

示出干涉现象。

§ 37-4 电子的实验

现在我们想象一个电子的类似实验,如图 37-3 所示。我们制造了一把电子枪,它包括一根用电流加热的钨丝,外面套有一个开有孔的金属盒,如果钨丝相对金属盒处于负电位,由钨丝发射出的电子将被加速飞往盒壁,其中有一些会穿过盒上的小孔。所有从电子枪出来的电子都带有(差不多)相同的能量。在枪的前方也有一堵墙(就是一块薄金属板),墙上也有两个孔。这道墙的后面有另一块作为“后障”的板。在后障的前面我们放置一个可移动的检测器,它可以是盖革计数器,或者更好一些,是一台与扩音器相连的电子倍增器。

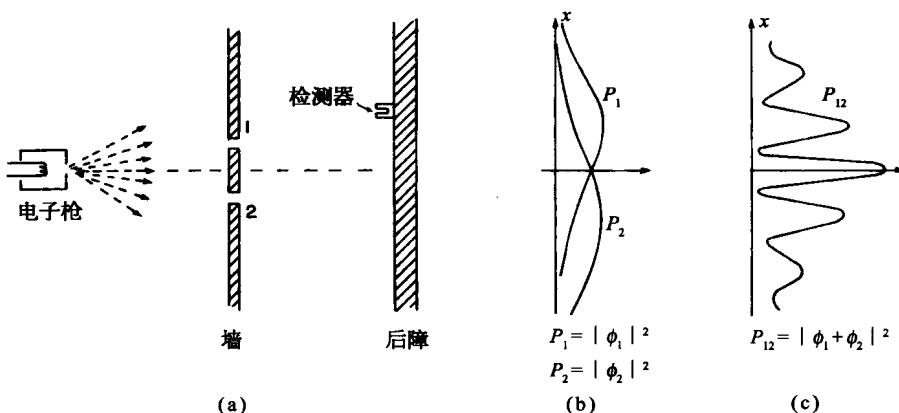


图 37-3 电子的干涉实验

我们应当立即告诉你最好不要试着去做这样一个实验(虽然你可能已做过我们所描述的前面两个实验)。这个实验从未以这种方式做过。问题在于,为了显示我们所感兴趣的效应,仪器的尺寸必须小到制造不出来的程度。我们要做的是一个“理想实验”,之所以要选它,是因为它易于想象。我们知道这个实验将会得到怎样的结果,因为有许多其他实验已经做过,在那些实验中,已选用了适当的尺度与比例来显示我们将要描写的效应。

在这个电子的实验中,我们注意到的第一件事是听到检测器(即扩音器)发生明显的“卡嗒”声。所有的“卡嗒”声全都相同,决没有一半的“卡嗒”声。

我们还会注意到“卡嗒”声的出现很不规则。比如象:卡嗒……卡嗒—卡嗒……卡嗒……卡嗒……卡嗒—卡嗒……卡嗒,等等,无疑,这就像人们听到盖革计数器工作时的声音一样。假如我们在足够长的时间内计数,比如说在许多分钟内听到的卡嗒声的数目,然后再在另一个相等的时间间隔内也进行一次计数,我们发现两个结果非常接近。所以,我们可以谈论“卡嗒”声出现的平均速率(平均每分钟多少、多少次“卡嗒”声)。

在我们上下移动检测器时,声响出现的速率有快有慢,但是每次“卡嗒”声的大小响度总是相同的。假如我们降低枪内钨丝的温度,“卡嗒”声的速率就会减慢,但是每一声“卡嗒”仍然是相同的。我们还会注意到,如果在后障上分别放置两个检测器,那么这一个或那一个将会“卡嗒”发声,但是决不会两者同时发声(除非有时两次“卡嗒”声在时间上非常靠近,以致

我们的耳朵可能辨别不出它们是分开的响声)。因此,我们得出结论,任何到达后障的东西总是呈“颗粒”的形式,所有的“颗粒”都是同样大小;只有“整颗”到达,并且每一次只有一颗到达后障。我们将说:“电子总是以完全相同的颗粒到达。”

与子弹的实验一样,现在我们可以从实验上找出下列问题的答案:“一个电子‘颗粒’到达后障上离中心的距离为不同的 x 处的相对概率是多少?”像前面一样,在保持电子枪稳定工作的情况下,我们可以从观察“卡嗒”声出现的速率来得出相对概率。颗粒到达某个 x 位置的概率正比于该处的卡嗒声的平均速率。

我们这个实验的结果就是图37-3(c)所画出的标有 P_{12} 的一条有趣的曲线。不错!电子的行为就是这样。

§ 37-5 电子波的干涉

现在,我们来分析一下图37-3的曲线,看看是否能够理解电子的行为。我们要说的第一件事是,由于它们以整颗的形式出现,每一颗粒(亦可称为一个电子)或者通过孔1,或者通过孔2。我们以“命题”的形式写下这一点:

命题A:每一个电子不是通过孔1就是通过孔2。

假设命题A后,所有到达后障的电子就可分为两类:(1)通过孔1的电子;(2)通过孔2的电子。这样,我们所观察到的曲线必定是通过孔1的电子所产生的效应与通过孔2的电子所产生的效应之和。我们用实验来检验这个想法。首先,我们将对通过孔1的电子作一次测量。把孔2遮住,数出检测器的“卡嗒”声,由响声出现的速率,我们得到 P_1 。测量的结果如图37-3(b)中标有 P_1 的曲线所示。这个结果看来是完全合乎情理的。以类似的方式,可以测量通过孔2的电子概率分布 P_2 。这个测量的结果也画在图上。

显然,当两个孔都打开时测得的结果 P_{12} 并不是每个孔单独开放时的概率 P_1 与 P_2 之和。与水波实验类似,我们可以说:“这里存在着干涉”。

对于电子

$$P_{12} \neq P_1 + P_2. \quad (37.5)$$

怎么会发生这样的干涉呢?或许我们应当说:“嗯,这大概意味着:电子颗粒要么经过小孔1,要么经过小孔2这一命题是不正确的,不然的话,概率就应当相加。或许它们以一种更复杂的方式运动,它们分裂为两半,然后……”但是,不对!不可能如此。它们总是整颗地到达……,“那么,或许其中有一些电子经过孔1后又转回到孔2,然后又转过几圈,或者按某个其他的复杂路径……于是,遮住孔2后,我们就改变了从孔1开始出来的电子最后落到后障上某处的机会……。”但是,请注意!在某些点上,当两个孔都开放时,只有很少电子到达,但是如果关闭一个孔时,则该处接收到许多电子,所以关闭一个孔增加了通过另一个孔的数目。然而,必须注意在图形的中心, P_{12} 要比 $P_1 + P_2$ 还大两倍以上。这又像是关闭一个孔会减少通过另一个孔的电子数。看来用电子以复杂方式运动这一假设是很难解释上述两种效应的。

所有这些都是极其神秘的。你考虑得越多,就越会感到神秘。人们曾经提出许多设想,试图用单个电子以复杂方式绕行通过小孔来解释 P_{12} 曲线,但是没有一个得到成功,没有一个人能由 P_1 与 P_2 来得到 P_{12} 的正确曲线。

然而,足以令人惊奇的是,将 P_1 和 P_2 与 P_{12} 联系起来的数学是极其简单的。因为 P_{12} 正好像图 37-2 的曲线 I_{12} ,而那条曲线的得来是简单的。在后障上发生的情况可以用两个称为 $\hat{\phi}_1$ 和 $\hat{\phi}_2$ 的复数(当然它们是 x 的函数)来描述。 $\hat{\phi}_1$ 的绝对值平方给出了孔 1 单独开放时的效应。也就是说, $P_1 = |\hat{\phi}_1|^2$ 。同样孔 2 单独开放时的效应由 $\hat{\phi}_2$ 给出,即 $P_2 = |\hat{\phi}_2|^2$ 。两个孔的联合效应正是 $P_{12} = |\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2|^2$ 。这里的数学与水波的情形是一样的(很难看出从电子沿着某些奇特的轨道来回穿过洞孔这种复杂的运动中能得出如此简单的结果)!

我们的结论是:电子以颗粒的形式到达,像粒子一样,这些颗粒到达的概率分布则像波的强度的分布。正是从这个意义上来说,电子的行为“有时像粒子,有时像波”。

顺便指出,在处理经典波动时,我们定义强度为波幅平方对时间的平均值,并且使用复数作为简化分析的数学技巧。但是在量子力学中结果发现振幅必须用复数表示,仅有实部是不行的。目前,这是一个技术上的问题,因为公式看上去完全一样。

既然电子穿过两个孔到达后障的概率分布如此简单[虽然它并不等于 $(P_1 + P_2)$],要说的一切实际上就都在这里了。但是在自然界以这种方式活动的事实中,却包括了大量的微妙之处。我们现在打算向你们说明其中的一些微妙所在。首先,到达某个特定点的电子数目并不等于通过孔 1 的数目加上通过孔 2 的数目,与从命题 A 本应得出的推论相反。所以,毋庸置疑,我们应该作出结论说,命题 A 是不正确的。电子不是通过孔 1 就是通过孔 2,这一点并不正确。但是这个结论可以用其他实验来检验。

§ 37-6 追踪电子

我们现在来考虑如下的一个实验。在前述的电子仪器中我们加上一个很强的光源,光源放置在墙的后面并在两个小孔之间,如图 37-4 所示。我们知道,电荷能散射光,这样,当电子在到达检测器的途中通过光时,不论它是怎样通过的,都会将一些光散射到我们的眼睛中,因而我们可以看见电子在哪里飞过。比方说,假如电子采取经过孔 2 的路径,如图 37-4 所示,我们应当看到来自图中标有 A 的位置附近的闪光。如果电子经过孔 1,我们可以预料在上面的小孔附近将看到闪光。要是发生这样的情形,因为电子分为两半,我们同时在两个位置上见到闪光多好……让我们做一下实验吧!

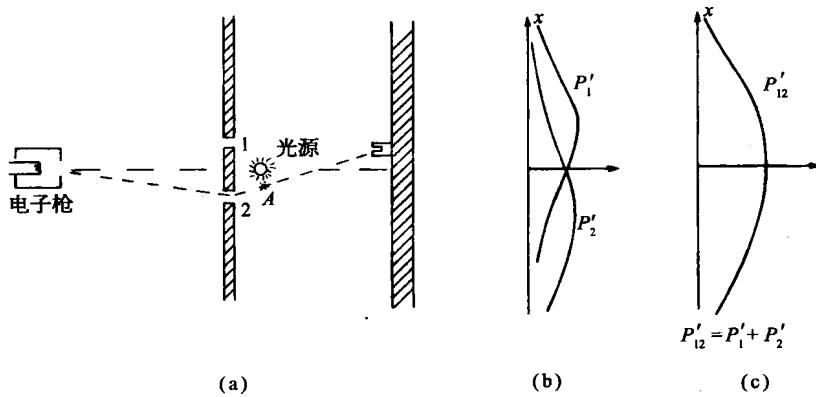


图 37-4 另一个电子的实验

我们所看到的情况是：每当我们由电子检测器（后障处的）听到一声“卡嗒”时，我们也见到闪光——不是在靠近孔1处就是在靠近孔2处的闪光。但是从未同时在两处见到！无论将检测器放到哪里，我们都观察到同样的结果。由这样的观察可以断言，在查看电子时，我们发现电子不是通过这个孔，就是通过另一个孔。在实验上，命题A必然是正确的。

那么，在我们否定命题A的论证中，有什么不对呢？为什么 P_{12} 不正好等于 $(P_1 + P_2)$ ？我们还是回到实验上去！让我们盯住电子，看看它们究竟做些什么。对于检测器的每一个位置（ x 坐标），我们都数出到达的电子数，同时也通过对闪光的观察记录下它们经过的是哪一个孔。我们可以这样来记录：每当我们听到一声“卡嗒”时，如果在孔1附近见到闪光，那么就在第一栏中作一个记录，如果在孔2附近见到闪光，那么就在第二栏中作一个记录。所有抵达的电子都可记录在这两类之一中，即经过孔1的一类和经过孔2的一类。由第一栏的记录我们可以得到电子经由孔1到达检测器的概率 P'_1 ；而由第二栏的记录则可得到电子经由孔2到达检测器的几率 P'_2 。如果现在对许多 x 的值重复这样的测量，我们就得到图37-4(b)所画的 P'_1 与 P'_2 的曲线。

你们看，这里没有什么过分令人惊奇的事。所得到的 P'_1 与我们先前遮住孔2而得到的 P_1 完全相似； P'_2 则与遮住孔1所得到的 P_2 相似。所以，像通过两个小孔这样的复杂情况是不存在的。当我们跟踪电子时，电子就像我们所预料的那样通过小孔。无论孔2是否关闭，我们所看到的通过孔1的电子分布都相同。

但是别忙！现在，总概率，即电子以任何途径到达检测器的概率又是多少呢？有关的资料早就有了。我们现在假想从未看到过闪光，而把先前分成两栏的检测器的“卡嗒”声次数归并在一起。我们只须把这些数加起来。对于电子经过任何一个孔到达后障的总概率，我们确实得出 $P'_{12} = P'_1 + P'_2$ 。这就是说，虽然我们成功地观察到电子所经过的是哪个孔，但我们不再得到原来的干涉曲线 P_{12} ，而是新的、不显示干涉现象的 P'_{12} 曲线！如果我们将灯熄灭的话， P_{12} 又出现了。

我们必须推断说：当我们观察电子时，它们在屏上的分布与我们不观察电子时的分布不同。也许这是由于打开光源而把事情搞乱了？想必是由于电子本身非常微妙，因而光波受到电子散射时给电子一个反冲，因而改变了它们的运动。我们知道，光的电场作用在电荷上时会对电荷施加一个作用力。所以也许我们应当预期运动要发生改变。不管怎样，光对电子有很大的影响。在试图“跟踪”电子时，我们改变了它的运动。也就是说，当电子散射光子时所受到的反冲足以改变其运动，以致原来它可能跑到 P_{12} 为极大值的那些位置上，现在却反而跑到 P_{12} 为极小值的那些位置上；这就是为什么我们不再看到波状干涉效应的原因。

你们或许会想：“别用这么强的光源！使亮度降低一些！光波变弱了，对电子的扰动就不会那么大。无疑，若使光越来越暗淡的话，最后光波一定会弱得使它的影响可以忽略”。好，让我们来试一下。我们观察到的第一件事是电子经过时所散射的闪光并没有变弱。它总是同样大小的闪光。使灯光暗淡后唯一发生的事情是，有时，我们听到检测器发生一下“卡嗒”声，但根本看不到闪光，电子在没有“被看到”的情况下跑了过去。我们所观察到的是：光的行为也像电子，我们已知它是波状的，但是现在发现它也是“颗粒状”的。它总是以整颗的形式（我们称为“光子”）到达或者被散射。当我们降低光源的强度时，我们并没有改变光子的大小，而只是改变了发射它们的速率。这就解释了为什么在灯光暗淡时有些电子没有被“看到”就跑了过去；当电子经过时，周围正好没有光子。

假如真的是每当我们“见到”电子，我们就看到同样大小的闪光，那么所看到的总是受到扰动的电子，这件事使人多少有点泄气。不管怎样，我们用暗的灯光来做一下实验。现在，只要听到检测器中一声“卡嗒”，我们就在三栏中的某一栏记下一次：栏(1)记的是在孔1旁看到的电子；栏(2)记的是孔2旁看到的电子，根本没有看到电子时，则记在栏(3)中。当我们把数据整理出来(计算概率)后可以发现这些结果：“在孔1旁看到”的电子具有类似于 P'_1 的分布；“在孔2旁看到”的电子具有类似于 P'_2 的分布(所以“在孔1或者孔2旁看到”的电子具有类似于 P'_{12} 的分布)；而那些“根本没有看到”的电子则具有类似于图37-3的 P_{12} 那样的“波状”分布！假如电子没有被看到，我们就会发现干涉现象！

这个情形是可以理解的，当我们没有看到电子时，就没有光子扰动它，而当我们看到它时，它已经受到了光子的扰动。由于光子产生的都是同样大小的效应，所以扰动的程度也总是相同的，而且光子被散射所引起的效应足以抹掉任何干涉现象。

难道没有某种可以不扰动电子而又使我们能看到它们的方法吗？在前面的一章中，我们已经知道，“光子”携带的动量反比于它的波长($p = h/\lambda$)。无疑当光子被散射到我们的眼中时，它给予电子的反冲取决于光子所携带的动量。对！如果我们只想略微扰动一下电子的话，那么应当降低的不是光的强度，而是它的频率(这与增加波长一样)。我们使用比较红的光，甚至用红外光或无线电波(如雷达)，并且借助于某种能“看到”这些较长波长的仪器来“观察”电子的行径。如果我们使用“较柔和”的光，那么或许可以避免对电子扰动太大。

现在我们用波长较长的波来做实验。我们将利用波长越来越长的光重复进行实验。起先，看不到任何变化，结果是一样的。接着，可怕的事情发生了，你们会记得，当我们讨论显微镜时曾指出过，由于光的波动性质，对两个小点彼此可以靠得多近而仍可视为两个分离的点存在着一个极限距离。这个极限距离的大小与光波波长的数量级相同。所以如果我们使波长大于两个小孔之间的距离，我们看到在光被电子散射时产生一个很大的模糊不清的闪光。这样就不再能说出电子通过的是哪一个孔了！我们只知道它跑到某处去！正是对这种波长的光，我们发现电子所受到的反冲已小到使 P'_{12} 看来开始像 P_{12} ——即开始出现某种干涉的效应。只有在波长远大于两个小孔之间的距离时(这时我们完全不可能说出电子跑向何处)，光所引起的扰动才充分地减小，因而我们又得到图37-3所示的曲线 P_{12} 。

在我们的实验中，我们发现不可能这样安排光源，使人们既可以说出电子穿过哪个小孔，同时又不扰动分布图样。海森伯提出，只有认为我们的实验能力有某种前所未知的基本局限性，那么当时发现的新的自然规律才能一致。他提出了作为普遍原则的不确定性原理，在我们的实验中，它可以这样表述：“要设计出一种仪器来确定电子经过哪一个小孔，同时又不使电子受到足以破坏其干涉图样的扰动是不可能的”。如果一架仪器能够确定电子穿过哪一个小孔的话，它就不可能精致得使图样不受到实质性的扰动。没有一个人曾找出(或者甚至想出)一条绕过不确定性原理的途径。所以我们必须假设它描述的是自然界的一个基本特征。

我们现在用来描写原子(事实上描写所有物质)的量子力学的全部理论都取决于不确定性原理的正确性。由于量子力学是这样一种成功的理论，我们对于不确定性原理的信任也就加深了。但是如果一旦发现了一种能够“推翻”不确定性原理的方法，量子力学就会得出自相矛盾的结果，因此也就不再是自然界的有效的理论，而应予以抛弃。

“很好”，你们会说：“那么命题A呢？电子要么通过小孔1，要么通过小孔2 这一点是正

确的,还是不正确的呢?”唯一可能作出的回答是,我们从实验上发现,为了使自己不致陷于自相矛盾,我们必须按一种特殊方式思考问题。我们所必须说的(为了避免作出错误的预测)是:如果人们观察小孔,或者更确切地说,如果人们有一架仪器能够确定电子究竟通过孔1还是孔2的话,那么他们就能够说出电子或者穿过孔1,或者穿过孔2。但是,当人们不试图说出电子的行径,当实验中对电子不作任何扰动时,那么他们可以不说电子或者通过孔1,或者通过孔2。如果某个人这么说了,并且开始由此作出任何推论的话,他就会在分析中造成错误。这是一条逻辑钢丝,假如我们希望成功地描写自然的话,我们就必须走这一条钢丝。

如果所有物质(以及电子)的运动都必须用波来描写,那么我们第一个实验中的子弹怎样呢?为什么在那里我们看不到干涉图样?结果表明:对于子弹来说,其波长是如此之短,因而干涉图样变得非常精细。事实上,图样精细到人们用任何有限尺寸的检测器都无法区别出它的分立的极大值与极小值。我们所看到的只是一种平均,那就是经典曲线。在图37-5中,我们试图示意地表明对大尺度物体所发生的情况。其中(a)图表示应用量子力学对子弹所预期的概率分布。快速摆动的条纹本应表示对于波长极短的波所得到的干涉图案。然而,任何物理检测器都跨越了概率曲线的几个摆动,所以通过测量给出的是图(b)中的光滑曲线。

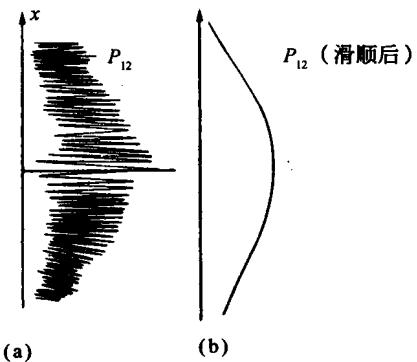


图37-5 子弹的干涉实验

(a)真实的图样(概图);(b)观测到的图样

§ 37-7 量子力学的基本原理

我们现在来概括地小结一下前面实验中的主要结论。不过,我们将把结果表示成对于这一类的实验普遍适用的形式。假如先定义一个“理想实验”,那么这个小结就可以简单一些。所谓“理想实验”指的是:其中没有我们无法计及的任何不确定的外来影响,即无跳动或其他什么事情。更确切的说法是:“所谓理想实验就是所有的初始条件和最终条件都完全确定的实验。”我们将要说到的“事件”,一般说来就是一组特定的初始与最终条件(例如:“电子飞出枪口,到达检测器,此外没有任何其他事情发生”)。下面就是我们的小结。

小 结

(1) 在理想实验中,一个事件的概率由一个复数 ϕ 的绝对值平方给出, ϕ 称为概率幅

$$\begin{aligned} P &= \text{概率}, \\ \phi &= \text{概率幅}, \\ P &= |\phi|^2. \end{aligned} \tag{37.6}$$

(2) 当一个事件按几种交替的方式出现时,该事件的概率幅等于各种方式分别考虑时的概率幅之和,此时存在干涉现象

$$\begin{cases} \phi = \phi_1 + \phi_2, \\ P = |\phi_1 + \phi_2|^2. \end{cases} \tag{37.7}$$

(3) 如果完成一个实验,此实验能够确定实际上发生的是哪一种方式的话,则该事件的概率等于发生各个方式的概率之和,此时干涉消失

$$P = P_1 + P_2. \quad (37.8)$$

人们也许还想问:“这是怎样起作用的?在这样的规律背后有什么机制?”还没有人找到过定律背后的任何机制,也没有人能够“解释”得比我们刚才的“解释”更多一些,更没有人会给你们对这种情况作更深入的描写。我们根本想象不出更基本的能够推导出这些结果的机制。

我们希望强调经典理论和量子力学之间的一个非常重要的差别。我们一直谈到在给定的情况下,电子到达的概率。我们曾暗示:在我们的实验安排中(即使是能作出的最好的一种安排)不可能精确预言将发生什么事。我们只能预言可能性!如果这是正确的,那就意味着,物理学已放弃了去精确预言在确定的环境下会发生的事情。是的!物理学已放弃了这一点。我们不知道怎样去预言在确定的环境下会发生的事件,而且我们现在相信,这是不可能的,唯一可以预言的是种种事件的概率。必须承认,对我们早先了解自然界的理想来说,这是一种节约,它或许是后退的一步,但是还没有能看出避免这种后退的出路。

现在,我们来评论一下人们有时提出的试图避免上述描写的一种见解。这种见解认为:“或许电子有某种我们目前还不知道的内部机构——某些内在变量。或许这种机构正是我们无法预言将会发生什么事情的原因。如果我们能够更仔细地观察电子,就能说出它将到达哪里。”就我们所知,这是不可能的。我们仍会遇到困难。假设在电子内部有某种机构能够确定电子的去向,那么这种机构也必定能够确定电子在途中将要通过哪一个孔。但是我们不要忘记,在电子内部的东西应当不依赖于我们的动作,特别是不依赖于我们开或关哪一个孔。所以,如果电子在开始运动前已打定主意:(a)它要穿过哪一个孔,(b)它将到达哪里,我们对选择孔1的那些电子就会得出 P_1 ,对选择孔2的那些电子就会得出 P_2 ,并且对通过这两个孔的电子得出的概率必定是 P_1 和 P_2 之和($P_1 + P_2$)。看来没有别的解决方式了。但是我们从实验上已经证实情况并非如此。而现在还没有人能够解决这个难题。所以,在目前我们只准备计算概率。我们说“在目前”,但是我们强烈地感觉到很可能永远如此——很可能永远无法解决这个难题——因为自然界实际上就是如此。

§ 37-8 不确定性原理

海森伯原来对不确定性的叙述就是这样的:假如对任何客体进行测量,并且测定其动量的 x 分量时,不确定量为 Δp ,那么关于其位置 x ,就不可能同时知道得比 $\Delta x = h/\Delta p$ 更准确。在任何时刻,位置的不确定量和动量的不确定量的乘积必定大于普朗克常数。这是前面所表述的较为一般的不确定性的特殊情形。比较普遍的表述是,人们不可能用任何方式设计出这样一个仪器,它能确定在两种可供选择的方式中采取的是哪一种方式,而同时又不扰动干涉图案。

现在我们举一种特殊情况来说明,为了不致陷于困境,海森伯给出的这种关系必须成立。我们对图37-3中的实验设想一种修正方案,其中带有小孔的墙是用一块安置上滚子的

板构成的,这样它可以在 x 方向上自由地上下滑动,如图 37-6 所示。仔细观察板的运动,我们可以试图说出电子通过的是哪个小孔。想象一下当检测器放在 $x = 0$ 处时会出现什么情况。我们可以预期对经过小孔 1 的电子,板必定使它往下偏转,以到达检测器。由于电子动量的垂直分量被改变了,板必定会以相等的动量向相反的方向反冲。它将往上跳动。如果电子通过下面一个小孔,板就会感到一个向下反冲的力。很清楚,对于检测器的每一个位置,电子经由孔 1 与经由孔 2 时板所接受的动量是不同的。这样,根本不必去扰动电子,只要通过观察板的运动,我们就可以说出电子所采取的是哪一条路径。

现在,为了做到这一点,必须知道电子通过前板的动量。这样测出电子经过后板的动量时,就能算出板的动量改变了多少。但是要记住,根据不确定性原理,我们不能同时以任意高的准确度知道板的位置。而如果我们不知道板的 确切 位置,就不能精确地说出两个孔在哪里。对于每个经过小孔的电子来说,小孔都将在不同的位置上。这意味着对于每个电子来说,干涉图样的中心都在不同的位置上。于是干涉图样中的条纹将被抹去。下一章我们将定量地说明,假如我们足够准确地测定板的动量从而由反冲的动量的测量来确定电子经过的是哪一个孔,那么按不确定性原理,该板 x 位置的不确定量将使在检测器处观察到的图样沿 x 方向上下移过一个相当于从极大值到最近的极小值之间的距离。这样一种无规则的移动正好将干涉图样抹去,因而观察不到干涉现象。

不确定性原理“保护”着量子力学。海森伯认识到,如果有可能以更高的准确度同时测出动量与位置的话,那么量子力学大厦就将倒塌。所以,他提出这一定是不可能的。于是人们试图找出一个能同时准确测量的方法,但是没有一个人找到一种方法能够以任何更高的准确度同时测出任何东西——屏障、电子、台球弹子,等等——的位置与动量。量子力学以其冒险但准确的方式继续存在着。

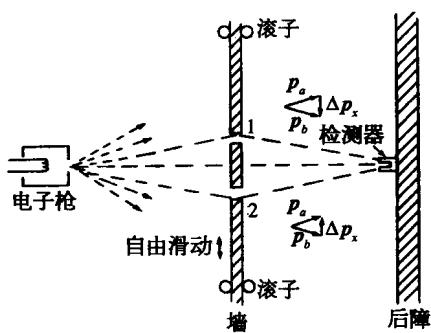


图 37-6 测出墙的反冲的实验

第 38 章 波动观点与粒子观点的关系

§ 38-1 概率波幅

本章我们将讨论波动观点与粒子观点之间的关系。由上一章我们已经知道, 波动观点和粒子观点都不正确。通常, 我们总是力图准确地描述事物, 至少也要做到足够地准确, 以使我们的学习深入时无须改变这种描述——它可以扩充, 但却不会改变! 然而, 当我们打算谈及波动图像或粒子图像时, 两者都是近似的, 并且都将发生变化。所以, 从某种意义上来说, 我们在这一章中所学习的东西并不是准确的; 这里的论证是半直观的, 我们将在以后使之更为准确, 但是, 当我们用量子力学作出正确解释时, 有一些事情将会有一点改变。我们之所以要这样来处理, 其原因当然在于我们不想立刻就深入到量子力学中去, 而是希望对于我们将会碰到的几种效应至少能有某种概念。而且, 我们所有的经验都与波动以及粒子有关, 因此, 在我们掌握对量子力学振幅的完整数学描述之前, 先应用波动和粒子的概念来理解一定场合下所发生的事情是颇为方便的。我们在这样做时将力图阐明那些最薄弱的环节, 但是其中大多数还是相当正确的——因为只是解释的问题。

首先, 我们知道量子力学中描述世界的新方法——新的框架——是对每个可能发生的事件给予一个振幅, 而且如果此事件涉及到接收一个粒子, 那么就给出在不同位置与不同时间找到该粒子的振幅。于是, 找到该粒子的概率就正比于振幅绝对值的平方。一般地讲, 在不同场所与不同时刻找到粒子的振幅是随着位置和时间而变化的。

在一种特殊情况下, 振幅在空间与时间上像 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ 那样呈正弦的变化(别忘了这些振幅是复数, 而不是实数), 它有一个确定的频率 ω 和波数 \mathbf{k} 。结果表明这对应于一种经典的极限情况, 也就是说, 我们可以认为在此情况中有一个粒子, 它的能量 E 为已知, 并且 E 与频率之间的关系是

$$E = \hbar\omega, \quad (38.1)$$

而且粒子的动量 \mathbf{p} 亦是已知的, 它与波数 \mathbf{k} 之间的关系是

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (38.2)$$

这一情况说明粒子的概念受到了限制。我们这么经常使用的粒子的概念——它的位置、动量等等在某些方面已不再令人满意了。比如, 假设在不同的位置上找到一个粒子的振幅是 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, 则其绝对值的平方是常数, 而这就意味着在所有的点上找到粒子的概率都相等。这就是说, 我们不知道粒子究竟在何处——它可以在任何地方——粒子的位置是非常不准确的。

另一方面, 如果一个粒子的位置知道得比较清楚, 而且我们可以相当准确地预测它的话, 那么在不同位置找到它的概率必定限制在一定的区域内, 我们称其长度为 Δx 。在此区域之外概率则为零。由于这个概率是某个振幅的绝对值的平方, 如果绝对值的平方为零, 则

振幅亦为零,结果我们就有一个长度为 Δx 的波列(图 38-1),此波列的波长(波列中波节之间的距离)就对应于该粒子的动量。

这里我们遇到了有关波动的一件奇妙的事情——一件很简单的,与量子力学毫无关系的事情。任何人,即使完全不懂量子力学,只要他研究过波的话就会知道:对一个短的波列,我们不可能规定一个唯一的波长。这样的波列没有一个确定的波长;由于波列的长度是有限的,因此相应地在波数上存在着不确定性,于是在动量上也就存在着不确定性。

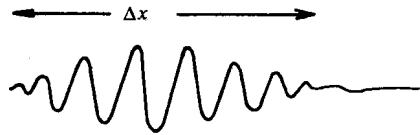


图 38-1 长度为 Δx 的波包

§ 38-2 位置与动量的测量

现在我们来考虑这种概念的两个例子——即看一下如果量子力学是正确的话,为什么在位置与(或)动量上会存在着不确定性的理由。在前面我们已经看到,如果事情不是这样——即如果有可能同时(精确)测定任何东西的位置与动量——我们就会遇到一个佯谬;幸而这样一种佯谬并不存在,由波动图像中可以自然地得出不确定性这一事实表明,一切都很协调。

这里有一个很容易理解的例子,表明位置与动量之间的关系。假设我们有一个单缝,一些具有一定能量的粒子从很远的地方飞来,也就是说它们全都大致水平地飞来(图 38-2)。

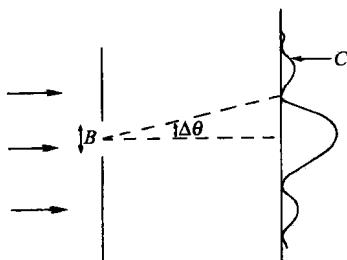


图 38-2 粒子穿过狭缝的衍射

我们将集中注意动量的垂直分量。从经典的意义上说,所有这些粒子都具有一定的水平动量,比如说 p_0 。所以,从经典意义上说,粒子穿过狭缝前的垂直动量 p_y 是确定知道的。图中粒子既不朝上,也不朝下运动,因为它来自很远的地方,当然这一来它的垂直动量就是零了。现在我们假设某个粒子通过宽度为 B 的狭缝。当它从 B 缝穿出后,我们以一定的精确度,即 $\pm B$,得知它的垂直位置 y 值。这就是说,在位置上的不确定量 Δy 约为 B 。现在我们也许想说,由于我们已知动量是绝对水平的,因而 Δp_y 是零;但这是错的。我们曾一度知道动量是水平方向的,但除此之外

就不知道什么了。在粒子穿过狭缝前,我们不知道它们的垂直位置。现在使粒子穿过狭缝,我们就发现它的垂直位置,但却失去了有关该粒子垂直动量的信息!为什么?按照波动理论,当波通过狭缝后,就像光那样会散开或衍射。因此,粒子跑出狭缝后,就有可能不笔直地飞行。由于衍射效应,粒子出射的图样散开,其张角(我们可将它定义为第一极小值的角度)就是对粒子出射的最后角度的不确定性的一种度量。

整个图样是怎样散开的呢?所谓散开就是说粒子有一定的往上或往下运动的可能性,也就是说,其动量具有向上或向下的分量。我们说可能性与粒子是因为可以用一个粒子计数器检测出这个衍射图样,而且当计数器(比如说在图 38-2 的 C 处)接收到一个粒子时,接收的是整个粒子,这样,从经典意义上来说,粒子要从狭缝射出往上偏至 C 处,就得具有垂直的动量。

为了对动量的散布有一个大致的概念, 我们设垂直动量 p_y 的散布等于 $p_0 \Delta\theta$, 这里 p_0 是水平动量。那么在散开的图样中 $\Delta\theta$ 有多大? 我们知道第一极小值出现在 $\Delta\theta$ 角上, 这时, 从狭缝的一边传出的波必须比从另一边传出的波多走过一个波长(在第 30 章中已得出过这个结论)。因此 $\Delta\theta$ 为 λ/B , 这样, 此实验中的 Δp_y 就是 $p_0 \lambda / B$ 。注意: 如果使 B 变小, 亦即对粒子的位置进行比较准确的测量, 那么衍射图样就变宽。我们记得, 在用微波做狭缝实验时, 当我们将狭缝关小时, 狹缝两侧强度的分布就变宽。所以, 狹缝越窄, 图样就越宽, 而我们发现粒子具有侧向动量的可能性就越大。这样垂直动量的不确定量就与 y 的不确定量成反比。事实上, 我们看到两者的乘积为 $p_0 \lambda$ 。但是 λ 是波长, p_0 是动量, 按照量子力学, 波长乘动量就是普朗克常数 h 。因此我们得到下列规则: 垂直动量的不确定量与垂直位置上的不确定量的乘积约为 h

$$\Delta y \Delta p_y \approx h. \quad (38.3)$$

我们不可能设计这样一个系统, 在其中既知道粒子的垂直位置, 又能以比式(38.3)所表示的更大确定性来预言它的垂直运动。这就是说垂直动量的不确定量必须超过 $h/\Delta y$, 这里 Δy 是我们的位置上的不确定量。

有时, 人们说量子力学是完全错误的。当粒子从左边飞来时, 它的垂直动量是零, 现在它穿过了狭缝, 它的位置也知道了。位置与动量两者似乎都能以任意高的准确度知道。不错, 我们可以接收一个粒子, 在接收时确定了它的位置如何, 以及为了到达那里应具有多少动量。这些都完全正确, 但这并不是不确定性关系式(38.3)所涉及的事, 式(38.3)所说的是对一种状况的可预知性, 而不是对于过去的陈述。“我知道粒子穿过狭缝前的动量是多少, 现在又知道它的位置”这种说法没有什么意思, 因为我们现在已失去了关于动量的知识。粒子通过了狭缝这一事实已使我们不再能预言垂直动量。我们所谈的是一种预言性的理论, 而不只是事后的一种测量。所以我们必须谈论能够预言的事。

现在我们从另一个角度来看一下。我们稍微定量地考虑同样现象的另一个例子。在前一个例子中, 我们曾以经典方法测量了动量。那就是说: 我们考虑了方向、速度和角度, 等等, 所以是用经典分析得出动量。然而, 由于动量与波数有关, 所以自然界中

还有另一种测量粒子(光子或其他粒子)动量的方法, 它没有经典的类比, 因为它利用的是式(38.2)。那就是测量波的波长。我们试用这种方式来测量动量。

假设有一个刻有许多线条的光栅(图 38-3), 并且有一束粒子射向此光栅。我们已屡次讨论过这样一个问题: 如果粒子具有确定的动量, 那么, 由于干涉效应, 我们会在某个方向上得到一个十分尖锐的图样。我们也谈过在测量这个动量时可以精确到什么程度, 也就是说, 这样的光栅分辨率有多大。我们不拟再作一次推导, 而只是参考第 30 章的结果, 在那里已经得出用一个给定的光栅能够测出的波长的相对不确定量为 $1/(Nm)$, 其中 N 是光栅线条数, m 是衍射图样的级数, 亦即

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm}. \quad (38.4)$$

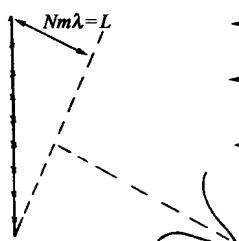


图 38-3 利用衍射光栅
确定动量

现在式(38.4)可以重新写为

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{Nm\lambda} = \frac{1}{L}, \quad (38.5)$$

这里 L 是图 38-3 中所示的距离。这段距离是粒子或者波或者其他某种东西从光栅底端反射后必须跑过的总路程与它们从光栅顶端反射后必须跑过的总路程之差。这就是说,形成衍射图样的波为来自光栅不同部分的波。首先到达的波来自光栅的底端和波列的始端,而其余到达的波则来自波列的后面各部分和光栅的另外部分,最后一个波最末到达,它包括了波列中与最前端相距为 L 的一点。所以为了使在我们的光谱中能有一条与一定的动量对应的锐线[其不确定量由式(38.4)给出],我们必须有一列长度至少为 L 的波列。如果波列太短,我们就没有用到整个光栅。形成光谱的波只是从光栅中很短的部分反射的波,光栅的作用没有很好发挥——我们将得到一个很大的角展度。为了得到较窄的角展度,我们必须利用整个光栅,这样至少在某些时刻整个波列应同时从光栅的各部分散射出来。因此为了使波长的不确定量小于式(38.5)所给出的值,波列的长度必须为 L 。顺便说一下

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\Delta k}{2\pi}. \quad (38.6)$$

因此

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}. \quad (38.7)$$

这里 L 是波列的长度。

这意味着,如果有一长度小于 L 的波列,那么在波数上的不确定量必然超过 $2\pi/L$ 。或者说波数的不确定量乘以波列的长度——暂时我们称之为 Δx ——将大于 2π 。我们之所以称波列长度为 Δx 是因为这是粒子在位置上的不确定量。如果波列只存在于有限长度之中,那么,这就是我们能找到粒子的区域在不确定量 Δx 范围以内。波的这种性质,即波列的长度乘以相应波数的不确定量至少为 2π 这一点,是每个研究波的人都知道的,这与量子力学毫无关系。这只是说,如果我们有一长度有限的波列的话,没有办法很精确地数出波的数目。我们试从另一途径来看看其中的理由。

假定我们有一长为 L 的有限波列;那么,由于它在两端必定减少(如图 38-1 所示),所以在长度 L 中波的数目是不确定的,其不确定量约为 ± 1 。但在长度 L 中的波数是 $kL/(2\pi)$ 。可见 k 是不确定的,我们又重新得出式(38.7)的结果,它只是波的一种特性。无论波是在空间传播, k 是每厘米的弧度数, L 是波列的长度,还是波在时间上展开, ω 是每秒的振动数, T 是波列持续的时间“长度”,都会出现同样的情况。这就是说:如果只是持续一定的有限时间 T 的波列,那么频率的不确定量就由下式确定

$$\Delta\omega = 2\pi/T. \quad (38.8)$$

我们已经着重指出,这些都只是波的性质,例如,在声学理论中就已为人们所熟知了。

要点在于,在量子力学中,我们将波数解释为对粒子动量的一种量度,即 $p = \hbar k$,这样,式(38.7)就告诉我们 $\Delta p \approx \hbar/\Delta x$ 。因此,这就表明了经典动量概念的适用界限(显然,如果我们想用波来表示粒子的话,动量的概念必定受到某种限制)。我们发现了一条规则,使我们对于经典概念在何时失效具有一些认识,这的确很好。

§ 38-3 晶体衍射

下面,我们考虑粒子波在晶体上的反射。晶体是一块厚厚的东西,它全部由排列得很好的

相同原子组成(我们将在后面包括一些较复杂的情况)。问题是对于一束给定的光(X射线)、电子、中子等等,怎样布置原子的排列才能在某个给定方向上得到强的反射极大值。为了得到强的反射,来自所有原子的散射都必须是同相位的。同相波的数量和反相波的数量不能相等,不然波会相互抵消掉。正如我们已经说明过的那样,解决这个问题的方法是找出等相位的区域;它们就是一些对入射方向和反射方向成相等角度的平面(图38-4)。

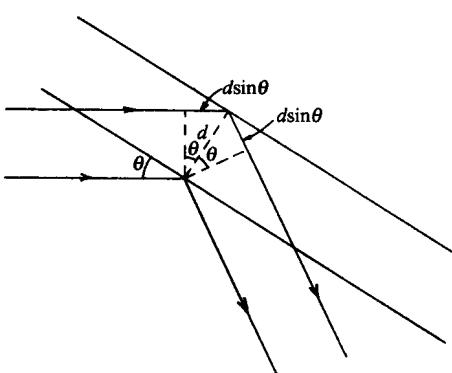


图 38-4 晶面对波的散射

考虑图38-4中两个平行平面,从这两个平面散射的波,假若其波前所经过的距离的差为波长的整数倍,则散射波的相位相同。可以看出,距离差

为 $2dsin\theta$,这里 d 是两平面间的垂直距离。于是相干反射的条件是

$$2dsin\theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (38.9)$$

比方说,如果晶体中原子刚巧分布在遵从式(38.9)(其中 $n = 1$)的平面上,那么就会出现强反射。然而,如果有性质相同(密度相同)的其他原子位于原来各对平面的中间,那么这些中间平面的散射也同样强烈,并将与其他的散射相干,致使总效果为零。所以式(38.9)中的 d 必须指相邻平面的距离;我们不能取两个相距五层的平面再应用这个公式!

有趣的是,实际的晶体通常并不那么简单,即好像只是以一定方式重复排列的同一类原子。换句话说,假如我们作一个二维类比的话,它们很像印满了某种重复图案的糊墙纸。对原子来说,所谓“图案”就是指可能包含有相当大量原子的某种排列,例如,CaCO3的图案包含有一个Ca原子、一个C原子和三个O原子等等。但不管是什么,这些图案都按一定的形式重复。这种基本图案就称为晶胞。

重复的基本形式决定了我们所称的点阵类型;只要观察反射波和找出它们的对称性,就能立即确定点阵类型。换句话说,只要最终发现有任何反射,就可确定点阵类型,但是为了确定晶格的每个组元的组成,就必须考虑各个方向上的散射强度。向哪个方向散射取决于点阵的类型,但各个散射的强度则由每个晶胞内有些什么来决定。晶体的结构就是用这种方式得出的。

图38-5和图38-6是两幅X射线衍射图样的照片;它们分别表明岩盐与肌红蛋白的散射。

附带提一下,如果最靠近的两个平面间的距离小于 $\lambda/2$,就会发生一件有趣的事。在这种情况下,式(38.9)对 n 就没有解。因此,如果 λ 大于相邻平面之间距离的两倍,就没有两侧衍射图样,光——或者别的什么——将直接穿过材料,而不反射也无损耗。所以,在可见光的情况下, λ 远大于间隔,当然光就直接通过,而不会出现从晶面反射的图样。

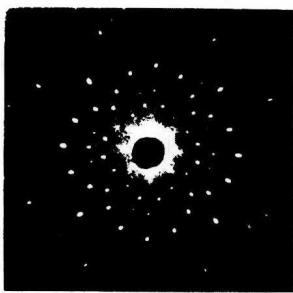


图 38-5

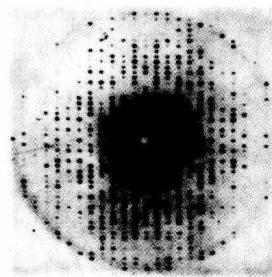


图 38-6

这个事实在产生中子的核反应堆情况下也引起了有趣的结果(中子显然是粒子,谁都会这么说)。假如我们引出这些中子使它们进入一根长石墨棒,它们就会扩散,并且缓慢地穿过石墨棒(图 38-7)。它们之所以扩散是因为被原子弹开,但严格地说,按照波动理论,它们之所以被原子弹开是由于晶面的衍射。结果表明,假如我们取一根长石墨棒的话,从远端跑出的中子都具有长的波长!事实上,假如我们把中子强度作为波长的函数作图的话,只有在波长大于某个极小值时才出现曲线(图 38-8)。换句话说,我们可以用这种方法得到极慢的中子,只有最慢的中子才会通过;它们没有被石墨棒的晶面所衍射或散射,而是像光线通过玻璃一样径直穿过石墨棒,没有向两边散射出去。还有许多其他证据也说明中子波和别的粒子波是真实的。

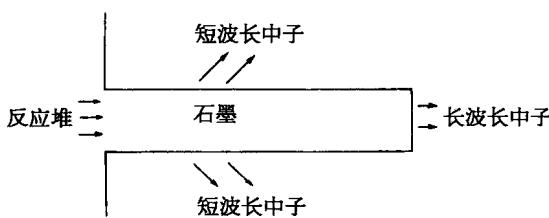


图 38-7 反应堆中子通过石墨块的扩散

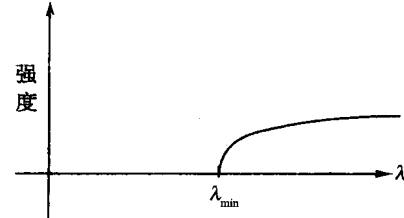


图 38-8 从石墨棒出来的中子强度与波长的关系

§ 38-4 原子的大小

现在我们来看一下由式(38.3)所表示的不确定性关系的另一个应用。在这里不用过分认真;概念是正确的,但所作的分析并不很精确。这个概念涉及到确定原子的大小,以及按经典说法,电子将不断辐射出光,因而一直作螺旋运动,直至最后落到原子核上这一事实。但是这种说法不符合量子力学的观点,因为那样一来我们就同时知道每一个电子的所在以及它运动得有多快。

假定我们有一个氢原子,现在要测量电子的位置;我们肯定不能精确地预言电子的位置,不然动量的扩展将会达到无限大。每当我们观察电子时,它是在某处,但是它在各个不同地方都有一定的振幅,因而在那些地方都可能找到它。这些位置不可能全都在原子核处,我们将假定位置有一定的扩展,其大小约为 a 。这就是说,电子离原子核的距离通常约为 a 。

我们将由原子的总能量取极小值这个条件来确定 a 的数值。

由于不确定性关系,动量的扩展约为 h/a ,这样,如果我们打算用某种方式去测量电子的动量,比如使它散射 X 射线,然后寻找运动散射体的多普勒效应,那么可以预期并不会每次都得到零——电子并不是静止不动的——但它的动量一定约为 $p \approx h/a$,于是动能约为 $mv^2/2 = p^2/(2m) = h^2/(2ma^2)$ (在某种意义上,这是一种量纲分析,用以找出动能是以何种方式取决于普朗克常数,质量 m ,以及原子的大小 a 。我们无需顾虑答案中 2、 π 等这类因子上的出入,事实上,我们甚至还没有很精确地定义过 a)。现在,势能为 $-e^2$ 除以离原子中心的距离,即 $-e^2/a$,这里的 e^2 大家记得就是电子电荷的平方除以 $4\pi\epsilon_0$ 。要点就在于,如果 a 变小,势能就变小,但 a 越小,由于不确定性关系,所需的动量也就越大,因而动能也越大。总能量是

$$E = \frac{h^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}. \quad (38.10)$$

我们不知道 a 究竟为多大,但我们却知道原子本身会进行安排,以取得某种折衷办法使能量尽可能地小。为使 E 保持极小,我们求 E 对 a 的微商,令此微商等于零后再解出 a 。 E 的微商是

$$\frac{dE}{da} = \frac{-h^2}{ma^3} + \frac{e^2}{a^2}, \quad (38.11)$$

令 $\frac{dE}{da} = 0$, 求得 a 值为

$$a_0 = \frac{h^2}{me^2} = 0.528 \text{ \AA} = 0.528 \times 10^{-10} \text{ m}. \quad (38.12)$$

这一个特殊的距离称为波尔半径。我们因此得知原子的大小约为埃的数量级,这个结论是正确的:这是一件挺不错的事——实际上,这是一件令人惊奇的事,因为在这以前,我们还没有推断原子大小的根据!从经典的观点来看,由于电子会螺旋式地落到原子核上,原子完全不可能存在。

现在,如果将(38.12)的 a_0 值代入(38.10)去求能量,结果得出

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{me^4}{2h^2} = -13.6 \text{ eV}. \quad (38.13)$$

能量为负意味着什么?这意味着,当电子在原子中时的能量比自由状态下的能量小。这就是说,它是受束缚的。也就是说,要把电子“踢出去”需要能量;要电离一个氢原子大约需要 13.6 eV 的能量。我们没有理由认为所需的能量不是这个值的 2 倍、3 倍或 1/2 倍、 $1/\pi$ 倍,因为我们这里所用的是十分粗略的论证。然而,我们在这里悄悄地这样来使用所有的常数,使得正好得出正确的数字! 13.6 eV 这个数字称为一个里德伯(Rydberg)能量;它是氢原子的电离能。

所以,我们现在懂得了为什么不会掉到地板下面去。当我们行走时,鞋子中的大量原子推斥着地板中的大量原子。为了把原子挤得更靠近一些,电子必须被限制在一个较小的空间,由不确定性关系,平均而言它们的动量将变得大些,这就意味着能量变大;抵抗原子压缩的是一种量子力学效应,而不是经典效应。按照经典的观点,如果使所有电子与质子更为靠近,我们应预期能量会进一步降低,因此,在经典物理学中,正电荷与负电荷的最佳排列就是

互相紧靠在一起。这些在经典物理学中是很清楚的,但是由于原子的存在又令人困惑。当然,早先的科学家发明过一些办法来摆脱这个困境——不过别去管它,我们现在找到了一种正确的方法(也许如此)。

顺便提一下(虽然眼下我们还不具备理解它的基础),在有许多电子的场合中,这些电子总是试图彼此离开。如果某个电子正占据着某一空间,那么另一个电子就不会占据同一空间。说得更精确一些,由于存在着两种自旋的情况,因此两个电子有可能紧靠在一起,一个电子沿一个方向自旋,而另一个电子则沿反方向自旋。但此后我们在该处再也不能放进更多的电子。我们必须把其他电子放到别的位置上,这就是物质具有强度的真正原因。假如我们有可能将所有电子放在同一个地方,那么它们将会比现在更为凝聚。正是由于电子不可能全都紧靠在一起这个事实,才使得桌子和其他种种东西变得坚固。

十分明显,为了理解物质的性质,我们必须用量子力学,经典力学在这方面是不会令人满意的。

§ 38-5 能 级

我们已讲过处在可能具有的最低能量状态下的原子,但是结果表明电子可以具有别种状态,它能以更有力的方式旋转与振动,因此原子可以有多种不同的运动。按照量子力学,在稳定状态下,原子只可能有确定的能量。我们作了一个图(图38-9),其中垂直方向标绘能量,每一个允许的能量值画一条水平线。当电子是自由电子,即它的能量为正时,它可以具有任何值,并能以任何速率运动。但是束缚能不能取任意值。原子必须取如图38-9所示的一组允许值中的某一个能量。

现在我们称这些能量的允许值为 E_0 , E_1 , E_2 , E_3 。如果原子本来处于 E_1 , E_2 等“激发态”之一时,它不会永远保持这种状态。迟早它会掉到较低的状态中去,并以光的形式辐射出能量。发射出的光的频率可由能量守恒关系加上量子力学的一个关系式[即光的频率与光的能量之间的关系式(38.1)]来确定。因此,比如说从能量 E_3 到能量 E_1 的跃迁所释放的光的频率即为

$$\omega_{31} = (E_3 - E_1) / \hbar. \quad (38.14)$$

于是,这就是原子的一个特征频率,它确定了一条发射谱线。另一种可能跃迁是从 E_3 至 E_0 ,这时就有一个不同的频率

$$\omega_{30} = (E_3 - E_0) / \hbar. \quad (38.15)$$

另一个可能性是,如果原子已被激发到 E_1 态,它可能掉回到基态 E_0 ,而发射出的光子的频率是

$$\omega_{10} = (E_1 - E_0) / \hbar. \quad (38.16)$$

我们举出三种跃迁的情况是为了指出一个有趣的关系。由式(38.14),(38.15)和(38.16)很容易看出

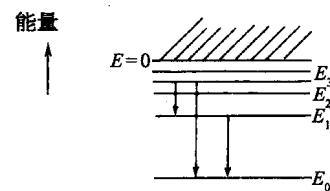


图38-9 原子的能级图(画出几种可能的跃迁)

$$\omega_{30} = \omega_{31} + \omega_{10}. \quad (38.17)$$

一般来说,如果我们找到了两条谱线,可以预期在频率之和(或之差)处将找到另一条谱线,而且通过找到这样一系列能级,使每条谱线对应于其中的某一对能级的能量差,那么所有的谱线就能得到理解。在量子力学出现以前人们就已注意到这种在谱线频率上出乎意外的巧合,它称为里兹(Ritz)组合原则。从经典的观点来看,这又是不可思议的。不过,我们别再唠叨经典力学在原子领域中的失败;看来我们已讲得够多的了。

前面已经谈到量子力学可以用振幅来阐述,振幅的行为很像波,它们具有一定的频率和波数。让我们看一下,从振幅的观点怎样会得出原子具有确定的能量状态。从我们至今所说的那些事情出发是无法理解这一点的,但是我们都知道被限制的波具有确定的频率,例如,若声音限制在一个风琴管或任何类似的东西中时,声波振动的方式就不止一种,但对每种方式都有一个确定的频率。这样,将波限制在其中的物体有某些确定的谐振频率。所以这是被限制在一定空间中的波的一个性质——这个课题我们将在以后详细地用公式来讨论——这些波只能具有一些确定的频率。由于振幅的频率与能量间存在着一般关系,我们发现束缚在原子内的电子具有确定的能量就不足为奇了。

§ 38-6 哲学含义

我们简单地谈谈量子力学的某些哲学含义。通常问题总是有两个方面:一个是对物理学的哲学含义,另一个是把哲学上的问题外推到其他领域。在把跟科学相联系的哲学观念引伸到别的领域中去时,它们往往完全被歪曲了。因此我们将尽可能把自己的评论局限于物理学本身。

首先,最有趣的是不确定性原理的概念;进行观察会影响现象。人们向来都知道进行观察要影响现象,但是要点在于,这种影响不可能依靠重新调整仪器而被忽略、减到最小或任意减小。当我们观察一定的现象时,不可避免地会以某一最低限度的方式来扰动它,这种扰动是物理观点的一致性所必需的。在量子力学以前的物理学中,观察者有时也是重要的,但这只是从无关紧要的意义上来说。曾经有人提出过这样的一个问题:如果有一棵树在森林中倒了下来,而旁边没有人听到,那它会发出响声吗?在一片真实的森林中倒下的一棵真实的树当然会发出声音,即使没有任何人在那里。但即使没有人在那里听到,它也会留下其他的迹象。响声会震动一些树叶,如果我们相当仔细的话,可以发现在某个地方有一些荆棘将树叶擦伤,在树叶上留下微小的划痕,除非我们假定树叶曾经发生振动,否则对此划痕就无法解释。所以,在某种意义上我们必须承认这棵树确实发出过声音。我们也许会问:是否有对声音的感觉呢?不像有过,感觉大约总与意识有关。蚂蚁是否有意识以及森林中是否有蚂蚁,或者树木是否有意识,这一切我们都还不知道。对这个问题我们就谈到这里吧!

量子力学出现以来人们所强调的另一件事情是这样一个观念:我们不应当谈论那些我们不能够测量的事情(实际上相对论也这么说过)。除非一件事情能通过测量来定义,否则它在理论上就没有地位。由于一个定域粒子的动量的精确值不能通过测量来确定,因此它在量子理论上就没有地位。但是,认为经典理论的问题就出在这里是错误的。这是一种对情况所作的粗枝大叶的分析。因为我们不能精确地测量位置和动量并不先验地意味着我们不能谈论它们,而只是意味着我们不必谈论它们。在科学中情况是这样的:一个无法测量或

无法直接与实验相联系的概念或观念可以是有用的，也可以是无用的。它们不必存在于理论之中。换句话说，假如我们比较物理世界的经典理论与量子理论，并假设实验上确实只能粗略地测出位置与动量，那么问题就是一个粒子的精确位置与它的精确动量的概念是否仍然有效。经典理论承认这些概念；量子理论则不承认。这件事本身并不意味着经典物理是错误的。当新的量子力学刚建立时，经典物理学家——除去海森伯、薛定谔和玻恩以外所有的人——说：“看吧，你们的理论一点也不好，因为你们不能回答这样一些问题：粒子的精确位置是什么？它穿过的是哪一个孔？以及一些别的问题”。海森伯的答复是：“我不用回答这样的问题，因为你们不能从实验上提出这个问题。”这就是说，我们不必回答这种问题。考虑下述两种理论(a)与(b)；(a)包括一个不能直接检验但在分析中要用到的概念，而(b)则不包括这个概念。如果它们的预测不一致，我们不能声称：由于(b)不能解释(a)中的那个概念，因而它就是错的，因为这个概念是一个无法直接检验的东西。知道哪些观念不能直接检验总是好的，但是没有必要将它们完全去掉。认为我们只利用那些直接受到实验制约的概念就能完全从事科学工作的这种看法是不正确的。

量子力学本身就存在着波函数振幅、势，以及其他许多不能直接测量的概念。一门科学的基础是它的预测能力。预测就是说出在一个从未做过的实验中会发生什么。怎么能做到这一点呢？所用的方法是假定那里会发生什么事情，而不依赖于实验。我们必须把各种实验结果外推到它们尚未做过的那个领域，同时必须引用我们的概念，并把它们引申到还未得到检验的那些地方。如果我们不这样做，就谈不上预测。所以，对于经典物理学家来说，欣然赞同，并且认为位置——它对棒球来说有着明显含义——对于电子也具有某种含义，将是非常明智的。这并不是什么笨拙，而是合情合理的步骤。今天我们说相对论应该对所有的能量都是正确的，但是或许有一天，有人会跑来说我们是多么笨呀！直到“惹出祸来”，我们实在是不知道笨在哪里的，所以整个思想就是惹点祸出来。唯一能发现我们错误的方法是找出我们的预测是什么。这对于建立起一种概念是绝对必要的。

我们已对量子力学的不确定性作过一些评论。那就是我们现在还不能预测在给定的、尽可能仔细安排的物理条件下会发生什么物理事件。假如有一个原子处于受激态，即将发射光子，那么我们无法说出它将在什么时候发射光子。它在任何时刻都有发射光子的一定振幅，我们可以预测的只是发射的概率；我们不能精确地预测未来。这件事引起了种种胡扯和关于诸如意志自由的含义的问题，还引起了世界是不确定的种种想法。

当然，我们必须强调，在某种意义上经典物理也是不确定的。人们通常认为这种不确定性——我们不能预言未来——是一种重要的量子力学的特色，而且据说这可用来解释心理的行为，自由意志的感觉等等。但是如果世界真是经典世界——如果力学定律是经典的——心理上也不见得会多少有些不同的感受。确实，就经典观念而言，如果我们知道了世界上（或者在一个气体容器中）的每个原子的位置与速度，那么就应当能精确地预言会发生什么。因此经典的世界是决定论的。然而，假定我们的精确度有限，而且的确不知道一个原子的确切位置，比如说只精确到十亿分之一，那么这个原子运动时会撞在别的原子上，由于我们所知道的位置的精确度不超过十亿分之一，因此我们发现在碰撞后，位置的误差还会更大。当然，在下一次碰撞时，误差又将被放大，这样，如果起先只有一点点误差的话，后来就会迅速放大而出现很大的不确定性。举个例子来说：比如一道水流从堤坝上泻下时，会飞溅开来。如果我们站得很近，常常会有一些水滴溅到我们的鼻子上。这一切看来完全是无规

则的,然而这样一种行为能由纯粹的经典定律来预言。所有水滴的精确位置取决于水流流过坝以前的精确运动。结果怎样呢?在水流落下时,极微小的不规则性都被放大了,结果就出现了完全的不规则性。很明显,除非我们绝对精确地知道水流的运动,否则就不能真正预知水滴的位置。

说得更明确一些,给定任一精确度,无论它精确到怎样的程度,我们都能找到一个足够长的时间,以致无法对这么长的时间作出有效的预言。其实要点在于这段时间并不太长。如果精确度为十亿分之一,这个时间并不是数百万年。事实上,这个时间随着误差呈对数式地增长,结果发现只在非常、非常短的时间里我们就失去了所有的信息。如果精确度提高到十亿乘十亿再乘十亿分之一——那么不管我们说多少个几十亿,只要最后不再说下去——我们就能找到一个比刚才提到的精确度的数字还要短的时间——过此时间后就再也不能预言会发生什么了!因此,诸如以下的说法,什么由于人类思维的明显的自由与非决定性,我们应当认识到再也不能希望用经典的“决定论的”物理来理解它;什么欢迎量子力学将我们从“绝对机械论的”宇宙下拯救出来啊,等等都是不公正的,因为从实际的观点来说,在经典力学中早已存在着不可确定性了。

第 39 章 气体分子动理论

§ 39-1 物 质 的 性 质

从本章起我们将开始一个新的课题,这个课题将占用相当的时间。它是从物质由大量原子或基本单元组成,它们之间存在着电相互作用,并且从遵循力学定律这种物理观点出发,对物质的性质进行分析的第一部分。我们企图了解为什么不同的原子集合会表现出它们所具有的特色。

显然这是一个困难的课题,我们要在一开始就强调指出,事实上这个课题是非常困难的,而且所用的处理方法也必须与迄今为止我们处理其他课题的方法都不相同。在力学和光学中,我们能够从某些定律,比如牛顿定律,或者加速电荷所产生的电场的公式的严格叙述开始。由此可以从本质上理解一大批现象,并且从此以后,这些定律就为我们理解力学与光学提供了基础。这就是说我们在以后可以学到更多的东西,但是我们并不是学习不同的物理内容,而只是学习用以处理问题的更好的数学分析方法。

在研究物质的性质时,我们不能有效地沿用这条途径,只能以一种非常初步的方式来讨论物质;直接从具体的基本定律出发来分析这样的课题是非常复杂的,因为这些定律无非是力学与电学的定律。但它们与我们希望研究的物质的性质之间相隔太远;从牛顿定律得出物质的性质要经过非常多的步骤,而这些步骤本身也是相当复杂的。我们现在开始采取其中的某些步骤,虽然我们的许多分析相当精确,但所得出的最后结果却越来越不精确。对于物质的性质,我们只能有一个大致的了解。

我们之所以只能用如此不完善的方式来分析,其原因之一是它在数学上要求对概率论具有深刻的理解;我们并不要求知道每个原子实际上在哪里运动,而是要求知道平均说来有多少原子在这里运动,有多少原子在那里运动,产生各种效应的可能性是多少。所以这一课题牵涉到概率论的知识,但由于我们的数学基础还不够,我们不想过多地引用这方面的知识。

其次,从物理观点来说更重要的理由是,原子的实际行为并不遵循经典力学规律,而是遵循量子力学规律,因此,在我们了解量子力学以前,不可能得到对这个课题的正确的理解。这里,和弹子房弹球、汽车等情况不同,经典力学规律和量子力学规律之间的差别是非常重要和非常显著的,以致由经典物理学推导出来的许多结果从根本上来说就不正确。因此,这里学到的某些东西有一部分必须抛弃,然而,我们将指明每一种结果不正确的情况,以便了解它的“界限”何在。在前两章中讨论量子力学的理由之一就是给你们一个概念,使能了解为什么经典力学在许多方面或多或少是不正确的。

为什么我们现在就要处理这个课题呢?为什么不等上一年半载,直到我们更好地掌握了概率的数学理论,并且学了一点量子力学后,再以更为彻底的方式来处理它呢?回答

是——这是一个困难的课题,学习它的最好方式是慢慢来!首先要做的是,使我们对不同场合下应当发生的情况多少获得一些概念,这样,以后当我们对这些规律了解得更清楚时,就能更好地用公式来表达它们。

任何一个企图分析实际问题中物质性质的人,可能都想从写出基本方程式出发,然后再从数学上求出它们的解。虽然有一些人试图采用这一条途径,但他们都是这个领域中的失败者;真正的成功来自那些从物理观点出发考虑的人,他们对于要做的事情具有大致的概念,并且在给定的复杂状况下知道哪些是重要的,哪些是次要的,然后开始作正确的近似。这些问题如此复杂,即使获得那种不精确和不完全的初步理解也是很有价值的,因此在整个物理课程中,我们将一再碰到这个课题,而且一次比一次更为准确。

就在现在开始这个课题的另一个原因是,我们已经在例如化学上用过许多这方面概念,而且甚至在高中时,就听到过其中的某些内容。因此,了解这些事情的物理基础是颇有意义的。

举一个有趣的例子来说,我们都应该,在相同温度、相同压力下,相同体积的气体含有同等数目的分子。阿伏伽德罗把倍比定律,即当两种气体在化学反应中化合时,所需的体积总是成简单的整数比的定律,理解为相同体积中含有相同数目的原子。但是,为什么它们含有相同数目的原子?我们能从牛顿定律推出原子数目应该相等吗?本章中我们将谈到这种特殊的情况。在以下几章中,我们将讨论包括压强、体积、温度及热量的其他各种现象。

我们也发现,不从原子观点出发也同样能着手处理这个课题,并且在物质的性质上存在着许多相互联系。比如说,当我们压缩某个东西时,它会变热;如果把它加热,它就膨胀。在这两件事之间存在着一种联系,它可以独立于更深一层的机制而推出。这个课题称为热力学。当然,对热力学的最深刻的理解来自于对更深一层的实际机制的理解,而这就是我们将要做的:我们从一开始就采用原子的观点,并用它来了解物质的各种性质和热力学定律。

那么,下面就让我们从牛顿力学定律出发来讨论气体的性质。

§ 39-2 气体的压强

首先,我们知道气体会产生压强。我们必须清楚地理解它是怎么产生的。如果我们的耳朵比现在灵敏几倍,就会听到持续的冲击噪声。进化论幸而没有使耳朵发展到这种地步,因为这样灵敏的耳朵毫无用处——不然我们将听到重复不停的吵闹声。原因是耳膜与空气相接触,而空气里有大量持续运动的分子,这些分子撞击在耳膜上。在撞击耳膜时,它们造成了无规则的咚、咚、咚的声音,这种声音我们听不见,因为原子非常小,以至于耳朵的灵敏度不足以感觉到。原子这样不停地撞击的结果是将耳膜推开,但是当然,在耳膜的另一边也有同样的原子在不停地撞击,因而作用在耳膜上的净力为零。如果我们从一边抽去空气,或者改变两边空气的相对数量,那么耳膜就将被推向这一边或那一边,因为在一边的撞击的量将大于另一边。当我们乘电梯或飞机时,由于上升得太快,特别是如果我们还患有重感冒的话,有时就会有这种不舒服的感觉(当我们感冒时,由于发炎而使通过咽喉联系耳膜内部空气与外部空气之间的导管关闭了,这样,内外压强就不能很快地保持平衡)。

为了定量地分析这种情况,我们设想有一个充满大量气体的容器,容器的一端是一个可

移动的活塞(图39-1)。我们希望找出由于容器中有原子存在所引起的作用在活塞上的力是多少。容器的体积为 V ,当原子在容器内以各种不同的速度来回运动时,它们就撞击在活塞上。假定在活塞外部没有什么东西,而是真空,那么它会怎么样呢?如果活塞是自由的,没有什么东西顶着,那么它每次受到撞击时,都将得到一点点动量,于是便会渐渐地从容器中被推出。所以为了使它不从容器中被推出,我们必须加上一个力 F 。问题在于要用多大的力?表示力的一种方法是考察每单位面积上的力:如果 A 是活塞的面积,那么作用在活塞上的力可以写成某个数乘以面积。于是,我们定义压强为加在活塞上的力除以活塞的面积

$$P = \frac{F}{A}. \quad (39.1)$$

为了更好地理解这个概念(为其他目的我们也曾推导出它),必须注意由于使活塞移动距离($-dx$)压缩气体时,对气体所作的元功 dW ,应当是力乘以压缩的距离,而按照式(39.1),就是压强乘以面积再乘以距离,即压强乘体积变化的负值

$$dW = F(-dx) = -PA dx = -PdV. \quad (39.2)$$

(面积 A 乘以距离 dx 等于体积的变化)。这里的负号是因为气体受压缩时,它的体积减少;如果考虑到这一点,就可以看出在气体受到压缩时,外界对它做了功。

我们必须施加多大的力来平衡分子的碰撞呢?活塞从每次碰撞中获得一定的动量。每秒钟都有一定的动量倾注在活塞上,使它开始运动。为了使活塞保持不动,必须从我们的力中每秒钟输回给它同样大小的动量。当然,这个力正是我们每秒钟必须输送给它的动量的数量。还可以用另一种方法来考虑这个问题:如果让活塞自由活动,它将由于碰撞而获得速率;而每一次碰撞都使速率增大一点,这样它就不断地受到加速。活塞的速率的增加,或者说加速度正比于作用在它上面的力。于是我们看到这个力等于由于分子*的碰撞每秒钟传给活塞的动量,而我们前面已经谈到过它等于压强乘以面积。

计算每秒钟施加给活塞的动量是不难的,我们可以分两步来求:首先,找出一个特定的原子在和活塞的一次碰撞中传给活塞的动量,然后,再乘上每秒钟原子与活塞壁发生碰撞的次数。力就是这两个因子的乘积。现在我们来看看两个因子是怎样的:首先,我们假定活塞对原子来说是一个理想的“反射体”,否则,整个理论就是错误的,活塞将开始变热,事情将发生变化。但是最后,当平衡建立后,总的效果是碰撞仍是有效的完全弹性碰撞。平均而言,每个粒子飞来和离开时都带有相同的能量。我们想象气体处在稳定的状态下,并且由于活塞静止不动,所以对于活塞我们没有损耗能量。在这种情况下,如果某一质量的粒子以一定的速率飞来,它也以同样的质量和同样的速率离开。

如果原子的速度为 v , v 的 x 分量为 v_x ,则“入射”粒子动量的 x 分量为 mv_x ;“出射”粒子动量的分量和它相等,这样,粒子在一次碰撞中施加给活塞的总动量是 $2mv_x$,因为这个粒子是被“反射”回来的。

现在,我们要知道每秒钟内原子与活塞的碰撞次数;或者说 dt 时间内的碰撞次数,然后

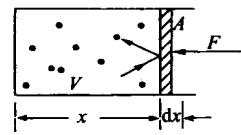


图39-1 一个具有无摩擦活塞的容器中的气体原子

* 原文如此,在本节文字中,作者有时似将分子和原子这两个概念混用。——译者注

再除以 dt 。有多少原子打上去呢？我们假设在体积 V 中有 N 个原子，即单位体积内的原子数为 $n = N/V$ 。为了找出有多少个原子打在活塞上，我们注意到，给定一个时间 t ，若某个粒子离活塞足够近，并且具有一定的指向活塞的速度，就能在这段时间 t 内碰上活塞。如果它离活塞太远，那么在时间 t 内只能向着活塞跑过一段路程，而不能到达活塞。非常清楚，只有离活塞的距离在 $v_x t$ 之内的那些分子，才会在时间 t 内打在活塞上。因而在时间 t 内的碰撞次数等于在距离为 $v_x t$ 内的区域里的原子数，并且由于活塞的面积是 A ，所以能在时间 t 内碰到活塞的原子所占有的体积是 $v_x t A$ 。但是碰撞到活塞的原子数等于这个体积乘以单位体积的原子数，即为 $n v_x t A$ 。当然，我们并不要求时间 t 内的碰撞次数，而是每秒钟的碰撞次数，因而只要除以时间 t ，就得到 $n v_x A$ （这个时间 t 可以很短；如果我们觉得需要更精确一些，可以称它为 dt ，然后再求微商，但结果是相同的）。

这样，我们求得力为

$$F = n v_x A \cdot 2 m v_x. \quad (39.3)$$

可见，若保持粒子密度不变，而改变面积，则力与面积成正比。于是压强为

$$P = 2 n m v_x^2. \quad (39.4)$$

不过我们注意到在这个分析中有一些小小的麻烦：首先，并非所有分子都具有同样的速度，而且它们并不都以同样的方向运动。因而，所有这些 v_x^2 项都不相同！因为每个分子都有它自己的贡献，所以，我们要做的自然是对这些 v_x^2 取平均。即我们要求的是 v_x 平方对所有分子的平均值

$$P = n m \langle v_x^2 \rangle. \quad (39.5)$$

这里我们是不是忘了写上因子 2？不，在所有的原子中，只有一半是朝着活塞跑的。另一半朝着相反的方向运动，如果我们取 $\langle v_x^2 \rangle$ ，则对负的 v_x 平方的平均和对正的 v_x 平方的平均一样。所以当我们只取 $\langle v_x^2 \rangle$ ，而不管符号的话，那么所得的值就是我们所要求的值的两倍。对正的 v_x ， v_x^2 的平均值等于对所有 v_x 所求平均值的一半。

当原子向四面八方运动时，显然在“ x 方向”上没有什么特殊之处；原子同样可以上下、左右、前后地运动。因此在运动过程中，表征原子在一个方向上平均运动的 $\langle v_x^2 \rangle$ 值和在其他两个方向上的平均值全都相等

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (39.6)$$

因此，只要稍微用一点点数学技巧就可看出，每一项等于这三项总和的三分之一，而这三项之和当然就是速率的平方

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}. \quad (39.7)$$

这个式子的方便之处在于我们毋须考虑任何特殊的方向，于是，可把压强公式重新写为

$$P = \left(\frac{2}{3}\right) n \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle. \quad (39.8)$$

把最后一个因子写成 $\langle mv^2/2 \rangle$ 是因为这是一个分子的质心运动的动能。由此我们得出

$$PV = N \left(\frac{2}{3} \right) \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle. \quad (39.9)$$

如果我们知道速率,用这个公式就可计算出压强有多大。

举一个十分简单的例子,我们考虑氦气或其他任何气体,例如水银蒸气,足够高温度下的钾蒸气或氩气,其中所有分子都是单原子分子,对这些单原子分子,我们可以假定在分子中没有内部运动。如果是复杂的分子,其中就可能存在某些内部运动,相互间的振动,等等。假设我们忽略这些运动(实际上,这些运动是很重要的,以后我们再回过头来考虑);这样做还是可行的。由于我们假定原子内部的运动可以不考虑,质心运动的动能就是分子所具有的全部能量。所以,对于单原子气体,动能就是总能量。通常我们称 U 为总能量(有时也称 U 为总内能)。我们或许会感到奇怪,因为对气体来说,并没有外能,它就是在气体中,或无论什么东西中所有分子的全部能量。

我们假设单原子气体的总能量 U 等于原子数乘以每个原子的平均动能,因为我们不考虑原子内部任何可能的运动或激发。于是,在这些条件下,我们有

$$PV = \frac{2}{3} U. \quad (39.10)$$

附带提一下,我们可以在这里停一下并找出下述问题的答案:假如我们缓慢地压缩盛在一个容器中的气体,要把体积压缩需要多大的压强?这不难求出,因为压强是总能量的三分之二再除以 V 。当我们压缩气体时,就对气体做功,因而增加了能量 U 。于是,我们就得到了某种微分方程:如果我们从具有一定内能和一定体积的已知条件出发,那么就能求出压强。一旦我们开始压缩气体,内能就增加,同时体积减少,从而压强增大。

这样,我们就需要求解微分方程。我们马上就来解它。不过首先必须强调指出,在压缩这一气体时,我们假设所有的功都转变为增加气体内部原子的能量。我们可能会问:“这种假设是否有必要?它所做的功难道还会跑到别的什么地方去吗?”结果表明,它是能够跑到别的地方去的。有一种所谓通过器壁“漏热”的现象:当热的(即快速运动的)原子撞击器壁时,加热器壁,使能量跑出去。现在我们假定不发生这种情况。

为了略微更普遍一些,虽则我们仍然对气体作某些十分特殊的假设,我们将不写 $PV = 2U/3$,而写

$$PV = (\gamma - 1)U. \quad (39.11)$$

按照习惯,把它写成 $(\gamma - 1)$ 乘以 U ,因为在以后处理的少数其他情况中, U 前面的因子不是 $2/3$,而是其他的数值。所以,为了更一般起见,我们称它为 $(\gamma - 1)$,因为人们已经这样称呼了近一百年了。对于像氯这样的单原子气体,因为 $(5/3 - 1)$ 是 $2/3$,所以 γ 等于 $5/3$ 。

我们已经注意到,压缩气体时所做的功是 $-PdV$ 。既不加入热能也不取走热能的压缩过程称为绝热(adiabatic)压缩,它是由希腊字 a(不)+dia(穿)+bainein(过)而来的。(“绝热”这个词在物理中有几种不同的用法,有时很难看出它们之间有什么共同含义。)这就是说,对于绝热压缩,所作的全部功都转变为内能。没有其他能量损失——这就是关键,因而我们有 $PdV = -dU$ 。但因 $U = PV/(\gamma - 1)$,可得

$$dU = \frac{PdV + VdP}{\gamma - 1}. \quad (39.12)$$

因而我们有 $PdV = - (PdV + VdP) / (\gamma - 1)$, 或者整理一下, 得

$$\gamma P dV = -V dP$$

或

$$\frac{\gamma dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0. \quad (39.13)$$

幸运的是, 假定 γ 是常数(比如对单原子气体), 我们就能进行积分: 即 $\gamma \ln V + \ln P = \ln C$, 这里 C 是积分常数。对两边取指数, 就得到定律

$$PV^\gamma = C(\text{常数}). \quad (39.14)$$

换句话说, 在绝热条件下, 在气体的压缩过程中, 由于没有热量流失, 因而温度升高, 对单原子气体来说, 压强乘以体积的 $5/3$ 次方是一个常数! 虽然我们是从理论上推出这个结论的, 但事实上, 单原子气体在实验上的表现也是如此。

§ 39-3 辐射的压缩性

我们可以举另一个气体分子动理论的例子, 它在化学上用得不多, 但在天文学上有用。设有一个装有大量光子的容器, 其中温度非常高(当然, 高热恒星中的气体就可看成是这样的容器。太阳还不够热; 在那里仍有太多的原子, 但是在某种更热的恒星中, 会有更高的温度, 我们可以忽略原子, 而假设在容器中唯一的客体是光子)。而光子具有一定的动量 p (当我们学习分子动理论时, 会一再遇到麻烦: p 既是压强, 又是动量; v 既是体积, 又是速度; T 既是温度, 又是动能、时间或者力矩; 我们必须保持警惕)。这里 p 是动量, 是矢量。按照与前面相同的分析, 正是矢量 p 的 x 分量产生“反冲”的, 矢量 p 的 x 分量的两倍是在反冲中给出的动量。于是 $2p_x$ 代替了 $2mv_x$, 而在计算碰撞次数时, v_x 仍为 v_x , 这样当我们继续采取以前的所有步骤后, 发现式(39.4)中的压强可用下式来代替

$$P = 2np_x v_x. \quad (39.15)$$

在作平均时, 它变为 n 乘以 $p_x v_x$ 的平均值(因子 2 的情况同上), 最后计入另外两个方向, 我们求得

$$PV = \frac{N}{3} \langle p \cdot v \rangle. \quad (39.16)$$

此式与(39.9)相符, 因为动量是 mv ; 只是它稍微更一般些, 如此而已。总之, 压强乘体积等于原子总数乘 $\langle p \cdot v \rangle / 3$ 的平均值。

对光子来说, $p \cdot v$ 是什么? 动量与速度方向相同, 而速度就是光速, 所以这就是每个光子的动量与光速的乘积。每个光子的动量乘光速是它的能量: $E = pc$, 因而这些项就是每个光子的能量, 当然, 我们应当取光子的平均能量乘光子数。这样, PV 的乘积是气体中能量的三分之一

$$PV = \frac{U}{3} (\text{光子气体}). \quad (39.17)$$

于是, 对光子来说, 由于前面的系数是 $1/3$, 即在式(39.11)中的 $(\gamma - 1)$ 是 $1/3$, 所以

$\gamma = 4/3$, 因而我们发现容器内的辐射满足规律

$$PV^{4/3} = C(\text{常数}). \quad (39.18)$$

从而我们知道辐射的压缩性! 这就是用在分析恒星上辐射压强贡献的关系式。这也是我们算出辐射压强的方法, 它也表示当我们压缩光子气体时, 压强是怎样变化的。瞧, 多么奇妙的事情我们也都能处理!

§ 39-4 温度和动能

到现在为止我们还没有考虑温度;这个概念是我们有意回避的。在压缩气体时, 分子的能量增加, 我们通常就说气体变热了;现在我们想了解它和温度的关系。如果要做一个所谓等温而不是绝热的实验, 该怎么办呢? 我们知道, 如果让盛有气体的两个容器彼此紧贴足够长时间后, 甚至即使开始时它们处在我们称之为不同的温度之下, 最后也将具有相同的温度。这意味着什么呢? 这意味着它们将达到的状态就是如果我们让它们单独存在足够长时间后它们所应达到的那种状态! 我们所说的相同温度指的正是当物体放在一起相互作用足够长时间后达到的最终状态。

如图 39-2 所示, 假设在一个被可移动活塞分开的容器里放有两种气体, 我们现在来考虑将会出现什么情况(为了简单起见, 假定这两种气体都是单原子气体, 如氦与氖)。在容器(1)中的原子质量为 m_1 , 速度为 v_1 , 单位体积原子数为 n_1 , 而在另一个容器(2)中, 原子质量为 m_2 , 速度为 v_2 , 单位体积原子数为 n_2 。它们的平衡条件是什么?

很明显, 从左边来的碰撞必定会使活塞向右移动, 并且压缩另一边的气体, 使它的压强升高, 从而活塞来回移动, 逐渐停在某个使两边压强相等的位置上。所以我们可以使压强相等;而这正意味着单位体积的内能相等, 或者说每一边的单位体积原子数 n 与平均动能的乘积彼此相等。最后, 我们想要证明的是, 这些数目本身也相等。到目前为止我们所知道的只是, 根据式(39.8), 由于压强相等, 所以原子数乘平均动能相等

$$n_1 \left\langle \frac{m_1 v_1^2}{2} \right\rangle = n_2 \left\langle \frac{m_2 v_2^2}{2} \right\rangle.$$

我们必须了解到这并不是经过长时间后所达到的唯一的条件, 当相应于温度相等的真正完全的平衡建立起来时, 还必将发生某些更缓慢的过程。

为了搞清楚这种概念, 假设作用在左边的压强是在高密度和低速度的情况下产生的。具有大的 n 和小的 v , 与具有小的 n 与大的 v 可以得出同样的压强。原子可能运动得很慢, 但挤得很紧密, 也可能密度较小, 但撞击力很强。它能永久地像这样继续下去吗? 一开始我们可能这样想, 但是再思考一下就会发现我们忘掉了一件重要的事情。也就是说, 中间的活塞不再受到一种稳定的压力;正像我们一开始就讲过的人的耳膜那样, 因为撞击不是绝对均匀, 它左右摆动。结果没有获得持续、稳定的压强, 而是不断地敲击——压强在变化, 因而活塞轻轻地晃动。假定右边的原子晃动得不太大, 而左边的原子数较少, 原子间隔较远, 但带有较大的能量, 那么, 活塞将会从左边得到一个较大的冲量, 因而将驱动右边缓慢运动的原

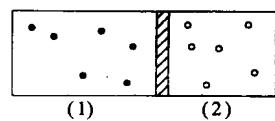


图 39-2 两种不同的单原子气体的原子被一可移动的活塞隔开

子,使它们获得更大的速率(每当原子与活塞碰撞时,它不是得到就是失去能量,取决于原子敲打在活塞上时活塞向哪个方向运动)。这样,由于碰撞的结果,活塞本身就反复地晃动,而这会使其他气体震动——它将能量传给了另一些原子,使它们运动得更快,直到与活塞所引起的晃动相平衡为止。当活塞以这样的平均速率运动,使它在单位时间内从原子获得的能量和它送回给原子的能量的比率大致相等时,系统就达到某种平衡。这样,活塞在速率上就获得一定的平均不规则性,这正是我们要找的。当我们找到它以后,就能更好地解决问题,因为这些气体将调节它们的速度,直到在单位时间内通过活塞彼此交换的能量变成相等为止。

在这种特殊情况下,要描述活塞运动的细节是十分困难的;虽然理解起来非常简单,但分析起来却比较困难。在我们分析这个问题以前,我们先来分析另一个问题:设有一个容器,其中包含由两种不同分子组成的气体,两种分子的质量分别为 m_1 及 m_2 ,速度为 v_1 及 v_2 ,等等;现在就有了一种更为密切的关系。如果所有的第二种分子都静止不动,那么这种情况将不会延续下去,因为它们受到第一种分子的碰撞,从而获得速度。如果所有的第二种分子都运动得比第一种分子快,那么这种情况也不会持续多久,它们将反过来把能量传给第一种分子。所以当在同一容器中存在两类气体时,问题就是要求出确定两者之间的相对速度的规则。

这仍然是一个十分困难的问题,我们将这样来解决。首先,我们考虑下面一个附属问题(这又是那种情况之一——别管推导——最终的结果很容易记住,但推导方式却是十分巧妙的)。假设有两个质量不同的分子发生碰撞,我们在质心(CM)系来考察这个碰撞。为了避免复杂性,我们在质心观察碰撞。由碰撞过程中动量和能量守恒定律可知,两个分子碰撞后,它们运动的唯一可能方式是各自保持原来的速率,即只改变它们的方向。所以,我们就

有了一种看来像图39-3所示的一般碰撞。假设我们暂时从静止的质心系观察所有这类碰撞,并且设想这些分子起初全都沿水平方向运动。当然,在第一次碰撞后,其中有一些以某一角度运动。换句话说,如果起初它们全都沿水平方向运动,那么以后至少会有一些沿垂直方向运动。而在某些其他碰撞中,它们可能来自其他方向,然后又以另外的角度运动。因而即使在开始时分子都排成一个方向运动,它们也会向所有的角度飞离,飞离的分子还将飞离更多次,如此继续下去。最终将怎样分布呢?答案是:任何一对分子沿空间任何方向运动的可能性是相等的。此后进行的碰撞也不会改变这个分布。

分子沿所有方向运动的机会是相等的,不过我们怎样来表示这一点呢?当然,它们不可能沿某一特定方向运动,因为某一特定方向过于严格,所以我们必须说每单位“某某”。我们的概念是在以碰撞点为中心的球面上,通过任何一块面积的分子数正好等于通过在球面上任何其他相等面积的分子数。因而碰撞的结果将使分子的方向这样分布,使得球面的每个相等的面积有相同的分子通过。

附带说一下,如果我们只要讨论原来的方向和某个与它成角度 θ 的其他方向,那么,有趣的是单位半径球的面积元为 $\sin \theta d\theta$ 乘以 2π ,这正是 $\cos \theta$ 的微分乘以 2π 。它意味着任意两个方向间夹角 θ 的余弦取-1至+1间的任意值的可能性是相同的。

下面我们来考虑实际情况,这时不是质心系中的碰撞,而是两个速度矢量分别为 v_1 与 v_2 的原子跑到一起的碰撞。这时会发生什么情况呢?我们可以对这个带有速度矢量 v_1 和

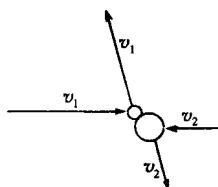


图 39-3 从质心系来看两个不同分子间的碰撞

v_2 的碰撞分析如下：

首先，有一个质心，质心的速度是权重和质量成正比的“平均”速度，即质心的速度是 $v_{CM} = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$ 。如果我们在质心系中观察这个碰撞，那么我们看到的碰撞正如图 39-3 所示，彼此以一定的相对速度 w 靠近。相对速度正好是 $v_1 - v_2$ 。现在，我们的想法是，首先，整个质心在运动，在质心系中有一个相对速度 w ，接着，分子碰撞后按某个新方向离开。所有这些都是在质心系保持原来运动时发生的，没有任何变化。

那么，由此而产生的分布是怎样的呢？由前面的论证我们断定：在平衡时，相对于质心的运动方向来说， w 在一切方向的可能性相同*。结果，相对速度的方向与质心运动方向之间没有任何特殊联系。当然，如果有，碰撞也会破坏这种联系，直到全部破坏掉为止，因而 w 与 v_{CM} 之间夹角之余弦的平均值是零，即

$$\langle w \cdot v_{CM} \rangle = 0. \quad (39.19)$$

但 $w \cdot v_{CM}$ 可用 v_1 及 v_2 表示为

$$w \cdot v_{CM} = \frac{(v_1 - v_2) \cdot (m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2) + (m_2 - m_1)(v_1 \cdot v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (39.20)$$

我们看看 $v_1 \cdot v_2$ 这项； $v_1 \cdot v_2$ 的平均值是什么？也就是说，一个分子的速度在另一个分子的速度方向上的分量的平均值是多少？显然，找到以一种方式运动的任何给定的分子的可能性与找到以另一种方式运动的给定的分子的可能性相同。速度 v_2 沿任意方向的平均值是零。所以，在 v_1 方向上， v_2 的平均值显然为零。因而 $v_1 \cdot v_2$ 的平均值就是零！由此能推知 $m_1 v_1^2$ 的平均值必须等于 $m_2 v_2^2$ 的平均值。这就是说，两个分子的平均动能必定相等

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (39.21)$$

如果在气体中有两种原子，那么可以证明，而且我们相信已经证明当它们两者都处在同样气体、同样容器内，并且处于平衡状态时，则一种原子的平均动能与另一种原子的平均动能相等。这意味着，重的原子将比轻的原子运动得慢一些；这不难用气垫中不同质量的“原子”的实验证明。

现在我们再进一步断言，如果在一个容器内有两种不同的分开的气体，当它们最后达到平衡时，即使不在同一容器内，它们也将具有相同的平均动能。我们可以用几种方法来论证。一种论证方法假定在容器内有一块固定的上面开有一个小孔的隔板（图 39-4），使得一种气体可以通过小孔漏出去，而另一种气体则因为分子太大而不能漏出。当达到平衡时，我们知道，在混合的那部分气体中，它们具有同样的平均动能，而通过小孔的那些分子没有失去动能，因而在纯气体中

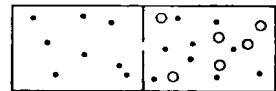


图 39-4 两种气体在一个具有半透膜的容器中

* 这个曾为麦克斯韦所采用的论证含有某些微妙之处。虽然结论是正确的，但这个结果并不能纯粹从我们前面用过的对称性的考虑得出，因为过渡到在气体中运动的参考系时，我们可以得到一个改变了的速度分布。但我们还未找到这个结果的简单证明。

的平均动能和在混合气体中的平均动能必然相等。这个论证还不太令人满意,因为可能不存在把一种气体分子与另一种气体分子分开的小孔。

现在我们回到活塞的问题上来。我们可以提出一个论证来说明这个活塞的动能必定也是 $m_2 v_2^2 / 2$, 实际上, 这就是由活塞作纯粹水平运动引起的动能, 这样, 如果忽略它的上下运动, 它所具有的动能同样必然是 $m_2 v_{2z}^2 / 2$ 。类似地, 从另一边的平衡条件, 又可证明活塞的动能是 $m_1 v_{1x}^2 / 2$ 。即使当活塞并不处于气体中央, 而是在气体的一边时, 虽然证明略为困难一些, 我们仍然可以作出同样的论证, 也就是由于所有碰撞的结果, 活塞的平均动能与气体分子的平均动能彼此相等。

如果这样做还不满意, 可以设想一种人为的例子, 认为平衡是由一个能打到所有各边的物体产生的。假定我们有一根每一端都有一个小球的短棒, 它穿过活塞插在一个无摩擦的滑动万向接头上。每个小球都像一个分子那样是圆的, 可以接受所有方向上的撞击。整个物体的总质量是 m 。现在, 和之前一样, 气体分子的质量各为 m_1 与 m_2 。用前面的分析可知, 碰撞的结果是, 由于受一边分子的撞击, m 的动能平均说来是 $m_1 v_1^2 / 2$ 。类似地, 由于受另一边分子的撞击, m 的动能平均说来必然是 $m_2 v_2^2 / 2$ 。所以, 当它们处于热平衡时, 两边必定有相同的动能。因而, 虽然我们只对混合气体证明了这一点, 但很容易推广到在同样温度下的两种不同的、分离的气体中去。

这样, 当两种气体处于相同温度时, 质心运动的平均动能相等。

分子的平均动能只是“温度”的一种特性, 由于它只是“温度”的特性, 而不是气体的特性, 因而我们可以利用它作为温度的定义。于是分子的平均动能即为温度的某种函数。但是, 谁来告诉我们温度该用什么尺度呢? 我们自己可以任意地定义温度的尺度, 使得平均动能和温度成线性正比关系。要做到这一点最好的办法就是把平均动能本身叫做“温度”。这是一个最简单的函数。遗憾的是, 温度的尺度已经按其他方式选定了, 所以我们不直接把平均动能称为温度, 而是在分子的平均动能与所谓开尔文绝对温度一度之间加上一个常数的转换因子。比例常数是 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ *。因此, 如果 T 是绝对温度, 按我们的定义, 分子的平均动能 * 是 $3kT/2$ ($3/2$ 是为了方便而引入的, 以便在其他地方去掉它)。

我们指出和运动沿任何特定方向的分量相联系的动能是 $kT/2$ 。因为平均动能包含三个独立的运动方向, 所以总和为 $3kT/2$ 。

§ 39-5 理想气体定律

当然, 现在我们可以把温度的定义代入式(39.9)中, 从而找到气体压强与温度之间的函数关系: 即压强乘体积等于原子总数乘以普适常数 k 再乘以温度

$$PV = NkT. \quad (39.22)$$

而且, 在同样的温度、同样的压强与同样的体积下, 原子数是确定的; 这也是一个普适常数! 所以, 根据牛顿定律, 在同样的温度和同样的压强下, 相同体积的不同气体中具有相同的分子数。这是一个令人惊异的结论!

* 摄氏温标与开尔文温标一样, 但 0°C 选在 273.16 K , 所以 $T = 273.16 + \text{摄氏温度}$ 。

实际上在处理分子时,因为分子数量太大,化学家人为地选择了一个特定的很大的数目,而给它一个名称,称为1摩尔(mol),1 mol 只是个方便的数。为什么他们不选 10^{24} 个分子这样的偶数,这只是个历史问题而已。化学家为了方便起见恰巧选择了标准情况下的分子数 $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$, 而称它为 1 mol 的分子数。所以化学家并不是以分子为单位来测量分子数,而是以摩尔数^{*}来测量的。根据 N_0 可以写出摩尔数,乘上 1 mol 中原子数,再乘以 kT ,而且如果我们需要的话,可以取 1 mol 的原子数乘以 k ,那就是 1 mol 的 k 值,而把它叫做其他的什么,我们叫它 R 。1 mol 的 k 是 $8.317 \text{ J} : R = N_0 k = 8.317 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 。这样我们也发现气体定律可写为摩尔数(也称为 N)乘以 RT ,或原子数乘 kT

$$PV = NRT. \quad (39.23)$$

它们是完全一样的,只是测量数目的尺度不同而已。我们用 1 作为单位,而化学家用 6×10^{23} 作为单位!

现在我们对气体定律再作一点说明,这与非单原子分子组成的气体的定律有关。我们只处理了单原子气体的原子的质心运动。如果还有一些力存在,会出现什么情况呢?首先,考虑活塞被一水平方向的弹簧拉住的情况,这时,有力作用于活塞上。当然,在任何时刻,原子与活塞间的无规则晃动的交换都和这时的活塞位置无关。平衡条件是相同的。无论活塞在哪里,它的运动速率都能刚好正确地将能量传递给分子。弹簧的存在与否并没有任何不同。平均说来,活塞运动应取的速率是相同的。因而,在一个方向上动能平均值是 $kT/2$ 的这个定理,无论有无力存在,都是正确的。

例如,考虑由原子 m_A 和 m_B 组成的双原子分子的情况。我们已经证明了 A 部分的质心运动与 B 部分的质心运动有下列关系

$$\left\langle \frac{1}{2}m_A v_A^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m_B v_B^2 \right\rangle = \frac{3}{2}kT.$$

如果它们合在一起后,是否也会如此呢?虽然它们合在一起,当它们在那里不断自转和旋转,当别的分子撞击它们,和它们交换能量时,唯一要计入的因素是分子跑得多快。只有这一点才确定了它们在碰撞中交换的能量有多快。在那一瞬间,力不是主要的,因此即使有力存在,同样的原理也是正确的。

最后,我们证明,不考虑分子内部运动时,气体定律同样成立。实际上以前我们并没有包括内部运动,只研究了单原子气体。但现在我们将证明,如果把整个系统考虑成一个总质量为 M ,具有质心速度的单个物体的话,则

$$\frac{1}{2}Mv_{CM}^2 = \frac{3}{2}kT. \quad (39.24)$$

换句话说,我们既可以考虑分开的部分,也可以考虑整体!原因在于:双原子分子的质量是 $M = m_A + m_B$,而质心速度等于 $v_{CM} = (m_A v_A + m_B v_B) / M$ 。现在要求出 $\langle v_{CM}^2 \rangle$ 。取 v_{CM} 的平方,得

* 化学家所说的分子量是指 1 mol 的分子以克计量的质量。1 mol 是这样定义的,即要使 1 mol 碳同位素 12(也就是说,原子核内有六个质子和六个中子)的质量正好是 12 克。

$$v_{CM}^2 = \frac{m_A^2 v_A^2 + 2m_A m_B \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B + m_B^2 v_B^2}{M^2}.$$

在两边各乘以 $M/2$, 然后取平均, 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} M v_{CM}^2 &= \frac{m_A \frac{3}{2} kT + 2m_A m_B \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle + m_B \frac{3}{2} kT}{M} \\ &= \frac{3}{2} kT + \frac{2m_A m_B \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle}{M}.\end{aligned}$$

[我们用到了 $(m_A + m_B)/M = 1$]。现在, $\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle$ 是多少(最好是零)? 为了求出结果, 我们利用原先的假定, 即相对速度 $\mathbf{w} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ 不会特别偏向于哪个方向, 也就是说, 它在任何方向上的平均分量均为零, 即

$$\langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{CM} \rangle = 0.$$

但 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{CM}$ 是什么? 它是

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_{CM} = \frac{(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \cdot (m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B)}{M} = \frac{m_A v_A^2 + (m_B - m_A) \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle - m_B v_B^2}{M}.$$

因此, 由于 $\langle m_A v_A^2 \rangle = \langle m_B v_B^2 \rangle$, 平均后将第一项与最后一项消去, 只剩下

$$(m_A - m_B) \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle = 0.$$

如果 $m_A \neq m_B$, 就可得出 $\langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle = 0$, 因此, 将整个分子的总体运动考虑成一个质量为 M 的单个粒子运动时, 它所具有的平均动能等于 $3kT/2$ 。

我们附带也证明了, 如果不考虑质心的整体运动, 则双原子分子内部运动的平均动能也是 $3kT/2$! 因为分子各部分的总动能是 $m_A v_A^2/2 + m_B v_B^2/2$, 而其平均值是 $3kT/2 + 3kT/2 = 3kT$ 。而质心运动的平均动能是 $3kT/2$, 因而分子中两个原子的转动与振动的平均动能是它们之差, 也等于 $3kT/2$ 。

关于质心运动平均动能的定理是普遍的: 当把任何物体考虑为一个整体时, 无论是否有力存在, 在这个物体的每个独立的运动方向上, 其平均动能都是 $kT/2$ 。这些“独立的运动方向”有时也称为系统的自由度。由 γ 个原子组成的分子的自由度数是 3γ , 因为每个原子都需要有三个坐标来确定它的位置。分子的总动能既可以表示为各个原子的动能的和, 也可以表示为质心运动的动能与内部运动的动能之和, 后者有时可以表示为分子转动动能与振动动能之和, 但这是一个近似。把我们的定理应用到 γ 个原子的分子时表明, 分子平均动能将是 $3\gamma kT/2$, 其中 $3kT/2$ 是整个分子的质心运动的动能, 其余的 $3(\gamma-1)kT/2$ 则是分子内部的振动与转动动能。

第 40 章 统计力学原理

§ 40-1 大气的指数变化律

我们已经讨论了大量相互碰撞的原子的某些性质。这个课题称为分子动理论，它是从原子碰撞的观点出发来描写物质的。从原则上来说，我们认为物质的总体性质都应当能借助于它的组成部分的运动来加以解释。

目前，我们只限于讨论热平衡状态，这只是所有自然现象中的一部分，我们把只能应用于热平衡状态的力学定律称为统计力学，在这部分中我们要学会这门学科中的某些主要定理。

其实，我们已经有了一个统计力学的定理，即在绝对温度 T 时，任何运动中的每个独立运动的动能，即每个自由度的动能的平均值都是 $kT/2$ 。它告诉了我们有关原子的方均速度的某些知识。我们现在的问题是要对原子的位置知道得更多一些，以便找出在热平衡情况下在不同的位置上的原子数是多少，并且还要对速度分布作稍微详细的研究。虽然我们知道方均速度，我们还不知道怎么回答比方均根速率快三倍的分子数有多少，或者速率为方均根速率的四分之一的分子有多少之类的问题，或者它们全体的速率都完全相同吗？

所以，我们试图回答的两个问题是：当力作用在分子上时，分子在空间位置上是怎么分布的？它们的速度分布如何？

结果表明，这两个问题是完全独立的。速度的分布总是一样的。当我们发现，不管有无力作用于分子上，每个自由度的平均动能相同，都为 $kT/2$ 时，对速度分布的问题就得到了一个提示。分子的速度分布与力无关，因为碰撞率不依赖于力。

我们以既没有风又没有其他扰动时，像我们所处的那种大气层中分子的分布作为一个例子来开始讨论。假设有一伸展得很高的气柱处在热平衡状态——这就不像我们的大气层，因为我们知道，实际的大气层越向上越冷。这里必须强调指出如果在不同高度上温度各不相同，那么我们可以用一根棒将底部小球与顶部小球连接起来的方法（图 40-1）说明气体没有达到热平衡。这些小球从底部的分子中获得 $kT/2$ 的动能，然后通过棒使顶部的小球振动再使顶部的分子振动。当然，这样，最后在重力场中的所有高度上，温度变得相同。

如果在所有高度上温度都相同，现在的问题是要找出当高度加大时，大气是按什么规律

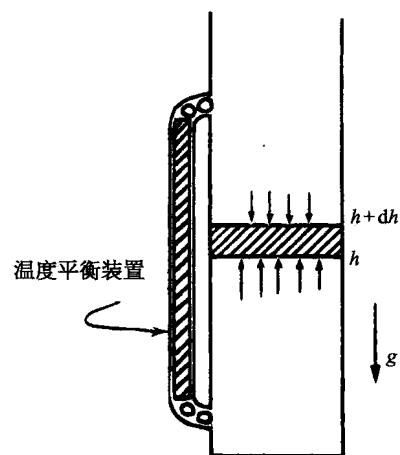


图 40-1 高度 h 处的压强必定超过高度 $h + dh$ 处的压强，两者之差等于这两层间气体的重量

变得稀薄的。设 N 为在压强 P 下, 体积 V 中的气体分子总数, 则有 $PV = NkT$, 或 $P = nkT$, 这里 $n = N/V$ 是每单位体积中的分子数目。换句话说, 如果我们知道每单位体积中的分子数目, 就知道了压强, 反之亦然。因为在这种情况下, 温度不变, 它们彼此成正比关系。但是压强并不是常数, 它必定随着高度的减小而增加, 因为可以这么说, 它必须维持在这个高度以上的所有气体的重量。这是一条我们可以用来确定压强随高度如何变化的线索。如果在高度 h 上取单位面积, 那么由下往上垂直作用在这个单位面积上的力就是压强 P 。在无重力时, 在高度 $h + dh$ 上向下作用在单位面积上的竖向力应当也是 P , 但现在却不是, 因为有重力, 所以从下往上的力必须超过从上往下的力, 超过的部分等于在 h 到 $h + dh$ 之间那部分气体的重量。现在, 由于作用在每个分子上的重力是 mg , 其中 g 是重力加速度, 而在单位截面上的分子总数是 ndh , 于是我们就得到以下微分方程

$$P_{h+dh} - P_h = dP = -mgn\,dh.$$

因为 $P = nkT$, T 是常数, 我们可以或者消去 P 或者消去 n , 比如消去 P , 得微分方程

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{mg}{kT}n.$$

它告诉了我们高度增大时, 分子密度将如何下降。

这样, 我们就得到了一个分子密度 n 随高度变化的方程, 这里, 密度的微商正比于它本身。某个函数的微商正比于它本身时, 它就是一个指数函数, 所以这个微分方程的解是

$$n = n_0 e^{-mgh/kT}. \quad (40.1)$$

这里积分常数 n_0 显然是在 $h = 0$ (我们可以任意选定) 的地方的分子密度。分子密度随着高度的上升而指数地衰减。

注意若有质量不同的不同种类的分子, 则它们将作不同的指数衰减, 较重的分子随高度衰减得比较轻的分子来得快。因而可以预期, 由于氧比氮重, 在含有氧和氮的大气层中越往上, 氮所占的比例越大。但在实际的大气层中, 这种情况并没有真正发生, 至少在相当的高度上没有发生, 这是因为空气中有很多搅动, 它使各种气体重新混合在一起。它不是一个等温的大气层。然而, 对于较轻的物质, 比如氢气, 确实有一种在大气层极高的地方占统治地位的趋势, 因为当其他的物质都指数地衰减完时, 质量最小的却依然存在(图 40-2)。

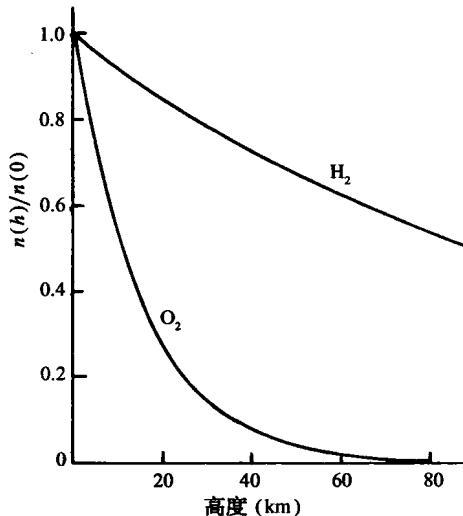


图 40-2 温度恒定时, 地球重力场中氧和氢的归一化密度与高度的关系

§ 40-2 玻尔兹曼定律

这里我们注意到一个有趣的事, 在式(40.1)中指数的分子是原子的势能。因此我们也可以将这条特殊定律表述为: 在任何一点的密度正比于

$$\exp[-(\text{每个原子的势能})/kT].$$

这或许是偶然的,也就是说,可能只对均匀重力场的特殊情况才成立。然而,我们可以证明,这个命题是很普遍的。假定作用在气体分子上的力不是重力,而是其他某种力。比方说,分子可以带电,它们可能受到电场的作用或别的电荷的吸引,由于原子彼此间的相互吸引,或者分子与器壁、固体或某个东西的相互作用,存在某种随位置而变化的吸引力,它作用在所有分子上。为了简单起见,现在我们假定分子全都相同,在每一个分子上都有力的作用,因而作用在一小部分气体上的总的力就是分子数乘以作用在每个分子上的力。同时为了避免不必要的麻烦,假设我们所选择的坐标系的 x 轴沿力 \mathbf{F} 的方向。

和先前一样,如果我们在气体中取两个相隔为 dx 的平行平面,那么,作用在每个原子上的力乘以每立方厘米的原子数 n (前面的 $nm g$ 项的推广),再乘以 dx ,必须与压强的改变量相平衡

$$Fn dx = dP = kT dn.$$

或者,也可以将这个规律写成我们以后要用的形式

$$F = kT \frac{d}{dx} (\ln n). \quad (40.2)$$

现在,注意到 $-F dx$ 是使分子从 x 跑到 $x + dx$ 我们所做的功,如果 F 由势而来,也就是说,如果所做的功完全可以用势能来表示的话,那么这也就等于势能(P. E.)之差。势能微分的负值就是所做的功 $F dx$,因而得出

$$d(\ln n) = -\frac{d(\text{P. E.})}{kT}.$$

积分后,

$$n = (\text{常数}) e^{-\text{P. E.}/kT}. \quad (40.3)$$

因此我们在特殊情况下得到的结果在一般情况下也是正确的[假如力不能由势函数得出的话又会怎样?那时式(40.2)根本没有解。当原子沿一条闭合路径走一圈后,做功不为0,能量可以产生或消失,因而根本不能保持平衡。如果作用在原子上的外力不是保守力,不存在热平衡]。式(40.3)就是玻尔兹曼定律,它是统计力学的另一条原理:在一种给定的空间排列下找到分子的概率按这种排列的势能的负值除以 kT 作指数的变化。

这就给出了粒子分布:假定在液体中有一个正离子,它将负离子吸引在周围,那么在不同的距离上吸引的负离子有多少呢?如果势能作为位置的函数是已知的,那么在不同距离上粒子的分布比例就可由上面的定律给出。对于这类问题,玻尔兹曼定律有许多应用。

§ 40-3 液体的蒸发

在更深入一步的统计力学中,人们试图解决下面这样一个重要问题。考虑一个彼此吸引的分子的集合,假定任何两个分子,比如 i 和 j 之间的作用力只依赖于它们的距离 r_{ij} ,并且可以用一个势函数 $V(r_{ij})$ 的微商来表示。图 40-3 表示这样一种函数可能具有的一种形式。对 $r > r_0$,当分子靠近时能量减少,因为它们互相吸引,以后,当它们再靠近时,能量则

迅速增加,因为它们强烈地相互排斥。大致地说,这表征了分子的行为。

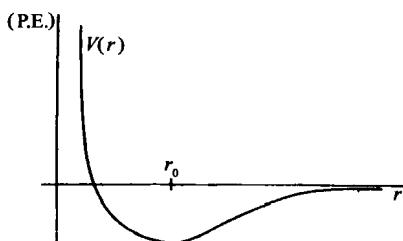


图 40-3 两个分子的势能函数,势能只取决于两个分子之间的距离

现在假设有一个容器充满了这样的分子,我们希望知道,平均说来分子之间的位置将如何安排。答案是 $e^{-P.E. / (kT)}$ 。在这种情况下,假定分子间都是两体力,总势能就是对所有的分子对求和(在更复杂的情况下,可能存在三体力,但是,比如说在电学中,势能全部是成对出现的),于是,在 r_{ij} 的任何特定组合下找到分子的概率将正比于

$$\exp\left[-\sum_{ij} V(r_{ij}) / kT\right].$$

现在,假如温度非常高,以致 $kT \gg |V(r_0)|$, 则指数值几乎处处相对地都很小,因而找到分子的概率几乎与位置无关。我们取只有两个分子的情况为例, $e^{-P.E. / (kT)}$ 表示在各种不同的相互距离 r 的情况下找到它们的概率。很清楚,当势能为负的最大时,概率最大,而当势能趋于无限大时,概率几乎为零,这在距离极小时才出现。这意味着,对于这样的气体原子来说,由于它们之间的排斥力很强,因而一个原子跑到另一个原子上面的概率为零。在每单位体积中,在点 r_0 处比在其他任何点找到分子的机会更大。大多少则取决于温度。如果温度远大于分子处在 $r = r_0$ 和 $r = \infty$ 时的能量差,指数值几乎接近于 1。在这种情况下,平均动能(约为 kT)大大地超过势能,不会由于力的作用而造成很大的差别。但是当温度下降时,在“优越”的距离 r_0 上找到分子的概率相对于在其他任何距离找到分子的概率逐渐增加,事实上,如果 kT 远小于 $|V(r_0)|$, 那么在 r_0 的邻域我们就有相对较大的正指数。换句话说,在一给定的体积中,较之彼此相距更远的距离来说,分子更加喜欢处在能量较少的距离上。当温度下降时,原子挤在一起,集结成群,凝缩成液体、固体和分子,当对它们加热时,它们又会蒸发掉。

为了精确地确定蒸发的状况,以及在给定条件下发生的情况,需要做下面两件事。第一,必须找出正确的分子作用力定律 $V(r)$, 它必须由其他办法,比如由量子力学或者实验得到。而给定了分子作用力定律后,只要研究函数 $\exp[-\sum (V_{ij}) / kT]$, 就能找出数十亿分子的运动情况。使我们感到十分意外的是,尽管函数如此简单,概念如此清晰,给定了势以后,整个工作仍是无比复杂的,困难就在于变数的数目极其巨大。

尽管存在这样的困难,这个课题却是十分振奋人心而且趣味无穷的。这是人们常常称之为“多体问题”的一个例子,它确实是一件饶有趣味的事情。在这个简单公式中,包括了所有的细节,例如,关于气体的凝固,或固体可能采取的晶格的形式等。人们一直试图从这个公式找出各种解答。但数学困难是非常巨大的,困难不在于写出定律,而在于要处理如此大量的变数。

这就是粒子在空间的分布。实际上,经典统计力学就到此为止,因为如果知道了力,那么在原则上我们就能求出在空间的分布,而速度分布是某种我们可以一次了结地找出的东西,而不是对于不同的情况而有所不同的东西。根本的问题在于从我们的形式解中找出特殊的信息,这就是经典统计力学的主要课题。

§ 40-4 分子的速率分布

下面我们继续讨论速度分布,因为有时了解以不同速率运动的分子数各有多少是有意义和有用的。为此,我们可以利用在研究大气层中的气体时已经发现的事实。取大气作为理想气体,正如我们在写出势能时已假设过的那样,而不考虑原子间的相互吸引的能量。在我们的第一个例子中所涉及的势能只有重力势能。当然,如果分子间存在作用力,可能会出现更复杂的情况。因而现在我们假设分子间没有作用力,并且暂时忽略碰撞,以后我们再回过头来说明为什么可以这样做。如图 40-4 所示,我们已经看到,在高度为 h 处的分子比高度为零处的分子要少;按公式(40.1),它们随高度而指数地下降。为什么在较高的地方分子数较少呢?难道不是所有在高度为零处向上运动的分子都能抵达高度 h 吗?不!因为在零处有一些往上运动的分子运动得太慢,它们不能爬过势垒到达 h 。由此,我们可以算出以不同速率运动的分子各有多少,因为从式(40.1)我们可以知道有多少分子缺乏足够的速率爬到高度 h 处。正是由于考虑了这一事实,因而在 h 处的分子密度比在零处的分子密度小。

现在,我们来更严格地表达这种想法。首先,我们来计算一下由下向上穿过 $h = 0$ 的平面的分子数(把它的高度叫作零并不意味着在那个地方有这么一层隔板,这只是一个方便的编号,在负 h 处也有气体),这些气体分子沿着每一个方向运动,但其中有一些穿过平面,在任何时刻,它们中每秒钟总有一定数量的分子带着不同的速度自下而上地穿过该平面。现在我们注意到:令 u 为它们刚好能到达高度 h 处所需要的速度(动能 $mu^2/2 = mgh$),则每秒钟通过下面的平面向上运动,且速度在垂直方向上的分量大于 u 的分子数正好等于经过上面的平面、带有任何向上运动的速度的分子数。那些垂直速度不超过 u 的分子不可能到达上面的平面,所以,我们看到

$$\text{穿过 } h = 0, \text{ 且 } v_z > u \text{ 的分子数} = \text{穿过 } h = h, \text{ 且 } v_z > 0 \text{ 的分子数}.$$

但是,以任何大于零的速度穿过 h 的分子数小于以任何大于零的速度经过更低高度的分子数,因为零高度上的分子数更大;这就是我们所需要的一切。经过我们以前作过的在大气中所有各处温度相等的论证以后,我们已经知道速度分布是相同的。由于速度分布相同,这正表明在越低的位置上有越多的分子,因而容易看到以正的速度穿过高度为 h 的分子数 $n_{>0}(h)$ 与以正的速度穿过高度为 0 的分子数 $n_{>0}(0)$ 的比值就是两种高度处密度的比值,即 $e^{-mgh/kT}$ 。但 $n_{>0}(h) = n_{>u}(0)$, 且 $\frac{1}{2}mu^2 = mgh$, 因此我们求得

$$\frac{n_{>u}(0)}{n_{>0}(0)} = e^{-mgh/kT} = e^{-mu^2/2kT},$$

用文字来表达就是,速度的 z 分量大于 u 的分子每秒穿过高度为零处的单位面积的分子数,

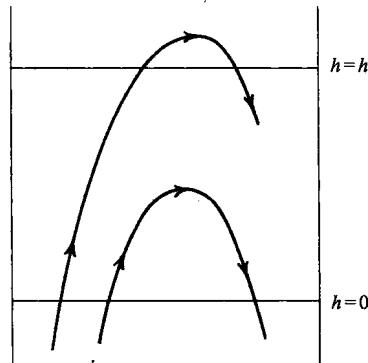


图 40-4 只有那些具有足够速度的分子从 $h = 0$ 向上移动才能够到达 h 的高度

等于以大于零的速度穿过同一平面的分子总数乘上 $e^{-mu^2/2kT}$ 。

这不仅对于任意选定的零高度成立,对于其他任何高度当然也成立,可见速度的分布全都相同(最后的说法不包括高度 h ,它只是在论证中间出现)!这个结果为我们提供了速度分布的一般规律。它告诉我们,如果在一个汽笛上钻一个非常小的小孔,使得碰撞很少而且两次碰撞间相距很远,即比孔的直径大很多,那么各种分子跑出时将具有不同的速度,但速度大于 u 的分子所占的比例则是 $e^{-mu^2/2kT}$ 。

现在我们回过来讨论忽略分子碰撞的问题:为什么碰撞没有造成任何差别呢?我们可以采取同样的论证,不过不是对有限的高度 h ,而是对无穷小的高度 h ;这里 h 取得如此小,以致在零与 h 之间没有碰撞的余地。但这是不必要的;因为我们的论证明显地建立在对能量的分析和能量守恒上,而在碰撞时发生的无非是分子之间的能量交换。然而,如果能量只是和其他的分子进行交换,那么实际上我们毋需注意所考虑的是否为同一个分子。因此,即使对问题作更详细的分析(当然,要做得严格的话,这是很困难的),结果仍没有什么不同。

有趣的是我们所发现的速度分布只是

$$n_{>u} \propto \exp[-(K.E.)/kT]. \quad (40.4)$$

这种通过给出以某一最小的速度 z 分量穿过某一给定面积的分子数的方式来描写速度分布的方法并不是给出速度分布的最方便的方法。例如,人们通常更想知道气体内在两个确定值之间以速度 z 分量运动的分子数有多少。当然,这不能直接由式(40.4)得出。我们想以更方便的形式表达前面的结果,虽然我们已经把式(40.4)写得很具一般性。注意:不能说任何分子精确地具有某种确定的速度;没有一个分子的速度正好是每秒 1.796 289 917 3

m。因而为了使表述具有意义,我们只能问在某个速度间隔中可以找到的分子数目是多少。我们只能说速度介于 1.796 和 1.797 之间的分子有多少,等等。用数学术语来说,就是用 $f(u)du$ 表示速度在 u 与 $u + du$ 之间的分子占分子总数的百分比,也就是说(如果 du 是无穷小量的话) $f(u)du$ 代表所有那些速度为 u ,间隔为 du 的分子所占总数的比例。图 40-5 表示函数 $f(u)$ 的一种可能形式,宽为 du ,平均高度为 $f(u)$ 的阴影部分代表了这个百分比 $f(u)du$ 。也就是说,阴影面积与曲线下的总面积之比就是速度为 u ,而间隔为 du 的分子数相对于总分子数所占的比例。

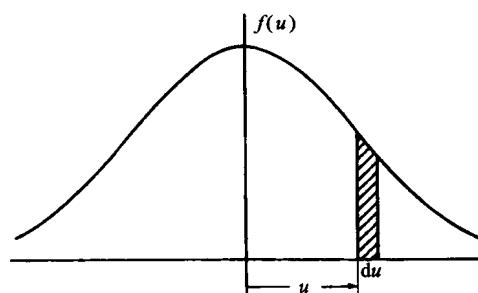


图 40-5 速度分布函数。图中的阴影面积代表 $f(u)du$,即速度在 u 附近 du 范围内的粒子数在总粒子数中所占的分数

如果我们这样来定义 $f(u)$,使得速度在这个间隔中的分子所占的比例直接由阴影面积给出的话,那么总面积必然是百分之百,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1. \quad (40.5)$$

现在只要把它和我们以前推得的结果进行比较,就能求出这个分布。首先我们问,怎样利用 $f(u)$ 来表示每秒钟内以大于 u 的速度通过某一面积的分子数?开始时我们或许以为

这只是积分 $\int_u^\infty f(u)du$, 但这是错的, 因为我们要求的是每秒钟通过这一面积的分子数。可以这么说, 快的分子比慢的分子通过的数目多, 为了表示有多少分子经过, 还必须乘以速度 (在前一章中当我们谈到碰撞数时, 曾讨论过这个问题)。在给定的时间 t 内, 经过表面的分子总数是所有那些能够到达这个表面的分子数, 也就是说是来自与表面的距离为 ut 的分子数。所以能够到达的分子数并不单单是在那里的分子数, 而是每单位体积的分子数乘上为了通过这块面积它们所走过的距离, 而这段距离正比于 u 。于是我们要求的是 u 乘以 $f(u)du$ 的积分, 这是一个下限为 u 的无穷积分, 积分结果必须和我们以前得到的结果相同, 即与 $e^{-mu^2/2kT}$ 成正比, 比例常数将在后面求出

$$\int_u^\infty u f(u)du = \text{常数} \times e^{-mu^2/2kT}. \quad (40.6)$$

现在, 若把这个积分对 u 求微商, 我们就得到积分号内的东西, 即得到被积函数(因为 u 是下限, 所以要加上一个负号), 而对另一边求微商, 则得到 u 乘同一指数的函数(以及某个常数)。消去 u 后, 有

$$f(u)du = Ce^{-mu^2/2kT} du. \quad (40.7)$$

我们在两边都保留 du 是为了记住这是一个分布, 它告诉我们在速度 u 与 $u+du$ 之间的分子所占的比例。

按式(40.5), 常数 C 必须由积分值为 1 这个条件确定。现在我们可以证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}^*.$$

由此很容易求得 $C = \sqrt{m/2\pi kT}$ 。

因为速度与动量成正比, 我们可以说动量的分布与每单位动量间隔的 $\exp[-(K.E.)/kT]$ 成正比。结果发现, 若用动量来表达的话, 这个定理在相对论中也成立。而用速度来表述则不行。所以, 最好是学习它的动量形式而不是速度形式

$$f(p)dp = Ce^{-K.E./kT} dp. \quad (40.8)$$

这样, 我们发现在不同的能量(动能和势能)的条件下, 它们的概率都可用 $\exp[-(\text{能量})/kT]$ 来表示, 这是一个很容易记住的、十分出色的定律。

当然, 到现在为止我们还只给出了“垂直”方向的速度分布。我们也可以问, 分子沿另一个方向运动的概率有多大? 当然, 这些分布是有联系的, 可以从我们已经有的一个分布求出总的分布, 因为总的分布只依赖于速度的大小的平方, 而与 z 分量无关。它必然是和方向无关的, 这里只包含一个函数, 即速度大小不同的概率。有了 z 分量的分布, 可以求得其他分量的分布。结果概率仍和 $e^{-K.E./kT}$ 成正比, 但现在动能包括三部分: $mv_x^2/2$, $mv_y^2/2$ 和 $mv_z^2/2$, 在指数上相加, 或者可将它写成乘积

* 为了计算这个积分的数值令 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$, 则 $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$,

这是在整个 xy 平面上的二重积分, 用极坐标可改写为: $I^2 = \int_0^\infty e^{-r^2} \cdot 2\pi r dr = \pi \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \pi$.

$$f(v_x, v_y, v_z) dx dy dz \propto \exp \frac{-mv_x^2}{2kT} \cdot \exp \frac{-mv_y^2}{2kT} \cdot \exp \frac{-mv_z^2}{2kT} dv_x dv_y dv_z. \quad (40.9)$$

可以看出这个公式必然是正确的,因为,首先它只是一个 v^2 的函数,这正符合我们的要求,其次,通过对所有的 v_x 与 v_y 积分后得出的不同 v_z 值的概率正好就是式(40.7)。式(40.9)这一函数可以同时满足这两个要求!

§ 40-5 气体比热

现在我们要找一些办法来检验上面的理论,看看气体的经典理论怎样获得成功。以前我们看到,若 U 是 N 个分子的内能,则 $PV = NkT = (\gamma - 1)U$ 对某些气体有时可能成立。如果是单原子气体,我们知道这也等于原子质心运动动能的 $2/3$ 。对于单原子气体,动能等于内能,因此 $\gamma - 1 = 2/3$,但是如果这是一个很复杂的分子,它能够转动和振动,并且我们假定内部运动的能量也正比于 kT (对经典力学而言,这是正确的)。于是在一定的温度下,除了动能 kT 外,还具有内部振动能或转动能。这样,总的 U 不仅包括内部的动能,而且也包括转动能,因而就得到不同的 γ 值。从技术上说,测量 γ 值的最好方法是测出比热,比热表征能量随温度的变化。后面我们还要再来讨论这个问题。目前,我们假设 γ 是从实验上由绝热压缩的 PV' 曲线得出的。

我们来计算某些情况下的 γ 值。首先,对单原子气体, U 是总能量,正好就是动能,我们已知 γ 应当是 $5/3$ 。对双原子气体,作为一个例子,我们可以取氧、碘化氢、氢,等等,并且假定双原子气体可以由某种类似于图 40-3 的力束缚在一起的两个原子来表示。还可以假定(结果表明这是完全正确的),在我们感兴趣的温度下,双原子气体中的一对原子倾向于使它们之间的距离保持为势能取极小值时的距离 r_0 。如情况并非如此,如果概率不是变化很大,不是使绝大多数原子处在势能曲线的底部,我们一定会想起氧气是由 O_2 与单个氧原子以不寻常的比例混合而成的。但事实上,我们知道,单个氧原子是十分罕见的,这意味着,正如我们所见到的那样,势能的最小值在数值上远大于 kT 。由于它们主要集中在距离 r_0 附近,我们唯一要考虑的只是接近曲线极小值的那一部分,它近似地可看作是抛物线,而抛物线型的势意味着有一个谐振子,事实上,在极好的近似下,氧分子可以比喻为用以弹簧连接在一起的两个原子来表示。

那么,在温度 T 下,这个分子的总能量是多少呢?我们知道,对这两个原子中的每一个原子来说,动能都应是 $3kT/2$ 。所以两者合在一起的动能是 $3kT/2 + 3kT/2$ 。我们也可用不同方式得出这个结果:同样的 $3/2$ 加 $3/2$ 也可看作为质心的动能($3/2$),转动动能($2/2$),以及振动动能($1/2$)。我们知道振动动能是($1/2$),因为这里只包含一维的振动,而每个自由度的能量是 $kT/2$ 。至于转动,它可以绕两根轴中的任何一根旋转,所以有两个独立的运动。我们假设原子是某种质点,不能绕它们的连线转动;这一点必须记住,因为如果与事实不符时,问题可能正出在这里。但是,另外还有一件事,那就是振动的势能;它有多大?一个谐振子的平均动能与平均势能是相等的,因此振动的势能也是 $kT/2$ 。于是全部总能量是 $U = 7kT/2$ 。或者说 kT 是每个原子的 $2U/7$ 。因而这就意味着 $\gamma = 9/7 \approx 1.286$,而不是 $5/3$ 。

我们可以把这些数值与表 40-1 中所列的测量值比较一下。先看氦,它是单原子气体,

我们发现 γ 很接近 $5/3$, 误差可能还是实验带来的, 虽然在这样低的温度下, 原子之间可能有某些力。氮和氩都是单原子的气体, 在实验的准确度范围之内, 理论值也和它相符合。

表 40-1 各种气体的比热商 γ 的值

气 体	$T(^{\circ}\text{C})$	γ	气 体	$T(^{\circ}\text{C})$	γ
He	-180	1.660	H ₂	100	1.40
Kr	19	1.68	Br ₂	300	1.32
Ar	15	1.668	I ₂	185	1.30
H ₂	100	1.404	NH ₃	15	1.310
O ₂	100	1.399	C ₂ H ₆	15	1.22

我们转向双原子气体, 发现氢的 γ 值为 1.404, 与理论值 1.286 不符合。与此非常类似, 氧的实验值为 1.399, 但也与理论值不符合。碘化氢也有类似的值 1.40。乍一看来, 正确的答案好像是 1.40。但也并非如此, 因为再看下去, 对于溴来说, 出现的值是 1.32, 而对于碘, 我们看到的是 1.30。因为 1.30 与 1.286 相接近, 因而可以说碘还是符合得比较好的, 但氧就差远了。这样就使我们处于进退两难的境地; 对某种分子它是对的, 而对另一种分子它又不对, 为了使两者都得到解释, 我们必须十分巧妙地进行构思。

我们进一步看看更复杂的多原子分子, 如乙烷(C₂H₆)共有 8 个不同的原子, 它们都以不同的组合在振动和转动, 所以总的内能必定为 kT 的许多倍, 至少单是动能就有 $12kT$, 因而 $\gamma - 1$ 必定十分接近于零, 或者说 γ 十分接近于 1。事实上, 它比较小, 但 1.22 并不太小, 它比只从动能算出的 $13/12$ 要大, 这也是不可理解的!

再进一步考虑的话, 整个事情更显得神秘莫测, 因为双原子分子终究不是刚性的, 即使我们使原子间的耦合无比坚固, 它不能强烈地振动, 但仍然不停地振动。内部的振动能仍然是 kT , 因为它并不依赖于耦合强度。但是, 如果我们能够设想存在着绝对刚性的分子, 停止一切振动, 以消除振动自由度的话, 那么对双原子分子将得到 $U = 5kT/2$, $\gamma = 1.40$ 。这看来对 H₂ 或 O₂ 是很符合的。然而, 这里还是存在着问题的, 因为无论对氢或氧, γ 值都随温度而变化! 从图 40-6 的测量值中, 我们看到对 H₂ 来说, γ 从 -185 °C 的 1.6 变化到在 2000 °C 的 1.3。氢的这种变化比氧来得显著, 然而, 即使对于氧来说, 当温度下降时, γ 也趋向于上升。

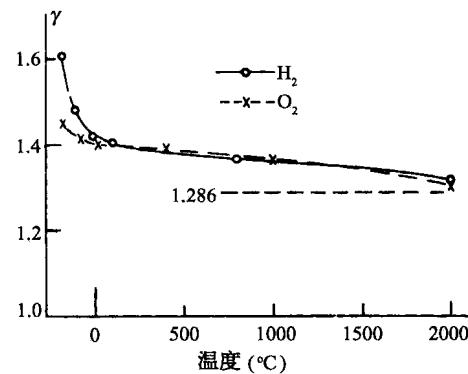


图 40-6 氢与氧的 γ 实验值与温度的关系。

经典理论预言 $\gamma = 1.286$, 与温度无关

§ 40-6 经典物理的失败

总而言之, 可以这么说, 我们碰到了一些困难。我们可以试用除弹力以外的其他力, 但结果是, 任何其他的力只能使 γ 变大。如果再包括更多形式的能量, γ 就更趋近于 1, 而与事

实不符。人们能够想到的经典理论只是使事情变得更糟。事实上,在每个原子中都有电子,由它们的谱线可知,存在着内部运动;每个电子至少应有 $kT/2$ 的动能,以及某些势能;把这些都加进来后, γ 会变得更小。这是荒谬的,也是错误的。

1859 年,麦克斯韦提出了有关气体动力学理论的第一篇出色的论文。在我们已经讨论过的那些观念的基础上,他能够精确地解释大量的已知关系,比如波义耳定律,扩散理论,气体的黏滞性,以及在下一章中要讲到的一些事情,在总结中,他列举了所有这些伟大的成就之后,写道:“最后,在建立了所有的非球形粒子的平动与转动之间的必然联系以后(他指的是 $kT/2$ 定理),我们证明了这样一个粒子的系统不可能满足两种比热之间众所周知的关系”。这里他谈的就是 γ (以后我们将看到 γ 与测量比热的两种方式有关),他说:“我们知道,我们无法得出正确的答案。”

十年以后,在一次演讲中他说:“现在我要在诸位面前提出在我看来是分子理论上所碰到的一个最大的困难。”这些话是物理学家第一次发现经典物理定律是错误的。它第一次指明由于严格证明了的定理与实验不符,存在着一些根本不可能解释的东西。大约在 1890 年,金斯又谈到这个疑难。人们常听说十九世纪下半叶的物理学家认为他们已经知道了所有的重要的物理定律,剩下所要做的只是计算更多的小数点位置罢了。有人这么说过一次,其他人则随声附和。但是,充分阅读那个时代的文献就可看出,那时的物理学家都在牵挂着一些事情。金斯讲到这个疑难时说,这是极其神秘莫测的现象;看来好像是,随着温度的下降,某些运动被“冻结”了。

如果我们假设,比方说,在低温下不存在振动,而在高温下存在振动,那么我们就可以设想或许存在这样一种气体,在足够低的温度下不出现振动,因而 $\gamma = 1.40$,而在较高的温度下开始出现振动,因而 γ 下降。对转动来说也可以作同样的论证。如果我们能够消除转动,比如说在足够低的温度下它被“冻结”了,那么我们就可以理解随着温度的下降,氢的 γ 值接近于 1.66 这一事实。怎么来理解这种现象呢?当然,这些运动的“冻结”用经典力学是无法理解的,只有在量子力学问世后,才能得到解释。

在这里我们不加证明地叙述量子力学理论用到统计力学后的一些结果。我们还记得,按照量子力学,一个被势,例如振动势束缚的系统具有一组分立的能级,即不同能量的状态。现在的问题是:根据量子力学理论如何来修正统计力学?答案非常有趣;虽然大多数问题在量子力学中处理比经典力学更为困难,但统计力学问题在量子论中却更容易!在经典力学中得到的简单结果 $n = n_0 \exp[-(\text{能量})/kT]$, 在量子论中变为下面一个极为重要的定理:若表示一系列分子状态的能级分别为 $E_0, E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$, 则在热平衡下,在某个具有能量为 E 的特定状态中找到一个分子的概率正比于 $e^{-E/kT}$ 。这给出了分子存在于不同态的概率。换句话说,在态 E_1 中的概率,即相对机会,与在态 E_0 下的概率之比是

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_0/kT}}, \quad (40.10)$$

因为 $P_1 = n_1/N$, 而 $P_0 = n_0/N$, 故上式当然也可写为

$$n_1 = n_0 e^{-(E_1 - E_0)/kT}, \quad (40.11)$$

可见分子处在较高能态的机会比处在较低能态的机会小。高能态的原子数与低能态的原子数之比是 e 的指数幂(能量差的负值除以 kT)。这是一个十分简单的命题。

对谐振子来说,能级是等间隔的。如果称最低的能级 $E_0 = 0$ (实际上它并不是零,这里有一点点差别,但把所有能量都移动一个常数没有任何影响),于是第一能级是 $E_1 = \hbar\omega$, 第二能级是 $E_2 = 2\hbar\omega$, 第三能级是 $E_3 = 3\hbar\omega$, 依次类推。

现在我们来看看会出现什么情况。假定我们研究的只是双原子分子的振动,它可以近似地看成是一个谐振子。我们问:在 E_1 态而不是在 E_0 态找到一个分子的相对机会是多少?答案是,在 E_1 态找到它的机会比在 E_0 态找到它的机会小 $e^{\hbar\omega/(kT)}$ 倍。现在假定 kT 远小于 $\hbar\omega$, 即气体处在低温条件下。那么,原子出现在 E_1 态的概率是极小的。实际上所有原子都处在 E_0 态。如果我们改变温度,但还是让 kT 保持很小,那么它在 $E_1 = \hbar\omega$ 态找到分子的机会仍然是无穷小的——振子的能量仍接近于零;只要温度远小于 $\hbar\omega$, 它将不会随温度而改变。所有的振子都处在基态,它们的运动实际上都“冻结”了;这时,振动运动对比热没有贡献。于是,由表 40-1,我们可以判断,在 100 °C, 即绝对温度 373° 时,相应的 kT 值远小于氧或氢分子的振动能量,但对碘分子情况就不是这样。之所以有这种差别,原因在于碘原子比氢原子重得多,虽然碘中原子间的力与氢中原子间的力可相比拟,但碘分子是这样重,以致使得它的固有振动频率比氢的低得多。对氢来说,在室温下 $\hbar\omega$ 大于 kT , 但对碘来说, $\hbar\omega$ 小于 kT , 因此只有对后者,即碘,才显示出经典的振动能。当从一个很低的 T (此时分子几乎都处在它们的最低能态中),开始增加气体的温度时,它们逐渐以相当的概率出现在第二个状态,然后再出现在下一个状态,等等。当在许多态中分子的概率相当大时,气体的行为就接近于经典物理所描写的情况,因为此时量子化的状态几乎变得和能量的连续性无法区分,并且整个系统差不多可以具有任何数值的能量。于是,在温度升高时,我们再次得到经典物理的结果,正如图 40-6 所示。同样可以说明分子转动的状态也是量子化的,但是这些状态靠得很近,以致在通常情况下 kT 远大于转动能级的间隔,这时,许多能态被激发,而系统中的转动能以经典方式起作用。在室温下情况不完全如此的一个例子是氢。

这是我们第一次通过和实验的比较确实推断出经典物理上存在着某些错误,并且我们以最初所使用的同样方式从量子力学中寻找解决困难的办法。过了三四十年,人们又发现了另一个困难,这又和统计力学有关,但这一次是光子气体的统计力学问题。普朗克在 20 世纪初期解决了这个问题。

第 41 章 布朗运动

§ 41-1 能量均分

布朗运动是一位植物学家布朗于 1827 年发现的。当他研究微生物时，他注意到植物花粉的细小微粒在他正在用显微镜观察的液体中到处游来游去，这时，他很明智地领悟到这些东西不是生物，而是在水中沿四周运动的微小的尘粒。事实上，为了帮助说明这一点和生命无关，布朗取一块从地下挖出的年代久远的石英岩，石英岩内含有一些水。这种水必然已贮存了数百万年以上，但是，在这样的水中布朗也看到了同样的运动。人们看到的是非常微小的粒子一直在不停地晃动。

以后，人们证明了这是分子运动的一种效应，我们可以通过想象在游艺场中有一个很大的可以推动的球来定性地理解这种效应。假定我们从很远的地方看去，下面有一大堆人，所有的人都从各个方向推动着这个球。我们看不到人，因为我们想象离开球太远了，但可以看见球，并且注意到它相当无规则地来回运动。由前几章讨论的定理我们知道，悬浮在液体或气体中的微粒的平均动能是 $3kT/2$ ，即使这个微粒远比一个分子重，情况仍然如此。如果它很重，那就意味着速率相对地较低。但实际上速率并不那么慢。事实上，我们不能轻易地看到这样一个粒子的速率，因为尽管平均动能是 $3kT/2$ ，但这对于一个直径约为 $1\sim 2 \mu\text{m}$ 的物体，它的速率大概是 $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ ，这甚至在显微镜下也是很难观察到的，因为粒子不断地改变运动方向，而且没有任何确定的目标。在本章的最后一节我们将讨论它到底能跑多远。这个问题是本世纪初由爱因斯坦首先予以解决的。

附带说一下，当我们讲到粒子的平动动能是 $3kT/2$ 时，我们声称这个结果是从分子动理论学理论，也就是从牛顿定律推出的。我们将发现能从分子动理论推导出种种令人惊奇的结果。由这么一点点东西就能推导出这么多的结果，这是极有意义的。当然，我们并不是说牛顿定律只是“一点点东西”——实际上，这已经足够了——这里所说的是我们并没有做很多事。那么，怎么能够得出这么多结果呢？答案是，我们一直在作一个重要的假设，那就是，如果某一给定系统在某个温度下处在热平衡状态，那么它与任何处在相同温度下的其他系统也处于热平衡状态。例如，如果我们想看看一个粒子与水分子发生实际碰撞时如何运动，可以想象在这里存在着由另一类微粒组成的气体，它们非常微小（我们假设），不会与水分子发生相互作用，而只与原来的粒子“强烈地”相互碰撞。假定这个粒子有一根伸出的刺，其他所有微粒能作的就是与这根刺碰撞。对这种温度为 T 的假想微粒气体，我们知道得很清楚，它是一种理想气体。水是复杂的，但理想气体是简单的。现在，这种粒子必然与这种微粒气体处于平衡之中。因此，粒子的平均运动必然由与气体微粒的碰撞所决定，因为相对于水来说它不是以正确的速度运动，而是比方说运动得更快的话，这就意味着微粒将得到能量而变得比水更热。但是整个系统开始时温度相同，而且我们又假定，某个系统一旦处于

平衡状态后,它将保持平衡——它的某些部分不会自发地变热,其他部分也不会自发地变冷。

这个命题是正确的,可以根据力学定律加以证明,但证明非常复杂,而且只有利用高等力学才能作出。在量子力学中证明它比经典力学容易得多。经典力学的证明首先由玻尔兹曼作出,但现在我们简单地把它看作是正确的,于是可以证明粒子在与假想微粒碰撞时,必定具有 $3kT/2$ 的能量,因而当我们拿走假想的微粒而让它和同样温度的水分子碰撞时,它也必然具有 $3kT/2$ 的能量,所以它的平均动能是 $3kT/2$ 。这是一种奇特的论证方法,但它是完全正确的。

除去最初发现布朗运动的那种胶体粒子的运动外,在实验室或其他场合的许多现象中也能见到布朗运动。如果我们要制作一个尽可能精密的仪器,比方说一个非常灵敏的冲击电流计,里面有一块很小的反射镜,悬挂在一根细石英丝上(图41-1),那么这面小镜不会停止不动,而是不停地来回晃动——所有时间都在不停地晃动——因此当我们往镜面上投射一束光线,并观察光点的位置时,由于镜面老是在晃动,因此这不是一台理想的仪器。为什么?因为这面镜子平均说来具有大小为 $kT/2$ 的平均转动动能。

那么,镜面来回晃动的“方均”角是多少?假如我们轻叩小镜的一侧,并观察它来回振动一次得花多长时间,就能得出它的固有振动周期,我们还知道它的转动惯量 I 。我们又知道转动动能的公式,它由式(19.8)给出,即 $T = I\omega^2/2$ 。这是动能,而势能则正比于转动角度的平方,即 $V = \alpha\theta^2/2$ 。但是,如果我们知道了周期 t_0 ,并由此算出固有频率 $\omega_0 = 2\pi/t_0$,则势能就是 $V = I\omega_0^2\theta^2/2$ 。现在我们知道平均动能是 $kT/2$,由于它是谐振子,平均势能也是 $kT/2$ 。于是有

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2\langle\theta^2\rangle = \frac{1}{2}kT,$$

或

$$\langle\theta^2\rangle = \frac{kT}{I\omega_0^2}. \quad (41.1)$$

用这种方法我们可以计算电流计镜面的振动,并由此求出我们这台仪器的使用限度。如果我们想使振动小些,可以冷却镜子。一个有趣的问题是,在哪里冷却它?这要看它受到的“撞击”来自何方。如果来自悬丝,就在顶部冷却它,如果镜子周围是气体,而撞击主要来自气体分子的碰撞,那么更好的办法是冷却气体。事实上,只要我们知道振动的阻尼来自何处,可以证明这常常也就是涨落的起源,这一点以后我们还将回过头来谈。

使人感到十分惊奇的是,在电路中,也会出现同样的情况。假设我们要制作一个对某一确定的频率非常灵敏和非常精确的放大器,在输入端有一个谐振回路(图41-2),

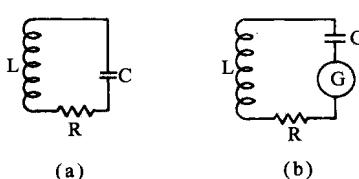


图41-2 高Q值谐振电路
(a)实际的电路,温度为 T ;(b)人为的电路,具有一理想(无噪声)的电阻及一“噪声发生器”G

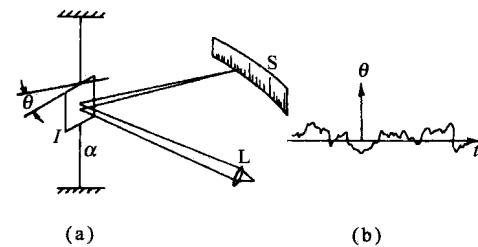


图41-1

(a)光束式灵敏电流计,来自光源L的光束经小镜反射后射至刻度尺上。(b)刻度的读数作为时间的函数的记录图

以使它对于那个确定的频率非常灵敏,就像一个质量很高的无线电接收机一样。如果我们要研究这个电路本身正常工作的最低的极限,就可以在电感上取出电压输入到放大器的其余部分。当然,任何这样的电路总会有一些损失。这不是一个理想的谐振回路,但它的性能非常好,比方说在回路中还有一点小的电阻(我们把电阻在图上画得能看出来,但假定它很小)。现在我们希望找出:电感上的电压涨落有多大?答案是,我们知道 $LI^2/2$ 是“动能”——即谐振回路中与线圈有关的能量(第25章),因此 $LI^2/2$ 的平均值等于 $kT/2$,这告诉我们均方根电流的大小,而从均方根电流又能求出均方根电压。如果要求出电感两端的电压,则公式为 $\hat{V}_L = i\omega L \hat{I}$, 而电感上的电压绝对值平方的平均值是 $\langle V_L^2 \rangle = L^2 \omega_0^2 \langle I^2 \rangle$, 代入 $L\langle I^2 \rangle / 2 = kT/2$, 就得到

$$\langle V_L^2 \rangle = L\omega_0^2 kT, \quad (41.2)$$

这样我们就能设计电路,并指出何时会在电路中出现所谓约翰逊(Johnson)噪声,即与热涨落有关的噪声!

这一种涨落来自何处?它们也是由电阻器产生的。实际上,由于电阻器内的电子与其他物质处于热平衡,因而它们有规则地来回跳动,并造成电子密度的涨落。这种涨落形成微小的电场,驱动谐振回路。

电子工程师用另一种方式来解答这个问题。从物理上来说,电阻器等效于噪声源。然而我们可以用一个假想的电路代替那个常能造成噪声的真实物理电阻的实际电路,假想的电路中包括一个很小的表示噪声的发生器,而现在的电阻器则是某种理想化的不产生噪声的东西。所有的噪声都在假想的发生器内。这样,如果已知电阻器产生噪声的特性,并且有了相应的公式,就能算出电路中噪声的响应。所以,我们需要一个噪声涨落的公式。而电阻器引起的噪声包含了所有的频率,因为电阻器本身并不会产生谐振。当然,谐振回路只能“收听”到接近谐振频率的那一部分频率,但电阻器中却具有许多不同的频率。我们可以用下述方式来描写噪声发生器的强度:如果设想电阻器直接并联在噪声发生器上,则它所吸收的平均功率应当是 $\langle E^2 \rangle / R$, 这里 E 是发生器上的电压。但是我们想更详细地知道在每种频率下的功率是多少。在任何一个频率上只有很小的功率,它是一个分布。令 $P(\omega)d\omega$ 为发生器在频率为 ω 而间隔为 $d\omega$ 内提供相同电阻器的功率。可以证明(我们将对另一种情况来证明,但数学上是完全相同的),功率应为

$$P(\omega)d\omega = \left(\frac{2}{\pi}\right)kT d\omega. \quad (41.3)$$

此式表明,当用这种方式处理时,噪声功率与电阻无关。

§ 41-2 辐射的热平衡

我们接着来考虑如下一个更为深入和更为有趣的问题:假定有一像在讨论光时讲到的那样的荷电振子,比如说在一个原子中的一个上下振动的电子。如果它上下振动,就会辐射出光。现在假设这个振子处在其他原子的极稀薄气体中,而且经常与那些原子相碰撞。这样,经过一段长时间后,达到了平衡状态。这个振子获得了能量,它的振动动能是 $kT/2$,因为它是一个谐振子,所以它的运动的总能量是 kT 。当然,迄今为止的这种描

写还是不正确的,因为振子携带电荷,而如果它带有能量 kT ,就会上下振动并且辐射出光。因此,单单物质本身处于热平衡中而所带电荷不发射出光是不可能的,而当辐射出光时,能量就流走了,随着时间的增加,振子将损失掉它的 kT 能量,于是与振动电子碰撞的整个气体将逐渐冷却。当然,这就是一种在寒冷的夜晚,一个烧红的火炉由于向空间辐射出光而逐渐冷却的方式,因为原子所带的电荷的跳动,它们不断地辐射出光,而慢慢地由于这种辐射,跳动将逐渐减慢。

另一方面,如果把所有的东西都放在一个封闭容器中,使光不能跑到无穷远处,那么我们最后还可以获得热平衡。我们可以或者是把气体放在一个容器中,在这个容器的器壁上有一些其他可使光线反射回来的辐射体,或者是作为一种更巧妙的例子,可以假设容器器壁就是镜子。这种情况较易想象。于是可以认为振子发出的所有辐射都只在容器内传来传去。这样,固然开始时振子确实在辐射,但尽管如此,由于它还被从器壁反射的自身的光线所照射,我们可以说,不久它将保持它的动能 kT 。过了一会儿后,在容器内有大量光线跑来跑去,虽然振子正在辐射一些光,但光又跑了回来,并把辐射出去的能量还给了振子。

我们现在来确定,为了使照射在这个振子上的光产生足够补偿振子所辐射出的能量,在这个温度为 T 的容器中必须有多少光。

假设气体中的原子非常少,彼此相隔很远,因而我们有一个除辐射阻尼外,并无其他阻尼的理想振子。考虑在热平衡状态下振子同时做的两件事。第一,它具有平均能量 kT ,我们要计算它辐射了多少光。第二,因为照射到振子上的光被散射,因而辐射量的大小应当正好等于由散射引起的量。由于能量不可能跑到其他地方,这一有效的辐射实际上正好就是在那里的光所散射的光。

我们首先计算一下,如果振子具有某一能量,它每秒辐射的能量是多少(我们借用第 32 章中有关辐射阻尼的一些公式,而不去重复它们的推导)。每弧度辐射的能量除以振子的能量称为 $1/Q$ (式 32.8)

$$\frac{1}{Q} = \frac{dW}{dt} \cdot (\omega_0 W)^{-1}.$$

利用阻尼常数 γ ,这也可以写为

$$\frac{1}{Q} = \frac{\gamma}{\omega_0}.$$

这里 ω_0 是振子的固有频率,如果 γ 很小, Q 就很大。每秒辐射的能量是

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\omega_0 W}{Q} = \frac{\omega_0 W \gamma}{\omega_0} = \gamma W. \quad (41.4)$$

每秒辐射的能量简单地就是 γ 乘振子的能量。现在,振子应当具有平均能量 kT ,可见 γkT 就是每秒钟辐射能量的平均值

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \gamma k T. \quad (41.5)$$

现在我们只须知道 γ 是什么。由式(32.12)很容易求出 γ ,那就是

$$\gamma = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2}{c}. \quad (41.6)$$

这里 $r_0 = e^2 / (mc^2)$ 是经典电子半径, 而上式已用了 $\lambda = 2\pi c / \omega_0$ 。

因此, 对于接近频率 ω_0 的平均光辐射率, 最后结果为

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2 k T}{c}. \quad (41.7)$$

接着我们要问, 必须要有多少光照射在振子上? 必须有足够的光, 使得从光线(随即被散射)吸收的能量正好等于这样多。换句话说, 可以把发射光看作是从照射在容器内那个振子上的光所散射的光。如果有一定量(未知)的辐射照射在振子上, 那么我们现在必须计算从振子散射了多少光。令 $I(\omega)d\omega$ 是频率为 ω , 间隔为 $d\omega$ 的光能的数量(因为在某一确定的准确的频率上没有光, 光总是扩展到整个光谱区), 所以 $I(\omega)$ 是一个确定的光谱分布。现在我们就来求它——这正是将火炉烧红到温度 T 时我们打开炉门观察炉膛时看到的颜色。现在吸收了多少光呢? 我们曾求出由一给定的入射光束所吸收的辐射的数量, 并用横截面来进行计算。这就等于说所有落在某一确定截面上的光全部被吸收, 所以再辐射(散射)的总量就是入射光强度 $I(\omega)d\omega$ 乘以截面 σ 。

我们曾推得的截面公式(式 32.19)不包括阻尼。不难再作一次推导, 并加上我们曾忽略的阻尼项。我们这样做, 并用同样的方式计算截面, 得

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \left[\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right]. \quad (41.8)$$

现在, 作为频率的函数, σ_s 只在 ω 极接近于固有频率 ω_0 时才有显著的数值(我们记得对辐射振子而言, Q 约为 10^8)。当 ω 等于 ω_0 时, 振子的散射很强, 而对其他的 ω 值则很弱。因此, 我们可以用 ω_0 代替 ω , $2\omega_0(\omega - \omega_0)$ 代替 $(\omega^2 - \omega_0^2)$, 从而得到

$$\sigma_s = \frac{2\pi r_0^2 \omega_0^2}{3[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.9)$$

现在, 整条曲线定域在靠近 $\omega = \omega_0$ 处(实际上我们没有必要作任何近似, 但是若使方程简化一些, 积分就十分容易了)。现在我们在给定频率间隔内以散射截面乘以强度, 就得到在间隔 $d\omega$ 内的散射能量的大小。于是散射的总能量是这个乘积对所有 ω 值的积分, 即

$$\frac{dW_s}{dt} = \int_0^\infty I(\omega) \sigma_s(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{2\pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega) d\omega}{3[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.10)$$

但是现在要使 $dW_s/dt = 3\gamma k T$ 。为什么是 3? 因为在第 32 章中对截面进行分析时, 我们假定偏振是要使光能驱动振子。如果我们利用一个只能在一个方向上运动的振子, 而假定光以错误的方式偏振, 那么它就不能产生任何散射。所以, 我们必须或者是对一个只能在一个方向上运动的振子的截面求其在所有的光的入射与偏振方向上的平均, 或者是更容易一些, 可以想象一个不管场怎么指向, 总是跟着场运动的振子。这样一个能等价地在三个方向上振动的振子将有 $3kT$ 的平均能量, 因为它有三个自由度。正是因为有三个自由度, 所以应该用 $3\gamma k T$ 。

现在我们来算出积分值。假设未知的光的光谱分布 $I(\omega)$ 是一条平滑曲线，在 ω_0 达到峰值的非常狭窄的频率范围内它的变化不太大（图 41-3）。于是唯一有意义的贡献来自 ω 十分靠近于 ω_0 的上下为 γ 的那个频率范围，而 γ 是很小的。因此，虽然 $I(\omega)$ 可能是一个未知的复杂函数，但唯一起重要作用的地方只是在 $\omega = \omega_0$ 附近，而在那里我们可以用同样高度的一条平坦的曲线——一个“常数”来代替那段平滑的曲线。换句话说，我们可以简单地把 $I(\omega)$ 提出到积分号外，并称之为 $I(\omega_0)$ 。还可以把其余的常数放到积分号前，这样就有

$$\frac{2}{3}\pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega_0) \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} = 3\gamma kT.$$

(41.11)

积分应当是从 0 至 ∞ ，但 0 离开 ω_0 很远，以致那时曲线已完全为零，因而可用 $-\infty$ 来代替 0，这没有什么差别，但进行积分要容易得多。这个积分即形式为 $\int dx/(x^2 + a^2)$ 的反正切函数。从书上可以查出它等于 π/a 。在我们的例子中就是 $2\pi/r_0$ 。经过整理后，我们得到

$$I(\omega_0) = \frac{9\gamma^2 kT}{4\pi^2 r_0^2 \omega_0^2}. \quad (41.12)$$

然后代入 γ 的公式（41.6 式）（在写 ω_0 时不必担心，因为它对任何 ω_0 都成立，我们可以把 ω_0 写为 ω ）， $I(\omega)$ 的公式是

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^2}. \quad (41.13)$$

这个式子给出了火炉中的光的分布。我们把它叫作黑体辐射，“黑”指的是当温度为零时，我们看到的炉膛是黑色的。

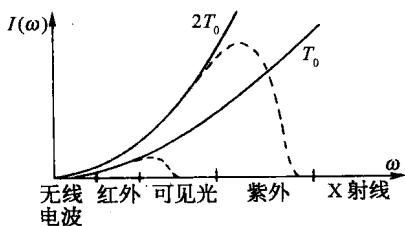


图 41-4 在两种温度下，黑体辐射的强度分布。实线表示按照经典物理所给出的分布。虚线表示实际的分布

按照经典理论，在温度为 T 的封闭容器内，式（41.13）是辐射能量的分布。首先，我们注意到这个表示式的一个引人注目的特色。振子的电荷、质量、所有振子的特殊性质全部消去了，因为一旦我们和一个振子达到了热平衡后，我们必然也和任何其他不同质量的振子达到热平衡，不然我们将陷于困境。所以，这是平衡并不依赖于处在平衡态的是一些什么，而只依赖于温度这个命题的一个重要验证。现在我们画出 $I(\omega)$ 曲线（图 41-4）。它告诉我们在不同的频率下光的强度各是多少。

在封闭容器中，每单位频率间隔内的强度的大小随着频率的平方而变化，这意味着如果我们真的有一个温度完全任意的容器，那么在观察从里面发射出的 X 射线时，将会发现有大量的 X 射线！

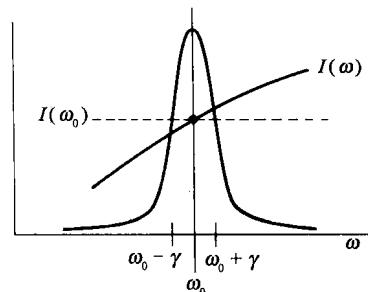


图 41-3 式（41.10）被积函数的因式。图中的峰为谐振曲线 $1/[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]$ 。作为一个很好的近似，因式 $I(\omega)$ 可用 $I(\omega_0)$ 来代替

当然,我们知道这是错误的结论。当我们打开炉门观察炉膛时,根本不会因为其中发射出的X射线而烧伤我们的眼睛。这是完全错误的。其次,容器中的总能量,即一切频率下的所有光强的总和,将是这条无限伸展的曲线下的总面积。由此可见,一定有某些东西从根本上明显地和绝对地错了。

正如经典理论不能正确地描述气体比热一样,经典理论也绝对不可能正确地描述从黑体发出的光的分布。许多物理学家从种种不同的观点反复推敲这个推导过程,都找不到出路。这是经典物理的预言。公式(41.13)称为瑞利定律,它是经典物理的预言,而它显然是荒谬的。

§ 41-3 能量均分与量子振子

上述困难是经典物理中不断出现的另一个问题。它从气体比热的困难开始,现在则集中到黑体内光的分布上。当然,在理论物理学家研究这个问题的同时,也对实际曲线作了许多测量。结果发现正确的曲线就像图41-4中的虚线那样。这就是说,其中根本没有X射线。根据经典理论,如果我们降低温度,整条曲线将随着T而成比例地下降,但观察到的曲线在更低的温度下也很快切断。因此,曲线的低频端是正确的,但高频端则是错误的。为什么?金斯爵士在考虑气体比热时,注意到在温度太低时,高频运动被“冻结”。这就是说,如果温度太低,频率太高,振子的平均能量不是kT。现在回忆一下式(41.13)的推导过程:它完全依赖于振子处于热平衡状态时的能量。式(41.5)中的kT是什么,式(41.13)中的kT又是什么,它是在温度为T、频率为 ω 时的谐振子的平均能量。从经典理论上来说,这是kT,但从实验上来说,却不是!当温度太低或振子频率太高时,平均能量就不是kT。可见,曲线下降的原因与气体比热问题上的谬误的原因相同!但是研究黑体曲线要比研究气体比热容易,后者太复杂了,所以我们的注意力集中在确定真实的黑体曲线上,因为这条曲线是一条能正确告诉我们在每种频率下作为温度函数的谐振子实际上的平均能量是多少的曲线。

普朗克研究了这条曲线。他首先根据经验通过观察曲线和一个符合得很好的函数进行比较来确定答案,从而有了一个作为频率函数的谐振子平均能量的经验公式。换句话说,他有了一个代替kT的正确公式。在经过反复推敲后,在一个非常特殊的假设下,他找到了这个公式的一个简单推导。这个假设是谐振子一次只能取 $\hbar\omega$ 的能量。谐振子能够具有任何能量的概念是根本错误的。当然,这是经典力学走到了尽头的开始。

现在我们来推导这个最先被正确确定的量子力学公式。假设一个谐振子的可能的能级彼此分开相等的间隔 $\hbar\omega$,因而振子只能取这些不同的能量(图41-5)。普朗克作了一些比这

里给出的更复杂的论证,因为那是量子力学的开创时期,他必须对某些事情加以证明。但是我们把下面的假设作为一个事实加以接受(普朗克对此进行了证明):占据能级E的概率是 $P(E) = \alpha e^{-E/kT}$ 。由此出发,我们就能得到正确的答案。

现在假定有许多振子,每一个振子的振动频率都是 ω_0 。这些振动有些可能处在最下面的量子态,有些则处在下一个量子态,等等。我们希望知道所有这些振子的平均

N_4	$E_4 = 4\hbar\omega$	$P_4 = A \exp(-4\hbar\omega/kT)$
N_3	$E_3 = 3\hbar\omega$	$P_3 = A \exp(-3\hbar\omega/kT)$
N_2	$E_2 = 2\hbar\omega$	$P_2 = A \exp(-2\hbar\omega/kT)$
N_1	$E_1 = \hbar\omega$	$P_1 = A \exp(-\hbar\omega/kT)$
N_0	$E_0 = 0$	$P_0 = A$

图41-5 谐振子的能级是等间距的: $E_n = n\hbar\omega$

能量。为此,我们计算所有振子的总能量,再除以振子的总数。这将是热平衡状态下每个振子的平均能量,同时也是与黑体辐射达到平衡时的能量,应该把它放在式(41.13)中 kT 的位置上。现在令在基态(最低能态)的振子数为 N_0 ,在 E_1 态的振子数为 N_1 ,在 E_2 态的振子数为 N_2 ,等等。按照前面的假设(我们未加以证明),在量子力学中,代替经典力学中概率 $e^{-P(E)/kT}$ 或 $e^{-K(E)/kT}$ 的是随着能量增加 ΔE ,概率下降 $e^{-\Delta E/kT}$,我们假定在第一个态的振子数 N_1 是基态的振子数 N_0 乘以 $e^{-\hbar\omega/kT}$,类似地,处于第二个态的振子数 N_2 为 $N_2 = N_0 e^{-2\hbar\omega/kT}$ 。为了简化代数运算,可令 $e^{-\hbar\omega/kT} = x$ 。于是就有 $N_1 = N_0 x$, $N_2 = N_0 x^2$, ..., $N_n = N_0 x^n$ 。

首先必须求出所有振子的总能量。如果振子处于基态,则没有能量。如果它处在第一个态,能量是 $\hbar\omega_0$,而振子数为 N_1 ,则 $N_1 \hbar\omega$ 或 $N_0 \hbar\omega x$ 就是我们从这里得到的能量。而在第二个态,能量是 $2\hbar\omega_0$,振子数为 N_2 ,因而我们从这里得到的能量是 $N_2 \cdot 2\hbar\omega = 2\hbar\omega N_0 x^2$,等等。把所有这些加在一起,就得到全部能量为

$$E_{\text{总}} = N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots).$$

现在,振子的总数是多少?当然, N_0 是处在基态的振子数, N_1 是第一个态的振子数,等等。累加起来

$$N_{\text{总}} = N_0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots).$$

这样,平均能量便是

$$\langle E \rangle = \frac{E_{\text{总}}}{N_{\text{总}}} = \frac{N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{N_0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)}. \quad (41.14)$$

我们把这里的两个求和式留给读者作为有趣的练习。当我们算出所有这些求和,并把 x 值代到这些求和中去后,只要在求和时没有算错,就应当得到

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (41.15)$$

这就是永远为人所熟知或讨论的第一个量子力学公式,它是经过几十年迷惑不解后达到的光辉的顶点。麦克斯韦知道,总是在某些地方弄错了,但问题在于,什么是正确的? 这里就是代替 kT 的定量的正确答案。当然,在 $\omega \rightarrow 0$ 或 $T \rightarrow \infty$ 时,式(41.15)应当趋向于 kT 。试试看,你能不能证明这一点——这也是学会如何运用数学的一种办法。

这就是金斯一直寻求的著名的截断因子,如果用它代替式(41.13)中的 kT ,我们就得到在一个黑色的容器内光的分布为

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (41.16)$$

我们可以看出,对大的 ω ,即使分子上有 ω^3 ,但在分母上有一个随 e 的很大的幂增加的数,因而曲线还是下降而并没有“翘起来”——在不希望有紫外光和 X 射线的地方确实没有看到它们!

或许有人会抗议,在式(41.16)的推导中,对谐振子的能级我们用了量子理论,而在确定截面 σ 时又用了经典理论。但光和谐振子相互作用的量子理论所得到的结果与经典理论所得到的结果是完全相同的。实际上,这就是为什么我们花费那么长的时间,利用一个像小振子一

样的原子模型来分析折射率和光的散射的道理——因为量子力学公式实质上与此相同。

现在回到电阻器中的约翰逊噪声上来。我们已经强调这个噪声功率的理论实际上与经典的黑体分布理论相同。事实上,比较有趣的是我们已经谈到如果在回路中的阻抗不是真实的电阻,而是像天线(一根天线实质上就像一个阻抗,因为它辐射能量)那样是一个辐射阻尼,那么计算它的功率对我们来说是比较容易的。这个功率正是天线从它周围的光那里取得的功率,所以我们会得同样的分布,只改变一个或两个因子。我们可以假设电阻器是一个具有未知功率谱 $P(\omega)$ 的发生器。 $P(\omega)$ 可由以下事实来确定:当我们把这个发生器连接在图 41-2(b) 那样的任意频率的谐振回路时,在电感上就产生了一个由式(41.2)给出的电压。由此导致像式(41.10)那样的积分,用同样的方式可以给出式(41.3)。在低温下,式(41.3)中的 kT 当然必须用式(41.15)代替。这两种理论(黑体辐射和约翰逊噪声)在物理上也是密切相关的,因为我们当然可以把谐振回路连接到一根天线上,这样,电阻 R 就是纯粹的辐射阻尼。因为式(41.2)并不依赖于阻尼的物理来源,所以发生器 G 对于真实的电阻和辐射阻尼是相同的。现在,如果电阻 R 只是一个在温度 T 时与它周围环境处于热平衡的理想天线,它所产生的功率 $P(\omega)$ 的起源是什么?那就是在温度为 T 时在空间中的辐射 $I(\omega)$,它作为“被接收的信号”冲击天线,并造成一个有效的发生器。因此我们可以推导出 $P(\omega)$ 和 $I(\omega)$ 的直接关系,然后从式(41.13)导出式(41.3)。

我们已经谈到的这一切——所谓约翰逊噪声、普朗克分布以及下面将要描述的布朗运动的正确理论,都是 20 世纪头十年左右所取得的成就。在了解了这些事情和这段历史后,现在我们再回到布朗运动上来。

§ 41-4 无规行走

我们现在来考虑对于比“冲击”间隔时间长得多的时间内一个跳动的粒子的位置将如何随时间而变化。一个小的布朗运动的粒子之所以跳动,是因为它四周受到无规则跳动的水分子的撞击。问题是,在经过一段给定的长时间间隔后,它离开起始位置的最可能距离有多远?这个问题为爱因斯坦与斯莫卢霍夫斯基所解决。如果设想把时间分为很小的间隔,比如 0.01 s,那么,在第一个 0.01 s 后粒子运动到这里,下一个 0.01 s 后它运动得更远一点,再下一个 0.01 s 后它跑到其他某个地方,等等。就碰撞的频率来说 0.01 s 是很长的时间。读者不难验证,一个水分子在 1 s 内的碰撞数大约是 10^{14} 次,因而 0.01 s 中碰撞 10^{12} 次,这是一个巨大的数字!因此,在经过 0.01 s 后,粒子不再记得先前发生过什么。换句话说,碰撞全部是无规的,“下一步”与“前一步”之间没有什么联系。这很像那个著名的喝醉酒的水手的问题:

有一个水手从酒店出来,踉踉跄跄地走了许多步,但是每一步的方向是随意定的,即是无规的(图 41-6)。问题是,经过一段较长的时间后,这个水手走到了哪里?当然,我们不知道!这是无法说出的。我们只能说:他总处在某个地方,这或多或少是无规则的。然而,平均说来,他在哪里?平均说来,他离开酒店有多远?我们已经回答过这个问题,因为有一次我们曾经讨论过从大量带有不同相位的不同光源来的光的叠加问题,这意味着

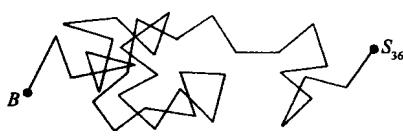


图 41-6 36 步每步长为 l 的无规行走。 S_{36} 离 B 有多远? 答案: 平均约为 $6l$

着要把许多不同方向的矢量累加起来(第32章)。这里我们发现从一连串无规行走的步伐的一端到另一端的距离的平方平均值(它就是光的强度),等于各个部分的强度之和。因此,用同样的数学方法我们立即可以证明,如果 \mathbf{R}_N 是经过 N 步后离开原点的位移矢量,则离原点的方均距离正比于步数 N 。也就是说, $\langle R_N^2 \rangle = NL^2$, 这里 L 是每步的长度。由于在这个问题中步数正比于时间,所以方均距离也正比于时间

$$\langle R^2 \rangle = \alpha t. \quad (41.17)$$

这并不意味着平均距离正比于时间。如果平均距离正比于时间,那就表示漂移是一个很好的匀速运动。水手以某种可感觉到的方式前进,但只有他的方均距离正比于时间。这就是无规行走的特征。

容易证明,每继续走一步,距离的平方平均说来增加 L^2 。因为如果写出 $\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_{N-1} + \mathbf{L}$ 后,则得 \mathbf{R}_N^2 为

$$\mathbf{R}_N \cdot \mathbf{R}_N = R_N^2 = R_{N-1}^2 + 2\mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} + L^2.$$

对许多走法作平均后,有

$$\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + L^2.$$

因为 $\langle \mathbf{R}_{N-1} \cdot \mathbf{L} \rangle = 0$ 。这样,利用归纳法,即得

$$\langle R_{N-1}^2 \rangle = NL^2. \quad (41.18)$$

现在希望算出式(41.17)中的系数 α ,为此必须补充一点东西。我们假定,如果在这个粒子上施加一个力(这跟布朗运动无关——我们暂时考虑一个枝节问题),那么它就会以下述反作用的方式反抗这个力。首先是惯性。令 m 是惯性的系数,即物体的有效质量(不一定必须与实际粒子的真正质量相同,因为当我们推动粒子时也带动了周围的水)。于是,假如我们讨论在一个方向上的运动,那么在一边就会有类似于 $m(d^2x/dt^2)$ 的项。其次,我们还要假设,如果稳定地推动粒子,液体就会对它产生一个正比于它的速度的阻力。除去液体的惯性外,由于液体的黏滞性和其他复杂性,存在着阻碍流动的阻力。为了出现涨落,某种不可逆的损耗,即某种类似阻力的东西是绝对必须的。除非也有某种损耗存在,否则就不可能产生 kT 。涨落的来源与这些损耗密切相关。我们会很快讨论到这种阻力的机制——我们将谈到与速度成正比的力以及它的由来。但目前我们假定有这样的阻力。当我们以一种正规的方式推动它,在有外力存在时,运动的公式是

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{\text{外}}. \quad (41.19)$$

μ 这个量可以直接由实验测定,例如,我们可以观测在重力作用下液滴的下落。我们知道重力是 mg , μ 是 mg 除以液滴最终达到的下落速率。或者,我们可以将液滴放到离心机上,观察它沉积得有多快,或者如果它带电的话,我们可以对它加上一个电场。因此, μ 是一个可测量,而不是一个人为的东西,对许多种胶体粒子来说,它们的 μ 值都是已知的。

现在,对力不是外力,而是等于布朗运动的无规则力的情况使用同样的公式。我们试图确定客体走过的方均距离。这里我们不讨论三维的运动,而只取一维运动求出 x^2 的平均值,以作备考(显然, x^2 的平均值与 y^2 的平均值和 z^2 的平均值相同,因此,均方距离应该是

我们要算出的值的3倍)。当然,无规则力的x分量和其他分量一样地无规则。 x^2 的变化率是什么?它是 $dx^2/dt = 2x(dx/dt)$,所以我们要求出的是位置乘以速度的平均值。我们将证明,这是一个常数,因此方均半径值将正比于时间而增大,并将说明增长率为多大。现在,如果以x乘以式(41.19)的两边,就有

$$mx\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \mu x\left(\frac{dx}{dt}\right) = xF_x.$$

我们要求 $x dx/dt$ 的时间平均值,所以我们可以对整个方程取平均,再研究这三项。x乘以力这一项如何?如果粒子刚巧走了一段距离x,那么,由于无规则力是完全紊乱的,它并不知道粒子从哪里开始,下一个冲击可能是在相对于x的任何方向上。如果x为正,那么没有理由认为平均力也应该在那个方向上。这种方式和那种方式完全一样。冲击力不能在某个确定的方向驱动粒子。因而x乘以F的平均值为零。另一方面,对于 $mx(d^2x/dt^2)$ 这一项,还要再略微想象一下,把它写为

$$mx\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d[x(dx/dt)]}{dt} - m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

这样就得到两个项,我们同时取这两个项的平均值。看看x乘以速度应当是什么。这个乘积的平均值不随时间而变化,因为当粒子到达某一位置时,它并不记得自己本来在什么地方,因而不会随时间而变化。故第一项的平均值等于零。剩下的量是 mv^2 ,这是我们已知的唯一的一项: $mv^2/2$ 的平均值是 $kT/2$ 。这样我们得出

$$\left\langle mx\frac{d^2x}{dt^2}\right\rangle + \mu\left\langle x\frac{dx}{dt}\right\rangle = \langle xF_x \rangle.$$

这暗示着

$$-\langle mv^2 \rangle + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 0.$$

或者

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 2 \frac{kT}{\mu}. \quad (41.20)$$

因此粒子在一定的时间t的末了的方均距离 $\langle R^2 \rangle$ 为

$$\langle R^2 \rangle = 6kT \frac{t}{\mu}. \quad (41.21)$$

这样,我们就可以实际确定粒子跑得多远!首先必须确定它们对一个稳定的力的反作用有多大,在一个已知的力下漂移得多快(为了找出 μ),然后可以确定在它们的无规运动中走了多远。这个方程在历史上具有相当重要的意义,因为它提供了最初测定常数k的方法之一。毕竟,我们可以测量 μ 、时间以及粒子走了多远,并取平均。测定k之所以重要,原因在于在1 mol 理想气体的定律 $PV = RT$ 中,R可以实际测出,并且等于1 mol 中的原子数乘以k。1 mol 原来的定义是这么多克的氧——16 g(现在用碳),所以1 mol 中的原子数本来不是已知的。这当然是一个非常有趣而重要的问题。原子有多大?1 mol 有多少个原子?所以,确定原子数的最早的方法之一是在显微镜下耐心地观察一段时间,以确定一颗小小的尘粒能走多远。这样,由于R的值已经测出,玻尔兹曼常量k和阿伏伽德罗常数 N_0 就全都能确定了。

第 42 章 分子动理论的应用

§ 42-1 蒸 发

本章我们将进一步讨论分子动理论的一些应用。在前一章中，我们强调动理论的一个独特的方面，即分子或其他物体的任何一个自由度的平均动能都是 $kT/2$ 。而我们现在将要讨论的中心则是，在不同位置处的单位体积中找到粒子的概率随 $\exp[-(P.E.)/(kT)]$ 而变化。我们将讨论这个结论的一些应用。

我们想要研究的现象是十分复杂的：液体进行蒸发，金属中的电子逸出表面，或者包括大量原子的化学反应。由于情况过于复杂，对于这些情况不可能从分子动理论出发作出任何简单和正确的陈述。因此本章中除去特别强调的地方以外，都相应地不精确。要强调的概念只是：从分子动理论出发，我们能够或多或少理解事物的行为应当如何。利用热力学的论据，或由某些临界量的经验测量结果，我们就可以更准确地描写那些现象。

然而，即使只是或多或少知道一点为什么它的行为会那样，也是十分有用的，这样，当我们遇到某种新的情况，或者还没有着手分析过的情况时，我们也可以多少说出一点会发生什么事情。所以，尽管这里的讨论十分不精确，但本质上还是正确的，即在概念上是正确的，不过，比如说，在某些特殊细节上作了一点简化。

我们将考虑的第一个例子是液体的蒸发。假设有一个体积很大的容器，里面放有一部分在一定温度下和它的蒸气达到平衡状态的液体。假定蒸气的分子彼此相距很远，而在液体内的分子则紧靠在一起。现在的问题是要知道，与液体中的分子数相比较，气相的分子数有多少？在给定的温度下蒸气的密度有多大？它对温度的依赖关系如何？

我们不妨假设蒸气中的每单位体积的分子数为 n 。当然，分子数会随着温度而变化。假如对液体加热，蒸发增加，就得到更多的蒸气。现在用另一个量 $1/V$ 表示液体中每单位体积的分子数。假定液体中的每个分子都占有一定的体积，若液体的分子较多，则合在一起所占的体积就较大。所以，若 V_0 为单个分子所占有的体积，那么单位体积除以每个分子的体积就是单位体积中的分子数。此外，我们假设，在分子之间存在着吸引力，以使它们能在液体中结合在一起，否则，我们就无法理解为什么液体是凝聚的。因而我们假设存在有这样一种力，并且在液体的分子中存在着束缚能，而当它变为蒸气时，就失去了这部分能量。这就是说，我们假定为了使一个分子从液体跑到蒸气中，必须对它作一定量的功 W 。一个处在蒸气状态下的分子和一个处在液体状态下的分子之间有一定的能量差 W ，因为我们是从其他分子对它的吸引中把它拉出来的。

现在我们利用上面的一般原理：在两个不同的区域中每单位体积的分子数的关系为

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-(E_2 - E_1)/kT}.$$

因而蒸气中每单位体积的分子数 n 除以液体中每单位体积的分子数 $1/V_a$, 就等于

$$nV_a = e^{-W/kT}, \quad (42.1)$$

这是一条普遍的规则。它就像在重力作用下处于平衡状态的大气层, 其下层气体要比上层气体稠密, 因为把气体分子提到高度 h 处需要作 mgh 的功。液体中的分子比蒸气中的分子稠密, 因为要通过能量的“小丘” W 才能拉开它们, 而两种密度比是 $e^{-W/kT}$ 。

这就是我们所要推导的结果——蒸气密度随着 e 的某种负的能量除以 kT 的幂而变化。前面的因子我们实际上并不感兴趣, 因为在大多数情况下蒸气密度远比液体密度小。在某些情况下, 只要不是靠近临界点(那里两种密度几乎相同), 而是蒸气密度远小于液体密度, n 远小于 $1/V_a$ 的事实是由 W 远大于 kT 的事实引起的。所以像式(42.1)那样的公式只有在 W 大大超过 kT 的情况下才有意义, 因为在这种情况下, 我们把 e 自乘到一个很大的负指数幂, 只要使 T 变化一点点, 这个指数幂也变化一点点, 而由指数因子引起的变化要比前面的因子可能出现的任何变化重要得多。为什么在像 V_a 这样的因子上会出现一些变化呢? 因为我们的分析是近似的。说到底, 实际上并不是每个分子都有一定的体积, 当我们改变温度时, 体积 V_a 不会保持不变——液体膨胀了。此外, 还有与此类似的其他次要的特征, 所以实际状况更为复杂。在整个过程中都有着随温度缓慢变化的因素。事实上可以说 W 本身也随温度而略有变化, 因为在较高的温度和不同的分子体积下, 有不同的平均吸引力等。因而, 可以想象, 如果我们有一个公式, 其中每一个量都以一种未知的方式随温度而变化, 那么实际上就等于完全没有公式。如果我们认识到, 指数 W/kT 一般说来非常大, 我们就会看出, 作为温度函数的蒸气密度曲线, 其主要的变化由指数因子引起, 若取 W 为常数, 以及取系数 $1/V_a$ 近似为常数, 对于曲线中比较短的间隔来说, 这是一个很好的近似。换句话说, 最主要的变化具有 $e^{-W/kT}$ 这样的普遍特征。

结果表明, 在自然界的许许多多种现象中都有这样一个特征: 要从某个地方汲取一些能量, 而它随温度变化的最主要的特征是有一个 e 的负能量除以 kT 的指数幂因子。只有当能量远大于 kT , 从而最主要的变化是由 kT 的变化引起, 而不是由常数或其他因子引起时, 这个特征才是一个有用的事实。

现在, 我们考虑另一个会对蒸发得到大约相似结果的方法, 但要对过程观察得更细致一些。在得出式(42.1)时, 我们曾简单地使用了在平衡状态下成立的一条规则, 但为了更好地理解这一切, 不妨观察一下所发生的具体细节。我们也可以以下述方式来描述所发生的事: 蒸气中的分子不断地碰撞液体的表面, 当它们撞击在液面上时, 可能被弹开, 也可能进入液体内。这里有一个未知的比例——可能是 50 对 50, 也可能是 10 对 90——我们并不知道。不妨先认为它们都跑到液体内, 以后再回过头来分析假设它们不全都跑到液体内的那种情况。于是在某一给定的时刻, 总有一定数目的分子凝聚在液体表面。凝聚分子数, 即到达单位面积上的分子数, 等于每单位体积的数目 n 乘以速度 v 。分子的速度与温度有关, 因为我们知道 $mv^2/2$ 的平均值是 $3kT/2$ 。所以 v 就是某种平均速度。当然, 我们应当对各种方向的速度进行积分从而得到某种平均值, 但粗略地说它正比于方均根速度, 并带有某个系数。总之

$$N_c = nv \quad (42.2)$$

是到达每单位面积并凝聚的分子数。

同时,液体的分子不停地跳动,时而它们中的某个分子被“踢”出液面。现在我们来估计它们被踢出液面有多快。这里的概念是,在平衡时每秒钟踢出的分子数与到达的分子数相等。

踢出的分子有多少?为了能跑出液面,必须要求某个特殊的分子偶然获得超过其邻近分子的额外能量——一个可观的额外能量,因为它受到液体中其他分子的很强的吸引力。通常由于这种很强的吸引力分子不会离开液体,但是在碰撞中有时它们中的某个分子会偶然得到一份额外的能量。若 $W \gg kT$, 那么要得到在我们的情况下所需的额外能量 W 的机会是非常小的。事实上, $e^{-W/kT}$ 是一个分子得到大于这么多的能量的概率。这是分子动理论的一条一般性原理:为了取得超过平均值的额外能量 W , 概率是 e 的负指数幂, 指数是我们所要获得的能量除以 kT 。现在假设有一些分子获得了这个能量。我们来估计每秒钟有多少分子离开液面。当然,仅仅使分子具有必要的能量并不意味着它实际上必然蒸发,因为它可能淹没在液体内很深的地方,或者,即使它接近表面,但可能沿着不适当的方向运动。每秒钟离开单位面积的分子数应当是:靠近表面的单位面积的分子数除以使得一个分子离开所需的时间,然后再乘上它们具有足够能量跑出液面的概率 $e^{-W/kT}$ 。

我们假设液面上的每个分子占有一定的截面 A , 则液面上单位面积内的分子数为 $1/A$ 。现在一个分子跑出液面需要多长的时间?如果分子具有一定的平均速率 v , 以及足够的能量可以移动一个分子的直径 D 那样的路程(即第一层的厚度), 则它经过这一厚度的时间就是离开液面所需的时间。这段时间即为 D/v 。于是蒸发的分子数近似地可写为

$$N_e = (1/A)(v/D)e^{-W/kT}. \quad (42.3)$$

式中每个分子的面积乘以这层分子的厚度近似地等于单个分子所占的体积 V_a , 因此为了达到平衡, 必须使 $N_e = N_c$, 或者

$$nv = (v/V_a)e^{-W/kT}. \quad (42.4)$$

我们可以消去 v , 因为它们相等, 虽然一项是蒸气中分子的速度, 另一项是正在蒸发的分子的速度, 但它们是相同的, 因为我们知道它们在一个方向上的平均动能是 $kT/2$ 。但是有人会反驳说:“不! 不! 这些是运动得特别快的分子, 是获取了额外能量的分子。”不过, 实际上并非如此, 因为开始把它们从液体中拉出来时, 为了抵抗势能, 它们必须消耗这些额外能量。所以, 当它们跑到液面时, 已经减慢到速度 v ! 它与我们讨论过的大气中分子速度分布的情况相同: 在底部, 分子具有一定的能量分布, 而到达顶部的那些分子具有同样的能量分布, 因为速度慢的分子根本到达不了上面, 而速度快的分子的运动则减慢下来。正在蒸发的分子和液体内的分子的能量分布相同——这是一个颇为引人注目的事实。无论如何, 因为还有种种其他的不精确性, 诸如存在着蒸气分子从液面弹回而不是跑入液体的概率, 等等, 所以过于细致地讨论我们的公式是无益的。这样我们对于蒸发率与凝结率有了一个粗略的概念, 当然, 我们看到蒸气密度 n 变化的方式还是像以前那样, 但是现在我们比较具体地理解了它, 而不是只把它看成一个任意的公式。

这个比较深入的理解使我们得以分析某些事情。例如, 假定我们抽出蒸气的速率快到跟蒸气形成的速率一样(倘若有一个很好的泵, 而液体的蒸发又很慢), 那么, 如果将液体温度保持为 T , 蒸发会有多快? 假设我们已从实验上测量了处于平衡状态时的蒸气密度, 因而

知道在给定的温度下,与液体处于平衡状态时单位体积的分子数。现在我们希望知道液体蒸发得有多快。虽然迄今为止我们只对它蒸发的部分作过粗略的分析,但除去有一个未知的反射系数因子外,到达液面的蒸气分子数也可以大体知道。所以我们可以利用平衡时离开液面的分子数与到达液面的分子数相等的事实。确实,当不断抽去蒸气时,分子只会跑出液面。但是如果蒸气被留下来,它将达到平衡状态下的密度,这时跑回液体的分子数等于蒸发的分子数。因此,不难看出每秒离开液面的分子数等于某个未知的反射系数 R 乘以假设蒸气仍然存在时每秒返回液面的分子数,因为这就是在平衡时应该补偿掉的数目,故

$$N_e = nvR = (vR/V_a)e^{-W/kT}. \quad (42.5)$$

当然,从蒸气中碰撞到液体上的分子数是不难算出的,因为我们毋须像在考虑分子如何离开液面那样,要对有关的力知道得那么多,用其他方式作论证要容易得多。

§ 42-2 热离子发射

我们举另外一个很实际的例子,它和液体的蒸发非常类似,以至于不值得另行分析。这在本质上是同样的问题。在电子管中,有一个电子发射源,即一根加热的钨丝以及一块吸引电子的带正电的板极。任何电子离开钨丝表面后就直接向板极飞去。这是一个理想的“泵”,它不停地“抽掉”电子。现在的问题是:每秒有多少电子从钨丝发射出来?而这个电子数目又怎样随温度而变化?这个问题的答案与式(42.5)相同,因为在一块金属中,电子受到金属的离子或原子的吸引。粗略地讲,它们被金属吸引。为了从金属中拉出一个电子,必须提供一定的能量,或拉出它来的功。这个功的大小视金属的种类而异。事实上,它甚至随某种给定金属表面的性质而变化,但是总的功约为几个电子伏,附带提一下,它是化学反应中所涉及的典型的能量。只要回忆一下化学电池中由化学反应产生的类似闪光灯电池上的电压约为 1 V 左右就可以想起这一事实了。

我们怎么能够找出每秒钟有多少电子跑出来呢?分析电子跑出的效应是十分困难的,用其他方法来分析比较容易。所以,开始时我们可以设想并没有将电子抽走,电子就像气体一样可以跑回到金属内。因此在平衡时应当有一定的电子密度,当然,它可以准确地由与式(42.1)同样的公式给出。在这里,粗略地讲, V_a 是金属中每个电子的体积,而 W 等于 $q_e \phi$,其中 ϕ 称为功函数,或者说是把一个电子拉出金属表面所需的电势。这就告诉我们,应当有多少电子存在于金属周围的空间中并撞到金属上,以平衡从金属跑出来的电子。于是,很容易算出如果抽走所有电子的话,会有多少电子从金属跑出,因为跑出的电子数恰好等于具有上述密度的电子“蒸气”跑回金属的电子数。换句话说,答案是:单位面积流入的电流等于每个电子的电荷乘以每秒到达单位面积的电子数,后者正如我们已多次见到的那样,就是单位体积的电子数乘以速度

$$I = q_e nv = (q_e v/V_a)e^{-q_e \phi/kT}. \quad (42.6)$$

而 1 eV 相当于温度为 11 600 K 的 kT 值。电子管灯丝比方说可以在温度为 1 100 K 下工作,这样指数因子约为 e^{-10} ,当我们改变一点温度时,指数因子变化很大。这样,我们再次看到公式的主要的特征是 $e^{-q_e \phi/kT}$ 。实际上,前面的因子是完全不正确的——结果表明金属中的电子的行为不能从经典理论得到正确描写,而要用量子力学才行,但是这使前面的因子

改变一点点。事实上,还没有一个人能够很好地直接求得它,虽则为了计算它许多人应用了高等量子力学理论。主要的问题是, W 是否略微随 T 而变化? 如果是的话,人们就无法把 W 随温度的缓慢变化和式前系数上的差别区别开来。比方说,如果 W 随温度呈线性变化,那么 $W = W_0 + \alpha kT$, 这样就有

$$e^{-W/kT} = e^{-(W_0 + \alpha kT)/kT} = e^{-\alpha} \cdot e^{-W_0/kT}.$$

于是, W 和温度的线性依赖关系等价于“常数”的改变。试图精确地得到式前的系数确实是非常困难的,并且通常是徒劳的。

§ 42-3 热电离

我们现在继续讨论另外一个应用同样概念的例子——总是同样的概念。这个例子与电离有关。假设在一种气体中有大量原子,它们处在中性状态,但气体很热,原子可能被离子化。我们想知道,如果温度一定,并且每单位体积的原子密度一定,在这种情况下将有多少离子。我们仍旧考虑一个容器,其中共有 N 个带有电子的原子(如果一个电子离开一个原子,那个原子就叫做离子,而如果原子呈中性,我们就简单地叫它为原子)。假设在任何确定的时刻,每单位体积中的中性原子数是 n_a , 离子数是 n_i , 而电子数是 n_e 。问题是:这三个数之间的关系如何?

首先,在这些数之间存在两个条件或约束。例如,在改变不同的条件,像温度或其他时, $n_a + n_i$ 将保持不变,因为这正是容器中的原子核数 N 。如果使单位体积的原子核数保持固定,而比方说改变温度,那么在电离过程中,某些原子将变为离子,但原子加离子的总数不会变化,也就是说

$$n_a + n_i = N.$$

另一个条件是,如果整个气体呈中性(如果我们忽略二次或三次电离),这就意味着在所有时间内离子的数目等于电子的数目,即

$$n_i = n_e.$$

这就是两个补充方程,它们只是简单地表示电荷守恒与原子守恒。

这些方程是正确的,我们在考虑实际问题时,最后要用到它们。但我们要想得到这些量之间的另一个关系式。为此可以这样做,我们再用类似的概念:电子离开原子需要一定的能量,称为电离能。同时为了使所有公式看起来一样,我们将它写为 W 。这样, W 就是从原子中拉出一个电子以产生一个离子所需要的能量。我们仍认为,在“蒸气”中每单位体积的自由电子数等于原子中单位体积的束缚电子数乘以 e 的负指数幂,其指数为束缚态与自由态之间的能量差除以 kT 。这又是一个基本方程。我们怎么把它写出来呢? 每单位体积的自由电子数当然是 n_e , 因为这就是 n_e 的定义。那么,每单位体积中束缚在原子中的电子数是多少? 可以放进电子的位置的总数看来是 $n_a + n_i$, 我们假设电子被束缚时,每个电子都束缚在一定的体积 V_a 之内。所以总的可束缚电子的体积将是 $(n_a + n_i)V_a$, 这样我们可以把公式写为

$$n_e = \frac{n_a}{(n_a + n_i)V_a} e^{-W/kT}.$$

但这个式子在一个基本方面是错误的,即当一个电子已经在一个原子内以后,另一个电子再也可能进入这个体积之内!换句话说,对于一个正在考虑究竟是要跑到“蒸气”中去,还是要凝结在某一位置上的电子来说,实际上并非所有可能位置的全部体积都是可供选择的。因为在这个问题中还有另外的特点:当已有其他电子处在那里时,这个电子就不能跑进去——它受到排斥力。由于这个原因,我们应当计算的只是电子可能位于那里或者不位于那里的那部分体积。也就是说,已为电子占据的体积不计在总的可供选择的体积之内,而允许占有的只是离子的体积,在那里有空位可让电子占据。所以,在这种情况下,我们发现可将公式写得更准确一些,就是

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{1}{V_a} e^{-W/kT}. \quad (42.7)$$

这个公式叫作萨哈(Saha)方程。现在我们来看看能否从所发生的动力学讨论中定性地了解为什么类似于这样的公式是正确的。

首先,每当一个电子跑到离子内,它们就组合成一个原子。同样,每当一个原子受到碰撞后,就会分裂为一个离子和一个电子。这两种比率应该相等。电子与离子彼此发现对方有多快呢?如果每单位体积的电子数增加,这种比率一定增加。如果每单位体积的离子数增加,比率也会增加。这就是说,产生复合的总比率一定正比于电子数和离子数的乘积。而由于碰撞引起的总电离率必定线性地依赖于电离的原子有多少,于是,当 $n_e n_i$ 的乘积与原子数 n_a 之间有某种关系时,两种比率将得到平衡。这种关系正好能用式(42.7)这个特殊公式(其中 W 是电离能)表述出来,这一事实当然包含的内容要更多一些。但我们不难理解公式必然包含像 $n_e n_i / n_a$ 这样的电子浓度、离子浓度与原子浓度之间的组合以得到一个与各个密度无关而只取决于温度、原子截面和其他的常数因子的常数。

我们可能还注意到,由于方程中包括每单位体积的粒子数,如果在原子加离子的总数 N 固定,即原子核的总数固定情况下做两个实验,但用两个体积不同的容器,则在大容器中,所有的 n 都较小。但由于比值 $n_e n_i / n_a$ 保持不变,因此,在较大的容器中电子与离子的总数必然较大。为了看出这一点,假定在体积为 V 的容器内有 N 个原子核,其中被电离的百分比是 f 。则 $n_e = fN/V = n_i$, 而 $n_a = (1-f)N/V$ 。这样我们的方程变为

$$\frac{f^2}{1-f} \frac{N}{V} = \frac{e^{-W/kT}}{V_a}. \quad (42.8)$$

换句话说,如果我们使原子密度越来越小,或使容器体积越来越大,电子与离子的百分比 f 必定增加。由于存在这种只是因密度下降即“膨胀”引起的电离现象,使得我们即使还不能从适当的能量观点来理解它,但也有理由相信,在极低的密度下,比如在恒星间的冷的空间中,也可能存在着离子。虽然为了产生离子需要许多 kT 的能量,但离子还是存在。

为什么当周围空间这么大时也会有离子存在,而当我们增加密度时,离子却趋于消失?答案是:考虑一个原子。偶尔,会有光,会有另一个原子或离子,总之会有保持热平衡的某个东西去撞击它。这种情况是极其罕见的,因为要使一个电子飞去而留下一个离子,需要大量的额外能量。如果空间极大,那么电子到处荡来荡去,经过年复一年也许还没有接近任何东西。但极其偶然地,它回到一个离子处,并和离子复合而组成一个原子。所以电子从原子中跑出来的比率非常低。但是因为空间体积极大,一个已经跑出来的电子要经过很长时间才

能找到另一个和它复合的离子,因而复合概率非常小。因此,尽管需要很大的额外能量,仍然会有一定数量的电子存在。

§ 42-4 化学动力学

在化学反应中也可以见到我们刚才称为“电离”的同样情况。例如,假定两个物体 A 与 B 组成化合物 AB,稍加思考后就能看出,AB 就是我们所谓的“原子”,B 可以叫作“电子”,A 可以叫作“离子”。经过这样代替以后,平衡方程式的形式就完全相同

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = C e^{-W/kT}. \quad (42.9)$$

当然,这个公式不是严格的,因为“常数”C 与容许 A 和 B 组合的体积等有关。但是,利用热力学的论据,人们可以确定指数因子上的 W 的含义,结果表明它与反应中所需的能量非常接近。

假定我们试图把这个公式理解为碰撞的结果,就像我们在理解蒸发公式时那样,看看单位时间有多少电子跑出来,又有多少电子跑回去。假设 A 和 B 在偶尔进行的一次碰撞中形成一个化合物 AB。假设 AB 是一个复杂分子,它四面八方作无规则运动,不时受到其他分子的碰撞,使它逐渐得到足够的能量以重新分裂为 A 和 B。

实际表明,在化学反应中,如果原子靠近时带有的能量太小,即使在 $A + B \rightarrow AB$ 的反应中可能释放能量,但是,A 与 B 可能彼此接触这一事实不一定会使反应开始进行。事实上,通常要求碰撞得很厉害才能使反应得以发生,A 与 B 之间的一次“软”碰撞不可能做到这一点,即使在反应过程中可能释放能量。所以我们假定在化学反应上这样的情况是非常普遍的:为了使 A 与 B 形成 AB,它们不能只靠彼此碰撞,而必须在碰撞时具有足够的能量。这个能量称为激活能——亦即使反应“激活”所需的能量。我们称 A^* 为激活能,为了使反应实际上得以进行,这是碰撞中所要求的额外能量。A 和 B 产生 AB 的速率 R_f ,应当包括 A 的原子数乘 B 的原子数,乘以单个原子碰撞在一定截面 σ_{AB} 上的速率,再乘以因子 $e^{-A^*/kT}$, $e^{-A^*/kT}$ 是它们具有足够能量的概率

$$R_f = n_A n_B v \sigma_{AB} e^{-A^*/kT}. \quad (42.10)$$

现在我们要求出相反的速率 R_r 。AB 也有一定的飞散开的机会。为了能够飞散开,不仅必须有一个使 A、B 完全分开的能量,而且正像使 A 和 B 难以化合在一起那样,必须存在一类 A 和 B 必须爬过它才能再次分开的能量“小丘”,它们必须不但具有正好可使彼此分开的足够能量,而且必须有一定的额外能量。这就像要翻过一座小山进入到一个深谷一样,人们得爬过小山进入深谷,在返回时又得爬出深谷,然后再爬过小山(图 42-1)。于是 AB 变成 A 和 B 的速率将正比于已存在的数目 n_{AB} ,再乘以 $e^{-(W+A^*)/kT}$

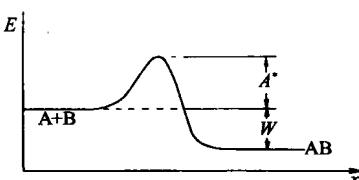


图 42-1 化学反应 $A + B \rightarrow AB$ 的能量关系

$$R_r = C' n_{AB} e^{-(W+A^*)/kT}. \quad (42.11)$$

这里的 C' 与原子的体积和碰撞率有关, 我们可以像在蒸发的情况下所做的那样, 用面积、时间和厚度来求出它, 但我们在里将不这样做。我们感兴趣的主要事情是在这两种速率相等时, 它们的比值等于 1。这告诉我们

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = C e^{-W/kT}.$$

像以前一样, 这里的 C 包括截面、速度以及其他与 n 无关的因子。

有趣的是, 反应率也随 $\exp[-(\text{常数})/(kT)]$ 而变化, 虽然这里的常数与支配浓度的常数并不相同, 激活能 A^* 与能量 W 也截然不同。 W 支配在平衡状态下 A、B 与 AB 的比例, 但是, 如果我们知道 $A + B$ 变为 AB 有多快, 这就不是一个平衡的问题了, 这里有一种不同的能量——激活能, 通过指数因子来支配反应率。

此外, A^* 并不是一个像 W 那样的基本常数。假如在器壁的表面上——或在某些其他地方——A 和 B 得以按某种方式暂时粘附在那里, 从而能使它们更易化合。换句话说, 我们可以找到一条穿过小山的“隧道”, 或者一座较低的小山。由能量守恒定律知道, 当一切都完成后, 我们仍由 A 和 B 组成 AB, 因而能量差 W 与反应发生的方式完全无关, 但是激活能 A^* 则与反应发生的方式极有关系。这就是为什么化学反应率对外部条件非常敏感的原因。如果化学反应依赖于表面的性质, 我们可以通过放入一个不同类型的表面以改变反应率, 也可以使反应率在一个“不同的圆筒”中进行, 这样它就有不同的反应率。或者, 如果我们放入第三种物质, 它可以大大改变反应率。有的东西仅仅通过使 A^* 稍加变化就能使反应率产生极大的变化——我们把它叫做催化剂。在一定的温度下, 由于 A^* 过大, 可能会使一个反应实际上根本无法进行, 但是, 当加入这种特殊物质——催化剂后, 因为降低了 A^* , 反应就进行得非常快。

附带说一下, 在 A 加 B 产生 AB 这样的反应中, 存在着一些麻烦, 因为当我们企图将两种物质放在一起以组成一种更稳定的物质时, 无法使能量和动量两者都守恒。因此, 我们至少还需要第三种物质 C, 这样实际反应就远为复杂了。正方向的反应速率包括乘积 $n_A n_B n_C$, 看来, 我们的公式是错误的, 但并非如此! 当我们考察 AB 沿反方向的反应率时, 我们发现它也需要和 C 发生碰撞, 这样, 在反方向的反应率中也存在着 $n_{AB} n_C$, 而在浓度平衡公式中 n_C 已被消去。无论反应机制如何, 我们开始写下的平衡定律式(42.9)绝对保证正确!

§ 42-5 爱因斯坦辐射律

我们现在转到一个类似的有趣问题, 它与黑体辐射定律有关。在上一章中, 我们用普朗克的方法, 考虑了振子的辐射问题, 得出了空腔内的辐射分布定律。振子必定具有某个平均能量, 既然它在振动, 它将辐射, 而且不断地往空腔辐射能量, 直至它积蓄了足够的辐射以使吸收和发射保持平衡。这样我们得到频率为 ω 的辐射强度由下列公式给出

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (42.12)$$

这个结果包括了进行辐射的振子具有有限的、间隔相等的能级的假设。我们没有说过光必

定是光子或任何某种与之类似的东西。当一个原子从某一能级跑到另一个能级时,能量必然以光的形式按一个能量单位 $\hbar\omega$ 释放出来。至于为什么会这样我们还没有讨论过。普朗克的原始思想认为物质而不是光是量子化的:物质振子不能取任何能量,它必须一份一份地取得能量。此外,推导中的麻烦还在于它是部分经典的。我们按经典物理计算了一个振子的辐射率,然后又回过来说:“不,这个振子有一系列能级。”所以,为了求得正确的和完全量子力学化的结果,物理学经历了非常缓慢的发展,终于在1927年建立了量子力学。但在此期间,爱因斯坦作了努力,他改变了普朗克的只有物质振子才可量子化的观点,而认为实际上光是一些光子,并且在某些方面可以看作是具有能量 $\hbar\omega$ 的粒子。此外,玻尔指出,任何原子系统都有能级,但并不需要像普朗克振子那样均匀地隔开。所以,从更完全的量子力学观点来重新推导,或者至少重新讨论辐射定律就成为必要了。

爱因斯坦假设普朗克的最后公式是正确的,他利用这个公式得到了某些前所未知的有关辐射和物质相互作用的崭新的知识。他的讨论如下:考虑一个原子的许多能级中的任何两个能级,比方说第m个与第n个能级(图42-2)。爱因斯坦假设,当这样一个原子受到适当频率的光照射时,它能够吸收光线中的光子,使它从n态跃迁到m态,而每秒钟发生这种情况的概率当然与这两个能级有关,但是它也正比于照射在原子上的光线有多强。我们把比例常数称为 B_{nm} ,以便提醒我们这不是一个自然界的普适常数,而只是与特定的两个能级有关:有的能级易于激发,有的能级则难于激发。现在,从m到n的发射率公式是什么?爱因斯坦认为必须把它分为两部分。首先,即使没有光存在,也应当存在原子从激发态落到较低能态而发射出一个光子的机会,我们称这一现象为自发发射。这与一个具有一定能量的振子即使在经典物理中也不会保持能量,而将通过辐射丧失能量的思想相似。于是,经典系统自发辐射的类比是:如果原子处在一种激发态,那么它就存在着一个确定的从m下降到n的概率 A_{mn} , A_{mn} 仍是依赖于这两个能级,但与原子是否受到光的照射无关。但是爱因斯坦再前进了一步,通过与经典理论的比较以及其他论据得出,发射也受光的存在的影响——当恰当频率的光照射到原子上时,它会增加一个光子的发射率,而这个发射率正比于光的强度,比例常数是 B_{mn} 。如果后来我们推导出这个系数是零的话,就能发现爱因斯坦错了;当然,我们将发现他是对的。

这样,爱因斯坦假定存在着三种过程:一种是正比于光强度的吸收,一种是正比于光强度的发射,它称为感生发射或者有时称为受激发射,还有一种是与光无关的自发发射。

现在我们假设在温度为T的平衡条件下,在n态有 N_n 个原子,在m态有 N_m 个原子。那么由n态跑到m态的原子总数就是在n态的原子总数乘以每秒钟一个原子从n态上升到m态的比率。所以我们就得到一个每秒钟从n上升到m的原子数的公式

$$R_{n \rightarrow m} = N_n B_{nm} I(\omega). \quad (42.13)$$

从m到n的数目可以用同样方式表示,即在m态的原子数 N_m 乘以每秒钟一个原子掉到n态的概率。这一次我们的表示式是

$$R_{m \rightarrow n} = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)]. \quad (42.14)$$

现在我们假设,在热平衡时跑上去的原子数必定等于落下来的原子数。至少,这是使



图42-2 原子内两个能级间的跃迁

每个能级上的原子数确实保持不变的一种方式^{*}。所以我们将假定这两种比率在平衡时相等。此外,我们还有另一种情况:我们知道 N_m 与 N_n 相比有多大——两者的比值是 $e^{-(E_m - E_n)/kT}$ 。现在爱因斯坦假设:从 n 到 m 的跃迁中唯一有效的光线只是具有相应于能级差的频率的光,所以在我们的所有公式中就有 $E_m - E_n = \hbar\omega$, 于是

$$N_m = N_n e^{-\hbar\omega/kT}. \quad (42.15)$$

这样,如果使两种比率相等

$$N_n B_{nm} I(\omega) = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)],$$

除以 N_m , 得到

$$B_{nm} I(\omega) e^{\hbar\omega/kT} = A_{mn} + B_{mn} I(\omega). \quad (42.16)$$

我们可以由这个方程算出 $I(\omega)$, 它就是

$$I(\omega) = \frac{A_{mn}}{B_{nm} e^{\hbar\omega/kT} - B_{mn}}. \quad (42.17)$$

但普朗克已经告诉我们这个公式必须是式(42.12)。由此我们可以推出一些结论:首先, B_{nm} 必定等于 B_{mn} , 否则我们就不能得出 $(e^{\hbar\omega/kT} - 1)$ 。所以, 爱因斯坦发现了某种他还不知道如何计算的东西, 即感生发射概率必定等于吸收概率。这是十分有趣的。此外, 为了使式(42.17)与式(42.12)一致, A_{mn}/B_{mn} 必须为

$$A_{mn}/B_{mn} = \hbar\omega^3/\pi^2 c^2. \quad (42.18)$$

所以, 比如说如果已知一定能级的吸收率, 就可以推导出自发发射率和感生发射率, 或者它们的任何组合。

这就是迄今为止爱因斯坦或任何别的人利用这样的论证所能得到的结果。当然, 要实际计算绝对自发光率或对任何特殊原子跃迁的其他比率, 都需要所谓量子电动力学的有关原子内部机制的知识, 这些知识直到 11 年后才被人们所发现。而爱因斯坦的这个工作是在 1916 年完成的。

今天感生发射的可能性已找到了颇有意义的应用。如果有光存在, 它将倾向于激发向下的跃迁。如果某些原子处于较高的状态, 跃迁就会使可资应用的光能增加 $\hbar\omega$ 。现在, 通过某种非热学的方法, 可以使气体中 m 态的原子数远大于 n 态的原子数。这种情况远离平衡态, 因此不能用平衡态的公式 $e^{-\hbar\omega/kT}$ 。我们甚至可以安排得使较高状态的原子数非常之大, 而较低状态的原子数实际为零。于是具有相应于能量差 $E_m - E_n$ 的频率的光不会强烈地被吸收, 因为在 n 态中没有那么多原子去吸收它。另一方面, 当这样的光存在时, 它将诱发从高能态的发射! 所以, 如果在高能态有大量原子, 就会产生一种连锁反应, 也就是说一旦原子开始发射, 越来越多的其他原子将引起发射, 最后大量的原子都一起倾泻到低能级上去。这就是所谓的激光, 或者在远红外的情况下, 就称为微波激射(图 42-3)。

为了得到处在 m 态的原子, 可以应用各种技巧。如果我们用高频的强光束照射, 原子

* 这并非是唯一可能的使不同能级上的原子数保持不变的安排方式, 但这是实际发生的情况。在热平衡状态下, 每一个过程必定被它准确的相反过程所平衡, 这一原理称为细致平衡原理。

就能到达更高的能级。它们能够从这些高能级上发射出各种光子而落下来,直至全部到达 m 态。如果它们趋于停留在 m 态而不发射,这种状态称为亚稳态。以后,通过感生发射,它们一起倾泻到 n 态。一个比较技术性的问题是,假如我们将这个系统放在一个普通的容器内,那么与感应效应相比较,它们将沿许多方向自发辐射,以致又会引起麻烦。但是,如果在容器的每一边放上一面接近于理想的镜子,以致被发射的光得到更多的机会一而再、再而三地感生更多的发射,那么我们就能够加强感应效果,提高它的效率。虽然镜子几乎能100%地反射,但它仍有少许透射,因而有一点点光跑出去。当然,最后从能量守恒定律看来,所有的光都沿一个统一的笔直的方向跑出去,而形成强光束。今天,利用激光器可能做到这一点。

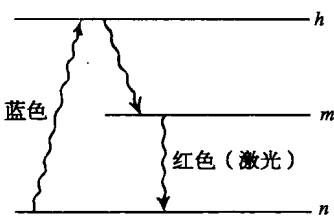


图42-3 如用蓝光将原子激发到较高的状态 h ,它可以发射一个光子使原子处于 m 态, m 态的原子足够多时就开始产生激光

第 43 章 扩 散

§ 43-1 分子间的碰撞

迄今为止,我们只考虑了处于热平衡状态下气体中的分子的运动。我们现在要讨论当情况接近但不是精确处于平衡态时将发生什么。在远离平衡态的情况下,问题极其复杂,但在非常接近于平衡态时,我们很容易得出会出现什么。然而为了要看出会发生什么事情,我们必须回到分子动理论上去。统计力学和热力学所处理的是平衡态,但是在偏离平衡的情况下,可以说,我们只能通过一个一个原子来分析所发生的事情。

作为非平衡状态的一个简单例子,我们来考虑气体中离子的扩散。假设在气体中存在着浓度相当小的离子——即带电分子。如果在气体上施加一个电场,则每个离子将受到一个力,这个力不同于气体中的中性分子所受的力。假设没有其他分子存在,直至到达容器壁前,离子都有一个恒定加速度。但是,由于存在着其他分子,它不能这样,它的速度只在和其他分子发生碰撞并失去动量以前增加。此后再次增加速率,它又会再次失去动量。净结果是,这个离子沿着一条奇特的路径运动,但是净运动总是沿着电力的方向。我们将看到离子在作一种平均速率正比于电场的平均“漂移”,电场越强,离子跑得越快。当加上电场,并且离子沿着电场方向运动时——当然这不是处在热平衡状态,而是力图趋向于平衡——离子位于容器的终端。利用分子动理论,我们可以计算漂移速度。

我们现在的数学水平实际上不能精确计算将出现的事情,但是我们可以获得能显示所有基本特色的近似结果。我们可以找出事情如何随着压强、温度等变化,但是不可能精确地得出所有各项前面的正确的数值因子。所以,在推导过程中,我们将不去为数值因子的精确值而担心。这只有使用非常细致的数学处理方法才能得出。

当我们考虑在非平衡状态下将会出现什么之前,需要稍微仔细地考察热平衡状态下的气体还会发生什么情况。比如说,我们要知道分子相继两次碰撞之间的平均时间。

显然,任何分子会以一种无规则的方式与其他分子作一连串碰撞。在一段相当长的时间 T 中,一个特定的分子具有一定的碰撞次数 N 。如果使时间加倍,碰撞次数也将加大一倍。可见碰撞次数正比于时间 T 。我们可以将这一点写成

$$N = T/\tau. \quad (43.1)$$

这里将比例常数写为 $1/\tau$,常数 τ 具有时间的量纲,并且是碰撞之间的平均时间。例如,假定在 1 h 内有 60 次碰撞, τ 就是 1 min。我们将说,这个 τ (1 min)就是碰撞之间的平均时间。

我们常常会提出这样的问题:“在下一个很短的时间间隔 dt 内,一个分子受到一次碰撞的机会是多少?”可以直接想到,答案是 dt/τ 。但是我们要作出一个更使人信服的论证。假设分子数 N 很大。在下一个时间间隔 dt 内将发生多少次碰撞?如果处在平衡态,任何东

西对时间的平均值不变。所以 N 个分子在时间 dt 内发生的碰撞次数与一个分子在时间 $N dt$ 内发生的碰撞次数相同。我们知道这个数目是 $N dt / \tau$ 。所以 N 个分子在时间 dt 内的碰撞次数是 $N dt / \tau$, 而任何一个分子作一次碰撞的机会或者概率都正好是 $1/N$, 或者正像我们上面所猜测的那样, 是 $(1/N)(N dt / \tau) = dt / \tau$, 这就是说, 在时间 dt 内受到一次碰撞的分子数占总分子数的比例为 dt / τ 。举一个例子来说, 如果 τ 是 1 min, 那么在 1 s 内受到碰撞的分子所占的比例是 $1/60$ 。当然, 这意味着, 占总数 $1/60$ 的分子正好和那些下一个时刻就会碰撞的分子靠得足够近, 因而它们的碰撞将在下一个 1 min 内发生。

当我们说碰撞之间的平均时间 τ 是 1 min 时, 并不意味着所有的碰撞都分别在正好相隔 1 min 时发生。某一特定的分子并不要等 1 min 后才有另一次碰撞。相继两次碰撞间的时间完全是可变的。我们后面的工作也并不需要知道它。但是我们可以将“两次碰撞之间的时间是什么?”这样的问题略加改动。我们知道, 对于上述情况, 平均时间是 1 min, 但是我们或许还想知道, 比方说, 在 2 min 内不发生碰撞的机会有多大?

我们将找出对以下的一般性问题的答案: “一个分子在时间 t 内一次碰撞也不发生的概率是多少?”在某一个任意时刻——可以称为 $t = 0$ ——我们开始注视一个特定的分子。直到时刻 t 它还未和另一个分子碰撞的机会有多大? 为了计算这个概率, 我们观察在容器内所有 N_0 个分子将发生什么情况。在等了一段时间 t 后, 它们中的某些已受到碰撞。令 $N(t)$ 为直到时间 t 为止没有受到碰撞的分子数。当然, $N(t)$ 小于 N_0 。我们可以求得 $N(t)$, 因为我们知道它随时间怎样变化。如果我们知道了直到 t 为止的未碰撞分子数是 $N(t)$, 那么, 直到 $t + dt$ 为止的未碰撞分子数 $N(t + dt)$ 小于 $N(t)$, 其差值就是在 dt 内发生碰撞的分子数。我们上面已用平均时间 τ 将 dt 时间内所发生的碰撞数写为

$$dN = N(t) dt / \tau.$$

于是有方程式

$$N(t + dt) = N(t) - N(t) \frac{dt}{\tau}. \quad (43.2)$$

按照微分的定义, 左边的量 $N(t + dt)$ 可写为 $N(t) + (dN/dt)dt$, 将此代入后, 方程式(43.2)就成为

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau}. \quad (43.3)$$

在 dt 间隔内损失的分子数正比于现在的分子数, 反比于平均寿命 τ 。如果把式(43.3)改写为

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\frac{dt}{\tau}, \quad (43.4)$$

就很容易积分。每一边都是个全微分, 所以积分是

$$\ln N(t) = -\frac{t}{\tau} + \text{常数}, \quad (43.5)$$

也就是说

$$N(t) = \text{常数} \cdot e^{-t/\tau}. \quad (43.6)$$

我们知道常数必定正好是现在的总分子数 N_0 , 因为从 $t = 0$ 开始它们全都等待着它们的“下一次”碰撞。我们可以把结果写为

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}. \quad (43.7)$$

如果我们要知道不发生碰撞的概率 $P(t)$, 可以将 $N(t)$ 除以 N_0 来得到, 于是

$$P(t) = e^{-t/\tau}. \quad (43.8)$$

我们的结果是: 某个分子直到时间 t 还没有发生碰撞的概率是 $e^{-t/\tau}$, 这里的 τ 是两次碰撞间的平均时间。概率从 $t=0$ 时的 1(或者必然发生) 开始随 t 越来越大而变小。一个分子在等于 τ 的时间内还不发生一次碰撞的概率是 $e^{-1} = 0.37\cdots$ 。两次碰撞之间的时间大于平均碰撞时间的机会小于 $1/2$ 。这是完全正确的, 因为有足够的分子在远大于平均碰撞时间的时间前不发生碰撞, 因而平均碰撞时间仍然可以是 τ 。

我们原来定义 τ 为碰撞之间的平均时间。由式(43.7)得到的结果也表明从任一时刻开始到下一次碰撞的平均时间也是 τ 。我们可以证明这个多少有点使人惊讶的事实: 在任意选定的初始时刻后的时刻 t , 在时间间隔 dt 内, 受到下一次碰撞的分子数是 $N(t)dt/\tau$ 。当然, 这些分子的“在下一次碰撞前的时间”正好是 t 。“在下一次碰撞前的平均时间”可以用通常求平均值的方法写为

$$[\text{在下一次碰撞前的平均时间}] = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \frac{N(t)}{\tau} dt.$$

利用式(43.7)得出 $N(t)$, 并计算积分, 我们确实发现 τ 是从任一时刻到下一次碰撞的平均时间。

§ 43-2 平均自由程

描写分子碰撞的另一种方式是不谈碰撞之间的时间, 而谈碰撞之间分子走了多远。如果我们说碰撞之间的平均时间是 τ , 而分子的平均速度是 v , 我们就可预期碰撞之间的平均距离(记为 l)正好是 τ 与 v 的乘积。两次碰撞之间的距离通常称为平均自由程

$$\text{平均自由程 } l = \tau v. \quad (43.9)$$

在本章中, 我们对每一个特殊场合下所指的究竟是哪一类平均并不那么在意。各种可能的平均——权重平均, 方均根, 等等——全都近似相等, 只差一个接近于 1 的因子。不管怎样, 为了得到正确的数值因子, 必须进行详细的分析, 因此我们不必担心在每一种特殊情况下需要用哪种平均值。我们也要提醒读者注意, 这里对某些物理量采用的代数符号(如平均自由程的 l)并非根据共同接受的习惯方式, 主要是因为没有被普遍采纳的记法。

正如一个分子在短时间 dt 内进行一次碰撞的机会是 dt/τ 一样, 它在距离 dx 内进行一次碰撞的机会是 dx/l 。按照上面采用过的同样论证, 读者可以证明一个分子在下一次碰撞前至少跑过距离 x 的概率是 $e^{-x/l}$ 。

一个分子在与其他分子碰撞前走过的平均距离——平均自由程 l ——取决于它周围有多少分子以及这些分子的“大小”, 即取决于它面临的“靶”有多大。我们通常用“碰撞截面”来描写在一次碰撞中靶的有效“大小”, 这与核物理或光散射问题中采用的概念相同。

考虑一个运动粒子在气体中移动距离 dx 的情况。气体中每单位体积内有 n_0 个散射体

(分子)(图 43-1)。观察与所选定的粒子运动方向相垂直的每单位面积, 将发现那里有 $n_0 dx$ 个分子。如果每个分子提供一个有效碰撞面积, 即通常说的“碰撞截面” σ_c , 则散射体所覆盖的总面积为 $\sigma_c n_0 dx$ 。

所谓“碰撞截面”指的是这样一种面积, 只要所研究的分子和一个特定的分子相碰撞, 这种分子的中心必定处在那块面积内。假如分子是一些小球(一幅经典图像), 我们就可以预期 $\sigma_c = \pi(r_1 + r_2)^2$, 这里的 r_1 和 r_2 是两个碰撞体的半径。分子发生一次碰撞的机会是散射分子所覆盖的面积与总面积之比, 总面积可取为一个单位。故在距离 dx 内发生一次碰撞的概率正好是 $\sigma_c n_0 dx$

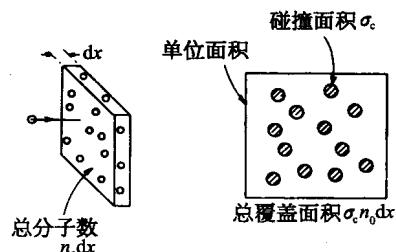


图 43-1 碰撞截面

$$\text{在 } dx \text{ 中发生一次碰撞的机会} = \sigma_c n_0 dx. \quad (43.10)$$

我们从上面已经看到过在 dx 内发生一次碰撞的机会也可用平均自由程 l 写为 dx/l , 与式(43.10)比较, 就可以把平均自由程与碰撞截面联系起来

$$\frac{1}{l} = \sigma_c n_0. \quad (43.11)$$

如果把它写为

$$\sigma_c n_0 l = 1, \quad (43.12)$$

将更便于记忆。

这个公式可以这样来看, 当分子经过距离 l , 在这段距离内散射分子正好能够覆盖住整个面积时, 平均说来将会发生一次碰撞。在一个长度为 l 、底面积为单位面积的圆柱形体积内, 有 $n_0 l$ 个散射体, 如果每一个散射体具有面积 σ_c , 则总的覆盖面积是 $n_0 l \sigma_c$, 它正好是一个面积单位。当然, 整块面积并没有被覆盖住, 因为有些分子被其他分子遮盖了一部分。这就是为什么有些分子在碰撞前跑得比 l 远的原因。分子在跑过距离 l 的这段时间内进行了一次碰撞, 这只是就平均而言。从平均自由程的测量中, 我们可以确定散射截面 σ_c , 并与建立在更详尽的原子结构理论基础上算出的结果进行比较。但这是一个不同的课题! 所以我们还是回到非平衡态的问题上来。

§ 43-3 漂 移 速 率

我们来描述一个或几个分子发生的行为, 它们在有的方面与气体中的大多数分子不同。我们把“大多数”分子称为“背景”分子, 而跟背景分子不同的分子则称为“特殊”分子, 或简称为 S 分子。任何原因都可以使分子变成特殊: 比如它可能比背景分子重一些, 可能有不同的化学成分, 还可能带有电荷——也就是说是一个在中性分子(不带电荷分子)背景下的离子。由于 S 分子在质量或电荷上的不同, S 分子可能受到的力与作用在背景分子上的力不同。考虑了在这些 S 分子上所发生的情况后, 我们就能够理解一些基本效应, 它们在许多不同的现象中以相似的方式出现。可以列举几个例子: 气体的扩散、电池中的电流、沉淀、离心分离, 等等。

我们先集中注意以下基本过程: 在背景气体中的一个 S 分子受到某种特殊的力 F 的作

用(比如说可能是重力或电力),此外它还受到由于和背景分子碰撞而产生的比较寻常的力。我们现在来描写S分子的一般行为。就细节来说,它所表现出的就是一再与其他分子碰撞,一会儿冲到这里,一会儿冲到那里。但是,如果我们留心观察的话,会注意到在力F的方向上,这个分子确实有某些净移动。可以说,在它的无规则运动上再叠加了一个漂移运动。我们希望知道这个分子由于力F而产生的漂移速度有多大。

如果我们从某个时刻开始观察S分子,可以预期它处在两次碰撞之间的某个位置上。除了它在最后一次碰撞中所留下的速度外,还获得了由于力F产生的某一速度分量。在一个短时间内(平均而言,在 τ 时间内),它受到一次碰撞,因而开始沿着一个新的轨道运动。它将具有一个新的初速度,以及由F产生的加速度。

为了简单起见,暂时假设每次碰撞后,S分子都获得一个“全新”的开始。也就是说,它根本不记得由F产生的过去的加速度。如果我们的S分子比背景分子轻得多,这是一个合理的假说,但一般说来它肯定不成立。以后我们将讨论一种改进的假设。

所以,暂时我们假定S分子在每次碰撞后所具有的速度沿任何方向的可能性都是相等的。这个初始速度是各向同性的,而且对任何净运动均无贡献,所以在一次碰撞后,我们将不必考虑它原来的速度。每个S分子除了它的无规则运动外,在任何时刻,还具有自上一次碰撞起由力F的作用而引起的沿F方向的附加速度。速度的这一部分的平均值是多大呢?它正是加速度 F/m (这里的m是S分子的质量)乘以自上一次碰撞以来的平均时间。而自上一次碰撞以来的平均时间必定和直到下一次碰撞为止的平均时间相同,前面我们曾把它称为 τ 。当然,由F所引起的平均速度正是我们所说的漂移速度,这样得到关系式

$$v_{\text{漂移}} = \frac{F\tau}{m}. \quad (43.13)$$

这个基本关系式是本章课题的核心。在确定 τ 是什么时,会出现某些复杂性,但是基本过程由式(43.13)确定。

你们会注意到,漂移速度正比于力。遗憾的是,对比例常数没有通用的名称。对于每类不同的力采用了不同的名称。在电学问题中,力可以写成电荷乘以电场 $F = qE$,而速度和电场E之间的比例常数通常称为“迁移率”。尽管有可能出现一些混淆,对于任何力,我们都将采用迁移率这个词来表示漂移速度与力的比值,即写为

$$v_{\text{漂移}} = \mu F, \quad (43.14)$$

而一般地称 μ 为迁移率。由式(43.13)有

$$\mu = \frac{\tau}{m}. \quad (43.15)$$

迁移率正比于碰撞之间的平均时间(τ 长时使S分子运动减慢的碰撞也少),并反比于质量(较大的惯性意味着在碰撞之间获得的速率较小)。

要想得到式(43.13)(它是正确的)中的正确数值系数,必须小心一些。为了避免混淆起见,我们还应当指出,在论证中包含着一个只有经过小心而详尽的考察才能领会的微妙之处。不管表面上如何,为了说明确实存在困难,我们以一种似乎合理但却是错误的方式重复一次能导出式(43.13)的论证(这种方式可以在许多教科书上找到)。

我们本来可以这样说:碰撞之间平均时间是 τ 。在一次碰撞后粒子以无规速度开始运

动,但在两次碰撞之间它得到了某个附加速度,并且等于加速度乘以时间。由于到下一次碰撞所需的时间为 τ ,那时它具有 $(F/m)\tau$ 的速度。在碰撞开始时,它的速度为零。所以在两次碰撞之间,平均说来,速度是末速度的一半,因而平均漂移速度为 $F\tau/2m$ 。但这个结果是错误的!而式(43.13)才是正确的,虽然这些论证听起来同样使人满意。第二个结果之所以不正确,其理由较为微妙。它与下述情况有关:有论证中,似乎所有的碰撞间隔时间都是平均时间 τ 。事实上,某些时间比平均值短,另一些时间又比平均值长。短的时间出现得较频繁,但是对漂移速度的贡献却较小,因为它们提供给粒子进行“真正得以运动”的机会较小。如果计及碰撞间自由时间的分布,可以证明没有从第二种论证中得到的因子 $1/2$ 。发生错误的原因在于企图通过简单的论证将平均末速度与平均速度本身联系起来。这种联系不是简单的,所以最好还是集中注意我们所想要的东西本身,即平均速度。我们给出的第一个论证直接地——并且正确地——确定了平均速度!但是也许我们现在可以看出,为什么在初步的推导中,一般地说我们并不企图得出所有正确的数值系数!

现在回来讨论我们的简化假设,即每次碰撞把所有与过去运动有关的记忆全部消除掉——每次碰撞后都有一个全新的开始。假如 S 分子是在较轻的背景分子中的一个较重的物体,那么在每次碰撞中 S 分子将不会丢失它“前进”的动量。在它的运动再次“无规则化”以前,还要经过几次碰撞。因此我们应该假设,在每次碰撞中——平均说来在每一个时间 τ 内——S 分子将失去其一定比例的动量。我们不打算讨论细节,而只是说明结果等价于用一个新的较长的 τ ——它相当于平均“忘却时间”,即“忘却”它的前进动量的平均时间——来代替平均碰撞时间 τ 。对 τ 作了这样一个解释,我们就可以把式(43.15)运用到那种不完全像起先所假设的那样简单的情况下。

§ 43-4 离子电导率

现在我们把所得结果运用到一个特殊情况中去。假设在一个容器内盛有气体,其中也有某些离子——带净电荷的原子或分子。图 43-2 描绘了这一情况。如果容器的两个正对面的器壁都是金属板,我们可以将它们联在电池的正负极上,从而在气体内产生一个电场。电场使离子受到作用力,这样它们开始向这一块或那一块极板漂移,引起一个电流,而带有离子的气体的行为就像一个电阻器。由漂移速度算出离子流后,就可以算出电阻。我们特别要问:电流与加在两板之间的电位差 V 的关系如何?

假设我们的容器是一个长方形的盒子,长为 b ,横截面积为 A (图 43-2)。如果从一块极板到另一块极板的电位差或电压降是 V ,极板之间的电场 E 就是 V/b (电势就是使单位电荷从一块极板跑到另一块极板所做的功。在单位电荷上的力是 E)。如果两极板之间的任何地方 E 都相同——在我们这里这是一个足够好的近似,那么电场在单位电荷上所做的功正好是 Eb ,所以 $V = Eb$)。作用在气体的一个离子上的特殊的力是 qE ,这里 q 是离子的电荷。因而离子的漂移

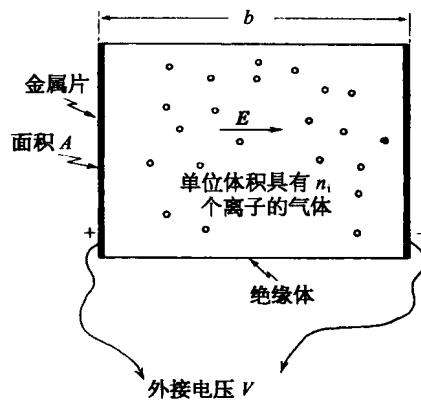


图 43-2 电离气体的电流

速度是 μ 与这个力的乘积, 即

$$v_{\text{漂移}} = \mu F = \mu q E = \mu q \frac{V}{b}. \quad (43.16)$$

电流 I 是单位时间内流过的电荷。抵达两块极板之一的电流由单位时间内到达这块极板的离子的总电荷给出。如果离子向这块极板漂移的速度是 $v_{\text{漂移}}$, 则在距离($v_{\text{漂移}} T$)内的离子将在时间 T 内到达这块极板。如果每单位体积内有 n_i 个离子, 则在 T 时间内到达极板的离子数为($n_i A v_{\text{漂移}} T$)。每个离子带电荷 q , 故有

$$\text{在时间 } T \text{ 内收集的电荷} = q n_i A v_{\text{漂移}} T. \quad (43.17)$$

电流 I 是在 T 时间内所收集的电荷再除以 T , 这样

$$I = q n_i A v_{\text{漂移}}, \quad (43.18)$$

用式(43.16)的 $v_{\text{漂移}}$ 代入, 就有

$$I = \mu q^2 n_i \frac{A}{b} V. \quad (43.19)$$

我们发现电流正比于电压, 这正好是欧姆定律的表达形式, 而电阻 R 是比例常数的倒数

$$\frac{1}{R} = \mu q^2 n_i \frac{A}{b}. \quad (43.20)$$

这样我们就得到了电阻与分子的性质 n_i 、 q 和 μ 之间的一个关系式, μ 又取决于 m 和 τ 。如果由原子的测量中知道 n_i 与 q , 就可用 R 的测量来确定 μ , 由 μ 还可以确定 τ 。

§ 43-5 分子扩散

现在我们转到另一类问题和另一类分析——扩散理论。假设有一个处在热平衡状态的气体容器, 我们在容器中的某处放入少量不同种类的气体。我们把原来的气体称为“背景”气体, 新的气体称为“特殊”气体。特殊气体将开始扩展到整个容器中, 但是由于有背景气体的存在, 它只能缓慢地扩展开来。这种缓慢的扩展过程称为扩散。扩散过程主要由特殊气体的分子与背景气体的分子之间的碰撞所控制。经过大量碰撞后, 结果特殊分子或多或少均匀地遍布整个容器。我们必须十分小心, 不要把气体的扩散和可能由于对流引起的大量分子的总体输运现象混为一谈。更一般地说, 两种气体的混合通常都是由对流和扩散组合而成的。我们现在感兴趣的只是那种不存在“风生流”的情况。气体只是由于分子运动和扩散而扩展的。我们希望算出扩散有多快。

现在我们来计算由于分子运动而引起的“特殊”气体分子的净的流动。只有在分子的分布上存在某种不均匀性时, 才会有净的流动, 否则, 所有分子运动取平均后不会有净的流动。我们首先考虑沿 x 方向的流动。为此设想一个表面垂直于 x 轴的平面, 并计算经过这个平面的特殊分子数目。为了得到净分子流, 我们必须把沿正 x 方向通过平面的分子数计为正的, 然后减去沿负 x 方向通过平面的分子数。我们曾多次看到, 在时间 ΔT 中经过一个表面的分子数等于在该表面和与之相距 $v \Delta T$ 处的表面间的体积内的分子数(注意这里的 v 是分子的实际速度, 而不是漂移速度)。

为了简化代数运算,取平面面积为一个单位面积。因而从左向右(以向右表示正 x 方向)通过的特殊分子数是 $n_- v \Delta T$, 这里 n_- 是左边每单位体积的特殊分子数(实际上差一个 2 左右的因子,但我们不去管这些因子)。类似地,从右向左通过平面的分子数是 $n_+ v \Delta T$, 这里 n_+ 是平面右边的特殊分子数密度。如果我们称分子流为 J , 即单位时间通过单位面积的净分子流,则有

$$J = \frac{n_- v \Delta T - n_+ v \Delta T}{\Delta T}. \quad (43.21)$$

或

$$J = (n_- - n_+)v. \quad (43.22)$$

对 n_- 和 n_+ 将用什么值呢? 当我们说“左边的密度”时,究竟指的是离左边多远距离处的密度? 我们应当选择分子开始“飞行”的那个地方的密度,因为开始这种旅行的分子数由在那个地方的分子数来决定。因此 n_- 应当是在左边的距离等于平均自由程 l 处的密度,而 n_+ 则是在我们的假想平面右边 l 处的密度。

如果考虑用一个称为 n_a 的 x 、 y 与 z 的连续函数来描写特殊分子在空间的分布,这将是方便的。 $n_a(x, y, z)$ 指的是中心在 (x, y, z) 的小体积元中的特殊分子数密度。利用 n_a ,可以将差 $(n_+ - n_-)$ 表示为

$$(n_+ - n_-) = \frac{dn_a}{dx} \Delta x = \frac{dn_a}{dx} \cdot 2l. \quad (43.23)$$

将这个结果代入式(43.22)并略去因子 2, 得

$$J_x = -lv \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.24)$$

我们发现,特殊分子流正比于密度的微商,或者说正比于有时称为密度“梯度”的那个量。

显然,我们已经作了某些粗略的近似。除去略掉几个 2 之类的因子外,我们在原来应当用 v_x 的地方用了 v , 并且还假设了 n_+ 与 n_- 是离开假想平面垂直距离为 l 的两个地方的值,而对于那些没有垂直地飞过平面元的分子来说, l 应该是离开平面的斜向距离。所有这些都可以改进,更仔细的分析结果表明,式(43.24)的右边应乘以 $1/3$,所以更好的答案是

$$J_x = -\frac{lv}{3} \cdot \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.25)$$

对 y 方向与 z 方向可以写出类似的方程式。

扩散流 J_x 与密度梯度 dn_a/dx 可以由宏观的观察来进行测量。它们从实验上测得的比值称为“扩散系数” D ,这样

$$J_x = -D \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.26)$$

我们已经能够表明,对于气体来说

$$D = \frac{1}{3} lv. \quad (43.27)$$

到目前为止,在本章中已考虑了两种不同的过程:迁移率,即由于“外”力而引起的分子的漂移;扩散,即仅由内力和无规则碰撞引起的分子的扩展。然而,在它们之间存在一个关系,因

为它们两者从根本上说都依赖于分子的热运动,而在两种计算中都出现平均自由程 l 。

如果在式(43.25)中,以 $l = v\tau$ 及 $\tau = \mu m$ 代入,我们就有

$$J_x = -\frac{1}{3}mv^2\mu \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.28)$$

但 mv^2 只取决于温度。回想一下

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT, \quad (43.29)$$

则

$$J_x = -\mu kT \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.30)$$

我们发现扩散系数 D 正是 kT 乘以迁移率 μ

$$D = \mu kT. \quad (43.31)$$

实际情况是式(43.31)的数值系数是完全正确的——不用再加上什么别的因子来修正我们的粗糙假设。事实上,可以证明,即使在我们简单计算的细节完全不适用的复杂情况中(例如,液体中微粒悬浮的情况),式(43.31)也必定同样正确。

为了说明式(43.31)一般来说也必然正确,我们将以另一种方式,即只使用统计力学的基本原则来推导它。设想一种存在“特殊”分子的梯度的情况,按照式(43.26),将有一个正比于密度梯度的扩散流。现在我们在 x 方向上施加一个力场,使每个特殊分子感受到力 F 。按迁移率 μ 的定义,将出现一个由下式决定的漂移速度,即

$$v_{\text{漂移}} = \mu F. \quad (43.32)$$

利用我们通常的论证,漂移流(单位时间内通过单位面积的净分子数)将是

$$J_{\text{漂移}} = n_a v_{\text{漂移}}, \quad (43.33)$$

或

$$J_{\text{漂移}} = n_a \mu F. \quad (43.34)$$

现在,我们来调整力 F 使得由它引起的漂移流刚好与扩散流平衡。这样,在我们的这些特殊分子中不存在净流。于是有

$$J_x + J_{\text{漂移}} = 0,$$

或

$$D \frac{dn_a}{dx} = n_a \mu F. \quad (43.35)$$

在“平衡”条件下,我们找到了一个稳定的(对时间说来)密度梯度

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a \mu F}{D}. \quad (43.36)$$

但是,请注意! 我们正在描写一个平衡条件,所以可以运用统计力学的平衡定律。按照这些定律,在坐标 x 处找到一个分子的概率正比于 $e^{-U/(kT)}$, 这里 U 是势能。用数密度 n_a 表示,这意味着

$$n_a = n_0 e^{-U/kT}. \quad (43.37)$$

将式(43.37)对 x 求微商, 得

$$\frac{dn_a}{dx} = -n_0 e^{-U/kT} \cdot \frac{1}{kT} \cdot \frac{dU}{dx}, \quad (43.38)$$

或

$$\frac{dn_a}{dx} = -\frac{n_a}{kT} \cdot \frac{dU}{dx}. \quad (43.39)$$

在我们的情况下, 由于力 \mathbf{F} 沿 x 方向, 势能 U 正好是 $-Fx$, 而 $-dU/dx = F$ 。由式(43.39)得出

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a F}{kT}. \quad (43.40)$$

[这正是式(40.2), 我们曾由它第一次推导出 $e^{-U/kT}$, 所以我们兜了一个圈子!]! 比较式(43.40)与(43.36), 正好得出式(43.31)。这样, 我们就证明了式(43.31)(它用迁移率 μ 给出扩散流)具有正确的而且是十分普遍的系数。迁移与扩散有着密切联系, 这一联系首先是由爱因斯坦推得的。

§ 43-6 热 导 率

上面运用的分子动理论方法也可以用来计算气体的热导率。如果某个容器顶部的气体比底部的气体热, 热量将从顶部流到底部(我们假定顶部的气体较热, 是因为否则将会形成对流现象, 这样问题就不再是热传导问题了)。热量由较热的气体向较冷的气体传递是由于带有较大能量的“热”分子往下扩散, 以及“冷”分子往上扩散而引起的。为了计算热能流, 我们可以问: 通过面积元向下运动的分子带到下面的能量, 以及通过这个面积向上运动的分子带到上面的能量是多少。它们的差就是向下的净能流。

热导率 κ 定义为单位时间内通过单位面积的热能与温度梯度之比

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{dT}{dx}. \quad (43.41)$$

由于具体的计算十分类似于我们前面在考虑离子气体中的电流时^{*}所作的计算, 因此我们把证明

$$\kappa = \frac{knlv}{\gamma - 1} \quad (43.42)$$

留给读者作为一个练习。 $(\gamma - 1)kT$ 是一个分子在温度 T 时的平均能量。

如果我们利用关系式 $n\sigma_c = 1$, 热导率 κ 可以写为

$$\kappa = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{kv}{\sigma_c}. \quad (43.43)$$

* 严格地讲: 此处应为“考虑分子扩散时”。——译者注

这是一个十分惊人的结果。我们知道，气体分子的平均速度与温度有关，而与密度无关。我们期望 σ_0 只与分子的大小有关，这样上面那个简单的结果表明热导率 κ （因此也就是在任何特定情况下的热流率）与气体的密度无关！由于密度变化而带来的能量“载流子”数目的变化正好被两次碰撞之间载流子跑过的较长的距离所抵消。

有人会问：“在气体密度趋向于零的极限情况下，热流是否也和气体密度无关？如果这里根本没有气体呢？”当然不会！式(43.43)的推导和本章中的所有其他推导一样，是建立在碰撞之间的平均自由程远小于容器的任何尺度这个假设之上的。只要气体密度低到这种程度，使得一个分子有充分机会无碰撞地从容器的一个器壁跑到另一个器壁，本章的所有计算就都不能用。在这种情况下，我们必须回到分子动理论上去，重新计算将会出现的具体情况。

第44章 热力学定律

§ 44-1 热机、第一定律

迄今为止,我们讨论物质性质都是从原子观点出发的,我们假定物质由遵从一定规律的原子所构成,企图由此来大致理解物质会出现什么情况。然而,物质性质之间的许多关系可以不考虑材料的具体结构而求得。不去过问物质的内部结构以确定物质各种性质之间的关系乃是热力学的课题。历史上,在人们了解物质内部的结构之前,热力学就得到了发展。

举个例子说:由分子动理论我们知道气体的压强是由分子的碰撞引起的。我们还知道,如果加热气体,碰撞就会增加,压强也会增大。反之,如果一个气体容器上的活塞朝里移动以反抗碰撞的力,则碰撞在活塞上的分子能量将增大,结果温度也将上升。所以,一方面,如果在一定的体积下升高温度,压强就增大。另一方面,如果压缩气体,就会发现温度将上升。由分子动理论,人们可以得出这两种效应之间的定量关系,但是我们也许会本能地猜测它们之间是由某种与碰撞细节无关的必然方式联系起来的。

再考虑另一个例子。许多人都很熟悉橡皮的一个有趣性质:如果拉长一根橡皮带,它就会变热。例如,如果把橡皮带放在嘴唇间拉长它,你就会感到橡皮带明显地变热。这种变热是可逆的,也就是说,如果当橡皮带还在嘴唇间时很快地放松它,它就会明显地变冷,这意味着当我们拉紧橡皮带时,它会变热,而当我们放松橡皮带的张力时,它就会变冷。现在,我们的直觉告诉我们,如果加热橡皮带,它可能会拉紧:拉一根带子会使它变热的事实也许还意味着加热一根带子会使它收缩。事实上,如果我们用煤气灯加热一根悬挂着重物的橡皮带时,就会看到带子会骤然收缩(图 44-1)。所以确实在加热橡皮带时它会拉紧这个事实与我们放松橡皮带的张力时它会变冷的事实之间有着一定的联系。

引起这些效应的橡皮带的内部机制是非常复杂的。我们将从分子的观点出发来作一些描写,虽然本章的主要目的是不涉及分子模型来理解这些效应之间的关系。不过我们可以从分子模型来说明这些效应是紧密联系的。理解橡皮带行为的一种方法是认为这种物质是由大量的长分子链(像一种分子“面条”那样)缠在一起而组成的。此外,它还具有另一种复杂性:分子链之间有着交键——就像有时一根面条穿过另一根面条时交叉在一起那样——那样的一种大的缠结。当我们拉开这样的缠结时,其中某些分子链趋向于沿着拉伸的方向排列。同时,链又处于热运动之中,所以互相之间又不停地碰撞。结果是,这样一根链如果被拉长的话,将不能自己保持这种状态,因为它将受到来自旁边的其他链和其他分子的碰撞,从而倾向于重新缠结在一起。所以,橡皮带具有收缩倾向的真实原因是,当把它拉开时,链变长了,而链旁边的

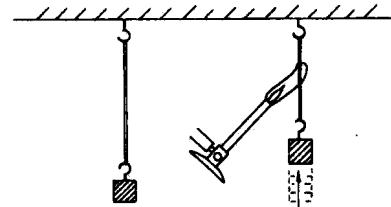


图 44-1 加热的橡皮带

分子的热扰动则趋向于使链重新缠结起来,使它变短。于是人们意识到,如果链保持伸长,而温度升高,使得链四周碰撞的活跃程度增加,链就趋向于收缩,因而在加热橡皮带时能拉起较大的重量。如果在拉伸了一段时间后,让橡皮带放松,那么每个链都变软,而碰撞到放松了的链上的分子在碰撞的时候损失了能量,于是温度就降低。

我们已经看到,加热时收缩与放松时变冷这两种过程可以由分子动理论联系起来,但是要从分子动理论确定这两者之间的精确关系,将是一个巨大的挑战。我们必须知道每秒发生多少次碰撞,这些链究竟像什么样子,同时还必须考虑到所有其他的复杂情况。细致的机制是这样复杂,以致我们实际上无法用分子动理论来精确定所发生的事情。但是,我们可以得出所观察到的这两种效应间的明确关系,而毋须知道任何有关的内部机制。

热力学整个课题从本质上说依赖于下面的这种考虑:因为橡皮带在高温时比在低温时更“强有力”,因此它应当有可能提起重物,移动重物,也就是说用热量做功。实际上,我们已

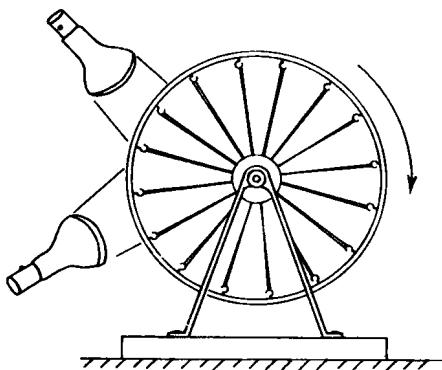


图 44-2 橡皮带加热机

从实验上看到受热的橡皮带能提起重物。研究利用热量来做功的方式是热力学这门科学的开端。我们能否制造出一台利用橡皮带的加热效应来做功的机器?我们可以制造一台外形不美观的机器来做这件事。它由一个自行车的轮子组成,轮子上的所有辐条都是橡皮带(图 44-2)。如果我们在轮子的一边用一对加热灯泡来加热橡皮带,它们就比另一边的橡皮带更“强有力”。轮子的重心将偏离轴承中心而移到一边去,从而使轮子转动。当它转动时,冷的橡皮带向热的地方运动,已受热的橡皮带离开热的地方而变冷,所以在不断地加热时,轮子就一直缓慢地转动。这台机器的效率是非常低的。给两个灯泡提

供 400 W 的功率,这台机器才刚刚能提起一只苍蝇!然而,一个有趣的问题是,我们能否用更有效的方式来利用热量做功?

事实上,热力学这门科学就是起源于伟大的工程师卡诺对如何制造最好的和最有效的热机这个问题所作的分析,这是工程学对物理理论作出基本贡献的少数几个著名的例子之一。可以想到的另一个例子是香农所作的信息论的最近的分析。顺便提一下,这两种分析之间有着密切的联系。

一台蒸汽机通常的工作方式是先用锅炉烧开一些水,所产生的蒸汽膨胀推动活塞而使飞轮转动。这样,蒸汽就推动了活塞——以后怎么办呢?我们必须做完的事是:完成一个循环,一个笨拙的方法是让蒸汽放到空气中去,于是就要不断地加水。比较便宜也比较有效的方法是把蒸汽放到另一个箱子里,在那里用冷水使它凝结,然后再把这些水抽回到锅炉里去,这样就能连续地循环往复工作。于是蒸汽机不断得到热量并把它们转变为功。现在我们要问,利用酒精是不是会更好一些呢?为了得到一台最好的热机,物质应当具有怎样的性质?这就是卡诺向自己提出的问题,而其中的副产品之一就是发现了我们上面刚刚解释过的这种类型的关系。

热力学的结果全都包括在一些称为热力学定律的十分简单明了的命题里。在卡诺那个时代,人们还不知道热力学第一定律——能量守恒定律,然而卡诺的论证作得很仔细,以致

虽然当时还不知道第一定律,但这些论证仍然成立!若干年后,克劳修斯(Clausius)作了一个比较简单的推导,它比起卡诺的非常精巧的推理来更易理解。结果表明,克劳修斯假设的不是一般的能量守恒定律,而是按照热质说认为热量是守恒的。后来知道,热质说是错误的,所以人们时常说卡诺的逻辑是错误的。但他的逻辑是完全正确的。只有克劳修斯的简化的论证人人都看得出是不正确的。

所谓热力学第二定律是卡诺在热力学第一定律之前发现的!给出卡诺不使用第一定律来作出的论证是有趣的,但是,我们不这样做,因为我们要学的是物理而不是历史。我们从一开始就运用热力学第一定律,尽管许多事情没有它也能作出。

我们首先陈述第一定律,即能量守恒定律:如果对一个系统加热,并对它做功,那么它的能量将由于吸收热量和对它所做的功而增加。这可以表示为:加进系统的热量 Q ,加上对系统所做的功 W ,等于系统的能量 U 的增加;能量 U 有时称为内能。于是

$$\text{能量 } U \text{ 的变化} = Q + W. \quad (44.1)$$

能量 U 的变化可以通过热量微元 ΔQ 与功微元 ΔW 相加来表示

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W. \quad (44.2)$$

这是同一条定律的微分形式。关于这一点,在早先的一章中我们已知道得很清楚。

§ 44-2 第二定律

现在要问热力学第二定律是什么?我们知道,如果反抗摩擦力做功,那么所损耗的功就等于所产生的热量。如果我们在温度为 T 的室内足够缓慢地做功,室温不会改变得很大,那么我们是在给定的温度下将功转变为热。是否可能存在逆过程?是否有可能在给定的温度下反过来将热转变为功?热力学第二定律断言这是不可能的。假定能够只通过把像摩擦这样的过程反过来就能使热转变为功,这就太方便了。如果我们只从能量守恒来考虑,我们可以想象把热能(比如在分子振动中的能量)作为提供有用能量的良好来源。但是卡诺认为,不可能在单一温度下取出热能。换句话说,如果整个世界处于同一温度下,那么我们就不可能将任何热能转变为功:在一个给定的温度下,使功转变为热的过程是可以发生的,但不能把它反过来再得到这些功。说得更具体一些,卡诺认为:不可能在一个给定的温度下取出热量,并把它转变为功而不引起系统或周围环境的其他任何变化。

最后一句话是非常重要的。假设有一罐处在某给定温度下的压缩空气,我们让空气膨胀。这时它就能做功,比如说,可以使锤子移动。在膨胀中气体会稍稍变冷,但是如果在一个给定温度下,我们有一个像海洋那样的热库,那么就可以使空气再变热。这样就从海洋中取出了热量,并利用压缩空气做功。但是,卡诺并没有错,因为我们没有使每件事情保持原样。如果我们重新压缩已经膨胀的空气,就会发现我们做了额外的功,在完成这一切后我们发现,不仅没有从温度为 T 的系统内取出功,实际上反而对它做功。我们讲的必须只是这样一种状况,其中整个过程的净结果是取出热量,并把它转变为功,正如反抗摩擦力做功这个过程的净结果是取出功,并把它转变为热那样。如果系统循环运动,我们可以使系统严格回到它的出发点,产生的净结果是反抗摩擦力做功,并产生热量。能把这个过程反过来吗?能否按一下开关,使每样东西都反过来进行,从而使摩擦力反抗我们做功,而海洋就冷却下

来呢?卡诺的回答是:不行!所以我们也假定这是不可能的。

假定这种情况可能出现,那就意味着,我们可以不花任何代价而从一个冷的物体中取出热量,并把它放进一个热的物体中去。我们知道一个热的东西能使一个冷的东西变热,这是很自然的。我们的实验还证实,如果只是简单地把热的物体与冷的物体放在一起,而其他一切都保持不变的话,那么绝不会发生热的物体越来越热,冷的物体越来越冷的情况!但是如果我们将从比如说海洋中,或从任何在单一温度下的其他东西中取出热量来做功的话,这个功就可以在某个其他温度下反过来通过摩擦而转变成热。例如,一台正在工作的机器的某工作臂可以和某种已经变热的东西发生摩擦。净结果是从一个“冷”的物体,即海洋中取出热量来,并把它放进一个热的物体里去。现在,按照卡诺的假定有时也把热力学第二定律表述如下:热量不能自动地从冷的物体流到热的物体。正如我们刚才看到的,这两个命题是等价的:第一个命题说,人们不可能设计这样一种过程,它的唯一结果是在一个单一的温度下将热转变为功,第二个命题说,人们不可能使热量自动地从冷的地方流到热的地方。我们主要采用第一种形式。

卡诺对热机的分析十分类似于第4章讨论能量守恒时我们对于起重机械问题所作的论证。事实上,那个论证正是仿效卡诺对热机的论证,所以现在的处理看起来非常相似。

假设我们建造了一台带有某个温度为 T_1 的“锅炉”的热机。从锅炉中取出了一定的热量 Q_1 ,蒸汽机做了某些功 W ,放出一些热量 Q_2 给另一个温度为 T_2 的“冷凝器”(图44-3)。由于卡诺不知道热力学第一定律,所以他不说热量是多少,也不用 Q_2 等于 Q_1 这条规则,因为他不相信这一点。虽然根据热质说,每个人都会认为 Q_1 与 Q_2 必定相等。卡诺则不说它们是相等的——这就是他的论证中的部分高明之处。如果利用热力学第一定律,就会发现放出的热量 Q_2 等于吸收的热量 Q_1 减去所做的功

$$Q_2 = Q_1 - W. \quad (44.3)$$

(假设有某种循环过程:在凝结后又把水泵回到锅炉中去,我们将说,在每一循环中,对进行循环过程的一定量的水来说,吸收了热量 Q_1 ,并做了功 W)。

现在我们将建造另一台热机,看看若用在温度 T_1 下放出的同样的热量,以及温度仍为 T_2 的冷凝器,能否做更多的功。我们将利用从锅炉中得到的同样多的热量 Q_1 ,并试图用别的液体,如酒精,以得到比在蒸汽机的情况下更多的功。

§ 44-3 可逆机

现在必须对我们的热机进行分析。有一件事很清楚:如果热机中含有存在着摩擦的装置,那么就有损耗。最好的热机是无摩擦的热机。于是,我们作一个和在研究能量守恒时作过的同样理想化的假设,即假设一个理想的无摩擦的热机(图44-3)。

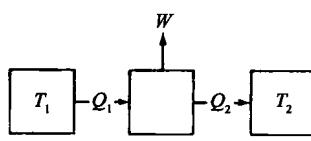


图44-3 热机

我们还必须考虑与无摩擦运动相类似的情况,即“无摩擦”的热传递。把一个温度高的热物体放在一个冷物体上,于是有热流产生,这时不可能通过让每个物体的温度作非常微小的变化来使热量沿相反方向流动。但是,当我们有一台实际上没有摩擦的机器时,如果用一个小小的力沿一个方向推它,它就沿

这个方向运动,如果用一个小小的力沿另一个方向推它,它就沿另一个方向运动。我们需要找出与无摩擦运动类似的情形:只利用微小的变化就能把热量传输的方向反过来。如果温度差有限,那么这是不可能的,但是如果能够确信热量流动总是在温度基本相同的两个物体之间发生,只要两个物体具有无限小的差别就可使热量顺着我们所希望的方向流动,这种流动称为可逆的(图44-4)。如果我们在左边稍微加热物体,热量将流向右边;如果我们使左边稍微冷却,热量将向左边流动。这样我们就发现理想热机就是所谓可逆机,其中的每一个过程在这种意义上都是可逆的,即只作极小的、无限小的变化,我们就能使热机沿相反方向运行。这意味着在机器中的任何地方都必然不存在可觉察到的摩擦力,并且也肯定没有发生热库或锅炉火焰直接和某种确定地较冷或较热的东西相接触。

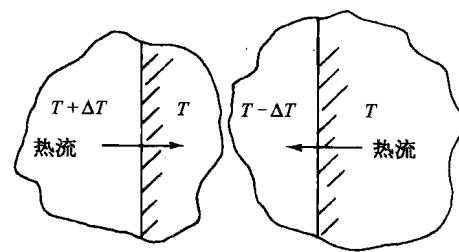


图44-4 可逆的热传递

现在考虑一台所有过程都可逆的理想热机。为了说明这一种东西在原则上是可能的,我们将举一个热机循环的例子,它可能是也可能不是实际的,但至少在卡诺设想的含义上是可逆的。如图44-5所示,假设有一个盛有气体的汽缸,汽缸上带有一个无摩擦的活塞。气体不一定必须是理想气体,甚至液体也不一定必须能汽化,但是为了确定起见,我们认为这是一种理想气体。假设我们还有两个很大的热垫 T_1 和 T_2 ——一种具有确定温度 T_1 和 T_2 的很大的东西。假定现在的情况是 T_1 高于 T_2 。我们先加热气体,同时让它膨胀,这时它与热垫 T_1 接触。在这样做的时候,一旦热量流入气体,活塞就非常缓慢地被顶出,我们确信气体的温度永远不会远离 T_1 。假定活塞被顶得太快,气体的温度就会比 T_1 低许多,于是过程就不完全是可逆的,但若活塞被顶得足够慢,气体的温度就永远不会远离 T_1 。另一方面,如果我们缓慢地把活塞推回来,气体温度只比 T_1 高一个无限小量,热量将传回给热垫。我们看到,这样一种进行得足够缓慢的等温(温度不变)膨胀是可逆过程。

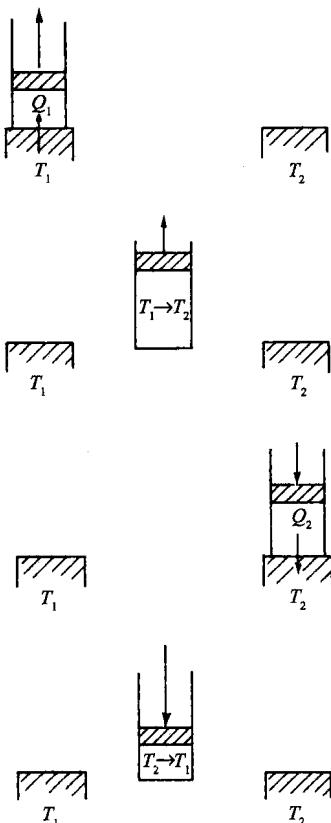


图44-5 卡诺循环中的各个步骤

为了理解刚才所做的事,我们画出气体压强与体积之间的关系图(图44-6)。当气体膨胀时,压强下降。记为(1)的曲线告诉我们当温度固定为 T_1 时,压强随体积会如何变化。

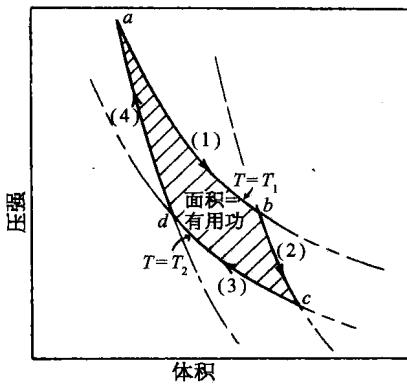


图44-6 卡诺循环

对于理想气体来说,这条曲线就是 $PV = NkT_1$ 。在等温膨胀中,当体积增加时,压强降低,直到停在 b 点为止。同时,必然有一定的热量 Q_1 从热库流入气体,因为我们已知,如果气体膨胀时不与热库接触,它就会冷却。完成了等温膨胀而停止在 b 点后,我们将汽缸从热库拿开,并让它继续膨胀。这时我们不让任何热量进入汽缸,同时仍让气体缓慢地膨胀,再假设没有任何摩擦力,因此没有任何理由说这个过程不可逆。气体继续膨胀时,因为再没有任何热量进入汽缸,所以气体温度将下降。

令气体沿着记为(2)的曲线膨胀,直到温度降为 T_2 到达 c 点。我们把这种不加进热量的膨胀称为绝热膨胀。对于理想气体来说,我们已知曲线(2)具有 $PV^\gamma = \text{常数}$ 的形式,这里 γ 是大于 1 的常数,所以和等温曲线相比,绝热曲线具有更负的斜率。现在汽缸的温度达到 T_2 ,因而如果我们把它放在温度为 T_2 的热垫上,将不会出现不可逆的变化。现在在气体与温度为 T_2 的热库接触的情况下,沿着记为(3)的曲线缓慢地压缩气体(图 44-5,第二步)。因为汽缸与热库接触,它的温度不会升高,但是热量 Q_2 要在温度为 T_2 时从汽缸流入热库。在沿曲线(3)等温地压缩气体至 d 点后,我们把汽缸从温度为 T_2 的热垫上拿开,并继续压缩气体,同时不让任何热量流出。于是气体的温度将上升,压强将沿记为(4)的曲线变化。如果妥善地实现每一步骤,我们可以回到温度为 T_1 的起点 a 处,并且重复这一个循环。

在图 44-6 上可以看到,我们已经使气体作一个完整的循环,在这一循环中,我们在温度 T_1 处加进了热量 Q_1 ,而在温度 T_2 处取走了热量 Q_2 。现在,要点在于这个循环是可逆的,因而我们能够把所有的步骤用另外反过来的方式表示。我们可以反向循环而不是正向循环:让气体从温度为 T_1 的 a 点出发,沿曲线(4)膨胀,膨胀到温度 T_2 后再吸收热量 Q_2 ,等等,使循环反向进行。如果我们沿这个方向作一个循环,我们必须对气体做功;而如果我们沿相反的方向循环,气体必定对我们做功。

附带提一下,不难求出功的总量,因为在任何膨胀过程中所做的功是压强乘以体积的变化,即 $\int P dV$ 。在这个特殊的循环图中,垂直轴表示 P ,水平轴表示 V 。如果我们称垂直坐标为 y ,水平坐标为 x ,功就是 $\int y dx$ ——换句话说,就是曲线下的面积。因此每条曲线下的面积就是对应的那个步骤中对气体或由气体所做的功。不难看出所做的净功就是图中的阴影面积。

现在我们已经举了一个可逆机的简单例子。我们还将假定可能有其他这样的热机。设有某个可逆机 A,它在 T_1 温度下吸收热量 Q_1 ,做了功 W ,并且在 T_2 温度下释放了部分热

量。现在我们假设还有另一台热机 B,它或许已经设计成功,或许还没有发明出来。这台热机由许多橡皮带、蒸汽或别的什么东西制成,既可以是可逆的,也可以是不可逆的,但要设计得使它在温度 T_1 下吸收同样多的热量 Q_1 ,而在较低的温度 T_2 下释放出热量(图 44-7)。假设热机 B 做了一定的功 W' 。现在我们将要证明, W' 不会大于 W ,也就是说没有一台热机做的功能够超过可逆机。为什么? 假设 W' 确实大于 W ,那么我们可以从 T_1 热库中取出热量 Q_1 ,利用热机 B 可以做功 W' ,并且释放一些热量到 T_2 热库中去,至于究竟有多少

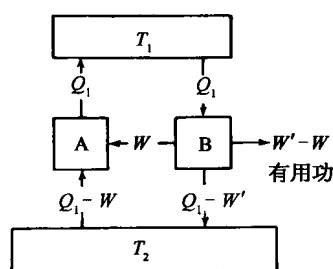


图 44-7 热机 B 使可逆机 A 反向运转

我们不去管它。这样做以后,由于已经假设 W' 大于 W ,我们可以省下 W' 中的某些功,利用它的一部分功 W 而使其余的功 $W' - W$ 作为有用功。利用功 W 可使热机 A 反过来运转,因为它是一个可逆机。它将从 T_2 热库中吸收某些热量,并把热量 Q_1 放回给 T_1 热库。经过两重循环后,净结果就是每样东西都回到原来的状态,但可以做某些额外的功,即 $W' - W$,而我们所做的一切就是从 T_2 热库中取出能量!我们已经很小心地把热量 Q_1 还给了 T_1 热库,因而这个热库可以很小,也可以把它放在联合热机(A+B)“之内”,这个联合热机的净结果是由 T_2 热库取出净热量($W' - W$),并把它变为功。但是,按照卡诺的假设,要从某个单一温度下的热库中取得有用功而不发生任何其他变化是不可能的,它是无法实现的。因此,在相同温度的运行条件下,没有一台热机能从较高温度 T_1 吸收一定的热量,又在 T_2 温度下释放一些热量,而所做的功能大于可逆机。

现在假设 B 机也是可逆的。当然,这时不但必须满足 W' 不大于 W ,也可以把论证反过来证明 W 也不能大于 W' 。所以,如果两台热机都可逆,它们必定做同样大小的功,这样,我们就得到了卡诺的光辉结论:如果一台热机是可逆的,那么不管它是怎样设计的,都不会有任何不同,因为如果这台热机在温度 T_1 下吸收一定的热量,而在某个其他温度 T_2 下释放一些热量,人们所得到的功与热机的设计无关。这是自然界的属性,而不是个别热机的特性。

如果我们能够找出一条定律来确定在温度 T_1 下吸收热量 Q_1 和在温度 T_2 下释放一些热量时能够做多少功,那么这个量将具有普遍的性质,而与物质无关。当然,如果我们知道了某种特殊物质的性质,并且能把这个量求出,就能够说,在一台可逆机中工作的所有其他物质也必定给出同样大小的功。这是一个关键的想法,利用这条线索,我们可以求出,比方说,当加热橡皮带时它收缩的程度与放松橡皮带时它冷却的程度之间的关系。我们不妨设想把这样的橡皮带放进一台可逆机中,并使它经过一个可逆循环。净结果(即做功的总量)是一个普适函数,亦即一个与物质无关的函数。所以我们看到物质的性质必然有一定的限制。人们不能要求任何想要的东西,也不可能发明一种物质,使这种物质经过一个可逆循环后,得出比所允许的最大值还大的功。这条原则和这种局限性是热力学得出的唯一真实的规则。

§ 44-4 理想热机的效率

现在来找出决定功 W 作为 Q_1 、 T_1 和 T_2 的函数的定律。显然 W 正比于 Q_1 ,因为如果我们考虑两个并联的可逆机时,这两台一起工作的热机组合起来仍然是可逆机。假设每台热机都吸收热量 Q_1 ,那么两台热机合在一起吸收热量 $2Q_1$,所做的总功就是 $2W$,等等。所以 W 正比于 Q_1 是合理的。

现在,下一个重要的步骤是找出这条普适定律。如果研究一台用我们已经知道它的规律的特定物质(例如理想气体)制成的可逆机,我们就能够而且一定找得出这个定律。通过纯粹的逻辑论证,根本不用任何特殊的物质也能得出这条规律。这是物理学中最出色的理论证明之一,如果不把它证明给你们看,就会于心不安,所以对于那些希望知道证明的人来说,我们将在适当时候讨论它。但是我们先用理想气体进行直接计算,这是一种不太抽象的、较为简单的方法。

我们只要得到 Q_1 和 Q_2 的公式(因为 W 刚好等于 $Q_1 - Q_2$),即在等温膨胀或压缩的过程中和热库交换的热量的公式。例如,从压强为 p_a ,体积为 V_a ,温度为 T_1 的 a 点[图 44-6 中标记为(1)的曲线],等温膨胀至压强为 p_b ,体积为 V_b ,温度仍为 T_1 的 b 点时,将要从温度

为 T_1 的热库中吸收多少热量 Q_1 ? 对于理想气体来说, 每个分子具有一个只取决于温度的能量, 而且因为 a 点和 b 点的温度和分子数相同, 内能也就相同。内能 U 没有任何变化。气体在膨胀过程中所做的总功

$$W = \int_a^b p dV.$$

它等于由热库取出的能量 Q_1 。在膨胀过程中, $pV = NkT_1$, 或

$$p = \frac{NkT_1}{V},$$

于是

$$Q_1 = \int_a^b p dV = \int_a^b NkT_1 \frac{dV}{V}, \quad (44.4)$$

即

$$Q_1 = NkT_1 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right).$$

这就是从 T_1 热库取得的热量。同样, 对于在 T_2 温度下的压缩来说[图 44-6 曲线(3)], 释放给 T_2 热库的热量是

$$Q_2 = NkT_2 \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right). \quad (44.5)$$

为了完成我们的分析, 只要求出 V_c/V_d 与 V_b/V_a 之间的关系。注意到曲线(2)是从 b 到 c 的绝热膨胀, 在这个过程中 pV^γ 是一个常数, 就可以找出这个关系。因为 $pV = NkT$, 可以把它写为 $(pV)V^{\gamma-1} = \text{常数}$, 或者, 利用 T 和 V , 可写为 $TV^{\gamma-1} = \text{常数}$, 即

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}. \quad (44.6)$$

类似地, 由于曲线(4), 从 d 到 a 的压缩也是绝热的, 我们有

$$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1}. \quad (44.6a)$$

式(44.6)除以式(44.6a)后, 可得 V_b/V_a 必定等于 V_c/V_d , 所以式(44.4)与式(44.5)中的对数项相等, 于是便有

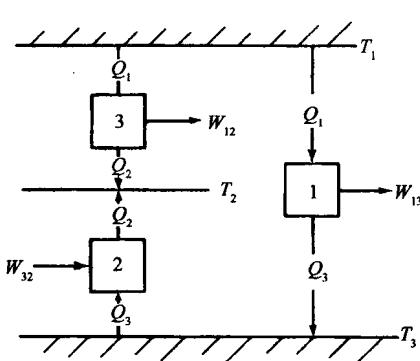


图 44-8 热机 1 与 2 联合起来等于热机 3

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.7)$$

这就是我们要找的关系。虽然这是对理想气体热机所作的证明, 但我们知道对于任何可逆机它都必定完全成立。

现在我们来看看如何能通过逻辑推理求得这条普适的定律, 而无需知道任何特殊物质的性质。现推导如下: 假定有三个热机和三种温度 T_1 、 T_2 和 T_3 。令一台热机在 T_1 温度下吸收热量 Q_1 , 做功 W_{13} , 并在温度 T_3 下放出热量 Q_3 (图 44-8)。令另一台热机在 T_2 和 T_3 之间反过来运转。再假定把第二台热机设

计得正好吸收同样的热量 Q_3 , 放出热量 Q_2 。我们必须对它做一定的功 W_{32} , 这里 W_{32} 是负的, 因为这台热机反过来运转。当第一台热机经过一个循环后, 它吸收热量 Q_1 而在温度 T_3 下放出热量 Q_3 , 然后第二台热机从 T_3 热库取出同样的热量 Q_3 , 而将热量 Q_2 释放给温度为 T_2 的热库。因此这两台热机一前一后地运行的净结果是从 T_1 吸收热量 Q_1 , 而在 T_2 放出热量 Q_2 。于是这两台热机等价于第三台热机, 第三台热机是在 T_1 下吸收热量 Q_1 , 做功 W_{12} , 然后在 T_2 下放出热量 Q_2 。因为由热力学第一定律我们立刻可以证明 $W_{12} = W_{13} - W_{32}$

$$W_{13} - W_{32} = (Q_1 - Q_3) - (Q_2 - Q_3) = Q_1 - Q_2 = W_{12}, \quad (44.8)$$

于是我们可以得到关于热机效率的定律, 因为在温度 T_1 和 T_3 之间, T_2 和 T_3 之间, 以及 T_1 和 T_2 之间运行的热机效率之间显然必定存在某种联系。

我们可以用下述方式使论证更为清楚: 刚才已经看到, 我们总可以通过找出在某个其他温度 T_3 下释放的热量, 而把在 T_1 吸收的热量和在 T_2 释放的热量联系起来。如果引进一个标准温度, 用这个标准温度来分析每一样东西, 我们就能求得所有的热机的性能。换句话说, 如果我们知道一台运转在一定的温度 T 和某个确定的标准温度间的热机效率, 就可以求出在任何其他温度差下的热机效率。因为我们假定只用可逆机, 我们可以使它从初始温度下降到标准温度, 然后再回升到最终温度。我们将标准温度任意定义为 1° , 并用一个特殊记号 Q_s 来表示在这个标准温度下所释放的热量。换句话说, 当一个可逆机在温度 T 下吸收热量 Q 时, 它将在 1° 下释放热量 Q_s 。如果一台热机在 T_1 下吸收热量 Q_1 , 而在 1° 下放出热量 Q_s , 并且如果一台热机在 T_2 下吸收热量 Q_2 , 而在 1° 下也放出同样的热量 Q_s , 则一台运行于温度 T_1 和 T_2 之间的热机将在温度 T_1 下吸收热量 Q_1 , 而在 T_2 下放出热量 Q_2 , 这正好和我们考虑在三种温度之间工作的热机时所证明的一样。所以实际上我们所做的就是求出在温度 T_1 时必须给热机多少热量 Q_1 才使它在单位温度下放出一定量的 Q_s 。一旦求得了它, 就什么都有了。当然, 热量 Q 是温度 T 的函数。不难看出, 当温度增加时, 热量也必定增加, 因为我们知道使一台热机反过来运行, 并把热量释放到温度更高的热库时需要对它做功。也不难看出热量 Q_1 必定与 Q_s 成正比。所以这一条重大的定律可以大致叙述如下: 一台在温度 T 下运行的热机, 在 1° 下释放出一定的热量 Q_s , 则热机所吸收的热量 Q 必定是 Q_s 乘以某个温度的递增函数

$$Q = Q_s f(T). \quad (44.9)$$

§ 44-5 热力学温度

现在我们不想利用熟知的水银温标来找出上述温度递增函数的公式, 而是要用一个新的温标来定义温度。在一段时期内, 人们曾经将水的膨胀划分为一定大小的均匀标度来任意地定义“温度”。但是后来用水银温度计测量温度时, 人们发现这些“度”不再是均匀的了。不过我们现在可以给出一个与任何特殊物质无关的温度的定义。我们可以利用与所使用的装置无关的函数 $f(T)$, 因为这些可逆机的效率与它们的工作物质无关。由于我们找到的这个函数随温度而增加, 所以我们将把这个函数本身定义为温度, 而以标准的 1° 作为单位来测定温度, 即

$$Q = ST, \quad (44.10)$$

而

$$Q_s = S \cdot 1^\circ. \quad (44.11)$$

这意味着,如果使一台可逆机运行于某个物体的温度与单位温度之间,只要求出这台可逆机吸收的热量,我们就能说出这个物体有多热(图 44-9)。如果从锅炉中吸收的热量是释放到

1°的冷凝器中的热量的 7 倍,锅炉的温度就是 7°,等等。所以,通过测量在不同温度下所吸收的热量,我们就能确定温度。以这种方法定义的温度称为热力学绝对温度,它和物质无关。以后我们将一概应用这个定义*。

现在我们看到,如果有两台热机,一台工作于 T_1 与 1°之间,另一台工作于 T_2 与 1°之间,它们在单位温度下释放相同的热量,则它们吸收的热量必然满足下列关系

$$\frac{Q_1}{T_1} = S = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.12)$$

这意味着,如果有某一台运行于 T_1 和 T_2 之间的热机,那么整个分析所得出的极为重大的结果是:如果热机在温度 T_1 吸收热量 Q_1 ,并且在温度 T_2 放出热量 Q_2 ,则 Q_1 比 T_1 等于 Q_2 比 T_2 。只要热机是可逆的,这个热量之间的关系就必须满足。全部结果都包括在这里,这是热力学领域的核心。

如果这就是热力学的所有一切,为什么把热力学看成是这样一门困难的学科呢?在处理一个包含一定质量的某种物质的问题时,在任何时刻物质的状态都可以通过给出它的温度和体积来描写。如果我们知道了物质的温度和体积,以及压强是温度与体积的某个函数,则我们就知道内能。有人会说:“我不想这么做,告诉我温度和压强是多少,我就会告诉你体积是多少。我可以把体积看成是温度和压强的函数,把内能看成是温度和压强的函数,等等。”这就是热力学之所以困难的原因,因为每个人都可采用一种不同的途径。只要我们坐下来,决定我们的变量,并且坚持使用下去,那么热力学就会变得非常容易了。

现在我们进行一些推论。正如 $F = ma$ 是力学领域的核心,所有一切都不断由它派生,同样的原则也适用于热力学。但人们能由此推出些什么结论呢?

让我们来开始做这件事情。为了得到第一个推论,我们把能量守恒定律和把 Q_2 与 Q_1 联系起来的定律结合起来,于是很容易得出可逆机的效率。由热力学第一定律,我们有 $W = Q_1 - Q_2$ 。而按照我们的新原理

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1,$$

于是功可以写成

* 我们以前曾用不同的方式定义了温标,由理想气体知道分子的平均动能正比于温度,或者说根据理想气体定律, pV 正比于 T 。这个新定义和它等价吗? 等价的,因为由气体定律推出的最后结果式 (44.7) 和这里推出的相同。关于这一点我们将在下一章再作讨论。

$$W = Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.13)$$

这个公式指出了热机的效率——从那么多的热量中得到了多少功。热机的效率等于热机在其中工作的两个温度之差除以较高的温度

$$\text{效率} = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.14)$$

它不可能大于 1, 因为绝对温度不可能小于绝对零度。这样, 由于 T_2 必须为正, 所以效率总是小于 1。这就是我们的第一个推论。

§ 44-6 熵

式(44.7)或式(44.12)可以按另一种特殊方式来解释。如果工作时都是用可逆机, 而 $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$, 那么从一个被吸收另一个被释放的意义上来说, 温度 T_1 的热量 Q_1 “等效”于温度 T_2 的热量 Q_2 。这就启发了我们, 如果称 Q/T 为某个量, 就可以说: 在可逆过程中, 吸收和放出的 Q/T 是一样多; Q/T 既不增加也不减少。这个 Q/T 称为熵。于是我们说: “在可逆循环中, 没有熵的净变化。”如果 T 是 1° , 那么熵就是 $Q/1^\circ$, 用我们的符号是 $Q_s/1^\circ = S$ 。实际上, S 正是通常用来表示熵的字母, 在数值上它等于释放给 1° 热库的热量 Q_s (熵本身并不是热量, 它等于热量除以温度, 因此单位是焦每度)。

有意思的是, 除去压强与内能这两个量是温度与体积的函数外, 我们发现另一个量, 即物质的熵, 也是状态的函数。我们要解释计算它的方法以及把它称为“状态函数”的含义。考虑两个处在不同状态下的系统, 它们很像我们在绝热膨胀和等温膨胀的实验中所遇到的情况(附带提一下, 热机不一定只有两个热库, 它可以从三个或四个不同温度吸热或放热, 等等)。我们可以在整个 pV 图上到处运动, 从一种状态转变到另一种状态。换句话说, 我们可以说气体处于某一状态 a , 接着转变到另一个状态 b , 我们要求从 a 至 b 的转变是可逆的。现在假设在沿着整条从 a 到 b 的路径上有许多不同温度的小热库, 使得在每一条小路径上由物质放出的热量 dQ 都传递给每一对应于路径上该点温度的小热库。然后, 我们用可逆热机将所有这些热库联结到单位温度的单个热库上去, 当我们完成了物质状态从 a 到 b 的转变, 将使所有热库回到它们的原始状态。在温度 T 下从物质中所吸收的任何热量 dQ 都被可逆机变换了, 而且把一定量的熵传递给单位温度, 即

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (44.15)$$

我们来计算所传递的总熵。熵的差值, 或者说在这个特殊的从 a 到 b 的可逆变化中所需要的熵, 就是从小热库中所得到并传递给单位温度的熵的总和

$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.16)$$

问题在于熵的差值是否与所选路径有关? 从 a 至 b 不止有一条路径。我们记得在卡诺循环中, 从图 44-6 中的 a 到 c 可以先等温膨胀, 然后再绝热膨胀, 也可以先绝热膨胀, 然后再等

温膨胀。所以问题是,当我们从图 44-10 的 a 到 b 时,沿一条路径的熵的变化是否与沿另一条路径相同?答案是它们必须相等。因为如果我们

沿着这个循环走过所有路径,向前走的时候沿着一条路径,回来的时候沿着另一条路径,这就相当于一台可逆机,并且对于单位温度的热库来说,没有什么热量损失。在整个可逆循环中不必从单位温度的热库取出热量,所以经过从 a 到 b 的一条路径与经过另一条路径所需的熵相同,它与路径无关,只取决于端点。因此我们可以说,存在着称为物质的熵的某个确定的函数,它取决于物质的状态,即只取决于体积和温度。

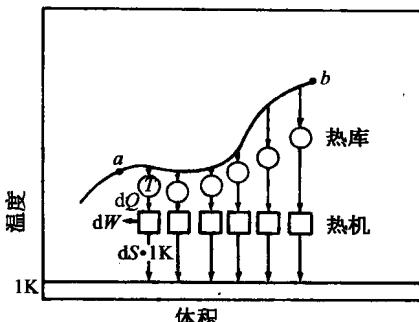


图 44-10 在可逆变化中熵的改变

我们可以找出一个函数 $S(V, T)$, 它具有这样的性质,当我们根据单位温度释放出的热量来计算物质

沿任何一条可逆路径熵的变化时,有

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}, \quad (44.17)$$

这里 dQ 是从温度为 T 的物质取走的热量。这个总的熵的改变是在起点和终点计算的熵的差值

$$\Delta S = S(V_b, T_b) - S(V_a, T_a) = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.18)$$

这个表示式并没有完全确定熵函数,而只是决定了两个不同状态之间的熵的差。只有当我们能够计算一种特殊状态下的熵以后,才可以真正确定 S 的绝对值。

长期以来人们相信,绝对熵毫无意义——只有它们的差才可以定义——但是最后能斯特(Nernst)提出他的所谓热定理,也叫做热力学第三定律。这是一条非常简单的定律,我们将讲一下它是什么,而不去解释它为什么是对的。能斯特的假设简单说来就是:在绝对零度时任何物质的熵为零。于是我们就知道一种 T 和 V 的情况,即 $T = 0$ 时 S 值为零。因而我们可以得到其他任何点的熵。

为了说明这些概念,我们来计算理想气体的熵。在等温可逆膨胀中, $\int dQ/T$ 是 Q/T , 因为 T 是常数。所以由式(44.4), 可得出熵的变化为

$$S(V_a, T) - S(V_b, T) = Nk \ln \frac{V_a}{V_b},$$

因此 $S(V, T)$ 等于 $Nk \ln V$ 加上某个仅是 T 的函数。 S 和 T 的依赖关系如何? 我们知道,在可逆绝热膨胀中不交换热量。所以即使 V 发生变化,熵也不发生变化,因为假设 T 也随着变化,以致有 $TV^{\gamma-1} = \text{常数}$ 。读者能否看出这意味着

$$S(V, T) = Nk \left[\ln V + \frac{1}{\gamma-1} \ln T \right] + a,$$

这里 a 是与 V, T 两者都无关的某个常数 [a 称为化学常数,它取决于所考虑的气体,可以按能斯特定理从实验上通过测量气体冷却到 0° 并凝结为固体(对氦是液体)时所释放的热量,

再由积分 $\int dQ/T$ 来确定。也可以从理论上用普朗克常数与量子力学来确定,但在这个课程中我们不准备进行讨论]。

现在我们要对物质的熵的某些性质作些说明。首先我们记得,如果沿着一条可逆循环路径从 a 到 b 运动,那么物质的熵将改变 ($S_b - S_a$)。我们也记得,如果沿着这条路径运动,熵——在单位温度释放的热量——将按照 $dS = dQ/T$ 的规则增加,这里 dQ 是从温度为 T 的物质中取走的热量。

我们已经知道,如果一个循环可逆,则一切事物的总熵就不会改变,因为在 T_1 吸收的热量 Q_1 与在 T_2 放出的热量 Q_2 对应着相等和相反符号的熵的变化,所以熵的净变化为零。所以对于可逆循环,包括热库在内的一切事物的熵没有变化(图 44-11)。这条规则看起来似乎像能量守恒,但其实不然,它只适用于可逆循环。如果包括不可逆循环,就不存在熵的守恒定律。

举两个例子来说明。首先,假设我们通过摩擦对一个物体做了不可逆功,在某个温度 T 下的物体产生了热量 Q ,则熵增加了 Q/T 。热量 Q 等于所做的功,所以当我们通过摩擦对温度为 T 的物体做了一定的功时,整个系统的熵增加了 W/T 。

再举一个不可逆的例子:如果我们把两个不同温度 T_1 和 T_2 的物体放在一起,那么一定量的热量将自动地从一个物体流到另一个物体。比方说,假如将一块很热的石头放到冷水中去,当从 T_1 到 T_2 传递了一定的热量 ΔQ 后,热的石头的熵的改变有多大?它减少了 $\Delta Q/T_1$ 。水的熵的改变又是多少?它增加了 $\Delta Q/T_2$ 。当然,热量只能从较高的温度 T_1 流向较低的温度 T_2 ,如果 T_1 大于 T_2 , ΔQ 为正。所以整个系统的熵的改变为正,它是这样两个分数之差

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}. \quad (44.19)$$

因此,下述命题成立:在任何不可逆过程中,整个系统的熵将增加。只有在可逆过程中熵才保持不变。由于没有什么过程是绝对可逆的,熵至少总有一点增加;一个可逆过程是一种使熵的增加最小的理想化过程。

遗憾的是,我们不打算深入到热力学领域中去。我们的目的只在于说明所涉及的原则性概念,以及为什么能作这些论证的理由,而不想在这门课程中使热力学用得太多。工程师,特别是化学家常常要用到热力学。所以我们必须在化学或工程的实践中学习热力学。因为不值得对每件事情都花双倍的精力,所以我们只对热力学理论的起源作一些讨论,而不详细研究它的特殊应用。

人们常将两条热力学定律表述为:

第一定律:宇宙的能量始终保持不变;

第二定律:宇宙的熵值始终不断增加。

这不是第二定律的最好的表述;例如,它没有说明在可逆循环中熵值保持相同,也没有

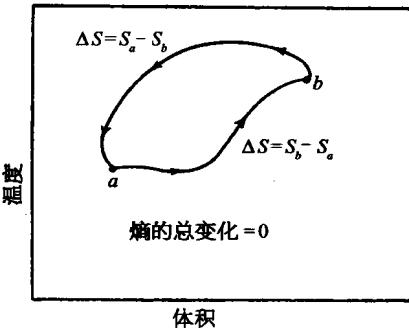


图 44-11 在完全可逆循环中熵的改变

精确说明熵是什么。这只是便于记忆这两条定律的很好的办法,但是实际上它没有告诉我们真正的立足点。在表 44-1 中,我们概括一下本章所讨论的定律。下一章我们将运用这些定律来找出在橡皮带膨胀时所产生的热量与加热带子时的附加张力之间的关系。

表 44-1 热力学定律总结

第一定律:

加进一个系统中的热量 + 对系统所做的功 = 系统内能的增加

$$dQ + dW = dU.$$

第二定律:

不可能有这样一个过程,它的唯一结果只是从一个热库取出热量,并把它转变为功。

没有任何一台热机,在从 T_1 取得热量 Q_1 ,而在 T_2 放出热量 Q_2 的过程中所做的功比可逆机更大。对于可逆机,

$$W = Q_1 - Q_2 = Q_1 \frac{(T_1 - T_2)}{T_1}.$$

系统的熵用以下方式定义:

(a) 如果 ΔQ 是可逆地加在温度为 T 的系统中的热量,那么这个系统的熵增加为 $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$;

(b) 当 $T = 0$ 时, $S = 0$ (第三定律)。

在可逆变化中,系统所有部分(包括热库)的总熵不变。

在不可逆变化中,系统的总熵始终不断增加。

第 45 章 热力学示例

§ 45-1 内能

热力学的应用是一门相当困难和复杂的课题。

在本课程中我们不宜在应用方面过分深入。当然，热力学对工程师和化学家来说极为重要，对这方面感兴趣的人可以在物理化学或工程热力学中学到许多有关应用的内容。关于热力学也有一些好的参考书，如泽曼斯基(Zemansky)的《热与热力学》，可以从中学到更多的有关内容。在大英百科全书(第十四版)的热力学与化学热力学条目中，以及化学条目的物理化学、蒸发、气体液化等段落中人们也可以找到很好的论述。

热力学之所以复杂，是因为在描写同一件事情时存在着许多方式。如果我们要描写气体的行为，既可以说压强取决于温度和体积，也可以说体积取决于压强和温度。对于内能 U 而言，假如选择温度和体积为变量，我们可以说内能取决于温度和体积——但是我们也可以说明它取决于温度和压强，或压强和体积，等等。在前一章中，我们讨论了另一个温度和体积的函数，并称之为熵 S 。当然，我们也可以建立起这些变量的许多其他我们所想要的函数：如 $(U - TS)$ 是温度和体积的函数。这样，我们就有许多不同的物理量，它们可以是许多不同变量组合而成的函数。

为了使本章的讨论简单起见，我们决定一开始就用温度和体积作为独立变量。化学家则使用温度和压强，因为在化学实验中这两个量较易测量和控制。但是在本章中我们从头至尾都用温度和体积，除了在一个地方我们将看一下怎样把它变换为化学家的变量系统。

这样，我们首先将只考虑一种独立变量系统——温度和体积。其次，我们将只讨论两个有关的函数：内能和压强。所有其他函数都可由此推导出来，所以不必讨论它们。即使作了这些限制，热力学仍是相当困难的课题，但已不是那么难以对付了！

我们先复习一下数学。如果一个量是两个变量的函数，那么考虑它的微商概念时要求比只有一个变量的情况更小心一些。所谓压强对温度的微商是什么意思呢？当然，随着温度变化而引起的压强变化部分地依赖于当 T 改变时体积的变化。在使对 T 的微商这一概念具有确切意义之前，必须指明 V 的变化。例如，我们可以问，如果 V 保持不变， P 对 T 的变化率有多大。这个变化率就是通常写为 dP/dT 的普通导数。习惯上我们使用一个特殊符号 $\partial P / \partial T$ ，以便提醒我们 P 除了取决于 T 外，还取决于另一个变量 V ，而此时另一个变量 V 保持为常数。我们将不仅用符号 ∂ 使人们注意另一变量保持不变的事实，而且还把这个保持不变的变量写成下标： $(\partial P / \partial T)_V$ 。由于只有两个独立变量，这种记法是多余的，但它将使我们易于搞清楚热力学中的偏微商。

假定函数 $f(x, y)$ 取决于两个独立变量 x 和 y 。把 y 看成常量后， $(\partial f / \partial x)$ ，就表示以通常方法求得的普通微商

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

类似地, 我们定义

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

例如, 设 $f(x, y) = x^2 + yx$, 则

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2x + y, \quad \text{而} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = x.$$

我们可以把这个概念推广到高阶微商: $\partial^2 f / \partial y^2$ 或 $\partial^2 f / \partial y \partial x$ 。后一个记号表示先把 y 看成常数, 求 f 对 x 的微商, 然后再把 x 看成常数, 把结果对 y 求微商。微商的实际次序是不重要的

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

我们要计算当 x 变到 $x + \Delta x$ 以及 y 变到 $y + \Delta y$ 时 $f(x, y)$ 的改变量 Δf 。下面一律假设 Δx 和 Δy 是无穷小量

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \underbrace{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}_{\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y} + \underbrace{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}_{\Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}. \end{aligned} \quad (45.1)$$

最后的式子是用 Δx 和 Δy 表示 Δf 的基本关系式。

举一个利用这个关系式的例子, 我们来计算当温度由 T 变到 $T + \Delta T$, 体积由 V 变到 $V + \Delta V$ 时内能 $U(V, T)$ 的变化。利用式(45.1), 可写出

$$\Delta U = \Delta T \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \Delta V \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T. \quad (45.2)$$

上一章我们发现当在气体中加进热量 ΔQ 时内能变化 ΔU 的另一个表示式

$$\Delta U = \Delta Q - P \Delta V. \quad (45.3)$$

比较式(45.2)和式(45.3), 一开始人们可能会猜想 $P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$, 但这是不正确的。为了得到正确的关系, 我们先假设在保持体积不变, 即 $\Delta V = 0$ 时加入气体一些热量 ΔQ 。由 $\Delta V = 0$, 从式(45.3)可知 $\Delta U = \Delta Q$, 而式(45.2)告诉我们 $\Delta U = (\partial U / \partial T)_V \Delta T$, 所以 $(\partial U / \partial T)_V = \Delta Q / \Delta T$ 。比值 $\Delta Q / \Delta T$ 是在体积不变时为了使温度改变一度所须加入到物质中的热量, 并称为定容比热, 用符号 C_V 表示。这样, 我们就论证了

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V. \quad (45.4)$$

现在, 我们再给气体加入一些热量 ΔQ , 但这一次保持 T 不变而让体积改变 ΔV 。在这种情况下的分析比较复杂, 但是我们可以利用上一章所介绍的卡诺循环, 通过卡诺的

论证来计算 ΔU 。

图 45-1 是卡诺循环的压强-体积图。我们已经证明,在一个可逆循环中气体所做的总功是 $\Delta Q(\Delta T/T)$, 这里 ΔQ 是当气体在温度 T 下等温地从体积 V 膨胀到 $V + \Delta V$ 时所加入到气体中的热量。而 $T - \Delta T$ 是在循环的第二步气体绝热膨胀时所到达的最终温度。现在我们要证明这个功也可以由图 45-1 中的阴影面积表示。在任何情况下,气体所做的功都是 $\int PdV$ 。当气体膨胀时,它是正的;当气体被压缩时,它是负的。如果我们画出 PV 图, P 与 V 的变化情况可以用一根曲线表示;每给定一个 V 值,在这条曲线上就可找到对应的 P 值。当体积从一个值变到另一个值时,气体所做的功 $\int PdV$ 是连接 V 的初值和终值的曲线下的面积。当我们把这个想法应用到卡诺循环时,注意到气体所做的功的正负号,就可以看到作一个循环后气体做的净功正是图 45-1 中的阴影面积。



图 45-1 卡诺循环的压强-体积图。标有 T 和 $T - \Delta T$ 的曲线是等温线;较陡的曲线是绝热线。 ΔV 是在恒定温度 T 下给气体加入 ΔQ 的热量所引起的体积改变。 ΔP 是在恒定体积下温度从 T 变为 $T - \Delta T$ 所引起的压强改变

图 45-2 阴影面积=虚线所包围的
面积=长方形面积= $\Delta P \Delta V$

现在我们要从几何上算出阴影面积。图 45-1 表示的循环与上一章中所用的循环的差别在于,我们现在假定 ΔT 和 ΔQ 都是无穷小量。循环图中所示的绝热线和等温线非常靠近,当增量 ΔT 和 ΔQ 趋向于零时,在图 45-1 中用粗线画出的图形接近于一个平行四边形。这一平行四边形的面积正是 $\Delta V \Delta P$,这里的 ΔV 是在温度不变时,对气体加入能量 ΔQ 后体积的变化,而 ΔP 则是等容情况下温度改变了 ΔT 时压强的变化。只要承认阴影面积等于图 45-2 中包围在虚线中的面积,就不难证明图 45-1 的阴影面积就是 $\Delta V \Delta P$,虚线中面积与由 ΔP 和 ΔV 所包围的矩形的差别只在于加上和减去图 45-2 中相等的三角形面积。

现在我们来归纳一下迄今为止已论证的结果

$$\text{气体所做的功} = \text{阴影面积} = \Delta V \Delta P = \Delta Q \left(\frac{\Delta T}{T} \right)$$

或

$$\frac{\Delta T}{T} \cdot (\text{使 } V \text{ 改变 } \Delta V \text{ 所需的热量})_{\text{等温}} = \Delta V \cdot (T \text{ 改变 } \Delta T \text{ 时 } P \text{ 的变化})_{\text{等容}} \quad \left. \right\} (45.5)$$

或

$$\frac{1}{\Delta V} \cdot (\text{使 } V \text{ 改变 } \Delta V \text{ 所需的热量})_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

方程式(45.5)表示卡诺论证的基本结果。全部热力学都能由式(45.5)及式(45.3)表示的热力学第一定律推导出。式(45.5)实质上就是第二定律;虽然它和卡诺原来的推导在形式上略有不同,因为他没有用到我们的温度定义。

现在我们可以着手计算 $(\partial U / \partial V)_T$ 。如果体积改变 ΔV , 内能 U 将改变多少? 内能之所以改变, 第一是因为加进了热量, 第二是由于做了功。根据式(45.5), 加进的热量是

$$\Delta Q = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V,$$

而对物质所做的功是 $-P \Delta V$, 因此内能的变化 ΔU 包括两部分

$$\Delta U = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \Delta V - P \Delta V. \quad (45.6)$$

两边除以 ΔV , 我们发现在 T 不变的情况下, U 对 V 的变化率是

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P. \quad (45.7)$$

在我们的热力学中, T 和 V 是仅有的变量, P 和 U 是仅有的函数, 式(45.3)和式(45.7)是基本的方程, 由此可推导出本课题的所有结果。

§ 45-2 应用

现在我们来讨论式(45.7)的意义, 看看为什么它能回答在上一章中所提出的问题。我们考虑以下的问题: 按照分子动理论, 由于原子对活塞的碰撞, 温度的增加显然会引起压强的增加。由于同样的物理原因, 当让活塞往回运动时, 就从气体中取出热量, 为了保持温度不变, 必须再加入热量。气体膨胀时会冷却, 而在气体被加热时压强会增加。在这两种现象之间必定存在某种联系, 而这种联系十分清楚地由式(45.7)给出。如果我们使体积保持固定而增加温度, 压强就按 $(\partial P / \partial T)_V$ 的比率增加。与这个事实有关的是: 如果我们增加体积, 除非加入一些热量以保持温度不变, 否则气体将冷却, 而 $(\partial U / \partial V)_T$ 告诉我们为了保持温度不变所需要的热量。式(45.7)表示这两种效应之间的基本的内部联系。这就是当我们开始学习热力学时, 曾经许诺要找到的关系。无需知道气体的内部机制, 只要懂得不能造出第二类永动机, 我们就可以推导出当气体膨胀时为了保持温度不变所需的热量与加热气体时压强变化之间的关系!

对于气体我们已经有了希望得到的结果, 现在再来考虑橡皮带的问题。当把橡皮带拉长时, 我们发现它的温度上升, 而在加热橡皮带时, 我们发现它会收缩。对一根橡皮带, 给出与气体的方程式(45.3)同样关系的方程是什么? 大体上来说情况如下: 加进热量 ΔQ 时, 内能改变了 ΔU , 并且做了某些功。唯一的差别是要以橡皮带所做的功 $-F \Delta L$ 代替 $P \Delta V$, 这里 F 是作用在带上的力, L 是带长。力 F 是温度和带长的函数。把式(45.3)中的 $P \Delta V$ 改为 $-F \Delta L$, 有

$$\Delta U = \Delta Q + F \Delta L. \quad (45.8)$$

比较式(45.3)和式(45.8), 我们看到只要用一个字母代替另一个字母就可以得到橡皮带的

方程。此外,如果以 L 代替 V , $-F$ 代替 P ,我们所有关于卡诺循环的讨论都可以用到橡皮带上。例如,通过与方程式(45.5)进行类比可以立即推出为使长度改变 ΔL 所需的热量

$$\Delta Q = -T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L \Delta L.$$

这个方程告诉我们,若保持带长不变而加热带子,我们可以根据把带子拉长一点点时为保持温度不变所需要的热量算出力增加多少。所以我们看到对气体和橡皮带两者,可以用同样的方程。事实上,如果我们写出

$$\Delta U = \Delta Q + A \Delta B,$$

这里 A 和 B 表示不同的量,如力和长度,压强和体积,等等,那么就可以通过分别以 A 、 B 代替 P 、 V ,应用在气体情况下所得到的结果。例如,考虑电池中的电势差或“电压” E 及流过电池的电荷 ΔZ 。我们知道,一个可逆电池(如蓄电池)所做的功是 $E \Delta Z$ 。(因为在功中不包括 $P \Delta V$ 这一项,因而要求电池的体积不变。)我们来看看热力学能对电池内的性能说些什么。如果在式(45.6)中以 E 代替 P ,以 Z 代替 V ,就得到

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = T \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_Z - E. \quad (45.9)$$

式(45.9)说明在电荷 ΔZ 通过电池时内能 U 会发生变化。为什么 $\Delta U / \Delta Z$ 不简单地是电池的电压 E 呢?回答是,在电荷通过电池时,真实的电池会发热。电池的内能之所以会发生变化,首先是因为电池在外电路上做功,其次是由于电池被加热。值得注意的是,第二部分又可以借助于电池的电压随温度的变化来表示。附带提一下,在电荷通过电池时,就会发生化学反应,式(45.9)为测量产生一种化学反应所需要的能量提供了一种别致的方法。我们所要做的一切只是制造一个能在反应中工作的电池,测量电压,再测定当电池中不流出电荷时电压随温度变化的关系!

我们已经假设电池的体积可以保持不变,因为我们在写出电池做的功为 $E \Delta Z$ 时已忽略了 $P \Delta V$ 这一项。但实际情况是要使体积保持不变在技术上是极其困难的。使电池保持在不变的大气压下要容易得多。为此,化学家不喜欢我们上面写下的任何方程:他们喜欢描述等压下各种特殊性的方程。在本章开始时我们选择 V 和 T 为独立变量。化学家则喜欢用 P 和 T ,我们现在来考虑怎样把迄今为止我们得到的结果改换为化学家的变量系统。注意在下述处理中,由于要把变量从 T 和 V 变换到 T 和 P ,所以很容易引起混淆。

我们从式(45.3),即 $\Delta U = \Delta Q - P \Delta V$ 出发, $P \Delta V$ 可以用 $E \Delta Z$ 或 $A \Delta B$ 代替。如果能用某种方式在最后一项以 $V \Delta P$ 代替 $P \Delta V$,那么就能变换 V 和 P ,这样化学家就会感到满意了。好,一个聪明人会注意到乘积 (PV) 的微分是

$$d(PV) = PdV + VdP,$$

如果把这个等式加到式(45.3)中,就可得到

$$\begin{aligned} \Delta(PV) &= P \Delta V + V \Delta P \\ \Delta U &= \Delta Q - P \Delta V \\ \hline \Delta(U + PV) &= \Delta Q + V \Delta P \end{aligned}$$

为了使结果看起来与式(45.3)相似,我们定义 $U+PV$ 为某个新的,称为焓的量 H ,并写为

$$\Delta H = \Delta Q + V\Delta P.$$

现在我们已经能够用下述规则: $U \rightarrow H$, $P \rightarrow -V$, $V \rightarrow P$ 来把我们的结果换成化学家的语言。例如,化学家用来代替式(45.7)的基本关系式是

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V.$$

现在,怎样换为化学家的变量 T 和 P 这一点应该清楚了。我们现在回到原来的变量上:本章的其余部分, T 和 V 都是独立变量。

现在把我们已经得到的结果应用到几种物理状况中去。首先考虑理想气体。由分子动理论我们知道理想气体的内能只与分子的运动以及分子数有关,内能取决于 T 而不是 V 。如果改变 V ,但保持 T 不变, U 就不变,因此 $(\partial U / \partial V)_T = 0$,于是式(45.7)告诉我们对于理想气体

$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = 0. \quad (45.10)$$

式(45.10)是一个可以告诉我们有关 P 的情况的微分方程。我们用下述方式来处理偏微商:因为偏微商是在等容下求得的,我们可用普通微商代替偏微商,并为醒目起见,清楚地写出“ V 不变”。这样式(45.10)就变为

$$T \frac{\Delta P}{\Delta T} - P = 0, \quad V \text{ 不变}; \quad (45.11)$$

由此积分可得

$$\ln P = \ln T + \text{常数}, \quad V \text{ 不变}$$

或

$$P = \text{常数} \times T, \quad V \text{ 不变}. \quad (45.12)$$

我们知道,对于理想气体,压强等于

$$P = \frac{RT}{V}, \quad (45.13)$$

这与式(45.12)一致,因为 V 和 R 都是常数。但是,既然我们已经知道了结果,那么何必还要作这样的计算呢?这是因为我们利用了两种独立的温度定义!前面我们曾假设分子的动能正比于温度,这个假设定义了一种我们称之为理想气体的温标。式(45.13)中的 T 是建立在这种理想气体温标上的。我们也把理想气体温标测得的温度称为动理温度。以后,我们又以与任何物质完全无关的第二种方式定义了温度。从基于热力学第二定律的论证出发,我们定义了称之为“绝对热力学温度” T 的温标,这就是在式(45.12)中出现的 T 。我们这里又证明了理想气体(根据理想气体的定义,它的内能与体积无关)的压强正比于绝对热力学温度。我们也知道压强正比于理想气体温标测得的温度。因此可以推断动理温度正比于“热力学绝对温度”。当然,这意味着,如果我们聪明的话,可以令两种温标一致。至少,在这一事例中,已经将这两种温标选择成

相互重合,即比例系数已选取为1。许多时候人们往往总是自找麻烦,但是这一次他们却使两种温标相等了!

§ 45-3 克劳修斯-克拉珀龙方程

液体的汽化是我们已经推得的结果的另一个应用。假如在一个汽缸中盛有一些液体,我们能够通过推动活塞来压缩它。我们可以问:“如果温度保持不变,压强将怎样随体积而变化?”换句话说,我们希望在 PV 图上画出等温线。汽缸中的物质不是我们以前考虑过的理想气体;它可能处于液相或气相,或者两相共存。如果压力足够大,物质将凝结为液体。如果压缩得更厉害,体积只改变一点点,我们的等温线将随着体积的减小而迅速上升,如图 45-3 中左方所示。

如果把活塞向外拉以增加体积,压强将下降到液体开始沸腾的那一点为止,然后蒸气开始形成。如果我们继续向外拉活塞,所发生的是有更多的液体汽化。当汽缸中存在部分液体和部分蒸气时,两相达到平衡——液体的蒸发率与蒸气的凝结率相同。如果给蒸气以更多的空间,为了保持压力不变需要更多的蒸气,所以液体蒸发得稍多一些,但压强仍保持不变。在图 45-3 中曲线的平坦部分,压强不变,这个压强的数值称为温度 T 时的蒸气压。当体积继续增加时,将到达没有更多的液体可供蒸发的时刻。此时,如果使

体积进一步膨胀,压强就会像普通气体那样下降,如 PV 图上的右方所示。图 45-3 中的较低曲线是对应于稍低温度 $T - \Delta T$ 的等温线。液相中的压强略有减少,因为在温度增加时液体膨胀(这是对大多数物质而言,而对近于冰点的水则并非如此),当然,在较低温度下蒸气压也较小。

我们现在把两条等温线平坦部分的端点连接(比如说用绝热线)起来形成一个循环,如图 45-4 所示。图中右下角的一个小尖角会造成一点小差别,我们将忽略它。我们来应用卡诺的论证,它告诉我们,为了使物质从液体变为蒸气所需加入的热量与物质在循环中所做的功有关。令 L 为使汽缸中的物质汽化所需要的热量。用式(45.5)前面的那种论证就可知道 $L(\Delta T/T) =$ 物质所做的功。同前面一样,物质所做的功就是阴影面

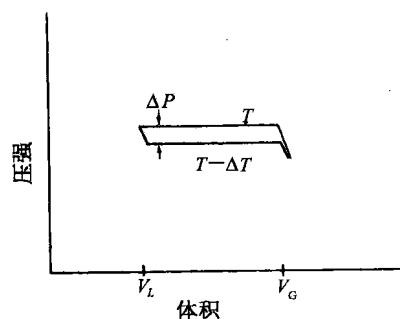


图 45-4 汽缸中可凝结蒸气的卡诺循环压强-体积图。在左边,物质处于液态。在温度 T 时,加入热量 L 使液体汽化。蒸气绝热膨胀时,温度由 T 变为 $T - \Delta T$

积,它近似地等于 $\Delta P(V_G - V_L)$,这里 ΔP 是 T 和 $T - \Delta T$ 这两个温度下的蒸气压之差, V_G 是蒸气的体积, V_L 则是液体的体积,都是指在饱和蒸气压强下所测得的体积。令这两个面积的表示式相等,就有

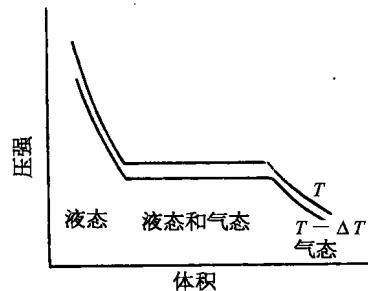


图 45-3 在汽缸中进行压缩的可凝结蒸气的等温线。在左边,物质处于液相。在右边,物质汽化。在中央部分,液体和蒸气并存

$$L \frac{\Delta T}{T} = \Delta P(V_G - V_L)$$

或

$$\frac{L}{T(V_G - V_L)} = \frac{\partial P_{\text{蒸气}}}{\partial T}. \quad (45.14)$$

式(45.14)给出蒸气压随温度的变化率与使液体蒸发所需要的热量之间的关系。这个关系曾被卡诺推得,但它却称为克劳修斯-克拉珀龙方程。

现在我们把式(45.14)与分子动理论推得的结果比较一下。通常 V_G 远大于 V_L , 所以 $V_G - V_L = V_G = RT/P$ (每摩尔)。如果进一步假设 L 是常数, 而与温度无关——这不是一个很好的近似——我们就有

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{LP}{RT^2}.$$

这个微分方程的解是

$$P = \text{常数} \times e^{-L/RT}. \quad (45.15)$$

我们把它与以前由分子动理论得出的压强随温度的变化作一个比较。分子动理论至少大略表明在液面上的蒸气的分子数可能是

$$n = \frac{1}{V_A} e^{-(U_G - U_L)/RT}, \quad (45.16)$$

这里的 $U_G - U_L$ 是气体中每摩尔的内能减去液体中的每摩尔的内能, 即汽化一摩尔液体所需要的能量。因为压强是 nkT , 由热力学得到的式(45.15)与由分子动理论得到的式(45.16)是密切相关的, 但它们不完全相同。然而, 假如我们设 $L - U_G = \text{常数}$ 以代替 $L = \text{常数}$, 那么结果将完全相同。如果设 $L - U_G = \text{常数}$, 而与温度无关, 那么推导式(45.15)的论证也同样能推导出式(45.16)。

下面这个比较说明了热力学比分子动理论有利与不利之处: 第一, 由热力学得出的式(45.14)是精确的, 而式(45.16)只在比方说 U 近似不变, 而且模型正确的情况下才近似成立。第二, 我们也许没有正确了解气体怎样变为液体, 然而式(45.14)还是正确的, 而式(45.16)只是近似的。第三, 虽然我们的处理是用在气体凝结为液体的情况, 但对于状态的任何其他变化, 这种论证同样成立。例如, 固—液相变就具有与图 45-3 和图 45-4 同一类型的曲线。引入熔解潜热, $M/\text{摩尔}$, 则类似于式(45.14)的公式为

$$\left(\frac{\partial P_{\text{熔解}}}{\partial T}\right)_v = \frac{M}{T(V_{\text{液}} - V_{\text{固}})}.$$

虽然我们也许不知道熔解过程的动理学理论, 但还是有一个正确的方程。不过, 当我们能够了解分子动理论时, 就会有别的好处。式(45.14)只是一个微分关系式, 我们无法得出积分常数。在分子动理论中, 如果有一个能完全描写现象的适当模型, 我们能求出积分常数。所以, 两者各有利弊。当我们缺乏有关知识, 并且情况较为复杂时, 热力学关系实际上是最有效的。当情况很简单, 可以进行理论分析时, 最好试试看从理论分析得出更多的信息。

再举一个例子: 黑体辐射。我们已经讨论过一个包含辐射而无其他物质的容器。我们

曾讨论过振子和辐射之间的平衡。我们也得出过打在器壁上的光子将产生一个压强 P , 并得出 $PV = U/3$, 这里 U 是所有光子的总能量, V 是容器的体积。如果我们以 $U = 3PV$ 代入基本方程(45.7)中, 就有

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 3P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \quad (45.17)$$

由于容器的体积是常数, 可用 dP/dT 代替 $(\partial P/\partial T)_V$, 从而得到一个常微分方程, 积分后得 $\ln P = 4 \ln T + \text{常数}$, 或 $P = \text{常数} \times T^4$ 。辐射压强随温度的四次方而变化, 而辐射能量密度 $U/V = 3P$ 也随 T^4 而变化。通常将 U/V 写为 $U/V = (4\sigma/c)T^4$, 这里 c 是光速, σ 是常数。只从热力学考虑不可能得出 σ 。这个例子很好地说明了热力学的功效及其局限性。知道 U/V 随 T^4 而变化是很了不起的, 但为了知道在任何温度下 U/V 实际上有多大则需要更深入详细的讨论, 并且只有一种完全的理论才能做到这一点。对于黑体辐射, 我们已经有了这样的理论, 可以按上述方式求出常数 σ 的表示式。

令 $I(\omega)d\omega$ 是强度分布, 即每秒流过 1 米² 的频率在 ω 与 $\omega + d\omega$ 之间的能量。能量密度分布 = 能量 / 体积 = $I(\omega)d\omega/c$, 所以

$$\frac{U}{V} = \text{总能量密度} = \int_{\omega=0}^{\infty} (\text{从 } \omega \text{ 至 } \omega + d\omega \text{ 的能量密度}) = \int_0^{\infty} \frac{I(\omega)d\omega}{c}.$$

由先前的讨论, 我们知道

$$I(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}.$$

将这个 $I(\omega)$ 的表示式代入 U/V 的等式中, 就有

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega.$$

如以 $x = \hbar\omega/kT$ 代换, 就得

$$\frac{U}{V} = \frac{(kT)^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

这个积分的数值可以用画出曲线并用方块来量面积的方法近似求出其值。它大致是 6.5。

数学家可以证明准确的积分值是 $\left(\frac{\pi^4}{15}\right)^*$ 。将这个结果与 $U/V = (4\sigma/c)T^4$ 相比较, 我们求得

$$\sigma = \frac{k^4 \pi^2}{60 \hbar^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

* 由于 $(e^x - 1)^{-1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots$, 积分是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^3 dx.$$

但 $\int_0^{\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}$, 对 n 微分三次得 $\int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx = \frac{6}{n^4}$, 所以积分是 $6 \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots\right)$, 把前几项相加就得到一个很好的估值。在第 50 章中我们将找到一种方法来证明, 整数的负四次幂之和事实上等于 $\pi^4/90$ 。

如果在器壁上开一个小孔,那么每秒钟流过单位面积的小孔的能量有多大?从能量密度到能流,须将能量密度 U/V 乘以 c ,还要乘以 $1/4$,这是由于:首先,一个 $1/2$ 的因子是因为只有流出的能量才能跑掉;其次,另一个 $1/2$ 的因子是因为到达小孔的能量与小孔的法线成一个角度时,其通过小孔的有效程度与沿法线方向通过小孔的情形相比差一个余弦因子。余弦的平均值是 $1/2$ 。现在可以清楚看出,我们为什么把 U/V 写为 $(4\sigma/c)T^4$ 。这样,最后我们就可以说,从小孔流出的能流是每单位面积 σT^4 。

第 46 章 棘 轮 和 撕 爪

§ 46-1 棘轮是怎样工作的

在这一章中我们要讨论棘轮和掣爪，这是一种非常简单的只让转轴往一个方向转动的装置。对某个东西只往一个方向转动的可能性需要作一些详尽而仔细的分析，这里有一些十分有趣的结论。

我们现在所安排的讨论，目的在于要从分子动理论的观点出发，对从一台热机中所能得到的功具有最大值这一事实提供一个基本的解释。当然，我们已经知道了卡诺论证的实质，但是能够找到一个基本的解释就好了，所谓基本是指我们能从物理上看出发生些什么而言。现在已经有一些复杂的数学论证，它从牛顿定律出发说明当热量从一个地方流到另一个地方时，我们只能得到一定量的功。但是，把它变成基本的证明却存在着很大的困难。概而言之，虽然我们可按照数学方法一步一步地进行推导，但是并不理解它。

在卡诺的论证中，关于从一个温度到另一个温度之间所能取出的功不能大于一定的数量这一点是从另一个公理推出的，那就是说：如果每一样东西都处在相同的温度下，那么就不可能通过一个循环过程来使热量转变为功。所以先让我们回过头来看看为什么这个比较简单的命题至少对一个基本的例子来说是正确的。

我们试图发明一个违反热力学第二定律的装置，它是一个能从所有东西都处在相同温度的热库中取出功来的小玩意儿。假设有一箱处在一定温度下的气体，其中有一根带叶片的转轴（见图 46-1，但取 $T_1 = T_2 = T$ ）。由于气体分子撞在叶片上，叶片会振动和跳动。我们要做的是在轴的另一端套上一个转轮，它只能沿一个方向转动，这就是棘轮和掣爪。于是，当轴试图往一个方向跳动时，它不能转动，而往相反方向跳动时，它能转动。于是，轮子将缓慢地转动，或许，我们甚至可以把一个跳蚤缚在一

根从轴上的鼓轮悬挂下来的弦上，并将它提起来！现在我们要问这是否可能？按照卡诺的假设，这是不可能的。但是如果光看这个轮子，那么最初的印象会认为这是完全可能的。所以我们必须更仔细地研究一下。的确，如果观察棘轮和掣爪，我们会看到一些复杂的情况。

首先，我们的理想化棘轮是尽可能简单的，尽管如此，总还有个掣爪，而在掣爪上又必须有一根弹簧。在经过一个轮齿后，掣爪必须又返回来，所以弹簧是必要的。

这个棘轮和掣爪的另一个特性在图上没有画出，但却是很本质的。假设这个装置由完全弹性的部件组成。在掣爪偏离一个轮齿的边缘后，就被弹簧拉回来，再撞到轮子上，并且

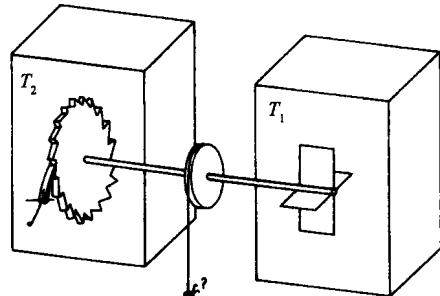


图 46-1 棘轮和掣爪机械

继续撞来撞去。于是,当另一个涨落到来时,轮子可能往相反方向转动,因为当掣爪跳起的那个时刻轮齿可能在它的下方!所以我们这个轮子不可逆性的实质部分是一种使跳动中止的阻尼或减弱的机制。当然在阻尼出现时,掣爪中的能量跑到了轮子上,并表现为热量的形式。所以,在棘轮转动时,轮子将越来越热。为了使事情再简化一些,我们可以在轮子四周充以气体来带走一些热量。无论如何,我们假设气体将和轮子一起升高温度。这种情况会永远继续下去吗?不行!棘轮和掣爪两者都处在某个温度 T 下,也都有布朗运动。也就是说,每当作用在叶片上的布朗运动企图使轮轴反转时,如果碰巧掣爪自己正好跳起一个轮齿的高度,它就会让这个轮齿转过。随着这个装置越来越热,这种情况就发生得越频繁。

所以,这就是这个装置不可能“永动”的原因。当叶片受到碰撞时,有时掣爪提高而越过轮齿边缘,但有时当叶片企图朝相反方向转动时,掣爪已经由于它在轮边运动的涨落而被提升,这样,轮子就反过来朝反方向运动!净结果等于零。不难证明,当两边的温度相等时,轮子没有净平均运动。当然,它会往这个方向或那个方向作多次晃动,但不会如我们所希望的那样只顺着一个方向转动。

让我们来看看理由何在。为了把掣爪提高到一个轮齿的顶部,必须克服弹簧做功。我们称这个能量为 ϵ ,两个轮齿之间的夹角为 θ 。系统可以积聚起足够的能量 ϵ 使得掣爪越过轮齿顶部的几率是 $e^{-\epsilon/kT}$ 。但掣爪由于偶然原因而提高的几率也是 $e^{-\epsilon/kT}$ 。因此掣爪提高而轮子可以自由地倒转的次数就等于在掣爪放下时我们具有足够的能量使轮子正转的次数。于是我们取得一种“平衡”,因而轮子不会转动。

§ 46-2 作为热机的棘轮

现在我们继续讨论下去。我们举这样的例子,设叶片的温度为 T_1 ,而轮子或棘轮的温度是 T_2 , T_2 小于 T_1 。由于轮子较冷,掣爪的涨落相对地要少一些,因而要使它获得能量 ϵ 是很难的。因为叶片的温度 T_1 较高,它将经常地取得能量 ϵ ,所以我们的装置将像设计的那样沿着一个方向转动。

现在我们来看看它是不是能够提起重物。在鼓轮中间我们缚上一根线,将一个重物,比方说跳蚤悬挂在线上。设 L 是重物所产生的力矩。如果 L 不太大,那么由于布朗涨落将使装置比起其他方向更多地往一个方向转动,它就会提起重物。我们要求出它可以提起多大的重量以及转动得多快,等等。

首先我们考虑向前转动,这是人们通常设计的棘轮转动方式。为了向前转一步,要从叶片末端取得多少能量呢?要提起掣爪,必须取得能量 ϵ 。轮子反抗力矩 L 转过角度 θ ,所以还需要能量 $L\theta$ 。这样,必须取得的总能量是 $\epsilon + L\theta$ 。得到这样的能量的概率正比于 $e^{-(\epsilon+L\theta)/kT_1}$ 。实际上,这不仅是一个取得能量的问题,而且我们还希望知道每秒它具有这个能量的次数。每秒钟的概率正比于 $e^{-(\epsilon+L\theta)/kT_1}$,我们称此比例常数为 $1/\tau$ 。不管怎样这个常数最后将会消去。当向前转一步时,对重物所做的功是 $L\theta$ 。从叶片中取出的能量是 $\epsilon + L\theta$ 。弹簧用能量 ϵ 拉紧,然后它卡嗒、卡嗒地跳起,弹回,使这些能量变成了热量。所有由叶片取得的能量都花在提高重物和驱动掣爪上,然后掣爪又落回来,并将热量传给另一边。

现在我们来看一看相反的情况,即反过来转动。这时会出现什么呢?为了使轮子向后转,我们必须做的只是提供能量来把掣爪提得足够高以使棘轮能滑过去。这个能量仍是 ϵ 。

每秒钟使掣爪提得这么高的概率是 $(1/\tau)e^{-\epsilon/kT_2}$ 。比例常数是相同的,但是因为温度不同,这次出现了 kT_2 项。当出现这种情况时,由于轮子向后转,功就被释放出来。滑过一个轮齿要放出 $L\theta$ 的功。所以,从棘轮系统取得的能量是 ϵ ,而给予叶片那边温度为 T_1 的气体的能量是 $L\theta + \epsilon$ 。这需要稍加思索才能看出其中的道理。假设偶然由于一次涨落,掣爪自动地提高,那么当它落下时,弹簧把它推向轮齿,由于轮齿压在一个斜面上,于是就有一个力企图转动轮子。这个力在做功,而由小重物产生的力也在做功。两者加在一起就是总的力,而所有的能量都缓慢地在叶片末端以热的形式放出(当然,按照能量守恒定律,这必定如此,不过我们还是有必要透彻地思考这个问题)。我们注意到,所有这些能量都完全相等,但是符号则相反。这样,重物或者缓慢升高,或者缓慢放下,取决于这两个比率中哪一个更大。当然,它不断上下跳动,一会升高,一会降低,但我们讲的是平均的行为。

假定对于某个特定的重物两种比率正好相等,那么我们可以在线上加上一个无限小的重物。这个重物将缓慢地下落,因而对机器做了功。能量将从棘轮取出并传给叶片。假如我们相反地取走了一点重量,就会出现相反的不平衡情况;重物被提高,热量从叶片中取出,并传给轮子。这样倘使重物的大小正好使两种几率相等,我们就得到卡诺可逆循环的条件。很明显这个条件就是 $(\epsilon + L\theta)/T_1 = \epsilon/T_2$ 。假设机器缓慢地提起了重物。由叶片取得的热量是 Q_1 ,释放给轮子的热量是 Q_2 ,这两个能量的比是 $(\epsilon + L\theta)/\epsilon$ 。假如我们缓慢地降低重物,也会有 $Q_1/Q_2 = (\epsilon + L\theta)/\epsilon$ 。于是(见表 46-1)我们就有

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

表 46-1 棘轮和掣爪的运行过程小结

向前转:需要的能量 $\epsilon + L\theta$, 取自叶片。∴ 比率 = $e^{-(L\theta+\epsilon)/kT_1}/\tau$		
取自叶片	$L\theta + \epsilon$	
做功	$L\theta$	
给予棘轮	ϵ	
向后转:需要的能量 ϵ 用于掣爪。∴ 比率 = $e^{-\epsilon/kT_2}/\tau$		
取自棘轮	ϵ	
放出功	$L\theta$	
给予叶片	$L\theta + \epsilon$	数值与上相同,但符号相反
如果系统是可逆的,则比率相等,因此 $\frac{\epsilon + L\theta}{T_1} = \frac{\epsilon}{T_2}$,		
$\frac{\text{给予棘轮的热量}}{\text{取自叶片的热量}} = \frac{\epsilon}{L\theta + \epsilon}$. 因此 $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$.		

此外,我们所得出的功与由叶片取出的能量之比和 $L\theta$ 与 $L\theta + \epsilon$ 之比相同,因此也就是 $(T_1 - T_2)/T_1$ 。由此可见,如果我们的装置可逆运行时,不可能得出比这更多的功。这就是我们从卡诺的论证希望得到的结果,也是本讲的主要结果。然而我们可以利用这个装置来理解若干其他现象,甚至包括那些偏离了平衡状态,因而也就超出了热力学范畴的现象。

我们现在来计算一下,如果每件东西的温度都相同,那么当在鼓轮上悬挂一个重物时,我们的单向装置将会转动得多快。当然,如果拉得非常非常紧,就会出现种种复杂现象——掣爪滑过棘轮,或者弹簧断裂,等等。但是假定我们只是轻轻地拉,那么每件东西都正常地工作。在这种情况下,如果记得两个温度是相同的,上述对于轮子向前转和向后转的概率的

分析是正确的。轮子每转一下都通过一个角度 θ , 所以角速度是 θ 乘以每秒钟内转一下的概率。向前转的概率是 $(1/\tau)e^{-(\epsilon+L\theta)/kT}$, 向后转的概率是 $(1/\tau)e^{-\epsilon/kT}$, 所以对于角速度有

$$\omega = (\theta/\tau)[e^{-(\epsilon+L\theta)/kT} - e^{-\epsilon/kT}] = (\theta/\tau)e^{-\epsilon/kT}(e^{-L\theta/kT} - 1). \quad (46.1)$$

如果我们画出 ω 对 L 的曲线, 就得到如图 46-2 所示的形状。我们看到 L 取正还是取负有

极大的差别。如果 L 在正的区域内增加(这在我们试图使轮子向后转时出现), 向后转的速度趋于一个常数。当 L 变为负值时, ω 实际上上升得很快, 因为指数幂的增长非常迅速。

于是, 由不同的力得到的角速度很不对称。向一个方向转动很容易: 一点点力就能得到很大的角速度。而向另一个方向转动时, 即使我们用很大的力, 轮子还是几乎不转动。

我们发现, 在电子整流器中也有同样的情况。这时出现的不是力而是电场, 不是角速度而是电流。对于整流器, 电压不与电阻成正比, 这种情况是非对称的。我们对于机械整流器所作的分析, 也同样适用于

电子整流器。事实上, 上面得到的这一类公式正是典型的作为电压函数的整流器载流特性曲线。

现在把所有的重物拿走, 并且观察这台原来的机械。如果 T_2 小于 T_1 , 棘轮向前转, 这是每个人都相信的。但是初看起来很难相信还存在着相反的过程。如果 T_2 大于 T_1 , 棘轮就会朝反方向转动! 一个具有大量热能的动态棘轮会使自己反转, 因为掣爪一直在跳动着。如果在某个时刻掣爪处在轮齿斜面某处, 它就会斜着推动这个斜面。但它总是经常推在一个斜面上, 因为如果它碰巧提得足够高, 以致超过了一只轮齿的边缘, 这个斜面就会滑过去, 而又会重新落在另一个斜面上。所以, 可以制作一个理想的热的掣爪和棘轮, 它能够往与原设计截然相反的方向转动!

无论我们的单向转动的设计如何巧妙, 如果两个温度严格相等, 那么向一个方向转动的倾向不会比向另一个方向转动的倾向更大。当我们在某一时刻观察时, 它可能往这个或那个方向转动, 但是从长远来看, 往哪儿也不转动。正是这个往哪儿也不转动的事实, 实际上反映了一个深刻的基本原理, 而整个热力学就建立在这个原理上。

§ 46-3 力学中的可逆性

究竟哪一条更深刻的力学原理告诉我们, 如果温度处处相同, 则我们的装置最终既不向右转也不向左转? 很明显, 我们有了一个基本命题: 不可能设计这样一台机器, 在让它自己运行足够长时间以后, 它往一个方向转动的可能性比往另一个方向转动的可能性大。我们必须试试看怎样从力学定律推得这个结论。

力学的定律大致如下: 质量乘加速度是力, 而作用在每个粒子上的力是所有其他粒子位置的某个复杂函数。也有其他一些情况, 其中力与速度有关, 比如在磁学中就是如此, 但现在我们不去考虑这一点。我们取一种比较简单的情况, 比如重力, 其大小只与位置有关。现

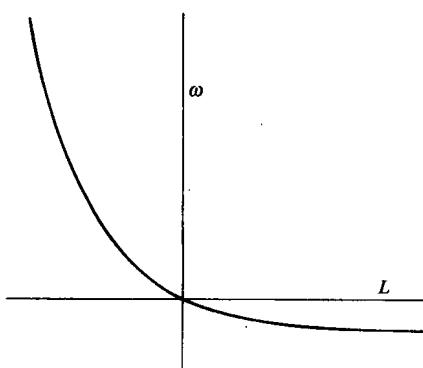


图 46-2 棘轮的角速度与力矩的关系

在,假定我们已解出了一组方程,并且对于每个粒子求得了一定的运动表示式 $x(t)$ 。在足够复杂的系统中,解是十分复杂的,而且随着时间的推移会出现令人非常惊异的事情。如果我们对各个粒子写下任何认为合适的排列,那么只要等待足够长时间,我们将看到这种排列实际上会出现!如果我们跟随粒子运动的解足够长的时间,可以说,它会尝试做每件事情。在最简单的装置中,这不一定是绝对必须的,但是当系统充分复杂,带有足够多的原子时,就会出现这种情况,此外,解还能起一些别的作用。如果我们解运动方程,也许会得到如 $(t + t^2 + t^3)$ 这样的函数。我们声称另一个解将是 $-t + t^2 - t^3$ 。换句话说,假定在整个解中处处都以 $-t$ 代替 t ,我们将再一次得到同一个方程的一个解。这个结论是从下述事实得出的:如果在原来的微分方程中以 $-t$ 代替 t ,由于在方程中只有对 t 的二阶导数出现,因此方程不会有任何变化。这意味着,如果我们有了一个确定的运动,那么严格相反的运动也是可能的。如果我们等待足够长的时间,系统将出现完全混乱的状况,它有时以这种方式运动,有时又以其他方式运动。没有哪种运动比另一种更占优势。所以不可能设计一台足够复杂的机器,并且从长远来看,它以一种方式运动的可能性会比另一种方式更大。

人们可能会想出一个对它来说上面这一点明显不正确的例子。比方说,如果使一个轮子在真空中转动,它会永远同样地转动下去。所以,存在着某些条件(像角动量守恒那样)违背上述的论证。但这只要求把论证作得更小心一些。也许,墙壁或者某些类似于墙壁之类的东西取走了角动量,这样我们就没有特殊的守恒定律。可见,如果系统是足够复杂的,论证就是正确的。它建立在力学定律可逆这一事实的基础上。

出自于对科学史的兴趣,我们想提一下麦克斯韦发明的一个装置,麦克斯韦是第一个建立气体动力论的科学家。他的假设如下:有两箱同温度的气体,箱子之间有一个小孔。孔上坐着一个小妖(当然,它可以是一台机器),在小孔上还有一扇可以由小妖打开或关闭的门。它注视着从左边来的分子,无论何时只要看到速度很快的分子,就把门打开,看到速度很慢的分子,就将门关上。如果我们要求它是一个极为特殊的小妖,使它的脑后也长着眼睛,它就能对来自另一边的分子作相反的事情。这样它就让慢的分子跑到左边,而让快的分子跑到右边。很快左边将变冷,右边将变热。问题在于,是否因为我们有了这样一个小妖而破坏了热力学定律?

结果表明,如果我们造出的是一个有限大小的小妖,它自己就会变得这样热,使得过了一会儿以后,不能很好地看清楚东西。举个例子来说,一个可能是最简单的小妖可以是一扇用一根弹簧扣住的遮住小孔的活动门。一个快速分子可以通过,因为它能推开活动门。慢的分子不能通过而被弹回。但是这个东西不是别的什么,不过是我们的棘轮和掣爪在另一种形式下的体现罢了。最后这个装置会发热。如果假设小妖的比热不是无限大,它一定会发热,它只有有限数目的内部轴承和转轮,所以不能清除由于观察分子而取得的额外热量。不久,它就会由于布朗运动而摇动得这么厉害,以致再也不能说出它自己是来还是去,更不用说分子是来还是去了,所以它不起作用。

§ 46-4 不 可 逆 性

所有的物理定律都可逆吗?显然不是!不信就试试看让一个炒蛋重新变成新鲜蛋吧!如果把电影倒过来放,不出几分钟就会使人们放声大笑。所有现象的最自然特征莫过于它

们的明显的不可逆性。

那么,不可逆性是从哪里来的? 它并非来自牛顿定律。如果我们声称每件事的行为最后都要按物理规律来理解,并且,如果所有的方程最后都有这么一个奇妙的性质,即以 $t = -t$ 代入时,将得到另一个解,那么一切现象都是可逆的。为什么自然界在宏观的尺度上,事情都是不可逆的呢? 显然必定存在着某条定律,某个尚未明了而是基本的方程,或许在电学中,或许在中微子物理学中,对它来说,时间朝哪个方向这一点是至关重要的。

我们现在来讨论这个问题。我们已经知道其中有一条物理定律指出:熵始终是增加的。如果有一个热的和一个冷的物体,那么热量总是从热的物体流到冷的物体。所以,熵的定律就是这样的一条定律。但是我们希望从力学观点出发来理解熵的定律。事实上,我们刚才是从力学论证成功地获得了热量不可能自动倒流这一论证的所有结果,并由此得到了对于热力学第二定律的一种理解。看来我们能从可逆的方程得出不可逆性。但是,我们所用的只是力学论证吗? 我们来更仔细地考察一下。

由于我们的问题和熵有关,因此必须设法找出一种熵的微观描述。如果在某种东西,比如气体中,有一定的能量,我们可以得出它的一幅微观图像,并且说每个原了都有一定的能量。所有这些能量相加起来就是总能量。类似地,或许每个原子都有一定的熵,把每个累加起来就得到总熵。但事情并不那么顺利,我们来看一看会发生什么情况。

举个例子说,我们要计算某一确定温度下,某一体积中的气体和在相同温度下,另一个体积中气体的两个熵值之差。由第 44 章知道,对熵的改变有

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

在现在的情况下,气体的能量在膨胀前后是相同的,因为温度没有变化。所以,我们必须加入足够的热量以补偿气体所做的功,或对每一个体积的小变化来说

$$dQ = PdV.$$

把 dQ 代入上式,就有

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} p \frac{dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{T} \frac{dV}{V} = Nk \ln V_2 / V_1.$$

这正是第 44 章得到的结果。例如,若体积膨胀为 2 倍,则熵变为 $Nk \ln 2$ 。

现在我们考虑另一个有趣的例子。假定有一个容器,中间放一块隔板,一边是氖气(“黑”分子),另一边是氩气(“白”分子)。我们取出隔板,让它们混合起来。试问熵的改变有多大? 可以设想用两个活塞来代替隔板,一个活塞上有一些只让白分子而不让黑分子通过的小孔,另一个活塞的作用正相反。如果把两个活塞往相反方向各自推到底,我们就会看到,对每一种气体来说,情况正像上面刚解过的那样。所以,熵改变了 $Nk \ln 2$,这意味着,每个分子的熵增加了 $k \ln 2$ 。 2 这个因子的得出与分子占有的额外空间有关,这一点是颇为奇特的。它不是分子本身的特性,而是与分子能活动的空间大小有关。这是一个奇怪的情况,熵增加了,但每样东西具有相同的温度和能量! 唯一发生变化的是分子的分布不同了。

我们都了解,如果把隔板拿走,经过一段较长时间后,由于分子的碰撞、跳动、敲击等等,它们全都混合起来。有时一个白分子跑向黑分子,有时一个黑分子跑向白分子,也可能彼此穿过。渐渐地,由于偶然的机会,白分子进入到黑分子的空间,黑分子也进入到白分子

的空间。如果我们等待足够长的时间后，就会得到一种混合的状态。很清楚，这是真实世界中的一种不可逆过程，它应当包含有熵的增加。

在这里我们有了一个完全由可逆事件组成的不可逆过程的简单例子。每当两个分子碰撞后，它们各以确定的方向离开。假如我们将拍摄某次碰撞过程的电影倒过来放，电影没有任何不对头的地方。事实上这一类碰撞正与另一类碰撞相似。所以混合过程完全是可逆的，然而它又是不可逆的。我们都应该知道，如果起先黑、白分子分开，几分钟内它们就会混合起来。如果我们坐下来观察好几分钟，它们也不会重新分开，而是仍然混合在一起。所以我们有了一种建立在可逆情形的基础上的不可逆性。但是现在我们也同时看到其原因何在。开始的排列在某种意义上是有序的，由于碰撞产生的混杂，它变成无序。从有序的排列到无序排列的变化是不可逆性的起源。

的确，如果我们拍下这些分子运动的影片，再将它倒过来放，我们会看到它会渐渐地变成有序。也许有人会说：“这是违反物理定律的！”那么我们将影片再重放一次，并观察每一次碰撞。每一样东西都是完善的，都遵循物理定律。当然，原因在于每个分子的速度都是适当的，所以如果沿着所有的路径返回，它们就会回到原来的状态。但是，这种情况是极不可能出现的。如果气体在开始时没有什么特殊的安排，只是白的归白，黑的归黑，它就永远不会回到原来的状态。

§ 46-5 序 与 熵

这样我们就必须讲一下无序是什么意思，有序又是什么意思。这不是什么有序合我们的意，无序不合我们意的问题。在上节所提到的例子中，混合与不混合的差别如下：假设我们把空间划分成许多小体积元。如果将白分子和黑分子分布在这些体积元中，并使白分子分布在一边，黑分子分布在另一边，试问有几种这样的分布方式？另一方面，如果对黑白分子分布到哪里不加任何限制，又有多少种分布方式？显然，在后一种情况下的排列方式要多得多，我们以在从外部看来完全一样的条件下，内部可能有的排列方式的数目来作为“无序”的量度。这种排列方式的数目的对数就是熵。在黑白分子分开的情况下，排列方式的数目较少，故熵较小，或“无序性”较小。

这样，有了上面对无序的术语上的定义，我们就可以理解这个命题。第一，熵是无序的量度。第二，宇宙总是从“有序”变到“无序”，所以熵总是增加的。“有序”并不是指我们所喜欢的排列这个意义的有序，而是指从外部看来完全一样的条件下所具有的内部不同排列方式的数目是相当有限的。在把气体混合的影片倒过来放的情况下，并没有我们所想象的那么多的无序。每个单个原子都恰好以正确的速率和方向出现。熵并不像表面上看来那么大。

其他物理定律的可逆性如何？当我们谈到由加速电荷产生的电场时，我们曾说过必须取推迟场。在时刻 t ，离电荷为 r 的地方，我们取加速电荷在 $t - r/c$ ，而不是 $t + r/c$ 的时刻所产生的场。这样，初看起来，似乎电学定律是不可逆的。然而，非常奇怪的是，我们所应用的定律来自实际上可逆的麦克斯韦方程组。而且，有可能论证如果我们只用超前场，即由在时刻 $(t + r/c)$ 的事态而引起的场，并在一个完全封闭的空间里始终如一地应用它，那么所发生的每一件事情都和使用推迟场严格一样！因此，这种电学中的表现不可逆性，至少在一个闭合体内，根本不是一种不可逆性。我们已经对此有过某种体会，因为我们知道，一个振

动电荷产生的场从闭合体的四壁反射回来后,最后达到一种没有什么偏向性的平衡。用推迟场只是为了解法上的方便而已。

就我们所知,所有的物理学基本定律,像牛顿方程那样,都是可逆的。那么不可逆性究竟是从哪里来的呢?它是从有序变到无序时产生的,但是在我们知道有序性的起源以前,我们并不理解这一点。为什么我们自己每天所发现的情况总是不处在平衡态呢?有一个可能的解释如下。我们不妨再来看一下黑白分子混合的箱子。如果我们等待足够长的时间,大多数白分子都在一边,大多数黑分子都在另一边的分布情况,虽然总的讲是不大可能的,但偶尔或许仍是可能的。此后,随着时间的推移,连续不断地出现一些偶然事件,它们又重新混合起来。

这样,对今天世界之所以高度有序的一个可能解释是,这恰恰是一种侥幸。或许我们的宇宙碰巧在过去发生过某种涨落,使得各种事物得以分开,而现在它们正在重新混合起来。这种理论不是非对称的,因为我们可以问,在不远的将来或是在不远的过去分离的气体是怎样的。不论哪一种情况,我们在分界面上都看到一层灰雾,因为分子正在重新混合。无论我们是往前还是往后计算时间,气体都在混合。所以这种理论认为不可逆性只是生活中的许多偶然事件之一。

我们试图论证情况并非如此。假定我们不是一下子观察整个箱子,而只是观察其中的一小部分,并且在某个确定的时刻,发现了某种程度的有序,那么在这一小部分空间中,黑分子与白分子是分开的。我们应当怎样来推论那些我们还没有观察过的地方的状况呢?如果我们确实认为有序是依靠涨落从完全的无序中产生的,那么我们一定是碰到了能产生这种情况的最可能的涨落,而最可能的情况不是它的其他部分也是分离的!所以,我们从这个世界是一种涨落的假设,能够预期的全部结论是,如果观察以前从未见到过的那一部分世界,我们将发现它已混合起来,而不像刚才所见到那部分世界那样。如果将有序归因于涨落,那么除了刚才注意到的地方之外,不能期望任何其他地方有序。

现在我们假定分离之所以产生是由于宇宙的过去实际上是有序的。它并非由一次涨落而造成,而是因为整个事情原来一直是区分为白的和黑的。现在这种理论预言在其他地方也将存在着有序——这种有序不是由于涨落,而是由于在时间的开始具有更高得多的序。这样,我们可以期望在人们还没有观察过的地方发现有序。

例如,天文学家只观察过天上的某些恒星。他们天天将望远镜转向一些新的恒星,而新的恒星的行为与其他恒星相同。因此我们可以推论宇宙不是一种涨落,而有序乃是对于万物开始时的状况的一种记忆。这并不是说我们明白了它的逻辑。由于某种原因,宇宙在某一时刻对它的能量来说有过非常低的熵,此后熵就不断增加。这就是通向未来的道路,也是一切不可逆性的起源;它引起了生长衰亡的过程,使我们回忆起过去,而不是将来;也使我们记得接近宇宙历史上那个有序性比现在高的时刻的事物,以及为什么我们不能记得那些无序性比现在更高的时刻,即所谓将来发生的事件。所以正像我们在第3章中曾指出的那样,如果我们足够近地去观察宇宙,整个宇宙就寓于一杯酒中,在这种情况下,这杯酒是复杂的,因为这里有水,玻璃,光线,以及其他种种东西。

物理学的另一件值得高兴的事是,即使简单而理想化的事物,比如棘轮和掣爪,它们之所以工作只是因为它们是宇宙的一部分。棘轮和掣爪之所以只能单向转动是因为它们与宇宙的其他部分有着某种最终的接触。如果将棘轮和掣爪放在一个箱子内,并且隔离了足够

长的时间,轮子朝一个方向的转动就不再比朝另一个方向的转动更为可能。但是,因为我们拉起窗帘让光线射出,因为在地球上感觉到冷时能从太阳得到热量……总之,因为诸如此类的原因,所以我们制造的棘轮与掣爪能单向转动。这种单向性与棘轮本身是属于宇宙的一部分这一事实有关。棘轮是宇宙的一部分——这不仅意味着它遵循宇宙的物理学定律,而且也意味着,它的单向行为是受整个宇宙的单向行为制约的。在进一步把关于宇宙历史开端的奥秘由推测化为科学的理解之前,我们是不可能完全理解它的。

第 47 章 声、波动方程

§ 47-1 波

本章我们将讨论波动现象。这种现象出现在整个物理学的许多领域中，所以我们应当把注意力放在它上面，不仅是因为这里所考察的特殊例子——声，而且也因为有关的概念在物理学的所有分支中有着相当广泛的应用。

我们在研究谐振子时已经指出过，振动系统的例子不仅在力学中存在，而且在电学中也同样存在。波动与振动系统有关，但波动不仅仅表现为在一处的随时间的振动，并且还在空间中传播。

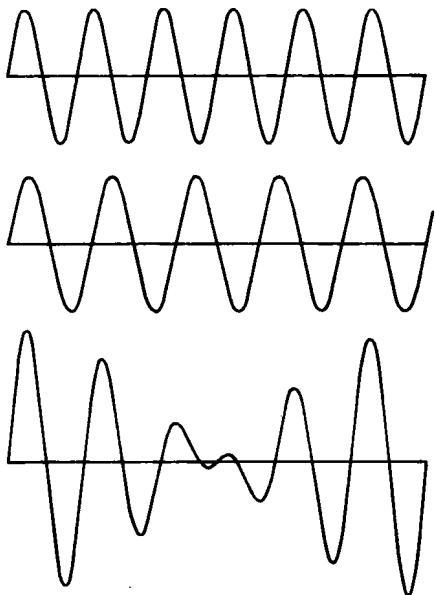


图 47-1 频率略有差异的两个波源在时间上的干涉形成拍

的例子，特别是声波的情况。

我们在海岸边缘见到过由长长的大浪形成水波翻腾的情况，也见过由表面张力的涟漪形成的小水波。这又是一些波动的例子。再举另外一种例子，在固体中有两类弹性波：一类是压缩波（或纵波），固体中的粒子沿着波传播的方向来回振动（气体中的声波就属于这一类）；另一类是横波，固体中的粒子在垂直于波传播的方向上振动。地震波包括了这两类弹性波，它们是由某处地壳的运动而造成的。

实际上我们已经研究过波动。在研究光学，讨论光的波动性质时，我们曾特别研究若干位于不同地方以同一频率振动的波源发出的几列波在空间的干涉现象。而在光波即电磁波以及其他任何形式的波动中所出现的两个重要现象，我们还不曾讨论。其中一个现象就是，波在时间上而不是在空间上的干涉现象。如果两个声源的频率稍有差别，在我们同时收听这两个声音时，有时声波波峰一起来，有时则是波峰和波谷一起来（见图 47-1）。这样所产生的声音的起伏就形成拍现象，或者说时间上的干涉。第二个重要现象涉及到波型，当波动约束在一定体积中，在界面之间来回反射时，就形成了这种现象。

当然，在研究电磁波时，本来可以对这些效应加以讨论。我们之所以没有这样做，是因为只使用一种例子也许会使我们不能体会到实际上已同时学习了许多不同的课题。为了强调波动概念的普遍性超出了电动力学范围，我们这里考虑一种不同的例子。

在现代物理学中还可找到另一类波的例子。这类波给出了在确定地方发现粒子的概率振幅，即我们已经讨论过的“物质波”。它们的频率正比于能量，波数则正比于动量。这就是量子力学中的波。

在本章中我们将只考虑波速与波长无关的波动。例如，光在真空中的传播情况就是如此。对无线电波、蓝光、绿光或任何其他波长的光来说，光速都相同。由于这种性质，当初开始描写波现象时，我们并没有指出波在传播这一点。我们只是说，如果有一个电荷在某处运动，那么离开它 x 处的电场正比于在较早时刻 $(t - x/c)$ 的加速度，而不是在 t 时刻的加速度。所以，如果我们画出某个瞬间空间中的电场，如图 47-2 所示，那么经过时间 t 后的电场将移动距离 ct ，如图中所示。在这里所取的一维例子中，从数学上我们可以说，对这个一维的例子，电场是 $(x - ct)$ 的函数。我们看到，当 $t = 0$ 时，它是 x 的某个函数。如果我们考虑较后一个时刻，只需适当增加 x 值就可以得到同样的电场值。举例说，如果在 $t = 0$ 时，电场极大值出现在 $x = 3$ 处，那么，为了找到在时刻 t 电场极大值的新位置，就得有

$$x - ct = 3 \quad \text{或} \quad x = 3 + ct.$$

我们看到，这样的函数表示了波的传播。

所以， $f(x - ct)$ 这种函数就表示了波。我们可以这样简单地总结波的描述

$$f(x - ct) = f[x + \Delta x - c(t + \Delta t)],$$

这里 $\Delta x = c\Delta t$ 。当然，还有另一种可能，即波源不是像图 47-2 中所示的那样在左边，而是在右边，结果波往负 x 方向传播。这时就要用 $g(x + ct)$ 来描写波。

此外，还存在这样一种可能性，空间同时存在着比方说一列以上的波，那么总电场就是两个独立传播的电场的和。电场的这种性质可以叙述为，假定 $f_1(x - ct)$ 是一列波， $f_2(x - ct)$ 是另一列波，那么它们的和也是波。这就叫做叠加原理。叠加原理对于声波来说同样有效。

我们都熟悉这样一个事实：声音产生以后，我们所听到的声音的顺序与产生时的顺序完全相同。假定高频的声音传播得比低频的快，那么短促尖锐的噪声将发生在乐声之后。类似地，如果红光跑得比蓝光快，那么当白光闪一下后，人们就会先看到红色，接着是白色，最后是蓝色。我们所知道的事实表明，情况并非如此。声与光在空气中的传播速率都非常接近于跟频率无关。跟频率有关的波传播的例子将在第 48 章中讨论。

对于光（电磁波）的情况，我们提供了一条规则来确定因电荷的加速而在某点所产生的电场。人们现在可能也期望有这么一条规则，由此能借助声源本身的运动并考虑到声传播时间引起的推迟，确定声源外一给定距离上空气的某个物理量如压强的数值。对于光来说，这种做法是行得通的，因为我们所要知道的一切就是一处的电荷对在另一处的另一个电荷施加作用力。从一处到另一处的传播细节并不是绝对重要的。然而，在声的情况下，我们知道它通过声源与收听者之间的空气而传播。因此，无疑人们会提出一个很自然的问题：在任

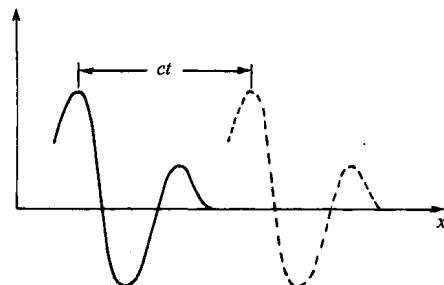


图 47-2 实线表示在某一瞬时电场的可能情况，虚线表示在时间 t 后的电场

何给定时刻,空气的压强有多大。另外,我们还想确切地知道空气怎样运动。在电学情况下,我们可以接受一条规则,因为我们可以对自己还不知道电学定律,但对于声来说,我们就不能讲同样的话了。因为整个过程应当作为力学定律的结果而得到理解,所以我们当然不会满足于仅仅陈述声压如何通过空气而传播的规则。简言之,声学是力学的一门分支,所以它要用牛顿定律来解释。声波由一处往另一处的传播,只是力学定律及传播声的那种物质的性质(如果在气体中传播,就指气体的性质,如果在液体或固体中传播,就指这些介质的性质)的推论。以后我们将用类似的方法从电动力学定律导出光的性质和光波的传播。

§ 47-2 声的传播

我们准备从牛顿定律导出声波在声源与接收者之间传播的特性,而对声源与接收者之间的相互作用将不予考虑。通常我们强调的是推导的结论而不是某一特殊推导过程本身。在本章中我们将采取相反的观点。在某种意义上,这里的要点就在于推导本身。在我们知道旧现象的规律之后,能借助于已知现象来解释新现象这件事或许是数学物理学的最伟大艺术。数学物理学家要解决两个问题:一个是给定了方程之后求出解答,另一个是找出描写新现象的物理方程。这里的推导是属于后一种情形的一个例子。

我们在这里将取一个最简单的例子——声波的一维传播。要进行这样的推导,首先必须对所发生的事情有一定的了解。这里所包含的基本事实就是,如果一个物体在空气中的某个地方运动着,我们就观察到有一种扰动在空气中传开。这是怎样的一种扰动?我们可以认为物体的运动产生了压强上的变化。当然,如果物体的运动相当缓慢,空气便只是绕着它流过去。但我们要讨论的是快速的运动,因此空气没有足够的时间作这样的流动。于是,随着物体的运动空气被压缩,引起压强上的变化,这种变化推动了周围的气体,接着这部分气体又被压缩,这又引起额外的压强,这样波就传播开了。

现在我们要把这个过程写成公式。首先必须决定所需要的变量。在这个特定问题中,我们要知道空气移动了多远,所以在声波中空气的位移肯定是一个有关的变量。此外,我们还要描述,在空气移动时它的密度怎样变化。空气压强也会发生改变,所以这又是一个值得注意的变量。当然,空气还有速度,因而我们必须描写空气粒子的速度。这些粒子还有加速度——但是,当我们列举了这么多变量之后,立即会认识到,如果知道了空气位移怎样随时间而变化,那么速度和加速度也就知道了。

我们已经说过,要考虑的是一维波动。如果离开波源足够远,以致所谓的波前非常接近于平面,那么就可以这样处理。取一个复杂性最小的例子会使论证比较简单一些。因此,我们可以说:位移 χ 只取决于 x 和 t ,而与 y 和 z 无关。所以我们用 $\chi(x, t)$ 来描写空气的位移。

这个描述完全吗?看来远远谈不上完全。因为我们一点也不知道空气分子运动的详情。它们往四面八方运动,这种情况肯定不能用函数 $\chi(x, t)$ 来描写。从分子动理论的观点来看,假定在一个地方分子密度较高,而在邻近的地方分子密度较低,那么分子就会从密度较高的区域跑向密度较低的区域,使得差异抵消。显然,这样一来就不会产生振动,于是也就没有声音。为了得到声波,必须出现下述情况:当分子由密度较高及压强较大的区域冲出去时,它们将把动量传递给邻近的密度较低区域中的分子。为了使声波得以产生,密度与压强上有变化的区域必须远远大于分子在与其他分子进行碰撞前所走过的距离。这段距离即

平均自由程,而压强的波峰与波谷之间的距离必须远远超过它,不然分子就会自由地从波峰跑向波谷,一下子把波抹平。

十分清楚,我们是在远大于平均自由程的尺度上来描写气体行为的,所以不用个别分子的运动来描写气体的性质。例如,所谓位移就是指一小块气体的质心的位移,而压强或密度则是这一小块区域中的压强或密度。我们称压强为 P ,密度为 ρ ,它们都是 x 和 t 的函数。我们必须记住这种描写只是近似的,只有当气体的有关性质随距离的变化不太快时才成立。

§ 47-3 波动方程

声波现象的物理内容包括了三个特征:

- I. 气体的移动使密度发生变化。
- II. 密度上的变化对应着压强上的变化。
- III. 压强的不相等导致气体的运动。

我们首先考虑 II。对于气体、液体或固体,压强是密度的某个函数。在声波抵达之前,我们有一个平衡状态,它的压强为 P_0 ,对应的密度是 ρ_0 。介质中的压强 P 与密度 ρ 由某种函数关系 $P = f(\rho)$ 联系起来,特别是平衡状态时的压强 P_0 由 $P_0 = f(\rho_0)$ 给定。声波中的压强相对于平衡值的变化是极其微小的。量度压强的一个方便单位是巴(bar): $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ 。 1 atm 非常接近于 1 bar ,即 $1 \text{ atm} = 1.0133 \text{ bar}$ 。在声学中我们采用声强的对数标度,因为耳朵的灵敏度近似地按对数变化。这个标度是分贝(dB)标度,对于振幅为 P 的压强,其声压级 I 用下式来定义

$$I = 20 \lg \left(\frac{P}{P_0} \right) \text{ dB.} \quad (47.1)$$

这里参考压强 $P_0 = 2 \times 10^{-10} \text{ bar}$ ^{*}。如压强振幅为 $P = 10^3 P_0 = 2 \times 10^{-7} \text{ bar}$,与之对应的就是 60 dB 的中等强度的声音。我们看到,在声波中压强的变化与平衡压强或平均压强一个大气压相比极其微小,位移和密度的变化相应地也极其微小。在爆炸时,变化就不是这么小了;所产生的额外压强可能超过 1 个大气压。这么大的压强变化将导致新的效应,我们在以后再来讨论。对声音来说,通常我们不考虑超过 100 dB 的声强级,120 dB 的声强级已使耳朵有痛觉。因此,对声波来说,如果写下

$$P = P_0 + P_e, \rho = \rho_0 + \rho_e, \quad (47.2)$$

那么与 P_0 相比压强变化值 P_e 总是很小,而与密度 ρ_0 相比密度变化值 ρ_e 也总是很小。于是

$$P_0 + P_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0). \quad (47.3)$$

这里 $P_0 = f(\rho_0)$,而 $f'(\rho_0)$ 是当 $\rho = \rho_0$ 时得出的 $f(\rho)$ 的微商值。只是由于 ρ_e 很小,我们才可以取第二步等式。这样我们就发现额外压强 P_e 正比于额外密度 ρ_e ,如果称比例系数为 κ ,则

$$P_e = \kappa \rho_e, \text{ 这里 } \kappa = f'(\rho_0) = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0. \quad (\text{II}) \quad (47.4)$$

* 在这样选择 P_0 时,相应的 P 不是声波的峰值压强,而是“方均根”压强,它等于 $1/\sqrt{2}$ 乘以峰值。

所以,对于Ⅱ来说我们要得到的就是这个非常简单的关系式。

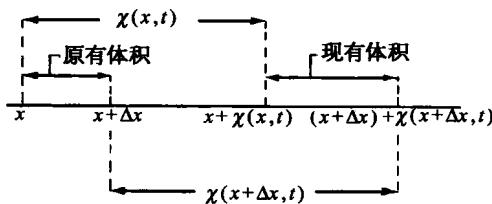


图 47-3 在 x 处空气的位移为 $\chi(x, t)$, 在 $x + \Delta x$ 处为 $\chi(x + \Delta x, t)$ 。平面波中, 截面为单位面积的空气柱原来的体积为 Δx ; 新的体积为

$$\Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t)$$

这些空气在声波驱动下移到 $x + \chi(x, t)$ 与 $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ 之间, 这样, 这个区间内的气体质量应与未扰动前处在 Δx 区间内的气体质量相同。如果以 ρ 表示新的密度, 就有

$$\rho_0 \Delta x = \rho [x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)]. \quad (47.5)$$

因为 Δx 很小, 我们可以写出

$$\chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t) = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right) \Delta x,$$

这个微商是偏微商, 因为 χ 与时间 t 及 x 都有关系。我们的方程于是就变为

$$\rho_0 \Delta x = \rho \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \Delta x + \Delta x \right) \quad (47.6)$$

或

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_e) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \rho_0 + \rho_e. \quad (47.7)$$

由于在声波中所有的变化都很小, 因此 ρ_e 很小, χ 很小, $\frac{\partial \chi}{\partial x}$ 也很小。所以在我们刚找到的关系式

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} - \rho_e \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (47.8)$$

中, 与 $\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}$ 相比我们可以略去 $\rho_e \frac{\partial \chi}{\partial x}$ 。这样我们就得到 I 所要求的关系式

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (I) \quad (47.9)$$

这个方程从物理上是可以预料的; 如果位移随着 x 而改变, 那么就会有密度上的变化。式中的符号也是正确的: 如果位移 χ 随着 x 而增加, 那么空气就扩展开来, 密度就一定会下降。

现在我们需要第三个方程, 那就是由压强改变所产生的运动方程。如果我们知道力与压强之间的关系, 就可以得出运动方程。现在我们取一薄层空气, 它的厚度为 Δx , 侧面积为

现在来考虑 I。我们假设没有被声波扰动的那部分空气的位置是 x , 而在时刻 t 由声波引起的位移是 $\chi(x, t)$, 因此新的位置是 $x + \chi(x, t)$, 如图 47-3 所示。我们还假设邻近的未受扰动的一部分空气的位置是 $x + \Delta x$, 而其新的位置是 $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ 。现在可以用下述方法来求出密度的变化。因为只限于平面波, 所以我们可取垂直于 x 方向的单位面积, x 方向就是声波传播的方向。于是由单位面积和 Δx 所围成的那部分空气的质量就是 $\rho_0 \Delta x$, 这里 ρ_0 是未受扰动的或平衡状态下的空气密度。

与 x 相垂直的单位面积，则此薄层气体的质量是 $\rho_0 \Delta x$ ，其加速度为 $\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$ ，于是质量与加速度

的乘积就是 $\rho_0 \Delta x \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right)$ （当 Δx 很小时，不管加速度 $\partial^2 \chi / \partial t^2$ 是指薄块边上的值还是指某个中间位置的值都没有关系）。假如现在我们求得在垂直于 x 的单位面积上给予这层空气的作用力，那么它就等于 $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$ 。在 x 处沿 $+x$ 方向，单位面积所受的力是 $P(x, t)$ ，在 $(x + \Delta x)$ 处沿 $-x$ 方向，单位面积所受的力是 $P(x + \Delta x, t)$ （图 47-4），由于 Δx 甚小，并且 P 中的变化部分只有额外压强 P_e ，结果我们得到

$$P(x, t) - P(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial P_e}{\partial x} \Delta x. \quad (47.10)$$

最后，对于Ⅲ，我们有

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_e}{\partial x} \quad (\text{III}) \quad (47.11)$$

这样就有足够的方程将各件事情联系起来，并将变量减少到一个，比如说 χ 。利用(Ⅱ)式能从(Ⅲ)式中消去 P_e ，于是有

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial \rho_e}{\partial x}, \quad (47.12)$$

再利用(Ⅰ)式就可消去 ρ_e 。这样我们发现 ρ_0 也被消去，余下的就是

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (47.13)$$

我们令 $c_s^2 = \kappa$ ，因此可写出

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (47.14)$$

这就是描写物质中声波行为的波动方程。

§ 47-4 波动方程的解

现在我们可以来看看这个方程是否确实描写了物质中声波的基本性质。我们希望由此推出声脉冲或扰动将以恒定速率运动，并且希望证实两个不同的脉冲可以相互穿过——叠加原理。我们还想证实声波可以往右或往左传播。所有这些性质都应当包括在这一个方程之中。

我们已经说过，任何以恒定速度 v 运动的平面波的扰动都具有形式 $f(x - vt)$ 。现在必须来看一下 $\chi(x, t) = f(x - vt)$ 是否为波动方程的一个解。在计算 $\partial \chi / \partial x$ 后，就得到 $\partial \chi / \partial x = f'(x - vt)$ ，再进行一次微商，则得到

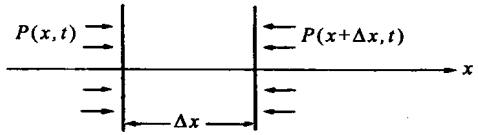


图 47-4 作用在垂直于 x 的单位面积上的压强在正 x 方向上所产生的净力是 $-(\frac{\partial P}{\partial x}) \Delta x$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = f''(x - vt). \quad (47.15)$$

这同一函数对 t 的微商是 $-v$ 乘以函数的微商, 即 $\frac{\partial \chi}{\partial t} = -vf'(x - vt)$, 而二阶时间微商是

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt). \quad (47.16)$$

很明显, 倘使波速 v 等于 c_s , $f(x - vt)$ 就满足波动方程。因此, 根据力学定律我们发现任何声扰动以速度 c_s 传播。此外, 我们还发现

$$c_s = \kappa^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{dP}{dp} \right)_0^{\frac{1}{2}},$$

这样我们就把波速与介质的性质联系起来了。

假如考虑一列沿相反方向传播的波, 那么 $\chi(x, t) = g(x + vt)$, 不难看出这样一种扰动也满足波动方程。这列波跟从左向右行进的波的唯一差别就是 v 前的符号, 但是, 无论函数中的变量是 $x - vt$ 还是 $x + vt$, 都不影响 $\partial^2 \chi / \partial t^2$ 的符号, 因为它包含的只是 v^2 项。由此可见我们具有以速度 c_s 往左或往右传播的波的解答。

叠加性是非常有趣的问题。假定我们已经找到波动方程的一个解, 比方说 χ_1 , 这意味着 χ_1 对 x 的二阶微商等于 $1/c_s^2$ 乘以 χ_1 对 t 的二阶微商。现在如果有任意另一个解 χ_2 亦具有同样的性质。假定把这两个解叠加起来, 就有

$$\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t), \quad (47.17)$$

我们要证实 $\chi(x, t)$ 也是波, 即 χ 也满足波动方程。这个结果很容易证明, 因为我们有

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} \quad (47.18)$$

以及

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2}. \quad (47.19)$$

所以就有 $\partial^2 \chi / \partial x^2 = \left(\frac{1}{c_s^2} \right) \partial^2 \chi / \partial t^2$ 。这样我们就证实了叠加原理。叠加原理的证明正是建立在波动方程对 χ 是线性的这个事实上的。

现在我们可以预期, 沿 x 方向传播而其电场在 y 方向上的偏振平面光波将满足波动方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (47.20)$$

这里 c 是光速。这个波动方程是麦克斯韦方程的结论之一。电动力学的定律将导致光的波动方程, 正像力学定律导致声的波动方程一样。

§ 47-5 声速

上面对声波的波动方程的推导使我们得到了一个公式, 它把波速与正常大气压下压强

对密度的变化率联系在一起

$$c_s^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0. \quad (47.21)$$

在计算这个变化率时, 必须知道温度如何变化。在声波中, 我们预期压缩区域的温度会升高, 而稀薄区域的温度会降低。牛顿第一个计算了压强对密度的变化率, 他假设温度保持不变。他论证热量十分迅速地由一个区域传导到另一个区域, 以致温度不可能升高或降低。在这种论证下得到了声波的等温速率, 但这是错误的。正确的推导是后来由拉普拉斯作出的。他提出了相反的概念——在声波中压强与温度进行着绝热变化。只要波长远大于平均自由程, 热量从压缩区域往稀薄区域的流动是可以忽略的。在这种条件下, 声波中的少量热流并不影响速度, 虽然它吸收了一点声能。我们可以正确地预计到这种吸收将随着波长趋近于平均自由程而增加, 但这种波长大约比可闻声波波长的百万分之一还要小。

声波中压强随密度的实际变化是一种没有热流的变化。这相当于绝热变化。对这种情况, $PV^\gamma = \text{常数}$, 这里 V 是体积。由于密度反比于 V , P 与 ρ 之间的绝热关系是

$$P = \text{常数 } \rho^\gamma. \quad (47.22)$$

由此可得 $dP/d\rho = \gamma P / \rho$ 。于是对于声速就有关系式

$$c_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho}. \quad (47.23)$$

我们也可写为 $c_s^2 = \gamma PV / (\rho V)$, 再利用等式 $PV = NkT$, 而且由于 ρV 是气体质量, 它也可表示为 Nm 或 μ , 这里 m 是一个分子的质量, μ 是分子量, 由此可得

$$c_s^2 = \frac{\gamma k T}{m} = \frac{\gamma R T}{\mu}, \quad (47.24)$$

从此式显然可知声速只与气体温度有关, 而与压强或密度无关。我们还注意到

$$kT = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle, \quad (47.25)$$

这里 $\langle v^2 \rangle$ 是分子的方均速率。因此 $c_s^2 = \left(\frac{\gamma}{3} \right) \langle v^2 \rangle$, 或

$$c_s = \left(\frac{\gamma}{3} \right)^{\frac{1}{2}} v_{\text{平均}}. \quad (47.26)$$

这个式子表明声速的大小大致等于 $1/\sqrt{3}$ 乘以分子的某种平均速率 $v_{\text{平均}}$ (方均速率的平方根)。换句话说, 声速与分子速率具有同样的数量级, 实际上多少小于分子平均速率。

当然, 我们可以预料到会有这样的结果, 因为扰动像压强的变化一样, 归根结蒂是由于分子运动而传播的。然而, 这种论证并不能告诉我们精确的传播速率; 因为既可以说声波主要是由最快的分子传播的, 也可以说主要是由最慢的分子传播的。一种合乎情理的并令人满意的看法是认为声速大约为分子平均速率 $v_{\text{平均}}$ 的一半。

第 48 章 拍

§ 48-1 两列波的相加

不久前我们相当详细地讨论过光波的性质以及光波的干涉，即从不同波源发出的两列波叠加的效应。在所有这些分析中我们假设波源的频率全都相同。本章我们将讨论的某些现象则是由于具有不同频率的两个波源的干涉所造成的。

很容易猜想到会发生什么事。我们采用与以前同样的做法，假设有两个相同的振动波源，其频率相等，相位则调整到比方说使它们发出的信号在到达某点 P 时同相。到达这一点的如果是光，光就很强；如果是声，声音就很响；而若是电子，那么其中到达的就很多。反之，假如抵达 P 点的信号彼此的相位差是 180° ，则在 P 点我们就可能得不到信号，因为在该处净的振幅为最小。现在，假设某个人转动其中一个波源的“相位旋钮”，来回改变该波在 P 点的相位，比方说先使其为 0° ，然后为 180° ，等等。当然，这样一来我们就会发现净的信号强度有变化。我们还可看出，如果一个波源的相位相对于另一个波源逐渐地、均匀地缓慢变化，由 0° 开始，增加到 10° ， 20° ， 30° ， 40° ，等等，那么在 P 点所测得的就是一串强弱相间的“脉动”，因为当相位移过 360° ，振幅就回到极大值。当然，说一个波源的相位相对于另一个波源以均匀的速率移动就等于说两个波源在每秒钟内的振动次数略有差别。

于是我们知道答案就是：假定两个波源的频率略有差别，我们将发现其净结果就是出现一个强度缓慢脉动的振动。对本课题而言，这实际上就是一切！

这个结果也很容易用数学公式来表示。例如，假定有两列波，我们暂时不去考虑所有的空间关系，而只是分析到达 P 点的波。不妨假设一个波源在这一点引起的振动是 $\cos \omega_1 t$ ，另一个波源则是 $\cos \omega_2 t$ ， ω_1 与 ω_2 不完全相等。当然，它们的振幅也可能不相同，但这个一般性的问题可以留在后面去解决，我们不妨先假定振幅是相等的。在 P 点的总振幅就是这两个余弦函数之和。如果像图 48-1 那样，画出波的振幅对时间的曲线，我们就看到波峰与波峰重合之处恰好出现较强的波，而在波峰与波谷重合之处，总振幅实际上为零，而当波峰再度重合时，又得到较强的波。

在数学上，我们只要将两个余弦相加并对结果进行一些整理。对于余弦函数有一些有用的关系式，它们是不难推得的。我们当然知道

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}, \quad (48.1)$$

而 e^{ia} 有一个实部（即 $\cos a$ ）和一个虚部（即 $\sin a$ ）。如果取 $e^{i(a+b)}$ 的实部，就得到 $\cos(a+b)$ 。将 e^{ia} 和 e^{ib} 相乘，就有

$$e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b),$$

我们得到 $\cos a \cos b - \sin a \sin b$ ，加上一些虚部。但我们现在只要实部，于是有

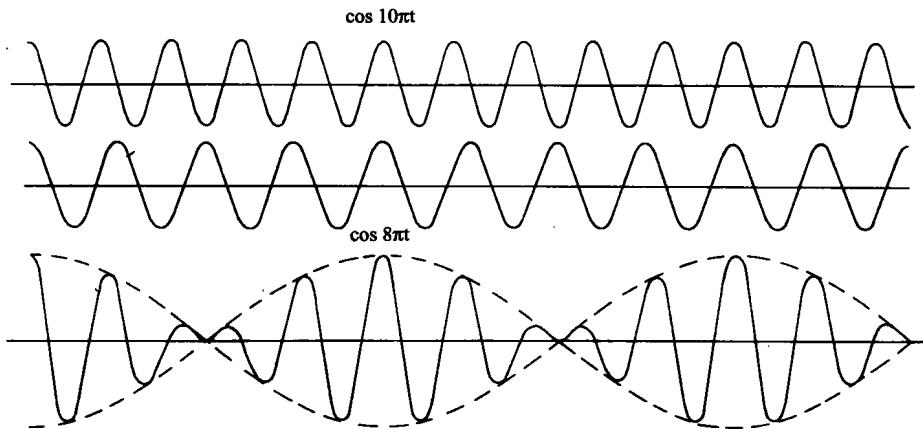


图 48-1 频率比为 8 : 10 的两列余弦波的叠加。图中各个“拍”内的图样精确重复这一点在一般情况下并不具有代表性

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (48.2)$$

假如改变 b 的符号, 因为这时余弦不变而正弦变号, 所以, 对 $-b$, 等式就是

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (48.3)$$

将这两个等式相加, 消掉正弦项, 便有

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b). \quad (48.4)$$

将这个公式反过来, 可以得到 $\cos \alpha + \cos \beta$ 的公式, 这只要令 $\alpha = a+b$, $\beta = a-b$, 于是 $a = (\alpha + \beta)/2$, $b = (\alpha - \beta)/2$, 因此有

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta). \quad (48.5)$$

现在可以来分析我们的问题了, $\cos \omega_1 t$ 与 $\cos \omega_2 t$ 之和为

$$\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (48.6)$$

我们假定两个频率近似相等, 这样 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ 就是平均频率, 它与 ω_1 与 ω_2 几乎都相同。但 $\omega_1 - \omega_2$ 远小于 ω_1 或 ω_2 , 因为已假设 ω_1 与 ω_2 近似相等。这意味着我们可以这样来说明这个解: 它是一个多少与我们开始时所具有的波相类似的高频余弦波, 但它的“大小”将缓慢地变动, 即以频率 $(\omega_1 - \omega_2)/2$ 作脉动变化。但这是不是人们所听到的拍频呢。虽然式(48.6)表示振幅随 $\cos[(\omega_1 - \omega_2)t/2]$ 而变化, 实际上它所告诉我们的却是高频振动被包含在两个相反的余弦曲线之内(如图 48-1 中的虚线所示)。根据这一点人们可以说振幅变化的频率是 $(\omega_1 - \omega_2)/2$, 但如果说到波的强度, 则必须认为它的频率两倍于此。这就是说, 按强度而言, 振幅的调制频率是 $\omega_1 - \omega_2$, 虽然式(48.6)表明我们所乘的余弦因子其频率为此一半。存在这种差别的物理原因是在第二个半周内高频波的相位关系有一点不同。

如果不去考虑这个小小的复杂性, 我们可以得出结论说, 将频率为 ω_1 与 ω_2 的两列波相

加,就会得到以平均频率 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ 振动而强度又按频率 $(\omega_1 - \omega_2)$ 变化的合成波动。

如果两列波的振幅不相同,我们可以重新再计算一下:将余弦乘上不同的振幅 A_1 和 A_2 ,利用类似于式(48.2)~(48.5)的关系式,进行一系列运算,整理等。然而还可用其他一些较简易方法来进行同样的分析。例如,我们知道指数的运算比正弦和余弦的运算要容易得多,并且可以将 $A_1 \cos \omega_1 t$ 看作为 $A_1 e^{i\omega_1 t}$ 的实部。另一个波也同样地可以看作是 $A_2 e^{i\omega_2 t}$ 的实部。如果将两者相加,就得到 $A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}$,将平均频率的因子提出,就有

$$A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} = e^{\frac{1}{2}i(\omega_1 + \omega_2)t} [A_1 e^{\frac{1}{2}i(\omega_1 - \omega_2)t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}i(\omega_1 - \omega_2)t}]. \quad (48.7)$$

我们再一次得到带有低频调制的高频波。

§ 48-2 拍符和调制

如果现在要求出式(48.7)所表示的合成波的强度,可以取该式左边或右边的绝对值平方。我们取左边来计算,于是强度为

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (48.8)$$

由此可见强度以频率 $(\omega_1 - \omega_2)$ 涨落,其变化界限则为 $(A_1 + A_2)^2$ 和 $(A_1 - A_2)^2$ 。如果 $A_1 \neq A_2$,则最小强度不为0。

另一种表示这个概念的方法是作图,如图48-2所示。我们画一根长为 A_1 ,以频率 ω_1 旋转的矢量,用以表示复平面上的一个波。再画出一个长为 A_2 ,旋转频率为 ω_2 的矢量来表示第二个波。如果两个频率正好相等,那么旋转时合矢量的长度就固定不变,于是由此两个波得出的是确定不变的强度。但是如果频率略有差别,两个复矢量就以不同速率旋转。图48-3表示相对于矢量 $A_1 e^{i\omega_1 t}$ 所见到的情况。我们看到 A_2 缓慢地转离 A_1 ,于是两列波叠加后得出的合成振幅起先最强,然后,两者拉开,当 A_2 相对于 A_1 转过 180° 时,合成振幅变得特别弱,等等。在矢量旋转时,合矢量的振幅时而变大,时而变小,因而强度作脉动变化。这是一个相当简单的方法,还有许多别的方法表示这件事情。

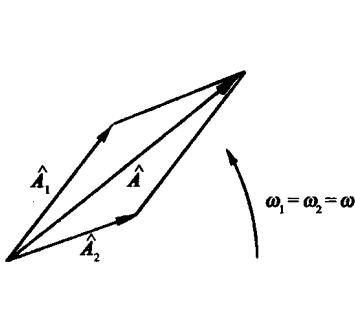


图 48-2 两个相同频率复矢量的合成

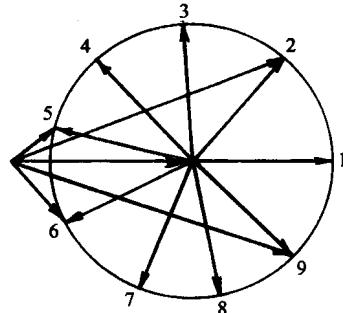


图 48-3 以一个旋转矢量为参考系来看,两个不同频率的复矢量的合成。图中绘出了缓慢旋转的矢量的九个相继位置

上述效应很容易从实验上观察到,在声学实验中,我们可以将两个扬声器分别连接到两个独立的振荡器上,一个振荡器接一个扬声器,因此每个扬声器发出一种音调。于是我们从

一个声源接收到一种音符,从另一个声源接收到另一种音符。如果使彼此的频率精确相等,则其总的效果为在一定的空间位置上具有确定强度。如果接着使两个音调略微调偏一些,就会听到强度上的某些变化。调偏得越厉害,声音的变化就越快。当这种变化每秒钟超过十次左右时,人耳要跟上这种变化就有些困难了。

我们也可以从示波器上见到这个效应,在示波器上可以直接显示出两个扬声器的电流的和。假如脉动频率颇低,我们就简单地看到一列振幅作脉动变化的正弦波,但当脉动加快时,我们就看到如图 48-1 所示的那类波形。当频率差再增大时,图中的“隆起部分”之间靠得更近。此外,如果两个信号振幅并不相等,一个强于另一个,那么,正如我们所预料的那样,所得到的合成波的振幅永远不会变为零。无论从声学上还是从电学上都得出了应得的结果。

也会出现与上述相反的现象! 在利用所谓调幅(AM)现象的无线电发送中,广播台是这样播送声音的:无线电发射机在广播频带产生频率很高的交流振荡,比如说 800 kHz。如果接通这个载波信号,电台就会发出频率为 800 kHz 幅度均匀不变的电波。将“消息”发送出去(常常是一类无用的消息,诸如去买哪种牌子的汽车)的方法是,当某个人的讲话送入话筒后,载波信号的幅度就随进入话筒的声音振动一起发生变化。

我们举一个数学处理上最简单的例子。如果有一个女高音歌手正在唱着一首优美动听的歌曲,她的声带产生完好的正弦振动,那么我们就得到一个强度如图 48-4 那样交替变化的信号。然后,在接收机中将这样的音频变化复原,我们去掉载波只看包络,这个包络就表示了声带的振动,或歌手的声音。于是扬声器就在空气中以同样的频率作相应的振动,而听众基本上不能够说出这与真实声音有何区别。当然由于许多畸变以及其他微妙的效应,实际上有可能说出我们是在听收音机还是在听真的女高音在歌唱;不然事情就像上面所说的那样。

§ 48-3 旁 频 带

在数学上,刚才所描写的调制波可以表示为

$$S = (1 + b \cos \omega_m t) \cos \omega_c t, \quad (48.9)$$

这里 ω_c 表示载波频率, ω_m 是音频。我们再次利用有关余弦的定理,或者利用 $e^{i\theta}$ 来计算(虽然用 $e^{i\theta}$ 简单一些,但这是一回事,没有什么差别),于是得到

$$S = \cos \omega_c t + \frac{1}{2} b \cos(\omega_c + \omega_m) t + \frac{b}{2} \cos(\omega_c - \omega_m) t. \quad (48.10)$$

所以,从另一个观点来看,我们可以说,电台所输出的波是由三列波叠加在一起的:首先是频率 ω_c 的规则波,即载波,另外两个是新的波,各自具有一个新的频率。一个是载频加上调频,另一个是载频减去调频。因此,假如我们画出信号发生器产生的信号强度对频率的函数图像,就会在载波频率上发现颇高的强度,这是很自然的,但当一位歌唱家开始歌唱时,我们

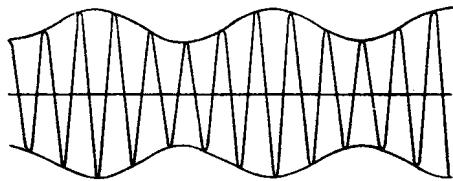


图 48-4 调制载波。在此简图中, $\frac{\omega_c}{\omega_m} = 5$ 。

在实际的无线电波中, $\frac{\omega_c}{\omega_m} \approx 100$

就会在频率 $(\omega_c + \omega_m)$ 及 $(\omega_c - \omega_m)$ 处突然发现正比于歌唱家声强 b^2 的强度, 如图 48-5 所示。

这就称为旁频带, 只要在发射机中存在调制信号, 就会有旁频带出现。如果同时出现的律音不止一个, 比如说有两个律音 ω_m 及 ω'_m , 即有两个乐器在演奏; 或者说, 假如存在着另外一个复杂的余弦波, 那么, 从数学上可以看出, 我们将会得到频率相应地为 $\omega_c \pm \omega'_m$ 的更多的波。

因此, 当有一个可以表示成许多余弦之和^{*}的复杂调制时, 我们就会发现实际的发射机发送的是在一段频率范围内的信号, 即载频加上或减去调制信号所包含的最高频率。

虽然原先我们可能认为无线电发射机发送的只是载波的标称频率, 因为在广播台里有许多大的、超稳定的晶体振荡器, 而且一切都调整到正好是 800 kHz, 但在某人刚宣告他们在 800 kHz 播音那个瞬间, 他已调制了 800 kHz 载波, 因此就不再正好是 800 kHz 了! 假如我们建造的放大器, 其频宽覆盖了人耳灵敏度的一个很大区域(人耳可以听到高达 20 kHz 的声音, 但通常发射机与接收机工作范围不超过 10 kHz, 所以我们不能听到最高频率部分), 而当一个人说话时, 他的声音中可以包括高到比如说 10 kHz 的频率。那么发射机发送的频率可以从 790 kHz 到 810 kHz。现在, 假定另一个广播台的频率是 795 kHz, 那么就会出现混乱。此外, 如果我们的接收机的灵敏度如此之佳, 以致只接收 800 kHz 的信号, 而不会接收到上下 10 kHz 的信号, 那么我们也不能听到播音员在说话, 因为信息正是在这两种频率上! 因此, 使各广播台的工作频率彼此保持一定的间隔是绝对必要的, 这样它们的旁频带才不会交叠, 此外接收机的选择性必须不至于强到不能接收到主标称频率和旁频带信号。对声音来说, 这个问题实际上并不会造成太多麻烦。我们可以听见的频率范围是 ± 20 kHz, 而广播波段通常是由 500 kHz 到 1500 kHz, 所以对广播来说可以设立许多电台。

电视的问题就比较困难了。当电子束扫过显像管屏幕时, 屏幕上就有许多小亮点和暗点。“亮”和“暗”就是“信号”。通常整个画面的电子束扫描是在约 1/30 s 中扫过大约 500 条线。假定画面的垂直分解与水平分解差不多相同, 这样沿着每条扫描线的每英寸中具有同样数量的斑点。在 500 条线上我们希望将明暗区分开来。为了用余弦波能做到这一点, 所需的最短波长相当于从一个极大值到另一个极大值之间的长度, 即屏幕尺寸的 1/250。于是每秒钟就有 $250 \times 250 \times 30$ 个信息。所以, 要携带的信号的最高频率接近于 4 MHz。实际上, 为了使电视台彼此间有一定的频率间隔, 我们必须用更高的频率, 即约 6 MHz; 其中一部分用来携带伴音信号和其他信息。所以电视频道的宽度约为 6 MHz。用 800 kHz 的载波肯定不能发送电视, 因为我们不可能以高于载频的频率去进行调制。

无论如何, 电视频带从 54 MHz 开始, 第一个发送频道是 2(!) 频道, 频率范围从

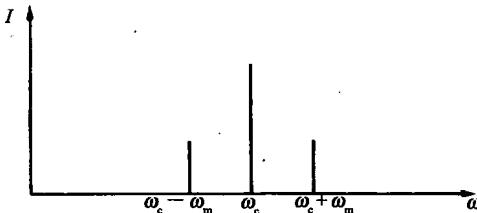


图 48-5 载波 ω_c 被单个正弦波 ω_m 调制时的频谱

去调制信号所包含的最高频率。

虽然原先我们可能认为无线电发射机发送的只是载波的标称频率, 因为在广播台里有许多大的、超稳定的晶体振荡器, 而且一切都调整到正好是 800 kHz, 但在某人刚宣告他们在 800 kHz 播音那个瞬间, 他已调制了 800 kHz 载波, 因此就不再正好是 800 kHz 了! 假如我们建造的放大器, 其频宽覆盖了人耳灵敏度的一个很大区域(人耳可以听到高达 20 kHz 的声音, 但通常发射机与接收机工作范围不超过 10 kHz, 所以我们不能听到最高频率部分), 而当一个人说话时, 他的声音中可以包括高到比如说 10 kHz 的频率。那么发射机发送的频率可以从 790 kHz 到 810 kHz。现在, 假定另一个广播台的频率是 795 kHz, 那么就会出现混乱。此外, 如果我们的接收机的灵敏度如此之佳, 以致只接收 800 kHz 的信号, 而不会接收到上下 10 kHz 的信号, 那么我们也不能听到播音员在说话, 因为信息正是在这两种频率上! 因此, 使各广播台的工作频率彼此保持一定的间隔是绝对必要的, 这样它们的旁频带才不会交叠, 此外接收机的选择性必须不至于强到不能接收到主标称频率和旁频带信号。对声音来说, 这个问题实际上并不会造成太多麻烦。我们可以听见的频率范围是 ± 20 kHz, 而广播波段通常是由 500 kHz 到 1500 kHz, 所以对广播来说可以设立许多电台。

电视的问题就比较困难了。当电子束扫过显像管屏幕时, 屏幕上就有许多小亮点和暗点。“亮”和“暗”就是“信号”。通常整个画面的电子束扫描是在约 1/30 s 中扫过大约 500 条线。假定画面的垂直分解与水平分解差不多相同, 这样沿着每条扫描线的每英寸中具有同样数量的斑点。在 500 条线上我们希望将明暗区分开来。为了用余弦波能做到这一点, 所需的最短波长相当于从一个极大值到另一个极大值之间的长度, 即屏幕尺寸的 1/250。于是每秒钟就有 $250 \times 250 \times 30$ 个信息。所以, 要携带的信号的最高频率接近于 4 MHz。实际上, 为了使电视台彼此间有一定的频率间隔, 我们必须用更高的频率, 即约 6 MHz; 其中一部分用来携带伴音信号和其他信息。所以电视频道的宽度约为 6 MHz。用 800 kHz 的载波肯定不能发送电视, 因为我们不可能以高于载频的频率去进行调制。

无论如何, 电视频带从 54 MHz 开始, 第一个发送频道是 2(!) 频道, 频率范围从

* 一个稍稍偏题的注释: 在哪种情况下曲线可以表示成许多余弦的和? 答案是: 除去数学家杜撰出来的某些情况外, 在所有通常的情况下都能这样做。当然曲线在给定点必须是单值的, 它必须不是一种在无限小距离内跳跃无穷多次或者诸如此类的曲线。除去这种限制外, 任何合乎情理的曲线(歌手振动她的声带就能造成这样的曲线)总是可以通过叠加余弦波而合成。

54 MHz 到 60 MHz, 宽为 6 MHz。“但是,”有人会说,“我们刚证明过在两旁都有边频带,因此频宽应为 6 MHz 的两倍”。但幸而无线电工程师相当聪明。如果在分析调制信号时,不是只使用余弦项,而是一起使用余弦项和正弦项把相位差考虑进去,我们可以看到在高频端的边频带和低频端的边频带之间存在着确定不变的关系。这就是说在另一个边带上没有什么新的信息。因此要做的就是抑制一个边频带,并将接收机中的线路接成使失去的信息能从单个边频带和载波中重新组成。单个边频带的发送对于减少发送信息所需的带宽来说是一个聪明的方案。

§ 48-4 定域波列

我们要讨论的下一个题目是波动在空间与时间两方面的干涉。假定有两列在空间行进的波。当然,可以用 $e^{i(\omega t - kx)}$ 来表示在空间行进的波。例如,这可以是声波中的位移。如果 $\omega^2 = k^2 c^2$ (这里 c 是波的传播速度),那么上式就是波动方程的一个解。在这种情况下,我们可以将它写成 $e^{-ik(x-ct)}$, 它可归入一般形式 $f(x-ct)$ 之中。因此这必定是以速度 ω/k , 即 c 传播的波。一切都很正常。

现在,我们要将这样的两列波相加。假定一列波以某个频率行进,另一列波以另一频率行进。我们把振幅不同的情况留给读者去考虑,这不会造成实质性的差别。于是我们来计算 $[e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}]$ 。在做加法时可以使用将信号波相加时用过的同样的数学方法。当然,如果 c 对于两者都相同,这就很容易,因为这与我们前面的计算一样

$$e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} = e^{i\omega_1(t - \frac{x}{c})} + e^{i\omega_2(t - \frac{x}{c})} = e^{i\omega_1 t'} + e^{i\omega_2 t'}, \quad (48.11)$$

这里只是用变量 $t' = t - x/c$ 代替 t 。所以,我们显然得到同样的调制,但我们当然也看到,这种调制是随着波一起运动的。换句话说,如果将两列波相加,但这些波不只是振动,而且也在空间移动,那么合成波也以相同速率运动。

现在我们打算将这种情况推广到波的频率与波数 k 之间的关系不再那么简单的情形。举例来说,波在具有折射率的物质中的传播就属于这种情形。在第 31 章中我们已经研究过折射率的理论,在那里我们知道可将 k 写成 $k = n\omega/c$, 这里 n 即折射率。作为一个有趣的例子,对于 X 射线,我们得出折射率 n 是

$$n = 1 - \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m\omega^2}. \quad (48.12)$$

实际上在第 31 章中我们导出过更复杂的公式,但作为一个例子,这个式子同任何其他式子一样适用。

顺便说一下,我们知道,即使 ω 与 k 不呈线性关系,比值 ω/k 仍然是波在该特定频率和波数下的传播速率。我们把它称为相速度,这是相位或单列波的波节移动的速率

$$v_{\text{相}} = \frac{\omega}{k}. \quad (48.13)$$

对于 X 射线在玻璃中的传播,其相速度大于真空中的光速[因为式(48.12)中的 n 小于 1],这有些使人费解,因为我们并不认为可以用大于光速的速度发送信号!

现在我们要来讨论的是 ω 与 k 之间有确定关系式的两列波的干涉。上面关于 n 的公式表明 k 是 ω 的确定函数。具体地说,在这个特定问题中,用 ω 来表示的 k 的公式是

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{a}{\omega c}, \quad (48.14)$$

这里 $a = Nq_e^2/(2\epsilon_0 m)$, 是一个常数。总之,对每个频率,都有一个确定的波数,我们要做的是将这样的两列波相加。

让我们像计算(48.7)式那样来计算

$$e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} = e^{\frac{1}{2}i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x]} \times \{ e^{\frac{1}{2}i[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} + e^{-\frac{1}{2}i[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} \}. \quad (48.15)$$

于是我们又得到了调制波,它以平均频率与平均波数行进,但它的强度则以取决于频率差和波数差的方式而变化。

现在,我们来讨论两列波之间的差别颇小的情形。假设相加的两个波的频率近于相等,于是 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ 实际上与 ω_1 或 ω_2 相同, $(k_1 + k_2)/2$ 亦然。这样,波、快速振动或波节的速度基本上仍为 ω/k 。但要注意,调制的传播速率并不相同!对于一定量的时间改变 t , x 应变化多大呢?这种调制波的速度就是比值

$$v_{\text{调}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \quad (48.16)$$

调制速率有时称为群速度。假如取频率差相当小,波数差也相当小的情况,那么在极限情况下,这个表示式就趋于

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (48.17)$$

换句话说,对于非常慢的调制和非常慢的拍而言,它们有一个确定的行进速率,而这个速率与波的相速率不同——这是一件多么不可思议的事!

群速度是 ω 对 k 的微商,而相速度是 ω/k 。

让我们看看是否可以理解其原因。考虑两列波,其波长仍略有不同,如图 48-1 所示。它们反相,同相,再反相,等等。现在,这两列波实际上也表示了在空间以略为不同的频率传播的波。因为相速,即这两列波的波节速度,不是正好相等,于是就发生某种新的情况。假定我们处在其中一列波上去看另外一列波;如果它们的速率相同,那么当我们处在这个波峰上时,另一列波相对于我们的位置是静止不动的。我们若处在波峰上,那么看到正好在对面的也是一个波峰;如果两个波速相等,波峰与波峰就重叠在一起。但这两个波速实际上并不相等。这两个波在频率上略有差别,因此其速度也略有差别,但由于这种速度上的差异,当我们处在一列波上前进时,另一列波相对于我们这列波就缓慢地朝前或者朝后运动。那么,随着时间的消逝,对波节会发生些什么呢?如果我们使其中一列波稍微往前挪动一点,波节就会朝前(或往后)移过相当的距离。这就是说,这两列波之和有一个包络,当两列波行进时,包络以不同的速率前进。群速度就是将调制信号发送出去的速度。

假如我们发出一个信号,即在波中形成某种变化,使别人在收听时能识别它(亦即一种调制),那么倘若这个调制相当慢,它就以群速度行进(当调制很快时,分析起来要困难得多)。

现在我们终于可以证明, X射线在一块碳中的传播速度并不比光速大, 虽然其相速度大于光速。为此我们必须求出 $d\omega/dk$ 。这可由对式(48.14)微分得到

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} + \frac{a}{\omega^2 c}.$$

因此, 群速度就是其倒数, 即

$$v_g = \frac{c}{1 + a/\omega^2}, \quad (48.18)$$

可见 v_g 小于 c ! 所以, 虽然相速度可以超过光速, 但调制信号运动得较慢, 这就解决了那个表观的佯谬! 当然, 对于 $\omega = kc$ 这种简单的情况, $d\omega/dk$ 也是 c 。所以如果所有的相位都具有同样的速度, 波群自然也具有相同的速度。

§ 48-5 粒子的概率幅

我们现在来考虑另一个关于相速度的极其有趣的例子。它与量子力学有关。我们知道, 在某些情况下, 在一处找到粒子的概率幅可以按下列公式随空间(假设为一维空间)和时间而变化

$$\Psi = A e^{i(\omega t - kx)}, \quad (48.19)$$

这里 ω 是频率, 它通过 $E = \hbar\omega$ 而与经典的能量概念相联系。 k 是波数, 通过 $p = \hbar k$ 而与动量相联系。假如波数精确地等于 k , 即无论在何处都具有相同振幅的理想的波, 那么我们就说粒子有一个确定的动量 p , 式(48.19)给出了这个波的振幅, 如果我们取其绝对值的平方, 就得到发现粒子的相对概率作为位置与时间的函数。如果这个相对概率是常数, 那就意味着在各处找到粒子的概率相同。现在假定我们知道比起其他地方来说, 粒子更可能位于某处。对于这种情形, 我们将用一个具有极大值并且向两边衰减的波来表示(图 48-6)[它与式(48.1)表示的波不完全一样, 该波有一系列极大值, 但是, 如果将几个 ω 和 k 差不多相同的波相加, 就可能去掉所有其余极大值, 只留下一个极大值]。

在这种情况下, 由于式(48.19)的平方表示在某处发现粒子的概率, 我们知道在一定时刻粒子最可能位于“隆起部分”中心附近, 在那里波幅是极大值。如果我们等待一些时间, 波会前进, 过了一会儿, “隆起部分”将移至另一处。在经典物理中, 如果知道粒子原来位于某处, 那么就可以预言它在以后将位于另一处, 这是因为它毕竟具有速度, 即具有动量。只有当波的群速度, 即调制速度等于从经典理论得出具有同样动量的粒子的速度时, 量子理论给出的动量、能量与速度的关系才过渡到正确的经典关系。

现在必须说明情况是否如此。按照经典理论, 能量与速度通过下方程相联系

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.20)$$

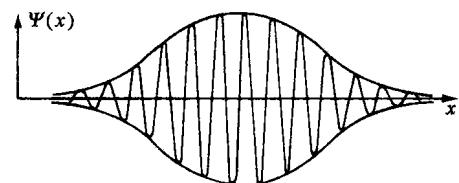


图 48-6 定域波列

类似地,动量是

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.21)$$

这就是经典理论。作为它们的一个推论,可以证明在消去 v 后,就得到

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

这是我们一再谈到的对四维世界的主要结果,它也可写为 $p_\mu p^\mu = m^2$; 这就是经典理论中能量与动量之间的关系式。由于用 $E = \hbar\omega$ 和 $p = \hbar k$ 代入后,可将 E 和 p 化为 ω 和 k ,因此对量子力学来说,上述结果就意味着下式必然成立

$$\frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} - \hbar^2 k^2 = m^2 c^2. \quad (48.22)$$

这就是表示一个质量为 m 的粒子的量子力学振幅波中频率与波数之间的关系式。由这个方程可推得 ω 为

$$\omega = c \sqrt{k^2 + m^2 c^2 / \hbar^2}.$$

在这里我们再次看到相速度 ω/k 比光速快!

现在我们来看群速度。群速度应为 $d\omega/dk$, 即调制行进的速度。为此要对平方根进行微分,这并不很困难。它的微商是

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2 + m^2 c^2 / \hbar^2}}.$$

但平方根正是 ω/c , 所以我们可写成为 $d\omega/dk = c^2 k / \omega$ 。其次, $k/\omega = p/E$, 所以

$$v_g = \frac{c^2 p}{E}.$$

但由式(48.20)和式(48.21), $c^2 p/E = v$, 即经典的粒子速度。所以我们看到,鉴于量子力学的基本关系式 $E = \hbar\omega$ 和 $p = \hbar k$ (由此两式可认为 ω 与 k 同经典的 E 与 p 是一致的)只得出方程 $\omega^2 - k^2 c^2 = m^2 c^4 / \hbar^2$, 我们现在还理解了将 E 和 p 与速度相联系的关系式(48.20)和(48.21)。当然,如要解释得通,群速度就必须是粒子的速度。如果我们按照量子力学的说法想象某一时刻粒子在这儿,十分钟后它又跑到那儿,则这个“隆起部分”所通过的距离除以时间间隔,必须等于经典的粒子速度。

§ 48-6 三维空间的波

现在我们对波动方程作一点一般性的评论,以结束有关波的讨论。在这些评论中,我们打算对未来作些概述——这并不是说我们此刻就能精确理解一切,而是看看我们稍微多研究一点波之后事情将会成为什么样子。首先,一维的声波方程是

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2},$$

这里 c 是该波的速率, 在声波的情况下就是声速; 在光的情况下则是光速。我们已证明过对声波来说, 位移将以一定的速率传播。但额外压强也以一定的速率传播, 额外密度亦然。所以我们可以预料压强也会满足这个方程, 事实上也确实如此。我们把它留给读者去证明。

提示: ρ_e 正比于 χ 对 x 的变化率。因此如果将波方程对 x 进行微分, 立即会发现 $\partial\chi/\partial x$ 亦满足同样的方程, 这就是说 ρ_e 满足同样的方程。但 P_e 正比于 ρ_e , 因此 P_e 也满足同样的方程。所以无论压强、位移等都满足同样的波动方程。

通常人们见到的声波方程是用压强而不是用位移写出的, 因为压强是标量, 没有方向, 但位移是矢量, 有方向, 因此分析压强更容易一些。

其次, 我们要讨论的是三维空间中的波动方程。我们知道一维声波方程的解是 $e^{i(\omega t - kx)}$, 这里 $\omega = kc_s$, 但我们也知道三维空间的波应当表示为 $e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$, 这里 $\omega^2 = k^2 c_s^2$, 当然也就是 $\omega^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) c_s^2$ 。现在我们要做的是猜出正确的三维波动方程。自然, 对于声波我们可以像前面对一维情况那样, 通过三维的动力学论证来导出方程。但是我们不这么做; 我们直接把它写出来, 对于压强(或位移, 或其他什么量)的方程是

$$\frac{\partial^2 P_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_e}{\partial z^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 P_e}{\partial t^2}. \quad (48.23)$$

以 $P_e = e^{i(\omega t - k \cdot r)}$ 代入即可证实此等式。显然, 对 x 每微分一次, 就等于乘上 $-ik_x$ 。微分二次, 就等于乘上 $-k_x^2$, 所以这个波方程的第一项就成为 $-k_x^2 P_e$, 类似地第二项成为 $-k_y^2 P_e$, 第三项则成为 $-k_z^2 P_e$ 。在右方, 我们得到 $-(\omega^2/c_s^2) P_e$ 。于是, 消去 P_e 项并改变符号后, 我们就看到 k 与 ω 之间的关系式正是我们所希望的。

再回头看一下, 我们禁不住要写下与色散方程式(48.22)对应的量子力学波动基本方程。如果 ϕ 表示在位置 x, y, z 及时间 t 发现粒子的概率幅, 那么有关自由粒子的量子力学的方程就是

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi.$$

首先可以看出式中的 x, y, z 及 t 系以相对论中经常涉及的那种组合形式出现, 这就暗示该式具有相对论的特征。其次, 这是一个波动方程, 如果我们用平面波试一下, 就会得出 $-k^2 + \omega^2/c^2 = m^2 c^2/\hbar^2$ 这一结果, 这正是量子力学的正确关系式。在这个方程中还包括了另一个重要事实, 即任何波的叠加也是一个解。所以这个方程包括了量子力学与相对论中我们迄今讨论过的一切东西, 至少在处理真空中不受外部势场或外力作用的单个粒子时是如此!

§ 48-7 简 正 模 式

现在我们转到拍现象的另一个例子, 这个例子颇为奇特, 而且与前相比略有不同。想象有两个相同的单摆, 其间以一相当软的弹簧相联。它们的摆长尽可能做得相同。如果我们把一个摆推向一侧, 然后放开它, 它就会来回运动。这时它又推动相联的弹簧, 所以它实际上就是一个产生力的机械, 力的频率就是另一个摆的固有频率。作为先前学过的共振理论的一个推论, 我们知道当我们恰好以正确的频率对某一物体施加一个力时, 就会驱动该物体。所以可以肯定, 一个来回摆动的摆将驱动另一个摆。然而, 在这种情况下发生了一件新

的事情,因为系统的总能量是有限的,所以当一个摆将其能量传给另一个摆而驱动该摆时,它本身就逐渐失去能量,如果节拍正好与速率一致,最后它就失去所有的能量,而变为处于静止状态!当然,此时另一个摆具有全部能量,而前一个摆则没有能量。随着时间的推移,我们将看到情况又沿相反的方向发生,能量又传回到第一个摆,这是一个非常有趣和吸引人的现象。然而,我们说这与拍的理论有关,现在我们应当解释一下,如何从拍的理论的观点来分析这个运动。

我们注意到两个摆中每一个的运动都是振动,并且振动的振幅是循环变化的。所以我们推想可用一种不同的方式来分析一个摆的运动,即将它看成两个振动的和,这两个振动同时存在,但具有略为不同的频率。所以应当有可能在这个系统中找到另外两个运动,从而声称我们所见到的是这两个解的叠加,因为这显然是一个线性系统。的确,很容易找到两种使运动开始的方式,其中每一个都是完整的单频率运动——绝对的周期性运动。像前面那样开始的运动并非是严格周期性的,因为它不会持续下去,一旦一个摆将能量传给另一个,它自己的振幅就改变了。但是,也有使运动得以开始而又使一切都不改变的方式,当然,我们一旦见到它,就会理解其中的道理。例如,假定我们使两个摆一起摆动,那么,由于它们具有相同长度,弹簧不起任何作用;同时假定没有摩擦,一切都很完善,那么它们当然会一直这样摆动下去。另一方面,还存在着另一种具有确定频率的可能运动,也就是说,如果我们使摆相反地运动,将它们向外拉过相等的距离,那么它们也会作绝对的周期运动。我们可以意识到弹簧只是在重力所提供的恢复力上加上一点力,全部情况就是如此,而系统正好以比第一种情况略高一点的频率不断振动。为什么高一点呢?因为除去重力外,弹簧施加了一个拉力,它使系统变得“倔强”一些,所以这种运动的频率正好略高于前一种运动的频率。

因此这个系统具有两种以不变的振幅振动的方式:或者使两个摆在所有时间中以同一频率同向振动,或者使它们以略微高一些的频率沿着相反方向振动。

现在,由于系统是线性的,摆的实际运动可以表示为上述两个运动的叠加(请记住,本章的主题就是不同频率的两个运动相加后的效应)。想想看,如果我们将这两个解组合起来,会出现什么情况?如果在 $t = 0$ 的时刻,以等振幅与同相位开始两个运动,它们的和就意味着,其中一个摆受到第一个运动往一个方向的推动,还受到第二个运动往相反方向的推动,从而其位移为零,而另一个摆在两种运动中都产生同样的位移,从而具有较大的振幅。然而,随着时间的推移,两个基本运动独立地进行,所以两者的相对相位就缓慢地改变。这意味着,当时间足够长,以致一个运动能够进行“900.5”周,而另一个运动只进行了“900”周,那么与先前相比,相对位移正好相反。这就是说,振幅大的运动将下降至 0,当然,与此同时,原来无运动的摆就将达到最大振幅!

这样我们看到,对这个复杂运动的分析,或者可以认为存在着共振现象,一个将能量传送给另一个,或者也可以认为,这是两个不同频率的等振幅运动的叠加。

第 49 章 波 模

§ 49-1 波 的 反 射

本章将讨论把波动限制在某一有限区域中时所产生的一些值得注意的现象。首先，我们将介绍几个有关振动弦所特有的事实作为例子，然后由这些事实归纳出一条原理，这一原理很可能是影响最广泛的数学物理原理。

约束波的第一个例子是使波动在一个界面上受到限制。现在来看一下弦上的一维波动这个简单例子。我们也完全可以讨论朝着墙传播的一维声波或其他性质类似的情况，但是弦的例子目前对我们来说已足够了。假定弦的一端固定，例如把弦系于一堵“无限坚实”的墙上。从数学上讲，这种情况可以表述成：弦在位置 $x = 0$ 处的位移 y 必须是零，因为该端点没有运动。现在，如果对于墙来说不是这样，那么我们知道运动的通解是 $F(x - ct)$ 和 $G(x + ct)$ 这两个函数之和，前面一项表示弦中沿一个方向传播的波，后面一项表示弦中沿相反方向传播的波，即

$$y = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (49.1)$$

是对任意弦的通解。但是，接下来我们必须满足弦的一端不运动这个条件。如果令方程式(49.1)中的 $x = 0$ ，并对任何 t 的数值考察 y 的值，于是我们得到

$$y = F(-ct) + G(+ct).$$

如果对所有的时间，这个值都是零，那就意味着函数 $G(ct)$ 一定等于 $-F(-ct)$ 。换句话说，任何量的函数 G 必定等于该量负值的函数 F 之负值。

如果将这个结果代回到方程(49.1)中，我们就发现问题的解是

$$y = F(x - ct) - F(-x - ct). \quad (49.2)$$

如果令 $x = 0$ ，就得到 $y = 0$ ，这一点很容易验证。

图 49-1 表示在 $x = 0$ 附近沿负 x 方向传播的一个波，以及另一符号相反、在原点另一边沿正 x 方向传播的假想波。我们说假想的，当然是因为没有弦在原点的另一边振动。弦上总的运动被看成为这样两个波在正 x 区域中的叠加。当它们到达原点 $x = 0$ 处，这两个波总是相互抵消，最后，在正 x 区域将只存在第二个（被反射的）波，此波当然将沿相反方向传播。这些结果与下列表述是一致的：如果一个波到达弦的固定

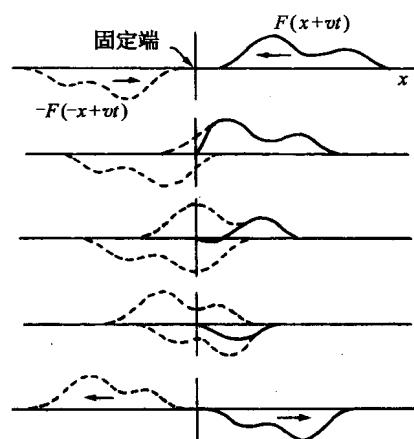


图 49-1 把波的反射看作为两个行波的叠加

端,它将被反射,同时改变符号。对这种反射总是可以这样来理解,即想象向弦端点行进的波,在墙后倒转波形再传出来。简单地说,如果我们假定弦是无限长的,每当我们有一个沿某一方向行进的波时,总有另一个沿相反方向行进的波,而且具有上述的对称性,则在 $x = 0$ 处的位移总是零,这时,即使在 $x = 0$ 处把弦固定也是毫无影响的。

下面讨论周期波的反射。假定用 $F(x - ct)$ 表示的波是一个正弦波,并且已被反射;那么,反射波 $-F(-x - ct)$ 也是同一个频率的正弦波,但沿相反方向传播。这种情况可以很简单地用复变函数记号来描写: $F(x - ct) = e^{i\omega(t-x/c)}$ 和 $F(-x - ct) = e^{i\omega(t+x/c)}$ 。如果将这两个表示式代入式(49.2),并且令 x 等于 0,就可以看到,对所有的 t 值, $y = 0$,所以它满足所需的条件。由于指数的性质,式(49.2)可以写成更为简单的形式

$$y = e^{i\omega t} (e^{-i\omega x/c} - e^{i\omega x/c}) = -2ie^{i\omega t} \sin(\omega x/c). \quad (49.3)$$

这个解告诉我们一些有趣的、新的东西,这就是如果我们在任一固定的 x 处观察弦,那么它以频率 ω 振动。不论这一点在哪里,频率都相同!但是在有一些地方,特别是在 $\sin(\omega x/c) = 0$ 的地方,则根本没有位移。另外,如果在任一时刻 t ,我们给振动弦拍一张快照,那么将得出一张正弦波的像。但是这个正弦波的位移与时间 t 有关。从方程式(49.3)可以看出此正弦波一周的长度等于两个叠加波中任何一个波的波长

$$\lambda = 2\pi c / \omega. \quad (49.4)$$

没有运动的那些点满足条件 $\sin(\omega x/c) = 0$,这就意味着 $(\omega x/c) = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$ 这些点称为波节。在任何两个相邻波节之间,每一点按正弦规律上下运动,但是运动的图样在空间是固定不动的。这一特征就是我们称之为波模的基本特征。如果能够找到一个运动图样,它具有这样的性质,即在任何点处物体完全按正弦规律运动,而且所有的点都以相同频率运动(虽然有些点比另一些点运动得更多),那么我们就得到了所谓的波模。

§ 49-2 具有固有频率的约束波

下一个有趣的问题是讨论如果弦的两端(比如说在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处)都固定时所发生的情况。我们可以由波的反射的概念着手,首先考察沿某一方向行进的某种“隆起部分”的运动。随着时间的推移,我们可以预期“隆起部分”将到达一个端点附近,而随着时间的继续推移,由于与来自另一边、方向与符号都相反的假想“隆起部分”合成的结果,它将变成一种小的颤动。最后,原始的“隆起部分”将消失,假想的“隆起部分”将沿反方向运动,并在另一端点重复上述过程。这个问题的解很容易,但是一个有趣的问题是我们能否得到一个正弦运动(刚才描述的解是周期性的,但当然不是正弦周期性的)。让我们来试一下在弦上产生一个正弦周期波。如果弦的一端被系住,我们知道它一定与我们先前的解式(49.3)相同。如果弦的另一端被系住,那么它在那一端出现的情况也必定相同。因此,对于周期的正弦运动,唯一的可能性是正弦波必须恰好能适合弦的长度。如果正弦波不能适合弦的长度,那么它的频率就不是一个可以使弦连续不断振动的固有频率。简单地说,如果弦恰好以合适的正弦波形状开始运动,那么它将继续保持完善的正弦波形,并在某个频率上谐和地振动。

数学上,我们可以将上述波形写成 $\sin kx$,式中 k 等于方程式(49.3)和(49.4)中的因子

ω/c , 这一函数在 $x = 0$ 处等于零。但是, 它在另一端点也必须等于零。这一点的意义是, 这里 k 不再像在一端固定的弦中那样是任意的了。当弦的两个端点均固定时, 唯一的可能性就是 $\sin(kL) = 0$, 因为这是使两个端点均保持固定的唯一条件。现在, 为了要使正弦值等于零, 角度必须等于 $0, \pi, 2\pi$ 或者另一些 π 的整数倍。因此, 方程

$$kL = n\pi \quad (49.5)$$

将给出任何一个可能的 k 值, 取决于所取的整数值是多少。对每一个 k 值, 就有一个确定的频率 ω , 按照(49.3)它就是

$$\omega = kc = n\pi c/L. \quad (49.6)$$

因此, 我们得出下述结论: 弦具有一种可以作正弦运动的性质, 但仅能以某些确定的频率作正弦运动。这是约束波的最重要的特征。无论系统怎么复杂, 结果表明总是存在某些运动图样, 它们具有完好的对时间的正弦依赖关系, 但频率则取决于该特定系统及其边界的性质。对弦来说, 我们可以有许多不同的频率, 根据定义, 每一个频率对应一个模式, 因为模式就是按正弦方式反复重演的运动图样。图 49-2 表示弦的前三种模式。对于第一种模式, 波长 λ 等于 $2L$ 。只要将波延长到 $x = 2L$, 得出一个完整的正弦波, 就能看出这一点。通常, 角频率 ω 等于 $2\pi c$ 除以波长, 现在由于 λ 等于 $2L$, 角频率就等于 $\pi c/L$, 与式(49.6)中 $n = 1$ 的结果相符。我们把第一种模式的频率称为 ω_1 。第二种模式给出了两个波腹, 在其中点有一个波节。于是, 这种模式的波长就等于 L 。相应的 k 值增大为两倍, 频率也增大为两倍, 等于 $2\omega_1$ 。对于第三种模式, 频率等于 $3\omega_1$, 如此等等。因此弦的所有不同频率都是最低频率 ω_1 的整数倍——1 倍、2 倍、3 倍、4 倍, 等等。

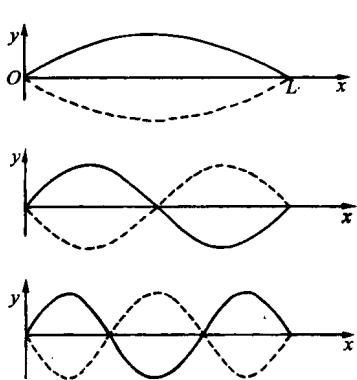


图 49-2 振动弦的前三种模式

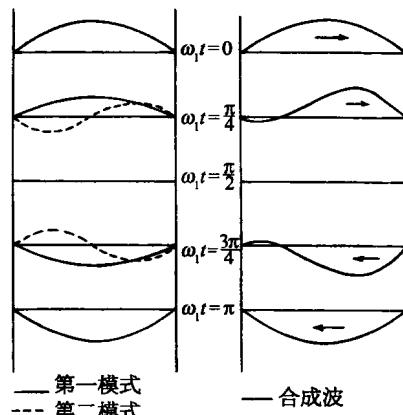


图 49-3 两种模式组合成一个行波

现在, 回到弦的一般运动, 结果是任何可能的运动总可以这样来分析, 即认为弦上同时振动着多个模式。事实上, 对一般运动来说, 必须同时激发无数个模式。为了得到有关这方面的某些概念, 让我们用图来说明, 当有两个模式同时振动时所发生的情况: 假定第一种模式按图 49-3 中所示的次序振动着, 图中画出在最低频率的半个周期内每隔相等的时间间隔弦的挠曲形状。

现在,我们假定同时还存在着两种模式的振动。图 49-3 也画出了一系列这种模式的图样,该模式在开始时与第一种模式有 90° 的相位差。这意味着它开始时没有位移,但是弦的两半具有相反方向的速度。现在,我们回想一下有关线性系统的一般原理:如果存在任意两个解,那么它们的和也是该系统的一个解。因此,由图 49-3 所示的两个解相加得到的位移应是弦的第三种可能的运动。合成结果也画在图中,它开始显示出在弦的两个端点之间来回运动的一个“隆起部分”的样子,虽然只有两个模式,我们作不出非常好的图,好的图需要更多的模式。事实上,这个结果是关于线性系统的重要原理的一个特殊情况:

任何运动都可以这样来分析,即设想它是所有各种由适当振幅和相位组成的不同模式的运动之和。

每个模式都非常简单——只随时间作正弦运动,这一事实使该原理显得很重要。诚然,即使弦的一般运动实际上并不非常复杂,但是存在着另一些系统,例如飞机机翼的抖动,其运动就复杂得多。然而,即使是机翼,我们也发现存在着具有一种频率的某个特定的扭曲方式,以及具有别的频率的其他扭曲方式。如果能够找到这些模式,那么机翼的复杂运动总是可以分解为一些简谐振动的叠加(除非抖动达到这种程度,以至于系统不能再看成是线性的)。

§ 49-3 二 维 波 模

下一个要讨论的例子是二维模式的有趣情况。到目前为止,我们只讲了有关一维的情况——张紧的弦或管中的声波。我们最终应讨论三维情况,但是比较容易的一步是对二维

情况进行讨论。为了明确起见,我们来讨论一个受到这样约束的矩形橡皮鼓面,它的矩形边界上任何地方的位移都为零,同时设矩形的尺寸为 a 和 b ,如图 49-4 所示。现在的问题是,可能具有的运动方式有什么特征?我们可以从处理弦问题时所采用的同样步骤着手。如果鼓面根本不受约束,那么可以预期,波将以某种波动形式向前传播。例如, $e^{i\omega t} (e^{-ik_x x + ik_y y})$ 就代表沿某方向传播的正弦波,此方向取决于 k_x 和 k_y 的相对值。现在,我们怎样才能使 x 轴,即 $y = 0$ 的直线成为波节呢?利用从一维弦发展而来的概念,我们可以想象用复函数

$(-e^{i\omega t})(e^{-ik_x x - ik_y y})$ 表示的另一个波。不论 x 和 t 为何值,这两个波的叠加,在 $y = 0$ 处得到的位移将为零(虽然这些函数是对负的 y 定义的,在那里没有鼓面在振动,但是这一点可以不予理会,因为在 $y = 0$ 处位移确实等于零)。在这种情况下,我们可以视第二个函数为反射波。

然而,我们不仅要求 $y = b$ 处为波节线,而且还要求 $y = 0$ 处为波节线。怎么做到这一点呢?问题的解与我们研究晶体反射时所得出的结论有关。只有当 $2bsin \theta$ 是 λ 的整数倍时,这些在 $y = 0$ 处相互抵消的波才会在 $y = b$ 处也相互抵消,式中 θ 是图 49-4 中所示的角

$$m\lambda = 2bsin \theta \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (49.7)$$

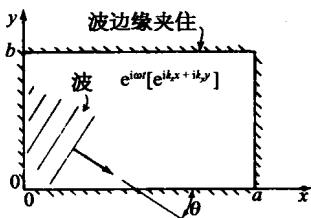


图 49-4 振动的矩形板

现在,按同样的方法,加上两个函数 $-e^{i\omega t}(e^{+ik_x x + ik_y y})$ 和 $+e^{i\omega t}(e^{+ik_x x - ik_y y})$,分别代表来自直线 $x = 0$ 的另两个波中的反射波,我们就可以使 y 轴成为波节线。使 $x = a$ 成为波节线的条件与使 $y = b$ 成为波节线的条件相似。即 $2a \cos \theta$ 也必须是 λ 的整数倍

$$n\lambda = 2a \cos \theta. \quad (49.8)$$

于是最终的结果是框中来回反射的波展现出一个驻波图样,即一个确定的模式。

因此,要得到一个模式,就必须满足上述两个条件。我们先来求一下波长。由式(49.7)和(49.8)消去角度 θ ,就可以求得用 a, b, n 和 m 表示的波长。最容易的计算方法是将上述两个方程的两边分别用 $2b$ 和 $2a$ 去除,然后将它们平方,再把这两个方程相加。结果是 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = (n\lambda / 2a)^2 + (m\lambda / 2b)^2$,由此可以解出 λ

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4b^2}. \quad (49.9)$$

这样,我们根据两个整数决定了波长,同时由波长,可立刻得到频率 ω ,因为我们知道,频率等于 $2\pi c$ 除以波长。

这个结果很有趣并且相当重要,因此我们还应通过纯粹数学的分析,而不是仅从关于反射的讨论来推导出这一结果。让我们用这样选定的四个波的叠加来表示振动,使四条直线 $x = 0, x = a, y = 0$ 和 $y = b$ 全都是波节。另外,我们还要求所有的波具有同样的频率,以使合成的运动代表一个模式。由前面对光反射的讨论,我们知道 $e^{i\omega t}(e^{-ik_x x + ik_y y})$ 代表沿图49-4所示的方向传播的波。式(49.6),即 $k = \omega/c$ 仍然成立,只要

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (49.10)$$

显然,由图可知 $k_x = k \cos \theta, k_y = k \sin \theta$ 。

现在,我们的矩形鼓面的位移(比如说 ϕ)的方程具有这种很长的形式

$$\phi = e^{i\omega t} [e^{(-ik_x x + ik_y y)} - e^{(+ik_x x + ik_y y)} - e^{(-ik_x x - ik_y y)} + e^{(+ik_x x - ik_y y)}]. \quad (49.11a)$$

虽然这个式子看起来相当混乱,但是计算上述各项之和并不十分困难。将各指数项合并,就可以得到正弦函数,这样一来,位移就是

$$\phi = [-4 \sin k_x x \sin k_y y] [e^{i\omega t}]. \quad (49.11b)$$

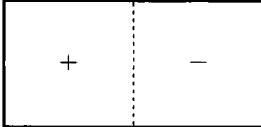
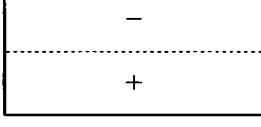
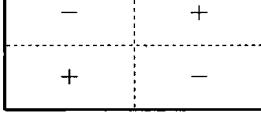
换句话说,这是一种正弦振动,其图样在 x 方向和 y 方向上也都是正弦的,一切都很好。当然,我们的边界条件在 $x = 0$ 和 $y = 0$ 处是满足的。我们还要求 ϕ 在 $x = a$ 和 $y = b$ 时也等于零。因此,我们必须加进另外两个条件: $k_x a$ 必须是 π 的整数倍,而 $k_y b$ 必须是 π 的另一个整数倍。因为我们已经看到 $k_x = k \cos \theta, k_y = k \sin \theta$,所以立即就得到式(49.7)和(49.8),并由这两个式子得出最后结果式(49.9)。

现在我们取一个宽是高的两倍的矩形作为例子。如果我们选取 $a = 2b$,并利用式(49.4)和(49.9),那么就能够计算出所有模式的频率

$$\omega^2 = \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2 \frac{4m^2 + n^2}{4}. \quad (49.12)$$

表49-1列出几个简单的模式,并且还定性地表示了它们的形状。

表 49-1

模 式 形 状	m	n	$(\omega / \omega_0)^2$	ω / ω_0
	1	1	1.25	1.12
	1	2	2.00	1.41
	1	3	3.25	1.80
	2	1	4.25	2.06
	2	2	5.00	2.24

关于这种特殊情况,要强调的最重要之点是频率互相不成倍数,它们也不是任何数的倍数。固有频率间具有谐和地相关的概念并不是普遍正确的。对于一维以上的系统它是不正确的,对于比具有均匀密度和均匀张力的弦更复杂的一维系统,它也是不正确的。后一种情况的一个简单例子是悬挂着的链条,链条顶部的张力比底部的张力大一些。如果使这种链条作谐振动,那么就有各种不同的模式和频率,而各频率都不是任何数的简单倍数,模式形状也不是正弦的。

更复杂一些的系统的波模就更加复杂了。例如,在我们的口腔内,声带上部是腔体,依靠使舌头和嘴唇活动,等等,可以做成不同口径和形状的开管或闭管。这是一个极其复杂的共振器,但它不过是一个共振器。当人们运用声带讲话时,声带就用来产生某种类型的音调。这种音调是相当复杂的,出来的有许多声音,但是由于口腔具有各种各样的共振频率,它进一步改变了这个音调。例如,一个歌手能够在同样的音调上发出各种元音 a、o 或 oo 等,但是它们听起来不一样,因为在口腔中,各种谐音的共鸣程度不同。空腔的共振频率在改变发声中的极端重要性可以用一个简单的实验来演示。由于声音的传播速率随介质密度的平方根的倒数而变化,因此利用不同的气体可以改变声音的速率。如果我们用氯气代替空气,这样密度就降低,声音的传播速率大大增加,空腔的所有频率都将升高。因而,如果在某人讲话前用氯气充满肺部,那么虽然声带还是以同样的频率振动,但他的发声特征将发生极大变化。

§ 49-4 耦合摆

最后,我们要着重指出,不仅仅是复杂的连续系统存在着波模,而且非常简单的力学系统也存在着波模。前一章中讨论过的两个耦合摆组成的系统,就是一个很好的例子。在那一章中已经证明,可以把这种运动看作具有不同频率的两个谐运动的叠加来分析。因此,即使是这样的系统也可以用谐运动或波模来分析。弦具有无穷个模式,二维的表面也具有无穷个模式。如果我们知道如何计算无穷大,那么在某种意义上,二维表面的模式数目是一个二重无穷大。但是,仅有两个自由度,只要求用两个变量来描述的一个简单的力学系统只有两个模式。

让我们在摆是等长的情况下对这两个模式进行数学的分析。如图 49-5 所示,令一个摆的位移为 x ,另一个摆的位移为 y 。如果没有弹簧,由于重力,作用在第一个物体上的力与该物体的位移成正比。如果没有弹簧,仅仅对于这一个摆来说,就应该有某个固有频率 ω_0 。没有弹簧时,运动方程应为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x. \quad (49.13)$$

如果没有弹簧,另一个摆应以同样的方式摆动。但当存在弹簧时,除去由于重力而产生的恢复力外,还有一个附加力在拉第一个物体。这个拉力取决于 x 超过 y 的距离,并且与其差额成正比,因此,拉力就等于取决于几何位置的某个常数乘以 $(x - y)$ 。同样大小但方向相反的力作用在第二个物体上。因此,要解的运动方程是

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - k(x - y), \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - k(y - x). \quad (49.14)$$

为了求出两个物体都以同样频率摆动的运动,我们必须决定每一个物体移动多少。换句话说,摆 x 和摆 y 将以同样的频率振动,但是它们的振幅必须具有确定的数值 A 和 B , A 和 B 的关系是固定的。我们用这种解来尝试一下

$$x = A e^{i\omega t}, \quad y = B e^{i\omega t}. \quad (49.15)$$

如果将这两个试解代入方程式(49.14),合并同类项,结果为

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)A &= -\frac{k}{m}B, \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)B &= -\frac{k}{m}A. \end{aligned} \quad (49.16)$$

所写出的方程中,公共因子 $e^{i\omega t}$ 已被消去,并且都除以 m 。

现在,我们看到,有两个似乎包含两个未知数的方程式。但是事实上没有两个未知数,因为运动的整个大小是无法由这些方程来决定的。上述方程可以决定的仅仅是 A 与 B 之比,但是这两个方程必定给出同样的比例。要使这两个方程相一致,就要求频率是某

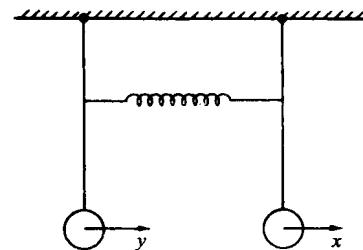


图 49-5 两个耦合摆

一个非常特殊的值。

在这种特殊情况下,频率可以相当容易地求出。如果将这两个方程相乘,那么结果是

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)^2 AB = \left(\frac{k}{m}\right)^2 AB. \quad (49.17)$$

方程两边的 AB 项可以消去,除非 A 和 B 都为零,而那就意味着根本没有运动。如果存在运动,那么剩下的两项必定相等,这给出一个要求出解的二次方程。结果是存在两个可能的频率

$$\omega_1^2 = \omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}. \quad (49.18)$$

另外,如果把这些频率值代回到方程(49.16)中,我们发现对第一个频率有 $A = B$, 对第二个频率有 $A = -B$ 。这些就是“模式形状”,这很容易用实验来验证。

显然,在 $A = B$ 的第一种模式中,弹簧从来没有被拉伸,因而两个摆都以频率 ω_0 振动,就好像弹簧不存在时一样。在 $A = -B$ 的另一个解中,弹簧提供一个恢复力,因而提高了振动频率。如果两个摆具有不同的长度,则可得出更为有趣的情况。有关的分析与上面给出的十分相似,我们将它留给读者作为练习。

§ 49-5 线性系统

现在,我们来总结一下上面所讨论过的概念,它可能包含了数学物理的最普遍、最奇妙的原理的所有方面。如果我们有一个特征与时间无关的线性系统,那么它的运动并不一定具有什么特别的简单性,事实上,它可以是非常复杂的,但是存在着一些(通常是一系列)非常特殊的、其整个图样随时间指数地变化的运动。对我们现在正在谈论的振动系统,指数是虚数,因而我们不说它随时间“指数地”变化,而宁可说它随时间“按正弦规律”变化。然而,人们可以更一般地说运动随时间以非常特殊的形状及非常特殊的模式指数地变化。系统最普遍的运动总是可以表示成包含各个不同指数的运动的叠加。

对于正弦运动的情况,将上述结论再叙述一遍是值得的:一个线性系统不一定作纯粹的正弦运动,即以确定的单个频率运动,但是无论它如何运动,这个运动总可以表示成纯正弦运动的叠加,这些正弦运动中每个运动的频率是系统的一个特征,并且每个运动的图样或波形也是系统的一个特征。在任何一个这样的系统中,一般运动的特征可以这样来表示,即给出各个模式的强度和相位,并把它们统统合在一起。叙述这一点的另一种方式是:任何一个线性振动系统等效于一组互相独立的谐振子,每个谐振子具有与各模式相应的固有频率。

我们评述一下模式与量子力学的联系作为这一章的结束。量子力学中的振动客体(或在空间变化的东西)是概率函数的振幅,它给出了在一个已知组态中,找到一个电子或一组电子的概率。这个振幅函数可以随空间和时间变化,并且事实上还满足一个线性方程。然而,在量子力学中有一种变换,在这种变换中我们所谓的概率振幅的频率就等于经典概念中的能量。因此,只要用能量一词来代替频率,我们就可以将上述原理变成适用于量子力学的情况。它变成这样:一个量子力学系统,例如一个原子,不必具有一个确定的能量,正像一个简单的力学系统并不一定要具有一个确定的频率一样。但是,无论系统表现得怎样,其行为总可以表示为一些具有确定能量的状态的叠加。每个状态的能量是该原子的一个特征,同

时决定在不同地点找到粒子概率的振幅图样也是原子的一个特征。一般的运动可以用给出各个不同能量状态的振幅来描写。这就是量子力学中能级的由来。由于量子力学是用波来表示的，在电子不具备足够的能量最终脱离开质子的情形下，这些波都是约束波。就像弦的约束波一样。量子力学波动方程的解中存在许多确定的频率。量子力学解释说这些就是确定的能量。因此一个量子力学系统，由于它是用波来表示的，可以具有能量固定的确定状态；各种各样原子的许多能级就是例子。

第 50 章 谱 波

§ 50-1 乐 音

据说毕达哥拉斯(Pythagoras)曾经发现如下事实:两根相似的弦处于同样的张力下,只是长度不同,当它们同时发声时,如果两根弦的长度之比为两个小整数之比,则所发出的声音是悦耳的。如果两根弦的长度为 1 与 2 之比,则这两根弦发出的声音相当于音乐中的八度。如果两根弦的长度为 2 与 3 之比,则相当于 C 到 G 之间的音程,称之为五度音程。一般认为这些音程是“悦耳”的和音。

毕达哥拉斯对于他的这一发现感受如此之深,因而把它作为一个学派的基础——人们称之为毕达哥拉斯派——这个学派对数字的巨大威力有着神秘的信仰。他们还相信,在行星(或“天体”)方面也会找到类似的现象。我们有时听到“天体音乐”这样的说法,它的意思就是在行星轨道之间或者在自然界中其他事物之间会存在数字关系。人们通常认为这只是希腊人的一种迷信。但是,这种迷信与我们自己对定量关系所表现的科学兴趣是这样的大不相同吗?除了几何学以外,毕达哥拉斯的发现是关于自然界中存在数字关系的第一个例子。突然发现自然界中确实包含简单的数字关系这件事肯定令人深感惊奇。通过简单的长度测量,我们就能对表面上看来与几何学毫无关系的某种事情作出预言——产生悦耳的声音。人们从这一发现可以引申出这样一点:算术和数学分析或将将成为了解自然界的良好工具。现代科学的成果证实了这个观点。

毕达哥拉斯只能通过实验观察来得到他的发现。然而这个重要方面似乎并未给他留下深刻的印象。如果不是这样的话,那么物理学就会开始得更早一些(回顾别人已经做过的事情,并且判断他在当时应该怎么做总是很容易的)。

我们不妨讲一下这个非常有趣的发现的第三方面,即这一发现与发出悦耳声音的两个音调有关。我们不妨自问,在关于为什么只有某些声音是悦耳的这一点上,我们是否比毕达哥拉斯了解得更多?在今天,美学的一般理论未必比毕达哥拉斯的时代更进步。希腊人的这个发现包括三个方面:实验,数学关系和美学。物理学只是在前面两个方面取得了巨大的进步。在本章中将要论述我们今天对毕达哥拉斯发现的认识。

在我们听到的声音中,有一种我们称之为噪声。噪声和鼓膜的一种不规则振动相对应,这个振动是由鼓膜附近的某个物体的不规则振动所引起的。如果我们画一个图来表示作用在鼓膜上的空气压力(及由此产生的鼓膜位移)对时间的函数关系,那么,和噪声相对应的曲线大致如图 50-1(a)所示(该图所示的噪声大致相当于一个踏脚声)。音乐的声音具有不同的性质。音乐的特征是存在着或多或少持续音——或“律音”(当然,乐器同样会产生噪声)。这种乐音可以像按下钢琴琴键时那样,持续一个较短的时间,也可以像长笛演奏者吹奏一个长音调那样,几乎一直持续下去。

从空气压力的观点来看,律音的特征是什么? 律音和噪声的差别在于它的图形具有周期性。空气压力随时间变化的曲线呈现出高低不平的形状,而且这个形状不断重复出现。图 50-1(b)表示与一个乐音相对应的压力-时间函数。

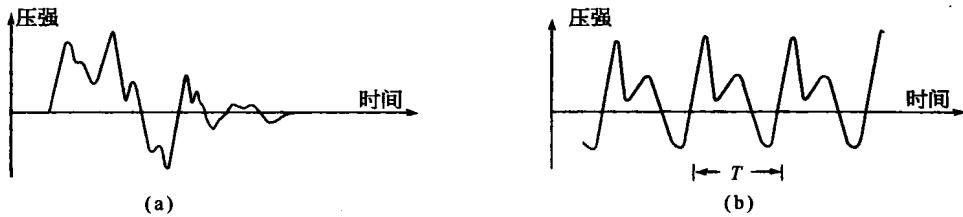


图 50-1 压力与时间的关系

(a) 噪声; (b) 乐音

通常音乐家是根据响度、音调和“音色”这三个特性来谈论乐音的。已经发现“响度”对应于压力变化的大小,“音调”对应于基本压力函数重复一次所需的时间(“低”音的周期比“高”音的周期长),乐音的“音色”与我们对两个相同响度和相同音调的律音之间仍能听得出其差别有关。双簧管、小提琴或女高音,即使当它们以同一音调发声时,我们仍能一一分辨出来。音色与重复的图样的结构有关。

现在我们来考虑由弦的振动所产生的声音。如果我们拨一下弦,先把它拉向一边,然后放开,其后的运动将由我们所产生的波的运动来决定。我们知道,这些波将向两个方向传播,并分别被两端反射。它们将来回运动很长一段时间。然而不管这个波有多么复杂,它总是重复自身。重复的周期恰好等于这个波传播整整两个弦长所需要的时间,因为这段时间正是任何一个波一经开始后被两端反射,回到出发点,再沿着原来的方向传播所需的时间。无论波在开始时向哪一个方向传播,其所需要的时间都是一样的。因此,弦上的各点经过一个周期后都将回到它原来的位置,再经过一个周期,又将回到它原来的位置,如此一直重复下去。它所产生的声波也必定同样地重复。这样我们就懂得了为什么拨一下弦会产生乐音。

§ 50-2 傅里叶级数

在前一章中,我们讨论了另一种考察振动系统运动的方法。我们知道弦有各种固有振动模式,而且对任何一种由起始条件所造成的特定振动,都可以看成是由一些同时振动的固有模式以适当的比例组合而成的。对弦来说,我们发现其振动的简正频率为 ω_0 , $2\omega_0$, $3\omega_0$, ...。所以,一根被拨动的弦,其最一般的运动是由频率为基频 ω_0 、二次谐频 $2\omega_0$ 、三次谐频 $3\omega_0$ 等等正弦振动组成的。基波模式每经过一个周期 T_1 重复一次, $T_1 = 2\pi/\omega_0$ 。二次谐波模式每经过一个周期 T_2 重复一次, $T_2 = 2\pi/(2\omega_0)$ 。当然它每经过 $T_1 = 2T_2$, 即两个周期,也照样会重复。同样,三次谐波模式经过 T_1 的时间,即它的三个周期,也会重复一次。我们又一次看到了,为什么一根被拨动的弦,会按照周期 T_1 重复它的全部图样。它产生一个乐音。

我们一直都在谈论弦的运动。然而,声音是空气的运动,它是由弦的运动产生的。因此,空气的振动也一定是由同样的谐波组成的——不过我们不再考虑空气的简正模式。同时,各谐波在空气中的相对强度可以和在弦中的不同,特别是如果弦是通过共鸣板和空气耦

合的。不同的谐波对空气耦合的效率不同。

如果我们用 $f(t)$ 表示一个乐音 [如图 50-1(b) 所示] 的空气压力与时间的函数关系, 那么我们预期, 可以把 $f(t)$ 写成若干个像 $\cos \omega t$ 这样的时间简谐函数之和——对每个谐频都有一个这样的函数。设振动周期为 T , 则基波角频率为 $\omega = 2\pi/T$, 谐波角频率为 $2\omega, 3\omega, \dots$ 等等。

这里有一点略为复杂一些。也就是对所有的频率来说, 我们预期各个频率的初相未必全都相同。因此, 应该用像 $\cos(\omega t + \phi)$ 这样的函数。然而, 如果对于每一个频率都以正弦和余弦两函数代替, 就会比较简单。我们记得

$$\cos(\omega t + \phi) = (\cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t). \quad (50.1)$$

因为 ϕ 是常数。所以频率为 ω 的任何正弦振动, 都能写作一个含 $\cos \omega t$ 的项与另一个含 $\sin \omega t$ 的项之和。

由此得出: 周期为 T 的任何函数 $f(t)$ 都可写成下面的数学形式

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (50.2)$$

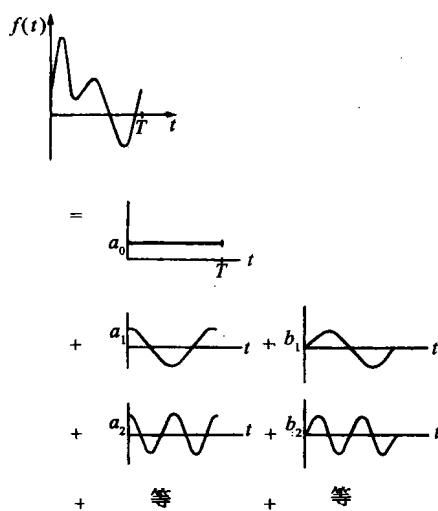


图 50-2 任何周期函数 $f(t)$ 等于简谐函数之和

式中 $\omega = 2\pi/T$, a 和 b 等均为常数, 它们表明各个分振动在振动 $f(t)$ 中所占的分量。我们在式中还加了“零频率”的项 a_0 , 因此我们的式子具有充分的普遍性, 虽然乐音的 a_0 通常为零。这一项表示声压的平均值(也就是“零”级)的移动。有了它上式就能适用于任何情况。等式(50.2)概括地表示在图 50-2 中(谐函数的振幅 a_n 和 b_n 一定要适当地选择。图中画的是大致情形, 并没有规定任何特定的尺度)。级数式(50.2)称为 $f(t)$ 的傅里叶级数。

我们已经讲过, 任何周期函数都能这样组成。现在应把这句话更正为: 任何声波或我们在物理学中通常遇到的任何函数, 都能用这样的和组成。数学家能创造出不能由简谐函数组成的函数——例如一个具有“反扭”的函数, 因此对于某些 t 值它有两个数值! 这里, 我们不必去为这类函数操心。

§ 50-3 音色与谐和

现在我们能够讲述是什么决定了乐音的“音色”了。这就是各种谐波的相对量—— a 和 b 之值。只含有基谐波的音是“纯音”。含有许多强谐波的音称为“重音”。小提琴和双簧管产生的谐波比例不同。

如果把几个“振荡器”与扩音器联接起来, 就能“制造”出各种不同的乐音(一个振荡器通常产生近乎纯粹的简谐函数)。我们应选择那些频率为 $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ 的振荡器。然后通过

调节各个振荡器的音量控制,我们就能随意加进任何量的各谐波——由此产生不同音色的乐音。电风琴就是大致以这种方法工作的。“键”是选择基音振荡器的频率的,“音栓”是控制谐波相对比例的开关。按动这些开关就能使电风琴发出像长笛、双簧管或小提琴的声音。

有趣的是,产生这种“人造”乐音,对每一频率只需要一个振荡器——对正弦和余弦分量不必采用各自的振荡器。耳朵对于谐波的相对相位并不很敏感。它主要注意各频率的正弦和余弦部分的总体。我们的分析已经超过了解释对音乐的主观看法所需的精确性。然而,传声器或者其他物理仪器的响应确实取决于相位,处理这种情况时就需要我们这种完整的分析。

语音的“音色”也确定了我们在语言中辨认出的元音的声音。口腔的形状决定了口腔内空气固有振动模式的频率。由声带所发出的声波使其中的一些模式发生振动。这样就会使声音中某些谐波的振幅相对于其他的振幅有所增加。当我们改变口腔的形状时,又会有不同频率的谐波占优势。这些效应说明了“e-e-e”音和“a-a-a”音的区别。

我们都知道,无论是以高的还是低的音调来念(或唱)某个元音(例如“e-e-e”),“听起来”仍然“像”同一个元音。根据我们所描写的机制,可以认为在口腔中发“e-e-e”音时的形状会使某些特殊频率得到加强,而且这些频率不会随着我们音调的改变而改变。所以当我们改变音调时,重要的谐波与基波之间的关系——即“音色”——也随之而改变。显然,我们并不是凭着特定的谐波关系来辨别语言的。

现在我们应该怎样来评论毕达哥拉斯的发现呢?我们知道如果两根相似的弦的长度之比为 $2:3$,则振动的基频之比为 $3:2$ 。但是当它们一起发声时,为什么会听起来悦耳呢?或许我们应该从谐波的频率中去寻找线索。那根短弦的二次谐波与长弦的三次谐波的频率相等(我们可以很容易证明或相信,一根被拨动的弦能产生一些很强的最低的谐波)。

也许我们应该作出如下的规定:当一些律音具有相同频率的谐波时,它们听起来是和谐的。当一些律音的较高次谐波的频率相近,但其差又足以产生快拍时,听起来就不那么和谐了。为什么拍音听起来不舒服而较高次谐波的同音却听起来悦耳?对这些我们还不知道怎样去解释或描述。我们不能根据这方面知识说什么声音好听或者气味应该好闻。换句话说,我们对这一问题的理解并不比它们是同音听起来就悦耳这一说法更全面。它不允许我们作出比音乐中的和谐性更多的推论。

我们可以很容易地利用钢琴作几个简单的实验来验证上述谐波关系。把靠近钢琴键盘中央的三个相继的C依次记作C、C'和C'',而把恰在其上方的G记作G、G'和G''。则它们的相对基频为

$$\begin{array}{ll} C - 2 & G - 3 \\ C' - 4 & G' - 6 \\ C'' - 8 & G'' - 12 \end{array}$$

这些谐波关系可以用下列方法演示。假定我们缓慢地按下C'键——这样不会发出声音,但却能使消音器升起。然后使C发声,以便产生它本身的基谐波和一些二次谐波。C的二次谐波会使C'的弦振动。如果我们现在放开C键(C'键仍然按着),消音器就会使C弦停止振动,同时我们听到(隐约地)音调C'渐渐地消失。利用类似的方法,C的三次谐波能使G'弦振动。或者C的六次谐波(现在已经相当的弱了)能引起G''的基频振动。

如果不出声地按下G键,然后再使C'发声,得到的结果略有不同。C'的三次谐波和G的

四次谐波相对应,因此只有 G 的四次谐波被激发。如果我们靠近去听,就能听到 G" 的声音,它比我们按着的 G 音高出两个八度! 我们可以很容易地想出许多种组合来玩这个游戏。

顺便提一下,我们可以用下述条件来确定大调音阶: 大三和弦(F-A-C)、(C-E-G)和(G-B-D)各表示一系列频率比值为 4 : 5 : 6 的音。这些比值——加上一音阶(C-C', B-B'等)的频率比值为 1 : 2 这个事实——决定了“理想”情况(或所谓“正确的音调”)的全部音阶。对于像钢琴等键盘乐器,一般都不按照此法调音,而是有点“不老实”,以至于对于所有可能的起始音,其频率都近似于正确。这种调音方法称为“按平均律调音”,其做法是: 把一音阶(频率之比仍是 1 : 2)分为 12 个相等的音程,每个音程频率的比值是 $2^{1/12}$ 。五度音程频率的比值不再是 $3/2$ 而是 $2^{7/12} = 1.499$, 显然,对于多数人的耳朵,这两者是足够近的了。

我们已经叙述了用谐波的符合来表示谐和的规则。然而这个符合是否就是两个音调和谱的原因呢? 有人已经断定,两个纯音——经过精心调制而不带谐音的音——当它们的频率比值等于或者接近于预期的比值时,并不能给人以谐和或者不谐和的感觉(这种实验是很困难进行的,因为很难产生纯音,在以后我们将会明白为什么)。我们至今仍不能确定,当我们判定某个声音好听时,我们的耳朵是在与谐波匹配还是在做算术?

§ 50-4 傅里叶系数

现在让我们回到这一概念,即任何律音——就是有周期性的声音——都能用谐波的适当组合来表示。我们想说明怎样才能求出每个谐波的需要量。如果我们已知所有的系数 a 和 b ,当然能很容易利用式(50.2)计算 $f(t)$ 。但现在的问题是,如果已知 $f(t)$,我们怎样才能求出各种谐波项的系数(按照食谱做蛋糕是容易的,但是如果给我们一个制好的蛋糕,我们能写出它的制法吗)?

傅里叶发现这个问题其实并不很难。 a_0 这一项当然是容易求得的。我们已经讲过,它就是 $f(t)$ 在一个周期内(从 $t = 0$ 到 $t = T$)的平均值。我们很容易看出事实上确实如此。正弦和余弦函数在一个周期内的平均值为零。在两个、三个或者任何整数个周期内的平均值也为零。因此,除了 a_0 以外,式(50.2)右边各项的平均值全部为零(要记得,我们必须取 $\omega = 2\pi/T$)。

由于和的平均值等于平均值的和,所以 $f(t)$ 的平均值就是 a_0 的平均值。然而 a_0 是常数,所以它的平均值就等于 a_0 。由平均值的定义,我们有

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (50.3)$$

其他系数的计算只是稍微难一些。我们可以用傅里叶发明的诀窍来求出它们。假若在式(50.2)的两边同时乘以某个谐波函数——例如 $\cos 7\omega t$,则有

$$\begin{aligned} f(t) \cdot \cos 7\omega t &= a_0 \cdot \cos 7\omega t \\ &\quad + a_1 \cos \omega t \cdot \cos 7\omega t + b_1 \sin \omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &\quad + a_2 \cos 2\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &\quad + \dots \quad + \dots \end{aligned}$$

$$+ a_7 \cos 7\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_7 \sin 7\omega t \cdot \cos 7\omega t \\ + \dots + \dots . \quad (50.4)$$

现在对上式两边求平均值。 $a_0 \cos 7\omega t$ 在时间 T 内的平均值与余弦在七个整周期内的平均值成比例。但是它正好是零。几乎所有其他各项的平均值也都为零。我们来看一下 a_1 项。我们知道在一般情况下

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cos(A-B). \quad (50.5)$$

a_1 项可写成

$$\frac{1}{2} a_1 (\cos 8\omega t + \cos 6\omega t). \quad (50.6)$$

这样就有了两个余弦项，一项在时间 T 内有八个整周期，另一项有六个整周期。这两项的平均值均为零。所以 a_1 项的平均值为零。

对 a_2 项，我们可以得到 $a_2 \cos 9\omega t$ 和 $a_2 \cos 5\omega t$ ，其中每一项的平均值也为零。对 a_9 项，我们可以得到 $\cos 16\omega t$ 和 $\cos(-2\omega t)$ 。但 $\cos(-2\omega t)$ 等于 $\cos 2\omega t$ ，所以这两项都以零为平均值。很清楚，除了 a_7 项之外，所有 a 项的平均值均为零。对 a_7 项有

$$\frac{1}{2} a_7 (\cos 14\omega t + \cos 0). \quad (50.7)$$

零的余弦是 1，它的平均值当然也是 1。因此我们得到了这样的结果：即式(50.4)中所有的 a 项平均值为 $a_7 / 2$ 。

至于 b 项就更加容易了。当我们用任何一个余弦项，例如 $\cos n\omega t$ 去乘两边时，我们可以用同样的方法证明所有的 b 项其平均值均为零。

我们看到傅里叶的“诀窍”起着筛子的作用。当我们用 $\cos 7\omega t$ 去乘两边然后求平均值时，除了 a_7 项之外，所有其他各项都去掉了，并且得到

$$[f(t) \cdot \cos 7\omega t] \text{ 的平均值} = \frac{a_7}{2} \quad (50.8)$$

或

$$a_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos 7\omega t dt. \quad (50.9)$$

我们留给读者自己去证明，系数 b_7 可以通过将式(50.2)的两边同乘以 $\sin 7\omega t$ 后求平均值而求得。其结果是

$$b_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin 7\omega t dt. \quad (50.10)$$

我们预期对 7 是正确的，对一切整数也都正确。因此可以把我们的证明归纳为下面比较优美的数学公式。如果 m 和 n 都是不等于零的整数，而且 $\omega = 2\pi/T$ ，则

$$\text{I. } \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt = 0. \quad (50.11)$$

$$\text{II. } \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ T/2 & (n = m) \end{cases} \quad (50.12)$$

$$\text{IV. } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t. \quad (50.13)$$

$$\text{V. } a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt. \quad (50.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t dt. \quad (50.15)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t dt. \quad (50.16)$$

在前面几章中用指数符号来表示简谐运动是很方便的。我们用指数函数的实数部分 $\text{Re}e^{i\omega t}$ 来代替 $\cos \omega t$ 。在本章中我们已经应用了正弦和余弦函数, 因为这样使证明也许较为清楚。然而式(50.13)的最终结果可以写成下面简洁的形式

$$f(t) = \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n e^{i\omega t}, \quad (50.17)$$

式中 \hat{a}_n 是复数 $a_n - ib_n$ (包括 $b_0 = 0$)。如果我们希望始终都用同样的符号, 那么我们还可以写出

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (n \geq 1). \quad (50.18)$$

现在我们知道怎样把一个周期波“分解”成它的谐波分量。这个过程称为傅里叶分析, 分解出来的各个独立项称为傅里叶分量。然而我们还没有证明, 一旦找出所有的傅里叶分量, 并把它们都加起来, 的确就回复到 $f(t)$ 。数学家们已经证明, 对于大多数类型的各种函数, 也就是事实上对于物理学家感兴趣的所有函数, 如果能够积分的话, 就能回复到 $f(t)$ 。不过有一个小小的例外。如果函数 $f(t)$ 不连续, 即 $f(t)$ 突然由一个值跳变到另一个值, 那么傅里叶和就会在断点处得到一个介于高值与低值中间的值。因此, 如果我们有一个奇异的函数 $f(t) = 0, 0 \leq t \leq t_0$ 及 $f(t) = 1, t_0 \leq t \leq T$, 那么傅里叶和在各处的值都与原函数相同, 但是 t_0 处除外, 在该处傅里叶和是 $1/2$ 而不是 1 。

不管怎样, 坚持说一个函数在直至趋近于 t_0 时应该是零, 而在 t_0 时又应该是 1 , 是很不符合物理学原则的。所以也许我们应该对物理学家作这样一个“规定”: 任何不连续函数 (这只能是真实的物理函数的一个简化) 在不连续点的值应该定义为两个不连续值的中间值。这样任何这类函数——具有任何有限数目的这类跳变的函数——和所有其他物理上感兴趣的函数一样, 都可以由傅里叶和正确地表示出来。

我们建议读者做一个练习, 确定图 50-3 所示函数的傅里叶级数。因为这一函数无法用一个明显的代数形式来表

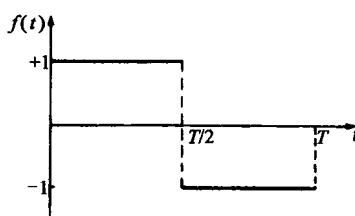


图 50-3 方波函数

$$f(t) = +1 \quad (0 < t < T/2),$$

$$f(t) = -1 \quad (T/2 < t < T)$$

示,因此不能照通常的方法从零到 T 范围进行积分。然而如果把积分分成两个部分:一部分从零到 $T/2$ (在这个范围中 $f(t) = 1$),另一部分从 $T/2$ 到 T (在这个范围中 $f(t) = -1$),那么积分就容易求了。其结果是

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right), \quad (50.19)$$

式中 $\omega = 2\pi/T$ 。于是我们发现这个具有特殊相位的方波只含有奇次谐波,而且它们的振幅和频率成反比。

现在我们来检验式(50.19)是否会回复到某个 t 值的 $f(t)$ 。我们选择 $t = T/4$,即 $\omega = \pi/2$,有

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right) \quad (50.20)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right). \quad (50.21)$$

这个级数^{*}的值是 $\pi/4$,从而我们得到 $f(t) = 1$ 。

§ 50-5 能量定理

波中的能量与其振幅的平方成正比。对于一个形状复杂的波,在一个周期内的能量与 $\int_0^T f^2(t) dt$ 成正比。我们也可以把这个能量与傅里叶系数联系起来

$$\int_0^T f^2(t) dt = \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right]^2 dt. \quad (50.22)$$

当我们展开括号内各项的平方时,就会得到所有可能的交叉项,如 $a_5 \cos 5\omega t \cdot b_7 \sin 7\omega t$ 。但是,上面[式(50.11)和(50.12)]我们已经证明,所有这些项在一个周期内的积分都为零,所以只剩下了像 $a_5^2 \cos^2 5\omega t$ 这种平方项。任何余弦平方或正弦平方在一个周期内的积分都等于 $T/2$,所以我们得到

$$\int_0^T f^2(t) dt = Ta_0^2 + \frac{T}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + b_1^2 + b_2^2 + \dots) = Ta_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (50.23)$$

我们把这个式子称为“能量定理”,它表明波中的总能量正好等于它的全部傅里叶分量的能量之和。例如,把这个定理应用到级数式(50.19)中,因为 $[f(t)]^2 = 1$,所以得到

$$T = \frac{T}{2} \cdot \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \dots \right).$$

* 这个级数可以用下述方法进行计算。首先我们注意到 $\int_0^x [dx/(1+x^2)] = \tan^{-1} x$ 。然后把被积函数展开为级数 $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ 。对这个级数逐项积分(从 0 到 x)得 $\tan^{-1} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$ 。取 $x = 1$,鉴于 $\tan^{-1} 1 = \pi/4$,我们就得到了上述结果。

由此我们知道奇数倒数的平方和等于 $\pi^2/8$ 。同样,采用首先得到一个函数 x^2 的傅里叶级数,再应用能量定理的方法,我们可以证明 $1+1/2^4+1/3^4+\dots$ 等于 $\pi^4/90$,这一结论我们在第45章中曾经用到过。

§ 50-6 非线性响应

非线性效应是谐波理论中的一个重要现象。由于它在实践方面的重要作用,最后还得讲一讲。至今我们都是假定所讨论的系统是线性的,也就是假定力的响应,例如位移或加速度始终正比于力,或者假定电路中的电流正比于电压,等等。现在我们要讨论的是不存在严格成比例的情况。设想有一个装置,它的响应(我们称为 t 时刻的输出 $x_{\text{输出}}$)由 t 时刻的输入 $x_{\text{输入}}$ 来决定。例如,当 $x_{\text{输入}}$ 为力时, $x_{\text{输出}}$ 就是位移。或者当 $x_{\text{输入}}$ 为电流时, $x_{\text{输出}}$ 就是电压。如果该装置是线性的,则

$$x_{\text{输出}}(t) = Kx_{\text{输入}}(t), \quad (50.24)$$

式中 K 是常数,与 t 和 $x_{\text{输入}}$ 无关。但是,如果该装置并不是严格线性的,而只是近似于线性,那么可写成

$$x_{\text{输出}}(t) = K[x_{\text{输入}}(t) + \epsilon x_{\text{输入}}^2(t)], \quad (50.25)$$

式中 ϵ 与 1 相比是个小量。上述线性和非线性响应如图 50-4 所示。

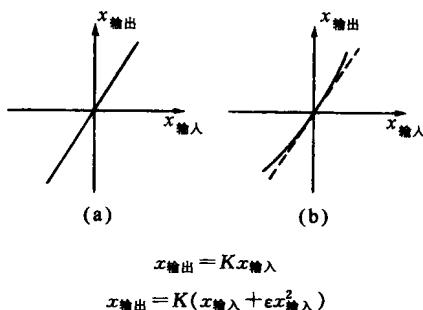


图 50-4 线性和非线性响应

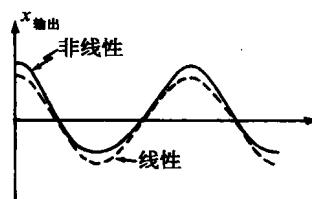


图 50-5 一个非线性装置对输入 $\cos \omega t$ 的响应,图中虚线表示线性系统的响应,以供比较

非线性响应在实用上有几个重要的结果。现在来讨论其中的一部分。首先考虑当一个纯音输入时会发生什么现象。令 $x_{\text{输入}} = \cos \omega t$ 。若画出 $x_{\text{输出}}$ 与时间的函数曲线,则得到如图 50-5 所示的实线。图中的虚线表示线性系统的响应,以供比较。可以看到这个输出不再是余弦函数。这条曲线的顶部较为尖锐,底部则较为平坦。我们说这个输出畸变了。然而,我们知道这种波不再是一个纯音,它具有谐波。我们能够求出这些谐波是什么。把 $x_{\text{输入}} = \cos \omega t$ 代入式(50.25),得

$$x_{\text{输出}} = K(\cos \omega t + \epsilon \cos^2 \omega t). \quad (50.26)$$

由等式 $\cos^2 \theta = \frac{(1 + \cos 2\theta)}{2}$ 得

$$x_{\text{输出}} = K \left(\cos \omega t + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \cos 2\omega t \right). \quad (50.27)$$

这一输出不仅有一个基频的分量, 即输入中出现的频率, 而且还包含它的二次谐波。此外, 还有一个常数项 $K(\epsilon/2)$, 它与图 50-5 所示的平均值的移动相符。产生平均值移动的过程叫做整流。

非线性响应能整流并且产生输入频率的谐波。虽然我们所假设的非线性只产生二次谐波, 但是, 高次非线性——即具有如 $x^3_{\text{输入}}$ 和 $x^4_{\text{输入}}$ 的项——会产生比二次谐波更高的谐波。

由非线性响应引起的另一个效应是调制。如果我们的输入函数包含两个(或更多个)纯音, 那么输出将不仅包含它们的谐波, 而且还包含其他频率的分量。令 $x_{\text{输入}} = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$, 其中 ω_1 和 ω_2 不成谐波关系。除去线性项(即 K 乘输入项)外, 输出中还有下面的分量

$$x_{\text{输出}} = K \epsilon (A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t)^2 \quad (50.28)$$

$$= K \epsilon (A^2 \cos^2 \omega_1 t + B^2 \cos^2 \omega_2 t + 2AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t). \quad (50.29)$$

式(50.29)括号中的前两项恰好能化成我们在前面已经得到的常数项和二次谐波项。但括号中的最后一项则是新的。

我们可以用两种方法来考察这个新的“交叉项” $AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$ 。首先如果这两个频率相差很大(例如, ω_1 远大于 ω_2), 我们可以认为这个交叉项代表一个变振幅的余弦振动。这就是说我们可以这样来看待这个因式

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = C(t) \cos \omega_1 t, \quad (50.30)$$

其中

$$C(t) = AB \cos \omega_2 t. \quad (50.31)$$

我们说 $\cos \omega_1 t$ 的振幅受到频率 ω_2 的调制。

另一种方法是, 把交叉项写成下面的形式

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{AB}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]. \quad (50.32)$$

现在我们可以说产生了两个新的分量, 其中一个分量的频率为和频 $(\omega_1 + \omega_2)$, 另一个分量的频率为差频 $(\omega_1 - \omega_2)$ 。

我们有两种不同的但是等价的方法来观察同一结果。在 $\omega_1 \gg \omega_2$ 的特殊情况下, 可以把这两种不同观点这样联系起来: 因为 $(\omega_1 + \omega_2)$ 与 $(\omega_1 - \omega_2)$ 非常接近, 我们预期在它们中间会观察到拍。但这些拍的效果就是以差额 $2\omega_2$ 的二分之一对平均频率 ω_1 的振幅进行调制。由此可见, 这两种描述是等价的。

归纳起来, 我们知道非线性响应会产生这样一些效应: 整流, 产生谐波, 以及调制或产生和频与差频分量。

我们应该注意到所有这些效应(式 50.29)不仅正比于非线性系数 ϵ , 而且还正比于两个振幅之乘积—— A^2 、 B^2 或 AB 。因此可以预期这些效应对强信号来说比对弱信号更为重要。

我们所描述的这些效应有许多实际应用。首先, 相信耳朵对于声音是非线性的。即相信这可以说明下面的事实, 对于强音, 即使声波中仅包含纯音, 我们却有着既听到它们的谐

音,还听到它们的和频和差频的感觉。

用于放声设备——放大器、扩音器等的组件总具有一些非线性。它们会使声音畸变——产生在原来的声音中不存在的谐波等等。当我们的耳朵听到这些新的分量时就会感到不愉快。正因为如此,所以要把“高保真度”的设备设计得尽量线性(为什么我们对于耳朵的非线性并不同样地感到不愉快?或者我们怎么会知道非线性是来自扩音器中而不是来自耳朵中?这些至今还不清楚)。

非线性是非常必需的。事实上,在无线电发射和无线电接收设备的某些部分,我们有意使它们具有很大的非线性。在调幅发射器中,“声音”信号(频率为每秒若干千周)和“载波”信号(频率为每秒若干兆周)在一个叫做调制器的非线性电路中结合起来产生调制的振荡,被发射出去。在接收器中,接收信号的各分量被馈送到一个非线性电路中,该电路把调制载波的差频与和频结合起来,重新产生声音信号。

在讨论光的传送时,我们假设电荷的感应振荡正比于光的电场——即线性响应。这确实是一个很好的近似。只是在最近几年,人们设计出能产生足够强度的光的光源(激光器)后,才能观察到光的非线性效应。产生光频谐波现已成为可能。当一束强的红光通过一块玻璃时,微弱的蓝光——红光的二次谐波——出现了。

第 51 章 波

§ 51-1 舰 波

虽然我们已经完成了关于波的定量分析,但是为了对与波有关的种种现象作一些定性的介绍,我们增添了这一章。由于这些现象太复杂,在这里不能作详细的分析。既然我们已经用了好几章篇幅来讨论波,这一章的标题应该叫做“与波有关的一些较为复杂的现象”才更为恰当。

我们所讨论的第一个题目,是关于波源比波速或相速度运动得更快时所产生的效应。我们首先考虑具有一定速度的波,如声波和光波。如果有一个声源比声速运动得快,那么就会发生如下的情况:假定在某一瞬间,位于图 51-1 中 x_1 处的声源发出一个声波,则在下一瞬间,当源移动到 x_2 时,原先发出的波从 x_1 扩展到以 r_1 为半径的圆上和 r_1 小于源运动的距离;当然,另一个波又从 x_2 开始向外传播。当声源继续向前运动到 x_3 时,又从那里发出声波,而现在从 x_2 发出的声波则扩展到以 r_2 为半径的圆上,从 x_1 发出的声波扩展到以 r_3 为半径的圆上。当然,这一系列事情是连续发生的,而不是一步一步来的。因此,我们有一连串的波圆,其公切线通过该时刻声源的中心。我们看到,声源不是像静止时那样产生球面波前,此时它所产生的波前在三维空间中形成一个圆锥面,在二维空间中形成两条相交的直线。很容易算出此圆锥面的角度。例如,在一定的时间间隔内,源移动了一段距离,比如说 $x_3 - x_1$,此距离与源的速度 v 成正比。在此期间,波前已向外扩展了距离 r_3 ,它与波的速率 c_w 成正比。因此,很清楚,所张半顶角的正弦等于波的速率除以源的速率。此正弦只有当 c_w 小于 v ,即物体(源)的速率比波的速率快时,才有解

$$\sin \theta = \frac{c_w}{v}. \quad (51.1)$$

顺便提一下,虽然我们认为要发声就必须有一个声源,但非常有趣的是,在介质中一旦物体运动得比声速快,就会发出声音。也就是说,声音不一定具有某种纯音的振动特征。任何一个穿过介质而运动的物体,当它的速率大于波在介质中传播的速率时,将自动地从运动本身向各个方向发出波。这一现象对声音来讲很简单,但是对光来说也会发生这种现象。最初人们认为或许没有什么东西能够运动得比光速更快。然而,在玻璃内光的相速度比真空中的光速小,而且我们有可能发射一个具有很高能量的带电粒子,使它以接近于真空中光

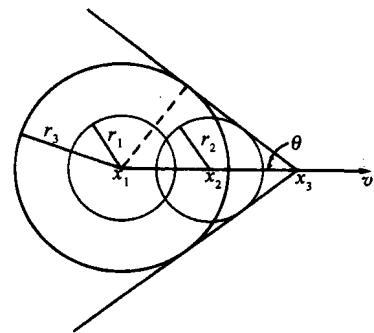


图 51-1 冲击波的波前位于以源为顶点、半顶角 $\theta = \sin^{-1}(c_w/v)$ 的锥面上

速的速率通过一块玻璃,而光在玻璃中的速率仅为真空中光速的 $2/3$ 。正在运动的比媒质中的光速快的粒子,将产生一个以源为顶点的锥形光波,就像汽艇前进时所形成的尾波(事实上,它来自同样的效应)。通过锥角的测量,我们能够确定粒子的速率。这种用来确定粒子速率的技术,在高能研究中已作为一种测定粒子能量的方法。所有要测量的只是光的方向。

这种光有时被称为切连科夫辐射,因为它是首先由切连科夫观测到的。弗兰克和塔姆在理论上分析过这种光应有的强度。由于这项工作,这三人一起获得了 1958 年度的诺贝尔物理学奖。

对声音来说,相应的情况如图 51-2 所示,该图是一张超音速物体穿过气体时的照片。压强的变化引起了折射率的变化,利用适当的光学系统就能使这种波的边缘显现出来。我们看到超音速物体确实产生了一个锥形波。但是更加仔细的观察却发现表面实际上是弯曲的。它逐渐趋近于直线,但在靠近顶点的地方是弯曲的。现在我们必须讨论为何会有这种现象,这也就是本章要讨论的第二个题目。

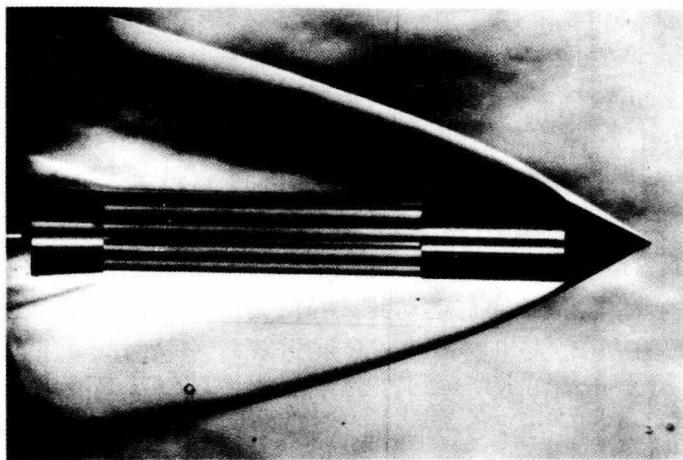


图 51-2 超音速抛射体在气体中所产生的冲击波

§ 51-2 冲 击 波

波速常常与振幅有关。对声音来说,速率与振幅的关系如下。一个穿过空气运动的物体,必须把空气推开,所以在这种情况下,所产生的扰动是某种压力阶跃,波前后面空气的压强比波(以正常速率传播)还没有到达的未受扰动的区域内空气的压强大。但在波前通过后,留下的空气已被绝热地压缩,因此它的温度升高。由于声音的速率随着温度的增加而增加,所以在跳变后面区域内的速率比在前面空气中的速率大。这意味着在阶跃后面产生的任何其他扰动,例如由于物体不断地推压空气所产生的扰动,等等,将传播得比前面的快,而声速则随着压强的增大而增大。图 51-3 说明了这一情形,图中在压强线上加上一些小的凸起部分,以帮助我们想象这一情况。我们看到随着时间的过去,后面压力较高的区域追上前面压力较高的区域,直到最后压缩波产生一个陡峭的波前为止。如果强度非常大,就立即形成陡峭的波前;如果强度相当弱,则需要很长的一段时间,事实上很可能

在陡峭的波前形成以前声波已经散开和消失了。

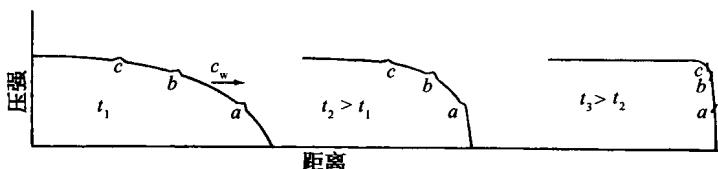


图 51-3 在相继的几个瞬间及时拍下的波前的“快照”

我们说话的声音所形成的压强,与大气压强相比是非常弱的——仅为百万分之一左右。但是当压强改变达一个大气压的数量级时,波的速度大约增加百分之二十,波前以相应的高速率变陡。在自然界中大概任何事件都不会以无限大的速率发生。同时,我们所谓的“陡峭”的波前实际上具有一个非常薄的厚度,而不是无限陡峭的。波前变化的距离约为一个平均自由程,在这个距离内,波动方程的理论开始不适用,因为我们并没有考虑气体的结构。

现在,再参看图 51-2,如果我们知道了靠近顶点的压强比后面离顶点较远处的压强大,从而角 θ 较大,我们就能理解弯曲的原因。这就是说,弯曲是由于声速与波的强度有关所造成的。因此,原子弹刚爆炸时形成的波的传播速度比声波快得多,直到波传播到很远时,由于扩展而变弱,直到其压强的变化小于大气压强时为止。这时它的速率接近于空气中的声速(附带提一下,结果冲击波的速率总是比在前面的气体中的声速高,但比后面的气体中的声速低。这就是说,从后面来的脉冲将会到达波前,但是波前在媒质中行进的速率比信号的正常速率来得大,因此,一个人如果根据听到的声音来判断冲击波的到来已经太迟了。原子弹爆炸时所产生的光是最先到达的,但是由于没有声音信号走在冲击波的前面,因此在冲击波到达之前我们不可能知道它的光临)。

这种波的堆积是一种非常有趣的现象,其所依据的主要之点是:在一个波出现之后,合成波的速率应该更高。下面是同一现象的另一个例子。试考察长度和宽度一定的长水槽中的流水。如果有一个人活塞或者一个横在水槽中的屏状物以足够快的速度沿着水槽运动,则水就像雪犁前面的雪一样地堆积起来。现在假定情况如图 51-4 所示,在水槽内某处水的高度有一个突变。可以证明,水槽中的长波在深水区比在浅水区中传播得快。因此,由运动的活塞所造成的任何新的能量的起伏和不匀都将向前移动,并在前面堆积起来。另一方面,从理论上来说,我们最终得到的就是一个具有陡峭波前的水流。然而如图 51-4 所示,其中还有一些复杂的情况。照片上所拍摄的是一个冲过来的波,活塞在水槽的右方远处。起先正如我们所预料的那样,它看起来可能像是一个正常的波,但当它沿着水槽越走越远时,波就变得越来越陡,直到出现照片上的状态为止。当一部分水下落时,在水面上产生可怕的翻腾,但是实质上它是一个很陡的前沿,并不搅动前面的水。



图 51-4

实际上水比声音复杂得多。然而,正是为了阐明一个论点,我们将设法分析这种所谓“激浪”在水槽中的速率。这个论点对我们的目的来讲没有任何基本的重要性——它不是一个重要的结论——仅仅说明,利用我们已知的力学规律就能够解释这个现象。

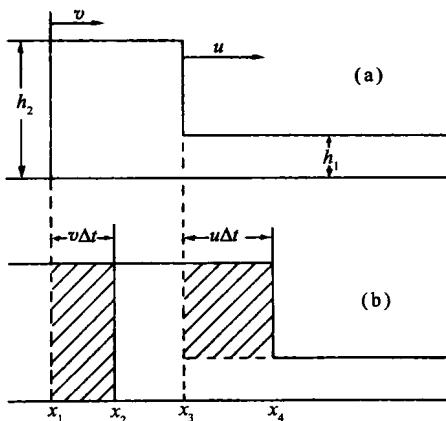


图 51-5 水槽中一个激浪的两个横截面,
其中(b)比(a)迟 Δt 时间

想象现在有一高度为 h_2 的水以速度 v 运动,而它的波前以速度 u 进入高度为 h_1 的平稳的水中,如图 51-5(a)所示。我们希望确定波前运动的速率。在时间 Δt 内,原先位于 x_1 的垂直平面,移动了距离 $v\Delta t$ 而到达 x_2 ,同时波前运动了 $u\Delta t$ 。

现在我们应用物质不灭和动量守恒的方程。首先应用物质不灭公式。我们知道:对于单位宽度的水槽,流过 x_1 处的物质数量 $h_2 v \Delta t$ (图中斜线部分),可用另一个其数量为 $(h_2 - h_1) u \Delta t$ 的斜线部分来补偿。因此,用 Δt 去除两者,得 $v h_2 = u(h_2 - h_1)$ 。但这还不够,因为我们虽然知道了 h_2 和 h_1 ,但还不知道 u 或 v ,我们要设法求出它们。

下一步是应用动量守恒。虽然我们还没有讨论过水的压强或在流体力学中的任何其他问题,但是

无论如何,我们清楚地知道,在一定深度处水的压强恰好能支持它上面的水柱。因此,水的压强等于水的密度 ρ 乘 g ,再乘水面到该处的深度。既然压力随着深度而线性地增加,那么在 x_1 处的平面上的平均压强即 $\rho g h_2 / 2$,这也是把该平面推向 x_2 处时,作用在单位宽度和单位高度上的平均力。因此,我们再乘上 h_2 就得到从左面作用到水上的总的力。另一方面,水的右边也存在着压力,使该区受到一个相反的力。用上面同样的分析方法得到这个力为 $\rho g h_1^2 / 2$ 。现在我们必须使力和动量的变化率保持平衡。因而我们必须算出图 51-5(b)情况中的动量比图 51-5(a)的动量多了多少? 我们看到具有速率 v 的物质所增加的质量恰好为 $\rho h_2 u \Delta t - \rho h_1 v \Delta t$ (每单位宽度),用 v 去乘就得到所增加的动量,它应等于冲量 $F \Delta t$

$$(\rho h_2 u \Delta t - \rho h_1 v \Delta t)v = \left(\frac{1}{2}\rho g h_2^2 - \frac{1}{2}\rho g h_1^2\right)\Delta t.$$

如果将已经得出的 $v h_2 = u(h_2 - h_1)$ 一式代入上式以消去 v ,并加以简化,最后就得到 $u^2 = g h_2(h_1 + h_2)/(2h_1)$ 。

假如高度差别很小,以致 h_1 和 h_2 近似相等,则速度等于 \sqrt{gh} 。我们以后将会看到,只有在波长大于水槽深度时这个结果才是正确的。

对于声波我们也可以作类似的处理——包括内能守恒,但熵不守恒,因为冲击波是不可逆的。事实上,如果在激浪问题中检验能量守恒的话,我们发现能量是不守恒的。如果高度差别不大,能量几乎完全守恒。但是当高度差别一旦变得很明显,就有净的能量损失。如图 51-4 所示,水的下落和翻腾就显示了这一点。

在冲击波的情况下,从绝热反应的观点来看,存在着相应的表观能量损失。在冲击波经过后,其后面的声波中的能量转化为气体的热能,这相当于激浪中水的翻腾。对于声波来讲,解这个问题需要有三个方程,而且正如我们已经看到的那样,冲击波后面的温度和它前

面的温度是不相同的。

如果我们设法形成一个上下颠倒的激浪 ($h_2 < h_1$)，那么我们发现每秒钟损失的能量是负的。因为它不能从任何地方得到能量，所以激浪不能维持自己，它是不稳定的。即使我们引起了这种类型的波，它也会变平而消失，因为对于我们所讨论的这种情况，导致波前陡峭的速度对高度的依赖关系有着相反的影响。

§ 51-3 固体中的波

我们接下去要讨论的一类波是固体中的更为复杂的波。我们已经讨论过气体和液体中的声波，在固体中存在一种与声波完全类似的波。如果突然推动一下固体，它就会被压缩。固体抵抗压缩就产生类似于声音的波。然而在固体中还可能存在另一类波，这类波在流体中是不可能存在的。如果从侧向推压固体使之畸变（称为剪切变），那么固体将力图把自己拉回来。如果我们（由内部）使液体畸变，维持一会儿，使它稳定下来，然后放开，则液体将保持这个样子。但是如果我们拿一块固体并推它，就像使一块“果胶”发生剪切变一样，那么当我们放开它时，它将恢复原来的样子并产生剪切波。从定义上来说，固体和液体的区别就在于此。剪切波的传播方式和压缩波相同。在所有的情况下，剪切波的速率小于纵波的速率。就它们的偏振而言，剪切波更类似于光波。声波没有偏振，它只是一种压力波。而光波则具有一个垂直于传播方向的特征取向。

在固体中有两类波。第一类为类似于声波的压力波，它以某一速率行进。如果固体是非晶状的，那么沿任何方向偏振的剪切波将以一个特征速率传播（当然所有固体都是晶状的，但是如果我们用一块由各种取向的微晶构成的固体，则晶体的各向异性最终得到了平衡）。

下面是另一个与声波相关的有趣的问题。如果固体中的波长变得较短，而且越来越短，那么将会发生什么现象？波长最终能达到多短？有趣的是它不能短于原子之间的空间距离，因为假如有一个波，其中的一个点上升，相邻的一个点下降，等等，显然可能存在的最短的波长就等于原子间距。从振动模式来看，我们说有纵向模式，横向模式，长波模式和短波模式。当我们考虑的波长能与原子间距相比拟时，速率不再是常数，在速度与波数有关的地方就有色散效应。但是，最终横波的最高模式将是各相邻原子有相反的运动方向。

现在从原子的观点来看，情况就像我们讨论过的两个单摆。对此存在两种模式，一种是两个摆一起运动，另一种是它们反向运动。我们可以采用另一种方法来分析固体波，即用耦合谐振系统的方法来分析，该系统是由大量单摆组成的，它的最高模式是这些单摆每相邻两个的振动方向相反，而较低的模式则具有不同的相位差。

由于最短的波长是如此之短，以至于在技术上通常无法利用。但是，它们是非常令人感兴趣的，因为在固体的热力学理论中，固体的热学性质，例如比热，可以根据短声波的性质来分析。当我们进一步研究波长更短的短声波极限时，必须归结为原子的个别运动，这两件事最终是一样的。

固体中的声波——纵波和横波的一个很有趣的例子是在固态地球里的波。我们不知道这些噪声的来源，但是在地球内部不时发生地震——某些岩石滑过另外一些岩石，这很像小的噪声。所以从这种源发出像声波那样的波，其波长比我们通常所考虑的声波的波长要长得很多，但是仍然是声波，它们在地球里到处传播。然而地球是不均匀的，而且压强、密度及压

缩性等等性质随着深度而变化,因此速率也随着深度而改变。于是波就不沿直线行进——这里存在着一种折射率,它们沿着曲线行进。纵波和横波具有不同的速率,所以对于不同的速率就有不同的解。因此,如果我们在某个地方放置一个地震仪,并且在别的地方发生地震后注意观察仪器指针的跳动,那么我们不仅仅得到一个不规则的跳动。我们也许先得到一阵跳动,接着平静下来,然后又是另一阵跳动,所发生的情况取决于地震仪的位置。如果地震仪和震源靠得足够近,我们将先收到从扰动处传来的纵波,然后过一会儿,又收到横波,因为横波行进得较慢。如果我们对波的传播速率以及地球内部有关区域的成分有足够的了解,则通过测量收到这两个波的时间差,就能断定地震发生在多远的地方。

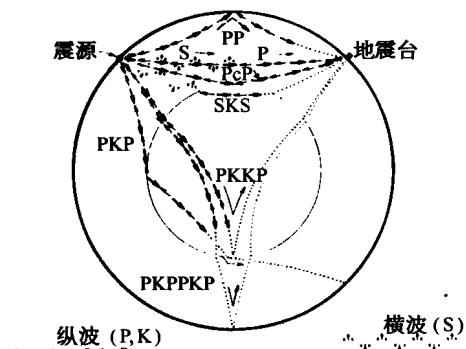


图 51-6 地球的示意图,表示纵声
波和横声波的路径

图 51-6 所示为在地球内部波的行为的一个例子。两种类型的波由不同的符号表示。如果在图上标为“源”的地方发生一个地震,横波和纵波将在不同时刻,经由最直接的路径到达地震台,同时也可能在不连续处发生反射,结果经过另外的不同路径在不同时间到达地震台。原来在地球内部存在一个核心,该核心不能传播横波。如果地震台在源的正对面,横波仍能到达,但是计时不正确。所发生的情况是横波到达核心处,并且每当横波到达两种介质之间的斜面上时,就会产生两个新的波,一个横波和一个纵波。但是在地球核心内部,横波不能传播(或至少没有证据表明它能传播,只有对纵波才有证据)。当波再度跑出核心时,又以纵波和横波这两种形式向地震台行进。

我们正是从这些地震波的行为断定横波不能在内核圆的里面传播。从不能传播横波这个意义上来说,这意味着地球的中心是液体。我们了解地球内部构造的唯一方法,就是研究地震。所以,利用在不同的地震站台对多次地震所作的大量观察,就可以知道地球内部的详细情况——速率、曲线等等。知道了不同类型的波在每一深度处的速率,我们就有可能计算出地球的简正模式。因为知道了声波的传播速率,也就知道了两种波在每一深度的弹性性质。假如使地球形变成一个椭球,再放开,只要把在椭球中到处传播的波叠加起来就能确定其自由模式的周期和形状。我们已经断定,如果有一个扰动,就会产生许多模式——从最低的椭球模式到结构比较复杂的较高的模式。

1960 年 5 月发生在智利的地震产生了足够强的“噪声”,这个信号在地球内绕行了多次,同时一个非常精密的新的地震仪刚好制成,它及时地测出了地球基谐模式的频率,我们将这些数值与用声波理论从已知的速度计算出的理论值进行了比较,这些速度是从与该地震无关的其他地震中测得的。实验的结果如图 51-7 所示,这是信号强度与其振动频率的关系曲线(傅里叶分析)。注意,在某些特殊频率所接收到的信号比在其他频率所接收到的信号强得多,即存在着非常确定的极大值。这些频率就是地球的固有频率,因为它们是地球能够振动的主要频率。换句话说,如果地球的总体运动是由许多不同的模式组成,那么可以预期,对于每个地震台,都能得到表示许多频率叠加的不规则跳动。如果我们按照频率来进行分析,应该能够找到地球的特征频率。图中的垂直黑线是计算出来的频率

值,我们发现理论值与实验值非常一致,这种一致性是由于这样的事实,即对于地球内部来讲声学理论是正确的。

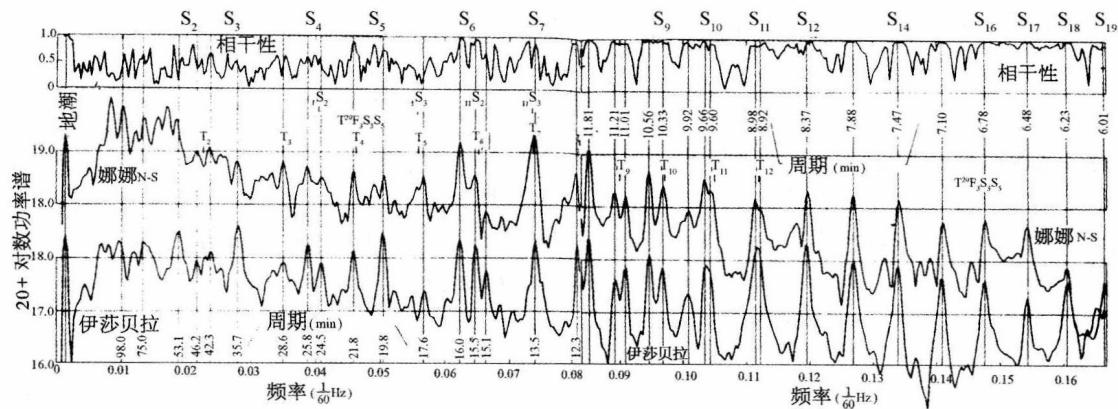


图 51-7 在秘鲁的娜娜(Ñaña)和加利福尼亚的伊莎贝拉(Isabella)的地震仪上所探测到的功率与频率的函数关系。图中所示的相干性可作为这两个地震台之间的耦合程度的量度

图 51-8 表示一个非常细致的测量,它对最低模式(地球椭球模式)有较好的分辨能力。它揭示了令人非常惊奇的一点,这就是极大值不是单一的,而是双重的,一个极大值在周期 54.7 min 处,另一个极大值在周期 53.1 min 处,两者略有差异。所以存在两个不同频率的原因,我们在测量的时候并不知道,虽然在当时或许能够找到其原因。现在至少有两种可能的解释:一种是在地球的分布中可能存在者不对称性,结果导致两个相似的模式。另一种可能更令人感兴趣,这就是设想从源发出的波沿两个方向绕地球传播。由于运动方程中存在地球的自转效应,它们的速率将不相等,而这种效应在进行上述分析时并没有考虑进去。在转动体系中物体的运动因科里奥利力而受到修正,这些因素可能引起所观察值的分裂。

关于用来分析这些地震的方法,在地震仪上得到的曲线并不是振幅对频率的函数曲线,而是位移对时间的函数曲线,所以总是一条非常不规则的示踪曲线。为了找出所有不同频率所对应的不同正弦波各占多少,其窍门是用某个确定频率的正弦波去乘这些数据,再进行积分,也就是对其进行平均,在求平均的过程中,所有其他频率都消失了。我们所引用的这些图就是将数据乘以每分钟不同周数的正弦波后进行积分所得出的积分图。

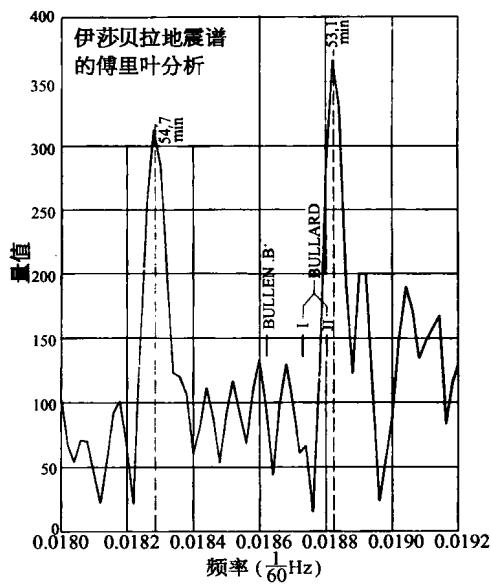


图 51-8 某一地震仪记录的高分辨分析,其中显示出双重谱线

§ 51-4 表面波

下一个令人感兴趣的波是水波，每个人都很容易看到这种波，而且在基本教程中常常用它来作为波的例子。我们立即就会知道，这可能是最糟糕的例子，因为它们没有一个方面像声波或光波；它们具有波所具有的全部复杂性。我们从深水中的长水波开始讲起。如果我们认为海洋是无限深的，并且在海面上有一个扰动，那么就会产生波。各种各样的无规则运动都会出现，但是由非常轻微的扰动所形成的正弦型运动，可能看上去很像普通向岸边移动的平滑的海浪。当然具有这种波的水平均地讲，仍是不流动的，而是波的移动。这是一种什么运动？是横波还是纵波？它应当都不是，既不是横波，也不是纵波。虽然在某个给定位置处水交替地成为波谷和波峰，但由于水的守恒，它不可能只是简单地上下运动。也就是说，如果水向下降落，那么水将跑到哪里去呢？水基本上是不可压缩的。波的压缩速率，即水中声波的压缩速率是非常非常高的，我们现在不去考虑它。因为在目前的这种尺度上，水是不可压缩的，所以当波峰下降时，水必然离开原来的区域。实际发生的情况是靠近表面的水的粒子近似地作圆周运动。当平滑的海浪移过来时，漂浮着的救生圈里的人可以注视近旁的物体，并且看到它是在作圆周运动。因此水波是纵波和横波的混合物，比一般的波更为复杂。在水中越深的地方，所作的圆周运动的圆就越小，直到在适当深处这种运动消失为止（图 51-9）。

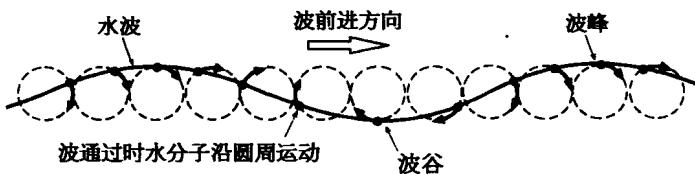


图 51-9 深水水波是由水的粒子作圆周运动而形成的。注意，圆与圆之间的对称性相移。漂浮物体将怎样运动呢？

求出这种波的速度是一个有趣的问题：波速必定是水的密度、重力加速度（重力是形成波的恢复力），或许还有波长和水的深度的某种组合。如果我们选取水的深度趋于无限的情况，则波速不再与深度有关。关于波的相速度，不论我们将得到什么样的公式，都必须把各种不同的因子组合起来，以构成正确的量纲。如果我们试图用各种方法来进行这种组合，我们发现要构成速度，只有一种方法，即将密度、 g 和 λ 组合起来，即 $\sqrt{g\lambda}$ ，其中根本不包含密度。实际上，关于相速度的这个公式不是严格正确的，但动力学的完整分析（这个我们将不去探究）表明，上面我们得到的相速度公式只差一个 $\sqrt{2\pi}$ 的因子，即

$$v_{\text{相}} = \sqrt{g\lambda} / (2\pi) \quad (\text{对于重力波}).$$

有趣的是长波比短波跑得快。因此，如果一只小船激起了传播得很远的波浪（因为有一个赛车驾驶员开着摩托艇飞驶而过），那么过了一会儿，波到达岸边，起先缓慢地拍打海岸，然后越来越快地拍打海岸，因为先到达的波是长波。随着时间的推移，到达的波变得越来越短，因为波的速度按波长的平方根变化。

有人也许会表示异议,认为“这是不对的,为了解决这个问题,我们必须着眼于群速度”!这当然是正确的。相速度的公式并不能告诉我们什么样的波首先到达,能告诉我们这些的是群速度。因此我们不得不求出群速度。只需假定速度随波长的平方根而变化(这是问题的全部要求),就可证明群速度是相速度的一半,我们把这个证明留作习题。群速度也随波长的平方根变化。群速度怎么会只有相速度的一半呢?如果有人注视由行进的小船所造成的一群波,并盯住一个特定的波峰,他会发现这个波峰在波群中向前运动,逐渐变弱,最后在前端消失。奇怪而不可思议的是,在后面的较弱的波却挤着向前进,并且变得越来越大。简单地说,波穿过波群运动,而波群的速度仅为波速的一半。

由于群速度和相速度不相等,所以运动物体通过时所产生的波不再只是简单的锥形,而是有趣得多。我们可以在图 51-10 中看到这个现象,该图显示了在水中运动的物体所产生的波。注意,这种波和声波大不相同。在声波中,速度与波长无关,我们将只有一个沿着锥面向外行进的波前,但这里的情况不同,波在小船的后面,其波前的运动方向与小船的前进方向平行,而且在边上还有小波,其波前的运动方向与小船前进方向成别的角度。我们只要知道相速度正比于波长的平方根,就能够巧妙地对整个波的图样进行分析。奥妙在于这个波的图样相对于小船(以恒定速度前进)是静止不动的,而任何其他波形都将从小船处消失。

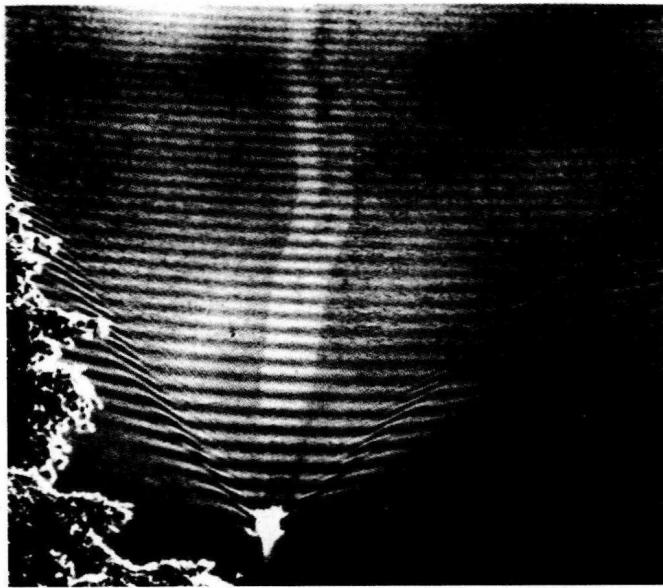


图 51-10 小船的尾流

迄今为止,我们所讨论的是长水波,在这种情况下恢复力是由重力引起的。但是当波在水中变得很短时,主要的恢复力则是毛细引力,亦即表面能和表面张力。对于表面张力波,可以证明其相速度为

$$v_{\text{相}} = \sqrt{\frac{2\pi T}{\lambda\rho}} \quad (\text{对于涟波}),$$

其中 T 是表面张力, ρ 是密度。它与重力所形成的波正好相反,在波长变得很短时,波长越

短,相速度越大。当同时存在重力和毛细作用时,按照通常的做法,我们得到两者的组合

$$v_{\text{相}} = \sqrt{\frac{Tk}{\rho} + \frac{g}{k}},$$

其中 $k = 2\pi/\lambda$ 是波数。所以水波的速度确实是非常复杂的。图 51-11 表示相速度作为波长的函数,对于很短的波,其速度很快;对于很长的波,其速度也很快,这两者之间存在一个波能够行进的极小速率。群速度可以通过公式来计算:

对于涟波,它为相速度的 $3/2$,对于重力波则为相速度的 $1/2$ 。在极小值的左面群速度大于相速度;在极小值的右面群速度小于相速度。有许多有趣的现象与这些事实有联系。首先,由于群速度随着波长的减小而急剧地增加,因此如果我们造成一个扰动,则此扰动将有一个最慢的末端,以相应波长的最小速率行进,而在前面的以较高的速率行进的波将是短波和非常长的波。在水槽中很难看到长波,但很容易看到短波。

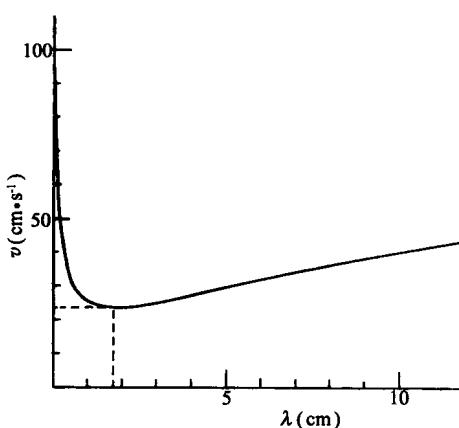


图 51-11 水波的相速度对波长的曲线

子的涟波是很有趣和复杂的,它不像简单的声波和光波,事实上几乎没有陡峭的波前。主波的前面有从后面跑出的小波。因为水有色散,所以在水中的剧烈的扰动并不能产生具有陡峭波前的波。首先到达的是非常细小的波。顺便讲一下,如果一个物体以一定的速率在水中运动,由于所有不同的波以不同的速率行进,所以产生了一个相当复杂的图样。我们可以用盛水的浅盘来演示这一现象,以便能够看到跑得最快的那些波是细小的表面张力波。在后面则有某种类型的跑得最慢的波。若使盘底倾斜,可以看到水浅的地方波的速率较低。如果波的前进方向与最大斜线成一角度,那么这个波就会弯曲,并有沿着那条线行进的趋势。用这种方法我们能够说明各种不同的情况,并得出结论:水中的波比空气中的波要复杂得多。

在作循环运动的水中,长波在水浅的地方的速率较慢,在水深的地方的速率较快。这样,当水来到较浅的海滩时,波跑得慢了。但是在水较深的地方,波跑得比较快,所以我们得到冲击波的效应。这次由于波并非如此简单,故冲击波会大大变形,并使自己向上弯曲成大家所熟悉的样子,如图 51-12 所示。这就是波冲上海岸时所发生的情况,在这种情况下,自然界真正的复杂性被揭露无遗了。然而,现在还没有一个人能够弄清楚波在破裂时应具有怎样的形状。当波很小时,这是相当容易的,但当一个波变大和破裂时,情况就复杂得多了。

在由水中运动的物体所造成的扰动中能够看到关于表面张力波的一个有趣的特征。从物体本身的观点来看,水在不停地向后流,而最终位于物体周围的波总是这样的波,它们恰好具有同水中的物体保持相对静止的适当速率。类似地,在小河中的物体周围,河水从物体旁边流过,波的图形是稳定不动的,这些波正好具有恰当的波长,使其以与河水相同的速率行进。但是,如果群速度小于相速度,则扰动在河流中向后传播,因为群速度赶不上水流的速度。如果群速度大于相速度,则波的图形将出现在物体的前面。如果我们仔细地注视河中的物体,可以看到在物体的前面有小的涟波,在物体的后面则有“咕咚咕咚”的长水波。



图 51-12 水波

表面张力波的另一个有趣的特性，可以在倾倒液体时观察到。例如，如果牛奶以足够快的速度从瓶中倒入流水中，两者相交后可以看到在流水中有许多线条。它们是从边缘处的扰动出发向外传播的波，这种波与河流中物体周围的波非常相似。在这种情况中存在着来自两侧的效应，这些效应产生了交叉的图形。

我们已经研究了波的一些有趣的性质以及相速度对波长的依赖关系，波速对水的深度的依赖关系等等各种复杂的情况，这一切展现了真正复杂的、因而也是有趣的自然现象。

第 52 章 物理定律的对称性

§ 52-1 对 称 操 作

我们可以把本章的主题称作为物理定律的对称性。在矢量分析(第 11 章),相对论(第 16 章)以及转动(第 20 章)等章节中,我们已经讨论过有关的物理定律中对称性的一些特点。

为什么我们要关心对称性呢?首先,在人们的心目中,对称性是非常吸引人的,我们都喜欢具有某种对称性的物体或图案。有趣的是,大自然常常在我们周围所遇到的物体中显示出某种对称性。或许可以想象的最对称的物体是球体,而在自然界中就充满了球体——恒星、行星、云层中的水滴等等。在岩石中找到的晶体也呈现出各种各样的对称性,对它们的研究使我们知道有关固体结构的某些重要情况。即使动植物世界也显示出某种程度的对称,虽然,一朵花或一只蜜蜂的对称性不像晶体中的对称性那样完美或重要。

但是,我们在这里主要关心的不是自然界的物体往往是对称的这个事实。我们倒更希望考察宇宙中的一些更引人注目的对称性——即存在于支配物理世界运转的基本定律自身中的对称性。

首先我们要问,对称性是什么?一条物理定律怎么会是“对称的”?定义对称性的问题是一件有趣的事情,我们曾提到过外尔给出了一个很好的定义,其要点为,如果有一样东西,我们可以对它做某种事情,在做完之后,这个东西看起来仍旧和先前一样,那它就是对称的。例如,一个对称的花瓶就是这类东西,如果我们使它反射或转动,结果看上去仍旧和先前一样。目前我们要考虑的是,可以对物理现象或实验中的物理状况做些什么事,而其结果却和未做前一样。表 52-1 列举了使种种物理现象得以保持不变的已知操作。

表 52-1 对称操作

空间平移 时间平移 转过一定的角度 匀速直线运动变换(洛伦兹变换) 时间反演	空间反射 全同原子或全同粒子的交换 量子力学的相位 物质-反物质(电荷共轭)
--	---

§ 52-2 空间与时间的对称性

我们尝试做的第一件事情,比方说,就是使现象在空间中平移。如果我们在一定的位置上做一个实验,然后在空间的另一个位置上建立另一套仪器(或者把原来的仪器搬过去),那么凡是在前一套仪器中按一定的时间顺序发生的一切,在后一套仪器中也将以同样方式出现;只要我们安排好同样的条件,并且对前面讲过的一些约束予以应有的注意,即周围环境

中所有使仪器不能同样工作的特征都要排除掉。关于在这些情形中怎样确定应包括的因素,我们已经谈过,这里就不再去考虑这些具体细节了。

在今天,我们也同样相信,时间的移动对物理定律也不会有影响(这是就我们迄今所知而言——所有这些事情都是就我们迄今所知而言)。这意味着,如果我们制造一套仪器,并且在某个时刻,比如星期四上午 10 : 00 使它开始工作,然后又制造同样一套仪器,并在(比方说)三天之后在同样的条件下使它开始工作,那么不管何时使这两套仪器工作的情形作为时间的函数是完全相同的。然而我们还是要假设,环境中的有关特征也要及时作相应的变动。当然这个对称性意味着,如果某人三个月前曾买进通用汽车公司的股票,假如他现在买进这些股票,所遇到的情况将完全一样!

我们也必须注意到地理情况的差别,因为地球表面各处的特征显然是不同的。例如,假如我们在测量了某处的地磁场后将仪器移到另一处去,那么由于地磁场不同,仪器可能不再以完全相同的方式工作,但我们说这是由于磁场与地球有关。我们可以设想,如果使地球和仪器一起移动,那么仪器的工作情况就不会受到影响了。

我们曾相当详细地讨论过的另一件事是在空间的转动:如果把仪器转动一个角度,并且假定其他每件与它有关的物体也随之转动,那么仪器将会同样地工作。事实上,在第 11 章中,我们曾比较具体地讨论过空间转动中的对称性,并且为了尽可能简洁地处理它,我们还创造了一种称为矢量分析的数学系统。

在较高级的水平上,有另一种对称性——匀速直线运动的对称性。这个相当不寻常的效应所说的是,如果我们有一件仪器按一定的方式工作,现将该仪器放到一辆汽车里,并使汽车以及与之有关的周围物体都沿直线匀速前进,那么汽车中所出现的物理现象并不会有什么不同:所有的物理定律都显得相同。我们甚至还知道怎样用比较专门性的方式来表示这一点,即在洛伦兹变换下,物理定律的数学方程式必须不变。事实上,正是在有关相对论问题的研究中,使得物理学家将注意力集中于物理定律的对称性方面。

上面所提的对称性都具有几何的性质,时间与空间多少是类似的,但是还有别的一类对称性。比如,有种对称性就描述了这样的事实:一个原子可以用同一类的另一个原子来替换;换句话说,存在着同一类的原子。我们可以找到一群原子,如果把其中的一对交换一下,并不会造成什么差别——这些原子是全同的。无论某种类型的一个氧原子会做什么,这类氧的另一个原子也会这样做。有人会说:“真可笑! 这正是同一类型的定义嘛!”这或许只是一个定义,但我们并不知道究竟存在不存在任何“同种类型的原子”,而事实则是,的确存在着许许多多同一类型的原子。因此,当我们说如果用同一类型的一个原子替换另一个而不会出现什么差别时,确实是有意义的。从上述意义来说,构成原子的那些所谓基本粒子也是些全同粒子——所有电子都相同,所有质子都相同,所有正 π 介子都相同,等等。

在列举了这么多使现象不改变的操作后,人们或许认为我们实际上能做任何事了;那么就让我们举一些反例,以便看出情况的差别。假设提出这样一个问题:“尺度改变了,物理定律是否对称?”设想我们先制造一台仪器,再制造一台每个部件都放大五倍的仪器,那么它们是否会同样精确地工作? 在这种情况下,答案是,不会! 例如,从一个装有钠原子的装置中发射出的钠原子光波的波长,与另一个体积为其五倍的装置所发射的钠原子光波波长相比,后者并非前者的五倍,而实际上完全相同。可见,波长与发射装置的大小之比值将会改变。

另一个例子是：在报纸上，有时我们看到由小火柴棒搭成的大教堂的照片，这些惊人的艺术作品是一些退休者用火柴棒粘成的，它比任何真实教堂都精致和奇特。如果我们设想这个用火柴棒制成的教堂果真按真正的尺寸建造起来，就会看到麻烦何在了，它不可能存在下去，整座教堂都会倒塌。因为按比例放大的火柴棒根本不够牢固。或许有人会说：“不错。但是，我们也知道，当存在一种外界的影响时，它也必须按比例改变！”这里谈的是物体承受万有引力的能力。因此我们应先得取一个真正的用火柴棒制成的教堂模型以及真实的地球，我们知道在这种情况下，“教堂”是牢固的。然后，我们该有一个较大的教堂和一个较大的地球，但是这样一来情况变得更坏，因为万有引力增加得更快！

当然，今天我是根据自然界中的物质由原子构成这一点出发来理解现象与尺度有关这个事实的，很明显，如果我们制造一个小到比方说其中只有五个原子的仪器，那么这种东西肯定不可以任意地放大或缩小。单个原子的尺寸根本不是任意的，而是完全确定的。

物理定律在尺度变化下并不保持不变这一事实是伽利略发现的。他认识到材料的强度并不恰好与其尺寸成比例，同时用表示两根骨骼的图画来说明那个我们刚刚提到的用火柴棒搭成的教堂的问题上讨论过的性质，图中有一根是通常的狗骨骼，它与支撑的狗的重量成适当的比例，而另一根是假想的“超级狗”——比方说大十倍或一百倍的狗的骨骼，这根骨骼按完全不同的比例画得又大又结实。伽利略是否曾把论证真正引申到这样一个结论：大自然的定律必须具有一定的尺度，我们不得而知。但是上述发现给他留下了深刻的印象，以致他认为这件事与发现运动定律同样重要，因为他把这两件事一起发表在同一本名为《论两种新科学》的书中。

另外一个物理定律不对称的例子是我们熟知的：当一个系统作均匀的角速度转动时，其中的表观物理定律与一个不转动的系统的物理定律显得不相同。如果我们安排好一个实验，然后把所有的东西放到一个宇宙飞船里，再在宇宙空间中让飞船本身以恒定的角速度自转，实验仪器将不会照原样那样工作，因为我们知道，在飞船里的东西会被甩出去，并且会发生其他一些情况。这是由于离心力或科里奥利力等而造成的。事实上，我们不必向外看，只要利用傅科摆就可觉察到地球在旋转。

下面我们来叙述一个很有趣的对称性，即时间的可逆性。初看起来，这显然不成立。很明显，物理定律在时间上是不可逆的，因为我们知道，所有明显的现象在大尺度上都是不可逆的：“挥笔写字，写完再写，……”到现在为止我们所能说的是，这种不可逆性是由于所牵涉到的粒子的数量极其巨大而产生的，倘若我们能够看到单个分子，就将无法辨别变化是往正方向发展还是往逆方向发展。更确切地说：我们先制造一台小小的仪器，就能知道其中所有原子的行为，也能观察到它们的运动。然后再制造一台类似的仪器，这台仪器开始工作时的状况与前一台仪器的最终状况相同，但所有的原子的速度正好相反。那么，这台仪器将经历完全相反的变化过程。换句话说，如果我们拍一部影片，详细地记录了一块材料的所有内部情况，然后再倒过来放，没有一个物理学家会说：“这是违反物理定律的，有些地方搞错了！”当然，如果我们没有去观察所有的细节，事情将是完全明确的，比如说，当我们看见一个鸡蛋落在人行道上，使蛋壳破碎时，肯定会说：“这是不可逆的，因为如果把这件事拍成影片，然后倒过来放时，破碎的蛋壳将会重新拼合，成为完整的鸡蛋，这显然是荒谬的！”但是，如果我们观察单个原子本身，定律看来完全是可逆的。当然，发现这一点要难得多，但很清楚，在微观的基本的水平上，物理学的基本定律在时间上确实是完全可逆的。

§ 52-3 对称性与守恒定律

至此,有关物理定律的对称性已显得十分有趣,但是结果发现,在量子力学中,这种对称性变得更为有趣和更令人兴奋。有这么一件事实:在量子力学中,对于每一个对称的规律都有一条守恒定律与之相对应。这个最深奥和最美妙的事实对许多物理学家来说简直令他们感到震惊。鉴于我们现在的讨论水平,我们无法对之作更多的说明。物理定律的对称性与守恒定律之间存在着一定的联系。在这里我们只加叙述而不打算作任何解释。

举例说,物理定律对空间平移是对称的。如果与量子力学的原则相结合,结果就意味着动量是守恒的。

物理定律对时间平移是对称的。在量子力学中就意味着能量是守恒的。

关于空间转动一定角度后的不变性与角动量守恒定律相对应。这些关系是非常有趣和非常美妙的!它们堪称为物理学中无比优美和意义深远的东西。

顺便提一下,量子力学中出现的有一些对称性并没有经典的类比,无法以经典物理的方式描述。其中有一个就是:如果 ψ 是某个过程的概率波幅,我们知道 ψ 的绝对值的平方就是这个过程出现的概率。现在,如果有人进行计算时不用这个 ψ ,而是用另一个 ψ' ,它与 ψ 只是相差一个相位因子(令 Δ 为某个常数,把 $e^{i\Delta}$ 乘以原来的 ψ 即得 ψ'),那么,作为该事件概率的 ψ' 的绝对值平方就等于 ψ 的绝对值平方

$$\psi' = \psi e^{i\Delta}; |\psi'|^2 = |\psi|^2.$$

因此,如果波函数的相位移动任意一个常数,物理定律仍然不变,这是另一种对称性。物理定律必须具有这样的性质,即量子力学相位的移动不会产生什么差别。我们刚才说过,在量子力学中,对每个对称性都存在着一个守恒定律。与量子力学相位相关联的守恒定律看来是电荷守恒定律。总之,这是一件非常有趣的事情!

§ 52-4 镜面反射

其次一个问题是在空间反射下的对称性。本章余下的大部分篇幅都将用来讨论这件事。我们要问:物理定律在反射下是否对称?可以用以下方式说得更具体一些:假定我们制造了一件东西,比方说一只钟,它带有许多齿轮,还有指针和数字。这只钟滴答滴答地走着,工作着,而钟里面有着卷紧的发条。我们从镜子里来看这个钟。问题并不是镜子里的钟像什么。但是让我们实际地制造出另一个正好同前一个钟在镜子中的映像一样的钟;每当原来的钟中有一个右旋的螺旋,我们就在另一个钟的对应位置上安装一个左旋的螺旋:前一个钟的钟面上刻着“2”字,就在后一个钟的钟面上对应地刻上一个“ξ”字;如果前者的发条是这样卷紧的,那么后者就以正好相反的方式卷紧。当我们做完这一切之后,就有了两个物理上的钟,它们彼此之间的关系就是物体和它的镜像的关系,然而我们要强调一下,它们都是实际存在的、物质的钟。现在的问题是:如果发条上得一样紧,两个钟在同样的条件下开始走动,那么这两个钟是否会永远那样滴答走动,就像一对精确的物与像一样(这是一个物理问题,而不是哲学问题)?我们对物理定律的直觉将认为,它们会如此。

我们猜想,至少在这对钟的情况下,空间的反射体现了物理定律的一种对称性,如果我们把每件事情从“右”变到“左”,并保持其他条件不变,就不能说出有何差别。所以,我们暂时假定这是正确的。如果确是如此,那么就不可能用任何物理现象来区分“右”和“左”,就像例如不能用物理现象来定义物体的某一绝对速度一样。所以,用任何物理现象来绝对地定义我们所谓的与“左”相反的“右”是什么意思应当是不可能的,因为物理定律应该是对称的。

当然,自然界并不一定是对称的。比如,利用所谓的地理学无疑能够定义“右边”。例如假定我们站在新奥尔良看芝加哥,佛罗里达就在我们的右边(只要我们站在地面上),所以,我们能用地理学来定义“右”和“左”。当然,任何系统中的实际状况并不一定具有我们所谈到的对称性。这里的问题在于,物理定律是否对称。换句话说,如果有一个像地球那样的天体,但组成它的尘土是“左”旋的,而且有一个像我们这样的人站在像新奥尔良那样的位置观望像芝加哥那样的城市,但由于每件东西都正好反过来,所以佛罗里达就在左边了,那么这种情况是否违反物理定律呢?显然,每件事都左右互换的话,看来似乎并非不可能,这并不违反物理定律。

另一个要点是我们的“右”的定义不应当与传统有关。区分左和右的一个简易方法是到机械零件商店去随意取一个螺丝。那么多数是拿到一个右旋螺纹——也就是说,并不一定是右旋螺纹,但得到一个右旋螺纹的机会要比得到一个左旋螺纹的机会多得多。这是个传统或习惯的问题,或者是偶然的结果,所以并不是一个基本定律的问题。我们可以意识到,人人都能着手制造左旋螺丝!

所以,我们必须设法找到从根本上来说包含着“右旋”的某些现象。我们讨论的另一种可能性是偏振光经过比如糖水这种溶液时其偏振面会发生旋转这一事实。正如我们在第33章中所看到的,比方说,在某种糖的溶液中,偏振面是向右旋转的。这就是定义“右旋”的一种方法,因为我们可以在水中溶解一些糖,于是偏振面就向右旋转。但是糖是从生物体——植物中取得的,如果我们用人造的糖试验时,我们会发现,偏振面并不旋转!但是假如先在这些不引起偏振面旋转的人造糖溶液中放进一些细菌(它们会吃去一些糖),然后再滤去细菌,我们就会发现仍有一些糖剩下来(差不多是先前的一半),这一回偏振面确实也转动了,但却以相反的方向转动!这看来颇令人迷惑,不过却很容易加以解释。

我们举另一个例子:有一种物质叫做蛋白质,在所有生物中都含有它,它对生命来说是

十分重要的。蛋白质由氨基酸链组成。图52-1是一种从蛋白质中产生的氨基酸的模型,它称为丙氨酸。如果是从真实的生物体蛋白质中提取出来的丙氨酸,分子的排列就如图52-1(a)所示。另一方面,如果我们设法用二氧化碳、乙烷、氨等合成丙氨酸(我们能够合成它,这并不是一个复杂的分子),就会发现所制成的丙氨酸含有等量的如图52-1(a),(b)所示的两种结构的分子!

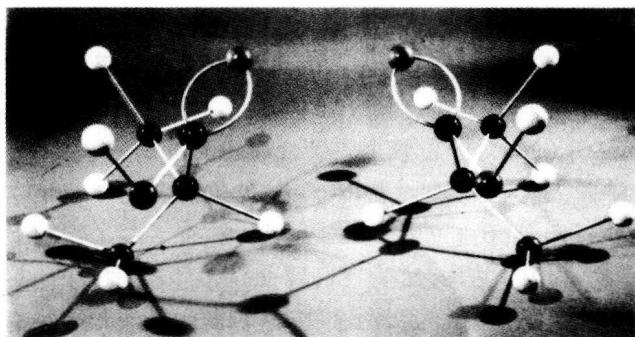


图 52-1

(a) L-丙氨酸(左);(b) D-丙氨酸(右)

前一种从生物体中得到的分子称作 *L*-丙氨酸，另一种化学成分相同（也就是有相同的原子，原子的关系也相同）的分子，与“左旋”*L*-丙氨酸分子相比，是“右旋”的，它称为 *D*-丙氨酸。有趣的是当我们在实验室内由简单的气体合成丙氨酸时，得到的是两类分子的等量混合物。然而，生物所利用的只是 *L*-丙氨酸（这不完全正确，生物体中各处都有一些 *D*-丙氨酸的特殊应用，但很少见。所有的蛋白质都只利用 *L*-丙氨酸）。现在如果我们制备两类丙氨酸，并用这种混合物喂给某种喜欢“吃”或消耗丙氨酸的动物，那么它不能利用 *D*-丙氨酸，只能利用 *L*-丙氨酸。这就是我们在糖水中所碰到的事，细菌只吃有用的糖，而留下了“错误”的一类糖（左旋糖也是甜的，但与右旋糖的味道不同）。

所以，看来生命现象似乎能区分出“左”与“右”，或者化学能够这样做，因为两种分子在化学上是不同的。但实际上并非如此！就所能进行的物理测量来说，例如，对能量和化学反应速度的测量，等等，如果我们使其他每件事都互为镜像，那么两类分子起同样的作用。一类分子将使光向右偏转，另一类分子则将使光在通过同样数量的溶液时往左偏转得正好一样多。这样，就物理学而言，这两类氨基酸同样符合要求。就我们今天对事物的理解来说，依照薛定谔方程的基本原理，两类分子所显示的特性应当完全对应，这样，一类有右旋作用，另一类则有左旋作用。但是，在生命过程中，却只有一种方式起作用。

人们推测其理由如下。比如，我们不妨假设在某个时刻生命不知怎么处在这样一种状况下：某些生物中的所有的蛋白质都包含有左旋的氨基酸分子，所有的酶也是有倾向性的——生命体中的每种物质都是有倾向性的——因此也就是不对称的。这样，在消化酶将食物中的化合物变为另一种化合物时，有一类化合物对酶来说是“合适”的，另一类却是不合适的（就像灰姑娘和拖鞋的那个故事。只是现在我们所试的是“左脚”）。就我们所知道的来说，在原则上，比方说，我们可以造出这样一只青蛙，其中所有的分子都是反过来的，每件事都像是一只真实青蛙的左旋镜像，因而这就是一个左旋蛙。这个左旋蛙可以很正常地活动一些时间，但是它会发现找不到东西吃，因为如果它吞下一只苍蝇，它的消化酶不能起作用，组成苍蝇的是一类“错误”的氨基酸分子（要么我们给青蛙一只左旋蝇）。就我们现在所知，如果每件事都反过来的话，化学与生命过程将照样进行下去。

如果生命完全是一种物理与化学的现象，那么蛋白质都由同样的螺旋状的分子所组成这件事情就只有这样来理解了：最初某一时刻，由于偶然的因素突然出现了某些生命分子，其中有的得到繁衍。在某个地方，一次有一个有机分子带有一定的倾向性，而从这一特殊事件出发，“右旋”就刚好在我们的特定环境下发展起来。一个个别的偶然历史事件是有倾向性的，但从这以后倾向性本身就传播开来。一旦达到今天的这种状态，当然它就将一直持续存在下去——所有的酶只消化“右旋”的东西，制造右旋的东西：当二氧化碳与水蒸气等等进入植物的叶中，制造糖的酶就把它们变成右旋的，因为酶本身就是右旋的。如果以后会产生什么新的病毒或活体的话，那么除非它们能“吃”已经存在的一类生命物质，不然就不能生存下去。因此它们也必须是同一类的东西。

这里不存在什么右旋分子数量上的守恒。右旋分子一旦突然出现，其数量就能保持继续增加。所以，人们推测，生命现象这种情况本身并不表明物理定律的缺乏对称性，相反，只是表明了宇宙的本性以及在上述含义下的地球上一切生命本源的共同性。

§ 52-5 极矢量与轴矢量

现在我们进一步讨论下去。我们可以看到，物理学中许多地方都有着“右手”和“左手”规则。事实上，在学习矢量分析时，我们学到了必须用右手规则来正确地得出角动量、力矩、磁场等等的方向。例如，在磁场中运动的电荷所受的力就是 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。在给定的情况下，我们知道 \mathbf{F} 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{B} ，这个方程是否足以定义右旋性？实际上，如果我们回过去考虑一下矢量的来源，就知道“右手规则”只是一种习惯而已，它只是一种巧妙的方法。其实像角动量、角速度之类的量本来根本不是矢量！它们都是以某种方式与一定的平面相联系，只是因为空间有三维，所以可把有关量与垂直于那个平面的方向联系起来，在两种可能的取向中，我们选取了“右旋”的方向。

所以，如果物理定律是对称的，我们将会发现，如果某个魔鬼偷偷溜进所有的实验室，在每本有右手规则的书里用“左”这个词来替换“右”，因而我们一概使用“左手规则”的话，那么在物理定律上不会造成任何差别。

我们来作一点说明。矢量可以分为两类，有一类是“真正”的矢量，比如空间中的位移 $\Delta\mathbf{r}$ 。如果在我们的仪器中，这里有一个零件，那里有另外一个零件，那么在一个镜像仪器里，有前一个零件的镜像物，也有后一个零件的镜像物。如果我们从“这个零件”到“那个零件”画出矢量，那么一个矢量就是另一个矢量的镜像（图 52-2）。矢量箭头变换了指向，就好像整个空间翻了个身一样，这一种矢量我们称为极矢量。



图 52-2 空间的位移矢量与其镜像

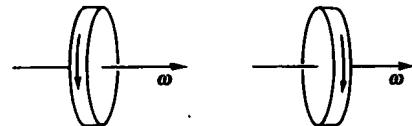


图 52-3 转轮与其镜像。注意角速度“矢量”方向并没有反转

但是，另一类与转动有关的矢量具有不同的性质。例如，在三维空间中有某个物体在作转动，如图 52-3 所示。如果在镜子中看它，将作如图右边所示的转动，也就是说作为原来那个转动的镜像而转动着。现在我们约定用同样的规则表示镜像的转动，它也是一个“矢量”，在反射后，并没有像极矢量那样改变，但是相对于极矢量以及空间的几何关系而言，则正好反过来；这种矢量称为轴矢量。

现在，如果反射对称定律在物理上是正确的，我们必须这样来设计方程，即当我们改变每个轴矢量的符号和每个矢积的符号时（它相当于反射），不应出现任何差别。比如，当我们写出一个公式表明角动量为 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$ 时，这个方程是完全正确的，因为如果我们换成左手坐标系时， \mathbf{L} 的符号改变了，而 \mathbf{p} 和 \mathbf{r} 没有改变；但矢积的符号变化了，因为我们要从右手规则变到左手规则。再举个例子，我们知道作用于在磁场中运动的电荷上的力为 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，但当我们从右旋变到左旋系统时，由于 \mathbf{F} 和 \mathbf{v} 都是极矢量，所以由矢积所要求的变号应当被 \mathbf{B} 的变号所抵消，这就意味着 \mathbf{B} 必须是轴矢量。换句话说，如果进行这样一种反射， \mathbf{B} 必须成为 $-\mathbf{B}$ 。所以，在把坐标系从右手改为左手后，我们也必须使磁铁的两极互换。

我们用例子说明上述情况。假定我们有如图 52-4 所示的两块磁铁。一块磁铁上的线圈按某种方式缠绕，电流按一个确定的方向流过线圈。另一块磁铁就像前一块的镜像一样，线圈按相反的方式缠绕，在线圈内发生的每件事都正好反过来，电流方向如图所示。现在，按产生磁场的定律（这一点我们还没有正规地学习过，但多半在高中已知道一些），这里磁场的方向应如图中所示。若一块磁铁的一个磁极是南极，则在另一块磁铁中，电流按相反方向流动，这样磁场就反了过来，相应地出现一个北极。这样我们看到，从右旋改为左旋时，我们的确要把磁铁的南北极互换！

我们对磁极的改变不必介意，这些也都只是习惯而已。让我们谈谈现象吧。假如现在有一个电子穿过一个磁场，进入纸面。于是，如果我们用公式 $v \times B$ 来求电子所受的力 F （记住电荷是负的），就可发现，按照物理定律，电子将在确定的方向上发生偏转。这样物理现象就是，当一个线圈通以一定指向的电流时，电子的运动轨迹也按一种确定的方式弯曲——这就是物理内容——这里毋需考虑如何给每件事情贴上标记。

现在我们用一面镜子来做同样的实验：使电子通过与原来对应的方向，于是力的方向反了过来，如果我们按同样的规则计算它的话，结果是很好的，因为对应的运动是一种镜像运动！

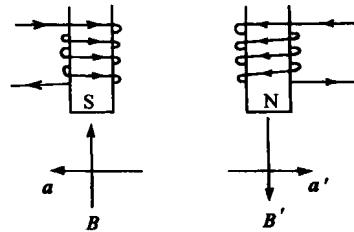


图 52-4 磁铁与其镜像

§ 52-6 哪一只是右手

实际的情况是，在研究任何现象时，总有两个或偶数个右手规则，而最后结果是：现象看起来总是对称的。因此，简言之，如果我们不能区别南极与北极，那么也无法分别左与右。然而看来我们好像可以说出磁铁的北极。例如，罗盘指针的北极就是指向北方。但实际上这也是一种与地理学有关的局部特征，这正像有关芝加哥所在方向的谈论一样，是不算数的。如果我们见过罗盘指针，就会注意到，指北针是浅蓝色的。但这是人们涂到小磁针上去的颜色。这些都是局部性的、约定的判定标准。

但是，如果磁铁真的具有这种性质：当我们十分靠近地观察它时，就能看到在北极而不是在南极上长有细丝，或者如果这是一般的规律，或者如果存在着任何其他独特的区分磁铁南北极的方法，我们就能说出实际情况是两种可能情况中的哪一种，而这就是反射对称定律的终结。

为了更清楚地说明整个问题，不妨设想我们同某个火星人，或某个极其遥远的理性生物通过无线电话进行交谈。我们不得发送给他任何实际的样品，以供观察，比如，假设我们能发送光信号给他，就可以送去右旋圆偏振光，并对他说：“这就是右旋光——你只要注意它的旋转方向就知道了。”但是，我们不能给他送去任何东西，只能和他交谈。他离这里太远，或者在某一个奇怪的地方，以致不能看到任何我们能见到的东西。比如，我们不能说：“看一看大熊星座；请注意这些星是如何排列的。我们所指的‘右’是……”我们只能通过无线电话交谈。

现在要告诉他有关我们的所有事情。当然，首先我们要从数的定义开始，于是说：“滴答、滴答，二，滴答、滴答、滴答，三，……”这样他渐渐地能够理解几个词，等等。不一会儿我们就可能跟这个伙伴变得十分熟悉，于是他说：“你这个家伙究竟是什么样子？”我就开始自我描写，并且告诉他说：“噢，我们有 6 ft 高。”他便说：“等一等，6 ft 是什么意思？”

有没有可能告诉他 6 ft 是多长吗？当然行！我们可以说：“你知道氢原子的直径吧！我们有 17 000 000 000 个氢原子那么高！”这之所以可能，是因为物理定律在尺度变化时不是不变的，因而我们可以定义一个绝对长度。这样我们就解释了自己身材的尺寸，并且把我们的一般形状也向火星人作了描述——有四肢，在四肢上有五个手指或脚趾，等等，他也就顺着我们来进行想象。我们描述自己的外形时，料想不会遇到任何特殊的困难。在我们讲述的过程中，火星人甚至还做了一个有关我们的外形的模型。接着他就说：“嗳呀！你真是个非常漂亮的家伙，但是在你的身体内有些什么呢？”于是我们就开始描写身体内的各种器官，随后，我们谈到心脏，在仔细地描写了心脏的形状之后，我们就说：“现在请把心脏的位置安排在左边。”他就问道：“慢着，什么是左边？”于是我们的问题就是向他描写心脏在哪一边，而他既不能看到我们所见到的任何东西，我们也不能向他发送任何我们所谓的“右”的样品——没有一个标准的右旋的物体。我们能这样做吗？

§ 52-7 宇称不守恒

我们知道，万有引力定律、电磁定律、核力都符合反射对称原则，所以，这些定律以及任何由它们推得的东西都不能应用。但是，与自然界中发现的许多基本粒子相关联，存在着一

种称为 β 衰变或弱衰变的现象。其中弱衰变的一个例子与大约在 1954 年发现的粒子有关，它使人们感到很难理解。有一种带电粒子蜕变为三个 π 介子，如图 52-5 所示。这个粒子一度称为 τ 介子。在图 52-5 中我们还看到另一个曾称为 θ 介子的粒子蜕变成两个介子。根据电荷守恒，其中

一个必须是中性的。这样，一方面我们有一个称为 τ 的粒子蜕变成三个 π 介子，还有一种 θ 粒子则蜕变成两个 π 介子。不久人们发现 τ 与 θ 在质量上几乎相等。事实上，在实验误差之内，它们是相等的。其次，人们发现，它们分别蜕变为三个 π 介子与两个 π 介子所需的时间也几乎相等；并且具有相同的寿命。再有，无论何时生成这两种粒子时，它们总以同样的比例出现，比如说，14% 是 τ 介子，86% 是 θ 介子。

任何头脑清楚的人都立即认识到：它们必定是相同的粒子，我们只是产生了一个有两种不同蜕变方式的东西，而不是两种不同的粒子。所以，这个可以按两种方式蜕变的东西具有同样的寿命和同样的产品比例（因为这就是粒子进行两类不同蜕变的可能性的比例）。

但是，可以证明（我们在那里完全无法说明如何证明），根据量子力学中的反射对称原理，不可能由同一种粒子得到这两种结果——同一个粒子不可能以两种这样的方式蜕变。与反射对称原理相对应的守恒定律没有经典的类比，这一类量子力学的守恒关系称作宇称守恒。这样，由于宇称守恒，或更确切地说，由于弱衰变的量子力学方程对反射的对称性，同一种粒子不可能按两种方式变化，所以这必定是某种质量、寿命等等方面的巧合。但是，人们越深入研究，这种巧合也愈加惊人，于是人们逐渐产生了疑问：也许，深奥的自然界反射对称定律可能并不正确。

由于出现了这种明显的失败，李政道和杨振宁建议做一些有关衰变的其他实验，试图检查一下定律在其他情况下是否正确。第一个这样的实验是由哥伦比亚大学的吴健雄女士做

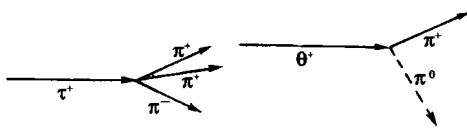


图 52-5 τ^+ 粒子衰变和 θ^+ 粒子衰变的简图

的,她的实验如下:人们知道,蜕变时发射一个电子的钴的某一同位素处于极低温度和极强的磁场中时是磁化的,如果温度低到使热振动不致过分扰动原子磁体的话,这些原子磁体就在磁场中排列起来。所以,钴原子在这个强磁场中就全都排列起来。随后它们发射一个电子而蜕变,人们发现,当原子排列在 \mathbf{B} 矢量朝上的磁场中时,大多数的电子是在朝下的方向上发射出去的。

如果一个人不是真正地“熟悉”世界,那么这种议论似乎没有丝毫意义。但是如果他懂得世界上的问题和有趣事情的话,就会看出这是一个最为戏剧性的发现:当我们把钴原子放到极强的磁场中去时,向下的蜕变电子比向上的蜕变电子要多。所以如果我们在“镜子”中进行对应的实验,钴原子将沿着相反的方向排列,此时它们就将往上而不是往下发射较多的电子,情况是非对称的。磁体长出细丝了! 磁铁的南极成为这样一种磁极:在 β 衰变中电子趋向于离开它!于是,这就在物理上区别了南北极。

在这以后,人们还做了其他许多实验: π 介子蜕变为 μ 和 ν 介子; μ 介子蜕变为一个电子和两个中微子;近来, Λ 蜕变为质子和 π , Σ 的蜕变以及许多其他的蜕变实验。事实上,在几乎所有可以预期的情况下,全都发现不遵从反射对称原则! 从根本上说,在物理学的这一个阶梯上,反射对称定律是不正确的。

简言之,我们能够告诉火星人该把心脏放到哪一个部位了。我们可以这样说:“听着,自己制造一块磁铁,把线圈绕上去,让电流通过,随后取一些钴,并使温度降低,然后再这样来安排实验,使电子从脚部向头部运动,那么电流通过线圈时,流进的方向就是我们称之为右的方向,而流出的方向就是左的方向。”所以,现在只要做一个这样的实验,就能够确定右与左了。

人们还曾预言过许多其他特征。例如,已知钴核的自旋,即角动量在蜕变前是 $5\hbar$,在蜕变后是 $4\hbar$ 。电子带有自旋角动量,还牵涉到中微子。从这里很容易看出电子必须具有与其运动方向一致的自旋角动量,中微子也同样如此。所以看上去好像电子往左自旋,这也得到实验验证。事实上,博姆和瓦帕斯特拉就是在我们这里验证了电子大多数是向左旋转的(还有另一些实验给出了相反的结果,但它们是错误的)。

另一个问题当然就是要找出宇称守恒失败的规律。有没有什么法则能告诉我们这种不守恒的情况在多大的范围内成立?有。这个法则是,只有在非常慢的称为弱衰变的反应中,守恒才遭到破坏,而且在这种情况下发生时,有关的法则表明,带有自旋的粒子,例如电子、中微子等等,在出现时倾向于向左自旋。这是一条倾向一面的法则,它把速度极矢量与角动量轴矢量联系起来,并且指出角动量与速度方向相反的可能性比一致的可能性要大一些。

这条法则就是如此,但今天我们并不真正理解它的原因。为什么这条法则是正确的,它的基本原因是什么,它与其他事情有何联系? 这件非对称的事实使我们感到如此的震惊,以致此刻还没有能从惊讶中充分地恢复过来去理解对于所有其他规则来说这将意味着什么。然而,这个课题是有趣和新颖的,也是仍未获得解决的,所以看来我们讨论一些与此有关的问题是可取的。

§ 52-8 反 物 质

当一种对称性丢失之后,我们要做的第一件事就是赶快查一下已知的或假定成立的对

称性的表,看看是否还会失去什么别的对称性。在我们的表中没有提到一种对称操作,这就是物质与反物质的关系,它也必须受到质疑。狄拉克曾预言除电子外必定还有另一种称为正电子的粒子(由安德森在本学院发现),它必然与电子有关。这两种粒子的所有性质都服从一定的对应法则:能量相等;质量相等;电荷相反。但是,比所有其他都重要的是,当它们碰在一起时,就彼此湮没而把所有的质量转化为能量,例如,以 γ 射线的形式释放掉。正电子称为电子的反粒子,而这些就是粒子与它的反粒子的特征。从狄拉克的论证可以清楚地看出,世界上所有其余的粒子也应有对应的反粒子。比如,对质子应有反质子,用符号 \bar{p} 来表示。 \bar{p} 应具有负电荷,它的质量和质子相同,等等。然而最重要的特点是,质子和反质子碰在一起彼此就会湮没。我们强调这件事的原因在于,人们对所说的有中子也有反中子这一点感到不好理解,他们说:“中子就是中性的,那么又怎么可能有相反的电荷呢?”“反”粒子的规则并不只是说它具有相反的电荷,它有一系列特征,所有这些特征都是相反的。反中子和中子的区别就在于,如果我们把两个中子放在一起,它们仍然是两个中子,但是如果把一个中子和一个反中子放在一起,它们彼此会湮没,并且释放出巨大的能量,发射出各种 π 介子、 γ 射线,等等。

现在,如果我们有了反中子、反质子和反电子,在原则上就可以造出反原子。虽然到现在还没有造出反原子,但在原则上这是可能的。例如,一个氢原子在中心有一个质子,在外面有一个电子绕着转动。现在设想在某个地方我们能产生一个反质子,而在外面带着一个正电子,正电子会不会绕着转动?会。首先,反质子带负电,而反电子带正电,这样它们就以相应的方式互相吸引——正负粒子的质量是一样的,每件事都一样。这是物理学的对称原理之一,方程式似乎表明,如果我们用某种物质制造出一个钟,然后又用反物质制造出一个同样的钟,它将同样走动(当然,如果把两个钟放在一起,它们就都会湮没,但那是另一回事了)。

这样就出现了一个问题。我们可以用物质制造出两个钟,一个是“左旋”的,另一个是“右旋”的。例如,我们可以不用简单的方式制造钟,而使用钴和磁铁以及电子探测器(它能检测出 β 衰变电子的存在,并对之计数)来制造钟。每计数一次,秒针就走动一下。那么另一个镜像钟由于接收到较少的电子,将不会走得一样快。所以,显然我们可以制造两个钟:一个左旋,另一个右旋,它们走得不一样。那就让我们用物质制造一个可称为标准的或“右旋”的钟,另外还有这种物质制造一个左旋的钟。我们刚才已看出,一般说来,这两者不会走得一样快,而在那个著名的物理现象发现之前,人们曾认为它们会走得一样快。我们还假定正物质与反物质是等价的。那就是说,如果我们用反物质制造一个同样形状的右旋钟,那它将会走得和右旋正物质钟一样快,而如果制造同样的左旋钟,它也会走得一样快。换句话说,原先人们相信所有这四个钟都是相同的,现在我们当然已经知道右旋物质和左旋物质并不一样。因此,可以假设,右旋反物质和左旋反物质也并不一样。

一个明显的问题是,究竟哪两种钟是相同的,如果发生这种情况的话?换句话说,右旋物质钟与右旋反物质钟走得一样快吗?或者说,右旋物质钟与左旋反物质钟走得一样快吗?利用正电子衰变来代替电子衰变的 β 衰变实验指出了这里的相互关系是:右旋物质的行为与左旋反物质的行为一样。

于是,现在终于可以说右与左的对称性仍然保持着!如果我们用反物质代替正物质制造一个左旋钟,它将走得一样快。这样事情就变为,代替我们的对称性表中的两条独立规则的,是把这两者结合在一起变成一条新规则,即右旋的物质与左旋的反物质是对称的。

这样,如果火星人是由反物质造成的,而我们若指点他如何作一个类似于我们的“右旋”模型,当然,结果就刚好相反。在我们之间进行了许多交谈后,我们彼此互相教会对方制造一艘宇宙飞船,然后乘飞船在空间半途相遇,那么会发生什么事呢?我们会把彼此的传统和习惯等等告诉对方,并且大家会很快地跑过去情不自禁地伸出手来。要是他真的伸出的是左手,请千万小心!

§ 52-9 对 称 破 缺

其次一个问题是,我们怎么来理解接近于对称的定律?令人惊异的是,一方面,在物理学的很大范围内,包括核力的强作用现象,电磁现象,以及最弱的引力现象等重要领域中,关于这些现象的所有定律似乎都是对称的。另一方面,那个小小的例外部分则跑出来:“不,定律并不都是对称的!”自然界几乎对称,但又不完全对称,这究竟是怎么回事?我们怎样来理解这一点?首先,我们是否还有什么别的例子?答案是,事实上我们确实有一些别的例子。比如,在质子与质子之间,中子与中子之间,中子与质子之间,相互作用的核力部分都完全相同,这里有着一种核力的对称性,一种新的对称性,所以,我们可以交换中子与质子——但很明显,这并不是普遍成立的对称性,因为两个相隔一定距离的质子间的电斥力对中子来说并不存在。所以,一般而言,并不总是能用中子来代替质子,这种代替只是一个良好的近似。为什么是良好的近似?因为核力远远比电力强,所以这也是一种“几乎”对称的情况。这样,我们在别的事情上确实也看到了例子。

在我们的心目中有一种倾向,认为对称是无比完美的。事实上,这与希腊人的一个古老观念相类似:圆是完美的,如果去相信行星的轨道不是圆形,而只是接近于圆形的话,这就太可怕了。是一个圆和近似于一个圆这两件事之间的差别不是一个很小的差别,对于我们的认识来说,这是一种根本性的改变。在圆上存在着对称性与完美性的迹象,一旦稍有偏离,就一切都完了,它就不再有对称性。于是,问题在于为什么行星的轨道只是接近于圆——这是一个更加困难的问题。一般地说,行星的实际运动轨道应当是椭圆形的。但是在漫长的岁月里,由于潮汐力的作用等因素,这些轨道变得几乎对称了。现在的问题是,我们这里是否也存在着类似的事情。若从圆的观点出发来看,如果轨道都是精确的圆,这种情况显然很简单,也自然用不到去解释。但是既然轨道只是接近于圆,就需要作许多解释,结果表明这是一个很大的动力学问题,于是,我们就得考虑潮汐力等等的影响来解释为什么轨道是近于对称的。

这样,我们的问题就是要解释对称性究竟从何而来。为什么自然界是如此近于对称?没有人能道出所以然。我们可能作出的唯一解释大致如此:日本的日光市有一座门,这座门有时被日本人称为全日本最美的城门,它是在深受中国艺术影响的时代建造的。这个城门非常精致,有许多山墙和美丽的雕刻图案,还有许多柱子以及刻有龙头及贵族雕像的圆柱,等等。但是当你挨近看时,在一跟柱子上除了见到复杂精细的雕刻图案外,还可见到有个小小的图样刻得正好颠倒过来。要是没有这件事,情况就完全对称了。如果你要问为什么会那样,据说有这样一个传说:它是故意刻得颠倒的,为的是使上帝不致妒忌人的完美。人们故意在这里留下一个小小的错误,那样上帝就不会因为妒忌而对人类感到愤怒了。

我们愿意把这种看法反过来,并且相信自然界之所以接近于对称,其真正的解释是:上帝只将物理定律造得接近于对称,这样我们就不会妒忌上帝的完美了!

索 引

二画

二维空间中的转动	rotation in two dimension	187
入射	incidence	260
入射角	angle of incidence	260
几何光学	geometrical optics	259, 269
力矩	moment of force	191

三画

三角法	triangulation	48
三体问题	three-body problem	102
干涉仪	interferometer	160
干涉波	interfering waves	379
干涉,衍射	interference	283, 285
大气的指数变化律	exponential atmosphere	411
门捷列夫	Mendeléev	19
矢积	vector product	207

四画

比热	specific heat	418, 470
毛细管作用	capillary action	535
引力	gravitation	13, 67, 77, 125
引力系数	gravitational coefficient	76
引力理论	theory of gravitation	79
引力能	gravitational energy	34
引力场	gravitational field	131
开普勒, J.	Kepler, J.	67
开普勒定律	Kepler's laws	67, 91, 193
瓦帕斯特拉	Wapstra	547
方均距离	mean square distance	60, 431
方均根距离	root-mean-square distance	60
内摆线	hypocycloid	339

化学动力学	chemical kinetics	439
化学反应	chemical reaction	7
化学能	chemical energy	34, 39
气体分子动理论	kinetic theory of gases	399
气体的热导率	thermal conductivity of a gas	453
气垫	air trough	106
无规行走	random walk	59, 430
厄缶, R.	Eötvös, R.	79
分子力	molecular force	3, 129
分子运动	molecular motion	422
分子动理论	kinetic theory	433
分子扩散	molecular diffusion	450
分子间的吸引(力)	molecular attraction	3
分辨本领	resolving power	276, 299
牛顿, I.	Newton, I.	84, 91, 156, 376
牛顿定律	Newton's laws	16, 69, 79, 91, 102, 120, 124, 399, 422, 479
切连科夫, P. A.	Cherenkov, P. A.	528
切连科夫辐射	Cherenkov radiation	528
双目视觉	binocular vision	365
双折射	birefringence	329
双星	double stars	73
反物质	antimatter	547
反射角	angle of reflection	260
反粒子	antiparticle	20
反常折射	anomalous refraction	334
贝克勒尔, A. H.	Becquerel, A. H.	280
五画		
四维矢量	four-vectors	164, 182
坐标轴的转动	rotation of axes	115
可感知的未来	affective future	181
永(恒运)动	perpetual motion	480

代数(学)	algebra 220	电瞬变态	electrical transient 246
外尔, H.	Weyl, H. 112	电共振	electrical resonance 235
弗兰克, I.	Frank, I. 528		六画
对称性	symmetry 5, 112		
正弦波	sinusoidal waves 287	西岛	Nishijima 19
平行轴定理	parallel-axis theorem 200	共振	resonance 231
平均自由程	mean free path 446	多普勒效应	Doppler effect 186, 240, 343, 394
平面运动	planetary motion 187	迈克耳孙-莫雷实验	Michelson-Morley experiment 159
平滑肌	smooth muscle 147	迈耶, J. R.	Mayer, J. R. 23
平衡	equilibrium 7	地震仪	seismograph 532
卡诺, S.	Carnot, S. 34, 459	亥姆霍兹, H.	Helmholtz, H. 356
卡诺循环	Carnot cycle 459, 471	托勒玫, C.	Ptolemy, C. 261
卡文迪什	Cavendish, H. 76	扩散	diffusion 444
卡文迪什实验	Cavendish's experiment 76	芝诺	Zeno 82
布里格斯, H.	Briggs, H. 226	安德森, C. D.	Anderson, C. D. 548
布朗, R.	Brown, R. 422	同步加速器	synchrotron 15, 165, 342, 343
布朗运动	Brownian motion 9, 59, 422	同步(加速器)辐射	synchrotron radiation 340, 342
布儒斯特角	Brewster's angle 331		
矢量代数	vector algebra 118	同时性	simultaneity 163
矢量分析	vector analysis 117	回转仪	gyroscope 209
电力	electrical forces 13	行星运动	planetary motion 67, 97, 141
电子云	electron cloud 66	自由度	degrees of freedom 250, 410
电子半径	radius of electron 321	自发发射	spontaneous emission 441
电子的电荷	charge on electron 130	自然界中的共振	resonance in nature 237
电子射线管	electron-ray tube 132	自感	self-inductance 236
电共振	electrical resonance 235	色[视]觉	color vision 349, 356
电场	electric field 14, 131	色[视]觉的生理	physiochemistry of color vision 358
电阻	resistance 236	化学	
电阻器	resistor 236	色品	chromaticity 355
电容	capacitance 236	色散	dispersion 312
电容器	capacitor (condenser) 155, 235	红外辐射	infrared radiation 238, 259
电荷	charge 129	动力学	dynamics 68, 91
电荷守恒	conservation of charge 40	动能	kinetic energy 8, 34, 38, 405, 408
电离能	ionization energy 437	动量	momentum 91, 389
电能	electrical energy 34	动量守恒	conservation of linear momentum 40, 102
电感	inductance 236	汤川秀树	Yukawa, H. 18
电感器	inductor 235	汤姆孙散射截面	Thompson scattering cross section 325
电磁场	electromagnetic field 12, 15, 111		
电磁波	electromagnetic wave 15		
电磁辐射	electromagnetic radiation 259,		

压力	pressure 4
压缩	compression 403
刚体	rigid body 187
刚体的转动	rotation of rigid body 189
刚体的角动量	angular momentum of rigid body 211
光波	light (electromagnetic) waves 15, 496
光学	optics 259
光子	photon 17, 259, 383
光的动量	momentum of light 347
光轴	optic axis 329
光散射	scattering of light 323
米勒, W. C.	Miller, W. C. 350
亚当斯, J. C.	Adams, J. C. 72
亚里士多德	Aristotle 42
亚稳态原子	metastable atom 443
导数(微商)	derivative 85
约束运动	constrained motion 147
约翰逊噪声	Johnson noise 424, 430
场方程	field equation 131
场的叠加	superposition of fields 132

七画

坐标轴平移	translation of axes 112
近轴光线	paraxial rays 270
圆周运动	circular motion 216
时间变换	transformation of time 161
时空	space-time 178
阻尼振动	damped oscillation 244
阻抗	impedance 257
陀螺仪	gyroscope 209
阿伏伽德罗	Avogadro 400
阿伏伽德罗常量	Avogadro's number 432
折射率	index of refraction 266, 307
里兹组合原则	Ritz combination principle 396
克尔盒	Kerr cell 331
克劳修斯, R.	Clausius, R. 457
克劳修斯-克拉	Clausius-Clapeyron equation
珀龙方程	475
库仑定律	Coulomb's law 279
麦克斯韦, J. C.	Maxwell, J. C. 54, 64, 278, 420, 429, 483

麦克斯韦方程组	Maxwell's equations 157, 253, 494
角动量	angular momentum 74, 191, 209, 211
角动量守恒	conservation of angular momen- tum 40, 193, 209
角频率	angular frequency 216, 287
角膜	cornea 349
抛物形天线	parabolic antenna 300
抛物运动	parabolic motion 90
伽利略	Galileo 42, 68, 540
伽利略变换	Galilean transformation 134
伽利略相对性	Galilean relativity 104
狄拉克, P.	Dirac, P. 548
狄拉克方程	Dirac equation 210
闵可夫斯基	Minkowski 186

八画

帕斯卡三角形	Pascal's triangle 58
帕普斯定理	theorem of Pappus 198
罗默, O.	Roemer, O. 72
受迫谐振子	forced harmonic oscillator 218, 232
倒易原理	reciprocity principle 300
物理定律的对称	symmetry of physical laws 170, 538
性	
迪克, R. H.	Dicke, R. H. 79
庞加莱, H.	Poincaré, H. 158, 161, 168
非保守力	nonconservative force 151
经典电子半径	classical electron radius 321
放大率	magnification 274
放射性(材料)的	radioactive clock 45
钟	
单原子气体	monatomic gas 403
“奇异”数	“strangeness” number 19
拉姆齐, N.	Ramsey, N. 47
拉普拉斯, P.	Laplace, P. 495
拉什顿	Rushton 358
波节	wave nodes 508
波(动)方程	wave equation 488
波前	wavefront 490
波数	wave number 287

空间转动	rotation in space 204	衍射光栅	diffraction grating 290, 297
视网膜	retina 349	玻尔, N.	Bohr, N. 441
视杆细胞	rods 350, 366	玻尔半径	Bohr radius 394
视皮层	visual cortex 364	玻尔兹曼, L.	Boltzmann, L. 423
视神经	optic nerve 350	玻尔兹曼定律	Boltzmann's law 412
视锥细胞	cones 350	玻意耳定律	Boyle's law 420
(线)动量	linear momentum 40, 102	玻恩, M.	Born, M. 376, 397
(线)动量守恒	conservation of linear momentum 40, 102	标准偏差	standard deviation 63
线性系统	linear systems 249	标量	scalar 117
线性变换	linear transformation 118	相对论	theory of relativity 79, 178
经屏的衍射	diffraction by screen 316	相对论性能量	relativistic energy 176
质心	center of mass 187, 195	相对论性动力学	relativistic dynamics 165
质能	mass energy 34, 39	相对论性动量	relativistic momentum 110, 173, 175
质能相当性	mass-energy equivalence 166	相对论性质量	relativistic mass 173
固(刚)体的角动量	angular momentum of solid(rigid body) 211	相速度	phase velocity 501
周期性的(时间)	periodic (time) 43	相移	phase shift 216
周期性振动	periodic oscillation 94	重力加速度	acceleration of gravity 94
欧几里得	Euclid 48	复阻抗	complex impedance 237
欧几里得几何学	Euclidean geometry 126	复眼	compound eye 367
欧姆定律	Ohm's law 255, 450	费马, P.	Fermat, P. 261
转动动能	rotational kinetic energy 201	绝热压缩	adiabatic compression 403
转动惯量	moment of inertia 194	绝热膨胀	adiabatic expansion 460
转矩	torque 190, 204		
势能	potential energy 34, 136, 149		
		十画	
		调幅	amplitude modulation 499
保守力	conservative force 148	哥白尼	Copernicus 67
统计力学	statistical mechanics 22, 411	莱布尼茨, G. W.	Leibnitz, G. W. 84
统计涨落	statistical fluctuations 56	爱因斯坦, A.	Einstein, A. 16, 79, 135, 156, 168, 422, 441, 442
孪生子佯谬	twin paradox 170	衰减	attenuation 314
香农, C.	Shannon, C. 456	旁频带	side bands 499
胡克定律	Hooke's law 130	格林函数	Green's function 253
科里奥利力	Coriolis force 202, 203	海森伯, W.	Heisenberg, W. 65, 376, 386, 387
狭义相对论	special theory of relativity 156	透镜公式	lens formula 275
轴矢量	axial vector 544	速度的变换	transformation of velocity 171
洛伦兹, H. A.	Lorentz, H. A. 158	热力学	thermodynamics 400, 469
洛伦兹收缩	Lorentz contraction 163	热力学定律	laws of thermodynamics 455
洛伦兹变换	Lorentz transformation 158, 178, 345, 539	热电离	thermal ionization 437
衍射	diffraction 294	热平衡	thermal equilibrium 424
		热机	heat engines 455

热导率	thermal conductivity 453
热能	heat energy 34, 39, 109, 110
原子过程	atomic processes 5
原子的 m(亚稳)态	atom metastable 443
原子的假设	atomic hypothesis 2
原子钟	atomic clock 47
原子的粒子	atomic particles 18
振荡器, 振子	oscillator 44
振动相位	phase of oscillation 215
振动周期	period of oscillation 215
振动(荡)	oscillation 214
振荡(动)频率	frequency of oscillation 15
振幅	amplitudes of oscillation 216
核力	nuclear force 135
核的截面	nuclear cross section 51
核能	nuclear energy 34
核(原子核)	nucleus 14, 18
能级	energy level 395
能量	energy 33
能量守恒	conservation of energy 23, 33
能量定理	energy theorem 523
能斯特热定理	Nernst heat theorem 466
离子	ion 6
离子电导率	ionic conductivity 449
离心力	centrifugal force 71, 134
载波信号	carrier signal 499
圆周运动	circular motion 216

十一画

焓	enthalpy 474
章动	nutation 211
推(延)迟时间	retarded time 279
斜面	inclined plane 37
菲涅耳反射公式	Fresnel's reflection formulas 334
轫致辐射	bremsstrahlung 343
谐波	harmonics 516
谐振子	harmonic oscillator 102, 213
理想气体定律	ideal gas law 408
理想热机的效率	efficiency of ideal engine 461
液体的蒸发	evaporation of a liquid 413

惯性	inertia 13, 78
惯性原理	principle of inertia 91
惯量	moment of inertia 194, 199
偏导数	partial derivative 154
偏振	polarization 327
偏振光	polarized light 326, 328
偶极辐射子	dipole radiator 282, 288
密度	density 4
虚功	virtual work 38
虚功原理	principle of virtual work 38
盖尔曼, M.	Gell-Mann, M. 19
剪切波	shear wave 531
基尔霍夫定律	Kirchhoff's laws 258
第谷·布拉赫	Tycho Brahe 67
距离	distance 47
距离测量	distance measurement 48
勒威耶, U.	Leverrier, U. 73
弹性能	elastic energy 34, 39
弹性碰撞	elastic collision 109, 174

十二画

温度	temperature 405
塔姆, I.	Tamm, I. 28
椭圆	ellipse 67
金斯, J.	Jeans, J. 420, 428
棘轮和掣爪的机制	ratchet and pawl machine 479
瞬变态	transient 242
瞬变响应	transient response 219
量子力学	quantum mechanics 16, 65, 111, 376, 388
量子电动力学	quantum electrodynamics 18, 280
晶体衍射	crystal diffraction 392
晶胞	unit cell 392
等温大气层	isotherm atmosphere 412
等温压缩	isothermal compression 460
等温膨胀	isothermal expansion 460
傅里叶, J.	Fourier, J. 520
傅里叶级数	Fourier series 517
傅里叶分析	Fourier analysis 252
傅里叶变换	Fourier transform 252

博姆	Boehm 547
傍轴光线	paraxial rays 270
紫外	ultraviolet electromagnetic waves 15, 259
紫外辐射	ultraviolet radiation 259
黑体辐射	blackbody radiation 427
焦点	focus 265
焦距	focal length 269
惠更斯, C.	Huygens, C. 157, 260
焦耳热	Joule heating 243
普朗克, M.	Planck, M. 428, 440, 441
普朗克常量	Planck's constant 53, 65, 186, 386
普尔基涅效应	Purkinje effect 351
斯莫卢霍夫斯基	Smoluchowski 430
斯涅耳, W.	Snell, W. 261
斯涅耳定律	Snell's law 261
斯蒂维纳斯, S.	Stevinus, S. 37
最短时间原理	principle of least time 261
散射截面	cross section for scattering 325

十三画

催化剂	catalyst 440
蒸发	evaporation 5
数值分析	numerical analysis 97
频率	frequency 216, 287
碰撞	collision 174
零质量	zero mass 20
瑞利判据	Rayleigh's criterion 299
瑞利定律	Rayleigh's law 428
概率	probability 54
概率分布	probability distribution 62
概率密度	probability density 63
摆	pendulum 43, 513
摆钟	pendulum clock 43
辐射电阻	radiation resistance 318
辐射阻尼	radiation damping 318
辐射的相对论性	radiation relativistic effects 337
效应	effect 337
辐射能	radiant energy 34
像差, 光行差	aberration 276, 347

叠加原理	principle of superposition 132, 250
微分学	differential calculus 84
微波激射(器)	maser 442
微积分, 微商(分)	calculus, differential 85, 87
简谐运动	harmonic motion 216, 231

十四画

模拟计算机	analog computer 257
磁场	magnetic field 133
磁学, 磁性	magnetism 14
磁感(应)强度	magnetic induction 133
收缩假设	contraction hypothesis 161

十五画

熵	entropy 465, 485
潮汐	tides 71
颜色-亮度	color-brightness 48
横纹肌	striated muscle 147
摩擦	friction 106, 126
摩擦系数	coefficient of friction 127

十六画

激活能	activation energy 439
激光	laser 323, 442
噪声	noise 516
膨胀	expansion 459
薛定谔, E.	Schrödinger, E. 354, 376, 397
穆斯堡尔, R.	Mössbauer, R. 240
整流	rectification 525

十七画

质力	pseudo force 133
螺旋起重器	screw jack 37
戴德金, R.	Dedekind, R. 223
X射线	X-rays electromagnetic waves 15, 259
X射线	X-rays 15, 259
γ射线	gamma rays electromagnetic wave 15

附录

本书涉及的非法定计量单位换算关系表

单位符号	单位名称	物理量名称	换 算 系 数
bar	巴	压强, 压力	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
Cal	大卡	热量	$1 \text{ Cal} = 1 \text{ kcal}$
cal	卡[路里]	热量	$1 \text{ cal} = 4.1868 \text{ J}$
dyn	达因	力	$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$
f, fa, fathom	英寻	长度	$1 \text{ f} = 2 \text{ yd} = 1.8288 \text{ m}$
fermi(fm)	费米	(核距离)长度	$1 \text{ fermi} = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$
ft	英尺	长度	$1 \text{ ft} = 3.048 \times 10^{-1} \text{ m}$
G, Gs	高斯	磁通量密度, 磁感应强度	$1 \text{ Gs} = 10^{-4} \text{ T}$
gal	加仑	容积	$1 \text{ gal(US)} = 3.78543 \text{ L}$
in	英寸	长度	$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$
lb	磅	质量	$1 \text{ lb} = 0.453592 \text{ kg}$
l. y.	光年	长度	$1 \text{ l. y.} = 9.46053 \times 10^{15} \text{ m}$
mi	英里	长度	$1 \text{ mi} = 1.60934 \text{ km}$
Mx	麦克斯韦	磁通量	$1 \text{ Mx} = 10^{-8} \text{ Wb}$
Oe	奥斯特	磁场强度	$1 \text{ Oe} = 1 \text{ Gb} \cdot \text{cm}^{-1}$ $= (1000/4\pi) \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ $= 79.5775 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$
oz	盎司	质量	$1 \text{ oz} = 28.349523 \text{ g}$
qt	夸脱	容积	$1 \text{ qt} = 1.13652 \text{ dm}^3$ $= 1.10122 \text{ dm}^3 (\text{US dry qt})$ $= 0.946353 \text{ dm}^3 (\text{US liq qt})$

[General Information]

书名=费恩曼物理学讲义（新千年版）第1卷=THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS (THE NEW MILLENIUM EDITION , VOLUME 1)

作者=(美)费恩曼(R.P.FEYNMAN),莱顿(R.B.LEIGHTON),桑兹(M.SANDS)著;
郑永令,华宏鸣,吴子仪等译

页数=557

SS号=13260764

出版社=上海科学技术出版社

出版日期=2013.04

封面

书名

版权

前言

目录

第1章 原子的运动

1-1 引言

1-2 物质是原子构成的

1-3 原子过程

1-4 化学反应

第2章 基本物理

2-1 引言

2-2 1920年以前的物理学

2-3 量子物理学

2-4 原子核与粒子

第3章 物理学与其他科学的关系

3-1 引言

3-2 化学

3-3 生物学

3-4 天文学

3-5 地质学

3-6 心理学

3-7 情况何以会如此

第4章 能量守恒

4-1 什么是能量

4-2 重力势能

4-3 动能

4-4 能量的其他形式

第5章 时间与距离

5-1 运动

5-2 时间

5-3 短的时间

5-4 长的时间

5-5 时间的单位和标准

5-6 长的距离

5-7 短的距离

第6章 概率

6-1 机会和可能性

6-2 涨落

6-3 无规行走

6-4 概率分布

6-5 不确定性原理

第7章 万有引力理论

- 7-1 行星运动
- 7-2 开普勒定律
- 7-3 动力学的发展
- 7-4 牛顿引力定律
- 7-5 万有引力
- 7-6 卡文迪什实验
- 7-7 什么是引力
- 7-8 引力与相对论

第8章 运动

- 8-1 运动的描述
- 8-2 速率
- 8-3 速率作为导数
- 8-4 距离作为积分
- 8-5 加速度

第9章 牛顿的动力学定律

- 9-1 动量和力
- 9-2 速率与速度
- 9-3 速度、加速度以及力的分量
- 9-4 什么是力
- 9-5 动力学方程的含义
- 9-6 方程的数值解

第10章 动量守恒

- 10-1 牛顿第三定律
- 10-2 动量守恒
- 10-3 动量是守恒的
- 10-4 动量和能量
- 10-5 相对论性动量

第11章 矢量

- 11-1 物理学中的对称性
- 11-2 平移
- 11-3 转动
- 11-4 矢量
- 11-5 矢量代数
- 11-6 牛顿定律的矢量表示法
- 11-7 矢量的标积

第12章 力的特性

- 12-1 什么是力
- 12-2 摩擦力
- 12-3 分子力
- 12-4 基本力、场

- 12-5 廢力
- 12-6 核力
- 第13章 功与势能（上）
 - 13-1 落体的能量
 - 13-2 万有引力所做的功
 - 13-3 能量的求和
 - 13-4 巨大物体的引力场
- 第14章 功与势能（下）
 - 14-1 功
 - 14-2 约束运动
 - 14-3 保守力
 - 14-4 非保守力
 - 14-5 势与场

- 第15章 狹义相对论
 - 15-1 相对性原理
 - 15-2 洛伦兹变换
 - 15-3 迈克耳逊-莫雷实验
 - 15-4 时间的变换
 - 15-5 洛伦兹收缩
 - 15-6 同时性
 - 15-7 四维矢量
 - 15-8 相对论动力学
 - 15-9 质能相当性
- 第16章 相对论中的能量与动量
 - 16-1 相对论与哲学家
 - 16-2 孪生子佯谬
 - 16-3 速度的变换
 - 16-4 相对论性质量
 - 16-5 相对论性能量

- 第17章 时空
 - 17-1 时空几何学
 - 17-2 时空间隔
 - 17-3 过去，现在和将来
 - 17-4 四维矢量的进一步讨论
 - 17-5 四维矢量代数
- 第18章 二维空间中的转动
 - 18-1 质心
 - 18-2 刚体的转动
 - 18-3 角动量
 - 18-4 角动量守恒
- 第19章 质心、转动惯量
 - 19-1 质心的性质

19-2 质心位置的确定

19-3 转动惯量的求法

19-4 转动动能

第20章 空间转动

20-1 三维空间中的转矩

20-2 用叉积表示的转动方程式

20-3 回转仪

20-4 固体的角动量

第21章 谐振子

21-1 线性微分方程

21-2 谐振子

21-3 简谐运动和圆周运动

21-4 初始条件

21-5 受迫振动

第22章 代数学

22-1 加法和乘法

22-2 逆运算

22-3 抽象和推广

22-4 无理数的近似计算

22-5 复数

22-6 虚指数

第23章 共振

23-1 复数和简谐运动

23-2 有阻尼的受迫振子

23-3 电共振

23-4 自然界中的共振现象

第24章 瞬变态

24-1 振子的能量

24-2 阻尼振动

24-3 电瞬变态

第25章 线性系统及其综述

25-1 线性微分方程

25-2 解的叠加

25-3 线性系统中的振动

25-4 物理学中的类比

25-5 串联和并联阻抗

第26章 光学：最短时间原理

26-1 光

26-2 反射与折射

26-3 费马最短时间原理

26-4 费马原理的应用

26-5 费马原理的更精确表述

26-6 最短时间原理是怎样起作用的

第27章 几何光学

27-1 引言

27-2 球面的焦距

27-3 透镜的焦距

27-4 放大率

27-5 透镜组

27-6 像差

27-7 分辨本领

第28章 电磁辐射

28-1 电磁学

28-2 辐射

28-3 偶极辐射子

28-4 干涉

第29章 干涉

29-1 电磁波

29-2 辐射的能量

29-3 正弦波

29-4 两个偶极辐射子

29-5 干涉的数学

第30章 衍射

30-1 n 个相同振子的合振幅

30-2 衍射光栅

30-3 光栅的分辨本领

30-4 抛物形天线

30-5 彩色薄膜、晶体

30-6 不透明屏的衍射

30-7 振荡电荷组成的平面所产生的场

第31章 折射率的起源

31-1 折射率

31-2 物质引起的场

31-3 色散

31-4 吸收

31-5 电波所携带的能量

31-6 屏的衍射

第32章 辐射阻尼、光的散射

32-1 辐射电阻

32-2 能量辐射率

32-3 辐射阻尼

32-4 独立的辐射源

32-5 光的散射

第33章 偏振

- 33-1 光的电矢量
- 33-2 散射光的偏振性
- 33-3 双折射
- 33-4 起偏振器
- 33-5 旋光性
- 33-6 反射光的强度
- 33-7 反常折射

第34章 辐射中的相对论性效应

- 34-1 运动辐射源
- 34-2 求“表观”运动
- 34-3 同步辐射
- 34-4 宇宙中的同步辐射
- 34-5 切致辐射
- 34-6 多普勒效应
- 34-7 , k四元矢量
- 34-8 光行差
- 34-9 光的动量

第35章 色视觉

- 35-1 人眼
- 35-2 颜色依赖于光的强度
- 35-3 色感觉的测量
- 35-4 色品图
- 35-5 色视觉的机制
- 35-6 色视觉的生理化学

第36章 视觉的机制

- 36-1 颜色的感觉
- 36-2 眼睛的生理学
- 36-3 视杆细胞
- 36-4 (昆虫的)复眼
- 36-5 其他的眼睛
- 36-6 视觉的神经学

第37章 量子行为

- 37-1 原子力学
- 37-2 子弹实验
- 37-3 波的实验
- 37-4 电子的实验
- 37-5 电子波的干涉
- 37-6 追踪电子
- 37-7 量子力学的基本原理
- 37-8 不确定性原理

第38章 波动观点与粒子观点的关系

- 38-1 概率波幅

38-2 位置与动量的测量

38-3 晶体衍射

38-4 原子的大小

38-5 能级

38-6 哲学含义

第39章 气体分子动理论

39-1 物质的性质

39-2 气体的压强

39-3 辐射的压缩性

39-4 温度和动能

39-5 理想气体定律

第40章 统计力学原理

40-1 大气的指数变化律

40-2 玻尔兹曼定律

40-3 液体的蒸发

40-4 分子的速率分布

40-5 气体比热

40-6 经典物理的失败

第41章 布朗运动

41-1 能量均分

41-2 辐射的热平衡

41-3 能量均分与量子振子

41-4 无规行走

第42章 分子动理论的应用

42-1 蒸发

42-2 热离子发射

42-3 热电离

42-4 化学动力学

42-5 爱因斯坦辐射律

第43章 扩散

43-1 分子间的碰撞

43-2 平均自由程

43-3 漂移速率

43-4 离子电导率

43-5 分子扩散

43-6 热导率

第44章 热力学定律

44-1 热机、第一定律

44-2 第二定律

44-3 可逆机

44-4 理想热机的效率

44-5 热力学温度

44-6 熵

第45章 热力学示例

45-1 内能

45-2 应用

45-3 克劳修斯-克拉珀龙方程

第46章 棘轮和掣爪

46-1 棘轮是怎样工作的

46-2 作为热机的棘轮

46-3 力学中的可逆性

46-4 不可逆性

46-5 序与熵

第47章 声、波动方程

47-1 波

47-2 声的传播

47-3 波动方程

47-4 波动方程的解

47-5 声速

第48章 拍

48-1 两列波的相加

48-2 拍符和调制

48-3 旁频带

48-4 定域波列

48-5 粒子的概率幅

48-6 三维空间的波

48-7 简正模式

第49章 波模

49-1 波的反射

49-2 具有固有频率的约束波

49-3 二维波模

49-4 耦合摆

49-5 线性系统

第50章 谐波

50-1 乐音

50-2 傅里叶级数

50-3 音色与谐和

50-4 傅里叶系数

50-5 能量定理

50-6 非线性响应

第51章 波

51-1 弦波

51-2 冲击波

51-3 固体中的波

51-4 表面波

第52章 物理定律的对称性

52-1 对称操作

52-2 空间与时间的对称性

52-3 对称性与守恒定律

52-4 镜面反射

52-5 极矢量与轴矢量

52-6 哪一只是右手

52-7 宇称不守恒

52-8 反物质

52-9 对称破缺

索引

附录