

力为止)。如果该柱壳带有正电荷,则导线在柱轴那一端将有负电荷。通过测量这根导线一端的电荷,我们能测得该系统的旋转速率。这样,也就有一种“角速度计”了!

但你还在怀疑:“要是把自己置身于该旋转柱的参照系上又将如何呢?这时不过是一根静止不动的带电圆柱壳,而我知道那些静电方程说明并没有电场存在于该柱壳之内,因而也就没有任何力会把电荷推向轴心。因此一定是出了某种差错”。但却没有发现什么东西弄错了。原来不存在“转动的相对性”。由于一个转动系统并不是一个惯性参照系,因而物理规律是不同的。我们必须确实保证,只相对于惯性坐标系才应用电磁学方程组。

要是我们能够运用这么一个带电圆柱壳来测量地球的绝对转动,那该多好,但可惜该效应过于微小,即使采用目前能够得到的最精密仪器也无法观察出来。

§ 14-5 一个小电流回路的场;磁偶极子

让我们应用矢势的方法求出一个小电流回路的场。所谓“小”者,照例它仅仅指我们所感兴趣的乃是远比回路尺度大得多的那些距离处的场。结果将得出,任一个小回路就是一个“磁偶极子”。这就是说,它所产生的磁场类似于一个电偶极子的电场。

首先考虑一矩形回路,并按照图 14-6 所示选择我们的坐标系。由于沿 z 方向并没有电流,因而 A_z 为零。在长度各等于 a 的两边则都有沿 x 向的电流。每一段中,电流密度(以及电流)都是均匀的。因此关于 A_x 的解就恰好像来自两根带电棒的静电势(见图 14-7)。既然这两根棒各带相反电荷,所以它们在远处的电势只可能是一个偶极子的势(§ 6-5)。在图 14-6 中的 P 点,这势应为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}, \quad (14.28)$$

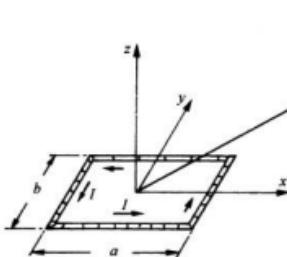


图 14-6 通有电流 I 的一个矩形回路。在 P 点的磁场有多大($R \gg a$ 或 b)

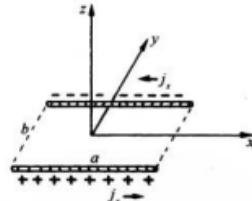


图 14-7 在图 14-6 的电流回路中 j_x 的分布

式中 \mathbf{p} 为该电荷分布的偶极矩。在这种情况下,偶极矩等于一根棒上的总电荷乘以两棒间的距离:

$$\mathbf{p} = \lambda ab. \quad (14.29)$$

这偶极矩指向负 y 方向,因而 \mathbf{R} 与 \mathbf{p} 夹角的余弦为 $-y/R$ (其中 y 是 P 点的坐标)。所以

我们有

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ab}{R^2} \frac{y}{R},$$

简单地用 I/c^2 代替 λ , 我们就得到 A_x :

$$A_x = -\frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{R^3}. \quad (14.30)$$

同理可得

$$A_y = \frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3}. \quad (14.31)$$

另外, A_y 正比于 x , 而 A_x 则正比于 $-y$, 所以该矢势(在远处)绕 z 轴围成圆环, 与回路中的电流 I 有相同的指向, 如图 14-8 所示。

\mathbf{A} 的强度与 Iab 成正比, 即是电流乘以该回路的面积。这一乘积称为该回路的磁偶极矩(常简称“磁矩”)。我们用 μ 来表示:

$$\mu = Iab. \quad (14.32)$$

一个具有任何形状(圆、三角、或其他)的平面小回路的矢势也是由式(14.30)和(14.31)给出的, 只要我们用下式来代替 Iab :

$$\mu = I \times (\text{回路面积}). \quad (14.33)$$

这留给读者去证明。

如果把 μ 视作矢量, 并将其方向规定为垂直于该回路的平面, 由右手定则给出其正的向指(图 14-8), 则可把有关 \mathbf{A} 的方程写成如下的矢量形式:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{e}_R}{R^2}. \quad (14.34)$$

现在仍需求出 \mathbf{B} 来。应用式(14.33)和(14.34), 连同式(14.4)一起, 便可得到:

$$B_x = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3} = \dots \frac{3xz}{R^5} \quad (14.35)$$

[其中我们用 \cdots 来代表 $\mu / (4\pi\epsilon_0 c^2)$],

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{y}{R^3} \right) = \dots \frac{3yz}{R^5}, \\ B_z &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\dots \frac{x}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\dots \frac{y}{R^3} \right) = -\dots \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3z^2}{R^5} \right). \end{aligned} \quad (14.36)$$

可见 \mathbf{B} 场分量的表现与由一指向 z 轴的电偶极子产生的 \mathbf{E} 场的表现完全一样[见式(6.14)和(6.15)以及图 6-4], 这就是为什么我们把电流回路叫作磁偶极子的缘故。“偶极子”这个词, 当应用于磁场时, 是有点令人迷惑不解的, 因为并没有与电荷相对应的磁“荷”。磁“偶极子场”不是由两个“荷”所产生的, 而是起因于一电流回路元。

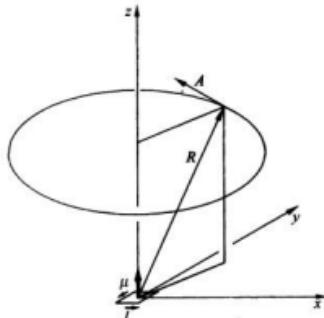


图 14-8 在(xy 平面的)原点处一个小电流回路的矢势;一个磁偶极子的场

然而,事情显得有点奇怪:从完全不同的两定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ 和 $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} / \mu_0 c^2$ 出发,竟会得出形式相同的场。为什么会这样呢?那是由于偶极子场只出现在与所有电荷或电流的距离都很远处。因此通过大部分有关空间, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的方程就相同:两者各具有零散度和零旋度。所以它们给出相同的解答。然而,我们用偶极矩来概括的那些源的位形在物理上却很不相同——对于彼此互相对应的场,在一种情况下源是一环行电流,而在另一种情况下源则是位于该回路平面上与下的一对电荷。

§ 14-6 电路的矢势

我们经常感兴趣的是导线直径与整个系统的线度相比非常小的那种电路所产生的磁场。在这种情况下,我们就能简化磁场的方程组。对细小导线来说,我们可以把体积元写成

$$dV = S ds,$$

式中 S 是导线的横截面积,而 ds 则是沿导线的距离元。实际上,由于矢量 ds 与 \mathbf{j} 方向相同,如图 14-9 所示(而且我们也可假定, \mathbf{j} 在任一给定截面上各处保持不变),我们便可写出一个矢量方程:

$$\mathbf{j} dV = j S ds. \quad (14.37)$$

但 jS 恰好就是我们所称的导线中的电流 I ,因而关于矢势式(14.19)中的积分就变成

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I ds_2}{r_{12}} \quad (14.38)$$

(见图 14-10)。我们假定通过电路的电流处处相同,但若有几条各载有不同电流的支路,则对于每条支路当然就应各自采用适当的 I 。

我们又一次可由直接对式(14.38)进行积分或由对相应的静电力学问题求解而把场求出来。

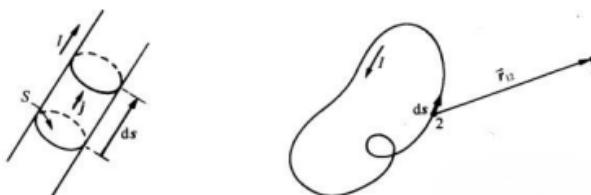


图 14-9 对于一根细小导线来说,
 $j dV$ 与 $I ds$ 相同

图 14-10 导线的磁场可以通过环绕
该电路取积分而获得

§ 14-7 毕奥-萨伐尔定律

在学习静电力学时我们了解到,某一已知电荷分布的电场可直接由积分式(4.16)获得:

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) \mathbf{e}_{12} dV_2}{r_{12}^2}.$$

正如我们曾经见到的,要算出这一积分——实际上是三个积分,每一分量各有一个——比起算出势的积分并求出它的梯度来,通常要花费更多工夫。

有一个相似的积分,它把磁场同电流联系了起来。我们已有一个关于 \mathbf{A} 的积分,即式(14.19),就可以通过对该式两边取旋度而获得关于 \mathbf{B} 的积分:

$$\mathbf{B}(1) = \nabla \times \mathbf{A}(1) = \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}} \right]. \quad (14.39)$$

现在我们必须小心:该旋度算符的含义是取 $\mathbf{A}(1)$ 的旋度,这就是说,它仅对坐标 (x_1, y_1, z_1) 进行运算。如果我们记住, $\nabla \times$ 这个算符只对附有脚标 1 的那些变量才进行运算,而这些变量显然仅出现于

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} \quad (14.40)$$

中,则可将该算符移进积分符号之内。对于 \mathbf{B} 的 x 分量,我们得

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y_1} - \frac{\partial A_y}{\partial z_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[j_z \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) - j_y \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) \right] dV_2, \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[j_z \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} - j_y \frac{z_1 - z_2}{r_{12}^3} \right] dV_2. \end{aligned} \quad (14.41)$$

方括号内的量恰好就是

$$\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}$$

的 x 分量。对于其他分量,我们将会找出相应结果,因而有

$$\mathbf{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (14.42)$$

这一积分直接由已知的电流给出了 \mathbf{B} 。这里所涉及的几何性质与图 14-2 中所示的相同。

若电流仅存在于细小导线的电路中,则如同上一节,我们可立即从导线的一头到另一头加以积分,即用 Ids 代替 $j dV$,其中 ds 是导线的长度元。这时,采用图 14-10 上的符号,便得:

$$\mathbf{B}(1) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I \mathbf{e}_{12} \times ds_2}{r_{12}^2} \quad (14.43)$$

(负号之所以出现是由于我们颠倒了该叉积的次序)。这一有关 \mathbf{B} 的方程,以它的发现者的名字命名,称为毕奥-萨伐尔定律。它提供一个直接获得载流导线所产生的磁场的公式。

你可能会觉得奇怪:“如果能直接由那个矢量积分找出 \mathbf{B} 来,则矢势还有什么用处呢?毕竟 \mathbf{A} 也含有三个积分!”因为有关 \mathbf{B} 的积分中存在叉积,所以该积分往往较为复杂,正如由式(14.41)显然可见。并且,由于 \mathbf{A} 的积分同静电学的那些相仿,所以我们可能已经懂得它们了。最后,我们还将见到:在更高一级的理论内容(比如相对论,力学定律的更高级描述方式,像以后将要讨论到的最小作用量原理,以及量子力学等)中,矢势起着重要的作用。

第 15 章 矢 势

§ 15-1 作用于一电流回路上的力;偶极子能量

上一章我们研究了由一矩形小电流回路所产生的磁场。并发现那是一个偶极子场,其偶极矩由

$$\mu = IA \quad (15.1)$$

给出,式中 I 为电流而 A 为回路面积。矩的方向垂直于该回路平面,因而也就可以写成

$$\mu = IA\mathbf{n},$$

式中 \mathbf{n} 是该面积 A 的法向单位矢量。

一个电流回路或磁偶极子不仅会产生磁场,而且当置于其他电流的磁场中时也会感受到力的作用。我们将首先考察在一匀强磁场中作用于一矩形回路上的力。设 z 轴沿磁场方向,而回路平面则被置于通过 y 轴并与 xy 面成 θ 角,如图 15-1 所示。这样,该回路的垂直于回路平面的磁矩就将与磁场成 θ 角。

由于在矩形对边上的电流互相对反,所以作用在上的那些力也将反向,从而不会有净力作用于该回路上(当磁场均匀时)。然而,由于图中标明为 1 和 2 的两边上存在作用力,因此就有一个倾向于把该回路绕着 y 轴旋转的力矩。这两个力 F_1 和 F_2 的大小为

$$F_1 = F_2 = IBb.$$

它们的力臂为

$$a \sin \theta,$$

从而该力矩为

$$\tau = IabB \sin \theta,$$

或者,由于 Iab 是该回路的磁矩,所以

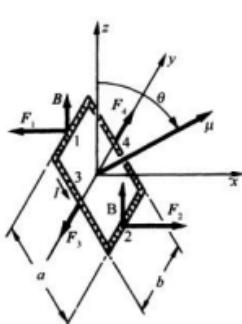
$$\tau = \mu B \sin \theta.$$

这力矩还可以写成矢量形式:

$$\tau = \mu \times \mathbf{B}. \quad (15.2)$$

图 15-1 一个通有电流 I 的矩形回路位于一匀强磁场 \mathbf{B} (沿 z 方向的)中。这样作用于该回路上的力矩就是 $\tau = \mu \times \mathbf{B}$, 其中磁矩 $\mu = Iab$

尽管仅仅在一个相当特殊的情况下证明了力矩由式(15.2)所给出,但这一结果对于任何形状的小回路都正确,正如我们将会看到的。对作用于电场中一电偶极子上的力矩也有相同



类型的关系式：

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

现在我们要询问这一电流回路的机械能。由于存在力矩，所以这能量显然与取向有关。虚功原理讲，力矩等于能量相对于角度的变化率，因而我们可写出

$$dU = \tau d\theta.$$

令 $\tau = \mu B \sin \theta$ 并积分，则能量可以写成：

$$U = -\mu B \cos \theta + \text{常数} \quad (15.3)$$

(符号之所以为负，是因为该力矩企图把磁矩旋转至与磁场同向，当 μ 与 B 平行时能量最低)。

由于今后将会讨论到的一些原因，这一能量并不是该电流回路的总能量(首先，我们未曾把回路中维持电流的那种能量计算在内)。因此，将这一能量称为 $U_{\text{机械}}$ ，就是要提醒我们它只是能量的一部分。并且，由于无论如何我们总已漏掉了某些能量，所以可令式(15.3)中的常数等于零。因而可把上式写成

$$U_{\text{机械}} = -\mu \cdot \mathbf{B}. \quad (15.4)$$

这再次与电偶极子的结果相对应：

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (15.5)$$

原来，式(15.5)中的静电能是真实的能量，但式(15.4)中的 $U_{\text{机械}}$ 却不是实际的能量。然而，凭借虚功原理它仍可用来计算力，假设回路中的电流或至少是 μ 保持不变的话。

我们能够证明：对于一个矩形回路来说， $U_{\text{机械}}$ 也相当于把该回路拿进场所需做的机械功。只有在匀强磁场中施于回路上的总力才等于零；在非均匀场中，则始终有一净力作用于通有电流的回路上。在把该回路置于场中时，我们势必经过其中场并非均匀的一些地方，因而就做了功。为使计算简单起见，我们将设想该回路被带进场时它的矩沿着场的指向(在到达了指定位置之后，还可以转至最后位置)。

试设想我们希望把该回路沿 x 方向移至场较强的区域，而该回路的指向按图 15-2 所示。我们从场等于零的某处出发，并对回路移进场中时所受的力乘距离后进行积分。

首先，让我们分别计算对每边所做的功，然后取其和(并非在积分之前就把力加起来)。作用于边 3 和边 4 上的力与运动方向垂直，因而没有做任何功。作用于边 2 上的力为 $I b B(x)$ ，在 x 方向，因而要获得抵抗磁力所做的功就必须从场为零的某处、比方说从 $x = -\infty$ 处积至它目前所处的位置，

$$W_2 = - \int_{-\infty}^{x_2} F_2 dx = - I b \int_{-\infty}^{x_2} B(x) dx. \quad (15.6)$$

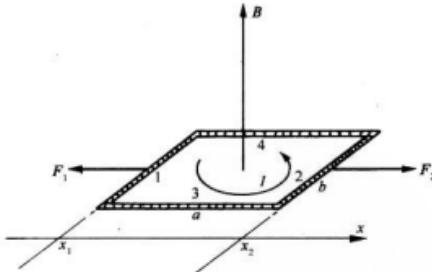


图 15-2 一个回路沿 x 方向移动，通过与 x 轴正交的 B 场

同理,为抵抗磁力而对边1所做的功为

$$W_1 = - \int_{-\infty}^{x_1} F_1 dx = Ib \int_{-\infty}^{x_1} B(x) dx. \quad (15.7)$$

为求得每个积分,我们需要知道 $B(x)$ 是怎样依赖于 x 的。但要注意,边1紧跟在边2之后,因而对它的积分就包括对边2做功的大部分。事实上,式(15.6)与(15.7)之和恰好就是

$$W = - Ib \int_{x_1}^{x_2} B(x) dx. \quad (15.8)$$

但若在一个区域里边1与边2处的场 B 几乎相等,则可将该积分写成

$$\int_{x_1}^{x_2} B(x) dx = (x_2 - x_1)B = aB,$$

式中 B 是在该回路中心处的场。我们所加进去的总机械能为

$$U_{\text{机械}} = W = - IabB = - \mu B. \quad (15.9)$$

这个结果同我们把式(15.4)作为能量相一致。

当然,要是在进行积分以求得功之前先将作用于回路上的力相加起来,也应该获得同样的结果。如果令 B_1 为边1处、而 B_2 为边2处的场,则沿 x 方向总的力为

$$F_x = Ib(B_2 - B_1).$$

若该回路很“小”,也就是说,若 B_2 和 B_1 相差不多,则可写成

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} a.$$

因而力为

$$F_x = Iab \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (15.10)$$

由外力对该回路所做的总功为

$$-\int_{-\infty}^x F_x dx = Iab \int \frac{\partial B}{\partial x} dx = - IabB,$$

这恰好又是 $-\mu B$ 。直到如今我们才看出为什么作用于一小电流回路上的力会与磁场的微商成正比,正如我们从

$$F_x \Delta x = - \Delta U_{\text{机械}} = - \Delta(-\mu \cdot B) \quad (15.11)$$

中预料到的。

上述结果表明:即使 $U_{\text{机械}} = -\mu \cdot B$ 可能并未包括系统的所有各种能量在内——它是一类膺造的能量——但它仍能同虚功原理一起被用来求得作用于恒定电流回路上的力。

§ 15-2 机械能与电能

现在我们要来证明,为什么上一节所讨论的能量 $U_{\text{机械}}$ 并不是与恒定电流相关的正确的

能量——它并未包括世界上的总能量。固然，我们曾经强调过它仍是一种能量，可用它由虚功原理算出力来，只要在回路中的电流（以及所有其他电流）都维持不变。让我们来看看为什么会是这样。

试设想图15-2上的回路正在沿正x向运动，并选取z轴在B的方向，在边2中的传导电子将感受到一个沿线即沿y向的力。但由于这些电子的流动——造成电流——就会有一个与此力同向的运动分量。因此，每一电子将得到功率为 $F_y v$ 的功，其中 v 是电子沿导线的速度分量。我们将称对电子所做的这个功为电功。现在证明：如果该回路在一匀强场中运动，则总电功为零，因为对回路的某些部分做的正功等于对其他部分做的负功。但如果该电路是在一非均匀场中运动，那就不正确了，此时将会对电子做净功。一般说来，这功会倾向于改变电子的流动，但若电流维持不变，则能量必然会被那些维持电流恒定的电池组或其他电源所吸收或输出。上面当我们由式(15.9)计算 $U_{\text{机械}}$ 时，这能量还未包括进去，因为我们的计算仅仅包括施于导线整体上的那些机械力。

你可能在想：但作用于电子上的力取决于导线运动得多快，若导线运动得足够慢，也许这一电能便可以略去。真的，电能被输出的功率与导线运动的速率成正比，但输出的总能量却也与这一功率所持续的时间成正比。因此，总电能就正比于速度乘时间，那刚好是移动的距离。对于在场中移动给定的距离，就做了相同数量的电功。

让我们考虑单位长度的一段导线，其中通有电流I并沿与其本身及磁场B均成直角的方向以速率 $v_{\text{导线}}$ 运动。由于通有电流，所以导线中那些电子将具有沿导线的漂移速度 $v_{\text{漂移}}$ 。对每一电子所施的磁力在漂移方向上的分量为 $q_e v_{\text{导线}} B$ 。因此做出电功的功率为 $F v_{\text{漂移}} = (q_e v_{\text{导线}} B) v_{\text{漂移}}$ 。设每一单位长度的导线里共有N个传导电子，则所做电功的总功率为

$$\frac{dU_{\text{电}}}{dt} = N q_e v_{\text{导线}} B v_{\text{漂移}}.$$

但 $N q_e v_{\text{漂移}} = I$ ，即导线中的电流，因而

$$\frac{dU_{\text{电}}}{dt} = I v_{\text{导线}} B.$$

现在由于电流保持恒定，所以作用于那些传导电子上的力并不引起它们加速，也就是说这电能将不会成为电子所有而是归于维持电流不变的那个电源所有。

但要注意作用于导线上的力为 IB ，因而 $IB v_{\text{导线}}$ 也是对导线做机械功的功率，即 $dU_{\text{机械}}/dt = IB v_{\text{导线}}$ 。因此我们断言：对导线所做的机械功恰好等于对电流源所做的电功，因而回路的能量保持不变！

这并不是偶然的，而是我们所已知定律的一个推论。对导线中每个电荷的总作用力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

其做功的功率为

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = q[\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]. \quad (15.12)$$

如果没有电场，便只有第二项，而这项总是等于零。以后我们将见到，一个正在变化着的磁场会产生电场，因而我们的论证就只适用于在恒定磁场中移动着的导线。

那么虚功原理又怎会给出正确的答案呢？那是由于我们还未曾把世界上的总能量都计

算进去。我们未曾把正在产生磁场(该磁场正被着手进行处理)的电流能量也包括在内。

设想有一个如图15-3(a)所绘的那种完整系统,其中我们正在把带有电流 I_1 的回路移进磁场 B_1 中去,而这磁场是由线圈中的电流 I_2 产生的。原来回路里的电流 I_1 也将在线圈那里产生某个磁场 B_2 。如果回路正在移动,则场 B_2 将正在变化。正如我们将在下一章见到的,一个变化着的磁场会产生一个 E 场,而这一 E 场则将对导线中的电荷做功。这样一个能量也应包括在我们关于总能量的出纳表中。

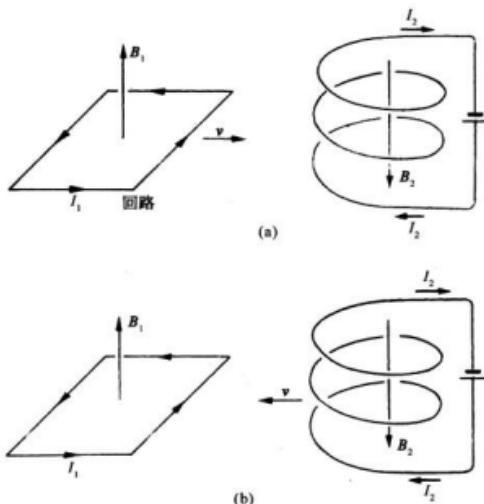


图 15-3 试求一个小回路在磁场中的能量

我们本来可以等到下一章才来求出这个新的能量项,但若按照下述办法应用相对性原理,则我们也可见到它将是什么。当把回路朝静止线圈移动时,我们知道回路中的电能恰与所做的机械功相等而符号相反。所以

$$U_{\text{机械}} + U_{\text{电}}(\text{回路}) = 0.$$

现在假设从一个不同的观点来考察所发生的事情,即在其中回路静止不动,而线圈向着它运动。这时线圈正在移进由回路所产生的场中。同样的论证会给出

$$U_{\text{机械}} + U_{\text{电}}(\text{线圈}) = 0.$$

在上述两种情况下所做的机械功相同,因为它来自两电路之间的作用力。

这两个方程之和给出

$$2U_{\text{机械}} + U_{\text{电}}(\text{回路}) + U_{\text{电}}(\text{线圈}) = 0.$$

整个系统的总能量,当然就是这两项电能再加上仅取一次的机械能。因此我们有

$$U_E = U_{\text{电}}(\text{回路}) + U_{\text{电}}(\text{线圈}) + U_{\text{机械}} = -U_{\text{机械}}. \quad (15.13)$$

世界上的总能量确实等于 $U_{\text{机械}}$ 的负值。比方,若我们需要磁偶极子的真实能量,则应写成:

$$U_{\text{总}} = +\mu \cdot B.$$

只有当我们假定一切电流都维持不变的那种条件时才能只用其中某一部分能量、即 $U_{\text{机械}}$ (这始终等于真实能量的负值)来求那机械力。在更普遍的问题中,我们就必须细心地把所有一切能量都包括进去。

在静电学中,我们已见过类似的情况。我们曾经证明,一个电容器的能量等于 $Q^2 / (2C)$ 。当我们应用虚功原理去求作用于电容器两板上的力时,能量的改变等于 $Q^2 / 2$ 乘以 $1/C$ 的改变,这就是说,

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2} \Delta \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{Q^2}{2} \frac{\Delta C}{C^2}. \quad (15.14)$$

现在假设我们曾在保持两导体间的电压不变的条件下,计算把两个导体向不同位置移动时所做的功。那么若我们做某些假定,则可以从虚功原理获得关于力的正确答案。由于 $Q = CV$, 所以真实的能量就是 $\frac{1}{2}CV^2$ 。但若我们定义一个等于 $-\frac{1}{2}CV^2$ 的人为能量,以及坚持使电压 V 维持不变,并令这一人为能量的变化等于机械功,则可应用虚功原理来求力。于是

$$\Delta U_{\text{机械}} = \Delta \left(-\frac{CV^2}{2} \right) = -\frac{V^2}{2} \Delta C, \quad (15.15)$$

上式与式(15.14)相同。即使我们忽略了为维持电压不变而由电系统所做的功,也仍能获得正确结果。这个电能又刚好是两倍的机械能而符号相反。

这样,若不把电压源必须作功以维持电压不变这个事实考虑在内,而人为地进行计算,则还是能够获得正确的答案。这与静磁学中的情况完全相似。

§ 15-3 恒定电流的能量

现在我们可以应用关于 $U_{\text{总}} = -U_{\text{机械}}$ 这一点知识来求出恒定电流在磁场中的真实能量。可以从一个小电流回路的真实能量出发,简单地称 $U_{\text{总}}$ 为 U ,便可写成

$$U = \mu \cdot B. \quad (15.16)$$

尽管这个能量是对平面矩形回路算出来的,但这同样的结果对于任何形状的小平面回路均适用。

一个任意形状的电路可以设想为由许多小的电流回路构成,从而可以求出该电路的能量。比方说,有一条如图 15-4 所示的回路 Γ 那种形状的导线。我们用一个 S 面来填满该曲线,并在该面上划出大量的小回路,其中每一个都可以认为是平面。如果让电流 I 沿每一小回路环行,净结果将犹如电流环绕 Γ 一样,因为在 Γ 内的那些电流将在所有线段上都互相抵消。物理上,这个小电流系统与原来的电路是不能区别的。能量也必然会相同,即刚好是那些小回路的能量之和。

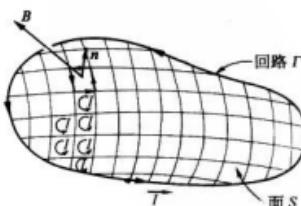


图 15-4 一个大回路在磁场中的能量可以认为等于许多个小回路的能量之和

设每一小回路的面积为 Δa , 则它的能量为 $I\Delta a B_n$, 其中 B_n 为垂直于 Δa 的分量。总能量为

$$U = \sum I B_n \Delta a.$$

当各回路趋于无限小的极限时, 求和变成积分, 即

$$U = I \int B_n da = I \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da, \quad (15.17)$$

式中 \mathbf{n} 是垂直于 da 的单位矢量。

如果令 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 则可利用斯托克斯定理把一个面积分与一个线积分联系起来:

$$I \oint_s (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da = I \oint_r \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad (15.18)$$

式中 $d\mathbf{s}$ 是沿 Γ 的线元。因此我们就有了对于任意形状的电路的能量:

$$U = I \oint_{\text{电路}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.19)$$

在这个表达式中, \mathbf{A} 当然是指产生了导线所在处之 \mathbf{B} 场的那些电流(而不是该导线中的电流 I)所造成的矢势。

现在, 恒定电流的任何分布都可以设想成由平行于电流线的一些细线电流所构成。对于这样的细线电路中的每一对, 能量由式(15.19)给出, 式中的积分是环绕其中一个电路取的, 同时应用那来自另一个电路的矢势 \mathbf{A} 。为求得总能量, 我们需要对所有各对求和。如果不保持一对一对求和, 而是把全部电流线都相加起来, 则会计算能量两次(以前在静电学中也曾见过类似的结果), 因而总能量可写成

$$U = \frac{1}{2} \int j \cdot \mathbf{A} dV. \quad (15.20)$$

这一公式相当于我们以前对静电能所求得的结果:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV. \quad (15.21)$$

因此, 如果我们愿意, 便可在静磁学中将 \mathbf{A} 看成是关于电流的一种势能。可惜, 这一概念不大有用, 因为它只适用于静场。实际上, 当场随时间变化时, 则式(15.20)和(15.21)均不会给出正确的能量。

§ 15-4 \mathbf{B} 与 \mathbf{A} 的对比

在本节中我们很想讨论下述问题: 矢势是否只是一种用作计算的工具——如同在静电学中所用的标势那样——或者矢势是一个“真实”的场? 难道磁场, 由于造成了作用于一个运动粒子上的力, 它就是一个“真实”的场吗? 首先, 我们应该说“一个真实的场”这一短语并不非常有意义。其一, 无论如何你可能不会感觉到磁场十分“真实”, 因为甚至整个有关场的概念都相当抽象。你不能伸出手来感受磁场。而且, 磁场之值并不十分确定, 例如, 通过选用一适当的运动坐标系, 你可以使在某一给定地点的磁场消失。

我们这里所谓“真实”的场是：一个真实的场就是被用来避免超距作用概念的一个数学函数。如果有一个带电粒子位于位置 P ，它会受到放在离 P 点某个距离处的其他电荷的影响。描述这相互作用的一种方法是讲其他电荷会在 P 点周围形成某种“状况”——不管它可能是什么状况。倘若知道了该状况，并通过给出电场和磁场来加以描述，则我们便能完全确定该粒子的行为——不需进一步询问那些情况是怎样产生的。

换句话说，若其他电荷以某种方式发生了改变，但由 P 点的电场和磁场所描述的 P 点的状况却依然未变，则该电荷的运动也将保持一样。这么一来，一个真实的场就是我们用某种方法规定的一组数字，即在某点所发生的无论什么事情都仅取决于该点的这些数字。我们不必知道其他地方将发生的更多事情。正是在这一种意义上我们将要来讨论矢势是否是一种“真实”的场。

你可能对这个事实感到奇怪，即矢势并不是单值的，它可以通过加上任一标量的梯度而改变，但丝毫不会改变施于粒子上的力。然而，这却与我们现在所谈的这种意义上的真实性问题毫不相干。比如，在某种意义上磁场可以通过相对论性变换而改变（ E 和 A 场也都如此），但我们却不会去操心如果场可以这样改变而发生的事情。这实际上并不会造成任何差别，与矢势是否是一种用来描述磁场的适当的“真实”场或只是一个有用的数学工具的问题毫无关系。

关于矢势 A 的用处我们也应作出一些评论。我们已见到，利用它并通过正常步骤即可计算已知电流的磁场，正如可用 ϕ 来求电场。在静电学中我们曾看到， ϕ 是由一个标量积分给出的：

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2. \quad (15.22)$$

通过三次微分运算，便可从这个 ϕ 获得 E 的三个分量。这个步骤通常要比在下列矢量式中算出三个积分较易于掌握：

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)e_{1z}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.23)$$

首先这里就有三个积分，其次，每个积分一般又较困难。

对静磁学来说，优点远没有那么明显。 A 的积分就已经是一个矢量积分：

$$A(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2)dV_2}{r_{12}}, \quad (15.24)$$

这当然包含了三个积分。并且，当我们取 A 的旋度以获得 B 时，不得不做六次微商把它们一对一对地结合起来。在大多数问题中，这一步骤是否确实比直接从下式算出 B 来较为容易，就不是立即能看清楚的：

$$B(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2) \times e_{1z}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.25)$$

对于简单问题，应用矢势往往较为困难，那是由于下述原因。假设我们只对一点的磁场 B 感兴趣，而问题又具有某种好的对称性——比如说，我们要求出在一环形电流的中轴上某一点的场。由于对称性，我们可以通过对式(15.25)的积分而很容易地获得 B 。然而，假如我们先求出 A ，则还得从 A 的微商算出 B ，因而就一定要知道在所注意点邻近所有点的 A

值。而这种点大多数位于对称轴的外面,从而使 \mathbf{A} 的积分变得较复杂。例如,在那圆环问题中,我们不得不用到椭圆积分。在这样的问题中, \mathbf{A} 显然不是十分有用。但对于许多复杂问题,用 \mathbf{A} 来计算比较容易,那却是真的。不过为了证明技术上的这点方便就认为使你多学习一种矢量场是正当的,那就有点困难了。

我们引进了 \mathbf{A} 是因为它的确具有重要的物理意义。它不仅与电流的能量有关,如在上节中我们曾经见到的;而且它还是在上述意义上的一种“真实”的物理场。在经典力学中我们显然可把作用于一粒子上的力写成下式:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (15.26)$$

因而若给出了力,则关于运动的一切事情就都确定了。在任何 $\mathbf{B} = 0$ 的区域中即使 \mathbf{A} 不为零,诸如在一螺线管外面,那里并没有可觉察到的 \mathbf{A} 的效应。因此人们早已相信 \mathbf{A} 不是一个“真实”的场。然而事实却证明,存在着涉及到量子力学的现象,它们表明场 \mathbf{A} 实际上就是我们定义过的那种意义的“真实”的场。在下一节中我们将向你们说明那是怎么回事。

§ 15-5 矢势与量子力学

当我们从经典力学过渡到量子力学时,在什么概念是重要的方面有了很多改变。我们曾在第1卷中谈过其中的一些,特别是,力的概念逐渐消失,而能量和动量的概念却成为最重要的了。你应当记得,人们与之打交道的乃是在空间和时间里变化着的概率幅,而不是粒子的运动。在这些振幅中,既有与动量相联系的波长,又有与能量有关的频率。因此,那些能确定波函数相位的动量和能量就成了量子力学中重要的量了。我们处理的是改变波的波长的相互作用,而不是力。力的概念变得十分次要,如果它多少还存在一点的话。比方,当人们谈论核力时,他们经常加以分析和计算的是两个核子间的相互作用能量,而不是它们之间的力。从没有人会为了找出力是个什么样子而对能量取微分。在这一节中我们要描述矢势和标势是怎样进入量子力学的。实际上,正因为动量和能量在量子力学中起着重要作用,才使得 \mathbf{A} 和 ϕ 提供了把电磁效应引进量子力学的最直接途径。

我们必须稍微复习一下量子力学是如何处理问题的。让我们再次考虑在第1卷第37章中曾经描述过的假想实验,在其中电子经两个狭缝而衍射。这个装置再次表示在图15-5上。能量几乎相同的电子离开了源而向具有两条狭缝的壁前进。在壁的外面是“挡板”,在其上有一个可移动的探测器,我们称之为 I ,它是用来测量电子到达挡板上距离对称轴为 x 处的一个小区域中的比率。这比率正比于各个别电子在离开了源之后到达该挡板区的概率。这概率具有如图所示的那种复杂形状的分布,我们认为这是由于两个波——每个来自一个狭缝——相互干涉所致。这两个波的干涉结果取决于它们间的相位差。也就是说,若振幅分别为 $C_1 e^{i\Phi_1}$ 和 $C_2 e^{i\Phi_2}$,则相位差 $\delta = \Phi_1 - \Phi_2$ 就确定了它们的干涉图样[见第1卷,式(29.12)]。设屏与狭缝之间的距离为 L ,又若通过两狭缝的电子所走过的程差为 a ,如图所示,则这两个波的相位差为

$$\delta = \frac{a}{\lambda}. \quad (15.27)$$

照例,我们令 $\lambda = \lambda/(2\pi)$,其中 λ 就是概率幅空间变化的波长。为简单起见,将只考虑那些

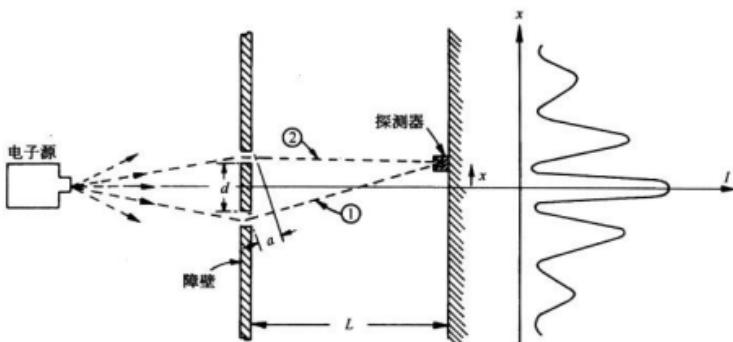


图 15-5 用电子做的一个干涉实验(同时参阅第1卷第37章)

远小于 L 的 x 值, 这样便可令

$$a = \frac{x}{L} d$$

和

$$\delta = \frac{x}{L} \frac{d}{\lambda}. \quad (15.28)$$

当 x 等于零时, δ 为零, 两波同相, 因而概率有一个极大值。当 δ 等于 π 时, 两波反相, 它们就会干涉相消, 而概率成为极小。因此, 我们将得到有关电子强度的那种波形函数。

现在我们想要说明用来代替力的定律 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的量子力学定律。这将是用来确定具有量子力学性质的粒子在电磁场中的行为的那种定律。由于发生的事件都要由概率幅来确定, 所以这一定律就必然会告诉我们磁效应如何影响概率幅; 我们不再与粒子的加速度打交道了。这定律是这样的: 经过任一轨道的粒子, 其概率幅的相位因磁场存在而改变的量, 等于矢势沿整个轨道积分乘该粒子的电荷再除以普朗克常量。也就是,

$$\text{磁所引起的相位变化} = \frac{q}{\hbar} \int_{\text{轨道}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.29)$$

要是没有磁场, 波到达时会有某一定的相位。但若某处存在磁场, 则到达波的相位增加了式(15.29)中的积分。

尽管对于目前的讨论不必用上它, 但我们还是要提出静电场的效应在于产生一个相位变化, 它等于标势 ϕ 的时间积分的负值:

$$\text{电所引起的相位变化} = -\frac{q}{\hbar} \int \phi dt.$$

上述两式不仅对于静场正确, 而且合起来对于静的或动的任何电磁场也都正确。这就是用来代替 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 的定律。然而, 现在我们只考虑静磁场。

假设在双狭缝实验中存在磁场, 则我们要问, 通过两狭缝的两个波在到达屏上时其相位如何。两波的干涉确定概率的极大值将出现在何处。我们可把沿路径(1)的波的相位叫作

Φ_1 。若 $\Phi_1(B=0)$ 为在没有磁场时的相位，则当加上磁场时这个相位便将是

$$\Phi_1 = \Phi_1(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.30)$$

同理，关于路径(2)的相位为

$$\Phi_2 = \Phi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.31)$$

这两个波在探测器上的干涉取决于其相位差

$$\delta = \Phi_1(B=0) - \Phi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} - \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.32)$$

无场时的相位差我们将称之为 $\delta(B=0)$ ，那恰好就是在上面式(15.28)中曾经算出来的那个相位差。并且，我们注意到，这两个积分还可以写成一个沿路径(1)向前并沿路径(2)返回的积分，我们称这个路径为闭合路径(1-2)。因而有

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.33)$$

上式告诉我们，电子的运动如何被磁场所改变。有了这个式子，我们就能求出在挡壁上强度为极大和极小的那些新位置。

可是，在做这件事之前，我们要提出下面有趣而又重要的一点。你会记起，矢势函数具有某种任意性。其差为某一标量函数梯度 $\nabla\psi$ 的两个不同的矢势函数 \mathbf{A} 和 \mathbf{A}' ，都代表同一个磁场，因为梯度的旋度为零。因此，它们将给出相同的经典力 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。如果在量子力学中其结果取决于矢势，则在许多可能的 \mathbf{A} 函数中究竟哪一个是正确的呢？

答案是， \mathbf{A} 同样的任意性在量子力学中依然存在。如果我们把式(15.33)中的 \mathbf{A} 改变成 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ ，则对于 \mathbf{A} 的积分变成

$$\oint_{(1-2)} \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{s} = \int_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{(1-2)} \nabla\psi \cdot d\mathbf{s}.$$

$\nabla\psi$ 的积分仍环绕闭合路径(1-2)，但根据斯托克斯定理，梯度的切向分量沿一闭合路径的积分总等于零。因此， \mathbf{A} 和 \mathbf{A}' 两者都给出相同的相位差和相同的量子力学干涉效应。在经典和量子力学的两种理论中只有 \mathbf{A} 的旋度才是要紧的，对 \mathbf{A} 函数的任何选择，凡具有正确旋度的，都给出了正确的物理意义。

如果我们引用 § 14-1 的那些结果，则结论明显相同。那里我们曾求得 \mathbf{A} 沿一闭合路径的线积分为穿过该路径的 \mathbf{B} 的通量，在这里就是穿过路径(1)与(2)之间的通量。如果我们愿意，式(15.33)便可以写成：

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} [\text{路径(1)与(2)之间 } \mathbf{B} \text{ 的通量}], \quad (15.34)$$

式中 \mathbf{B} 的通量通常指 \mathbf{B} 的法向分量的面积分。这结果仅取决于 \mathbf{B} ，从而也仅取决于 \mathbf{A} 的旋度。

由于用 \mathbf{B} 或用 \mathbf{A} 都能写出结果，因此你可能倾向于认为 \mathbf{B} 保持它本身为“真实”的场，而 \mathbf{A} 仍可视作为一种人为的结构。但我们原来提出的“真实场”的定义，是建筑在真实场不会对粒子做超距作用的概念上的。然而，我们能够举出一个例子，其中在有某种机会找到粒

子的任何地方， \mathbf{B} 都等于零或至少任意地小，因而不可能认为磁场会直接对粒子作用。

你应当记得，对于通有电流的长螺线管，管内有 \mathbf{B} 场，而管外则无；但却有许多 \mathbf{A} 环绕在管的外面，如图 15-6 所示。若我们安排一种情况，其中电子只在螺线管外被发现——即在那个只有 \mathbf{A} 的地方——则按照式(15.33)对其运动的影响依然存在。从经典方面看，这是不可能的。按经典理论是，力仅取决于 \mathbf{B} ；为了知道螺线管是否正通有电流，就必须使粒子穿过它。但从量子力学方面看，通过粒子围绕螺线管运转，甚至不用靠近它，你就能够发现有磁场存在于螺线管内！

假设我们把一个直径很小的长螺线管恰好放在障壁后面的两缝之间，如图 15-7 所示。螺线管直径要比两狭缝间的距离 d 小得多。在这种情况下，电子在狭缝处的衍射不会提供电子接近该螺线管的相当大的概率。这对我们的干涉实验将会发生什么影响呢？

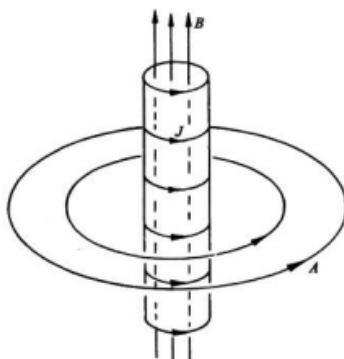


图 15-6 一个长螺线管的磁场和矢势

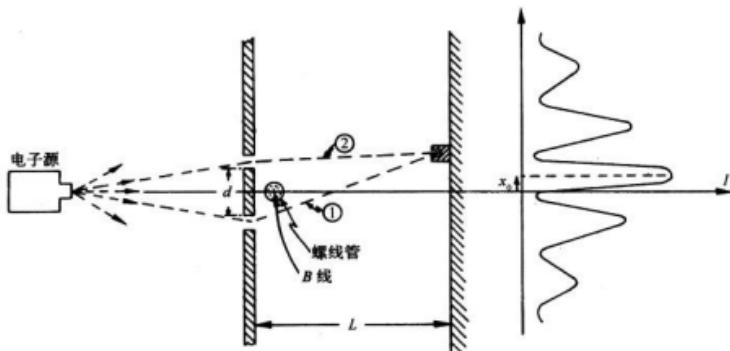


图 15-7 磁场能够影响电子的运动，哪怕场仅存在于其中找到电子的概率是任意小的区域里

试比较电流有否流经螺线管的两种情况。若没有电流，我们便不会有 \mathbf{B} 或 \mathbf{A} ，因而就得到挡板处电子强度的原来图样。但若对螺线管通电流并在管内建立磁场 \mathbf{B} ，则在管外便有 \mathbf{A} 。于是就存在一个正比于管外 \mathbf{A} 的环流的相位差方面的移动，这意味着整个极大和极小的图样被移至一个新位置。事实上，由于对任一对路径来说，穿过其中的 \mathbf{B} 的通量是常数，因而 \mathbf{A} 的环流也是常数。对于每一到达点来说就有相同的相位变化；也就是相当于使整个图样在 x 方向上移动一个常数，比方说 x_0 ，那是容易算出的。极大强度将出现在两个波的相位差为零的地方。应用关于 δ 的式(15.32)或(15.33)以及关于 $\delta(\mathbf{B} = 0)$ 的式(15.28)，我们得

$$x_0 = -\frac{L}{d} \lambda \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad (15.35)$$

或

$$x_0 = -\frac{L}{d} \lambda \frac{q}{\hbar} [\text{路径}(1) \text{与}(2) \text{之间 } \mathbf{B} \text{ 的通量}]. \quad (15.36)$$

从螺线管所在的位置来看,出现的图样*应如图 15-7 所示。至少,这是量子力学的预言。

的确如此,这一实验最近已经做成了。它是一个十分难做的实验,由于电子的波长很短,所以仪器必须以微小的尺度来观察干涉现象。两狭缝必须互相靠近,这意味着需要有一个非常细的螺线管。事实证明,在某些场合下,铁晶体将会生长成十分长而又只在显微镜下才能看得到的细丝,即所谓晶须。当这些铁晶须被磁化时,像微小的螺线管,因而除了靠近两端的地方,外面就没有任何磁场。电子相干实验,是把这种晶须放在两狭缝之间做出来的,而所预言的电子图样中的移动被观测到了。

于是,在我们的意义上 \mathbf{A} 场是“真实”的。你可能会说:“但磁场本来就有。”本来就有,不过要记住我们原来的概念——所谓场是“真实”的,那只要它是为了得到运动而就必须在粒子所在的位置被规定的。在晶须里的 \mathbf{B} 场却有着超距的作用。如果我们不愿意用超距作用来描写它的影响,则非得用矢势不可。

这一课题曾有过一段有趣的历史。我们所描述的理论从 1926 年量子力学问世时人们就知道了。矢势出现在量子力学的波动方程(薛定谔方程)中的事实,从该方程最初被写出来的那一天起就已经明显了。它不可能以任何轻易的方式由磁场代替,这已由企图做此种尝试的人们陆续注意到了。从我们对于在没有磁场的区域里运动的电子仍然受到影响的例子来看,那也是清楚的。但由于在经典力学中 \mathbf{A} 没有显示出任何直接的重要性,并且由于它可以通过加上一梯度而改变,人们便不断地认为矢势不具有直接的物理意义——即使在量子力学中也只有磁场和电场才是“正确”的。在进行回顾时似乎觉得奇怪,为什么从没有人想要讨论这一实验,一直到了 1956 年才由博姆和阿哈罗诺夫最先对此提出建议,从而使整个问题明朗化。其意义始终存在,但就是没有人曾注意到它。于是,当这一事情被提起时许多人都颇受震动。这就是为什么会有人认为值得做实验以弄明白它确实是正确的,尽管这么多年来已被人们确信的量子力学给出过明确的答案。有趣的是,像这样一件事情竟搁置达 30 年之久,只是由于对什么东西有意义而什么东西没有意义的某些偏见,就使这件事一直被忽视。

现在我们希望继续做稍微进一步的分析。要证明量子力学公式与经典公式间的关系,即证明为什么结果是:若以足够大的尺度来考察事件,则它看起来好像粒子被等于 $qv \times \nabla \times \mathbf{A}$ 的力所作用着似的。为要从量子力学得到经典力学,需要考虑这种情况,其中所有波长比起如场那样的外加条件做出可观变化所跨越的距离来都远为微小。我们将不在最普遍的场合下证明这一结果,而只是一个十分简单的例子表明它是如何得出来的。我们再次考虑相同的狭缝实验,但不再把所有磁场都局限在两狭缝间的一个十分微小的区域里,而是设想磁场延伸至狭缝后面较广阔区域中,如图 15-8 所示。我们将考虑一种理想情况,其中磁场

* 如果 \mathbf{B} 是从图面向外,则根据我们曾对其下过的定义,通量为正,而因电子的电荷 q 为负,所以 x_0 为正。

在与 L 相比相当小的、宽度为 w 的狭窄长条中是均匀的(那很容易安排, 挡板可以随意地放在某一远处)。为了要算出相位的移动, 必须算出沿路径(1)和(2)的两个积分。正如我们曾经见到的, 它们间的差值恰好就是在两路径间 \mathbf{B} 的通量。对于我们的近似程度, 这通量为 Bwd 。这样, 对于这两路径的相位差就是

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} Bwd. \quad (15.37)$$

我们注意到, 对于我们所取的近似程度, 这一相位移动与角度无关。因此, 这一效应又把整个图样向上移动一个距离 Δx 。利用式(15.35),

$$\Delta x = -\frac{L\lambda}{d}\Delta\delta = -\frac{L\lambda}{d}[\delta - \delta(B=0)].$$

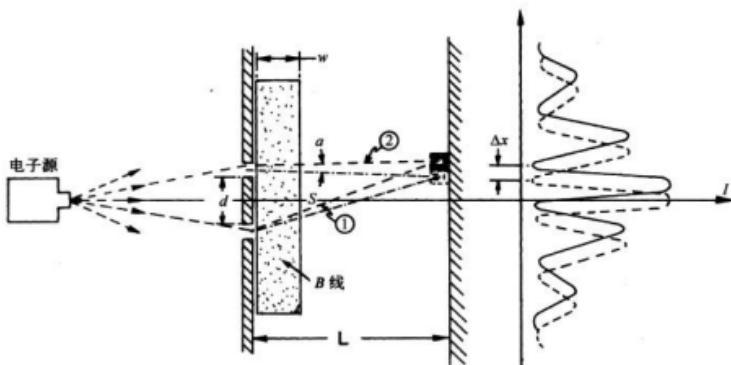


图 15-8 由狭长条磁场所引起的干涉图样的移动

对于 $\delta - \delta(B=0)$, 利用式(15.37)得

$$\Delta x = -L\lambda\frac{q}{\hbar}Bw. \quad (15.38)$$

这样的移动相当于把所有轨道都偏转了一个角度 α (见图 15-8), 这里

$$\alpha = \frac{\Delta x}{L} = -\frac{\lambda}{h}qBw. \quad (15.39)$$

原来按照经典理论, 我们也会期待薄狭长条磁场会把所有轨道都偏转某一个小角度, 比如说 α' , 如图 15-9(a)所示。当电子通过磁场时, 它们将感受到一个持续了时间 w/v 的横向力 $qv \times \mathbf{B}$ 。它们横向的动量的改变就恰好等于这个冲量, 因此

$$\Delta p_x = -qvB. \quad (15.40)$$

角偏转[图 15-9(b)]等于这一横向动量对总动量 p 的比。我们得到

$$\alpha' = \frac{\Delta p_x}{p} = -\frac{qvB}{p}. \quad (15.41)$$

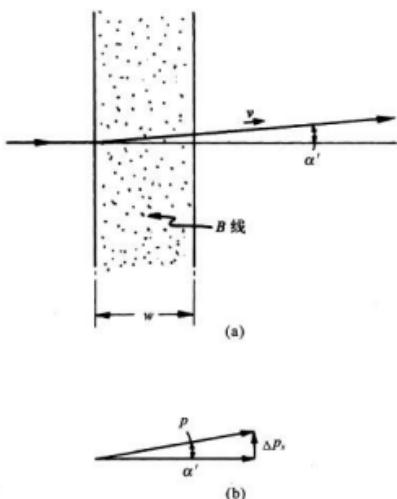


图 15-9 粒子通过狭长条磁场时被偏转

可以把这个结果同由量子力学算出来的相同的量 α 做比较。但经典力学与量子力学之间的关系则是这样：一个具有动量 p 的粒子相当于随波长 $\lambda = \hbar/p$ 变化的量子振幅。应用这个等式， α 和 α' 就彼此全等。经典的与量子的两种计算给出相同的结果。

从这个分析我们看到，在量子力学中以明显的形式出现的矢势怎样产生一个仅取决于其微商的经典力。在量子力学中重要的是邻近路径间的相干作用，结果往往是该效应仅取决于从一点至另一点场 \mathbf{A} 变化了多少，因而仅取决于 \mathbf{A} 的微商而并不取决于 \mathbf{A} 本身之值。虽然如此，矢势 \mathbf{A} （以及与相随的标势 ϕ ）看来似乎给出了物理学的最直接描述。我们越是深入到量子理论中去，这一点就变得越清楚。在量子电动力学的普遍理论中，人们把矢势和标势作为代替麦克斯韦方程的一组方程中的基本量： \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 逐渐从物理定律的现代表达式中消失，它们正在被 \mathbf{A} 和 ϕ 所代替。

§ 15-6 对静态是对的而对动态将是错的

我们现在处于探索静场这一主题的末尾了。在这一章中，我们已经冒险地开始接近必须对付场随时间变化时所发生的情况。我们过去处理磁场能量时，仅仅依靠躲入相对性论证的避难所才逃避了它。即使如此，我们对能量问题的处理还是多少带着人为性和也许甚至是神秘性，因为曾经忽略了实际上运动的线圈必定产生变化的场这个事实。现在正是学习处理随时间变化的场——电动力学这一门学科的时候。我们将在下一章中做这件事。然而，首先将要强调下面几点。

尽管在这一课程中，我们是从一组完整而又正确的电动力学方程的表达方式出发的，但我们立刻开始学习某些不完整的部分——因为那是比较容易的。从静场的简单理论出发，并只在后来才逐步进入包括动态场在内的更复杂的理论，是有很大优越性的。马上要学习的新材料比较少，因而也就有时间给你去发展智力，为更加艰巨的任务做准备。

但在我们开始了解全部事情之前的这一过程中会存在这样的危险性，我们以这种方式学习过的那些不完整真理可能变成了根深蒂固的东西并误认为是全部真理——把那些正确的与那些有时才是正确的理论互相混淆起来。因此，我们在表 15-1 中提供一个我们已经接触过的重要公式的总结，把那些普遍正确的与那些只有对静态才正确、而在动态则是错误的东西区别开来。这个总结表也部分地表达了我们今后的动向，因为在今后处理动态时就将详细地发展此刻我们仅仅必须提出来而没有加以证明的那些东西。

对这张表做一些说明可能会有用处。首先，你应该注意到，我们最初处理的那些方程都

是正确的方程——在那里并没有给你错误的印象。电磁力(常称为洛伦兹力) $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 是正确的。只有库仑定律才是错误的, 它仅适用于静态。关于 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的四个麦克斯韦方程也是正确的。当然, 那些我们对静态取的方程则是错的, 因为已删去了所有含有时间微商的项了。

高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ 依然正确, 但 \mathbf{E} 的旋度一般并不等于零。所以 \mathbf{E} 不能总是等于一个标量——静电势——的梯度。我们将看到标势依然保存, 但它是一个随时间变化着的量了, 必须与矢势一起配合才能用作对电场的完整描述。所以, 那些支配这个新标势的方程也必然都是新的。

我们也必须把在导体里 \mathbf{E} 等于零的概念丢掉。当场正在变化时, 导体里的电荷一般没有时间安排它们本身使得电场为零。它们被迫运动, 但却永远达不到平衡。唯一普遍的说法是: 导体里的电场产生了电流。所以在变化的场中导体并不是一个等势体。由此可知, 电容器的概念不再是准确的。

表 15-1

一般是错的(只有对静态才正确)

总是对的

$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (库仑定律)	$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (洛伦兹力) $\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (高斯定律)
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ $E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$ 对于导体, $\mathbf{E} = 0$, $\phi = \text{常数}$, $Q = CV$	$\rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (法拉第定律) $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 在导体中, \mathbf{E} 造成电流
$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{j}{\epsilon_0}$ (安培定律) $B(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$	$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (不存在磁荷) $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\rightarrow c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{j}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (泊松方程) $\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{j}{\epsilon_0 c^2} \\ \text{而} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{和} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{j}{\epsilon_0 c^2} \\ \text{而} \\ c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$
$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2$ $\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2)}{r_{12}} dV_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \phi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2, t')}{r_{12}} dV_2 \\ \text{和} \\ \mathbf{A}(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2, t')}{r_{12}} dV_2 \\ \text{而} \\ t' = t - \frac{r_{12}}{c} \end{array} \right.$
$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV + \frac{1}{2} \int j \cdot A dV$	$U = \int \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\mu_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV$

那些用箭头(\rightarrow)标明的方程都是麦克斯韦方程。

由于不存在磁荷,所以 \mathbf{B} 的散度就永远为零,因此, \mathbf{B} 总可以等于 $\nabla \times \mathbf{A}$ (一切都不变)。但 \mathbf{B} 的产生不仅来自电流: $\nabla \times \mathbf{B}$ 正比于电流密度加上一个新的项 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 。这意味着, \mathbf{A} 由一个新的方程同电流相联系,而且也同 ϕ 有关。如果为了我们自身的方便而利用对 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 进行选择的自由,则可以把关于 \mathbf{A} 或 ϕ 的方程安排成一种简单而又优美的形式。因此,建立 $c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = -\partial \phi / \partial t$ 的条件,就能使有关 \mathbf{A} 或 ϕ 的微分方程表现出如表中所列的形式。

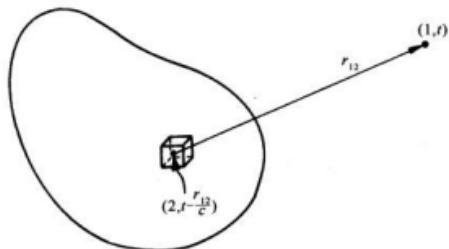


图 15-10 通过把在游动点(2)处源的每个体积元中较早时刻 $t - r_{12} / c$ 的电流和电荷的贡献相加起来,而给出 t 时刻点(1)处的势

\mathbf{A} 和 ϕ 这两种势仍可通过对电流和电荷的积分而求得,但已不同于静态积分。然而,最令人惊异的是,真实的积分很像静态的积分,只有一个小小的、在物理方面引人注意的修改。当我们计算积分求某一点、比如图 15-10 中的点(1)的势时,就必须使用较早时刻 $t' = t - r_{12} / c$ 、位于点(2)处的 \mathbf{j} 和 ρ 值。正如你所预期的,影响以速率 c 从点(2)传播至点(1)。用这一点小改变,人们就能求解关于变化电流和电荷的场。因为一旦我们知道了 \mathbf{A} 和 ϕ ,就能像以前那样从 $\nabla \times \mathbf{A}$ 得到 \mathbf{B} ,而又从 $-\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ 得到 \mathbf{E} 。

最后,你将注意到,有些结果——比如,在电场中的能量密度为 $\epsilon_0 \mathbf{E}^2 / 2$ ——对于电动力学与对于静电磁学一样都是正确的。你应当不会误解以致认为这完全是“自然”的。在静态中导出的任何公式的正确性都必须在动态情况下再度加以论证。一个相反的例子是,由 $\rho \phi$ 的体积分所表达的有关静电能的表示式,这个结果仅仅对于静态才正确。

在适当的时候我们将更加详细地考虑上述所有这些内容,但记住这个总结表也许是有用的,这样你就会知道哪些可以忘记,哪些作为永远正确的东西应该记住。

第 16 章 感生电流

§ 16-1 电动机与发电机

1820 年对电和磁间密切关系的发现曾令人十分兴奋——在那以前，电和磁这两个课题一直被认为是完全互相独立的。首先发现的是导线中的电流会产生磁场，接着于同一年中，又发现载流导线在磁场中会受到力的作用。

每当机械力存在时，令人兴奋的一件事是，利用它在机器中做功的可能性。当上述现象被发现后，几乎立即就有人开始利用这些作用于载流导线上的力来设计电动机了。这种电磁式发动机的原理如图 16-1 中裸露轮廓图所示。用一块永磁铁——通常配合一些软铁片——在上下两槽里产生磁场。在每一个槽的对面都有南北两极，如图所示。在每个槽中放置铜制矩形线圈的一边。当电流通过线圈时，在两槽处的电流互相对向，因而力也反向，这样便产生一个环绕轴线的力矩。如果线圈安装在传动轴上以便转动，则可与滑轮或齿轮互相配合而做功了。

同样的设想也可用来制作电学测量方面的灵敏仪器。自从该力的规律被发现之后，电学测量的精确度就大大提高了。首先，可以使电流绕行许多匝而不仅仅是一匝，以促使这种电动机的力矩大大增加。于是，这个线圈又可以装配得用一个很小的力矩便能够转动——或者把它的转轴装在一个十分精致的宝石轴承上，或者用十分细小的金属丝或石英丝来悬挂该线圈。于是一个极小电流便能使线圈转动，而对于小角度来说这转动的大小将与电流成正比。把一指针粘紧在该线圈上，或对于非常精密的仪器，则通过安装在线圈上的一个小镜子来观察标尺的像的移动，这转动的大小就可以测到了。这样的仪器叫作电流计。至于伏特计和安培计，也是基于相同的原理工作的。

这一概念也可用来大规模地制造提供机械动力的大型电动机。利用安装在轴心上的一组触点可使线圈每转半周接法就变换一次，这样，线圈便能不断旋转，于是力矩将始终朝同一方向。小型直流电动机就是这样制成的。较大型的电动机，无论是直流的或交流的，往往利用一个由电源激励的电磁铁来代替永磁铁。

在认识了电流能够产生磁场之后，人们立即提出，也可以设法使磁铁产生电场。各种实

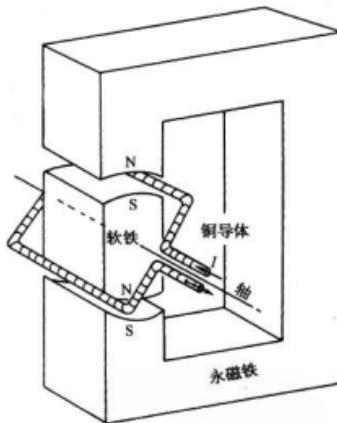


图 16-1 一部简单电磁式发动机的示意图
轮廓图

验都尝试过。例如,将两根导线平行排列,当电流通过其中之一时就希望能在另一根导线中也找到电流。当时的看法是:磁场或许会用某种方法在第二根导线中拖动着电子前进,给出诸如“同类喜欢以同样的方式运动”的规律。结果是否定的,尽管已利用了当时可使用的最大电流,以及为探测电流用的最灵敏电流计。把大块磁铁置于导线旁边也产生不出可观测到的效果。最后,法拉第于1840年发现最重要的特点给漏掉了——只有当某种东西正在变化时电效应才存在。如果两导线之一中存在着正变化着的电流时,则另一根导线中会有电流感应,或者如果一块磁铁在一电路附近运动,则在该电路中会有电流存在。我们讲,这些电流是被感生出来了。这就是法拉第所发现的电磁感应效应。它把相当沉闷的静场课题转变成包括大量奇异现象的、十分激动人心的动力学课题。本章专为其中某些现象做出定性描述。正如以后将会见到的,人们很快就将遇到难以详细做出定量分析的一些相当复杂的情况。但不要紧,这一章的主要目的首先在于使你熟悉所涉及的现象,我们在以后才做详细分析。

从我们所学过的知识可以容易理解磁感应现象的一个特性,尽管在法拉第时代还没有被人知道。它来自作用于运动电荷的 $v \times B$ 这种力,而该力正比于电荷在磁场中的速度。假设有一根导线在一块磁铁附近经过,如图 16-2 所示,并将这根导线的两端连接至一电流计。如果移动导线使其通过磁铁的一端,电流计的指针就会摆动。

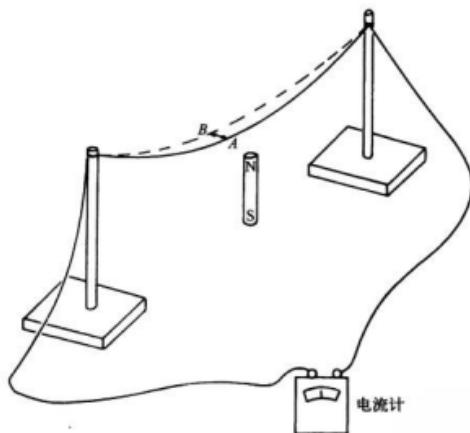


图 16-2 一根导线在磁场中运动会产生电流,并由电流计显示出来

磁铁产生了某个竖向磁场,而当我们把导线推过该磁场时,导线里的电子便会感受到一个侧向力——既垂直于场也垂直于运动。该力沿着导线推动电子。但为什么会使电流计摆动呢,它与那个力相距有那么远?这是由于当那些感受到磁力的电子试图运动时,它们——通过电的排斥——沿导线推稍远的电子,这些被推的电子又依次推斥更远一些的电子,以此类推,在一个长距离上的电子也受到推斥,简直令人吃惊。

最早制成电流计的高斯和韦伯感到如此惊异,以致试图弄清楚这些力在导线中会传到

多远。他们把导线跨越整个市区。在一端，高斯先生将导线接至电池组（电池在发电机之前就为人们所熟悉），而韦伯先生则在另一端观察电流计的摆动。于是他们有了一种在长距离上通讯的办法——这就是电报的起源！当然，这并非直接与感应有关，它只是使导线载流必须用的方法，不管电流是不是由感应推动的。

现在假设在图 16-2 的装备中，我们让导线静止不动而令磁铁运动。这样，仍然会看到在电流计上的效应。正如法拉第所发现的那样，把磁铁在导线下面朝某一方向移动与将导线在磁铁上面朝反向移动，具有相同的效应。但当磁铁被移动时，就不再有作用于导线内部电子上的任何 $v \times B$ 力了。这是法拉第找到的一个新效应。今天，我们也许希望从相对论性的论证中来理解它。

我们已经了解到一块磁铁的磁场是来自它的内部电流。所以如果不用图 16-2 上的那块磁铁，而是用一个载有电流的线圈，我们预料也会观察到相同的效应。如果使导线运动并经过线圈，则将有电流流经该电流计，或如果让线圈运动并经过导线，情形也是如此。但现在有一个更动人的事态发生了：若我们不是通过运动而是通过改变其中的电流变更线圈的磁场，那么在电流计中又再度会发生效应。例如，设有一导线回路放在一线圈附近，如图 16-3 所示，此时若保持回路与线圈两者都不动，而断开线圈中的电流，就会有一电流脉冲通过电流计。当我们再对线圈通上电流时，电流计则将向相反的方向摆动。

每当在诸如图 16-2 或图 16-3 所示情况下，电流计有电流通过时，导线里的电子总会受到沿着导线某一方向的一个净推力。在不同位置可能有不同方向的推力，但在某一方向的推力比其他方向的大。这推力绕整个电路的累积是什么，这个净的累积起来的推力叫作该电路的电动势(emf)。更准确地说，电动势被定义为导线中单位电荷所受的沿线切向力对整个电路环绕一周的路程所作的积分。法拉第的整个发现在于可以由三种不同方法在导线中产生电动势：通过使导线运动，通过使磁铁在导线附近运动，或通过改变邻近导线中的电流。

让我们再考虑图 16-1 的那部简单机器，只是现在不再输入电流通过导线使之转动，而是由一外力，比如是用手或水轮机使该回路旋转。当线圈转动时，它的导线在磁场中运动，而我们便将在该线圈电路中发现电动势。电动机变成了发电机。

发电机的线圈由于运动就有感生电动势。这电动势大小由法拉第所发现的一个简单法则给出（目前仅陈述这一法则，等待以后再详细分析）。法则 是这样的：当穿过回路的磁通量（这通量就是 B 的法向分量对整个回路所包围面积的积分）随时间变化时，电动势等于这通量的变化率。我们称这一法则为“通量法则”。你看到当图 16-1 中的线圈转动时，穿过它的通量改变了。开始时有某一通量朝一个方向穿过，然后当线圈转过了 180° 时相同的通量朝

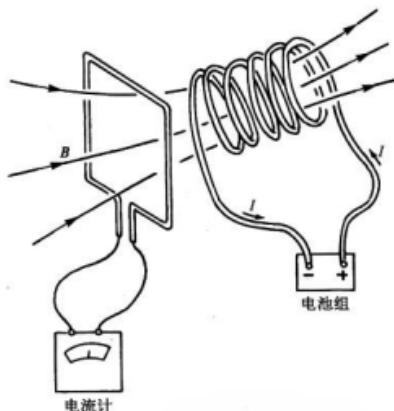


图 16-3 如果移动一个载流线圈或将其中的电流变化，这个线圈会在第二个线圈中产生电流

另一个方向穿过。如果继续转动线圈，该通量首先是正，然后是负，再又是正，如此等等。通量的变化率必然也是正负交替地改变的。因而在该线圈中就有一个交变电动势。如果将这线圈的两端通过某种滑动接触——称为汇电环——(只有这样导线才可不至于扭绕起来)与外面导线连接，则我们具有了一部交流发电机。

或者，也可以这样安排：通过某些滑动接触，使在每转动半圈之后线圈端点与外导线之间的连接便反转过来，因而当电动势反转时，连接方式也反转了。因而电动势的脉冲始终在同一方向推动电流通过外电路。这样，我们就有一部所谓的直流发电机。

图 16-1 上的那部机器既是电动机也是发电机。利用两部结构全同的永磁式直流“电动机”，在它们的线圈间用两根铜线相连，则关于电动机与发电机之间的互易性就可以漂亮地显示出来。当其中一个线圈的轴做机械旋转时，它便成为一部发电机而推动另一部作为电动机。如果将第二部的轴旋转，则它变成发电机而把第一部当成电动机驱动。因此，这里是自然界中新型等效性的一个有趣例子：电动机与发电机彼此等效。事实上，这种定量的等效性并非完全出于偶然，它是与能量守恒律密切相关的。

能够用来既产生电动势又响应电动势的装置的另一种例子，是一部标准电话机的接收器——即“听筒”。贝尔原来的电话机由用两根长导线连接起来的这样两个听筒构成，其基本原理如图 16-4 所示。一块永磁铁在由软铁制成的两块“轭铁”以及在一薄铁膜片中产生了磁场，该膜片则由声压引起运动。当这膜片运动时，改变了轭铁中的磁场大小。因此，当声波撞击膜片时，在环绕其中一块轭铁的线圈中所穿过的磁通量就改变了。因而在该线圈中就有电动势。如果线圈的两端与一电路相连接，则一种以电的方式表达声音的电流就会建立起来。

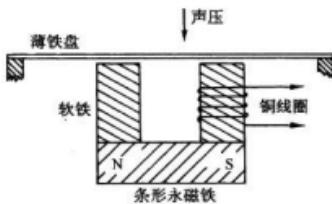


图 16-4 电话的送、受话器

如果图 16-4 的线圈两端用两根导线连接至另一个完全相同的装置，则那变化着的电流将在第二个线圈中流动。这些电流将产生一个变化着的磁场，并将对该铁的膜片造成一个变化的吸引作用。这膜片将上下振动而造成声波，这些声波大体上与原来使膜片振动起来的那些声波相似。这就是说，利用几块铜和铁就能使人们的声音在导线上传递！

(现代的家用电话所用的受话器与上面所描述的相似，而其送话器改进了，它利用了一种新发明以获得较强大的功率。那就是“炭粒传声器”，它利用声压以改变来自电池组的电流。)

§ 16-2 变压器与电感

法拉第发现的最重要的特征之一，不是在一运动线圈中存在电动势——那是可以用磁力 $qv \times B$ 来理解的——而是在一个线圈中变化的电流会在另一个线圈中产生电动势。而十分令人惊奇的是，在第二个线圈中所感生的电动势其大小也由同样的“通量法则”给出：电动势等于穿过线圈的磁通量的变化率。假设我们有两个线圈，各绕在彼此分开的一捆铁片上(这些铁片起着使磁场增强的作用)，如图 16-5 所示。现在把其中一个线圈 a 连接到一交流发电机

上。那不断变化的电流产生一个不断变化的磁场。这变化的磁场就在第二个线圈 b 中产生一个交变电动势。这一电动势能够,例如,产生足够大的能量使一个灯泡发亮。

线圈 b 中的电动势的频率当然与原来发电机的频率相同。但线圈 b 中的电流则可能大于或小于线圈 a 中的电流。线圈 b 中的电流取决于其中的感应电动势以及线路中其余部分的电阻和电感。这电动势可能比发电机的小,例如,若通量的变化较少。要不然,线圈 b 中的电动势可以通过增加围绕其的线圈匝数而比发电机中的大许多,因为在一给定磁场中此时穿过线圈的通量增加了(或者,若你喜欢用另一种方式来看它,则由于每一匝的电动势彼此相同,而总电动势等于分开的各匝的电动势之和,所以如有许多匝串联起来就会产生一个较大的电动势)。

两个线圈的这种组合——通常用配置的铁片来引导磁场——称为**变压器**。它能把一个电动势(也叫“电压”)“变成另一个电动势”。

在单个线圈中也会有感应效应发生。例如在图 16-5 的那种装置中,有一个变化的磁通量不但穿过线圈 b 以使灯泡发亮,而且也穿过线圈 a 。在线圈 a 中变化着的电流会在它自己内部产生一个变化着的磁场,因而这个场的通量也就不断变化,结果在线圈 a 中有一个**自感电动势**。当任何电流正在建立磁场时——或更普遍地说,当它的场以任何方式变化时——便有一个电动势作用于该电流上。这个效应称为**自感**。

当我们在上面给出“通量法则”,即电动势等于磁通匝连数的变化率时,还未确定电动势的方向。有一个简单法则,叫楞次法则,就是为了判断电动势指向的:电动势企图反抗任何磁通变化。也就是说,感生电动势的方向总是这样:如果电流沿该电动势的方向流动,则它总会产生一个 B 通量,该通量抗拒产生该电动势的 B 发生变化。楞次法则可以用来找出图

16-3* 中那部发电机的电动势方向,或图中变压器绕组内电动势的方向。

特别是,如果在单一线圈(或任何导线)中存在变化的电流,则在该电路中就会有“反”电动势。在图 16-5 的线圈 a 中,这个反电动势作用于流动的电荷上以反抗磁场的变化,从而也处在反抗电流改变的方向。它力图保持电流恒定不变,当电流增加时它与电流反向,当电流减少时则与电流同向。在自感中的电流具有“惯性”,因为该感应效应力图保持电流恒定,正如机械惯性力图保持物体的速度恒定一样。

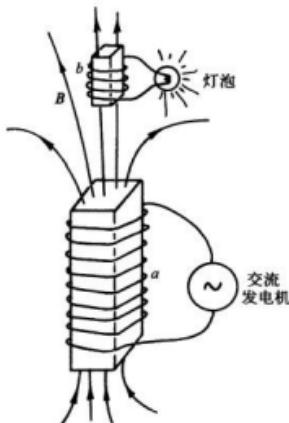


图 16-5 各围绕在一捆铁片外面的两个线圈,能让一部发电机在没有直接连接的情况下使一个灯泡发亮

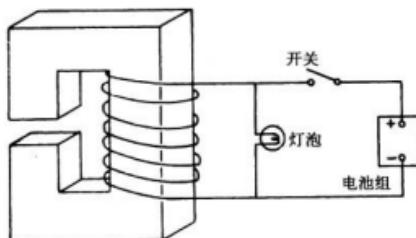


图 16-6 电磁铁的电路连接法。灯泡允许在开关打开时仍然有电流通过,这是为了避免出现过高的电动势

* 原书中为图 16-1,拟有误。译者

任何大型电磁铁中都会有大的自感。假设一个电池组连接于一个大型电磁铁的线圈上,如图 16-6 所示,则一个强磁场就被建立起来了(电流达到了一个由电池组电压和线圈中导线电阻所确定的稳恒值)。但现在假定我们试图通过打开开关而切断电池组。要是真的断开电路,电流就会迅速趋于零,而在这样做时会产生一个巨大电动势。在大多数情况下,这一电动势会大到足以在开关的断路接点间发展成一个跨越接点的电弧。这样出现的高电压也许会损害线圈中的绝缘——甚至会把你击伤,如果你正是打开开关的那个人!由于这些原因,电磁铁往往被接成像图 16-6 所示的那种电路。当开关打开时,电流并不做迅速变化,而是保持稳定,这是由于受线圈中的自感电动势所驱使的电流正在流经灯泡。

§ 16-3 作用于感生电流上的力

你也许曾经见过利用如图 16-7 所示的那种装置来戏剧性地演示楞次法则。这是一个电磁铁,非常像图 16-5 中的线圈 a ,一个铝质圆环放在电磁铁的顶端。当闭合开关使线圈连接至一交流发电机时,这个环就飞向空中。当然,力来自环中的感生电流。环会飞开这一事实表明,环里的电流反抗穿过其中的磁场的变化。当电磁铁正在其顶端形成北极时,在环里的感生电流正在形成一个朝下的北极。环与线圈犹如两块同极磁铁那样互相排斥,但如果在环里制造一个狭窄的径向裂缝,力就会消失,这表明力确实来自环中的电流。

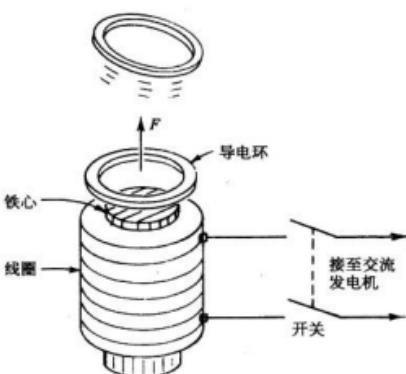


图 16-7 一个导电环会被一块通有变化电流的电磁铁强烈推开

如果不采用圆环而改用一个铝盘或铜盘横放在图 16-7 中磁铁上端,它也被推开;感生电流在盘的材料里形成环流,再度产生了排斥作用。

其根源与此相类似的一个重要的效应发生在一片理想的导体中。要知道,理想导体无论对于什么电流都不会有电阻,所以如果电流一旦在其中产生,它们就能够永远保持下去。事实上,一个最微小的电动势都会产生一个任意大的电流——这实际上意味着完全可以没有电动势。任何要把磁通量送进这样一片理想导体里的尝试都产生引起相反 B 场的电流——所有这一切都由于无限小的电动势,因而没有磁通量进入理想导体中。

如果有一片理想导体并把一块电磁铁放在其附近,则当我们接通电磁铁的电流

时,被叫作涡流的那种电流会出现在该片导体里,使得磁场不能进入其中。场线看来会像图 16-8 所示。当然,如果把一条形磁铁移近一理想导体,这同样的情况也会发生。由于涡流正在产生相反的磁场,磁铁就受到导体的排斥。这样就有可能让一条形磁铁悬浮在形状有点像个盘子那样的理想导体片之上,情形如图 16-9 所示。这磁铁受到理想导体里感生涡流的排斥而被悬浮于空中。在通常温度下不存在理想导体,但某些材料在足够低的温度下会变成理想导体。例如,在 3.8 K 以下的锡,导电就十分完美。它被称为超导体。

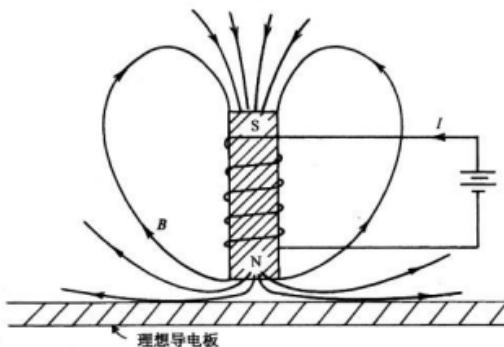


图 16-8 靠近一块理想导电板的电磁铁

如果图 16-8 中的那块导体不是很理想的导体，则对于涡流的流动会有一些阻力。电流将逐渐消失而磁铁便将慢慢落下。在一非理想导体中，涡流需要电动势来维持，而要有电动势，通量必须保持不断变化。这样，磁通量就会逐渐透入导体中去。

在正常导体中，来自涡流的不仅有推斥力，而且也可能有侧向力。例如，若把一块磁铁沿导体表面向旁边移动，

则涡流将产生一个阻力，因为这些感生电流正在反抗通量配置的变化。这种力的大小与速度成正比，像一种黏性力。

这些效应在图 16-10 所示的仪器中得到令人满意的表现。一块方形铜片悬挂在一根棒的下端而构成一个摆。这铜片在一电磁铁的两极间来回摆动。当电磁铁的电流接通时，摆动突然被抑制。这块金属板当进入电磁铁的缝隙中时，板里就有感生电流，它起着抗拒通过该板磁通量变化的作用。假若该板是理想导体，即其中电流会大到足以将板重新推出去——即它会反弹回去。若采用的是一块铜板，由于板里有一些电阻，因而当它开始进入磁场中时，板中的电流将先把该板阻止到几乎停止运动的地步。然后，当电流降低时，板就会在磁场中缓慢地降到静止。

铜摆中涡流的性质如图 16-11 所示。这种电流的强度及几何图形对板的形状很敏感。例

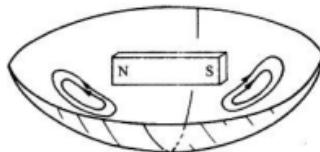


图 16-9 由于受到涡流排斥，一根条形磁铁会悬浮在一个超导体碗上面

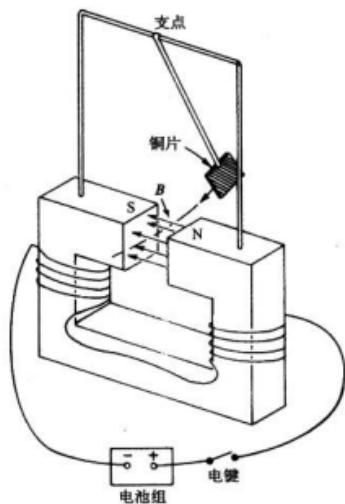


图 16-10 摆的制动表明有起因于涡流的力

如,若像图 16-12 所示,用一块中间割成几条狭槽的铜板来代替原来的铜板,则涡流效应会剧烈地减弱。摆通过磁场摆动,仅有一微小的阻尼力。原因是:在铜板的每个截面内激励电流的磁通量减少了,因而使每个回路电阻的作用增大。电流变小而阻力也就小了。如果把一块铜板放在图 16-10 的磁铁两极间然后释放,则力的黏滞特性还会看得更加清楚。铜板不会掉落下来,只是缓慢地下沉。涡流对该运动会施加一个强大阻力——就像蜂蜜中的黏性阻力一样。

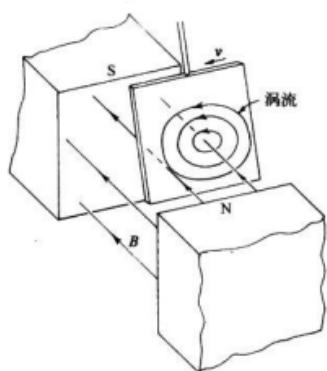


图 16-11 铜摆中的涡流

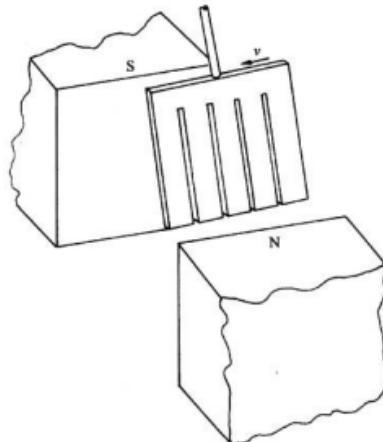


图 16-12 在铜板中割出一些狭槽, 涡流效应会剧烈下降

如果不是将一块导体拉着经过磁铁,而是在磁场中尝试转动导体,则将有来自同样效应的抵抗力矩。反之,若在导电板或导电环附近旋转一块磁铁,则板或环将被拖着在一起旋转。

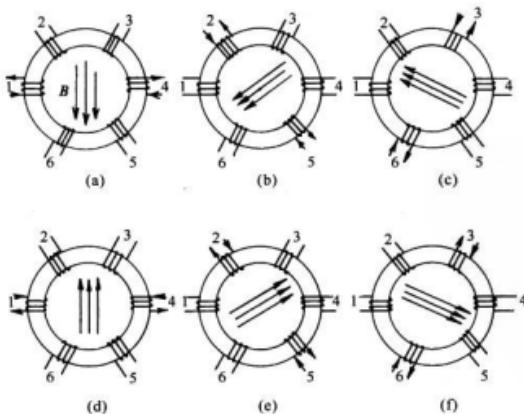


图 16-13 构成一个旋转磁场

转，板或环里的电流将产生一个倾向于使其跟随磁铁旋转的力矩。

一个恰好像那转动磁铁的磁场可以用如图 16-13 所示的那种排列的线圈来完成。我们取一个铁环(也就是一个像炸面圈那样的铁环)并绕上六个线圈。如果如图(a)所示使(1)和(4)两绕组通有电流，就会有一个如图所示方向的磁场。现在若把电流转移到(2)和(5)两绕组上，则磁场将指向图(b)所示的新方向。继续这个步骤，便会得到图上其他部分所示的磁场顺序。倘若这一过程顺利地进行，就会有一“旋转”磁场了。把各线圈连接至一套三相电源线上就能轻易地获得所需的电流顺序，因为三相电源线正好提供这种电流。“三相电源”是利用图 16-1 的原理在一部发电机中形成的，只是有三个回路以对称的方式一起固定在同一根轴上——也就是说，一个回路与邻近的一个回路之间要相隔 120° 。当各回路作为整体旋转时，先是在一个线圈中的电动势为极大，然后在下一个线圈中达到极大，以此类推。三相电源有许多实际优点，其中之一就是可能造成一个旋转磁场。由这种旋转磁场在导体中所产生的力矩可轻易地由刚好在铁环上面的绝缘台上一个竖立的金属环来演示，如图 16-14 所示。这旋转磁场会引起该导电环绕着一根垂直轴线旋转。在这里看到其基本原理与在一部大型商用三相感应电动机中实际上起作用的原理完全相同。

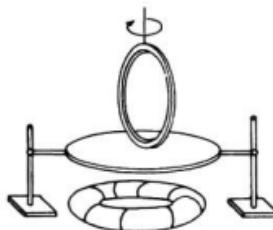


图 16-14 图 16-13 中的旋转磁场可用来对一个导电环提供力矩

感应电动机的另一种形式如图 16-15 所示。这里所示的配置对一部实用的高效率电动机虽不适用，但能说明原理。电磁铁 M 由一捆多层铁片和在其外面绕着的螺线管式线圈构成，用一部发电机的交变电流来提供动力。这电磁铁会产生一个穿过该铝盘的变化着的 B 通量。但如果仅我们仅有这两个部件，如图(a)中所示的，则还不能构成一部电动机。盘中虽然有了涡流，但它们是对称的，因而不会产生任何力矩(由于这些感生电流，盘里多少总会发生一些热)。现在若用一个铝板刚好遮盖磁极的一半，如图(b)所示，则盘便将开始转动，而我们便有一部电动机。这种运转有赖于两个涡流效应。首先，在铝板中的涡流抗拒着穿过它的通量变化，因而在这块板上面的磁场就总会落后于不受遮盖的一半磁极在上面产生的磁场。这种所谓“屏蔽磁极”效应在那“被屏蔽”区中会产生一个其变化非常像在“非屏蔽”区中的磁场，只不过在时间上被延迟了一个恒定的值。整个效应就像只有一半宽的一块磁

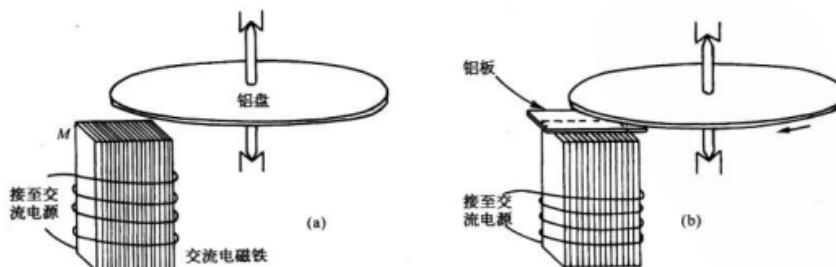


图 16-15 磁极屏蔽式感应电动机的一个简单例子

铁不断从非屏蔽区移至屏蔽区。于是，这些正在变化着的磁场就会与铝盘中的涡流互相作用而产生一个作用于铝盘上的力矩。

§ 16-4 电 工 技 术

当法拉第最初将其著名的发现——即关于变化着的磁通量会产生电动势——公诸于世时，他曾被人质问（像任何人在发现自然界的新事物时被人质问一样）：“这有什么用处呢？”其实他所发现的不过是当他在一块磁铁近旁移动一根导线时就会有一小电流产生的奇事。这有什么被“利用”的可能呢？他的回答是：“一个新生的婴儿有什么用处呢？”

然而想一想他的发现已经导致多么巨大的实际应用。我们上面所描述的不只是一些玩具，但是选择的这些例子在大多数情况下是为了说明某种实用机器的原理的一些例子。例如，在一旋转磁场中的转动环就是一部感应电动机。当然，它与实际的感应电动机之间存在某些区别。那个环只有很小的力矩，你用手就可以止住它。对于一部优良电动机，结构就必须安排得更加紧凑：不能让那么多的磁场“浪费”在外面空气中。首先，利用铁芯以集中磁场。我们还未讨论过铁芯如何会完成这一使命，但铁芯的确能使磁场比单靠铜线圈时强几万倍。其次，铁片与铁片间的缝隙被缩小了，为此，有些铁片甚至被嵌入该旋转环之中。每一件东西都被安排得能够获得最大的力和最高效率，也就是说，把电功率转变成机械功率，一直到该“环”不再能够用手去阻止它转动并使其停下来。

封闭缝隙以及使事情按最实用的方式进行，这些问题属于工程技术。这需要对设计做认真的研究，尽管从获得力来说并不存在任何新的基本原理。但要从基本原理过渡到一种实用而又经济的设计却仍然有一段漫长的道路要走。然而，正是这种细致的工程技术设计才使得像博尔德(Boulder)水坝^{*}那类庞大物体及其所有附属的东西成为可能。

博尔德水坝是什么？一条大河给一座混凝土的墙壁挡住了。但究竟是怎样的墙壁呢？它是按一条经过十分仔细计算过的理想曲线来建造的，使用了最少量的混凝土，便能挡住整条河流。它的底部得到了加厚，它的奇妙形状为艺术家们所喜欢，而工程师们对它则能够理解，因为他们懂得这样的加厚与压力随水的深度而增加有关。但我们却已离开了电学。

然后，河水被导入一条巨大的管道。这件东西本身就已经是工程上绝妙的一项成就。管道把水提供给水轮——一座巨大涡轮机——而使水轮旋转（另一项工程业绩）。但为什么要转动水轮呢？它们同一大堆精巧而复杂的、又相互交织纠缠在一起的铜和铁耦合起来，其中包括两部分——一部分在转动而另一部分不动。几种材料的复杂混合物，其中绝大多数是铁和铜，但也有供绝缘用的一些纸片和虫胶。一件会旋转的巨大怪物，也就是一部发电机。在这一大堆铜和铁之外还有铜制的几个特殊配件。水坝、轮机、铁和铜，所有这些都配置在那里以使某一特殊事物终于发生在几根铜杆之间——一个电动势。然后，这些铜杆伸出去并在一变压器的另一铁块上绕了几圈，于是它们的任务完成了。

可是环绕那同一铁块的却还有另外的铜缆，看上去它与来自发电机的那几根铜杆毫无直接联系。铜杆由于在磁场附近经过而正受影响——因而获得了电动势。变压器把对发电

* 博尔德水坝位于美国西南部科罗拉多河上，坝长 360 m，深 222 m，蓄水量 $3.95 \times 10^{10} \text{ m}^3$ 。——译者注

机的有效设计所需的那种相对低的电压转变成十分高的电压,这对于电能跨越长电缆而做有效传输是再好不过的了。

每一件东西都必须效率非常高——不能有任何浪费或损失。为什么?一个都市的动力全部经由此通过。要是有一小部分损失了——比方说百分之一二——想一想留给后面的能量!要是有百分之一的能量留在变压器里,这些能量就必须设法取出来,否则,若它表现为热,就会马上将全部机件都熔掉。当然,采取下述做法也有点降低效率,然而这是必需的。那就是要有几部液泵,使某种油循环流过散热器中以保证变压器不致过热。

从博尔德水坝出来的是几十根铜棒——也许有手腕那样粗的长长的铜棒伸向四面八方,越过数百英里。这些小铜棒把一条大河的动力都载上了。然后这些棒又分叉成更多的棒,再又接至更多的变压器,有时则接至能产生其他形式电流的巨大发电机,有时接至为了庞大工业目标而运转着的机器,接至更多的变压器,然后又再行分叉和散开,直到最后该河流就遍布了整个城市——驱动着电动机、发热、发光以及使许多小机器运转。从 600 mile 外的冷水变成炽热灯光这样一种奇迹——全都由一些特殊布置的铜、铁块完成。轧钢用的大型电动机或牙科医生用来钻牙齿的微小电动机,千万个小轮子都随着博尔德水坝那边巨轮的运转而转动。如果停止该巨轮的转动,所有一切小轮就都会停止;电灯也会熄灭。它们确实是互相联系着的。

此外,还有更多的东西。获取河流的庞大动力,和把这些动力散布于各地农村,直到几滴水流便足以驱动牙科医生用的牙钻,都是相同的一些现象,它们也一再出现在一些非常精密仪器的建造上,对于异常微小电流的探测,对于口语、音乐和图像的传递,对于计算机,对于惊人准确的自动化机器。

所有这一切之所以成为可能就是由于对铜和铁的精心设计安排——有效地产生出来的磁场,具有 6 ft 直径的铁块当旋转时其缝隙才有 $1/16$ in 宽,为了获得最高效率而对铜选取的最仔细比例,所有一切的古怪形状,都像该水坝的曲线那样,为的是达到同一个目标。

如果未来的某一位考古学家发现博尔德水坝,那么我们可能推测他将对那些曲线的优美加以赞叹。但出自未来某一伟大文明时代的探险者也将望着该发电机和变压器说:“注意每一块铁片都各有其美妙的有效形状。想想渗透到每块铜片里面去的思想吧!”

这就是工程的威力以及电工技术的精心设计。在发电机中已创造出一种在自然界其他地方都不存在的东西,果然不错,在其他地方存在感应的力,在太阳和星球周围的某些地方肯定也会有电磁感应。例如地球磁场或许(虽然还不确定)也是由对地球内部的环行电流产生影响的一种类似发电机的东西维持着。但什么地方都没有这样的部件,它们与运动的部分一起构成一个整体——用很高的效率和规则性——像发电机那样产生电能。

你可能会想,设计发电机不再是一门有趣科目,而是一门呆板的科目了,因为各种发电机都已被设计出来了,几乎完美的发电机或电动机都可从货架上取下来。即使这是真的,但我们可以对这个问题接近圆满解决的惊人成就表示钦佩。何况还保留着许多没有解决的问题,甚至发电机和变压器正再度成为问题。整个低温和超导体技术领域都有可能很快就被用于电力分配课题上。由于在这一课题中已经出现了一个根本上崭新的因素,所以新的最佳设计就非得创造出来不可。未来的动力网可能与今天的仅有很少类似之处。

在学习感应定律时你可以看到有数不清的应用和问题可以供我们研究。关于电机设计

的研究本身就是一项终身的工作。虽然我们不能在这方面走得太远，但应该意识到这个事实，即当人们发现了电磁感应规律之后，便突然把理论和大量的实际发展联系了起来。然而我们总必须把这一科目留给那些对算出特殊应用细节感兴趣的工程师和应用科学家们。物理学只是提供基础——无论哪一种应用的基本原理（我们还未完成这种基础，因为还得详细考虑铁和铜的性质。稍后一些我们将会见到，物理学对于这些都会有所论述）。

现代电工技术是由于法拉第的发现而开始的。那个毫无用处的初生婴儿竟会培养成一位非凡的天才，以一种连他那自豪的父亲都从来没有想象到的方式把地球的面貌改变了。

第 17 章 感应定律

§ 17-1 感应的物理过程

在上一章中我们曾描述过许多现象，它们表明电感效应既很复杂又很有趣。现在我们要讨论控制这些效应的基本原理。我们已经把导电电路中的电动势定义为作用在电荷上的力对该回路全长的总累积。更具体地说，它是作用于单位电荷上力的切向分量，沿该电路一周的线积分。因此，在数量上就等于环绕电路一周对单位电荷所作的总功。

我们也已给出这样的“通量法则”，它讲：电动势等于穿过这样一个导电电路的磁通量的变化率。让我们来看看能否理解其中的原因。首先，我们将考虑由于电路在恒定磁场中移动而导致通量变化的情况。

在图 17-1 中，我们表示一个面积可以改变的简单导线回路。这回路有两部分，固定的 U 形部分(a)和一根可以在该 U 的两腿上滑动的横杆(b)。它始终是一个完整电路，不过其面积是在变化的。假设现在把该回路置于一匀强磁场中，使 U 形平面垂直于磁场。按照通量法则，当横杆移动时在回路中就该产生一个电动势，它与穿过回路通量的变化率成正比。这电动势将在回路中引起电流。我们将假定导线中的电阻相当大以致电流很小，于是便可以略去来自这个电流的任何磁场。

穿过该回路的磁通量为 wLB ，因而对于电动势——我们将把它写成 \mathcal{E} ——“通量法则”给出

$$\mathcal{E} = wB \frac{dL}{dt} = wBv,$$

式中 v 是该横杆的移动速率。

现在应该能够从作用于移动杆里电荷上的磁力 $v \times B$ 来理解这一结果。这些电荷会感受到一个力，该力与导线相切，每单位电荷所受的力等于 vB 。在沿横杆的长度 w 上这力恒定，而在别处则都是零，因此力沿整个电路的积分为

$$\mathcal{E} = wvB,$$

这与上面从通量的变化率所获得的结果相同。

刚才所给出的论证可以推广至导线在固定磁场中移动的任何情况。在一般情况，人们能够证明：对于任何电路，当其部分在固定磁场中移动时，产生的电动势等于通量对时间的

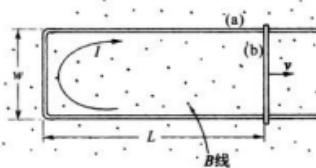


图 17-1 如果通量是由于改变电路面积而改变的，则在该回路中会感生一电动势

微商,而与该电路的形状无关。

反之,若回路固定不动而改变磁场,情况将会怎样呢?我们不能根据同一论证来导出对这一问题的解答。那是法拉第在实验上的发现,即不管通量怎样变化,该“通量法则”总是正确的。作用于电荷上的力,普遍地说,是由 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 给出的,并没有任何新的特殊的、“由于变化磁场而产生的力”。任何作用于固定导线中的静止电荷上的力都是来自 \mathbf{E} 的项。法拉第的观察导致发现电场和磁场是由一个新的规律联系起来的:在一个其中磁场正在随时间变化的区域里,电场被产生了。正是这一电场驱使着电子围绕该导线移动——因而当有变化磁通量时在一固定电路中引起电动势。

对于与变化磁场有关的电场,其普遍的定律为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (17.1)$$

我们将这称之为法拉第定律。它是由法拉第发现的,但首先是麦克斯韦将其写成一微分形式并作为他方程组中的一个方程。让我们看一看这方程怎样给出电路中的“通量法则”。

利用斯托克斯定理,这一定律可以写成积分形式:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} da = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da, \quad (17.2)$$

式中 Γ 通常指任意闭合曲线,而 S 则是由它所包围的任何曲面。这里应该记住, Γ 是一条固定于空间中的数学曲线,而 S 则是一个固定曲面。于是该时间微商就可以移至积分符号的外面,因而我们有

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{d}{dt} (\text{穿过 } S \text{ 的通量}). \quad (17.3)$$

把这个关系式应用到沿一个固定的导电电路而行的曲线 Γ ,我们便再度获得“通量法则”。左边的积分为电动势,而右边积分则是由该电路包围着的通量的负变化率。所以式(17.1)应用在一个固定电路上时,就相当于“通量法则”。

因此,“通量法则”——电路中的电动势等于穿过该电路磁通量的变化率——无论由磁场变化还是由电路运动(或两者兼有)所引起的通量变化都适用。在该法则的表述中这两种可能性——“电路移动”或“磁场变化”——不能加以区别。然而在我们对该法则的解释中,则对于这两种情况已用了两条完全不同的定律——在“电路移动”中用 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$,而在“磁场改变”中则用 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 。

我们知道,在物理学的其他领域里还没有一个这么简单而又准确的普遍原理,为了真正理解它需要依据两种不同现象的分析。通常,这么一个优异的普遍性总是发源于一个单一而又深刻的基本原理。然而,在我们这种情况下一点没有任何这样的深刻的含意。因此,我们得把这个“法则”理解为两种完全独立现象的组合效应。

我们必须按照下述方式来看待“通量法则”。一般地说,对单位电荷的作用力为 $\mathbf{F}/q = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。在移动导线时,有一个来自第二项的力。并且,如果某处有变化着的磁场,则该处也有一个 \mathbf{E} 场。它们是两个独立效应,但环绕该导线回路的电动势则始终等于穿过其中的磁通量的变化率。

§ 17-2 “通量法则”的一些例外

现在我们将举一些例子，其中部分起源于法拉第。这些例子表明，清楚地记住导致感生电动势的两种效应之间的差别是十分重要的。下述例子将包括“通量法则”不能够应用的一些情况——或者由于根本没有导线，或者由于感生电流所取的路径在一导体的扩展体积内运动。

作为开始，我们指出如下一个要点：来自 E 场的那部分电动势并不依赖于实体导线（如 $v \times B$ 那部分所要有的实体导线那样）的存在。 E 场可以存在在自由空间中，而它环绕任一固定在空间中的想象曲线的积分就等于穿过该曲线的 B 通量的变化率（注意，这与由静止电荷所产生的 E 场完全不同，因为在那种情况下 E 绕一闭合回路的线积分永远为零）。

现在我们将描述一种情况，其中穿过电路的通量没有改变，但仍然存在电动势。图 17-2 表示一个可以在磁场存在的条件下绕一固定轴旋转的导电盘，其一个接触点装在轴上，而另一个接触点则与该盘的外缘相擦，通过电流计使该电路闭合。当盘旋转时，该电路——意思就是在空间中有电流经过的那些地方——总是一样。但在盘中的那部分“电路”是在运动着的材料里。尽管穿过该“电路”的磁通量固定不变，但仍然有一电动势，可以由电流计的偏转观察到。很清楚，这里的情况就是转动盘中的 $v \times B$ 力产生了电动势，但它却不能被等同于通量的变化。

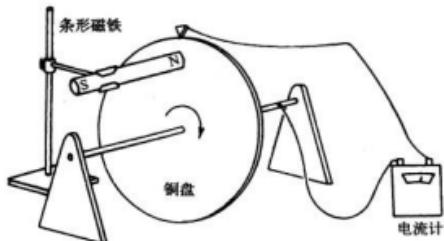


图 17-2 当金属盘旋转时，有一个来自 $v \times B$ 的电动势，但在被包围的通量中却没有什么变化

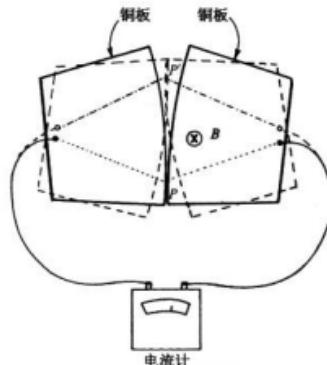


图 17-3 当两板在一匀强磁场中辗转而过时，可以有巨大的磁通量变化，但却没有电动势产生

现在作为一个相反例子，我们将考虑一种稍微有点异常的情况，即在其中穿过“电路”（又是指在有电流通过的那些地方）的磁通量发生了变化，但却没有什么电动势。设想两块边缘稍微弯曲的金属板，如图 17-3 所示，这两块板被放在与其平面垂直的匀强磁场中。每一块板连接到电流计的一端，如图所示。两板在 P 点相接触，因而构成了一个闭合电路。如果现在两板辗转过一个小小角度，接触点将转移至 P'。如果设想该“电路”沿图中所示的那条虚线经两板而形成，则当两板往复辗转时，穿过这一电路的磁通量变化就很大。然而这

种转动却可由微小运动来完成,以致 $v \times B$ 很小,实际上不存在电动势。“通量法则”在此不适用,它必须应用于其中电路材料保持相同的那些电路。当电路的材料正在变化时,就必须回到基本定律中去。正确的物理意义总是由这两个基本定律

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

给出的。

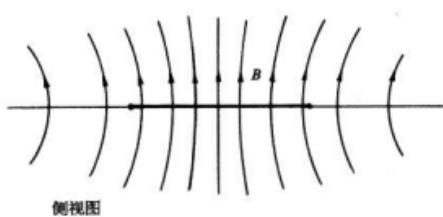
§ 17-3 感生电场使粒子加速;电子感应加速器

我们已说过,由变化磁场而产生的电动势即使在没有导体时也能存在,这就是说,没有导线也可以有电磁感应。我们仍然可以想象环绕空间中任意数学曲线的电动势,它被定义为 \mathbf{E} 的切向分量绕该曲线的积分。法拉第定律讲,这个线积分等于穿过该闭合曲线磁通量的变化率的负值,即式(17.3)。

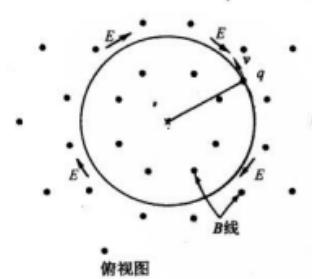
作为这种感生电场效应的例子,我们现在要考虑在变化磁场中电子的运动。想象有这么一个磁场,在一个平面上处处都指向其垂直方向,如图 17-4 所示。磁场是由电磁铁产生的,但其细节我们将不予考虑。对于这一例子我们将设想磁场对某个轴是对称的,也就是说,磁场强度将仅取决于离轴的距离。这一磁场也是随时间变化的。现在设想有一个电子在这磁场中正沿以轴为中心、半径恒定的圆周运动着(我们稍后将看到,如何才能安排这一种运动)。由于变化着的磁场,因此就会有一个与电子轨道相切的场 \mathbf{E} ,这将驱动电子环绕着该圆周运动。又由于对称性的缘故,这电场在圆周上各处将有相同的值。若电子轨道具有半径 r ,则 \mathbf{E} 环绕其轨道的线积分将等于穿过该圆周的磁通量的变化率的负值。 \mathbf{E} 的线积分恰好就是它的大小乘以圆的周长 $2\pi r$ 。一般说来,这磁通量必须从一积分求得。这时,我们令 $B_{平均}$ 代表该圆周内的平均磁场,于是通量为这平均磁场乘圆的面积,我们将有

$$2\pi r \mathbf{E} = \frac{d}{dt}(B_{平均} \cdot \pi r^2).$$

由于假定 r 为常数,所以 \mathbf{E} 与一平均场的时间微商成正比:



侧视图



俯视图

图 17-4 电子在一个轴对称的、正在增强的磁场中被加速

$$\mathbf{E} = \frac{r}{2} \frac{dB_{\text{平均}}}{dt}. \quad (17.4)$$

电子将感受到电力 $q\mathbf{E}$ 并将被加速。想起有关运动的相对论性的正确方程乃是动量的变化率正比于力,所以我们得

$$q\mathbf{E} = \frac{dp}{dt}. \quad (17.5)$$

对于已假定的圆周轨道,电子所受的电力始终指向其运动方向,因而它的总动量将按式(17.5)所给出的时间变化率增加。合并式(17.5)和(17.4),我们就可将动量变化率与平均磁场的变化率互相联系起来:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{qr}{2} \frac{dB_{\text{平均}}}{dt}. \quad (17.6)$$

对 t 进行积分,可得到电子的动量

$$p = p_0 + \frac{qr}{2} \Delta B_{\text{平均}}, \quad (17.7)$$

式中 p_0 为电子开始时的动量,而 $\Delta B_{\text{平均}}$ 则是 $B_{\text{平均}}$ 接着发生的改变。电子感应加速器——一种用来把电子加速至高能的机器——的运行就是以这一概念为基础的。

为了详细看看电子感应加速器是怎样工作的,我们现在就必须探讨如何才能把电子约束在一个圆周上运动。我们曾在第1卷第11章中讨论过所涉及的原理。如果能够这样安排,使得在电子的轨道上有一磁场 \mathbf{B} ,则将有一横向力 $qv \times \mathbf{B}$,对于一个适当选择的 \mathbf{B} ,这个力就能够使电子保持在所预定的轨道上运动。在电子感应加速器中,正是这一横向力引起了电子在一固定半径的圆周轨道上运动。通过再度应用关于运动的相对论性方程(不过这次却是关于力的横向分量的),我们便能找出在该轨道上的磁场强度应有多大。在这电子感应加速器中(见图 17-4),由于 \mathbf{B} 垂直于 \mathbf{v} ,因而横向力为 qvB 。于是这个力就等于动量的横向分量 p_t 的变化率:

$$qvB = \frac{dp_t}{dt}. \quad (17.8)$$

当一粒子在圆周上运动时,它的横向动量的变化率等于总动量的大小乘以转动角速度 ω (根据第1卷第11章中的论证):

$$\frac{dp_t}{dt} = \omega p, \quad (17.9)$$

这里,由于是圆周运动,所以

$$\omega = \frac{v}{r}. \quad (17.10)$$

合并式(17.8)、(17.9)及(17.10)得

$$qvB_{\text{轨道}} = p \frac{v}{r}, \quad (17.11)$$

式中 $B_{\text{轨道}}$ 为半径 r 处的磁场。

当电子感应加速器运行时,电子的动量会按照式(17.7)正比于 $B_{\text{平均}}$ 而增长。而若电子

继续在其原来的圆周上运动，且当其动量增大时式(17.11)仍应继续维持正确，则 $B_{\text{轨道}}$ 的值就必须随动量 p 成比例地增大。将式(17.11)与确定 p 的式(17.7)做比较，我们看到，在半径为 r 的轨道内的平均磁场 $B_{\text{平均}}$ 与在轨道上的磁场 $B_{\text{轨道}}$ 必须有如下关系：

$$\Delta B_{\text{平均}} = 2\Delta B_{\text{轨道}}。 \quad (17.12)$$

电子感应加速器的正确运行要求：在轨道内的平均磁场的增长率比轨道处磁场本身的增长率要大一倍。在这种情况下，当粒子能量被感生电场增加时，轨道处的磁场以维持该粒子在圆周上运动所需要的比例增长。

电子感应加速器被用来加速电子，使其达到几千万乃至几亿电子伏的能量。然而，要把电子加速至远高于几亿电子伏的能量就变得不切合实际，这里有几个原因。原因之一是，要在该轨道内获得所需的高平均值磁场在实际上有困难。另一个原因则是，式(17.6)在能量高的情况下已不再正确，因为它并没有把由于粒子电磁辐射（即在第1卷第34章中所称为同步加速器辐射的）而损失的能量包括在内。由于这些原因，要把电子加速至更高能量——达到几十亿电子伏——就得采用另一种称为同步加速器的机器来完成。

§ 17-4 一个佯谬

现在要向你们描述一个显而易见的佯谬。佯谬指的是这样一种情况，当用一种方法分析时得出一个答案，而用另一种方法分析时又得出另一个答案，因而对于实际上究竟会发生什么我们就会陷于某种困境。当然，在物理学中从未有过任何真正的佯谬，因为实际上只有一个正确答案，至少我们相信自然界只按照一种方式行动（不用说，那就是正确方式）。因此，在物理学中佯谬只是我们本身理解上的一种混乱。下面是我们将要提出的一个佯谬。

试想象构造一个如图17-5所示的装置。一个薄而圆的塑料盘被支撑在一根装有优良轴承的同心轴上，从而能够十分自由地旋转。在该盘上，与转轴同心地放着一个短螺线管形状的线圈。通过这个线圈的恒定电流 I 由一个同样是装在盘上的小电池组供应。靠近盘的

边缘绕圆周边等距离地分布着若干个金属小球，它们相互之间以及与线圈之间均由制造该盘的塑料材料绝缘。这些小导体球，每一个都各带有等量的静电荷 Q 。每件东西都完全固定，而盘则静止不动。假设现在由于某一偶发事件或由于预先的安排，线圈中的电流被中断了，然而却没有受到任何外界干扰。只要继续通电流，便有或多或少与盘的轴平行的磁通量穿过该线圈。当电流中断时，这通量一定会趋于零。因此，就必然会感生一电场，而这电场将以该轴为中心环绕成一些圆周。在盘的周边那些带电球体均将感到一个与圆盘边缘相切的电场。这个电力对于所有电荷来说都在与圆盘边缘相切的方向，因而将产生一个作用于

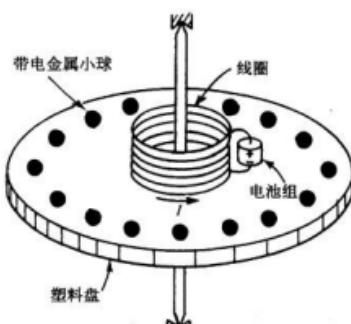


图 17-5 如果电流 I 停止了，该盘是否会转动

该盘上的净力矩。从上面的论证，我们预期当线圈中电流消失时，圆盘将开始转动。要是我们已知道盘的转动惯量、线圈中的电流以及小球上的电荷，那我们就能够算出所要的角速度。

但我们也可轻易地做出不同的论证。利用角动量守恒原理，我们可以说，盘及其一切部件的角动量在开始时为零，因而这整套装置的角动量就应该保持等于零。当电流中断时不应用有转动。究竟哪一种论证才是正确的呢？盘将转动还是不转动？我们将把这一问题留给你们去思考。

必须提醒你们一点，正确的答案并不依赖于任何非本质的特征，诸如电池组的非对称位置等等。事实上，你可以想象一种诸如下述的理想情况：该螺线管是由超导电线绕成的，里面通有电流。在该盘已经小心地被安置于静止状态后，让螺线管的温度缓慢上升。当导线的温度达到介乎超导电性与正常导电性之间的转变温度时，螺线管里的电流便将因导线的电阻而趋向零。如前所述磁通量将降低至零，因而环绕着该轴心将产生一个电场。我们也应该提醒你，这个解答并不容易得到，但也不是一种诡计。当你把它想出来时，你已经发现了一个重要的电磁学原理。

§ 17-5 交流发电机

在本章的其余部分，我们将应用 § 17-1 中的原理来分析第 16 章中曾讨论过的若干现象。我们首先要对交流发电机更详细地加以审察。这种发电机基本上由一个在匀强磁场中转动的导电线圈构成。相同的结果也可用磁场中的固定线圈来获得，而磁场的方向按上一章所描述的方法旋转。我们将仅仅考虑前一种情况。假设有一个圆形线圈能够以它的一根直径为轴而旋转。让这个线圈安放在一个垂直于该转轴的匀强磁场之中，如图 17-6 所示。我们并且设想该线圈两端通过某种滑动触点被引至外电路。

由于线圈转动，穿过它的磁通量便将发生改变。因此，在线圈的电路中就有一个电动势。令 S 为该线圈的面积^{*}，而 θ 为磁场与线圈平面法线之间的夹角。于是穿过线圈的磁通量就是

$$BS \cos \theta. \quad (17.13)$$

如果线圈以匀角速度 ω 旋转，则 θ 随时间变化为 $\theta = \omega t$ 。

线圈中每匝的电动势都等于该通量的变化率。若线圈有 N 匝，则总电动势就大 N 倍，所以

$$\mathcal{E} = -N \frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = NBS\omega \sin \omega t. \quad (17.14)$$

如果把来自发电机的导线引导至离转动线圈相当远的地方，那里的磁场为零，或至少磁

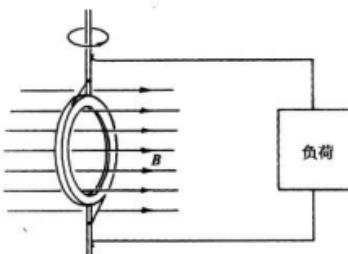


图 17-6 一个导电线圈在匀强磁场中旋转——交流发电机的基本原理

* 现在由于字母 A 已被用于矢势了，我们建议用 S 来表示表面积。

场已不随时间变化,那么在这个区域里 E 的旋度将为零,因而我们可以定义一个电势。事实上,若没有电流从发电机中引出,则两根导线间的电势差 V 将等于该旋转线圈中的电动势。这就是说,

$$V = BS\omega \sin \omega t = V_0 \sin \omega t.$$

两根导线间的电势差随 $\sin \omega t$ 变化。这样变化的电势差称为交变电压。

既然两根导线之间存在电场,那么它们就必然是带电的。显然,发电机的电动势已经把某些超额电荷推出至导线上,直到这些电荷产生的电场强大到足以抵消该感应力时为止。从发电机的外面看,两根导线表现出似乎像在静电场中那样,被充电至电势差 V ,而电荷又似乎是随时间变化的,因而给出一个交变电势差。与静电情况还有另一个不同。如果把发电机与一个容许电流通过的外电路连接,则我们将发现该电动势并不允许导线放电,而是当电流从导线引出来时继续对导线供应电荷,企图使两导线之间永远保持一个不变的电势差。事实上,若发电机与一总电阻为 R 的电路连接,则流经该电路的电流将与发电机的电动势成正比与 R 成反比。由于电动势具有正弦形式的时间变化,所以电流也是一样。即有一个交变电流:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t.$$

关于这一种电路的原理图如图 17-7 所示。

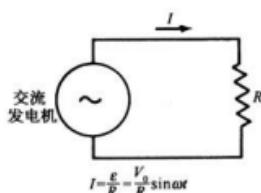


图 17-7 包含一部交流发电机和一个电阻的电路

我们也能看到,电动势确定了发电机供应能量的多少。导线中的每个电荷都以 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ 的功率接受能量,其中 \mathbf{F} 为作用于该电荷上的力,而 \mathbf{v} 为电荷的速度。现在设单位长度导线中的运动电荷数目为 n ,则对导线的任意线元 ds 所供应的功率为

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} n ds.$$

对于一条导线来说, \mathbf{v} 总是沿着 ds ,所以这功率可以写成

$$n v \mathbf{F} \cdot ds.$$

对整个电路提供的总功率等于这一表达式环绕整个回路的积分:

$$\text{功率} = \oint n v \mathbf{F} \cdot ds. \quad (17.15)$$

现在应当记得, qnv 就是电流 I ,而电动势则被定义为 F/q 环绕该电路的积分。因此就得到这么一个结果:

$$\text{发电机提供的功率} = \mathcal{E}I. \quad (17.16)$$

当发电机的线圈中有电流通过时,也将会有机械力作用于其上。事实上我们知道,作用于线圈上的力矩与它的磁矩、磁场强度 B 以及它们间夹角的正弦成正比,磁矩等于线圈中的电流乘以线圈面积,因此该力矩为

$$\tau = NISB \sin \theta. \quad (17.17)$$

为维持线圈转动必须做机械功,其功率等于角速度 ω 乘以力矩:

$$\frac{dW}{dt} = \omega \tau = \omega NISB \sin \theta. \quad (17.18)$$

把上式和式(17.14)比较,可见为了转动线圈而抵抗磁力所需的机械功率恰好等于 $\mathcal{E}I$,即发电机的电动势所输送出来的电能的功率。在发电机中用掉的全部机械能表现为电路中的电能。

作为由于感生电动势而产生的电流和力的另一个例子,让我们分析在 § 17-1 中曾描述过、如图 17-1 所示的设备中发生的事情。那里有两根平行导线和一根滑动横杆放置在一个垂直于该平行导线平面的磁场中。现在让我们假定该 U 形“底”部(图中的左端)是由高电阻导线制成,而那两根侧线由像铜一样的良导体制成——于是我们就不必担心当横杆移动时电路的电阻会发生改变。和以前一样,电路的电动势为

$$\mathcal{E} = vBw. \quad (17.19)$$

电路中的电流与这个电动势成正比而与电路的电阻成反比:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBw}{R}. \quad (17.20)$$

由于这个电流,所以就会有作用于横杆上的磁力,这力与杆的长度、杆中的电流以及磁场均成正比,即

$$F = BIw. \quad (17.21)$$

由式(17.20)取 I ,因而对于力便有

$$F = \frac{B^2 w^2}{R} v. \quad (17.22)$$

我们看到,力与横杆的速度成正比。正如你可以很容易就明白,这个力的方向与杆的移动速度相反。这种像黏力那样与“速度正比”的力,每当在磁场中移动导体而产生感生电流时总会出现。在上一章中我们所举的有关涡流的例子,也会产生作用在导体上、与导体速度成正比的力,尽管一般来说,这样的情况都会给出难以进行分析的复杂电流分布。

在机械系统的设计中,要得到与速度成正比的阻尼力往往是方便的。涡流力提供一个获得这种与速度有关的力的最方便办法。应用这种力的一个例子就是普通的家用电表。在电表中有一个旋转于永磁铁两极间的薄铝盘。这个盘由一个小电动机驱动,其力矩与家庭电路中所消耗的功率成正比。鉴于在盘中的这个涡流力,便会有一个正比于速度的阻力,当平衡时该速度与电能消耗的速率成正比。利用一个连接于转盘上的计数器,就把它转数记录下来了。这个数目就是总能量消耗、亦即所用去的瓦时数的指示。

我们也可以指出,式(17.22)表明来自感生电流的力——也就是任何涡旋电流的力——均与电阻成反比。材料的导电性能越好,这力就越大。当然原因在于电阻低,电动势所产生的电流就更强,而较强的电流表示较大的机械力。

从那些公式我们也可以看出,机械能是如何转变成电能的。如前所述,对电路中电阻所提供的电能为积 $\mathcal{E}I$ 。当移动导电横杆时对其所做的功率,为杆受到的作用力乘以杆的速度。利用关于力的式(17.22)后,所做的功率为

$$\frac{dW}{dt} = \frac{v^2 B^2 w^2}{R}.$$

我们看到,这确实等于由式(17.19)和(17.20)所该获得的积 $\mathcal{E}I$ 。机械功再次表现为电能。

§ 17-6 互 感

现在我们想要考虑一种导线线圈固定而磁场在变化的情形。当我们过去描述磁场由电流产生时,仅考虑恒定电流的情况。但只要电流变化缓慢,磁场在每一时刻就几乎与一恒定电流的磁场相同。在这一节的讨论中,我们将假定电流总是足够缓慢地变化着,使得这种情况保持正确。

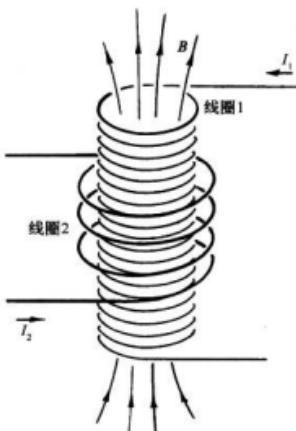


图 17-8 线圈 1 中的电流会产生一个穿过线圈 2 的磁场

由下式给出:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 S \frac{dB}{dt}, \quad (17.24)$$

在式(17.23)中,唯一随时间变化的量为 I_1 。因此电动势为

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_1 N_2 S}{\epsilon_0 c^2 l} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.25)$$

我们看到,线圈 2 中的电动势与在线圈 1 中的电流变化率成正比。该比例常数基本上是两线圈的一个几何因数,称为互感,而往往被记作 M_{21} 。于是式(17.25)便可以写成

$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.26)$$

现在假设电流通过线圈 2 而要问线圈 1 中的电动势。我们应该计算出磁场,它处处与电流 I_2 成正比。穿过线圈 1 的磁通匝连数应与几何形状有关,但同时又应与 I_2 成正比。因此,在线圈 1 中的电动势再次正比于 dI_2/dt ,可以把它写成

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

如果 $M_{12} = M_{21}$, 则

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.27)$$

要算出 M_{12} , 比起刚才对于 M_{21} 所做的计算更困难一些。我们不打算现在就来进行计算, 因为在本章稍后将会证明 M_{12} 必然等于 M_{21} 。

由于任何线圈中的磁场总是与其电流成正比, 因此对任何两个线圈就会获得同种类型的结果。式(17.26)和(17.27)具有相同形式, 只是常数 M_{21} 和 M_{12} 不同, 它们之值应取决于两线圈的形状和它们的相对位置。

假设我们希望求得任意两个线圈——比如如图 17-9 所示的那两个线圈——之间的互感, 我们知道在线圈 1 中的电动势其一般表式可写成

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \int_{(1)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a},$$

式中 \mathbf{B} 为磁场, 而积分是对以电路 1 为边界在整个面进行的。在 § 14-1 中我们已经知道, 这种对 \mathbf{B} 的面积分可以与矢势的一个线积分相联系。具体地说为

$$\int_{(1)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1,$$

式中 \mathbf{A} 代表矢势, 而 $d\mathbf{s}_1$ 则是电路 1 的一个线元。该线积分必须环绕电路 1 进行。因此, 在线圈 1 中的电动势可以写成

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1. \quad (17.28)$$

现在让我们假设在电路 1 处的矢势是由电路 2 中的电流产生的。于是这矢势便可以写成环绕电路 2 的一个线积分:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}}, \quad (17.29)$$

式中 I_2 代表电路 2 中的电流, 而 r_{12} 则是从电路 2 中的线元 $d\mathbf{s}_2$ 至电路 1 上我们正在计算其矢势的那一点之间的距离(见图 17-9)。合并式(17.28)和(17.29), 则可将电路 1 中的电动势表达成一个双重的线积分:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d}{dt} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}} \cdot d\mathbf{s}_1.$$

式中的积分全都是对于固定电路进行的。唯一与积分的变量无关的只有电流 I_2 。因此, 我们可以把它提到两个积分号之外。于是电动势就可以写成

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

式中系数 M_{12} 为

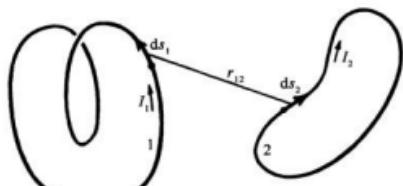


图 17-9 任何两个线圈都有与 $ds_1 \cdot ds_2 / r_{12}$ 的积分成正比的互感 M

$$M_{12} = -\frac{1}{4\pi r_0 c^2} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{ds_2 \cdot ds_1}{r_{12}}. \quad (17.30)$$

从这一积分我们见到, M_{12} 仅取决于电路的几何结构, 它依赖于两电路间的一种平均间距, 而在这个平均过程中对两线圈互相平行的那些节段必须加权。我们的式子可以用来计算两个任意形状电路间的互感。并且, 它表明 M_{12} 的积分与 M_{21} 的积分全同。因此, 我们已证明了这两系数是全等的。对于只含有两个线圈的系统, 这两个系数 M_{12} 和 M_{21} 常被表示成没有任何下角标的符号 M , 简单叫作互感:

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

§ 17-7 自 感

在对图 17-8 或 17-9 的两个线圈中的感生电动势进行讨论时, 我们仅仅考虑了其中一个线圈中电流的情况。如果两个线圈中同时载有电流, 则耦合到每一线圈的磁通量就将是那些分开存在着的两个通量之和, 因为叠加定律对于磁场是适用的。因此, 每个线圈中的电动势不仅正比于另一线圈中的电流变化, 而且也正比于该线圈本身的电流变化。于是, 在线圈 2 中的总电动势就应当写成*

$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} + M_{22} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.31)$$

同理, 线圈 1 中的电动势将不仅依赖于在线圈 2 中的变化电流, 而且也依赖于本身的变化电流:

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt} + M_{11} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.32)$$

系数 M_{22} 和 M_{11} 都永远是负数, 通常被写成

$$M_{11} = -L_1, \quad M_{22} = -L_2, \quad (17.33)$$

其中 L_1 和 L_2 分别称为两个线圈的自感。

当然, 即使仅有有一个线圈, 自感电动势依然存在。任一线圈因自身的原因都有一个自感 L 。电动势将正比于其中电流的变化率。对于单个线圈, 通常采取这样的惯例, 即如果电动势与电流的方向相同, 那它们就被认为是正的。按照这种惯例, 我们可以把单个线圈的电动势写成

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (17.34)$$

负号指明该电动势反抗电流的变化——故常称为“反电动势”。

由于任何线圈都有反抗电流变化的自感, 所以线圈里的电流就有一种惯性。事实上, 如果想要改变线圈里的电流, 就必须把线圈接至某一电池组或发电机的外电压源来克服这一惯性, 原理图如图 17-10(a)所示。在这样一个电路中, 电流 I 按照如下关系依赖于电压 V :

* 式(17.31)和(17.32)中 M_{12} 和 M_{21} 的符号取决于对该两线圈中正电流向指的任意选择。

$$V = L \frac{dI}{dt}. \quad (17.35)$$

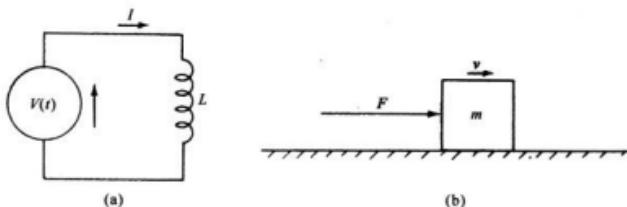


图 17-10 (a) 含有一电压源和一自感的电路; (b) 类似的机械系统

这一方程与粒子在一维中情况下的牛顿运动定律具有相同形式。因此,我们可以按“相同的方程具有相同的解”的原则来对它进行研究。这样,若把外加电压 V 对应于所加的外力 F ,而把线圈中的电流对应于粒子的速度,则该线圈的自感就对应于粒子的质量 m^* 。看一看图 17-10(b)。我们可以编制一个关于各相应量的对照表:

粒子	线圈
F (力)	V (电势差)
v (速度)	I (电流)
x (位移)	q (电荷)
$F = m \frac{dv}{dt}$	$V = L \frac{dI}{dt}$
mv (动量)	LI
$\frac{1}{2}mv^2$ (动能)	$\frac{1}{2}LI^2$ (磁能)

§ 17-8 电感与磁能

继续上一节中所进行的类比,我们就会预期,对应于其变化率为作用力的机械动量 $p = mv$,就会有一个等于 LI 的类似量,其变化率为 V 。当然,我们并没有任何权利讲 LI 就是电路的真实动量,事实上,它并不是。整个电路可能固定不动而没有任何动量。 LI 与动量 mv 相类似只是在彼此都满足相对应的方程这一意义上说的。同样,对于动能 $\frac{1}{2}mv^2$,也有一类似量 $\frac{1}{2}LI^2$ 与之对应。但这里却使我们感到惊异,这 $\frac{1}{2}LI^2$ 在电的情况下确就是能量。这是因为对电感做功的时间变化率为 VI ,而它在力学系统中相应的量为 Fv 。因此,就能量来说,这些量不但在数学上彼此对应,而且也具有相同的物理意义。

从下面所述情况我们可更详尽地明了这一点。就像在式(17.16)中我们曾经求得的那样,由感应力所做的电功其时间变化率为电动势与电流之积:

* 附带说一下,这并不是在力学量与电学量之间能够建立起对应关系的唯一途径。

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon I.$$

将式(17.34)中用电流表示的 ε 代入上式, 我们得

$$\frac{dW}{dt} = -LI \frac{dI}{dt}. \quad (17.36)$$

对这一方程进行积分, 则就求得在建立电流过程中为了克服自感电动势而需要从外部电源获得的能量* (这必定等于所储存的能量 U) 为

$$-W = U = \frac{1}{2}LI^2. \quad (17.37)$$

因此, 储藏于自感中的能量为 $\frac{1}{2}LI^2$ 。

把与此相同的论据应用于诸如图 17-8 或 17-9 中的那一对线圈, 就可以证明该系统的总电能由下式给出:

$$U = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2. \quad (17.38)$$

为此, 设开始时两线圈中的 $I = 0$, 然后可以先在线圈 1 中接通电流 I_1 , 让线圈 2 中的电流 $I_2 = 0$ 。此时所做的功正好为 $\frac{1}{2}L_1I_1^2$ 。但现在当接通 I_2 时, 就不仅在电路 2 中对抗电动势做功 $\frac{1}{2}L_2I_2^2$, 而且也做了附加的功 MI_1I_2 , 后者等于电路 1 中电动势 $[M(dI_2/dt)]$ 的时间积分, 再乘以该电路中当时的恒定电流 I_1 。

假设现在希望求出分别带有电流 I_1 和 I_2 的任意两个线圈之间的作用力。首先我们也许预期, 可以应用虚功原理通过取式(17.38)中的能量变化而求得。当然, 还必须记住, 当我们改变两线圈的相对位置时, 唯一变化的量是互感 M 。这样, 我们也许会把虚功原理方程写成:

$$-F\Delta x = \Delta U = I_1I_2\Delta M(\text{错了}).$$

但这个式子却是错误的。因为, 正如我们以前曾经见过的, 它只包括两线圈中的能量变化, 而没有包括为使电流 I_1 和 I_2 保持恒定值的那些电源的能量变化。现在我们能够理解这些电源必须在线圈移动时供应能量以便抵抗线圈中的感生电动势。如果想要正确地应用虚功原理, 就必须把这些能量也包括进去。然而, 正如我们曾经见到的, 可以取一捷径, 通过回忆知道总能量等于所谓的“机械能” $U_{\text{机械}}$ 的负值后, 再应用虚功原理。因此, 我们可以把力写成:

$$-F\Delta x = \Delta U_{\text{机械}} = -\Delta U. \quad (17.39)$$

于是两线圈间之力由下式给出:

$$F\Delta x = I_1I_2\Delta M.$$

关于两线圈系统的能量表示式(17.38), 可以用来证明两线圈间的互感 M 与自感 L_1 和

* 目前我们忽略电流在线圈的电阻中发热而引起的任何能量损耗。这种损耗需要来自电源的附加能量, 但不会改变输入电感中的能量。

L_2 之间存在一个有趣的不等式。十分清楚,两线圈的能量必须总是正的。如果把两线圈的电流从零开始增加到某个值,则我们就已经在给该系统输入能量了。要不然的话,电流便会自发增加而同时又对世界其他部分释放能量——一件不可能会发生的事情!现在,我们的能量表示式(17.38)也同样可以写成如下形式:

$$U = \frac{1}{2}L_1\left(I_1 + \frac{M}{L_1}I_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)I_2^2. \quad (17.40)$$

这只是一个代数变换。这个量对于 I_1 和 I_2 的任何值都必须始终为正。特别是即使 I_2 恰巧为特殊值

$$I_2 = -\frac{L_1}{M}I_1, \quad (17.41)$$

它仍必须为正。但对于 I_2 这个电流,式(17.40)中的首项为零。如果能量一定是正值,则式(17.40)的末项就必须大于零。因而要求有

$$L_1L_2 > M^2.$$

这样,我们就已证明了这个普遍结果:任意两个线圈互感 M 的大小必然小于或等于两个自感的几何平均值(M 本身是可正可负的,这取决于对电流 I_1 和 I_2 的符号约定)。

$$|M| < \sqrt{L_1L_2}. \quad (17.42)$$

M 与自感的关系常被写成

$$M = k\sqrt{L_1L_2}. \quad (17.43)$$

常数 k 称为耦合系数。如果来自一个线圈的通量大部分贯穿另一个线圈,则该耦合系数很接近于 1,我们说该两线圈是“紧耦合”的。如果两线圈相距很远,或由另外的安排使得其互相贯穿的通量很少,则耦合系数接近于零,而互感便很小了。

为计算两线圈的互感,我们在式(17.30)中已给出了一个环绕两电路的双重线积分公式。或许我们认为,可以利用相同的公式通过环绕同一个线圈进行两次线积分而获得单个线圈的自感。然而,这办法行不通,因为在环绕两个线圈积分时,若两线圈都落在同一点,则被积函数中的分母 r_{12} 将会趋于零,于是从这个式所得到的自感就会无限大。原因在于这个公式是一种近似,只有当两电路的导线截面比从一个电路至另一个电路的距离小时这个公式才适用。很清楚,这样一种近似对于单个线圈并不成立。事实上,单个线圈的自感,当其中导线的直径变得越来越小时,真的会按照对数函数方式趋于无限大。

这样,我们就必须寻找计算单个线圈自感的另一种方法。有必要将导线里的电流分布也算在内,因为导线的大小是一个重要参数。因此,我们不应去追究一个“电路”的自感如何,而应去寻求导体分布的自感如何。或许求出自感最方便的办法是利用磁能。以前我们在 § 15-3 中曾求出过关于恒定电流分布的磁能表示式:

$$U = \frac{1}{2} \int j \cdot A dV. \quad (17.44)$$

如果已知电流密度 j 的分布,则可以算出矢势 A ,并进一步算出式(17.44)的积分而获得能量。这个能量等于自感的磁能,即 $\frac{1}{2}LI^2$ 。令两者相等我们就给出了关于自感的公式:

$$L = \frac{1}{I^2} \int j \cdot A dV. \quad (17.45)$$

当然,我们期望,自感是只与该电路的几何形状有关而与电路中的电流 I 无关的一个数值。式(17.45)的确会给出这样的结果,因为这个式中的积分与电流的平方成正比,电流通过 J 出现一次,通过矢势 A 又出现一次。这积分除以 I^2 后将与电路的几何形状有关而与电流 I 无关了。

关于电流分布的能量表示式(17.44),可以写成一个十分不同的形式,后者有时更便于计算,并且,正如我们以后将见到的,它是一种重要形式,因为它的正确性更普遍。在关于能量的公式(17.44)中, A 和 j 两者都可以联系到 B ,因而可以指望用磁场来表示这能量——就像过去我们能够把静电能同电场联系起来那样。我们通过用 $\epsilon_0 c^2 \nabla \times B$ 替代 j 开始,但不能那么容易地代替 A ,因为 $B = \nabla \times A$, 所以并不能倒过来用 B 给出 A 。但无论如何,我们总可以写出

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int (\nabla \times B) \cdot A dV. \quad (17.46)$$

有趣的是,附带一些限制条件,这个积分可以写成

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B \cdot (\nabla \times A) dV. \quad (17.47)$$

为看清这一点,我们将其中一个典型项详细写出。假定我们处理式(17.46)积分中所含的项 $(\nabla \times B)_x A_z$ 。将其各部分写出,便得

$$\int \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) A_z dx dy dz$$

(当然,还有两个相同类型的积分)。现在就第一项对 x 进行积分——采用分部积分法,这就是说,我们可以有

$$\int \frac{\partial B_y}{\partial x} A_z dx = B_y A_z - \int B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} dx.$$

现在假定我们的系统——指各源及各场——是有限的,因而在无限远处所有的场都趋于零。这样,若那些积分都是对全部空间进行的,则在积分限处项 $B_y A_z$ 的值将为零。剩下的就只有 $B_y (\partial A_z / \partial x)$ 那一项,这显然是 $B_y (\nabla \times A)_z$ 的一部分,因而也就是 $B \cdot (\nabla \times A)$ 的一部分。如果你又算出其余五项,就将看到式(17.47)的确与式(17.46)等效。

但现在我们可用 B 来代替 $\nabla \times A$, 从而获得

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B \cdot B dV. \quad (17.48)$$

上式已经把一静磁情况的能量仅用磁场来表示,这一表示式紧密地对应于我们曾经得到的静电能公式:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E \cdot E dV. \quad (17.49)$$

之所以强调这两个能量公式,其中的一个原因是,有时它们更便于应用。而更为重要的是,事实证明,对于动态场(当 E 和 B 都随时间变化时)这两个表示式(17.48)和(17.49)都保持

正确,而以往关于电能和磁能所曾给出的其他公式则不再正确——它们仅适用于静态场。

如果对单个线圈的磁场已经了解,则可以通过使能量表示式(17.48)等于 $\frac{1}{2}LI^2$ 而求出自感。让我们通过求出长螺线管的自感来看看这是如何计算出来的。以前就知道长螺线管里的磁场是均匀的而管外的 B 为零。管内磁场的大小为 $B = nI/(\epsilon_0 c^2)$, 其中 n 为单位长度的绕线匝数, 而 I 为电流。如果该线圈的半径为 r 而其长度为 l (我们设想 l 很长, 也即 $l \gg r$, 从而可以忽略边缘效应), 则管内的体积为 $\pi r^2 l$ 。因而磁能为

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} B^2 \cdot (\text{体积}) = \frac{n^2 I^2}{2\epsilon_0 c^2} \pi r^2 l,$$

它等于 $\frac{1}{2}LI^2$, 即

$$L = \frac{\pi r^2 n^2}{\epsilon_0 c^2} l. \quad (17.50)$$

第 18 章 麦克斯韦方程组

§ 18-1 麦克斯韦方程组

本章我们将回到第 1 章中作为我们起点的、由四个式子构成的、完整的麦克斯韦方程组。到目前为止，我们已经零碎地研究过麦克斯韦方程组，现在是把最后一部分加进去并将其全都合起来的时候了。于是对于可能以任何形式随时间变化的电磁场，我们将有完整而又正确的描述。在这一章中所谈到的任何事情与以前谈到的事情发生矛盾的话，则都以本章为准，以前所谈到的是错误的——因为以前所论述的只适用于诸如恒定电流和固定电荷那样一些特殊情况。尽管过去每当我们写出一个方程时总是十分细心地指出它受到的限制，但很容易把所有的限制条件都忘记了，而且很容易对那些不正确的方程学得过分认真。现在我们准备给出全部真理，而不附带（或几乎不具有）任何限制条件。

整套麦克斯韦方程组列于表 18-1 中，其中包括语言和数学符号两种表达方式。语言与方程式等效这一事实从现在就应该熟悉它——你应当能够从一种形式顺利地变换到另一种形式。

表 18-1 经典物理学

麦克斯韦方程组：

I. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (穿过一闭合面的 \mathbf{E} 通量) = (面内电荷) $/\epsilon_0$

II. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (\mathbf{E} 环绕一回路的线积分) = $-\frac{\partial}{\partial t}$ (穿过该回路的 \mathbf{B} 通量)

III. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (穿过一闭合面的 \mathbf{B} 通量) = 0

IV. $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (\mathbf{B} 环绕一回路的积分) = 穿过该回路的电流 $/\epsilon_0 + \frac{d}{dt}$ (穿过该回路的 \mathbf{E} 通量)

[电荷守恒

$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (穿过一闭合面的电流通量) = $-\frac{d}{dt}$ (闭合面内电荷)]

力的定律：

$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

运动定律：

$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}$, 其中 $\mathbf{p} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (经爱因斯坦修正过的牛顿定律)

引力：

$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$

第一个方程—— \mathbf{E} 的散度等于电荷密度除以 ϵ_0 ——是普遍正确的。无论对于动态场或静态场，高斯定律永远正确。穿过任何闭合面的 \mathbf{E} 通量与面内电荷成正比。第三个方程是与第一个方程相对应的、关于磁场的一般定律。由于不存在磁荷，所以通过任一闭合面的 \mathbf{B}

通量总是等于零。第二个方程，即 \mathbf{E} 的旋度为 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ ，这就是法拉第定律，我们在前面两章中已经讨论过了，它也是普遍正确的。最末一个方程含有某种新的东西，以前我们只看到对恒定电流才适用的那一部分。在那种情况下，我们曾经说过 \mathbf{B} 的旋度为 $\mathbf{j} / (\epsilon_0 c^2)$ ，但普遍正确的方程则还带有一个由麦克斯韦发现的新的项。

在麦克斯韦完成其工作以前，电和磁方面的已知定律就是从第3章至第17章中我们曾经学习过的那些。特别是，关于恒定电流的磁场方程仅仅知道为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.1)$$

麦克斯韦从考虑这些已知定律开始并将其表达成微分方程，正如我们这里曾经做过的那样（虽然当时 ∇ 这一符号尚未发明，但今天我们称为旋度和散度的那些微商组合的重要性，就是由于麦克斯韦才首次显示出来）。后来他又注意到式(18.1)有些奇怪。如果我们取这一方程的散度，左边将是零，因为一个旋度的散度始终等于零，所以这一方程要求 \mathbf{j} 的散度也是零，但如果 \mathbf{j} 的散度为零，则从任何闭合面跑出来的电流总通量也将是零。

来自一闭合面的电流通量等于该面内电荷的减少。一般地说，这肯定不能为零，因为我们知道电荷可以从一处移至另一处。事实上，方程

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (18.2)$$

几乎已是我们关于 \mathbf{j} 的定义了。这一方程表示电荷守恒这样一个最基本定律——任何电荷流动都必须来自某个供应处。麦克斯韦认识到这一困难，并提出可以通过在式(18.1)右边加进 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 这一项来加以避免，于是他就得到了表 18-1 上所列的那第四个方程：

$$IV. c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

在麦克斯韦时代人们还不习惯于用抽象的场来进行思考。麦克斯韦曾利用好像弹性固体那种真空来讨论他的概念。他也尝试过用这种机械模型来解释他新方程的意义。当时对接受他的理论存在不少阻力，首先是由于他的模型，而其次则是由于当初尚未有实验证明。今天，我们更好地了解到，争论点在于那些方程本身，而并不是用来获得它们的那种模型。我们仅仅可以质问这些方程是正确的呢还是错误的。这要通过做实验来回答，而无数实验都已证实了麦克斯韦方程组。如果把他用以建立他大厦的脚手架搬开，我们将发现麦克斯韦的华丽大厦本身仍巍然屹立。他把所有关于电学和磁学的定律都综合在一起而形成一套完整而又漂亮的理论。

让我们来证明这一附加项正好是为解决麦克斯韦所发现的那个困难所必需的。如果对他的方程（表 18-1 上的式 IV）取散度，则右边的散度就应为零：

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (18.3)$$

在第二项中对坐标与对时间取微商的次序可以对调，因而该方程可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (18.4)$$

但麦克斯韦方程组中的第一个方程表明, E 的散度为 ρ / ϵ_0 。将这个等式代入式(18.4)中, 则又回到式(18.2), 我们知道它是正确的。反过来, 若接受麦克斯韦方程组——事实上, 我们接受了, 因为没有任何人发现过一个实验与这些方程不相符——则我们必定得出结论: 电荷总是守恒的。

物理规律没有回答下述问题: “如果电荷突然在这里产生, 则会出现什么? 有哪一些电磁效应该会发生?”对此没有答案可以提供, 因为我们的方程组表明, 上述情况是不会发生的。要是它真的发生的话, 便需要一些新的定律, 但我们无法讲清楚这些定律会是怎样的, 因为还没有机会去观察一个电荷不守恒的世界将会怎样行动。按照我们的那些方程, 如果你突然将一电荷放在某处, 那你一定是从别处把它带到那里的。在那种情况下, 你就能够说出将会发生什么了。

当我们对 E 的旋度方程添加一新项时, 就发现有完整的一类新型现象可以得到描述。我们即将见到, 麦克斯韦对 $\nabla \times B$ 那个方程的一个小小附加也具有深远后果。在本章中, 对这些后果我们只能提及其中的几个。

§ 18-2 新的项是如何起作用的

作为第一个例子, 我们要考虑一个具有球对称的径向电流分布发生的情况。我们设想有一个其上面带有放射性材料的小球, 这种放射性材料正喷射出一些带电粒子(或者也可以设想有一大块胶体, 在其中心处有一个小空穴, 用一支皮下注射针在空穴注入了一些电荷, 并从那里慢慢地渗漏出来)。在上述任一种情况下, 我们都具有处处沿径向流出的电流。下面将假定, 这一电流的大小在各不同方向上都相同。

令在任意半径 r 以内的总电荷为 $Q(r)$ 。如果在相同半径处的径向电流密度为 $j(r)$, 则式(18.2)要求 Q 减少的速率为

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r). \quad (18.5)$$

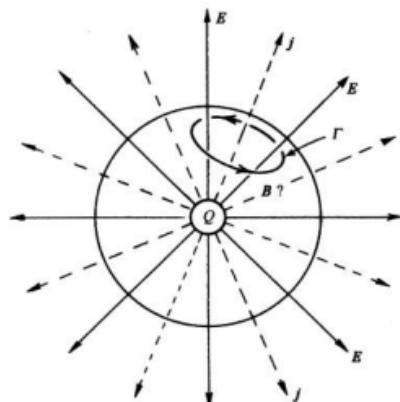


图 18-1 一个具有球形对称的电流, 其磁场如何

现在我们要问, 在这种情况下由电流所产生的磁场如何。假设在半径为 r 的球面处画出某一条回路 Γ , 如图 18-1 所示。这样就有一些电流会穿过该回路, 因而也许可以期望求出沿图上所示方向的磁场环流来。

但这样我们就已经处于困难之中了。 B 如何能在该球面上有任何特殊方向呢? 对 Γ 的另一种选择将会容许我们断定它的方向恰恰与所示的相反, 所以怎么能够有环绕着那些电流的 B 的任何环流呢?

幸而麦克斯韦方程救了我们。 B 的环流不仅取决于穿过 Γ 的总电流, 而且也取决于穿过它的电通量对时间的变化率, 一定是这两部分刚好互相抵消。让我们看看是否能证

明确实是这样。

在半径为 r 处的电场必定是 $Q(r)/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ ——只要如我们所假定的那样, 电荷是球对称分布的。电场沿着径向, 而其时间变化率为

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (18.6)$$

将此式与式(18.5)比较, 我们就知道在任何半径处

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j}{\epsilon_0}. \quad (18.7)$$

在方程IV中那两个源的项互相抵消了, 因而 \mathbf{B} 的旋度就永远为零。在我们的例子中不存在磁场。

作为第二个例子, 我们考虑用来对平行板电容器充电的导线的磁场(参见图18-2)。如果板上的电荷随时间变化(但不是太快), 则导线里的电流等于 dQ/dt 。我们会料到这电流将产生环绕着该导线的磁场。肯定地说, 结束于极板的电流必定产生正常的磁场——它不可能依赖于电流在何处消失。

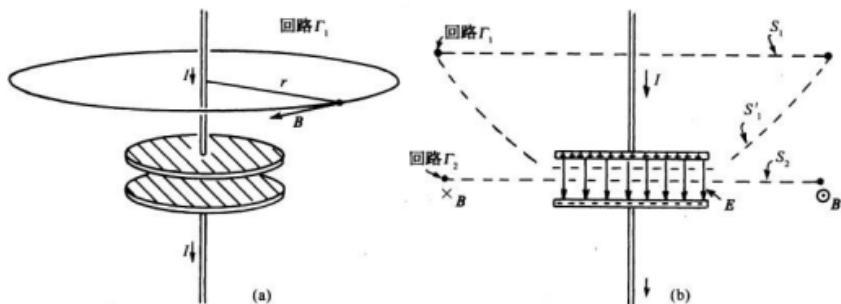


图 18-2 一个正在充电的电容器附近的磁场

假定选取一条回路 Γ_1 , 那是一个如图(a)所示的半径为 r 的圆周。磁场的线积分应等于电流 I 除以 $\epsilon_0 c^2$, 即

$$2\pi r B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.8)$$

这是对于恒定电流应该获得的结果, 不过在加上麦克斯韦的附加项之后它仍然正确, 因为我们考虑那个圆周内的平面 S , 则在该面上将不会有电场(假定那条导线是十分优良的导体), 所以 $\partial E / \partial t$ 的面积分为零。

然而, 假设现在慢慢地把曲线 Γ_1 向下移动, 直至电容器的极板水平为止, 我们得到的结果总是相同。此时电流 I 变为零, 磁场是否就消失了呢? 这将是十分奇怪的。让我们来看看, 对于那条其平面通过电容器两板之间而其半径为 r 的圆周曲线 Γ_2 [图18-2(b)], 麦克斯韦方程对此将做何解释。 \mathbf{B} 环绕 Γ_2 的线积分为 $2\pi r B$, 它必然等于穿过该圆面 S_2 的 \mathbf{E} 通量

对时间的微商。我们从高斯定律得知,这个 E 通量应等于 $1/\epsilon_0$ 乘以电容器一个板上的电荷。于是就有

$$c^2 2\pi r B = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right). \quad (18.9)$$

那很方便,这结果与我们在式(18.8)中得到的相同。对变化着的电场取积分与对在导线里的电流取积分给出相同的磁场。当然,这恰好就是麦克斯韦方程所讲的。对于图 18-2 (b)所示的由同样的圆周曲线 Γ_1 为边界的两个面 S_1 和 S'_1 , 只要应用与上述相同的论证便很容易看出结果永远应该如此。穿过 S_1 的有电流 I , 但没有电通量。而穿过 S'_1 的则没有电流,但却有一个以速率 I/ϵ_0 变化着的电通量。如果把方程 IV 应用到任何一个面,则会得到相同的 B 。

从我们迄今对麦克斯韦新项的讨论,你可能会觉得有了它并没有增加多少东西——它只是把方程组安排得符合于我们已经预期的结果。诚然,若只是孤立地考虑方程 IV, 就不会发现任何特别新鲜的东西。然而,“孤立地”这个词却十分重要。麦克斯韦在方程 IV 中的那个小小的改变,当它与其他的方程结合起来时,就的确会产生不少全新而又重要的东西。然而,在考虑这些事情之前,我们要对表 18-1 多说几句。

§ 18-3 全部经典物理学

表 18-1 包含了我们所熟悉的全部基本经典物理学, 即在 1905 年以前已知的那种物理学。这里将其全都列在一个表上。借助这些方程, 我们就能理解经典物理的整个领域。

首先, 我们拥有麦克斯韦方程组——写成阐述的形式和简短的数学形式两种。然后就有电荷守恒, 它即使是写在方括号之内的, 也因为一旦我们有了完整的麦克斯韦方程组, 就能够由其导出电荷守恒了, 所以该表甚至还稍微有点重复。其次, 我们已写出了力的定律, 因为尽管有了电场和磁场仍不会告诉我们任何东西, 除非我们知道它们对于电荷起着什么作用。可是, 若知道了 E 和 B , 我们就能求出作用于一个带有电荷 q 、以速度 v 运动着的物体上的力。最后, 虽然有了这个力但并不告诉我们什么, 除非我们知道当力推动某件东西时发生了什么, 否则我们需要运动定律, 那就是力等于动量的变化率(记得吗? 我们早在第 1 卷中就已经有了)。我们甚至通过把动量写成 $p = m_0 v / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ 而将相对论效应也包括了进去。

如果真正希望完美无缺的话, 应该再加上一个定律——牛顿的引力定律——所以我们将其放在该表之末。

因此, 在一个小小的表中, 我们有了经典物理学的全部基本定律——甚至有的地方还用语言写出以及有一些重复。这是一个伟大时刻, 我们已爬上了一座高峰, 处在 K-2 高峰之上——正在准备攀登珠穆朗玛峰, 那就是量子力学。我们已登上了“洛基山脉分水岭”的那个高峰, 而现在可以从山的那边下去了。

我们一直在努力学习如何去理解那些方程式。现在我们已有了集合在一起的完整的方程组, 以后将研究这些方程具有的意义——它们会说出我们还未见过的那些新东西。为到达这个目标, 我们一直在努力工作。它已是一个伟大的成就, 但现在当我们见到这一成就的全部结果时, 我们将令人愉快地飘然下坡而去了。

§ 18-4 行 移 场

现在就来谈谈一些新的结果。它们是由于将所有的麦克斯韦方程集合在一起而产生的。首先,让我们看看在一个我们选定为特别简单的情况下会有什么。假定所有的量都仅在一个坐标内变化,我们的问题就变成一个一维问题了。这样的情况如图 18-3 所示。我们具有置于 yz 平面上的一片电荷。该片电荷起初是静止的,然后瞬息得到一个平行于 y 轴的速度 v ,并保持以这一恒定速度运动。你也许会为有这种“无限大”的加速度而担心,但实际上并不要紧,只要想象该速度很快就提高到 v 。因此,我们突然就有一个面电流 J (J 是在 z 方向的单位宽度中的电流)。为了保持问题简单,我们假定还有一片静止的异号电荷叠加在 yz 平面上,使得不会发生任何静电效应。并且,虽然在图上我们仅仅表明,在一个有限区域里所发生的情况,但应该想象该片电荷伸展至土 y 和土 z 的无限远处。换句话说,我们有这么一种情况,即原本没有电流,但突然有了一个均匀的面电流。这样将发生什么呢?

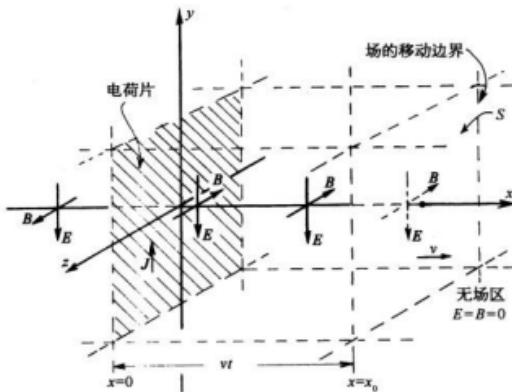


图 18-3 一个无限大电荷片突然平行于其本身运动。这样就会有
磁场和电场以一恒速率从该片传播出去

噢! 当沿正 y 方向上有一片电流时,如我们所知,在 $x > 0$ 的地方就会产生一个沿负 z 方向的磁场,而在 $x < 0$ 的区域磁场则沿相反方向。我们可以通过应用磁场的线积分将等于电流除以 $\epsilon_0 c^2$ 这一事实来求出 B 的大小。这样,就会得到 $B = J / (2\epsilon_0 c^2)$ (因为在一宽度为 w 的长片上,电流 I 就是 Jw ,而 B 的线积分则为 $2Bw$)。

这向我们提供了在该片附近——即对于小 x 处——的磁场,但由于我们所设想的乃是一个无限大的片,因而也会期望这同样的论证应当给出在较大 x 值即在较远处的磁场。可是,这就意味着,接通电流的瞬间,磁场突然处处从零变到一个有限值。但请等一下! 如果磁场突然改变,也会产生巨大的电效应(只要它在改变,就有电的效应)。由于移动了该电荷片,因此,我们造成一个变化的磁场,因而电场也一定被产生。如果有电场产生,则它们必定从零开始而变化至某一个量值。这样就将有个 $\partial \mathbf{E} / \partial t$,与电流 \mathbf{J} 一起将对磁场的产生做出

贡献。因此,通过存在大量交相混合的各个方程求解时,我们不得不力图同时求解所有的场。

如果仅仅考察麦克斯韦方程组,还不容易直接看出如何去求得解答。因此,我们将首先

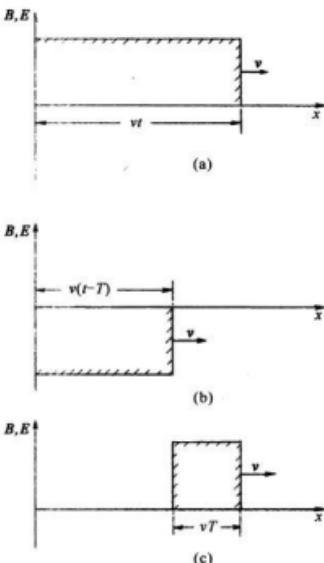
向你们说明答案是什么,然后才证实它的确满足那些方程。答案是这样的:上面我们所算出的场 \mathbf{B} ,实际上确实在该电流片右面附近(即对于小 x 值)产生的。结果一定是这样,因为如果环绕该片做一个小回路,则不会有地方可供任何电通量穿过。但是在较远—— x 较大——处的 \mathbf{B} 场起初为零,它保持了片刻为零,然后便突然增大。总之,我们一开通电流,磁场立即靠紧在它的地方跃升至一恒定值 \mathbf{B} ,然后这个 \mathbf{B} 的跃升又从源区再度扩展出去。经历了某一段时间后,在某一 x 值之内就将处处有一个均匀强磁场,在更远的地方则都等于零。由于对称的缘故,它会朝着正的和负的两个 x 方向扩展出去。

\mathbf{E} 场也与此一样。在 $t = 0$ (当我们开通电流时)之前,场处处为零。然后在经历了时间 t 之后, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 两者在扩展到 $x = vt$ 的范围内都是均匀的,而再往外则均为零。这些场像潮汐波一样向前扩展,其波前以一匀速前进,这速度最终将弄清楚是 c ,但暂时我们却只叫它作 v 。关于 \mathbf{E} 或 \mathbf{B} 的大小与 x 的关系曲线,在 t 时刻的表现如图 18-4(a)所示。再回顾一下图 18-3,在 t 时刻,在 $x = \pm vt$ 的区域内都“充满”着场,但这些场却还未到达更远的地方。这里要再次强调,我们是在假定该电流片以及由此产生的场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ,都是在 y 和 z 方向上伸展至无限远的(我们不能够画出一张无限大的片,因而图中所示的只是在一个有限大范围内所发生的事情)。

图 18-4 (a) 在电荷片已经运动之后,在 t 时刻作为 x 函数的 \mathbf{B} (或 \mathbf{E})的大小;
(b) 在 $t = T$ 时才将一电荷片朝着负 y 方向移动后的场;(c) (a)与(b)之和

现在,我们要对所发生的情况做定量分析。为此,就要考察两个截面图,一个是沿 y 轴向下的俯视图,如图 18-5 所示;另一个则是沿 z 轴往回望的侧视图,如图 18-6 所示。我们从该侧视图开始,就会见到该电荷片正在向上移动,在 $+x$ 各处磁场都指向书内;而在 $-x$ 各处磁场则指向读者,电场处处向下——一直伸展至 $x = \pm vt$ 处。

让我们看看这些场是否符合麦克斯韦方程组。首先,画出一条供计算线积分用的回路,比如说图 18-6 中所示的那个矩形 Γ_2 。你会注意到,这矩形的一边落在有场的区域,但另一边却落在场还没有到达的地方。有一些磁通量穿过这一回路。如果这通量正在变化着,则环绕该回路应有电动势。如果波前正在前进,就会有一个变化着的磁通量,因为 \mathbf{B} 所存在的区域正在以速度 v 逐渐扩大。在 Γ_2 内的通量等于 \mathbf{B} 乘以存在磁场的那一部分面积。由于 \mathbf{B} 的大小恒定,所以通量的变化率就等于 \mathbf{B} 的量值乘以面积的变化率。要获得面积的变化率挺容易。若该矩形的宽度为 L ,则其中有 \mathbf{B} 存在的面积在时间 Δt 内将改变 $Lv\Delta t$ (见图 18-6)。于是通量的变化率便是 BLv 。按照法拉第定律,这应等于 \mathbf{E} 环绕 Γ_2 的线积分,而



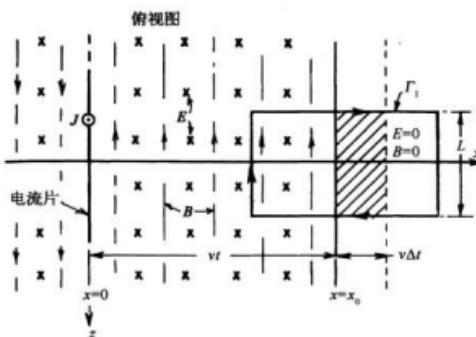


图 18-5 图 18-3 的俯视图

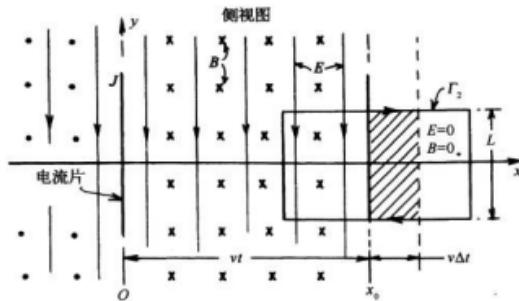


图 18-6 图 18-3 的侧视图

那恰好就是 EL 。于是我们就有方程：

$$E = vB. \quad (18.10)$$

因此,若 E 对 B 的比率为 v , 则我们所假设的这些场都将满足法拉第方程。

但那不是唯一的方程, 我们还有联系着 E 和 B 的另一个方程:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{i}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (18.11)$$

为了应用这个方程, 我们考察图 18-5 那个俯视图。我们已经知道, 这一方程将提供靠近该电流片的 B 值。并且, 对于任何画在该片之外但在波前之后的回路, 就不会有 B 的旋度, 也不会有任何 J 或变化的 E , 因而方程式(18.11)在那里是正确的。现在让我们来看看对于如图 18-5 所示的那条与波前相交的回路 R_1 发生什么事情。这里并没有电流, 因而方程式(18.11)可以——用积分形式——写成

$$c^2 \oint_{R_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_{\text{在 } R_1 \text{ 之内}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (18.12)$$

\mathbf{B} 的线积分恰好就是 B 乘以 L 。 \mathbf{E} 通量的变化率仅仅是由前进的波前引起的。在 Γ_1 内 \mathbf{E} 不为零的面积正在以 vL 的速率增大,于是式(18.12)的右边就是 vLE ,所以该方程式变成

$$c^2 B = Ev. \quad (18.13)$$

我们有这么一个解:即在波前后面 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 都是恒量,它们各与波前行进的方向垂直而且彼此之间也互相垂直。麦克斯韦方程组规定了 E 对 B 的比值。根据式(18.10)和(18.13),得

$$E = vB \text{ 和 } E = \frac{c^2}{v} B.$$

可是请等一等! 我们已求得关于比值 E/B 的两个不同的条件。刚才描述的这种场能否确实存在呢? 当然,要使这两个式都正确,只能有一个速度 v ,也即 $v = c$, 波前一定要以速度 c 前进。这样我们就有了一个例子,其中来自电流的电效应以某个有限速度 c 传播。

现在试问,如果在经历了一段短时间 T 之后,突然把电荷片的运动停止下来,会发生什么情况呢? 应用叠加原理我们能够看出将发生什么事情。我们有过电流原来为零,然后才突然开通的情况,并且已知道了那种情况的解。现在我们打算加上另一组场,即取另一片电荷,并仅在开通了第一个电流后的时刻 T ,在相反的方向以相同的速率突然使它开始移动。这两者相加起来的总电流起初为零,然后接通了一段时间 T ,之后又再中断——因为两电流恰好互相抵消,于是我们有一个电流的矩形“脉冲”。

这一新的负电流产生了与正电流相同的场,只是所有的符号都相反,当然都延迟了时间 T 。波前再次以速度 c 传播出去,在 t 时刻它已到达了 $x = \pm c(t-T)$ 的远处,如图 18-4(b) 所示。因此,就有两“块”场以速率 c 向外推进,正如图 18-4 的(a)和(b)两部分所示。至于联合场则如图 18-4(c)所示,在 $x > ct$ 处场为零,在 $x = c(t-T)$ 与 $x = ct$ 之间场为恒量(具有我们上面所求得的值),而在 $x < c(t-T)$ 处场又是零。

总之,我们有一小块场——厚度为 cT 的一块——离开了该电流片而独自穿越空间传播。场已经“起飞”了,它们正在自由地穿越空间传播着,不再与源有任何方式的联系。毛虫已变成了蝴蝶!

这组电磁场如何能维持它本身呢? 答案是:依靠法拉第定律 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 和麦克斯韦新项 $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$ 的联合效应。它们不得不维持其本身的存在。假定磁场已在消失,那就会有一个变化着的磁场,而这变化着磁场会产生一个电场。如果这个电场试图消逝,则这变化着的电场将再度产生磁场。因此,通过不断的相互影响——通过由一个场到另一个场的前后快速变换——它们必定会永远继续下去,而绝不会消逝*, 它们以一种舞蹈方式——一个围着另一个,第二个又围着第一个转——把它们自己维系在一起,穿越空间而向前传播。

§ 18-5 光速

我们已获得了一个离开了物质源、而以速度 c 即光速向外行进的波。可是,让我们回顾一下,从历史观点看,过去并不知道麦克斯韦方程组中的系数 c 就是光传播的速率,当时只

* 噢! 并不完全正确。如果它们到达一个有电荷存在的区域,便可能被“吸收”。这意味着其他的场可以在某处产生而在与这些场互相叠加时,通过相消干涉就可将其“抵消”掉(见第 1 卷第 31 章)。

是一个方程组中的常数。我们从一开始就叫它做 c , 那是因为已知道它最终应该变成什么。我们并不认为, 让你学习了含有不同常数的公式后, 才回过来在它适当的地方代入 c , 这是切合实际的。然而, 根据电学和磁学的观点, 我们恰好开始就拿出两个常数 ϵ_0 和 c^2 , 它们分别出现在静电和静磁的方程式中:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18.14)$$

与

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{j}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.15)$$

如果我们对于电荷的单位采取任何独立的定义, 便可通过实验来确定式(18.14)中所需的那个常数 ϵ_0 ——例如利用库仑定律测量在两个静止的单位电荷之间的力。我们也必须在实验上测定式(18.15)中出现的常数 $\epsilon_0 c^2$, 例如通过测量两单位电流之间的力而获得(单位电流指每秒流过的单位电荷)。这两个实验常数之间的比值为 c^2 ——正好是另一个“电磁常数”。

现在应该注意: 无论我们选择什么作为电荷单位, 这个常数 c^2 是相同的。如果把两倍“电荷”——如两倍的质子电荷——放进我们的电荷“单位”中, 那么 ϵ_0 就必须是原来的四分之一大。当我们把两个这样的“单位”电流通过两根导线时, 在每根导线中每秒通过的电荷将是两倍, 因而在两导线之间的力就会大四倍。常数 $\epsilon_0 c^2$ 一定要减少至四分之一, 但比值 $\epsilon_0 c^2 / \epsilon_0$ 不变。

因此, 仅仅由电荷和电流所做的实验就能求出 c^2 的数值来, 结果证明它是电磁影响传播速度的平方。从静态测量——通过对两单位电荷间和两单位电流间作用力的测量——我们求得 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ 。当麦克斯韦首先用他的方程组做出这个计算结果时, 就宣布了一组电场和磁场应以这一速率传播。同时他也已经注意到这个数值与光速相同的神秘巧合。麦克斯韦说: “我们几乎不可避免地断定, 光存在于相同媒质的横向波动之中, 这种媒质是电和磁现象的起因。”

麦克斯韦完成了物理学中几项重大统一事业中的一项。在他之前, 既有光, 也有电和磁。这后两者是由法拉第、奥斯特和安培通过实验工作而统一的。然后突然地, 光不再是“别的某种东西”, 而只是在这种新形式下的电和磁——独自穿越空间而传播着的一小块一小块的电场和磁场。

曾提醒过你们要注意这种特解的某些特点, 但事实却证明, 任何电磁波都具有这些特点: 即磁场和电场分别与波前运动的方向垂直; 而且 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 这两矢量又彼此互相垂直。此外, 电场的大小 E 等于磁场的大小 B 乘 c 。这三个事实——两种场都垂直于传播方向, \mathbf{B} 垂直于 \mathbf{E} , 而 $E = cB$ ——对于任何电磁波都普遍正确。我们的特殊情况是一个很好的例子——它表明了电磁波的所有主要特点。

§ 18-6 求解麦克斯韦方程组; 势和波动方程

现在, 我们愿意做些数学工作, 要把麦克斯韦方程组写成比较简单的形式。你可能会认为我们正在使其复杂化, 但倘若你稍微忍耐一点, 它们就会突然显得简单。尽管目前你已完全熟悉了麦克斯韦方程组中的每个方程, 但其中有许多部分必须全部综合起来。这就是我

们所要做的。

现在从 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ——最简单的方程——开始。我们知道,这意味着 \mathbf{B} 是某种东西的旋度。所以,如果写成:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (18.16)$$

则我们已解答了一个麦克斯韦方程(顺便提一下,你知道,若另一个矢量 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ ——其中 ψ 为任一标量场——则这个 \mathbf{A}' 仍保持正确,因为 $\nabla\psi$ 的旋度为零,所以 \mathbf{B} 还是一样。对此我们早已有所论述)。

其次,考虑法拉第定律 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, 因为它并不涉及任何电流或电荷。如果将 \mathbf{B} 写成 $\nabla \times \mathbf{A}$ 并对 t 微分,则可把法拉第定律写成如下形式:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}.$$

由于对时间或对空间取微商的先后次序是可以调换的,上式也可写成

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (18.17)$$

由此可见, $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 乃是一个旋度为零的矢量。因此,这一矢量便应当是某种东西的梯度。

当我们处理静电学问题时,就有 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 于是断定, \mathbf{E} 本身就是某种东西的梯度,并假定为 $-\psi$ (负号是为了技术上的方便)的梯度。现在对于 $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ 也同样处理,即令

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\psi. \quad (18.18)$$

这里采用了同样的符号 ψ ,以致在没有东西随时间变化的静电情况下, $\partial \mathbf{A} / \partial t$ 项消失, \mathbf{E} 就是我们原来的一 $-\nabla\psi$ 。因此,法拉第方程可以写成这种形式:

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (18.19)$$

我们已经解决了麦克斯韦方程组中的两个方程,而且我们已发现,为了描述电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ,总共需要四个势函数:一个标量势 ψ 和一个矢量势 \mathbf{A} ,后者当然就是三个函数。

现在那个 \mathbf{A} 确定了 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 的一部分,那么当我们把 \mathbf{A} 改成 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$ 时,又会发生什么呢?一般说来,如果我们不采取某种特别预防措施的话, \mathbf{E} 是会改变的。然而,仍然可容许 \mathbf{A} 按照上述方式改变而不影响 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ——也就是说,不改变其物理本质——如果我们总是按下列法则一同改变 \mathbf{A} 和 ψ ,即

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi, \quad \psi' = \psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (18.20)$$

则不论 \mathbf{B} 或由式(18.19)得到的 \mathbf{E} ,就都不会改变。

以前,我们曾选取 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$,以便使静态方程组稍微变得简单些。现在我们不准备再这样做了,打算做另一种选择。但在告诉大家这种选择到底是什么之前,我们将稍微等一下,因为以后就会明白为什么要这样做这样一种选择。

现在回到余下的两个描写势与源(ρ 和 \mathbf{j})之间关系的麦克斯韦方程。一旦我们能够根

据电流和电荷确定 \mathbf{A} 和 ϕ , 就总可以从式(18.16)和(18.19)获得 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} , 所以我们将有另一种形式的麦克斯韦方程组。

首先, 将式(18.19)代入 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ 中, 我们便得:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

这个式子也可写成:

$$-\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.21)$$

这是 ϕ 和 \mathbf{A} 与源相联系的一个方程。

最后的方程将是最复杂的一个方程。我们先把第四个麦克斯韦方程重新写成

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},$$

然后利用式(18.16)和(18.19)以势代替 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} , 得

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}.$$

再利用代数恒等式: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, 得到:

$$-c^2 \nabla^2 \mathbf{A} + c^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}, \quad (18.22)$$

这不是很简单!

幸而我们现在可以利用任意选择 \mathbf{A} 的散度的自由。下面将要做的就是利用这一选择以便使 \mathbf{A} 和 ϕ 的方程互相分开而又具有相同形式。为此, 选择可以按下式规定*:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (18.23)$$

当我们这样做时, 式(18.22)中关于 \mathbf{A} 和 ϕ 的中间两项便互相抵消, 因而该式也就比原来简单得多了:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.24)$$

而关于 ϕ 的方程——式(18.21)——取相同的形式:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.25)$$

多么漂亮的一组方程! 它们之所以漂亮, 首先是因为它们令人满意地互相分开了——电荷密度属于 ϕ , 电流则属于 \mathbf{A} 。而且, 尽管左边看来有点古怪——拉普拉斯算符加上一个

* 这样选取 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 称为“选取一个规范”。通过加 $\nabla \phi$ 来改变 \mathbf{A} 的方法称为“规范变换”。式(18.23)称为“洛伦兹规范”。

$-\frac{1}{c^2}(\partial/\partial t)^2$ ——但当我们将其全都展开出来时看到

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.26)$$

就 x, y, z, t 而言方程具有很好的对称性——这里 $-1/c^2$ 是必要的, 因为时间和空间当然彼此不同, 它们各有不同的单位。

麦克斯韦方程组已经把我们引导到关于势 ϕ 和 \mathbf{A} 这样一类新型方程以及所有四个函数 ϕ, A_x, A_y 及 A_z 的相同的数学形式。一旦掌握了如何求解这些方程, 便能够由 $\nabla \times \mathbf{A}$ 和 $-\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$ 获得 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 。所以我们具有一套完全同麦克斯韦方程组等价的另一种形式的电磁学定律, 而在许多场合下它们处理起来简单得多。

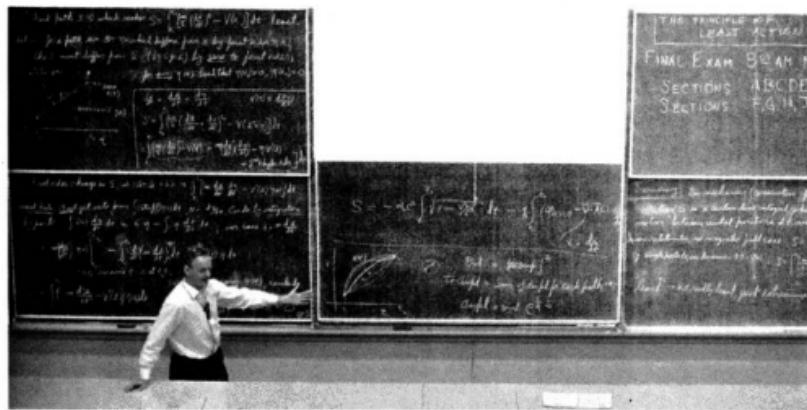
事实上, 我们曾经解过一个与式(18.26)十分相似的方程。早在第1卷第47章中学习声学时, 我们就有这种形式的方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

并且知道, 它描述了波在 x 方向以速率 c 进行的传播。方程式(18.26)是关于三维空间相应的波动方程。所以在不再存在任何电荷和电流的那些区域中, ϕ 和 \mathbf{A} 都等于零并不是这些方程的解(虽然它们的确也是一种可能的解)。会有一些解, 其中某组 ϕ 和 \mathbf{A} 随时间变化, 但却总是以速率 c 向外运动, 那些场穿越自由空间向前传播, 正如本章开头的例子那样。

借助方程IV中麦克斯韦的新项, 我们就能用 \mathbf{A} 和 ϕ 将场方程组写成一种简单的而又能立即使电磁波的存在成为明显的那种形式。对于许多实用的目的来说, 利用 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 的原来那些方程将仍然很方便。但这都在我们已经攀登过的山峰的那一边。现在我们准备跨越山峰到另一边去了。事情看来将会不同——我们准备看到一些新的和美妙的景色。

第 19 章 最小作用量原理



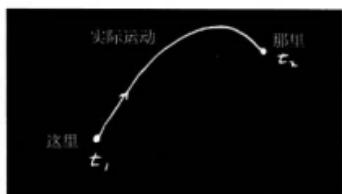
§ 19-1 专题演讲(完全按演讲记录付印)*

当我在中学念书时，我的物理教师——他的名字是巴德(Bader)先生——有一次在讲完了物理课之后，把我叫住说：“看来你有点厌烦，我要给你讲点有趣的东西。”然后，他告诉我一件事，我发现它是绝对会令人神往的，并且自那时以来，我发现它总是那么引人入胜。每次提出这一课题时，我就会对它进行分析研究。事实上，当我开始准备这次演讲时，我发现自己对这个问题正在做更详尽的分析。并不是为这一次演讲操心，实则我已被卷入到一个新的问题中去了。这个课题就是——最小作用量原理。

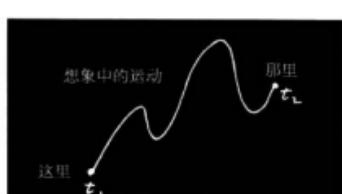
巴德先生这样告诉我：假定有一质点(例如，在一引力场中)通过自由运动从某处移动至另一处——你把它抛掷出去，它就会上升而又落下[图 19-1(a)]。它在一定时间内由出发点到达最后的地方。现在，你尝试一个不同的运动。假设由这里到达那里是如图 19-1(b)这样进行的，但所用时间却正好相同。然后他又这样说：如果你算出在该路径上每一时刻的

* 这是一次专题演讲。以后各章并不依赖于这篇专题讲演的材料——这是特意为“娱乐”的目的而设置的。

动能，减去势能，再计算出在经历整条路径期间它对时间的积分，你将会发现所获得的数值比对实际运动所获得的要大。



(a)



(b)

图 19-1

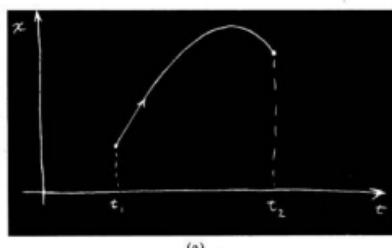
换句话说，牛顿定律可以不写成 $F = ma$ 的形式而表述成：一物体从一点到另一点所走的路径其平均动能减去平均势能应尽可能地小。

让我把这里面的意义说得更清楚些。如果我们考虑引力场的情况，那么若粒子的路径为 $x(t)$ （让我们暂时只考虑一维，即是一条升高、降落、但绝不会偏斜的轨道），其中 x 是地面以上的高度，则在任一时刻动能为 $\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2$ ，而势能为 mgx 。现在我沿该路径在每一时刻取动能减去势能再对时间自始至终进行积分。假定在起始时刻 t_1 由某一高度出发，并在结束时刻 t_2 确实到达了另外某一点[图 19-2(a)]。

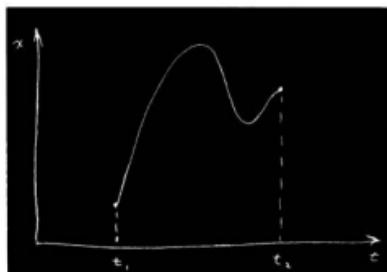
那么该积分就是

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mgx \right] dt.$$

实际的运动为某种类型的一条曲线——如果作一个位置-时间图，它是一条抛物线——而对于该积分会给出一个确定的值。但我们可以设想另一种运动，它升得很高，而且以某种特殊的方式上升和下落，如图 19-2(b)所示。我们可以算出动能减去势能并对这么一个路径或其他任何我们所想要的路径积分。令人诧异的是，真正的路径就是那一条会使这一积分取得最小值的路径。



(a)



(b)

图 19-2

让我们把它们彻底检验一下。首先，假定取一个完全没有势能的自由质点的情况。那么，该法则讲：在给定时间内在从一点跑至另一点的过程中，动能的积分是最少的，因而它一定要以均匀的速率行进（我们知道这是一个正确答案——以匀速率前进）。为什么是这样呢？因为假如该质点以任何其他方式运动，则其速度将有时比平均值高，有时比平均值低。因为它一定要在给定的时间内由“这里”到达“那里”，所以平均速度对于每一情况都是相同的。

作为一个例子，比如你的任务是乘车在给定时间内从家里到达学校，你可以用几种方式做到这点：可以一开始就像疯子似的使车子加速，然后在接近终点时用刹车逐渐放慢速度；或者你可以匀速前进；甚至你也可向后走一会儿，然后再往前开，如此等等。事实是，平均速率当然必须是你所经过的总距离除以所用的时间。但如果你试用各种方式、但就是不以匀速前进，那么你总会有时太快而有时则太慢。如你所知，围绕平均值偏差的某事件，其均方值恒大于其平均值的平方。所以如果你不保持开车的速度，那么动能的积分就总比用均匀速度开车时为高。所以我们看到，如果速度固定不变（当没有力作用时），则该积分便是一个极小值。正确的路径如图 19-3 这样。

现在，一个在引力场中被上抛的物体起初升得较快，然后逐渐放慢。那是因为物体还具有势能，所以就平均而言必须有最小的动能与势能之差。由于在空中上升时势能增大，所以如果我们能够尽快上升到高势能的地方，则将获得一个较低的差值。这样该势能才能从动能那里扣除出去，从而获得较低的平均值。所以最好就是去选取能够升得高、从而可从势能处得到很多负值的那一条路径（图 19-4）。

另一方面，你也不能升得太快，或跑得太远，因为这么一来你将会包含过多的动能——你得很快达到高处以便在可利用的规定时间里再落下来。所以你也不宜升得太高，但总要升到某个高度。因此事实证明，答案是在试图获得更多的势能与最少的额外动能之间取得某一种平衡——以期获得动能减去势能的差值尽可能小。

这就是我的老师告诉我的全部内容，因为他是一位十分好的教师并懂得在什么时候应停止对话。但我却还未懂得要在什么时候结束谈话，所以并不会留给你一个有趣评论，而我却想要来证明它确是如此，这无异用生活中的复杂性来使你感到不安和焦躁。我们将遇到的数学问题会十分困难，而且是一个崭新的课题。我们有某一个叫作作用量 S 的量。它是动能减去势能后对时间的积分。

$$\text{作用量} = S = \int_{t_1}^{t_2} (\text{动能} - \text{势能}) dt.$$

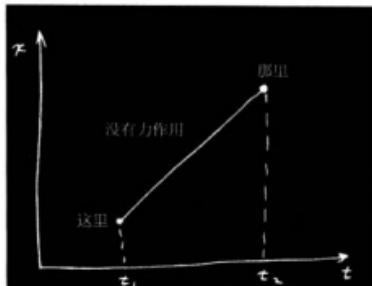


图 19-3

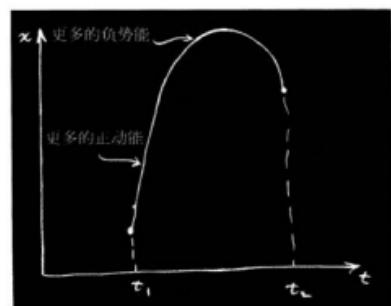


图 19-4

记住势能和动能两者都是时间的函数。对每条不同的可能路径你将获得有关这个作用量不同的值。我们的数学问题是找出使这个数值最小的那一条曲线。

你会说——呵，那不过是普通微积分学中的极大和极小问题罢了。在算出了作用量之后，只要求导就能找出那个极小值。

但是要小心。通常我们只有某变量的函数，而我们得求出使该函数为最小或最大的那个变量值。例如，设我们有一根棒，在其中部已加了热，因而热量将向两边传送出去。对于棒上每一点都有一个温度，而我们必须找出温度最高的那一点。但现在对于空间每一条路径我们有一个数值——完全不同的事件——而我们得找出那一条会使该数值极小的空间路径。那是完全不同的一个数学分支。它并不是普通的微积分。事实上，它被称为变分学。

有许多问题属于这一类数学。例如，圆周往往被定义为与一固定点的距离为常数的所有点的轨迹。但圆周还有另一种定义的方法：圆周是具有给定长度而包围最大面积的那条曲线。对于给定周长来说，任何其他曲线所包围的面积都比圆周包围的要小。因此，若我们提出这样一个问题：试求给定周长而能包围最大面积的那条曲线，我们就会有一个变分学问题——与你们熟悉的有所不同的一种微积分。

这样，我们就对一物体的路径进行计算。这里介绍一下将用的方法。我们的意图是：设想一条正确的路径，以及画出任何其他都是错误的路径，因而若对错误路径算出作用量，则将得到一个比按正确路径算得的作用量要大的结果（图 19-5）。

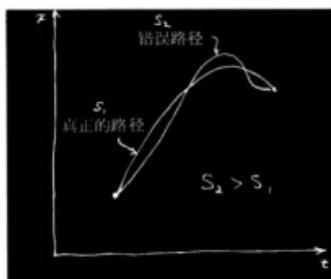


图 19-5

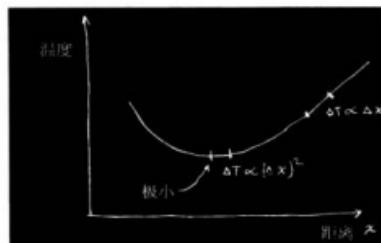


图 19-6

习题：试找出真实路径。它到底在哪里？当然，一种方法是去算出千千万万条路径上的作用量，再找出哪一条是最小的。当你找到了那条最小时，它就是正确的路径了。

那是一种可能途径，但我们却能够比这做得更好些。当有一个具有极小值的量——例如像温度那样的普通函数——时，极小值就有这么一个特点：若变量偏离极小值位置为一级小量，则函数与极小值的偏差仅为二级小量。在该曲线的任何其他部分，若原位置移动一个小距离，则函数值也将改变一级小量。但在极小处，一个微小的偏离在一级近似下函数不产生差异（图 19-6）。

这就是我们将用来计算真实路径的办法。如果已有一条真实路径，那么一条与它只有微小差别的曲线，其作用量在一级近似下将不会造成什么差别。若确实有一个极小值的话，则任何差别都将在二级近似内。

那不难证明。若当我们使曲线偏离某个路径时发生一个一级小量的变化，则作用量就有一个与该偏离成正比的变化。这变化大概会使作用量变得较大，否则我们就不会得到一个极小值了。但是若该变化与偏离成正比，则改变偏离的符号将会使作用量变得较小。我们将获得这样的作用量，沿一条路径它增加，而沿另一条路径它减少。作用量真正能够是极小值的唯一路径，是作用量在一级近似下不做任何改变的路径。而作用量的改变是与对真实路径偏离的平方成正比的。

所以我们就这样做：称 $\underline{x}(t)$ （下边加一底线）为真实路径——即我们试图要寻找的。取某条尝试路径 $x(t)$ ，与该真实路径有一微小差别，这差别我们称之为 $\eta(t)$ ，见图 19-7。

现在我们的想法是：若对路径 $x(t)$ 计算作用量 S ，则这个 S 与我们对路径 $\underline{x}(t)$ 所算出的作用量——为了简化写法，我们可叫它作 \underline{S} ——之差，即 S 与 \underline{S} 之差，在小 η 的一级近似下应等于零。这差可以是二级小量，但在一级近似下这差必须为零。

而对于任何一个 η 都必定是正确的。噢，还未尽然。这方法不会具有任何意义，除非你所考虑的各路径彼此都有相同的起点和终点——每条路径都在 t_1 时刻从某点出发而在 t_2 时刻到达另一点，这些地点和时间都保持固定不变。因此，我们的偏离 η 在每一端都应等于零，即 $\eta(t_1) = 0$ 和 $\eta(t_2) = 0$ 。有了这个条件，我们的数学问题才告确定。

要是你完全不懂得微积分，为了求一普通函数 $f(x)$ 的极小值你或许也是这样做。你可能会讨论如果对 $f(x)$ 中的 x 加一小量 h 后会发生的情况，并论证以 h 的一次幂对 $f(x)$ 的修正正在极小值处必然等于零。你会以 $x+h$ 取代 x 并展开至 h 的一次幂……正如我们将要对 η 做的那样。

于是我们的想法是，把 $x(t) = \underline{x}(t) + \eta(t)$ 代入作用量公式中，

$$S = \int \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt,$$

式中 $V(x)$ 代表势能。而 dx/dt 这个微商当然就是 $\underline{x}(t)$ 的微商再加上 $\eta(t)$ 的微商，所以对于作用量我得到这个表达式：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \eta) \right] dt.$$

现在我必须写得更详尽些。对于该平方项得到

$$\left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2.$$

可是请等一等。对高于一次幂的项我并不在意，因而将所有含有 η^2 和更高次幂的项都取出来并放进一个标明“二次和更高次项”的小箱子中。从上式中的这一平方项我只得到二次幂，但从其他方面还可得到更多一些东西。因此，动能部分就是

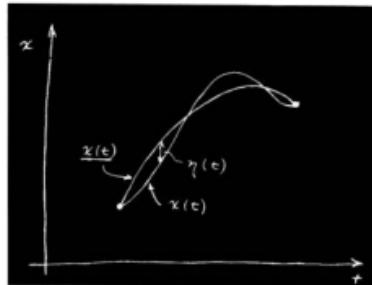


图 19-7

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\text{二阶和更高阶项}).$$

现在我们需要一个在 $\underline{x} + \eta$ 处的势能 V 。我认为 η 是小量，因而可以将 $V(x)$ 写成泰勒级数。它近似地等于 $V(\underline{x})$ ，在下一级近似下（按微商的通常性质）则该修正的应该是 η 乘以 V 对 x 的变化率，如此等等：

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \frac{\eta^2}{2} V''(\underline{x}) + \dots$$

为了简化书写，我已将 V 对 x 的微商写成 V' 。至于 η^2 项以及其后面各项则都落在“二阶和更高阶项”的范畴之内，而我们便不需对之操心了。将所有这一切都合起来，得：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(\underline{x}) + m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(x) + (\text{二阶和更高阶项}) \right] dt.$$

现在，如果我们对事情观察得仔细些，则会见到我在这里整理好的头两项相当于用真实路径 \underline{x} 应该计算出来的作用量 S ，而我要集中注意力的东西乃是 S 的变化—— S 与对正确路径所应得的 S 之间的差。我们把这差写成 δS ，并称之为 S 的变分。略去那些“二阶和更高阶项”，则对于 δS 得

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dx}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(x) \right] dt.$$

现在的问题是：这里是某个积分。虽然我还不知道 \underline{x} 是什么，但我确实知道不管 η 是什么，这一积分必须等于零。噢，你试想想，这件事可能发生的唯一办法就是乘上 η 的部分应当是零。可是含有 $d\eta/dt$ 的第一项又怎么样呢？噢，归根到底，既然 η 可以是任何变量，它的微商也是任何变量，因而你可以断定 $d\eta/dt$ 的系数也必定等于零。那样讲不完全正确。之所以不完全正确是因为 η 与它的微商之间存在着联系，它们并非完全独立，因为 $\eta(t)$ 必须在 t_1 和 t_2 两个时刻都等于零。

在变分学中解决一切问题的方法总要用到相同的普遍原理。即首先对你所要变化的东西做一个移动（像我们上面通过加 η 而做到的那样），旨在寻找一级小量的项；然后又总是把积分安排成含有“某种东西乘以移动 (η)”的形式，而其中又不含有其他微商（没有 $d\eta/dt$ ）。为此必须重新安排以便总是“某件东西”乘以 η 。过了一会你将会看出这样做的巨大价值（也有一些公式会告诉你，在某些情况下如何不经实际计算就能获得结果，但这样一些公式都不够普遍，所以就不值得你去关注；最好的办法还是按照上述这种方法把它算出来）。

怎么才能将 $d\eta/dt$ 项重新安排使其含有 η 呢？回答是通过分部积分就可以做到。事实证明，变分学的全部巧妙就在于先写下 S 的变分，然后利用分部积分使得 η 的微商消去。在微商会出现的每个问题中总是采取相同的方法。

你回忆一下分部积分的一般原理。如果你有任意函数 f 乘以 $d\eta/dt$ 并对 t 积分，可以写下 ηf 的微商：

$$\frac{d}{dt}(\eta f) = \eta \frac{df}{dt} + f \frac{d\eta}{dt}.$$

你所要的积分是对末一项而积的，因此，

$$\int f \frac{d\eta}{dt} dt = \eta f - \int \eta \frac{df}{dt} dt.$$

在我们关于 δS 的公式中，函数 f 就是 m 乘以 $d\underline{x}/dt$ ，因此，我得到下列关于 δS 的公式：

$$\delta S = m \frac{dx}{dt} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x}) \eta(t) dt.$$

首项必须在 t_1 和 t_2 两个限上算出来。然后我还必须对那个从分部积分剩下来的部分积分。末项则是照抄下来的，没有什么改变。

现在碰到一件总会发生的事情——积出的部分不见了（事实上，如果该被积出的部分不消失，则你就应当重申该原理，并加上一些条件以确保其消失）。我们已经说过，在路径两端 η 必须是零，因为该原理要求只有在该变化曲线开始并终结于选定的点时作用量才是一极小值，这条件就是 $\eta(t_1) = 0$ 和 $\eta(t_2) = 0$ ，所以该项积分结果为零。我们将其他各项都集合起来并得到：

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] \eta(t) dt.$$

S 的变分现在就成为我们所希望得到的形式了——在该方括号内的各项，比方说 F ，全都乘上了 $\eta(t)$ 并从 t_1 积至 t_2 。

我们得到了某种东西乘以 $\eta(t)$ 的积分总等于零：

$$\int F(t) \eta(t) dt = 0.$$

这里我有 t 的某个函数，再以 $\eta(t)$ 相乘，并从一端至另一端对它积分。而不论 η 是什么，结果始终为零。这意味着函数 $F(t)$ 是零。尽管这很明显，但无论如何我会给你证明看看。

假设对于 $\eta(t)$ ，我选取除了某一特定 t 值外其余一切 t 上都等于零的某变量。在到达这个 t 前它始终保持零值（图 19-8），在时刻 t 它突然跃起，过了一会又骤然落下。当我们对这个 η 乘以任意函数 F 做积分时，唯一不等于零的地方就是 $\eta(t)$ 出现脉冲的地方，这时我们会得到在该处的 F 值乘以对脉冲的积分。对于脉冲本身的积分不会等于零，但当乘上了 F 之后它就必须等于零；所以函数 F 在脉冲处必然为零。但由于脉冲发生在我们想要它发生的任何地方，因而 F 就必须处处为零。

我们看到，如果对于任何 η ，我们的积分为零，则 η 的系数必须为零，只有满足这个复杂微分方程

$$\left[-m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] = 0$$

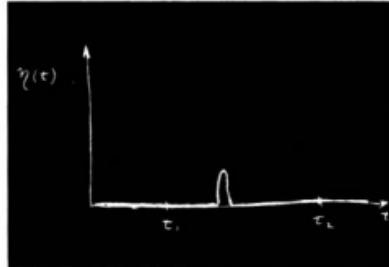


图 19-8

的那条路径,作用量积分才将是极小值。实则它并非那么复杂,你以前就见过这方程,它不过是 $F = ma$ 罢了。第一项是质量乘加速度,而第二项则是势能的微商,那就是力。

所以,至少对于一个保守系统来说,我们已证明最小作用量原理给出了正确答案。它表明,具有最小作用量的那条路径就是满足牛顿定律的那条路径。

一个述评:我从未证明它是一个极小值——也许是一个极大值。事实上,它的确不必是一个极小值。这与我们过去在讨论光学时所发现的那个“最少时间原理”十分类似。在那里我们起初也曾说过是“最少”时间。然而事实却证明,会有时间并非最少的一些情况。基本原理是,对于任何离开光学路径的一级变化,时间的变化为零;情况与此完全一样。所谓“最小”我们实在是指,当你改变路径时, S 值的一级变化为零。它未必是“极小”。

其次,我谈论一些推广的问题。第一,可以推广至三维,即不只是 x ,我可能有 x , y 和 z 作为 t 的函数,此时作用量更为复杂。对于三维运动,你必须用到完整的动能——($m/2$) 乘上整个速度的平方。这就是

$$\text{动能} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

并且,势能也是 x , y 和 z 的函数。而路径究竟如何呢?路径是空间中某条一般的曲线,它很不容易画出来,但意思却是一样的。不过 η 又是怎么回事?噢, η 可以有三个分量。你可以在 x 方向、 y 方向或 z 方向——也可以同时在所有三个方向移动路径,所以 η 应该是一个矢量。然而,这样做实际上并未把事情弄得过于复杂。由于只有一级变分必须为零,我们便可以通过三个连续移动而进行计算。可仅仅在 x 方向移动 η ,而说明它的系数必须为零,这样就得到一个方程,然后在 y 方向移动而得到另一个方程,又在 z 方向得到第三个。当然,或者按照你所喜欢的任一种次序进行。无论如何,你得到了三个方程。而牛顿定律实际上就是在三维空间中的三个方程——对每一分量就有一个。我想你实际上能够明白,这一定行得通的,但这个三维问题仍留给你自己去证明。顺便提一下,你也可以采用任一种你所喜欢的坐标系,诸如极坐标或其他坐标,通过观察你在半径、角度或其他坐标方向移动 η 时发生的事情,就会立即得出适用于该坐标系的牛顿定律。

同样,这一方法也可推广至任何数目的粒子。例如,如果你有两个粒子,而在它们之间有作用力,因而就有相互作用势能,那么你只要将这两粒子的动能相加并取它们间的相互作用能作为势能。对此你想要变化什么东西呢?势必变化双粒子的路径。于是,对于在三维中运动的两个粒子,就总共有六个方程。你可以在 x 方向、 y 方向和 z 方向变更第一个粒子的位置,而对于第二个粒子也是这样做,因而就有六个方程。而这是理应如此的。其中三个方程确定了第一个粒子受力作用时的加速度,而另外三个则确定第二个粒子受力作用时的加速度。你继续坚持进行同样的游戏,就会得到关于任何数目的粒子在三维中的牛顿定律。

我刚才说过,我们得到了牛顿定律。这并非十分正确,因为牛顿定律还包括像摩擦一类非保守力。牛顿说 ma 等于任何 F ,可是最小作用量原理却只适用于保守系——那里所有的力都可以从势函数获得。然而,你知道,在微观层次——即在物理学最深入的层次——并没有非保守力。像摩擦力那样的非保守力,之所以出现乃是由于我们忽略了微观上的复杂性——存在的粒子实在太多难于分析。但基本定律却都可以放进最小作用原理的形式之中。

让我继续来做进一步的推广。假定我们问起粒子做相对论性的运动时会发生什么情况，而上面还未获得正确的相对论性运动方程； $F = ma$ 只对于非相对论才正确。问题是：对于相对论性的情况是否有一个对应的最小作用量原理？回答是肯定的。对于相对论性情况其公式如下：

$$S = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt - q \int_{t_1}^{t_2} [\phi(x, y, z, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(x, y, z, t)] dt.$$

这个作用量积分的第一部分是粒子的静质量 m_0 乘以 c^2 再乘以对于速度函数 $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 的积分。后一项不再是势能，却是一个对于标势 ϕ 和对于 \mathbf{v} 乘以矢势 \mathbf{A} 的积分。当然，此时我们只包括电磁力。所有的电场和磁场都是由 ϕ 和 \mathbf{A} 提供的。这一个作用量函数对于单个粒子在电磁场中的相对论性运动给出完整的理论。

当然，每当我写出 \mathbf{v} 时，你总会明白，在试图做出任何计算之前，得先用 dx/dt 来代替 v_x ，并对其他各分量也都这样做。而且，你还必须把沿路径在 t 时刻的一点写成 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ，而这些在上式中我只是简单地写作 x, y, z 。严格讲，只有当你已经对 \mathbf{v} 等做了这种代换以后，你才能有一个关于相对论性粒子的作用量公式。事实上这个作用量公式确能给出那些正确的相对论性运动方程，我将把这一问题的证明留给你们中那些较机敏的人去做。我是否可建议你们先做没有 \mathbf{A} 、亦即没有磁场的情况？此时你应当得到运动方程 $dp/dt = -q \nabla \phi$ 的各分量，其中你会记起 $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。

把存在矢势的情况也包括进去就困难多了。那些变分变得相当复杂。可是最终，解得的力项确实为 $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ，正该如此。但我将把这留给你们去考虑。

我想要强调，在一般情况下，比如在相对论公式中，那作用量的被积函数不再具有动能减去势能的形式。那是只有在非相对论性的近似下才正确的。例如， $m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 这一项就不是我们所称的动能了。对于在任何特定情况下作用量应该是什么的问题必须通过某种试试改改的办法来确定。这与首先确定什么是运动定律的问题恰好相同。你只要对所已知的一些方程反复尝试，就看出你能否把它们纳入最小作用量的形式之中。

还有一点是关于名称方面的。那个经过对时间积分就可以得到作用量 S 的函数称为拉格朗日函数 \mathcal{L} ，它只是粒子的速度和位置的函数。因此最小作用原理也就可以写成

$$S = \int \mathcal{L}(x_i, v_i) dt,$$

其中 x_i 和 v_i 指位置和速度的所有分量。所以如果你听到有人正在谈论“拉氏函数”，你就会知道他们是在谈论那个要用来求出 S 的函数。对于在电磁场中的相对论性运动，

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}).$$

并且，我还应该讲，对于大多数讲究准确和学究式的人物来说， S 实际上并非叫作“作用量”，它称为“哈密顿第一主函数”。现在，我讨厌的是，要来做一个关于“最小哈密顿第一主函数原理”的演讲。所以就把它叫作“作用量”吧。而且，会有越来越多的人正把它称为作用量。在历史上你看到还有许多不那么有用的东西也曾被称为作用量，但我想更合理的还是改用一个新一点的定义。所以现在你也将这个新函数叫作作用量，而不久人人都会用这个简单名字去称呼它了。

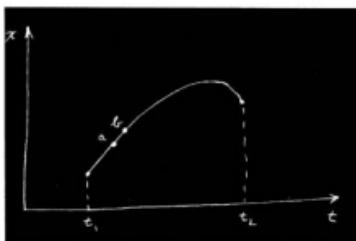


图 19-9

现在,我要对这一课题做些讨论,它们与以前我对最少时间原理所做的讨论相似。一个宣称从一处到另一处的某个积分是一极小值的定律——这会告诉我们有关全过程的某种东西——与一个宣称当你沿路径行进时、有一个力在使它加速的定律相比,它们的特性有很大差别。第二种办法,告诉你如何沿着路径一点一点地前进;而另一种办法,是关于整个路径的全面描述。在光的情况下,我们已谈论过这两者间的关系。现在,我来解释在有了这类最小作用原理时,为什么还会有微分定律。原因是这样的:试考虑在时间和空间中的那条实际路径。如前一样,让我们仅仅考虑一维,从而可把 x 作为 t 的函数画成曲线。沿这一真实路径, S 是极小值。假定已有了该真实路径,而它在空间和时间上既通过某点 a ,又通过附近另一点 b ,见图 19-9。现在,如果从 t_1 至 t_2 整个积分是极小值,那么就有必要沿 a 至 b 的小段积分也是极小值。不可能在 a 至 b 这一部分就稍微多一点。因为不然的话,就总能仅仅拨动这段路径而使整个积分值稍微降低。

所以在这条路径中的每一小段也必然是极小值。并且不管该小段如何短,这都是正确的。因此,整个路径给出极小值的原理,也可说成路径的每一无限小线段也是具有最小作用量的那种曲线。现在若我们取路径上足够短的一段——在十分靠近的 a 与 b 两点之间——那么在遥远处势能如何逐点变化就是无足轻重的事情了,因为在那整整一小段路径上你几乎总是呆在同一个地点。你必须加以讨论的唯一事情就是势能中的一级变化。答案只能取决于势能的微商而不是在各处的势能。所以关于整条路径的总性质的陈述就变成对一小段路径会发生的事情的陈述——一种微分式描述。而这一种微分式描述就仅仅涉及到势能的微商,也就是在一点处的力。这就是总体定律与微分定律之间关系的一种定性解释。

在光的情况下,我们也曾讨论过这问题:粒子怎么会找到它的正确路径呢?从微分的观点,那是容易理解的。它获得加速度的每个瞬时仅仅知道在该时刻做些什么。可是如果你讲粒子决定选取将给出最小作用量的路径,那你关于因果的全部直觉就发生了混乱。为了找出邻近路径是否具有更多的作用量,它“闻出”它们了吗?在光的情况下,当我们放置一些光学元件在光所经过的道路上、以致光子们不能检查所有的路径时,我们便发现它们不再能算出该走哪一条路,从而就有了衍射现象。

这类事情在力学中也会发生吗?粒子真的不仅仅能选取正确路径,而且还会审查所有其他的各种可能路径吗?而且,若在路途上设置一些东西以阻止其向四处张望,我们也能得到与衍射类似的现象吗?当然,一切令人惊奇之处就在于,事情恰恰是这样。这正是量子力学定律所说的。因此,我们的最小作用原理还是陈述得不完全。并非粒子选取了作用最小的那条路径,而是它对附近的所有路线都闻过,从而按照与光选择最短时间类似的方法来选取一条具有最小作用量的路径。你应记得,光选取最短时间的办法是这样的:要是它遵循一条需要不同时间的路径,则当它到达时就有不同相位。而在某一点上的总振幅等于光能到达的所有不同路径振幅贡献的总和。所有那些提供相位差异很大的路径将不会合成任何东西。但如果你能找出一整序列路径,它们都具有几乎相同的相位,则小小的贡献便将加在一起。

而在到达之处得到一个可观的总振幅。因此，重要路径就成为许多能给出相同相位彼此靠近的路径。

对于量子力学，事情恰巧完全相同。整个量子力学（对于非相对论情况，并略去电子自旋）是这样处理的：一个粒子在时刻 t_1 从点 1 出发，将在 t_2 到达点 2 的概率等于概率幅的平方。总概率幅可以写成每一可能路径——每一条到达的途径——的各概率幅之和。对于我们可能有的每个 $x(t)$ ——对于每条可能想象出来的轨道——我们就得算出一个概率幅。然后再把它们相加起来。对于每条路径，我们认为概率幅是什么呢？上述作用量积分告诉我们，对于一条单独路径其概率幅应该是什么。概率幅正比于某个常数乘 $e^{iS/\hbar}$ ，其中 S 就是对那条路径的作用量。这就是说，如果我们用一个复数来表示概率幅的相位，则相角就是 S/\hbar 。作用量 S 具有能量乘时间的量纲，而普朗克常量 \hbar 也具有相同的量纲。它是判定量子力学什么时候才显得重要的一个常数。

这就是它工作的原理：假设对所有路径，与 \hbar 相比 S 很大，则一条路径贡献一定的概率幅。对于附近一条路径，该相位已很不相同，因为对于巨大的 S ，即使 S 的一个小小变化也意味着一个完全不同的相位——因为 \hbar 是那么小。所以在求和时，互相靠近的路径一般都会将其效应互相抵消——除了一个区域以外，而这个区域一条路径与其邻近路径在一级近似下全都会给出相同的相位（更准确地说，在 \hbar 范围内给出相同的作用量），只有这些路径才是重要的。因此，在普朗克常量 \hbar 趋于零的极限情况下，正确的量子力学规律可以总结成简单的一句话：“忘记所有这些概率幅吧。粒子就在一条特殊路径上运动，那是在一级近似下 S 不发生变化的一条路径”。这就是最小作用原理与量子力学之间的关系。量子力学可以用这种形式来表达的事实，是由本次演讲开头曾提及的同一位教师巴德先生的另一名学生在 1942 年发现的[量子力学原本是通过给出关于概率幅的微分方程（薛定谔首创）以及通过某种其他矩阵数学（海森伯首创）而表达出来的]。

现在要来谈谈物理学中其他的极小原理，其中有许多是很有意义的。我并不想马上就将它们全都罗列出来，而只打算再描述其中的一种。以后，当我们面临一个具有漂亮的极小原理的物理现象时，我将随时结合它来谈。现在我要来证明：不必通过给出场的微分方程，而是通过讲述某个积分是极大或极小值，就能够描述静电学。首先，让我们考虑电荷密度处处已知的情况，而问题就在于求出空间中每一处的电势 ϕ 。你知道答案应该是：

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0.$$

但表述这相同事件的另一种办法却是：计算积分 U^* ：

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \phi)^2 dV - \int \rho \phi dV,$$

这是一个对全部空间进行的体积分。对于正确的势分布 $\phi(x, y, z)$ ， U^* 是极小值。

我们可以证明，这两种关于静电学的表述是等效的。现在假定选取任意函数 ϕ 。要求证明：当我们认为 ϕ 是正确的势 ϕ 加上一个小的偏离 f 时，则在一级近似下 U^* 的变化为零。因此我们记作

$$\phi = \phi + f.$$

ϕ 就是我们所要寻找的，但现在给它造成一种变化，以找出它必须怎样才能使 U^* 的变分在

一级近似下为零。对于 U^* 中的第一部分, 我们有必要写成

$$(\nabla\phi)^2 = (\nabla\phi)^2 + 2\nabla\phi \cdot \nabla f + (\nabla f)^2.$$

式中会变化的唯一一个一级项为

$$2\nabla\phi \cdot \nabla f.$$

在 U^* 的第二项中, 被积函数为

$$\rho\phi = \rho\phi + \rho f,$$

其变化部分为 ρf 。因此, 若只保留那些变化的部分, 则需要有下面的积分:

$$\Delta U^* = \int (\epsilon_0 \nabla\phi \cdot \nabla f - \rho f) dV.$$

现在, 根据以往的普遍法则, 我们必须得到经过了补缀的完全去掉 f 的微商的那种东西。让我们看看那些微商是什么。上式中的点积为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z},$$

我们得把它们对 x , 对 y 和对 z 进行积分。原来窍门就在这里: 若要将 $\partial f / \partial x$ 去掉, 就必须对 x 进行分部积分, 这样就会把微商移到 ϕ 上去。这与我们过去常用来去掉对 t 微商的那种一般想法是相同的。我们利用等式:

$$\int \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = f \frac{\partial\phi}{\partial x} - \int f \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} dx.$$

等号右边已积出的项为零, 因为我们必须使 f 在无限远处为零 [这相当于使 η 在 t_1 和 t_2 时为零]。因此, 我们的原理就应该更准确地说成: 对于正确的势 ϕ , U^* 比对任何其他势 $\phi(x, y, z)$ 都小, 而在无限远处 ϕ 和 ϕ 则有相同的值]。然后我们对于 y 和 z 也这样做。因而 ΔU^* 的积分为

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0 \nabla^2\phi - \rho) f dV.$$

为了使这一变分对于任何 f ——不管是什——都为零, f 的系数就必须为零, 因而

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0.$$

我们又回到了原来的方程。因而上述的“极小”命题是正确的。

如果我们采用稍微不同的方法来做上述代数运算, 就可以使命题普遍化。让我们回到原来的式子, 不计算各分量, 而直接做分部积分。注意下列这个等式:

$$\nabla \cdot (f \nabla\phi) = \nabla f \cdot \nabla\phi + f \nabla^2\phi.$$

如果算出左边的微分, 就能证明它刚好等于右边。现在可以利用这一等式进行分部积分。在上述 ΔU^* 的积分中, 用 $\nabla \cdot (f \nabla\phi) - f \nabla^2\phi$ 替代 $\nabla\phi \cdot \nabla f$, 而后对体积进行积分。其中散度项的体积分可以用面积分代替:

$$\int \nabla \cdot (f \nabla\phi) dV = \int f \nabla\phi \cdot n da.$$

由于是对全部空间积分，所以积分的面位于无限远处。由于那里的 f 等于零，因而得到与前面相同的答案。

只有现在我们才明白怎样求解这样的一个问题，即我们不知道其中全部电荷如何分布。假设我们有些导体，电荷以某种方式分布在其上面，只要所有导体的电势都固定不变，则我们仍然能够应用极小原理。对 U^* 的积分仅在一切导体之外的空间中进行。这时，由于不能使导体上的 ϕ 发生变化，所以在所有导体的表面上 f 都等于零，因而面积分

$$\int f \nabla \phi \cdot n da$$

仍然为零。剩下的体积分

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0 \nabla^2 \phi - \rho) f dV$$

只在各导体之间的空间中进行。当然，我们再次得到泊松方程：

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon_0.$$

这样就证明了原来的积分 U^* 也是一个极小，只要在电势全都固定的各导体外的空间里进行计算[这就是说，当 x, y, z 是导体表面上的一点时，任何尝试函数 $\phi(x, y, z)$ 都必须等于该导体的给定电势]。

一个有趣的情况是电荷只存在于导体上。这时

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \phi)^2 dV.$$

我们的极小原理讲，在一组导体都处于某些给定电势的情况下，它们之间的势就会自动调整到使积分 U^* 为最小。这个积分是什么呢？由于项 $\nabla \phi$ 就是电场，因而该积分就是静电能。真实的场是在所有来自电势梯度的场中总能量最小的那个场。

我想要利用这一结果来算出某个具体的东西，从而给你们看看这些东西实际上是非常有用的。假设我取两个导体构成一柱形电容器(图 19-10)，内部的导体具有电势 V ，而外面的导体电势为零。令内、外两个导体的半径分别为 a 和 b 。现在可以假定它们之间的任意电势分布。如果我们采用正确的 ϕ 并算出 $\epsilon_0/2 \int (\nabla \phi)^2 dV$ ，则它应当是系统的能量，即 $\frac{1}{2}CV^2$ 。因此，也可以根据我们的原理算出 C 。但若采用错误的势分布并试图用这个办法来算出 C ，则我们得到的电容将太大。因为电势 V 已经被规定了，所以任何假定出来的、并非严格等于正确电势的 ϕ ，都会给出一个比正确值要大的假的 C 。不过如果我的辅助的 ϕ 是任意的粗略近似，则 C 将是一个良好的近似，因为 C 的误差比 ϕ 的误差要高一级。

假设我不知道一个柱形电容器的电容，那我就可以利用这一原理来找到它。我只要不

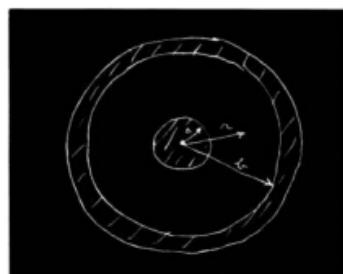


图 19-10

断对势函数 ϕ 进行猜测直到获得最低的 C 值为止。例如,假定我选取一个与恒定电场相对应的势(当然,你知道,这里的场实际上不是恒定的,它会随 $1/r$ 变化)。一个恒定场意味着一个与距离成正比的势。为适合两导体所在处的条件,它必须是

$$\phi = V \left(1 - \frac{r-a}{b-a} \right).$$

这个函数在 $r=a$ 处为 V ,在 $r=b$ 处为零,而在两者之间的势则有等于 $-V/(b-a)$ 的固定斜率。所以为了求得积分 U^* ,我们所要做的就是将这个 ϕ 的梯度的平方乘以 $\epsilon_0/2$ 并对全部体积求积分。让我们对单位长度的圆柱做这种计算。在半径 r 处的体积元为 $2\pi r dr$,进行积分,我对求电容的第一次尝试就得到

$$\frac{1}{2} CV^2 (\text{第一次尝试}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{V^2}{(b-a)^2} 2\pi r dr.$$

这积分不难,它正好为

$$\pi V^2 \left(\frac{b+a}{b-a} \right).$$

这样我就有了一个关于电容的公式,它虽然不正确,但却是一种近似结果:

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b+a}{2(b-a)}.$$

自然,它与正确答案 $C = 2\pi\epsilon_0 \ln(b/a)$ 不同,但并非太坏。让我们对几个 b/a 值把它与正确答案做比较,所得结果如下表所列:

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{正确}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C(\text{第一次尝试})}{2\pi\epsilon_0}$
2	1.442 3	1.500
4	0.721	0.833
10	0.434	0.612
100	0.217	0.51
1.5	2.466 2	2.50
1.1	10.492 059	10.500 000

即使当 b/a 大至 2 时——就电场来讲,与一个线性变化的场相比它给出了相当大的改变——我仍获得了相当好的近似。当然,正如所预期的那样,答案稍微偏高一些。如果你把一根细导线放在一个大圆柱之中,事情就糟得多。这时场已有了巨大变化,而倘若你还是用一个恒定场来代表它,那你就干得不太好。当 $b/a = 100$ 时,我们偏离了几乎 2 倍。对于小的 b/a ,则事情要好得多。试取与刚才极端相反的情况,当两导体相距不远——比方说 $b/a = 1.1$ ——时,则恒定场就是一个相当好的近似,而我们会得到误差在千分之一以内的正确 C 值。

现在我要来告诉你,如何可改进这种计算(当然,对于柱形电容器来说你已经知道它的正确答案,但对于其他一些你还不知道其正确答案的古怪形状,所用方法仍然与此相同)。下一步对未知的正确 ϕ 尝试较好的近似。例如,你也许会试一试一个常数加上一个指数函数的 ϕ ,如此等等。但除非你已知道正确的 ϕ ,否则你怎么会知道何时才能得到一个较好的近似呢? 答案: 你把 C 算出来, 最低的 C 值就是最接近于正确的值。让我们来尝试这一想

法。假定电势不是 r 的线性函数而是 r 的二次函数——电场不是恒定的而是线性的。能够适合在 $r = b$ 处 $\phi = 0$ 、而在 $r = a$ 处 $\phi = V$ 这种条件的最一般的二次形式的 ϕ 为

$$\phi = V \left[1 + \alpha \left(\frac{r-a}{b-a} \right) - (1+\alpha) \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^2 \right],$$

式中 α 为任意常数。这公式稍微复杂了一点。在势中除了一个线性项外还包括一个二次项。很容易从它得到场，该场正好为

$$E = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{\alpha V}{b-a} + 2(1+\alpha) \frac{(r-a)V}{(b-a)^2}.$$

现在我们必须将上式加以平方并对体积进行积分。但请等一等。我应当给 α 取个什么值呢？我可以对 ϕ 取一条抛物线，然而是什么样的抛物线呢？这里我所要做的是：用任意一个 α 算出电容。得到的结果是

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{a}{b-a} \left[\frac{b}{a} \left(\frac{a^2}{6} + \frac{2\alpha}{3} + 1 \right) + \frac{1}{6} \alpha^2 + \frac{1}{3} \right].$$

这看来还是稍微复杂一点，但它是从对场的平方进行积分而得到的。现在我可以选择 α 了。我知道正确结果总是比我将要算出的任何值都小，因而不管我代入什么 α 值总会得到一个太大的答案。但如果我保持着玩弄 α 并得到一个我所能得到的最低的可能值，则这个最低值就会比其他任何值都更接近于真实的值。所以我将要做的下一件事就是去拣出会提供极小 C 值的那个 α 。按照普通的微积分来计算，我得到极小的 C 出现在 $\alpha = -2b/(b+a)$ 时，将此值代入上面的公式中，得到的极小电容为：

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)}.$$

对于各种不同的 b/a 值我已经算出了由这一公式所给出的 C 值。我将称这些数值为 C (二次)，这里是 C (二次) 与正确 C 的对照表。

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{正确}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C_{(\text{二次})}}{2\pi\epsilon_0}$
2	1.442 3	1.444
4	0.721	0.733
10	0.434	0.475
100	0.217	0.346
1.5	2.466 2	2.466 7
1.1	10.492 059	10.492 065

例如，当两半径之比为 2 比 1 时，我得到 1.444，这对于正确答案 1.442 3 来说已经是一个很好的近似。即使对于较大的 b/a ，它仍旧相当好——比一次近似要好得多。当 b/a 为 10 比 1 时，还是相当准确——只偏离 10%。但当 b/a 达到 100 比 1 时，事情就开始变糟。我所得到的 $C/2\pi\epsilon_0$ 是 0.346 而不是 0.217。在另一方面，对于 1.5 的半径比，该答案非常好；至于 1.1 的 b/a ，答案表明是 10.492 065 而不是 10.492 059。这里答案应该是好的，它就已经非常非常好了。

我已经举出了好几个例子，首先为了表明极小作用量原理和一般的极小原理的理论价

值,其次在于表明它们的实用价值——不仅仅去算出我们已明知其答案的电容。对于任何其他形状的电容,你可以用某些像 α 那样的未知参数去猜测一个近似的场,并调整这些参数以获得一个极小值。对于其他方法难以处理的一些问题,用此法你将得极好的数值结果。

§ 19-2 演讲后补充的一段笔记

我愿意补充一点我没有时间在课堂上讲的东西(似乎我准备的材料总是比我有时间讲到的要多)。正如我曾经提到的,当准备这一演讲时我对一个问题产生了兴趣。我要告诉你们这是个什么问题。在我上面所提及的极小原理中,我曾注意到其中大多数以不同的方法来自力学和电动力学中的最小作用量原理。但也有一类并非如此。作为一个例子,若电流通过某一块材料时遵从欧姆定律,则在这块材料中的电流就会分布得使热量的产生率尽可能小。我们也可以讲(如果材料都保持等温的话),能量的产生率是一极小值。那么,按照经典理论,这一原理甚至也适用于确定载流金属内部电子的速度分布。速度的这种分布并非是严格的平衡分布[见第1卷第40章,式(40.6)],因为电子正在向侧面漂移。这一新的分布可以从下述原理找到,即对某个给定的电流,它是使得因碰撞每秒所产生的熵尽可能少的一种分布。然而,关于电子行为的正确描述应该是由量子力学给出的。于是问题就是:当情况要用量子力学来描述时,同样的极小熵产生原理是否仍然正确?我对此还未找到答案。

当然,这问题在理论上是很重要的。像这样的原理是令人神往的,而且尝试看清其普遍性如何始终是值得的。但从一个更为实用的观点来说,我也希望去了解它。我与几位同事曾经发表过一篇论文,其中我们根据量子力学近似地计算过一个运动电子通过一块像 NaCl 那样的离子晶体时所感受到的电阻[Feynman, Hellwarth, Iddings, and Platzman, Mobility of Slow Electrons in a Polar Crystal. *Phys. Rev.*, 1962, **127**:1004]。但要是极小原理存在,则我们可以用它做出更为精确的结果,就像有关电容器电容的极小原理曾经允许我们对电容获得那样高的准确度那样,尽管我们只有初步的电场知识。

第 20 章 麦克斯韦方程组在自由空间中的解*

§ 20-1 自由空间中的波;平面波

在第 18 章中,我们就已经达到拥有完整形式的麦克斯韦方程组的目的。对电磁场的经典理论所要知道的一切知识,全都可以在下列四个方程中求得:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{II. } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III. } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{IV. } c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \quad (20.1)$$

当我们把所有这些方程都合在一起时,一个惊人的新现象出现了:由运动电荷所产生的场可以离开源而独自通过空间传播。我们曾考虑过一个特殊例子,在其中一无限大电流片被突然地开通。当电流已经开通了时间 t 之后,就有均匀的电场和磁场从源处扩展至距离 ct 。假设该电流片被置在 yz 平面上,且具有沿正 y 方向的面电流密度 \mathbf{J} ,则电场将只有一个 y 分量,而磁场只有一个 z 分量。在 x 轴的正方向, x 小于 ct 的地方,这些场的分量由下式给出:

$$E_y = cB_z = -\frac{J}{2\epsilon_0 c}. \quad (20.2)$$

但对于 x 大于 ct 的地方,这些场都是零。当然,也有相似的场从该电流片向负 x 方向传播而达到相同的距离(在图 20-1 中我们画出了作为 x 函数的场其大小在时刻 t 的图形)。随着时间的推移,在 ct 处的“波前”会以恒定速度 c 沿 x 方向往外传播。

现在,试考虑下述的事件次序。首先开通单个强度的电流并经历了一段时间,然后突然把电流强度增加至三个单位,并从此一直保持在这一数值上。这时场会像个什么样子呢?我们能够用如下方式来看个究竟。首先,设想有一单位强度的电流在 $t = 0$ 时开通,并且永不改变。这样,对于在 x 正向的场,其图形就由图 20-2(a)给出。

其次,我们要问,若在 t_1 时刻开通两个单位的恒定电流又将发生什么呢?

在这一情况下场将比原来增强一倍,但在 x 方向仅传播到 $c(t-t_1)$ 那么远的距离,如图 20-2(b)所示。当我们运用叠加原理而把这两个解相加起来时,就会发现这两个源之和在

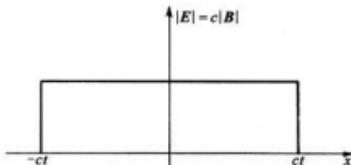


图 20-1 在电流片接通后的 t 时刻,作为 x 函数的电场和磁场

* 参考:第一卷 47 章声,波动方程;第一卷 28 章,电磁辐射

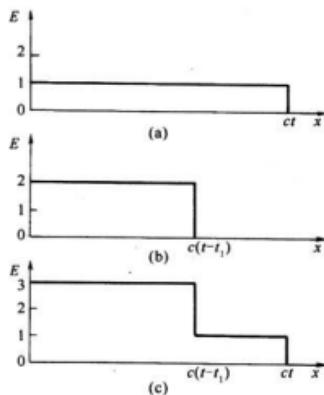


图 20-2 由一电流片产生的电场。
(a) 在 $t = 0$ 时, 一单位电流被接通;
(b) 在 $t = t_1$ 时, 二个单位的电流被接通;
通;(c)(a)和(b)两者的叠加

给定时刻 t 电场随 x 的变化如图 20-3(b)所示。场是电流的确定表象。场在空间中的分布就是电流随时间变化的一条漂亮曲线, 只不过要倒转过来画才对。随着时间流逝整个图形会以速率 c 向外运动, 因而就有一小截场朝正 x 方向传播, 这里含有全部电流变化历史的完整而详尽的记录。要是站立在若干英里以外, 我们能够从电场和磁场的变化情况中准确地说出在源处电流曾经是怎样变化的。

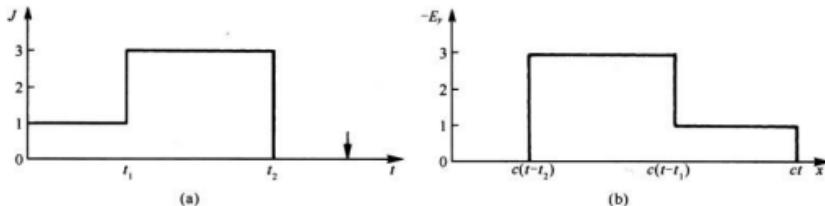


图 20-3 如果电流源强度随时间的变化如图(a)所示, 则在箭头所指的 t 时刻电场作为 x 函数就如图(b)所示

你也将注意到, 在源处的所有活动都已完全停止后很久, 一切电荷和电流都变为零, 而那一小块场仍将继续通过空间传播。我们有了不依赖于任何电荷或电流而存在的一种电场和磁场分布。这就是来自完整麦克斯韦方程组的新效应。如果我们愿意, 尽可以对刚才所做的分析给出一个完全数学形式的表示, 即把在某一给定地点和给定时刻的电场写成与在源处的电流成正比, 只不过不是在同一时刻、而是在较早时刻 $t - x/c$ 的电流。我们可以写成

$$E_x = -\frac{J(t-x/c)}{2\epsilon_0 c}. \quad (20.3)$$

从零至 t_1 的时间里电流为一单位而在大于 t_1 的时间里电流为三单位。在 t 时刻则场随距离 x 变化的情形如图 20-2(c)所示。

现在, 让我们处理一个较复杂的问题。考虑这样一种电流, 开通至一单位强度, 过了一会儿之后, 又增强至三个单位, 再过些时间便完全给截断。对于这么一种电流, 场又将如何呢? 我们能够按照同样的办法来求出解答——把三个分开着的问题的解都相加起来。首先, 求一个单位强度的阶梯式电流的场(这问题我们已经解决)。其次, 再求两个单位的阶梯式电流的场。最后, 才解出负三个单位的阶梯式电流的场。当把这三个解相加起来时, 我们将得到一个电流, 它从 $t = 0$ 起至某个往后时刻——比如说 t_1 ——有单位强度, 然后又有三个单位强度, 并一直持续到一个更后时刻 t_2 , 才将其完全切断——也就是变成零。作为时间函数的电流曲线如图 20-3(a)所示。当我们将电场的那三个解相加起来时, 便求得在某个

信不信由你,早在第 1 卷当与折射率理论打交道时,我们就已经从另外的观点导出过这种相同的公式。当一片具有偶极子系统的、电介质材料中的一薄层电偶极子,当受到照射进来的电磁波的电场驱动而发生振动时就产生电场。那时我们的问题是要算出原来的波与由振动偶极子辐射的波的合成场。在还没有(提到)麦克斯韦方程组时怎么能够算出由运动电荷产生的场呢?当时我们曾(不做任何推导)把加速点电荷在远处所产生的辐射场的一个公式作为我们的出发点。如果你查阅一下第 1 卷第 31 章,你就会看到,那里的式(31.17)同我们刚才写的式(20.3)完全一样。尽管我们以前的推导只有在距离源很远处才正确,但现在明白,即使在靠近源处相同的结果仍然是正确的。

现在,我们要一般地考察在离源也即离电流和电荷很远的真空空间中电场和磁场的行为。在十分靠近源处——近至足以使源在传播的延迟时间内还来不及做出大的变化——场与我们过去在所谓静电和静磁的情况下所求得的场几乎完全相同。然而,如果我们已离开足够远的距离以致延迟变得十分重要,则场的性质就可能与我们找到的那些解完全不同。在某种意义上,当场远离所有的源时,它便开始具有它们本身的特性。因此,我们便可以开始讨论在既没有电流也没有电荷的区域里场的行为。

假设我们询问:在 ρ 和 j 两者都是零的区域里哪一种场可能存在呢?在第 18 章中我们曾看到,麦克斯韦方程组的物理内涵也可以利用标势和矢势的一组微分方程来表示:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (20.4)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (20.5)$$

如果 ρ 和 j 都是零,则这些方程具有较简单的形式:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.6)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.7)$$

这样,在自由空间里,标势 ϕ 和矢势 \mathbf{A} 的每个分量就都满足相同的数学方程。假如令 ψ 代表 ϕ, A_x, A_y, A_z 四个量中的任一个,则我们需要研究下列方程的通解:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.8)$$

这个方程称为三维的波动方程——所谓三维,是因为函数 ψ 通常可能依赖于 x, y 和 z ,因而我们必须关心所有三个坐标的变化。如果将拉普拉斯算符的三项都明显写出,则上式就清楚地变成:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.9)$$

在自由空间中电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 也都满足波动方程。例如,由于 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$,所以我们可通过取式(20.7)的旋度而得到一个关于 \mathbf{B} 的微分方程。由于拉普拉斯算符是一标量算符,因而它与旋度算符可以互相交换次序:

$$\nabla \times (\nabla^2\mathbf{A}) = \nabla^2(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla^2\mathbf{B}.$$

同理,旋度算符与 $\partial/\partial t$ 的次序也可以互换:

$$\nabla \times \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

利用这些结果,便可获得下列**B**的微分方程:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.10)$$

因此,磁场**B**的每一分量就都满足三维波动方程。同样,若利用 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ 这个事实,则由此得出在自由空间中的电场**E**也满足该三维波动方程:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.11)$$

一切电磁场都满足相同的波动方程(20.8)。也许我们还会问:这个方程最一般的解到底是什么?然而,与其马上去处理这个困难问题,倒不如先来看看对于不随y和z变化的那些解一般能够说些什么(常常要先解决容易的情况以便能看清将会发生的事情,然后你才能处理那些较复杂的情况)。让我们假定那些场的大小只取决于x——场不随y和z变化。当然,我们又在考虑平面波了。应该期待得到与前一节中多少有点相似的结果。事实上,我们将精确地求得相同的答案。你可能会问:“为什么还要全部重做一遍呢?”再做一遍很重要。第一,因为我们过去从未证明已找到的波就是关于平面波最普遍的解;其次,则因为我们当时仅从一个非常特殊类型的电流源找到了那些场。现在我们很想问:存在于自由空间中最普遍类型的一维波到底是什么?我们不能通过观看这个或那个特殊源所发生的事情而做到这一点,而必须以更大的普遍性来处理这个问题。而且这次将要处理微分方程而不是处理一些积分形式。尽管将得到相同的结果,但仍不失为一种反复练习的途径,借以证明无论你采取什么方法都不会产生任何差别。你应该懂得如何去用多种方法来做事情,因为当碰到一个困难问题时,你往往会在各种方法中只有一种是易于处理的。

我们或许有可能直接考虑解某个电磁量的波动方程。但相反,我们要一开始就从自由空间中的麦克斯韦方程组出发,以便使你能够看到它们与电磁波之间的密切关系。因此,我们就从式(20.1)中的方程组开始,令电荷和电流都等于零。它们变成

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I.} & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \text{II.} & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III.} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \text{IV.} & c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (20.12)$$

把第一个方程用分量写出:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (20.13)$$

我们假定场不随y和z变化,因而最后两项都为零。于是,这个方程告诉我们:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0. \quad (20.14)$$

它的解 E_z 是在 x 方向的电场分量, 它在空间里是一个恒量。如果你考察(20.12)中的IV式, 同时假定 \mathbf{B} 在 y 与 z 方向没有变化, 那么你就能够看出 E_z 在时间上也是不变的。像这样的场, 或许有可能来自远处某个充电电容器极板的恒定直流动场。此刻, 我们对于这种枯燥乏味的静电场不感兴趣, 目前感兴趣的只是一些动态变化的场。对于动态场来说, $E_z = 0$ 。

于是我们就有一个重要结果, 对于沿任何方向传播的平面波, 电场必须垂直于传播方向。当然, 它仍然能够以复杂的形式随坐标 x 变化。

这横向的 \mathbf{E} 场总可以分解成两个分量, 例如 y 分量和 z 分量。所以让我们先算出电场仅有横分量的情况。我们将先考虑一个始终在 y 方向而不具有 z 分量的电场。显然, 若已解出了这个问题, 也就能解出电场总是在 z 方向的那种情况。通解始终可以表达成这样两种场的叠加。

现在, 我们的方程组已变得多么容易。电场的唯一不等于零的分量为 E_x , 而所有的微商——除了对于 x 的微商以外——都等于零。这样, 其余的麦克斯韦方程就变得很简单了。

其次, 让我们来看看麦克斯韦方程组中的第二个方程[式(20.12)中的II]。将 \mathbf{E} 旋度的各分量写出, 得

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial x}.$$

$\nabla \times \mathbf{E}$ 的 x 分量为零, 因为对 y 和对 z 的微商都是零。它的 y 分量也是零; 其中第一项为零是因为 E_x 对 z 的微商为零, 而第二项为零是由于 E_x 为零。 \mathbf{E} 旋度唯一不等于零的分量为 z 分量, 它等于 $\partial E_x / \partial z$ 。令 $\nabla \times \mathbf{E}$ 的三个分量对应 $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ 的分量, 我们可以得到下列结论:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0. \quad (20.15)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (20.16)$$

由于磁场的 x 分量和 y 分量两者对时间的微商都为零, 所以这两分量正好是恒定场并且与我们以前找到的静磁解相对应。可能某人曾将某个永久磁铁遗留在靠近波传播的地方。我们忽略这些恒定场, 并设 B_x 和 B_y 等于零。

顺便提一下, 我们可能已经得出结论: 由于别的原因 \mathbf{B} 的 x 分量应为零。由于 \mathbf{B} 的散度为零(由第三个麦克斯韦方程得知), 运用与我们上面关于电场所用的相同论证, 就会得出结论, 磁场的纵向分量不可能随 x 变化。既然我们忽略波动解中的这种匀强场, 因此就应该令 B_z 等于零。在平面电磁波中, \mathbf{B} 场以及 \mathbf{E} 场都一定与传播方向垂直。

式(20.16)给我们提供一个附加定理: 如果电场只有 y 分量, 则磁场将只有 z 分量, 所以 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 互相垂直。这正好是我们曾经考虑过的特殊波中所出现的情况。

现在准备利用关于自由空间中的最后一个麦克斯韦方程[式(20.12)中的IV]。写出分

量后,得:

$$\left. \begin{aligned} c^2(\nabla \times \mathbf{B})_x &= c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} - c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ c^2(\nabla \times \mathbf{B})_y &= c^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} - c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ c^2(\nabla \times \mathbf{B})_z &= c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} - c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

在关于 \mathbf{B} 分量的六个微商中,只有 $\partial B_z / \partial x$ 一项不等于零。因此,这三个方程仅给了我们一个方程

$$-c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (20.18)$$

上述一切工作的结果表明,电场与磁场都仅有一个不等于零的分量,而这些分量应该满足式(20.16)和(20.18)。如果前一式对 x 取微商而后一式对 t 取微商,则这两个方程可以结合成一个,这时两方程的左边(除了因数 c^2 之外)将相同。因此我们发现, E_y 满足下列方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (20.19)$$

在过去学习声音的传播时,我们就已经见过相同的微分方程。它是关于一维波的波动方程。

你应该注意到,在我们的推导过程中已经发现的某些东西比包含在式(20.11)中的要多。麦克斯韦方程组已给了我们进一步的知识,即电磁波只具有垂直于其传播方向的场分量。

让我们复习一下已知的关于一维波动方程的解。如果有任何量 ψ 满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.20)$$

则一个可能的解是如下形式的函数 $\psi(x, t)$:

$$\psi(x, t) = f(x - ct). \quad (20.21)$$

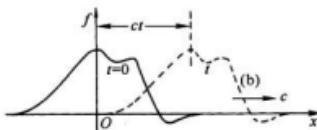
也就是说,它是单变量 $(x - ct)$ 的某种函数。函数 $f(x - ct)$ 代表一个在 x 轴上的“刚性”图

形朝着正 x 方向以速率 c 在传播(见图 20-4)。例如,若函数 f 当它的自变量为零时有一个极大值,则在 $t = 0$ 时该极大值会出现在 $x = 0$ 处。此后在某一时刻,比方说当 $t = 10$ 时, ψ 将在 $x = 10c$ 处有它的极大值。随着时间的推移,这极大值以速率 c 朝着正 x 方向行进。

图 20-4 函数 $f(x - ct)$ 代表一个朝正 x 方向以速率 c 行进的不变“形状”

有时这样说会更方便,即一维波动方程的一个解是 $(t - x/c)$ 的一个函数。然而,这里谈的是同一件事情,因为 $(t - x/c)$ 的任何函数也是 $(x - ct)$ 的函数:

$$F(t - x/c) = F\left[-\frac{x - ct}{c}\right] = f(x - ct).$$



让我们来证明 $f(x - ct)$ 的确是波动方程的一个解。由于它是只有一个变量——即自变量 $(x - ct)$ ——的函数,因此我们将令 f' 表示 f 对它的变量的微商,而 f'' 表示 f 的二次微商。求式(20.21)对 x 的微商,得

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x - ct),$$

由于 $(x - ct)$ 对 x 的微商为 1,所以 ψ 对 x 的二次微商显然等于

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x - ct). \quad (20.22)$$

取 ψ 对于 t 的微商,得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= f'(x - ct)(-c), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= +c^2 f''(x - ct).\end{aligned} \quad (20.23)$$

我们看到, f 确实满足一维波动方程。

你可能感到诧异:“如果我有那个波动方程式,又怎么会知道应取 $f(x - ct)$ 作为它的解呢? 我就不喜欢这种逆向的办法。是否有某种正向的办法来找出解答呢?”噢,一个好的正向的办法就是要了解那个解答。有可能“设计”出一个表面上看来是正向的数学论证,特别是因为我们已知道解答大致应该如何,但对于一个这么简单的方程来说就不必按部就班了。不久你将会达到这样的程度,当看到式(20.20)时,就几乎同时看出 $\psi = f(x - ct)$ 是一个解(就像现在当你看到 $x^2 dx$ 的积分时,你马上就知道答案是 $x^3/3$)。

实际上,你也应该看出稍微多一点的东西。不仅任何 $(x - ct)$ 的函数是一个解,而且任何 $(x + ct)$ 的函数也是一个解。既然波动方程中仅含有 c^2 ,所以改变 c 的符号就不会引起任何差别。事实上,一维波动方程最普遍的解乃是两个任意函数之和,其中一个是 $(x - ct)$ 的函数而另一个则是 $(x + ct)$ 的函数:

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (20.24)$$

第一项代表一个沿正 x 方向传播的波,而第二项则是沿负 x 方向传播的任意波。通解就是同时存在的两个这样的波的叠加。

我们将把下面一个有趣的问题留给你去思考。考虑如下形式的一个函数 ψ :

$$\psi = \cos kx \cos kct.$$

这个式子并不取 $(x - ct)$ 或 $(x + ct)$ 的函数形式,但你可以通过将其直接代入式(20.20)中而轻易地证明这函数就是波动方程的一个解。那么,我们怎么能够说通解具有式(20.24)那样的形式呢?

将我们关于波动方程解的那些结论应用到电场的 y 分量 E_y 上去,就可以断言, E_y 能够按任何一种方式随 x 变化。然而,确实存在的场总可以认为是两个图形之和。一个波是在

一个方向上以速率 c 通过空间飞驶, 带有一个垂直于电场的相伴磁场; 另一个波则是在相反方向上以同一速率传播, 像这样的波相当于我们所已熟悉的各种电磁波——光、无线电波、红外辐射、紫外辐射、X射线等等。我们曾在第1卷中详细讨论过光的辐射。由于在那里学过的每件事情都适用于任何电磁波, 所以我们不需在这里详尽讨论这些波的行为。

也许应当对电磁波的偏振问题进一步做几点评论。在上述的解中, 我们曾选择考虑其中电场只有一个 y 分量的那种特殊情况。显然还有另一个解, 其中电场只有一个 z 分量, 但也是朝着正的或负的 x 方向传播的波。由于麦克斯韦方程组是线性的, 所以对于沿 x 方向传播的一维波的通解就是 E_x 波和 E_z 波之和。这个通解可以综合在下列方程中:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (0, E_y, E_z) \\ E_y &= f(x - ct) + g(x + ct) \\ E_z &= F(x - ct) + G(x + ct) \\ \mathbf{B} &= (0, B_y, B_z) \\ cB_z &= f(x - ct) - g(x + ct) \\ cB_y &= -F(x - ct) + G(x + ct). \end{aligned} \tag{20.25}$$

这样的电磁波具有一个 \mathbf{E} 矢量, 其方向并非固定而是在 yz 平面上按某种任意方式旋转。在每一点磁场总是垂直于电场, 也垂直于传播方向。

如果只有在一个方向、比如在正 x 方向上上传播的波, 就存在一个简单法则, 它告诉我们关于电场和磁场的相对取向。这法则是: 叉积 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ——当然, 那是一个既垂直于 \mathbf{E} 又垂直于 \mathbf{B} 的矢量——指向波传播的方向。如果按照右手螺旋法则 \mathbf{E} 被转到 \mathbf{B} , 则这个螺旋指向波的速度方向(往后我们将看到, 矢量 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 具有一个特殊的物理意义: 它是描述电磁场中能量流动的一个矢量)。

§ 20-2 三 维 波

现在要转到三维波的课题上来。我们已经看到, 矢量 \mathbf{E} 满足波动方程。通过由麦克斯韦方程组所做的直接论证不难得出这同样的结论。假设我们是从方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

出发, 并取两边的旋度

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}). \tag{20.26}$$

你将记得, 任何矢量旋度的旋度都可以写成两项之和, 其中一项含有散度而另一项含有拉普拉斯算符, 即

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

然而, 在自由空间里, \mathbf{E} 的散度等于零。因而只有拉普拉斯算符那一项才保留着。并且, 根据自由空间中第IV个麦克斯韦方程[式(20.12)], $c^2 \nabla \times \mathbf{B}$ 的时间微商即是 \mathbf{E} 对 t 的二次微商:

$$c^2 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

于是式(20.26)就成为

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

上式是三维波动方程。若要反映出它的全部光辉,这一方程当然就是

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.27)$$

我们将如何找出波动方程的通解呢?答案是所有三维波动方程的解都可以表示为我们已找到的一维解的叠加,通过假定场并不依赖于 y 和 z ,我们已获得在 x 方向上运动的波的表示式。显然,还存在别的解,其中场并不依赖于 x 和 z ,它表示波在 y 方向上行进。然后还有与 x 和 y 都无关的解,它代表沿 z 方向传播的波。或者一般说来,由于我们已将方程写成了矢量形式,所以三维波动方程可以有在各点朝任何一个方向运动着的平面波之解。再则,由于那些方程都是线性的,因而可以同时具有任意多的、沿各种不同方向传播的平面波。这样,三维波动方程的最一般解就是在各种不同方向运动的所有各种平面波的叠加。

试想象此刻存在于这个课堂空间中的电场和磁场像什么样子。首先,有一个恒定磁场,它来自地球内部的电流——也就是地球的恒定磁场。然后,还有一些不规则的、几乎是静态的电场,这或许是由于各人在其椅子上移动并以其大衣袖口擦过椅臂时由于摩擦引起的电荷所产生的。然后也存在由电线里的振动电流所产生的其他磁场——以 60 Hz 的频率变化着、并且与水坝的发电机同步的场。但更为有趣的是那些以高得多的频率变化着的电场和磁场。例如,当光从窗口至地板、从这面壁至那面壁传播时,就会有电场和磁场的微小摆动以 186 000 mile s⁻¹ 的速率跟着运动。然后也有从各个温暖的前额跑向较冷的黑板上的红外线。而我们已经把那些紫外光、X 射线以及通过这个房间传播的各种无线电波都忘记了。

飞过这个房间里的还包括载有爵士乐队音乐的那些电磁波,也有由那些代表着世界上其他各地方发生事故的图像、或代表着那种想象的退热药阿司匹林溶解在想象的肚子里的图像的一系列脉冲所调制了的那些波。要演示这些波的真实性,只需打开那种能把这些波转变成图像和声音的电子设备就行了。

如果我们更加详细地分析到那些甚至是最微小的摆动,便会发现从遥远距离进入这房间里的细小电磁波。此刻就有这一种电场的微小振动,其波峰相距一英尺,那是来自几兆英里以外、由水手二号空间飞船刚刚经过金星时所传送到地球表面上来的。它的信号载着它从那个行星所收集到的信息概要(信息由该行星传播至空间飞船上的电磁波所提供)。

此外还有电场和磁场的十分微小摆动,那是发源于几十亿光年以外——从宇宙间最遥远角落里的星系送来的波。这件事情的真实性已由“用装满导线的房间”——即由建立像这房间那么大的天线组——证明了。这种从最大光学望远镜观测范围以外空间中一些地方来的无线电波被探测到了。甚至那些光学望远镜也不过是电磁波的收集器而已。所谓星星,只是一些推断,即从它们那里所已经获得的唯一物理实质所做出的推断——对到达地面上我们这里的电场和磁场的无比复杂的波动做了仔细研究而得出的结果。

当然,还有更多的电磁场:从若干英里外的闪电所产生的场,那些带电的宇宙射线粒子当其嘘嘘地通过我们的房间里时的场,此外还有更多更多。围绕着你四周的空间电场竟会

如此复杂！但它却始终满足三维波动方程式。

§ 20-3 科学的想象

我曾要求你们对这些电场和磁场进行想象。到底应该做些什么呢？你们是否懂得了怎样去做？我如何设想电场和磁场呢？我实际看到的到底是些什么？对科学想象应有哪些要求？它与试着想象这房间里充满着一些看不见的天使究竟有何区别？不，这并不像对那些看不到的天使的想象。要理解电磁场，比理解那些看不见的天使，还要有高级得多的想象力。为什么？因为要使那些看不到的天使们可以理解，我所必须做的只是把他们的性质稍微改变一点点——即使得他们稍微看得见，这样我就能见到他们的翅膀、躯体和光环的形像。一旦我已成功地想象出一个见得到的天使，那么所必须做的抽象化——即接纳一些几乎看不见的天使而把他们想象成完全是看不见的——就相对地容易了。所以你会说：“教授先生，请给我一个关于电磁波的近似描述吧，哪怕它还可能有点不准确，以便使我也能像看到那些几乎看不到的天使们那样看到它们。然后我才将该图像做必要的抽象化的修改。”

对不起，我不能为你做这件事。我不知道怎么办。我并没有关于这电磁场在任何意义上准确的图像。我知道电磁场已有很长时间了——25年前我所处的地位与你们现在所处的地位正好相同，而我已经有了这25年来琢磨这些摆动着的波的经验。当我开始描述磁场通过空间运动时，我谈及**E**场和**B**场并摇摆我的两只手臂，而你可能想象我已能够看到它们了。我将告诉你我看到了什么。我看到了某种模糊的阴影，摇摆着的线——莫明其妙在这里或那里的线上写着**E**或**B**，而也许有些线还带着箭头——当我对其考察得太细致时，这里或那里的一个箭头竟会消失不见。当我谈及嗖地通过空间的那些场时，在用来描述对象的符号与对象本身之间存在一种可怕的混乱。即使接近像真实波的图像我也确实不能做出。因此如果你对于做出这样一种图像感到困难的话，你就不必担心你的困难是异乎寻常的了。

我们的科学对想象竟会提出这么可怕的要求。所需的想象程度比起对一些古老概念所要求的要极端得多。现代概念远更难于想象。尽管如此，我们还是用了一大堆工具。使用数学方程式和法则，并构造许多种图像。我现在所认识的是：当我谈及在空间中的电磁场时，我所看到的乃是所有那些我曾见过的关于它们的图形的某种叠加，并未看到在周围奔跑着的那些小束场线，因为我担心如果我以另一速率走过则那些线条将会消失不见。甚至我并非自始至终都在注视着那些电场和磁场，因为我有时还想到应当有一幅用矢势和标势来表示的图像，原因是，它们也许是正在摇动着的更具有物理意义的东西。

你会说，也许唯一的希望就是采取数学图像。那么数学图像又是怎么回事呢？从数学的观点看，空间中每一点有一个电场矢量和一个磁场矢量，即共有六个数目与每一点相联系。你能否想象出与空间中每一点联系着的竟有六个数目之多？那太难了。哪怕只有一个数目与每点联系，你能够想象得出来吗？我就不能！我只能想象在空间中每一点像温度那样的东西，那似乎还是可以理解的。若这里存在冷和热，则这里的温度就逐点变化。但老实说，我并不理解在每一点上就有一个数值的那种概念。

因此，也许应该这样来提出问题：我们能否用更像温度的某种东西来表示电场呢？比方说，像一块胶质的位移。假设我们这样开始，即通过想象世界充满着一种稀疏胶质而场代表胶质中的某种畸变——比如说伸长和扭曲，那么我们就能够使场看得见。在已经“看到”了

它像个什么样子之后，我们就该能将胶质抽象化掉。这就是许多年来人们所企图做到的。麦克斯韦、安培、法拉第以及其他一些人都曾经尝试过按这一途径去理解电磁学（有时他们叫这抽象化了的胶体为“以太”）。但事实证明，按那种方式去想象电磁场的尝试实际上是在前进道路上设置的一道障碍。可惜我们始终仅局限于去做抽象化，去应用仪器来探测场，去利用数学符号来描述场，等等。但无论如何，在某种意义上场却是真实的，因为在我们完全结束了对数学方程式的反复摆弄之后——不管有无做出图像和图画或试图去看那种东西——我们仍然能够使仪器探测出从水手二号送来的信号并找出远在几十亿英里以外的那些银河，等等。

科学中的整个想象问题往往被从事其他学科的人们所误解。他们以下述办法企图来试验我们的想象力。他们说：“这里就是某些人在某种情况下的一幅图像。你想象以后将会发生什么呢？”当我说“我想象不出来”时，他们可能认为我的想象力太弱了。他们忽视了一个事实，即在科学中容许我们去想象的无论什么东西都必须与我们所已知道的其他每件事情相一致：我们所谈及的电场和波不只是我们随心所欲地自由创造出来的某些愉快思想，而是必须与我们所已知的一切物理规律都符合一致的一些概念。我们不能容许去认真地想象那些明显与所知的自然规律发生矛盾的东西，因而我们的那一种想象乃是十分困难的玩艺。人们得具有想象从未见过或从未听说过的某些事物的想象力。同时这些思想又好比是被束缚在一件紧身衣里，即受到来自自然界确实情况的知识的那些条件所限制。去创造出某种新的东西，但又要同以前已知的每一件东西相一致，这是一个极端困难的问题。

趁正在谈这个课题的时候，我要来谈一下是否有可能想象出我们所不能见到的那种美丽。那是一个饶有趣味的问题。当我们凝望着彩虹时，它对我们来说好象是美丽的。每个人都会说：“啊，彩虹”（你看我多么科学。我不敢说某一件东西是美丽的，除非我有定义它的实验方法）。可是假如我们都是瞎子，则又该如何去描述彩虹呢？当我们测量 NaCl 的红外反射系数时，或者当我们在谈到来自不能看到的某个星系之波的频率时，我们都是瞎子——我们制作了一幅图，画出了一条曲线。例如，对于彩虹来说，这样的曲线可能是在天空中的每一个方向用分光光度计所测得的辐射强度对频率的关系。在一般情况下，这样的测量会给出一条相当平坦的曲线。于是在某一天，有人发现对于某种气候条件以及在天空中某个角度，作为波长函数的强度谱发生了一种奇异行为，它可能有扰动。当仪器的角度只稍微改变时，这个扰动的极大值就从某一波长移向另一波长。然后有一日，这些盲人办的物理评论杂志也许会发表一篇标题为《在某种气候条件下作为角度函数的辐射强度》的专门论文。在这篇论文中也许会出现一条像图 20-5 所示的那种曲线。作者可能要指出，在较大的角度处较多辐射集中在长波上，而对于较小角度，则辐射的峰出现在较短的波长上（从我们的观点出发，我们可能会说，在 40° 角绿色光占优势，而在 42° 角则红色光占优势）。

那么，我们发现图 20-5 上的那些曲线很优美吗？它所包含的内容比我

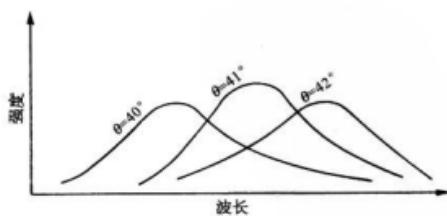


图 20-5 在（从与太阳相反的方向量起的）三个角度处作为波长函数的电磁波强度，这只是在某种气象条件下进行测量的结果

们看到彩虹时所理解的要详细得多,因为我们的
眼睛不能够在光谱的形状中看到其精确细节。然而,
眼睛却发现到彩虹是美的。是否我们的想象力足以在光谱曲线中看到如同当我们直接了望彩虹时所看得到的同一种美丽?我不知道。

但假定有一幅作为红外区波长函数、也作为角度的函数的关于 NaCl 的反射系数的曲线图。要是眼睛能看到红外线——也许是一种灿烂夺目的“绿色”混杂着从该表面上反射而来的“金属红”——那么我该有一种对于我的双眼来说它看起来会是什么样子的图像了。那该是一件华丽的东西,但我还不知道我是否会有一天在看到用某种仪器测量出的关于 NaCl 的反射系的曲线图时,便能说出它具有同样的那种美丽。

另一方面,即使我们不能在具体的测量结果中看到美丽,我们也已能够声称在那些描述普遍物理规律的方程式中看到了某种美丽。例如,在波动方程式(20.9)中,就存在关于 x , y , z 和 t 表现出来的规则性的某些优美的东西。而在 x , y , z 和 t 外表所呈现出来的优美对称性,在人们的心中就会浮现出一种必须用四维空间完成的更伟大的美丽,该空间会有四维对称的可能性以及经过分析之后发展成为狭义相对论的可能性。所以存在许许多多与这个方程有关的智力上的美丽。

§ 20-4 球面波

我们已看到波动方程具有与平面波相对应的解,而任何电磁波都可描述为许多平面波的叠加。然而,在某些特殊情况下,用不同的数学形式来描写波场更为方便。现在,我们很想讨论球面波——与从某一中心扩展开去的球形表面相对应的波——的理论。当你把一块石头扔到湖里时,那些涟漪会在水面上以圆形波的形式扩展开去——它们是二维波。球面波与此相似,只不过它是在三维中扩展出去而已。

在我们开始描述球面波之前,需要一点数学。假设有一个函数仅取决于离某一原点的径向距离 r ——换句话说,这是一个球对称的函数,让我们叫它函数 $\psi(r)$,其中 r 是指

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

即与原点间的径向距离。为了求出满足波动方程的函数 $\psi(r)$,我们将需要关于 ψ 的拉普拉斯表示式。因此,就要求出 ψ 对 x , y 和 z 的二次微商之和。我们将采用这种符号,即 $\psi'(r)$ 代表 ψ 对 r 的微商,而 $\psi''(r)$ 代表 ψ 对 r 的二次微商。

首先,求对 x 的微商。第一次微商为

$$\frac{\partial \psi(r)}{\partial x} = \psi'(r) \frac{\partial r}{\partial x}.$$

ψ 对 x 的二次微商为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi'' \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \psi' \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

可以由下列两式计算 r 对 x 的偏微商:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right).$$

因此, ψ 对 x 的二次微商就是

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) \psi'. \quad (20.28)$$

同理,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right) \psi', \quad (20.29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) \psi'. \quad (20.30)$$

拉普拉斯算符等于这三个微商之和。记住 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, 我们便得

$$\nabla^2 \psi(r) = \psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r). \quad (20.31)$$

把这一方程写成如下形式往往更为方便:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\psi). \quad (20.32)$$

如果你将式(20.32)中所标明的微分算出, 则将看到右边与式(20.31)的右边相同。

如果希望讨论能够像球面波那样传播出去的球对称场, 则场量就必须是 r 与 t 两者的函数。这时, 假如我们问起下列三维波动方程

$$\nabla^2 \psi(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(r, t) = 0 \quad (20.33)$$

之解是怎样的函数 $\psi(r, t)$ 。由于 $\psi(r, t)$ 仅仅通过 r 而依赖于空间坐标, 因而可以采用上面求得的那个拉普拉斯算符方程式(20.32)。然而, 为了准确起见, 由于 ψ 也是 t 的函数, 所以我们应该把对 r 的微商写成偏微商。这样该波动方程便变成

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0.$$

现在我们必须解出这一方程, 这看来比平面波的情况复杂得多。可是注意, 如果我们以 r 乘这一方程, 则得到

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = 0. \quad (20.34)$$

上式告诉我们, 函数 $r\psi$ 满足以 r 为变量的一维波动方程。应用曾经经常强调过的普遍原理, 即相同的方程总会有相同的解, 那么我们知道, 如果 $r\psi$ 仅仅是 $(r - ct)$ 的函数, 则它将是方程式(20.34)的解。因此, 我们就知道球面波一定具有下面这种形式:

$$r\psi(r, t) = f(r - ct).$$

或者, 正如我们以前曾见过的, 同样可以说 $r\psi$ 可能具有这种形式:

$$r\psi = f(t - r/c).$$

两边各除以 r , 便得到场量 ψ (不管它可能代表什么)具有如下形式:

$$\psi = \frac{f(t - r/c)}{r}. \quad (20.35)$$

这样一个函数表示从原点以速率 c 传播出去的普遍的球面波。如果暂时忘却那个在分母上的 r , 则在某一给定时刻波幅作为离原点距离的函数会具有一定形状并以速率 c 向外传播。然而, 那个分母中的因子 r 却说明当波传播时波幅正比于 $1/r$ 减小。换句话说, 和平面波不同, 当平面波向前行进时波幅维持不变, 而在一球面波中波幅却是恒定地减小, 如图 20-6 所示。这一效应不难从简单的物理论证得到理解。

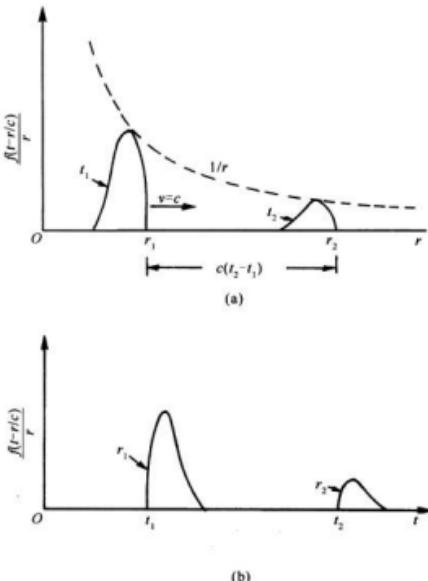


图 20-6 球面波 $\psi = f(t - r/c) / r$ 。(a) 作为 r 函数的 ψ 在 $t = t_1$ 时刻的情况和同一个波在一个较后时刻 t_2 时的情况; (b) 作为 t 函数的 ψ 在 $r = r_1$ 处的情况和同一个波在 r_2 处所看到的情况

我们知道, 波的能量密度取决于波幅的平方。当波向外传播时, 其能量分布在与径向距离的平方成正比的越来越大的面积上。如果总能量守恒的话, 则能量密度必定随 $1/r^2$ 下降, 而波幅则一定随 $1/r$ 减小。因此, 式(20.35)是关于球面波的“合理”形式。

我们已忽略了对于一维波动方程的第二种可能解:

$$r\psi = g(t + r/c)$$

或 $\psi = \frac{g(t + r/c)}{r}.$

这也代表一个球面波, 不过是一个从较大的 r 朝着原点向内传播的波。

现在打算做一个特殊假定,但不做任何证明。我们讲,由源所产生的波仅是向外行进的波,由于我们知道波是由电荷的运动所引起的,所以我们认为波是从电荷那里向外发出来的。要想象在电荷还未开始运动以前就有一个球面波从无限远处出发而恰恰在那些电荷刚要开始动起来的那一瞬到达它们那里,这应该是相当奇怪的。虽然这是一个可能的解,但经验表明,当电荷被加速时波是从电荷那里向外传播的。尽管麦克斯韦方程组会允许这两种可能性,但我们还要放进一个附加事实——基于经验——只有向外行进波的解才产生“物理意义”。

然而,也应该指出,对于这一附加假设存在一个有趣的后果:我们正在消除存在于麦克斯韦方程组中的时间对称性。关于 E 和 B 原来的方程组,以及从它们导出的波动方程式,都具有这么一种性质,即如果改变 t 的符号,方程式仍将保持不变。这些方程表明,对应于沿某一方向行进波的每一个解,就有一个沿相反方向传播的波作为同样有效的解。我们关于将只考虑向外的球面波的陈述是一个重要的附加假设(一种旨在避免这一附加假设的电动力学表达方式已由人们仔细地研究过。令人惊异的是,在许多场合下它并未在物理上导致荒谬的结论,但若此刻就来讨论这些想法,那就可能把我们引入歧途太远了。我们将在第28章对它们稍微多讨论一些)。

必须提出另一要点。在一个向外行进波的解即式(20.35)中,函数 ψ 在原点处等于无限大。那是有点特别的。我们很想有一个处处平滑的波动解。但我们的解必须在物理上代表某个源位于原点的情况。换句话说,由于疏忽我们已犯了一个错误。我们并未处处对自由波动方程式(20.33)求得解答,只是求得了在其右边除了原点之外处处都为零的方程式(20.33)的解。我们所以会不知不觉犯错,是由于在上述求导过程中,在 $r = 0$ 的某些步骤是不“合法”的。

让我们来证明,在静电问题中也很容易犯同样类型错误。假定要求出自由空间里静电势方程 $\nabla^2\phi = 0$ 的解。这拉普拉斯方程所以等于零,是因为我们假设处处都没有电荷。但关于这一方程的一个球对称解——即仅仅取决于 r 的某个函数 ψ ——将会怎么样呢?利用式(20.32)关于拉普拉斯算符的公式,就有

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0.$$

对上式乘以 r ,便得到一个易于积分的微分方程:

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0.$$

如果对 r 积分一次,就求得 $r\phi$ 的一次微商为一常数,我们可称之为 a :

$$\frac{d}{dr}(r\phi) = a.$$

再积分一次,求得 $r\phi$ 的形式为:

$$r\phi = ar + b,$$

其中 b 是另一积分常数。因此,我们发现,下列 ϕ 是自由空间中静电势方程的一个解:

$$\phi = a + \frac{b}{r}.$$

显然出现了某种差错。在不存在电荷的区域中,我们知道静电势的解为:势处处为恒量。这相当于我们解中的第一项,但还有那第二项,这说明有一个与离原点的距离成反比变化的势的贡献。然而,我们知道,这样一个势相当于在原点处有一个点电荷。所以,虽然我们当初设想对自由空间中的势求解,但上述的解却也给出了在原点上有一个点源的场。你是否看到目前所发生的事情与上面我们对波动方程求球对称解时所发生的事情之间存在的相似性?要是真的在原点上没有任何电荷或电流,那么就不会有任何往外跑的球面波了。当然,球面波一定是由原点处的源产生的。在下一章中我们将探讨那些正在往外行进的电磁波与产生这些波的电流和电压之间的关系。

第 21 章 有电流和电荷时 麦克斯韦方程组的解

§ 21-1 光与电磁波

在上一章我们看到, 在麦克斯韦方程组的解中就有电与磁的波。这些波相当于无线电波、可见光、X射线等现象, 视波长如何而定。我们曾在第1卷中详尽地学习过光学。本章将把这两门学科互相结合起来——证明麦克斯韦方程组确实能够形成我们前期处理光学现象的基础。

过去当我们学习光学时, 是由写出一个以任意方式运动着的电荷所产生的场的方程开始的, 即

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{e}_r}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}_r \right], \quad (21.1)$$

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}$$

[见第1卷式(28.3)及式(28.4)。正如下面所述, 这里的符号是原来符号的负值。]

如果电荷是以任意方式运动, 则我们现在在某一点所求得的电场并非取决于电荷此刻所处的位置和运动, 而仅仅取决于在一个较早时刻——早于光以速率 c 从电荷传播至该场点的距离 r' 所需的时间的那个时刻——的位置和运动。换句话说, 若要得到 t 时刻在点(1)处的场, 就必须算出在 $(t - r'/c)$ 时刻电荷所处的位置(2')及其运动, 其中 r' 是在 $(t - r'/c)$ 时刻从电荷位置(2')至点(1)的距离。加上一撇是为了说明 r' 是从点(2')至点(1)的所谓“推迟距离”, 而非电荷在 t 时刻的位置即点(2)至该场点(1)的实际距离(见图21-1)。注意, 现在我们正在采用一种关于单位矢量 \mathbf{e}_r 方向的新规则。在第1卷第28和34两章中我们曾取 \mathbf{r} (因而 \mathbf{e}_r)指向源处, 那是方便的。但现在却要按照上面关于库仑定律的定义, 其中 \mathbf{r} 是从点(2)处的电荷指向点(1)处的场点的。当然, 唯一不同之处是, 现在的新 \mathbf{r} (和 \mathbf{e}_r)就是过去那些量取负值。

我们也已知道, 若电荷的速度 v 总是比 c 小得多, 而且只考虑那些距离电荷很远的点, 以致只有式(21.1)中最后一项才算重要, 则场也就可以写成

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \left[\begin{array}{l} \text{电荷在 } (t - r'/c) \text{ 时刻的加速度} \\ \text{垂直于 } \mathbf{r}' \text{ 方向的投影} \end{array} \right] \quad (21.1')$$

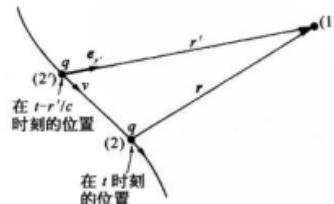


图 21-1 t 时刻在点(1)处的场取决于在 $(t - r'/c)$ 时刻电荷 q 所占据的位置(2')

和

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}.$$

让我们稍微详细地考察一下整个公式(21.1)讲些什么。矢量 \mathbf{e}_r 乃是从推迟位置($2'$)至点(1)的单位矢量。那么第一项是我们预期的在推迟位置处的电荷的库仑场,可以把它叫作“推迟库仑场”,电场与距离的平方成反比,并且从电荷的推迟位置上指向外(也就是在 \mathbf{e}_r 的方向上)。

但那只是第一项。其他两项告诉我们,电学定律并未讲过除了推迟场外所有场都与静场相同(这是人们有时喜欢说的)。对于“推迟库仑场”我们还必须加上其他两项。式中的第二项讲,对于推迟库仑场有一项“修正”,那就是推迟库仑场的电荷变化率乘以延迟时间 r'/c 。在某种意义上,这一项势必对第一项的推迟做出补偿。这前面两项相当于在算出了“推迟库仑场”之后再把它往后推 r'/c 这个量,即一直推至时刻 t ! 这一外推是线性的,好像我们必须假定“推迟库仑场”应该以电荷在点($2'$)处所算得的变化率继续变化。如果场变化得很慢,则推迟效应几乎完全被修正项所抵消,而这两项一起给我们提供了“瞬时库仑场”那样的电场——也就是在点(2)处的电荷的库仑场——趋向于很好的近似。

最后,式(21.1)中还有第三项,它是对单位矢量 \mathbf{e}_r 的二项微商。在学习光学现象时我们曾利用过这样的事实,即在离电荷很远的地方,前两项都与距离的平方成反比,因而对于巨大的距离来说,它们比起随 $1/r$ 减少的第三项来就变得十分微弱。因此,我们完全把注意力集中在这第三项上,并证明(又是对于大距离而言)这一项与电荷的加速度在视线上的垂直分量成正比(并且,我们在第1卷中的大部分工作都是考虑其中电荷正在做非相对论性运动的情况,仅在第36章中才考虑过相对论性效应)。

现在应该尝试把这两件事联系起来。我们既有麦克斯韦方程组,也有关于点电荷场的方程式(21.1),肯定会问这两者是否等效。若我们能从麦克斯韦方程组导出式(21.1),则我们将确实懂得光学与电磁学间的关系。建立这种关系是本章的主要目标。

事实证明,我们不想完全解决这个问题——数学的细节变得过于复杂以致我们不能将其彻底完成。但将进行到足够接近完成的地步,以便使你们能够轻而易举地看出如何才能把联系建立起来,所遗漏的部分将只是一些数学细节。你们当中有些人可能会发觉这一章中的数学相当复杂,因而也就非常仔细地领会这种论证了。然而,我们认为这样做是十分重要的,即要把你以前学到的与现在正在学习的东西联系起来,或者至少指出这种联系如何才能建立。倘若你对以前各章大致看一看,你就会注意到,每当我们把一种说法作为讨论的起点时,总是要小心地解释它是某个“基本规律”的一种新的“前提”,还是最终可以从别的某些规律推导出来的结果。多亏你们对这些演讲的热切心意,我们才来建立光与麦克斯韦方程组之间的关系。若在某些地方变得太困难,噢,那就是生活——没有其他别的途径可走。

§ 21-2 由点源产生的球面波

在第18章中我们曾发现,麦克斯韦方程组是可以求得解答的,即通过设

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (21.2)$$

和

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (21.3)$$

式中 ϕ 和 \mathbf{A} 这时必定是下列两方程的解,

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (21.4)$$

和

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}, \quad (21.5)$$

而且也必须满足条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (21.6)$$

现在要来求出式(21.4)和(21.5)两方程之解。为此,就得求方程

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -s \quad (21.7)$$

的解 ψ ,这里我们称之为源的 s 是已知的。当然,对于式(21.4)来说, s 相当于 ρ/ϵ_0 而 ψ 相当于 ϕ ,或者若 ψ 为 A_z ,则 s 为 $j_z/(\epsilon_0 c^2)$,等等。但我们要作为一个数学问题来解方程式(21.7)而不管 ψ 和 s 在物理上指的是什么。

在 ρ 和 \mathbf{j} 都分别等于零的那些地方——即在我们称之为“自由”空间里——势 ϕ 和 \mathbf{A} 以及场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 都满足无源的三维波动方程,其数学形式为

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (21.8)$$

在第 20 章中就知道这一个方程的解可表示不同类型的波:在 x 方向上的平面波 $\psi = f(t - x/c)$;在 y 方向、 z 方向或任何其他方向上的平面波;或者具有如下形式的球面波:

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{f(t - r/c)}{r}. \quad (21.9)$$

方程的解也可以按其他方式写出,比方从一根轴线向外传播的柱面波。

我们也曾指出,在物理上,式(21.9)不代表自由空间里的波——必须在原点处有电荷才能获得开始向外行进的波。换句话说,式(21.9)是方程(21.8)在每个地方的解,除了很靠近 $r = 0$ 处,在那里它必然是包括某些源的完整方程式(21.7)的解。让我们看看如何处理这个问题,方程式(21.7)中要有什么样的源 s 才能产生像式(21.9)那样的波?

假设已有了式(21.9)的球面波,并考察在 r 十分微小处所发生的情况。这时, $f(t - r/c)$ 中的推迟 $-r/c$ 可以忽略——只要 f 是一个平滑函数——因而 ψ 变成

$$\psi = \frac{f(t)}{r} (r \rightarrow 0). \quad (21.10)$$

所以 ψ 很像在原点处随时间变化的电荷产生的库仑场。这就是说,要是有一小堆电荷被限制在原点附近的一个小区域里,并具有密度 ρ ,那么我们知道

$$\phi = \frac{Q/(4\pi\epsilon_0)}{r},$$

式中 $Q = \int \rho dV$ 。现在我们懂得这样的 ϕ 满足方程

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

根据相同的数学, 我们总可以讲, 式(21.10)中的 ϕ 满足

$$\nabla^2 \phi = -s \ (r \rightarrow 0). \quad (21.11)$$

这里 s 与 f 的关系为

$$f = \frac{S}{4\pi},$$

而

$$S = \int s dV.$$

唯一不同之处是在这种普遍情况下, s , 从而 S , 都可以是时间的函数。

现在重要的事情在于: 若对于小 r 来说 ϕ 满足方程式(21.11), 则它也满足方程式(21.7)。当我们进至极靠近原点时, ϕ 对 $1/r$ 的依存关系使空间微商变得十分大。但时间微商却仍保持它们原有的值 [它们不过是 $f(t)$ 的时间微商]。所以当 r 趋于零时, 式(21.7)中的 $\partial^2 \phi / \partial t^2$ 项比起 $\nabla^2 \phi$ 来就可以忽略, 而方程式(21.7)也变得与方程式(21.11)等价。

因此扼要地说, 若方程式(21.7)中的源函数 $s(t)$ 被置在原点处并具有总强度

$$S(t) = \int s(t) dV, \quad (21.12)$$

则该方程式(21.7)的解便是

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{S(t-r/c)}{r}. \quad (21.13)$$

式(21.7)中 $\partial^2 \phi / \partial t^2$ 项的唯一影响是在库仑势中引入了推迟时间 $(t-r/c)$ 。

§ 21-3 麦克斯韦方程组的通解

我们已求得关于点源方程式(21.7)的解。下一个问题是: 对于一个分布源来说其解是什么呢? 那是容易求得的; 可以把任何源 $s(x, y, z, t)$ 都想象为由许多个“点”源所组成, 而对于每个体积元 dV 就有一个其源强为 $s(x, y, z, t)dV$ 的“点”源。由于方程式(21.7)是线性方程, 所以合成场就等于所有这种源的基元产生的场的叠加。

利用上一节的结果 [式(21.13)] 我们知道, 在 t 时刻在点 (x_1, y_1, z_1) ——或简称点(1)——处的来自点 (x_2, y_2, z_2) ——或简称点(2)——的一个源的基元 $s dV$ 的场 $d\phi$ 由下式给出:

$$d\phi(1, t) = \frac{s(2, t-r_{12}/c) dV_2}{4\pi r_{12}},$$

式中 r_{12} 是从(2)至(1)的距离。把来自源所有部分的贡献都相加起来, 那意思当然是指对所有 $s \neq 0$ 的区域进行积分, 因而我们有

$$\phi(1, t) = \int \frac{s(2, t-r_{12}/c) dV_2}{4\pi r_{12}}. \quad (21.14)$$

这就是说,在 t 时刻在点(1)处的场是在 $(t - r_{12}/c)$ 时刻离开位于(2)处的各个源的基元的球面波之和。这就是对于任何一组源的有关波动方程的解。

现在我们来看看如何才能得到麦克斯韦方程组的通解。若 ϕ 指的是标势 ϕ , 则源函数 s 便变成 ρ/ϵ_0 。我们也可以令 ϕ 代表矢势 \mathbf{A} 的三个分量中的任一个, 同时由 $j/(c_0 c^2)$ 的对应分量来取代 s 。这样, 若我们对各处的电荷密度 $\rho(x, y, z, t)$ 和电流密度 $j(x, y, z, t)$ 都已知道, 则可立即把式(21.4)和(21.5)两方程的解写出来。它们是

$$\phi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 \quad (21.15)$$

和

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2. \quad (21.16)$$

于是利用式(21.2)和(21.3), 场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 便可以通过势的微商而求得[顺便提一下, 我们有可能核实由式(21.15)和(21.16)得到的 ϕ 和 \mathbf{A} 的确满足方程式(21.6)]。

我们已解出了麦克斯韦方程组。在任何情况下, 如果给出电流和电荷, 便能够从这些积分直接求得势, 然后通过微分而获得场。因此, 我们已经学完了麦克斯韦理论。而且这也使我们能够把这个环节与光的理论衔接起来, 因为要联系到我们以前关于光方面的工作, 所以只需要算出来自运动电荷的电场。尚待做的是取一个正在运动的电荷, 从这些积分算出各个势来, 然后再通过微分而由 $-\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ 找出 \mathbf{E} , 这样就会得到式(21.1)。事实证明, 需要做的工作很多很多, 但那是原则。

因此, 这里是电磁领域的中心——电和磁, 以及光的完整理论; 对于由任何运动电荷所产生的场的完整描述; 以及另外的一些, 全都在这里了。这里就是由麦克斯韦建立起来的、以它的全部功能和美丽而使其完满的建筑物, 它可能是物理学中最伟大的成就之一。为要使你想起它的重要性, 我们将把它全都收集在一个精致的框架中。

麦克斯韦方程组:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

它们的解:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\phi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2$$

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2$$