, 这只有当驱动源的频率与盒子的共振频率相同时才会发生。如果源的频率不对头, 则电场和磁场将不会发生共振, 因而盒子里的场就会变得非常微弱。

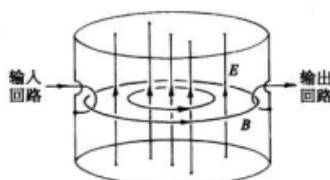


图 23-8 对一共振腔的耦进和耦出办法

通过在盒子旁边再开另一个小洞并钩住另一个耦合回路，如在图 23-8 中描画出来的那样，则这共振行为便容易观察到。穿过这耦合回路的变化磁场将在回路中产生一感生电动势。若这个回路现在被连接至某个外面的测量电路，则电流将正比于空腔中场的强度。假定现在将空腔的输入回路接至一部射频信号发生器，如图 23-9 所示。这信号发生器含有一个交变电流源，其频率可由旋转发生器面板上的旋钮而改变。然后又把空腔的输出回路接至一个“检波器”上，它是一部能测量来自输出回路电流的仪器。它会给出正比于电流的指针读数。如果现在测量作为该信号发生器频率函数的输出电流，则可找到一条像图 23-10 所示的曲线。除十分靠近空腔共振频率 ω_0 的那些频率以外，对于其他所有频率，输出电流都很小。这条共振曲线很像我们曾在第 1 卷第 23 章中所描述过的那些曲线。然而，这一共振曲线的宽度比起通常由电感和电容所构成的共振电路中所求得的要狭窄得多；也就是说，空腔的 Q 值很高。要得到一个高达 10 万或更大的 Q 值并不希奇，只要空腔的内壁是由某些像银那样十分优良的导电材料所构成的。

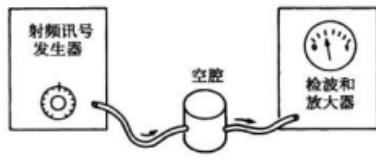


图 23-9 为观测空腔共振用的装备

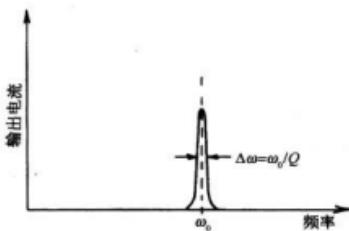


图 23-10 共振空腔的频率响应曲线

§ 23-4 腔 模

假设现在我们试图通过对实际盒子做测量来检验上述理论。取一个圆柱形盒子，其直径为 3.0 in 而高度约 2.5 in。这个盒子装配有如图 23-8 所示的一个输入和输出回路。若按照式(23.18)算出关于这个盒子预期的共振频率，则可得 $f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 3\,010 \text{ MHz}$ 。当我们把信号发生器的频率设置在 3 000 MHz 左右并稍微变更这一频率以获得共振时，就会观察到最大的输出电流发生在频率为 3 050 MHz 处，这数值很接近于那预期的共振频率，但不完全相同。产生这一差异有几种可能原因。或许由于为要放进耦合回路而挖开的那些小洞会使共振频率有了一点变化。然而，稍微想一下就会明白，那些小洞理应使共振频率略有降低，因而这不能成为理由。或许是在校准信号发生器时稍微有一些误差，或许是我们对空腔的直径量得不够准确。但无论如何，还是符合得相当好的。

更为重要的是：当信号发生器的频率在 3 000 MHz 以上改变一些时所发生的情况。当我们这样做时，便会获得如图 23-11 所示的那些结

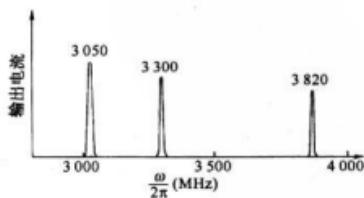
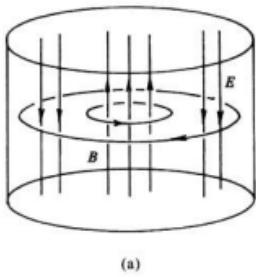


图 23-11 对一柱形空腔所观测到的几个共振频率

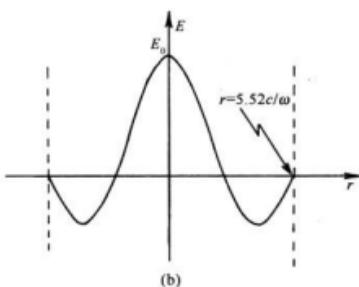
果。我们发现,除了在 3 000 MHz 附近那个预期的共振外,还有一个接近于 3 300 MHz 和另一个接近于 3 820 MHz 的共振。这些附加的共振意味着什么呢?我们也许可从图 23-6 获得一条线索。尽管曾经假定贝塞尔函数的第一个零点出现在盒子的边缘,但也有可能贝塞尔函数的第二个零点与盒子的边缘相对应,因而当我们从盒子中心移动至边缘时电场恰好完成一个完整的振动,如图 23-12 所示。这是关于振动场的另一种可能模式。我们应当肯定地预期盒子会以这种模式发生共振。可是要注意,贝塞尔函数的第二个零点发生在 $x = 5.52$ 处,那比起第一个零点处的值不止大一倍。因此,这个模式的共振频率就应比 6 000 MHz 还高。无疑,我们会在那里找到它的,但却不能用它来解释在 3 300 时所观测到的那个共振。

麻烦就在于对有关共振腔行为的分析,我们只考虑了电场和磁场一种可能的几何布局。已经假定电场是垂直的而磁场则位于一些水平圆周上。但别的场也是有可能的。唯一的要求是,在盒子里的电场和磁场都必须满足麦克斯韦方程组而且电场还必须与盒壁正交。我们已考虑其中盒子顶部和底部都是平坦的那一种情况,但要是顶和底都弯曲,事情也不会完全不同。事实

上,盒子怎么能够被认为知道哪是它的顶、底以及侧面呢?实际上能够证明,在盒内就存在电场或多或少穿越直径的那一种振动模,如图 23-13 所示。



(a)



(b)

图 23-12 更高频率的模式

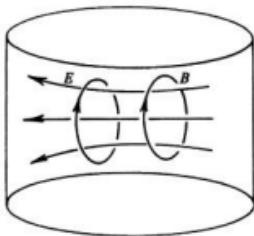


图 23-13 柱形空腔的一种横向模

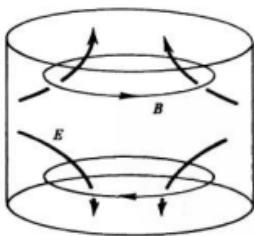


图 23-14 柱形空腔的另一种模

要理解为什么这一模式的固有频率与我们所曾考虑过的第一个模式的固有频率不应有很大差别,并不是太困难的。假设不取该柱形空腔,而是取一个每边 3 in 的立方形空腔。很清楚,这个空腔该有三种不同模式,但都有相同的频率。其中电场几乎是上下振动的一种模

式肯定将与其中电场是左右指向的另一种模式具有相同频率。如果我们现在将该立方空腔扭曲成一圆筒，就会或多或少改变其频率。但仍应该期望，这些频率不会改变得太多，只要对该空腔的尺寸大约保持一样。因此，图23-13那种模式的频率应不太异于图23-8的模式。本来我们可以对图23-13的那种模式详细算出其固有频率，但现在还不打算那样做。当这些计算做出来时，便会发现，对于上面所假定的那些尺寸，算出的共振频率的确很接近于在3300 MHz处所观测到的共振的频率。

通过相似的一些计算还能够证明，应该还有另外的模式，其共振频率为我们已找出的接近3800 MHz的那个频率。对于这一模式，电场和磁场如图23-14所示。不必担心该电场会自始至终横穿过空腔。它从侧壁跑至两端，如图所示。

那么你现在大概会相信，若把频率增加得越来越高，则应该指望会找到越来越多的共振。存在许多不同的模式，每一个都具有与电场和磁场的某一特定的复杂布局相对应的不同共振频率。这些场的每一种布局称为共振模。通过求解关于空腔里的电场和磁场的麦克斯韦方程组，每一种模式的共振频率就可以计算出来。

当有了在某个特定频率处的共振时，我们怎样才能知道被激发的是哪一模式呢？一种办法是，通过一个小洞把一根小导线插进空腔里。如果电场沿着导线方向，如图23-15(a)所示，则导线里便有一个相对较大的电流从电场汲取能量，因而共振将被抑制。若电场像图23-15(b)所示的那样，则影响会小得多。通过把导线的末端弯曲，像图23-15(c)那样，我们可以找出这种模式中场所指的方向。于是，当把导线转动使其末端与E平行时影响便大，而当转动至与E成90°时影响就小。

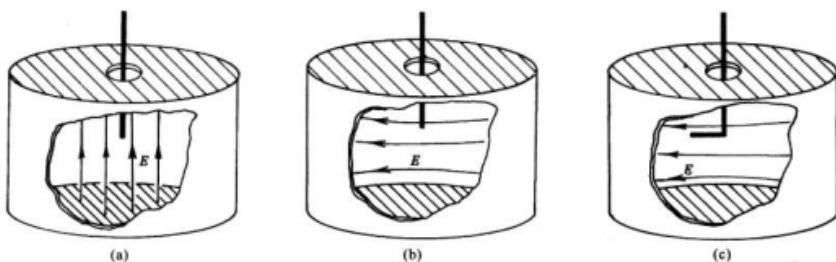


图23-15 一根伸进空腔里的短金属线，当其平行于E时，对共振的干扰比起与E垂直时要大得多

§ 23-5 空腔与共振电路

尽管我们已经描述的共振腔似乎与通常含有电感和电容的那种共振电路很不相同，但这两种共振系统还是很紧密地联系着的。它们都是同一家庭的成员，恰好就是电磁共振的两个极端情况——有许多中间情况介乎这两个极端之间。假设我们通过考虑一个电容与一个电感并联的共振电路开始，如图23-16(a)所示。这一电路将在 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 的频率发生共振。如果我们希望提高这一电路的共振频率，可通过降低电感L而做到。一

种办法是,减少线圈中的匝数。但是,在这方面我们只能走到这一步,即最后将达到只有一匝,就是连接电容器的顶板和底板间的那一根导线。本来还可以通过降低电容而把共振频率提得更高,然而,我们可以通过把几个电感并联而继续降低这个电感。当两个单匝电感并联时就只有每匝电感的一半。所以当电感已减至仅有1匝时,我们仍可通过添加其他一些连接电容器的顶板与底板间的单个回路来继续提高共振频率。例如,图 23-16(b)表明电容器两板之间是由六个这样的“单匝电感”连接的。如果继续增加许许多多这种导线段,则可能会过渡到一个完全封闭了的共振系统,如图 23-16(c)所示,那是一个柱形对称物体的截面。现在我们的电感是一个连接至电容器两板边缘的柱形空罐,电场和磁场显示在该图中。当然,这样的物体就是一个共振腔,被叫作“加感”空腔,但我们仍可以把它看作为一个 LC 电路,即其中电容部分是我们能够在那里找到大多数电场的地方,而电感部分则是能找到大多数磁场的地方。

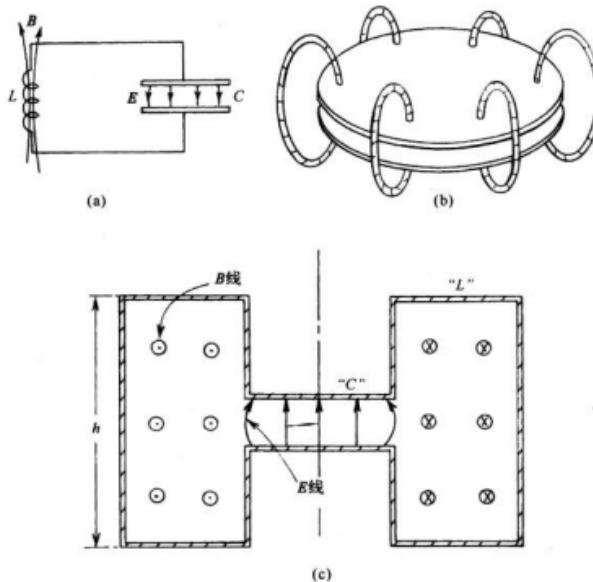


图 23-16 共振频率逐渐提高的各种共振器

如果要进一步提高图 23-16(c)的共振器频率,还可以通过继续降低电感 L 而做到。为此,就必须减小该电感部分的几何尺寸,比方说缩小图中的高度 h 。当 h 缩小时,共振频率将会提高。当然最后将会达到其中高度 h 刚好等于电容器两板之间的间距。此时,我们就刚好有一个柱形盒,共振电路变成图 23-7 所示的空腔共振器。

你将会注意到,在图 23-16 中原来的 LC 共振电路中,电场和磁场分得很开。当逐渐把共振系统修改以便使其频率逐步提高时,磁场就会越来越靠近电场,直到两者在空腔共振器

中完全混合。

尽管在这一章中，我们曾谈过的空腔共振器都是柱形盒子，但圆柱这个形状却没有什么神秘之处。任一种形状的盒子都会有对应于电场和磁场的各种可能振动模式的共振频率。例如，图 23-17 所示的那个“空腔”就会有它自己特定的一组共振频率——虽则要把它算出来是相当困难的。

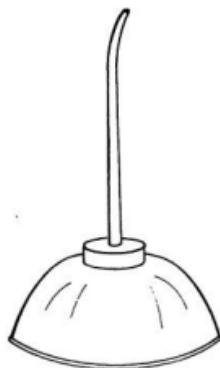


图 23-17 另一种共振空腔

第 24 章 波 导

§ 24-1 传 输 线

上一章我们学习过电路的集总元件在十分高的频率工作时所发生的情况，从而看出一个共振电路可由场在其中共振的一个空腔替代。另一个有趣的技术问题是，要把两个物体连接起来使得电磁能量能在它们之间传输。在低频电路中，这种连接是由导线完成的，但这一种方法在高频时就不怎么奏效，因为这种电路将会把能量辐射到周围的整个空间中去，从而难以控制能量的去向。场将在导线周围散发出去，电流和电压不可能由导线很好地“引导”。在这一章中我们要来看看在高频时物体可能互相连接的办法。至少，这是一种介绍我们课题的方式。

另一种说法是，上面我们讨论了在自由空间里波的行为。现在正是搞清楚当振动场被局限在一维或多维的空间里时所发生的情况的时候。我们将发现一些有趣的新现象。当场受到最好的二维限制而允许在第三维自由通过时，它们将以波的形式传播出去。这些就是“导波”——本章的课题。

我们由研究传输线的普遍理论着手。那些在旷野从一个铁塔到另一个铁塔的输电线会辐射出一些功率，但电源的频率(50~60 Hz)竟是如此之低，以致这种损失并不严重。这种辐射可以用金属套管包围导线而加以防止，但这一办法对于电力传输线来说并不实际，因为所用的电压和电流势必要求一条十分粗重而又昂贵的套管。因此，常用的还是简易的“明线”。

对于较高一些的频率——比方说几千赫——辐射可能已变得严重。然而，它还是可采用诸如在短程电话接线中所用的那种“双扭线”来降低的。但是，在更高频率时，辐射立刻变得难以忍受，这或是由于功率损失，或是由于能量在不需要它出现的其他电路中出现了。对于从几千赫起至几百兆赫的频率，电磁信号和功率往往采用在筒形“外导体”或“屏蔽物”之内含有一根导线的那种同轴线来传输。虽然我们仍将仅仅对一根同轴线进行推导，但下述处理办法将适用于两个互相平行的任何形状的导体构成的传输线。

试取一条最简单的同轴线，在其中心处有一个薄中空圆筒，此外又有与这一内导体同轴的另外一个导体，也是一个薄筒，如图 24-1 所示。一开始我们用近似的方法算出该同轴线

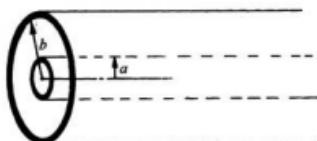


图 24-1 一条同轴传输线

在相对低频时的工作情况。当早先我们讲到两导体具有确定的单位长度电感或电容时，就已经描述了某些低频行为。事实上，是可以通过给出任何一根传输线的单位长度电感 L_0 和电容 C_0 而描述其低频行为的。于是，我们就可以将该线当作 § 22-6 中曾讨论过的那种 LC 滤波器的极限情况而加以分析。通过采用一些小串联元件 $L_0 \Delta x$ 和一些小并联元件 $C_0 \Delta x$

(其中 Δx 是该线中的一个长度元), 可以制造一个模拟传输线的滤波器。利用关于无限长滤波器的结果, 可以看到电场的信号会沿着该线传播。然而, 我们现在并不想遵循这一途径, 而宁愿从微分方程的观点来考察该线。

假设我们要看看沿传输线相邻两点, 比如说距离线的开头部分为 x 和 $x + \Delta x$ 两点间发生的事情。让我们把这两导体间的电势差称为 $V(x)$, 而沿那根“热”导体的电流称为 $I(x)$ (见图 24-2)。如果导线中的电流正在变化, 则电感将向我们提供跨越从 x 至 $x + \Delta x$ 那一小段导线间的电压降计为:

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = -L_0 \Delta x \frac{dI}{dt}.$$

或者, 取 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限, 则可得

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (24.1)$$

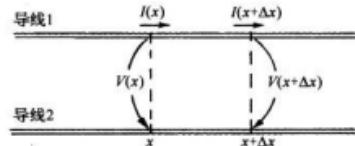


图 24-2 传输线的电流和电压

这表明变化着的电流产生了电压的梯度。

再参考上图, 若在 x 处的电压正在变化, 则必定有某些电荷提供给该区域里的电容。如果我们考虑从 x 至 $x + \Delta x$ 那一小线段, 则其上的电荷为 $q = C_0 \Delta x V$ 。这一电荷的时间变化率为 $C_0 \Delta x dV/dt$, 但只有在流入该线元的电流 $I(x)$ 不等于从该线元流出的电流 $I(x + \Delta x)$ 时电荷才出现改变。把这一电流差称为 ΔI , 便有

$$\Delta I = -C_0 \Delta x \frac{dV}{dt}.$$

若取 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限, 可得

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (24.2)$$

因此, 电荷守恒意味着电流梯度正比于电压的时间变化率。

于是, 式(24.1)和(24.2)就是传输线的基本方程。如果我们乐意, 可以把它稍微修改一下使之包括导体中的电阻效应或电荷经由导体之间绝缘体的泄漏现象, 但对于眼前的讨论来说我们将只停留在这个简单例子上。

关于传输线的这两个方程, 通过对其中一个取 t 的微商, 而对另一个取 x 的微商, 再消去 V 或 I , 从而把它们结合起来。于是, 我们就有

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (24.3)$$

或者是

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (24.4)$$

由此我们再次认识到它们是在 x 方向上的波动方程。对一条均匀的传输线来说, 电压(或电流)作为波而沿该线传播。沿线电压必然会取 $V(x, t) = f(x - vt)$ 或 $V(x, t) = g(x + vt)$ 或两者之和的形式。那么速度 v 是什么呢? 我们知道, $\partial^2 / \partial t^2$ 项的系数恰好是 $1/v^2$, 因而

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (24.5)$$

我们将希望你们去证明:线里每一个波的电压总会正比于那个波的电流,而比例常数刚好等于特性阻抗 z_0 。对于沿正 x 向行进的波分别称其电压和电流为 V_+ 和 I_+ , 则应该得到

$$V_+ = z_0 I_+. \quad (24.6)$$

同理, 对于一个负 x 走向的波其关系为

$$V_- = -z_0 I_-.$$

特性阻抗——正如过去曾从滤波器方程中找到的那样——由下式给出:

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad (24.7)$$

所以是一个纯电阻。

为求得一条传输线的传播速率 v 及其特性阻抗 z_0 , 我们必须知道单位长度的电感和电容。对于一条同轴电缆来说, 是能轻而易举地把它们算出来的, 因而我们会知道情况到底怎么样。对于电感, 根据 § 17-8 的那些概念, 并设 $\frac{1}{2}LI^2$ 等于磁能, 则它可以通过 $\epsilon_0 c^2 B^2 / 2$ 对整个体积的积分而获得。假定该中心导体载有电流 I , 那么我们知道, $B = I/(2\pi\epsilon_0 c^2 r)$, 其中 r 为离轴的距离。取一厚度为 dr 而长度为 l 的柱形壳作为体积元, 则对于磁能应有

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \right)^2 l 2\pi r dr,$$

式中 a 和 b 分别代表内外两导体的半径。算出该积分, 得

$$U = \frac{I^2 l}{4\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (24.8)$$

设这一能量等于 $\frac{1}{2}LI^2$, 就可以求出

$$L = \frac{l}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (24.9)$$

正如推测到的那样, 它与线的长度 l 成正比, 因而单位长度的自感 L_0 就是

$$L_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c^2}. \quad (24.10)$$

我们曾算出在一柱形电容器上的电荷(见 § 12-2)。现在, 将该电荷除以电势差, 便得

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

因而单位长度的电容 C_0 为 C/l 。把这个结果与式(24.10)相结合, 便可知道乘积 $L_0 C_0$ 恰好等于 $1/c^2$, 因而 $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ 即等于 c 。波以光速沿线向下传播。必须指出, 这一结果有赖于我们所做的如下假定:(a)在两导体之间的空间里并没有电介质或磁性材料存在, 以及(b)电流全都是在导体表面上通过的(对理想导体理该如此)。我们以后还将见到, 对于优良导体, 当频率高时, 一切电流将像理想导体那样都分布于其表面上, 因此这个假定是适用的。

眼下有趣的是, 只要(a)和(b)两假设正确, 则对于任一对平行导体——甚至是一根六角

形内导体放置在一根椭圆形外导体中的任何地方——积 $L_0 C_0$ 就等于 $1/\kappa^2$ 。只要横截面固定不变以及两导体之间的空间里没有材料，则波以光速传播。

关于特性阻抗就不能做出这样的普遍表述。对于一根同轴线来说，它是

$$z_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c}. \quad (24.11)$$

式中因子 $1/(\epsilon_0 c)$ 具有电阻的量纲并等于 $120\pi \Omega$ 。几何因子 $\ln(b/a)$ 仅以对数的形式依赖于同轴线的几何尺寸，因而就同轴线——和大多数传输导线——而言，这特性阻抗具有从 50Ω 至几百欧左右的典型值。

§ 24-2 矩 形 波 导

我们将要谈及的下一个问题，初看起来，似乎是一种令人惊奇的现象：如果从同轴线中抽去中心导体，它仍会运载电磁功率。换句话说，在足够高的频率时，一根空管子将工作得如同导线那样好。这与一种神秘的办法有关，即在高频时电容器和电感器所构成的共振电路必须由一个空盒来代替。

尽管当人们把一条传输线当作一种分布式的电感和电容来思考时，或许是一件引人注目之事，但大家都清楚，电磁波可以沿一条中空的金属管道内部通过。如果该管道是笔直的，则还可以通过它看到东西！因此肯定，电磁波是会通过管子的。但我们也知道，不可能使低频波（电力或电话）从一个单独的金属管内部通过。因此就必然是：若电磁波的波长足够短，才可以从其中通过。我们要来讨论对某一给定大小的管子能够从其中通过的最长波长（或最低频率）的极限情况。由于这时管子是用来载波的，所以它被称为波导。

我们将从一矩形管开始，因为它是待分析的最简单情况。起初打算给出一种数学处理，以后才回过头来用一种更加基本的办法来考察该问题。然而，这较基本的办法只能轻易地运用到一个矩形导管上去。但对任意形状的一般导管，基本现象都相同，故从根本上来说数学论证基本上更为可靠。

这样，我们的问题就是要找出在矩形管中哪一种波才可以存在。现在先来选取某些方便的坐标，我们选取 z 轴沿管长方向，而 x 和 y 轴则平行于管的两个侧面，如图 24-3 所示。

我们知道，当光波沿着管道往下传播时，它们有一横向电场，因此，假定先来寻找垂直于 z 的、比如说只有一 y 分量 E_y 的那一种解。这一电场在横跨该导管时会有某种变化，事实上，在平行于 y 轴的两侧壁处它必须为零，因为在一导体中的电流和电荷始终会调整自己使得在导体表面上不会有切向的电场分量。因此， E_y 就将随 x 以某一拱形变化，如图 24-4 所示。也许它就是我们对空腔所求出的那种贝塞尔函数？不，因为贝塞尔函数必须是与柱形几何有关的。对于一个矩形的几何形状来说，波通常是一

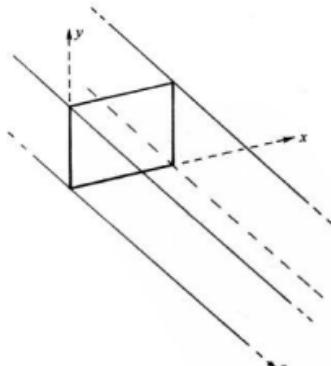


图 24-3 对矩形波导所选取的坐标

简谐函数,因而就应该尝试某种像 $\sin k_z x$ 那样的东西。

既然我们所想要的是沿波导往下传播的波,那就应该期望,当沿 z 方向行进时场会在正值与负值之间反复变化,如图 24-5 所示的那样,而这些振动又将以某一速度 v 沿着波导传播。若我们具有以某个确定频率 ω 的振动,则会猜测到,该波随 z 的变化也许会像 $e^{i(\omega t - k_z z)}$ 那样。这一种与 z 的依存关系表示以速率 $v = \omega/k_z$ 传播的波(见第 1 卷第 29 章)。

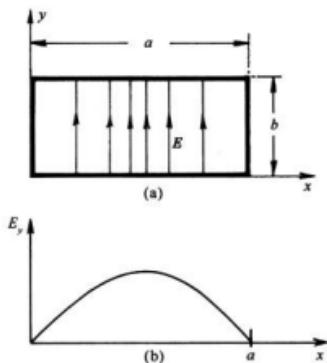


图 24-4 在波导中某一个 z 值处的电场

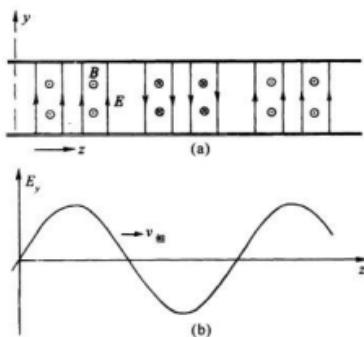


图 24-5 在波导中电场与 z 的依赖关系

因此,我们也许会猜测,导管里的波可能有如下数学形式:

$$E_y = E_0 \sin k_z x e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (24.12)$$

让我们来看一看这猜测是否满足正确的场方程。首先,电场在导体处不应该有切向分量,我们的场满足这一要求,它垂直于顶面和底面,并在两侧面上为零。噢,若选取 k_z 使得 $\sin k_z x$ 的半周恰好与导管的宽度相符——也就是只要

$$k_z a = \pi \quad (24.13)$$

就行,使侧面处的电场为零还有其他一些可能性,比如 $k_z a = 2\pi, 3\pi, \dots$ 或一般说来,

$$k_z a = n\pi, \quad (24.14)$$

其中 n 是任一整数。这些就代表场的各种复杂布局,但在目前让我们只考虑最简单的情况,即 $k_z = \pi/a$, 其中 a 为该导管内部的宽度。

其次,在导管内部的自由空间里 E 的散度必须为零,因为那里并没有电荷。 E 只有一个 y 分量,而这一分量并不会随 y 变化,因而的确有 $\nabla \cdot E = 0$ 。

最后,电场在导管内部的自由空间里必须与其余的麦克斯韦方程都一致。这与它必须满足下列波方程是同一回事:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (24.15)$$

我们得看看我们的猜测,即式(24.12)是否很好地起作用。 E_x 对 x 的二次微商正好是 $-k_z^2 E_y$,对 y 的二次微商则为零,因为没有东西与 y 有关。对 z 的二次微商为 $-k_z^2 E_y$,而对 t 的二次微商则为 $-\omega^2 E_y$ 。于是,方程(24.15)表明

$$k_z^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0.$$

除非 E_y 处处为零(那并非十分有意义),否则只有下式

$$k_z^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (24.16)$$

才是正确的。我们已经确定了 k_z ,因而这个方程就告诉我们,只要 k_z 与频率 ω 之间的关系使式(24.16)得到满足——换句话说,只要

$$k_z = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2}, \quad (24.17)$$

就可能有上面所假设的那种类型的波。我们刚才所描述的波以这个 k_z 值在 z 方向传播。

对于给定的频率 ω ,由式(24.17)获得的波数 k_z 告诉我们波节沿波导往下传播的速率。这个相速度是

$$v = \frac{\omega}{k_z}. \quad (24.18)$$

你会记得,一个行波的波长是由 $\lambda = 2\pi v/\omega$ 给出的,因而 k_z 也就等于 $2\pi/\lambda_g$,其中 λ_g 是沿 z 方向的振动波长——即“导管波长”。当然,导管波长与同频率的电磁波在自由空间里的波长是不同的。若把等于 $2\pi c/\omega$ 的自由空间波长称为 λ_0 ,则可将式(24.17)写成

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}. \quad (24.19)$$

除了电场之外,还有磁场也随波传播,但眼前我们将不操心去算出有关磁场方面的那个表示式。由于 $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$,所以 \mathbf{B} 线将围绕那些 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 值最大的区域旋转,也就是说,将围绕 \mathbf{E} 的极大点与极小点中间的区域旋转。 \mathbf{B} 的回路将平行于 xz 平面并位于 \mathbf{E} 的峰与谷之间,如图24-6所示。

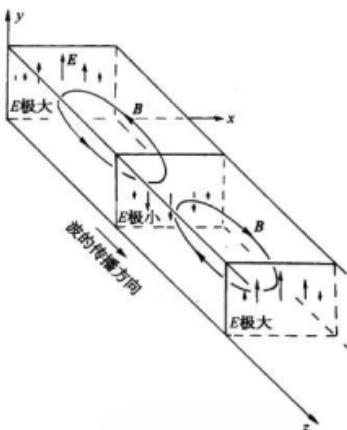


图24-6 波导中的磁场

§ 24-3 截止频率

在解方程式(24.16)以求得 k_z 时,实际应有两个根,一个正,一个负。我们应该写成

$$k_z = \pm \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2}. \quad (24.20)$$

这两个符号只是意味着可能有以负相速(朝向 $-z$)传播的波,同样在导管中也有沿正向传播

的波。自然,波沿任一方向传播都应该是可能的。由于这两种类型的波可以同时存在,所以就会有驻波解的可能性。

有关 k_z 的方程也告诉我们,较高的频率给出较大的 k_z 值,因而也就是较短的波长,一直到 ω 取大的极限时, k_z 变得等于 ω/c ,它就是我们对自由空间里的波所预期的值。我们通过管子所“看到”的光仍然以速率 c 行进。但此刻注意,若频率下降,则某些怪事会跟着发生。开始波长会变得越来越大,但若 ω 降得太小,则式(24.20)中的平方根内的量突然变负。一旦 ω 变为小于 $\pi c/a$ ——或当 λ_0 变得大于 $2a$,上述情况就会发生。换句话说,当频率变成低于某一临界频率 $\omega_c = \pi c/a$ 时,波数 k_z (从而 λ_0) 会变成虚数,从而不再得到任何解了。难道真的得不到解了吗?谁说 k_z 必须是实数呢?如果确实出现虚数,那又该怎么办呢?场方程组仍旧被满足,或许一个虚数 k_z 也代表一个波。

假设 ω 小于 ω_c ,便可以写成

$$k_z = \pm ik', \quad (24.21)$$

其中 k' 是正的实数,即

$$k' = \sqrt{\pi^2/a^2 - \omega^2/c^2}. \quad (24.22)$$

如果现在回到 E_y 的表达式(24.12),则有

$$E_y = E_0 e^{i(\omega t \mp k' z)} \sin k_z x, \quad (24.23)$$

这也可以写成

$$E_y = E_0 e^{\pm k' z} e^{i\omega t} \sin k_z x. \quad (24.24)$$

上述表达式给出了一个按 $e^{i\omega t}$ 随时间振动但却按照 $e^{\pm k' z}$ 随 z 变化的 E 场。它作为一个指数函数随 z 平滑地减少或增加。在我们的推导中并未对发出波的源有所操心,不过一定有一个源存在于导管中某处。伴随 k' 的符号必定是使场随着离开波源的距离增大而减小的那个。

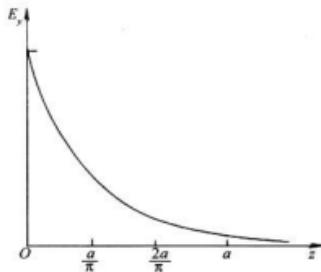


图 24-7 对于 $\omega \ll \omega_c$, E_y 随 z 的变化情况

因此,对于比 $\omega_c = \pi c/a$ 低的频率,波并不会沿导管往下传播,该振动场只能透入导管内仅达到 $1/k'$ 数量级的距离。为此,频率 ω_c 被称作导管的“截止频率”。考察式(24.22)可知,在频率仅稍低于 ω_c 时, k' 是一个小数值,因而场可透入导管内很大的距离。但若 ω 比 ω_c 小很多,则指数系数 k' 等于 π/a ,而场便非常迅速地减弱,如图 24-7 所示。在距离等于 a/π 或在约三分之一宽度的距离内,场减弱至 $1/e$ 。场从源出来后仅透入很短距离。

我们想要强调对导波进行分析的一个有趣特点——即虚波数 k_z 的出现。按正常情况,如果在物理学中求解一个方程并获得一个虚数,它不具有任何物理意义。然而,对于波来说,一个虚数确实意味着某种东西。波动方程仍被满足,它只是意味着解答会给出一个指数式地减弱的场,而不是一个传播着的波罢了。因此,在任一个波动问题中,若对于某一频率 k 会变成虚数,这意味着波的形式变了——正弦波变成了指数式衰减的场。

§ 24-4 导波的速率

上面所用的波速是相速,即波节^{*}的速率,它是频率的函数。若把式(24.17)和(24.18)结合起来,则可写出

$$v_{\text{相}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}}. \quad (24.25)$$

对于比截止频率为高的频率——其中存在行波—— ω_c/ω 小于 1, 而 $v_{\text{相}}$ 为实数, 且会大于光速。我们曾在第1卷第48章中见到, 相速大于光速是可能的, 因为那不过是波节在运动而不是能量或信息在运动。为知道信号传播得多快, 我们得算出由一个频率的波与另一个或更多个频率稍微不同的波互相干涉而形成的脉冲或调制波的速率(见第1卷第48章)。我们已把这样一群波的包络速率称为群速度, 它不是 ω/k , 而是 $d\omega/dk$:

$$v_{\text{群}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (24.26)$$

取式(24.17)对 ω 的微商并颠倒过来以获得 $d\omega/dk$, 就求得

$$v_{\text{群}} = c\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}, \quad (24.27)$$

它比光速要小。

$v_{\text{相}}$ 与 $v_{\text{群}}$ 的几何平均恰好就是 c , 也即光速:

$$v_{\text{相}} v_{\text{群}} = c^2. \quad (24.28)$$

这很奇怪, 因为我们已在量子力学中见过相似的关系式了。对于一个具有任何速度——即便是相对论性的——的粒子, 其动量 p 与能量 U 都是这样联系着的:

$$U^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (24.29)$$

但在量子力学中能量为 $\hbar\omega$, 而动量为 \hbar/k , 即等于 $\hbar k$, 因而式(24.29)便可以写成

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (24.30)$$

或

$$k = \sqrt{\omega^2/c^2 - m^2 c^2/\hbar^2}, \quad (24.31)$$

这看来十分像式(24.17), 真有趣!

波的群速度也就是能量沿导管传输的速率。如果想要求出沿波导传送的能流, 则可以从能量密度乘以群速度而得到。设电场的方均根值为 E_0 , 则电场能量的平均密度为 $\epsilon_0 E_0^2/2$ 。也有一些能量与磁场有联系, 我们将不在这儿来证明它, 但在任一个空腔或导管中磁能与电能始终相等, 因而总的电磁能量密度为 $\epsilon_0 E_0^2$ 。于是, 由导管传输的功率 dU/dt 为

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 a b v_{\text{群}} \quad (24.32)$$

* 这里“波节”指的是行波中的波谷(或波峰), 而不是驻波中的那种波节。——译者注

(我们将在以后看到获得能流的更普遍的方法)。

§ 24-5 导波的观测

能量可借助某种“天线”耦合到波导中。例如,用一根小小的垂直导线或“短线”就可以。导波的存在可以用一小接收“天线”——仍可以是一根小短线或一个小回路——来拾取某些电磁能而加以观测。在图 24-8 中,展示了切开一部分侧壁的波导管,表明其中装有一根驱动短线和一个拾波“探头”。该驱动短线可以通过共轴缆连接至信号发生器,而拾波探头则可由一根相似的电缆连接至一检波器。把拾波探头通过一条细长狭槽插入导管之内往往较方便,如图 24-8 所示。这样,探头就可以沿着导管来回移动以便在不同位置对场取样。

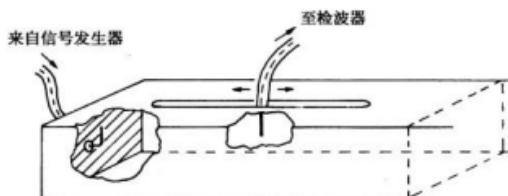


图 24-8 装配有驱动短线和拾波探头的波导管

如果信号发生器被调节在大于截止频率 ω_c 的某个频率 ω 时,那么就会有波从该驱动短线出发沿导管往下传播。如果该导管无限长,则这些波将是唯一存在的波,用一个经过仔细设计的吸收器使导管不致从远端发生反射,从而使有终端的导管有效地设置成具有上述性质的导管。于是,由于检波器所测量的是在探头附近场的时间平均值,所以它将检测到一个与沿导管位置无关的信号,它的输出将与被传递的功率成正比。

如果现在导管的远端以某种方式被封闭因而产生一个反射波——作为一个极端例子,假定用一块金属板来封闭它——则除了原来的前进波之外还将有一个反射波。这两个波将互相干涉,在导管里产生一个驻波,它与我们以前曾在第 1 卷第 49 章中讨论过的那种弦线上的驻波相似,于是,当拾波探头沿线移动时,检波器的读数就将周期性地升降,表明在驻波的每一个波腹处场为极大而在每一个波节处场为极小,在相邻两波节点(或波腹点)间的距离恰为 $\lambda_e/2$ 。这提供了测量导管内波长的一个方便的方法。现在若频率移至接近于 ω_c 处,则两节点间的距离增长,这表明该导管波长是按照式(24.19)所预言的而增大了。

假设现在信号发生器被调节至稍微低于 ω_c 的一个频率。那么,当该拾波探头沿导管往下移动时,检波器的输出便将逐渐减弱。如果频率再度降低,场强将按照图 24-7 的曲线迅速下降,并表明波不再传播出去了。

§ 24-6 波 导 管

波导的一种重要实际应用就是对于高频功率的传输,比如把一个高频振荡器或一部雷

达装置中的输出放大器耦合至一根天线。事实上，天线本身往往包括一个抛物线形反射镜，由一个在其末端张开成“喇叭口”形状的波导把沿导管而来的波辐射出去，并馈至镜的焦点上。尽管高频电磁波可以经由同轴电缆传输，但对于传输大量功率，波导较为优越。首先，可以沿一条缆线传输的最大功率受到导体间的绝缘材料（固体或气体）击穿的限制。对于给定的功率量，在一导管内的场强往往比同轴电缆内的弱，因而在击穿发生之前就可在其中传递较大的功率。其次，同轴电缆中的功率损耗往往比在波导管内的大。在同轴电缆内必须有用以支持该中心导体的绝缘材料，而在这一材料中便有能量损耗——特别是在高频上。并且，在同轴电缆的中心导体上电流密度很高，而由于损耗是随电流密度的平方增大的，因而出现在导管壁上的较低电流就会导致较小的能量损耗。为确保损耗最小，导管内壁往往是由一种诸如银的高电导率材料电镀的。

凡在有波导存在的“电路”中，连接的问题与在低频时相应的电路问题大不一样，这种连接常称为微波“衔接”法。为此目的许多特殊器件已经发展起来。例如，两节波导往往是经由凸缘接头互相连接的，这可由图 24-9 中看出。然而，像这样的连接会导致严重的能量损耗，因为那些表面电流必然流经接口，而那里可能有相对高的电阻。避免这种损耗的一种办法是制造截面如图 24-10 所示的那种凸缘接头。在导管的相邻两节间留下一点空隙，而在其中一个凸缘接头上则刻有一条槽沟以便造成一个如图 23-16(c) 所示的那种小空腔。适当地选取这个空腔的大小尺寸使它能在所采用的频率发生共振。这一共振腔对于电流会呈现一个高“阻抗”，因而流经该金属接口（图 24-10 中的 a 处）的电流就相对地小。导管里的大电流只是对该空隙（图中的 b 处）的“电容”充电及放电而已，因而那里仅有少量的能量损耗。

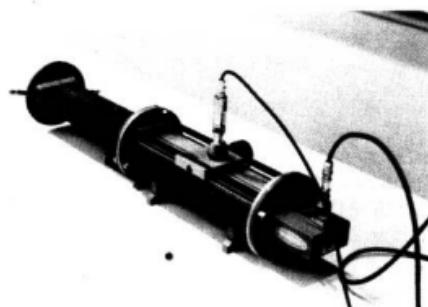


图 24-9 几段波导由凸缘接头互相连接

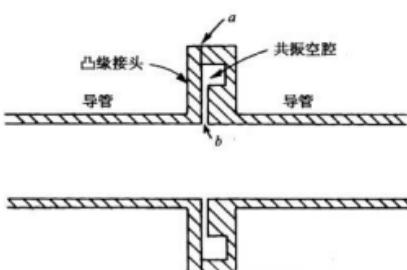


图 24-10 两节波导间的低损耗连接

假设你想要在某一处截断一节波导管使得不会形成反射波，那么，你就必须在其末端安置一种模拟一根无限长导管的东西。你需要有一个对于导管的作用就像特性阻抗对于传输线的作用那样的“终端”——对到达之波仅有吸收而不产生反射的一种东西。此时该导管将起着仿佛永远接续下去的作用。像这样的终端是通过在该导管中放进某种经过精心设计的电阻材料的劈形物制成的。它被用来吸收波的能量使得几乎不产生任何反射波。

如果你想要把三件东西——例如一个源与两个不同的天线——互相连接起来，那么你就可用一个像图 24-11 所示的那种“T”形波导来完成。在这个“T”形管中心截口馈入的功

率会被分开经由两条侧臂流出(可能还有一些反射波)。从图 24-12 的简略图示中你可以定性地看出,当场到达该输入截口的末端时就会扩散开来并形成电场,该电场会使波在该两臂中开始传播出去。在接合处的这些场会约略如图 24-12(a)或(b)所示,具体要视导管里的电场是与该“T”形管的“顶”平行还是垂直而定。



图 24-11 “T”形波导管(在凸缘接头处配备了塑料端帽,以保持当这个“T”形导管不用时内部清洁)

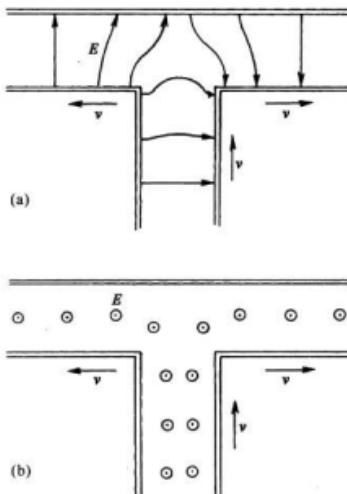


图 24-12 在一“T”形波导中关于两种可能取向的电场

最后,我们想要描述一种称为“单向耦合器”的器件,这对于在你已经连接好一个复杂的波导布局之后要讲出到底发生了什么是非常有用的。假设你想知道在波导的某一特定截口处波朝哪一方向行走——例如,你或许会怀疑是否存在一强反射波。若导管里的波是沿某一方向行走,这单向耦合器就会从其中吸取一小部分功率,但若波是朝另一方向行走,则不能取出任何功率。通过把这个耦合器的输出连接到一个检波器上,你就能够测得导管中的“单向”功率。

图 24-13 是单向耦合器的简图,沿着一段波导 AB 的一个面上焊接上另一段波导 CD。波导 CD 被弯开以便有可以安置凸缘接口的地方。

在把这两个波导焊接在一起之前,要在每一波导上钻通两个(或者更多个)洞(借以互相耦合),以便使主波导 AB 中的一些场可被耦合至副波导 CD 中去。每个洞起着小天线的作用,以致在副波导中产生出波来。要是只有一个洞,波会在两个方向上被送出,而且不管波在原导管中走哪个方向都应相同。但当存在间隔等于导管波长的四分之一的两

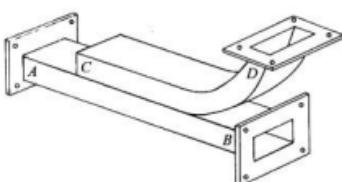


图 24-13 单向耦合器

个洞时,它们就会形成相位差 90° 的两个源。你是否还记得,在第 1 卷第 29 章中讨论过空间相距 $\lambda/4$ 、而在时间上激发相位超过 90° 的两根天线发出的波引起的干涉? 我们曾发现,这两波在一个方向上相减而在相反方向上相加。相同的事情也将在这里发生。导管 CD 中所产生的波与在 AB 中的波会有相同的传播方向。

如果在主导管中波正从 A 向 B 传播,则在副导管的输出口 D 处将会有个波。若在主导管中的波是从 B 传向 A,则将有一个波朝副导管的 C 端传播。但这一端却已装配成一终端,因而波将被吸收,于是在该耦合器的输出口处就不存在波了。

§ 24-7 波 导 模 式

由我们选择出来而正在加以分析的波乃是场方程组的一个特解。此外还有许多其他的解,每个解称为一种波导“模”。例如,上面讨论的场与 x 的依赖关系不过是正弦波的半周。还存在同样好的具有全周的解,这时 E_y 随 x 的变化将如图 24-14 所示。这种模式的 k_x 是前一种的二倍,因而截止频率就高得多了。并且,在我们所已学习过的波中 E 只有一个 y 分量,但此外还有包含更复杂电场的其他模。若电场只有 x 和 y 分量——因而总场始终与 z 方向正交——则这种模称为“横电”(或 TE)模。这种模的磁场总会有一个 z 分量。事实证明,若 E 有一个 z 分量(沿传播方向),则磁场始终只有横向分量,因此这种场就称为横磁(TM)模。对于一个矩形导管来说,所有其他模比起上述那种简单的 TE 模来具有较高截止频率。因此,就有可能——而且也经常是——采用一个其中频率只比这一最低波模的截止频率为高而比其他一切截止频率都较低的导管,以便仅有这么一种模能够传播。不然的话,波的行为就会变得复杂而且更难于控制了。

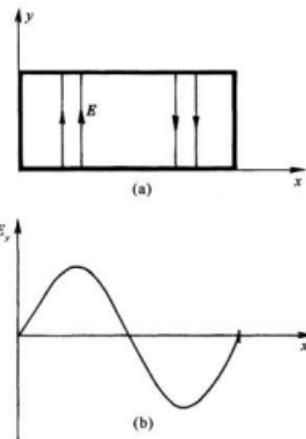


图 24-14 另一种可能的 E_y 随 x 变化的情况

§ 24-8 另一种看待导波的方法

现在要让你看看另一种理解波导行为的方法,即为什么波导对比其截止频率 ω_c 低的那些频率会使场迅速衰减。这样对于波导在高、低频之间行为之所以会突然变化,你将有一个更为“形象化”的概念。对于一个矩形波导来说,通过利用在导管壁上的反射或镜像法对场的分析,我们能够做到这点。然而,这种办法只对矩形波导有效,这就是为什么我们要从较多数学上的分析开始,因为它在原则上对任何形状的波导都适用。

对于上面已描述过的模,垂直方向的尺寸大小(即 y 值)不会引起任何效应,因而可略去该导管的顶和底,并想象导管乃是在垂直方向上延伸至无限远的。于是,可设想导管仅由两块相距为 a 的垂直板组成。

假定场源是一根放在导管中间的垂直方向的导线,这根线中载有以频率 ω 振动着的电流。在不存在导管壁的情况下,像这样的导线会辐射出柱面波。

现在,考虑导管壁都是理想导体。这样,如同在静电学中一样,若我们对于该导线的场再加上一个或更多个适当的镜像导线的场,则在壁面处的那些条件将是正确的。关于镜像的概念,在电动力学中,正如同在静电学中一样,也都适用,当然要把推迟效应也包括进去。我们都明白那是真的,因为经常见到镜子会产生光源的像。而对于光频波段的电磁波来说,

一面镜子正好是一块“理想”导体。

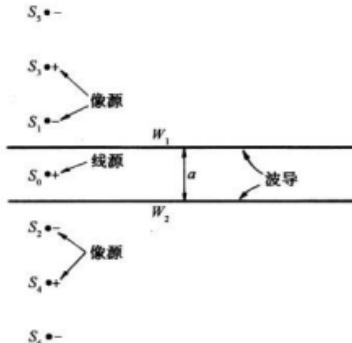


图 24-15 放在两面导体壁 W_1 和 W_2 之间的线源 S_0 。这两面壁可以由一个无穷序列的像源代替

现在让我们取一个水平截面,如图 24-15 所示,其中 W_1 和 W_2 是导管的两个壁,而 S_0 则是那根源导线。我们称这根导线里的电流方向为正。现在假如仅有一面壁,比方说 W_1 ,我们可以把它除去,只要在那标明为 S_1 的地方放置一个(具有相反极性的)像源。但由于存在两面壁,所以在壁 W_2 中也将有 S_0 的像,将其标明为像 S_2 。这个像源也将在 W_1 中造成一个像,叫它做 S_3 。现在 S_1 和 S_2 两者都将在 W_2 中在标明为 S_4 和 S_5 的位置上各有其像,如此等等。对于中间有一个源的两个平面导体来说,其场与由排列成一条直线、彼此相隔各为 a 的无限多个源所产生的场相同(事实上就恰如你在观察置于两平行平面镜中间的一根线时所会看到的那样)。为了使在两壁处的场为零,在像上的那些电流极性必须从一个像至另

一个像交替地改变着。换句话说,它们的振动存在 180° 的相位差。于是,该波导场就恰好是这种无限多个线源产生的场的叠加。

如果靠近那些源,场就很像是个静场。在 § 7-5 中曾经考虑过由一排栅形线源所产生的静场,并求得除随着与栅的距离指数式地减弱的那些项外,这个场好像一块带电平板产生的场。这里平均源强为零,因为从一个源至下一个源的符号交替地改变。任何存在的场会随距离做指数式的减弱。在靠近源时,所见到的场主要是来自最接近的源,在较远处,许多源都会做出贡献,因而它们的平均效果便是零了。因此,现在我们明白为什么在低于其截止频率时波导会给出一个按指数衰弱的场。特别是在低频上,这静态近似表现得很好,因而它预言场会随距离的增大而迅速减弱。

现在,我们却面临一个相反问题:为什么波真的会传播呢? 那是个神秘部分! 原因是,在高频时场的推迟会在相位上引进一个附加改变,使得来自那些异相的源的场相长而不是相消。事实上,正是为了这一问题,我们在第 1 卷第 29 章中已学习过由一个天线阵或一个光栅所产生的场,当几根无线电天线被适当排列时,它们就能提供一种干涉花样,使得在某一方向有强信号而在另一方向则没有信号。

假设回到图 24-15 并观察从那一列像源到达远处的场。只有在某些由频率决定的方向——只有在来自所有一切源的场因同相相加的那些方向——场才会最强。在与源有适当距离处,场在这些特殊方向才作为平面波传播。我们在图 24-16 中对这一种波画出了示意

图,其中实线代表波峰而虚线表示波谷。波的传播方向将是这样的一个方向,在这个方向两相邻源到达波峰的推迟时差等于半个振动周期。换句话说,图中的 r_2 与 r_0 之差是自由空间波长的一半:

$$r_2 - r_0 = \frac{\lambda_0}{2}.$$

于是角度 θ 就由下式给出:

$$\sin \theta = \frac{\lambda_0}{2a}. \quad (24.33)$$

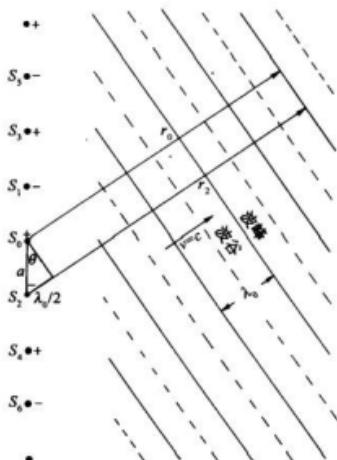


图 24-16 来自一列线源的一组相干波

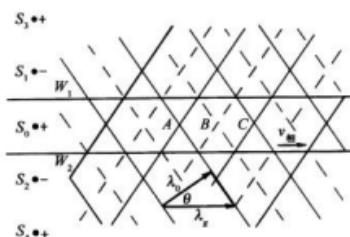


图 24-17 波导场可以视作两列平面波的叠加

当然,还有另一组波以相对于该列线源对称的角度向下传播。整个波导场(不要太靠近源)就是这两组波的叠加,如图 24-17 所示。当然,只有在该波导的两壁之间那实际的场才会真的是这样。

比如在 A 和 C 那些点,两种波形的峰相重合,因而场就有一个极大值;比如在 B 那种点,两波都有负峰值,因而场会有一个极小值(最大负值)。当时间向前推移时,导管里的场会表现出以波长 λ_s ——等于从 A 至 C 的距离——沿导管传播。这一距离与 θ 角的关系为

$$\cos \theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_s}. \quad (24.34)$$

利用关于 θ 的式(24.33),便可得到

$$\lambda_s = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}, \quad (24.35)$$

这恰好就是上面我们在式(24.19)中所求得的。

现在明白了为什么只有在超过截频 ω_0 时才会有波传播。如果自由空间波长大于 $2a$,

则波不能在如图 24-16 所示的那种角度出现。当 λ_0 降至 $2a$ 以下或当 ω 升至 $\omega_0 = \pi c/a$ 以上时，所需的相长干涉才会突然出现。

若频率足够高，则波将出现的方向就可能有两个或更多个。如果 $\lambda_0 < \frac{2}{3}a$ ，则上述情况就会发生。然而，一般说来，这也可能发生在 $\lambda_0 < a$ 时。这些附加波相当于我们提到过的那些较高的波导模。

通过上述分析我们也已弄清楚为什么导波的相速度会大于 c ，以及为什么这一速度会依赖于 ω 。当 ω 改变时，图 24-16 中的自由波角度会跟着发生变化，从而沿导管的速度也就变了。

虽然已经把导波描写成无限多个线源的阵列之场的叠加，但是只要设想有两组自由空间的波在两面理想平面镜之间不断地被往复反射——记住反射意味着周相的反转——我们便会得到这相同的结果。这些反射波组，除非刚好按照式(24.33)所给出的那个角度 θ 在传播，否则彼此完全互相抵消。因此考虑同一事物存在着许多方法。

第 25 章 用相对论符号表示的电动力学

在这一章中: $c = 1$

§ 25-1 四维矢量

现在来讨论狭义相对论在电动力学中的应用。由于已在第 1 卷的 15 至 17 章中学习过狭义相对论,因而我们在此只要很快地温习一下基本概念。

在实验上已经发现:如果我们以匀速运动,则物理规律不会改变。你不可能区别你是否处于一艘以匀速沿直线航行的宇宙飞船中,除非你从飞船中向外观望,或至少得做一种与外界有关的观测。我们写出的任何正确的物理定律都必须安排得使自然界的这一事实成为其中的固有部分。

设存在两个坐标系,其中一个 S' 系在 x 方向上以速率 v 相对于另一个 S 系而做匀速运动,这两个坐标系的空间与时间之间的关系由洛伦兹变换式给出:

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - ux}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y, \\x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad z' = z.\end{aligned}\tag{25.1}$$

物理定律必须是这样的:在经过了洛伦兹变换之后,该定律的新形式看来刚好像其旧形式。这恰恰同物理定律与坐标系的取向无关的原理相似。在第 1 卷第 11 章中,我们已看到,要从数学上描写物理过程对于转动的不变性,其办法是利用矢量来写出方程式。

例如,若有两矢量

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \text{ 和 } \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

我们曾发现其组合式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

如果对转动的坐标系进行变换,是不变的。因此我们知道,若在一个方程式的两边都有像 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 这一类的标识,则这方程在所有转动坐标系中都会有完全相同的形式。我们也曾发现过这么一个算符(见第 2 章):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

当作用于一标量函数时,它会给出像一个矢量那样变换的三个量。利用这一算符我们曾定

义过梯度,而与其他矢量相组合时也曾定义过散度与拉普拉斯算符。最后还发现,取两矢量的各对分量之积并求和,可能得到三个新的量,其行为像一个新的矢量。我们曾称它为两矢量的叉积。然后,又利用算符 ∇ 做叉积,定义了矢量的旋度。

表 25-1 三维矢量分析中重要的量和重要运算

矢量定义	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
标积	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
微分矢量算符	∇
梯度	$\nabla \varphi$
散度	$\nabla \cdot \mathbf{A}$
拉普拉斯算符	$\nabla \cdot \nabla - \nabla^2$
叉积	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
旋度	$\nabla \times \mathbf{A}$

由于我们会经常回过去参考矢量分析中所曾做过的事情,因此就把过去用过的三维空间中所有重要的矢量运算的摘要罗列在表 25-1 上。这里的要点在于,必须将物理学方程写得能使其两边在坐标系转动时以相同的方式变换。如果一边是矢量,则另一边也必须是矢量,以便在坐标系转动后方程两边将以完全相同的方式一起改变。同理,若一边是标量,则另一边也应该是标量,因而当转动坐标系时两边都不应当有任何改变,等等。

现在,在狭义相对论的情况下,时间和空间不可分割地混在一起,因而就必须对四维做出类似的事情。我们希望所得的方程不仅对于转动会保持不变,而且对于任何惯性参照系也是如此。这意味着,方程式在经历了式(25.1)的洛伦兹变换后应该不变。本章的目的就是要向你们说明如何才能做到这一点。然而,在开始之前,还要做一件将使我们的工作轻松得多(也会减少某些混乱)的事情。这就是选取长度和时间单位使得光速 c 等于1。你可以把这看作为把时间单位选取为光行走1 m 所需的时间(约为 3×10^{-9} s)。我们甚至可以叫这个时间单位为“一米”。采用这种单位,一切方程会更明显地呈现出空时对称性。并且,所有的 c 将不再出现在我们的相对论方程式中(如果你对此觉得麻烦的话,你始终可用 ct 代替每一个 t ,或一般说来,通过在那些需要使方程的量纲表现得正确的地方添加一个 c ,即把 c 再放回到任一个方程中去)。有了这个约定,我们就准备开始工作。我们的计划是要在四维空时中做出曾用矢量在三维中做过的所有事情。这诚然是一场十分简单的游戏,我们只是根据类比来做工作罢了。唯一真正的复杂性是符号的表示方法(在三维时已用尽了矢量符号)以及符号的一个轻微扭曲。

首先,通过与三维中的矢量的类比,定义一个四维矢量为 a_t, a_x, a_y, a_z 一组的四个量,当我们变换运动坐标系时,这些量会像 t, x, y, z 那样变换。对于四维矢量人们使用几种不同的符号表示方法。人们会写成 a_μ ,这指的是四个数 (a_t, a_x, a_y, a_z) 的一组——换句话说,该下脚标 μ 可以取 t, x, y, z 各“值”。有时由一个三维矢量来指明它的三个空间分量,即像 (a_i, \mathbf{a}) 那样,也会很方便。

我们已碰到过一个四维矢量,它由粒子的能量和动量组成(第1卷第17章),在新符号表示法中我们把它写成

$$\mathbf{p}_\mu = (E, \mathbf{p}), \quad (25.2)$$

这意味着该四维矢量 \mathbf{p}_μ 是由粒子的能量及其三维矢量 \mathbf{p} 的三个分量所构成的。

看来似乎这场游戏的确十分简单——对于物理学中每一个三维矢量,我们必须做的全部事情就在于找出其余的一个分量该是什么,从而就有一个四维矢量了。为了弄清楚事实并不是那么回事,试考虑速度矢量,它的分量是

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}.$$

试问：那时间分量是什么？凭本能就应能够提供正确的答案。由于四维矢量都像 t, x, y, z 那样，我们就会猜测到其时间分量为

$$v_t = \frac{dt}{dt} = 1.$$

这是错的。原因是，当我们做洛伦兹变换时在每个分母中的 t 并非是不变量。虽然为构成一个四维矢量，那些分子都具有正确的行为，但在各个分母中的 dt 却把事情搞坏了，它并不是对称的，而且在两个不同系统中是不相同的。

事实证明，只要各除以 $\sqrt{1 - v^2}$ ，上面所写下的四个“速度”分量将成为四维矢量的分量。我们能够看出那是正确的，因为如果从动量四维矢量出发：

$$p_\mu = (E, \mathbf{p}) = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \quad (25.3)$$

并用四维中不变的标量、静止质量 m_0 来除它，便有

$$\frac{p_\mu}{m_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \quad (25.4)$$

这必然仍是一个四维矢量（用一个不变标量来除，并不会改变变换性质）。因此，就可由下式定义一个“速度四维矢量” u_μ ：

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, & u_y &= \frac{v_y}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ u_x &= \frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2}}, & u_z &= \frac{v_z}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned} \quad (25.5)$$

这个四维速度是一个有用的量，例如，可以写出

$$p_\mu = m_0 u_\mu. \quad (25.6)$$

这是相对论中正确的方程都必须具有的那一种典型形式，式的每一边都是一个四维矢量（右边是一个不变量乘以一个四维矢量，那仍然是一个四维矢量）。

§ 25-2 标 积

还可以讲，在坐标系转动下从原点至某一点的距离不变乃是生活中的一项巧遇。这意味着在数学上 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 是一个不变量。换句话说，在经过了转动之后， $r'^2 = r^2$ 或

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

现在的问题是：在洛伦兹变换下是否也有一个相似的不变量？有的。从式(25.1)可以看出

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2.$$

除了它有赖于 x 方向的特殊选择之外，那是很好的不变量。若再减去 y^2 和 z^2 便能把这个

问题解决了。于是,任何洛伦兹变换加转动都会使这个量保持不变。因此,与三维中的 r^2 相类似的量,在四维中为

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

这是在所谓“完整洛伦兹群”——意指恒速平动和转动二者都进行的那种变换——下的一个不变量。

现在,由于这个不变性是仅仅依赖于式(25.1)的变换法则——再加上转动——的一个代数问题,它对于任一个四维矢量都是正确的(根据定义,它们都做同样的变换)。因此,对于一个四维矢量 a_μ 来说,便有

$$a'^2 - a'_x^2 - a'_y^2 - a'_z^2 = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2.$$

我们叫这个量为四维矢量 a_μ 的“长度”的平方(有时人们将所有各项的符号都改变而叫 $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2$ 为长度的平方,因而你得要小心对待)。

现在如果有两个矢量 a_μ 和 b_μ ,它们的相应分量按相同的方式变换,则这个组合

$$a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu$$

也是一个不变(标)量(事实上,在第1卷第17章中对此已有过证明)。很明显,这一表示式与矢量的点积很相似。实际上,我们将称之为两个四维矢量的点积或标积。把它写成 $a_\mu \cdot b_\nu$,使得看来像个点积,似乎该合乎逻辑。可是,不凑巧,习惯上不是那样做,而是往往被写成没有中间那一点。因此,我们将按照这一惯例而把该点积简写成 $a_\mu b_\nu$ 。这样,根据定义,

$$a_\mu b_\nu = a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu - a_\mu b_\nu. \quad (25.7)$$

每当你看到两个全同下脚标在一起(有时得用 ν 或某一其他字母来代替 μ)时,那就意味着你必须取这四个积并相加起来,记住对于那些空间分量之积都取负号。按照这一惯例,在洛伦兹变换之下,标积的不变性可以写成

$$a'_\mu b'_\nu = a_\mu b_\nu.$$

由于式(25.7)中的最后三项恰好是三维中标量的点积,把它写成如下形式往往更为方便:

$$a_\mu b_\nu = a_\nu b_\mu - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

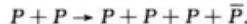
在上面描述过的那种四维长度的平方可以写成 $a_\mu a_\mu$,那也是明显的:

$$a_\mu a_\mu = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (25.8)$$

有时把它写成 a_μ^2 也很方便:

$$a_\mu^2 \equiv a_\mu a_\mu.$$

现在要向你们提供有关四维矢量点积的用途的一个例证。在巨大的加速器中,通过下列反应可以产生反质子(\bar{P}):



这就是说,一个高能质子与一个静止质子(例如,放置在质子束中的氢靶里的质子)相碰撞,而倘若入射质子拥有足够的能量,则除了原来的两个质子之外还可能会产生质子-反

质子^{*}对。试问：应给予入射质子多少能量才能使这一反应在能量上成为可能。

获得答案的最容易的方法是考虑在质心(CM)系中该反应看来像个什么样子(见图25-1)。我们将叫入射质子为 a 而其四维动量为 p_a^* 。同理，将叫靶质子为 b 而其四维动量为 p_b^* 。若入射质子仅仅勉强具有使反应进行的能量，那么末态——经过碰撞后的状态——在质心系中将由包含三个质子和一个反质子的一个静止球构成。要是入射能量稍高一些，那些末态粒子就会具有一些动能而四散跑开；要是入射能量稍低一些，则不会有足够能量产生四个粒子。

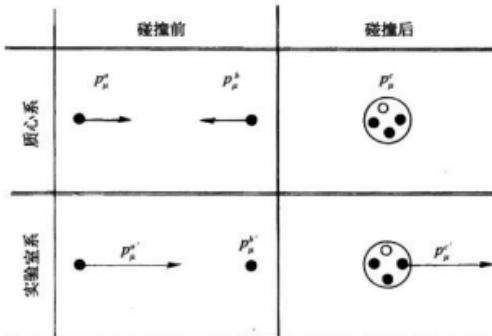


图 25-1 从实验室和质心系中来观察反应 $P + P \rightarrow 3P + \bar{P}$ 。假定入射质子仅仅勉强具有使反应进行的能量，质子由实心圆点表示，而反质子则由圆圈表示

若把末态中整个小球的四维总动量称为 p_c^* ，则动量与能量守恒律告诉我们：

$$p_a^* + p_b^* = p_c^*$$

和

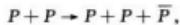
$$E_a^* + E_b^* = E_c^*.$$

合并这两式，可以写成

$$p_a^* + p_b^* = p_c^*. \quad (25.9)$$

现在重要的事情在于，这是一个其中包含四维矢量的方程，因而在任何惯性系中都是正确的。我们可以利用这一事实来简化计算，由取式(25.9)中每边的“长度”开始，当然，它们也是彼此相等的，于是得

* 你可能会问：为什么不去考虑



或甚至



那些显然要求较少能量的反应？答案是，一个称为重子数守恒的原理告诉我们：“质子数减去反质子数”不能改变，在我们的反应中左边这个量为2，因此，若希望有一反质子出现在右边，则同时应有三个质子(或其他重子)伴随它。

$$(p_\mu^a + p_\mu^b)(p_\mu^a + p_\mu^b) = p_\mu^a p_\mu^b. \quad (25.10)$$

既然 $p_\mu^a p_\mu^b$ 是不变的, 所以可在任何坐标系中进行计算。在质心系中, p_μ^c 的时间分量为四个质子的静止能量, 即 $4M$, 而空间部分 \mathbf{p} 则等于零, 因此 $p_\mu^c = (4M, 0)$ 。我们已利用了反质子的静质量等于质子的静质量那一项事实, 并已称这一共同质量为 M 。

这样, 式(25.10)就变成

$$p_\mu^a p_\mu^a + 2p_\mu^a p_\mu^b + p_\mu^b p_\mu^b = 16M^2. \quad (25.11)$$

现在, $p_\mu^a p_\mu^a$ 和 $p_\mu^b p_\mu^b$ 都十分容易求得, 因为任何粒子的动量四维矢量的“长度”都不过是粒子质量的平方:

$$p_\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = M^2.$$

这可由直接的计算给予证明, 而更巧妙的办法则是通过注意一个静粒子的 $p_\mu = (M, 0)$, 从而 $p_\mu p_\mu = M^2$ 。但由于它是一个不变量, 故在任何参照系中都等于 M^2 。把这些结果用到式(25.11)中, 便有

$$2p_\mu^a p_\mu^b = 14M^2,$$

也即

$$p_\mu^a p_\mu^b = 7M^2. \quad (25.12)$$

现在, 也就可以在实验室系统中算出 $p_\mu^a p_\mu^b = p_\mu^{a'} p_\mu^{b'}$ 。四维矢量 $p_\mu^{a'}$ 可以写成 $(E^{a'}, \mathbf{p}^{a'})$, 而 $p_\mu^{b'} = (M, 0)$, 因为后者描述一个静止质子。这样, $p_\mu^{a'} p_\mu^{b'}$ 也必定等于 $ME^{a'}$ 。又因为知道标积是个不变量, 所以它在数值上必须等于式(25.12)中求得到的值。因而有

$$E^{a'} = 7M,$$

这就是我们所要求的结果。初始质子的总能量必须至少为 $7M$ (约合 6.6 GeV, 因为 $M = 938$ MeV), 或者在减去了静质量 M 之后, 其动能至少必须为 $6M$ (约合 5.6 GeV)。在伯克利(Berkeley)的高能质子同步稳相加速器是为了能够制造反质子而设计的, 它提供给受加速质子约 6.2 GeV 的动能。

由于标积都是不变量, 所以它们对计算来说总是有趣的。那么, 关于四维速度的“长度” $u_\mu u_\mu$ 又该如何呢? 由于

$$u_\mu u_\mu = u_t^2 - \mathbf{u}^2 = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1,$$

因而 u_μ 是单位四维矢量。

§ 25-3 四维梯度

我们必须讨论的下一个问题是梯度的四维类似物。回想起(第1卷第14章)三个微分算符 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ 的变换就像三维矢量, 所以就叫梯度。同样的方案也应该适用于四维情况。这就是说, 我们也许会猜测到四维梯度应当是 $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 。然而, 这是错误的。

为了搞清这个错误, 可考虑一个仅与 x 和 t 有关的标量函数 ϕ 。如果在 t 方面做一个小变化 Δt 而保持 x 不变, 则在 ϕ 方面的变化为

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t. \quad (25.13)$$

另一方面, 对一个正在运动的观察者来说,

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\Delta t'.$$

应用式(25.1), 我们可用 Δt 来表示 $\Delta x'$ 和 $\Delta t'$ 。记住我们正保持 x 不变, 因而 $\Delta x = 0$, 并可写出

$$\Delta x' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

$$\text{这样, } \Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t\right) + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

把这一结果与式(25.13)比较, 就可知道

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right). \quad (25.14)$$

类似的计算给出

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'} - v\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right). \quad (25.15)$$

现在我们可以看到, 该梯度相当奇怪。用 x' 和 t' 来表示 x 和 t 的公式[由解方程组(25.1)而得到的]为:

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

这就是一个四维矢量进行变换的必需方式。但式(25.14)和(25.15)中却有两个符号搞错了!

答案是, 不要那个不对的 ($\partial/\partial t, \nabla$), 而必须通过下式来定义一个四维梯度算符, 称之为 ∇_μ :

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right). \quad (25.16)$$

采用这一定义, 上面所遇到的符号困难就消除了, 从而 ∇_μ 表现得如同一个四维矢量所应有的性质那样(带着那些负号相当难看, 但那是世人都用的方法)。当然, 所谓 ∇_μ “表现得如同一个四维矢量”指的只不过是, 一个标量的四维梯度为一个四维矢量。如果 ϕ 是一个真实的标量不变场(洛伦兹不变量), 则 $\nabla_\mu\phi$ 就是一个四维矢量场。

好, 现在已有了矢量、梯度和点积, 下一件事情则是要找出一种与三维的矢量分析中的散度相类似的不变量。很清楚, 这种类似物要求形成 $\nabla_\mu b_\mu$ 这样一种表示式, 其中 b_μ 为一个四维矢量场, 其分量都是空间和时间的函数。要把一个四维矢量 $b_\mu = (b_t, \mathbf{b})$ 的散度定义为 ∇_μ 与 b_μ 的点积:

$$\nabla_\mu b_\mu = \frac{\partial}{\partial t}b_t - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)b_x - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)b_y - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)b_z = \frac{\partial}{\partial t}b_t + \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad (25.17)$$

式中 $\nabla \cdot b$ 是三维矢量 b 的普通三维散度。注意，人们必须细心对待这些符号，其中有些符号来自标积的定义，即式(25.7)，其他则是由于诸如式(25.16)中关于 ∇_μ 的空间分量为 $-\partial/\partial x$ 等所要求的。由式(25.17)定义出来的散度是一个不变量，因而它在相差一个洛伦兹变换的所有坐标系中给出相同的答案。

让我们来看一个其中会出现四维散度的物理例子，可以用它来求解运动导线周围场的问题。我们已经知道(§13-7)电荷密度 ρ 和电流密度 j 会形成一个四维矢量 $j_\mu = (\rho, j)$ 。如果一根不带电荷的导线载有电流 j_x ，那么在一个以速度 v (沿 x 轴)从它旁边经过的参照系中来看，该导线将拥有如下的电荷和电流密度[由洛伦兹变换式(25.1)得到]：

$$\rho' = \frac{-vj_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x}{\sqrt{1-v^2}}.$$

这些恰好就是我们曾在第13章中求得的。于是，我们就能把这些源应用到运动坐标系的麦克斯韦方程中去求解场。

§13-2的电荷守恒律，在这四维矢量符号表示中，也会具有简单形式。考虑到 j_μ 的四维散度为：

$$\nabla_\mu j_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j. \quad (25.18)$$

电荷守恒律表明，单位体积中电流的流出量应等于电荷密度的负增长率。换句话说，

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

将此代入式(25.18)中，电荷守恒律就会取简单形式

$$\nabla_\mu j_\mu = 0. \quad (25.19)$$

由于 $\nabla_\mu j_\mu$ 是一个不变标量，所以如果它在一个参照系中为零，则在所有参照系中都为零。于是我们就有这样的结果，即如果电荷在一个坐标系中守恒，则它在所有匀速运动的坐标系中也守恒。

作为最后一个例子，我们要考虑该梯度算符 ∇_μ 与它自身的标积。在三维中，这样的标积给出拉普拉斯符号：

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

在四维中，将得到个什么呢？这很容易。按照有关点积和梯度的法则，就可以得到

$$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

这一算符，就是三维拉普拉斯算符的类似物，称为达朗贝尔算符，并有一种独特的表示符号：

$$\square^2 = \nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (25.20)$$

根据定义，它是一个不变的标量算符。如果它作用于一个四维矢量场上，将产生一个新的四维矢量场[有些人用与式(25.20)相反的符号给达朗贝尔算符下定义，因而当你阅读文献时

务必当心]。

现在,对上面表25-1中所列举的那些三维量,大部分已找到了其四维的相应量(不过还没有叉积和旋度运算方面的相应物,在下一章以前我们将不会对它有所论述)。如果把所有重要定义和结果都集中在一处,对你记住它们如何演变可能有所帮助,因此我们就在表25-2中做了这么一个提要。

表25-2 在三维和四维矢量分析中的一些重要量

	三 维	四 维
矢 量	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$	$a_\mu = (a_t, a_x, a_y, a_z) = (a_t, \mathbf{a})$
标 积	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
矢 算 符	$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$	$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$
梯 度	$\nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$	$\nabla_\mu \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi\right)$
散 度	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla_\mu a_\mu = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \nabla \mathbf{a}$
拉氏算符或达氏算符	$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square^2$

§ 25-4 用四维符号表示的电动力学

我们曾在§18-6中碰到过达朗贝尔算符,但没有给它这一名字。在那里对于那些势所求得的微分方程可以用新的符号表示法写成:

$$\square^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square^2 \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (25.21)$$

这两个方程中的右边四个量为 ρ , j_x , j_y 及 j_z ,再各除以 ϵ_0 。如果在所有参照系中都采用相同的电荷单位,则这个 ϵ_0 是在各坐标系中都相同的一个普适常数。因此,那四个量 ρ/ϵ_0 , j_x/ϵ_0 , j_y/ϵ_0 及 j_z/ϵ_0 也就会如同一个四维矢量那样变换。我们可将其写成 j_μ/ϵ_0 。当坐标系改变时达朗贝尔算符不会改变,因而 ϕ , A_x , A_y , A_z 四个量也必须像四维矢量那样变换——这意味着它们就是一个四维矢量的分量。简单地说,

$$A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

是一个四维矢量。我们所称的标势和矢势,它们实际上就是同一个物理客体的不同方面。它们合成为整体。而倘若把它们合起来看,则这个世界的相对论不变性就很明显了。我们称 A_μ 为四维势。

在四维矢量符号表示中,式(25.21)中的两方程简单地变成

$$\square^2 A_\mu = \frac{j_\mu}{\epsilon_0}. \quad (25.22)$$

这一方程的物理内容恰好同麦克斯韦方程组相同。但可以把它改写成这么一个优美形式实在令人感到有些喜悦。这个漂亮形式也有其本身意义,它直接证明了在洛伦兹变换之下电

动力学的不变性。

要记住,式(25.21)之所以能够由麦克斯韦方程组推导而得,只是由于我们加上了规范条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (25.23)$$

这不过是讲 $\nabla_{\mu} A_{\mu} = 0$, 这规范条件说明四维矢量 A_{μ} 的散度为零。这一条件称为洛伦兹条件。因为它是一个不变性条件,所以是很方便的,从而使麦克斯韦方程组对所有参照系都能保持式(25.22)那种形式。

§ 25-5 运动电荷的四维势

虽然变换规律已隐含在上述内容中,但现在还是把它写下来,它用一个静止参考系中的 ϕ 和 \mathbf{A} 给出运动参考系中的 ϕ' 和 \mathbf{A}' 。由于 $A_{\mu} = (\phi, \mathbf{A})$ 是一个四维矢量,所以这些变换看来自几乎像式(25.1)一样,只是 t 应以 ϕ 代,而 x 则用 \mathbf{A} 代。于是,

$$\begin{aligned}\phi' &= \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad A'_y = A_y, \\ A'_x &= \frac{A_x - v\phi}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad A'_z = A_z.\end{aligned}\quad (25.24)$$

这里假定带撇的坐标系是以速率 v 沿正 x 方向运动,而这速率则是在不带撇的坐标系中测得的。

我们要来讨论四维势概念用途的一个例子。以速率 v 沿 x 轴运动的电荷 q ,其矢势和标势是什么呢?这一问题在随电荷运动的坐标系中很简单,因为在这个系统中电荷是静止的。让我们假设,这电荷位于 S' 参照系的原点,如图 25-2 所示。于是在这个系统中的标势为

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad (25.25)$$

式中 r' 是从 q 至场点的距离,即在运动系统中所测到的。当然,矢势 \mathbf{A}' 为零。

现在去求在静止坐标系中的测得的势 ϕ 和 \mathbf{A} 是直截了当的。式(25.24)的逆变换关系为

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\phi' + vA'_x}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad A_y = A'_y, \\ A_x &= \frac{A'_x + v\phi'}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad A_z = A'_z.\end{aligned}\quad (25.26)$$

利用由式(25.25)所给出的 ϕ' 以及 $\mathbf{A}' = 0$,可得

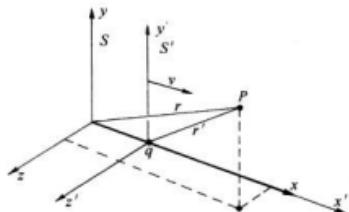


图 25-2 参照系 S' 以速度 v (沿 x 方向) 相对于 S 系运动。在 S' 系中原来的一个静止电荷在 S 系中处于 $x = vt$ 的地方。 P 点的势可以在两个参照系的任一个中算出来

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' \sqrt{1 - v^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

这向我们提供了在 S 系中可能观察到的标势 ϕ , 但可惜是, 这是用 S' 的坐标表示的。还可以利用式(25.1), 将 t' , x' , y' 和 z' 的各式代入得到用 t , x , y , z 表示出来的式子。我们得

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{1}{\sqrt{[(x - vt)/\sqrt{1 - v^2}]^2 + y^2 + z^2}}. \quad (25.27)$$

对于 \mathbf{A} 的各个分量, 按照相同的手续, 你可以证明

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}\phi. \quad (25.28)$$

这些都是在第 21 章中用别的方法推导出来的相同公式。

§ 25-6 电动力学方程组的不变性

我们已发现势 ϕ 和 \mathbf{A} 合起来看便形成一个称为 A_μ 的四维矢量, 而波动方程——即用那些 j_μ 来确定 A_μ 的完整方程组——可写成如式(25.22)那样的方程。这个方程, 与电荷守恒律、即式(25.19)一起, 就给出了电磁场的基本定律:

$$\square^2 A_\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j_\mu, \quad \nabla_\mu j_\mu = 0. \quad (25.29)$$

只在页面的一个微小区间内就有了全部麦克斯韦方程组——优美而又简单。除了它们既优美而又简单外, 将方程组这样写出来从中学习到什么东西呢? 首先, 这与我们过去将各种不同分量全都写出来时所得到的那些结果有何区别? 能否从这一方程推导出某些过去由电荷和电流表示势的波动方程不能够推导出来的东西? 答案是明确否定的。我们所做的唯一事情就是改变各事情的名称——应用新的符号表示法。我们已写下了四个方框符号来代表微商, 但它仍然意味着不多不少的对时间的二次微商、减去对 x 的二次微商、减去对 y 的二次微商、减去对 z 的二次微商。而 μ 则意味着有四个方程, 对于 $\mu = t, x, y$ 或 z 会各有一个。那么, 可以将那些方程写成这么简洁形式的事实有什么意义呢? 按直接从其导出什么东西的观点来看, 它确实没有什么意义。然而, 也许这些方程的简单性就意味着自然界也具有某种简单性。

让我们来向你证明某种新近才发现的有趣事情: 所有物理规律都可以包括在一个方程之中。这方程就是

$$U = 0. \quad (25.30)$$

多么简单的一个方程! 当然, 还需要知道该符号指的是什么。 U 是一个称为情况的“超脱性”的物理量, 而对于它我们有一个公式。这里关系到你怎样去计算该超脱性。你可以取所有已知的物理定律, 并把它们都写成一种独特形式。例如, 假设你所取的是力学定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, 并把它重新写成 $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$ 。然后你可以将 $(\mathbf{F} - m\mathbf{a})$ ——那当然应该等于零的——叫作力学上的“失调”。其次, 你再取这失调的平方并叫它作 U_1 , 这可以称为“力学效应的超脱性”。换句话说, 你会取

$$U_1 = (\mathbf{F} - m\mathbf{a})^2. \quad (25.31)$$

现在你又写下另一个物理定律,比如说, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$, 并定义

$$U_2 = \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right)^2,$$

这或许被你称为“电的高斯超脱性”。你继续再写出 U_3, U_4 , 等等——对每一物理定律都有一个。

最后,你把来自一切有关的分现象的诸多不同超脱性 U_i 都相加起来,而把它叫作宇宙的总超脱性 U ,也就是, $U = \sum U_i$ 。这样自然界的伟大定律为

$$U = 0. \quad (25.32)$$

这一“定律”当然意味着所有各个失调的平方之总和为零,而能使一大堆平方之和为零的唯一办法就是其中每一项都等于零。

因此,式(25.32)的“优美简单”定律相当于你原来所写下的一整套方程式。因而绝对明显的是,一种不过把复杂性隐藏在符号的定义之内的简单表示方法并不是真正的简单性。它不过是一种花招。式(25.32)中所出现的优美——仅从几个方程被隐藏在其中这一事实看来——也不外是花招而已。当你把整个东西都打开时,你就会回到你原来所在的地方。

然而,把电动力学写成式(25.29)那种形式,除了简单之外还有其他一些东西。它的含义会多一些,就像矢量分析理论含有更多的意义一样。电动力学方程组之所以能够用为洛伦兹变换的四维几何所设计的那种十分特殊符号写出来——换句话说,作为在四维空间中的一个矢量方程——这一事实,就意味着它在洛伦兹变换下是不变的。只是由于麦克斯韦方程组在那些变换下不变,才使得它们能够被写成优美形式。

能够将电动力学方程组写成式(25.29)那样美妙卓越的形式并非偶然。正是由于在实验上已发现由麦克斯韦方程组所预言的各种现象在一切惯性系中都相同,相对论才发展起来的。而又是通过研究麦克斯韦方程组的变换性质,才使得洛伦兹发现了他的变换作为保留方程不变的一种变换来说是精确的。

然而,还有另一个要把方程组这样写出来的理由。已经发现——在爱因斯坦猜测方程也许是这样之后——所有物理定律在洛伦兹变换下都是不变的。这就是相对性原理。因此,如果我们发明一种符号,当写下一个定律时它能够立刻指出该定律是否不变,那么,便能够在试图创立新的理论时保证只写出与相对论原理相一致的方程式。

以这种特殊的符号表示麦克斯韦方程组变得很简单这一事实,并不是什么奇迹,因为这种符号就是在考虑到那些方程之后才发明的。但有意义的物理事情却是:每一个物理规律——介子波的传播或在β衰变中中微子的行为,等等——在相同的变换下都必须具有这种相同的不变性。那么当你待在一艘匀速航行的太空飞船中时,所有自然规律以相同的方法一起作变换,以致没有任何新的现象会发生。正是由于相对论性原理是自然界中的一个事实,所以按照四维矢量的符号世界的各种方程式都会表现得很简单。

第 26 章 场的洛伦兹变换

在本章中: $c = 1$

§ 26-1 运动电荷的四维势

在上一章中见到势 $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ 是一个四维矢量。时间分量为标势 ϕ , 而三个空间分量则构成矢势 \mathbf{A} 。通过应用洛伦兹变换我们也算出了做匀速直线运动粒子的势(在第 21 章中就已经用另一种方法求出了这些势)。对于一个在时刻 t 位置为 $(vt, 0, 0)$ 的点电荷, 其在点 (x, y, z) 的势为

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{1/2}, \\ A_x &= \frac{qv}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2 \right]^{1/2}, \\ A_y &= A_z = 0.\end{aligned}\tag{26.1}$$

对于一个“现”位置(指的是在 t 时刻的位置)为 $x = vt$ 的电荷, 式(26.1)给出了时刻 t 在 x, y 和 z 处的势。注意这些式子是用 $(x-vt), y$ 和 z 来表示的, 它们是根据该运动电荷的现行位置 P 测得的坐标(见图 26-1)。我们知道的实际影响确是以速率 c 传播的, 因而真正有效的影响乃是在推迟位置 P' 后面的电荷行为^{*}。 P' 点位于 $x = vt'$ 上(其中 $t' = t - r'/c$ 是推迟时刻)。但是, 电荷是做匀速直线运动的, 因而在 P' 点与在 P 点上的行为自然有直接的联系。事实上, 如果做一个附加假设, 即假定那些势仅取决于在推迟时刻的位置和速度, 那么式(26.1)便是以任意方式运动的电荷的势的完整公式了。方法是这样: 假定你有以某种任意方式运动、比方其轨道如图 26-2 所示的电荷, 而你试图找出在点 (x, y, z) 处的势。首先, 你找出推迟位置 P' 以及在该位置时电荷的速度 v' 。然后你设想电荷会在这推迟时间 $(t-t')$ 里继续保持这一速度, 以致此时它会出现在一个想象的位置 $P_{\text{投影}}$ 处, 这可称之为“投影位置”, 并应该以速度 v' 到达那里(当然, 电荷并不是那样运动, 它在 t 时刻的确实位置是 P)。于是在 (x, y, z) 点的势就恰好是一个想象电荷在该投影位置时由式(26.1)所给出的。我们现在要说的是, 由于势仅取决于电荷在该推迟时刻的行为, 所以不管电荷是否

* 这里用来指明推迟位置或推迟时刻的那些撇号都不应与上一章中用来指明一个已作了洛伦兹变换的参照系的撇号混淆。

继续恒速度运动或者是否在 t' 时刻之后——即在 t 时刻在点 (x, y, z) 将出现的势早已确定了之后——改变它的速度，势都将相同。

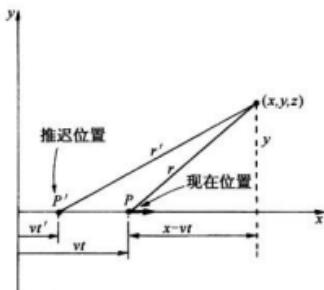


图 26-1 求一个沿 x 轴匀速 v 运动的电荷 q 在 P 点的场。“此刻”在点 (x, y, z) 的场既可用“现”位置 P ，也可用($t' = t - r'/c$ 时刻的)“推迟”位置 P' 来表示

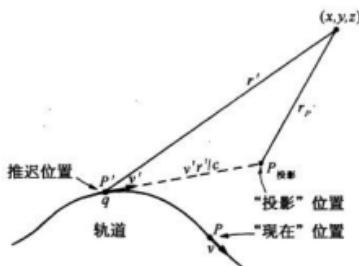


图 26-2 电荷在任意轨道上运动。时刻 t 在点 (x, y, z) 的势由推迟时刻 $t - r'/c$ 的位置 P' 和速度 v 所确定，这些势可用该“投影”位置 $P_{\text{投射}}$ 的坐标来表示(在时刻 t 的实际位置为 P)

你当然知道，一旦有了来自一个以任意方式运动着的电荷的势的公式，便拥有了全部电动力学，能够通过叠加以获得任何电荷分布的势。因此，通过写出麦克斯韦方程组，或者通过遵照如下的一系列陈述，可以把电动力学的所有现象都总结出来(如果你有机会登上一个荒岛，你就可以回忆起这些陈述。一切东西都可由此重新建造。当然，你要懂得洛伦兹变换，无论是在一个荒岛上或其他任何地方你总别忘记它)。

首先， A_μ 是一个四维矢量；其次，关于一个静止电荷的库仑势为 $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ ；第三，一个以任何方式运动着的电荷所产生的势仅取决于在推迟时刻的速度和位置。只要有这三个事实我们就有了一切。根据 A_μ 是一个四维矢量这个事实，便可变换已知的库仑势，以获得匀速运动的势。然后，通过势仅取决于过去的在该推迟时刻电荷的速度这种最后一项陈述，我们便可以运用该投影位置手法而找到各势。这虽然不是一个处理问题特别有用的方法，但它表明了物理规律能够用许多不同方式加以表达，仍然是挺有趣的。

有时一些漫不经心的人们会说，全部电动力学都可以从洛伦兹变换和库仑定律完全推导出来。当然，那是完全错误的。首先，必须假定存在一个标势和一个矢势，它们一起构成一个四维矢量。这里，就告诉我们如何对势做变换。然后，为什么只有那推迟时刻的影响才算有效的呢？若是这样提问就更好：为什么势仅取决于位置和速度，而与诸如加速度就毫无关系？而场 B 和 E 则确实与加速度有关。如果你试图对于这些场也使用相同的论证，则你就会讲，它们也仅取决于推迟时刻的位置和速度。可是这么一来，来自加速电荷的场就与来自投影位置上的电荷的场相同——那是错误的。场不仅取决于电荷沿路径的位置和速度，而且也取决于其加速度。所以在一切都可从洛伦兹变换推导出来的伟大说法中还有几个附加的默认假设(每当你看到从很少几个假设就能够产生出惊人数量成果的这种总结性的说法时，你总会发现它是错误的。如果你足够小心地加以思考的话，就会觉得其中往往有许多远非明显的隐含着的假设)。

§ 26-2 匀速点电荷的场

现在已有了由匀速运动的点电荷产生的势，我们——为了实用原因——该求其场。有许多情况其中带电粒子是以匀速运动的——例如，穿过云室的宇宙线，或甚至在一根导线里缓慢运动的电子。因此，至少让我们知道，对于任何速率——甚至对于接近光速的速率，只要假定其中没有加速度——场实际上看来像什么样子，这是一个有意义的问题。

通过常用法则便可由势得到场：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

首先，对于 E_z ，

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

但 A_z 等于零，所以我们就对式(26.1)中的 ϕ 取微商，得

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{z}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.2)$$

同理，对于 E_y 得

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{y}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.3)$$

要求得 x 分量需多做一些工作。 ϕ 的微商此时较为复杂而且 A_x 又不等于零。首先，

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.4)$$

然后，对 A_x 取 t 的微商，可得到

$$-\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{-v^2(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.5)$$

而且最后再取其和，则有

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{x-vt}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.6)$$

过一会儿我们将要来看看 \mathbf{E} 的物理意义，此刻让我们先来求出 \mathbf{B} 。对于其 z 分量，

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

由于 A_y 为零，就只需得到一个微商。然而，要注意 A_x 正好是 $v\phi$ ，而 $v\phi$ 的 $\partial/\partial y$ 则恰恰是 $-vE_y$ 。因此

$$B_z = vE_y. \quad (26.7)$$

同理，

$$B_y = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = +v \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

也即

$$B_y = -vE_x. \quad (26.8)$$

最后, B_z 为零, 因为 A_y 和 A_z 两者都是零。因而可以将磁场简单地写成

$$\mathbf{B} = v \times \mathbf{E}. \quad (26.9)$$

现在来看看场像个什么样子。我们试图把电荷在其现在位置周围各不同位置上的场描绘出来。电场的影响, 在某种意义上确实来自推迟位置, 但由于运动是严格规定的, 所以推迟位置便可以由现在位置唯一地给出。对于匀速运动来说, 更妙的是把场同现行位置联系起来, 因为在点 (x, y, z) 处各场分量都仅取决于 $(x - vt)$, y 和 z ——从现在位置到达点 (x, y, z) 的位移 \mathbf{r}_P 的各分量(见图 26-3)。

首先考虑 $z = 0$ 的点。那么 \mathbf{E} 就只有 x 和 y 分量。根据式(26.3)和(26.6), 这两分量的比恰好等于位移的 x 分量和 y 分量的比, 这意味着, \mathbf{E} 和 \mathbf{r}_P 指向相同方向, 如图 26-3 所示。由于 E_z 也正比于 z , 所以这个结果在三维中适用就是明显的了。总之, 电场是从电荷沿径向发出的, 正如一个静止电荷的场那样。

当然, 这个场并非完全与静止电荷的场相同, 那全是由于附加因子 $(1 - v^2)$ 所致。但是我们还可以证明一件相当有趣的事情。要是你用一个特殊的坐标系——其中 x 轴被压缩了一个因子 $\sqrt{1 - v^2}$ ——来画出库仑场, 则你正好会得到这个差别。如果你这样做, 则场线就将在该电荷前后散开, 而在侧向周围将被压缩在一起, 如图 26-4 所示。

如果将 \mathbf{E} 的强度同场线密度按照惯常的办法互相联系起来, 则可以看到, 在侧向的场较强, 而前后的场较弱, 恰如那些方程所指出的。首先, 若在垂直于运动路线的方向上观察场强, 也就是说, 在 $(x - vt) = 0$ 的地方, 从电荷至场点的距离为 $\sqrt{y^2 + z^2}$, 则这里总场强就是 $\sqrt{E_x^2 + E_z^2}$, 即

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{y^2+z^2}. \quad (26.10)$$

场与距离的平方成反比——很像库仑场, 所不同的是被一个恒大于 1 的恒定附加因子 $1/\sqrt{1-v^2}$ 所增强。因此, 在运动电荷的侧向, 电场比从库仑定律所得到的要强。实际上, 侧向场比库仑场增大的倍数刚好等于该粒子的能量与其静质量的比。

在电荷的前面(与后面), y 和 z 都是零, 因而

$$E = E_x = \frac{q(1-v^2)}{4\pi\epsilon_0(x-vt)^2}. \quad (26.11)$$

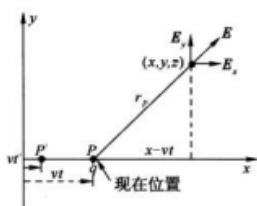


图 26-3 一个以匀速运动着的电荷, 其电场从电荷的“现”位置径向地指出

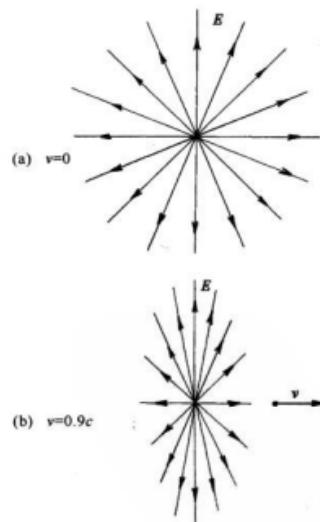


图 26-4 一个以匀速 $v = 0.9c$ 运动的电荷的电场[图(b)], 与一静止电荷的电场[图(a)]比较

场又与离开电荷距离的平方成反比,但现在却被减弱了一个因子($1 - v^2$),这与场线的图景相符。如果 v/c 是一个小量,则 v^2/c^2 更小,因而 $(1 - v^2)$ 这一因子的影响就很小,我们便回到库仑定律上来。但如果粒子的运动速度十分接近于光速,则在前后方向上的场将会大大削弱,而在侧向的场将大大增强。

关于运动电荷电场的上述结果可以这样来表示:假定你把一个静止电荷的场线描绘在一张纸上,然后使这幅图画以速率 v 行进。当然,此时整幅图画会受到洛伦兹收缩,也就是说,在纸面上的那些点会出现在不同地方。令人惊异的是,当该页纸在你旁边飞过时,你所看到的图画仍然代表该点电荷的场线。这一收缩会把那些场线在侧向上互相挤紧,而在前后方向则彼此散开,刚好按照适当方式给出正确的线密度。我们曾强调过,场线是不真实的,只不过是一种表示场的方式。然而,这里场线却几乎像是真实的了。在这种特殊情况下,如果你错误地认为场线是由于某种原因真实地存在于空间里的,并对之作了变换,你就获得了正确的场。然而,这也丝毫不会使场线更加真实。你必须提醒你自己场线并不是真实的,你所应该做的事情就是去考虑由电荷和磁铁一起产生的电场。当磁铁运动时,新的电场被产生,从而破坏了美丽图景。因此,这一收缩图像的巧妙构思并非普遍有效。然而,对于记住来自一个快速运动电荷的场像什么样子,它是一种方便手段。

磁场就是 $v \times E$ [根据式(26.9)]。如果你把速度矢量乘一个径向的 E 场,你便会得到一个环绕着运动路线的 B ,如图 26-5 所示。如果把那些 c 都放回去,则你将看到,它与过去处理低速电荷时所得的结果相同。为了看清应该在哪里放进 c ,一个好办法是回过去参考力的定律:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

你看到速度乘上磁场才具有与电场相同的量纲。因此,式(26.9)的右边就应该有一个因子 $1/c^2$:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (26.12)$$

对于一个低速运动电荷 ($v \ll c$) 来说,我们可以取库仑场作为 E ,这时

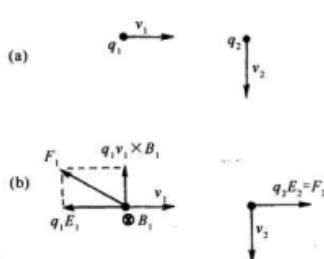


图 26-6 两个运动电荷之间的作用力并不总是相等而相反。看来“作用”不等于“反作用”

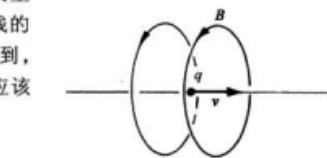


图 26-5 在一运动电荷附近的磁场为 $v \times E$ (试与图 26-4 比较)

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (26.13)$$

上式完全相当于曾在 § 14-7 中得到的关于电流的磁场方程式。

我们愿意顺便指出某一种你会感兴趣而加以思考的东西(以后还将会回来再次进行讨论)。试想象两质子具有互成直角的速度,使得其中一个将横穿过另一个的路径,但却在其前面,从而彼此不会发生碰撞。在某一时刻,它们的相对位置将如图 26-6(a)所示。现在试考察由 q_2 作用于 q_1 上的力以及相反情况。作用于 q_2 上的只有来自 q_1 的电力,因为 q_1 在沿

其运动路线上不会造成磁场。然而,作用于 q_1 上的除了那个电力外,却还有磁力,因为 q_1 正在 q_2 所造成的 \mathbf{B} 场中运动。这些力如图 26-6(b)所示。作用于 q_1 与 q_2 上的电力彼此大小相等方向相反。然而,却有一侧向(磁)力作用于 q_1 上,而没有侧向力作用于 q_2 上。是否作用不等于反作用呢? 我们想把这一问题留给你们去思索。

§ 26-3 场的相对论变换

在上一节中我们从经过变换后的势算出了电场和磁场。当然,场很重要,不管以前的论证曾经给出势具有物理意义及其真实性。场毕竟也是真实的。对于许多目的来说,如果你已经知道了在某个“静止”系统中的场,而又有办法去算出在运动系统中的场,那是很方便的。我们已有了关于 ϕ 和 \mathbf{A} 的变换规律,因为 \mathbf{A}_μ 是一个四维矢量。现在希望弄清楚 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的变换律。已知在一个参照系中的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ,在另一个从旁边跑过的参照系中它们看来会像些什么呢? 那该是一个便于得到的变换式。本来我们始终可以通过势而再算出场的,但如果能直接将场变换,有时仍挺有用。现在会看到那是怎样进行的。

如何能找到场的变换规律呢? 我们已知道 ϕ 和 \mathbf{A} 的变换规律,并已懂得了场是如何由 ϕ 和 \mathbf{A} 给出的——要找出 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 的变换式就应该是容易的了(你也许会想到,对于每个矢量就可能有某种会使之成为四维矢量的东西,因而对于 \mathbf{E} 来说,就一定有另一种可用来作为其第四分量的东西,而对于 \mathbf{B} 也是如此。但事实却并非这样,与你所指望的很不相同)。作为开始,让我们仅仅考虑磁场 \mathbf{B} ,那当然就是 $\nabla \times \mathbf{A}$ 。现在知道,具有 x, y, z 各分量的矢势只是某种东西的一部分,此外还有一个 t 分量。而且也知道,对于像 ∇ 的微商,除了 x, y, z 各部分外,也还有对于 t 的微商。因此,让我们试算出若把“ y ”代以“ t ”,或把“ z ”代以“ t ”,或如此这般,则会发生什么。

首先,注意当把 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的各分量写出时,其中各项的形式是

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (26.14)$$

x 分量等于仅含有 y 与 z 分量的对偶项。假设把这个微商与分量的结合体称为“ zy 事件”,并给它一个速写名字 F_{zy} 。我们的意思只是

$$F_{zy} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (26.15)$$

同样, B_y 等于这同类“事件”,但这回它却是“ xz 事件”了。而 B_z 当然就是相应的“ yx 事件”。于是便有

$$B_x = F_{zy}, \quad B_y = F_{xz}, \quad B_z = F_{yx}. \quad (26.16)$$

现在,若我们也试图编造出一些像 F_{zx} 和 F_{tx} 那样的“ t ”型事件(由于自然界在 x, y, z 和 t 方面应该是美好而对称的),则会有什么情况发生呢? 例如, F_{tx} 是什么? 当然,它就是

$$\frac{\partial A_t}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

但要记住 $A_t = \phi$, 因而它也等于

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

对此你以前就已见过。它是 E 的 z 分量。噢，几乎成了——还有符号错误。但我们忘记了在四维梯度中对 t 微商与对 x, y, z 的微商带有相反符号。因此，实际上我们应该取下式作为 F_{tx} 更加一致的推广：

$$F_{tx} = \frac{\partial A_t}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}. \quad (26.17)$$

这样，它严格等于 $-E_x$ 。也可尝试算出 F_{ty} 和 F_{tz} ，我们发现这三种可能事件给出

$$F_x = -E_x, F_y = -E_y, F_z = -E_z. \quad (26.18)$$

如果两个下脚标都是 t ，又将出现什么情况呢？或者，对于此事来说，若两者都是 x 呢？我们会得到像如下的事件：

$$F_{tt} = \frac{\partial A_t}{\partial t} - \frac{\partial A_t}{\partial t},$$

和

$$F_{xx} = \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x},$$

即这些都不外给出零值。

于是，就有六个这种 F 事件。还有六个你可以通过倒转下标而得的，但它们实际上不会给出任何新的事件，因为

$$F_{xy} = -F_{yx},$$

等等。所以，从四个下标取对的十六种可能组合中，仅得到六个不同的物理客体，而它们就是 **B** 和 **E** 的分量。

为了表示出 F 的一般项，我们将采用普遍的下脚标 μ 和 ν ，其中每一个各代表 0、1、2 或 3——在通常的四维矢量符号表示法中指 t, x, y 和 z 。而且，一切都符合四维矢量符号表示法，只要对 $F_{\mu\nu}$ 作出如下的定义：

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu}, \quad (26.19)$$

请记住 $\nabla_{\mu} = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z)$ 和 $A_{\mu} = (\phi, A_x, A_y, A_z)$ 。

我们已得到的是：在自然界中有六个合成整体的量——它们是同一件事件的不同方面。电场和磁场，在低速运动世界里（那里不需担心光速）被认为是彼此分开的矢量，而在四维空间里却并不是矢量。它们是一种新“事件”的各部分。物理“场”实际上是那具有六个分量的客体 $F_{\mu\nu}$ 。这就是我们必须把它作为相对论来考虑的方法。现在把有关 $F_{\mu\nu}$ 的结果概括在表 26-1 中。

你看到我们这里所做的就是推广叉积。要从旋度的运算及旋度的变换性质与两矢量——通常的三维矢量 **A** 和已知道其行为也像一矢量的梯度算符——的变换性质相同这一事实出发。考察一下在三维中的一个普通叉积，比如一个粒子的角动量。当一物体在一平面内运动时， $(xv_y - yv_x)$ 这个量是重要的。对于在三维中的运动，则有三个这

表 26-1 $F_{\mu\nu}$ 的各分量

$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$
$F_{\mu\mu} = 0$
$F_{xy} = -B_z, \quad F_{xt} = E_x$
$F_{yz} = -B_x, \quad F_{yt} = E_y$
$F_{zx} = -B_y, \quad F_{zt} = E_z$

样的重要量,称之为角动量:

$$L_{xy} = m(xy_y - yx_x), L_{yz} = m(yz_z - zy_y), L_{zx} = m(zx_x - xz_z).$$

然后(尽管你现在可能已经忘记了),我们曾在第1卷第20章中发现这样的奇迹,即这三个量可以与矢量的分量等同起来。为达到此目的,我们曾不得不用右手惯例来建立一个人为法则。那只不过是幸运。它之所以是幸运,因为 L_i (i 和 j 各可等于 x , y 或 z) 是一个反对称的事件:

$$L_y = -L_x, L_z = 0.$$

在九个可能的量中,只有三个独立的值。而碰巧当你改变坐标系时,这三个事件按与一矢量的分量完全相同的方式变换。

相同的事情允许我们把一个面积元表示成矢量。一个面积元有两部分——比如说 dx 和 dy ——这我们可用一个垂直于该面积的矢量 da 来表达。但我们不能在四维中这样做。垂直于 $dxdy$ 的是个什么呢? 它到底沿 z 方向还是沿 t 方向?

总之,对于三维而言碰巧在取了像 L_y 那样的两矢量的组合之后,你又可把它用另一个矢量来表达,因为刚好有三项碰巧会像一个矢量的分量那样变换。但在四维中,那显然是不可能的,因为存在六个独立的项,而你不可能用四个事件来代表六个事件。

即使在三维中,很可能存在不能用矢量来表示的两个矢量的组合。假设任意取两矢量 $a = (a_x, a_y, a_z)$ 和 $b = (b_x, b_y, b_z)$, 并构成各种可能的分量组合,像 $a_x b_x, a_x b_y$, 等等。则应该有九个可能的量:

$$\begin{array}{lll} a_x b_x, & a_x b_y, & a_x b_z, \\ a_y b_x, & a_y b_y, & a_y b_z, \\ a_z b_x, & a_z b_y, & a_z b_z. \end{array}$$

我们也许可以叫这些量为 T_{ij} 。

如果现在来到一个转动(比如说绕 z 轴转动)的坐标系中, a 和 b 的各分量就会改变。在这一新参照系中,比如 a_x 由下式代替:

$$a'_x = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta,$$

而 b , 则由下式代替:

$$b'_y = b_y \cos \theta - b_x \sin \theta.$$

对于其他各分量也与此相仿。当然,由我们所发明的乘积 T_{ij} 的九个分量也全都改变了。例如, $T_{xy} = a_x b_y$ 就变成

$$T'_{xy} = a_x b_y (\cos^2 \theta) - a_x b_x (\cos \theta \sin \theta) + a_y b_y (\sin \theta \cos \theta) - a_y b_x (\sin^2 \theta)$$

或 $T'_{xy} = T_{xy} \cos^2 \theta - T_{xz} \cos \theta \sin \theta + T_{yz} \sin \theta \cos \theta - T_{xz} \sin^2 \theta.$

T'_{ij} 的每一分量就是 T_{ij} 的诸分量的一个线性组合。

因此发现,不仅可能有像 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的那种“矢积”,它具有像矢量那样变换的三个分量,而且也能够人为地造成两矢量的另一种“乘积” T_{ij} ,它有九个分量,在转动之下,它们按我们能够计算出来的一组复杂法则而变换。这种要有两个下标、而不是单一下标才能加以描述的事件,叫作张量。这是一个“二阶”张量,因为你也可以用三个矢量来做这一游戏,从而获得一

个三阶张量——或用四个矢量而获得一个四阶张量,如此等等。一阶张量就是矢量。

所有这一切的要点在于,电磁量 $F_{\mu\nu}$ 也是一个二阶张量,因为它带有两个下标。然而,它是一个四维中的张量。它按一种即将算出来的独特方式变换——恰恰是矢量积的变换方式。对于 $F_{\mu\nu}$,如果你改变两下标的前后次序,则 $F_{\mu\nu}$ 碰巧会改变符号,那是一种特殊情况——它是一个反对称张量。所以我们说,电场和磁场是四维中一个两阶反对称张量的两部分。

你们已经走过很长的路程,是否还记得好久以前我们对速度下定义的时候?现在正在谈论“四维中一个二阶反对称张量”。

眼前,我们得求出关于 $F_{\mu\nu}$ 的变换规律。这完全不难做到,只是有点麻烦罢了。无需动脑筋,但要做不少工作。我们所需要的是关于 $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ 的洛伦兹变换。由于 ∇_μ 不过是矢量的特殊情况,所以我们将处理普遍的反对称矢量组合式,可称为 $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu \quad (26.20)$$

(对于我们的目的来说, a_μ 最终将由 ∇_μ 代替而 b_μ 由 A_μ 代替)。 a_μ 和 b_μ 的各分量分别按照洛伦兹公式变换,它们是

$$\begin{aligned} a'_t &= \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_t &= \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_x &= \frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_x &= \frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_y &= a_y, & b'_y &= b_y, \\ a'_z &= a_z, & b'_z &= b_z. \end{aligned} \quad (26.21)$$

现在来变换 G_{tx} 的分量。要从 G_{tx} 开始:

$$G'_{tx} = a'_t b'_x - a'_x b'_t = \left(\frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left(\frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}} \right) - \left(\frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left(\frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) = a_x b_x - a_t b_t.$$

但这恰好就是 G_{tx} ,因而有这么一个简单结果:

$$G'_{tx} = G_{tx}.$$

我们将再多做一个。

$$G'_{ty} = \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} b_y - a_y \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(a_t b_y - a_y b_t) - v(a_x b_y - a_y b_x)}{\sqrt{1-v^2}}.$$

因而得到

$$G'_{ty} = \frac{G_{ty} - vG_{tx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

当然按相同的方法可得

$$G'_{tz} = \frac{G_{tz} - vG_{ty}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

剩下的将怎样做就很清楚了。让我们对所有这六项都制成一表,不过此刻也可用 $F_{\mu\nu}$ 来写出罢了:

$$\begin{aligned} F'_{xx} &= F_{xx}, & F'_{xy} &= \frac{F_{xy} - vF_{yz}}{\sqrt{1-v^2}}, \\ F'_{yy} &= \frac{F_{yy} - vF_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{yz} &= F_{yz}, \\ F'_{zz} &= \frac{F_{zz} - vF_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{xz} &= \frac{F_{xz} - vF_{yz}}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (26.22)$$

当然,仍旧有 $F'_{\mu\nu} = -F'_{\nu\mu}$ 和 $F'_{\mu\mu} = 0$.

所以我们得到了电场和磁场的变换式。我们所必须做的一切就是去查表 26-1 以找出在用 $F_{\mu\nu}$ 的漂亮的符号表示法中改用 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 时意味着什么。那不过是如何代入的问题。为了使你能够清楚在通常的符号中看上去如何,我们将在表 26-2 中重新写出关于场分量的变换式。

表 26-2 电场和磁场的洛伦兹变换 ($c=1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \frac{B_y + vE_z}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \frac{B_z - vE_y}{\sqrt{1-v^2}}$

表 26-3 场变换的另一种形式 ($c=1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})_y}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})_z}{\sqrt{1-v^2}}$

表 26-2 中的那些式子告诉我们:如果从一个惯性系到另一个惯性系, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 将怎样变化。若已知道在一个系中的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} , 则可求得在其旁边以速率 v 运动的另一个参照系中它们会变成什么。

如果注意到,由于 v 是在 x 方向上,因而所有含有 v 的项就都是叉积 $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的分量,那么便能把这些式子写成一种更易于记忆的形式。因此,可以重新将那些变换式写成如表 26-3 所示的形式。这样就较易于记住哪个分量在哪里。事实上,这种变换式甚至还可以写得更加简单。只要把沿 x 轴的场分量定义为“平行”分量 E_{\parallel} 和 B_{\parallel} (因为它们都平行于 S 与 S' 间的相对速度),而把总横分量—— y 和 z 两分量的矢量和——定义为“正交”分量 E_{\perp} 和 B_{\perp} , 就得到表 26-4 中的那些式子(我们已把 c 放回去了,使得以后要回过来参考时更为方便)。

表 26-4 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的洛伦兹变换的又一种形式

$E'_\parallel = E_\parallel$	$B'_\parallel = B_\parallel$
$E'_\perp = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	$B'_\perp = \frac{(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2})_\perp}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

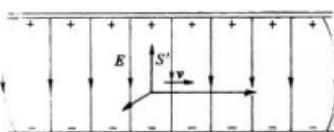


图 26-7 坐标系 S' 正在穿过一个静电场而运动

这些场变换式为我们提供求解某些曾经解过的问题——比如求运动点电荷的场——的另一种方法。我们以前就曾通过对势取微商而算出了场,但现在有可能通过变换仓库而做到这一点了。若有一个在 S 参照系中静止的点电荷,则那里只有简单的径向场。在 S' 参照系中,将会看到一个以速度 u 运动着的点电荷,如果 S' 参照系是以速率 $v = -u$ 经过 S 参照系的话。我们将让你们证明,表 26-3 和 26-4 中的变换会给出与我们在 § 26-2 中曾经得

到的电场和磁场相同。

如果我们运动并经过任何固定的电荷系统，则对于我们所能看到的事件表 26-2 中的变换式会提供一个有趣而又简单的答案。例如，假定要知道在我们的 S' 参照系中的场，倘若我们正在如图 26-7 所示的那个电容器两板之间运动着（当然，如果说一个充电电容器运动着经过我们，情况也一样），我们看到了什么呢？在这种情况下变换是轻而易举的，因为在原来的系统中， \mathbf{B} 场为零。首先，假定我们的运动是垂直于 \mathbf{E} 的，则将看到一个仍然是完全横向的 $\mathbf{E}' = \mathbf{E}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。此外，我们还将看到磁场 $\mathbf{B}' = -v \times \mathbf{E}'/c^2$ （在关于 \mathbf{B}' 的表达式中 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 不会出现，因为我们将用 \mathbf{E}' 而非用 \mathbf{E} 来写出的，但那是同一回事）。因此，当我们垂直于一静电场而运动时，就会看到一个被增强了的 \mathbf{E} 和一个附加的横向 \mathbf{B} 。如果我们的运动并不垂直于 \mathbf{E} ，则可将 \mathbf{E} 分成 \mathbf{E}_\parallel 和 \mathbf{E}_\perp 两部分。该平行部分不会改变，即 $\mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel$ ，而其垂直部分则恰如刚才所述的那样变化。

现在要来考虑相反的情况，并设想我们正在穿过一个纯静磁场而运动。这次会看到电场 \mathbf{E}' ，它等于 $v \times \mathbf{B}'$ ，以及改变了一个因子 $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 的磁场（假定它是横向的）。只要 v 比 c 小很多，就可以忽略磁场中的变化，而主要效应则是出现一个电场。作为这一效应的一个例子，试考虑测定飞机航速这个著名问题。目前这已经不再是著名的了，因为可以利用雷达从地面的反射波来测定空气的速率，但多年来在恶劣气候中找出飞机的速率一直是困难的。你不能见到地面，且又不知道哪个方向向上，等等，但要去弄清楚相对于地面你正在动得多快，仍然是十分重要的。见不到地面如何能做到这一点呢？许多懂得那些变换式的人们曾经琢磨过这种想法，即利用飞机在地球磁场中运动这一事实。假定飞机飞过的地方磁场大体上已经知道。让我们仅仅考虑磁场取垂直方向的简单情况。要是我们正在以一水平速度 v 飞过它，则按照公式，就会看到等于 $v \times \mathbf{B}$ 的电场，也就是说，这电场垂直于飞行方向。假如安装一根被绝缘的导线横穿过机身，则这个电场便会在导线两端感生电荷。这并不是任何新的东西。从地面上某些人的观点来看，我们正在移动一根导线横穿磁场，因而 $v \times \mathbf{B}$ 的力就会引起电荷流向导线两端。那些变换式不过是用另一种方式道出了同一件事情（我们能够以不只一种方法谈论同一件事情这个事实，并不意味某种方法比其他方法好。现在已有那么多的不同方法和工具，以致我们经常能够用 65 种不同方法获得相同的结果）。

所以为了测得 v ，我们必须做的一切就是去测量该导线两端间的电压。我们不能用一个伏特计来做这件事，因为同样的场也将作用于伏特计的导线上，但总会有测量这种场的一些方法。当我们在第 9 章中讨论大气电时就曾谈及某些方法。所以应该有可能测出飞机的航速。

然而，这一重要问题却从未用这种方式解决过。原因是，这样产生的电场约为每米几毫伏的数量级。这样的场本来是可以测出的，可是困难却在于，可惜这些场不能与其他电场做任何区别。由穿过磁场中运动所产生的场与从另一种原因，比如与在空气中或云雾上的静电荷所已经存在于空气中的某些电场，不能区分开来。我们曾在第 9 章中描述过在地球表面上空存在着强度约为 100 V m^{-1} 的典型电场。但它们很不规则。因而当飞机在空中飞过时，它会看到比起那由 $v \times \mathbf{B}$ 项所产生的微小场还要强大得多的大气电场的起伏，而结果是由于实际原因不能凭飞机穿过地球磁场中的运动来测定它的航速。

§ 26-4 用相对论符号表示的运动方程*

由麦克斯韦方程组求电场和磁场没有很大好处,除非我们知道如果有场那它们将干些什么。你可能记得,场对于求得作用于电荷上的力是需要的,而这些力则确定了该电荷的运动。因此,电动力学理论的一部分当然就是关于电荷运动与力的关系。

对于处在 E 和 B 场中的单独电荷,它所受的力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26.23)$$

对于低速情况来说,这个力等于质量乘以加速度,但对于任何速度的情况正确的规律则是力等于 $d\mathbf{p}/dt$ 。写出 $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 后,就求得了在相对论上正确的运动方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26.24)$$

现在,希望从相对论的观点来讨论这个方程。既然已经把麦克斯韦方程组表达成相对论形式了,去看看在相对论形式下运动方程会像什么样子该是多么有趣。就让我们来看看,能否将这个方程重新用四维矢量符号写出来。

我们知道,动量是四维矢量 p_μ 中的一部分,而其时间分量则为能量 $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。因此我们也许会想到,要用 $d p_\mu / dt$ 来代替式(26.24)的左边。于是,只需找出属于 F 的第四个分量。这第四个分量应该等于能量的变化率,或者是做功的功率,亦即 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ 。于是我们希望将式(26.24)的右边写成一个像 $(F \cdot v, F_x, F_y, F_z)$ 那样的四维矢量。可是这并不会构成四维矢量。

一个四维矢量的时间微商不再是一个四维矢量,因为 d/dt 要求选定某个用来测量 t 的特殊参照系。我们以前在试图使 v 成为一个四维矢量时,就曾碰到过这样的麻烦。当时我们的第一个猜测是,其时间分量一定是 $c dt/dt = c$ 。但这些量

$$(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = (c, \mathbf{v}) \quad (26.25)$$

却不是一个四维矢量的分量。我们曾经发现,通过对每个分量乘以 $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, 则它们可以被改造成一个四维矢量。“四维速度” u_μ 就是这么一个四维矢量:

$$u_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (26.26)$$

所以似乎是这样:若我们希望那些微商会造成四维矢量,则秘诀在于对 d/dt 乘以 $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。

于是,我们的第二个猜测是:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} (\rho_\mu) \quad (26.27)$$

* 在这一节中我们将放回所有的 c 。

应该是一个四维矢量。但 v 究竟是什么？它是粒子的速度，而并非坐标系的速度！那么，由下式定义的量 f_μ

$$f_\mu = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad (26.28)$$

就是力在四维中的推广，我们可叫它为“四维力”。它的确是一个四维矢量，其空间分量并非 \mathbf{F} 的分量，而是 $\mathbf{F}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 的分量。

问题在于为什么 f_μ 是一个四维矢量呢？对因子 $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 稍微有点理解对这个问题应该是不错的。由于现在它已被提到过两次，所以现在是弄清楚为什么 $\frac{d}{dt}$ 总可以用相同的因子来确定的时候了。答案如下：当我们就某个函数 x 对时间取微商时，是在自变量 t 的一个小间隔 Δt 中计算 x 的增量 Δx 。但在另一个参照系上，这间隔 Δt 或许会相当于在 t' 和 x' 两个方面的变化，因而如果我们仅改变 t' ，则在 x 中的变化便将不同了。对于微商来说，我们必须求出作为时空“间隔”度量的变量，这样才会在一切坐标系中都相同。当我们对那样的间隔取为 Δs 时，则它对所有的坐标系都会是相同的。当一粒子在四维空间中“运动”时，会有 Δt ， Δx ， Δy 及 Δz 的变化。我们能否用它们来构成一个不变的间隔呢？噢，它们就是四维矢量 $x_\mu = (\sigma, x, y, z)$ 各分量的变化，因而如果由下式定义一个量 Δs ：

$$(\Delta s)^2 = \frac{1}{c^2} \Delta x_\mu \Delta x_\mu = \frac{1}{c^2} (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2), \quad (26.29)$$

由于它是一个四维点积，则我们有一个用来量度四维间隔的很好的四维标量了。从 Δs 或其极限 ds ，我们能够定义一个参数 $s = \int ds$ 。而对于 s 的微商，即 ds/ds ，就是一种漂亮的四维运算，因为它对于洛伦兹变换来说是不变的。

对一个运动粒子，若要将 ds 和 dt 联系起来倒很容易。对于一个正在运动的点状粒子，

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt, \quad (26.30)$$

而

$$ds = \sqrt{(dt^2/c^2)(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)} = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (26.31)$$

所以这算符

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt}$$

就是一个不变算符。若用它来对任一四维矢量进行运算，则可以得到另一个四维矢量。例如，若把它作用于 (σ, x, y, z) 上，可获得该四维速度 u_μ ：

$$\frac{dx_\mu}{ds} = u_\mu.$$

现在我们明白，为什么这个因子 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 总会把事情解决好。

这个对洛伦兹变换不变的变量 s 是一个有用的物理量。它称为沿粒子路径的“原时”，因为 ds 总是在一个跟随粒子一起运动的参照系中在任何特定的时刻的一个时间间隔（这时， $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ ，因而 $\Delta s = \Delta t$ ）。如果你能够想象出某个“钟”，它的运行快慢与加

速度无关,那么这样一个伴随着粒子的钟就会显示出时间 s 。

现在我们可以回过头去把(经过了爱因斯坦修正的)牛顿定律写成简洁形式:

$$\frac{dp_\mu}{ds} = f_\mu, \quad (26.32)$$

其中 f_μ 就是式(26.28)中所给出的。并且,动量 p_μ 也可以写成

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{ds}, \quad (26.33)$$

式中坐标 $x_\mu = (\alpha, x, y, z)$, 现在描述粒子的轨道。最后,该四维符号表示法为我们提供了形式十分简单的运动方程:

$$f_\mu = m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}, \quad (26.34)$$

这使人想起 $F = ma$ 。重要的是要注意式(26.34)与 $F = ma$ 的不同,因为这个四维矢量公式(26.34)已包含在相对论力学中了,在高速运动中它不同于牛顿定律,也不像麦克斯韦方程组的那种情况,那里我们能够把各个方程都重新写成相对论形式而完全没有改变其意义——只不过是符号表示法的改变而已。

现在让我们回到式(26.24)并看看怎样才能将其右边用四维矢量符号写出来。那三个分量——当各除以 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 时——就是 f_μ 的分量,因而

$$f_x = \frac{q(E + v \times B)_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q \left[\frac{E_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{-v_y B_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{v_z B_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]. \quad (26.35)$$

现在,我们必须把所有的量都用它们的相对论符号来表示。首先, $c/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $v_y/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 以及 $v_z/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 分别是四维速度 u_μ 的 t , y 和 z 分量。 E 和 B 的分量则是场的二阶张量 $F_{\mu\nu}$ 的分量。当回到表 26-1 中查看与 E_x , B_x 和 B_y 相对应的 $F_{\mu\nu}$ 的分量时,则可以得到*

$$f_x = q(u_x F_{xt} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz}),$$

这个式子开始看上去似乎很有趣。每项都有一个下脚标 x ,那是合理的,因为我们正在寻求 x 分量嘛。然后,所有其他下脚标则是成对地出现: tt , yy , zz ,除了 xx 那一项不见以外。所以我们正好把它插进去,并写成

$$f_x = q(u_t F_{tx} - u_x F_{xx} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz}). \quad (26.36)$$

这并未改变什么,因为 $F_{\mu\nu}$ 是反对称的,从而 F_{xx} 等于零。之所以要把 xx 项放进去就是为了使我们能够将式(26.36)写成一个简写形式

$$f_\mu = qu_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.37)$$

这个式子与式(26.36)是一样的,如果给出这样一个规则,即每当任一个下脚标出现两次时(比如这里的 v),你就得自动地用像标积那样的方法把这些项都相加起来,这也是应用相同的符号惯例。

* 我们把 c 放回到表 26-1 时,则与 E 相对应的 $F_{\mu\nu}$ 分量都乘以 $1/c$ 。

你可以相信,式(26.37)对于 $\mu = y$ 或 $\mu = z$ 也同样适用,但对于 $\mu = t$ 又是怎么回事呢? 开一个玩笑,让我们来看看它讲些什么:

$$f_t = q(u_t F_{tx} - u_x F_{tx} - u F_{ty} - u_z F_{tz}).$$

现在要变回成 E 和 B 的表示式,我们得

$$f_t = q \left(0 + \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_x + \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_y + \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} E_z \right) \quad (26.38)$$

或

$$f_t = \frac{qv \cdot E}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

但根据式(26.28), f_t 被认为是

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

由于 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$ 为零,所以就与式(26.38)相同。因此,一切都很顺利。

概括起来,运动方程可以写成一个优美形式:

$$m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = f_\mu = qu_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.39)$$

虽然方程式可以这样写出看起来很巧妙,但这种形式却并非特别有用。对于求解粒子运动的问题,应用原来的方程式(26.24)往往更加方便,而那是我们将经常做的事情。

第 27 章 场的能量和场的动量

§ 27-1 局域守恒

很明显，实物的能量并不守恒。当一物体辐射光时它就失去能量。然而，这部分损失的能量可以用其他形式来描述，比如说用光的形式。因此，要是没有考虑到与光、或普遍地说，与电磁场联系着的能量，那么能量守恒的理论是不完整的。我们现在着手处理场的能量守恒和动量守恒。肯定不可能只论述其中一个而不涉及另一个，因为在相对论中它们是同一个四维矢量的不同方面。

早在第 1 卷中，就曾讨论过能量守恒，那时只是说世界上的总能量恒定不变。现在要将能量守恒律的概念在一个重要方面加以推广——在某些细节方面说明能量是怎样守恒的。这一新的定律将说明：如果能量离开一个区域，那是由于它通过该区域的边界流出去的。这是比不加这样一种限制的能量守恒要强一点的规律。

为看清这一说法的含义，让我们先来考察一下电荷守恒律是怎样产生的。过去我们对电荷守恒是这样描述的：有一电流密度 j 和一电荷密度 ρ ，当某处的电荷减少时就必然会有电荷从该处流出，我们把它称为电荷守恒。这个守恒律的数学形式是

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (27.1)$$

上述定律得出如下结论，即在世界上的总电荷总保持恒定不变——永远不会有任何净电荷的获得或丧失。然而，总电荷很可能按另一种方式保持不变。假定在某点(1)附近有某个电荷 Q_1 ，在隔某段距离的点(2)附近则没有什么电荷(图 27-1)。现在假定：随着时间的推移，电荷 Q_1 会逐渐消失，而与此同时随着 Q_1 的减少却有某些电荷 Q_2 在点(2)处出现，并且以这样一种方式进行，即使得在每个时刻 Q_1 与 Q_2 之和是一常数。换句话说，在任一中间态上 Q_1 所丧失的量应该加到 Q_2 上，那么世界上电荷的总量才会守恒。这是一种“世界范围”的守恒，而不是我们将称之为“局域”性的守恒，因为要使电荷从点(1)转移至点(2)并不要求在两点之间的空间里任何一处出现。就局部来说，该电荷是真正“丧失”了。

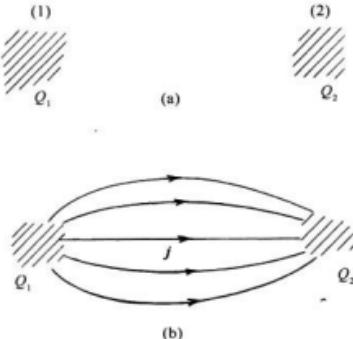


图 27-1 两种使电荷守恒的方式：(a) $Q_1 + Q_2$ 为一恒量；(b) $dQ_1/dt = - \int j \cdot n da = -dQ_2/dt$

这一种“世界范围”的守恒律在相对论中会碰到困难。在相隔一定距离的各个点，“同时”这个概念对于不同参照系是彼此不相等的。两事件在某个参照系中是同时的，但对于从旁运动而过的另一个参照系来说则不是同时的了。在上述那种“世界范围”的守恒律中，要求从 Q_1 上丧失的电荷应该同时出现在 Q_2 上。否则就会出现电荷并不守恒的某些时刻。因此如不将其造成一个“局域”的守恒定律，似乎就没有办法使电荷守恒律在相对论上成为不变式。事实上，洛伦兹的相对论不变性这一要求，似乎以令人惊异的方式限制了可能有的自然规律。比方，在现代量子场论中，人们往往希望通过承认我们称为“非局域”性的互作用——这里的某事件会直接影响到那里的某事件——来改变理论，但却陷入了相对论性原理上的困难。

“局域”守恒还含有另一种概念。它表明电荷之所以能够从一处移至另一处，在它们之间的空间里必须有某个事件发生。要描述该定律，我们不仅需要电荷密度 ρ ，而且也需要另一类量，即 j ，它是给出通过一个截面的电荷流动速率的一个矢量。于是这个流量就同电荷密度的变化率通过式(27.1)而互相联系起来，这是守恒律中更为极端的一种。它表明电荷按某一特殊形式守恒——“局域”地守恒。

事实证明，能量守恒是一种局域过程。在某个给定空间区域里不但存在能量密度，而且也存在代表穿越表面的能量流动速率的矢量。例如，当有一个光源向外辐射时，我们能够求出从该源发射出来的光能。如果设想某个包围着该光源的数学曲面，那么从这个曲面内部所损失的能量就等于穿越该曲面流出去的能量。

§ 27-2 能量守恒与电磁学

现在我们要定量地写出关于电磁学的能量守恒。为此，就必须描述在空间任何体积元中能量及其能流速率各有若干。假定我们首先只考虑电磁场的能量，因而将令 u 代表场的能量密度（也就是在空间内单位体积的能量），并令矢量 S 代表场的能通量密度（即单位时间通过垂直于流动方向的单位截面的能流）。于是，同电荷守恒、即式(27.1)完全相似，我们可以把场能量的“局域”守恒律写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot S. \quad (27.2)$$

当然，这一定律并非普遍正确，说场能量守恒是不对的。假设你在一个黑暗房间里打开电灯开关，忽然之间整个房间里都充满了灯光，所以就有了场方面的能量，尽管在此之前一点光也没有。式(27.2)并非一个完全的守恒律，因为场能量单独来说是不会有守恒的，只有世界上的总能量——也包括实物方面的能量——才会守恒。如果实物对场做了一些功或场对实物做了一些功，则场的能量将会发生改变。

可是，若在有关体积里存在实物，则我们知道它具有多少能量：每个粒子具有能量 $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。实物的总能量正好是所有粒子能量之和，而通过一个面的这种能流就正好是通过这个面的每个粒子所携带的能量之和。现在我们只想谈论有关电磁场方面的能量，因此就必须写出这样一个方程，它会说出在某个给定体积里的总场能的减少，或者是由场能从该体积里流出，或者是由于场把能量给了实物而有了损失（或从实物处获得能量，那不过是能量的负损失）。体积 V 内的场能为

$$\int_V u dV,$$

而其减少速率则是这个积分对时间微商的负值。从体积 V 出来的场的能量流等于 \mathbf{S} 的法向分量对包围着 V 的整个曲面 Σ 的积分, 即

$$\int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da.$$

因此,

$$-\frac{d}{dt} \int_V u dV = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da + (\text{对 } V \text{ 内实物所做的功}). \quad (27.3)$$

我们以前已经知道, 场对单位体积实物做功的功率为 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ [作用于一粒子上的力为 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, 因而做功的功率就是 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$]。若单位体积里共有 N 个粒子, 则单位体积的作功功率为 $Nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$, 但 $Nq\mathbf{v} = \mathbf{j}$], 所以量 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ 必然等于单位时间内单位体积中场损失的能量。于是式(27.3)便变成

$$-\frac{d}{dt} \int_V u dV = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV. \quad (27.4)$$

这是场内能量的守恒律。如果能够把第二项变成体积积分, 就可以将它转变成一个像式(27.2)那样的微分方程, 这是容易用高斯定理做到的。 \mathbf{S} 的法向分量的面积分等于它的散度对整个内部体积的积分。因此, 式(27.3)就相当于

$$-\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV,$$

其中我们已把第一项中的时间微商置于该积分之内。由于这一方程对于任何体积都适用, 因而可以除去那些积分而得到关于电磁场的能量方程式:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (27.5)$$

现在, 这一方程对我们毫无用处, 除非知道 u 和 \mathbf{S} 各是什么。也许仅能告诉你们用 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 来表达它们的式子, 因为我们真正希望得到的只是结果。然而, 这里却宁愿向你们展示曾于 1884 年由坡印亭用来获得 \mathbf{S} 和 u 的公式的那种论证, 以便使你们能够知道这些式子是从何而来的(然而, 对于今后的工作来说, 你们并不需要去牢记这一推导)。

§ 27-3 电磁场中的能量密度和能流

假定存在仅仅取决于 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的场能量密度 u 和能通量密度 \mathbf{S} , 这是一种理念(例如, 至少在静电学中就已知道, 能量密度可以写成 $\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$)。当然, 这里的 u 和 \mathbf{S} 也许会依赖于势或其他的东西, 但让我们看看能够算出什么结果来。可以尝试把 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ 这个量重新写成为两项之和: 其中一项是一个量的时间微商, 而另一项则是第二个量的散度。这时, 那第一个量该含 u 而第二个量则含 \mathbf{S} (带有适当符号), 这两个量都必须只用场来表示的。这就是说, 我们希望把上述方程写成

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (27.6)$$

左边应该首先仅仅用场来表示。我们如何能做到这一点呢？当然，要通过应用麦克斯韦方程组。根据关于 \mathbf{B} 的旋度的那个麦克斯韦方程，用 \mathbf{E} 对之点乘，便得

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (27.7)$$

这样就已部分地完成了任务。最末一项是时间微商——即 $(\partial / \partial t) \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right)$ 。因此， $\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ 至少就是 u 的一部分了。这与我们曾经在静电学中求得的是相同的东西。现在，一切必须做的就是要使另一项纳入某种东西的散度之中。

注意式(27.7)右边的第一项与

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} \quad (27.8)$$

相同。而正如你从矢量代数方面所知道的， $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 一样，因而上面这一项也就等同于

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}), \quad (27.9)$$

这就有了“某种东西”的散度，这恰恰就是我们所需要的。结果这件事却是错的！以前曾向你们警告过， ∇ 虽然“像”矢量，但与矢量不“完全”相同。之所以不是矢量，是因为有一个来自微积分学方面的附加惯例：当一微分算符置于一乘积的前面时，它要对右边每个东西都进行运算。在式(27.7)中， ∇ 只对 \mathbf{B} 运算，而对 \mathbf{E} 不运算。但在式(27.9)的那种形式中，按照正常惯例， ∇ 应当对 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 两者都进行运算。所以并不是同一回事。实际上，若我们算出 $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ 的各部分，就能看出它等于 $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ 再加上某些其他的项。这很像当我们取代数中一个积的微商时所发生的情况。例如，

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f \frac{dg}{dx}.$$

并不打算将 $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ 的所有各部分都算出，仅愿意向你们指明一个对付这种问题十分有用的技巧，那就是允许你将矢量代数的法则全部运用到含有算符 ∇ 的表示式上去而又不会引起任何麻烦的一种技巧。这技巧就是要丢开——至少暂时是如此——关于微商算符对什么进行运算的微积分符号表示法则。你会看到，通常，各项的次序用于两个单独的目的。一个目的是在运算方面，为使 $f(d/dx)g$ 不同于 $g(d/dx)f$ ；另一个目的则是在矢量方面，为使 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 不同于 $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ 。如果我们乐意，可以决定暂时放弃这个运算法则，不去说明微商要对右边每件东西都进行运算，而是来制订一种与所写下来的各项次序无关的新规则。于是我们就能巧妙地处理前后各项而用不着操心。

这里就是新的规则：用下脚标来表示微分算符对什么进行运算，这样前后次序就没有什么意义了。假设令算符 D 代表 $\partial / \partial x$ ，那么 D_f 就意味着仅对变量 f 取微商，于是

$$D_f f = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

但如果我们将 $D_f f g$ ，则它指的是

$$D_f f g = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) g.$$

不过要注意,此刻按照我们的新规则, $f D_f g$ 也意味着相同事情。我们可将相同的事情任意写成以下各种形式:

$$D_f f g = g D_f f = f D_g g = f g D_f.$$

你看, D_f 甚至可以处在每件事情之后(像这样一种方便的符号表示法竟从未在数学或物理学书中得到传授,真令人感到意外)。

你可能会怀疑:若我要写出 fg 的微商,那该怎么办呢?我所要的是对两项的微商。那很容易,你只要这样说就行了,你写下 $D_f(fg) + D_g(fg)$,而这恰好就是 $g(\partial f / \partial x) + f(\partial g / \partial x)$,也即在旧符号表示法中你用 $\partial(fg) / \partial x$ 表示的意思。

你将会看到,现在算出关于 $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ 的新表示式就变得很容易了。我们从改成新的符号表示法开始,也即写出

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \nabla_B \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \nabla_E \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}). \quad (27.10)$$

当我们这样做时,就无需再保持次序上的正确了。我们始终懂得, ∇_E 只对 \mathbf{E} 进行运算,而 ∇_B 只对 \mathbf{B} 运算。在这种场合下,就能够把 ∇ 当作通常的矢量那样来运用(当然,当运算结束时,就要回到每人常用的那种“标准”符号表示法上去)。因此,现在就可以做出像交换点积和叉积以及对各项进行其他类型的新安排等各种事情。例如,式(27.10)中的中间项可以重新写成 $\mathbf{E} \cdot \nabla_B \times \mathbf{B}$ (你会记得, $a \cdot b \times c = b \cdot c \times a$),而那最末一项则与 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \times \nabla_E$ 相同。这看来像是异想天开,但却没有什么问题。现在,如果我们试图回到通常的惯例上来,那必须安排得使 ∇ 仅对其“本身”的变量进行运算。第一项已经那样做了,因此可以仅仅去掉下标。第二项就需要某种调整才能使 ∇ 移至 \mathbf{E} 之前,这我们可通过交换叉积的次序并改变符号而做到:

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} \times \nabla_E) = -\mathbf{B} \cdot (\nabla_E \times \mathbf{E}).$$

现在,式子已经按照惯常次序写出,因而就可回到通常的符号表示法上来。式(27.10)相当于

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (27.11)$$

(在这一特殊情况下,较快的方法应该是一直利用各分量,但花点时间向你们指出这种数学技巧还是值得的。你或许将不会在其他地方见到它,但对于把矢量代数从关于含有微商的项的次序规则中解放出来是极为好用的)。

现在我们就回到能量守恒的讨论上来,并引用我们的新结果,即式(27.11),去变换式(27.7)中的 $\nabla \times \mathbf{B}$ 项。这样,能量方程变成

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (27.12)$$

现在你看到,我们几乎完成任务了。这里有两项,一项用作 u 对于 t 的漂亮微商,另一项代表 \mathbf{S} 的美妙散度。可惜,那中间项仍旧保留下,它既不是散度,又不是对于 t 的微商,所以我们已经接近胜利,但还不完全。在经历了一番思考之后,回去查看麦克斯韦的微分方程组,幸运地发现 $\nabla \times \mathbf{E}$ 等于 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$,这就意味着我们可以把这独特项转变成单纯

的时间微商：

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{B} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right).$$

现在完全具有了我们所需要的一切。我们的能量方程可写成

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\epsilon_0 c^2 \mathbf{B} \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right), \quad (27.13)$$

那就完全像式(27.6)，只要下这样两个定义：

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (27.14)$$

和

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (27.15)$$

(交换叉积的次序使符号显得正确)。

我们的计划是成功的。已经有一个关于能量密度的表示式，它是“电”和“磁”两种能量密度之和，它们的形式很像以前我们在静场情况下求得的形式，那时我们计算出了用场表示的能量公式。并且，我们也已找到了关于电磁场的能流矢量的公式。这一新的矢量， $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ，按照它的发现者的名字，称为“坡印亭矢量”，它告诉我们有关场能在空间各处流动的速率，每秒流经一小面积 da 的能量为 $\mathbf{S} \cdot n da$ ，其中 n 为垂直于 da 的单位矢量(现在你有了 u 和 \mathbf{S} 的公式，若乐意的话，便可忘掉那些推导过程)。

§ 27-4 场能的不确定性

在考虑坡印亭公式[式(27.14)和(27.15)]的某些应用前，我们希望说明，我们并未真正“证明”过这些公式。上面只不过是找到了一个可能的“ u ”和一个可能的“ \mathbf{S} ”。我们怎能知道，通过巧妙处理各项的前后次序，不能再找到关于“ u ”和关于“ \mathbf{S} ”的另外的公式呢？这个新的 \mathbf{S} 和新的 u 可能是不同的，但它们仍应该满足式(27.6)。它是可能的，也是能够做到的。不过所找到的公式其形式始终含有场的各种微商(总会有像二次微商或一次微商的平方那样的二次项)。事实上，有无数个关于 u 和 \mathbf{S} 的不同可能性，而迄今还没有人曾经想到用实验方法来判明哪一个是对的！人们曾猜测最简单的一个可能是对的，但必须讲明，我们肯定不知道在电磁场能量的空间中真实的位置是什么。因此，我们也就用容易的办法选取并说明场的能量是由式(27.14)给出的。于是，能流矢量 \mathbf{S} 也必然由式(27.15)给出。

十分有趣，似乎没有唯一的方法能解决场能位置的不确定性问题。有时人们会宣称，这一问题可以通过利用引力理论按照下述论证来加以解决。在引力理论中，所有各种能量都是引力之源。因此，如果我们知道了引力作用的方向，则电的能量密度也就必然被适当定位了。然而，迄今为止还未有人曾做过这样精确的实验使得电磁场的引力效应的精密位置可以确定下来，因而电磁场单独可以作为引力之源这一概念在外表上是难于处理的。事实上，确曾观测到光当它靠近太阳通过时会受到偏转——我们可以说太阳把光向它本身吸引下来。你难道不要考虑光同等地吸引太阳吗？反正，每人都乐于接受我们所已找到的那些关于电磁能的位置及其流动的简单表示式。尽管有时运用那些式子获得的结果似乎有点奇

怪，但却从未有人找出那些结果的毛病——这就是说，没有与实验不一致。因此，我们仍将跟随世界上其他人——此外，我们相信它可能是完全对的。

应该做一个关于能量公式的进一步述评。首先，场中单位体积的能量很简单：它是静电能量加上磁场能量，如果静电能量用 E^2 而磁场能量用 B^2 写出的话。我们过去计算静态问题时，就曾得出两个这样的表示式作为能量的可能表示式。我们也曾求得关于静电场中能量的若干个其他公式，诸如 $\rho\phi$ ，在静电情况下它等于 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ 的积分。然而，在动态电场中等效性失效，而至于哪个式子正确则还未曾有过明显的选择。现在我们才知道哪一个是对的。同样，我们已找到了一个普遍正确的磁能量公式，对动态场的能量密度仍然正确的公式就是式(27.14)。

§ 27-5 能流实例

关于能流矢量 \mathbf{S} 的公式，是某种相当新鲜的事情。我们现在就要来看看，在某些特殊情况下它是如何工作的，并看看它是否与以前已知的任何事情互相验证。我们将举的第一个例子是光。在一个光波中， \mathbf{E} 矢量和 \mathbf{B} 矢量互相正交而且也垂直于波的传播方向（见图 27-2）。在电磁波中， \mathbf{B} 的大小等于 $1/c$ 乘上 \mathbf{E} 的大小，而且由于它们互相垂直，所以还可写成

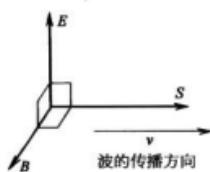


图 27-2 关于光波中的
 \mathbf{E} , \mathbf{B} 和 \mathbf{S} 矢量

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = \frac{E^2}{c}.$$

因此，对于光来说，每秒通过单位面积的能流为

$$S = \epsilon_0 c E^2. \quad (27.16)$$

在 $E = E_0 \cos \omega(t - x/c)$ 的那种光波中，每单位面积能流的平均速率，即 $\langle S \rangle_{\text{平均}}$ ——也称为光的强度——为电场平方的平均值乘以 $\epsilon_0 c$ ：

$$\text{强度} = \langle S \rangle_{\text{平均}} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{\text{平均}}. \quad (27.17)$$

信不信由你，我们曾在第 1 卷 § 31-5 中学习光学时就已经导出过这一结果。应该可以相信这结果是正确的，因为它也被另外某些事情所核实。当我们有一光束时，在空间中就存在由式(27.14)所给出的能量密度。对于光波利用 $cB = E$ ，得出

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{E^2}{c^2} \right) = \epsilon_0 E^2.$$

但 \mathbf{E} 在空间中是变化着的，因而平均能量密度为

$$\langle u \rangle_{\text{平均}} = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{\text{平均}}. \quad (27.18)$$

现在，波以速率 c 传播，所以应该想到每秒穿过一平方米的能量等于 c 乘以每立方米中的能量。因此我们会说

$$\langle S \rangle_{\text{平均}} = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{\text{平均}}.$$

上式是对的，因为它与式(27.17)相同。

现在举出另一例子。这是相当奇妙的一个例子。我们来考察正在缓慢充电的电容器中的能流(并不要求那么高的频率,以致电容器初看起来像一个共振空腔,但也不要直交流)。假定是用一个普通类型的圆形平行板电容器,如图 27-3 所示,在其内部有一个几乎均匀而随时间变化的电场。在任何时刻,这内部的总电磁能等于 U 乘以体积。若两板的半径均为 a 而其间隔为 h , 则在两板间的总能量为

$$U = \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2\right)(\pi a^2 h). \quad (27.19)$$

当 E 改变时,这个能量也在改变。当电容器充电时,位于两板间的体积正在以速率

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 \pi a^2 h E \dot{E} \quad (27.20)$$

接受能量。因此,一定会有从某处进入该体积中的能流。当然,你知道,它必定从那些用作充电的导线进来——但完全不是这样! 它不可能经由该方向流入两板内的空间,因为 E 是与板垂直的,所以 $E \times B$ 就一定与两板平行。

当然,你会记得,当电容器正在充电时,就有一个环绕轴的圆形磁场。我们在第 23 章中对此曾有所讨论。利用麦克斯韦方程组中最后一个方程,已求得在电容器边缘上磁场由下式给出:

$$2\pi a c^2 B = \dot{E} \cdot \pi a^2$$

或

$$B = \frac{a}{2c^2} \dot{E},$$

它的方向如图 27-3 所示。因此,就有一个正比于 $E \times B$ 的能流从边缘四周进入,如图中所示。能量实际上并不是从导线下来的,而是从围绕着该电容器的空间那里来的。

让我们来核对一下通过两板边缘间的整个面的总能流是否与其内部能量的变化率相符——看来这样较好。为了核实,虽然我们仔细研究了证明式(27.15)的工作的全过程,但还是让我们来弄清楚。该面面积为 $2\pi ah$, 而 $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的量值为

$$\epsilon_0 c^2 E \left(\frac{a}{2c^2} \dot{E}\right),$$

因此总能流为

$$\pi a^2 h \epsilon_0 E \dot{E}.$$

这的确与式(27.20)相符。但它告诉我们一件奇怪的事情:当对电容器充电时,能量并不是沿导线下来的,而是穿过边缘的间隙进来的。那分明就是这一理论所说的!

怎么能够是这样的呢? 这虽不是一个容易解决的问题,但这里有一个考虑该问题的方法。假设在该电容器的上面和下面很远处都有一些电荷,当电荷离得很远时,就会有一个微弱的但却是极其散开的场包围着该电容器(见图 27-4)。于是,当这些电荷靠拢

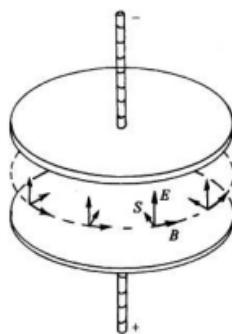


图 27-3 接近一个正在充电的电容器,坡印矢量 \mathbf{S} 会朝轴心指向内

时,离电容器较近处的场就变得较强。因此,远处的场能量是会朝该电容器移动过来并最后停驻于两板之间。

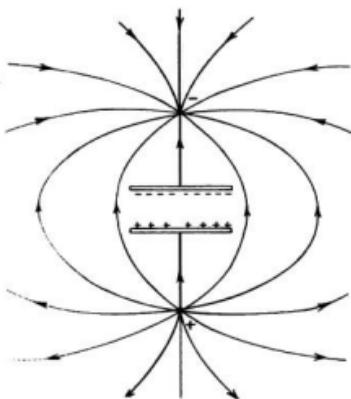


图 27-4 当将两电荷从远处移来对一电容器充电时,在电容器外面的场

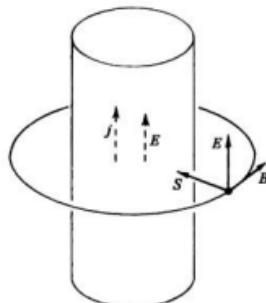


图 27-5 在一根载流导线附近的坡印亭矢量 S

作为另一个例子,试问在一根有电阻的导线中当它载有电流时会有什么情况发生。既然这根导线中有电阻,则沿导线方向便有驱动电流的电场。由于沿导线有电势降,因而刚好在导线外面存在与其表面平行的电场(见图 27-5)。此外,还有一个由电流所产生的环绕着导线的磁场。 E 和 B 成直角,因此就有一个沿半径而指向内的坡印亭矢量,如图中所示,即有一个从周围各处流进导线的能流。当然,这等于导线中以热的形式损耗掉的能量。因此,我们的“狂妄”理论讲:由于能量从外面的场流进了导线,电子才获得它们用以产生热的那些能量。直觉似乎告诉我们,电子是由于沿着导线被推动才获得能量的,因而这能量应该是沿导线流下(或流上)。但这一理论却说:电子实际上是被来自远处的某些电荷的电场所推动的,而它们从这些场获得了产生热的能量。能量总会莫名其妙地从遥远处的电荷流进空间的广阔区域,然后又流进导线中去。

最后,为了使你确实相信这一理论明显是一个难题,我们将再举一个例子——其中有一电荷和一块磁铁彼此都静止地互相靠近着的例子——即两者都固定不动。假设取一个其中的点电荷被置于棒状磁铁中点附近,如图 27-6 所示。每一件东西都是静止的,从而能量并

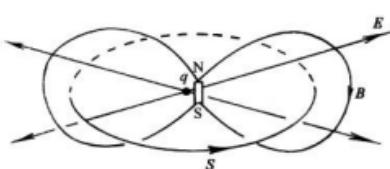


图 27-6 电荷和磁铁会产生一个绕闭合回路循环的坡印亭矢量

不会随时间变化。而且, E 和 B 也都是完全静止的。可是坡印亭矢量却说存在一个能流,因为 $E \times B$ 并不等于零。如果你考察这能流,就会发现它不过是在一圈圈地循环旋转。任何一处都没有能量方面的任何变化——凡是流进某一体积里的东西都会从那里再流出来。这很像不可压缩的水在环流。因此,在这种所谓静态的情况下还存在

能量的环流。这是多么荒谬！

然而，当你记起我们所谓的“静”磁实际上是一种环行的永久电流时，这也许就不会使你那么可怕地感到莫明其妙。在一块永磁体中，其内部电子都在永恒地旋转。这样也许能量在外面环流这一点就不那么奇怪了。

你无疑开始得到这么一个印象，即坡印亭理论至少部分地违背了你对于在电磁场中能量被设置于何处的那种直觉。你也许会相信，必须对你的一切直觉都进行修改，因此在这里有许多东西得学习。但实际上似乎并不需要。如果有时忘记了导线里能量是从外面流进来而不是沿导线传来的，但你无需感觉到，你就会陷入巨大的困难。在应用能量守恒的概念时，过细地注意能量所取的路径，看来好像价值不大。能量围绕着一块磁铁和一个电荷在兜圈子，这在大多数场合似乎是很不重要的。它并非一个极为重要的细节，但很清楚，我们通常的直觉却是很错误的。

§ 27-6 场 的 动 量

接下来，我们希望谈论关于电磁场中的动量。正如场具有能量一样，它的每个单位体积也将具有一定的动量。让我们称之为动量密度 \mathbf{g} 。当然，动量具有各种可能的方向，因而 \mathbf{g} 必定是个矢量。让我们每次谈一个分量，首先，考虑 x 分量。由于动量的每一分量都守恒，所以可能写下下一个看来有点像这样的定律：

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\text{实物的动量})_x = \frac{\partial g_x}{\partial t} + (\text{流出的动量})_x.$$

左边是容易理解的，实物动量的变化率正好就是作用于其上的力。对于一个粒子来说，这力就是 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ，对于一个电荷分布来说，则作用于单位体积上的力为 $(\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})$ 。然而，“流出的动量”这项却有点奇怪。它不可能是一个矢量的散度，因为它并非一个标量，其实是某一矢量的 x 分量。无论如何，它看来大概有点像

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z},$$

因为 x 动量还可能在三个方向中的任意一个方向上流动。总之，不管 a , b 和 c 是什么，这个组合被认为等于 x 动量的流出量。

现在这场游戏应该是仅仅用 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 来写出 $\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ，利用麦克斯韦方程组而把 ρ 和 \mathbf{j} 消掉，然后才对那些项调整并做一些代换以使它看来像如下的形式：

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

之后，通过对那些项做出标记，就会得到关于 g_x , a , b 和 c 的表示式。它的工作量很大，我们并不打算那样做，而只准备找出关于动量密度 \mathbf{g} 的表示式——而且是通过另一种方法来求的。

在力学中有一个重要定理，这就是：在任何场合下，每当真正存在能量（场能或任何其他类型的能量）流动时，则单位时间流经单位面积的能量，乘以 $1/c^2$ ，就等于空间内单位体积的动量。在电动力学的特殊情况下，这一定理给出了 \mathbf{g} 等于 $1/c^2$ 乘以坡印亭矢量的结果：

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (27.21)$$

因此,坡印亭矢量不但会给出能流,而且只要除以 c^2 ,也就给出了动量密度。这同样的结果可从我们提出过的另一种分析方法获得,但更有意义的还是去注意这个更加普遍的结果。现在将提供若干有趣例子及论证以便使你们相信这个普遍定理是正确的。

第一个例子:假设在一个箱子里存在大量粒子——比方说每立方米中含有 N 个粒子——而它们以某个速度 v 运动着。现在就来考虑一个垂直于 v 的想象平面。每秒通过这个面单位面积的能流,等于每秒流过的粒子数 Nv 乘以每一粒子所带的能量。因每个粒子的能量为 $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, 所以每秒的能流就是

$$Nv \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

但每个粒子具有的动量为 $m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, 因而动量密度为

$$N \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

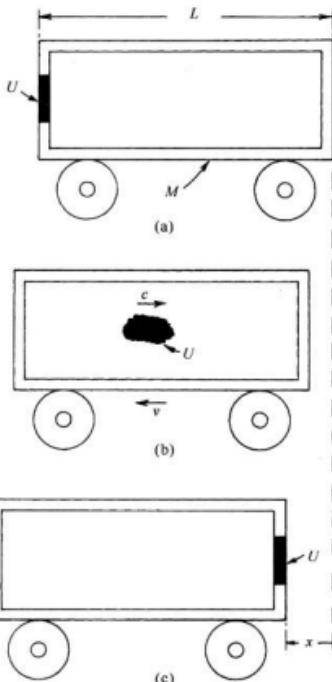


图 27-7 以速率 c 运动着的能量 U 会带有运动量 U/c

这恰好就是 $1/c^2$ 乘以能流——和该定理所说的相同。因此,对于一群粒子来说这定理是正确的。

这定理对于光来说也正确。我们过去在第1卷学习光学时就曾看到,当从一束光吸收能量时,会有一定动量递交给该吸收体。事实上,在第1卷第34章中我们曾经证明,动量等于 $1/c$ 乘以所吸收的能量[第1卷的式(34.24)]。若令 U_0 代表每秒到达单位面积的能量,则每秒到达单位面积上的动量就是 U_0/c 。但动量以速率 c 传播,因而在该吸收体前面的动量密度就必然是 U_0/c^2 。因此,再次表明该定理是对的。

最后,我们将提供一个论据,这论据来源于爱因斯坦对同样事情的又一次证明。假设有一火车车厢在轨道上自由滑动(假定没有摩擦阻力),这车厢具有某巨大质量 M 。车厢里的一端配有能发射出一些粒子或光(或任何其他东西,到底是哪一种东西都没有什么区别)的某种装备,然后这射出来的东西就给车厢对面一端所截住了。原来有某些能量放在车厢的一端——比如说是图 27-7(a)中所标明的能量 U ——而后来它却转移到了对面的一端,如图 27-7(c)所示。这能量 U 已经移动了一个等于该车厢长度的距离 L 。既然能量 U 具有质量 U/c^2 , 因而要是车厢保持不动的话,该车厢

的重心就必然会移动。爱因斯坦不喜欢一物体的重心可以只凭在其内部瞎胡闹一番就能使其移动的那种想法,因而他假定通过在物体内部做任何事情来移动其重心是不可能的。但如果事实确是那样,则当我们把能量 U 从一端移至另一端时,整个车厢就应反冲一段距离 x ,如图(c)中所示的。实际上,你可以看到,车厢的总质量乘以 x 就必定等于所移动能量的质量 U/c^2 乘以 L (假定 U/c^2 比 M 要小得多):

$$Mx = \frac{U}{c^2}L. \quad (27.22)$$

现在让我们来考察一下能量由一次闪光所携带的那种特殊情况(该设备也同样适用于粒子,但我们将跟随爱因斯坦,他对于光的问题感兴趣)。究竟是什么东西会引起车厢移动的呢?爱因斯坦这样议论说:当光被发射出来时一定存在反冲,即带有动量 p 的某个未知的反冲。正是这一个反冲才使车厢向后滚动的。车厢的反冲速度 v 等于这一动量除以车厢质量:

$$v = \frac{p}{M}.$$

车厢以这一速度运动,直至光的能量到达对面一端为止。于是,当它碰到时,它交还了它的动量而使车厢停住了。如果 x 很小,则车厢运动的时间约等于 L/c ,所以就有

$$x = vt = v \frac{L}{c} = \frac{p}{M} \frac{L}{c}.$$

把这个 x 值代入式(27.22)中,便得

$$p = \frac{U}{c}.$$

我们又一次得到了光的能量与动量的关系。用 c 相除则获得动量密度 $g = p/c$,因而又得到

$$g = \frac{U}{c^2}. \quad (27.23)$$

你可能会觉得奇怪:为什么重心定理会那么重要?也许它是错的。或许是吧,但那时我们也可能丧失角动量守恒律。假定我们的车厢沿着轨道以某一速率 v 前进,而同时我们把某些光能从车顶射向车底——比方说,从图 27-8 中的 A 点射至 B 点。现在来考察这系统相对 P 点的角动量。能量 U 在离开 A 点之前,它具有质量 U/c^2 和速度 v ,从而具有角动量 mvr_A 。当它到达 B 点时,仍具有相同的质量,而倘若整个车厢的线动量不会发生变化,则它必定仍具有速度 v 。这时它相对 P 点的角动量就是 mvr_B 。这角动量将会改变,除非当光被射出时正确的反冲动量曾给于车厢——也就是说,除非光携带动量 U/c 。结果变成,角动量守恒与重心定理在相对论中是紧密相联的。因此,要是我们的重心定理不正确,则角动量守恒就被破坏了。无论如何,已经弄清楚它是一个正确的普遍定律,而在电动力学的情况下我们

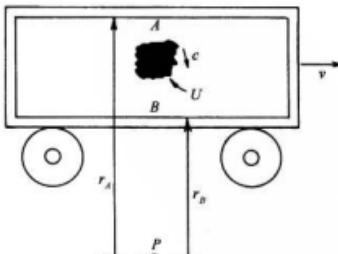


图 27-8 如果环绕 P 点的角动量是守恒的,则能量 U 应带有动量 U/c