

度呢？磁场会产生一个绕水平轴的转矩。你会认为这样的转矩正在试图使该磁体与场排成直线，可是它却仅仅引起了进动。如果想要改变该陀螺仪相对于 $z$ 轴的角度，那就必须对它施一环绕 $z$ 轴的转矩。倘若所施的是一个与进动同向的转矩，则该陀螺仪的角度将会这样改变以给出一个在 $z$ 方向较小的 $J$ 分量。在图 35-3 中， $J$ 与 $z$ 轴间的夹角将会增大。若试图阻止进动， $J$ 会朝着垂直方向运动。

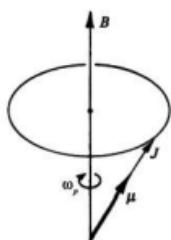


图 35-3 具有磁矩 $\mu$ 和角动量 $J$ 的原子的经典进动

对一个在均匀场中正在进动的原子，如何才能加上我们所要的那种类型的转矩呢？答案是，从旁加一个弱磁场。乍看起来你也许认为这个磁场的方向必须随同磁矩的进动一起旋转，使得它总是垂直于磁矩，如图 35-4(a)中由场 $B'$ 所指出的那样。像这样的场会工作得很好，但一个交变的水平场几乎同样优良。如果有一个小的水平场 $B'$ ，它总是在(正的或负的) $x$ 方向上而且以频率 $\omega_p$ 振动着，那么在每个半周期内施于磁矩上的力矩就将倒转方向，以致它具有一个积累效应，该效应几乎与一转动的磁场同样有效。于是，从经典方面说，我们就会期待，若有一个频率恰恰为 $\omega_p$ 振动着的很弱的磁场，则磁矩沿 $z$ 方向的分量就应该改变。当然，按照经典理论， $\mu$ 应该是连续变化的，但在量子力学中这磁矩的 $z$ 分量就不能做连续调整，它必须从一个值突然跳跃至另一个值。我们已做出了经典力学与量子力学两种结果之间的比较，为你们提供在经典理论中也许会发生的事情与在量子力学中实际发生的事情如何联系起来的线索。顺便说说，你将会注意到，该期待的共振频率在这两种情况下是相同的。

又一附注：从我们所曾谈到的关于量子力学的事情来看，并没有明显的理由说明为什么不能够在 $2\omega_p$ 的频率也发生跃迁。碰巧在经典情况下没有任何与此类似的东西，而在量子力学中也不会发生这种跃迁——至少对于我们刚才所述的那种独特诱导跃迁的方法来说是不会发生的。采用一个水平方向的振动磁场，频率 $2\omega_p$ 引起同时跳跃两步的概率等于零。只有在频率 $\omega_p$ ，无论向上或向下的跃迁才可能发生。

现在，我们准备来描述有关测量磁矩的拉比方法。这里将仅仅考虑对自旋为 $1/2$ 的那种原子的操作。仪器设备的简图如图 35-5 所示。有一个熔炉，它发出的中性原子流直通过直线排列的三组磁铁。磁铁 1 几乎与图 35-2 中的一样，具有强大的场梯度——比方说，其 $\partial B_z / \partial z$  为正。如果原子有一磁矩，而且  $J_z = +\hbar/2$ ，则它会被向下偏转；如果  $J_z = -\hbar/2$ ，则将被向上偏转(因为对于电子来说， $\mu$  的方向与  $J$  的方向相反)。若只考虑那些能穿过狭缝  $S_1$  的原子，就有如图所示的两条可能轨道。凡  $J_z = +\hbar/2$  的原子必定沿曲线  $a$  穿过该狭缝，而凡  $J_z = -\hbar/2$  的原子则必定沿曲线  $b$  通过。从熔炉发出来的、沿其他路径的原子将不会穿过该狭缝。

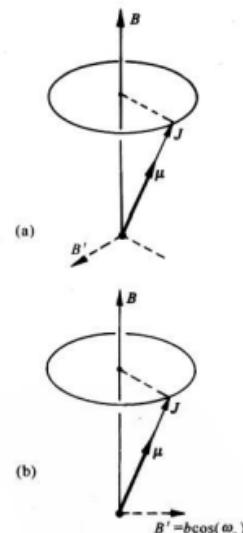


图 35-4 一个原子磁体的进动角度，可以通过始终垂直于 $\mu$ 的、如在(a)或(b)中的一个振动着的水平磁场来加以改变

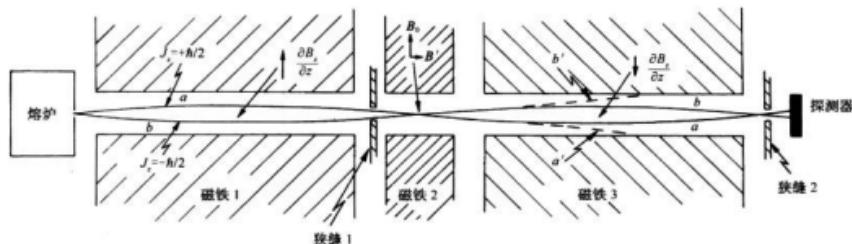


图 35-5 拉比的分子束仪器

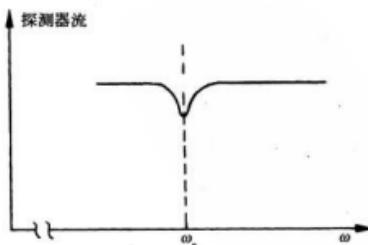
磁铁 2 产生一个匀强场。在这一区域中没有力施于原子上，因而它们将直接通过而进入磁铁 3 中。磁铁 3 恰好像磁铁 1，但其场是反转过来的，所以  $\partial B_z / \partial z$  具有相反符号。那些具有  $J_z = +\hbar/2$ （我们讲“自旋向上”）的原子，先前在磁铁 1 中被推向下的，现在在磁铁 3 中却被推向上了，它们将继续沿着路径 a 穿过狭缝  $S_2$  到达探测器。那些具有  $J_z = -\hbar/2$ （即“自旋向下”）的原子，在磁铁 1 和磁铁 3 中也各受到反向的力而沿路径 b 穿过狭缝  $S_2$  达到探测器。

探测器可以用各种不同方式制成，这取决于被测量的原子。例如，对于像钠一类的碱金属原子，探测器可以是一根与一灵敏电流计相连接的细热钨丝。当钠原子到达钨丝上时， $\text{Na}^+$  离子被蒸发出去，留下来一个电子。因此在该导线上就有一个正比于每秒到达的原子数目的电流。

在磁铁 2 的间隙中有一组能产生小的水平磁场  $\mathbf{B}'$  的线圈。这组线圈由以一可变频率  $\omega$  振动的电流所驱动，所以在磁铁 2 的两极间就有一个强大而恒定的垂直方向的磁场  $\mathbf{B}_0$  和一个弱小的振动着的水平磁场  $\mathbf{B}'$ 。

现在假设该振动场的频率  $\omega$  被调至  $\omega_p$  处——即处于场  $\mathbf{B}$  中原子的“进动”频率。这交变场将使某些从旁经过的原子作出从一个  $J_z$  值至另一个  $J_z$  值的跃迁。一个原来自旋“向上” ( $J_z = +\hbar/2$ ) 的原子可能给翻转“向下” ( $J_z = -\hbar/2$ )。此时这个原子已把它的磁矩方向倒转了，因而它将在磁铁 3 中感受到一个向下的力并将沿着路径  $a'$  运动，如图 35-5 所示。它将不再穿过狭缝  $S_2$  而到达探测器了。同理，有些原子原来自旋是向下 ( $J_z = -\hbar/2$ ) 的，当经过磁铁 2 时将被翻转向上 ( $J_z = +\hbar/2$ )，于是它们将沿着路径  $b'$  而不会到达探测器。

若振动场  $\mathbf{B}'$  的频率与  $\omega_p$  明显不同，则它将不会引起任何自旋的倒转，因而各原子将按照它们不受干扰的路径到达探测器。因此你可以看到，原子在  $\mathbf{B}$  场中的“进动”频率  $\omega_p$  可以这样求得，即变更场  $\mathbf{B}'$  的频率  $\omega$  直到抵达探测器的原子流的减弱被观测出来。原子流的下降将发生在  $\omega$  等于  $\omega_p$  的“共振”时刻。探测器中的电流作为  $\omega$  的函数曲线或许看来像图 35-6 所示的那样。知道了  $\omega_p$ ，就能得到原子的 g 值。

图 35-6 当  $\omega = \omega_p$  时，在束中的原子流就会减弱

像这样的原子束、或通常被称为“分子”束的共振实验，是测量原子客体磁性的一种漂亮而又精密的方法。这共振频率  $\omega_p$  可以用极高的精度测得——事实上，比起我们对(为了求  $g$  而必须知道的)磁场  $B$  可能进行的测量要精确得多。

### § 35-4 大块材料的顺磁性

现在我们很想描述大块材料的顺磁现象。假设有一种物质其原子具有永磁矩，比如像硫酸铜那样的晶体。在这种晶体中存在这样的铜离子，其内部的电子壳层有一净角动量和一净磁矩。所以这种铜离子就是一个具有永磁矩的物体。请让我们就这件事说一句，有些原子具有磁矩而有些不具有。任何比如像钠那种含有奇数个电子的原子，将具有磁矩。钠有一个电子位于它的未填满的壳层内，这个电子给该原子一个自旋和一个磁矩。然而，通常当化合物形成时，在外壳层中的额外电子就会与自旋方向恰巧相反的其他电子互相耦合，使得所有价电子的角动量和磁矩都经常被抵消掉，这就是为什么分子一般都不具有磁矩的原因。当然，如果是钠原子气体，则不会有这样的抵消作用\*。并且，如果你有那种在化学中所谓“自由基”的东西——一种具有奇数个价电子的物体——则键不会完全被满足，因而就有一个净角动量。

在多数大块材料中，只要存在其内电子壳层未被填满的原子就具有净磁矩，此时可能会有一个净角动量和磁矩。这样的原子在周期表中的“过渡元素”部分被找到了——诸如铬、锰、铁、镍、钴、钯和铂等就是这一类元素。此外，所有的稀土元素也都具有未填满的内壳层和永久磁矩。还有其他两三种奇怪的东西会偶而具有磁矩，诸如液态氧，但我们将把它留给化学系去解释原因。

现在，假设有一个箱子充满了具有永久磁矩的原子或分子，比如气体、液体或晶体。我们想要知道，当加上一外磁场时将会发生什么情况。当没有磁场时，原子因热运动而被到处撞来撞去，因而它们的矩在所有方向上转来转去。一旦有了磁场时，它就使那些小磁体整齐排列起来，于是趋向场的矩比离开场的矩就多些，即该材料已被“磁化”了。

我们将把材料的磁化强度  $M$  定义为单位体积中的净磁矩，而这指的是单位体积内原子磁矩的矢量和。如果单位体积中有  $N$  个原子，而它们的平均磁矩为  $\langle \mu \rangle_{\text{平均}}$ ，则  $M$  可以写成  $N$  乘以平均原子磁矩：

$$M = N \langle \mu \rangle_{\text{平均}}. \quad (35.8)$$

$M$  的定义相当于第 10 章中关于电极化强度  $P$  的定义。

顺磁性的经典理论很像第 11 章中曾向你们表明的有关介电常量的理论。人们假定每个原子都有一个磁矩  $\mu$ ，它的大小固定，但其方向是任意的。在场  $B$  中，其磁能为  $-\mu \cdot B = -\mu B \cos \theta$ ，其中  $\theta$  为矩与场之间的夹角。根据统计力学，具有任意角度的相对概率为  $e^{-\text{能量}/kT}$ ，因而靠近零度的角比靠近  $\pi$  的角更可能出现。同以前在 § 11-3 中所进行的步骤完全一样，我们会发现，对于小磁场来说， $M$  平行于  $B$ ，大小为

$$M = \frac{N\mu^2 B}{3kT} \quad (35.9)$$

\* 通常的钠蒸气大多是单原子的，虽则也有一些  $\text{Na}_2$  分子存在。

[见式(11.20)]。这一近似公式只对  $\mu B / (kT)$  比 1 小得多时才正确。

我们已求得感生磁化强度——单位体积中的磁矩——与磁场成正比，这即是顺磁性现象。你将会看到，这效应在低温时较强而在高温时较弱。当我们在该物质上加一磁场时，对于弱场会产生一个正比于该场的磁矩。 $M$  对  $B$  的比率（对于弱场而言）称为磁化率。

现在，我们要从量子力学观点来考察顺磁性。首先考虑原子自旋为  $1/2$  的情况。在没有磁场的情况下，原子具有某个能量；但当处于磁场中时，就有两个可能的能量，每一个  $J_z$  值对应一个能量。对于  $J_z = +\hbar/2$ ，能量被磁场改变的量为

$$\Delta U_1 = + g \left( \frac{q_e \hbar}{2m} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B \quad (35.10)$$

（由于电子的电荷为负<sup>\*</sup>，因此对于一个原子来说能量移动  $\Delta U_1$  是正的）。对于  $J_z = -\hbar/2$ ，能量被改变的量为

$$\Delta U_2 = - g \left( \frac{q_e \hbar}{2m} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B. \quad (35.11)$$

为了书写方便，让我们令

$$\mu_0 = g \left( \frac{q_e \hbar}{2m} \right) \cdot \frac{1}{2}, \quad (35.12)$$

于是

$$\Delta U = \pm \mu_0 B. \quad (35.13)$$

$\mu_0$  的意义很明显： $-\mu_0$  是在自旋向上的情况下磁矩的  $z$  分量，而  $+\mu_0$  则是在自旋向下时磁矩的  $z$  分量。

可是统计力学告诉过我们，一个原子处在一个态或另一个态，其概率正比于

$$e^{-(\text{态的能量})/kT}.$$

当没有磁场时，这两个态具有相同能量，所以当在磁场中达到了平衡时，概率就正比于

$$e^{-\Delta U/kT}. \quad (35.14)$$

单位体积中自旋向上的原子数为

$$N_{\text{向上}} = a e^{-\mu_0 B/kT}, \quad (35.15)$$

而自旋向下的原子数为

$$N_{\text{向下}} = a e^{+\mu_0 B/kT}. \quad (35.16)$$

常数  $a$  是被这样确定下来的，即

$$N_{\text{向上}} + N_{\text{向下}} = N, \quad (35.17)$$

式中  $N$  为单位体积中的原子总数。因此就得到

$$a = \frac{N}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \quad (35.18)$$

\* 在上一章 § 34-2 中曾令电子电荷为  $-q_e$ ，因此那时  $q_e$  是正的。——译者注

我们所感兴趣的是沿  $z$  轴的平均磁矩。由于自旋向上的那些原子将各贡献  $-\mu_0$  之矩，而自旋向下的那些原子则各贡献  $+\mu_0$  之矩，因而平均矩为

$$\langle \mu \rangle_{\text{平均}} = \frac{N_{\text{向上}}(-\mu_0) + N_{\text{向下}}(+\mu_0)}{N}. \quad (35.19)$$

于是单位体积中的磁矩  $M$  就是  $N \langle \mu \rangle_{\text{平均}}$ 。利用式(35.15)、(35.16)和(35.17)，便可得到

$$M = N\mu_0 \frac{e^{+\mu_0 B/kT} - e^{-\mu_0 B/kT}}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \quad (35.20)$$

这就是关于  $j = 1/2$  的原子其  $M$  的量子力学公式。顺便提及，这个式也可以用双曲正切函数写得更简洁些：

$$M = N\mu_0 \tan h \frac{\mu_0 B}{kT}. \quad (35.21)$$

$M$  作为  $B$  的函数其曲线如图 35-7 所示。当  $B$  变得非常大时，双曲正切函数趋于 1，因而  $M$  趋于其极限值  $N\mu_0$ 。所以在强场的情况下，磁化达到饱和。我们可以明白为什么会这样，在足够强的场中，磁矩全部被排列在同一个方向上了。换句话说，它们全都处于自旋向下的状态，因而每一原子贡献一个磁矩  $\mu_0$ 。

在大多数正常情况下——比如说，对于典型的矩、室温以及我们通常能够获得的场强（诸如 10 000 Gs）——比值  $\mu_0 B/kT$  约等于 0.002。人们一定要达到极低温度时才能见到饱和现象。对于常温来说，我们往往能够用  $x$  来代替  $\tan h x$ ，因而上式可以写成

$$M = \frac{N\mu_0^2 B}{kT}. \quad (35.22)$$

正如我们曾在经典理论中见到的， $M$  与  $B$  成正比。事实上，这个式子几乎和以前的完全相同，除了因子  $1/3$  似乎不见了以外。但我们仍需要把量子力学中的  $\mu_0$  同式(35.9)经典结果中出现的  $\mu$  联系起来。

在经典公式中，出现的是  $\mu^2 = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu}$ ，即矢量磁矩的平方，也即

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \left(g \frac{g_e}{2m}\right)^2 \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}. \quad (35.23)$$

我们曾在上一章中指出，通过用  $j(j+1)\hbar^2$  代替  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ ，你就很可能会从经典的计算结果中得到正确答案。在我们这个特殊例子中， $j = 1/2$ ，因而

$$j(j+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2.$$

若用此来顶替式(35.23)中的  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ ，则可得

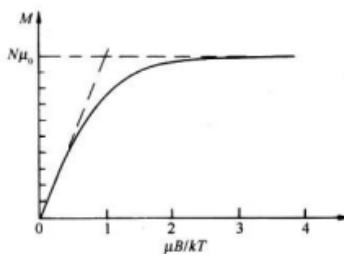


图 35-7 顺磁性磁化强度随磁场强度  $B$  的变化

$$\mu \cdot \mu = \left( g \frac{q_e}{2m} \right)^2 \frac{3\hbar^2}{4},$$

或者利用式(35.12)所定义的  $\mu_0$ , 我们得

$$\mu \cdot \mu = 3\mu_0^2.$$

用这个结果代替经典公式(35.9)中的  $\mu^2$ , 的确会重现正确的量子公式(35.22)。

关于顺磁性的量子理论很容易推广到任意自旋  $j$  的原子。弱场磁化强度为

$$M = Ng^2 \frac{j(j+1)}{3} \frac{\mu_B^2 B}{kT}, \quad (35.24)$$

其中

$$\mu_B = \frac{q_e \hbar}{2m} \quad (35.25)$$

是一个具有磁矩量纲的常数组合。大多数原子都具有近似这种大小的磁矩。它被称为玻尔磁子。电子的自旋磁矩就几乎正好是一个玻尔磁子。

### § 35-5 绝热退磁冷却法

关于顺磁性有一种很有趣的特殊应用。在非常低的温度下, 有可能把原子磁体在一个强磁场中整齐排列起来。这时就能够通过一种所谓绝热退磁过程来获得极端低的温度。我们可取一种顺磁性盐(比方, 像硝酸镨铵那样含有一些稀土原子的盐), 并一开始就在强磁场中用液态氮把它降低到绝对温度 1 或 2 度, 这时因子  $\mu_B/kT$  就会大于 1——比如说大概是 2 或 3。大多数自旋已被整齐排列, 因而磁化几乎饱和。为简易起见, 让我们说, 磁场很强而温度很低, 以致几乎所有原子都被整齐排列。那么, 你就把盐绝热隔离(比如说, 通过移去液态氮并保留高度真空), 并将磁场撤除。盐的温度就大大降低下来。

现在假如你突然把磁场除去, 那么晶格内原子的轻微的摆动或振动就会逐渐把所有自旋从整齐排列中撞散开来。它们有些自旋向上, 而有些自旋向下。但若没有磁场(并略去原子间的互作用, 它只会造成微小误差), 则翻转原子磁体并不需要能量。所以它们会在能量不发生改变因而也就没有任何温度变化的条件下, 使本身的自旋处在随机分布的状态。

然而, 假定正当那些原子磁体被热运动所翻转时还存在一些磁场, 那么当把它们翻转到逆着磁场时就需要作一些功——它们必须反抗场而作功。这会从热运动中取出能量, 从而降低了温度。因此, 如果该强磁场并非消除得太快, 则盐的温度将降低——它是通过去磁而被冷却的。根据量子力学观点, 当场强时所有原子都处于最低能态, 因为任何会处于较高能态的可能性不可能大。但当场减弱时, 热涨落使原子处在较高能态的可能性变得越来越大。当此事发生时, 原子吸收了能量  $\Delta U = \mu_0 B$ 。因此, 若场慢慢除去, 则这种磁跃迁会从晶体的热振动中取出能量, 因而就把它冷却了。用这种办法能够将温度从绝对温度几度降低至千分之几度。

你是否想要制造甚至比这更冷的东西? 事实证明, 自然界已提供了一条途径。我们曾经提到过原子核也有磁矩。关于顺磁性的公式对核也同样适用, 不同之处仅在于核磁矩约比原子磁矩小千倍[它们具有  $qh/(2m_p)$  的数量级, 其中  $m_p$  为质子质量, 由于电子质

量与质子质量之比较小,所以核磁矩也较小]。对于这样的磁矩,即使在 2 K 的温度,因子  $\mu B / kT$  也只有千分之几。但如果利用顺磁性的去磁过程把温度降低至千分之几度,那么  $\mu B / kT$  就会变成一个接近于 1 的数——在这种低温下,我们能够着手使核磁矩饱和。那很幸运,因为此后便可利用核磁性的绝热去磁方法来达到更低温度。这样,就有可能做出两级的磁冷却。首先,利用顺磁性离子的绝热去磁达到千分之几度。然后,再利用这寒冷的顺磁性盐来冷却某些具有强核磁性的材料。最后,当我们从这一材料中移去磁场时,它的温度就会降低到绝对零度 1 度的兆分之一内——只要我们非常小心地做完每件事情。

## § 35-6 核 磁 共 振

我们曾经说过,原子顺磁性很小,而核的磁性甚至比它还要小千倍。然而通过核磁共振的方法来观测核的磁性相对而言还是容易的。假设取一种像水那样的物质,其中全部电子的自旋都完全抵消,以致它们的净磁矩为零。但水分子仍将有非常非常微小的磁矩,那是由氢核的核磁矩引起的。假设将水的一个小样品放在磁场  $B$  之中。由于(氢的)质子具有  $1/2$  的自旋,所以它将有两个可能的能态。如果水处于热平衡状态,则将有较多一点的质子处在那较低能态——它们的磁矩方向平行于场的方向。在每个单位体积中就有一个小的净磁矩。由于质子磁矩仅仅约等于原子磁矩的千分之一,表现为  $\mu^2$  的磁化强度——应用式(35.22)——大约只有典型原子顺磁性强度的兆分之一(这就是为什么我们得先挑选一种不具有原子磁矩的材料)。如果你把它算出来,那些自旋指向上的质子数目与那些自旋指向下的质子数目相差只有  $10^{-8}$  个,因而这效应的确十分微小!然而,它仍然可以按下列办法观测出来。

假设用一个能产生小水平振动磁场的小线圈把样品水包围起来。如果这个场以频率  $\omega_p$  振动,则它将在两个能态之间诱导跃迁——正如在 § 35-3 中我们曾对拉比实验所描述的那样。当质子从较高能态跃迁至较低能态时,它将放出能量  $\mu_e B$ ,而这正如我们曾经见到的,它等于  $\hbar \omega_p$ 。如果它是从较低能态跃迁到较高能态,则它会从线圈那里吸收能量  $\hbar \omega_p$ 。由于处在较低态上的质子数目略微多于处在较高态上的,所以将从该线圈吸收净的能量。

尽管该效应十分微弱,但很小的能量吸收可以用一台灵敏的电子放大器观测到。

正如在拉比的分子束实验中那样,这能量的吸收将仅当振动场处于共振时、也即当

$$\omega = \omega_p = g \left( \frac{q_e}{2m_p} \right) B$$

时才会被看到。通过保持  $\omega$  固定不变而变更  $B$  来寻找共振往往较为方便。能量吸收显然将在

$$B = \frac{2m_p \omega}{g q_e}$$

时出现。

一台典型的核磁共振仪器如图 35-8 所示。一个高频振荡器驱动着置于一对大电磁铁两极间的一

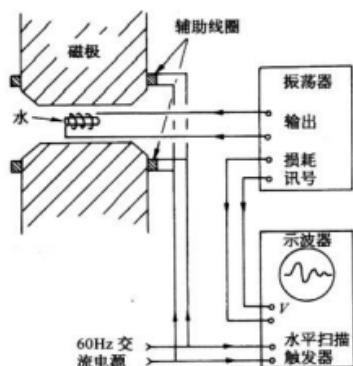


图 35-8 一台核磁共振仪器

个小线圈。两个绕于极尖上的小辅助线圈由 60 Hz 的电流驱动着,以便整个磁场围绕其平均值作十分微小的“摆动”。例如,假设该磁铁的主电流被调至会产生一个等于 5 000 Gs 的磁场,而辅助线圈则围绕这一值产生  $\pm 1 \text{ Gs}$  的变化。如果该振荡器被调至 21.2 MHz,那么当场每次扫过 5 000 Gs 时它就会处在质子的共振范围内了[应用式(34.13),对于质子要用  $g = 5.58$ ]。

这振荡器电路还被安排得能够给出一个附加的输出信号,这信号与从该振荡器所吸收的功率的任何改变成正比。把这一信号馈入示波器垂直方向偏转放大器中。示波器的水平扫描在该磁场摆动的每一周中被触发一次(更一般的是,这水平偏转被制成与该摆动场的大小成正比)。

在样品水还未放进该高频线圈内之前,从振荡器所吸收的功率为某个值(它不会随磁场改变)。然而,当一小瓶水放进线圈中时,示波器上就出现一个如图所示的信号。我们见到由于质子翻转所引起的功率被吸收的一个图像!

在实践中,很难掌握如何把主磁场恰恰调至 5 000 Gs。人们所做的是将主磁电流调至使共振出现在示波器上为止。结果证明,这是目前对磁场强度做出精密测量的最方便办法。当然,过去为了测定质子的  $g$  值有人不得不精确测量磁场和频率。但现在这件事已经完成了,因此如图所示的质子共振仪就可用作“质子共振磁强计”了。

应该提一句关于该信号的形状。假如磁场十分缓慢地摆动,就会期待看到一条正常的共振曲线。当  $\omega_p$  恰好达到振荡器频率时,能量吸收就会显示出一个极大值。在附近的频率处也有一些吸收,因为并不是所有质子都处在完全相同的场内——而不同的场就意味着稍微不同的共振频率。

顺便说说,人们也许会怀疑,在共振频率是否真的会看到任何信号。我们应否期望该高频频会使那两个态的粒子数相等——使得除了水刚放入时之外就该没有任何信号? 不完全是这样,因为尽管我们试图使该两个粒子数相等,但热运动方面却力图保持对于温度  $T$  的粒子数的适当比率。如果处于共振态,则被核所吸收的功率恰好就消耗在热运动上。然而,在质子磁矩与原子运动之间只有相对微弱的“热接触”。质子被相对彻底地隔离于电子分布的中心。因此在纯水中,该共振信号实际上往往太小,难于被观察到。要增加吸收,就必须加强“热接触”。这通常是在水中添加一点点氧化铁而做到的。这些铁原子像小磁体一样,当它们以其热舞蹈的方式到处跳动时,就会在质子上造成一种微小的摆动磁场。这些变化着的场会把质子磁体与原子振动“耦合”起来并往往会建立起热平衡。正是通过这一“耦合”,才使处于较高能态上的那些质子能够消耗它们的能量,以便再有可能从振荡器吸取能量。

实际上核共振仪的输出信号看来并不像一条正常的共振曲线。经常是一个更复杂的还含有一些振动的信号——像图上所画出的那样。这种信号的出现是由于变化磁场引起的。解释应该由量子力学来提供,但也可以证明,在这种实验中有关进动磁矩的那些经典概念总会给出正确的答案。按照经典理论,我们应该说,当到达共振时就开始同步地驱动大量进动着的核磁体。当这样做时,就使它们一起共同进动。当这些核磁体全部一起转动时,将在振荡器线圈中建立起一个频率为  $\omega_p$  的感生电动势,但由于磁场正随着时间增加,所以进动频率也将随着提高,因而这感生电压立即就会处在比振荡器频率稍微高一点的频率上。当这感生电动势与振荡器间交替地处于同相与异相时,该“被吸收”功率就会交替地变成正或负。因而在示波器上我们就会见到在质子频率与振荡器频率之间的那种拍音。由于质子频率并

非全都相同(不同质子会处在稍微不同的磁场上),而也可能由于来自水里氧化铁的干扰,那些自由进动着的磁矩不久就会异相,从而该拍的信号也消失了。

这些磁共振现象已有广泛应用,作为寻找关于物质的新情况的工具——特别是在化学和核物理上。不用说关于核磁矩的数值会告诉我们有关核的结构。在化学中,许多知识是从共振的结构(或形态)中弄清楚的。由于附近的核所产生的磁场,核共振的准确位置稍微有点移动,这取决于任一特定核本身所处的环境。测量出这些移动会帮助人们去确定哪些原子靠近其他哪些原子,并帮助解释分子结构中的细节。同样重要的是关于自由基的电子自旋共振。虽然在平衡时并不会出现于任意的非常大的范围内,但这种自由基往往是化学反应中的中间态。对电子自旋共振的测量是对自由基存在的一种精密检验,而往往也是理解某些化学反应机制的一把钥匙。

# 第36章 铁磁性

## § 36-1 磁化电流

在本章中，我们将讨论某些材料磁矩的净效应远大于顺磁性或抗磁性的情况，这种现象称为铁磁性。在顺磁性或抗磁性材料中，感生磁矩往往那么微弱，以致我们无需担心磁矩所产生的附加场。然而，对铁磁性材料来说，那些由外加磁场所感生的磁矩非常巨大并会对场本身产生很大的影响。事实上，感生磁矩竟是如此强大，以致它们在产生被观测场的过程中往往起着支配的作用。因此，我们将不得不操心的事情之一，就是关于巨大的感生磁矩的数学理论。当然，那不过是一个技术性问题。真正的问题是，为什么磁矩会那么强——到底是怎么造成的？过一会儿我们就要来讨论这一问题。

求铁磁性材料中的磁场与存在电介质时求静电场的问题有些相似。你会记得，我们开始曾用一矢量场  $\mathbf{P}$ ——即单位体积中的偶极矩——来描述电介质的内部特性。然后，我们弄清楚了这种极化的结果与  $\mathbf{P}$  的散度所提供的电荷密度  $\rho_{\text{极化}}$ ，即

$$\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (36.1)$$

是等效的。在任何情况下，总电荷都可以写成这个极化电荷加所有其他电荷之和，其他电荷的密度我们将写成<sup>\*</sup>  $\rho_{\text{其他}}$ 。于是把  $\mathbf{E}$  的散度与电荷密度相联系起来的麦克斯韦方程便变成

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{极化}} + \rho_{\text{其他}}}{\epsilon_0}$$

或 
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{其他}}}{\epsilon_0}.$$

因此我们便可把电荷的极化部分抽出来并放在方程式的另一边，就得到一个新的定律：

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{其他}}. \quad (36.2)$$

这一定律表明，量  $(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$  的散度等于其他电荷的密度。

当然，像在式(36.2)中那样把  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{P}$  放在一起，只有当我们懂得了它们间的关系时才会有用。我们已经知道，将感生偶极矩与场联系起来的理论是相当复杂的，而实际上它只能应用于某些简单情况，并且即使那样也还只是一种近似。我们希望使你们想起曾经用过的一个近似概念。为了求得电介质内部一个原子的感生偶极矩，就必须知道作用于一个单独的原子上的电场。我们做过这种近似——在许多情况下还不太坏——即作用于原子上的场与我们把该原子挖出后（保持所有附近其他原子的偶极矩都不变）留下的小洞中心处的场相

\* 假如所有其他电荷都是在导体上，这  $\rho_{\text{其他}}$  就会与我们在第 10 章中的  $\rho_{\text{自由}}$  相同。

同。你也会记得,极化电介质中空穴内的电场取决于该空穴的形状。我们把以前的结果都总结在图 36-1 中。对于一个垂直于极化的薄盘形空穴,穴里的电场由下式给出:

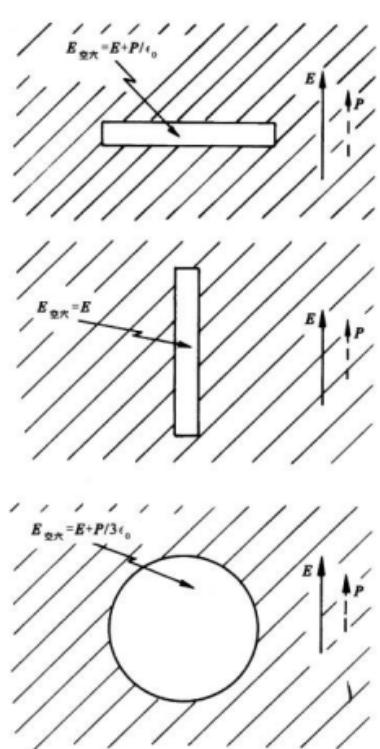


图 36-1 在电介质里的空穴中,电场取决于该空穴的形状

代表“磁极”密度。然而,如今我们知道,材料的磁化乃起因于原子里的环行电流——或者来自原子内自旋的电子或者电子的运动。因此,依照物理观点,对事情如实地用原子电流而不用某种神秘莫测的“磁极”密度来加以描述,是较好的。顺便说说,这些电流有时被称为“安培”电流,因为安培最早提出物质磁性起因于环行的原子电流。

当然,在磁化物质中实际的微观电流其密度十分复杂,它的数值依赖于你在原子里进行观察的地方——它在某些地方会较大而在其他地方则较小;它在原子的某一部分指向这一方向而在另一部分又指向相反方向(正如微观电场在电介质中变化很大一样)。然而,在许多实际问题中,我们所感兴趣的仅仅是物质外面的场,或物质里面的平均场——这里我们指的是对许许多多个原子取的平均。只有对于这种宏观问题,用单位体积中的平均偶极矩  $\mathbf{M}$

$$E_{空穴} = E_{电介质} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

这是我们用高斯定律证明的。另一方面,在一个平行于极化的针状槽里,我们曾经利用  $\mathbf{E}$  的旋度等于零的事实证明槽内电场与槽外电场相同。最后,我们曾求出球形空穴中的电场介于槽内的场与槽内的场之间三分之一的样子:

$$E_{空穴} = E_{电介质} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (\text{对于球形空穴}). \quad (36.3)$$

这就是我们在考虑极化电介质中原子的遭遇时所用过的场。

现在我们不得不完全类似的方法来讨论磁的情况。完成此事的简单办法是讲:单位体积中的磁矩  $\mathbf{M}$ ,完全与单位体积中的电偶极矩  $\mathbf{P}$  相似,因而  $\mathbf{M}$  的负散度等价于一个“磁荷密度” $\rho_m$ ——不管它可能指的是什么。当然,困难在于物理世界中并不存在任何像“磁荷”那样的东西。正如我们所知道的, $\mathbf{B}$  的散度恒为零。但这并不能阻止我们做出人为的类比并写出

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -\rho_m, \quad (36.4)$$

这里不用说  $\rho_m$  是纯数学形式。于是就能够做出与静电情况完全类似的结论并从静电学中引用我们所有原来的方程。人们常常做过一些像那样的事情。事实上,从历史方面讲,人们甚至相信这种类比是正确的。他们确信量  $\rho_m$  就是

来描写物质的磁态才是方便的。我们现在所要证明的是，磁化物质的原子电流能够产生一种与  $\mathbf{M}$  有关的大规模电流。

于是，我们将要做的就是，把电流密度  $j$ ——那是磁场的真正来源——分成几个部分：一部分是描述原子磁矩的环行电流；而其他部分则为描述那里可能会存在的其他电流。把电流分成三部分往往最为方便。在第32章中我们曾对电流做过这样的区别，即在导体中能够自由流动的电流及在电介质中由于束缚电荷的来回运动所引起的电流。在 § 32-2 中我们就曾写出

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{极化}} + \mathbf{j}_{\text{其他}},$$

式中  $\mathbf{j}_{\text{极化}}$  代表电介质中束缚电荷的运动所产生的电流，而  $\mathbf{j}_{\text{其他}}$  则代表所有其他各种电流。现在我们要再进一步，把  $\mathbf{j}_{\text{其他}}$  再分成两部分，一部分  $\mathbf{j}_{\text{磁化}}$  描述该磁化材料内部的平均电流，另一部分为一个附加项，它是任何留下来的我们可称之为  $\mathbf{j}_{\text{传导}}$  的那种电流。这最后一项一般将指导体中的电流，但也可包括其他电流——比如由穿过真空间自由运动的电荷所产生的电流。所以我们将总电流密度写成：

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{极化}} + \mathbf{j}_{\text{磁化}} + \mathbf{j}_{\text{传导}}. \quad (36.5)$$

当然，正是这个总电流属于  $\mathbf{B}$  旋度的麦克斯韦方程：

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (36.6)$$

现在必须把电流  $\mathbf{j}_{\text{磁化}}$  与磁化强度矢量  $\mathbf{M}$  相联系。为了使你们能够明白今后将往何处去，此刻就告诉你们即将得到的结果是

$$\mathbf{j}_{\text{磁化}} = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (36.7)$$

若已知一磁性材料中每一处的磁化强度矢量  $\mathbf{M}$ ，那么该环行电流密度就可以用  $\mathbf{M}$  的旋度来表示。让我们来看看能否理解为什么会这样。

首先考虑一根柱形棒的情况，它具有平行于其轴的均匀磁化。从物理方面讲，我们懂得像这样的均匀磁化，实际上意味着在材料内部各处原子环行电流的密度均匀。让我们试着想象在这材料的横截面上有效电流看起来会像什么。应该期望会看到有点像图 36-2 所示的那种电流。每个原子电流在一个小圆周上兜着圈子，而且所有这些环行电流都是沿同一方向绕行。那么这一物体的有效电流究竟怎么样呢？噢，在棒里的大多数地方完全没有什么效应，因为在每一电流近旁恰好有另一个与之反向的电流。如果设想一个小面积——但比起单独原子来却要大得多的面积——诸如图 36-2 中由  $\overline{AB}$  线所标明的那个面，则穿过这个面的净电流等于零。因此在该材料内部任何地方都没有净电流。可是要注意，在材料表面上会存在未被其附近的反向电流所抵消的原子电流。在表面上始终有一个以相同方向

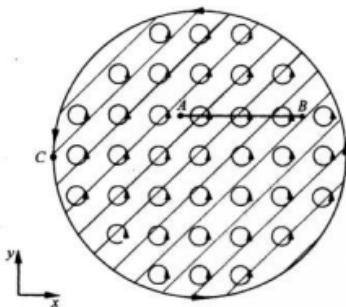


图 36-2 从一根沿  $z$  方向被磁化的铁棒横截面上所看到的原子环行电流的示意图

环绕着该棒的净电流。现在我们明白,为什么以前会讲,一根均匀磁化棒相当于载有电流的一个长螺线管。

这个观点怎么会与式(36.7)一致呢?首先,在材料内部,磁化强度  $\mathbf{M}$  是一恒量,因而它的一切微商就都等于零。这与我们的几何图像相符。可是,在表面上, $\mathbf{M}$  实际上却不是恒量——它只在到达边缘之前才是常数,然后便突然消失为零。因此,刚好在表面上存在巨大的梯度,而按照式(36.7)这将会给出一个大的电流密度。假设我们考察图 36-2 中 C 点附近所发生的情况,选取如图中所示的  $x$  和  $y$  方向,则磁化强度  $\mathbf{M}$  将沿  $z$  方向。写出式(36.7)的各分量,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_z}{\partial y} &= (j_{\text{磁化}})_x, \\ -\frac{\partial M_z}{\partial x} &= (j_{\text{磁化}})_y.\end{aligned}\quad (36.8)$$

在 C 点上,微商  $\partial M_z / \partial y$  为零,而  $\partial M_z / \partial x$  则很大并为正。式(36.7)表明,在负  $y$  方向上有一个大的电流密度。这与环绕该棒的表面电流的上述图像相符。

现在要求出材料中磁化强度逐点变化那种较复杂情况下的电流密度。不难定性地看到,如果相邻区域内的磁化强度不同,则那些环行电流不会完全抵消,因而在该材料体积中会有净电流。我们想要定量地算出的就是这一效果。

首先,我们需要回忆一下 § 14-5 中的结果,即环行电流  $I$  具有的磁矩  $\mu$  由下式所给出:

$$\mu = IA, \quad (36.9)$$

其中  $A$  为该电流回路的面积(见图 36-3)。现在让我们考虑磁化材料内部的一个小矩形块,如示意图 36-4 所示。我们选取的这块材料是那么小,以致可以认为其中的磁化强度是均匀的。若这一块材料在  $z$  方向有一磁化强度  $M_z$ ,则其净效果将与围绕着图上所示的那些垂直面上的面电流相同。根据式(36.9)我们能够求出这些电流的大小。这块材料的总磁矩等于磁化强度乘以其体积:

$$\mu = M_z(abc),$$

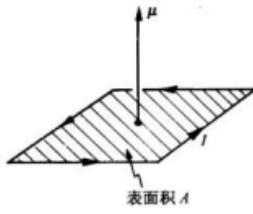


图 36-3 一个电流回路的磁偶极矩  $\mu$  为  $IA$

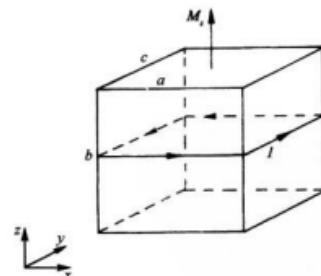


图 36-4 被磁化的一小块材料与一环行的表面电流等效

由此得到(记住该回路的面积为  $ac$ )

$$I = M_z b.$$

换句话说，在每一垂直面上单位（垂直方向）长度的电流等于  $M_z$ 。

现在假设我们想象两个彼此相邻的小块，如图 36-5 所示。由于第二块被从第一块那里稍微移动了一点，所以它会有一稍微不同的磁化强度垂直分量，我们称之为  $M_z + \Delta M_z$ 。在两块之间的界面上，对总电流现有两种贡献。第一块将产生一个流向正  $y$  的电流  $I_1$ ，而第二块则将产生流向负  $y$  方向的面电流  $I_2$ ，沿正  $y$  向的总面电流等于两者代数和\*：

$$I = I_1 - I_2 = M_z b - (M_z + \Delta M_z) b = -\Delta M_z b.$$

可以将  $\Delta M_z$  写成  $M_z$  在  $x$  方向上的微商乘以从第一块至第二块的位移，那刚好是  $a$ ：

$$\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial x} a.$$

这样流经两块间的电流就是

$$I = -\frac{\partial M_z}{\partial x} ab.$$

要把电流  $I$  与平均体积电流密度  $j_y$  联系起来，就必须认识到，这一电流  $I$  实际上被布满于某个横截面积上。如果我们设想材料的整个体积是由这样的小块充填起来的，则每一个（垂直于  $x$  轴的）这样的侧面便可以与每一小块联系起来\*\*。于是我们看到要与电流  $I$  联系的面积恰好就是前面一个面的面积  $ab$ 。因而得到结果：

$$j_y = \frac{I}{ab} = -\frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

我们至少开始有了  $\mathbf{M}$  的旋度。

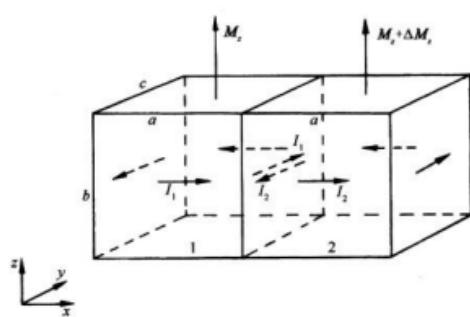


图 36-5 如果两相邻块中的磁化强度不一样，便将有净表面电流存在于其间

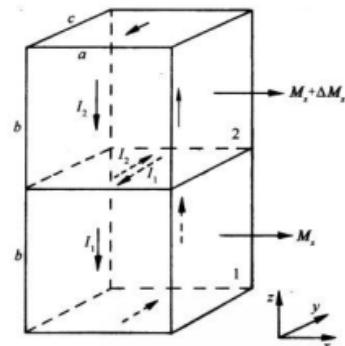


图 36-6 高低相重叠的两块也可对  $j_y$  作出贡献

在  $j_y$  中，还应有因磁化强度  $x$  分量随  $z$  变化而引起的另一项。对  $j$  的这一贡献，来自如图 36-6 所示的那种上下重叠的两小块之间的界面。利用刚才所做的相同论证，你可以证

\* 这里原文是“和”，我们将其改为“代数和”，似较确切些。——译者注

\*\* 或者如果你乐意的话，每一个面上的电流  $I$  应可以用两侧上的那些小块分解成  $50 \times 50$  份。

明这个界面将对  $j_y$  贡献量  $\partial M_x / \partial z$ 。这些就是能够对电流  $y$  分量作出贡献的唯一一些面，因而我们得到在  $y$  方向上的总电流密度

$$j_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

计算出一个立方体其余表面上的电流——或者在利用了  $z$  方向完全是任意的这个事实——我们能够得出结论，电流密度矢量确实是下式给出的：

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{M}.$$

因此，若我们选择用单位体积的平均磁矩  $\mathbf{M}$  来描述物质中的磁化情况，则可发现，那些环行的原子电流等效于由式(36.7)给出的物质内的平均电流密度。如果该材料也是一种电介质，则另外还可能有极化电流  $j_{\text{极化}} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ 。倘若该物质又是导体，则同时还可能有传导电流  $\mathbf{j}_{\text{传导}}$ 。因此我们可以将总电流写成

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{传导}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (36.10)$$

## § 36-2 $\mathbf{H}$ 场

接下来，要将式(36.10)中所写出的电流代入麦克斯韦方程组。得：

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \mathbf{j}_{\text{传导}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

可以将含  $\mathbf{M}$  的项移至式的左边：

$$c^2 \nabla \times \left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) = \frac{\mathbf{j}_{\text{传导}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right). \quad (36.11)$$

正如第32章所述，许多人喜欢把  $(\mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0)$  写成一个新的矢量场  $\mathbf{D}/\epsilon_0$ 。同理，把  $[\mathbf{B} - \mathbf{M}/(\epsilon_0 c^2)]$  写成一个单独的矢量场也往往较为方便。我们决定用下式定义一个新的矢量场  $\mathbf{H}$ ：

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.12)$$

于是式(36.11)变成：

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{传导}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (36.13)$$

这看来似乎较简单，但所有的复杂性都被隐藏在字母  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  之中了。

现在得给你们一个警告。许多采用米·千克·秒(mks)制的人们却曾决定用一个与这里的  $\mathbf{H}$  不同的定义。将他们的场叫做  $\mathbf{H}'$  (当然，他们也仍然叫它为  $\mathbf{H}$ ，而不加上一撇)，它被定义为：

$$\mathbf{H}' = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (36.14)$$

(并且，他们通常把  $\epsilon_0 c^2$  写成新的数  $1/\mu_0$ ，这样他们所要记住的常数就又多了一个)。采用这一定义，式(36.13)看起来甚至更为简单：

$$\nabla \times \mathbf{H}' = j_{\text{传导}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (36.15)$$

但若用  $\mathbf{H}'$  的定义，则困难在于：第一，它与不采用米·千克·秒制的人们的定义不相符；第二，它使得  $\mathbf{H}'$  和  $\mathbf{B}$  有不同的单位。我们认为， $\mathbf{H}$  具有与  $\mathbf{B}$  相同的单位——而不是像  $\mathbf{H}'$  那样具有  $\mathbf{M}$  的单位——更加方便。但如果你将成为一名工程师，并且将从事变压器、电磁铁等的设计工作，那你就得小心注意。你将会发现许多书本是采用式(36.14)作为  $\mathbf{H}$  的定义，而不是采用我们在式(36.12)中的定义，还有其他许多书——特别是有关磁性材料的手册——按照我们所用的方式把  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  联系了起来。你得仔细弄清楚他们所用的定义。

一种区别的办法是根据他们所用的单位。应该记住在米·千克·秒制中， $\mathbf{B}$ ——从而我们的  $\mathbf{H}$ ——都是以如下单位度量的：1 Wbm<sup>-2</sup> 等于 10 000 Gs。在米·千克·秒制中，磁矩(电流乘以一面积)的单位为 1 Am<sup>2</sup>。于是磁化强度  $\mathbf{M}$  就具有单位：1 Am<sup>-1</sup>。对于  $\mathbf{H}'$  来说，其单位与  $\mathbf{M}$  的一样。你可以看到，这也与式(36.15)相符，因为  $\nabla$  具有 1 被长度除的量纲。那些从事电磁铁工作的人们，也有把  $\mathbf{H}$ (采用那  $\mathbf{H}'$  的定义)的单位叫作“1 安培匝/米”的习惯——考虑到绕组上的导线匝数。可是“匝”实际上是一个无量纲数，因而不至于打扰你们。既然我们的  $H$  等于  $H' / (\mu_0 c^2)$ ，所以如果你正在采用米·千克·秒制，则  $H$ (以 Wbm<sup>-2</sup> 计)就等于  $4\pi \times 10^{-7}$  乘以  $H'$ (以 Am<sup>-1</sup> 计)。记住  $H$ (以 Gs 计) = 0.012 6  $H'$ (以 Am<sup>-1</sup> 计)，也许会更方便。

还有另一桩更为糟糕的事情。许多采用我们关于  $\mathbf{H}$  定义的人们还决意要对  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{B}$  的单位赋予不同名称！尽管它们具有相同量纲，但他们还是叫  $\mathbf{B}$  的单位为 高斯，而把  $\mathbf{H}$  的单位叫做奥斯特(当然，是为了纪念高斯和奥斯特两人)。因此，在许多书本中你会找到一些用高斯表达的  $\mathbf{B}$  和用奥斯特表达的  $\mathbf{H}$  而做成的曲线，它们实际上是同一种单位——即米·千克·秒制的单位的  $10^{-4}$  倍。关于磁性单位的混乱情况我们已将其综合列于表 36-1 上。

表 36-1 磁量单位

$[B] = \text{Wbm}^{-2} = 10^4 \text{ Gs}$
$[H] = \text{Wbm}^{-2} = 10^4 \text{ Gs}$ 或 $10^4 \text{ Oe}$
$[M] = \text{Am}^{-1}$
$[H'] = \text{Am}^{-1}$
方便的换算关系：
$B(\text{Gs}) = 10^4 B(\text{Wbm}^{-2})$
$H(\text{Gs}) = H(\text{Oe}) = 0.012 6 H'(\text{Am}^{-1})$

### § 36-3 磁化曲线

现在将考察某些简单情况，其中磁场为恒量、或场变化得足够缓慢以致同  $j_{\text{传导}}$  相比可以略去  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ，于是场将遵循方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (36.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j_{\text{传导}} / \mu_0 c^2, \quad (36.17)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}/\epsilon_0 c^2. \quad (36.18)$$

假设有一个由铜线圈包扎的铁环(炸面饼圈模样),如图 36-7(a)所示。导线中有电流  $I$  流动。

这样,磁场将会怎么样呢?磁场将主要存在于铁环之内,那里, $\mathbf{B}$  线将是一些圆圈,如图 36-7(b)所示。由于  $\mathbf{B}$  通量是连续的,所以它的散度便是零,而式(36.16)被满足。其次,通过绕图 36-7(b)所示的闭合回路  $\Gamma$  进行积分而把式(36.17)写成另一种形式。根据斯托克斯定理,我们有

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S j_{\text{非}n} \cdot \mathbf{n} da, \quad (36.19)$$

其中  $j$  的积分是对整个以  $\Gamma$  为边界曲面进行的。这个曲面被每一匝绕线穿过一次,每一匝对积分都贡献了电流  $I$ ,若总共有  $N$  匝,则积分为  $NI$ 。根据我们问题中的对称性,环绕曲线  $\Gamma$  各处的  $\mathbf{B}$  都相同,若假定磁化强度——从而场  $H$ ——沿着  $\Gamma$  也是恒定不变的,则式(36.19)变成

$$Hl = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2},$$

其中  $l$  为该曲线  $\Gamma$  的长度。因此,

$$H = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{NI}{l}. \quad (36.20)$$

正是因为在像这样一种情况下  $\mathbf{H}$  与起磁电流成正比,所以  $\mathbf{H}$  有时被称为磁化场。

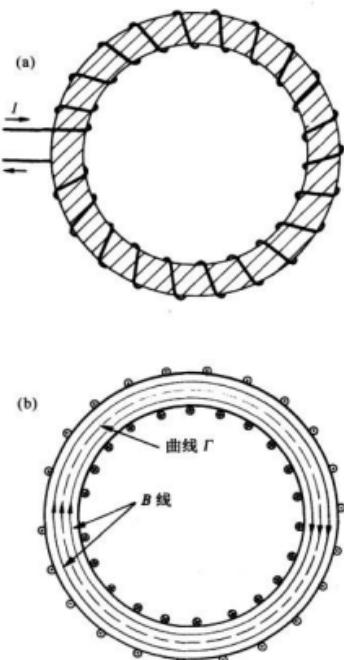
现在,只需要  $\mathbf{H}$  与  $\mathbf{B}$  有关的方程。但不存在任何这样的方程!当然,我们有个方程式(36.18),

图 36-7 (a) 一个绕上了绝缘导线圈的铁环;  
(b) 铁环截面中的场线

不过那没有什么帮助,因为对于像铁那样的铁磁性材料  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{B}$  之间并没有直接的关系。磁化强度  $\mathbf{M}$  取决于铁的整个过去历史,而不仅取决于该时刻的  $\mathbf{B}$ 。

然而,并不是毫无希望。在某些简单情况下我们还是能够获得一些解答的。如果从未磁化的铁开始——让我们说该块铁已在高温下退了火——那么在铁环的简单几何中,全部铁就都有相同的磁性历史。这样,我们就能根据实验测量结果对  $\mathbf{M}$ ——从而对  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  间的关系——说出某些东西。根据式(36.20),铁环里的场  $\mathbf{H}$  可以表示为一常数乘以绕线中的电流  $I$ 。而场  $\mathbf{B}$  则可通过对面圈中(或绕于图示的那个起磁线圈上面的另一个辅助线圈中)的电动势对时间的积分而量度出来。由于这个电动势等于  $\mathbf{B}$  通量的变化率,因而电动势对时间的积分就等于  $\mathbf{B}$  乘以该铁环的横截面积。

图 36-8 显示出用一个软铁环所观测到的  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  之间的关系。当电流初接通时,  $\mathbf{B}$  沿曲线  $a$  随着  $\mathbf{H}$  的增大而增大。要注意,  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的不同标度。起初,只要相对小的  $\mathbf{H}$  就能造成大的  $\mathbf{B}$ 。为什么用铁所得的  $\mathbf{B}$  会比在空气中得到的大那么多呢?这是因为有一个大的磁化强



度  $M$ , 它等效于在铁上有一个较大的表面电流——场  $B$  来自这一电流与绕线中的传导电流之和。为什么  $M$  会那么大, 我们将在以后讨论。

在  $H$  值较高时, 磁化曲线趋于水平, 我们就说铁块已经饱和。按图上的那种标尺, 曲线看来已变成水平。实际上, 它稍微继续上升——对于强场来说,  $B$  变成正比于  $H$ , 并有一单位斜率。 $M$  不再增加。顺便提一下, 我们应该指出, 假如该环是由某种非磁性材料制成的, 则对于所有场  $M$  均应该为零, 而  $B$  应等于  $H$ 。

我们所注意到的第一件事, 是图 36-8 中曲线  $a$ ——通常所说的磁化曲线——的高度非线性。但更糟的是若达到了饱和之后, 我们减少线圈里的电流使  $H$  回到零, 则磁场  $B$  将沿曲线  $b$  下降。当  $H$  达到零时, 仍会有些剩余的  $B$ 。即使没有起磁电流, 在铁里仍有磁场——它已被永远磁化了。如果我们此时在线圈中接通一负电流, 则  $B-H$  曲线仍将继续沿着  $b$  下降, 直到铁在负方向达到饱和。然后若我们再使电流回到零, 则  $B$  将沿曲线  $c$  变化。如果使电流在大的正值与负值之间交变, 则  $B-H$  曲线将会沿着极接近于  $b$  与  $c$  的两条曲线来回变化。然而, 若以某种任意方式改变  $H$ , 则可获得更为复杂的曲线, 一般而言它们将位于曲线  $b$  与  $c$  之间的某些地方。由场的反复振荡所形成的回路称为铁的磁滞回线。

于是我们看到, 不可能写出一个像  $B = f(H)$  的函数关系, 因为在任意时刻的  $B$  值不但取决于在该时刻的  $H$  值如何, 而且还取决于它过去的整个历史。自然, 磁化曲线和磁滞回线对于不同物质是不同的。这些曲线的形状既密切依赖于该材料的化学成分, 也依赖于其制备及随后物理处理的细节。我们在下一章中将对这些复杂情况的某些物理解释进行讨论。

## § 36-4 铁芯电感

磁性材料的最重要应用之一, 是在电路中——诸如在变压器、电动机等器件中。一个原因是, 有了铁我们就能够控制磁场的走向, 并且对于某一给定电流能够获得大得多的场。例如, 那种典型“环形”电感就做得很像图 36-7 所示的物体。一个给定的电感与一个等值的“空芯”电感相比在体积上要小得多, 所用的铜也少得多。对于一给定电感, 我们可以在绕组中得到小得多的电阻, 从而该电感就更接近于“理想”的了——特别对于低频的情况。定性地理解这种电感如何工作是十分容易的。如果  $I$  是绕组中的电流, 则在其内部产生的场  $H$  正比于  $I$ ——如式(36.20)所给出的那样。跨过线端的电压  $V$  与磁场  $B$  有关。略去绕线中的电阻, 这电压  $V$  便与  $\partial B / \partial t$  成正比。自感  $L$  是  $V$  与  $\partial I / \partial t$  的比(见 § 17-7), 因此就涉及到铁中  $B$  与  $H$  的关系。由于  $B$  远大于  $H$ , 所以我们在电感中得到很大的倍数。从物理上讲, 发生的情况是: 在线圈里的小电流, 通常产生一个小磁场, 在铁里就会引起从属的小磁体全

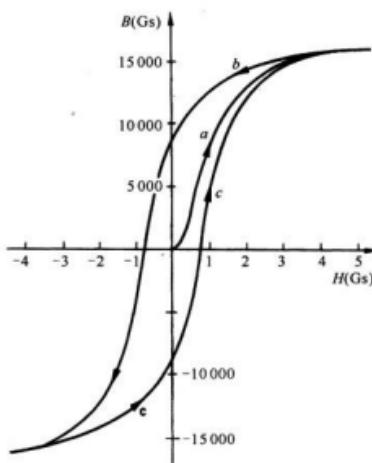


图 36-8 软铁的典型磁化曲线和磁滞回线

都排列整齐,因而产生了一个比绕组里的外电流要大得惊人的“磁化”电流,似乎流经线圈的电流比实际的电流大得多了。当我们把电流的方向反转时,所有这些小磁体都翻转过来——所有那些内在电流都反转了方向——从而得到一个比没有铁时高得多的感生电动势。如果我们要计算自感,则可通过能量来做——如在§17-8中所描述的那样。从电流源释放出来的能量的时间变化率为 $IV$ 。电压 $V$ 等于该铁芯的截面积 $A$ ,乘以 $N$ ,再乘以 $dB/dt$ 。根据式(36.20), $I = (\epsilon_0 c^2 l / N)H$ 。因而我们有

$$\frac{dU}{dt} = VI = (\epsilon_0 c^2 l A)H \frac{dB}{dt}.$$

对时间积分,得到

$$U = (\epsilon_0 c^2 l A) \int H dB. \quad (36.21)$$

注意 $lA$ 乃是该环的体积,所以我们已证明在一磁性材料中的能量密度 $u = U/\text{体积}$ ,由下式给出:

$$u = \epsilon_0 c^3 \int H dB. \quad (36.22)$$

这里包含着一个重要的特点。当我们应用交变电流时,铁环中的磁性被迫循着一条磁滞回线变动。由于 $B$ 并非 $H$ 的一个单值函数,

所以环绕一个完整循环的 $\int H dB$ 积分不会等于零,而等于该磁滞曲线所包围的面积。这样,策动源在一周期内就会付出一定的净能——一个正比于磁滞回线内面积的能量。而这些能量“损失”了。这种损失是由维持该电磁现象而造成的,但却变成了铁里的热量,这称为磁滞损耗。为了确保这种能量损失得少一点,我们希望磁滞回线尽可能窄一些。减少回线面积的一种办法是将每周中场所达到的峰值降低。对于较小峰值的场,我们可得到一条像图36-9所示的那种磁滞曲线。并且,具有十分狭窄回线的特殊材料亦已设计出来。那种所谓变压器用铁——含有少量硅的铁合金——就是为了具有这种特性而被研究出来的。

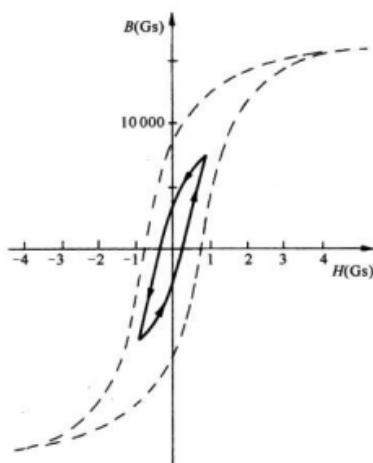


图 36-9 一条未达到饱和的磁滞回线

当电感环绕一小磁滞回线运行时, $B$ 和 $H$ 的关系可用一个线性方程来近似。人们经常写成

$$B = \mu H. \quad (36.23)$$

常数 $\mu$ 并非我们以前曾用过的磁矩,它称为该铁的磁导率(有时称为“相对磁导率”)。普通铁的磁导率其典型值为几千。有几种像“超透磁合金”的那类特殊合金,磁导率可高达一兆。

如果我们把 $B = \mu H$ 这种近似式应用到式(36.21)中去,则可将一环形电感中的能量写成

$$U = (\epsilon_0 c^2 l A) \mu \int H dB = (\epsilon_0 c^2 l A) \frac{\mu H^2}{2}. \quad (36.24)$$

因而能量密度近似地为

$$u \approx \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mu H^2.$$

现在可令式(36.24)中的能量等于电感的能量  $LI^2/2$ , 并解出  $L$ 。从而获得

$$L = (\epsilon_0 c^2 LA) \mu \left(\frac{H}{I}\right)^2.$$

利用来自式(36.20)的  $H/I$ , 就有

$$L = \frac{\mu N^2 A}{\epsilon_0 c^2 l}, \quad (36.25)$$

自感与  $\mu$  成正比。如果你想要有为声频放大器这类东西所用的电感, 你就得尝试将其运用于  $B-H$  关系尽可能线性的那种磁滞回线上(你会记得, 我们曾在第1卷第50章中谈论过关于非线性系统中谐波产生的事)。对于这样的目的, 式(36.23)乃是一个有用的近似。反之, 如果你希望产生谐波, 则可以采用一种故意按高度非线性方式运作的电感。此时你就得利用全部  $B-H$  曲线, 并用图解法或数值计算法来分析所发生的情况。

变压器通常是把两个线圈套在同一个磁性材料的环或芯上制成的(对于较大型的变压器, 为了方便起见, 铁芯是按矩形的尺寸比例制作的)。这样在“原”绕组中变化着的电流就会引起铁芯中磁场的变化, 而磁场的变化又在“副”绕组中感生一电动势。由于穿过两绕组中每匝的磁通量都相同, 所以两绕组中的电动势比值就与其匝数的比值相同。这样加于原绕组上的电压就在副绕组中转变成不同的电压。由于为了产生必需的磁场变化就要求环绕铁芯有某个净电流, 因而两绕组中的电流代数和就被确定, 并且等于所必需的“起磁”电流。若从副绕组取出的电流增加, 则原绕组中的电流也应按比例增加——和电压的变换相同, 也有电流方面的相互“变换”。

## § 36-5 电磁铁

现在让我们来讨论一种稍微复杂些的实际情况。假设有一块如图 36-10 所示的、形式相当标准的电磁铁——由一块“C 形”轭铁以及绕在这块轭铁上的多匝导线圈制成。缝隙中的磁场  $B$  将会怎样呢?

如果缝隙厚度比所有其他尺寸都小, 则作为一级近似, 可以认为  $B$  线将环绕整个回路, 正如它们在铁环中所表现的那样。它们看来有点像图 36-11(a), 在缝隙处往往散开一些, 但若缝隙很窄, 则这种散开只是一个微小的效应。假设通过轭铁任一截面的  $B$  通量是一个常数, 这是一个相当好的近似。如果轭铁具有均匀的横截面积——而我们又忽略在缝隙处和在转弯处的任何边界效应——那么便可以讲, 环绕轭铁的  $B$  是均匀的。

并且, 在缝隙中  $B$  将有同样的数值, 这是从式(36.16)得出来的结论。试想象如图 36-11(b)所示的闭合曲面  $S$ , 它的一个面位于缝隙中而另一个面位于铁

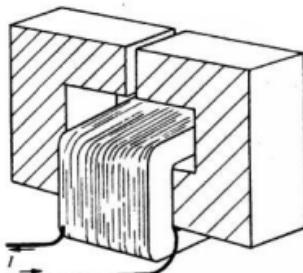


图 36-10 电磁铁

中,从这个闭合曲面跑出来的总  $B$  通量必为零。如果把缝隙中的场称为  $B_1$ ,而把铁里的场称为  $B_2$ ,则我们得

$$B_1 A_1 - B_2 A_2 = 0.$$

由于  $A_1 = A_2$ (在我们的近似程度下),所以可推断  $B_1 = B_2$ 。

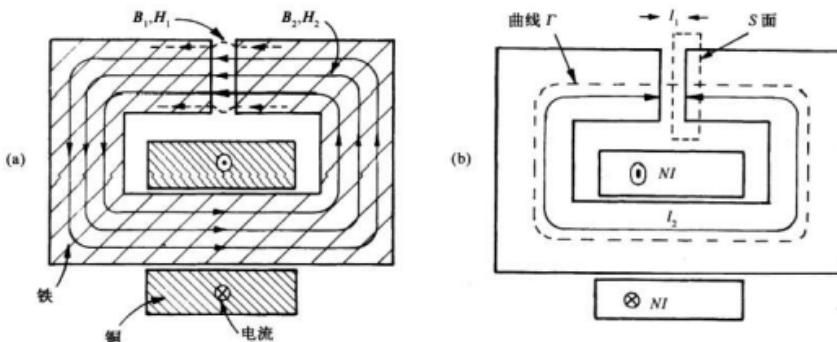


图 36-11 电磁铁的截面

现在让我们来看看  $H$ 。可以仍然利用式(36.19),环绕图 36-11(b)中的曲线  $\Gamma$  进行线积分。右边的积分照旧是  $NI$ ,即匝数乘电流。然而,现在铁里和空气中的  $H$  将不相同。称铁里的场为  $H_2$ ,环绕铁块的路径长度称为  $l_2$ ,则这一部分的曲线将对该积分贡献量  $H_2 l_2$ ;把缝隙里的场称为  $H_1$ ,假定缝隙厚度为  $l_1$ ,则可获得来自缝隙的贡献  $H_1 l_1$ 。于是我们有

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.26)$$

现在还知道另外一些情况:由于在空气缝隙里磁化强度可以忽略,因而  $B_1 = H_1$ 。由于  $B_1 = B_2$ ,所以式(36.26)变成

$$B_2 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}, \quad (36.27)$$

我们仍然有两个未知数。为了求得  $B_2$  和  $H_2$ ,还需要另一个关系式——即把铁中的  $B$ ,  $H$  联系起来的关系式。

如果可作  $B_2 = \mu H_2$  这个近似,则就能用代数法求解上述方程。然而,让我们考虑普遍的情况,即其中铁的磁化曲线如图 36-8 所示。我们希望得到的就是这个函数关系与式(36.27)结合后的联立解。这个解可以这样找到,通过把式(36.27)的曲线和磁化曲线画在同一个图上,如图 36-12

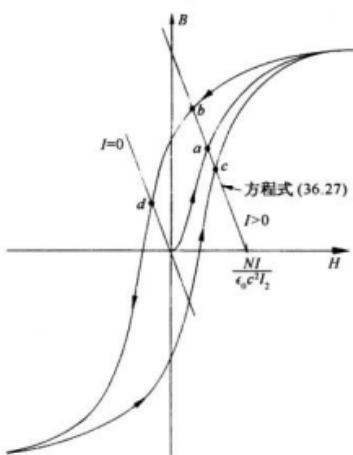


图 36-12 求解电磁铁中的场

所示,两条曲线相交之处,就是我们要求的解。

对于一给定电流  $I$ ,函数式(36.27)就是图 36-12 中标明  $I > 0$  的直线。该线与  $H$  轴 ( $B_z = 0$ ) 相交于  $H_z = NI / (\epsilon_0 c^2 l_z)$  处,而其斜率为  $-l_z/l_1$ 。不同的电流仅仅是沿水平方向移动该直线。从图 36-12 我们看到,对于一给定电流可以有几个不同的解,这取决于你怎样到达那里。如果你刚好制成该块磁铁,并接通电流而上升到了  $I$ ,则场  $B_z$ (也即  $B_1$  场)的值就将有点  $a$  给出。如果你已经使电流达到某个很大的值,而下降至  $I$ ,则场将由点  $b$  给出。或者,如果在磁铁中你刚好有一个高负值电流,然后才把它升高至  $I$ ,则场就是  $c$  点处的场。因此,缝隙里的场将取决于你在过去做过的事情。

当磁铁中的电流为零时,式(36.27)中  $B_z$  和  $H_z$  的关系式用图中标明为  $I = 0$  的那条直线来表示。仍然存在各种可能的解。如果你先使铁达到了饱和,则可能存在一个由  $d$  点给出的、在磁铁里相当大的剩余磁场。你可以将线圈除掉,从而得到一个永久磁体。由此可见,若要制成一块优质永久磁体,你必须要有宽磁滞回线的材料。诸如铝镍钴 V 族那类特种合金,就具有很宽阔的磁滞回线。

## § 36-6 自发磁化

现在要转到这样一个问题上来,为什么在铁磁性材料中一个小磁场就会产生那么大的磁化强度。诸如铁和镍那种铁磁性材料的磁化强度来自原子内壳层中电子的磁矩。每个电子都具有等于  $g/(2m)$  乘以其  $g$  因子、再乘以其角动量  $\mathbf{J}$  的磁矩  $\mu$ 。对于不具有净轨道运动的单个电子,  $g = 2$ , 而  $\mathbf{J}$  在任一方向——比如在  $z$  方向——上的分量为  $\pm \hbar/2$ , 因而  $\mu$  沿  $z$  轴的分量为

$$\mu_z = \frac{g\hbar}{2m} = 0.928 \times 10^{-23} \text{ Am}^2. \quad (36.28)$$

一个铁原子中,实际上存在两个对铁磁性有贡献的电子。为了使讨论比较简单,我们将谈谈关于镍的磁性,它是与铁相似的一种铁磁性材料,不过在其内壳层中只有一个电子。不难把该论证推广到铁的情况。

现在的要点在于,在外加场  $\mathbf{B}$  存在的情况下,那些原子磁体倾向于随场整齐排列,但受到热运动的冲撞,正如同我们对顺磁性材料曾描述的那样。在上一章中,我们曾找出企图把原子磁体排列整齐的场与力图把它们打乱的热运动之间的平衡会产生出这样的结果,即单位体积内的平均磁矩最后应为

$$M = N\mu \tan h \frac{\mu B_z}{kT}. \quad (36.29)$$

所谓  $B_z$ ,我们意指作用于原子上的场,  $kT$  为玻耳兹曼能量。在顺磁性理论中,我们不过是用  $B$  本身表示  $B_z$ ,忽略了由附近其他原子在任何给定原子处贡献的那部分场。在铁磁性情况下,却存在一种复杂性。我们不应当用铁里的平均场表示作用于单个原子上的  $B_z$ 。相反,我们必须像在电介质情况下所做的那样来处理——我们必须求出作用于单个原子上的局部磁场。在精密计算中,我们应当把由晶格中所有其他原子对有关原子所贡献的场都相加起来。但正如我们对电介质所做的那样,将做这样的近似,即在一个原子处的场与我们在该材料内一个小球形空穴中可能找到的场相同——假定其邻近原子的磁矩都不会因该空穴

的存在而改变。

根据我们曾在第11章中所做的论证,也许认为可以写成

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \quad (\text{错了!}),$$

但这却不正确。然而,如果我们把第11章中的式子和本章中有关铁磁性的方程仔细比较一下,就会发现那里的一些结果还是可以利用的。让我们把对应的方程放在一起,对不存在传导电流或传导电荷的区域,我们有:

静电学	静铁磁性
$\nabla \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \left( \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) = 0$

(36.30)

这两组方程可以认为彼此相类似,只要做出如下的纯数学性对应:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}, \quad \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{B}.$$

这与做出下列的类比相同:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}/c^2. \quad (36.31)$$

换句话说,若我们将铁磁性的方程写成

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (36.32)$$

那么它们看起来就很像静电学方程了。

这种纯代数的对应性,过去曾经引起过某些混乱。人们往往认为  $\mathbf{H}$  就是“磁场”。可是,正如我们已经明白,在物理上  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$  才是基本场,而  $\mathbf{H}$  只是一种衍生出来的概念。所以尽管方程式彼此类似,但其物理意义却不类似。然而,这不会阻止我们去运用相同方程具有相同解答的原理。

可以利用关于电介质中各种不同形状空穴中电场的以前结果——概括在图36-1内的场——来找出在各对应空穴中的场  $\mathbf{H}$ 。一旦知道了  $\mathbf{H}$ ,便可以确定  $\mathbf{B}$ 。例如(利用那些我们在第1节中总结出来的结果),在一个平行于  $\mathbf{M}$  的针状空穴中,场  $\mathbf{H}$  与在材料里的  $\mathbf{H}$  相同,

$$\mathbf{H}_{\text{空穴}} = \mathbf{H}_{\text{材料}}.$$

但由于空穴中的  $\mathbf{M}$  等于零,所以得

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B}_{\text{材料}} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.33)$$

另一方面,在一个垂直于  $\mathbf{M}$  的盘状空穴中,我们有

$$\mathbf{E}_{\text{空穴}} = \mathbf{E}_{\text{电介质}} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

这可转换成

$$\mathbf{H}_{\text{空穴}} = \mathbf{H}_{\text{材料}} + \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}.$$

或者用  $\mathbf{B}$  来表示, 则为

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B}_{\text{材料}}. \quad (36.34)$$

最后, 对于一个球状空穴, 通过与式(36.3)做类比, 我们应有

$$\mathbf{H}_{\text{空穴}} = \mathbf{H}_{\text{材料}} + \frac{\mathbf{M}}{3\epsilon_0 c^2}$$

或

$$\mathbf{B}_{\text{空穴}} = \mathbf{B}_{\text{材料}} - \frac{2}{3} \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.35)$$

这一结果与我们以前对于  $\mathbf{E}$  所得的结果很不相同。

当然, 通过直接利用麦克斯韦方程组, 有可能用更加物理的方式来获得这些结果。例如, 式(36.34)就是直接从  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  推得的(你可以用一个一半在材料里而另一半在材料外的高斯面)。同理, 你可以通过利用沿一条在空穴内部往上而通过材料后又返回的曲线的线积分而得到式(36.33)。在物理上, 空穴中的场, 由于表面电流——那是由  $\nabla \times \mathbf{M}$  提供的——而被削弱了。式(36.35)也可通过考虑该球形空穴边界上的表面电流效应而获得。我们将把它留给你们去证明。

为了由式(36.29)求得平衡时的磁化强度, 事实证明, 最方便的乃是同  $\mathbf{H}$  打交道, 从而写出

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{H} + \lambda \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.36)$$

在那球形空穴的近似中, 我们应该有  $\lambda = 1/3$ , 但是, 正如你将会看到的, 我们以后要用到某个其他值, 因而就保留它作为一个可调参数。而且, 我们还将假定所有的场都在同一个方向上, 以致无需去担心那些矢量的方向。假如现在将式(36.36)代入式(36.29)中, 就会有一个把磁化强度  $\mathbf{M}$  与磁化场  $H$  相联系的方程:

$$M = N\mu \tanh \mu \left[ \frac{H + \lambda M / (\epsilon_0 c^2)}{kT} \right].$$

然而, 这是一个不可能明显解出的方程, 因而将用图解法解它。

让我们把式(36.29)写成

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \tanh x \quad (36.37)$$

而将问题置于一种普遍形式中, 其中  $M_{\text{饱和}}$  为磁化强度的饱和值, 即  $N\mu$ , 而  $x$  则代表  $\mu B_a / (kT)$ 。 $M/M_{\text{饱和}}$  对  $x$  的依存关系由图 36-13 中的曲线  $a$  表示。我们也可以把  $x$  写成  $M$  的函数——利用关于  $B_a$  的式(36.36)——为

$$x = \frac{\mu B_a}{kT} = \frac{\mu H}{kT} + \left( \frac{\mu \lambda M_{\text{饱和}}}{\epsilon_0 c^2 kT} \right) \frac{M}{M_{\text{饱和}}}.$$

$$(36.38)$$

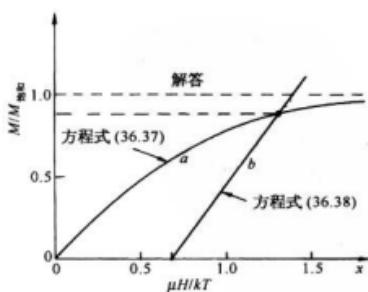


图 36-13 (36.37) 和 (36.38) 两方程的图解法

对于任何给定的  $H$  值, 这是  $M/M_{\text{饱和}}$  与  $x$  间的直线关系式。直线的  $x$  的截距在  $x = \mu H / (kT)$  处, 而其斜率为  $\epsilon_0 c^2 kT / (\mu M_{\text{饱和}})$ 。对于某个特定的  $H$ , 我们会有一条像图 36-13 中标明为  $b$  的直线。曲线  $a$  与直线  $b$  的交点向我们提供了关于  $M/M_{\text{饱和}}$  的解。这样我们就把问题解决了。

让我们看一看, 各种不同情况下的解答将会怎样。我们从  $H = 0$  开始。有两种可能情况, 分别用图 36-14 中的  $b_1$  和  $b_2$  两直线表示。你将从式(36.38)注意到, 直线的斜率与绝对温度  $T$  成正比, 因此, 在高温时就会有一条像  $b_1$  的线, 其解答为  $M/M_{\text{饱和}} = 0$ 。当磁化场  $H$  为零时, 磁化强度也为零。但在低温时, 我们会有一条像  $b_2$  的线, 而对于  $M/M_{\text{饱和}}$  就有两个解答——一个是  $M/M_{\text{饱和}} = 0$ , 而另一个是  $M/M_{\text{饱和}} \approx 1$ 。事实证明, 只有那个较高的解才是稳定的——正如你可以通过考虑围绕这些解的微小变化所看到的那样。

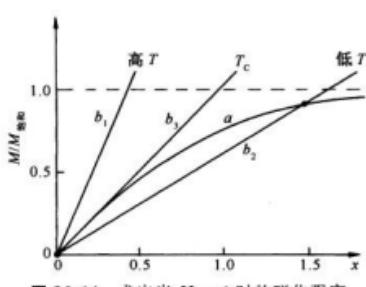


图 36-14 求出当  $H = 0$  时的磁化强度

于是, 按照这些概念, 磁性材料在足够低的温度下会自发地使本身磁化。总之, 当热运动足够小时, 原子磁体间的耦合作用就会导致它们全部互相平行地排列起来——我们就有了一种与第 11 章中讨论过的铁电性相似的永磁材料。

若我们从高温出发而逐渐降低温度, 则存在一个称为居里温度  $T_c$  的临界温度, 在那里铁磁性行为突然出现。这一温度对应于图 36-14 中的直线  $b_1$ , 它与曲线  $a$  相切, 因而具有等于 1 的斜率。居里温度由下式给出:

$$\frac{\epsilon_0 c^2 k T_c}{\mu \lambda M_{\text{饱和}}} = 1. \quad (36.39)$$

如果我们乐意的话, 可以利用  $T_c$  将式(36.38)写得更简单些:

$$x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_c}{T} \left( \frac{M}{M_{\text{饱和}}} \right). \quad (36.40)$$

现在要来看看, 对于小的磁化场  $H$  会发生什么情况。我们可以从图 36-14 看到, 如果将那些直线稍微往右移动一下事情会怎样进行。对于低温情况, 交点将沿着曲线  $a$  的低斜率部分移出一点点, 而  $M$  就将改变得相对少一点。然而, 对于高温情况, 交点却沿曲线  $a$  的陡峭部分往上升, 而  $M$  便将改变得相对快一些。实际上, 可以将曲线  $a$  的这一部分用一条具有单位斜率的直线来作近似, 并写成:

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_c}{T} \left( \frac{M}{M_{\text{饱和}}} \right).$$

现在就可以解出  $M/M_{\text{饱和}}$ :

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \frac{\mu H}{k(T - T_c)}. \quad (36.41)$$

这里有一条有些像顺磁性中有过的定律。关于顺磁性, 我们曾有

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \frac{\mu B}{kT}. \quad (36.42)$$

此刻的一个差别在于，我们有一个用  $H$  表示的磁化强度，而  $H$  包含了各原子磁体相互作用的某些效应，但主要的差别还在于，磁化强度是与  $T$  和  $T_c$  之间的差值成反比，而不仅仅与绝对温度  $T$  成反比。略去相邻原子间的相互作用就相当于选取  $\lambda = 0$ ，根据式(36.39)这意味着取  $T_c = 0$ 。于是结果正好就是第35章中我们有过的。

可以把有关镍的理论图像与实验数据核对一下。在实验上已经观测到，当温度升高至超过 631 K 时镍的铁磁性特征便消失了。我们可将此值与由式(36.39)计算出来的  $T_c$  相比较。记住  $M_{\text{饱和}} = N\mu$ ，则有

$$T_c = \lambda \frac{N\mu^2}{k_B c^2}.$$

根据镍的密度和原子量，可以得到

$$N = 9.1 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

从式(36.28)取  $\mu$ ，并设  $\lambda = \frac{1}{3}$ ，则得

$$T_c = 0.24 \text{ K}.$$

存在的误差约等于 2600 倍！我们关于铁磁性的理论完全失败了。

可以像外斯(Weiss)曾经做过的那样，通过说明由于某种未知原因， $\lambda$  不是等于三分之二，而是等于  $(2600) \times \frac{1}{3}$  ——或约 900 ——尝试“修补”我们的理论。结果是人们对像铁那样的其他铁磁性材料获得了一些相似的值。为了弄清楚这意味着什么，让我们回到式(36.36)上去。我们看到，一个大的  $\lambda$  值意味着作用于原子上的局部场  $B_a$ ，似乎比我们所想到的要大得多。事实上，若写成  $H = B - M/(\epsilon_0 c^2)$ ，则有

$$B_a = B + \frac{(\lambda - 1)M}{\epsilon_0 c^2}.$$

按照我们原来的意思——令  $\lambda = \frac{1}{3}$  ——局部磁化强度  $M$  使有效场  $B_a$  约减少了量  $\frac{2}{3}M/\epsilon_0 c^2$ 。即使我们关于球形空穴的模型不是很好，仍然预期会有某些减弱。与此相反，为了解释铁磁现象，我们必须想象场的磁化作用会把局部场增强某个巨大——比如一千或更大——的倍数。似乎没有任何合理办法能在一个原子附近造成这么巨大的场——甚至适当符号的场也都不可能！显然，我们关于铁磁性的“磁”性理论是一场可悲的失败。因此必然得出结论，铁磁性必定与相邻原子中自旋电子间的某种非磁性相互作用有关。这种相互作用必然会产生一种强大的趋势，使所有邻近的自旋都沿一个方向整齐排列。以后我们将会明白这必须用量子力学以及泡利不相容原理来处理。

最后，我们来考察在低温时——即  $T < T_c$  ——所发生的情况。我们已经看到，此时将有一种自发磁化——即使  $H = 0$  ——由图 36-14 中曲线  $a$  与  $b_2$  的交点给出。如果对于不同的温度——通过变更直线  $b_2$  的斜率——解出  $M$ ，则我们就能得到如图 36-15 所示的那条曲线。对于所有其中原子磁矩都起因于一个单独电子的铁磁性材料来说，这条曲线应该是相同的。对于其他材料的曲线，只稍微有点不同。

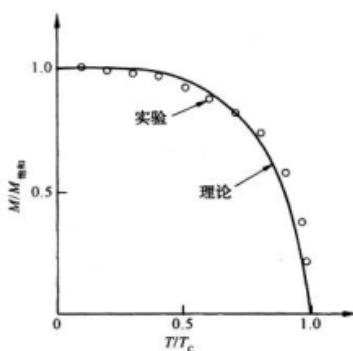
在极限的情况下，如  $T$  趋向于绝对零度时， $M$  变成  $M_{\text{饱和}}$ 。当温度升高时，磁化强度会

逐渐减少,至居里温度时就降为零。图 36-15 中的那些点是镍的实验观测值。它们与该理论曲线符合得相当好。尽管我们并不理解其基本机制,但理论的一般特征似乎是正确的。

最后,在我们尝试理解铁磁性时,还有一个更令人烦恼的误差。我们已发现,在高于某一温度时该材料的性能应该像顺磁物质,其磁化强度  $M$  与  $H$ (或  $B$ )成正比;而在低于该温度时则它应变成自发磁化。但那不是我们测定铁的磁化曲线时所求得的。只有在我们使它“磁化”之后,它才会变成永久磁化。按照刚才所讨论的意思,它就应当本身磁化!毛病出在哪里呢?噢!事实证明,如果你对一块足够小的铁或镍晶体进行观察,则它的确是完全磁化了的!但在一大块铁中,就有许多沿不同方向被磁化了的区域或“畴”,以致在大的尺度范围内平均磁化强度似乎为零。然而,

图 36-15 镍的自发磁化作为温度的函数

在每个小畴中,铁具有被锁住的、几乎等于  $M_{\text{饱和}}$  的磁化强度  $M$ 。这种畴结构的重要性在于,大块材料的整体性质与实际进行处理的微观性质是很不相同的。我们将在下一次演讲中介绍大块磁性材料的实际行为。



# 第37章 磁性材料

## § 37-1 已知的铁磁性

在本章中，我们将讨论铁磁性材料和其他一些奇异磁性材料的行为和特点。然而，在对磁性材料进行研究以前，我们将十分迅速地复习一下上一章中学过的某些有关磁铁方面的普遍理论。

首先，想象材料内部引起磁性的原子电流，然后再用体电流密度  $j_{\text{磁化}} = \nabla \times \mathbf{M}$  来描述它。我们要强调，这并不认为它代表那些实际电流。当磁化强度均匀时，电流也并非真的恰好互相抵消。也就是说，在某原子中一个电子的旋转电流与在另一个原子中一个电子的旋转电流并不会以这样的方式交叠，以致其总和恰好等于零。即使在单个原子内部，磁性的分布也不是平滑的。例如，在铁原子中，磁化强度被分布在一个近似是球形的壳层上，它既不是很靠近核，也不离核太远。因而，物质中的磁性就其细节而言是很复杂的事情，它非常不规则。然而，我们现在不得不忽略这种细致的复杂性，而从整体的、平均的观点来讨论那些现象。于是在任何比原子大的有限范围内，当  $M = 0$  时，在内部区域里的平均电流确实为零。因此，在目前我们正在考虑的程度，所谓单位体积的磁化强度以及  $j_{\text{磁化}}$  等等，我们指的都是在比单个原子所占空间要大的区域里的平均。

在上一章中，我们也曾发现铁磁材料具有如下的重要性质：在超过某一温度时，它并不具有强磁性，而在这一温度之下才会变得有磁性。这个事实不难被演示出来。一段镍线在室温时会被一块磁铁吸引。然而，如果用煤气火焰把它加热至高于其居里点时，则它便变成非磁性体，此时即使被带至磁铁近旁，也不会为磁铁所吸引。如果让它在磁铁近旁冷却，则当温度降至临界温度以下时便会突然再度被磁铁吸引！

我们将采用的有关铁磁性的普遍理论，假定电子的自旋导致了磁性。电子的自旋为  $1/2$  并带有一个玻尔磁子的磁矩  $\mu = \mu_B = q_e \hbar / (2m)$ 。电子自旋可“向上”也可“向下”。由于电子有负电荷，所以当其自旋“向上”时，就有一个负的矩，而当其自旋“向下”时则有一个正的矩。按照我们常用的惯例，电子的磁矩  $\mu$  与其自旋反向。我们已求得一个磁偶极子在给定外加磁场  $\mathbf{B}$  中的取向能为  $-\mu \cdot \mathbf{B}$ ，可是一个自旋电子的能量也取决于邻近自旋的排列情况。在铁中，若附近一原子的磁矩“向上”，则与之相邻的另一原子就有使其本身磁矩也同样“向上”的强烈倾向。这就是促使铁、钴、镍等具有如此强大磁性的因素——磁矩全都必须互相平行。我们不得不讨论的第一个问题就是这个为什么。

量子力学发展起来之后不久，人们就注意到存在一个很强的表观力——既不是一种磁力，也不是任何其他种类的真实力，而只是一种表观力——试图把相邻电子的自旋互相反向整齐排列。这些力与化学键力密切相关。在量子力学中有一个原理——称为不相容原理——两个电子不能处于完全相同的状态，即它们的位置和自旋取向不能完全相同。例如，若它们

位于相同的地点，则唯一可能的就是它们的自旋相反。因此，如果两原子之间有一个空间区域，电子乐于聚集在那里（像在化学键中那样），而我们也想把另一个电子放在已经呆在那里的一个电子的上面，则唯一办法就是将这第二个电子的自旋指向与第一个电子的自旋指向相反。要使它们的自旋平行是违反规律的，除非这两个电子间互相离得很远。这样就产生了一个效应，即一对互相靠近、自旋平行的电子比一对自旋相反的电子具有大得多的能量。净效应好像有一个企图把自旋翻转过来的力，有时把这种使自旋翻转的力称为交换力，但那样只能使它更加神秘——并不是一个很好的名称。只是由于不相容原理才使得电子具有一种促使它们自旋相反的倾向。事实上，这就是关于几乎一切物质都缺乏磁性的解释！原子外部自由电子的自旋具有在相反方向达到平衡的强大趋势。问题是来解释为什么像铁那样的材料其性质恰恰与我们所预期的相反。

对想象的排列效应我们已在能量公式中加上一个适当的项而加以概括了，即假定如果邻近的电子磁体具有平均磁化强度  $M$ ，则电子的磁矩就具有同邻近原子的平均磁化强度处于相同方向的强大趋势。这样，就可以将两种可能的自旋取向写成\*：

$$\begin{aligned} \text{自旋“向上”的能量} &= +\mu\left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2}\right), \\ \text{自旋“向下”的能量} &= -\mu\left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2}\right). \end{aligned} \quad (37.1)$$

当弄清楚量子力学可能会提供一个巨大的自旋取向力时——即使其符号显然错误——人们曾认为铁磁性也许都起源于同一种力。由于铁的复杂性以及牵涉到大量电子，所以这互作用能的符号计算结果相反。自从这一主意被想出来之后——约在 1927 年，当量子力学开始被理解的时候——许多人就曾做出各种估计和半定量计算，试图得到一个关于  $\lambda$  的理论预言。关于铁里两电子自旋间能量的最新计算——假定该相互作用是相邻原子里两个电子间的一种直接相互作用——仍然会给出错误的符号。目前对此的理解依旧假定，情况的复杂性不知道是什么原因造成的，并希望下一个根据更复杂情况而进行计算的人能获得正确答案！

目前人们相信，在内壳层上一个造成磁性的电子向上自旋，力图使在外层飞绕的传导电子具有反向自旋。人们也许期待此事会发生，因为那些传导电子已进入与“磁性”电子相同的区域。由于这些传导电子到处运动，它们可以带着其自旋已经颠倒的偏见来到另一个原子附近。这就是说，一个“磁性”电子企图强迫一个传导电子与之反向，此后这传导电子又会促使次一个“磁性”电子与它反向。这双重相互作用就等效于企图使那两个“磁性”电子平行排列的一种相互作用。换句话说，造成两自旋平行的趋势是由于一种媒介物作用的结果，这媒介物在某种程度上有与两者都相反的倾向。这个机制并不要求传导电子完全“颠倒”过来。它们只可以稍微有些自旋向下的偏向，刚刚足够促使那些“磁性”电子指向另一方向。那些曾经计算过这类事情的人们目前认为这是导致铁磁性的主要原因。但我们必须强调，直到今天还没有人只凭知道该材料在周期表中的数目 26 就能够算出  $\lambda$  的大小来。总之，我们对它还未充分了解。

---

\* 为了同上一章的工作一致，我们用  $H = B - M / (\epsilon_0 c^2)$ ，而不是用  $B$  来写出这些方程。你也许喜欢把它写成  $U = \pm \mu B_s = \pm \mu (B + \lambda' M / \epsilon_0 c^2)$ ，其中  $\lambda' = \lambda - 1$ 。但那是同一件事。

现在让我们继续来谈谈这个理论，待以后再回来讨论某一项涉及我们对这一问题的提法上的错误。如果某个电子的磁矩“向上”，则能量既来自外加磁场，也来自使自旋成为平行的那种倾向这两方面。由于当自旋互相平行时能量较低，所以这效应有时被认为是起因于一种“有效内场”。但要记住，这并非由真实的磁力引起的，而是一种更为复杂的相互作用。不管怎样，我们把式(37.1)作为关于一个“磁性”电子的两个自旋态的能量公式。在温度  $T$  时，这两个态的相对概率正比于  $e^{-\frac{\text{能量}}{kT}}$ ，我们可把它写成  $e^{\pm x}$ ，其中  $x = \mu [H + \lambda M / (\epsilon_0 c^2)] / (kT)$ 。这样，若我们计算磁矩的平均值，则会(如同上一章中那样)求得

$$M = N\mu \tanh x. \quad (37.2)$$

现在，我们想要计算材料的内能。我们注意到一个电子的能量恰好与磁矩成正比，因而平均能量的计算就与平均磁矩的计算相同——只要在式(37.2)中  $\mu$  的地方，我们应该写成  $-\mu B$  也即  $-\mu [H + \lambda M / (\epsilon_0 c^2)]$ 。于是平均能量为

$$\langle U \rangle_{\text{平均}} = -N\mu \left( H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2} \right) \tanh x.$$

可是这并不是很正确的。由于  $\lambda M / (\epsilon_0 c^2)$  这一项代表所有可能的原子对之间的互作用，所以必须记住，每一对只能计数一次(当我们考虑一个电子在其余电子的场中的能量、而后又考虑第二个电子在其余电子的场中的能量时，我们就已将第一次能量中的一部分多算了一次)。因此，我们就必须将相互作用的项除以 2，于是有关能量的公式结果为

$$\langle U \rangle_{\text{平均}} = -N\mu \left( H + \frac{\lambda M}{2\epsilon_0 c^2} \right) \tanh x. \quad (37.3)$$

在上一章中，我们曾经发现过一件有趣事情——低于某一温度时，对于该材料人们找到了一个即使没有外加磁化场其磁矩也并不是零的方程组的解。当我们在式(37.2)中令  $H = 0$  时，曾求得

$$\frac{M}{M_{\text{饱和}}} = \tanh \left( \frac{T_c}{T} \frac{M}{M_{\text{饱和}}} \right), \quad (37.4)$$

式中  $M_{\text{饱和}} = N\mu$ ，而  $T_c = \mu\lambda M_{\text{饱和}} / (k\epsilon_0 c^2)$ 。当(用图解法或其他方法)解这一方程时，我们发现，比率  $M/M_{\text{饱和}}$  作为  $T/T_c$  的函数是一条像图 37-1 中标明为“量子理论”的曲线。而那条标明为“钴、镍”的虚曲线则表示这些元素晶体的实验结果。理论和实验符合得相当好。在这图上也显示出经典理论的结果，其计算是在假定原子磁体在空间中可以具有一切可能的取向下进行的。你可以看出，这个假定提供了一个甚至不

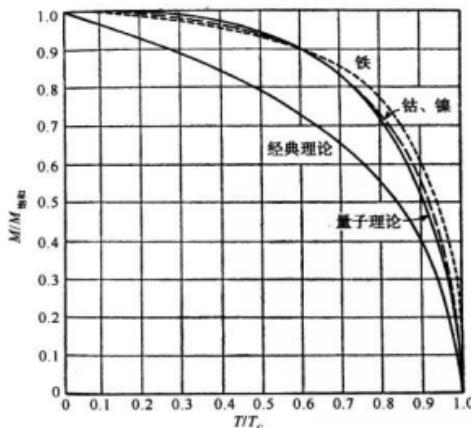


图 37-1 铁磁性晶体的自发磁化强度( $H = 0$ )作为温度的函数[摘自 Encyclopaedia Britannica]

会与实验事实接近的预言。

即使是量子理论，在高温和低温两区域中，也都与所观测到的行为有所偏离。发生偏离的原因是，在该理论中我们曾经做出过一个相当草率的近似：即假定一个原子的能量取决于它的附近原子的平均磁化强度。换句话说，对于在一给定原子附近的每个“向上”磁矩，就将存在由于那种量子力学排列效应而引起的能量贡献。但究竟有多少个磁矩指“向上”呢？就平均来说，这是用磁化强度  $M$  来度量的——不过只是在平均的意义上而言的。某处的一个特定原子也许会发现它的所有邻居都是“向上”的。这样，它的能量便会大于平均值。另一个原子可能发现其邻居有些“向上”，而有些“向下”，或许平均为零，因而就该没有来自这一项的能量，如此等等。我们所应当做的是，采用某种较复杂的平均法，因为在不同位置上的原子会有不同的环境，因而对于不同原子就有不同数目的向上和向下的邻居。不仅仅考虑一个受到平均影响的原子，而是应该考虑每一个处于实际情况下的原子，算出它的能量，并求出平均能量。但我们如何来找出在其附近的原子中究竟有多少个“向上”和多少个“向下”呢？当然，这恰恰就是我们企图要算出的东西——“向上”的和“向下”的数目——因而就有一个十分复杂的相互联系的关联问题，即是一个从未得到解决的问题。这是一个错综复杂而又令人振奋的问题，已存在了许多年，而某些鼎鼎大名的物理学界人士在这方面也曾写过一些论文，但即使是他们也仍未能完全解决该问题。

结果证明，在低温时，当几乎全部原子磁矩都指“向上”而只有少数几个指“向下”时，问题易于解决；而在比居里温度  $T_c$  高得多的高温、且它们几乎全都混乱时，问题又容易解决。往往还不难算出在某种简单而又理想的情况下微小偏差，因而对于为什么会在低温时与该简单理论有所偏离已有相当好的理解。在物理上也已理解到基于统计原因磁化强度应该在高温时有所偏离。但接近居里点的准确行为就从未被完全算出来过。如果你希望有一个从未被解决的问题的话，则那就是一个有朝一日会计算出来的有重要意义的问题。

## § 37-2 热力学性质

在上一章中，我们已经为计算铁磁性材料的热力学性质打下了必要的基础。自然，这些性质与晶体内能有关，而晶体的内能包括各种自旋的互作用、由式(37.3)给出。对于比居里点为低的自发磁化能量，可以令式(37.3)中的  $H = 0$ ，因而——注意到  $\tanh x = M/M_{\text{饱和}}$  ——可求得正比于  $M^2$  的平均能量：

$$\langle U \rangle_{\text{平均}} = -\frac{N\mu\lambda M^2}{2\epsilon_0 c^2 M_{\text{饱和}}} \quad (37.5)$$

如果现在把由磁性引起的能量作为温度函数而作图，我们便会得到一条图 37-1 中那条曲线的平方取负值后的曲线，如图 37-2(a)所示。要是此时测量这种材料的比热，我们便会得到一条如图 37-2(b)所示的曲线，它是图 37-2(a)所示曲线的微商。它随温度增加而缓慢地上升，但在  $T = T_c$  时就突然降低至零。这一急剧下降是由于磁化能量曲线的斜率刚好在居里点上出现巨大改变引起的。因此，完全不需要任何磁性测量，根据测量这一热力学性质，我们就可以发现在铁或镍中将发生的某些事情。然而，实验和经过了改进的理论(包括涨落)却都显示这条简单的曲线是错误的，而真实的情况实际上更加复杂。该曲线在那尖峰处升得更高，而下降至零时则有点缓慢。即使温度已高至足以在平均上使自旋处于混乱状态，

但是仍然会有局部区域存在某些磁化量，而在这些区域中自旋具有小的额外相互作用能——这只有在温度进一步升高而情况变得越来越混乱时才会缓慢地消失。因此，实际的曲线看来就像图37-2(c)那样。今天理论物理学的挑战之一就是要找出在居里转变点附近关于比热特性的准确的理论描述——一个还未得到解答的引人入胜的问题。自然，这个问题与同一区域内磁化曲线的形状会有十分密切的关系。

现在要来描述某些除热力学以外的实验，这些实验会证明，我们对磁性的解释有些是正确的。当材料在低温下被磁化至饱和程度时， $M$ 很接近于 $M_{\text{饱和}}$ ——几乎所有自旋以及它们的磁矩都是平行的。这可以通过下述实验加以核实。假设将一条形磁铁用一根细丝悬挂起来，然后对它包围上一个线圈，使得无需接触磁铁或对其施加任何转矩就能使磁场倒转过来。这是一个十分难做的实验，因为磁力如此巨大以致任何不平衡、任何倾斜或在铁里的任何不完整都会产生一些偶然的转矩。然而，该实验已在这种偶然转矩被减至最低程度的小心谨慎条件下完成了。利用包围在磁铁上的那个线圈的磁场，我们一下子就将所有的原子磁体全都翻转过来了。当我们这样做时，也将所有自旋的角动量都由“向上”变成了“向下”（见图27-3）。如果在这全部自旋都翻转过来时角动量守恒，则铁条的其余部分就必然在角动量方面有相反的改变，整块磁体

将开始旋转。果然，当我们做这一实验时，就发现磁铁的微小转动。可以测出给予整条磁铁

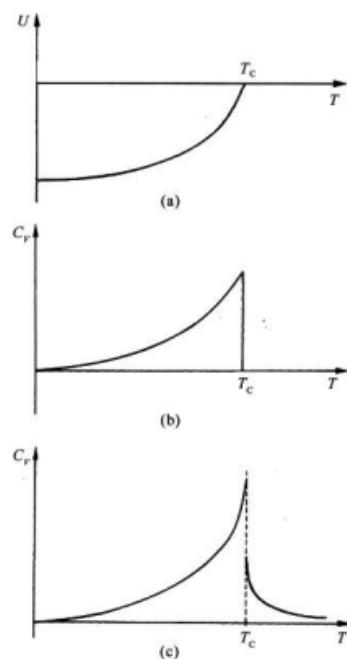


图37-2 一块铁磁性晶体的单位体积能量和比热

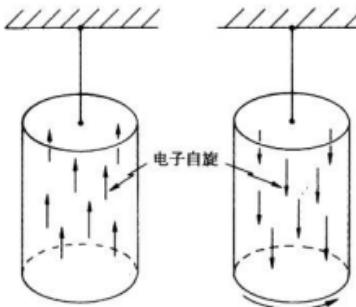


图37-3 当铁条中的磁化方向倒转过来时，铁条会得到某一角动量

的总角动量，而这仅是 $N$ 乘以 $\hbar$ ，后者为每个自旋角动量的变化。由这样量得的角动量与磁矩的比率同我们的计算值相差约在10%以内。实际上，我们的计算曾假定原子磁体纯粹起因于电子自旋，但在大多数材料中除了自旋之外，还有某种轨道运动。由于这种轨道运动不是完全脱离晶格的，因而对于磁性的贡献就不会超出百分之几很多。事实上，通过取 $M_{\text{饱和}} = N\mu$ 及利用铁的密度为7.9和自旋电子的磁矩 $\mu$ ，人们所得到的饱和磁场约为20 000 Gs。但根据实验，它实际上是在21 500 Gs左右。这是误差的典型值——5%~10%，由于忽略了包含在所做的分析中的轨道磁矩的贡献造成的。于是，上述回转磁

测量中的微小偏差就完全理解了。

### § 37-3 磁滞回线

从上面的理论分析我们就已断定，在某一定温度之下铁磁性材料应当自发地磁化，以致所有磁性都指向同一方向。可是我们知道，这对于一块普通的、尚未经磁化的铁来说是不正确的。为什么并不是所有的铁都被磁化了呢？我们可以借助于图 37-4 来解释。假定铁全部是一大块如图 37-4(a)所示形状的单晶，并都已在—个方向上自发地磁化了，那么就有相当强的外部磁场，即具有大量能量。我们能够减少这种场的能量，只要布置得使铁块一边被“向上”磁化，而另一边则被“向下”磁化，如图 37-4(b)所示。当然，这时铁外的场就会伸展至较小体积，因而使那里有较少能量。

啊，等一等！在两个区域的边界层内，自旋向上的电子紧靠着自旋向下的电子。但铁磁性只在这样的材料中才会表现出来，即其中电子自旋若互相平行而非互相反向，则能量会削减。因此，我们在沿图 37-4(b)的那条虚线上就已加进了一些额外能量，这种能量有时称为壁能。一个仅有单一磁化方向的区域叫做磁畴。在两磁畴间的界面——“壁”——处，在对边上的原子按不同方向旋转着，因而具有单位面积的壁能。我们已把它描写成好像是有两个相邻原子，以恰恰相反的方向自旋，但事实证明，大自然会把事情调整得使转变较为平缓。然而这里我们无需为这样的细节操心。

现在的问题是：在什么时候造成一个壁较好或较差？答案是，这取决于那些磁畴的大小。假设把一铁块按比例增大，以致整个事物增大一倍，则在体外充满给定磁场强度的空间就会是八倍大，从而正比于体积的磁场能量也会是八倍大。可是在提供壁能的两磁畴间的界面面积，却只有四倍大。因此，如果铁块足够大，则把它分裂成多个磁畴将是合算的。这就是为什么只有那些十分微小的晶体才能拥有单个磁畴的缘故。任何大的——尺度大于百分之一毫米的——物体将至少有一个磁畴壁；而任何普通“厘米大小”的物体则将分裂成如图所示的许许多多个磁畴。分裂成磁畴的这种过程将继续下去，一直到再插进一个附加壁所需的能量与晶体外面磁场降低的能量同样大时为止。

实际上大自然还发现了另一种降低能量的途径。完全不需要有磁场跑出外面，只要有一小块三角形区域被斜着磁化就行，如图 37-4(d)所示\*。因此按图 37-4(d)的那种排列，

\* 你可能会觉得奇怪，那些或者“向上”或者“向下”的自旋怎么又能够“斜着”了呢！这问题提得好，但我们此刻不需去担心它。我们将采取经典观点，认为原子磁体都是一些经典的磁偶极子，可以在斜着方向受到磁化。要求对量子力学相当熟悉，才能理解物体如何能够“上与下”以及“左与右”同时全部被量子化。

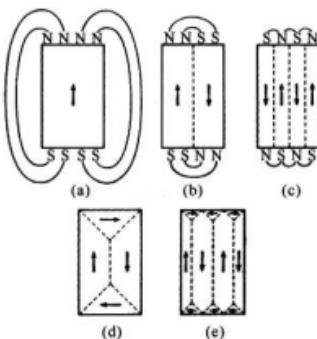


图 37-4 铁的一块单晶中磁畴的形成  
[转载自 Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*, 2nd ed., 1956]

我们知道体外不会存在磁场，只不过增加了一点点畴壁而已。

然而，那又会引起一种新问题。事实证明，当铁的单晶体被磁化时，在磁化方向改变了长度。因而一个“理想”立方体当其磁化强度比如是“向上”时，就不再是一完美的立方体了。其“竖向”尺寸将不同于“水平”尺寸。这一种效应叫做磁致伸缩。由于这种几何形态上的变化，因此图37-4(d)中的小三角块，比如说，不再与那些适用的空间“相配”了——该晶体在一个方向已变得太长，而在另一个方向则太短了。当然，实际上还是相配的，只不过是硬挤进去罢了，而这就牵涉到某些机械应力。因此，这种排列也引进了一种附加能量。正是所有这些不同能量的互相平衡，才决定在一块未经磁化的铁中磁畴最后如何把它们自己排列成那种复杂的形式。

现在，当加上一个外加磁场时会发生什么情况呢？为了简单起见，试考虑磁畴如图37-4(d)所示的晶体。如果我们加上一个方向向上的外磁场，则该晶体将以什么方式进行磁化呢？首先，中间的畴壁可以向侧向（向右）移动而减少能量。之所以这样移动，其目的在于使“向上”区域变成大于“向下”区域。有更多的基本磁体与场整齐排列，而这就提供了一个较低的能量。因此，一块铁在弱场中——即在磁化过程中的最初阶段——那些畴壁会开始移动并侵蚀与场反向的磁化区域。当场继续增强时，整块晶体便逐渐转变成一个单独大畴，那是外场帮助维持整齐地排列成的。在强场中晶体“喜欢”全都排列成一个方向，只是因为在外磁场中它的能量会被降低——这时有关的就不再仅仅是晶体本身的外场。

如果几何形态不那么简单又会怎么样呢？若晶体的轴与其自发磁化处于同一方向，但我们所加磁场却在其他某个方向——比如说在45°上——那又会怎样呢？我们也许认为，各磁畴会改造自己使得其磁化强度与外场平行，然后和以前一样，它们就能够全部生长成一个畴了。但这对于铁来说是不容易办到的，因为磁化晶体所需的能量依赖于相对于晶轴的磁化方向。要把铁在平行于其晶轴的方向上磁化是相对容易的，但要在其他某个方向——比如相对于其中一轴成45°角的方向——把它磁化就需要较多能量。因此，如果我们就在这样一个方向加一磁场，则首先发生的是，那些指向接近于外加磁场方向的从优方向之一的磁畴将会长大，直到磁化全都沿着这些方向中的一个为止。因此，如果加上更强大的场，则磁化强度就逐渐被扭转至与场平行的方向，如图37-5所粗略表示的那样。

图37-6画出了铁单晶磁化曲线的一些观测结果。为了便于理解它们，我们首先必须对描述晶体中有关方向的符号做一些解释。一块晶体可以用多种不同方式把它切开，以便产生原子水平的表面。任何曾驱车经过果园或葡萄园的人们都会知道这么一件事——对之观望令人神往。如果你朝一个方向望去，会见到一行行的树——若朝另一方向看，又会见到另外一行行的树，如此等等。同样地，一块晶体也有一些确定的平面族，其中每个平面都包含了许许多原子，而这些平面都具有这么一个重要特点（为较易于理解起见只考虑立方晶体），即如果观察这些面与那三条坐标轴相交于什么地方——则我们发现这些交点与原点间距离

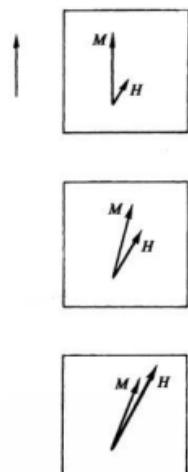


图37-5 一个与晶轴成一角度的磁化场  $H$  将逐渐改变磁化强度的方向，而不会改变其大小

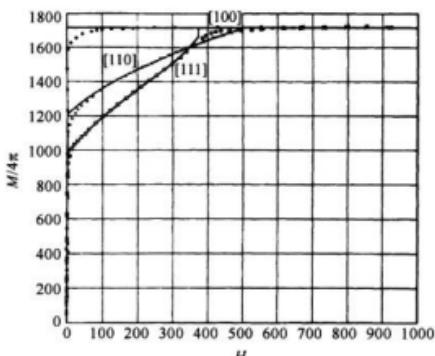


图 37-6 对  $H$  的不同方向(相对于晶轴而言),与  $H$  平行的  $M$  分量[转载自 Bitter F. *Introduction to Ferromagnetism*, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1937]

的倒数会形成一些简单的整数比。这三个整数就被取作为该组平面的定义。例如图 37-7(a)中我们把一个平行于  $yz$  面的平面描绘出来了,这叫作[100]晶面,它与  $y$  轴和  $z$  轴的交点的倒数都是零。对于(立方晶体中的)这种面的垂直方向也给予相同一组数目。在立方晶体中要理解这个意思是容易的,因为此时[100]这些指数意味着一个矢量,它在  $x$  方向具有单位分量,而在  $y$  和  $z$  方向则都没有任何分量。[110]这一方向是同  $x$  轴和  $y$  轴均成  $45^\circ$  角的那个方向,如图 37-7(b)所示;而[111]的方向则是沿立方体对角线的方向,如图 37-7(c)所示。

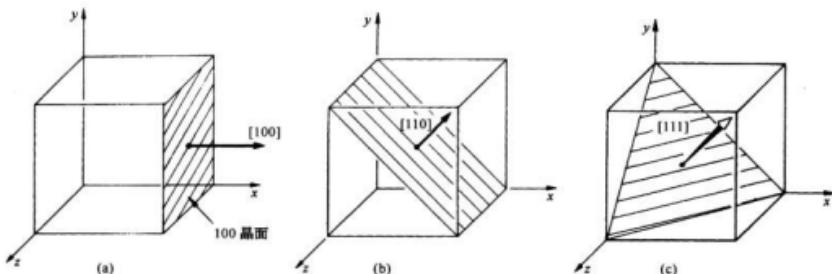


图 37-7 标明各晶面的方法

现在回到图 37-6,我们看到了铁的单晶在各个方向上的磁化曲线。首先应当注意,对于十分微小的场——弱至在标度上极难见到它——磁化强度非常迅速地达到了一个十分大的值,如果这个场处在[100]方向——即是沿那些敏锐而容易磁化的方向之一——则该曲线会上升至一个高值,稍微弯曲一点,然后就饱和了。所发生的情况是,那些已经在那里的磁畴非常易于移动。只要有一小场,就引起畴壁移动而吃掉所有那些“方向错误”的磁畴。单晶铁与普通的多晶铁相比,其导磁本领要大得多。一块理想晶体非常易于磁化。但为什么它的磁化曲线竟被弯曲了呢?为什么它不会立刻就达到饱和呢?我们不十分肯定。你或许有一天会学习到这些东西。但我们的确懂得,在高场时该曲线很平坦。当整块都已是一个单独的磁畴时,为什么附加磁场就不能造成任何更多的磁化——它已经处在  $M_{\text{饱和}}$  的状态,其中所有电子都已经排列整齐了。

现在,若试图在[110]方向上——那是与晶轴成  $45^\circ$  角的——做同样的事情,那会发生什么呢?我们试开动一个小小的场,而当那些磁畴长大时磁化就跳跃上去。然后,当把场再增大一点时,我们便发现需要有一个相当大的场才能达到饱和,因为此刻磁化已偏离了那个“容易”的

方向。如果这一解释正确，则 $[110]$ 曲线外推回至纵轴上的交点应为饱和值的 $1/\sqrt{2}$ 。事实上，结果证明这的确非常非常接近于 $1/\sqrt{2}$ 。同理，在 $[111]$ 方向上——那是沿立方体的对角线——我们发现，正如期待的那样，曲线会外推回至接近饱和值的 $1/\sqrt{3}$ 。

图37-8显示有关其他两种材料（镍和钴）的对应情况。镍与铁不同。在镍中，事实证明 $[111]$ 方向才是易磁化方向。镍具有六角晶形，而人们对于这一种情况就曾拙劣地修补了一套名称。他们希望取六角柱的底面上的三个坐标轴和另一个垂直于底面的坐标轴，因此一共用了四个指数。 $[0001]$ 的方向指沿六角轴的方向，而 $[1010]$ 的方向则是垂直于这一条轴的。我们看到不同金属的晶体其行为用不同的方法来表示。

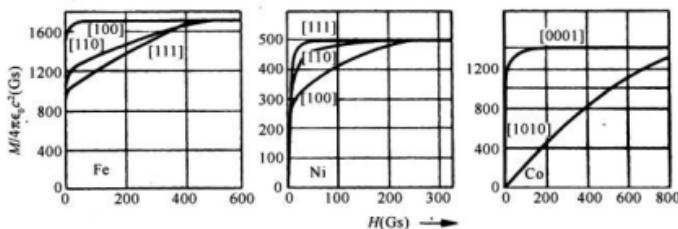


图37-8 铁、镍和钴单晶的磁化曲线[转载自 Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*, 2nd ed., 1956]

现在我们应该讨论多晶材料，诸如一块通常铁。在这种材料中有许许多多小晶体，它们的晶轴指向各个方向。这些是与磁畴不同的。应该记住，几个磁畴可能属于同一单晶，但在一块铁中就有许多其取向不同的不同的晶体，如图37-9所示。在这些晶体的每一个中，一般也会有几个磁畴。当对一块多晶材料加上一个小磁场时，所发生的情况是：畴壁开始移动，而那些具有易磁化的有利方向的畴会长得较大。这一种成长过程是可逆的，只要场保持很小——若我们把场除去，磁化强度就会回到零。磁化曲线的这一部分在图37-10中标明为 $a$ 。

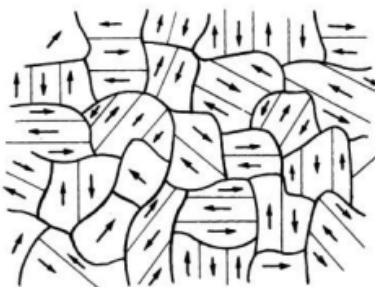


图37-9 未被磁化的铁磁材料的微观结构。每一晶粒具有一个易磁化方向，并分裂成一些平行于这一方向的自发磁化的磁畴

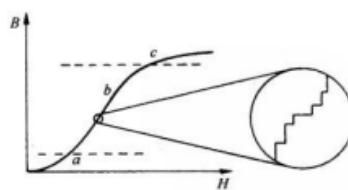


图37-10 多晶铁的磁化曲线

对于较大的场——在所示的磁化曲线的**b**区中——情况复杂得多。在材料的每个小晶体中，会有应变和位错存在，同时也会有杂质、尘埃和不完整性。而除了最小的场之外的一切场，当畴壁移动时就会被这些东西所阻挡住。在畴壁与位错之间、与晶粒间界之间或与杂质原子之间，都会有一种相互作用能。因而当畴壁到达其中之一时，它就受到阻挡。它在某个磁场时被阻塞在那里。但若此时将场增大一些，则畴壁会突然迅速地移动过去。因此畴壁的运动并不像理想晶体中那样顺利——它不时被拖住，然后又做跳跃式的运动。要是我们在微观范围内来注视这一磁化过程，则会见到像图37-10中那个插入圆圈内的某些情况。

现在重要的事情在于，这些在磁化过程中的跳动能引起能量损失。首先，当磁畴边界最后滑过一个障碍物时，它会很快地移到次一个障碍物上去，因为场已超过对无障碍运动所需的了。迅速运动意味着有迅速变化的磁场，这会在晶体中产生涡电流。这些电流在加热金属的过程中丧失了能量。第二种效应则是，当磁畴突然变化时，晶体的一部分由于磁致伸缩而改变了它的大小。畴壁的每一突然移动都会产生一个带走能量的小声波。由于这些效应，磁化曲线的第二部分就是不可逆的，并有能量损失。这便是磁滞效应的来源，因为要把边界壁向前移动——迅速地移动——然后又向后移动——又迅速地移动——会产生不同的结果。它像一种“颤簸”的摩擦力，因而带走了能量。

最后，对于足够高的场，当我们已把所有畴壁都移动并将每一晶体都在其最佳的方向上磁化了时，仍然会有某些小晶体的易磁化方向不在我们所加的外磁场方向上。这时要将那些磁矩转动就需要很强的额外磁场。因此对于强场来说，磁化曲线会缓慢而平稳地增加——即在图上标明为**c**的区域。磁化强度并不会急剧达到它的饱和值，因为在该曲线的最后部分原子磁体正在一个强场中进行转动。因此，我们就见到为什么通常的多晶材料的磁化曲线，如图37-10中所示的那样，会在开头升高一点点并且是可逆的，然后就不可逆地升高，最后才再慢慢地弯过去。当然，在这三个区域之间并没有明显的转折点——它们会平滑地互相融合。

不难证明那磁化曲线中部的磁化过程是跳跃式的——畴壁在移动时跳跃和突然停止。

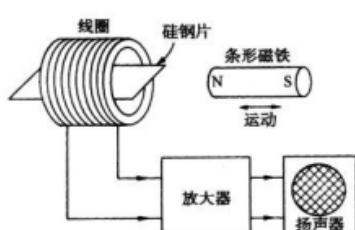


图37-11 钢片里磁化的突然变化在扬声器中发出嗒嗒响声

你只需要将一个——绕上了许多千匝的——线圈接至放大器及扬声器上，如图37-11所示。如果你把几张硅钢片（如在变压器中所用的那一种）放置在线圈中心并将一条形磁铁慢慢地移近该叠硅钢片，那么磁化的突然改变就会在线圈中产生一些脉冲电动势，它会在扬声器中产生听得到的清楚的嗒嗒声。当你把磁铁移得更靠近铁片时，你将听到一大串的嗒嗒声，有点像把一罐沙子倒转时沙粒竞相落下来的那种嘈杂声。当场增强时，畴壁就在跳跃、突然停止和摇动。这一现象叫作巴克豪森效应。

当你把磁铁再移近铁片时，有一段时间这噪声变得越来越响亮，但之后当磁铁十分靠近铁片时噪声又相对小了。为什么呢？因为几乎所有畴壁都已被移至尽可能远了。所以任何更大的场都只是在转动每个磁畴中的磁化强度，那是一种平稳的过程。

如果你现在将磁铁移开，以便使它沿磁滞回线的那条下降支路返回来，那么各磁畴便全都企图再回到低能量上去，而你就会听到另一大串反向跳跃的声音。你也可注意到，若把磁

铁带到某一指定地点而在那里稍微来回移动，便将只有相对少的噪声，再又像是把一罐沙倾倒——但一旦那些沙粒已经站稳了位置，罐的细小运动便将不会对它造成扰动。在铁中磁场小的变化不足以移动任何边界越过任何“驼峰”（即克服阻挡）。

### § 37-4 铁磁材料

现在我们很想来谈谈在技术领域中用到的各种磁性材料，并讨论为不同目的而设计磁性材料时所涉及的某些问题。首先，“铁的磁性”这个人们经常听到的名词是一种误称——并没有这么回事。“铁”不是一种完全确定的材料——铁的性质严格地取决于所含杂质的份量和该块铁是怎样制成的。你可以体会到，磁性将依赖于畴壁移动的难易程度，以及那是一种整体的性质而不是个别原子的特性。所以凡实用的铁磁性实际上并非一个铁原子的一种特性——它是处于某一形态上的固体铁的性质。例如，铁可取两种不同的结晶形式。普通形式具有体心立方晶格，但它也可有面心立方晶格，不过后者只在超过 $1100^{\circ}\text{C}$ 的温度时才会稳定。当然，在该温度时体心立方的结构早已越过其居里点了。可是，通过把铬和镍加入铁中形成合金（一种可能的混合物，其中含有18%的铬和8%的镍），我们能够获得所谓的不锈钢，这虽然主要含的是铁，但即使在低温时也仍保留其面心晶格。由于它的晶体结构不同，它便具有完全不同的磁性。大多数品种的不锈钢并不带有可观程度的磁性，尽管有某些品种稍微带点磁性——这取决于该合金的成分。即使这样一种合金有磁性，它仍不是像普通铁那样的铁磁性——尽管该合金所含的成分大多数是铁。

现在我们很想来描述几种为某些特定磁性而研制起来的特种材料。首先，如果想制成一块永磁体，想要具有宽磁滞回线的那种材料，使得当撤去电流而把起磁场降低至零时，磁化强度仍会保持强大。对于这样的材料，磁畴边界应该尽可能“冻结”在原地。这种材料中的一种就是“铝镍钴V”（含有51%铁，8%铝，14%镍，24%钴，3%铜）。（这种合金相当复杂的成分标志着要制成优质磁铁所必须经历过的详尽的努力。要把五种东西混合起来，并一直试验到求得最理想的物质，需要多少耐性啊！）当铝镍钴凝固时，就有一种“第二相”沉淀出来，造成许多微小晶粒和很高的内应变。在这种材料中，畴壁边界根本难于移动。除了应具备准确的成分外，铝镍钴是这样机械“加工”的，即使晶体具有长晶粒结构，而且晶粒沿着将要磁化的方向。这样，磁化就在这些方向上被排列起来的一种自然趋势，而凭这种各向异性效应磁化就会被保持在那里了。而且，材料在制造时甚至被置在外加磁场中冷却，以致晶粒将按正确的结晶方向生长。铝镍钴V的磁滞回线如图37-12所示。你看它比上一章图36-8中关于软铁的磁滞回线要宽约700倍。

现在让我们转到另一种不同的材料上来。为了制造变压器和电动机，需要一种“软”磁材料——它的磁性很容易改变，以致由一个十分微小的外加磁场就造成大量的磁化。为做到这点，

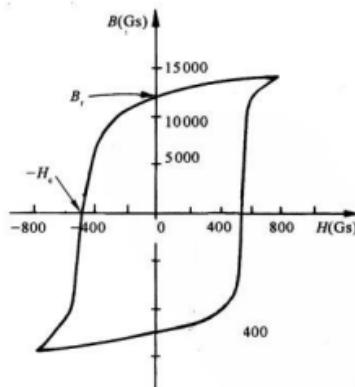


图37-12 铝镍钴V的磁滞回线

我们需要一些纯净的而又退火退得很好的材料，其中将含有很少的位错和杂质，使得畴壁能够容易移动。要是我们能制成小的各向异性，那也会是很好的。这时，即使材料中的晶粒有相对于场处在不恰当的角度，但它也仍然容易被磁化。原来我们已经说过，铁比较喜欢沿[100]方向磁化，而镍则倾向于[111]方向，因此如果我们把铁和镍以各种不同的比例混合，也许有希望用刚好恰当的比例找到一种不会偏爱任何方向的合金——[100]和[111]两个方向可能彼此等价。事实证明，这发生于混合物中含有70%镍和30%铁的情况。此外——也许由于幸运，或可能由于在各向异性与磁致伸缩效应之间存在某种物理关系——结果是，铁与镍的磁致伸缩具有相反的符号。而在这两种金属的合金中，当含有约80%的镍时，这一性质就会通过零值。因此，镍含量在70%~80%之间时，我们将获得一种非常“软”的磁性材料——极易于磁化的合金，它们被叫做坡莫合金。这种坡莫合金用于优质(在低信号水平的)变压器中，但对于永磁则毫无用处。坡莫合金一定要很小心地制造和使用。一块坡莫合金若所受的应力超过弹性限度，性质将激烈发生变化，即不能把它弯曲。如果把它弯曲，其磁导率将由于机械形变所产生的位错、滑移带等等而降低，畴壁不再容易移动了。然而，这高磁导率可以通过在高温中退火而恢复。

用某些数字来表征各种不同磁性材料往往很方便。有两个有用的数字，那就是磁滞回线与B轴和H轴的截距，如图37-12所标明出来的那样。这些截距分别称为剩余磁场 $B_r$ 和矫顽力 $H_c$ ，在表37-1中我们把几种磁性材料的这些数字列举了出来。

表37-1 某些铁磁材料的性质

材料名称	剩余磁场 $B_r$ (Gs)	矫顽力 $H_c$ (Gs)
超坡莫合金	(≈5 000)	0.004
硅钢(变压器)	12 000	0.05
阿姆科铁(工业用纯铁)	4 000	0.6
铝镍钴V	13 000	500

### § 37-5 特殊磁性材料

我们现在想要讨论一些更奇异的磁性材料。在周期表上有许多元素其内电子壳层尚未填满因而具有原子磁矩。例如，紧靠着铁磁性元素铁、镍、钴，你就会找到铬和锰。为什么它们不是铁磁性的呢？答案是，对于这些元素式(37.1)中的λ项具有相反的符号。例如，在铬晶格中，铬原子的自旋逐个改变方向，如图37-13(b)所示。所以铬从它本身的观点来看是“磁性”的，但在技术上却不是令人感兴趣的，因为缺乏外部磁性效应。这样，铬就是量子力学效应使自旋交替的那类材料的一个例子。像这样一种材料称为反铁磁性的。反铁磁材料中的自旋排列也与温度有关。低于某一临界温度，所有自旋都会在每隔一列上排列整齐，但当晶体被加热到高于某个温度——还是称为居里温度——时，自旋便突然变得混乱起来。在内部发生了一次突然转变。这一转变可以在比热曲线中看到，也在某些独特的“磁性”效应中表现出来。例如，这种交替自旋的存在可通过被铬晶体中散射出来的中子而加以证实。由于中子本身具有自旋(和磁矩)，所以它就具有不同的散射振幅，这取决于它的自旋是平行还是反平行于散射物质中的自旋。这样，当晶体中的自旋交替与具有无规分布时，我们会得到不同的干涉图样。

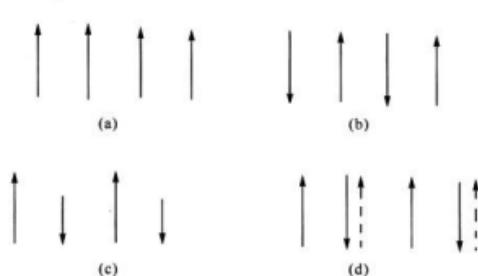


图 37-13 在各种不同材料中电子自旋的相对取向:(a)铁磁性;(b)反铁磁性;(c)铁氧体;(d)钇铁合金(虚线箭头代表包括轨道运动在内的总角动量方向)

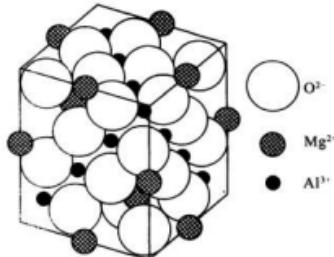


图 37-14 尖晶石 ( $MgAl_2O_4$ ) 矿物的晶体结构。 $Mg^{2+}$  离子占据正四面体位置, 每个被四个氧离子所包围; $Al^{3+}$  离子占据八面体位置, 每个被六个氧离子所包围  
[转载自 Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*, 2nd ed., 1956]

还有另一种物质,量子力学效应促使其中电子的自旋交替排列,但无论如何它还是铁磁性的——这就是说,这种晶体具有净的永久磁化强度。这一类物质的内部结构如图 37-14 所示。图上显示出尖晶石、即  $MgAl_2O_4$  的晶体结构,这如同图上所示,乃是不带磁性的。这种氧化物含有两种金属原子:镁和铝。现在,若用两种像铁和镍、或锌和锰的磁性元素来代替镁和铝——换句话说,如果放进磁性原子而不是原来的非磁性原子——一件有趣的事情就会发生。让我们称其中一种金属原子为  $a$  而另一种金属原子为  $b$ ,那么下述各种力的组合就必须加以考虑。有一种  $a\cdot b$  互作用,企图促使  $a$  原子与  $b$  原子具有相反自旋——因为量子力学总是给出相反符号(除了铁、镍和钴那些神秘的晶体以外)。然后,还有直接的  $a\cdot a$  相互作用,企图促使  $a$  与  $a$  间反向,另外还有企图促使  $b$  与  $b$  间反向的那种  $b\cdot b$  相互作用。现在,我们当然不能使每一件东西与其他每一件东西都相反—— $a$  与  $b$  反, $a$  与  $a$  反,而  $b$  又与  $b$  反。大概是由于  $a$  与  $a$  间的距离较大并有氧原子存在(尽管我们实际上还不知道其所以然),结果是  $a\cdot b$  相互作用比  $a\cdot a$  或  $b\cdot b$  的较强。因此,大自然在这种情况下所采用的解答是使所有的  $a$  都互相平行,以及所有的  $b$  也都互相平行,可是这两个系统却互相反向。该解答会给出最低能量,因为  $a\cdot b$  相互作用较强。结果变成:所有的  $a$  都是自旋向上,而所有的  $b$  则都是自旋向下——当然,或者与此相反。但如果  $a$  型原子与  $b$  型原子的磁矩不相等,则我们该得到如图 37-13(c)所示的那种情况,而在材料中就可能存在净的磁化强度。于是材料将属于铁磁性的——虽然弱了一点。这样的材料叫做铁氧体。它们不具有像铁那么高的饱和磁化强度——由于明显的原因——因而只对较弱的场才有用。但有一个十分重要的差别——它们都是绝缘体,铁氧体是铁磁绝缘体。在高频场中,它们会有十分微小的涡电流,并从而可用于诸如微波系统中。微波场能够进入像这样的绝缘材料的内部,而它们在像铁那样的导体中将被涡流逐出体外。

还有另一类最近才被发现的磁性材料——称为石榴石的正交硅酸盐族的成员。它们也是在晶格中含有两种金属原子的晶体,因而我们又有几乎可以随意地代替其中两个原子的那种情况。在许多感兴趣的化合物中,有一种是完全磁性的,它在该石榴石结构中含有钇和

铁,而它所以具有铁磁性的原因是很难理解的。这里量子力学又再使相邻的自旋反向,从而形成铁中电子自旋指向一方、而钇中电子自旋则指向相反的一个同步系统。但钇原子比较复杂,它是一种稀土元素,它的磁矩从电子的轨道运动中获得大的贡献。对于钇来说,轨道运动的贡献与自旋方面的贡献相反,并且还比较大。于是,借助不相容原理而工作的量子力学,虽然会使钇的自旋与铁的自旋反向,但由于轨道效应就仍能使钇原子的总磁矩平行于铁的原子磁矩——如图 37-13(d)所简略表示的那样。因此,该化合物就是一种正常的铁磁体。

铁磁性的另一个有趣例子存在于某些稀土元素中,它与自旋的一种更特殊的排列有关。该材料既不是自旋全都平行意义上的铁磁性,也不是每个原子的自旋相反意义上的反铁磁性。在这些晶体中,处于某一层内的所有自旋都互相平行,并躺在该层的平面之上。在邻接的一层内,所有自旋又彼此平行,但却指着稍微不同的方向。在接下来的一层又再有另一个方向,如此等等。结果是,局部的磁化强度矢量按螺旋式变化——当沿一条垂直于各层的直线通过时,逐层的磁矩在旋转。试图分析当加一磁场于这样一个螺旋体时会发生什么情况——在所有各原子磁体中所必须进行的一切扭转和旋转——是很有趣的(有些人就喜欢用这些东西的理论来自我取乐)。不仅存在“平坦”螺旋的那些情况,也还存在逐层磁矩,它们的方向会形成一个锥面,以致它既具备一个螺旋分量而又具备沿某一方向均匀的铁磁性分量!

在比我们这里所能做出的更高的水平上计算出来的物质磁性,曾经使各种类型的物理学家着迷。首先,有些实际工作者,他们喜欢寻找以更佳方式制造出各种东西来的途径——他们乐于去设计出更为优良而又更加有意义的磁性材料。像铁氧体那类东西的发现或其应用,立即使得那些喜欢看到用灵巧的新方法来做出东西的人们很高兴。除此之外,还有一些人在大自然能够用几条基本定律就产生出的极度复杂性中寻找魅力。仅从唯一一个相同的普遍概念出发,大自然便从铁的铁磁性和磁畴开始,至铬的反铁磁性,又至铁氧体和石榴石的那种磁性,以致一些稀土元素的螺旋结构,等等,等等。要在实验上去发现这些特殊物质中所发生的一切奇异事情是挺令人向往的。然后,对于那些理论物理学家来说,铁磁性代表着若干项十分有趣、但尚未得到解决、而又挺漂亮的挑战。一项挑战就是去理解为什么铁磁性真的会存在。另一项挑战则是去预言在一理想晶格中有相互作用的自旋的统计性。即使忽略任何可能不重要的复杂性,这一问题迄今仍难以充分理解。那么有趣的原因在于它竟是这么容易表述的问题:设在常规晶格中存在以如此这般的规律相互作用着的大量电子自旋,试问它们究竟会做什么呢?问题虽然简单地说明了,但多年来人们就是难以对它做出完全的分析。尽管对于温度不太靠近居里点的情况已做了相当仔细的分析,但在居里点处的突然转变的理论仍有待完成。

最后,有关自旋的原子磁体系统——在铁磁性材料、或在顺磁性材料、以及在核磁性中——的整门学科,对于物理系的高年级学生来说,也已是一种具有魅力的东西。这些自旋系统可用外加磁场加以推和拉的作用,从而人们就能够利用共振、弛豫效应、自旋回波以及其他各种效应达到许多目的。它被用作许多复杂热力学系统的原型。但在顺磁性材料中情况往往相当简单,而人们已经很高兴去做实验以及从理论上解释那些现象。

我们现在已结束了电学和磁学的学习。在第 1 章中,我们曾谈到自从早期希腊人对于琥珀和天然磁石的奇怪行为进行了观察以来已经大有进步。可是在我们一切冗长而又复杂的讨论中,却从未解释过为什么当我们摩擦一块琥珀时会在它上面获得电荷,而我们也没有解释过为什么一块天然磁石会被磁化!你可能会说:“呵!我们不过未能得到一个正确符号

罢了。”不，比这还要糟些。因为即使我们的确曾获得过正确符号，仍然会有这么一个问题：为什么在地壳里的天然磁石会被磁化呢？当然，存在地球磁场，但地球磁场又是从哪里来的呢？实际上并没有任何人知道——只能有一些良好的猜测。所以你看，我们这一套物理学竟是一套膺品——从天然磁石和琥珀现象出发，而就在对这两者都不很了解处收场，但是，我们在这一过程中也已经学到了大量十分令人振奋而又非常实用的知识！

# 第38章 弹性学

## § 38-1 胡克定律

弹性学这一学科，是与使物体产生形变的力被撤去后即能恢复其大小和形状的那些物质行为打交道的。对于所有固态物体，我们在某种程度上都发现了这种弹性特征。要是我们有时间详尽地处理这一课题，则要观察下列许多事情：材料行为、弹性的一般规律、弹性的普遍理论、决定弹性的原子机制以及最后当力大至范性流动和破裂发生时的弹性定律限度。要详细地涉及全部这些课题，所花费时间可能比我们具有的更多，因而将不得不忽略某些东西。例如，我们将不讨论范性或弹性定律的限度（当过去谈论金属中的位错时，就曾稍微接触过这些课题）。并且，也将不能讨论弹性的内在机制——所以以下述处理就将不会有如我们在以前各章中所试图达到的那种完整程度。我们的目的主要在于使你们熟悉怎样去处理诸如梁的弯曲那样的实际问题的某些方法。

当你挤压一块材料时，它将“屈服”——材料发生了形变。如果力足够小，则材料中各点的相对位移与力成正比——我们说这行为是弹性的。下面将仅仅讨论弹性行为。首先，写出弹性的基本定律，然后，将其应用于若干不同情况。

假设取一根长度为  $l$ 、宽度为  $w$  及高度为  $h$  的矩形杆，如图 38-1 所示。如果在其两端用力  $F$  来拉，此时其长度将伸长  $\Delta l$ 。我们将假定在整个过程中这长度的改变是原来长度的一个微小分数。事实上，对于诸如木材和钢等材料，若长度改变超过其原长的百分之几，则该材料便将断裂。对于大多数材料，实验证明，在伸长足够小时，力与伸长成正比：

$$F \propto \Delta l. \quad (38.1)$$

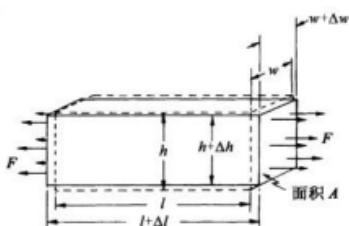
这一关系就是大家熟悉的胡克定律。

图 38-1 一根杆在受均匀张力时发生的伸长

杆的伸长  $\Delta l$  也与其长度有关，我们可以通过下述论证来尽可能弄清楚这关系。若把全同的两块材料头对头地粘在一起，作用于每块上的力相同，且每块都将伸长  $\Delta l$ 。这样，长为  $2l$  的一块的伸长即为截面与之相同但长度为  $l$  的另一块的伸长的两倍。为要得到一个更能表征该材料性质而包含较少特殊形状的数字，我们决定与伸长对原长的比率  $\Delta l/l$  打交道。这一比率与力成正比但与  $l$  无关：

$$F \propto \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.2)$$

力  $F$  也将取决于该块材料的横截面积。假设将两块材料侧面与侧面相靠，那么，对于



给定伸长  $\Delta l$ , 我们作用于每块的力就应为  $F$ , 亦即对这两块的组合作用了两倍的力。对于一给定的伸长量, 力必定与该块材料的截面积  $A$  成正比。为获得一个比例系数与物体的线度无关的定律, 我们把对于一矩形块的胡克定律写成下列形式:

$$F = YA \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.3)$$

常数  $Y$  仅代表材料的特征性质, 被称为杨氏模量(你将经常见到杨氏模量被写成  $E$ , 但我们都已把  $E$  用作为电场、能量和电动势了, 因而建议采用另一个字母)。

单位面积的力称为应力, 而单位长度的伸长——分数伸长——则称为应变。因此式(38.3)便可重新写成:

$$\frac{F}{A} = Y \times \frac{\Delta l}{l}, \quad (38.4)$$

$$\text{应力} = (\text{杨氏模量}) \times (\text{应变}).$$

胡克定律的另一个主要部分是: 当你在一个方向上拉伸一块材料时, 它将在一垂直于伸长的方向上收缩。宽度的收缩正比于原来宽度, 也正比于  $\Delta l/l$ 。这侧向收缩对于宽度和高度两方面都有相同比例, 并经常被写成

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{\Delta l}{l}, \quad (38.5)$$

其中常数  $\sigma$  表示另一种称为泊松比的材料性质。在符号上它总是正的, 而且是一个小于  $1/2$  的数目( $\sigma$ 一般应取正值, 那是“合理”的, 但为什么一定是这样, 就不十分清楚)。

$Y$  和  $\sigma$  这两常数就完全规定了一种均匀而各向同性(即非晶体)材料的弹性。在结晶材料中, 伸长和收缩在不同方向上可以不同, 因而可以有许多弹性系数。我们将暂时把讨论局限于其性质可以由  $Y$  和  $\sigma$  加以描述的那些均匀而又各向同性的材料。和往常一样存在描述事物的不同方法——有些人喜欢用不同的常数来描述材料的弹性, 但始终要用到两个, 而且它们都可以与  $\sigma$  和  $Y$  联系起来。

我们所需要的最后一个普遍原理是叠加原理。由于式(38.4)和(38.5)两定律在力和位移方面都是线性的, 所以叠加将有效。如果你有一组力并得到某个位移, 然后你增加一组新的力并得到某个另外的位移, 则合位移将是 you 从这两组力独立作用时所得到的两个位移之和。

现在, 我们有了所有的普遍原理——叠加原理和方程式(38.4)与(38.5)——就有了全部弹性学。但这好像是在说, 一旦有了牛顿定律, 就有了全部力学。或者, 给出了麦克斯韦方程组, 也就给出了全部电学。当然, 有了这些原理你便可以得到许多东西, 因为具备了你目前的数学本领你就能够走得很远。不过, 我们还将演算几个特殊的应用问题。

## § 38-2 均匀应变

作为第一个例子, 让我们来找出在均匀的流体静压强的作用下, 一个矩形块发生的情况。现在把一块东西放进压力箱的水里, 那么, 这一块东西的每一个面就都会受到一个正比于该面积向内的作用力(见图 38-2)。由于流体静压强是均匀的, 所以作用于该块东西每一面上的应力(单位面积之力)就都相同。我们将首先算出在长度上的变化。该块东西的长度变化可以想象成如图 38-3 中所简示出来的那三个独立问题中可能发生的长度变化之和。

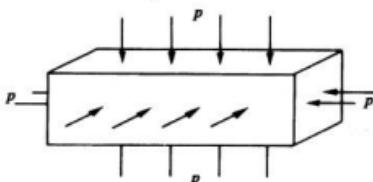


图 38-2 受到均匀的流体静压强作用的一根杆

问题 1 若在该块材料两端我们用压强  $p$  将其推压, 则压缩应变为  $p/Y$ , 而且符号是负的,

$$\frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{p}{Y}.$$

问题 2 若加压强  $p$  于该块材料的两个侧面, 则压缩应变又是  $p/Y$ , 但此刻我们所要的是纵向应变, 它可以由侧向应变乘以  $-\sigma$  而得到。侧向应变变为

$$\frac{\Delta w}{w} = -\frac{p}{Y},$$

因而

$$\frac{\Delta l_2}{l} = +\sigma \frac{p}{Y}.$$

问题 3 若在该块材料的顶上加以推压, 则压缩应变又是  $p/Y$ , 而其相应的侧向应变再次为  $-p/Y$ 。因而得到

$$\frac{\Delta l_3}{l} = +\sigma \frac{p}{Y}.$$

把这三个问题的结果合起来——也就是说, 取  $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$  ——我们便得

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma). \quad (38.6)$$

当然, 这一问题在所有三个方向上都对称, 因此,

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma). \quad (38.7)$$

在流体静压强作用下的体积变化也是有些令人感兴趣的。由于  $V = lwh$ , 所以对于小位移可写出

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h}.$$

利用式(38.6)和(38.7), 我们得

$$\frac{\Delta V}{V} = -3 \frac{p}{Y}(1 - 2\sigma). \quad (38.8)$$

人们喜欢把  $\Delta V/V$  叫做体应变, 并写为

$$p = -K \frac{\Delta V}{V}.$$

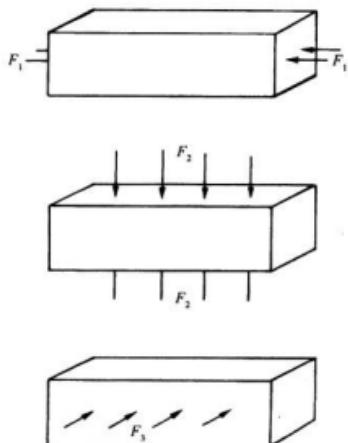


图 38-3 流体静压强是三个纵向压缩力的叠加

该体应力  $\rho$  与体应变成正比——再次得到胡克定律。系数  $K$  称为体积弹性模量，它与其他常数间的关系为

$$K = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)}. \quad (38.9)$$

由于  $K$  具有某种实用价值，许多手册常给出  $Y$  和  $K$  而不是给出  $Y$  和  $\sigma$ 。如果你想要得到  $\sigma$ ，就总可以由式(38.9)获得它。我们也可从式(38.9)看出，泊松比  $\sigma$  必然小于  $1/2$ 。假如不是这样的话，则体积弹性模量会是负值，因而材料便会在增大压强时膨胀。这使得我们能够从任一块旧材料中获取机械能量——这意味着该块材料处于不稳定平衡中。如果我们开始让它膨胀，则它就会自己继续膨胀同时释放出能量来。

现在我们要来讨论，当把“切”应变加于某个东西上时发生的情况。所谓切应变，我们指图 38-4 所示的那种畸变。作为对这一问题的准备，让我们考察受到如图 38-5 所示的力作用的一块立方形材料内的应变。可以再度把它分解成两个问题：垂直方向的推力和水平方向的拉力。设这立方体每一面的面积为  $A$ ，则对于水平长度的变化得

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{Y} \frac{F}{A} + \sigma \frac{1}{Y} \frac{F}{A} = \frac{1 + \sigma}{Y} \frac{F}{A}. \quad (38.10)$$

垂直方向高度的变化恰好就是此式的负值。

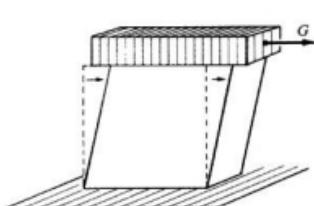


图 38-4 在均匀剪切作用下的立方体

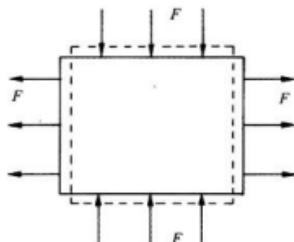


图 38-5 在顶部和底部都受到压缩力作用而在两侧受到相等的拉伸力作用的一个立方体

现在假设同样的立方体受到如图 38-6(a)所示的那些剪切力作用。注意！如果要不产生净转矩并要立方体处于平衡态中的话，则所有力必须相等（相似的力也必须在图 38-4 中出现，因为这块东西是处于平衡态。这种力是由使这块东西固定在台面上的“黏胶”提供的）。这时，该立方体被认为是处于纯剪切的状态。但必须注意，若用一个  $45^\circ$  角的面——比如说沿图中的对角线  $A$ ——来切割该立方体，则作用于这一截面上的总力垂直于这个平面并等于  $\sqrt{2}G$ 。受这个力所作用的面积为  $\sqrt{2}A$ ，因此，垂直于这个面上的张应力仅为  $G/A$ 。同理，如果我们检查一下与另一方向作成  $45^\circ$  角的平面——图中的对角线  $B$ ——便会看到有一个垂直于这个面的压缩应力  $-G/A$ 。由此可见，在一“纯剪切”中的应力相当于彼此大小相等、互相正交，并与原立方体的面成  $45^\circ$  角的那个张应力和压应力的组合。内应力和内应变与我们在图 38-6(b)所示的那种力作用下的较大块材料中将要求得的相同，但这就是我们已经解答的问题。对角线长度的改变由式(38.10)给出：

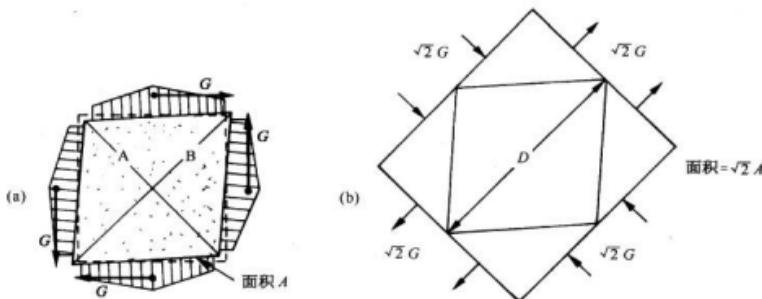


图 38-6 (a)中的两对剪切力产生了与在(b)中的压缩和拉伸力相同的应力

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1 + \sigma}{Y} \frac{G}{A} \quad (38.11)$$

(其中一条对角线缩短,另一条则伸长)。

把剪切应变用立方体受扭转的角度——图 38-7 中的  $\theta$  角——来表示往往很方便。从这个图的几何形状你便可以看出,顶边的水平位移  $\delta$  等于  $\sqrt{2}\Delta D$ , 因此

$$\theta = \frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{2}\Delta D}{l} = 2 \frac{\Delta D}{D}. \quad (38.12)$$

剪切应力  $g$  被定义为作用于一个面上的切向力除以该面面积, 即  $g = G/A$ 。应用式 (38.11) 于 (38.12) 中, 得

$$\theta = 2 \frac{1 + \sigma}{Y} g.$$

或者, 把这个式子写成“应力 = 常数乘应变”的形式, 即

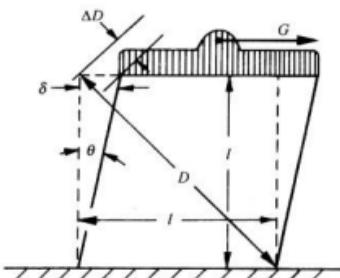
$$g = \mu\theta. \quad (38.13)$$

比例系数  $\mu$  称为剪切模量(或者有时称为刚度系数)。如果用  $Y$  和  $\sigma$  来表达, 则为

$$\mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)}. \quad (38.14)$$

顺便提一下, 这剪切模量必须是个正值——要不然你就可以从正在受到剪切作用的一块材料中获得功。根据式 (38.14),  $\sigma$  必须大于  $-1$ 。这样, 我们便知道  $\sigma$  一定要在  $-1$  与  $+\frac{1}{2}$  之间。然而, 实际上, 它却总是大于零的。

作为整个材料中应力均匀的那种典型情况的最后一个例子, 让我们考虑这样的问题, 一块材料被拉伸而同时又受到约束以致没有什么横向收缩能够发生(在技术上, 对它进行压缩而同时不避免侧向凸起来稍微容易些——但这是同样的问题)。会发生什么情况呢? 噢, 必

图 38-7 切应变  $\theta = 2\Delta D/D$

然存在使它的厚度不变的那种侧向力——一些我们此时不知道但必须计算出来的力。这与上面已经做过的问题类型相同,只是要用一点不同的代数。我们设想作用于所有三个侧向面上的力如图38-8所示,计算各种线度的改变,而选择一些横向力使得宽度和高度都保持不变。按照通常的论证,对于那三个应变得:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta l_x}{l_x} &= \frac{1}{Y} \frac{F_x}{A_x} - \frac{\sigma}{Y} \frac{F_x}{A_y} - \frac{\sigma}{Y} \frac{F_x}{A_z} \\ &= \frac{1}{Y} \left[ \frac{F_x}{A_x} - \sigma \left( \frac{F_x}{A_y} + \frac{F_x}{A_z} \right) \right],\end{aligned}\quad (38.15)$$

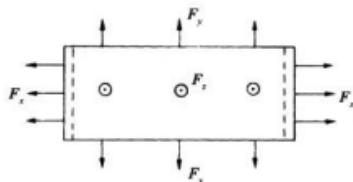


图38-8 没有侧向收缩的伸长

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{1}{Y} \left[ \frac{F_y}{A_y} - \sigma \left( \frac{F_x}{A_x} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right], \quad (38.16)$$

$$\frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{1}{Y} \left[ \frac{F_z}{A_z} - \sigma \left( \frac{F_x}{A_x} + \frac{F_y}{A_y} \right) \right]. \quad (38.17)$$

现在,由于  $\Delta l_y$  和  $\Delta l_z$  都假定为零,所以式(38.16)和(38.17)给出了把  $F_y$  和  $F_z$  与  $F_x$  相联系的两个方程式。对它们一起求解,得到

$$\frac{F_y}{A_y} = \frac{F_z}{A_z} = \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{F_x}{F_z}. \quad (38.18)$$

代入式(38.15)中,得

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{Y} \left( 1 - \frac{2\sigma^2}{1-\sigma} \right) \frac{F_x}{A_x} = \frac{1}{Y} \left( \frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma} \right) \frac{F_x}{A_x}. \quad (38.19)$$

你以后会经常看到把这个式倒转,并将  $\sigma$  的二项式分解成因式,于是它被写成

$$\frac{F}{A} = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} Y \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.20)$$

当我们把各侧都约束住时,杨氏模量得用一个复杂的  $\sigma$  函数相乘。正如你可以由式(38.19)最容易见到的,在  $Y$  前面的那个因子总大于 1。当各侧都固定时,拉伸一块东西是较难的——这也就意味着,一块东西的强度当其各侧都被固定时会比不固定时强。

### § 38-3 扭转的棒;剪切波

现在让我们把注意力转到一个较复杂的例子上来,因为这里材料的不同部分受到不同量值的应力作用。试考虑一根被扭转的棒,诸如某种机械的驱动轴或在一部精密仪器中用来作为悬丝的被扭转的石英纤维。正如你可能从扭摆实验中所知道的,作用于扭转的棒上的扭矩与角度成正比——该比例常数显然取决于棒的长度、棒的半径以及材料的性质。问题是:按怎样的方式? 我们目前能够回答这个问题,因为那不过是演算某个几何问题。

图38-9(a)表示一根长度为  $L$ 、半径为  $a$ 、其一端相对于另一端扭过一个角度  $\phi$  的柱形棒。如果要把这应变同我们已知道的东西联系起来,则可以把棒设想为由许多个柱形壳所

构成，并分别算出每个壳所发生的情况。作为开始，我们考察一个薄而短的、半径为  $r$ （小于  $a$ ）而厚度为  $\Delta r$  的柱形壳——如图 38-9(b) 所示。现在，如果考察这个柱壳上原本是一个小正方形的部分，则会看到它已被扭转成一个平行四边形。圆柱壳的每个这样的单元都处在剪切之中，而其剪切角为

$$\theta = \frac{r\phi}{L}.$$

因此，材料中的剪切应力  $g$  [根据式(38.13)] 为

$$g = \mu\theta = \mu \frac{r\phi}{L}. \quad (38.21)$$

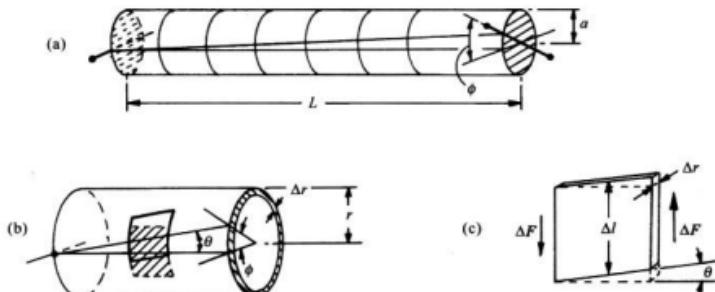


图 38-9 (a)一根扭转的柱形棒；(b)一个扭转的柱形壳；(c)壳中每一小部分都处在剪切中

剪切应力为作用于正方体端面上的力  $\Delta F$  除以其端面积  $\Delta l \Delta r$  [参见图 38-9(c)]，

$$g = \frac{\Delta F}{\Delta l \Delta r}.$$

作用于这样一个正方体端面上的力  $\Delta F$  贡献出绕柱轴的转矩  $\Delta \tau$ ：

$$\Delta \tau = r \Delta F = rg \Delta l \Delta r. \quad (38.22)$$

总转矩  $\tau$  就是绕该柱壳整圆周的这种转矩之和。所以把足够多的部分拼在一起使得所有  $\Delta l$  相加成  $2\pi r$ ，我们就得到一个空心管的总转矩为

$$rg(2\pi r)\Delta r. \quad (38.23)$$

或者，利用式(38.21)，得

$$\tau = 2\pi\mu \frac{r^3 \Delta r \phi}{L}. \quad (38.24)$$

我们得到一根空心管的转动刚度  $\tau/\phi$  是与该管半径  $r$  的立方和厚度  $\Delta r$  成正比而与其长度  $L$  成反比的。

现在可以想象一根实心棒是由一系列同心管所构成的，而每个管子都被扭转相同的角速度  $\phi$ （虽然对于每个管子来说内应变是不同的），总转矩是转动每一个柱壳所需的转矩之和，因此对于实心棒

$$\tau = 2\pi\mu \frac{\phi}{L} \int r^3 dr,$$

其中积分是从  $r = 0$  积至  $r = a$  的,  $a$  为该棒的半径。经过积分后, 得

$$\tau = \mu \frac{\pi a^4}{2L} \phi. \quad (38.25)$$

对于一根被扭转的棒, 转矩正比于角度并且与其直径的四次幂都成正比——一根两倍那么粗的棒产生 16 倍那么大的扭转刚度。

在放下扭转这一课题之前, 让我们把刚才所学到的东西应用到一个有趣的问题: 即扭转波。如果你取一根长棒并突然扭转其一端, 则一个扭转波将会沿该棒发展下去, 如图 38-10(a) 所简略表示出来的那样。这比一个稳恒扭转更令人精神振奋——让我们看看是否能算出所发生的情况。

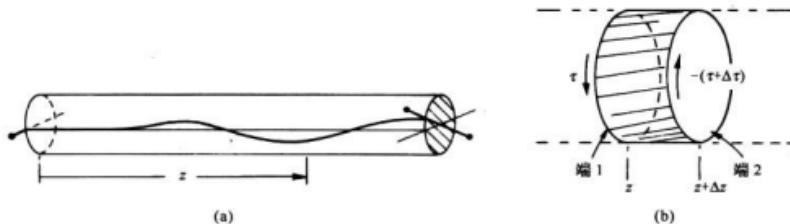


图 38-10 (a) 在一根棒上行进的扭转波; (b) 棒的一个体积元 \*

令  $z$  为沿棒从一端至某一点的距离。对于一个静扭转来说沿棒各处都有相同的转矩, 并且正比于  $\phi/L$ , 即总扭转角除以总长度。对材料要紧的是局部扭转应变, 你会知道它就是  $\partial\phi/\partial z$ , 当沿棒的扭转不均匀时, 则应该用下式来代替式(38.25):

$$\tau(z) = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (38.26)$$

现在让我们来看看如放大图 38-10(b) 所示的、长度为  $\Delta z$  的体积元所发生的情况。设在一小段棒的端 1 处有转矩  $\tau(z)$ , 而在端 2 处有一不同的转矩  $\tau(z + \Delta z)$ , 如果  $\Delta z$  足够小, 则可采用泰勒级数把它展开并写成

$$\tau(z + \Delta z) = \tau(z) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right) \Delta z. \quad (38.27)$$

作用于  $z$  与  $z + \Delta z$  间那一小段棒上的净转矩显然等于  $\tau(z)$  与  $\tau(z + \Delta z)$  之差, 即  $\Delta \tau = (\partial \tau / \partial z) \Delta z$ 。对式(38.26)取微分, 得

$$\Delta \tau = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z. \quad (38.28)$$

这个净转矩的效果是对该小段棒提供一个角加速度。这小段棒的质量为

\* 原图中箭头方向有误, 已改正。

$$\Delta M = (\pi a^2 \Delta z) \rho,$$

式中  $\rho$  为材料密度。我们曾经在第1卷第19章中算出一圆柱体的转动惯量为  $mr^2/2$ , 若把上述那小段材料的转动惯量叫作  $\Delta I$ , 则有

$$\Delta I = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z. \quad (38.29)$$

牛顿定律讲: 转矩等于转动惯量乘以角加速度, 即

$$\Delta \tau = \Delta I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (38.30)$$

把每个公式集合起来, 我们得

$$\mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

或

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (38.31)$$

你会认识到这是一个一维的波动方程。我们已求得扭转波将以下述速率沿棒传播下去:

$$C_{\text{剪切波}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (38.32)$$

棒越致密——对于相同的刚度来说——波行得越慢; 而棒越坚硬, 则波发展下去就越快。这速率与棒的直径无关。

扭转波是剪切波的一个特例。一般说来, 剪切波是其中应变不会改变材料任何部分体积的那种波。在扭转波中, 存在这种切应力的一个特殊分布——即分布于一个圆周上。但对于切应力的任一种安排, 波将以相同速率——即由式(38.32)所给出的那一速率——传播。例如, 地震学家发现了在地球内部传播的这种波。

在一固体材料内部, 我们还可以有另一种弹性领域中的波。如果你推动某一件东西, 就可以引起“纵”波——也称为“压缩”波, 这有如空气或水中的声波——位移与波的传播沿同一方向(在一弹性体的表面上也还可以有其他类型的波——叫“瑞利波”或“乐甫波”)。在其应变既不是纯纵向的也不是纯横向的。我们目前没有时间研究它)。

正当我们论述波这个课题时, 试问在像地球这样一块巨大的固体中纯压缩波的速度究竟如何? 我们所以讲“巨大”, 是因为在一粗而厚的物体中的声速与在一根(比如)细棒中的声速不同。所谓“粗厚”物体, 是指其横向尺寸比声音的波长要大得多。于是, 当我们推动该物体时, 它就不能向旁伸展——只能在一维上受压缩。幸亏, 我们已算出了一块受约束的弹性材料的特殊压缩情况, 亦曾在第1卷第47章中算出过气体中声波的速率。按照同样的论证你可以知道, 在固体中声音的速率等于  $\sqrt{Y'/\rho}$ , 其中  $Y'$  为受约束情况下的“纵向模量”——或压强除以长度的相对变化, 这恰好就是我们曾在式(38.20)中得到的  $F/A$  对  $\Delta l/l$  的比。因此, 纵波的速率由下式给出:

$$C_{\text{纵波}} = \frac{Y'}{\rho} = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{Y}{\rho}. \quad (38.33)$$

只要  $\sigma$  在零与  $\frac{1}{2}$  之间，则剪切模量  $\mu$  就小于杨氏模量  $Y$ ，而  $Y'$  比  $Y$  还要大，因而

$$\mu < Y < Y'.$$

这意味着纵波比剪切波传播得更快。一种用来量度物质弹性常数的最精密方法，就是测量该材料的密度和这两种波的速率。从这种数据我们就能得到  $Y$  和  $\sigma$ 。顺便说说，通过对发自一次地震的那两种波到达时间差的测量，一位地震学家——甚至仅从一个站所收到的信号——就能够估计出振源的距离。

## § 38-4 弯曲的梁

现在要来考察另一个实际问题——棒或梁的弯曲。当我们弯曲一根具有任意截面的棒时，力会怎么样呢？虽然我们将算出的是设想的一根具有一圆截面的棒，但其答案将适用于任何的形状。然而，为了节省时间，我们将抄近路，因而即将得到的理论仅仅是近似的。我们的结果将只在弯曲的半径比梁的厚度大得多时才正确。

假定你抓住一根直棒的两端而把它弯成像图 38-11 那样的曲线，在该棒内部会发生什么情况呢？噢，如果它被弯曲了，则意味着在该曲线之内的材料受到压缩，而在曲线之外的材料受到拉伸。存在某

个近似与棒轴平行的面既不被拉长也不被缩短，这个面叫做中性面。

你会预期，这个面靠近横截面的“中间”。可以证明（但我们将不在这里做出）：对于简单梁的微小弯曲，中性面会穿过横截面的“重心”。这只有对于“纯”弯曲——只要你不同时对梁拉伸或压缩——才正确。

这样，对于纯弯曲来说，梁的一块横向薄片就会如图 38-12(a)所示的那样变形。在该中性面之下的材料具有与距这一中性面的距离成正比的压缩应变；而在其上的材料则被拉伸，其应变也正比于距这一中性面的距离。因此，纵向伸长  $\Delta l$  与高度  $y$  成正比，其比例常数恰好就是  $l$  除以该棒的曲率半径——参见图 38-12：

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}.$$

所以在  $y$  处的一条小带上单位面积的力——应力——也与距中性面的距离成正比：

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = Y \frac{y}{R}. \quad (38.34)$$

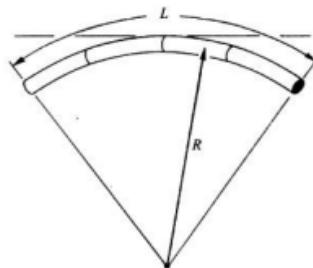


图 38-11 一根弯曲的梁

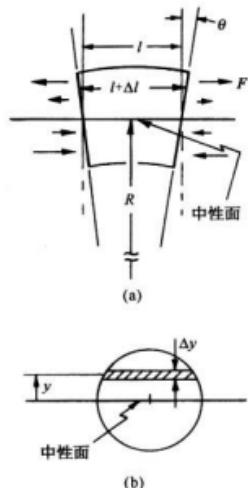


图 38-12 (a)一根弯曲梁中的一小片段；(b)梁的横截面

现在让我们来考察这一应变产生的力。作用于图 38-12 中那一小段上的各个力如图所示。如果设想任何横向截面，则作用于其上的力在中性面之上朝一个方向，而在中性面之下则朝另一个方向，它们成对地构成一个“弯曲转矩” $\mathfrak{M}$ ——这指的是绕该中性线的转矩。我们可通过对图 38-12 中那样一小段的一个面上的力乘以距中性面的距离，然后进行积分，从而计算出总转矩：

$$\mathfrak{M} = \int_{\text{横截面}} y dF. \quad (38.35)$$

根据式(38.34),  $dF = (Yy/R)dA$ , 因而

$$\mathfrak{M} = \frac{Y}{R} \int y^2 dA.$$

$y^2 dA$  的积分我们可称之为该几何截面绕穿过其“质心”的水平轴的“转动惯量”\*, 我们将把它叫作  $I$ :

$$\mathfrak{M} = \frac{YI}{R}, \quad (38.36)$$

$$I = \int y^2 dA. \quad (38.37)$$

于是, 式(38.36)向我们提供了有关弯曲转矩  $\mathfrak{M}$  与梁的曲率  $1/R$  之间的关系。梁的“刚度”与  $Y$  和转动惯量  $I$  均成正比。换句话说, 如果你要用比如说一定数量的铝来制造一根尽可能强硬的梁, 那你就得把尽可能多的铝放在离中性面较远的地方, 以便造成一个大的转动惯量。然而, 不能把此推至极端, 因为这么一来该件东西就将不会如我们所假定的那样弯曲——但却将弯折或曲折, 因而又会变成较脆弱了。可是现在你已明白, 为什么结构梁要造成工字形或 H 字形——如图 38-13 所示的那样。

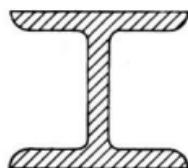


图 38-13 “工字”梁

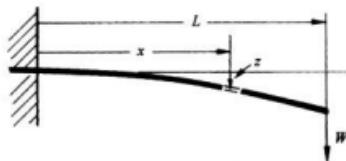


图 38-14 一端加有重量的一根悬臂架

作为梁方程式(38.36)的一个应用例子, 让我们算出有集中力  $W$  作用于其自由端的一根悬臂梁的偏移, 如图 38-14 所示意的那样(所谓“悬臂”我们只是指梁被支持得使其一端的位置和斜率都保持固定——它被插入水泥墙内)。这根梁的形状将会怎么样呢? 让我们把距固定端的距离为  $x$  处的偏移量叫作  $z$ , 我们希望知道  $z(x)$ , 将只对小的偏移作出计算, 也将假定与其截面比较起来梁是很长的。现在, 正如你已从数学课中懂得, 任一条曲线  $z(x)$  的曲率  $1/R$  由下式给出:

\* 当然, 那实际上就是单位面积具有单位质量的一个薄片的转动惯量。

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z / dx^2}{[1 + (dz / dx)^2]^{3/2}}, \quad (38.38)$$

由于我们只对于小斜率感兴趣——这往往是工程结构中的情况——与1比较起来略去 $(dz / dx)^2$ , 从而取

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{dx^2}. \quad (38.39)$$

我们还需要知道弯曲转矩 $M$ , 它是 $x$ 的函数, 因为它等于绕任一个横截面的中性轴的转矩。让我们略去梁本身的重量而仅仅考虑在梁末端处向下的力 $W$ (如果你愿意的话, 可以把梁的重量也考虑进去)。于是在 $x$ 处的弯曲转矩为

$$M(x) = W(L - x),$$

因为那是由重量 $W$ 所施加的、围绕着 $x$ 点的转矩——梁必须在 $x$ 处加以支撑的转矩。我们就得到

$$W(L - x) = \frac{YI}{R} = YI \frac{d^2 z}{dx^2}$$

或

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{W}{YI}(L - x). \quad (38.40)$$

这是一个没有什么窍门的、可以积分的方程, 结果得到

$$z = \frac{W}{YI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (38.41)$$

这里利用了在 $x = 0$ 处 $z(0) = 0$ 及 $dz / dx$ 也等于零的假定。那是由梁的形状决定的。末端的位移为

$$z(L) = \frac{W L^3}{YI 3}, \quad (38.42)$$

即一根梁末端的位移随长度的立方而增加。

上面在导出梁的近似理论时, 我们曾经假定过梁的横截面在梁被弯曲时不会改变。当梁的厚度与曲率半径相比显得微小时, 因横截面的改变非常小, 所以我们的结果是好的。不过, 一般说来, 这一效应是不能忽略的, 正如你能够通过把一块软橡皮擦弯曲在手指上而容易自行验证出来那样。如果原来的横截面是一个矩形, 你将会发现, 当它被弯曲时在其底部会凸起来(见图38-15)。此事之所以发生, 是因为当我们推压其底部时, 材料便向旁延伸——正如由泊松比所描述的那样。橡皮是容易弯曲或伸长的, 但它有点像液体, 即很难改变其体积——犹如你在弯曲那块橡皮擦时它所明白表现出来的那样。对于不可压缩的材料, 泊松比应该恰好等于 $1/2$ ——橡皮几乎就是这样。

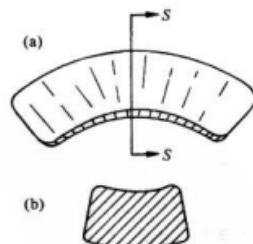


图38-15 (a)一块被弯曲的橡皮擦; (b)横截面

## § 38-5 弯 折

现在要用我们关于梁的理论来理解有关梁或者柱和棒弯折的道理。考虑示意图 38-16 中所表示的情况，一根原来是直的棒，在其两端受一对反向力所推压而保持弯曲的形状。我们想要计算这根棒的形状以及作用于两端的力的大小。

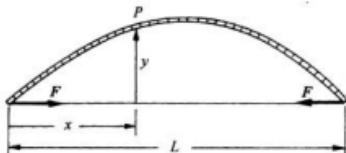


图 38-16 一根弯曲的梁

令棒与两端之间直线的偏离为  $y(x)$ ，其中  $x$  为距一端的距离。在图中  $P$  点的弯曲转矩  $M$  等于力  $F$  乘以力臂，即垂直距离  $y$ ，

$$M(x) = Fy. \quad (38.43)$$

利用关于梁的方程式(38.36)，便有

$$\frac{YI}{R} = Fy. \quad (38.44)$$

对于小偏移来说，可以取  $1/R = -d^2y/dx^2$ （负号来源于向下弯曲）。我们就得到

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F}{YI}y, \quad (38.45)$$

这是正弦波的微分方程。因而对于小的偏移，这样一根被弯曲的梁其曲线为正弦曲线。这正弦波的“波长” $\lambda$  为两端间距离  $L$  的两倍。若弯曲程度很小，则这正好是棒未被弯曲时长度的两倍。因而该曲线为

$$y = K \sin \pi x/L.$$

对此式取二次微商，便得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2}y.$$

将其同式(38.45)比较，可以看到力为

$$F = \pi^2 \frac{YI}{L^2}. \quad (38.46)$$

对于微小弯曲来说，力与弯曲位移  $y$  无关！

这样，在物理上就有下述情况，如果力小于式(38.46)所给出的  $F$ ，则根本就没有什么弯曲。但如果稍微大于这个力，则材料将突然严重弯曲——这就是说，对于超过这一临界力  $\pi^2 YI / L^2$ （常称为“欧拉力”的那些力，梁将“弯折”。如果一座建筑物的楼上的负载超过了支柱的欧拉力，则该建筑物将倒塌。另一个显示这种弯折力最重要的地方是在太空火箭上。一方面，火箭必须在发射台上能够支持它本身的重量并在加速期间能够经得起那些应力；另一方面，重要的是把结构的重量保持极小，以便使有效负载和燃料容量尽可能地大。

事实上，当力超过欧拉力时，梁未必就完全崩缩下来。当位移变大时，力会大于上面所求得的力，因为我们曾略去了式(38.38)有关  $1/R$  中的一些项。为要求得梁严重弯曲时的力，就必须回到准确的方程式(38.44)上去，它是在我们采用有关  $R$  与  $y$  间的近似关系前就

已经得到的。式(38.44)具有一种相当简单的几何性质\*,要把它算出来稍微有点复杂,但却是相当重要的。不用  $x$  和  $y$  来描述该曲线,我们可以用两个新的变数: $S$ ,即沿曲线的距离;  $\theta$ ,即该曲线的切线的倾角。参阅图 38-17。曲率就是该角随距离的变化率:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dS}.$$

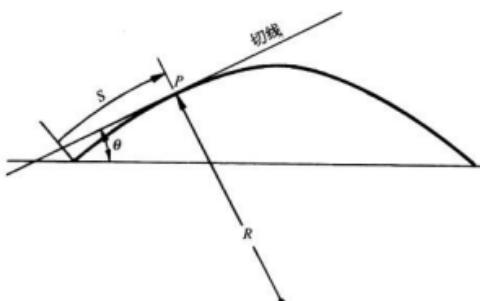


图 38-17 关于一根弯曲梁的曲线坐标  $S$  和  $\theta$

因此,我们能够将那个准确的方程(38.44)写成

$$\frac{d\theta}{dS} = -\frac{F}{YI} y.$$

如果取上式对于  $S$  的微商并用  $\sin \theta$  代替  $dy/dS$ ,则我们得

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} = -\frac{F}{YI} \sin \theta \quad (38.47)$$

[如果  $\theta$  很小,便会回到式(38.45)。一切都行了]。

现在,当你知道式(38.47)刚好就是你所获得的关于摆作大幅度振动的方程式时——当然,其中  $F/(YI)$  要用另一个常数来代替,你或许会感到喜悦或者不高兴。我们早就在第 1 卷第 9 章中学习过如何通过数值计算来求解这样的方程\*\*。你所得到的解答就是某些令人神往的曲线——称为“弹性”曲线。图 38-18 显示对于不同  $F/(YI)$  值的三条曲线。

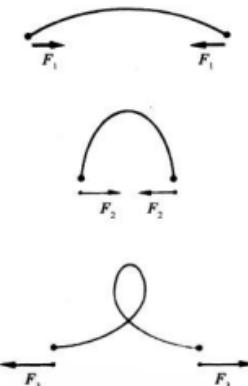


图 38-18 一根弯曲棒的曲线

\* 偶尔,同一个方程也出现在其他的物理情况中——例如,在两块平行平面之间所包含液体的弯月面——而同样的几何解答可以通用。

\*\* 这些解也可用称为“雅可比椭圆函数”的一些函数来表示,这些也已被某些人算出来了。

# 第39章 弹性材料

## § 39-1 应变张量

上一章我们曾谈到一些特殊弹性体的形变，本章我们将要考察弹性材料内部通常可能发生的情况。我们希望当用某种复杂方式把一大团果子冻扭转和压缩时，有可能描述其内部的应力和应变的情况。要完成此事，就需要能描写弹性体中每一点上的局域应变。对此，我们可以通过对每一点给出一组六个数——一个对称张量的分量——来做到。以前我们就曾谈及应力张量（第31章），现在却需要应变张量。

考虑从一块起初未发生任何应变的材料出发，并注意当其发生应变时埋在材料里的一个小“灰尘”斑点的运动。原来被放在  $P$  点、即  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  处的斑点，移到如图 39-1 所示的  $P'$  点、即  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  处。我们把从  $P$  至  $P'$  的矢量位移记作  $\mathbf{u}$ 。于是

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}. \quad (39.1)$$

当然，这位移  $\mathbf{u}$  依赖于我们出发的一点  $P$ ，因而  $\mathbf{u}$  就是  $\mathbf{r}$  的一个矢量函数——或者，如果你喜欢的话，也即是  $(x, y, z)$  的函数。

让我们首先来考察应变在整块材料中是常数的那种简单情况——因而我们就有所谓均匀应变。例如，假设有一块材料，将其均匀拉伸，仅仅在一个方向——比如在  $x$  方向——上均匀地改变它的长度，如图 39-2 所示。位于  $x$  处斑点的位移  $u_x$  与  $x$  成正比。实际上，

$$\frac{u_x}{x} = \frac{\Delta l}{l}.$$

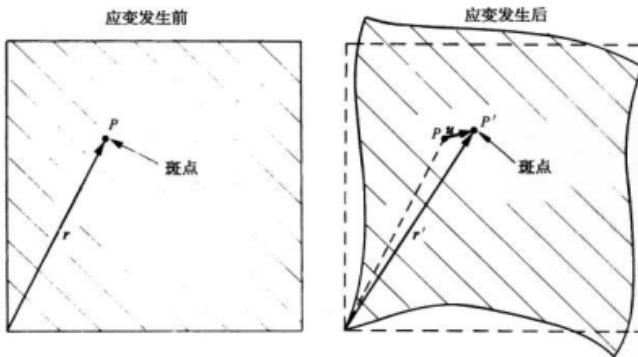


图 39-1 在未发生应变的一块材料中位于  $P$  点处的斑点，当材料发生应变后移到  $P'$  点处

我们将  $u_x$  写成这样：

$$u_x = e_{xx}x.$$

当然, 比例常数  $e_{xx}$  与  $\Delta l/l$  是同一件事(你不久就会看到为什么我们要用一个双重脚标)。

如果应变不均匀, 则  $u_x$  与  $x$  的关系将在材料里逐点改变。对于一般的情况来说, 就要用一种局域的  $\Delta l/l$ , 即用下式来定义  $e_{xx}$ :

$$e_{xx} = \partial u_x / \partial x. \quad (39.2)$$

这个数——它现在是  $x$ 、 $y$  和  $z$  的函数——描述整块果子冻中  $x$  方向的伸长量。当然, 此外还可以有沿  $y$  向和  $z$  向的伸长, 我们用下列两个数值来描述:

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (39.3)$$

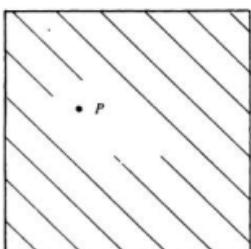
我们还需要能描述剪切型的应变。假设我们想象在起初未发生形变的果子冻中标示出一个小立方体。当这团果子冻被推压而变形时, 立方体的一个面可能变成一个平行四边形, 如图 39-3 所示意的那样\*。在这种应变中, 每个质点在  $x$  方向的移动与  $y$  坐标成正比,

$$u_x = \frac{\theta}{2}y, \quad (39.4)$$

还有一个正比于  $x$  的  $y$  方向的位移,

$$u_y = \frac{\theta}{2}x. \quad (39.5)$$

应变发生前



应变发生后

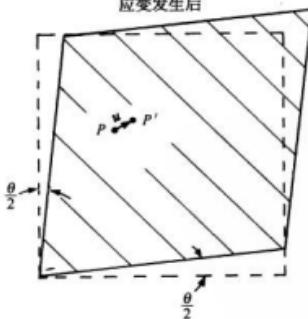


图 39-3 均匀剪切应变

\* 我们暂时选择把总剪切角  $\theta$  分成两个相等部分, 并使该应变相对于  $x$  和  $y$  是对称的。

因此,我们就能通过写出

$$u_x = e_{xy}y, \quad u_y = e_{yx}x,$$

其中

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{\theta}{2}$$

来描述这种剪切型应变。

现在你也许会想到,当应变不均匀时,我们可以用下面对  $e_{xy}$  和  $e_{yx}$  这两个量所下的定义来描述普遍的剪切应变:

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad e_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (39.6)$$

不过这里有一点困难。假定位移  $u_x$  和  $u_y$  分别由下式给出:

$$u_x = \frac{\theta}{2}y, \quad u_y = -\frac{\theta}{2}x.$$

除了  $u_y$  的符号相反之外它们就很像式(39.4)和(39.5)。对于这些位移来说,果子冻中一个小立方体将仅仅转过一个角度  $\theta/2$ ,如图 39-4 所示。完全没有什么应变——只不过在空间中的转动,材料没有变形,所有原子的相对位置都根本没有改变。所以应当想办法使纯转动不包括在我们对剪切应变的定义之中。关键点在于:若  $\partial u_y / \partial x$  和  $\partial u_x / \partial y$  相等而相反,则没有应变,因此,我们可用下列定义解决问题:

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2}(\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y).$$

对于纯转动来说,两者均等于零,但对于纯剪切则会得到  $e_{xy}$  等于  $e_{yx}$ ,这正是我们想要的那种关系。

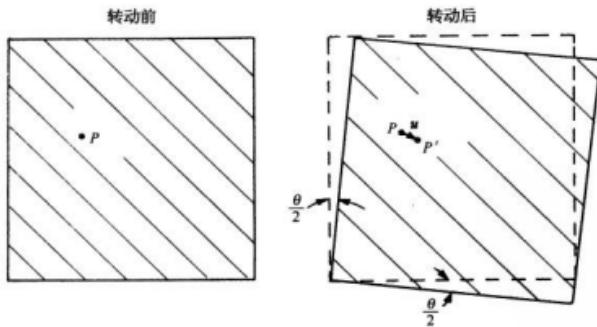


图 39-4 均匀转动——没有应变

在最普遍的形变中——可以包括伸长或收缩以及切变在内——我们可通过给出九个数值来定义应变:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\
 e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\
 &\vdots \\
 e_{xy} &= \frac{1}{2} (\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y), \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{39.7}$$

这些就是应变张量的各项。由于它是一个对称张量——我们的定义总是使得  $e_{xy} = e_{yx}$  ——实际上, 它只有六个不同的数。你会记得(见第31章), 张量的普遍特征是: 那些项都会像两个矢量的分量之积那样变换(若  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  都是矢量, 则  $C_{ij} = A_i B_j$ , 便是一个张量)。 $e_{ij}$  的每一项都是矢量  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  和算符  $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$  的各分量之积(或这种积之和), 我们知道后者如同一个矢量那样变换。让我们令  $x_1, x_2, x_3$  各代表  $x, y, z$ , 而  $u_1, u_2, u_3$  各代表  $u_x, u_y, u_z$ , 则可以将这个应变张量的普遍项  $e_{ij}$  写成

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j), \tag{39.8}$$

式中,  $i$  和  $j$  各可以是 1, 2 或 3。

当有一均匀应变——可以包括拉伸和剪切——时, 则所有的  $e_{ij}$  都是常数, 因而可以写出

$$u_x = e_{xx}x + e_{xy}y + e_{xz}z \tag{39.9}$$

(我们选取  $\mathbf{u}$  为零的那一点作为  $x, y, z$  坐标系的原点)。在这种情况下, 应变张量  $e_{ij}$  会给出坐标矢量  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  和位移矢量  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  之间的关系。

当应变不均匀时, 果子冻的任一部分也可能受到一些扭转——会存在局部转动。若形变都很小, 则应该有

$$\Delta u_i = \sum_j (e_{ij} - \omega_{ij}) \Delta x_j, \tag{39.10}$$

式中  $\omega_{ij}$  是一个反对称张量,

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_j / \partial x_i - \partial u_i / \partial x_j), \tag{39.11}$$

上式能够描述转动。可是, 我们将不再为转动操心, 而仅关心由对称张量  $e_{ij}$  描述的应变。

## § 39-2 弹性张量

我们已描述了应变, 现在要把这些应变与内力——材料中的应力——联系起来。对于材料中每一小部分, 假定胡克定律都成立, 因而将应力写成正比于应变。在第31章中, 我们曾把应力张量  $S_{ij}$  定义为在整个垂直于  $j$  轴的单位面积上的力的第  $i$  个分量。胡克定律讲,  $S_{ij}$  的每一分量与每一个应变分量都为线性关系。由于  $S$  或  $e$  每个有 9 个分量, 因此会有  $9 \times 9 = 81$  个可能的系数被用来描述材料的弹性。如果材料本身是均匀的, 则它们都是常数。现在把这些系数写成  $C_{ijkl}$ , 并由下式定义:

$$S_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} e_{kl}, \quad (39.12)$$

其中  $i, j, k, l$  都可取 1, 2 或 3 的值。既然这些系数  $C_{ijkl}$  把一个张量与另一个张量联系起来, 所以它们本身也就形成一个张量——一个四阶张量, 可以称它为弹性张量。

假定所有的  $C$  均为已知, 而你将一个复杂的力作用于某一特殊形状的物体之上。将会有各式各样的形变, 而该物体就将形成某种被扭转过的形状。位移将会怎样呢? 你可以看出那是一个复杂的问题。假如你知道了应变, 你便能够由式(39.12)求出应力——或者相反。但在任一点上, 你所获得的应力和应变都将取决于材料的所有其余部分发生的情况。

解决这一问题的最易途径就是考虑能量。当有力  $F$  正比于位移  $x$  时, 比如说  $F = kx$ , 则对于任意位移  $x$  所需之功为  $kx^2/2$ 。同理, 可以证明进入单位体积形变材料内的功  $w$  为

$$w = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl}. \quad (39.13)$$

在使物体形变过程中所作的总功  $W$  为  $w$  对整个体积的积分:

$$W = \int \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV. \quad (39.14)$$

于是, 这就是储藏于材料内应力中的势能。现在当物体处于平衡态时, 其内能必然处在极小。因此, 求物体中应变的问题, 就可以通过求出整个物体的一组位移  $u$ ——将使得  $W$  为极小——而得到解决。我们曾在第 19 章中提供过处理像这一类极小值问题时使用到的变分法的某些普遍概念。这里不能对这一问题进行更详尽的深入讨论。

现在我们主要感兴趣的是, 关于弹性张量的一般性质我们能够说些什么。首先, 很明显, 实际上在  $C_{ijkl}$  中并没有 81 个不同项。由于  $S_{ij}$  和  $e_{ij}$  两者都是对称张量, 所以每个张量就只有六个不同项, 因而在  $C_{ijkl}$  中至多也只能有 36 个不同项。然而, 存在的项往往比这还少得多。

让我们考察立方晶体的特殊情况。在其中, 能量密度  $w$  像下式这样开始写起:

$$w = \frac{1}{2} [C_{xxxx} e_{xx}^2 + C_{xxyy} e_{xx} e_{yy} + C_{xxyx} e_{xx} e_{xy} + C_{xxyx} e_{xx} e_{xy} + C_{xyxy} e_{xx} e_{yy} + C_{xyxy} e_{xx} e_{yy} + \dots + C_{yyyy} e_{yy}^2 + \dots], \quad (39.15)$$

共有 81 项! 但是立方晶体具有某些对称性。特别是, 如果晶体被转过  $90^\circ$ , 则它具有相同的物理性质。对于在  $y$  方向的拉伸与对于在  $x$  方向的拉伸来说具有相同的刚度。因此, 如果我们改变式(39.15)中关于  $x$  和  $y$  两坐标方向的定义, 则能量就不会改变。对于立方晶体来说, 必然有

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz}. \quad (39.16)$$

其次, 我们还能够证明, 像  $C_{xxyy}$  那些项一定会等于零。立方晶体具有这么一种性质, 即在与轴正交的任何平面的反射之下它是对称的。若我们用  $-y$  代替  $y$ , 不会有什么差别。但当由  $y$  变至  $-y$  时  $e_{xy}$  会变成  $-e_{xy}$ ——以前朝向  $+y$  的位移现在朝向  $-y$  了。如果能量不会改变, 则当我们做反射时,  $C_{xxyy}$  就必然变成  $-C_{xxyy}$ 。但反射后的晶体与以前的相同, 因此  $C_{xxyy}$  就必须与  $-C_{xxyy}$  相等。这只有当两者均等于零时才能实现。

你会说：“但同样的论证也将使  $C_{xyy} = 0$  啊！”不对，因为这里共有四个  $y$ 。对于每个  $y$ ，符号都要改变一次，而四个负号就会造成一个正号。因此，若有两个或四个  $y$ ，则该项的确不必为零。只有当出现一或三个  $y$  时，它才是零。所以，对于立方晶体来说， $C$  的任何不等于零的项将只有偶数个相同的脚标（上面我们对于  $y$  所做的论证，显然对于  $x$  和  $z$  也都有效）。于是，也许会有像  $C_{xxyy}$ ， $C_{xyxy}$ ， $C_{zyzx}$ ，等等的项。然而已经证明，若把所有的  $x$  都改成  $y$ ，以及相反（或把所有的  $z$  和所有的  $x$  对换，等等），则我们必定获得——对于立方晶体来说——相同的数值。这意味着只有三种不同的非零可能性：

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= C_{yyyy} = C_{zzzz}, \\ C_{xxyy} &= C_{yyxx} = C_{zzzz}, \text{ 等等}, \\ C_{xyxy} &= C_{yxxy} = C_{zzzz}, \text{ 等等}. \end{aligned} \quad (39.17)$$

于是，就立方晶体来说，能量密度看来会像这样：

$$w = \frac{1}{2} [C_{xxxx}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2C_{xxyy}(e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx}) + 4C_{xyxy}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)]. \quad (39.18)$$

就各向同性——也就是非晶的——材料而言，对称性还会更高。那些  $C$  项应该对于坐标系的任何选取都相同。于是结果是，在那些  $C$  项中还存在另一个关系式，即

$$C_{xxxx} = C_{xxyy} + C_{xyxy}. \quad (39.19)$$

通过下面的一般论证可以看出的确是这样。应力张量  $S_y$  与  $e_y$  必须与坐标方向完全无关的方式相联系，即必须只由标量来联系。你会说：“那很容易。”“从  $e_y$  得到  $S_y$  的唯一途径，就是由一个标量常数相乘，它正好就是胡克定律，所以它必定是  $S_y = (\text{常数})e_y$ ”，但这并不完全对，因为也可能存在由单位张量  $\delta_{ij}$  乘上与  $e_{ij}$  成线性关系的某个标量。你能够用  $e$  线性地构成的唯一不变量是  $\sum e_{ij}$ （它如同标量  $x^2 + y^2 + z^2$  那样变换）。因此，把  $S_y$  与  $e_y$  联系起来的方程的最普遍形式——对于各向同性材料来说——为

$$S_y = 2\mu e_y + \lambda(\sum_k e_{kk})\delta_{iy} \quad (39.20)$$

（第一个常数往往被写成  $2$  乘以  $\mu$ ，这样该系数  $\mu$  才会等于我们在上一章中曾定义过的剪切模量）。 $\mu$  和  $\lambda$  这两常数称为拉梅弹性常数。将式(39.20)和(39.12)两相比较，你就会看出

$$\begin{aligned} C_{xxyy} &= \lambda, \\ C_{xyxy} &= 2\mu, \\ C_{xxxx} &= 2\mu + \lambda. \end{aligned} \quad (39.21)$$

因此，我们已经证明了式(39.19)的确是正确的。你也会看到，各向同性材料的弹性可由两个常数完全给出，正如我们曾在上一章中说过的那样。

这些  $C$  项可用以前曾经用过的任意两个弹性常数——例如杨氏模量  $Y$  和泊松比  $\sigma$ ——来表示。我们愿意把下列各式留给你们去证明：

$$\begin{aligned} C_{xxx} &= \frac{Y}{1+\sigma} \left( 1 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \right), \\ C_{xxy} &= \frac{Y}{1+\sigma} \left( \frac{\sigma}{1-2\sigma} \right), \\ C_{xyy} &= \frac{Y}{1+\sigma}. \end{aligned} \quad (39.22)$$

### § 39-3 在弹性体中的运动

我们已经指出，处于平衡中的弹性体其内应力自身会做调整，以使其能量极小。现在来

做一番考察，当内力不平衡时会发生什么情况。让我们假设，在某个表面  $A$  内有一小块材料，参见图 39-5。如果这一块处于平衡之中，则作用于其上的总力  $\mathbf{F}$  就必然为零。可以设想，这一个力是由两部分组成的。一部分可能是由像重力那样的“外”力引起的，它是从远处作用于该块材料而产生的单位体积的力  $\mathbf{f}_{\text{外}}$ 。而总外力  $\mathbf{F}_{\text{外}}$  就是这  $\mathbf{f}_{\text{外}}$  对整块材料体积的积分：

$$\mathbf{F}_{\text{外}} = \int \mathbf{f}_{\text{外}} dV. \quad (39.23)$$

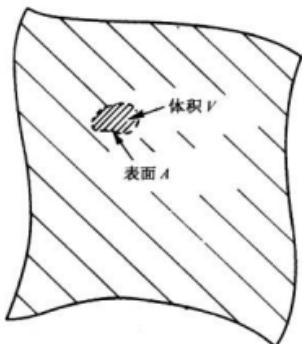


图 39-5 由表面  $A$  所包围的一个小体积元  $V$

平衡时，这个力会被来自附近材料对整个表面  $A$  作用的总力  $\mathbf{F}_{\text{内}}$  所抵消。当这块材料不是处于平衡中时——如果它在运动——则这个内力与外力之和就应等于质量乘以加速度。我们应有

$$\mathbf{F}_{\text{外}} + \mathbf{F}_{\text{内}} = \int \rho \ddot{\mathbf{r}} dV, \quad (39.24)$$

其中  $\rho$  为材料密度，而  $\ddot{\mathbf{r}}$  为其加速度。现在我们可以把式(39.23)和(39.24)两者结合起来，从而写成

$$\mathbf{F}_{\text{内}} = \int_V (-\mathbf{f}_{\text{外}} + \rho \ddot{\mathbf{r}}) dV. \quad (39.25)$$

将通过

$$\mathbf{f} = -\mathbf{f}_{\text{外}} + \rho \ddot{\mathbf{r}} \quad (39.26)$$

这一定义来简化我们的写法。于是，式(39.25)可以写成

$$\mathbf{F}_{\text{内}} = \int_V \mathbf{f} dV. \quad (39.27)$$

被称为  $\mathbf{F}_{\text{内}}$  的这个积分与材料内的应力有关。该应力张量  $S_{ij}$  曾(在第 31 章中)被这样定义，使得跨越单位法线为  $\mathbf{n}$  的一个表面元  $d\mathbf{a}$  的力  $d\mathbf{F}$  的  $x$  分量由下式给出：

$$dF_x = (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z)d\mathbf{a}. \quad (39.28)$$

于是作用于那一小块材料上的  $\mathbf{F}_n$  的  $x$  分量, 就是  $d\mathbf{F}_x$  对整个表面的积分。将此式代入式(39.27)中的  $x$  分量中, 得

$$\int (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) d\alpha = \int_V f_x dV. \quad (39.29)$$

我们已有面积分与体积分的关系——而这就使我们想起曾在电学中学过的某种东西。注意, 如果忽略式(39.29)左边每个  $S$  的第一个下脚标  $x$ , 那么它看来就恰好像量“ $\mathbf{S}$ ”· $\mathbf{n}$ ——即一个矢量的法向分量——对整个表面的积分。它应该是从该体积流出去的“ $\mathbf{S}$ ”的通量。而倘若利用高斯定律, 则可以写成“ $\mathbf{S}$ ”的散度的体积分。事实上, 无论该  $x$  脚标存在与否, 它总是正确的——它仅是你可以通过分部积分而得到的一个数学定理。换句话说, 我们可将式(39.29)改写成

$$\int_V \left( \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) dV = \int_V f_x dV. \quad (39.30)$$

现在就可以去掉那些体积分, 而把  $f$  一般分量的微分方程写成:

$$f_i = \sum_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (39.31)$$

上式告诉我们单位体积的力如何同应力张量  $S_{ij}$  联系起来。

关于固体内部运动的理论就是这样做出来的。如果从认识初位移——比如说, 由  $\mathbf{u}$  所给出——着手, 则可以算出  $e_{ij}$ 。从这些应变又可以根据式(39.12)而得到应力。从这些应力可以得到式(39.31)中的力密度  $f$ 。一旦知道了  $f$ , 就可以根据式(39.26)获得材料的加速度  $\ddot{\mathbf{r}}$ , 这会告诉我们位移将如何变化。把所有结果都聚集在一起, 便会得到关于弹性固体的可怕的运动方程。我们只写出对各向同性材料所得到的结果。如果你用式(39.20)表示  $S_{ij}$ , 并将  $e_{ij}$  写成  $\frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ , 则你最后会得到这样一个矢量方程:

$$\mathbf{f} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (39.32)$$

事实上, 你能够看出  $\mathbf{f}$  与  $\mathbf{u}$  相联系的方程必然具有这种形式。力必然取决于位移  $\mathbf{u}$  的二次微商。由  $\mathbf{u}$  的二次微商构成矢量的到底有哪些呢? 其一是  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ , 那是一个真正的矢量, 仅有的另一个矢量是  $\nabla^2 \mathbf{u}$ , 因此最普遍的形式为

$$\mathbf{f} = a \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + b \nabla^2 \mathbf{u},$$

它就是式(39.32), 只是常数的定义不同而已。你可能会觉得奇怪, 为什么我们没有用到  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$  作为第三项, 因为它也是一个矢量。但要记住,  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$  同  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$  是同一件事, 因而它就是我们所有的两项的一个线性组合。把它加进去不会增加任何新东西。我们再一次证明了各向同性材料只会有两个弹性常数。

对于这种材料的运动方程, 可以令式(39.32)等于  $\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$ ——目前略去任何像重力那样的彻体力——并得到

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (39.33)$$

它看来有点像我们以前在电磁学中曾有过的波动方程式,只不过有一个附加的复杂项。对于弹性处处相同的材料,按上述办法可以弄清楚其一般解的表现形式。你会记得,任何矢量场都可以写成两矢量之和:一个矢量的散度为零;另一个矢量的旋度为零。换句话说,我们可令

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad (39.34)$$

其中

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_2 = 0. \quad (39.35)$$

用  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$  代替式(39.33)中的  $\mathbf{u}$ , 我们得

$$\rho \partial^2 / \partial t^2 [\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2] = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_2) + \mu \nabla^2 (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2). \quad (39.36)$$

可以通过取这一方程的散度而消去  $\mathbf{u}_1$ ,

$$\rho \partial^2 / \partial t^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_2) = (\lambda + \mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}_2) + \mu \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_2.$$

由于算符( $\nabla^2$ )和( $\nabla \cdot$ )可以相互交换, 所以我们能将散度作为一个公因子提取出来, 从而得

$$\nabla \cdot [\rho \partial^2 \mathbf{u}_2 / \partial t^2 - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_2] = 0. \quad (39.37)$$

由于根据定义  $\nabla \times \mathbf{u}_2 = 0$ , 所以整个括号 $[\quad]$ 的旋度也等于零, 因而该括号本身就恒等于零, 即

$$\rho \partial^2 \mathbf{u}_2 / \partial t^2 = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u}_2. \quad (39.38)$$

这是以速率  $c_2 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  运动的波满足的矢量波动方程。由于  $\mathbf{u}_2$  的旋度为零, 所以就没有任何剪切与这种波有联系。这种波正好是上一章中曾经讨论过的那种压缩——声音型的——波, 而其速度就恰恰是我们曾求得的  $c_{\text{纵波}}$ 。

同样地——通过取式(39.36)的旋度——我们能够证明  $\mathbf{u}_1$  会满足方程

$$\rho \partial^2 \mathbf{u}_1 / \partial t^2 = \mu \nabla^2 \mathbf{u}_1. \quad (39.39)$$

这又是具有速率  $c_1 = \sqrt{\mu/\rho}$  的波之矢量波动方程。由于  $\nabla \cdot \mathbf{u}_1$  为零, 所以  $\mathbf{u}_1$  不会产生密度变化, 这个矢量  $\mathbf{u}_1$  相当于上一章中我们曾见过的那种横波或剪切型波, 而  $c_1 = c_{\text{切变波}}$ 。

要是我们希望知道各向同性材料中的静应力, 原则上可以通过令  $\mathbf{f}$  等于零——或等于像来自重力  $\rho \mathbf{g}$  的那种静彻体力——在与施于该大块材料的表面上的力有关的一些条件下, 求解方程式(39.32)而找到。这比电磁学中的相应问题更困难一些。之所以较难, 首先由于方程的处理稍微困难; 而其次, 则由于我们很可能感兴趣的弹性体的形状通常更加复杂。在电磁学中, 我们所感兴趣的常常是环绕像柱体、球体等相对简单的几何形状来求解麦克斯韦方程组, 因为这些都是电学设备的合适形状。在弹性学中, 我们希望分析的东西却可能具有十分复杂的形状——像曲柄钩、汽车里的曲轴或汽轮机的转子。应用我们以前曾提及的最小能量原理, 这样的问题有时可以通过数值计算法近似地算出。另一种办法是采用物体模型, 利用偏振光在实验上测量内部的应变。

工作是这样进行的: 当一种透明的各向同性材料——例如, 一种像留西特那样的透明塑料——被置于应力之下时, 它就变成双折射。如果你使偏振光穿过它, 则偏振面会被旋转一个与应力有关的角度。通过测量这个旋转角度, 你就能测出该应力了。这样的装置看起来

会如图39-6所示的样子。图39-7则是处于受力状态下的复杂形状的光弹模型的照片。

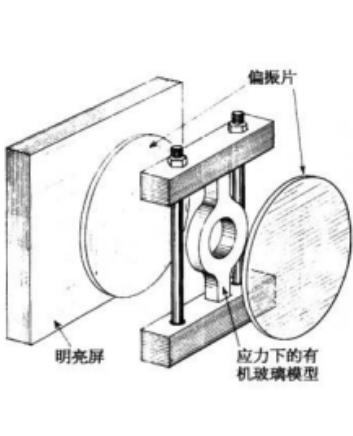


图 39-6 用偏振光测量内应力

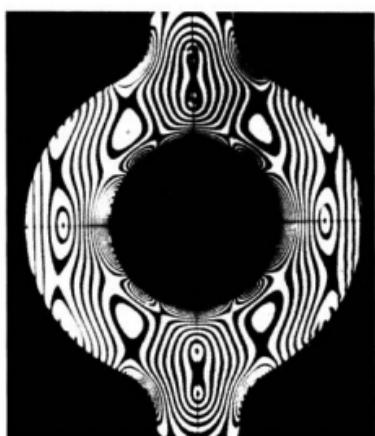


图 39-7 从两块互相交叉的偏振片间所看到的处在受力状态的一件塑料模型 [转载自 Sears F. W. Optics, 1949]

#### § 39-4 非弹性行为

迄今在我们所谈及的一切情况中都曾假定应力正比于应变；一般说来，这是不正确的。图39-8显示一种可延性材料的典型应力-应变曲线。对于小应变来说，应力与应变的确成正比。可是，最后当越过了某一点之后，应力与应变的关系就开始与直线有所偏离了。就许多种——我们总称之为“脆性”的——材料来说，只要应变稍微超过该曲线开始弯下去的一点，物体就会破裂。一般说来，在该应力-应变关系中还有其他复杂性。例如，若你使一物体变形，则应力最初可能会很高，但随着时间推移应力会慢慢降低。而且，如果已达到了高的应力，但还未达到“破裂”点，则当你减少应变时，应力将会沿另一条曲线返回。即有一个小小的滞后效应（类似我们在磁性材料中见到的B和H间的关系曲线）。

材料将会破裂的那个应力，一种材料与另一种材料的差异很大。有些材料在最大拉伸应力达到某一值时发生断裂，另一些材料则会在最大剪切应力达到某一个值时破裂。粉笔是一种张力比剪切力弱得多的材料的例子。如果你拉一支粉笔的两端，粉笔将在垂直于所加应力的方向上断裂，如图39-9(a)所示。之所以在垂直于外加力的方向上断裂，是由于粉笔不过是一群易于拉开的粒子被紧压在一起而已。然而，这一材料却难于发生切变，因为

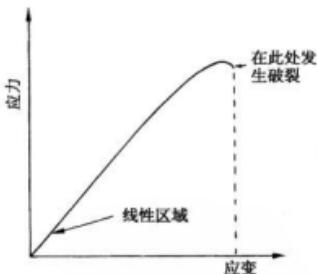


图 39-8 大应变的一个典型应力-应变关系

其中粒子会彼此互相妨碍。现在你会记起,当有一根棒处于扭转中时,则环绕着它各点都存在剪切力。并且,也曾经证明过,剪切应力等效于拉伸应力与压力在 $45^\circ$ 角上的组合。由于这些原因,如果你扭转一支黑板上用的粉笔,它将沿着与轴成 $45^\circ$ 角开始的一个复杂的面破裂。一支这样破裂了的粉笔的照片如图39-9(b)所示,粉笔是在拉伸应力最大的地方破裂的。

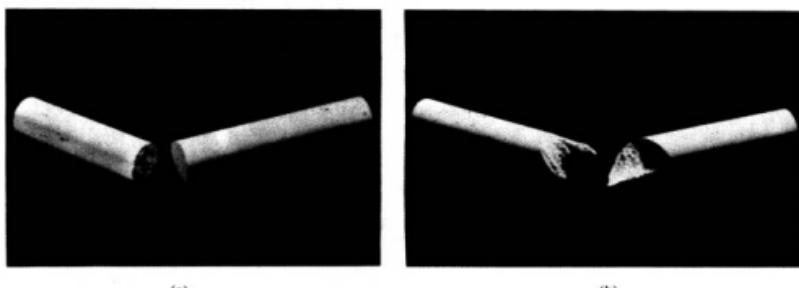


图 39-9 (a)两端受拉力而断裂的一支粉笔; (b)因扭转而断裂的粉笔

别的材料表现出奇特而复杂的行为。材料越复杂,其行为就越发有趣。如果取一条莎纶头巾,把它揉皱成一团,并将其投掷到桌面上,则它将会缓慢地自己舒展开来从而恢复它原来的平坦形式。乍看起来,我们也许总会以为是惯性在阻碍着它回复原来的形状。然而,简单的计算表明,惯性对于解释该效应小了好几个数量级。似乎存在两种重要的互相对抗的效应:材料内部“某种东西”会“记得”它原先有过的形状,并“力图”恢复原样;但另外某种东西“更喜欢”新的形状,而“阻止”回到原先的形状上去。

我们将不尝试去描写莎纶塑料中起作用的那种机制,但你可从下述模型中获得关于这种效应怎么可能发生的一些概念。假设你想象一种材料,它由长而柔顺但却坚韧的纤维与充满着黏滞性液体的某些小孔互相混合在一起而构成。也想象从一个孔到邻近的孔存在一些狭窄的通道使得液体能够从一个孔缓慢地渗入邻近的孔。当我们揉皱一片这样的材料时,使那些长纤维变了形,把在一处小孔里的液体挤压出来而逼进到那些正被拉伸着的其他小孔中去,在我们把那片材料释放后,长纤维会试图恢复它们原来的形状。但这样做时,必须迫使液体回到原先的位置上去——由于黏滞性的缘故这将进行得相当慢。在我们将该片东西揉皱时所加之力,比起由那些纤维所施之力要大得多。我们能够迅速地将其揉皱,但恢复的过程就较为缓慢了。这无疑是那些大而强硬的分子与一些较小而易移动的分子在莎纶头巾中的组合是造成它行为的主要原因。这一概念也符合下列事实:材料在温暖时会比寒冷时更迅速地恢复到它原来的形状——热量增加了较小分子的可动性(降低了黏滞性)。

虽然我们刚才正在讨论胡克定律为何会失灵,但引人注目之处或许不是胡克定律对于大的应变会发生失灵,而是它总是很普遍地成立。我们通过考察材料中的应变能量可以获得这事情为什么会有这样的某些概念。提出应力正比于应变,同提出应变能量随应变的平方而变化,是同一回事。假设把一根棒扭转了小角度  $\theta$ ,如果胡克定律正确,则应变能量应当与  $\theta$  的平方成正比。如果我们假定这个能量为旋转角度的任意函数,那就把它写成关于零角度的泰勒展开式:

$$U(\theta) = U(0) + U'(0)\theta + \frac{1}{2}U''(0)\theta^2 + \frac{1}{6}U'''(0)\theta^3 + \dots \quad (39.40)$$

转矩  $\tau$  等于  $U$  对角度的微商, 我们应有

$$\tau(\theta) = U'(0) + U''(0)\theta + \frac{1}{2}U'''(0)\theta^2 + \dots \quad (39.41)$$

现在, 若从那平衡位置度量我们的角度, 则第一项为零, 因而第一个留下的项是与  $\theta$  成正比的。而对于足够小的角度, 它将比含  $\theta^2$  的项占有明显优势[事实上, 材料内部是足够对称的, 以致  $\tau(\theta) = -\tau(-\theta)$ , 于是这个含  $\theta^2$  的项便将为零, 因而与线性的偏离就只会来自那  $\theta^3$  的项了]。然而, 为什么这对于压缩和伸张都应该正确, 就找不出理由来了? 我们还未加以解释的事情在于, 为什么材料往往会在那些高阶项变得重要之后就立即断裂。

### § 39-5 计算弹性常量

作为有关弹性学的最后一个论题, 我们想要指明, 从构成材料原子的性质的某些知识着手, 人们如何才能试图算出材料的弹性常量来。我们将仅仅考虑像氯化钠那样的离子立方晶体的简单情况。当一晶体被变形时, 它的体积和形状都会发生变化。这种变化导致晶体中势能的增加。要算出这应变能量的变化, 得先弄清楚每个原子的去处。在一些复杂晶体中, 原子将按十分复杂的方式把它们自己安排在晶格中, 以便使其总能量尽可能地小, 这使得对应变能量的计算相当困难。然而, 在简立方晶体的情况下, 不难看到将会发生的情况。晶体内部的形变在几何上将与晶体外部边界的形变相似。

我们能够用下述方法算出立方晶体的弹性常量。首先, 我们设想在晶体中每一对原子之间的某个力学定律。然后, 计算出当晶体离开其平衡状态而发生形变时其中内能的变化。这向我们提供了一个能量与包含所有应变的平方之间的关系。将用这种方法得到的能量与式(39.13)相比, 就能够把每一项的系数看作是弹性常量  $C_{ijkl}$ 。

在我们的例子中, 将设想一个简单的力的定律: 两相邻原子之间的力是中心力, 意指力的作用沿着两原子间的连线。应该预期, 离子晶体中的力与此相类似, 因为它们基本上都只是库仑力(共价键力往往较为复杂, 因为它们能够对相邻原子作用一个侧向的推力, 我们将不考虑这种复杂性)。我们也将仅仅包括每个原子与其最近邻及次近邻原子之间的作用力。换句话说, 我们将做一种近似, 即略去所有超过次近邻的力。在  $xy$  平

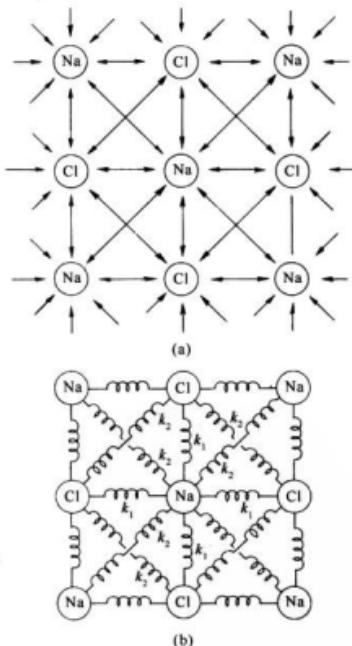


图 39-10 (a) 我们正考虑的原子间的相互作用力; (b) 各原子由弹簧联系起来的模型

面上将计入的力如图 39-10(a)所示。当然，在 $y$  和 $z$  两平面上的相应的力也得包括进去。

由于我们只对适用于小应变的弹性常量感兴趣，因而就只需要在能量中随应变的平方变化的项，所以就可以想象每一对原子之间的作用力是随位移线性地变化的。于是，我们还可以设想，每一对原子由一条线性弹簧联系着，如图 39-10(b)所示。所有连接钠原子与氯原子间的弹簧都应具有相同的弹性常量，比方说 $k_1$ 。在两个钠原子间和两个氯原子间的弹簧可能具有不同的常量，但将通过把它们取作相等而使讨论较简单，我们将统称之为 $k_1$ （在知道了计算如何进行之后，就可以在以后的计算中取不同的 $k$  值）。

现在假定晶体的形变是由应变张量 $e_{ij}$  描述的均匀应变产生的。在一般情况下，它将具有与 $x$ 、 $y$  和 $z$  有关的各种分量，但现在我们将仅仅考虑具有 $e_{xx}$ 、 $e_{xy}$  和 $e_{xz}$  这三个分量的应变，以便易于对它进行想象。如果我们挑出一个原子作为原点，则其他每个原子的位移都可由像式(39.9)那样的方程来给出：

$$\begin{aligned} u_x &= e_{xx}x + e_{xy}y, \\ u_y &= e_{xy}x + e_{yy}y. \end{aligned} \quad (39.42)$$

假设把那个在 $x = y = 0$  处的原子叫做“1号原子”，并如图 39-11 所示的那样对它在 $xy$  平面上的一些近邻也加上号码。又把晶格常数称为 $a$ ，我们便得到列于表 39-1 中的那些 $x$  方向和 $y$  方向的位移 $u_x$  和 $u_y$ 。

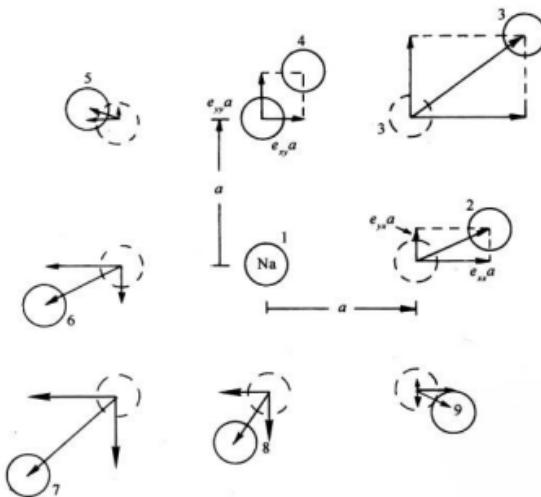


图 39-11 1号原子的最近邻及次近邻原子的位移(被夸大的)

现在可以计算储藏于那些弹簧中的势能，即 $k/2$  乘以每一条弹簧的伸长的平方。例如，在原子 1 与原子 2 间的水平弹簧中的能量为

$$\frac{k_1(e_{xx}a)^2}{2}. \quad (39.43)$$

注意作为一级近似，原子2的y方向位移并不改变连接原子1与原子2间弹簧的长度。然而，要获得一条像连接到原子3的那种对角线弹簧的应变能量，就必须算出由于水平方向和垂直方向两个位移所引起的长度改变。对于偏离原来的立方体的微小位移来说，我们可以把到达原子3距离的改变写成 $u_x$ 和 $u_y$ 在对角线方向上的分量之和，即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_x + u_y).$$

利用从表上得到的 $u_x$ 和 $u_y$ 值，便可获得能量

$$\frac{k_2}{2} \left( \frac{u_x + u_y}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{k_2 a^2}{4} (e_{xx} + e_{yy} + e_{xy} + e_{yy})^2. \quad (39.44)$$

对于在 $xy$ 平面上的所有弹簧的总能量，我们需要像式(39.43)和(39.44)那样的八个项之和，称这一能量为 $U_0$ ，则有

$$U_0 = \frac{a^2}{2} \left\{ k_1 e_{xx}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} + e_{yy} + e_{xy} + e_{yy})^2 + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} - e_{yy} - e_{xy} + e_{yy})^2 + k_1 e_{xy}^2 \right. \\ \left. + \frac{k_2}{2} (e_{xx} + e_{yy} + e_{xy} + e_{yy})^2 + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} - e_{yy} - e_{xy} + e_{yy})^2 \right\}. \quad (39.45)$$

表 39-1

原 子	位置 $x, y$	$u_x$	$u_y$	$k$
1	0, 0	0	0	—
2	$a, 0$	$e_{xx}a$	$e_{yy}a$	$k_1$
3	$a, a$	$(e_{xx} + e_{yy})a$	$(e_{yy} + e_{yy})a$	$k_2$
4	$0, a$	$e_{xy}a$	$e_{yy}a$	$k_1$
5	$-a, a$	$(-e_{xx} + e_{yy})a$	$(-e_{yy} + e_{yy})a$	$k_2$
6	$-a, 0$	$-e_{xx}a$	$-e_{yy}a$	$k_1$
7	$-a, -a$	$(e_{xx} + e_{yy})a$	$(-e_{xx} + e_{yy})a$	$k_2$
8	$0, -a$	$-e_{xy}a$	$-e_{yy}a$	$k_1$
9	$a, -a$	$(e_{xx} - e_{yy})a$	$(e_{yy} - e_{yy})a$	$k_2$

为了获得与原子1连接的所有弹簧的总能量，还必须对式(39.45)中的能量再添加一项。虽然我们只有应变的x方向和y方向分量，但仍然有在 $xy$ 平面以外的、与次近邻相联系的某些能量，这附加的能量就是

$$k_2 (e_{xx}^2 a^2 + e_{yy}^2 a^2). \quad (39.46)$$

弹性常量与能量密度 $w$ 由式(39.13)相联系。我们已计算出来的能量是与一个原子联系着的能量，更确切地说，是每个原子能量的两倍，因为每条弹簧能量的一半必须分配给连接着的两个原子中的每一个。由于单位体积里共有 $1/a^3$ 个原子，所以 $w$ 与 $U_0$ 的关系为

$$w = \frac{U_0}{2a^3}.$$

要求出弹性常量 $C_{ijkl}$ ，只需完全写出式(39.45)中的那些平方项——再加上式(39.46)中的那些项——并把 $e_{ij}e_{kl}$ 的系数同式(39.13)中的相应系数做比较。例如，把含有 $e_{xx}^2$ 和 $e_{yy}^2$ 项

都搜集起来, 我们得到因子

$$(k_1 + 2k_2)a^2,$$

因而

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = \frac{k_1 + 2k_2}{a}.$$

对于剩下来的项, 就有一点儿复杂了。由于我们不能够把如  $e_{xx}e_{yy}$  这样的两项之积与  $e_{yy}e_{xx}$  区别开来, 所以在这些能量表式中这种项的系数就等于式(39.13)中这两项之和。在式(39.45)中  $e_{xx}e_{yy}$  的系数为  $2k_2$ , 因而我们有

$$(C_{xxyy} + C_{yxxz}) = \frac{2k_2}{a}.$$

但由于在我们的晶体中的对称性,  $C_{xxyy} = C_{yxxz}$ , 因而就有

$$C_{xxyy} = C_{yxxz} = \frac{k_2}{a}.$$

按照相似步骤, 也可以得到

$$C_{xyxy} = C_{yxzx} = \frac{k_2}{a}.$$

最后你们将注意到, 任何包含  $x$  或  $y$  只有一次的项都为零——和上面根据对称性的论证得出的结论相同。把上述结果综合如下:

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = \frac{k_1 + 2k_2}{a},$$

$$C_{xyxy} = C_{yxzx} = \frac{k_2}{a},$$

(39.47)

$$C_{xxyy} = C_{yxxz} = C_{yzyx} = C_{zyxy} = \frac{k_2}{a},$$

$$C_{xyxy} = C_{yxzx} = \cdots = 0.$$

我们已能够把大块材料的弹性常量与由常量  $k_1$  和  $k_2$  表现出来的那些原子性质联系了起来。在我们的特殊情况下,  $C_{xyxy} = C_{xxyy}$ 。结果是——正如你也许会从计算所要的方法中看到的——对于立方晶体来说, 这些项始终相等, 不管被计及的力项共有多少, 只要力的作用沿着每对原子间的连线——这就是说, 只要存在于原子之间的力是像弹簧那样的力, 而不是你也许会从一根悬梁那里得到的(以及你在共价键中所确实得到的)那种具有侧向部分的力。

我们可以用测定弹性常量的实验结果来核对这个结论。在表 39-2 中所给出的是若干种立方晶体的三个弹性系数的观测值\*。你将会注意到,  $C_{xxyy}$  与  $C_{xyxy}$  一般不相等。原因是, 在像钠和钾那些金属中原子间的力, 并不如同我们在上述模型中所假定的那样沿连接原

\* 在文献中你将常常发现使用不同符号的表示方法。比如, 人们往往写成  $C_{xxxx} = C_{11}$ ,  $C_{xxyy} = C_{12}$  和  $C_{xyxy} = C_{44}$ 。

子的直线。金刚石也不服从该定律，因为在金刚石内的力是共价力，具有某种方向性——那些键会更喜欢处在四面体角内。像氟化锂、氯化钠那样的离子晶体，的确几乎具有我们在模型中所假定的全部物理性质，因而  $C_{xxxy}$  和  $C_{xxyx}$  就几乎相等。但不清楚为什么氯化银会不满足  $C_{xxxy} = C_{xxyx}$  这一条件。

表 39-2\* 立方晶体的弹性模量(以  $10^{12} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2$  为单位)

	$C_{xxxx}$	$C_{xxxy}$	$C_{xxyx}$
Na	0.055	0.042	0.049
K	0.046	0.037	0.026
Fe	2.37	1.41	1.16
金刚石	10.76	1.25	5.76
Al	1.08	0.62	0.28
LiF	1.19	0.54	0.53
NaCl	0.486	0.127	0.128
KCl	0.40	0.062	0.062
NaBr	0.33	0.13	0.13
KI	0.27	0.043	0.042
AgCl	0.60	0.36	0.062

\* 转载自 Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*, 2nd ed., 1956. 93

# 第 40 章 干水的流动

## § 40-1 流体静力学

流体，特别是水的流动这一课题使每个人都着迷。我们均能记起自己小时候，在澡盆里或在泥浆水坑里与那种奇怪的东西玩耍。当我们逐渐长大时，便会注视着河流、瀑布以及旋涡水塘，因而被这种相对于固体来说似乎像是活生生的物质所迷住。流体的行为在许多方面都很出人意外并且十分有趣——它是本章和下一章的课题。在街上一个小孩子企图阻塞一股小水流的努力，以及他对水确定它的道路的那种奇特方式所感到的惊异，与我们多年来为理解流体流动所做的努力很类似。我们试图依靠获得的描述流动的那些定律和方程式——以我们的理解——来筑坝拦水。我们将在这一章中描述这些尝试。而在下一章中，将描述水如何会冲出水坝以及使我们理解它的努力落空的那种独特方式。

假定你们都已熟悉了水的基本性质。区别流体与固体的一个主要性质就是流体不能维持任意长的时间切应力。如果我们对流体作用一剪切力，则它将在这剪切力作用下运动。像蜂蜜那样较稠的液体，比起像空气或水的流体来就不那么容易流动。对一流体量度其屈服的难易程度的乃是它的黏滞性。在本章中，我们将只考虑其中黏滞性效应可以忽略的那些情况，黏滞性效应将在下一章中考虑。

我们将从考虑流体静力学，即静止时的流体理论开始。当流体静止时，就没有任何剪切力（甚至对于黏滞性液体亦然）。因此，流体静力学的定律是：应力总是垂直于流体内的任何一个面。单位面积的这个法向力叫做压强。从静止流体中不存在剪切力这一事实出发，就可以推断出压应力在所有方向都相等（图 40-1）。我们将让你们自己娱乐一下，即证明若在流体中的任一个面上都没有剪切力，则压强在任何方向必然相同。

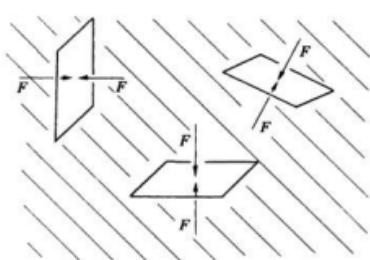


图 40-1 在一静止流体中，作用于任何截面上的单位面积的力与该面垂直，并且对于面上的所有取向都相同

流体中的压强可以逐处变化。例如，在地球表面的静流体中，压强将由于流体的重量而随高度变化。如果该流体的密度被认为不变，并且如果把某个任意零水平面处的压强称为  $p_0$ （图 40-2），则在水平面上以上高度为  $h$  处的压强就是  $p = p_0 - \rho gh$ ，其中  $g$  为单位质量的重力。因此，组合

$$p + \rho gh$$

在静止流体中是一恒量。这个关系式是你们熟悉的，但现在要来导出一个把上式作为一种特殊情况的、更为普遍的结果。

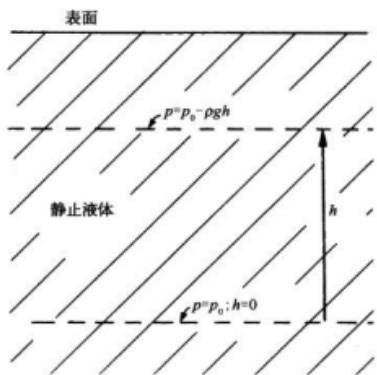


图 40-2 在一静止液体中的压强

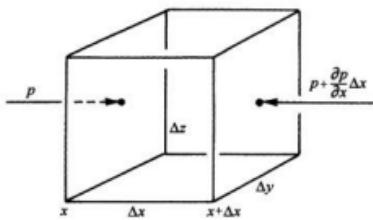


图 40-3 作用于立方体上的净压力为单位体积的 -nabla p

如果考虑水的一个小立方体,那么作用于其上的来自压强方面的净力是什么呢?因为在任何地方压强在各个方向都相同,所以仅由于压强的逐点变化就能够产生单位体积中的净力。假设压强在  $x$  方向上是变化的——而我们所选取的各坐标轴方向都平行于该立方体的各边。这样作用于  $x$  处面上的压强就会提供  $p \Delta y \Delta z$  的力(图 40-3),而在  $x + \Delta x$  处面上的压强则提供  $-[p + (\partial p / \partial x) \Delta x] \Delta y \Delta z$  的力,因而净力为  $-(\partial p / \partial x) \Delta x \Delta y \Delta z$ 。如果我们考虑这一立方体的其余各对表面,则不难看出,单位体积的压力为  $-\nabla p$ 。若除此之外还有别种力——诸如重力——则该压力就必须抵消它们才能得到平衡。

让我们考虑这种附加力可以由一势能来加以描述的情况,就像在重力情况下它应该是正确的那样,我们将令  $\phi$  代表单位质量的势能(比如,对于重力, $\phi$  就恰好是  $gz$ )。单位质量的力通过  $-\nabla \phi$  用势表示出,因而若  $\rho$  为流体密度,则单位体积中的力就是  $-\rho \nabla \phi$ 。对于平衡的情况来说,单位体积的这种力加上单位体积压强方面的力就必然为零:

$$-\nabla p - \rho \nabla \phi = 0. \quad (40.1)$$

式(40.1)就是流体静力学的方程。在一般情况下,它没有解。若密度在空间中按任意方式变化,就没有办法使得这些力互相抵消,因而该流体就不可能处于静平衡之中。此时对流将开始出现。我们从这一方程就可以清楚地看出,因为压强项是一纯粹梯度,而对于可变的  $\rho$  那里的另一项并不是梯度。只有当  $\rho$  是常数时,该势能项才是纯粹梯度。此时方程就有解

$$p + \rho \phi = \text{常数}.$$

另一种容许流体静力平衡的可能性是,  $\rho$  仅为  $p$  的函数。然而,我们将放下流体静力学这一课题,因为它与流体运动时相比远不是那么有趣。

## § 40-2 运 动 方 程

首先,我们按照一种纯抽象的、理论的方式来讨论流体的运动,然后才考虑一些特殊例

子。要描述流体的运动，我们必须给出它在每一点上的性质。比方，在不同地方，水（让我们称该流体为“水”吧）以不同的速度在运动。因此，要确定流动的特性，就必须给出任何时刻处于每一点的速度的三个分量。如果能够找到确定速度的方程式，那么我们就可能知道流体在所有时刻是怎样运动的了。然而，速度并非流体所具有的逐点变化的唯一性质。我们刚才已讨论过压强的逐点变化，此外还有其他各种变量，可能也存在密度的逐点变化。并且，该流体可能是一导体，其中载有在大小和方向上都逐点变化的密度为  $j$  的电流，还可能存在逐点变化着的温度或磁场，等等。因此，用以描述整个情况所需的场的数目就将取决于问题到底有多么复杂。当其中的电流和磁场对于确定流体行为起主要作用时就会出现一些有趣的现象，这个学科称为磁流体力学，目前正受到极大注意。然而，我们将不讨论这些较复杂的情况，因为在复杂性较低的水平上就已经有一些有趣的现象，而即使在这种较初级的水平也将是足够复杂的。

我们将考虑其中既没有磁场也没有导电性的那种情况，并且不必对温度操心，因为我们假定密度和压强会按照唯一的方式确定任何一点的温度。事实上，我们将通过做出密度不变的假定——设想该流体基本上是不可压缩的——以减少工作的复杂性。换句话说，我们是在假定压强变化是这样的小，以致由其产生的密度变化可以忽略不计。如果情况不是这样，则将遇到超出这里即将要加以讨论的范围之外的一些现象——比如说，声音或冲击波的传播。我们已在某种程度上讨论过声波和冲击波的传播，因而现在将通过做出密度  $\rho$  是一恒量的近似，把我们关于流体动力学的考虑与这些其他现象隔离开来。不难判定， $\rho$  不变的近似何时才是一个好的近似。我们可以说，若流动速度比流体中的声波的速率小得多，则无需担心密度的变化。水在我们尝试理解它的过程中所做的逃避与密度恒定的近似无关。那些的确容许逃避的复杂性将在下一章中讨论。

在有关流体的普遍理论中，人们必须从联系压强和密度的物态方程出发。在我们的近似中，这个物态方程仅是

$$\rho = \text{常数}.$$

于是，这就是关于各变量的第一个关系式。下一个关系式表示物质守恒——若物质从某一点流出，则所遗留下来的量中就一定有所减少。设流体的速度为  $v$ ，则单位时间流经单位面积的质量就是  $\rho v$  垂直于该面的分量。在电学中我们曾有过一个相似的关系式。从电学中也已知道，这个量的散度会给出单位时间内密度的减少率。同样，方程

$$\nabla \cdot (\rho v) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (40.2)$$

表示流体质量的守恒，它是流体动力学中的连续性方程。在我们的近似、即在不可压缩流体的近似下， $\rho$  是恒量，因而连续性方程就简单地为

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (40.3)$$

流体速度  $v$ ——像磁场  $B$  那样——具有零散度（流体动力学方程往往酷似电动力学方程，这就是为什么我们要先学习电动力学的缘故。有些人却从相反方面论证，认为人们应先学习流体动力学，以便此后能更易于理解电学。可是电动力学实际上要比流体动力学容易得多）。

我们将从牛顿定律得到下一个方程，而牛顿定律告诉我们速度是如何由于力的作用而发生变化的。流体中一个体积元的质量乘以其加速度必定等于作用在此体积元上的力。取一个

单位体积元，并将单位体积所受的力写成  $f$ ，便有

$$\rho \times (\text{加速度}) = f.$$

我们将把这个力密度写成下述三项之和。曾经讨论过作用于单位体积上的压力为 $-\nabla p$ 。此外，还有从远处作用着——像重力或电力那样——的一些“外”力。当它们是具有单位质量势  $\phi$  的保守力时，它们就会给出力密度 $-\rho \nabla \phi$ （若这些外力并非保守力，则必须把单位体积的外力写成  $f_{\text{外}}$ ）。因此，存在另一种单位体积的“内”力，它是由于在流动的流体中也可能存在剪切应力的事实引起的。这被称为黏滞力，我们将把它写成  $f_{\text{黏滞}}$ 。于是，流体的运动方程就是

$$\rho \times (\text{加速度}) = -\nabla p - \rho \nabla \phi + f_{\text{黏滞}}. \quad (40.4)$$

在本章中，我们将假定液体是“稀薄”的，这是在黏滞性不重要的意义上说的，从而将略去  $f_{\text{黏滞}}$ 。当去掉这一黏滞项时，我们就正在做出这样一种近似，即所描写的乃是某种理想材料而并非真正的水。冯·诺伊曼就曾深切地意识到当没有这一黏滞项与有这一项时所发生巨大差别，而他也意识到，在直到约 1900 年时流体力学的大部分发展中，几乎主要的兴趣都集中在求解具有这个近似、而几乎与实际流体毫无关系的那些漂亮的数学问题上。他把从事这种分析的理论家标志为研究“干水”的人们。这样的分析不考虑流体的基本性质。正是因为我们在本章的计算中都要忽略这一性质，所以才给它“干水的流动”这么一个标题。我们把对真实的水的讨论推迟到下一章去。

如果不考虑  $f_{\text{黏滞}}$ ，则在式(40.4)中除了关于加速度的表示式以外，我们就有了所需的一切。你或许会认为，关于流体质点的加速度公式会十分简单，因为似乎很明显，若  $v$  是流体中一个质点在某处的速度，则加速度该不过是  $\partial v / \partial t$  罢了。但这并不对——而且是由于某一相当微妙的原因。微商  $\partial v / \partial t$  是在空间一个固定点的速度  $v(x, y, z, t)$  的变化率。我们所需要的却是关于流体一个特定部分的速度变化有多快。试想象对其中一滴水用有色斑点来标明，以便能够对它进行观察。在一个小的时间间隔  $\Delta t$  内，这一滴水将移动至一个不同的位置。如果该滴水正在沿某一如图 40-4 所示意的路径运动，则它可能在  $\Delta t$  内从  $P_1$  移动至  $P_2$ 。事实上，它将在  $x$  方向移动量  $v_x \Delta t$ ，在  $y$  方向移动量  $v_y \Delta t$ ，并在  $z$  方向移动量  $v_z \Delta t$ 。我们看到，若  $v(x, y, z, t)$  为时刻  $t$  在  $(x, y, z)$  处的流体质点的速度，则这同一质点在  $t + \Delta t$  时刻的速度由  $v(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t, t + \Delta t)$  给出，其中

$$\Delta x = v_x \Delta t, \quad \Delta y = v_y \Delta t, \quad \Delta z = v_z \Delta t.$$

根据偏微商的定义——回顾式(2.7)——我们对它展开至第一级，有

$$\begin{aligned} &v(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t, t + \Delta t) \\ &= v(x, y, z, t) + \frac{\partial v}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial v}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial v}{\partial z} v_z \Delta t + \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t. \end{aligned}$$

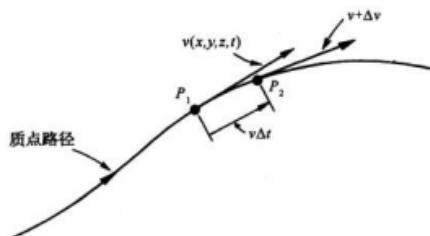


图 40-4 一流体质点的加速度

因而加速度  $\Delta v / \Delta t$  为

$$v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

可以用算符形式将这个式——把  $\nabla$  当成一个矢量看待——写成

$$(v \cdot \nabla)v + \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (40.5)$$

注意, 即使  $\partial v / \partial t = 0$ , 以致在给定点的速度不再变化, 但仍可能有加速度。作为一个例子, 以恒定速率沿一圆周流动着的水正在作加速运动, 尽管在一给定点的速度并不发生变化。当然, 原因在于, 起初在圆周某点的特定部位的水, 一会儿之后其速度已经有了不同的方向, 这表明存在一个向心加速度。

上述理论的其余部分就只是数学方面的了——先将式(40.5)中的加速度代入式(40.4)而得到运动方程, 然后求运动方程的解。我们得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi, \quad (40.6)$$

在此式中黏滞性已被略去。利用从矢量分析得来的下列恒等式:

$$(v \cdot \nabla)v = (\nabla \times v) \times v + \frac{1}{2} \nabla(v \cdot v)$$

可以把上述方程重新整理。如果现在定义一个新的矢量场  $\Omega$ , 例如  $v$  的旋度,

$$\Omega = \nabla \times v, \quad (40.7)$$

则上面的矢量恒等式还可以写成

$$(v \cdot \nabla)v = \Omega \times v + \frac{1}{2} \nabla v^2,$$

而我们的运动方程式(40.6)就变成

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Omega \times v + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi. \quad (40.8)$$

你可以利用式(40.7)通过核对方程中两边的各分量都彼此相等, 而证实式(40.6)和(40.8)两方程是等效的。

矢量场  $\Omega$  被称为涡度。如果涡度处处为零, 则我们就说流动是无旋的。我们曾在 § 3-5 中定义过一个称为矢量场的环流的东西。在给定时刻, 在流体中环绕任一闭合回路的环流等于流体速度环绕该回路的线积分:

$$(环流) = \oint v \cdot ds.$$

于是对于一个无限小的回路来说, 单位面积的环流——利用斯托克斯定理——就等于  $\nabla \times v$ 。因此, 涡度  $\Omega$  就是围绕一单位面积(垂直于  $\Omega$  的方向)的环流。由此也可推断出: 如果你将一小片灰尘——不是无限小的点——放进该液体中任何地方, 它就会以角速度  $\Omega/2$  旋转。试试看你能否证明这个结论。你也可以对放在一个转台上的一桶水加以核对, 这时

$\Omega$  等于水的局部角速度的两倍。

如果我们仅对于速度场感兴趣，则可将压强从各式中消去。取式(40.8)两边的旋度，记住  $\rho$  是恒量，而任一梯度的旋度都为零，并利用式(40.3)，便得

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times v) = 0. \quad (40.9)$$

上述方程，结合下列两式

$$\Omega = \nabla \times v, \quad (40.10)$$

和

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (40.11)$$

就完整地描述了速度场  $v$ 。从数学方面讲，如果在某一时刻知道了  $\Omega$ ，那么我们会知道速度矢量的旋度，而同时也明白速度的散度为零，因而若给定该物理情况，我们便具有确定每一处  $v$  所需的一切了（这刚好与磁学中的情况相似，在那里曾经有  $\nabla \cdot B = 0$  和  $\nabla \times B = j / (\epsilon_0 c^2)$ ）。于是，一个给定的  $\Omega$  会确定  $v$ ，就正如一个给定的  $j$  会确定  $B$  一样。因此，一旦知道了  $v$ ，方程式(40.9)便告诉我们关于  $\Omega$  的变化率，由此可以获得下一时刻的新  $\Omega$ 。利用式(40.10)，我们又求出一个新的  $v$  来，如此等等。我现在必须告诉你这些方程怎么会包含为计算流动所需的一切机制。然而，要注意这种方法只会给出速度场，我们已经失去了有关压强方面的一切信息。

我们指出该方程的一个特殊后果。若在任何时刻  $t$  各处  $\Omega = 0$ ，则  $\partial \Omega / \partial t$  也为零，以致在  $t + \Delta t$  时刻  $\Omega$  仍然处处为零。我们得到了方程的一个解，流动永远是无旋的。假如流动从零转动开始，就永远不会有旋转。此时，待解的方程组为

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \nabla \times v = 0.$$

它们恰好像自由空间中的静电场或静磁场方程组。对此我们以后将回来再做讨论，并考察其中某些特殊问题。

### § 40-3 定常流——伯努利定理

现在要回到运动方程式(40.8)上来，但将限于讨论“定常”流动的情况。所谓定常流动我们指的是，在流体中任何地方的速度永远不会发生变化的流动。在任何地点的液体，总是被新的流体以完全相同的方式所代替。速度图看起来总是相同的—— $v$  是一个静止的矢量场。用我们在静磁学中画出“场线”一样的方法，现在也可以把那些始终与流体速度相切的线画出来，如图 40-5 所示。这些线称为流线。对于定常流来说，它们显然就是流体微粒的实际路径（在非定常流中，这个流线图样会随时改变，因而在任何时刻的流线图样就并不代表流体微粒的路径）。

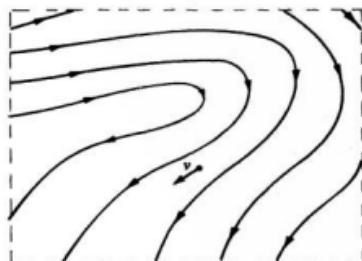


图 40-5 流体定常流动中的流线

定常流并不意味着没有什么情况发生, 流体中的原子正在运动和改变其速度。它仅仅意味着  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ 。因此, 若我们以  $\mathbf{v}$  点乘该运动方程, 则项  $\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v})$  就会消失, 而仅留下

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left\{ \frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right\} = 0. \quad (40.12)$$

上述方程表明, 对于沿流体速度方向的一个小位移来说, 括号内的量不会改变。这时, 在定常流中的所有位移都沿着流线, 因而式(40.12)告诉我们: 对于沿流线的所有点, 我们能够写出

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = \text{常数(沿着流线)}. \quad (40.13)$$

这就是伯努利定理。一般来说, 右边那个常数, 对于不同流线可以有所不同, 尽我们所知就是: 式(40.13)左边沿一给定流线是完全相同的。顺便说说, 我们不妨注意, 对于  $\boldsymbol{\Omega} = 0$  的那种定常无旋运动, 运动方程式(40.8)会向我们提供下面的关系

$$\nabla \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi \right\} = 0,$$

使得

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = \text{常数(处处)}. \quad (40.14)$$

除了现在该常数对于整个流体都具有相同值之外, 该式与式(40.13)完全相同。

事实上, 伯努利定理只不过是关于能量守恒的一种表述。像这样的一个守恒定理会提供关于流动的大量信息, 而不必实际去解那些详尽的方程。伯努利定理竟是那么重要而又那么简单, 使得我们愿意向你们表明, 如何才能用一种与刚才所用的正规运算不同的方式将其推导出来。设想如图 40-6 所示的、由一束相邻流线所形成的一个流管。由于这个管的壁是由流线构成的, 所以就不会有流体穿越管壁流出来。让我们把这个流管一端的截面叫作  $A_1$ , 那里的流速为  $v_1$ , 密度为  $\rho_1$ , 而势能为  $\phi_1$ 。在管的另一端, 这些对应的量则分别为  $A_2$ ,  $v_2$ ,  $\rho_2$  和  $\phi_2$ 。现在, 在经历了一个短短的时间间隔  $\Delta t$  之后, 在  $A_1$  处的流体已经移动一小段距离  $v_1 \Delta t$ , 而在  $A_2$  处的流体则移动另一段距离  $v_2 \Delta t$  [图 40-6(b)]。质量守恒要求凡通过  $A_1$  而进入的质量必须等于通过  $A_2$  而离开的质量。在管两端这两质量必定相同:

$$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t.$$

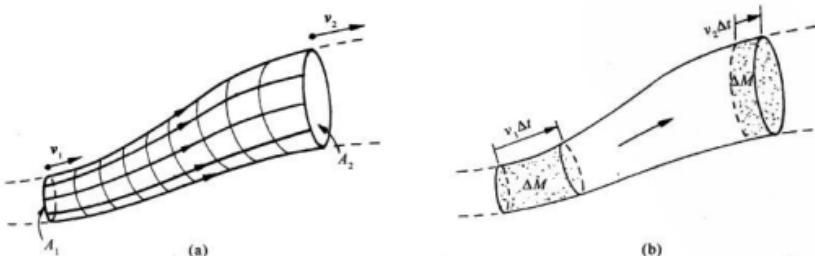


图 40-6 流体在流管里的运动

因此,就有等式

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2. \quad (40.15)$$

这个方程告诉我们:若  $\rho$  是一恒量,则速度与流管的截面积成反比。

现在要来计算由流体压强所做的功。对  $A_1$  处进入的流体所做的功为  $p_1 A_1 v_1 \Delta t$ ,而在  $A_2$  处流体对外所做的功则为  $p_2 A_2 v_2 \Delta t$ 。因此,对  $A_1$  与  $A_2$  之间流体所做净功为

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t,$$

它必定等于质量为  $\Delta M$  的流体在从  $A_1$  至  $A_2$  的运动过程中能量的增加,换句话说,

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = \Delta M(E_2 - E_1), \quad (40.16)$$

其中  $E_1$  为在  $A_1$  处单位质量的流体能量,而  $E_2$  则为在  $A_2$  处单位质量的能量。流体的单位质量能量可以写成

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \phi + U,$$

其中  $\frac{1}{2}v^2$  为单位质量的动能,  $\phi$  为单位质量的势能,而  $U$  则代表流体单位质量的内能的一个附加项。例如,内能也许相当于可压缩流体中的热能或化学能。所有这些量都可以逐点变化。把这种能量的形式应用到式(40.16)中,则有

$$\frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta M} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta M} = \frac{1}{2}v_2^2 + \phi_2 + U_2 - \frac{1}{2}v_1^2 - \phi_1 - U_1.$$

但我们已经知道  $\Delta M = \rho A v \Delta t$ , 所以得到

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}v_1^2 + \phi_1 + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}v_2^2 + \phi_2 + U_2, \quad (40.17)$$

这是带有内能附加项的伯努利方程。若流体是不可压缩的,则该内能项在两边相等,而我们再一次得到:方程式(40.14)沿任何流线成立。

现在考虑某些简单例子,其中伯努利积分给我们提供了对流动的描述。假设有水从靠近桶底的一个小孔流出来,如图 40-7 所示。我们考虑这种情况,即其中小孔处的流速  $v_{出口}$  比靠近桶顶处的流速要大得多,换句话说,设想桶的直径大到我们可以略去液面的下落(只要愿意我们可以做更精确的计算)。在桶顶处压强为  $p_0$ ,即大气压,而在出口旁的压强也是  $p_0$ 。现在就对诸如图上所画出来的那条流线写出伯努利方程。在桶顶,我们取  $v$

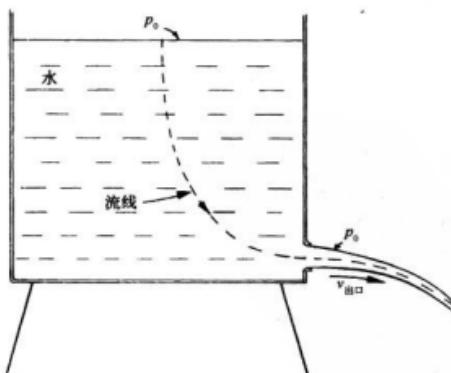


图 40-7 从水桶喷出的水流

等于零,同时也取重力势  $\phi$  为零。在出口处速率为  $v_{\text{出口}}$ , 而  $\phi = -gh$ , 因而

$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_{\text{出口}}^2 - \rho g h,$$

也即

$$v_{\text{出口}} = \sqrt{2gh}. \quad (40.18)$$

这一速度恰好就是某一物体下落了距离  $h$  应该得到的速度。这不会太令人惊异,因为水在出口处获得的动能是以在桶顶的势能作为代价的。然而,一定不要由此得出这样的概念,即可以用这一速度乘该小孔面积而算出流体从该桶流出的流量。流体喷离小孔时,其速度并非完全互相平行,而是带有向内朝着流线中心的分量——水流在收缩。在经过了一小段路

程后,这水流的收缩便停止,而速度的确变成平行。因此,总流量乃是速度乘以该点所在处的面积。事实上,若我们有一个排水口恰好是圆形而有锐利边缘的小孔,则水流将缩小至小孔面积的 62%。对于不同形状的排水管,这缩小后的有效排水面积是不相同的,而实验上的收缩率可以从射流系数表查得。

如果排水管属于凹入式的,如图 40-8 所示,则人们可用最漂亮的方式证明这射流系数恰为 50%。下面将仅仅给出如何做这一证明的一点提示。我们已用能量守恒获得了速度,即式(40.18),但动量守恒也值得加以考虑。既然在排出水流中有动量流出,就一定有一个力作用于排水管的横截面上。这力是从哪里来的呢? 力必须来自桶壁上的压强。只要该

射流孔细小并远离桶壁,则靠近桶壁的流体速度将很小。因此,作用于每个面上的压强就与在静止流体中的静压强——从式(40.14)中得出的——几乎完全一样。于是,在桶的侧壁上任一点处的静压强就必定与对面壁上一点处的相等压强相对应,除了排出管对面壁上的那些点以外。如果我们算出由这一压强所引起的通过出口而流出的动量,则就能够证明射流系数为 1/2。然而,对于像图 40-7 所示的那种排水孔我们就不能应用这一方法,因为沿桶壁一直到接近排水孔的区域速度增大所产生的压强降,是我们无法算出的。

让我们来看另一例子——一根截面变化的水平管,如图 40-9 所示,水从一端流入,而由另一端流出。能量守恒、亦即伯努利公式表明:在速度较高的那个颈缩区压强比较低。我们可以通过下述办法轻易地演示这一效应,即利用在流管的不同截面处接上一些竖直的小口径管子——小到不会影响流动——来量度各处的压强。这时,压强是由这些竖直管中的水柱高度来量度的。在颈缩处所求得的压强小于两侧的压强。如果在经过颈

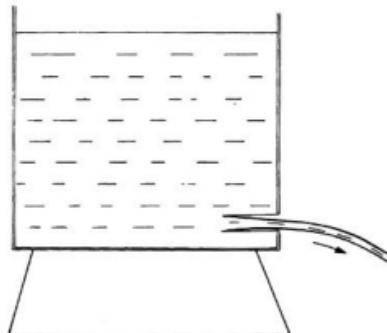


图 40-8 若用一条凹入式排水管,则水流将缩小至出口面积的一半

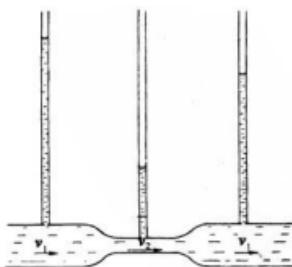


图 40-9 在速度最大处压强最低

缩区之后，面积又恢复到颈缩区前相同的值，则压强又会再升高。伯努利公式会预言，在颈缩区下游的压强应与上游的一样，但实际上显著地较低。我们的预言所以有误，是由于忽略了那些摩擦、黏滞力之故，这些力会引起压强沿着管道下降。尽管存在这种压强降，但在颈缩处的压强（由于增大的速率）仍明显地低于其两侧的压强——正如伯努利所预言的那样，速率  $v_2$  肯定应当超过  $v_1$  才能使相同的水量流经较窄的管道。因此，水在从宽处流经窄的部分时是被加速的。产生这一加速度的力则来自压强降。

还可用另一个简单的演示来核对我们的结果。假设有一个接于桶旁而会向上喷射的排水管，如图 40-10 所示。要是射流速度恰好等于  $\sqrt{2gh}$ ，则这排出的水就应当上升至与桶内水面相平的高度。实验表明，它稍微低了一点。我们的预言大致正确，但在能量守恒公式中那还未被包括进去的黏滞阻力又一次引起了能量损耗。

你有没有拿着两张互相靠近的纸片而试图把它们吹开？试试看。它们会互相靠紧。当然，原因是，空气流经两张纸片中间狭窄的空间时，比起流经外面来具有较高速率。两纸片之间的压强比大气压低，因而它们就互相靠近而不是互相离开。

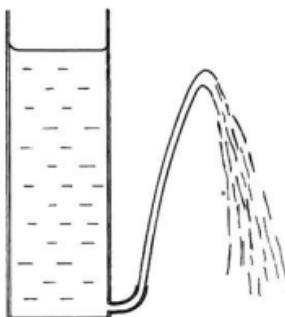


图 40-10  $v \neq \sqrt{2gh}$  的证明

#### § 40-4 环 流

在上一节的开头我们曾经看到，若不可压缩流体中不存在环流，则流动满足下列两个方程：

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \nabla \times v = 0. \quad (40.19)$$

它们与自由空间中的静电或静磁方程组相同。当没有电荷时，电场的散度为零，而电场的旋度则总是等于零的。若没有电流，磁场的旋度为零，而磁场的散度则永远等于零。因此，方程组(40.19)与静电学中关于  $E$  或静磁学中关于  $B$  的方程组具有相同的解。事实上，在 § 12-5 中，作为对静电学的类比，我们曾解过流体流经一个球体的那种流动问题。该电学模拟就是一匀强电场加上一偶极子场。这偶极子场被调整到使得垂直于球面上的流速为零。对经由一根柱体的同样的流动问题，可以按相似的办法即利用一个适当的线型偶极子场和一均匀流场来算出。对于在远处的流速——包括大小和方向——为恒量的那种情况，这一种解答是正确的。这个解的示意图为图 40-11(a)。

当条件使得在远处的流体沿着围绕该柱体的圆周运动时，对于围绕柱体的流动就有另一个解。于是，流动处处都是圆周，如图 40-11(b)所示。这样的流动有一个围绕着该柱体的环流，尽管此时在流体中  $\nabla \times v$  仍为零。怎样才能有环流而没有旋度呢？围绕该柱体有环流是因为环绕任一包围柱体在内的回路的  $v$  的线积分不等于零。同时， $v$  围绕任一不包含该柱体在内的闭合路径的线积分都是零。当我们过去求围绕一根导线的磁场时，也曾见过这相同的事情。在导线外  $B$  的旋度为零，虽然围绕一条包围该导线在内

的路径  $B$  的线积分却不为零。在围绕柱体的无旋环流中的速度场,与围绕一根导线的磁场恰好相同。对于以柱体的轴心为中心的一条圆周路径来说,速度的线积分为

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r v.$$

在无旋流动中这一积分必然与  $r$  无关,让我们把这一常数值称作  $c$ ,那么便有

$$v = \frac{c}{2\pi r}, \quad (40.20)$$

式中  $v$  是切向速度,而  $r$  是距轴的距离。

关于围绕一小孔的流体环流可以做一个精彩的演示。你取一个在底面中心处开有一个排水孔的透明柱形桶。把这个桶装满了水,用一根棍子在其中搅起一些环流,然后拉开孔塞,你便会获得如图 40-12 所示的那种漂亮的效应(你在浴盆中也曾多次见过与此相类似的东西)。虽然你在开始时加入某个  $\omega$ ,但由于黏滞性的缘故它不久就会消失而流动变成无旋的了——尽管此时还有围绕着该排水孔的环流。

根据理论,我们能够算出水的内表面形状。当一个水的质点向中心流入时,它会获得速率。根据式(40.20),该切向速度与  $1/r$  成正比——这恰好出自角动量守恒——像溜冰者缩回两只手臂一样,并

图 40-11 (a) 理想流体正流经一根柱体; (b) 围绕柱体的环流; (c) 是(a)和(b)两者的叠加

且径向速度也表现为  $1/r$  的形式。若略去切向运动,就有水沿着径向朝中心流进孔里,根据  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ,可以推断出径向速度会正比于  $1/r$ 。因此,总速度也与  $1/r$  成正比,从而水将沿着阿基米德螺线流动。空气与水间的界面全都处于大气压强下,因而根据式(40.14)它必须具有这么一种性质:

$$gz + \frac{1}{2}v^2 = \text{常数}.$$

但由于  $v$  与  $1/r$  成正比,从而该表面形状为:

$$(z - z_0) = \frac{k}{r^2}.$$

一个有趣的地方——这一般说是不正确的,但对于不可压缩的无旋流动则是正确的——乃是:若我们有两个解,则它们之和也是一个解。这所以正确,是因为方程组(40.19)是线性的。流体动力学的完整方程组(40.8)、(40.9)和(40.10)都不是线性的,这就造成巨大的差别。然而,对于围绕柱体的无旋流动来说,我们可以将图 40-11(a)的流动叠加于图 40-11(b)的流动之上,而获得一个如图 40-11(c)所示的那种新型

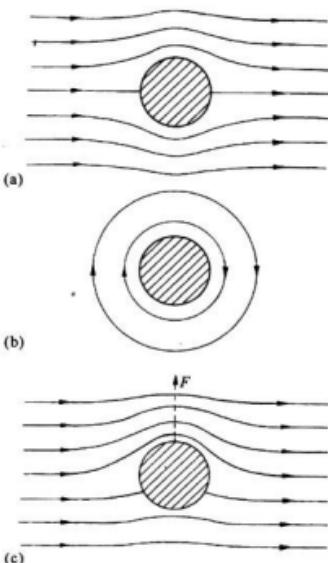


图 40-12 带有环流的水从桶中排出

流动图样。这种流动特别有趣，在柱体上面的流速比在其下面的要高。因此，在上面的压强就比在下面的低。这样，当一个围绕着柱体的环流与一个纯水平方向的流动相结合时，就会有一个净的垂直方向的力作用于该柱体上——这个力被称为升力。当然，按照我们关于“干”水的理论，若没有环流，则就不会有净力作用于任何物体上。

## § 40-5 涡 线

对于可能有涡旋的不可压缩流体，其流动的一般方程式为

$$\text{I.} \quad \nabla \cdot v = 0,$$

$$\text{II.} \quad \Omega = \nabla \times v,$$

$$\text{III.} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times v) = 0.$$

这些方程的物理内容曾由亥姆霍兹通过三个定理用语言描述过。首先，设想在流体中我们应该画出涡线而不是流线。所谓涡线，指的是具有  $\Omega$  的方向、并在任何区域里都具有与  $\Omega$  的大小成正比的密度的那种场线。根据上列方程 II,  $\Omega$  的散度始终等于零(回忆起 § 3-7 中旋度的散度总是零)。因此，涡线就像  $B$  线，它们从来既没有始点也没有终点，因而往往会造成闭合回路。现在亥姆霍兹通过下述这一句话来描述 III：涡线随流体一起在运动。这意味着：假如你对沿某些涡线的流体质点加以标志——比如用墨水给它们着色——那么当流体带着那些质点一起运动时，它们将始终标志着那些涡线的新位置。无论流体中的原子怎样运动，涡线总是跟着它们一起前行。这是描述那些定律的一种方法。

它也提供了求解任何问题的一种方法。给出最初的流动图样——比如，各处的  $v$  值——那么你便可以算出  $\Omega$  来。根据  $v$  你也可以讲出在一会儿之后那些涡线将会跑到哪里——它们以速率  $v$  运动。用新的  $\Omega$ ，你便可以应用方程 I 和 II 求出新的  $v$ (这很像给定电流后求  $B$  的问题)。如果我们得到了某一时刻的流动图像，则在原则上就可以算出后来一切时刻的图像。因此我们就得到关于非黏滞流动的一般解。

现在要来说明：亥姆霍兹的表述——因而也就是 III——如何才能够至少部分地加以理解。实际上它仅仅是应用于流体的角动量守恒定律。试设想一个其轴平行于涡线的液态小柱体，如图 40-13(a)所示。在此后某一时刻，这同一块流体

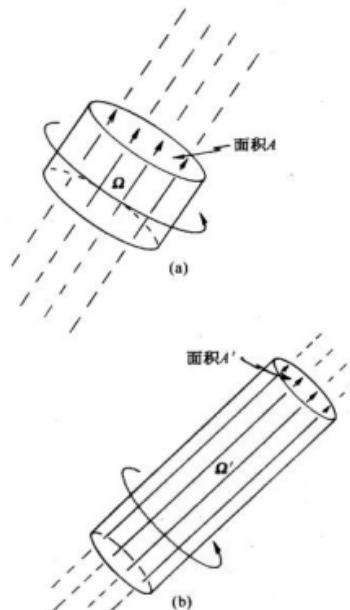


图 40-13 (a) 在  $t$  时刻的一群涡线；  
(b) 同一群线在较迟的  $t'$  时刻

将移至别处。一般说来，它将占据一个直径不同的柱体并将位于不同的地方。它也可以有不同取向，比如图 40-13(b)所示的那样。但是，若直径已经变小，则长度就会增长，以保持其体积不变（因为我们假定的是一种不可压缩的流体）。并且，由于涡线离不开材料，所以其密度就会随截面的缩小而增大。涡度  $\Omega$  与该柱体的截面积  $A$  两者之积将保持不变，因而按照亥姆霍兹表述，应有

$$\Omega_2 A_2 = \Omega_1 A_1. \quad (40.21)$$

现在要注意：由于黏滞性为零，因而所有作用于该柱体（就那事来说，或任何体积）的表面上的力就都垂直于该表面，这种压力能够导致该体积从一处移至另一处，也能使它改变形状，但由于没有切向力，所以材料内部的角动量的大小就不可能改变。该小柱体内液体的角动量等于其转动惯量  $I$  乘以液体的角速度，它正比于涡度  $\Omega$ 。对于柱体来说，转动惯量正比于  $mr^2$ 。因此根据角动量守恒，我们就应该断定

$$(M_1 R_1^2) \Omega_1 = (M_2 R_2^2) \Omega_2.$$

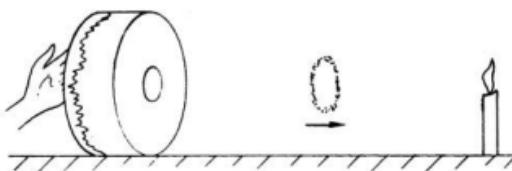


图 40-14 造成一个正在移动的涡环

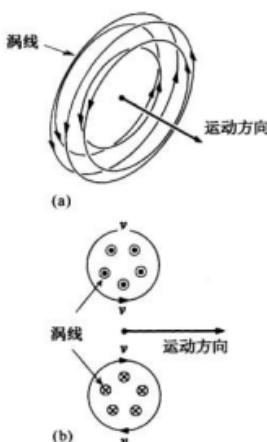


图 40-15 一个运动着的涡环（烟环）。(a) 涡线；(b) 涡环的截面

可是质量彼此相同，即  $M_1 = M_2$ ，而截面积则正比于  $R^2$ ，因而我们又再次得到方程式(40.21)。亥姆霍兹的表述——与Ⅲ等效——正好是在没有黏滞性的条件下流体元的角动量不可能发生改变这一事实的推论。

有一个用图 40-14 所示的简单设备形成运动涡旋的精彩演示。用一张绷紧的厚橡胶膜覆盖在一个柱形箱的开端上构成一个“鼓”，鼓的直径 2 ft，深也是 2 ft。鼓“底”——这个鼓被翻倒而靠它的侧壁支持着——除了有一个直径 3 in 的孔外，周围都密闭。如果你用手在橡胶膜上猛击一下，一个涡环就被从孔中投射出来。尽管涡旋看不见，但你却能说出它在那儿，因为它会吹熄放在 10~20 ft 远处的一支蜡烛。根据这一效应的迟延时间，你可以说出“某种东西”正在以一有限的速率行进着。如果你先将一些烟雾吹进箱子里，则还能对发生的情况看得更清楚。这时你会把涡旋看成一个美丽的圆“烟环”。

烟环是环状的涡线群，如图 40-15(a)所示。由于  $\Omega = \nabla \times \mathbf{v}$ ，这些涡线也代表图(b)中的  $\mathbf{v}$  的环流。我们可以按

照下述办法来理解烟环的前进运动：环底附近的环流速度会延伸到环顶，而那里就有一个前进运动了。由于  $\Omega$  线同流体一起运动，这些线也就以速度  $v$  向前运动（当然，环顶部附近的  $v$  的环流导致底部的涡线的向前运动）。

现在必须提到一个严重的困难。我们已经注意到式(40.9)表明：若  $\Omega$  起初为零，则它将永远为零。这个结果表明“干”水理论的大失败，因为它意味着，一旦  $\Omega$  为零，则它将永远为零——在任何场合下都不能产生任何涡度。可是，在我们利用那个鼓的简单演示中，却能够从原来是静止的空气里产生出涡环来（肯定在我们击鼓以前，鼓箱里处处都是  $v = 0, \Omega = 0$ ）。并且，我们全都知道，可以在湖水中用一柄桨来发生一些涡旋。显然，必须研究“湿”水的理论才能对流体的行为得到充分理解。

干水理论的另一不正确之处在于，在考虑流体与固体表面之间边界处的流动时我们所做的那种假设。过去当讨论经过柱体的流动——例如在图 40-11 中的那种流动——时，我们曾容许流体能沿固体表面滑动。在我们的理论中，在固体表面处的速度可以有任何值，这取决于该流动是怎样开始的，而我们就从未考虑过流体与固体之间的任何“摩擦”。然而，实验事实是，实际流体的速度在一固态物体的表面总是趋于零的。因此，我们关于柱体的解，不管有无环流，都是错误的——正如有关产生涡度的那种结果一样。我们将在下一章中告诉你们较为正确的理论。

# 第41章 湿水的流动

## § 41-1 黏性

在上一章我们曾在忽略黏性现象的情况下讨论过水的行为，现在想要讨论包括黏性效应在内的流体流动。我们希望考察流体的实际行为，定性地讨论在各种不同场合下流体的实际行为，使得你对这一课题将会有某些感触。虽然你将看到某些复杂方程，并听到某些复杂的事情，但这并非我们要求你必须学习所有这些东西的目的。在某种意义上，这是一章“文化课”，它将给予你这个世界存在方式的某些概念，其中只有一项是值得学习的，那就是我们立即将加以讨论的有关黏性的简单定义，其余的就只是为了向你们提供乐趣。

上一章中我们曾经发现，流体运动的规律全都包含在下述方程中，

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi + \frac{\mathbf{f}_E}{\rho}. \quad (41.1)$$

在我们的“干”水近似中曾去掉了末项，从而忽略了所有的黏性效应。并且，有时还由于考虑到流体是不可压缩的而做出一个附加近似，这时我们就有过一个补充方程

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

这最后一种近似往往很有效——特别是当流速比声速小得多的时候。但在实际流体中，认为可以略去我们所称之为黏性的那种内摩擦力几乎是绝对不正确的，而发生的大部分有趣的事情总是来自这种黏性。例如，我们曾见到在“干”水中环流永不会改变——如果开始时没有一个环流，往后也永不会有。可是，流体内的环流却是每天都要发生的事情。我们必须修补我们的理论。

我们从一个重要的实验事实着手。当我们过去算出“干”水环绕或经过一根柱体而流动——即所谓“有势流动”——时，我们没有理由不容许水具有与表面相切的速度，只有法向分量才必须等于零。我们并未把液体与固体之间或许会存在剪切力的那种可能性考虑进去。结果是——虽然并不是完全不言而喻的——在为实验所证实的一切场合下，在固体表面流体速度恰好为零。无疑，你已注意到风扇叶片会积聚一薄层灰尘——而当风扇已经把空气搅动后灰尘仍然留在那里。甚至在风洞中的大型风扇上，你也可以看到同样的效应。为什么灰尘不会给空气吹跑了呢？虽然事实是扇叶正以高速穿越空气而运动，但空气相对于扇叶的速率在叶面上恰好趋向于零。因此，那些最小的尘埃粒子才没有被扰动\*。所以我们必须对理论作出修正，以便能够与这个实验事实相符，即在一切通常的流体中，那些靠

\* 你能够将大的尘埃粒子从桌面上吹掉，但不能吹去十分微细的灰尘，那些大的才会掉进到微风里去。

近固体表面的分子都会有零速度(相对于表面而言)\*。

我们原来是由这个事实来标志液体的,即如果你对它作用一个切应力——不管多么小——它就会放弃抵抗。它流动了。在静止情况下,不会有剪切应力。但在达到平衡之前——只要你仍然推动它——就可能存在剪切力。黏性描述了存在于运动流体中的剪切力。为要得到流体运动时剪切力的量度,我们考虑下述实验。假设有两块其间夹有水的固体平面,如图 41-1 所示,保持其中一块固定,而另一块则以低速率  $v_0$  对其作平行运动。如果你对保持上板运动所需要的力进行测量,你会发现这力与板的面积和  $v_0/d$  都成正比,其中  $d$  为两板间的距离。因此,剪切应力  $F/A$  正比于  $v_0/d$ :

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d}.$$

比例常数  $\eta$  称为黏性系数。

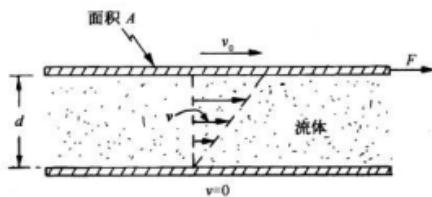


图 41-1 在两平行板之间的黏性阻力

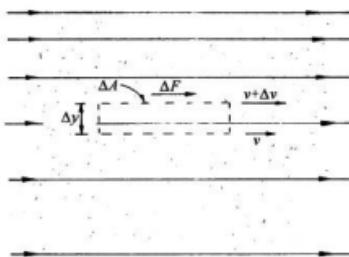


图 41-2 在一黏性流体中的剪切应力

如果我们有一较复杂情况,则总可以考虑水中一个小而平坦的矩形单元,其上下两面都平行于水流,如图 41-2 所示。整个这单元上的剪切力由下式给出:

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (41.2)$$

此时,  $\partial v_x / \partial y$  就是我们曾在第 38 章中定义过的剪切应变的变化率,因而对于液体来说,剪切应力与剪切应变的变化率成正比。

在一般情况下,我们写成

$$S_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right). \quad (41.3)$$

如果流体有一匀速转动,则  $\partial v_x / \partial y$  是  $\partial v_y / \partial x$  的负值,因而  $S_{xy}$  为零——正应该如此,因为在匀速转动的流体中不存在应力(我们在第 39 章中对  $\epsilon_{xy}$  下定义时做过类似的事情)。当然,还有关于  $S_{yx}$  和  $S_{zz}$  的相应表示式。

作为应用这些概念的一个例子,我们考虑在两个同轴圆筒间流体的运动。设内筒半径

\* 若情况不真实,你可以想象:虽然在理论上玻璃是一种“液体”,但肯定能够把它制造得沿钢面滑动。因此,我们的说法必然会在某处失效。

为  $a$ , 圆周线速度为  $v_a$ , 而令外筒具有半径  $b$  和圆周线速度  $v_b$ , 参见图 41-3。我们也许会问, 在两筒之间的速度分布如何? 为回答这一问题, 我们从找出流体中距轴心为  $r$  处的黏性剪切力公式开始。

根据问题的对称性, 我们可以假定流动总是沿着切向的, 而其大小仅取决于  $r$ ,  $v = v(r)$ 。如果注视水里半径为  $r$  处的一个小斑点, 它的坐标作为时间的函数为

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t,$$

其中  $\omega = v/r$ 。于是速度的  $x$  和  $y$  分量就是

$$v_x = -r \omega \sin \omega t = -\omega y$$

和

$$v_y = r \omega \cos \omega t = \omega x. \quad (41.4)$$

根据式(41.3), 我们有

$$S_{xy} = \eta \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x\omega) - \frac{\partial}{\partial y} (y\omega) \right] = \eta \left[ x \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]. \quad (41.5)$$

图 41-3 在以不同角速度旋转着的两个同心筒之间流体的流动

对于  $y = 0$  的一点,  $\partial \omega / \partial y = 0$ , 而  $x \partial \omega / \partial x$  与  $r d\omega / dr$  相同。因此在该点上,

$$(S_{xy})_{y=0} = \eta r \frac{d\omega}{dr} \quad (41.6)$$

( $S$  应依赖于  $\partial \omega / \partial r$  是合理的, 当  $\omega$  不随  $r$  变化时, 流体就处匀速转动之中因而不会有应力存在)。

我们已算出来的应力是切线方向剪切应力, 围绕着整个柱面它们都相同。通过把剪切应力乘以矩臂  $r$  和面积  $2\pi rl$ , 就可以获得作用于半径  $r$  处的整个柱形面上的转矩。我们得到

$$\tau = 2\pi r^2 l (S_{xy})_{y=0} = 2\pi \eta lr^3 \frac{d\omega}{dr}. \quad (41.7)$$

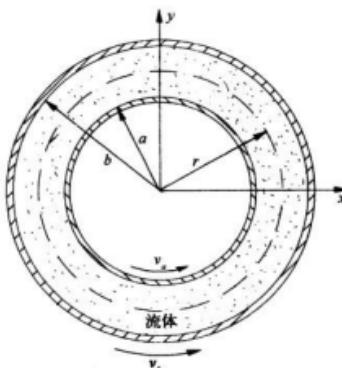
由于水的运动是定常的——没有角加速度——因而作用于  $r$  与  $r + dr$  间水的柱壳上净转矩必然为零, 这就是说, 在  $r$  处的转矩势必被在  $r + dr$  处的一个相等而相反的转矩所抵消, 使得  $\tau$  必须与  $r$  无关。换句话说,  $r^3 d\omega / dr$  等于某个恒量, 比方说  $A$ , 因而

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{A}{r^3}. \quad (41.8)$$

积分后, 我们求出  $\omega$  随  $r$  的变化关系为:

$$\omega = -\frac{A}{2r^2} + B. \quad (41.9)$$

$A$  和  $B$  两常数, 它们由满足在  $r = a$  处  $\omega = \omega_a$  和在  $r = b$  处  $\omega = \omega_b$  的条件而被确定下来。结果得到



$$\begin{aligned} A &= \frac{2a^2 b^2}{b^2 - a^2} (\omega_b - \omega_a), \\ B &= \frac{b^2 \omega_b - a^2 \omega_a}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \quad (41.10)$$

所以我们就知道作为  $r$  的函数的  $\omega$ , 从而也知道  $v = \omega r$ 。

如果希望得到转矩, 则可由(41.7)和(41.8)两式得到:

$$\tau = 2\pi\eta l A$$

或

$$\tau = \frac{4\pi\eta l a^2 b^2}{b^2 - a^2} (\omega_b - \omega_a), \quad (41.11)$$

它与两筒的相对角速度成正比。测量黏性系数用的一种标准仪器就是这样制成的。其中一个圆筒——比方说外筒——安装在一个支板上, 但由测量作用于筒上转矩的弹簧秤来保持其稳定, 而内筒则以恒定角速度旋转着。于是, 黏性系数由式(41.11)确定。

根据  $\eta$  的定义, 你可以看出它的单位是  $\text{Nsm}^{-2}$ 。对于  $20^\circ\text{C}$  的水来说,

$$\eta = 10^{-3} \text{ Nsm}^{-2}.$$

通常更方便的是采用比黏性, 即  $\eta/\rho$ , 此时水与空气之值就可以进行比较:

$$\begin{aligned} \text{在 } 20^\circ\text{C} \text{ 的水, } \quad \eta/\rho &= 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}; \\ \text{在 } 20^\circ\text{C} \text{ 的空气, } \quad \eta/\rho &= 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (41.12)$$

黏性通常强烈地依赖于温度。例如, 对于刚好在凝固点时的水, 其  $\eta/\rho$  比在  $20^\circ\text{C}$  时的要大 1.8 倍。

## § 41-2 黏性流动

现在我们研究黏性流动的最普遍理论——至少是人类已经知道的最普遍形式。我们已经了解到剪切应力分量与各种速度分量的空间微商(诸如  $\partial v_x / \partial y$  或  $\partial v_y / \partial x$ )成正比。然而, 在可压缩流体的普遍情况下, 应力中还存在取决于速度其他微商的另外的项。普遍的表示式为

$$S_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \delta_{ij} (\nabla \cdot v), \quad (41.13)$$

式中  $x_i$  是直角坐标  $x$ ,  $y$  或  $z$  中的任一个, 而  $v_i$  则是速度的直角坐标中的任一个( $\delta_{ij}$  是克罗内克符号, 当  $i = j$  时为 1, 而当  $i \neq j$  时为零)。该附加项对于应力张量的所有对角元  $S_{ii}$  都增添了  $\eta' \nabla \cdot v$ 。如果流体是不可压缩的, 则  $\nabla \cdot v = 0$ , 而这一附加项就不见了。所以它与受压缩时的内力有关。因此要描述流体就需要两个常数, 正如我们过去在描述均匀弹性固体时曾有过两个常数一样。系数  $\eta$  即我们曾遇到的“普通”黏性系数。它也被称为第一黏性系数或“剪切黏性系数”, 而新的系数  $\eta'$  被称为第二黏性系数。

现在要确定单位体积里的黏性力  $f_\eta$ , 以便能将其代入式(41.1)中而获得实际流体的运

动方程。作用于流体中一小立方体上的力,等于作用在所有六个面上之力的合力。每次取其中两个面,将获得其差值,该值决定于应力的微商、亦即速度的二次微商。这很好,因为将使我们回到矢量方程式上来。每单位体积的黏性力在直角坐标  $x_i$  方向的分量为

$$(f_{\text{粘}})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta' \nabla \cdot v). \quad (41.14)$$

通常,黏系数随位置的变化并不重要,因而可以忽略,这样,单位体积的黏性力就仅含有速度的二次微商。在第39章中,我们看到在一个矢量方程中可能存在的二次微商的最普遍形式为,含拉普拉斯符号 ( $\nabla \cdot \nabla v = \nabla^2 v$ ) 的项与含散度的梯度项 ( $\nabla(\nabla \cdot v)$ ) 两者之和。式 (41.14) 恰好就是具有系数  $\eta$  和  $(\eta + \eta')$  的这样一个和。我们得到

$$f_{\text{粘}} = \eta \nabla^2 v + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot v). \quad (41.15)$$

在不可压缩的情况下,  $\nabla \cdot v = 0$ , 因而单位体积的黏性力正好是  $\eta \nabla^2 v$ 。那就是许多人所用到的全部内容。然而,如果你要计算流体中声波的吸收,那你就需要第二项了。

现在可以完成实际流体运动的普遍方程方面的工作了。把式(41.15)代入(41.1)中,得

$$\rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right\} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \eta \nabla^2 v + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot v).$$

它是一个复杂的方程,但大自然就是这个样子。

如果像以往一样引进涡度  $\Omega = \nabla \times v$ , 那么就可将上述方程写成

$$\rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega \times v + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right\} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \eta \nabla^2 v + (\eta + \eta') \nabla(\nabla \cdot v). \quad (41.16)$$

我们再次假定唯一起作用的彻体力是像重力那样的保守力。为弄清楚新项意味着什么,让我们考察不可压缩流体的情况。于是,如果取式(41.16)的旋度,则得到

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times v) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \Omega. \quad (41.17)$$

这个式子除了在其右边有一新项外就很像式(40.9)了。当右边为零时,我们曾有过涡度随流体一起运动的亥姆霍兹定理。现在,虽然在右边已有相当复杂的非零项,然而,它却具有简单明了的物理意义。如果暂时略去项  $\nabla \times (\Omega \times v)$ , 则得到一个扩散方程。该新项意味着涡度  $\Omega$  经由流体而扩散。如果在涡度方面存在一个大的梯度,则它将会扩散到其邻近的流体中去。

这就是引起烟环在前进时会变得较厚的那一项。同样,如果你把一个“洁净”的涡环(由上一章所描述的那台仪器造成的“无烟”环)送过烟雾,则它就可以漂亮地被显示出来。当它跑出烟雾时,它已很好地吸取了某些烟雾,所以你会看到一个空心的烟环壳。有些  $\Omega$  向外扩散进烟雾之中,但仍能保持与涡旋一起向前运动。

### § 41-3 雷 诺 数

现在我们要来描述因新的黏性项在流体流动特性方面所造成的一些变化。我们将相当详细地探讨两个问题。第一个是流体经过柱体的流动——那是我们在上一章就曾试图用非

黏性流动的理论进行计算的问题。事实证明，今天人们只能对几种特殊情况求得黏性方程组的解。因此将要告诉你们的某些东西是建立在实验测量基础上的——假定实验模型满足方程式(41.17)。

数学上的问题是：我们很想对不可压缩的黏性流体流经一根直径为  $D$  的长柱体的流动进行求解。这种流动应该由式(41.17)及

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (41.18)$$

给出，同时满足下述条件：在远处速度是某个恒定值，比方说  $V$ （平行于  $x$  轴），在柱体的表面处速度为零，即对于表面

$$x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4},$$

会有

$$v_x = v_y = v_z = 0. \quad (41.19)$$

那就完全规定了该数学问题。

如果你考察那些方程式，你会明白对于该问题有四个不同常数： $\eta$ ， $\rho$ ， $D$  和  $V$ 。你也许会想到应该对于不同的  $V$ 、不同的  $D$  等等给出一整系列的情况。然而，实际情况却并非如此，所有这些不同的可能解答均相应于一个参数的不同数值，这就是我们关于黏性流动所能说的最重要的普遍的东西。要知道其所以然，首先应当注意黏性和密度只出现在比率  $\eta/\rho$ ——即比黏性中。这就把独立参数的数目减少到三个。现在假定我们采用出现于这个问题中的唯一长度、即柱体的直径  $D$  来量度所有距离，那就是说，用按照下列关系的新变量  $x'$ ， $y'$ ， $z'$  来代替  $x$ ， $y$ ， $z$ ：

$$x = x'D, y = y'D, z = z'D,$$

这样  $D$  就从式(41.19)中消失了。同样地，若我们用  $V$  来量度所有的速度——即是令  $v = v'V$ ——则可以消去  $V$ ，而在大距离上  $v'$  正好等于 1。由于已确定了长度和速度的单位，所以现在我们的时间单位就是  $D/V$ 。因而应该令

$$t = t' \frac{D}{V}. \quad (41.20)$$

采用这一套新的变量，式(41.18)中的那些微商就得从  $\partial/\partial x$  改成  $(1/D)\partial/\partial x'$ ，其余依次类推，因而式(41.18)就变成

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{V}{D} \nabla' \times \mathbf{v}' = \frac{V}{D} \boldsymbol{\Omega}'. \quad (41.21)$$

于是我们的主方程式(41.17)可以看作

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}'}{\partial t} + \nabla' \times (\boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{v}') = \frac{\eta}{\rho V D} \nabla'^2 \boldsymbol{\Omega}'.$$

所有常数都精简成一个因子，根据传统我们将其写成  $1/R$ ：

$$\mathbf{R} = \frac{\rho}{\eta} V D. \quad (41.22)$$

如果真正记住全部方程式都是以这些新单位的量写出的，则可以省略一切带撇号。于是上面关于流动的方程组为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{R} \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad (41.23)$$

和

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

所附条件为：对于

$$x^2 + y^2 = 1/4, \quad (41.24)$$

$$\mathbf{v} = 0;$$

以及对于

$$x^2 + y^2 + z^2 \gg 1,$$

$$v_x = 1, v_y = v_z = 0.$$

这在物理上所包含的全部意义十分有趣。比如，它意味着：若我们解决了关于某速度  $V_1$  和某个柱体直径  $D_1$  的流动问题，然后又问起关于不同的  $D_2$  及另一种流体的流动问题，则对于给出相同雷诺数的速度  $V_2$ ——也就是说，当

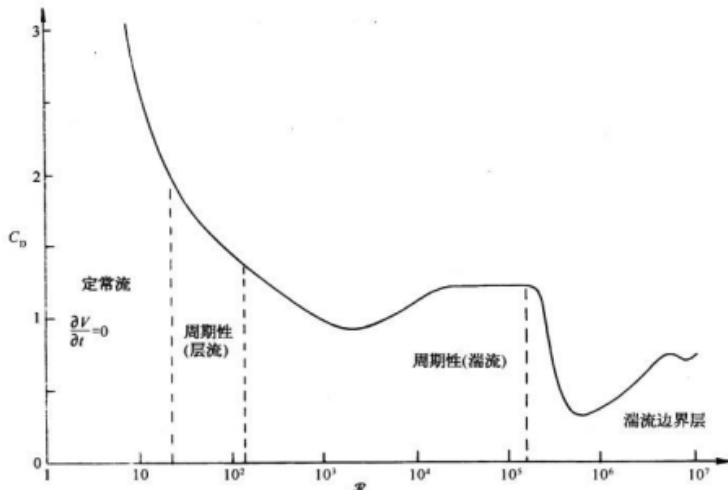
$$R_1 = \frac{\rho_1}{\eta_1} V_1 D_1 = R_2 = \frac{\rho_2}{\eta_2} V_2 D_2 \quad (41.25)$$

时，流动将是相同的。对于雷诺数相同的任何两种情况，流动“看起来”将是一样的——用适当标度  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  和  $t'$  的话。这是一个重要定理，因为它意味着我们不需制成一架飞机来做试验，就可以确定空气流经机翼时的行为。作为代替，可以制造一个模型并利用提供相同雷诺数的速度来进行测量。这是一个原理，它容许我们把小型飞机所作的“风洞”测量结果或把按比例缩小了的模型船在“模型池”中的试验结果应用于实际尺寸的物体。然而应当记住，只有假定流体的压缩性可以忽略时，我们才能这样做。要不然，就会进入一个新的量——声速。而只有在  $V$  对声速的比值也相同时，不同的情况才会真正互相对应。这后一比值称为马赫数。因此，对于接近声速或超过声速的速度，若两种情况的两个马赫数及两个雷诺数都相同，则在这两种情况下的流动才会彼此相同。

#### § 41-4 经过一圆柱体的流动

让我们回到低速（几乎是不可压缩的）流经柱体的流动问题上来，将对实际流体的流动给予定性描述。有许多关于这类流动的情况我们很想知道——例如作用于柱体上的曳引力是什么？作用于柱体上的曳引力作为  $R$  的函数被画成图 41-4 中的曲线。若其他一切都保持固定的话，则  $R$  与空气的速度  $V$  成正比。实际上所画出来的乃是所谓曳引系数  $C_D$ ，它是一个无量纲的数值，等于力除以  $\frac{1}{2} \rho V^2 D l$ ，其中  $D$  和  $l$  分别代表柱体的直径和长度，而  $\rho$  则是流体的密度：

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V^2 D l}.$$

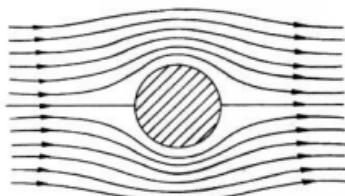
图 41-4 一根圆柱体的曳引系数  $C_D$  作为雷诺数的函数

这曳引系数按相当复杂的方式变化，并为我们提供一种预示，即在流动中正发生着某些相当有趣而又复杂的事情。我们现在将对不同的雷诺数范围的流动性质进行描述。首先，当雷诺数十分小时，流动完全是定常的，这就是说，在任何地方速度都恒定，流动绕柱体而过。可是，流线的实际分布却不像在有势流动中那样，它们是稍微不同的方程之解。当速度十分低，或等效地说，当黏性十分高以致该物质像蜂蜜那样时，则那些惯性项都可以忽略，而流动便可由下式描写：

$$\nabla^2 \Omega = 0.$$

这个方程首先由斯托克斯求解。他也曾解过关于球体的同样问题。若你有一个小球在这种低雷诺数的条件下运动，则曳引它所需之力等于  $6\pi\eta aV$ ，其中  $a$  为球体半径而  $V$  为其速度。这是一个十分有用的公式，因为它决定尘埃微粒（或可近似地视作球体的其他粒子）在一给定力的作用下穿过一流体——诸如在一离心机中，或在沉淀或扩散过程中——的运动速率。在低雷诺数区域——对于  $R$  小于 1 的情况，围绕一根柱体的  $v$  线如图 41-5 所示。

如果现在为了获得比 1 大一些的雷诺数而增大流体速率，则我们发现流动情况不同了。在该柱体后面存在环流，如图 41-6(b) 所示。关于是否即使在雷诺数最小时也总会有环流存在，或要在某一定雷诺数时情况才突然发生变化，这仍然是个未解决的问题。人们过去常常认为环流是连续不断地生长的，但现在却认为环流是突然出现的，并肯定它随  $R$  而增加。无论如何，对于  $R$  在  $10 \sim$

图 41-5 围绕一根圆柱体的黏性流动  
(低速流动)

30 范围内的流动来说存在不同的特性。在该柱体后面就有一对涡旋。

当  $R$  达到 40 左右的数目时, 流动已经再次发生变化。在运动的特性方面突然有一个完全的改变。所发生的情况是, 在该柱体后面有一个涡旋竟变得那么长, 以致分裂开来并随液体顺流而行。这时在柱体后面附近的流体又会卷起来并形成新的涡旋。这些涡旋在每一边交替散裂, 因而流动的瞬时图看来大致像示意图 41-6(c) 所画的那样, 这些涡旋的流称为

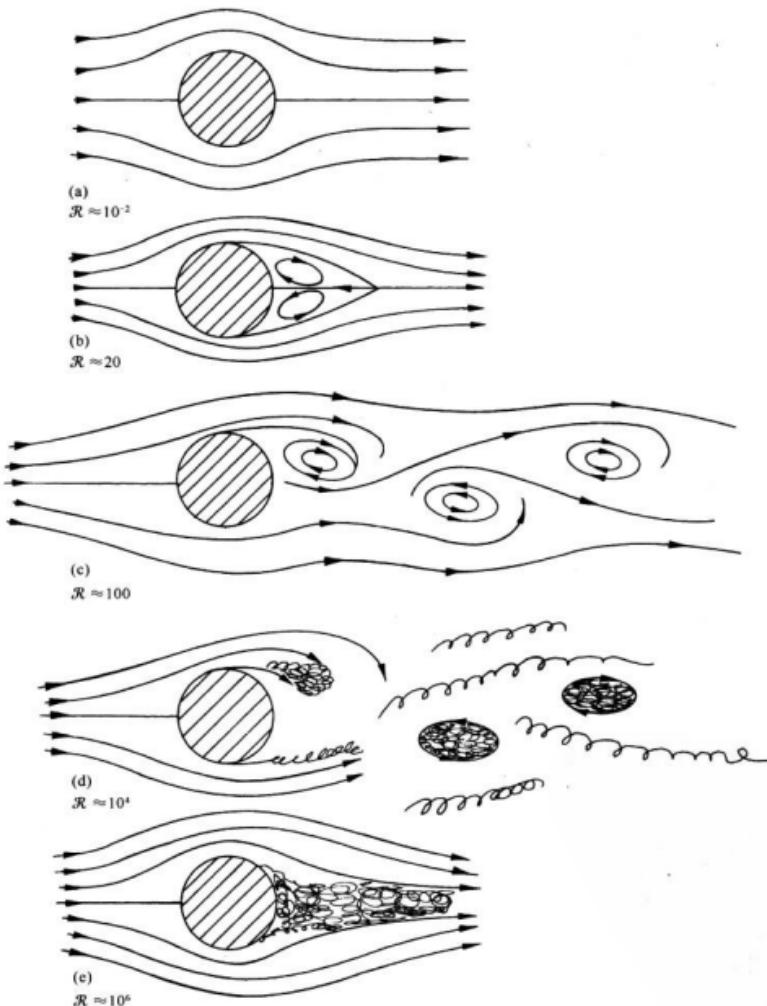


图 41-6 流经一柱体的、不同雷诺数的流动

“卡门涡街”，它们总是在  $R > 40$  时出现，这种流动的照片如图 41-7 所示。

在图 41-6 中，(a) 与 (b) 或与 (c) 这两种流动间的差别在状态方面几乎已完全不同。在图 (a) 或 (b) 中，速度是恒定的，而在 (c) 中，则在任一点的速度都随时间变化。超过  $R = 40$  时就不会有定常解了。对于这些较高的雷诺数，流动会随时间变化，但还是以有规则的周期性方式进行的。

关于这些涡旋如何产生，我们可得到一个物理概念。我们知道，流体速度在柱体表面处必须为零，也知道在离开表面后速度便迅速增长。涡性就是由流体速度方面的这种巨大的局域变化产生的。现在，当主流的速度足够低时，对涡性来说便会有充分时间从靠近柱面产生它的那个薄薄的区域扩散开来并生成一个大涡旋区。这一物理图像应该会帮助我们对主流速度或  $R$  再度增大时在流动性质方面的下一次变化做好思想准备。

当速度变得越来越高时，涡性扩散至较大的流体区域中的时间就越少了。当雷诺数达到几百时，涡性已开始充满一条薄薄的带，如图 41-6(d) 所示。在这一薄层中，流动是混沌和无规的，这一个区域叫做 边界层。而当  $R$  增大时这个无规流动区会克服困难越来越往上游伸展。在这一湍流区中，速度非常无规，而又“受到干扰”，流动也不再是二维的，而是在整个三维中都出现扭转和转动。但仍然有一规则的交替运动叠加于这种湍流之上。

当雷诺数进一步增大——对稍高于  $R = 10^5$  的那种流动——这湍流区会克服困难向前直到它抵达流线刚离开柱体的地点。这种流动如图 41-6(e) 所示，因而我们就有了所谓“湍流边界层”。并且，在曳引力方面存在猛烈变化，它下降了很多倍，如图 41-4 中所示。在一个速率范围内，曳引力的确会随速度的增加而降低，周期性的迹象似乎很少。

对于更大的雷诺数将会发生什么呢？当我们进一步提高速率时，那尾流的尺寸会再度增大，而曳引力又复增加。最近的实验——达到  $R = 10^7$  左右——指出：有一种新的周期性出现在尾流之中，这或者是由于整个尾流以整体运动的方式发生了来回振动，或者是由于某种新类型的涡旋正伴随那不规则的嘈杂运动而产生。详细的情况迄今还不完全清楚，人们仍在用实验方法进行研究。

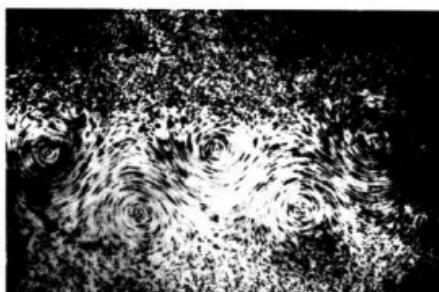


图 41-7 由潘德耳(L. Prandtl)拍摄的在柱体后面的流动中出现的“涡街”照片

### § 41-5 零黏性极限

我们愿意指出，上面所描述的那些流动，没有一种与上一章所求得的那种有势流动解有任何相像的地方。乍一看来，这似乎很奇怪。 $R$  毕竟与  $1/\eta$  成正比，因而  $\eta$  趋于零与  $R$  趋于无限大是等效的。若在式(41.23)中取大  $R$  的极限，则会把右边去掉，而正好得到上一章的那些方程。可是，你该会发现，在  $R = 10^7$  的那种高度湍流竟会趋向于从“干”水方程组所算

出来的平滑流动，真是难以置信。当  $R = \infty$  时，由方程式(41.23)所描述的流动会完全不同于我们从取  $\eta = 0$  开始着手获得的解，这怎么可能呢？答案十分有趣。应当注意式(41.23)右边存在  $1/R$  乘一个二次微商，它是方程中比任何其他微商都高次的微商。发生的情况是：虽然系数  $1/R$  是小量，但在表面附近的空间内却存在着  $\Omega$  的十分迅速的变化。这些迅速变化补偿了那个小的系数，因而两者之积就不会随  $R$  的增大而趋于零。解答就不会趋于当  $\nabla^2 \Omega$  的系数变成零时的那种极限情况。

你可能会觉得奇怪，细粒湍流是什么，而它又是怎样维持它本身的呢？在柱体边缘某处所造成的涡度如何能在背景中产生那么多的噪声呢？答案又是很有趣的。原来涡度有扩大自身的倾向。如果我们暂时忘却那种会引起涡度损失的涡旋扩散现象，则流动的规律表明（正如我们以前见过的）：涡线会以速度  $v$  随同流体一起运动。可以想象，有一定数目的  $\Omega$  线正被  $v$  的复杂流动花样所扭转和变形，这会将那些线紧密地吸引在一起并彻底混合。原先那些简单的涡线将会纠缠成结而且紧密地吸引在一起。涡度强度将会增加，而其无规性——包括正的和负的——一般也将增加。因此，当流体到处被旋转时，在三维中涡度的量值就增大。

你也许正好要问：“什么时候那种有势流动才是真正满意的理论呢？”首先，在湍流区以外，即在涡度还未通过扩散而明显进入的地区，它是令人满意的。通过制造特殊的流线型物体，我们就能使得湍流区尽可能小。机翼——那是经过精心设计的——周围的那种流动就几乎完全是真的有势流动。

## § 41-6 库 埃 特 流 动

流经一柱体那种流动的复杂而易变的特性并不特殊，而各种各样的流动可能性却会普遍地发生，这是有可能加以演示的。在第一节中我们曾经对两个圆筒间的黏性流动算出了一个解，并能够把这一结果与实际发生的情况进行比较。若取两个同心的圆筒，在它们之间的空隙里装进油，并放进一些铝粉以作为油中的悬浮物，这样流动就可容易观察到。现在，若缓慢地转动外筒，并不会有什幺意料之外的事情发生，这可从图 41-8(a)上看到。相反，若慢慢转动内筒，也不会有十分显著的事情发生。然而，若以较高速率转动内筒，则我们会感到惊奇，流体已破裂成一些水平带，如图 41-8(b)所指出来的那样。当外筒以一相似速率转动而保持内筒静止不动时，却没有这种效应发生。怎么可能在转动内筒或转动外筒之间

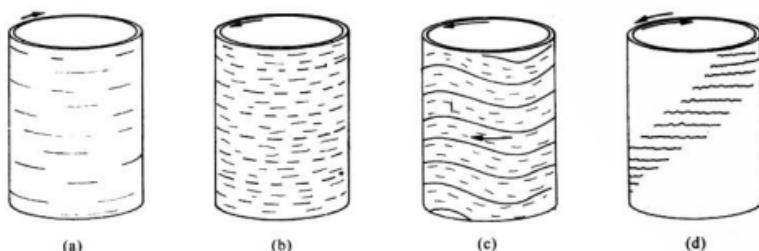


图 41-8 在两个透明的旋转圆筒间液体流动的花样

存在这种差别呢？毕竟，我们在第一节中导出的那种流动图样只依赖于  $\omega_b - \omega_e$ 。我们可以通过对图 41-9 所示截面的考察而得到答案。当内层流体比外层流体运动得快时，它们趋向于向外运动——离心力大于把它们固定在适当位置上的压强。因为外层的阻塞，所以整层流体不可能均匀地向外移动，因此就必然会破裂成小格并做环流，如图 41-9(b) 所示。就像房间里底部空气较热时所发生的对流。当内筒不动而外筒高速转动时，离心力会建立起把一切都保持在平衡状态的压强梯度——见图 41-9(c)(正如在一问顶部空气较热的房子那样)。

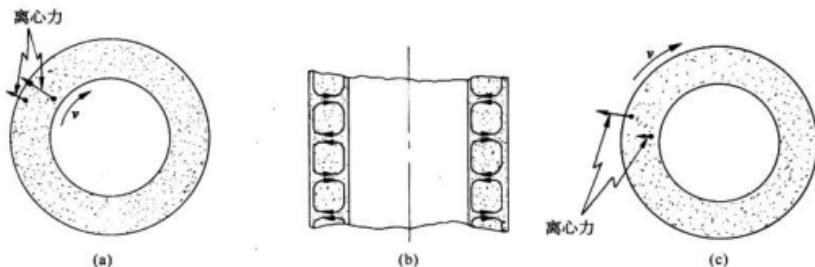


图 41-9 为什么流动会破裂成带状

现在让我们提高内筒的转速。起初，带的数目增加。然后突然你会看到那些带变成波浪形状，如图 41-8(c) 所示，而这些波正在环绕着筒行进。波的速率很容易测量出来。对于相当高的转速来说，这波速会接近于内筒速率的三分之一。但没有谁能知其所以然！这就存在一种挑战，一个像  $1/3$  的简单数目，还得不到任何解释。事实上，这种波形成的整个机制并未得到很好理解，而它却是一种定常层流。

如果我们现在也开始转动外筒——但是沿相反方向——则该流动花样开始破裂，所获得的乃是波浪形状区域与表面上静止的区域相互交替的一种情形，如图 41-8(d) 所示意的那样，构成一种螺旋式的花样。然而，在这些“静止”区中，我们能够看到流动实在是很不规则的，它实际上完全是湍流，而那些波浪形状区也开始表现出无规的湍流了。如果内外筒继而转得更快，则整个流动便会变成混沌的湍流了。

在这个简单的实验中，我们看到了许多有趣的、完全不同的流动状态，但它们却全都包含在一个参数  $R$  取不同数值的简单方程中。利用上面的旋转圆筒，能看到发生于流经柱体的流动中的许多效应：首先，有一种定常流动；其次，开始出现一种随时间变化的、但仍以有规则而又平滑的方式进行的流动；最后，流动就变成完全无规的了。你们大家都曾在平静空气里，从点燃着的一支纸烟升起的一股烟柱中看到相同的效应。有一股平滑而稳定的烟柱，接着当这股烟流开始破裂时就有一系列的扭转和弯曲，最后才形成一股无规的涡流烟云。

从所有这些实验中我们能够学到的主要经验是，一大堆不同的行为都隐藏在式(41.23)那组简单的方程中。所有的解都属于同样的方程组，仅有不同的  $R$  值。我们并没有理由认为在这些方程式中会有任何遗漏的项。唯一的困难在于，今天除了十分小的雷诺数——即完全黏性的那种情况——以外，我们仍然缺乏数学本领对各种情况进行分析。我们虽然写

下了一个方程,但这并不会从流体的流动中除掉它的魅力、它的神秘或它的令人惊异之处。

若在只有一个参数的简单方程中这样的变化是可能的话,那么对于更加复杂的方程可能性是多么多啊!也许用以描述旋涡星云以及那些正在凝结、旋转、爆炸的众星球和众银河的基本方程,正好就是关于几乎为纯氢气的流体动力学行为的简单方程。经常有某些对物理学怀着毫无根据的恐惧心理的人会说,你不可能写出关于生命的一个方程。噢,也许我们能够。事实上,当我们写出量子力学的方程

$$H\psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

时,我们就很可能已经有了足够近似的方程。刚才已经看到,事情的复杂性能够那么容易而又戏剧性地被用来描写它们的那些方程的简单性所忘记。人们往往还未认识到一些简单方程的适用范围,就得出结论,解释世界的复杂性所需要的除非上帝,而仅有方程是不行的。

我们已写出了关于水流动的方程组。从实验方面来说,也找到了一组用来讨论其解的概念和近似方法——涡街、湍性尾流、边界层等等。当我们在一种不那么熟悉的、而同时又还未能做出实验的情况下拥有相似的方程组时,就企图按照一种原始、不完全和混乱的方式求解那些方程,希望确定有什么新的定性特点可能会出现,或有什么新的定性形式是那些方程的结果。例如,当我们把太阳作为一个氢气球看待时,方程式把太阳描绘成没有太阳黑子、表面没有谷粒状结构,也没有太阳红焰和日冕。可是,所有这些,实际上都存在于该方程之中,只是我们还未找到借以获得它们的方法罢了。

还有一些人对于在其他行星上尚未找到生物而感到失望。我却不是那种人——我希望通过行星际探索,以及从这么简单的原理就能产生出那种变化无穷而又新奇的各种现象,再次受到启发、受到鼓舞,并感到惊异。科学的检验标准乃是其预言的本领。假如你从未探望过地球,难道你能预言雷电、火山、海涛、极光以及五彩缤纷的晚霞吗?当我们获悉在那些死寂的行星——八个或十个球体——上每一个所发生的一切事情时,即每个都由同一种尘埃云所凝聚而成,而且每个又都遵循着完全相同的物理规律,那将是有益的一课。

下一个人类智慧的伟大启蒙期,很可能会产生出一种理解方程的定性内容的方法。目前我们还不能够。今天不能看出那个水的流动方程会含有人们在两个转动圆筒间所见得到的、像理发店门前的旋转招牌那样的湍流结构。今天还不能看出薛定谔方程是否包含青蛙、音乐作曲家或者伦理道德——也许它不会。对于超越事情本身范围的、像上帝那样的某些事情,我们不可能说需要还是不需要,因而我们都可以就这两种情况保持自己的坚定信念。

# 第 42 章 弯曲空间

## § 42-1 二维弯曲空间

按照牛顿理论，所有物体都吸引其他物体，吸引力与它们之间距离的平方成反比；物体受力后就产生与力成正比的加速度。这些就是牛顿的万有引力定律和运动定律。如你所知，它们说明了球、行星、人造卫星、星系等等运动的原因。

对于引力定律，爱因斯坦有不同的解释。按照他的理论，空间和时间——必须放在一起称为时空——在重质量物体附近是弯曲的。物体总是力图沿着弯曲时空中的“直线”行进，它们的这种运动方式是弯曲时空造成的。这是一个复杂的概念——非常复杂。这就是本章我们要阐明的概念。

我们的题目含有三个部分。一部分涉及引力效应；另一部分涉及我们已经学过的时空概念；第三部分与弯曲时空概念有关。开始时我们把题目简化，先不考虑引力，且撇开时间——只讨论弯曲空间。稍后，我们会谈到其他部分，但现在我们将注意力集中在弯曲空间的概念——弯曲空间的含意是什么，更确切地说，爱因斯坦应用弯曲空间的含意是什么。结果发现，即使如此，在三维情况下仍相当困难。所以我们一开始还得把问题做进一步的简化，只讨论二维情况下“弯曲空间”一词的意思是什么。

为了理解二维情况下弯曲空间的概念，你真应该去体验一下生活在这种空间中的角色的特别的观点。假定我们设想一只昆虫，它没有眼睛，生活在一个平面上，如图 42-1 所示。它只能在平面上行动，而且无法知道有什么发现任何“外部世界”的方法（它没有你们的想象力）。当然，我们将用类推法进行讨论。我们生活在一个三维的世界，因而不会有任何离开我们的三维世界、在一个新的方向上的想象能力，所以我们只得通过类推的方法把事情想清楚。这如同我们就是一只生活在平面上的昆虫，而在另一方向上存在着空间。这就是为什么我们首先将和昆虫打交道，并记住它必须生活在它的表面上而不能离开的原因。

作为生活在二维空间中昆虫的另一例子，我们设想有一只昆虫生活在球面上。我们可以想象它在球的表面上到处爬行，如图 42-2 所示，但它不能“仰视”、“俯视”或“朝外面”观看。

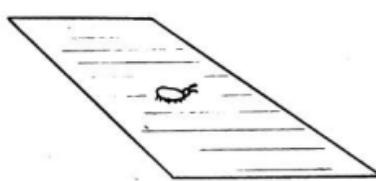


图 42-1 平面上的一只昆虫

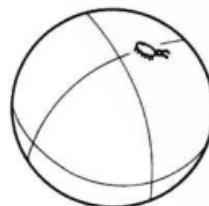


图 42-2 球面上的一只昆虫