

则在能源滤波器中可以找到。面积为 1 dm^2 而间距为 1 mm 的一对平行板约有 1 pF 的电容。

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ Fm}^{-1}$$

§ 6-11 高(电)压击穿

现在,我们想定性地讨论导体周围场的某些特性。若我们对之充电的导体不是一个球,而是在其上面有一针尖或尖端,如图 6-14 所示,那么尖端周围的场比起其他区域的场就会高出许多。从定性方面讲,原因是电荷企图尽可能广阔地铺开在导体表面,而尖端上的尖顶就是与大部分表面离得尽可能远的地方。

板面上有些电荷被一直推至尖顶,尖顶上相对小量的电荷仍能提供一个大的面密度,而一个高的电荷密度也就意味着刚好在外部的一个强电场。

要看出导体上那些曲率半径最小的地方场最高的一种办法,是考虑一个大球与一个小球被导线连接在一起的那种组合,如图 6-15 所示。它多少是如图 6-14 所示的那个导体的某种理想模型。导线对于处在球外的场影响甚小,它在这里的作用只是维持两球处在相同的电势。现在,究竟哪一个球在其表面上会有较大的场呢?如果左边的球半径为 a 并带有电荷 Q ,则它的势约为

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}.$$

图 6-14 在导体上接近尖端处的电场十分强

(当然一个球的存在总会改变另一个球上的电荷分布,因而无论哪个球上的电荷都不是真正球对称的。但若我们感兴趣的只是对场的一种估计,那就可采用一个球形电荷的势。)若那个半径为 b 的小球带有电荷 q ,则它的势约等于

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b}.$$

但 $\phi_1 = \phi_2$,因而

$$\frac{Q}{a} = \frac{q}{b}.$$

另一方面,在表面上的场与面电荷密度成正比(见式 5.8),而电荷密度又正比于电荷除以半径平方。因而我们得

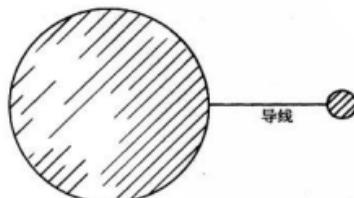


图 6-15 一个尖锐物体的场可以由处于相同电势的球来近似

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q/a^2}{q/b^2} = \frac{b}{a}. \quad (6.35)$$

所以,在小球表面处的场较高,场与半径成反比。

这一结果在技术上很重要,因为若电场太大,空气会被击穿。所发生的情况是:一个在空气中某处的游离电荷(电子或离子)被场所加速,倘若场很大,则该电荷会在打击另一个原子之前就获得了足够高的速率以致能够从该原子中打出一个电子来。结果,越来越多的离子产生了,它们的运动构成放电或火花。如果你要对一物体充电至一高电压而又不让它通过空气中的火花而使它本身放电,那你就必须保证该表面是平滑的,从而不会在任何一处出现异常强的电场。

§ 6-12 场致发射显微镜

在一带电导体上任何尖锐突出部分的周围那种非常高的电场,有很有意义的应用。场致发射显微镜的操作就有赖于在一金属尖端上所产生的高场*,它是按如下方式制成的:一根非常细小的针,其尖端的直径约为 1000 \AA ,被安置在一个抽成真空的玻璃球泡的中心(图6-16)。球的内表面涂上薄层荧光材料导电膜,而在这荧光涂层与针之间加上一个非常高的电压。

让我们首先考虑,当针相对于荧光涂层是负时所发生的情况。场线在尖端处高度集中。电场可以高达 4 GV m^{-1} 。在这样强的场中,电子会从针的表面被拉出去并在针和荧光涂层之间的势差中被加速。当电子到达涂层时就会引起发光,正如电视显像管中的情况一样。

那些到达荧光面给定点上的电子,在很高的近似程度上,可以看作是发源于径向场线的另一端,因为电子将沿着场线从该点跑至面上来。这样,我们在荧光面上就看到了针的尖端的某种像。更正确地说,是看到了针表面的发射率图像——也就是电子离开金属尖端表面的难易程度。如分辨率足够高,人们还可以指望能够分辨出在针的尖端处个别原子的位置。利用电子,由于下述一些原因,这样的分辨率无法达到。首先,电子波存在一种量子力学效应的衍射,它能使像模糊。其次,由于电子在金属中的内在运动,它们在离开针面时会有一个小小的侧向初速,而这一种速度的无规律向分量就会引起像的某种模糊不清。这两种效应合在一起迫使分辨率限于 25 \AA 左右。

然而,如果我们颠倒电极方向,并在玻泡中引进少量氦气,那就可能得到高得多的分辨率。当一个氦原子与针尖碰撞时,那里的强电场会把一个电子从该氦原子中剥离出来,剩下的原子就带上了正电。然后,这个氦离子就会沿着场线向外加速直至荧光屏。由于氦离

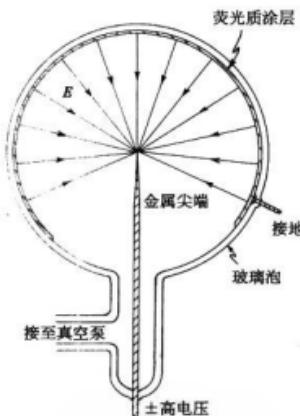


图 6-16 场致发射显微镜

* Müller E W. The Field-ion Microscope. *Advances in Electronics and Electron Physics*, 1960, 13: 83—179. Academic Press, New York.

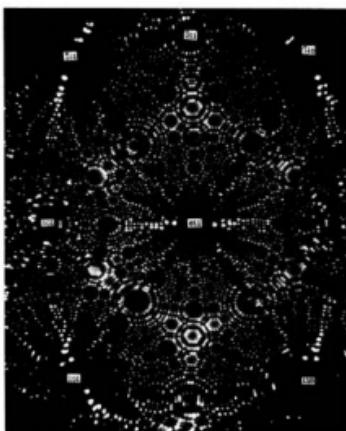


图 6-17 由一台场致发射显微镜所产生的微[宾夕法尼亚州立大学物理学研究教授埃尔温 W. 穆勒提供]

子比电子重得多,其量子力学波长就小得多。如果温度不太高,则热速度效应也比电子的情况小。所以像就有了较少的模糊程度,一个清楚得多的有关尖端的图像就可以得到。用这种正离子的场致发射显微镜,有可能获得高达二百万倍的放大率——放大率比最佳的电子显微镜要高出十倍。

图 6-17 是由一台利用钨针的场致发射显微镜所得结果的一个例子。一个钨原子中心对氯原子的离化,比钨原子间的空隙有稍微不同的比率。在荧光屏上的斑点图样就会显示出钨针尖端的单个原子的排列。斑点之所以表现为环形,可以通过观察一个大箱子里用以代表金属里原子的、被堆积成矩形阵列的小球而得到理解。如果你从该箱子里划出一个粗略的球形的部分,便可以看到原子结构的环状图样特性。场致发射显微镜第一次为人类提供了观察原子的工具。鉴于该仪器的简单性,这是一项了不起的成就。

第7章 在各种情况下的电场(续)

§ 7-1 求静电场的各种方法

本章将继续讨论各种特殊情况下电场的特性。首先,要来描述一些求解导体问题的更精确的方法。并不期望读者对这些较高级的方法能够在这个时候就熟练掌握,虽然有些问题可能利用在较高级课程中学到的技巧就能解决,但从这类问题得到某种概念仍然可能是有意义的。然后,我们还将提出两个例子,其中电荷分布既非固定、也非由导体所携带,而是要由其他某种物理规律来确定的。

正如在第6章我们所发现的,当电荷分布已确定后,静电场问题基本上就很简单,只要求算出一个积分。然而,当有导体存在时,由于导体上的电荷分布原先不知道,复杂性便产生了。电荷必须这样分布于导体表面上,使得该导体能成为一个等势体。对于这种问题的解法既非直接也不简单。

我们曾看到过一个解决这类问题的间接方法,在此方法中我们找到了关于某种特定的电荷分布的一些等势面,并用一个导电面去代替其中的一个。按这种办法我们就能制成一份关于球面、平面等形状导体的特殊解的目录。在第6章中所描述的有关镜像法的应用,就是间接法的一个例子,我们将在本章中描述另一个例子。

如果所要求解的问题并不属于能够用间接法构造解的那一类问题,则我们不得不采用较直接的方法来解决。直接方法的数学问题是在服从某些边界——各导体表面——上 ϕ 分别为一些恰当常数的条件下,求拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (7.1)$$

的解。凡属牵涉到求解一个微分方程并受某些边界条件所支配的问题,都叫作边值问题。这种问题已成为很多数学研究的对象。在具有复杂形状的导体的情况下,并没有普遍的解析方法,甚至像一个带电的两端都封闭着的金属柱体罐——比如啤酒罐——这种简单的问题都会遇到可怕的数学困难,它只能用数值计算法近似地给予解决。唯一普遍的求解方法就是数值计算法。

方程式(7.1)对于若干问题是可直接求解的。例如,具有旋转椭球面形状的带电导体问题,可以用已知的特殊函数严格解出。对于一个薄盘的解,可通过一个无限扁平的椭球来得出。同样,关于一根针的解,则可用一个无限长的椭球而获得。然而必须强调,唯一具有普遍适用性的直接方法乃是数值计算技术。

边值问题也可通过对一个物理类似体的测量来解决。拉普拉斯方程产生于许多不同的物理情况中:稳定热流、无旋液流、掺杂媒质中的电流以及弹性膜的挠曲。这些经常能够用来建立一个模拟所要求解的电学问题的物理模型。通过对在该模型上适当模拟量的测量,

有关问题的解就可以确定了。模拟技术的一个例子是用电解槽来解二维的静电学问题,这个办法所以有效,乃是由均匀导电媒质中势的微分方程与在真空中的相同。

有许多物理情况,在一个方向上物理场的变化为零,或者是与另外两个方向上的变化比较,这个变化可以忽略,这样的问题叫作二维问题,其场仅取决于两个坐标。例如,若沿 z 轴放置一根长直带电导线,则在离导线不太远处的一点,其电场只与 x 及 y 有关,而与 z 无关。这就是一个二维问题。由于在一个二维问题中 $\partial/\partial z = 0$, 所以在自由空间里关于 ϕ 的方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (7.2)$$

由于这个二维方程相对简单,所以就会有一个宽广的条件范围,在这范围内它可以解析地求解。事实上,一个强有力间接数学技巧依赖于复变函数的一个数学定理。现在,我们就将予以描述。

§ 7-2 二维场; 复变函数

复变数 z 被定义为

$$z = x + iy.$$

(切莫把这里的 z 与 z 坐标混淆, 在下面的讨论中我们将不涉及 z 坐标, 因为已假定场与 z 没有依存关系了。) 于是以 x 和 y 表示的每一点就对应于一个复数 z , 可以把 z 当成一个单独的(复)变数, 并用它来写出通常类型的数学函数 $F(z)$ 。例如,

$$F(z) = z^2,$$

或

$$F(z) = 1/z^3,$$

或

$$F(z) = z \log z,$$

等等。

给出任意特定函数 $F(z)$, 便可以代入 $z = x + iy$, 这就可得到一个 x 和 y 的函数——包括实的和虚的两部分。例如

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (7.3)$$

任意函数 $F(z)$ 都可以写成纯粹实部与纯粹虚部之和, 而每一部分都是 x 和 y 的函数

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y), \quad (7.4)$$

式中 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 都是实函数。于是, 从任意复变函数 $F(z)$ 可以导出两个新的函数 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 。例如, $F(z) = z^2$ 给出的两个函数为

$$U(x, y) = x^2 - y^2, \quad (7.5)$$

和

$$V(x, y) = 2xy. \quad (7.6)$$

现在我们来谈一个不可思议的数学定理, 它是那么令人喜悦, 所以我们将把它的证明留给你们数学中一门课程去做(不应将所有的数学奥妙都透露出来, 否则题材就未免太枯燥无

味了)。这个定理是:对于任一“普通复变函数”(数学家将把它定义得更好些),上述 U 和 V 两函数会自动地满足下列关系:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (7.8)$$

由此可立即推出,每一个 U 和 V 函数都各满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0; \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (7.10)$$

这两方程对于式(7.5)和(7.6)那种函数显然是正确的。

这样,从任意普通的函数出发,我们便能得到两个函数 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$,它们都是二维的拉普拉斯方程之解,并各代表一种可能的静电势。我们可以捡起任意函数 $F(z)$,它就代表某个电场问题——事实上是两个,因为 U 和 V 每个都代表一个解。我们可以随心所欲地写出尽可能多的解答——只要编造出各种函数——然后又只要找出与每一解答相符合的问题。这听起来似乎有点本末倒置,但毕竟是一种可能方法。

作为一个例子,让我们看一看函数 $F(z) = z^2$ 会提供什么样的物理内容。从这一函数我们获得了两个势函数式(7.5)和(7.6)。要看出函数 U 属于哪一种问题,可令 $U = A$,即一常数,而解出一组等势面来:

$$x^2 - y^2 = A.$$

这是一个直角双曲线方程。对各种不同 A 值,我们会得到如图 7-1 所示的那些双曲线。当 $A = 0$ 时,所得到的是通过原点的两条交叉直线的特殊情况。

像这样的一组等势面相当于几种可能的物理情况。首先,它代表两个相等点电荷间其中点附近场的详细情况。其次,它代表导体内一个直角角隅内的场。如果我们有两个形状做得像图 7-2 所示的、各保持不同电势的电极,那么标明为 C 的那个角附近的场看来就像图 7-1 所示的原点处那种场。图中实线组是等势面,而与之成直角的虚线组则相当于 E 线。在尖端或突出部分处电场趋向增强,而

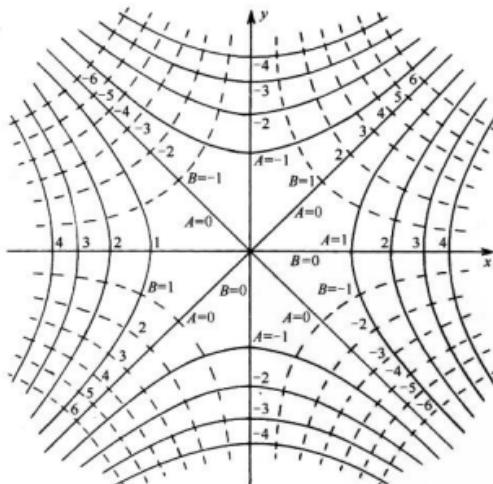


图 7-1 两组正交曲线,它们各可代表一个二维静电场中的等势面

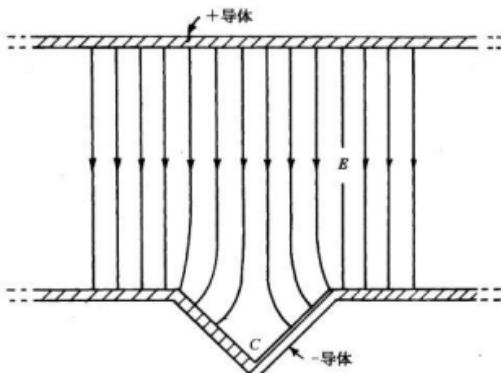


图 7-2 在 C 点附近的场与在图 7-1 所示的相同

在凹陷处或坑谷里的场则会趋向减弱。

我们所找到的解也相当于一个双曲线形电极放在一个直角角隅附近或两个各具有适当电势的双曲线形电极的解。图 7-1 所示的场具有重要的性质。电场的 x 分量 E_x 为

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2x,$$

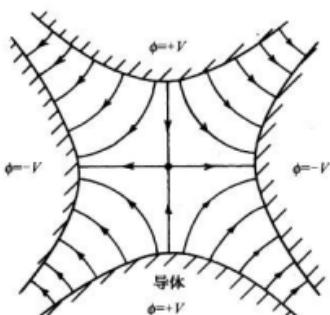


图 7-3 在一个四极透镜中的电场

即电场与离轴的距离成正比。利用这一事实，可制成一种（称为四极透镜的）装置，它对于使粒子束聚焦很有用（参阅 § 29-7），所需的场往往通过使用四个如图 7-3 所示的那种双曲线形电极而获得。对于图 7-3 中的电场线，我们只要把照图 7-1 中那一组代表 $V = \text{常数}$ 的虚线复制下来。我们有一意外收获！由于式(7.7)和(7.8)，所以 $V = \text{常数}$ 的那些曲线会与 $U = \text{常数}$ 的那些曲线正交。每当我们选取一个函数 $F(z)$ 时，就从 U 和 V 分别得到等势面和场线。我们已解决了两问题中的任一个，到底是哪一个，则取决于哪一组曲线将被称为等势面。

作为第二个例子，考虑函数

$$F(z) = \sqrt{z}. \quad (7.11)$$

若我们写出

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta},$$

其中

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

而

$$\tan \theta = y/x,$$

那么

$$F(z) = \rho^{1/2} e^{i\theta/2} = \rho^{1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

由此可得

$$F(z) = \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} + x}{2} \right]^{1/2} + i \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} - x}{2} \right]^{1/2}. \quad (7.12)$$

利用来自式(7.12)的 U 和 V , 对于 $U(x, y) = A$ 和 $V(x, y) = B$ 的两组曲线被画在图 7-4 上。另一方面, 有许多可能情况也可用这些场来描述, 其中最有趣的一种是靠近一张薄板边缘的场。如果 $B = 0$ 的线——在 y 轴右侧的那条线——代表一块带电薄板, 那么在它附近的场线就是由 A 等于各种不同值的一组曲线给出的。物理情况如图 7-5 所示。

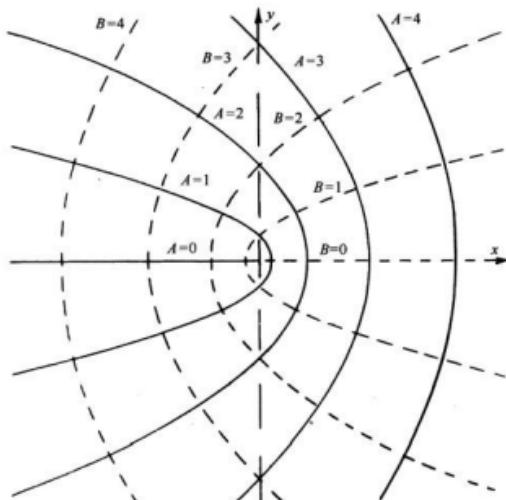


图 7-4 由式(7.12)中 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 等于常数的两组曲线

其他的例子还有:

$$F(z) = z^{2/3}, \quad (7.13)$$

这给出一个直角角隅外面的场;

$$F(z) = \log z, \quad (7.14)$$

给出一根线电荷的场;

$$\text{而} \quad F(z) = 1/z, \quad (7.15)$$

则会给出电偶极子的二维模拟物的场, 也就是两条互相靠近而带有异号电荷的平行线的场。

本课程中对上述课题将不再追寻下去, 但仍必须强调, 虽然复变函数技巧常常很有效, 但它局

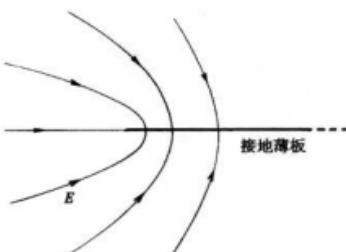


图 7-5 在一块接地薄板的边缘附近的场

限于二维问题,而且还是一种间接方法。

§ 7-3 等离子体振荡

现在我们考虑某些物理情况,其中的电场,既不是由固定电荷也不是由导体表面上的电荷所确定,而是由两种物理现象的组合所确定。换句话说,场将同时由两组方程决定:(1)来自静电学的方程组,把电场与电荷的分布联系起来;以及(2)来自物理学另一分支的一个方程,确定场存在时电荷的位置或运动。

我们将要考虑的第一个例子是动力学的例子,其中电荷的运动由牛顿定律所支配。这种情况的一个简单例子发生在等离子体中,这是一种分布于某一空间区域内由离子和自由电子组成的电离气体。电离层——大气的较高一层——就是这种等离子体的一个例子。来自太阳的紫外线把空气分子内的一些电子撞击出来,从而产生了电子和离子。在这样的等离子体中,正离子比电子重得多,因而同电子的运动相比,离子的运动可以略去。

假定分子是被单一电离的,并令 n_0 为在不受干扰的平衡状态下电子的密度,则这也必然是正离子的密度,因为等离子体(在不受干扰时)是电中性的。现在假定不知什么缘故电子离开了平衡状态而运动,试问将会发生什么情况?如果在一个区域里,电子的密度增大,它们便将互相排斥而趋向于返回其平衡位置。当电子朝着原来位置运动时,它们将会获得动能,但不会在其平衡位置上静止下来,而是过了头。它们将来回振动。与在声波中发生的情况相似,那里的恢复力是气体的压强。在等离子体中,恢复力则是作用于电子上的电力。

为了使讨论简单化,我们将只关心一维(例如沿 x 轴)运动。让我们假定原来位于 x 处的诸电子,在 t 时刻从它们的平衡位置上移动了一小段距离 $s(x, t)$ 。由于电子已移了位,它们的密度一般将改变。密度的改变是容易算出的。参照图 7-6,最初包含在 a 与 b 两平面间的电子,已经移动,现在则包含在 a' 与 b' 两个平面之间了。位于 a 与 b 间的电子数目正比于 $n_0 \Delta x$;这相同数目的电子现在位于宽度为 $\Delta x + \Delta s$ 的空间中,因此密度已经变成

$$n = \frac{n_0 \Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{n_0}{1 + (\Delta s / \Delta x)}. \quad (7.16)$$

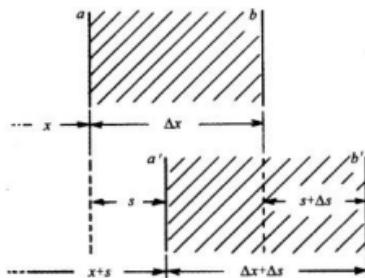
图 7-6 等离子体中波的运动。在 a 平面处的电子移动至 a' ,而在 b 处的电子则移动至 b'

如果密度的变化很小,便可以写成[利用对 $(1+\epsilon)^{-1}$ 的二项展开式]

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x}\right). \quad (7.17)$$

假定正离子不发生显著移动(由于其大得多的惯性),因而它们的密度仍保持为 n_0 。每一电子所带的电荷为 $-q_e$,因而在任一点的平均电荷密度就由下式给出:

$$\rho = -(n - n_0) q_e,$$



或

$$\rho = n_0 q_e \frac{ds}{dx}. \quad (7.18)$$

式中, 我们已把 $\Delta s / \Delta x$ 写成微分形式。

电荷密度与电场的关系是通过麦克斯韦方程组, 特别是

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.19)$$

这个方程确定下来的。如果问题是属于一维的(并且倘若除来自电子位移的场外别无其他场), 那么电场 \mathbf{E} 只有一个分量 E_x . 式(7.19)同(7.18)一起给出

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (7.20)$$

对式(7.20)积分得

$$E_x = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} s + K. \quad (7.21)$$

由于当 $s = 0$ 时 $E_x = 0$, 所以积分常数 K 为零。

作用于移了位的电子上的力为

$$\mathbf{F}_x = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s, \quad (7.22)$$

这是一个正比于电子位移 s 的恢复力。它将会导致电子做谐振动。一个移了位的电子其运动方程为

$$m_e \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s. \quad (7.23)$$

我们发现 s 将做谐变化。 s 随时间的变化将按照 $\cos \omega_p t$, 或——应用第 1 卷的指数函数符号——按照

$$e^{i\omega_p t}. \quad (7.24)$$

振动频率 ω_p 由方程式(7.23)确定, 为

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0 m_e}, \quad (7.25)$$

ω_p 称为等离子体频率。它是等离子体的一个特征数值。

在同电子的电荷打交道时, 许多人喜欢用一个量 e^2 来表示他们的答案, 该量定义为

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2.3068 \times 10^{-28} \text{ Nm}^2. \quad (7.26)$$

应用这一惯例, 式(7.25)变成

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}, \quad (7.27)$$

这是你们将在大多数书中见到的一种形式。

这样,我们就发现,等离子体的扰动会引起电子在其平衡位置附近、固有频率为 ω_p 的自由振荡。这固有频率与电子密度的平方根成正比。等离子体中电子的行为很像一个诸如在第1卷第23章中所描述过的那种共振系统。

等离子体的这种固有共振具有某些重要的效应。例如,如果有人试图把无线电波通过电离层传播出去,则他会发现只有当其频率高于等离子体频率时才能穿透,否则信号将被反射回来。要是我们希望同空间的人造卫星通信,就必须采用高频。反之,若想同地平线上远处的一个无线电台通信,则必须利用比等离子体频率低的频率,以便信号被反射回地面。

等离子体振荡的另一个有趣例子发生于金属内。金属里含有正离子的等离子体及自由电子。这里密度 n_0 十分高,因而 ω_p 也是这样,但仍应能观察到其中电子的振动。原来,按照量子力学,凡具有固有频率为 ω_p 的谐振子,都具有能量间隔为 $\hbar\omega_p$ 的能级。因此,如果把一束电子射进比如一张铝箔,而在箔的另一面十分仔细地对电子能量进行测量,那么可以预料发现电子有时把能量 $\hbar\omega_p$ 传给等离子体振荡。这件事情的确发生过。1936年第一次从实验上观测到:拥有几百至几千电子伏能量的电子从一薄金属膜散射或穿透出来时,会以跳跃的方式损失能量。这一效应从未弄明白,直到1953年博姆和派因斯*才证明这些观测结果可用金属中等离子体振荡的量子激发来解释。

§ 7-4 电解质内的胶态粒子

现在,我们转到各电荷的位置受这些电荷的一部分产生的势所控制着的另一种现象。这样产生的效应对于胶体的行为有着重要影响。胶体由水中的带电悬浮物构成,这些带电微粒尽管微小,但从原子的观点看却已十分巨大。要是这些微粒不带电,它们将有凝聚成一大块的倾向。但由于带电,就将互相排斥,并保持悬浮状态。

现在,如果有某种盐也溶解于水中,则它将分解成正负离子(像这样的离子溶液称为电解质)。那些负离子会被胶体微粒所吸引(假定微粒带的是正电),而正离子则被推开。我们要确定围绕着胶体微粒的那些离子在空间是怎样分布的。

为保持概念简单,我们还是仅仅求解一维情况。如果把一胶体微粒看成一个具有巨大半径的球——在原子尺度上!——那么,便可以把它表面的一小部分看成平面(每当试图理解一个新现象时,取一个有些过于简化的模型总是一个好主意。于是,用这个模型弄通了这个问题之后,才能更好地进行较精确的计算)。

假定那些离子的分布会产生一个电荷密度 $\rho(x)$ 和一个电势 ϕ ,这两者的关系遵守静电学定律 $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$,或者,对于仅在一维情况下变化着的场,则遵守

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.28)$$

现在假定已有这么一个势 $\phi(x)$,那么离子将怎样分布在其中呢?这可以通过统计力学的原理来确定。于是,我们的问题就是要确定 ϕ ,使得从统计力学所获得的电荷密度也能满

* 关于这方面的新近工作和文献摘要可参考 Powell C J and Swann J B. *Phys. Rev.*, 1959, **115**; 869.

足式(7.28)。

按照统计力学(参阅第1卷第40章),在一个力场中处于热平衡的粒子是这样分布的,即在位置 x 处的粒子密度 n 由下式给出

$$n(x) = n_0 e^{-U(x)/kT}, \quad (7.29)$$

式中 $U(x)$ 为势能, k 为玻尔兹曼常量,而 T 为绝对温度。

假定每一离子带有正的或负的一个电子的电荷。在离胶体微粒的表面为 x 的地方,一个正离子将有势能 $q_s\phi(x)$,因而

$$U(x) = q_s\phi(x).$$

这样,在该处的正离子密度就是

$$n_+(x) = n_0 e^{-q_s\phi(x)/kT}.$$

同理,负离子密度则为

$$n_-(x) = n_0 e^{+q_s\phi(x)/kT}.$$

总的电荷密度为

$$\rho = q_s n_+ - q_s n_-,$$

即

$$\rho = q_s n_0 (e^{-q_s\phi/kT} - e^{+q_s\phi/kT}). \quad (7.30)$$

把上式与式(7.28)相结合,我们发现势 ϕ 必须满足

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{q_s n_0}{\epsilon_0} (e^{-q_s\phi/kT} - e^{+q_s\phi/kT}). \quad (7.31)$$

这个微分方程可立即得到一个通解[两边各乘以 $2(d\phi/dx)$,并对 x 积分],但为了尽可能保持问题简单,我们在这里仅考虑电势 ϕ 很小或温度 T 很高的那种极限情况。 ϕ 小的情况相当于稀溶液。在这些情况下,该指数很小,因而可做如下近似:

$$e^{\pm q_s\phi/kT} = 1 \pm \frac{q_s\phi}{kT}. \quad (7.32)$$

于是,式(7.31)给出

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = +\frac{2n_0 q_s^2}{\epsilon_0 k T} \phi(x). \quad (7.33)$$

注意!这时上式右边的符号已经是正的了。 ϕ 的解就不再是振动式的,而是指数式的。

方程式(7.33)的通解为

$$\phi = A e^{-x/D} + B e^{+x/D}, \quad (7.34)$$

式中

$$D^2 = \frac{\epsilon_0 k T}{2n_0 q_s^2}. \quad (7.35)$$

常数 A 和 B 必须由问题的条件确定。在上述情况下, B 应为零,否则对于大的 x 值电势将趋于无限大。因此,我们有

$$\phi = Ae^{-x/D}, \quad (7.36)$$

式中 A 是在 $x = 0$ 处, 也即在胶体微粒表面处的电势。

每当距离增大 D 时, 势就降低一个因子 $1/e$, 如图 7-7 的曲线所示。数值 D 称为德拜长度, 它是对电解质中包围一个巨大带电粒子的离子层厚度的一种量度。式(7.35)表明, 当离子浓度 n_0 增加或当温度降低时, 这离子层就变薄。

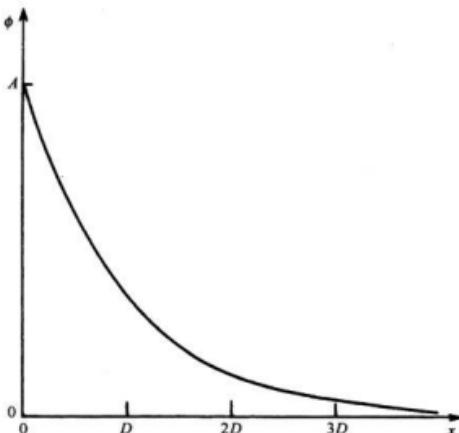


图 7-7 在一胶体微粒表面附近电势的变化情形, D 为德拜长度

如果已知胶体微粒的表面电荷密度 σ , 那么式(7.36)中的常数 A 就可以容易获得。我们知道

$$E_s = E_x(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (7.37)$$

但 E 也是 ϕ 的梯度

$$E_x(0) = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_0 = +\frac{A}{D}, \quad (7.38)$$

由此得出

$$A = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.39)$$

把这一结果应用于式(7.36)中, 便得到(通过取 $x = 0$)该胶体微粒的电势为

$$\phi(0) = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.40)$$

你会注意到, 这一个势与面电荷密度为 σ 而两板间距为 D 的电容器的电势差相同。

我们已经讲过, 胶体微粒受它们之间电的排斥作用而得以保持分离。但现在我们见到, 稍微离开胶体微粒表面的场会由于聚集在微粒周围的离子层而被削弱。如果这些离子层变

得相当薄，则这些微粒便有较大机会互相对撞。于是它们会粘住，而胶体便会凝聚在一起并从液体中沉淀出来。从上面的分析我们明白，为何对一胶体加进足够的盐类就会使它沉淀出来。这一过程称为“胶体的加盐萃取”。

另一个有趣例子则是盐溶液对于蛋白质分子的影响。一个蛋白质分子乃是一条既长而又可挠曲的复杂的氨基酸链。在这种分子上面存在各种电荷，而有时碰巧有一些净电荷——比如说负电荷——会沿该链分布着。由于各负电荷的相互排斥，所以蛋白质链便会保持拉长的姿态。并且，若溶液中还有其他相似的链存在，则由于同样的排斥效应，它们会保持彼此分开。因此，在一液体中可以有链状分子的悬浮物。但如果我们加盐于该液体中，则会改变悬浮物的特性。当盐加进溶液中时，德拜长度会缩短，链状分子能够互相靠近，并蜷缩起来。如果加进溶液中的盐足够多，链状分子便可以从溶液中沉淀出来。有许多这类化学效应都可以用电力来加以理解。

§ 7-5 棚极的静电场

作为最后一个例子，我们想要描述电场的另一个重要特性。它是制造出来应用于电子仪器设计、真空管构造以及其他许多目的的一种特性。这就是带电导线棚附近电场的特性。为了使问题尽可能简单，让我们考虑一个由无限长导线间隔均匀地平行排列在一平面上的阵列。

若我们从在导线平面上方远处俯视电场，则见到一个恒定的电场，正如电荷被均匀地分布在平面上一样。当接近导线棚时，场开始与从远处见到的均匀场有所不同。我们想要估计靠棚多近才能见到势的明显变化。图 7-8 表示距棚不同距离处等势面的粗略草图。越接近棚，变化就越大。当我们平行于棚运动时，会观察到一种周期性起伏的场。

现在我们已(由第 1 卷第 50 章)知道任何周期性量都可以表示成正弦波之和(傅里叶定理)。让我们来看看能否找到一种满足场方程的适当简谐函数。

如果导线都处在 xy 平面内，并且平行于 y 轴排列着，则我们可以试试下列这样的项

$$\phi(x, z) = F_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{a}, \quad (7.41)$$

其中 a 为导线间距，而 n 为简谐数(我们已假定各导线很长，从而不会随着 y 变化)。一个通解应该由 $n = 1, 2, 3 \dots$ 这样一些项之和构成。

如果这是一个正确的势，则它应在导线上面的空间(那里没有电荷)内满足拉普拉斯方程，即

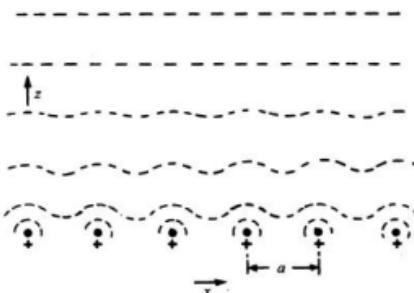


图 7-8 在带电导线构成的均匀棚上面的等势面

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

用式(7.41)中的 ϕ 对上式进行尝试, 我们得出

$$\frac{-4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{a} + \frac{d^2 F_n}{dz^2} \cos \frac{2\pi n x}{a} = 0, \quad (7.42)$$

或者说, $F_n(z)$ 必须满足

$$\frac{d^2 F_n}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n. \quad (7.43)$$

因此, 我们就必然有

$$F_n = A_n e^{-z/z_0}, \quad (7.44)$$

式中

$$z_0 = \frac{a}{2\pi n}. \quad (7.45)$$

我们已找到: 如果存在简谐数为 n 的场的傅里叶分量, 则这个分量将按照特征距离 $z_0 = a/2\pi n$ 指数式地下降。对于第一谐波 ($n = 1$) 来说, 每当 z 增大一个栅间隔 a 时, 波幅将下降一个因子 e^{-z} (是一个大的降落), 其他的谐波在离开栅时将下降得更快。我们看到, 如果仅仅离开栅几个 a 的距离, 场就十分接近于均匀场。也就是说, 那些振荡的项都是小项。当然, 为了给出在大 z 处的那个均匀场, 就始终应该保留“零级简谐”场

$$\phi_0 = -E_0 z.$$

对于通解来说, 我们应当把这一项与由诸如式(7.41)[其中 F_n 由式(7.44)给出]那些项之和组合起来。系数 A_n 应当这样调整, 使得整个总和在经过了微分之后, 会给出与栅格导线上的电荷密度 λ 相符合的电场。

我们刚才所发展的方法可以用来说明, 为什么采用一个屏栅作为静电屏蔽物往往与用一块坚实金属板同样优良。除非在与屏栅相距仅几倍于屏栅导线间隔的距离以内, 在一闭合屏栅内的电场等于零。我们见到, 为什么一个铜屏栅——比铜片既轻又便宜——常被用来保护灵敏的电气设备不受外面干扰电场的影响。

第8章 静电能

§ 8-1 电荷的静电能; 均匀带电球

在力学的研究中,最有意义而又最有用的发现之一是能量守恒定律。有了力学系统的动能和势能表达式,我们无需考察两个不同时刻系统状态间发生的细节,而能发现两态间的关系。现在我们要来考虑静电系统的能量。在电学中,能量守恒原理也将为发现一系列有意义的事情而发挥它的作用。

在静电学中,相互作用的能量定律十分简单。实际上,这个问题我们已经讨论过。假设两个电荷 q_1 和 q_2 ,相距 r_{12} 。在这个系统中,就存在一定能量;因为要把两电荷移到一起需要做出一定量的功。我们已计算过将远离的两个电荷移到一起所做的功,它为

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (8.1)$$

从叠加原理我们也知道,如果存在许多个电荷,则作用于任一电荷上的总力,等于其他各电荷作用于它的力的总和。因此,可以断定:由多个电荷构成的系统的总能量,等于每一对电荷间的相互作用的各项之和。若 q_i 和 q_j 是任一对相距为 r_{ij} 的电荷(图 8-1),则这一特定电荷对的能量为:

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (8.2)$$

总静电能 U 等于所有可能的电荷对之间的能量的和:

$$U = \sum_{\text{所有的对}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \quad (8.3)$$

如果有一个密度为 ρ 的电荷分布,式(8.3)的求和当然要用积分来代替。

我们应关注能量的两个方面:一是把能量概念应用于静电学问题;二是运用各种不同的方法,计算能量。对某些特殊情况,有时计算所做的功比按式(8.3)

求和或计算相应的积分要容易。作为一个例子,让我们来计算把电荷集中到一个球体中,并具有均匀的电荷密度所需的能量。这一能量恰好等于把那些电荷从无限远处聚集起来所做的功。

设想该球体是由一层层无限薄的球壳构成的,在过程的每一阶段,我们聚集小量电荷并把它置于从 r 至 $r+dr$ 的薄层中。继续这一过程,一直到最后的半径 a 为止(图 8-2)。设 Q 为已建立至半径为 r 的球体上的电荷,那么把电荷 dQ 移到这个球体上面所做的功为

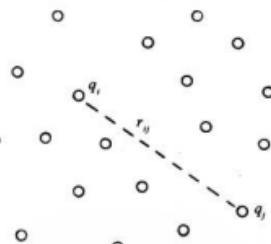


图 8-1 一个粒子系统的静电能等于每对粒子静电能的总和

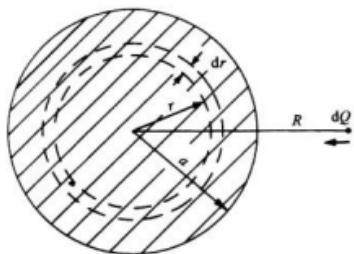


图 8-2 一个均匀带电球体的能量, 可以通过将它设想为由一层层壳组合成的而计算出来

$$dU = \frac{Q_r dQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (8.4)$$

若球体中的电荷密度为 ρ , 则电荷 Q_r 为

$$Q_r = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

而电荷 dQ 为

$$dQ = \rho \cdot 4\pi r^2 dr.$$

因此, 式(8.4)变成:

$$dU = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0}. \quad (8.5)$$

要把电荷聚集成整个球体, 所需的总能量则等于从 $r = 0$ 至 $r = a$ 对 dU 的积分, 即

$$U = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0}. \quad (8.6)$$

若希望把结果用球体的总电荷 Q 来表示, 则为:

$$U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.7)$$

可见, 能量与总电荷的平方成正比而与球的半径成反比。我们也可以将式(8.7)理解为: 对球体里的所有各对点来说, $(1/r_g)$ 这个量的平均值为 $6/5a$ 。

§ 8-2 电容器的能量; 作用于带电导体上的力

现在我们来考虑电容器充电时所需的能量。如果电荷 Q 已从电容器的一个导体移至另一导体, 则它们之间的势差为:

$$V = \frac{Q}{C}, \quad (8.8)$$

式中 C 为该电容器的电容。电容器充电时需做多少功呢? 按照上面对球体的做法, 我们设想电容器是逐步把小的电荷增量 dQ 从它的一板移至另一板而进行充电的。转移电荷 dQ 所需的功为:

$$dU = V dQ.$$

将式(8.8)中的 V 代入, 则可以写成:

$$dU = \frac{Q dQ}{C}.$$

或者, 从零电荷到最后电荷量 Q 进行积分, 则有:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (8.9)$$

这个能量也可写成：

$$U = \frac{1}{2} CV^2. \quad (8.10)$$

若回忆起一个导电球体(相对于无限远处)的电容为

$$C_{\text{球体}} = 4\pi\epsilon_0 a,$$

则可立即由式(8.9)得到一个带电球的能量：

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.11)$$

当然这也是一个带有总电荷 Q 的薄球壳的能量，而且恰好就是式(8.7)所给出的一个均匀带电球体能量的 $5/6$ 。

现在，我们讨论静电能概念的应用。试考虑下述问题：施于电容器两板间的力多大？或者，当存在另一异号电荷的导体时，绕带电导体某个轴的力矩是多少？这些问题，应用上述电容器的静电能式(8.9)，再加上虚功原理(第1卷第4、13和14章)，就不难回答。

让我们运用这一方法来求平行板电容器两板间的作用力。若我们设想两板的间距增加一小量 Δz ，那么外界对于移动这两板所做的机械功应为

$$\Delta W = F \Delta z, \quad (8.12)$$

式中 F 为两板间的力。这功必定等于电容器的静电能的变化。

根据式(8.9)，电容器原来的能量为：

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

这能量的变化(如果不让电量变化的话)为：

$$\Delta U = \frac{1}{2} Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C} \right). \quad (8.13)$$

使式(8.12)和(8.13)两者相等，则有

$$F \Delta z = \frac{Q^2}{2} \Delta \left(\frac{1}{C} \right). \quad (8.14)$$

这也可以写成：

$$F \Delta z = -\frac{Q^2}{2C^2} \Delta C. \quad (8.15)$$

当然，该力是由两极板上电荷的吸引造成的。但我们不必为电荷如何分布的具体细节而操心，我们所需要的一切都由电容 C 来对付。

不难看到，如何将这个概念推广到任意形状的导体以及关于力的其他分量上去。在式(8.14)中，我们可用所要寻求的力的分量代替 F ，并用在相应方向上的小位移来代替 Δz 。或者，若有一个带轴的电极，而希望知道该力矩 τ ，则可将虚功写成：

$$\Delta W = \tau \Delta \theta,$$

式中 $\Delta\theta$ 是小角位移。当然, $\Delta(1/C)$ 必须是与 $\Delta\theta$ 相对应的 $1/C$ 的变化。按照这一办法, 我们能够求得如图 8-3 所示的那种可变电容器中作用于可动片上的力矩。

再回到平行板电容器的特殊情况, 我们可应用第 6 章中已导出的关于电容的公式:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\epsilon_0 A}, \quad (8.16)$$

式中 A 是每块板的面积。如果两板间距增大 Δz , 则

$$\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{\Delta z}{\epsilon_0 A}.$$

图 8-3 作用于一可变电容器上的力矩有多大

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}. \quad (8.17)$$

让我们对式(8.17)更仔细地考察一下, 并看看能否说出力是怎样来的。若把其中一板上的电荷写成

$$Q = \sigma A,$$

式(8.17)则可以重新写成

$$F = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

或者, 由于两板间的电场为

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

于是

$$F = \frac{1}{2} QE_0. \quad (8.18)$$

人们会立即猜想到, 作用于板上的力, 应等于板上的电荷 Q 乘以作用于该电荷的场。但我们却有一个令人惊奇的因子 $\frac{1}{2}$ 。原因是, E_0 并非作用于电荷的场。如果设想在板表面上的电荷占据一薄层, 如图 8-4 所示, 则场将从这一层的内边界上的零变化至在板外空间里的 E_0 。作用于面电荷上的平均场乃是 $E_0/2$ 。这就是式(8.18)中为什么出现因子 $\frac{1}{2}$ 的原因。

你应注意, 在计算虚功时, 我们曾假定在电容器上的电荷保持不变——即在电的方面电容器不与其他东西连接, 从而总电荷不能改变。

要是设想当电容器做虚位移时, 其电势差保持

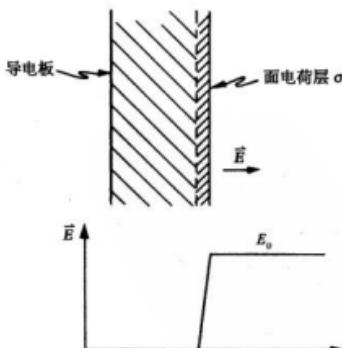


图 8-4 导体表面上的电场, 当穿过该表面的电荷层时, 由零变至 $E_0 = \sigma/\epsilon_0$

不变。那么就应当取

$$U = \frac{1}{2}CV^2,$$

而且代替式(8.15),我们现在应有

$$F\Delta z = \frac{1}{2}V^2\Delta C.$$

它给出一个大小等于式(8.15)的力(因为 $V = Q/C$),但却带有相反的符号!很遗憾,当我们把电容器和它的充电源断开时,电容器两板间的作用力肯定不会改变符号。并且,我们还知道,带有异号电荷的两板一定互相吸引。在这第二种情况下,虚功原理已被误用——我们未把充电时对电源所做的虚功计算在内。这就是说,当电容变化时,要保持电势 V 为常数,电荷 $V\Delta C$ 就必然要由电荷源来提供。但这一电荷是在势为 V 时提供的,因而保持电势不变的那个电力系统所做的功就是 $V^2\Delta C$ 。机械功 $F\Delta z$ 加上这个电功 $V^2\Delta C$ 共同构成电容器总能量的变化 $\frac{1}{2}V^2\Delta C$ 。因此,如同上面一样, $F\Delta z$ 仍然是 $-\frac{1}{2}V^2\Delta C$ 。

§ 8-3 离子晶体的静电能

现在,我们来考虑静电能概念在原子物理中的一种应用。原子间的作用力,一般不易测量,但人们对原子的两种不同排列之间的能量差——比如说,化学反应的能量——却经常感兴趣。由于原子力基本上是电力,所以化学能大部分都是静电能。

例如,让我们考虑一离子晶格的静电能。

像 NaCl 那种离子晶体,组成它的正离子和负离子都可以设想成刚性球体。它们由于电的作用而吸引,直至开始接触,然后出现一种排斥力。这时,若是试图将它们推得更加接近,则这种排斥力就会很快增大。

因此,作为我们的第一级近似,设想用一组刚性球体来代表食盐晶体里的原子。其晶格结构,已用 X 射线衍射法确定。它是一个立方晶格,像一个三维棋盘。图 8-5 所示为其一个截面图像。离子间的间隔为 2.81 \AA ($= 2.81 \times 10^{-8} \text{ cm}$)。

这一系统的图像如果是正确的,那我们就可以通过提出如下问题而加以核对:把这些离子完全拉开——也就是,把晶体完全拆开成各离子——将需要多少能量?这一能量应等于 NaCl 的汽化热加上使分子分解成离子所需的能量。这个把 NaCl 分解成离子的总能量,在实验上已经确定为每个分子需 7.92 eV。通过换算

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J},$$

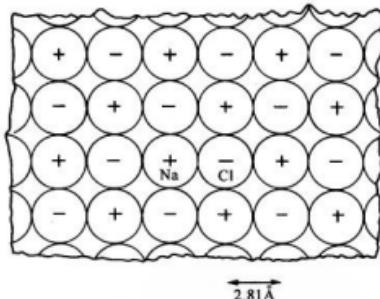


图 8-5 在原子尺度上的食盐晶体的截面。Na 和 Cl 两种离子跳棋盘式的排列着,与此垂直的两个横截面上情况也一样(参考第 1 卷,图 1-7)

以及 1 mol 的分子数, 即阿伏伽德罗常量

$$N_0 = 6.02 \times 10^{23},$$

也可以给出汽化能为

$$W = 7.64 \times 10^5 \text{ J mol}^{-1}.$$

物理化学家喜欢用 kcal 作为能量单位, 每 kcal 等于 4 190 J, 所以 1 eV / 分子 就是 23 kcal mol⁻¹. 于是, 化学家会说 NaCl 的离解能为

$$W = 183 \text{ kcal mol}^{-1}.$$

我们能否通过计算将晶体拉开所需的功, 从而在理论上得到这个化学能呢? 按照我们的理论, 这个功就是所有离子对的势能和。计算这个和的最容易的办法, 是先挑选一个特定离子, 再算出它与其他每个离子之间的势能。这将给予每个离子两倍的能量, 因为这能量是属一对电荷的。而我们所要的乃是属于某一特定离子的能量, 所以应取这个和的一半。但我们要真正要的却是每个分子的能量, 而每一分子含有两个离子, 因而这样算出来的和就将直接给出每个分子的能量。

一个离子与它最近邻的离子的能量为 e^2/a , 其中 $e^2 = q_e^2/(4\pi\epsilon_0)$, 而 a 为两近邻离子的中心间距(这里所考虑的是单价离子)。这个能量为 5.12 eV。我们已看到, 它为我们提供了一个具有正确数量级的结果, 但距我们所需的无限多项之和, 还有一段很长的距离。

开始, 我们对那些在直线上的离子的所有项求和。图 8-5 中标明为 Na 的那个离子是我们考虑的特定离子。现在将首先注意与它同在一条水平直线的那些离子, 有两个带负电荷的 Cl 离子靠它最近, 每个距离均为 a ; 随后有两个在 $2a$ 距离处的正离子; 依此类推。把这个和的能量叫做 U_1 , 就可以写出:

$$U_1 = \frac{e^2}{a} \left(-\frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \mp \dots \right) = -\frac{2e^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots \right). \quad (8.19)$$

这一级数收敛缓慢, 因而难于用数字算出, 可是已经知道它等于 $\ln 2$ 。因此,

$$U_1 = -\frac{2e^2}{a} \ln 2 = -1.386 \frac{e^2}{a}. \quad (8.20)$$

现在再来考虑位于上面的那条次近邻离子线, 最靠近它的一个是负离子, 距离为 a ; 随后又有两个正离子位于 $\sqrt{2}a$ 处; 下一对位于 $\sqrt{5}a$ 处, 再下一对则是位于 $\sqrt{10}a$ 处, 依此类推。所以, 对于这整条线就得到一个级数:

$$\frac{e^2}{a} \left(-\frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}} \mp \dots \right). \quad (8.21)$$

这样的线总共有四条: 在上面、下面、前面和后面。然后, 又有四条在对角线上的最靠近的线, 如此等等。

如果你耐心地算出所有这些线的值, 然后取其和, 则将求得总和为:

$$U = -1.747 \frac{e^2}{a},$$

这比起在式(8.20)中对第一条线所得的结果仅稍微大一点。利用 $e^2/a = 5.12 \text{ eV}$, 我们得到:

$$U = -8.94 \text{ eV}.$$

这答案比实验上观察到的能量要高 10%。这表明关于整个晶格是由电的库仑力维持在一起的观点基本上是正确的。这是我们第一次从原子物理的知识中获得有关宏观物质的一种特殊性质, 往后还要处理更多的问题。利用原子行为的定律来理解大块物质行为的学科叫做固体物理学。

计算上的误差怎么会出现的呢? 为什么它不是完全正确的呢? 那是由于在近距离处离子间的排斥作用造成的。它们并不是理想的刚球, 因而当互相靠近时, 将部分地被压缩。它们也并非很柔软, 因而仅被压缩了一点点。可是, 有些能量是用于使离子变形的, 而当离子被拉开时, 这能量被释放出来。拉开离子所需要的实际能量比我们算出的要稍微少一点。这种排斥作用有助于克服静电的吸引作用。

有没有办法对这一项贡献做出估计呢? 只要我们知道有关排斥力的定律, 就可能做到这一点。虽然目前我们不准备对这种排斥机制的细节进行分析, 但可以从某些宏观测量结果获得有关它的特性的某种概念。对整块晶体压缩率的测量结果, 就有可能得到有关离子间排斥定律的定量概念, 从而获得它对能量的贡献。用这种方法已经求得这项贡献应等于来自静电吸引的贡献的 $1/9.4$, 当然符号相反。如果从纯粹的静电能量减掉这一贡献, 便可得出每个分子的离解能为 7.99 eV 。这与 7.92 eV 的观测结果已较接近了, 但仍未完全相符。还有另一件我们没有算进去的东西, 那就是对于晶体振动的动能还未作出估计。若对这一效应也做出修正, 就可获得与实验值符合得很好的结果。因此, 上述概念是正确的, 对于像 NaCl 这种类晶体的能量的主要贡献是静电方面的贡献。

§ 8-4 核内的静电能

现在我们将考虑原子物理中另一个有关静电能的例子, 也就是原子核的电能。但在此之前, 还得对核中把质子与中子维持在一起的主要力(叫核力)的某些性质加以讨论。在发现核——以及构成核的中子和质子——的初期, 人们曾希望, 对于比如质子与质子间的非电部分的强作用力, 会有某个简单的定律, 如电的平方反比定律。因为一旦人们确定了这个力学定律, 以及相应的有关质子与中子、中子与中子间的力学定律, 对这些粒子在核中的全部行为就应该能在理论上给予描述了。因此, 关于研究质子散射的宏大计划启动了, 希望借此找到质子之间作用力的定律, 但经过了 30 年的努力, 完全没有任何结果。有关质子与质子间作用力的知识已经积累了相当多, 但却发现, 这种力可能要多么复杂就有多么复杂。

所谓“可能要多么复杂就有多么复杂”, 我们指的是该力取决于应有尽有的许多东西。

首先, 核力并非两质子间距离的简单函数。在距离大时它是吸引力, 而在距离较小时则是排斥力。这种与距离的依赖关系, 仍然未能完全搞清楚。

其次, 核力依赖于质子自旋的指向。凡是质子都有自旋, 而任何两个相互作用着的质子都可能以同向或反向的角动量自旋着。当两自旋平行与反平行时, 如图 8-6(a)和(b)所示, 两者的作用力是不同的。这差别很大, 并不是一个微小效应。

第三, 当两质子间的间隔在平行于它们的自旋方向上, 如图 8-6(c)和(d)时, 与当间隔

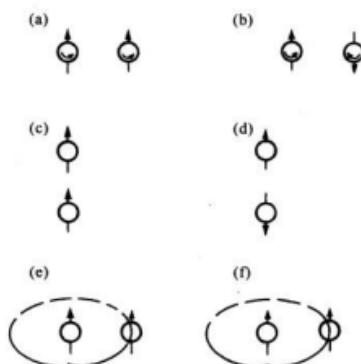


图 8-6 作用于两质子间的力取决于每一个可能参数

可是,存在一个重要方面,核力比其可能有的性质较为简单。这就是,两个中子间的核力与质子与中子间的核力彼此相同,与两质子间的核力相同!在任何核作用的情况下,如果我们用一个中子去代替质子(或者相反),核的相互作用不会改变。这种相等性的“基本原因”还不清楚,但它是也可以推广到其他强相互作用粒子——诸如 π 介子及“奇异”粒子——的相互作用定律去的重要原理的一个例子。

这一事实可用相似的核中各能级的位置漂亮地显示出来。考虑一个像 ^{11}B (硼 11)的核,它是由 5 个质子和 6 个中子构成的。在这个核中这 11 个粒子以最复杂的舞蹈方式互相作用。现在,在所有可能的相互作用中存在一种具有最低可能能量的组态,那就是核的正常态,称为基态。如果核被扰动(比如说受一高能质子或其他粒子的撞击),它将跃迁到称为激发态的其他任何一个组态上去,每一激发态都将有一个高于基态的特征能量。在核物理研究中,像在利用范德格拉夫起电机[例如在加州工学院的凯洛格(Kellogg)和斯隆(Sloan)两实验室]所做的研究中,这些激发态的能量以及其他性质都可以由实验加以测定。关于 ^{11}B 的 15 个已知的最低激发态的能量表示在图 8-7 左边的一维图表上,那根最低的水平线代表基态。第一激发态拥有高于基态 2.14 MeV 的能量,第二激发态则有比基态高出 4.46 MeV 的能量,如此等等。核物理的研究试图对这一相当复杂的能量图案找到解释,然而直到如今,关于这种

在垂直于自旋方向上,如图中的(a)和(b)时,力的差别也相当大。

第四,如同磁现象一样,核力依赖于质子的速度,只是这依存关系比起磁的情况来要强得多。而且,这个与速度有关的力并不是一种相对论效应。即使在速率远小于光速时,它仍然相当强。此外,这一部分力除了与速度大小有关外还依赖于其他东西。例如,当一质子在另一质子附近运动时,其轨道运动与自旋的转动方向同向,如图 8-6(e)所示,与其轨道运动和自旋转动反向的如图 8-6(f)所示,这力是不同的。这叫作核力的“自旋-轨道”部分。

在质子与中子间、中子与中子间作用力也同样地复杂。迄今为止,我们还不知道这些力后面的机制——也就是任何理解它们的简单途径。

10.61	10.89
10.26	10.56
10.32	10.08
9.87	9.73
9.19	9.92
9.28	
8.92	
8.57	8.98
	8.43
7.99	8.66
	8.10
7.30	7.50
6.76	6.90
6.81	6.35
	6.49
5.03	
4.46	4.81
	4.32
2.14	2.00

^{11}B 1.982 ^{11}C

图 8-7 ^{11}B 和 ^{11}C 的能级(以兆电子伏数计)。 ^{11}C 的基态比 ^{11}B 的要高出 1.982 MeV

核能级的完整而普遍的理论却还未找到。

如果把¹¹B中的一个中子换成质子，则会得到一个碳的同位素¹¹C的核。这¹¹C的最低16个激态的能量也已测量出来，它们被描画于图8-7中的右边（虚线表示那些实验结果尚属可疑的能级）。

看看图8-7，我们便知道，在这两种核的能级图案之间存在着惊人的相似性。第一激态位于基态之上约2MeV处。从第一激发态到达第二个激发态有一个大小约为2.3MeV的能隙，然后仅以一个大小为0.5MeV的小跳跃就到达第三激发态。在第四至第五个能级间又再有一个大的跳跃；可是在第五与第六两个能级之间则只有0.1MeV的小间隔了，如此等等。在约第十个能级之后，这种对应性似乎消失，但若用其他的规定特性——诸如角动量以及凡足以使其额外能量遭到损失的东西——来标明能级的话，则这种对应性就仍可以见到。

在¹¹B和¹¹C的能级图案间的惊人相似性肯定不仅仅是个巧合，它必然揭露了某个物理定律。事实上，它显示出：即使在核内的复杂情况下，用质子代替中子仅造成十分微小的变化。这只能意味着中子与中子、质子与质子之间的力必定几乎全同。只有这样，我们才会期望，拥有5个质子与6个中子的核的组态同拥有6个质子与5个中子的核的组态彼此相同。

注意，这两种核的性质还未告诉我们有关中子与质子间作用力的情况。这两种核中的中子与质子的组合数目相同，但若比较另外两个核，比如拥有6个质子与8个中子的¹⁴C，同拥有7个质子与7个中子的¹⁴N，我们又会找到能级相似的对应性。因此，可以断定： $p-p$ ， $n-n$ 与 $p-n$ 这三种力在它们所有的复杂性上都相同。关于核力定律竟存在这么一个意想不到的原理。尽管每对核粒子间的力十分复杂，但这三种可能不同的对之间的力却是相同的。

但某种小的差别仍然存在，能级并不严格对应。并且，¹¹C基态的绝对能量（它的质量）比¹¹B的基态绝对能量高1.982MeV，所有其他能级在绝对能量上也高出这么多。因此，这些力并不完全相等。可是我们知道得很清楚，整个力并不严格相等。由于每个质子都带正电荷，所以两质子之间就存在着电力，而在两个中子之间就不存在这种电力。我们或许能够通过¹¹B和¹¹C这两种情况中质子间电相互作用不同这一事实来解释它们间的差别？或许甚至能级上其余的小差别也是由这一电效应所引起的？既然核力比电力强得那么多，电效应对于各能级上的能量就只应该有小的微扰影响。

为了核对这个概念，或毋宁说是要找出这一概念的后果如何，我们首先考虑这两种核的基态能量的差别。为选取一个十分简单的模型，我们假定核是含有Z个质子、半径为r（待定）的球体。如果认为核像一个具有均匀电荷密度的球体，那么会预料到[由式(8.7)]其静电能为

$$U = \frac{3}{5} \frac{(Zq_e)^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (8.22)$$

式中 q_e 为质子的基本电荷。由于在¹¹B中Z为5，而在¹¹C中Z为6，所以它们的电能将是不同的。

然而，就具有这种小数目的质子来说，式(8.22)并不十分正确。如果假定各质子是几乎均匀地分布在球体中的各点，并计算所有这些质子对间的电能，则将发现，式(8.22)中 Z^2 那个量应由 $Z(Z-1)$ 代替，因而能量为

$$U = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{r}. \quad (8.23)$$

若已知半径 r , 就可以利用式(8.23)求出 ^{11}B 与 ^{11}C 之间静电能的差。但我们却要倒过来计算, 即利用所观测到的能量差来算出半径, 假定这能量差全都起源于静电方面。

可是, 这并不完全正确。 ^{11}B 与 ^{11}C 基态间的能量差 1.982 MeV 还包括所有各粒子的静能——即能量 mc^2 。在从 ^{11}B 变成 ^{11}C 的过程中, 我们是用一个质量较小的质子和一个电子来代替一个中子的。因而部分能量差就是一个中子与一个质子加一个电子的静能之差, 它等于 0.784 MeV。为了用静电能来说明能量差, 因而这能量差应比 1.982 MeV 还要多, 即

$$1.982 + 0.784 = 2.766 \text{ MeV}.$$

把这一能量数值代入式(8.23)中, 便可找出 ^{11}B 或 ^{11}C 的半径为

$$r = 3.12 \times 10^{-13} \text{ cm}. \quad (8.24)$$

这个数值到底是否具有任何意义? 要弄清楚这一点, 我们应拿它同这些核半径的某些其他测量结果做比较。例如, 可以通过观察核是如何散射快速粒子而对它的半径做另一种测量。事实上, 从这样的测量已经发现所有各种核中的物质密度都几乎相同, 也就是说, 它们的体积与其所含有的粒子数成正比。若令 A 为核中质子和中子的总数(这是一个与其质量非常接近成正比的数目), 那么已经找出半径可由下式给出:

$$r = A^{1/3} r_0, \quad (8.25)$$

其中

$$r_0 = 1.2 \times 10^{-13} \text{ cm}. \quad (8.26)$$

从这些测量结果我们发现一个 ^{11}B (或一个 ^{11}C)核的半径预期为

$$r = (1.2 \times 10^{-13})(11)^{1/3} \text{ cm} = 2.7 \times 10^{-13} \text{ cm}.$$

把这一结果与式(8.24)做比较, 就可见 ^{11}B 与 ^{11}C 的能量差乃起因于静电方面的假设是相当良好的, 差异只有约 15%(作为我们的第一次核计算来说, 这结果并不算坏!)。

产生差异的原因可能是这样, 按照对核的现代理解, 偶数的核粒子——在 ^{11}B 中是 5 个中子与 5 个质子——会形成一个核心, 当另外一个粒子加入到这个核心时, 它会在该核心外面绕行以形成一个新的球形核, 而不是被吸收到里面去。如果是这样, 对于加入质子情况我们应取不同的静电能。对于 ^{11}C 比 ^{11}B 超过的能量, 我们应该仅仅取 $\frac{Z_B q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$, 这是在该核心之外再添加一个质子所需的能量。这个数值只不过是式(8.23)所预期的数值的 5/6, 所以对半径的新的预期值就只有式(8.24)的数值的 5/6, 该值就更接近于直接测量的值。

从结果彼此相符这一事实就可以得出两个结论。其一是, 电的定律在小至 10^{-13} cm 的范围内看来仍然适用; 另一是, 我们已经证实了质子与质子、中子与中子以及质子与中子之间力的非电部分全都相等这一引人注目的巧合。

§ 8-5 静电场中的能量

现在来考虑计算静电能的其他方法。这些方法全都可以从基本关系式(8.3)推导出来, 该式将每个电荷对的相互作用能对所有电荷对求和。首先, 我们希望写出有关电荷分布的

能量表达式。按照常规,认为每个体积元 dV 含有电荷元 ρdV 。于是式(8.3)将写成

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{全部空间}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_1 dV_2. \quad (8.27)$$

注意:之所以要引入因子 $\frac{1}{2}$,是因为在对 dV_1 和 dV_2 的双重积分中,我们已把所有电荷元对都计算了两遍(没有任何方便的办法可以写出一个能跟踪电荷对,以使每对仅算一次的积分式)。其次,我们也注意到,式(8.27)中对 dV_2 的积分恰好是点(1)处的势,即是

$$\int \frac{\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 = \phi(1),$$

因而,式(8.27)便可以写成

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(1) \phi(1) dV_1.$$

或者,由于点(2)已不再出现了,便可以简单地写成

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV. \quad (8.28)$$

这一方程可做如下说明。电荷 ρdV 的势能等于这电荷与其所在处势的乘积,因此,总能量就是对 ϕdV 的积分。但又有因子 $\frac{1}{2}$,这仍然是需要的,因为我们把能量计算了两遍。两个电荷间的相互作用能等于其中一个电荷乘以其所在点由另一电荷产生的势。或者,这也可认为是第二个电荷乘以该点由第一个电荷产生的势。于是对于两个点电荷来说,我们写成

$$U = q_1 \phi(1) = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}},$$

或

$$U = q_2 \phi(2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}.$$

注意,我们也能写成

$$U = \frac{1}{2} [q_1 \phi(1) + q_2 \phi(2)]. \quad (8.29)$$

式(8.28)中的积分部分对应于(8.29)中括弧内的两项。这就是为什么我们需要那个因子 $\frac{1}{2}$ 的原因。

一个有趣的问题:这静电能究竟位于何处?或许我们也会问:谁在乎呢?提出这样一个问题有什么意义?如果有一对相互作用着的电荷,则该组合就有某个能量。我们是否有必要说出该能量定位于其中某一电荷处、或另一电荷处、或两个电荷处、或两个电荷之间?这些问题可能不具有任何意义,因为我们实在只知道总能量是守恒的。能量定位在某处的概念并非必要。

然而,一般说来,假定能说出能量位于某处,确实具有意义,如同热能那样,那么,我们就应该对能量守恒原理用如下的概念加以推广,即如果在一个给定体积内的能量变化了,我们应该能够通过流进或流出该体积的能量来说明这种变化。你认识到,如果某些能量从一处

消失而在另一遥远处出现,在其间并没有任何东西正在通过(也就是说,没有任何特殊的现象发生),则我们先前关于能量守恒原理的提法仍然完全正确。因此,目前我们正在讨论关于能量守恒这一概念的推广,也许可以称为局域性能量守恒原理。这样的一个原理会说:在任何给定体积内能量只能依据流进或流出该体积的量来变化。能量确实有可能是按这一方式局域守恒的。如果事情果然是这样,我们应有一个比起总能量守恒那种简单提法详细得多的定律。实际情况是,在自然界中能量是局域守恒的。我们能够找到关于能量在哪里以及它如何从一处跑到另一处的公式。

能够说出能量在哪里是重要的事情,还有一个物理上的原因。按照引力理论,所有质量都是引力之源。我们也知道,根据式 $E = mc^2$, 质量与能量彼此等价。因此,所有能量就都是引力之源。要是我们不能够指明能量的位置,也就不能够指明质量的位置。我们将不可能说出引力场的源究竟位于何处。因而引力理论将是不完整的。

若把我们限制在静电学的范围里,确实无法说出能量的位置在哪里。电动力学完整的麦克斯韦方程会向我们提供多得多的知识(尽管此时答案严格说来仍不是唯一的),因此,我们将在后面一章中再详细讨论这个问题,现在仅仅给出在静电学的特殊情况下的那种结果。能量在电场所在的空间里,这似乎很合理,因为我们知道,当电荷加速时它们会辐射出电场来。我们愿意这么说,即当光或无线电波从一点传播至另一点时,它们随身带着能量,但是在这些波中却没有电荷。因此喜欢把能量定域在电磁场所在的地方,而不是在其发出来的电荷那里。于是我们不用电荷而是用由电荷所产生的场来描述能量。事实上,能够证明式(8.28)在数值上等于

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (8.30)$$

于是,可把此式解释为:当电场存在时,在该空间里就定域了能量,其密度(单位体积能量)为:

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (8.31)$$

这一概念如图 8-8 所示。

为要证明式(8.30)与静电学定律一致,我们现在把曾在第 6 章中得到的有关 ρ 与 ϕ 的关系

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi$$

引入(8.28)式,因而得到

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \phi \nabla^2 \phi dV. \quad (8.32)$$

写出被积函数的各个分量后,可见到

$$\begin{aligned} \phi \nabla^2 \phi &= \phi \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \\ &= \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi). \end{aligned} \quad (8.33)$$

于是我们的能量积分为

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV.$$

可以利用高斯定理把第二个积分变成一个面积分：

$$\int_{\text{体积}} \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV = \int_{\text{曲面}} \phi \nabla \phi \cdot n da. \quad (8.34)$$

我们要在所有电荷都被放置在某个有限距离内的假定下，对面积伸展至无限远处（从而使体积分变成对全部空间的积分）的情况计算该面积分，进行积分的简单办法乃是取一个具有巨大半径而其中心位于坐标系原点的球面。我们知道，当离所有电荷都很远时， ϕ 会随 $1/R$ 变化，而 $\nabla \phi$ 则按 $1/R^2$ 变化（如果那里分布中的净电荷为零，则这两项均将随 R 下降得更快）。由于该巨大球面的面积随 R^2 增大，当球面的半径增大时，那面积分将按照 $(1/R)(1/R^2)R^2 = (1/R)$ 而下降。因此，如果把全部空间都包括在我们的积分之内 ($R \rightarrow \infty$)，则该面积分将趋于零，而结果为：

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{全部空间}} (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{全部空间}} E \cdot E dV. \quad (8.35)$$

由此可见，对于任何电荷分布，我们总能将其能量表达为对场中能量密度的积分。

§ 8-6 点电荷的能量

我们的新关系式(8.35)说明，即使单个点电荷 q 也将有若干静电能量。在这种情况下，电场是由下式给出的：

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

因此，在距离电荷 r 处的能量密度为

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}.$$

我们可以取一个厚度为 dr 、面积为 $4\pi r^2$ 的球壳作为体积元。总能量为

$$U = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r=0}^{r=\infty}. \quad (8.36)$$

现在对于在 $r = \infty$ 的上限毫无困难。但对于一个点电荷来说，我们本应从下限 $r = 0$ 积起，而这会给出一个无限大的数值。式(8.35)讲：在一个点电荷的场中会有无限大的能量，尽管我们过去是从只在点电荷之间才有能量那种观点出发的。在我们原来关于一群点电荷的能量公式(8.3)中，并未把电荷对于其本身的任何相互作用能包括在内。实际发生的

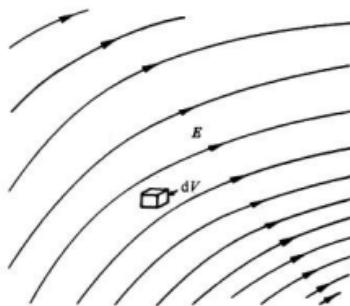


图 8-8 在电场中每一体积元 $dV = dx dy dz$ 含有能量 $(\epsilon_0/2) E^2 dV$

情况乃是：当我们转变到电荷的连续分布、即式(8.27)时，就曾计入了每一无限小电荷与所有其他无限小电荷之间的相互作用能。同一计算也包括在式(8.35)之内，因而当将其应用于有限多点电荷时，我们已把从无限小部分电荷聚集起来所要的那种能量也包括进去了。事实上，我们将注意到：若应用有关一个带电球体的能量表示式(8.11)，并让其中半径趋于零，则我们也会获得式(8.36)中的那种结果。

必须断言，把能量定域在场中的那种概念同存在点电荷的假设是彼此不相容的。一种摆脱困难的办法应该说明，像电子那样的基本电荷并不是一些点，而实际上是电荷的微小分布。或者，本来我们也可以这样讲：在十分微小的距离内，电学理论已有些错误，或局域能量守恒的概念有点不对头。对于这两种观点中的任一个观点都存在困难，这些困难从未得到克服，一直遗留到今天。此后在某个时候，当我们已讨论过诸如电磁场中的动量那样一些附加概念之后，就将对在理解大自然时所碰到的这些基本困难给予更全面的估量。

第9章 大气中的电学

§ 9-1 大气的电势梯度

在寻常的日子，平坦的旷野或海洋上，当从地面垂直上升时，电势将每米增加约 100 V 。这样，在空气中就有一个竖直的 100 V m^{-1} 的电场。这电场的符号与地面上带负电相对应。这意思是说，在室外，在你鼻子的高度上就有高于你脚下 200 V 的电势差！你也许会问：“为什么我们不正好在人体外空气中一米的距离上安装一对电极，就可利用这 100 V 来点亮电灯？”或者你也许会觉得奇怪：“是否真的在我的鼻子和脚底之间就会存在 200 V 的电势差，那为什么当我出门上街时不会受到电击？”

我们先来回答第二个问题。你的身体是一个相当好的导电体，当你与地面接触时，你和地面将趋于形成一个等势面。通常等势面平行于地面，如图9-1(a)所示，但当你站在那里时，这些等势面就会变形，而场看来像图9-1(b)所示的样子。因此，在你的头与脚之间有非常接近于零的电势差。有一些电荷会从地面走向你的头部，从而改变着电场。它们有些会通过从空气中积累的离子而放电，但由这些过程形成的电流十分微小，因为空气是一种不良导体。

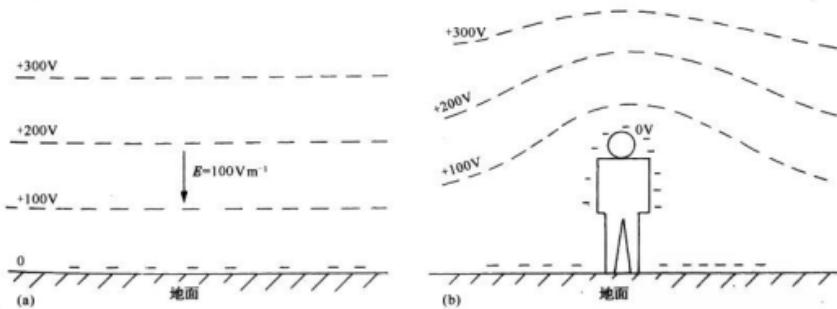


图9-1 (a)在地面上的电势分布；(b)在室外平坦地方人身附近的电势分布

如果把某件东西放在那里就会改变电场，那我们怎么能够测量这样的电场呢？有几种测量办法。一个办法是，把一个绝缘好的导体置于高出地面某个距离处，并让它留在那里一直到它的电势与空气的电势相等时为止。如果它在那里停留得足够久，则空气里的微小导电性会让电荷漏出该导体（或漏到该导体上去），直到它取得在它的高度上的势为止。然后，再把它带回到地面上，并测量当这样做时势的改变。一种较快捷的做法是令该导体为一个稍有点儿泄漏的水桶。当水珠滴下时，会带走任何超额电荷，因而该水桶与空气的势将趋向

于相同(正如你所知道的,电荷分布于表面,当水珠漏出来时,“表面各部分”就会拆散)。我们可用一个静电计来测量水桶的电势。

还有另一种直接测量电势梯度的方法。由于存在电场,所以在地面上就会有面电荷

$(\sigma = \epsilon_0 E)$ 。如果放置一块平坦金属板在地面上并把它接地,负电荷就会在它上面出现[图 9-2(a)]。现在若再对这块板覆盖上另一块接地的导体 B ,则电荷将会出现在这一块遮盖板上,而原来那块板 A 却没有电荷了。当我们把 B 盖上时,测量从 A 流向地面的电流(比方用一个连接于接地导线上的电流计),便能找出原来在那里的电荷密度,所以也就求得了电场。

在建议了如何才能测量大气中的电场后,我们现在继续来对它进行描述。首先,测量的结果表明:当我们升向高空时这个场持续存在,但它会逐渐减弱。在约 50 km 的高度上,这电场变得十分微弱,因而大部分的势差(对 E 的积分)都发生在较小高度上。从地面起一直到大气顶部总势差约为 400 000 V。

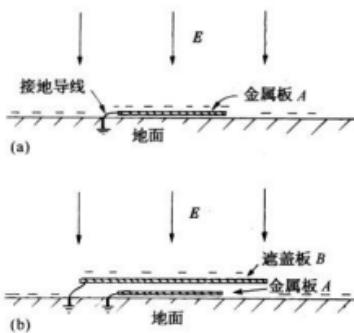


图 9-2 (a)一块接地金属板与相同面积的地面带有相同的面电荷;(b)如果这块板又给另一块接地的导电体覆盖着,则它便不会有电荷。

§ 9-2 大气中的电流

除了电势梯度以外,另一个可以测量的东西就是大气中的电流。这电流密度很小——通过与地面平行的每平方米面积约有 10 pA。空气显然不是完美的绝缘体,而由于这一导电性,一个微小电流——由刚才所描述的那种电场所引起的——就会从天空流向大地。

为什么大气会有导电性?原因是,这里或那里的空气分子中存在个别离子——比如已获得了一个额外电子、或也许丧失了一个电子的氧分子。这些离子并不保持为单独的分子状态,它们由于带有电场而经常会把几个其他分子聚集在其周围,于是每一离子就成为一小团块,与其他团块一起,在电场中到处漂移——缓慢地移上移下——形成所观察到的电流。这些离子从哪里来的呢?最初人们猜测这些离子是由地球的放射性产生的(已经知道,从放射性材料发出的辐射会把空气分子电离而使空气导电)。像 β 射线那样的粒子,从原子核出来之后会跑得那样快以致把电子从空气里的原子中扯去,从而留下离子。当然,这就暗示着:要是我们升至较大高度,便会发现电离作用较少,因为放射性全都藏在地表上的尘土之中——在镭、铀、钾等的痕迹中。

为了检验这一理论,有些物理学家带着仪器乘气球上升去测量空气电离度(赫斯,1912 年),但发现的情况相反——单位体积里的电离度随高度而增加(仪器与图 9-3 所示的相类似,两块金属板周期性地被充电至一

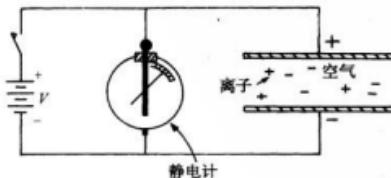


图 9-3 测量由于离子运动所引起的空气导电性

电势 V 。由于空气的导电性,这两块板将慢慢地放电,这放电率用静电计测量)! 这是一个最神秘的结果——在关于大气电研究的整个历史中最为戏剧性的发现。事实上,该结果是如此具有戏剧性,以致需要一门全新的学科分支——宇宙射线学。大气电本身仍保留它的不太戏剧性的地位。电离作用显然是从地球以外的某种东西产生的。对于这一来源的研究,导致了宇宙线的发现。我们现在不讨论宇宙线这一学科,只是说明宇宙线会维持离子的供应。尽管离子经常会被清除掉,但新的离子却总会由外面来的宇宙射线粒子创造出来。

为准确起见,我们必须说,除了由分子形成的离子外,还有其他种类的离子。微小的灰尘,像十分细小的粉末微粒,会漂浮于空气中并带了电。它们有时被称为“核”。例如,在海面上当一个波浪破碎时,小小的浪花就会飞溅到空中。当一颗这样的水珠蒸发时,它将留下一个无限小的 NaCl 晶体浮荡于空气中。此后,这些小晶体可能会拾取电荷而成为离子,它们被称为“大离子”。

那些小离子——由宇宙线形成——最易于移动。由于它们那么小,就会在空气中运动得相当快——在 100 Vm^{-1} (或 1 Vcm^{-1}) 的场中其速率约为 1 cms^{-1} 。那些大得多而又重得多的离子,运动起来就缓慢得多。事实是,倘若空中有许多个“核”,它们会从那些小离子上拾得电荷。此时,由于“大离子”在场中运动得那么慢,总电导率就降低了。因此,空气的电导率是很容易变化的,因为它对空气里存在的灰尘份量很敏感。在陆地上这样的灰尘比在水面上多得多,因为风会刮起尘埃,或在那里人类会把各种污染抛入空气之中。这并不奇怪,日复一日,从此地到彼地,靠近地面的电导率变化得很厉害。在地面任何特定的地点所观测到的电压梯度也变化得很大,因为在不同的地方从高空流下来的电流大致相同,而只是由于靠近地面处多变的电导率引起了电压梯度的差异。

起因于离子漂移的空气电导率也随着高度上升而增加得很快——由于两个原因。首先,由宇宙线引起的电离作用随高度增加;其次,当空气密度降低时,离子的平均自由程增大,从而在碰撞之前,它们能够在电场中跑得较远——结果使电导率随高度增加得很快。

虽然空气中的电流密度只有每平方米几皮安,但由于大地表面有许许多多的平方米,以致在任何时候流至地面的总电流很接近于 $1\ 800 \text{ A}$ 这一常数。当然,这个电流是“正”的——它把正电荷带到地面上。因此,我们就有 $400\ 000 \text{ V}$ 的电压供应,并伴有 $1\ 800 \text{ A}$ 的电流——功率达七亿瓦!

随着这么大的电流流下来,在地面上的负电荷会被很快放电。事实上,只需约半个钟头就使整个大地都放了电。但大气电场自从它被发现以来已经不止半个钟头。它到底是怎样得到维持的呢? 什么东西在维持着电压? 这电压存在于地球与什么东西之间? 问题多得不胜枚举。

地球是负的,而空气中的电势是正的。如果你升得够高,那里的电导率会大得使水平方向电压变化的机会不多。对于我们所谈及的时间尺度来说,空气实际上已变成了导体。这发生在 50 km 左右的高空上。这一高度还没有所谓“电离层”那么高,在电离层中有由日光的光电现象所产生的大量离子。尽管如此,对于我们有关大气电的讨论来说,在约 50 km 的高空处,空气已变得足以导电,以致可以想象在这一高度上实际存在一个理想的导电面,电流从那里流下来。这种情况的图像如图 9-4 所示。问题是:正电荷怎样会

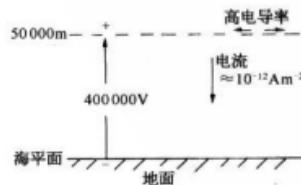


图 9-4 在晴朗大气中的典型电状态

维持在那里？它是怎样被泵回去的？既然它已降落到地面上，总得想办法把它泵回去才行。这是人们在相当长一段时间内有关大气电的最大困惑之一。

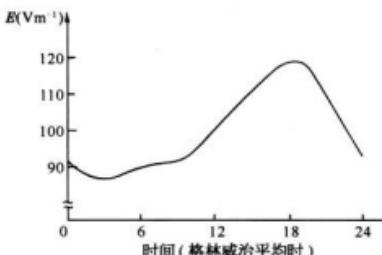


图 9-5 在晴朗的日子里，在海洋上大气电势梯度的平均日变化(参照格林威治时间)

的钟在下午敲 7 点时电流就达到它的峰值！全世界，电流总是在伦敦时间下午 7 时达到极大，而在伦敦时间上午 4 时则达到极小。换句话说，它取决于地球的绝对时间，而不是取决于进行观测地点的当地时间。从一个方面说，这并不见得神秘，它与我们的下述观点一致，即在大气顶层有极高的横向电导率，这使得从地面至顶层间的电势差不可能按地域改变。任何电势变化都应该是全球性的，而事实确是如此。因此，我们现在所知道的就是，在“顶”面的电势随地球的绝对时间升降 15%。

§ 9-3 大气电流的来源

其次，我们必须谈谈关于从“顶”层流至地面持续对地球充负电的那种巨大负电流的来源，承担这一任务的电池组究竟放在哪里？这电池组如图 9-6 所表示。充电是通过雷暴雨和闪电来实现的。事实证明，那些闪电并不会使我们刚才谈及的电势“放电”（起初你或许会这样猜测的）。雷雨把负电荷带至地球上。每当一次闪电落下时，十之八九会把大量负电荷带至地球。正是全世界的这些雷暴雨经常以平均 1 800 A 的电流把地球充起电来，然后它通过天气好的那些地区逐渐放电。

整个地面每天约有四万次雷暴雨，而我们可将其想象成会把电荷泵至上层以保持其电势差的电池组，然后计入地面的地理因素——在巴西每天下午总有雷暴雨及在非洲热带地区的雷暴雨等等。人们已经对在任何时候世界范围内落下多少次闪电做了估计，不用说他们的估计多少总会同电势差方面的测量结果相符：在整个地面上雷暴雨活动的总量在伦敦时间下午 7 时达到最高。然而，关于雷暴雨的估计十分难于做出，而只是在人们知道了必须发生那种变化之后才做出该估计的。这些事情十分困难，因为我们无论在海洋上或在全世界所有各地区，都没有做过足够多的观察以准确地弄清楚雷暴雨发生的次数。但那些认为他们“做得对”的人都曾得到这么一个结果，即在世界范围内每秒发生一百次闪电，在格林威治平均时间下午 7 点钟雷暴雨活动达到顶峰。

为了了解这些电池组是怎样工作的，我们将详细地考察一次雷暴雨。在雷暴雨过程中

我们能够得到的每一点信息都会提供关于某事物的线索，或至少会告诉你关于它的某些情况。这里就是一个有趣现象：比方，若在海面上测量电流（它比起电势梯度来更为稳定），或者在严格条件下进行测量，并十分小心地对结果加以平均，除去不规则的变化，我们发现，仍然逐日变化。对在洋面上许多测量结果的平均，显示出一种大致如图 9-5 所示的那种跟随时间的变化。电流约有 $\pm 15\%$ 的变化，而在伦敦时间每天下午 7 时变化最大。事情的奇怪方面是：不论你在哪里测量电流——是在大西洋、太平洋或北冰洋上——总是当伦敦的钟在下午敲 7 点时电流就达到它的峰值！

全世界，电流总是在伦敦时间下午 7 时达到极大，而在伦敦时间上午 4 时则达到极小。换句话说，它取决于地球的绝对时间，而不是取决于进行观测地点的当地时间。



图 9-6 产生大气电场的机制[由 William L. Widmayer 拍的照片]

到底发生了什么？打算就迄今已知道的给予描述。当我们进入实际自然界——而不是一些想象中的理想导电球体存在于我们所能够非常熟练地加以解决的其他球面之内——这种令人惊奇的现象时，我们就发现不懂的东西非常多。任何曾经经历过雷暴雨的人都会感到一种享受，或吃了一惊，或至少也发生过某种激动吧。而在自然界中那些会引起激动的地方，我们发现一般都存在与此相应的复杂性和神秘性。目前并不可能对雷暴雨的行为做出准确描述，因为我们懂得的仍然不太多。但我们愿意尝试对所发生的事情稍微描述一下。

§ 9-4. 雷 暴 雨

首先，一场普通的雷暴雨是由若干个彼此相当靠近却又几乎互为独立的“盒形区域”构成的。所以，最好是每次仅仅分析其中的一个盒。所谓“盒形区”指的是一个在水平方向上占据有限面积的区域，而全部基本过程都会在此中发生。通常会有几个盒子靠在一起，而在每一个中所发生的现象又约略相同，尽管可能在时间上有所不同。图 9-7 以一种理想的方式指示出在雷暴雨的最初阶段这样一个盒子会出现的形态。结果表明：在我们即将描述的条件下，空气中某处会出现普遍的空气上升，越接近顶层速度就越大。当底层的温暖而又潮湿的空气上升时，它会被冷却而其中的水蒸气发生凝结。图中那些小星星代表雪花，而小点点则代表雨，但由于向上冲的气流足够强而这些雨滴和雪花又足够小，因而在这一阶段雪和雨都不会落下来，这是开始阶段，还不是真正的雷暴雨——在这种意义上地面上还未发生过任何变化。当暖空气上升的同时，还会把旁边的空气也吸引过来——这是许多年来一直被忽略的一个要点。于是，不仅下面的空气会升上来，而且还有从侧面来的一份量的空气。

为什么空气会像这样上升呢？正如你们所知道的，高度越高空气就越冷。地面被太阳晒热，而这些热量再辐射至天空中则要依靠大气高层中的水蒸气，因此，在高空空气是冷

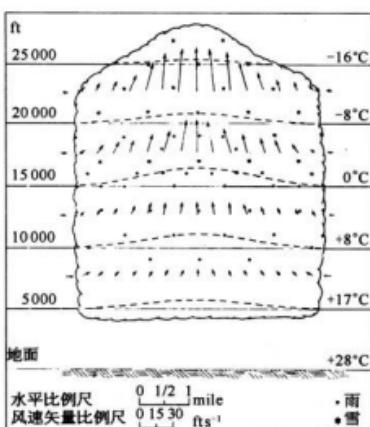


图 9-7 在最初发展阶段中的一个雷暴雨盒
[转载自美国商业部气候局报告, 1949 年 6 月]

的——十分寒冷——较低的地方它较温暖。你可能会说：“那么事情很简单，暖空气比冷空气较轻，因而这个组合在力学上是不稳定的，这样暖空气便会上升。”当然，如果在不同高度空气的温度不同，那它在热力学上是不稳定的。要是让空气本身无限久地不受影响，则空气全部会达到相同的温度。可是，它并非不受干扰，太阳（在白天）总会向它照射。因此，问题确实不是一个热力学平衡的问题，而是一种力学平衡问题。假设我们——像在图 9-8 所示的那样——把空气温度相对地面上的高度做一曲线，在通常情况下，会得到沿一条像图 9-8 中(a)那样的曲线下降关系，当高度增大时温度下降了。大气怎样才能得到稳定呢？为什么下层的热空气不会简单地上升到冷空气中去？答案是这样的：假如空气上升，压强就会下降，而要是考虑一特定区域里的空气正在上升，则它将绝热膨胀（没有任何热量会进出该区，因为在我们这里所考虑的那么大的尺寸内，将不会有时间让大批热量流动）。于是这个区域里的空气当升高时就会变冷。像这样的绝热过程会给出一条如图 9-8 中曲线(b)那样的温度与高度关系。任何从下面升上来的空气比它进入的环境温度要低，这样就没有理由让下层的热空气升上来。假如真的升起的话，它将冷却到其温度比原来已在该处的空气低，则会比那里的空气重，因而刚好一升上来就要再降落下去了。在一个美好、晴朗的日子里湿度很低，此时大气中存在某个温度下降率，这一般比由曲线(b)所表示的那“极大稳定梯度”要低些。空气是处在一个稳定的力学平衡状态中。

另一方面，要是我们想起一个里面含有许多水汽的部分空气正在上升，那么它的绝热冷却曲线就将不同。当它膨胀而冷却时，其中的水蒸气将会凝结，而这些正在凝结的水会释放出热量。因此，潮湿空气并不像干燥空气冷却得那么厉害。所以如果比平均湿度高的那种空气开始上升，则其温度将按图 9-8(c)那样的曲线下降。它将变得冷一些，但仍比同一高度的周围空气要暖和。如果一个区域中存在温暖的湿空气，并由于某种原因开始上升，则它始终比周围的空气要轻而温暖，所以将继续升高直到升达很高处为止。这就是使雷暴雨盒中的空气上升的机制。

多年来，关于雷暴雨盒的解释就只是这样。但此后的测量结果表明，云层里不同高度的温度并不会像曲线(c)所示的那样高。原因是：当湿空气的“气泡”上升时，它会从其周围捕捉到一些空气，并

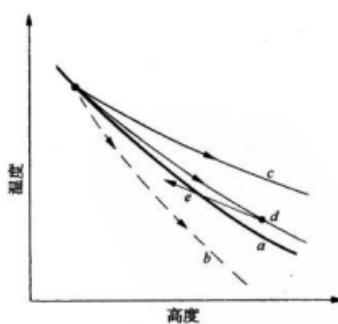


图 9-8 大气温度。(a)静态大气；(b)干燥空气的绝热冷却；(c)潮湿空气的绝热冷却；(d)潮湿空气与一些周围空气混合

为这些空气所冷却。温度对高度的关系看来就更像曲线(d),与曲线(c)相比,它与原来的曲线(a)要接近得多。

当上述对流发生了之后,雷暴雨盒的截面看来就像图 9-9 那样。我们已有了所谓“成熟”的雷暴雨了。在这个阶段,向上冲的气流非常迅猛,一直升达 10 000~15 000 m——有时比这还要高得多。具有凝结特点的雷暴雨盒顶部会一直向上爬至高出一般云端之外,由一股通常约每小时 60 mile 的向上气流来完成。当水汽被带上去而凝结时,它形成了一些迅速被冷却至 0 °C 以下的小水滴。它们本应该凝固,但并不立即凝固——它们已经是“过冷”了的水点。只要不存在足以使结晶过程开始的一些“核”,水及其他液体往往会在结晶之前冷却至凝固点之下。只有当一小块物质、例如一小块 NaCl 晶体存在时,水滴才会凝成一小冰块。此后平衡是这样建立的,即水滴蒸发而冰晶生长。于是,在某一时刻水会迅速消失,而冰迅速形成。并且,在水滴与冰粒之间也有可能直接相撞——那些过冷的水便粘上冰粒,从而使它突然结晶。所以在云体膨胀的某一时刻会有大的冰粒迅速累积起来。

当这些冰粒足够重时,它们穿过上升的空气开始降落——它们变得太重,以致那向上的气流支持不住。当冰粒落下来时,会连同一点儿空气也带下来,因而就开始了一股向下刮的气流。而足够奇怪的是,很容易看出当这种下刮之风一旦开始了之后,便将继续保持。现在空气正在冲下来!

注意,图 9-8 中那条代表云里实际温度分布情况的曲线(d),要比适用于潮湿空气的曲线(c)稍微陡些*。所以,如果有湿空气落下来,则它的温度将按曲线(c)的斜率降落,只要下降得够多,它的温度便会低于其周围的温度,如图中曲线(e)所指出的。当它一旦那样做时,它的密度便会比周围的空气大,因而将继续迅速下降。你们会说:“那是一种永恒运动。起初你曾争辩说空气应该上升,而当你确已把它升到那里时,却又同样巧妙地争辩说它应该下降”。但它并不是永恒运动。当情况不稳定而暖空气必须上升时,显然就得有某种东西来代替该暖空气。同样确实的是,下降的冷空气会有力地代替那暖空气,但你认识到,那下落的并不是原来的空气。早期的论据认为有某种特别的云,它上升时并不会挟带旁边的空气,而在上升了之后就又降落下来,这确有某种令人迷惑不解之处。这种论点需要雨来维持那向下的气流——是一个难以置信的论据。一旦我们认识到有不少原来空气会混杂于上升的空气之中,则热力学论据就足以表明原本处于某一高处的冷空气会降落下来。这就解释了图 9-9 的草图上的那种活跃的雷暴雨形象。

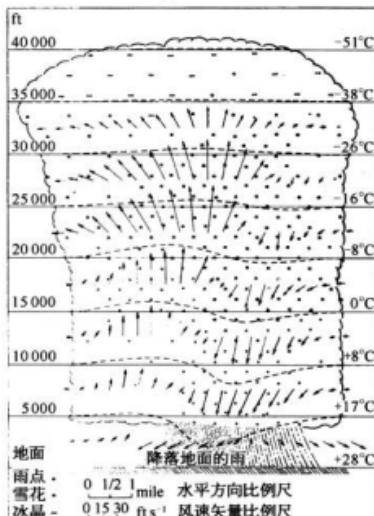


图 9-9 成熟的雷暴雨盒 [转载自美国商业部气候局报告,1949 年 6 月]

* 这里按原文是“没有那么陡”,似乎有误,所以我们把它改了。——译者注

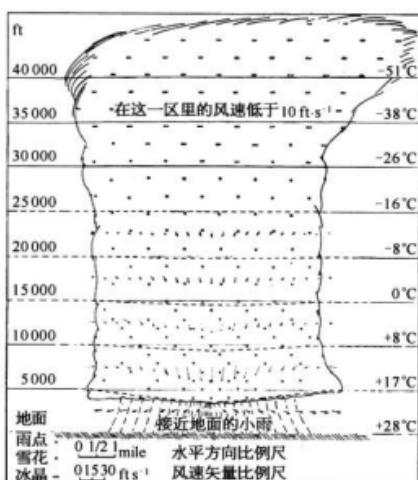


图 9-10 雷暴雨盒的后一阶段形势 [转载自美国商务部气候局报告, 1949 年 6 月]

冰晶残留在高空中。由于在极大高度上风吹向四面八方, 云端通常就会伸展成一块铁砧的形状。雷暴雨盒到了生命的尽头。

§ 9-5 电荷分离的机制

现在要来讨论对我们的目的来说最重要的方面——即关于电荷的发展情况。各种实验——包括飞机穿过雷暴雨区(干这一件事的飞行员真是好汉!)——都告诉我们, 在雷暴雨盒里的电荷分布有点像图 9-11 所示的那样。在顶部有正电荷, 而在底部则有负电荷——只在云脚处还有小的局部区域带有正电荷, 这对每个人都曾引起不少烦恼。似乎还没有谁懂得为什么它会存在那里, 到底它有什么重要性——是该正电荷雨降落时的次级效应、还是机制中的基本部分。假使它不存在, 事情该会简单得多。不管怎样, 在底部占优势的负电荷与在顶部占优势的正电荷对于促使地面带负电所必需的电池组就有了正确符号。正电荷存在于 6 或 7 km 高的大气中, 那里温度约为 -20°C , 而负电荷则在 3~4 km 高处, 那里温度在 0°C 与 -10°C 之间。

聚集在云底的电荷大到足以使在云与地面之间产生一个 20 或 30、甚至达到 100 MV 的电势差——比起在晴朗大气中从“天空”至地面的 0.4 MV 要高得多。这样高的电压会把空气击穿, 并产生大规模的弧光放电现象。当击穿发生时, 在雷暴雨区底部的负电荷就会在闪电中被带到了地面。

现在我们将比较详细地来描述闪电的特性。首先, 附近应有大的电势差, 才能把空气击穿。闪电会发生在一朵云的两部分之间, 或在云与云之间, 或在云与地面之间。在每一次独

当空气降落时, 雨开始从雷暴雨盒的底层降下来。另外, 当那相对寒冷的空气降落到地面上时, 还会向周围扩展。所以恰好在雨尚未落下之前, 就有一小股冷风给我们以大暴雨即将来临的预兆。在暴风雨本身中, 会有猛烈而又无规的阵风, 而在云层里则有巨大的湍流, 如此等等。但基本上是先有一股向上气流, 然后才有一股气流向下一一般说来, 这是一个十分复杂的过程。

降雨过程开始的时刻也就是强劲的下降气流开始的时刻, 实际上, 也是电现象发生的时刻。然而, 在对闪电进行描述以前, 我们可以通过考察在半个钟头至一个钟头以内, 雷暴雨盒中发生的情况来结束这个故事。此时, 该盒看来就像图 9-10 所示的那样。向上的气流停止了, 因为已不再有足够的暖空气来维持它。降雨继续了一阵子, 最后连一些小水滴都落了下来, 情况逐渐变得越来越平静——尽管还有一些小冰

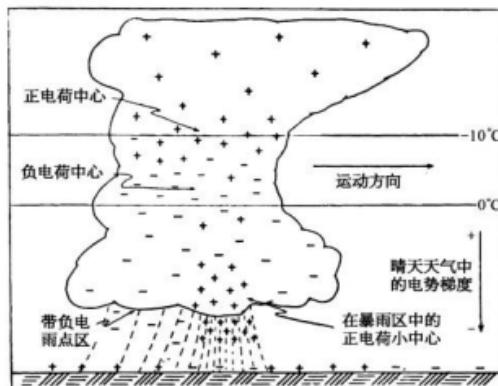


图 9-11 在一个成熟的雷暴雨云中的电荷分布 [转载自美国商业部气候局报告, 1949 年 6 月]

立的放电闪光——就是你所见到的那种闪电——中大约有 20~30 C 的电荷被带到地面。一个问题是: 云要再生这些被闪电所带走的 20 或 30 C 电荷需要多少时间? 这可以通过测量在离云很远的地方由云的电偶极矩所产生的电场而得知。在这样的测量中你可以见到, 在闪电那一瞬间电场会突然降低, 然后又有一个返回到原值的指数式变化, 这个指数函数的时间常数对不同情况稍微不同, 但约略在 5 s 左右。每次发生闪电之后, 雷暴雨只消 5 s 就能再度建立起它的电荷。这并非意味着另一次闪电一定要恰恰在 5 s 之后发生, 当然因为几何形状的改变等等, 闪电或多或少是无规发生的, 但重要的是, 大约需要 5 s 才能重新创造原来条件。这样在雷暴雨的起电机中会流经约 4 A 的电流。这意味着, 任何为解释暴雨如何能产生它的电荷的模型一定是具有大量燃料的——它必须是一部庞大而又迅速运转着的装置。

在进一步讨论之前, 我们将考虑一件几乎肯定是完全不相干的、但却是饶有趣味的事情, 因为它的确表明电场对水滴的影响。我们之所以说它可能与雷电无关, 是因为它联系到的是我们能用一束水流在实验室里做的、表明电场对水滴影响相当强的实验, 而在雷暴雨中却没有水流, 那里只存在由凝结的冰和水滴所形成的云。因此, 关于在雷暴雨中起作用的机制问题, 可能根本就与能够在即将描述的简单实验中所见到的现象毫无关系。要是你取一个小喷嘴接至水龙头上, 并以陡峭的角度朝上安放, 如图 9-12 所示, 那么水便将以一小束流的形式射出来并最后碎裂成一串由微小水滴组成的雾。如果你现在把一根带电棒移近过来, 那么该水流的形状就将改变。若用弱电场, 则你将发现水流会破裂成数目较少的一些大水滴。但若

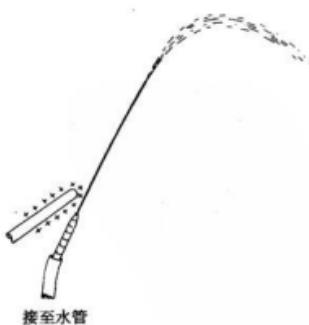


图 9-12 把电场靠近喷嘴时的一条水流

所提供的是一个强电场，则水流将碎裂成许许多多的微小水滴——比以前的要小得多*。采用弱电场时，有一种会妨碍水流碎裂成水点的倾向。可是，若用强电场则拆开成水滴的倾向就增加。

有关这些效应的解释可能是这样。如果有一条从喷嘴射出来的水流而又让一弱电场横穿过它，则它的一边会稍微带正电而另一边稍微带负电。此时，当水流破裂时，一边的水滴便可能带正电而另一边的水滴带负电。它们将彼此互相吸引并比以前更加倾向于粘在一起——水流不会那么容易破裂了。反之，如果电场较强，则存在于每一水滴上的电荷比较多，因而电荷本身就会通过其中的互斥作用而协助把那些水滴分裂。每一水滴将碎裂成许多更小的各带有电荷的水滴，因而它们将互相排斥而迅速向外扩展。所以当我们增强电场时，水流便将分裂成更微细的水珠。我们想要提出的唯一一点是，在某些条件下电场能够对水滴发生相当大的影响。在雷暴雨中某些事情发生的精确机制，还完全未弄清楚，而且也完全无需与刚才所描述的现象联系在一起。我们之所以把它包括进来只是为了使你们认识到可能会起作用的那些复杂性。事实上，还没有谁提出过以这种概念作为基础而适用于云的理论。

我们要来描述两种已经发明的、用来解释雷暴雨中电荷被分离的理论。两种理论都包含这样一个概念，即在凝结的粒子上带有某些电荷，而在空气中则有另一些不同电荷。于是通过这些凝结粒子——水滴或冰粒——在空气中的运动，电荷便分离了。唯一的问题是：这些粒子开始是怎样带电的？较老的一种理论被称为“水滴破裂”论。有人曾经发现，如果气流中有一水滴破裂为两小块，则在水滴上存在正电荷，而在空气里会有负电荷。这种水滴破裂理论存在几方面的缺点，其中最严重的是符号弄错了。其次，在大量会出现闪电的那种温度带式雷暴雨雨盒中，高空里的凝结效应乃是形成冰，而不是形成水。

从刚才所说的，我们注意到，若能够想出一种在水滴顶部与底部各带有不同电荷的方法，而如果又能知道为什么在一个高速空气流中水滴会破裂成大小两部分——由于水滴穿

过空气的运动，或其他原因使大的部分在前面而小的部分在后面——那么我们便会有一套理论了（这与任何已知的理论不同）。此后，在空气阻力的影响下，小滴在空中降落不如大滴那样快，因而取得了电荷分离的效果。你看，编造出各种可能性是有可能的。

一种更巧妙的、在许多方面比那水滴破裂理论更为满意的理论，是由 C. T. R. 威尔逊提出的。我们将按照威尔逊的办法用水滴来描述它，尽管这一现象也适用于冰。假设有一水滴正在约 100 Vm^{-1} 的电场中朝着带负电的地面降落。这水滴将有一个感生电偶极矩——水滴的底部带正电而顶部带负电，这如图 9-13 所示。

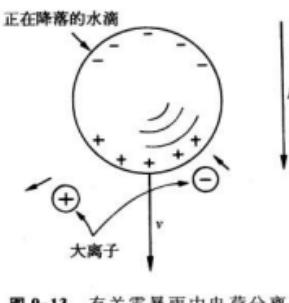


图 9-13 有关雷暴雨中电荷分离的 C. T. R. 威尔逊理论

原来在空气中会有如上面所提及的“核”——那些粗大而运动迟缓的离子（高速度的离子在这里没有重要影响）。假设当这水滴降落时，接近这么

* 一种方便的用以观察水滴大小的办法是，让水流落在一大块金属薄板上，较大的水滴会造成较响的声音。

一个大离子。若这个大离子带的是正电，它会被水滴底部的正电荷所推开。因而，它就不会粘在该水滴上。可是，假若该离子是从上面接近水滴的，则它也许会粘在那带负电的顶部。但由于水滴正在空中降落，所以有一股相对于水滴向上的气流，这气流将把离子带走，如果各离子在空气中运动得足够缓慢的话。于是正离子也就不会粘在水滴上了。你看，这只适用于大而行动缓慢的离子，这一种类型的正离子将不会粘在一顆降落的水滴前面或后面。反之，当一水滴接近一些粗大而行动缓慢的负离子时，它们便将被吸引而终于粘了上去，水滴将获得负电荷——这个电荷符号已被整个地球上的原来电势差所确定——而我们便将得到一个正确符号了。负电荷将由这些水滴带到了云的底部，而剩下来的带正电荷的离子则将被各种向上气流吹刮至云顶。这一套理论看来相当好，至少会提供正确符号，并且它也不依赖于要有液态水滴。当我们以后学习到电介质的极化时将会见到，用小冰块也同样会做这些事情。当它们处于电场中时，在其两端处也将产生出电荷。

然而，即便这一理论也还有一些问题。首先，在雷暴雨中所牵涉到的总电荷会非常多。过了一段短时间之后，那些大离子的供应将告枯竭，因此威尔逊和其他人就建议还得有其他的大离子来源。一旦这种电荷的分离开始，巨大的电场便形成，而在这些大电场中某些地方的空气就可能发生电离。如果有一个尖端强烈带电，或有任何像水滴那样的小物体，则它可能将场集中到足够强以致造成“刷形放电”。当有一个足够强的电场时——让我们说它是正的吧——电子们便将落入场中并在两次碰撞之间获得了巨大速率。它们的速率将足以在碰到另一个原子时把其中的一些电子拉出来，而让正电荷留在后面。这些新的电子又将获得速率而与更多的原子碰撞。因此，就将有一种链式反应或雪崩现象发生，从而离子会迅速积累起来。那些正电荷被留在原来的位置附近，因而净效应就是把原来在某一点上的正电荷分布在围绕该点的一个区域内。此时，当然就不再有强电场了，而这一过程便停止。这就是刷形放电的特点。有可能在云里的电场会变成足够强，以致形成一个小小的刷形放电；也可能还有其他别的机制，在一旦发动了之后就能产生大量离子。但还没有谁会确切知道它如何动作，因此，关于闪电的基本原因实际上就还未完全明白。我们仅知道它是来源于雷暴雨（而且我们当然也知道，雷声来自闪电——是由闪电释放的热能引起的）。

至少我们已能部分地理解大气电的起源。通过气流、离子以及雷暴雨中的水滴或冰粒，正、负电荷被分开了。正电荷被向上带至云顶（见图 9-11），而负电荷则在电击时倾倒到地面上。那些正电荷还会离开云顶，进入具有更高电导率的高层大气中，并将伸展至全球。在气候晴朗的地区，这一高空层里的正电荷会通过空气中存在着的离子——由宇宙线、海洋及人类活动所形成的——缓慢地输送至地面。大气是一部忙碌工作着的电机！

§ 9-6 闪 电

作为闪电中所发生情况的证据的第一张照片是这样获得的，快门打开着的一部照相机由人们提着前后移动——同时指向闪电所预期发生的地方。用这种办法获得的早期照片清楚地表明，闪电往往是由沿相同路线的一连串放电构成的。后来，一种安装在一个迅速旋转着的盘上的、配有分开 180° 的双镜头“博伊斯”(Boys)牌照相机问世了。由每一镜头所形成的像横越胶片移动——图像按时间被展开。比方，若闪电重复着，就会有并排着的两个像。通过对由这两个镜头所形成的像做比较，人们就有可能计算出有关闪光发生的时间序列的细节。

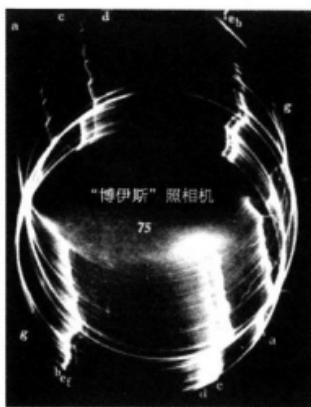


图 9-14 由一部“博伊斯”牌照相机拍得的一张闪电照片 [转载自 Schonland, Malan and Collens, *Proc. Roy. Soc. London*, 1935, 152]

朵的充满着负电荷的一根“导线”。现在，云里的负电荷能够最后干脆逃脱了出来。处在指引线底部的那些电子最早体会到这一点，它们倾倒了出来，剩下正电荷在后头，那又再从指引线的较高处吸引着更多的负电荷，而这又再倾倒下来，如此等等。所以最后一部分云朵里的全部负电荷将沿着这根柱以迅速而有力的方式奔跑出来。因此你所见到的闪电乃是地面跑上去的，如图 9-16 所示。实际上，这一主要闪电——是其中最明亮的部分——称为回路闪电。这就是能够产生十分明亮的光的那种东西，而其热量使空气迅速膨胀从而发生霹雳一声雷响。

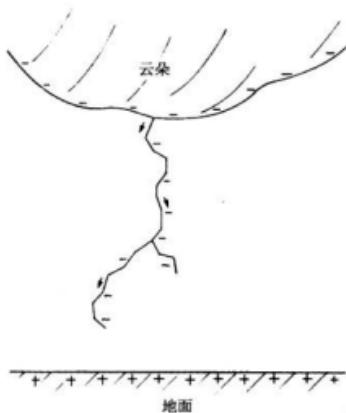


图 9-15 “梯式指引线”的形成



图 9-16 回路闪电沿着指引线所开辟的道路回头跑上去

图 9-14 表示由“博伊斯”牌照相机拍摄的一张照片。

现在我们要来描写闪电。另外，对它的动作仍未确切理解。仅将对它的外表形象给予定性描述，但对于它为什么会这样表现则不做详细讨论。我们将仅仅描述在平坦旷野上面云底带有负电荷的那种普通情况。这朵云的负电势比起下面的地球的负电势来还要低得多，因而带负电荷的电子将被加速而奔向地面。发生的情况如下。全都从一种所谓“梯式指引线”开始，这并没有像闪电那么光亮。在照片上人们可以看到，初时一小点亮斑会从云朵那里开始出现，随即迅速地向下移动——以六分之一的光速进行！它只跑过 50 m 左右便停下来。约歇息 50 μs 之后，重又开始第一步。再歇息一会就又跨出第三步，如此等等。通过一连串阶梯而向地面运动，沿着像图 9-15 所示的路线。在这条指引线里有来自云朵的负电荷，整根柱里充满着负电荷。并且，空气被那些产生该指引线的迅速运动的电荷所电离，因而沿电荷走过的这条路线空气已变成导体。在指引线接触到地面的那一瞬间，便有向上直通云

在一次闪电中，电流的峰值达到约 10 000 A，由它带下来的电荷约为 20 C。

但至此事态仍未结束。可能在大约百分之几秒后，当这个回路闪电消失时，另一条梯式指引线又冲了下来。但这一次中间不再歇息。它被称为“飞标引线”，一直奔跑下来——一下子就从顶到底。它全力完全沿着旧路前进，因为那里还有足够的余烬使它成为一条最容易通得过的路径。这一条新的指引线又再充满着负电荷。当它接触到地面的一刻——咝的一声！——沿着该路径就有一个回路闪电一直往上冲击。所以你会看到闪电一再发生。有时仅闪击一两次，有时五或十次——有一次在同一条路线上竟有多达 42 次的闪电被看到——但总是迅速地相继发生的。

有时事情甚至变得更加复杂。例如，在其中一次歇息之后，该指引线可能通过送出两个阶梯——都是朝下指向地面的，但在不同的角度上——而发展成一种分支，如图 9-15。此后会发生什么情况，将取决于其中是否有一条支肯定更早地到达地面。如果真的是这样，则那明亮的（把负电荷倾卸到地面上的）回路闪电便会沿这条直达地面的支路往上冲，而在其通往云朵的路途中经过该分叉点时，就有一条明亮的闪电沿另一条支路往下跑。为什么？因为负电荷正在倾倒而下，而这便点燃了闪电。这电荷开始在那个次级分支的顶端运动，把该支路中那些较长的相继部分排空，因而该明亮闪电便显示出是在沿该支路奔跑下来，同时闪电也朝着云朵伸展上去。然而，倘若这些额外的指引线支路有一条恰巧几乎同时与那原来的指引线到达地面，则有时恰巧可能那第二次闪电的飞标指引线沿着这第二条支路。于是，我们便见到第一次主闪光发生在一处，而第二次闪光则发生在另一处。它是从原来概念衍生来的。

再者，对于十分靠近地面的区域，我们上面的描述就过于简化了。当该梯式指引线离地面 100 m 内时，有证据表明从地面发生了放电来迎接它。大概电场已变强至足以使一刷形放电产生。例如，设有一尖锐物体，诸如有尖顶的一座建筑物，那么当指引线落下至该屋顶附近时，电场是那么强大以致放电从尖端开始而向上达到该指引线。闪电倾向于打击这样的一点。

显然久已明白，高耸的东西常受雷击。波斯王哲息斯 (Xerxes) 的顾问阿塔班尼斯 (Artabanis) 曾有一句名言，那是当哲息斯企图把整个已知世界都归由波斯人管辖而出征时，他给予他的主子关于对希腊的一次预谋攻击的忠告。阿塔班尼斯说：“看上帝怎样利用他的闪电来毁灭那些大野兽，他不能容忍它们逐渐变傲慢，而那些小动物却从未惹怒过他。同样，他又如何使他的闪电总是落在高屋和高树上。”然后，他才解释理由：“因此，十分明白，他喜欢把任何灾难都降落在那些自高自大的东西上面”。

你是否会觉得——现在你已经懂得了闪电总要打击高大树木的真正原因——比 2 400 年前的阿塔班尼斯对国王有关军事上的忠告更加明智？不要自高自大，你做起来只会比他更缺乏诗意。

第 10 章 电 介 质

§ 10-1 介电常量

这里,我们开始讨论在电场的影响下物质的另一种特殊性质。上一章我们曾考虑过导体的行为,其中电荷为了响应电场而自由地移至这样的点上,使得在导体内部不再残留电场。现在我们将讨论绝缘体,即那种不能导电的材料。也许人们起初会认为不应该有任何效应。然而,利用一个简单验电器和一个平行板电容器,法拉第就发现事实并非如此。他的实验表明,在这个电容器的两板间塞进一块绝缘体时,其电容会增加。若绝缘体完全充满两板的间隙,电容会增大 κ 倍,而 κ 的大小仅取决于该绝缘材料的性质。绝缘材料也称作电介质。这样,该因子 κ 就代表电介质的一种特性,因而被称为介电常量。当然,真空的介电常量为1。

现在我们的问题在于解释:如果绝缘体确实是绝缘的而不能导电,那为什么还会有某种电效应呢?我们从电容增大这一实验事实出发,试找出可能的原因。考虑一个平行板电容器,在其两导体表面上带有一些电荷,让我们假定顶板带着负电而底板带着正电,两板的间距为 d ,而每块板的面积为 A 。正如以前我们曾经证明过的,这样一个电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad (10.1)$$

而在其上面的电荷与电压的关系为

$$Q = CV. \quad (10.2)$$

现在有这样的实验事实:若把一块留西特(一种人造荧光树脂)玻璃那样的绝缘材料塞进极板之间,则我们会发现电容增大了。当然,这意味着,对于相同的电荷来说电压则是降低了。可是电压或电势差等于电场经过电容器的积分,因而我们必然得出结论,即使两板上的电荷保持不变,电容器里的电场还是会减弱的。

怎么会这样呢?有一个由高斯创立的定律告诉我们,电场通量正比于所包围的电荷。考虑图10-1那个由虚线表示的高斯面 S 。由于有电介质存在时电场被削弱,所以我们断定,在该面内的净电荷应少于没有该材料时的净电荷。只有一个可能的结论,那就是在电介质表面上必然存在正电荷。由于场虽被削弱了,但不是降低至零,所以我们应期待这正电荷仍比在导体表面上的负电荷少。因此,只要能够以某种方式理解,当介电材料被置于电场中时会有正电荷感生于其一面而负电荷感生于另一面,这一现象便可以得到解释。

我们会预料,对于导体来说,这同一现象也会发生。比方,假设有一个板间距为 d 的电容器,而我们将一块厚度为 b 的电中性导体放进两板之间,如图10-2所示。电场在顶面会感生正电荷,而在底面感生负电荷,因而在导体内部就没有电场了。但在其他空间里的场,则和未放进该导体时一样,因为它等于面电荷密度除以 ϵ_0 。可是,为了获得电压(电势差)得

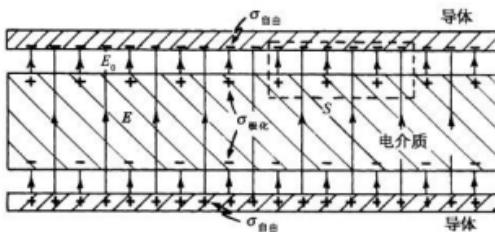


图 10-1 含有一个平行板电容器。图中表示出 E 线

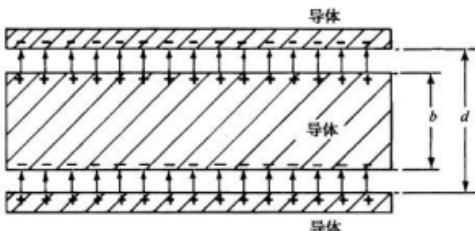


图 10-2 若把一块导电板放进一个平行板电容器的空隙里, 那些感生电荷就会使导体内之场减少至零

进行积分, 此时所取的距离却已经缩短了。该电压为

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - b).$$

关于电容的最终公式与式(10.1)相似, 即

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d(1 - b/d)}. \quad (10.3)$$

只要用 $(d - b)$ 来代替 d 罢了。

电容按一定因子增大, 而这个因子取决于 (b/d) , 即被导体所占的体积与原来空间体积的比例。

上述实验结果为我们提供了一个关于电介质到底是怎么回事的形象化模型——在材料内部有许多会导电的小片。这么一个模型的困难在于它具有某一特定轴, 即那些片的法线, 而大多数电介质却没有这么一种轴。然而, 若我们假定所有介电材料都含有彼此绝缘分开的小导电球体, 如图 10-3 所示的那样, 这一困难则可以消除的。介电常量现象可以通过感生于每个球上的电荷的效果来加以解释。这是用来解释被观察到的法拉第现象的最早有关电介质的物理模型之一。更具体地说, 曾经假定材料里每一原子是一个理想导体, 但彼此互相绝缘。介电常量 κ 应该取决于这些导电小球体所占空间的比例。然而, 这并不是目前常用的模型。

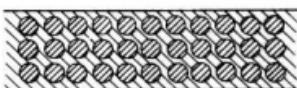


图 10-3 关于电介质的一个模型。小导电球体被埋在一块理想绝缘体之中

§ 10-2 极化矢量 \mathbf{P}

如果我们更深入地进行上面的分析，便会发现，关于完全导电性与完全绝缘性范围的概念并不是必要的。每一个小球的作用就像一个电偶极子，而其偶极矩则是由外电场感生的。对于理解电介质所唯一不可缺少的东西是：在该材料里感生了许许多多个小偶极子。是否由于具备一些小导电球体或由于其他原因才会感生那些偶极子，却是无关紧要的。

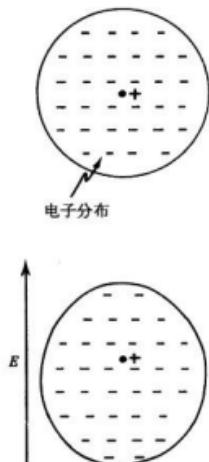
如果原子不是一个导电球体，那电场为什么会在原子中感生一个电偶极矩呢？这一课题将留在下一章中做较详尽的讨论，内容会涉及介电材料的内部机制。然而，我们在这里要举出一个例子以显示一种可能的机制。一个原子在其核上带有正电荷，而在其周围则有一些负电子。当处于电场中时，核会被吸引向一方，而电子向另一方。电子的轨道或波形（或用任何一种量子力学图像）将在某种程度上变了形，如图 10-4 所示，负电荷的重心将移动而不再与核上的正电荷相重合。这样的一种电荷分布我们曾经讨论过。若从远处看，则这么一个电中性位形在一級近似下它相当于一个小的电偶极子。

这样说似乎更合理：若场不太强，则所感生的偶极矩将与场成正比。这就是说，弱电场将把电荷稍微移动一点，而强电场则把它们移动得多些——总是与场成正比——除非位移变得太大。在这一章的其余部分，我们将假定电偶极矩严格地与场成正比。

现在我们将设想，在每一原子中存在间距为 δ 的两个电荷 q ，因而 $q\delta$ 就是每一原子的偶极矩（我们采用 δ ，因为已把 d 用于两极板的间距了）。设单位体积中含有 N 个原子，则单位体积的偶极矩等于 $Nq\delta$ 。这个单位体积偶极矩将用矢量 \mathbf{P} 来代表。不用说，它处在各个电偶极矩的方向，也就是处在电荷位移 δ 的方向：

$$\mathbf{P} = Nq\delta. \quad (10.4)$$

图 10-4 电场中原子的电子分布，其中电子相对于核来说已有了移动



一般说来，在电介质里面 \mathbf{P} 将随位置而改变。可是，在材料中的任一点， \mathbf{P} 与电场 \mathbf{E} 成正比。这个比例常数取决于电子移位的容易程度，它将与构成该材料的原子种类有关。

实际上是什么东西在决定这个比例常数如何表现，对十分强大的场这个常数保持不变会准确至什么程度，以及在不同材料内部会有什么事情发生，关于这些我们都将在以后讨论。目前，我们将简单假定，存在一种与电场成正比的感生电偶极矩的机制。

§ 10-3 极化电荷

现在让我们来看看，这一模型对于含有电介质的电容器的理论会提供些什么？首先，考虑其中每单位体积含有一定电偶极矩的一片材料。平均说来，是否会存在由此而产生的任

何电荷密度？如果 \mathbf{P} 是均匀的，那就不会有。即如果彼此被相对移了位的正电荷和负电荷都有相同的平均密度，那么它们被移了位这个事实就不会在该体积里产生任何净电荷。反之，要是 \mathbf{P} 在某一地方较大而在另一地方较小，那就会意味着被移进某一区域的电荷比移出的要多。因此，我们会预期得到一个体电荷密度。对于平行板电容器来说，我们假定 \mathbf{P} 是均匀的，因而就只需考虑在表面所发生的情况。在一个表面上，负电荷即电子，实际上被移出了一段距离 δ ；在另一个表面上，它们却向里面移动，因而留下正电荷使之实际上移出一段距离 δ 。如图 10-5 所示，我们将有一个称为面极化电荷的面电荷密度。

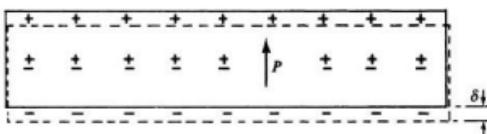


图 10-5 在均匀电场中的一片电介质。正电荷相对于负电荷被移动了一段距离 δ

面极化电荷可以这样计算。设 A 为板的面积，则出现在板面上的电子数目应等于 A 、 N （单位体积的电子数）及位移 δ ——这里假定它与板面垂直——三者的乘积。表面电荷可由此再乘上电子电荷 q_e 而获得。为要得到在表面上感生的极化电荷面密度，我们除以 A 。因此，面电荷密度的大小为

$$\sigma_{\text{极化}} = Nq_e \delta.$$

但这恰好等于式(10.4)中极化矢量 \mathbf{P} 的量值：

$$\sigma_{\text{极化}} = P. \quad (10.5)$$

面电荷密度就等于材料内的极化强度。当然，这面电荷在一个面上是正的，而在另一个面上则是负的。

现在让我们假定，上述那块板就是存在于平行板电容器中的电介质。构成电容器的那两块金属板也带有面电荷，这我们将称之为 $\sigma_{\text{自由}}$ ，因为这些电荷可以在导体上到处“自由”移动。当然，这就是对电容器充电时我们放上去的电荷。必须强调， $\sigma_{\text{极化}}$ 之所以存在只是由于有了 $\sigma_{\text{自由}}$ 。如果通过使电容器放电而将 $\sigma_{\text{自由}}$ 移去，则 $\sigma_{\text{极化}}$ 将消失，但它没有沿放电导线跑掉，而是缩回材料里面去了——由于材料内部极化的衰减。

现在，我们可以将高斯定律用于图 10-1 的那个高斯面 S 。电介质里的电场 E 等于总的面电荷密度除以 ϵ_0 。很明显， $\sigma_{\text{极化}}$ 与 $\sigma_{\text{自由}}$ 具有相反符号，因而

$$E = \frac{\sigma_{\text{自由}} - \sigma_{\text{极化}}}{\epsilon_0}. \quad (10.6)$$

注意！金属板与电介质表面间的电场 E_0 要比 E 大一些，它仅对应于 $\sigma_{\text{自由}}$ 。但这里我们所关心的却是电介质内部的场，如果电介质几乎充满了两板间的缝隙，那么场就遍及几乎整个体积。利用式(10.5)，我们可以写出

$$E = \frac{\sigma_{\text{自由}} - P}{\epsilon_0}. \quad (10.7)$$

这个式并不会告诉我们关于电场的样子,除非已知道 P 是什么。然而,这里我们已假定 P 依赖于 E ——实际上是正比于 E 。这个比例式通常写成

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (10.8)$$

常数 χ 称为该电介质的电极化率。

于是,式(10.7)变成

$$E = \frac{\sigma_{\text{自由}}}{\epsilon_0} \frac{1}{(1 + \chi)}, \quad (10.9)$$

这向我们提供了关于场被减弱的因子 $1/(1 + \chi)$ 。

两板间的电压等于对电场的积分。既然场是均匀的,积分就不过是 E 与两板间距 d 的乘积。我们有

$$V = Ed = \frac{\sigma_{\text{自由}} d}{\epsilon_0 (1 + \chi)}.$$

在电容器上的总电荷为 $\sigma_{\text{自由}} A$,以致由式(10.2)所定义的电容变成

$$C = \frac{\epsilon_0 A (1 + \chi)}{d} = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d}. \quad (10.10)$$

我们已解释了所观察到的事实。当一平行板电容器充满了电介质时,其电容就增大这么一个倍数

$$\kappa = 1 + \chi, \quad (10.11)$$

它代表该材料的一种特性。当然,我们的解释还不够完全,要等到已能解释——这将在以后来做——原子极化是怎样产生时才行。

现在,让我们来考虑某种稍微复杂的东西——极化强度 P 不是处处相同的情况。正如上面曾经提到的,如果极化不是常数,一般会预期在体积内找到电荷密度,因为进入一个小体积元一边的电荷比离开另一边的电荷也许会多一些。我们怎样才能求得到底有多少电荷为一个小体积所获得或丧失了呢?

首先,让我们计算当材料被极化时有多少电荷会通过任一个想象的表面。倘若极化垂直于该表面,则穿过一个表面的电荷量恰好就等于 P 乘以该面积。当然,要是极化与该表面相切,那便不会有任何电荷通过该表面。

按照我们曾经用过的同样的论据,很容易看出,通过任一面积元的电荷将与垂直于该面积的 P 的分量成正比。试比较图 10-6 和 10-5。我们见到在一般情况下,式(10.5)应改写成

$$\sigma_{\text{极化}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}. \quad (10.12)$$

若我们考虑在电介质里的一个想象的面积元,那么式(10.12)便会给出通过该面积的电荷,但不会形成净电荷,因为该面两边的电介质所贡献的仍是等量异号电荷。

然而,电荷的位移的确能产生体电荷密度。任

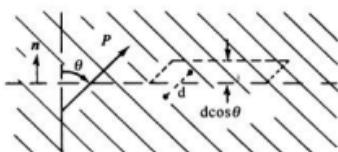


图 10-6 在电介质里通过一个想象的面积元的电荷与垂直于该面积的 P 的分量成正比

何体积 V 通过极化向外移出的总电荷等于 \mathbf{P} 的向外垂直分量对包围该体积的 S 面的积分(见图 10-7)。一个相等而异号的剩余电荷则被遗留在后头。我们把在体积 V 内的净电荷记作 $\Delta Q_{\text{极化}}$, 就可以写出

$$\Delta Q_{\text{极化}} = - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (10.13)$$

还可认为 $\Delta Q_{\text{极化}}$ 是具有密度 $\rho_{\text{极化}}$ 的体电荷分布引起的, 因而

$$\Delta Q_{\text{极化}} = \int_V \rho_{\text{极化}} dV. \quad (10.14)$$

将这两式结合起来, 便得

$$\int_V \rho_{\text{极化}} dV = - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (10.15)$$

我们已有一种把来自极化材料的电荷密度与极化矢量 \mathbf{P} 相联系起来的高斯定理。可以看到, 这与上面在平行板电容器中的电介质表面上的极化电荷所获得的结果相符。把式(10.15)应用到图 10-1 中的那个高斯面上, 该面积分给出 $P\Delta A$, 而在里面的电荷为 $\sigma_{\text{极化}}\Delta A$, 所以我们又再度获得 $\sigma_{\text{极化}} = P$ 。

正如以前我们对静电学的高斯定律所做的那样, 可以将式(10.15)转变成一个微分形式——利用数学上的高斯定理:

$$\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV.$$

我们得:

$$\rho_{\text{极化}} = - \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (10.16)$$

若是非均匀极化, 则它的散度给出在该材料里的净电荷密度。我们强调, 这是完全真实的电荷密度。之所以叫它作“极化电荷”, 只是为了要提醒我们自己, 它是如何得来的。

§ 10-4 有电介质时的静电方程组

现在, 让我们把上述结果同静电学理论结合起来。静电学的基本方程是

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (10.17)$$

这里 ρ 指一切电荷的密度。由于极化电荷不容易被注意, 因而把 ρ 分开成两部分是很方便的。我们再把由非均匀极化所引起的电荷叫作 $\rho_{\text{极化}}$, 而把所有其他的电荷叫作 $\rho_{\text{自由}}$ 。通常 $\rho_{\text{自由}}$ 指我们放在导体上面的或是置于空间某些特定位置上的电荷。于是, 式(10.17)便变成

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{自由}} + \rho_{\text{极化}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{自由}} - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

或

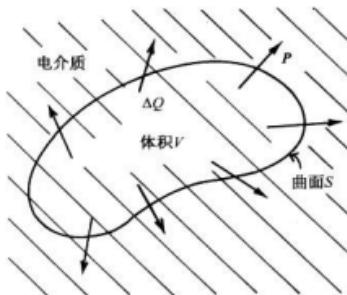


图 10-7 非均匀的极化强度 \mathbf{P} 会在电介质体内形成净电荷

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}. \quad (10.18)$$

当然,那个关于 \mathbf{E} 的旋度方程却没有改变:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.19)$$

由式(10.8)取 \mathbf{P} , 我们便得到一个较简单的方程:

$$\nabla \cdot [(1+\chi)\mathbf{E}] = \nabla \cdot (\kappa\mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}. \quad (10.20)$$

这些就是当有电介质时的静电学方程组。当然,它们并没有陈述任何新的东西,但对于其中 $\rho_{\text{自由}}$ 为已知、而极化强度 \mathbf{P} 又是正比于 \mathbf{E} 的那些情况,则在计算上它们仍不失为较方便的一种形式。

请注意! 我们并没有把介电“常量” κ 提到散度之外。那是因为它不一定会处处相同。如果它的值处处相同,则可以把它提出来,因而方程组就不过是那些用 κ 来除电荷密度 $\rho_{\text{自由}}$ 的静电方程组了。我们所给出的那种形式的方程组仍适用于一般情况,即场中不同地点可能存在不同的电介质。这样,该方程组就可能很不容易求解了。

有一件具有某种历史重要性的事情应在这里提出。在电学的早期,对极化的原子机制还未了解,而 $\rho_{\text{极化}}$ 的存在也未被觉察到。当时 $\rho_{\text{自由}}$ 被认为是全部电荷密度。为了把麦克斯韦方程组写成一简单形式,一个新的矢量 \mathbf{D} 被定义为 \mathbf{E} 与 \mathbf{P} 的线性组合:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (10.21)$$

结果,式(10.18)和(10.19)就曾被写成表面上看来十分简单的形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{自由}}; \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.22)$$

人们能否解出这组方程? 只有给出了 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 之间关系的第三个方程才能做到。当式(10.8)成立时,这个关系为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1+\chi) \mathbf{E} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (10.23)$$

上述方程往往被写成

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (10.24)$$

其中 ϵ 仍然是描述材料介电特性的另一个常数。它被称为“电容率”(现在你就明白,为什么在我们方程组中会有 ϵ_0 , 它是“真空的电容率”)。显然,

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 = (1+\chi) \epsilon_0. \quad (10.25)$$

今天我们从另一个观点来看待这些事情,那就是,在真空中方程组较为简单,而倘若在每种情况下我们把一切电荷(不管其来源如何)都表示出来,则该方程组总是正确的。如果为了方便我们将其中某些电荷分离开来,或由于我们不愿意详细讨论将要发生的事态,则可以把方程组改写成任一种可能方便的形式,要是我们乐意的话。

还有一点应该强调,一个像 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 的方程是描写物质特性的一种尝试。可是物质非常复杂,而这样一个方程实际上并不正确。例如,若 \mathbf{E} 变得太大,那么 \mathbf{D} 便不再正比于 \mathbf{E} 。对于某些物质来说,甚至在相对弱的电场下这个比例关系就已经破坏了。并且,这比例“常量”

还可能依赖于 E 随时间变化的快慢。因此这一种方程，像胡克定律一样，是一种近似。它不可能是一个深刻而又基本的方程。反之，我们关于 E 的基本方程组，式(10.17)和(10.19)，却代表我们对静电学的最深刻而又最完整的理解。

§ 10-5 有电介质时的场和力

现在，我们将证明在电介质存在的情况下，关于静电学的某些相对普遍的定理。我们已经看到，如果电容器的两平行板之间充满了电介质，则电容会增大某一定因子。还可以证明，这对于任何形状的电容器都是正确的，只要在两个导体附近的整个区域里都充满一种均匀的线性电介质就行。在没有电介质时，待解的方程组为：

$$\nabla \cdot E_0 = \frac{\rho_{自由}}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad \nabla \times E_0 = 0.$$

当有电介质时，前一个式子给修改了。因而，我们代之而有：

$$\nabla \cdot (\kappa E) = \frac{\rho_{自由}}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad \nabla \times E = 0. \quad (10.26)$$

现在，由于我们认为 κ 处处相等，这最后两方程还可以写成：

$$\nabla \cdot (\kappa E) = \frac{\rho_{自由}}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad \nabla \times (\kappa E) = 0. \quad (10.27)$$

因此，对于 κE 和对于 E_0 就有相同的方程组，它们具备 $\kappa E = E_0$ 的解。换句话说，比起没有电介质时的情况，场处处都减弱了一个因子 $1/\kappa$ 。由于电压是电场的线积分，所以电压也被降低了这同一因子。由于电容器电极上的电荷在两种情况下都被认为是相同的，式(10.2)就告诉我们，在一个处处都充满着均匀电介质的情况下，电容增大了 κ 倍。

现在我们要问，在有电介质时两个带电导体之间力该如何？考虑一种处处均匀的液态电介质。我们早已知道，一种求力的方法是把能量相对于一适当距离取微商。如果两导体上的电荷等量异号，能量就是 $U = Q^2/(2C)$ ，其中 C 为它们的电容。利用虚功原理，任何一个分力都由微商给出。例如，

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right). \quad (10.28)$$

由于电介质会给电容增大一个因子 κ ，因此所有力就将减少相同的因子。

必须强调，我们上面所说的只有对于液态电介质才正确。嵌在固态电介质里的导体的任何运动，都会改变电介质的机械应力条件，以及不但引起电介质里某种机械能量的变化，而且改变其电学性质。在液体中移动导体，则不会使液体发生变化。液体会移至一个新的地方，但它的电学性质却没有改变。

许多较古老的电学书往往从这样一个“基本”定律出发，即两电荷间的力为

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\kappa r^2}, \quad (10.29)$$

这种观点完全不能令人满意。其一是，它并非普遍正确，它只对充满某种液体的世界才正

确。其次,它有赖于 κ 是常数这么一个事实,这对于大多数实际材料来说只是近似正确。从电荷处于真空中的库仑定律出发会好得多,那永远是正确的(对于静止电荷来说)。

在固体中究竟会发生什么呢?这是一个十分困难的问题,至今还未得到解决,因为在某种意义上它是不确定的。如果你把电荷放进一固态电介质里面去,就将涉及各种压强和应变。假如不把压缩固体所需的机械能量也包括进去的话,就不能同虚功原理打交道。而一般说来,要对电力和起因于固体材料本身的机械力做出唯一的区别是相当困难的。幸而,实际上还没有人需要弄清楚所提问题的答案。他有时可能想要知道在一固体中将产生多少应变,而这是能够算出的,但比起我们对于液体所获得的那种简单结果要复杂得多。

在电介质理论中有一个非常复杂的问题:为什么一个带电物体会吸起一些小块电介质?如果你在一个干燥的日子里梳一下头发,那梳子会立即吸起一些小纸片来。如果你偶然想起这件事,你大概认为梳子上有一种电荷而纸片上则有与之异号的电荷。但纸片开始时是电中性的。它并没有任何净电荷,但不管怎样它终于被吸引了。真的!有时纸片会来到梳子上,然后又飞开,在它接触到梳子之后就立刻被排斥了。这其中原因当然在于:当纸片接触到梳子时,获得了一些负电荷,此后同号电荷便互相排斥了。但这并没有回答原来的问题。首先,为什么纸片会朝着梳子跑来呢?

答案得用电介质放在电场中时会被极化来求得。两种符号的极化电荷都存在,它们分别被梳子所吸引和排斥。然而,会有一个净吸引力,因为靠近梳子一边的电场比远离梳子那一边的电场较强——梳子并非一个无限大板块。它的电荷是局域性的。一块电中性纸片在一个平行板电容器里将不会被哪一块板所吸引。电场的变化才是这个吸引机制的本质部分。

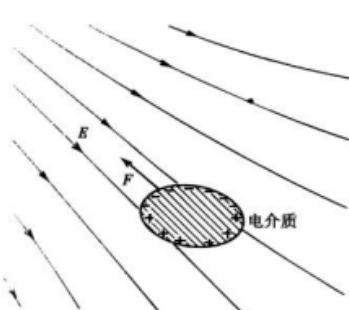


图 10-8 电介质在非均匀场中会感到一个指向场强较高的区域的力

如图 10-8 上所示,一块电介质总是从一弱场区域被拉向场较强的区域。事实上,人们能够证明,对于细小物体这个力正比于场强平方的梯度。为什么会取决于场的平方呢?因为那些感生电荷与电场成正比,而对于已给定的电荷其所受的力又正比于场。然而,正如刚才我们所指出的,只有当场的平方逐点变化时才会有一个净力。所以力就正比于场平方的梯度了。比例常数除含有其他东西之外,还包括物体的介电常量,并依赖于物体的大小和形状。

有一个与此相关的问题,其中作用于电介质上的力可以很准确地算出。如果在平行板电容器中有一片电介质只部分地插入,如图 10-9 所示,则将有一个力要把它拉进去。对这个力作详细分析是十分复杂的,它同该片电介质与两板边缘附近场的非均匀性有关。然而,若我们不考察这些细节,而只是引用能量守恒原理,便能轻易地算出这个力来。我们可从以前所导出的公式求得这个力。式(10.28)等价于

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (10.30)$$

所以我们只需要求出电容是如何随该块电介质的位置而变化的。

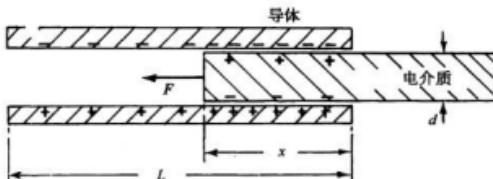


图 10-9 作用置于一平行板电容器中的一片电介质上的力可通过应用能量守恒原理而算出

让我们假设板的总长为 L , 宽为 W , 两板间距和电介质厚度都是 d , 而该片电介质插入的距离为 x 。电容等于板上的总自由电荷除以两板间的电压。我们在上面已经见到, 对于已知电压 V , 自由电荷的面密度为 $\kappa\epsilon_0 V/d$ 。因而板上的总电荷就是

$$Q = \frac{\kappa\epsilon_0 V}{d} x W + \frac{\epsilon_0 V}{d} (L - x) W,$$

由此可以得到电容:

$$C = \frac{\epsilon_0 W}{d} (\kappa x + L - x). \quad (10.31)$$

应用式(10.30), 便有

$$F_x = \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 W}{d} (\kappa - 1). \quad (10.32)$$

现在这个式子并不是对任何事情都特别有用, 除非你碰巧需要知道在这种情况下的力。我们只希望表明在求作用于电介质材料上的力时能量理论往往能避免一大堆复杂性——正如在目前情况下本来就应该有的那些复杂性。

上面关于电介质理论的讨论我们只涉及电现象, 即承认材料的极化与电场成正比的事实。为什么会产生这样一个正比性, 也许对物理学更有重大意义。一旦我们从原子的观点理解了介电常量的起源, 我们便能运用在各种不同环境下对介电常量的电学测量结果来获得有关原子或分子结构的详细信息。这方面的部分问题将在下一章加以讨论。

第 11 章 在电介质内部

§ 11-1 分子偶极子

在本章我们将讨论为什么某些材料会是电介质。我们在上一章中曾说过：当一电场作用于电介质上时，场将在原子中感生一偶极子。一旦领会了这点，我们就可能理解那些含有电介质在内的带电系统的性质。具体地说，若电场 E 在单位体积里感生了一个平均偶极矩 P ，则介电常量 κ 由下式给出：

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} \quad (11.1)$$

我们已经讨论过如何应用这个方程。现在我们得讨论当材料内部存在电场时极化发生的机制。从最简单的可能例子——气体的极化——谈起。但即使是气体，已经较复杂。气体存在两种类型。某些气体，如氧气，它们的每个分子含有对称的原子对，因而不会存在内禀偶极矩。但其他分子，如水蒸气（含有氢和氧两种原子的非对称排列），则有一永久电偶极矩。正如我们在第 6 章中曾经指出的那样，在水蒸气分子中的那些氢原子上存在着平均正电荷而氧原子则带有负电荷。由于负电荷的重心与正电荷的重心不一致，所以该分子的总电荷分布就具有偶极矩。像这样的分子叫作极性分子。在氧中，由于分子的对称性，正电荷重心与负电荷重心重合，因而氧分子就是一个非极性分子。然而，当氧被置在电场中时，它仍然会变成一个偶极子。这两种类型的分子形状如图 11-1 所示。



图 11-1 (a) 氧分子具有零偶极矩；(b) 水分子具有永久偶极矩 p_0

§ 11-2 电子极化强度

我们将首先讨论非极性分子的极化。可以从最简单的单原子气体（例如氦）开始。当这样一种气体的原子处在电场中时，电子会被场拉向一边而核则被拉向另一边，如图 10-4 所

示。虽然相对于我们在实验上所能施加的电力来说原子是十分坚硬的，但是电荷中心仍存在微小的净位移，从而感生了一个偶极矩。对于弱场来说，这位移量、也就是偶极矩，与电场成正比。产生这种感生偶极矩的电子分布的位移称为电子的极化。

过去与折射率理论打交道时，我们曾在第 1 卷第 31 章中讨论过电场对原子的影响。如果你稍微思考一下便将看到，现在我们应该做的和那时做过的完全相同。但现在需要操心的只是不随时间变化的场，而折射率却与随时间变化的场有关。

在第 1 卷第 31 章中我们曾经假定，当原子被置于振动的电场中时，原子内电子的电荷中心会遵循下列方程而运动：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = q_e E. \quad (11.2)$$

式中，第一项为电子质量乘以其加速度，第二项为恢复力，而右边那一项则代表来自外电场的力。若电场以频率 ω 变化，则方程式(11.2)的解为

$$x = \frac{q_e E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (11.3)$$

这表明，当 $\omega = \omega_0$ 时，会发生共振。当以前得到这个解时，我们曾把它理解为该式表明 ω_0 是光（到底是在可见光区还是在紫外光区，则取决于该原子）被吸收的频率。然而，现在我们感兴趣的却只是恒定场的情况，也就是，只对于 $\omega = 0$ 的场有兴趣，因而可以将式(11.2)中的加速度项略去，并得出电荷的位移为

$$x = \frac{q_e E}{m\omega_0^2}, \quad (11.4)$$

由此可见，单个原子的偶极矩为

$$\mathbf{p} = q_e x = \frac{q_e^2 E}{m\omega_0^2}. \quad (11.5)$$

在上述这种理论中，偶极矩 \mathbf{p} 确与电场成正比。

人们经常把上式写成：

$$\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (11.6)$$

(ϵ_0 又一次由于历史原因而被放了进去)。其中常数 α 称为原子的极化率，并具有 L^3 的量纲。它是由电场在原子中感生一个偶极矩的难易程度的一种量度。将式(11.5)和(11.6)两者比较，我们这一简单的理论讲

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2} = \frac{4 \pi e^2}{m \omega_0^2}. \quad (11.7)$$

设单位体积中共有 N 个原子，则单位体积的极化强度 \mathbf{P} 就是

$$\mathbf{P} = N \mathbf{p} = N \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (11.8)$$

把式(11.1)和(11.8)两者合拼在一起，我们得到

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = N\alpha, \quad (11.9)$$

或者,利用式(11.7),可得

$$\kappa - 1 = \frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2}. \quad (11.10)$$

从式(11.10)我们会预料到不同气体的介电常量 κ 可能与该气体的密度及其对光的吸收频率有关。

当然,上述公式只是一种近似,因为在式(11.2)中我们所选择的模型略去了量子力学的复杂性。例如,我们曾经假定每个原子仅有一个共振频率,而实际上却有许多个。为了正确地计算原子的极化率 α ,我们必须应用完整的量子力学理论,但上面的经典概念却已为我们提供了一个合理的估计。

让我们来看看,对某种物质的介电常量我们是否能得到一个正确的数量级。假定我们对氢做尝试,过去(在第1卷第38章中)就曾估计过电离一个氢原子所需的能量约为

$$E \approx \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2}. \quad (11.11)$$

为了对那个固有频率 ω_0 做出估计,可以令这一能量等于 $\hbar\omega_0$ ——即固有频率为 ω_0 的原子振子的能量。这样我们就得到:

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^3}.$$

若现在把 ω_0 的这个值应用于式(11.7),则可求得电子极化率为:

$$\alpha \approx 16\pi \left[\frac{\hbar^2}{me^2} \right]^3. \quad (11.12)$$

$[\hbar^2/(me^2)]$ 这个量是玻尔原子的基态轨道半径(见第1卷第38章),等于 0.528 \AA 。因处于标准压强和标准温度(1 atm 、 0°C)下的气体每立方厘米都具有 2.69×10^{19} 个原子,所以式(11.9)就给出:

$$\kappa = 1 + (2.69 \times 10^{19}) 16\pi (0.528 \times 10^{-8})^3 = 1.000\ 20. \quad (11.13)$$

氢气的介电常量已测定为

$$\kappa_{\text{实验}} = 1.000\ 26.$$

由此可见,我们的理论已差不多正确了。不应该期望任何比此更佳的结果,因为测量当然是用正常氢气进行的,所以它所含的是双原子分子,而不是单原子分子。如果分子中各原子的极化与彼此分开的原子的极化不完全相同,那应不足为怪。可是,实际上分子效应却不是那么大。对于氢原子的 α 进行严格的量子力学计算给出比式(11.12)约大 12% 的结果(即将 16π 改变成 18π),因而预言一个更接近于观察值的介电常量。不管怎样,我们上述的电介质模型显然已相当之好。

对上述理论的另一个考验,是将式(11.12)试用于具有更高激发频率的那些原子。例如,需要有 24.6 eV 才能将氦原子中的电子拉出来,这可与电离氢所需的 13.6 eV 做比较。因此,我们会期待,氦的吸收频率 ω_0 应比氢约大一倍,从而它的 α 可能为氢的四

分之一大。期待值为

$$\kappa_R \approx 1.000\ 050.$$

实验值为

$$\kappa_R = 1.000\ 068.$$

所以你们可以看到，我们的粗糙估计方向是对头的。至此，我们已了解非极性气体的介电常量，然而那不过是定性的，因为我们还未用到有关原子中电子运动的那种正确的原子理论。

§ 11-3 极性分子；取向极化

其次，我们将考虑具有永久电偶极矩 p_0 ——如水分子那样——的分子。在没有电场时，各个偶极子指向处于无规方向，从而使单位体积内的净矩为零。但是当加上电场后会发生两件事。首先，由于场对电子施加了力，所以有额外偶极矩被感生，这部分给出的电子极化率，其种类恰巧与我们对非极性分子所求得的电子极化率相同。当然，对十分精密的工作，这一效应是应该包括进去的，但目前我们将加以忽略（在最后总是可以加上去的）。其次，电场倾向于将各个偶极子排列起来从而在每个单位体积中产生一个净矩。假使气体中所有偶极子都整齐地排列起来了，则会产生很大的极化强度，但这种现象却从未发生过。在通常温度和电场的作用下，分子因热运动而发生的相互碰撞使它们排列得很不整齐。但总会有某种净的取向，因而也就有某种极化（见图 11-2）。这里出现的极化可以通过第 1 卷第 40 章中所描述的那种统计力学方法来加以计算。



图 11-2 (a) 在极性分子的气体中，各个偶极矩的取向是无规的，在一小体积里的平均矩为零；
(b) 当有电场时，分子们就有某种平均取向了

要运用这种方法就需要知道偶极子在电场中的能量。考虑一个电偶极矩 p_0 处在电场之中，如图 11-3 所示。正电荷的能量为 $q\phi(1)$ ，而负电荷的能量为 $-q\phi(2)$ 。于是偶极子的能量为

$$U = q\phi(1) - q\phi(2) = q\mathbf{d} \cdot \nabla\phi,$$

或

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E} = -p_0 E \cos \theta, \quad (11.14)$$

其中 θ 是 \mathbf{p}_0 与 \mathbf{E} 间的夹角。正如我们会预料到的，当偶极矩沿着电场方向排列时其能量就最低。

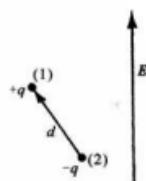


图 11-3 在场 E 中一个偶极子 p_0 的能量为 $-\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}$

现在,我们利用统计力学方法来求出会有多少取向排列发生。从第1卷第40章中就求得,在热平衡态具有势能 U 的分子其相对数目正比于

$$e^{-U/kT}, \quad (11.15)$$

式中 $U(x, y, z)$ 是作为位置函数的势能。相同的论证会说:若采用式(11.14)作为角度函数的势能,则在角度 θ 处单位立体角的分子数目正比于 $e^{-U/kT}$ 。

令 $n(\theta)$ 为在角度 θ 处单位立体角的分子数目,我们便有

$$n(\theta) = n_0 e^{+p_0 E \cos \theta / kT}. \quad (11.16)$$

对正常的温度和电场来说,这指数值很小,因此通过对指数函数展开而取其近似式

$$n(\theta) = n_0 \left(1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{kT}\right). \quad (11.17)$$

如果把式(11.17)对所有角度积分,则我们可以求得 n_0 。积分结果应恰好等于 N ,即单位体积的分子数目。 $\cos \theta$ 遍及所有角度的平均值为零,因而这一积分就刚好等于 n_0 乘以总立体角 4π 。我们得到:

$$n_0 = \frac{N}{4\pi}. \quad (11.18)$$

由式(11.17)可以看出,沿场取向($\cos \theta = 1$)的分子比逆着场取向($\cos \theta = -1$)的分子要多,因而在任何含有许多个分子的小体积里每个单位体积都将有净的偶极矩——也即极化强度 P 。要算出 P ,必须得到单位体积内所有分子偶极矩的矢量和。由于我们知道这结果将沿着 E 方向,所以,我们将仅仅对这个方向上的分量求和(垂直于 E 的分量之和将为零):

$$P = \sum_{\text{单位体积}} p_0 \cos \theta_i.$$

可以通过对整个角分布的积分而算出这个和。在 θ 处的微立体角为 $2\pi \sin \theta d\theta$,因而

$$P = \int_0^\pi n(\theta) p_0 \cos \theta 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (11.19)$$

把由式(11.17)得到的 $n(\theta)$ 代入,我们有

$$P = -\frac{N}{2} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \theta\right) p_0 \cos \theta d(\cos \theta),$$

上式很容易积分而给出:

$$P = \frac{N p_0^2 E}{3kT}. \quad (11.20)$$

由于极化强度与场 E 成正比,所以会有正常的电介质行为。并且,正如我们所预期的,极化强度与温度成反比,因为在较高温度时由于碰撞,不整齐排列的分子就多。这个 $1/T$ 的依赖关系叫作居里定律。永久偶极矩 p_0 之所以出现平方有下述原因:在一给定电场中促使分子排列整齐之力与 p_0 成正比;而由分子排列整齐所产生的平均矩又与 p_0 成正比。于是平均感生矩就会正比于 p_0^2 。

现在应该试着看看式(11.20)与实验符合的程度怎样? 让我们考察水蒸气的情况。由于还不知道 p_0 是什么, 所以就不能直接算出 P 来, 但式(11.20)确实预言 $\kappa - 1$ 应与温度成反比, 这点我们应该加以核对。

由式(11.20)得到

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{N p_0^2}{3 \epsilon_0 k T}, \quad (11.21)$$

因而 $\kappa - 1$ 应正比于密度 N , 而反比于绝对温度。介电常量曾在几个不同压强和温度时测量过, 对压强和温度的这种选取可使单位体积里的分子数能保持固定不变*(注意! 假如测量在恒压下进行, 则单位体积里的分子数会随温度的升高而线性地减少, $\kappa - 1$ 将按 T^{-2} 变化, 而不是按 T^{-1} 变化)。在图 11-4 中, 我们把从实验观测到的 $\kappa - 1$ 作为 $1/T$ 的函数而图示出来。由式(11.21)所预期的那种依存关系遵循得很好。

极性分子的介电常量还有另一种特性——随外加电场的频率变化。由于分子具有转动惯量, 要使那些笨重分子转向场的方向就需要一定的时间。因此, 若所加电场的频率在微波区或者更高, 则对于介电常量极性的贡献开始下降, 因为分子不可能跟随变化。与此相反, 即使高至光频, 电子的极化率仍保持不变, 这是由于电子惯性较小的缘故。

§ 11-4 电介质空腔里的电场

现在要转到一个有趣而又复杂的问题——致密材料中的介电常量问题。假设我们选取液态氯或液态氩, 或其他某种非极性材料, 我们仍将期待会有电子极化。可是在致密材料中, P 可以很大, 从而使作用在各个别原子上的场会被其近邻原子的极化所影响。问题在于, 作用于各个别原子上的电场究竟如何?

设想有一液体被置于一电容器的两极之间。若板上带电, 则这些电荷将在液体里产生一个电场。但在各个别原子中也有电荷, 因而总场 E 便是这两种效应之和。这一真正电场在液体里从一点至另一点变化得十分迅速。这电场在原子里面很强——特别是刚好在核附近——而在原子与原子之间就相对弱了。两板间的电势差是对这一总场的线积分。若略去一切微小尺度上的变化, 则可以认为存在一个平均电场 E , 它恰好就是 V/d (这是上一章中我们所曾采用过的场)。应该把这个场想象成在一个含有许多个原子

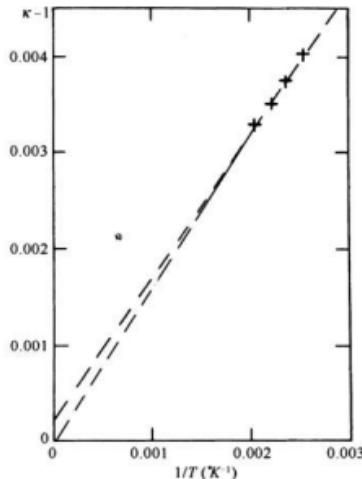


图 11-4 在不同温度下水汽介电常量的实验测量

* 参考: Sänger, Steiger and Gächter. *Helvetica Physica Acta*, 1932, 5; 200.

的空间内的平均场。

现在你也许认为,一个处在“平均”位置上的“平均”原子会感觉到这一个平均场。可是事情却并不那么简单,若想象电介质中有不同形状的空腔,则通过考虑里面所发生的情况就可证明这点。例如,假设在一块被极化了的电介质里挖出一个槽来,该槽的取向与电场平行,如图 11-5(a)所示。由于我们知道 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$,故在环绕图(b)所示曲线 Γ 所取的线积分就应等于零。槽中的场所提供的贡献必定恰好抵消来自槽外的场的贡献。因此,实际上在一条狭长槽的中心处得到的场 E_0 等于在电介质里找到的平均电场 E 。

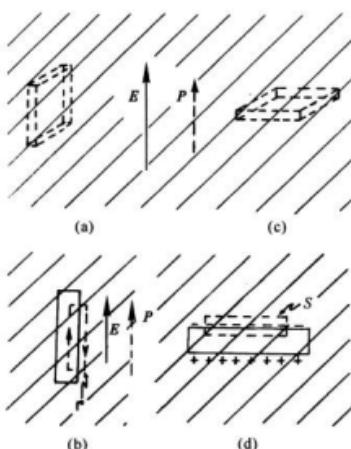


图 11-5 从电介质里切割出一个槽来,槽中的场取决于该槽的形状及取向

E_0 ,从而可测得场 D 。但从来没有人按照这种办法把它们测量出来,因而那不过是一种哲学上的东西而已。

对于结构不太复杂的大多数液体来说,我们可以期待:平均地说一个原子发现自己受到其他原子的包围,作为很好的近似,认为它处在一个球形的空腔之中。因此,我们就会问:“在一个球形空腔中的场到底怎样?”注意!若在一块均匀极化材料中,设想挖出一个球形空腔,那不过是把极化材料中的一个球体移出去罢了,这样就可将腔里之场找出来(我们必须想象,在挖出该空腔之前极化已被“冻结”了)。然而,根据迭加原理,在该球体移出之前,电介质内部的场等于球体体积外所有电荷的场再加上极化球内部电荷之场。这就是说,若我

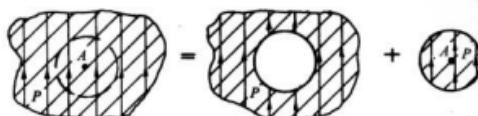


图 11-6 介质内任一点 A 的场,可认为是一个球形空腔里的场与一个球形塞子所产生的场之和

现在考虑大的侧面与 E 垂直的另一种槽,如图 11-5(c)所示。在这种情况下,槽里的场 E_0 就不同于 E ,因为极化电荷出现在槽面上了。如果我们应用高斯定律于图(d)中所画出来的那个 S 面,则发现槽里的场 E_0 由下式给出:

$$E_0 = E + \frac{P}{\epsilon_0}, \quad (11.22)$$

式中 E 仍然是电介质中的场(该高斯面中含有面极化电荷 $\sigma_{\text{极化}} = P$)。我们曾在第 10 章中提及, $\epsilon_0 E + P$ 这个量常称为 D ,因而 $\epsilon_0 E_0 = D_0$ 就等于在电介质里的 D 。

在物理学较早期的历史中,当时人们认为每个量都要直接由实验来下定义是非常之重要的,因而当发现不必在原子之间到处爬行就能够给电介质里的 E 和 D 下定义时,感到十分喜悦。平均场 E 在数值上就等于平行于场的槽中所量得的场 E_0 。通过挖一个垂直于场的槽,并求得其中的 E_0 ,从而可测得场 D 。但从来没有人按照这种办法把它们测量出来,因而那不过是一种哲学上的东西而已。

对于结构不太复杂的大多数液体来说,我们可以期待:平均地说一个原子发现自己受到其他原子的包围,作为很好的近似,认为它处在一个球形的空腔之中。因此,我们就会问:“在一个球形空腔中的场到底怎样?”注意!若在一块均匀极化材料中,设想挖出一个球形空腔,那不过是把极化材料中的一个球体移出去罢了,这样就可将腔里之场找出来(我们必须想象,在挖出该空腔之前极化已被“冻结”了)。然而,根据迭加原理,在该球体移出之前,电介质内部的场等于球体体积外所有电荷的场再加上极化球内部电荷之场。这就是说,若我

们把在均匀电介质里的场叫作 E , 则可以写成

$$E = E_{\text{空腔}} + E_{\text{极化}}. \quad (11.23)$$

式中, $E_{\text{空腔}}$ 指在该腔里之场, 而 $E_{\text{极化}}$ 则为一个均匀极化球内部的场(见图 11-6)。由一个均匀极化球所产生的场, 如图 11-7 所示。在这个球体之内, 场是均匀的, 其值为

$$E_{\text{极化}} = -\frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.24)$$

应用式(11.23), 我们得到

$$E_{\text{空腔}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.25)$$

在一个球形空腔里的场比平均场要大 $P/3\epsilon_0$ (系数 $1/3$ 表明, 球形空腔里的场介于平行于场的槽内的场和垂直于场的槽内的场之间)。

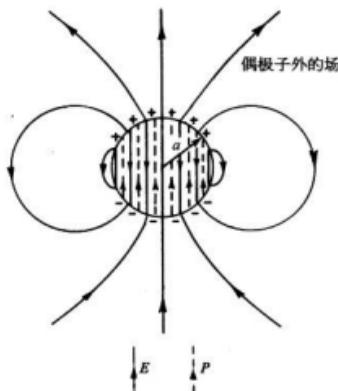


图 11-7 一个均匀极化球体的电场

§ 11-5 液体的介电常量; 克劳修斯-莫索提方程

在液体中, 我们期待对各个别原子起极化作用的场类似 $E_{\text{空腔}}$, 而不是 E 。如果把式(11.25)的 $E_{\text{空腔}}$ 用作式(11.6)中的极化场, 则式(11.8)变成

$$P = N\alpha\epsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \quad (11.26)$$

或

$$P = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3} E. \quad (11.27)$$

回忆一下, $\kappa - 1$ 正好是 $P/(\epsilon_0 E)$, 因而有

$$\kappa - 1 = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3}. \quad (11.28)$$

这为我们提供了用原子极化率 α 表达的液体介电常量。式(11.28)称为克劳修斯-莫索提方程。

每当 $N\alpha$ 非常小时, 如在气体那种情况(因为密度 N 很小), 于是项 $N\alpha/3$ 与 1 相比可以忽略, 因而我们得到以往那个结果, 即式(11.9),

$$\kappa - 1 = N\alpha. \quad (11.29)$$

让我们拿式(11.28)同某些实验结果进行比较。有必要首先考虑能用 κ 的测量值通过式(11.29)算出 α 来的那些气体。例如, 对于在 0 °C 的 CS₂ 来说, 介电常量为 1.0029, 所以 $N\alpha$ 就是 0.0029。气体的密度一般容易算出, 而液体的密度则可从手册中找到。液态 CS₂ 在 20 °C 的密度比在 0 °C 时该气体的密度要高 381 倍, 这意味着它处在液体时的 N 比处在气

体时高 381 倍。因而——倘若我们近似地认为 CS_2 凝结成液体时, 其基本原子极化率并不发生变化——在液体中的 $N\alpha$ 便是 0.0029 的 381 倍, 即 1.11。注意项 $N\alpha/3$ 的值接近 0.4, 所以就显得极为重要。用这些数字我们预测介电常量等于 2.76, 与 2.64 的观测值符合得相当好。

在表 11-1 中, 我们列出了几种不同材料的一些实验数据(从《化学与物理学手册》中得来的), 以及按刚才所述的方法由式(11.28)计算出来的介电常量。对于 Ar 和 O₂, 观测值与理论值的符合程度甚至比 CS_2 还要好——而对于 CCl₄, 理论值与观测值的符合程度就不那么好了。大体上, 所得结果都表明式(11.28)用起来十分良好。

表 11-1 由气体的介电常数算出液体的介电常量

物 质	气 体			液 体				
	κ (实验值)	$N\alpha$	密 度	密 度	比 值*	$N\alpha$	κ (预料值)	κ (实验值)
CS ₂	1.0029	0.0029	0.00339	1.293	381	1.11	2.76	2.64
O ₂	1.000523	0.000523	0.00143	1.19	832	0.435	1.509	1.507
CCl ₄	1.0030	0.0030	0.00489	1.59	325	0.977	2.45	2.24
Ar	1.000545	0.000545	0.00178	1.44	810	0.441	1.517	1.54

* 比值 = 液体密度 / 气体密度。

我们关于式(11.28)的推导仅适用于液体中的电子极化。对于 H₂O 那样的极性分子来说, 这个式子就不正确了。如果对水也做同样的计算, 便会得出 $N\alpha$ 等于 13.2, 那意味着在该液体的介电常量为负值, 但 κ 的观测值却是 80。这一问题牵涉到得对永久偶极矩作正确的处理, 而昂萨格(Onsager)就曾指出过正确的方向。现在我们没有时间来讨论这种情况, 但若你有兴趣的话, 可参考克脱耳(Kittel)所著的《固体物理导论》, 书中对这个问题有所论述。

§ 11-6 固态电介质

现在我们再来讨论固体。关于固体的第一个有意义的事实是, 可能存在由某些东西构成的永久极化——即使没有外加电场, 那些东西也依然存在。例如, 蜡这样一种材料, 它含有带

永久偶极矩的长形分子。要是你熔解了一些蜡, 并当它在液态时就加上一强电场, 使得那些偶极矩部分地排列起来, 那么当液体凝固时它们将保留原样。当场移去之后, 这固体材料仍将具有那遗留下来的永久极化。像这样的固体叫永电体或驻极体。

在永电体的表面上会有永久的极化电荷。它是类似于永磁体的带电体, 然而却并不怎么有用, 因为来自空气中的自由电荷会被吸引至其表面上, 最后抵消了那些极化电荷。永电体被“放了电”, 因而便没有可见的外电场了。

在某些结晶物质中, 也可以找到自然发生的永久的内部极化强度 P 。在这类晶体中, 晶格的每个晶胞都有一个彼此相同的永久偶极矩, 如图 11-8

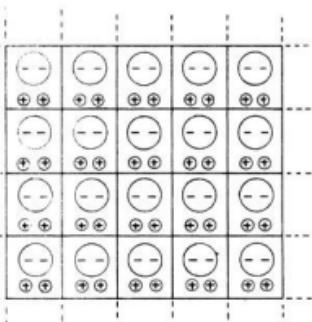


图 11-8 复杂的晶格可以有一永久的内禀极化强度 P

所示。即使没有外加电场，所有的偶极子仍会指向同一方向。事实上，许多复杂晶体就都有这种极化现象。但我们平常并没有注意到它，这是由于出现于晶体外面的场已被放了电，正如永电体的情况那样。

然而，如果晶体中这些内在偶极矩发生变化，则由于此时杂散电荷还来不及聚集起来和抵消这些极化电荷，所以外电场会显现出来。如果电介质是在电容器里，那么自由电荷将会感生在极板上。例如，当电介质加热时，其中的电偶极矩可能由于晶体受热膨胀而发生变化，这一效应称为热释电。同样地，如果我们改变晶体中的应力——如把晶体弯曲——偶极矩也可能稍微改变，因而出现微小的电效应，这种效应称为压电效应，它可以被探测出来。

对于那些不具有永久电极矩的晶体来说，我们可以求出一种涉及原子中电子极化率的介电常量理论来。这跟液体的情况差不多。有些晶体内部还存在可转动的偶极子，而这些偶极子的转动也会对 κ 有所贡献。在诸如 NaCl 这种离子晶体中还有离子极化率。这种晶体由正、负离子排列而成的方格构成，在电场中正离子会被拉向一边而负离子被拉向另一边；正电荷和负电荷之间有一个净的相对运动，因而也就有了体积极化。根据食盐晶体的硬度知识我们能够估计出这种离子极化率的大小，但这里不打算讨论这一课题。

§ 11-7 铁电现象; BaTiO₃

现在要来描述一种特殊晶体，几乎仅仅是偶然它才具有内在的永久电极矩。它的情况很接近临界状态，以致若稍微升高一点温度，该晶体便将完全丧失永久电极矩。另一方面，若它们接近于立方晶体，以致它们的矩可以在不同方向被转动，则可以在改变外电场时探测到电极矩大的变动。所有的极矩都翻转过来了，因而得到了大的效应。凡具有这种永久电极矩的物体都称为铁电体，它取名于首先在铁中发现的相应的铁磁效应。

我们愿意通过对铁电材料的一个特殊例子的描述，来解释铁电现象是如何产生的。有几种方法可以产生铁电特性。但我们将仅仅讨论其中一种神秘情况——BaTiO₃。这种材料的单胞具有如草图 11-9 的那种晶格。事实证明，在某个温度以上，具体地说即在 118 °C 以上，BaTiO₃ 是一种普通电介质，具有巨大的介电常量。然而，低于这一温度，它会突然具有永久电极矩。

在计算固态材料的极化时，我们必须先求得每个元胞处的局部电场。同时还必须将自身极化的场也算在内，如同上面处理液体的情况那样。但晶体并非均匀液体，因而不能采用在一个球形空腔里可能获得的那种局域场。如果你对该晶体进行计算，就会发现在式(11.24)中的那个因子 $1/3$ 已稍微发生了变化，但与 $1/3$ 仍相距不远（对于简单立方晶体来说，就恰好是 $1/3$ ）。因此，在这里的初步讨论中，我们将假定在 BaTiO₃ 中这个因子为 $1/3$ 。

原来当我们在上面写出式(11.28)时你可能就

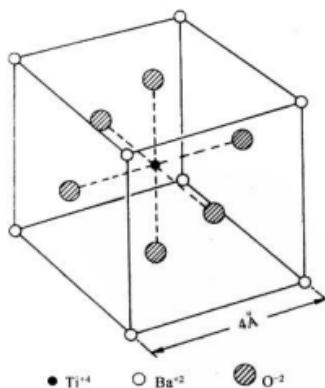


图 11-9 BaTiO₃ 的一个单胞，原子实际上填充了大部分空间，但为了看起来清楚起见，仅表示出它们的中心位置

已怀疑,要是 $N\alpha$ 变成大于 3 那会发生什么情况呢?似乎显出 κ 会变成负数。但这肯定是对的。让我们来看看,要是在一特定晶体中 α 逐渐增大会出现什么情况。当 α 变大时,极化跟着增加,从而形成了一个较强的局域电场。可是一个较大的局域电场将使每一原子的极化增强,从而又进一步提高了局域电场。假如原子的“适应性”足够大,则这一过程会继续下去;这里有一种反馈作用,引起了极化的无限度增长——假定每一原子的极化始终正比于场而增长。这个“失控”条件发生在 $N\alpha = 3$ 时。当然,极化不会变成无限大,因为感生极矩与电场之间的正比关系在强场时失灵了,从而使上述的一些公式不再正确。真正发生的情况,是在晶格中已“锁住”了一个自生自长的、高度的内部极化。

在 BaTiO_3 的例子中,除了电子极化之外,还有相当大的离子极化。这可认为是由于钛离子在立方晶格中会稍微移动一点而引起的。不过晶格会阻碍大的运动,因而当钛离子已移过一小段距离后,它就被堵住而停止不动。但这时晶胞却已把一个永久偶极矩保留下来了。

在大多数晶体中,这就是在能够达到的各种温度时的实际情况。关于 BaTiO_3 的这个十分有趣事情,是由于存在这么一个灵敏的条件,即如果 $N\alpha$ 只减少一点点就不会碰到困难了。既然 N 是随温度升高而减少的——由于热膨胀的缘故——我们便能够通过改变温度来调整 $N\alpha$ 。在那临界温度之下它才恰好被固定下来,因而——通过加上电场——就很容易改变极化并把它锁定在另一个方向上。

让我们来看看能否更详细地对所发生的事态进行分析。就把 $N\alpha$ 严格等于 3 的那个温度叫做临界温度 T_c 。当温度升高时,由于晶格膨胀, N 就减少一些。由于膨胀很小,所以我们便可以说,在临界温度附近

$$N\alpha = 3 - \beta(T - T_c). \quad (11.30)$$

式中 β 是一个小的常数,它与热膨胀系数的数量级相同,或者约等于 10^{-6} — $10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}$ 。现在,若我们将这个关系代入式(11.8)中,便可以得到

$$\kappa - 1 = \frac{3 - \beta(T - T_c)}{\beta(T - T_c)/3}.$$

由于已假定 $\beta(T - T_c)$ 比 1 小,因而可以将此式近似地化成

$$\kappa - 1 = \frac{9}{\beta(T - T_c)}. \quad (11.31)$$

当然,这个关系式仅在 $T > T_c$ 时才是对的。我们看到,恰好在临界温度以上时, κ 非常大。由于 $N\alpha$ 那么接近 3,因此就有一个巨大的放大效应,使介电常量可以轻易地高达 50 000 至 100 000。它对温度也非常敏感,当温度升高时,介电常量与温度成反比地降低。可是,与偶极性气体的情况不同,那里的 $\kappa - 1$ 与绝对温度成反比,而对于铁电体它同绝对温度与临界温度两者之差反比地变化(这一定律称为居里-外斯定律)。

当我们把温度降至临界温度时,会发生什么情况呢?如果设想一个像图 11-9 所示的那种单胞晶格,便会见到有可能选出沿竖直线的离子链。在这些链中,有一种是由彼此相间的氧离子和钛离子组成的。还有其他一些线则分别由钡离子或氧离子构成,但沿这些线上的间隔要大些。通过想象出如图 11-10(a)所示的一系列离子链我们便可以作出一个简单模型来模拟这种情况。沿着我们所称的主链,其中离子间隔为 a ,等于晶格常量的一半;在彼此全同的链之间,其横向距离为 $2a$ 。在这些主链之间还有一些不那么致密

的链，我们暂且不予考虑。为使分析稍微简单些，我们也将假定在各条主链上的所有离子完全相同（这不是一种极粗略的简化，因为所有一切重要效应仍会出现。这是理论物理的技巧之一。先做另一个问题，因为它较容易解决——然后，在已经理解了事情怎样进行之后，才及时将一切复杂情况都放进去）。

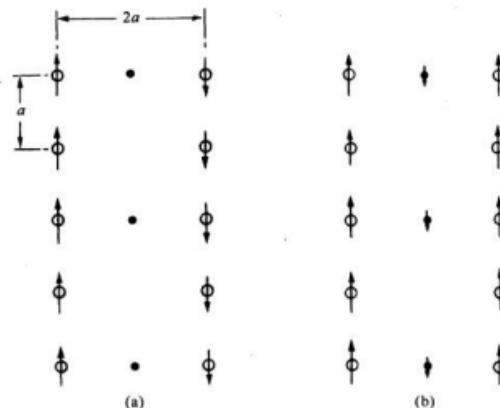


图 11-10 关于铁电体的模型。(a) 相当于反铁电体；(b) 相当于正常铁电体

现在，让我们试着按照上述模型找出会发生的事情。我们假定每个原子的偶极矩为 p ，并希望算出链中一个原子处的场，必须求出来自其他各原子之场的总和。我们将首先算出仅来自一条竖直链中各偶极子的场，其他的链我们将在以后再谈。沿偶极子轴向并与其实距为 r 处的场由下式给出：

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (11.32)$$

作用于任一个特定原子上的、由那上下两个等距偶极子所提供的场，方向总是相同，因而对于整条链来说，我们就得到：

$$E_{\text{eff}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^3} \cdot \left(2 + \frac{2}{8} + \frac{2}{27} + \frac{2}{64} + \dots \right) = \frac{p}{\epsilon_0} \frac{0.383}{a^3}. \quad (11.33)$$

不太难证明：要是我们的模型像一块完整的立方晶体——也就是说，若近邻的全同链只离开 a ——则数值 0.383 便应改成 $1/3$ 。换句话说，要是近邻一些链位于距离 a 处，这些链对整个和的贡献也不过是 -0.050 个单位。然而，我们正在考虑的近邻一条主链却在 $2a$ 距离处，而正如你可回忆第 7 章那里所讲的，来自一个周期性结构的场乃是随距离作指数函数式衰减的。因此，这些链的贡献将远比 -0.050 为小，这正好使我们可以略去所有其他链的贡献了。

现在，应当找出要使失控过程能够进行必须有多大的极化率 α 。假定链中每一原子的感生极矩 p 正比于作用在它上面的场，如式(11.6)所示。利用式(11.33)，就可从 E_{eff} 获得作用于原子上的、使其极化的场。因而便有下列两式：

$$p = \alpha \epsilon_0 E_{\text{场}}$$

和

$$E_{\text{场}} = \frac{0.383}{a^3} \frac{p}{\epsilon_0}.$$

上面这一对方程有两个解: $E_{\text{场}}$ 和 p 均为零; 或当 $E_{\text{场}}$ 和 p 均为有限时

$$\alpha = \frac{a^3}{0.383},$$

于是, 若 α 与 $a^3 / 0.383$ 同样大, 则由它本身的场所维持的永久极化便将开始。这一临界等式对于 BaTiO_3 来说, 必须正好在温度 T_c 时达到(注意, 假如 α 高于弱场的临界值, 则在强场中 α 应降低, 而在平衡态我们已找到的相同等式仍将成立)。

对于 BaTiO_3 来说, 间距 a 为 2×10^{-8} cm, 因而必然预期 $\alpha = 21.8 \times 10^{-24}$ cm³。我们可以把它与单个原子的已知极化率做比较。对于氧, $\alpha = 30.2 \times 10^{-24}$ cm³, 看来我们是对头的! 但对于钛, $\alpha = 2.4 \times 10^{-24}$ cm³, 那就相当之小。为了运用上述模型, 我们大概应当采取它们的平均值(本来也可再度就相间原子的那种链进行计算, 但结果却几乎相同)。因此, $\alpha(\text{平均}) = 16.3 \times 10^{-24}$ cm³, 它仍未达到足以提供永久极化的程度。

但请等一等! 迄今为止我们仅对电子极化率进行了相加。此外, 还有由于钛离子移动而引起的某种离子性极化。我们只需要一个等于 9.2×10^{-24} cm³ 的离子极化率*(采用相间原子所进行的更精密的计算表明实际上需要的是 11.9×10^{-24} cm³)。要理解 BaTiO_3 的特性, 我们就得假定有这么一种离子极化率存在。

在 BaTiO_3 中, 为什么钛离子会有那么大的离子极化率还不清楚。此外, 在较低温度时, 它在沿体对角线和在沿面对角线上的极化程度为什么会相同, 也不明白。如果把图 11-9 中各球的实际大小都计算出, 并问在由钛的近邻氧离子所构成的箱子中钛离子是否会有点儿松动——那是我们所期望的, 以便它较易移动——你却找到完全相反的结果, 它被塞得很紧。那些钡原子就有点儿松, 但要是你仅让它们运动, 则算不出那种结果。因此, 你会看出, 这一课题实际上还没有百分之百弄清楚, 仍然存在一些我们希望了解的奥秘。

回到图 11-10(a)中的简单模型上来, 我们看到来自一条链的场往往会使邻近的链按相反方向极化, 这意味着尽管每一条链会被锁住, 但单位体积里却不会有净极矩(这样, 虽然不会有外部的电效应, 但仍存在某种人们可以观测到的热力学效应)! 像这样的系统确实存在, 并称为反铁电体。因此, 我们刚才所解释的实际上乃是反铁电体。然而, BaTiO_3 确实排列得如图 11-10(b)那样。所有的氧钛链都在同一个方向上极化, 因为它们之间还有一些中间链存在。尽管这些链中的原子并不是非常极化, 也并非十分致密, 但仍将在与氧钛链相反的方向上有些极化。这极化作用在近邻一条氧钛链上所产生的弱场就会促使它处于与第一条链相平行的方向。因此, BaTiO_3 的确是属于铁电性的, 这是由于在链与链之间还存在一些原子。你或许会觉得奇怪:“在两条氧钛链之间的直接影响又该会怎么样呢?”然而, 应当记住, 那直接效应是随距离按指数函数减弱的。强偶极子的链在 $2a$ 距离上的效应可能还小于弱偶极子的链在 a 距离上的效应。

这一个目前我们对于气体、液体和固体的介电常量理解的相当详尽的报告就此结束。

* 按照上述的简单平均法计算, 这个数字似乎应是 11.0×10^{-24} cm³。——译者注

第 12 章 静电模拟

§ 12-1 相同的方程组具有相同的解

自科学兴起以来,对于物理世界所获得的知识总数非常繁多,任何人要懂得其中的一个相当部分都似乎是不可能的。但实际上一个物理学家仍很有可能掌握有关物理世界的广泛知识,而不致成为某一狭窄范围内的专家。这里面有三重原因:第一,有一些重大原理可以应用到一切不同种类的现象上去——诸如能量以及角动量的守恒原理。对这些原理的透彻理解会马上导致对许多东西的理解。其次,有这么一个事实,即许多复杂现象,诸如固体在受压缩时的行为,实际上基本取决于电力和量子力学方面的力,所以如果人们理解了电学和量子力学的基本规律,至少对发生于复杂情况下的许多现象就有理解的可能。最后,还有一个最引人注目的吻合:对于多种不同物理情况的方程,都具有完全相同的形式。当然,符号可能不同——一个字母代替了另一个字母——但方程的数学形式却彼此相同。这意味着,已经学习了一个学科,我们便立即拥有大量直接而又精确的关于另一门学科的方程的解的知识。

现在,我们已结束了静电学这一科目,不久便将继续学习磁学和电动力学。但在这样做之前,我们很想指出,在学习静电学的同时就已经学习了许多其他学科。我们将发现,静电学的方程组会出现在物理学的其他几个场合。通过对解答的直接转译(当然相同的数学方程组必定具有相同的解),就有可能像在静电学中那样同等容易——或同等困难——地去解决在其他方面存在的问题。

我们知道,静电学方程组是:

$$\nabla \cdot (\kappa E) = \frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}; \quad (12.1)$$

$$\nabla \times E = 0. \quad (12.2)$$

这里选取了含有电介质的那种静电学方程组,以便得到最普遍的情况。同样的物理内容也可以表达为另外的数学形式:

$$E = -\nabla\phi; \quad (12.3)$$

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla\phi) = -\frac{\rho_{\text{自由}}}{\epsilon_0}. \quad (12.4)$$

现在问题的要点在于,有许多物理问题其数学方程都具有相同形式。有一个势(ϕ)的梯度乘以一标量函数(κ),该积的散度等于另一标量函数($-\rho_{\text{自由}}/\epsilon_0$)。

我们对静电学所知道的任何东西,都可以立即转移到其他学科里去,反过来也是如此(当然,这是一种双行道——如果在其他学科中某些特定性质为已知,则我们也可把这种知识应用到对应的静电学问题上来)。下面我们要考虑一系列例子,它们都来自能够产生这种形式的方程组的不同学科。

§ 12-2 热流；无限大平面边界附近的点源

以前(在 § 3-4 中)我们就曾讨论过一个例子——热流。设想有一大块材料，它无需均匀，也可以是在不同地方含有不同材质，而其内部温度是逐点变化的。这些温度变化的结果产生一股热流，由矢量 \mathbf{h} 表示，这代表每秒通过垂直于流向的单位面积的热量。 \mathbf{h} 的散度表示热量从该区域单位体积离开的速率：

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{单位时间内从单位体积流出的热量.}$$

当然，本来也可以将此式写成一积分形式——正如我们以前曾在静电学中用高斯定律处理问题那样——那就会说明：通过一个面的通量等于材料内部热能的变化率。我们不准备自找麻烦，在微分与积分形式之间把方程组变来变去，因为这种变换同静电学的变换一模一样。

在各个地方热的产生率或吸收率当然依问题的不同而异。例如，假设在材料内部有一个热源(也许是一个放射源，或是由电流加热的电阻器)。让我们把由这个源每秒在单位体积中所产生的热能叫作 s 。也可能还有转变成体积内其他类型的内能而引起的热能损失(或获得)。设 u 为单位体积的内能，则 $-du/dt$ 也将是热能的一个“源”。于是我们便有

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s - \frac{du}{dt}. \quad (12.5)$$

眼下不打算讨论其中事物随时间变化的完整方程，因为我们正在做静电模拟，这里并没有什么东西与时间有关。我们将仅仅考虑恒定热流问题，其中有些恒定源已产生了一个平衡态。在这些场合下，

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s. \quad (12.6)$$

当然，还必须用另一个方程来描述在各不同地方热是如何流动的。在许多种材料中，热流近似地正比于温度对位置的变化率：温差越大，热流越强，正如我们曾经见到的，热流这个矢量与温度梯度成正比。比例常数 K 称为热导率，它代表该材料的一种性质。

$$\mathbf{h} = -K \nabla T. \quad (12.7)$$

如果材料的导热性能是随地点而改变的，那么 $K = K(x, y, z)$ 就是一个位置函数[式(12.7)并不如表达热能守恒的式(12.5)那么基本，因为前者依赖于物质的特性]。现在我们若把式(12.7)代入式(12.6)中，便有

$$\nabla \cdot (K \nabla T) = -s, \quad (12.8)$$

这与式(12.4)在形式上完全相同。恒定热流问题与静电学问题相同。热流矢量 \mathbf{h} 对应电场 \mathbf{E} ，而温度 T 则对应于 ϕ 。我们已经注意到，一个热源会产生一个按 $1/r$ 变化的温度场和一个按 $1/r^2$ 变化的热流。这不过是从静电学方面来的一种转译，即一个点电荷会产生一个按 $1/r$ 变化的势和一个按 $1/r^2$ 变化的电场。一般说来，我们能够跟解决静电学问题那样，容易地去解决恒定热流问题。

考虑一个简单例子。假设有一个半径为 a 、温度为 T_1 的圆筒，该温度由筒内所产生的热维持着(这可能是一根载电流的导线，或一根其中有蒸汽正在凝结的管道)。这个圆筒外

面覆盖着一层绝缘材料的同心护套，这种材料的热导率为 K 。比方说，这绝缘套的外半径为 b ，套外的温度为 T_2 [图 12-1(a)]。我们要找出该导线、或蒸汽管、或在其轴心上的任何东西的热量损失率。设由长度为 L 的一段管道每秒所损失的总热量为 G ——这就是我们要尝试去求的。

如何才能求解这个问题呢？我们已有了上述微分方程，但是由于这些方程和静电学的相同，所以实际上就已解决了该数学问题。类似的电学问题是：一个半径为 a 的圆筒形导体处于势 ϕ_1 ，与处于势 ϕ_2 、而半径为 b 的另一个圆筒形导体分别隔离着，中间填充了一层同轴的电介质材料，如图 12-1(b) 所示，现在既然热流 h 对应于电场 E ，我们所要求的量 G 就对应于出自长度 L 的电场通量（换句话说，对应于在长度 L^* 上的电荷除以 ϵ_0 ）。我们已用高斯定律解决了静电学问题。对于热流问题，我们也按照相同的步骤来求解。

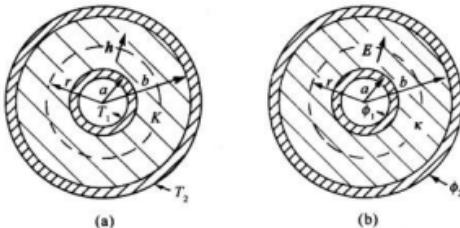


图 12-1 (a) 在一个圆筒状几何形体中的热流；(b) 相应的电学问题

由对称性可知， h 仅取决于与轴心间的距离 r 。所以我们包围管子作一个长为 L 、半径为 r 的高斯圆柱面。根据高斯定律，我们知道，热流 h 乘以该表面的面积 $2\pi rL$ 便应等于其内部所产生的总热量，这就是我们所称的 G ：

$$2\pi rLh = G \quad \text{或} \quad h = \frac{G}{2\pi rL}. \quad (12.9)$$

热流与温度梯度成正比：

$$h = -K\nabla T,$$

或者在这种情况下， h 的大小为

$$h = -K \frac{dT}{dr}.$$

上式同式(12.9)一起给出

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{G}{2\pi K L r}. \quad (12.10)$$

从 $r = a$ 至 $r = b$ 进行积分，便得

$$T_2 - T_1 = -\frac{G}{2\pi K L} \ln \frac{b}{a}. \quad (12.11)$$

* 这里两处“长度 L ”，在原书中都作“单位长度”，我们作了改正。——译者注

解出 G , 得

$$G = \frac{2\pi K L (T_1 - T_2)}{\ln(b/a)}. \quad (12.12)$$

这一结果完全对应于圆柱形电容器上的电荷

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 \kappa L (\phi_1 - \phi_2)}{\ln(b/a)}. *$$

问题相同, 因而有相同的解。我们根据静电学知识, 也知道一根隔热管道损失了多少热量。

现在来讨论热流的另一个例子。假设我们要知道位于地下离地表不远或在一大块金属表面附近的一个点热源周围的热流, 这个定域热源也许是一个在地下爆炸了的原子弹所留下来的强烈热源, 或许相当于在一大块铁中的一个小小放射源——总之会有种种可能性。

我们将处理这样一个理想化的问题, 即一个强度为 G 的点热源置于一块无限大均匀材料——其热导率为 K ——的表面下距离为 a 的地方。我们将忽略材料外面空气的热导率, 而希望求得这块材料表面上的温度分布。试问在材料表面上正对热源的那一点以及其他各处的温度是多少?

怎样解决这个问题呢? 它很像静电学中这样一个问题, 即在一平面边界两侧存在介电常量不同的两种材料。啊哈! 或许它与边界附近的点电荷的情况相似, 而该边界处在电介质与导体或类似的某些东西之间。让我们来看看, 该表面附近的情况如何。这表面的物理条件是, \mathbf{h} 的法向分量为零, 因为我们已假定没有热量流出板外, 我们会问: 在我们做过的哪一种静电学问题中会有这样的条件, 即在表面处电场 \mathbf{E} (这类似于 \mathbf{h}) 的法向分量为零。不会有这种情况!

这是一件务必当心的事情。由于一些物理原因, 可能在某一门学科中对数学条件产生了某些限制。因此, 若我们仅仅对有限几种情况的微分方程进行分析, 便可能会丢失在其他物理情况下能够发生的某些类型的解答。例如, 没有一种材料的介电常量为零, 而真空的热导率却确实等于零。所以对于完全绝热的物体, 竟找不出一种静电的类似物来, 然而, 我们还是可以采用同样的方法。不妨试行想象, 假如介电常量等于零, 将发生什么情况(当然, 在任一种实际情况中, 介电常量总不会等于零的。但也许会有这么一种情况, 即其中有一种材料其介电常量非常高, 使得我们可以略去外面空气的介电常量)。

如何去找出与表面没有垂直分量的那种电场呢? 也就是一种只与表面相切的电场。你会注意到, 我们的问题与在一平面导体附近放置一个点电荷的问题刚好相反。那里曾要求有一个垂直于表面的场, 因为该导体全都处于相同的势, 在电的问题中, 我们通过设想在导电板后面有一个点电荷而发明了一种解法, 可再引用那同一概念。试挑选一个“像源”, 那将会自动地使在表面上场的法向分量为零。这种解法如图 12-2 所示。一个同号而又等强的像源被置在该表面上距离为 a 处, 将使场始终切于材料表面。这两个源的法向分量互相抵消了。

这样, 我们的热流问题就得到了解决。通过直接类比, 在各处的温度与两个相等点电荷产生的势相同。放在无限大媒质中一个单独点源 G , 在距离为 r 处所产生的温度为

* 原书式中少了 κ 。——译者注

$$T = \frac{G}{4\pi K r}. \quad (12.13)$$

当然,这只是 $\phi = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ 的模拟。对于一个点源来说,若加上它的像源,所产生的温度就是

$$T = \frac{G}{4\pi K r_1} + \frac{G}{4\pi K r_2}, \quad (12.14)$$

上式给出在大块材料内任一点的温度。图 12-2 中表示出几个等温面,同时也显示出一些 \mathbf{h} 线,它可以由 $\mathbf{h} = -K \nabla T$ 获得。

我们原来的问题是要找出在该表面上的温度分布。对于表面上离轴心为 ρ 的一点,即在 $r_1 = r_2 = \sqrt{\rho^2 + a^2}$ 处,就会有

$$T(\text{表面}) = \frac{1}{4\pi K} \frac{2G}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}. \quad (12.15)$$

这一函数在图上也表示了出来。刚好在热源正上方一点上的温度自然会高于其他较远的点的温度。这是地球物理学家们经常需要加以解决的那类问题。我们现在看到,这也是在电学方面已经解决了的同类事情。

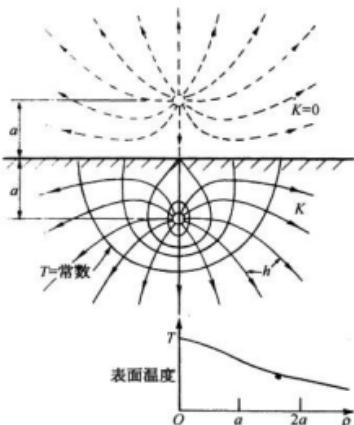


图 12-2 在一良导体表面之下距离为 a 处有一个点热源,在其周围附近所产生的热流和等温面。材料外面显示的是一个像源

§ 12-3 绷紧的薄膜

现在让我们来考虑一种完全不同的物理情况,不过它会再次给出相同的方程。设有一橡胶薄层——一张膜——铺在一个大的水平构架上而被拉紧(如一张鼓膜)。现在假设这张膜的一处被顶起,而在另一处被压下,如图 12-3 所示。对于这个表面的形状我们能够加以描述吗? 即将表明,当膜的挠曲程度不太大时,这一问题如何才能解决。

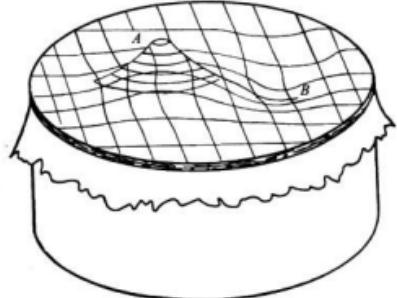


图 12-3 一橡胶薄层铺在一个筒形构架上而被拉紧(如一张鼓膜)。如果在该薄层 A 处被顶起,而在 B 处被压下,这个表面是什么形状?

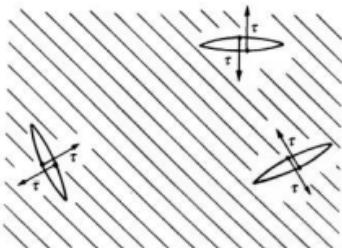


图 12-4 一张绷紧了的橡胶薄层,其中表面张力 τ 为垂直于一条线的单位长度的力

由于膜被拉紧所以在膜内就会有力存在。要是在任一处造成一条小裂缝，则裂缝两边就会彼此互相拉开(见图12-4)。可见在薄层内有一种表面张力，如同拉紧弦线中的一维张力。对于如图12-4所示的那样一条裂缝，刚刚能够把缝的两侧拉在一起的单位长度的力，我们定义为表面张力，其大小为 τ 。

现在就来观察膜的一个垂直截面。它将表现为一个弯曲截面，如图12-5所示。设 u 为膜离开其正常位置的垂直方向位移，而 x 和 y 则分别代表水平面上的两个坐标(图上所表示的截面平行于 x 轴)。

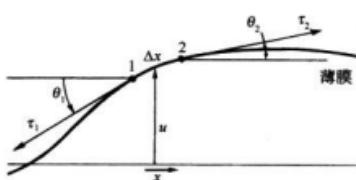


图 12-5 被挠曲了的膜片的横截面

试考虑长度为 Δx 而宽度为 Δy 的一小块表面。由于表面张力，所以将会有作用于该小块表面每一边的力。图上边缘1上的力将是 $\tau_1 \Delta y$ ，其方向与该表面相切——也就是与水平线成 θ_1 角。边缘2上的力将在角 θ_2 的方向，为 $\tau_2 \Delta y$ (还有作用于该小块表面其他两个边缘上的相似之力，但这些我们暂不予理会)。从1与2两个边缘作用于该小块表面上的向上的净力为

$$\Delta F = \tau_2 \Delta y \sin \theta_2 - \tau_1 \Delta y \sin \theta_1.$$

我们将只考虑膜的小畸变，也就是小斜率范围。于是， $\sin \theta$ 便可用 $\tan \theta$ 来代替，而 $\tan \theta$ 又可写成 $\partial u / \partial x$ 。因而力为

$$\Delta F = \left[\tau_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \tau_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right] \Delta y.$$

在方括号内的量也同样可以写成(对于小 Δx 而言)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x.$$

于是

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y.$$

作用在其他两个边缘上的力对 ΔF 也将有贡献，所以总力显然是

$$\Delta F = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y. \quad (12.16)$$

该鼓膜之挠曲是由外力引起的。让我们设 f 为由外力引起的膜上单位面积的向上的力(一种“压强”)。当该膜处于平衡状态(静止情况)时，这力必须被刚才所算出的内力即式(12.16)平衡掉。也就是说，

$$f = - \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y}.$$

于是式(12.16)便可以写成

$$f = - \nabla \cdot (\tau \nabla u). \quad (12.17)$$

其中， ∇ 目前所指的当然是二维的梯度算符($\partial / \partial x, \partial / \partial y$)。我们就要一个把 $u(x, y)$ 和所施力 $f(x, y)$ 以及表面张力 $\tau(x, y)$ ——一般来说，膜中的 τ 是可以逐点改变的——联系

起来的微分方程(一个三维弹性体的畸变也由一组相似的方程所支配,但我们将专注于二维的情况)。我们将仅仅关心表面张力 τ 在整张膜中为常数的那一种情况。于是,可以将式(12.17)写成

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{\tau}. \quad (12.18)$$

这样就有另一个与静电学相同的方程了!——只是这回限制在二维上。位移 u 对应于 ϕ ,而 f/τ 对应于 ρ/ϵ_0 。所以无论是对于无限大的平面带电板、或两平行长导线、或带电的圆筒形导体,我们所做过的一切工作,均可直接应用到一张绷紧的薄膜上。

假设我们在膜的某些点上将膜推到一定高度——也就是说,在某些点上把 u 值固定下来,这就是在电的情况下,在各对应地方有一个特定势的一种模拟。因此,比如我们可以用一个与筒形导体对应的截面形状的物体把膜推上去,因而形成一个正“势”。例如,若我们用一根圆棒把膜推上去,该表面便将如图12-6所示的形状。高度 u 与一带电圆棒的静电势 ϕ 相同。它是按 $\ln(1/r)$ 下降的(其斜率,对应于电场 E ,将按 $1/r$ 下降)。

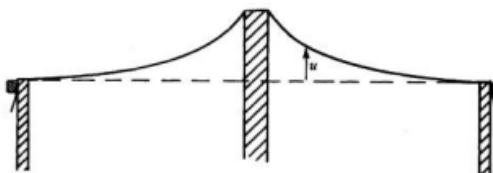


图 12-6 一张绷紧的橡胶薄层用一根圆棒推上去时的横截面。函数 $u(x, y)$ 与
在一根很长的带电棒附近的电势 $\phi(x, y)$ 相同

一张绷紧的橡胶薄层,往往用来作为一种从实验上解决复杂的电学问题的途径。这里,模拟是倒过来用了!各种不同的棒和杆被用来把膜推至对应于一组电极的势的高度。此后,对高度的测量就能给出在电情况下的电势。这一种模拟甚至被发展得更远。如果将一些小球放在膜上面,它们的运动会近似地对应于电子在相应电场中的运动。人们能够实际上观看到“电子”在其轨道上运动。这一方法曾被用来对许多光电倍增管(诸如那些用在闪烁计数器上的,以及那些用于控制卡迪拉克牌汽车的车前灯光的)的复杂几何图形进行设计。这一方法目前仍被采用,但其准确度却是有限的。对于最准确的工作,更好的是通过数值计算法,即利用大型电子计算机把场求出来。

§ 12-4 中子扩散;均匀媒质中的均匀球形源

我们取另一个会给出相同类型方程的例子,这回得同扩散打交道了,在第1卷第43章中,我们曾经考虑过离子在纯气体中的扩散,以及一种气体在另一种气体中的扩散。这一次让我们选取一个不同的例子——中子在一种诸如石墨那样的材料中的扩散。之所以着重提出石墨(碳的一种纯净形式),是因为碳并不会吸收慢中子。在碳中,中子能够自由地到处漂移。它们在被核散射而偏转至一个新的方向之前,能够平均沿直线跑过几厘米。所以如果我们有一大块石墨——每边有许多米长——那么最初在某处的中子就会扩散至其他地方。

我们想要找出能对它们的平均行为——也就是，对它们的平均流动——所做的一种描述。

设 $N(x, y, z)\Delta V$ 代表点 (x, y, z) 处体积元 ΔV 中的中子数。由于运动，有些中子就会离开 ΔV ，而其他一些则将进入。若在一个区域里有比其邻区更多的中子，则从第一个区进入第二个区中的中子比起返回的将会多些，这将有一个净流。按照第1卷第43章中的讨论，我们用一个流矢量 \mathbf{J} 来描述该流动。它的 x 分量 J_x 就是单位时间通过垂直于 x 方向的单位面积的净中子数。我们曾经求得

$$J_x = -D \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (12.19)$$

式中扩散系数 D ，由平均速度 v 和在连续两次散射间的平均自由程 l 表达的关系式为

$$D = \frac{1}{3} lv.$$

因而有关 \mathbf{J} 的矢量方程便是

$$\mathbf{J} = -D \nabla N. \quad (12.20)$$

中子流经任一个表面元 da 的时间变化率为 $\mathbf{J} \cdot n da$ (n 照例指单位法向矢量)。于是，从一体积元流出的净流(根据通常的高斯理论)为 $\nabla \cdot \mathbf{J} dV$ 。这一流动应该导致在 ΔV 内的数目随时间而减少，除非有些中子正在 ΔV 中产生出来(通过某一种核过程)。若在该体积内存在能够在单位时间单位体积中产生出 S 个中子的源，则流出 ΔV 的净流将等于 $(S - \partial N / \partial t) \Delta V$ 。这时我们就有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (12.21)$$

把式(12.21)和(12.20)两者合并，便得到中子扩散方程：

$$\nabla \cdot (-D \nabla N) = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (12.22)$$

在静止——即其中 $\partial N / \partial t = 0$ ——情况下，我们再度得到式(12.4)! 可以利用关于静电学的知识来解决中子的扩散问题。因此，就让我们来解答这个问题。你们可能会奇怪：如果已在静电学中解答了一切问题的话，为什么还要再来求解一个问题？ 原因是，这回我们能够较快地获得解答，因为静电学的问题已经解决了!

假设有一大块材料，其中中子——比如是通过铀裂变——正在从一个半径为 a 的球形区域里朝各方向均匀地产生出来(图 12-7)。我们想要弄清楚：各处的中子密度是多少？在产生中子的区域里中子的密度究竟会多么均匀？在源中心处的中子密度与在源区表面上的中子密度的比率是多少？要找出这些答案挺容易。这里，源密度 S_0 代替了电荷密度 ρ ，因而我们的问题与具有均匀电荷密度的球体问题相似。求 N 正如同求势 ϕ 。以前我们曾计算出一个均匀带电球体的内场和外场，对这些场取积分就可以获得势。在球外，电势为 $Q/(4\pi\epsilon_0 r)$ ，其总电荷 Q 是由 $4\pi a^3 \rho/3$ 给出的。因此

$$\phi_{\text{外}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}. \quad (12.23)$$

对于球内各点，那里的电场仅仅来自半径为 r 的球体内的电荷 $Q(r)$ ，亦即 $Q(r) = 4\pi r^3 \rho/3$ ，

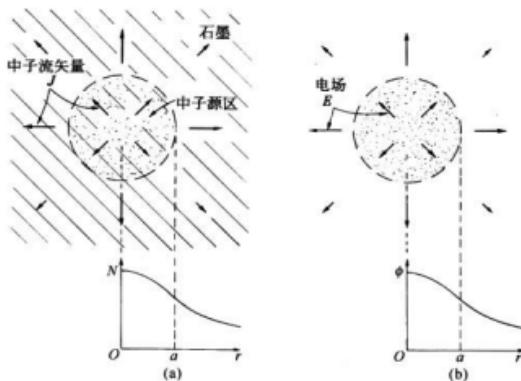


图 12-7 (a) 在一大块石墨中, 中子在一个半径为 a 的球体里均匀地产生并向外扩散。发现中子密度 N 为离源心距离 r 的函数。(b) 类似的静电情况:一个均匀带电球体, 其中 N 对应于 ϕ , 而 J 对应于 E

因而

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \quad (12.24)$$

这个场随着 r 增大线性地增大。对 E 取积分便可得到 ϕ , 于是我们有

$$\phi_{\text{in}} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \text{常数}.$$

在半径 a 处, ϕ_{in} 与 ϕ_{ex} 必定相等, 因而该常数就应当是 $\rho a^2 / (2\epsilon_0)$ (假定离源很远的地方 ϕ 等于零, 这就相当于那里的中子数 N 为零)。因此,

$$\phi_{\text{in}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.25)$$

我们立即就知道另一个问题中的中子密度。答案是

$$N_{\text{in}} = \frac{Sa^3}{3Dr} \quad (12.26)$$

和

$$N_{\text{ex}} = \frac{S}{3D} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.27)$$

N 作为 r 的函数如图 12-7 所示。

那么, 源心与边缘的密度之比又是多少呢? 在源心 ($r = 0$) 处, 密度正比于 $3a^2 / 2$; 在边缘 ($r = a$) 处, 密度正比于 $2a^2 / 2$; 因而, 两密度的比为 $3/2$ 。一个均匀源并不会产生均匀的中子密度。你看! 静电学的知识给我们提供了关于核反应堆物理学的一个良好开端。

有许多物理情况, 其中扩散起着重要作用。例如, 离子在液体中的运动, 或电子在半导体中的运动, 都遵循相同的方程。我们一次又一次地和这种相同的方程式打交道。

§ 12-5 无旋流体的流动；从球旁经过的流动

现在让我们考虑一个并非十分完美的例子，因为我们将要用的方程式不会真正十分普遍地代表该主题，而只是代表一种人为的理想情况。将要讨论的是水流问题。对于绷紧的薄膜，我们的方程乃是一种近似，只有在挠曲程度微小时才正确。在有关水流的讨论中，将不做这种近似，而必须做出一些与实际的水流有很大出入的限制条件。我们将仅仅处理一种不可压缩的、无黏滞性的、而又无环流的液体的定常流动情况。然后，就将速度 $v(r)$ 作为位置 r 的函数来表达该流动。若流动是定常的（唯一具有静电学类似的一种情况），则 v 与时间无关。如果用 ρ 代表该流体密度，则 ρv 便是单位时间通过单位面积的质量。根据物质守恒， ρv 的散度一般将是单位体积内材料质量的时间变化率。我们将假定，并没有任何不断创造或消灭物质的过程。于是物质守恒就要求 $\nabla \cdot \rho v = 0$ （一般说来，它应当等于 $-\partial \rho / \partial t$ ，但由于我们的流体是不可压缩的， ρ 处处相同，故可将其分离出来，因而上述方程就不过是

$$\nabla \cdot v = 0.$$

好！我们又回到静电学（空间不存在任何电荷）上来了。上式恰好就像 $\nabla \cdot E = 0$ 。然而，情况并非那样简单！静电学并不仅仅是 $\nabla \cdot E = 0$ ，而是包括一对方程。单单一个方程不能告诉我们足够多的东西，还需要另一个方程。为了同静电学协调起来，我们还需要 v 的旋度为零。但这对于实际液体来说，并非普遍正确。大多数液体往往会产生一些环流。所以我们就被限制在没有液体环流的情况。这样的流动常称为无旋流动。不管怎样，若我们作出了所有这些假定，便可以想象出类似于静电学的一种流体流动情况。因而采取

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (12.28)$$

和

$$\nabla \times v = 0. \quad (12.29)$$

我们要强调，遵循这些方程的液体流动只是一些特殊而远非普遍的情况。它们是表面张力、可压缩性和黏滞性都必须可以忽略、而又可以假定该流动是无旋的那么一些情况。这一些条件对于真实水的适用性竟是如此之少，以致数学家冯·诺伊曼曾经说过，凡对式(12.28)和(12.29)进行过分析的人们乃是在研究“干水”！我们将在第40和41章中对流体流动的问题进行更详细的讨论。

由于 $\nabla \times v = 0$ ，因此“干水”的速度就可以写成某个势的梯度：

$$v = -\nabla \psi. \quad (12.30)$$

ψ 这个量的物理意义是什么？它并不含有任何十分有用的意义。速度可以写成为势的梯度，仅仅是因为该流动是无旋的。而根据与静电学的类比， ψ 就称为速度势，但它与 ϕ 不同，与势能毫无关系。由于 v 的散度为零，我们便有

$$\nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi = 0. \quad (12.31)$$

和在自由空间 ($\rho = 0$) 里的静电势一样，这速度势 ψ 也服从同样的微分方程。

让我们举一个属于无旋流动问题的例子，并看看能否通过学过的方法来解决它。考虑

穿过液体下落的球体问题。如果它降落得太慢，则我们所忽略的黏滞力就会十分重要。如果它落得太快，则会有一些小漩涡(湍流)出现在其尾部，而在水里就会有一些环流。但若该球体运动得既不太慢又不太快，则水流将大体上符合我们的那些假设，这样才能通过那些简单方程式来描述水的运动。

在固定于球体的参照系中来描述所发生的事情很方便。在这个参照系中，我们提出这样一个问题：若在离球很远的地方水均匀流动，当其流经静止球体时，运动情况将如何呢？这就是说，在离球很远的地方，流动处处相同。但在球体附近的流动则如图 12-8 中的那些流线。这些线，始终平行于 v ，而与电场线相对应。我们希望得到有关这一速度场的定量描述，即关于任一点 P 的速度表示式。

可以从 ψ 的梯度求得速度，因而首先就要算出势来。我们需要处处都满足式(12.31)的那一种势，而这个势也应满足两个限制条件：(1) 球内区域不存在流动；(2) 在远距离处流动是稳定的。为了满足条件(1)，垂直于球面的 v 分量就应等于零。这意味着，在 $r = a$ 处， $\partial\phi/\partial r$ 为零。为了满足条件(2)，则在 $r \gg a$ 的所有点上，必须有 $\partial\phi/\partial z = v_0$ 。严格说来，并没有一种静电情况会完全对应于我们的问题。实际上它对应于把一个介电常量为零的球体放置在一个均匀电场中。要是已求出了关于介电常量为 κ 的球体放在一均匀场中的问题之解，那么代入 $\kappa = 0$ ，我们便该立即获得有关这一问题的解答。

实际上，并未详细算过这个特定的静电学问题，那现在就让我们来做吧(本来也可以直接用 v 和 ψ 来解决流体问题的，但仍将采用 E 和 ϕ ，因为那是我们所熟悉的)。

问题是：求出 $\nabla^2\phi = 0$ 的一个解，使得对于 r 很大时 $E = -\nabla\phi$ 为一常数，比方说 E_0 ，而又使得在 $r = a$ 处 E 的径向分量为零，即

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (12.32)$$

我们的问题牵涉到一种新的边界条件，这里并不要求表面上的 ϕ 为常数，而是要求 $\partial\phi/\partial r$ 为常数。这样一来，情况就有所不同了，不容易立即得到答案。首先，当该球体不存在时， ϕ 应当是 $-E_0 z$ 。于是 E 应该沿 z 轴方向，并具有一个大小不变的 E_0 。原来我们曾经分析过内部具有均匀极化的一个电介质球的情况，而且我们现在这种均匀极化球内部的场乃是一个均匀场，而在其外部的场则与一处在球心的点偶极子的场相同。因此，我们猜测所希望得到的解为一个均匀场和一个偶极子场的叠加。因偶极子之势(第 6 章)为 $pz/(4\pi\epsilon_0 r^3)$ ，于是我们假定

$$\phi = -E_0 z + \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (12.33)$$

由于偶极子场按 $1/r^3$ 下降，所以在大的距离处我们便恰好拥有场 E_0 。我们的猜测自动满足了上面的条件(2)。但该偶极子强度 p 取何值呢？为求得这个值，我们可利用关于 ϕ 的另一条件，即式(12.32)。必须取 ϕ 对 r 的微商，但这当然要求在一个固定的角度上进行，因而

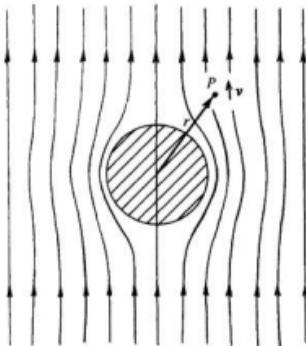


图 12-8 从球旁流过的无旋流体的速度场

为了方便,首先就得用 r 和 θ 而不是用 z 和 r 来表达 ϕ 。由于 $z = r \cos \theta$, 所以得:

$$\phi = -E_0 r \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (12.34)$$

E 的径向分量为

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = +E_0 \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (12.35)$$

上式在 $r = a$ 处对于所有的 θ 均必须为零。若取 p 为

$$p = -2\pi\epsilon_0 a^3 E_0, \quad (12.36)$$

那就确实如此。

要小心注意! 如果式(12.35)中两项并非都具有相同的 θ 依赖关系, 则不会有可能选得出 p 而使式(12.35)在 $r = a$ 处对一切角度都变为零。我们算出的结果意味着, 在写出式(12.33)时的猜测是聪明的。当然, 在做出该猜测时, 我们是向前看的。我们知道将需要另一项, 它将会:(a)满足 $\nabla^2 \phi = 0$ (任何真实的场都该如此); (b)依赖于 $\cos \theta$; (c)并在大的 r 处降至零。偶极子场就是唯一能满足这三个条件的场。

利用式(12.36), 我们的势就是

$$\phi = -E_0 \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.37)$$

关于流体流动问题的解可以简单地写成:

$$\psi = -v_0 \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.38)$$

从这个势求 v 很方便, 对此事我们就不进一步追究下去了。

§ 12-6 照度; 对平面的均匀照明

在这一节中, 我们将转到一个完全不同的物理问题上去——旨在显示许多不同的可能

性, 此次, 我们将做某种事情, 它所导致的积分与我们在静电学中所求得的积分类型相同(如果我们有一个数学问题会给出某一积分, 而它若就是以前解决另一问题的同一积分, 那么我们对于该积分的性质便会理解一些)。现在就从照明工程中选取一个例子: 假设有一光源放在一平面上距离为 a 处。该面上的照明情况如何呢? 这就是说, 单位时间到达单位面积上的辐射能有多少(见图 12-9)? 假定光源是球对称的, 以致在任何方向辐射的光都相等。这时, 通过

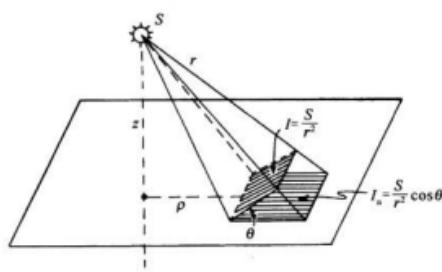


图 12-9 面上的照度 I_a 代表单位时间到达单位面积表面上的辐射能

垂直于光流的单位面积的辐射能量与距离的平方成反比。显然，在垂直于光流的表面上，光的强度与点电荷源产生的电场具有相同的公式。若光线与表面的法线成一角度 θ 投射到表面上，那么 I_n ，即到达单位面积表面上的能量，就仅有 $\cos \theta$ 那么大了，因为同样的能量落在了 $1/\cos \theta$ 倍的面积上。如果我们称光源的强度为 S ，则在一个面上的照度 I_n 便是

$$I_n = \frac{S}{r^2} e_r \cdot n. \quad (12.39)$$

式中， e_r 是从光源向外的单位矢量；而 n 则是该面积的单位法线。照度 I_n 相当于从一强度为 $4\pi_0 S$ 的点电荷所产生的电场的法向分量。明白了这一点，我们便可看到，对于任一种光源分布，都能够通过求解对应的静电学问题而获得答案。在计算电荷分布所产生的电场在一平面上的垂直分量时，我们就是按照这种求光源* 对一平面的照度的方法来做的。

试考虑下述例子。为了某种特定实验条件，我们希望使台面上有一个十分均匀的照明。这里，可资利用的是一些沿管的长度辐射均匀的长荧光管。这可以在距台面为 z 处的天花板上安置一整排荧光管对我们的台子照明。如果我们要求台面照度均匀，比方说在 1% 的起伏范围内，则所选用的管与管间的最大间隔 b 是多少？答案：(1) 求相隔为 b 的均匀带电导线栅的电场；(2) 计算电场的垂直分量；(3) 找出 b 应多大才能使场的起伏不超过 1%。

在第 7 章中我们曾见过，带电导线栅的电场可用许多项之和来表示，其中每项给出一个周期为 b/n 的正弦变化的场，这里 n 是一整数。任何一项的幅度都由式(7.44)给出：

$$F_n = A_n e^{-2\pi n b}.$$

若要求的场是不太靠近那导线栅处的场，则我们仅需考虑 $n = 1$ 的情况。对于一个完整的解来说，本来还需确定整套系数 A_n ，而这我们还未曾做过（尽管是简单的计算）。既然我们只要求 A_1 ，就可以估计出它的大小约略与平均场相同。于是该指数因子就会直接提供关于场强变化的相对幅度。如果希望这个因数等于 10^{-3} ，则将得出 b 应为 $0.91z$ 。若令荧光灯管间的间隔等于台面至天花板距离的 $3/4$ ，则该指数因子为 $1/4000$ ，而我们便有一个安全系数 4，从而相当肯定地会使照明在 1% 的范围内保持恒定不变（准确的计算表明， A_1 实际上两倍于平均场，因而 $b \approx 0.83z$ ）。对于这么一个均匀照明，所容许的管间距离竟会如此之大，多少有点令人惊奇。

§ 12-7 自然界的“基本统一性”

在这一章中，我们希望证明，在学习静电学的过程中你们已同时学习了怎样去处理物理学中的其他许多课题，而正是由于这一点，我们才有可能在有限的岁月里学习几乎全部物理学。

可是，当这样的讨论结束时肯定会浮现出一个问题：为什么从不同现象所得到的微分方程竟会如此相似呢？ 我们也许会说：“那是自然界的基本统一性。”但这指的到底是什么呢？这样一个命题本来能具有什么意义？简而言之，它意味着不同现象有着彼此相似的方程组，

* 由于我们所谈的是关于非相干光源，它们的强度就总是线性地相加，因此模拟的电荷将始终带有相同符号。并且，我们的模拟仅适用于到达一块不透明面上的光能，因而在我们的积分中只需计入照射于该面上的光源（自然不包括该面下面的其他光源）。

当然这时我们还未给出任何解释。“基本统一性”也许指的是，任何东西都由同一种材料构成，因而便应服从同样的方程。这听起来是一个完满的解释，但让我们深思一下，静电势、中子扩散、热流——是否确实在与同一种材料打交道？我们能否真的想象出那静电势在物理上全同于温度，或全同于粒子密度？肯定的是， ϕ 不会恰好与粒子的热能相同；鼓膜的位移肯定不像温度。既然这样，为什么还会“一种基本统一性”呢？

事实上，对各种不同科目的物理学加以更密切的考察就会证实，那些方程式并非真的全同。对于中子扩散所找到的方程只是一种近似。当我们观察的距离比自由程大时，以上近似才有效。如果更细致地进行观察，便会看到各个中子正在各处跑动。各个中子的运动，肯定完全不同于我们从微分方程解出的那种连续光滑的变化。该微分方程只是一种近似，因为我们曾经假定中子在空间是连续分布的。

是否这就是关键所在？是否一切现象所共有的东西就是空间，即藉以建立物理学的一种构架？只要东西在空间里相当平滑，那么所牵涉到的重要事情就将是某些量相对于空间中位置的变化率。这就是为什么我们总是获得一个有梯度存在的方程。微商必定以梯度或散度的形式出现；由于物理定律与方向无关，所以它们必然表示成矢量的形式。静电学方程组就是人们所能获得的、仅含有各个量的空间微商的、最简单的矢量方程组，任何其他简单问题——或复杂问题的简化——看起来都应当像静电学那样。所有问题的共同点是：它们全都涉及到空间，以及我们总是用简单的微分方程来模拟实际的复杂现象。

由此引导到另一个有趣问题。这同样的讲法对静电学方程组是否也可能是对的呢？它们是否也只有作为实际上复杂得多的微观世界的一种理想化的模拟才是正确的呢？客观（物质）世界是否可能由一些仅在极微小距离上才能看得见的 X 子组成的呢？而在测量过程中我们是否可能总是在那么大的尺度上进行观察，以致不能见到这些小 X 子、这才是所以会得到那些微分方程的根由？

现在最完整的电动力学理论，的确会在十分短的距离上碰到困难。因此，在原则上这些方程可能是某些事情的理想化模型。它们在小至约 10^{-14} cm 的距离上仍显示正确，但此后就开始显得不对了。可能会有某种迄今还未被发现的内部“机制”，而这种内部复杂性的一些细节被表面上看来理想的那些方程隐藏起来了——正如在那种“理想”的中子扩散现象中一样。但还没有人系统地提出过克服那种困难的成功理论。

相当奇怪的是：事实表明（基于我们完全不清楚的原因），相对论和量子力学按照我们所知的方式结合起来，似乎已不允许有一个基本上不同于式(12.4)的方程，而同时又不会引起某种矛盾的那种发明。不仅仅是与实验不符合，而且还是一种内部矛盾。例如：对所有可能发生的各种情况的概率之和不等于 1，或能量有时可能会出现为复数的那种预言，或其他与此类似的某种荒谬设想。迄今还没有人能够创立一种电学理论，使得在其中 $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ 被理解成对深一层机制的一种理想化近似，而又不会最终引导到某一种谬论上去。然而，还必须补充说明：若假定 $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ 在所有不论多么小的距离上都正确，则会导致它本身的荒谬（一个电子的电能为无限大）——即迄今还没有谁懂得怎样摆脱这些谬论的影响。

第 13 章 静 磁 学

§ 13-1 磁 场

作用于一电荷上的力不仅取决于它的位置,而且还取决于它运动的速度。空间每一点可由两个能确定作用于电荷上的力的矢量来做标志。首先,电场提供了与电荷运动无关的一部分力,我们用电场 E 来描述它;其次,另一部分力,称为磁力,那是有赖于电荷的速度的。磁力还具有一种奇怪的方向特性:在空间任一特定点上,这力的方向和大小均取决于该粒子的运动方向。在任一时刻,这力总是垂直于速度矢量;并在任一特定点上,这力又总是与空间中某一固定方向成直角(见图 13-1);而且,力的大小是与垂直于这一规定方向的速度分量成正比的。所有这一切行为都能由一个定义为磁场矢量的 B 来加以描述。这个矢量不仅在空间规定出唯一方向,并且还规定力与速度成正比的那个比例常数,从而写出磁力为 $qv \times B$ 。于是,作用于电荷上的总电磁力就可以写成

$$F = q(E + v \times B). \quad (13.1)$$

这称为洛伦兹力。

磁力可用一根磁棒靠近一阴极射线管而轻易地加以演示。电子束的偏转,表明磁铁的存在产生了一个作用于电子而与其运动方向成直角的力,如同在第 1 卷第 12 章中我们曾描述过的那样。

磁场 B 的单位显然是 $1 \text{ NsC}^{-1}\text{m}^{-1}$ 。这同一单位也是 1 Vsm^{-2} 。它也称为 1 Wbm^{-2} 。

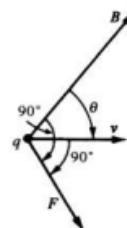


图 13-1 作用于一运动电荷上与速度有关的那一部分力,与 v 及 B 的方向都成直角。它也与垂直于 B 的 v 的分量(即 $v \sin \theta$)成正比

§ 13-2 电流;电荷守恒

我们首先考虑怎样来理解磁力对载流导线的作用。为此,我们先给所谓电流密度下个定义。电流是电子或其他电荷的净漂移或净流动所形成的运动。我们可用一个矢量来表达这一种电荷流动,这矢量给出每单位时间通过垂直于流动方向的单位面积元的电荷量(正如我们对于热流所曾做过的那样),我们称之为电流密度,并用矢量 j 来表示,它的方向沿着电荷运动的方向。如果在材料中某处取一小面积 ΔS ,则单位时间流经该面积的电荷量为

$$j \cdot n \Delta S, \quad (13.2)$$

式中 n 是垂直于 ΔS 的单位矢量。

这电流密度与电荷的平均流动速度有关。假设有一个电荷分布,它的平均运动就是一个速度为 v 的漂移。当这一分布通过一面积元 ΔS 时,在 Δt 时间内流经该面积元的电荷

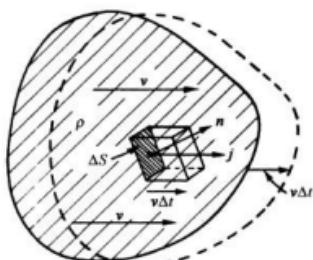


图 13-2 如果具有密度为 ρ 的电荷分布以速度 v 移动, 则单位时间流经 ΔS 的电荷为 $\rho v \cdot n \Delta S$

式中 N 为单位体积的电荷数目。

单位时间通过任一个面 S 的总电量称为电流 I 。它等于通过该面的所有面元的流的法向分量的积分

$$I = \int_S j \cdot n dS \quad (13.5)$$

(见图 13-3)。

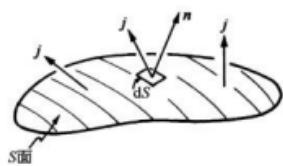


图 13-3 流过 S 面的电流 I 为 $\int j \cdot n dS$

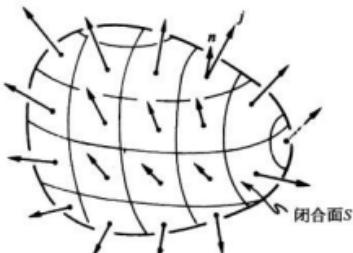


图 13-4 $j \cdot n$ 对整个闭合面的积分, 等于内部总电荷 Q 的变化率的负值

从闭合面 S 流出来的电流 I 代表电荷从面 S 所包围的体积 V 内离开的速率。物理学的一个基本定律为: 电荷是不灭的; 它永不消失也永不被创造。电荷能够从一处移至另一处, 但却从未出现过无中生有的情况。我们说电荷是守恒的。如果有一个净电流从一个闭合面流出, 则其内部的电荷就应相应地减少(图 13-4)。因此, 我们能够将电荷守恒律写成

$$\int_{\text{任一闭合面}} j \cdot n dS = - \frac{d}{dt} (Q_{\text{内}}). \quad (13.6)$$

内部电荷则可以写成电荷密度的体积积分:

$$Q_{\text{内}} = \int_{\text{在 } S \text{ 内之 } V} \rho dV. \quad (13.7)$$

如果应用式(13.6)于一个小体积 ΔV , 那么我们便知道左边的积分为 $\nabla \cdot j \Delta V$ 。其中的电荷为 $\rho \Delta V$, 因而电荷守恒律也可以写成

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (13.8)$$

(再一次是高斯数学!)。

§ 13-3 作用于电流上的磁力

现在我们准备求磁场作用于一载流导线上的力。电流由以速度 v 沿导线运动的带电粒子组成。每一个电荷都感受到一个横向力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

[图 13-5(a)]。如果单位体积含有 N 个这样的电荷, 则在导线的一个小体积 ΔV 内的数目为 $N\Delta V$ 。作用于 ΔV 上的总磁力 ΔF 等于作用在各电荷上之力的总和, 即是,

$$\Delta F = (N\Delta V)(q\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

但 Nqv 恰好就是 j , 因而

$$\Delta F = j \times B \Delta V \quad (13.9)$$

[图 13-5(b)]。作用于单位体积的力为 $j \times B$ 。

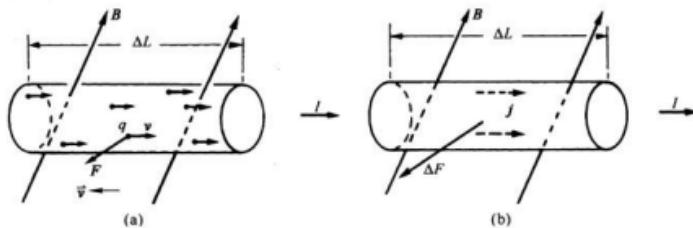


图 13-5 作用于一载流导线上的磁力等于对各个运动电荷作用力的总和

如果在一根截面为 A 的导线中, 流经导线的电流是均匀的, 则可取截面为 A 而长度为 ΔL 的一段柱体作为体积元。于是

$$\Delta F = j \times B A \Delta L. \quad (13.10)$$

现在就可以把 jA 叫作导线中的电流矢量 I (它的大小为导线中的电流, 而其方向则是沿着导线)。这样,

$$\Delta F = I \times B \Delta L. \quad (13.11)$$

因此作用于单位长度导线上的力为 $I \times B$ 。

上式显示了一个重要结果, 即由于导线内电荷运动而作用于导线上的磁力, 仅取决于总电流, 而与其中每一粒子所带的电荷量——甚至连符号! ——都无关。作用于磁铁附近导

线上的力,通过观察接通电流时线的偏转不难加以演示,正如在第1章中所曾描述过的那样(见图1-6)。

§ 13-4 恒定电流的磁场;安培定律

我们已经看到,诸如在由一磁铁所产生的磁场存在的情况下,就有力作用于导线上。从作用等于反作用这一原理出发,我们也许会期望,当导线中有电流通过时应当有一个力作用于磁场之源,也即作用于磁铁上*。确实有这样的力存在,这可由置于载流导线附近的一根磁针的偏转而看出来。原来我们知道,磁铁会感受到来自其他磁铁的作用力,因而这就意味着,当导线中有电流时,这导线本身就会产生磁场。于是,运动电荷确实会产生磁场。现在我们愿意尝试找出如何确定这种磁场产生的规律。问题是:给出电流后,它能形成什么样的磁场?对这一问题的解答由实验上的三个决定性实验和安培在理论上所做的辉煌论证而确定了下来。我们将绕过这一有趣的历史进程,而只是简单地说说大量实验事实已经证实了麦克斯韦方程组的有效性。我们将把它们作为起点。若在这些方程中省略含有时间微商的那些项,则可得到关于静磁学的方程组:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.12)$$

和

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (13.13)$$

这些方程仅在一切电荷密度都恒定、一切电流都稳恒,使得电场和磁场都不随时间而变——一切场都呈现“静止”状态——时才正确。

应当指出,认为有像静磁这种情况是相当危险的,因为毕竟总得有电流才能获得磁场——而电流则只能来自运动着的电荷。因此,“静磁”只是一种近似,它指的是拥有大量运动电荷、而我们又可将其近似成定常流动的一种特殊的动力情况。只有这样才能谈论一种不随时间而变的电流密度 \mathbf{j} 。这一题目应当更准确地称为关于恒定电流的研究。假定所有的场都恒定,我们从那完整的麦克斯韦方程组(2.41)中省略了一切含有 $\partial \mathbf{E} / \partial t$ 和 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 之项后,便可获得上面两个方程式(13.12)和(13.13)。并注意:由于任何矢量旋度的散度均必须等于零,所以式(13.13)便要求 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ 。根据式(13.8),这只有在 $\partial \rho / \partial t$ 为零时才正确。但如果 \mathbf{E} 不随时间而变,这便是必然的了,因而我们的一些假设都是一致的。

$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ 这一要求的含意是,只能容许在首尾相连的路线中才有流动着的电荷。例如,它们可以在构成一个完整回路——称为电路——的导线中流动。当然,这种电路可以包含维持电荷流动的发电机或电池组。但不容许包括正在被充电或放电的电容器(当然,我们以后还将推广到包括那些动态场,但目前打算先讨论较简单的恒定电流情况)。

现在,让我们来看看式(13.12)和(13.13)的含意如何。第一个式子说明 \mathbf{B} 的散度为零。拿它与静电学中的类似方程 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ 作比较,就可以断定,不会有电荷的磁类似物,即没有能从中产生出 \mathbf{B} 线的磁荷。如果我们用矢量场 \mathbf{B} 的“线”来考虑,则这些线将永远不可能突然出现,也永远不可能终止。那么,它们是从哪里来的呢?在有电流的地方磁

* 然而,我们不久将见到,对于电磁力来说这样的假定一般是不正确的。

场才会“出现”；它们有一个正比于电流密度的旋度。无论哪里有电流，那里就有构成回路的磁力线环绕着该电流。由于 \mathbf{B} 线无始无终，这些线便经常能够兜绕回来以形成闭合回路。但也有 \mathbf{B} 线不是简单闭合回路的那些复杂情况。可是，无论情况如何，它们永远不会有从一些点上散发出去。迄今为止，还没有发现过磁荷，因而 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。这一结果，不仅对于静磁场正确，甚至对于动态场也始终正确。

\mathbf{B} 场与电流的关系包含在式(13.13)中。这里有一个新的情况与静电学大不相同，在那里我们曾有过 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。这个方程意味着 \mathbf{E} 环绕着任一闭合回路的线积分为零：

$$\oint_{\text{回路}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

这一结果是由斯托克斯定理得到的，该定理说：任一个矢量场沿任一闭合曲线的线积分，等于该矢量旋度的法向分量的面积分（对以该闭合回路为其边缘的任何表面求积分）。把同样这个定理应用于磁场矢量并利用在图 13-6 上所示的那些符号，则可得

$$\int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (13.14)$$

由式(13.13)取 \mathbf{B} 的旋度，便有

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (13.15)$$

根据式(13.5)，对 \mathbf{j} 的积分即是通过 S 面的总电流 I 。由于是对恒定电流来说的，所以通过 S 面的电流与该面的形状无关，仅仅要求该面由 Γ 曲线所包围，因而人们往往说成是“穿过 Γ 回路的电流”。这样，我们就有一个普遍定律：围绕任何闭合曲线的 \mathbf{B} 的环流，等于穿过该回路的电流 I 除以 $\epsilon_0 c^2$ ：

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_{\text{围} \Gamma}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.16)$$

这一定律——叫安培定律——在静磁学中的作用与高斯定律在静电学中的作用相同。但是只有安培定律仍不能由电流确定 \mathbf{B} 。一般说来，还必须用到 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。然而，正如我们将在下一节中见到的，在具有某些简单对称性的特殊情况下仍可以用它来求磁场。

§ 13-5 直导线与螺线管的磁场；原子电流

通过求出一根导线附近的磁场，我们就能够举例说明安培定律的应用。我们要问：在一条圆形截面的长直导线外面的场如何？我们将假定某种东西，它可能不十分明显、但无论如何却是真的：即 \mathbf{B} 的场线以闭合圆周环绕着该导线。如果我们做出这一假定，那么安培定律，即式(13.16)，便会告诉我们场有多强。根据这一问题的对称性，在导线的一个同心圆上的所有各点， \mathbf{B} 就具有相同的大小（见图 13-7）。于是，我们能够很容易地算出 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ 的线积分，只不过是 B 乘以该圆周罢了。设 r 为圆周半径，则

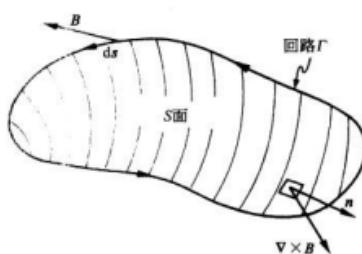


图 13-6 \mathbf{B} 切向分量的线积分等于 $\nabla \times \mathbf{B}$ 法向分量的面积分

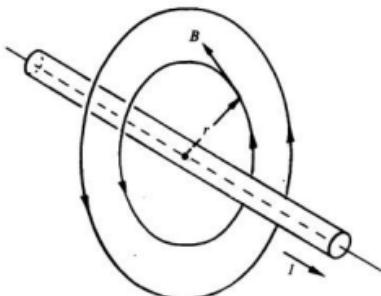


图 13-7 在载有电流 I 的一根长直导线外面的磁场

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r.$$

穿过该回路的总电流就是导线中的电流 I , 因而

$$B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0 c^2},$$

或

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r}. \quad (13.17)$$

磁场的强度与 r 反比地逐渐减弱, r 是距导线轴心的距离。倘若我们乐意,也可把式(13.17)写成矢量形式。记住 \mathbf{B} 与 \mathbf{I} 和 \mathbf{r} 两者都垂直,因而有

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\mathbf{I} \times \mathbf{e}_r}{r}. \quad (13.18)$$

我们已将因子 $1/(4\pi\epsilon_0 c^2)$ 提了出来,因为它经常会出现。值得记住的是,这一因子准确地等于 10^{-7} (在 $\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}$ 制中),因为一个像式(13.18)那样的方程式是用来定义电流单位安培的。在距离 1 A 电流 1 m 远处的磁场为 $2 \times 10^{-7} \text{ Wbm}^{-2}$ 。

由于电流产生了磁场,所以它也将施力于附近另一根同样载有电流的导线上。在第1章中,我们就曾描述过作用于两载流导线间的一个简单演示,如果两导线互相平行,则每根导线将垂直于由另一导线所产生的磁场。当两电流处在相同方向时,两线将互相吸引;当电流的方向相反时,则两线互相排斥。

让我们举另一个例子,它也可以用安培定律来加以分析,只要我们加进关于场的某种知识。假设有一个长导线圈绕成的紧密螺旋线,其两种截面如图 13-8 所示。这样的线圈称为螺线管。从实验上我们观察到:当一螺线管相对于其直径十分长时,则管外的场与管内的场相比将十分微小。仅仅利用这一事实,再加上安培定律,便可以求出管内场的大小。

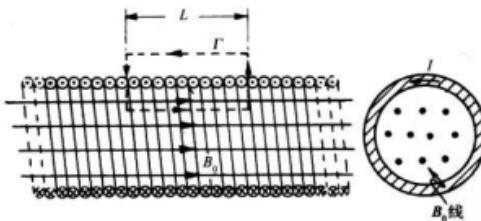


图 13-8 长螺线管的磁场

由于场存在其里面(而且散度为零),那么表示它的一些场线就必然平行于管轴,如图 13-8 所示。假定这是事实,便可利用图上所示的那条矩形“曲线” Γ 来运用安培定律。这条回路先在螺线管内沿着那里的场,例如 B_0 ,行了一段距离 L ,然后垂直于场而行,再沿着管

外回来,而那里的场则可以忽略。对于这么一条曲线, \mathbf{B} 的线积分正好是 $B_0 L$, 而它应当等于 $1/(\epsilon_0 c^2)$ 乘以穿过 Γ 的总电流, 如果在长度为 L 的螺线管上共有 N 匝的话, 则总电流为 NI 。这样, 我们就有

$$B_0 L = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}.$$

或者, 若令 n 为单位长度螺线管的匝数(即 $n = N/L$), 则得

$$B_0 = \frac{nI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.19)$$

当到达螺线管一端时, \mathbf{B} 线会怎么样呢? 大概的情形是: 它们多少有点散开, 并兜回到另一端, 再进入螺线管, 如图 13-9 所示的那样。像这样的场恰好就是在一根条形磁铁外面所观察到的。但磁铁到底是什么东西? 我们的方程表明, \mathbf{B} 来自电流。可是我们知道, 一根普通铁棒(既没有电池组也没有发电机)也能产生磁场。你也许会期望, 在式(13.12)或(13.13)的右边还应有其他一些项来代表“磁铁密度”或者如此类的量, 但是却没有这样的项。我们的理论说: 铁的磁效应乃来自某些内部电流, 而这些电流则已用 \mathbf{j} 的项来对付了。

从基本观点上看, 物质是十分复杂的——正如我们以前在试图理解电介质时所见到的那样。为了不致扰乱目前的讨论, 我们打算以后再来详细处理像铁那样的磁性材料的内部机制。暂时你们得接受所有磁性都来自电流, 而在永磁体中就有永久性的内部电流存在。对铁来说, 这些电流来自绕其本身的轴自旋的电子。每一电子既然带有这样的自旋, 便相当于一个小环行电流。当然, 一个电子不会产生多么大的磁场, 但在通常一块物质中就有无数亿个电子。平常它们都在作自旋并各自指向任意方向, 因而没有任何净效应发生。奇迹出现在寥寥几种像铁那样的物质中, 其中有相当大一部分电子会绕相同方向的轴自旋——对铁来说, 每一原子中就有两个电子参加这种协同运动。在一根条形磁铁中会有许许多多个电子全都在同一方向自旋, 因而, 正如我们将会见到的, 其总效应就相当于环绕该磁棒表面的电流(这与我们以前对电介质所发现的情况很相似——即一块均匀极化的电介质相当于在其表面上有电荷分布)。因此, 一根磁棒与一个螺线管等价并不是偶然的。

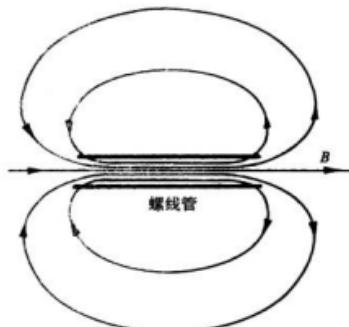


图 13-9 在螺线管外面的磁场

§ 13-6 磁场与电场的相对性

当我们在前面提及作用于电荷上的磁力与其速度成正比时, 你也许会奇怪: “什么速度? 相对于哪个参照系?”事实上, 从本章开头所给出的有关 \mathbf{B} 的定义就已经很清楚, 这个矢量是什么取决于我们选取哪一个参照系来规定电荷的速度。但关于哪一个才是规定磁场的合

适当参照系，我们还未说过什么。

事实证明，任何一个惯性系都可以。我们也将看到，磁和电并不是互相独立的东西，它们必须永远作为一个完整的电磁场结合在一起。虽然在静止情况下，麦克斯韦方程组会分成性质不同的两对，其中一对是关于电方面，而另一对则关于磁方面，在这两种场之间并没有明显联系，然而，在自然界内部它们之间却有一个起因于相对性原理的十分密切的关系。从历史上看，相对性原理是在麦克斯韦方程组之后才发现的。事实上，正是对于电和磁的研究才最终导致爱因斯坦对相对性原理的发现。但是让我们且来看看，如果假定相对性原理可以——的确是可以——应用于电磁学方面的话，则关于磁力相对论知识会告诉我们些什么。

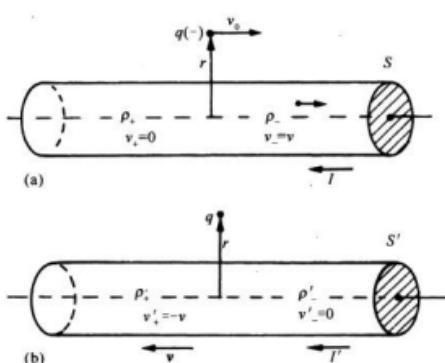


图 13-10 从两个参照系上去看一根载流导线与一个电荷 q 的相互作用。(a) 在 S 系上，导线是静止的；(b) 在 S' 系上，电荷是静止的

我们也该看到粒子会向导线方面靠拢。必须尝试去理解，为什么会发生这样的事情。

现在我们回过头来对一载流导线中的原子进行描述。在诸如铜一类的通常导体中，电流来自某些负电子——称为传导电子——的运动，而正的核电荷以及其余电子则都在材料里保持不动。我们令传导电子的密度为 ρ_- ，在 S 系中它们的速度为 v 。在 S 系中，那些静止不动的电荷密度为 ρ_+ ，这必须等于 ρ_- 的负值，因为我们正在考虑的是一根不带电的导线。这样在导线之外便不会有电场，因而作用于该运动粒子上的力正好是

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}.$$

利用式(13.18)中我们所求得的结果，即离导线轴心 r 处的磁场，我们可以断定，作用于该粒子上的力指向导线而具有量值：

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2Iqv_0}{r}.$$

利用式(13.3)和(13.5)，电流 I 可以写成 $\rho_- v A$ ，其中 A 是导线的截面积。于是

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2q\rho_- Avv_0}{r}. \quad (13.20)$$

假定我们想一想，如图 13-10 所示，一个负电荷以速度 v_0 平行于一根载流导线而运动，将会发生的情况。我们试图理解在如下两种参照系中正在进行的事态：一个系统相对于导线固定，如图(a)所示；而另一个系统则相对于粒子固定，如图(b)所示。我们将第一个参照系叫作 S ，而第二个参照系叫作 S' 。

在 S 系中，显然有一磁力作用于该粒子上。这力指向导线，所以若该电荷做自由运动，则应该看到它会向导线方面靠拢。但在 S' 系上，就不会有任何磁力作用于该粒子，因为它的速度为零。因此，它是否将停留在那里呢？在这两个参照系上，我们会看到不同的事态发生吗？相对性原理应说明，在 S' 系我

我们可以继续处理任意速度 v 和 v_0 的普遍情况,但考察粒子速度 v_0 与传导电子速度 v 相等的那种特殊情况,只会更好。因此,我们就写成 $v_0 = v$,而式(13.20)则变成

$$F = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_- A}{r} \frac{v^2}{c^2}. \quad (13.21)$$

现在我们把注意力转移到在 S' 系中所发生的情况,那里粒子静止不动而导线则以速率 v (朝向图的左方)从旁跑过。那些跟着导线跑的正电荷将在该粒子处造成某一磁场 B' 。但粒子现在是静止的,因而就没有磁力作用于其上了!如果有任何力作用于该粒子上,则它必然来自电场,必定是那根正在运动着的导线已产生了电场。但它所以能够这样只有它表现出带了电——一定是一根载流的中性导线运动时才会表现出带了电。

我们必须对此仔细检查。应当尝试从 S 系中所已知的导线里的电荷密度算出在 S' 系中导线内的电荷密度,人们起初也许认为它们相同。可是我们知道,长度在 S 与 S' 之间是改变的(见第1卷第15章),从而体积也将起变化。由于电荷密度有赖于电荷所占的体积,因而密度也将发生变化。

在我们对 S' 系中的电荷密度做出决定以前,必须知道一群电子正在运动时它们的电荷会发生什么情况。我们知道,一个粒子的表观质量按 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 变化。是否它的电荷也要做某种相似变化?不!无论动还是不动,电荷总是一样的。否则我们便不会始终都观测到总电荷守恒了。

假设我们取一块材料,比方说一块导体,它原本是不带电的。现在我们把它加热。由于电子与质子的质量不同,所以它们速度改变的数量将会不同。假如粒子的电荷有赖于携带该电荷的粒子的速率,则在这么一块加了热的导体中,电子和质子的电荷便不再平衡了。一块材料当加了热之后就该变成带电的了。正如以前我们曾经见到的,在一块材料中所有电子的电荷若发生微小变化就会引起巨大的电场。这样的效应却从未观测到。

并且,我们还可以指出,在物质中电子的平均速率与其化学成分有关。假如电子的电荷会随速率变化,则在一块材料中的净电荷将在化学反应中有所变化。通过一种直接计算又能够证明:即使电荷对速率仅有一个十分微小的依存关系,也会从最简单的化学反应中产生出巨大的电场来。但从没有这种效应被观测到,因而我们得出结论:单个粒子的电荷与其运动状态无关。

因此,一个粒子所带的电荷 q 是一个不变标量,与参照系无关。这意味着,在任何参照系中,由电子分布的电荷密度恰好就正比于单位体积中的电子数目。我们只需关注这么一个事实:体积可以由于距离的相对论性收缩而发生改变。

现在,我们把这些概念应用于正在运动的那根导线。如果取长度为 L_0 的一段导线,其中静止电荷具有密度 ρ_0 ,则它将含有总电荷 $Q = \rho_0 L_0 A_0$ 。如果同样这些电荷是在一个以速度 v 运动着的不同参照系中被观测的,则它们均会在一段较短的长度

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (13.22)$$

的材料内被找到。但面积 A_0 却依旧不变(因为垂直于运动的尺度不会改变),参见图 13-11。

若把电荷在其中运动着的那个参照系中的电荷密度叫做 ρ ,则总电荷 Q 将是 $\rho L A_0$ 。这也必定等于 $\rho_0 L_0 A_0$,因为在任一参照系中电荷总是一样的,所以 $\rho L = \rho_0 L_0$,或根据式(13.22),

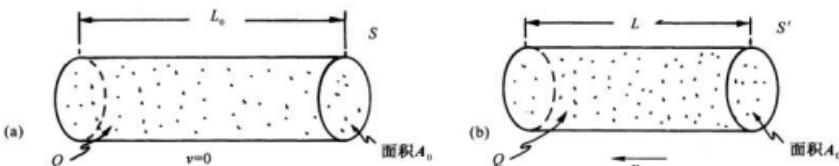


图 13-11 如果处于静止的带电粒子的一个分布具有电荷密度 ρ_0 , 则从一个以相对速度 v 运动着的参考系来看, 同样的电荷将具有密度 $\rho_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.23)$$

在一个运动着的电荷分布中, 其电荷密度的变化情况, 就像一个粒子的相对论性质量那样。

现在我们将这一普遍结果应用于导线中的正电荷, 这些电荷在 S 参照系中是静止的。然而在 S' 系中, 导线以速率 v 运动, 因而正电荷密度就会变成:

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.24)$$

负电荷在 S' 系上是静止的, 因而在这一参照系中它们具有“静密度” ρ_- , 即在式(13.23)中, $\rho_0 = \rho'_-$ 。由于当导线静止时, 即在 S 系中, 负电荷的速率为 v , 因而它们具有密度 ρ_- 。于是对于传导电子来说, 我们便有

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.25)$$

或

$$\rho' = \rho_+ \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (13.26)$$

现在我们就能够明白, 为什么在 S' 系中会有电场——因为在这一参照系上导线里拥有净电荷密度 ρ' , 其为

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_-.$$

利用式(13.24)和(13.26), 便得

$$\rho' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

由于静止导线是中性的, $\rho_- = -\rho_+$, 因而我们就有

$$\rho' = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.27)$$

由此可见, 运动导线会带正电, 并将在导线外的一个静止电荷处产生电场 E' 。我们已经解决了一个均匀带电柱体的静电学问题。与该柱轴相距为 r 处的电场为

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A v^2/c^2}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.28)$$

作用于带负电粒子上的力指向导线。从这两个观点来看,至少我们有一个相同方向的力,在 S' 系中的电力与在 S 系中的磁力方向相同。

在 S' 参照系中,力的大小为

$$F' = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_+ A}{r} \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (13.29)$$

拿这个结果 F' 与式(13.21)中的结果 F 比较,我们看到从这两个观点来说力的大小几乎完全相等。事实上,

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (13.30)$$

所以对于我们已经考虑过的低速情况,这两个力相等。至少,对于低速情况我们能够说,我们相信磁和电不过是“观察同一事物的两种方法”而已。

可是事情甚至比此还要好。若我们从一参照系过渡到另一参照系时把力的变换这一事实也计算在内,则将发现这两种看待事情发生的方法对于任何速度来说都确实给出相同的物理结果。

要弄清楚这一点的一种办法,是先提出这样一个问题:力作用了一会儿之后,该粒子会有什么样的横向动量?从第1卷第16章中我们知道,不论在 S 或 S' 参照系中,一个粒子的横向动量应该相同。若把这横向坐标叫作 y ,则我们要来比较 Δp_y 和 $\Delta p'_y$ 。利用在相对论中正确的运动方程 $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$,我们期待在 Δt 时间之后粒子将有一横向动量 Δp_y ,这在 S 参照系中即是

$$\Delta p_y = F \Delta t. \quad (13.31)$$

而在 S' 系,则这横向动量将为

$$\Delta p'_y = F' \Delta t'. \quad (13.32)$$

当然,我们必须在互相对应的时间间隔 Δt 与 $\Delta t'$ 中来比较 Δp_y 和 $\Delta p'_y$ 。在第1卷第15章中我们曾见到,相对于一个运动粒子来说,时间间隔显得比在该粒子的静止系统中要长些。由于粒子在 S' 系中最初是静止的,因而我们期望,对于小的 Δt ,应有

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (13.33)$$

而所有这一切都表现正常。根据式(13.31)和(13.32),

$$\frac{\Delta p'_y}{\Delta p_y} = \frac{F' \Delta t'}{F \Delta t},$$

如果把式(13.30)和(13.33)两式结合起来,上式正好等于1。

我们已发现:对于沿一导线运动着的粒子,无论是从相对于导线静止的坐标系,还是从相对于粒子静止的坐标系来进行分析,都会得到同样的物理结果。在第一种情况下,该力纯系“磁”力;而在第二种情况下,则力纯系“电”力。这两种观点显示于图13-12中(尽管在第二个参照系中仍有一磁场 B' ,但它对于一静止粒子来说将不会产生任何力)。

要是选取另一个坐标系,则会找到另一组不同的 E 和 B 场。电力和磁力都是同一物理现象——粒子间的电磁相互作用——中的两个部分。把这一相互作用分成电的和磁的两部

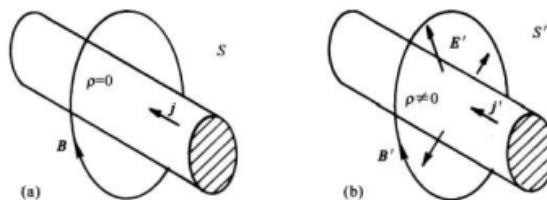


图 13-12 (a) 在 S 参照系, 电荷密度为零而电流密度为 j 。这里仅有一磁场。(b) 在 S' 系, 就有电荷密度 ρ' 和一不同的电流密度 j' 。磁场 B' 已经不同, 且还有一电场 E'

分, 在很大程度上取决于被选用来描述它的参照系, 但完整的电磁描述是不变的, 因而电和磁合在一起就同爱因斯坦的相对论是一致的了。

由于我们改变坐标系时, 电场和磁场会以不同的混合体显示出来, 所以如何看待 E 场和 B 场就必须小心谨慎。例如, 倘若我们把 E 和 B 想象成“线”, 就决不可能赋予太多的真实性。若试图从一个不同的坐标系去进行观察, 有些线可能会消失。比如, 在 S' 系上有电场线, 但我们却从未发现过这些线“在 S 系上以速度 v 在我们旁边通过”。在这个 S 系中根本没有电场线! 因此, 做这样的陈述是没有意义的: 当我把一块磁铁移动时, 它会带着它的磁场一起动, 因而 B 线也就在移动。一般说来, 从“场线的运动速率”这么一种概念出发, 始终无法构成任何意义。场是我们用来描述在空间一点所发生的事情的办法。特别是, E 和 B 告诉我们作用于一个运动粒子上的力。“由运动磁场作用于一电荷上的力是什么”的问题根本不含有任何准确意义。力是由电荷处 E 和 B 的值给出的, 而公式(13.1)不会由于 E 或 B 之源正在运动而改变(E 和 B 之值才会由于源的运动而发生改变)。我们的数学描述只是同相对于某一惯性参照系的两种作为 x , y , z 和 t 的函数的场打交道。

以后将常提到“在空间传播的电场和磁场的波”, 诸如光波。但这与谈论一根弦线上的行波相似。此时, 我们并非指弦线的某部分将会在波的方向上运动, 而是指弦线的位移将首先出现在某处, 继而又出现在另一处。同理, 在一电磁波中, 波在传播, 但是场的大小在变化。所以今后当我们——或其他人——谈及一个“运动着”的场时, 你就应该把它看作仅是一种描述在某些情况下变化着的场的既便利又快捷的途径。

§ 13-7 电流与电荷的变换

对于上面当我们对粒子和对导线里的传导电子均取同样的速度 v 时所作的那种简化手续, 你可能会感到担心。本来尽可以返回去并对两个不同速度再进行分析, 但更方便的却是去注意电荷和电流是一个四维矢量的分量(见第1卷第17章)。

我们已经知道, 若在静止参照系中的电荷密度为 ρ_0 , 则在具有速度 v 的参照系中, 该密度为

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

在这参考系中电流密度为

$$j = \rho v = \frac{\rho_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.34)$$

原来我们知道，一个以速度 v 运动着的粒子其能量 U 与动量 p 分别由下列两式给出：

$$U = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

其中 m_0 为粒子的静质量。我们也知道， U 与 p 构成一相对论性四维矢量。由于 ρ 和 j 与速度 v 的关系同 U 和 p 与速度的关系一样，所以我们便可以断定， ρ 和 j 也是一个相对论性四维矢量的分量。这一性质就是对以任一速度运动着的导线之场进行普遍分析的钥匙。如果我们想要对线外粒子速度 v_0 不同于那些传导电子速度的问题再次谋求解决，就需要这一把钥匙。

如果我们希望把 ρ 和 j 变换到以速度 u 沿 x 轴运动的一个坐标系中，则我们知道，它们应该恰好如同 t 和 (x, y, z) 那样变换（见第1卷第15章）：

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & j'_x &= \frac{j_x - u\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y' &= y, & j'_y &= j_y, \\ z' &= z, & j'_z &= j_z, \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & \rho' &= \frac{\rho - uj_x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (13.35)$$

有了这些方程式，我们就能把两个参照系中的电荷和电流互相联系起来。取得其中一种参照系中的电荷和电流后，我们便能通过应用麦克斯韦方程组解出在该参照系中的电磁学问题。不管我们选取哪一个参照系，所获得的关于粒子运动的结果将会彼此相同。稍后我们还将回到有关电磁场的相对论性变换上来。

§ 13-8 叠加原理；右手定则

我们将通过对静磁学这一课题再作出两点评论来结束这一章。首先，关于磁场的两个基本方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/c^2 \epsilon_0$$

对 \mathbf{B} 和 \mathbf{j} 来说都是线性的。这意味着，叠加原理也适用于磁场。由两个不同的恒定电流所产生的场等于每一电流单独作用时的场之和。我们的第二点评论是关于以前曾遇到过的右手定则（诸如由电流所产生之磁场的那个右手定则）的。我们也都注意到，一块磁铁的磁化被理解成来自该材料里的电子自旋。一个自旋电子的磁场方向也通过同样的右手定则而与其自旋轴线相联系。由于 \mathbf{B} 是按照“手”式法则——涉及一个叉积或旋度——而制定的，因而被称为轴矢量（凡在空间里的方向与参照右手或左手都无关的那些矢量则叫做极矢量。例如，位移、速度、力和 \mathbf{E} 都是极矢量）。

可是，在电磁学中物理方法上的可观测量却不是右手（或左手）的。电磁相互作用在反射（变换）下是对称的（见第1卷第52章）。每当计算两组电流间的磁力时，改变手的约定并不会改变所得的结果。与右手约定无关，我们的方程组总会导致同向电流相吸而异向电流

相斥的最终结果(试用“左手定则”来算出力)。吸引力或排斥力是一种极矢量。之所以出现这一结果,是由于在描述任一完整的相互作用时,我们两次用了右手定则——一次是从电流找出 \mathbf{B} ;再一次则是求出这个 \mathbf{B} 在另一电流上所产生的力。使用右手定则两次与使用左手定则两次是一样的。假如把约定改变成一左手系统,则所有的 \mathbf{B} 场都将反向,但所有的力——或更加确切的乃是所观测到的物体的加速度——却仍保持不变。

虽然最近物理学家惊讶地发现,自然界的所有定律未必总是对镜面反射保持不变的,但电磁定律的确具有这样一种基本对称性。

第 14 章 在各种不同情况下的磁场

§ 14-1 矢势

在本章中, 我们将继续讨论与恒定电流有关的磁场——静磁学课题。磁场与电流之间由如下的基本方程相联系:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (14.1)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}, \quad (14.2)$$

现在我们希望以一种普遍的方式, 即不需要任何特殊对称性或直观猜测, 就能在数学上解出这些方程。在静电学中, 我们曾发现当所有电荷的位置均为已知时存在场的一种直接方法。人们通过对电荷取积分——比如式(4.25)中的积分——就能简单地算出标势 ϕ 来。然后, 如果还想知道电场, 则可对 ϕ 求微商而得到。现在我们要证明: 如果已知所有运动电荷的电流密度 \mathbf{j} , 则会有一种求得磁场 \mathbf{B} 的相应方法。

在静电学中, 我们就知道(由于 \mathbf{E} 的旋度始终是零), 有可能把 \mathbf{E} 表达成一个标量场 ϕ 的梯度。现在 \mathbf{B} 的旋度却常不等于零, 因而一般说来不可能把它表达成一梯度。然而, \mathbf{B} 的散度却永远为零, 这就意味着我们总能把 \mathbf{B} 表达成另一个矢量场的旋度。因为正如我们以前曾在 § 2-7 中见到的, 旋度的散度总等于零。于是, 就总能够把 \mathbf{B} 与将被称作 \mathbf{A} 的场互相联系起来,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (14.3)$$

或者通过写成分量, 则有

$$\begin{aligned} B_x &= (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \\ B_y &= (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \\ B_z &= (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

既然写出了 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 就能保证式(14.1)被满足, 因为必然有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.$$

A 这个场被称为矢势。

你会记得, 标势 ϕ 并未由其定义完全规定。如果你对某一问题已求得了 ϕ , 你还总能通过加上一常数而找到另一个同样好的势 ϕ' :

$$\phi' = \phi + C.$$

因为梯度 ∇C 为零,所以这个新的势 ϕ' 会给出相同的电场。因而 ϕ' 与 ϕ 代表相同的物理性质。

同样,我们也有 ϕ 可能给出同一磁场的不同矢势 \mathbf{A} 。而且,由于 \mathbf{B} 是由 \mathbf{A} 的微商得到的,因而,若在 \mathbf{A} 上加一常数并不改变任何物理的实质。可是对于 \mathbf{A} 来说,还有更加广阔的活动余地。我们可以对 \mathbf{A} 加进任何场,只要它等于某一标量场的梯度,就不致改变其物理情况。这可证明如下。假设对某个实际问题我们已有了一个 \mathbf{A} ,它正确地给出了磁场 \mathbf{B} ,并试问在什么情况下某一个 \mathbf{A}' 才能在代入式(14.3)中时,会给出同一个场 \mathbf{B} 。于是, \mathbf{A} 和 \mathbf{A}' 必定具有相同的旋度:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}.$$

因此,

$$\nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0.$$

但若一矢量的旋度为零,则它必然是某一标量场——比如说 ψ ——的梯度,因而 $\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla \psi$ 。这就意味着,若 \mathbf{A} 为适合于某一问题的矢势,则不论对于任何 ψ ,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi \quad (14.5)$$

仍将是一个同样令人满意的矢势,因为它导致相同的场 \mathbf{B} 。

这样做往往很方便,即任意使 \mathbf{A} 受另一条件限制,因而将其某些“活动范围”扣除出去(正如我们经常选取在无限远处的标势 ψ 等于零也很方便一样)。例如,可以任意规定 \mathbf{A} 的散度必须是什么而对 \mathbf{A} 加以限制。我们总能够这样做,而不致影响 \mathbf{B} 。这是因为:虽然 \mathbf{A}' 和 \mathbf{A} 都具有同一旋度,从而给出了相同的 \mathbf{B} ,但它们却不需要具有相同的散度。事实上, $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi$,因而通过选取某一适当的 ψ ,就可以使 $\nabla \cdot \mathbf{A}'$ 成为我们所希望要的任何东西。

对于 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 到底应该如何选取呢?这一选择应为获得最大的数学方便而做出,并将取决于我们所要解决的问题。对于静磁学来说,我们将做这种简单选择:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (14.6)$$

(往后,当考虑电动力学时。将改变这种选择)。于是,目前我们对 \mathbf{A} 的完整定义*为:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{和} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

为了对矢势得到一些经验,让我们首先看看对于匀强磁场 \mathbf{B}_0 来说,它的矢势是什么。选取 z 轴作为 \mathbf{B}_0 的方向,我们就应有:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0; \\ B_y &= \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0; \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0. \end{aligned} \quad (14.7)$$

经检查可知这些方程的一个可能解为:

$$A_y = xB_0; \quad A_x = 0; \quad A_z = 0.$$

* 我们的定义仍未唯一地确定 \mathbf{A} 。对于一个唯一的 \mathbf{B} ,我们还得说明在某个边界上或在无限远处场 \mathbf{A} 的行为如何。例如,选取在无限远处场趋向于零有时是方便的。

或者,我们也同样可以取:

$$A_x = -yB_0; \quad A_y = 0; \quad A_z = 0.$$

还有另一个解则是上述两个解的线性组合:

$$A_x = -\frac{1}{2}yB_0; \quad A_y = \frac{1}{2}xB_0; \quad A_z = 0. \quad (14.8)$$

很明显,对于任一特定场 \mathbf{B} 来说,矢势 \mathbf{A} 有许多可能性,因而不是唯一的。

上面第三个解,即式(14.8),具有某些有趣的特性。由于其 x 分量正比于 $-y$,而其 y 分量正比于 $+x$,所以 \mathbf{A} 必定垂直于与 z 轴同方向的矢量。我们把这个矢量叫作 \mathbf{r}' (之所以加上一撇是为了要提醒我们,并不是从原点出发的一个位移矢量)。并且, \mathbf{A} 的大小仍正比于 $\sqrt{x^2 + y^2}$,因而也就正比于 \mathbf{r}' 。所以(对于我们的匀强磁场来说) \mathbf{A} 可以简单写成

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}'. \quad (14.9)$$

这矢势 \mathbf{A} 具有 $B_0 r' / 2$ 的量值并绕着 z 轴旋转,如图 14-1 所示。例如,若 \mathbf{B} 场为螺线管内的轴向磁场,则这个矢势便和螺线管上的电流一样沿着同一指向环行。

关于一匀强场的矢势也可由另一种方式获得。 \mathbf{A} 绕任一闭合回路 Γ 的环流与 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的面积分可以由斯托克斯定理、即式(3.38)相联系:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{在 } \Gamma \text{ 内}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da. \quad (14.10)$$

但右边的积分等于 \mathbf{B} 穿过回路的通量,因而

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{在 } \Gamma \text{ 内}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da. \quad (14.11)$$

因此, \mathbf{A} 绕任一回路的环流等于 \mathbf{B} 穿过该回路的通量。如果在与匀强场 \mathbf{B} 垂直的平面上取一半径为 r' 的圆形回路,则通量恰恰为

$$\pi r'^2 B.$$

如果把原点选取在对称轴上,则可以认为 \mathbf{A} 沿着圆周并且仅仅是 r' 的函数,所以 \mathbf{A} 的环流将为

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r' A = \pi r'^2 B.$$

同上面一样,我们得到

$$A = \frac{Br'}{2}.$$

在刚才所述的例子中,我们已从磁场算出了矢势,这与正常做法恰好相反。在复杂

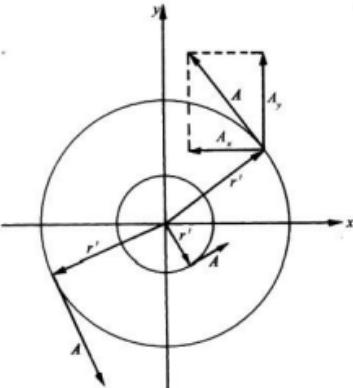


图 14-1 一个沿 z 方向的匀强磁场 \mathbf{B} 对应于绕着 z 轴旋转而又具有大小为 $A = Br'/2$ 的矢势 \mathbf{A} (r' 是从 z 轴出发的位移)

问题中,往往先解得矢势,然后才由它来确定磁场,那就比较容易。接下来,我们将说明如何才能做到这一点。

§ 14-2 已知电流的矢势

由于 \mathbf{B} 是由电流确定的,所以 \mathbf{A} 也如此。我们现在要由电流来求 \mathbf{A} 。从基本方程式(14.2)出发:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},$$

当然,这就意味着

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (14.12)$$

这一方程对于静磁学,正如同方程

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (14.13)$$

对于静电学一样。

如果我们应用矢量恒等式(2.58),将 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ 改写成:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (14.14)$$

则关于矢势的式(14.12)看来就更像关于 ϕ 的式子。由于我们已决定使 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (而现在就会看出个所以然来了),所以式(14.12)变成

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (14.15)$$

当然,这个矢量方程包括下列三个方程:

$$\nabla^2 A_x = -\frac{j_x}{\epsilon_0 c^2}; \quad \nabla^2 A_y = -\frac{j_y}{\epsilon_0 c^2}; \quad \nabla^2 A_z = -\frac{j_z}{\epsilon_0 c^2}. \quad (14.16)$$

而这三个方程中的每一个在数学上均与下列方程全同:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (14.17)$$

所有以前曾学习过的由已知 ρ 解出势的方法,都可用来由已知 j 解出 \mathbf{A} 的每一个分量!

在第4章中,我们已经知道,静电学方程式(14.17)的一个通解为

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}}.$$

因而我们就立即知道,关于 A_x 的通解为

$$A_x(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_x(2)dV_2}{r_{12}}. \quad (14.18)$$

A_y 和 A_z 与此相仿(图14-2将使你们想起关于 r_{12} 和 dV_2 的习惯表示)。我们可以将这三个

解合并在一个矢量式中

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}}. \quad (14.19)$$

如果你乐意,还可直接对各分量取微分而证实:关于 \mathbf{A} 的这一积分满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 只要 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, 而我们早已知道对于恒定电流来说这是理所当然的。

这样,我们就得到关于求出恒定电流的磁场的普遍方法。原则是:从一电流密度 \mathbf{j} 所产生的矢势的 x 分量与从一等于 j_z / c^2 的电荷密度 ρ 所该产生的电势 ϕ 相同——而 y 和 z 分量也与此相仿(这一原则只对在固定方向上的分量才适用。例如, \mathbf{A} 的“径向”分量不能用同样的办法从 \mathbf{j} 的“径向”分量算出来)。因此,从电流密度矢量 \mathbf{j} ,便可以应用式(14.19)求出 \mathbf{A} —即通过求解电荷分布为 $\rho_1 = j_x / c^2$, $\rho_2 = j_y / c^2$ 和 $\rho_3 = j_z / c^2$ 的三个想象中的静电学问题,从而求得 \mathbf{A} 的每一分量。然后,又可通过 \mathbf{A} 的各种微商算出 $\nabla \times \mathbf{A}$, 最后获得 \mathbf{B} 。这比静电学稍微复杂一些,但想法是相同的。现在,我们将通过在几种特殊情况下矢势的求解例子来说明这一理论。

§ 14-3 直 导 线

作为第一个例子,我们将再次求一直导线的场——这在上一章中已经应用式(14.2)和一些关于对称性的论据而解出。我们考虑半径为 a 而通有恒定电流 I 的一根长直导线。与静电力学中电荷分布于一导体上的情况不同,导线中的恒定电流乃均匀地分布在该线的横截面内。

如果选取如图 14-3 所示的坐标系,则电流密度矢量 \mathbf{j} 便只有一个 z 分量,其大小在导线内为

$$j_z = \frac{I}{\pi a^2}, \quad (14.20)$$

而在导线外则为零。

既然 j_x 和 j_y 都是零,我们便立即有

$$A_x = 0; \quad A_y = 0.$$

为求得 A_z ,我们可以利用带有均匀电荷密度 $\rho = j_z / c^2$ 的导线,解出其电势 ϕ 。在一无限长均匀带电圆柱体之外的各点,其电势为

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r',$$

图 14-3 沿着 z 轴而通有均匀电流密度 j 的一根长圆柱形导线

式中 $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$, 而 λ 则为单位长度的电荷,即 $\pi a^2 \rho$ 。所以对于通有均匀电流的长直导线之外的某点, A_z 应该为

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'.$$

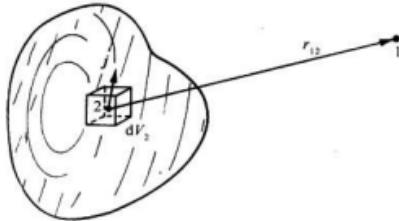
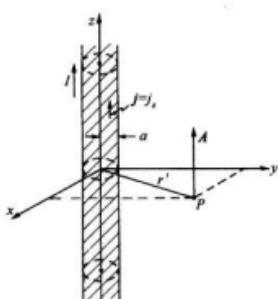


图 14-2 点 1 处的矢势 \mathbf{A} 是对所有点 2 处的电流元 $j dV$ 积分而得出的



由于 $\pi a^2 j_s = I$, 上式还可以写成

$$\mathbf{A}_s = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'. \quad (14.21)$$

现在就可由式(14.4)求出 \mathbf{B} 。由于该式的六个微商中只有两个不等于零,因而得出

$$B_x = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \ln r' = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{r'^2}; \quad (14.22)$$

$$B_y = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \ln r' = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{r'^2}; \quad (14.23)$$

$$B_z = 0.$$

我们得到了与以前相同的结果: \mathbf{B} 环绕着导线, 其大小为

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r'}. \quad (14.24)$$

§ 14-4 长螺线管

其次,再来考虑一个无限长螺线管。沿管的表面单位长度通有 nI 的环行电流(我们设想每单位长度绕有 n 匝通了电流 I 的导线,并略去绕圈时的微小螺距)。

正如曾经定义过的“面电荷密度” σ 那样,这里我们也定义“面电流密度” \mathbf{J} ,它等于在该螺线管表面上单位长度的电流(这当然恰好就是平均电流密度 j 乘以该薄线圈层的厚度)。 \mathbf{J} 的大小在这里等于 nI 。这一表面电流(见图 14-4)具有如下分量:

$$J_x = -J \sin \phi, \quad J_y = J \cos \phi, \quad J_z = 0.$$

现在我们必须对这样一种电流分布找出 \mathbf{A} 来。

首先,我们希望找出在螺线管外面各点处的 A_x , 这结果与带有面电荷密度

$$\sigma = \sigma_0 \sin \phi$$

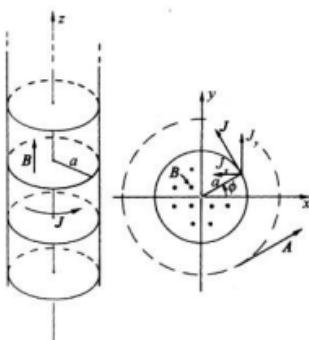
(其中 $\sigma_0 = -J/c^2$) 的圆柱外的电势相同。我们从未解过这样一种电荷分布,但却求解过某种相似的问题。这一电荷分布相当于两根各带正电和负电的实心圆柱,在 y 方向上它们的轴有了微小的相对位移。这样一对带电柱体的势,与单独一根均匀带电柱体的势对 y 的微商成正比。这一比例常数是可以算得的,但暂时无需对它操心。

图 14-4 通有面电流密度 J 的长螺线管

一根带电柱体的势正比于 $\ln r'$, 于是一对带电柱体的势便为

$$\phi \propto \frac{\partial \ln r'}{\partial y} = \frac{y}{r'^2}.$$

因此我们知道



$$A_x = -K \frac{y}{r^2}, \quad (14.25)$$

式中 K 是某一常数。根据相同的论证，我们会求出

$$A_y = K \frac{x}{r^2}. \quad (14.26)$$

尽管以前曾经说过在螺线管之外没有磁场，但现在我们却发现有一个 A 场环绕着 z 轴，如图 14-4 所示。问题在于，它的旋度是否等于零？

显然， B_x 和 B_y 都等于零，而

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{x}{r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-K \frac{y}{r^2} \right) = K \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} \right) = 0.$$

因此，在一个十分长的螺线管外面磁场的确为零，即使矢势并不等于零。

上述结果我们还可以利用其他已知的东西来核对：矢势绕螺线管的环流应等于管内 \mathbf{B} 的通量（式 14.11）。这环流为 $A \cdot 2\pi r'$ ，或者，由于 $A = K/r'$ ，所以环流为 $2\pi K$ 。注意！这与 r' 无关。如果管外不存在 \mathbf{B} 的话，这恰好就是应得的结果，因为通量仅仅是螺线管内 \mathbf{B} 的大小乘以 πa^2 。对于半径 $r' > a$ 的所有圆周这通量都相同。在上一章中我们曾经得出管内的场为 $nI/(\epsilon_0 c^2)$ ，因而可以确定常数 K ：

$$2\pi K = \pi a^2 \frac{nI}{\epsilon_0 c^2},$$

即

$$K = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2}.$$

因此，管外矢势的大小为：

$$A = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r'}, \quad (14.27)$$

并且总是垂直于矢量 r' 。

我们刚才考虑的是一个由导线绕成的螺线管，假如旋转一根表面带有静电荷的长柱体，也会产生那相同的场。若有一根半径为 a 、带有面电荷密度 σ 的薄圆柱壳，则当把它旋转时就会形成一个表面电流 $J = \sigma v$ ，其中 $v = a\omega$ 是面电荷的速度。这样，在该柱内就将有一个 $B = \sigma a \omega / (\epsilon_0 c^2)$ 的磁场。

现在，可以提出一个有趣的问题。假设我们把一根短导线 W 安置成垂直于柱轴，从轴心伸至柱面，并固定于柱面上，以便随柱旋转，如图 14-5 所示。由于这根导线是在磁场中运动，因而力 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 就会引起该导线两端带电（两端将被充电直至由这些电荷所产生的 \mathbf{E} 场的力恰好抵消 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 之

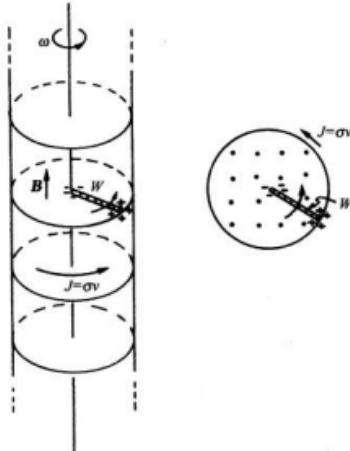


图 14-5 一根旋转着的带电柱壳在柱内会产生一个磁场。伴随该柱旋转的一根径向短导线会有电荷感生在其两端上