

还能利用它来获得场的动量。

我们将进一步提及在电磁场中关于动量的两个例子。曾在 § 26-2 中指出,当两个带电粒子在互成直角的轨道上运动时作用与反作用定律失败了。作用于两粒子上的力并不平衡,因而作用并不等于反作用,这样实物的净动量就必然正在改变,它是不守恒的。但在这样一种情况下场的动量也正在改变。如果你算出由坡印亭矢量所给出的动量,则它不是一个常数。然而,粒子动量的改变刚好被这个场的动量所抵偿,所以粒子加上场的总动量守恒。

最后,另一个例子则是如图 27-6 所示的具有磁铁与电荷的那种情况。我们曾由于发现有能量处处绕圆周流动而感到不快,但此刻,由于我们知道能流与动量是互成比例的,所以我们也知道在空间有环行着的动量。可是一个环行动量就意味着存在角动量,因此在场中有角动量。你是否记得,在 § 17-4 中我们描述过的关于放在圆盘上的一个螺线管和若干个电荷的那个佯谬?似乎当电流中断时,整个盘会开始旋转。令人迷惑的是:角动量到底是从哪里来的?答案:如果你有一磁场和某些电荷,则在场中就会有某一角动量。当场建立时,它必定已经安置在那里了。而当场去掉时,这一角动量被还了回来。因此在该佯谬中的盘子就应该开始转动。这一神秘的能量环流,最初似乎觉得是那么荒谬可笑,但却是绝对必需的。确实有一个动量流,为了在整个世界中保持角动量守恒,它是必需的。

第 28 章 电磁质量

§ 28-1 点电荷场的能量

在把相对论和麦克斯韦方程结合在一起的过程中，我们完成了关于电磁理论的主要工作。当然，有某些细节我们曾经漏掉，还有一个以后将会涉及的广阔领域——电磁场与实物的相互作用。但现在却要稍微停留一下以便向你们指明，这座崇高大厦尽管在解释那么多现象方面是多么美妙和成功，但最终不得不脸朝下倒了下去。当你追随任一物理学太远时，总会发现它将碰到某种困难。现在就要来讨论一个严重的困难——经典电磁理论的失败。你可能意识到，由于量子力学效应，使得全部经典物理学都失败了。经典力学是一种在数学上协调一致的理论，它只是与经验不符而已。然而，很有趣，电磁学的经典理论就其本身而言已经是一种不能令人满意的理论。有一些困难与麦克斯韦理论的概念联系在一起，但这困难却不是量子力学所能解决或与之直接有关的。你可能会说：“为这些困难操心也许没有什么用处，既然量子力学正在对电动力学定律进行修改，应该等修正之后再看看还有什么困难。”然而，当电动力学被结合到量子力学时，那些困难却依然存在。因此，现在来考察这些困难到底是什么并不是浪费时间。何况，这些困难还有巨大的历史价值。此外，从能够跟踪理论足够远去了解每件事——包括它的一切困难——你可能会得到某种成就感。

当把电磁理论应用于电子或其他带电粒子时，我们所谈论的困难与电磁动量和能量的概念有关。结构单一的带电粒子和电磁场的概念在有些方面是互相矛盾的。为了描述这些困难，我们从做一些能量和动量概念方面的练习开始。

首先，将计算一个带电粒子的能量。假设采取一个简单的电子模型，其中全部电荷 q 都均匀分布在一个半径为 a 的球面上，对于点电荷的特殊情况， a 可取为零。现在让我们计算电磁场中的能量。如果该电荷静止不动，就不会有磁场，则每单位体积的能量正比于电场的平方。电场的大小为 $q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ ，其能量密度即是

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}.$$

要获得总能量，就得将这个密度对全部空间积分。利用体积元 $4\pi r^2 dr$ ，我们把 $U_{\text{电}}$ 称为总能量，它为

$$U_{\text{电}} = \int \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr,$$

这很容易积出。由于下限为 a 而上限为 ∞ ，因而

$$U_{\text{电}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a}. \quad (28.1)$$

如果用电子电荷 q_e 来代替 q 而用符号 e^2 来代替 $q_e^2/(4\pi\epsilon_0)$, 则

$$U_{\text{q}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a}. \quad (28.2)$$

这全都很好, 直到对于一个点电荷我们令 a 趋于零——才存在巨大困难。由于场的能量密度与离中心距离的四次幂成反比, 所以它的体积分为无限大。在一个点电荷的周围的场中竟有无限大的能量。

一个无限大能量有什么不妥之处呢? 如果能量不能跑出去, 而必定永远保持在那里, 则一个无限大能量是否会带来任何真正的困难? 当然, 出现无限大的量可能会使人烦躁不安, 但真正要紧的却是究竟有无任何可观测得到的物理效应。为回答这一问题, 我们应当转到能量以外的其他事情上去。假定我们问起当移动电荷时能量怎样变化。那时, 如果变化为无限大, 则我们便将陷入困难之中了。

§ 28-2 运动电荷场的动量

设想一个电子以匀速通过空间, 暂时假定这速度比光速要慢。与这个运动电子相联系的是有一动量——即使电子在带电之前没有质量——由电磁场中的动量引起。我们能够证明, 这个场动量是在电荷速度 v 的方向上, 而且对于小的速度来说它与 v 成正比。在与电荷中心的距离为 r 、与运动路线成角度 θ 的 P 点处(参见图 28-1)电场是径向的, 而且正如我们业已知道的那样, 磁场为 $v \times E/c^2$ 。根据式(27.21)和(27.15), 动量密度为

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

它斜对着运动路线, 如图中所示, 并具有大小

$$g = \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin \theta.$$

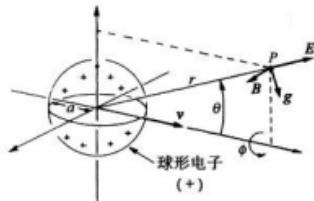


图 28-1 一个正电子的场 E , B 及其动量密度 g 。对于负电子, E 和 B 都倒转方向, 但 g 的方向仍不变

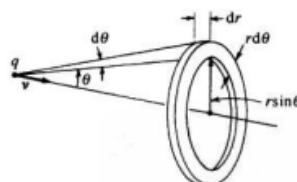


图 28-2 用来计算场动量的体积元 $2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr$

这些场对于运动路线是对称的, 因而当我们对整个空间积分时, 那些横向分量加起来就会等于零, 结果给出一个平行于 v 的合动量。在这个方向上 g 的分量为 $g \sin \theta$, 我们必须对它在全部空间进行积分。取一个其平面垂直于 v 的圆环作为体积元, 如图 28-2 所示。它的体积为 $2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta$, 于是总动量为

$$p = \int \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr.$$

由于 E 与 θ 无关(对于 $v \ll c$), 所以我们可立即对 θ 积分, 这个积分为

$$\int \sin^3 \theta d\theta = - \int (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = - \cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3}.$$

由于 θ 积分的上下限分别为 0 和 π , 因而这个 θ 积分只给出一个因子 $4/3$, 结果

$$p = \frac{8\pi}{3} \frac{\epsilon_0 v}{c^2} \int E^2 r^2 dr,$$

这个积分(对于 $v \ll c$) 就是刚才在求能量时算出过的, 它为 $q^2 / (16\pi^2 \epsilon_0^2 a)$, 因而

$$p = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{v}{ac^2}$$

或

$$p = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} v. \quad (28.3)$$

场中的动量——电磁动量——与 v 成正比。这正是我们应有的粒子动量, 粒子的质量就等于 v 前面的系数。因此, 我们可把这一系数叫作电磁质量 $m_{\text{电磁}}$, 并把它写成

$$m_{\text{电磁}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2}. \quad (28.4)$$

§ 28-3 电 磁 质 量

质量是从哪里来的呢? 在我们的力学定律中就曾经假定每一物体都带有一种我们称之为质量的东西——这也意味着带有一个正比于其速度的动量。现在发现, 一个带电粒子携带正比于它速度的动量, 这是可以理解的。事实上, 也许质量不过是这种电动力学效应。质量的起源迄今还未得到解释。最后在电动力学理论中就有极好的机会来理解这一种我们以前从未理解过的东西。意外地——更确切地说, 是从麦克斯韦和坡印亭那里——得出结果, 即任一带电粒子正是由于电磁影响才具有正比于其速度的动量。

让我们放保守一些而暂且说, 存在两种质量——物体的总动量可以是机械动量与电磁动量两者之和。机械动量等于“机械”质量 $m_{\text{机械}}$ 乘以 v 。在一些实验中, 通过观察一个粒子有多少动量或观察它在轨道各处如何旋转来测量其质量, 我们正在测量的是其总质量。普遍地说, 动量等于总质量($m_{\text{机械}} + m_{\text{电磁}}$)乘速度。因此, 凡观测到的质量都可能含有两部分(或可能有更多部分, 若我们还包括其他类型的场的话): 机械部分加上电磁部分。我们明确知道有一个电磁部分, 而且对于它已经有一个公式了。但却有一个令人激动的可能性, 即机械部分根本就不存在——质量全都是电磁性质的。

让我们来看看, 要是电子不具有机械质量的话必须有多大。可以通过令式(28.4)中的电磁质量等于所观测到的电子质量 m_e 而找到。我们求得

$$a = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (28.5)$$

而量

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad (28.6)$$

称为“经典电子半径”，它的数值为 2.82×10^{-13} cm，约等于一个原子直径的十万分之一。

为什么要把 r_0 称为电子半径，而不是 a 呢？因为我们也可用另外想象的电荷分布——电荷也许会均匀分布在一个球体中，或者也许会像一个模糊的球体那样渗透出去——来做同样的计算。对于任一特殊假定，因子 $2/3$ 会改变成某个其他的分数。例如，对于均匀分布在一个球体内的电荷，这 $2/3$ 就得由 $4/5$ 代替。与其去争辩哪一种分布是对的，倒不如决定把 r_0 定义为一种“标称”半径。然后，不同的理论就可以提供其所喜爱的系数。

让我们追踪一下关于质量的电磁理论。上面的计算是针对 $v \ll c$ 的，如果进入高速度，又将发生什么情况呢？早期的尝试曾导致某些混乱，但洛伦兹却认识到在高速情况带电球体会收缩成一个椭球，而场则会按照我们在第 26 章中对于相对论性情况所导出的式(26.6)和(26.7)改变。如果你对那种情况下的 \mathbf{p} 进行积分，则会发现，对于任意速度 v ，动量被改变一个因子 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ ：

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (28.7)$$

换句话说，电磁质量与 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 成反比地随速度增加——是一项在相对论问世之前就已做出的发现。

为了确定粒子质量中有多少质量是机械性质的以及有多少是电性质的，早期曾提出了一些实验以测量一个粒子的观测质量如何会随速度而改变。当时人们相信，那电的部分才会随速度变化，而机械部分则不会。可是，当那些实验正在进行之际，理论家们也仍在继续工作。不久之后相对论发展起来，它提出不管质量来源于什么，全都应当随 $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 变化。式(28.7)就是质量与速度有关理论的起源。

让我们回到曾导致式(28.2)的有关场能的计算。根据相对论，能量 U 将具有质量 U/c^2 ，于是式(28.2)说，电子的场应该具有质量

$$m'_\text{电} = \frac{U_\text{电}}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{ac^2}. \quad (28.8)$$

这不同于式(28.4)中的电磁质量 $m_\text{电磁}$ 。事实上，若我们只要结合(28.2)和(28.4)两式，便可写出

$$U_\text{电} = \frac{3}{4} m_\text{电磁} c^2.$$

这个公式在相对论之前就被发现，而当爱因斯坦及其他开始认识到 $U = mc^2$ 必定始终成立时，就已经存在巨大混乱。

§ 28-4 电子作用于其自身的力

关于电磁质量的两个公式间的差异是特别令人为难的，因为我们已经小心地证明过电动力学理论与相对性原理是互相一致的。但相对论却毫无疑问地含有动量必定等于能量乘

以 v/c^2 的意思。因此，我们就陷于某种困难之中，必然是犯了错误。虽然我们在计算中从未犯过代数方面的失误，但是可能遗漏了某种东西。

在推导有关能量和动量的方程时，我们假定过一些守恒律。也设想过把所有的力都考虑进去，把任何由“非电”机制所做的功与所带的动量也都包括进去。现在如果有一个带电球体，且电力全都是斥力，则电子会趋于飞散状态。由于这个系统具有不稳定的力，所以我们可能在与能量和动量有关的规律中犯了各种类型的错误。为了得到一个协调一致的图像，就必须想象有某种东西把电子结合在一起。那些电荷必须由某种橡胶带——某种不使电荷飞散的东西——束缚在一个球体之内。最早曾由庞加莱指出，这些橡胶带或任何能把电子结合在一起的东西必须包括在能量和动量的计算之内。为此缘故，这一附加的非电性力才被赐以一个更优雅的名字：“庞加莱应力”。如果这些附加力也包括在计算之内，则用两种办法计算出来的质量也将有所改变（在某种意义上改变程度取决于一些详细假定），而结果就会与相对论一致。也就是说，从动量计算得来的质量与从能量计算得来的质量相同。然而，它们两者都各含有两种贡献：电磁质量和来自庞加莱应力方面的贡献。只有当这两方面相加起来时才能获得协调一致的理论。

因此，不可能按照我们所希望的方式得出所有质量都是电磁性质量的结论。如果除了电动力学之外别无其他的话，那它就不是一个正规的理论。必须补充其他某种东西。不管你称作什么——“橡胶带”或是“庞加莱应力”还是其他什么——要构成这种协调一致的理论，在自然界中就必须存在其他的力。

很明显，当我们不得不把一些力放进电子内部时，整个概念的美妙之处就开始消失。事情变得十分复杂。你可能会问：那些应力有多强呢？电子怎样摇动呢？它到底会不会振动？它的内部特性如何？如此等等。也许有可能电子的确具有某些复杂的内部特性。假如按照这些方向创立一个电子理论，就可能预言一些像振动模式那样的奇特性质，而这些性质却从未明显地被观测到。我们所以说“明显地”，是因为已在自然界中观测到大量仍未能形成观念的东西。可能有朝一日会发现，今天我们所未能理解的东西之一（比如 μ 介子）实际上能够被解释为庞加莱应力的振动。这似乎不合理，但没有任何人能说得准。有许多关于基本粒子的事情我们还不了解。不管怎样，这一理论所包含的复杂结构是不受欢迎的，但企图用电磁学理论来解释全部质量的尝试——至少按我们所描述的那种办法——则已走进了死胡同。

我们愿意稍微多想一想，为什么当场里的动量与速度成正比时我们就说已有了质量。这很容易！质量就是在动量与速度之间的那个系数嘛。但我们也可按另一种方式来看待质量：如果为了加速一个粒子你得施力，那么它就具有质量。因此，如果我们稍微仔细地考察力是从哪里来的，则可能对我们的理解有所帮助。你怎么会知道必须有一个力呢？因为我们已证明了场的动量守恒定律。如果你有一个带电粒子并推动它经历一小段时间，那么在电磁场中将有一些动量。动量必定已被以某种方式注入场中。因此就必然会有某一个力推动电子而使其运动——一个除了需要克服机械惯性之外的附加力，即一个由于电磁相互作用引起的力。同时必然有一个反作用于“推动者”之上的相应的力。但究竟这个力是从哪里来的呢？

图景大抵就像是这样。我们可以把电子想象成一个带电球体，当它静止时，每一部分电荷都将与其他每一部分互相排斥，但力全部都成对地抵消掉，因而并没有任何净力存在[见

图 28-3(a)]。不过,当电子正在加速时,由于事实上电磁影响从一点传播至另一点需要时间,所以那些力就不再平衡了。例如,在图 28-3(b)中由 β 那一部分作用于 α 那一部分的力取决于在某一较早时刻的位置,如图中所示。力的大小和方向都取决于电荷的运动。如果电荷正在加速,则作用于电子各不同部分的力也许会如图 28-3(c)所示的那样。当把所有这些力都加起来时,它们并不互相抵消。对于均匀速度来说它们就会抵消,尽管初看起来似乎甚至对于匀速运动这推迟作用也会给出一个非平衡力。但结果是,除非电子正在加速,否则就不存在净力。在加速的同时,如果我们考察电子的各部分之间的力,则作用与反作用不会严格相等,从而电子施于本身一个力,该力试图阻碍其加速。它被自身所阻碍。

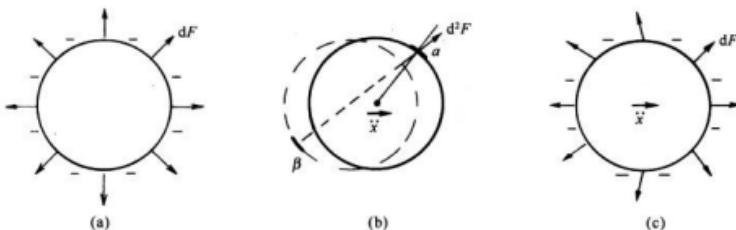


图 28-3 由于推迟作用,所以作用于一个加速电子上的自力不会等于零(dF 指作用于面元 da 上的力;
 d^2F 则指由在面元 da_β 上的电荷作用于面元 da_α 上的力)

要算出这个自作用力是可能的,但不那么容易,可是在这里我们还不打算从事这种复杂的计算。我们将告诉你们关于一个相对不那么复杂的一维——比方说沿 x 方向——运动的那种特殊情况的结果。这时,自作用力就可以写成一个级数。级数的首项依赖于加速度 \ddot{x} , 第二项依赖于 \dddot{x} , 等等*。结果得出

$$F = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \ddot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\ddot{x}} + \gamma \frac{e^2 a}{c^4} \ddot{\ddot{\ddot{x}}} + \dots, \quad (28.9)$$

式中 α 和 γ 都是数量级为 1 的数字系数。 \ddot{x} 项的系数 α 取决于所假定的电荷分布,如果电荷均匀分布于一个球面上,则 $\alpha = 2/3$ 。因此就有一项正比于加速度,它与电子的半径 a 成反比,而与我们在式(28.4)中所获得的关于 $m_{\text{电量}}$ 的数值完全相同。如果所选的电荷分布不同,因而 α 改变,则式(28.4)中的分数 $2/3$ 也会按相同的方式改变。含 $\ddot{\ddot{x}}$ 项与所假定的半径 a 无关,因而也与所假定的电荷分布无关,它的系数始终等于 $2/3$ 。再下一项与半径 a 成正比,而其系数 γ 则取决于电荷的分布情况。你会注意到,如果我们让电子半径 a 趋于零,则末项(以及一切更高次项)将趋于零;第二项保持不变;但那首项——电磁质量——趋于无限大。而且,我们能够看到,这无限大是由于电子的一部分作用于另一部分上的力引起的——由于我们承认了“点”电子可能会作用于其自身这件也许是蠢事所引起的。

* 我们是在采用这么一种记法: $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, $\ddot{\ddot{x}} = d^3x/dt^3$, 等等。

§ 28-5 改进麦克斯韦理论的尝试

现在我们愿意来讨论也许可以将麦克斯韦的电动力学理论做某种改进，以便使得电子作为一个简单点电荷的那种概念能够维持得住。为此曾做过许多种尝试，而其中有些理论甚至能将事情安排得使电子质量全都是电磁性质的。但所有这些理论如今却都已消声匿迹了。要来讨论曾被提出来的某些可能性——借以看看人类智力中的一些奋斗历程——仍是有意义的。

我们是通过谈论一个电荷与另一个电荷之间的相互作用而着手进行我们的电学理论的。然后又对这些相互作用的电荷建立一种理论并最后得出场论。我们对此竟如此相信，以致承认它所告诉的有关电子中的一部分对另一部分的作用力。也许整个困难就在于电子根本不会对其本身进行作用，也许从分开电子的相互作用过渡到一个电子与其本身的作用，这概念外推得太远了。因此在有些提出的理论中，电子作用于自身的可能性给排除掉了。于是，就不再存在由于自作用而引起的那种无限大。并且，也不再有任何与粒子联系着的电磁质量。所有质量都回到机械性质上面，但在这种理论中仍有一些新的困难。

我们必须立即说明，这样的理论要求对电磁场概念加以修改。你会记得，我们开始时就讲，作用于任何位置的粒子上的力仅由两个量 E 和 B 来确定。如果我们放弃了“自作用力”，则这一说法可能不再正确，因为假定某处有一电子，它所受的力并非由总 E 和总 B 给出，而只是由别的电荷所产生的那些部分 E 和 B 给出。因此当计算一个电荷受力作用的情况时，我们总得记住， E 和 B 中有多少来自那个电荷，而又有多少来自其他电荷。这使得理论烦琐得多，但却消除了那个无限大的困难。

因此，如果我们乐意，便可以说不存在诸如电子作用于其本身这种事情，因而抛弃了式(28.9)中全部的力。然而这么一来，我们却把小孩连同洗澡盆里的水一起倒掉了！因为式(28.9)中的第二项，即含 \ddot{x} 的项，仍然是需要的。这个力处理某种事情十分确切。如果你把它丢掉，你又将陷入困难之中。当我们加速电荷时，它会辐射出电磁波，从而损耗了能量。因此，加速电荷，比加速相等质量的中性物体，必然需要更大的力，否则能量不会恒守。我们对加速粒子所做的功率必须等于每秒内由于辐射而损耗的能量。以前就曾谈论过这种效应——它被称为辐射阻尼。不过我们仍需回答这样一个问题：必须用做功来抵抗的那个附加力究竟来自何方？当一大天线正在辐射时，力来自天线中的一部分电流对另一部分电流的影响。对于正在向真空空间辐射的单个的加速电子来说，力似乎只能从一个地方来——即从电子的一部分对另一部分的作用而来。

我们回到第 1 卷第 32 章中后发现一个振动电荷辐射能量的功率为：

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 (\ddot{x})^2}{c^3}. \quad (28.10)$$

让我们看看为抵抗式(28.9)的自身力而对电子所做的功率来说，能够得到些什么。功率等于力乘速度，或 $F\dot{x}$ ：

$$\frac{dW}{dt} = a \frac{e^2}{ac^2} \ddot{x} \dot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} \dot{x} + \dots \quad (28.11)$$

第一项与 $d\dot{x}^2/dt$ 成正比,因而恰好对应于与电磁质量联系在一起的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 的变化率。

第二项可能对应于式(28.10)中的辐射功率,可是它仍有所不同。差异来源于这样的事实,即式(28.11)中的那一项是普遍正确的,而式(28.10)却只对振动电荷才正确。我们能够证明:如果电荷运动是周期性的,则这两者等同。为此,将式(28.11)中的第二项重新写成

$$-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d}{dt}(\dot{x}\ddot{x}) + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\ddot{x})^2,$$

那不过是一种代数变换。如果电子运动是周期性的,则 $\dot{x}\ddot{x}$ 这个量会周期性地回到相同的值,因此若对它的时间微商取平均便会得到零。然而,第二项却总是正的(它是一个平方),因而它的平均值也是正的。这一项给出了所做的净功,并恰好等于式(28.10)。

为了使在辐射系统中的能量守恒,那个由 \ddot{x} 所表示的自身的力项是必需的,因而不能把它丢掉。事实上,洛伦兹所取得的成功之一就是在于证明存在这种力并且它来自电子对其本身的作用。我们必须相信电子对其本身作用的概念,并需要含 \ddot{x} 的项。问题在于如何才能获得该项,而又不至于同时得到式(28.9)中的第一项,那是一切困难之源。我们不懂得应该怎么办才好。你看,经典电子理论已经把它自身推进了困境。

为了解决事情已有了修改定律的若干种其他尝试。由玻恩和因费尔德建议的一种办法,是用一种复杂的方式来改变麦克斯韦方程组,使其不再是线性的。这样,电磁能量和动量就可以表现出有限大,但他们所倡议的这些规律还预言了一些从未被观测到的现象。他们的理论也遭遇到另一种我们将在下面谈到的、为避免上述毛病所做的一切尝试所产生的共同的困难。

下述独特的可能性是由狄拉克提出的。他说:让我们认为电子通过式(28.9)中的第二项而不是第一项对本身作用。然后他又有一种能消除其中一项而不消除另一项的精巧计划。他说,看!当只取麦克斯韦方程组的推迟波解时我们做过一种特殊的假设,要是代之以取那些超前波,就会得到一些别的东西。关于自作用力的公式应是

$$F = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \ddot{x} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} + \gamma \frac{e^2 a}{c^4} \ddot{x} + \dots \quad (28.12)$$

除了级数中的第二项和某些更高次项的符号外,这个式子几乎与式(28.9)一样[从推迟波变成超前波不过改变了推迟的符号,而不难看出,这相当于处处都改变 t 的符号。对于式(28.9)的唯一效果就是改变所有奇数次的时间微商的符号]。所以,狄拉克说,让我们建立一个新的法则,即电子是通过它所产生的推迟与超前两种场的差值之一半而作用于其本身的。这样,式(28.9)与(28.11)之差除以 2,便是

$$F = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} + \text{更高次项.}$$

在所有更高次的项中,半径 a 仿佛是分子中的某个正次幂。因此,当我们趋向点电荷的极限时,就只会得到那么一项——恰恰是所需要的。就这样,狄拉克得到了辐射阻力而不是惯性力。电磁质量不见了,而经典理论也得救了——可是却付出了关于自作用力的任意假定的那种代价。

狄拉克的附加假设的任意性至少部分地被惠勒和费恩曼所排除,他们提出了一个更加

奇怪的理论。他们建议点电荷仅与其他的电荷相互作用，但这种相互作用一半是通过超前波而另一半是通过推迟波产生的。最令人惊奇的是，在大多数场合下你将不会看到超前波的任何效应，但它们却的确具有刚好产生辐射作用力的效应。该辐射阻尼并不是由于电子对本身的作用，而是由于下述的特殊效应。当一电子在时刻 t 被加速时，它将在较后时刻 $t' = t + r/c$ (其中 r 为至其他电荷的距离) 摆动世界上所有其他电荷，这是由于推迟波的作用。但此时别的电荷又通过它们的超前波从后面作用于原来那个电子上，这些波将在等于 t' 减去 r/c 的 t'' 时刻、当然也就恰恰在 t 时刻上到达(它们也用其推迟波从后面作用，但那不过是对应于正常的“反射”波罢了)。超前波与推迟波的组合意味着，当一个振动电荷正在被加速时它会感觉到来自所有“将要吸收”其辐射波的那些电荷的力。你看在试图获得关于电子的理论时人们已陷入多么严重的困难之中！

现在要来描述另一种理论，以表明当人们碰到麻烦时会想些什么。这是由博普提出的对电动力学定律的另一种修改。你会认识到，一旦你决定要来修改电动力学方程组时，你可以在任一个想要下手的地方开始。可以改变关于电子的力的定律，或者改变麦克斯韦方程组(正如我们在已描述过的例子中所见到的)，或者也可在其他某个地方做出改变。一种可能性是去改变那些用电荷和电流给出的势的公式。我们的这些公式之一已经表明在某一点的势是由较早时刻在任何其他点上的电流(或电荷)密度所给出的。应用有关势的四维矢量符号表示法，可写成

$$A_\mu(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_\mu(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (28.13)$$

博普的美妙而又简单的想法是：也许困难出在这个积分里的因子 $1/r$ 上。假设我们从此开始，即只是通过假定在某点上的势取决于在任何其他点上的电荷密度作为该两点间距离的某个函数，比如说 $f(r_{12})$ 吧。于是，在点(1)处的总势就将由 j_μ 乘以这一函数而对全部空间的积分所给出：

$$A_\mu(1, t) = \int j_\mu(2, t - r_{12}/c) f(r_{12}) dV_2.$$

这就是一切。既没有微分方程，也没有其他的东西。噢，还有一件事情。我们也要求这结果应该是相对论性不变的。因此所谓“距离”，我们应取在时空中两点间的不变“距离”。这一距离的平方(在一个无关紧要的符号变化范围之内)为

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2. \quad (28.14)$$

因此，对于一个相对论性不变的理论来说，我们就应当采取 s_{12} 的大小的某一函数，或与此相同的，即采取 s_{12}^2 的某一函数。因此博普理论就是

$$A_\mu(1, t_1) = \int j_\mu(2, t_2) F(s_{12}^2) dV_2 dt_2 \quad (28.15)$$

(当然，这积分就应该是对整个四维体积 $dt_2 dx_2 dy_2 dz_2$ 进行)。

剩下的一切就是要选取一个适当函数作为 F 。对于 F 来说，我们仅仅假定这么一点——即除了自变数接近于零处都十分微小——使得 F 的曲线像图 28-4 所示的那样。它是一个

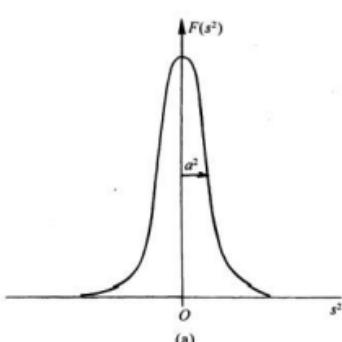
狭窄钉形,具有一个集中于 $s^2 = 0$ 处的有限面积,我们可以说它的宽度约等于 a^2 。不妨粗略地这样说,当我们计算点(1)的势时,只有当

$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2$ 在零点的 $\pm a^2$ 之内时那些点(2)才能产生一些可观的效应。我们可以指出,这点只有对于

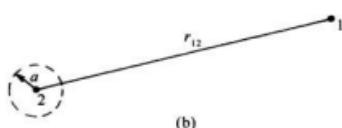
$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 \approx \pm a^2 \quad (28.16)$$

这种情况 F 才是重要的。你如果乐意,还可以使它更为数学化些,但那是我们的想法。

现在假定 a 比起像电动机、发电机等普通器物的大小来要小得多,以致在正常问题中总是 $r_{12} \gg a$ 。这样式(28.16)表明,只有在 $t_1 - t_2$ 处于下列的小范围内那些电荷才会对式(28.15)的积分有所贡献:



(a)



(b)

图 28-4 用于博普的非局域理论中的函数 $F(s^2)$

$$c(t_1 - t_2) \approx \sqrt{r_{12}^2 \pm a^2} \approx r_{12} \sqrt{1 \pm \frac{a^2}{r_{12}^2}}$$

由于 $a^2/r_{12}^2 \ll 1$, 所以平方根可近似为 $1 \pm a^2/(2r_{12}^2)$, 因而

$$t_1 - t_2 = \frac{r_{12}}{c} \left(1 \pm \frac{a^2}{2r_{12}^2} \right) = \frac{r_{12}}{c} \pm \frac{a^2}{2r_{12}c}.$$

这有什么含义呢? 这一结果表明,在 A_μ 的积分中只有与我们要计算的势所处的时刻 t_1 相差为推迟时间 r_{12}/c ——带有一个只要符合 $r_{12} \gg a$ 便可以忽略的改正项——的那些时刻 t_2 才是重要的。换句话说,博普的这个理论在它给出推迟波的效应这一意义上来说是接近麦克斯韦理论的——只要我们远离任何特定的电荷就行。

事实上,我们能够约略地看出式(28.15)的积分将给出什么结果。如果首先对于 t_2 从 $-\infty$ 至 $+\infty$ 进行积分——保持 r_{12} 固定不变——那么 s_{12}^2 也将从 $-\infty$ 进至 $+\infty$ 。该积分将全部来自以 $t_1 - r_{12}/c$ 为中心、而在狭小宽度 $\Delta t_2 = 2a^2/(2r_{12}c)$ 内的那些 t_2 的贡献。设函数 $F(s^2)$ 在 $s^2 = 0$ 处具有值 K , 则对于 t_2 的积分近似为 $K j_\mu \Delta t_2$, 或

$$\frac{Ka^2}{c} \frac{j_\mu}{r_{12}}.$$

当然,还应该取 $t_2 = t_1 - r_{12}/c$ 时的 j_μ 值,因而式(28.15)就变成

$$A_\mu(1, t_1) = \frac{Ka^2}{c} \int \frac{j_\mu(2, t_1 - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2.$$

如果我们挑选 $K = 1/4\pi\epsilon_0 ca^2$, 则正确地回到了麦克斯韦方程组的推迟势解——自动地包含了 $1/r$ 的依存关系! 而这全都来自一个简单的主张,即在时空中某一点的势取决于在时空中所有其他各点的电流密度,不过带有两点间四维距离的某个狭窄函数的权重因子。这一理论再次预言电子的电磁质量为有限大,而能量与质量之间也具有正确的相对论关系。

它们必然如此,因为这理论从一开始就是相对论不变的,而一切似乎都是正确的。

然而这一理论,以及我们所曾描述过的所有其他各种理论,都存在一个基本缺点。我们知道的一切粒子都遵循量子力学规律,因而对电动力学的量子力学修正正是必须做的。光的行为像光子。它并非百分之百地像麦克斯韦理论所描述的那样。因此,电动力学理论就必须改变。我们已经提出过,为了修正经典理论而如此艰苦地工作也许是白费时间,因为结果可能是:在量子电动力学中那些困难将消失或可以按照其他某种方式得到解决。可是,这些困难在量子电动力学中却也未被消除。人们之所以花那么多精力试图解决这些经典困难,原因之一就是希望假如他们能够先解决这些经典困难,然后才去做量子力学方面的修正,则一切都可能被搞清楚。但在做了量子力学的修正之后麦克斯韦方程组仍然存在困难。

量子效应确会造成某种变化——有关质量的公式被修改了,而普朗克常量出现了——但答案仍然出现无限大,除非你想办法截止积分——正如我们过去在 $r = a$ 处不得不终止经典积分那样。而答案就取决于你怎样去截断那些积分。可惜我们在这里不能向你们证明这些困难实际上是基本相同的,因为我们对于量子力学理论迄今掌握得那么少,而对于量子电动力学甚至更少。所以你就必须仅仅相信我们的话,即麦克斯韦电动力学的量子化理论对于一个点电子来说会给出无限大的质量。

然而,事实证明,迄今从未有人在从任何一个已经修改过的理论造成一种自洽的量子理论方面取得过成功。玻恩和因费尔德的想法从没有满意地转变成量子理论。狄拉克的或惠勒和费恩曼的关于超前和推迟波的那些理论也从未被转变成满意的量子理论。博普的理论同样也未曾被转变成令人满意的量子理论。所以今天,对这一问题还没有已知的解答。我们还不懂得如何去形成对电子或对任一个点电荷不会产生出无限大自能的一种协调一致的理论——包括量子力学。而在同时,也没有描述一个非点电荷的令人满意的理论。这是一个还未得到解决的问题。

当你决定仓促地去做出一个理论、其中电子对其本身的作用完全被消除、以致电磁质量不再具有任何意义、然后建造量子理论时,那你就应该被警告说,你一定会陷于困难之中。有明确的实验证据表明,电磁惯性是存在的——有证据表明,带电粒子的某些质量的确起源于电磁性质。

在较古老的书本中往往会说,由于大自然显然不会向我们提供两个粒子——一个是中性的而另一个是带电的,其他方面则全都相同——我们就将永远不能够说出有多少质量是属于电磁的而有多少质量是属于机械的。但结果弄清楚,大自然已经足够仁慈来供给我们恰恰就是这样的物体,以致通过比较带电粒子的观测质量与中性粒子的观测质量,就能够道出是否有电磁质量。例如,在自然界中存在中子和质子,它们之间具有巨大的相互作用力——核力——其来源还不清楚。然而,正如我们已经描述过的,核力具有一种引人注目的性质。就核力方面来说,中子与质子完全相同。就我们所能说的,中子与中子、中子与质子、质子与质子间的核力全都相同,只有那小小的电磁力才是不同的。从电方面说,质子与中子间的差别有如白天和黑夜,这恰好就是我们所需要的。我们拥有两种粒子,从强相互作用的观点看是全同的,但从电方面看则是不同的。而它们在质量上存在一个小差别。质子与中子间的质量差别——用兆电子伏的单位来表示静能 mc^2 之差——约为 1.3 MeV, 约等于电子质量的 2.6 倍。于是经典理论会预言它们具有一个约等于经典电子半径的 $1/3$ 至 $1/2$ 、或约为 10^{-13} cm 的半径。当然,人们实际上应该应用量子理论,但依靠某种奇怪的偶然性,

所有的常数—— 2π 和 \hbar 等等——一起使得量子理论给出与经典理论近似相同的半径。唯一的毛病是符号错了！中子比质子还要重。

表 28-1 粒子质量

粒子	电荷(电子电荷单位)	质量(MeV)	Δm^* (MeV)
n (中子)	0	939.5	
p (质子)	+1	938.2	-1.3
$\pi(\pi \text{介子})$	0	135.0	
	± 1	139.6	+4.6
$K(K \text{介子})$	0	497.8	
	± 1	493.9	-3.9
$\Sigma(\Sigma \text{超子})$	0	1191.5	
	+1	1189.4	-2.1
	-1	1196.0	+4.5

* $\Delta m = (\text{带电粒子的质量}) - (\text{中性粒子的质量})$ 。

大自然还提供几种别的粒子对——或三重态——除了它们的电荷之外其他各方面的表现都完全相同。它们通过所谓核力的“强”相互作用与质子和中子发生相互作用。在这种相互作用中,给定种类的粒子——比如说 π 介子——除了它们的电荷之外在每一方面的行为都像一个物体。表 28-1 上给出这些粒子的一张清单,包括对它们测定的质量。那些带电的 π 介子——无论正的或负的——都具有 139.6 MeV 的质量,但中性 π 介子较轻为 4.6 MeV。我们相信,这一质量差是电磁性质的,它可能相当于一个半径为 3 至 4×10^{-14} cm 的粒子。你将从表上看到其他粒子的质量差往往一般大小相同。

现在这些粒子的大小是可以由其他方法、诸如由在高能碰撞中所表现出来的直径来测定的。因此,这电磁质量似乎一般都与电磁理论相符,只要在场能的计算中在用其他方法得到的相同半径处截止积分。这就是我们为什么要相信这些差值确实代表了电磁质量的原因。

你无疑会对表中那些质量差的不同符号感到担心。弄清楚为什么带电粒子比中性粒子较重挺容易,但像质子和中子那样的粒子,测量出来的质量差倒表现出相反的符号,那又是怎么一回事呢?噢,结果是,这些粒子较为复杂,因而对于它们电磁质量的计算就一定要更精细些。例如,尽管中子没有净电荷,但在其内部确有一种电荷分布——只是其净电荷等于零。事实上,我们相信中子至少有时看来像一个被负 π 介子“云”所包围着的质子,如图 28-5 所示。尽管由于总电荷等于零,中子表现出“中性”,但它仍然具有电磁能量(例如,它具有磁矩),因此,若没有其内部结构的详尽理论,就不容易讲出电磁质量差值的符号来。

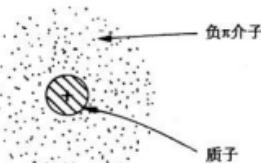


图 28-5 有时,中子可能作为一个由一个负 π 介子包围着的质子而存在

我们在这里只希望强调下述几点:(1)电磁理论预言有一种电磁质量存在,但它这样做时也会落到嘴啃泥,因为它不会产生一个协调一致的理论——而对于量子修正也是如此;(2)关于电磁质量的存在是有实验依据的;而(3)所有这些质量都大体上与电子的质量相同。因此,我们又回到了洛伦兹的原来想法——也许全部电子质量纯粹是电磁性质的,也许整个 0.511 MeV 都起源于电动力学。究竟是,还是否呢?由于我们还未得到一套理论,所以就不可能说出什么来了。

必须提起最令人烦恼的另一点信息。在世界上还有一种叫作 μ 介子的粒子，迄今我们所能说的除了质量外，它和电子没有一点区别。它每一方面的表现都很像电子：它能同中微子、电磁场发生相互作用，但就是没有核力。它的行为丝毫无异于电子——至少，没有什么事情不能被理解为仅由于它的较高质量(206.77倍电子质量)的后果。因此，每当有人最后获得关于电子质量的解释时，他将对 μ 介子从何处得到它的质量感到困惑。为什么呢？因为无论电子干什么， μ 介子总是同样地干什么——所以质量理应表现相同。有人坚定地相信这么一个观念，即 μ 介子与电子是同一种粒子，而在有关质量的最后理论中，对质量的公式将是一个具有两个根的二次方程——每种粒子一个根。也有一些人建议，该公式将是一个具有无限多个根的超越方程，而他们正在猜测：在这个系列中其他粒子的质量应该是什么，以及为什么这些粒子还未曾被发现。

§ 28-6 核 力 场

我们愿意对那一部分非电磁性质的核(粒)子质量进一步做某些评述。这另一大部分质量究竟从哪里来的呢？除了电动力以外还有别的力——像核力——它们也有本身的场的理论，尽管没有人知道现行的理论是否正确。这些理论也预言对核粒子提供与电磁质量相似的质量项的场能，我们可以把它称为“ π 介子场质量”。它大概会十分巨大，因为那些力非常强，而这可能就是重粒子的质量起源。但有关介子场的理论目前还处于最初步的状态。即使利用发展得最完善的电磁理论，我们仍然发现在解释电子质量时难以获得成功。至于对介子理论，我们就像击球手在棒球场上三击不中而退下场的情况。

由于同电动力学存在着有趣联系，我们将花一点时间来略述介子理论。在电动力学中，场可以用满足下列方程的一个四维矢量来描述：

$$\square^2 A_\mu = \text{源}.$$

现在我们已经知道，一部分场可以被辐射出去，因而可以离开源而存在。这部分场就是光的光子，而它们是由一个无源的微分方程描述的：

$$\square^2 A_\mu = 0.$$

人们曾经议论说，核力场也应有它自己的“光子”——它们大概会是 π 介子——而且它们应该由一个相似的微分方程来描述(由于人类脑子的弱点，我们不能想出某些真正新的东西，因而才通过与已知的东西的类比来进行论证)。因此，介子方程式也许就是

$$\square^2 \phi = 0,$$

其中 ϕ 可能是一个不同的四维矢量或也许是一个标量。结果证明 π 介子没有偏振，所以 ϕ 应为标量。如果采用这一简单方程 $\square^2 \phi = 0$ ，则介子场应该随着与源间的距离按 $1/r^2$ 变化，正如电场那样。可是我们知道，核力具有短得多的作用距离，因而该简单方程式就不适用。有一种办法能够使事情改变而又不会破坏相对论不变性：我们可以对达朗贝尔算符加上或减去一个常数乘以 ϕ 。因此汤川秀树就曾建议，核力场的自由量子或许遵循方程：

$$\square^2 \phi - \mu^2 \phi = 0, \quad (28.17)$$

式中 μ^2 是一常数——也就是一个不变的标量(由于 \square^2 是四维空时中的一个标量微分算符, 所以如果我们对之加上另一个标量, 它的不变性仍然成立)。

让我们来看看, 当情况不随时间变化时式(28.17)会给出一个怎么样的核力。我们希望有满足下列方程的围绕着处于原点的点源的球对称解。

$$\nabla^2\phi - \mu^2\phi = 0.$$

如果 ϕ 仅取决于 r , 则我们知道

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi).$$

因此有方程:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \mu^2\phi = 0$$

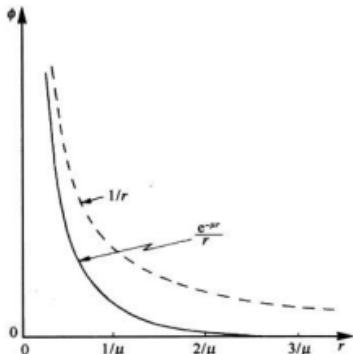
或

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \mu^2(r\phi).$$

若把 $(r\phi)$ 想象成因变量, 则这便是我们曾经多次见过的一个方程。它的解是

$$\phi = Ke^{\pm pr}/r. \quad (28.18)$$

这一函数称为汤川势。对于吸引力来说, K 为负数, 其大小必须调整到与实验上所观测到的力的强度相符。



核力的汤川势按指数因子衰减得比 $1/r$ 更快。对于超过 $1/\mu$ 的那些距离, 这个势——从而这个力——降落到零要比 $1/r$ 快得多, 如图 28-6 所示。核力“范围”要比静电力“范围”小得多。从实验上发现, 核力并不会超出约 10^{-13} cm, 因而 $\mu \approx 10^{15}$ m⁻¹。

最后, 让我们看看方程式(28.17)的自由波解。如果将

$$\phi = \phi_0 e^{i(\omega t - kr)}$$

代入式(28.17)中, 便得

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \mu^2 = 0.$$

将频率与能量、波数与动量联系起来, 像在第 1 卷第 34 章末尾我们曾经做过的那样, 便可得到

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \mu^2 \hbar^2,$$

上式表明, 汤川“光子”具有等于 $\mu\hbar/c$ 的质量。如果我们对 μ 采用核力的观测范围的估计值 10^{15} m⁻¹, 结果质量为 3×10^{-25} g 或 170 MeV, 这近似等于所观测到的 π 介子质量。因此, 根据与电动力学所做的类比, 我们会说 π 介子就是核力场中的“光子”。但现在我们已把电动力学的那些概念推广到它们可能实际上并不适用的领域中去了——我们已超过了电动力学范围而涉及到了核力的问题。

第 29 章 电荷在电场和磁场中的运动

§ 29-1 在匀强电场或匀强磁场中的运动

我们现在要来描述——主要采取定性方式——在各种不同情况下电荷的运动。电荷在场中运动的有趣现象，大多数都发生于有许许多多电荷互相作用着的十分复杂的情况下。例如，当电磁波行经一块材料或一团等离子体时，会有亿万个电荷与该波相互作用并彼此相互作用。往后我们将进入这样的问题，但现在只希望讨论在给定场中单个电荷的运动这种简单得多的问题。这样就可以忽略所有其他电荷——当然除了存在于某处的、借以产生我们将采用的场的那些电荷和电流以外。

我们大概应当首先询问粒子在匀强电场中的运动情况。在低速时，这一种运动并非特别有趣，它不过是在电场方向做匀加速运动。然而，如果粒子获得了足够多的能量以致成为相对论性的粒子，那么运动就会变得更加复杂。但我们将把这一情况下的问题留给你们自己去解决。

其次，考虑在没有电场的匀强磁场中的运动。我们已解决了这个问题——其中一个解是粒子做圆周运动。磁力 $qv \times B$ 始终与运动方向成直角，因而 dp/dt 垂直于 p 并具有量值 $v p / R$ ，其中 R 为圆的半径，即

$$F = qvB = \frac{vp}{R}.$$

于是该圆周的轨道半径为

$$R = \frac{p}{qB}. \quad (29.1)$$

那只是一种可能性。如果粒子还有沿场方向的运动分量，则这个运动是恒定的，因为在场的方向不可能有磁力的分量。粒子在一匀强磁场中的普遍运动将是一个平行于 B 的匀速运动加上一个垂直于 B 的圆周运动——轨道乃是一条柱形螺旋线(图 29-1)。这螺旋线的半径由式(29.1)给出，只要我们用垂直于场的动量分量 p_{\perp} 来代替其中的 p 。

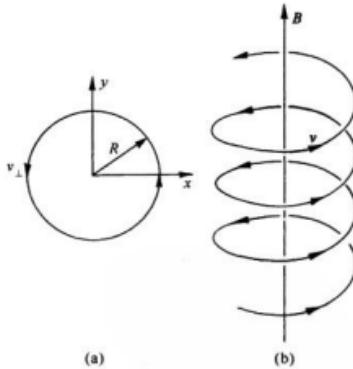


图 29-1 粒子在一匀强磁场中的运动

§ 29-2 动量分析

一个匀强磁场往往被用来制造一台高能带电粒子的“动量分析器”或“动量谱仪”。假定

带电粒子在图 29-2(a)中的 A 点被射入一匀强磁场, 这磁场与该图面垂直。每个粒子将在半径正比于该粒子动量的一个圆周上运动。如果所有粒子都与场边缘正交地进入场中, 那么它们将在一个离 A 点距离为 x 的地方离开场, 这 x 值正比于它们的动量 p 。位于诸如某点 C 的计数器将只能探测到动量 $p = qBx/2$ 附近间隔 Δp 内的那些粒子。

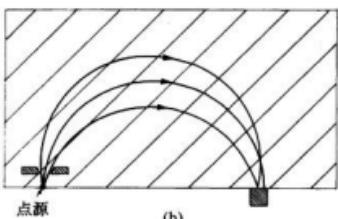
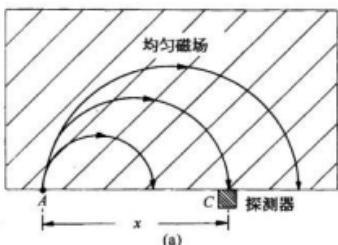


图 29-2 匀强磁场, 180°聚焦的动量谱仪:(a)动量不同;(b)角度不同(磁场方向与图面垂直)

“谱”就可以被测得了[所谓“动量谱” $f(p)$, 我们指的是动量在 p 与 $(p + dp)$ 之间的粒子数为 $f(p)dp$]。比方, 这样的方法曾用来测定各种原子核在 β 衰变中的能量分布。

有许多其他形式的动量谱仪, 但我们将只描述具有特别大接收立体角的那种。它是以如图 29-1 所示的那种在均匀强场中的螺旋轨道为基础的。让我们设想一个柱面坐标系 ρ, θ, z , 使得 z 轴沿着场的方向。如果粒子相对于 z 轴以某一角度 α 从原点射出, 则它将沿方程为

$$\rho = a \sin k z, \quad \theta = bz$$

的螺旋线运动, 其中 a, b 和 k 都是你可以容易用 p, α 和磁场 B 来表示的参数。如果对于给定的动量, 但对于几个不同起始角, 把与轴的距离 ρ 作为 z 的函数画成曲线, 则我们将得到像图 29-3 所示的那些实曲线(记住这不过是对于一条螺旋形轨道的投影)。当入射方向与轴成较大角度时, ρ 的峰值变大, 但其纵向速度则变小, 从而使不同角度的轨道趋向于在图的 A 点附近形成一个“焦点”。如果我们放置一个窄孔于 A 处, 那么在一个起始角范围内的粒子仍然能够全部到达并穿过窄孔到达 z 轴, 在那里粒子可由一个长条形探测器 D 进行算数。

以较大的动量但以相同的角度从原点处的源射出的粒子, 将遵循图中所示虚线轨道运动而不能穿过 A 处的窄孔。因此, 这台仪器将选出一个小间隔的动量。与上述第一种谱仪

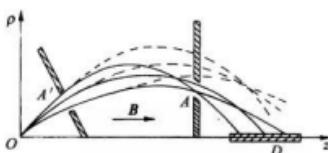


图 29-3 一个轴向场式谱仪

相比它的优点是：孔 A 以及孔 A' 都可以做成环形孔，以便使在一个相当大的立体角范围内离开了源的粒子都能够被接收到。来自源的大部分粒子都给应用上了——对于弱源或对于十分精密的测量这都是一个重要优点。

然而，人们为这个优点付出了代价，因为这样做需要一个大体积的匀强磁场，而这往往仅对低能粒子才是切实可行的。你会记得，制造匀强磁场的一种办法是在球面上绕一个线圈，使得其面电流密度正比于角度的正弦。你也能够证明，这同样的事情对于一个旋转椭球来说也属正确。因此这种谱仪往往通过在一个木(或铝)架上绕一个椭球形线圈来制造，所要求的一切就是在每个轴线距离间隔 Δx 内的电流都相同，如图 29-4 所示。

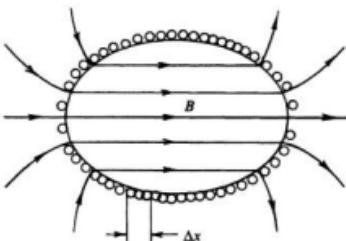


图 29-4 每个轴线间隔 Δx 中有相等电流的椭球形线圈在其内部产生匀强磁场

§ 29-3 静电透镜

粒子聚焦有许多应用。例如，在电视显像管中那些离开了阴极的电子被聚焦在显示屏上——为了形成一个细斑。在这种情况下，人们希望把所有具有同一能量但以不同起始角射出来的粒子都聚集在一小点上。这一问题就像用透镜使光聚焦一样，因而对粒子也会做这种相应事情的器件就也叫作透镜。

电子透镜的一个例子被简略地画成图 29-5。它是一个静电透镜，它的作用取决于两相邻电极间的电场。其运用情况可通过考虑从左边进来的平行电子束会发生什么来加以理解。当各电子到达区域 a 时，它们会感受到一个具有侧向分量的力而获得使其弯向轴心的某个冲力。你也许会想到，它们会在区域 b 获得一个相等而相反的冲力，但事实却不是这样。当电子到达区域 b 时它们已得到了能量，从而在 b 区停留的时间就较短。力还是一样，但时间短些，冲力也就小些了。在从 a 区进至 b 区时，就有一净的轴向冲力，因而电子会弯向一个共同点。在离开了高电压区之后，这些粒子又得到指向轴心的另一次冲击。在 c 区的力是向外的而在 d 区的力则是向内的，但粒子在后一区域里停留的时间较长，因而又再受到一个净冲力。对于离轴心不太远的点，通过透镜时的总冲力与离轴线的距离成正比(你

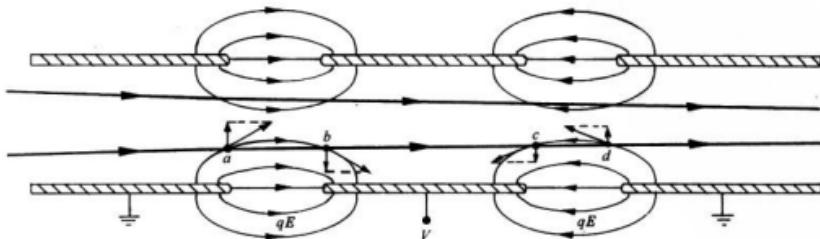


图 29-5 静电透镜。这里所示的场线是“力线”，也即 qE 线

能否看出个什么原因来),而这正是透镜式聚焦所必要的条件。

你能够用同样的论据来证明,无论中间电极的电势相对于其他两极是正还是负,都会有聚焦作用。这一种类型的静电透镜通常用于阴极射线管或某些电子显微镜中。

§ 29-4 磁 透 镜

另一种透镜——常出现在电子显微镜中——就是简略如图 29-6 所示的磁透镜。一个柱形对称的电磁铁具有十分尖锐的圆形尖极,因而能在一小区域里产生一个非均匀的强磁场。一些沿垂直方向运动的电子在通过这一区域时给聚焦了。你能够通过考察如图 29-7 所示的极尖区域的放大图像而理解其机制,考虑相对于轴线以某一角度离开了源 S 的 a 和 b 两个电子。当电子 a 到达场的开始部分时,它被场的水平分量所偏转以致离开了你。但这时电子将有一横向速度,使得当它经过强的垂直方向场时会得到一个指向轴心的冲力。它的横向运动当离开场时便给该磁力所消除,因而净效应就是一个朝向轴心的脉动加上一个环绕轴线的“旋转”。作用于粒子 b 上的所有力都与此相反,因而它也被朝向轴心偏转。在这图中,那些发散出去的电子都被引入平行路径。这作用就像置一物体于透镜的焦点上一样。安置在上部的另一个相似透镜则可用来把这些电子再聚焦回到一个单独的点上去,造成源 S 的像。

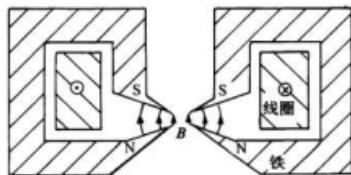


图 29-6 磁透镜

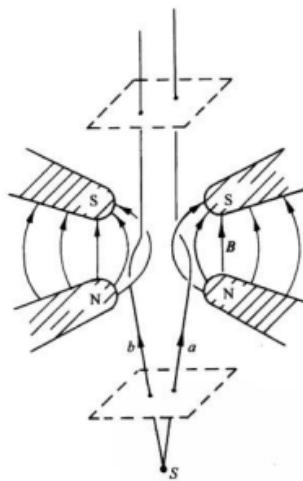


图 29-7 在磁透镜中电子的运动

§ 29-5 电 子 显 微 镜

你们知道,电子显微镜能够“看见”光学显微镜所无法看到的非常微小的物体。我们曾在第 1 卷第 30 章中讨论过由于透镜孔径的衍射给任何光学系统带来的基本限制。如果透

镜孔径对源点所张角度为 2θ (见图 29-8), 若在源处的两相邻的圆点的间距比

$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

要小, 则不能把它们看成分开的点, 式中 λ 为光的波长。用最优良的光学显微镜, 设 θ 趋近 90° 的理论极限, 因而 δ 约等于 λ , 即约为 5000 \AA 。

对于电子显微镜来说这一限制也应该适用, 不过这里的波长——对于 50 kV 的电子——约为 0.05 \AA 。假如人们能够采用一个接近 30° 的孔径, 就应该能看到相距只有 0.2 \AA 的两物体。由于分子中原子的典型间距为 1 或 2 \AA , 所以我们就能够拍得分子的照片。生物学会变得较为容易, 我们将拥有关于脱氧核糖核酸结构的照片, 那将是多么重大的一件事情呵! 当前分子生物学领域中大多数研究工作就是企图弄清楚复杂有机分子的形状。但愿我们能够看到这些分子!

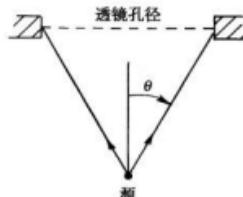


图 29-8 显微镜的分辨本领受从源点对向的角所限制

可惜, 迄今在电子显微镜中能够获得的最高分辨本领还只是接近 20 \AA 。原因是, 还没有人能够设计出一种具有大孔径的透镜。所有一切透镜都带有“球面像差”, 那意味着与轴成大角度的射线与近轴射线有不同的聚焦点, 如图 29-9 所示。通过特殊技术, 光学显微镜的透镜可以造得忽略掉球面像差, 但迄今还没有人能制成避免球面像差的电子透镜。

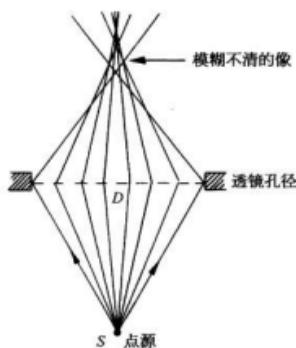


图 29-9 透镜的球面像差

事实上, 人们能够证明, 我们曾经描述过的任何静电透镜或磁透镜一定会有不可能消除的球面像差。这一像差——和衍射在一起——把电子显微镜的分辨本领限制在目前的大小。

我们所提及的那种限制不适用于非轴对称的或在时间上不是恒定的那些电场和磁场。也许有朝一日有人会想出一种新型的电子透镜, 它能够克服简单电子透镜所固有的像差, 那时我们将能直接为原子们拍照了。也许有一天, 化学中的化合物将能够通过考察原子位置而不是通过观察某些沉淀物的颜色来加以分析!

§ 29-6 加速器中的导向场

在高能粒子加速器中磁场也被用来产生特殊的粒子轨道。像回旋加速器和同步加速器那一类机器, 会使粒子反复经过强电场而把它加速至高能。粒子被磁场保持在它们的循环轨道中。

我们已经见到, 在匀强磁场中的粒子将在圆周轨道上运动。然而, 这仅对于完全均匀的场才正确。试设想一个在很大范围几乎均匀、但在某一区域里会稍微强于其他区域里的 B 场。若把一个动量为 p 的粒子放置在这个场中, 它便将在一个几乎圆形的轨道内运动, 其半径为 $R = p/(qB)$ 。然而, 在场较强的区域里这轨道的曲率半径稍微小点。轨道不是一个

闭合圆周,它但将在场中“漫步”,如图 29-10 所示。如果我们乐意的话,可以认为场里的这个小“误差”产生了一个附加的角度冲击,它把粒子送上一个新的轨道。如果粒子要在加速器中绕行几兆圈的话,则某一种能倾向于保持各轨道靠近某个设计轨道的“径向聚焦”是必需的。

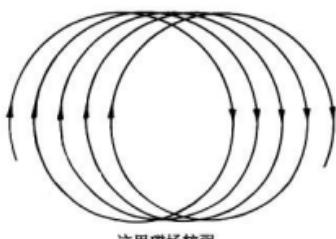


图 29-10 在一个稍微非均匀的磁场中
粒子的运动

对于一个匀强场来说,另一种困难是粒子不会保持在一个平面内。如果它们以一微小角度开始——或通过场中的任一微小误差给予了一个小角度——它们便将跑一个螺旋路线而最终会闯进磁极或到达真空室里的天花板或地板上。必须做出某种安排来避免这种垂直方向的漂移,场必须同时提供“垂直方向聚焦”和径向聚焦。

最初,人们会猜测到,可以通过制造一个磁场来提供这种径向聚焦,而该磁场随着与设计路线中心的距离的增大而增强。于是,若有一粒子跑到较大的半径上去,它便将处于较强的磁场之中而被弯回到其正确的半径上来。如果它跑到了一个太小的半径,则弯曲程度将变小,因而又会朝设计的半径返回。一个粒子,一旦相对该理想圆周以某个角度开始运动,便将在该理想圆周轨道上左右摇摆,如图 29-11 所示。这种径向聚焦作用会把粒子保持在该圆周路径附近。

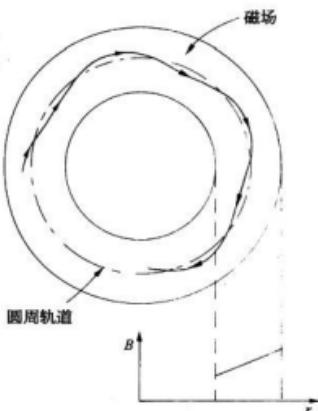


图 29-11 在一个具有大的正斜率的
磁场中粒子的径向运动

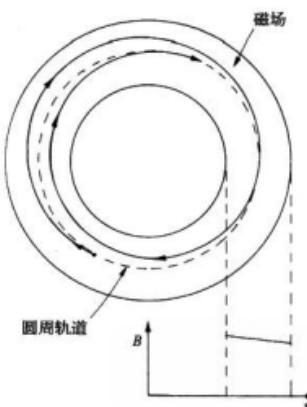


图 29-12 在一个具有小的负斜率的
磁场中粒子的径向运动

实际上,即使使用相反的磁场斜率,也仍会有某种径向聚焦作用。只要轨道曲率半径的增大不会快过粒子与场中心的距离的增大,这种聚焦作用就可能发生。粒子的轨道将会如图 29-12 所示。然而,若场的梯度太大,则轨道将不会回到设计半径上来,而向内旋入或向外旋出,如图 29-13 所示。

我们通常用“相对梯度”或场指数 n 来描述场的斜率：

$$n = \frac{dB/B}{dr/r}. \quad (29.2)$$

如果这个相对梯度大于 -1 , 则导向场就能提供径向聚焦。

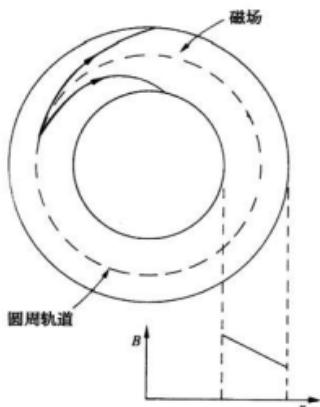


图 29-13 在一个具有大的负斜率的磁场中粒子的径向运动

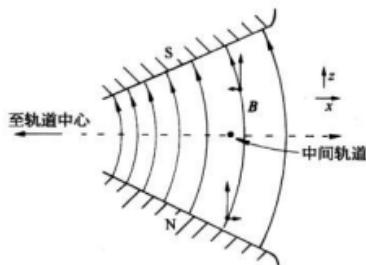


图 29-14 从一个垂直于轨道的截面上来看一个垂直方向的导向场

一个径向的场梯度也将对粒子产生垂直方向的力。假设有一个靠近轨道中心处较强而在外面较弱的场, 那么垂直于轨道的、磁体的垂直方向截面也许会如图 29-14 所示(对于质子来说, 它们的轨道应该是从页面出来)。如果左边的场比右边的较强, 则磁场线必然如图所示的那样弯曲。通过应用自由空间里 \mathbf{B} 的环流等于零的规律, 我们可以明白情况必然会是这样。若我们选取如图所示的那些坐标, 则

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

或

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial x}. \quad (29.3)$$

由于已假定 $\partial B_x / \partial x$ 是负的, 所以就必然存在一个相等的 $\partial B_z / \partial z$ 。如果轨道的“标称”平面是一个 $B_x = 0$ 处的对称平面, 则径向分量 B_z 在这一个平面之上为负而在其下为正, 场线就必须弯曲成如图所示的那个样子。

像这样的一个场将具有垂直方向的聚焦特性。试想象一个质子正在与中间轨道近乎平行但却在其上面运动, \mathbf{B} 的水平分量将对它施一向下的力。如果质子是在该中间轨道之下运动, 则力会颠倒过来。因此, 就有一个朝向该中间轨道的“恢复力”。根据我们的论证, 将有一个垂直方向的聚焦作用, 只要该垂直方向场随半径的增大而减小。但如果这个场的梯

度为正，则将有一“垂直方向的去焦”作用。因此，对于垂直方向聚焦来说，该场指数 n 必须小于零。上面我们已求得对于径向聚焦 n 必须大于 -1，这两个条件结合在一起就给出总条件

$$-1 < n < 0,$$

若要把粒子维持在稳定的轨道上，则要满足上述条件。在回旋加速器中，常采用非常接近于零的 n 值，而在电子回旋加速器和同步加速器中，则一般采用 $n = -0.6$ 的数值。

§ 29-7 交变梯度聚焦法

像这么小的 n 值只会给出相当“弱”的聚焦作用。很清楚，一个有效得多的径向聚焦作用应该由一个大的正梯度($n \gg 1$)来提供，但这时垂直方向力就将产生一个强大的去焦作用。同理，大的负斜率($n \ll -1$)会给出一个较强的垂直方向力，但却会引起径向的去焦作用。然而，约十年前就已经认识到，在强聚焦与强去焦之间的交变力仍然能够产生一个净的聚焦力。

为解释交变梯度聚焦法是如何起作用的，我们将首先描述一个四极透镜的工作情况，它以上述相同的原理为基础。试设想一个匀负磁场加于图 29-14 中的场上，使其强度调整至在轨道处的场为零。合成的场——对于与中立点间的小位移来说——会像图 29-15 所示的场。这样一种四极磁体称为“四极透镜”。一个在中点之左或右(从读者一边看)进入场内的正粒子会被推回中心。如果这个粒子是在上面或下面进入的，则将被从中点推开。这是一个平行方向的聚焦透镜。如果水平梯度被反向——正如可通过变换所有磁极的极性而做到的那样——则所有力的符号都将反号，因而我们就有一个人工方向的聚焦透镜，如图 29-16 所示。对于这样一种透镜，场强——因而焦聚力——会随着离轴的透镜距离线性地增大。

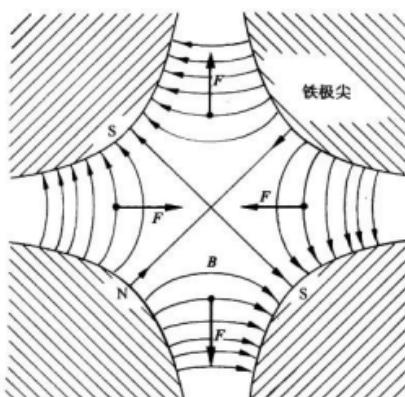


图 29-15 水平方向聚焦的四极透镜

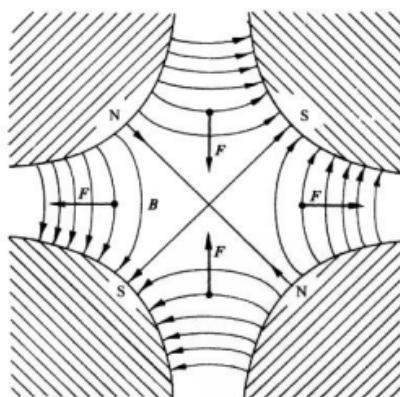


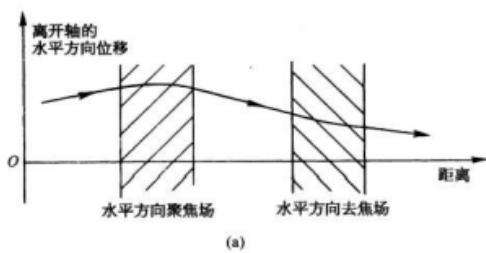
图 29-16 垂直方向聚焦的四极透镜

现在设想有两个这样的透镜串联安放着。若一粒子从与轴心有某个水平位移的地方进入场中，如图 29-17(a)所示，则它在第一个透镜中将被朝轴的方向偏转。当抵达第二

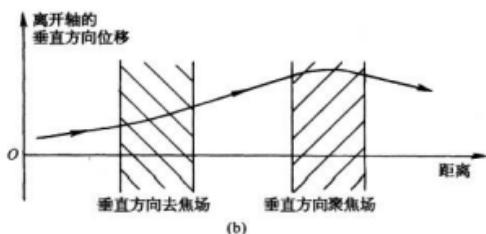
个透镜时, 它距离轴已较近, 因而向外的力较小, 向外的偏转也就较小。所以有一个朝轴向的净弯曲, 平均效应是水平方向的聚焦作用。另一方面, 若我们考察一个在进场时在垂直方向上就离开轴的粒子, 则其路径将如图 29-17(b) 所示。该粒子初时被偏转以致离开轴, 但之后在较大位移时到达那第二个透镜, 在那里它会感觉到一个较强的力, 因而被弯向轴。净效应再次为聚焦作用。这样一对四极透镜独立地对于水平方向和垂直方向的运动起作用——十分像一个光学透镜。四极透镜被用来形成并控制粒子束, 与光学透镜用于控制光束的方法十分相似。

还应该指出, 一个交变梯度系统并不总会产生聚焦作用。如果梯度太大(相对于粒子动量或两透镜的间隔来说), 则净效应可能是一个去焦作用。你若设想图 29-17 那两个透镜的距离增大了三或四倍, 就会看清楚这种作用可能是怎样发生的了。

现在就让我们回到同步加速器的导向磁体上来。可以认为, 它由叠加了均匀场的“正”、“负”透镜交替序列构成的。平均来说匀强磁场用来把粒子弯曲成一个水平圆周(对于垂直方向运动不起作用), 而该交变透镜组对任何也许已走错了路的粒子会起作用——始终把它们(在平均上)推向中间轨道上去。



(a)



(b)

图 29-17 利用一对四极透镜而得到的水平方向聚焦和垂直方向聚焦

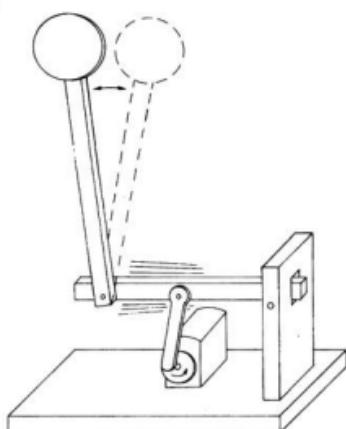


图 29-18 一副配有振动轴的摆, 可以使位于轴上的摆锤有一个稳定位置

有一套漂亮的机械模拟器, 可以用来演示在“聚焦”力与“去焦”力之间交替变换着的力能够产生一个净的“聚焦”效应。试想象一副机械摆, 它含有一根末端装有重物的坚固棒, 该棒悬挂在被安排好的轴上, 轴由一部电动机驱动着的曲柄带动而使其迅速做上下振动。像这样的摆会有两个平衡位置, 除了正常的下垂悬挂位置外, 该摆还有一个“向上悬挂”的平衡位置——摆锤高居于轴上! 这样的摆如图 29-18 所示。

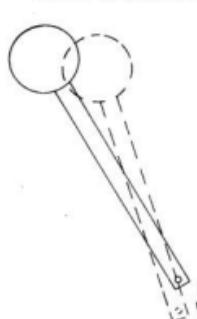


图 29-19 轴的向下加速会
引起摆朝着垂直方向运动

通过下述论证我们能够看出轴的垂直方向运动相当于一个交变聚焦力。当轴向下加速时, 摆锤倾向于向内运动, 如图 29-19 所示。当摆锤向上加速时, 这效应就被反转。促使摆锤恢复朝向轴线的力虽然在交替变换着, 但其平均效应仍然是一个朝向轴线的力。所以这个摆将会围绕正常平衡位置正对面的中立位置来回摆动。

当然, 可用一种容易得多的办法来保持一副摆倒悬着, 那就是把它平衡于你的手指之上! 不过你还可试一试, 在同一只手指上平衡两根互为独立的棒! 或者把你的眼睛掩闭着而试着平衡一根棒! 平衡含有对即将出现的错误进行改正的意思, 而一般说来, 倘若同时有几件事情都发生错误的话, 平衡是不可能的。在一部同步加速器中有数以亿计的粒子同时在环行, 其中每一个都可能从不同的“误差”出发。我们刚才描述的那种聚焦作用对它们就都有效。

§ 29-8 在交叉的电场和磁场中的运动

迄今为止我们谈论了只在电场或只在磁场中的粒子。当这两种场同时存在时就会有某些有趣的效应。假设有一个匀强磁场 B 和一个电场 E 正交。凡垂直于 B 出发的粒子都将沿如图 29-20 所示的曲线运动(这是一条平面曲线, 而不是一条螺旋线)。我们能够定性地理解这一运动。当(假定带正电的)粒子在 E 的方向运动时, 它会增加速率, 因而被磁场弯曲得较小。当其逆着电场运动时, 它减少速率, 因而被磁场连续弯曲得多些。净效应就是它有一个沿 $E \times B$ 方向的平均“漂移”。

事实上, 我们能够证明, 上述运动是由一个匀速圆周运动叠加于一个以速率 $v_d = E/B$ 进行着的横向匀速运动之上的合运动——图 29-20 中的那条轨道

就是一条旋轮线。试想象一个以恒定速率向右运动的观察者, 在他的参照系上, 我们的磁场会转换成一个新的磁场再加上一个方向朝下的电场。如果他恰巧具有正确的速率, 则他的总电场将为零, 因而他将看到电子在做圆周运动。因此, 我们所看到的乃是一个圆周运动加上一个以漂移速率 $v_d = E/B$ 进行的平动。电子在交叉的电场和磁场中的运动就是磁控管——即用来产生微波能量的振荡器——的基础。

关于在电场和磁场中粒子的运动还有许多其他的有趣例子, 诸如被捕获在范艾伦(Van Allen)带中的电子和质子的轨道, 可惜我们这里没有时间一一讨论。

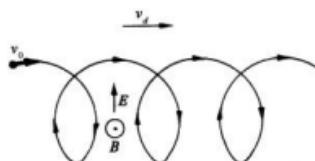


图 29-20 在交叉的电场和磁场中一个
粒子的路径

第30章 晶体的内禀几何

§ 30-1 晶体的内禀几何

我们已经结束了关于电磁基本定律的学习,现在要来学习实物的电磁性质了。我们将从描述固体——即晶体——开始。当物质中的原子运动得并不太厉害时,它们逐渐粘在一起并把它们自己安排在一个尽可能低的能量位形中。如果某处的原子已找到了一个似乎具有低能量的图样,那么在别处的原子大概也会做出同样的安排。为了这些缘故,在固体材料中我们就有重复的原子图样。

换句话说,晶体中的情况是这样的:晶体里某一特定原子的周围环境具有某种安排,而倘若你在更向前的另一处又看到一个相同种类的原子,那么你将会发现它的环境与前面的完全相同。如果你再向前同样的距离选取一个原子,你将会发现情况又是完全相同。这图样将一次又一次地重复——这当然是在三维之中。

试想象设计一张墙纸或花布,或平面上的某种几何图案——你假定将有一个一次又一次地重复着的设计单元,以致你可以制成一个任意大的面积,这就是将要在三维中求解的晶体问题的一个二维类比。例如,图 30-1(a)显示一张常见的墙纸的设计图样。在图样中有一个能够永远重复的单元。若仅仅考虑其重复性质而不理会花朵本身的几何图形或其艺术价值,则这种墙纸图样的几何特性可用图 30-1(b)来表述。你若从任一点出发,便可通过沿箭头 1 的方向移动距离 a 而找到一个对应点。如果沿另一个箭头方向移动距离 b ,那么你也可获得一对应点。当然,还有许多其他方向。例如,你可以从 α 点至 β 点而达到一个对应点,但这样的一步可认为是这样两步的组合,即沿方向 1 的一步,接着又沿方向 2 的一步。这个图样的一种基本性质就是可以由达到邻近同样位置的两个最短步长来描述。所谓“同样”位置我们指的是若你站在其中一个位置上而眺望你的周围,你将看到的事情与你站在

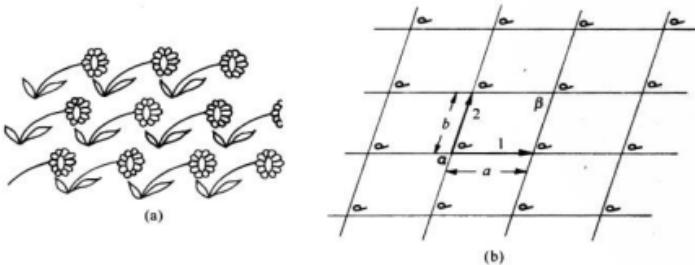


图 30-1 在二维中的一个重复图样

另一个位置上所看到的完全相同，这就是晶体的基本性质。唯一不同在于，晶体是一种三维排列，而不是二维排列；而其格点的每个基元自然就不是那些花朵，而是某些原子——也许是六个氢原子和二个碳原子——在某个图样中的某种排列。晶体中原子的图样在实验上可以通过X射线衍射而找到。由于以前我们曾简短地提到过这种方法，并且对于大多数简单晶体和某些相当复杂的晶体来说，它们的原子在空间中的精确排列都已经被计算出来，现在就不再赘述了。

晶体的内在图样会在不同方面显示出来。首先，原子在某些方向的结合强度往往比其他方向的要强，这意味着通过晶体的某些平面会比另一些平面更易于裂开，它们被称为解理面。如果你用一小刀刃劈裂一块晶体，它往往会沿这样的面破裂开来。其次，根据晶体的形成方式，其内部结构还往往表现在其表面上。试想象晶体正从溶液中沉淀出来。有一些原

子会在溶液里各处漂浮，而最后当它们找到一个能量最低的地方时就沉淀下来（这好像墙纸逐渐制成的情形，花朵到处漂浮，直到其中一朵偶尔漂到一个地方而给逐渐粘住，之后一个又一个花朵都给粘住，使得该图样逐渐生长起来）。你将体会到，其中一些方向的生长速率与其他方向的不同，因而长成某种几何形状。由于这种效应，许多晶体的外表就会呈现原子内部排列的某些特征。

例如，图30-2(a)显示一块典型石英晶体的形状，它的内部图样为六角形。如果你仔细地考察这样一块晶体，你将会注意到，它的外表并不会形成很好的六边形，因为那些边并非完全等长——事实上，它们往往很不一致。但在一个方面石英晶体却是十分完美的六边形，两面间所形成之角恰好是 120° 。很清楚，任一个特定面的大小是生长中的一个偶发事件，但角度却是其内禀几何的一种表示。所以每一块石英晶体各有其不同形状，即使各对应面之间的角度总是相同的。

一块氯化钠晶体的内禀几何，从其外表形状来看，也是很显然的。图30-2(b)表示一块典型食盐的形状。这种晶体不再是理想立方体，但其表面间却严格互相垂直。

一种更为复杂的晶体是云母，它的形状示如图30-2(c)所示。它是一种高度各向异性的晶体，并从这么一个事实就容易看得出来，即如果你试图在一个方向（图中的水平方向）上拉断它，它表现出十分坚韧，但在另一个方向（垂直方向）上就很容易把它拉裂开来。它常被用来获得十分坚韧的薄片。云母和石英是两种含有硅的天然矿物样品。第三种含硅矿物样品则是石棉，它具有这么一种有趣性质，即在两个方向上它很容易被拉开，但在第三个方向上就不是这样，它表现为由十分坚韧的线状纤维所构成。

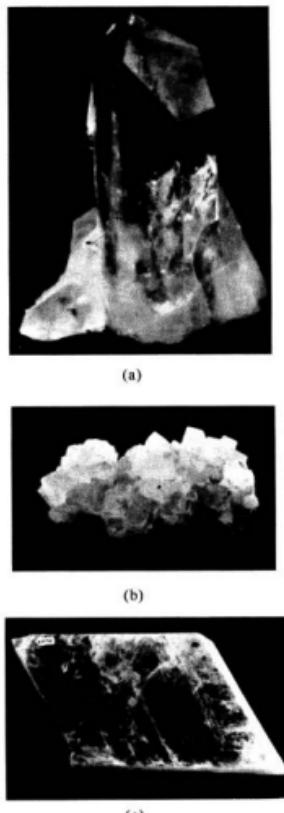


图30-2 天然晶体：(a)石英；(b)氯化钠；(c)云母。

§ 30-2 晶体中的化学键

晶体的机械性质显然取决于原子间化学成键的类型。云母沿不同方向明显不同的强度取决于在不同方向原子间成键的类型。无疑，你已经在化学中学到了不同种类的化学键。首先，有离子键，正如我们对于氯化钠所做过的讨论。一般说来，钠原子失去了一个电子而变成正离子，氯原子则获得了一个电子而变成负离子。这些正离子和负离子给安排在一个三维的棋盘内并由电力把它们维系在一起。

共价键——其中电子为两个原子所共有——更为常见而且一般非常强。例如，在金刚石中，碳原子在到其最近邻的所有四个方向上都有共价键，因而这种晶体确实十分坚硬。在石英晶体中，硅与氧间也有共价成键，但那里的键实际上只是部分共价。由于不存在电子的完全共性，所以那些原子部分带电，因而该晶体有点是离子性的了。大自然并不像我们试图要它变成那么简单就那么简单，实际上，在共价键与离子键之间还有一切可能的(成键)层次。

糖晶体还有另一种成键类型，其中存在大型分子，大型分子中的原子通过共价键强有力地结合在一起，因而每个分子就是一个坚固的结构。但由于那些强键都已完全被满足，所以就只存在分开的、各个分子之间的相对微弱的吸引力了。在这种分子晶体中，分子们会保持它们单独的身分，而其内部排列也许像图 30-3 所示。由于分子间并不彼此强有力地互相维系着，这种晶体就很容易破裂。它们与金刚石很不相同，后者实际上是一个巨大分子，如果不破坏其强有力的共价键，就不可能在任何一处使其破裂。石蜡是分子晶体的另一个例子。

分子晶体的一个极端例子存在于一种像固态氩的物质中。这种物质的原子之间只有十分微弱的吸引力——每个原子就是一个完全饱和的单原子分子。但在非常低的温度下，热运动十分微弱，因而原子间微小的力就能导致原子沉积成像一堆紧密堆积起来的球体那样整齐排列。

金属构成一类完全不同的物质，其成键属于完全不同的类型。在金属中，成键并非在相邻原子间进行，而是整个晶体的一个属性。那些价电子并不是附属于一个或一对原子而是为整个晶体所共有。每一原子对公共的电子海贡献出一个电子，而那些原子型的正离子则驻留在这个负电子海里。这个电子海像某种胶质一样把离子结合在一起。

在金属中，由于不存在任何特殊方向上的特别的键，所以在成键中就不会有强有力的方向性。然而，它们仍然是晶体，因为当那些原子型离子被安排成某个确定的阵列时其总能量最低——尽管这个优选排列的能量往往不会比其他可能的排列的能量低得太多。对于一级近似来说，许多金属的原子就好像是尽可能紧密地堆积起来的一堆小球。

§ 30-3 晶体生长

试想象地球中晶体的自然形成情况。在地球表面存在着各种各样原子组成的大混合

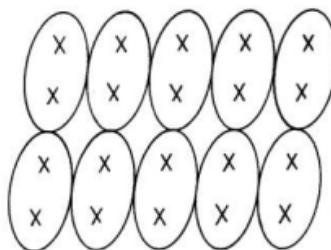


图 30-3 分子晶体的点阵

物，它们不断受到火山活动、风和水的搅拌——不断地被激起运动及互相混合。可是，通过某种方法，硅原子逐渐开始找到它的伙伴，并找到了氧原子，而形成石英。每次当一原子加进其他原子之中而建立晶体时——混合体就变成不混合了。而在附近某处，钠原子和氯原子又会互相彼此找到而建立起食盐的晶体来。

当晶体一旦开始形成，就只允许一种特殊类型的原子继续参加进去，这是怎么回事呢？之所以会这样，乃由于整个系统正在寻找最低的可能能量。一块正在生长的晶体将接受一个新原子，只要它使得能量尽可能低。但这块生长中的晶体怎么会知道当一个硅原子——或一个氧原子——处在某一特定位置时就会导致最低的可能能量呢？这是通过尝试法而做到的。在液体中，所有原子都处在永恒的运动之中。每一原子对其邻居每秒约要碰撞 10^{13} 次。如果它撞在生长晶体的正确位置上，倘若能量低下，那它再跳出来的机会就比较小。在数百万年以上的手中通过每秒 10^{13} 次连续不断的尝试，原子们便会在那些它们发现能量最低的地方逐渐堆积起来。最后，它们生长成一大块晶体。

§ 30-4 晶 格

晶体中原子的排列——晶格——可以取许多种几何形态。我们愿意先来描述那些最简单的晶格，它们是大多数金属以及由惰性气体所形成的固体的特征。它们是能够以两种形式存在的立方晶格：如图 30-4(a)所示的体心立方，与如图 30-4(b)所示的面心立方。当然，图上所示的只是晶格中的一个立方，你得想象这种图样在三维中被无限地重复着。并且，为了使画面比较清楚，只表示了原子的中心。但在一实际晶体中，原子更像是互相接触着的球体。图中的实心球和空心球，一般说来，可以代表异类原子，也可代表同类原子。例如，铁在低温时具有体心立方晶格，但在高温时则形成面心立方晶格。在这两种结晶形态中其物理性质很不相同。

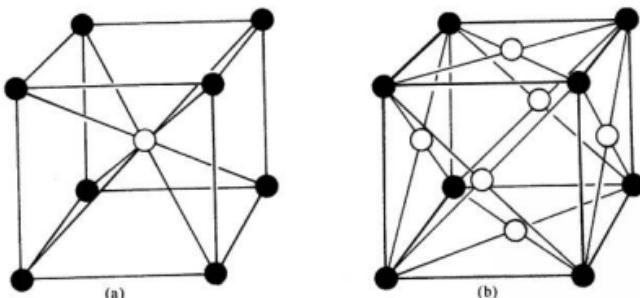


图 30-4 立方晶体的晶胞：(a)体心立方；(b)面心立方

这样的形态是怎样得来的呢？试设想你有一个要把球形原子堆积成尽可能紧密的问题。一种办法可能是开始通过造成一个“六角密堆积排列”中的一层，如图 30-5(a)所示。然后你就会建立与第一层相似的第二层，但在水平方向上作位移，如图 30-5(b)所示。此后，你还可放上第三层。但要注意！安放第三层有两种显然不同的方式。若你通过放一个原子于图 30-5(b)的 A 处而开始第三层，则这个第三层中的每一原子就正好位于底层的一

个原子之上。另一方面,如果你通过放一个原子于位置 B 而开始第三层,则这个第三层的原子将恰恰被置在由底层的三个原子所形成的三角形的中心点上方。任何其他的初始位置都相当于 A 或 B ,从而就只有这两种安放第三层的方式。

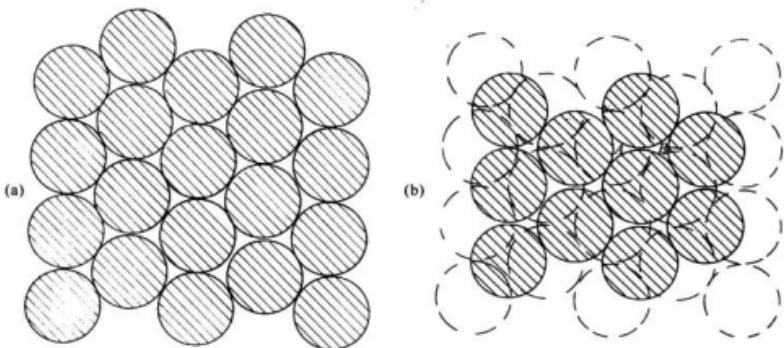


图 30-5 建立一个六角密排点阵

如果第三层有一个原子位于 B 点,则这种晶格就是面心立方——不过是从一个角度看。似乎很有趣,本来你是从一个六角形开始的,但到头来却得到一个立方体。可是要注意,若从角隅去看,一个立方体就会有六角形的轮廓。比方,图 30-6 就可以代表一个平面上的六角形或一个透视中的立方体!

如果第三层是通过把一个原子放在 A 点上而叠加于图 30-5(b)上,则不会有立方结构,这个晶格此时只有六角对称。很清楚,我们刚才所述的这两种可能性都是属于密堆积。

某些金属——诸如铜和银——选择第一种可能性,即面心立方。其他——例如铍和镁——则选取另一种可能性,它们形成六角晶体。很明显,将出现哪一种晶格,不能仅仅取决于小球的堆积,也必须部分地由其他因素确定。特别是,这有赖于原子间作用力的少量剩余的角依存关系(或对于金属而言,则有赖于该电子海的能量)。你无疑会在化学课中学到所有这些东西。

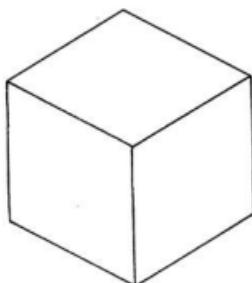


图 30-6 从一个角上去看,这是个六角形还是个立方体?

§ 30-5 二维对称性

我们现在愿意从内禀对称性的观点来讨论晶体的某些性质。晶体的一个主要特点是:若你从某一原子出发而移过一个晶格单位到达一个对应原子,则你将再处在同样一种环境中,这是基本命题。但假如你是一个原子,也许还有另一种变化能够把你再带到同样一种环境——这就是说,存在另一种可能的“对称性”。图 30-7(a)显示另一种可能的“墙纸型”设

计(虽则你可能从未见过)。假设我们要来比较 A 和 B 两点的环境。起初,你也许认为它们彼此相同——但又不完全相同。C 和 D 两点与 A 是等效的,但 B 点的环境只有在经过了倒转,诸如在镜面中的反射,才会像 A 的环境。

在这一图样中还有其他类型的“等效”点。比如，点 E 和 F ，除了一点相对另一点转过 90° 之外，它们具有“相同”环境。这一图样很特别。环绕顶点诸如 A 旋转 90° 或 90° 的任一整数倍，会再给出一个完全相同的图样。一块具有这种结构的晶体在其外表看来该有正方的棱角，但其内部比简单立方稍微复杂。

现在已描述了某些特殊例子,让我们尝试算出晶体具有的一切可能的对称性。首先,我们考虑在一个平面上发生的情况。一个平面晶格可以通过两个所谓基矢来定义,这两个矢量是从晶格中的一点指向两个最邻近的等效点的。图 30-1 中那两个矢量 \mathbf{l} 和 $\mathbf{2}$ 就是该晶格的基矢。图 30-7(a)中的 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 两矢量则是那种图样的基矢。当然,我们尽可以用 $-\mathbf{a}$ 来代替 \mathbf{a} ,或用 $-\mathbf{b}$ 来代替 \mathbf{b} 的。由于 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的大小相等并互相垂直,所以 90° 角的转动会将 \mathbf{a} 变成 \mathbf{b} ,并将 \mathbf{b} 变成 $-\mathbf{a}$,这又给出相同的晶格。

我们看到存在一些具有“四次”对称性的晶格，而前面则已描述了一种密堆积排列，它是以具有六次对称性的六角形为基础的。对于图 30-5(a)中排列的圆圈，环绕任何一个圆心的一个

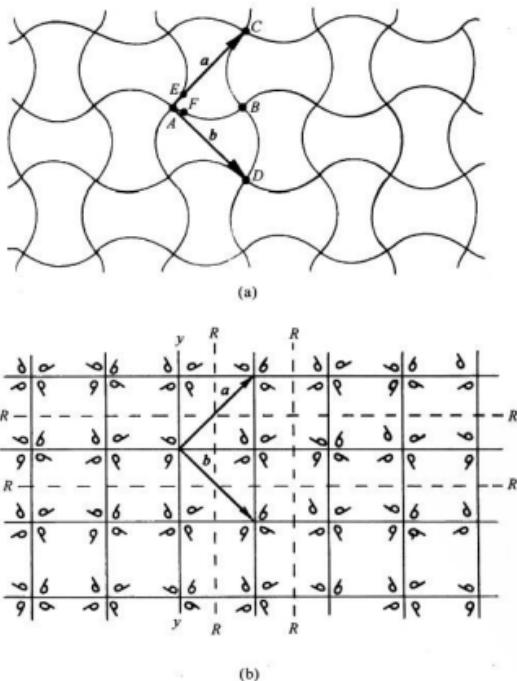


图 30-7 一个高对称性的图样

做一个 60° 角的转动将会把该图样转回到原来样子。

还有哪些其他类型的转动对称性呢？比方，能否有五次或八次转动对称性呢？很容易看出那是不可能的。多于四次的唯一一种对称性就是六次对称。首先，让我们来证明多于六次的对称是不可能的。假设我们试图想象一种晶格，其中的两个等长初基矢做成小于 60° 的内角，如图30-8(a)所示。我们必须假定：B和C两点各等效于A，而**a**和**b**便是从A点至其等效邻点的两个最短矢量。但这显然是错误的，因为在B与C两点间的距离比从其中任一点至A点的距离还要短。因此就必定有一个与A点等效的、而较B点或C点近的邻点D。我们本来就应当选取**b'**作为我们的初基矢之一，所以两个基矢所夹之角必然是 60° 或更大。八次对称根本没有可能。

关于五次对称又怎么样呢？若我们假定该初基矢**a**和**b**具有相等长度，并且做成一个等于 $2\pi/5 = 72^\circ$ 的角度，如图30-8(b)所示，那么在D处也就应有一个等效格点与C作成 72° 角。但此时从E至D的矢量**b'**比**b**短，因而**b**就不是一个初基矢了，这样五次对称就不可能存在。不至于使我们陷入这类困难中去的可能性只有 $\theta = 60^\circ, 90^\circ$ 或 $120^\circ, 0^\circ$ 或 180° 显然也都可能。对上述结果的一种提法是：通过转动一个整圈（即完全不变动）、半圈、三分之一、四分之一或六分之一圈，图样能够保持不变。而这些就是在一平面上所有可能的转动对称性——总共有五种。如果 $\theta = 2\pi/n$ ，我们就说这是一个“n次（度）”对称性。我们说，一个n等于4或6的图样比一个n等于1或2的图样具有“较高的对称性”。

回到图30-7(a)，我们看到这个图样具有四次转动对称性。在图30-7(b)中曾画出一个与图(a)具有相同对称性的另一个图样。那些像逗点模样的小图形是用来在每个方块中定义该图样对称性的一个不对称的东西。注意在相邻方块中的逗点都是彼此反转的，因而单胞比每一方块要大。假如没有那些逗点，该图样仍然会有四次对称，但单胞就会小些。图30-7的图样也还有别的对称性。例如，对任何虚线R-R的反映会再产生相同的图样来。

图30-7的图样还有另一类对称性。若该图样对Y-Y线反映并向右（或向左）移过一个方块，则我们将得到原来的图样。这Y-Y线称为“滑移”线。

这些就是在二维中所有的可能对称性。还有一种空间对称操作，它与在二维中的 180° 转动等效，但在三维中却是一个很特殊的操作，这就是反演。所谓反演我们意指从某一原点[比方，图30-9(b)中的A点]做出的位移矢量**R**所指的任一点被移至 $-R$ 的另一点。

图30-9的图样(a)通过反演产生出一个新的图样，但图样(b)的反演又再产生出相同的图样。对于一个二维图样来说（正如你可以从图上看出来的），通过A点对图样(b)的反演与环绕同一点做 180° 的转动等效。然而，假设通过想象将每一小逗点都各加上一个

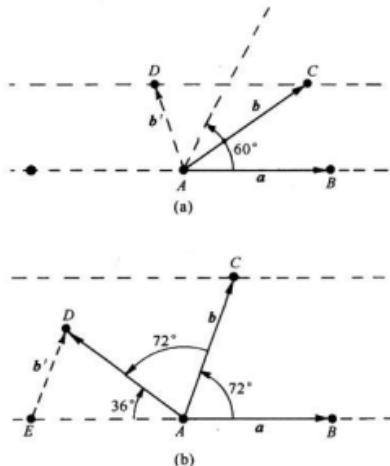


图30-8 (a)多于六次的转动对称是不可能的；
(b)五次转动对称性也没有可能

从页面上指出来的“箭头”以便使图 30-9(b)的图样变成个三维的图样。在经历了三维中的反演之后，所有的箭头都将倒向，因而该图样就不会再现。若我们分别用点和叉来代表箭头和箭尾，则能造成一个如图 30-9(c)所示的那种三维图样，在反演下它是不对称的，或者造成一个像图(d)所示的图样，那就具有反演对称性了。注意，用转动的任何组合来模拟三维中的反演是不可能。

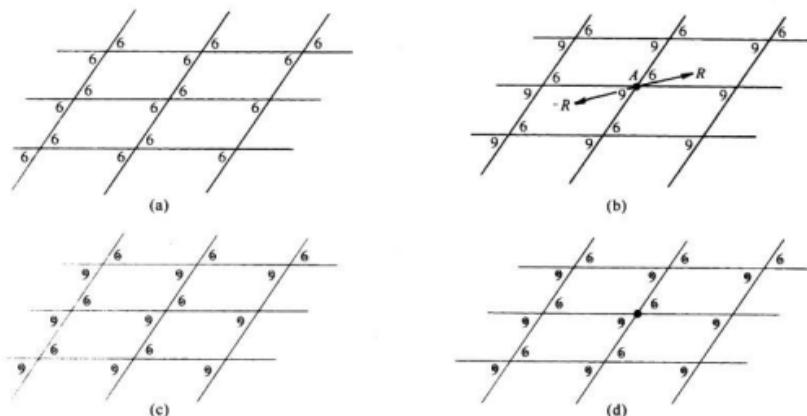


图 30-9 反演对称性。若把 R 变成 $-R$ ，图样(b)将保持不变，但图样(a)却将改变。在三维中，图样(d)具有反演对称性而图样(c)则没有

如果我们用刚才所描述的那些类型的对称操作来标志一个图样——或晶格——的“对称性”，那么结果弄清楚，对于二维可能有 17 种不同的图样。我们曾在图 30-1 中画出一个对称性可能最低的图样，而在图 30-7 中又画出一个对称性高的图样。把 17 种可能图样都画出来，作为游戏留给你们。

在这 17 种可能的图样中，只有寥寥几种才被用来制作墙纸和织物，那是有点奇怪的。人们始终只看到那三四种基本图样。这是因为设计者缺乏想象力，还是因为许多可能的图样都不悦目呢？

§ 30-6 三 维 对 称 性

迄今我们所谈到的都只是有关二维的图样。然而，我们实际感兴趣的却是三维中的原子图样。首先，很明显的就是一块三维晶体将具备三个基矢。于是，如果我们问起在三维中的可能的对称操作，则将发现共有 230 种不同的可能对称性！为了某些目的，这 230 种类型还可归纳成七类，它们绘在图 30-10 中。那对称最少的一种晶格称为三斜类，它的单胞是平行六面体。基矢的长度各不相同，而它们间的夹角也不会有任何两个相等，所以没有任何转动或反映对称的可能。然而，仍然有两种可能的对称性——即通过对顶点的反演能使单胞改变或不改变[在三维中所谓反演我们的意思仍然是空间位移 R 由 $-R$ 代替——换句话说，

就是从 (x, y, z) 变成 $(-x, -y, -z)$]。因此,三斜晶格就只有两种可能的对称性,除非在那些基矢之间存在某种特殊关系。例如,若所有的基矢长度都相等并以相同角度分隔开,则人们便有图中所示的三角晶格。这个图形可以有一个附加的对称性,通过对体内的长对角线的转动它可以保持不变。

如果其中一个基矢,比如说 c ,垂直于其他两个,则我们得到一个单斜的单胞。一个新的对称性成为可能——就是围绕着 c 转过 180° 。六角单胞是一种其中 a 和 b 两矢量长度相等而其夹角则为 60° 的特殊情况,因而围绕着 c 所作的 60° 、 120° 或 180° 转动就重复相同的晶格(对于某些内禀对称性而言)。

如果所有三个基矢都互成直角,但长度不同,则将得到一个正交单胞。这一图形在环绕那三根轴中任一根轴转过 180° 时都是对称的。对于其中三个基矢都互相正交而其中又有两个彼此等长的四方单胞,则可能有较高级的对称性。最后,还有立方单胞,那就是所有晶体之中对称性最多的了。

全部关于对称性的这种讨论其要点在于晶体的内禀对称性,有时会以巧妙的方式表现在晶体的宏观物理性质中。例如,晶体一般都有一个张量性电极化率,如果我们用极化椭球来描写该张量,则应当预期某些晶体对称性也可能会表现在该椭球中。例如,立方晶体相对于围绕三个正交方向之一的 90° 转动都是对称的。很明显,具有这种性质的唯一椭球就是圆球。因而立方晶体就必然是各向同性的电介质。

另一方面,四方晶体具有四次转动对称性,所以它的椭球就必定具有两个等长的主轴,而其第三根轴必与晶轴平行。同理,由于正交晶体对三根正交轴都有二次转动对称性,所以它的这些轴就必然与极化椭球的轴相合。与此相似,单斜晶体中的一根轴必然平行于这一椭球的三根主轴之一,尽管我们对其他两轴不能说些什么。由于三斜晶体不具有转动对称性,所以其椭球就可以具有完全任意的取向了。

正如你所能见到的,对算出各种可能对称性并将其与各种可能的物理张量联系起来,我们可以进行一场大的游戏。刚才仅仅考虑了极化张量,但对于其他张量——比如弹性张量——事情就会变得更加复杂。有一门称为“群论”的数学分支就是与这些课题打交道的,但通常用常识也能解决你所需要的问题。

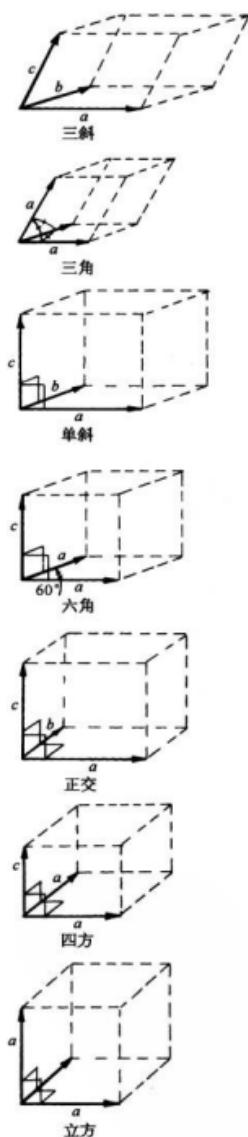


图 30-10 七大类晶格

§ 30-7 金 属 强 度

我们已经说过，金属通常具有一种简立方的晶体结构，现在要来讨论它们的力学性质——那是与这一结构有关的。一般而言金属十分“柔软”，因为很容易使金属晶体中的一层在另一层上滑动，你可能会认为：“那是滑稽可笑的，金属很强硬嘛。”这可不然，因为金属单晶是很容易变形的。

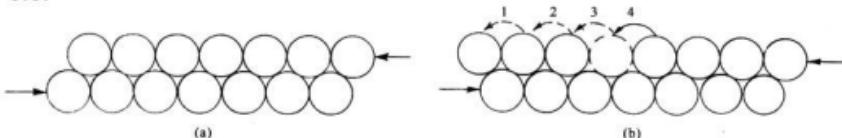


图 30-11 晶面滑移



图 30-12 一小块铜晶体受拉伸之后的照片

假设我们考察晶体中受切向力作用的两层，如 30-11 的简图所示。起初你也许会想到，整层原子会阻碍运动直到所施之力大到足以推动整层“越过隆起”，从而向左移过一个峡谷。尽管滑移的确会沿一个平面发生，但实际却不是那样的（假如是那样的话，你会算出金属比实际的强度要强得多）。实际发生的情况更像是每次只有一个原子在移动，首先左边那个原子跳了过去，然后又轮到第二个、第三个等等，如图 30-11(b) 所示。事实上，是两个原子间的空穴迅速跑到右边，而净结果则是整个第二层都已移过了一个原子间隔。滑移就是这样进行的，因为每次要把一个原子抬高越过一个隆起所需的能量远低于把整排原子都抬起来所需的能量。一旦力足以启动这一过程，其余的就进行得非常快了。

结果证明：在一实际晶体中，滑移将在一个平面上重复发生，然后就在那里停顿下来，却又在某另一个面上开始。滑动为什么会开始和停止，其细节十分神秘。事实上，滑移相继发生的区域，往往被相当均匀地分隔开，这就很奇怪了。图 30-12 显示一块细长的铜晶体在受到拉伸后的照片，你能够看到滑移发生的那些不同平面。

如果你把一根其中存在一些大晶体的细锡线拿到耳边，并拉伸它时，则个别晶面的突然滑移会很明显。当那些滑移面一个接着一个地一声移至一个新的位置上去时，你会听到一大堆嗒嗒声。在一排原子中出现一个“空位”的问题也许比按照图 30-11 所示的情形较难实现。当有更多的

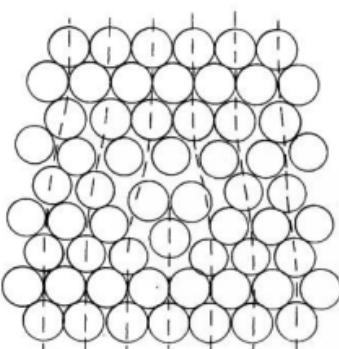


图 30-13 晶体中的一个位错

层时,情况就必然有点像图 30-13 所示的那样。晶体中这样的一种不完整性叫做位错。推測这种位错或是在晶体形成时就存在,或是在其表面的某些切口或裂缝处产生,一旦它们产生了,就能够相当自由地在晶体里移动。由于大量这样的位错的运动就形成了宏观的畸变。

位错能够自由运动——这就是说,它们要求极少量的额外能量——只要晶体的其余部分都具有理想晶格。但如果位错碰到晶体中别种缺陷的话可能会给“粘住”。若要位错通过这种缺陷则需要很大能量,否则运动就会停歇。这恰好就是赋予不完整金属晶体以强度的机制。纯铁本来很软,但微小浓度的杂质原子就可以引起足够多的缺陷来有效地束缚住位错。正如你所知道的,钢基本上就是铁,却十分坚硬。要炼成钢,就把小量碳溶解在铁水中了,如果这熔体迅速冷却,碳便会沉淀成小晶粒,在晶体里引起了许多微观畸变。位错不能再到处移动,因此金属就变硬。

纯铜十分柔软,但可以进行“加工硬化”。这是通过锤打或来回弯曲而做到的。在这种情况下,许多新的各类位错形成了,从而彼此互相干扰,减低了它们的可动性。也许你曾看过这样一种特技,取一条“极软”的铜带轻轻地将其弯曲成围绕在某人腕上的手镯。在这一过程中,铜镯受到加工硬化,便不能轻易地再被伸直!像铜这样受过加工硬化的金属,可以通过高温退火而再变软。原子的热运动把那些位错都“熨平”了,并再形成一些大块单晶。我们迄今仅仅描述了那种所谓滑移位错。还有许多其他种类,其中之一就是如图 30-14 所示的那种螺旋位错。这种位错经常在晶体生长中起着重要作用。

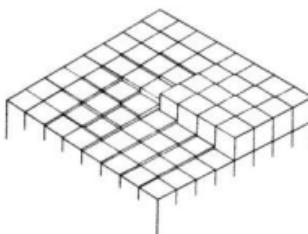


图 30-14 螺旋位错

§ 30-8 位错与晶体生长

长期以来一个重大难题就是晶体如何才能合理生长。我们已描述过每一原子也许是在经过了反复试验之后才决定是否最好加入到晶体中去。但这就意味着每个原子必须找到一个能量低的地方。然而,被置在一个新的表面上的原子只受到来自其下面的一个或两个化学键结合,而不会具有与被放在一个角落里受到三面原子包围时所具有的相同能量。假设我们把一块正在生长的晶体想象为如图 30-15 所示的一堆木块。若试图把新的一块放置在比如 A 的位置上,它将仅有最终可能得到的六个邻居中的一个。既然缺少那么多的键,因此它的能量便不会很低。但若放在位置 B 上那就会好得多,那里已具备全部化学键的一半份额。晶体的确是通过把新的原子吸附在像 B 那样的位置上而生长起来的。

然而,当这一行完成后又将如何呢?为开始新的一行,结果一个原子必须仅由两个附着的侧面来承担,而这又不太可能了。即使真的是这样,当全层结束了又该如何呢?怎能开始一个新的层呢?一个答案是:晶体喜爱在位错处生长,比如围绕一个如图 30-14 所示的那种螺旋位错生长。当一些块块加到晶体之上时,总会有这样的地方,那里存在三个可使用的化学键。因此,晶体喜欢同内部的位错生长在一起。这种生长的螺旋形图样如图 30-16 所示,那是一块石蜡单晶的照片。

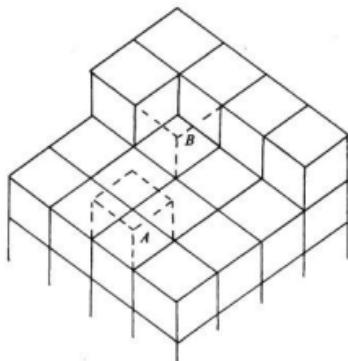


图 30-15 晶体生长

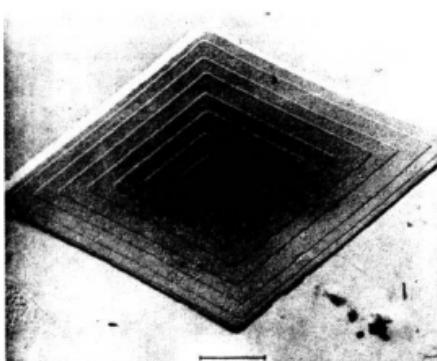


图 30-16 一块曾围绕着一个螺型位错而生长起来的石蜡晶体

§ 30-9 布拉格-奈晶体模型

我们当然不能看到各个原子在晶体中所经历的过程。并且,正如你现在所认识的,有许多复杂现象是不容易作定量处理的。布拉格爵士和奈曾想出一种方案来制作金属晶体的模型*,这种模型能以令人惊奇的方式表现出许多据信是在实际金属中发生的现象。

* 原书复制了这种模型的原始文献(*Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 190, September 1947, pp. 474~481)。由于此附件过于繁复,没有译出。——译者注

第 31 章 张量

§ 31-1 极化张量

物理学家总有这么一种习惯，即取任何现象的最简单例子并称之为“物理学”，而把那些更复杂的例子留给其他学科——诸如应用数学、电工学、化学、晶体学等——去处理。甚至固体物理几乎只算得半个物理学，因为它对一些特殊物质操心得太多。所以在这些讲演中我们将常常漏掉许多有趣的东西。例如，晶体——或大多数物质——的重要性质之一就是它的电极化率在不同方向上并不相同。如果你在任一方向加上电场，则原子的电荷将会移动一点点而产生出一个电偶极矩，可是这偶极矩的大小在很大程度上却取决于场的方向。当然，这是相当复杂的。但在物理学中我们一般通过谈论极化率在一切方向都相同的特殊情况开始，目的在于使生活过得容易些。其他情况则都留给别的部门。因此，在这一章中将要论及的东西，对于我们今后的工作来说是完全不需要的。

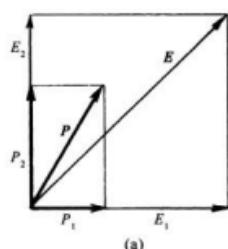
张量数学对于描述随方向而变的那些物质性质特别有用——尽管这只是其用途的一个方面。由于你们中大多数人不准备成为物理学家，但将会进入各种事态都与方向密切相关的现实世界中，所以你们迟早需要用到张量。为了不遗漏任何东西，我们即将描述张量，即使不是十分详尽也罢。你们要有物理学处理问题是完整的那种感觉。例如，我们的电动力学是完整的——正如同任何电磁学课程甚至研究院课程那么完整。我们的力学不够完整，因为当过去学习力学时，你们还不具备高水平的数学技巧，因而不能讨论像最小作用原理、拉格朗日函数、哈密顿函数等那类课题，这些都是描述力学的更精致的方法。然而，除了广义相对论之外，我们的确已有了一整套力学定律。我们的电磁学是完整的，而一大堆其他东西也很完整。自然，量子力学还谈不上——我们得留一些东西在后头。可是，你至少应该知道张量是什么。

我们曾在第 30 章中强调过，结晶物质的特性在不同方向上是不同的——我们说它们是各向异性的。感生偶极矩随所加电场的方向而改变的情况，只是我们将作为张量应用的一个例子。我们讲，对于某个给定方向的电场，单位体积内的感生偶极矩 \mathbf{P} 与这外加电场 \mathbf{E} 的强度成正比（如果 \mathbf{E} 不太大，这对于许多物质来说都是个很好的近似）。我们将称这个比例常数为 α^* 。现在要来考虑 α 与外加场方向有关的那类物质，诸如像方解石那样的晶体，当你通过它看物体时会看到双像。

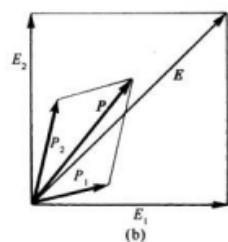
假定在某一特定晶体中，我们已发现在 x 方向的电场 \mathbf{E}_1 在 x 方向产生一个极化强度

* 在第 10 章中，我们曾按照通常惯例并写出 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ ，而称 χ (“khi”) 为“电极化率”。这里采用一个单独字母将更方便，所以就把 $\epsilon_0 \chi$ 写成 α 。对于各向同性的电介质来说， $\alpha = (\kappa - 1)\epsilon_0$ ，其中 κ 为介电常量（见 § 10-4）。

P₁。然后又发现在 y 方向有一个与 E_1 同等强度的电场 E_2 , 却在 y 方向产生一个不同的极化强度 P_2 。如果我们把电场置于 45° 角上又将如何呢? 噢, 那是沿 x 与沿 y 两种场的叠加, 因而极化强度 \mathbf{P} 便将是 \mathbf{P}_1 与 \mathbf{P}_2 的矢量和, 如图 31-1(a) 所示。极化强度不再与电场同方向了。你可以看出这结果如何才会出现。可能有些电荷很容易上下移动, 但对于侧向运动则相当困难。当力作用于 45° 角时, 电荷就会向上动得比向侧面远一些。位移并不沿外力方向, 因为存在非对称的内部弹性力。



(a)



(b)

图 31-1 在一块各向异性的晶体中, 极化强度的矢量加法

当然, 对于 45° 并没有什么独特意义。晶体的感生极化强度不在电场的方向上是普遍正确的。在上述例子中, 我们碰巧对于 x 和 y 轴做了一个侥幸选择, 即对该两轴来说 \mathbf{P} 都沿着 \mathbf{E} 。要是晶体相对于坐标轴有了转动, 则在 y 方向上的 E_2 就可能产生一个含有 x 分量也含有 y 分量的极化强度 \mathbf{P} 。同理, 起因于 x 方向电场的极化强度也会有 x 和 y 两个分量。那么极化强度就该如图 31-1(b) 所示, 而不再像(a)那种模样了。事情变得较为复杂——但对于任何场 \mathbf{E} 来说, \mathbf{P} 的大小仍然正比于 \mathbf{E} 的大小。

我们现在要处理晶体相对于坐标系有任意取向的那种普遍情况。沿 x 方向的电场将产生一个具有 x , y 和 z 各分量的极化强度 \mathbf{P} , 我们可以写为

$$P_x = \alpha_{xx} E_x, \quad P_y = \alpha_{yx} E_x, \quad P_z = \alpha_{zx} E_x. \quad (31.1)$$

这里我们正在讲述的一切就是: 若电场处在 x 方向, 则极化强度不一定在同一方向, 而是含有 x , y 和 z 各分量——每个分量都正比于 E_x 。我们分别称这些比例常数为 α_{xx} , α_{yx} 和 α_{zx} (第一个字母告诉我们 \mathbf{P} 包含的分量, 末一个字母则表明电场的方向)。

同理, 对于一个沿 y 方向的场, 我们可以写成

$$P_x = \alpha_{xy} E_y, \quad P_y = \alpha_{yy} E_y, \quad P_z = \alpha_{zy} E_y; \quad (31.2)$$

而对于一个沿 z 方向的场, 则有

$$P_x = \alpha_{xz} E_z, \quad P_y = \alpha_{yz} E_z, \quad P_z = \alpha_{zz} E_z. \quad (31.3)$$

原来我们已经说过, 极化强度线性地依赖于场, 因而若有一个兼有 x 和 y 分量的电场 \mathbf{E} , 则最后得到的 \mathbf{P} 的 x 分量将等于式(31.1)和(31.2)的两个 P_x 之和。如果 \mathbf{E} 具有沿 x , y 和 z 的各分量, 则最后得到的 \mathbf{P} 的分量将等于式(31.1)、(31.2)和(31.3)的三个贡献之和。换句话说, \mathbf{P} 将由下列诸式给出:

$$\begin{aligned} P_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z, \\ P_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z, \\ P_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (31.4)$$

于是晶体的介电行为就由这九个量(α_{xx} , α_{xy} , α_{xz} , α_{yx} , \cdots)完整地描述, 我们可用 α_{ij} 这个符号来代表(每个下脚标 i 和 j 各代表三个可能字母 x , y 和 z 中的任一个)。一个任意电场 E 可以分解为分量 E_x , E_y 和 E_z , 从这些我们就能够用 α_{ij} 来求出 P_x , P_y 和 P_z , 它们一起给出总极化强度 P 。由这九个系数 α_{ij} 构成的一组数称为张量——在本例中, 即指极化张量。正如我们所说三个数(E_x , E_y , E_z)会“构成矢量 E ”那样, 我们也可讲这九个数(α_{xx} , α_{xy} , \cdots)“构成张量 α_{ij} ”。

§ 31-2 张量分量的变换

你知道, 当我们变换到另一个坐标系 x' , y' , z' 时, E 矢量的分量 E_x' , E_y' 和 E_z' 将完全不同—— P 的分量也是如此。所以对于不同坐标系, 系数 α_{ij} 将不相同。事实上, 你可以通过用适当办法改变 E 和 P 的分量而看出那些 α 应该怎样被改变, 因为如果我们在该新坐标系里描述原来的物理电场, 就仍应得到原来的极化强度。对于任一个新的坐标系, P_x' 是 P_x , P_y 和 P_z 的一个线性组合:

$$P_x' = aP_x + bP_y + cP_z,$$

而对于其他各分量也是如此。如果你利用式(31.4)由那些 E 来代替 P_x , P_y 和 P_z , 则可获得

$$P_x' = a(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z) + b(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \cdots) + c(\alpha_{zx}E_x + \cdots + \cdots).$$

然后再用 E_x' , E_y' 和 E_z' 来写出 E_x , E_y 和 E_z , 例如

$$E_x = a'E_x' + b'E_y' + c'E_z',$$

式中 a' , b' , c' 与 a , b , c 有关, 但彼此不相等。因此你就有了以分量 E_x' , E_y' 和 E_z' 表示的 P_x' 的式子, 也就是说, 你已有一套新的 α_{ij} 。这一步骤相当繁复, 但却十分直截了当。

当谈论改变坐标轴时, 我们正假定晶体在空间保持不动。若晶体跟着坐标轴转动, 则那些 α 就不会改变。反之, 假如晶体的取向相对于坐标轴变了, 则我们就理应有一套新的 α 。但如果这些 α 对于晶体的任何取向为已知, 则对于任何其他取向就都可以通过刚才所述的那种变换求得。换句话说, 晶体的介电性质可以通过给出相对于任意选定的坐标系的极化率张量 α_{ij} 而做出完整的描述。正如我们可以把一矢量速度 $v = (v_x, v_y, v_z)$ 与一个粒子联系起来那样, 只要改变坐标轴就知道这三个分量将按照某一特定方式改变, 所以对于晶体来说, 我们也将它与它的极化张量 α_{ij} 联系起来, 如果坐标系改变, 则这九个分量将按照某一规定方式变换。

式(31.4)中所写出的 P 与 E 间的关系可以用更简洁的符号表示:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j, \quad (31.5)$$

这里应理解 i 代表 x , y 或 z , 而在求和符号中的 j 则取 $j = x$, y 和 z 。为了与张量打交道, 已经发明了许多种独特的符号表示法, 但每一种方法只对于有限几类问题较方便。一个共同的惯例是省略掉式(31.5)中的求和符号(\sum), 而留下一个默认: 每当同一个下脚标(这里是 j)出现两次时, 就要对它求和。由于我们对张量用得那么少, 所以就无需去关心采用任何这种独特的符号表示法或规则了。

§ 31-3 能量椭球

现在想要取得有关张量的某些经验。假定我们提出一个有趣问题：要使晶体极化需要多少能量（除了我们已知的电场中单位体积能量 $\epsilon_0 E^2 / 2$ 以外）？暂时考虑那些正在发生位移的原子电荷。使电荷移动距离 dx 所做的功为 $qE_x dx$ ，而倘若单位体积中有 N 个电荷，则所做总功为 $qE_x N dx$ 。但 $qNdx$ 又是单位体积中的偶极矩变化 dP_x ，因而单位体积所需的能量就是

$$E_x dP_x.$$

把场的三个分量所做的功合起来，就可得到单位体积的功为

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}.$$

由于 \mathbf{P} 的大小正比于 \mathbf{E} ，因此在使 \mathbf{P} 从 0 增大至 \mathbf{P} 时对单位体积所做的功就是对 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}$ 的积分。把这个功叫作 u_P ，就可写出

$$u_P = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{2} \sum_i E_i P_i. \quad (31.6)$$

现在可以根据式(31.5)用 \mathbf{E} 表示 \mathbf{P} ，因而有

$$u_P = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} E_i E_j. \quad (31.7)$$

这能量密度 u_P 是一个与坐标轴的选择无关的数值，因此是一个标量。这样，张量便有这么一种性质，即当它对其中一个下脚标（即对一个矢量）求和时，会给出一个新的矢量；而当它对两个下脚标（即对两个矢量）都求和时，则会给出一个标量。

张量 α_{ij} 实际上应称为“二阶张量”，因为它有两个下脚标。矢量——带有一个下脚标——是一阶张量，而标量——完全没有下脚标——则是零阶张量。因此我们讲，电场 \mathbf{E} 是一阶张量，而 u_P 则是零阶张量。有可能把张量的概念推广到三个或四个下脚标，因而形成了高于二阶的张量。

极化张量的下脚标取遍三个可能的数字，这是三维中的张量。数学家会考虑在四维、五维或更多维中的张量。我们在对电磁场的相对论性描述中已采用过一个四维张量 $F_{\mu\nu}$ （第 26 章）。

极化张量 α_{ij} 具有一个有趣的性质，即它是对称的，这就是说， $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ ，而对于任何对下脚标都是如此（这是实际晶体的一种物理性质，而对一切张量并不一定如此）。你可以通过在下述循环中计算晶体的能量变化而自己去证明那必然是正确的：(1) 在 x 方向加一电场；(2) 在 y 方向加一电场；(3) 除去沿 x 方向的场；(4) 除去沿 y 方向的场。现在晶体已回到原来出发时的那个状态，因而在极化过程中所做的净功必须回到零。然而，你能够证明，要此事成立， α_{xy} 必须等于 α_{yx} 。当然，相同种类的论证也可对 α_{xz} 等等进行。因而极化张量是对称的。

* 由电场产生极化而做的功，不应与永偶极矩 p_0 的势能 $-p_0 \cdot \mathbf{E}$ 互相混淆。

这也就意味着,极化张量可以通过只测量在不同方向上使晶体极化所需的能量而加以测定。假设我们加上一个只有 x 和 y 分量的 \mathbf{E} 场,那么按照式(31.7),就有

$$u_P = \frac{1}{2} [\alpha_{xx} E_x^2 + (\alpha_{xy} + \alpha_{yx}) E_x E_y + \alpha_{yy} E_y^2]. \quad (31.8)$$

仅用一个 E_x 场,就可以测定 α_{xx} ;仅用一个 E_y 场,则可以测定 α_{yy} ;若同时用 E_x 和 E_y ,两者,还可得到由含有 $(\alpha_{xy} + \alpha_{yx})$ 这一项而引起的附加能量。由于 α_{xy} 与 α_{yx} 相等,所以这一项为 $2\alpha_{xy}$,并且可以与能量联系起来。

式(31.8)的能量表示式具有漂亮的几何解释。假设我们问起对应于某一给定能量密度——比如说 u_0 ——该有什么样的场 E_x 和 E_y ,那恰好就是求解下列方程式的数学问题:

$$\alpha_{xx} E_x^2 + 2\alpha_{xy} E_x E_y + \alpha_{yy} E_y^2 = 2u_0.$$

这是一个二次方程,因此如果我们把 E_x 和 E_y 画成曲线,则这一方程的解便是在一个椭圆上的所有各点(图 31-2)(它必须是个椭圆,而不是一条抛物线或双曲线,因为任何场的能量总是正的而且是有限的)。具有分量 E_x 和 E_y 的矢量 \mathbf{E} 可以从椭圆的原点画到椭圆上,因此,像这样的一个“能量椭圆”就是使极化张量“形象化”的一种巧妙方法。

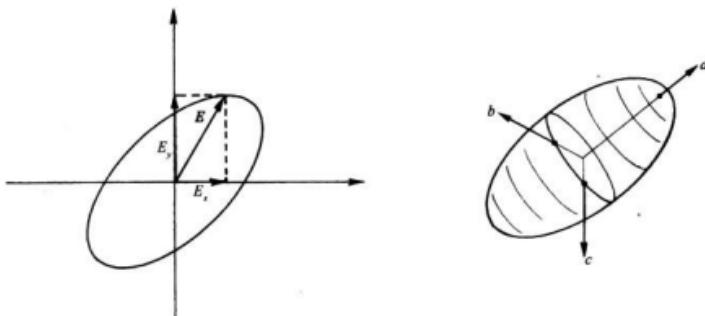


图 31-2 提供恒定极化能的矢量
 $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ 的轨迹

图 31-3 极化张量的能量椭球

如果我们现在推广至包括所有三个分量的情况,则所需在任何方向提供单位能量密度的电场矢量 \mathbf{E} 就会在椭球表面上给出一点,如图 31-3 所示。这个恒定能量椭球的形状唯一地表示着张量极化率的特征。

原来椭球具有这么一个有趣性质,即它总是可以简单地通过给出三个“主轴”方向以及沿这些轴的椭圆直径而加以描述。“主轴”的方向就是最长直径与最短直径的方向以及与两者都正交的另一方向。它们由图 31-3 中 a , b 和 c 三根轴所标明。相对于这些轴,椭球具有特别简单的方程

$$\alpha_{xx} E_a^2 + \alpha_{yy} E_b^2 + \alpha_{zz} E_c^2 = 2u_0.$$

因此,相对于这些轴,介电张量就只有三个不等于零的分量: α_{xx} , α_{yy} 和 α_{zz} 。这就是说,不管晶体如何复杂,总能够选取一组坐标轴(不一定是晶体本身的轴),在其中极化张量只有

三个分量。用这样一组坐标轴,式(31.4)便简单地变成

$$P_a = \alpha_{aa} E_a, P_b = \alpha_{bb} E_b, P_c = \alpha_{cc} E_c. \quad (31.9)$$

沿任何一个主轴的电场将产生沿同一个轴的极化,当然这三条轴的系数可能是不同的。

人们往往这样来描述张量,即把那九个系数列在一个方括号内:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}. \quad (31.10)$$

对于主轴 a, b 和 c 来说,只有那些对角线的项才不等于零,这时我们就说“张量是对角的”。整个张量为

$$\begin{bmatrix} \alpha_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{cc} \end{bmatrix}. \quad (31.11)$$

重要之处在于,任何极化张量(实际上,在任何维数中凡属于二阶的任何对称张量)都可以通过选取适当的一组坐标轴而写成这种形式。

若对角形极化张量的三个元素都相同,即如果

$$\alpha_{aa} = \alpha_{bb} = \alpha_{cc} = \alpha, \quad (31.12)$$

则能量椭球就变成圆球,极化率在所有方向都相同,这种材料就是各向同性的。在张量符号表示法中,

$$\alpha_{\bar{i}} = \alpha \delta_{\bar{i}}, \quad (31.13)$$

式中 $\delta_{\bar{i}}$ 为单位张量

$$\delta_{\bar{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (31.14)$$

当然,这意味着:

$$\delta_{\bar{i}} = 1, \quad \text{若 } i = j; \quad (31.15)$$

$$\delta_{\bar{i}} = 0, \quad \text{若 } i \neq j.$$

这个 $\delta_{\bar{i}}$ 张量通常称为“克罗内克 δ ”。你可以这样来自取乐,即证明:若把坐标系改变成任何其他的直角坐标系,则张量式(31.14)仍然具有完全相同形式。式(31.13)的极化张量会给出

$$P_i = \alpha \sum_j \delta_{\bar{i}} E_j = \alpha E_i,$$

这个式子意味着与我们以前关于各向同性电介质的结果

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$$

相同。

极化椭球的形状和取向有时可与晶体的对称特性联系起来。我们曾在第 30 章中说过,

三维晶格共有 230 种不同的可能内部对称性，而对于许多目的来说，它们可以按照单胞的形状方便地归纳成七类。现在这极化椭球就应该分享晶体的这些内禀几何对称性。例如，三斜晶体具有低级对称——其极化椭球将有互不等长的轴，而每一轴的方向一般都没有与晶轴排成一线。另一方面，单斜晶体具有这样的特性，即如果晶体对其中的一轴转过 180° ，它的性质不会改变。所以在经过了这样一个转动之后极化张量应仍然相同。结果是，极化椭球在经过了 180° 转动后就必须回到其本身，这只有在该椭球的一根轴与晶体的对称轴的方向相同时才能发生。除此之外，这个椭球的取向和大小都不受限制。

可是对于正交晶体，该椭球的诸轴就必须都对应于各晶轴，因为围绕三个轴中任一轴的 180° 转动都将重复同一晶格。如果我们涉及四方晶体，则椭球必须具有相同的对称性，因而就必然会有两根相等的直径。最后，对于立方晶体来说，椭球的所有三根直径都必须等长，它变成了一个球，而晶体的极化率在所有方向就都相同。

对晶体的一切可能对称性算出各种可能有的张量类型将是一场大型游戏，这称为“群论”分析法。但对于极化张量的简单情况，要看出其中关系应该会怎么样，还是相对容易的。

§ 31-4 其他张量；惯量张量

还有许多其他张量的例子出现在物理学中。例如，在金属或任何导体中，人们经常发现电流密度 j 近似地正比于电场 E ，比例常数称为电导率 σ ：

$$j = \sigma E.$$

可是，对于晶体来说， j 与 E 的关系就比较复杂了；电导率并非在所有方向都是一样的。电导率乃是一个张量，因而可以写成

$$j_i = \sum \sigma_{ij} E_j.$$

物理张量的另一个例子是转动惯量。在第 1 卷第 18 章中我们曾经见过，一块固体绕某一固定轴旋转时就有一个与角速度 ω 成正比的角动量 L ，而我们称这个比例因数 I 为转动惯量：

$$L = I\omega.$$

对任意形状的物体，转动惯量与物体相对于转动轴的取向有关。例如，一块矩形板对于它的三个正交轴的转动惯量就各不相同。现在角速度 ω 和角动量 L 两者都是矢量。对于绕每一根对称轴的转动，它们彼此互相平行。但如果对于三根主轴转动惯量各不相同，则一般说来， ω 和 L 就不会在同一个方向上（图 31.4）。它们以类似于 E 和 P 间关系的方式互相联系着。一般说来，我们应当写出

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z, \end{aligned} \quad (31.16)$$

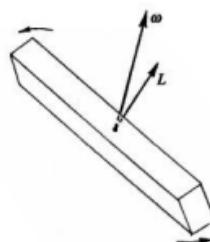


图 31-4 一般说来，一块固体的角动量 L 并不平行于其角速度 ω

这九个系数 I_{ij} 称为惯量张量。按照与极化的类似性，任何角动量的动能理应为角速度分量 ω_x , ω_y 和 ω_z 的某种二次型：

$$KE = \frac{1}{2} \sum_i I_{ij} \omega_i \omega_j. \quad (31.17)$$

我们可利用能量来定义惯量椭球。并且，关于能量的论证也可用来证明该张量是对称的，即 $I_{ij} = I_{ji}$ 。

若一刚性物体的形状为已知，则该物体的惯量张量便可以算出来。我们只需写下该物体中所有粒子的总动能。一个质量为 m 而速度为 v 的粒子具有动能 $\frac{1}{2}mv^2$ ，而总动能就不过是对该物体中所有粒子的动能求和

$$\sum \frac{1}{2}mv^2.$$

每个粒子的速度 v 与固体的角速度 ω 有关。现在假定，物体在绕我们认为静止的质心旋转。那么，若 r 是从质心到粒子的位移，则其速度 v 由 $\omega \times r$ 给出。因此总动能为

$$KE = \sum \frac{1}{2}m(\omega \times r)^2. \quad (31.18)$$

眼前必须做的就是用 ω_x , ω_y , ω_z 各分量和 x , y , z 写出 $\omega \times r$ ，并将这一结果与式(31.17)做一比较，通过识别各项以找出 I_{ij} 。在进行代数运算时，我们写出

$$\begin{aligned} (\omega \times r)^2 &= (\omega \times r)_x^2 + (\omega \times r)_y^2 + (\omega \times r)_z^2 \\ &= (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \\ &= +\omega_y^2 z^2 - 2\omega_y \omega_z zy + \omega_z^2 y^2 + \omega_x^2 z^2 - 2\omega_x \omega_z xz + \omega_z^2 z^2 + \omega_x^2 y^2 - 2\omega_x \omega_y xy + \omega_y^2 x^2. \end{aligned}$$

对这一方程乘以 $m/2$ ，对所有的粒子求和，并同式(31.17)做比较，我们见到，例如 I_{xx} 由下式给出：

$$I_{xx} = \sum m(y^2 + z^2).$$

这就是我们以前(第1卷第19章)曾经得到过的关于物体绕 x 轴的转动惯量公式。由于 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ，也可将这一项写成

$$I_{xx} = \sum m(r^2 - x^2).$$

算出所有其他各项，则惯量张量便可以写成

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} \sum m(r^2 - x^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(r^2 - y^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(r^2 - z^2) \end{bmatrix}. \quad (31.19)$$

如果你乐意的话，还可以按“张量符号表示法”写成

$$I_{ij} = \sum m(r^2 \delta_{ij} - r_i r_j), \quad (31.20)$$

式中 r_i 是某个粒子位置矢量的(x , y , z)分量，而 \sum 则意味着对所有粒子求和。于是转动

惯量就是一个二阶张量，其中各项代表物体的一种属性，并且通过下式将 L 与 ω 联系起来：

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j. \quad (31.21)$$

对于不管什么形状的任何物体，我们都能够找到惯量椭球，从而找到三个主轴。对于这些轴来说，该张量将是对角的，所以对于任何物体就总存在三个互相正交的轴，绕这些轴的角速度与角动量互相平行。它们被称为惯量主轴。

§ 31-5 叉积

我们应当指出，从第1卷第20章后我们就已经应用过二阶张量了。在那里，我们曾用下式定义过“平面上的转矩”，诸如 τ_{xy} ：

$$\tau_{xy} = xF_y - yF_x.$$

推广到三维的情况，可以写成

$$\tau_{ij} = r_i F_j - r_j F_i. \quad (31.22)$$

τ_{ij} 这个量就是一个二阶张量。为了看清楚这个张量就是这样的形式，一种办法就是通过把 τ_{ij} 同某个矢量相结合，比方说按照下式同单位矢量相结合，

$$\sum_j \tau_{ij} e_j.$$

如果这个量是一矢量，则 τ_{ij} 必然会像张量那样变换，这是我们关于张量的定义。把有关 τ_{ij} 的式子代入，便得

$$\sum_j \tau_{ij} e_j = \sum_j r_i F_j e_j - \sum_j r_j e_j F_i = r_i (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) F_i.$$

由于那些点积都是标量，所以右边两项都是矢量，因而它们之差也是矢量。因此 τ_{ij} 就是一个张量。

但 τ_{ij} 是一种特殊类型的张量，它是反对称的，即

$$\tau_{ij} = -\tau_{ji},$$

所以它只有三个不等于零的项—— τ_{xx} ， τ_{yy} 和 τ_{zz} 。在第1卷第20章中我们已能够证明，这三项几乎是由于“偶然”才会像矢量的三个分量那样变换，以致我们可以定义：

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) = (\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}).$$

我们所以说“偶然”，是因为它只发生于三维中。例如，在四维中，一个二阶的反对称张量就多达六个不等于零的项，因而肯定不能由具有四个分量的矢量来代替它。

正如轴矢量 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 实际上是一个张量那样，所以每个由两个极矢量构成的叉积也是张量——与上述相同的一切论证也都适用。可是，出自幸运，它们也可用矢量（实际上是一种膺矢）来表达，因而数学就给我们带来了方便。

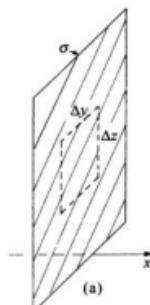
从数学方面讲，若 a 和 b 是任意两个矢量，则那九个量 $a_i b_j$ 会形成一个张量（尽管它可能没有任何有用的物理目的）。这样，对于位置矢量 \mathbf{r} 来说， $r_i r_j$ 就是一个张量，而由于 δ_{ij} 也

是一个张量，我们便明白式(31.20)的右边确是一个张量。同样，式(31.22)也是一个张量，因为其右边的两项都是张量。

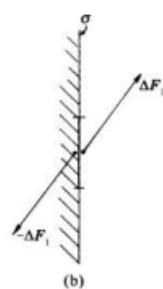
§ 31-6 应力张量

迄今我们所描述的对称张量都是在一个矢量与另一个矢量建立联系的过程中作为系数产生的。现在我们很想考察一个具有不同物理意义的张量——应力张量。假设有一块被施以各种力的固体，我们说其内部会有各种“应力”，这意思是指，在材料中的相邻部分间存在一些内力。当我们在§12-3中考虑被伸展的膜中的表面张力时，就曾稍微谈及在二维情况下的这种应力。现在将看到，在三维物体的材料中内力可以由一个张量来描述。

考虑某种弹性材料——比如说是一大块果子冻——的物体。如果把这块材料切开，则切面每一边的物质一般都会受到内力作用而引起位移。在切开前，材料中的两部分间必然有力把材料维持在其固定位置，我们可以用这些力来定义应力。假设我们正在考察一块垂直于 x 轴的假想平面——像图31-5中的 σ 面——并询问在这个面上穿过小面积 $\Delta y \Delta z$ 的力。设在这一面积左边的材料施力 ΔF_1 于其右边的材料，如图(b)所示。当然，还有一个反作用力 $-\Delta F_1$ 施于左边的材料上。如果该面积足够小，则我们预期 ΔF_1 与面积 $\Delta y \Delta z$ 成正比。



(a)



(b)

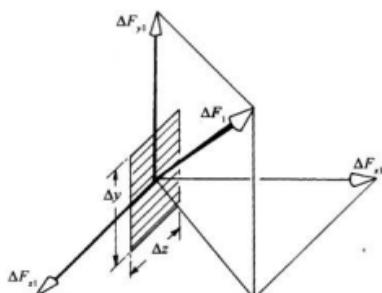


图 31-5 σ 平面左边的材料穿过面积 $\Delta y \Delta z$ 施力 ΔF_1 于该平面右边的材料上
图 31-6 穿过与 x 轴正交的面积元 $\Delta y \Delta z$ 的力
 ΔF_1 可分解成三个分量 ΔF_{x1} 、 ΔF_{y1} 和 ΔF_{z1}

你已经熟悉了应力中的一种——静止液体中的压强。在那里，力等于压强乘面积并与面积元垂直。对于固体——也对于运动中的黏滞性液体——来说，力就不一定与该面垂直，除了压强(正的或负的)之外还会有剪切力(所谓“剪切力”，指的是穿过面的力的切向分量)。力的所有三个分量都必须计算在内。也应该注意，如果我们在某个其他取向的平面上切割，则这些力将不相同。对于内应力的完整描述需要有一个张量。

我们按照下述办法对应力张量下定义：首先，我们想象一个垂直于 x 轴的切面并把穿过这切面上的力 ΔF_1 分解成它的分量 ΔF_{x1} 、 ΔF_{y1} 和 ΔF_{z1} ，如图31-6所示。这些力对面积 $\Delta y \Delta z$ 的比值，分别被称为 S_{xx} 、 S_{yy} 和 S_{zz} 。例如，

$$S_{yx} = \frac{\Delta F_{y1}}{\Delta y \Delta z}.$$

第一个下脚标 y 指力的分量方向;第二个下脚标 x 指垂直于该面积的方向。如果你愿意,还可以把该面积 $\Delta y \Delta z$ 写成 Δa_x , 表明是一个垂直于 x 轴的面积元。于是

$$S_{yx} = \frac{\Delta F_{y1}}{\Delta a_x}.$$

其次,我们设想一个垂直于 y 轴的想象的切面。穿过一小面积 $\Delta x \Delta z$ 将有力 ΔF_z 。再把这个力分解成三个分量,如图 31-7 所示,并定义三个应力分量 S_{xz} , S_{yy} , S_{yz} , 作为在那三个方向上单位面积的力。最后,我们做一个垂直于 z 轴的想象切面并定义三个分量 S_{xx} , S_{yz} 和 S_{zz} 。因此,我们就有了九个数值:

$$S_y = \begin{bmatrix} S_{xz} & S_{xy} & S_{yz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}. \quad (31.23)$$

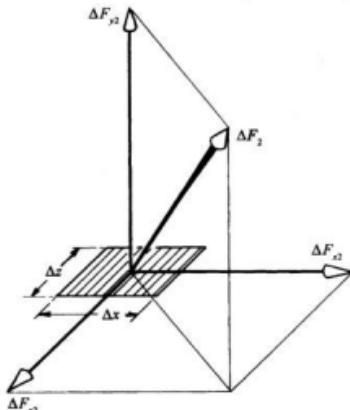


图 31-7 穿过垂直于 y 轴的面积元
的力被分解成三个互相垂直的分量

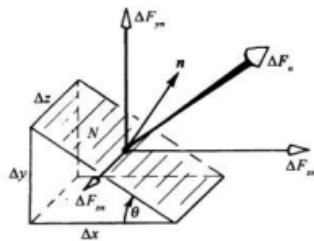


图 31-8 把穿过 N 面(其单位法线
为 n)的力 ΔF_n 分解成各分量

现在要来证明,这九个数值足以完整地描述应力的内部状态,而且 S_y 的确是一个张量。假设我们知道穿过一个以某个任意角度取向的面积的力,能否从 S_y 求得它呢?能,只要按照下述办法:试想象一个小小的立体图形,在另加的面内有一个 N 面,而其他各面则都垂直于坐标轴。假如这个 N 面碰巧平行于 z 轴,则会有如图 31-8 所示的那个三角形(这是有些特殊的情况,但将足以充分说明普遍的方法)。既然作用于图 31-8 中那个小三角体上的各应力是平衡的(至少在无限小尺寸的极限内),因而施于其上的总力就必须等于零。我们直接从 S_y 知道了在垂直于各坐标轴的那些面上的力,它们的矢量和就应等于作用在 N 面上的力,因而我们可用 S_y 来表示这个力。

关于作用在该小三角形体积上的表面力处于平衡这一假设,其中我们忽略了任何可能

会存在的其他一些彻体力,诸如重力或膺力,如果我们的坐标系不是一个惯性坐标系的话就会存在膺力。然而,应该注意,这种彻体力将与那个小三角体的体积、因而也与 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 成正比,而所有的表面力则均与诸如 $\Delta x \Delta y$ 、 $\Delta y \Delta z$ 等面积成正比。所以,如果我们把楔形物的尺寸取得足够小,则同表面力相比彻体力就总是可以被忽略的。

现在让我们把施于该小楔形物上的力都相加起来。首先考虑 x 分量,那是五个部分之和——从每一个面各有一部分。然而,如果 Δz 足够小,那么作用于(与 z 轴垂直的)那两个三角形上的力就会相等相反,因而可以将其忘却掉。作用于底面矩形上的力其 x 分量为

$$\Delta F_{xz} = S_{xy} \Delta x \Delta z.$$

作用于垂直矩形上的力为

$$\Delta F_{x1} = S_{xz} \Delta y \Delta z.$$

上述两力必须等于穿过 N 面向外的力的 x 分量。令 n 为垂直于 N 面的单位矢量,并令作用于此面上的力为 ΔF_n ,于是我们有

$$\Delta F_n = S_{xz} \Delta y \Delta z + S_{xy} \Delta x \Delta z.$$

穿过这个平面的应力的 x 分量 S_{xn} 等于 ΔF_n 除以面积 $\Delta z \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,即

$$S_{xn} = S_{xz} \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + S_{xy} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

由于 $\Delta x / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 就是 n 与 y 轴间夹角 θ 的余弦,如图 31-8 所示,因而我们可把它写成 n_y ,即 n 的 y 分量。同理, $\Delta y / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 就是 $\sin \theta = n_x$ 。我们便可将上式写成

$$S_{xn} = S_{xz} n_x + S_{xy} n_y.$$

如果现在推广至一个任意表面元,就该得到

$$S_{xn} = S_{xz} n_x + S_{xy} n_y + S_{zz} n_z,$$

或一般地,

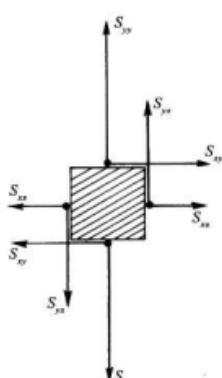
$$S_{in} = \sum_j S_{ij} n_j. \quad (31.24)$$

我们能够求得以 S_{in} 表示的穿过任何面元的力,因而 S_{in} 的确完整地描述了材料内部的应力状态。

式(31.24)表明,张量 S_{ij} 使力 S_{in} 与单位矢量 n 相联系,就好像 α_{ij} 使 P 与 E 有关那样。既然 n 和 S_{in} 都是矢量,所以 S_{in} 的各分量就必然像张量那样随坐标系的改变而作变换。因此, S_{in} 的确是一个张量。

我们也可通过考察作用于一个小立方体材料上的力来证明 S_{in} 是一个对称张量。假设取一个小立方体,使其各个面的取向平行于我们的坐标轴,并从一个截面上去考察它,如图 31-9 所示。若令这个立方体的每个边长为一个单位,则作用于与 x 和 y 轴正交的那些面上的力的 x 和 y 分量就可能如图上所示。如果

图 31-9 作用于一小单位立方体的四个面上的力的 x 分量和 y 分量



该立方体很小，则一个面上的应力与其相对的面上的应力就不会有显著的不同，因而力的分量就如图所示的那样大小相等而方向相反。现在对于该立方体必然不会有转矩作用，否则它就会开始转动。环绕中心点的总转矩为 $(S_{xx} - S_{yy})$ （乘以立方体的 $\frac{1}{2}$ 单位边长），而由于这总转矩为零， S_{yy} 就应等于 S_{xx} ，因而这应力张量就是一个对称张量。

既然 S_{yy} 是一个对称张量，因此它就可以用一个具有三根主轴的椭球来加以描述。对于与这些轴正交的面来说，应力特别简单——它们相当于与这些面正交的压力或拉力，因而沿这些面上就不会有剪切力了。对于任何应力来说，我们总能够选择坐标轴使其各切向分量为零。如果这椭球是一圆球，则在任何方向就只有法向力。这相当于流体静压强（正的或负的）。因此，对于流体静压强来说，这个张量就是对角的，而且所有三个分量都相等，实际上，它们刚好等于压强 p ，即可以写成

$$S_{yy} = p\delta_{yy}. \quad (31.25)$$

应力张量——因而还有它的椭球——一般将在一块材料中逐点变化，要描述整块材料，就需要给出作为位置函数的 S_{yy} 的每一分量。因此，应力张量就是一个场。我们已经有过标量场，像温度 $T(x, y, z)$ ，它们在空间每一点都给出一个数值，以及矢量场，像 $E(x, y, z)$ ，它们对每一点给出三个数值。现在我们又有了张量场，它们对空间每一点给出九个数值——或对于对称张量 S_{yy} 来说，实际上是六个数值。在一块任意畸变的固体中，对其内力的完整描述需要六个各含有 x, y 和 z 的函数。

§ 31-7 高阶张量

应力张量 S_{yy} 描述了物质中的内力。如果材料是弹性的，用另一个张量 T_{yy} ——称为应变张量——来描述其内部畸变就较方便。对于像金属棒那样的简单物体，你知道长度的改变 ΔL 与作用力近似成正比，因而我们说它服从胡克定律：

$$\Delta L = \gamma F.$$

对于受了任意畸变的固态弹性体来说，应变 T_{yy} 与应力 S_{yy} 是由一组线性方程相联系的：

$$T_{yy} = \sum_{k,l} \gamma_{ykl} S_{kl}. \quad (31.26)$$

并且，一根弹簧（或一根棒）的势能为

$$\frac{1}{2} F \Delta L = \frac{1}{2} \gamma F^2.$$

对于固体中的弹性能量密度，可推广为

$$U_{\text{弹性}} = \sum_{ykl} \frac{1}{2} \gamma_{ykl} S_{yy} S_{kl}. \quad (31.27)$$

因此晶体弹性的完整描述就必须用这些系数 γ_{ykl} ，这带来了一个新的、难以控制的量，它是一个四阶张量，由于每一个下脚标可取 x, y 或 z 中任何一个，共有 $3^4 = 81$ 个系数，但实际上却只有 21 个不同数值。首先， S_{yy} 是对称的，它只有 6 个不同的数值，因而在式(31.27)中

就只需要 36 个不同系数。可是, S_{ij} 和 S_{kl} 可以互相交换而不改变能量, 所以交换 ij 和 kl 时 γ_{ijkl} 必定是对称的, 这样就把不同系数的数目又减少至 21 个。所以对于可允许的对称性最低的晶体来说, 要描述它的弹性就需要 21 个弹性常数! 当然, 对于较高对称的晶体, 这一数目还可以减少。例如, 立方晶体只有三个弹性常数, 而各向同性物质则只有两个弹性常数。

这后者的真实性可以这样理解。如同一块各向同性物质必然会对称那样, γ_{ijkl} 的各分量怎么可能与坐标轴的方向无关呢? 答案是: 只有当它们可用张量 δ_{ij} 表达时, 它们才能是与坐标无关的。有两个可能的表示式: $\delta_{ij}\delta_{kl}$ 和 $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$, 它们都具备所需的对称性, 因而 δ_{ijkl} 就必须是它们的线性组合。因此, 对于各向同性材料来说,

$$\gamma_{ijkl} = a(\delta_{ij}\delta_{kl}) + b(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

所以这种材料就需要两个常数 a 和 b 来描述它的弹性。而立方晶体仅需要三个常数, 我们将把它留给你们去证明。

作为最后一个例子, 我们举出压电效应, 这次是属于一个三阶张量。在应力作用下, 晶体会产生一个正比于这个应力的电场, 因此, 一般说来, 其规律是

$$E_i = \sum_{j, k} P_{ijk} S_{jk},$$

式中 E_i 为电场, 而 P_{ijk} 为压电系数——或压电张量。你能否证明, 若晶体有一个反演中心 (在 $x, y, z \rightarrow -x, -y, -z$ 的变换下保持不变), 则所有压电系数都等于零?

§ 31-8 电磁动量的四维张量

在这一章中, 迄今所考察过的所有张量都是与三维空间有关的, 它们被定义为在空间转动下具有某种变换性质。在第 26 章中, 我们曾有机会用到在四维相对论性时空中的一个张量——电磁张量 $F_{\mu\nu}$ 。这样一个四维张量的各分量在洛伦兹坐标变换下以我们算出的特殊方式变换着(尽管我们并未那样做, 但我们可能已经把洛伦兹变换认为是在叫作闵可夫斯基空间的“四维空间”里的一种转动, 那么与我们这里正在做的做个类比, 就会更加清楚了。)

作为最后一个例子, 我们想要考虑在相对论四维(t, x, y, z)中的另一个张量。当我们在上面写出应力张量时, 我们曾把 S_{ij} 定义为穿过单位面积的力的分量。可是力等于动量的变化率, 因此, 不说“ S_{xy} 是穿过垂直于 y 方向的单位面积力的 x 分量”, 而同样可以说“ S_{xy} 是穿过垂直于 y 方向的单位面积动量的 x 分量的变化率”。换句话说, S_{ij} 的每一项也各代表通过垂直于 j 方向单位面积的动量的 i 分量流。这些是纯空间分量, 但它们却是在四维(μ 和 $\nu = t, x, y, z$)中含有像 S_{tx}, S_{ty}, S_{tz} 等附加分量的一个“较大”张量 $S_{\mu\nu}$ 的一些部分, 我们现在就试图找出这些附加分量的物理意义。

我们知道, 那些空间分量代表动量流。我们可以从研究另一种“流”——电荷流——来获得如何把它推广到时间那一维上去的线索。对于标量电荷来说, 其变化率(通过垂直于流的单位面积)就是一空间矢量——电流密度 j 。我们已经看到, 这个流矢量的时间分量就是那些流动物质的密度。例如, j 可以同一个时间分量 $j_t = \rho$ ——即电荷密度——相结合而构成一个四维矢量 $j_\mu = (\rho, j)$, 也就是说, 当 j_μ 中的 μ 取 t, x, y, z 各值时, 它指的是标量电荷的“密度, 及标量电荷在 x 方向的流动速率, 在 y 方向的流动速率, 在 z 方向的流动速率”。

现在,与刚才所做的关于一个标量流的时间分量的说法相类似,我们也许会期待,与描述动量 x 分量流的 S_{xx} , S_{xy} , S_{xz} 一起,就应该有一个时间分量 S_{xt} , 它应代表正在流动的那种东西的密度,也就是说, S_{xt} 应该是 x 方向动量的密度。所以我们就能够沿水平方向把我们的张量推广到包含一个 t 分量。我们得

$$S_{xt} = x \text{ 动量密度},$$

$$S_{xx} = x \text{ 动量的 } x \text{ 向流},$$

$$S_{xy} = x \text{ 动量的 } y \text{ 向流},$$

$$S_{xz} = x \text{ 动量的 } z \text{ 向流}.$$

同理,对于动量的 y 分量我们有三个流动分量—— S_{yy} , S_{yz} , S_{yz} ——此外还应加入一个第四项:

$$S_{yt} = y \text{ 动量密度}.$$

而当然,在 S_{xx} , S_{yy} , S_{zz} 之外我们也应该加上

$$S_{zt} = z \text{ 动量密度}.$$

在四维中还有一个动量的 t 分量,我们知道那就是能量。因此,张量 S_y 应该在垂直方向上*用 S_{tx} , S_{ty} 和 S_{tz} 来推广,其中

$$S_{tx} = \text{能量的 } x \text{ 向流},$$

$$S_{ty} = \text{能量的 } y \text{ 向流}, \quad . \quad (31.28)$$

$$S_{tz} = \text{能量的 } z \text{ 向流}.$$

这就是说, S_u 是单位时间内穿过垂直于 x 轴单位面积的能流,等等。最后,为使张量达到完整,还需要 S_{tt} , 那该是能量密度。我们已把三维的应力张量 S_y 推广成四维的应力-能量张量 $S_{\mu\nu}$ 。那下脚标 μ 可以取四个值 t , x , y 和 z , 它们分别指“密度”、“在 x 向单位面积的流动”、“在 y 向单位面积的流动”、“在 z 向单位面积的流动”。同样地, ν 取 t , x , y , z 四个值就告诉我们什么在流动,即“能量”、“沿 x 向的动量”、“沿 y 向的动量”和“沿 z 向的动量”。

作为一个例子,我们将讨论不是在实物中,而是在一个存在着电磁场的自由空间区域里的一个张量。我们知道,能流就是坡印亭矢量 $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 。因此, \mathbf{S} 的 x , y 和 z 分量,从相对论的观点来看,就是我们的四维应力-能量张量的分量 S_{xx} , S_{yy} 和 S_{zz} 。张量 S_y 的对称性也同样移到了 t 分量,因而四维张量 $S_{\mu\nu}$ 是对称的:

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}. \quad (31.29)$$

换句话说,代表 x , y 和 z 动量密度的 S_{xt} , S_{yt} , S_{zt} 也等于坡印亭矢量 \mathbf{S} , 即能流的 x , y 和 z 分量——正如我们在前面一章中曾用不同的论证所证明过的那样。

这电磁应力张量 $S_{\mu\nu}$ 的其余各分量也可用电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 来表示。这就是说,必须把应力——或较少神秘性地说成是动量流——纳入电磁场之中。在第 27 章中与式(27.21)有关

* 这表明是一个与 x , y , z 各轴都“正交”的方向,即 t 方向。——译者注

的地方我们曾对此有所讨论,但还未将其细节算出。

那些想要在四维张量方面锻炼本领的人们,也许乐于见到用场来表示的关于 $S_{\mu\nu}$ 的公式:

$$S_{\mu\nu} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\sum_a F_{\mu a} F_{\nu a} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha, \beta} F_{\beta a} F_{\beta a} \right),$$

其中对于 α, β 的求和是指对于 t, x, y, z 的求和,不过(如同在相对论中经常做的那样)我们采用关于求和符号 \sum 与符号 δ 的特别含义。在总和中有关 x, y, z 的项都要去掉,并且 $\delta_{tt} = 1, \delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = -1$, 对于 $\mu \neq \nu$ 则 $\delta_{\mu\nu} = 0$ 。你能否证实(令 $c = 1$)它会给出能量密度 $S_{tt} = (\epsilon_0/2)(E^2 + B^2)$ 和坡印亭矢量 $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$? 你能否证明:在 $\mathbf{B} = 0$ 的静电场中,应力的主轴在电场的方向,而且有一个张应力 $(\epsilon_0/2)E^2$ 沿电场方向,还有一个相等的压强垂直于电场方向?

第 32 章 稠密材料的折射率

§ 32-1 物质的极化

我们现在要来讨论由稠密材料所引起的光的折射——因而也包括光的吸收——现象。在第 1 卷第 31 章中，我们曾讨论过折射率理论，但那时由于我们的数学能力有限，就不得不局限于只是找出诸如气体那样的低密度材料的折射率。然而，产生折射率的物理原理却已弄清楚了。光波中的电场使气体里的分子极化，产生了振动着的偶极矩。这些振动电荷的加速度又会辐射出新的场波。这种新的场与旧的场相干，就会产生一个变化了的场，它相当于原来的波受到某个相移，由于这相移与该材料的厚度成正比，所以这一效应就相当于在材料里有不同的相速度。以前考察这一课题时，曾经略去了诸如新波会改变振动偶极子所在处的场这些效应所引起的复杂性。我们曾假定施于原子中电荷上的力仅来自那个入射波，而事实上，它们的振动不仅由入射波驱动，而且也由所有其他各原子的辐射波所推动。当时要把这种效应包括进去，对于我们来说会有困难，因而仅仅研究了稀薄气体，在那里上述效应变成无关紧要的了。

然而，现在我们将发现，通过利用微分方程来处理这个问题非常容易。这一办法掩盖了折射率的物理起源（如来自再辐射波与原来波的相干作用），但却使有关稠密材料的理论简单得多。本章将从以前的工作中拼集大量材料。实际上我们将选取所需要的一切东西，因而在引进的概念中属于全新的相对来说就不多。由于你可能需要重新想起我们将要用的东西，因此我们提供一个关于即将用到的公式及其出处的清单（表 32-1）。在大多数例子中，我们将不再花时间去提供物理论证，而只是要利用那些公式。

表 32-1 本章的工作将建立在下列这些包含在以前各章中的材料的基础上

主 题	参 考	方 程 式
阻尼振动	第 1 卷第 23 章	$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = F$
气体折射率	第 1 卷第 31 章	$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq_0^2}{\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$ $n = n' - in''$
迁 移 率	第 1 卷第 41 章	$m\ddot{x} + \mu\dot{x} = F$
电 导 率	第 1 卷第 43 章	$\mu = \frac{r}{m}; \sigma = \frac{Nq_0^2 r}{m}$
极 化 率	第 2 卷第 10 章	$\rho_{极化} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$
在电介质内部	第 2 卷第 11 章	$\mathbf{E}_{内部} = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$

我们从回忆气体折射率的机制着手。假定单位体积内共有 N 个粒子，而每个粒子的行

为像一个谐振子，并采用这样的原子或分子模型：其中的电子被正比于其位移的力束缚住（好像被弹簧维持在其位置上似的）。我们曾经强调，这并非原子的正统经典模型，但以后将证明，正确的量子力学理论（在一些简单情况中）会给出等效于这一模型的结果。在以往的处理中，我们从未将原子振子中的阻尼力那种可能性包括进去，但现在就要这样来做。这种力相当于对运动的阻力，也就是与电子速度成正比的力。于是运动方程为

$$F = q_e E = m(\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x), \quad (32.1)$$

式中 x 是平行于 E 方向的位移（我们正假设一种各向同性的振子，其恢复力在一切方向都相同。并且，我们目前也在考虑一个线偏振波，以致 E 不改变方向）。如果作用于原子上的电场随时间正弦地变化，则可以写出

$$E = E_0 e^{i\omega t}. \quad (32.2)$$

于是位移将以同样的频率振动，因而可令

$$x = x_0 e^{i\omega t}.$$

将 $\dot{x} = i\omega x$ 和 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ 代入式(32.1)，就能够用 E 来解出 x ：

$$x = \frac{q_e/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} E. \quad (32.3)$$

如果已经知道位移，则可算出加速度 \ddot{x} ，并求得引起折射率的辐射波。这就是以前在第1卷第31章中曾经计算过折射率的那种办法。

然而，现在想要采取一种不同的计算方法。一个原子的感生偶极矩 p 为 $q_e x$ ，或利用式(32.3)，即得

$$p = \frac{q_e^2/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} E. \quad (32.4)$$

由于 p 与 E 成正比，所以我们可写成

$$p = \epsilon_0 \alpha(\omega) E, \quad (32.5)$$

式中 α 称为原子极化率^{*}。采用这一定义，得

$$\alpha = \frac{q_e^2/m \epsilon_0}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \quad (32.6)$$

关于原子中电子运动的量子力学解给出除了下述一些修正之外的相似结果。每一种原子^{**}具有若干个固有频率，而每个频率有其本身的阻尼常数 γ 。并且，每种振动模式的有效“强度”各不相同，这可用每个频率的极化率乘以强度因子 f 来表示，我们预期 f 是数量级为 1 的数值。对于每个振动模式，用 ω_{ek} ， γ_k 和 f_k 代表那三个参数 ω_0 ， γ 和 f ，并对不同的

* 在整个本章中我们将遵照第1卷第31章中的那种符号表示法，并令 α 代表原子极化率，如在这里所定义的。在上一章中我们曾利用 α 代表体积极化率——即 P 对 E 的比率，在本章的记法中则应该是 $P = N\alpha\epsilon_0 E$ ，见式(32.8)。

** 这里按原文只是“The atoms”，我们将其改成“每一种原子”，似较确切些。——译者注

模式全部求和，则我们可把式(32.6)修改成：

$$\alpha(\omega) = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k \omega + \omega_{0k}^2}. \quad (32.7)$$

如果 N 是该材料内单位体积的原子数，则极化强度 \mathbf{P} 就恰好是 $N\mathbf{p} = \epsilon_0 N \alpha E$ ，并正比于 E ：

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 N \alpha(\omega) \mathbf{E}. \quad (32.8)$$

换句话说，当有一正弦电场作用于材料上时，就有一个正比于该电场的单位体积感生偶极矩——我们要强调比例常数 α 与频率有关。当频率非常高时， α 很小，即响应不厉害。然而，在低频时，就可能存在较强的响应。并且，这个比例常数是一复数，这意味着极化强度并不完全跟随着电场变化，而是其相位在某种程度上可能被移动了。无论如何，总会有一个其大小正比于电场强度的单位体积极化强度。

§ 32-2 在电介质中的麦克斯韦方程组

物质中极化现象的存在意味着材料内部有了极化电荷和极化电流，而为了求场就应该把它们放进完整的麦克斯韦方程组中。我们这回要在这种情况下求解麦克斯韦方程组，即其中的电荷和电流不像在真空里那样各等于零，而是由极化矢量所隐蔽地给出。第一步是明确地找出电荷密度 ρ 和电流密度 \mathbf{j} ，它们是对我们过去定义 \mathbf{P} 时所考虑的相同尺度的小体积平均过的。于是，我们所需要的 ρ 和 \mathbf{j} 能够从极化强度获得。

我们已在第 10 章中见到，当极化强度 \mathbf{P} 逐处变化时，就存在由下式给出的电荷密度：

$$\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (32.9)$$

虽然我们当时处理的是静场，但同样的公式也适用于随时间变化的场。可是，当 \mathbf{P} 随时间变化时，就有电荷在运动，因而也存在极化电流。每个振动电荷贡献的电流等于其电荷 q_e 乘以其速度 v ，设单位体积共有 N 个这样的电荷，则电流密度 \mathbf{j} 为

$$\mathbf{j} = N q_e \mathbf{v}.$$

既然我们知道 $v = dx/dt$ ，那么 $j = N q_e (dx/dt)$ ，这恰好就是 $d\mathbf{P}/dt$ 。因此，由变化着的极化强度引起的电流密度为

$$\mathbf{j}_{\text{极化}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (32.10)$$

我们的问题现在既直接而又简单。利用式(32.9)和(32.10)，我们要用由 \mathbf{P} 表示的电荷密度和电流密度来写出麦克斯韦方程组（假定在该材料中并没有别的电流和电荷）。然后再用式(32.5)把 \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 联系起来，并对 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 求解方程，寻找波动解。

在做此事之前，我们想要做一个历史性的注解。麦克斯韦原来写出的方程式在形式上与我们现在所用的不同。由于这些方程在过去许多年中曾被写成这种不同形式——而且目前还有许多人按照那样来写——我们将解释其中的区别。在早期，介电常量机制还未受到充分和清楚的认识。原子的本性既未被理解，材料的极化也不清楚。因此人们并未认识到对电荷密度 ρ 会有来自 $\nabla \cdot \mathbf{P}$ 方面的贡献。他们仅凭那些不受原子束缚的电荷（诸如在导线

中流动的电荷或从表面上擦去的电荷)来思考问题。

今天,我们更喜欢让 ρ 代表总电荷密度,包括被束缚的原子电荷所产生的那部分。若我们把这一部分称为 $\rho_{\text{极化}}$,则可以写出

$$\rho = \rho_{\text{极化}} + \rho_{\text{其他}},$$

式中 $\rho_{\text{其他}}$ 就是麦克斯韦曾经考虑过的电荷密度,而且是指那些不会被束缚于个别原子上的电荷。于是可写出

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{极化}} + \rho_{\text{其他}}}{\epsilon_0}.$$

把式(32.9)代入 $\rho_{\text{极化}}$,得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{其他}}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}$$

或

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{其他}}. \quad (32.11)$$

在麦克斯韦方程组中有关 $\nabla \times \mathbf{B}$ 的电流密度,一般也有来自受束缚的原子电流的贡献,因此可以写出

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{极化}} + \mathbf{j}_{\text{其他}},$$

而麦克斯韦方程则变成

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}_{\text{其他}}}{\epsilon_0} + \frac{\mathbf{j}_{\text{极化}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (32.12)$$

利用式(32.10),我们得

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{其他}} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}). \quad (32.13)$$

现在你可以明白,假如由下式定义一个新的矢量 \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (32.14)$$

则两个场方程就会变成

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{其他}} \quad (32.15)$$

和

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{其他}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (32.16)$$

这些实际上就是麦克斯韦对于电介质所用的形式。他的其余两个方程则是

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

和

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

这些与我们目前所用的相同。

麦克斯韦以及其他早期工作者还遇到一个与磁性材料(我们不久即将加以考虑)有关的问题。由于他们还不知道导致原子磁性的环行电流,因此他们所使用的电流密度还缺少这

另一部分。他们实际上写出的并非式(32.16),而是

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}' + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (32.17)$$

式中的 \mathbf{H} 与 $\epsilon_0 c^2 \mathbf{B}$ 不同之处在于后者已包括了原子电流的效应*(于是 \mathbf{j}' 就代表剩下的其余电流)。所以麦克斯韦拥有四个场矢量 \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} 和 \mathbf{H} , \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 是不关心材料内部正在进行着的过程的一种隐蔽方法,你会在许多地方找到用这种方式写出的方程组。

为了求解该方程组,有必要把 \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 与其他的场联系起来,而人们往往写成

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \text{ 和 } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (32.18)$$

然而,这些关系式对于某些材料只是近似地正确,而且即使如此也只有在场随时间变化不太迅速时才行(对于按正弦变化的场,人们往往能够通过使 ϵ 和 μ 成为频率的复变函数而将式子按照这样写出,但对于场的任意时间变化那就不行)。所以在求解这些方程时往往受到各种形式的欺骗。我们认为,正确的办法乃是用目前所理解为基本的那些量来保持那些方程式——而这正是我们一贯做的。

§ 32-3 电介质中的波

我们现在想要求出:哪种类型的电磁波才能在这样的电介质中存在,其中除了束缚于原子中的电荷外并无其他附加电荷,为此我们取 $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 和 $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ 。这样,麦克斯韦方程组变成

$$\begin{aligned} (a) \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}, & (b) c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} + \mathbf{E} \right), \\ (c) \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & (d) \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (32.19)$$

可按照以前做过的那样来求解这些方程式,即从取式(32.19c)的旋度开始:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}.$$

其次,利用矢量恒等式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E},$$

利用式(32.19b)并代替 $\nabla \times \mathbf{B}$,便得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

* 这说法从式子的表面看似乎是对的,因为式左边只出现 \mathbf{H} (而不出现 \mathbf{B}),右边只出现 \mathbf{j}' (而不出现 \mathbf{j})。但实际上 \mathbf{H} 是不包括原子电流效应的,这可从式(36.12)看出。 \mathbf{D} 也是不包括极化电荷的效应的,但由于 $\rho_{\text{极化}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$,在减去此方面的效应时,负负为正得了在中间的一个正号(即 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$)。只有 \mathbf{E} 才是包括一切电荷的电场,又只有 \mathbf{B} 才是包括一切电流的磁场。这些正确观点在本书中各处都由作者经常加以反复强调。——译者注

对于 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 则利用式(32.19a), 因而得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (32.20)$$

所以我们现在所得到的并非是波动方程, 而是达朗贝尔算符作用于 \mathbf{E} , 等于含有极化强度 \mathbf{P} 的两项。

然而, 由于 \mathbf{P} 取决于 \mathbf{E} , 所以方程式(32.20)可能仍存在波动解。现在我们将限于各向同性电介质中, 因而 \mathbf{P} 始终与 \mathbf{E} 同向。让我们尝试找出沿 z 方向行进的波的解, 这样电场也许会按 $e^{i(\omega t-kz)}$ 变化。我们也将假定波是在 x 方向偏振的, 即电场只有一个 x 分量。我们写出

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t-kz)}. \quad (32.21)$$

你知道, 任一个 $(z-vt)$ 的函数代表一个以速率 v 传播的波。式(32.21)的指数可以写成

$$-ik\left(z - \frac{\omega}{k}t\right),$$

因而式(32.21)就代表一个具有如下相速的波:

$$v_{\text{相}} = \omega/k.$$

折射率 n 是通过令

$$v_{\text{相}} = \frac{c}{n}$$

而被定义的(见第1卷第31章)。这样式(32.21)就变成

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - nkz)}.$$

因此, 我们可以先求出要使式(32.21)满足适当的场方程所需的 k 值, 然后再应用下式求出 n :

$$n = \frac{kc}{\omega}. \quad (32.22)$$

由于在各向同性的材料中, 常常只有极化的一个 x 分量, 于是 \mathbf{P} 不会随 x 坐标发生变化, 所以 $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, 这样便消除了式(32.20)右边的第一项。并且, 由于我们现在假定电介质是线性的, 所以 P_x 可能按 $e^{i\omega t}$ 变化, 而 $\partial^2 P_x / \partial t^2 = -\omega^2 P_x$ 。这样, 式(32.20)中的拉普拉斯算符简单地变成 $\partial^2 E_x / \partial z^2 = -k^2 E_x$, 因而得到

$$-k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P_x. \quad (32.23)$$

现在让我们暂时假定, 由于 \mathbf{E} 按照正弦形式变化, 所以可以令 \mathbf{P} 正比于 \mathbf{E} , 犹如式(32.8)那样(以后我们将要回来讨论这一假定)。因而写出

$$P_x = \epsilon_0 N \alpha E_x.$$

这样, 从式(32.23)中除去 E_x , 从而求得

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + N \alpha). \quad (32.24)$$

我们已经发现一个像式(32.21)那样的波,其波数 k 由式(32.24)所给出,该波将满足各个场方程。利用式(32.22),则折射率 n 将由下式给出:

$$n^2 = 1 + N\alpha. \quad (32.25)$$

让我们把这一个式同在气体折射率的理论(第1卷第31章)中所得到的式子做比较。在那里,我们曾经得到式(31.19),即

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 + \omega_b^2}. \quad (32.26)$$

由式(32.6)取 α ,则式(32.25)应给出

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_b^2}. \quad (32.27)$$

首先,这里有一个新项 $i\gamma\omega$,这是由于我们正把振子的损耗包括进去的缘故。其次,前一个式子左边是 n 而不是 n^2 ,所以又有一个附加因数 $1/2$ 。但要注意,如果 N 足够小以致 n 接近于 1(如在气体中的情况),则式(32.27)表明 n^2 等于 1 加上一个小数目: $n^2 = 1 + \epsilon$ 。于是可以写成 $n = \sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$,而且两个表示式也就彼此等价。这样,我们的新方法对于气体给出与以前相同的结果。

现在,你或许认为,式(32.27)也应给出稠密材料的折射率。然而,由于以下几个原因它需要做修正。首先,关于这个式子的推导曾假定作用于每个原子的极化场是场 E_e 。然而,这一假定并不正确,因为在稠密材料中也还有附近其他原子所产生的、与 E_e 相差不多的场。当我们过去学习电介质中的静电场时也曾考虑过相似的问题(见第11章)。你会记得,我们当时通过想象将一个单独原子置于周围电介质的一个球形空穴中而估计它所在处的场。在这样一个空穴的场——我们曾称为局部电场——比起平均场 E 来要超出 $P/(3\epsilon_0)$ (然而,应该记住,这一结果只有在各向同性材料——包括立方晶体的那种特殊情况——中才是严格正确的)。

相同的论证对于波中的电场也会适用,只要波长比原子间距大得多便行。在这种限制情况下,我们可以写出

$$E_{\text{局部}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (32.28)$$

这局部电场应该就是用于式(32.3)中的 E 场,也就是说,式(32.8)应重新写成

$$P = \epsilon_0 N\alpha E_{\text{局部}}. \quad (32.29)$$

应用式(32.28)的 $E_{\text{局部}}$,求得

$$P = \epsilon_0 N\alpha \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

或

$$P = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)} \epsilon_0 E. \quad (32.30)$$

换句话说,在稠密材料中 P 仍旧正比于 E (对正弦变化的场来说)。然而,比例常数却不是 $\epsilon_0 N\alpha$ [如在式(32.23)下面的式中我们曾写出的那样],而应该是 $\epsilon_0 N\alpha/[1 - (N\alpha/3)]$ 。因此

就必须将式(32.25)改正为

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}. \quad (32.31)$$

如果把这个式写成如下形式,那就更加方便:

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha, \quad (32.32)$$

在代数上上两式是等价的,这就是大家熟悉的克劳修斯-莫索提方程。

在稠密材料中还有另一种复杂性。由于相邻原子如此靠近,它们之间便有强烈的相互作用。因此,那些内部的振动模式改变了。原子振动的固有频率因这些相互作用而被扩大了,所以它们往往受到很严重的阻尼——阻力系数变得很大。因此,固体中的那些 ω_0 和 γ 与在自由原子中的相比就很不相同。虽然有这些限制,但我们仍然至少可以近似地利用式(32.7)来表示 α 。于是就有

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Nq_e^2}{m_e} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_{0k}^2}. \quad (32.33)$$

最后一个复杂性。如果稠密材料是几种成分的混合物,则每一种成分都对极化有贡献。总的 α 就等于这混合物中每种成分贡献之和[除了对有序晶体中局部场近似式(32.28)的不准确性——过去分析铁电体时我们就曾讨论过的效应——外]。把每种成分单位体积的原子数写成 N_j ,便可用下式代替式(32.32):

$$3 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) = \sum_j N_j \alpha_j, \quad (32.34)$$

其中每个 α_j 将由像式(32.7)那样的表示式给出。于是式(32.34)就完成了我们关于折射率理论的工作。 $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ 这个量由频率的某个复变函数给出,而这个函数就是平均原子极化率 $\alpha(\omega)$ 。关于稠密物质中 $\alpha(\omega)$ 的准确计算(即要求出 f_k , γ_k 和 ω_{0k})是量子力学中的困难问题,只对于几种特别简单的物质才根据第一性原理完成了这种计算。

§ 32-4 复 折 射 率

现在要来考察上述结果,即式(32.33)。首先,我们注意到 α 是一复数,因而折射率 n 也必将是一复数。这意味着什么呢?现在让我们试将 n 写成实部与虚部之和:

$$n = n_R - i n_I, \quad (32.35)$$

其中 n_R 和 n_I 都是 ω 的实数函数。我们在 $i n_I$ 之前写上一负号,因此在所有普通光学材料中 n_I 将是一正值(在普通非活动性材料——不像激光器或光源本身那样的材料——中 γ 是正数,而使得 n 的虚部为负)。式(32.21)所表示的平面波可以用 n 写出,为

$$E_x = E_0 e^{i\omega(t - nR/k)}.$$

将 n 写成像式(32.35)中的那样,则有

$$E_x = E_0 e^{-i n_I t/k} e^{i\omega(t - n_R k/k)}. \quad (32.36)$$

项 $e^{i\omega(t-n_R z/c)}$ 表示以速率 c/n_R 传播的波，因而 n_R 就代表我们正常所认为的折射率。但这个波的振幅为

$$E_0 e^{-\alpha n_1 z/c},$$

它随 z 指数式地减弱。对于 $n_1 \approx n_R/(2\pi)$ 的情况，在某一时刻，电场强度作为 z 的函数曲线如图 32-1 所示。至于折射率的虚部则表示由于在原子振子中的能量损耗而引起的波的衰减。波的强度与波幅的平方成正比，因而

$$\text{强度} \propto e^{-2\alpha n_1 z/c}.$$

这往往被写成

$$\text{强度} \propto e^{-\beta z},$$

其中 $\beta = 2\alpha n_1/c$ 称为吸收系数。这样在式(32.33)中我们就不仅得到了材料的折射率理论，而且同样也有了材料吸收光的理论。

在通常我们认为是透明的材料中，量 $c/(\omega n_1)$ ——具有长度量纲——比起该材料的厚度来是很大的量。

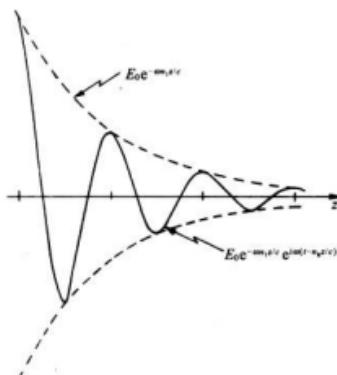


图 32-1 在某一时刻 t , $E_z(z)$ 曲线，设 $n_1 \approx n_R/(2\pi)$

§ 32-5 混合物的折射率

关于折射率理论还有另一个可以用实验来进行核对的预言。假设我们考虑一个含有两种材料的混合物。这混合物的折射率并非是两种折射率的平均值，而应当按式(32.34)所示的那样由两个极化率之和来给出。如果我们问起(比如说)糖溶液的折射率，那么总极化率就是水与糖的两个极化率之和。当然，每个极化率必须用该种物质单位体积内的分子数作为 N 来计算。换句话说，若给定溶液中有 N_1 个极化率为 α_1 的水分子和 N_2 个极化率为 α_2 的蔗糖($C_{12}H_{22}O_{11}$)分子，则应该有

$$3\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right) = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2. \quad (32.37)$$

可以通过测量不同浓度的蔗糖水溶液的折射率，应用此式对照实验结果来检验我们的理论。然而，这里我们得做几种假设。上面的公式假定当蔗糖溶解于水中时并没有发生化学反应，而对各个原子振子的扰动在不同浓度中差异不会太大。所以上述结果肯定只是近似的。不管怎样，还是让我们来看看这个式子到底如何有效。

选取蔗糖溶液这一例子是因为在《化学与物理学手册》(*Handbook of Chemistry and Physics*)中有一个关于折射率测量值的很好的表，而且又因为蔗糖是一种分子晶体，所以在其溶解过程中并没有发生过电离或其他任何会改变其化学状态的事情。

我们在表 32-2 的头三行中给出从手册中查出来的数据。A 列为蔗糖按重量计的百分比，B 列为测得的密度(g/cm^3)，而 C 列则为用 589.3 nm 波长的光时测得的折射率。对于纯的糖，我们已经取得了糖晶体折射率的测量值。这种晶体并非各向同性的，因而所测得的

折射率沿各方向是不同的。该手册给出三个数值：

$$n_1 = 1.5376, n_2 = 1.5651, n_3 = 1.5705,$$

我们取其平均值。

现在我们可以试着算出每种浓度的 n , 但不知道对 α_1 或 α_2 取何值。让我们用这种方法来检验该理论：假定水的极化率(α_1)在所有各种浓度时都相同，并利用 n 的实验值及从式(32.37)解出 α_2 从而算出蔗糖的极化率。如果这一理论正确，则对于所有浓度都应得到相同的 α_2 。

首先，必须知道 N_1 和 N_2 ：让我们用阿伏伽德罗数 N_0 来表示它们。试取 1 升(1000 cm^3)作为体积单位。于是 N_1/N_0 等于每升的质量除以克分子量。而每升的质量则是密度(乘 1000 后获得每升克数)乘以蔗糖或水的用分数表示的含量。就这样，得到了记在该表 D 和 E 两列中的 N_2/N_0 和 N_1/N_0 ^{*}。

表 32-2 蔗糖溶液的折射率,与式(32.37)的预言做比较

从手册中查出来的数据								
A 蔗糖分 含量(以重 量计)	B 密 度 (gcm^{-3})	C n (20 °C)	D 每升蔗糖 ^d 的摩尔数 N_2/N_0	E 每升水 ^e 的摩尔数 N_1/N_0	F $3\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)$	G $N_1\alpha_1$	H $N_2\alpha_2$	J $N_0\alpha_2$ (gl^{-1})
0 ^a	0.9982	1.333	0	55.5	0.617	0.617	0	—
0.30	1.1270	1.3811	0.970	43.8	0.698	0.487	0.211	0.213
0.50	1.2296	1.4200	1.798	34.15	0.759	0.379	0.380	0.211
0.85	1.4454	1.5033	3.59	12.02	0.886	0.1335	0.752	0.210
1.00 ^b	1.588	1.5577 ^c	4.64	0	0.960	0	0.960	0.207

a 纯水；b 蔗糖晶体；c 平均值(见书中)；d 蔗糖的分子量=342；e 水的分子量=18。

在 F 列，我们从 C 列中的实验 n 值算出了 $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ 。对于纯水来说， $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ 为 0.617，那恰好是 $N_1\alpha_1$ 。然后我们便能填上 G 列中的其余部分，因为对于每一行 G/E 只容许有相同的比值——即 0.617 : 55.5。从 F 列减去 G 列，便得到蔗糖的 $N_2\alpha_2$ 那一部分贡献，如 H 列所示。把这些数字用 D 列中的 N_2/N_0 值来除，我们便得到如 J 列所示的 $N_0\alpha_2$ 的值。

根据我们的理论，应该预计所有的 $N_0\alpha_2$ 值都相同。它们虽然并不完全相同，但也相当接近。可以得出结论说，我们的想法是相当正确的。而且，我们还发现糖分子的极化率似乎与其周围环境的关系不是太大——它的极化率在稀溶液与在晶体中几乎相同。

§ 32-6 金属中的波

在本章中我们对固体材料所建立的理论也可应用于像金属那种良导体，但要作很小的修正。在金属中，某些电子缺乏把它们维系在任何特定原子上的束缚力，而正是这种“自由”电子才引起了导电性。别的电子则被受束缚着，而上面的理论对这些电子是直接适用的。然而，这

* 本节原文中有些地方把重量和质量搞混了。——译者注

些束缚电子的影响往往被那些传导电子的效果所掩盖，我们现在将只讨论自由电子的效果。

如果一个电子没有受到恢复力作用——但对其运动仍有某种阻力——则它的运动方程与式(32.1)的差别就仅在于缺少 $\omega_0^2 x$ 那一项。所以在其余的推导过程中我们所必须做的一切就是令 $\omega_0^2 = 0$ ——此外还有一点不同。过去所以必须要在电介质中区别平均场与局部场，是因为在电介质中每个偶极子的位置是固定的，从而与其他偶极子位置就有确定的关系。但由于金属中的传导电子到处运动，作用于其上的场平均说来恰好是平均场 E 。因此，我们利用式(32.28)对式(32.8)所做的修正，对于传导电子就不应该做了。这样，金属的折射率公式，除了应令 ω_0 等于零之外，看来就应像式(32.27)，即

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (32.38)$$

这只是来自传导电子方面的贡献，但我们将假定对于金属来说这是主要项。

现在我们甚至知道了怎样去找出用于表示 γ 的值，因为它与金属的电导率有关。在第1卷第43章中就曾讨论过金属的电导率如何起源自自由电子在穿越晶体中时的扩散。这些电子从一次散射至另一次散射遵循的是锯齿形路径，而在两次散射之间除了由于任意的平均电场所引起的加速之外，它们的运动是自由的（如图32-2所示）。在第1卷第43章中，我们曾求得平均漂移速度恰好等于加速度乘以两次碰撞间的平均时间 τ 。加速度为 $q_e E / m$ ，因而

$$v_{\text{漂移}} = \frac{q_e E}{m} \tau. \quad (32.39)$$

这一公式曾假定 E 为常数，从而 $v_{\text{漂移}}$ 就是一个恒定速度。由于没有平均加速度，所以阻尼力等于外加力。我们已用 $\gamma m v$ 表示阻尼力[见式(32.1)]而定义了 γ ，这个力应当等于 $q_e E$ ，因此就有

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \quad (32.40)$$

虽然我们不能轻易地直接测得 τ ，但仍可以通过测量金属的电导率来确定它。从实验上发现，金属中的电场 E 会产生一个密度为 j 的电流（对于各向同性材料而言）：

$$j = \sigma E.$$

这个比例常数 σ 称为电导率。这恰好就是我们从式(32.39)所预期的，只要令

$$j = Nq_e v_{\text{漂移}},$$

于是

$$\sigma = \frac{Nq_e^2}{m} \tau. \quad (32.41)$$

所以 τ ——因而 γ ——就可以同观测到的电导率联系起来。利用式(32.40)与(32.41)，还可以把折射率的公式(32.38)重新写成如下形式：

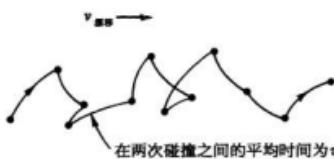


图32-2 一个自由电子的运动

$$n^2 = 1 + \frac{\sigma/\epsilon_0}{i\omega(1+i\omega\tau)}, \quad (32.42)$$

其中

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m\sigma}{Nq_e^2}, \quad (32.43)$$

这是关于金属折射率的一个简便公式。

§ 32-7 低频近似与高频近似;趋肤深度与等离子体频率

上述结果,即关于金属折射率的公式(32.42),预期对不同频率的波的传播会产生很不相同的特性。首先让我们看看在非常低频时发生的情况。若 ω 足够小,则式(32.42)可以近似为:

$$n^2 = -i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}. \quad (32.44)$$

现在,正如你能够取下式的平方而加以核实*,

$$\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

所以对于低频来说,

$$n = \sqrt{\sigma/(2\epsilon_0 \omega)}(1-i). \quad (32.45)$$

n 的实部与虚部的大小相同。由于 n 既有这么一个大的虚部,所以波在金属中就会迅速地衰减。参见式(32.36)可知,在 z 方向行进波的波幅是按照下式递减的:

$$\exp[-\sqrt{\sigma\omega/(2\epsilon_0 c^2)}z]. \quad (32.46)$$

让我们将此式写成

$$e^{-z/\delta}, \quad (32.47)$$

于是,这里的 δ 是波幅被削弱一个因子 $e^{-1} = 1/2.72$ ——或约三分之——时波所经过的距离。这样一种波的波幅作为 z 的函数,如图 32-3 所示。由于电磁波将透入金属仅仅这段距离,所以 δ 称为趋肤深度。它由下式给出:

$$\delta = \sqrt{2\epsilon_0 c^2 / (\sigma\omega)}. \quad (32.48)$$

那么所谓“低”频指的是什么呢?考察式(32.42)可以知道,只要 $\omega\tau$ 远小于 1,而且 $\omega\epsilon_0/\sigma$ 也远小于 1,则它便可由式(32.44)做近似——这就是说,我们的低频近似适用的条件为:

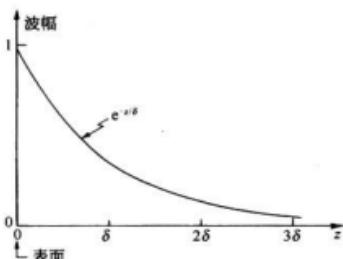


图 32-3 一个横电磁波的波幅作为进入金属中距离的函数

* 或者写出 $-i = e^{-iz/\delta}$, $\sqrt{-i} = e^{-iz/\delta} = \cos \pi/4 - i \sin \pi/4$, 这会给出相同的结果。

$$\omega \ll \frac{1}{\tau}$$

和

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (32.49)$$

让我们来看看,对于一种像铜那样的典型金属,与这些条件相当的是什么频率。我们利用式(32.43)算出 τ ,并再利用观测得的电导率以求得 σ/ϵ_0 。从手册中查出下列数据:

$$\sigma = 5.76 \times 10^7 (\Omega m)^{-1},$$

$$\text{原子量} = 63.5, *$$

$$\text{密度} = 8.9 \text{ g cm}^{-3},$$

$$\text{阿伏伽德罗常量} = 6.02 \times 10^{23} (\text{克原子量})^{-1}.$$

如果我们假定每个原子中有一个自由电子,则每立方米的自由电子数为

$$N = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

利用

$$q_e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C},$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1},$$

$$m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg},$$

我们得

$$\tau = 2.4 \times 10^{-14} \text{ s},$$

$$\frac{1}{\tau} = 4.1 \times 10^{13} \text{ s}^{-1},$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = 6.5 \times 10^{18} \text{ s}^{-1}.$$

所以对低于约 10^{12} Hz 的频率(这意思是说,对于自由空间波长大于 0.3 mm 的波——即波长十分短的无线电波),铜将具有如我们刚才所述的那种“低频”行为。

对于这些波,在铜内的趋肤深度为

$$\delta = \sqrt{\frac{0.028 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}}{\omega}}.$$

对每秒 $10\,000 \text{ MHz}$ 的微波来说(3 cm 波)

$$\delta = 6.7 \times 10^{-5} \text{ cm}.$$

说明这个波仅仅透入十分微小的一段距离。

由此我们可以看出,为什么在研究空腔(或波导)时,我们只需考虑空腔里的场,而不

* 原文为 atomic weight = 63.5 grams;似乎有误。——译者注

需关心金属里的或在空腔外面的场。并且,我们也明白,为什么通过用镀上一薄层银或金就能降低空腔里能量的损失。损耗来自电流,但只有在等于趋肤深度的那一薄层中它才是明显的。

假设现在考察像铜一类金属在高频时的折射率。对十分高的频率来说,由于 $\omega\tau$ 比 1 要大得多,而式(32.42)可很好地近似为:

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega^2 \tau}. \quad (32.50)$$

对于高频波来说,金属的折射率变成实数——并小于 1。这从式(32.38)来看也是明显的,只要含有 γ 的耗散项可以被忽略(这对于非常大的 ω 就可以做到)就行。式(32.38)给出

$$n^2 = 1 - \frac{Nq_e^2}{m_e \omega^2}. \quad (32.51)$$

当然,这与式(32.50)正好相同。以前我们曾见过 $Nq_e^2 / (m_e)$ 这个量,它曾被称为等离子体振动频率的平方(§ 7-3):

$$\omega_p^2 = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m},$$

因此就可以将式(32.50)或(32.51)写成

$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2.$$

该等离子体频率是一种“临界”频率。

对于 $\omega < \omega_p$, 金属的折射率有一虚部,因而波被衰减;但若 $\omega \gg \omega_p$, 则折射率是实数,此时金属变成透明的了。你当然知道,金属对于 X 射线是相当透明的,但有些金属甚至在紫外光区也是透明的。表 32-3 中,给出了几种金属开始变成透明时的实验观测波长。在第二列中给出了算出来的临界波长 $\lambda_p = 2\pi c / \omega_p$ 。鉴于实验上的波长值并非十分确切,所以理论与实践的这种符合程度就是相当好了。

表 32-3* 低于下列各波长,金属就变成透明

金 属	λ (实验值)(\AA)	$\lambda_p = 2\pi c / \omega_p$ (\AA)
Li	1 550	1 550
Na	2 100	2 090
K	3 150	2 870
Rb	3 400	3 220

* 转录自:C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2nd ed., 1956, p. 266.

你可能会觉得奇怪,为什么等离子体频率会与金属中电磁波的传播有关。在第 7 章中,等离子体频率曾作为自由电子的密度振荡的固有频率出现(一群电子由于电力作用而彼此互相排斥,又由于这些电子的惯性引起了一种密度振荡)。因此,那些等离子体纵波会在 ω_p 处发生共振。可是现在我们所谈的却是横电磁波,而又已发现这些横波在低于 ω_p 的频率时被吸收(这是一个有趣的然而并不是偶然的巧合)。

尽管我们谈论了金属中波的传播,但此刻你会意识到物理现象的普适性——无论是金属中的电子,还是地球外面电离层的等离子体中的电子或星球大气中的电子,它们都不构成任何差别。为了理解电离层中无线电的传播,我们可以使用同样的表示式——当然,要采用适当的 N 和 τ 值。现在我们能够弄清楚,为什么无线电长波会被电离层吸收或反射,而短波则将一直贯穿过去(如果要同人造卫星通信,就必须采用短波)。

我们已经谈论了关于金属中波传播的高频与低频两种极端情况。对于中间频率,那全频段的式子(32.42)就必须用到了。一般说来,折射率具有实部和虚部,当波传入金属时会受到衰减。对于很薄的层,金属甚至在光频时也有一点透明。作为一个例子,为在高温炉旁工作的人们所制作的特种护目镜就是在玻璃上蒸发一薄层金制成的。可见光能够相当好地透过它——带有墨绿色——但红外线则强烈地被它吸收。

最后,读者肯定会注意到,这里许多公式同第 10 章中所曾讨论过的有关介电常量 ϵ 的那些公式在某些方面相似。介电常量度了材料对恒定场、即对 $\omega = 0$ 的场的响应。如果你仔细地考察 n 和 ϵ 的定义,你就会见到 ϵ 不过是当 $\omega \rightarrow 0$ 时 n^2 的极限。诚然,在本章的方程中,若令 $\omega = 0$ 和 $n^2 = \epsilon$, 就会重现第 11 章中有关介电常量理论的那些方程。

第33章 表面反射

§ 33-1 光的反射与折射

本章的主题是光(一般地说即是电磁波)在表面上的反射和折射。我们曾在第1卷第26和33章中讨论过反射与折射定律,下面列出曾经在那里得到的一些结果:

1. 反射角等于入射角。若采用图33-1所规定的那些角,则

$$\theta_r = \theta_i. \quad (33.1)$$

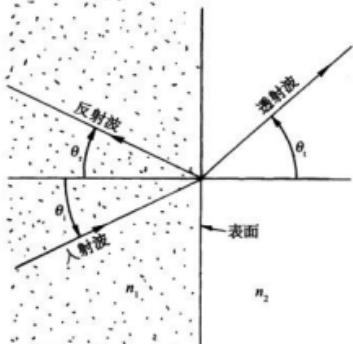


图33-1 在表面上光波的反射与折射
(波的传播方向与各波峰垂直)

2. 对于入射和透射波束,乘积 $n \sin \theta$ 彼此相等(斯涅耳定律):

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t. \quad (33.2)$$

3. 反射光的强度取决于入射角和偏振方向。对于 E 与入射面正交的情况,反射系数 R_{\perp} 为

$$R_{\perp} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}. \quad (33.3)$$

对于 E 与入射面平行的情况,反射系数 R_{\parallel} 为

$$R_{\parallel} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)}. \quad (33.4)$$

4. 对于法向入射(当然,不论哪一种偏振!),

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2. \quad (33.5)$$

以前,我们曾用 i 代表入射角, r 代表折射角。由于不能对“折射”角和“反射”角两者都用 r , 所以现在就采用 θ_i =入射角, θ_r =反射角, 而 θ_t =透射角。

我们以前所讨论的内容实际上是任何人至今正常跟上这个课题所需要的,但我们现在要用一种不同的方法完全重做一遍。为什么?一个原因是,以前我们假定折射率是实数(在材料中没有吸收)。另一个原因是,你应该知道怎样从麦克斯韦方程组的观点去处理波在表面上发生的情况。我们将得到与以前相同的答案,但目前却是从波动问题的一个直接解,而不是从某些聪明的论证得到的。

我们要强调,表面反射的振幅并不像折射率那样是材料的属性。它是一个“表面特性”,严格地取决于该表面是怎样构成的。在折射率为 n_1 和 n_2 的两种材料之间表面上一薄层额外的杂质往往会影响反射的情况(这里有各种类型干涉的可能性——像油膜的五颜六色)。

对某给定的频率适当的厚度甚至可以使反射波的振幅降低至零，那就是镀膜透镜的制作原理。我们将要导出的公式，只在折射率的改变很急速——发生在一个与波长相比很小的距离之内——时才正确。对于光来说，其波长约为5 000 Å，从而所谓“光滑”面我们指的是这样一种面：在面内经过仅仅几个原子（或几个Å）的距离，状况就改变。我们的方程式对于光在高度磨光的表面上将是有效的。一般说来，如果折射率是在超过几个波长的距离上逐渐改变的，则根本就很少反射。

§ 33-2 稠密材料中的波

首先，要向你们提起曾在第1卷第34章中采用过的描述平面正弦波的方便办法。波中任何场分量（我们用 E 作为例子）可以写成如下形式：

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (33.6)$$

其中 E 表示 t 时刻在（从原点算起的）点 \mathbf{r} 处的波幅。矢量 \mathbf{k} 指向波传播的方向，而它的大小 $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda$ ，即是波数。波的相速度为 $v_{相} = \omega/k$ ，对于折射率为 n 的材料中的光波， $v_{相} = c/n$ ，因而

$$k = \frac{\omega n}{c}. \quad (33.7)$$

假设 \mathbf{k} 沿着 z 方向，那么， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 就恰好是 kz ，正如我们经常用到的那样。对于在任何其他方向的 \mathbf{k} ，应当用 r_z 来代替 z ，那是在 \mathbf{k} 方向上从原点算起的距离，也就是说，应该用 kr_z 代替 kz ，前者恰好是 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ （见图33-2）。因此，式(33.6)就是波在任何方向的简便表示式。

当然，还必须记得

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z,$$

式中 k_x 、 k_y 和 k_z 是 \mathbf{k} 沿三个坐标轴的分量。事实上，以前曾经指出过： (ω, k_x, k_y, k_z) 是一个四维矢量，而它与 (t, x, y, z) 的标积则是一个不变量。因此，波的相位是一个不变量，而式(33.6)可以写成

$$E = E_0 e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

但是我们目前还不需要表示得那样漂亮。

对于一个如式(33.6)所示的那种正弦波形式的 E 来说， $\partial E / \partial t$ 等于 $i\omega E$ ，而 $\partial E / \partial x$ 等于 $-ik_x E$ ，其他各分量以此类推。你可以看出，为什么当与微分方程打交道时，运用式(33.6)那种形式会十分方便——微分都被乘法代替了。还有另一个有用之处：算符 $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$ 被三个乘积 $(-ik_x, -ik_y, -ik_z)$ 所代替。但这三个因子却按矢量 \mathbf{k} 的三个分量变换，因而算符 ∇ 就由 $-i\mathbf{k}$ 所代替了：

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\omega,$$

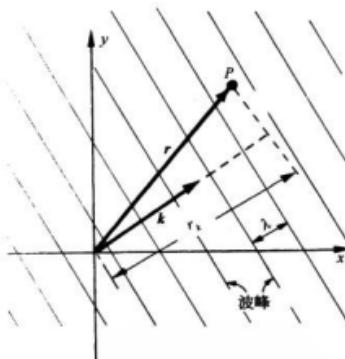


图33-2 沿 \mathbf{k} 方向前进的波，在任一点 P 的相位为 $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$

$$\nabla \longrightarrow -ik. \quad (33.8)$$

这对于 ∇ 的任一种运算——不论是梯度、散度或旋度——都保持正确。例如, $\nabla \times E$ 的 z 分量为

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

若 E_y 和 E_x 两者都按 e^{-ikz} 变化, 则由上式得

$$-ik_x E_y + ik_y E_x,$$

你明白这是 $-ik \times E$ 的 z 分量。

因此我们就得到非常有用的普遍事实, 即每当你不得不对一个像三维波(这种波是物理学的一个重要部分)那样变化的矢量取梯度时, 你始终可凭记住 ∇ 运算等价于乘上 $-ik$, 就能够迅速地并几乎不需思索地取得那些微商。

例如, 法拉第方程

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

对于波变成

$$-ik \times E = -i\omega B.$$

这告诉我们

$$B = \frac{k \times E}{\omega}, \quad (33.9)$$

上式相当于以前我们对自由空间里的波所求得的结果——波中的 B 既垂直于 E , 也垂直于波的传播方向(在自由空间中, $\omega/k = c$)。你可以从 k 沿着坡印亭矢量 $S = \epsilon_0 c^2 E \times B$ 的方向这个事实记住式(33.9)中的符号。

如果你对其他麦克斯韦方程也运用同样的规则, 你就会重新获得上一章中的那些结果, 而特别是

$$k \cdot k = k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}. \quad (33.10)$$

但既然我们已经知道了那些结果, 就无需再去做它了。

如果你想要自己寻点乐趣, 可以尝试下述的可怕问题, 回到 1890 年代那时研究生的毕业试题: 当极化强度 P 与电场 E 由一极化率张量相联系时, 试解出麦克斯韦方程组以求出各向异性晶体中的平面波。当然, 你应该选取你的坐标轴使其沿该张量的主轴, 以致关系最为简单(这样 $P_x = \alpha_x E_x$, $P_y = \alpha_y E_y$, 和 $P_z = \alpha_z E_z$), 但允许波有任意的方向和任意的偏振。你应能够求出 E 与 B 之间的关系以及 k 怎样随着方向和波的偏振而变化, 那么你将理解一块各向异性晶体的光学性质。最好是先从双折射晶体——像方解石——那种较简单的情况开始, 其中两个极化率相等(比方说 $\alpha_x = \alpha_z$), 并看看你是否能理解为什么当你通过这样的晶体观察时会得到双像。如果你已能够理解这些问题, 那么便可尝试那最困难的情况, 即三个 α 都不相同的那种情况。这样, 你就会明白你是否已达到 1890 年代研究生的水平。然而, 在本章中, 我们只希望讨论各向同性物质。

我们从实验上得知, 当一平面波到达两种不同材料——比如说, 空气和玻璃, 或水和油——之间的界面上时, 就有一个反射波和一个透射波。假设我们除此之外不再假定有其

他任何东西了，并看看能否算出些什么。首先，选取坐标轴使得 yz 面就是该界面，而 xy 面垂直于那些入射波面，如图 33-3 所示。

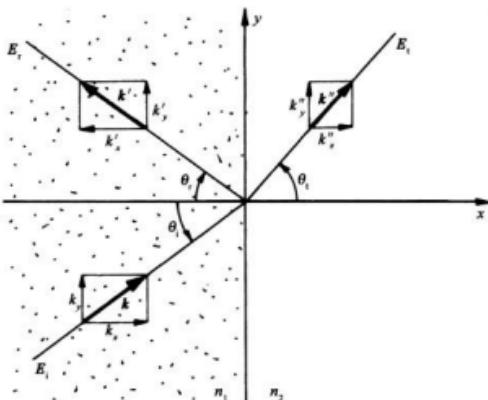


图 33-3 关于入射、反射和透射波的传播矢量 k , k' 和 k''

于是入射波的电矢量就可以写成

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (33.11)$$

既然 \mathbf{k} 垂直于 z 轴，因此

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y. \quad (33.12)$$

可以把反射波写成

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_0 e^{i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}, \quad (33.13)$$

以致它的频率为 ω' ，波数为 \mathbf{k}' ，而波幅为 \mathbf{E}'_0 （当然我们知道，频率以及 \mathbf{k}' 的大小分别与入射波的相同，但甚至对此也不打算做假定。我们将让它出自数学设计）。最后，对于透射波还可以写出

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}''_0 e^{i(\omega'' t - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r})}. \quad (33.14)$$

我们知道，麦克斯韦方程组中的一个方程会给出式(33.9)，因而对于每个波就有

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_i}{\omega}, \quad \mathbf{B}_r = \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_r}{\omega'}, \quad \mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_t}{\omega''}. \quad (33.15)$$

并且，如果把那两种媒质的折射率叫作 n_1 和 n_2 ，则由式(33.10)可得

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2}. \quad (33.16)$$

由于反射波是在同一种材料中的，因此

$$k'^2 = \frac{\omega'^2 n_1^2}{c^2}, \quad (33.17)$$

而对于透射波则为

$$k''_z = \frac{\omega''_2 n_2^2}{c^2}. \quad (33.18)$$

§ 33-3 边界条件

迄今我们已描述了三种波,现在的问题是要用入射波的各参数算出反射波和透射波的各参数,我们怎样才能做到这一点呢?上述三个波都满足在均匀材料中的麦克斯韦方程组,但是在两种不同材料的边界处麦氏方程组也应该被满足。因此,现在就必须考察一下正好在边界处发生的事情。我们将会发现,麦克斯韦方程组要求这三个波应以某种方式联系在一起。

作为我们意向的一个例子,电场 \mathbf{E} 的 y 分量在边界两边一定要相同。这是法拉第定律

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (33.19)$$

所要求的,同样也可以用下述方法看出。考虑一个横越边界的小矩形回路 Γ ,如图 33-4 所示。式(33.19)表明 \mathbf{E} 绕 Γ 的线积分等于通过该回路的 \mathbf{B} 通量的变化率:

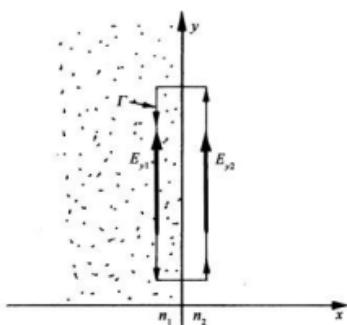


图 33-4 边界条件 $E_{y2} = E_{y1}$ 是根据

$$\oint_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ 获得的}$$

$$\oint_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_r \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da.$$

现在设想该矩形十分狭窄,以致回路所包围的面积为无限小。如果 \mathbf{B} 仍保持有限大(没有什么理由使它在边界上应该无限大),则通过该面积的通量为零,因此 \mathbf{E} 的线积分就必然为零。若 E_{y1} 和 E_{y2} 为边界两边的场分量,又若矩形的长度为 l ,则得

$$E_{y1} l - E_{y2} l = 0$$

或

$$E_{y1} = E_{y2}, \quad (33.20)$$

正如我们在上面说过的那样。这向我们提供了三个波的场之间的关系。

计算麦克斯韦方程组在边界处的结果这一步骤称为“确定边界条件”。一般总是这样做的:通过对诸如图 33-4 的那个小矩形 Γ 或对跨越在边界上的小高斯面做的论证来找出尽可能多的类似式(33.20)那样的式子。尽管那是一种非常完美的做法,但它给人们的印象是,对于每一不同的物理问题处理边界问题的方法都不相同。

例如,在一个越过边界的热流问题中,两边的温度是怎样联系起来的呢?噢,你可能争辩说,首先,从一边流进边界的热流应该等于从另一边流出边界的热流。由做出这样的物理论证以求得边界条件,通常是可能的,而且一般也很有用。然而,有时当你在处理某一问题时你可能只有某些方程式,而还未能立刻看出要采取什么样的物理论证。所以虽然我们目前感兴趣的只在于电磁问题,其中我们能够做出那些物理论证,但是仍想要给你们指出一种可用于任何一种问题的方法——一种直接从微分方程求出在边界上所发生的情况的普遍方法。

从写出关于电介质的所有麦克斯韦方程开始——而这次很特别, 将把一切分量都明显地写出:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) \quad (33.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial E_y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (33.22a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (33.22b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (33.22c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (33.23)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (33.24a)$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (33.24b)$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_z}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (33.24c)$$

现在这些方程必须在区域 1(边界左侧)和区域 2(边界右侧)中全都成立。我们已写出了在区域 1 与区域 2 中的解。最后, 它们也应当在边界内、即在我们称之为区域 3 中被满足。虽然人们往往把边界想象成明显不连续的区域, 事实却并非如此。物理性质很迅速地变化, 但并不是无限快的。在任何情况下, 我们都可以想象在一个我们称之为区域 3 中的短距离内, 折射率从区域 1 至区域 2 的过渡是非常快的, 但还是连续的。并且, 任何像 P_x , E_x 等场量在区域 3 中也将做相似的一种过渡。在这区域里, 那些微分方程仍必须被满足, 而根据这一区域中那些微分方程的结果我们就能获得所需的“边界条件”。

例如, 假设有一个介乎真空(区域 1)与玻璃(区域 2)之间的边界。在真空中没有什么可极化的东西, 因而 $\mathbf{P}_1 = 0$ 。假定在玻璃中有某种极化强度 \mathbf{P}_2 , 真空与玻璃之间有一个光滑而迅速的过渡。如果我们考察 \mathbf{P} 的任一分量, 比方说 P_x , 则它也许会如图 33-5(a) 所示那样变化。现在假设取第一个方程式(33.21), 它含有 \mathbf{P} 的分量对于 x , y 和 z 的微商。对 y 和 z 的微商我们不感兴趣, 在那些方向上不会发生什么特别事情。可是 P_x 的 x 微商在区域 3 中就将有某一很大值, 因为 P_x 的斜率极大。微商 $\partial P_x / \partial x$ 在边界处将有一明显的尖峰, 如

图 33-5(b)所示。如果我们设想将边界挤压成更薄的一层,则该尖峰便会升得更高。如果对于我们关心的波,边界的的确很陡,则在区域 3 中 $\partial P_x / \partial x$ 的大小将大大高于从边界外的波内 P 的变化中可能得到的任何贡献——这样就可以忽略除了由于边界引起的以外的其他一切变化。

现在若在式(33.21)右边存在一个巨大的尖峰,则该方程怎么才能够被满足呢?除非在另一侧也有一个同样巨大的尖峰,在左边的某种东西一定也很大。唯一的选择物是 $\partial E_x / \partial x$,因为其他随 y 和随 z 的变化都只不过是我们刚才所说的波中的小效应。因此, $-\epsilon_0(\partial E_x / \partial x)$ 必然会如图 33-5(c) 所示的那样——刚好是 $\partial P_x / \partial x$ 的拷贝。我们有

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

如果把这一方程对 x 跨越区域 3 积分,则得出结论:

$$\epsilon_0(E_{x2} - E_{x1}) = -(P_{x2} - P_{x1}). \quad (33.25)$$

换句话说,从区域 1 至区域 2, $\epsilon_0 E_x$ 的跃变必然等于 $-P_x$ 的跃变。

可以将式(33.25)重新写成

$$\epsilon_0 E_{x2} + P_{x2} = \epsilon_0 E_{x1} + P_{x1}, \quad (33.26)$$

这说明在区域 1 和区域 2 中量 $(\epsilon_0 E_x + P_x)$ 具有相等的值。人们说:越过边界时量 $(\epsilon_0 E_x + P_x)$ 是连续的。这样,我们有了一个边界条件。

尽管我们列举了一个由于区域 1 是真空而其中 P_1 是零的情况,但很清楚,这相同的论证也适用于在这两个区域中的任两种材料,因而式(33.26)

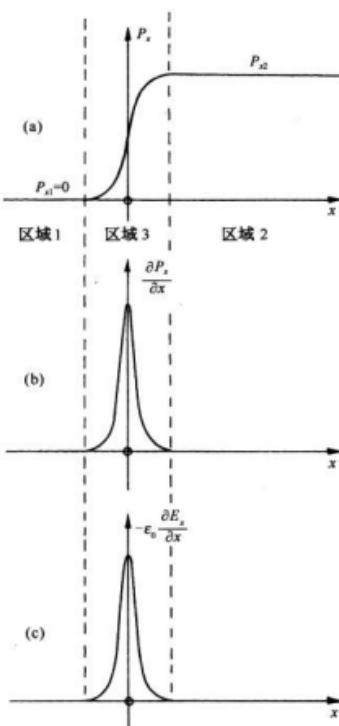
图 33-5 处于区域 1 与区域 2 的两种不同材料之间的过渡区域 3 中的场

是普遍正确的。

现在仔细检查其余的麦克斯韦方程,并看看它们中的每一个会告诉我们什么。下一步我们将选取式(33.22a)。这其中并没有 x 微商,因而不会告诉我们任何东西(记住场本身在边界处不会变得特别大,只有对于 x 的微商才可能变得如此巨大以致它们支配了方程)。其次,我们考察式(33.22b)。啊! 这里有一个 x 微商! 在左边有 $\partial E_x / \partial x$,假定它是一个巨大微商。但请等一等! 右侧并没有什么东西与它相配,因此 E_x 在从区域 1 进至区域 2 时就不能有任何跃变[若果真有跃变的话,就会在式(33.22b)的左边出现一个尖峰,但在右边则没有,那么该方程式就是错的了]。因此,我们有这么一个新的条件:

$$E_{x2} = E_{x1}. \quad (33.27)$$

通过同样的论证,式(33.22c)给出



$$E_{y2} = E_{y1}, \quad (33.28)$$

这最后的结果恰好就是根据线积分的论证而获得的式(33.20)。

我们继续讨论式(33.23)。唯一可能具有尖峰的项为 $\partial B_z / \partial x$, 但在该式右侧却没有什么与之相配, 因而可以断定

$$B_{xz} = B_{x1}. \quad (33.29)$$

面临麦克斯韦方程组的最后一个了! 式(33.24a)不会给出什么, 因为并没有 x 微商。式(33.24b)中有一个 x 微商, 即 $-c^2 \partial B_z / \partial x$, 但仍旧没有什么与之相配。因而得

$$B_{z2} = B_{z1}. \quad (33.30)$$

最后一个方程与此很相似, 并将给出

$$B_{y2} = B_{y1}. \quad (33.31)$$

后面三个方程为我们提供了 $B_2 = B_1$ 。然而, 必须强调, 只有当边界两侧的材料是非磁性材料——或宁可说, 当我们可以忽略材料的任何磁效应——时才会获得这个结果。除了铁磁性材料之外, 对于大多数材料来说往往是可做到的(我们将在以后某些章节中处理材料的磁性)。

表 33-1 在电介质表面上的边界条件

$(\epsilon_0 E_1 + P_1)_x = (\epsilon_0 E_2 + P_2)_x$
$(E_1)_y = (E_2)_y$
$(E_1)_z = (E_2)_z$
$B_1 = B_2$
(表面在 yz 平面内)

上述计划已使我们获得关于在区域 1 与区域 2 之间场的六个关系式, 已经将它们汇集在表 33-1 中。现在可以利用它们来匹配两个区域内的波。然而, 还要强调, 刚才所用到的那种概念在任何这样的物理情况下都适用。例如你有一些微分方程, 并想要求得方程跨越两区域之间(那里某种性质发生了改变)一个明显的边界的解, 对于我们眼前的目标来说, 可以利用关于在边界处通量与环流的那些论证轻易地推导出同样的方程(你或许想要看看能否按照那种办法来得到同样的结果)。但现在你已经看到, 每当你遇到困难而又不明白关于在边界上发生的事情的物理方面的任何简易论证时, 你们便会有一种行之有效的方法——可以只处理那些方程。

§ 33-4 反射波与透射波

现在可以把前面的边界条件应用于 § 33-2 中写下的波。我们曾有:

$$E_i = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (33.32)$$

$$E_r = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}, \quad (33.33)$$

$$E_t = E''_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}, \quad (33.34)$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_i}{\omega}, \quad (33.35)$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_i}{\omega}, \quad (33.36)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_i}{\omega}, \quad (33.37)$$

另外,还有一点知识:对于每一个波, \mathbf{E} 垂直于其传播矢量 \mathbf{k} 。

结果将取决于该入射波的 \mathbf{E} 矢量方向(偏振)。如果我们把入射波具有平行于“入射面”(即 xy 面)的 \mathbf{E} 矢量的情况与入射波具有垂直于入射面的 \mathbf{E} 矢量的情况分开处理,那么分析起来就会简单得多。任何其他偏振的波都不过是这两种波的线性组合。换句话说,反射与透射强度对于不同的偏振是不同的,而最容易做的是选出这两种最简单的情况而加以分别处理。

我们将对一个垂直于入射面偏振的入射波进行分析,然后对另一种情况只给出结果。通过选取这种最简单情况我们似乎未免有点不老实,但在原理上两者都是一样的。因此我们假定 \mathbf{E}_i 只有一个 z 分量,而既然所有的 \mathbf{E} 矢量都在同一个方向上,就可取消矢量的符号。

只要两种材料都是各向同性的,那么材料里电荷的感生振动也将沿着 z 方向,而透射与反射波的 \mathbf{E} 场也将各只有一个 z 分量。因此,对于所有的波, E_x 和 E_y ,以及 P_x 和 P_y ,都等于零。那些波的 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 矢量如图 33-6 所示(这里对于原来想要从微分方程组得到一切的计划来说我们是抄了一条近路。这些结果也可从边界条件得到,但通过利用物理论证我们可以省去许多代数运算。如果你有些空闲时间,不妨试试能否从那些方程获得同样的结果。很清楚,我们上面所说的一切都与那些方程相一致,只是我们还没有证明不存在别的可能性而已)。

现在从式(33.26)至(33.31)的边界条件给出区域 1 与区域 2 中 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 各分量间的关系。在区域 2 中只有那透射波,而在区域 1 中则有两种波。

图 33-6 当入射波的 \mathbf{E} 场垂直于入射面时,反射波和透射波的偏振情形

我们要用哪一种波呢?当然,在区域 1 中的场等于入射波与反射波两个场的叠加(由于每个场都满足麦克斯韦方程组,因而两者之和亦然)。所以当我们应用边界条件时,就必须用到

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t,$$

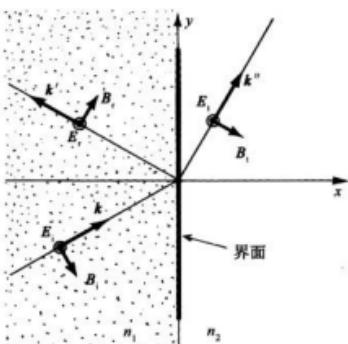
对于 \mathbf{B} 的情况来说,也与此相仿。

对我们正在考虑的偏振而言,式(33.26)和(33.28)不会提供任何新的知识,只有式(33.27)才有用处。它表明:在边界上,也就是在 $x=0$ 处,

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t.$$

因此我们就有

$$E_0 e^{i(\omega t - k_z y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_z y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_z y)}, \quad (33.38)$$



上式必须对一切的 t 和所有的 y 都正确。假设首先考察在 $y = 0$ 处的情况，此时我们有

$$E_0 e^{i\omega t} + E'_0 e^{i\omega' t} = E''_0 e^{i\omega'' t}.$$

这一方程表明，两个振动项之和等于第三个振动项，这只有当所有的振动都具有相同频率时才能出现（三个——或任何数目的——具有不同频率的这种项相加在任何时刻都为零，这是不可能的）。因此

$$\omega'' = \omega' = \omega. \quad (33.39)$$

正如我们过去一直都知道的那样，反射波及透射波的频率与入射波的相同。

其实一开始我们就可以将这一条件放进去以避免一些麻烦，但希望向你们证明它也可以从那些方程式得出。当你正在做实际的问题时，往往最好一开头就把你知道的每件事都正确地放到计算中去，从而使你避免许多麻烦。

根据定义， k 的大小由 $k^2 = n^2 \omega^2 / c^2$ 给出，因而也就有

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k'^2}{n_1^2} = \frac{k^2}{n_1^2}. \quad (33.40)$$

现在我们来考察 $t = 0$ 时的式(33.38)。再度利用刚才所做的相同类型的论证，但这一次是建筑在该方程必须对所有 y 值都满足这个事实基础上的，因而得

$$k''_y = k'_y = k_y. \quad (33.41)$$

由式(33.40)，即 $k'^2 = k^2$ ，所以得

$$k_x'^2 + k_y'^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

将此式与(33.41)相结合，我们有

$$k_x'^2 = k_x^2,$$

即 $k'_x = \pm k_x$ 。正号不构成任何意义，它不会给出反射波，却给出另一个入射波，而我们一开始就说过了正在解只有一个入射波的问题，所以我们有

$$k'_x = -k_x. \quad (33.42)$$

式(33.41)和(33.42)向我们提供了反射角等于入射角的结论，正如所期待的（见图 33-3）那样，反射波为

$$E_r = E'_0 e^{i(\omega t + k_x x - k_y y)}. \quad (33.43)$$

对于透射波，则已有

$$k''_y = k_y$$

和

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k^2}{n_1^2}, \quad (33.44)$$

因而我们能够由这两式解出 k''_x 来，结果得到

$$k''_x = k''^2 - k''_y^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} k^2 - k_y^2. \quad (33.45)$$

暂时假定 n_1 和 n_2 都是实数（即两折射率的虚部都十分微小），那么所有的 k 也都是实

数, 并从图 33-3 求得

$$\frac{k_x}{k} = \sin \theta_i, \quad \frac{k''_x}{k} = \sin \theta_r. \quad (33.46)$$

又由式(33.44), 我们得到

$$n_2 \sin \theta_r = n_1 \sin \theta_i, \quad (33.47)$$

这就是斯涅耳折射定律——又是我们熟悉的某种东西。如果折射率不是实数, 则波数将是复数, 而我们就得用到式(33.45) [仍然能够通过式(33.46)来定义角度 θ_i 和 θ_r]。而式(33.47)即斯涅耳方程大体上也应该正确。但此时“角度”也是复数, 因而丧失了作为角度的简单几何解释。于是, 最好是通过它们的复数 k_x 或 k''_x 的值来描述那些波的行为]。

迄今为止, 我们没有发现任何新的东西。只是从复杂的数学方法中得到了某些明显答案而感到一种纯朴的喜悦。现在我们准备求出还不知道的波幅。利用关于 ω 和 k 的结果, 式(33.38)中的指数因子就可以消去, 因而我们得到

$$E_0 + E'_0 = E''_0. \quad (33.48)$$

由于 E'_0 和 E''_0 都属未知, 所以就需要另一个关系式。我们必须引用另一个边界条件。有关 E_x 和 E_y 的那些方程都无能为力, 因为所有的 E 都只有一个 z 分量。因此, 必须用到关于 B 的那些条件。让我们试一试式(33.29):

$$B_{xz} = B_{x1}.$$

根据式(33.35)至(33.37),

$$B_{xi} = \frac{k_y E_i}{\omega}, \quad B_{xr} = \frac{k'_y E_i}{\omega}, \quad B_{xt} = \frac{k''_y E_i}{\omega''}.$$

并回忆起 $\omega'' = \omega' = \omega$ 和 $k''_y = k'_y = k_y$, 我们便得

$$E_0 + E'_0 = E''_0.$$

但这恰好又是式(33.48)! 我们不过在为得到已知的某些东西而浪费时间。

可以试一试式(33.30), 即 $B_{xz} = B_{x1}$, 但却没有 B 的 z 分量! 因此剩下来的就只有一个方程: 即式(33.31), $B_{yz} = B_{y1}$ 。对于那三个波:

$$B_{yi} = -\frac{k_z E_i}{\omega}, \quad B_{yr} = -\frac{k'_z E_i}{\omega}, \quad B_{yt} = -\frac{k''_z E_i}{\omega''}. \quad (33.49)$$

把 $x = 0$ 处(即在边界上)波的表示式作为 E_i , E_r 和 E_t 代入, 则边界条件为

$$\frac{k_z}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - k_z y)} + \frac{k'_z}{\omega} E'_0 e^{i(\omega' t - k'_z y)} = \frac{k''_z}{\omega''} E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_z y)}.$$

而且所有的 ω 和所有的 k_z 都相等, 因而上式将简化成

$$k_z E_0 + k'_z E'_0 = k''_z E''_0. \quad (33.50)$$

这为我们提供了一个不同于式(33.48)的有关 E 的方程。有了这两个式, 便可解出 E'_0 和 E''_0 了。由于 $k'_z = -k_z$, 我们得

$$E'_0 = \frac{k_x - k''_x}{k_x + k''_x} E_0, \quad (33.51)$$

$$E''_0 = \frac{2k_x}{k_x + k''_x} E_0. \quad (33.52)$$

这些,再加上关于 k''_x 的式(33.45)或(33.46),便向我们提供了想要知道的东西。将在下一节中讨论这一答案的后果。

如果从一开始就设偏振波的 E 矢量平行于入射面,则 E 将有 x 和 y 两分量,如图 33-7 所示。代数运算虽然直截了当,但较为复杂点(在这种情况下通过用全都沿 z 方向的磁场 B 来表示,工作量会稍为减轻些)。人们求得

$$|E'_0| = \frac{n_2^2 k_x - n_1^2 k''_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k''_x} |E_0| \quad (33.53)$$

和

$$|E''_0| = \frac{2n_1 n_2 k_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k''_x} |E_0|. \quad (33.54)$$

让我们来看看,上述结果是否与我们以前得到的相符。式(33.3)就是在第 1 卷第 33 章中我们曾经算出来的关于反射波与入射波强度的比。

然而,我们当时只考虑了实数折射率。对于实数折射率(以及实数 k)来说,就可以写成

$$k_x = k \cos \theta_i = \frac{\omega n_1}{c} \cos \theta_i,$$

$$k''_x = k'' \cos \theta_i = \frac{\omega n_2}{c} \cos \theta_i.$$

把这些代入式(33.51)中,则得

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_i}, \quad (33.55)$$

看来上式还是与式(33.3)不同。然而,如果我们运用斯涅耳定律以消去那些 n ,则两式就会相同。即令 $n_2 = n_1 \sin \theta_i / \sin \theta_r$, 并对上式中的分子和分母各乘以 $\sin \theta_r$, 便得

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\cos \theta_i \sin \theta_r - \sin \theta_i \cos \theta_r}{\cos \theta_i \sin \theta_r + \sin \theta_i \cos \theta_r}.$$

分子和分母都仅是 $-(\theta_i - \theta_r)$ 和 $(\theta_i + \theta_r)$ 的正弦,因而得到

$$\frac{E'_0}{E_0} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)}. \quad (33.56)$$

由于 E'_0 和 E_0 都在同一种材料中,强度都正比于其电场的平方,所以我们就得到与以前相同的结果。同理,式(33.53)也与式(33.4)相同。

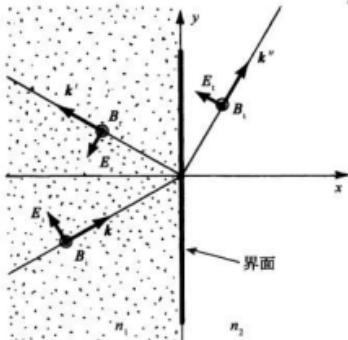


图 33-7 当入射波的 E 场平行于入射面时各波的偏振情形

对于沿法向入射的波, $\theta_i = 0$ 和 $\theta_r = 0$ 。式(33.56)便给出 0/0, 那不是十分有用的。然而, 我们可以回到式(33.55)上去, 它会给出

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E'_o}{E_o} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (33.57)$$

自然, 这一结果适用于上述两者中的“任一种”偏振, 因为对于法向入射来说不存在特殊的“入射面”。

§ 33-5 金属上的反射

我们现在可以引用上述结果来理解从金属上反射的有趣现象。为什么金属会闪闪发亮呢? 在上一章中我们曾看到, 金属的折射率对于某些频率来说具有大的虚部。让我们来看看, 当光从空气 ($n = 1$) 照射到 $n = -in_1$ 的材料时我们会得到什么样的反射强度。因此式(33.55)给出(对于法向入射):

$$\frac{E'_o}{E_o} = \frac{1 + in_1}{1 - in_1}.$$

关于反射波的强度, 我们需要 E'_o 和 E_o 的绝对值的平方:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{|E'_o|^2}{|E_o|^2} = \frac{|1 + in_1|^2}{|1 - in_1|^2}$$

或

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{1 + n_1^2}{1 + n_1^2} = 1. \quad (33.58)$$

对于折射率为纯虚数的材料, 会发生百分之百的反射!

金属并不会百分之百地反射, 但其中有许多对可见光的反射非常好。换句话说, 它们的折射率的虚部很大。但我们已经知道, 折射率的巨大虚部意味着强烈的吸收。因此就有这么一个普遍法则: 任何材料如果对任何频率都变成十分优良的吸收体, 则这种波会在其表面强烈反射而很少会进入其内部被吸收。你可以利用一些浓稠颜料看到这个效应。最浓颜料的纯晶体会有一种“金属”光泽。也许你已注意到, 在一个紫色墨水瓶边缘上那些干燥了的颜料会发出一种金黄色的金属反射, 或干燥了的红墨水有时会给出一种浅绿色的金属反射。红墨水把透射光中的绿色吸收掉了, 因而如果该墨水很浓, 它就会表现出对绿色光那些频率的强烈表面反射。

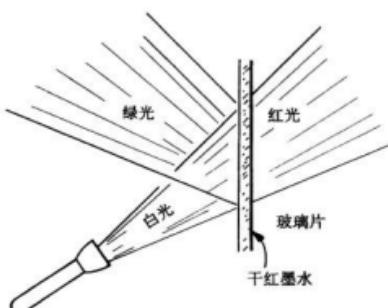


图 33-8 对频率为 ω 的光会强烈吸收的材料也能对该频率的光进行反射

你可以用红墨水涂于玻璃片之上并让它干燥后来轻易地表演这一效应。如图 33-8 所示, 如果你用一束白光从玻璃片后面照射上去, 则可得到一束红色透射光和一束绿色反射光。

§ 33-6 全内反射

如果光从像玻璃那样具有实数折射率 n 大于 1 的材料向折射率等于 1 的空气传播，则由斯涅耳定律

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r.$$

可知，当入射角等于由下式所给出的“临界角” θ_c

$$n \sin \theta_c = 1 \quad (33.59)$$

时，该透射波的角 θ_r 会变成 90° 。对大于这临界角的 θ_i 又会发生什么情况呢？你知道将会有全内反射，但那是怎么产生的呢？

让我们回到式(33.45)上去，它给出透射波的波数 k'' 。我们应有

$$k''_x = \frac{k^2}{n^2} - k_y^2,$$

这里 $k_y = k \sin \theta_i$ ，而 $k = \omega n / c$ ，因而

$$k''_x = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 \theta_i),$$

如果 $n \sin \theta_i$ 大于 1，则 k''_x 就是负的，因而 k''_x 是一个纯虚数，比方说 $-ik_1$ 。至此你已明白那意味着什么了！该透射波(式 33.34)将有这种形式：

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_0'' e^{\pm k_1 x} e^{i(\omega t - k_y y)}.$$

波幅会随 x 的增大而按指数式地增加或减少。很清楚，这里所要的是那个负号。这样在界面右边的波幅就将如图 33-9 中所示的那样递减。注意 k_1 为 ω/c ，它具有 $1/\lambda_0$ 的数量级，其中 λ_0 为光在自由空间中的波长。当光从玻璃—空气界面上发生全内反射时，在空气里仍会有场，但只延伸到光波长的数量级那么一段距离。

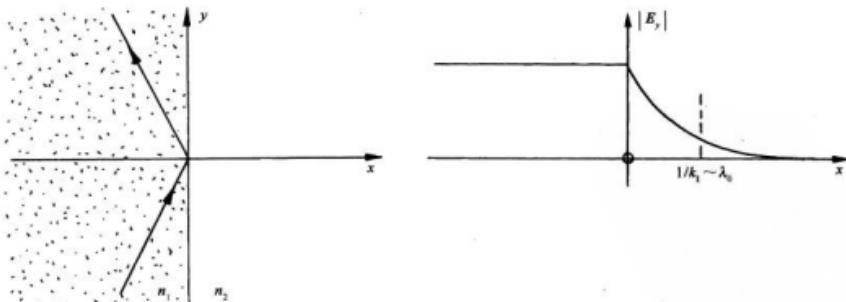
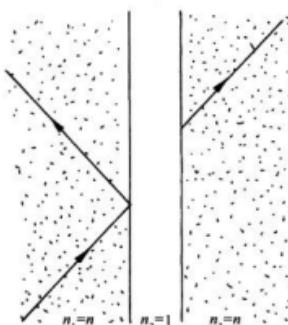


图 33-9 全内反射

现在我们可以知道如何来回答下述问题：如果玻璃中的光波以一足够大的角度到达表

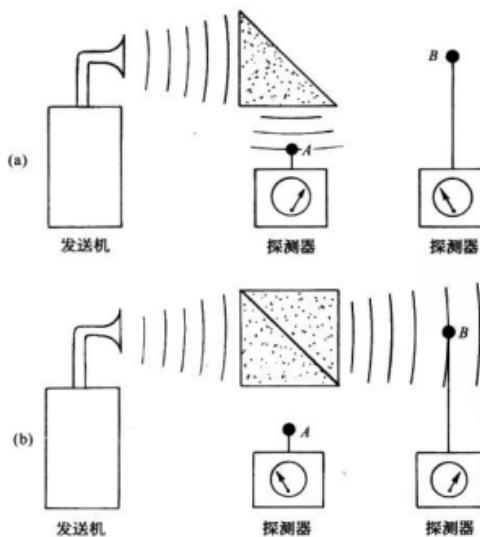
面，则它会被反射回来，如果把另一块玻璃移到该表面上去（以致“表面”实际上是消失了），



则此时光将透射过去。试问这恰好是在什么时候发生的呢？肯定地说，必然存在从全反射变成无反射的连续变化过程。答案当然是：如果该空气间隙如此之小，以致波在空气中的指数曲线的尾部在那第二块玻璃中还有相当大的强度，则它仍将会在那里振动着电子而产生一个新的波，如图 33-10 所示。某些光将透射过去（显然，我们的解是不完全的，本来应该就两层玻璃间一薄层空气的情况再对所有的方程求解）。

这种透射效应可以用普通光观察到，只要空气间隙十分微小（属于光波波长的数量级，诸如 10^{-5} cm），但如果采用三厘米波，则不难演示出来。这时按指数函数衰减的场就会伸展几个厘米。一种能表现这一效应的微波装置如图 33-11 所示。从三厘米波的小发送机发出波对准一个 45° 角的石蜡棱镜。对于这种频率石蜡的折射率为 1.50，因而临界角为 41.5°。所以波全部从那个

45° 的面上反射而由探测器 A 采集，如图 33-11(a) 所示。如果将第二个石蜡棱镜与该第一个棱镜互相接触地放在一起，如图 33-11(b) 中所示，则波将笔直地贯穿过去而在探测器 B 那里被接收。如果在两个棱镜之间留下几厘米厚的空隙，如图 33-11(c) 所示那样，则透射波与反射波两者都同时并存。在图 33-11(a) 中存在于该棱镜的 45° 面之外的电场，也可以通过把探测器 B 移至离该表面几厘米内而加以鉴定。



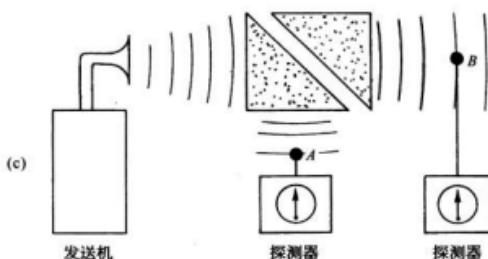


图 33-11 对内反射波的贯穿程度的演示

第34章 物质的磁性

§ 34-1 抗磁性和顺磁性

在本章中,我们将要谈论物质的磁性。具有最显著磁性的材料当然是铁。与此类似的磁性材料还有镍、钴,以及——在足够低的温度下(低于16℃)——钆和若干特种合金。这类被称为铁磁性的磁性足够显著和复杂,所以我们将专门用一章来加以讨论。然而,所有普通物质也确实会表现出某些磁效应,尽管十分微弱——比铁磁性材料中的效应要小千倍至百万倍。这里我们将描述普通的磁性,也就是说,描述除了那些铁磁性物质以外的其他物质的磁性。

这种微小磁性分成两类。有些材料会被引向磁场,而其他材料则被排斥。不像物质中的电效应那样,始终引起电介质被吸引,而这种磁效应却有两种符号。这两种符号可以借助于一座配备有一个尖极和一个平极的强电磁铁来轻易地加以证明,如图34-1所示。

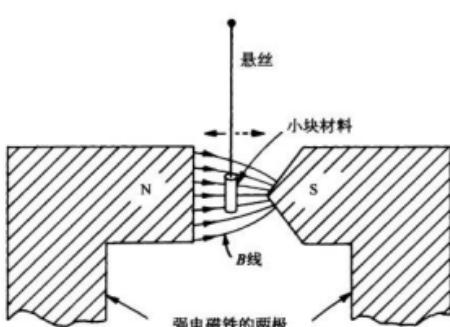


图34-1 一块铋的小柱体会被尖极轻微排斥;而一块铝则会被吸引

在尖极附近的磁场比平极附近的磁场要强得多。如果一小块物质由一根长线缚住并悬挂在两极之间,则一般说来,将有一微小的力作用于其上,这个小力可以通过电磁铁通电时悬挂材料的微小位移看出来。上述那几种铁磁材料会十分强烈地被吸引至该尖极上去,其他一切材料只会感到十分微弱之力,有的被微微地引向尖极,有的则轻微地被排斥。

用铋的一个小柱体最容易看到这一效应,它会从强场区域被推开。像这样受到排斥的物质称为抗磁性物质。铋就是一种最强的抗磁性物质,但即使如此,效应仍然十分微弱。抗磁性总是十分弱的。如果一小块铝被挂在两极之间,则也会受到一微小之力,但却是指向该尖极的。像铝这类物质称为顺磁性物质(在这么一个实验中,当电磁铁通电或断路时会发生一些涡流力,而这些力就能够引起强烈冲击。所以你必须小心地测出该悬挂物体静止后的净位移)。

现在我们要来简略地描述这两种效应的机制。首先,在许多种物质中的原子都不具有永久磁矩,或者毋宁说,每个原子里面的磁体都互相抵消了以致该原子的净磁矩等于零。电子自旋及其轨道运动都完全给抵消掉了,使得任何特定的原子都不具有平均磁矩。在这种

场合下,当你把磁场开动时,由于感应在原子里产生了一个小小的额外电流。按照楞次定律,这些电流处在反抗正在增长着的磁场这样一种方向,所以原子的感生磁矩的指向就与磁场的指向相反,这就是抗磁性的机制。

另外,还有某些物质,其中原子确实具有永久磁矩——各电子的自旋和轨道运动具有不等于零的净环流。所以除了抗磁性(这始终会存在)之外,还存在把各个原子的磁矩排列整齐的可能性。在这一种情况下,磁矩试图随同磁场整齐排列(正如电介质中的永久电偶极子会被电场排齐一样),因而这感生磁场就有加强原来磁场的倾向。这一类物质就是顺磁性的物质。顺磁性一般都相当弱,因为那些使其排列整齐的力比起那些来自企图扰乱秩序的热运动之力相对较微小。由此也可以推断说,顺磁性通常都对温度较敏感(由造成金属导电性的自由电子的自旋所引起的顺磁性则是个例外。我们将不在这里讨论这种现象)。对于普通的顺磁性,温度越低,效应就越强。在低温下当碰撞引起的混乱效应较少时就会有较整齐的排列。另一方面,抗磁性几乎与温度无关。在任何具有固有磁矩的物质中抗磁和顺磁两种效应同时存在,但顺磁效应却往往占优势。

在第11章中,我们曾描述过一种铁电性材料,其中所有电偶极子都被它们本身共有的电场所排齐。也有可能设想这种铁电性的磁性模拟,其中所有的原子磁矩都会排列整齐并连接在一起。如果你对这种情况如何会发生进行计算,则你就会发现由于磁力比电力小得那么多,所以甚至在绝对温度十分之几度时热运动就应能把这种排列冲散。因此在室温时不可能会存在任何磁矩的永恒排列。

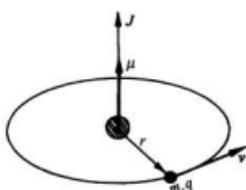
反之,这恰好就是铁中发生的事情——磁矩的确得到了整齐排列。在铁的不同原子的磁矩间有一种比直接磁相互作用要强得多得的有效力。这是一种只能用量子力学加以解释的间接效应。它比直接的磁相互作用约强一万倍,而这就是把铁磁性材料中的磁矩整齐排列起来的力。我们将在后面一章中讨论这种特殊的相互作用。

既然我们已经试着向你们提供了一个有关抗磁性与顺磁性的定性解释,因此我们必须纠正自己并且说明,不可能从经典物理学的观点用任何普通的方法来理解材料的磁效应。这样的磁效应完全是一种量子力学现象。然而,却可以做出某些虚假的经典论证而获得关于事情将发生的某种概念。我们也许可以这样说。你可做出某些经典论证并得到关于材料性能的一些猜测,但这些论证在任何意义上都不是“合法”的,因为最本质的是在每一种这样的磁现象中都绝对涉及到量子力学。另一方面,有一些情况,诸如在等离子体中或在含有许多自由电子的空间区域中,在那里电子的确遵循经典力学规律。而在那些场合下,某些来自经典磁性的定理才有价值。并且,由于历史原因经典论证也确有某些价值。人们最初几次能够猜想到磁性材料的意义及其行为,的确是用了经典论据的。最后,正如我们上面所指出的,经典力学也还能够向我们提供有关或许会发生的事态的某些有用猜测——尽管要研究这一课题的真正简单的方法应该是先去学习量子力学,然后再用量子力学来理解磁性。

另一方面,我们却不想等到彻底学习了量子力学以后才来理解像抗磁性这么一种简单东西。我们不得不依靠经典力学作为对发生过程的一种不完全证明,但始终必须认识到,那些论证实际上是不正确的。为此,我们做出了一系列会使你们发生混乱的有关经典磁性的定理,因为它们会证明另一些东西。除了最后那一条定理外,其他每一条都将是错误的。而且,作为对物理世界的描述它们全都是错的,因为量子力学被漏掉了。

§ 34-2 磁矩与角动量

我们所要证明的第一个来自经典力学方面的定理如下：如果电子在一个圆周轨道上运动（比方，在有心力的影响下绕核旋转），则磁矩与角动量间存在一个确定的比率。对于在轨道上运动的电子，让我们称它的角动量为 \mathbf{J} ，磁矩为 μ 。角动量的大小就是电子质量乘上速度再乘以半径（见图 34-2），它的方向与轨道的平面垂直，



$$\mathbf{J} = mvr \quad (34.1)$$

（当然，这是一个非相对论性的公式，但它对于原子却是一种很好近似，因为对于电子所涉及的 v/c 值一般为 $e^2/\hbar c = 1/137$ 或约 1% 的数量级）。

相同轨道的磁矩是电流乘以面积（见 § 14-5），电流等于单位时间通过轨道上任一点的电量，也即电荷 q 乘以转动频率，因为频率等于速度除以轨道的周长，所以

$$I = q \frac{v}{2\pi r}.$$

因面积为 πr^2 ，所以磁矩为

$$\mu = \frac{qvr}{2}, \quad (34.2)$$

它也指向与轨道平面垂直的方向，所以 \mathbf{J} 与 μ 处在相同的方向：

$$\mu = \frac{q}{2m} \mathbf{J} \text{ (轨道).} \quad (34.3)$$

它们间的比率与速度和半径都无关。对于任何在圆周轨道上运动的粒子，其磁矩等于角动量的 $q/(2m)$ 倍。对于一个电子来说，电荷是负的——我们把它叫做 $-q_e$ ，因而有

$$\mu = -\frac{q_e}{2m} \mathbf{J} \text{ (电子轨道).} \quad (34.4)$$

那是我们按照经典理论所预期的，但相当奇怪，它在量子力学中却仍然正确。它属于这类事情中的一件。可是，若你继续应用经典物理，你就会发现在其他一些地方，从它得出来的答案乃是错误的，因而试图记住哪些是对的与哪些是错的将是一场大的游戏。我们也许可以立刻向你们提供在量子力学中一般是正确的东西。首先，式(34.4)对轨道运动是正确的，但那并不是唯一存在的磁性。电子还有对其本身的轴自旋的运动（有点像地球绕地轴的转动），而作为自旋的结果它同时具有角动量和磁矩。但由于纯粹是量子力学方面的原因——并没有经典方面的解释——所以关于电子自旋的 μ 与 \mathbf{J} 的比率是该自旋电子的轨道运动的二倍，即

$$\mu = -\frac{q_e}{m} \mathbf{J} \text{ (电子自旋).} \quad (34.5)$$

一般说来，在任何原子中既有几个电子，又有关于自旋和轨道运动的某种结合，从而造成一个总角动量和一个总磁矩。尽管没有经典方面的理由可以说明为什么会这样，但在量子力学中却始终正确，即（对于一个孤立原子）磁矩的方向恰好与角动量的方向相反。这两

者之间的比率不一定为 $-q_e/m$ 或者为 $-q_e/(2m)$ ，而是介乎这两值之间，因为有来自轨道和自旋两方面贡献的混合。我们可以写成

$$\mu = -g\left(\frac{q_e}{2m}\right)J, \quad (34.6)$$

式中 g 是标志原子状态的一个因子，对于纯轨道矩它应该为 1，对于纯自旋矩它应该是 2，若对于一个像原子那样的复杂系统，则 g 应该处于 1 与 2 之间的其他某个数值。当然，这一公式并不会告诉我们很多东西，它只是说磁矩平行于角动量，但可以有任意的大小。然而，式(34.6)的形式却很方便，因为被称作“朗德 g 因子”的这个 g 是一个大小为 1 的量级的无量纲常数。量子力学的任务之一就是对任何特定的原子态预言这个 g 因子。

你或许也会对核里发生的情况感兴趣。在核里存在着质子和中子，它们可能在某种轨道上绕行，而同时，像电子一样，也具有内禀自旋。磁矩再度平行于角动量。对于绕圆周运动的质子来说，只有现在这两者之比的数量级才是你可能想到的，即式(34.3)中的 m 应等于质子质量。因此对于核来说经常写成

$$\mu = g\left(\frac{q_e}{2m_p}\right)J, \quad (34.7)$$

式中 m_p 为质子质量，而 g 称为核的 g 因子，是一个接近于 1 的常数，对每一种核要分别加以测定。

关于核的另一个重要差别就是质子的自旋磁矩并不像电子那样具有一个等于 2 的 g 因子。对于质子而言， $g = 2(2.79)$ 。非常奇怪，中子也有自旋磁矩，而此磁矩相对于其角动量则为 $2(-1.93)$ 。换句话说，在磁的意义上，中子并不严格表现“中性”，它好像是个小磁体，而且具有一个旋转着的负电荷才会有的那种磁矩。

§ 34-3 原子磁体的进动

磁矩与角动量成正比的后果之一是，放在磁场中的一个原子磁体将会进动。首先，我们将按照经典方式来做论证。假设在匀强磁场中有一个自由悬挂着的磁矩 μ ，它将感受到一个等于 $\mu \times B$ 的力矩，该力矩试图将它转至场的方向。但原子磁体是个陀螺仪——它具有角动量 J 。因此，由磁场所产生的力矩并不会使该磁体排列整齐。而是，磁体将会进动，正如我们以前在第 1 卷第 20 章中分析陀螺仪时所见到的。角动量——以及和它相随的磁矩——相对一平行于磁场的轴进动。我们可以通过与第 1 卷第 20 章中所用的相同的方法求出这个进动速率。

假设在一小段时间 Δt 内角动量从 J 变至 J' ，如图 34-3 所示，而相对于磁场 B 的方向始终保持一个相同角度 θ 。让我们称这个进动角速度为 ω_p ，使得在时间 Δt 内进动的角(度)为 $\omega_p \Delta t$ 。从图中的几何形状就可看出，在时间 Δt 内角动量的改变为

$$\Delta J = (J \sin \theta)(\omega_p \Delta t).$$

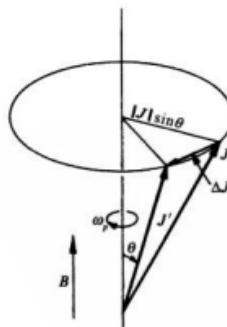


图 34-3 一个具有角动量 J 和与之平行的磁矩 μ 的物体被放在磁场 B 中时，将以角速度 ω_p 进动

因而角动量的变化率为

$$\frac{dJ}{dt} = \omega_p J \sin \theta, \quad (34.8)$$

它必定等于转矩

$$\tau = \mu B \sin \theta. \quad (34.9)$$

于是进动的角速度为

$$\omega_p = \frac{\mu}{J} B. \quad (34.10)$$

由式(34.6)代入 μ/J , 则我们见到, 对于一个原子系统来说,

$$\omega_p = g \frac{q_e B}{2m}, \quad (34.11)$$

进动频率与 B 成正比。记住下列两个关系式会很方便, 即对于一个原子(或电子),

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (1.4 \text{ 兆周 } / \text{Gs}) g B, \quad (34.12)$$

而对于一个核,

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (0.76 \text{ 千周 } / \text{Gs}) g B \quad (34.13)$$

(关于原子与核这两公式不同之处, 仅仅是由在这两种情况下 g 的不同规定引起的)。

这样, 按照经典理论, 原子中的电子轨道——和自旋——应在磁场中进动。按照量子力学这是否也正确呢? 基本上是正确的, 但关于“进动”的意义却有所不同。在量子力学中人们不能在与经典相同的意义上谈论角动量的方向, 尽管如此, 还是存在着十分密切的类似——类似得那么密切以致我们仍称之为“进动”。以后在谈论量子力学时将对此再作讨论。

§ 34-4 抗磁性

接下来我们从经典观点来考察抗磁性。它可以用几种方法算出, 但其中一种巧妙的办法则是这样的。假设在一个原子附近我们慢慢地开动磁场。当磁场改变时, 由于磁感应而产生一电场。按照法拉第定律, E 环绕任一闭合路径的线积分等于穿过该路径的磁通量的变化率。假设我们选取这样一条路径 Γ , 即是与该原子中心同心的一个半径为 r 的圆周, 如图 34-4 所示。

环绕这一路径的平均切向电场 E 由下式给出:

$$E 2\pi r = - \frac{d}{dt} (B \pi r^2),$$

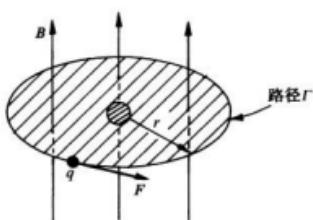
因而就有一个强度为

$$E = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

图 34-4 作用于原子中电子上的感生电力

的旋转电场。

作用于原子中一个电子上的这个感生电场会产生



一个等于 $-q_r Er$ 的转矩，它必然等于角动量的变化率 dJ/dt ：

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{q_r r^2}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (34.14)$$

从零场开始对时间积分，我们就求得由于开动磁场而引起的角动量改变

$$\Delta J = \frac{q_r r^2}{2} B. \quad (34.15)$$

这就是当场开动时由于造成电子转动而引起的额外角动量。

这附加的角动量产生附加的磁矩，由于那是一种轨道运动，所以附加磁矩恰等于 $-q_r/(2m)$ 倍的角动量。这感生的反抗磁矩为

$$\Delta\mu = -\frac{q_r}{2m} \Delta J = -\frac{q_r^2 r^2}{4m} B. \quad (34.16)$$

式中负号（正如你通过应用楞次定律就可以看得出它是正确的）意味着这附加磁矩与磁场反向。

我们想要把式(34.16)写成稍微不同的形式。在该式中出现的 r^2 是指从原子中通过的平行于**B**的轴量起的距离的平方，因而若**B**沿着 z 方向，则它为 $x^2 + y^2$ 。如果我们所考虑的是球对称原子（或对固有轴在所有方向的原子做平均），则 $x^2 + y^2$ 的平均值将是真正从原子中心点量起的径向距离平方的平均值的 $2/3$ 倍。因此，把式(34.16)写成下式往往更加方便：

$$\Delta\mu = -\frac{q_r^2}{6m} \langle r^2 \rangle_{\text{平均}} B. \quad (34.17)$$

总之，我们已求得一个与磁场 B 成正比而方向相反的、感生的原子磁矩，这就是物质的抗磁性。这个磁效应是造成一非均匀磁场中作用于一块铋上的那种小力的主要原因（你有可能通过下述办法计算出这个力，即算出这些感生矩在磁场中的能量，并弄清楚当该材料移进或移出高场区时这能量究竟如何变化）。

我们还剩下这么一个问题：半径的平方平均值 $\langle r^2 \rangle_{\text{平均}}$ 是什么？经典力学不能提供任何答案。我们必须回去并用量子力学重新开始。在原子内部我们不能确实说出电子在哪里，而只知道它将位于某处的概率。若把 $\langle r^2 \rangle_{\text{平均}}$ 理解为距中心距离的平方对概率分布的平均值，则由量子力学所给出的抗磁矩就恰恰与式(34.17)相同。当然，这个式子是关于一个电子的磁矩。总磁矩应由对原子内所有各电子求和给出。令人惊异的事情是，经典论证与量子力学都会给出相同的答案，虽则正如我们将要看到的，给出式(34.17)的经典论证在经典力学中实际上并没有充分的根据。

即使原子已经有了永久磁矩，相同的抗磁效应依然会发生，此时系统将在磁场中进动。当整个原子进动时，它取得一个附加的小角速度，而这个缓慢转动又会产生一个代表对该磁矩修正的小电流。这不过是用另一种方式表示的抗磁效应。但我们在谈论顺磁性时实在无需为它操心。如果这抗磁效应像刚才所做的那样先行算出，则我们不必对来自进动方面的那个附加小电流留意，它已经包含在抗磁性项之内了。

§ 34-5 拉莫尔定理

从迄今所获得的结果我们已能够做出某种结论了。首先，在经典理论中磁矩 μ 始终正比于 \mathbf{J} ，而对于特定的原子就有一个给定的比例常数。由于过去谈及的电子都没有自旋，所以，该比例常数始终等于 $-q_s/(2m)$ 。这就是说，在式(34.6)中我们应该令 $g = 1$ 。 μ 对 \mathbf{J} 的比值与电子的内部运动毫无关系。这样，按照经典理论，所有电子系统就该以相同的角速度进动（在量子力学中这是不正确的）。这个结果与我们现在要来证明的一个经典力学定理有联系。假设我们有一群电子，它们都被指向一中心点的吸引力维系在一起——就像各电子被核所吸引似的。电子之间也彼此相互作用，因而一般而言它们可以有复杂的运动。假设你已求出了没有磁场时的运动，然后希望知道有一弱磁场时运动又会怎样。这一定理讲，当有一弱磁场时运动总等于无场时的解之一加上一个角速度 $\omega_L = q_s B / (2m)$ 的绕场的轴的附加转动（若 $g = 1$ ，则这与 ω_p 相同）。当然，会有许多种可能的运动。要点是，对于无磁场时的每个运动在场中就有一个与之相对应的运动，那就是原来的运动加上一个均匀转动。这称为拉莫尔定理，而 ω_L 称为拉莫尔频率。

我们很想说明这定理如何才能加以证明，但细节将留给你们自己算出来。首先，考虑中心力场中的一个电子，对它的作用力只是指向中心的 $\mathbf{F}(r)$ 。如果现在开动一匀强磁场，就有一附加力 $qv \times \mathbf{B}$ ，因而合力为

$$\mathbf{F}(r) + qv \times \mathbf{B}. \quad (34.18)$$

现在让我们从一个转动坐标系来考察同样的系统，该坐标系以角速度 ω 绕通过力心且与 \mathbf{B} 平行的轴旋转着。这不再是一个惯性系，因而就得放进那些适当的膺力——在第1卷第19章中所曾经谈及的离心力及科里奥利力。我们在那里发现，在一个以角速度 ω 旋转着的参照系中，会有一个正比于速度的径向分量 v_r 的表观切向力：

$$F_r = -2m\omega v_r. \quad (34.19)$$

又有一个由下式给出的表观法向力：

$$F_r = m\omega^2 r + 2m\omega v_r, \quad (34.20)$$

其中 v_r 是在该转动着的参照系中测得的速度切向分量（法向分量 v_r 则对于该转动系统和惯性系统是相同的）。

现在，对于足够小的角速度（也就是，如果 $\omega r \ll v_r$ ），我们在式(34.20)中同第二项（科里奥利力）相比可以忽略第一项（离心力）。于是式(34.19)和(34.20)就可以合并写成

$$\mathbf{F} = -2m\omega \times \mathbf{v}. \quad (34.21)$$

现在若把转动和磁场联合起来，则必须将式(34.21)中的力与式(34.18)中的力相加。合力为

$$\mathbf{F}(r) + qv \times \mathbf{B} + 2m\omega \times \mathbf{v} \quad (34.22)$$

[我们颠倒式(34.21)中的叉积及符号以便获得这末一项]。考察上述结果，我们看到，若

$$2m\omega = -qB,$$

则右边两项互相抵消，因而在转动参照系中就只有力 $F(r)$ 了。电子的运动正好同没有磁场——当然也就没有转动——时一样。我们已对一个电子证明了拉莫尔定理。由于这个证明假定了 ω 较小，那也就意味着这个定理只对于弱磁场才正确。我们唯一要求你们对此做出改进的事情就是考虑许多电子彼此相互作用的情况，但是这些电子都处在相同的有心力场中，并要求你们证明同样的定理。因此，不管一个原子多么复杂，若它有一个有心力场，则这个定理就是正确的。但那是经典力学的末日，因为事实上原子是并不会像那样进动的。式(34.11)的进动频率只有当 g 碰巧等于 1 时才会等于 ω_L 。

§ 34-6 经典物理不会提供抗磁性或顺磁性

现在我们想要来证明，按照经典力学完全不可能有抗磁性或顺磁性。这听起来有点像发疯似的——起初，我们证明了存在顺磁性、抗磁性、进动轨道等等，而如今却又要证明那是完全错的。的确，我们将要证明若你跟随经典力学走得足够远，则不会有这样的磁效应，因为它们全都抵消掉了。如果你在某处开始做经典论证并且不走得太远，则你可以获得任何想要获得的答案。但唯一合理而又正确的证明却显示不会有任何磁效应存在。

经典力学的一个结论是：若你有任何类型的系统——比如含有电子、质子或其他任何东西的气体——被保持在一个箱子中以致整个系统不能够转动，则不会有任何磁效应发生。如果你有一个孤立系统，比如由其本身维系在一起的一颗星体，当你加上磁场时它就能够发生转动，那么就可能有磁效应。但如果你有一块材料，它的位置被固定得不能发生旋转，那么就不会有磁效应了。我们所谓抑制自旋的意思可以概括为：在某一给定温度下，假定系统只有一个热平衡状态。于是定理讲：如果你开动磁场并等待该系统达到热平衡状态，则不会有顺磁性或抗磁性——不会有感生的磁矩。证明：按照统计力学，一个系统将处于任意给定运动状态的概率与 $e^{-U/kT}$ 成正比，其中 U 为系统运动的能量，那么，运动能量又是什么呢？对于一个在匀强磁场中运动的粒子，其能量等于通常的势能加上动能 $mv^2/2$ ，磁场并不会附加任何东西[你知道，来自电磁场之力为 $q(E + v \times B)$ ，而功率 $F \cdot v$ 正好就是 $qE \cdot v$ ，并不会受磁场影响]。因此一个系统的能量，不管是否处于磁场之中，始终等于动能加上势能。既然任何运动的概率仅取决于能量——这就是说，取决于速度和位置——不管是否有磁场存在都一样。因此，对于热平衡来说，磁场并不会影响。如果有一个系统处于箱子中，然后有另一个系统处于第二个箱子中，但这回是存在磁场的，那么处于第一个箱子中的任何一点具有任何特定速度的概率将与在第二个箱子中的相应概率相同。如果在第一个箱子中并没有平均环行电流（这将不会出现，倘若是与静止箱壁达成平衡的话），那就不会有平均磁矩。由于在第二个箱子中一切运动又都是一样的，所以那里也没有平均磁矩。因此，如果温度保持不变而热平衡在磁场开动之后又重新建立起来，则按照经典力学，不可能存在由磁场感生的磁矩。所以我们只能从量子力学方面得到有关磁现象的满意理解。

可惜，不能假定你们对量子力学已有了充分理解，因而这里不可能是讨论这一课题的场所。反之，我们并不总得在学习某些东西时先学习正确的法则，然后学习如何把它们应用于不同情况。在本科中几乎所有考虑到的每一课题都曾经按照另一种方式处理过。对于电学情况，我们曾在“第一页”就写出了麦克斯韦方程组，然后才推导出所有的结果来。那是一条途径。但我们现在决不试图去创立新的“第一页”，即把量子力学的各个方程都写下来并从

它们推导出一切东西。在你们弄清楚其出处以前,我们将只得告诉你们某些量子力学结果。在这里我们就这样干。

§ 34-7 量子力学中的角动量

上面已向你们提供了关于磁矩与角动量之间的关系式。这很令人高兴。但这磁矩和角动量在量子力学中又意味着什么呢?为了保证人们懂得到底指的是什么,在量子力学中,事实证明最好是用像能量这种概念来定义如磁矩那样的东西。现在,要用能量来定义磁矩并不困难,因为磁矩在磁场中的能量按照经典力学为 $\mu \cdot B$ 。因此,下述定义已为量子力学所采用:如果我们算出一个系统在磁场中的能量并发现它正比于该场强(对于弱场来说),那么这个比例系数就称为磁矩在该场的方向上的分量(目前我们无需对工作要求得那么精致,可以仍然按照那种普通的、在某种程度上是经典的意义来考虑磁矩)。

现在我们想要讨论量子力学中的角动量概念——更确切地说,是量子力学中所称为角动量的一些特性。你知道,当你着手新型的定律时,就不能只假定每一个词都要表示与以前完全相同的东西。比方,你可以这样想:“呵,我懂得了角动量是什么。它是会受转矩改变的那种东西。”但转矩又是什么呢?在量子力学中我们不得不对一些旧物理量赋予新的定义。因此,合理地说,最好就是用诸如“量子角动量”或其他相似名称来称呼它,因为它是在量子力学中定义出来的角动量。但如果你在量子力学中能够找到一个量,在系统变成足够大时与我们关于角动量的古老概念相同,则去发明一个额外字眼就没有什么用处了。我们也可以同样叫它作角动量。有了这么一点认识,即将加以描述的这种古怪东西也就是角动量了。它是在大系统中我们用经典力学观点认为是角动量的那种东西。

首先,我们取一个角动量守恒的系统,诸如完全处在真空中的一个孤立原子。于是像这样的东西(像绕自己的轴自转的地球)在通常意义上来说,它有可能环绕人们所任意选取的轴旋转着。而对于给定的自旋,可能会有许多不同的状态,全都具有相等能量,每一个“态”相当于角动量轴的一个特定方向。所以在经典理论中,对于给定的角动量,就有无数个可能的态,它们全都有相同能量。

然而,结果是在量子力学中出现了若干件奇怪的事情。首先,在这样的系统中能够存在的状态数目是受限制的,即只存在有限个数目。如果系统很小,这有限的数目也很小,但如果系统大了,则这个有限的数目便变得非常非常大。其次,我们不能通过给出其角动量方向以描述一个“态”,而只能通过给出沿某一方向——诸如 z 方向——的角动量分量来给予描述。按照经典理论,具有给定总角动量 J 的物体,对于其 z 分量该可以有从 $+J$ 与 $-J$ 的任何数值。可是按照量子力学,角动量的 z 分量只能取某些分立数值。任何具有一定能量的给定系统——一个特定原子、原子核或任何一种东西——都各有一个特征数目 j ,而它的角动量的 z 分量就只能有下列这组数目中的一个:

$$j\hbar \quad (j-1)\hbar \quad (j-2)\hbar \quad \cdots \quad -(j-2)\hbar \quad -(j-1)\hbar \quad -j\hbar \quad (34.23)$$

最大的 z 分量为 j 乘 \hbar ,次大的是减少一个 \hbar 单位,一直减少到 $-j\hbar$ 为止。这数值 j 叫作“该系统的自旋”(有些人却叫它做“总角动量量子数”,但我们将称之为“自旋”)。

你或许会担心我们现在所谈的可能只对于某一“特殊” z 轴才正确,但并非如此。对于

一个自旋为 j 的系统, 沿任何轴的角动量分量只能取式(34.23)中所列数值之一。虽然这看来很神秘, 但仅要求你们暂且接受它, 以后我们才回来讨论这一点。你至少可能乐于听到 z 分量会从某一数值变到负的相同数值, 使得我们至少无需去决定哪一个是 z 轴的正方向(当然, 假如我们曾经说过它要从 $+j$ 变到负的某个其他数值, 那么就会是无限神秘的, 因为在指明了其他方向后, 我们不可能再定义 z 轴)。

于是, 如果角动量的 z 分量必须从 $+j$ 起按整数递减到 $-j$, 那么 j 就必须是整数了。非也! 并不尽然, j 的二倍才必须是整数, 只有在 $+j$ 与 $-j$ 之间的差值才必须是整数。所以, 一般说来, 自旋 j 或者是整数或者是半整数, 取决于 $2j$ 是偶数还是奇数。例如, 像锂那样的核, 它具有 $3/2$ 的自旋, 即 $j = 3/2$, 于是绕 z 轴的角动量, 以 \hbar 为单位, 就是下列诸值之一:

$$+3/2 \quad +1/2 \quad -1/2 \quad -3/2.$$

总共有四个可能态, 若该核处在无外场的真空中, 则每个态具有相同能量。如果我们有一个自旋为 2 的系统, 则按 \hbar 为单位角动量的 z 分量就只能有下列诸数值:

$$2 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad -2.$$

如果你数一下对给定的 j 共有多少个态, 则共有 $(2j+1)$ 个可能性。换句话说, 如果你将能量和自旋 j 都告诉我, 结果表明, 正好存在 $(2j+1)$ 个具有那种能量的态, 每个态相当于角动量分量的一个不同的可能值。

我们想要加上另一事实。如果你随意选取一个已知其 j 值的原子而测量其角动量的 z 分量, 那么你会获得可能数值中的任何一个, 而每个数值是同样可能的。所有的态实际上都是单态, 而每个态同任意另一个态恰恰是一样。在世界上每个态都各具有相同“权重”(我们假定并没有预先挑选出一个特殊样品)。顺便说说, 这个事实有一个简单的经典类似。如果你按照经典方式提出这同样的问题: 若取一个都具有相同总角动量的随机系统样品, 那么对于某个特定角动量分量的可能性究竟如何呢? ——答案是, 从极大至极小的所有数值都具有同样的可能(你可以不难把它计算出来)。这一经典结果就相当于在量子力学中 $(2j+1)$ 个可能性具有相等的概率。

从迄今我们所得到的结果, 还能够得出另一个有趣而有点令人吃惊的结论。在某些经典计算中, 最终结果中出现的量是角动量 \mathbf{J} 大小的平方——换句话说, 那就是 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 。结果是, 通过利用经典的计算结果和下述的简单法则: 由 $j(j+1)\hbar^2$ 取代 $J^2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$, 就往往能够猜出正确的量子力学公式。这一法则通常是有效的, 而且往往但并非永远会给出正确结果。我们可以提供下面的论据来证明为什么你可能预料到这一法则会起作用。

标积 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 可以写成

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

由于它是标量, 所以对于自旋的任意取向它都应相同。假定我们随机地选择任何给定的原子系统的样品并作出对 J_x^2 , J_y^2 或 J_z^2 的测量, 那么对每一个的平均值都应该相同(对任何一个方向都不存在任何特殊区别)。因此, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 的平均值就恰恰是任一分量的平方——比方说 J_z^2 ——平均值的三倍:

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} \rangle_{\text{平均}} = 3\langle J_z^2 \rangle.$$

但由于 $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 对所有一切取向都相同, 所以它的平均值当然也就刚好是它的恒定值, 于是我

们有

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = 3\langle J_z^2 \rangle. \quad (34.24)$$

如果我们现在说,对于量子力学也将采用同样的式子,则可以容易地求得 $\langle J_z^2 \rangle_{平均}$ 。我们只需取 J_z^2 的 $(2j+1)$ 个可能值之和除以总数:

$$\langle J_z^2 \rangle_{平均} = \frac{j^2 + (j-1)^2 + \cdots + (-j+1)^2 + (-j)^2}{2j+1} \hbar^2. \quad (34.25)$$

对于一个自旋为 $3/2$ 的系统,这个式子成为:

$$\langle J_z^2 \rangle_{平均} = \frac{(3/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-3/2)^2}{4} \hbar^2 = \frac{5}{4} \hbar^2.$$

我们断定

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = 3\langle J_z^2 \rangle_{平均} = 3 \times \frac{5}{4} \hbar^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \hbar^2.$$

将把它留给你们自己去证明,式(34.25)加上式(34.24)就会给出这个普遍结果:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = j(j+1)\hbar^2. \quad (34.26)$$

虽然我们可能从经典理论想到 \mathbf{J} 的 z 分量最大可能值会恰好等于 \mathbf{J} 的大小——也即 $\sqrt{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}$ ——但按照量子力学 J_z 的极大值却总要比这略为小些,因为 $j\hbar$ 总是小于 $\sqrt{j(j+1)}\hbar$ 的。所以角动量从不“完全沿 z 方向”。

§ 34-8 原子的磁能

现在,我们又要再来谈论磁矩。上面曾经说过,在量子力学中一个特定原子系统的磁矩可通过式(34.6)用角动量写出:

$$\boldsymbol{\mu} = -g\left(\frac{q_e}{2m}\right)\mathbf{J}, \quad (34.27)$$

其中 $-q_e$ 和 m 分别表示电子的电荷和质量。

一个置于外加磁场中的原子磁体将具有额外能量,这取决于它的磁矩沿场向的分量。我们知道,

$$U_{\text{磁}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (34.28)$$

选择 z 轴使其沿 \mathbf{B} 方向,则

$$U_{\text{磁}} = -\mu_z B. \quad (34.29)$$

利用式(34.27),我们得

$$U_{\text{磁}} = g\left(\frac{q_e}{2m}\right)J_z B.$$

量子力学表明, J_z 只能有某些值: $j\hbar, (j-1)\hbar, \dots, -j\hbar$ 。因此,原子系统的磁能并不是任意的,它只能有某些值。例如,它的极大值为

$$g\left(\frac{q_e}{2m}\right)j\hbar B.$$

$q_e \hbar / (2m_e)$ 这个量通常被赋予“玻尔磁子”的名称而被写成 μ_B :

$$\mu_B = \frac{q_e \hbar}{2m}$$

磁能的可能值为

$$U_{\text{磁}} = g \mu_B B \frac{J_z}{\hbar},$$

其中 J_z / \hbar 取可能值: $j, (j-1), (j-2), \dots, (-j+1), -j$ 。

换句话说,一个原子系统当被置于磁场中时,其能量改变的值正比于场,同时也正比于 J_z 。我们讲,一个原子系统的能量被磁场“分裂成 $2j+1$ 个能级”。例如,在磁场外时能量为 U_0 。而 j 值为 $3/2$ 的一个原子,当被置于磁场中时,就会有四个可能的能量。我们可以通过像图 34-5 中所画的能级简图来表明这些能量。任何特定原子在任何给定的磁场中只能有这四个可能能量中的一个。这就是量子力学所说的关于一个原子系统在磁场中的行为。

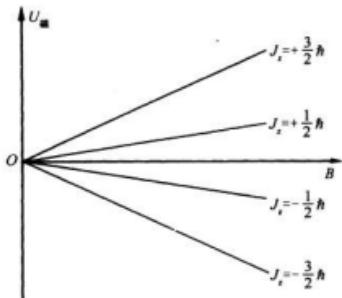


图 34-5 自旋为 $3/2$ 的原子系统在磁场 B 中可能具有的磁能

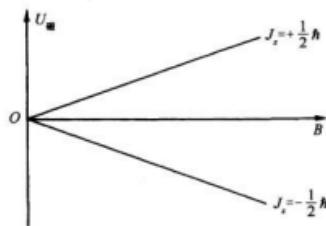


图 34-6 电子在磁场 B 中两个可能的能量状态

最简单的“原子”系统乃是单个电子。电子的自旋为 $1/2$,因而就有两个可能的状态: $J_z = \hbar/2$ 和 $J_z = -\hbar/2$ 。对于一个静止(没有轨道运动)的电子来说,自旋磁矩具有等于 2 的 g 值,因而磁能可以是 $\pm \mu_B B$ 中的一个,在磁场中的可能能量如图 34-6 所示。大概而言,我们就说电子或者具有“向上”(沿场方向)的自旋,或者具有“向下”(逆场方向)的自旋。

对具有较高自旋的系统,就会存在更多的态。我们可以设想其自旋是“向上”或是“向下”,还是在这两者之间激起某个“角度”,这都要取决于 J_z 值。

在下一章我们将用这些量子力学结果来讨论材料的磁性。

第35章 顺磁性与磁共振

§ 35-1 量子化磁态

上一章我们曾描述过在量子力学中一物体的角动量怎么会不具有任意方向，而在一给定轴上它的分量却只能取某些间隔相等的分立值，那是一件令人震惊而又独特的事情。你可能认为，在你的智力达到更高水平并准备好接受这种概念之前也许不应该探索这种事情。实际上，就能够轻易地接受这样一件事情的意义上来说，你的智力将永远不会变得更高级。并没有任一种描述方法可以使其明白易懂，而同时在其本身的形式上又不会那么微妙和高级以致比起你企图要加以解释的东西更复杂。在小尺度范围内的物质行为——正如我们曾经多次提到的——与通常所熟悉的任何事情都不相同，而且确实十分奇怪。当我们继续讲解经典物理时，试图对小尺度范围内物质的行为得到一个逐渐增长的感性认识，开始的时候作为一种缺乏任何深刻理解的经验，乃是一个好主意。对这些事情的理解，在任何程度上都是很慢地达到的。当然，人们逐步变成能够更好地懂得在量子力学情况下所发生的事情——如果这就是所谓理解的涵义——那么人们将永远得不到一个认为量子力学法则是“自然的”那种舒舒服服的感觉。当然那些法则的确是“自然的”，但对于我们本身在普通水平的经验上来说它们却不是自然的。我们对待这一角动量的法则的态度与过去对待许多曾经谈到的其他东西的态度很不相同，这一点应该有所解释。我们并不试图解释“它”，但至少必须告诉你们发生的情况，要对材料磁性进行解释而又不提及有关磁性——包括角动量和磁矩——的那种经典解释乃是不正确的，那可能是不诚实的。

关于量子力学的一个最令人震惊而又扰乱人心的特征在于：如果你沿任一根特定轴取角动量，则你会发现它总等于一整数或半整数乘以 \hbar 。不管你取的是哪一根轴，结果是一样的这一奇怪事实——你可取任一根其他轴并发现它上面的分量也被固定在那同一组数值上——所涉及的微妙之处我们将留在后面一章中讨论，到那时你将会因看到这一表观佯谬如何最后获得解决而感受到欢欣鼓舞。

目前我们将仅仅接受这个事实，即对于每个原子系统就有一个数值 j ，称为该系统的自旋，它必须是一个整数或一个半整数，而沿任一特定轴的角动量分量则将始终具有下列从 $+j\hbar$ 到 $-j\hbar$ 之间的那些值之一：

$$J_z = \begin{Bmatrix} j \\ j-1 \\ j-2 \\ \dots \\ -j+2 \\ -j+1 \\ -j \end{Bmatrix} \cdot \hbar \text{之一.} \quad (35.1)$$

我们也都曾提及每个简单原子系统都有一个与角动量的方向相同的磁矩。这不仅对于原子和核正确，而且对于基本粒子也都正确。每个基本粒子有其本身的特征值 j 和磁矩（对于某些粒子来说，这两者均为零）。在这一句话中，所谓磁矩我们指的是，比方说在一个沿 z 方向的磁场中，对于小磁场来说系统的能量可以写成 $-\mu_z B$ 。我们一定要有磁场不应太大的条件，否则它就可能会干扰该系统的内部运动，从而能量不会成为磁场发动前存在的那个磁矩的一种量度。但如果场足够弱，则由该场所改变的能量由量

$$\Delta U = -\mu_z B \quad (35.2)$$

表示，而条件是在这个式子里的 μ_z 要由下式来代替：

$$\mu_z = g \left(\frac{q}{2m} \right) J_z, \quad (35.3)$$

其中 J_z 就是式(35.1)中那些数值之一。

假设考虑一个自旋为 $j = 3/2$ 的系统。在没有磁场时，该系统就有四个不同的可能状态，这些状态对应于那些不同的 J_z 值，但都具有完全相同的能量。可是一旦我们加上磁场，就有一个附加的相互作用能量把这些状态分隔开，形成四个稍微不同的能级。这些能级的能量是由某些与 B 成正比而又乘以 J_z 值 ($3/2, 1/2, -1/2$ 和 $-3/2$) 的 \hbar 倍给出。关于自旋分别为 $1/2$ 、 1 和 $3/2$ 的原子系统的能级分裂，如图 35-1 的那些简图所示（记住对于电子的任何配置，磁矩始终与角动量反向）。

你将从图上注意到，那些能级的“重心”在有磁场和没有磁场时都一样。并且注意到，对于给定磁场中的某个给定粒子来说从一个能级至下一能级的间隔总是相等的。对于某一给定磁场 B 我们想把能量间隔写成 $\hbar \omega_p$ ——这仅仅是 ω_p 的定义。利用式(35.2)和(35.3)，我们得

$$\hbar \omega_p = g \frac{q}{2m} \hbar B$$

或

$$\omega_p = g \frac{q}{2m} B. \quad (35.4)$$

量 $g[q/(2m)]$ 恰好就是磁矩对角动量的比——它是该粒子的一种性质。式(35.4)

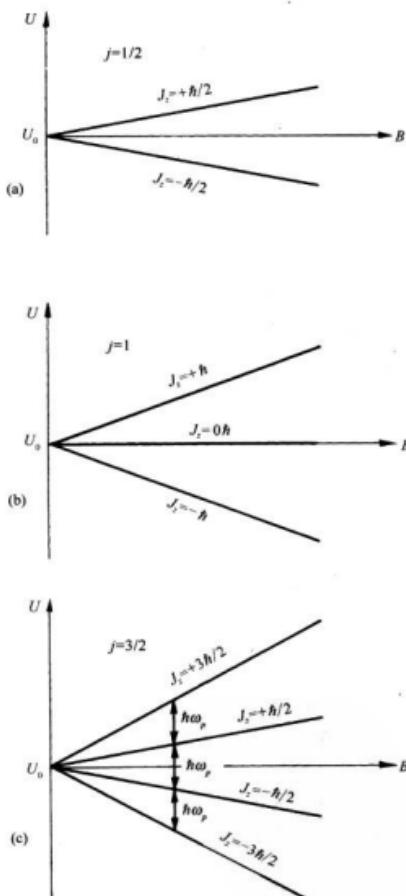


图 35-1 自旋为 j 的一个原子系统在磁场 B 中具有 $(2j+1)$ 个可能能量，对于小场来说，能量间隔与 B 成正比

与我们在第34章中得到的角动量为 \mathbf{J} 而磁矩为 μ 的陀螺仪在磁场中的进动角速度的公式相同。

§ 35-2 斯特恩-格拉赫实验

角动量被量子化这一事实是那么令人惊异,所以我们将根据历史的观点对它稍微谈一下。从它被发现的那一刻起就成为一种震动(尽管在理论上已预期到了)。最初由斯特恩-格拉赫于1922年在一个实验上观察到。如果你愿意的话,尽可以认为斯特恩-格拉赫实验就是关于角动量量子化这一信念的直接验证。斯特恩和格拉赫设计了一种测量个别银原子磁矩的实验。他们通过在一个热炉中把银汽化并让某些银蒸气穿过一系列小孔而产生出一银原子束。这原子束对准一块独特磁铁的极尖之间的空隙,如图35-2所示。他们的意图如下:如果银原子有磁矩 μ ,则在磁场 \mathbf{B} 中它就具有能量 $-\mu_z B$,这里 z 为磁场方向。在经典理论中, μ_z 应等于磁矩乘以该矩与磁场间夹角的余弦,因而在场中的附加能量该是

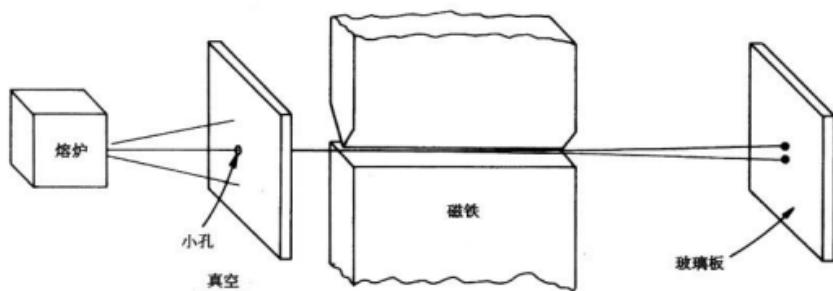


图 35-2 斯特恩-格拉赫实验

$$\Delta U = -\mu B \cos \theta. \quad (35.5)$$

当然,当原子从炉中跑出来时,它们的磁矩会指向每一个可能方向,因而会有所有的 θ 值。现在如果磁场随 z 变化得很快——有一个很强的场梯度——那么磁能也将随位置变化,因而将有一个力作用于磁矩之上,这力的方向取决于 $\cos \theta$ 是正还是负。原子将被一个正比于磁能微商的力拉向上或拉向下,根据虚功原理,

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu \cos \theta \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (35.6)$$

斯特恩和格拉赫所制成的磁铁,其中一个极的头部形成十分尖锐的刃以便产生迅速变化的磁场。银原子束恰好对准沿这一尖锐的刃,使得原子在那个非均匀磁场中会感受到一个垂直方向的力。一个磁矩按水平取向的银原子不会受任何力的作用而将笔直地经过该磁铁。一个其磁矩完全垂直向上的原子则该受到一个拉其向上指向磁铁尖刃的力。一个其磁矩指向下的原子则会感受到一向下的推力。于是,当这些原子离开磁铁时,它们就会按照其磁矩的垂直方向分量而被分散开来。在经典理论中所有的角度都属可能,以致当这些原子

由沉淀在玻璃板上而被收集时，人们应该期望沿垂直方向出现一条银斑线。这条银线高度应与磁矩的大小成正比。当斯特恩和格拉赫看到实际所发生的情况时，经典概念的惨败完全被揭露了。他们在玻璃板上发现了两个明晰的斑点，那些银原子形成了两束。

一束自旋显然是杂乱取向的原子竟被分裂成开的两束，这是最令人感到惊奇的。磁矩怎么会知道只允许它在磁场的方向上取某些分量呢？噢，那实际上就是角动量量子化被发现的开始，而不是试图给你一个理论上的解释，我们只是说你已被这一实验结果难住了，正如当年这个实验刚被做出来时物理学家们不得不接受该结果那样。这是原子在磁场中的能量会取一系列分立值的实验事实。对于这些数值中的每一个，能量正比于磁场强度。因而在场变化的区域中，虚功原理告诉我们，作用于原子上的可能磁力将具有一系列的分立值，由于对每个态所作用的力不同，因而原子束就被分裂成开的若干束。从这些束偏移的尺度，人们就能求出磁矩的大小来。

§ 35-3 拉比分子束法

现在我们要来描述一种由拉比及其同事们所发展起来的、经改进的测量磁矩用的仪器。由于在斯特恩-格拉赫实验中原子的偏移很小，因而磁矩的量度并不是很精确。拉比的技术使得磁矩的测量有可能达到难以想象的精度。这一方法是以这种事实为基础的，即原子的固有能量在磁场中被分裂成有限数目的能级。一个原子在磁场中的能量只能有某些分立值，这件事实际上并不比原子一般只具有某些分立能级的事实——我们在第1卷中曾经常提及的某些事情——更令人诧异。为什么这同样的事情对处于磁场中的原子来说就不成立呢？它仍然成立。但正是希望把这一事实与取向磁矩的概念相联系的意图才给量子力学带来某些奇怪的含意。

当一原子具有能量差约为 ΔU 的两个能级时，它可以通过发射一个频率为 ω 的光量子，从较高的能级跃迁到较低的能级。 ω 满足下式

$$\hbar\omega = \Delta U. \quad (35.7)$$

处于磁场中的原子也可以发生同样的事情。只是此时，能量差竟会那么小以致该频率与光对应不起来，而是对应于微波或无线电波。原子从低能级至较高能级的跃迁，也可通过对光的吸收而发生，对于原子处于磁场中的情况则通过对微波能量的吸收而实现。这样，如果有一个原子处于磁场中，则我们可以通过加一频率适当的附加电磁场使其从一个态跃迁至另一个态。换句话说，若有一个处在强磁场中的原子，而我们用一个弱的变化电磁场来“扰动”该原子，则会存在某个概率把它撞到另一个能级上去，只要该频率接近于式(35.7)中的 ω 值。对于一个处在磁场中的原子，这个频率恰好就是我们以前曾称之为 ω_p 的、根据式(35.4)用磁场所给出的那个频率。若该原子受一错误频率扰动，则能够引起跃迁的机会将十分微小。于是在引起跃迁的概率内就有一个在 ω_p 处的尖锐共振。通过在一已知磁场 B 中测量这个共振频率，我们就能以巨大的精度测得量 $g[q/(2m)]$ ——从而也测得了 g 因子。

十分有趣，人们从经典的观点也会得出相同的结论。按照经典图像，当我们把一个磁矩为 μ 而角动量为 J 的小陀螺仪置于一外磁场中时，该陀螺仪将环绕平行于磁场的轴进动（见图 35-3）。假设我们要问：如何改变经典陀螺仪相对于场——也即相对于 z 轴——的角