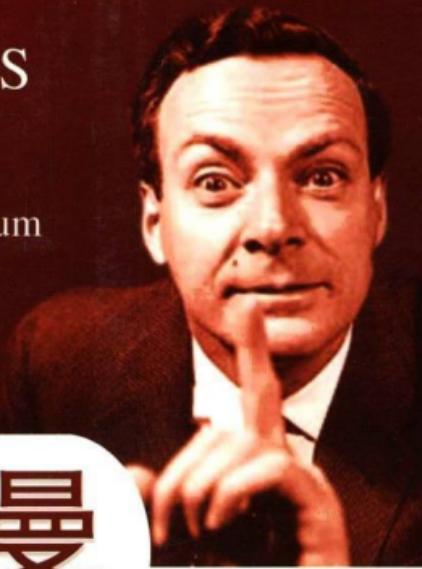


THE
Feynman
LECTURES
ON
PHYSICS

Volume III

The
New Millennium
Edition



费恩曼
物理学讲义 第③卷

新千年版

[美]费恩曼(R.P.Feynman) 莱顿(R.B.Leighton) 桑兹(M.Sands) 著
潘笃武 李洪芳 译



上海科学技术出版社



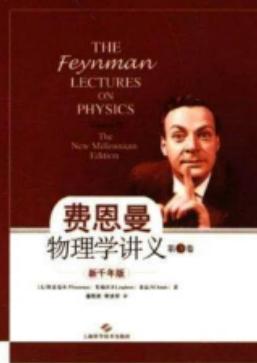
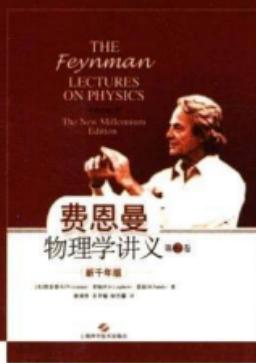
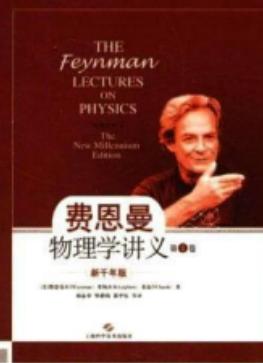
责任编辑 田延彦
封面设计 房惠平

费恩曼物理学讲义

第3卷
新千年版

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS

Volume III
The New Millennium Edition



上海科学技术出版社
www.sstp.cn

上架建议：物理学

ISBN 978-7-5478-1638-7

9 787547 816387

定价：78.00元

易文网 www.ewen.cc



The Feynman Lectures on Physics(The New Millennium Edition, Volume III)

费恩曼物理学讲义

(新千年版)

第 3 卷

[美]费恩曼(R. P. Feynman)

莱顿(R. B. Leighton) 著

桑兹(M. Sands)

潘笃武 李洪芳 译

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

费恩曼物理学讲义：新千年版，第3卷 / (美)费恩曼 (Feynman, R. P.), (美)莱顿 (Leighton, R. B.), (美)桑兹 (Sands, M.)著；潘笃武, 李洪芳译。—上海：上海科学技术出版社，2013.5

书名原文：The Feynman lectures on physics: The new millennium edition

ISBN 978-7-5478-1638-7

I. ①费... II. ①费... ②莱... ③桑... ④潘... ⑤李...
III. ①物理学—教材 IV. ①04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 031508 号

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS: The New Millennium Edition, Volume III
By Richard P. Feynman, Robert B. Leighton and Matthew Sands

© 1965, 2006, 2010 by California Institute of Technology, Michael A. Gottlieb, and Rudolf Pfeiffer

Simplified Chinese translation copyright © 2013 by Shanghai Scientific & Technical Publishers

Published by arrangement with Basic Books, a Member of Perseus Books Group

Through Bardon-Chinese Media Agency

博达著作权代理有限公司

ALL RIGHTS RESERVED

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行

上海科学技术出版社

(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)

新华书店上海发行所经销

苏州望电印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 23.75

字数 490 千字

2013 年 5 月第 1 版 2013 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5478-1638-7/O · 20

定价：78.00 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，

请向工厂联系调换。

译者序

20世纪60年代初,美国一些理工科大学鉴于当时的大学基础物理教学与现代科学技术的发展不相适应,纷纷试行教学改革,加利福尼亚理工学院就是其中之一。该校于1961年9月至1963年5月特请著名物理学家费恩曼主讲一二年级的基础物理课,事后又根据讲课录音编辑出版了《费恩曼物理学讲义》。本讲义共分3卷,第1卷包括力学、相对论、光学、气体分子运动论、热力学、波等,第2卷主要是电磁学,第3卷是量子力学。全书内容十分丰富,在深度和广度上都超过了传统的普通物理教材。

当时美国大学物理教学改革试图解决的一个主要问题是基础物理教学应尽可能反映近代物理的巨大成就。《费恩曼物理学讲义》在基础物理的水平上对20世纪物理学的两大重要成就——相对论和量子力学——作了系统的介绍,对于量子力学,费恩曼教授还特地准备了一套适合大学二年级水平的讲法。教学改革试图解决的另一个问题是按照当前物理学工作者在各个前沿研究领域所使用的方式来介绍物理学的内容。在《费恩曼物理学讲义》一书中对一些问题的分析和处理方法反映了费恩曼自己以及其他在前沿研究领域工作的物理学家所通常采用的分析和处理方法。全书对基本概念、定理和定律的讲解不仅生动清晰,通俗易懂,而且特别注重从物理上作出深刻的叙述。为了扩大学生的知识面,全书还列举了许多基本物理原理在各个方面(诸如天体物理、地球物理、生物物理等)的应用,以及物理学的一些最新成就。由于全书是根据课堂讲授的录音整理编辑的,它在一定程度保留了费恩曼讲课的生动活泼、引人入胜的独特风格。

《费恩曼物理学讲义》从普通物理水平出发,注重物理分析,深入浅出,避免运用高深繁琐的数学方程,因此具有高中以上物理水平和初等微积分知识的读者阅读起来不会感到十分困难。至于大学物理系的师生和物理工作者更能从此书中获得教益。

1989年,为纪念费恩曼逝世一周年,原书编者重新出版本书,并增加了介绍费恩曼生平的短文和新的序言。2010年,编者根据五十多年来世界各国在阅读和使用本书过程中提出的意见,对全书(三卷)存在的错误和不当之处(885处)进行了订正,并使用新的电子版语言和现代作图软件对全书语言文字、符号、方程及插图进行重新编辑出版,称为新千年版。本书就是根据新千年版翻译的。

本书中译本1987年版本第1章至第15章由潘笃武翻译,其中第6章至第11章是在吴子仪译稿基础上重译,第12章在李洪芳译稿基础上重译,第15章在潘笃武、李洪芳合译的基础上重译。第16章至第21章、索引由李洪芳翻译。郑广垣、郑永令曾参与了本书译稿的校阅工作。本卷这一版由潘笃武(1—15章)、李洪芳(16—21章,索引)重新校勘。

由于译者水平所限,错误在所难免,欢迎广大读者批评指正。

译者

2012年10月

关于费恩曼

理查德·费恩曼(R. P. Feynman)1918年生于纽约市,1942年在普林斯顿大学获得博士学位。第二次世界大战期间,尽管当时他还很年轻,就已经在洛斯阿拉莫斯的曼哈顿计划中发挥了重要作用。以后,他在康奈尔大学和加利福尼亚理工学院任教。1965年,因在量子电动力学方面的工作和朝永振一郎及施温格尔(J. Schwinger)同获诺贝尔物理学奖。

费恩曼博士获得诺贝尔奖是由于成功地解决了量子电动力学的理论问题。他也创立了说明液氦中超流动性现象的数学理论。此后,他和盖尔曼(M. Gell-Mann)一起在 β 衰变等弱相互作用领域内做出了奠基性的工作。在以后的几年里,他在夸克理论的发展中起了关键性的作用,提出了高能质子碰撞过程的部分子模型。

除了这些成就之外,费恩曼博士将新的基本计算技术及记号法引进物理学,首先是无处不在的费恩曼图,在近代科学历史中,它比任何其他数学形式描述都更大程度地改变了对基本物理过程形成概念及进行计算的方法。

费恩曼是一位卓越的教育家。在他获得的所有奖项中,他对1972年获得的奥斯特教学奖章特别感到自豪。在1963年第一次出版的《费恩曼物理学讲义》被《科学美国人》杂志的一位评论员描写为“难啃的但却富于营养并且津津有味。25年后它仍是教师和最优秀的初学学生的指导书”。为了使外行的公众增加对物理学的了解,费恩曼博士写了《物理定律和量子电动力学的性质:光和物质的奇特理论》。他还是许多高级出版物的作者,这些都成为研究人员和学生的经典参考书和教科书。

费恩曼是一个活跃的公众人物。他在挑战者号调查委员会里的工作是众所周知的,特别是他的著名的O型环对寒冷的敏感性的演示,这是一个优美的实验,除了一杯冰水和C形钳以外其他什么也不需要。费恩曼博士1960年在加利福尼亚州课程促进会中的工作却很少人知道,他在会上指责教科书的平庸。

仅仅罗列费恩曼的科学和教育成就还没有充分抓住这个人物的本质。即使是他的最最技术性的出版物的读者都知道,费恩曼活跃的多面的人格在他所有的工作中都闪闪发光。除了作为物理学家,在各种不同的时候:他是无线电修理工,是锁具收藏家、艺术家、舞蹈家、邦戈(bongo)鼓手,以至玛雅象形文字的破译者。他的世界是永远的好奇,他是一个典型的经验主义者。

费恩曼于1988年2月15日在洛杉矶逝世。

新千年版前言

自理查德·费恩曼在加利福尼亚理工学院讲授物理学导论课程以来，已经过去快 50 年了。这次讲课产生了这三卷《费恩曼物理学讲义》。在这 50 年中，我们对物理世界的认识已经大大改变了，但是《费恩曼物理学讲义》的价值仍旧存在。由于费恩曼对物理学独到的领悟和教学方法，费恩曼的讲义今天仍像第一次出版时那样具有权威性。这些教本已在全世界范围内被初学者，也被成熟的物理学家研读；它们已被翻译成至少 12 种语言，仅仅英语的印刷就有 150 万册以上。或许至今为止还没有其他物理学书籍有这样广泛的影响。

新千年版迎来了《费恩曼物理学讲义 (FLP)》的新时代：21 世纪的电子出版物时代。FLP 改变为 eFLP，本文和方程式用 L^AT_EX 电子排字语言表示，所有的插图用现代绘图软件重画。

这一版的印刷本的效果并没有什么特别之处，它看上去几乎完全和学物理的学生都已熟悉并热爱的最初的红色书一样。主要的差别在于扩大并改进了的索引，以前的版本第一次印刷以来的 50 年内读者们发现的 885 篇错误的改正，以及改正未来的读者可能发现的错误的便利。关于这一点我以后还要谈到。

这一版的电子书版本以及加强电子版不同于 20 世纪的大多数技术书籍的电子书，如果把这种书籍的方程式、插图、有时甚至包括课文，放大以后都成为多个像素。新千年版的 L^AT_EX 稿本有可能得到最高质量的电子书，书页上的所有的面貌特征（除了照片）都可以无限制地放大而始终保持其精确的形状和细锐度。带有费恩曼原初讲课的声音和黑板照相、还带有和其他资源的联接的加强电子版是新事物，（假如费恩曼还在世的话）这一定会使他极其高兴。^{*}

费恩曼讲义的回忆

这三卷书是一套完备的教科书。它们也是费恩曼在 1961—1964 年给本科生上物理学课的历史记录，这是加利福尼亚理工学院的一年级和二年级学生，无论他们主修什么课程，都必须上的一门课。

读者们可能和我一样很想知道，费恩曼的讲课对听课的学生的影响如何。费恩曼在这几本书的前言中提供了多少有些负面的看法。他写道：“我不认为我对学生做得很好”。马修·桑兹在他的《费恩曼物理学指导手册》的回忆文章中给出了完全正面的观点。出于好

* 原文“What would have given Feynman great pleasure”是虚拟式的句子，中文没有相当于英语虚拟式的句法，所以加上括号内的句子。——译者注

奇,2005年春天,我和从费恩曼1961—1964班级(大约150个学生)中半随机地挑选一组17位学生通过电子邮件或面谈联系——这些学生中有些在课堂上有很大的困难,而有一些很容易掌握课程;他们主修生物学、化学、工程、地理学、数学及天文学,还包括物理学。

经过了这些年,可能已经在他们的记忆中抹上了欣快的色彩,但大约有80%回忆起费恩曼的讲课觉得是他们大学时光中精彩的事件。“就像上教堂。”听课是“一个变形改造的经历”,“一生的重要阅历,或许是我从加利福尼亚理工学院得到的最重要的东西。”“我是一个主修生物学的学生,但费恩曼的讲课在我的本科生经历中就像在最高点一样突出……虽然我必须承认当时我不会做家庭作业并且总是交不出作业。”“我当时是课堂上最没有希望的学生之一,但我从不缺一堂课……我记得并仍旧感觉到费恩曼对于发现的快乐……他的讲课具有一种……感情上的冲击效果,这在印刷的讲义中可能失去了。”

相反,好些学生,主要由于以下两方面问题,而具有负面的记忆。(Ⅰ)“你无法通过上课学会做家庭作业。费恩曼太灵活了——他熟知解题技巧和可以作哪些近似,他还具有基于经验和天赋的直觉,这是初学的学生所不具备的。”费恩曼和同事们在讲课过程中知道这一缺陷,做了一些工作,部分材料已编入《费恩曼物理学指导手册》:费恩曼的三次习题课以及罗伯特·莱顿和罗各斯·沃格特(Rochus Vogt)选编的一组习题和答案。(Ⅱ)由于不知道下一节课可能会讨论什么内容产生一种不安全感,缺少与讲课内容有任何关系的教科书或参考书,其结果是我们无法预习,这是十分令人丧气的……我发现在课堂上的演讲是令人激动但却是很难懂,但(当我重建这些细节的时候发现)它们只是外表上像梵文一样难懂。当然,有了这三本《费恩曼物理学讲义》,这些问题已经得到了解决。从那以后的许多年,它们就成了加州理工学院学生学习的教科书,直到今天它们作为费恩曼的伟大遗产还保持着活力。

改错的历史

《费恩曼物理学讲义》是费恩曼和他的合作者罗伯特·莱顿及马修·桑兹非常仓促之中创作出来的,根据费恩曼的讲课的录音带和黑板照相(这些都编入这新千年版的增强电子版)加工扩充而成*。由于要求费恩曼、莱顿和桑兹高速度工作,不可避免地有许多错误隐藏在第一版中。在以后几年中,费恩曼收集了加州理工学院的学生和同事以及世界各地的读者发现的、长长的、确定的错误列表。在20世纪60年代和70年代早期,费恩曼在他的紧张的生活中抽出时间来核实第1卷和第2卷中确认的大多数,不是全部错误,并在以后的印刷中加入了勘误表。但是费恩曼的责任感从来没有高到超过发现新事物的激情而促使他处理第3卷中的错误。**在1988年他过早的逝世后,所有三卷的勘误表都存放到了加州理工学院档案馆,它们躺在那里被遗忘了。

* 费恩曼的讲课和这三本书的起源的说法请参阅这三本书每一本都有的《费恩曼自序》和《前言》,也可参看《费恩曼物理学指导手册》中马修·桑兹的回忆以及1989年戴维·古德斯坦(David Goodstein)和格里·诺格鲍尔(Gerry Neugebauer)撰写的《费恩曼物理学讲义纪念版》特刊前言,它也刊载在2005年限定版中。

** 1975年,他开始审核第3卷中的错误,但被其他事情所分心,因而没有完成这项工作,所以没有作出勘误。

2002 年,拉尔夫·莱顿(Ralph Leighton)(已故罗伯特·莱顿的儿子,费恩曼的同胞)告诉我,拉尔夫的朋友迈克尔·戈特里勃(Michael Gottlieb)汇编了老的和长长的新的勘误表。莱顿建议加州理工学院编纂一个改正所有错误的《费恩曼物理学讲义》的新版本,并将他和戈特里勃当时正在编写的新的辅助材料——《费恩曼物理学指导手册》一同出版。

费恩曼是我心目中的英雄,也是亲密的朋友。当我看到勘误表和提交的新的一卷的内容时,我很快就代表加州理工学院(这是费恩曼长时期的学术之家,他、莱顿和桑兹已将《费恩曼物理学讲义》所有的出版权利和责任都委托给她了)同意了。一年半以后,经过戈特里勃细微工作和迈克尔·哈特尔(Michael Hartl)(一位优秀的加州理工学院博士后工作者,他审校了加上新的一卷的所有错误)仔细的校阅,《费恩曼物理学讲义》的 2005 限定版诞生了,其中包括大约 200 处勘误。同时发行了费恩曼、戈特里勃和莱顿的《费恩曼物理学指导手册》。

我原来以为这一版是“定本”了。出乎我意料的是全世界读者热情响应。戈特里勃呼吁大家鉴别出更多错误,并通过创建的费恩曼讲义网站 www.feynmanlectures.info 提交给他。从那时起的五年内,又提交了 965 处新发现的错误,这些都是从戈特里勃、哈特尔和纳特·博德(Nate Bode)(一位优秀的加州理工学院研究生,他是继哈特尔之后的加州理工学院的错误检查员)的仔细校对中遗漏的。这些 965 处被检查出来的错误中 80 处在《定本》的第四次印刷(2006 年 8 月)中改正了,余下的 885 处在这一新千年版的第一次印刷中被改正(第 1 卷中 332 处,第 2 卷中 263 处,第 3 卷 200 处)*,这些错误的详情可参看 www.feynmanlectures.info/flp-errata.html。

显然,使《费恩曼物理学讲义》没有错误已成为全世界的共同事业。我代表加州理工学院感谢 2005 年以来作了贡献的 50 位读者以及更多的在以后的年代里会作出贡献的读者。所有贡献者的名字都公示在 www.feynmanlectures.info/flp-errata.html 上。

几乎所有的错误都可分为三种类型:(Ⅰ)文字中的印刷错误;(Ⅱ)公式和图表中的印刷和数学错误——符号错误,错误的数字(例如,应该是 4 的写成 5),缺失下标、求和符号、括号和方程式中一些项;(Ⅲ)不正确的章节、表格和图的参见条目。这几种类型的错误虽然对成熟的物理学家来说并不特别严重,但对于初识费恩曼的学生,就可能造成困惑和混淆。

值得注意的是,在我主持下改正的 1165 处错误中只有不多几处我确实认为是真正物理上的错误。一个例子是第二卷,5—9 页上一句话,现在是“……接地的封闭导体内部没有稳定的电荷分布不会在外部产生[电]场”(在以前的版本中漏掉了接地一词)。这一错误是好些读者都曾向费恩曼指出过的,其中包括威廉和玛丽学院(The College of William and Mary)学生比尤拉·伊丽莎白·柯克斯(Beulah Elizabeth Cox),她在一次考试中依据的是费恩曼的错误的段落。费恩曼在 1975 年给柯克斯女士的信中写道:“你的导师不给你分数是对的,因为正像他用高斯定律证明的那样,你的答案错了。在科学中你应当相信逻辑和论据、仔细推理而不是权威。你也正确阅读和理解了书本。我犯了一个错误,所以书错了。当时我或许正想着一个接地的导电球体,或别的;使电荷在(导体球)内部各处运动而不影响外部的事物。我不能确定当时是怎样做的。但我错了。你由于信任我也错了。”**

* 原版如此。——译者注

** 《与习俗完全合理的背离,理查德·P·费恩曼的信件》288~289 页,米歇尔·费恩曼(Michelle Feynman)编,Basic Books,纽约,2005。

这一新千年版是怎样产生的

2005年11月到2006年7月之间,340个错误被提交到费恩曼讲义网站 www.feynmanlectures.info。值得注意的是,其中大多数来自鲁道夫·普法伊弗(Rudolf Pfeiffer)博士一个人:当时是奥地利维也纳大学的物理学博士后工作者。出版商艾迪生·卫斯利(Addison Wesley),改正了80处错误,但由于费用的缘故而没有改正更多的错误:由于书是用照相胶印法印刷的,用1960年代版本书页的照相图出版印刷。改正一个错误就要将整个页面重新排字并要保证不产生新的错误,书页要两个不同的人分别各排一页,然后由另外几个人比较和校读——如果有几百个错误要改正,这确是一项花费巨大的工作。

戈特里勃、普法伊弗和拉尔夫·莱顿对此非常不满意,于是他们制定了一个计划,目的是便于改正所有错误,另一目的是做成电子书的《费恩曼物理学讲义》的加强电子版。2007年,他们将他们的计划向作为加州理工学院的代理人的我提出,我热心而又谨慎。当我知道了更多的细节,包括《加强电子版本》中一章的示范以后,我建议加州理工学院和戈特里勃、普法伊弗及莱顿合作来实现他们的计划。这个计划得到三位前后相继担任加州理工学院物理学、数学和天文学学部主任——汤姆·汤勃列罗(Tom Tomrello)、安德鲁·兰格(Andrew Lange)和汤姆·索伊弗(Tom Saifer)——的支持;复杂的法律手续及合同细节由加州理工学院的知识产权法律顾问亚当·柯奇伦(Adam Cochran)完成。《新千年版》的出版标志着该计划虽然很复杂但已成功地得到执行。尤其是:

普法伊弗和戈特里勃已将所有三卷《费恩曼物理学讲义》(以及来自费恩曼的课程并收入《费恩曼物理学指导书》的1 000多道习题)转换成L^AT_EX。《费恩曼物理学讲义》的图是在书的德文译者亨宁·海因策(Henning Heinze)的指导下,为用于德文版,在印度用现代的电子方法重画的。为了将海因策的插图的非独家使用于新千年英文版,戈特里勃和普法伊弗购买了德文版[奥尔登博(Oldenbourg)出版]的L^AT_EX方程式的非独家的使用权,普法伊弗和戈特里勃不厌其烦地校对了所有L^AT_EX文本和方程式以及所有重画的插图,并必要时作了改正。纳特·博德和我代表加州理工学院对课文、方程式和图曾作过抽样调查,值得注意的是,我们没有发现错误。普法伊弗和戈特里勃是惊人的细心和精确。戈特里勃和普法伊弗为约翰·沙利文(John Sullivan)在亨丁顿实验室安排了将费恩曼在1962—1964年黑板照相数字化,以及乔治·布卢迪·奥迪欧(George Blood Audio)将讲课录音磁带数字化——从加州理工学院教授卡弗·米德(Carver Mead)获得财政资助和鼓励,从加州理工学院档案保管员谢利·欧文(Shelly Erwin)处得到后勤支持,并从柯奇伦处得到法律支持。

法律问题是很严肃的。20世纪60年代,加州理工学院特许艾迪生·卫斯利发表印刷版的权利,20世纪90年代,给予分发费恩曼讲课录音和各种电子版的权利。在21世纪初,由于先后取得这些特许证,印刷物的权利转让给了培生(Pearson)出版集团,而录音和电子版转让给珀修斯(Perseus)出版集团。柯奇伦在一位专长于出版的律师艾克·威廉姆斯(Ike Williams)的协助下,成功将所有这些权利和珀修斯结合在一起,使这一新千年版成为可能。

鸣 谢

我代表加州理工学院感谢这许多使这一新千年版成为可能的人们。特别是,我感谢上面提到的关键人物:拉尔夫·莱顿,迈克尔·戈特里勃,汤姆·汤勃列罗,迈克尔·哈特尔,鲁道夫·普法伊弗,亨宁·海因策,亚当·柯奇伦,卡弗·米德,纳特·博德,谢利·欧文,安德鲁·兰格,汤姆·索伊弗,艾克·威廉姆斯以及提交错误的50位人士(在 www.feynmanlectures.info 中列出)。我也要感谢米歇尔·费恩曼(Michelle Feynman,理查德·费恩曼的女儿)始终不断的帮助和支持,加州理工学院的艾伦·赖斯(Alan Rice)的幕后帮助和建议,斯蒂芬·普奇吉(Stephan Puchegger)和卡尔文·杰克逊(Calvin Jackson)给普法伊弗从《费恩曼物理学讲义》转为L^AT_EX的帮助和建议。迈克尔·菲格尔(Michael Figl)、曼弗雷德·斯莫利克(Manfred Smolik)和安德烈斯·斯坦格尔(Andreas Stangl)关于改错的讨论,以及珀修斯的工作人员和(以前版本)艾迪生·卫斯利的工作人员。

基普·S·桑尼(Kip S. Thorne)

荣休理论物理费恩曼教授

加州理工学院

2010年10月

费恩曼自序



这是我前年与去年在加利福尼亚理工学院对一二年级学生讲授物理学的讲义。当然，这本讲义并不是课堂讲授的逐字逐句记录，而是已经经过了编辑加工，有的地方多一些，有的地方少一些。我们的课堂讲授只是整个课程的一部分。全班 180 个学生每周两次聚集在大教室里听课，然后分成 15 到 20 人的小组在助教辅导下进行复习巩固。此外，每周还有一次实验课。

在这些讲授中，我们想要抓住的特殊问题是，要使充满热情而又相当聪明的中学毕业生进入加利福尼亚理工学院后仍旧保持他们的兴趣。他们在进入学院前就听说过不少关于物理学是如何有趣以及如何引人入胜——相对论、量子力学以及其他的新概念。但是，一旦他们学完两年我们以前的那种课程后，许多人就泄气了，因为教给他们意义重大、新颖的现代的物理概念实在太少。他们被安排去学习像斜面、静电学以及诸如此类的内容，两年过去，没什么收获。问题在于，我们是否有可能设置一门课程能够顾全那些比较优秀的、兴致勃勃的学生，使其保持求知热情。

我们所讲授的课程丝毫不意味着是一门概况性的课程，而是极其严肃的。我想这些课程是对班级中最聪明的学生而讲的，并且可以肯定，这可能是对的，甚至最聪明的学生也无法完全消化讲课中的所有内容——其中加入了除主要讨论的内容之外的有关思想和概念多方面应用的建议。不过，为了这个缘故，我力图使所有的陈述尽可能准确，并在每种场合都指明有关的方程式和概念在物理学的主体中占有什么地位，以及——随着他们学习深入——应怎样作出修正。我还感到，重要的是要向这样的学生指出，他们应能理解——如果他们够聪明的话——哪些是从已学过的内容中推演出来的，哪些是作为新的概念而引进的。当出现新的概念时，假若这些概念是可推演的，我就尽量把它们推演出来，否则就直接说明这是一个新的概念，它根本不能用已学过的东西来阐明，也不可能予以证明，因而是直接引进的。

在讲授开始时，我假定学生们在中学已学过一些内容，如几何光学、简单的化学概念，等等。我也看不出有任何理由要按一定的次序来讲授。就是说没有详细讨论某些内容之前，不可以提到这些内容。在讲授中，有许多当时还没有充分讨论过的内容出现。这些内容比较完整的讨论要到以后学生的预备知识更齐全时再进行。电感和能级的概念就是例子，起先，只是以非常定性的方式引入这些概念，后来再进行较全面的讨论。

在针对那些较积极的学生的同时，我也要照顾到另一些学生，对他们来说，这些外加的五彩缤纷的内容和不重要的应用只会使其感到头痛，也根本不能要求他们掌握讲授中的大部分内容。对这些学生而言，我要求他们至少能学到中心内容或材料的脉络。即使他不理解一堂课中的所有内容，我希望他也不要紧张不安。我并不要求他理解所有的内容，只要求他理解核心的和最确切的面貌。当然，对他来说也应当具有一定的理解能力，来领会哪些是主要定理和主要概念，哪些则是更高深的枝节问题和应用，这些要过几年他才会理解。

在讲课过程中有一个严重困难：在课程的讲授过程中一点也没有学生给教师的反馈来指示讲授的效果究竟如何。这的确是一个很严重的困难，我不知道讲课的实际效果的好坏。整个事件实质上是一种实验。假如要再讲一次的话，我将不会按同样的方式去讲——我希望我不会再来说！然而，我想就物理内容来说，第一年的情形看来还是十分满意的。

但在第二年，我就不那么满意了。课程的第一部分涉及电学和磁学，我想不出什么真正独特的或不同的处理方法，也想不出什么比通常的讲授方式格外引人入胜的方法。因此在讲授电磁学时，我并不认为自己做了很多事情。在第二年末，我原来打算在电磁学后多讲一些物性方面的内容，主要讨论这样一些内容如基本模式、扩散方程的解、振动系统、正交函数等等，并且阐述通常称为“数学物理方法”的初等部分内容。回顾起来，我想假如再讲一次的话，我会回到原来的想法上去，但由于没有要我再讲这些课程的打算，有人就建议介绍一些量子力学——就是你们将在第3卷中见到的——或许是有益的。

显然，主修物理学的学生们可以等到第三年学量子力学。但是，另一方面，有一种说法认为许多听我们课的学生是把学习物理作为他们对其他领域的主要兴趣的背景；而通常处理量子力学的方式对大多数学生来说这些内容几乎是无用的，因为他们必须花费相当长的时间来学习它。然而，在量子力学的实际应用中——特别是较复杂的应用中，如电机工程和化学领域内——微分方程处理方法的全部工具实际上是用不到的。所以，我试图这样来描述量子力学的原理，即不要求学生首先掌握有关偏微分方程的数学。我想，即使对一个物理学家来说，我想试着这样做——按照这种颠倒的方式来介绍量子力学——是一件有趣的事，由于种种理由，这从讲课本身或许会明白。不过我认为，在量子力学方面的尝试不是很成功，这主要是因为在最后我实际上已没有足够的时间（例如，我应该再多讲三四次来比较完整地讨论能带、概率幅的空间的依赖关系等这类问题）。而且，我过去从未以这种方式讲授过这部分课程，因此缺乏来自学生的反馈就尤其严重了。我现在相信，还是应当迟一些讲授量子力学。或许有一天我会有机会再来讲授这部分内容，到那时我将会讲好它。

在这本讲义中没有列入有关解题的内容，这是因为另有辅导课。虽然在第一年中，我的确讲授过三次关于怎样解题的内容，但没有将它们收在这里。此外，还讲过一次惯性导航，应该在转动系统后面，遗憾的是在这里也略去了。第五讲和第六讲实际上是桑兹讲授的，那时我正外出。

当然，问题在于我们这个尝试的效果究竟如何。我个人的看法是悲观的，虽然与学生接触的大部分教师似乎并不都有这种看法。我并不认为自己在对待学生方面做得很出色。当我看到大多数学生在考试中采取的处理问题的方法时，我认为这种方式是失败了。当然，朋友们提醒我，也有一二十个学生——非常出人意外地——几乎理解讲授的全部内容，并且非常积极地攻读有关材料，兴奋地、感兴趣地钻研许多问题。我相信，这些学生现在已具备了一流的物理基础，他们毕竟是我想要培养的学生。但是，“教育之力量鲜见成效，除非施之于天资敏悟者，然若此又实为多余。”[吉本(Gibbon)^{*}]

但是，我并不想使任何一个学生完全落在后面，或许我曾经这样做的。我想，我们能够更好地帮助学生的一个办法是，多花一些精力去编纂一套能够阐明讲课中的某些概念的习题。习题能够充实课堂讲授，使讲过的概念更加实际，更加完整和更加易于牢记。

* Edward Gibbon (1737—1794)，英国历史学家。——译者注

然而,我认为要解决这个教育问题就要认识到最佳的教学只有当学生和优秀的教师之间建立起个人的直接关系,在这种情况下,学生可以讨论概念、考虑问题、谈论问题,除此之外,别无他法。仅仅坐在课堂里听课或者只做指定的习题是不可能学到许多东西的。但是,现在我们有这么多学生要教育,因此我们必须尽量找出一种代替理想情况的办法。或许,我的讲义可以作出一些贡献;也许在某些小地方有个别教师和学生会从讲义中受到一些启示或获得某些观念,当他们彻底思考讲授内容,或者进一步发展其中的一些想法时,他们或许会得到乐趣。

R. P. 费恩曼

1963年6月

前　　言

20世纪物理学的伟大成就，量子力学理论，现在已经近40岁了。我们到现在一般还一直在物理学课程中给我们的学生安排物理学引论的课程（对有些学生来说还是最后的物理课）。对我们物理世界知识的这一中心部分充其量只是简单地提一提。我们应当比这做得更好一些。我的意图是在这些讲课中希望以学生能理解的方式提供给他们量子力学的基本的和最重要的概念。你们将发现这里的方法是新型的，特别是对二年级学生课程的水平来说是新的，并且我们更多地是把它当作一次实验。然而，在看到一些学生是如何容易地接受它以后，我相信实验是成功的。当然，还有需要改进的地方，这将在有更多的课堂经验以后会得到。你们在这里看到的是这第一次实验的记录。

从1961年9月到1963年5月在加州理工学院作为物理学引论课程，连续两年的费恩曼物理教程中，正当需要靠它来理解所描写的现象的时候，量子物理学的概念就被引入了。此外，第二学年的最后12讲全部用来更有条理地介绍一些量子力学概念。然而，在讲座接近结束的时候，才搞清楚已没有足够的时间留给量子力学了。在准备材料的时候，不断地发现其他一些重要和有兴趣的题目可以用已经发展的基本工具来处理。也担心第12章中薛定谔函数的过分简单的处理不能为学生在可能会去研读的许多书籍中更加传统的处理方法间架起足够的桥梁。因此决定扩展另外一组7次讲座；他们是在1964年5月给二年级学生讲的。这些讲演进一步解释并扩展了在前几章中已有的某些材料。

在这一卷中，我们将两年中的演讲汇集在一起，并将次序作了一些调整。此外，原来是给一年级讲的两次介绍量子物理学的演讲全部从第1卷中（在那里是第37和38章）移过来放在本卷中作为第1、2章——使这一卷成为独立的单位，相对独立于前面两卷。几个关于角动量量子化的概念（包括施特恩-格拉赫实验的讨论）已经在第2卷的第34和35章中介绍过了，我们假定对它们已经熟悉了；〔为那些手头没有第2卷的读者的方便起见，这两章重印在本卷中作为附录。〕

这一系列讲座从一开始就试图阐明量子力学的最基本、最普遍的特征。第一次讲课一上来就讨论概率振幅、振幅干涉、状态的抽象符号、叠加以及状态的分解等概念——并且从一开始就使用狄拉克符号。在每一情况中，概念是和对某些特定例子详细讨论一同引进的——为使物理概念尽可能地实在。接着讨论包括确定能量状态在内的状态对时间的依赖，这些概念立即被应用于研究双态系统。氨微波激射器的详细讨论提供了引进辐射吸收及感应跃迁的框架。讲演接着进一步考虑更复杂的系统，直到讨论电子在晶体中的传播，以及对更复杂的角动量的量子力学处理。我们对量子力学的介绍在第20章中讨论到薛定谔波函数、它的微分方程以及对氢原子的解为结束。

这一卷的最后一章并不打算作为“课程”的一部分。它是关于超导的“专题讨论”，是按

照前两卷中某些兴趣性的讲演的精神作的,期望给学生开启有关他们正在学习的内容与普遍物理文化的关系的宽阔视野。费恩曼的“结束语”是这3卷书的句号。

正如在第1卷前言中所说的,这些演讲是在物理课程修订委员会[莱顿、内尔(V. Neher)和桑兹]指导下,加利福尼亚理工学院所做的发展新的引论课程计划的一个方面。在福特基金会的资助下计划得以进行。许多人帮助准备了这一卷的技术细节:克雷顿(M. Clayton)、库乔(J. Curcio)、哈特尔(J. Hartle)、哈尔维(T. Harvey)、伊斯雷尔(M. Israel)、普里乌斯(P. Preuss)、沃伦(F. Warren)和齐莫曼(B. Zimmerman)、诺伊格鲍尔(G. Neugebauer)教授和威尔兹(C. Wilts)仔细审阅了大部分手稿,使材料更加准确和清楚。

不过,你将在这里发现的量子力学故事是属于费恩曼的。如果我们只要能够给其他人带来一些智力的激动,这是当我们领会到在他的现实的物理学讲座中展开的思想时所体验到的,我们的劳动就没有白费。

M. 桑兹

1964年12月

目 录

第 1 章 量子行为	1	§ 5-1	用施特恩-格拉赫装置过滤	
§ 1-1 原子力学	1	原子	54	
§ 1-2 子弹的实验	1	§ 5-2 过滤原子的实验	59	
§ 1-3 波的实验	3	§ 5-3 串联施特恩-格拉赫过		
§ 1-4 电子的实验	4	滤器	60	
§ 1-5 电子波的干涉	6	§ 5-4 基础态	62	
§ 1-6 监视电子	7	§ 5-5 干涉的振幅	64	
§ 1-7 量子力学的第一原理	10	§ 5-6 量子力学的处理方法	67	
§ 1-8 不确定性原理	11	§ 5-7 变换到不同的基	69	
第 2 章 波动观点与粒子观点的关系	13	§ 5-8 其他情况	71	
§ 2-1 概率波振幅	13	第 6 章 自旋 1/2	73	
§ 2-2 位置与动量的测量	14	§ 6-1 变换振幅	73	
§ 2-3 晶体衍射	17	§ 6-2 变换到转动坐标系	75	
§ 2-4 原子的大小	19	§ 6-3 绕 z 轴的转动	78	
§ 2-5 能级	20	§ 6-4 绕 y 轴转动 180° 和 90°	81	
§ 2-6 哲学含义	21	§ 6-5 绕 x 轴的转动	84	
第 3 章 概率幅	24	§ 6-6 任意的旋转	86	
§ 3-1 振幅组合定律	24	第 7 章 振幅对时间的依赖关系	89	
§ 3-2 双缝干涉图样	28	§ 7-1 静止的原子; 定态	89	
§ 3-3 在晶体上的散射	31	§ 7-2 匀速运动	91	
§ 3-4 全同粒子	33	§ 7-3 势能; 能量守恒	94	
第 4 章 全同粒子	37	§ 7-4 力; 经典极限	97	
§ 4-1 玻色子和费米子	37	§ 7-5 自旋 1/2 粒子的“进动”	99	
§ 4-2 两个玻色子的状态	39	第 8 章 哈密顿矩阵	103	
§ 4-3 n 个玻色子的状态	42	§ 8-1 振幅与矢量	103	
§ 4-4 光子的发射和吸收	44	§ 8-2 态矢量的分解	105	
§ 4-5 黑体光谱	45	§ 8-3 世界的基础态是什么?	107	
§ 4-6 液氦	49	§ 8-4 状态怎样随时间而变	109	
§ 4-7 不相容原理	50	§ 8-5 哈密顿矩阵	112	
第 5 章 自旋 1	54	§ 8-6 氮分子	113	
		第 9 章 气微波激射器	118	

§ 9-1	氨分子的状态	118	§ 13-6	在不完整的晶格上的 散射	204
§ 9-2	静电场中的分子	122	§ 13-7	被晶格的不完整性陷俘	206
§ 9-3	在随时间变化的场中的 跃迁	126	§ 13-8	散射振幅和束缚态	207
§ 9-4	共振跃迁	129	第 14 章	半导体	209
§ 9-5	偏离共振的跃迁	131	§ 14-1	半导体中的电子和空穴	209
§ 9-6	光的吸收	132	§ 14-2	掺杂的半导体	212
第 10 章	其他双态系统	134	§ 14-3	霍尔效应	215
§ 10-1	氢分子离子	134	§ 14-4	半导体结	216
§ 10-2	核力	139	§ 14-5	半导体结的整流	218
§ 10-3	氢分子	141	§ 14-6	晶体管	220
§ 10-4	苯分子	144	第 15 章	独立粒子近似	222
§ 10-5	染料	146	§ 15-1	自旋波	222
§ 10-6	磁场中自旋 $1/2$ 粒子的 哈密顿	146	§ 15-2	双自旋波	225
§ 10-7	磁场中自旋的电子	149	§ 15-3	独立粒子	227
第 11 章	再论双态系统	152	§ 15-4	苯分子	228
§ 11-1	泡利自旋矩阵	152	§ 15-5	其他有机化学分子	232
§ 11-2	作为算符的自旋矩阵	157	§ 15-6	近似方法的其他应用	235
§ 11-3	双态方程的解	160	第 16 章	振幅对位置的依赖关系	237
§ 11-4	光子的偏振态	161	§ 16-1	一维情形的振幅	237
§ 11-5	中性 K 介子	165	§ 16-2	波函数	240
§ 11-6	对 N 态系统的推广	173	§ 16-3	具有确定动量的态	243
第 12 章	氢的超精细分裂	177	§ 16-4	对 x 的态的归一化	245
§ 12-1	由两个自旋 $1/2$ 粒子组 成的系统的基础态	177	§ 16-5	薛定谔方程	247
§ 12-2	氢原子基态的哈密顿	179	§ 16-6	量子化能级	250
§ 12-3	能级	183	第 17 章	对称性和守恒定律	254
§ 12-4	塞曼分裂	185	§ 17-1	对称性	254
§ 12-5	在磁场中的态	189	§ 17-2	对称与守恒	257
§ 12-6	自旋 $1/2$ 粒子的投影 矩阵	192	§ 17-3	守恒定律	261
第 13 章	在晶格中的传播	195	§ 17-4	偏振光	263
§ 13-1	电子在一维晶格中的 状态	195	§ 17-5	Λ^0 的衰变	265
§ 13-2	确定能量的状态	197	§ 17-6	转动矩阵概要	270
§ 13-3	与时间有关的状态	200	第 18 章	角动量	272
§ 13-4	三维晶格中的电子	202	§ 18-1	电偶极辐射	272
§ 13-5	晶格中的其他状态	203	§ 18-2	光散射	274
			§ 18-3	电子偶素的湮没	276
			§ 18-4	任意自旋的转动矩阵	281
			§ 18-5	测量核自旋	285
			§ 18-6	角动量的合成	286

§ 18-7 附注 1: 转动矩阵的推导	293	§ 20-5 动量算符	324
§ 18-8 附注 2: 光子发射中的宇称 守恒	295	§ 20-6 角动量	329
第 19 章 氢原子与周期表	296	§ 20-7 平均值随时间的变化	330
§ 19-1 氢原子的薛定谔方程	296	第 21 章 经典情况下的薛定谔方程:	
§ 19-2 球对称解	297	关于超导电性的讨论会	334
§ 19-3 具有角度依赖关系的 状态	302	§ 21-1 磁场中的薛定谔方程	334
§ 19-4 氢原子的一般解	305	§ 21-2 概率的连续性方程	336
§ 19-5 氢原子波函数	308	§ 21-3 两类动量	337
§ 19-6 周期表	310	§ 21-4 波函数的意义	339
第 20 章 算符	315	§ 21-5 超导电性	340
§ 20-1 操作与算符	315	§ 21-6 迈斯纳效应	341
§ 20-2 平均能量	317	§ 21-7 通量的量子化	343
§ 20-3 原子的平均能量	320	§ 21-8 超导动力学	346
§ 20-4 位置算符	322	§ 21-9 约瑟夫森结	348
		费恩曼的结束语	353
		索 引	354
		附 录	357

第1章 量子行为

§ 1-1 原子力学

“量子力学”描述物质和光的行为的各方面细节，特别是发生在原子尺度上的事件。在微小的尺度下事物的行为一点也不像我们有着直接经验的任何事物。它们的行为既不像波动，又不像粒子，也不像云雾，或弹子球，或悬挂在弹簧上的重物，总之不像我们曾经见过的任何东西。

牛顿认为，光是由微粒构成的，但是，之后发现光的行为像波动。然而，后来（在 20 世纪初叶）人们发现，光的行为有时确实又像粒子。又譬如，在历史上，电子起先被认为像粒子，后来发现它在许多方面的性质像波。所以，实际上它表现得两者都不像。现在我们不再说它到底是什么，我们说：“它什么都不像。”

然而，运气总算还好：电子的行为很像光。原子客体（电子、质子、中子、光子等等）的量子行为都是相同的，它们都是“粒子波”，或者随便什么你愿意称呼的名称。所以，我们所学的关于电子（我们将用它作为例子）的性质也可应用到所有的“粒子”，包括光子上。

在 20 世纪的前四分之一，有关原子与其他小尺度粒子行为的知识逐渐积累起来，给出了微小物体是如何活动的一些线索，由此也引起了越来越多的混乱，到 1926 和 1927 年，薛定谔、海森伯与玻恩终于解决了这些问题。他们最后对微小尺度物质的行为作出了协调一致的描述。本章中我们将开始研究这种描述的主要特点。

因为原子的行为与我们的日常经验不同，所以很难适应它，而且对每个人——不管是新手，还是有经验的物理学家——都显得奇特而神秘。甚至专家们也不能以他们所想要的方式去理解原子的行为，而且这是完全有道理的，因为一切人类的直接经验和所有的人类的直觉都只适用于大的物体。我们知道大物体的行为将是如何，但是在小尺度下事物的行为却并非如此。所以我们必须用一种抽象的或想象的方式，而不是把它与我们的直接经验联系起来的方式来学习它。

在本章中，我们将直接讨论以最陌生的方式出现的神秘行为的基本特征。我们选择用来考察的现象不可能，绝对不可能，以任何经典方式来解释，但它却包含了量子力学的核心。事实上，它包含着独一无二的奥秘。我们不能通过“说明”它如何作用来消除这个奥秘。我们只是告诉你，它是怎样起作用的。在告诉你它怎样起作用的同时，我们也将告诉你所有量子力学的基本特色。

§ 1-2 子弹的实验

为了试图理解电子的量子行为，我们将在一个特殊的实验装置中，把它们的行为和我们

较为熟悉的像子弹那样的粒子的行为以及如水波那样的波动的行为作一比较和对照。首先考虑子弹在图 1-1 中概略地画出的实验装置中表现的行为。我们有一挺机枪射出一连串子弹。但它不是一挺很好的机枪,因为它发射的子弹在相当大的角度内(随机地)散开,如图所示。在机枪的前方有一堵用铁甲板制成的墙,墙上开有两个孔,其大小正好能让一颗子弹穿过,墙的后面是一道后障(譬如说一道厚木墙),它能“吸收”打上去的子弹。在后障前面,有一个可称为“探测器”的物体。它可以是一个装着沙的箱子。进入探测器的子弹都被留在那里聚集起来。如果我们愿意的话,可以出空箱子,清点射到箱子里面的子弹数。探测器可以(沿我们称为 x 的方向)来回移动。利用这个装置,我们可以通过实验找出以下问题的答案:“一子弹通过墙上的小孔后到达后障上离中心的距离为 x 处的概率是多少?”首先,你们应当体会我们所谈的应该是概率,因为不可能肯定地说出某一特定的子弹会打到什么地方。一颗碰巧打到一个小孔上的子弹可能从孔的边缘弹开,最终打到某个地方。所谓“概率”,我们指的是子弹到达探测器的机会,这可以用以下方式来量度,数一下在一定时间内到达探测器的子弹数,然后算出这个数与这段时间内打到后障上的子弹总数的比值。或者,如果假定在测量时间内机枪始终以同样的发射率发射子弹,那么我们所要求的概率就正比于在某个标准时间间隔内到达探测器的子弹数。

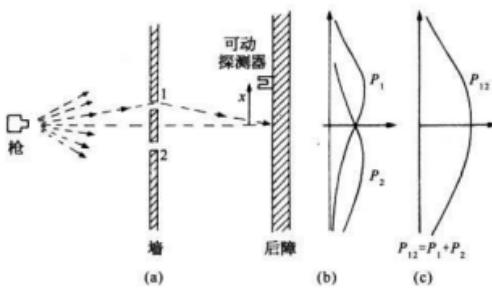


图 1-1 子弹的干涉实验

为了我们现在的目的,设想一个多少有点理想化的实验,其中子弹不是真正的子弹,而是不会裂开的子弹,即它们不会分裂成两半。在实验中,我们发现子弹总是整颗整颗地到达,在探测器中找到的总是一颗颗完整的子弹。如果将机枪射击的发射率弄得十分低,那么我们发现在任何给定时刻,要么没有任何东西到达,要么有一颗,并且只有一颗——不折不扣的一颗——子弹打到后障上。而且,整颗的大小也必定与机枪射击的发射率无关。我们说:“子弹总是以同样的整颗到达。”我们的探测器中测得的是整颗子弹到达的概率。我们测量的是作为 x 的函数的概率。用这种仪器作这样的测量的结果画在图 1-1(c) 上(我们还从未做过这种实验,所以实际上是想象这种结果而已),在图上,向右的水平轴表示概率的大小,垂直轴表示 x ,这样 x 的坐标就对应于探测器的位置。我们称这概率为 P_{12} ,因为子弹可能通过孔 1,也可能通过孔 2 过来。你们不会感到奇怪, P_{12} 的值在接近图中心时大,而在 x 很大时则变小。然而,你们可能感到惊奇的是:为什么 $x = 0$ 的地方 P_{12} 具有极大值。假如我们先遮住孔 2 作一次实验,再遮住孔 1 作一次实验的话,就可以理解这一点。当孔 2 被

遮住时，子弹只能通过孔 1，我们就得到(b)图上标有 P_1 的曲线。正如你们会预料的那样， P_1 的极大值出现在与枪口和孔 1 在一条直线上的 x 处。当孔 1 关闭时，我们得到图中所画出的对称的曲线 P_2 。 P_2 是通过孔 2 的子弹的概率分布。比较图 1-1 的(b)与(c)，我们发现一个重要的结果

$$P_{12} = P_1 + P_2. \quad (1.1)$$

概率正好相加。两个孔都开放时的效果是各个孔单独开放时的效果之和。我们称这个结果为“无干涉”的观测，其理由不久就会明白。关于子弹我们就讲这些，它们整颗地出现，到达的概率不显示干涉现象。

§ 1-3 波的实验

现在我们要来考虑一个水波实验。实验装置概略地画在如图 1-2 中。这里有一个浅水槽，一个标明为“波源”的小物体由马达带动作上下振动激起圆形波。在波源的后面也有一堵带两个孔的墙，墙以后又是另一堵墙。为了简单起见，设这后一堵墙是一个“吸收器”，因而波到达这里后不被反射。吸收器可以用逐渐倾斜的“沙滩”做成，在沙滩前，放置一个可以沿 x 方向前后移动的探测器，和先前的一样。不过现在这个探测器是一个测量波动“强度”的装置。你们可以设想一种能测量波动高度的装置，但其刻度则标成与实际高度的平方成比例，这样读数正比于波的强度。于是，我们的探测器的读数正比于波携带的能量，或者更确切地说，正比于被带至探测器能量的速率。

在我们这个波动实验中，第一件值得注意的事是强度的大小可以是任意值，如果波源只作很小的运动，那么在探测器处就只有微弱的波动。当波源的振动较强时，在探测器处的强度就较大。无论如何，波的强度可以为任意值。我们不会说在波的强度上能显示出任何“颗粒性”。

现在，我们来测量不同 x 处的波的强度(保持波源一直以同样的方式振动)。我们得到图 1-2(c)上标有 I_{12} 有趣样式的曲线。

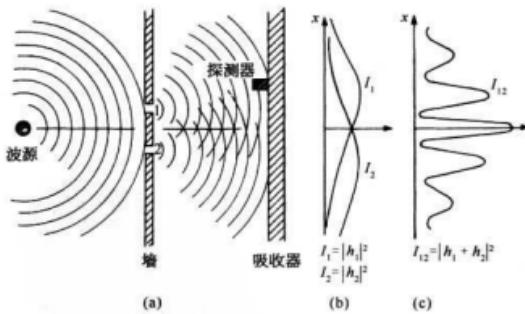


图 1-2 水波干涉实验

我们在第 1 卷中学习电磁波的干涉时，已经算出怎样会产生这种图样。在这种情况下，

我们会观察到原始波在小孔处发生衍射，新的圆形波从各个小孔向外扩展。如果我们分别一次遮住一个小孔，并且测量吸收器处的强度分布，则得到如图 1-2(b)所示的相当简单的强度曲线。 I_1 是来自孔 1 的波的强度（在孔 2 被遮住时测得）， I_2 是来自孔 2 的波的强度（在孔 1 被遮住时测得）。

当两个小孔都开放时所观察到的强度 I_{12} 显然不是 I_1 与 I_2 之和。我们说，两列波产生了“干涉”。在某些位置上（在那里曲线 I_{12} 有极大值）两列波“同相”，其波峰相加就得到一个大的振幅，因而得到大的强度。我们说，在这些地方，两列波之间发生“相长干涉”。凡是探测器到一个小孔的距离比到另一个小孔的距离大（或小）了波长整数倍的那些地方，都会产生这种相长干涉。

在两列波抵达探测器时相位差为 π （称为“反相”）的那些地方，合成波的振幅是两列波的振幅之差。这两列波发生“相消干涉”，因而得到的波的强度低。我们预料这种低的强度值出现在探测器到小孔 1 的距离与到小孔 2 的距离之差为半波长的奇数倍的那些地方。图 1-2 中 I_{12} 的低值对应于两列波相消干涉的那些位置。

你们一定会记得 I_1 , I_2 与 I_{12} 之间的定量关系可以用以下方式来表示：来自孔 1 的水波在探测器处的高度瞬时值可以写成 $h_1 e^{i\omega t}$ （的实部），这里“振幅” h_1 一般来说是复数。波动强度则正比于均方高度，当我们用复数表示时，则正比于 $|h_1|^2$ 。类似地，对来自孔 2 的波，高度为 $h_2 e^{i\omega t}$ ，强度正比于 $|h_2|^2$ 。当两个孔都开放时，由两列波的高度相加得到总高度 $(h_1 + h_2) e^{i\omega t}$ 以及强度 $|h_1 + h_2|^2$ 。就我们目前的要求来说，可略去比例常数，于是对相互干涉的波适用的关系就是：

$$I_1 = |h_1|^2, I_2 = |h_2|^2, I_{12} = |h_1 + h_2|^2. \quad (1.2)$$

你们会注意到，这个结果与在子弹的情况下所得到的结果（式 1.1）完全不同。如果将 $|h_1 + h_2|^2$ 展开，就可以看到：

$$|h_1 + h_2|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2 |h_1| |h_2| \cos \delta. \quad (1.3)$$

这里 δ 是 h_1 与 h_2 之间的相位差。用强度来表示时，我们可以写成：

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (1.4)$$

式(1.4)中最后一项是“干涉项”。关于水波就讲这一些。波的强度可以有任何数值，这显示出干涉现象。

§ 1-4 电子的实验

现在我们想象一个用电子做的类似实验。图 1-3 中描绘了此实验的概略图。我们制造了一把电子枪，它包括一根用电流加热的钨丝，外面套有一个开有小孔的金属盒，如果钨丝相对金属盒处于负电位时，由钨丝发射出的电子将被加速飞往盒壁，其中有一些会穿过盒上的小孔。所有从电子枪出来的电子都带有（差不多）相同的能量。在枪的前方也有一堵墙（就是一块薄金属板），墙上有两个小孔。这道墙的后面有另一块作为“后障”的板。在后障的前面我们放置一个可移动的探测器。它可以是盖革计数器，或者更好一些，是一台与扩音器相连的电子倍增器。

我们应当直接了当地告诉你不要试着去做这样一个实验(虽然你可能已做过我们所描述的前面两个实验)。这个实验从未以这样的方式做过。问题在于,为了显示我们所感兴趣的效应,仪器的尺寸必须小到制造不出来的程度。我们做的是一个“理想实验”。之所以要选它,是因为它易于想象。我们知道这个实验会得到怎样的结果,因为有许多已经做过的实验,在那些实验中,已在选用的适当的尺度与比例上显示了我们将要描写的效应。

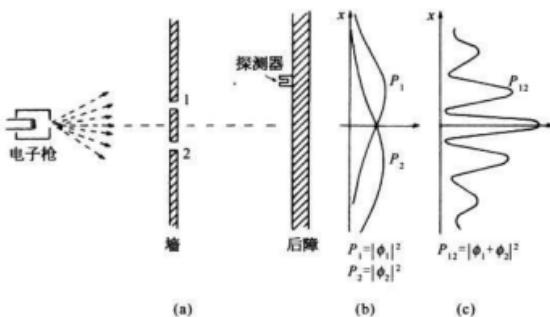


图 1-3 电子的干涉实验

在这个电子的实验中,我们注意到的第一件事是听到探测器(即从扩音器)发出尖锐的“卡嗒”声。所有的“卡嗒”声全都相同,决没有“半卡塔”声。

我们还会注意到“卡嗒”声的出现很不规则。比如像:卡嗒……卡嗒—卡嗒……卡嗒……卡嗒……卡嗒—卡嗒……卡嗒,等等,无疑,这就像人们听到盖革计数器工作时的声音一样。假如我们计数在足够长的时间内——譬如说在许多分钟内——听到的卡嗒声的数目,然后再在另一个相等的时间间隔内再进行一次计数,我们发现两个数值非常接近。所以,我们能够谈论“卡嗒”声出现的平均速率(平均每分钟多少次卡嗒声)。

在我们移动探测器时,声响出现的速率有快有慢,但是每次“卡嗒”声的大小(响度)总是相同的。假如我们降低枪内钨丝的温度,卡嗒声的速率就会减慢,但是每一声“卡嗒”仍然是同样响。我们还可以注意到,如果在后障前分别放置两个探测器,那么这一个或那一个将会“卡嗒”发声,但是决不会二者同时发声(除非偶尔两次“卡嗒”声在时间上非常靠近,以致我们的耳朵可能辨别不出它们是分开的响声)。因此,我们得出结论,任何到达后障的东西总是呈“颗粒”的形式。所有的“颗粒”都是同样大小:只有“整颗”到达,并且每一次只有一颗到达后障。我们说:“电子总是以完全相同的‘颗粒’到达。”

与子弹的实验一样,我们现在开始从实验上寻找下列问题的答案:“‘整颗’电子到达后障上离中心之距离为不同的 x 处的相对概率是多少?”像前面一样,在保持电子枪稳定工作的情况下,我们可以从观察“卡嗒”声出现的速率来得出相对概率。颗粒到达某个特定 x 位置的概率正比于该处的卡嗒声的平均速率。

我们这个实验的结果就是图 1-3(c)所画出的标有 P_{12} 的一条有趣的曲线。不错! 电子的行为就是这样。

§ 1-5 电子波的干涉

现在,我们来分析一下图 1-3 的曲线,看看是否能够理解电子的行为。我们要说的第一件事是,由于它们整颗整颗地出现,每一颗粒,就是所谓的电子,要么通过小孔 1,要么通过小孔 2。我们以“命题”的形式写下这一点:

命题 A:每一个电子要么通过小孔 1 要么通过小孔 2。

有了命题 A,所有到达后障的电子就可分为两类:(1)通过小孔 1 的电子;(2)通过小孔 2 的电子。这样,我们所观察到的曲线必定是通过小孔 1 的电子所产生的效应与通过小孔 2 的电子所产生的效应之和。我们用实验来检验这个想法。首先,我们测量通过小孔 1 的那些电子。我们把小孔 2 遮住,数出探测器的“卡嗒”声,由响声出现的速率,我们得到 P_1 。测量的结果如图 1-3(b)中标有 P_1 的曲线所示。这个结果看来是完全合理的。以类似的方式,可以测量通过小孔 2 的电子概率分布 P_2 。这个测量的结果也画在图上。

当两个小孔都打开时测得的结果 P_{12} 显然不是各个孔单独开放时的概率 P_1 与 P_2 之和。与水波实验类似,我们说:“这里发生了干涉。”

对于电子:

$$P_{12} \neq P_1 + P_2. \quad (1.5)$$

怎么会发生这样的干涉呢?或许我们应当说:“嗯,这大概意味着:整颗电子要么经过小孔 1,要么经过小孔 2 这一命题是不正确的,如果是这样的话,概率就应当相加。或许它们以一种更复杂的方式运动。它们分裂为两半,然后……”但是,不对!不可能如此。它们总是整颗地到达……。“那么,或许其中有一些电子经过小孔 1 后又转回到小孔 2,然后又转过几圈,或者按某个其他的复杂路径……于是,我们遮住小孔 2 后,就改变了从小孔 1 出发的电子最后落到后障上某处的机会……”。但是,请注意!当两个孔都开放时在某些点上只有很少电子到达,但是如果关闭一个孔时,则该处接收到许多电子,所以关闭一个孔就增加了通过另一个小孔后来到该点电子的数目。然而,必须注意在图形的中心, P_{12} 要比 $P_1 + P_2$ 还大两倍。这又像是关闭一个孔就减少了通过另一个孔到来的电子数。看来用电子以复杂方式运动这一假设是很难解释上述两种效应的。

所有这些都是极其神秘的。你考虑得越多,就越会感到神秘。人们曾经提出许多设想,试图用单个电子以复杂方式绕行通过小孔来解释 P_{12} 曲线。但是没有一个得到成功,没有一个人能由 P_1 与 P_2 得到 P_{12} 的正确曲线。

然而,足以令人惊奇的是,将 P_1 和 P_2 与 P_{12} 联系起来的数学是极其简单的。因为 P_{12} 正好像图 1-2 中的曲线 I_{12} ,而那条曲线是简单的。在后障上发生的情况可以用两个称为 ϕ_1 和 ϕ_2 的复数(当然它们是 x 的函数)来描述。 ϕ_1 的绝对值平方给出了小孔 1 单独开放时的效应。也就是说, $P_1 = |\phi_1|^2$ 。同样只有小孔 2 单独开放时的效应由 ϕ_2 给出,即 $P_2 = |\phi_2|^2$ 。两个孔的联合效应正是 $P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2$ 。这里的数学与水波的情形是一样的!(很难看出从电子沿着某些奇特的轨道来回穿过洞孔这种复杂的游戏中能得出如此简单的结果。)

我们的结论是:电子作为粒子总是以完整颗粒的形式到达,这些颗粒到达概率的分布则像波的强度的分布。正是从这个意义来说,电子的行为“有时像粒子,有时像波”。

顺便指出，在处理经典波动时，我们定义强度为波的振幅平方对时间的平均值，并且使用复数作为简化分析的数学技巧。但是在量子力学中结果发现振幅必须用复数表示。仅有实部是不行的。目前，这是一个技术上的问题，因为公式看上去完全一样。

既然电子穿过两个小孔到达后障的概率分布虽然并不等于 $(P_1 + P_2)$ 但仍旧如此简单，要说的一切实际上都在这里了。但是在自然界以这种方式活动的事实中，还包括了大量的精妙之处。我们现在打算向你们说明其中一些精妙之所在。首先，到达某个特定点的电子数目并不等于通过小孔 1 后到达的数目加上通过小孔 2 后到达的数目，而从命题 A 得出的推论却与此相反。所以，毋庸置疑，我们应该作出结论说，命题 A 是不正确的。电子要么通过小孔 1 要么通过小孔 2 这是不正确的。但是这个结论可以用其他实验来检验。

§ 1-6 监视电子

现在来考虑如下的一个实验。在前述的电子仪器中我们加上一个很强的光源，放置在墙的后面，且在两个小孔之间，如图 1-4 所示。我们知道，电荷会散射光。这样，当电子通过某一小孔一路来到探测器时，无论如何它肯定是沿着某一路径来到并会将一些光散射到我们的眼睛中，因而我们可以看见电子在哪里飞过。比方说，假如电子采取经过小孔 2 的路径，如图 1-4 上画出来的，我们应当看到来自图中标有 A 的位置附近出现闪光。如果电子经过小孔 1，我们可以预料在上面的小孔附近将看到闪光。假如发生这样的情形，我们看到在两个位置上同时出现闪光，那是因为电子分成了两半……。让我们来做这个实验吧！

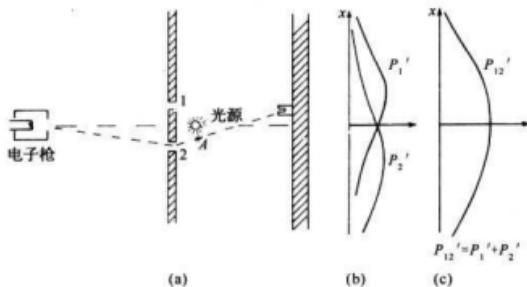


图 1-4 另一个电子的实验

我们所看到的情况是：每当听到（后障处的）电子探测器发出一声“卡嗒”时，我们要么在靠近小孔 1 处要么在靠近小孔 2 处见到闪光。但是决不会同时在两处见到！无论探测器放在哪里，我们都观察到同样的结果。我们由这样的观察得出结论，在监看电子时，我们发现，电子不是通过这个孔就是通过另一个孔。在实验上，命题 A 必然是正确的。

那么，在我们否定命题 A 的论证中，有什么不对呢？为什么 P'_{12} 不正好等于 $(P'_1 + P'_2)$ ？我们还是回到实验上去！让我们跟踪电子，看看它们究竟做些什么。对于探测器的每一个位置 (x 坐标)，我们都对到达的电子计数，同时也通过对闪光的观察记录下它们经过的是哪

一个孔。可以这样来跟踪发生的过程：每当我们听到一声“卡嗒”时，如果在小孔 1 附近见到闪光，那么就在第一列中作一个记录，如果在小孔 2 附近见到闪光，那么就在第二列中作一个记录。所有抵达的电子都可分别记录在这两列中，即经过小孔 1 的一列和经过小孔 2 的一列。由第一列的记录我们可以得到电子经由小孔 1 到达探测器的概率 P'_1 ；而由第二列的记录则可得到电子经由小孔 2 到达探测器的概率 P'_2 。如果现在对许多 x 的值重复这样的测量，我们就得到图 1-4(b) 所画的 P'_1 与 P'_2 的曲线。

你们看，这里没有什么过分令人惊奇的事。所得到的 P'_1 与我们先前遮住小孔 2 而得到的 P_1 完全相似； P'_2 则与遮住小孔 1 所得到的 P_2 相似。所以，像两个小孔都通过这样的复杂情况是不存在的。当我们监看电子时，它们就像我们所预料的那样通过小孔。无论小孔 2 是开着还是关着，我们看到通过小孔 1 到来的电子分布都相同。

但是别忙！现在总概率，即电子以任何途径到达探测器的概率又是多少呢？我们已经有信息了。我们现在假装从未看到过闪光，而把先前分成两列的探测器“卡嗒”声次数归并在一起。我们只须把这些数加起来。对于电子经过随便哪一个小孔到达后障的总概率，我们确实得出 $P'_{12} = P'_1 + P'_2$ 。这就是说，虽然我们成功地观察到电子所经过的是哪个孔，但我们也再也得不到原来的干涉曲线 P_{12} ，而是新的、不显示干涉现象的 P'_{12} 曲线！如果我们将灯熄灭， P_{12} 又出现了。

我们必须作出结论：当我们看着电子时，它们在屏上的分布与我们不看着它时的分布不同。也许这是由于打开光源而干扰了事态？想必是由于电子本身非常精巧，因而光波受到电子散射时给电子一个反冲，因而改变了它们的运动。我们知道，光的电场作用在电荷上时会对它施加一个作用力。所以也许我们应当预期到运动要发生改变。不管怎样，光对电子有很大的影响。在试图“跟踪”电子时，我们改变了它的运动。也就是说，当光子被散射时电子所受到的撼动足以改变其运动，以致原来它可能跑到 P_{12} 为极大值的那些位置上，现在却反而落到 P_{12} 为极小值的那些位置上了；这就是为什么我们不再看到起伏的干涉效应的原因。

你们或许会想：“不要用这么强的光源！将亮度调低一些！光波变弱了，对电子的扰动就不会那么大。无疑，若使光越来越暗淡的话，最后光波一定会弱到它的影响可以忽略。”好，让我们来试一下。我们观察到的第一件事是电子经过时所散射出的闪光并没有变弱。它总是同样强的闪光。灯光暗淡后唯一发生的事情是，有时，我们听到探测器发出一声“卡嗒”，但根本看不到闪光。电子在没有“被看到”的情况下跑了过去。我们所观察到的是：光的行为也像电子，我们原来就知道它是波动，但是现在发现它也是“颗粒状”的。它总是以我们称为光子的整颗的形式到达或者被散射。当我们降低光源的强度时，我们并没有改变光子的大小，而只是改变了发射它们的速率。这就解释了为什么在灯光暗淡时有些电子没有被“看到”就跑了过去。当电子经过时，周围正好没有光子。

这件事使人多少有点泄气。如果真的是每当我们“见到”电子，我们看到的是同样大小的闪光，那么所看到的总是受到扰动的电子。不管怎样，我们用弱的灯光来做一下实验。现在，只要听到探测器中一声“卡嗒”，我们就在下述三列中的某一列记下一次：列(1)记的是在小孔 1 旁看到的电子；列(2)记的是小孔 2 旁看到的电子，根本没有看到电子时，则记在列(3)中。当我们把数据整理出来(计算概率)后可以发现这些结果：“在小孔 1 旁看到”的电子具有类似于 P'_1 的分布；“在小孔 2 旁看到”的电子具有类似于 P'_2 的分布(所以无论“在小孔 1 或者小孔 2 旁看到”的电子共同具有类似于 P'_{12} 的分布)；而那些“根本没有看到”的电子则具

有类似于图 1-3 的 P_{12} 那样的“起伏的”分布！假如电子没有被看到，我们就会得到干涉现象！

这是可以理解的，当我们没有看到电子时，就没有光子干扰它，而当我们看到它时，它已经受到了光子的扰动。由于光子产生的都是同样大小的效应，所以扰动的程度也总是相同的，而且光子被散射所引起的效应足以抹掉任何干涉效应。

难道没有某种可以不干扰电子而又使我们能看到它们的方法吗？在先前的一章中，我们知道，“光子”携带的动量反比于它的波长 ($p = h/\lambda$)。无疑当光子被散射到我们的眼中时，它给予电子的扰动取决于光子所携带的动量。啊哈！如果我们只想略微扰动一下电子的话，那么降低的不应当是光的强度，而是它的频率（这与增加波长一样）。我们使用比较红的光。甚至用红外光或无线电波（如雷达），并且借助于某种能“看到”这些较长波长的仪器来“观察”电子的行径。如果我们使用“较柔和”的光，那么或许可以不至于使电子扰动太大。

现在我们用波长较长的波来重复我们的实验。每次实验用波长越来越长的光。起先看不到什么变化。结果都是相同的。接着，可怕的事情发生了，你们会记得，当我们讨论显微镜时曾指出过，由于光的波动性质，仍旧可以分辨出是两个分离的点的两个靠近光点的距离有一个最小的极限。这个极限距离是光波波长的数量级。所以如果我们使波长大于两个小孔之间的距离，我们看到在光被电子散射时产生一团很大的模糊不清的闪光。这样就不再能说出电子通过的是哪一个孔了！我们只知道它跑到某处去！正是对这种颜色的光，我们发现电子所受到的撼动已小到使 P'_{12} 看来开始像 P_{12} ——即开始出现某种干涉的效应。只有在波长远大于两个小孔之间的距离时（这时我们完全不可能说出电子经过什么地方），光所引起的扰动足够地小，因而我们又得到图 1-3 所示的曲线 P_{12} 。

在我们的实验中，我们发现不可能这样安排光源，即使人们既可以说出电子穿过哪个小孔，同时又不扰动分布图样。海森伯提出，只有认为我们的实验能力有某种前所未知的基本极限，才能使当时发现的新的自然界的定律协调一致。他提出了作为普遍原理的不确定性原理，在我们的实验中，它可以这样表述：“要设计出一种装置来确定电子经过哪一个小孔，同时又不使电子受到足以破坏其干涉图样的扰动是不可能的”。如果一套装置能够确定电子穿过哪一个小孔，它就不能巧妙得使图样不受到实质性的扰动。还没有一个人找到（或者甚至想出）一条绕过不确定性原理的途径。所以我们必须假设它描述的是自然界的一个基本特征。

我们现在用来描写原子，事实上也描写所有物质的量子力学的全部理论都取决于不确定性原理的正确性。由于量子力学是这样一种成功的理论，我们对于不确定性原理的信任也就加强了。但是如果一旦发现了一种能够“推翻”不确定性原理的方法，量子力学就会得出自相矛盾的结果，因此也就不再是自然界的有效的理论，而应予以抛弃。

“很好”，你们会说：“那么命题 A 呢？电子要么通过小孔 1，要么通过小孔 2，这是正确的还是不正确的呢？”唯一可能作出的回答是，我们从实验上发现，为了使自己不致陷于自相矛盾，我们必须按一种特殊方式思考问题。我们所必须说的（为了避免作出错误的预测）是：如果人们观察小孔，或者更确切地说，如果人们有一套装置能够确定电子究竟通过小孔 1 还是小孔 2 的话，那么他们就能够说出电子穿过小孔 1，或者穿过小孔 2。但是，当人们不想知道电子走的是哪条路，实验中没有干扰电子的因素时，那么他们可以不去说电子通过了小孔 1 还是通过了小孔 2。如果某个人一定要这么说，并且由此作出任何推论的话，他就会在分

析中造成错误。这是一条逻辑钢丝，假如我们希望成功地描写自然的话，我们就不得不走这一条钢丝。

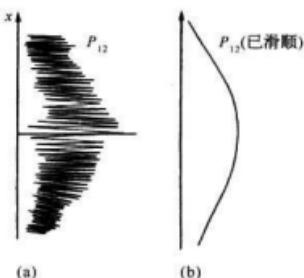


图 1-5 子弹的干涉实验

(a) 实际的图样(概图); (b) 观测到的图样

如果所有物质——包括电子——的运动都必须用波来描写，那么我们第一个实验中的子弹又怎样呢？为什么在那里我们看不到干涉图样？我们发现：对于子弹来说，其波长是如此之短，因而干涉图样变得非常细密。事实上，图样细密到人们用任何有限尺寸的探测器都无法分辨出它的分立的极大值与极小值。我们所看到的只是一种平均，那就是经典曲线。在图1-5中，我们试图示意地表明对大尺度物体所发生的情况。其中图(a)表示应用量子力学对子弹所预期的概率分布。假设快速摆动的条纹表示对于波长极短的波所得到的干涉图案。然而，任何物理探测器都跨越了概率曲线的好几个摆动，所以通过测量给出的是图(b)中的光滑曲线。

§ 1-7 量子力学的第一原理

我们现在来小结一下前面实验中得出的主要结论。不过，我们将把结果表示成对于这一类的实验普遍适用的形式。假如先定义“理想实验(ideal experiment)”，那么这个小结就可以较为简单一些。在“理想实验”中没有任何不确定的外来影响，即没有不稳定或其他什么我们无法考虑的事情。更确切的说法是：“理想实验是所有的实验初始条件和最终条件都完全确定的实验。”我们说的“事件”，一般说来就是一组特定的初始与最终条件。(例如：“电子飞出电子枪，到达探测器，此外没有任何其他事情发生”。)下面就是我们的小结：

小 结

(1) 在理想实验中事件的概率由一个复数 ϕ 的绝对值平方给出， ϕ 称为概率幅*：

$$\begin{aligned} P &= \text{概率}, \\ \phi &= \text{概率幅}, \\ P &= |\phi|^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

(2) 当一个事件可以按几种不同的方式发生时，该事件的概率幅等于各种方式分别考虑时的概率幅之和。此时出现干涉：

$$\begin{cases} \phi = \phi_1 + \phi_2, \\ P = |\phi_1 + \phi_2|^2. \end{cases} \quad (1.7)$$

(3) 如果完成一个实验，此实验能够确定实际上发生的是哪一种方式的话，则该事件的

* 概率幅的英文为 probability amplitude，也可译作“概率振幅”。本书原文常简称为 amplitude，译文也照译成“振幅”。——译者注

概率等于按各个不同方式发生的概率之和。此时不发生干涉：

$$P = P_1 + P_2. \quad (1.8)$$

人们也许还想问：“这是怎样起作用的？在这定律背后有什么机制？”还没有人发现定律背后的任何机制。也没有人能够“解释”得比我们勉强作出的“解释”更深入一些，更没有人会给你们对这种情况作更深刻的描述。我们没有能够推导出这些结果的更基本机制的概念。

我们要强调经典理论和量子力学之间的一个非常重要的差别。我们一直谈论在给定的情况下，电子到达的概率。我们曾暗示：在我们的实验安排中（即使是可能作出的最好的一种安排）不可能准确预言会发生什么事。我们只能预言可能性！如果这是正确的，那就意味着，物理学已放弃了要准确预言在确定的环境下会发生的事情。正是！物理学已放弃了这一点。我们不知道怎样去预言在给定的环境下会发生什么，而且我们现在相信，这是不可能的——唯一可以预言的是各种事件的概率。必须承认，这是我们早先认识自然界的理念的削弱。它或许是倒退了一步，但是还没有能看到避免这种倒退的方法。

现在，我们来评论一下人们有时提出的试图避免上述困难的一种见解。这种见解认为：“或许电子有某种我们目前还不知道的内部机理——某种内变量。或许这就是我们无法预言会发生什么事情的原因。如果我们能够更仔细地观察电子，我们就能说出它会到达哪里。”就我们所知，这是不可能的。我们仍旧没有摆脱困境。假设在电子内部有某种机制能够确定电子的去向，那么这种机制也必定能够确定电子在途中将要通过哪一个孔。但是我们不要忘记，在电子内部的东西应当不依赖于我们所做的事情，特别是不依赖于我们打开或关闭哪一个孔。所以，如果电子在开始运动前已打定主意：(a) 它要穿过哪一个孔，(b) 它将到达哪里，我们会发现选择小孔 1 的那些电子会得出 P_1 ，选择小孔 2 的那些电子会得出 P_2 ，通过两个孔的许多电子得出的概率必定是求和 $P_1 + P_2$ 。看来没有别的解决方法了。但是我们从实验上已经证实情况并非如此。而现在还没有人能够解决这个难题。所以，在目前我们只能将我们自己局限于计算概率。我们说“在目前”，但是我们强烈地感觉到很可能永远如此——很可能永远无法解决这个难题——因为自然界实际上就是如此。

§ 1-8 不确定性原理

海森伯原来对不确定性原理的叙述是这样的：假如对任一客体进行测量，你能以不确定量 Δp 确定其动量的 x 分量，你就不可能同时测定其位置比 $\Delta x = \hbar / 2\Delta p$ 更准确，其中 \hbar 是自然界给出的确定的数。它称作“约化普朗克常量”，近似地等于 $1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。在任何时候，位置的不确定量和动量的不确定量的乘积必定大于约化普朗克常量的一半。上面所述的是较为一般的不确定性原理的特殊情况。比较普遍的表述是，人们不可能用任何方式设计出这样一种装置，可以用它来确定在两种可供选择的方式中采取的是哪一种方式，而同时又不破坏干涉图样。

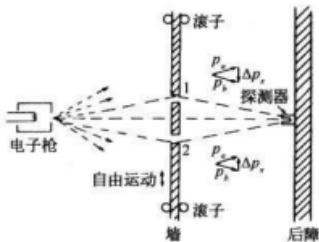


图 1-6 测出墙的反冲的实验

现在我们举一种特殊情况来说明,为了不致陷于困境海森伯给出的这种关系必须成立。我们设想对图1-3中的实验作一些修改,其中带有小孔的墙是一块装上滚子的板,这样它可以在 x 方向上自由地上下滑动,如图1-6所示。仔细观察板的运动,我们可以试着说出电子通过的是哪个小孔。想象一下当探测器放在 $x=0$ 处时会出现什么情况。我们可以预期对经过小孔1的电子,板必定使它往下偏折到达探测器。由于电子动量的垂直分量被改变了,板必定会以相等的动量向相反的方向反冲。它将被推向上。如果电子通过下面的小孔,板就会受到一个向下推力。很清楚,对于探测器的每一个位置,电子经由小孔1与经由小孔2时板所得到的动量是不同的。这样!完全不必去扰动电子,只要盯着板看,我们就可以说出电子取的是哪一条路径。

现在,为了做到这一点,必须知道电子通过以前板的动量。测出电子经过后板的动量就能算出板的动量改变了多少。但是要记住,根据不确定性原理,我们不能同时以任意高的准确度知道板的位置。而如果我们不知道板的确切位置,就不能精确地说出两个孔在哪里。对于各个经过小孔的电子来说,小孔是在不同的位置上。这意味着对于每个电子来说,干涉图样的中心在不同的位置上。于是干涉图样中的起伏将被抹去。下一章我们将定量地说明,假如我们能足够准确地测定板的动量从而由反冲动量的测量来确定电子经过的是哪一个孔,那么按不确定性原理,该板的 x 位置的不确定量足以使探测器观察到的干涉图样的 x 位置上下移动一定的距离,使得干涉极大移向最近的极小值的位置上。这种无规则的移动正好将干涉图样抹平,因而观察不到干涉现象。

不确定性原理“保护”了量子力学。海森伯认识到,假如有可能以更高的准确度同时测定动量与位置的话,量子力学就将坍塌。所以他相信这肯定不可能。于是人们试图找出一个能同时准确测量二者的方法,但是没有一个人找到一种方法能够以任何更高的精确度同时测出任何东西——屏障、电子、台球弹子等等——的位置与动量。量子力学一直担着风险,但仍旧是正确的。

第2章 波动观点与粒子观点的关系

§ 2-1 概率波振幅

本章我们将讨论波动观点与粒子观点之间的关系。由上一章我们已经知道，波动观点和粒子观点都欠正确。通常，我们总是力图准确地描述事物，至少也要做到足够精确，当我们的学习更深入时无须改变这种描述——它可以扩充，但却不会改变！然而，当我们打算谈及波动图像或粒子图像时，两者都是近似的，并且都将改变。所以，从某种意义上来说，我们在这一章中所学习的东西并不是很精确的；这里的论证是半直觉的，我们将在以后使之更为精确，但是，当我们用量子力学作出正确解释时，有一些事情将会有一点改变。我们这样做是为了在深入到量子力学的数学细节之前使你得到一些量子现象的定性感觉。而且，我们所有的经验都是关于波的和关于粒子的，因此，在我们知道量子力学振幅的完整数学描述之前，先应用波动和粒子的概念来得到一定场合下所发生的事情的理解是颇为方便的。我们在这样做时将力图阐明那些最薄弱的环节，但是其中大多数还是相当接近于正确的——这只是解释的问题。

首先，我们知道量子力学中描述世界的新方法——新的框架——是给每个可能发生的事件一个振幅，而且如果此事件涉及到接收一个粒子，那么就给出在不同位置与不同时间找到该粒子的振幅。于是，找到该粒子的概率就正比于振幅绝对值的平方。一般地讲，在不同场所与不同时刻找到粒子的振幅是随着位置和时间而变化的。

在某些特殊情况下，振幅在空间与时间中像 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ 那样呈正弦式变化，其中 \mathbf{r} 是从某个原点起算的矢量位置。（别忘了这些振幅是复数，不是实数），这样的振幅按照确定的频率 ω 和波数 \mathbf{k} 变化。结果发现这对应于一种经典的极限情况，我们可以认为在此情况中有一个粒子，它的能量 E 为已知，并且与频率之间的关系是

$$E = \hbar\omega, \quad (2.1)$$

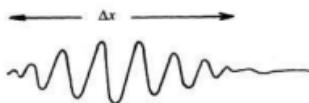
而且粒子的动量 \mathbf{p} 亦是已知的，它与波数 \mathbf{k} 之间的关系是

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (2.2)$$

（符号 \hbar 表示数 h 除以 2π ，即 $\hbar = h/2\pi$ 。）

这意味着粒子的概念受到了限制。我们如此经常使用的粒子的概念——它的位置，它的动量，等等。从某些方面说来已不再令人满意了。比如，假设在不同的位置上找到一个粒子的振幅由 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ 给出，则其绝对值的平方是常数。而这就意味着在所有的点上找到粒子的概率都相等。这就是说，我们不知道粒子究竟在何处——它可以在任何地方——粒子的位置是非常不确定的。

另一方面，如果一个粒子的位置比较确定，我们可以相当准确地预测到，那么在不同位

图 2-1 长度为 Δx 的波包

邻波谷之间的距离)就对应于该粒子的动量。^{*}

这里我们遇到了有关波动的一件奇妙的事情;一件很简单的、严格说来与量子力学毫无关系的事情。任何人,即使完全不懂量子力学,只要他研究过波的话就会知道:对一个短的波列,我们不可能定义一个唯一的波长。这样的波列没有一个确定的波长;存在着与有限的波列长度相关联的波数的不确定性,从而在动量上也就存在着不确定性。

§ 2-2 位置与动量的测量

现在我们来考虑这一概念的两个例子——即看一下如果量子力学是正确的话,为什么存在着位置与(或)动量的不确定性的理由。在前面我们已经看到,如果事情不是这样——即如果有可能同时测定任何东西的位置与动量——我们就会遇到一个佯谬;幸而这样一种佯谬并不存在,由波动图像中可以自然地得出不确定性这一事实表明,一切都很协调。

这里有一个很容易理解的例子,表明某一情况下位置与动量之间的关系。假设我们有一个单缝,一些具有一定能量的粒子从很远的地方飞来——所以它们实际上全都水平地飞来(图 2-2)。我们将集中注意动量的垂直分量。从经典的意义上,所有这些粒子都具有一定的水平动量,譬如说 p_0 。所以,从经典意义上说,粒子穿过狭缝前的垂直动量 p_y 是确定知道的。图中粒子既不向上,也不朝下运动,因为它来自很远的地方——当然它的垂直动量就是零。现在我们假设这个粒子通过宽度为 B 的狭缝。当它从狭缝穿出后,我们就以一定的精确度,即 $\pm B^{**}$,知道它的垂直位置—— y 坐标数值。这就是说,在位置上的不确定量 Δy 为 B 的数量级。现在我们也许想说,由于已知动量是绝对水平的,因而 Δp_y 是零;但这是错的。我们曾原来知道动量是水平方向的,但是现在再也不知道了。在粒子穿过狭缝前,我们不知道它们的垂直位置。由于粒子穿过了狭缝,现在我们就发现它的垂直位置,但却失去了该粒子垂直动量的信息!为什么?按照波动理论,当波通过狭缝后就会散开或衍射,像光那样子。因此有一定概率,粒子出狭缝后,不严格笔直地飞行。由于衍射效应,粒子出射的图样散开,其弥散角(我们可将它定义为是第一极小值的张角)就是对粒子出射的最后角度的不确定性的一种度量。

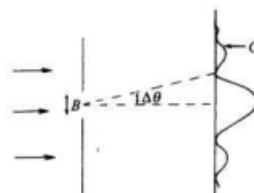


图 2-2 穿过狭缝粒子的衍射

* 原文为 the distance between nodes of the waves in the train。其中用 nodes 不恰当,故略加修改。——译者注

** 更精确地说,我们所知的 y 坐标的误差是 $\pm B/2$ 。但是我们现在只对一般的概念感兴趣,所以不必为因子 2 操心。

图样是怎样弥散开的呢？所谓弥散开就是说粒子有一定的往上或往下运动的机会，也就是说，其动量出现向上或向下的分量。我们说机会与粒子是因为可以用一个粒子计数器检测出这个衍射图样，而且当计数器在譬如说图 2-2 的 C 处接收到粒子时，接收到整个粒子，这样，从经典意义上来说，粒子要从狭缝射出往上偏至 C 处，就得具有垂直的动量。

为了对动量的弥散有一个大致的概念，垂直动量 p_y 的弥散等于 $p_0 \Delta\theta$ ，这里 p_0 是水平动量。那么在弥散开的图样中 $\Delta\theta$ 有多大？我们知道第一极小值出现在 $\Delta\theta$ 角上，这时，从狭缝的一个边缘处传出的波必定比从另一边缘传出的波多走过一个波长——我们以前已得出这个结论（第 1 卷第 30 章）。因此 $\Delta\theta$ 为 λ/B ，这样，此实验中的 Δp_y 就是 $p_0 \lambda/B$ 。注意：如果将 B 做得更小，亦即对粒子的位置做更为准确的测量，那么衍射图样就变宽。所以，狭缝做得越窄，衍射图样就越宽，而我们发现粒子具有侧向动量的可能性就越大。这样，垂直动量的不确定量就与 y 的不确定量成反比。事实上，我们看到两者的乘积为 $p_0 \lambda$ 。但是 λ 是波长， p_0 是动量，按照量子力学，波长乘以动量就是普朗克常量 \hbar 。因此我们得到下列规则：垂直动量的不确定量与垂直位置的不确定量的乘积约为 \hbar 的量级：

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar / 2. \quad (2.3)$$

我们不可能造出这样一个系统，在其中既知道粒子的垂直位置，又能以式(2.3)所表示的更大准确性来预知它的垂直运动。这就是说垂直动量的不确定量必须超过 $\hbar/2\Delta y$ ，这里 Δy 是我们的位置的不确定量。

有时，人们说量子力学是完全错误的。当粒子从左边飞来时，它的垂直动量是零。现在它穿过了狭缝，它的位置也就知道了。位置与动量两者看来都能以任意高的精确度知道。完全正确，我们可以接收一个粒子，在接收时确定它的位置，以及确定为了到达那里原来应具有多少动量。这些都完全正确，但这并不是不确定关系式(2.3)所谈的事。式(2.3)所说的是对一种状况的可预知性，而不是对于过去的评述。“我知道粒子穿过狭缝前的动量是多少，现在又知道它的位置”这种说法没有什么意思，因为我们现在已失去了关于动量的知识。粒子通过了狭缝这一事实已使我们不再能预言垂直动量。我们所谈的是一种预言性的理论，而不只是一种事后的测量。所以我们必须谈论能够预料的事。

现在我们从另一个角度来看一下。我们更为定量地考虑同样现象的另一个例子。在上一个例子中，我们曾以经典方法测量了动量。那就是说，我们考虑了方向、速度和角度，等等，所以是用经典分析得出动量。然而，由于动量与波数有关，所以自然界中还有另一种测量粒子（光子或其他粒子）动量的方法，它没有经典的类比，因为它利用的是式(2.2)。我们测量波的波长。我们试用这种方式来测量动量。

假设有一个有大量刻线的光栅（图 2-3），并且将一束粒子射向此光栅。我们已屡次讨论过这样一个问题：如果粒子具有确定的动量，那么，由于干涉，我们会在某个方向上得到一个十分锐细的图样。我们也讨论过在测量动量时可以精确到什么程度，也就是说，这样的光栅分辨率有多大。我们不拟再作一次推导，而只是参考第 1 卷第 30 章的结果，在那里已经得出用一个给定的光栅

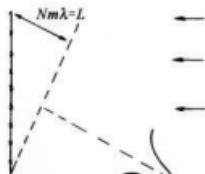


图 2-3 利用衍射
光栅确定动量

能够测出的波长的相对不确定量为 $1/Nm$, 其中 N 是光栅刻线数, m 是衍射图样的级数, 亦即

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm}. \quad (2.4)$$

现在式(2.4)可以改写为

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{Nm\lambda} = \frac{1}{L}, \quad (2.5)$$

这里 L 是图 2-3 中所示的距离。这段距离是粒子或者波, 不论它是什么, 从光栅底端反射后必须跑过的总路程与它们从光栅顶端反射后必须跑过的总路程的路程差。也就是说, 形成衍射图样的波来自光栅的不同部分。首先到达的波是来自光栅底端的波列的起始部分, 该波列的其余部分依次通过。随着来自光栅不同部分的波列也先后到达。最后到达的是来自光栅顶端的波列, 它的起始部分与最先到达的(来自光栅底端的)波列上距离其起始端长度为 L 处的波动相遇。^{*} 所以为了在我们的光谱中得到一条与一定的动量对应的锐细谱线, 其不确定量由式(2.4)给出, 我们必须有一列长度至少为 L 的波列。如果波列太短, 我们就没有用到整个光栅。波列太短的话, 形成光谱的波只是从光栅的很小一块面积上反射的波, 光栅的作用没有很好发挥——我们将得到很大的角宽度。为了得到较窄的光谱线, 我们必须利用整个光栅, 这样至少在某些时刻所有波列都是同时从光栅的所有部分散射出来。因此为了使波长的不确定量小于式(2.5)所给出的值, 波列的长度必须为 L 。顺便说一下,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\Delta k}{2\pi}. \quad (2.6)$$

因此

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}. \quad (2.7)$$

这里 L 是波列的长度。

这意味着, 如果有一长度小于 L 的波列, 那么在波数上的不确定量必然超过 $2\pi/L$ 。或者说波数的不确定量乘以波列的长度——暂时我们称之为 Δx ——将大于 2π 。我们之所以称波列长度为 Δx 是因为这是粒子在位置上的不确定量。如果波列长度有限, 那么, 这就是说我们能在不确定的范围 Δx 以内找到粒子。波的这种性质, 即波列的长度乘以相应波数的不确定量至少为 2π , 是每个研究波的人都知道的, 这与量子力学毫无关系。这只是说, 如果我们有一长度有限的波列的话, 没有办法很精确地数出波的数目。

我们试从另一途径来看看其中的道理。假定我们有一有限长度为 L 的波列; 那么, 由于它在两端必定减弱(如图 2-1 所示), 所以在长度 L 中波的数目是不确定的, 可能相差 ± 1 。但在长度 L 中的波的数目是 $kL/2\pi$ 。可见 k 是不确定的, 我们又重新得出式(2.7)的结果, 它只是波的一种性质。无论波是在空间传播, k 是每厘米的弧度数, L 是波列的长度, 还是波在时间上展开, ω 是每秒的振动数, T 是到达的波列持续的时间“长度”, 都是同样的情况。这就是说: 如果只是持续一定的有限时间 T 的波列, 那么频率的不确定量则由下

* 原文这几句话表达含糊, 曾经译者重新整理, 补充。——译者注

式确定：

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.8)$$

我们已经着重指出，这些都只是波的性质，例如，在声学理论中就已为人们所熟知了。

问题在于，在量子力学中，我们将波数解释为按照公式 $p = \hbar k$ 对粒子动量的一种量度，这样，式(2.7)就告诉我们 $\Delta p \approx h/\Delta x$ 。因此，这就表明了经典动量概念的适用极限。（显然，如果我们想用波来表示粒子的话，动量的概念必定受到某种限制！）我们发现了一条规则，给了我们经典概念何时失效的一些观念，这是件很好的事情。

§ 2-3 晶体衍射

下面，我们考虑粒子波在晶体上的反射。晶体是一块厚厚的东西，它整个由排列成很整齐阵列的相同原子组成——我们将在后面讨论一些较复杂的情况。问题是对于一束给定的光(X射线)、电子、中子、或者别的东西，怎样安置原子阵列才能在某个给定方向上得到强的反射极大值。为了得到强的反射，来自所有原子的散射都必须同相位。同相波的数量和反相波的数量不能相等，不然波会相互抵消掉。正如我们已经说明过的那样，解决这个问题的方法是找出等相位的区域；它们就是一些对入射方向和反射方向成相等角度的平面(图2-4)。

考虑图2-4中两个平行平面，如果从这两个平面散射的波的波前传播距离之差为波长的整数倍，则散射波的相位相同。可以看出，距离差为 $2ds\sin\theta$ ，这里 d 是两平面间的垂直距离。于是相干反射的条件是

$$2ds\sin\theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.9)$$

比方说，如果晶体中原子刚巧处在遵从式(2.9)中 $n = 1$ 条件的平面上，那么就会出现强反射。然而，如果有性质相同(密度相同)的其他原子位于原来原子的中间，这些中间平面的散射也同样强，就会与其他的散射相互干涉，致使总效果为零。所以式(2.9)中的 d 必须指相邻平面的距离；我们不能对两个相距五层的平面来应用这个公式！

有趣的是，实际的晶体通常并不那么简单，即只是以一定方式重复排列的同一类原子。假如我们作一个二维类比的话，它们更像印满了重复某种图形的墙纸。对原子来说，所谓“图形”就是多个原子的某种排列，例如，碳酸钙的图形包含有一个钙原子、一个碳原子和三个氧原子等等，也可能包含相当多的原子。但不管是什，这些图形都按一定的形式重复构成图案。这种基本图形就称为晶胞。

重复的基本图形决定了我们所称的晶格类型；通过观察反射光束并找出它们的对称性，就能立即确定晶格类型。换句话说，只要找到各个反射点，就可确定晶格类型，但是为了确定晶格的每个单元的组成，就必须考虑各个方向上的散射强度。向哪个方向散射取决于晶

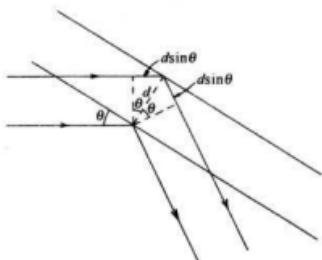


图2-4 晶面对波的衍射

格的类型,但每一束散射光有多强则由每个晶胞内有些什么来决定*。晶体的结构就是用这种方式得出的。

图 2-5 和图 2-6 是两幅 X 射线衍射图样的照片,它们分别是从岩盐与肌红蛋白的散射的衍射图。

附带提一下,如果最靠近的两个平面间的距离小于 $\lambda/2$,就会发生一件有趣的事。在这种情况下,式(2.9)对 n 就没有解。因此,如果 λ 大于相邻平面之间距离的两倍,就没有侧向衍射图样,光——或者无论它是什么——将直接穿过材料,而不被弹开或损失。所以,对于(可见)光, λ 远大于间隔的情况下,它就直接通过,而不会出现从晶体中平面反射的图样。

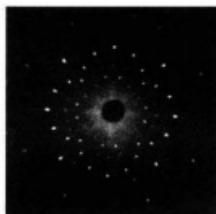


图 2-5 由一束 X 射线射在氯化钠晶体上衍射得到的图样

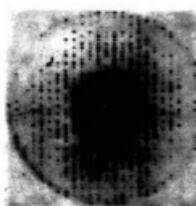


图 2-6 肌红蛋白的 X 射线衍射图样

这个事实在产生中子的核反应堆情况下也引起有趣的结果(中子显然是粒子,任何人都这样认为!)。假如我们引出这些中子使它们进入一厚石墨块,它们就会扩散,并且奋力地穿过石墨(图 2-7)。它们之所以扩散是因为被原子弹开,但严格地说,按照波动理论,它们之所以被原子弹开是由于晶体内许多平面的衍射。结果表明,假如我们取一块厚石墨块的话,从远端跑出的中子都有长的波长!事实上,假如我们把中子强度作为波长的函数作图的话,除波长大于某个极小值外其余什么也没有(图 2-8)。换句话说,我们可以用这种方法得到极慢的中子。只有最慢的中子才会通过;它们没有被石墨的晶格平面所衍射或散射,而是像光通过玻璃一样径直穿过石墨而没有向两边散射开去。还有许多其他证据也说明中子波和别的粒子波是真实的。

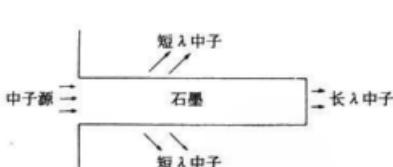


图 2-7 反应堆中子通过石墨块的扩散

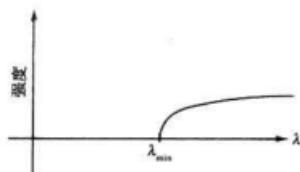


图 2-8 从石墨棒出来的中子强度与波长的关系

* 光斑组成的整个衍射图的强度分布决定于每个晶胞的结构。——译者注

§ 2-4 原子的大小

现在我们来看一下不确定性关系式(2.3)的另一个应用。在这里不用过分严密;概念是正确的,但所作的分析并不很精确。这个概念涉及到确定原子的大小,以及按经典理论电子将不断辐射光并作螺旋运动直至最后落到原子核上这一事实。但是这在量子力学中就不是这样,假如是这样的话我们就可以同时知道每一个电子在什么地方以及它运动得有多快。

假定我们有一个氢原子,并且要测量电子的位置;我们肯定不能精确地预言电子的位置,不然动量将会扩展到无限大。每当我们观察电子时,它是在某处,但它在各个不同地方都有一定的振幅,因而在不同地方都可能找到它。这些位置不可能全都在原子核附近,我们假定位置有一定的扩展,其数量级为 a 。这就是说,电子离原子核的距离通常大约为 a 。我们对原子的总能量取极小值来确定 a 。

由于不确定性原理,动量的弥散约为 \hbar/a ,这样,如果我们打算用某种方式去测量电子的动量,譬如使它散射 X 射线,然后观察运动散射体引起的多普勒效应,那么可以预期并不会每次都得到零——电子并不是静止不动的——但它的动量一定为 $p \approx \hbar/a$ 的数量级,于是动能约为 $mv^2/2 = p^2/2m = \hbar^2/2ma^2$ 。(在某种意义上,这是一种量纲分析,用以找出动能是以何种方式依赖于约化普朗克常数,质量 m ,以及原子的大小 a 。我们毋需顾虑答案中 $2/\pi$ 等这类因子上的出入。我们甚至还没有很精确地定义过 a 。)现在,势能为 $-e^2$ 除以离原子中心的距离,即 $-e^2/a$ 。按第1卷中的定义*,这里的 e^2 是电子电荷的平方除以 $4\pi\epsilon_0$ 。要点就在于,如果 a 变小,势能就变小,但 a 越小,由于不确定性原理,要求动量增大,因而动能也增大。总能量是

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}. \quad (2.10)$$

我们不知道 a 有多大,但我们却知道原子本身会进行调整以取得某种折衷办法使能量尽可能地小。为了得到 E 的极小值,我们求 E 对 a 的微商,令此微商等于零后解出 a 。 E 的微商是

$$\frac{dE}{da} = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{a^2}, ** \quad (2.11)$$

令 $\frac{dE}{da} = 0$, 求得 a 值为

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.528 \text{ \AA} = 0.528 \times 10^{-10} \text{ m}. \quad (2.12)$$

这个特殊的距离称为玻尔半径。我们因此得知原子的大小约为埃的数量级,这完全正确。这是一件挺不错的事——实际上,是令人惊奇的,因为到现在为止,我们还没有理解原子大小的基础!从经典的观点来看,由于电子会螺旋式地运动终至落到原子核上,原子完全不可能存在。

* 第1卷28章和第2卷第4章。——译者注

** 计算(2.11)和(2.12)式时, e^2 要代入 $e^2/4\pi\epsilon_0 = (1.602 \times 10^{-19} \text{ 库仑})^2 \times 8.99 \times 10^9 \text{ 牛顿} \cdot \text{米}^2/\text{库仑}^2$ 。——译者注

现在,如果将式(2.12)的 a_0 值代入式(2.10)求能量,结果得出

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV}. \quad (2.13)$$

负能量意味着什么?这意味着,当电子在原子中时的能量比自由状态下的能量小。这意味着它是受束缚的。也就是说,要把电子“踢出去”需要能量;要电离一个氢原子大约需要 13.6 eV 的能量。我们没有理由认为所需的能量不是这个值的 2 倍、3 倍——或它的一半,或 $(1/\pi)$,因为我们这里所用的是十分粗略的论证。然而,我们作了弊,我们这样引进所有常数,使得正好得出正确的数字! 13.6 eV 这个数字称为一个里德伯(Rydberg)能量,它是氢原子的电离能。

所以,我们现在懂得了为什么不会穿过地板掉到下面去。当我们行走时,鞋子中的大量原子带着原子的质量挤压着地板中的原子。为了把原子挤得更靠近一些,电子就要被限制在一个更小的空间中,按照不确定性原理,平均而言它们的动量将变得更大些,这就意味着能量变大;抵抗原子压缩的是一种量子力学效应,而不是经典效应。按照经典的观点,如果使所有电子与质子更为靠近,我们应预期能量会进一步降低,因此,在经典物理学中,正电荷与负电荷的最佳排列就是互相紧靠在一起。这些在经典物理学中是很清楚的,但是由于原子的存在又令人困惑。当然,早先的科学家发明过一些办法来摆脱这个困境——不过不必担心,我们现在找到了一种正确的方法!

顺便提一下,虽然眼下我们还不能理解它,我们发现在有许多电子的场合中,这些电子总是试图彼此离开。如果某个电子正占据着某一空间,那么另一个电子就不会占据同一空间。说得更精确一些,由于存在着两种自旋的情况,因此两个电子有可能紧靠在一起,一个电子沿一个方向自旋,而另一个电子则沿反方向自旋。但此后我们在该处再也不能放进更多的电子。我们必须把其他电子放到别的位置上,这就是物质具有强度的真正原因。假如我们有可能将所有电子放在同一个地方,那么它们将会比现在更为紧密。正是由于电子不可能全都紧靠在一起这个事实,才使得桌子和其他种种东西变得坚固。

十分明显,为了理解物质的性质,我们必须用量子力学,经典力学是不能满足的。

§ 2-5 能 级

我们已讲过处在可能具有的最低能量状态下的原子,但是发现电子还可以做别的事,它

能以更具活力的状态跳来跳去,因此原子可以有多种不同的运动状态。按照量子力学,在定态条件下,一个原子只可能有确定的能量。我们作一个图(图 2-9),其中垂直方向标绘能量,每一个允许的能量值画一条水平线。当电子是自由的时候,这时它的能量为正,能量可以具有任意值,并能以任何速度运动。但是束缚能不能取任意值。原子只能取图 2-9 所示的一系列允许值中的某一个能量值。

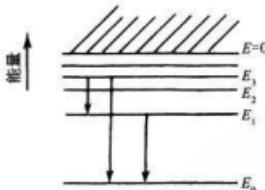


图 2-9 原子的能级图
(表示几种可能的跃迁)

现在我们称这些能量的允许值为 E_0, E_1, E_2, E_3 。如果原子原来处于 E_1, E_2 等“激发态”之一时,它不会永远停

留在这状态中。它迟早会掉到较低的状态中并以光的形式辐射出能量。发射的光的频率由能量守恒加上量子力学的光的频率与光的能量之间的关系式(2.1)来确定。因此,譬如说从能量 E_3 到能量 E_1 的跃迁所辐射的光的频率为

$$\omega_{31} = \frac{E_3 - E_1}{\hbar}. \quad (2.14)$$

这就是该原子的一个特征频率,它确定了一条发射光谱线。另一可能跃迁是从 E_3 至 E_0 ,这时就得到不同的频率

$$\omega_{30} = \frac{E_3 - E_0}{\hbar}. \quad (2.15)$$

另一个可能性是,如果原子已被激发到 E_1 态,它可能掉回到基态 E_0 ,发射光子的频率是

$$\omega_{10} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}. \quad (2.16)$$

我们举出三种跃迁的情况是为了指出一个有趣的关系。由式(2.14),(2.15)和(2.16)很容易看出

$$\omega_{30} = \omega_{31} + \omega_{10}. \quad (2.17)$$

一般来说,如果我们找到了两条谱线,可以预料在频率之和(或之差)处将找到另一条谱线,而且通过找到一系列能级,每条谱线都对应于其中的某一对能级的能量差,那么所有的谱线就能得到解释。在量子力学出现以前人们就已注意到这种在谱线频率惊人的对应,它称为里兹组合原则。从经典的观点来看,这又是不可思议的。不过,我们别再唠叨经典力学在原子领域中的失败,看来我们已讲得足够多了。

前面已经谈到量子力学可以用概率幅来描述,概率幅的行为像具有一定的频率和波数的波动。让我们看一下,从振幅的观点怎样会得出原子具有确定的能量状态。根据我们前面所说过的那些是无法理解这一点的,但是我们都应该知道被约束的波具有确定的频率。例如,若声音约束在一个风琴管或任何类似的东西中时,声波振动的方式不止一种,但每种方式都有一个确定的频率。这样,将波约束在其中的物体有某些确定的共振频率。所以这是被约束在有限空间中的波的一种性质——这个课题我们将在以后详细地用公式来讨论——只能存在某些确定频率的波。由于振幅的频率与能量间存在着普遍关系,我们发现束缚在原子内的电子具有确定的能量就不足为奇了。

§ 2-6 哲学含义

我们简单地谈谈量子力学的某些哲学含义。通常这种问题总是有两个方面:一个作为物理学的哲学的含义,另一个是把哲学问题外推到其他领域。在把和科学有关的哲学观念引申到其他领域中去时,它们往往完全被歪曲了。因此我们将尽可能把自己的评论限制于物理学本身。

首先,最有兴趣的问题是不确定性原理的概念,观察影响现象。人们向来都知道进行观察要影响现象,但是问题在于,这种效应不可能依靠重新安排仪器使其可以忽略,或减到最小或任意减小。当我们观察某一定的现象时,不可避免地要产生某种哪怕是最低限度的扰

动,这种扰动是观测的自然性所必需的。在前量子物理学中,观察者有时也是重要的,但这只是非本质的问题。曾经有人提出过这样的一个问题:如果有一棵树在森林中倒了下来,而旁边没有人听到,那它真的发出了响声吗?在真实的森林中倒下的一棵真实的树当然会发出声音,即使没有任何人在那里。但即使没有人在那里听到声音,它也会留下其他的迹象。响声会使树叶振动,如果我们够仔细的话,可以发现在某个地方有一些荆棘擦伤了树叶,在树叶上留下细小的划痕,除非我们假定树叶曾经发生振动,否则对此划痕就无法解释。所以,在某种意义上我们必须承认曾经发出过声音。我们也许会问:是否有过声音的感觉呢?大概没有,感觉一定要意识到才有意义。蚂蚁是否有意识以及森林中是否有蚂蚁,或者树木是否有意识,这一切我们都不知道。对这个问题我们就谈到这里吧!

量子力学发展以来人们所强调的另一件事情是这样一个观念:我们不应当谈论那些我们不能够测量的事情(实际上相对论也这么说的)。如果一件事情不能通过测量来定义,它在理论上就没有地位。由于一个定域粒子的动量的精确值不能通过测量来确定,因此它在理论上就没有地位。但是,认为这是经典理论的问题是错误的。这是一种对情况所作的粗枝大叶的分析。只是因为我们不能同时精确地测量位置和动量并不是从先验的意义上说我们不能讨论它们。它的意思只是我们不需要讨论它们。在科学中情况是这样的:一个无法测量或无法直接与实验相联系的概念或观念可以是有用的,也可以是无用的。它们不必存在于理论之中。换句话说,假如我们比较世界的经典理论与世界的量子理论,并假设实验上确实只能不精确地测出位置与动量,那么问题就是一个粒子的精确位置与它的精确动量的概念是否仍然有效。经典理论承认这些概念;量子理论则不。这件事本身并不意味着经典物理是错误的。当新的量子力学刚发现时,经典物理学家——除去海森伯、薛定谔和玻恩以外所有的人——都说:“看吧,你们的理论一点也不好,因为你们不能回答这样一些问题:粒子的精确位置是什么?它穿过的是哪一个孔?以及一些别的问题。”海森伯的答复是:“我不用回答这样的问题,因为你们不能从实验上提出这个问题。”这就是说,我们不必要回答这种问题。考虑两种理论(a)与(b),(a)包括一个不能直接检验但在分析中用到的概念,而(b)则不包括这个概念。如果它们的预言不一致,我们不能声称:由于(b)不能解释(a)中的那个概念,因而它就是错的,因为这个概念是一个无法直接检验的东西。知道哪些观念不能直接检验总是好的,但是没有必要将它们全部去掉。认为我们只利用那些能直接实验测定的概念才能真正算作科学的看法是不正确的。

量子力学本身就存在着概率幅、势以及其他许多不能直接测量的概念。科学的基础是它的预测能力。预测就是说出在一个从未做过的实验中会发生什么。我们怎么去做这件事呢?假定我们不是依靠实验要知道发生什么情况,我们只能将已有的实验外推到实验尚未达到的领域。我们必须依据我们的概念并将它们推广到这些概念还没有受到检验的领域中。如果我们不是这样做,就不会提出预测。所以,对经典物理学家来说恰当地按照这样的程序进行是完全合理的,从而假设位置——对垒球来说显然具有某种意义——对于电子来说也具有某种意义。这并不愚蠢。这是合理的步骤。今天我们就说相对论定律对所有的能量都应该是正确的,但是或许有一天,有人会跑出来对我们是多么愚蠢呀!直到我们自己惹出麻烦之前,我们实在是不知道“蠢”在哪里的,所以整个思想都是自找麻烦。唯一能发现我们错误的方法是说出我们的预测是什么。这对于建立概念是绝对必要的。

我们已对量子力学的非决定性作过一些评论。那就是我们现在还不能预测在给定尽可

能仔细安排好的物理条件下会发生什么物理事件。假如有一个处于受激态的原子，并且它将发射光子，那么我们无法说出它将在什么时候发射光子。它有在任何时刻发射光子的一定振幅，我们可以预测的只是发射的概率；我们不能精确地预测未来。这引起了关于意志自由的意义的种种问题和胡说八道，还引起了世界是不确定的种种观念。

当然，我们必须强调，在某种意义上经典物理也是非决定的。人们通常认为这种非决定性，即我们不能预言未来，是重要的量子力学的特色，而且据说这可用来解释精神的行为、自由意志的感觉等等。但是假如世界真的是经典世界——假如力学定律是经典的——还是一点也不清楚精神是否也觉得多少有些相同。确实，在经典物理学中如果我们知道了世界上，或者在一盒气体中的每个粒子的位置与速度，那么就能精确地预言会发生什么。因此经典的世界是决定论的。然而，考虑到我们的精确度有限，而且不知道哪怕只是一个原子的精确位置到譬如十亿分之一。那么这个原子运动时会撞上另一个原子，由于我们知道的位置的精确度不超过十亿分之一，因此我们发现在碰撞后，位置的误差还会更大。当然，在下一次碰撞时，误差又被放大，这样，如果起先只有一点点误差的话，后来就迅速放大而出现很大的不确定性。举个例子来说：比如一道水流从堤坝上泻下时，会飞溅开来。如果我们站得很近，时不时地有水滴溅到我们的鼻子上。这一切看来完全是无规则的，然而这样一种行为能够按纯粹的经典定律来预言。所有水滴的精确位置取决于水流流过堤坝以前的精确运动。结果怎样呢？在水流落下时，极微小的不规则性都被放大了；结果就出现了完全的随机性。很明显，如果我们不能绝对精确地知道水的运动，就不能真正预知水滴的位置。

说得更明确一些，给定任一精确度，无论多么精确，都能找到一个足够长的时间，以致我们无法使对这么长的时间作出的预言有效。问题在于这段时间并不很长。如果精确度为十亿分之一，这个时间并不是数百万年。事实上，这个时间随着误差呈对数式地变化，结果发现只在非常、非常短的时间里我们就丢失了所有的信息。如果精确度提高到亿亿亿分之一——那么不管我们想要多少个亿，最后总要停在某一位数上——我们就会得出一个时间，小于这个时间的事件都在已有测量的精度下是可预言的——此时间后发生的事件就再也不能预言了！由此看来，诸如以下的说法，什么由于人类精神表面上的自由与非决定性，我们应当认识到再也不能希望用经典的“决定论的”物理学来理解它，并且欢迎量子力学将我们从“完全机械论的”宇宙下解放出来，等等，都是不公正的。因为，从实际的观点来说，在经典力学中早已存在着非决定性了。

第3章 概率幅

§ 3-1 振幅组合定律

当薛定谔最初发现量子力学的正确定律时，他写出了一个方程，描述在不同地点找到粒子的振幅。这个方程非常像经典物理学家原来就知道的某些方程——这些方程曾被用来描述空气中声波的运动、光的传播以及其他一些现象。在量子力学建立的初期，大部分时间都花在解这个方程上。但在同一个时期，特别是玻恩和狄拉克，发展了对隐藏在量子力学方程式背后的、全新的物理概念的理解。随着量子力学的进一步发展，人们又发现还有许多东西没有直接包含在薛定谔方程里——如电子自旋以及各种相对论现象。传统上所有的量子力学课程都是以同一方式开始的，即顺着这一主题的历史发展顺序讲解。一个人首先得学习大量的经典力学，这样他就会懂得如何去解薛定谔方程。然后，他花很多时间去求各种情况下薛定谔方程的解，只有在详尽地研究了这个方程之后，才接触到电子自旋这个“高深”的课题。

我们原来也曾考虑过，结束这些物理课程的正确方式是给你们讲解怎样去解复杂情况下的经典物理学方程——例如在封闭区域内声波的描述，圆柱形空腔中电磁辐射的模式等等。这是本课程的最初计划。然而，我们还是决定抛弃这个计划而代之以量子力学的导论。我们得到这样的结论：通常认为量子力学的高深部分事实上是十分简单的，这里面所用的数学特别简单，只包含简单的代数运算而且没有微分方程，至多只有一些很简单的微分方程。唯一的问题是，我们必须跃过一个裂隙，这个裂隙是我们不再能够详细描述粒子在空间的行为。所以，我们想要做的是：给你们讲解通常所谓的量子力学的“高深”部分。但是我们向你们保证，它们是极其简单的部分——从深刻意义上来说——并且也是最基本的部分。坦白地说，这是一个教学法的实验，据我们所知，以前还从来没有这样做过。

当然，在这个课题中，我们的困难是对物体的量子力学行为十分陌生，没有人曾在日常经验中有过有关物体量子力学行为的粗略的、直观的概念。有两种介绍这一课题的方法：我们可以用较为粗略的物理方式来描述可能发生的事件，多少告诉你们发生了一些什么而不给出每一事件的精确定律；或者从另一个角度，给出精确定律的抽象形式。但是，由于抽象，你们就完全不知道它们的物理意义。后一种方法不能令人满意，因为它完全是抽象的，而前一种方法给人不舒服的感觉，因为无法知道究竟哪些东西是真的，哪些是假的。怎样克服这个困难，我们尚无把握。事实上，你们会注意到，在第1和第2章里已经提出了这个问题，第1章是比较精确的，而第2章是对不同现象的特征的粗略描述。在这里，我们将尝试在这两个极端之间找到一种适当的描述方法。

在这一章里我们将首先处理一些普遍的量子力学概念。某些表述是十分精确的，另一些表述只是部分精确。当我们进行讲解的时候，很难向你们指明哪一些表述是十分精确的，哪一些是部分精确的。但是当你们学完这一本书的其余部分以后，再回过头来看一看就会

知道哪些部分是严密的，哪些部分只是简略的解释。本章以后的各章将不像本章那样不够精确。事实上，在以后各章里，我们精心力求讲得更精确的理由之一是：要向你们指出量子力学中最美妙的东西之一——从很少的前提推导出很多的结论。

我们还是从讨论概率幅的叠加开始。我们将用第1章的实验作为例子，并把它重新画在图3-1上。有一个粒子（譬如说电子）源s；后面是一堵上面有两条狭缝的墙，在墙后面有一个探测器放在某一个位置x。我们要求在x处发现粒子的概率。量子力学的第一普适原理：粒子从源s发出到达x的概率能够用一个叫做概率幅的复数的绝对值的平方来定量地描述——在现在这个例子中，就是“从s来的粒子到达x的振幅”。量子力学中经常用到这个振幅，我们用一个速记符号——狄拉克发明并在量子力学中通用的——来描述这个概念。我们用这样的方式来表示概率幅。

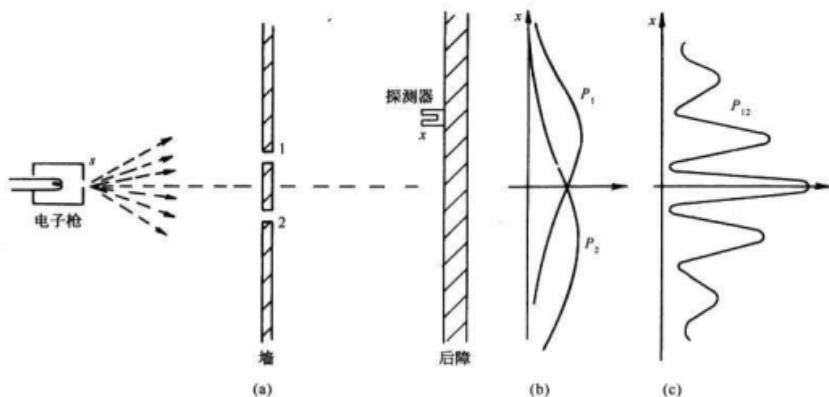


图3-1 电子的干涉实验

$$\langle \text{到达 } x \text{ 的粒子} | \text{离开 } s \text{ 的粒子} \rangle. \quad (3.1)$$

换言之，两个括号 $\langle \rangle$ 是与“振幅”相当的记号，竖线右边的表式总是表示初始状况，左边的表示终了状况，为了方便，有时候可以进一步缩写，各用一个字母分别表示初始状况和终了状况。例如，有时我们可以把振幅式(3.1)写成：

$$\langle x | s \rangle. \quad (3.2)$$

我们要强调一下，这个振幅当然只是一个单独的数字——一个复数。

在第1章的讨论中，我们已经看到，粒子到达探测器有两条可能的路径时，总的概率不是两个概率之和，而必须写成两个振幅之和的绝对值的平方。两条路径都畅通的时候，电子到达探测器的概率是：

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2. \quad (3.3)$$

我们把这个结果用新的符号来表示。不过我们先要讲一讲量子力学第二普适原理：当一个粒子可以通过两条可能的路径到达某一给定的状态时，这个过程的总振幅是，各自独立地考

虑的两条路径的振幅之和,用新的符号表示:

$$\langle x | s \rangle_{\text{两个小孔都打开}} = \langle x | s \rangle_{\text{通过1}} + \langle x | s \rangle_{\text{通过2}}. \quad (3.4)$$

顺便提一下,我们必须假定小孔 1 和 2 是足够地小,当我们谈及电子通过小孔的时候,我们不必讨论通过的是小孔的哪个部分。当然我们可以把每一个小孔分割成许多部分,而电子具有通过小孔的上部或通过小孔的底部或其他部分的一定振幅。我们假定小孔是足够地小,从而就不必为这些细节操心。这就是所涉及的粗糙部分;我们可以使之更为精确,但是在现阶段还不需要那么做。

现在,我们要详细地写出我们对于电子通过小孔 1 到达位于 x 处的探测器这一过程的振幅能说些什么。在这里,我们要应用第三普适原理:如果粒子走的是某一特定的路径,对于这条路径的振幅可以写成走过部分路程的振幅以及走过其余部分路程的振幅之乘积。对于图 3-1 的装置,从 s 通过小孔 1 到达 x 的振幅等于从 s 到孔 1 的振幅乘以从孔 1 到 x 的振幅:

$$\langle x | s \rangle_{\text{通过1}} = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle. \quad (3.5)$$

这个结果也不是完全精确的。我们还应当在振幅中包含一个关于电子通过小孔 1 的因子,但是,在目前的情况下,这只是一个简单的小孔,我们可令这个因子等于 1。

你们要注意,式(3.5)是以相反的次序写的。它应当从右边读到左边。电子从 s 到 1,然后从 1 到 x 。总结一下,如果事件是接连发生的——就是说,如果你们能够分析粒子所走的一条路线,说它先走这一段,然后走那一段,再走另一段——则将各相继事件的振幅相乘即可求出该路线的总振幅。运用这个定律,我们可以将式(3.4)重新写成:

$$\langle x | s \rangle_{\text{通过1,2}} = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle.$$

现在我们要证明,只要运用这几条原理,我们就能计算如图 3-2 所示那种更为复杂的问题。在该图中有两堵墙,一堵墙上有两个小孔 1 和 2,另一堵墙上有三个小孔 a 、 b 和 c 。在第二堵墙后面有探测器,位于 x 处,我们要求粒子到达这一探测器的振幅。一个你们能求出振幅的方法是计算通过这许多小孔的波的叠加,或干涉;但是你们也可这样来求,认为有 6 条可能的路线,把走过各条路线的振幅叠加起来。电子可以先通过小孔 1,然后通过小孔 a ,最后到达 x ;或者它可以先通过小孔 1,然后通过小孔 b ,最后到达 x ,如此等等。按照上述

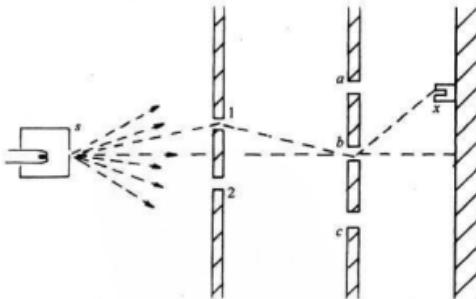


图 3-2 一个比较复杂的干涉实验

第二原理,将各条可供选择的路线的振幅相加。所以我们可以把电子从 s 到 x 的振幅写成 6 个单独振幅之和。另一方面,应用第三原理,每一个单独的振幅都能写成三个振幅的乘积。例如,其中有一个是从 s 到 1 的振幅乘以 1 到 a 的振幅再乘以 a 到 x 的振幅。采用我们的速记符号,从 s 到 x 整个振幅可写成

$$\langle x | s \rangle = \langle x | a \rangle \langle a | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | b \rangle \langle b | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \cdots + \langle x | c \rangle \langle c | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle.$$

可用求和符号来节省书写

$$\langle x | s \rangle = \sum_{\substack{i=1, 2 \\ a=a, b, c}} \langle x | a \rangle \langle a | i \rangle \langle i | s \rangle. \quad (3.6)$$

为了用这些方法进行各种计算,自然必须知道从一个地点到另一地点的振幅。我们将给出一个典型振幅的粗略概念,它不考虑像光的偏振和电子自旋之类的东西,但是,除了这些方面之外,它是十分准确的。有了这些概念,你们就能够解决包含多个狭缝的不同组合的问题。假设有一个具有一定能量的粒子,在真空中从位置 r_1 走到位置 r_2 。换言之,这是一个不受力作用的自由粒子。除了前面还要有一个常数因子外,从 r_1 到 r_2 的振幅是:

$$\langle r_2 | r_1 \rangle = \frac{e^{(p \cdot r_{12})/\hbar}}{r_{12}}, \quad (3.7)$$

其中 $r_{12} = r_2 - r_1$, p 是动量,它和能量 E 由相对论方程联系起来:

$$p^2 c^2 = E^2 - (m_0 \cdot c^2)^2,$$

或者由非相对论性方程式联系起来:

$$\frac{p^2}{2m} = \text{动能}.$$

方程式(3.7)实际上表示粒子具有像波一样的性质,振幅就像一个具有波数等于动量除以 \hbar 的波那样传播。

在最一般的情况下,振幅和相应的概率也包含时间。对于大多数这些初步的计算,我们假设粒子源始终发射具有特定能量的粒子,所以我们不必考虑时间问题,但是在一般的情况下,我们可能对另外一些问题感兴趣。假设有一个粒子在某一时刻,在某一地点 P 被释放,而你们想要知道它在某个晚一些的时刻到达某个位置,譬如说在 r 的振幅。这可用符号表示成振幅 $\langle r, t = t_1 | P, t = 0 \rangle$ 。显然,这个振幅将依赖于 r 和 t 。如果你们把探测器放在不同的位置并在不同的时刻进行测量,你们就会得到不同的结果。一般地说,这个 r 和 t 的函数满足一微分方程,这微分方程是一个波动方程。例如在非相对论的情况下,它就是薛定谔方程。于是人们就得到一个与电磁波或者气体中声波的方程式相类似的波动方程。然而必须强调指出,满足这个方程式的波函数与空间的真实的波动并不相同,我们不能像对声波那样用一种实在的图像来描绘这种波动。

虽然人们在处理一个粒子的问题的时候,很想用“粒子波”这个概念来进行思考,但这并不是一个恰当的概念。因为,如果有两个粒子,那么在 r_1 发现一个粒子并且在 r_2 发现另一个粒子的振幅并不是一个简单的三维空间的波,而是依赖于 6 个空间变量 r_1 和 r_2 。例如,如果我们处理两个(或者更多的)粒子,我们还需要有下面的附加原理:假如有两个不相互作

用的粒子,一个粒子做一件事并且另一个粒子做另一件事的振幅是两个粒子分别做这两件事的两个振幅之乘积。例如,倘若 $\langle a | s_1 \rangle$ 是粒子1从 s_1 到 a 的振幅, $\langle b | s_2 \rangle$ 是粒子2从 s_2 到 b 的振幅,则两者一起都发生的振幅是:

$$\langle a | s_1 \rangle \langle b | s_2 \rangle.$$

还有一个问题要强调,假定在图3-2中,我们不知道粒子到达第一堵墙的小孔1和2之前是从什么地方来的,但是只要知道到达1的振幅和到达2的振幅这两个数据,我们仍旧可以对在墙的后面将会发生些什么(例如到达 x 的振幅)作出预言。换言之,由于接连发生的事件振幅相乘这一事实,如式(3.6)所示,你在继续分析时所必须知道的只是两个数字——对这里的特殊情形来说就是 $\langle 1 | s \rangle$ 和 $\langle 2 | s \rangle$ 。有了这两个复数,就足够预言未来的一切了。这就是真正使得量子力学容易的地方。结果在以后的几章里当我们用两个(或少数几个)数字详细地说明初始状态后,我们所要做的就是用它来预言未来。当然,这些数字取决于粒子源的位置,并且可能还取决于仪器的其他细节。但是,这两个数字给定后我们就不再需要知道这些细节。

§ 3-2 双缝干涉图样

现在我们要考虑一个在第1章中已经比较详细讨论过的问题。这一次我们将要运用振幅概念的全部光辉成就来向你们说明这些结果是怎样得出的。我们采用与图3-1所示相同的实验,但现在两个小孔后面加上一个光源,如图3-3所示。在第1章里,我们曾经得到下面的有趣结果,如果我们在狭缝*1后面观察,并且看见光子从该处散射,那么在 x 处得到的与这些光子对应的电子的分布和狭缝2关闭着是相同的。曾经在狭缝1或在狭缝2处被“看到”的电子的总分布是单独打开狭缝1或2时的分布之和,并且和关掉小孔后面的光源时的分布完全不同。这个结果至少在我们采用足够短的波长的光线时是正确的。如果波长长,以致我们无法确定散射过程发生在哪一个小孔附近,电子的分布就变得更像关掉小孔后面的光源时的分布了。

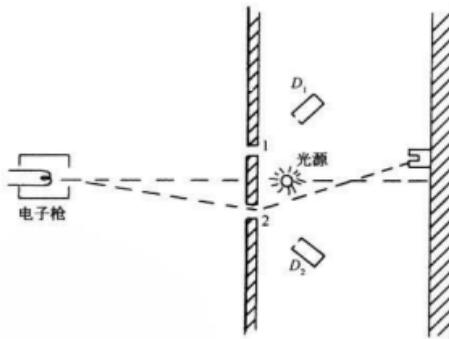


图3-3 确定电子走过哪一个小孔的实验

* 大约费恩曼在讲课时小孔(hole)和狭缝(slit)常常不分。原书中小孔和狭缝混用。译文照原文翻译,估计读者不会困惑。——译者注

我们用新的符号和振幅组合原理来仔细考虑一下会出现些什么情形。为使书写简单，我们仍然令 ϕ_1 表示电子通过小孔 1 到达 x 的振幅，即

$$\phi_1 = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle.$$

同样，我们令 ϕ_2 表示电子经小孔 2 到达探测器的振幅，

$$\phi_2 = \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle.$$

这些是没有光源时通过两个小孔到达 x 的振幅。现在如果有了光源，我们要问这个问题：电子从 s 出发，光子从光源 L 发出，最后电子到达 x 而光子在狭缝 1 后面被观察到，这一个过程的振幅是什么？假定我们用一个探测器 D_1 来观察狭缝 1 后面的光子，如图 3-3 所示，并用一个同样的探测器 D_2 来对小孔 2 后面被散射的光子计数，对于一个光子到达 D_1 以及一个电子到达 x 的情形，将有一个振幅。对于一个光子到达 D_2 以及一个电子到达 x 的情形，也有一个振幅。让我们来计算这两个振幅。

虽然我们对计算中所遇到的所有因子还没有正确的数学公式，但通过下面的讨论，你们可以体会到它的精神。首先，电子从电子源跑到小孔 1 有一个振幅 $\langle 1 | s \rangle$ 。其次，我们可以假设电子在小孔 1 附近把一个光子散射到探测器 D_1 中也有一定的振幅。我们用 a 来表示这个振幅。再有，电子从狭缝 1 跑到位于 x 的电子探测器具有振幅 $\langle x | 1 \rangle$ 。于是，电子从 s 通过狭缝 1 跑到 x 并把一个光子散射到 D_1 里面的振幅是：

$$\langle x | 1 \rangle a \langle 1 | s \rangle.$$

或者用我们以前用过的符号来表示，它就是 $a\phi_1$ 。

通过狭缝 2 的电子将一个光子散射到 D_1 中去的情形也具有某个振幅。你们要说：“这是不可能的，如果探测器 D_1 只是观测小孔 1，光子怎么会散射到 D_1 中去呢？”如果波长足够长，就有衍射效应，那就肯定可能。如果仪器做得很好，而且我们用的是短波长的光子，那么光子被通过小孔 2 的电子散射到探测器 1 中去的振幅是非常小的。但是为使讨论具有普遍性，我们应该考虑到总有一些这种振幅存在，我们称它为 b 。于是，一个电子通过狭缝 2 并且把一个光子散射到 D_1 中去的振幅是：

$$\langle x | 2 \rangle b \langle 2 | s \rangle = b\phi_2.$$

在 x 位置找到电子并在 D_1 中发现光子的振幅是上面两项之和，每一项分别对应于电子的一条可能的路线。每一项又由两个因子构成。第一，电子通过一个小孔，第二，光子被这个电子散射到探测器 1 中，我们有：

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{电子到 } x \\ \text{光子到 } D_1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{电子从 } s \text{ 发出} \\ \text{光子从 } L \text{ 发出} \end{array} \right\rangle = a\phi_1 + b\phi_2. \quad (3.8)$$

对于在另一个探测器 D_2 中发现光子的情况，我们可得到类似的表达式。为简单起见，假设系统是对称的，那么 a 也就是电子通过小孔 2 时把光子散射到 D_2 中的振幅， b 是电子通过小孔 1 时把光子散射到 D_2 中的振幅，相应的光子进入 D_2 而电子到 x 的总概率是：

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{电子到 } x \\ \text{光子到 } D_2 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{电子从 } s \text{ 发出} \\ \text{光子从 } L \text{ 发出} \end{array} \right\rangle = a\phi_2 + b\phi_1. \quad (3.9)$$

现在我们完成了。我们可以容易地算出不同情况的概率。假定我们知道在 D_1 中有一个计数而同时在 x 处收到一个电子的概率，这就是式(3.8)所给出的振幅的绝对值的平方，即 $|a\phi_1 + b\phi_2|^2$ 。让我们更仔细地研究一下这个表达式。首先，如果 b 等于零——这是我们设计仪器时想要做到的——答案就是 $|\phi_1|^2$ 乘以 $|a|^2$ ，即总振幅缩小了因子 $|a|^2$ 。这

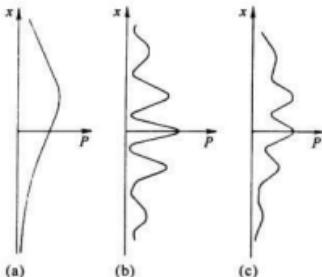


图 3-4 在图 3-3 的实验中，对应于进入 D 的一个光子，有一个电子到达 x 的概率：

- (a) 对于 $b = 0$ ；(b) 对于 $b = a$ ；
- (c) 对于 $0 < b < a$

布。不用说，我们求进入 D_1 的光子和到达 x 的电子的符合计数，我们将会得到同样的结果，如果你们还记得第 1 章中的讨论，你们可以看出这些结果对第 1 章里所谈到的过程给出了定量的描述。

为使你们避免一个普遍的错误，我们现在要强调说明一个重要的问题。假定你只要知道电子到达 x 处的概率而不管光子是在 D_1 还是在 D_2 中计数，你们是否应把式(3.8)和(3.9)所表示的振幅相加起来呢？不！对于不同的、互相可以区别的终态的振幅，你们无论如何都不得把它们相加起来。光子一旦被某个光计数器所接收，只要我们愿意，不需要更多地去扰乱这个系统，我们总是能够确定到底是哪一种情况发生，每个情况的概率完全不依赖于另一情况。再重复一遍，不要把不同的最终情况的振幅相加，所谓“最终”，指的是我们当时希望知道的概率——就是当实验“结束”的时候。在整个过程结束以前，你们的确对实验中不能区别的各个不同的过程的振幅求和。在过程的终了，你们或许会说，“不想要观察光子”。要不要对光子进行观察是你们自己的事，但是你们仍然不可以把振幅相加。自然界并不知道你们正在观察什么。无论你们是否费心记录数据，自然界都按照它自身原有的方式发展变化着，所以我们不可以把振幅相加。我们应当先求出所有可能的终态的振幅的平方，然后再把它们加起来。对于一个电子到达 x ，同时一个光子到达 D_1 或到达 D_2 的情形来说，正确的结果是：

$$\begin{aligned} & \left| \langle \text{电子到 } x \mid \text{电子从 } s \text{ 发出} \rangle \right|^2 + \left| \langle \text{电子到 } x \mid \text{电子从 } s \text{ 发出} \rangle \right|^2 \\ &= |a\phi_1 + b\phi_2|^2 + |a\phi_2 + b\phi_1|^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

如果只有一个孔时所应当得到的概率分布——如图 3-4(a)的曲线所示。另一方面，如果波长很长，光子从小孔 2 后面散射到 D_1 中的振幅可能正好和从小孔 1 散射的情形相同。虽然在 a 和 b 中可能还分别包含某个相位因子，但是我们可以问一个简单的情况，即两者相位因子相等的情况。如果 a 实际上等于 b ，那么总概率就成为 $|\phi_1 + \phi_2|^2$ 乘以 $|a|^2$ ，因为公共因子 a 可以提出来。然而，这正好就是完全没有光子的情况下我们所得到的概率分布。所以，在波长很长的情况下——从而光子探测器无效——你们又重新得到原来的显示出干涉效应的分布曲线，如图 3-4(b)所示。对于光子探测器部分有效的情况，在大量的 ϕ_1 和少量的 ϕ_2 之间存在着干涉，你将得到如图 3-4(c)上所画的那种介于两者之间的分布。

§ 3-3 在晶体上的散射

下一个例子是这样一个现象，在此现象中我们要比较仔细地分析概率幅的干涉。我们观察中子在晶体上的散射过程。假定我们有一块晶体，它包含大量的原子，原子的中心是原子核。这些原子核作周期性的排列，一束中子从很远的地方射来。我们用指标 i 来标记晶体中不同的原子核， i 依次代表一系列的整数， $1, 2, 3, \dots, N, N$ 等于原子的总数。问题是计算在图 3-5 所示的装置中，计数器接收中子的概率。对于任意的一个特定的原子 i ，中子到达计数器 C 的振幅等于中子从源射到原子核 i 的振幅乘以在原子核 i 上受到散射的振幅 a ，再乘以中子从 i 到计数器的振幅。我们可将其写成：

$$\langle \text{到达 } C \text{ 的中子} | \text{ 从 } S \text{ 来的中子} \rangle_{\text{通过}} = \langle C | i \rangle a \langle i | S \rangle. \quad (3.11)$$

在写这个方程式时，我们已经假定散射振幅 a 对于所有的原子都是一样的。这里有大量的、表观上不能区别的路线。这些路线之所以不能区别是因为低能中子从原子核散射的时候不会把原子撞离它在晶体中原来的位置——没有留下散射的“记录”。按照以前的讨论，中子到达 C 的振幅必须包括式(3.11)对所有原子求和：

$$\langle \text{到达 } C \text{ 的中子} | \text{ 从 } S \text{ 来的中子} \rangle = \sum_{i=1}^N \langle C | i \rangle a \langle i | S \rangle. \quad (3.12)$$

因为我们是对在不同空间位置的原子的散射振幅求和，这些振幅有不同的相位，从而得到和我们以前曾经分析过的光在光栅上散射的情况下同样具有特征的干涉图样。

在这样一个中子强度为角度函数的实验里面，确实常常发现中子强度显示出巨大的变化，具有若干尖锐的干涉峰，在这些峰之间则几乎什么也没有——如图 3-6(a)所示。然而，对于某几种晶体情况就不是这样的了。伴随着上面所说的干涉峰一起的还有散射到所有方向上的普遍的本底，我们必须试图去理解这个看上去似乎难以理解的原因。原来我们没有考虑中子的一个重要的性质。它具有 $1/2$ 的自旋，因而它就有两个可能的状态：不是自旋“向上”（譬如说在图 3-5 中垂直于纸面）就是自旋“向下”。如果晶体中的原子核没有自旋，中子的自旋就没有任何效应。但是，如果晶体的原子核也具有自旋，譬如说自旋为 $1/2$ ，你们就会观察到上面所讲的模糊的散射本底。这个现象的解释如下。

如果中子的自旋在某一个方向上，并且原子核具有同样方向的自旋，在散射过程中不可能发生自旋方向的改变。如果中子和原子核具有相反的自旋，于是可能发生两种不同的散射过程，其中一个过程中的自旋方向不变；而在另一种过程中自旋的方向互相交换。这个自旋的总和不变的定则和经典定律中的角动量守恒定律相似。如果我们假定所有散射中子的原子核的自旋都按同一方向排列，我们就开始能够理解这一现象。与原子核具有相同自旋的中子受到散射时就得到预期的锐细的干涉分布曲线。对于自旋相反的中子，情况又怎样呢？如果它在散射时不发生自旋方向翻转，那么情况与上述结果没有什么两样，但是如果两者的自旋在散射过程中都翻了一个身，原则上我们就可发现，是在哪一个原子核上进行了散射。

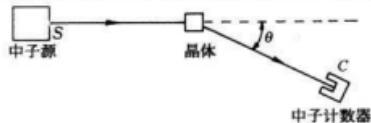


图 3-5 中子在晶体上的散射

因为这是唯一的自旋反转的原子核。既然我们可以说出是在哪一个原子核上发生了散射，其他的原子对此中子又有什么影响呢？当然没有，这一情况就和在单个原子上散射完全一样。

为计入这种效应，式(3.12)的数学表达式必须加以修正，因为在那样的分析过程中我们还没有对状态作完全的描述。让我们从下述条件出发：从中子源来的全部中子都具有向上的自旋，而晶体中的所有原子都具有向下的自旋。首先我们要求的是：到达计数器的中子的自旋都向上并且晶体中所有原子核的自旋仍旧向下的振幅。这和我们以前的讨论没有不同。我们令 a 为散射时自旋不翻转的振幅。那么，在第 i 个原子上散射的振幅是：

$$\langle C_{\text{向上}} \text{ 晶体都向下} | S_{\text{向上}} \text{ 晶体都向下} \rangle = \langle C | i \rangle a \langle i | S \rangle.$$

因为所有原子核的自旋仍旧向下，各个不同的原子核（不同的 i 值）无法区别。显然不可能说出是在哪一个原子上发生了散射。对于这样的过程，所有的振幅互相干涉。

然而还有另外的情况，在这种情况下，从 S 出发的中子的自旋虽然都是向上的，但探测到有一个中子自旋却是向下的，在晶体中有一个原子核的自旋必定要改变成向上方向——我们说这是第 k 个原子。我们又假定对于自旋翻转的每一个原子都具有相同的散射振幅，称为 b 。（在实际的晶体中，存在着另一种可能性，就是相反方向的自旋会转移到另外某个原子上，但是让我们只讨论这种过程的概率非常小的晶体。）于是，散射振幅就是：

$$\langle C_{\text{向下}} \text{ 原子核 } k \text{ 向上} | S_{\text{向上}} \text{ 晶体都向下} \rangle = \langle C | k \rangle b \langle k | S \rangle. \quad (3.13)$$

假如我们要计算发现中子自旋向下以及第 k 个原子核自旋向上的概率，它等于这个振幅的绝对值的平方，就是 $|b|^2$ 乘上 $|\langle C | k \rangle \langle k | S \rangle|^2$ 。第二个因子几乎与第 k 个原子在晶体中的位置无关，并且在取这个绝对值的平方时，所有的相位都消失了。从晶体中任意的原子核上发生的自旋翻转的散射概率是：

$$|b|^2 \sum_{k=1}^N |\langle C | k \rangle \langle k | S \rangle|^2,$$

这就显示出图 3-6(b) 那样的光滑的分布曲线。

你们或许会争辩：“我不在乎哪个原子向上。”也许你不在乎，但是自然界是知道的。实际上的概率就是我们上面所得出的——没有任何干涉效应。另一方面，如果我们要求进入探测器内的中子自旋向上而所有原子的自旋仍旧向下的概率，那么我们要取下式的绝对值的平方：

$$\sum_{i=1}^N \langle C | i \rangle a \langle i | S \rangle.$$

因为求和号下面的各项都包含相位因子，它们要互相干涉，于是我们得到锐细的干涉图样。如果我们做实验时，不去观察被检测到的中子的自旋，那么两种情况都可能发生，两种概率就要相加。作为角度的函数的总概率（或计数率）看上去就像图 3-6(c) 中的曲线那样。

我们来回顾一下这个实验的物理意义。如果你们原则上能够区别各个不同的终态（即使你们不愿费心去区别它们），要求出总的最终的概率。先要算出各个状态的概率（不是振幅），然后把它们相加即得。如果你们甚至在原则上都不能区别各个终态，在取绝对值的平方以求出实际的概率之前，必须先对概率幅求和。你们必须特别注意的是：假如仅仅用波动来描写中子的话，你们对向下自旋的中子和向上自旋的中子都会得到同样的散射分布。你们就要说：“波”来自所有的原子并且相互干涉，就像具有同样波长的向上自旋的中子那样。

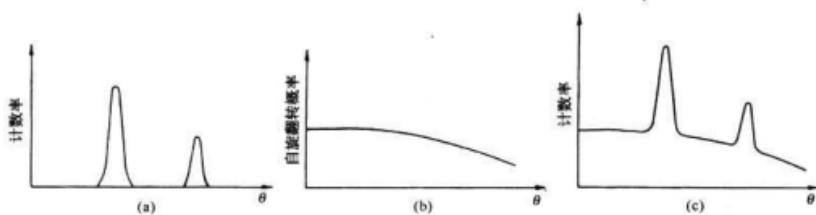


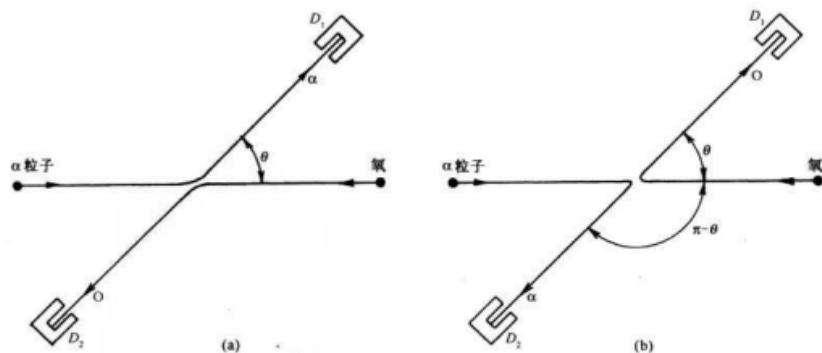
图 3-6 中子计数率作为角度的函数

(a) 对于自旋为零的原子核; (b) 自旋翻转的散射概率; (c) 对于自旋为 $1/2$ 的原子核所观察得到的计数率

但是我们知道实际情况并不是这样的。所以正如我们以前所讲过的,我们必须小心,不要对空间的波动赋予过多的实在性。它们对于某些问题是有效的,但不是对所有的问题都有用。

§ 3-4 全同粒子

下面我们要描述显示量子力学的一个美妙结论的实验。这个实验再一次涉及这样的物理过程,一件事能以两种不能区别的方式发生,因此发生振幅的干涉——在这种情况下它总是正确的。我们将要讨论在比较低的能量下,一个原子核在另一个原子核上的散射。我们先考虑 α 粒子(即你们所知道的,氦原子核)轰击,譬如说,氧原子。为使我们对这个反应的分析较为容易起见,我们在质心坐标系中进行观察,在这个坐标系中氧原子核和 α 粒子的速度在碰撞以前具有相反方向,在碰撞以后也具有完全相反的方向。参看图 3-7(a)。(因为质量不同,速度的大小当然是不同的。)我们还要假定能量是守恒的,并且碰撞的能量足够低,既不发生粒子碎裂,也不会使粒子跃迁到激发态,两个粒子之所以彼此发生偏转,其原因当然是由于两者都带有正电荷,按照经典的说法,当它们靠近擦过时,存在着静电斥力。散射以不同的概率在不同的角度发生。我们要讨论的是这种散射的角度依赖关系。(当然可

图 3-7 在质心系中观察 α 粒子在氧原子核上的散射

以按照经典物理学来计算这个关系,因为量子力学对这个问题的解答和经典的结果完全一样。这是量子力学中最意外的巧合之一,对于这一点很难理解,因为除了平方反比定律以外对其他力的情况就不是这样——所以它确实是一种巧合。)

不同方向的散射概率可以用图3-7(a)所示的实验来进行测量。在位置1的计数器可以设计成只检测 α 粒子,在位置2的计数器设计成只检测氧原子核——这第二个探测器仅仅用来作为核对。(在实验室系统中,探测器不会在相反的方向上,但在质心系中,它们在相反的方向上。)我们的实验是测量在不同方向上的散射概率。令 $f(\theta)$ 为 α 粒子散射到放在 θ 角度上的探测器中的振幅;那么, $|f(\theta)|^2$ 就是我们由实验测得的概率。

我们还可设计另一个实验,其中所用的探测器既能对 α 粒子作出反应,也能对氧原子核作出反应。这样我们就可得到在不需要区别所计数的是哪一种粒子的情况下所发生的过程。当然,假如我们在 θ 角的位置上接收到一个氧原子,在相反的位置角度为 $(\pi - \theta)$ 上必然会接收到一个 α 粒子,如图3-7(b)所示。所以,如果 $f(\theta)$ 是 α 粒子散射到 θ 角的振幅,则 $f(\pi - \theta)$ 是氧原子散射到 θ 角的振幅*。于是,探测器在位置1接收到某种粒子的概率是:

$$\text{在 } D_1 \text{ 中接收到某种粒子的概率} = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2. \quad (3.14)$$

注意,这两个状态原则上是可以区别的。即使在这个实验中我们不去区别这两种状态,但我们可以区别它们的。按照以前的讨论,我们必须把概率相加而不是把振幅相加。

上述结果对于许多种靶核都是正确的—— α 粒子在氧原子核上的散射,在碳、铍、氢等原子核上的散射。但是对于 α 粒子在 α 粒子上的散射,这个结果就不对了。对于两个粒子完全相同的情况,实验得出的数据与式(3.14)所预言的不一致。例如在90°角的散射概率正好是上述理论所预言的两倍,并且问题不在于这些粒子是不是“氦”原子核。如果靶是 He^3 ,而入射粒子是 α 粒子(He^4),那么实验结果就和上述理论相符合了。只有当靶是 He^4 ——其原子核和入射的 α 粒子全同时,粒子的散射以其独特的方式随角度变化。

或许你们已能看出对这个现象的解释。使 α 粒子进入计数器有两种方式:使轰击的 α 粒子以 θ 角散射,或者使它散射到 $(\pi - \theta)$ 角度上。我们能不能够辨别进入计数器的粒子是轰击粒子还是靶粒子呢?回答是不能。在 α 粒子对 α 粒子的情况下,这是两个无法区别的粒子。这里我们必须把概率振幅相加发生干涉,在计数器中找到 α 粒子的概率是两个振幅和的平方:

$$\alpha \text{ 粒子进入 } D_1 \text{ 的概率} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2. \quad (3.15)$$

这个结果和式(3.14)完全不同。我们可取角度 $\pi/2$ 作为一个例子,因为这很容易计算。对于 $\theta = \pi/2$,显然 $f(\theta) = f(\pi - \theta)$,所以式(3.15)的概率变为 $|f(\pi/2) + f(\pi/2)|^2 = 4|f(\pi/2)|^2$ 。

另一方面,如果它们不发生干涉,式(3.14)的结果只给出 $2|f(\pi/2)|^2$ 。所以90°角的散射是我们所预料的两倍。当然,在其他角度结果也是不同的,于是,你们得到了一个不寻常的结论:在粒子是全同的情况下,出现了粒子是可以区别的情况下未曾发生过的某种新的情况。

* 一般地讲,散射方向当然应该用两个角度来描写,极角 ϕ 以及方位角 θ 。那么我们说氧原子核在 (θ, ϕ) 就是说 α 粒子在 $(\pi - \theta, \phi + \pi)$ 。然而,对于库仑散射(以及对于其他许多情况),散射振幅不依赖于 ϕ 。于是在 θ 方向得到一个氧原子核的振幅和在 $(\pi - \theta)$ 方向得到一个 α 粒子的振幅是相同的。

况。在数学描述中，必须把可选择的各种过程的振幅相加，在这种过程中，粒子只是简单地交换它们扮演的角色，并且存在着干涉。

当我们用电子对电子散射，或者质子对质子散射进行同样类型的实验时，甚至会出现更为错综复杂的情况。此时以上两个结论都不正确！对于这些粒子，我们还必须引进一条新的法则，一个最为独特的法则，这个法则是这样的：当来到某一点的电子的身份和另一个电子的身份互相交换时，在这种情况下新的振幅以相反的相位与旧的振幅相干涉。这确确实实是干涉，只是带有一个负号。就 α 粒子而言，当把 α 粒子交换进入计数器时，相干的振幅以正号相干涉。就电子而言，交换干涉的相干振幅以负号相干涉。除了下面将要谈到的另一细节外，在与图3-8所示相类似的实验中，适合电子的方程为：

$$\text{电子到达 } D_1 \text{ 的概率} = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2. \quad (3.16)$$

对上面的陈述还必须加以限制，因为我们还没有考虑到电子的自旋（ α 粒子没有自旋）。可以认为，电子的自旋相对于散射平面来说，不是“向上”就是“向下”。如果实验的能量足够低，由于电荷运动所产生的磁力很小，因而自旋不受到影响。我们假定现在分析的就是这种情况，所以在碰撞的时候，自旋方向不会改变。不管电子具有什么方向的自旋，它总是不变的。你们可以看到，这里有几种可能性。轰击粒子和靶粒子的自旋都向上，或者都向下，或者它们的自旋方向相反。假定两者的自旋都向上，如图3-8所示（或者假定它们的自旋都向下）。反冲粒子的自旋情况也同样，而且这个过程的振幅等于图3-8(a)和(b)所表示的两种可能过程的振幅之差。于是在 D_1 中探测到电子的概率由式(3.16)给出。

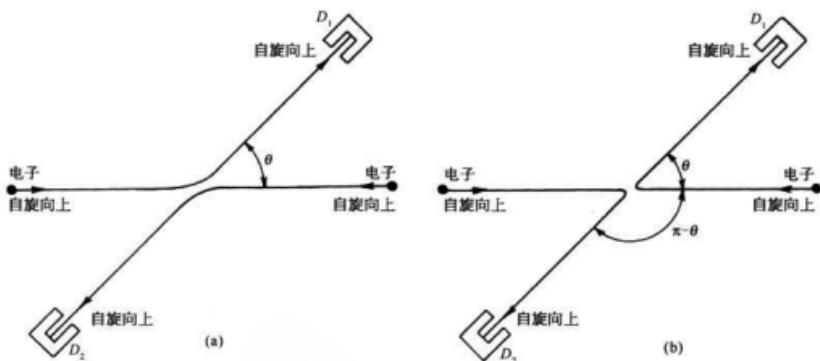


图3-8 电子对电子的散射。如果来到的这两个电子具有互相平行的自旋，过程(a)和(b)是不能区别的

如果“轰击”粒子的自旋向上而“靶”粒子的自旋向下，进入计数器1的电子自旋可以向上也可以向下。通过对电子自旋的测量，我们就能够说出这个电子是来自轰击粒子束还是来自靶粒子了。这两种可能性表示在图3-9的(a)和(b)中，原则上它们是可以区别的，因而互不干涉——只不过是两者的概率相加。如果原来的自旋方向都反过来——就是说，左边的自旋向下而右边的自旋向上——同样的论证仍然成立。

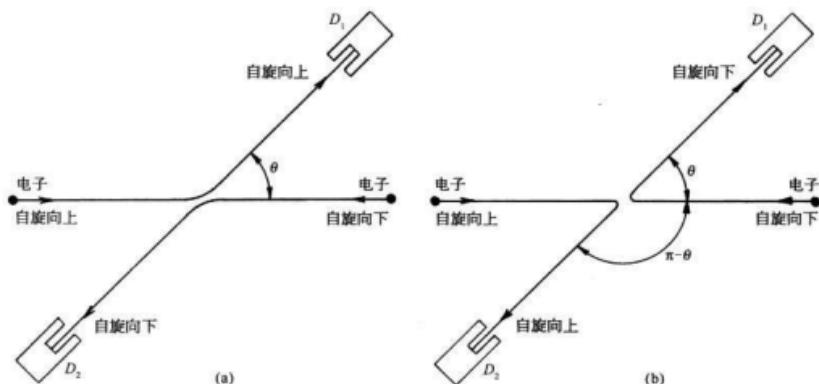


图 3-9 自旋反平行的两个电子的散射

现在如果我们随意选取电子——例如由钨丝发射的电子是完全非极化的——那么发射的任一特定电子的自旋向上还是向下的机会是 50 对 50。如果我们在实验中不去测量在任何地点电子的自旋，这就是所谓的非极化的实验。这个实验的结果最好用这样的方法来计算：把所有的各种可能性都排列成表，就像我们在表 3-1 中所做的那样，对各个可以区别的不同情况分别求出它们的概率。总的概率就等于所有各个概率的和。注意，对于非极化粒子束， $\theta = \pi/2$ 的结果是对互不依赖的粒子按经典理论求出的结果的一半。全同粒子的行为具有许多有趣的结论，我们将在下一章更为详细地讨论它们。

表 3-1 非极化的自旋为 $1/2$ 的粒子的散射

各种情况的比率	粒子 1 的自旋	粒子 2 的自旋	到达 D_1 中粒子的自旋	到达 D_2 中粒子的自旋	概 率
$\frac{1}{4}$	向上	向上	向上	向上	$ f(\theta) - f(\pi - \theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	向下	向下	向下	向下	$ f(\theta) - f(\pi - \theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	向上	向下	{ 向上 向下}	{ 向下 向上}	$ f(\theta) ^2$ $ f(\pi - \theta) ^2$
$\frac{1}{4}$	向下	向上	{ 向上 向下}	{ 向下 向上}	$ f(\pi - \theta) ^2$ $ f(\theta) ^2$
总概率 = $\frac{1}{2} f(\theta) - f(\pi - \theta) ^2 + \frac{1}{2} f(\theta) ^2 + \frac{1}{2} f(\pi - \theta) ^2$					

第4章 全同粒子

§ 4-1 玻色子和费米子

在上一章里，我们开始考虑发生在两个全同粒子相互作用的过程中振幅干涉的特殊法则。所谓全同粒子是指像电子那样的无法将它们彼此区分开来的粒子。如果在某一个过程中包含两个全同的粒子，将到达计数器的粒子与另一粒子互相调换一下，这样调换后的状态与原来的状态是不能区别的，而且——像所有其他不能区别的情况一样——调换后的状态与原来的状态相干涉。于是事件的振幅就是两个相干振幅之和，但是，令人感到有趣的是，在某些情况下两个振幅以相同的相位相干涉，而在另一些情况下，振幅以相反的相位相干涉。

假设两个粒子 a 和 b 相互碰撞，其中 a 散射到方向 1 而 b 散射到方向 2，如图 4-1(a) 所示。令 $f(\theta)$ 为这一过程的振幅，于是，观察到这个事件的概率 P_1 正比于 $|f(\theta)|^2$ 。当然也可能发生另一种过程，即粒子 b 散射到计数器 1 中而粒子 a 进入计数器 2 中，如图 4-1(b) 所示。假设不存在由自旋之类所定义的特殊方向，这一过程的概率就是 $|f(\pi - \theta)|^2$ ，因为这正好等于在第一过程中把计数器 1 移到 $\pi - \theta$ 角处。你们也许会想到，第二个过程的振幅正好等于 $f(\pi - \theta)$ 。但它并不一定是这样，因为还可以有一个任意的相位因子。这就是说振幅可以是

$$e^{i\phi} f(\pi - \theta).$$

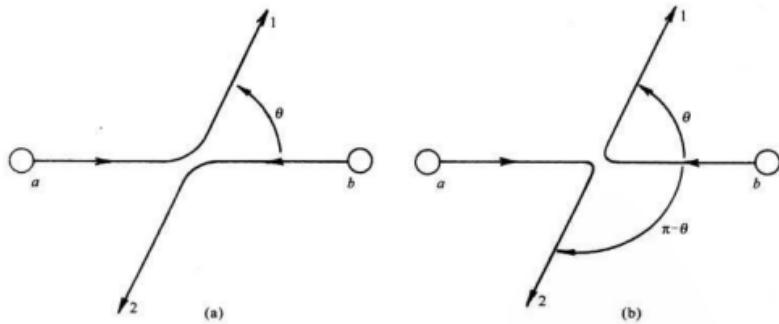


图 4-1 在两个全同粒子的散射过程中，(a) 和 (b) 两个过程不能区别

这个振幅仍旧给出概率 P_2 等于 $|f(\pi - \theta)|^2$ 。

现在让我们来看一看，如果 a 和 b 是全同粒子的话，将会出现些什么情况。这时我们就不能区别图 4-1 中的两个图所表示的不同过程。对于无论 a 还是 b 进入计数器 1 而同时另

一个进入计数器 2 的情形,有一个振幅。这个过程的振幅是图 4-1 所示的两个过程的振幅之和。假使我们把第一个过程的振幅叫做 $f(\theta)$,那么第二个就是 $e^{\imath\theta}f(\pi-\theta)$ 。现在,相位因子就很重要了,因为我们要把两个振幅相加。假设当我们把这两个粒子的角色交换时,我们必须在振幅上乘以某个相位因子,如果我们把这两个粒子再交换一次,我们应该再次乘以同样的因子。可是这样一来,我们又回到了第一过程。相位因子应用两次必然回到原来的状态——相位因子的平方必定等于 1。这存在着两种可能性: $e^{\imath\theta}$ 等于 +1 或者等于 -1。两个粒子交换前后的振幅要么是有相同的符号,要么具有相反的符号。这两种情况在自然界中都存在,它们分别对应于不同种类的粒子。以正号相干涉的粒子称为玻色子,以负号相干涉的粒子称为费米子。光子、介子和引力子都是玻色子,电子、 μ 子、中微子、核子和重子都是费米子。于是,我们得到全同粒子的散射振幅是:

玻色子:

$$(直接的振幅) + (交换后的振幅), \quad (4.1)$$

费米子:

$$(直接的振幅) - (交换后的振幅). \quad (4.2)$$

对于具有自旋的粒子——如电子——还有一个另外的复杂情况。我们不仅要详细说明粒子的位置,还要说明它们自旋的方向。只对于是有相同自旋状态的全同粒子相互交换时振幅才相互干涉。如果考虑非极化射束——这是不同自旋状态的混合物——的散射,还有某些特别的计算。

当两个或更多的粒子紧紧地束缚在一起的时候,将出现一个有趣的问题。例如,一个 α 粒子里面有 4 个粒子——两个中子和两个质子。当两个 α 粒子相互散射时,有几种可能性。在散射过程中,可能有一个中子从一个 α 粒子跳到另一个 α 粒子中的一定振幅,同时在另一个 α 粒子中有一个中子跳过来和它交换位置,于是散射以后的 α 粒子已经不是原来的粒子了——已经交换了一对中子。见图 4-2。交换一对中子的散射振幅和没有这种交换的散射振幅相干涉,由于这里有一对费米子相互交换,干涉必定具有负号。另一方面,如果两个 α 粒子的相对能量是如此之低,使得它们保持相当的距离——譬如说由于库仑斥力——那么

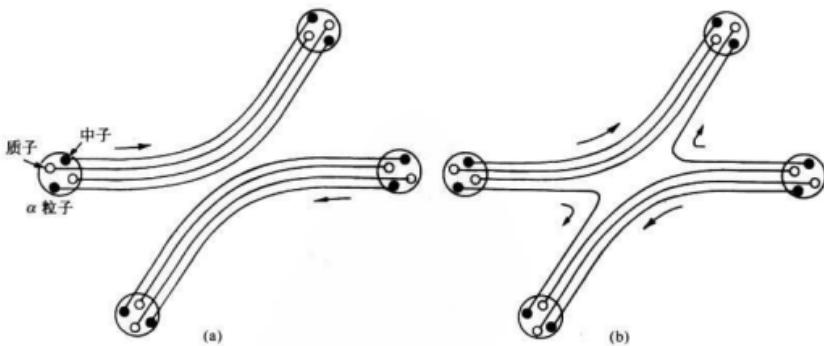


图 4-2 两个 α 粒子的散射。在(a)中,两个 α 粒子保持原来的样子不变;在(b)中,碰撞时互相交换一个中子

就不可能有交换任何内部粒子的概率。于是我们可以把 α 粒子当作结构单一的客体而不必去考虑它的内部细节。在这种情形下,只有两种情况对散射振幅有所贡献,在散射过程中要么没有粒子交换,要么4个粒子都交换。因为 α 粒子中的质子和中子都是费米子,任意一对粒子的交换都要改变散射振幅的符号。只要在 α 粒子之间没有内部粒子的交换,交换两个 α 粒子和交换4对费米子是同样的。对于每一对费米子的交换都要改变符号,其结果是振幅以正号相组合。 α 粒子的行为像玻色子。

因此,关于复合粒子的法则是这样的,在复合粒子可以看成单个粒子的情况下,复合粒子的行为像费米子还是像玻色子取决于它们包含的是奇数个费米子还是偶数个费米子。

所有我们提到过的基本费米子——例如电子、质子以及中子等等——具有自旋 $j = 1/2$ 。如果将几个这样的费米子放在一起组成一个复合粒子,总的自旋不是整数就是半整数。例如,氦的普通同位素 He^4 ,它的原子核包含两个中子和两个质子,其自旋为零。而 Li^7 的原子核有3个质子和4个中子,具有 $3/2$ 的自旋。我们以后要学习角动量的合成规则,而现在只提一下,每一个具有半整数自旋的复合粒子就像一个费米子,而每一个具有整数自旋的复合粒子就像一个玻色子。

这就提出了一个有趣的问题:为什么具有半整数自旋的粒子是费米子,它们的振幅要以负号相加;而具有整数自旋的粒子是玻色子,它们的振幅以正号相加?很抱歉,对于这个问题我们不能给出一个简单的解释,泡利曾从量子场论和相对论的复杂的论证中作出过一个解释,他指出,量子场论和相对论必须一起应用。但是我们无法在初等的水平上找到一种方法来重复他的论证。看来这是物理学中不多的情形之一,在这些情形中具有能非常简明表述的法则,但是没有人能为它找到简单而又容易的解释。这种解释要深入到相对论量子力学中。这可能意味着我们还没有完全理解其中所包含的基本原理。目前,你们只好把它当作自然界的一个法则接受下来。

§ 4-2 两个玻色子的状态

现在我们来讨论关于玻色子相加法则的一个有趣的结果。这和有几个粒子出现时的行为有关。我们先考虑两个玻色子从另外两个粒子上散射的情形。我们不去关心散射机构的细节,我们只对被散射粒子发生些什么变化感兴趣。假设情况如图4-3所示。粒子 a 被散射到状态1。所谓状态系指一定的运动方向和能量,或者别的某种给定的条件。粒子 b 被散射到状态2。我们假设这两个状态1和2几乎相同。(事实上我们所要求的是两个粒子被散射到相同的方向或状态的振幅;但是最好我们先考虑一下如果两个状态几乎相同时会发生些什么,然后再解决当两个状态变为完全相同时,会发生些什么。)

假定我们只有粒子 a ,它具有一定的振幅被散射到方向1,写成 $\langle 1|a \rangle$ 。而粒子 b 单独存在时,它被散射到方向2具有振幅 $\langle 2|b \rangle$ 。如果两个粒子不相同,两次散射

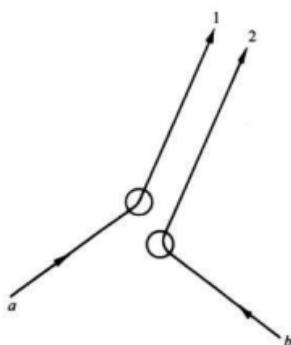


图4-3 一对粒子被散射到靠近的终态

同时发生的振幅就是乘积

$$\langle 1 | a \rangle \langle 2 | b \rangle.$$

于是发生这一事件的概率为

$$|\langle 1 | a \rangle \langle 2 | b \rangle|^2,$$

它也等于

$$|\langle 1 | a \rangle|^2 |\langle 2 | b \rangle|^2.$$

在目前的论证中,为了使书写方便,有时我们令

$$\langle 1 | a \rangle = a_1, \langle 2 | b \rangle = b_2.$$

于是,双散射的概率是

$$|a_1|^2 |b_2|^2.$$

也可能发生这样的情况:粒子 b 散射到方向 1,而粒子 a 散射到方向 2。这一过程的振幅是

$$\langle 2 | a \rangle \langle 1 | b \rangle.$$

这个事件的概率是

$$|\langle 2 | a \rangle \langle 1 | b \rangle|^2 = |a_2|^2 |b_1|^2.$$

现在,设想我们有一对小型计数器,可以用它们来检测这两个被散射的粒子。它们同时检测到两个粒子的概率 P_2 为

$$P_2 = |a_1|^2 |b_2|^2 + |a_2|^2 |b_1|^2. \quad (4.3)$$

现在让我们假设方向 1 和 2 非常靠近,我们期望 a 应随着方向连续地变化,所以当 1 和 2 互相靠近时, a_1 和 a_2 也必定彼此趋近。当方向 1 和 2 足够接近时,振幅 a_1 和 a_2 将相等。我们可以令 $a_1 = a_2$, 并把它们都称为 a , 同样令 $b_1 = b_2 = b$ 。于是我们得到

$$P_2 = 2 |a|^2 |b|^2. \quad (4.4)$$

现在假设 a 和 b 是全同的玻色子。那么, a 进入 1 而 b 进入 2 的过程和相互交换后 a 进入 2 而 b 进入 1 的过程不能区别。假使这样,这两个不同过程的振幅相互干涉。两个计数器各俘获一个粒子的总振幅是

$$\langle 1 | a \rangle \langle 2 | b \rangle + \langle 2 | a \rangle \langle 1 | b \rangle. \quad (4.5)$$

在计数器中得到一对粒子的概率就是这个振幅绝对值的平方,

$$P_2 = |a_1 b_2 + a_2 b_1|^2 = 4 |a|^2 |b|^2. \quad (4.6)$$

我们得到这样的结果:两个全同玻色子被散射到同一状态的概率是假设两个粒子不相同时所计算出的概率的两倍。

虽然我们刚才考虑两个粒子在不同的计数器中被观察到,我们在下面就会知道,这并不是实质性的。我们设想沿 1 和 2 两个方向的粒子都进入放在某一距离处的一个单独的小型计数器中。我们定义方向 1 为正对着计数器上面积元 dS_1 的方向,方向 2 正对着计数器的面积元 dS_2 。(我们设想计数器有一和散射线垂直的面。)现在我们不可能给出粒子将进入某一精确方向或到达空间某一特定点的概率。这种事是办不到的——进入任一精确方向的机会为零。如果我们希望说得非常具体的话,我们必须这样定义我们的振幅,它给出到达计

数器上单位面积的概率。假定我们只有粒子 a , 它具有被散射到方向 1 的某个振幅。我们定义 $\langle 1 | a \rangle = a_1$ 是 a 被散射到在方向 1 的计数器单位面积上的振幅。换言之, a_1 的标度已选定了——我们说它已被“归一化”, 于是粒子 a 被散射到面积元 dS_1 上的概率是

$$|\langle 1 | a \rangle|^2 dS_1 = |a_1|^2 dS_1. \quad (4.7)$$

如果我们的计数器的总面积是 ΔS , 我们使 dS_1 遍及这个面积的范围, 粒子 a 被散射到计数器中的总概率是:

$$\int_{\Delta S} |a_1|^2 dS_1. \quad (4.8)$$

和以前一样, 我们假设计数器足够小, 以致振幅 a_1 在计数器的整个面上没有显著的变化, 那么 a_1 是一个常数振幅, 我们可称它为 a 。于是粒子 a 被散射到计数器中某处的概率是

$$p_a = |a|^2 \Delta S. \quad (4.9)$$

用同样的方法, 我们得到粒子 b ——单独存在时——被散射到某一面积元 dS_2 的概率是

$$|b_2|^2 dS_2.$$

(我们用 dS_2 代替 dS_1 , 因为下面我们要使 a 和 b 进入不同的方向。) 我们再使 b_2 等于常数振幅 b , 于是粒子 b 在探测器中被计数的概率是:

$$p_b = |b|^2 \Delta S. \quad (4.10)$$

现在当两个粒子同时存在时, a 被散射到 dS_1 而 b 被散射到 dS_2 的概率是

$$|a_1 b_2|^2 dS_1 dS_2 = |a|^2 |b|^2 dS_1 dS_2. \quad (4.11)$$

如果我们要求的是 a 和 b 两者都进入计数器 的概率, 我们将 dS_1 和 dS_2 都在 ΔS 上积分, 得到

$$P_2 = |a|^2 |b|^2 (\Delta S)^2. \quad (4.12)$$

附带提一下, 我们注意到它正好等于 $p_a \cdot p_b$, 正如你们假定粒子 a 和 b 互相独立地行动那样。

然而, 如果两个粒子是全同的, 对于每一对面积元 dS_1 和 dS_2 就有两个不能区别的概率。粒子 a 进入 dS_1 而粒子 b 进入 dS_2 和粒子 a 进入 dS_2 而粒子 b 进入 dS_1 是不能区别的, 所以这两个过程的概率将相互干涉。(在上面当我们有两个不同的粒子时——虽然事实上我们并不在乎到底哪一个粒子跑到计数器的哪一部分——原则上我们能够找出哪个粒子进入哪里, 所以不存在干涉。而对于全同粒子, 即使在原则**上**我们也不可能断定。) 于是, 我们必须把两个全同粒子到达 dS_1 和 dS_2 的概率写成

$$|a_1 b_2 + a_2 b_1|^2 dS_1 dS_2. \quad (4.13)$$

然而, 现在我们对计数器的面积求积分时, 我们必须小心。如果令 dS_1 和 dS_2 都遍及整个面积 ΔS , 我们就把面积上每一部分都计算了两次, 因为式(4.13)包括了任何一对面积元 dS_1 和 dS_2 *

* 在式(4.11)中, 交换 dS_1 和 dS_2 就得到另一个不同的事件, 所以两个面积元都必须遍及计数器的整个面积。在式(4.13)中, 我们把 dS_1 和 dS_2 成对地处理, 并且包括了可能发生的所有情况。如果积分又包含 dS_1 和 dS_2 交换后所发生的情况, 各种情况就计算了两次。

可能会遇到的所有情况。如果我们把结果除以 2 来改正双重计算, 我们仍然可以求这个积分。于是, 对于全同玻色子, 我们得到

$$P_2(\text{玻色}) = \frac{1}{2} \{4 |a|^2 |b|^2 (\Delta S)^2\} = 2 |a|^2 |b|^2 (\Delta S)^2. \quad (4.14)$$

这正好又等于式(4.12)的两倍, 该式是我们对可以区别的粒子求得的。

如果我们设想一下, 我们知道通道 b 已经将其粒子送入某一特定方向, 我们可以说第二个粒子进入同一方向的概率等于我们把它当作独立事件计算时所预期的结果的两倍。玻色子具有这样的特性: 如果已有一个粒子处于某一状态, 在这同一状态中出现第二个粒子的概率等于第一个粒子不在这个状态时的两倍。这个事实常常用下面的方式来表达: 如果已有一个玻色子处于一给定的状态中, 再将另一全同玻色子放进这同一状态的振幅等于第一个粒子不在该状态时的 $\sqrt{2}$ 倍。(从我们所采用的物理的观点来看, 这并不是表达这个结果的适当方式, 但是如果始终将它当作一个法则来使用, 它肯定会给出正确的结果。)

§ 4-3 n 个玻色子的状态

我们把上一节的结果推广到具有 n 个粒子的情况。设想图 4-4 所示的情况。我们有 n 个粒子 a, b, c, \dots 它们分别被散射至 $1, 2, 3, \dots, n$ 等各个方向上。所有这 n 个方向都正对着放在远处的一个小计数器。和上一节一样, 我们把所有的振幅都归一化, 各个粒子单独行动时进入计数器上面积元 dS 的概率是:

$$|\langle \quad \rangle|^2 dS.$$

让我们先假设这些粒子都是可以区别的, 于是, n 个粒子在 n 个不同的面积元上都一起被计数的概率是:

$$|a_1 a_2 a_3 \dots|^2 dS_1 dS_2 dS_3 \dots \quad (4.15)$$

我们再假设振幅不依赖于 dS 在计数器(假设它很小)上的位置, 并把这些振幅称为 a, b, c, \dots 。概率式(4.15)变成:

$$|a|^2 |b|^2 |c|^2 \dots dS_1 dS_2 dS_3 \dots \quad (4.16)$$

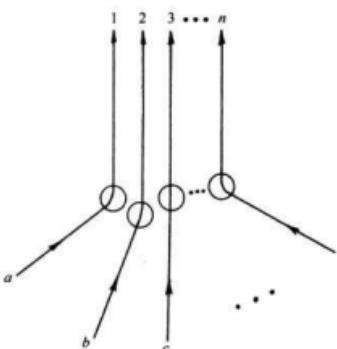


图 4-4 n 个粒子被散射到靠近的终态

将各个 dS 分别在计数器的表面 ΔS 上求积分, 我们得到同时对 n 个不同粒子计数的概率 P_n (不同)为

$$P_n(\text{不同}) = |a|^2 |b|^2 |c|^2 \dots (\Delta S)^n. \quad (4.17)$$

这正好等于各个粒子分别进入计数器的概率的乘积。它们各自独立地行动——某一粒子进入计数器的概率与另外还有多少其他粒子也进入计数器无关。

现在假设所有的粒子都是全同的玻色子。对于每一组方向: $1, 2, 3, \dots$ 有许多不可分辨的可能性。例如, 当只有 3 个粒子时, 我们有下列几种可能性:

$$\begin{array}{lll}
 a \rightarrow 1 & a \rightarrow 1 & a \rightarrow 2 \\
 b \rightarrow 2 & b \rightarrow 3 & b \rightarrow 1 \\
 c \rightarrow 3 & c \rightarrow 2 & c \rightarrow 3 \\
 a \rightarrow 2 & a \rightarrow 3 & a \rightarrow 3 \\
 b \rightarrow 3 & b \rightarrow 1 & b \rightarrow 2 \\
 c \rightarrow 1 & c \rightarrow 2 & c \rightarrow 1
 \end{array}$$

共有 6 种不同的组合。 n 个粒子就有 $n!$ 种不同的、但是不可分辨的可能性，因此我们必须把它们的振幅相加。于是， n 个粒子在 n 个面积元上计数的概率就是

$$\begin{aligned}
 & |a_1 b_2 c_3 \dots + a_1 b_3 c_2 \dots + a_2 b_1 c_3 \dots \\
 & + a_2 b_3 c_1 \dots + \dots + \dots|^2 dS_1 dS_2 dS_3 \dots dS_n.
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

我们再次假设所有的方向很靠近，因而我们可以设 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ ，对于 b, c, \dots 也如此，式(4.18)表示的概率则成为：

$$|n!abc\dots|^2 dS_1 dS_2 dS_3 \dots dS_n. \quad (4.19)$$

当我们把各个 dS 对计数器的面积 ΔS 求积分时，每个可能的面积元的乘积都计算了 $n!$ 次，对此我们除以 $n!$ 来加以修正，于是得到

$$P_n(\text{玻色}) = \frac{1}{n!} |n!abc\dots|^2 (\Delta S)^n$$

或

$$P_n(\text{玻色}) = n! |abc\dots|^2 (\Delta S)^n. \quad (4.20)$$

把这个结果和式(4.17)比较，我们看到，对 n 个玻色子一起计数的概率比假设这些粒子都是可以分辨的情况下所算出的概率大 $n!$ 倍。我们可以把以上结果概括为

$$P_n(\text{玻色}) = n! P_n(\text{不同}). \quad (4.21)$$

于是，玻色子情况的概率比假设粒子都独立行动所算出的概率大 $n!$ 倍。

下面的问题可使我们更好地看出上述结果的意义：一个玻色子进入已有 n 个其他玻色子存在的某个特殊状态的概率是什么？我们把这个新加入的粒子叫做 w 。包括 w 在内，我们共有 $(n+1)$ 个粒子，式(4.20)变成

$$P_{n+1}(\text{玻色}) = (n+1)! |abc\dots w|^2 (\Delta S)^{n+1}. \quad (4.22)$$

此式可以写成

$$P_{n+1}(\text{玻色}) = (n+1) |w|^2 \Delta S |n! |abc\dots|^2 \Delta S^n|$$

或

$$P_{n+1}(\text{玻色}) = (n+1) |w|^2 \Delta S P_n(\text{玻色}). \quad (4.23)$$

我们可以下列方式来看待这个结果。 $|w|^2 \Delta S$ 是当没有其他粒子存在时，粒子 w 进入探测器的概率， $P_n(\text{玻色})$ 是已经有了另外 n 个玻色子存在时的概率。所以式(4.23)表明，当已经有另外的 n 个全同玻色子存在于某一状态中时，在这同一个状态中再增加一个玻色子的概率增强了 $(n+1)$ 倍。由于其他粒子的存在，使得再加入一个粒子的概率增大了。

§ 4-4 光子的发射和吸收

在上面的整个讨论中,我们所谈的都是像 α 粒子散射这一类的过程。但这并不是本质问题。我们可以谈论粒子的产生,例如光的发射。发射光时,光子“产生”了。在这样的情况下,

我们不需要图4-4中的入射线。我们只要考虑有一些原子发射 n 个光子,如图4-5所示。于是,我们的结果也可以表述为:如果在某一特定的状态中已经有了 n 个光子,原子再发射一个光子到这个特定状态中的概率增大了 $(n+1)$ 倍。

人们常常喜欢把这个结果概括为:当已有 n 个光子存在时,再发射一个光子的振幅增大了 $\sqrt{n+1}$ 倍。当然,这只是同一事情的另一种说法而已,因为振幅的平方就是概率。

从任何一个状态 ϕ 转变到另一个状态 χ 的振幅就是从状态 χ 变为状态 ϕ 的振幅的共轭复数:

$$\langle \chi | \phi \rangle = \langle \phi | \chi \rangle^*. \quad (4.24)$$

这在量子力学中是普遍正确的。不久我们将学习这个定律,但目前我们就假定它是正确的。我们可以用它来弄清楚光子是怎样从一个给定的状态被散射或吸收的。一个光子加入某一个已经有 n 个光子存在于其中的状态(譬如说*i*)的振幅是

$$\langle n+1 | n \rangle = \sqrt{n+1}a, \quad (4.25)$$

其中 $a = \langle i | a \rangle$ 是没有其他粒子存在时的振幅。应用式(4.24),过程反方向进行——从 $(n+1)$ 个光子变为 n 个光子——的振幅是

$$\langle n | n+1 \rangle = \sqrt{n+1}a^*. \quad (4.26)$$

这不是通常所用的叙述方式。人们不喜欢考虑从 $(n+1)$ 到 n 这样的过程,而总喜欢从存在 n 个粒子的状态开始。于是,他们说:当有 n 个光子存在时,从其中吸收掉一个光子的振幅——换言之,从 n 到 $n-1$ ——是

$$\langle n-1 | n \rangle = \sqrt{n}a^*. \quad (4.27)$$

当然这和式(4.26)完全一样。但这样却有要努力记住何时用 \sqrt{n} 或用 $\sqrt{n+1}$ 的麻烦。这里有一个记忆的方法, a 前面的因子总是出现的最大光子数的平方根,不论此数出现在反应前,还是反应后,式(4.25)和(4.26)表明这个定律实际上是对称的——只有当你们把它写成式(4.27)的形式,看上去才不对称。

从这些新的法则可以推导出许多物理的结论;我们说一下其中一个与光的发射有关的结论。假如我们设想这样一种情况,光子被包围在一个盒子里里面——你们可以想象一个用反射镜做墙的盒子。现在假定在这个盒子中有 n 个光子,它们都处于同样的状态——同样的频率、同样的传播方向和偏振——所以它们是不可分辨的。此外在盒子中还有一个原子,它可把另一个光子发射到这一状态中。这个原子发射光子的概率是

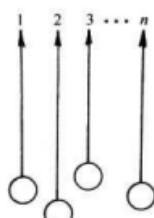


图4-5 处于接近状态中的 n 个光子的产生

$$(n+1) |a|^2, \quad (4.28)$$

它吸收一个光子的概率是

$$n |a|^2, \quad (4.29)$$

其中 $|a|^2$ 是原来没有光子存在时,这个原子发射一个光子的概率。我们已经在第1卷第42章中以稍许不同的方式讨论过这些法则。式(4.29)说明原子吸收一个光子并跃迁到较高的能量状态的概率正比于照射到这个原子上的光的强度。但是,正如爱因斯坦首先指出的,原子向下跃迁到较低能量状态的概率包含两个部分,这个概率等于自发跃迁的概率 $|a|^2$ 加上感应跃迁的概率,后者正比于光的强度——即正比于出现的光子数目,即 $n |a|^2$ 。此外,正如爱因斯坦所说的,吸收系数和感应发射系数相等并与自发发射的概率有关。我们这里所学到的是:如果用出现的光子的数目(用它来代替每单位时间通过每单位面积的能量)来量度光的强度,吸收、感应发射以及自发发射的系数都相等。这就是第1卷第42章式(42.18)中的爱因斯坦系数 A 和 B 之间关系的实质。

§ 4-5 黑体光谱

我们要应用关于玻色子的法则再来讨论黑体辐射的光谱(见第1卷第42章)。我们要找出在一个盒子内部,辐射与某些原子处于热平衡状态时,该盒子里面有多少光子。假设对于光的每一种频率 ω ,存在着某一数量 N 的原子,这些原子具有两个能量状态,其能量间隔为 $\Delta E = \hbar \omega$ 。参见图 4-6。我们把较低的能量状态叫做“基”态,较高能量的状态叫做“激发”态。令 N_g 和 N_e 分别是基态和激发态上的原子平均数,那么,当这些原子处于温度为 T 的热平衡状态时,由统计力学,我们有

$$\frac{N_e}{N_g} = e^{-\Delta E / kT} = e^{-\hbar \omega / kT}. \quad (4.30)$$

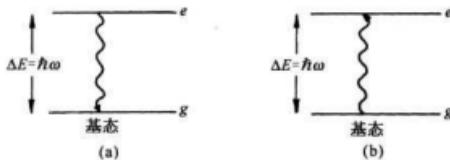


图 4-6 频率为 ω 的光子的辐射和吸收

处于基态的每一个原子都可以吸收一个光子并跃迁到激发态,激发态的每一个原子都可以发射一个光子并跃迁到基态。平衡状态下,这两个过程的速率必定相等。这速率正比于事件的概率和其中原子的数目,设 \bar{n} 是处于频率为 ω 的状态中的光子的平均数。那么,从该状态中吸收的吸收率是 $N_g \bar{n} |a|^2$,光子发射到这个状态中的发射率是 $N_e (\bar{n} + 1) |a|^2$ 。令这两个速率相等,我们就有

$$N_g \bar{n} = N_e (\bar{n} + 1). \quad (4.31)$$

把此式和式(4.30)结合起来,我们得到

$$\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} = e^{-\hbar\omega/kT}.$$

解出 \bar{n} ,得到

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (4.32)$$

这是在热平衡的空腔中,处于频率为 ω 的状态中光子平均数。因为每一个光子具有能量 $\hbar\omega$,在这个状态中光子的总能量是 $\bar{n}\hbar\omega$,或

$$\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (4.33)$$

附带提一下,此式和另外一章中的一个式子[第1卷第41章式(41.15)]相同。你们还记得,对于任何一种谐振子——例如弹簧上的重物——量子力学能级是以相等的间距 $\hbar\omega$

均匀地分布的,如图4-7所示。如果我们令第n个能级的能量为 $n\hbar\omega$,我们发现,这样的振子的平均能量也由式(4.33)表示。然而这个方程在这里是通过计算粒子数对光子导出的,它也得出同样的结果,这是量子力学不可思议的奇迹之一。如果我们从考虑没有相互作用的玻色子的某种状态或条件开始(我们曾经假设光子彼此之间是没有相互作用的),然后设想在这个状态中可以放入或者零个、或者一个、或者两个……直到任意数目n个粒子。人们发现,这个系统所有量子力学意义上的行为与谐振子完全一样。所谓谐振子是指一种动力学系统,譬如像弹簧上的重物或者共振腔里的驻波。这就是为什么可以用光子来描绘电磁场的理由。

从某种观点来看,我们可以用大量的谐振子这一思想

来分析盒子或空腔中的电磁场。根据量子力学把每一种振动模式当作一种谐振子。从另一种观点来看,我们可以对同样的物理过程,按照全同玻色子的概念来进行分析。两种方式所得出的结果总是完全一致。你们无法决定电磁场实际上应当用量子化的谐振子来描写还是用在各个状态中的光子数来说明,可以证明这两种观点在数学上是完全相同的。所以今后我们可以说盒子里处于某一特定状态的光子数目,也可以说和电磁场某一特定振动模式相联系的能级的数目。它们是描述同一事物的两种不同的方式。对于自由空间中的光子,这也同样正确,它们相当于器壁移至无穷远处的空腔中的振动。

我们已算出在温度为T的盒子里任一特定的模式的平均能量。为得到黑体辐射定律,我们只需再知道一件事,即需要知道在每一种能量状态有多少模式。(我们假设,对于每一种模式,在盒子里——或者在器壁上——都有一些原子,它们具有可能辐射到这个模式的能级,从而每一模式都能达到热平衡。)黑体辐射定律的表达通常是给出:在单位体积内,在微小的频率间隔 ω 到 $\omega + \Delta\omega$ 中的光所携带的能量。所以我们需要知道盒子内部,在频率间隔 $\Delta\omega$ 中有多少个模式。虽然这个问题在量子力学中经常出现,但它纯粹是一个关于驻波的经典问题。

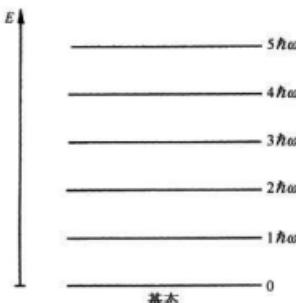


图4-7 谐振子的能级

我们只对矩形盒子求解。对于任意形状的盒子，结果都是相同的。但是对于任意情况，计算非常复杂。而且我们只对线度比光的波长大得多的盒子有兴趣。这样就有亿万个模式。在任意小的频率间隔 $\Delta\omega$ 内也有许多模式。所以我们可以讨论频率 ω 处，任何频率间隔 $\Delta\omega$ 中的“平均数”。首先我们讨论在一维情况——就像在一条紧绷着的绳子上的波——中有多少个模式。你们都知道，每一种模式就是一个正弦波，在两个端点处必须趋于零。换言之，整个线的长度必须为整数个半波长，如图 4-8 所示。我们喜欢用波数： $k = 2\pi/\lambda$ 。令 k_j 为第 j 个模式的波数，我们有：

$$k_j = \frac{j\pi}{L}, \quad (4.34)$$

其中 j 是任意整数。相邻的模式的波数间隔 δk 是

$$\delta k = k_{j+1} - k_j = \frac{\pi}{L}.$$

我们假设 kL 如此之大，从而在很小的间隔 Δk 内就有许多模式。令 ΔN 为间隔 Δk 内模式的数目，我们有：

$$\Delta N = \frac{\Delta k}{\delta k} = \frac{L}{\pi} \Delta k. \quad (4.35)$$

现在，在量子力学方面工作的理论物理学家常常喜欢用只有这个数目一半的模式数来表示。他们写作

$$\Delta N = \frac{L}{2\pi} \Delta k. \quad (4.36)$$

我们来解释一下这是为什么，他们通常喜欢用行波的概念来思考——某些波向右行进（具有正的 k ），某些波向左行进（具有负的 k ）。但是，所谓“模式”是对于驻波而言的。驻波是两列波之和，两列波各自在相反方向上行进。换言之，他们认为每一驻波包含了两个不同的光子“态”。如果人们喜欢用 ΔN 来表示给定 k （现在 k 的范围包括从正的到负的数值）的光子态的数目，那么应该取式（4.35） ΔN 的一半大小。（现在所有的积分必须从 $k = -\infty$ 积到 $k = +\infty$ ，从而对于任何给定 k 的绝对值算出的状态总数仍然完全正确。）当然，这样并没有很好地描写驻波，但是我们用前后一贯的方法来计算振动模式。

现在我们要把结果推广到三维情况。矩形盒子里的驻波必须沿着每一个轴都有整数个半波长。图

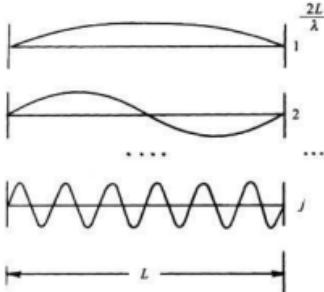


图 4-8 一条线上驻波的模式

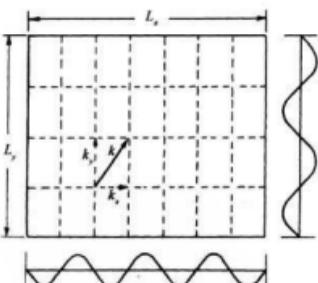


图 4-9 二维的驻波模式

4-9 所示是其中的二维情况。每个波的方向和频率都用一个波矢 \mathbf{k} 来表示。波矢的 x , y 和 z 方向的分量必定满足类似于式(4.34)那样的方程。所以我们得到

$$k_x = \frac{j_x \pi}{L_x},$$

$$k_y = \frac{j_y \pi}{L_y},$$

$$k_z = \frac{j_z \pi}{L_z}.$$

和前面一样,具有 k_x 值在间隔 Δk_x 内的模式数为

$$\frac{L_x}{2\pi} \Delta k_x.$$

对于 Δk_y 和 Δk_z 的情况也是一样。令 $\Delta N(\mathbf{k})$ 为波矢 \mathbf{k} 的模式的数目,波矢 \mathbf{k} 的 x 分量在 k_x 和 $k_x + \Delta k_x$ 之间,它的 y 分量在 k_y 和 $k_y + \Delta k_y$ 之间,它的 z 分量在 k_z 和 $k_z + \Delta k_z$ 之间。那么

$$\Delta N(\mathbf{k}) = \frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z. \quad (4.37)$$

乘积 $L_x L_y L_z$ 等于盒子的体积。于是我们得到一个极其重要的结果:对于高的频率(波长比盒子的线度小得多),空腔中模式的数目正比于盒子的体积 V 和“ k 空间中的体积” $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ 。这个结果在许多问题中反复地出现,应该将它记住:

$$dN(\mathbf{k}) = V \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (4.38)$$

虽然我们还没有证明过,但这个结果不依赖于盒子的形状。

我们现在应用这个结果来求光子的频率范围 $\Delta\omega$ 内的光子模式的数目。我们有兴趣的只是各个模式中的能量——对波的方向不感兴趣,我们想要知道在给定频率范围内模式的数目。真空中 \mathbf{k} 的大小和频率的关系是

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}. \quad (4.39)$$

所以在频率间隔 $\Delta\omega$ 内,与波矢 \mathbf{k} 相对应的模式就是与大小在 k 到 $k + \Delta k$ 之间的全部模式,它们与方向无关。在 k 到 $k + \Delta k$ 之间的“ k 空间体积”是一球壳,其体积为

$$4\pi k^2 \Delta k,$$

于是模式的数目为

$$\Delta N(\omega) = \frac{V 4\pi k^2 \Delta k}{(2\pi)^3}. \quad (4.40)$$

然而,由于我们现在感兴趣的是频率,我们应将 $k = \omega/c$ 代入上式,于是得到

$$\Delta N(\omega) = \frac{V 4\pi \omega^2 \Delta \omega}{(2\pi)^3 c^3}. \quad (4.41)$$

这里还有一个复杂的情况。如果我们讨论的是电磁波的模式，对于任一波矢 \mathbf{k} 可以有两个(互相正交的)偏振。因为这些模式是互相独立的，我们必须——对于光——把模式的数目加倍。所以我们得到

$$\Delta M(\omega) = \frac{V\omega^2 \Delta\omega}{\pi^2 c^3} \text{(对于光).} \quad (4.42)$$

我们曾经指出，式(4.33)每一模式(或每一“状态”的平均能量是

$$\bar{n}\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

将此式乘以模式的数目，我们就得到在区间 $\Delta\omega$ 内这些模式的总能量 ΔE ：

$$\Delta E = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \cdot \frac{V\omega^2 \Delta\omega}{\pi^2 c^3}. \quad (4.43)$$

这就是关于黑体辐射频谱的定律，我们在第1卷第41章中已经得到过这一定律。其频率谱画在图 4-10 中。你们现在看到，这个答案取决于光子是玻色子这一事实，它们具有使所有的粒子都进入同一状态的倾向(因为这样做振幅大)。你们要记住，是普朗克对黑体辐射光谱的研究(从经典物理学看来，这是很神秘的问题)，以及他对式(4.43)的发现开创了量子力学整个学科。

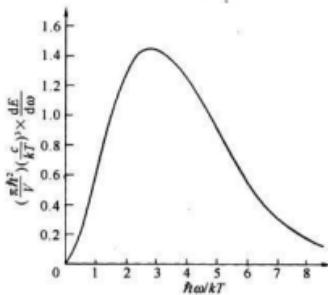


图 4-10 处于热平衡的空腔中
辐射的频谱，“黑体”光谱

§ 4-6 液 氦

液氦在低温下有许多奇特的性质，遗憾的是我们现在不可能花时间来详细叙述，但它的许多性质起源于氦原子是玻色子这个事实。其中一个性质是，液氦在流动时没有任何黏性阻力。实际上，这就是我们在以前有一章中所讲的理想“干”水——假如速度足够低的话。其原因如下：为使液体具有黏性，就必定有内能损失；必须有某种方法使一部分液体具有与其余部分不同的运动。这就意味着必须有可能把某些原子撞击到不同于另一些原子所占据的状态中去。但是在足够低的温度下，当热运动变得非常小时，所有的原子都企图进入同样的状态中。于是，只要有一部分原子在向前运动，所有的原子都要以同样的方式一起运动。这种运动具有一种刚性，并且很难使它像在互相独立的粒子中所发生的那样分裂为不规则的湍流。所以在玻色子组成的液体中，所有原子有极强的进入同样状态的倾向——这个倾向可以用我们以前求得的因子 $\sqrt{n+1}$ 来表征。(对于一瓶液氦来说， n 当然是一个非常大的数字！)在高温下，这种合作运动不出现，因为这时有足够的热能使不同的原子进入不同的高能态。但是在足够低的温度下，突然在某一瞬间所有的氦原子都试图进入同一状态中。氦就成为超流体。顺便提一下，这个现象只出现在原子量为 4 的氦同位素中。对于原子量为 3 的氦同位素，各个原子都是费米子，其液体是正常的液体。由于超流动性只发生于 He^4 ，这显然是一种量子力学的效应——由于 α 粒子的玻色子性质。

§ 4-7 不相容原理

费米子的行为完全不同。我们来看一下,如果试图把两个费米子放到同一状态中将会发生些什么。我们回到原先的例子,求两个全同费米子被散射到几乎完全相同的方向上的振幅。粒子 a 进入方向 1 而粒子 b 进入方向 2 的振幅是

$$\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle,$$

两个粒子出射方向互相交换的振幅是

$$\langle 2|a\rangle\langle 1|b\rangle.$$

因为我们讨论的是费米子,这个过程的振幅等于这两个振幅之差:

$$\langle 1|a\rangle\langle 2|b\rangle - \langle 2|a\rangle\langle 1|b\rangle. \quad (4.44)$$

我们所说的“方向 1”不仅表示粒子的某一个运动方向,还表示其确定的自旋方向。“方向 2”和方向 1 几乎完全相同,并且相当于同样的自旋方向。于是 $\langle 1|a\rangle$ 和 $\langle 2|a\rangle$ 近乎相等。(如果出射状态 1 和 2 的自旋不相同,这个结果就不一定成立,因为有某些理由可以说明为什么振幅要依赖于自旋方向。)现在如果使方向 1 和 2 互相靠近,式(4.44)中的总振幅就变成零。对于费米子所得出的结果比玻色子简单得多。两个费米子——譬如两个电子——根本不可能进入完全相同的状态。你们永远不会发现两个自旋方向相同的电子在同一个位置上。两个电子不可能具有相同的动量和相同的自旋方向。如果它们在同一位置上或具有同样的运动状态,唯一的可能性是它们必须有相反的自旋。

这有些什么后果呢?有许多十分引人注目的效应,这些效应都归结为一个事实:即两个费米子不可能同时进入同一状态。实际上,几乎物质世界的所有特性都和这个奇妙的事实有关。周期表所显示的丰富多样的元素基本上就是这一法则的结果。

当然,我们无法说出如果这个法则发生了变化,世界将要成为什么样子。因为它是量子力学的整个结构的一个部分,我们不可能说清楚如果关于费米子的法则改变了,还有别的什么东西会改变。不管怎样,让我们试着看一下,假如只有这个法则改变的话,可能会发生些什么。首先,我们可以证明,这样一来所有的原子就会多少有点相同了。我们从氢原子开始吧,它不会受到明显的影响。构成原子核的质子被球对称的电子云所包围,如图 4-11(a)所示。正如我们在第 2 章中所描述的那样,电子被吸引中心,但不确定性原理要求在空间的密集和动量的集中之间有一个平衡。这个平衡意味着必定存在着某一能量和某种弥散状态的电子分布,这种分布决定了氢原子的特征线度。

现在假定我们有一带两个单位电荷的原子核,譬如氦原子核。这个原子核要吸引两个电子,如果电子是玻色子,它们就会——除了它们之间的排斥作用外——尽可能地一齐挤向原子核。氦原子看上去就会像图 4-11(b)所画的那样。同样,锂原子具有 3 个荷电核子,它的电子分布如图 4-11(c)所示。各种原子看上去多少是相同的——一个所有电子都处在原子核附近的小圆球,没有方向性,也并不复杂。

然而,由于电子是费米子,实际情况就大不相同了。对于氢原子来说,情况基本不变。唯一的差别是电子具有自旋,这在图 4-12(a)中用一个小箭头表示。然而就氦原子而言,我

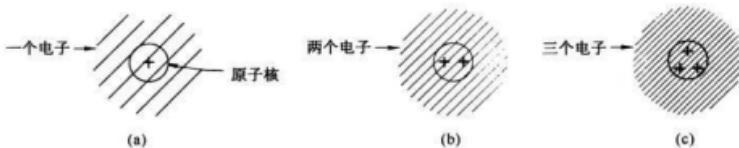
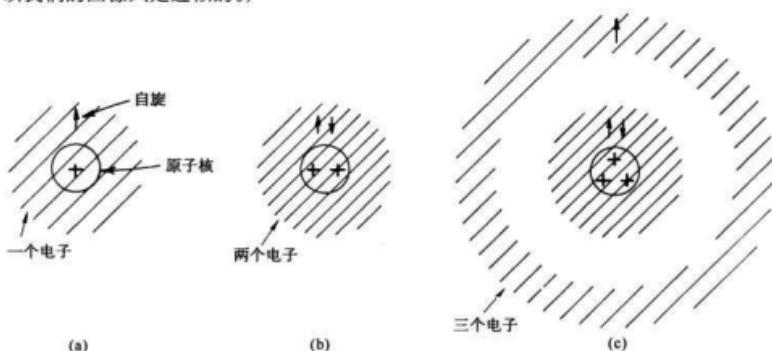


图 4-11 假如电子的行为像玻色子, 原子看上去可能会是什么样的

们不能再把两个电子紧靠在一起。不过且慢, 这只在两者的自旋相同时才是正确的。如果两个电子的自旋相反, 它们就可以占据同一状态。所以氦原子看上去也没有很大的不同。它看上去像图 4-12(b)所画的那样。然而对于锂来说, 情况就变得完全不同了。我们可以把第三个电子放在什么地方呢? 第三个电子不能再和另外两个电子紧靠在一起了, 因为这一状态上的两个自旋方向都已被占据了。(你们记得, 一个电子或任何一个自旋为 $1/2$ 的粒子只有两个可能的自旋方向。)第三个电子不能靠近另外两个电子所占据的地方, 所以, 它只能在远离原子核的另一个状态中占据一个特殊位置, 见图 4-12(c)。(这只是一个粗浅的说法, 因为实际上这 3 个电子都是全同的。由于我们不能真正区别这个电子和那个电子, 所以我们的图像只是近似的。)

图 4-12 真实的费米型的、自旋为 $1/2$ 的电子的原子组态

现在我们可以理解为什么不同的原子具有不同的化学性质。因为锂原子中的第三个电子离中心较远, 相对地说对它的束缚比较松。从锂原子中拿走一个电子比从氦原子中拿走一个电子来得容易。(实验得到, 使氦电离需要 25 V , 而使锂电离只要 5 V 。)这就说明了锂原子的价键。价键的方向性和外层电子的波的图样有关, 我们暂时不去讨论它。但是我们已经能够看出所谓不相容原理——不可能在完全相同的状态(包括自旋)中找到两个电子——的重要性。

不相容原理对大尺度物体的稳定性也起着作用。我们以前曾经说物质中各个原子之所以不会坍缩是由于不确定关系, 但是这不能解释为什么不能随心所欲地把两个氢原子紧紧挤压在一起——为什么所有的质子不能互相靠得很近, 使一大团电子围绕着它们。答案当然是由于没有两个以上的电子——具有相反的自旋——可以大体上处在同一个位置上, 氢

原子之间必须保持一定的距离。所以，大尺度的物质的稳定性实际上是电子的费米子性质的结果。

当然，如果两个原子的外层电子具有相反方向的自旋，它们就能够彼此接近。实际上化学键正是这样发生的。结果是，如果两个原子之间有一个电子，则这两个原子总共具有最低能量。对两个带正电的原子核来说，这时受到的是一种指向中间的电子的静电吸引力。只要

两个电子的自旋相反，就可将它们放在两个原子核的中间。最强的化学键就是这样产生的。没有比这更强的链联了，因为不相容原理不允许在两个原子之间的空间里存在着两个以上的电子。我们认为氢分子看上去多少有些像图 4-13 所示的那样。

图 4-13 氢分子 我们还要讲一个不相容原理的结果。你们记得如果氯原子中的两个电子都靠近原子核，那么它们的自旋必须相反。现在假定我们设法把两个电子的自旋排列在同一个方向上——我们可以设想加上一个极强的磁场使电子的自旋排成同一方向。但是，这样一来，两个电子就不可能占据空间的同一状态，其中一个电子必须占据一个不同的几何位置，如图 4-14 所示。离原子核较远的那个电子具有较小的结合能。于是整个原子的能量就变得更大得多。换言之，当两个电子的自旋方向相反时，总的吸引力要强得多。

所以，当两个电子接近时，有一个表观上的、巨大的力试图使自旋按彼此相反的方向排列，如果两个电子试图进入同一位置，其自旋就有极其强烈的反向排列倾向。这一试图使两个自旋取向相反的表观上的力比起电子磁矩之间的微弱的力来要强得多。你们记得，在我们讲到铁磁性的时候，曾经有过这样一个不可思议的问题，为什么不同的原子中的电子具有极强的平行排列的倾向。对此虽然还没有定量的解释，但可认为其中所发生的过程是这样的：原子的内层电子和已经变为在整个晶体内部自由运动的外层电子因不相容原理而相互作用，这种相互作用使得自由电子的自旋和内层电子的自旋的取向相反。但是只有当所有的内层电子都具有相同的自旋方向时，自由电子和内层电子的自旋才可能相反，如图 4-15 所示。

看来可能是这样的情况：不相容原理的效应通过自由电子间接地起作用，引起了在铁磁体中起作用的强烈的排列力。

我们再讲一个受不相容原理影响的例子。以前曾经讲过，中子和质子之间、质子和质子之间、中子和中子之间的核力都是相同的。为什么一个质子和一个中子可以粘在一起形成一个氘原子核，而不存在只有两个质子或者只有两个中子的原子核呢？事实上，氘原子核大约受到 2.2 MeV 的能量束缚，然而在一对质子之间却没有相应的束缚以组成原子量为 2 的氦同

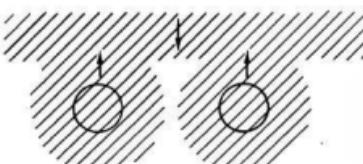


图 4-13 氢分子

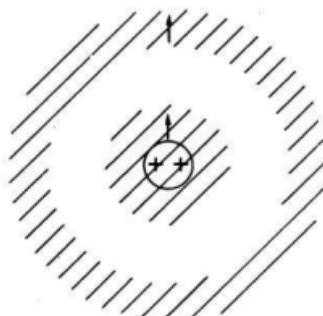


图 4-14 一个电子在高能态的氮

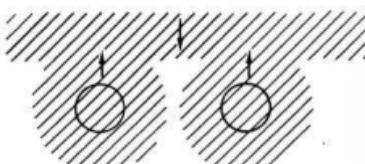


图 4-15 在铁磁体晶体中可能的机理；传导电子反平行于不成对的内层电子

位素。这样的核不存在，两个质子的组合不形成束缚态。

这个问题的答案是两个效应的共同结果：第一是由于不相容原理，第二是由于核力对于自旋方向比较敏感这一事实。中子和质子之间的作用力是吸引力，而且这种力当它们的自旋相互平行时比它们的自旋相反时稍微强一些。由于两种力的这一点差别，使得中子和质子的自旋方向互相平行时，正好足以构成氘原子核；当它们的自旋方向相反时，质子和中子间的引力不足以使它们束缚在一起。由于中子和质子的自旋都是 $1/2$ ，而且在同样的方向上，因此氘原子核的自旋为 1。然而我们知道，两个自旋互相平行的质子不可能紧挨在一起。如果不是由于不相容原理，两个质子就可以束缚在一起。但是由于自旋方向相同的质子不可能在同一位置存在，因此 He^2 原子核就不存在。两个质子如果其自旋相反就可能聚集在一起，但这样就没有足够的束缚力以形成稳定的原子核，因为自旋相反时的核力太弱了，不足以把一对核子束缚在一起。自旋相反的中子和质子之间的相互吸引力可以从散射实验中观察到。对两个自旋平行的质子所做的同样的散射实验表明也存在着相应的吸引力。所以不相容原理解释了为什么氘可以存在而 He^3 却不能。

第5章 自旋 1

§ 5-1 用施特恩-格拉赫装置过滤原子

本章我们才真正开始讨论量子力学本身——就是说我们将完全用量子力学方法来描述量子力学现象。我们并不想找出量子力学和经典力学之间的联系，也不为此而感到抱歉。我们要用新的语言来讲述某些新的事物。我们所要描述的特殊问题是自旋 1 的粒子的所谓角动量量子化。但是要等到后面我们才使用经典力学的像“角动量”之类的术语或其他概念。我们之所以选择这一个特殊的例子是由于它比较简单，虽然它可能并不是最简单的例子。不过，它也还是足够复杂因而可作为一个范例，将它推广后就可以用来描写所有量子力学现象。因此，我们所处理的虽然只是一个特例，但我们提到的所有定律都可直接推广，我们将作出这种推广，从而使你们可看到量子力学描述的一般特性。我们从施特恩-格拉赫实验中一束原子会分裂成三束这个现象开始讨论。

你们记得，如果有一个带有尖端磁极的磁铁所产生的非均匀磁场，我们使一原子射束穿过这个磁场，粒子束就会分裂成好几束——其数目取决于原子的种类和它所处的状态。我们要讨论能分裂成三束的原子，并把这种粒子称作自旋 1 粒子。你们可以自己讨论五束、七束、两束等情况——只要把每一个步骤都重复一遍，在得到三项的地方，就得到了五项、七项等等。

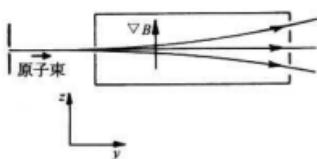


图 5-1 在施特恩-格拉赫实验中，
自旋为 1 的原子分裂成三束

想象这样的装置，其简图画在图 5-1 中。一束原子（或者任何种类的粒子）经过狭缝后成为准直射束，然后通过非均匀磁场，我们设此射束沿 y 方向运动，磁场和磁场梯度都沿 z 方向。从侧面观察，我们将看到射束竖直地分裂成为三束，如图所示。在磁铁的输出端可以放置一个小小的计数器，用来计算三射束中的任意一束的到达率。或者我们也可以挡住两束射束而只让第三束通过。

假设我们挡住下面两个射束，只让最上面的那一束通过并使它进入第二台同样的施特恩-格拉赫装置，如图 5-2 所示。这时将发生什么情况呢？在第二台装置中不再出现三射束，而只有最上面的一束*。如果你认为第二台装置只是第一台装置的延伸，这个结果将正是你所预期的。那些被向上推的原子在第二台装置中继续被向上推。

于是你们看到，第一台装置产生了一束“纯化了的”原子——在特殊的非均匀磁场中向

* 我们假定偏转角非常小。

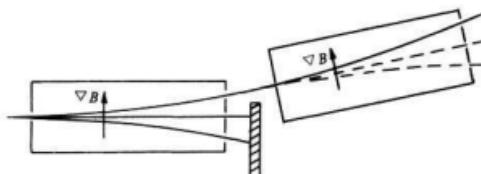


图 5-2 三束射束中的一束被送入第二台同样的装置

上偏转的原子。进入第一台施特恩-格拉赫装置的原子有三“种”，这三种原子采取不同的轨道。留下其中的一种，其他两种都被滤掉后，我们获得了这样一束射束，它以后在同样的装置中的行为是确定的并且是可以预言的。我们称它为滤过射束，或者极化射束，或者已知其中所有原子都处于某一确定状态的射束。

在下面的讨论中，如果我们考虑经过某些修改的施特恩-格拉赫型装置将更为方便。虽然这种装置初看上去比较复杂，但它会使所有论证比较简单。不管怎样，既然这只是“理想实验”，把仪器弄得复杂一点并不需要花费什么东西。（附带提一下，从来没有人做过我们这种方式描写的每一个实验，但是我们从量子力学定理可以知道必定会发生些什么事，当然这些定理是建立在其他类似的实验基础上的。这些其他的实验在初学时比较难以理解，所以我们要叙述一些理想的——但却是可能的——实验。）

图 5-3(a)是我们想要用的、“改装过的施特恩-格拉赫仪器”的简图，它包括一串三个高磁场强度梯度的磁铁，第一个(左边的)就是通常的施特恩-格拉赫磁铁，它把一束入射的自

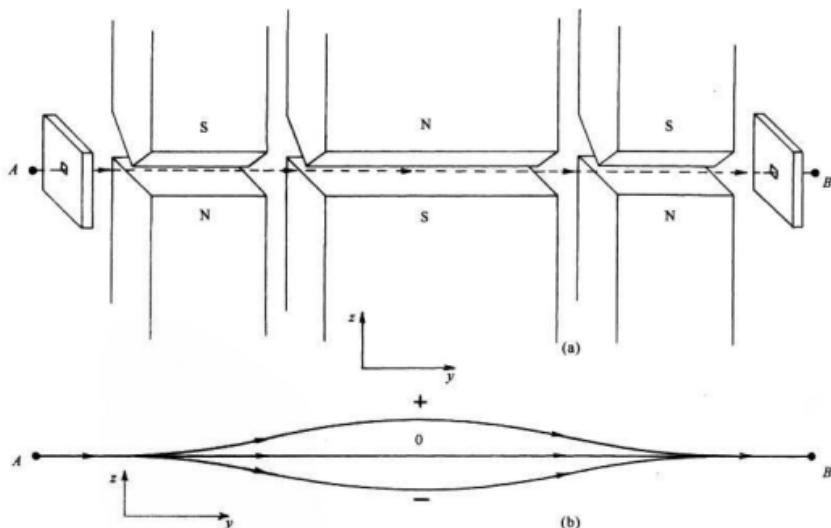


图 5-3 (a) 施特恩-格拉赫装置的一个改装设想；(b) 自旋 1 的原子的路径

旋1的粒子射束分开成三束。第二个磁铁和第一个磁铁有同样的截面，但是有第一个的两倍长，并且它的磁场的极性和第一个磁铁的磁场极性相反。第二个磁铁把原子磁体推向相反的方向，使其路线向轴线弯曲，如图5-3(b)中的轨迹所示。第三个磁铁和第一个完全一样，它使三束射束重新聚合在一起。从沿着轴线上的出射孔射出去。最后，我们想象在小孔A的前面有某种机构，它能使原子从静止开始运动，而在出射孔B的后面有一个减速机构，它使原子在B处回到静止状态。虽然这些并不是必不可少的，但是这意味着在分析过程中我们可以不必考虑任何像原子射出等等这样的一些运动效应，而把注意力集中于只和自旋有关的现象上。“改进”的装置的全部目的仅仅在于使所有的粒子都来到同一地点而且速度为零。

现在如果我们要做一个如图5-2所示的实验，我们可以在装置的中央放上一块挡板以挡住射束中的两束从而获得一束滤过射束，如图5-4所示。如果我们使这些极化原子穿过第二台同样的装置，所有原子都将采取上面的一条路线。这可以将同样的挡板放在第二个S过滤器中各射束的通道上，并观察粒子是否通过来证明。

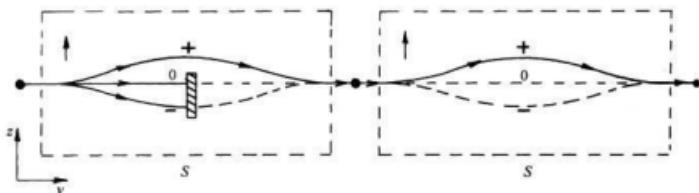


图5-4 “改进”的施特恩-格拉赫装置作为一个过滤器

假设我们把第一台装置称作S。(我们将要考虑各种可能的组合，为使条理清楚需对各台装置加上标记。)我们说在S中采取上面一条路线的原子是处在“相对于S为正的状态”中，采取中间一条路线的原子是处于“相对于S为零的状态”中，采取下面一条路线的原子是处在“相对于S为负的状态”之中。(用较为常用的语言，我们说角动量的z分量是 $+1\hbar$ ，0和 $-1\hbar$ ，但是我们现在不用这种术语。)在图5-4中，第二台装置的取向和第一台相同，所以经第一台装置滤过的原子进入后都将走上面的那条路线。或者如果我们挡住第一台装置中上面的和下面的射束，而只让零态原子通过，所有滤过原子都将通过第二台装置中间的那条路线。如果在第一台装置中，除了最低的那一束射束外，其余两束都被挡住，于是在第二台装置中只有下面的一束射束。我们可以说，在上述各种情况下，第一台装置产生了一束相对于S而言(+，0或-)处于纯粹状态中的滤过射束，我们可以使射束通过第二台同样的装置以检验其中原子所处的状态。

我们可以这样安排第二台装置，使它只让某种特殊状态的原子通过——就像第一台装置那样，在其中放上挡板——那么我们只要看一看是否有什么东西从远端出来，就可以检验出入射射束的状态。举例说，如果我们挡住第二台装置中下面的两条路线，结果百分之百的原子都能通过，但如果我们将挡住上面的路线，那么一个原子也通不过。

为使讨论容易起见，我们发明一种速记符号来表示改进的施特恩-格拉赫装置。我们用

下面的符号

$$\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix} \quad S \quad (5.1)$$

代表一台完整的装置。(这并不是你们通常所看到的在量子力学中用的符号,它是我们为这一章的方便而发明的,它只是图 5-3 中的装置的速写符号。)因为下面我们要同时使用好几台装置,这些装置有不同的取向,我们就在每一个符号下面写上一个字母以资识别。所以式(5.1)中的符号代表装置 S 。当我们挡住其中的一束或几束粒子时,我们就用一条垂直的杠杠来表示哪一束粒子被挡住了,如:

$$\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix} \quad S \quad (5.2)$$

图 5-5 表示我们将要使用的各种可能的组合。

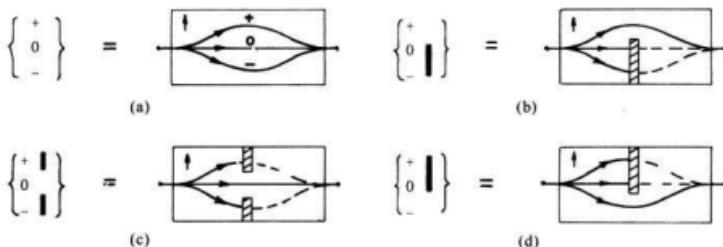


图 5-5 施特恩-格拉赫过滤器的专用速记符号

如果我们接连放置两个过滤器(如图 5-4 所示),我们就将两个符号紧接在一起,像这样:

$$\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix} \quad S \quad S \quad (5.3)$$

对于这样的装置,通过第一台的各种粒子也都能通过第二台。实际上,即使我们挡住第二台装置中的“零”和“负”通道也没什么关系,从而我们有

$$\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix} \quad S \quad S \quad (5.4)$$

我们仍旧得到穿过第二台装置的透射粒子为百分之百。另一方面，如果我们有

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S \end{array} \quad \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S \end{array}, \quad (5.5)$$

那么远端连一个原子都不会出来。同样，

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S \end{array} \quad \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S \end{array} \quad (5.6)$$

什么都不出来。另外，

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S \end{array} \quad \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S \end{array} \quad (5.7)$$

等效于

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S \end{array}.$$

现在我们要用量子力学来描写这些实验。如果原子通过图 5-5(b) 的装置，我们说该原子处在 $(+S)$ 态中，如果原子通过(c)，就处在 $(0S)$ 态中，如果通过(d)，就处在 $(-S)$ 态*。我们令 $\langle b | a \rangle$ 是处于状态 a 的原子通过装置后状态变为 b 的振幅。我们也可以说： $\langle b | a \rangle$ 是在状态 a 中的原子进入状态 b 的振幅。实验(5.4)给出：

$$\langle +S | +S \rangle = 1,$$

而式(5.5)给出：

$$\langle -S | +S \rangle = 0.$$

同样，式(5.6)的结果是：

$$\langle +S | -S \rangle = 0,$$

式(5.7)的结果是：

$$\langle -S | -S \rangle = 1.$$

只要我们处理的是“纯粹的”状态——即我们只打开一条通道——就有 9 个这样的振幅，我们可以把它们列在一张表格里面：

* 读法： $(+S)$ = “正 S ”； $(0S)$ = “零 S ”； $(-S)$ = “负 S ”。

	从 +S	0S	-S
到 +S	1	0	0
0S	0	1	0
-S	0	0	1

(5.8)

这 9 个数字的排列——叫做矩阵——概括了我们以上所述的现象。

§ 5-2 过滤原子的实验

现在讨论一个重要的问题：如果使第二台装置倾侧一个角度，因而其场的轴线不再和第一台场的轴线相平行，这将会发生些什么现象呢？第二台装置不仅可以倾侧，而且还可以指向另一方向——例如可以使射束相对于原来的方向转过 90°。为方便起见，我们先考虑一种安排，其中第二个施特恩-格拉赫实验装置绕 y 轴转过一个角度 α ，如图 5-6 所示。我们称第二台装置为 T，假定我们现在做下面的实验：

$$\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}_S \quad \begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}_T,$$

或者做这样的实验：

$$\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}_S \quad \begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}_T.$$

在这些情况下，从远端出来的是些什么呢？

答案如下：假定原子相对于 S 处在一个确定的状态中，它们对于 T 就不是处在这一状态中——(+S)态并不就是(+T)态。然而，发现原子在(+T)态——或者(0T)态，或者(-T)态——都有一定的振幅。

换言之，尽管我们像已经做过的那样仔细地查明了所有的原子都处在确定状态，但实际情况却是当原子通过一台转过一定角度的装置时，它不得不“重新取向”——不要忘记，这个

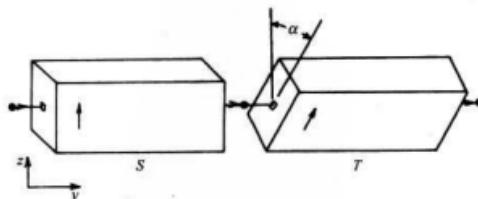


图 5-6 两个串联的施特恩-格拉赫型的过滤器，第二台相对第一台倾侧角度 α

“重新取向”是凭运气的。我们可以使一次只有一个粒子通过,于是我们只能提出这样的问题:它通过的概率是什么?通过 S 的原子有些将进入 $(+T)$ 态,有些将进入 $(0T)$ 态,还有一些将进入 $(-T)$ 态——都各有各的可能性。这种可能性可以由复数振幅绝对值的平方求得,我们需要的是表示这种振幅的一些数学方法或量子力学描述。我们所需要知道的是像

$$\langle -T | +S \rangle$$

之类的各种量,它表示原来在 $(+S)$ 态的原子进入 $(-T)$ 态的振幅(除非 T 和 S 平行排列否则这个振幅不等于零)。还有另一些振幅,如

$$\langle +T | 0S \rangle, \text{ 或 } \langle 0T | -S \rangle, \text{ 等等.}$$

事实上有 9 个这样的振幅——另一个矩阵——粒子的理论应当告诉我们怎样计算它们。正如 $F = ma$ 告诉我们怎样计算一个经典粒子在任何情况下的运动状态一样,量子力学定律使我们可以决定粒子通过某个特定装置的振幅。于是,中心问题是能够——对于任意给定的倾角 α ,实际上就是对于无论什么取向——求出 9 个振幅:

$$\begin{aligned} & \langle +T | +S \rangle, \langle +T | 0S \rangle, \langle +T | -S \rangle, \\ & \langle 0T | +S \rangle, \langle 0T | 0S \rangle, \langle 0T | -S \rangle, \\ & \langle -T | +S \rangle, \langle -T | 0S \rangle, \langle -T | -S \rangle. \end{aligned} \quad (5.9)$$

我们已能得出这些振幅之间的一些关系。第一,按照我们的定义,绝对值的平方

$$| \langle +T | +S \rangle |^2$$

是 $(+S)$ 态的原子进入 $(+T)$ 态的概率。我们经常发现把这个平方数写成下列等效形式更为方便:

$$\langle +T | +S \rangle \langle +T | +S \rangle^*.$$

用同样的记号,数值

$$\langle 0T | +S \rangle \langle 0T | +S \rangle^*$$

是在 $(+S)$ 态中的原子进入 $(0T)$ 态的概率,以及

$$\langle -T | +S \rangle \langle -T | +S \rangle^*$$

是原子进入 $(-T)$ 态的概率。但是我们的装置做成这样,凡是进入 T 装置的每一个原子一定在 T 装置的 3 个状态中的某一个状态中被发现——对于给定的这种原子没有别的地方可去,所以我们刚才写的 3 个概率的总和必定等于百分之百。我们得到下面的关系式:

$$\begin{aligned} & \langle +T | +S \rangle \langle +T | +S \rangle^* + \langle 0T | +S \rangle \langle 0T | +S \rangle^* \\ & + \langle -T | +S \rangle \langle -T | +S \rangle^* = 1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

当然,如果从 $(0S)$ 或 $(-S)$ 出发,我们可以得到另外两个类似的方程。这些都是我们能够很容易得到的方程,下面我们将继续讨论另一些普遍的问题。

§ 5-3 串联施特恩-格拉赫过滤器

这是一个有趣的问题:假设原子经过过滤成为 $(+S)$ 态,然后我们将这些原子送入第二

个过滤器，使之成为 $(0T)$ 态，然后再通过另一个 $+S$ 过滤器。（我们称这最后一个过滤器为 S' ，这样我们就可把它和第一个 S 过滤器相区别。）原子是否还记得它们曾经处在 $(+S)$ 态中呢？换句话说就是我们做下面的实验：

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S & T & S' \end{array} \quad (5.11)$$

我们想要知道是否所有通过 T 的原子也都通过 S' 。它们并不是如此，它们一经被 T 过滤后，就丝毫不记得在它们进入 T 以前曾经处在 $(+S)$ 态中。注意，(5.11)中的第二台 S 装置的取向和第一台 S 装置的取向完全一样，所以它仍旧是 S 型过滤器。被 S' 过滤后的状态当然也是 $(+S)$ 、 $(0S)$ 和 $(-S)$ 。

这里的要点是，假如 T 过滤器只能通过一束原子，通过第二台 S 过滤器的原子占进入这一台 S 过滤器原子总数的比例只取决于 T 过滤器，而与在 T 前面是些什么完全无关。相同的一些原子曾被 S 过滤器分类这个事实对它们被 T 过滤器再一次分类成为纯粹射束后的行为丝毫没有影响。它们此后进入不同状态的概率与进入 T 仪器之前的经历完全无关。

作为一个例子，我们把实验(5.11)和下面的实验相比较：

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S & T & S' \end{array} \quad (5.12)$$

其中只有第一个 S 改变了。设(S 和 T 之间的)角度 α 的大小正好使得(5.11)实验中通过 T 的原子有三分之一也能通过 S' 。在实验(5.12)中，虽然一般说来通过 T 的原子数有所不同，但其中仍然有同样的一部分——三分之一——将通过 S' 。

事实上，从以前已学过的东西我们就可证明，从 T 出来并且通过任一特定 S' 的原子的比例只取决于 T 和 S' 而与在这以前所发生的任何事情无关。我们来把实验(5.12)和

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S & T & S' \end{array} \quad (5.13)$$

比较一下。在(5.12)的实验中，原子从 S 出来并且也能通过 T 和 S' 两者的振幅是：

$$\langle +S | 0T \rangle \langle 0T | 0S \rangle.$$

相应的概率是：

$$| \langle +S | 0T \rangle \langle 0T | 0S \rangle |^2 = | \langle +S | 0T \rangle |^2 | \langle 0T | 0S \rangle |^2.$$

实验(5.13)的概率是：

$$| \langle 0S | 0T \rangle \langle 0T | 0S \rangle |^2 = | \langle 0S | 0T \rangle |^2 | \langle 0T | 0S \rangle |^2.$$

它们的比例是：

$$\frac{|\langle 0S | 0T \rangle|^2}{|\langle +S | 0T \rangle|^2}.$$

它只取决于 T 和 S' , 而与 S 所选择的射束是 $(+S)$ 还是 $(0S)$ 或是 $(-S)$ 毫无关系。(绝对数随通过 T 的原子数目多少而一起增减。)当然, 如果我们比较进入 S' 的正的或负的状态的概率, 或者求进入零或负的状态的概率的比值, 我们会得到同样的结果。

事实上, 由于这些比值只取决于被允许通过 T 的是哪一束射束而与第一台 S 过滤器所作的选择无关, 显然, 甚至最后的装置不是 S 过滤器我们也会得到同样的结果。如果我们所用的第三台装置——我们现在称它为 R ——相对于 T 转过一个任意的角度, 我们将会发现, 像 $|\langle 0R | 0T \rangle|^2 / |\langle +R | 0T \rangle|^2$ 这样的比例不依赖于第一台过滤器 S 中通过的是哪一束射线。

§ 5-4 基 础 态

以上的结果说明了量子力学的一条基本原理: 任何原子体系都可以通过过滤将其分解为某一组所谓的基础态, 在任一给定的基础态中, 原子未来的行为只依赖于基础态的性质——而与其以前的任何历史无关*。当然, 基础态取决于所采用的过滤器, 例如 $(+T)$, $(0T)$ 和 $(-T)$ 这 3 个状态是一组基础态, $(+S)$, $(0S)$ 和 $(-S)$ 3 个状态是另一组基础态。完全可以有许多种可能性, 每一种都和其他的一样合适。

当我们说正在考虑的是的确能产生“纯粹”射束的优良过滤器时, 我们须加小心。如果我们的施特恩-格拉赫装置不能把 3 束射束很好地分开, 那么我们就不能用挡板把它们不含糊地分开, 这样我们就不可能完全地分出各基础态。通过观察射束在另一个同类的过滤器中是否再进一步分裂, 我们就能够确定是否得到了纯粹的基础态。例如, 假设我们得到的射束是纯粹的 $(+T)$ 态, 那么所有原子都会通过:

$$\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}, \quad T$$

而没有原子能通过

$$\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}, \quad T$$

也不能通过

$$\begin{Bmatrix} + \\ 0 \\ - \end{Bmatrix}. \quad T$$

* 我们并不打算让“基础态”这个词含有比这里所说的更多的任何意思。无论如何不能认为它们具有任何“基本的”意思。我们是以描述的基础这个观念来应用基础这个词的, 有点像人们所说的“以十为基础的数字”这种意思。

我们对基础态的陈述意味着射束有可能被过滤成某种纯粹的状态，以致用同样的仪器不可能再有进一步的过滤。

还必须指出，我们所说的只对颇为理想的情况才严格地正确。在任何实际的施特恩-格拉赫装置中，我们必须考虑狭缝的衍射，这会使某些原子进入对应于别的角度的状态，或者考虑射束中是否包含不同的内部激发状态的原子，等等。我们已把情况理想化了，因此所谈的只是在磁场中分裂的状态，对于与位置、动量、内部激发等有关的事情我们都忽略了。一般说来，我们还必须考虑按照这些性质分类的基础态。但是，为了保持概念简单，我们只考虑上面所说的包含三个状态的基础态组，这对于理想情况的严格处理已足够了，在这理想情况下，原子通过仪器时不会被破坏，也不会受到严重干扰，并且离开装置后就停止下来。

你们会注意到，我们开始理想实验时总是用一台只打开一条通道的过滤器，以使我们从某一确定的基础态出发。之所以这样做是因为从炉子里出来的原子具有各种状态。这些状态是由炉子中偶然发生的过程随意决定的。（它给出所谓“非极化”射束。）这种无规性包含了“经典”型的概率——类似于抛掷硬币——而与我们现在所讨论的量子力学概率不同。处理非极化的射束会使我们陷入更为复杂的情况，我们最好是避开它，一直到我们了解了极化射束的行为以后。所以现在不去考虑如果第一台装置可以让一束以上的射束通过时会发生些什么。（在本章的末尾会告诉你们怎样处理这类情况。）

我们现在回过头来看一看，当从一台过滤器的一个基础态变为另一台不同的过滤器的一个基础态时，会发生些什么？假如我们还是从

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S \end{array} \quad \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ T \end{array}$$

出发。从 T 出射的原子是处于基础态($0T$)，这些原子已忘记了它们曾经处于($+S$)态中。有人会说，原子被 T 过滤时，“失去”关于以前状态($+S$)的信息，因为当我们在装置 T 中把原子分解成三束时，我们“扰乱了”它们。但这是不正确的。关于过去的信息并不是由于将原子分解成三束而失去的，而是由于放进去的挡板——这一点我们从下面的一组实验可以看出。

我们从 $+S$ 过滤器出发，并将从这个过滤器出射的原子数记作 N 。如果在它的后面接着放置一个 $0T$ 过滤器，从这后一过滤器出射的原子数目是原来的原子数的一部分，令其为 αN 。如果我们再放上一个 $+S$ 过滤器，只有这些原子中的一部分 β 可以从远端出射。我们可以用下列方式来表示这一过程：

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S \end{array} \xrightarrow{N} \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ T \end{array} \xrightarrow{\alpha N} \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S' \end{array} \xrightarrow{\beta \alpha N} . \quad (5.14)$$

如果第三台装置 S' 选择另一个不同的状态，譬如说($0S$)态，出射原子的比例就不同了，譬如这个比数是 γ 。^{*} 我们有：

* 用以前的符号来表示： $\alpha = |\langle 0T | +S \rangle|^2$, $\beta = |\langle +S | 0T \rangle|^2$, 以及 $\gamma = |\langle 0S | 0T \rangle|^2$ 。

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \xrightarrow{aN} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \xrightarrow{\gamma_a N} . \\ S \qquad T \qquad S' \end{array} \quad (5.15)$$

现在假定我们重复这两个实验,不过把 T 的所有挡板都去掉。于是我们得到引人注意的结果如下:

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \xrightarrow{N} . \\ S \qquad T \qquad S' \end{array} \quad (5.16)$$

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \xrightarrow{N} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right| \xrightarrow{0} . \\ S \qquad T \qquad S' \end{array} \quad (5.17)$$

在第一种情况下,所有的原子都能通过 S' ,可是在第二种情况下,一个原子也没有通过!这是量子力学的主要定律之一。自然界按照这种方式行动并不是不证自明的,但是从我们的理想实验所得到的结果就是从无数实验中观察到的量子力学行为。

§ 5-5 干涉的振幅

从实验(5.15)变为实验(5.17)——打开更多的通道——通过的原子怎么反而更少了呢?这是量子力学的一个很老而又深奥的问题——振幅的干涉。它和我们在最初的电子双缝干涉实验中所观察到的现象属于同一类。在那里,我们曾经看到:到达某些地点的电子在两个狭缝都打开时可以比只打开一个狭缝时少。在定量上是按下述方式处理的,我们可以把原子通过(5.17)装置中 T 和 S' 的振幅写成三个振幅之和,每一个振幅相当于 T 中的一束射束,其总和等于零:

$$\langle 0S | +T \rangle \langle +T | +S \rangle + \langle 0S | 0T \rangle \langle 0T | +S \rangle + \langle 0S | -T \rangle \langle -T | +S \rangle = 0. \quad (5.18)$$

这三个振幅没有一个等于零——例如,第二个振幅的绝对值的平方等于 γ_a ,见实验(5.15)——可是三项的总和为零。如果把 S' 安装成选择 $(-S)$ 态,我们会得到同样的结果。然而,在(5.16)的装置中,答案就不同了。如果令 a 为通过 T 和 S' 的振幅,则在此情况下,我们有*:

$$\begin{aligned} a &= \langle +S | +T \rangle \langle +T | +S \rangle + \langle +S | 0T \rangle \langle 0T | +S \rangle \\ &\quad + \langle +S | -T \rangle \langle -T | +S \rangle = 1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

在实验(5.16)中,一射束被分解又被重新组合。打碎的蛋又复原了。关于原来 $(+S)$ 态的信息仍被保留下来——就像 T 仪器完全不存在一样。无论把什么接在“敞开的” T 装置后面都是这个样子。我们可以在它后面接一个 R 过滤器——转过其他角度的过滤

* 实际上,从这个实验我们并不能推断出 $a = 1$,只能断定 $|a|^2 = 1$,所以 a 可能等于 $e^{i\delta}$ 。但可以证明,如果选择 $\delta = 0$ 实际上并不失去普遍性。

器——或者其他任何东西，答案总是与原子从第一台 S 过滤器直接过来一样。

这是一个重要的原理：一个挡板敞开的 T 过滤器——或者任何一种过滤器——没有引起任何改变。我们还要附加一个条件。敞开的过滤器不仅能够让 3 束射束都通过，而且对于 3 束射束不产生不相等的扰动。例如，不能使一束射束近旁有很强的电场而在另一束附近却没有。理由是：即使这个额外的扰动仍旧让所有的原子都通过过滤器，但它可以改变某些振幅的相位，那么干涉将发生变化，式(5.18)和(5.19)中的振幅也会不同。我们始终假设没有这类额外的扰动。

让我们用改进的符号把式(5.18)和(5.19)重写一下。用 i 代表 3 个状态 $(+T)$ 、 $(0T)$ 和 $(-T)$ 中的任一个，于是方程式就可以写成：

$$\sum_{\text{所有 } i} \langle 0S | i \rangle \langle i | +S \rangle = 0 \quad (5.20)$$

以及

$$\sum_{\text{所有 } i} \langle +S | i \rangle \langle i | +S \rangle = 1. \quad (5.21)$$

同样地，对于用完全任意的过滤器 R 代替 S' 的实验，我们有：

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S & T & R \end{array} \quad (5.22)$$

其结果总是和 T 仪器被省去时一样，只有

$$\begin{array}{cc} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \\ S & R \end{array}$$

或者，用数学公式表示，

$$\sum_{\text{所有 } i} \langle +R | i \rangle \langle i | +S \rangle = \langle +R | +S \rangle. \quad (5.23)$$

这是一个基本定律，并且只要 i 代表任何过滤器的 3 个基础态，它便是普遍正确的。

你们要注意，在实验(5.22)中， S 和 R 与 T 并没有特殊的关系。而且，不论它们选择的是什么态，论证都是同样的。为了把这个方程写成普遍的形式，不必涉及 S 和 R 所选择的特定的状态，我们称 ϕ (“phi”) 为第一个过滤器所准备的状态(在我们特定的例子中是 $+S$ 态)， χ (“khi”) 是最后一个过滤器所检验的状态(在我们的例子中是 $+R$)。于是我们可把基本定律式(5.23)用下面的形式来表述：

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_{\text{所有 } i} \langle \chi | i \rangle \langle i | \phi \rangle, \quad (5.24)$$

其中 i 遍及于某一特定过滤器的 3 个基础态。

我们要再次强调基础态的意义。它们像可以用我们的施特恩-格拉赫装置的任何一台

来选择的3个状态那样。基础态的一个条件是：如果有了一个基础态，那么未来就不取决于过去。另一个条件是，假如有了一组完全的基础态，式(5.24)对于任何一组初态 ϕ 和末态 χ 都是正确的。然而，基础态组并不是唯一的。我们是从考虑对于特定的装置 T 的基础态开始的。如果考虑对于 S 或对于 R 或其他^{*}装置的另一组基础态也同样有效。我们通常说“在某个表象中的”基础态。

在任一特定表象中的一组基础态的另一个条件是：它们都是完全不相同的。这意思是说：如果原子在 $(+T)$ 态它就不会有进入 $(0T)$ 或 $(-T)$ 态的振幅。如果我们用*i*和*j*来代表特定的一组基础态中的两个基础态，当*i*和*j*不相等时从(5.8)式有关的讨论中可以得到的普遍规律是：

$$\langle j | i \rangle = 0.$$

当然，我们知道：

$$\langle i | i \rangle = 1.$$

通常将这两个方程写成：

$$\langle j | i \rangle = \delta_{ji}, \quad (5.25)$$

其中 δ_{ji} （“克罗内克符号”）是一个符号，当*i* \neq *j*时，它定义为零，当*i* $=$ *j*时则定义为1。

式(5.25)并非与我们所讲过的其他的定律相独立。我们现在对于寻找这样一个数学问题，即寻找可以把所有的定律作为其推论的最少的一组独立的公理，并没有特殊的兴趣**。只要我们有一组完全的无明显矛盾的基础态，我们就感到满意了。然而我们可证明：式(5.25)和(5.24)不是互相独立的。我们令式(5.24)的 ϕ 表示与*i*同一组基础态中的某一个基础态，譬如说第*j*个基础态，那么我们就得到：

$$\langle x | j \rangle = \sum_i \langle x | i \rangle \langle i | j \rangle.$$

但是式(5.25)告诉我们，除非*i* $=$ *j*，否则 $\langle i | j \rangle$ 等于零。所以求和变成只有 $\langle x | j \rangle$ 一项，于是我们得到一个恒等式，这就证明了两个定律不是互相独立的。

我们可看出，如果式(5.10)和(5.24)都是正确的话，振幅之间必定还有另外一个关系。式(5.10)为

$$\langle +T | +S \rangle \langle +T | +S \rangle^* + \langle 0T | +S \rangle \langle 0T | +S \rangle^* + \langle -T | +S \rangle \langle -T | +S \rangle^* = 1.$$

如果式(5.24)中的 ϕ 和 χ 都是 $(+S)$ 态，那么其左边就是 $\langle +S | +S \rangle$ ，显然它等于1，于是我们再一次得到式(5.19)，

$$\langle +S | +T \rangle \langle +T | +S \rangle + \langle +S | 0T \rangle \langle 0T | +S \rangle + \langle +S | -T \rangle \langle -T | +S \rangle = 1.$$

只有满足下列方程式时，上面两个式子才是一致的（对于装置 T 和 S 的所有相对取向）

$$\langle +S | +T \rangle = \langle +T | +S \rangle^*,$$

$$\langle +S | 0T \rangle = \langle 0T | +S \rangle^*,$$

$$\langle +S | -T \rangle = \langle -T | +S \rangle^*.$$

由此，对于任意的状态 ϕ 和 χ ：

* 事实上，对于有3个或更多基础态的原子体系来说，还存在着另外一些类型的过滤器——和施特恩-格拉赫装置完全不同的——可以用它们来选择更多的基础态组（每一组都有同样的状态数）。

** 过多的真理不会迷惑我们！

$$\langle \phi | \chi \rangle = \langle \chi | \phi \rangle^*. \quad (5.26)$$

假如这个式子不正确,概率就不会“守恒”,粒子就会“丢失”。

在继续讨论之前,我们把有关振幅的三条重要的普遍定律总结一下,这就是式(5.24), (5.25)和(5.26):

$$\text{I} \quad \langle j | i \rangle = \delta_{ji},$$

$$\text{II} \quad \langle \chi | \phi \rangle = \sum_{\text{所有 } i} \langle \chi | i \rangle \langle i | \phi \rangle, \quad (5.27)$$

$$\text{III} \quad \langle \phi | \chi \rangle = \langle \chi | \phi \rangle^*.$$

在这些方程式里 i 和 j 代表某一表象的所有基础态,而 ϕ 和 χ 代表原子的任何可能状态。必须注意,II式只对遍及体系的所有基础态(在我们的情况中是 3 个: $+T, 0T, -T$)求和时才成立。关于怎样选择我们的基础态组的各个基础态,以上这些定律一点也没有谈到。我们从应用装置 T 开始,这是一个有任意选定的某种取向的施特恩-格拉赫实验装置,但任意别的取向,譬如 W (装置),也同样适用。我们也可把另一组不同的状态作为 i 和 j ,而所有的定律仍然适用——基础态组的选择并不是唯一的。量子力学的主要策略之一就是利用事物都可以用一种以上的方法来计算这个事实。

§ 5-6 量子力学的处理方法

我们来证明为什么这些定律是有用的。假设我们有一个处于给定状态中的原子(这就是说该原子是以某种方法制备的),我们想要知道它在某个实验中的行为。换句话说,开始时原子处于状态 ϕ 中,我们想知道该原子通过只能接受在满足条件 χ 的原子的装置的可能性。量子力学定律表明,我们可以用 3 个复数 $\langle \chi | i \rangle$ 完全地描写仪器,这 3 个复数就是各个基础态在状态 χ 中的振幅。如果我们用 3 个数字 $\langle i | \phi \rangle$ (即分别在 3 个基础态的每一个态中找到初始状态原子的振幅)来描写原子的状态,我们就能说出,该原子被放进装置后会发生些什么变化。这是一个重要的概念。

我们来考虑另一个例子。考虑下面这个问题:我们从一台 S 装置开始,接着放上一个极其复杂的装置,我们称它为 A ,后面再接上一台装置 R ——就像这样:

$$\begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \left| \begin{array}{c} A \\ \downarrow \end{array} \right| \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right. \quad S \qquad R \quad (5.28)$$

A 指的是任何施特恩-格拉赫装置的复杂组合,其中有挡板或半挡板,具有特定角度的取向,额外的电场和磁场……几乎有你想要放进去的任何东西。(做理想实验是很有方便的——不必费心去真实地建立这样一台装置!)于是我们的问题是:进入 A 的一个 ($+S$) 态粒子从 A 出来时处于 ($0R$) 态,从而它能通过最后的那个 R 过滤器,这个过程的振幅是什么?对于这样的振幅,有一个习惯的记法,它就是:

$$\langle 0R | A | +S \rangle.$$

它照例从右读到左(像希伯来文那样):

$$\langle \text{终结} | \text{经过} | \text{开始} \rangle.$$

如果 A 正巧不起任何作用——只是一条打开的通道——于是我们写成

$$\langle 0R | 1 | +S \rangle = \langle 0R | +S \rangle, \quad (5.29)$$

这两个符号是等效的。对于更为一般的问题,我们可以用一般的起始状态 ϕ 代替 $(+S)$, 以及用一般的终了状态 χ 代替 $(0R)$, 我们想要知道的是振幅

$$\langle \chi | A | \phi \rangle.$$

对于装置 A 的完整的分析必定给出对每一对初态 ϕ 和终态 χ 的振幅 $\langle \chi | A | \phi \rangle$ ——共有无穷多个组合! 怎样才能对装置 A 的行为作出一个简明的描述呢? 我们可以采用下面的方法。设想把式(5.28)的装置仪器改为:

$$\begin{array}{ccccc} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} A \\ | \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\} \\ S & T & & T & R \end{array} \quad (5.30)$$

实际上根本没有改变,因为完全开放的装置 T 不起任何作用。但是它能启发我们如何来分析这个问题。原子从 S 进入 T 的 i 状态有一组振幅 $\langle i | +S \rangle$ 。于是有另一组的状态 i(对于 T)进入 A 而以状态 j(对于 T)出来的振幅。最后,有一个每一个 j 态通过最后一个过滤器成为 $(0R)$ 态的振幅。对于每一条可能的路径,有一个振幅,其形式为

$$\langle 0R | j \rangle \langle j | A | i \rangle \langle i | +S \rangle,$$

总振幅为从各种可能的 i 和 j 的组合所得出的各项之和。我们所要求的振幅就是:

$$\sum_j \langle 0R | j \rangle \langle j | A | i \rangle \langle i | +S \rangle. \quad (5.31)$$

如果 $(0R)$ 和 $(+S)$ 用一般的状态 χ 和 ϕ 来代替, 我们可得到同样类型的表达式, 于是我们得到普遍的结果:

$$\langle \chi | A | \phi \rangle = \sum_i \langle \chi | j \rangle \langle j | A | i \rangle \langle i | \phi \rangle. \quad (5.32)$$

注意式(5.32)的右边实际上比左边简单。这里装置 A 完全可以用 9 个数字 $\langle j | A | i \rangle$ 描述, 这 9 个数字表示 A 对装置 T 的 3 个基础态的响应。只要我们知道这 9 个数字, 并且把入射和出射状态 ϕ 和 χ 分别用进入 3 个基础态或从 3 个基础态出来的 3 个振幅来予以定义, 我们就能够处理任何两个入射和出射状态 ϕ 和 χ 。实验结果可以用式(5.32)来预言。

这就是对于自旋为 1 的粒子的量子力学处理方法机理。每一个状态可以用 3 个数字来描写, 这 3 个数是对于某一组选定的基础态的每一基础态中的振幅。每一装置可以用 9 个数字来描写, 这 9 个数字是装置中从一个基础态进入另一个基础态的振幅。任何结论都可以从这些数字计算出来。

描写仪器的 9 个数字常常写成方阵的形式——叫做矩阵 $\langle j | A | i \rangle$:

$$\begin{array}{c}
 \text{从} \\
 + \quad 0 \quad - \\
 \text{到} \\
 + \left| \begin{array}{ccc} \langle +|A|+ \rangle & \langle +|A|0 \rangle & \langle +|A|- \rangle \\ \langle 0|A|+ \rangle & \langle 0|A|0 \rangle & \langle 0|A|- \rangle \\ \langle -|A|+ \rangle & \langle -|A|0 \rangle & \langle -|A|- \rangle \end{array} \right| \\
 0 \\
 - \\
 \end{array} \quad (5.33)$$

量子力学的数学只是这个概念的推广。我们将给出一个简单的例证。假设有一台我们要进行分析的装置 C——就是说我们要计算各个 $\langle j|C|i \rangle$ 。例如我们想要知道在像下面这样的实验里发生些什么：

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \left\{ C \right\} \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}. \quad (5.34)$$

但是后来我们注意到 C 是由 A 和 B 两台装置串联组成——粒子先通过 A 然后通过 B——所以我们可以用符号写出

$$\langle C \rangle = \langle A \rangle \cdot \langle B \rangle. \quad (5.35)$$

我们可以把装置 C 叫做 A 和 B 的“乘积”。我们还要假设已经知道怎样来分析这两个部分，所以我们可以写出 A 和 B(对于 T)的矩阵。我们的问题就这样解决了。对于任何入射和出射状态，我们很容易求出

$$\langle \chi | C | \phi \rangle.$$

我们首先写下

$$\langle \chi | C | \phi \rangle = \sum_k \langle \chi | B | k \rangle \langle k | A | \phi \rangle.$$

你们看得出这样写的理由吗？(提示：设想在 A 和 B 之间放进一个装置 T。)如果我们考虑一个特殊情况， ϕ 和 χ 也是(T 的)基础态，譬如说是 i 和 j ，我们得到

$$\langle j | C | i \rangle = \sum_k \langle j | B | k \rangle \langle k | A | i \rangle. \quad (5.36)$$

这个方程式给出以装置 A 和 B 的两个矩阵表示的“乘积”装置 C 的矩阵。数学家们把新的矩阵 $\langle j | C | i \rangle$ ——由两个矩阵 $\langle j | B | i \rangle$ 和 $\langle j | A | i \rangle$ 按照式(5.36)所表示的方式求和得出的——称为两个矩阵 A 和 B 的“乘积”矩阵 BA。(注意：次序很重要， $AB \neq BA$ 。)因此，我们可以说明：两台串接的装置的矩阵等于这两台装置的矩阵的矩阵乘积(把第一台装置放在乘积的右边)。知道矩阵代数的每一个人都懂得这就是式(5.36)。

§ 5-7 变换到不同的基

我们要提出有关计算时所用的基础态的最后一个问题。假定我们已经选用某一特定的基——譬如说 S 基——而另一个人决定采用不同的基——譬如说 T 基——进行同一计算。为明确起见，把我们所用的基础态称做(iS)态，其中 $i=+, 0, -$ 。同样我们可以称他所用的基础态为(jT)。怎样把我们的工作和他的工作进行比较呢？任何测量结果的最后答案应

该相同,但是在计算过程中所用的各个振幅和矩阵却是不同的,两者的关系是怎样的呢?如果大家都从同样的初态 ϕ 出发,我们将用 3 个振幅 $\langle iS | \phi \rangle$ 来描写它,这个式子表示 ϕ 在 S 表象中分解为基础态,而他却用振幅 $\langle jT | \phi \rangle$ 来描写它,这表示 ϕ 分解为他所用的 T 表象的基础态。怎样证明大家所描写的实际上都是同一状态 ϕ 呢?我们可以应用式(5.27)的普遍定理 II 来证明。用他的任意一个状态 jT 来代替 χ ,我们得到:

$$\langle jT | \phi \rangle = \sum_i \langle jT | iS \rangle \langle iS | \phi \rangle. \quad (5.37)$$

为了把两个表象联系起来,我们只要给出矩阵 $\langle jT | iS \rangle$ 的 9 个复数。于是用这个矩阵就可以把我们的所有方程式转换为他所用的形式。它告诉我们怎么从一组基础态 变换为另一组基础态。(因这个理由, $\langle jT | iS \rangle$ 有时称为“从 S 表象到 T 表象的变换矩阵”。好长的名词!)

对于自旋为 1 的粒子的情形,我们只有 3 个基础态(对于更高的自旋,就有更多的基础态),其数学运算和我们在矢量代数中所见过的很相似。每一个矢量可以用 3 个数来表示——沿 x , y 和 z 轴的分量。这就是说每一个矢量可以分解为 3 个“基础”矢量,这些“基础”矢量是沿着 3 个坐标轴的矢量。但是假如另一人选择另一组坐标系—— x' , y' 和 z' ,他就将用 3 个不同的数字来代表同一矢量。他的计算看上去和我们的不同,但最后的结果将是—样的。我们以前已经考虑过这个问题并且知道从一组坐标到另一组坐标的矢量变换法则。

你们或许希望通过某个例子来看一看量子力学变换是怎样进行的;所以我们在这里对两个过滤器 S 和 T 的各个特殊的相对取向写出(不予证明)自旋为 1 的粒子的振幅从 S 表象变换到 T 表象的变换矩阵。(我们将在下一章告诉你们如何导出这个结果。)

第一种情况: T 装置和 S 装置的 y 轴(粒子沿此轴运动)重合,但 T 装置绕着这个共同的 y 轴转过一个角度 α (如图 5-6)。(说得明确一些,固定在 T 装置上的一组坐标轴 x' , y' , z' 和固定在 S 装置上的坐标 x , y , z 的关系为: $z' = z\cos\alpha + x\sin\alpha$, $x' = x\cos\alpha - z\sin\alpha$, $y' = y$),那么,变换振幅是:

$$\begin{aligned} \langle +T | +S \rangle &= \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha), \\ \langle 0T | +S \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha, \\ \langle -T | +S \rangle &= \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha), \\ \langle +T | 0S \rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha, \\ \langle 0T | 0S \rangle &= \cos\alpha, \\ \langle -T | 0S \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha, \\ \langle +T | -S \rangle &= \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha), \\ \langle 0T | -S \rangle &= +\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha, \\ \langle -T | -S \rangle &= \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha). \end{aligned} \quad (5.38)$$

第二种情况: T 装置和 S 装置有同一 z 轴, 但 T 装置绕 z 轴转过角度 β 。(坐标变换为: $z' = z$, $x' = x\cos\beta + y\sin\beta$, $y' = y\cos\beta - x\sin\beta$) 于是, 变换振幅为:

$$\begin{aligned}\langle +T | +S \rangle &= e^{i\beta}, \\ \langle 0T | 0S \rangle &= 1, \\ \langle -T | -S \rangle &= e^{-i\beta}, \\ \text{所有其他的} &= 0.\end{aligned}\tag{5.39}$$

注意, T 的任何转动都可以由上述两种转动合成。

假定状态 ϕ 由 3 个数定义:

$$C_+ = \langle +S | \phi \rangle, C_0 = \langle 0S | \phi \rangle, C_- = \langle -S | \phi \rangle,\tag{5.40}$$

从 T 的观点来看, 上述状态可用另外 3 个数来表示:

$$C'_+ = \langle +T | \phi \rangle, C'_0 = \langle 0T | \phi \rangle, C'_- = \langle -T | \phi \rangle,\tag{5.41}$$

那么, 式(5.38)或(5.39)的系数 $\langle jT | iS \rangle$ 给出 C_i 和 C'_i 的变换关系。换言之, C_i 很像一个矢量的分量, 从 S 和 T 的观点来看, 这些分量是不同的。

仅仅对于自旋为 1 的粒子——因为它需要 3 个振幅——与矢量的对应才十分相近。在各种情况下都有随坐标的改变而以某种确定方式变换的 3 个数字。实际上, 存在着一组基础态, 其变换与一个矢量的 3 个分量完全相似。下列 3 个组合

$$C_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ - C_-), C_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}(C_+ + C_-), C_z = C_0\tag{5.42}$$

变换到 C'_x , C'_y 和 C'_z 的方式与 x , y , z 变换到 x' , y' , z' 的方式完全一样。[你们可以用变换定律式(5.38)和(5.39)来检验一下。]现在你们可以看出, 为什么自旋为 1 的粒子常常叫做“矢量粒子”。

§ 5-8 其他情况

我们一开始指出, 对于自旋为 1 的粒子的讨论是所有量子力学问题的典范。只要改变状态的数目就可使讨论普遍化。在任一特殊情况下可以包括 n 个基础态而不只是 3 个基础态*。我们的基本定律(5.27)式具有完全相同的形式——只是 i 和 j 要理解为遍及于所有 n 个基础态。任何现象都可以这样来分析: 求出它出发时在每一基础态的振幅以及终止于另一组基础态中的振幅, 然后对整个基础态组求和。任何适当的基础态组都可以采用。如果有人愿意用另外的一组也同样合适。两个基础态组可用 n 行 n 列的变换矩阵相联系, 关于这种变换, 我们以后还有更多的东西要讲。

最后, 我们愿意谈论一下怎样处理下述情况, 如果原子直接来自原子炉, 经过某台装置, 譬如说 A , 然后用选择状态 χ 的过滤器对之进行分析。你们不知道开始时原子所处的状态 ϕ 是什么。也许最好目前不要把精力花费在这个问题上面, 而是把注意力集中在从纯粹状

* 基础态的数目 n 可以是, 而且通常是无穷的。

态出发的问题上。但是,如果你们坚持要知道的话,下面就是这个问题的处理方法。

首先,你们必须能对从炉子里出来的原子的状态分布方式作出某些合理的猜测。例如,假使炉子没有任何的“特殊性”,你们可以合理地猜想原子离开炉子时“取向”是无规的。按照量子力学,这就相当于说,除了可以说有三分之一的原子在(+S)态,三分之一在(0S)态,还有三分之一在(-S)态。你们关于原子状态一点也不了解。对于(+S)态的原子,通过整个装置的振幅是 $\langle \chi | A | +S \rangle$,通过的概率就是 $|\langle \chi | A | +S \rangle|^2$,另外两个状态也与之类似。于是总概率等于:

$$\frac{1}{3} |\langle \chi | A | +S \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle \chi | A | 0S \rangle|^2 + \frac{1}{3} |\langle \chi | A | -S \rangle|^2.$$

为什么我们用S而不用T呢?不可思议的是,对于初始分解,无论我们选取什么基础态组,答案都是一样的——只要我们所处理的情况是完全的无规取向。对于任何 χ ,下式总是成立的:

$$\sum_i |\langle \chi | iS \rangle|^2 = \sum_j |\langle \chi | jT \rangle|^2.$$

(我们把它留给你们自己去证明。)

必须注意,如果说初始的状态具有振幅 $\sqrt{1/3}$ 在(+S)中, $\sqrt{1/3}$ 在(0S)中以及 $\sqrt{1/3}$ 在(-S)中,这就不正确了;这种说法意味着可能存在着某种干涉。情况只是你们不知道初态是什么,你们不得不根据概率的观点认为体系在开始的时候处于各种可能的初始状态,然后对各种可能性取加权平均。

第6章 自旋 1/2*

§ 6-1 变换振幅

在上一章中，我们用自旋 1 的体系作为例子，将量子力学的普遍原理概括如下：

任何状态 ψ 都可用这个状态在一组基础态的各个态中的振幅来描述。

一般说来，从任意一个状态过渡到另一个状态的振幅可写成许多乘积的总和，每一个乘积为从初态进入某一基础态的振幅乘以从该基础态到终态的振幅，最后每个基础态的项求和：

$$\langle \chi | \psi \rangle = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | \psi \rangle. \quad (6.1)$$

基础态是相互正交的——一个基础态的振幅在另一个基础态中等于零：

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}. \quad (6.2)$$

从一个状态过渡到另一个状态的振幅等于其逆过程的振幅的复共轭：

$$\langle \chi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \chi \rangle. \quad (6.3)$$

我们还讨论了一下状态可以有不止一个基这一事实，而且我们可以用式(6.1)从一个基变换到另一个基。例如，假定在基础体系 S 的第 i 基础态中找到状态 ψ 的振幅是 $\langle iS | \psi \rangle$ ，但是后来我们决定宁愿用另一组基础态，譬如说用属于基础体系 T 的状态 j 来表示 ψ 这个状态。在一般公式(6.1)中，我们用 jT 代替 χ ，从而得到下面的公式：

$$\langle jT | \psi \rangle = \sum_i \langle jT | iS \rangle \langle iS | \psi \rangle. \quad (6.4)$$

状态 ψ 在基础态 (jT) 中的振幅通过一组系数 $\langle jT | iS \rangle$ 和 ψ 在基础态 (iS) 中的振幅相联系。如果有 N 个基础态，那么就有 N^2 个这样的系数。这一组系数常常被称为“从 S 表象到 T 表象的变换矩阵”。这看上去在数学上是很棘手的，但是只要稍微改变一下名称，我们就可以看到它实际上并非如此之难。如果我们令 C_i 为状态 ψ 在基础态 iS 中的振幅——即 $C_i = \langle iS | \psi \rangle$ ——并令 C'_j 是对于基础体系 T 的相应的振幅——即 $C'_j = \langle jT | \psi \rangle$ ，于是式(6.4)可以写成：

$$C'_j = \sum_i R_{ji} C_i, \quad (6.5)$$

* 本章是比较长且抽象的一个附带观光，这里并不引进，在以后各章中也不再以其他的方式引进任何新概念。所以你们完全可以跳过这一章，如果以后感兴趣的话可以再回头过来读它。

式中 R_μ 就是 $\langle jT| iS \rangle$ 。每一个振幅 C'_i 等于振幅 C_i 乘以对应的系数 R_μ ，后对所有 i 求和。这和矢量从一个坐标系到另一坐标系的变换有同样的形式。

为了避免过分抽象，我们曾对自旋 1 的情况举过若干个这些系数的例子，使你们能领会在实际情况中怎样应用它们。在另一方面，量子力学中有一件极其美妙的事——从存在着 3 个状态这一纯粹的事实以及转动的空间对称性出发，这些系数可以用纯粹抽象推理来推出。在此初期阶段就给你们讲解这样的论证有其不利之处，在我们“脚踏实地”之前，你们又陷入了另一个抽象问题之中。然而，这是如此之美妙，不管怎样我们还是谈一谈吧。

在本章里，我们将向你们说明，对于自旋 $1/2$ 的粒子，怎样求出它的变换系数。我们选择自旋 $1/2$ 的情况而不选择自旋 1 的情况是由于前者比较容易。我们的问题是，对于施特恩-格拉赫装置中分裂为两束的粒子——原子体系——确定它的系数 R_μ 。我们要用纯粹的推理——加上一些假设——推导出从一个表象到另一个表象的所有变换系数。为了进行“纯粹的”推理，作一些假设常常是必要的！虽然这个论证是抽象的，而且比较复杂，但是所得到的结果叙述起来却比较简单并且容易理解——而结果是最重要的事情。如果你们愿意，可以把这当作一种文化游览。实际上我们是这样安排的，凡是在这一章里得到的重要结果在以后的几章中如果需要的话会用另外的方法导出。所以你们不必担心如果把这一章完全略去或留到以后某个时刻再来学习，会使你们学习量子力学时乱了头绪。我们是在这个意义上说这是“文化的”游览：即试图表明量子力学原理不仅有趣，而且如此深刻，只要再加上关于空间结构的少数几个假设，我们就能导出物理体系的许许多多性质。知道量子力学的不同结论来自何处也是重要的，因为只要我们的物理定律还是不完全的——正如我们知道它们确是如此——弄清理论和实验不一致的那些地方到底是我们的逻辑最好之处还是最糟之处，是很有趣的。直到现在为止，看来我们的逻辑最抽象的地方却总是给出正确的结果——它和实验一致。只有当我们试图提出基本粒子内部机理和它们相互作用的特殊模型时，我们才不能找到和实验符合的理论。下面要讲的理论无论在什么地方受到检验时，都和实验符合——对于奇异粒子以及对于电子、质子等等都如此。

在我们继续讲下去之前，先谈一个令人烦恼但却很有趣的问题：不可能唯一地确定系数 R_μ ，因为概率振幅始终具有某种任意性。假定你们有一组任何种类的振幅，譬如说是通过所有不同的路径到达某一地点的振幅，如果在每一个振幅上乘以同样的相位因子——例如 $e^{i\theta}$ ——你们就得到另一组和原来的一组同样好的振幅。所以对于任何给定的问题中，如果你愿意的话，可以任意改变所有振幅的相位。

假定你们写下多个振幅之和，譬如说是 $(A + B + C + \dots)$ ，并取其绝对值的平方以计算某个概率。可是另外的某一个人应用振幅之和 $(A' + B' + C' + \dots)$ 并取其绝对值的平方以计算同一事物的概率。如果除了因子 $e^{i\theta}$ 之外，所有各个 $A', B', C' \dots$ 与 $A, B, C \dots$ 都各各相等，那么两者取绝对值平方所得出的概率将完全相等，因为此时 $(A + B + C + \dots)$ 等于 $e^{i\theta}(A' + B' + C' + \dots)$ 。例如，假定我们要用式(6.1)计算某个东西，但是，我们突然改变了某个基础体系的所有相位。每一个振幅 $\langle i|\psi \rangle$ 都要乘以同样的因子 $e^{i\theta}$ 。同样，振幅 $\langle i|\chi \rangle$ 也要改变 $e^{i\theta}$ ，但是振幅 $\langle \chi|i \rangle$ 是振幅 $\langle i|\chi \rangle$ 的共轭复数，所以， $\langle \chi|i \rangle$ 改变因子 $e^{-i\theta}$ 。指数上正的和负的 $i\theta$ 相消，于是我们就得到和以前同样的表达式。所以这是一个普通的规则。如果对于一个给定基础体系，我们使所有的振幅改变同一个相位——或者甚至在任意问题中我们改变所有振幅的相位——这不会影响结果。所以在我们的变换矩阵中有着某种选择相位的自

由。我们常常要作这种任意的选择——通常按照通用的惯例来作出选择。

§ 6-2 变换到转动坐标系

我们再来考虑上一章曾描写过的“改进的”施特恩-格拉赫装置。一束自旋 $1/2$ 粒子从左边进入装置，一般说来它会分裂成两束，如图 6-1 所示。（对于自旋 1 就有三束。）和以前一样，两束粒子会重新会聚，除非其中一束被插在中间的“挡板”挡住。在图上我们画一个箭头，它表示磁场大小的增加方向——就是说指向有尖端的磁极。我们用这个箭头来表示任一特定装置的“向上”坐标轴。它相对于装置是固定的，当我们同时使用几台装置时，可以用这个箭头表示各装置的相对取向。我们还假设每一个磁铁中的磁场方向总是与此箭头一致。

我们说：在“上”射束中的原子是处于对该装置而言的(+)的状态中，在“下”射束中的原子是处于(-)的状态中。（对于自旋 $1/2$ 粒子没有“零”状态。）

现在我们把两台改进的施特恩-格拉赫装置串接起来，如图 6-2(a)所示。第一台装置称为 S ，我们可以用挡住其中的这一束或那一束射束的方法来制备纯粹的 $(+S)$ 或纯粹的 $(-S)$ 状态，[图上所示为制备纯粹的 $(+S)$ 态。]对于每一种情况，从 S 出射的粒子都有一定的振幅进入第二台装置中的 $(+T)$ 射束或 $(-T)$ 射束。实际上，一共只有 4 个振幅：从 $(+S)$ 到 $(+T)$ ， $(+S)$ 到 $(-T)$ ， $(-S)$ 到 $(+T)$ ，以及 $(-S)$ 到 $(-T)$ 的振幅。这些振幅就是从 S 表象到 T 表象的变换矩阵 R_{μ} 的 4 个系数。我们可以认为：第一台装置“制备”在某一个表象中的特定状态，而第二台装置按照第二个表象来“分析”上面得到的状态。于是，我们要解答的问题是：假定处于给定状态——譬如说 $(+S)$ 态——的原子是用挡住 S 装置中某一射束的方法制备的，那么该原子通过调节成（譬如说） $(-T)$ 态的第二个装置 T 的机会是多少？当然，其结果依赖于 S 和 T 这两个系统间的角度。

我们应当解释一下：为什么我们能够希望用演绎法来求出系数 R_{μ} 。你们知道很难相信如果一个粒子原来的自旋沿 $+z$ 方向排列，以后会有可能发现其自旋指向 $+x$ 方向——或者另一个完全任意的方向。实际上，这虽然是几乎不可能的，但并不是绝对不可能。它几乎不可能，所以只有一种方法可使上述情况发生，这就是我们可以找到这唯一的方法的理由。

我们可以作出的第一个论证是：假定我们建立了如图 6-2(a)中的那样一套设备，其中有两台装置 S 和 T ， T 对于 S 向上翘起一个角度 α ，我们只让 S 通过(+)射束，而让 T 通过(-)射束。我们将观察到从 S 出来的粒子并通过 T 的概率有一定的数值。现在假定我们用图 6-2(b)的装置进行另一次测量。 S 和 T 的相对取向不变，但整个系统放在空间另一个

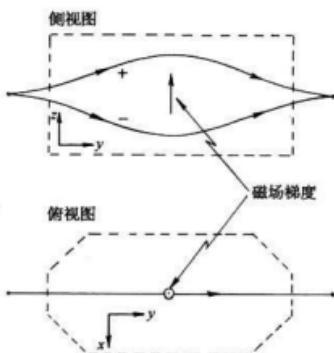


图 6-1 有自旋 $1/2$ 粒子束通过“改进的”施特恩-格拉赫仪器的俯视图和侧视图

角度的位置上,我们要假设,关于对处于 S 的一个纯粹状态中的粒子进入 T 的某一特定状态的概率,这两个实验都会给出同样的数值。换言之,我们假设这种类型的任何实验的结果都是相同的——物理规律是相同的——无论整套装置在空间中如何取向。(你们会说:“这是显而易见的。”不,它是一个假设,只当它符合实际情况时才能认为它是“正确的”。)这意味着系数 R_{μ} 只依赖于 S 和 T 在空间的相互关系而不依赖于 S 和 T 在空间的绝对位置。换一种说法, R_{μ} 只依赖于将 S 至 T 的转动,因为图 6-2(a)和 6-2(b)的相同之处显然是将装置 S 转到装置 T 的三维转动,当变换矩阵 R_{μ} 只依赖于转动时,这里的情形就是如此,它被称作转动矩阵。

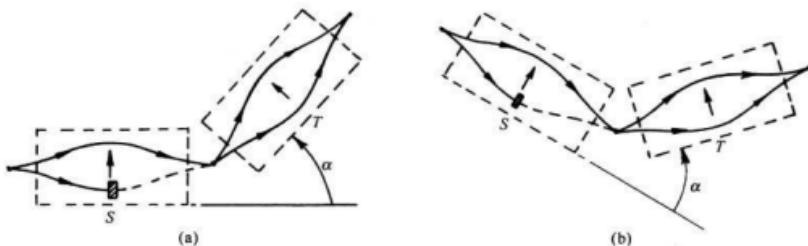
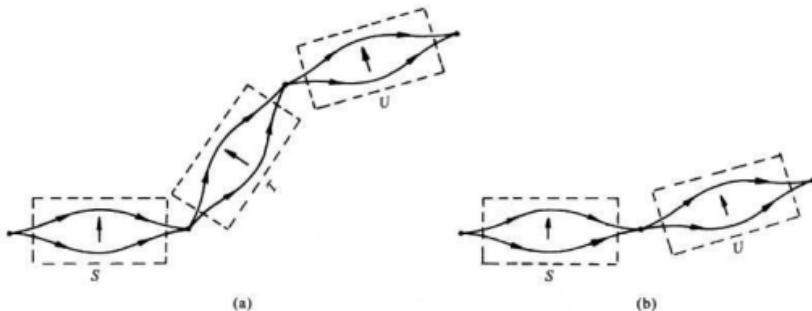


图 6-2 两个等效的实验

为下一步的讨论,我们还需要一点资料。假定我们加上第三台装置,我们称它为 U ,它以任意的角度接在 T 的后面,如图 6-3(a)。(初看起来这很讨厌,但这正是抽象思维有趣之处——你们只要用划线的办法就可进行最不可思议的实验!)现在要问, $S \rightarrow T \rightarrow U$ 的变换是什么? 我们实际上要做的是,当我们已知从 S 到 T 和从 T 到 U 的变换的前提下,求出从 S 的某一个状态到 U 某一个状态的振幅。我们接着要讨论的是 T 的两个通道都打开的实验,我们可连续两次运用式(6.5)来求出答案。从 S 表象到 T 表象,我们有:

$$C'_j = \sum_i R_{ji}^T C_i, \quad (6.6)$$

图 6-3 如果 T “敞开”, (b) 和 (a) 等效

式中,我们在 R 上加上上标 TS 是为了和 T 到 U 的系数 R^{UT} 相区别。

假设处于 U 表象中基础态的振幅为 C''_k , 我们可再一次运用式(6.5)把它和 T 振幅联系起来; 我们得到:

$$C''_k = \sum_j R_k^{UT} C'_j. \quad (6.7)$$

将式(6.6)和式(6.7)结合起来, 就得到直接从 S 到 U 的变换。把式(6.6)的 C'_i 代入式(6.7), 我们得到:

$$C''_k = \sum_j R_k^{UT} \sum_i R_i^{TS} C_i. \quad (6.8)$$

由于 i 在 R_k^{UT} 中不出现, 我们可把对 i 的求和符号也放到前面来, 并把上式写成:

$$C''_k = \sum_i \sum_j R_k^{UT} R_i^{TS} C_i. \quad (6.9)$$

这就是双重变换的公式。

可是, 注意, 只要所有 T 中的射束都没有被挡住, 从 T 出射的粒子的状态和进入 T 时的状态是相同的。我们就可以直接从 S 表象变换到 U 表象。这应和直接把装置 U 接在 S 后面是一样的, 如图 6-3(b)。在这个情况下, 我们可以写出:

$$C''_k = \sum_i R_k^{US} C_i, \quad (6.10)$$

式中 R_k^{US} 就是这一变换的系数。显然, 式(6.9)和式(6.10)应该给出同一个振幅 C''_k , 并且不管给我们振幅 C_i 的初态 ϕ 是什么, 这个结果都应该正确, 所以, 下式必定成立:

$$R_k^{US} = \sum_j R_k^{UT} R_j^{TS}. \quad (6.11)$$

换言之, 如果参考基的 $S \rightarrow U$ 任意转动可以看作由连续两次相继的转动 $S \rightarrow T$ 和 $T \rightarrow U$ 组成, 转动矩阵 R_k^{US} 可以按照式(6.11)由两次部分转动的矩阵求得。如果你们愿意, 你们可以直接从式(6.1)求出式(6.11), 因为它只是 $\langle kU | iS \rangle = \sum_j \langle kU | jT \rangle \langle jT | iS \rangle$ 的不同记法而已。

为透彻起见, 我们应加上下面的附注。不过, 它们并非是十分重要的, 如果你们不愿意看的话可以略去它直接阅读下一节。我们上面所讲的东西不是十分正确的。我们确实不能说式(6.9)和式(6.10)必须给出严格相同的振幅。只是在物理意义上应该相同; 所有的振幅可以相差某个共同的相位因子 $e^{i\delta}$ 而并不改变关于真实世界的任何计算结果。所以, 替代式(6.11), 我们真正能够说的是:

$$e^{i\delta} R_k^{US} = \sum_j R_k^{UT} R_j^{TS}. \quad (6.12)$$

其中 δ 是某个实常数。当然, 这个额外的因子 $e^{i\delta}$ 的意义是: 如果我们采用矩阵 R^{US} , 由此求得的所有振幅与从两次转动 R^{UT} 和 R^{TS} 所得到的振幅都可以相差同样的相位因子 $e^{-i\delta}$ 。我们知道如果所有的振幅都改变同样的相位是无关紧要的, 所以只要我们愿意, 完全可以忽略这个相位因子。然而, 可以证明, 假如我们用特定的方法来定义转动矩阵, 这个额外的相位因子就永远不会出现——式(6.12)中的 δ 永远等于零。虽然这对于以后的论证并不重要, 但我们可以用关于行列式的数学定理来简短地证明一下。[如果你们对行列式知道得不多, 可以不必为此证明, 而可以直接跳到式(6.15)的定义。]

第一, 我们应该指出, 式(6.11)是两个矩阵的“乘积”的数学定义。(说成“ R^{US} 是 R^{UT} 和 R^{TS} 的乘积”可能更简便一些。)第二, 有一个数学定理——对于这里的两行两列矩阵你们自己能够很容易证明它——这个定理说: 两个矩阵的“乘积”的行列式等于它们的行列式的乘积。把这个定理应用于式(6.12), 我们得到

$$e^{i\delta} (\text{Det } R^{US}) = (\text{Det } R^{UT})(\text{Det } R^{TS}). \quad (6.13)$$

(我们省略了下标, 因为它们并不告诉我们任何有用的东西。)是的, 2δ 是正确的。要记住我们所处理的是两行两列的矩阵; 矩阵 R_k^{US} 中的每一项都乘上 $e^{i\delta}$, 所以行列式中的每一个乘积——它有两个因子——都要乘上 $e^{i\delta}$ 。现在取式(6.13)的平方根, 并用它来除式(6.12), 我们得到

$$\frac{R_{\mu}^{TS}}{\sqrt{\text{Det}R^{TS}}} = \sum_i \frac{R_{\mu}^{UT}}{\sqrt{\text{Det}R^{UT}}} \frac{R_{\mu}^{TS}}{\sqrt{\text{Det}R^{TS}}}. \quad (6.14)$$

额外的相位因子不见了。

现在已清楚,假如我们要使任意给定的表象中的所有振幅都归一化(你们还记得,归一化的意思是 $\sum_i \langle \phi | i \rangle \langle i | \phi \rangle = 1$),转动矩阵就都有像 $e^{i\omega t}$ 的纯粹虚数指数的行列式。(我们不去证明它,你们将会看到,它们都是这样的。)所以,只要我们愿意,我们可以这样来进行选择,使 $\text{Det}R = 1$,我们的转动矩阵 R 就具有唯一的相位。具体的做法是这样的,假设我们以某种任意的方式求出了转动矩阵 R ,作为一条规则,我们通过定义:

$$R_{\text{标准}} = \frac{R}{\sqrt{\text{Det}R}}. \quad (6.15)$$

把 R “变换”到“标准形式”。因为我们可在 R 的每一项上乘以相同的相位因子以得到我们所要的相位,所以我们可以做到这一要求。下面我们将总是假定我们的矩阵已经变成“标准形式”,于是我们可以运用式(6.11)而不需要有任何额外的相位因子。

§ 6-3 绕 z 轴的转动

我们现在准备找出两个不同表象之间的变换矩阵。有了合成转动的法则以及空间没有特殊方向的假设,我们就有了求出任意转动矩阵的钥匙。解答只有一个,我们从对应于绕 z 轴转动的变换开始。假设两台装置 S 和 T ,串联安放在一直线上,它们的轴平行,从图指向外,如图 6-4(a)所示。我们取此方向为“ z 轴”。确实,若射束的路径在 S 装置中向“上”(向着 $+z$)偏移,那么在 T 装置中也将如此。同样,如果射束在 S 装置中向下偏移,它在 T 装置也将向下。假定 T 装置被放在另一个角度上,但其轴仍旧平行于 S 的轴,如图 6-4(b)。根据直觉你们会说在 S 中的(+)射束到达 T 中仍旧是(+)射束,因为 S 和 T 的磁场和磁场梯度仍旧在同样的物理方向上。这是十分正确的。同样 S 中的(-)射束在 T 中仍旧是(-)射束。对于 T 在 S 的 xy 平面中的任意取向都可得出同样的结果。关于 $C'_+ = \langle +T | \phi \rangle$, $C'_- = \langle -T | \phi \rangle$ 以及 $C_+ = \langle +S | \phi \rangle$, $C_- = \langle -S | \phi \rangle$ 之间的关系,上面的结论可以告诉我们些什么呢?你们也许会得出这样的结论:绕“参考系” z 轴的任意转动使射束“向上”或“向下”偏移的基础态的振幅仍和先前一样。我们可以写出: $C'_+ = C_+$ 以及 $C'_- = C_-$ ——但这是不正确的。我们所能作出的结论只是:经过这样的转动之后,在 S 装置中和 T 装置中处于“向上”射束的概率相同,即:

$$|C'_+| = |C_+| \text{ 和 } |C'_-| = |C_-|.$$

我们不能认为,对于图 6-4(a)和(b)中 T 装置的两个不同取向,有关 T 装置的振幅的相位不会不同。

图 6-4 的(a)和(b)中的两个装置实际上是一样的,我们可以由下述方法看出这一点。假定我们把一台产生纯粹 $(+x)$ 态的装置放在 S 的前面。 $(x$ 轴指向图的下端。)这些粒子在 S 中会分裂成 $(+z)$ 和 $(-z)$ 射束,但是这两束射束在 S 的出口 P_1 处重新结合得到 $(+x)$ 态。在 T 中又发生同样的过程。假如在 T 后面接着放上第三台装置 U ,它的轴沿着 $(+x)$ 方向,如图 6-5(a)所示,所有的粒子都将进入 U 的(+)射束中。现在把 T 和 U 一起转过 90° 到达图 6-5(b)所示的位置,设想一下将会发生些什么。同样,从 T 仪器出射的状态就是进入 T 仪器的状态,所以进入 U 的粒子是处在对于 S 为 $(+x)$ 的状态。但是现在的 U 是相对于 S 为 $(+y)$ 状态分析的,这是不同的状态。(根据对称性,我们将预期只有一半粒子通过。)

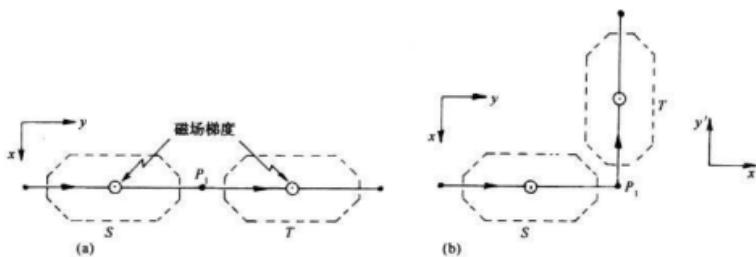


图 6-4 绕 z 轴转动 90°

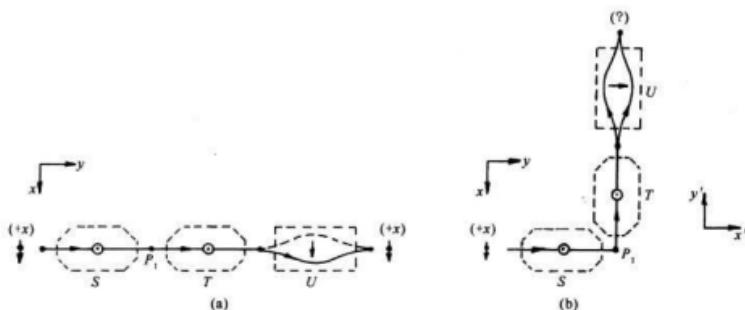


图 6-5 处于 (+x) 态的粒子在(a)和(b)中有不同的行为

什么因素变了呢？装置 T 和 U 仍处在相同的相对物理关系中。仅仅是因为 T 和 U 处在另一个不同的方向上就能使物理规律改变吗？我们原来的假设是物理规律不应改变。答案只能是这样，对于 T 的振幅在图 6-5 的两种情况下是不同的——所以在图 6-4 的两种情况下也是不同的。粒子必定有某种方法知道它在 P_1 点拐了一个弯。怎么会知道呢？我们已确定的是 C'_+ 和 C_+ 的大小在这两种情况中是相同的，但是它们可能——事实上，必定——具有不同的相位。我们得出结论， C'_+ 和 C_+ 必定由下列关系联系起来：

$$C'_+ = e^{i\lambda} C_+,$$

C'_- 和 C_- 必定由下列关系联系起来：

$$C'_- = e^{i\mu} C_-,$$

其中 λ 和 μ 是实数，它们必定以某种方式与 S 和 T 之间的角度相联系。

目前我们关于 λ 和 μ 可以说的仅仅是它们一定不相等。[除了图 6-5(a)所表示的特殊情况，这时 T 和 S 有相同的取向。]我们曾看到，所有的振幅同时改变相同的相位时不会有什物理后果。由于同一理由，我们总可以在 λ 和 μ 上加上同样的任意数值而不改变任何东西。所以我们可以这样选择 λ 和 μ ，使其分别等于某一数的正负值，即我们总可以取：

$$\lambda' = \lambda - \frac{(\lambda + \mu)}{2}, \mu' = \mu - \frac{(\lambda + \mu)}{2}.$$

于是

$$\lambda' = \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} = -\mu'.$$

所以为了方便*, 我们取 $\mu = -\lambda$ 。于是我们得到参考装置绕 z 轴转动某一角度的普遍法则, 其变换是

$$C'_+ = e^{i\phi} C_+, C'_- = e^{-i\phi} C_-. \quad (6.16)$$

振幅的绝对值不变, 只是相位不同。这些相位因子造成了图 6-5 中两个实验的不同结果。

现在我们想要知道联系 λ 与 S 和 T 之间角度的定律。我们已经知道一种特殊情况的答案。如果角度为零, 则 λ 也为零。现在我们假设, 当 S 和 T 之间的角度 ϕ (见图 6-4) 趋近于零时, 相移 λ 是 ϕ 的连续函数——这仅仅看上去是合理的。换言之, 如果将 T 从通过 S 的直线转过很小的角度 ϵ , 这时 λ 也是一个很小的数量, 譬如说等于 $m\epsilon$, m 是某一个数, 因为我们可以证明 λ 必正比于 ϵ , 所以我们可以这样写。假定我们在 T 后面放上另一台装置 T' , 它和 T 成角度 ϵ , 因而就和 S 成角度 2ϵ 。于是对于 T , 我们得到:

$$C'_+ = e^{i\phi} C_+,$$

对于 T' , 我们有:

$$C''_+ = e^{i\phi} C'_+ = e^{i2\phi} C_+.$$

但是我们知道, 如果我们把 T' 直接接在 S 后面, 我们应当得到同样的结果。这样, 如果角度加倍相位也要加倍。显然我们可以把这一论证推广, 并且完全可以通过一系列无限小的转动以构成任意的转动。我们得到结论: 对于任意的角度 ϕ , λ 正比于转过的角度。因此我们可以写下 $\lambda = m\phi$ 。

于是, 我们得到的一般结果是: 当 T 绕 z 轴相对于 S 转过角度 ϕ 时,

$$C'_+ = e^{i\phi} C_+, C'_- = e^{-i\phi} C_-. \quad (6.17)$$

对于角度 ϕ 以及我们以后将要讲到的所有转动, 我们采用标准的约定: 正的转动是对于参考轴正方向的右手旋转, 正的 ϕ 表示向正 z 方向前进的右手螺旋的转动。

我们现在要求出 m 应当等于多少? 首先, 我们可以试一下这样来论证: 假定 T 转过 360° , 显然它正好回到原来零度的位置, 我们应当有 $C'_+ = C_+$ 以及 $C'_- = C_-$, 或者和这意义相同的式子: $e^{im2\pi} = 1$ 。我们得到 $m = 1$ 。这个论证是错误的!为了看出这是错误的, 我们来考虑 T 转过 180° 的情况。假如 m 等于 1, 我们有 $C'_+ = e^{i\pi} C_+ = -C_+$, $C'_- = e^{-i\pi} C_- = -C_-$ 。然而, 这恰好又是原始状态, 两个振幅都正好乘上 -1 , 于是它回复为原始的物理体系。(这又是一个共同相位变化的情况。)这意味着如果图 6-5(b)中 T 和 S 间的角度增加到 180° , 这个系统(对于 T)就和 0° 的情形不可区分, 粒子重又通过 U 装置的(+)状态。尽管在 180° , 但 U 装置的(+)态是原来 S 装置的($-x$)态, 因而($+x$)态就变成($-x$)态。但是, 我们并没

* 从另一个角度来看, 我们只是利用式(6.15)把变换纳入 § 6-2 所描写的“标准形式”中。

有改变原始状态,这个答案是错误的。我们不能令 $m = 1$ 。

我们具有的情况必须是转动 360° ,并且没有比 360° 更小的角度能够再得到同样的物理状态。如果 $m = 1/2$ 就可以满足这个条件。这样,只有这样,再得到同样的物理状态的第一个角度是 $\phi = 360^\circ$ * 它给出:

$$\left. \begin{array}{l} C'_+ = -C_+ \\ C'_- = -C_- \end{array} \right\} \text{绕 } z \text{ 轴转 } 360^\circ. \quad (6.18)$$

如果你们使装置转过 360° ,你将得到新的振幅,这是非常奇怪的说法。然而这实在不是什么新东西,因为共同改变符号并没有给出任何不同的物理状态。假定另外某一个人决定改变所有振幅的符号,因为他认为他已经把装置转过了 360° ,这完全正确,他仍得到同样的物理状态**。于是,我们的最后答案是:如果我们已经知道自旋 $1/2$ 粒子对于参考系 S 的振幅 C_+ 和 C_- ,然后我们应用对于 T 的基础系统(T 为将 S 绕 z 轴转动 ϕ 所得出的),用旧的振幅表示的新振幅为:

$$\left. \begin{array}{l} C'_+ = e^{i\phi/2} C_+ \\ C'_- = e^{-i\phi/2} C_- \end{array} \right\} \text{绕 } z \text{ 轴转动 } \phi. \quad (6.19)$$

§ 6-4 绕 y 轴转动 180° 和 90°

下面,我们要求 T 相对于 S 绕垂直于 z 轴的某一个轴——譬如说 y 轴——转动 180° 的变换关系。(在图 6-1 中我们已规定了坐标轴。)换言之,我们从两个全同的施特恩-格拉赫设备开始,不过其中第二台装置 T 对于第一台 S 来说是“上下倒置”的,如图 6-6。现在设想粒子像一个小小的磁偶极子,处在 $(+S)$ 态的一个粒子——所以它在第一台装置中走上面的通道——在第二台装置中也走上面的通道,所以它对于 T 来说是在“负的”状态中。(在倒放的 T 装置中,场和它的梯度的方向都是倒转的。对于一个带有一定方向磁矩的粒子来说,力是不变的)。不管怎样,对于 S 来说是“向上”的,对于 T 而言就是“向下”的。那么,对于 S 和 T 这样的相对位置,我们认为变换必定给出

$$|C'_+| = |C_-|, |C'_-| = |C_+|.$$

和以前一样,我们不能排除某个附加的相位因子,(对于绕 y 轴 180° 的旋转)我们可以有

$$C'_+ = e^{i\beta} C_- \text{ 和 } C'_- = e^{i\gamma} C_+, \quad (6.20)$$

其中 β 和 γ 仍然是要求的。

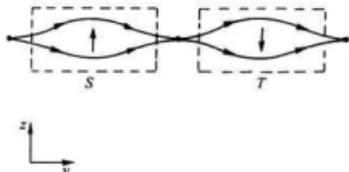


图 6-6 绕 y 轴转动 180°

* 可以看出 $m = -1/2$ 也行。然而,我们从式(6.17)中看到,符号的改变只是重新规定自旋向上的粒子的符号而已。

** 同样,假如某一物体经过一系列微小转动后,其净效果正好回到原来的取向,如果你们跟踪它的整个历史就可以定义它转动了 360° ——以区别于净转动为零。(非常有趣的是,对于 720° 的净转动这是不正确的。)

绕 y 轴旋转 360° 又是怎样的情况呢？我们已经知道绕 z 轴旋转 360° 的答案——在各个状态中的振幅都改变符号。随便绕哪一个坐标轴旋转 360° 仍旧回到原来位置。对于绕任意轴旋转 360° 的结果必定和绕 z 轴旋转 360° 的结果相同——所有的振幅仅仅改变符号。现在我们想象绕 y 轴的两次连续旋转 180° ——运用公式(6.20)——我们应当得到式(6.18)的结果，换言之，

$$C''_+ = e^{i\beta} C'_- = e^{i\beta} e^{i\gamma} C_+ = -C_+$$

以及

$$C''_- = e^{i\gamma} C'_+ = e^{i\gamma} e^{i\beta} C_- = -C_-.$$
 (6.21)

这两个式子意味着：

$$e^{i\beta} e^{i\gamma} = -1 \quad \text{或} \quad e^{i\gamma} = -e^{-i\beta}.$$

所以，绕 y 轴旋转 180° 的变换就可以写成

$$C'_+ = e^{i\beta} C_-, \quad C'_- = -e^{-i\beta} C_+. \quad (6.22)$$

上面的论证同样适用于绕 xy 平面上的任意轴旋转 180° ，当然，不同的轴 β 的数值是不同的。然而，这也是它们唯一可以不同之处。 β 取什么数值具有一定的任意性，但是对于 xy 平面上的一个旋转轴，这个数值一经确定以后，对于同一平面上其他任意的旋转轴的数值也就确定了。习惯上对于绕 y 轴旋转 180° 选取 $\beta = 0$ 。

为了证明我们可以作这样的选择，我们假定绕 y 轴旋转时 β 不等于零。那么我们可以证明：在 xy 平面上可以找到另外的某一个轴，绕这一个轴旋转时，相应的相位因子将等于零。图 6-7(a)上表示一个和 y 轴成 α 角的轴 A ，我们求对于 A 轴的相位因子 β_A 。（为了清楚起见，图上所画的 α 是一个负数，但这是无关紧要的。）假定开始的时候 T 装置和 S 装置在一直线上，然后 T 装置绕 A 轴旋转 180° ，旋转以后 T 装置的 3 个坐标轴——我们用 x' 、 y' 和 z' 来标记——表示在图 6-7(a)中。于是，对于 T 的振幅是：

$$C''_+ = e^{i\beta_A} C_-, \quad C''_- = -e^{i\beta_A} C_+. \quad (6.23)$$

我们可以通过图上(b)和(c)所表示的两次连续转动，使装置转到同样的方向上。第一，我们想象装置 U 对于装置 S 绕 y 轴旋转 180° 。图 6-7(b)中 x' 、 y' 和 z' 表示 U 的坐标轴。对于 U 的振幅由式(6.22)给出。

现在注意，我们可以通过绕 U 装置的 z 轴旋转，即绕 z' 轴旋转，从 U 到达 T ，如图 6-7(c)所示。你们从图上可以看到，需要转动的角度为 α 的两倍，但是方向相反（对于 z' 而言）。应用式(6.19)的变换，令 $\phi = -2\alpha$ ，我们得到

$$C''_+ = e^{-i\omega} C'_+, \quad C''_- = e^{+i\omega} C'_-. \quad (6.24)$$

结合式(6.24)和(6.22)，我们得到：

$$C''_+ = e^{i(\beta-\alpha)} C_-, \quad C''_- = -e^{-i(\beta-\alpha)} C_+. \quad (6.25)$$

这些振幅一定和我们在式(6.23)中得到的相同。所以 β_A 与 α 及 β 必定以下式相联系：

$$\beta_A = \beta - \alpha. \quad (6.26)$$

这个式子意味着当 A 轴和(S 的) y 轴之间的夹角 α 等于 β 时，绕 A 轴旋转 180° 的变换将有

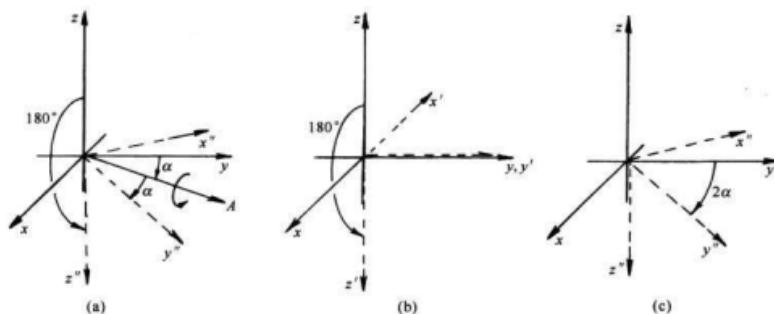


图 6-7 绕 A 轴旋转 180°等效于先绕 y 轴旋转 180°再绕 z' 轴旋转

$$\beta_A = 0.$$

只要垂直于 z 轴的某个轴, 具有 $\beta = 0$, 我们就可把它选作 y 轴。这纯粹是习惯的问题, 在普通的情况下我们就采用它。我们的结果是: 对于绕 y 轴作 180°的旋转, 我们有

$$\left. \begin{array}{l} C'_+ = C_- \\ C'_- = -C_+ \end{array} \right\} \text{绕 } y \text{ 轴旋转 } 180^\circ. \quad (6.27)$$

当考虑 y 轴时, 我们接着来求绕 y 轴转 90°的变换矩阵。因为我们知道绕同一个轴接连两次旋转 90°等于旋转 180°, 所以可求出这一变换矩阵。我们从把对 90°的变换写成最普遍的形式开始:

$$C'_+ = aC_+ + bC_-, \quad C'_- = cC_+ + dC_-. \quad (6.28)$$

绕同一个轴的第二次 90°旋转将具有同样的系数:

$$C''_+ = aC'_+ + bC'_-, \quad C''_- = cC'_+ + dC'_-. \quad (6.29)$$

把式(6.28)和(6.29)结合起来, 得到:

$$\begin{aligned} C''_+ &= a(aC_+ + bC_-) + b(cC_+ + dC_-), \\ C''_- &= c(aC_+ + bC_-) + d(cC_+ + dC_-). \end{aligned} \quad (6.30)$$

然而, 从式(6.27)我们知道:

$$C''_+ = C_-, \quad C''_- = -C_+,$$

所以, 我们必定有:

$$\begin{aligned} ab + bd &= 1, \\ a^2 + bc &= 0, \\ ac + cd &= -1, \\ bc + d^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

从这四个方程式足以确定所有的未知数 a , b , c 和 d 。这是不难做到的。考察第二个和第四个方程式。由之推得 $a^2 = d^2$, 这意味着 $a = d$, 或者 $a = -d$ 。但是 $a = -d$ 要去掉, 因为

如果这个关系成立的话第一个方程式就不正确了, 所以 $d = a$ 。利用这一关系式我们立即可以得到 $b = 1/2a$ 以及 $c = -1/2a$ 。现在我们把各个未知数用 a 表示。譬如, 把第二个方程式全部用 a 表示:

$$a^2 - \frac{1}{4a^2} = 0 \quad \text{或} \quad a^4 = \frac{1}{4}.$$

这个方程式有四个不同的解, 但其中只有两个给出行列式的标准值。我们可以取 $a = 1/\sqrt{2}$; 于是*

$$\begin{aligned} a &= 1/\sqrt{2}, b = 1/\sqrt{2}, \\ c &= -1/\sqrt{2}, d = 1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

换言之, 对于两台装置 S 和 T , T 对 S 绕 y 轴旋转 90° , 变换式为:

$$\left. \begin{aligned} C'_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ + C_-) \\ C'_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-C_+ + C_-) \end{aligned} \right\} \text{绕 } y \text{ 轴旋转 } 90^\circ. \quad (6.32)$$

当然, 我们可以从这些方程式解出 C_+ 和 C_- , 这就给出绕 y 轴转动 -90° 的变换。交换“撇”号, 将得出结论

$$\left. \begin{aligned} C'_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ - C_-) \\ C'_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C_+ + C_-) \end{aligned} \right\} \text{绕 } y \text{ 轴旋转 } -90^\circ. \quad (6.33)$$

§ 6-5 绕 x 轴的转动

你们可能会想: “这样越来越荒谬。接下来他们将做些什么? 绕 y 轴旋转 47° , 然后绕 x 轴旋转 33° 等, 一直这样求下去吗?”不, 我们就要结束了。只用两个我们已经求出的变换——绕 y 轴旋转 90° 以及绕 z 轴转任意的角度(如果你还记得, 我们在一开始就已经把它算出来了)——我们就完全可以做到任意的转动。

作为一个例证, 我们讨论绕 x 轴旋转角度 α 。我们知道如何处理绕 z 轴旋转角度 α , 但是我们现在要的是绕 x 轴旋转。怎样求呢? 第一步, 把 z 轴转到 x 的位置——这就是图 6-8 所示的绕 y 轴旋转 90° 。然后绕 z' 转过角度 α 。再绕 y'' 旋转 -90° 。三次旋转的净效果和绕 x 轴旋转 α 角度是相同的。这是空间的特性。

(这些组合旋转的过程以及它们产生的结果很难直观地掌握。这是比较陌生的, 虽然我们生活在三维空间中, 但是这样转一转, 然后那样转一转会得到些什么结果, 对我们来说是很难领会的。假如我们是鱼或者是鸟, 真正体会过在空中翻筋斗时发生些什么, 或许我们就比较容易理解这些东西。)

* 另一个解改变 a , b , c 和 d 的所有符号, 它相当于 -270° 的旋转。

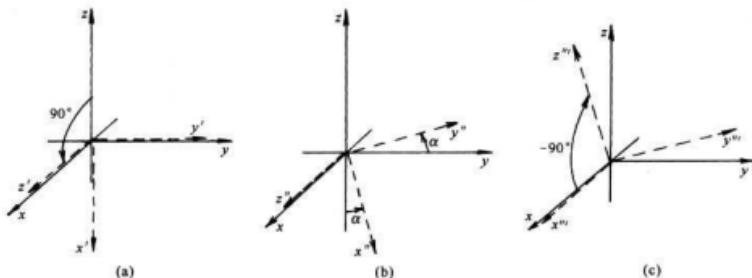


图 6-8 绕 x 轴旋转 α 等效于:(a)绕 y 旋转 $+90^\circ$, 接着(b)绕 z' 旋转 α , 接着(c)绕 y'' 旋转 -90°

不管怎样,现在让我们应用已知的结论来求出绕 x 轴旋转 α 的变换关系。第一步绕 y 轴旋转 $+90^\circ$, 振幅按照式(6.32)改变。我们把旋转后的坐标轴叫做 x' 、 y' 和 z' , 第二步绕 z' 转动角度 α , 我们就得到坐标系 x'' 、 y'' 、 z'' , 对此:

$$C''_+ = e^{i\pi/2} C'_+, \quad C''_- = e^{-i\pi/2} C'_-.$$

最后一次绕 y'' 轴作 -90° 旋转使我们得到 x'' 、 y'' 、 z'' , 由式(6.33)

$$C''_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (C''_+ - C''_-),$$

$$C''_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (C''_+ + C''_-).$$

把上面这两个变换式结合起来, 我们得到:

$$C''_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{+i\pi/2} C'_+ - e^{-i\pi/2} C'_-),$$

$$C''_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{+i\pi/2} C'_+ + e^{-i\pi/2} C'_-).$$

应用对于 C'_+ 和 C'_- 的方程式(6.32), 我们得到完整的变换:

$$C''_+ = \frac{1}{2} |e^{+i\pi/2} (C_+ + C_-) - e^{-i\pi/2} (-C_+ + C_-)|,$$

$$C''_- = \frac{1}{2} |e^{+i\pi/2} (C_+ + C_-) + e^{-i\pi/2} (-C_+ + C_-)|.$$

根据:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta, \text{ 和 } e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta,$$

可把上面的公式写成比较简单的形式, 于是得到:

$$\left. \begin{aligned} C''_+ &= \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right) C_+ + i \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) C_- \\ C''_- &= i \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) C_+ + \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right) C_- \end{aligned} \right\} \text{绕 } x \text{ 轴旋转 } \alpha. \quad (6.34)$$

这就是绕 x 轴旋转任意角度 α 的变换。它比其他的变换只是稍微复杂一点。

§ 6-6 任意的旋转

现在我们可以知道对于完全任意的角度应怎样进行变换。首先，我们知道，两个坐标系之间的任意相对取向可用图 6-9 所示的 3 个角度来描写。假定我们有一组对于 x , y 和 z 而言具有完全任意取向的坐标系 x' , y' 和 z' ，我们可用 3 个欧拉角 α , β , γ 来描写这两个坐标系之间的关系。欧拉角规定了从坐标系 x , y , z 变为坐标系 x' , y' , z' 的 3 次连续转动。从 x , y , z 开始，我们把坐标绕 z 轴转过角度 β , x 轴转到直线 x_1 ，然后绕这临时的 x 轴(即 x_1)旋转 α , 把 z 转至 z' 。最后，绕新的 z 轴(即 z')旋转角度 γ ，就使 x 轴变为 x' , y 轴变为 y' *。我们已经知道这 3 次旋转的每一次旋转的变换关系——它们由式(6.19)和(6.34)所给出。以适当的顺序把它们结合起来，我们得到：

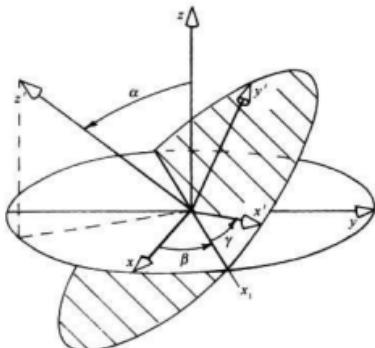


图 6-9 任意坐标系 x' , y' , z' 相对于另一坐标系 x , y , z 的取向可以用欧拉角 α , β , γ 来规定

$$\begin{aligned} C'_+ &= \cos \frac{\alpha}{2} e^{i(\beta+\gamma)/2} C_+ + i \sin \frac{\alpha}{2} e^{-i(\beta-\gamma)/2} C_- , \\ C'_- &= i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i(\beta-\gamma)/2} C_+ + \cos \frac{\alpha}{2} e^{-i(\beta+\gamma)/2} C_- . \end{aligned} \quad (6.35)$$

所以仅仅从关于空间性质的某些假设出发，我们就导出了完全任意的旋转的变换关系式。这就意味着，如果我们知道了处于任一状态的自旋为 $1/2$ 的粒子进入坐标为 x , y , z 的施特恩-格拉赫装置 S 的两束射束的振幅，我们就可以算出这种粒子进入坐标为 x' , y' , z' 的装置 T 中某一射束粒子的比例。换言之，假如我们已经知道自旋为 $1/2$ 的粒子的状态 ψ ，它们在 x , y , z 坐标系中相对于 z 轴向“上”和向“下”的振幅是 $C_+ = \langle + | \psi \rangle$ 和 $C_- = \langle - | \psi \rangle$ ，我们也就知道了相对于另一任意坐标系 x' , y' , z' 的 z' 轴向“上”和向“下”的振幅。方程式(6.35)中 4 个系数是“变换矩阵”中的项，有了它们，就可把自旋为 $1/2$ 的粒子的振幅投影到另一任意的坐标系中。

现在举几个例子来说明怎样进行这种变换。我们来讨论下面这个简单的问题。将一个自旋 $1/2$ 的原子放入只能透过 $(+z)$ 态的施特恩-格拉赫装置中。这个原子进入 $(+x)$ 态的振幅是什么？ $+x$ 轴与系统绕 y 轴旋转 90° 后的 $+z'$ 轴相同。对这个问题，用式(6.32)最为简单——虽然你们也可应用式(6.35)这个完整的方程式。因为 $C_+ = 1$, $C_- = 0$ ，我们得

* 稍微花一点功夫你们就可以看出，通过下述绕原来的坐标轴作三次旋转也能够把 x , y , z 变换为 x' , y' , z' ：①绕原来的 z 轴旋转角度 γ ; ②绕原来的 x 轴旋转角度 α ; ③绕原来的 z 轴旋转角度 β 。

到 $C'_+ = 1/\sqrt{2}$ 。概率就等于这些振幅的绝对值的平方，从而粒子有 50% 的机会通过选择 $(+x)$ 态的装置。如果我们问的是 $(-x)$ 态，振幅就是 $-1/\sqrt{2}$ ，它仍旧给出概率为 $1/2$ ——正如你们从空间的对称性所预期的。所以，如果粒子处于 $(+z)$ 态，它有同样的可能性进入 $(+x)$ 态和 $(-x)$ 态，只不过相位是相反的。

对于 y 轴也同样合适，在 $(+z)$ 态中的粒子进入 $(+y)$ 或进入 $(-y)$ 的机会是 50 对 50，然而，在这种情况下（应用绕 x 轴旋转 -90° 的公式），振幅为 $1/\sqrt{2}$ 和 $-i/\sqrt{2}$ 。这一次两个振幅的相位差为 90° ，这和 $(+x)$ 和 $(-x)$ 相位差为 180° 不同。事实上，这里显示出了 x 和 y 之间的区别。

作为最后一个例子，假定已知在状态 ψ 中的自旋为 $1/2$ 的粒子是对于某个轴 A “向上”极化的。 A 轴由图 6-10 中的 θ 和 ϕ 决定。我们要求出粒子对于 z 轴“向上”的振幅 C_+ 和对于 z “向下”的振幅 C_- 。我们可以这样来求这两个振幅：设想 A 是一个坐标系的 z 轴，这个坐标系的 x 轴指向随便哪一个方向——譬如 A 和 z 组成的平面上，然后可以通过 3 次旋转使 A 的坐标系和 x, y, z 重合。首先，绕 A 轴旋转 $-\pi/2$ ，于是 x 轴落到图上的直线 B 上，然后绕直线 B （坐标系 A 的新的 x 轴）旋转 θ 使 A 和 z 轴重合。最后，绕 z 轴旋转角度 $(\pi/2 - \phi)$ 。记住，我们只有对于 A 为 $(+)$ 的状态，我们得到

$$C_+ = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\pi/2}, \quad C_- = \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\pi/2}. \quad (6.36)$$

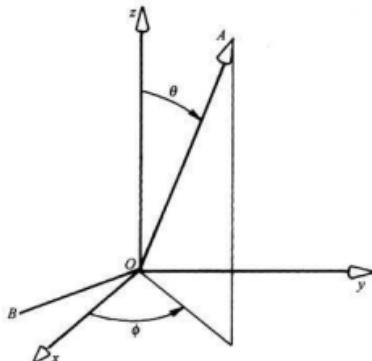


图 6-10 由极角 θ 和 ϕ 定义的 A 轴

最后，我们将以表格形式总结一下本章的结果，这对我们以后的工作是有用的。首先要提醒你们，式(6.35)中的主要结果可以用另外的符号来表示。注意式(6.35)和(6.4)是同一回事。这就是说，式(6.35)中的系数 $C_+ = \langle +S | \psi \rangle$ 和 $C_- = \langle -S | \psi \rangle$ 就是式(6.4)中的振幅 $\langle jT | iS \rangle$ ——处于 S 的 i 态中的粒子进入 T 的 j 态的振幅 (T 相对于 S 的取向由 α, β, γ 表示)。在式(6.6)中我们也把它叫作 R_{ji}^TS 。（我们的符号太多了！）例如， $R_{+i}^TS = \langle -T | +S \rangle$ 就是在 C'_+ 的公式中 C_+ 的系数，即 $i \sin(\alpha/2) e^{i(\beta-\gamma)/2}$ 。因此，我们把我们的结果总结一下排列在表 6-1 中。

表 6-1 由图 6-9 的欧拉角 α, β, γ 所定义的旋转的振幅 $\langle jT | iS \rangle$

$R_{ij}(\alpha, \beta, \gamma)$

$\langle jT iS \rangle$	$+S$	$-S$
$+T$	$\cos \frac{\alpha}{2} e^{i(\beta+\gamma)/2}$	$i \sin \frac{\alpha}{2} e^{-i(\beta-\gamma)/2}$
$-T$	$i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i(\beta-\gamma)/2}$	$\cos \frac{\alpha}{2} e^{-i(\beta+\gamma)/2}$

将某些已经求出的简单的特殊情况的振幅列出来，在使用时往往十分方便。令 $R_z(\phi)$ 表示绕 z 轴转过角度 ϕ 的旋转。它也可以代表相应的旋转矩阵(略去下标 i 和 j ，这很容易理解)。按照同样的精神， $R_x(\phi)$ 和 $R_y(\phi)$ 分别代表绕 x 轴和绕 y 轴旋转角度 ϕ 。在表 6-2 中我们写出矩阵——振幅 $\langle jT|iS \rangle$ 的表——这些是从 S 坐标系投影到 T 坐标系的矩阵元， T 是从 S 经过指定的旋转得到的。

表 6-2 绕 z 轴， x 轴或 y 轴转过角度 ϕ 的旋转 $R(\phi)$ 的振幅 $\langle jT|iS \rangle$

	$R_x(\phi)$		$R_z(\phi)$		$R_y(\phi)$	
$\langle jT iS \rangle$	$+S$	$-S$	$+S$	$-S$	$+S$	$-S$
$+T$	$e^{i\phi/2}$	0	$\cos \phi/2$	$i \sin \phi/2$	$\cos \phi/2$	$\sin \phi/2$
$-T$	0	$e^{-i\phi/2}$	$i \sin \phi/2$	$\cos \phi/2$	$-\sin \phi/2$	$\cos \phi/2$

第7章 振幅对时间的依赖关系

§ 7-1 静止的原子；定态

我们现在要谈一些概率幅在时间中的行为。之所以只讲“一些”，是因为时间中的实际行为必然涉及到空间中的行为。因此，如果我们正确而详尽地处理这个问题，我们立刻就遇到最复杂的可能情况。我们总是处于这种困境，究竟是选用一种逻辑上严密然而颇为抽象的方式来处理问题，还是选用一种全然不严格、然而能使人对真实情况获得某种概念的方式来处理问题——将更仔细的讨论留到以后去。就能量相关性而言，我们将采用第二种做法。我们将作出一系列陈述。我们不要求严格，只是把业已发现的事实告诉你们，使你们对振幅作为时间的函数的特性得到一些感觉。当我们继续讲下去时，描述的精确性将逐渐增加，所以不要感到不安，似乎我们是在凭空捏造。当然，它确实是完全凭空的——凭借实验以及人类想象之空。但是重温历史的发展要花费太多时间，所以我们必须从其中某个阶段开始。我们可以埋头于抽象方式，并推导出一切——然而这么一来你们不易理解——或者，也可以诉诸于大量实验来证实每个论述。我们选取了介于上述两者之间的做法。

虚空空间中只有一个电子时，在一定条件下，它可以有确定的能量。例如，假使它静止着（就是它不作平动，也就没有动量或动能），它具有静止能量。像原子这样较复杂的粒子在静止时也可以有确定的能量，但它也可能由于内部激发而处在另一个能级上。（我们将在以后叙述其中机理。）我们常常可以把处在激发态的原子看作具有确定的能量，但这实际上只是近似正确而已。原子不会永远停留在激发态上，因为它会通过和电磁场相互作用而释放能量。所以，就有产生新状态的振幅——原子跃迁到较低的状态，而电磁场则变为较高的激发态。系统的总能量前后不变，但原子的能量减少了。所以，一个受激原子具有确定的能量这种说法是不精确的，不过这样说常常是方便的，而且并不十分错误。

[附带提一下，为什么原子这样变化而不那样变化？为什么原子辐射光？答案必定与熵有关。当能量处在电磁场中时，这些能量有如此多的存在方式——有如此多的地方供它徘徊——如果我们寻求平衡条件的话，我们发现最可能的情况是电磁场受到激发增加光子，原子退激发。要经过很长的时间后光子再返回来，并且发现它会将原子重新激发。这与以下这个经典问题非常类似：为什么加速运动的电荷会辐射？这并不意味着它“想要”丢掉能量，因为实际上当它辐射时，世界的总能量依然与辐射前一样。辐射或吸收沿着熵增加的方向进行。]

原子核也可处于不同能级，在不计电磁效应的近似下，我们可以说有一个处于激发态的原子核。虽然我们知道它不会永远停留在该状态，但是，从一种多少理想化了的而又易于思考的近似情况着手往往是有用的。在一定的情况下这种近似常常也是合理的。（当我们最初介绍自由落体的经典定律时，并没有把摩擦考虑进去，但几乎从未有过一点摩擦也没有的情况。）

还存在着一些亚核“奇异粒子”，它们具有不同的质量。但较重的粒子会衰变为其他的

轻粒子,因此说它们具有精确定的能量也不正确。只当它们永远不发生变化这样说才是正确的。所以,在我们当作它们具有确定能量这一近似时,忽略了这些粒子必定分裂这一事实。目前,我们有意忘掉这种过程,以后再来学习怎样将它们考虑进去。

假设有个原子——或电子,或任何粒子——在静止时具有确定能量 E_0 。所谓 E_0 指的是总质量乘以 c^2 。这种质量包括了所有内能;所以受激原子具有的质量与处在基态的同样原子的质量不同。(基态的意思是能量最低。)我们称 E_0 为“静止能量”。

对于静止的原子,在各个地方找到它的量子力学振幅处处相同,它与位置无关。当然,这意味着在任何地方找到原子的概率都相同。不过,这里还有更多的含义。概率可以和位置无关,但振幅的相位则可以随着地点而改变。但对静止的粒子来说,整个振幅处处一样,然而它实际上依赖于时间。对于处在具有确定能量 E_0 的状态的粒子来说,在 (x, y, z) 处和时刻 t 找到粒子的振幅是

$$ae^{-i(E_0/\hbar)t}, \quad (7.1)$$

这里 a 是某个常数。此振幅对空间任一点都相同,但它按照式(7.1)依赖于时间。我们就假定这一法则正确的。

当然,式(7.1)也可写成

$$ae^{-i\omega t}, \quad (7.2)$$

这里

$$\hbar\omega = E_0 = Mc^2,$$

M 是原子或粒子的静质量。这里可以用三种不同的方式来表示能量:振幅的频率,经典意义的能量,或者惯性质量。它们彼此等价,只不过是同一事物的不同说法而已。

你们可能认为,想象一个在整个空间各个地点找到它的振幅都相等的“粒子”未免太不可思议了。无论如何,我们平常总将“粒子”想象为位于“某一地点”的一个小物体。但是,不要忘记不确定性原理。如果一个粒子有确定能量,它也就有确定的动量。如果动量的不确定量为零,那么不确定性原理 $\Delta p \Delta x = \hbar$ 告诉我们,位置的不确定量必定无限大,这正是我们所说的在空间中所有各点找到粒子的振幅都相等这句话的意义。

如果原子内部具有不同总能量的不同状态,那么振幅随时间的变化就不相同。如果你不知道它究竟处于哪种状态,那么它有一定的振幅处于某一状态,也有一定的振幅处于另一状态,而这些振幅各有不同的频率。在这些不同的分量之间将出现如拍音那样的干涉现象,这将表现为变化的概率。在原子内将有某种事情“发生”——即使从质心没有漂移这个意义上来说,整个原子是“静止”的。然而,如果原子有一个确定的能量,振幅由式(7.1)给出,而其绝对值平方与时间无关。由此你们可以看出,如果一个东西有确定能量而我们去追问任何有关于它的概率问题的话,答案将与时间无关。但是如果能量确定,虽然振幅随时间而变,但它按虚指数变化,因而绝对值不变。

这就是为什么我们常说在确定能级上的原子在定态之中。假定你们对原子内部进行任何测量,你们将会发现没有一个量(的概率)会随时间而变化。为使概率随时间变化,必须使不同频率的两个振幅相干,而这就意味着我们不可能知道能量是多少。粒子将具有一定的振幅处在一种能量状态,又具有一定的振幅处在另一种能量状态。这就是当某种东西的行为随时间而变时量子力学对它的描述。

如果有这么一种“情况”，它是两种能量不同的状态的混合，那么原来各状态的振幅就按式(7.2)随时间而变化，例如

$$e^{-i(E_1/\hbar)t} \quad \text{及} \quad e^{-i(E_2/\hbar)t}. \quad (7.3)$$

如果这二者组合起来，我们就得到干涉。但我们注意到，如在两种能量上都加上一常数，这将毫无影响。如果另外某人采用一种不同的能量标度，使所有能量增加(或减少)同一个常量，譬如说 A ——那么在他看来，两种状态的振幅将是

$$e^{-i(E_1+A)/\hbar t} \quad \text{及} \quad e^{-i(E_2+A)/\hbar t}. \quad (7.4)$$

所有振幅都将乘上同样的因子 $e^{-i(A/\hbar)t}$ ，因而所有的线性组合或干涉都有同样的因子。在取绝对值平方求概率时，所有的答案都相同。能量标度的原点选择不会造成任何差异，我们可以从我们想选取的任何零点起测量能量。对于相对论的要求来说，测量能量时将静质量也包括在内较好，但对许多非相对论性的情况，从出现的所有能量中都减去某个标准量值常常是有益的。例如，就原子来说，减去 $M_e c^2$ 通常较方便，这里 M_e 是所有各个单独部分——核与电子——的总质量，它当然与整个原子的质量不同。在另一些问题中，从所有能量中减去 $M_e c^2$ 较为有用，这里 M_e 是处在基态的整个原子的质量，于是出现的能量只是原子的激发能。所以，有时我们可以将能量的零点移动很大的一个常量，如果在某个计算中将所有能量都作同样数量的移动，则不会造成任何差别。关于静止粒子我们就讲这些。

§ 7-2 匀速运动

如果我们认为相对论是正确的，那么在一个惯性系中静止的粒子在另一个惯性系中观察可能作匀速运动。在粒子静止的参考系中，概率振幅对所有的 x 、 y 及 z 都相同，但它将随时间 t 而变化。振幅的大小对所有 t 都相同，但相位则依赖于 t 。如果画出作为 x 与 t 的函数关系等相位线——譬如说零相位线——我们就可得到一种表示振幅行为的图。对于静止的粒子，这些等相位线平行于 x 轴而在 t 轴上等间隔分布，如图 7-1 的虚线所示。

另一个不同的参考系—— x' 、 y' 、 z' 、 t' ——相对于粒子在譬如说 x 方向上运动，空间任一点的坐标 x' 与 t' 通过洛伦兹变换和 x 与 t 相联系着。如图 7-1 中那样画出 x' 与 t' 轴，就可将这种变换用图来表示。(见第 1 卷第 17 章图 17-2。)你们可以看出，在 $x'-t'$ 系中等相位*点沿着 t' 轴的间隔与 t 轴的不相同，因而时间变化频率是不相同的。同样，相位随 x' 也有变化，所以概率振幅必定也是 x' 的函数。

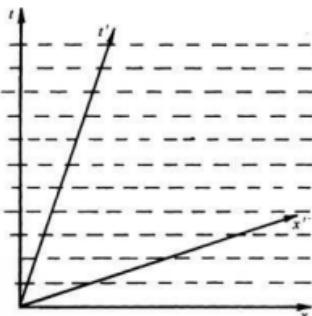


图 7-1 在不同的 $x-t$ 系统中静止
粒子振幅的相对论性变换

* 这里我们假设在两个参考系中对应的点具有相同的相位值。然而这是个微妙的问题，因为量子力学振幅的相位在很大程度上是任意的。为了完全证明这个假设，需要对两个或者多个振幅之间的干涉进行更仔细的讨论。

对以速度 v 沿着负 x 方向运动的洛伦兹变换中 t 与 t' 之间的关系是

$$t = \frac{t' - x'v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

所以现在振幅的变化方式就是

$$e^{-(i/\hbar)E_0 t} = e^{-(i/\hbar)(E_0 t'/\sqrt{1-v^2/c^2} - E_0 vx'/c^2\sqrt{1-v^2/c^2})}.$$

在带撇的系统中它既随时间变化,也随空间变化。如果我们把振幅写成

$$e^{-(i/\hbar)(E_p t' - p' x')},$$

就可以看出 $E'_p = E_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 是在经典物理意义上对一个静止能量为 E_0 而以速度 v 运动的粒子所求得的能量,而 $p' = E'_p v/c^2$ 是相应的粒子动量。

你们知道 $x_\mu = (t, x, y, z)$ 及 $p_\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$ 都是四维矢量,而 $p_\mu x_\mu = Et - p \cdot x$ 是个标量不变量。在粒子的静止参考系中, $p_\mu x_\mu$ 就是 Et ,所以如果变换到另一个坐标系中, Et 应代之以

$$E't' - p' \cdot x'.$$

于是,动量为 p 的粒子的概率幅将正比于

$$e^{-(i/\hbar)(E_p t' - p \cdot x)}, \quad (7.5)$$

这里 E_p 是动量为 p 的粒子的能量,即

$$E_p = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}, \quad (7.6)$$

像前面一样,上式 E_0 是静能。对于非相对论性问题,

$$E_p = M_c^2 + W_p, \quad (7.7)$$

这里 W_p 是原子各组成部分的静能 M_c^2 之外的能量。一般地讲, W_p 既包括原子动能,也包括可称之为“内”能的结合能或激发能。 W_p 可以写成

$$W_p = W_{ph} + \frac{p^2}{2M}, \quad (7.8)$$

而振幅是

$$e^{-(i/\hbar)(W_p t' - p \cdot x)}. \quad (7.9)$$

由于我们一般进行的是非相对论性计算,所以将使用概率幅的这个表达式。

注意,根据我们的相对论性变换,无须任何附加假设,就可得出在空间运动的原子的振幅变化。由式(7.9)空间变化的波数为

$$k = \frac{p}{\hbar}; \quad (7.10)$$

因而波长是

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\hbar}{p}. \quad (7.11)$$

这跟前面我们所用的动量为 p 的粒子的波长相同。德布罗意正是以这种方式首先得出这

个公式的。对一个运动粒子，振幅变化的频率仍由下式得出

$$\hbar\omega = W_p. \quad (7.12)$$

式(7.9)的绝对值平方正好是1，所以对一个具有确定能量的运动粒子，在任何地方找到它的概率都相同，并且不随时间变化。（重要的是应当注意振幅是复数波。假如我们用的是实数正弦波表示，其平方就会随位置而变化，而这是不正确的。）

当然，我们知道存在着粒子由一处运动到另一处的情况，因而概率随位置和时间而变化。怎样来描写这种情况呢？我们可以这样做，把振幅看成两个或两个以上的对应于确定能量状态的振幅之叠加。我们已经在第1卷第48章讨论过这种情况——即使对概率振幅而言也同样适用！我们发现具有不同波数 k （即动量）及不同频率 ω （即能量）的两个振幅之和将给出干涉峰或拍，因此振幅的平方就随着空间与时间变化。我们也发现这些拍以下式给出的所谓“群速度”运动：

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k},$$

这里 Δk 与 $\Delta\omega$ 分别是两列波的波数之差与频率之差。对更复杂的波——由许多频率全都相近的振幅叠加而成——来说，群速度是

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (7.13)$$

取 $\omega = E_p / \hbar$ 及 $k = p / \hbar$ ，我们看到

$$v_g = \frac{dE_p}{dp}. \quad (7.14)$$

利用式(7.6)，我们有

$$\frac{dE_p}{dp} = c^2 \frac{p}{E_p}. \quad (7.15)$$

但 $E_p = Mc^2$ ，所以

$$\frac{dE_p}{dp} = \frac{p}{M}. \quad (7.16)$$

这正是粒子的经典速度。或者，如果使用非相对论性表达式，我们有

$$\omega = \frac{W_p}{\hbar} \quad \text{和} \quad k = \frac{p}{\hbar},$$

以及

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{dW_p}{dp} = \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2}{2M} \right) = \frac{p}{M}, \quad (7.17)$$

这样又得到了经典速度。

于是我们的结果是，如果有几个能量几乎相同的纯能量状态的振幅，它们的干涉将产生概率“团”，以具有同样能量的粒子的经典速度在空间运动。然而，应当说明，当我们说将两列波数不同的波叠加所得到的拍对应于运动粒子的时候，我们已经引进了不能由相对论推出的某种新的东西。我们讲过静止粒子的振幅如何，还要推知如果粒子运动，振幅又将如何。但由这样的论证不可能推论出当两列波以不同速度移动时会发生些什么。如果我们使

其中一列停下,就不能停止另一列。所以我们无形中添加了额外的假设,即不仅式(7.9)是可能的解,而且对于同样的系统还存在具有各种动量 p 的解,并且这些不同的项会发生干涉。

§ 7-3 势能;能量守恒

现在我们来讨论当粒子能量可以变化时将出现什么情况。我们从下述问题开始考虑。粒子在一个可用势描述的力场中运动,首先讨论势是常数的效应。假设有个大金属盒,将其

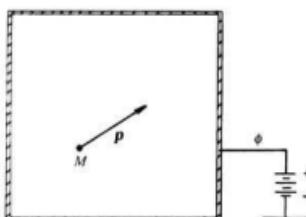


图 7-2 质量为 M , 动量为 p 的粒子处在一个恒势区域中

静电势升高到 ϕ , 如图 7-2 所示。如果在盒内有带电体, 它们的势能将是 $q\phi$ (我们称之为 V), 完全与位置无关。因为恒势对盒内所发生的任何事情都没有影响, 因此在盒内的物理状况不会发生任何变化。我们既然没法推知答案是什么, 那就必须进行猜测。你们多少会料到一个合理的猜测是: 能量必定是势能 V 与能量 E_p 的和, 这里 E_p 本身就是内能与动能的和。于是, 振幅正比于

$$e^{-(i/\hbar)[(E_p + V)r - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}]}. \quad (7.18)$$

一般的原则是: i 的系数(可称之为 ω)总是由系统的总能量给出, 即内能(或“质量”)加动能再加势能:

$$\hbar\omega = E_p + V. \quad (7.19)$$

或者, 对非相对论性情况有

$$\hbar\omega = W_{\text{in}} + \frac{p^2}{2M} + V. \quad (7.20)$$

现在, 盒内会出现什么物理现象呢? 如果存在着几个不同的能量状态, 我们将得到什么结果? 对每个状态的振幅都有一个相同的附加因子

$$e^{-(i/\hbar)V_r},$$

其余的因子都是 $V=0$ 时的项。这只不过好像改变了能量标度的零点。它使所有的振幅都产生相同的相位变化, 但我们在前面已经看到, 这并不会使概率有任何改变。所有的物理现象都相同。(我们假定讨论的是同一个带电体的不同状态, 因此 $q\phi$ 对所有的状态都一样。如果带电体由一个状态变到另一个状态时电荷也会变化, 那就会有完全不同的结果, 但电荷守恒防止了这种情况的出现。)

至此, 我们的假设与我们对参照能级的变化所预期的情况是相符的。但如它确实正确, 那就应当对势能不是恒量的情况亦成立。一般而言, V 可以随空间与时间两者以任意方式变化, 有关振幅的完整结果必须借微分方程求得。我们不打算立刻就来处理这种一般情况, 而只想对某些事情怎样发生获得一些概念, 所以我们将考虑只随空间作极缓慢变化而对时间为恒定的势场, 这样我们就可以将经典概念与量子概念作一比较。

设想如图 7-3 所示的情况: 有两个分别具有恒势 ϕ_1 与 ϕ_2 的盒子。假设在它们之间的

区域中势从一个值平滑地变化到另一个值，我们设想在任何一个区域中都有找到某个粒子的振幅，并假定粒子的动量足够大，以至在任何有很多波长的小区域内势几乎是恒定的。于是我们会认为在空间的任何部分，振幅应具有式(7.18)那样的形式，而其中的 V 取所在的该部分空间的值。

让我们考虑一个 $\phi_1 = 0$ 的特殊情况，因而此处势能为 0，但 $q\phi$ 为负值，所以按照经典观点，在第二个盒子内的粒子具有更多的能量。按照经典观点，粒子在第二个盒内将跑得快些——它将具有更多能量，从而有更大的动量。现在来看一下怎样能从量子力学来得出这个结论。

依照所作的假设，在第一个盒中的振幅将正比于

$$e^{-(i/\hbar)[(W_{p_1} + p_1^2/(2M) + V_1)t - p_1 \cdot x]}, \quad (7.21)$$

而在第二个盒内的振幅正比于

$$e^{-(i/\hbar)[(W_{p_2} + p_2^2/(2M) + V_2)t - p_2 \cdot x]}. \quad (7.22)$$

(这里认为内能不变，因而在两个区域中都相同。)现在的问题是这两个振幅在两盒子之间的区域中如何相匹配？

我们假设势不随时间变化，即所有条件都不发生变化。于是我们就可假定各处不同的振幅(即其相位)都有相同的频率——可以说在“介质”中没有任何事情与时间有关。如果空间中没有任何变化，我们可以认为在一个区域中的波在全部空间中“产生”出子波，它们全都可以相同频率振动——就像光波通过几种静止的材料时不改变它们的频率一样。如果式(7.21)和(7.22)中的频率相同，就必定有

$$W_{p_1} + \frac{p_1^2}{2M} + V_1 = W_{p_2} + \frac{p_2^2}{2M} + V_2. \quad (7.23)$$

两边都正好等于经典的总能量，故式(7.23)就是能量守恒的表述。换言之，与能量守恒的经典表述相等价的量子力学表述是：如果条件不随时间变化，则粒子的频率到处都相同。这一切都与 $\hbar\omega = E$ 这个概念相符合。

在上述特例中 $V_1 = 0$ ，而 V_2 为负。式(7.23)给出 p_2 大于 p_1 ，所以区域 2 中波的波长较短。等相面由图 7-3 中虚线表示出来。我们也画出了振幅的实部图，它再次显示出由区域 1 至区域 2 波长减少的情况。波的群速度 p/M 也按照我们由经典的能量守恒关系所预期的方式增加，因为经典能量守恒律由式(7.23)所表示。

有一种有趣的特殊情况是： V_2 很大以至 $V_2 - V_1$ 大于 $p_1^2/(2M)$ ，这时，由公式

$$p_2^2 = 2M \left[\frac{p_1^2}{2M} - V_2 + V_1 \right] \quad (7.24)$$

给出的 p_2^2 为负值。这意味着 p_2 是个虚数，譬如说 ip' ，按照经典的观点我们会说粒子决不会进入区域 2，它没有足够的能量越过势垒。然而，在量子力学上，振幅仍由式(7.22)给出，

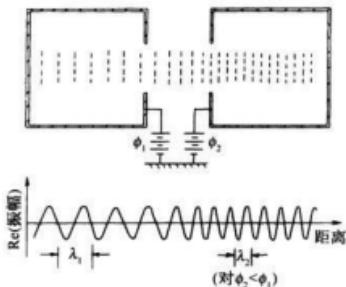


图 7-3 粒子由一个势场转移
至另一个势场的振幅

它随空间的变化方式仍是

$$e^{(i/\hbar)p_2 \cdot x}.$$

但如 p_2 是虚数, 空间相关性变为实指数形式。譬如说粒子原先沿 $+x$ 方向运动, 那么振幅则按

$$e^{-\delta' x/\hbar} \quad (7.25)$$

而变化, 它随着 x 的增加而迅速减小。

设想这两个具有不同势的区域互相非常靠近, 这样势能从 V_1 突然变为 V_2 , 如图 7-4(a) 所示。如果我们画出振幅的实部, 就得到图 7-4(b) 中所示的曲线。在区域 1 中的波对应于试图进入区域 2 的粒子, 但在进入区域 2 后振幅就迅速衰减了。在区域 2 中还是有可能观察到粒子的机会——在经典(观念)上它是根本不可能达到该区域的——但除去紧靠边界处外, 振幅是非常小的。这种情况与我们在光的全内反射情况下所见到的极为相像。这时光没有像通常那样射出, 但若在离表面的一、二个波长的地方放上某种东西, 我们就可以观察到光。

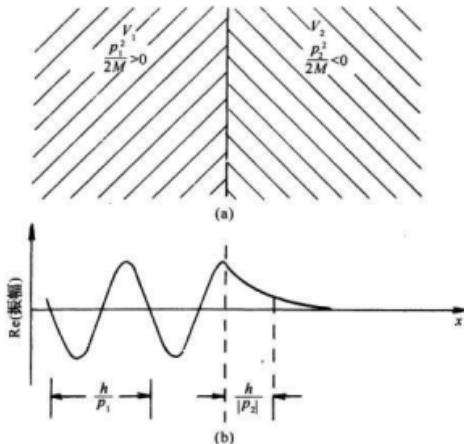


图 7-4 向很强的排斥势运动的粒子的振幅

你们一定还记得, 如果将另一个表面紧靠着光全反射的那个边界面, 就会发现有一些光透射到了第二块材料中。在量子力学中粒子也发生相类似的情况。如在一个狭小区域中有一个颇大的势 V 以至使经典意义上的动能为负, 按照经典的观点粒子绝不会通过这个区域。但在量子力学中, 指数衰减的振幅可以通过这个区域, 给出在动能重新为正的另一边找到粒子的微小概率, 情况如图 7-5 所示。这个效应就称为量子力学的“势垒穿透”效应。

量子力学振幅的势垒穿透对铀核的 α 粒子衰变作出了解释——或者说描述。如图 7-6(a) 所示为 α 粒子的势能作为离铀核中心之距离的函数。如果我们打算把一个能量为 E 的 α 粒子射入铀核, 它将会受到来自核电荷 Z 的静电斥力, 按照经典力学, 它不可能靠得比距离

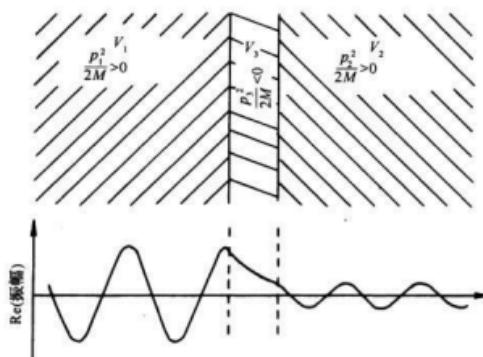
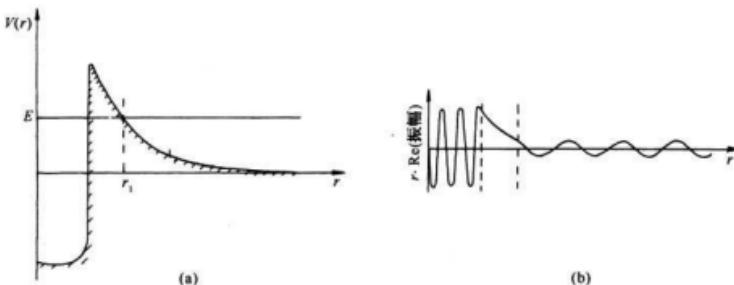


图 7-5 粒子穿透势垒的振幅

r_1 更近，在 r_1 处它的总能量与势能 V 相等。然而，在原子核内部，因为短程核力的强烈吸引，势能就大为降低。那么，在放射衰变中我们发现具有能量 E 的 α 粒子由核内射出，这是怎么回事呢？原因是它们带有能量 E 从核内出发，并“透”过势垒。概率幅大致如图 7-6(b) 所示。当然实际上指数衰减要比图中画的大得多。事实上，令人非常惊异的是，铀核中的 α 粒子的平均寿命长达 45 亿年，而核内的固有振动极快——约为 10^{22} Hz ！怎么可能由 10^{-22} s 得出 10^9 年这样一个数呢？答案在于指数提供了约为 e^{-45} 这样极其微小的因子，这就得到了极其微小的、但是确定的泄漏概率。一旦 α 粒子处在核中，在外部几乎就没有找到它的振幅，然而，如果你们取许多铀核，并且等待足够长时间的话，你们就可能有幸发现一个 α 粒子跑了出来。

图 7-6 (a) 铀核中 α 粒子的势函数；(b) 概率幅的定性图示

§ 7-4 力；经典极限

假设有个运动粒子穿过一个区域，在该区域内，存在着一个在垂直于运动方向上变化的势场。按照经典的观点我们可以用图 7-7 来描述这种情况。如粒子沿 x 方向运动，进入一个势

随 y 而变化的区域,那么这个粒子将从力 $F = -\partial V / \partial y$ 得到一个横向的加速度。如果只是在宽为 w 的有限区域中存在力的作用,那么作用时间只是 w/v 。粒子获得的横向动量就将是

$$p_x = F \frac{w}{v},$$



图 7-7 在横向势梯度作用下粒子的偏转

而偏转角 $\delta\theta$ 就是

$$\delta\theta = \frac{p_x}{p} = \frac{Fw}{pv},$$

这里 p 是初始动量。用 $-\partial V / \partial y$ 代 F , 就有

$$\delta\theta = -\frac{w}{pv} \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (7.26)$$

现在我们该来看一下, 所设想的式(7.20)那样的波是否能解释这样的结果。我们从量子力学角度来看这同一件事, 假设每样东西的尺度与概率幅波的波长相比都非常大。在任何小区域内我们可以说振幅依下式变化

$$e^{-(i/\hbar)[(W + p^2/(2M) + V)x - p \cdot x]}. \quad (7.27)$$

我们是否能由此看出当 V 具有横向梯度时上式会造成粒子的偏转呢? 在图 7-8 中我们描绘了概率波的样子。我们所画的是一系列“等相位”线, 你们可将它们看作振幅的相位为零的面。在每个小区域内, 相邻等相位线之间的距离, 即波长是

$$\lambda = \frac{\hbar}{p},$$

p 与 V 之间的关系是

$$W + \frac{p^2}{2M} + V = \text{常数}. \quad (7.28)$$

在 V 较大区域中, p 较小, 波长就较长。因此等相位线之间的角度就发生变化, 如图中所示。

为求出波的等相位线的角度的变化, 我们注意到, 对于图 7-8 中 a 和 b 两条路径而言, 存在着势差 $\Delta V = (\partial V / \partial y)D$, 所以两条路径上就有动量差 Δp , 这可由式(7.28)得出:

$$\Delta \left(\frac{p^2}{2M} \right) = \frac{p}{M} \Delta p = -\Delta V. \quad (7.29)$$

因此, 沿两条路径上的波数 p / \hbar 是不同的, 这意味着相位以不同的速率前进。相位增加率的差值是 $\Delta k = \Delta p / \hbar$, 于是经过距离 w 后的总的相位差是

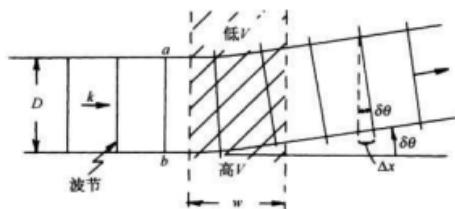


图 7-8 在具有横向势梯度的区域中的概率幅波

$$\Delta(\text{相位}) = \Delta k \cdot w = \frac{\Delta p}{\hbar} w = -\frac{M}{p} \Delta V \cdot w. \quad (7.30)$$

这就是当波离开狭条阴影区时沿路径 b 的相位“超前”于沿路径 a 的相位的数量。而在狭条外的区域中,这一数量的相位超前对应于等位相线超前的数量为

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta(\text{相位}) = \frac{\hbar}{p} \Delta(\text{相位})$$

或

$$\Delta x = -\frac{M}{p^2} \Delta V \cdot w. \quad (7.31)$$

参考图 7-8,我们看到新的波前将偏转 $\delta\theta$, $\delta\theta$ 可由下式得出

$$\Delta x = D \delta\theta, \quad (7.32)$$

于是我们有

$$D \delta\theta = -\frac{M}{p^2} \Delta V \cdot w. \quad (7.33)$$

如果用 v 代替 p/M ,用 $\partial V/\partial y$ 代替 $\Delta V/D$,上式就与式(7.26)相同。

我们刚才所得结果只是在势缓慢而光滑变化的情况下(我们称此为经典极限)才是正确的。我们证明了在这些条件下,假如势 V 对概率幅相位的贡献是 Vt/\hbar 的话,我们将得出与由 $F = ma$ 所得的同样的粒子运动。在经典极限下,量子力学与牛顿力学相一致。

§ 7-5 自旋 1/2 粒子的“进动”

注意,我们还不曾对势能作过任何特殊的假定——它只是个由其导数可求出力的能量。例如在施特恩-格拉赫实验中,能量是 $U = -\mu \cdot B$,如果 B 在空间中变化,由 U 就能求出力来。如果我们要作一个量子力学描述,就可以说一束粒子的能量按一种方式变化,另一束粒子的能量则按相反的方式变化。(我们可以将磁能 U 归入势能 V 中,也可以归入“内”能 W 中,这并没有什么关系。)由于能量的变化,波被折射,粒子束往上或往下偏转。(现在我们看到量子力学所给出的弯曲和由经典力学计算所得的结果相同。)

从振幅对势能的依赖关系,我们也可以预期:如果粒子处在沿 z 方向均匀的磁场中,它的概率幅必定按

$$e^{-(i/\hbar)(-\mu_z B)t}$$

而随时间变化。(事实上,我们可以把这幅作为 μ_z 的定义。)换言之,假如我们把一个粒子置于均匀磁场 B 中,经过一段时间 t ,其概率幅将为无磁场时的概率幅乘以

$$e^{-(i/\hbar)(-\mu_z B)t}.$$

由于对自旋 $1/2$ 粒子来说, μ_z 可以是某个数 μ 的正值或负值,因而在匀磁场中这两种可能状态的相位将有同样的变化率,但沿着相反的方向。两种振幅分别要乘以

$$e^{\pm(i/\hbar)\mu Br}. \quad (7.34)$$

这个结果会得出一些有趣的结论:假定有个自旋 $1/2$ 粒子处于某个不完全朝上或朝下的状态,我们可以用处于纯粹朝上和纯粹朝下状态的振幅来描述这一状态,但在磁场中,这两个态的相位将有不同的变化率。所以如果要问一些有关振幅的问题,那么答案将取决于它在磁场中已停留了多长时间。

作为一个例子,我们考虑 μ 子在磁场中的衰变。当 μ 子作为 π 介子衰变的产物而形成时,它们是极化的(换言之,它们有着优先的自旋取向)。接着, μ 子衰变——平均约为 $2.2\text{ }\mu\text{s}$ ——发射出一个电子及两个中微子:

$$\mu \longrightarrow e + \nu + \bar{\nu}.$$

发现在这个衰变中(至少在最高能量下)电子优先在与 μ 子自旋方向相反的方向上发射出来。

假设我们考虑一个如图 7-9 所示的实验安排。如果极化的 μ 子从左方射入而在一块材料的 A 中停了下来,稍过一会儿它们就会衰变。

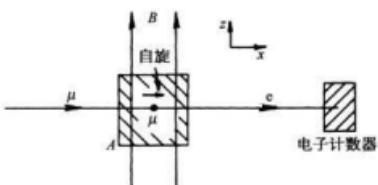


图 7-9 μ 子衰变实验

一般地说,电子将向一切可能方向飞出。然而,假定当 μ 子进入这块停在 A 处的物质时,全都带有沿 x 方向的自旋。如果没有磁场的话,将会在衰变方向上存在某种角分布,我们想要知道的是磁场的存在怎样改变这种分布。我们预期分布会以某种方式随时间而变。通过求出任何时刻在 $(+x)$ 态找到 μ 子的振幅,我们就可以知道发生了什么。

这个问题可以表述为:已知一个 μ 子在 $t = 0$ 时其自旋沿 $+x$ 方向,那么在 t 时刻它处在同一自旋态的振幅为何?关于自旋 $1/2$ 粒子处在与自旋相垂直的磁场中的行为,我们现在还没有任何法则,但我们知道磁场对于自旋朝上或朝下的状态所产生的影响——它们的振幅需乘以式(7.34)的因子。于是我们的办法就是选择这样一种表象,其中的基础态对 z 方向(场方向)而言为自旋朝上和自旋朝下。任何问题都可参照这两个态的振幅来表达。

让我们设 $\psi(t)$ 表示 μ 子状态。当它进入块状物 A 时,其状态为 $\psi(0)$,我们想知道晚些时刻 t 的 $\psi(t)$ 。如果用 $(+z)$ 与 $(-z)$ 表示两个基础态,我们知道 $\langle +z | \psi(0) \rangle$ 及 $\langle -z | \psi(0) \rangle$ 这两个振幅——我们知道这些振幅,因为我们知道 $\psi(0)$ 表示自旋沿 $(+x)$ 方向的状态。由

上一章所得的结果,这些振幅是*

$$\langle +z | +x \rangle = C_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

及 (7.35)

$$\langle -z | +x \rangle = C_- = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

它们正好相等。由于这些振幅涉及的是 $t = 0$ 时的状况,让我们称它们为 $C_+(0)$ 及 $C_-(0)$ 。

现在我们知道这两个振幅将如何随时间变化。利用式(7.34),我们有

$$C_+(t) = C_+(0)e^{-(i/\hbar)\mu B t}$$

及

$$C_-(t) = C_-(0)e^{+(i/\hbar)\mu B t}. \quad (7.36)$$

但如我们求得了 $C_+(t)$ 及 $C_-(t)$,也就知道了在时刻 t 的一切状况。唯一的困难在于我们想要知道的是在 t 时刻自旋沿 $+x$ 方向的概率。然而,我们的一般法则可以处理这个问题。我们将 t 时刻处在 $(+x)$ 状态的振幅记为 $A_+(t)$,

$$A_+(t) = \langle +x | \psi(t) \rangle = \langle +x | +z \rangle \langle +z | \psi(t) \rangle + \langle +x | -z \rangle \langle -z | \psi(t) \rangle$$

或

$$A_+(t) = \langle +x | +z \rangle C_+(t) + \langle +x | -z \rangle C_-(t). \quad (7.37)$$

再利用前章的结果——或者最好用第5章的等式 $\langle \phi | x \rangle = \langle x | \phi \rangle^*$ ——我们知道

$$\langle +x | +z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle +x | -z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

于是我们就知道了式(7.37)中的所有量,从而得到

$$A_+(t) = \frac{1}{2} e^{(i/\hbar)\mu B t} + \frac{1}{2} e^{-(i/\hbar)\mu B t},$$

或

$$A_+(t) = \cos \frac{\mu B}{\hbar} t.$$

这是多么简单的一个结果!注意这个答案与我们预期的 $t = 0$ 时的结果一致。我们得到 $A_+(0) = 1$,这是正确的,因为我们假设 $t = 0$ 时 μ 子就处在 $(+x)$ 态中。

在 t 时刻找到 μ 子处在 $(+x)$ 态的概率 P_+ 是 $(A_+)^2$,即

$$P_+ = \cos^2 \frac{\mu B t}{\hbar}.$$

* 如果你们跳过了第6章,可以在此刻把式(7.35)作为尚未推导过的法则。我们在后面(第10章)将对自旋进动作更全面的讨论,包括把这些振幅推导出来。

概率在 0 与 1 之间振荡，如图 7-10 所示。注意当 $\mu B t / \hbar = \pi$ (不是 2π) 时概率回到 1。因为我们已将余弦函数平方，概率以频率 $2\mu B / \hbar$ 自身重复。

于是我们发现，图 7-9 中的电子计数器捕获衰变电子的机会随 μ 子处于磁场中的时间作周期变化。变化频率与磁矩 μ 有关。事实上， μ 子的磁矩正是以这种方式测得的。

当然，我们可以利用同样的方法来回答有关 μ 子衰变的任何其他问题。比方说，在与 x 方向成 90° 但仍与磁场方向垂直的 y 方向上检测到衰变电子的机会如何随时间 t 而变？如果你们把它求出来，处在 $(+y)$ 态的振幅将按 $\cos^2 [(\mu B t / \hbar) - \pi/4]$ 随时间变化，它的振动周期与前相同，但是晚了四分之一周期才达到最大值，即当 $\mu B t / \hbar = \pi/4$ 。事实上所出现的情况是，随着时间的推移， μ 子经历一系列状态，它们对应着在绕着 z 轴的不断转动的方向上的完全极化，我们可以这样来描述这种情况：自旋以频率作进动。

你们开始看到，在描述事物如何随时间而变的行为时量子力学所采取的表述方式是怎样的。

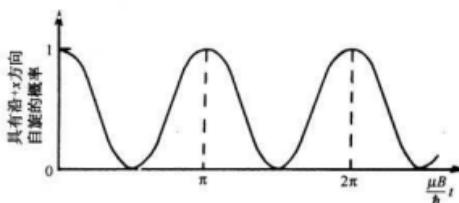


图 7-10 自旋 $1/2$ 粒子对于 x 轴处于 $(+)$ 态的概率与时间的关系

第8章 哈密顿矩阵

§ 8-1 振幅与矢量

在开始讲述本章的主题前, 我们想来描述一些在量子力学文献中用得很多的数学概念。了解它们会使你们阅读这方面的其他书籍或论文时更为方便。第一个概念是: 量子力学的方程与两个矢量的标积方程数学上十分相似。你们记得, 如果 χ 和 ϕ 是两个状态, 那么从 ϕ 态开始而终止于 χ 态的振幅, 可以写成由 ϕ 进入一组完全的基础态中各个基础态, 再由各基础态进入 χ 态之振幅, 最后对这一组全部基础态求和:

$$\langle \chi | \phi \rangle = \sum_{\text{所有} i} \langle \chi | i \rangle \langle i | \phi \rangle. \quad (8.1)$$

我们曾用施特恩-格拉赫装置解释这点, 但要提醒你们注意: 这里并不需要有这种装置。式(8.1)是数学定律, 不论我们是否装上过滤设备, 它总是正确的——不用老是想象有仪器在那儿。我们可以简单地把它看作振幅 $\langle \chi | \phi \rangle$ 的一个公式。

我们把式(8.1)与两个矢量 \mathbf{B} 及 \mathbf{A} 的点积公式作个比较。如果 \mathbf{B} 与 \mathbf{A} 是三维空间中的普通矢量, 我们可以将点积写成

$$\sum_{\text{所有} i} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}), \quad (8.2)$$

这里符号 \mathbf{e}_i 表示沿 x , y 及 z 方向的 3 个单位矢量。于是 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_1$ 就是通常所说的 B_x ; $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_2$ 则是通常说的 B_y ; 等等。这样, 式(8.2)就等同于

$$B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z,$$

这就是 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ 的点积。

比较式(8.1)与(8.2), 可以看出下述类似点: 态 χ 与 ϕ 对应于两个矢量 \mathbf{B} 与 \mathbf{A} , 诸基础态 i 对应于一些特定的矢量 \mathbf{e}_i , 我们用这些矢量来表示所有其他矢量。任何矢量都可表示成 3 个“基矢” \mathbf{e}_i 的线性组合。而且, 如果你知道该组合中每个“基矢”的系数——矢量的 3 个分量——你就知道了这个矢量的一切。类似地, 任何量子力学状态可以用处在各个基础态的振幅 $\langle i | \phi \rangle$ 完全地表示出来, 如果知道了这些系数, 也就知道了有关此态的一切。因为存在着这样切近的类比, 我们也常常将“态”称为“态矢量”。

由于基矢 \mathbf{e}_i 都互相垂直, 就有关系式

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (8.3)$$

这与各基础态 i 之间的关系式(5.25)相对应:

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}. \quad (8.4)$$

现在你们可以明白,为什么人们说基础态 i 全都“正交”。

在式(8.1)与点积之间有个小小的差别。我们知道

$$\langle \phi | \chi \rangle = \langle \chi | \phi \rangle^*, \quad (8.5)$$

但在矢量代数中,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

由于在量子力学中使用了复数,我们必须始终保持各项的先后次序,而在点积中,次序是无关紧要的。

现在来考虑下列矢量等式:

$$\mathbf{A} = \sum_i \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}). \quad (8.6)$$

这种写法有点与众不同,但它是正确的。它的含义与下式相同:

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i \cdot \mathbf{e}_i = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z. \quad (8.7)$$

不过请注意,式(8.6)涉及到一个不同于点积的量。点积只是数,而式(8.6)是矢量方程。矢量分析的一大诀窍就是从方程中抽象出矢量概念本身。或许有人也同样想从量子力学公式(8.1)中抽象出一个类似于“矢量”的东西来——这的确可以。我们将式(8.1)的两边移去 $\langle \chi |$,从而写出如下方程(别怕,这只是个记法,不一会儿你们就会弄清符号的含义):

$$| \phi \rangle = \sum_i | i \rangle \langle i | \phi \rangle. \quad (8.8)$$

人们将括号 $\langle \chi | \phi \rangle$ 分为两半。后半个括号 $|\phi\rangle$ 常称为右矢(ket),前半个括号 $\langle \chi |$ 称为左矢(bra)(放在一起,就构成“左-右”(“bra-ket”)——这是狄拉克提出的符号),半括号 $\langle \chi |$ 及 $| \phi \rangle$ 也称为态矢量。无论如何,它们不是数,而一般来说,我们希望计算所得的结果为数,所以这些“未完成”的量只是计算中的过渡步骤。

实际上,迄今我们的所有结果都用数表示。我们是怎样设法避开矢量的呢?有意思的是,即使在通常的矢量代数中,我们也能使所有的方程只包括数。譬如,我们总可以将矢量方程

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

改写为

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C} \cdot (m\mathbf{a}).$$

于是我们就有了一个对任何矢量 \mathbf{C} 都成立的点积方程。但是,如果对一切 \mathbf{C} 都成立,那么写出 \mathbf{C} 来就没有什么意思了!

现在来看看式(8.1)。它是对任何 χ 都成立的方程。所以为简化书写起见,我们正可以拿走 χ 而将它改写为式(8.8)。该式与式(8.1)具有同样多的信息,只要我们理解到,它总是要在两边“左乘”某个 $\langle \chi |$ (这只不过是重新拼上括号而已)才得以“完成”。所以式(8.8)的意义不多不少正好与式(8.1)相同。当你想要数字时,就把合适的 $\langle \chi |$ 放进去。

或许你已对式(8.8)中的 ϕ 感到疑惑。既然这式对任何 ϕ 成立,为什么我们还要保留

它？的确，狄拉克提议， ϕ 也一样可以抽掉，于是我们就只有

$$| = \sum_i | i \rangle \langle i |. \quad (8.9)$$

这就是量子力学的伟大定律！（在矢量分析中没有与这类似的公式。）它表示如果在方程式等号两边从左、右两侧各放进任何两个态 χ 和 ϕ ，就回到式(8.1)。这种表达实际上并非很有用处，但它很巧妙地提示了方程对任何两个态都成立。

§ 8-2 态矢量的分解

让我们再来看一下式(8.8)；可以用下述方式来考虑它。任何态矢量 $|\psi\rangle$ 可以表示为一组具有适当系数的基“矢”的线性组合——或者，只要你喜欢，也可表示为一些比例恰当的“单位矢量”的叠加。为了强调系数 $\langle i | \psi \rangle$ 只是普通的（复）数，我们可以假设

$$\langle i | \psi \rangle = C_i.$$

那么式(8.8)就等同于

$$|\psi\rangle = \sum_i | i \rangle C_i. \quad (8.10)$$

我们可以对任何别的态矢量，例如 $|\chi\rangle$ ，写下类似的关系式，当然，其中的系数不同——譬如说为 D_i 。于是就有

$$|\chi\rangle = \sum_i | i \rangle D_i, \quad (8.11)$$

这里 D_i 就是振幅 $\langle i | \chi \rangle$ 。

假定我们一开始已从式(8.1)抽去 ϕ ，那就有

$$\langle \chi | = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i |. \quad (8.12)$$

我们记得 $\langle \chi | i \rangle = \langle i | \chi \rangle^*$ ，故可将上式写为

$$\langle \chi | = \sum_i D_i^* \langle i |. \quad (8.13)$$

有趣的是，只要将式(8.13)与式(8.10)相乘，就能回到 $\langle \chi | \psi \rangle$ 。在相乘时，必须注意求和指标，因为在两式中它们是完全不同的。让我们先把式(8.13)重新写为

$$\langle \chi | = \sum_j D_j^* \langle j |,$$

这当然不会改变什么。然后将它与式(8.10)相乘，就有

$$\langle \chi | \psi \rangle = \sum_j D_j^* \langle j | i \rangle C_i, \quad (8.14)$$

不过，记住 $\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$ ，因而在求和中只留下 $j = i$ 的项。于是得到

$$\langle \chi | \psi \rangle = \sum_i D_i^* C_i, \quad (8.15)$$

当然，这里 $D_i^* = \langle i | \chi \rangle^* = \langle \chi | i \rangle$ ，而 $C_i = \langle i | \psi \rangle$ 。由此我们又一次看到与点积

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \sum_i B_i A_i$$

非常相似。唯一的差别在于取了 D_i 的复数共轭。这样式(8.15)就说明如果态矢量 $\langle \chi |$ 及 $|\phi\rangle$ 在基矢 $|i\rangle$ 或 $|i\rangle$ 上展开, 那么由 ϕ 到 χ 的振幅就可由式(8.15)的那种类型的点积得到。当然, 这个表达式只是用不同符号写的式(8.1)罢了。我们就这样为了习惯新的记号而兜了一个圈子。

或许我们应当再一次强调, 三维空间的矢量是用3个相互正交的单位矢量来描写的, 而量子力学状态的基矢 $|i\rangle$ 则必须遍布在适用于任何特定问题的完整的集合内。按具体情况, 基础态可以有两个、三个、五个或无限多个。

我们也曾谈到当粒子通过一个仪器时发生的情况。假如让粒子从某个定态 ϕ 开始, 通过一台仪器, 然后来测量它们是否处在 χ 态, 其结果可由以下振幅来表示:

$$\langle \chi | A | \phi \rangle. \quad (8.16)$$

在矢量代数中没有与这个符号相近的类似符号。(它更接近于张量代数, 但这种类比没有特别的用处。)由第5章式(5.32)可知, 我们可将式(8.16)写为

$$\langle \chi | A | \phi \rangle = \sum_j \langle \chi | i \rangle \langle i | A | j \rangle \langle j | \phi \rangle. \quad (8.17)$$

这正是两次使用基本法则式(8.9)的一个例子。

如果在 A 后面再放进另一台仪器 B , 则有

$$\langle \chi | BA | \phi \rangle = \sum_{ijk} \langle \chi | i \rangle \langle i | B | j \rangle \langle j | A | k \rangle \langle k | \phi \rangle. \quad (8.18)$$

这又是直接由狄拉克记号方法式(8.9)得到的——只要记得我们总可以在 B 与 A 之间划一个竖线(|), 它正犹如因子1。

顺便提一下, 我们可以用另一种方法理解式(8.17)。设想处在 ϕ 态的粒子进入仪器 A , 而离开时则处在 ψ ("psi")态。换句话说, 我们可以向自己提出这样的问题: 能否找到这样一个 ψ 态, 使得从 ψ 态到 χ 态的振幅在任何时刻和任何地点都恒等于振幅 $\langle \chi | A | \phi \rangle$? 答案是肯定的。我们想用下式代替式(8.17):

$$\langle \chi | \psi \rangle = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | \psi \rangle. \quad (8.19)$$

显然, 只要

$$\langle i | \psi \rangle = \sum_j \langle i | A | j \rangle \langle j | \phi \rangle = \langle i | A | \phi \rangle, \quad (8.20)$$

就可以从它确定 ψ 。但你们会说: “这没有确定 ψ , 只确定 $\langle i | \psi \rangle$ 。”然而, $\langle i | \psi \rangle$ 的确确定了 ψ 。因为, 如果你已知道 ψ 与各个基础态 i 相联系的所有系数的话, ψ 就唯一地被定义了。事实上, 可以利用我们的记法将式(8.20)的最后一项写成

$$\langle i | \psi \rangle = \sum_j \langle i | j \rangle \langle j | A | \phi \rangle. \quad (8.21)$$

这么一来, 由于上式对所有 i 成立, 我们就可简写为

$$| \psi \rangle = \sum_j | j \rangle \langle j | A | \phi \rangle. \quad (8.22)$$

于是我们可以说：“ ψ 态就是从 ϕ 态开始，通过仪器 A 后所得到的态。”

再举最后一个应用这一诀窍的例子。我们还是从式(8.17)出发。既然它对任何 χ 与 ϕ 成立，我们可以将两者都扔掉！于是可得*

$$A = \sum_i |i\rangle\langle i| A |j\rangle\langle j|. \quad (8.23)$$

它表示什么意思呢？它的含义和把 ϕ 与 χ 代回去所得到的一样不多不少。写成式(8.23)时，它是个“开放”的未完成的方程。如果将它“右乘” $|\phi\rangle$ ，就变为

$$A |\phi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i| A |j\rangle\langle j| |\phi\rangle, \quad (8.24)$$

这正好回到式(8.22)。事实上，我们正可从式(8.22)略去对 j 求和而写成

$$|\psi\rangle = A |\phi\rangle. \quad (8.25)$$

符号 A 既不是振幅，也不是矢量，它是一种称为算符的新东西，是一种“作用在”一个态上以产生一个新态的东西——式(8.25)就表示 $|\psi\rangle$ 是 A 作用到 $|\phi\rangle$ 上所得到的结果。这又是个开放方程，直到将某个左矢如 $\langle\chi|$ 乘之才得以完成

$$\langle\chi|\psi\rangle = \langle\chi|A|\phi\rangle. \quad (8.26)$$

当然，如果利用任一组基矢给出振幅矩阵 $\langle i|A|j\rangle$ ——也可写为 A_{ij} ——那么就完全描写出算符 A 的特性了。

对这一新的数学记法，我们实际上没有加入任何新东西。之所以要面面俱到地讨论这一记号方法，是要把各种方程的书写方式告诉你们，因为你们会在许多书上发现以不完全的形式书写的方程，而在遇到它们时你没有理由对之束手无策。如果你愿意，总可以加入一些略去的部分使方程成为表示数量间关系的形式，这样看来更熟悉些。

正如你们将看到的，“左矢”与“右矢”是一种十分方便的记法。首先，从现在开始我们可以用态矢量来表示一个状态。当我们想要表述一个具有确定动量 p 的状态时，就可说：“状态 $|p\rangle$ 。”我们也可说某个任意态 $|\psi\rangle$ 。为前后一致起见，我们将总是用右矢（记为 $|\psi\rangle$ ）来表示一个态。（当然，这是个随意的选择，我们同样可以选用左矢 $\langle\psi|$ 表示态。）

§ 8-3 世界的基础态是什么？

我们已经发现世界上的任何状态可以用基础态的叠加——具有适当系数的线性组合——表示出来。你们可能首先会问，这些基础态是什么？这里存在着许多不同的可能性，例如，你们可以将自旋投影到 z 方向或别的某个方向上。存在着许许多多不同的表象，这跟人们可以用不同的坐标系来表示通常的矢量相类似。其次，你们要问用哪些系数？这取决于物理状况。不同的系数集合对应于不同的物理条件。重要的是要知道你在其中研究的“空间”是什么，换句话说，基础态的物理意义是什么。所以，一般来说，你必须知道的第一件

* 你们可能想我们得写上 $|A|$ 而不只是 A。但这个符号看起来像“A 的绝对值”符号，所以两条竖线通常略去了。一般来说，竖线(|)的作用很像因子 1。

事情是基础态是什么样子的，然后才能够知道如何用这些基础态来描写一个状态。

我们想在这里根据现在流行的物理观念，略微提前谈一点自然界的一般量子力学描述是怎样的。首先，人们得选定一种基础态的特定表象——不同的表象总是可能的。例如，对自旋 $1/2$ 粒子，可以利用相对于 z 轴的正和负两种态。但 z 轴本身并无任何特殊之处——你可随意取任何别的轴。然而为前后一贯起见我们总是采用 z 轴。假定我们从一个电子的情况开始。除了电子自旋的两种可能性（沿着 z 轴“朝上”和“朝下”）外，还有电子的动量。我们选取一组基础态，每个基础态对应于动量的一个值。那么，假如电子没有确定的动量怎么办呢？这没有关系，我们说的只是基础态是什么。如果电子没有确定的动量，它总有取某一个动量的一定振幅，取另一个动量有另一振幅等等。而如果电子并非一定朝上自旋，它总有一定振幅以这个动量朝上自旋，有另一个振幅以那个动量朝下自旋，等等。就我们现在所知，对一个电子的完全描述，只需要用动量和自旋来描写的基础态就可以了。所以对单个电子而言，一组令人满意的基础态 $|i\rangle$ 就是指动量的不同数值，以及自旋究竟朝上还是朝下的振幅的不同组合——即系数 C_i 的不同组合描写不同的状况。对任何特定电子的行为，可以这样来描写：它的自旋朝上或朝下的振幅是多少，对所有可能的动量值而言，它具有某个动量值或另一个动量值的振幅又是多少。于是你们可以看到单个电子的完全量子力学描述包括些什么内容。

对多于一个电子的系统又如何呢？那时基础态变得较为复杂。假设有两个电子，首先，自旋有 4 种可能状态，即：两电子自旋均朝上，第一个朝下而第二个朝上，第一个朝上而第二个朝下，或两者都朝下。另外我们也必须标出第一个电子具有动量 p_1 ，第二个电子具有动量 p_2 。对两个电子而言的基础态需要指明两个动量和两个自旋的性质。对于 7 个电子，我们则必须指明 7 个动量和 7 个自旋的性质。

如果有一个质子和一个电子，我们必须标出质子的自旋方向及其动量，以及电子的自旋方向及其动量。至少这是近似正确的。我们并不真正知道这个世界的正确表象是什么。如果从一开始就能够指明电子自旋及其动量，对质子也有同样的参数，你就会有一组基础态。能够这样那就很好。但对质子的“内部”怎么办呢？让我们这样来看这个问题。在氢原子中有一个质子和一个电子，我们有许多不同的基础态来描述它——质子及电子朝上和朝下的自旋，质子和电子的种种可能的动量。于是就存在着振幅 C_i 的不同组合，它们合在一起描写处在不同状态中的氢原子的性质。但是，假定我们将整个氢原子看作一个“粒子”，如果我们不知道氢原子由一个质子及一个电子组成，也许会一开始就说：“噢，我知道基础态是什么——它们对应于氢原子的特定的动量。”错了，因为氢原子具有内部结构，于是，它可以具有不同内能的各种状态，从而，描写真实的性质就需要更多的细节。

问题是：质子是否有内部结构？我们是否一定要通过给出质子、介子和奇异粒子的所有可能状态来描写质子？我们不知道。而即使我们假设电子是简单的，我们对它必须要讲的只是它的动量和自旋，但可能明天我们发现了电子也有内部齿轮和轮子。那就意味着我们的表示是不完全的，或错的，或者是近似的——这跟只用动量来描写氢原子的表示是不完全一样的，因为那种表示忽略了氢原子内部有可能成为激发态这样的事实。假如电子内部也可能激发而转变为其他某个东西，譬如说，一个 μ 子，那么对它的描写不仅要给出新粒子的状态，而且大概还要利用某些更复杂的内部机构来描写它。今天在基本粒子研究中的主要问题，就是要揭示什么是描述自然界的正确表象。在目前，我们猜想，对电子来说指明其动量与自旋就够了。我们也猜想存在着理想质子，还有它的一些 π 介子， K 介子，等等，而所有

这些都得指明。共有几十种粒子——真是迷人！哪些是基本粒子，哪些不是基本粒子的问题——关于这些你们现在听得很多——就是要发现在世界的最终量子力学描述中最后的表象究竟是什么样的。电子的动量将来是否仍旧是描述自然的正确东西？甚至于整个问题到底是否该这么提！这个问题在任何科学研究中心必然会一再被提出来。无论如何，我们看到了问题——如何去找到表象。我们不知道答案是什么，甚至还不知道我们是否提出了“正确”的问题，但如问题正确，我们必须首先要查明任一特定的粒子是否“基本的”粒子。^{*}

在非相对论量子力学中——假定能量不太高，以致你们不会干扰奇异粒子等等的内部过程——你们可以不必考虑这些细节而做出一些相当好的工作来。你尽可以只说明电子和核的动量及自旋，就会一切顺利。在大多数化学反应及其他低能事件中，核内不发生什么变化，它们不受到激发。再者，如果一个氢原子缓慢运动并轻轻地与其他氢原子相撞——根本不会引起内部激发或辐射，或任何类似的复杂情况，它的内部运动始终是处于基态能量——你可以应用这样的近似，即将整个氢原子视为一个整体或粒子，而不必担心它的内部可能发生某种变化。只要在碰撞中动能比 10 eV（使氢原子激发到另一种内部状态所需的能量）低得多，上述近似就是个颇好的近似。我们将经常作这种不包含内部运动可能性的近似，从而减少必须纳入基础态的细节的数目。当然，这一来就忽略了在某些高能情况下（通常）会出现的一些现象，但利用这种近似我们得以大大简化物理问题的分析。例如，我们可以讨论低能下两个氢原子的碰撞或任何化学过程而不必顾虑原子核也可能被激发这个事实。概而言之，当我们可以略去粒子的任何内部激发态的效应时，我们就可选择一组基础态，这些基础态就是具有确定动量以及角动量 z 分量的状态。

于是，描写自然界的一个问题就是找出基础态的一种适当的表象。但这只是开始。我们还要能够说出会“发生”什么。假如我们知道了某个时刻世界的“状态”，就想知道下一个时刻的状态。所以我们还须找到决定事物如何随时间而变的规律。现在我们就来论述量子力学框架中的第二部分——状态怎样随时间而变化。

§ 8-4 状态怎样随时间而变

我们已经谈过如何表示让某个东西通过一个装置的情形。现在考虑一种方便而令人愉快的“装置”，它只是等候几分钟；就是说，先提供一个状态 ψ ，在你分析它之前，就只要让它待几分钟。或许你会让它待在某个特殊的电场或磁场中——它依赖于世界中的物理环境。总而言之，无论条件如何，你都让该物体从时间 t_1 待到时间 t_2 。假设它在 t_1 从第一个装置出来时处在状态 ψ ，然后它通过一台“装置”，但该“装置”只是把时间推延到 t_2 。在这段延迟过程中，可能发生着种种情况——有外力作用或其他把戏——于是就会发生某些事情。在时间推延的末了，在某个态 χ 中找到这东西的振幅与没有延迟时所具有的振幅不再完全相同了。既然“等待”只是一种特别的“装置”，我们就可以使用与式(8.17)同样的表式给出振幅以描写所发生的事情。因为“等待”这种操作特别重要，我们将称之为 U 而不称为 A ，并标明起始和末了时刻 t_1 与 t_2 ，将它记为 $U(t_2, t_1)$ 。于是所求的振幅就是

* 从 20 世纪 70 年代以来，粒子物理学有很大的进展。关于粒子构造最流行的是“标准模型”。但它也还存在不少问题。有兴趣的读者可参阅有关书籍和文献。——译者注

$$\langle \chi | U(t_2, t_1) | \phi \rangle. \quad (8.27)$$

像任何其他这样的振幅一样,可以用某一种或另一种基础态系统表示它而将上式写为

$$\sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | U(t_2, t_1) | j \rangle \langle j | \phi \rangle, \quad (8.28)$$

于是 U 就可由一组完整的振幅,即由以下矩阵完全描写:

$$\langle i | U(t_2, t_1) | j \rangle. \quad (8.29)$$

顺便指出,矩阵 $\langle i | U(t_2, t_1) | j \rangle$ 提供了比所需的更多的细节。第一流的高能理论物理学家考虑下列一般性质的一些问题(因为这正是通常进行实验的方式)。他从一对粒子开始,譬如说从无穷远来到一起的两个质子。(在实验室中,通常一个粒子静止,而另一个来自某个加速器,就原子尺度而言加速器实际上在无穷远处。)两个粒子碰撞后,结果在某些方向上得到具有一定动量的许多粒子,譬如两个 K 介子,6 个 π 介子,及两个中子等等。出现这种情况的振幅有多大? 这可用下面的数学公式来描写:用 ϕ 态表示入射粒子的自旋与动量。 χ 态则是待求的出射状态。例如,朝这个或那个方向运动的 6 个介子及各带着自己的自旋朝一定方向出射的两个中子的振幅有多大,等等。换句话说, χ 态将由给出最终产物的所有动量和自旋等来表征。接着,理论物理学家的工作就是计算振幅式(8.27)。然而,他实际上只对 t_1 为 $-\infty$ 和 t_2 为 $+\infty$ 的这种特殊情况感兴趣。(对过程的细节没有什么实验数据,有的只是关于入射粒子和出射粒子的数据。)当 $t_1 \rightarrow -\infty$ 和 $t_2 \rightarrow +\infty$ 时, $U(t_2, t_1)$ 的极限情况称为 S ,于是他要知道的就是

$$\langle \chi | S | \phi \rangle,$$

或者,利用式(8.28),他要计算矩阵

$$\langle i | S | j \rangle.$$

上式称为 S 矩阵。所以,如果你看到一个理论物理学家一面在地板上踱来踱去,一面说道:“我所要做的就是计算 S 矩阵。”你就知道他所操心的是什么了。

如何分析或阐明关于 S 矩阵的定律是个有趣的问题。在高能相对论量子力学中,采用了一种做法,而在非相对论量子力学中则可采用另一种非常方便的做法。(这另一种做法也可用在相对论情况下,但那样做并不很方便。)这种方法是算出小的时间间隔的情况下——即 t_2 与 t_1 十分靠近时的 U 矩阵。如果对于相继的时间间隔可以找到一系列这样的 U 矩阵,我们就能够观察到情况如何随时间变化。你们马上会意识到这种做法对相对论的情况并不那么合适,因为你们大概不想去做那种对发生在不同地点的每一种事件是否“同时”都得逐一说明的工作吧。但我们不必担心这事——我们这里只打算考虑非相对论力学。

假定我们考虑一个由时刻 t_1 推延到 t_3 的 U 矩阵,而 t_3 大于 t_2 。换句话说,取三个相继时刻: t_1 小于 t_2 , t_2 小于 t_3 。然后我们断言从 t_1 到 t_3 的矩阵是从 t_1 推延到 t_2 ,然后再从 t_2 推延到 t_3 的两个矩阵的连乘积。这正如 B 和 A 两个装置串联的情形一样。于是,根据 § 5-6 的记法,可以写出

$$U(t_3, t_1) = U(t_3, t_2) \cdot U(t_2, t_1). \quad (8.30)$$

换言之,我们能够分析任何时间间隔,只要能够分析该时间间隔中的一系列短时间间隔。只需将所有小段连乘在一起就行,这就是非相对论量子力学的分析方法。

于是,我们的问题就是弄清无穷小时间间隔下的矩阵 $U(t_2, t_1)$,这里 $t_2 = t_1 + \Delta t$ 。我们

自问：如果现在有个态 ψ ，那么在无穷小时间 Δt 后它变成什么样？让我们想一想怎么来写出它。称时刻 t 的态为 $|\psi(t)\rangle$ （我们写出 ψ 的时间依赖关系非常明确，就表明我们说明了时刻 t 的状况）。现在我们要问，在很短的时间间隔 Δt 后情况如何呢？答案是

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = U(t + \Delta t, t) |\psi(t)\rangle. \quad (8.31)$$

此式的含义与式(8.25)相同，就是说，在时刻 $(t + \Delta t)$ 找到 χ 态的振幅是

$$\langle \chi | \psi(t + \Delta t)\rangle = \langle \chi | U(t + \Delta t, t) |\psi(t)\rangle. \quad (8.32)$$

由于我们尚不大擅长于这些抽象的东西，让我们把振幅投影到一个确定的表象中。如果将式(8.31)两边都乘上 $\langle i |$ ，就有

$$\langle i | \psi(t + \Delta t)\rangle = \langle i | U(t + \Delta t, t) |\psi(t)\rangle. \quad (8.33)$$

我们也可将 $|\psi(t)\rangle$ 分解为基础态：

$$\langle i | \psi(t + \Delta t)\rangle = \sum_j \langle i | U(t + \Delta t, t) | j \rangle \langle j | \psi(t)\rangle. \quad (8.34)$$

可以这样来理解式(8.34)：如果用 $C_i(t) = \langle i | \psi(t)\rangle$ 表示时刻 t 处在基础态 i 的振幅，那我们就可把这个振幅（记住，这只是一个数！）看成随时间而变。每个 C_i 成为 t 的一个函数。而且我们对这振幅怎样随时间而变也有些了解。每一个 $(t + \Delta t)$ 时刻的振幅跟 t 时刻的所有其他振幅与一组系数的乘积之和成比例。将 U 矩阵表为 U_{ij} ，意即

$$U_{ij} = \langle i | U | j \rangle.$$

那就可将式(8.34)写成

$$C_i(t + \Delta t) = \sum_j U_{ij}(t + \Delta t, t) C_j(t). \quad (8.35)$$

这就是量子力学的动力学方程的样式。

但是，除去一件事外我们对 U_{ij} 知道得还不多。我们知道当 Δt 趋于零时，不会发生任何变化——我们应该得到原有状态。所以， $U_{ii} \rightarrow 1$ ；而对 $i \neq j$ ， $U_{ij} \rightarrow 0$ 。换句话说，如 $\Delta t \rightarrow 0$ ， $U_{ij} \rightarrow \delta_{ij}$ 。我们也可认为，对小的 Δt ，每个系数 U_{ij} 与 δ_{ij} 的差应当是个与 Δt 成比例的量，于是可以写出

$$U_{ij} = \delta_{ij} + K_{ij} \Delta t. \quad (8.36)$$

然而，由于某些历史的与其他方面的原因，通常由系数 K_{ij} 中提出因子 $(-i/\hbar)^*$ ，我们喜欢将式(8.36)写成

$$U_{ij}(t + \Delta t, t) = \delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \Delta t. \quad (8.37)$$

当然，这与式(8.36)相同，如果你们愿意的话，它正好定义系数 $H_{ij}(t)$ 。 H_{ij} 项正是系数 $U_{ij}(t_2, t_1)$ 对 t_2 的导数在 $t_2 = t_1 = t$ 时的值。

将 U 的这种形式用于式(8.35)，我们有

$$C_i(t + \Delta t) = \sum_j \left[\delta_{ij} - \frac{i}{\hbar} H_{ij}(t) \Delta t \right] C_j(t). \quad (8.38)$$

* 这里在符号上遇到一些麻烦。在因子 $(-i/\hbar)$ 中， i 的意思是虚数单位 $\sqrt{-1}$ ，而不是表示第 i 个基础态的指标 i ！我们希望你们不致混淆。

对 δ_q 项求和,正好得 $C_i(t)$,可将它移到方程式左边。再除以 Δt ,我们就看出是一个导数的式子

$$\frac{C_i(t + \Delta t) - C_i(t)}{\Delta t} = -\frac{i}{\hbar} \sum_j H_{ij}(t) C_j(t)$$

或

$$i \hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}(t) C_j(t). \quad (8.39)$$

你们记得, $C_i(t)$ 就是(时刻 t)在基础态中的一个 i 找到状态 ψ 的振幅 $\langle i | \psi \rangle$ 。所以式(8.39)告诉我们每个系数 $\langle i | \psi \rangle$ 怎样随时间变化。但这等于说式(8.39)告诉我们态 ψ 如何随时间变化,因为我们就是用振幅 $\langle i | \psi \rangle$ 来描写 ψ 的。 ψ 随时间的变化由矩阵 H_q 来描写, H_q 当然必定包括能使系统发生变化而给予它的性质。 H_q 包括作用的物理意义,而且一般说来,可能依赖于时间,如果我们知道了它,我们对系统随时间变化的行为就可以有完整的描述。所以式(8.39)就是世界的动力学的量子力学定律。

(应指出,我们所取的总是一组固定的、不随时间变化的基础态。有人用的是会变化的基础态。这类似于在力学中使用转动坐标系,我们不想陷入这种复杂的情况。)

§ 8-5 哈密顿矩阵

描述量子力学世界的思路是,我们需要选取一组基础态 i ,并通过给出系数为 H_{ij} 的矩阵来写出物理定律。于是我们就有了一切——我们就可以回答关于会发生什么事情的任何问题。所以必须知道求出在任何物理条件下的 H 的法则——这些物理条件是指磁场或电场,等等。这是最困难的部分。例如,对新的奇异粒子,我们根本不知道该用什么 H_q 。换句话说,没有人知道整个世界的完全的 H_q 。(部分困难是,当人们甚至不知道基础态是什么时,当然很难指望他会找到 H_q !)对非相对论性现象及某些其他的特殊情况,我们确已有了很好的近似。特别是,我们已经有了描写原子中电子运动所需的方法——可以用于描写化学。但我们不知道对于全宇宙而言全部的正确的 H 是什么。

系数 H_{ij} 称为哈密顿矩阵,或简称为哈密顿。(活跃于 19 世纪 30 年代的哈密顿怎么会命名在一个量子力学矩阵上,有一段历史故事。)把它称为能量矩阵更恰当,其理由到我们应用它时就会明白。所以问题就是:找出你的哈密顿!

哈密顿有一个可以直接了当地推得的性质,那就是

$$H_q^* = H_q, \quad (8.40)$$

此性质来自于以下的条件:系统处在某个态的总概率不会改变。如果起初有一个粒子——一个物体或整个世界,那么随着时间的流逝你得到的仍然是它。在任何地方找到它的总概率是

$$\sum_i |C_i(t)|^2,$$

它必定不会随时间而变。如果这对任何初始状况 \neq 正确,那么式(8.40)也必定正确。

作为第一个例子,我们取一个物理环境不随时间变化的情况,意思就是外界物理条件与时间无关,于是 H 与时间无关。没有什么人将电磁铁通上电流或关掉。我们还取一个只要用一个基础态描写的系统。这是一种近似,对于静止氢原子或与之类似的体系所可以作的

一种近似。于是式(8.39)就成为

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1, \quad (8.41)$$

只有一个方程——就是这些！如果 H_{11} 是常数，这个微分方程很容易解得：

$$C_1 = (\text{常数})e^{-(i/\hbar)H_{11}t}. \quad (8.42)$$

这就是具有确定能量 $E = H_{11}$ 的状态与时间的关系。你们已看到为什么应该称 H_{ij} 为能量矩阵了。它不过是能量概念对于更复杂情况的推广。

接着，为了再多理解一点有关方程的含义，我们来研究具有两个基础态的系统。这时式(8.39)成为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_1}{dt} &= H_{11}C_1 + H_{12}C_2, \\ i\hbar \frac{dC_2}{dt} &= H_{21}C_1 + H_{22}C_2. \end{aligned} \quad (8.43)$$

如各个 H 仍旧与时间无关，你们会很容易解出这个方程组。为提高兴趣，我们将这留给你们去尝试一下，后面我们将回过来解这个问题。的确，只要 H 系数与时间无关，你们就能够在不知道 H 的情况下解量子力学问题。

§ 8-6 氨 分 子

现在我们要来向你们说明怎样使用量子力学的动力学方程去描写某个特定的物理系统。我们选取一个有趣而又简单的例子，在这个例子中通过对哈密顿作一些合理的猜测，我们可以求得某些重要的——并且是实用的——结果。我们打算考虑的是可用两个态描写的情况：氨分子。

氨分子有 1 个氮原子和 3 个氢原子，氢原子都位于氮原子下面的一个平面上，于是这个分子成金字塔形，就如图 8-1(a) 中所示的那样。这个分子像任何其他分子一样有无穷多个状态。它可以绕任何可能的轴自转，可以朝任何方向运动，可以在内部发生振动，等等，等等。因此，它根本不是个双态系统。但我们要作个近似，即认为所有其他态都固定不变，因为它们并不包括在我们目前考虑的问题里。我们只考虑分子绕其对称轴的自转（如图所示），它的平动量为零，并且它的振动尽可能地小。这就限定了所有的条件，只有一点除外：对氮原子来说仍然存在着两种可能的位置——氮原子可以在氢原子平面的一侧或另一侧，如图 8-1(a) 及(b) 所示。所以我们把分子当作双态系统来讨论。这就是说，我们实

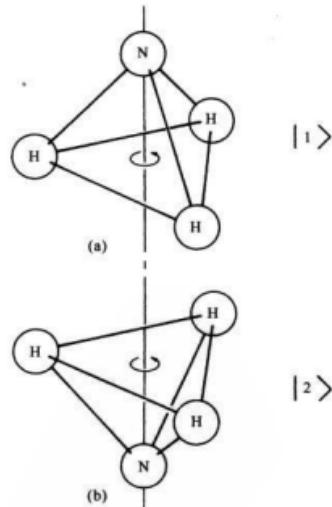


图 8-1 氨分子的两种等价的几何构形

际上考虑的只有两个状态,而假设所有其他状态都保持不变。你们看到,即使我们知道分子以一定角动量绕对称轴自转,以一定的动量运动,以及以确定的方式振动,但仍然存在着两种可能的状态。氮原子在“上面”,如图 8-1(a)那样,我们就说分子处在态 $|1\rangle$,而当氮原子在“下面”,如图 8-1(b)那样,就说分子处在态 $|2\rangle$ 。我们将把态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 取作分析氮分子行为的一组基础态。任何时刻分子的实际状态 $|\psi\rangle$ 可由 $C_1 = \langle 1 | \psi \rangle$ 即处于态 $|1\rangle$ 的振幅,及 $C_2 = \langle 2 | \psi \rangle$ 即处于态 $|2\rangle$ 的振幅表示出来。于是,利用式(8.8),可以把态矢量 $|\psi\rangle$ 写作

$$|\psi\rangle = |1\rangle\langle 1 | \psi \rangle + |2\rangle\langle 2 | \psi \rangle$$

或

$$|\psi| = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2. \quad (8.44)$$

有趣的是,如果知道在某个时刻分子处在某态,那么稍过一会儿它就将不再处于同一态了。两个 C 系数将依式(8.43)而随时间变化,该式对任何双态系统都成立。例如,假定你进行过某种观察——或者对分子进行挑选——因此你知道分子起初处在态 $|1\rangle$ 。在稍后一时刻,会有一定机会在态 $|2\rangle$ 中找到它。为了求出机会有多大,我们必须去解那个告诉我们振幅如何随时间变化的微分方程。

唯一的麻烦是我们不知道在式(8.43)中系数 H_{ij} 怎样得到。然而,我们能够讲出一些东西来。假设分子一旦处在态 $|1\rangle$,它就不再有机会进入态 $|2\rangle$,反之亦然。于是 H_{12} 及 H_{21} 都应为零,从而式(8.43)变为

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1, \quad i\hbar \frac{dC_2}{dt} = H_{22}C_2.$$

很容易解出这两个方程,我们得到

$$C_1 = (\text{常数})e^{-(i/\hbar)H_{11}t}, \quad C_2 = (\text{常数})e^{-(i/\hbar)H_{22}t}. \quad (8.45)$$

这正是具有能量 $E_1 = H_{11}$, $E_2 = H_{22}$ 的定态的振幅。然而,我们注意到,对氮分子来说,两个态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 有确定的对称性。假如自然界真是合理的话,矩阵元 H_{11} 与 H_{22} 应当相等。我们都用 E_0 来表示这两者,因为它们对应着如果 H_{12} 与 H_{21} 等于零时状态所具有的能量。但式(8.45)并没告诉我们氮分子的真实行为。原来氮原子有可能穿过 3 个氢原子中央而翻到另一边去。这是十分困难的,越过一半路程也需要大量能量。如果氮原子没有足够的能量那它怎么能翻过去呢?这里存在着它能穿透势垒的若干振幅。在量子力学中有可能很快地穿透一个从能量来看是被禁止的区域。所以,确实有一个很小的振幅使开始处于态 $|1\rangle$ 的分子变为态 $|2\rangle$ 。系数 H_{12} 与 H_{21} 并非真正为零。由对称性,它们也应当相等——至少在大小上如此。事实上,我们已经知道,一般来说, H_{ij} 必须等于 H_{ji} 的共轭复数,所以它们只可能在相位上有差别。结果表明,正如你们将会明白的,即使让它们彼此相等也并不失一般性。为以后的方便,我们让它们都等于一个负数,即取 $H_{12} = H_{21} = -A$ 。于是就有下列一对方程:

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = E_0 C_1 - AC_2, \quad (8.46)$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = E_0 C_2 - AC_1. \quad (8.47)$$

这个方程组足够简单,可以用多种方法去解。有一种方便的解法如下。取两式之和,得到

$$i\hbar \frac{d}{dt}(C_1 + C_2) = (E_0 - A)(C_1 + C_2),$$

它的解是

$$C_1 + C_2 = ae^{-(i/\hbar)(E_0 - A)t}. \quad (8.48)$$

然后,再取式(8.46)与(8.47)的差,就有

$$i\hbar \frac{d}{dt}(C_1 - C_2) = (E_0 + A)(C_1 - C_2),$$

由此得

$$C_1 - C_2 = be^{-(i/\hbar)(E_0 + A)t}. \quad (8.49)$$

我们称两个积分常数为 a 与 b ;当然,它们必须选得使对任何特定的物理问题都能给出适当的初始条件。通过(8.48)与(8.49)两式的加减,我们得到 C_1 与 C_2 :

$$C_1(t) = \frac{a}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0 - A)t} + \frac{b}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0 + A)t}, \quad (8.50)$$

$$C_2(t) = \frac{a}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0 - A)t} - \frac{b}{2}e^{-(i/\hbar)(E_0 + A)t}. \quad (8.51)$$

它们除第二项的符号外都相同。

我们求出了解,但它们的意义是什么呢?(量子力学中的麻烦不仅在于求解方程,而且在于理解求出的解的意义是什么!)首先,注意到若 $b = 0$, 两项具有相同的频率 $\omega = (E_0 - A)/\hbar$ 。如果一切都以同一频率变化,就意味着系统处在某个确定的能量状态中——在这里能量是 $(E_0 - A)$ 。所以存在着一个具有这种能量的定态,这时两个振幅 C_1 与 C_2 相等。我们得到如下结果:如果氮原子“在上”或“在下”两个状态具有相同的振幅,则氨分子就有确定的能量 $(E_0 - A)$ 。

当 $a = 0$ 时,还有另一个可能的定态,这时两个振幅都有频率 $\omega = (E_0 + A)/\hbar$ 。所以,若两个振幅等值反号,即 $C_2 = -C_1$, 则存在另一种具有确定能量 $(E_0 + A)$ 的定态。这些是两个仅有的具有确定能量的状态。下章中我们将更详细地讨论氨分子的状态,这里我们只提两件事。

我们得到结论,因为氮原子有一定的机会从一个位置翻转到另一个位置,所以分子的能量并不正好是我们原来所预料的 E_0 ,而是有 $(E_0 + A)$ 与 $(E_0 - A)$ 两个能级。不管分子具有怎样的能量,它的每一个可能的状态都“分裂”成两个能级。我们说每一个状态,是因为你们记得,我们当初挑出了一个特定的转动、内能态,等等。对这样的每一个可能情况,由于分子的翻转,都出现了双重能级。

现来问下面一个有关氨分子的问题。假设 $t = 0$ 时,我们知道分子处在态 $|1\rangle$,换句话说, $C_1(0) = 1$, $C_2(0) = 0$ 。那么在时刻 t 发现分子处在态 $|2\rangle$ 的概率有多大,或者,在时刻 t 发现分子仍处在态 $|1\rangle$ 的概率有多大? 初始条件告诉我们式(8.50)及(8.51)中的 a 与 b 是什么。令 $t = 0$, 就有

$$C_1(0) = \frac{a+b}{2} = 1, \quad C_2(0) = \frac{a-b}{2} = 0.$$

显而易见 $a = b = 1$ 。将这些值代入 $C_1(t)$ 及 $C_2(t)$ 的表达式,经整理后有

$$C_1(t) = e^{-(i/\hbar)E_0 t} \left(\frac{e^{(i/\hbar)At} + e^{-(i/\hbar)At}}{2} \right),$$

$$C_2(t) = e^{-(i/\hbar)E_0 t} \left(\frac{e^{(i/\hbar)At} - e^{-(i/\hbar)At}}{2i} \right).$$

以上两式可改写为

$$C_1(t) = e^{-(i/\hbar)E_0 t} \cos \frac{At}{\hbar}, \quad (8.52)$$

$$C_2(t) = i e^{-(i/\hbar)E_0 t} \sin \frac{At}{\hbar}, \quad (8.53)$$

两振幅随时间作简谐式变化。

时刻 t 在态 $|2\rangle$ 找到分子的概率是 $C_2(t)$ 的绝对值平方：

$$|C_2(t)|^2 = \sin^2 \frac{At}{\hbar}. \quad (8.54)$$

这个概率开始是 0(理应如此), 增大到 1, 然后在 0 和 1 之间来回摆动, 如图 8-2 的曲线 P_2 所示。分子处在 $|1\rangle$ 态的概率当然不会一直保持为 1。概率“倾泻”入第二状态直至在第一状态中找到分子的概率为零, 如图 8-2 的曲线 P_1 所示。概率就这样在 0 和 1 之间摆荡。

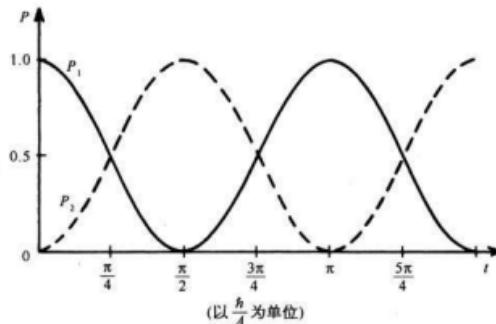


图 8-2 $t = 0$ 时处于 $|1\rangle$ 态的氨分子在 t 时刻仍处在 $|1\rangle$ 态的概率是 P_1 ; P_2 是在 $|2\rangle$ 态发现氨分子的概率

很早之前我们见到过两个弱耦合的相同的摆所发生的情况(见第 1 卷第 49 章)。当我们将其中一个拉向一边然后放开, 它就会摆动, 但渐渐地另一个也开始摆起来。不一会第二个摆获得了所有能量。接着, 过程逆转, 第一个摆又获得能量。这和上述情况完全相类似。能量来回交换的速率取决于两摆之间的耦合——即“振动”得以漏过去的速率。你们该还记得, 对两个摆的组合有两种特殊运动——每种都有确定频率——我们称之为基本模式。如果将两个摆一起向一边拉开, 它们就以同一频率一起摆动。另一方面, 将一摆向一边拉开而将另一摆向另一边拉开, 就会有另一种稳定模式, 它也具有确定的频率。

你看, 这里我们有类似的情况——在数学上氨分子就像一对摆。这里有两个频率—— $(E_0 - A)/\hbar$ 及 $(E_0 + A)/\hbar$, 各对应于它们一起振动和反相振动。

摆的类比并不比同样方程具有同样的解这条原理深奥多少。振幅的线性方程式(8.39)非常像谐振子的线性方程。(事实上,这就是经典折射率理论成功的原因,在这种理论中,我们用谐振子代替了量子力学的原子,即使从经典上说这也是一种对于电子绕核转动的合理观点。)如果你将氨原子拉向一边,你就会得到这两个频率的叠加,从而得到一种拍现象,因为系统不再处于这个或那个有确定频率的状态了。然而,氨分子的能级分裂全然是一种量子力学的效应。

氨分子的能级分裂有重要的实际应用,我们将在下章中讨论。我们终于有了个能利用量子力学来理解的实际物理问题的例子!

第9章 氨微波激射器

§ 9-1 氨分子的状态

本章我们打算讨论量子力学在一个实用的器件——氨微波激射器上的应用。你们也许会奇怪为什么我们打断量子力学讨论的正规进程去研究一个特殊问题，但是，你们会看到，这个特殊问题的许多特征在量子力学的一般理论中相当普遍，如果仔细考察了这个问题，你们将学到许多东西。氨微波激射器是产生电磁波的器件，其工作原理系建立在我们上一章简单讨论过的氨分子性质的基础上。让我们先把上章已经得到的结果概括一下。

氨分子有许多状态，但我们只将其视为双态系统，即只考虑分子处于任何一种特定的转动或平动状态时所发生的事情。双态的物理模型可以描绘如下。设想氨分子绕通过氮原子并垂直于氢原子组成的平面的轴转动，如图 9-1 所示，其中仍然存在着两种可能的状态——氮原子可以在氢原子平面的这边或那边。我们称这两个状态为 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 。这两个态就取为我们分析氨分子行为的一组基础态。

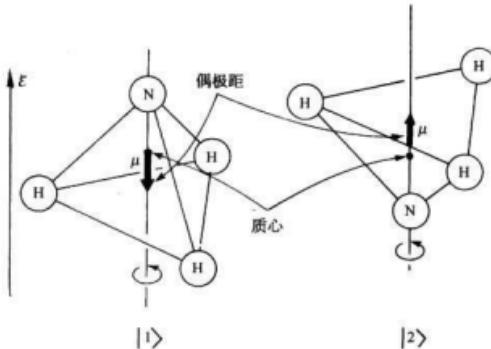


图 9-1 氨分子双基础态的物理模型。这种状态具有电偶极矩 μ

在一个具有两种基础态的系统中，系统的任何态 $|\psi\rangle$ 总可用这两个基础态的线性组合来描写；这就是说，存在着处于一种基础态的一定振幅 C_1 以及处于另一基础态的振幅 C_2 。可以把系统的态矢量写成

$$|\psi\rangle = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2, \quad (9.1)$$

式中

$$C_1 = \langle 1 | \psi \rangle, \quad C_2 = \langle 2 | \psi \rangle.$$

这两个振幅随时间变化的关系满足哈密顿方程式(8.43)。利用氨分子的两种状态的对称性,可取 $H_{11} = H_{22} = E_0$, 及 $H_{12} = H_{21} = -A$, 从而得到解[见式(8.50)及(8.51)]

$$C_1 = \frac{a}{2} e^{-(i/\hbar)(E_0-A)t} + \frac{b}{2} e^{-(i/\hbar)(E_0+A)t}, \quad (9.2)$$

$$C_2 = \frac{a}{2} e^{-(i/\hbar)(E_0-A)t} - \frac{b}{2} e^{-(i/\hbar)(E_0+A)t}. \quad (9.3)$$

我们现在要更仔细地考察这两个一般解。假设分子原先处在系数 b 为零的态 $|\psi_0\rangle$ 中。那么当 $t = 0$ 时, 处于态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 的振幅相同, 并且它们一直保持这种状态。它们的相位以同样的方式, 即以同样的频率 $(E_0 - A)/\hbar$ 随时间变化。类似地, 如果我们将分子置于 $a = 0$ 的状态 $|\psi_1\rangle$, 振幅 C_2 等于 C_1 的负值, 这个关系也将一直保持下去。两个振幅都以频率 $(E_0 + A)/\hbar$ 随时间变化。以上所述就是 C_1 与 C_2 之间的关系与时间无关的仅有的两种可能状态。

我们已经找到了振幅的大小不变而它们的相位以相同频率变化的两个特解, 按 § 7-1 的定义, 它们是定态, 意即具有确定能量的状态。态 $|\psi_0\rangle$ 具有能量 $E_0 = E_0 - A$, 而态 $|\psi_1\rangle$ 具有能量 $E_1 = E_0 + A$ 。这两者是存在的仅有的两种定态, 所以我们发现分子有两个能级, 能量差为 $2A$ 。(当然, 我们指的是相对于原先假设中所给定的转动和振动状态而言的两个能级。)*

如果氮原子没有上下翻转的可能性, 就得取 A 等于零, 于是两个能级将在能量 E_0 处彼此重叠在一起。但实际能级并不是这样, 它们的平均能量是 E_0 , 但它们分裂, 离开 E_0 距离为 $\pm A$, 在两个状态的能量之间有 $2A$ 的间隔。实际上, 由于 A 非常小, 能量差也非常小。

从原子内部激发一个电子所需要的能量比这高得多——需要可见光或紫外光光子。为了激发分子的振动, 需要红外光光子。至于转动的激发, 状态的能量差就对应于远红外光的光子。但能量差 $2A$ 低于上述任何值, 事实上, 它低于红外波段进入了微波区域。实验发现, 有一对间隔是 10^{-4} eV——相当于频率 $24\,000$ MHz——的能级。显然这意味着 $2A = hf$, 即 $f = 24\,000$ MHz (对应的波长是 1.25 cm)。所以, 这种分子在跃迁时发射的不是通常意义上的光, 而是微波。

为以下的讨论, 我们要稍稍改进一下对这两种具有确定能量的状态的描述。假设我们取两个数 C_1 与 C_2 的和而得到一个振幅 C_{II} :

$$C_{II} = C_1 + C_2 = \langle 1 | \Phi \rangle + \langle 2 | \Phi \rangle. \quad (9.4)$$

此式的意义是什么? 这正是在某个新的状态 $|II\rangle$ 中找到 $|\Phi\rangle$ 的振幅, 而在这个新的状态中, 原有基础态的振幅是相等的。如果把 C_{II} 写成 $\langle II | \Phi \rangle$, 则可从式(9.4)中抽出 $|\Phi\rangle$ ——因为此式对任何 Φ 成立, 从而可得

$$\langle II | = \langle 1 | + \langle 2 |,$$

* 往后你自己在阅读或与别人交谈时, 如果有个区分阿拉伯数字 1 及 2 和罗马数字 I 及 II 的简便方法将是有益的。我们觉得对阿拉伯数字保留“one”和“two”的名称, 而用“eins”及“zwei”来称呼 I 及 II 是方便的(虽然称作“unus”及“duo”也许更合理些!)。(以上外文分别是英文、德文和意大利文“一”和“二”的意思。——译者注)

此式同下式意义相同

$$|\text{II}\rangle = |\text{1}\rangle + |\text{2}\rangle, \quad (9.5)$$

态 $|\text{II}\rangle$ 处于态 $|\text{1}\rangle$ 的振幅是

$$\langle 1 | \text{II} \rangle = \langle 1 | 1 \rangle + \langle 1 | 2 \rangle,$$

显然这正好是 1, 因为 $|\text{1}\rangle$ 及 $|\text{2}\rangle$ 是基础态。态 $|\text{II}\rangle$ 处在态 $|\text{2}\rangle$ 的振幅也是 1, 所以态 $|\text{II}\rangle$ 是一个在两个基础态 $|\text{1}\rangle$ 及 $|\text{2}\rangle$ 中具有相等振幅的状态。

但是, 我们碰到了一点麻烦。态 $|\text{II}\rangle$ 处在这个或那个基础态的总概率大于 1。不过这只是意味着该态矢量未适当地“归一化”。只要记住令 $\langle \text{II} | \text{II} \rangle = 1$, (这对任何态都必须成立)那我们就能够消除这个麻烦。利用一般关系式

$$\langle \chi | \Phi \rangle = \sum_i \langle \chi | i \rangle \langle i | \Phi \rangle,$$

设 Φ 及 χ 都是态 II , 并对基础态 $|\text{1}\rangle$ 及 $|\text{2}\rangle$ 求和, 就有

$$\langle \text{II} | \text{II} \rangle = \langle \text{II} | \text{1} \rangle \langle \text{1} | \text{II} \rangle + \langle \text{II} | \text{2} \rangle \langle \text{2} | \text{II} \rangle.$$

要使这个式子等于 1, 只要改变式(9.4)中 C_{II} 的定义, 将 C_{II} 写为

$$C_{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [C_1 + C_2].$$

同样, 我们可以构造出一个振幅

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [C_1 - C_2],$$

或

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle 1 | \Phi \rangle - \langle 2 | \Phi \rangle]. \quad (9.6)$$

这个振幅是态 $|\Phi\rangle$ 在一个新态 $|\text{I}\rangle$ 上的投影, 这个新态处在态 $|\text{1}\rangle$ 的振幅与处在态 $|\text{2}\rangle$ 的振幅差一符号。即式(9.6)的意义与下式相同:

$$\langle \text{I} | = \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle 1 | - \langle 2 |],$$

或

$$|\text{I}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\text{1}\rangle - |\text{2}\rangle], \quad (9.7)$$

由此可得

$$\langle 1 | \text{I} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\langle 2 | \text{I} \rangle.$$

我们做所有这一切的原因在于表明态 $|\text{I}\rangle$ 及 $|\text{II}\rangle$ 可以取作一组新的基础态, 用它描写氨分子的定态特别方便。你们记得, 作为一组基础态要满足

$$\langle i | j \rangle = \delta_{ij}.$$

我们已使

$$\langle \text{I} | \text{I} \rangle = \langle \text{II} | \text{II} \rangle = 1.$$

由式(9.5)及(9.7)很容易证明

$$\langle \text{I} | \text{II} \rangle = \langle \text{II} | \text{I} \rangle = 0.$$

任何态 Φ 处在我们的新基础态 $|\text{I}\rangle$ 及 $|\text{II}\rangle$ 中的振幅 $C_1 = \langle \text{I} | \Phi \rangle$ 及 $C_{\text{II}} = \langle \text{II} | \Phi \rangle$ 也必须满足式(8.39)形式的哈密顿方程。事实上, 若将式(9.2)减式(9.3)然后再对 t 求导, 就有

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = (E_0 + A)C_1 = E_1 C_1. \quad (9.8)$$

如取式(9.2)及(9.3)的和再对 t 求导, 就得

$$i\hbar \frac{dC_{\text{II}}}{dt} = (E_0 - A)C_{\text{II}} = E_{\text{II}} C_{\text{II}}. \quad (9.9)$$

用 $|\text{I}\rangle$ 和 $|\text{II}\rangle$ 作基础态, 哈密顿矩阵具有简单的形式

$$\begin{aligned} H_{1,1} &= E_1, & H_{1,\text{II}} &= 0, \\ H_{\text{II},1} &= 0, & H_{\text{II},\text{II}} &= E_{\text{II}}. \end{aligned}$$

注意式(9.8)与(9.9)看起来都正好跟 § 8-6 中在单态系统下所得的方程相像。对应于单一的能量它们具有简单的随时间作指数式变化的关系。处在各个态的振幅各自独立地随时间变化。

当然, 我们上面所找到的两个定态 $|\psi_1\rangle$ 及 $|\psi_{\text{II}}\rangle$ 是方程式(9.8)及(9.9)的解。对于态 $|\psi_1\rangle$ (这时 $C_1 = -C_2$) 有

$$C_1 = e^{-(i/\hbar)(E_0+A)t}, \quad C_{\text{II}} = 0. \quad (9.10)$$

而对态 $|\psi_{\text{II}}\rangle$ (这时 $C_1 = C_2$) 则有

$$C_1 = 0, \quad C_{\text{II}} = e^{-(i/\hbar)(E_0-A)t}, \quad (9.11)$$

还记得式(9.10)中的振幅就是

$$C_1 = \langle \text{I} | \psi_1 \rangle, \text{ 以及 } C_{\text{II}} = \langle \text{II} | \psi_1 \rangle;$$

从而式(9.10)和下式相同:

$$|\psi_1\rangle = |\text{I}\rangle e^{-(i/\hbar)(E_0+A)t}.$$

这就是说, 定态的态矢量 $|\psi_1\rangle$ 与基础态的态矢量 $|\text{I}\rangle$ 的差别只在于有个与状态的能量相应的指数因子。事实上, 当 $t = 0$ 时

$$|\psi_1\rangle = |\text{I}\rangle,$$

态 $|\text{I}\rangle$ 的物理组态与能量为 $(E_0 + A)$ 的定态相同。同样, 对第二个定态我们有

$$|\psi_{\text{II}}\rangle = |\text{II}\rangle e^{-(i/\hbar)(E_0-A)t},$$

态 $|\text{II}\rangle$ 正是 $t = 0$ 时能量为 $(E_0 - A)$ 的定态。于是我们的两个新基础态 $|\text{I}\rangle$ 及 $|\text{II}\rangle$ 在物理

上与具有确定能量但去掉了指数时间因子的状态形式上相同,因而它们可以成为与时间无关的基础态。(下面我们会发现不去区别定态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 以及它们的基础态 $|I\rangle$ 和 $|II\rangle$ 是方便的,因为它们的差别只在于明显的时间因子。)

总之,态矢量 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 是一对基矢,它们适合于描写氦分子的确定能量的状态。它们与我们原来的基矢的关系是

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle - |2\rangle], \quad |II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle + |2\rangle]. \quad (9.12)$$

处在 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 中的振幅与 C_1, C_2 的关系是

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[C_1 - C_2], \quad C_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}[C_1 + C_2]. \quad (9.13)$$

任何状态都可用 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$ 的线性组合表示——系数为 C_1 与 C_2 ,或者用确定能量的基础态 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 的线性组合表示——系数为 C_1 与 C_{II} 。于是

$$|\Phi\rangle = |1\rangle C_1 + |2\rangle C_2,$$

或

$$|\Phi\rangle = |I\rangle C_1 + |II\rangle C_{II}.$$

第二种形式给出了在能量为 $E_1 = E_0 + A$ 的状态或在能量为 $E_{II} = E_0 - A$ 的状态找到态 $|\Phi\rangle$ 的振幅。

§ 9-2 静电场中的分子

若氦分子处在两个确定能态之一,我们以某种频率 ω 扰动它, ω 满足 $\hbar\omega = E_1 - E_{II} = 2A$,这时系统就可能由一个态跃迁到另一个态。或者,如果它原来处在较高能态,它就可能变到较低能态而发出一个光子。但是为了诱发这种跃迁,必须与状态发生物理上的联系——某种扰动系统的方法。必须有某种外部机制如磁场或电场来影响该状态。在现在所讨论的特定情况下,这些态对于电场较敏感。所以,接下来我们来考察氦分子处在外电场中的行为。

为讨论电场中的行为,我们将回到原来的基础态 $|1\rangle$ 及 $|2\rangle$,而不使用 $|I\rangle$ 及 $|II\rangle$ 。假设在垂直于氢原子组成的平面的方向上存在一个电场。暂时不去考虑氮原子上、下翻转的可能性,那么对于氮原子的两种位置,这个分子的能量是否相同?一般说来并不相同。由于电子更倾向于靠近氮原子核而不是氢原子核,所以氢原子略带正电。真实的能量取决于电子分布的详细状况。要精确描写出该分布的情况是个复杂的问题,但无论如何,净效应是氦分子具有一个电偶极矩,如图9-1所示。我们可以在不知道电荷位移的方向与大小的详细情况下继续进行我们的分析。但为了跟其他人的记号相一致,让我们假设电偶极矩是 μ ,方向从氮原子垂直指向氢原子平面。

当氮原子由一边翻转到另一边时,质心并不移动,但电偶极矩反转。由于这个偶极矩的存在,分子处在电场 ϵ 中的能量将取决于分子的取向。^{*}按照上面所作的假定,如氮原子的

* 很抱歉,我们不得不引进一个新的记号,因为我们已经用 p 和 E 来表示动量和能量,所以不想再用它们来表示偶极矩和电场。记住,在这一节中 μ 是电偶极矩。

指向沿着场的方向，势能就高，如与场方向相反，势能就低，两者能量的间隔是 $2\mu\ell$ 。

在此为止的讨论中，我们只假设了 E_0 与 A 的值而不知道怎么去计算它们。根据正确的物理理论，应有可能根据所有原子核和电子的位置与运动来计算出这些常数。但从没有人作过这种计算。这样一个系统包括 10 个电子和 4 个原子核，这种计算实在是太复杂的问题。事实上，关于这个分子的情况，别人知道的比我们的也多不了许多。人们所能够说的只是，当电场存在时，两种状态的能量是不同的，其差值正比于电场。我们令比例系数为 2μ ，但其值必须由实验确定。我们也可以说分子翻转的振幅是 A ，但它也必须由实验测定。没有人会告诉我们 μ 和 A 的精确理论值，因为详细计算实在太复杂。

对于处在电场中的氨分子，我们的描写必须有些改变。如果不考虑分子由一个位形翻转到另一个位形的振幅，我们可以预料这两个态 $|1\rangle$ 与 $|2\rangle$ 的能量是 $(E_0 \pm \mu\ell)$ 。按照上一章的做法，我们取

$$H_{11} = E_0 + \mu\ell, \quad H_{22} = E_0 - \mu\ell. \quad (9.14)$$

我们还假定施加的电场不会显著地影响分子的几何形状，因此，也不会影响氨分子从一位置跳至另一位置的振幅。于是可以认为 H_{12} 与 H_{21} 没有变化，即

$$H_{12} = H_{21} = -A. \quad (9.15)$$

现在我们必须来解具有这些新的 H_g 值的哈密顿方程式(8.43)。我们本可以像过去那样来解方程，但因为以后有几种场合需要求双态系统的解，让我们对一般情况下的任意 H_g ——只假定它们不随时间变化——劳永逸地求出方程的解来。

我们要求下列一对哈密顿方程的一般解：

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = H_{11}C_1 + H_{12}C_2, \quad (9.16)$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = H_{21}C_1 + H_{22}C_2. \quad (9.17)$$

由于这些是常系数线性微分方程，我们总可找到依赖于变量 t 的指数函数的解。我们得先来求对 C_1 与 C_2 两者来说有相同时间相关性的解；可以用尝试函数

$$C_1 = a_1 e^{-i\omega t}, \quad C_2 = a_2 e^{-i\omega t}.$$

因为这样一个解对应于能量 $E = \hbar\omega$ 的状态，我们可以直接写出

$$C_1 = a_1 e^{-(i/\hbar)Et}, \quad (9.18)$$

$$C_2 = a_2 e^{-(i/\hbar)Et}. \quad (9.19)$$

这里 E 仍然未知，要求使微分方程式(9.16)及(9.17)得到满足来给予确定。

将式(9.18)及(9.19)的 C_1 与 C_2 代入微分方程式(9.16)及(9.17)中，导数项正好给出 $-iE/\hbar$ 乘以 C_1 或 C_2 ，所以左边就是 EC_1 和 EC_2 。消去公共指数因子，我们得到

$$Ea_1 = H_{11}a_1 + H_{12}a_2, \quad Ea_2 = H_{21}a_1 + H_{22}a_2,$$

经整理之后得到

$$(E - H_{11})a_1 - H_{12}a_2 = 0, \quad (9.20)$$

$$-H_{21}a_1 + (E - H_{22})a_2 = 0. \quad (9.21)$$

这齐次代数方程组, 只有在 a_1 与 a_2 的系数行列式为零, 即当

$$\text{Det} \begin{vmatrix} E - H_{11} & -H_{12} \\ -H_{21} & E - H_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (9.22)$$

时, a_1 和 a_2 才有非零解。

然而, 当只有两个方程和两个未知数时, 我们无需这种深奥的概念。两个方程式(9.20)与(9.21)中的每个都给出两个系数 a_1 与 a_2 的比, 这两个比必须相等。由式(9.20)有

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{H_{12}}{E - H_{11}}, \quad (9.23)$$

由式(9.21)有

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{E - H_{22}}{H_{21}}. \quad (9.24)$$

这两个比值相等, 我们得到 E 必须满足的方程

$$(E - H_{11})(E - H_{22}) - H_{12}H_{21} = 0.$$

这与解式(9.22)得到的结果相同。不论哪种解法都得到一个 E 的二次方程, 它有两个解

$$E = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12}H_{21}}, \quad (9.25)$$

能量 E 有两个可能值。注意两个解对能量都给出实数, 因为 H_{11} 与 H_{22} 是实数, 而 $H_{12}H_{21} = H_{12}H_{12}^* = |H_{12}|^2$, 都是正实数。

利用与前面同样的约定, 我们称较高的能量为 E_1 , 较低的能量为 E_2 。于是

$$E_1 = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} + \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12}H_{21}}, \quad (9.26)$$

$$E_2 = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \sqrt{\frac{(H_{11} - H_{22})^2}{4} + H_{12}H_{21}}, \quad (9.27)$$

在式(9.18)及(9.19)中分别使用这两个能量值, 就得到两个定态(确定能量的状态)的振幅。如果没有外来扰动, 系统原先处在两态中某一个态, 就将一直处在该态, 只是相位会改变。

可以对两种特殊情况验证我们的结果。如 $H_{12} = H_{21} = 0$, 就有 $E_1 = H_{11}$ 及 $E_2 = H_{22}$ 。这无疑是正确的, 因为这时式(9.16)与(9.17)之间没有耦合, 分别表示能量为 H_{11} 和 H_{22} 的状态。其次, 如令 $H_{11} = H_{22} = E_0$ 及 $H_{21} = H_{12} = -A$, 我们就会得到先前得到过的解:

$$E_1 = E_0 + A \text{ 和 } E_2 = E_0 - A.$$

对一般情况, 两个解 E_1 和 E_2 对应于两个状态, 这两个状态又可以写成

$$|\psi_1\rangle = |\text{I}\rangle e^{-(i/\hbar)E_1 t} \text{ 和 } |\psi_2\rangle = |\text{II}\rangle e^{-(i/\hbar)E_2 t}.$$

这两个态就有式(9.18)及(9.19)给出的 C_1 与 C_2 , 其中 a_1 与 a_2 仍待定。它们的比值由式(9.23)或(9.24)给出。它们还需满足一个条件。如果已知系统处在定态之一, 那么在 $|1\rangle$ 或

|2)中找到它的概率之和必定等于1,即必须有

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1, \quad (9.28)$$

或等价地

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1. \quad (9.29)$$

这些条件并没有唯一地确定 a_1 与 a_2 , 它们仍有个不确定的任意的相位, 即有 e^{ϕ} 这样一个因子未确定。虽然可以写出各个 a 的一般解*, 但算出每一种具体情况下各 a 的值通常更方便些。

现在让我们回到电场中的氮分子这一特例上去。利用式(9.14)与(9.15)所给定的 H_{11} , H_{22} 及 H_{12} 的值, 我们得到两个定态的能量

$$E_1 = E_0 + \sqrt{A^2 + \mu^2 \epsilon^2}, \quad E_{11} = E_0 - \sqrt{A^2 + \mu^2 \epsilon^2}, \quad (9.30)$$

这两个能量作为电场强度 ϵ 的函数画在图 9-2 中。当电场为零时, 两个能量当然正好是 $E_0 \pm A$ 。在施加电场之后, 两个能级之间的分裂增加。这种分裂起先随 ϵ 缓慢增大, 但最后变为与 ϵ 成正比例。(曲线是双曲线。)在极强的电场中, 能量成为

$$E_1 = E_0 + \mu\epsilon = H_{11}, \quad E_{11} = E_0 - \mu\epsilon = H_{22}. \quad (9.31)$$

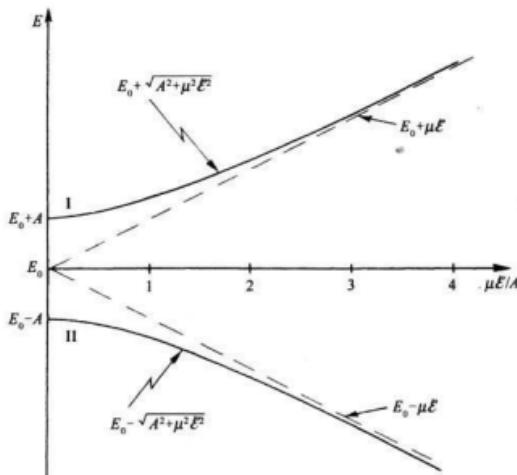


图 9-2 处于电场中的氮分子的能级

当氮原子在两个位置上的能量相差非常大时, 它在两个位置之间来回翻转的振幅就不起什么作用了。这是个有趣的问题, 我们后面还要谈到它。

* 例如, 下面就是一组可能的解, 你很容易验证它们:

$$a_1 = \frac{H_{12}}{[(E - H_{11})^2 + H_{12}H_{21}]^{1/2}}, \quad a_2 = \frac{E - H_{11}}{[(E - H_{11})^2 + H_{12}H_{21}]^{1/2}}.$$

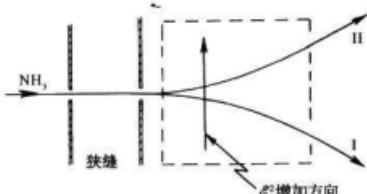


图 9-3 氨分子束可以用电场分离，在该电场中 ϵ^2 具有垂直于分子束方向上的梯度

量将在腔内表现为电能。

我们如何使两种状态的分子分离？一种办法是：使氨气由细小喷嘴射出，连续通过两个狭缝后形成一细束，如图 9-3 所示，然后让细束通过一个具有颇大横向电场的区域。产生电场的电极形状要做得使电场在横越分子束方向上迅速地变化。于是电场的平方 $\epsilon \cdot \epsilon$ 在垂直于分子束的方向上有很大的梯度。而处在 $|I\rangle$ 态的分子所具有的能量随 ϵ^2 而增大，因此这部分分子束将向 ϵ^2 较低的区域偏转。相反，处在 $|II\rangle$ 的分子将向 ϵ^2 较大的区域偏转，因为它的能量随 ϵ^2 增大而减小。

附带提一下，对实验室中所能产生的电场来说，能量 $\mu\epsilon$ 总是远小于 A 。在这样的情况下，式(9.30)中的平方根可以近似取为

$$A \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 \epsilon^2}{A^2} \right). \quad (9.32)$$

所以，就实用的目的而言，能级是

$$E_I = E_0 + A + \frac{\mu^2 \epsilon^2}{2A} \quad (9.33)$$

及

$$E_{II} = E_0 - A - \frac{\mu^2 \epsilon^2}{2A}. \quad (9.34)$$

而能量的变化近似地与 ϵ^2 成线性关系。于是作用在分子上的力是

$$\mathbf{F} = \frac{\mu^2}{2A} \nabla \epsilon^2. \quad (9.35)$$

许多分子在电场中具有正比于 ϵ^2 的能量。比例系数就是分子的极化率。由于分母中的 A 值很小，氨分子具有异常高的极化率。所以，氨分子对电场异常敏感。（你估计一下氨气的介电系数是多少？）

§ 9-3 在随时间变化的场中的跃迁

在氨微波激射器中，处在态 $|I\rangle$ 且具有能量 E_I 的分子束被送入一个共振腔，如图 9-4

* 从现在起我们写 $|I\rangle$ 与 $|II\rangle$ 来代替 $|\psi_I\rangle$ 与 $|\psi_{II}\rangle$ 。你们必定记得实际的态 $|\psi_I\rangle$ 与 $|\psi_{II}\rangle$ 是能量的基本态乘以适当的指数因子。

我们终于可以理解氨微波激射器的工作原理了。首先，我们要找到一种把处在 $|I\rangle$ 态的分子和处在 $|II\rangle$ 态的分子分离开的方法*。然后，使处于较高能态 $|I\rangle$ 的分子通过一个共振频率为 24 000 MHz 的谐振腔。分子会把能量交给谐振腔——交的方式将在后面讨论——从而在离开腔时分子处在态 $|II\rangle$ 之中。每一个发生这样跃迁的分子都把 $E = E_I - E_{II}$ 的能量交给谐振腔。来自分子的能量将在腔内表现为电能。

所示。而另一分子束则被丢弃。在腔内有一个随时间变化的电场，于是我们要讨论的下一个问题是分子处在随时间变化的电场中的行为。我们碰到了完全不同类型的问题——具有随时间变化的哈密顿的问题。由于 H_0 依赖于 ϵ , H_0 也就随时间而变，于是我们必须确定系统在这种情况下的行为。

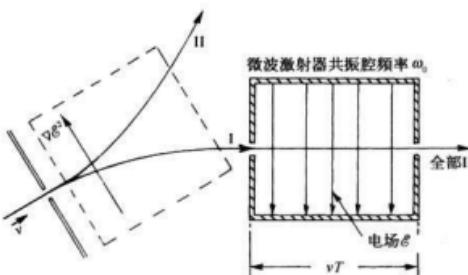


图 9-4 氢微波激射器示意图

首先，我们写下待解的方程：

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_1}{dt} &= (E_0 + \mu\epsilon)C_1 - AC_2, \\ i\hbar \frac{dC_2}{dt} &= -AC_1 + (E_0 - \mu\epsilon)C_2. \end{aligned} \quad (9.36)$$

为明确起见，我们设电场作正弦式变化，于是可以写出

$$\epsilon = 2\epsilon_0 \cos \omega t = \epsilon_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (9.37)$$

在实际操作中频率 ω 与分子跃迁的共振频率 $\omega_0 = 2A/\hbar$ 极为接近，但此刻我们想使问题保持普遍性，所以还是设它具有任意值。解上述方程的最好方法是像先前那样构成 C_1 与 C_2 的线性组合。于是我们将两个方程相加，除以 2 的平方根，再利用式(9.13)中 C_1 及 C_{\pm} 的定义。就得到

$$i\hbar \frac{dC_{\pm}}{dt} = (E_0 - A)C_{\pm} + \mu\epsilon C_1, \quad (9.38)$$

你们会注意到这与式(9.9)相同，只是多了一个由电场引起的额外项。类似地，将式(9.36)中的两个方程相减，可得

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = (E_0 + A)C_1 + \mu\epsilon C_{\pm}. \quad (9.39)$$

现在的问题是，怎样解这些方程？它们比先前的那组方程更难解，因为 ϵ 依赖于 t ，而事实上，对于一般的 $\epsilon(t)$ ，其解无法用初等函数表示。然而，只要电场很小，我们可以得到一个很好的近似解。首先我们写出

$$\begin{aligned} C_1 &= \gamma_1 e^{-i(E_0+A)t/\hbar} = \gamma_1 e^{-i(E_1)t/\hbar}, \\ C_{\pm} &= \gamma_{\pm} e^{-i(E_0-A)t/\hbar} = \gamma_{\pm} e^{-i(E_{\pm})t/\hbar}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

如果不存在电场,那么只要选取 γ_1 与 γ_2 为两个复常量,这些解就是正确的,事实上,因为处在态 $|I\rangle$ 的概率是 C_1 的绝对值平方,而处在态 $|II\rangle$ 的概率是 C_2 的绝对值平方,处在态 $|I\rangle$ 或态 $|II\rangle$ 的概率正好是 $|\gamma_1|^2$ 或 $|\gamma_2|^2$ 。例如,系统开始时处于态 $|II\rangle$,那么 γ_1 为零而 $|\gamma_2|^2$ 是 1,这种状况将一直继续下去。如果分子本来处在态 $|II\rangle$,那么就没有机会变为态 $|I\rangle$ 。

注意,我们将方程写成式(9.40)的形式的思路是,如果 $\mu\epsilon$ 比 A 小,那么解答依然可写成这种形式,只是 γ_1 与 γ_2 变成随时间缓慢变化的函数了。所谓“缓慢变化”是指与指数函数相比较而言。这就是诀窍。我们利用 γ_1 与 γ_2 变化缓慢这个事实来得到近似解。

现在我们要把式(9.40)中的 C_1 代入微分方程式(9.39),但必须记住 γ_1 也是 t 的函数。我们有

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = E_1 \gamma_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + i\hbar \frac{d\gamma_1}{dt} e^{-iE_1 t/\hbar}.$$

微分方程就变成

$$\left(E_1 \gamma_1 + i\hbar \frac{d\gamma_1}{dt}\right) e^{-(i/\hbar)E_1 t} = E_1 \gamma_1 e^{-(i/\hbar)E_1 t} + \mu\epsilon \gamma_2 e^{-(i/\hbar)E_2 t}. \quad (9.41)$$

类似地, dC_2/dt 的微分方程成为

$$\left(E_2 \gamma_2 + i\hbar \frac{d\gamma_2}{dt}\right) e^{-(i/\hbar)E_2 t} = E_2 \gamma_2 e^{-(i/\hbar)E_2 t} + \mu\epsilon \gamma_1 e^{-(i/\hbar)E_1 t}. \quad (9.42)$$

现在你们会注意到每个方程的两边都有相等的项。我们先将它们消去,再将第一个方程乘以 $e^{+iE_1 t/\hbar}$,将第二个方程乘以 $e^{+iE_2 t/\hbar}$ 。要记住 $(E_1 - E_2) = 2A = \hbar\omega_0$, 最后就有

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\gamma_1}{dt} &= \mu\epsilon(t) e^{i\omega_0 t} \gamma_2, \\ i\hbar \frac{d\gamma_2}{dt} &= \mu\epsilon(t) e^{-i\omega_0 t} \gamma_1. \end{aligned} \quad (9.43)$$

现在我们有了一对外观上简单的方程——当然,它们仍然是精确的。一个变量的导数是时间函数 $\mu\epsilon(t) e^{i\omega_0 t}$ 乘以第二个变量,第二个变量的导数则是类似的一个时间函数乘以第一个变量。尽管不能得出这些简单方程的一般解,我们仍将就某些特殊情况求解这些方程。

我们只对振动电场的情况感兴趣,至少当前是这样。将 $\epsilon(t)$ 取为式(9.37)的形式,我们发现 γ_1 与 γ_2 的方程变为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\gamma_1}{dt} &= \mu\epsilon_0 [e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{-i(\omega-\omega_0)t}] \gamma_2, \\ i\hbar \frac{d\gamma_2}{dt} &= \mu\epsilon_0 [e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}] \gamma_1. \end{aligned} \quad (9.44)$$

如果 ϵ_0 足够小, γ_1 与 γ_2 的变化率也就小。两个 γ 随时间 t 的变化不会很大,特别是跟指数项所引起的迅速变化相比而言。这些指数项具有实部及虚部,它们以频率 $(\omega + \omega_0)$ 或 $(\omega - \omega_0)$ 振荡。以 $(\omega + \omega_0)$ 振荡的这一项在平均值零上下变化得很快,因此,对 γ 的变化率的平均值贡献并不很大。这样,我们就可以合理地取一个很好的近似,即用它们的平均值,也就是零,来代替这些项。只要舍去它们,即可取作我们的近似式:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\gamma_1}{dt} &= \mu\epsilon_0 e^{-i(\omega-\omega_0)t}\gamma_2, \\ i\hbar \frac{d\gamma_2}{dt} &= \mu\epsilon_0 e^{+i(\omega-\omega_0)t}\gamma_1. \end{aligned} \quad (9.45)$$

即使剩下的其指数与 $(\omega - \omega_0)$ 成比例的那一项也变化得很快,除非 ω 接近于 ω_0 。只有这时右边的变化才会足够缓慢,以至当我们对 t 求积分时才能得到可觉察到的量值。换句话说,对弱电场而言,只有那些靠近 ω_0 的频率才是重要的。

在得到式(9.45)所作的近似下,方程才可以精确地解出,但解法仍颇复杂,所以我们现在不想解它,而要等到以后碰到同样类型的另一个问题时再说。现在我们只求出近似解——或更确切地说,我们将找出完全共振,即 $\omega = \omega_0$ 时的精确解,以及频率接近于共振频率时的近似解。

§ 9-4 共振跃迁

首先让我们考虑完全共振的情况。如果取 $\omega = \omega_0$, 则式(9.45)的两个方程的指数均等于 1,于是便有

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = -\frac{i\mu\epsilon_0}{\hbar}\gamma_2, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = -\frac{i\mu\epsilon_0}{\hbar}\gamma_1. \quad (9.46)$$

如果先从这些方程中消去 γ_1 ,然后消去 γ_2 ,我们就发现每个 γ 都满足简谐运动的微分方程:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\left(\frac{\mu\epsilon_0}{\hbar}\right)^2\gamma. \quad (9.47)$$

这些方程的一般解可由正弦和余弦函数组成。很容易验证,下列方程式就是一种解:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a\cos\left(\frac{\mu\epsilon_0}{\hbar}t\right) + b\sin\left(\frac{\mu\epsilon_0}{\hbar}t\right), \\ \gamma_2 &= ib\cos\left(\frac{\mu\epsilon_0}{\hbar}t\right) - ia\sin\left(\frac{\mu\epsilon_0}{\hbar}t\right), \end{aligned} \quad (9.48)$$

式中 a 与 b 是根据特定的物理条件来定的常数。

例如,设 $t = 0$ 时分子系统处在较高能态 $|I\rangle$,由式(9.40)可知,这要求 $t = 0$ 时 $\gamma_1 = 1$ 及 $\gamma_2 = 0$ 。在这种情况下,就要求 $a = 1$, $b = 0$ 。往后某时刻 t 分子处在态 $|I\rangle$ 的概率是 γ_1 的绝对值平方,即

$$P_I = |\gamma_1|^2 = \cos^2\left(\frac{\mu\epsilon_0}{\hbar}t\right). \quad (9.49)$$

类似地,分子处于态 $|II\rangle$ 的概率是 γ_2 的绝对值平方,即

$$P_{II} = |\gamma_2|^2 = \sin^2\left(\frac{\mu\epsilon_0}{\hbar}t\right). \quad (9.50)$$

只要 ϵ 很小,并且处于共振情况下,概率就由简单的振荡函数给出。处在态 $|I\rangle$ 的概率由 1 下降到 0,然后再回升到 1,同时,处在态 $|II\rangle$ 的概率则由 0 上升到 1,再下降。两种概率随时间的变化曲线如图 9-5 所示。不用说,两概率的和总是等于 1,分子总得处在某个状态之中!

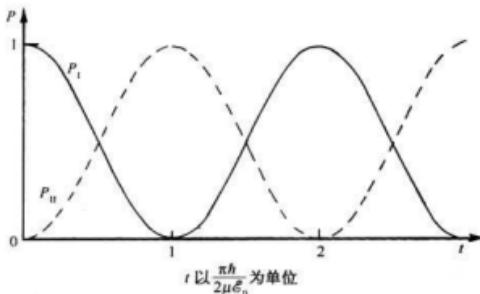


图 9-5 在正弦型电场中的氦分子处于两种状态的概率

设氦分子通过共振腔需要时间 T 。如果使腔长正好满足 $\mu\epsilon_0 T / \hbar = \pi/2$, 那么进腔时处在态 $|I\rangle$ 的分子离开时必处于态 $|II\rangle$ 。如果它进入空腔时处于高能态, 离开腔时就处于低能态。换句话说, 它的能量减少了, 能量不可能丢失到其他地方, 只可能进入产生场的机制中去。你们可以看到分子能量怎么馈入共振腔的振荡中去的有关细节是不简单的, 不过, 我们不必去研究这些细节, 因为我们可以利用能量守恒原理。(如果我们一定要研究这些细节, 那么除了原子的量子力学外我们还要考虑共振腔中场的量子力学。)

概括一下: 分子进入共振腔后, 以正好恰当的频率振荡的腔内电场诱发分子从高能态跃迁至低能态, 而所释放的能量则馈入振荡电场。在一个工作的微波激射器中, 分子提供足够的能量以维持腔的振荡——不仅提供足够功率以弥补腔内损耗, 还提供少量可从腔中引出的额外功率。于是, 分子能量被转换为外界的电磁场能量。

记住, 在分子束进入共振腔之前, 必须使用一个分离分子束的过滤装置, 只让高能态的分子进入腔内。不难证明, 如果你在开始时用的是低能态的分子, 整个过程将沿相反方向进行, 从腔中取出能量。如果使未过滤的分子束进入, 那么有多少分子取走能量就有多少分子释放能量, 最终什么也不发生。当然, 在实际运行中, 不必使 $(\mu\epsilon_0 T / \hbar)$ 正好是 $\pi/2$ 。对任何其他值(除去正好是 π 的整数倍外), 都有一定概率从态 $|I\rangle$ 跃迁至态 $|II\rangle$ 。但对其他值来说, 器件的效率不是 100%; 许多离腔时本来应该把一些能量交给空腔的分子并没有把能量交给腔。

在实际情况中, 所有分子的速度并不都相同, 它们具有某种形式的麦克斯韦分布。这意味着不同分子的理想的时间周期不相同, 因此不可能同时对所有分子都获得 100% 的效率。此外, 还存在另一种容易想到的复杂性, 但此刻我们不想为此费心。大家记得腔内的电场通常在腔中处处不同。因此, 当分子通过共振腔时, 分子所在处的电场以比我们所假设的随时间作简谐式振荡更为复杂的方式变化。显然, 必须用更繁复的积分来精确计算这个问题, 但其基本概念仍然相同。

还有另外一些制造微波激射器的方法, 代替用施特恩-格拉赫装置分离态 $|I\rangle$ 的分子和态 $|II\rangle$ 的分子, 也可以将原子(像气体或固体)预先放在腔内, 用某种方法使原子从态 $|II\rangle$ 变到态 $|I\rangle$ 。一种方法是在所谓三态*微波激射器中使用的方法。为此, 所用的原子系统要

* 本书原文 three-state, 译作“三态”。现在普遍使用的术语是“三能级”three-level。——译者注

有3个能级,如图9-6所示,它们具有下列特性。系统会吸收频率为 $\hbar\omega_1$ 的辐射(如光),从最低能级 E_{II} 跳到高能级 E' ,然后迅速发射光子 $\hbar\omega_2$ 而落到能量 E_{I} 的态 $| \text{I} \rangle$ 。态 $| \text{I} \rangle$ 有长的寿命,因而这个态的布居数会增多,这样,就会达到于态 $| \text{I} \rangle$ 与态 $| \text{II} \rangle$ 之间发生微波激射的条件。虽然这种器件称为“三态”微波激射器,它的工作方式实际上和我们所描写的双态系统完全一样。

激光 (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) 只不过是一种工作在光学频率的激射器。激光的“共振腔”通常由两块反射镜组成,在两反射镜之间建立起驻波。

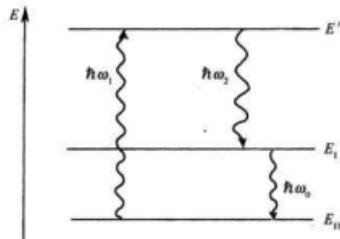


图9-6 “三态”微波激射器的能级

§ 9-5 偏离共振的跃迁

最后,我们想要搞清在共振腔频率接近、但不严格等于 ω_0 的情况下状态如何变化。我们能够精确解答这个问题,但我们并不打算这样做,而讨论一种重要情况,即电场较弱,而且时间间隔 T 也较小,从而 $\mu\epsilon_0 T/\hbar$ 远小于1。这样,即使在我们刚计算过的完全共振的情况下,产生跃迁的概率也较小。假设我们仍从 $\gamma_{\text{I}} = 1$ 及 $\gamma_{\text{II}} = 0$ 开始。在时间 T 内我们预料 γ_{I} 仍然保持近似等于1,而 γ_{II} 则保持远小于1。这样问题就很容易。我们可以从式(9.45)的第二个方程来计算 γ_{II} ,取 γ_{I} 等于1,并从 $t = 0$ 积分到 $t = T$ 。我们得到

$$\gamma_{\text{II}} = \frac{\mu\epsilon_0}{\hbar} \left[\frac{1 - e^{i(\omega - \omega_0)T}}{\omega - \omega_0} \right]. \quad (9.51)$$

将此 γ_{II} 值用于式(9.40)中即给出时间间隔 T 内从态 $| \text{I} \rangle$ 跃迁至态 $| \text{II} \rangle$ 的振幅。发生跃迁的概率 $P(| \text{I} \rightarrow \text{II}|)$ 是 $|\gamma_{\text{II}}|^2$,即

$$P(| \text{I} \rightarrow \text{II}|) = |\gamma_{\text{II}}|^2 = \left[\frac{\mu\epsilon_0 T}{\hbar} \right]^2 \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)T/2]}{[(\omega - \omega_0)T/2]^2}. \quad (9.52)$$

将在一定时间间隔内跃迁的概率作为共振腔频率的函数作图是很有意义的,从这可以看出在共振频率 ω_0 附近跃迁概率对频率依赖的灵敏程度。我们将这样的 $P(| \text{I} \rightarrow \text{II}|)$ 曲线画在图9-7中。(通过将纵坐标表示的概率除以 $\omega = \omega_0$ 处的概率值,峰值的纵坐标被调整到1。)我们在衍射理论中已见到过这样的曲线,所以你们对它应该已经熟悉了。当 $(\omega - \omega_0) = 2\pi/T$ 时,曲线相当迅速地下降至零,而对更大的频率偏差,再也不能重新达到可观的数值。事实上,曲线下面积的绝大部分位于 $\pm\pi/T$ 的区间之内,可以证明*曲线下的面积正好是 $2\pi/T$,并等于图中所画的阴影矩形的面积。

让我们就一个真实的微波激射器来考察上述结果的含义。假设氨分子在腔内呆了适当长的时间,比方说1ms。那么对 $f_0 = 24\,000\text{ MHz}$,我们可以求出频率偏差为 $(f - f_0)/f_0 =$

* 利用公式 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$ 。