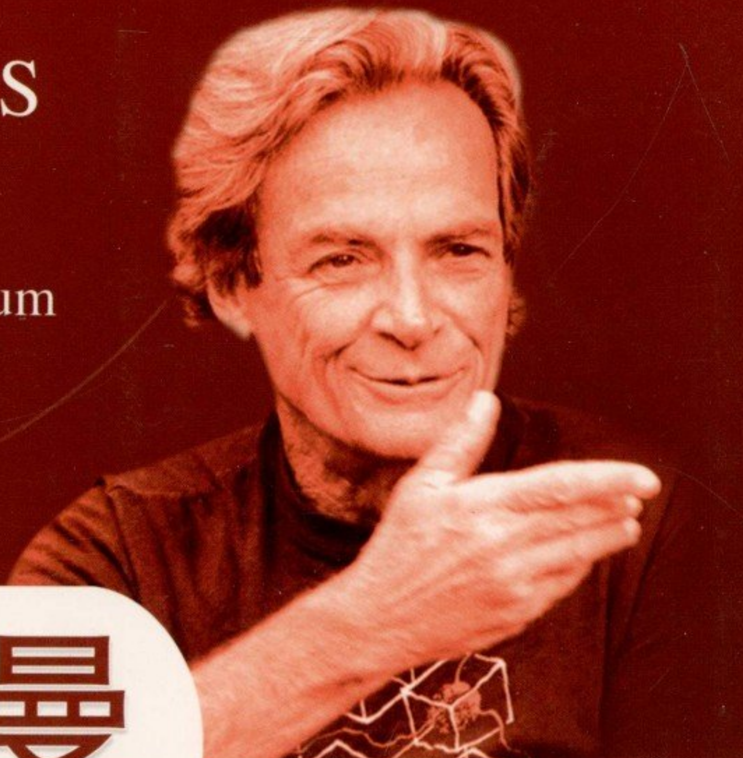
THE
Feynman
LECTURES
ON
PHYSICS

Volume I

The
New Millennium
Edition



费恩曼物理学讲义 第1卷

新千年版

[美]费恩曼(R.P.Feynman) 莱顿(R.B.Leighton) 桑兹(M.Sands) 著
郑永令 华宏鸣 吴子仪 等译

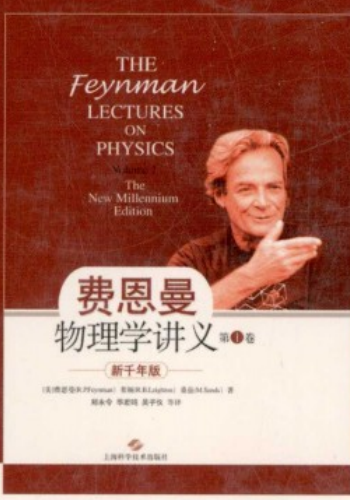
上海科学技术出版社

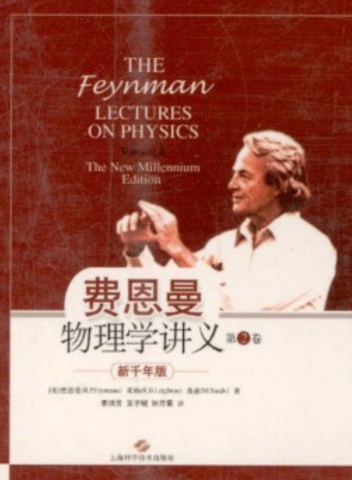
责任编辑 赵 伟
封面设计 房惠平

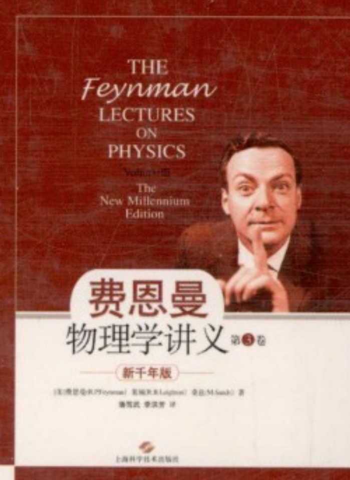
费恩曼物理学讲义

第1卷
新千年版

THE FEYNMAN
LECTURES ON PHYSICS
Volume I
The New Millennium Edition







上海科学技术出版社
www.sstp.cn

上架建议：物理学

ISBN 978-7-5478-1636-3

9 787547 816363 >

定价：98.00元

The Feynman Lectures on Physics(The New Millennium Edition, Volume Ⅰ)

费恩曼物理学讲义

（新千年版）

第 1 卷

［美］费恩曼（R. P. Feynman）
莱顿（R. B. Leighton） 著
桑兹（M. Sands）

郑永令 华宏鸣 吴子仪 等 译

上 海 科 学 技 术 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

费恩曼物理学讲义:新千年版.第1卷/(美)费恩曼(Feynman,R. P.),(美)莱顿(Leighton,R. B.),(美)桑兹(Sands,M.)著;郑永令等译.—上海:上海科学技术出版社,2013.4

The Feynman lectures on physics:The new millennium edition

ISBN 978-7-5478-1636-3

Ⅰ.①费… Ⅱ.①费… ②莱… ③桑… ④郑… Ⅲ.①物理学—教材 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第031567号

上海世纪出版股份有限公司
上海科学技术出版社 出版、发行
(上海钦州南路71号 邮政编码200235)
新华书店上海发行所经销
苏州望电印刷有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 36.25
字数:800千字
2013年4月第1版 2013年4月第1次印刷
ISBN 978—7—5478—1636—3/O·18
定价:98.00元

译者序

20世纪60年代初,美国一些理工科大学鉴于当时的大学基础物理教学与现代科学技术的发展不相适应,纷纷试行教学改革,加利福尼亚理工学院就是其中之一。该校于1961年9月至1963年5月特请著名物理学家费恩曼主讲一二年级的基础物理课,事后又根据讲课录音编辑出版了《费恩曼物理学讲义》。本讲义共分3卷,第1卷包括力学、相对论、光学、气体分子动理论、热力学、波等,第2卷主要是电磁学,第3卷是量子力学。全书内容十分丰富,在深度和广度上都超过了传统的普通物理教材。

当时美国大学物理教学改革试图解决的一个主要问题是基础物理教学应尽可能反映近代物理的巨大成就。《费恩曼物理学讲义》在基础物理的水平上对20世纪物理学的两大重要成就——相对论和量子力学——作了系统的介绍,对于量子力学,费恩曼教授还特地准备了一套适合大学二年级水平的讲法。教学改革试图解决的另一个问题是按照当前物理学工作者在各个前沿研究领域所使用的方式来介绍物理学的内容。在《费恩曼物理学讲义》一书中对一些问题的分析和处理方法反映了费恩曼自已以及其他在前沿研究领域工作的物理学家所通常采用的分析和处理方法。全书对基本概念、定理和定律的讲解不仅生动清晰,通俗易懂,而且特别注重从物理上作出深刻的叙述。为了扩大学生的知识面,全书还列举了许多基本物理原理在各个方面(诸如天体物理、地球物理、生物物理等)的应用,以及物理学的一些最新成就。由于全书是根据课堂讲授的录音整理编辑的,它在一定程度保留了费恩曼讲课的生动活泼、引人入胜的独特风格。

《费恩曼物理学讲义》从普通物理水平出发,注重物理分析,深入浅出,避免运用高深繁琐的数学方程,因此具有高中以上物理水平和初等微积分知识的读者阅读起来不会感到十分困难。至于大学物理系的师生和物理工作者更能从此书中获得教益。

1989年,为纪念费恩曼逝世一周年,原书编者重新出版本书,并增加了介绍费恩曼生平的短文和新的序言。2010年,编者根据五十多年来世界各国在阅读和使用本书过程中提出的意见,对全书(三卷)存在的错误和不当之处(885处)进行了订正,并使用新的电子版语言和现代作图软件对全书语言文字、符号、方程及插图进行重新编辑出版,称为新千年版。本书就是根据新千年版翻译的。

本书的费恩曼自序、前言及本卷第1至10章、15章、16章、37至48章、52章由郑永令在吴子仪译稿的基础上重译,第11章、17至25章由华宏鸣翻译,第12章、49章由诸长生翻译,第13和14章由范膺翻译,第26至34章由郑永令翻译,《费恩曼物理学讲义》另序、关于费恩曼及第35和36章由潘笃武翻译,第50和51章由钟万衡翻译。原译稿曾由郑广垣、王福山、苏汝铿校阅。由于译者水平所限,错误在所难免,欢迎广大读者批评指正。

译 者

2012年10月

关于费恩曼

理查德·费恩曼(R. P. Feynman)1918 年生于纽约市,1942 年在普林斯顿大学获得博士学位。第二次世界大战期间,尽管当时他还很年轻,就已经在洛斯阿拉莫斯的曼哈顿计划中发挥了重要作用。以后,他在康奈尔大学和加利福尼亚理工学院任教。1965 年,因在量子电动力学方面的工作和朝永振一郎及施温格尔(J. Schwinger)同获诺贝尔物理学奖。

费恩曼博士获得诺贝尔奖是由于成功地解决了量子电动力学的理论问题。他也创立了说明液氦中超流动性现象的数学理论。此后,他和盖尔曼(M. Gell-Mann)一起在 β 衰变等弱相互作用领域内做出了奠基性的工作。在以后的几年里,他在夸克理论的发展中起了关键性的作用,提出了高能质子碰撞过程的部分子模型。

除了这些成就之外,费恩曼博士将新的基本计算技术及记号法引进物理学,首先是无处不在的费恩曼图,在近代科学历史中,它比任何其他数学形式描述都更大地改变了对基本物理过程形成概念及进行计算的方法。

费恩曼是一位卓越的教育家。在他获得的所有奖项中,他对 1972 年获得的奥斯特教学奖章特别感到自豪。在 1963 年第一次出版的《费恩曼物理学讲义》被《科学美国人》杂志的一位评论员描写为"难啃的但却富于营养并且津津有味。25 年后它仍是教师和最优秀的初学学生的指导书"。为了使外行的公众增加对物理学的了解,费恩曼博士写了《物理定律和量子电动力学的性质:光和物质的奇特理论》。他还是许多高级出版物的作者,这些都成为研究人员和学生的经典参考书和教科书。

费恩曼是一个活跃的公众人物。他在挑战者号调查委员会里的工作是众所周知的,特别是他的著名的 O 型环对寒冷的敏感性的演示,这是一个优美的实验,除了一杯冰水和 C 形钳以外其他什么也不需要。费恩曼博士 1960 年在加利福尼亚州课程促进会中的工作却很少人知道,他在会上指责教科书的平庸。

仅仅罗列费恩曼的科学和教育成就还没有充分抓住这个人物的本质。即使是他的最最技术性的出版物的读者都知道,费恩曼活跃的多面的人格在他所有的工作中都闪闪发光。除了作为物理学家,在各种不同的时候:他是无线电修理工,是锁具收藏家、艺术家、舞蹈家、邦戈(bongo)鼓手,以至玛雅象形文字的破译者。他的世界是永远的好奇,他是一个典型的经验主义者。

费恩曼于 1988 年 2 月 15 日在洛杉矶逝世。

新千年版前言

自理查德·费恩曼在加利福尼亚理工学院讲授物理学导论课程以来,已经过去快 50 年了。这次讲课产生了这三卷《费恩曼物理学讲义》。在这 50 年中,我们对物理世界的认识已经大大改变了,但是《费恩曼物理学讲义》的价值仍旧存在。由于费恩曼对物理学独到的领悟和教学方法,费恩曼的讲义今天仍像第一次出版时那样具有权威性。这些教本已在全世界范围内被初学者,也被成熟的物理学家研读;它们已被翻译成至少 12 种语言,仅仅英语的印刷就有 150 万册以上。或许至今为止还没有其他物理学书籍有这样广泛的影响。

新千年版迎来了《费恩曼物理学讲义(FLP)》的新时代:21 世纪的电子出版物时代。FLP 改变为 eFLP,本文和方程式用LATEX电子排字语言表示,所有的插图用现代绘图软件重画。

这一版的印刷本的效果并没有什么特别之处,它看上去几乎完全和学物理的学生都已熟悉并热爱的最初的红色书一样。主要的差别在于扩大并改进了的索引,以前的版本第一次印刷以来的 50 年内读者们发现的 885 篇错误的改正,以及改正未来的读者可能发现的错误的便利。关于这一点我以后还要谈到。

这一版的电子书版本以及加强电子版不同于 20 世纪的大多数技术书籍的电子书,如果把这种书籍的方程式、插图、有时甚至包括课文,放大以后都成为多个像素。新千年版的LATEX稿本有可能得到最高质量的电子书,书页上的所有的面貌特征(除了照片)都可以无限制地放大而始终保持其精确的形状和细锐度。带有费恩曼原初讲课的声音和黑板照相、还带有和其他资源的联接的加强电子版是新事物,(假如费恩曼还在世的话)这一定会使他极其高兴。*

费恩曼讲义的回忆

这三卷书是一套完备的教科书。它们也是费恩曼在 1961—1964 年给本科生上物理学课的历史记录,这是加利福尼亚理工学院的一年级和二年级学生,无论他们主修什么课程,都必须上的一门课。

读者们可能和我一样很想知道,费恩曼的讲课对听课的学生的影响如何。费恩曼在这几本书的前言中提供了多少有些负面的看法。他写道:“我不认为我对学生做得很好”。马修·桑兹在他的《费恩曼物理学指导手册》的回忆文章中给出了完全正面的观点。出于好

* 原文“What would have given Feynman great pleasure”是虚拟式的句子,中文没有相当于英语虚拟式的句法,所以加上括号内的句子。——译者注

奇,2005年春天,我和从费恩曼1961—1964班级(大约150个学生)中半随机地挑选一组17位学生通过电子邮件或面谈联系——这些学生中有些在课堂上有很大的困难,而有一些很容易掌握课程;他们主修生物学,化学,工程,地理学,数学及天文学,还包括物理学。

经过了这些年,可能已经在他们的记忆中抹上了欣快的色彩,但大约有80%回忆起费恩曼的讲课觉得是他们大学时光中精彩的事件。“就像上教堂。”听课是“一个变形改造的经历”,“一生的重要阅历,或许是我从加利福尼亚理工学院得到的最重要的东西。”“我是一个主修生物学的学生,但费恩曼的讲课在我的本科生经历中就像在最高点一样突出……虽然我必须承认当时我不会做家庭作业并且总是交不出作业。”“我当时是课堂上最没有希望的学生之一,但我从不缺一堂课……我记得并仍旧感觉到费恩曼对于发现的快乐……他的讲课具有一种……感情上的冲击效果,这在印刷的讲义中可能失去了。”

相反,好些学生,主要由于以下两方面问题,而具有负面的记忆。(ⅰ)“你无法通过上课学会做家庭作业。费恩曼太灵活了——他熟知解题技巧和可以作哪些近似,他还具有基于经验和天赋的直觉,这是初学的学生所不具备的。”费恩曼和同事们在讲课过程中知道这一缺陷,做了一些工作,部分材料已编入《费恩曼物理学指导手册》:费恩曼的三次习题课以及罗伯特·莱顿和罗各斯·沃格特(Rochus Vogt)选编的一组习题和答案。(ⅱ)由于不知道下一节课可能会讨论什么内容产生一种不安全感,缺少与讲课内容有任何关系的教科书或参考书,其结果是我们无法预习,这是十分令人丧气的……我发现在课堂上的演讲是令人激动但却是很难懂,但(当我重建这些细节的时候发现)它们只是外表上像梵文一样难懂。当然,有了这三本《费恩曼物理学讲义》,这些问题已经得到了解决。从那以后的许多年,它们就成了加州理工学院学生学习的教科书,直到今天它们作为费恩曼的伟大遗产还保持着活力。

改错的历史

《费恩曼物理学讲义》是费恩曼和他的合作者罗伯特·莱顿及马修·桑兹非常仓促之中创作出来的,根据费恩曼的讲课的录音带和黑板照相(这些都编入这新千年版的增强电子版)加工扩充而成*。由于要求费恩曼、莱顿和桑兹高速度工作,不可避免地有许多错误隐藏在第一版中。在以后几年中,费恩曼收集了加州理工学院的学生和同事以及世界各地的读者发现的、长长的、确定的错误列表。在20世纪60年代和70年代早期,费恩曼在他的紧张的生活中抽出时间来核实第1卷和第2卷中确认的大多数,不是全部错误,并在以后的印刷中加入了勘误表。但是费恩曼的责任感从来没有高到超过发现新事物的激情而促使他处理第3卷中的错误。**在1988年他过早的逝世后,所有三卷的勘误表都存放到加州理工学院档案馆,它们躺在那里被遗忘了。

* 费恩曼的讲课和这三本书的起源的说法请参阅这三本书每一本都有的《费恩曼自序》和《前言》,也可参看《费恩曼物理学指导手册》中马修·桑兹的回忆以及1989年戴维·古德斯坦(David Goodstein)和格里·诺格鲍尔(Gerry Neugebauer)撰写的《费恩曼物理学讲义纪念版》特刊前言,它也刊载在2005年限定版中。

** 1975年,他开始审核第3卷中的错误,但被其他事情所分心,因而没有完成这项工作,所以没有作出勘误。

2002年，拉尔夫·莱顿(Ralph Leighton)(已故罗伯特·莱顿的儿子，费恩曼的同胞)告诉我，拉尔夫的朋友迈克尔·戈特里勃(Michael Gottlieb)汇编了老的和长长的新的勘误表。莱顿建议加州理工学院编纂一个改正所有错误的《费恩曼物理学讲义》的新版本，并将他和戈特里勃当时正在编写的新的辅助材料——《费恩曼物理学指导手册》一同出版。

费恩曼是我心目中的英雄，也是亲密的朋友。当我看到勘误表和提交的新的一卷的内容时，我很快就代表加州理工学院(这是费恩曼长时期的学术之家，他、莱顿和桑兹已将《费恩曼物理学讲义》所有的出版权利和责任都委托给她了)同意了。一年半以后，经过戈特里勃细微工作和迈克尔·哈特尔(Micheal Hartl)(一位优秀的加州理工学院博士后工作者，他审校了加上新的一卷的所有的错误)仔细的校阅，《费恩曼物理学讲义》的2005限定版诞生了，其中包括大约200处勘误。同时发行了费恩曼、戈特里勃和莱顿的《费恩曼物理学指导手册》。

我原来以为这一版是“定本”了。出乎我意料的是全世界读者热情响应。戈特里勃呼吁大家鉴别出更多错误，并通过创建的费恩曼讲义网站 www. feynmanlectures. info 提交给他。从那时起的五年内，又提交了965处新发现的错误，这些都是从戈特里勃、哈特尔和纳特·博德(Nate Bode)(一位优秀的加州理工学院研究生，他是继哈特尔之后的加州理工学院的错误检查员)的仔细校对中遗漏的。这些965处被检查出来的错误中80处在《定本》的第四次印刷(2006年8月)中改正了，余下的885处在这一新千年版的第一次印刷中被改正(第1卷中332处，第2卷中263处，第3卷200处)*，这些错误的详情可参看 www. feynman lectures. info.

显然，使《费恩曼物理学讲义》没有错误已成为全世界的共同事业。我代表加州理工学院感谢2005年以来作了贡献的50位读者以及更多的在以后的年代里会作出贡献的读者。所有贡献者的名字都公示在 www. feynmanlectures. info /flp-errata. html 上。

几乎所有的错误都可分为三种类型：(ⅰ)文字中的印刷错误；(ⅱ)公式和图表中的印刷和数学错误——符号错误，错误的数字(例如，应该是4的写成5)，缺失下标、求和符号、括号和方程式中一些项；(ⅲ)不正确的章节、表格和图的参见条目。这几种类型的错误虽然对成熟的物理学家来说并不特别严重，但对于初识费恩曼的学生，就可能造成困惑和混淆。

值得注意的是，在我主持下改正的1 165处错误中只有不多几处我确实认为是真正物理上的错误。一个例子是第二卷，5—9页上一句话，现在是“……接地的封闭导体内部没有稳定的电荷分布不会在外部产生[电]场”(在以前的版本中漏掉了接地一词)。这一错误是好些读者都曾向费恩曼指出过的，其中包括威廉和玛丽学院(The College of William and Mary)学生比尤拉·伊丽莎白·柯克斯(Beulah Elizabeth Cox)，她在一次考试中依据的是费恩曼的错误的段落。费恩曼在1975年给柯克斯女士的信中写道：“你的导师不给你分数是对的，因为正像他用高斯定律证明的那样，你的答案错了。在科学中你应当相信逻辑和论据、仔细推理而不是权威。你也正确阅读和理解了书本。我犯了一个错误，所以书错了。当时我或许正想着一个接地的导电球体，或别的；使电荷在(导体球)内部各处运动而不影响外部的事物。我不能确定当时是怎样做的。但我错了。你由于信任我也错了。”**

* 原版如此。——译者注

** 《与习俗完全合理的背离，理查德·P·费恩曼的信件》288～289页，米歇尔·费恩曼(Michelle Feynman)编，Basic Books，纽约，2005。

这一新千年版是怎样产生的

2005年11月到2006年7月之间,340个错误被提交到费恩曼讲义网站 www. feynmanlectures. info.值得注意的是,其中大多数来自鲁道夫·普法伊弗(Rudolf Pfeiffer)博士一个人:当时是奥地利维也纳大学的物理学博士后工作者。出版商艾迪生·卫斯利(Addison Wesley),改正了80处错误,但由于费用的缘故而没有改正更多的错误:由于书是用照相胶印法印刷的,用1960年代版本书页的照相图出版印刷。改正一个错误就要将整个页面重新排字并要保证不产生新的错误,书页要两个不同的人分别各排一页,然后由另外几个人比较和校读。——如果有几百个错误要改正,这确是一项花费巨大的工作。

戈特里勃、普法伊弗和拉尔夫·莱顿对此非常不满意,于是他们制定了一个计划,目的是便于改正所有错误,另一目的是做成电子书的《费恩曼物理学讲义》的加强电子版。2007年,他们将他们的计划向作为加州理工学院的代理人的我提出,我热心而又谨慎。当我知道了更多的细节,包括《加强电子版本》中一章的示范以后,我建议加州理工学院和戈特里勃、普法伊弗及莱顿合作来实现他们的计划。这个计划得到三位前后相继担任加州理工学院物理学、数学和天文学学部主任——汤姆·汤勃列罗(Tom Tomlrello)、安德鲁·兰格(Andrew Lange)和汤姆·索伊弗(Tom Saifer)——的支持;复杂的法律手续及合同细节由加州理工学院的知识产权法律顾问亚当·柯奇伦(Adam Cochran)完成。《新千年版》的出版标示着该计划虽然很复杂但已成功地得到执行。尤其是:

普法伊弗和戈特里勃已将所有三卷《费恩曼物理学讲义》(以及来自费恩曼的课程并收入《费恩曼物理学指导书》的1 000多道习题)转换成LaTeX。《费恩曼物理学讲义》的图是在书的德文译者亨宁·海因策(Henning Heinze)的指导下,为用于德文版,在印度用现代的电子方法重画的。为了将海因策的插图的非独家使用于新千年英文版,戈特里勃和普法伊弗购买了德文版[奥尔登博(Oldenbourg)出版]的LaTeX方程式的非独家的使用权,普法伊弗和戈特里勃不厌其烦地校对了所有LaTeX文本和方程式以及所有重画的插图,并必要时作了改正。纳特·博德和我代表加州理工学院对课文、方程式和图曾作过抽样调查,值得注意的是,我们没有发现错误。普法伊勃和戈特里勃是惊人的细心和精确。戈特里勃和普法伊弗为约翰·沙利文(John Sullivan)在亨丁顿实验室安排了将费恩曼在1962—1964年黑板照相数字化,以及乔治·布卢迪·奥迪欧(George Blood Audio)将讲课录音磁带数字化——从加州理工学院教授卡弗·米德(Carver Mead)获得财政资助和鼓励,从加州理工学院档案保管员谢利·欧文(Shelly Erwin)处得到后勤支持,并从柯奇伦处得到法律支持。

法律问题是很严肃的。20世纪60年代,加州理工学院特许艾迪生·卫斯利发表印刷版的权利,20世纪90年代,给予分发费恩曼讲课录音和各种电子版的权利。在21世纪初,由于先后取得这些特许证,印刷物的权利转让给了培生(Pearson)出版集团,而录音和电子版转让给珀修斯(Perseus)出版集团。柯奇伦在一位专长于出版的律师艾克·威廉姆斯(Ike Williams)的协助下,成功将所有这些权利和珀修斯结合在一起,使这一新千年版成为可能。

鸣　　谢

我代表加州理工学院感谢这许多使这一新千年版成为可能的人们。特别是，我感谢上面提到的关键人物：拉尔夫·莱顿，迈克尔·戈特里勃，汤姆·汤勃列罗，迈克尔·哈特尔，鲁道夫·普法伊弗，亨宁·海因策，亚当·柯奇伦，卡弗·米德，纳特·博德，谢利·欧文，安德鲁·兰格，汤姆·索伊弗，艾克·威廉姆斯以及提交错误的50位人士（在 www.feynmanlectures.info 中列出）。我也要感谢米歇尔·费恩曼（Michelle Feynman）（理查德·费恩曼的女儿）始终不断的支持和建议，加州理工学院的艾伦·赖斯（Alan Rice）的幕后帮助和建议，斯蒂芬·普奇吉（Stephan Puchegger）和卡尔文·杰克逊（Calvin Jackson）给普法伊弗从《费恩曼物理学讲义》转为LaTeX的帮助和建议。迈克尔·菲格尔（Michael Figl）、曼弗雷德·斯莫利克（Manfred Smolik）和安德列斯·斯坦格尔（Andreas Stangl）关于改错的讨论，以及珀修斯的工作人员和（以前版本）艾迪生·卫斯利的工作人员。

基普·S·桑尼（Kip S. Thorne）
荣休理论物理费恩曼教授
加州理工学院
2010 年 10 月

费恩曼自序

这是我前年与去年在加利福尼亚理工学院对一二年级学生讲授物理学的讲义。当然，这本讲义并不是课堂讲授的逐字逐句记录，而是已经经过了编辑加工，有的地方多一些，有的地方少一些。我们的课堂讲授只是整个课程的一部分。全班 180 个学生每周两次聚集在大教室里听课，然后分成 15 到 20 人的小组在助教辅导下进行复习巩固。此外，每周还有一次实验课。

在这些讲授中，我们想要抓住的特殊问题是，要使充满热情而又相当聪明的中学毕业生进入加利福尼亚理工学院后仍旧保持他们的兴趣。他们在进入学院前就听说过不少关于物理学是如何有趣以及如何引人入胜——相对论、量子力学以及其他的新概念。但是，一旦他们学完两年我们以前的那种课程后，许多人就泄气了，因为教给他们意义重大、新颖的现代的物理概念实在太少。他们被安排去学习像斜面、静电学以及诸如此类的内容，两年过去，没什么收获。问题在于，我们是否有可能设置一门课程能够顾全那些比较优秀的、兴致勃勃的学生，使其保持求知热情。

我们所讲授的课程丝毫也不意味着是一门概况性的课程，而是极其严肃的。我想这些课程是对班级中最聪明的学生而讲的，并且可以肯定，这可能是对的，甚至最聪明的学生也无法完全消化讲课中的所有内容——其中加入了除主要讨论的内容之外的有关思想和概念多方面应用的建议。不过，为了这个缘故，我力图使所有的陈述尽可能准确，并在每种场合都指明有关的方程式和概念在物理学的主体中占有什么地位，以及——随着他们学习深入——应怎样作出修正。我还感到，重要的是要向这样的学生指出，他们应能理解——如果他们够聪明的话——哪些是从已学过的内容中推演出来的，哪些是作为新的概念而引进的。当出现新的概念时，假若这些概念是可推演的，我就尽量把它们推演出来，否则就直接说明这是一个新的概念，它根本不能用已学过的东西来阐明，也不可能予以证明，而是直接引进的。

在讲授开始时，我假定学生们在中学已学过一些内容，如几何光学、简单的化学概念，等等。我也看不出有任何理由要按一定的次序来讲授。就是说没有详细讨论某些内容之前，不可以提到这些内容。在讲授中，有许多当时还没有充分讨论过的内容出现。这些内容比较完整的讨论要到以后学生的预备知识更齐全时再进行。电感和能级的概念就是例子，起先，只是以非常定性的方式引入这些概念，后来再进行较全面的讨论。

在针对那些较积极的学生的同时，我也要照顾到另一些学生，对他们来说，这些外加的五彩缤纷的内容和不重要的应用只会使其感到头痛，也根本不能要求他们掌握讲授中的大部分内容。对这些学生而言，我要求他们至少能学到中心内容或材料的脉络。即使他不理解一堂课中的所有内容，我希望他也不要紧张不安。我并不要求他理解所有的内容，只要求他理解核心的和最确切的面貌。当然，对他来说也应当具有一定的理解能力，来领会哪些是主要定理和主要概念，哪些则是更高深的枝节问题和应用，这些要过几年他才会理解。

在讲课过程中有一个严重困难:在课程的讲授过程中一点也没有学生给教师的反馈来指示讲授的效果究竟如何。这的确是一个很严重的困难,我不知道讲课的实际效果的好坏。整个事件实质上是一种实验。假如要再讲一次的话,我将不会按同样的方式去讲——我希望我不会再来一次! 然而,我想就物理内容来说,第一年的情形看来还是十分满意的。

但在第二年,我就不那么满意了。课程的第一部分涉及电学和磁学,我想不出什么真正独特的或不同的处理方法,也想不出什么比通常的讲授方式格外引人入胜的方法。因此在讲授电磁学时,我并不认为自己做了很多事情。在第二年末,我原来打算在电磁学后再多讲一些物性方面的内容,主要讨论这样一些内容如基本模式、扩散方程的解、振动系统、正交函数等等,并且阐述通常称为"数学物理方法"的初等部分内容。回顾起来,我想假如再讲一次的话,我会回到原来的想法上去,但由于没有要我再讲这些课程的打算,有人就建议介绍一些量子力学——就是你们将在第3卷中见到的——或许是有益的。

显然,主修物理学的学生们可以等到第三年学量子力学。但是,另一方面,有一种说法认为许多听我们课的学生是把学习物理作为他们对其他领域的主要兴趣的背景;而通常处理量子力学的方式对大多数学生来说这些内容几乎是无用的,因为他们必须花费相当长的时间来学习它。然而,在量子力学的实际应用中——特别是较复杂的应用中,如电机工程和化学领域内——微分方程处理方法的全部工具实际上是用不到的。所以,我试图这样来描述量子力学的原理,即不要求学生首先掌握有关偏微分方程的数学。我想,即使对一个物理学家来说,我想试着这样做——按照这种颠倒的方式来介绍量子力学——是一件有趣的事,由于种种理由,这从讲课本身或许会明白。不过我认为,在量子力学方面的尝试不是很成功,这主要是因为在最后我实际上已没有足够的时间(例如,我应该再多讲三四次来比较完整地讨论能带、概率幅的空间的依赖关系等这类问题)。而且,我过去从未以这种方式讲授过这部分课程,因此缺乏来自学生的反馈就尤其严重了。我现在相信,还是应当迟一些讲授量子力学。或许有一天我会有机会再来讲授这部分内容,到那时我将会讲好它。

在这本讲义中没有列入有关解题的内容,这是因为另有辅导课。虽然在第一年中,我的确讲授过三次关于怎样解题的内容,但没有将它们收在这里。此外,还讲过一次惯性导航,应该在转动系统后面,遗憾的是在这里也略去了。第五讲和第六讲实际上是桑兹讲授的,那时我正外出。

当然,问题在于我们这个尝试的效果究竟如何。我个人的看法是悲观的,虽然与学生接触的大部分教师似乎并不都有这种看法。我并不认为自己在对待学生方面做得很出色。当我看到大多数学生在考试中采取的处理问题的方法时,我认为这种方式是失败了。当然,朋友们提醒我,也有一二十个学生——非常出人意外地——几乎理解讲授的全部内容,并且非常积极地攻读有关材料,兴奋地、感兴趣地钻研许多问题。我相信,这些学生现在已具备了一流的物理基础,他们毕竟是我想要培养的学生。但是,"教育之力量鲜见成效,除非施之于天资敏悟者,然若此又实为多余。"[吉本(Gibbon)*]

但是,我并不想使任何一个学生完全落在后面,或许我曾经这样做的。我想,我们能够更好地帮助学生的一个办法是,多花一些精力去编纂一套能够阐明讲课中的某些概念的习题。习题能够充实课堂讲授,使讲过的概念更加实际,更加完整和更加易于牢记。

---

* Edward Gibbon (1737—1794),英国历史学家。——译者注

然而，我认为要解决这个教育问题就要认识到最佳的教学只有当学生和优秀的教师之间建立起个人的直接关系，在这种情况下，学生可以讨论概念、考虑问题、谈论问题，除此之外，别无他法。仅仅坐在课堂里听课或者只做指定的习题是不可能学到许多东西的。但是，现在我们有这么多学生要教育，因此我们必须尽量找出一种代替理想情况的办法。或许，我的讲义可以作出一些贡献；也许在某些小地方有个别教师和学生会从讲义中受到一些启示或获得某些观念，当他们彻底思考讲授内容，或者进一步发展其中的一些想法时，他们或许会得到乐趣。

R. P. 费恩曼

1963 年 6 月

前　言

本书是根据R. P. 费恩曼教授在加利福尼亚理工学院1961—1962学年所讲物理学导论课编写的，它包括全校一二年级学生念的两年导论课的第一年的内容，在1962—1963学年还继续讲授了这门课程的第二年的内容。这些讲授构成四年来对导论课所作的根本性修改的主要部分。

课程要进行彻底的修改，不但是由于近数十年来物理学迅速发展的需要，而且还有鉴于高中数学课内容改进后，入校新生的数学能力有了稳步的提高。我们希望利用有利的条件，并且希望能在课程中介绍足够的现代题材，从而使这门课程能引起学生的注意和兴趣，并能体现出现代物理的状况。

在应当包括哪些内容以及怎样介绍这些内容方面，为了能形成各种想法，我们鼓励物理系的许多教师以提纲的形式对课程的修改提出意见。人们对其中的几种想法进行了详细的讨论和评述。大家几乎立即同意，认为仅仅换一本教科书或者重新写一本教科书，是不可能完成对这门课程的彻底修改的。新的课程应当以每周讲二三次的一系列讲授为中心，而随着课程的进展，相应的教材内容将作为其从属的工作而产生出来，在讲课的同时，也要安排适当的实验来配合讲授内容。据此提出了课程的初步轮廓。但大家也认识到，这是不完全的和试验性的，有待于实际承担讲授工作的人作出相当大的修改。

关于最后究竟以什么方式来实施这门课程，大家考虑过几种方案。这些方案大多类似，由 N 个人进行合作，均匀地分担责任，即每个人负责 $1/N$ 的材料，进行讲授，并使他这部分成文。然而，由于没有足够的教师，同时因为参加者的个性与哲学见解不同，很难保持一致的观点。因此这种方案看来难以实现。

桑兹教授令人鼓舞的想法是他领悟到，我们实际上所拥有的能力不只是可以建立一门新的、不同的物理课程，而且有可能创立一门完全独特的课程。他建议由费恩曼教授来准备和进行讲授，并用磁带录音。再将这些录音抄写出来并加以编辑，就成为新课程的教科书了。我们所采用的基本上就是这样的方案。

起先我们估计必要的编辑工作不会很多，大体上只是一些补充图画、核对标点、语法之类的事，完全可以由一两个研究生花部分时间去完成。遗憾的是我们很快就发现这种估计是不正确的。事实上，即使对题材不进行重新组织或修改(有时这是必要的)，只是把逐字逐句的记录改写成可供阅读的形式，就需要相当多的编辑工作。而且，这不是一个技术编辑或一个研究生就能办得了的事，而是需要一位专业物理工作者对每次讲授的内容专心一致地花上10～20小时才行！

编辑任务的艰巨，再加上要尽快把材料发给学生，这就大大地限制了对材料所能作出的推敲润色工作。因此，我们只能指望完成一本初步的、但专业上保持正确的、立即可以使用

的讲义,而不是一本可视为最终的或完备的讲义。由于本校学生急需的份数较多,同时还由于一些外校师生的鼓励和关心,我们决定不再等待进一步的大量修改——这样的工作也许不会再做——就将这些材料以这种初步的形式出版。我们对内容的完整,文体的流畅或组织的逻辑性都不抱幻想;事实上,我们打算在最近的将来对课程作一些小的修改,并且希望它无论在形式上还是在内容上,都不要停滞不前。

除去构成课程核心部分的讲授外,还有必要向学生提供适当的练习来启发他们的经验和才智,以及提供适当的实验使他们在实验室中能与讲课内容有第一手的接触。这两方面都还没有像讲课内容那样成熟,但也都取得了相当大的进展。在讲授过程中已选编了一些习题,并已进行增补扩充以供下一年使用。然而,我们还不能认为,在应用讲课内容方面,这些习题已具有足够的深度和广度,从而可使学生充分发挥其才智。所以,我们将这本习题集单独出版,以便鼓励经常的修订。

内尔(H. V. Neher)教授为新课程设计了许多新实验。其中有几个实验利用了空气轴承所显示的极低摩擦,例如新的直线气槽,用它可以对一维运动、碰撞和简谐振动作定量测量;利用空气支承、空气驱动的麦克斯韦陀螺可以研究加速转动,回转仪的进动和章动。预计发展新的供实验室用的实验这件事将会持续相当一段时间。

本书的修订计划是在莱顿(R. B. Leighton)、内尔和桑兹(M. Sands)教授指导下进行的。官方参与此计划的有来自物理、数学和天文部门的费恩曼、诺伊格鲍尔(G. Neugebauer)、萨顿(R. M. Sutton)、斯特布勒(H. P. Stabler)、斯特朗(F. Strong)和沃格特(R. Vogt)教授,以及来自工程科学部门的考伊(T. Caughey)、普莱西特(M. Plesset)和威尔茨(C. H. Wilts)教授。深深感谢所有为本书修订计划作出贡献的极有价值的帮助。我们还要特别感谢福特基金会(Ford Foundation)的资助,没有他们的经济资助,本计划是不可能顺利完成的。

R. B. 莱顿

1963 年 7 月

目　录

第1章 原子的运动

§1-1 引 言

这是一门两学年的物理课程，我们开设这门课程的着眼点是你们，有志成为物理学家的读者们。当然，情况并非一定如此，但是每门学科的教授都是这样设想的！假如你打算成为一名物理学家，就要学习很多东西，因为这是一个200年以来空前蓬勃发展的知识领域。事实上，你会想到，这么多的知识是不可能在四年内学完的，确实不可能，你们还得到研究生院去继续学习。

相当出人意外的是，尽管在这么长时间中做了极其大量的工作，但却有可能把这一大堆成果大大地加以浓缩。这就是说，找到一些概括我们所有知识的定律。不过，即使如此，掌握这些定律也是颇为困难的。因此，在你对科学的这部分与那部分题材之间的关系还没有一个大致的了解之前就让你去钻研这个庞大的课题的话，那就不公平了。根据这一思路，前三章将略述物理学与其他科学的关系、各门学科之间的相互联系以及科学的含义，这有助于你们对本学科产生一种切身的感受。

你们可能会问，在讲授欧几里得几何时，先是陈述公理，然后作出各种各样的推论，那为什么在讲授物理学时不能先直截了当地列出基本定律，然后再就一切可能的情况说明定律的应用呢？（这样一来，如果你不满足于要花四年时间来学习物理，那你是否打算在四分钟内学完它？）我们不能这样做是基于两个理由。第一，我们还不知道所有的基本定律：未知领域的边界在不断地扩展；第二，正确地叙述物理定律要涉及到一些非常陌生的概念，而叙述这些概念又要用到高等数学。因此，即使为了知道词的含义，也需要大量的预备性的训练。的确，那样做是行不通的，我们只能一步一步地来。

大自然整体的每一部分始终只不过是对于整个真理——或者说，对于我们至今所了解的整个真理——的逼近。实际上，人们知道的每件事都只是某种近似，因为我们懂得，到目前为止，我们确实还不知道所有的定律。因此，我们学习一些东西，正是为了要重新忘掉它们，或者更确切地说是为了改正以前对它们的谬见。

科学的原则——或者简直可称为科学的定义为：实验是一切知识的试金石。实验是科学"真理"的唯一鉴定者。但什么是知识的源泉呢？那些要检验的定律又是从何而来的呢？从某种意义上说，实验为我们提供了种种线索，因此可以说是实验本身促成了这些定律的产生。但是，要从这些线索中作出重大的判断，还需要有丰富的想象力去对蕴藏在所有这些线索后面的令人惊讶、简单而又非常奇特的图像进行猜测，然后再用实验来验证我们的猜测究竟对不对。这个想象过程是很艰难的，因此在物理学中有所分工：理论物理学家进行想象、推演和猜测新的定律，但并不做实验；而实验物理学家则进行实验、想象、推演和猜测。

我们说过，大自然的定律是近似的：起先我们找到的是"错"的定律，然后才发现"对"的

定律。那么,一个实验怎么可能是"错误"的呢?首先,通常是:仪器上有些毛病,而你又没有注意。但是这种问题是容易确定的,可以通过反复检查。如果不去纠缠在这种次要的问题上,那么实验的结果怎么可能是错误的呢?这只可能是由于不够精确罢了。例如,一个物体的质量似乎是从来不变的:转动的陀螺与静止的陀螺一样重。结果就发现了一条"定律":质量是个常数,与速率无关。然而现在发现这条"定律"却是不正确的。质量实际上随着速度的增大而增加,但是要速度接近于光速,才会显著增加。正确的定律是:如果一个物体的速率小于 100 mi/s,那么它的质量的变化不超过百万分之一。在这种近似形式下,这就是一条正确的定律。因此,人们可能认为新的定律实际上并没有什么有意义的差别。当然,这可以说对,也可以说不对。对于一般的速率我们当然可以忘掉它,而用简单的质量守恒定律作为一种很好的近似。但是对于高速情况这就不正确了:速率越高,就越不正确。

最后,最有趣的是,就哲学上而言,使用近似的定律是完全错误的。纵然质量的变化只是一点点,我们的整个世界图景也得改变。这是有关在定律后面的哲学或基本观念的一件十分特殊的事。即使是极小的效应,有时在我们的观念上也会引起深刻的变化。

那么,我们应该首先教什么呢?是否应先教那些正确的、陌生的定律以及有关的奇特而困难的观念,例如相对论、四维时空等等之类?还是应先教简单的"质量守恒"定律,即那条虽然只是近似的,但并不包含那种困难的观念的定律?前一条定律比较引人入胜,比较奇特和比较有趣,但是后一条定律在开始时比较容易掌握,它是真正理解前一种观念的第一步。这个问题在物理教学中会一再出现,在不同的时候,我们将要用不同的方式去解决它。但是在每个阶段都值得去弄明白:我们现在所知道的是什么?它的正确性如何?它怎样适应其他各种事情?当我们进一步学习后它会有怎样的变化?

让我们按照我们所理解的当代科学(特别是物理学,但是也包括周围有关的其他科学)的轮廓继续讲下去,这当我们以后专门注意某些特殊问题时,就会对于背景情况有所了解——为什么这些特殊问题是有趣的?它们又是怎样适应整体结构的?

那么,我们世界的总体图像是怎样的呢?

§1-2 物质是原子构成的

假如由于某种大灾难,所有的科学知识都丢失了,只有一句话可传给下一代,那么怎样才能用最少的词汇来传达最多的信息呢?我相信这句话是原子的假设(或者说原子的事实,无论你愿意怎样称呼都行):所有的物体都是由原子构成的——这些原子是一些小小的粒子,它们一直不停地运动着,当彼此略微离开时相互吸引,当彼此过于挤紧时又互相排斥。只要稍微想一下,你就会发现,在这一句话中包含了大量的有关这个世界的信息。

为了说明原子观念的重要作用,假设有一滴直径为 1/4 in 的水珠,即使我们非常贴近地观察,也只能见到光滑的、连续的水,而没有任何其他东西,并且即使我们用最好的光学显微镜(大致可放大 2 000 倍)把这滴水放大到 40 ft 左右(相当于一个大房间那样大),然后再靠得相当近地去观察,我们所看到的仍然是比较光滑的水,不过到处有一些足球状的东西在来回游动,非常有趣。这些东西是草履虫。你们可能就到此为止,对草履虫以及它的摆动的纤毛和卷曲的身体感到十分好奇。也许除了把草履虫放得更大一些,看看它的内部外,就不再进一步观察了。当然这是生物学的课题,但是现在让我们继续观察下去,再次把水放大

2 000 倍，更近地观察水这种物质本身。这时，水滴已放大到有 15 mi 那样大了，如果你再十分贴近地观察，你将看到水中充满了某种不再具有光滑外表的东西，而是有些像从远处看过去挤在足球场上的人群。为了能看出挤满的究竟是些什么东西，我们再把它放大 250 倍后就会看到某种类似于图 1-1 所示的情景。这是放大了 10 亿倍的水的图像，但是在以下这几方面是理想化了的：首先，各种粒子用简单的方式画成有明显的边缘，这是不精确的；其次，为了简便起见，把它们都画成二维的排列，实际上它们当然是在三维空间中运动的。注意在图中有两类"斑点"或圆，它们各表示氧原子(黑色)和氢原子(白色)，而每个氧原子有两个氢原子和它连接在一起(一个氧原子与两个氢原子组成的一个小组称为一个分子)。图像中还有一个被理想化的地方是自然界中的真实粒子总是在不停地摇晃跳动，彼此绕来绕去地转着，因而你必须把这幅画面想象成能动的而不是静止的。还有一件不能在图上说明的事实是粒子会"粘在一起"的，它们彼此吸引着，这个被那个拉住等等，可以说，整个一群"胶合在一起"。但同时，这些粒子也不是挤到一块儿，如果你把两个粒子挤得太紧，它们就互相推斥。

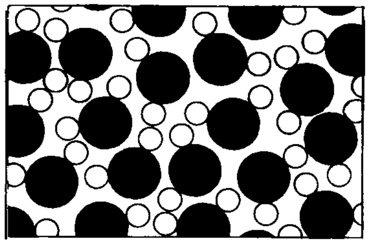


图 1-1 放大 10 亿倍的水

原子的半径为 $1\times10^{-8}\sim2\times10^{-8}$ cm，10^{-8} cm 现在称为 1 Å(这只是另一个名称)，所以我们说原子的半径为 1～2 Å。另一个记住原子大小的方法是这样的：如果把苹果放大到地球那样大，那么苹果中的原子就差不多有原来的苹果那样大。

现在，想象这个大水滴是由所有这些跳动着的粒子一个挨一个地"粘合"起来的，水能保持一定的体积而并不散开，因为它的分子彼此吸引。如果水滴在一个斜面上，它能从一个位置移动到另一个位置。水会流动，但是并不会消失——它们并没有飞逝，因为分子之间有吸引力。这种跳动就是我们所说的热运动。当温度升高时，这种运动就增强了。如果我们加热水滴，跳动就增加，原子之间的空隙也增大。如果继续加热到分子间的引力不足以将彼此拉住时，它们就分开来飞散了。当然，这正是我们从水制取水蒸气的方法——提高温度。粒子由于运动的增强而飞散。

图 1-2 是一幅水蒸气的图像。这张水蒸气图像有一个不足之处：在通常的气压下整个房间里只有少数几个分子。决不可能像在这样一张图像中有三个以上的分子。在大多数情况下，这样大小的方块中可能连一个都不会有——不过碰巧在这张图中有两个半或三个分子(只有这样，图像才不会是完全空白的)。现在，比起水来，在水蒸气的情况下，我们可以更清楚地看到水所特有的分子。为了简单起见，将分子画成具有 120°的夹角。实际上，这个角是 105°3′，氢原子中心与氧原子中心之间的距离是 0.957 Å。这样，我们对这个分子了解得已很清楚了。

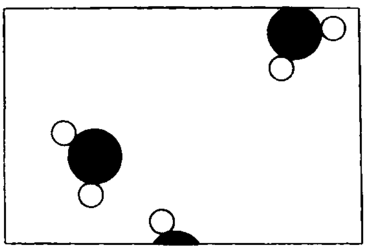


图 1-2 水蒸气

让我们来看一下，水蒸气或任何其他气体具有一些什么性质。这些气体分子是彼此分离的，它们打在墙上时，会反弹回来。设想在一个房间里有一些网球(100 个左右)不断地来回跳动，当它们打到墙上后，就将墙推离原位(当然，我们必须将墙推回去)。这意味着，气体

施加一个“颤动”的力，而我们粗糙的感官(并没有被我们自己放大10亿倍)只感到一个平均的推力。为了把气体限制在一定的范围之内，我们必须施加一个压力。图1-3是一个盛气体的标准容器(所有教科书中都有这种图)，一个配有活塞的汽缸，由于不论水分子的形状如何，情况都是一样，因此为简单起见，我们把它们画成网球形状或者小黑点，这些东西沿着所有的方向不停地运动着。由于有这么多的气体分子一直在撞击顶端的活塞，因此要使活塞不被这种不断的碰撞逐渐顶出来必须施加一定的力把活塞压下去，这个力称为压力(实际上，是压强乘以面积)。很清楚，这个力正比于面积，因为如果我们增大面积而保持每立方厘米内的分子数不变的话，那么分子与活塞碰撞次数增加的比例与面积增加的比例是相同的。

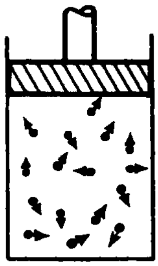


图 1-3

现在，让我们在这个容器内放入2倍的分子，以使密度增加1倍，同时让它们具有同样的速度，即相同的温度。那么，作为一种很好的近似，碰撞的次数也将增加1倍。由于每次碰撞仍然和先前那样“有力”，压力就正比于密度。如果我们考虑到原子之间的力的真实性质，那么由于原子之间的吸引，可以预期压力略有减少；而由于原子也占有有限的体积，则可以预期压力略有增加。无论如何，作为一个很好的近似，如果原子较少，密度足够低，那么，压力正比于密度。

我们还可以看一下其他情况。如果提高温度而不改变气体密度，亦即只增加原子的速率，那么在压力上会出现什么情况？当然，原子将撞击得更剧烈一些，因为它们运动得更快一些。此外，它们的碰撞更频繁了，因此压力将增加。你们看，原子理论的概念是多么简单！

我们来考虑另一种情况，假定活塞向下移动，原子就慢慢地被压缩在一个较小的空间里。当原子碰到运动着的活塞时，会发生什么情况呢？很显然，原子由于碰撞而提高了速率。例如，你可以试一下乒乓球从一个朝前运动的球拍弹回来时的情况，你会发现弹回的速率比打到球拍上的速率更大一些(一个特例是：如果一个原子恰好静止不动，那么在活塞碰上它以后，当然就运动了)。这样，原子在弹离活塞时比碰上去之前更“热”。因此所有容器中的分子的速率都提高了。这意味着，当我们缓慢压缩气体时，气体的温度会升高。结果，在缓慢压缩时，气体的温度将升高；而在缓慢膨胀时，气体的温度将降低。

现在回到我们的那滴水珠上去，从另一个角度去观察一下。假定现在降低水滴的温度，假定水的原子、分子的跳动逐渐减小。我们知道在原子之间存在着引力，因而过一会儿，它们就不能再跳得那么厉害了。图1-4表示在很低的温度下会出现什么样的情况。这时分子连接成一种新的图像，这就是冰。这个特殊的冰的图像不大正确，因为它只是二维的，但是它在定性上是正确的。有趣的一点是，对于每一个原子，都有它的确定位置。你们可以很容易地设想，如果我们用某种方式使冰粒一端的所有的原子按一定的方式排列，并让每个原子处在一定的位置上，那么由于互相连接的结构很牢固，几英里之外(在我们放大的比例下)的另一端也将有确定的位置。如果我们抓住一根冰棍的一端，另一端就会阻止我们把它拉出去。这种情况不像水那样由于跳动加强以致所有的原子以种种方式到处跑来跑去，因而结构也就被破坏了。固体与液体的差别就在于：在固体中，原子以某种称为晶体阵列的方式排列着，即使在较长的距离上它们的位置也不能杂乱无章。晶体一端的原子位置取决于

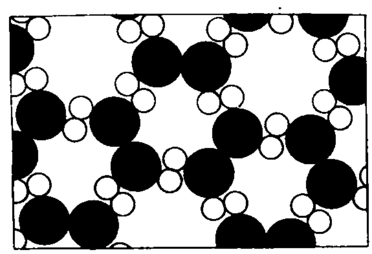


图 1-4 冰

晶体另一端的与之相距千百万个原子的排列位置。图 1-4 是一种虚构的冰的排列状况，它虽然包括了冰的许多正确的特征，但并不是真实的排列情况。正确的特征之一是这里具有一种六边形的对称性。你们可以看到：如果把画面绕一根轴转动 120°的话，它仍然回到原来的形状，因此，在冰里存在着一定的对称性，这说明为什么雪花具有六边形的外表。从图 1-4 中还可以看到为什么冰融解时会缩小。在这里列出的冰的晶体图样中有许多“孔”，真实的冰的结构也是如此，在排列打散后，这些孔就可以容纳分子。除了水和活字合金外，许多简单的物质在熔(融)化时都要膨胀，因为在固体的晶体结构中，原子是密集堆积的，而当熔化时，需要有更多的空间供原子活动，但是开放结构则会倒坍，体积反而收缩了，就像水的情况那样。

虽然冰有一种“刚性的”结晶形态，它的温度也会变化——冰也储存热量，如果我们愿意的话，就可以改变热量的储存。对冰来说，这种热量指的是什么呢？冰的原子并不是静止不动的，它们不断地摇晃着、振动着，所以虽然晶体存在着一种确定的次序——一种确定的结构，所有的原子仍都“在适当的位置”上振动，当我们提高温度时，它们振动的幅度就越来越大，直到离开原来的位置为止。我们把这个过程称为熔解。当降低温度时，振动的幅度越来越小，直到绝对零度时原子仍能有最低限度的振动，而不是停止振动。原子所具有的这种最低的振动不足以使物质熔解，只有一个例外，即氦。在温度降低时，氦原子的运动只是尽可能地减弱，但即使在绝对零度时也有足够的运动使之不至于凝固，除非把压力加得这样大，以致将原子都挤在一起。如果我们提高压力，也可以使它凝固。

§ 1-3 原 子 过 程

关于从原子的观点来描写固体、液体和气体，我们就讲到这里。然而原子的假设也可以描写过程，所以我们现在从原子的观点来考察一些过程。我们要考察的第一个过程与水的表面有关。在水的表面有些什么情况呢？设想水的表面上是空气，现在我们来把图画得更复杂一些——也更实际一些，如图 1-5 所示。我们看到，水分子仍然像先前那样，组成大量的水，但现在还能看到水的表面。在水面上我们发现一些东西：首先，水面上有水的分子，这就是水的蒸汽，在水面上总是有水蒸气的。(在水蒸气与水之间存在着一种平衡，这种平衡我们以后再讲。)此外，我们还发现一些别的分子：这里是两个氧原子彼此结合在一起组成的一个氧分子，那里是两个氮原子结合在一起组成的一个氮分子。空气几乎完全是由氮气、氧气、水蒸气组成的，此外还有少量的二氧化碳、氩气和其他一些气体。所以在水面上的是含有一些水蒸气的气体。那么，在这种情况下会发生什么事呢？水里的分子不断地晃来晃去。有时，在水面上有个别分子碰巧受到比通常情况下更大的冲击而被“踢”出表面。

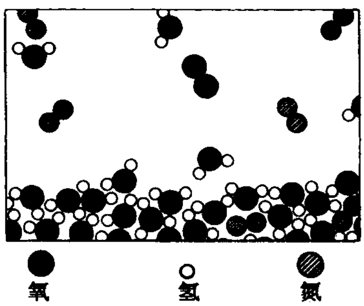


图 1-5 空气中水的蒸发

因为图 1-5是静止的画面，所以在图上难以看出所发生的事。但是我们可以想象表面附近的某一个分子刚好受到碰撞而飞了出去，或者也许另一个分子也受到碰撞而飞了出去。分子一个接着一个地跑了出去，水就消失了——蒸发了。但是如果把容器盖上，过了一会儿就会发

现在空气分子中有大量的水分子。水蒸气的分子不时地飞到水面,又回到水中。结果,我们看到那个看来死气沉沉的、无趣的事情——一杯盖好的可能已放了20年的水——实在包含了一直生气勃勃而有趣的现象。对我们这双肉眼而言,看不出有任何变化,但是如果能放大10亿倍来看的话,就能发现情况一直在变化:一些分子离开水面,另一些分子则回到了水面。

为什么我们看不出变化呢?因为有多少分子离开水面就会有多少分子回到水面!归根到底“没有任何事情发生”。如果现在我们把容器盖打开,使潮湿的空气吹走而代之以干燥空气,那么离开水面的分子数还是如先前那样多,因为这只取决于水分子晃动的程度,但是回到水面的分子数则大大地减少了,因为在水面上的水分子数已极其稀少。因此逸出水面的分子比进入水面的分子多,水就蒸发了。所以,如果你要使水蒸发的话,就打开风扇吧!

这里还有另一件事情:哪些分子会离开?一个分子能离开水面是由于它偶然比通常情况稍微多积累了一些能量,这样才能使它摆脱邻近分子的吸引。结果,由于离开水面的分子带走的能量比平均能量大,留在水中的分子的运动平均起来就比先前减弱。因此液体蒸发时会逐渐冷却。当然,当一个水蒸气分子从空气中跑向水面时,它一靠近水面就要突然受到一个很强的吸引。这就使它进入水中时具有更大的速度,结果就产生热量。所以当水分子离开水面时,它们带走了热量;而当它们回到水面时,则产生了热量。当然,如果不存在净的蒸发现象的话,什么结果也不会发生——水的温度并不改变。如果我们向水面上吹风,使蒸发的分子数一直占优势,水就会冷却。因此,要使汤冷却就得不停地吹!

当然,你们应当了解,刚才所说的那个过程实际上要比我们所指出的更为复杂。不仅水分子进入空气,不时还有氧分子或氮分子跑到水里,“消失”在水分子团中,这样空气就溶解在水中;氧和氮的分子进入水中,水里就有了空气。如果我们突然抽走空气,那么空气分子出来的要比进去的来得快,这样就形成了气泡。你们可能知道,这对潜水员是很不利的。

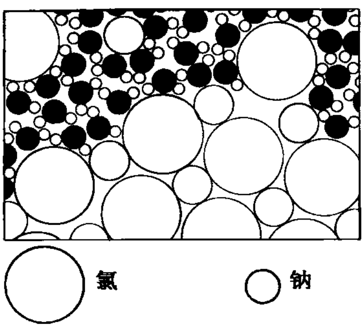


图 1-6 盐在水中的溶解

晶体	●	○	a(Å)
岩盐	Na	Cl	5.64
钾钠盐	K	Cl	6.28
	Ag	Cl	5.54
	Mg	O	4.20
方铅矿	Pb	S	5.97
	Pb	Se	6.14
	Pb	Te	6.34

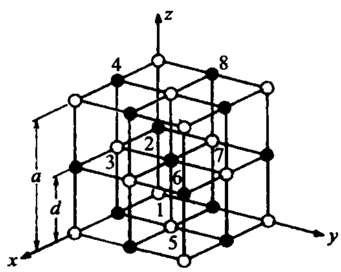


图 1-7

现在我们来考虑另一种过程。在图1-6中,我们从原子的观点来看固体在水中溶解。如果我们把结晶盐粒丢入水中,会出现什么情况呢?食盐是一种固体,一种晶体,并且具有“食盐原子”的有规则的排列。图1-7是普通食盐——氯化钠的三维结构图。严格地说,这种晶体不是由原子而是由我们所谓的离子构成的!离子就是带有额外电子的原子,或失去一些电子的原子。在食盐晶体中我们发现了氯离子(带有一个额外电子的氯原子)和钠离子(失去一个电子的钠原子)。在固态食盐中,所有的离子都由于电的作用而吸引在一起。但是当我们把食盐投到水里后就会发现,由于带负电的氧和带正电的氢对离子的引力,有一些

离子离散了。在图1-6中有一个氯离子松开来了,其他的原子则以离子的形式在水中浮动。这张图画得相当仔细。例如,注意水分子中的氢原子一端大多靠近氯离子,而在钠离子周围所见到的大多是氧原子的那一端,因为钠是正的,而水的氧原子一端是负的,它们之间有电的吸引。我们能不能从这幅图画中看出盐究竟是溶解于水中,还是从水中结晶出来?当然,我们看不出来,因为当某些原子离开晶体时,另一些原子又重新聚集到晶体上。整个过程是一个动态过程,犹如蒸发的情况,它取决于水中的盐的含量是超过还是少于形成平衡所需要的数量。所谓平衡我们指的是这种情况,即原子离开晶体的比率正好与回到晶体的比率相同。假如在水中几乎没有什么盐,离开的原子就比回去的原子多,食盐就溶解。但反过来讲,如果水里的"食盐原子"太多,那么回去的就多于离开的,食盐就结晶。

我们顺便说一下,物质的分子这个概念只是近似的,而且只是对某些种类的物质才有意义。很清楚,在水的情况下,三个原子彼此确实粘在一起。但是在固体的氯化钠情况下就不那么明确了。在氯化钠中钠离子和氯离子只是以立方体的形式排列。这里没有一种把它们自然分成"食盐分子"的方式。

现在回到我们的溶解与淀积的讨论上。如果增加食盐溶液的温度,那么原子离开的比率就会增加,而原子回来的比率也会增加。结果是一般很难预言会朝哪一个方向发展,固体溶解得多一些还是少一些。当温度提高时,大多数物质更易溶解,但是某些物质却更不易溶解。

§1-4 化学反应

到现在为止,在我们所描述的一切过程中,原子和离子的伙伴并没有变更,但是当然也有这种情况,原子的组合的确改变了,形成新的分子。图1-8就是说明这一情况的。在一个过程中如果原子的伙伴重新排列,我们就称之为化学反应。其他前面所描述的过程称为物理过程,但是两者之间并没有明显的界限(大自然并不关心我们究竟如何去称呼,它只知道不断地进行工作)。图1-8表示碳在氧气中的燃烧。在氧气中,两个氧原子紧紧地吸引在一起(为什么不是三个甚至四个吸引在一起?这是此类原子过程的一个很典型的特征。原子是非常特别的:它们喜欢一定的伙伴,一定的方向,等等。物理学的任务就是要分析每一个原子为什么想要它所希望要的东西。无论如何,两个氧原子形成了一个饱和的、适宜的分子)。

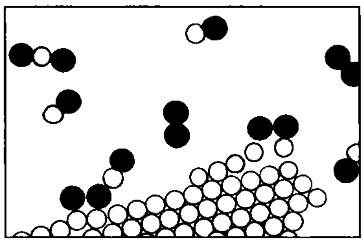


图1-8 碳在氧气中的燃烧

这些碳原子应该处于固态晶体之中(可以是石墨,也可以是金刚石*)。现在,比如说有一个氧分子跑到碳这边来,每个氧原子可以抓住一个碳原子而以一种新的组合——"碳-氧"——一起飞走,这就是所谓的一氧化碳气体分子,它的化学名称是CO。这种气体分子很简单:字母"CO"实际上就是这个分子的一个画像。但是碳吸引氧的能力比氧吸引氧或者碳吸引碳的能力更大。因此,在这个过程中氧原子可能在到达时只带有一点点能量,但是氧和碳的结合却是非常彻底而剧烈的,所有靠近它们的原子都吸收能量。于是就产

* 金刚石在空气中也可以燃烧。

生了大量的分子运动的能量——动能。当然,这就是燃烧。我们从氧和碳的结合得到了热量。这种热量通常是以热气体的分子运动的形式存在的,但是在某些情况下,由于热量非常大而发出了光。这就是产生火焰的过程。

此外,一氧化碳分子并不感到满足。它可能再缚住另一个氧原子,因此,可能出现远为复杂的反应:氧与碳会结合起来,同时偶而又与一氧化碳分子碰撞。于是一个氧原子可能结合到一个一氧化碳分子上,最终形成另一个分子,它包含一个碳原子和两个氧原子,称为二氧化碳,并以 CO_2 表示。假如我们以很快的速度在很少的氧气中燃烧碳的话(例如,在汽车引擎中,爆炸是如此迅速,以致没有时间形成二氧化碳)就形成了大量的一氧化碳。在许多这种重新排列的过程中,大量的能量被释放出来,依反应条件的不同而形成爆炸、火焰等。化学家研究了这些原子的排列情况,发现每一种物质都是某种类型的原子的排列。

为了说明这个概念,我们来考虑另一个例子。如果我们走到一个紫罗兰花圃里去,我们知道那是一种什么香气。这是某种分子或者说原子排列钻进了我们的鼻子。首先,这种分子是怎样钻进来的呢?这很容易。假如香气是飘浮在空气中的某种分子,它们就会到处晃动,四面八方地撞来撞去,很可能偶尔钻进了我们的鼻子。可以肯定,分子并不想特别进入我们的嗅觉器官。在挤成一堆的分子中,大家都无目的地到处徘徊,而碰巧有一些分子却发现自己原来已到达人的鼻子中了。

现在,化学家可以取一些像紫罗兰香气这样特殊的分子进行分析,然后告诉我们原子在空间的精确排列。我们知道二氧化碳分子的结构是简单而对称的:O—C—O(这也很容易用物理方法来确定)。然而,即使对化学中那些非常复杂的原子排列,人们也可以通过长期的、卓越的探索工作来查明其排列方式。图 1-9 是空气中紫罗兰香气图。我们再一次发现有氮、氧以及水蒸气(为什么这儿有水蒸气?因为紫罗兰是湿的。所有的植物都会蒸发水气)。然而,我们还看到一个由碳原子、氧原子及氢原子组成的"怪物",它也选择了一种特殊的排列形式。这种形式比二氧化碳的排列远为复杂,事实上,它是一种极为复杂的排列。遗憾的是,我们无法画出所有那些在化学上已确实知道的情况,因为所有的原子的精确排列都是三维的,而我们的画面只能是二维的。六个碳原子组成了一个环,但它不是扁平的,而是一种"皱褶"的环。环的所有角度和间距都已知道。所以一个化学式只是这样的分子的一个画像。当一位化学家把它写在黑板上时,粗略地说,他是在二维空间里"画"图。比如,我们见到六个碳原子组成的一个"环",在一个端点还悬挂着一条碳"链",链的第二个端点的碳上有一个氧原子,还有三个氢原子连在那个碳原子上,两个氢原子和三个碳原子竖在这儿,等等。

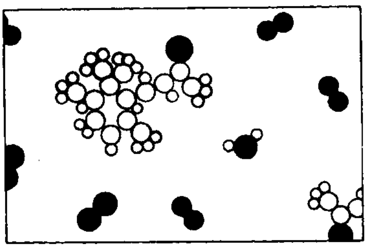


图 1-9 空气中的紫罗兰香气分子

化学家是怎样发现这种排列的呢?他把几瓶东西混合起来,如果变红了,就说明,在某处有两个碳原子与一个氧原子联结在一起;如果变蓝了,就说明根本不是那么一回事。这是所做过的最奇妙的探索工作之一——有机化学。为了发现极其复杂的阵列中的原子排列,化学家观察两种不同的物质混合后究竟会发生什么事?当化学家描述原子的排列时,物理学家从来不怎么相信化学家了解他在谈论的是什么。大约在 20 年前就能在某

些情况下用物理方法来研究这些分子的排列(不完全像我们这个分子那样复杂,只包括了它的一部分),而且能通过测量而不是观察颜色来确定每个原子的位置,嗨!你瞧!化学家几乎总是正确的。

结果,实际上紫罗兰的香气里有三种略为不同的分子,其差别仅在于氢原子的排列不同。

化学的一个任务是给物质命名,从而使我们知道它是什么。给这种形状起个名字看看。这个名称不仅要表明形状,而且还要说出这里是一个氧原子,那里是一个氢原子——确切地说出每个原子的名称和位置。所以我们可以设想,为了全面起见,化学名称一定是十分复杂的。你们看!这个东西的比较完整的名称是4-(2,2,3,6-四甲基-5-环已烯基)-3-丁烯-2-酮,它告诉你这样东西的结构,还告诉你这就是它的排列方式。我们可以意识到化学家所遇到的困难,也懂得这样长的命名的理由。化学家们并不想把名称搞得这样晦涩难解,但在试图用词汇来描写分子时,他们却遇到了非常棘手的问题!

图1-10是α-鸢尾酮香料的分子结构图。

我们怎么知道存在着原子呢?可以用上面提到过的一种技巧:我们假设存在着原子,而一个又一个的结果与我们的预言相符合,如果事物真是由原子组成的话,它们就应当如此。此外,也多少有点更为直接的证据,下面就是一个很好的例子。由于原子是如此之小,你用光学显微镜观察不到它,事实上,即使用电子显微镜也不行(用光学显微镜,你们只能看到大得多的东西)。要是原子一直在运动,比如水中的原子,那么如果我们把某种较大的球放到水中去,这个比原子大得多的球就会晃来晃去——就像玩球时,一个很大的球被许多人打来打去一样。人们向各个方向推球,结果球在场地上作不规则的运动。同样,"大球"也将运动,因为它在各方面受到的碰撞不等,在各个时刻受到的碰撞也不等。因此,如果我们用很好的显微镜观察水中很小的粒子(胶粒),就能看到微粒在不停地跳动,这是原子碰撞的结果。这种运动称为布朗运动。

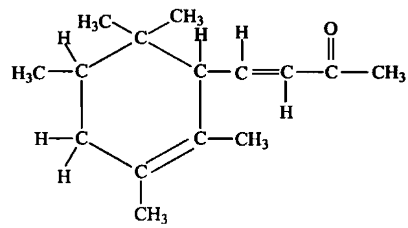


图1-10 紫罗兰香α-鸢尾酮香料的分子结构图

我们在晶体结构上也可看到进一步的证据。在许多情况下,由X射线分析推断出的结构在空间"形状"上与自然界中的晶体实际上显示出来的形状相符合。实际晶体的各个"面"之间的夹角,与从晶体是由多"层"原子构成的假设推断出来的角度之差在秒以下。

一切都由原子构成。这就是关键性的假设。例如,在整个生物学中最重要的假设是:动物所做的每件事都是原子做的。换句话说:没有一件生物所做的事不能从这些生物是用服从物理定律的运动原子组成的这个观点来加以理解。这在开始时并没有认识到:提出这种假设需要做一些实验与推理。但现在它已被接受了,它是在生物学领域内产生新观念的最有用的理论。

如果一块由一个挨一个的原子组成的钢或盐可以具有这种有趣的性质;如果水——它只不过是些小滴,地球上到处都有——可以形成波浪和泡沫,这些波浪冲向水泥堤岸时会产生冲击声和奇妙的浪花;如果一流细水永远只能是一堆原子,那么还会有什么呢?假设我们不是把原子排成确定的样式,再三重复,不断反复,或者甚至形成像紫罗兰香气那样复杂的东西,而是制造出一种各处都不相同的排列:不同的原子以不同的方式配置,不断改变,从不

重复,那么事情会变得更加不可思议吗?——那个在你面前走来走去与你攀谈的东西可能是一大群排列得非常复杂的原子吗?这个东西的彻底复杂性可能动摇你对它产生一些什么想象吗?当我们说,我们是一堆原子,这并不意味着我们只是一堆原子,当你站在镜子面前,你就能在镜子里看到,一堆并非简单地一个一个重复排列的原子所组成的东西将会具有何等丰富而生动的内容!

第2章 基本物理

§2-1 引 言

在本章中我们将考察有关物理学的最基本观念，即我们在目前所知道的事物的本性。这里将不去论及我们如何知道所有这些观念是正确的那个认识过程，你们在适当的时候会学习到这些具体的细节。

我们在科学上所关心的事物具有无数的形式和许多属性。举例来说，假如我们站在岸边眺望大海，将会看到：这里有海水、拍击的浪花、飞溅的泡沫以及汹涌的波浪，还有太阳、光线、蔚蓝的天空、白云以及空气的流动——风；在海边有沙粒，不同色纹和硬度的岩石；在海里浮游着生物，此生彼灭；最后，还有我们这些站在海岸边的观察者；甚至还有幸福和怀念。在自然界的其他场合，也同样出现种种纷繁复杂的事物和影响。无论在哪里，到处都是这样错综复杂和变化无穷。好奇心驱使我们提出问题，把事物联系起来，而将它们的种种表现理解为或许是由较少量的基本事物和相互作用以无穷多的方式组合后所产生的结果。

例如，沙粒和岩石是两回事吗？也许沙粒只不过是大量的细小石块？月亮是不是一块巨大的岩石呢？如果我们了解岩石，是否就能了解沙粒和月亮呢？风是否与海洋中的水流相类似，就是一种空气的流动？不同的运动有什么共同特征？不同的声音有什么相似之处？究竟有多少种颜色？等等。我们就是试图这样逐步分析所有的事情，把那些乍看起来似乎不相同的东西联系起来，希望有可能减少不同类事物的数目，从而能更好地理解它们。

几百年以前，人们想出了一种部分解答这类问题的方法，那就是：观察、推理和实验，这些内容构成了通常所说的科学方法。在这里，我们将只限于对那些有时称为基础物理中的基本观点，或者在科学方法的应用中形成的基本概念作一描述。

现在我们要问：所谓"理解"某种事情指的是什么意思？可以作一想象：组成这个"世界"的运动物体的复杂排列似乎有点像是天神们所下的一盘伟大的国际象棋，我们则是这盘棋的观众。我们不知道弈棋的规则，所有能做的事就是观看这场棋赛。当然，假如我们观看了足够长的时间，总归能看出几条规则来。这些弈棋规则就是我们所说的基础物理。但是，即使我们知道了每条规则，仍然可能不理解为什么下棋时要走某一步棋，这仅仅是因为情况太复杂了，而我们的智力却是有限的。如果你们会下棋，就一定知道，学会所有的规则是容易的，但要选择最好的一着棋，或者要弄懂别人为什么走这一着棋往往就很困难了。在自然界里，情况也正是如此，而且只会更难一些。但是，至少我们能发现所有的规则。实际上我们今天还没有找到所有规则（时而还会出现弈棋中"王车易位"之类的令人费解的情况）。除了我们还不知道所有的规则以外，我们真正能用已知规则来解释的事情也是非常有限的，因为几乎所有的情况都是极其复杂的，我们不能领会这盘棋中应用这些规则的走法，更无法预言下一步将要怎样。所以，我们必须使自己只限于这种游戏规则的比较基本的问题。如果我

们知道了这些规则,就认为"理解"了世界。

如果我们不能很好地分析这盘象棋游戏,那么又怎样来辨别我们"猜测"出的规则实际上是否正确呢?大致地讲,可以有三种办法。第一,可能有这种情况:大自然安排得,或者说我们将大自然安排得十分简单,只有少数几个组成部分,从而使我们能够正确地预测将要发生的事。在这种情况下,我们就能检验我们的规则是怎样起作用的(在棋盘角落里可能只有少数几个棋子在移动,所以我们能够正确地解决)。

第二种检验规则的好办法是,利用那些由已知规则推导出来的较一般性的法则来检验已知规则本身。比如,象在棋盘中移动的规则是只许走对角线,因而我们可以推断,无论象走了多少步,它总是出现在红方块里。这样,即使不能领会细节,我们也总能检验有关象的走法的概念,只要弄清楚它是否一直在红方块里。当然,在相当长的时间里,它都将如此,直到突然发现它出现在黑方块里(显然,这时发生的情况是这个象被俘获了,另一个卒走过来成为皇后,红方块的象就变成黑方块的象)。这也就是物理学中出现的情况,即使我们不能领会其中的细节,但是在相当长的时期内我们仍有在各方面都很好地起作用的规则;但是在某个时候,我们又会发现新的规则。从基本物理的观点来看,最有趣的现象当然是在那些新的场合——那些已知规则行不通的场合中所出现的现象,而不是在原有规则行得通的地方发生的现象!这是我们发现新规则的一条途径。

第三种鉴别我们的观念是否正确的方法比较粗糙,但或许是所有方法中最为有效的,这就是用粗略的近似方法来加以辨别。我们可能说不出为什么阿莱克因(Alekhine)* 要走这步棋,但是我们或许能大致认为他或多或少地在调集一些棋子到王的周围来保护它。因为这是在这种情况下明摆着的事。同样,根据我们对这盘棋的理解,即使不能看出每一步棋的作用,也常常能对自然界多少有所理解。

人们首先把自然界中的现象大致分为几类,如热、电、力学、磁、物性、化学、光或光学、X射线、核物理、引力、介子等等现象。然而,这样做的目的是将整个自然界看作是一系列现象的许多不同侧面。这就是今天基础理论物理面临的问题:发现隐匿在实验后的定律;把各类现象综合起来。在历史上,人们总能做到这一点,但随着时间的推移,新的事实发现了;我们曾经将现象综合得很好,突然,发现了 X 射线,随后我们又融合了更多事实,但是又发现了介子。因此,在弈棋的任何一个阶段,看起来总是相当凌乱。大量事实被归并了,但总还有许多线索向一切方向延伸出去。这就是今天的状况,也就是我们将试图去描绘的现状。

历史上出现过的若干进行综合的情况有如下几个。首先,是热与力学的综合。当原子运动时,运动得越是剧烈,系统所包含的热量就越多,因此,热和所有的温度效应可以用力学定律来说明。另一个巨大的综合是发现了电、磁、光之间的联系,从而知道它们是同一个事物的不同方面,即今天我们称为电磁场的那个东西的不同表现。还有一个综合是把化学现象、各种物质的各种性质以及原子的行为统一起来,这就是量子化学的内容。

显然,现在的问题是:能不能继续把所有事情都综合起来,并且发现整个世界只是体现了一件事情的种种不同方面?无人知道答案如何。我们所知道的只是:这样做下去时,我们发现可以综合一些事实,随后又发觉出现了一些不能综合的事实。我们继续尝试这种拼图游戏。至于是否只有有限数量的棋子,甚至这场拼图游戏是否有底,当然不知道。除非有那

* 世界著名弈棋名手,系国际象棋特级大师,曾多次获得国际象棋世界冠军。——译者注

么一天终于把图拼成了,否则我们就永远不会知道事情的究竟。在这里我们要做的是,看看哪种综合已进行到什么程度,在借助于最少的一组原理来理解基本现象方面,现状又是如何。简言之,事物是用什么构成的?总共存在多少基本元素?

§2-2 1920 年以前的物理学

一开始就从现在的观点讲起是有点困难的,所以让我们先来看一下在 1920 年左右人们是怎样看待世界的,然后再从这幅图像中挑出几件事情来。在 1920 年以前,我们的世界图像大致是这样的:宇宙活动的"舞台"是欧几里得所描绘的三维几何空间,一切事物在被称为时间的一种介质里变化,舞台上的基本元素是粒子,例如原子,它们具有某些特性。首先它具有惯性:如果一个粒子正在运动,它将沿着同一方向继续运动下去,除非有力作用其上。此外,第二个基本元素就是力,当时认为共有两类力。第一类力是一种极其复杂细致的相互作用,它们以复杂的方式将各种各样的原子约束在不同的组合之中,它们决定当温度升高时食盐是溶解得快些还是慢些;另一类已知的力是一种长程的相互作用,它是与距离平方成反比而变化的平缓的吸引力,称为万有引力。这条定律已为我们所知,它是很简单的。当然,为什么物体的运动一经开始就能保持下去,或者为什么存在一条万有引力定律,我们则不清楚。

对自然的描述正是我们在这里要关心的。从这个观点出发,气体以及实际上所有的物质都是无数运动着的原子。这样我们站在海边所见到的许多东西马上可以联系起来了。首先是压力,它来自原子与壁或者某个东西的碰撞;如果原子的运动平均而言都沿着一个方向,这种原子的漂移运动就是风;而无规则的内部运动就是热。某个地方有过多的原子集结在一起时,就形成过剩密度的波,当波前进时,把成堆的原子推向更远的地方,等等。这种过剩密度的波就是声波。能够理解这么多事情的确是惊人的成就。在前一章里我们已经说明过一些这样的事情。

粒子有哪些种类?在当时认为有 92 种。那时已发现有 92 种不同的原子,各按其化学性质而被赋予不同的名称。

其次的问题是,"短程力"是什么?为什么碳吸引一个(有时两个)而不是三个氧?原子间的相互作用的机制是什么?是万有引力吗?答案是否定的。万有引力实在太弱了。于是让我们来设想一种类似于万有引力那样的与距离平方成反比的力,不过它在强度上远远超过前者,此外还有一个差别:在重力作用下,每个物体彼此吸引,但现在我们设想有两类"东西",而这种新的力(当然就是所谓电力)具有同类相斥而异类相吸的特性。具有这样强的作用的"东西"就称为电荷。

那么,我们会得到什么结果呢?假定我们有两个异类电荷,一正一负,并且彼此十分靠近。现在,在若干距离之外,还有另一个电荷。它会感到吸引吗?实际上它几乎不会感到什么作用,因为如果前两个电荷的大小相等,来自一个电荷的吸引被来自另一个电荷的排斥所抵消,所以,在任何可估计的距离上只有很小的一点作用力。另一方面,如果我们使第三个电荷非常靠近前两个时,就会发生吸引作用。因为同类电荷的斥力与异类电荷的引力倾向于使异类电荷靠近而使同类电荷远离。这样,排斥作用就将小于吸引作用。这就是为什么由正、负电荷组成的原子相互离开较远时只感受到很小一点作用力(重力除外),而当它们彼此靠近时,就能够互相"看到内部"而重新安排其电荷,结果产生极强的相互作用的原因。原子间作用力的最终基础是电的作用。由于这种力是如此巨大,以致所有正的与负的电荷通

常都以尽可能紧密的方式结合在一起。所有的事物,甚至我们自己,都由极精细的和彼此强烈作用着的正、负微粒所组成,所有正的微粒与所有负的微粒正好抵消。有时,碰巧我们“擦”去了一些负电荷或正电荷(通常擦去负电荷较为容易),在这种情况下将会发现电力不再平衡,于是就能看到电的吸引作用。

为了对电力作用究竟比引力作用大多少有个概念,我们举出大小为1 mm,相距为30 m的两粒沙子为例。假如它们之间的作用力没有抵消,每个电荷都吸引所有其他电荷而不考虑同类电荷间的斥力,那么,两颗沙粒之间的作用力会有多大呢?两者间将会产生3×10^6 t的力!你瞧,只要正电荷或负电荷的数目有一点点极小的过剩或欠缺,就足以产生可观的电效应。当然,这就是你们为什么不能看出带电体与非带电体之间的差别的原因——所牵涉的粒子数目少得无论在物体的重量上或者形状上都很难造成什么差别。

有了这样的图像,对原子就比较容易理解了。人们认为原子的中心是一个带正电的质量甚大的“原子核”,核周围围绕着一定数量的很轻而带有负电的“电子”。让我们稍稍超前一点提一下:在原子核里也发现了两类粒子——质子和中子,它们的重量几乎相同,并且十分重。质子带正电,中子则呈中性。如果我们有一个原子,其核内有六个质子,从而四周环绕着六个电子(在通常的物质世界中负粒子都是电子,与组成原子核的质子和中子相比,它们是很轻的),在化学周期表上这个原子的序数是6,名称是碳。原子序数为8的物质叫做氧,等等。因为化学性质取决于核外的电子,实际上它只取决于核外有多少个电子,所以一种物质的化学性质只由电子的数目所决定(化学家的全部元素的名称实际上可以用1,2,3,4,5,等等编号来称呼)。我们可以说“元素6”,表示六个电子,以代替“碳”这个名称。当然,在先前发现元素时,人们并不知道它们可以用这种方式来编号。此外,这又会使事情复杂化,因此,宁可对这些元素定一个名称和符号,这比用编号来称呼元素来得更好。

关于电的作用人们还发现了更多事情。对电相互作用的自然解释是,两个物体简单地互相吸引:正的吸引负的。然而后来发现用这种观点来描述电的相互作用并不妥当。更合适的描述这种情况的观点是:在某种意义上,正电荷的存在使空间的“状况”发生畸变,或者说在空间造成了一种“状况”。于是当我们将负电荷放到这个空间里后,它就会感受到一个作用力。这种产生力的潜在可能性就叫做电场。当把一个电子放入电场时,我们就说它受到“拉曳”。于是我们就有了两条规则:(1)电荷产生电场;(2)电荷在电场中会受到力的作用而运动。如果我们讨论下述现象的话,建立这两条规则的理由就清楚了:假如我们使某物体(比方说梳子)带电,然后把一张带电的纸片放在一定距离之外,当我们来回移动梳子时,纸片就会有反应,并且总是指向梳子。如果我们使梳子晃动得快些,就会发现纸片的运动有一点滞后,即作用有所延迟(起先,当我们相当慢地晃动梳子时,我们发现一种错综复杂的现象,这就是磁。磁的影响与作相对运动的电荷有关,所以磁力和电的作用力实际上可以归之于一个场,就像同一件事的两个不同的方面。变化的电场不能离开磁而存在)。假如我们把纸片移得更远,滞后就更大,这时能观察到一件有趣的事:虽然两个带电体之间的作用力应当与距离平方成反比,但是我们发现,当摇动一个电荷时,电作用的影响范围要比起初所猜想的大得多。这就是说,作用的减弱要比反平方的规则来得慢。

这里有一个类比:如果我们在水池里,而在近处漂浮着一个软木塞,我们可以用另一个软木塞划水来“直接”移动那个木塞。如果现在你只注意两个软木塞,你能看到的将是一个立即响应另一个的运动——在软木塞之间存在着某种“相互作用”。当然,我们实际上所做

的只是搅动了水；然后水又去扰动另一个木塞。于是我们就能提出一条“定律”：如果稍微划一下水，那么水中附近的物体就会移动。当然，假若第二个软木塞离得较远，则它将几乎不动，因为我们只是局部地搅动水。另一方面，假如我们晃动木塞，就会产生一个新的现象，即这部分水推动了那部分水，等等，于是波就传播开去，这样，由于晃动，就有一种波及十分远的影响和一种振荡的影响，这是无法用直接相互作用来理解的。所以那种直接作用的概念必须用水的存在来代替，或者，对于电的情形，用我们所谓的电磁场来代替。

电磁场能传送各种波，其中的一些就是光波，另一些波用在无线电广播里，但它们的总名称是电磁波。这些振荡的波可以有各种频率，一种波和另一种波之间的唯一的真正差别只是振荡的频率。假如我们越来越快地来回晃动电荷，并且注视着所产生的效应时，我们将得到一系列不同的效应，只要用一个数，即每秒钟振荡的次数，就能把这些效应统一起来。通常在我们住房墙上电路里流动的电流所产生的扰动约为 100 Hz。如果我们把频率提高到 500 kHz 或 1 000 kHz，我们就“在空气中了”*，因为这正是无线电广播所用的频率范围（当然，广播与空气毫无关系！没有任何空气也能进行广播）。假如再提高频率，那么就进入调频广播和电视所用的波段。再上去，我们使用一种极短的波，比如雷达所用的波。频率再增高，我们就无需用仪器来“看”这种波了，而用眼睛就能够看到它。在频率范围为 $5\times10^{14}\sim5\times10^{15}$ Hz 的时候，只要有可能使带电的梳子晃动得这样快，我们的眼睛就能见到带电梳子的振动，像红光、蓝光或紫光，视振动的频率而定。低于上述频率范围的称为红外，高于此范围的称为紫外。从物理学家的观点来看，我们能看见某种频率范围的波这个事实并不使这一部分电磁波谱比其他部分有什么更令人注意的地方，但是从人类的观点来看，这当然是更有趣的。如果我们把频率提得更高，于是就得到 X 射线。X 射线不是别的，只是频率极高的光而已。如果再提高频率，就得到γ射线。X 射线与γ射线这两个名称在使用时几乎是同义的，通常将原子核发出的电磁射线称为γ射线，而从原子中发出的这种高能的电磁射线就称为 X 射线。但是不论它们的起源如何，当频率相同时，它们在物理上是无法区别的。如果我们进到更高的频率，比如说 10^{24} Hz，我们发现可以人工制造这样的波，例如用加利福尼亚理工学院的同步加速器。我们还可以在宇宙线里发现频率出奇的高的电磁波——具有甚至比它还快 1 000 倍的振荡，而这些波目前还不能由我们来控制。

表 2-1 电磁波谱

频率(Hz)	名 称	大略行为
10^2	电扰动	场
$5\times10^5\sim5\times10^6$	无线电广播	波
10^8	FM—TV	波
10^{10}	雷达	波
$5\times10^{14}\sim5\times10^{15}$	可见光	波
10^{18}	X 射线	粒子
10^{21}	γ射线(核)	粒子
10^{24}	γ射线(“人造”)	粒子
10^{27}	γ射线(宇宙线中)	粒子

* 原文为“On the air”，直译为“在空气中”，亦作电台“正在广播”解，作者在这里用的是双关语，故有下文的“广播与空气毫无关系”。——译者注

§2-3 量子物理学

说明了电磁场概念和电磁场能传送波后,我们很快就认识到,这些波的行为实际上十分奇怪,看起来完全不像波。在频率较高时它们的行为更像粒子!正是在 1920 年后发展起来的量子力学解释了这种奇怪的行为。在 1920 年之前,爱因斯坦就已改变了把空间看作是三维空间,把时间看成单独存在的这种图像。他首先把它们组合在一起,并且称之为时空,然后又进一步用弯曲的时空来描绘万有引力,这样,"舞台"就变为时空,而万有引力则大概是时空的一种调整。以后,人们又发现有关原子运动的规则也是有问题的:在原子世界中,"惯性"与"力"的力学法则是不正确的——牛顿定律已不再成立。人们发现小尺度范围内事物的行为与大尺度范围内事物的行为没有任何相似之处。这给物理学造成困难——但又十分有趣。之所以困难,是由于事物在小尺度范围内的表现如此"反常",我们对之没有直接的经验。在这里,事物的表现完全不像我们所知道的任何事情,因而除了用解析的方式,用任何其他方法都不可能描写这种特性。这的确是困难的,需要作大量的想象。

量子力学有许多观点。首先,一个粒子既有确定的位置也有确定的速度这种概念已被抛弃,那是不正确的想法。表明经典物理是怎样不正确的一个例子是,在量子力学中有这样一条定则:不可能既知道某个粒子在什么地方,又知道它运动得多快。动量的不确定性与位置的不确定性是并协的,两者的乘积是常数。我们可以把这条定律写成 $\Delta x \Delta p \geqslant h/2\pi$,在以后将会更详尽地解释它。这条定则解释了这样一个十分神秘的佯谬:如果原子是由正负电荷所构成,那么为什么负电荷不是简单地位于正电荷的顶端(它们彼此是吸引的),从而彼此靠拢以至于完全抵消?为什么原子这么大?为什么原子核在中心,而其周围环绕着一些电子?起先曾认为原子核很大,但事实并非如此,它是非常小的。一个原子的直径约为 10^{-8} cm,一个原子核的直径约为 10^{-13} cm。如果我们有一个原子,为了看到原子核,就要把整个原子放大到一个大房间那样大,这时原子核才是一个刚刚可以用眼睛分辨出来的斑点,但是原子的几乎所有重量都集中在这个无比小的原子核上。是什么原因使电子没有直接落入原子核呢?正是由于上述的原理。如果电子在原子核里出现,我们就会精确地知道它们的位置,而不确定性原理则要求它们具有很大的(不过是不确定的)动量,即很大的动能。电子具有这样大的能量就要脱离原子核。然而这些电子作出了让步:由于不确定性,它们为自己留下一个狭小的空间,于是以由这个定则所决定的最小的运动晃动着(记得我们曾经说过,当晶体冷却到绝对零度时,原子并没有停止运动,它们仍然在晃动,为什么?如果它们停止运动,我们就能知道它们在什么地方,而且它们不运动,这就违反了不确定性原理:我们不能既知道它们在哪里,又知道它们以什么速度运动,所以它们必须在那里不断地摆动)。

另一个由量子力学带来的在科学的观念和哲学方面最有趣的变化是,在任何情形下要精确地预言会发生什么事都是不可能的。比如我们有可能使一个原子处于准备发光的状态,在原子发光时,可以利用探测光子的方法进行测量(这一点我们马上就要讲的),但是,我们无法预计它将在什么时候发光,或者在有几个原子的情况下,究竟哪一个原子将发光。你们可能说,这是由于某种我们还没有足够仔细观察过的内部"转轮"在起作用。然而,这里根本没有什么内部的转轮。按照我们今天的理解,大自然的表现是这样的:根本不可能精确地预言在一定的实验中究竟会发生什么事情,这是一件糟透了的事。事实上,哲学家曾经声

称:科学所必需的基本东西之一就是,每当你安排了同样的条件时,那么发生的必定是同一件事。但是,这完全不正确,它并不是科学的基本条件。事实是所发生的并不是同一件事,我们所能得到的只是发生一些什么的统计平均。不过,科学并没有完全崩溃。顺便说一下,哲学家们讲了一大套科学之绝对必需是什么,但就像人们所能看到的那样,这些总是相当天真的,甚至还是错误的。例如,某个哲学家宣称,对科学的成就来说十分重要的是,如果同一个实验先在某处(比如说在斯德哥尔摩)做,然后在另一处(比如说在基多)做,那么必定会出现同样的结果。完全错了。对科学来说,这并不是必然的。它可能是一个经验事实,但并不是必然的情况。比如有一个实验是在斯德哥尔摩观察天空,这时会看到北极光,如果在基多则看不到这种现象,这就是出现了不同的情况。"但是",你会说:"这是一件与外部情况有关的事,如果你把自己关在斯德哥尔摩的一个房间里,拉下窗帘的话,那么会发现什么差别吗?"肯定会。假如我们在一个万向接头上挂一个摆,让它开始摆动,它就会差不多在一个平面里摆动,但也并不完全如此。在斯德哥尔摩,平面会缓慢地转动着。但是在基多就不会。在那里,窗帘也是垂下的。这件事的发生并没有引起科学的毁灭。科学的基本假设,它的基本哲学观念是什么呢?我们在第1章里讲到过:实验是任何观念的正确性的唯一试金石。假如结果是在基多所做的大多数实验与在斯德哥尔摩所做的实验效果一样,那么这"大多数实验"就可用来提出某种一般性的定律,至于对那些效果不同的实验我们就将说:"这是由于斯德哥尔摩周围的环境不同所引起的。"我们将能想出一些办法来概括实验结果,而没有必要在事先就被告诫说,这些办法看起来像什么。假如有人告诉我们说,同样的实验总是产生同样的结果,这固然很好。但是当我们试了一下后,发现并非如此,因而结论的确就是并非如此。我们正是必须相信自己所看到的,然后才能借助于实际的经验来形成我们的一切其他观念。

现在让我们回到量子力学和基本物理上来。当然,我们在此刻还不能详细叙述量子力学的原理,因为它们是颇难理解的。我们将假定它们成立,然后叙述一下某些结果。其中一个是,我们通常视作为波的那些事物也具有粒子的特性,而粒子则具有波的特性。实际上,每一种事物的行为都是一样的,不存在波和粒子的区别。这样,量子力学就将场的概念与场的波与粒子统一起来。的确,频率低时,现象的场的特性比较明显,或者说作为日常经验的近似描写时比较有用。但当频率增加时,现象的粒子特性对于我们通常用来作测量用的仪器来说更为明显。实际上,虽然我们提到过许多频率,但目前还没有探测到任何直接涉及频率在 10^{12} Hz 以上的现象,我们只是在假定了量子力学的波粒二象性概念是正确的之后,根据有关规则从粒子的能量来推断出这些较高的频率的。

于是,我们对电磁相互作用有了新的见解。我们把一种新类型的粒子加入到电子、质子及中子的行列,这种新的粒子称为光子。而这种电子与质子相互作用的新的见解被称为量子电动力学,它就是电磁理论,不过其中的一切在量子力学上都是正确的。这是光和物质,或电场与电荷之间相互作用的基本理论,就物理学来说它是我们最伟大的成就。在这个理论中,我们得到了除万有引力与原子核过程之外的所有一般现象的根本规则。比如,从量子电动力学可以得出所有已知的电学、力学和化学定律:弹子碰撞的定律、导线在磁场中运动的定律、一氧化碳的比热、霓虹灯的色彩、盐的密度、以及氢与氧形成水的反应等全都是这一理论的推论。所有这些细节,如果简单到能使我们运用近似方法的话,都可以得出,这实际上当然不可能,不过我们总能对发生的事多少有所理解。目前,在原子核外面还没有发现量子电动力学定律有什么例外,对于原子核我们不知道是否会有例外,因为对于核

内的过程我们简直还不太清楚。

这样,在原则上,量子电动力学是一切化学以及生命的理论——如果生命最后归结为化学,因而也就归结为物理的话(因为化学本身已经归结为物理,涉及化学中的那部分物理早就知道了)。不仅如此,量子电动力学这个伟大的理论还预言了许多新的事实。首先,它说明了甚高能光子、γ 射线等的性质。它还预言了另一个十分出乎意外的事:除电子外,还应当有同样质量、但带有正电荷的称为正电子的粒子,并且这两种粒子碰在一起时,会彼此湮没而放出光或 γ 射线(其实,光与 γ 射线完全是一回事,只是频率不同而已)。这件事情的推广——即对每个粒子总有一个反粒子——现在知道是正确的。电子的反粒子有另一个名称,即正电子,但其他大多数反粒子,就称反某某子,如反质子、反中子。在量子电动力学中,提出了两个基本数据——电子质量与电荷,所有世界上其他的数被认为可以从这两个数据推导出来。实际上,这不完全正确,因为化学还有一整套数据,它告诉我们原子核是多重,这就把我们引导到下一部分内容中去了!

§2-4 原子核与粒子

原子核是由什么组成的,这些东西又是怎样结合在一起的?人们发现,原子核是靠巨大的作用力结合在一起的,当这种力释放时,其放出来的能量比化学能大得多,前者与后者之比就好像原子弹爆炸与 TNT 炸药的爆炸相比一样。当然,这是因为原子弹爆炸时与原子核里的变化有关,而 TNT 的爆炸则与原子外层的电子变化有关。问题是,究竟是什么力使原子核中的质子与中子结合在一起呢?汤川秀树提出,就好像电相互作用可以与一种粒子——光子联系起来一样,中子与质子之间的作用力也有某种场,当这个场晃动时,就好像一个粒子一样。所以除去中子与质子外,在世界上应当有一些别的粒子,而汤川能从已知的核力特征推导出这些粒子的性质。比如,他预言它们应当有二三百个电子那样大的质量。你瞧!在宇宙间竟然真的发现了这样质量的粒子!但是,后来发现这并不正是预言的粒子,它被称为 μ 子。

然而,没有过多少时候,在 1947 年或 1948 年就发现了另一个粒子——π 介子,它满足汤川的判据。这样,除去质子与中子外,为了得到核力,我们还必须加上 π 介子。你可能会说,“太好了!借助这个理论就可以像汤川所希望的那样建立起利用 π 介子的量子核动力学,然后看看它是否成立。如果成立的话,那么每件事都可得到解释了。”不幸的是,包含在这种理论中的计算是如此困难,以至于一直到今天,已将近 20 年了,从来还没有一个人能够从这个理论中得出什么结果来,或者能够用实验去验证一下。

所以我们被这个理论难住了,我们不知道它究竟是正确的还是错误的,但却知道它有点小小的错误,或者至少是不完全的。正当我们在理论上徘徊并且试图用这个理论计算出结果时,实验物理学家发现了一些事情。比如,他们早已发现了 μ 子,而我们却还不知道把它归到哪里去。而且,在宇宙线里,还发现了大量的其他“额外”粒子。今天,我们已发现了大约 30 种粒子。理解所有这些粒子的相互关系是非常困难的——大自然要它们来干什么?这一个粒子与另一个粒子之间的联系是什么?我们今天并没有把这些不同的粒子理解为同一件事情的不同的方面。我们有这么多相互无关的粒子这件事本身就表明,我们还没有一个能够说明这么多相互无关的信息的良好理论。由于量子电动力学的伟大成功,我们具备

了一定的核物理知识，它是一种粗糙的半经验半理论的知识，假设一种质子与中子间的力的类型，然后看看会发生什么事情，但是并不确切知道力的来源。除此以外，我们很少取得进展。在化学上，人们曾搜集大量的化学元素，以后突然在元素之间显现出一种没有预期到的关系，它就体现在门捷列夫元素周期表中。比如，钠和钾的化学性质几乎是相同的，它们就在周期表的同一行里。对于新粒子而言，我们一直也在探索着这种门捷列夫式的表。有一张这样的新粒子表是由美国的盖尔曼与日本的西岛各自独立做出的。他们分类的基础是一个新的数，类似于电子的电荷，这种新的数叫做“奇异数”S，对每个粒子都指定了这样一个数，它像电荷一样是守恒的，即在核力的反应中保持不变。

表 2-2 列出了所有的粒子。眼下我们对之还无法讨论得更多。但是这张表至少向你们表明我们不知道的东西有多少。每个粒子下写着它的质量，其单位是兆电子伏(MeV)。1 MeV 等于 1.782×10^{-27}g。选取这种单位的理由是出自历史的原因，我们现在不去说它。质量大的粒子在表中放在较高的位置。可以看到，中子与质子的质量是差不多相同的，在垂直的列内放置有同样电荷的粒子，所有的中性粒子都放在同一列内，所有带正电的粒子在这一列的右边，所有带负电的粒子则在左边。

表 2-2　基本粒子

质量(GeV)	电荷 −e	电荷 0	电荷 +e	分类与奇异性	
1.4	$Y_1^- \to \Lambda^0+\pi^-$	$Y_1^0 \to \Lambda^0+\pi^0$	$Y_1^+ \to \Lambda^0+\pi^-$ 1 395	$S=2$	
1.3	Ξ^- 1 319	Ξ^0 1 311		$S=2$	
1.2	Σ^- 1 196	Σ^0 1 191	Σ^+ 1 189	$S=1$	重子
1.1		Λ^0 1 115		$S=1$	
1.0					
		n 939	p 938	$S=0$	
0.9					
0.8		$\omega^0 \to \pi+\pi+\pi$		$S=0$	
	$\rho^- \to \pi+\pi$	$\rho^0 \to \pi+\pi$	$\rho^+ \to \pi+\pi$	$S=0$	
0.7					
0.6					
0.5	K^- 494	$K^0\bar{K}^0$ 498	K^+ 494	$S=\begin{smallmatrix}-1\\+1\end{smallmatrix}$	介子
0.4					
0.3					
0.2	π^- 139.6	π^0 135.0	π^+ 139.6	$S=0$	
0.1	μ^- 105.6				轻子
0	ϵ^- 0.51	ν^0 0			

表 2-2 中实线标出的是粒子，虚线标明的是“共振态”。表中略去了几个粒子，包括重要的零质量、零电荷的粒子，即光子与引力子，它们并不属于重子-介子-轻子分类图。此外，还有某些较新的共振态(K^*，φ，η)也不包括在这里。介子的反粒子已列在本表内，但轻子与重子的反粒子就需要另列一张表了，它看起来正好是目前这张表对零电荷列的反演。虽然

除去电子、中微子、光子、引力子和质子外,所有的粒子都是不稳定的,但是在这里只列出了共振态的衰变产物。奇异数并不适用于轻子,因为它们与核之间并没有强作用。

所有与中子、质子放在一起的粒子统称为重子。共存在着以下几种:Λ 介子,质量为 1 154 MeV。另外还有三个:Σ^+ 介子、Σ^- 介子和 Σ^0 介子,质量是相近的。这里还有成群或者说成多重态的粒子,带有差不多相同的质量,相差不到 1%或 2%。在多重态内的每个粒子都有同样的奇异数。第一个多重态是质子-中子二重态,以后是单重态(Λ 介子),再以后是 Σ 三重态,最后是 Ξ 二重态。最近,在 1961 年,又发现少数几个粒子,但它们都是粒子吗?它们的寿命是如此短暂,当刚形成时,几乎就立刻蜕变了,所以我们不知道它们究竟应被认为是新的粒子,还是在它们蜕变成 Λ 介子及 π 介子时后两者之间某种确定能量的"共振"作用呢?

除去重子外,其他包括在核内相互作用中的粒子称为介子。首先是 π 介子,有三种形态:正、负及中性,它们组成了另一多重态。我们还发现一些新的称为 K 介子的粒子,它们作为 K^+ 及 K^- 而出现。其次,每个粒子都有反粒子,除非一个粒子是它自己的反粒子。例如 π^- 和 π^+ 是一对反粒子,但是 π^0 是它自己的反粒子;K^- 及 K^+ 是反粒子对,K^0 及 $\overline{K}^0$ 也是反粒子对。附带说一下,在 1961 年我们又发现了一些介子或可能的介子,它们几乎即刻就蜕变了,有一个称为 ω 的东西带有 780 MeV 的质量,分解为三个 π 介子,有一个还不怎么确定的东西分解为两个 π 介子。那些被称为介子与重子的粒子与介子的反粒子放在同一张表里,但重子的反粒子必须放到另一张通过零电荷列"反射"而来的表里去。

门捷列夫周期表是很完美的,除去有一些稀土元素挂在外面。同样,这里也有一些粒子挂在表外,它们在核内的相互作用不强,跟核相互作用根本无关,跟核之间也没有强相互作用(我们所指的是那种强的核能相互作用)。它们被称为轻子,主要有如下几种:电子,其质量很小,只有 0.510 MeV;然后是 μ 子,质量约为电子的 206 倍。根据所有的实验,我们今天所能说的电子与 μ 子之间的差别仅仅是质量不同而已,除了 μ 子比电子重外,两者在其他方面都完全一样。为什么一个比另一个重?μ 子有什么用?我们不知道。此外,有一种轻子是中性的,叫做中微子,具有零质量,事实上,现在知道有两类中微子,一类与电子有关,另一类与 μ 子有关。

最后,还有两种与核内其他粒子间没有强作用的粒子:一个是光子,另一个(或许)是具有零质量的引力子——假如引力场也有类似量子力学的原理的话(引力的量子化理论还没有建立)。

什么是"零质量"?这里所标示的质量是粒子在静止时的质量。事实上,一个粒子具有零质量在某种程度上就意味着它不可能静止。光子是永远不会静止的,它一直以 186 000 $\text{mi}\cdot\text{s}^{-1}$(即 300 000 $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)的速度运动。当我们在适当的时候学习了相对论的内容后,对于质量就会理解得更多一些。

这样,我们就面对着一大群粒子,它们看来都是物质的基本组成部分。幸运的是,这些粒子彼此之间的相互作用并不全都是不同的。事实上,粒子之间的相互作用看来可以分为四类,按强度降低的顺序排列时,它们就是:核力、电相互作用、β 衰变作用以及引力。光子与所有带电粒子会发生耦合,作用的强度用某个数(1/137)来度量。这种耦合的详细定律已经知道,那就是量子电动力学。引力和所有的能量发生耦合,但它的耦合是非常弱的,远远小于电的作用,这条定律也已经知道了。然后,还存在着所谓的弱衰变——β 衰变,它使中子蜕变为质子、电子及中微子,其过程是比较慢的,这种作用的定律只是部分地知道。还有

所谓的强相互作用——介子-重子相互作用，其强度为 1，它的规律完全不知道，虽然已经知道几条法则，比如重子的数目在任何反应中都不改变。

表 2-3 基本相互作用

耦合关系	强度*	定律
光子对带电粒子	$\approx 10^{-2}$	已知
引力对所有其他能量	$\approx 10^{-40}$	已知
弱衰变	$\approx 10^{-5}$	部分已知
介子对重子	≈ 1	不知(部分法则已知)

这些就是当代物理学的惊人的状况。总结一下，我可以这样说：在核外，看来一切都知道了；在核内，量子力学是正确的，还没有发现量子力学原理失效的情况。可以说：容纳我们所有知识的舞台是相对论性时空；也许引力也包括在时空之中。我们不知道，宇宙是怎样开始的，我们从来没有做过实验来精确地检查在某个微小距离下的时空观念，所以只知道在那个距离以上我们的时空观念行得通。我们还应当补充说：这个伟大的国际象棋赛的规则就是量子力学的原理，到现在为止我们可以说，这些原则应用于新的粒子时与应用于过去已发现的粒子一样成功。核力的起源将我们引向新的粒子，但是遗憾的是出现的粒子实在太多，以至于使我们感到迷惑不解。虽然我们已经知道在它们之间存在着一些非常出人意外的关系，但对它们的相互关系缺乏完整的理解。看来我们正摸索着前进，逐渐趋近于对亚原子粒子世界的理解；但是，我们实在不清楚，在这种摸索中我们还必须走多远。

* 这里的“强度”是包含在每种相互作用中的耦合常数的一无量纲的量。

第3章 物理学与其他科学的关系

§3-1 引　　言

物理学是最基本的、包罗万象的一门学科，它对整个科学的发展有着深远的影响。事实上，物理学是与过去所谓的“自然哲学”相当的现代名称，现代科学大多数就是从自然哲学中产生的。许多领域内的学生都发现自己正在学习物理学，这是因为它在所有的现象中起着基本的作用。在本章中我们试图说明其他科学中的基本问题是什么。当然，在这么一点篇幅内要真正地处理这些领域中的复杂、精致而美妙的事情是不可能的。正因为篇幅较少，使我们不能讨论物理学与工程、工业、社会和战争之间的关系，甚至不能讨论数学与物理之间的最令人注目的关系(按照我们的观点，从数学不是一门自然科学这个意义上来说，它不是一门科学。它的正确性不是用实验来检验的)。顺便提一下，我们必须从一开始就说清楚：如果一件事情不是科学，这并不一定不好。例如，爱好就不是科学。所以，如果说某件事不是科学，这并不意味着其中有什么错误的地方，这只是意味着它不是科学而已。

§3-2 化　　学

也许受物理学影响最深的科学就是化学了。在历史上，早期的化学几乎完全讨论那些现在称为无机化学的内容，即讨论那些与生命体不发生联系的物质。人们曾经进行了大量的分析才发现许多元素的存在以及它们之间的关系——即它们是怎样组成在矿石、土壤里所发现的简单化合物的，等等。早期的化学对于物理学是很重要的。这两门科学间的相互影响非常大，因为原子的理论在很大程度上是由化学实验来证实的。化学的理论，即化学反应本身的理论，在很大程度上总结在门捷列夫周期表里，周期表体现了各种元素之间的许多奇特的联系，它汇总了有关的规则：哪一种物质可以与哪一种物质化合，怎样化合，等等，这些就组成了无机化学。原则上，所有这些规则最终可以从量子力学得到解释，所以理论化学实际上就是物理。但是，必须强调的是，这种解释只是原则上的。我们已经讨论过了解下棋规则与擅长下棋之间的差别。也就是说，我们可能知道有关的规则，但是下得不很好。我们知道，精确地预言某个化学反应中会出现什么情况是十分困难的；然而，理论化学的最深刻部分必定会归结到量子力学。

还有一门由物理学与化学共同发展起来的极其重要的分支，这就是把统计学的方法应用于力学定律起作用的场合，这被恰当地称之为统计力学。在任何化学状态中都要涉及大量的原子，我们已经看到原子总是以复杂而毫无规则的方式不停地晃动。假如我们能够分析每一次碰撞，并且跟踪每一个分子的运动细节的话，就能判断出将会发生一些什么。但是要记录所有这些分子就需要许许多多数据，这远远超过了任何计算机的容

量，当然也一定超过人脑的容量，所以为了处理这样复杂的情况，重要的是要采取一种有效的方法。统计力学就是关于热现象或热力学的理论。作为一门科学，无机化学现在基本上已归结为所谓物理化学和量子化学。物理化学研究反应率和所发生的详细变化（分子间如何碰撞？哪一些分子先飞离？等等），而量子化学则帮助我们根据物理定律来理解所发生的事。

化学的另一个分支是有机化学，它研究与生命体有关的物质。人们曾一度相信与生命有关的物质极其神秘，因此不可能用我们的手从无机材料中制造出这种物质。这根本不对——它们与无机化学中制成的物质完全一样，只是包括了更复杂的原子排列。很明显，有机化学与提供有机物质的生物学之间有十分密切的关系，与工业也有密切的联系，而且许多物理化学和量子化学的定律不仅适用于无机化合物的情况，而且也适用于有机化合物。然而，有机化学的主要任务并不在于这些方面，而是在于分析、综合那些在生物系统以及在生命体中所形成的物质。这样就不知不觉地逐步引向了生物化学，然后是生物学本身，或分子生物学。

§3-3 生 物 学

我们就这样进入了生物学，它研究的是生命体。在生物学发展的早期，生物学家必须进行单纯的说明性工作——找出有哪些生物，所以他们要数数跳蚤足上的细毛之类的东西。当他们以很大的兴趣完成这种工作后，就进而考虑在生命体内部的机制问题，起先自然是从十分粗略的观点出发的，因为要知道更详细的情况是需要经过一番努力的。

在物理学与生物学的早期关系中有过一件很有趣的事，生物学曾经帮助物理学发现了能量守恒定律，迈耶(J. R. Mayer)最先在关于生物吸收和放出的热量问题上证实了这条定律。

假如我们更仔细地观察动物的生物学过程，就会看到许多物理现象：血液的循环、心脏的跳动、血压，等等。这里还有神经：如果我们踩在一块尖锐的岩石上，就会知道发生了什么事情，这个信息不知怎么地就从我们的脚底传递上来。有趣的是这个信息是怎样传递的。在研究神经时，生物学家得到了这样的结论：神经是非常精细的小管道，有十分薄而复杂的管壁。细胞通过这样的管壁吸进离子，所以在外面有正离子，而在里面则有负离子，就像一个电容器一样。这层薄膜还有一个有趣的性质：如果它在某个地方“放电”，即一些离子能够通过这个地方，那么该处的电压就减小，它会影响到邻近地方的离子，而这又会影响那里的薄膜，使它也让离子通过。接着这又要影响更远的薄膜，等等，于是在薄膜中就出现一列“穿透性变动”波，当神经末梢的一端由于碰到尖锐的岩石而受到“刺激”后，这种波就沿着神经传开来。它有点像一长列垂直放置的多米诺骨牌，如果末端的一个被推倒，邻近的一个也就被它带动，等等。当然，除非把多米诺骨牌再重新排好，不然这时只有一个信息传递过去。类似地，在神经元里，也有排出离子的缓慢过程，使神经又处于准备接收下一个脉冲的状态。这就是为什么我们会知道正在做什么（或者至少知道我们在哪里）。当然我们可以用电子仪器测出这种与神经冲动有关的电的效应，因为这里存在着电的作用。十分明显，电效应的物理知识对理解这个现象很起作用。

相反的效应是从大脑中某个地方沿着神经发出一个信息。这时在神经的末梢会出现什么情况呢？神经在末梢处分成了细微的小纤维，这些小纤维与肌肉附近的一种称为端板的结构相连接。由于一些现在还不完全理解的原因，当脉冲信号抵达神经末梢后，射出一小团

一小团称为乙酰胆碱的化学物质(每次 5～10 个分子),它们影响了肌肉纤维而使其收缩——这一切多么简单!什么东西使肌肉会发生收缩呢?肌肉是由极多的彼此紧贴的纤维所组成的,它含有两种不同的物质:肌球蛋白和肌动球蛋白。但是由乙酰胆碱所引起的那种改变分子大小的化学反应机制现在还不清楚,因而在肌肉中引起机械运动的基本过程也未被我们所知。

生物学的领域是如此广泛,有许多问题我们根本无法叙述。比如视觉是如何产生的(即光在眼睛里做什么)?听觉是如何产生的?等等(思维是如何进行的这一个问题将在后面心理学中讨论)。但是从生物学的观点来说,我们刚才所讨论的这些关于生物学的事情实在并不是基本的,并且不是生命的根源——即使我们理解了它们,仍然不能理解生命本身。举一个例子:研究神经的人感到他们的工作是很重要的,因为无论如何不存在没有神经的动物,但是没有神经仍然可以有生命。植物既无神经也无肌肉,但是它们照样活动着,照样生存着。所以我们对于生物学的基本问题必须更仔细地研究一下。如果我们这样做,就会发现所有的生命体中存在着许多共同的特征。最普遍的特征是它们都由细胞组成,每个细胞内都有起化学作用的复杂机制。例如,在植物细胞中就存在着接收光线而产生蔗糖的机构,植物在夜间消耗蔗糖以维持其生存。当动物摄取植物后蔗糖在动物体内就产生了一系列化学反应,这些反应与植物体内的光合作用(以及在夜间的相反作用)有很密切的关系。

在生命系统的细胞里有许多复杂的化学反应,在反应中一种化合物变成另一种化合物,然后再变成一种化合物。为了对生物化学研究中所付出的巨大的努力有某种印象,我们在图 3-1 中总结了到此刻为止所知道的在细胞中出现的反应,这些反应只是所有反应中的很小一部分,只占 1%左右。

这里我们可以看到整整一系列分子,它们在一连串相当小的步骤组成的循环中从一个变到另一个。这个循环称为三羧酸循环或呼吸循环。如果从分子发生的变化来说,每一种化合物和每一步反应都是相当简单的,但是——这是生物化学中非常重要的发现——这些变化在实验室里比较难以完成。假如我们有一种物质,还有另一种十分类似的物质,那么前一种物质并不就转变成后一种物质,因为这两种形式通常由一个能量屏障或“势垒”隔开。考虑这样一个类似的情况:如果我们要把一个物体从一个地方拿到另一个地方,而这两个地方处在相同的水平高度,但是分别在一座小山的两边,那么我们可以把物体推过山顶,但是要做到这一点需要一些附加的能量。由于这种原因,大多数化学反应都不会发生,因为有一种所谓的活化能妨碍这一反应的进行。为了在一种化合物中增加一个额外的原子,就要使这个原子靠得足够紧,以便能出现某种重新排列,这样它就结合到那个化合物上去了。但是如果我们不能给它足够的能量使之靠得足够近,它就不会越过势垒,只是上去了一部分路程后又倒退回来。然而,假如我们真的能把分子拿在手中,把其中的原子推来推去使它出现一个缺口,让新原子进入,然后又使缺口一下子合拢,我们就找到了另一个办法,即绕过势垒,这不需要额外的能量,因此反应就较容易进行。现在,在细胞里确实存在着一些很大的分子,比起我们刚描述过其变化的分子要大得多,它们以某种复杂的方式使较小的分子处于恰当的状态,从而使反应易于发生。这些很大的、复杂的分子称为酶(它们起先被叫做酵素,因为最早是在糖发酵时发现的。事实上三羧酸循环的某些反应最初就是在发酵中发现的)。由于有酶存在,反应就会进行。

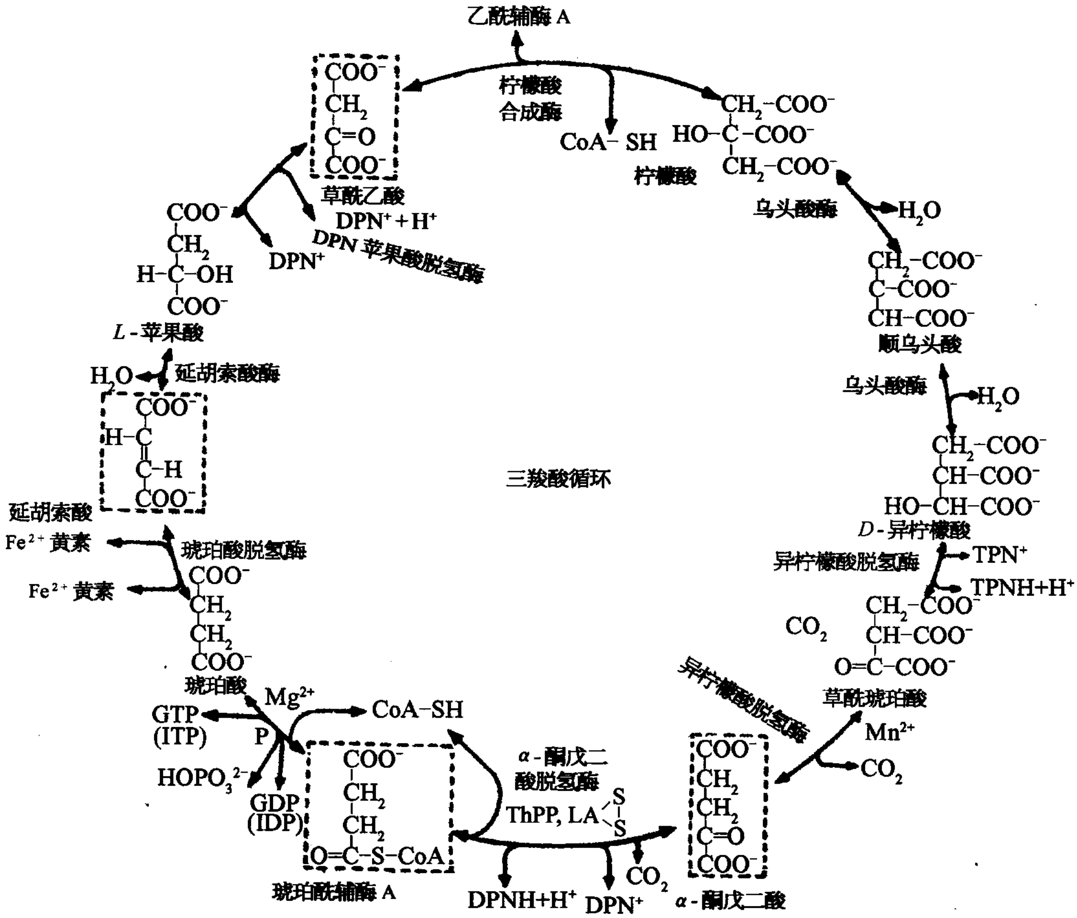


图 3-1　三羧酸循环

酶是由另一种称为蛋白质的物质构成的。酶分子族是非常庞大而复杂的,每一种酶互不相同,并且都控制着一定的特殊反应。图 3-1 中每个反应中都写上了酶的名称(有时同一种酶可以控制两种反应)。我们要强调指出:酶本身并不直接参与反应,它们并没有变化,只是使一个原子从一个地方跑到另一个地方。干完了这件事后,它又准备对下一个原子做同样的事,犹如工厂里的机器一样。当然,必须对某种原子进行补充,并且可以处理另一些原子。比如,以氢为例,有些酶具有特殊的结构单元,能在各种化学反应中运送氢原子。例如,有三种或四种脱氢酶在我们整个循环的各个地方都用到。有趣的是,有一种机构使一个地方释放某些氢原子并将其取走,然后用到其他的地方去。

图 3-1 的循环中最重要的是 GDP 转变为 GTP(二磷酸鸟嘌呤核苷变为三磷酸鸟嘌呤核苷),因为 GTP 比 GDP 含有更多的能量。就像在某些酶中存在着一种运送氢原子的"盒子"一样,在酶中也有特殊的携带能量的"盒子",三磷酸基就是这样的"盒子"。所以 GTP 比 GDP 具有更多的能量,而且如果循环是朝某个方向时,我们就产生具有附加能量的分子,它可以推动另一个需要能量的循环,比如肌肉的收缩。除非存在着 GTP,肌肉就不会收缩。我们可以拿几根肌肉纤维,把它们浸到水里,加一些 GTP,只要这里存在着适当的酶,肌肉

纤维就会收缩,GTP 就变为 GDP。所以真实的系统是在 GDP-GTP 转变中,在晚上就用白天贮藏起来的 GTP 使整个循环往另一个方向进行。你们可以看到酶对反应进行的方向并不介意,因为倘若不是如此,就会违反一条物理定律。

物理学对于生物学和其他科学之所以极为重要还在于另一个原因,这与实验技术有关。事实上,如果不是由于实验物理的巨大发展,这些生物化学的循环图今天就不可能知道。其理由是:分析这种极其复杂的系统的最有效的方法就是要辨认在反应过程中所用到的原子。例如,如果我们能把一些带有"绿色标记"的二氧化碳引到循环中去,然后测量 3 s 后绿色标记的位置,在 10 s 后再测量一次,等等,我们就能描绘出反应的过程。那么"绿色标记"是什么呢?它们就是同位素。我们可以回顾一下:原子的化学性质是由电子的数量而不是原子核的质量所决定的。但是有这种可能,比如在碳原子中,可能有 6 个或 7 个中子与每个碳原子核都具有的 6 个质子在一起。这两个原子碳 12 和碳 13 在化学上是相同的,但它们的重量不同,在核的性质上也有差别,因而是可以区分的。利用这些不同重量的同位素,或者甚至利用放射性同位素如碳 14,就有可能跟踪反应的过程,这是比较灵敏的探查极少量物质的方法。

现在,让我们回到酶和蛋白质的描述。并不是所有的蛋白质都是酶,但是所有的酶都是蛋白质。蛋白质有许多种,比如说肌肉中的蛋白质、结构蛋白质,它们存在于软骨、头发和皮肤中,等等,这些蛋白质本身并不是酶。但是,蛋白质是生命的非常具有代表性的物质。首先,它们组成了所有的酶;其次,它们构成了大部分其余的生命的物质。蛋白质具有十分有趣而简单的结构。它们是一系列不同的氨基酸。有 20 种不同的氨基酸,它们全都能互相组合而形成链,其骨架是 CO—NH,等等。蛋白质不是别的,正是这 20 种氨基酸形成的各种各样的链。每一种氨基酸可能起某种特定的作用。比如,有一些氨基酸在一定的位置上有一个硫原子;当同一蛋白质内有两个硫原子时,它们就形成一个键,也就是说,它们用链在这两点上连接起来形成一个环。另一种氨基酸有一个额外的氧原子,因而使它变为酸性物质,再有一种则呈碱性的特征。有些氨基酸在一边悬挂着一个大基团,因此占有许多空间。有一种称为脯氨酸的氨基酸实际上并不是氨基酸,而是亚氨基酸。这里稍微有些差别,因为当脯氨酸在链上时,就会出现扭曲。如果我们想制造一种特殊的蛋白质,就应当按照这样的规则:这里先放一个硫钩;然后加进某种东西来占据空位;再加入某种东西以形成链上的扭曲。这样,我们将得到一个外观上复杂的链,它们互相钩连在一起,具有某种复杂的结构。这可能就是所有的酶形成的方式。1960 年以来,我们所获得的伟大成就之一就是终于发现了某些蛋白质的原子的精确空间排列。在这些蛋白质中,一条链上就含有 56 个或 60 个左右的氨基酸链,在两种蛋白质的复杂图样中已经确定了 1 000 个以上的原子(如果把氢原子计入,那么就接近于 2 000 个)的位置。第一种阐明结构的蛋白质就是血红蛋白。这个发现的不足之处是我们从这样的图样中不能看出任何东西,我们不理解它为什么会具有那样的功能。当然,这是下一步需要解决的问题。

另一个问题是,酶怎么会知道该成为什么?一个红眼蝇会生出一个小的红眼蝇,这样产生红色素的整个酶组信息必定从一代传到下一代。这是由细胞核中的一种称为 DNA(脱氧核糖核酸的缩写)的物质所完成的,它不是蛋白质。这种关键的物质从一个细胞传到另一个细胞(例如,精虫细胞主要由 DNA 组成),并且携带了关于如何形成酶的信息。DNA 是一张"蓝图"。那么这张蓝图看来像什么?它又如何起作用?首先,这张蓝图必须能加以复制。

其次，它必须能给蛋白质以指令。说到复制，我们可能会认为这种过程像细胞的复制。但细胞只是简单地长大，然后一分为二。那么 DNA 分子也必须如此吗？它们也是长大以后一分为二吗？每一个原子当然不会长大并一分为二！因此，除非有一种更聪明的办法，否则就不可能复制出一个分子来。

对 DNA 这种物质的结构已经进行了很长时间的研究，首先用化学方法找出它的成分。然后又用 X 射线法找出它在空间的图像。结果得到如下值得注意的发现：DNA 分子是一对彼此缠绕在一起的链。这些链与蛋白质的链类似，但化学结构上是完全不同的，每条链的骨架是一列糖与磷酸基，如图 3-2 所示。现在我们看出链是怎样容纳指令的，因为如果我们把这个链从中间劈开，就可以得到一个 BAADC……系列，而每个生命体都可以有一个不同的系列。这样，也许为制造蛋白质所需的特殊指令已以某种方式包括在 DNA 的特殊系列里。

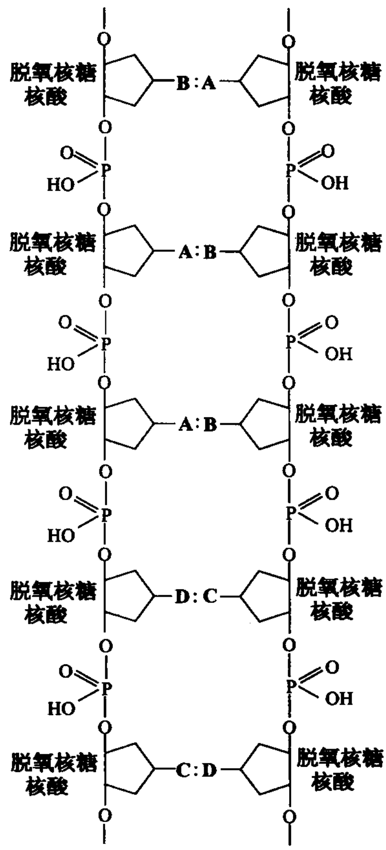


图 3-2　DNA 结构示意图

与链上的每一个糖相结合，并把两条链连接在一起的是一些交叉链对。然而它们并不都是相同的，总共有四种：腺嘌呤、胸腺嘧啶、胞嘧啶及鸟嘌呤。现在让我们称它们为 A、B、C 和 D。有趣的是，只有一定的配对才能彼此处于相对的位置，例如 A 对 B，C 对 D。当这些对放在两列链上时，它们“彼此对合”，并具有强大的相互作用能。然而 C 不适合于 A，B 也不适合于 C；它们的适合配对是 A 对 B，C 对 D。所以假如有一个是 C，另一个就一定是 D，等等。在一条链上无论是什么字母，在另一条链上则必须有特定的与之配对的字母。

那么，复制又是怎么一回事呢？假设我们把这整条链一分为二，我们怎么能制造出另一个正好与它一样的链呢？如果在细胞的物质中有一种加工部门，产生了磷酸盐、糖以及没有连在一个链上的 A、B、C、D 单元，那么唯一能与我们那个分开的链相连的单元必须是正确的，是 BAADC……的互补体，即ABBCD……。于是，当细胞分裂时，链亦从中间裂开，一半最终与其中一个细胞在一起，而另一半则留在另一个细胞内；当它们分离后，每个半链都会形成一个新的补足的链。

接下来的问题是，A、B、C、D 单元的次序究竟怎样精确地决定蛋白质中氨基酸的排列？这是今天生物学中没有解决的一个中心问题。然而，初步的线索，或者说一点信息是：细胞中存在一种叫做微粒体的小粒子，现已知道那就是制造蛋白质的地方。但是微粒体并不在细胞核内，而 DNA 及它的指令却在细胞核内。看来是有某种原因的。然而，现在也知道从 DNA 分出的小分子，不像携带有全部信息的大 DNA 分子那样长，而像它的一小部分，它叫 RNA。但这无关紧要，RNA 是一种 DNA 的拷贝——一个简短的拷贝。RNA 不知怎么地携带了关于要制造那种蛋白质信息，跑到微粒体中，这一点我们已经知道了。

当它到达那里后,在微粒体中就合成出蛋白质,这一点也已经知道了。不过,氨基酸怎样进入蛋白质,又怎样根据 RNA 上的密码来排列,等等,这些细节还不太清楚。我们不知道如何去解这种密码。比方说,假如我们知道了一排字母 ABCCA,我们也无法告诉你要制造的是什么蛋白质。

今天,无疑没有一个学科或领域在这样多的前沿上比生物学取得更大的进展。如果我们要作出引导着人们在探索生命的努力中不断前进的最有成效的假说,这就是:所有的物质都是由原子组成的,并且生命体所做的每一件事都可以从原子的摆动和晃动中来理解。

§3-4 天 文 学

在我们对整个世界非常概括的描绘中,现在必须转到天文学上。天文学是一门比物理学更古老的学科。事实上,正是天文学向物理学提出了解释星体运动得如此美妙而又简单的问题,对于这个问题的理解,就构成了物理学的开端。但是在所有的天文学发现中,最值得注意的是:星体是由同地球上一样的原子组成的*。那么这是怎么知道的呢?原子释放具有确定频率的光,这有点像乐器的音色是具有确定的音调或频率的声音。当我们听见几种不同的音调时,可以分别说出它们来,但是当我们用眼睛观察混合的颜色时,却无法说出它由哪几种颜色组成,因为眼睛的辨别能力在这一点上远远比不上耳朵。然而,利用分光镜我们可以分析光波的频率,这样就可以看见各个不同星体上的原子所发出的真正"音调"。事实上,有两种化学元素在地球上被发现之前就已经在星体上发现了。氦是在太阳上发现的,它的名称就是由此而来的**;锝是在一种冷却的星体上发现的。这当然使我们在理解星体方面取得了一定的进展,因为它们也是由跟地球上同样的原子组成的。今天,我们已经知道了许多有关原子的知识,特别是它们在高温而密度不太大的条件下的行为,这样我们就能用统计力学的方法来分析星体物质的性能。即使我们无法在地球上复现有关的条件,但是应用基本的物理定律往往能精确地或十分接近地说出会发生什么事情。这就是物理学帮助了天文学。看来令人奇怪的是,我们对太阳内部物质的分布情况的了解远胜于对自己脚下的地球内部情况的了解。我们对星体内部发生的情况的了解要比在人们必须通

---

* 在这里我是讲得多么匆促啊!在这个简短的叙述中,每一句话包含了多么丰富的内容!"星体和地球都由同样的原子组成。"我通常挑选跟这一样的小题目来讲课。据诗人们说,科学使星星失去了美丽——它们只不过是由气体原子组成的球体。但事实上远不是这么一回事。我也会在荒凉的夜晚仰望星空,并感受它们。但我看到的比诗人少还是更多呢?无垠的天空丰富了我的想象,我那小小的眼睛扫遍这回转的天穹,就能注视这欢乐的天空,并能捕获 100 万年前发出的星光。宇宙是一幅无边无际的图案——我也是其中的一部分——也许组成我的身体的材料正是从某个已被遗忘的星球上喷射出来的,就像现正在那儿喷射的某个星球一样。假若我通过帕洛玛(Palomar)的巨大眼睛[指安装在美国威尔逊(Wilson)山帕洛玛天文台的 200 in 光学望远镜——译者注]来观察夜空,那么就会看到原来或许紧靠在一起的星群从某个共同的起点往四面八方奔驰而去。宇宙的模式,或者说它的含义,它的成因是什么?人们对这些问题有点了解是不会有损于宇宙的奥秘的。真理远比以往任何艺术家的想象更为奇妙!为什么现在的诗人不去歌颂它?为什么如果朱庇特(木星)像一个人,诗人就会歌颂它,但如果朱庇特是一个由甲烷和氨组成的旋转的巨大球体,诗人就默不作声了呢?

** 氦的英文名 helium 来自 Helios(太阳神)。——译者注

过望远镜来观察小小的光点这种困难的情况下可能推测出更多一些，因为在大多数情况下，我们可以计算出星体里的原子应当做些什么。

给人印象最深的发现之一是使星球不断发出光和热的能量来源问题。有一个参与这项发现的人，在他认识到要使恒星发光，就必须在恒星上不断地进行核反应之后的一天晚上和他的一位女朋友出去散步。当这个女朋友说："看这些星星闪烁得多美啊！"他说："是的，在此刻我是世界上唯一知道为什么它们会发光的人。"他的女朋友只不过对他笑笑。她并没有对于同当时唯一知道恒星发光原因的人一起散步产生什么深刻的印象。的确，孤单是可悲的，不过在这个世界上就是这个样子。

正是氢原子核的"燃烧"给太阳提供了能量，这时氢也就转变成了氦，而且，最终从氢制造出各种化学元素的过程是在恒星的中心进行的。组成我们身体的各种元素在一个星体上被"烹调"好后，就被抛出，存在于宇宙之中。我们是怎么知道的呢？因为这里有一条线索。化学反应永远改变不了不同的同位素的比例——多少碳 12，多少碳 13，等等，因为化学反应对两者而言都是大致相同的。这个比例纯粹是核反应的结果。看看，在熄灭的、冷却的余烬——比如我们自己就是这样的产物——里同位素的比例，就可以发现在构成我们身体材料的形成时期熔炉像什么样子。这个熔炉很像恒星，所以我们的元素很可能是在恒星上"制造"出来，而在我们称为新星和超新星的爆炸中被喷吐出来的。正是因为天文学与物理学是这样密切相关，所以我们学下去时将要研究许多有关天文学的知识。

§3-5　地　质　学

我们现在转到所谓的地球科学或地质学。首先是气象学和天气。当然气象学的仪器是物理仪器，就像前面所说的那样，实验物理学的发展使得提供这些仪器成为可能。然而，物理学家从来没有得出满意的气象学理论。"怎么！"你们会说："这里除了空气以外什么东西都没有，而我们已经知道了空气的运动方程。"我们的确知道。"那么，如果我们知道了今天的空气状态，为什么就不能计算出明天的空气状态？"首先，我们并不真正知道今天的状态究竟是怎样的，因为空气到处旋转。结果它非常敏感，甚至不稳定。假如你们看到过水流平稳地流过水坝，然后当它下落时一下子变成大量的水珠和水滴的话，你就会懂得我所说的不稳定是什么意思了。你们知道水在流出溢水口之前的情况，它是十分平滑的；但是在它开始下落的一瞬间，水滴从哪里开始溅出？决定水滴将会有多大，并且在哪里的因素是什么？这些都无法知道，因为这里水是不稳定的。而对于空气来说，即使是平稳地运动着，但当它越过一座山时就变成了复杂的旋涡。在许多领域中都出现这种湍流现象，我们在今天还无法对之进行分析。现在，赶快离开天气问题，回到地质学上去吧！

对于地质学而言，它的基本问题是，究竟是什么使地球成为现在这个样子？最明显的过程就在你们的眼前，这就是河流、风等的侵蚀过程。要理解这些事是相当容易的，但是要知道，对于每一片侵蚀都有等量的另外一些东西出现。平均而言，今天的山脉并不比过去的低，因此必定有一种造山过程。假如你们学过地质学，你们就会知道，确实存在着造山过程以及火山作用，这些现象没有人懂得，但却占了地质学的一半内容。实际上，火山的本质并没有被人们所理解。造成地震的原因是什么最终也未被人们所了解。我们所知道的是，如果一个东西推动另外一些东西，那么就会突然断裂，并且产生滑动，这当然是对的。但是什

么东西在推？为什么会这样？有一种理论认为，在地球内部存在着环流，它是由于内外温度上的差别而造成的，也就是它们在运动过程中轻微地推着地球的表层，这样，假如有两股相对的环流在某个地方碰上的话，物质就会在这个区域里堆积起来而形成山脉，这些山脉处于非常不相宜的受到应力的状态，这样就会引起火山爆发，或造成地震。

那么地球内部的情况是怎样的呢？关于地震波在地球里的传播速度以及地球的密度分布已经了解得很多。然而，关于物质处于我们预期在地球中心所应有的压强之下会有怎样的密度，物理学家没有能够提出一种有效的理论。换句话说，我们还不能很好地解决在这种情况下的物质的性质问题。我们在地球方面所做的事比在星体的物质条件下所做的事要差得多。这里所包含的数学到现在为止看来似乎过于复杂，但是也许不要很长时间就会有人认识到这是一个重要的问题，并且着手解决这个问题。当然，另一方面，即使我们确实知道了密度，还是不能判断环流，也不能真正得知高压下的岩石的性质。我们无法说出岩石要多快才会“融化”，这必须通过实验来解决。

§3-6 心 理 学

接下来，我们考虑心理科学。顺便提一下，心理分析并不是一门科学，它充其量不过是一个医学过程，也许更像巫术。它有一个疾病起源的理论——据说有许多不同的“幽灵”等。巫医有一个理论说，像疟疾那样的疾病是由进入空气中的幽灵所引起的，但是医治疟疾的药方并不是将一条蛇在病人头上晃动，而是奎宁。所以，如果你的身体感到有什么不舒服，我倒劝你到巫医那儿去，因为他是对疾病知道得最多的那批人中的一个。然而，他的知识不是一种科学。心理分析没有用实验仔细地检验过，因此没有办法知道，在哪些情况下它是有效的，在哪些情况下则是无效的，等等。

心理学的其他一些分支，包括感觉的生理学——在眼睛里出现一些什么情况，在大脑中出现一些什么情况——可以说，是并不令人感到兴趣的。但是在它们的研究中取得了一些微小的然而是真正的进展。有一个最有趣的技术性问题可以归之为心理学，也可以不归之为心理学，即有关大脑——如果你愿意的话，或者说神经系统的中心问题是：当某种动物学到了某件事后，它就能做一些以前不会做的事，所以它的大脑细胞也一定会有变化——只要大脑细胞是由原子构成的。那么，差别表现在哪里呢？当一件事情被记在大脑里后，我们不知道在哪儿去找它，或者去找些什么东西。如果一件事情被学到了，它意味着什么？或者说神经系统有些什么变化？我们都不知道。这是一个很重要的问题，但根本没有解决。然而，假设存在着某种记忆的物质的话，那么大脑恰恰就是这么多的连线和神经的集合体，这种集合体大概是无法用简单的方式来分析的。这和计算机以及计算单元很类似，它们也有大量的布线，有某种单元，大概就类似于神经元触点，或者说一根神经到另一根神经的联结点。思维和计算机之间的联系是一个非常有趣的课题，但我们在这里没有时间作进一步的讨论。当然，必须懂得，这个课题在有关人们一般行为的真正复杂性上所告诉我们的东西是非常之少的。人与人之间存在着如此巨大的差别，为了要达到那种理解将需要很长的时间，我们必须把研究起点退到更后面的地方。假如我们总算能够解决狗是怎样活动的，我们就已经走得够远了。狗是比较容易理解的，但是今天还没有一个人懂得狗是怎样活动的。

§ 3-7　情况何以会如此

为了使物理学不仅在仪器的发明方面，而且在理论方面对其他科学也有所裨益，有关的科学就必须向物理学家提供用物理学家的语言描述的研究对象。人们或许会问："青蛙为什么会跳跃？"物理学家对此就回答不出。如果人们告诉他青蛙是什么，这里有这么多的分子，那里有神经，等等，情况就不同了。假如人们或多或少地告诉我们地球或者星星是怎样的，那么我们就能够把它们想象出来。要使物理理论有点用处，我们就必须知道原子的位置。要理解化学，就应当确切知道存在着哪些原子，不然就无法分析。当然，这只是限制因素之一。

在物理学的姐妹科学中存在着另一种物理学中不存在的问题，因为没有更好的措辞，我们可以称它为历史问题。情况何以会如此？假如我们懂得了生物学的一切，就会想要知道现在地球上的所有生物是怎样发展过来的。这就是生物学的一个重要部分——进化论。在地质学中，我们不仅要知道山脉正在怎样形成，而且要知道整个地球最初是怎样形成的，太阳系的起源，等等。当然，这就会使我们想要知道在宇宙的彼时有什么样的物质。恒星是怎样演化的？初始状态又是如何？这些都是天体的历史问题。今天我们已经弄清楚许多有关恒星的形成及有关组成我们身体的元素的形成的知识，甚至还知道一些有关宇宙起源的事。

目前在物理学中还没有这种历史问题要研究。我们不会问："这里是物理学的定律，它们是怎样变化而来的？"我们此刻不去想象物理定律以某种方式随时间而变化，不认为它们在过去与现在是有差别的。当然，不能排除这种可能，而且我们一旦发现果真如此，物理学的历史问题就将与宇宙发展的其余历史问题交织在一起，于是物理学家就要谈论天文学家、地质学家和生物学家同样的问题。

最后，在许多领域中普遍存在着一个物理问题，这是一个很古老的问题，但是还没有得到解决。这并不是寻找新的基本粒子的问题，而是好久之前——大约 100 多年前就遗留下来的一件事情。在物理学上没有一个人能够真正令人满意地对它进行数学的分析，尽管它对于姐妹科学来说是一个重要问题。这就是环流或湍流的分析。如果我们注视着一个恒星的演化，就会发现这样的情形，我们就可以推断出将要出现对流，但在这以后我们就再也无法推断会有什么事发生了。几百万年后这个星体会发生爆炸，但是我们想不出是什么道理。我们不能分析气候，也不知道地球内部的运动。这类问题的最简单的形式就是取一根很长的管子，使水高速通过。我们问：使一定量的水通过管子需要多大的压力？没有人能从基本原理和水的性质出发来分析它。如果水流得非常慢，或者用的是蜂蜜那样的黏性物质，那么我们可以分析得很不错。在你们的教科书上就有这方面的内容。我们真正不能处理的是实际的水流过管子的问题。这是一个我们有朝一日应当解决的中心问题，但是现在还没有解决。

有一位诗人曾经说过："整个宇宙就存在于一杯葡萄酒中。"我们大概永远不可能知道他是在什么含义上这样说的，因为诗人的写作并不是为了被理解。但是真实的情况是，当我们十分接近地观察一杯葡萄酒时，我们可以见到整个宇宙。这里出现了一些物理学的现象：弯弯的液面，它的蒸发取决于天气和风；玻璃上的反射；而在我们的想象中又添加了原子。玻璃是地球上的岩石的净化产物，在它的成分中我们可以发现地球的年龄和星体演化的秘密。葡萄酒中所包含的种种化学制品的奇特排列是怎样的？它们是怎样产生的？这里有酵素、酶、基质以及它们的生成物。于是在葡萄酒中就发现了伟大的概括：整个生命就是发酵。任

何研究葡萄酒的化学的人也必然会像巴斯德(L. Pasteur)所做过的那样发现许多疾病的原因。红葡萄酒是多么的鲜艳！让它深深地留在人们美好的记忆中去吧！如果我们微不足道的有限智力为了某种方便将这杯葡萄酒——这个宇宙——分为几个部分:物理学、生物学、地质学、天文学、心理学,等等,那么要记住,大自然是并不知道这一切的。所以让我们把所有这些仍旧归并在一起,并且不要忘记这杯酒最终是干什么用的。让它最后再给我们一次快乐吧！喝掉它,然后把它完全忘掉！

第4章 能量守恒

§4-1 什么是能量

讲完对事物的一般性描述后，从这一章起，我们开始比较详细地研究物理学中各个方面的问题。为了说明理论物理学中可能用到的概念和推理的类型，我们现在来考察能量守恒定律，它是物理学最基本的定律之一。

有一个事实，如果你愿意的话，也可以说一条定律，支配着至今我们所知道的一切自然现象。没有发现这条定律有什么例外——就我们所知，它是完全正确的。这条定律称为能量守恒定律。它指出，在自然界所经历的种种变化之中，有一个称为能量的物理量是不变的。那是一个最抽象的概念，因为它是一种数学原理，说的是在某种情况发生时，有一个数量是不变的。它并不是一种对机制或者具体事物的描写，而只是一件奇怪的事实。起先我们可以计算某种数值，当我们看完了大自然要弄的技巧表演后，再计算一次数值，其结果是相同的(有点类似于在红方格中的象，移动了几步后——具体步骤并不清楚——它仍然在某个红方格里。我们这条定律就是这种类型的定律)。由于这是一种抽象的概念，我们将用一个比喻来说明它的含义。

设想有一个孩子，或许就叫他“淘气的丹尼斯(Dennis)”，他有一堆积木，这些积木是绝对不会损坏的，也不能分成更小的东西。每一块都和其余的相同。让我们假定他共有 28 块积木。每天早上他的母亲把他连同 28 块积木一起留在一个房间里。到了晚上，母亲出于好奇心很仔细地点了积木的数目，于是发现了一条关于现象的规律——无论丹尼斯怎样玩积木，积木数目仍然是 28 块！这种情况继续了好几天。直到有一天她发现，积木只有 27 块了，但是稍许调查一下就发现在地毯下面还有一块——为了确信积木的总数没有改变，她必须到处留神。然而，某一天积木的数目看来有些变化，只有 26 块了！仔细的调查表明：窗户已经打开，再朝窗外一看，就发现了另外的两块积木。又有一天，经过仔细的清点表明总共有 30 块积木！这使她相当惊愕。以后才了解到有个叫布鲁斯(Bruce)的孩子曾带着他的积木来玩过，并留下了几块在丹尼斯的房间里。自从丹尼斯的母亲拿走了多余的积木，把窗关上，并且不再让布鲁斯进来以后，一切都归正常，直到有一次，她清点时发现只有 25 块积木。然而，在房间里有一个玩具箱，母亲走过去要打开这个箱子，但是孩子大声叫喊道：“不，别打开我的箱子”，不让她打开玩具箱。这时他母亲十分好奇，也比较机灵，她想出了一种办法，她知道一块积木重 3 oz，有一次当她看到积木有 28 块时曾经称过箱子的重量为 16 oz，这一次她想核对一下，就重新称一下箱子的重量，然后减去 16 oz，再除以 3，于是就发现了以下的式子

$$(\text{所见到的积木数})+\frac{(\text{箱重})-16\ \mathrm{oz}}{3\ \mathrm{oz}}=\text{常数}. \tag{4.1}$$

接着,又好像出现了某种新的偏差,但是仔细的研究又表明,浴缸里脏水的高度发生了变化,孩子正在把积木扔到水里去,只是她看不见这些积木,因为水很混浊,不过在她的公式里再添上一项她就可以查明在水中有几块积木了。由于水的高度原来是 6 in,每一块积木会使水升高 1/4 in,因而这个新的公式将是

$$(\text{见到的积木数}) + \frac{(\text{箱重}) - 16\ \text{oz}}{3\ \text{oz}} + \frac{(\text{水的高度}) - 6\ \text{in}}{1/4\ \text{in}} = \text{常数}. \tag{4.2}$$

在她的这个复杂性逐渐增加的世界里,她发现了用一系列的项来计算积木的方法,这些积木藏在不准她去看的那些地方。结果,她得出了一个用于计算某个量的复杂公式,无论孩子怎样玩耍,这个量总是不变的。

这件事情和能量守恒有什么相似的地方呢?抽象地说,必须从这个图像中除去的最显著的一点就是,根本没有积木。在式(4.1)及式(4.2)中取走第一项,我们就会发现自己是在计算多少是有点抽象的东西。上述比较的相似之处在于以下几点。第一,当我们计算能量时,有时其中的一部分离开系统跑掉了,有时又有另一些能量进入这个系统。为了验证能量的守恒,必须注意我们没有把能量引入系统中或从系统中取走。第二,能量有许多不同的形式,对每一种形式都有一个公式。这些不同形式的能量是:引力能、动能、热能、弹性能、电能、化学能、辐射能、核能、质能。假如我们把表示这些能量的公式全都加在一起,那么,除非有能量逸出或有其他能量加入,否则其总和是不会改变的。

重要的是要认识到:在今天的物理学中,我们不知道能量究竟是什么。我们并不把能量想象成为以一定数量的颗粒物形式出现。它不是那样的。可是有一些公式可以用来计算某种数量,当我们把这些数量全部加在一起时,结果就是“28”——总是同一个数目。这是一个抽象的对象,它一点也没有告诉我们各个公式的机制或者理由是什么。

§4-2 重力势能

只有当我们的公式包含了所有形式的能量时才能理解能量守恒。我想在这里讨论一下地球表面附近的重力势能的公式,并用一种与历史无关的方式来导出它,这种推导方式只是为这堂课想出来的,也就是说一种推理思路,为的是要向你们说明一个值得注意的情况:从几个事实和严密的推理出发可以推断出很多有关大自然的知识。它也表明了理论物理学家是投身于怎样的一类工作。我们这里的推理仿照了卡诺讨论蒸汽机效率时所使用的极其杰出的论证方式*。

让我们考虑一种起重的机械,它有这样的特点:用降低一个重物的方法来提高另一个重物。此外还假设:在这种起重机械中不可能有永恒的运动(事实上,根本不存在什么永恒运动,这正是能量守恒定律的一般表述)。在定义永恒运动时必须特别小心。首先,我们定义起重机械的永恒运动。假如我们提起和放下一些重物并使机械回复到原来的状态后,发现最后的结果是提升了一个重物,于是我们就有了永恒运动的机械,因为我们可以利用被提起

* 事实上你们可能已经知道公式(4.3),因此这一讨论的意义与其说是得出式(4.3),不如说是表明能用推理论证的方法来得出这样的结果。

的重物使另外的一些东西运转。这就是说，提起重物的机械精确地回到原来的状态，而且是完全独立完成的——它没有从外界(就像布鲁斯的积木)取得能量来抬高这个重物。

图 4-1 所示是一台很简单的起重机械。这台机械举起三个单位的重物。我们把这三个单位的重物放在一个秤盘里，在另一端秤盘内则放置一个单位的重物。但是，为了使机械实际上能工作，我们必须在左边减去一点点重量。另一方面，我们可以通过降低三个单位的重物来升高一个单位的重物，只要我们在右边的盘子里提起一点点重量。当然，我们认识到，对于任何实际的起重机械来说，为了使它运行，必须施加一点额外的作用。这一点我们暂时不去考虑。理想的机械并不需要额外的作用，然而它们事实上是不存在的。我们实际使用的机械在某种含义上可以说几乎是可逆的，即假如降低一个单位的重物能使这种机械提升三个单位的重物的话，那么降低三个单位的重物也能使这种机械把一个单位的重物提升到接近原来的高度。

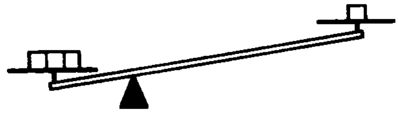


图 4-1　简单的起重机械

我们设想存在着两类机械：一类是不可逆的，它包括所有的真实的机械；另一类是可逆的。当然实际上它是不可能达到的，不管我们怎样仔细地去设计轴承、杠杆，等等。但是，我们假设有这样的东西——一台可逆机，在它使一个单位(1 lb 或任何其他单位)重的物体降低一个单位距离的时候提起了三个单位的重物。把这台可逆机称为 A 机。假定它使三个单位的重物升高的距离是 x。此外，假设还有另一台机械——B 机，它不一定是可逆机，并且也使一个单位的重物降低一个单位距离，不过使三个单位的重物升高的距离是 y。我们现在可以证明 y 不会高于 x，这就是说，不可能建造这样一种机械，能把重物提得比可逆机所提到的高度还要高。让我们来看看为什么是这样。假设 y 大于 x。我们用 B 机使一个单位的重物降低一个单位距离，这使三个单位的重物升高距离 y。然后，我们可以使这个重物从 y 降到 x，获得自由的能量，再利用可逆机 A 反向运转，使三个单位的重物降低 x 而使一个单位的重物升高一个单位距离。这样，一个单位的重物回到了原来的高度，而这两台机械又处于初始的备用状态！因此，假如 y 高于 x，那么就会有永恒运动，但我们已经假设这是不可能的。于是利用这些假定，我们就能够推导出 y 不会比 x 高，因此在所有可能设计的机械中，可逆机是最好的。

我们还可以看出所有的可逆机提升的高度一定完全相同。假定 B 的确也是可逆的。当然，前面关于 y 不会高于 x 的论据现在同样成立，但是我们也可以把这两台机械的工作顺序倒过来，即反之论证 x 不高于 y。这一点是很值得注意的，因为它使我们能够在不考察内部机制的情况下分析不同的机械对物体可以提升的高度。我们立刻知道，如果有一个人制作了一组极其精巧的杠杆，利用这组杠杆使一个单位的重物降低一个单位距离就可以把三个单位的重物提升到某一个高度，把这组杠杆和一个具有同样用途的简单的可逆的杠杆作比较就可以知道，它不会比简单的可逆的杠杆提得更高，而是或许还会低一些。假如这个人的机械是可逆的，我们也能精确地知道它可以提得多高。概括地说就是：每一台可逆机械无论怎样运转，当它使一个单位的重物下降一个单位距离时，总是会使三个单位的重物提升同样的距离 x。很清楚，这是一条非常有用的普遍定律。接下来的问题自然是 x 是多少？

假如我们有一台可逆机，它能在 3 对 1 时提升距离 x。在图 4-2 中，我们在一个固定的多层架子上放置三个球。另外有一个球放在离地面 1 ft 的台上。这台机械可以使一个球降

低1 ft来抬高三个球。现在，我们来这样安排：设容纳三个球的升降台有一层底板和两层架子，间隔正好是 x。其次，容纳球的多层架的间隔也是 x[图 4-2(a)]。首先我们使小球从多层架水平地滚到升降台上的架子中去[图 4-2(b)]，我们假设这并不需要能量，因为高度并没有改变。于是开动可逆机进行工作：它使一个球降到底层，而使升降台升高距离 x[图 4-2(c)]。由于我们已经巧妙地安排了多层架，于是这些球又和架子相平。接着我们把球卸到了多层架上[图 4-2(d)]。卸了球以后，我们可以使机械回复到初始状态。现在在上面三层架子上有三个球，在底部有一个球，但奇怪的是从某种观点上讲，我们根本没有使其中两个升高，因为，无论如何第二层和第三层架子像以前一样里面装着球。因此，最后的效果是使一个球升高了 $3x$ 距离。假如 $3x$ 超过 1 ft，那么我们就可以把小球放下来使机械回到初始状态[图 4-2(f)]，这样就能使这个装置再次运转。所以 $3x$ 不可能超过 1 ft，因为如果 $3x$ 超过1 ft，我们就能创造出永恒运动。同样，使整台机械反向运行，我们可以证明，1 ft 不能超过 $3x$，因为这是一台可逆机。所以 $3x$ 既不大于也不小于 1 ft，这样我们只是通过论证就发现了一条规律，$x = 1/3$ ft 。显然，这条规律可以推广为：开动一台可逆机使 1 lb 重物降下一定距离，那么这台机械可以使 p lb 重物提高那段距离的 $1/p$。另一种表示结果的说法是：3 lb 乘以所提高的距离(在我们的问题中是 x)，等于1 lb乘以所降低的距离(在这种情况下是 1 ft)。如果我们先把所有的球的重量分别乘以它们现在所在的高度，然后使机械运转，再把所有的球的重量乘以它们所在的高度，得出的前后结果不会有任何改变(我们必须把例子中只移动一个重物的情况推广到当我们降低一个重物就能提升几个不同的重物的情况——但这是不难的)。

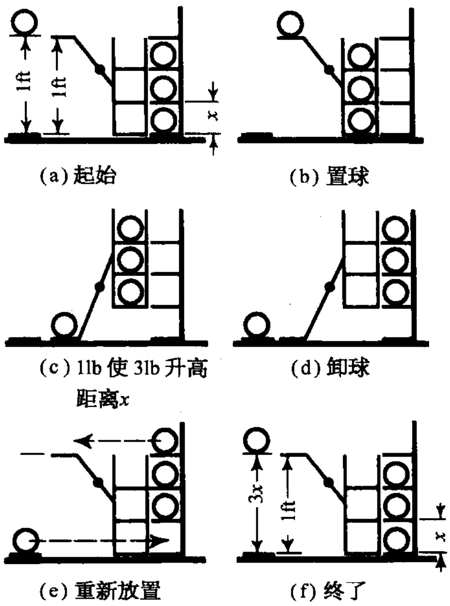


图 4-2 一种可逆机

我们把重量和高度的乘积之和称为重力势能——这是一个物体在空间上与地球之间的相互关系而具有的能量。那么，只要我们离地球不是太远(当位置很高时重力要减弱)，重力势能的公式就是

$$(\text{一个物体的重力势能}) = (\text{重量}) \times (\text{高度}). \tag{4.3}$$

这是一条十分优美的推理思路。唯一的问题在于，或许这并不是实际的情形(无论如何，大自然无须按我们的推理行事)。例如，也许永恒运动事实上是可能的。某些假设可能是错误的，或者我们的推理或许有错误，所以验证总是必要的。事实上，实验证明它是正确的。

那种与物体间相对位置有关的能量的一般名称就称为势能。当然，在上面的特殊情况中，我们则称它为重力势能。如果我们克服电力做功，而不是克服重力做功，即用许多杠杆“提升”一些电荷使之离开其他的电荷，那么所包含的能量就称为电势能。一般的原则是能量的变化为有关的力乘以力所推过的距离，而且这是一般的能量变化

$$(\text{能量的变化}) = (\text{力}) \times (\text{力的作用所通过的距离}). \tag{4.4}$$

随着课程的进展我们还要讲到其他的种种势能。

在许多情况下能量守恒原理对于推断会发生什么事都是非常有用的。在高中你们已学过许多有关不同用途的滑轮和杠杆的定律。我们现在可以看到所有这些“定律”都是一回事,并且不需要记住 75 条法则。一个简单的例子是如图 4-3 所示的一个光滑斜面,很巧,这是一个边长为 3—4—5 的三角形。我们在斜面上用滑轮挂上一个 1 lb 重的物体,而在滑轮的另一端悬挂一个重物 W。我们想知道为了平衡在斜面上的 1 lb 重物,W 必须是多重? 怎样来求出答案呢? 假如我们说情况正好是平衡的话,那就是可逆的,因而可以使重物上下移动。所以,我们可以考虑下述情况。起初,如图 4-3(a)所示,1 lb 重物在斜面底部,而重物 W 在斜面的顶端。当 W 以一种可逆的方式滑下去后,1 lb 的物体就在斜面顶部,而 W 经过的距离就是斜边的长度,如图 4-3(b)所示,即 5 ft。我们使 1 lb 重的重物只提高了 3 ft 而使 W 降低了5 ft,所以,$W = 3/5$ lb。注意,我们是从能量守恒,而不是从力的分解来得出这个结论的。然而在这里,巧妙总是相对的。可以用另一种更高明的方法来推导这个结果,这个由斯蒂维纳斯所发现的方法就铭刻在他的墓碑上。图 4-4 说明这个重物一定是 3/5 lb,因为这个圆球链并没有转动,很明显,链条的下端的部分是为自身所平衡的,所以一边三个重物的拉力必须与另一边五个重物的拉力平衡,即按边长的比例。从图中你们可以看到,W 一定是 3/5 lb。

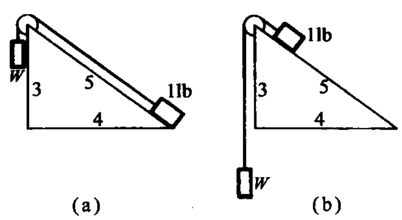


图 4-3 斜面

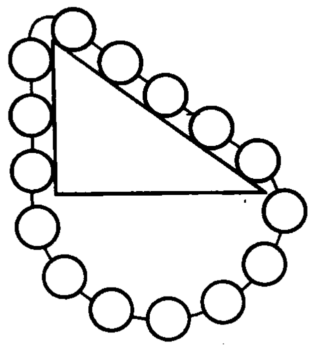


图 4-4 斯蒂维纳斯的墓志铭

现在用图 4-5 所示的螺旋起重器这个比较复杂的问题来说明能量原理。转动螺旋的把柄长为 20 in,螺纹为每英寸 10 圈(即 10 in^{-1})。我们想知道,为了举起 1 t (约 2 000 lb)的重物,在把柄上要施加多大的力? 假如我们要使 1 t 重物升高 1 in,就必须使把柄转 10 圈。把柄转一次时大约走过 126 in,所以它总共要走过 1 260 in。如果我们利用各种滑轮之类的机械,就可以用加在柄的端点上的一个未知的小重物 W 来举起 1 t 的重物。我们发现,W 大约是 1.6 lb。这就是能量守恒的一个结果。

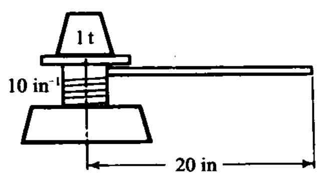


图 4-5 螺旋起重器

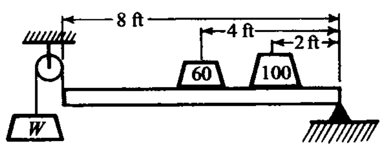


图 4-6 一端支撑着的荷重杆

在图4-6中我们举一个稍为更复杂一点的例子。一根8 ft长的棒,一端被支撑着,在棒的中间有一个60 lb的重物,离支点2 ft处还有一个100 lb的重物。假如不考虑棒的重量,为了保持它的平衡,我们要在棒的另一端加多大的力?假设在棒的那一端放上一个滑轮,并在滑轮上悬挂一个重物W,为了使棒平衡,W应当是多重?我们设想W落下任意一段距离,为了简便起见,设它下降了4 in,那么这两个重物要升高多少呢?棒的中心升高了2 in,而离固定端2 in处的那一点升高了1 in,所以,各个重物与高度的乘积之和不变。这个原理告诉我们,W乘以下降的4 in,加上60 lb乘以升高的2 in,再加上100 lb乘以升高的1 in,其和必定是零

$$-4W + 2 \times 60 + 1 \times 100 = 0, \quad W = 55\ \mathrm{lb}. \tag{4.5}$$

这就是说,为了使棒平衡,必须加上一个55 lb的重物。用这种方法,我们可以得出"平衡"定律——复杂的桥梁建筑的静力学,等等。这种处理问题的方法称为虚功原理,因为为了进行这种论证,我们必须设想系统移动一下——即使它实际上没有移动,甚至不能移动。为了运用能量守恒的原理,我们用了很小的假想的运动。

§4-3 动 能

为了说明另一种形式的能量,我们来考虑一个单摆(图4-7)。假如我们把它拉向一边,再把它放开,它就会来回摆动。在这种运动中,每当从端点跑向中点时,它的高度降低了,这时势能跑到哪里去了呢?当摆降到底部时,势能就消失了,不过,它将再次爬上来。可见重力势能必定转变为另一种能量形式。很明显它是依靠了自己的运动才能重新爬上来的。所以,当它到达底部时,重力势能就转变为某种其他形式的能量。

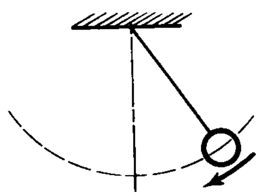


图4-7 单摆

我们应当得出一个运动能量的公式。现在,回想一下关于可逆机的论证,很容易看出,在底部的运动必定具有一定量的能量,可使摆升高到一定高度,这个能量与摆上升的机制无关,或者说与上升的路径无关,所以与我们对孩子玩积木的情形所写出的公式一样,这里也有一个(两种能量间的)等价公式。我们有另一种表示能量的形式,要说明它是不难的。摆在底部的动能等于重量乘以它能升高的高度:$\mathrm{K.E.} = W \cdot H$。现在需要的是一个利用某种与物体的运动有关的规则来说明摆动高度的公式。假如我们以一定的速度直接朝上抛出一个物体,它将到达一定的高度。我们暂时还不知道到底是多高,但是它依赖于速度——关于这个,有一个相应的公式。于是,为了找到物体以速度V运动的动能的公式,我们必须计算它能到达的高度,再乘以物体的重量。我们立刻就会知道,可以把动能写成这种形式

$$\mathrm{K.E.} = WV^2/(2g). \tag{4.6}$$

当然,运动具有能量这个事实与物体处于重力场内这件事毫无关系。无论运动怎样产生,这都没有关系。这是一个适用于各种速度的一般公式。式(4.3)及式(4.6)都是近似的公式。式(4.3)在高度很大时是不正确的,因为这时,重力要减弱,而式(4.6)在高速时要加以相对论性的校正。然而,当我们最后得到动能的精确公式时,能量守恒定律则是正确的。

§4-4 能量的其他形式

我们可以继续以这种方法来说明能量还以其他的形式存在。首先考虑弹性能。假如我们拉伸弹簧，就必须做一些功，因为拉伸时，可以提起重物，所以弹簧在伸长的情况下具有做功的可能性。假如我们求出重量与高度的乘积之和，那将与总能量不符——我们必须加上另外的一些东西来说明弹簧处于拉紧状态这一事实。弹性能就是关于弹簧被拉伸时这个事实的表述，它有多大呢？假如我们释放弹簧，那么弹簧经过平衡点时，弹性能就转变为动能，能量就在弹簧的伸长、压缩和动能之间来回变换（这里也有一些重力势能的增减，但是如果我们愿意的话，可以使实验"平着"做）。弹簧将一直来回振动，直到能量失掉为止……啊哈！前面我们已经在整个过程中玩了一点小小的手法——如加上一些小重物使物体运动，或者说机械是可逆的，它们可以永远运动下去等。但是，我们可以看到这些东西最终都要停下来的。当弹簧不再上下振动时，能量到哪里去了呢？这就引进了另一种形式的能量：热能。

在弹簧或杠杆里有着由大量原子组成的晶体。在极其仔细和精致地安排了机械的各个组成部分后，人们可以试着使事情调整得当某个东西在另一个东西上滚动时，根本没有一个原子会作任何跳动。但是我们必须非常小心。通常在机器运转时，由于材料本身的缺陷，会产生撞击和跳动，材料中的原子就开始无规则地摆动。于是那部分能量失踪了，但我们却发现机械运动减慢后，材料中的原子正以杂乱无章的方式摆动着。不错，这里仍然有动能，但是它与看得见的运动没有联系。多么奇怪！我们何以知道这里仍然有动能呢？我们发现，从温度计上可以看出，事实上弹簧或杠杆变热了，所以动能确实有了一定数量的增加。我们称这种形式的能量为热能。但是我们知道这实在并不是一种新的形式，它就是内部运动的动能（我们在宏观范围内对物质所做的一切实验中都有一个困难，即不能真正演示出能量守恒，也不能实际制成可逆机，因为每当我们使大块材料运动时，原子不会绝对不受扰动，所以总有一定量的无规则运动进入原子系统。我们无法用眼睛看出这一点，但是可以用温度计或其他方式测量出来）。

还有许多其他形式的能量，当然，眼下不可能对它们叙述得更多更详细。这里有电能，它与电荷的吸引和排斥有关；也存在着一种辐射能，即光能，我们知道它是电能的一种，因为光可以表示为电磁场的振动；还有化学能——在化学反应中释放的能，它是原子彼此间相互吸引的能量。弹性能也是如此，所以实际上，弹性能在一定程度上就像化学能。我们目前对化学能的理解是，化学能可分为两部分：首先是原子内电子的动能，所以化学能的一部分是动能，其余一部分是电子和质子的相互作用所产生的电能。接下去我们来考虑核能，它涉及原子核内的粒子的排列。我们有核能的公式，但是没有掌握基本的定律。我们知道它不是电能，不是重力能，也不纯粹是化学能，还不知道它究竟是什么。看来这是另外的一种能量形式。最后，存在着一个与相对论有关的对动能定律的修正（或者随便哪一种你喜欢用的说法），也就是说动能与另一种称为质能的东西结合在一起。一个物体由于它的纯粹的存在就有能量产生。假如有一个静止的电子和一个静止的正电子起先稳定地搁置着而不发生任何作用——既不去考虑引力效应，也不去考虑其他，然后当它们碰在一起时就会湮没，并释放出一定量的辐射能，它是可以计算的。为此我们需要知道的只是物体的质量，而与究竟是什么物体无关。两个粒子消失后，就产生了一定的能量。爱因斯坦首先找到了计算公式，即 $E = mc^2$。

从我们的讨论中可以很明显地看到,在进行分析时,能量守恒定律是极其有用的。我们已经在几个例子中表明了这一点,在那些例子中并没有知道所有的公式。假如我们有了各种能量的公式,那么无需深入细节就能分析出有多少过程应当会发生,所以守恒定律是非常有趣的。由此很自然会产生一个问题:在物理学中还有哪些其他守恒定律?有另外两条守恒定律是与能量守恒定律类似的,一条称为线动量守恒,另一条称为角动量守恒,关于这方面我们会在以后知道得更多。归根到底,我们并没有深刻地理解守恒定律。我们不理解能量守恒。我们并不认为能量是一定数量的颗粒物。你们也许听说过光子是以一个个的颗粒形式出现的,一个光子的能量是普朗克常数乘以频率。这是正确的。但由于光的频率可以是任意的,所以没有哪条定律断言能量必须是某种确定的数值。与丹尼斯的积木不同,能量的数值可以是任意的,至少今天的理解是如此。所以在目前我们并不把能量理解为对某种东西的计数,而只是看作一种数学的量。这是一种抽象而又十分奇怪的情况。在量子力学中,我们知道能量守恒与自然界的一个重要性质——事物不依赖于绝对时间——有十分密切的关系。我们可以在一个给定的时刻安排一个实验,并且完成它,然后在晚一些的时候再做同样的实验,那么实验的情形将完全是相同的。但这是否严格正确,我们并不知道。如果我们假设它是正确的,再加上量子力学的原理,我们就可以推导出能量守恒定律,这是一件相当微妙和有趣的事,不容易加以解释。其他的守恒定律也有连带的关系。动量守恒定律在量子力学中与一个命题有关,即无论你在哪里做实验都不会造成什么差别,结果总是同样的。最后,像空间上的无关性与动量守恒相联系、时间上的无关性与能量守恒相联系一样,假如我们转动仪器的话,这也不会造成任何差别,所以宇宙世界在角度取向上的不变性与角动量守恒相关。此外,还有三条其他的守恒定律。迄今为止我们可以说,这些定律是精确的。它们要容易理解得多,因为在本质上它们是属于清点积木一类的事。

这三条守恒定律中的第一条是电荷守恒定律,这只是意味着,数一下你有多少正电荷,多少负电荷,将正电荷的数量减去负电荷的数量,那么这个结果将永远不会改变。你们可以用一个负电荷抵消一个正电荷,但是你们不可能创造任何正电荷对负电荷的净余额。另外两条守恒定律与这一条相类似。一条称为重子的守恒。存在着一些奇异粒子,例如中子和质子,它们称为重子。在任何自然界的反应中,假如我们数一下有多少重子进入一个反应,那么在反应结束时出去的重子*的数量将完全相同。还有一条是轻子守恒定律。我们可以举出称为轻子的一群粒子:电子,μ子和中微子,还有一个电子的反粒子,即正电子(轻子数为−1)。在一个反应中对轻子的总数进行计数将揭示出这个事实:进入的数量与出去的数量决不会改变,至少就今天所知就是如此。

这就是六条守恒定律,其中三条是微妙的,与空间和时间有关,另外三条从对某种东西进行计数的意义上说是简单的。

关于能量守恒,我们应当指出,可资利用的能量是另一回事——在海水中的原子进行着大量的晃动,因为海水具有一定的温度,但是如果不从别处取得能量,就不可能使原子都按一个确定的方向运动。这就是说:虽然我们知道能量确实守恒,但是可供人类利用的能量并不那么易于保存。确定究竟有多少能量可供利用的那些定律称为热力学定律,它们包括着一个称为熵的有关不可逆热力学过程的概念。

---

* 反重子的重子数记为(−1)。

最后，我们提一下这个问题：今天我们可以从哪里获得能量？我们的能量来源是太阳、雨水、煤、铀以及氢。太阳形成了降雨，也造成了煤矿，所以所有这些都起源于太阳。虽然能量是守恒的，但看来大自然对此并无兴趣，她使太阳释放了大量的能量，但其中只有二十亿分之一到达地球。大自然保存着能量，不过实际上并不关心这一点，它让巨大数量的能量向四面八方散布开去。我们已经从铀中得到能量，从氢中也能得到能量，但是，现在只是在爆炸的危险的条件下才得到这些能量。假如可以在热核反应中控制它，那么每秒钟从 10 qt 水中得到的能量就等于整个美国每秒钟所发的电量，每分钟用 150 gal 的水，就会使你们有足够的燃料来供应今天在整个美国所需要使用的能量！所以，怎样想出一些办法使我们从对能量的需要中解放出来就成为物理学家的责任。无疑，这是可以达到的目标。

第5章　时间与距离

§5-1　运　动

在这一章里我们将研究时间和距离这两个概念的某些方面。上面我们曾经强调过，物理学像所有其他科学一样是依赖于观察的，人们或许还可以说，物理科学发展到它今天这种形式在很大程度上是由于强调了要进行定量的观察。唯有通过定量的观察，人们才能得到定量的关系，这些关系是物理学的核心。

很多人都喜欢把伽利略在350年前所做的工作看作是物理学的开端，并且称他为第一个物理学家。在此之前，对运动的研究是一种哲学上的事情，它所根据的是人头脑中所能想象出来的一些论据。大部分的论据是由亚里士多德和其他希腊哲学家提出的，并且被认为是"已经证明"了的。伽利略采取一种怀疑的态度，关于运动他做了一个实验，这个实验主要是这样的：他让一个球沿一斜面滚下，并且观察它的运动。然而他并不只是观察而已，而且还测量了在多长一段时间内小球跑了多远一段距离。

在伽利略之前很久，人们已经很好地掌握了测量距离的方法，但是，对于时间的测量，特别是短时间的测量，还没有精确的方法。虽然伽利略后来设计了比较准确的时钟（不过不像我们今天所见到的那样），但他在第一次做运动实验时是用他的脉搏来数出等间隔的时间的。让我们也来做一下这个实验。

当小球沿着轨道滚下时（图5-1），我们可以数自己的脉搏："一……二……三……四……五……六……七……八……"我们请一个朋友于每数一次就在小球所到达的位置上做一个小记号；然后就可以测量小球从被释放的位置开始在1个、2个或3个相等的时间间隔内所经过的距离。伽利略用下面这种方法来表述他的观察结果：如果从小球释放的时刻算起，它的位置是在1，2，3，4，……单位时间记下的，那么这些记号离开起点的距离就正比于数1，4，9，16，……。今天我们就会这样说：距离与时间的平方成正比

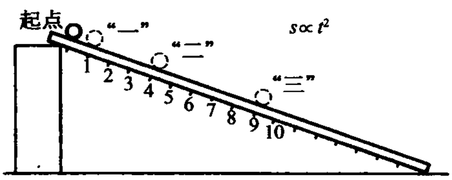


图5-1　一个小球沿着斜面滚下

$$s \propto t^2。$$

运动的研究对所有的物理领域是一件基本的事，它所讨论的问题是：何处？何时？

§5-2　时　间

让我们先来考察一下何谓时间。时间究竟是什么？假如我们能够找到时间的一个确切

的定义那该是多好。在韦伯斯特辞典里把“一段时间(a time)”定义为“一个时期(a period)”,又把后者定义为“一段时间”。这种定义看来并不十分有用。或许我们应该说:“时间就是不发生其他事情时所发生的事。”然而这也未必使我们的理解深入。事实上(就字典的含义来说)时间很可能是我们不能定义的事物之一。面对这个事实也许并没有什么不好。我们干脆说时间就是我们所知道的那回事:它就是我们等了多久!

不管怎样,重要的不在于我们如何来定义时间,而在于我们如何来测量它。测量时间的一种方法是利用某种能以有规则的方式一再发生的事情,即某种能周期性发生的事情。例如,一个昼夜。昼夜似乎是一再重复出现的。然而你思索一下,也许就会问:“昼夜是否系真正周期性重复的?它们是否有规则地变化着?每一天是否都同样长?”人们肯定会有这种印象,夏天的日子比冬天的日子长。当然,在人们感到非常无聊的时候,总觉得冬天的有些日子长得可怕。你们一定会听到过有人这么说:“哎呀,这是多么长的一天!”

但是就平均而言,日子确实大致一样长。我们有没有什么方法来检验日子——不论从某一天到下一天,还是(至少)就其平均而论——长短相同与否?一个办法是把它同某种别的周期性现象作比较,我们来看怎样能用一个沙漏来作这种比较。如果我们让某个人昼夜站在它的旁边,每当最后一粒沙掉下之后,他就把沙漏倒转过来,这样,我们用沙漏就能“创造”一个周期性的事件。

于是,我们就能计算从每天早上到下一天早上倒转沙漏的次数,这一次我们大概会发现每一“天”的“小时”数(即倒转沙漏的次数)并不相同。这样,我们就会怀疑太阳或者沙漏,或者怀疑这两者。在加以思索之后,我们或许会想到要计算从这个中午到下一个中午的“小时”数(在这里中午的定义并不是 12:00,而是指太阳在其最高点的时刻)。这一次我们将会发现,每一天的小时数都是相同的。

现在我们比较有把握认为“小时”和“昼夜”具有一种有规则的周期性,也就是说,它们划分出相继的等时间间隔,虽然我们没有证明它们中不论哪一个“确实”是周期性的。或许有人会问:是否会有某个万能者在夜间使沙漏中的流动变慢,而在白天又把它加快?我们的实验当然无法对这类问题作出回答,我们所能说的,只是发现一种事物的规则性与另一种事物的规则性相吻合而已。我们只能说把时间的定义建立在某种明显是周期性事件的重复性上。

§5-3 短的时间

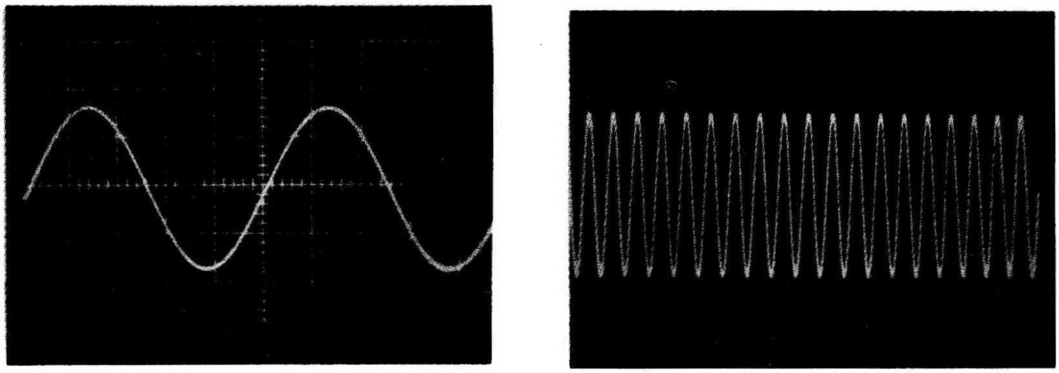
现在我们要指出,在检验昼夜的重复性这个过程中我们获得了一个重要的副产品,这就是找到了一种比较精确地测量一天的几分之一的方法,亦即找到了一种用较小的间隔来计量时间的方法。能不能把这种过程再往前发展,从而学会测量更小的时间间隔呢?

伽利略断定,只要一个摆的摆幅始终很小,那么它将总以相等的时间间隔来回摆动。如果做这样一个实验,对摆在一个“小时”内的摆动次数进行比较,那么这个实验就会表明,情况确实如此。我们用这个方法可划分出一个小时的几分之一。假如我们利用一个机械装置计点摆动次数,并且保持摆动进行下去,那么就得到了我们祖父一代所用的那种摆钟。

让我们约定,如果我们的摆一个小时内振动 3 600 次(并且如果一天有 24 个这样的小时),那么我们就称每一摆动的时间为 1“秒”。这样,就把原来的时间单位分成大约 10^5 个部分。我们可以应用同样的原理把秒分成更加小的间隔。你们可以理解,制造一个能

够走得任意快的机械摆是不现实的,但是我们现在能够制造一种称为振荡器的电学摆,这种电学摆能提供周期很短的摆动。在这种电子振荡器中,是电在来回振动,其方式与摆锤的摆动方式相类似。

我们可以制造一系列这种电子振荡器,每一个的周期要比前一个减小10倍。每一个振荡器可用前一个较慢的振荡器这样来"定标",即数出较慢的振荡器振动一次时它所振动的次数。当我们的钟的振动周期小于1 s的几分之一时,如果没有某种辅助装置以扩展我们的观察能力,那就无从计点振动的次数。这种装置之一是电子示波器,它的作用就像一种观察一短段时间用的"显微镜"。这个装置在荧光屏上画出一幅电流(或电压)对时间的图像。将示波器依次与我们的系列中相继的两个振荡器相连,它就先显示出一个振荡器中的电流图像,然后显示出另一个振荡器中的电流图像,从而得到如图5-2所示的两幅图像。这样,我们就很容易测出较快的振荡器在较慢的振荡器的一个周期中振动的次数。



(a) (b)

图 5-2 示波器屏上的两个图像。在(a)中,展示的是示波器与一个振荡器相连接时的波形;在(b)中,展现了它与另一个其周期只有前者十分之一的振荡器相连接时的波形

利用现代电子技术,已经制造出周期短到大约 10^{-12} s的振荡器,并且可以按照前面描述的那种比较方法用我们的标准时间单位——秒来予以定标。近年来,随着"激光器"或光放大器的发明和完善,已能制造周期甚至比 10^{-12} s更短的振荡器了,但是还不能用上述那些方法来予以定标,虽然毫无疑问,这不久一定能够做到。

比 10^{-12} s还短的时间已经测量出来,但用的是另一种测量技术。事实上,这里所用的是"时间"的另一种定义。一个方法是观察发生在运动物体上的两个事件之间的距离。例如,假定有一辆行驶的汽车把它的车灯先开亮,然后再关掉。如果我们知道车灯开、关的地点以及车速,那么我们就能求出灯开着的时间有多长。这段时间就是灯开着时所通过的距离除以汽车的车速。

近几年来,正是这种技术被用来测量 π^0 介子的寿命。π^0 介子在感光乳剂中产生并在其中留下微细的踪迹,用显微镜观察这些踪迹时,我们就可看到,平均而言一个 π^0 介子(认为它以接近光速的某个速度运动)在蜕变之前大约走过了 10^{-7} m的距离,所以它的寿命总共只有大约 10^{-16} s。但是必须着重指出,这里我们用了一个与之前稍有不同的"时间"定义。然而,只要在我们的理解方面不出现任何不协调的地方,那么我们就觉得有充分的信心认为这些定义是足够等效的。

在把我们的技术——而且如有必要也把我们的定义——进一步加以扩展之后，就能推断更快的物理事件的持续时间，我们就可以谈论原子核振动的周期，以及第 2 章中提到过的那些新发现的奇异共振态(粒子)的寿命。它们的全部寿命只不过占 10^{-24} s 的时间，大致相当于光(它以我们已知的最快速度运动)通过氢原子核(这个已知的最小物体)所花的时间。

那么，再短的时间呢？是不是还存在尺度更小的“时间”？如果我们不能够测量——或者甚至不能合理地去设想——某些发生在更短时间内的事件，那么要谈论更短的时间是否还有任何意义？可能没有意义。这是一些尚未解决的、但你们会提出的、而且也许在今后 20 或 30 年内才能回答的问题。

§5-4　长 的 时 间

我们现在来考虑比一昼夜还长的时间。要测量较长的时间很容易，我们只要数一数有几天就是——只要旁边有人在做这种计数的工作。首先我们发现，自然界里存在着另一个周期性，即年，一年大约等于 365 天。我们还发现，自然界有时也为我们提供了计算年的一些东西，例如树木的年轮或河流底部的沉积物。在某些情况下，我们就能利用这些自然界的时间标记来确定从发生某种事件以来所经历的时间。

当我们不能用计算年的方法来测量更长的时间时，那就必须寻找其他的测量方法。最成功的方法之一是把放射性材料作为一只“钟”来使用。在这种情况下，并不出现像昼夜或摆那样周期性的事件，但是有一种新的“规则性”。我们发现，某种材料的样品，当它的年龄每增加一相同的数值时，它的放射性就减少一相同的分数。假如我们画一张图来表示所观察到的放射性作为时间的函数，那么我们就得到如图 5-3 所示的一条曲线。我们看到，如果放射性在 T 内减少到一半(称为“半衰期”)，那么它在另一个 T 内就减少到 1/4，等等。在任一时间间隔 t 内共包含了 t/T 个半衰期，而在这段时间 t 后尚剩下的部分则是 $(1/2)^{t/T}$。

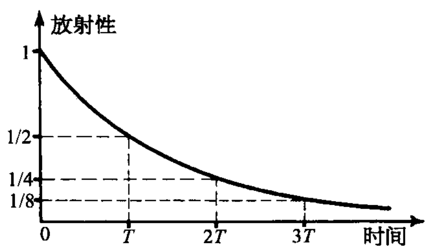


图 5-3　放射性随时间而减小。在每一个“半衰期”T 中，放射性都减小一半

时　　间

a	s	具有该平均寿命之事物	
		???????	
	10^{18}	宇宙的年龄	
10^{9}		地球的年龄	U^{238}
	10^{15}		
10^{6}		最早的人	
	10^{12}	金字塔的年龄	
			Ra^{226}
10^{3}		美国的历史	
	10^{9}	一个人的寿命	H^{3}
	10^{6}	一天	
	10^{3}	光从太阳射到地球	中子
	1	一次心跳	

(续表)

a	s	具有该平均寿命之事物	
	10^{-3}	声波的周期	
	10^{-6}	无线电波的周期	μ 介子
			$\pi^{\pm}$ 介子
	10^{-9}	光通过 1 ft 距离	
	10^{-12}	分子转动的周期	
	10^{-15}	原子振动的周期	
			π^0 介子
	10^{-18}	光经过一个原子	
	10^{-21}	核振动的周期	
	10^{-24}	光经过一个原子核	奇异粒子
		???????	

如果我们知道一块材料,比如说一块木料,在它形成时其中含有数量为 A 的放射性物质,而我们用直接测量法发现它此刻的量为 B,那么只要解方程

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}=\frac{B}{A},$$

就能计算这一物体的年龄 t。

幸运的是,在某些情况中,可以知道物体在形成时所包含的放射性总量。比如说,我们知道空气中的二氧化碳含有某一确定小量的放射性碳同位素碳 14(它由于宇宙线作用而连续不断地得到补充),如果测量一个物体的碳的总含量,并且知道这个总含量的某一分数就是原来的放射性碳 14,那么,就可知道上述公式中所要用到的那个开始时的总含量 A。碳14 的半衰期是 5 000 年,通过仔细的测量我们测出经 20 个左右的半衰期后所余留下来的数量,因此,就能够确定生成于 100 000 年以前那样古老的有机体的年代。

我们很想知道,并且认为也能知道比它更老的那些事物的寿命。许多有关这方面的知识,我们是通过测量具有不同半衰期的其他放射性同位素而得到的。如果我们用一种半衰期更长的同位素来进行测量,那么就能测得更长的时间。例如,铀有一种同位素,它的半衰期大约为 10^9 年,所以如果有一种物质在 10^9 年前形成时就含有这种铀,那么今天这种铀就只剩下一半。当铀蜕变时,它变成了铅。设想有一块岩石,它是在很久以前通过某种化学过程形成的。铅由于具有与铀不同的化学性质,它将出现在岩石的一个部分中,而铀则出现在岩石的另一部分中。铀和铅将互相分开。如果我们今天来考察那块岩石,将发现在那种应该只有铀存在的地方,现在有某一分数的铀和某一分数的铅,通过对这两个分数的比较,我们就能说出百分之几的铀已消失并且变成了铅。利用这个方法,有些岩石的年龄被测定为几十亿年。这个方法的一个推广便是不用特定的岩石,而是着眼于海洋中的铀和铅,并且对整个地球取平均值。用这个推广了的方法(在过去几年中)曾测得地球本身的年龄大约为 45 亿年。

人们发现,地球的年龄与掉到地球上的陨石(也是用铀方法测定的)的年龄是相同的,这是一件令人鼓舞的事情。看来,地球是由漂游在太空中的岩石形成的,而陨石很可能就是遗留下来的那些物质的残片。在 50 亿年前的某个时候,宇宙开始形成。现在人们认为,至少我们这部分宇宙起源于大约 100 或 120 亿年之前。我们不知道在此之前发生过什么事情。

事实上我们又可以提问:这个问题是否有任何意义?更早的时间是否有任何意义?

§5-5 时间的单位和标准

我们在前面实际上已表明了,如果从时间的某个标准单位,比如一天或一秒出发,并把所有其他的时间表示为这个单位的倍数或分数,那么将十分方便。然而,我们将用哪个单位作为我们时间的基本标准呢?是否用人的脉搏跳动?如果我们比较各人的脉搏,那就会发现它们之间似乎差别很大。如果比较两只钟,则发现它们的变化不那么大。于是你们会说:好,就让我们采用钟吧!但是用谁的钟呢?有个故事讲到一个瑞士男孩,他想使他所在的镇上所有的钟在正午时刻都同时敲响,所以他就跑来跑去,穿家过院,想使人人相信这样做的好处。每个人都想,如果他的钟在正午敲响时,其他钟也全都敲响的话,这该是一个多好的主意呀!然而要决定谁的钟应该取作标准,这倒是一件难事。幸运的是,我们大家都同意用一只钟,即地球。在很长一段时间里,人们把地球的自转周期当作时间的基本标准。但是当测量变得越来越精确的时候,人们发现,用最好的钟来进行测量,地球的转动也不是严格周期性的。我们有理由相信,这些"最好"的钟是精确的,因为它们彼此之间是相符的。由于种种理由,我们现在认为,有些天要比另一些天长,有些天要比另一些天短,平均而论,地球的自转周期是随着一个世纪一个世纪的过去而变长了一点的。

直到最近,我们还没有找到任何一个比地球的周期好得多的标准,所以把所有的钟同一天的长度联系了起来,而把一秒规定为一个平均日的 1/86 400。最近我们对自然界中某些振荡器获得了一些经验。我们现在相信,这些振荡器可以当作比地球更稳定的时间参考物。而且,它们也是基于一个大家都能采用的自然现象。这就是所谓的"原子钟"。它的基本的内在周期,就是原子振动的周期,这种振动对于温度或任何其他外界影响都不十分敏感。原子钟能使时间的精确度达到 10^{-9},或者比之更高。在过去两年中,哈佛大学的拉姆齐教授研制了一种改进的原子钟,它是依靠氢原子的振动而工作的。拉姆齐认为,这种钟比其他原子钟精确 100 倍。现在他正在对之作测量,这些测量将表明他的说法是否正确。

既然现在有可能制作远比天文时间精确的钟,那么我们可以预期,科学家们不久就会一致同意采用许多原子标准钟中的一种来定义时间单位*。

§5-6 长的距离

现在我们转到距离的问题上来。事物有多远或者有多大?人们都知道测量距离的方法是选用一种长度单位再加上计数,例如可以用尺或拇指边量边数。那么怎样来量比较小的东西呢?怎样把距离分小呢?这与我们将时间分小一样,我们同样取一个较小的单位,然后数出这个单位组合成一个较长单位时所需的数目。这样我们就能测量越来越小的长度。

但是我们并不总是把距离理解为用米尺量得的结果。仅仅用一根米尺是难以测量两个

* 1967 年的第十三届国际计量大会已通过决议将时间单位"秒"的定义改为:"一秒等于 ^{133}Cs 原子基态的两个超精细能级之间跃迁的辐射周期的 9 192 631 770 倍"。——译者注

山顶之间的水平距离的。我们曾经凭经验发现可以用另一种方式来测量距离:即用三角法。虽然这意味着我们实际上对距离用了一个不同的定义,但当它们可以一起应用时,就应是彼此相一致。空间或多或少有点像欧几里得所设想的那个样子,所以距离的这两种定义是一致的。既然它们在地球上相一致,那就使我们充满信心用三角法来测量更大的距离。例如,我们当时曾用三角法测定了第一颗人造卫星的高度(图 5-4)。我们测得的高度约有 5×10^5 m。如果测量得更仔细一点,则用同样的方法可以测出地球到月球的距离;安放在地球上两个不同地点的两个望远镜,将会告诉我们所需要的两个角度。用这种方法我们求得月球离我们有4×10^8 m 远。

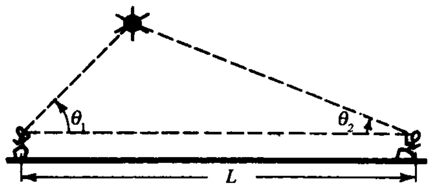


图 5-4 用三角法测定人造卫星的高度

对于太阳,我们不能这样做,或者至少到现在没有人能够这样做。由于我们不能相当精确地对准太阳上一个特定的点,从而不能精确地测出两个角度,所以无法测出到太阳的距离。那么如何来测量这个距离呢? 我们必须将三角法这个观念加以引申。我们可以通过天文观察方法来测量所有行星出现的位置之间的相对距离,从而得到一幅有关太阳系的图像,以显示每个行星间的相对距离。但这不是绝对距离。因此需要测出一个绝对距离,而这种绝对距离测量已由几种方法得到,其中直到最近以前还认为最精确的一个是测出地球到爱神星的距离。爱神星是一个时常靠近地球的小行星。如果对这个小天体应用三角法,就能得到一个所需要的比例尺度。由于知道了其他天体的相对距离,我们就能得出它们之间的绝对距离,例如地球到太阳,或地球到冥王星的绝对距离。

去年,我们在有关太阳系的比例尺度的了解上获得了巨大的进展。喷气推进实验室用直接的雷达观测非常精确地测定了地球到金星的距离。当然,这又是另外一种由推测而得到的距离。我们说,我们知道光传播的速度(而这也是雷达波传播的速度),并且假定,在地球与金星之间无论何处这个速度都相同。我们发射无线电波,并测得电波直到返回所需的时间,我们就能从时间来推测距离。这确实是距离测量的另一种定义。

可是我们如何来测量一个更遥远的恒星的距离呢? 幸运的是,我们可以回到三角法上来,因为地球绕太阳公转,而这种转动就为测量太阳系外的恒星距离提供了一条基线。假如我们在夏天和冬天用望远镜对准一颗恒星,那么我们可以期望能足够精确地测出这两个角度,从而能测出地球到恒星的距离,如图 5-5 所示。

如果恒星离得太远而不能应用三角法时又怎么办? 天文学家总是在发明测量距离的新方法。例如,他们发现,从恒星的颜色可以估计它的大小和亮度。他们测定了许多靠近地球的恒星——这些恒星的距离已用三角法测得——的颜色和内在亮度,并且发现在恒星颜色和内在亮度(在大多数情况中)之间存在着一个平滑的关系。如果现在测出了一个遥远恒星的颜色,那就可以用颜色-亮度关系来确定这个星体的内在亮度。在测量了我们地球上看来这颗恒星有多亮(或许应该说有多暗)之后,我们就可以计算它有多远(对于一个给定的内在亮度,其表观亮度是随距离的平方而减小的)。对称为球状星团的一群恒星作测量后,所得的结果很好地证实了这种星际距离测量方法的正确性。图 5-6 是这样一群恒星的一张照片。只要看一下照片,人们就会相信这些恒星都聚集在一起。用颜色-亮度关系这个测量距离的方法得到了同样的结果。

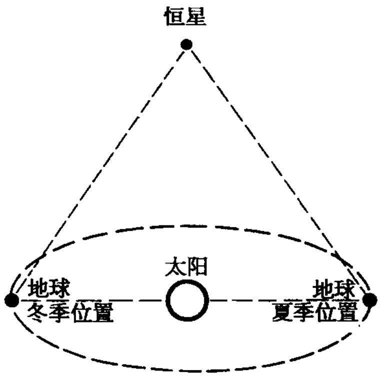


图 5-5 利用地球轨道的直径作为基线，可以用三角法测量靠近地球的恒星的距离

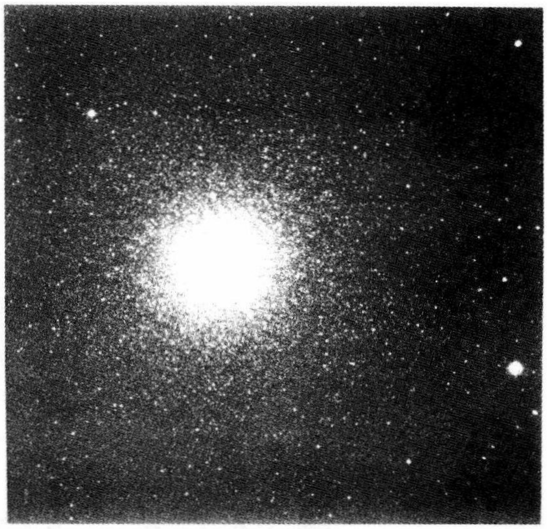


图 5-6 靠近我们银河系中心的一个星团。其中各恒星与地球的距离为 30 000 l. y.，或约为 3×10^{20} m

对许多球状星团进行研究之后我们得到另一些重要信息。人们发现，在天空的某一部分有许多这样的星团高度集中在一起，而且其中大部分离地球的距离大致相同。把这个信息和其他证据结合起来就能断定，星团的这个集中处就是我们所在银河系的中心。于是我们就知道到银河系中心的距离——大约为 10^{20} m。

知道了我们自己所在银河系的大小，我们就有了一把测量更大距离——也就是到其他银河系的距离——的钥匙。图 5-7 是一幅形状与我们的银河系颇为相同的一个银河系的照

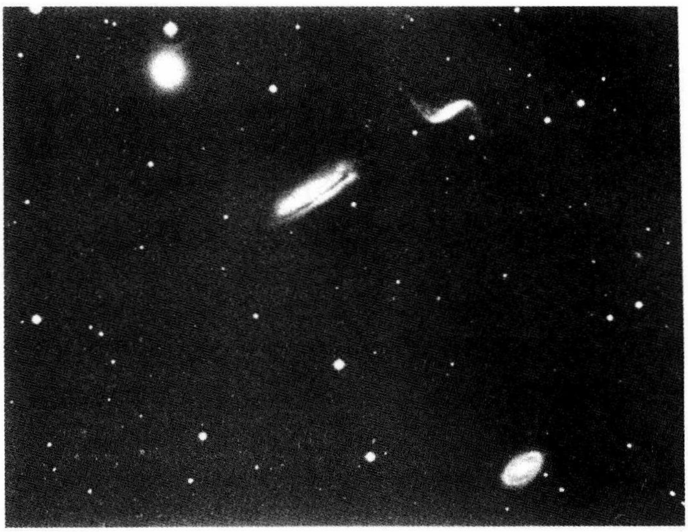


图 5-7 与我们的银河系一样的一个螺旋银河系，假定它的直径与我们的银河系相近，那么我们从它的表观大小就能算出它的距离。它离地球约 3×10^{7} l. y.（即 3×10^{23} m）

片。它的大小可能也和我们的相近(另外的一个证据支持了这种想法,即所有银河系都有相近的大小)。假如确实如此,那么我们就能说出它的距离,我们测量它在天空中的张角,又知道它的直径,于是就能算出它的距离——这又是三角法!

新近用巨大的帕洛玛望远镜获得了极其遥远的一些银河系的照片。图 5-8 是其中的一张。现在人们认为,这样的一些银河系大约处在从地球到我们宇宙界限——10^{26} m 处——一半的地方。10^{26} m 是我们能想象的最大距离!

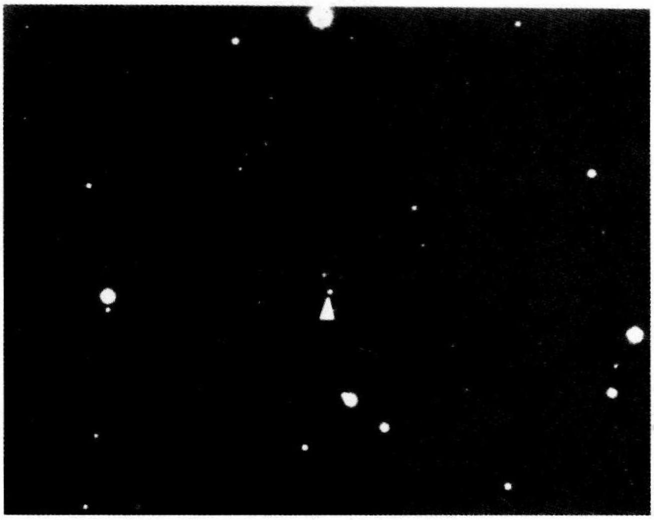


图 5-8 最现代化的 200 in 望远镜拍摄的最远天体——牧夫座中的 3C295(用箭头标出)(1960)

§ 5-7 短的距离

现在我们来考虑一下小的距离。把米分小是容易的。把一米划分成 1 000 个相等的间隔并没有多大困难。用相似的方法(利用一架好的显微镜),我们能够把一毫米分成 1 000 个等份,构成微米(一米的百万分之一)这样一个尺度,但这要稍微困难一些。要继续分成更小的尺度则更困难,因为我们“看不见”一个比可见光的波长(大约 5×10^{-7} m)还要小的物体。

然而我们不必停止在我们看得见的东西上。依靠电子显微镜,我们能用拍照方法来对更小的尺度(比方说一直到 10^{-8} m)继续这个划分过程(图 5-9)。用间接的测量,即用一种显微镜规模的三角法,我们能对越来越小的尺度继续进行测量。首先,我们从观察波长短的光(X 射线)如何在间隔为已知的标记所组成的图样上被反射的情况,确定光振动的波长。然后从同样的光在一块晶体上被散射的图样,我们就能确定原子在晶体中的相对位置,所得结果与化学方法确定的原子间距离相符合。用这种方法我们发现,原子的直径约为 10^{-10} m。

典型的原子大小约为 10^{-10} m,而原子核的大小为 10^{-15} m,其间相差 10^5 倍!可见原子与原子核之间在物理尺度上存在一个很大的“空隙”。对原子核的大小来说,用另一种测量方法比较方便。我们测量的是它的表观面积 σ,称之为有效截面。如果要知道半径,则可从

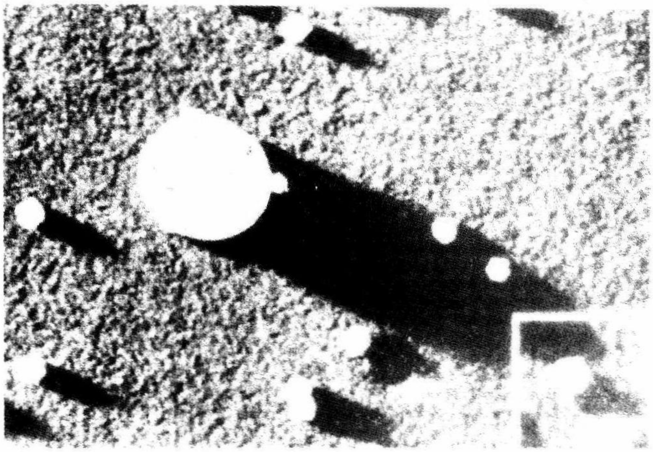


图 5-9 某些病毒分子的电子显微图。“大的”球是为定标用的，且已知其直径为 2×10^{-7} m(2 000 Å)

$\sigma=\pi r^2$ 求得，因为原子核是近似球形的。

核的截面可以这样来测量：使一束高能粒子通过某种材料的一块薄板，然后观察没有通过薄板的粒子数。这些高能粒子通常会穿过薄薄的电子云，而只有当它们碰上了质量集中的原子核时，才会被阻止或者被偏转。假设我们有一块 1 cm 厚的材料，其中大约有 10^8 个原子核。由于原子核是如此之小，以致一个核恰好位于另一个核的背后的机会是很小的。我们可以设想，沿着粒子束看去时这种情况的一个高度放大的图像犹如图 5-10 所示。

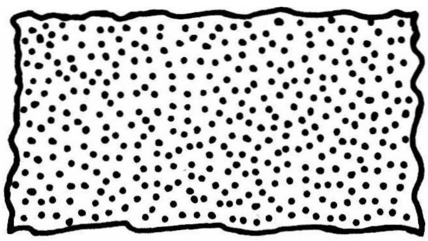


图 5-10 在只观察核的时候，通过一块厚 1 cm 的碳所见到的那个设想的图像

一个很小的粒子在通过物质时能打在一个核上的机会，正好等于其中所有核的剖面所占的总面积除以这幅图上的总面积。假定我们知道在这块板的面积 A 中有 N 个原子(当然，每个原子只有一个核)，那么被这些核所“覆盖”的总面积的比数就等于 $N\sigma/A$。现在设粒子束中射到薄板的粒子数为 n_1，从薄板另一边射出的粒子数为 n_2。这样，没有通过薄板的粒子的比数为 $(n_1-n_2)/n_1$，它应该正好等于被覆盖面积的比数。于是从等式*

$$\pi r^2=\sigma=\frac{A}{N}\left(\frac{n_1-n_2}{n_1}\right)$$

就能获得核的半径。

从这样一种实验我们得出，核的半径大约为 10^{-15} m 的 1～6 倍。10^{-15} m 这个长度单位称为费米**，以纪念著名的物理学家费米(1901—1958)。

* 只有当核所覆盖的面积是总面积的一个很小分数，即当 $(n_1-n_2)/n_1$ 远比 1 小时，这一等式才正确。否则我们必须对这样一种事情，即有些核将部分地为其前面的核所挡住的情况进行校正。

** 在国际单位制中，10^{-15} m 称为飞米。——译者注

如果我们进到更小的距离,那么将会发现什么呢?能不能测量更小的距离?这样的问题现在还不可能回答。有人提出这种看法,认为迄今尚未解决的核力之谜,只有在对这样小的距离下的我们关于空间或测量的观念进行某些修正以后才能解开。

人们也许会想到,用某些自然长度来作为我们的长度单位——比如说地球的半径或者它的某一部分——倒是一个很好的意见。米之取作为单位只是出于这样的考虑,它被定义为地球半径的$(\pi/2)\times10^{-7}$倍。但是,用这种方法来规定长度单位,既不方便,也不很准确。很长时间以来国际上约定:一米的定义是保持在法国一个特殊实验室中的一根棒上两条刻线之间的距离。不久前人们认识到这个定义既未精确到足以使之有用,也不像人们所希望的那样稳定或普遍。近年来正在考虑采用一个新的定义,即选定一根光谱线,把大家一致同意的它的波长的(任意)倍数作为长度的单位*。

距离测量和时间测量的结果有赖于观察者。两个作相互运动的观察者在测量看来似乎是同一事物时,将会得到不同的距离和时间。距离和时间间隔随着测量时所用的坐标系(或"参照系")不同而有不同的大小。我们将在后面的一章中详细地研究这个问题。

距　离

l.y.	m	
	10^{27}	?????
10^{9}		宇宙的边缘
	10^{24}	
10^{6}		到最邻近的银河系
	10^{21}	
10^{3}		到我们的银河系的中心
	10^{18}	
1		到最近的恒星
	10^{15}	
		冥王星的轨道半径
	10^{12}	
		到太阳
	10^{9}	
		到月球
	10^{6}	
		人造卫星的高度
	10^{3}	
		电视塔的高度
	1	一个孩子的高度
	10^{-3}	
		一粒盐
	10^{-6}	
		病毒
	10^{-9}	
		原子半径
	10^{-12}	
	10^{-15}	原子核半径
		?????

* 第十一届国际计量大会(1960年)已将原来用国际铂铱原器确定的长度单位米的定义改为"米的长度等于^{86}Kr的$2p^{10}$和$5d^{5}$能级间跃迁的辐射在真空中波长的1 650 763.73倍"。1983年第十七届国际计量大会又正式通过了米的新定义:"米是光在真空中1/299 792 458秒的时间间隔内运行路程的长度。"——译者注

完全精密的距离测量或时间测量是为自然规律所不允许的。我们前面已经提到，在测量一个物体的位置时，误差至少有

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p}$$

那么大，其中 h 是一个称为“普朗克常量”的很小的量，而 Δp 是我们在测量物体的位置时，对它的动量（质量乘以速度）所知的误差。我们也曾提到，位置测量的不确定性是与粒子的波动本性有关的。

空间和时间的相对性意味着时间的测量也有一个实际由

$$\Delta t = \frac{h}{\Delta E}$$

给出的最小误差，其中 ΔE 是我们在测量一个过程的时间时，对它的能量所知的误差。如果我们要更精确地知道某个事件何时发生，那就只能对发生了什么知道得更少一点，因为我们对其所含能量的知识减少了。时间的不确定性也是与物质的波动本性有关的。

第 6 章　概　　率

我们这个世界的真正逻辑寓于概率的计算之中。

——J. C. 麦克斯韦

§ 6-1　机会和可能性

"机会"是日常生活中通常使用的一个词汇。无线电在播送明天的天气预报时可能会说:"明天下雨的机会是 60%。"你也许会说:"我能活上 100 岁的机会是不大的。"科学家也使用机会这个词。一个地震学家可能会对这样的问题感兴趣:"明年在南加利福尼亚州发生某一级地震的机会有多大?"一个物理学家也许会提出这样的问题:"在下一个 10 s 内,某一特定盖革计数器将记录到 20 个计数的机会是多少?"一个政治家或国务活动家可能对下列问题感兴趣:"下一个 10 年内发生核战争的机会是多少?"同样,你也许会对从这一章中将学到一些东西的机会发生兴趣。

所谓机会指的是某种类似于猜测的事。为什么我们要猜测呢? 希望作出判断而只掌握不完全的信息或不确定的知识时,我们就要进行猜测。我们要对这是些什么东西或者可能会发生什么事情进行猜测。由于必须作出决定,我们常常要进行猜测。比如说,明天我是否要带上雨衣? 我应设计一座能够防御哪种程度地震的新大厦? 我是否要为自己建造一个放射性微粒掩蔽所? 我是否要在国际谈判中改变自己的立场? 我今天是否要去上课?

有时我们所以要进行猜测,是因为我们想用自己有限的知识来对某种情况说出尽可能多的东西。事实上,任何一个判断本质上都是一种猜测。同样,任何物理理论都是一种猜测,其中有成功的,也有失败的。概率论就是为进行较好猜测而产生的一种理论体系。应用概率的语言能使我们定量地谈论某些情况,而这些情况的变化可能很大,但确有某种一贯的平均行为。

让我们来研究向上抛掷硬币这件事。如果抛掷——以及硬币本身——都是"可靠"的,那么对任何一次特定的抛掷,我们无法预期能得到什么样的结果。然而我们可能会感到,在大量的抛掷中应该得到数目大致相等的正面和反面。我们说:"每次抛掷以正面落地的概率是 0.5。"

我们只对将来要做的那些观察谈论概率。所谓在一次观察中将得到一个特定结果的"概率",就是指我们在大量重复这个观察时对其中出现该特定结果的最可能分数的估计。如果我们设想重复作某种观察——比如看一下刚抛掷的硬币——N 次,并且称 N_A 为我们对这些观察中最可能出现某一指定结果 A——比如出现"正面"——的数的估计,那么所谓观察到 A 的概率 $P(A)$ 就是指

$$P(\mathrm{A})=\frac{N_{\mathrm{A}}}{N}. \tag{6.1}$$

对我们这个定义，需要作几点注释。首先，只有当所发生的事件是某一可重复的观察的可能结果时，我们才能谈到发生某件事的概率。像“那所房子里出现一个幽灵的概率是多少?”这类问题有没有任何意义是不清楚的。

也许你会反对说，没有一种情况是严格重复的。没错。每个不同的观察至少要在不同的时间或者地点进行的。我们所能说的只是，对于我们想要达到的目的来说，凡是重复进行的观察应该看来似乎都是等价的。至少我们应当这样假定，每一次观察都在同样准备好的情况下进行，特别是在观察开始时都要带有同等程度的无知(玩纸牌时，如果我们偷看一下对方的牌，那么我们对自己获胜的机会的估计就显然与偷看前不同)。

我们应当强调指出，式(6.1)中的 N 和 N_{A} 并不代表实际所作观察的次数。N_{A} 是我们在 N 个想象的观察中可能得出结果 A 的观察的最佳估计。因此，概率有赖于我们的知识以及进行估计的能力，实际上有赖于我们的常识！幸好许多事物在常识上都有某种程度的一致性，所以不同的人会作出同样的估计。然而，概率不必是一些“绝对”的数字。既然它们与我们对事物的无知有关，那么如果我们所掌握的知识发生变化，它们也会变得不同。

你们也许已经注意到我们的概率定义中另一个相当“主观”的方面。我们把 N_{A} 说成是对最可能次数的一个估计……。可是这并不意味着我们不折不扣地期望能观察到 N_{A}，而是期望能得到一个靠近 N_{A} 的数，而且数 N_{A} 比其邻近的任何其他的数更为可能。比如说，我们抛掷一个硬币 30 次，那么我们可以预料，得到正面的数字不大可能正好是 15，而很可能是某一靠近 15 的数，如 12、13、14、15、16 或 17。然而，如果我们必须对之作出抉择，那么我们就会决定，15 次正面要比任何其他的数更为可取。我们将写成：$P(\text{正面})=0.5$。

为什么我们选择 15 为一个比任何其他数更可取的数呢？我们一定跟自己进行过如下的争辩：如果在 N 次抛掷中得到正面的最可能次数为 N_{H}，那么得到反面的最可能次数 N_{T} 就等于 $N-N_{\mathrm{H}}$ (这里我们作了这样的假定，即每次抛掷不是得到正面便是得到反面，不会得到“其他”结果)。但如果硬币是“可靠”的，它就既不偏向正面，也不偏向反面。除非有某些理由可以认为硬币(或者抛掷)是不可靠的，我们就必须认为正面与反面具有相等的可能性。所以必须使 $N_{\mathrm{T}}=N_{\mathrm{H}}$。这样就得到

$$N_{\mathrm{T}}=N_{\mathrm{H}}=\frac{1}{2}N,\text{或者 } P(\mathrm{H})=P(\mathrm{T})=0.5.$$

我们可以把这一论证推广到任何一种情况，在这种情况下，可以观察到 m 个不同但又“相等”(即机会均等)的可能的结果。如果通过观察能得出 m 个不同结果，而且又有理由相信，其中任何一个结果与别的任何结果同样可能，那么得到某一个特定结果 A 的概率就等于 $P(\mathrm{A})=1/m$。

如果在一个不透明的箱子里有 7 个不同颜色的小球，我们“随便”(即不朝它看时)取出一个，那么得到某一种颜色的小球的概率是 1/7。从已洗过的 52 张牌中“任意”抽出一张红桃 10 的概率是 1/52。掷骰子而得到两个一点的概率是 1/36。

*　　　　*　　　　*　　　　*

在第 5 章中，我们用原子核的表观面积，或者称为“截面”来描写它的大小。这样做时，实际上我们就是

在谈概率。当我们向一块薄的材料发射一个高能粒子时，它有一定机会直接穿过去，也有一定机会碰撞在一个原子核上(既然原子核如此之小，以致我们无法看到，我们就不可能直接瞄准，而必须"盲目射击")。设在这块薄板中有 n 个原子，而每个原子的核具有截面积 σ，那么被所有这些核所"遮盖"的总面积为 $n\sigma$。在随机发射的很大数目 N 中，我们预期能击中某些核的数目 N_C 与 N 之比，犹如被遮盖的面积与薄板的总面积之比

$$\frac{N_C}{N}=\frac{n\sigma}{A}. \tag{6.2}$$

因此我们可以说，任何一个入射粒子在穿过薄板时将经受一次撞击的概率为

$$P_C=\frac{n}{A}\sigma, \tag{6.3}$$

其中 n/A 是我们这块薄板中单位面积内的原子数。

§ 6-2 涨　落

我们现在想利用有关概率的概念来比较详细地考虑一下这样的一个问题："如果我把一个硬币抛掷 N 次，那么预期会得到多少次真正的正面？"然而在回答这个问题之前，让我们先来看一下在这样一个"实验"中确实会发生什么情况。图 6-1 表示 $N=30$ 的这样一个实验在前三"轮"中所得的结果。"正面"和"反面"的前后次序完全是按照它们得到时的次序排列的。第一轮得到 11 次正面；第二轮也是 11 次；第三轮 16 次。在这三轮试验中，我们没有一回得到 15 次正面。是不是要对硬币开始发生怀疑呢？或者在这样一种游戏中，我们设想得到正面的最可能次数是 15 这一点错了呢？再做 97 轮实验，以便一共得到 100 轮每回抛掷 30 次的实验。实验的结果列在表 6-1 中*。

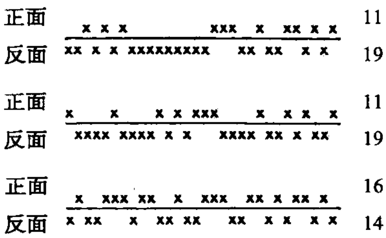


图 6-1 在每轮为 30 次抛掷的三轮游戏中所观察到的正面和反面的前后次序

表 6-1 在抛掷一个硬币 30 次的逐轮试验中每轮所得正面的数目

11	16	17	15	17	16	19	18	15	13	90次试验
11	17	17	12	20	23	11	16	17	14	
16	12	15	10	18	17	13	15	14	15	
16	12	11	22	12	20	12	15	16	12	
16	10	15	13	14	16	15	16	13	18	
14	14	13	16	15	19	21	14	12	15	
16	11	16	14	17	14	11	16	17	16	
19	15	14	12	18	15	14	21	11	16	
17	17	12	13	14	17	9	13	16	13	

如果观察一下表 6-1 中所列的各数，那么我们看到，大多数结果"靠近"15，而且位于 12 与 18 之间。如果我们为这些结果画一张分布图，那么就会对这些结果的细节有一个更好的

* 在前三轮游戏之后，实际上是这样进行实验的，即把放在一只盒子中的 30 个分币剧烈摇动，然后数一下出现正面的数目。

理解。我们计算一下得到某一记录 k 的实验次数，并把这个数对每一个 k 作图，如图 6-2 所示。记录到 15 次正面的共有 13 轮游戏。记录到 14 次正面的也是 13 轮。得到 16 和 17 次的，每一个都大于 13 轮。我们是否断定这里对正面有所偏袒？我们的“最佳估计”是否不够好？是不是我们现在应该作出这个结论，即每轮 30 次抛掷的“最可能”记录实际上是 16 次正面？但是且慢！把所有各轮游戏加到一起，就总共抛掷了 3 000 次。而获得正面的总数是 1 492。可见出现正面的抛掷其比数是 0.497，很接近而稍小于 0.5。当然我们不应假定抛掷后得到正面的概率大于 0.5！至于某特定的一组观察经常得到 16 次正面这个事实，是一种涨落现象。然而我们仍然预期最可能的正面数是 15。

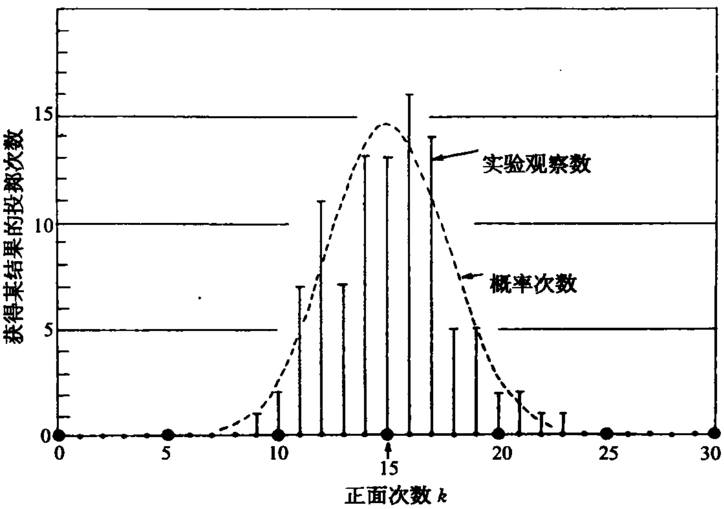


图 6-2 每轮 30 次抛掷的 100 轮游戏所得结果的概况。垂直线表示记录到 k 次正面的各轮游戏的数目。虚线表示从概率计算求得的所期望记录到 k 次的游戏轮数

我们可以提出这样的一个问题：“在 30 次抛掷的游戏中将获得 15、16 或任何其他次数正面的概率是多少？”我们已经说过，在抛掷一次的游戏中，得到一次正面的概率是 0.5，得不到正面的概率也是 0.5。在抛掷两次的游戏中，有四种可能的结果：即 HH，HT，TH，TT*。既然这些结果中的每一个都是同样可能的，我们就推断出：(a)记录到两次正面的概率是 1/4；(b)记录到一次正面的概率是 2/4；(c)记录到零次正面的概率是 1/4。这里有两种方式可以得到一次正面。但是得到两次或零次正面的方式各只有一种。

现在我们来研究抛掷三次的游戏。第三次抛掷同样可能得到一个正面或者一个反面。这里得到三次正面的方式只有一种：我们必须在前两次抛掷中得到两次正面，而后在最后一次中也得到正面。可是这里有三种方式可以得到两次正面。在掷得两次正面（一种方式）后，我们可以掷出反面，或者在前两次抛掷中只掷出一次正面（两种方式）后，我们可以掷出一个正面。因此对于 3—H，2—H，1—H，0—H 等记录，其同样可能的方式的数目分别为

* 这里“H”为英语单词“Head”的略写，此处意为“正面”，“T”为英语单词“Tail”的略写，此处意为“反面”。——译者注

1，3，3，1。共有八种不同的可能结果。于是其概率分别为 1/8，3/8，3/8，1/8。

刚才的讨论可以用图 6-3 所示的图解表示来概括。可以清楚看出，对于更大数目的抛掷，应如何来把这个图解表示继续下去。图 6-4 表示抛掷 6 次的这样一个图解表示。达到图中任何一点的所有"方式"的数目就是从起点开始到该点可以取的各种不同"途径"(即正面和反面相连的各种次序)的数目。最后一栏告诉我们掷得正面的总数。这样一种图表中出现的一组数称为帕斯卡三角形。这些数也称为二项式系数，因为它们也出现在 $(a+b)^n$ 的展开式中。如果我们称 n 为抛掷的次数，k 为掷得正面的次数，那么图表中的数字通常用符号 $\binom{n}{k}$ 来表示。顺便提一下，二项式系数也可以从下式

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{6.4}$$

算出，其中 $n!$ 称为"n 阶乘"，表示连乘积 $n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$ 的意思。

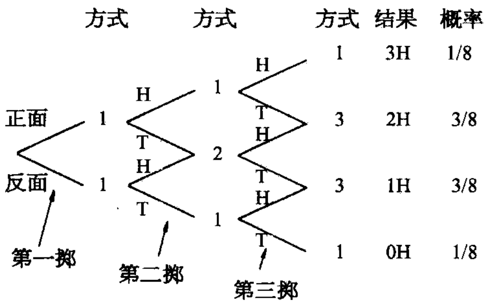


图 6-3 在抛掷三次的游戏中，能得到 0，1，2，3 次正面的方式数目的图解表示

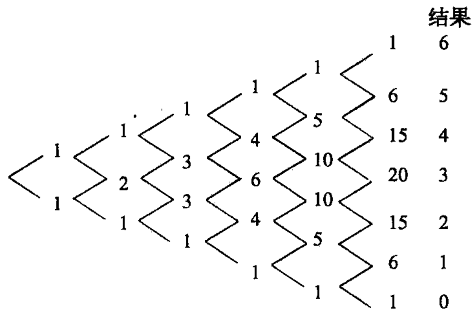


图 6-4 类似于图 6-3 的抛掷 6 次的游戏的图解表示

我们现在打算根据式(6.1)来计算在 n 次抛掷中得到 k 次正面的概率 $P(k, n)$。所有可能结果的总数是 2^n(因为对每一抛掷有两个结果)，得到 k 次正面的总共有 $\binom{n}{k}$ 种，而每一种都是同样可能的，所以我们有

$$P(k, n)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}. \tag{6.5}$$

既然 $P(k, n)$ 是我们期望会得到 k 次正面的比数，那么在 100 轮游戏中，我们应预期共有 $100\cdot P(k, n)$ 轮会出现 k 次正面。图 6-2 中虚线所经过的各点就是从 $100\cdot P(k, 30)$ 计算出来的那些点子。我们可以看到，我们预期有 14 或 15 轮游戏会记录到 15 次正面，然而只有 13 轮游戏观察到这个记录，我们预期有 13 或 14 轮游戏会记录到 16 次正面，但是却有 16 轮游戏观察到这个记录。这种涨落情况是"游戏的组成部分"。

我们刚才用过的方法，可以应用于最一般的情况，也就是在单独一次观察中只能得出两种可能结果的情况。我们用 W[表示"win"(赢)]和 L[表示"lose"(输)]来表示这两种结果。在一般情况下，单独一个事件会得 W 或 L 的概率是无需相等的。设 p 为得到结果 W 的概

率。于是 q——这个得到结果 L 的概率必然等于 $(1-p)$。在一组 n 轮的试验中,得到 k 次结果为 W 的概率 $P(k, n)$就等于

$$P(k, n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{6.6}$$

这个概率函数称为伯努利或二项式概率。

§6-3 无规行走

另一个有趣的问题也需要用到概率概念。这就是"无规行走"的问题。在最简单的形式下,我们可以想象这样一个"游戏",其中"游戏者"从 $x=0$ 的一点出发,要求他每"移动"一次要么朝前(向 $+x$ 方向)走一步,要么朝后(向 $-x$ 方向)走一步。而朝前朝后必须随机决定,例如用抛掷硬币的方法。我们将怎样来描写这种运动的结果呢?在一般形式下,这个问题与气体中原子(或其他粒子)的运动,即布朗运动有关,也与测量中误差的组合有关。你们将会看到,无规行走问题与我们已讨论过的抛掷硬币问题密切有关。

首先,让我们看几个无规行走的例子。我们可以用行走者在 N 步中所经过的净距离 D_N 来表示他的进度。图 6-5 为无规行走者所走路径的三个例子(这里我们用图 6-1 所示抛掷硬币所得的结果作为随机选择的移动取向)。

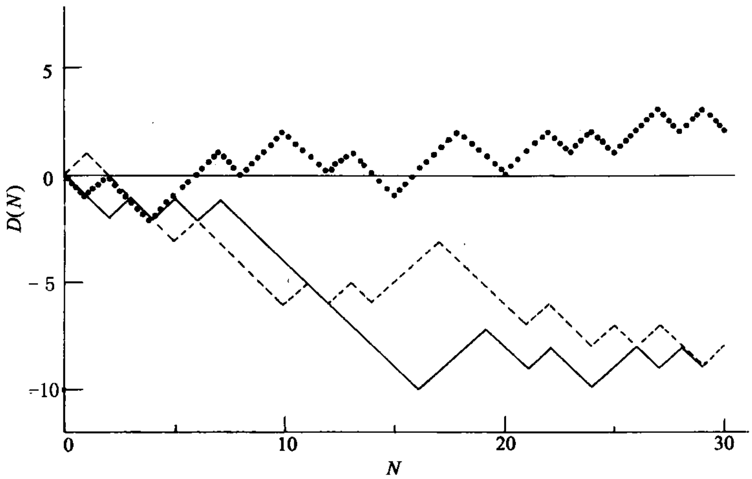


图 6-5 无规行走取得的进度。横坐标 N 表示所走的步子总数;纵坐标 $D(N)$表示离开起点的净距离

对于这样一种移动我们可以说些什么呢?首先我们也许会问:"平均而言他走了多远?"我们必定预期他的平均进度将为零,因为他向前或向后走的可能性是均等的。然而我们有这样的感觉,随着 N 的增加,他更可能偏离起点越来越远。因此我们也许要问,走过的用绝对值表示的平均距离是多少,也就是说 $|D|$ 的平均值是多少。可是在这里用另一种量度"进度"的方法更为方便。这就是用距离的平方 D^2 来表示,它无论对正的还是负的移动都为正,所以它是这种随机漫步的一个合理量度。

我们可以证明,D_N^2 的预期值恰好是所走步子的数目 N。所谓"预期值",指的是可几值(也就是我们的最佳猜测),我们可以把它看作是对重复多次的一系列行走所预期的平均行为。我们用$\langle D_N^2\rangle$来表示这样一个预期值,并且也可以称它为"方均距离"。走一步后的 D^2 总是$+1$,所以当然 $\langle D_1^2\rangle=1$(所有的距离都将以一步为单位来量度。以后我们将不再写出距离的单位)。

当 $N>1$ 时,预期值 D_N^2 可以从 D_{N-1} 求得。如果走了$(N-1)$步后,我们得到 D_{N-1},那么经过 N 步后,就有 $D_N=D_{N-1}+1$ 或 $D_N=D_{N-1}-1$。其平方为

$$D_N^2=\begin{cases}D_{N-1}^2+2D_{N-1}+1,\text{或}\\ D_{N-1}^2-2D_{N-1}+1.\end{cases}\tag{6.7}$$

对于大量独立的无规行走,我们所能预期得到的,每次只有每一个数值的一半,因此我们的平均预期值恰好是这两个可能值的平均值。于是 D_N^2 的预期值就是 D_{N-1}^2+1。一般而言,我们对 D_{N-1}^2 所应期望的"预期值"就是 $\langle D_{N-1}^2\rangle$(根据定义!)。所以

$$\langle D_N^2\rangle=\langle D_{N-1}^2\rangle+1.\tag{6.8}$$

我们已经说明 $\langle D_1^2\rangle=1$;因而得到

$$\langle D_N^2\rangle=N.\tag{6.9}$$

这是一个多么简单的结果!

如果我们希望得到的不是距离的平方,而是像距离那样的一个数,以表示无规行走中"所作的从原点算起的进展",那么我们可以用"方均根距离"D_{rms}来表示:

$$D_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\langle D^2\rangle}=\sqrt{N}.\tag{6.10}$$

我们已经指出,无规行走问题在数学形式上与本章开始时讨论过的那种抛掷硬币的游戏十分相似。如果我们设想每一步的取向对应于抛掷硬币中出现的正面或反面,那么 D 正好是获得正面的次数与获得反面的次数的差值 $N_{\mathrm{H}}-N_{\mathrm{T}}$。由于 $N_{\mathrm{H}}+N_{\mathrm{T}}=N$ 是总的所走步数(或总的所抛掷次数),我们就有 $D=2N_{\mathrm{H}}-N$。以前我们曾为预期的分布 N_{H}(也称为 k)导出一个表达式,而且得到了如式(6.5)所示的结果。由于 N 正好是一个常数,所以我们就为 D 得到一个相应的分布(由于超过 $N/2$ 后出现的每次正面都会使反面受到"损失",所以在 N_{H} 与 D 之间相差一个因子 2)。图 6-2 表示在无规行走 30 步的例子中可能得到的距离分布情况(其中 $k=15$ 应读作 $D=0$, $k=16$ 应读作 $D=2$,等等)。

N_{H} 和它的预期值 $N/2$ 的偏差为

$$N_{\mathrm{H}}-\frac{N}{2}=\frac{D}{2}.\tag{6.11}$$

方均根(rms)偏差为

$$\left(N_{\mathrm{H}}-\frac{N}{2}\right)_{\mathrm{rms}}=\frac{1}{2}\sqrt{N}.\tag{6.12}$$

根据我们对 D_{rms} 求得的结果,在走 30 步所预期的"典型"距离应是 $D_{\mathrm{rms}}=\sqrt{N}=\sqrt{30}=5.5$,或者典型的 k 应与 15 相差大约 $5.5/2\approx2.8$ 个单位。在图 6-2 中,我们可以看到,从

中心量起的曲线"宽度"正好大约等于 3 个单位,和上述结果相一致。

现在我们已有条件来考虑一直到目前为止被我们所回避的一个问题。我们怎样知道一块硬币是"可靠的"或是"灌过铅的"?现在我们至少能够为之提供一部分答案。对于一块可靠的硬币,我们预期其能出现正面的次数的比值是 0.5,亦即

$$\frac{\langle N_H \rangle}{N} = 0.5. \tag{6.13}$$

我们也预期实际的 N_H 将偏离 $N/2$ 大约有 $\sqrt{N}/2$,或者说,它的比值与 1/2 的偏差为

$$\frac{1}{N}\frac{\sqrt{N}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{N}}.$$

N 越大,所预期的比值 N_H/N 就越接近于二分之一。

在图 6-6 中,我们根据本章前面提到的掷币记录画了一条表示比值 N_H/N 的曲线。从图中可以看出,对于大的 N,得正面的比值趋向于接近 0.5。遗憾的是,对任何给定的一轮或几轮,连观察到的偏差都保证不了接近于预期的偏差。总是有一定的机会出现大的涨落——一长串的正面或者一长串的反面,造成一个任意大的偏差。我们一切所能说的,只是如果偏差接近于预期的 $1/(2\sqrt{N})$(比如说在 2 或 3 倍之内),那么就没有理由去怀疑硬币的可靠性。如果偏差大得多,那么我们可以对硬币发生怀疑,但无法证明它是灌过铅的(或者抛掷者是非常机灵的)。

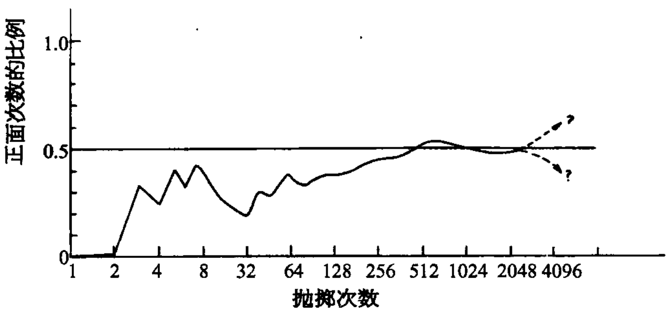


图 6-6 在一连串 N 次抛掷中获得正面次数的比例

我们也没有考虑过应该如何来处理这样一块"硬币"或某一与之相似的"不确定的"物体(比如一块始终以两种方位中无论哪一种着地的石块),对于它们来说,我们很有理由认为出现正面和反面的概率应该是不同的。我们已经定义了 $P(H) = \langle N_H \rangle / N$。那么怎样知道 N_H 的预期值是多少呢?在某些情况下,我们所能做得最好的,就是去观察在大量抛掷中所得正面的数目。由于缺少任何更好的数据,我们不得不令 $\langle N_H \rangle = N_H$(观察值)(除此之外,还能期望做什么呢)。然而必须理解到,在这样一种情况下,不同的实验或不同的观察者可能会推论出不同的概率 $P(H)$。但是我们可以预料,这些不同的答案应该在偏差 $1/(2\sqrt{N})$的范围内相互一致[假如 $P(H)$接近于 1/2 的话]。实验物理学家常常这样说:"实验确定的"概率是有"误差"的,并且把它写成

$$P(H) = \frac{N_H}{N} \pm \frac{1}{2\sqrt{N}}. \tag{6.14}$$

在这样一个表示式中含有下列意义:存在着一个"真正的"或"正确的"概率,只要我们知道的东西足够多,就能把它计算出来,其次是由于有涨落,观察会发生"误差"。然而没有办法能使这种想法做到逻辑上始终如一。如果能领悟到下列几点或许要比较好一些,即概率概念在某种意义上是主观的,它总是建立在不肯定的知识上的,而且它的定量值是随着我们得到的信息越多而改变着。

§6-4 概 率 分 布

我们现在回到无规行走的问题上来,并且考虑它的一种修正。我们设想除了每一步的方向(+或−)可以随机选择外,每一步的长度也能以某种无法预定的方式变化着,唯一的条件就是平均而言步子的长度是一个单位。这种情况更能代表象气体中一个分子的热运动那样的状况。如果我们称一步的长度为 S,那么 S 完全可以取任何一个值,但最通常的是"接近于"1。为明确起见,我们令 $\langle S^2\rangle = 1$,或者与之同等,$S_{\text{rms}} = 1$。$\langle D^2\rangle$ 的推导将仿照以前一样,只是式(6.8)现在要加以改变而写成

$$\langle D_N^2\rangle = \langle D_{N-1}^2\rangle + \langle S^2\rangle = \langle D_{N-1}^2\rangle + 1. \tag{6.15}$$

同以前一样,我们得到

$$\langle D_N^2\rangle = N. \tag{6.16}$$

现在对于距离 D,我们会预期得到什么样的一种分布呢?比如在走了 30 步后,$D=0$ 的概率是多少?回答是 0!D 取任一特定值的概率是 0,因为根本没有一种机会能使后退的(长度是变化的)步子的总和与朝前的步子的总和正好相等。我们无法画出一张像图 6-2 那样的图。

然而如果我们不是去问获得其值正好等于 0,1,或 2 的那些 D 的概率是多少,而代之以去问获得其值靠近 0,1,或 2 的那些 D 的概率有多大,那么我们就能得到与图 6-2 相似的曲线。我们定义 $P(x,\Delta x)$ 为 D 位于 x 处一个间隔 Δx(比如从 x 到 $x+\Delta x$)内的概率。对于小的 Δx,我们可以预期 D 位于这个间隔内的概率,与间隔的宽度 Δx 成正比。因此我们可以写成

$$P(x,\Delta x) = p(x)\Delta x, \tag{6.17}$$

函数 $p(x)$ 称为概率密度。

$p(x)$ 的形式与所走步子的数目 N 有关,也与个别步子的长度分布有关。我们不能在这里给出有关的论证,但当 N 很大时,对于所有合理的个别步子的长度分布,$p(x)$ 都是相同的,因而只取决于 N。在图 6-7 中,我们对三个 N 值各作一条曲线。你们会注意到,这些曲线的"半宽度"(离 $x=0$ 的典型散布范围)是 $\sqrt{N}$,正如我们已证明过它理应如此。

你们可能也已注意到,靠近零处的 $p(x)$ 值反比于 $\sqrt{N}$。这是由于曲线都有相似的形状以及曲线下面的面积都应相等而来的。既然 $p(x)\Delta x$ 是当 Δx 很小时在 Δx 中找到 D 的概率,那么我们可以这样来确定在任意一个从 x_1 到 x_2 的间隔内不论何处找到 D 的概率,只要把间隔分割成许多微小增量 Δx,然后对每个增量的有关概率 $p(x)\Delta x$ 相加而求其总和。D 落在 x_1 与 x_2 之间某处的概率,我们可以写作 $P(x_1 < D < x_2)$,它等于图 6-8 中所示阴

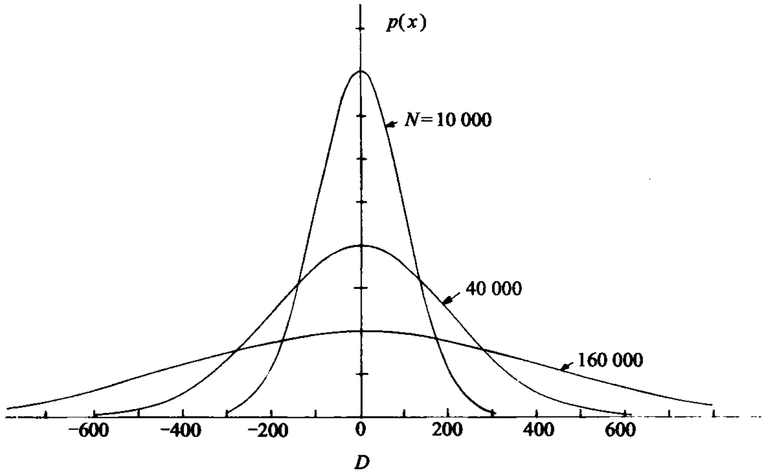


图 6-7　在步数为 N 的无规行走中终止在从起点算起的距离 D 处的概率密度(D 是用均方根步长为单位来量度的)

影的面积。增量 Δx 取得越小,结果就越正确。因此我们可以写成

$$
\begin{aligned}
P(x_1 < D < x_2) &= \sum p(x)\Delta x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} p(x)\mathrm{d}x. \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

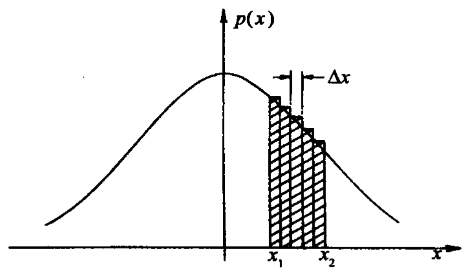


图 6-8　无规行走中所通过的距离 D,它位于 x_1 与 x_2 之间的概率就是曲线 $p(x)$ 下面从 x_1 到 x_2 的面积

整个曲线下面的面积是 D 落在不论何处(也就是它具有在 $x=-\infty$ 到 $x=+\infty$ 之间的某一值)的概率。这个概率当然是 1。因而必须有

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1. \qquad (6.19)
$$

由于图 6-7 中的曲线与$\sqrt{N}$成比例地变宽,所以为了保持总面积等于 1,它们的高度必须正比于 $1/\sqrt{N}$。

我们这里所描述的概率密度函数是最经常遇到的一种。通常把它称为正常或高斯概率密度。它的数学形式是

$$
p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}, \qquad (6.20)
$$

其中 σ 称为标准偏差,在我们的情况中 $\sigma=\sqrt{N}$,或者当方均根步长不为 1 时

$$
\sigma = \sqrt{N}S_{\mathrm{rms}}.
$$

前面我们已提到,气体中一个分子或任何一个粒子的运动犹如一种无规行走。假定我们打开一个装着有机化合物的瓶子,让它的一部分蒸气跑到空气中去。如果外面有气流,以致空气在作循环运动,那么气流也将带着蒸气一起运动。然而即使在完全静止的空气中,蒸气也会渐渐散布开去,进行扩散,直到布满整个房间。我们可以从它的颜色或气味加以鉴别。有机

化合物蒸气的个别分子之所以能在静止空气中散布开去,是由于这些分子与其他分子碰撞而造成的分子运动所致。如果我们知道其"步子"的平均大小,以及每秒所走的步数,那么就能求出一个或 n 个分子在经过任何一段特定时间后在从其起点算起的某一距离被找到的概率。随着时间的消逝,步子越走越多,气体就会像图 6-7 中相继的几条曲线那样逐渐散开。在以后要讲的一章中,我们将求出步子的大小和步子的频率如何与气体的温度和压强有关。

我们以前说过,气体的压强是由于分子撞击容器壁而形成的。以后如果要作较定量的描写时,我们就需要知道分子在弹跳时跑得有多快,因为它们所作的碰撞与这个速率有关。然而我们不能说这些分子具有如何确定的速率。这里必须用概率来描写。一个分子可以具有任何一个速率,但有些速率出现的可能性比另一些要大。我们可以这样来描写气体内正在发生什么,这就是说出任何一个特定分子具有速率在(v)与 ($v+\Delta v$) 之间的概率 $p(v)\Delta v$,而 $p(v)$这个概率密度是速率 v 的一个确定函数。往后我们会看到,麦克斯韦如何运用常识和概率观念为 $p(v)$找到一个数学表示式。函数 $p(v)$的形状 * 如图 6-9 所示。速度可以取任何一个值,但是最可能取的是靠近最可几值或预期值$\langle v\rangle$的那一些。

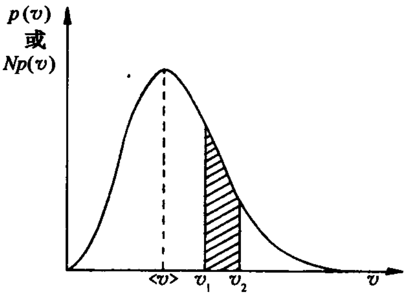


图 6-9 气体中分子的速度分布

我们常常以稍微不同的方式去看待图 6-9 中的曲线。如果我们考虑一个典型容器(比如,其体积为 1 l)中的分子,那么容器中存在着极大数量的分子 ($N\approx 10^{22}$)。由于 $p(v)\Delta v$ 是一个分子具有在 Δv 间隔内的速度的概率,所以根据我们对概率的定义,我们说,找到速度处在间隔 Δv 内的分子数的预期值$\langle\Delta N\rangle$应是

$$\langle\Delta N\rangle = Np(v)\Delta v. \tag{6.21}$$

我们称 $Np(v)$为"速度分布"。曲线下面两个速度 v_1 与 v_2 之间的面积,例如图 6-9 中所示阴影的面积代表了[对曲线 $Np(v)$来说]速度在 v_1 和 v_2 之间的分子的预期数。由于在气体的情况中,我们通常与大量的分子打交道,所以可以期望这一面积与预期数的偏差是小的(犹如 $1/\sqrt{N}$),因此我们常常不说"预期"数,而代之以说:"具有速度在 v_1 和 v_2 之间的分子数是曲线下面的面积。"但是我们应当记住,这种陈述所谈到的总是可几数。

§ 6-5 不确定性原理

在描写气体样品中 10^{22}个或类似这样多个分子的行为时,概率的概念肯定是有用的,因为很清楚,即使要写下每个分子的位置或速度这种试图,也是不实际的。当概率最初运用于这类问题时,大家曾认为这是一种方便——一种处理非常复杂的情况的方法。现在我们认为,概率的概念是描写原子事件所必不可少的。按照量子力学这个有关粒子的数学理论,在说明位置和速度方面总是存在着某种不确定性。充其量我们可以说,任何粒子只有一定的

* 麦克斯韦的表示式是 $p(v)=Cv^2\rho^{-av^2}$,其中 a 是一个与温度有关的常数,而 C 应选定得使总的概率等于 1。

概率可以使它的位置接近某一坐标 x。

我们可以这样来引进一个概率密度函数 $p_1(x)$，使 $p_1(x)\Delta x$ 为在 (x) 与 $(x+\Delta x)$ 之间找到这个粒子的概率。如果这个粒子的位置被很好地限制在某个地方，比如说靠近 x_0，那么函数 $p_1(x)$ 就可能如图 6-10(a)所示的曲线给出的那样。与之相似，我们必须用概率密度 $p_2(v)$ 来限定粒子的速度，而 $p_2(v)\Delta v$ 则表示能找到一个处于 v 与 $v+\Delta v$ 之间的速度的概率，如图 6-10(b)所示。

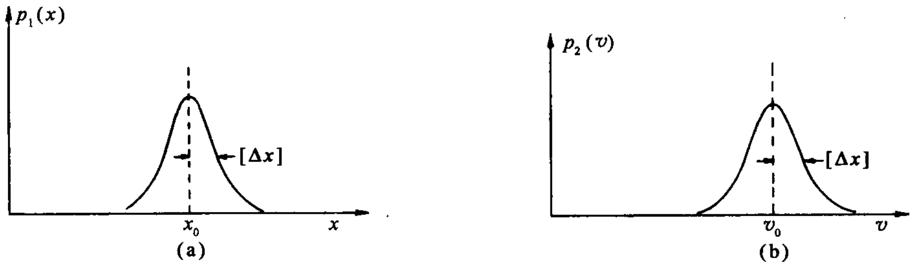


图 6-10 观察一个粒子的位置与速度时的概率密度

量子力学的基本结果之一是：两个函数 $p_1(x)$ 与 $p_2(v)$ 不能予以独立选定，特别是不能把它们都取得任意的窄。如果我们称 $p_1(x)$ 曲线的典型“宽度”为 $[\Delta x]$，$p_2(v)$ 曲线的典型宽度为 $[\Delta v]$（各如图所示），那么自然界就要求这两个宽度的乘积至少要与数 h/m 一样大，这里 m 是粒子的质量，h 是一个称为普朗克常量的基本物理常数。我们可以把这个基本关系写成

$$[\Delta x]\cdot[\Delta v]\geqslant h/m. \tag{6.22}$$

这个式子就是我们前面提到过的海森伯不确定性原理的一种表述。

由于式(6.22)的右面是一个常数，这就表明，如果我们迫使一个粒子处于某一特定位置而试图把它“钉住”，结果它就获得一个很大的速度。或者是：如果我们迫使它跑得很慢，或以精确的速度运动，那么它就要“散开”，以致我们不能很好地知道它究竟在哪里。粒子的举止真是太奇妙了！

不确定性原理描述了在叙述自然界的任何尝试中所必然存在着的那种内在的模糊性或不明确性。我们对自然界的最准确描写必须用概率的观念。有些人不喜欢用这种方法来描写自然界。不知怎么地，他们总觉得，只要能说出一个粒子真正在做什么，他们就能同时知道它的速度和位置。在量子力学发展的初期，爱因斯坦曾为这个问题十分担忧。他常摇头说：“啊！上帝肯定不是用掷骰子来决定电子应如何运动的！”他为这个问题担忧了好长时间，或许他从来也没有使他自己真正相信过这个事实，即：这是人们对自然界所能作出的最好描述。现在仍然有一两位物理学家在研究这问题，他们从直觉上深信，可以通过某种方式用另一种方法来描写这个世界，并且可以把有关事物行为的所有这种不确定性都消除掉。然而到现在没有一个是成功的。

当我们希望描写原子结构时，确定一个粒子的位置所必然要出现的不确定性就变得极为重要。在氢原子中有一个由单个质子组成的核，核的外面有一个电子，而这个电子的位置的不确定性就同原子本身一样大！因此我们不能严格地说，电子在某一“轨道”上绕质子运动。最多我们可以说，在一个离质子距离为 r 的体积元 ΔV 内有一定的机会 $[p(r)\Delta V]$ 观察

到这个电子,概率密度 $p(r)$ 由量子力学来确定。对一个未受扰动的氢原子来说,$p(r) = Ae^{-r^2/a^2}$,这是一个如图 6-8 所示的那种钟形函数。数 a 是"典型"的半径,函数由这里开始减小很快。既然在离原子核距离远大于 a 的地方找到电子的概率很小,我们可以把 a 设想为"原子的半径",大约等于 10^{-10} m。

如果想象有这样一团"云",它的密度正比于我们能观察到的电子的概率密度,那么我们就能形成氢原子的图像。这样一团云的一个实例如图 6-11 所示。所以我们对氢原子的最好"写照"便是一团"电子云"(虽然我们实际上指的是"概率云")围绕着一个核。电子就处在云中某一地方,但自然界只允许我们知道在任何一个特定位置上能找到它的机会是多少。

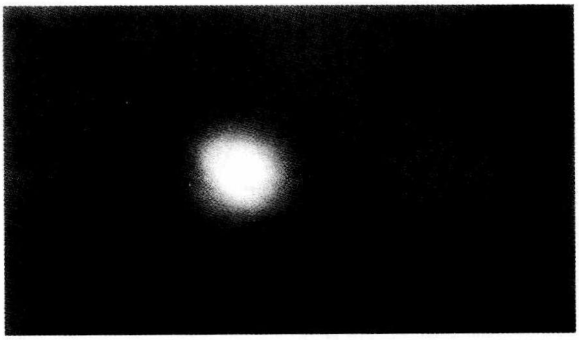


图 6-11 使氢原子形象化的一种方法。这里云的密度(洁白度)表示能观察到的电子的概率密度

在尽可能多地了解自然界的努力中,现代物理学曾发现,有些事情永远不可能确切地"知道"。我们的许多知识必然总是不确定的。而用概率来表述时,我们所能获得的知识则最多。

第 7 章　万有引力理论

§7-1　行 星 运 动

在这一章中，我们将要讨论对人类智慧影响最为深远的通则之一的引力定律。当我们现在赞颂人类智慧的时候，应当先停下来向大自然表示敬畏之意，因为她能如此完整而普遍地遵循引力定律这样一个出奇地简单的原理。那么什么是引力定律呢？它指出，宇宙中每一个物体都以一定的力吸引着每一个其他物体，而对任何两个物体来说，这一力正比于每一个物体的质量，而反比于它们之间距离的平方。这个陈述数学上可以用下列式子来表示：

$$F = G\frac{mm'}{r^2}.$$

如果对此再加上一个事实，即一个物体在力的作用下会沿着力的方向得到加速，而加速的快慢与物体的质量成反比；那么我们就已说出了所需要的一切，于是一个天资卓越的数学家就能推导出这两个原理的所有结论。然而由于你们还没有被认为天资如此卓越，所以我们要更详细地来讨论一下这些结论，而不是只给你们留下两个简单的原理。我们将简短地叙述一下发现引力定律的故事，讨论它的某些结果，它在历史上的作用，这样一条定律所遗留下来的神秘之处，以及爱因斯坦对这条定律所作的若干改进；我们还将讨论这条定律与物理学中其他定律的关系。所有这些不可能在这一章中都讲到，所以有些论题将在适当时候放到往后的几章中去讨论。

故事要从古人对行星在恒星中间运动的观察，并且最终作出了它们在围绕太阳运行的推论开始，这是后来为哥白尼所重新发现的一个事实。行星究竟怎样围绕太阳运行，并且究竟用什么样的运动绕之运行，要发现这些，就要稍微多作一点工作。15 世纪初叶，在行星到底是不是围绕太阳运行这个问题上曾有过剧烈的争论。第谷·布拉赫(Tycho Brahe)有一个想法，它与古人提出的任何观点都不相同，他认为：如果能足够精确地测得行星在天空中实际的位置，那么这些有关行星运动本性的争论就会得到最好的解决。如果测量能精确地显示出行星在如何运动，那么或许有可能去建立这种或那种观点。这是一个非同小可的想法：如果要想发现什么东西，那么去细致地做一些实验要比展开冗长的哲学争辩好得多。在这个想法的指引下，第谷·布拉赫在哥本哈根附近的希恩(Hven)岛上他的天文台里，花了多年时间来研究行星的位置。他编制了一种篇幅庞大的星表；在第谷死后，数学家开普勒对这些星表进行了研究。从这些数据中，开普勒发现了涉及行星运动的一些非常优美、卓越而又简单的定律。

§7-2　开 普 勒 定 律

开普勒首先发现，每个行星沿一条称为椭圆的曲线绕太阳运行，而太阳处在椭圆的一个

焦点上。椭圆不仅仅是呈现为一个卵形的东西，而是一条非常独特和精确的曲线，这条曲线可以用两只图钉(在每个焦点上各钉一只)，一段线和一支铅笔把它画出来；从数学观点上来看，它是这样一些点的轨迹，从两个定点(焦点)到其上每一点的距离之和是一个常数。或者，如果你们愿意的话，可以把它说成是一个“压扁”了的圆(图 7-1)。

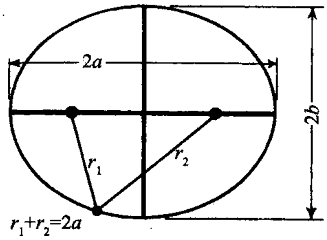


图 7-1 椭圆

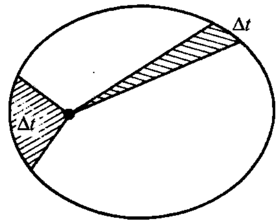


图 7-2 开普勒的面积定律

开普勒的第二个发现是，行星并不以均匀速率绕太阳转动，而是当它们接近太阳时跑得较快，远离太阳时则跑得较慢。确切地说便是这样：设在任意相继的两个时间，比如说相隔为一周的时间内观察一个行星，并且对每个观察位置向行星画一条矢径*。那么行星在一周中所经过的轨道上一段弧线和两条矢径一起围成一定的平面面积，犹如图 7-2 中所示的那个阴影面积。如果在离太阳较远的那部分轨道上(此时行星运动得较慢)，也作时间相隔一周的与前类似的两次观察，那么这时围成的面积与前一情况下的面积完全相等。因此，按照开普勒第二定律，每个行星的轨道速率都使矢径在相等时间内“扫过”相等的面积。

开普勒第三定律发现得较晚；这条定律与前两条不同，各属于不同的范畴，因为它不是只涉及单独的行星，而涉及一个行星与其他行星之间的关系。这条定律表明：如果把任何两个行星的轨道周期和轨道大小进行比较，则周期与轨道大小的 3/2 次方成正比。这里所说的周期是行星在其轨道上完全绕一圈所需的时间间隔，而所谓轨道的大小是用椭圆轨道最大直径(术语叫“长轴”)的长度来量度的。更简单一些，如果行星绕圆周运动(实际上确实近似如此)，那么绕圆周走一圈所需的时间将正比于直径(或半径)的 3/2 次方。这样，开普勒的三条定律便是：

Ⅰ. 每个行星都沿椭圆轨道绕太阳运行，太阳位于椭圆的一个焦点上。

Ⅱ. 从太阳指向行星的矢径，在相等时间间隔内扫过相等的面积。

Ⅲ. 任何两个行星的周期平方正比于它们各自轨道半长轴的立方：$T^2 \propto a^3$。

§ 7-3 动力学的发展

当开普勒发现这些定律的时候，伽利略正在研究有关运动的定律。当时的问题在于是什么东西驱使行星在天上转动(那时有一种理论这样说，行星之所以运动是因为在它们背后有一群看不见的天使在扑动他们的翅膀，推动行星前进。你们将会看到，这个理论现在被修改了一下！这就是说，为了保持行星的环绕运动，看不见的天使们必须朝不同于运动的方向飞行，并且他们也没有翅膀。除此以外，这倒多少有点像现在的理论)。在有关运动方面，伽利略发现了一个

* 矢径是从太阳到行星轨道上任何一点的连线。

非常值得注意的事实,这个事实对于理解开普勒定律是必不可少的。这就是惯性定律——如果有某个物体在运动,但没有和其他东西相碰撞,也完全不受任何干扰,那么它将沿一直线以均匀速度永远运动下去(为什么它能保持直线运动? 我们不知道,但是事情就是如此)。

牛顿使这个观念更为明确。他说:"改变物体运动的唯一方法是要对之用力。"如果物体的速率变大,就必定有一个力施加在运动方向上。另一方面,如果物体的运动改变到另一个新的方向,那么它必定受到一个斜向的力的作用。这样牛顿添进了如下一个观念:要改变一个物体运动的速率或方向,就需要有力才行。例如:把一块石子系在绳上,并使它作圆周运动,那么就需要有一个力以保持它在圆周上运行。这时我们必须把绳子拉住。事实上,这个定律说的是,力所产生的加速度反比于物体的质量;或者说,力正比于质量乘加速度。物体的质量越大,使它产生某一给定加速度所需的力就越大(质量可以这样来测量,使其他石子系于同一根绳的末端,使它们以同样的速率绕同样的圆周转动,用这种方法可以知道它们所需的力的大小,质量较大的物体,所需的力较大)。从这些考虑中得出的一个卓越的观念就是:要保持行星在它的轨道上运行,根本不需要有一个切向的力(天使们并不一定要沿切线方向飞行),因为行星总会沿所要求的方向运动。如果根本没有什么东西去干扰它,那么行星就将沿直线运行下去。但实际的运动却偏离了不存在力作用时物体所应沿之运动的那条直线,这种偏离差不多与运动相垂直,而不沿运动的方向。换句话说,由惯性原理得知,控制行星绕太阳运动所需的力不是一个绕太阳而是指向太阳的力(如果有一个力指向太阳,那么当然太阳也许就是那天使了)。

§7-4 牛顿引力定律

牛顿凭借他对运动定律的精辟理解,意识到太阳可能就是支配行星运动的那些力的源头所在。他给自己证明(或许我们不久也能证明),正是在相等时间内扫过相等面积这个事实成了所有偏离都沿径向这一命题的一个明确的标志——也就是说面积定律是所有的力都精确地指向太阳这一观点的直接结果。

其次,对开普勒第三定律的分析可以表明,行星越远,作用力越弱。如果比较两个离太阳距离不同的行星,那么分析表明,力与行星各自的距离平方成反比。把这两条定律结合起来,牛顿于是推断说,必定存在着一个力,它的大小反比于两个物体间距离的平方,方向则沿着它们间的连线。

作为一个对事物普遍性有非凡感悟力的人,牛顿当然要假设这个关系可以更普遍地加以应用,而不只限于太阳拉住行星这个事实。例如当时已经知道,正像月球绕着地球转动一样,木星也有自己的月球在绕着它转动,于是牛顿确信,每个行星都在用一个力拉住自己的月球。至于把我们吸住在地面上的那个力,牛顿也早已知道,所以,他就提出,这类力是一个普遍存在的力——每个物体都吸引任何其他物体。

其次一个问题是,地球拉住人的力与它拉住月球的力是否"相同",也就是说,是否都与距离平方成反比。如果地面上一个物体原来静止,然后释放,在第一秒钟内落下 16 ft,那么在同样时间内,月球将落下多远? 我们也许会说,月球根本没有落下。但是如果没有力作用在月球上,它会沿一条直线离去,可是,它并不这样做而是沿一圆周运动,所以实际上它是从那个如果根本没有力作用时所应处的位置上落了下来。从月球的轨道半径(约 240 000 mi)

以及它绕地球一圈所需的时间(约为 29 天),可以算出月球在其轨道上每秒钟走了多远,随后就可以算出它在 1 s 内落下了多远*。经过计算这段距离约为 1/20 in。它与反平方定律吻合得非常好,因为地球的半径是 4 000 mi,而如果一个离地球中心 4 000 mi 的物体在第一秒钟内落下 16 ft,那么一个在 240 000 mi,也就是在 60 倍远的地方的物体应当只掉下 16 ft 的1/3 600,这个数值大约也为 1/20 in。为了用类似的计算来检验这个引力理论,牛顿非常仔细地进行了他的计算,但是却发现差异很大,以致他认为这个理论与事实相矛盾,因而没有发表他的结果。六年之后,一个对地球大小的新的测量表明,天文学家曾使用了一个不正确的到月球的距离。当牛顿听到这个消息后,他就用正确的数据重新作了计算,所得的结果与事实非常一致。

月球"下落"的这种观念,多少有点使人迷惑,因为正像你们知道的那样,月球丝毫没有靠近地球。但是这个观念相当有意思,以致值得进一步加以说明:所谓月球下落,其含义就是:它离开了不存在力的作用时原应遵循的那条直线。让我们举地球表面上的一个例子。一个靠近地面的物体被释放后,在第一秒内将落下 16 ft。一个水平射出的物体也将落下 16 ft;即使它沿水平方向运动,但在同样时间内它仍然要落下 16 ft。图 7-3 表示一个用以演示这一情况的仪器装置。在轨道的水平部分有一个小球,它行将往前冲出一小段距离。在同一高度则有一个行将垂直下落的小球。另外,有一电动开关起控制作用,在第一个小球离开轨道的时刻,它随即释放另一个小球。至于两个小球在同样时间内落下同样的高度可以用它们在半空中相碰撞这个事实来证明。一个物体(如子弹)被水平射出时,可能在 1 s 内要跑很长一段路程——比如说 2 000 ft——但即使它是水平瞄准的,它仍然要落下 16 ft。然而,如果我们把子弹发射得越来越快,那么会发生什么情况呢?不要忘记,地球的表面是弯曲的。如果子弹发射得足够快,那么在落下 16 ft 后,它可能恰巧在地面之上与之前相同高度的地方。怎么会这样呢?子弹仍然在下落,但是由于地球向下弯曲,所以在"绕着"地球下落。问题是,它在 1 s 内必须跑多远才能使地球在水平线下面 16 ft?在图 7-4 中,我们看

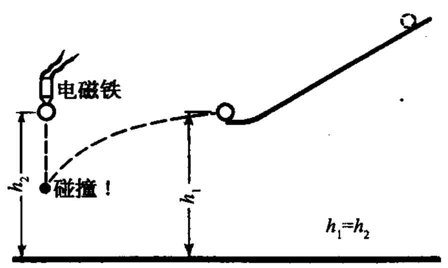


图 7-3 演示竖直运动与水平运动互不相关的仪器装置

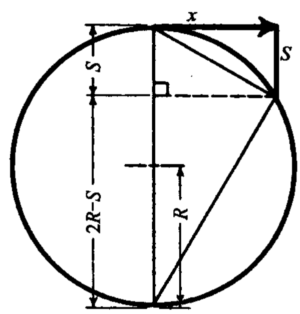


图 7-4 指向圆形轨道中心的加速运动。根据平面几何,$x/S=(2R-S)/x\approx 2R/x$,其中 R 是地球的半径(4 000 mi),x 是每秒"水平通过"的距离;S 是每秒"下落"的距离(16 ft)

* 这就是说,月球的圆形轨道处在一条直线之下有多远,而这条直线就是月球在 1 秒钟前在轨道上所处的那一点的切线。

到一个半径为4 000 mi 的地球，以及一条在没有力作用的情况下子弹将循之而行的切向直线。如果我们现在应用几何学中一条奇妙的定理，即垂直于直径的半弦是所分割的直径两部分的比例中项，那么就可以看出，子弹所走的水平距离是所下落的距离 16 ft 与地球直径 8 000 mi 的比例中项。(16 /5 280)×8 000 的平方根很接近于 5 mi。于是我们看到，如果子弹每秒跑 5 mi，那么它将继续以同样的速度每秒往地球落下 16 ft，而决不会与之靠得更近一些，因为地球表面总是在不断地弯曲而离开子弹。加加林先生也是这样以每秒大约 5 mi 的速率绕地球飞行 25 000 mi 来使自己保持在空间的(他绕地球一周所需的时间稍为长一些，因为他在稍为高一点的地方飞行)。

只有在所获得的超过所给予的时，任何一个新定律的重大发现才有价值。现在，牛顿用开普勒第二和第三定律来推导他的引力定律。他预言了什么？首先，他对月球运动的分析是一个预测，因为他把地面上物体的下落与月球的下落联系起来。其次一个问题在于行星轨道是不是一个椭圆？我们在往后的一章中将看到如何能精确地计算这个运动，而且人们确实能够证明，它的轨道应当是一个椭圆 *，所以毋需再用其他事实来说明开普勒第一定律。正是这样，牛顿作出了他第一个有力的预言。

引力定律解释了许多以前所不能理解的现象。例如，月球对地球的吸引造成了潮汐，直到那时为止还是一个谜。月球吸引地面的水造成潮汐——这在以前人们也想到过，但是他们不如牛顿那样聪明，所以他们想，一昼夜应该只有一次潮汐。其理由是，月亮把地面的水提升上来，造成一个高潮和一个低潮。由于地球在月球下面旋转，就使一个地方的潮水每 24 h 涨落一次。实际情况是潮水每 12 h 涨落一次。另一个学派则主张，高潮应当在地球的另一面，他们争辩说，因为月球把地球从水中拉开！这两种理论都是错误的。实际的过程如下：月球对地球和对水的吸引在中心是“平衡”的。但是靠近月球的水被拉的程度要比平均值大，而离月球较远的水被拉的程度要比平均值小。此外，水能流动，而比较结实和坚硬的地球却不能。真实的情况是这两者的结合。

所谓“平衡”指的是什么意思呢？什么东西在平衡？如果月球把整个地球拉向自己，那么为什么地球不会“向上”落到月球上去？这是由于地球要着像月球一样的花招，所以它在绕某点作圆周运动，这个点在地球内部，但不在地球中心。月球并不在绕地球中心转动，而是地球和月球一起在绕另一个中心位置转动，每一个都在向着这个共同位置下落，如图 7-5 所示。这个绕共同中心的运动，是使每一个的下落得以平衡的原因。因此，地球也不是沿一直线行走，而是在绕一个点作圆周转动。地球上离这点远的一边的水是“不平衡的”，因为该处月球的引力要比在地球中心处小，而在地球中心处这一引力刚好和“离心力”平衡，结果这一不平衡使水沿离开地球中心的正方向运动。在近的一边，月球的吸引较强，所以不平衡是在空中相反的方向上，但又是离开地球中心的。最后，我们得到了两次涨潮。

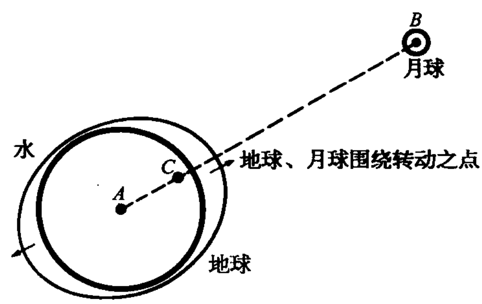


图 7-5　地球——月球系统与潮汐现象

* 这在本课程中将不予证明。

§7-5 万有引力

当我们理解引力的时候,还可以理解别的什么呢? 人人都知道地球是圆的。为什么地球是圆的? 这很容易回答:由于引力的作用。我们之所以能够理解地球是圆的,仅仅是因为每个物体都在吸引任何其他的物体,所以地球尽它之所能把自身各部分相互吸引在一块!如果我们进一步深入下去,那么地球并非是一个精确的圆球,因为它在旋转着,从而引进了离心效应,在靠近赤道的地方,它趋向于与引力相对抗,其结果表明,地球应当是椭圆形的,而且我们甚至得到了这个椭圆的正确形状。这样,我们仅仅从引力定律出发,就能推论出太阳、月球和地球都应当呈(近似的)圆球形。

应用引力定律我们还能做别的什么呢? 如果我们看一下木星的月球,那么我们就能知道它们怎样围绕这个行星运行的一切情况。附带说一下,在有关木星的月球这个问题上曾经出现过一个困难,值得在这里一提。罗默(Roemer)非常仔细地研究了这些月球,他注意到,它们时而好像走在时间表的前面,时而好像走在时间表的后面(等待很长一段时期,并找出这些月球绕行一圈平均所需的时间,就能找到它们的时间表)。当木星特别靠近地球时,它们走在前面,而当木星远离地球时,它们就走在后面。要按照引力定律来解释,将会是一件非常困难的事——确实,如果找不到其他解释的话,这就会成为这个美妙理论的终结。如果某条定律,哪怕只在一个理应对的地方不对,那它就是错的。但是现在出现这个矛盾的原因是十分简单和美妙的:为了看到木星的月球就需要稍微花一点时间,因为光从木星跑到地球上来是需要时间的。当木星靠近地球时,它花的时间稍微短一点,而当木星远离地球时,所花的时间就稍微长一点。这就是为什么这些月球平均而论好像时而稍微超前、时而稍微落后的原因,完全看它们靠近还是远离地球而定。这个现象表明光的传播并不是在一瞬间发生的,并且它第一次为光的速度提供了一个估计。这个估计是在1676* 年做的。

如果所有的行星彼此之间都相互吸引,那么控制一个行星比如说木星围绕太阳转动的力,不是只有从太阳来的引力,也有来自例如土星的拉力。实际上这个力并不强,因为太阳的质量比土星要大得多,但是毕竟有一点吸引作用,所以木星的轨道不应该是一个精确的椭圆,事实也确是这样;它与精确的椭圆轨道稍有偏离,而且绕着它"摆动"。这样的一种运动就稍微更复杂些。人们曾试图在引力定律的基础上分析木星、土星及天王星的运动。对这些行星中的每一个,人们计算了它对其他行星所产生的效应,以便知道这些运动中出现的微小偏差与不规则性,是否单独用这条定律就能完全理解。好,就让我们看一下吧! 对于木星和土星,一切都很好,但是对天王星却是"不可思议"的。它以非常奇特的方式运行着。至于它不是沿着一个精确的椭圆运行,那是可以理解的,因为有木星和土星在吸引它。但是,即使考虑到这些引力,天王星仍然没有按正确方式运行,所以引力定律就面临被推翻的危险,这是一个不能排除的可能性。但在英国与法国有两个人,亚当斯(Adams)与勒威耶(Leverrier),他们各自设想另一种可能性:或许存在着另一

* 原文误为1656,经查证为1676。而且据考证,罗默在1676年的文章中并未对光速的数值作出估计。第一次对光速值的估计是1678年由惠更斯作出的。——译者注

个幽暗而看不见的行星，以致人们从未看到过它。这个行星N可能在吸引天王星。他们计算了这样一个行星应处在哪个位置才能造成所观察到的那个扰动。他们把这一消息分别通知有关的天文台，并说："先生们，把你们的望远镜指向某某、某某位置，你们就会看到一颗新的行星。"至于人们对你注意不注意，那常常要看你在同谁进行联系。他们确实注意到了勒威耶；他们朝那个位置看了，果真发现有一颗行星N！另一个天文台过了几天也很快地看到了这颗新行星。

这个发现表明，牛顿定律在太阳系范围内是绝对正确的；但是这些定律的应用是否能扩展到离我们最近的那些行星所在的比较小的距离以外呢？对它们的第一个检验，在于回答这个问题：恒星是否也像行星一样在彼此吸引？在双星的情况下，我们有确凿的证据表明，它们是在彼此吸引的。图7-6表示一对双星——两颗非常靠近的恒星（图上还有第三颗恒星，由此我们看出照片没有被旋转过）。图中也显示了双星在几年之后所在的位置。我们看到，相对于"固定"的恒星来说，双星的轴转过了一定角度，也就是说两颗星中每一颗在绕着另一颗转动。它们是不是在按照牛顿定律转动？图7-7表明对这种双星系统中一颗星的相对位置所作的仔细测量。这里我们看到一个完美的椭圆，测量工作从1862年开始，到1904年测完了整个一圈（到现在它必定又已绕行了一圈多）。一切与牛顿定律相一致，只是天狼星A不在焦点上。为什么是这样？因为椭圆平面并不在"天空平面"上。我们不是从垂直方向去看轨道平面，而当从倾斜方向去看时，它还是一个椭圆，但焦点不再在同一个位置上。因此我们确实能够按照引力定律的要求来分析双星中一个绕另一个的运动。

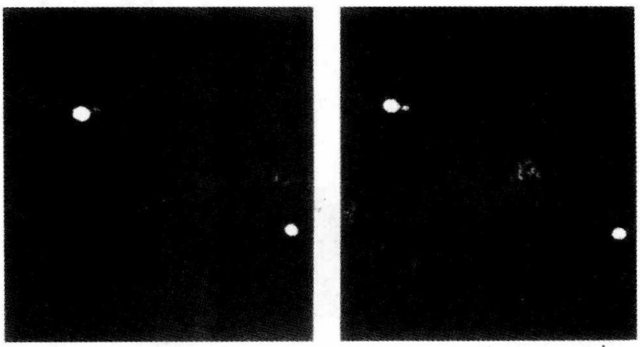


图7-6 双星系统

甚至对更大的距离，引力定律也是正确的，图7-8表明了这一点。如果一个人看不出引力在这里起作用，那他是过于迟钝了。这幅图所显示的是天空中最美妙的事物之一——一个球状星团。所有的小点都是星星。虽然看上去它们好像向中心密集地挤成一团，其实这是由于我们的仪器难免发生错误所致。事实上，即使是最靠近中心的那些恒星之间的距离也非常巨大，而且它们也非常难得相互碰撞。在内部比在外沿有更多的恒星，越往外走，恒星越少。很明显，在这些恒星之间存在着一个引力。因此非常清楚，在如此巨大的、或许是太阳系大小的100 000倍的范围内也存在着引力的作用。让我们现在跑得更远一点，看一下图7-9所示的某个星系的整体。这个星系的形状表明它的物质明显地有团聚在一起的趋势。当然我们不能证明这一定律在这里也是准确地与平方成反比，而只能说明在如此巨大

的范围内,仍然有引力作用着,它把整个物体聚集在一起。有人或许会说:“嗯,这一切真是太巧妙了,但是为什么不聚集成一个球呢?”回答是:因为它在旋转,并且具有角动量,而这是在它收缩时所不能放弃的;因此,它必然主要在一个平面内收缩(附带提一下,如果你在探讨一个有意思的问题,银河系的旋臂如何形成,以及究竟是什么决定了这些星系的形状等等,都还没有人进行研究)。然而,非常清楚,星系的形状来源于引力的作用,尽管它的结构的复杂性还不允许我们把它完全分析清楚。一个星系的规模有 50 000~100 000 光年,地球到太阳的距离是 8.33 光分,所以你们可以看到这样的范围是多么的大!

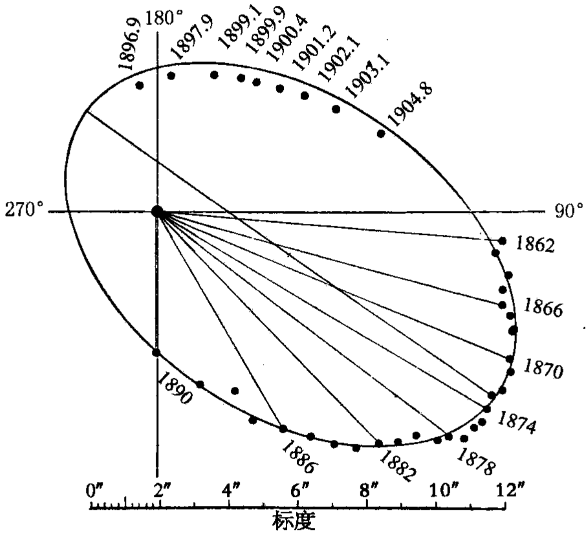


图 7-7　天狼星 B 绕天狼星 A 转动的轨道

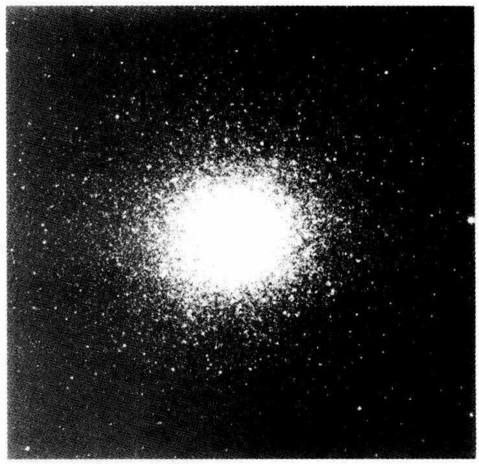


图 7-8　球状星团

图 7-9　某星系

图 7-10　星系团

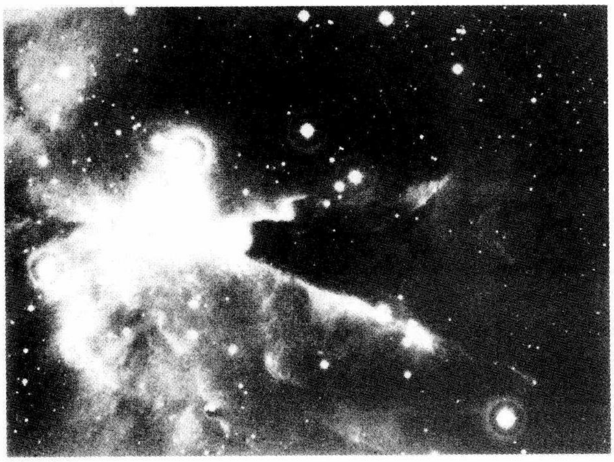


图 7-11　星际尘埃云

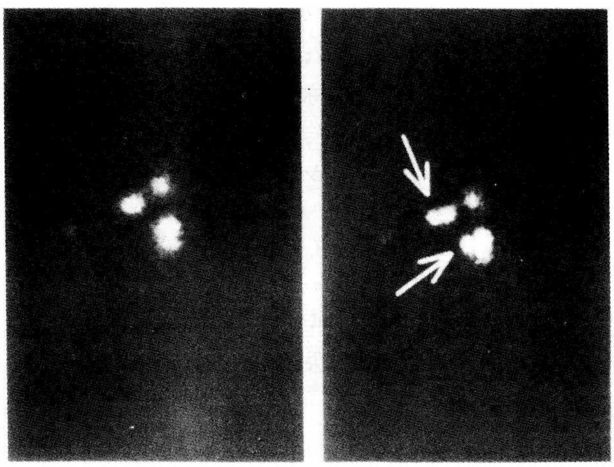


图 7-12　新星的形成

正如图 7-10 所指出的那样,甚至在更大的范围内也存在着引力。图中还显示出有许多“小”的东西集成一簇。这就是一个犹如星团一样的星系团。可见这些星系相距如此之遥也彼此吸引而同样聚集成团。或许甚至在超过几千万光年的距离之间也存在着引力作用;就我们今天所知,看来引力永远以与距离平方成反比的方式延伸开去。

我们不仅能够理解星云,而且从引力定律出发;甚至还能对恒星的起源获得某些概念。如果我们有很大的一片尘埃与气体云,如图 7-11 所示,那么尘埃片与片之间由引力而产生的吸引,可能会使它们形成一些小的团块。在图上有一些“小”黑斑依稀可辨,它们可能是尘埃与气体相积聚的开始,而由于这些积聚物彼此间的引力作用,就开始形成星体。我们究竟是否看到过一个星的形成,这是一个可争论的问题。图 7-12 提供了一个证据说明我们曾经见到过。左边是一张 1947 年拍摄的照片,显示一个气体区域,中间有几个星体;右边是一张只过了七年之后拍摄的照片,显示两个新的亮点。气体是不是积聚了起来,引力是不是作用得足够强,并把它聚集成一个足够大的球体,以致在其内部发生星体核反应而把它变为一颗星呢?或许是这样,或许不是这样。而不可思议的是,仅仅在七年之中我们竟会如此幸运,能看到一颗星体把本身转变为可见的形式;更不可能的是,我们居然一下子能看到了两个!

§7-6 卡文迪什实验

由前可见,引力作用伸展到距离极大的地方。但是,如果在任何一对物体之间有一个力作用着,那么我们应当能够测出作用在我们周围物体之间的这个力。比方说,难道不能用一个铅球和一个大理石球来做实验,观察大理石球朝向铅球跑去,而一定要去观察星体的相互绕行吗?用这样一种简单方式来做这个实验,其困难在于,这里的力是非常之弱的。因此必须格外小心地来对待,这就是说,要把仪器遮盖起来以避免与空气接触、要肯定它不带电等等;然后可以来测量这个力。卡文迪什(Cavendish)第一个进行了这种测量,他所使用的仪器的略图如图 7-13 所示。这个实验第一次演示了两个大的固定铅球和两个小铅球之间力的直接作用;两个小铅球装在一根细杆的两端,细杆用一根非常精细的、称为扭丝的金属丝悬挂起来。用测量扭丝扭转了多少的方法,我们就能测出力的强度,证实它与距离平方成反比,并确定它的大小。这样,我们就能精确地确定公式

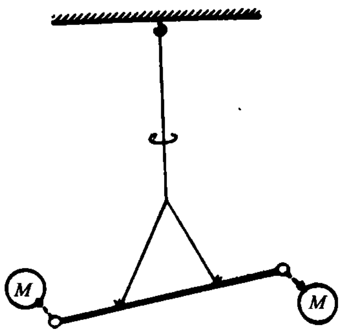


图 7-13 卡文迪什用来验证小的物体之间存在万有引力和测量引力常数 G 的装置略图

$$F = G\frac{mm'}{r^2}$$

中的系数 G,因为质量和距离都是已知的。你们会说:“对地球来说我们早就知道这个系数了。”是的,但我们并不知道地球的质量。如果从这个实验知道了 G,以及地球的吸引有多强,我们就能间接地知道地球的质量有多大!这个实验曾经叫做“称地球”实验。卡文迪什也声言他称了地球,但是他实际测量的是引力定律的系数 G。这是唯一能确定地球质量的方法。G 的数值是

$$6.670\times10^{-11}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}^{-2}.$$

引力理论的这一伟大成就在科学史上所产生的重大影响，怎么估计也不会过分。请把早先年代里无休止的争论和悖论盛行、知识中充满着混乱、迷惑以及不完善和不可靠这种情况同这条定律的明晰和简单作个比较吧！现在，所有月球、行星和恒星都由这样一条简单的规则来支配，并且，人们能够理解它，从它推论出行星应当如何运动！这是科学在以后年代里所以会获得巨大成就的原因，因为它为人类提供了一个希望，也许宇宙间其他现象也有这样一种极其简单的定律支配着。

§7-7　什么是引力

然而这条定律确是如此简单吗？它的机制是什么？我们所做过的一切，不过是描写了地球怎样绕太阳运行，但是我们没有谈到是什么东西在使它运动。牛顿对此没有做过任何假设；他满足于找出它做的是什么，而并未深入到它的机制中去。从那时起也没有人提出过任何机制。物理定律的特征，就是它们具有这种抽象的性质。能量守恒定律是一条关于这样一些量的定理，对于这些量必须加以计算，然后把它们加起来，但它没有提到它的机制，同样，力学中的那些重要定律也是一些数学定律，我们并不知道起作用的机制是什么。为什么我们能用数学来描述自然，而在其背后又没有一个机制呢？无人知道。我们必须继续照此办理，因为用这种方法我们能够发现更多的东西。

引力的机制曾经屡次为人们所提出过。研究一下很多人一再想到的其中的一个，是颇饶趣味的。起初，当有人“发现”它的时候，确实非常高兴，感到十分幸运，但他随即发现原来这是错误的。这个机制大约在 1750 年第一次被人们提出。设想有许许多多粒子在空间以极大速度向各个方向运动，在它们穿过物质时只有很少一部分被吸收掉。当它们被吸收时，就给地球以一个冲量。然而，由于在一个方向上运动的粒子同在别的方向上运动的粒子一样多，所以这些冲量都互相抵消。但是如果考虑到太阳在地球附近，那么跑向地球的粒子穿过太阳时要被吸收一部分，所以来自太阳的粒子比来自另一边的粒子要少一些。因此，地球最后受到一个朝向太阳的冲量。而且，不要花费多少时间人们就能看出，这个冲量与距离平方成反比，因为当距离改变时，太阳所张的立体角也要改变。这个机制错在哪里呢？错在其中包括了一些新的结果，而这些新的结果是不真实的。这个特别的想法遇到了如下的困难：地球绕太阳运行时，它与从前面射来的粒子相碰撞的次数，将比从后面射来的粒子要多(当你在雨中奔跑时，打在你脸上的雨点要比打在你脑后的多)。因此从正面将会给予地球更大的冲力，而地球将会受到一种对其运动的阻力作用，这种阻力将使它在轨道上的运动减慢下来。人们可以算出，作为这种阻力的结果，地球需要多长时间才会停下来；结果是使地球仍留在轨道上的时间并不长，所以这个机制行不通。从此也就没有再提出过任何一个机制，它既能“解释”引力，又不至于会预言其他实际不存在的现象。

其次我们要讨论万有引力与其他作用力之间可能存在的关系。目前还没有一种用其他力来说明引力的解释。它不是电或诸如此类的一个方面，所以我们无法解释。然而，引力与其他力十分相似，因而看一下它们的相似之处是很有趣的。例如，两个带电体之间的电力看上去就很像引力定律：它们之间的电力等于一个带负号的常数乘以电荷之积，并与距离的平方成反比。电力的方向则与引力的情况相反——同号相斥。但是两条定律含有同样的距离

函数，这难道还不够引人注目吗？引力与电力之间的关系或许比我们所能想象的要密切得多。人们作了许多尝试企图把它们统一起来；所谓的统一场论，不过是一个想把电力与引力结合起来的非常美妙的尝试而已；但是如果把引力与电力相比较，那么最有趣的事是力的相对强度。任何一个包括它们两者的理论，必须也能推导出引力有多大。

如果我们来看用某些自然单位表示的由于电作用产生的两个电子(自然界中的电荷的基本单位)之间的斥力，以及两个电子由于它们的质量而产生的引力，那么我们就能求出电斥力与万有引力的比值。这个比值与距离无关，是自然界的一个基本常数，如图7-14所示。两个电子间的万有引力与电斥力之比等于1比4.17×10^{42}！现在的问题是，这样巨大的数字从何而来？正像地球与跳蚤的体积之比那样，这个比值不是偶然的。我们研究的是同一事物，即电子的两个固有特性。这个大得难以置信的数字是一个自然常数，所以它包含了自然界中某种深邃的性质。这样一个惊人的数字从哪里来呢？有些人说，总有一天我们会找到一个“宇宙方程”，其中的一个根就是这个数。要找到这样的方程，它确能以大得如此出奇的数字为一个自然根，那是非常困难的。人们也曾想到过其他的可能性；其中之一是把它与宇宙年龄联系起来。很清楚，我们必须在某个地方找到另一个巨大的数字。那么，我们是不是用年来表示宇宙的年龄呢？不，因为年不是“自然”量；它只是人们所想象出来的。作为某种自然量的一个例子，让我们来看一下光穿过一个质子的时间，它是10^{-24} s。如果我们把这个时间与宇宙年龄2×10^{10}年相比较，那么答案是10^{-42}。它有大约同样数目的零跟在后面，因而有人提出，引力常数与宇宙年龄有关。如果情况真是如此，引力常数就会随时间而变化，因为随着宇宙的变老，宇宙年龄与光穿过一个质子所需的时间之比就会逐渐变大。那么，引力常数是否可能随着时间在发生变化呢？当然，这种变化如此之小，以致要确定它是相当困难的。

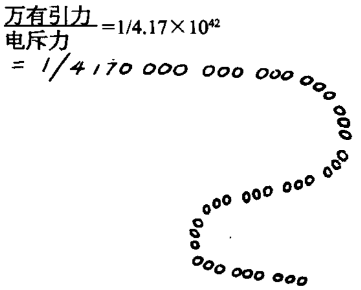


图 7-14 两个电子之间的电力相互作用和引力相互作用的相对强度

这里我们能够想到的一个检验方法是确定在过去10^9年中这种变化可能产生过什么影响。10^9年大约是地球上出现最早的生命以来到目前为止的时间，是宇宙年龄的十分之一，在这段时间内，引力常数可能增加大约百分之十，从这里可以得出，如果我们考虑到太阳的结构——即太阳物质的重量与其内部产生辐射能的快慢之间的平衡，那么我们可以推论说，如果引力增加百分之十，则太阳的亮度要增加比百分之十大得多——为引力常数增大率的六次方。如果我们计算一下，引力改变时地球轨道会发生什么情况，那么我们将发现，地球那时应更靠近太阳。总而言之，地球将变得更热(大约100 ℃)，所有的水不会再留在海洋里而变成了充满在空气中的水蒸气，这样，生命也就不会从海洋里开始。所以我们现在并不相信引力常数随着宇宙的年龄而改变。但是，这样一些论证像我们刚才所给出的那样，是不会十分令人信服的，这个问题还没有完全得到解决。

众所周知，物体的重量正比于它的质量，而这种质量实际上就是惯性的一种量度，也就是当一个物体绕圆周运动时，要维持它在圆周上有多难的一种量度。因此，若有一轻一重两个物体，由于重力作用而绕一更大的物体沿同一个圆周以同样速度转动，那么它们总将保持在一起，因为要在圆周上运动就需要力，对大的质量，需要的力也大。这就是说：对于一个较

重的物体,重力作用应当正好以恰当的比例增加,所以这两个物体仍将一起作圆周运动。如果一个物体原先在另一物体的里边,那么它将留在里边而不离开;这是一个完全的平衡状态。因此,加加林或季托夫发现宇宙飞船舱内的一切东西是“失重”的,比方说如果他们碰巧丢掉一支粉笔,那么粉笔将与整个宇宙飞船沿着一条完全一样的路径绕地球飞行,所以它将始终在空间悬浮于宇航员的眼前。非常有趣的是,重力以极大的精密度精确地与质量成正比,因为如果不是如此的话,将产生某种效应,其中惯性与重量会有所区别。这样一种效应实际上并不存在。关于这一点,人们曾以极大的精密度用实验验证过。厄缶(Eötvös)在 1909 年第一次进行了这种实验;而最近则由迪克(Dicke)做过。对于所有做过试验的材料,其结果是,质量与重量的正比关系精确到 10^{-9} 或者更小。这是一个非凡的实验。

§7-8　引力与相对论

另一个值得讨论的论题是爱因斯坦对牛顿引力定律所作的修正。尽管牛顿引力定律创造了所有这些惊人的成就,但仍然是不正确的!爱因斯坦对它所作的修正,在于把相对论考虑了进去。依照牛顿的观点,引力效应是瞬时发生的,也就是说,如果我们移动一个物体,那么我们就会立即感觉到一个新的力,因为物体到达了新的位置;按照这种说法,我们可以以无穷大的速度发送信号。然而爱因斯坦提出了种种论证,说明我们不能发送比光更快的信号,所以牛顿引力定律必定是错误的。在考虑到延迟情况而加以校正后,我们得到一条新的定律,称为爱因斯坦引力定律。这条非常容易理解的新定律的一个特点是:在爱因斯坦相对论中,任何具有能量的东西也具有质量——质量应在这一意义下来理解,即它以引力方式被其他质量所吸引。即使是光,由于它有能量,也就有“质量”。当一束带有能量的光经过太阳附近时,它将受到太阳的吸引。所以光并不是沿直线通过的,而是被弯曲了的。例如在日食时,太阳周围的恒星应该看起来好像从它们的这些位置偏离开去,这些位置就是如果太阳不在那里时它们所应处的地方。而人们也观察到了这个情况。

最后,让我们把引力理论与其他理论比较一下。近年来我们发现,所有物质都由微小粒子所构成,并且世界上存在着几种相互作用,如核力等等。但是在这些核力或电力中还没有发现有哪一个能用来说明引力。自然界的量子力学方面还没有引申到引力中去。当尺度小到需要考虑量子效应时,引力效应却仍是如此之弱,以致到现在还不需要去发展一种有关引力的量子理论。另一方面,为了物理理论的内在一致性,重要的一点是研究一下牛顿定律经修正为爱因斯坦定律以后,是否还可进一步加以修正,使之与不确定性原理相协调。到现在为止,还没有完成这最后一个修正。

第8章 运　　动

§8-1 运动的描述

为了找出物体随时间而发生的各种变化所遵循的规律，我们必须描述这些变化，并用某种方式把它们记录下来。在物体中要观察的最简单的变化是物体的位置随时间的明显改变，我们把它称之为运动。让我们考虑某一个带有我们能观察它，并将它称为一个点的恒定标记的固体。我们将讨论这个小标记的运动(这个小标记可以是一辆汽车的散热器盖子，或一个下落球的球心)，并将试图描述它在运动以及如何运动这一事实。

这些例子看来似较一般，但在描述其变化时，也有许多要小心对付之处。有些变化，例如，一朵缓慢漂移但迅速形成或迅速蒸发的云的漂移速率，或者一个女人思想上的变化，要描述它们就比描述在固体上一点的运动困难得多。我们不懂得分析思想上发生变化的简单方法，不过由于云可以用许多分子来表示或描述，或许在原则上我们能够通过描述云中所有个别分子的运动来描述云的运动。同样，甚至思想上的变化或许也与大脑内原子的变化有类似之处，但我们对此尚一无所知。

总而言之，这就是我们为什么要从点的运动开始研究的原因；也许我们应当把它们想象为原子，但在开始时粗略一些可能更妥当。我们把它们简单地想象为某一类小的物体——所谓小，是指与运动的距离相比较而言。比如，在描述一辆开过 100 km 的汽车的运动时，就不必去分汽车的前部和后部。的确，这里有一点儿差别，但粗略地看我们只讲“汽车”的运动，同样，我们选择的点不是绝对的点也丝毫没有关系；就我们现在的目的来说，没有必要极其精确。还有，在初次考察这个课题时，我们将不考虑世界的三维性。我们将只集中注意在一个方向上的运动，就像在一条公路上行驶的汽车那样。当我们知道了如何描写一维运动后，就将回到三维中去。现在，你们会说：“这尽是一些琐碎的事，”确实如此。那么，我们怎样来描述这样的一维运动，比方说，汽车的运动呢？没有比这更简单的了。有许多可能的方式，下面是其中之一。为了确定不同时刻汽车的位置，我们测量它与起点的距离，并记下所有的观测。在表 8-1 中，s 表示汽车离起点的距离，单位是英尺，t 表示时间，单位是分。表中的第一行表示零距离和零时间——即汽车尚未出发。1 分钟后，出发并开过了 1 200 ft。在 2 分钟内，它开得更远——注意汽车在第 2 分钟开过了更大的距离——汽车在加速前进；但在第 3 和第 4 分钟甚至一直到第 5 分钟之间发生了什么事情——也许是遇到红灯停了下来？然后它再次加速，在第 6 分钟末开过 13 000 ft，在第 7 分钟末开过 18 000 ft，在第 8 分钟开过 23 500 ft，在第 9 分钟它只前进到 24 000 ft，因为在最后一分钟它被警察拦住了。

这就是一种描写运动的方式，另一种方式是利用曲线图。如果我们以横轴表示时间，纵轴表示距离，就得到如图 8-1 那样的一条曲线。当时间增加时，距离也增加，开始很慢，然后较快，在 4 分钟前后又很慢，以后几分钟内又再加快，最后在第 9 分钟时，看来像停止增加。这些情

况不用表也能从图上观察到。显然,为了描述完全起见,人们还必须知道,在那些半分钟的标记处,汽车开到了那里。但是我们假定这个曲线图意味着在所有的居间时刻汽车都具有某个位置。

表 8-1

t(min)	s(ft)	t(min)	s(ft)
0	0	5	9 600
1	1 200	6	13 000
2	4 000	7	18 000
3	9 000	8	23 500
4	9 500	9	24 000

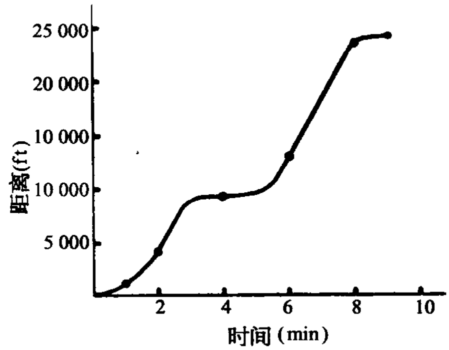


图 8-1 汽车的距离-时间曲线

表 8-2

t(s)	s(ft)
0	0
1	16
2	64
3	144
4	256
5	400
6	576

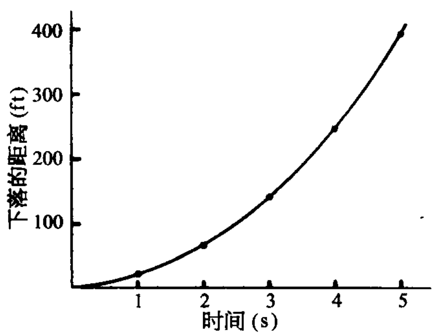


图 8-2 落体的距离-时间曲线

汽车的运动是复杂的。我们取某个以比较简单的方式运动的东西,比如说一个下落的小球,作为另一个例子。它遵循较简单的规律。表 8-2 列出落体的时间(以秒为单位)和距离(以英尺为单位)。在零秒时,小球从 0 ft 开始下落,在第 1 秒末落下 16 ft,在第 2 秒末落下 64 ft,在第 3 秒末落下 144 ft,等等。如果将表上的数字作图,就得到图 8-2 所示的一条漂亮的抛物线。这条曲线的公式可以写为

$$s = 16t^2. \tag{8.1}$$

这个公式使我们可以计算小球在任何时刻的距离。你们或许会说,对第一个曲线图也应当有个公式。实际上,人们也可以抽象地把这样一个公式写成

$$s = f(t), \tag{8.2}$$

它表示 s 是某个依赖于 t 的量,或用数学术语来说,s 是 t 的函数。由于我们不知道这个函数是什么,因此无法以确定的代数形式写下来。

现在我们已经看到了两个用非常简单的思想就能适当地描述的运动的例子——没有什么难以捉摸之处。然而,难以捉摸之处还是有的,有几处。首先,时间和空间究竟意味着什么?结果表明,这些深刻的哲学命题在物理学上必须十分小心地加以分析,而这并不是容易

做到的。相对论表明我们关于空间和时间的观念并不如人们乍一看来可以想象的那么简单。然而,就我们当前的目的而论,对我们在开始时所要求的精确度来说,我们毋需十分小心地去精确地定义事物。或许你们要说:“这很糟糕,我听说过在科学上我们必须精确地定义每一件事。”我们不可能精确地定义任何事物!如果强求如此,只会使我们陷入像某些哲学家那样的思想僵化,他们面对面坐着,一个对另一个说:“你不知道你在讲些什么!”第二个说:“你所谓的‘知道’是什么意思呢?你所谓的‘讲’是什么意思呢?你所谓的‘你’又是什么意思呢?诸如此类。”为了能够进行建设性的讨论,我们必须一致赞同我们所谈论的大致是同一件事。你们对于时间的了解已能满足我们目前的需要,但必须记住,还有一些微妙和难以捉摸的事情需要讨论,我们将在以后进行。

前面所涉及的另一个难以捉摸之处是能够设想我们正在观察的动点总是位于某处(当然,当我们注视它时,它在那里,但当我们看别处时,它可能不在那里了)。现在知道,在原子的运动中,这个观念也是错误的,我们不可能在一个原子上找到一个标记并观察它的运动。这种微妙的情况我们将在量子力学中去仔细讨论,但是在引进复杂性之前,我们将首先了解一下这些问题是什么,然后才能较好地按照这个题材的更现代的知识进行修正。因此,关于时间和空间,我们将采用一种简单的观点。我们大致知道这些概念是怎么一回事,而那些驾驶汽车的人则知道速率指的是什么。

§8-2 速　　率

即使我们大致知道“速率”的含义,也仍有某些相当奥妙的难以捉摸之处;须知甚至博学的希腊人也从未能恰当地描述牵涉到速度的问题。当我们试图精确地领会“速率”的含义时,就会出现难以捉摸之处。希腊人对这个问题是非常混乱的,因而必须在希腊人、阿拉伯人与巴比伦人的几何学与代数学之外,发现一个新的数学分支才能解决这个问题。作为这种难点的一个例证,试用纯代数方法来解这样一个问题:一个气球正在膨胀,它的体积以 $100\ \mathrm{cm^3 \cdot s^{-1}}$的比率增加;当气球体积为 $1\ 000\ \mathrm{cm^3}$ 时,气球半径增加的速率是多少?希腊人多少有点被这样的问题弄糊涂了。当然,这是被某些思想混乱的人所促成的。为了指出在某一时刻有关速度方面的推理中存在着困难,泽诺(Zeno)提出了一大堆佯谬,我们将举其中的一个来说明他的关于思考运动时存在着明显困难的论点。“请听这样的论点”,他说:“阿基利斯(Achilles)比乌龟跑得快 10 倍,但他却永远抓不住乌龟。因为,假定他们开始赛跑时,乌龟在阿基利斯前面 100 m,那么当阿基利斯跑了 100 m而到达乌龟原来所在的地方时,乌龟已经以他的快慢的 1/10 前进了 10 m。现在,阿基利斯又得跑另一个 10 m 以便赶上乌龟,但在到达该段路程的终点时,他发现乌龟仍在他前面 1 米;当他再跑 1 m 时,他又发现乌龟依然在他前面 10 cm,如此下去,直至无穷。因此,在任何时刻乌龟总是在阿基利斯前面,阿基利斯永远追不上乌龟。”这段论证错在哪里?它错在认为一段有限的时间可以被分为无限多的段,正如一段线长不断地一分为二可以被分成无限多的小段一样。因此,虽然(在论证中)到阿基利斯追上乌龟的那个点有无限多步,但这并不意味着时间也有无限的数量,从这个例子我们可以看到,在有关速度的推理中的确存在一些难以捉摸的地方。

为了以更为清楚的方式来领会这种微妙的情况,我讲一个你们肯定听到过的笑话。坐

在汽车里面的一位太太在某个地点被警察拦住了，警察走过来对她说："太太，你刚才的车速是 60 mi · h^{-1}！"她反驳说："先生，这是不可能的，我刚才只开了 7 分钟。这真是天大的笑话！我开车还没有到一小时，怎么可能走 60 mi 呢？"假如你是警察的话你该如何回答她呢？当然，如果你真是那个警察，那就没有什么疑难之处，很简单，你会说："对审判员讲去！"但是，假若我们没有这条退路，而是更公正和理智地对待这个问题，企图向这位太太解释所谓她的车速达 60 mi · h^{-1}的说法是什么意思，那么我们的含义究竟是什么呢？我们可以说："太太，我们的意思是：如果你继续像现在这样开车，在下一个小时里你将开过 60 mi。"她会答道："嗯，我的脚已经离开油门，汽车已慢了下来，所以如果我继续这样开下去，不会超过 60 mi 的。"或者，我们考虑一个自由下落的小球，如果这个小球保持它正在进行的运动方式的话，我们想要知道它在第三秒时的速率有多大。这意味着什么呢？是继续加速，落得更快吗？不，应该是继续以同样的速度运动。但这正是我们试图加以定义的东西！因为如果小球保持它现在正在进行的方式运动，那么它在以后就将继续保持这种方式运动。于是我们就需要更好地定义速度，究竟是什么必须保持一样呢？这位太太也可以这样来辩护："如果我再继续保持现在的开车方式，那么过了一小时后，我就会撞到街道尽头的墙上了！"看来要说清楚我们的意思并不那么容易。

许多物理学家认为测量是唯一定义任何事物的方式。那么，显然，我们应当使用测量速率的仪器——速度计，并说："看！太太，你的速度计的读数指到 60。"可是她说："我的速度计坏了，根本不能读数。"这是否表示汽车停着不动呢？我们相信，在我们造出速度计之前，就存在某种要测量的东西。只有这样，我们才可以说："速度计走得不准，"或"速度计坏了。"如果速度没有与速度计无关的含义，上面所讲的就是毫无意义的废话。所以，显然在我们的头脑中存在着一种与速度计无关的概念，速度计只是用来使这个概念计量化。所以，还是让我们来看看是否能得到这个概念的更好的定义。我们可以说："嗯！固然在你的车子开了一个小时以前，你就会撞到墙上，但是如果你开了一秒钟，你就会通过 88 ft 的距离。太太，你刚才的车速正是 88 ft · s^{-1}，如果继续下去，下一秒钟也将开过 88 ft，而那堵墙离这还远着呢。"她就说："对，但是，没有一条法律禁止 88 ft · s^{-1}的车速！只有一条禁止开 60 mi · h^{-1}的法律。""不过，"我们反驳道："这是同一件事。"如果这确是同一件事，又何必转弯抹角地大讲其 88 ft · s^{-1}呢？事实上，自由落体甚至连一秒钟也不可能保持同样的运动方式，因为它的快慢在变化着，我们必须设法来定义速率。

现在看来，我们已经走上了正轨，似乎可以这样说：如果那位太太在另一个 1/1 000 h 内继续这样行驶，她将开过 60 mi 的 1/1 000。换句话说，她无需继续开足 1 h，主要在于，在某一瞬间她正以这个速率开车。现在我们的意思是，只要她再多开一点点时间，那么汽车所通过的外加距离就和一辆以 60 mi · s^{-1}的稳定速率开动的汽车相同。也许 88 ft · s^{-1}的观念是正确的，我们看看她在最后一秒钟开了多远，再除以 88 ft，如果结果是 1，那么速率就是 60 mi · s^{-1}。换句话说，可以这样来求出速率：我们问在一个很短的时间内物体走过多远？把这一段距离除以时间就得到速率。但是应当把这段时间取得尽可能短，越短越好，因为在这段时间内有可能发生某种变化。假如我们将落体的时间取为一小时，这个概念就荒唐了。但若取为 1 s，对汽车来说其结果就相当好，因为在这段时间内，汽车的快慢没有很大变化，但对落体来说就不行了。所以为了要得到越来越精确的速率，我们应当把时间间隔取得越来越小。我们应当做的是取百万分之一秒，并且用百万分之一秒去除以通过的距离。结

果给出每秒的距离,这就是我们所谓的速度。因此我们可以用这个方式去定义它。这是对那位太太的成功的答案,或者更确切地说,它就是我们将要采用的定义。

上述定义包括了一个新的概念,这是一个不曾被希腊人以普遍形式所采用过的概念。这个概念是取无穷小距离及相应的无穷小时间,求出它们的比值,并观察当我们所取的时间越来越小时,那个比值将发生什么情况。换句话说,当时间越取越小,以至无穷小时,取所通过的距离除以所需的时间的极限。这个概念分别由牛顿和莱布尼茨发明,它开创了称为微分学的新的数学分支。微积分的发明是为了描述运动,而它的第一个应用就是给"每小时开 60 mi"作什么解释下一个定义。

让我们试试看把速度定义得更好一些。假设在一个短时间 ε 内,汽车或其他物体通过一段短距离 x,则速度 v 定义为

$$v = x/\varepsilon.$$

这是一个近似,当 ε 取得越来越小,近似程度就越来越好。如果想用一个数学表示式,我们可以说速度等于在表示式 x/ε 中,当 ε 越来越小时的极限,即

$$v = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x}{\varepsilon}. \tag{8.3}$$

我们不可能对汽车里面的那位太太做同样的事情,因为那张表是不完全的。我们只知道她在各个间隔为 1 分钟的时刻的位置,我们能得到在第 7 分钟内她开车的速率是 5 000 $\mathrm{ft \cdot min^{-1}}$ 这一大致的概念,但无法知道,在正好是第 7 分钟那个时刻,她是否已经加速运动,是否在第 6 分钟开始时速率是 4 900 $\mathrm{ft \cdot min^{-1}}$,而现在是 5 100 $\mathrm{ft \cdot min^{-1}}$,或者其他情况,因为我们没有获知其间的精确细节。因此只有以无穷个数据来完成这张表,我们才能真正从这样一张表来计算速度。另一方面,如果我们有一个完整的数学公式,就像在落体的情况下(8.1 式)那样,就有可能计算速度,因为我们可以计算出在无论任何时刻的位置。

作为例子,我们来决定落体在 5 s 那个特定时刻的速度。一个方法是由表 8-2 中看出它在第五秒内的情况,它走了 $400 - 256 = 144$ ft, 因此它正以 144 $\mathrm{ft \cdot s^{-1}}$ 下落;可是这是错误的,因为速率正在发生变化,在这段时间间隔内,平均来说是 144 $\mathrm{ft \cdot s^{-1}}$,但这个球在加速,因而实际上走得比 144 $\mathrm{ft \cdot s^{-1}}$ 要快。我们希望弄清楚它的速度究竟有多快。在这个过程中涉及的方法如下:我们知道在 5 s 时球在那里。在 5.1 s 时,它总共走过的距离是 $16(5.1)^2 = 416.16$ ft[见式(8.1)],在 5 s 内它已下落 400 ft,在最后的 1/10 s 内它下落了 $416.16 - 400 = 16.16$ ft。由于在 0.1 s 中通过 16.16 ft 与 161.6 $\mathrm{ft \cdot s^{-1}}$ 是同一回事,这差不多就是速率,但还不完全正确。它究竟是 5 s、5.1 s 抑或是两者当中的 5.05 s 时的速度呢? 或者说,是什么时刻的速度? 别管它——现在的问题是要求出在 5 s 时的速率,而我们还没有得到精确的答案。我们必须进一步去求。于是,我们比 5 s 多取千分之一秒,即 5.001 s。再计算这时总共落下的距离

$$s = 16(5.001)^2 = 16(25.010\,001) = 400.160\,016 \text{ ft}.$$

在最后 0.001 s 内球落下了 0.160 016 ft,如以 0.001 s 除以这个数字。就得到速率为 160.016 $\mathrm{ft \cdot s^{-1}}$。这个值更为接近,而且十分接近,但它仍不精确。为了找出准确的速率,我们必须做什么,是很明显的。为了完成这个数学过程,我们把问题提得略微抽象一点;要

求出在一特定时刻 t_0 时的速度，在上面的问题中，t_0 就是 5 s。现在在 t_0 时刻的距离，我们称为 s_0 是 $16t_0^2$，或在这个情况下是 400 ft。为了求出速度，我们问："在 t_0 +（一点点），即 $t_0+\varepsilon$ 时刻物体在何处？"新位置是 $16(t_0+\varepsilon)^2=16t_0^2+32t_0\varepsilon+16\varepsilon^2$，于是它比以前走得更远了，因为以前它只是 $16t_0^2$。这段距离我们称为 s_0 +（多一点点）或 s_0+x（如果 x 是附加的一点点距离）。现在如果从在 $(t_0+\varepsilon)$ 时刻的距离中减去在 t_0 时刻的距离，我们就得出 x，即附加距离，为 $x=32t_0\varepsilon+16\varepsilon^2$。我们对速度的第一次近似是

$$v=\frac{x}{\varepsilon}=32t_0+16\varepsilon. \tag{8.4}$$

真正的速度是当 ε 变到趋于 0 那么小时的比值 x/ε。换句话说，在作出比值后，我们取当 ε 越来越小，即趋于 0 时的极限。(8.4)式化为

$$v(\text{在时刻 } t_0)=32t_0.$$

在我们的问题中 $t_0=5\,\mathrm{s}$，故答案是 $v=32\times5=160\,\mathrm{ft\cdot s^{-1}}$。在前面，我们曾相继取 $\varepsilon=0.1$ 及 0.001 s，所得到的 v 值比这稍大一些，但现在我们看到，实际速度正好是 $160\,\mathrm{ft\cdot s^{-1}}$。

§8-3 速率作为导数

我们刚刚采用的步骤在数学上是经常要做的，因此为了方便起见，对量 ε 和 x 规定了特殊的符号。在这一符号中，上面所用的 ε 改为 Δt，x 改为 Δs。Δt 表示"附加的一点 t"，并带有它能变得更小的含义。前缀 Δ 不是一个乘数，正如 $\sin\theta$ 不是 $\mathrm{s\cdot i\cdot n}\cdot\theta$ 一样，它仅仅定义了一个时间增量，并使我们想起了它所具有的特性。Δs 对距离 s 有类似的含义。因为 Δ 不是一个因子，因此在比值 $\Delta s/\Delta t$ 中不能消去而得出 s/t，正如比值 $\sin\theta/\sin 2\theta$ 不能消去成为 1/2 一样。在这种符号下，速度等于当 Δt 变得越来越小时 $\Delta s/\Delta t$ 的极限，即

$$v=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{8.5}$$

实际上这和我们前面使用 ε 与 x 的表达式(8.3)相同，但它的好处是表示某种东西在变化着，并且记录了什么东西正在发生变化。

顺便提一下，作为一个好的近似，我们还得到另一条定律：一个动点距离的变化是速度乘上时间间隔，或 $\Delta s=v\Delta t$。这个说法仅当速度在这个时间间隔内不变时才正确，而这个条件又只是在 Δt 趋于 0 的极限情况下才成立。物理学家喜欢把它写为 $\mathrm{d}s=v\mathrm{d}t$，因为按他们的意思 $\mathrm{d}t$ 是非常小的。根据这样的理解，这个表达式作为一个非常接近的近似是成立的。如果 Δt 太长，速度在这段间隔内可能发生变化，因而这个近似就欠佳了。对趋于 0 的时间 $\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}s=v\mathrm{d}t$ 严格成立。用这种符号我们可将(8.5)式写为

$$v=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

我们在上面得到的量 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 叫做"s 对于 t 的导数"（这个称呼有助于记下发生变化的过程），而求出它的复杂过程就称为求导，或求微商。单独出现的 $\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}t$ 称为微分。为了使你们熟悉用词，我们指出，我们已经找到函数 $16t^2$ 的导数，或 $16t^2$ 对于 t 的导数是 $32t$。当

我们习惯于这些词后,这些概念就更容易理解了。作为练习,让我们来求一个更复杂的函数的导数。我们考虑公式 $s = At^3 + Bt + C$, 它可以描写一点的运动。字母 A, B, C 表示常数,就像在熟知的二次方程一般形式中一样。从这个运动公式出发,我们希望求出在任何时刻的速度。为了以比较巧妙的方式求得它,我们把 t 改为 $t+\Delta t$, 并注意 s 将随之变为 $s+$ 某个 Δs;然后我们求出用 Δt 来表示的 Δs。这就是说

$$s+\Delta s = A(t+\Delta t)^3 + B(t+\Delta t) + C = At^3 + Bt + C + 3At^2\Delta t + B\Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3.$$

但由于

$$s = At^3 + Bt + C,$$

因而

$$\Delta s = 3At^2\Delta t + B\Delta t + 3At(\Delta t)^2 + A(\Delta t)^3.$$

但是我们想要的不是 Δs,而是 Δs 除以 Δt。将上述等式除以 Δt,得

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3At^2 + B + 3At(\Delta t) + A(\Delta t)^2.$$

当 Δt 趋于 0 时,$\Delta s/\Delta t$ 的极限是 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$,并等于

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3At^2 + B.$$

这就是微积分的基本运算过程,对函数求微商。这个过程甚至可以比上面所讲的更简单一些。当观察到这些展开式中含有 Δt 的平方项、立方项或任何更高次幂时,这种项马上可以去掉,因为取极限时它们变为 0。在稍微练习一下后;这个过程就显得方便了,因为我们知道把什么去掉。为了求出不同类型的函数的微商,有许多规则或公式。这些规则或公式可以记住,也可以在表中找到。表 8-3 就是一张简表。

表 8-3 求导简表

s, u, v 和 w 是 t 的任意函数;a, b, c 和 n 是任意常数

函　数	导　数
$s = t^n$	$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = nt^{n-1}$
$s = cu$	$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
$s = u+v+w+\cdots$	$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\cdots$
$s = c$	$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$
$s = u^a v^b w^c$	$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = s\left(\frac{a}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{b}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{c}{w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\cdots\right)$

§ 8-4 距离作为积分

现在我们讨论相反的问题。假定我们不是有一张距离的表,而是有一张从零开始,在不同时刻的速率表。对一个下落的球,这样的速率和时间表如表 8-4 所示。

表 8-4 自由下落小球的速度

t(s)	$v(\mathrm{ft}\cdot\mathrm{s}^{-1})$	t(s)	$v(\mathrm{ft}\cdot\mathrm{s}^{-1})$
0	0	3	96
1	32	4	128
2	64		

每分钟或每半分钟记录一次速度计的读数也可以对汽车的速度作出类似的表。假如我们知道汽车在任何时刻开得有多快,我们能确定它开了多远吗?这个问题恰好与上面所解决的问题相反,即给出速度而要求出距离。如果我们知道了速度,我们怎样找出距离呢?假定汽车的速度不是常数,而那位太太在某个时刻的速度是 60 $\mathrm{mi}\cdot\mathrm{h}^{-1}$,然后慢下来,再加快,等等,我们如何来确定汽车走了多远呢?这很容易。我们使用同样的概念,并将距离表示成许多无穷小量之和。我们说:"在第一秒钟汽车的速度是如此如此,并由公式 $\Delta s = v\Delta t$,计算出它以这个速度在第一秒内走了多远。"而在下一秒钟内它的速度近似相同,但略有差别。我们可以用新的速率乘时间来计算出在下一秒钟内它走了多远。对每一秒钟我们都同样处理,直到路程的终点为止。现在我们就求得了一系列小距离,总距离将是所有这些小距离的和。这就是说,距离将是速率乘时间的和,或 $s = \sum v\Delta t$,这里希腊字母 $\sum$ 表示累加。说得更确切一些,距离是在某一确定时刻,比方第 i 个时刻的速度乘以 Δt 以后的和。

$$s = \sum_i v(t_i)\Delta t. \tag{8.6}$$

这里关于时间的规则是 $t_{i+1} = t_i + \Delta t$。然而,我们用这个方法得到的距离是不准确的,因为在时间间隔 Δt 内速度已发生变化。假定我们将时间取得足够短,和就是精确的了,于是我们将时间取得越来越小,直到获得所需要的精确度为止。真正的 s 是

$$s = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_i v(t_i)\Delta t. \tag{8.7}$$

类似于微分符号,数学家们对这个极限也规定了一个符号。(8.7)式中的 Δ 变为 d,以提醒我们时间是尽可能地短,于是速度就是在时刻 t 的 v,累加则写成用拉长了的"s"——$\int$[从拉丁文 Summa(和)而来]表示的和,遗憾的是现在只称其为积分符号。于是我们可写出

$$s = \int v(t)\mathrm{d}t. \tag{8.8}$$

将所有这些项加起来的过程称为积分,它是微分的逆过程。这个积分的导数就是 v,所以一个运算符号(d)就消除了另一个运算符号($\int$)。人们可以把求微商的公式反过来,以得出一些积分公式,因为它们彼此正好是相反的运算。于是,对所有类型的函数求微分,人们就可以得出他们自己的积分表。对每个微分公式,如果我们把它倒过来,就得到一个积分公式。

每个函数可以用解析的方法微分,即这个过程能用代数方法来进行,并得出某个确定的函数。但是,对任何随意给定的积分,却不可能用简单的方式写下一个解析解。你们可以计算一下,比如,上述的求和,再用更小的时间间隔 Δt 进行计算,然后用更小的间隔等等,直到得到一个近乎正确的值。但一般说来,给定某个特殊的函数,就是不可能解析地找到它的积

分是什么。人们可能老是想找到一个函数,当对它求微分后,能给出某个所希望的函数;但人们可能找不到它,而且从能用已命名的函数来表示的意义来说,它可能不存在。

§8-5 加 速 度

推导运动方程的下一个步骤是引进另一个超出速度概念的新概念,即速度的变化。我们现在要问:"速度是如何改变的?"在前几章中我们已经讨论过力产生速度变化的情况。你们或许在听到某辆汽车能在 10 s 内由静止达到 60 mi · h^{-1}时很兴奋。从这样一种情况中我们可以看到速率变化有多快,但这只是平均的情况。我们现在将要讨论的是更为复杂的情况,即速度变化得有多快的问题,换句话说,在 1 s 内,速度的变化是每秒多少英尺,亦即每秒每秒多少英尺? 我们前面已导出过落体速度的公式为 $v = 32t$, 其值列于表 8-4 中,现在我们要求出每秒钟速度改变多少,这个量称为加速度。

加速度的定义是速度的时间变化率。由前面的讨论,我们已经充分懂得,如同将速度写成距离对时间的微商那样,应将加速度写成微商 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$。如果我们现在对公式 $v = 32t$ 求微商,我们得出,对自由落体

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 32. \tag{8.9}$$

[为了求 $32t$ 的微商可利用前面问题中得出的结果,那里我们发现 Bt 的微商就是 B(常数)。这样,令 $B = 32$,马上得出 $32t$ 的微商是 32]。这意味着落体的速度总是每秒改变 32 ft · s^{-1}。从表 8-4 中亦可看到速度在每秒内增加 32 ft · s^{-1}。这是一种非常简单的情况,因为加速度通常不是常数。在这里加速度是常数的原因是,作用在落体上的力是常数,而牛顿定律指出加速度与力成正比。

作为另一个例子,我们来求前面已经求过速度的那个问题中的加速度。由 $s = At^3 + Bt + C$ 出发,由于 $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, 我们得出

$$v = 3At^2 + B.$$

因为加速度是速度对时间的导数,我们还需对上面最后一个表达式求微商。回忆一下,右方两项的微商等于各项微商之和的规则。为了对其中第一项求微商,注意到我们在对 $16t^2$ 求微商时,已求出过平方项的微商,因此不必再重复基本运算,其结果是将 t^2 变成 t,并把数值系数加倍;我们假定这次发生的也是同样的情况,你们自己可以验证一下这个结果。于是 $3At^2$ 的微商是 $6At$。下一步我们对 B 这个常数项求微商,按前述规则,B 的微商为 0;因此,这一项对加速度无贡献。所以最后的结果是

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6At.$$

我们讲两个极有用的,可由积分得出的公式作为参考。如果一个物体由静止出发以匀加速度 g 运动,它在任何时刻 t 的速度为

$$v = gt.$$

在同一时间内它通过的距离是

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

在写出微商时人们使用了各种数学符号。因为速度是$\frac{ds}{dt}$,加速度是速度对时间的微商,我们也可写为

$$a=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}, \tag{8.10}$$

这是表示二阶导数的通常方法。

我们还有另一条规则:速度等于加速度的积分。这正是 $a=dv/dt$ 的逆过程;我们已经看到距离是速度的积分,所以距离可由加速度积分两次求出。

前面所讨论的运动只是一维情况,限于篇幅这里只简单讨论一下三维运动。考虑一个在三维空间中以无论什么方式运动的粒子 P。在本章开始时,我们从观察汽车在不同时间离出发点的距离,来展开对汽车的一维运动情况的讨论。然后讨论了用这些距离随时间的变化来表示速度,以及用速度的变化来表示加速度。我们可以类似地处理三维运动。先在二维图上说明运动,再将它推广到三维空间,这样做比较简单一些。我们建立一对互成直角的轴,然后由测量质点离每根轴多远来确定在任何时刻质点的位置。这样每个位置就可用 x 距离和 y 距离来表示,于是可列出表来描述运动,在表中将这两个距离都表示为时间的函数(将这个过程推广到三维空间时只需要再加上一根与前两根轴成直角的轴,并测量第三个距离,即 z 距离。现在的距离不是从线,而是从坐标平面量起)。在列出了 x, y 距离的表后,我们如何来确定速度呢?我们首先找出在每个方向上的速度分量。速度的水平部分,即 x 分量,是 x 距离对时间 t 的微商,或

$$v_x=\frac{dx}{dt}. \tag{8.11}$$

类似地,速度的垂直部分,或 y 分量,是

$$v_y=\frac{dy}{dt}. \tag{8.12}$$

对第三维,

$$v_z=\frac{dz}{dt}. \tag{8.13}$$

现在,给定了速度各分量,我们如何求沿实际运动路径的速度?在二维情况下,考虑质点两个彼此相隔短距离 Δs 和短时间间隔 $t_2-t_1=\Delta t$ 的相继的位置。在 Δt 时间内,质点水平运动的距离为 $\Delta x\approx v_x\Delta t$,垂直运动的距离为 $\Delta y\approx v_y\Delta t$ (符号"≈"读作"近似是")。实际运动的距离近似是

$$\Delta s\approx\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}, \tag{8.14}$$

如图 8-3 所示。如本章开始时那样,在这个间隔内的近似速度可由 Δs 除以 Δt 并令 Δt 趋于 0 而得出。于是得出速度为

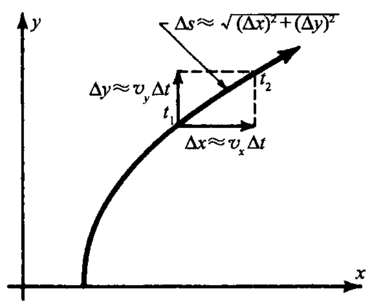


图 8-3 物体两维运动的描述和它的速度的计算

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2}. \tag{8.15}$$

对于三维空间,结果是

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}. \tag{8.16}$$

与定义速度的方法一样,我们可以定义加速度:可以得出加速度的 x 分量 a_x 是速度的 x 分量 v_x 的微商(即 $a_x= d^2x/dt^2$, x 对 t 的二阶微商),等等。

让我们考虑一个在平面内复合运动的良好例子。取一个在水平方向以匀速 u 运动,同时在垂直向下的方向又以匀加速度($-g$)运动的球;整个运动是怎样的呢?我们可以说 $dx/dt = v_x = u$。因为速度 v_x 是常数,故

$$x = ut. \tag{8.17}$$

而由于向下的加速度$-g$ 是常数,球体落下的距离 y 可写为

$$y=-\frac{1}{2}gt^2. \tag{8.18}$$

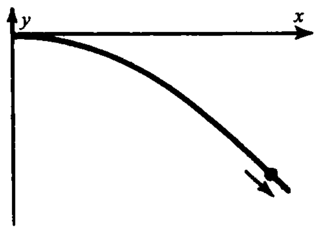


图 8-4 具有水平初速的落体所描述的抛物线

路程的曲线,即 y 与 x 之间的联系是怎样的呢?因为 $t = x/u$,我们可以从方程(8.18)消去 t。把它代入以后,求得

$$y=-\frac{g}{2u^2}x^2. \tag{8.19}$$

这个 y 与 x 之间的关系式可视为正在运动的小球的路径的方程。当画出这个方程的图形时,我们得到一条称为抛物线的曲线;向任何方向射出的自由落体都将沿着如图 8-4 所示的抛物线行进。

第 9 章 牛顿的动力学定律

§9-1 动 量 和 力

动力学定律,或运动定律的发现在科学史上是一个激动人心的时刻。在牛顿时代以前,像行星之类事物的运动那是一个谜,但在牛顿以后,一切都了如指掌了。甚至连由于行星之间的扰动而引起的与开普勒定律的微小偏离,也可以计算出来。摆的运动,用弹簧和重物组成的振子的运动等等,在牛顿定律被阐明后全都能圆满地加以分析。对这一章来说情况也是这样:在本章前我们还不能计算挂在弹簧上的一个有质量的物体如何运动,更不能计算由土星和木星在天王星上所引起的摄动。在这一章后,我们将不仅能计算振动着的有质量物体的运动,而且也能计算由土星和木星对天王星所产生的摄动!

伽利略发现的惯性原理对于运动的理解给推进了一大步。这条原理是:如果一个物体处在自由状态而不受干扰,则若此物体原来在运动,它就继续作匀速直线运动;若原来静止,则它仍然静止。当然,这种情况在自然界中永远不会出现,因为如果我们让一个木块在桌面上自由滑动,它就会停下来,但这正是由于它并不是不受干扰的——它与桌面间存在着摩擦。要找出这条正确的规律需要一定的想象力,而这种想象力正是伽利略提供的。

当然,下一步所需要的是用来求出物体受到某种影响时,它的速度如何变化的规则。这是牛顿的贡献。牛顿写下了三条定律:第一定律只是刚才叙述过的伽利略惯性原理的重新表达。第二定律提供了一个具体的方法来确定在称为力的种种影响下速度如何发生变化。第三定律在某种程度上描述了力,我们将另行讨论。这里我们将只讨论第二定律,它断言,力以下述方式引起物体运动的变化:某个称为动量的量的时间变化率正比于力。我们一会儿将用数学形式来表达第二定律,但首先让我们解释一下概念。

动量与速度不同。在物理学中使用的大量词汇,虽然在日常用语中可能并没有精确含义,但在物理学上它们都有精确的物理含义。动量就是一个例子,我们必须严格地定义它。如果我们用手臂在一个轻的物体上推一下,它很容易运动;如果我们用同样的力气去推另一个通常所谓的重得多的物体,它的运动就会慢得多。实际上,我们必须把“轻”与“重”的词汇改为质量较小和质量较大,因为应当理解一个物体的重量和其惯性之间存在着差别(为了使它运动起来有多难是一回事,它称起来有多重是另一回事)。重量与惯性是成正比的,而且在地球表面上也常常把它们在数值上取为相等,这就在一定程度上使学生产生混淆。在火星上,重量的概念将不同,但为了克服惯性所需要的力的大小则是相同的。

我们用“质量”这个术语作为惯性的定量量度,并且可以这样来测定质量,例如使一个物体以一定的速率沿圆周运动,然后测出为了保持它作圆周运动需要多大的力。用这种方法,我们就能找出每个物体的确定的质量。物体的动量是它的质量和速度两部分的乘积。于是牛顿第二定律可以在数学上写成这种方式

$$F=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv). \tag{9.1}$$

这里应当考虑下列几点。在写出任何这样的定律时,我们使用了许多直觉的观念,隐含的意义,以及不同的假设,以便在开始时近似地组成我们的"定律"。以后我们可以回过头来更详细地研究每一项的含义究竟是什么,但是如果我们操之过急,就会搞糊涂了。所以在开始时,我们认为有几件事情是当然的。首先,物体的质量是一个常数;这并非真正如此,但我们将从牛顿近似开始,假定质量不变,并且在所有时间中都相同;其次,当我们把两个物体放在一起时,它们的质量是相加的。当然,在牛顿写下他的方程时,就暗含了这些观念,否则方程就毫无意义了。比如,假定质量与速度成反比,那么动量在任何情况下将永不改变,所以除非你知道质量怎样随速度而变化,否则这个定律就毫无意义了。一开始我们就认为,质量是不变的。

关于力也隐含了某些东西。作为一种粗略的近似,我们往往把力看作是利用肌肉作出的推或拉,但现在有了这条运动定律后,我们就能更精确地定义它。最重要的是要了解到这个关系所包含的内容不仅有动量或速度在数值上的变化,而且还有在方向上的变化。如果质量是常数,那么方程式(9.1)也可写为

$$F=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=ma. \tag{9.2}$$

加速度 a 是速度的变化率,而牛顿第二定律不仅表明一个给定的力的效应与质量成反比,还表明速度变化的方向与力的方向相同。因此我们必须了解速度的变化,即加速度,有着比日常用语中更广泛的含义:运动物体的速度既可以通过加快或减慢(当它变慢时,我们说它以负的加速度运动)来变化,也可以通过改变它的运动方向来变化。在第7章中已讨论过速度和加速度垂直的情况。那里我们看到,以恒定速率 v 在半径为 R 的圆周上运动的物体,如果 t 很小,它偏离直线的距离就等于 $\frac{1}{2}(v^2/R)t^2$,因而与运动方向垂直的加速度的公式是

$$a=\frac{v^2}{R}, \tag{9.3}$$

而与速度垂直的力将使物体沿曲线运动。这条曲线的曲率半径可以通过将力除以质量以得到加速度,然后再利用式(9.3)求出。

§9-2 速率与速度

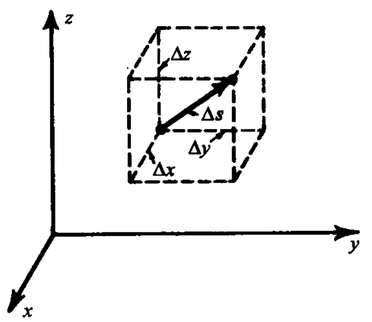


图 9-1 一个物体的微小位移

为了使我们的语言更确切,在使用速率和速度这两个词时,我们将作进一步的定义。我们通常认为它们是相同的东西,在日常用语中它们也确实是一样的。但在物理学上,我们利用本来就有两个词这一事实,并且决定用它们来区分两个概念。我们仔细地将同时具有大小和方向两者的速度和速率区分开来,而速率我们将只用以表示它的大小,但并不包括方向。我们可以通过描写一个物体的 x, y, z 坐标如何随时间变化而将上面的意思更确切地表述出来。例如,假定某时刻一个物体如图9-1所示那样的运动着。

在某一段给定的时间间隔 Δt 内，它将沿 x 方向移动一定的距离 Δx，向 y 方向移动 Δy，向 z 方向移动 Δz。这三个坐标变化的总效果是位移 Δs，Δs 是沿着边长为 Δx，Δy 和 Δz 的平行六面体的对角线。用速度来表示的话，位移 Δx 是速度的 x 分量乘 Δt，Δy 与 Δz 亦与此类似

$$\Delta x = v_x \Delta t,\ \Delta y = v_y \Delta t,\ \Delta z = v_z \Delta t. \tag{9.4}$$

§ 9-3　速度、加速度以及力的分量

在式(9.4)中，我们通过物体沿 x 方向、y 方向和 z 方向运动的快慢，已把速度分解为分量。如果我们给出它的三个正交分量的数值

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}, \tag{9.5}$$

则速度的大小和方向两者都确定，从而速度也就完全确定。另一方面，物体的速率是

$$\frac{ds}{dt} = |\,v\,| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,. \tag{9.6}$$

其次，我们假定，如图 9-2 所示，由于力的作用，速度改变为另一个方向，并取不同的数值。如果我们算出速度的 x、y 及 z 分量的变化，就可以相当简单地分析这一表面上颇为复杂的情况。在时间 Δt 内速度在 x 方向分量的变化是 $\Delta v_x = a_x \Delta t$，这里 a_x 称为加速度的 x 分量。同样，我们看出 $\Delta v_y = a_y \Delta t$ 和 $\Delta v_z = a_z \Delta t$。用这些说法，我们看到，牛顿第二定律，即力与加速度方向相同时，力在 x、y 及 z 方向上的分量就等于质量乘相应的速度分量的变化率

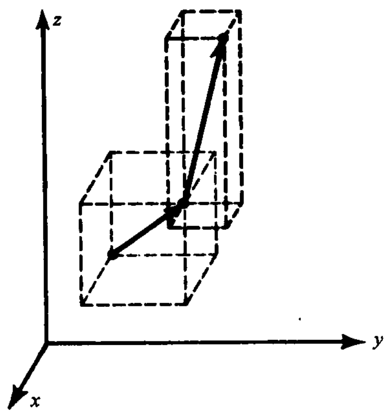


图 9-2　速度的数值与方向均改变的情况

$$\begin{aligned} F_x &= m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = ma_x, \\ F_y &= m\frac{dv_y}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} = ma_y, \\ F_z &= m\frac{dv_z}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2} = ma_z, \end{aligned} \tag{9.7}$$

它实际上是三条定律。如同速度和加速度可以通过将一根标明大小和方向的线段投影到三个坐标轴上而分解为三个分量一样，用同样方法，一给定方向的力可用 x、y 和 z 的一定的分量来表示

$$\begin{aligned} F_x &= F\cos(x,\ F), \\ F_y &= F\cos(y,\ F), \\ F_z &= F\cos(z,\ F), \end{aligned} \tag{9.8}$$

这里 F 表示力的大小，$(x,\ F)$ 表示 x 轴与 F 的方向之间的夹角，等等。

式(9.7)给出牛顿第二定律的完整形式。如果知道了施加于物体上的力，并将它们分解

为x、y和z分量,我们就能从这些方程求出物体的运动。让我们考虑一个简单的例子。假设现在在y,z方向上没有力,只有在x方向,比方说竖直方向上有力。方程式(9.7)告诉我们速度在竖直方向上有变化,但在水平方向上没有变化。这在第7章中已经用特殊仪器(图7-3)演示过了。一个平抛落体的水平运动没有任何变化,而它的竖直运动的方式就和水平运动不存在时的运动方式相同。换句话说,只要各方向的力之间没有联系,在x、y和z方向的三个运动将是独立的。

§9-4 什么是力

为了使用牛顿定律,我们必须具有某个力的公式;因为这些定律提醒我们:要注意力。如果一个物体在加速,那么某种力就在起作用,让我们去寻找它。动力学今后要做的工作就是去寻找有关力的规律。牛顿本人继续作了一些示例。在引力的情况下,他提出了这种力的特殊公式。至于其他的力,他在第三定律中提供了部分信息,这条定律讲的是作用和反作用相等,我们将在下一章研究它。

我们对前一个例子作进一步分析,作用在地面附近的物体上的力是什么?接近地球表面时,在竖直方向上由重力产生的力正比于物体的质量,而高度远小于地球半径R时,这个力几乎与高度无关,即$F=GmM/R^2=mg$,这里$g=GM/R^2$,称为重力加速度。这样重力定律告诉我们重量正比于质量;力作用在竖直方向上,等于质量乘以g。我们再次发现水平运动是匀速运动。有意义的运动则在竖直方向上。牛顿第二定律告诉我们

$$mg=m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{9.9}$$

消去m,我们得到在x方向上的加速度是一个常数,并等于g。当然,这就是众所周知的重力作用下的自由落体定律,由此可得到方程

$$v_x=v_0+gt,$$
$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}gt^2. \tag{9.10}$$

作为另一个例子,假设我们能够制作出如图9-3所示的一个装置——一个弹簧,它提供一个正比于距离而方向相反的力。如果我们不去管重力(当然它已被弹簧的原始伸长所平衡),而只去谈论外加的力,我们看到,如果将这个有质量物体往下拉,弹簧就会往上拉,而如果我们把它往上推,弹簧就会往下推。这个装置经过了细心设计,使得我们向上推得越厉害,弹簧的力越大,精确地与离平衡状态的位移成正比,同样,弹簧往上拉的力也与我们把它向下拉多远成正比。如果观察这个装置的动力学情况,我们看到一个颇为美妙的运动——上,下,上,下,……。问题是,牛顿定律是否能正确地描写这一运动?让我们看看,利用牛顿定律式(9.7),究竟能不能精确计算出这个周期振动的情况。在本例中,方程是

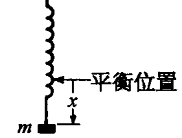


图9-3 挂在弹簧上的一个重物

$$-kx=m\frac{dv_x}{dt}. \tag{9.11}$$

这是一个 x 方向上的速度变化率正比于 x 的情况。由于保留各个系数不会有什么新的结果，因而我们想象或者是改变了时间的尺度，或者是在单位上有一个巧合，结果刚巧 $k/m=1$。所以，我们打算来解方程

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-x. \tag{9.12}$$

为此，我们必须知道 v_x 是什么；当然，我们已经知道，速度是位置的变化率。

§9-5　动力学方程的含义

现在我们来分析一下方程式(9.12)究竟意味着什么。假定在某一给定的时刻 t 物体有一定的速度 v_x 和位置 x。那么，在稍晚一点的时间 $t+\varepsilon$ 时，速度与位置又各是多少呢？如果我们能够回答这一点，问题就解决了，因为这样我们就可以从给定的条件出发，计算第一个时刻它改变了多少，下一个时刻又改变了多少，等等，并按此方式逐步推断出物体的运动。具体地说，假定在时间 $t=0$ 时，我们有 $x=1$ 和 $v_x=0$，那么究竟为什么物体会运动呢？因为除 $x=0$ 外，物体处在任何位置时总有一个力作用在它上面。如果 $x>0$，这个力就朝上。因此，根据运动定律，速度从 0 开始变化，一旦它获得一点点速度，物体就开始朝上运动，等等。现在，在任何时刻 t，如果 ε 十分小，作为一个很好的近似，我们可以用在 t 时刻的位置和速度将 $t+\varepsilon$ 时刻的位置表示为

$$x(t+\varepsilon)=x(t)+\varepsilon v_x(t). \tag{9.13}$$

ε 越小，这个表达式越精确，即使 ε 不是小到趋于零，此式仍能达到有用的精确度。现在，速度又如何呢？为了求出后一时刻的速度，即 $t+\varepsilon$ 时刻的速度，我们需要知道速度怎样变化，即加速度。我们将怎样去求加速度呢？动力学定律就在这种地方起作用。动力学定律告诉我们加速度有多大。它说加速度是 $-x$，且

$$v_x(t+\varepsilon)=v_x(t)+\varepsilon a_x(t), \tag{9.14}$$

$$=v_x(t)-\varepsilon x(t). \tag{9.15}$$

式(9.14)只是运动学的方程，它表明速度的变化是由于存在加速度。但式(9.15)是动力学的方程。因为它将加速度和力联系起来，它表明对于这个特殊问题，在这个特定时刻，你可以用 $-x(t)$ 来代替加速度。因此，如果我们知道在一给定时刻的 x 与 v 两者，我们就知道加速度，而这又告诉我们新的速度，于是又可知道新的位置——这就是动力学方程的含义所在；由于有力，速度改变了一点点，而由于有速度，位置又改变了一点点。

§9-6　方程的数值解

现在我们来真正解上述问题。假定取 $\varepsilon=0.100\ \mathrm{s}$。当我们做好这一切工作后，如果发现这还不够小，我们可以再回过头来，以 $\varepsilon=0.010\ \mathrm{s}$ 重做一次。从初值 $x(0)=1.00$ 开始，$x(0.1)$ 是多少呢？它是原来的位置 $x(0)$ 加上速度(这时为 0)乘 0.10 s。于是 $x(0.1)$ 仍是 1.00，因为它还没有开始运动。但在 0.10 s 时的新速度就是原速度 $v(0)=0$ 加 ε 乘以加速

度。加速度是 $-x(0)=-1.00$。于是

$$v(0.1)=0.00-0.10\times1.00=-0.10.$$

现在,在 0.20 s 时

$$x(0.20)=x(0.1)+\varepsilon v(0.1)=1.00-0.10\times0.10=0.99$$

和
$$v(0.2)=v(0.1)+\varepsilon a(0.1)=-0.10-0.10\times1.00=-0.20.$$

依此类推,一直做下去,就可计算出其余的运动,这正是我们要做的事。然而,实际上,这里有点小小的技巧可用来提高准确度。假如我们继续已经开始的计算,就会发现由于 $\varepsilon=0.100$ s 是相当粗糙的,因而运动也是相当粗糙的,我们得取一个很小的时间间隔,比如说 $\varepsilon=0.01$ s。于是,要对一段适当的总时间间隔进行研究,就要作大量的重复计算。所以我们将在用同样粗糙的间隔 $\varepsilon=0.10$ s 的条件下,把要计算的工作组织一下以提高准确度。这一点在分析技巧上略加改进就可以办到。

我们注意到,新的位置是老的位置加上时间间隔 ε 乘以速度。但这是什么时刻的速度呢?在时间间隔开始时是一个速度,在时间间隔结束时又是另外一个速度。我们的改进就是利用两者之间的速度。假定我们知道现在的速率,但速率正在变化,如果继续采用现在的速率,那就得不到正确的答案。我们应当用"现在这个时刻"的速率以及间隔结束的"那个时刻"的速率之间的某个速率。同样的考虑也可用于速度:为了计算速度变化,我们将使用要求出它的速度的那两个时刻中间的加速度。这样我们实际使用的方程就多少如下所述:后来的位置等于先前的位置加上 ε 乘以在间隔中间的那个时刻的速度。类似地,间隔中间那个时刻的速度等于比它早 ε 时(它正处在前一个时间间隔中间)的速度加上 ε 乘以 t 时刻的加速度,也就是说,我们利用的方程是

$$x(t+\varepsilon)=x(t)+\varepsilon v\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$v\left(t+\frac{\varepsilon}{2}\right)=v\left(t-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\varepsilon a(t),$$

$$a(t)=-x(t). \tag{9.16}$$

剩下来还有一个小问题:$v(\varepsilon/2)$是什么?在起始时刻,我们得到的是 $v(0)$,而不是 $v(-\varepsilon/2)$。我们将用一个特殊等式,即 $v(\varepsilon/2)=v(0)+(\varepsilon/2)a(0)$ 来开始计算。

现在我们已经准备好,可以进行计算了。为了方便起见,可以用列表的方法进行,各栏分别为时间,位置,速度,加速度,而速度则标在两行之间,如表 9-1 所示。当然,这张表只

表 9-1

$dv_x/dt=-x$ 的解。间隔:$\varepsilon=0.10$ s

t	x	v_x	a_x
0.0	1.000	0.000	−1.000
		−0.050	
0.1	0.995		−0.995
		−0.150	
0.2	0.980		−0.980

（续表）

t	x	v_x	a_x
		−0.248	
0.3	0.955		−0.955
		−0.343	
0.4	0.921		−0.921
		−0.435	
0.5	0.877		−0.877
		−0.523	
0.6	0.825		−0.825
		−0.605	
0.7	0.764		−0.764
		−0.682	
0.8	0.696		−0.696
		−0.751	
0.9	0.621		−0.621
		−0.814	
1.0	0.540		−0.540
		−0.868	
1.1	0.453		−0.453
		−0.913	
1.2	0.362		−0.362
		−0.949	
1.3	0.267		−0.267
		−0.976	
1.4	0.169		−0.169
		−0.993	
1.5	0.070		−0.070
		−1.000	
1.6	−0.030		+0.030

是表示由等式(9.16)所得到数值的方便的办法，事实上方程本身无须写出。我们只要在表中一个接一个地填满空位。这张表给我们提供了一个关于运动的很好的概念：它从静止开始，先获得一点往上的负速度，并失去一点距离。加速度减少了一点点，但它仍然获得速率。当运动继续时，速率增加得越来越慢，直到大约 $t=1.50\,\mathrm{s}$ 时它通过 $x=0$ 点，我们可以肯定地断言物体将继续运动，但现在是往另一边运动；x 将变为负值，而加速度为正。于是速率减慢。将这些数值与图 9-4 所示的函数 $x=\cos t$ 相比是有意思的，在我们的计算准确到三位有效数字的范围内，它们是符合的！以后我们会知道 $x=\cos t$ 是这个运动方程的精确数学解，但这样容易的计算会得出这样准确的结果使人们对数值分析的作用留下了深刻的印象。

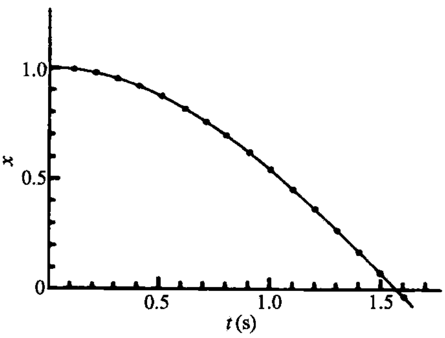


图 9-4　悬于弹簧上的重物运动的曲线

§9-7　行　星　运　动

上面对于振动弹簧运动的分析是非常完美的，但我们能否分析行星的绕日运动呢？我们来看看是否能在一定的近似下得出椭圆轨道。我们假定太阳是无限重的，这意味着我们将不把太阳包括在运动中。假定行星在某个位置开始以某个速度运动；它将沿某一曲线绕日转动，我们试图用牛顿运动定律及引力定律来分析一下这是一条什么样的曲线。从何下手呢？在一个给定时刻它在空间的某确定位置上。如果把从太阳到这个位置的矢径称为

r,那么根据引力定律可知,将有一个力沿 r 指向太阳,它等于一个常数乘以太阳质量与行星质量的乘积,再除以距离的平方。为了进一步分析下去,我们必须求出由这个力所产生的加速度。我们需要知道沿两个方向(称为 x 和 y 方向)的加速度分量。于是,如果以给定的 x 和 y 表示某一时刻行星的位置(我们将假设 z 总是为0,因为在 z 方向无作用力,而如果没有初速度 v_z,就不会使 z 变为异于零的值),力就沿着行星与太阳连线的方向,如图9-5所示。

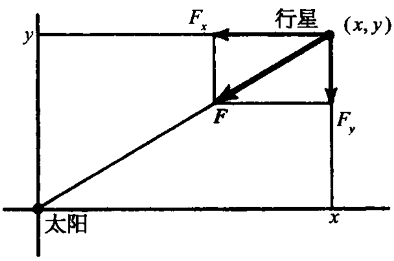


图 9-5 作用在行星上的太阳引力

从这个图上我们看到,力的水平分量与整个力的关系跟水平距离 x 与整条斜边 r 的关系相同,因为两个三角形相似。此外,如 x 为正,则 F_x 为负。这就是说

$$\frac{F_x}{|F|}=-\frac{x}{r},\text{或 } F_x=-\frac{|F|x}{r}=-\frac{GMmx}{r^3}.$$

现在我们运用动力学定律得出,这个力的分量等于行星的质量乘以它在 x 方向上的速度变化率。这样我们就得到下述定律

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}&=-\frac{GMmx}{r^3},\\ m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}&=-\frac{GMmy}{r^3},\\ r&=\sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}\tag{9.17}$$

这就是我们要解的一组方程。为了简化数值计算,我们再假设时间单位或太阳质量已经过调整(或者我们有幸如此)使 $GM\equiv1$。在我们这个特例中,我们将假定行星的初始位置在 $x=0.500$, $y=0.000$ 处,而在初始时刻,速度完全在 y 方向,其值为1.630 0。我们现在怎样来进行计算呢?我们再作一个表,其中各列分别为时间,x 位置,x 方向速度 v_x 及 x 方向加速度 a_x;然后,另外列出 y 方向上的位置,速度,加速度三列,并与前者用双线隔开。为了得到加速度,我们需要用到式(9.17);它告诉我们 x 方向的加速度是 $-x/r^3$, y 方向的加速度是 $-y/r^3$,而 r 是 (x^2+y^2) 的平方根。于是,给定了 x 与 y 后,我们只须在一旁稍作计算,取平方和的平方根,从而找出 r,以准备计算两个加速度。将 $1/r^3$ 求出也是有用的。进行这项计算利用平方表、立方表及倒数表会更容易一些。然后只要用计算尺将 x 乘 $1/r^3$ 就行了。采用时间间隔 $\epsilon=0.100$,我们的计算按下述步骤来完成:在 $t=0$ 时的初始值

$$x(0)=0.500,\ y(0)=0.000;$$

$$v_x(0)=0.000,\ v_y(0)=+1.630.$$

由此求得

$$r(0)=0.500,\ \frac{1}{r^3(0)}=8.000.$$

$$a_x=-4.000,\ a_y=0.000.$$

于是可计算 $v_x(0.05)$和 $v_y(0.05)$

$$v_x(0.05)=0.000-4.000\times0.050=-0.200;$$
$$v_y(0.05)=1.630+0.000\times0.050=+1.630.$$

表 9-2

$dv_x/dt=-x/r^3$, $dv_y/dt=-y/r^3$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 的解

间隔：$\varepsilon=0.100$

在 $t=0$ 时，轨道 $v_y=1.63$, $v_x=0$, $x=0.5$, $y=0$

t	x	v_x	a_x	y	v_y	a_y	r	$1/r^3$
0.0	0.500		−4.00	0.000		0.00	0.500	8.000
		−0.200			1.630			
0.1	0.480		−3.68	0.163		−1.25	0.507	7.675
		−0.568			1.505			
0.2	0.423		−2.91	0.313		−2.15	0.526	6.873
		−0.859			1.290			
0.3	0.337		−1.96	0.442		−2.57	0.556	5.824
		−1.055			1.033			
0.4	0.232		−1.11	0.545		−2.62	0.592	4.81
		−1.166			0.771			
0.5	0.115		−0.453	0.622		−2.45	0.633	3.942
		−1.211			0.526			
0.6	−0.006		+0.020	0.675		−2.20	0.675	3.252
		−1.209			0.306			
0.7	−0.127		+0.344	0.706		−1.91	0.717	2.712
		−1.175			0.115			
0.8	−0.245		+0.562	0.718		−1.64	0.758	2.296
		−1.119			−0.049			
0.9	−0.357		+0.705	0.713		−1.41	0.797	1.975
		−1.048			−0.190			
1.0	−0.462		+0.796	0.694		−1.20	0.834	1.723
		−0.968			−0.310			
1.1	−0.559		+0.858	0.663		−1.02	0.867	1.535
		−0.882			−0.412			
1.2	−0.647		+0.90	0.622		−0.86	0.897	1.385
		−0.792			−0.499			
1.3	−0.726		+0.92	0.572		−0.72	0.924	1.267
		−0.700			−0.570			
1.4	−0.796		+0.93	0.515		−0.60	0.948	1.173
		−0.607			−0.630			
1.5	−0.857		+0.94	0.452		−0.50	0.969	1.099
		−0.513			−0.680			
1.6	−0.908		+0.95	0.384		−0.40	0.986	1.043
		−0.418			−0.720			
1.7	−0.950		+0.95	0.312		−0.31	1.000	1.000
		−0.323			−0.751			
1.8	−0.982		+0.95	0.237		−0.23	1.010	0.970
		−0.228			−0.773			
1.9	−1.005		+0.95	0.160		−0.15	1.018	0.948
		−0.113			−0.778			
2.0	−1.018		+0.96	0.081		−0.08	1.021	0.939
		−0.037			−0.796			
2.1	−1.022		+0.95	0.001		0.00	1.022	0.936
		+0.058			−0.796			
2.2	−1.016		+0.96	−0.079		+0.07	1.019	0.945
					−0.789			
2.3								

在 2.101 s 时与 x 轴相交，∴ 周期 = 4.20 s。

在 2.086 s 时 $v_x=0$。

与 x 相交于 −1.022 长度单位处，∴ 半长轴 $=\dfrac{1.022+0.500}{2}=0.761$。

$v_y=-0.796$。

预言时间 $\pi(0.761)^{3/2}=\pi(0.663)=2.082$。

现在开始作我们的主要计算

$$x(0.1)=0.500-0.20\times0.1=0.480,$$

$$y(0.1)=0.0+1.63\times0.1=0.163,$$

$$r=\sqrt{0.480^2+0.163^2}=0.507,$$

$$1/r^3 = 7.67,$$

$$a_x(0.1) = -0.480 \times 7.67 = -3.68,$$

$$a_y(0.1) = -0.163 \times 7.67 = -1.250,$$

$$v_x(0.15) = -0.200 - 3.68 \times 0.1 = -0.568,$$

$$v_y(0.15) = 1.630 - 1.26 \times 0.1 = 1.505,$$

$$x(0.2) = 0.480 - 0.568 \times 0.1 = 0.423,$$

$$y(0.2) = 0.163 + 1.50 \times 0.1 = 0.313,$$

等等.

这样我们就得到表 9-2 中列出的数值,20 步左右我们就追踪了行星绕太阳运行的一半路程!图 9-6 中画出表 9-2 所得的 x 坐标和 y 坐标,圆点表示每隔 1/10 的时间单位所求得的位置,我们看到开始时行星的运动较快,到末尾时运动则较慢,就这样,曲线的形状被确定下来。于是我们看到,我们确实知道如何来计算行星的运动了!

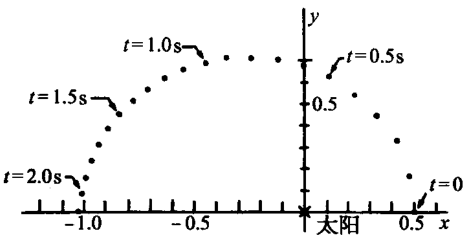


图 9-6 由计算所得的行星绕日运动

现在来看看如何计算海王星,木星,天王星或任何其他行星的运动。如果我们有许许多多行星,并且让太阳也运动,我们也能这样计算吗?当然能。我们可以计算在某一特定行星,比如说第 i 颗行星上的力,它的位置是 x_i, y_i 和 z_i ($i = 1$ 可以代表太阳,$i = 2$ 是水星,$i = 3$ 是金星,等等)。我们必须知道所有行星的位置。作用在一颗行星上的力是所有其他(比方说位于 x_j, y_j, z_j)的物体所产生的。因此方程式是

$$m_i \frac{dv_{ix}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{-Gm_i m_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^3},$$

$$m_i \frac{dv_{iy}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{-Gm_i m_j (y_i - y_j)}{r_{ij}^3},$$

$$m_i \frac{dv_{iz}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{-Gm_i m_j (z_i - z_j)}{r_{ij}^3}. \tag{9.18}$$

此外,我们定义 r_{ij} 为两个行星 i 与 j 之间的距离;它等于

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}. \tag{9.19}$$

这里的 $\sum$ 仍旧表示对所有 j——所有其他物体——求和,当然 $j = i$ 除外。于是我们所要作的就是取更多列。对木星的运动要排 9 列;对土星的运动要排 9 列,等等。然后,当我们有了所有的初始位置与速度后,就可以首先用式(9.19)计算出所有的距离,再用式(9.18)计算出所有的加速度。这要花多长时间呢?如果你在家里计算,这需要很长的时间!但现在我们已经有了运算得很快的机器——计算机,一台很好的计算机只花 1 μs,即 1 s 的百万分

之一就可做一次加法。做一次乘法要长一些，比方说 10 μs。在一轮计算中可能要做 30 次乘法或类似的运算，视具体的问题而定。那么一轮计算将花 300 μs。这意味着我们每秒钟可算 3 000 轮。为了获得一定的精度，比方说十亿分之一，那么与行星绕日转动一周所对应的计算循环约为 4×10^5 轮，这相当于 130 s 或约 2 min 的计算时间。因此，用这个方法，跟随木星绕太阳的运动，即使计及所有行星所引起的精确到十亿分之一的摄动，也只需要 2 min（结果表明误差约随间隔 ϵ 的平方而变化，如果使间隔小 1 000 倍，精确度就提高 100 万倍，那么，让我们使间隔小 10 000 倍吧）！

结果，正如我们所说的，在本章开始时我们甚至还不知道如何计算在弹簧上有质量物体的运动。现在，掌握了具有巨大威力的牛顿定律后，我们不仅可以计算这样的简单运动，而且只要有一台可以解决算术运算的计算机，即便是许多行星的极端复杂的运动，也能以我们所希望的任意高的精确度计算出来！

第10章　动量守恒

§10-1　牛顿第三定律

牛顿第二定律给出了任何物体的加速度与作用在它上面的力之间的关系，在这个基础上，原则上可以解决任何力学问题。例如，为了确定几个粒子的运动，人们可以利用前面一章中所展开的数值方法。但是我们有充分的理由来进一步研究牛顿定律。首先，有一些十分简单的运动不仅可以用数值方法分析，也可以直接进行数学分析。比如：我们知道落体的加速度是 $32\ \mathrm{ft}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ 后，由这个事实虽然可以用数值方法计算出运动，但是分析这个运动并找到一般解 $s=s_0+v_0t+16t^2$，则更为容易也更令人满意。同样，虽然我们可以按数值方法计算简谐振子的位置，但我们也能用分析方法表明一般解是简单的 t 的余弦函数，因此，当存在一种简单而又更为精确的方法以得出结果时，再去用一系列麻烦的算术运算就毫无必要了。同理一个行星由引力决定的绕太阳的运行固然可以用第9章的数值解法逐点地加以计算，从而找到轨道的一般形状，但能够得到准确的形状——分析表明这是一个完整的椭圆——就更好了。

遗憾的是，只有很少问题能够以分析方法精确求解。例如就简谐振子来说，如果弹簧力不是正比于位移，而是更为复杂的话，人们就只得又回到数值解法上来。或者，假如有两个天体绕太阳运行，使天体的总数是三个，那么分析法就无法得出一个简单的运动公式，实际上这个问题只能作数值解。这就是著名的三体问题，它曾经长时间地向人们的分析能力挑战；十分有趣的是，人们花了那么长时间才领悟到也许数学分析的能力是有限的，因而使用数值解法是必要的这个事实。今天，大量无法以分析方法解决的问题已由数值方法解出，那个曾被认为是如此困难的古老的三体问题，已作为常规计算准确地按上一章所描述的方式进行充分的演算后，加以解决了。然而，也有一些两种方法都失效的情况：对简单的问题我们可以用分析方法，对适当困难的问题可以用数值和算术方法；但是对非常困难的问题则这两种方法都不能用了。例如：两辆汽车的碰撞，或者甚至气体中分子的运动，就是一种复杂的问题。在一立方毫米的气体中有数不清的粒子，而试图用这么许多变量（约 10^{17} 个）来作计算将是荒谬的。任何问题，如果不是只有两三个行星绕太阳运行，而是诸如像气体、木块、铁块中的分子或原子的运动，或在球状星团中许多恒星的运动之类这样的问题，我们就不能直接去解，因此只好借助于其他手段。

在那种无法了解细节的情况下，我们需要知道某些一般性质，亦即需要知道作为牛顿定律结果的一般性定理或原则。在第4章讨论过的能量守恒定律就是其中之一。另一个是动量守恒定律，这是本章的课题。进一步研究力学的另一个理由是：有某些运动模式在许多不同的状况下一再重复地出现，因此在一个特定情况下研究这些模式是有益的。例如，我们将研究碰撞，不同类型的碰撞有许多共同之处。又如在流体的流动中，到底是哪一种流体这个

问题并没有多大关系,这是因为流动的定律是类似的。我们将研究的其他一些问题是振动及振荡,特别是,机械波的特殊现象——声、杆的振动,等等。

在我们对牛顿定律的讨论中已经解释过:这些定律是一种处理问题的方案,它告诉我们:"要注意力!"而在有关力的性质方面牛顿只向我们讲了两件事。在引力情况中,他留给我们一条完整的力的定律。关于原子间的非常复杂的作用力,他并不知道力的正确的规律;然而,他发现了一条有关力的一般性质的规则,并在第三定律中对此作了阐明,这就是牛顿在有关力的性质上所具有的全部知识——引力定律和第三定律,再没有其他细节了。

牛顿第三定律是:作用等于反作用。

它的含义如下:假设我们有两个小物体,比如说两个粒子,第一个粒子对第二个粒子施加一个力,即用一个一定的力推它。那么,按照牛顿第三定律,第二个粒子同时以大小相等、方向相反的力推第一个粒子;而且,这些力实际上沿同一根线起作用。这就是牛顿提出的假设,或者说定律,它看来是相当准确的,尽管并不严格正确(以后我们将讨论它的误差)。暂时我们将认为作用等于反作用是正确的。当然,假如有第三个粒子,它不与前两个粒子在同一条直线上,则这个定律并不意味着作用在第一个粒子上的总的力等于作用在第二个粒子上的总的力,因为,比方说,第三个粒子对这两个粒子中的每一个都要施加推力。结果作用在前两个粒子上的总效应是在某个别的方面上,从而一般说来,作用在前两个粒子上的力大小既不相等,方向也不相反。然而,作用在每个粒子上的力总可以分解为若干部分,每一个与之相互作用的粒子都有一份贡献或一个部分。因而,每一对粒子都有相应的彼此相互作用的分量,它们大小相等、方向相反。

§10-2 动 量 守 恒

现在来看一下,上述联系有什么有趣的结果?为了简单起见,我们假设只有两个互相作用的粒子,质量可能不同,并分别编为 1 号及 2 号。它们之间的力相等而方向相反;这会有什么结果呢?按照牛顿第二定律,力是动量对时间的变化率,于是我们得出粒子 1 的动量 p_1 的变化率等于粒子 2 的动量 p_2 变化率的负值,即

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}. \tag{10.1}$$

现在,如果变化率总是数值相等、方向相反,就可知道粒子 1 动量的总变化与粒子 2 动量的总变化数值相等、方向相反;这意味着,如果我们把粒子 1 的动量与粒子 2 的动量相加,那么由于粒子之间相互作用力(称为内力)引起的两个粒子动量之和的变化率为零,即

$$\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}=0. \tag{10.2}$$

在这个问题中假定没有其他作用力。如果这个和的变化率总是零,这正是量 (p_1+p_2) 不发生变化的另一种说法(这个量也可写成 $m_1v_1+m_2v_2$,并称为这两个粒子的总动量)。现在我们得出两个粒子的总动量不因它们之间的任何相互作用而改变的结论。这个说法表示了在这个特例下的动量守恒定律。我们断言:如果两个粒子间存在着任何类型的力(不管这个力怎样复杂),我们在力作用之前及力作用之后去测量或计算 $(m_1v_1+m_2v_2)$,即两个动量

之和,则结果总是相等的,也就是说,总动量是一个常数。

假如我们把论证引申到更复杂的三个或多个相互作用粒子的情况,那么很明显,当只考虑内力时,所有粒子的总动量保持不变,因为其中一个粒子由另一个粒子引起的动量的增加,恰好严格地被前者引起的后者动量的减少所补偿。也就是说,所有的内力将互相抵消,因此不可能改变粒子的总动量。于是,如果没有来自外界的力(外力),那么就没有什么力可以改变总动量,因此总动量是一个常数。

值得一提的是,如果存在一些并非来自所说的粒子间的相互作用的力:假定我们把相互作用的粒子隔离开来,这时会出现什么情况?如果只有相互作用力,那么同以前一样,无论这些力多么复杂,粒子的总动量不变。反之,假定还有来自隔离开来的那一群以外的粒子的作用力。我们称任何外部物体施加于内部物体的力为外力。以后我们将证明所有外力之和等于所有内部粒子动量总和的变化率。这是一个非常有用的定理。

如果没有净的外力,一群相互作用粒子的总动量守恒可以表示为

$$m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3+\cdots=\text{常数},\tag{10.3}$$

这里将粒子的质量和相应的速度顺序编为1,2,3,4,…等。对每个粒子,牛顿第二定律的一般表述是

$$f=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv),\tag{10.4}$$

特别是对力和动量在任何给定方向上的分量也同样成立;这样作用在一个粒子上的力的 x 分量就等于该粒子动量变化率的 x 分量,即

$$f_x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_x),\tag{10.5}$$

对 y 和 z 方向也如此。所以方程式(10.3)实际上是三个方程,每个方向一个。

除动量守恒定律外,牛顿第二定律还有另一个有趣的结果,现在先提一下,以后再证明。这个原理就是:无论我们保持静止状态,还是沿一条直线作匀速运动,物理定律将都是相同的。例如,一个在飞机上拍皮球的孩子,会发现皮球跳得和他过去在地面上拍时一样高。即使飞机以极高速度飞行,只要它不改变飞行速度,物理定律在孩子看来总是和飞机静止时完全一样。这称为相对性原理。当我们在这里使用这个原理时,将称它为“伽利略相对性”,以与爱因斯坦所作的更仔细的分析相区别,后者我们将在以后研究。

我们刚从牛顿定律推导出了动量守恒定律,由此出发,我们可以接下去找出一些描写碰撞的定律。但是为多样化起见,同时也为了阐明一种在物理学上可用于其他情况(比方说,人们也许并不知道牛顿定律,也许另辟途径)的推理方式,我们将从一个完全不同的观点讨论碰撞定律。我们的讨论将从上述伽利略相对性原理出发,而以得出动量守恒定律告终。

我们将从下列假定出发:我们以一定速度运动并观察自然界时,自然界在我们看来和我们静止不动时完全相同。在讨论那种两个物体碰撞后粘在一起,或者来到一起再弹开的情况之前,我们将首先考虑用弹簧或其他东西联结在一起的两个物体,突然放开它们,使它们受到弹簧或者某种轻微爆炸所造成的推力的情形。而且,我们将只考虑一个方向上的运动。我们先假定,两个物体完全相同、十分对称,接着两者之间发生了轻微爆炸。爆炸后,其中一个物体将以速度 v 向右运动,另一个物体将以速度 v 向左运动。由于这两个物体是全同的,

因而没有什么理由认为它们对左或右会有所偏爱，故两个物体的行为应该是对称的。因此，认定另一物体以速度 v 向左运动看来是合理的。这里阐明了一种在许多问题中都十分有用的思维方式，如果我们只从公式入手，那就显不出来了。

我们这个实验的第一个结论是相同的物体将有相等的速率，现在假设两个物体由不同材料比如说铜和铝制成，并令它们的质量相等。我们将假定，如果用两个质量相等的物体做实验，即使它们不是全同的，它们的速度也将是相等的。有人可能反驳说："但是你知道，你可以反过来，不必去作假设。你可以定义在这个实验中获得相等速度的两个物体的质量为相等的质量。"我们按照这个建议，并在铜块与体积很大的铝块之间作一次轻微爆炸，铝块是如此之重，以至于铜块飞出去后，铝块几乎不动。由于铝太多，因而我们把铝块减少到只剩下很薄一片，于是当我们再作一次爆炸时，铝块飞走了，而铜块却几乎不动。这说明铝又太少了。很明显，在两种铝的数量之间有某个正确的数值；于是我们继续调整铝的数量直至速度相等为止。好，现在我们反过来，并认为当速度相等时，质量也相等。这似乎只是一个定义，看来很奇怪，我们居然可以把一些物理定律变成仅仅是一些定义。然而，这里已经包含了某些物理定律，假如我们采纳这个质量相等的定义，我们立即就可得到如下的一条定律。

假设我们从上面的实验知道，两块材料 A 与 B(铜和铝)具有相等的质量。我们用上述的同样方式将铜块和第三块材料，比如金块，进行比较，并确认它的质量等于铜块的质量。如果我们现在用铝和金做实验，在逻辑上并不能说明这些质量必须相等；然而实验表明它们实际上是相等的。所以通过实验，我们发现了一条新的定律。这条定律的一种说法可能是这样的：如果两个物质的质量分别等于第三个物质的质量(由在这个实验中速度相等来确定)，那么它们彼此相等(这个表述完全不能从用于有关数学量的假设的相似的陈述中推得)。从这个例子我们可以看到，假如我们不小心的话，我们会多么轻易地推出结论！说速度相等时质量相等，这绝不仅仅是一个定义，因为说质量相等就含有数学上有关相等的定律的意思，而这个相等的定律又可反过来对有关实验作出预言。

作为第二个例子，假设实验时用某一强度的爆炸使 A、B 两个物体获得一定的速度，从而发现它们相等；那么如果我们再使用更强烈的爆炸，这时所获得的速度是不是还相等呢？同样在逻辑上根本不能确定这个问题，但实验证明确实如此。这样，我们又有了一条定律，它可以表述为：如果在某一速度时按照速度相等方法来测定两个物体具有相等质量，则在另一个速度下测量，它们也将有相同的质量。从这些例子中我们看出，表面上看来只是一个定义的东西实际上包含了某些物理定律。

在下面的论证中，我们将假设：当在两个物体间发生爆炸时，相等的质量将具有数值相等、方向相反的速度这个命题成立。在相反的情况下，我们将作另一个假设：如果两个以相等的速度在相反的方向上运动的全同物体碰撞后被某种粘胶粘在一起，那么碰撞后它们将以什么方式运动呢？这又是一个对左和右没有特别偏重的对称的情况，所以我们假定它们将保持静止。我们还要假定，任何两个质量相同的物体，即使由不同材料制成，当它们以相等的速度沿相反的方向运动而发生碰撞并粘在一起时，它们碰撞后将保持静止。

§ 10-3 动量是守恒的

我们可以用实验来验证上述假设：即，第一，如果两个相等质量的静止物体发生爆炸后

分开时，它们将以同样的速率分开运动；第二，两个相等质量的物体以同样的速率相向运动，碰撞并粘合后，它们将停止运动。我们可以利用一个称为气垫*的惊人的发明来做实验，它能摆脱不断使伽利略深感麻烦的摩擦力(图 10-1)。伽利略不能用光滑的东西来做实验，因为那些物体不能自由地滑动，但是在今天，加上一个神奇的凹槽**后，我们就能摆脱掉摩擦力。我们的物体正如伽利略所宣称的那样，可以毫无困难地以不变的速度滑动。这是通过以空气来托起物体而实现的。因为空气只有极其微小的摩擦力，当不加力时，物体实际上就以不变的速度滑行。首先，我们使用两个经过精心制作具有同样的重量或质量的滑块(实际上是测出了它们的重量，但是我们知道重量是正比于质量的)，在两个滑块间的一个封闭气缸中放进一个小的雷管(图 10-2)。开始时，将两个滑块静止置放在槽的中心，然后利用电火花引爆雷管，迫使它们分开。这时会出现什么呢？如果在它们飞开时速率相等，就应当同时到达气垫的两端。到达两端后，它们实际上又将以相反的速度弹回，然后又跑到一起，并停在开始运动时的起点——中心处。这是一个很好的试验；经过实践以后，结果正如上所述(图 10-3)。

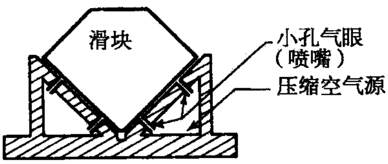


图 10-1 直线气垫端视图

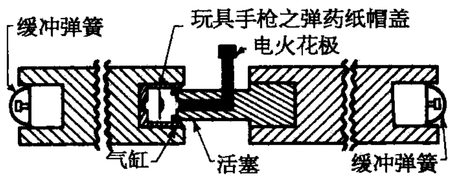


图 10-2 带有爆破作用气缸附件的滑块截面图

接下来，我们要解决的是在稍微复杂一些的情况下会发生什么。假设我们有两个质量相等的物体，一个以速度 v 运动，另一个静止不动，它们碰撞后结合在一起；那时又将发生什么情况？结果是一个质量为 $2m$ 的物体以一个未知速度移动。速度多大呢？问题就在于此。为了找到答案，假定当我们驱车前进时，物理规律在我们看来和静止时完全一样。我们从两个质量相等以相同的速率 v 沿相反的方向运动的物体发生碰撞后，将静止不动出发。现在假设在发生这种情况时，我们乘在一辆以速度 $-v$ 开行的汽车上。那么它看上去像什么呢？由于我们随着两个相向运动的物体中的一个一起前进，因而这一个物体在我们看来速度为 0。而另一个以速度 v 向相反方向运动的物体，在我们看来就以速度 $2v$ 向我们走来(图 10-4)。

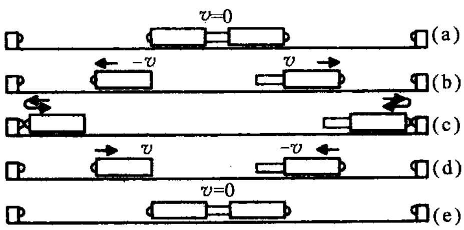


图 10-3 两个质量相等的物体的作用-反作用实验的示意图

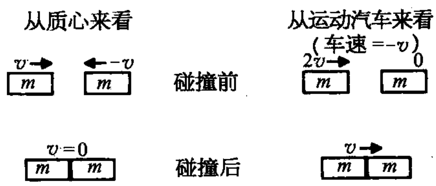


图 10-4 质量相等的物体进行的非弹性碰撞的两种看法

* Neher H V, Leighton R B. *Amer J of Phys*, 1963, **31**:255

** 原文为 touch(接触)，疑为 trough(槽)之误(air trough 即气垫)。——译者注

最后，在碰撞后结合起来的物体看来以速度 v 经过。因此我们得出结论，一个速度为 $2v$ 的物体碰到另一个静止的质量相等的物体时，结果将以速度 v 运动，或者用数学上完全等价的方式来说是：一个速度为 v 的物体撞在另一个静止物体上并结合在一起时，将产生一个以速度 $v/2$ 运动的物体。注意，如果我们将事前的质量与速度分别相乘再相加得到 $mv+0$，与我们将事后的每一个物体的质量与速度相乘，即 $2m$ 乘以 $v/2$ 所得的答案相同。这就告诉我们一个速度为 v 的物体撞在一个静止的物体上时会出现什么情况。

我们可以用完全同样的方式推导出当两个质量相等的物体以任意两种速度相碰撞时会出现什么情况。

假设我们有两个质量相等的物体，分别具有速度 v_1 及 v_2，它们碰撞并结合在一起。试问碰撞后，它们的速度 v 是多少？我们再乘上一辆速度为 v_2 的汽车来看，则一个物体就像是静止的，而另一个物体就像具有 (v_1-v_2) 的速度，于是我们就得到了同以前一样的情况。当所有这一切都完成后，它们相对于汽车将以 $(v_1-v_2)/2$ 的速度运动。那么它们相对于地面的实际速度是多少呢？答案是 $v=(v_1-v_2)/2+v_2=(v_1+v_2)/2$(图 10-5)。我们再次注意到

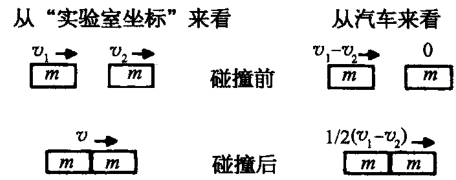


图 10-5 质量相等的物体进行的另一种非弹性碰撞的两种看法

$$mv_1+mv_2=2m\cdot\frac{(v_1+v_2)}{2}. \tag{10.6}$$

于是利用这个原理，对于任何质量相等的物体碰撞后结合在一起的情况，我们都能加以分析。事实上，我们虽然只是计算了一维的情况，但是假如我们坐在一辆沿某个倾斜方向运动的汽车上，我们就可以对更为复杂的碰撞找出更多的东西。这里原理是相同的，只是细节上更加复杂而已。

为了从实验上检验一个以速度 v 运动的物体与另一个速度为 0 的质量相等的物体碰撞在一起后，是否会组成一个以速度 $v/2$ 运动的物体，我们可以用气垫装置进行如下的实验。在气垫中放入三个质量相等的物体，其中两个物体开始时由爆破汽缸装置连接在一起，第三个物体非常靠近，但和它们稍微隔开一点点，它还带有一个粘性缓冲器以至于在另一个物体碰上它时，就会和它粘在一起。现在，在爆炸后一刹那，我们有两个质量为 m，分别以相等而相反的速度 v 运动的物体。过一会儿其中一个物体将碰撞在第三个物体上，构成一个质量为 $2m$ 的物体，我们相信，它将以速度 $v/2$ 运动。我们怎样测出它确实是 $v/2$ 呢？把物体在气垫上的初始位置作这样安排，使得两端的距离不同，而是按 2∶1 的比例。这样继续以速度 v 运动的第一个物体，在一给定时间内所通过的距离将是那两个连在一起的物体通过的距离的 2 倍(假定第二个物体在与第三个物体碰撞前只通过一段很小的距离)。质量为 m 的物体与质量为 $2m$ 的物体应当同时到达终点，我们去试一下时，就会发现确实如此(图 10-6)。

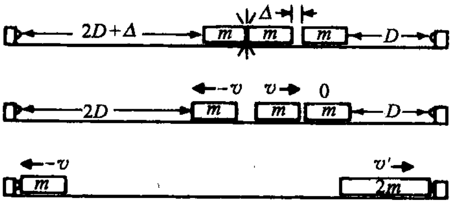


图 10-6 验证以速度 v 运动的质量为 m 的物体与一个质量相同的静止物体碰撞后结合在一起以质量 $2m$、速度 $v/2$ 运动的实验

我们要解决的下一个问题是，如果有两个不同

质量的物体,情况又会怎样。让我们取一个质量为 m 的物体和一个质量为 $2m$ 的物体,并利用我们的爆炸作用。这时将会发生什么呢?如果爆炸后 m 以速度 v 运动,那么 $2m$ 又以什么速度运动呢?令第二个和第三个质量之间的距离为零,重复我们刚才作过的实验,当我们试一下后,会得出同样的结果,也就是说,起作用的质量 m 和 $2m$ 各达到速度 $-v$ 及 $v/2$。这样,m 与 $2m$ 之间的直接的反作用与先是在 m 和 m 之间对称地反作用,随后 m 又与第三个 m 发生碰撞并结合在一起所得出的结果完全相同。而且,我们还发现,从气垫两端弹回的质量为 m 和 $2m$ 的物体的速度与原来(几乎)完全相反,如果它们粘在一起,就会停止不动。

现在我们要问的另一个问题是:如果具有速度为 v,质量为 m 的物体与另一个静止的质量为 $2m$ 的物体碰撞并结合在一起,会发生什么情况呢?这个问题利用伽利略相对性原理很容易回答,因为我们只要坐在一辆以速度 $-v/2$ 运动的汽车里观察刚才描写的碰撞就行了(图 10-7)。从汽车上看,速度是

$$v_1' = v - v(\text{汽车}) = v + \frac{v}{2} = \frac{3}{2}v \text{ 及 } v_2' = -\frac{v}{2} - v(\text{汽车}) = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} = 0.$$

在碰撞后,质量 $3m$ 在我们看来以速度 $v/2$ 运动。于是我们就得到了碰撞前后的速度比是 3∶1 的答案:如果一个质量为 m 的物体与一个质量为 $2m$ 的静止的物体相碰撞,并结合在一起,则整个物体就以原先 m 的速度的 $1/3$ 运动。一般的规则又是:各个物体的质量与速度乘积之和保持不变,即 $mv + 0 = 3m \times v/3$, 这样,我们就一步一步逐渐建立起动量守恒定理。

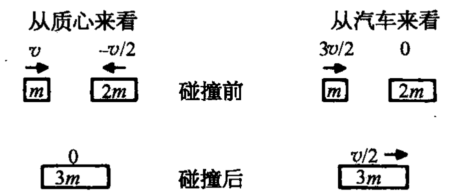


图 10-7 m 和 $2m$ 之间的非弹性碰撞的两种看法

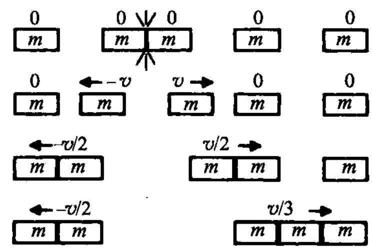


图 10-8 $2m$ 与 $3m$ 之间的作用与反作用

现在的情况是 1 对 2。利用同样的论证,我们可以预言 1 对 3, 2 对 3 等等的结果,从静止开始的 2 对 3 的情况如图 10-8 所示。

在每一种情况中,我们发现,第一个物体的质量乘它的速度,加上第二个物体的质量乘它的速度,等于最后物体的总质量乘它的速度。因此,这都是一些动量守恒的例证。从简单的、对称的情况出发,我们用实验说明了在较复杂情况下的守恒定律。事实上,对于任何质量比是有理数的情况,我们都能这样做,并且由于任何一个比值都可以充分接近于一个有理数的比值,因此,我们能够以任何精确度处理任何比值的情形。

§10-4 动量和能量

上述的所有例子都是物体发生碰撞结合在一起,或者是先结合在一起,以后又由于爆炸而被分开的简单的情况。然而也有一些物体不粘合在一起的情况;例如,两个质量相等的物

体以相同速率发生碰撞后弹开。在很短的时间内，它们发生接触，彼此都受到压缩。在压缩最大的那一瞬间，它们的速度都是0，而能量则贮存在弹性物体内，就像压缩弹簧的情形一样。这个能量是由物体碰撞之前所具有的动能转化而来的，而在速度为0的那一瞬间，它们的动能就变为0。然而，动能只是暂时失去。压缩状况类似于爆炸时释放能量的雷管。在某种爆炸的状况下，这些物体立即膨胀并又相互飞开；但是我们已经知道在这种情况下，物体是以相同速率飞开的。然而，一般说来，弹开的速率要比原来的速率小，因为并非所有的能量都为爆炸所用，这与材料性质有关。如果材料是油灰，动能就不会恢复；如果材料是比较硬的，通常会再获得一定的动能。在碰撞中，其余的动能转化为热和振动能——物体变热并作振动。振动能量也很快转变为热能。用钢这样的高弹性材料制成一些碰撞物体，再用精心设计的弹簧缓冲器，有可能使得在碰撞中产生的热和振动很小。在这些情形中，弹回来的速度实际上等于初始速度；这种碰撞称为弹性碰撞。

弹性碰撞的前、后速度相等这件事与动量守恒无关，而与动能的守恒有关。然而，在对称的碰撞后，物体弹开的速率彼此相等却与动量守恒有关。

我们可以类似地分析不同质量、不同初始速度和不同弹性程度的物体之间的碰撞，确定最终速度和动能的损失，但是我们将不去详细探讨这些过程。

对于没有内部的"齿轮、转轴或部件"的系统来说，弹性碰撞是特别有趣的。这样在发生碰撞时，没有地方可以消耗能量，因为那些弹开的物体与它们在碰撞时的状态相同。因此，在非常基本的物体之间的碰撞总是高弹性的，或者非常接近于弹性的。例如，气体中分子或原子间的碰撞就被认为是完全弹性的。虽然这是一个非常好的近似，但即使这样的碰撞也不是完全弹性的；不然人们就会无法理解能量怎么会以光或热辐射的形式从气体中释放出来。在气体分子的碰撞中，偶尔会有低能红外线发射出来，但这种情况是非常罕见的，所发射的能量也是非常微小的。所以，对于大多数场合，气体中的分子碰撞被认为是完全弹性的。

作为一个有趣的例子，让我们考虑两个质量相等的物体之间的弹性碰撞。如果它们以同样速率相碰撞，那么，根据对称性原理，它们应当以相同的速率弹开。但是现在我们来看一下另一种情况下的这种碰撞，即其中的一个物体以速度 v 运动，而另一个物体保持静止。当两者碰撞时会出现什么情况？其实我们在前面已碰到过这种情况。从跟着物体中的一个一起运动的汽车中来观察对称的碰撞，我们发现，如果静止的物体与另一个质量恰好相同的物体发生弹性碰撞，则运动着的物体停了下来，而曾经是静止的物体现在以另一个物体曾经具有的同样的速度运动；两个物体只不过变换一下速度而已。用适当的碰撞装置很容易演示这个现象，更一般地说，假如两个物体以不同的速度运动，那么在碰撞时它们仅仅简单地交换一下速度。

另一个几乎是完全弹性的相互作用的例子为磁性。假如在我们的滑块上放置一对U形磁铁，使它们彼此推斥，那么当一块磁铁静静地移向另一块磁铁时，这块磁铁会把另一块推走，而自己则完全保持静止，被推走的一块磁铁则无摩擦地向前滑动。

动量守恒原理是非常有用的，因为它使我们在无需了解细节的情况下也能解决许多问题，例如，我们并不知道在雷管引爆时气体的运动情况，然而却能预知物体分离的速度。另一个有趣的例子是火箭的推进。一枚具有很大质量 M 的火箭用极大的速度 V(相对于火箭来说)排出质量为 m 的小块后，如果火箭原来静止的话，它将以很小的速度 v 运动。利用动量守恒原理，我们可以计算出这个速度为

$$v = \frac{m}{M} \cdot V.$$

只要不断地排出物质,火箭就一直加速。火箭的推进本质上与枪的反冲是一回事:不需要任何作反推的空气。

§10-5 相对论性动量

近代已对动量守恒定律作了一些修正。然而,今天这条定律仍是正确的,修正主要是在事物的定义上。在相对论中,我们的确也有动量守恒定律;粒子具有质量,而动量仍由 mv,即质量乘以速度给出,但是质量随速度而改变,因此动量也发生改变。质量随速度的变化遵从以下规律

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{10.7}$$

这里 m_0 是物体的静止质量,c 是光速。从这个公式很容易看出,除非 v 非常大,否则 m 与 m_0 的差别就可忽略,而对通常的速度,动量的表示式就还原为原来的公式。

单个粒子的动量分量可以写为

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ p_y &= \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ p_z &= \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{10.8}$$

这里 $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$。如果对所有相互作用粒子在碰撞前后的 x 动量分量分别求和,则两个和相等,也就是说,在 x 方向上的动量守恒。同样的情况对任何方向都成立。

在第4章中,我们看到,只有承认能量可表现为电能、机械能、辐射能、热能等等不同形式,能量守恒定律才确实成立。在某些这类情况中,例如热能,能量可以说成是"隐藏"的。这个例子可能使我们联想到这样一个问题:"是不是也存在着动量的隐藏形式——或许是某种热动量呢?"答案是由于下述理由隐藏动量是很困难的。

如果把各个原子的速度的平方相加,一个物体内原子的无规则运动就提供了热能的一种量度。速度平方和将是正的,不具有方向上的特征。物体内热的存在与物体是否作整体运动无关,并且以热这种形式的能量守恒不是很明显的。相反,如果我们把速度相加,由于速度是有方向的,若发现其结果不为零,这就意味着整个物体在某个特定方向上有移动,而这样显著的动量是很容易观察到的。因为只有物体作整体运动时,它才有净动量,所以就不存在内部无规则动量损耗。因此动量作为一个力学量是难以隐藏起来的。然而,例如在电磁场内动量也可以被隐藏起来。这种情况是另一种相对论效应。

牛顿的前提之一是认为在一段距离内的相互作用是瞬时的。结果发现情况并非如此;比如,在包含着电力的情况下,如果在某一个位置上的一个电荷突然移动,其对在另一个位

置上的另一个电荷的影响并不是瞬时的——稍有一点延迟。在那种状况下，即使彼此作用的力是相等的，动量仍与之不符；这样，在一段短时间内将出现麻烦，因为有一段时间，第一个电荷将感受一定的反作用力，即获得了某些动量，但第二个电荷却丝毫也不受影响，也不改变它的动量。这段时间就是电作用跨过它们之间的距离所需要的时间，即以 186 000 $\mathrm{mi \cdot s^{-1}}$ 的速度跨过这段距离的时间。在这段很短的时间内，粒子的动量是不守恒的。当然，在第二个电荷感受到第一个电荷的作用并且一切都稳定下来之后，动量的方程就完全成立，但在那段小小的时间间隔中动量是不守恒的。为了表明这一点，我们说在这段时间内除粒子的动量 mv 外还有另一类动量存在，这就是电磁场的动量。如果我们将电磁场的动量加在粒子的动量上，则在所有时间内动量每一时刻都守恒。电磁场具有动量和能量这个事实使场的存在更为真实。因此，更好的理解是，原来那种认为只有粒子之间存在力的概念必须修正为：粒子具有场，场作用在另一个粒子上，而场本身具有我们所熟悉的性质，比如正像粒子那样带有能量和动量。再举另外一个例子：电磁场中存在着我们称之为光的电磁波，结果光也具有动量。所以，光撞击一个物体时，它在每秒钟内传递了一定大小的动量；这相当于一个力，因为，如果被照射物体每秒钟获得一定的动量，它的动量就会发生变化，这种情况与有一个力作用在它上面完全相同。光撞击在物体上时会施加一个压力；这个压力很小，但用足够灵敏的仪器可以测量出来。

在量子力学中，动量是另一回事——它不再是 mv 了。物体的速度的含义已难以确切定义，但是动量仍然存在。在量子力学中，差别在于当粒子表现为粒子时，动量仍是 mv，但是当粒子表现为波时，动量就用每厘米的波数来量度：波数越大，动量就越大。尽管存在这些差别，动量守恒定律在量子力学中仍然成立。虽然 $f = ma$ 不成立，所有从牛顿定律出发的有关动量守恒的推导也都不成立，然而，在量子力学中，这条特殊定律却最后仍然保持有效！

第11章 矢 量

§11-1 物理学中的对称性

我们在本章中介绍的课题,在物理术语上称为物理定律的对称性。这里所用的“对称性”一词具有特殊涵义,因此需要加以定义。事物在什么时候是对称的——我们究竟怎样定义它呢?当我们拿到一幅对称的图画时,它的一边和另一边总是相同的。外尔(H. Weyl)教授曾给对称性下了这样一个定义:如果能对一个事物施加某种操作,在此操作以后能使它与原来的情况完全相同,则这个事物是对称的。例如,如果我们观察一个左右对称的瓶子,那么当把它绕竖直轴转过180°后,看上去它就和原来的完全一样。关于对称性的定义,我们将采用外尔的这种较为直观的形式,并以此来讨论物理定律的对称性。

假定我们在某个地方建造了一台复杂的机器,它具有很多复杂的相互作用,并且有很多小球由于它们之间力的作用而跳来跳去,等等。现在,假如我们在另一个地方建造一个完全相同的装置,它的各个部分都与前者相同,都具有同样大小和方位,那么除了横移一段距离外,两台机器一切都相同。如果我们在相同的初始情况下,完全一致地开动这两台机器,我们要问:这两台机器的行为是否完全一样?它们所有的动作是否完全对应?当然,答案很可能是否定的,因为假如我们选错了地方,把一台机器安装在某个墙壁里面,则由于受墙的影响,这台机器运转不起来。

在使用物理学中的所有概念时,都需要具备一定的常识,它们不纯粹是数学的或抽象的概念。我们应该了解,当我们说:把一个装置移动到一个新的位置时现象完全相同这句话是什么意思。我们的意思是说,我们把一切我们认为有关的东西都移过去了,如果现象不相同,我们就认为还有某些有关的东西没有移过去,于是就要把它找出来。如果一直找不到,我们就宣称这些物理定律没有这种对称性。另一方面,如果这些物理定律具有这种对称性,我们就能找出我们预计应该能找到的那些东西。例如在上一个例子中,环顾一下周围,就会发现原来墙壁正在影响着我们的装置。根本问题在于,如果我们能足够明确地定义事物,如果能把所有必不可少的力都包括在装置里面,并且把所有有关的部分从一个地方移到另一个地方,那么这些规律是否就相同呢?这台机器装置是否就以相同的方式运转呢?

很清楚,我们要做的是移动整个装置和所有的主要影响,而不是世界上的一切东西——行星、恒星等,因为如果我们这样做,我们就又会得到相同的现象,道理很简单:因为我们正好又回到了开始时的状况。不,我们不可能移动一切东西。但是实践表明,只要我们对需要移动的东西有一定的理解力,机械是能够运转的。换句话说,假如我们不把机器放到墙里,以及我们知道所有外力的来源,并设法把它们移走,那么机械在一个地方就会像在另一个地方一样工作。

§ 11-2 平 移

我们将只限于分析力学问题，因为对力学我们已经掌握了足够的知识。在前几章中，我们已经看到对于每一个粒子，力学定律都能归纳成三个方程

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=F_x,\quad m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)=F_y,$$
$$m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)=F_z. \tag{11.1}$$

这意味着我们有办法测量三个互相垂直的轴 x、y 和 z 以及沿这些方向的力，以使得这些定律成立。这些量必须从某个原点量起，但是原点放在什么地方呢？牛顿最初告诉我们，存在着某个我们赖以从它量起的地方，它可能就是宇宙中心，可使这些定律成立。但是，我们可以立即证明永远找不到这个中心，因为如果采用其他原点，得出的结果不会有任何差别。换句话说，假设有两个人——乔(Joe)，他以某处为原点，和莫(Moe)，他有一个与乔平行的坐标系，但原点在另外一个地方(图 11.1)。现在当乔测量空间中某点的位置时，他发现这一点在 x、y 和 z 处(通常我们不画出 z 轴，因为在一个图上画那么多轴显得太乱)。另一方面，当莫测量同一点时，他得出一个不同的 x 值(为了区别起见，我们令它为 x')，而且在原则上 y 值也不同，虽然在这个例子中，两个 y 在数值上相等。因此，有

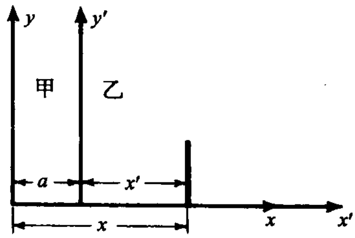


图 11-1 两个平行坐标系

$$x'=x-a,\ y'=y,\ z'=z. \tag{11.2}$$

现在，为了完成我们的分析，还必须知道莫会得到怎样的力。假设力沿着某一条线作用，在 x 方向上的力就是总的力在 x 方向上的分量，即力的大小乘以它和 x 轴之间夹角的余弦。这里，我们看到莫和乔采用完全相同的投影，因此得出方程组

$$F_{x'}=F_x,\ F_{y'}=F_y,\ F_{z'}=F_z. \tag{11.3}$$

这些就是乔和莫看到的各个量之间的关系。

问题在于，如果乔知道牛顿定律，而莫也试图写出牛顿定律，那么牛顿定律对莫是否还正确？从不同原点来测量这些点是否会有什么差别？换句话说，假如方程组(11.1)正确，并且方程组(11.2)和(11.3)给出了各个量之间的关系，下面的方程式

$$m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)=F_{x'}, \tag{11.4a}$$

$$m\left(\frac{d^2y'}{dt^2}\right)=F_{y'}, \tag{11.4b}$$

$$m\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=F_{z'} \tag{11.4c}$$

是否也正确呢?

为了检验这些方程式,我们将对 x' 的式子微分两次。首先

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x-a)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}.$$

这里,我们假定莫的原点相对于乔是固定(不动)的,因此,a 是一个常数, $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t=0$, 这样就得到

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

因而

$$\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2};$$

因此方程式(11.4a)就变成

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)=F_{x'}.$$

(我们还假定乔和莫测得的质量是相等的)。因此,加速度和质量的乘积与另一个人的一样,我们已经得出了 $F_{x'}$ 的公式,把式(11.1)代入 $F_{x'}$ 的式子,就得到

$$F_{x'}=F_x.$$

因此,莫看到的规律是一样的,他用不同的坐标也能写出牛顿定律,而且将仍然正确。这就意味着没有唯一的方法定义世界的原点,因为不管从哪个位置进行观察,这些定律都是一样的。

下面的这个论断也是正确的:如果在某处有一个内部具有某种机械的装置,则在另一处的同一装置将以同样的方式运转。为什么?因为莫研究的机械和乔研究的另一个机械满足完全相同的方程式。既然,方程是相同的,那么出现的现象也相同。因此,证明一个装置在一个新的位置上的行为与在老的位置上的行为完全一样,与证明当它们在空间发生位移时,方程式的形式不变,这两者是一回事。因此,我们说,物理定律对于平移是对称的,这里对称的意义是指当我们把坐标作一平移时,物理定律不变。当然,从直观上看,它的正确性是显而易见的,但是讨论它的数学关系却是很有趣而又引人入胜的。

§11-3 转　动

上面是关于物理定律对称性的一系列较为复杂的命题中的第一个。下一个命题是无论把轴选择在哪一个方向应该没有影响。换句话说,假如我们在某处建造了一个装置,并观察它的运转,同时在附近我们再造一个同样的装置,但使它转过一个角度,它是否将以同样的方式运转呢?显然不是,有摆的老式的大座钟就是一个例子。例如一个摆钟竖直地放着,它走得很好,但是如果把它斜放,摆碰到钟罩的一个面上,因而它就不走了。因此,就摆钟来说,除非把吸引摆的地球也包括进去,否则,上述定理就不成立。因此,如果我们相信对转动而言物理定律是对称的,那么对于摆钟我们就能作如下预言:除了钟的机械结构之外,在摆的运转中还包含有其他因素,因此必须找出钟之外的因素。我们也可以预言,如果把摆钟放在相对于产生这种不对称的神秘起源(或许是地球)来说不同的位置上,摆钟的走动情况将

不同。事实上，例如，我们知道在人造卫星上的摆钟根本不走，因为那里没有有效作用力，而在火星上摆钟将以不同的速率走动。摆钟除了内部的机械结构外，的确包含有其他东西，也就是含有某些外来的因素。当我们认识到这个因素时，我们知道应该使地球随这个装置一起转动。当然，我们无须为此担心，这是很容易做到的；只要等一会儿，地球就转过一些，于是摆钟在新的位置上就像以前一样走动着。当我们在空间转动时，我们的角度不断在变化，而且是绝对地在变化，这种变化似乎没有给我们带来很大麻烦，因为我们在新的位置上的情形就像在原来的位置上的一样。这里可能会使人迷惑不解，因为在新转过的位置上物理定律与在未转动的位置上完全一样，这是正确的。但是，如果认为一个正在转动的物体和一个不在转动的物体遵循同样的规律，这就不对了。假如我们进行足够精密的实验，就能断定地球正在转动，但不能说出地球已经转过多少。换句话说，我们不能确定地球所处的角度的位置，但能断定它正在发生变化。

现在我们来讨论角方位对于物理定律的影响。让我们来看一看乔和莫的游戏是否还能重演。这一次，为了避免不必要的麻烦，我们假定乔和莫采用同一个坐标原点(我们已经证明过，坐标轴能够平移到另一个地方)。假定莫的轴相对于乔的轴转过一个角度 θ。这两个坐标系如图 11-2 所示。该图只限于两维的情况。考虑任意一点 P，在乔系统中其坐标为 $(x,\ y)$，在莫系统中为$(x',\ y')$。和前面一样，我们将从用 x、y 和 θ 来表示坐标 x' 和 y' 开始。为此，首先从 P 点向四个轴各画一条垂线，并画出 AB 垂直于 PQ。从图上可以看出 x' 可以写成沿 x' 轴的两段长度之和，y' 可写成沿着 AB 的两段长度之差。所有这些长度都能用(11.5)式中的 x、y 和 θ 来表示，其中我们还增加了一个第三维的方程式

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{11.5}$$

下一步是按照上述的一般方法来分析两个观察者所看到的那些力之间的关系。假设有一个力 F，已经被分解成分量 F_x 和 F_y(从乔看来)作用在图 11-2 中 P 点处的一个质量为 m 的质点上。为了简化起见，我们把两组坐标轴的原点都移到 P 点，如图 11-3 所示。莫沿着他的坐标轴看到的 F 的分量是 $F_{x'}$ 和 $F_{y'}$。F_x 在沿 x' 和 y' 轴的方向上都有分量，同样 F_y 在这两个轴的方向上也有分量。为了用 F_x 和 F_y 来表示 $F_{x'}$，我们把它们沿 x' 轴的分量加起来，以同样的办法用 F_x 和 F_y 来表示 $F_{y'}$。结果是

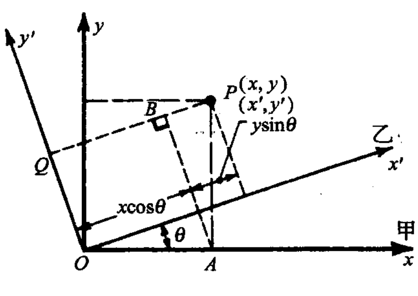


图 11-2 角方位不同的两个坐标系

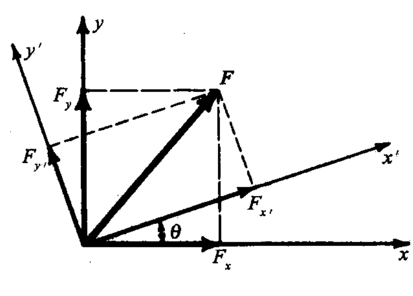


图 11-3 在两个坐标系中力的分量

$$F_{x'} = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta,$$
$$F_{y'} = F_y\cos\theta - F_x\sin\theta, \tag{11.6}$$
$$F_{z'} = F_z.$$

有趣的是这里看到了一种出人意外的,然而是非常重要的情况:分别表示 P 点坐标的式(11.5)和力 F 的分量的式(11.6)具有相同的形式。

和前面一样,假定牛顿定律在乔的坐标中成立,而且可用式(11.1)来表示。问题仍然是莫是否能应用牛顿定律——对于他的坐标轴转过的系统这些结果是否仍然正确?换句话说,如果我们假设式(11.5)和(11.6)给出了各个测量值之间的关系,那么下式

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}\right) = F_{x'},$$
$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\right) = F_{y'}, \tag{11.7}$$
$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}\right) = F_{z'}$$

是否也正确呢?为了检验这些方程,我们分别计算式子的左端和右端,然后比较其结果。为了计算左端,用 m 乘以式(11.5),并求出它对时间的两次微商,这里假定角度 θ 为常数。这就给出

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}\right) = m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\cos\theta + m\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\sin\theta,$$
$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}\right) = m\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\cos\theta - m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\sin\theta, \tag{11.8}$$
$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}\right) = m\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

然后再计算式(11.7)的右边。把式(11.1)代入式(11.6),这就得出

$$F_{x'} = m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\cos\theta + m\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\sin\theta,$$
$$F_{y'} = m\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\cos\theta - m\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)\sin\theta, \tag{11.9}$$
$$F_{z'} = m\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

看哪!式(11.8)和(11.9)右端是一样的;因此,我们断定,如果牛顿定律对一组坐标轴是正确的,它们对其他任何一组坐标轴也是正确的。从刚才对坐标轴的平移和转动证实的结果得出一些推论:第一,没有一个人能宣称他的特定坐标轴是唯一的,虽然对于某些特定的问题,这些坐标轴可以带来方便。例如,把重力的方向作为某一个轴的方向是比较方便的,但是这在物理上并不是必须的。第二,它意味着如果整套设备完全装在一起,即所有产生力的装置都包含在这套设备的内部,当把它转过一个角度时,它的运转情况不变。

§11-4 矢 量

不仅牛顿定律，而且我们迄今为止所知道的其他物理定律，都具有这两种特性，我们称之为在轴作平移和转动情况下的不变性(或对称性)。这些特性极为重要，因而发展了一种数学技巧，用来写出和应用物理定律。

前面的分析包含有相当乏味的数学工作。为了在分析这些问题时把那些繁琐的东西减小到最低限度，设计了一种非常有用的数学工具，称为矢量分析，也就是本章的标题。但是，严格地说，本章讲的是物理规律的对称性。为了得出我们希望得到的结果，采用前面分析的方法，我们已经能够做需要做的一切事情，但实际上，我们总喜欢做起事来更方便和更快一些，因此采用了矢量技术。

我们先注意一下在物理学上很重要的两类量的某些特性(实际上不仅仅是两类，我们就从这两类研究起)。其中之一我们称为普通量，例如一个袋子里土豆的数目，是一个无方向的量，或称为标量，温度就是这种量的另一个例子。在物理学中占有重要地位的另外一些量是有方向的，如速度：我们不仅要知道它的速率，还要记录它向哪个方向运动。动量和力也有方向，位移也一样：当某人从一个地方走到另一个地方时，我们可以记录他走了多远，但假如我们还想知道他到哪里去，就还需要说明方向。

所有有方向的量都称矢量。

一个矢量由三个数组成。要表示在空间中所走的一步，比如说，从原点走到坐标为(x, y, z)的特定点P，我们确实需要三个数，但是，我们另外创造一个数学符号$\boldsymbol{r}$，它与我们至今采用的数学符号都不同*。它不是一个单一的数，而是代表三个数：x、y和z。一个矢量意味着三个数，但实际上又并不仅仅是那三个数，因为如果我们采用不同的坐标系，这三个数就要变成x'、y'和z'。但是，为了保持数学的简单性，我们想用同一个符号来表示三个数(x, y, z)和另外三个数(x', y', z')。也就是说，我们采用同一符号来表示相对于一个坐标系的第一组三个数，但如果我们用另一坐标系时，它就表示另一组三个数。这样做大有好处，因为当我们改变坐标系时，我们无须改变方程的字母。假如我们用x, y, z写出一个方程式，当采用另一坐标系时，就要换成x', y', z'。但是，按照习惯假如采用一组坐标轴时，$\boldsymbol{r}$表示(x, y, z)，当采用另一组坐标轴时，它表示(x', y', z')，等等，我们将只写$\boldsymbol{r}$就行了。在一个给定坐标系中，描述一个矢量的三个数称为矢量在该系统三个坐标轴方向上的分量。也就是说，我们用同一个符号来表示相应于从不同的坐标轴看到的同一客体的三个字母。正因为包含着在空间中走一步这件事与我们测量它时所用的分量无关这种物理直觉，我们才能说"同一个客体"这一事实。因此，不管我们怎样转动坐标轴，符号$\boldsymbol{r}$都表示同一事物。

现在假定还有另一个有方向的物理量，它是有三个数与之相联系的一个任意量，例如力，在我们改变坐标轴时，这三个数通过一定的数学法则变成了另外三个数。它应该与把(x, y, z)变成(x', y', z')的法则一样。换句话说，任何与三个数相联系的物理量，当它的变换和在空间中走一步的三个分量的变换一样时，就是一个矢量。如

* 在打字时，矢量用黑体字$\boldsymbol{r}$表示；在手写时，用白体加一个箭头$\vec{r}$表示。

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}$$

的式子,在某一个坐标系中是正确的,那么在任何坐标系中它也应是正确的。当然,这个方程式代表三个方程式

$$F_x=x,\ F_y=y,\ F_z=z.$$

或者,也代表

$$F_{x'}=x',\ F_{y'}=y',\ F_{z'}=z'.$$

一个物理关系可以表示成矢量方程这一事实使我们确信:这种物理关系在坐标系仅仅作转动时是不变的。这就是为什么矢量在物理学中如此有用的道理。

现在我们来研究矢量的某些性质。速度、动量、力和加速度都是矢量的例子。根据多种用途,用一个指示矢量所作用的方向的箭头来表示矢量是很方便的。为什么能用箭头来表示力呢?因为它具有和"在空间走一步"相同的数学变换性质。因此,就像走一步中的"步"一样,我们可以用一个力的单位,比如令一牛顿相应于某个规定的长度作为尺度,把它在图上表示出来。一旦这样做了,则所有的力都能用长度来表示。因为类似于

$$\boldsymbol{F}=k\boldsymbol{r}$$

的式子,这里 k 是常数,是一个完全合理的式子。因此,我们总是可以用线来表示力,这是非常方便的,因为只要画出线,就不再需要轴了。当然,当轴转动时,它的三个分量会改变,我们能很快地算出这些分量,因为这仅仅是一个几何问题。

§11-5 矢 量 代 数

我们现在来叙述矢量用不同方式组合时的定律或法则。第一种组合是两个矢量相加:假设 $\boldsymbol{a}$ 是一个矢量,在某一特定坐标系中它具有三个分量(a_x, a_y, a_z),$\boldsymbol{b}$ 是另一个矢量,它也有三个分量(b_x, b_y, b_z)。现在让我们创造三个新的数(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)。这些数是否构成一个矢量呢?"是的",人们可能会说,"它们是三个数,每三个数都构成一个矢量。"不对,不是每三个数都能构成矢量!要使它是一个矢量,不仅要有三个数,而且这三个数必须要以这样的方式和一个坐标系相联系,即当转动坐标系时,这三个数正好按照我们已经叙述过的严格的规律相互"旋转",彼此"混合在一起"。因此,问题在于,如果我们转动坐标系,使(a_x, a_y, a_z)变成($a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$)和(b_x, b_y, b_z)变成($b_{x'}$, $b_{y'}$, $b_{z'}$),那么(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)变成什么呢?它们是否变成($a_{x'}+b_{x'}$, $a_{y'}+b_{y'}$, $a_{z'}+b_{z'}$)?回答当然是"对的",因为方程式(11.5)的标准变换是所谓线性变换。如果把这些变换应用于 a_x 和 b_x 以得出 $a_{x'}$ 和 $b_{x'}$,就会发现已变换的 a_x+b_x 的确是 $a_{x'}+b_{x'}$。当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在这个意义上"彼此相加"时,它们将构成一个矢量,我们称之为 $\boldsymbol{c}$。我们可以把它写成

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

从它的分量我们立即看出 $\boldsymbol{c}$ 具有重要的性质

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$

这样还有

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}.$$

我们可以按任意次序把矢量相加。

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的几何意义是什么呢？假如在一张纸上用线段来表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，那么 $\boldsymbol{c}$ 应是什么样子呢？如图 11-4 所示，我们看到，如果把表示 $\boldsymbol{b}$ 分量的矩形以图中所示的方式放到表示 $\boldsymbol{a}$ 分量的矩形上，就能非常方便地把 $\boldsymbol{b}$ 的分量加到 $\boldsymbol{a}$ 的分量上去。因为 $\boldsymbol{b}$ 正好"配合"它的矩形，$\boldsymbol{a}$ 也正好配合它的矩形，它就像是把 $\boldsymbol{b}$ 的"尾端"接到 $\boldsymbol{a}$ 的"顶端"一样，从 $\boldsymbol{a}$ 的"尾端"到 $\boldsymbol{b}$ 的"顶端"的箭头是矢量 $\boldsymbol{c}$。当然，如果我们以另外的方式把 $\boldsymbol{a}$ 加到 $\boldsymbol{b}$ 上，那就应该把 $\boldsymbol{a}$ 的"尾端"放在 $\boldsymbol{b}$ 的"顶端"上，根据平行四边形的几何性质，我们将得到 $\boldsymbol{c}$ 的同样结果。注意，矢量按照这种方法相加，无需参照任何坐标轴。

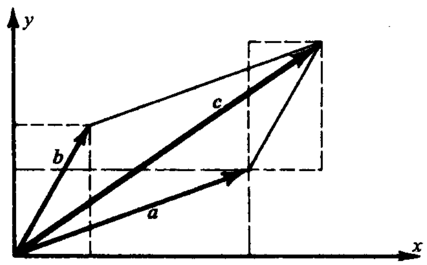


图 11-4 矢量的加法

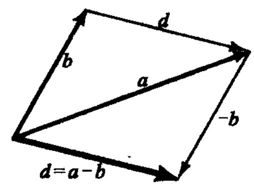


图 11-5 矢量的减法

假设用一个数 α 去乘一个矢量，这是什么意思呢？我们定义它代表一个新矢量，它的分量为 αa_x，αa_y 和 αa_z。它的确是一个矢量，我们把这个问题留给学生去证明。

现在来考虑矢量减法。我们可以用定义加法一样的方法来定义减法，但不是把各个分量相加，而是把各个分量相减。或者，定义一个负矢量 $-\boldsymbol{b}=-1\boldsymbol{b}$，然后把分量相加的方法来定义减法，这实际上是一回事。结果如图 11-5 所示。这个图表示 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$；同时，我们还看到采用等效关系 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$，从 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 很容易求出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的差。因而求矢量的差甚至比求矢量的和更容易：我们只要从 $\boldsymbol{b}$ 的"顶端"到 $\boldsymbol{a}$ 的"顶端"画一个矢量，就得到 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$！

下面来讨论速度。为什么速度是矢量呢？如果位置是由三个坐标 (x, y, z) 给定，那么速度是什么呢？速度由 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ 给出。这是不是矢量？我们可以通过对表示式(11.5)求微商来判明 $\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t$ 是否以恰当的方式变换。我们看到 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 的确是按照与 x 和 y 同样的规律变换，因此这个时间的微商是一个矢量。因而速度是矢量。我们可以把速度写成一个有趣的形式

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.$$

速度是什么，以及为什么它是一个矢量还可以更形象地来理解：在一个短时间 Δt 内粒子运动了多远呢？回答是：$\Delta\boldsymbol{r}$，因此，如果一个粒子某一时刻在"这里"，而另一时刻跑到"那里"，那么用时间间隔 $\Delta t=t_2-t_1$，去除位置的矢量差 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$（$\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向就是图 11-6 所示的运动方向），就得到"平均速度"矢量。

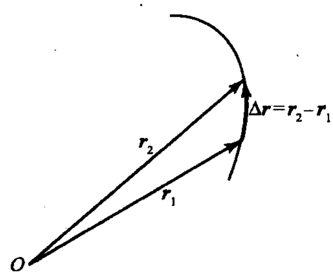


图 11-6 在短时间间隔 $\Delta t=t_2-t_1$ 内，一个粒子的位移

换句话说，速度矢量就是在 Δt 趋近于零时，在 $t+\Delta t$ 和 t 这两个时刻的矢径之差除以 Δt 的极限

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{11.10}$$

因为速度是两个矢量之差,所以它也是一个矢量。因为它的分量是 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$,所以这也是速度的正确定义。实际上,从这个论证我们看到,将任一矢量对时间求微商,得到的是一个新的矢量。因此,我们有好几种方法得出新的矢量:(1)乘以一个常数;(2)对时间求微商;(3)两个矢量相加或相减。

§11-6 牛顿定律的矢量表示法

为了将牛顿定律写成矢量形式,需要再进一步定义加速度矢量。这是速度矢量的时间微商,很容易证明它的分量是 x, y 和 z 相对于 t 的两次微商

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}, \tag{11.11}$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}. \tag{11.12}$$

有了这个定义,就能把牛顿定律写成如下形式

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{11.13}$$

或

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}. \tag{11.14}$$

证明牛顿定律对坐标转动的不变性的问题就是去证明 $\boldsymbol{a}$ 是一个矢量,这一点我们刚才已证明过。证明 $\boldsymbol{F}$ 是一个矢量;我们暂且假定它是的。既然我们已知加速度是一个矢量,如果力也是一个矢量,那么式(11.13)在任何坐标系中就都一样了。把它写成不显含 x, y, z 项的形式有这样一个好处,即往后每次在写牛顿方程或其他物理定律时,不需要写出三个方程。看上去我们写的是一条定律,但当然,实际上对每一组特定坐标轴来说它是三个方程,因为任何矢量方程包含了方程两端各分量相等的含义。

加速度是速度矢量的变化率的事实有助于我们计算在某些复杂情况下的加速度。例如,假定一个粒子在某一复杂曲线上运动(图 11-7),并且在一个给定的时刻 t_1,具有一定速度 $\boldsymbol{v}_1$,稍微过一会儿,当到达另一时刻 t_2 时,具有另一个速度 $\boldsymbol{v}_2$。什么是加速度呢? 答案是:加速度等于这个微小的时间间隔去除速度之差,因此,这里要用到两个速度的差。我们怎样来求两个速度的差呢? 为了把两个矢量相减,我们在 $\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_1$ 的“端点”之间画一个矢量,即,如图 11-7 所示用 $\Delta\boldsymbol{v}$ 来表示两个矢量之差,对吗? 不对! 只有当两个矢量的尾端在一起时,才可以这样做! 如果我们把一个矢量移到别的地方,再在它们之间画一条线,这是毫无意义的。这一点务必注意! 我们需要画一个新的图来做这两个矢量的减法。在图 11-8 中,$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 画成与图 11-7 中的相应的部分平行且相等,这样我们就能讨论加速度了。当然,加速度就是 $\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$。有趣的是,我们可以把速度差分成两个部分;即可以认为加速度具有两个分量,一个是沿路径的切线方向的分量 $\Delta\boldsymbol{v}_{/\!/}$,另一个是与路径相垂直的分量 $\Delta\boldsymbol{v}_{\perp}$,如

图 11-8 所示。当然，路径的切向加速度就是速度长度的变化，也就是速率 v 的变化

$$a_{/\!/}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{11-15}$$

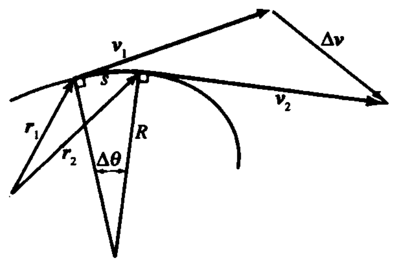


图 11-7 曲线轨道示意图

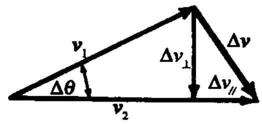


图 11-8 计算加速度的矢量图

加速度的另一与曲线垂直的分量利用图 11-7 和 11-8 也很容易算出。在短时间 Δt 内，设 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 之间变化了一个很小的角 $\Delta\theta$。如果速度的大小是 v，那么显然

$$\Delta v_\perp = v\Delta\theta,$$

加速度 $a_\perp$ 就是

$$a_\perp = v\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right).$$

现在需要知道 $\Delta\theta/\Delta t$ 的值，它可以用下面的办法求出：如果在一给定时刻，曲线近似于某一个半径为 R 的圆周，则在 Δt 时间内走过的距离 s 就是 $v\Delta t$，这里 v 是速率

$$\Delta\theta = v\left(\frac{\Delta t}{R}\right) \quad 或 \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{v}{R}.$$

因此，得出

$$a_\perp = \frac{v^2}{R}, \tag{11.16}$$

这与我们以前看到的一样。

§ 11-7 矢量的标积

现在进一步研究矢量的某些性质。很容易看出在空间走一步的长度在任何坐标系中都是一样的。这就是说如果在某一坐标系中用 x, y, z 来表示某特定的一步 $\boldsymbol{r}$，在另一个用 x', y', z' 表示的坐标系中，可以肯定距离 $r=|\boldsymbol{r}|$ 是一样的。现在有

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

及

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

因此我们需要证明的是这两个量是相等的。我们不必去求平方根，较为方便的办法是讨论距离的平方，即验证是否有

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2. \tag{11.17}$$

最好此式是成立的——如果把式(11.5)代入,就会发现它确实是成立的。因此,我们看到还有另一些方程在任何两个坐标系中也成立。

这里包含一些新的内容。我们可以导出一个新的量,它是 x、y 和 z 的函数,称之为标函数,它没有方向,但在两个系统中是一样的。我们也可以从一个矢量得出一个标量。为此,必须找出一个一般法则。很清楚,在刚刚考虑过的例子中这个法则就是:把各分量的平方相加。现在来定义一个新的量,它叫 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$。这不是矢量,而是标量,它是一个在所有坐标系中都不变的数,并定义为矢量的三个分量的平方和

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2. \tag{11.18}$$

也许你要问,"这是对哪些轴而言呢"?它与轴无关,对任何一组轴其结果都是一样。这样,我们得到了一个新的量,一个由矢量"平方"得出的不变量,或标量。如果对任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,定义下面的量

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z, \tag{11.19}$$

我们发现,这个量不管是在带撇还是不带撇的系统里计算,都是不变的。要证明这一点我们只要注意到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}$ 是不变的,这里 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。因而平方和

$$(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2+(a_z+b_z)^2$$

是不变的

$$(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2+(a_z+b_z)^2=(a_{x'}+b_{x'})^2+(a_{y'}+b_{y'})^2+(a_{z'}+b_{z'})^2. \tag{11.20}$$

如果把此式两边展开,就会有如式(11.19)中出现的那些交叉乘积项,以及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的分量的平方和。由于式(11.18)那样的项不变,因此剩下的式(11.19)的交叉乘积项也不变。

量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 称为两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的标积,它具有很多重要而有用的性质。例如,很容易证明

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}. \tag{11.21}$$

还有,计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 有一个不需要计算 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的分量的简单的几何方法:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的长度和 $\boldsymbol{b}$ 的长度之积乘以它们之间夹角的余弦。为什么?假设我们选一个 x 轴沿 $\boldsymbol{a}$ 方向的特殊的坐标系,在这种情况下,a_x 是 $\boldsymbol{a}$ 的唯一分量,它当然就是整个 $\boldsymbol{a}$ 的长度。此时方程式(11.19)就简化成 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x$,这就是 $\boldsymbol{a}$ 的长度乘 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的分量,即 $b\cos\theta$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab\cos\theta.$$

因此,在此特殊的坐标系中,我们已经证明了 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 之长乘 $\boldsymbol{b}$ 之长再乘 $\cos\theta$。然而,如果它对一个坐标系成立,则对所有坐标系也成立。因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与坐标系无关;这就是我们的论证。

点积有什么用处呢?在物理学中有些什么场合需要用到它吗?是的,我们随时都要用到它。例如,在第4章中,动能是 $mv^2/2$,如果物体在空间运动,v^2 应该是速度在 x、y 和 z 方向上的分量的平方和,因此按照矢量分析动能的公式是

$$\mathrm{K}\cdot\mathrm{E}=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2). \tag{11.22}$$

能量没有方向。但动量有方向；它是一个矢量，等于质量乘以速度矢量。

当一个物体从一处被推到另一处时力所做的功是点积的另一个例子。我们还没有给功下过定义，但是它是与当一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用了一段距离 $\boldsymbol{s}$ 时能量的改变和重物的升高相当的

$$\text{功} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}. \tag{11.23}$$

有时讨论矢量在某一方向(比如说竖直方向，因为它就是重力方向)上的分量是很方便的。为此，在我们希望研究的方向上引入一个所谓单位矢量将是很有用的。所谓单位矢量，是指它自身的点积等于 1。我们用 $\boldsymbol{i}$ 表示单位矢量，则 $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1$。如果要求某矢量在 $\boldsymbol{i}$ 方向上的分量，我们看到点积 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}$ 是 $a\cos\theta$，它就是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{i}$ 方向上的分量。这是求分量的一种较好的办法。事实上，它能使我们得出所有的分量，并写出一个很有意思的公式。假定在一个给定的坐标系 x, y, z 中，我们引入了三个矢量：x 方向的单位矢量 $\boldsymbol{i}$, y 方向的单位矢量 $\boldsymbol{j}$，以及 z 方向的单位矢量 $\boldsymbol{k}$。首先请注意 $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1$。但 $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$ 是什么呢？当两个矢量互相垂直时它们的点积为零。于是

$$\begin{gathered} \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1, \\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = 0, \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1, \\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1. \end{gathered} \tag{11.24}$$

有了这些定义，不管什么矢量都能写成如下形式

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}. \tag{11.25}$$

应用这种方法，我们就能从一个矢量的分量求出矢量本身。

有关矢量的这些讨论远非完整。但是，与其现在就去深入研究这个课题，还不如先来学会把我们至今讨论过的某些概念应用于物理领域。当我们相当好地掌握了这一基本内容以后，再去钻研这一课题中更深入的东西就比较容易，也不会被搞糊涂。以后我们会发现定义两个矢量的另一种乘积，即矢积，并写成 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，也是非常有用的。我们将在以后的章节中再讨论这部分内容。

第 12 章　力的特性

§ 12-1　什么是力

物理定律能够帮助我们认识自然与利用自然。虽然仅仅从这一点看，就已经值得我们花时间去研究它，但是人们还是应当不时停下来思考一下“它们的真正含义是什么?”自远古以来，任何领域所表述的含义都是一个使哲学家发生兴趣而又感到棘手的课题，而物理定律的含义甚至更为有趣，这是因为人们普遍认为，这些定律阐明了某种真正的知识。知识的含义是一个深奥的哲学问题，而追问“它的含义是什么?”始终是重要的。

让我们来问一下，“写成 $F = ma$ 的牛顿定律的含义是什么? 力、质量以及加速度的含义是什么?”嗯，我们可以凭直觉领会质量的含义，如果我们知道了位置和时间的含义，就能够*定义*加速度。我们将不去讨论这些含义，而要集中讨论*力*这个新概念。答案同样地简单:“如果一个物体在作加速运动，那么一定有力作用在这个物体上。”这就是牛顿定律所表明的，于是人们可以想象到的力的最精确和最优美的定义就能够简单地表述为:力等于物体的质量乘以加速度。假定我们有一条定律，即:如果所有外力之和等于零，那么动量守恒成立;于是产生了这样的问题，“所有外力之和等于零是什么*意思*?”对上面这个陈述的一个有意思的解释是:“当总动量不变时，外力之和等于零。”这种说法肯定有毛病，因为它实在没有说出什么新的东西。如果我们已经发现了一条基本定律，该定律宣称:力等于质量乘以加速度，并且正式加以*定义*，那么我们就什么也没有发现。我们也可以这样来定义力:一个物体不受力作用时将一直以恒定速度沿直线运动。于是，如果我们观察到一个物体*不*是以恒定速度沿直线运动，我们就可以说，物体上有力作用着。这些说法当然不可能属于物理学的内容，因为它们是一些循环论证的定义。上面的牛顿表述尽管看来好像是力的一种最精确的定义，而且合数学家的意;然而，它完全是无用的，因为从这个定义得不出任何预见。人们可以整天坐在安乐椅上，任意定义一些词，但是要发现当两个球相互碰撞或者一个重物悬挂在弹簧上时发生一些什么则完全是另一回事，因为物体所表现的*行为*是与定义的选择完全无关的。

举例来说，如果我们愿意说，一个物体不去碰它，它就停留在原来所处的位置上不动，那么当我们看到某个东西在漂移时，我们就可以说，这一定是由一种称为“戈斯”(Gorce)的力*所引起的——“戈斯”是位置的变化率。现在我们得到了一个奇妙的新的定律:任何物体都保持静止状态除非有“戈斯”作用其上。你们看，这就和上述力的定义相类似，它并不包含什么内容。牛顿定律的真正内容是:除了 $F = ma$ 这条定律外，力还应该具有某些*独立的性质*。但是牛顿或其他人并没有把力所*特有的*独立性质完全描述出来。因此物理定律 $F = ma$ 是一个不完全的定律。它暗示着，如果我们研究质量乘以加速度，并且称这个乘积

---

* 此名称系作者根据“Force(力)”杜撰。——译者注

为力,也就是说如果我们有兴趣研究力的特征,那么我们将发现力具有某种简单性。这个定律是分析自然界的一种很好的方案,力是简单的则是一种联想。

这类力的第一个例子就是完整的万有引力定律,它是由牛顿提出的,并且在阐述定律时还回答了"力是什么?"这个问题。假如除了万有引力外没有其他的力,那么万有引力定律和力的定律(第二运动定律)的组合应当是一种完整的理论。但是除了万有引力外还有很多种力,而且我们希望在许多不同的情况下使用牛顿定律,因此为了继续深入,我们必须讲一些有关力的性质的内容。

例如,在处理力的问题时总是默认:除非有某个物理实体存在,否则力等于零。如果我们发现一个力不等于零,我们也一定能在附近找到某个物体是力的来源。这个假定完全不同于我们上面所介绍的"戈斯"的那种情况。力的最重要的特征之一就是它具有实质性的起源,这就不仅是一个定义了。

牛顿还提供了一个有关力的法则:相互作用的物体之间的力大小相等、方向相反——作用力等于反作用力。后来知道,这条法则并不是完全正确的。事实上,$F = ma$ 这条定理就不完全正确。要是它是一个定义,我们就应当说:它永远是完全正确的,但事实上并非如此。

读者可能会提出异议:"我不喜欢这种不严谨性,我喜欢对每件事情都下一个严格的定义;事实上在有些书上是这样说的,任何科学都是一门严格的学科,在那里每件事情都有一个定义。"如果你坚持要获得力的精确定义,你将永远得不到它!因为首先,牛顿第二定律是不精确的,其次,要理解物理定律,你就必须懂得所有这些物理定律都是某种近似。

任何简单的概念都是近似的。作为例子,考虑一个客体,什么是客体?哲学家总是这样说:"嗯,就拿一张椅子来作为例子吧!"当他们说这句话的时候,你们就知道他们不知道再如何说下去了。椅子是什么?椅子就是那边的某种确定的东西,确定到什么程度呢?原子不时从椅子中跑出来——虽然不是很多,但总有一些,灰尘落到椅子上,逐渐溶化到油漆里,所以要精确地定义椅子,确切地说出哪些原子属于椅子,哪些原子属于空气或哪些原子属于灰尘,哪些原子属于椅子上的油漆,这是不可能的。因此只能近似地定义椅子的质量。同样,要确定单个客体的质量也是不可能的。因为世界上并不存在任何单个孤立的客体——每个客体都是许多事物的混合体。所以我们只能以一系列的近似和理想化来处理它们。

窍门就在于使之理想化。在大约是 $1/10^{10}$ 以内的极好近似下,椅子中的原子数在一分钟内是不变的,而如果要求不是太精确的话,我们可以把椅子理想化为一个确定的物体;同样,如果要求不是太精确的话,我们将以一种理想化的方式来学习有关力的特性。人们可能并不满足于物理学试图获得的对自然界的近似(但总是力图增加这个近似的精确度)看法,而宁愿要一种数学的定义,但是数学的定义在真实世界中是永远不会起作用的。对数学来说所有的逻辑都能完全贯彻,数学定义对它将是适合的。但是正如我们在像海浪和葡萄酒等一些例子中指出过的那样,物理世界是复杂的。当我们试图将它的各部分隔离开来讨论一种质量时,对于酒和杯子来说,当一方溶于另一方时,我们怎么能知道哪些是酒,哪些是杯子呢?作用于单个物体上的力已经包含着近似了,要是我们有一个论述真实世界的体系,那么这种体系,至少对目前来说,必定包含着某些近似。

这种体系完全不像数学体系那样。在数学中对每个事物都能够下定义,此外我们就不知道在说些什么了。事实上,数学的伟大就在于我们不必说出我们所谈论的是什么东西。此种伟大在于定律、论证和逻辑都与"它"是什么东西无关。如果有另外一组客体,它遵从同

样的欧几里得几何公理体系,那么一旦我们作出一些新的定义,并根据它们作正确的逻辑推演,所有的结论都将是正确的,而与所讨论的内容没有关系。然而,在自然界中当我们利用一束光或经纬仪(正如我们在测量中所做的)来画出或建立一条线时,我们是在欧几里得的几何意义上量度线吗?不,我们是在作一种近似。叉丝有一定的宽度,但是一根几何线并没有宽度。因此,欧几里得几何学是否能用于测量是一个物理问题而不是数学问题。然而,从实验的观点,而不是从数学的观点来看问题的话,我们需要知道欧几里得的定理是否适用于我们丈量土地时所使用的那种几何。于是我们假定它是适用的,而且非常成功。但是它不是精确的,因为我们测量的线并不是真正的几何线。那些真正抽象的欧几里得线是否适用于实验上的线是一个经验问题;而不是由纯粹的推理可以回答的问题。

同样,既然力学是一门描述自然界的学科,我们就不能仅把 $F = ma$ 称做定义,纯数学地推演一切,把力学变成一门数学理论。在建立了适当的假定后,总是有可能建立一套数学体系,就像欧几里得所作的那样,但是我们不可能建立有关我们这个世界的某种数学,因为迟早我们必定会发现这些公理对于自然界的客体是否正确。因此我们立刻被纠缠入这些复杂的、"玷污了的"自然界的客体中去,而且作出精确度日益增加的近似。

§12-2 摩 擦 力

前面的考虑表明,要真正领会牛顿定律需要对力进行讨论。本章的目的正是要提出这种讨论使牛顿定律更为完整。我们已经研究了加速度的定义和有关的概念,但是现在我们必须研究力的性质。与前面几章不同,这一章不是非常严谨的,因为力是十分复杂的。

首先从特殊的力开始,我们来考虑作用在空中飞行的飞机上的阻力。这种力遵从什么定律(的确,对每一种力都有一条定律,也一定得有一个定律)?人们简直想不到这种力所遵从的定律会如此简单。试想一想作用在空中飞行的飞机上的阻力是由什么构成的——冲过机翼的空气,机尾的漩涡,机身周围发生的变化以及许多其他复杂因素。于是你们就认为将不会有一个简单的定律。但是作用在飞机上的阻力近似地等于一个常数乘以速度的平方,或 $F \approx cv^2$,则是一个显著的事实。

那么这样一个定律的地位如何呢?它类似于 $F = ma$ 吗?绝对不是。首先,因为这一定律是由风洞试验大致得出的经验公式。你也许会说:"好!$F = ma$ 也可能是经验的。"那不是两者有所差别的原因。差别不在于它是经验的,而在于就我们所了解的自然界来说,这个定律是事件的错综复杂性的产物,它根本不简单。如果我们研究得越来越深入,测量得越来越精确,这个定律就变得越加复杂,而不是越加简单。换句话说,当我们越来越细致地研究这个飞机阻力的定律时,我们发现它越来越"不真实",而我们研究得越深入,测量得越精确,真相就变得越加复杂。因此在这种意义上,我们认为它不是由那种简单的基本过程所引起的,与我们原来的推测一致。举例来说,如果速度非常低,低到一般的飞机不能飞行,那么当飞机在空气中被慢慢地拖着前进时,定律就发生变化,这时曳引阻力与速度之间的关系比较接近于线性。再举另一个例子,球、气泡或任意物体在蜂蜜那样的黏稠液体中缓慢地运动时,作用于其上的摩擦阻力同速度成正比。但是当运动速度变快,以致引起液体打漩时(蜂蜜不会打漩,但水和空气会打漩),那么摩擦阻力就更接近于同速度的平方成正比($F = cv^2$),而如果速度继续增大,甚至这个定律也开始失效。有人说:"这是由于比例系数有了

某些改变”，说这些话的人是回避问题。其次，还有其他很复杂之处：作用在飞机上的力是否可以分成或分解为一个作用在机翼上的力，一个作用在机头上的力等等？的确，如果我们考虑的是作用在这里或那里的力矩的话，是可以这样做的。但这时我们必须找出作用在机翼上等等的力的特殊定律。令人惊异的是，作用于一个机翼上的力与作用于另一个机翼上的力有关。换句话说，如果我们把飞机拆开，只把一个机翼放到空中，这时机翼所受的力与飞机的其余部分都在那里时所受的力是不同的。当然，这是因为有一些冲击机头的风流到机翼周围，改变了作用在机翼上的力。这样一种简单的、粗糙的、经验的定律能够应用于飞机设计中似乎是一个奇迹，但是这个定律与物理学的基本定律不是同一类型的，进一步的研究只会使这种定律越来越复杂。对于系数 c 如何依赖于飞机前缘形状的研究，说得婉转一点，是令人失望的。根据飞机形状来决定系数的简单定律是不存在的。对比之下，万有引力定律是简单的，越是研究就越觉得它是简单的。

刚才我们讨论了物体在空气中快速运动和在蜂蜜里缓慢运动而引起的两种摩擦情况。另外还有一类摩擦，它是当一个固体在另一个固体上滑动时出现的，称为干摩擦或滑动摩擦。在这种情况下，需要有力来维持运动。这种力称为摩擦力，它的起因也是非常复杂的问题。从原子情况来看，相互接触的两个表面是不平整的。它们有许多接触点，在这些接触点上，原子好像粘结在一起，于是当我们拉动一个正在滑动的物体时，原子啪的一下分开，随即发生振动；所发生的情况大致如此。过去，把这种摩擦的机理想象得非常简单：表面只不过布满凹凸不平的形状，摩擦起因于抬高滑动体越过突起部分。但是不可能是这样，因为在这种过程中不会有能量损失，而实际上是要消耗动力的。动力耗损的机理是当滑动体撞击突起部分时，突起部分发生形变，接着在两个物体中产生波和原子运动，过了一会儿，产生热。现在非常出乎意外的是，根据经验这个摩擦再次可以近似地用一个简单的定律来描述。这个定律是：克服摩擦，使一个物体在另一物体上运动所需的力取决于两个相互接触的表面间的法向力(即同表面垂直的力)。实际上，作为相当好的近似，摩擦力与这个法向力成正比，比例系数近似是常数，即

$$F = \mu N, \tag{12.1}$$

式中的 μ 称为摩擦系数(图 12-1)。

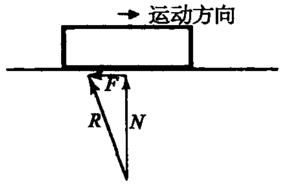


图 12-1 接触面相对滑动时的摩擦力与法向力的关系

虽然这个系数不是严格的常数，但是这个公式对于大致判断某些实际或工程学情况中所需力的大小是一个很好的经验法则。如果法向力或运动速度太大，由于产生大量的热，定律就失效。重要的是要认识到每个经验定律都有它的适用范围，超过了这个范围，定律实际上不起作用。

公式 $F = \mu N$ 是近似正确的，这可以用一个简单的实验来验证。取一块平板，使它倾斜一个小角度 θ，在平板上放置一块重为 W 的木块，然后使平板倾角增大，直到木块由于自身的重量刚好开始滑动。重力沿平板向下的分力是 $W\sin\theta$，当木块匀速滑动时，这个分力必须等于摩擦力 F。与平板垂直的分力是 $W\cos\theta$，这个力就是法向力 N。代入这些值后，公式变成 $W\sin\theta = \mu W\cos\theta$，由此我们得到 $\mu = \sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$。如果这个定律是绝对正确的，在某个一定的倾角，物体就开始下滑。如果在同一木块上再增加一些重量，这时虽然 W 增大，但是公式中

的各个力都按相同的比例增加,W 被消去了。如果 μ 保持不变,则加重的木块将再次在同样的斜度时下滑。当我们用原先的重物做试验,确定角度 θ 时,可以发现,比较重的木块将以大致相同的角度下滑,甚至当一个重物比另一重物大很多倍时,上述规律仍然正确。于是我们得出结论:摩擦系数与重量无关。

在做这个实验时,值得注意的是,当平板倾斜到约为正确的角度 θ 时,木块并不平稳地滑动,而是以断断续续的方式下滑。在某个地方它可能停住,在另一个地方它可能作加速运动。这个现象表明,摩擦系数仅仅大致上是常数,在平板上不同的地点摩擦系数是不同的。不论木块上加重物或不加重物都观察到同样的古怪现象。这些变化是由平板的不同平滑度或硬度引起的,也可能是污物、氧化物或其他外来物质引起的。表中列出的所谓钢与钢、铜与铜等的 μ 值全都是不可信的,因为它们忽略了上述那些真正决定 μ 值的因素。摩擦决不是由于"铜与铜"等等引起的,而是由于粘附到铜上的杂质所引起的。

在上述这类实验中,摩擦几乎与速度无关。很多人认为,使物体起动所需克服的摩擦力(静摩擦)大于保持物体滑动所需的力(动摩擦)。但是用干燥金属很难显示出有什么差别。这种见解可能是由于这样的经验引起的:存在着极少量油或润滑剂,或者木块被弹簧或其他易形变的支座撑起以至于看起来好像是结合在一起的。

尽管有大量精确分析的工程数据,要做精确的定量摩擦实验仍然是非常困难的,并且摩擦定律也还没有被人们很好地分析过。虽然,只要表面经受标准处理,定律 $F=\mu N$ 是相当精确的,但是对于定律具有这种形式的原因还没有真正弄清楚。要证明摩擦系数 μ 几乎与速度无关需要一些巧妙的实验方法,因为如果下表面快速振动,表面摩擦就要大大减少。当在非常高的速度下进行这项实验时,必须注意物体彼此之间不能有振动,因为在高速情形下摩擦明显减小常常是由振动引起的。无论如何,摩擦定律是又一个半经验定律,这些半经验定律还没有被我们完全认识。而且,奇怪的是从我们做过的所有研究来看,对这些现象仍然没有进一步理解。实际上,目前甚至要估计一下两个物体之间的摩擦系数也是不可能的。

上面曾经指出,企图用纯的物体如铜在铜上面的滑动来测量 μ 将得出虚假的结果。因为接触的表面不单纯是铜,而是氧化物和其他杂质的混合物。如果我们想要得到绝对纯的铜,即使清洗和抛光表面,在真空中对材料除气,并且采取各种可能想到的预防措施,我们还是不能测得 μ。因为即使我们把装置倾斜到垂直位置,滑块仍不下落——两片铜粘在一起了!对一般硬度的表面来说,摩擦系数 μ 通常比 1 小,而这时 μ 变得比 1 大上好几倍!出现这种意想不到的现象的原因是当相互接触的原子全都是同一种原子时,这些原子无法"知道"它们是在不同的铜片上的。当原子存在于其他氧化物、油脂和更复杂的玷污物的薄表面层时,原子就"知道"它们不是在同一部分。当我们考虑到正是原子之间的力把铜原子结合在一起成为固体的时候,就会明白,对纯金属是不可能得出正确的摩擦系数的。

在用一块平玻璃板和一只玻璃杯做的简单的家庭实验中也能够观察到同样的现象。如果把玻璃杯放在平板上,并用一根绳子拉它,它将在平板上很好地滑动,人们能够感觉到摩擦系数,这个系数虽然有点不规则,但毕竟是一个系数。如果我们现在把玻璃板和玻璃杯底弄湿,重新再拉,就会发现杯子粘住了。如果仔细看一下,将会发现划痕,因为水能够从表面除去油脂和其他玷污物,这样我们才真正得到玻璃与玻璃的接触。这种接触是如此牢固,以至于使它们粘紧在一起,不再分离,结果玻璃被撕裂,也就是说造成了划痕。

§12-3　分　子　力

接下来我们将讨论分子力的特征。这些力是原子之间的力，也是摩擦的根本起因。在经典物理学的基础上，分子力从来没有得到满意的解释；只有用量子力学才能充分理解它们。然而，根据经验，原子之间的力可用图 12-2 来说明。

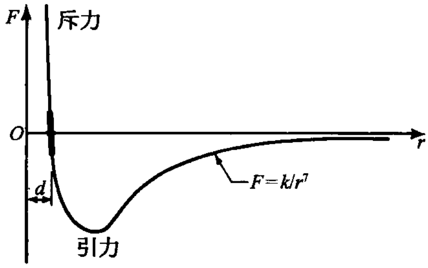


图 12-2　两个原子之间的力与其距离的函数关系

图中将两个原子之间的力 F 作为两个原子之间的距离 r 的函数。同时，还存在着不同的情况：例如在水分子中氧带有较多负电荷，所以负电荷和正电荷的平均位置不在同一点上，结果附近的另一个分子感受到比较大的力，这个力称为偶极-偶极力。然而，对许多系统来说，电荷平衡得非常好，特别是氧气，它是完全对称的。在这种情况下，虽然负电荷和正电荷散布在整个分子中，但是这种分布使正、负电荷的中心重合。正、负电荷中心不重合的分子称为极性分子，电荷与电荷中心间距离的乘积称为偶极矩。非极性分子是一种电荷中心重合的分子。对于所有非极性分子(其中所有的电力都被中和)，在较大距离上的作用力仍然是引力，而且与距离的 7 次方成反比，即 $F = k/r^7$，式中 k 是一个取决于分子的常数。只有当我们学到量子力学时才会懂得为什么是这样的。当有偶极子存在时，力就增大。当原子或分子靠得太近时，它们以很大的斥力相互排斥；正是这个力使得我们不会落到地板下面去！

这些分子力可以用一种相当直接的方式来演示：用一只滑动的玻璃杯做的摩擦实验就是方法之一，另一种方法是取两个经过非常仔细研磨和十分平整的平面，使之紧密地贴合在一起。约翰逊(Johansson)平板就是这种平面的一个实例。机床厂里常用它作为精确的长度测量的标准。如果一块这样的平板在另一块平板上非常小心地滑动，然后提起上面一块平板，由于分子力的作用，另一块平板将会粘在上面一块平板上并跟着被提起。这是一块平板上的原子对另一平板上的原子之间直接吸引的例证。

但是按照引力是基本的这个意义来说，这种分子吸引力还不算是基本的，它们是由一个分子中所有的电子和核与另一个分子中所有的电子和核之间的大量极其复杂的相互作用所引起的。我们得到的任何一个看起来简单的公式都是相当于复杂因素的总和，因此我们仍旧没有弄清楚基本的现象。

因为分子力在距离大时吸引，距离小时排斥，如图 12-2 所示，我们可以这样来形成固体，其中所有的原子依靠吸引力的作用结合在一起，而当原子靠得太近时，斥力就开始起作用使它们分开。在某一距离 d 处(图 12-2 中的曲线与轴相交的地方)，作用力为零，这意味着所有的力都被平衡，因此分子与分子之间保持着这个距离。如果将分子推近到比距离 d 更近，分子就相互排斥，这就是 r 轴上方的曲线所表示的情况。要想把分子稍微推近一点就需要用很大的力，因为当距离小于 d 时，分子斥力迅速增大。如果分子被稍微拉开一点，就要有一点引力，引力随拉开的距离的增大而增加。如果分子被很大的力所拉开，它们将永远分开——键被拉断了。

如果分子相对于距离 d 仅被推近或拉开一段很小的距离，那么在图 12-2 曲线上相应移

动的距离也是很小的，于是可以近似地用一条直线来表示。因此，在很多情况下，如果位移不是很大，力就与位移成正比。这条原理就是众所周知的胡克定律或弹性定律。此定律表明：当物体形变时，物体中试图恢复原状的力与形变的大小成正比。当然，此定律仅当形变较小时才是有效的。当形变太大时，物体将破裂或者被压碎，视形变的性质而定。为了使胡克定律成立，力的数值要有一定范围，它取决于材料的性质；例如，对面粉团或油灰来说，这个力是非常小的；但是对于钢，这个力就比较大。用一条垂直悬挂的钢制长螺旋弹簧可以很好地演示胡克定律。在弹簧的下端挂上适量的重物，可以使各处都产生很小的扭转，结果在每一匝中都引起一个小的垂直偏转，如果匝数很多，加起来就成为一个大的位移。比如说，如果测量 100 g 重物产生的总伸长，可以发现，每增加 100 g 重物将会产生一段附加伸长，它与相对于第一个 100 g 重物测得的伸长量几乎相等。当弹簧过载时，力与位移的这种定比关系开始变化，也就是说胡克定律不再有效。

§12-4 基本力、场

下面我们来讨论唯一剩下的基本力。我们把它们称做基本力，是由于它们遵从的定律从根本上说是简单的。我们将首先讨论电力。物体带有仅由电子或质子组成的电荷。如果任何两个物体带上电荷，那么在它们之间就存在电力。如果电荷的大小分别是 q_1 和 q_2，那么电力与两个电荷之间的距离的平方成反比，即 $F=(\text{常数})q_1q_2/r^2$。对于异号电荷，这一定律与万有引力定律相似，但是，对于同号电荷，这个力是斥力，符号(方向)相反。本质上，电荷 q_1 和 q_2 可以是正的或负的。在公式的具体应用中，只要给予 q 以适当的正、负号就能得出力的正确的方向。力的方向沿着两个电荷的连线。当然，公式中的常数取决于力、电荷和距离所用的单位。通常，在实际应用中，电荷的单位是库仑(C)，距离的单位是米(m)，力的单位是牛顿(N)。为了使力恰好以牛顿为单位，常数(由于历史原因，这个常数被写成 $1/4\pi\varepsilon_0$)的值取

$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}}$$

或

$$1/(4\pi\varepsilon_0) = 8.99\times10^{9}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}.$$

因此，静止电荷的作用力的定律为

$$\boldsymbol{F} = q_1q_2\boldsymbol{r}/(4\pi\varepsilon_0 r^3). \tag{12.2}$$

在自然界中，所有电荷中最重要的是单个电子的电荷，它的电量为 1.60×10^{-19} C。在研究基本粒子之间的电力而不是研究大的电荷时，许多人宁可用 $(q_{el})^2/(4\pi\varepsilon_0)$ 这种组合，其中 q_{el} 规定为电子的电荷。这种组合是经常出现的，为了简化计算，用记号 e^2 表示；在国际单位制中，它的数值是 $(1.52\times10^{-14})^2$。采用这种形式常数的好处是，两个电子之间的力，用牛顿作为单位时可以简单地写成 e^2/r^2；其中 r 的单位用米来表示，而不需要很多单独的常数。电力比这个简单公式所表示的要复杂得多，因为公式所给出的仅仅是当两个物体处于静止时，它们之间的力。接下去我们将讨论较普遍的情况。

在分析比较基本的一类力(不是像摩擦力，而是电力或引力之类的力)时形成了一种有趣的、非常重要的概念。因为乍看起来，力比反平方定律所指出的要复杂得多，而这些定律仅当相互作用物体处于静止时才成立，所以就需要一种改进的方法来处理当物体开始以一

种复杂的方式运动时所产生的非常复杂的力。经验表明,用所谓"场"的概念这种方法,对于分析这种类型的力是非常有用的。比如说,以电力为例来说明这个概念,假定我们有两个电荷 q_1、q_2 分别位于 P 点和 R 点。那么两个电荷之间的力为

$$\boldsymbol{F} = q_1 q_2 \boldsymbol{r} / r^3. \tag{12.3}$$

如果用场的概念来分析这个力,我们说 P 处的电荷 q_1 在 R 处产生了一种"条件",而当电荷 q_2 被置于 R 处时,它就"感受"到这个作用力。这是一种描写力的方法,或许是奇特的。我们说,作用在 R 处电荷 q_2 上的力 $\boldsymbol{F}$ 可以写成两部分。力等于电量 q_2 乘以一个量 $\boldsymbol{E}$,不管有没有电荷 q_2,$\boldsymbol{E}$ 都应当是存在的(只要我们将所有其他的电荷都保持在原来的位置上)。我们说 $\boldsymbol{E}$ 是由 q_1 产生的"状况",$\boldsymbol{F}$ 是 q_2 对于 $\boldsymbol{E}$ 的响应。$\boldsymbol{E}$ 叫做电场,它是一个矢量。由 P 处电荷 q_1 在 R 处产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 的公式是电荷 q_1 乘以常数 $1/(4\pi\varepsilon_0)$ 除以 r^2(r 是 P 到 R 的距离),它作用于沿矢径的方向(矢径 $\boldsymbol{r}$ 除以它自身的长度),因此 $\boldsymbol{E}$ 的表示式为

$$\boldsymbol{E} = \frac{q_1 \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{12.4}$$

这样,我们就把力、电场和电场中电荷的关系式写成

$$\boldsymbol{F} = q_2 \boldsymbol{E}. \tag{12.5}$$

这样做的要点是什么?要点就是把分析分成两部分。一部分说,某物产生了一个场。另一部分说,某物受到场的作用。由于可以独立地看待这两部分,把分析分成这两部分在许多情况中简化了问题的计算。要是有许多电荷存在,我们可以先算出由所有电荷在 R 处产生的总电场,然后只要知道放在 R 处的电荷,我们就能求出作用在该电荷上的力。

对于引力的情形,我们完全可以同样处理。在这种情形下,力 $\boldsymbol{F} = -Gm_1m_2\boldsymbol{r}/r^3$。我们可以作如下的类似分析:引力场中的物体所受的力等于物体的质量乘以引力场 $\boldsymbol{C}$。m_2 所受的力等于 m_2 的质量乘以由 m_1 所产生的场 $\boldsymbol{C}$;即 $\boldsymbol{F} = m_2\boldsymbol{C}$。质量为 m_1 的物体所产生的场 $\boldsymbol{C} = -Gm_1\boldsymbol{r}/r^3$,它的方向与电场的情况一样沿着径向。

不管初看起来如何,这种把一部分与另一部分分开的方法并不是微不足道的。如果力的定律真是简单的,它就没什么价值(只不过用另一种方法来写出同一件事情),但是力的定律是如此复杂,以至于结果表明场具有几乎与产生它们的物体无关的实在性。人们可以做某种事情,例如使电荷保持运动,于是在一定距离处产生一种效应——场;然而,如果电荷停止运动,场记录着过去所有的情况,因为两个粒子之间的相互作用不是瞬时的。我们希望有某种方法记住以前所发生的事情。如果某电荷所受的力取决于另一个电荷昨天所在的位置以及它当时的行为,那么我们就需要一种机构来记录昨天发生的事情,这就是场的特征。因此,当力变得越复杂,场就变得越来越真实,而这种分离技巧的人为性也就越来越少。

用场来分析力时,我们需要用到有关场的两种定律。第一种是对场的响应,它给出了运动方程。例如,质量对引力场的响应定律为:力等于质量乘以引力场;或者,如果物体还带有电荷,电荷对于电场的响应等于电荷乘以电场。对这些情况的性质的第二部分分析是把场的强度以及它是如何产生的规律用公式表示出来。有时,把这些定律称为场方程。在适当的时候,我们将更深入地学习场方程,这里我们只写出几点有关的内容。

第一,一切事实中最为惊人的是,由若干源产生的总电场是由第一个源、第二个源等等

产生的电场的矢量和,这是完全确实而又容易理解的。换句话说,如果有许多电荷产生一个场,则其中的一个电荷独自产生的电场为 $\boldsymbol{E}_1$,另一个电荷独自产生的电场为 $\boldsymbol{E}_2$ 等等。那么,只要把所有的矢量加起来就得到了总电场。这个原理可以表示成

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\cdots, \tag{12.6}$$

或者,根据上面给出的定义

$$\boldsymbol{E}=\sum_i \frac{q_i \boldsymbol{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3}. \tag{12.7}$$

同样的方法适用于引力吗?牛顿把两个物体 m_1 和 m_2 之间的力表示成 $\boldsymbol{F}=-Gm_1m_2\cdot\boldsymbol{r}/r^3$。但是按照场的概念,我们可以说物体 m_1 在其周围空间产生了引力场 $\boldsymbol{C}$, m_2 所受的力则由

$$\boldsymbol{F}=m_2\boldsymbol{C} \tag{12.8}$$

给出。同电场的情况完全类似

$$\boldsymbol{C}_i=-\frac{Gm_i\boldsymbol{r}_i}{r_i^3}. \tag{12.9}$$

由几个物体产生的引力场为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{C}_3+\cdots. \tag{12.10}$$

在第 9 章中计算行星运动情况时,实质上我们已经应用了这一原理。我们正是把所有的力矢量加起来以得到作用在一个行星上的合力。要是约去该方程中行星的质量,我们就得到式(12.10)。

式(12.6)和(12.10)表示的就是所谓场的叠加原理。这个原理说明,由所有的源产生的总的场等于由每一个源产生的场之和。就我们目前所知,对于电学这是一个绝对保证的定律。甚至由于电荷运动而使力的定律变为复杂时,这个定律仍然正确。有一些表面上的反例,但只要再仔细分析一下,总会发现这是由于忽略了某些运动电荷。然而,虽然叠加原理完全适用于电力,但是对于很强的引力场,叠加原理不完全正确。按照爱因斯坦的引力场理论,牛顿方程式(12.10)仅是一种近似。

与电力紧密相关的另一类力称为磁力,这种力也是用场来进行分析的。电力和磁力之间的一些定性关系可以用一个电子射线管(图 12-3)的实验来说明。电子射线管的一端是一个发射电子流的源。在管子里面有一套装置把电子加速到很高的速度,并聚焦成很窄的电子束再送到管子另一端的荧光屏上。在荧光屏的中央,电子打到的地方发出一个亮的光点,这样我们就能够跟踪电子的径迹。在射向荧光屏的途中,电子束穿过一对水平放置的平行金属板中间的窄缝。两块金属板上可以加上电压,因此可以随意成为带负电的。当加上电压时,两块金属板之间就产生一个电场。

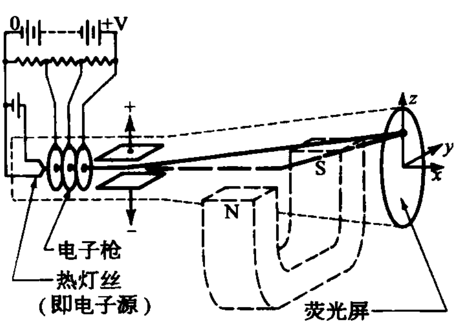


图 12-3 电子束管

实验的第一部分是给下极板加上负电压,这意味着把额外的电子放到下极板上。由于同种电荷相互排斥,荧光屏上的光点立即向上移动(我们也

可以用另一种方式来表明——电子“感受”到场，并以向上偏转作为响应)。接着，我们把电压极性反过来，使上极板为负。现在，荧光屏上的光点跳到中心之下，这表明电子束中的电子受到上极板中电子的排斥(或者我们又可以说电子对场作出响应，现在是在相反的方向上)。

实验的第二部分是切断极板上的电压，试验磁场对电子束的影响。这一步是用一个马蹄形磁铁来进行的，磁铁的两极分得足够开，可以或多或少地跨立在管子上。假定我们把磁铁以字母U那样的取向放到管子下面，两极向上，使管子的一部分位于磁极之间。我们看到光点偏转了，比如说，当磁铁从下方趋近管子时，光点就向上偏转。这样看来好像是磁铁排斥电子束。然而事情并不那样简单，如果我们把整个磁铁倒转过来，但磁极的位置并不对调，那么从上方趋近管子，光点还是向上移动。由此看来，电子束不是受到排斥；相反，好像是受到吸引。现在，我们再从头开始，把磁铁恢复到原来的U形取向，并把它放在管子下方。没有错，光点还是向上偏转。现在将磁铁绕垂直轴旋转180°，这样，磁铁仍处于U形位置，但两个磁极的相对位置颠倒了。瞧！现在光点跳向下方，并停在下方，即使像前面那样把磁铁倒转过来，从上方趋近管子，光点还是停在下方。

要理解这种独特的行为，我们必须有一种新的力的组合，因此，我们把它解释为：在磁铁的两极之间存在着磁场。这种场是有方向性的，其方向总是由一特定的极(我们可以标上记号)出发，指向另一极。将磁铁倒转过来并不改变场的方向，但是将一磁极相对另一磁极颠倒一下就使场的方向变得相反。举例来说，如果电子速度沿x方向是水平的，则磁场也是水平的，但在y方向上，作用于运动电子上的磁力应在z方向上，即向上或向下，取决于磁场是在正y方向还是负y方向。

尽管目前我们不准备介绍彼此以任意方式相对运动的带电物体之间力的正确定律，但因为定律太复杂，我们将介绍它的一个方面：如果场是已知时力的完整定律。作用在带电物体上的力取决于它的运动；如果物体在一给定位置上停止不动时，有某个力作用着，则这个力与电荷量成正比，比例系数就是我们所谓的电场。当物体运动时，力就不同了，我们发现其修正项，即新的“一份”力严格线性地取决于速度，并与$\boldsymbol{v}$和另一个我们称为磁感应强度$\boldsymbol{B}$的矢量正交。如果电场$\boldsymbol{E}$和磁感应强度$\boldsymbol{B}$的分量分别为(E_x, E_y, E_z)和(B_x, B_y, B_z)，速度$\boldsymbol{v}$的分量为(v_x, v_y, v_z)，那么作用在运动电荷q上总的电磁力的分量为

$$\begin{aligned}F_x &= q(E_x + v_yB_z - v_zB_y),\\ F_y &= q(E_y + v_zB_x - v_xB_z),\\ F_z &= q(E_z + v_xB_y - v_yB_x).\end{aligned} \tag{12.11}$$

举例来说，如果仅有磁场分量B_y和速度分量v_x，那么磁力项中留下的只有z方向的力，它与$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{v}$两者正交。

§12-5 赝　力

下面，我们将讨论的这一类力可以称为赝力。在第11章中，我们讨论了使用不同坐标系的乔和莫两个人之间的关系。我们假定，粒子的位置由乔测得的是x，由莫测得的是x'；于是定律如下所示

$$x = x' + s,\ y = y',\ z = z',$$

式中 s 是莫的坐标系相对于乔坐标系的位移。如果我们假定,运动定律对于乔是正确的,那么定律在莫看来又如何呢?首先,我们发现

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{ds}{dt}.$$

前面,我们考虑了 s 是常量的情况,我们发现 s 对运动定律毫无影响,因为 $ds/dt = 0$;因此,最终物理定律在两种坐标系中是相同的。但是我们可以取的另一种情况是 $s = ut$,式中 u 是沿直线运动的均匀速度,于是 s 不是常量,ds/dt 就不为零,但等于一个常数 u。然而,加速度 d^2x/dt^2 仍然与 d^2x'/dt^2 相同,因为 $du/dt = 0$。这就验证了我们在第 10 章中所使用的定律,即如果我们沿直线以均匀速度运动,则我们所看到的物理定律与处于静止时相同。这就是伽利略变换。但是,我们希望讨论 s 的更加复杂的有趣情况,比如说 $s = at^2/2$。于是 $ds/dt = at$,而 $d^2s/dt^2 = a$,一个均匀加速度;或者更复杂一些,加速度可以是时间的函数。这就意味着,虽然从乔的观点来看力的定律应为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$

而从莫看来则应是

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'} - ma.$$

也就是说,由于莫的坐标系相对于乔的坐标系是加速的,因此出现了额外项 ma,而莫就必须用这个量来修正他的力,以便使牛顿定律继续有效。换句话说,这是一个明显的、起源不明的神秘的新力,当然它的出现是因为莫使用了不正确的坐标系。这是赝力的一个例子;其他的例子出现在转动的坐标系中。

赝力的另一个例子是通常所谓的"离心力"。在转动坐标系中,例如一个旋转的箱子里的观察者在把东西抛向墙壁时,将会发现一种神秘的力,这个力用任何已知起源的力都解释不了。这些力的出现,只是由于观察者不具备牛顿坐标系这个事实,而牛顿坐标系是最简单的坐标系。

赝力可以通过一个有趣的实验来说明,在这个实验中,我们拖一桶水沿着一张桌子加速前进。当然,作用在水上的重力方向向下,但是由于水平方向的加速,也有一个水平作用着的赝力,方向与加速度方向相反。重力与赝力的合力与垂直方向成一角度,在加速运动期间,水的表面将与合力垂直,即与桌面倾斜成一角度,在桶的后面部分水面将高起一些。当我们不再拖水桶时,由于摩擦而使桶减速运动(赝力变换了方向),桶前面部分的水将高起一些(图 12-4)。

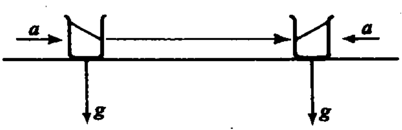


图 12-4 赝力的实例

赝力的一个非常重要的特征是,它们永远与质量成正比;重力也是这样。因此,有可能重力本身就是一种赝力。或许简单地说,引力就是由于我们没有正确的坐标系而引起的,这难道是不可能的吗?归根到底,如果我们设想一个物体正在加速,那么我们总可以得到一个与质量成正比的力。例如,一个关闭在箱子里的人(箱子静止放在地球上),就会发现有一个

力使他呆在箱子的地板上，这个力与他的质量成正比。但是如果根本没有地球，而箱子静止不动，那么箱子里的人就会漂浮在空中。另一方面，如果根本没有地球，而是有某个东西将箱子以加速度 g 向上拉，那么箱子里的人在分析物理现象时，应当发现一个赝力，这个力就像重力那样把人拉向地板。

爱因斯坦提出了著名的假设，加速度产生引力的赝物，加速度的力（赝力）与引力是不可能区分的；要说出给定的力中有多少是重力，有多少是赝力是不可能的。

把重力看作赝力，比如说我们都保持向下是由于我们在向上加速，这似乎没有问题，但是在地球另一边的马达加斯加人会怎样呢？——他们也在加速吗？爱因斯坦发现，每次只有在一个点上才可以把重力同时看成赝力，根据这个考虑，他认为世界的几何性要比普通欧几里得几何复杂得多。我们现在的讨论仅仅是定性的，并不想涉及超出一般概念之外的东西。为了对引力怎么会是赝力的结果有个大致的概念，我们来作一个纯粹是几何的，并不代表真实情况的说明。假定，我们大家都在二维空间中生活，对第三维空间毫无所知。我们只认为，我们处在一个平面上，但是假定我们实际上处在一个球的表面上。再假定我们沿地面发射出一个物体，物体上没有力作用着。它将到哪儿去呢？看来它似乎沿直线运动，但是必须仍处在球的表面上，球面上两点之间的最短距离是沿着一个大圆的；于是它就沿大圆运动。如果我们同样地发射另一个物体，但沿另一方向，它就沿另一大圆运动。因为我们认为，我们是处在一个平面上，可以预期，这两个物体之间的距离将随时间线性地增加，但经过仔细观察将会发现，如果两个物体运动得足够远，那么它们又会互相接近，仿佛相互吸引。但是它们并不相互吸引——关于这种几何学真是有点“古怪”。这个特定的例子并没有正确地描述欧几里得几何学“古怪”在哪里，但是它说明，如果我们使几何形状充分畸变，那么所有的引力以某种方式与赝力联系起来是可能的；这就是爱因斯坦引力理论的一般观念。

§12-6 核 力

作为本章的结束，我们简短地讨论一下仅有的另外一些已知的力，即所谓的核力。这些力存在于原子核的内部，尽管对它们进行了充分的讨论，但没有一个人曾经计算过两个原子核之间的力，甚至在目前还没有关于核力的已知定律。这些力的作用范围极小，差不多与原子核的大小（大约是 10^{-13} cm）相同。对于这样小的粒子，再加上作用距离又是如此微小，只有量子力学的定律才是正确的，牛顿定律就失效了。在核分析中，我们不再用力来思考，事实上我们可以用两个粒子的相互作用能的概念来代替力的概念，这一课题将在以后进行讨论。关于核力，能够写出的任何公式都是忽略了许多复杂情况的相当粗糙的近似；其中之一可以表述如下：在原子核之内的力并不随距离的平方反比变化，而是在一定距离 r 之后指数地衰减掉，用公式表示，即 $F=(1/r^2)\exp(-r/r_0)$，式中距离 r_0 的数量级是 10^{-13} cm。换句话说，粒子相隔距离稍大一些，力就消失了，虽然这些力在 10^{-13} cm 范围内是非常强的。就今天对核力的理解而言，它的定律是非常复杂的；我们不能以简单的方式去理解它们，因而分析核力背后的基本机理的整个问题仍未解决。在试图解决这个问题的过程中，发现了许多奇异粒子，例如 π 介子，但是这类力的起因仍然不清楚。

第 13 章 功与势能(上)

§ 13-1 落体的能量

在第 4 章中我们讨论过能量守恒。那里,我们没有引用牛顿定律,但是,按照牛顿定律,能量实际上是守恒的。我们来看一看能量守恒如何与牛顿定律相符合是很有意义的。为了清楚起见,我们从最简单的实例开始讨论,然后逐步推广到比较难的例子。

能量守恒最简单的例子是一个垂直下落的物体,它只在垂直方向上运动。一个仅仅在重力作用下改变高度的物体,由于下落运动而具有动能 T(或 K. E.),并且还具有势能 mgh(简写成 U 或 P. E.)。这两种能量的总和是恒量

$$\underset{\text{K.E.}}{\frac{1}{2}mv^2} + \underset{\text{P.E.}}{mgh} = 恒量$$

或

$$T + U = 恒量. \tag{13.1}$$

现在我们要证明这一表述是正确的。我们说"证明这一表述是正确的"是什么意思呢?从牛顿第二定律我们很容易说明物体如何运动,而且容易求出速度如何随时间而变化——速度的增加与时间成正比,高度随时间的平方而改变。所以,假若我们以物体静止的那个位置作为零点来测量高度,那么,高度等于速度的平方乘以一些常数就不足为奇了。不管怎样,我们还是来稍微仔细地看一下这个问题。

我们将动能对时间求微商,然后应用牛顿定律直接从第二定律求出动能是如何变化的。我们把 $mv^2/2$ 对时间求微商,由于假设 m 是常数,故得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m \cdot 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{13.2}$$

但由牛顿第二定律,$m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t) = F$,所以

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = Fv. \tag{13.3}$$

一般地讲,结果应该是 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$,但在一维情况下我们只要写成力乘以速度就够了。

在我们的简单例子中,力是常数,等于 $-mg$,即一个垂直向下的力(负号的意思是指作用向下),而速度当然是垂直位置(或高度)对时间的变化率。这样,动能的变化率就是 $-mg(\mathrm{d}h/\mathrm{d}t)$,非常奇怪,这个量是另外的物理量的变化率,它是 mgh 的时间变化率!因此,随着时间的推移,动能的变化在数量上等于 mgh 的变化,而符号相反;所以,这两个量的总和保持不变,证明完毕。

从牛顿第二定律我们已经证明,在恒力的情况下如果将势能 mgh 与动能 $mv^2/2$ 加在一起,则能量是守恒的。现在我们进一步看一下是否能将它推广,以加深我们的理解。能量守恒定律是否只对自由落体适用,还是可以适用于更一般的情况?根据对能量守恒的讨论,我们预计它对一个物体在重力作用下沿一曲线无摩擦地从一点运动到另一点的情形也是成立的(图 13-1)。

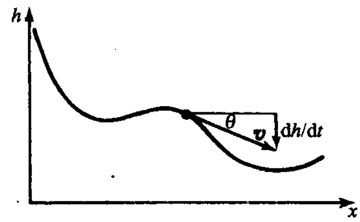


图 13-1　物体在重力作用下在一无摩擦的曲线上的运动

如果物体从原来的高度 H 到达某一高度 h,即使速度不再是沿垂直方向,上述方程仍然应当成立。我们要搞清楚为什么这条定律仍然正确。下面我们用同样的分析方法求出动能的时间变化率。诚然,动能的时间变化率仍是 $mv(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$,而 $m(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$则是动量大小的变化率,也就是运动方向上的力——切向力 F_t。于是有

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F_t v.$$

这里的速率是沿着曲线的距离对时间的变化率 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$,但切向力 F_t 不是 mg,而是随路径的距离 $\mathrm{d}s$ 与垂直的距离 $\mathrm{d}h$ 的比率而减弱,换句话说

$$F_t=-mg\sin\theta=-mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s},$$

所以

$$F_t\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-mg\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\right)\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)=-mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

因为 $\mathrm{d}s$ 被消掉了,于是我们就得到 $-mg(\mathrm{d}h/\mathrm{d}t)$,与前面所证明的一样,它等于 $-mgh$ 的时间变化率。

为了确切地理解能量守恒定律一般在力学中是怎样起作用的,我们来讨论几个有助于分析这个问题的概念。

首先我们讨论三维情况下一般的动能变化率。在三维空间的动能是

$$T=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2).$$

把它对时间求微商,我们得到三个项

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=m\left(v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+v_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+v_z\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right).\tag{13.4}$$

但 $m(\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t)$是沿 x 方向作用在物体上的力 F_x,于是式(13.4)的右边就是 $F_xv_x+F_yv_y+F_zv_z$。回忆一下矢量分析,我们记得这就是 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$,因此有

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}.\tag{13.5}$$

这个结果从下面的方法能够更快地推导出来:假如 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个矢量,它们都可以与时间有关,对 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 求微商,一般有

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{b}.\tag{13.6}$$

把这个关系式用到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{v}$ 的情形

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)}{\mathrm{d}t}=m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t}. \tag{13.7}$$

由于动能概念以及一般的能量概念很重要,所以在这些方程式中的一些重要项使用了各种名称。正如我们所知道的那样,$mv^2/2$ 称为动能,$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$ 称为功率,作用于物体上的力乘以物体的速度(矢量点积)是力传递给物体的功率。这样,我们就有了一个奇妙的定理:一个物体动能的变化率等于作用于该物体的力所消耗的功率。

然而,为了研究能量守恒,我们打算对它作进一步的分析。让我们估计一下在很短的时间 $\mathrm{d}t$ 内动能的变化。假若在式(13.7)两边都乘以 $\mathrm{d}t$,我们得到的动能的微小变化等于力"点乘"移动的距离元

$$\mathrm{d}T=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{13.8}$$

若对其积分,我们得到

$$\Delta T=\int_1^2\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{13.9}$$

这是什么意思呢?它的意思是:如果一个物体在力的作用下在某弯曲的路径上以任何方式运动,则当它沿着此曲线从一点移动到另一点时,动能的变化率等于沿着曲线的分力乘以位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的积分,积分从该点积到另一点。这个积分也有一个名称——叫做作用于物体的力所做的功。我们立即可以看到:功率等于每秒钟所做的功。我们也可以看到:仅仅是力在运动方向的分量对功有贡献。在我们的简单例子中,只有垂直方向的力,且只有单一的分量 F_z,它等于 $-mg$。不管物体在这些情况下如何运动,例如沿抛物线下落,总可以把 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 写成 $F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$,但除了 $F_z\mathrm{d}z=-mg\,\mathrm{d}z$ 之外其他都没有了,因为力的其他分量都是零。由此,在我们的简单情况下有

$$\int_1^2\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{z_1}^{z_2}-mg\,\mathrm{d}z=-mg(z_2-z_1), \tag{13.10}$$

所以我们又一次得到:在势能中只考虑物体下落的垂直高度。

现在我们来讲一讲单位。因为力以牛顿来量度,为了得到功,我们要乘上距离,所以功以牛顿米(N·m)来量度,但人们不喜欢说牛顿米,而宁可说焦耳(J)。1 N·m 称为 1 J;功是以焦耳来量度的。功率的单位是焦耳每秒,也叫瓦(W)。如果瓦乘以时间,就是所做的功。从技术上讲,电力公司对我们家庭所做的功,等于瓦乘以时间。千瓦小时就是这样得来的,1 kW·h 就是 1 000 W 乘以 3 600 s,或 3.6×10^6 J。

现在我们再举一个能量守恒的例子。考虑一个具有初始动能、快速运动的物体,它克服地板的摩擦而滑动,最后停了下来。开始滑动时动能不等于零;而最后停止时动能为零;是力做了功,因为每当有摩擦时,在与运动相反的方向上就存在分力,所以运动物体的能量不断地损耗掉。现在我们在支点的末端放置一个小质量的物体,使它在重力场中在垂直平面内无摩擦地振动。这时发生的现象就不同了,因为当物块向上运动时力向下,而当物块朝下运动时力亦朝下;所以,向上时 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的符号不同于向下时的符号。向上和向下路径上每个对应点的 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 数值大小完全相等,而符号相反,所以在这种情况下积分的净结果是零。于

是,物块返回到底部的动能与前一次离开底部时的动能是一样的;这就是能量守恒原理(注意,当存在摩擦时,乍看起来能量守恒似乎失效。我们不得不寻找其他形式的能量。事实表明,一个物体与另一物体摩擦时产生了热,暂时我们假定并不知道这些事)。

§13-2 万有引力所做的功

下面所讨论的问题要比上面的难得多;不像我们已经讨论过的那样,这里的力不是恒量,也不只是在垂直方向上。例如,我们想要讨论一个围绕太阳运动的行星,或者在空中围绕地球运转的卫星。

我们首先讨论一个物体从某点 1 开始,比方说直接落向太阳或地球(图 13-2)。在这种情况下能量守恒定律还适用吗?此时,唯一的差别是力随着物体的运动而变化,它不是恒量。正如我们所知道的,这个力是 GM/r^2 乘以质量 m,其中 m 是运动物体的质量。确实,当物体落向地球时,动能随下落的距离的增大而增加,恰如力不随高度而变化那种情况一样。问题在于:是否可能找到另一个不同于 mgh 的势能公式,即离地球的距离的函数,使得能量守恒仍然是正确的。

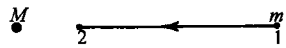


图 13-2 在重力作用下小质量 m 的物体向大质量 M 的物体落下

这个一维情况很容易处理,因为我们已知动能的变化等于 $-GMm/r^2$ 乘以位移 $\mathrm{d}r$ 的积分,积分从运动的一端到另一端

$$T_2 - T_1 = -\int_1^2 GMm\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2}. \tag{13.11}$$

对此情况不必乘上余弦,因为力与位移是同方向的。$\mathrm{d}r/r^2$ 是容易积分的;所得的结果是 $-1/r$,因此式(13.11)变为

$$T_2 - T_1 = +GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{13.12}$$

这样我们就得到一个不同的势能公式。式(13.12)告诉我们,在点 1、点 2 或其他任何地方所计算的 $(mv^2/2 - GMm/r)$ 的数量是一个不变的数值。

我们有了引力场中沿垂直方向运动的势能公式。现在有一个有趣的问题:我们能否在引力场中获得永久的运动?引力场是变化的;在不同的地方,引力场的方向和强度都不相同。我们是否能用一个固定的、无摩擦的滑道来这样做;从某一点开始,将物体提高到另一点,然后沿着一段弧把它移动到第三点,接着使它降低一段高度,以一定的倾斜度移动它,再沿别的路径把它拉高,以致当我们使物体回到初始点的时候,引力做了一些功,而使物体的动能有所增加呢?我们能否设计出某种曲线,使物体返回时要比先前运动得快一些,以致它周而复始地不断往复而获得永久运动?由于永久运动是不可能的,我们应该发觉上述过程也是不可能的。我们应该发现如下的命题:既然没有摩擦,那么物体既不会以较大的速度,也不会以较小的速度返回到原来的位置——它应能沿任何封闭路径不断地作往复运动。换句话说,循环一周重力所做的总功应为零。因为这个功如果不是零,我们就能从循环中取得能量(如果所作的功结果小于零,以致沿这一条路径得到的速率比原来的低,那么我们只要沿相反的路径就可以从中取得能量,因为力当然只取决于位置,与方向无关;如果一条路径是正的,那

么相反的一条路径就为负,所以除非是零,否则我们将从两种走法中的一种获得永久运动)。

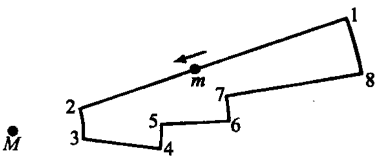


图 13-3 引力场中的闭合路径

引力所做的功果真是零吗?让我们来证明它确实为零。首先,我们要稍微解释一下为什么是零,然后用数学方法来检验一下。假设我们使用一条如图 13-3 所示的简单路径。其中一个质点从点 1 转移到点 2,然后沿圆弧到 3,回到 4,再到 5, 6, 7 和 8,最后返回到 1。所有这些线,都是以 M 为圆心的半径或圆弧。使 m 沿着这条路径运行要做多少功呢?在点 1 与点 2 之间所做的功是 GMm 乘以两点之间 $1/r$ 的差

$$W_{12}=\int_1^2 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_1^2 -GMm\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=-GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

从 2 到 3,力正好与曲线垂直,所以 $W_{23}\equiv 0$。从 3 到 4 做的功是

$$W_{34}=\int_3^4 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=-GMm\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_3}\right).$$

用同样的方法我们可求得

$$W_{45}=0,\ W_{56}=-GMm\left(\frac{1}{r_6}-\frac{1}{r_5}\right),$$

$$W_{67}=0,\ W_{78}=-GMm\left(\frac{1}{r_8}-\frac{1}{r_7}\right),$$

以及 $W_{81}=0$, 于是有

$$W=GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}-\frac{1}{r_6}+\frac{1}{r_7}-\frac{1}{r_8}\right).$$

我们注意, $r_2=r_3$, $r_4=r_5$, $r_6=r_7$ 以及 $r_8=r_1$,因此 $W=0$。

当然,我们可以怀疑这一曲线是否太特殊了。如果我们使用一条真实曲线将会怎样呢?让我们在真实曲线上试一试。首先我们断言,一条真实曲线总是可用如图 13-4 所示的一系列锯齿形曲线来适当模拟,由此,只需证明沿小三角形路径所做的功为零,就可证实沿真实闭合曲线一周所做的功为零;但不作一点分析,沿一个小三角形所做的功为零在开始时也不是显而易见的。我们将其中的一个三角形放大,如图 13-4 中所示。在三角形上,从 a 到 b 和 b 到 c 所做的功,与 a 直接到 c 所做的功是否相同呢?假定力作用在一个确定的方向上;作为一个例子,我们取一个三角形,它的 bc 边就在这个方向上。我们还假设三角形是如此小,以致作用于整个三角形上的力基本上是恒量。那么从 a 走到 c 所做的功是怎样的呢?它是

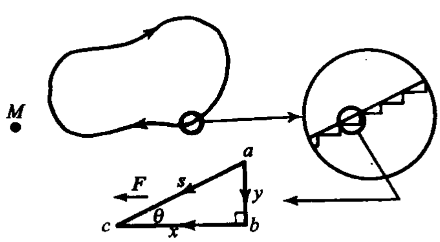


图 13-4 一条光滑闭合路径,表明用一系列径向与圆周阶梯近似表示的放大片段和一个阶梯的放大图

$$W_{ac}=\int_a^c \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=Fs\cos\theta,$$

等式第二步是因为力是一个恒量。现在我们计算沿三角形其他两边运动时引力所做的功。在垂直边 ab 上力垂直于 ds，所以做功为零。在水平边 bc 上

$$W_{bc} = \int_b^c \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = Fx.$$

这样我们就看到，沿小三角形两个边所做的功，与沿斜边所做的功是一样的，因为 $s\cos\theta$ 等于 x。前面我们已经证明，对于一系列如图 13-3 那种锯齿组成的任何路径，引力所做的功为零。现在又证明了如果以直穿对角来代替沿锯齿形运动，则所需做的功是相同的（只要锯齿形足够细小，我们总是可以使它非常细小）；因此，在引力场中，环绕任何封闭路径运行一周所做的功是零。

这是一个非常值得注意的结果。它告诉我们某些以前不知道的行星运动的情况：当行星围绕太阳（没有其他绕它运动的物体，也不存在其他力）运动时，它以这种方式运动，即在轨道的每一点上，任何一点速率的平方减去某些常数与该点半径的比值，其数值总是相等的。例如，行星越是靠近太阳，运行越是快，快多少呢？利用下面这样一个数量：如果行星不是环绕太阳运行，而是改变它的速度方向（但不改变它的数值大小）使它作径向运动，然后让它从某一特定的半径落到我们所感兴趣的半径上，那么，新的运动速度与它在真实轨道上的速度是相同的，因为这正好是沿复杂路径运动的另一个例子。只要我们使它回到同一距离，动能总是相同的。所以，无论运动是真实的、未受干扰的，或者用凹槽、无摩擦约束来改变运动方向，行星到达同一点的动能是相同的。

这样，正如我们前面所作的那样，当我们对行星在其轨道上的运动作数值分析的时候，能够通过计算这些恒量——每一步中的能量来检验一下我们是否引进了明显的误差。能量应当不会改变。对于表 9-2 的轨道而言，能量确实发生变化 *。它从开始到末尾大约变化了 1.5%。这是什么原因呢？或者是由于我们的数值计算采用了有限的数值间隔，或者是由于某些地方在运算上有点差错。

我们来考虑另一种情况下的能量：弹簧上一个小球的问题。当我们使小球离开平衡位置时，恢复力正比于位移。在这种情况下，我们能否得出一个能量守恒的定律？能！因为这种力所做的功是

$$W = \int_0^x F\mathrm{d}x = \int_0^x -kx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}kx^2. \tag{13.13}$$

因此，对于弹簧上的小球，我们可以得到：物体振动的动能加上 $kx^2/2$ 是一个恒量。现在来看一下这个过程是如何完成的。我们把小球往下拉着，它静止不动，所以速度是零。但此时 x 不是零，而是极大，所以有一定的能量当然是势能。现在我们放开小球，就会发生一些情况（详细情况不予讨论），但在任何瞬时的动能加势能必然是一个恒量。例如，当小球通过原来的平衡点时，其位移 x 等于零，但具有最大的 v^2，并且 v^2 随 x^2 的变大而变小，等等。所以，当小球上下运动时，x^2 与 v^2 保持均衡。于是我们有另一个规则，即如果力是 $-kx$，则弹簧的势能是 $kx^2/2$。

---

* 按表 9-2 的单位，能量是 $(v_x^2 + v_y^2)/2 - 1/r$。

§13-3 能量的求和

现在我们接着考虑如果有许多物体时将会产生怎样的更一般的问题。假设我们有一个许多物体的复杂问题,物体用 $i=1, 2, 3, \cdots$ 来标记,它们彼此互相施加引力,即相互吸引。结果会怎样呢?我们将证明:如果把所有质点的动能加起来,再把每一对质点相互之间的引力势能 $-GMm/r_{ij}$ 加上去,则其总和是一个恒量

$$\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \sum_{\text{对}} -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = \text{恒量}. \tag{13.14}$$

我们如何证明它?将方程的两端对时间求微商,则方程的右端为零。当对 $m_i v_i^2/2$ 求微商时,我们得出 m 乘速度的微商,这就是力,就像式(13.5)中那样。我们把牛顿万有引力定律所描写的力代入,就看到它等于

$$\sum_{\text{对}} -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}$$

对时间求微商。

总动能对时间的微商是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i m_i v_i \cdot \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \sum_i \sum_j \left(-\frac{Gm_i m_j \boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^3}\right) \cdot \boldsymbol{v}_i. \tag{13.15}$$

总势能对时间的微商是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\text{对}}\left(-\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}\right) = \sum_{\text{对}}\left(+\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}r_{ij}}{\mathrm{d}t}\right).$$

而

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}r_{ij}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2r_{ij}}\left[2(x_i - x_j)\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\right) + 2(y_i - y_j)\left(\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t}\right) + 2(z_i - z_j)\left(\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}t}\right)\right],$$

$$= \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \frac{\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j}{r_{ij}} = \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \frac{\boldsymbol{v}_i}{r_{ij}} - \boldsymbol{r}_{ji} \cdot \frac{\boldsymbol{v}_j}{r_{ji}}.$$

由于 $\boldsymbol{r}_{ij} = -\boldsymbol{r}_{ji}$,而 $r_{ij} = r_{ji}$,于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\text{对}}\left(-\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}\right) = \sum_{\text{对}}\left[\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3}\boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \frac{Gm_j m_i}{r_{ji}^3}\boldsymbol{r}_{ji} \cdot \boldsymbol{v}_j\right]. \tag{13.16}$$

我们必须注意 $\sum_i\left\{\sum_j\right\}$ 与 $\sum_{\text{对}}$ 所指的意思。在式(13.15)中,$\sum_i\left\{\sum_j\right\}$ 是指 i 依次可取 $i=1, 2, 3, \cdots$ 所有的数,对每一个 i, j 可取除 i 之外的任何数。因而假如 $i=3$, j 所取的值就是 $1, 2, 4, \cdots$。

另一方面,在式(13.16)中,$\sum_{\text{对}}$ 是指 i 和 j 的给定值只出现一次。这样,1 和 3 这对质点对总和式中只供献一项。为了保持这一目的,我们约定 i 可取 $1, 2, 3, \cdots$所有的数,而对

于每一个 i，令 j 只能取大于 i 的数。因此如果 $i=3$，j 只能取 4，5，6，…，但我们必须注意，对于每一个 i，j 值对总和有两项贡献，一项包含 $\boldsymbol{v}_i$，另一项包含 $\boldsymbol{v}_j$，这两项与式(13.15)中的一样，在该式中所有的 i 和 j ($i=j$ 除外) 之值都包括在求和之中，因此，把一项一项匹配起来，我们就可看出式(13.16)与(13.15)恰好相同，而符号相反，所以动能与势能之和对时间的微商的确为零。于是我们看到，对于许多物体来说，总动能是每一个物体的动能之和，而且势能也很简单，它是所有质点之间的势能之和。我们可以理解它为什么是每一对质点的能量之和：假设想要求得使这些物体彼此离开一段距离需要做功的总量，我们可以分几步将物体从无穷远的、不存在作用力的地方，一个一个地取得。首先，我们把物体 1 拿来，因为还不存在对它施加力的物体，所以不需要做功。接着，把物体 2 拿来，它需要做一些功，即 $W_{12}=-Gm_1m_2/r_{12}$。现在请注意(这一点很重要)：假如我们再把另一个物体放在第三个位置上，那么，在任何时刻，作用在物体 3 上的力可写成两个力——物体 1 和物体 2 作用于物体 3 上的力的总和。因此，所做的功是每个力所做的功之和，因为如果 $\boldsymbol{F}_3$ 能被分解成两个力之和

$$\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{F}_{13}+\boldsymbol{F}_{23},$$

则功就是

$$\int\boldsymbol{F}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int\boldsymbol{F}_{13}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}+\int\boldsymbol{F}_{23}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=W_{13}+W_{23}.$$

这就是说，所做的功是克服第一个力和第二个力的功之和，就像每个力单独作用那样。用上述方法我们可以看到，要使这些物体集合成一定的组态所需的总功，恰好是式(13.14)作为势能所给出数值。正是由于引力服从力的叠加原理，所以我们能够把总势能写成每一对质点之间势能的总和。

§13-4　巨大物体的引力场

现在我们将要计算在一些涉及到质量分布的物理状况中遇到的场。迄今为止，我们只讨论过质点的情况，还没有考虑过质量分布的问题，所以计算不止一个质点所产生的力是很有意义的。首先，我们将求出无限大物质薄片作用于一个物体上的万有引力。物质薄片作用在位于 P 点处单位质量上的力(图 13-5)，显然是指向物质薄片的。假设 P 点离薄片的距离为 a，且设这块大薄片单位面积的质量为 μ。我们设 μ 是常数，即认为薄片是均匀的。现在要问：在薄片上与最接近 P 点的 O 点的距离为 ρ 到 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 之间的质量 $\mathrm{d}m$ 所形成的场 $\mathrm{d}\boldsymbol{C}$ 有多大？答案是：$\mathrm{d}\boldsymbol{C}=G(\mathrm{d}m\boldsymbol{r}/r^3)$，这个场的指向是沿着 $\boldsymbol{r}$ 方向的；我们还知道，当把所有的小矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{C}$ 相加而得 $\boldsymbol{C}$ 的时候，只剩下 x 方向的分量。$\mathrm{d}\boldsymbol{C}$ 的 x 分量是

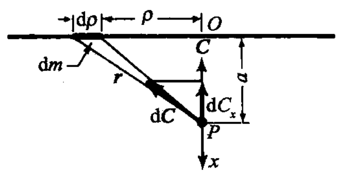


图 13-5　无限大物质薄片对一个质点产生的万有引力 F

$$\mathrm{d}C_x=\frac{G\mathrm{d}mr_x}{r^3}=\frac{G\mathrm{d}ma}{r^3}.$$

现在所有与 P 具有相同距离 r 的 $\mathrm{d}m$ 将产生相同的 $\mathrm{d}C_x$，因此，我们立即可以把 $\mathrm{d}m$ 写成 ρ 到 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 之间这一圆环中的总质量，即 $\mathrm{d}m=\mu2\pi\rho\mathrm{d}\rho$(若 $\mathrm{d}\rho\ll\rho$，$2\pi\rho\mathrm{d}\rho$ 就是半径为 ρ、宽度为 $\mathrm{d}\rho$ 的圆环面积)，这样

$$dC_x = G\mu 2\pi\rho \frac{d\rho a}{r^3}.$$

于是,因为 $r^2 = \rho^2 + a^2$, $\rho d\rho = r dr$, 所以有

$$C_x = 2\pi G\mu a\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = 2\pi G\mu a\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\infty}\right) = 2\pi G\mu. \tag{13.17}$$

这就是说,力与距离 a 无关!为什么?难道我们弄错了吗?也许你会认为:物体离我们越远,作用力应该越弱;但不是这样!如果我们接近这个无限大薄片,那么这块薄片上的绝大部分物质是处于不适宜的角度在吸引我们。假如我们离得远一些,则薄片上有较多的物质处于更有利的角度把我们拉向薄片。在任何距离上,最有效的物质位于一定的圆锥内。当我们远离薄片时,作用随距离的平方而减少;但在同一角度上,同一圆锥内有更多的物质正好随距离的平方而增加!注意到下面的事实我们就能作出严格的分析:在任何给定的锥体中,微分元的贡献事实上与距离无关,因为一个给定的质量所产生的力的大小随距离的变化与包含在圆锥内的质量多少随距离的变化,是相应而相反的。当然,这个作用力并不是真正常数,因为当我们走到薄片的另一面时,它的符号就改变了。

事实上,我们已经解决了一个电学上的问题:假如我们有一个带电的薄板,其单位面积的电量为 σ,那么薄板外面一点的电场是 $\sigma/(2\varepsilon_0)$。假若薄板带正电荷,电场方向就由薄板指向外面;假若薄板带负电荷,电场方向就指向薄板。为了证明这一点,我们只要注意引力中的 G 相当于电学中的 $1/4\pi\varepsilon_0$。

现在我们假设有两个平板,其中一个带正电荷 $+\sigma$,另一个带负电荷 $-\sigma$,它们之间的距离是 D。现在要问场是怎样的?在两个平板外面,场是零。为什么?因为一个吸引,另一个排斥,而吸引力与排斥力都与距离无关,所以它们相互抵消掉了。同样,两个平板之间的力显然是单独一个平板的两倍,即 $E = \sigma/\varepsilon_0$,且电场方向是从带正电荷的平板指向带负电荷的平板。

现在我们来研究一个非常有趣而重要的问题。这个问题是这样的:地球对其表面或外面一点所产生的力,正像地球质量全部集中在地心所产生的力一样。我们一直假设问题的答案就是如此,但这种假设的正确性并不明显,因为当靠近一个物体时,有些质量离我们非常近,而有些质量则离开我们较远。但当我们把所有的效果加起来,净的作用力正好与质量全部集中在中点的力一样,这似乎是一个奇迹。现在我们来验证这一奇迹的正确性。我们用一个均匀的空心薄壳来代替整个地球,令薄壳的总质量是 m,让我们来计算一下离球心的距离为 R,质量为 m' 这一质点的势能(图 13-6),并且证明这个势能与质量 m 集中在球心一点时的势能一样(势能比场容易计算,因为我们可以避免角度的麻烦,只要把各部分质量的势能相加就可以了)。如果我们令某一个截面与球心的距离为 x,那么在薄片 dx 中的所有质量与 P 点的距离都是 r,由这个圆环产生的势能应该是 $-Gm'dm/r$;那么在小薄片 dx 中的质量是多少呢?其数量是

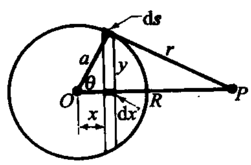


图 13-6 一个质量或电荷的球状薄壳

$$dm = 2\pi y\mu ds = \frac{2\pi y\mu dx}{\sin\theta} = \frac{2\pi y\mu dx a}{y} = 2\pi a\mu dx,$$

其中 $\mu = m/(4\pi a^2)$ 是球壳的质量面密度(球带的面积正比于它的轴宽是一个一般的规则)。

$\mathrm{d}m$ 的势能应该是

$$\mathrm{d}W=-\frac{Gm'\mathrm{d}m}{r}=\frac{-Gm'2\pi a\mu\mathrm{d}x}{r}.$$

但我们看出

$$r^2=y^2+(R-x)^2=y^2+x^2+R^2-2Rx=a^2+R^2-2Rx.$$

这样就有

$$2r\mathrm{d}r=-2R\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{r}=\frac{\mathrm{d}r}{R}.$$

因此有

$$\mathrm{d}W=-\frac{Gm'2\pi a\mu\mathrm{d}r}{R},$$

以及

$$\begin{aligned}W&=\frac{-Gm'2\pi a\mu}{R}\int_{R-a}^{R+a}\mathrm{d}r\\&=\frac{-Gm'2\pi a\mu}{R}2a=\frac{-Gm'(4\pi a^2\mu)}{R}\\&=\frac{-Gm'm}{R}.\end{aligned}\tag{13.18}$$

这样，对于一个球状薄壳，在其外面质量 m' 的势能与薄壳质量全部集中在球心时的势能是完全一样的。地球可以想象成为由一系列不同的壳层所组成，每一壳层贡献一个能量，这个能量只取决于壳层的质量以及离开中心的距离。把各壳层的质量统统加起来，我们就得到总的质量，因此，地球的作用力就好像所有的物质都集中在它的中心一样！

但是必须注意：假若有一个点 P 是在球壳里面，那将会怎样？当 P 点在球壳里面，我们可以作同样的计算而得到两个 r 的差，但现在它的形式是

$$a+R-(a-R)=2R,$$

即两个 r 的差是 P 点离中心距离的两倍。换言之，W 的结果是

$$W=-\frac{Gm'm}{a},$$

它与 R 和 P 点的位置都无关，也就是说，不论物体在球内什么地方，其势能都相同，因此不存在作用力；当我们在球内移动物体时不做功。如果一个物体无论放在球内什么地方，其势能都一样，则不可能有力作用于该物体上。所以在球内不存在作用力，只在球外存在作用力；而球外的作用力与质量全部集中在球心时的作用力是完全相等的。

第14章 功与势能(下)

§14-1 功

上一章我们介绍了许多新的概念和结论,它们是物理学的核心。这些概念是如此重要,以至于有必要另立一章对它们作进一步考察。在本章中,我们将不再重复用来得到那些结果的“证明”或专门技巧,而将集中讨论概念本身的问题。

在学习任何一个与数学有关的技术性课题中,人们面临着弄懂并记住大量事实和概念的任务。可以“证明”存在着某些关系将这些事实和概念联系起来。人们容易把证明本身与它们之间所建立起来的关系混淆起来。很清楚,要学习和记住的要点是事实和概念之间的关系,而不是证明本身,在任何特定的情况下,我们可以或者说“能够证明”某某是正确的,或者直接来证明它。几乎在所有情况中,我们所采用的那种特殊证明首先是为了能将它很快地和容易地写在黑板上或纸上,并且使它尽可能地清楚。结果,看上去似乎这个证明很简单,而事实上,作者可能花上好几个小时的时间,企图用不同的方法去计算这同一个问题,直到他找到一个最简洁的方法,从而能够表明可以在最短的时间内把它证明出来!当看到一个证明时,要记住的并不是证明本身,而是那些能够证明是正确的东西。当然,如果证明中包含了一些数学推导或人们以前未见过的“技巧”,那么我们所需要注意的也不完全是技巧,而是所涉及的数学概念。

的确,一个作者在一门课程中(例如本课程)所作的全部论证,并不是他从学习大学一年级物理时就记住的。完全相反:他只记得某某是正确的,而在说明如何去证明的时候,需要的话,他就自己想出一个证明方法。无论哪个真正学过一门课程的人,都应遵循类似的步骤去做,而死记证明是无用的。这就是为什么我们在本章中将避开前面有关各种表述的证明,而只是总结一下结果。

第一个需要领会的概念是力所做的功。物理学上“功”这个词并不是通常在“全世界无产者联合起来!”的口号中那个词所指的意思*,而是不同的两个概念。物理上的功用 $\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$ 来表示,称为“$\boldsymbol{F}$ 点乘 $d\boldsymbol{s}$ 的线积分”,它所指的意思是:如果在一个方向上有一个力作用于物体,使得物体在某一方向上发生位移,则只有在位移方向上的分力做了功。假若力是恒力,位移是有限的距离 $\Delta\boldsymbol{s}$,则运动中恒力在整个距离上所做的功只是沿 $\Delta\boldsymbol{s}$ 方向的分力乘以 Δs。规则是“力乘距离”,而真正的含义是:位移方向上的分力乘 Δs,也可以说成是作用力方向上的位移分量乘以 $\boldsymbol{F}$。显然,与位移成直角的力什么功也不做。

如果把位移矢量 $\Delta\boldsymbol{s}$ 分解成分量,换句话说,如果把 $\Delta\boldsymbol{s}$ 实际上看成沿 x 方向的位移分

* 英文中“功(work)”与“无产者(worker)”出于同一词源。——译者注

量 Δx，y 方向上的位移分量 Δy，以及 z 方向的位移分量 Δz，那么物体从一个地方移到另一地方所做的功可以分成三部分来计算，即计算沿 x 方向、y 方向和 z 方向的功。沿 x 方向所做的功只涉及到 x 方向的分力，即 F_x，依此类推，因此所做的功是 $F_x\Delta x+F_y\Delta y+F_z\Delta z$。当力不是恒力，而我们遇到的又是复杂的曲线运动时，必须把路程分成许多小的 $\Delta \boldsymbol{s}$，再把物体沿每个 $\Delta \boldsymbol{s}$ 移动所做的功统统加起来，并取 $\Delta \boldsymbol{s}$ 趋于零时的极限。这就是“线积分”的含意。

我们刚才所说的一切都包含在 $W=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$ 这一式子中。可以说这真是一个奇妙的式子，但要去理解它的意义或弄懂它的一些推论，则是另一回事了。

物理学上“功”这个词的含义与一般情况下的含义是不同的，为此我们必须仔细观察它显示出不同含义的某些特殊情况。例如，按照物理上的功的定义，如果一个人把 100 lb 的重物提在手中一段时间，他并没有做功。然而，每个人都知道他会出汗，颤抖，喘气，好像他在奔上楼梯一样。可是，奔上楼梯则被认为是在做功(按照物理学，下楼时，地球对人做功)，但仅仅把物体保持在一个固定的位置上是不做功的。显然，物理学上功的定义与生理学中功的定义不一样，我们将对其原因作一简单的探讨。

当一个人提着重物的时候，他必须做“生理”上的功，这是事实。为什么他会出汗？为什么他提着重物时需要消耗营养？为什么仅仅是为了提起重物人体内部机构需要全力以赴地工作？实际上，只要将重物放在桌子上就不必再费力气；而静止和平稳的桌子不需要供给任何能量就能够把相同的重物保持在相同的高度上！生理上的情况则如下所述：在人体和其他动物内有两种肌肉，一种称为横纹肌或骨胳肌，例如我们手臂中的那种肌肉，它可以随意控制；另一种称为平滑肌，如人肠内的肌肉，或蛤蜊之类动物中使蛤壳闭拢的闭壳肌。平滑肌工作得非常缓慢，但它能够保持一种“姿势”，也就是说，假若蛤蜊要把它的外壳闭拢在某一个位置上，即使有很大的力去改变它，它将仍然保持那个位置。在长时间的负荷下它仍然保持一定的位置而不感觉疲劳，因为这与桌子支持重物非常相似，它“固定”在一个确定的位置，而它的分子就暂时卡在那里不做功，所以蛤蜊不需花费力气。事实上，我们提着一个重物之所以要花费力气，仅仅是由于横纹肌结构的关系。当神经脉冲传到肌肉纤维的时候，该纤维就会抽搐一下，然后松弛下来，所以当我们拿起一个重物时，大量的神经脉冲流传到肌肉，大量的抽搐维持着重物，而另一些肌肉纤维则松弛着。当然，我们可以看到：当我们提起一个重物而感到疲劳时，我们就开始颤抖。其原因是神经脉冲流不规则地传过来，而肌肉疲劳了，反应得不够快。为什么会出现这种不能胜任的样子呢？我们不知道确切的原因，但是人类还没有进化到能产生快速作用的平滑肌。平滑肌支撑重物将有效得多，因为当你站着的时候，平滑肌会卡住，这不涉及到做功问题，也不需要能量，可是，它的缺点是动作非常缓慢。

现在回到物理学上来，我们或许要问：为什么我们要计算所做的功？回答是：计算功是有意义和有用处的。因为作用于一个质点的合力对质点所做的功，恰好等于该质点的动能的变化。也就是说，假若推动一个物体，物体会获得速度，而且 $\Delta v^2=2\boldsymbol{F}\cdot\Delta \boldsymbol{s}/m$。

§ 14-2 约束运动

力和功的另一个有趣的特性是：假设我们有一个倾斜的或弯曲的轨道，质点必须沿着轨道运动，但不存在摩擦。或者我们有一个由一根弦和一个重物组成的摆；弦约束重物围绕支

点作圆周运动。如果重物摆动时,弦碰到一个木栓上,支点就改变了,结果是重物沿着两个不同半径的圆运动。这就是我们称为固定的无摩擦约束运动的例子。

在固定的无摩擦约束运动中,约束力不做功,因为约束力始终与运动方向垂直,所谓"约束力"我们指的是直接由约束本身作用到物体上的力——例如与轨道接触而引起的接触力,或者弦的张力。

一个质点在重力的影响下沿斜面运动时,所涉及的力是非常复杂的,因为有约束力和重力等等。然而,如果我们根据能量守恒定律并且只考虑重力来计算其运动,所得出的结果是正确的。看来相当奇怪,因为严格地讲,这并不是正确的方法——我们应当用合力来计算。但是,结果只有重力所做的功使动能改变,因为约束力所做的功是零(图 14-1)。

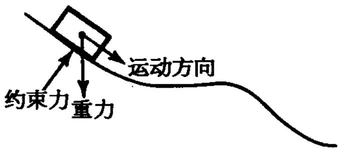


图 14-1 作用于一个(无摩擦)滑动物体上的力

这里的要点是:如果一个力能够分解为两个或两个以上分力之和,则合力沿某一曲线所做的功是各分力所做之功的总和。假如我们把力分解为重力与约束力等各种效应的矢量和,或者把所有的力分解成 x 方向的分量和 y 方向的分量,或者任何其他我们所希望的分解方式,那么净力所做的功等于被分解成的各分力所做之功的总和。

§14-3 保 守 力

自然界中有些力,例如重力,具有非常引人注意的、我们称之为"保守"的性质(这里"保守"这个词并不涉及政治上的概念,它又是一个"怪词")。如果我们要计算一个力使物体沿曲径从一点运动到另一点时做了多少功,一般这个功依赖于曲径,但在特殊情况下,它与曲径无关。假若它不依赖曲径,那么我们说这个力是保守力。换句话说,在图 14-2 中,假若沿曲线 A 计算从位置 1 到位置 2 的力乘距离的积分,再沿曲线 B 计算这一积分,我们得到相同的焦耳数,如果这个结果对这两点之间的每一条曲线的积分都正确,并且无论我们取哪两点这个说法都成立,那么我们就称这个力为保守力。在这种情况下,从 1 到 2 的功的积分可以用简单方法计算出来,而且可以用一个式子来表示所得的结果。一般情况下这是不易做到的,因为我们还得指定一条曲线,但当功与曲线无关时,功当然就只取决于 1 和 2 的位置了。

为了说明这个概念,现作如下考虑。

我们在任意位置上取一个"标准"点 P(见图 14-2),则我们所要计算的从 1 到 2 的功的线积分,可看作从 1 到 P 点所做的功再加上从 P 点到 2 所做的功,因为这里的力是保守力,所做的功与曲线无关。现在,从 P 点到空间一个特定点所做的功是那一点的空间位置的函数。当然,它实际上也取决于 P,但在分析时,我们使任意点 P 一直固定不变。如果这样做,则从 P 点到 2 点所做的功就是最终位置 2 的某个函数。它取决于 2 所在的位置;如果到达另外的某一点,我们得到的就是不同的答案。

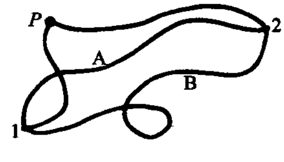


图 14-2 力场中两点之间的可能途径

我们称这个位置函数为 $-U(x, y, z)$,并且当我们要提到坐标为 (x_2, y_2, z_2) 的某个特定点 2 时就把 $U(x_2, y_2, z_2)$ 简写成 $U(2)$。从点 1 到 P 所做的功也可以写成沿着相反的途

径把全部 $d\boldsymbol{s}$ 反过来的积分。也就是说,从 1 到 P 所做之功是从 P 到 1 所做之功的负值

$$\int_1^P \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_P^1 \boldsymbol{F}\cdot(-d\boldsymbol{s}) = -\int_P^1 \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

这样,从 P 到 1 所做的功是 $-U(1)$,从 P 到 2 所做的功是 $-U(2)$。因此,从 1 到 2 的积分等于 $-U(2)$ 加上 $-U(1)$ 的负值,即

$$U(1) = -\int_P^1 \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s},\ U(2) = -\int_P^2 \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s},$$

$$\int_1^2 \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = U(1) - U(2). \tag{14.1}$$

我们把 $U(1)-U(2)$ 称为势能的变化,并把 U 称为势能。我们说,当物体处于位置 2 时,它具有势能 $U(2)$,在位置 1 时,具有势能 $U(1)$。如果物体处于位置 P,它的势能为零。假如我们用另外一点 Q 来代替 P,结果表明,势能将只会改变一个常量(这留给读者自己去证明)。由于能量守恒只与"能量的变化"有关,所以,如果我们在势能上再加上一个常量是没有关系的。可见 P 点可以任意选取。

现在我们有了如下两个命题:(1)力所做的功等于质点动能的改变;(2)在数学上,保守力所做的功等于势能函数 U 的变化的负值。作为这两者的推论,我们得到一个定理:如果只受保守力的作用,则动能 T 加势能 U 是一个恒量

$$T + U = \text{恒量}. \tag{14.2}$$

现在我们来讨论某些场合下的势能公式。如果有一个均匀的重力场,当我们不涉及可与地球半径相比的高度,那么力是一个沿垂直方向的恒力,所做的功就是力乘以垂直距离。于是

$$U(z) = mgz, \tag{14.3}$$

而相当于势能为零的 P 点刚巧是 $z=0$ 的平面上的任意一点。如果有必要,我们还可以把势能写成 $mg(z-b)$,在分析中,除了在 $z=0$ 处的势能应该是 $-mgb$ 之外,其余的所有结果当然都是一样的,情况并不会有什么不同,因为我们要考虑的只是势能之差。

把弹簧从平衡点压缩距离 x 所需的能量是

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \tag{14.4}$$

在弹簧的平衡位置 $x=0$ 处,势能为零。我们也可以加上一个所需要的常数。

相距为 r 的两个质点 M 与 m,其引力势能是

$$U(r) = -GMm/r. \tag{14.5}$$

这里选择的常数应使无穷远处的势能为零。当然,同样的公式可应用到电荷问题上,因为两者有相似的定律

$$U(r) = q_1q_2/(4\pi\varepsilon_0 r). \tag{14.6}$$

现在我们来具体地应用其中的一个公式看看是否明白这些公式的含义。问题:为了使火箭飞离地球,火箭发射的速度要多大?解答:动能加势能一定是恒量。当火箭"脱

离”地球时，它将在离开地球千百万公里之外，如果它刚好能脱离地球，我们可以假定它到达那里时以“零速度”在勉强运动。设地球的半径为 a，质量为 M。动能加势能的总和最初是由 $(mv^2/2 - GmM/a)$ 给定。火箭运动到最后这两个能量的总和必定与此相等。动能在最后将为零，因为假设火箭那时实质上以“零速度”在勉强漂移，而势能为 GmM 除以无穷大，其值为零。因此，式子的另一端中每一项都是零，这就告诉我们速度的平方必然是 $2GM/a$，而 GM/a^2 就是所谓的重力加速度 g，于是

$$v^2 = 2ga.$$

为了使人造卫星不断地绕地球转动，它必须以多大的速度运行？我们早已算出来了，是 $v^2 = GM/a$。因此，要离开地球，其速度必须是刚好围绕地球表面附近运行所需速度的 $\sqrt{2}$ 倍。换句话说，离开地球所需的能量必须是环绕地球运转所需能量的两倍(因为能量按速度的平方变化)。因此，在历史上首先是使人造卫星围绕地球运行，这要求人造卫星具有 5 $\mathrm{mi \cdot s^{-1}}$ 的速度。其次是发射永远离开地球的人造卫星，此时需要两倍的能量，即 7 $\mathrm{mi \cdot s^{-1}}$ 的速度。

我们继续讨论势能的特征。我们考虑两个分子或两个原子的相互作用，例如两个氧原子的相互作用。当它们离得很远时，相互之间的作用力是一种引力，此引力与原子间距离的 7 次方成反比。而当两个原子非常接近时，则具有很大的斥力。假如对距离的 7 次方的倒数进行积分求所做的功，我们就得出势能 U，它是两个氧原子之间径向距离的函数，在距离较大时，势能 U 按照距离的 6 次方的倒数而变化。

设我们画一个势能 $U(r)$ 的曲线图，如图 14-3 所示。我们从很大的 r 开始，按 $1/r^6$ 来画，如果距离足够近，就到达势能最小点 d。$r = d$ 处势能最小的意思是：如果从 d 开始，移动很小一段距离，所做的功，即移动这段距离时的势能变化，几乎为零，因为在曲线底部势能的变化非常小。这样，在 $r = d$ 这一点不存在作用力，所以它是一个平衡点。另一个看出它是平衡点的方法是：无论从哪一个方向上离开 d 都要做功。当两个氧原子稳定下来，以至于从它们之间的束缚力中不再有能量释放出来时，它们就处于最低能量状态，彼此之间隔开这个距离 d。氧分子处于“冷”态时就是这种样子。如果我们对它加热，原子就要发生振动，并且彼此之间更加分开，事实上，我们能够使它们分开，但这样做需要消耗一定数量的功或能量，这些功或能量等于 $r = d$ 与 $r = \infty$ 之间的势能差。当我们试图使两个原子靠得非常近时，由于它们彼此排斥，其势能增加得非常快。

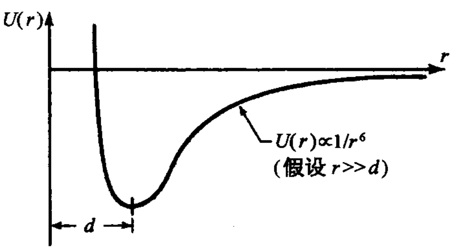


图 14-3　两个原子之间的势能与它们之间的距离的关系

我们引出势能曲线的原因，是由于力的概念对量子力学来说不太合适，在那里，能量的概念是最自然的。当我们进一步考虑核物质之间以及分子之间等等的更高级的作用力时，我们发现虽然力和速度都“溶化”和消失了，但是能量概念继续存在。因此，在有关量子力学的书中我们看到有势能曲线，但是很少看到两个分子之间作用力的曲线，因为在那时人们是用能量，而不是用力来分析问题。

其次我们注意到，如果有几个保守力同时作用于一个物体，那么，该物体的势能是每一

个力的势能的总和。这与我们前面所提到的是同一个命题，因为，假若力能表达为分力的矢量和，则总的力所做的功是分力所做的功的总和，因此能把它分析为各个力的势能的改变。于是，总的势能是所有各部分的势能的总和。

我们可将此推广到包含很多物体相互作用的系统中去，例如木星、土星、天王星等，或者是氧、氮、碳等系统，系统中的物体彼此成对地作用着，并且作用力都是保守力。在这种场合下，整个系统中的动能就是所有个别原子或行星或其他什么东西的动能的总和，而系统的势能则是每对物体相互作用势能的总和，在计算一对质点的相互作用势能时，其他质点都好像不存在一样（这种说法对分子实际上是不正确的，因而公式要复杂一些；对牛顿万有引力，这当然是正确的，而对分子力则近似地正确。对分子力来说也存在势能，但它往往是原子位置的比较复杂的函数，而不只是各对分子的势能的总和）。因此，在万有引力的特殊情况下，势能是 $-Gm_im_j/r_{ij}$ 对所有的 i，j 求和，如式(13.14)所表示的那样。式(13.14)用数学方法表达了如下定理：总的动能加上总的势能不随时间而变化。当各种行星周而复始继续不断地运行和旋转时，如果计算它的总动能和总势能，我们发现，其总和保持不变。

§14-4　非 保 守 力

我们花了相当多的时间讨论保守力；关于非保守力又是怎样呢？我们对这个问题将采取比通常深入的看法，并将说明不存在非保守力！实际上，自然界所有的基本力都是保守力。这不是牛顿定律所得出的结果。事实上，按照牛顿自己的看法，力可以是非保守的，如摩擦力显然就是非保守力。但当我们说到摩擦力显然是非保守力时，我们采用的是现代的观点，即认为粒子之间的最基本的力都是保守力。

例如，如果我们分析一个很大的球状星团，我们从一张这种星团的照片上可以看到有几千个星球彼此相互作用，那么，总势能的式子只不过是一项加另一项等等，对所有各对星球求和，而动能是所有各个星球动能之和。但星团作为一个整体也在空间漂移，假若我们离开它足够远，不能详细观察它，可以把它想象为一个单一的物体。假若对它施加作用力，其中有一部分力最终驱使它作为整体向前运动，我们就看到物体的中心在运动。另一方面，有些力可以说是“消耗”在增加内部“粒子”的动能或势能上。例如，我们假定这些力的作用使整个星团扩张，并且使其中的质点运动得更快。整个体系的总能量实际上是守恒的，但用我们不精确的眼睛从外面看（它不能看出里面运动的混乱情况），并且把整个物体运动的动能看作单一物体的动能，能量就似乎是不守恒了。但这是由于我们对看到的东西缺乏了解。结果实际的情形却是：当我们足够仔细地观察时，世界上的总能量（动能加势能）是一个恒量。

当我们非常仔细地研究原子范围的物质时，物体的总能量并不一定能够方便地分成动能与势能两部分的，而且这种区分也不一定必要。但要这样做几乎总是可能的，所以我们说这种区分总是可能的，并且世界上动能加势能是一个恒量。这样，在整个世界内总的动能加势能是一个恒量，如果“世界”是一块孤立物质，若无外力作用，其能量也是一个恒量。但正如我们已经看到的那样，同样东西的动能和势能中有些可以在其内部，例如内部的分子运动，这是从我们还没有注意到它这个意义上说的。我们知道，在一杯水中一切都在晃动着，所有各部分一直在运动着，所以一杯水内部有一定的动能，通常我们可能不会去注意它。我们不注意原子的运动，这种运动产生热，所以我们不称它为动能，而热原来也是动能。内部

的势能同样可以具有一定的形式,例如化学能的形式:当我们燃烧汽油时,由于新的原子排列比旧的原子排列所具有的势能低,所以有能量释放出来。把热纯粹当作动能并非严格,因为其中包含一些势能,反之化学能也不能单纯说成是势能,也包含少量的动能。把上面所说的话并在一起就是说:一个物体内部的总的动能和势能一部分是热,一部分是化学能,等等。总之,所有这些不同形式的内能在上述意义中常常看作是"损失掉"的能量;当我们研究热力学的时候将会对此更加清楚。

作为另一个例子,当有摩擦存在时动能并非真正损失掉,即使一个滑动着的物体停了下来,看上去动能似乎损失掉了,其实,动能并没有损失掉,因为内部原子以比以前更大的动能晃动着,虽然我们不能看到这些,但可用测定温度的办法来量度它。当然,如果我们不考虑热能,那么,能量守恒定律就显得不正确了。

另一种情况是,当我们只研究系统的某一部分时,能量守恒也似乎不正确。当然,如果某个物体与外面的某个物体相互作用,而我们忽略了把这种作用计算进去,此时能量守恒定理就会显得不正确了。

在经典物理学中,势能只包括引力能和电能,现在我们则还有核能和其他能量。例如,光能在经典理论中必须作为一种新的能量形式,但是如果我们愿意的话,也可以把光能想象为光子的动能,这样,式(14.2)仍旧是正确的。

§14-5 势 与 场

现在我们将要讨论几个与势能以及场的概念有联系的问题。假定我们有两个大物体 A 和 B,以及第三个很小的物体。第三个小物体受到两个大物体的万有引力吸引,吸引的合力为 $\boldsymbol{F}$。在第12章中我们已经注意到,作用在一个质点的万有引力可以写成它的质量 m 乘以另一个矢量 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}$ 只取决于质点的位置

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{C}.$$

于是,我们可以这样来分析重力:想象在空间每一位置都存在一个矢量 $\boldsymbol{C}$,它"作用"于可能放在该处的一个质量上,但不论实际上是否有质量被它作用,矢量 $\boldsymbol{C}$ 本身总是存在的。$\boldsymbol{C}$ 有三个分量,每一个分量都是 (x, y, z) 的函数,即空间位置的函数。这样的东西我们称为场,我们说物体 A 和 B 产生了场,即它们"创造"了矢量 $\boldsymbol{C}$。当一个物体被置于场内,作用于物体的力等于该物体的质量乘以物体所在处的场矢量的数值。

我们对势能也可以同样处理:由于势能是 $(F)\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{s})$ 的积分,可以把它写成 m 乘以(场)$\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{s})$ 的积分,这只是改变一下标度,所以我们看到一个物体在空间一点 (x, y, z) 所具有的势能 $U(x, y, z)$,可以写成 m 乘以另一个我们称为 Ψ 的势函数积分 $\int\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\Psi$,就像 $\int\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-U$ 一样,两者之间只相差一个标度因子

$$U=-\int\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-m\int\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=m\Psi. \tag{14.7}$$

在空间每一点上有了这个函数 $\Psi(x, y, z)$ 后,我们就可以直接计算物体在空间任何一点的势能,即 $U(x, y, z)=m\Psi(x, y, z)$。这看起来似乎价值不大,实际上并非没有价值,因为

有时用空间各处的 Ψ 值而不是用 C 值能更好地描述场。我们可以用标量函数 Ψ 来代替一定要写出三个复杂的分量的矢量函数。而且，如果场是由许多质量产生的，计算 Ψ 比计算 C 的任何一个分量要容易得多，因为势是一个标量，只要相加就行了，不必为方向而操心。同样，我们会看到，从 Ψ 很容易重新得出场 C。假设质点 m_1，m_2，… 位于点 1，2，… 处，我们希望知道任何一点 p 的势函数 Ψ。很简单，它就是各个质点在 p 点所产生的势之和

$$\Psi(p)=\sum_i -\frac{Gm_i}{r_{ip}} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots). \tag{14.8}$$

在上一章中，我们应用过总的势能是所有个别物体势能的总和这个公式，来计算一个球壳形状的物体的势能，这个势能只要把球壳的所有部分对某一点势能的贡献相加就可获得。计算的结果画在图 14-4 中。总势能是负的，在 $r=\infty$ 处其值为零，从 $r=\infty$ 直到半径 a 处其值按 $1/r$ 变化，然后在球壳内则是常数，在球壳之外，势能是 $-Gm/r$（此处 m 是球壳的质量），它与球壳的质量全部集中在球心时的势能完全一样。但它不是在任何地方都严格相同，在球壳之内，势能就是 $-Gm/a$，并且是一个恒量。如果势能为恒量，就不存在场，或者不存在作用力，因为，如果我们在球壳内把物体从一个地方移动到另一个地方，力所做的功必然为零。为什么？因为物体从一个地方移动到另一个地方所做的功等于势能改变的负值（或者相应的场积分是势的改变）。但在球壳内任何两点的势能是相同的，所以势能的改变为零，因此，在球壳内任何两点之间移动时不做功。只有在完全没有作用力存在时，才能使所有位移方向上做的功为零。

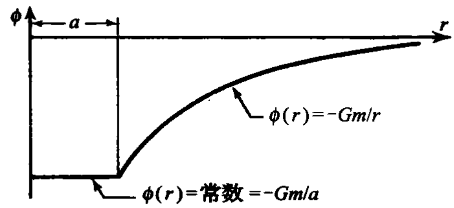


图 14-4　由半径为 a 的球壳所引起的势能

这给我们提供一个如何从已知势能去求出力或场的线索。假定物体在 $(x,\ y,\ z)$ 位置的势能是已知的，我们要求出作用于该物体上的力。正像我们将要看到的那样，仅仅根据这一点的势能，是不能求出力的，还需要知道邻近点的势能。为什么？如何计算力在 x 方向的分量（当然，如果能够计算 x 方向的分量，也就能够计算 y，z 方向上的分量，也就知道了整个作用力）？现在，如果我们使物体移动一个小小的距离 Δx，作用于物体的力所做之功是力在 x 方向的分量乘以 Δx，如果 Δx 足够小，这就应等于从一点移动到另一点的势能之变化

$$\Delta W=-\Delta U=F_x\Delta x. \tag{14.9}$$

我们只不过应用了公式 $\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\Delta U$，但是只适用于一个非常短的路径。把它除以 Δx，于是得到的力是

$$F_x=-\Delta U/\Delta x. \tag{14.10}$$

显然这是不严格的，实际上我们所需要的是 Δx 变得越来越小时式(14.10)的极限，因为它只有在 Δx 趋于无穷小的极限时才是严格正确的。我们认识到这正是 U 对 x 的微商，因此倾向于写成 $-\mathrm{d}U/\mathrm{d}x$。但 U 依赖于 x，y 和 z，而数学家创造了一个不同的符号来提醒我们对这一函数求微商时要非常小心，使我们记住所考虑的只是 x 的变化，y 和 z 是不变的。他们用"反写的 6"即 ∂ 来代替 d（我认为在微分学刚开始就应当使用 ∂，因为我们总是想消去式子中的这个 d，而从来不想去消去 ∂），所以他们写成 $\partial U/\partial x$，而且，在不得已的时候，如

果他们想要非常仔细,就放一根在底部写有小的字母 yz 的直线在$\partial U/\partial x$ 旁边($\partial U/\partial x|_{yz}$),它表示:“保持 y 和 z 不变,取 U 对 x 的微商”。在大多数场合下,我们不写出关于保持常数的记号,因为通常从上下文中是看得很明显的,所以我们一般不用这根写有 y 和 z 的直线。然而,总是用∂代替 d,以告诉人们它是使另一些可变量保持常数的微商。这称为偏导数,它是当只有 x 改变时的微商。

于是,我们得到 x 方向的分力是 U 对 x 偏导数的负值

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{14.11}$$

同样,保持 x 和 z 不变,以 U 对 y 求微商可得到力在 y 方向上的分量,当然,第三个力的分量是保持 y 和 x 不变时,U 对 z 的微商

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{14.12}$$

这是从势能求得力的方法。我们以完全相同的方向从势能求得场强

$$C_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},\ C_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y},\ C_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{14.13}$$

我们在这里附带提一下另一个符号,这个符号实际上在相当一段时间里还用不到;由于 $\boldsymbol{C}$ 是矢量,有 x, y 和 z 的分量,而产生 x, y 和 z 分量的符号$\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ 和$\partial/\partial z$ 有点像矢量。数学家已经创造了一个了不起的符号$\boldsymbol{\nabla}$,称为“梯度”或“grad”,$\boldsymbol{\nabla}$不是一个量,而是一个从标量得出矢量的算符。它具有下列“分量”:“grad”的 x 方向的分量是$\partial/\partial x$,y 方向的分量是$\partial/\partial y$,z 方向的分量是$\partial/\partial z$,于是很有趣,我们的公式可以写成

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U,\ \boldsymbol{C} = -\boldsymbol{\nabla} \Psi. \tag{14.14}$$

运用$\boldsymbol{\nabla}$,给我们提供了一个快速方法以检验是否有一个真正的矢量式,实际上式(14.14)的含义确实与式(14.11)和(14.12)一样;它只是这些式子的另一种写法,由于我们不愿意每次都写出三个方程式,所以就以$\boldsymbol{\nabla} U$ 来代替。

电的情形是场和势的又一个例子。在电的场合中,作用在静止物体上的力是电荷乘以电场:$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ [当然,一般在电学问题中 x 方向的分力也有一部分取决于磁场。由磁场引起的作用在质点上的力总是与质点的速度垂直,并与磁场方向垂直,从式(12.10)很容易证明这一点。既然磁场引起的作用在运动电荷上的力是垂直于速度的,磁场对运动电荷就不做功,因为运动方向与力的方向垂直。因此,在电场和磁场中使用动能定理时,我们可以不管磁场的作用,因为它不改变动能]。假定只存在电场,那么用与万有引力同样的方法,我们可以计算能量,或电场力所做的功,并可计算ϕ的数值,它是 $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$ 从任意确定的一点到我们欲计算的那一点的积分的负值,于是电场的势能就是电荷乘以ϕ

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s},$$

$$U = q\phi.$$

我们取两块平行金属板作为例子,每一块金属板表面单位面积的电荷为$\pm\sigma$。这个装置

称为平板电容器。我们先前已求得金属板之外的力为零，并且两块平板之间有一个恒定电场，其方向从＋指向－，大小为 σ/ϵ_0（图 14-5）。我们想知道将一个电荷从一块平板移到另一块平板上要做多少功。这个功是（力）·（d$\boldsymbol{s}$）的积分，它可以写成电荷乘以平板 1 的势与平板 2 的势之差

$$W=\int_1^2 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=q(\phi_1-\phi_2).$$

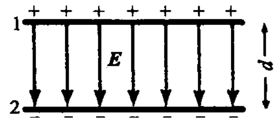


图 14-5　两块平行金属板之间的场

实际上我们可以算出这一积分，因为力是恒定的，如果令两块平板之间的距离为 d，则积分是容易的

$$\int_1^2 \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{q\sigma}{\epsilon_0}\int_1^2 \mathrm{d}x=\frac{q\sigma d}{\epsilon_0}.$$

势差 $\Delta\phi=\sigma d/\epsilon_0$ 称为电压差，ϕ 以伏特来量度。当我们说一对平板充电到一定的电压，意思是指两块平板之间的电势差为多少伏特。对于两块面电荷为 $\pm\sigma$ 的平板所组成的电容器，两块平板的电压或电势差是 $\sigma d/\epsilon_0$。

第 15 章　狭义相对论

§15-1　相对性原理

两百多年来，牛顿所阐明的运动方程一直被认为是对自然的一种正确描述。第一次看出这些定律中存在的一个谬误，并且找到了修正它的方法是在 1905 年，这两件事都是爱因斯坦所提出的。

我们曾用下面的方程表示牛顿第二定律

$$F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t},$$

牛顿在叙述这一定律时默认了这样一个假定，即质量 m 是一个恒量，但是我们现在知道这并不正确，而是物体的质量要随着其速度的增加而增大。在经爱因斯坦修正后的公式中，质量具有数值

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{15.1}$$

这里"静止质量"m_0 表示一个不运动的物体的质量，c 是光速，约为 $3 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 或 $186\ 000\ \mathrm{mi \cdot s^{-1}}$。

对于那些只想学一点能够解释问题就行了的人来说，这个式子就是全部相对论了——它只是对质量引入一个修正因子来改变一下牛顿定律。从公式本身很容易看出，在通常情况下，质量的增加是十分微小的。即使速度大到像绕地球运转的卫星一样，即约 $5\ \mathrm{mi \cdot s^{-1}}$，于是 $v/c = 5/186\ 000$；把这个值代入公式后表明，对质量的修正只是 20 亿到 30 亿分之一，小得几乎无法观察到。实际上，这个公式的正确性已被对许多种粒子作出的观察所广泛证明，这些粒子运动速度很大，一直到实际上等于光速。然而，由于这种效应通常非常之小，所以看来似乎不寻常的是，它在理论上的发现先于它在实验上的发现。从实验上看，当速度足够大的时候，这种效应非常之大，但是它不是用这一方法发现的。所以，看一下一条涉及到这样一种细致的修正的定律，在它第一次被发现的那个时期如何能从实验和物理推理的结合中得以产生该是十分有趣的。有很多人对这条定律的发现作出了贡献，但是爱因斯坦的发现是这些人的工作的最后成果。

实际上爱因斯坦的相对论包括两部分内容。这一章所谈到的是 1905 年以来就已存在的狭义相对论。1915 年爱因斯坦发表了称为广义相对论的补充理论。这后一个理论所讨论的是将狭义相对论推广到引力定律中去的情况；这里我们将不去讨论它。

相对性原理是牛顿在他的运动定律的一个推论中首先提出的："封闭在一个给定空间中的诸物体，它们彼此之间的运动是同一的，无论这个空间是处于静止状态还是均匀地沿一直

线向前运动。"这意味着,比如说,如果有一艘宇宙飞船在以均匀速度飞行,那么在飞船上所做的所有实验以及所有的现象,将与飞船不运动时所看到的完全相同,当然这是指如果人们并不伸出头去往外看的话。这就是相对性原理的含义。它是一个十分简单的观念,唯一的问题在于是否确实如此:即从一个运动系统内进行的所有实验中得到的物理定律是否看来都与如果该系统处于静止时所得出的相同。让我们首先来研究一下,牛顿定律在运动系统中是否相同。

假设某一个人莫(Moe)以均匀速度 u 沿 x 方向运动,并且测量了某一点的位置,如图 15-1 所示。他把这个点在他这个坐标系中的"x 距离"记作 x'。另一个人乔(Joe)静止不动,并且测量了同一点的位置,用他的坐标系中的 x 坐标记作 x。这两个系统的坐标之间的关系可以从图中清楚看出。经过时间 t 后,莫的原点移动了一段距离 ut,如果这两个系统原先是重合在一起的,那么

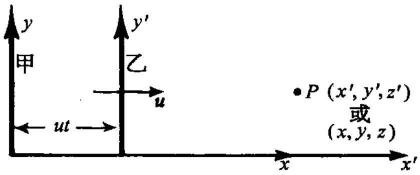


图 15-1 沿着 x 轴以均匀速度作相对运动的两个坐标系

$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{15.2}$$

如果把这个坐标变换代入牛顿定律中去,那么我们发现,这些定律变换到带撇(′)的坐标系中时,仍旧是同样的定律;这就是说,牛顿定律在运动系统中与在静止系统中一样具有相同的形式,因此,依靠力学实验不可能说出系统究竟是否在运动。

相对性原理在力学中已应用了很长一段时间。曾经有许多人,特别是惠更斯(Huygens),应用它来求出弹子球碰撞的规则,这与我们在第 10 章中用它来讨论动量守恒时所用的方法很相同。在上一世纪中,由于对电、磁以及光等现象的研究,人们对于这条原理的兴趣更加浓厚了。许多人对这些现象所作的一系列精心研究,其结晶就是麦克斯韦电磁场方程组,它们在统一的体系下描写了电、磁与光的现象。但是麦克斯韦方程组似乎并不遵循相对性原理。这就是说,如果我们用式(15.2)代入麦克斯韦方程组并对它进行变换,那么它们的形式不再保持相同;因此,在飞行的宇宙飞船中,电与光的现象应当与飞船静止时不同。这样,我们就可以利用这些光的现象来确定飞船的速度;特别是可以通过适当的光学或电学测量来确定飞船的绝对速度。麦克斯韦方程组的结论之一是,如果在电场中产生扰动,以致有光发射出来,那么这些电磁波在所有方向上均等地而且以相同的速度 c(即 186 000 $\mathrm{mi \cdot s^{-1}}$)传播出去。方程组的另一个结论是,假如扰动源在运动,那么所发射的光将以同样的速度 c 穿过空间。这与声的情况相似,声波的速度也与声源的运动无关。

在光的情况下,这种与声源运动的无关性引起了一个有趣的问题。

假定我们以速度 u 驱车前进,从后面射来的光,以速度 c 追过了我们的车子。对式(15.2)中的第一个方程微分就得到

$$\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t - u,$$

这意味着,按照伽利略变换,我们在汽车里测得的掠车而过的光的表观速度不应当是 c 而应

当是 $(c-u)$。例如,如果汽车以 100 000 mi · s^{-1}速度前进,而光速是 186 000 mi · s^{-1},那么掠车而过的光的表观速度应当是 86 000 mi · s^{-1}。总之,在任何情况下,只要测出掠车而过的光的速度(如果伽利略变换对于光是正确的话),我们就应当可以决定汽车的速度。在这种一般设想的基础上,曾经进行了大量的实验以确定地球的速度,但是它们全都失败了——根本没有发现地球有什么速度。我们将详细地讨论其中的一个实验,用以确切地说明我们做了一些什么以及问题何在;显然,是有一些问题,物理方程有点不对。那么怎么会这样的呢?

§ 15-2 洛伦兹变换

当物理方程在上述情况下的失效暴露出来的时候,所出现的第一个想法就是认为这个麻烦的根源必定在于当时只有 20 年之久的新的麦克斯韦电动力学方程组。看来相当明显的是,这些方程一定是错误的,所以要做的事就是这样来改变它们,使得相对性原理在伽利略变换下能够得到满足。在这种尝试中,必须在方程组中引入一些新的项,而这些项预言了一些新的电现象,但一旦用实验来检验它们时,这些现象就根本不存在,因而,这个尝试必须予以放弃。于是人们逐渐明白,麦克斯韦电动力学方程组是正确的,必须到其他地方去寻找症结所在。

在这期间,洛伦兹注意到一件令人注目的奇怪的事,那就是当他在麦克斯韦方程组中进行以下代换时

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
y' &= y, \\
z' &= z, \\
t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}},
\end{aligned}
\tag{15.3}
$$

发现这些方程组在这种变换下保持其原有形式不变!式(15.3)现在通称为洛伦兹变换。爱因斯坦仿效原来由庞加莱(Poincaré)提出的设想,作出了这样的一个假设:所有的物理定律都应该是这样的定律,它们在洛伦兹变换下保持不变。换句话说,需要予以改变的,不应当是那些电动力学定律,而应当是力学定律。那么,我们将如何改变牛顿定律,使它们在洛伦兹变换下保持不变呢?如果确定的是这样一个目标,那么我们必须把牛顿方程这样来予以改写,使得它们能满足我们所提出的条件。结果发现,这里的唯一要求,就是牛顿方程中的质量 m 必须代之以等式(15.1)中所示的形式。作了这个改变之后,牛顿定律与电动力学定律就会完全协调。这时,如果我们用洛伦兹变换把莫的测量与乔的测量相比较,那么就根本不可能发现究竟谁在运动,因为两个坐标系中,所有方程的形式都是相同的!

当我们用新的时间与坐标之间的变换来代替旧的变换时,这究竟意味着什么,讨论一下这个问题是颇为有趣的,因为旧的变换(伽利略变换)似乎是不证自明的,而新的变换(洛伦兹变换)看来是奇特的。我们希望知道的是,在逻辑上以及在实验上是否可能把新的而不是旧的变换看作是正确的。要弄清楚这一点,单去研究力学定律是不够的,而应像爱因斯坦所做的那样,必须对我们关于时间和空间的观念进行分析,以求得对这种变换的理解。我们将

不得不稍微花一点时间来讨论这些观念以及它们对力学的含义，所以我们要说明在前，由于其结果与实验相符合，这种努力是完全有理由的。

§ 15-3 迈克耳逊-莫雷实验

如上所述，人们曾经做过多次尝试，以确定地球通过一种假设的“以太”时的绝对速度，而以太是被想象为充满整个空间的。这些实验中最著名的一个是 1887 年迈克耳逊(Michelson)和莫雷(Morley)所做的。这个实验所得到的负结果经过 18 年之后才最终由爱因斯坦作出了解释。

迈克耳逊-莫雷实验使用了如图 15-2 所示的一种装置。它主要包括一个光源 A，一块部分镀银的玻璃片 B，两面镜子 C 和 E。所有这些都装在一个牢固的底座上。两面镜子放在离 B 都等于 L 的地方。B 片将射来的光分为两束，这两束光以互相垂直的方向分别向两面镜子射去，并在那里被反射而回到 B。在返回到 B 后，这两束光线又作为叠加分量 D 与 F 组合起来。如果光线从 B 到 E 一次来回的时间与光线从 B 到 C 一次来回的时间相同，那么所产生的两条光线 D 与 F 的相位相同，因而彼此加强。但是如果这两个时间稍有差异，那么两条光线之间就会有一点相位差，结果将产生干涉现象。如果这个装置在以太中“静止”不动，那么这两个时间应该精确相等，但是如果它以速度 u 向右运动，那么这两个时间就应有所差别。让我们看看其原因何在。

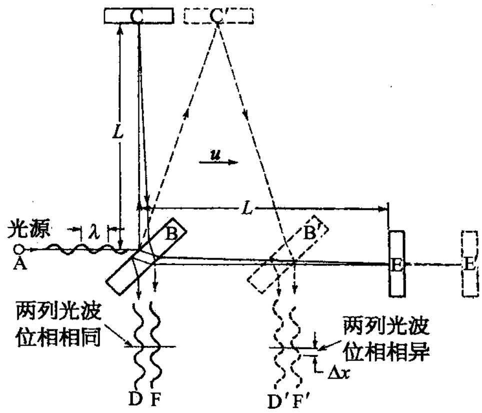


图 15-2 迈克耳逊-莫雷实验的示意图

首先，我们来计算光从 B 到 E 而后再返回到 B 所需的时间。假设光从 B 片到镜 E 所需的时间为 t_1，返回的时间为 t_2。现在，当光在从 B 跑向镜子的途中这段时间内，装置移动了一段距离 ut_1，所以光必然用速度 c 走了 $L+ut_1$ 的距离。我们也可以用 ct_1 来表示这段距离。这样，我们就有

$$ct_1 = L + ut_1 \text{ 或 } t_1 = L/(c-u).$$

(这一结果也可以用这个观点明显看出，即光相对于装置的速度是 $c-u$，所以这个时间是长度 L 除以 $c-u$)。用类似方法可以算出时间 t_2。在这段时间中 B 片前进了距离 ut_2，所以光返回的距离是 $L-ut_2$。于是就有

$$ct_2 = L - ut_2 \text{ 或 } t_2 = \frac{L}{c+u}.$$

所以总的时间是

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2-u^2}.$$

为了便于以后对时间进行比较，我们把它写成

$$t_1+t_2=\frac{2L/c}{1-u^2/c^2}. \tag{15.4}$$

我们的第二部分,将是计算光从 B 到镜 C 的时间 t_3。与前面一样,在 t_3 时间内,镜 C 向右移动了 ut_3 距离而到达位置 C′;同时,光沿着一个直角三角形的斜边跑过距离 ct_3,即 BC′。对于这个三角形,我们有

$$(ct_3)^2=L^2+(ut_3)^2$$

或

$$L^2=c^2t_3^2-u^2t_3^2=(c^2-u^2)t_3^2.$$

由此可得

$$t_3=L/\sqrt{c^2-u^2}.$$

从 C′返回的路程与此相同,这可从图形的对称性上看出;所以返回用的时间也相同,因而整个时间是 $2t_3$。稍微改变一下形式,我们可以写成

$$2t_3=\frac{2L}{\sqrt{c^2-u^2}}=\frac{2L}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{15.5}$$

现在我们就能比较两条光线所需的时间了。在(15.4)和(15.5)两式中,分子是相同的,它表示在装置静止不动的假定下光所取的时间。在分母中,除非 u 可以与 c 相比拟,不然 u^2/c^2 就很小。分母代表了由于装置运动而引起的时间上的修正。但必须注意,这些修正是不相同的——到达 C 来回所花的时间略小于到达 E 来回所花的时间,尽管两面镜子离 B 等距离,而我们所要做的就是要精确地把这个差别测量出来。

这里产生一个次要的技术性问题——假设两段长度 L 并不精确相等,怎么办?事实上,我们肯定不能使它们完全相等。在这种情况下,我们只要把装置转过 90°,使 BC 保持在运动的方向上,而 BE 则垂直于运动的方向。于是任何长度上的微小差别都变得不重要,我们要寻找的只是在装置转动时干涉条纹的移动。

在进行实验时,迈克耳逊和莫雷将仪器调整得使 BE 接近于平行地球的运动轨道(在白天和夜晚的一定时刻),地球的轨道速度约 18 mi · s^{-1},那么,在一昼夜的某个时刻和一年之中的某些时候任何"以太漂移"都至少应有这么大。仪器的灵敏度足以观察到这种效应,但是,并没有发现时间上的差别——地球通过以太的速度无法被检测到。实验的结果说明不存在这种效应。

迈克耳逊-莫雷实验的结果令人迷惑不解和十分困扰。摆脱这个绝境的第一个有成效的观念是洛伦兹想到的。他提出,物体运动时会收缩,收缩只发生在运动方向上。这样,如果物体静止时长度为 L_0,那么当它以速度 u 平行于其长度方向运动时,新的长度 $L_\parallel$ 则为

$$L_\parallel=L_0\sqrt{1-u^2/c^2}. \tag{15.6}$$

当将这个修正应用于迈克耳逊-莫雷干涉仪时,从 B 到 C 的长度没有改变,但是从 B 到 E 的长度缩短至 $L\sqrt{1-u^2/c^2}$. 因此,式(15.5)没有改变,但式(15.4)中的 L 必须按式(15.6)而改变. 这样做以后,我们得到

$$t_1+t_2=\frac{(2L/c)\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-u^2/c^2}=\frac{2L/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{15.7}$$

将此结果与式(15.5)作比较,我们看到 $t_1 + t_2 = 2t_3$。所以如果仪器按刚才所说的方式缩短的话,我们就能够理解为什么迈克耳逊-莫雷实验根本没有测出这种效应。收缩假设虽然成功地解释了实验的负结果,但却也被认为这只是专门用来解释所遇到的困难而发明的,因而是过于牵强的。然而在用作发现以太风的许多其他实验中,也都出现了类似的困难。看来这是大自然反对人类的"阴谋",它引进了某种新的因素来破坏每一个人原来以为应当测出速度 u 的实验现象。

人们终于认识到,正如庞加莱指出的那样,整个阴谋本身乃是一条自然法则!庞加莱于是便假定说,应当存在这么一条自然定律,即不可能用任何实验来发现以太风;也就是说,不可能测定绝对速度。

§15-4 时间的变换

在检验收缩的概念是否与其他实验事实相协调时,结果发现假如时间也用方程组(15.3)中第四个变换加以修正的话,那么每一件事就都很正确。这就是为什么从 B 到 C 再返回的过程中所花的这段时间 $2t_3$ 由那个在飞船上做实验的人算出时与由另一个观看飞船飞行的静止观察者算出的结果不一样的原因,对于在飞船上的人来说时间就是 $2L/c$,但对另一个观察者来说,时间就是 $(2L/c)/\sqrt{1-u^2/c^2}$ (式 15.5)。换句话说,当一个外部观察者看到飞船中的人点燃雪茄烟时,所有的过程看来都比正常情况慢,而对飞船上这个人来说,每件事情都以正常方式进行。所以,不仅是长度需要缩短,时间测量仪器("时钟")显然也必须减慢。也就是说,从飞船上的人看来,钟记录下的时间过去一秒钟时,对于外面的人来说,它指示的是 $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ s。

这种运动系统中的时钟减慢是非常奇特的现象,值得解释一下。为了理解这一点,我们必须看看钟的机构,并且注意它走动时的情况。由于这样做是相当困难的,我们将只选取一种非常简单的钟。我们所选择的是一个相当简陋的钟,但在原则上它是能工作的:这是一根米尺,两端各有一面镜子,当我们在镜子间发出一个光信号时,光信号将一直来回传送着,当它往下跑时,每一次都会使这个钟"滴答"响一声,就像一个标准"滴答"钟一样。我们制作两个这样的钟,其长度完全相同,并把它们放在一起起动,使之同步。此后它们就会一直走得一样,因为它们的长度是相同的,光速也总是 c。我们把其中一个钟让那个飞船上的人带着,他将尺的方向摆成垂直于运动的方向,这样,尺的长度不会发生变化。我们怎么知道垂直的长度不会发生变化呢?观察者和飞行者可以约好在擦过的一瞬间彼此在对方的 y 尺上刻下标记。根据对称性,两个标记必定具有同样的 y 和 y' 坐标,不然的话,当这两个人聚到一起比较结果时,有一个标记会高于或低于另一个标记,从而就能断定究竟谁在运动。

现在我们来看一下正在运动的钟上发生什么情况。在把钟带上飞船之前,那个人同意它是一个良好的、标准的钟,以后在飞船飞行中他也没有发现任何异常的现象,如果他发现了,就能知道自己在运动,因为假如有任何事情因运动而变化,他就能断定自己正在运动。但是相对性原理认为在匀速前进的系统中这是不可能的,可见不会产生任何变化。另一方面,当那个外部观察者在飞船的钟经过旁边时,他看到在镜子之间来回传送的光线"真正"取的是一条"之"字形的路径,因为尺总是横向运动的. 我们在迈克耳逊-莫雷实验中已经分析

过这种"之"字形运动. 假定说，在一定时间内，尺朝前运动的距离正比于 u，如图 15-3 所示，在同样时间内，光经过的距离正比于 c，那么垂直距离就正比于$\sqrt{c^2-u^2}$。

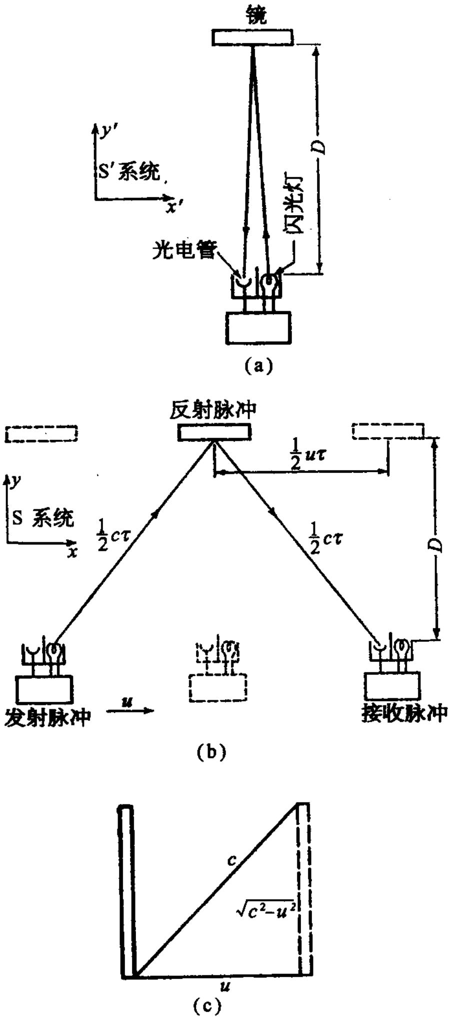


图 15-3 (a)一个"光钟"静止在 S′坐标系中；(b)一个同样的，相对于 S 坐标系运动的钟；(c)在正在运动的"光钟"中，光束经过的斜向路程示意图

这就是说，运动钟内光来回跑动的时间要长于静止钟内的时间。因此，对于运动钟来说，滴答声之间的表观时间以与图中所示的直角三角形的斜边同样的比例增长。(这就是我们方程式中平方根式的由来。)从图中也可以明显地看出 u 越大，运动的钟走得越慢。不仅这一类特定的钟会走得慢，只要相对论是正确的话，无论按什么原理工作的任何其他钟也都会慢下来，并且是以同样的比例慢下来——我们毋须进一步分析就可以说这句话，为什么如此呢？

为了回答这个问题，假定我们另外有两只做得完全相同的利用齿轮的钟，或者是根据放射性衰变或其他原理的钟。然后我们校准这些钟，使其与我们原先的钟严格同步。当光在先前的两只钟上来回，并在到达时发出滴答声，新的钟也完成了某种循环，它们同时以双重符合的闪光、响声或其他信号表明这一点。在这两只钟中我们取一只放到飞船上去，和先前那只钟放在一起。也许这只钟不会变慢，而与那只静止的同样的钟走得一样，这样就与另一个运动钟不一致了。嘿！假如果真发生这种事，飞船上的人就能利用他的两只钟之间的不一致来确定飞船的速度，但是，我们已经假定这是不可能的。我们毋须知道任何有关会使新的钟产生这种效应的机理——我们只知道，不管理由如何，它都将同先前那只钟一样变慢。

现在，假如所有的运动钟都变慢，测量时间的任何方式都得出较慢的时间节拍，那么我们就得说：在一定的意义上飞船中的时间本身变慢了。在这里，所有的现象——人的脉搏，他的思维过程，他点燃雪茄烟的时间，以致他成长衰老的过程——所有这些事都必定以同样的比例变慢，因为他无法说出他正在运动。生物学家和医生有时会说：在飞船上癌的扩散所需的时间不一定会延长，但是从现代的物理学家来看这几乎是肯定的，不然，人们就能利用癌的扩散速度来确定飞船的速度了！

时间随着运动而变慢的一个非常有趣的例子与 μ 子有关。这是一些经过平均寿命 2.2×10^{-6} s 后会自行蜕变的粒子。这种粒子可以在到达地球上的宇宙射线中找到，也可以在实验室里由人工制造。在射向地球时，其中有些粒子在半空中就蜕变了，其余的则在与物体碰撞而被留下之后才蜕变。很清楚，即使 μ 子的速度同光一样快，在这样短的寿命内，它

所走过的路程也不会超过 600 m 以上。但是,虽然 μ 子是在大气层的顶部,即大约 10 km 高的地方产生的,但是我们在大气层下面的实验室里的宇宙线中也确实找到了它们。这怎么可能呢?答案是:不同的 μ 子各以不同的速度运动,其中有一些十分接近于光速。从它们本身的观点来看,它们只生存了大约 2 μs,但是从我们的观点来看,它们的寿命要长得多——长到可以使它能到达地面。时间增长的因子已知是 $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$。对于各种速度的 μ 子,人们非常精确地测量了它们的平均寿命,其数值与上述公式相当吻合。

我们并不知道为什么 μ 子会蜕变,或者它的内部机理是什么,但是我们确实知道它的习性符合于相对论原理。这就是相对论原理的用途——它使我们甚至对那些知之不很多的东西作出预言。例如,在我们对于什么是使 μ 子蜕变的原因获得一些概念之前,还是能够预言到,当它以光速的 9/10 的速度运动时,其所能生存的表观寿命为 $(2.2\times10^{-6})/\sqrt{1-9^2/10^2}$ s;我们的这种预言是成功的——这是一件好事情。

§15-5 洛伦兹收缩

现在,我们回到洛伦兹变换式(15.3)上来,并试图更好地理解坐标系(x, y, z, t)与(x', y', z', t')之间的关系。这些坐标系我们将分别称为 S 和 S′系或乔和莫系。我们已经看到,第一个等式是建立在洛伦兹的沿 x 方向的收缩这个假设上的;我们如何来证明发生这样一种收缩呢?在迈克耳逊-莫雷实验中,我们根据相对论原理现在理解到,横臂 BC 不可能改变长度;然而,实验得到的结果为零就要求两个时间必须相等。所以,为了使实验得出零结果,看来纵臂 BE 必须缩短一个因子 $\sqrt{1-u^2/c^2}$。从乔和莫所做的测量来说,这个收缩意味着什么呢?假定随同 S′系沿 x 方向运动的莫是在用米尺测量某点的 x'坐标。他用尺量了 x'次,因此他认为这段距离是 x'm。但从 S 系的乔看来,莫却用了一根缩短了的尺,所以所测得的"真实"距离应当是 $x'\sqrt{1-u^2/c^2}$ m。于是,当 S′系离开 S 系跑过了距离 ut 时,S 上的观察者将会说,在他的坐标系中测得的同一点的距离是

$$x=x'\sqrt{1-u^2/c^2}+ut \text{ 或 } x'=\frac{(x-ut)}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

这就是洛伦兹变换的第一个等式。

§15-6 同 时 性

同样的情况表明,由于时间尺度上的不同,分母的表示式也被引进到洛伦兹变换的第 4 个等式中。这个等式中最有趣的一项是分子中的 ux/c^2 项,因为它是全新的,而且是未曾预料到的。那么这究竟意味着什么呢?如果我们仔细地来看一下这个情况,我们可以发现,发生在不同地点的两个事件,在 S′中的莫看来发生于同时,但在 S 中的乔看来,它们并不发生于同时。如果一个事件在 x_1 处发生于时间 t_0,另一个则在 x_2 发生于时间 t_0(同一时刻),那么我们发现,两个相应的时间 t_1' 与 t_2' 相差一个量

$$t_2'-t_1'=\frac{u(x_1-x_2)/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

这种情况称为“异地同时性的破坏”。为了使这个概念稍为清楚一些，让我们考虑下面一个实验。

假设有一个人在运动的宇宙飞船上(系统S′)的两端各放置一只钟，并且想弄明白这两只钟是否已对准。怎样使这两只钟对准呢？有许多方法：一个方法只需要很少一点计算，这就是首先精确地确定两只钟之间的中点。然后从这个位置上发出一个光信号，这个光信号将以同样的速度沿两条路径传播，而且非常清楚将同时到达两只钟。信号的这种同时到达性可以用来把钟对准。我们假定S′中的人是用这种特殊方法对准他的钟的。我们再看一下S系统中的一个观察者是否会同意这两只钟已经对准。S′系统中的人相信这一点，因为他不知道他正在运动。但是S系统中的人则推论说，由于宇宙飞船向前运动，飞船前端的一只钟将离开光信号而去，因此为了追到它，光必须走过大于一半距离的路程；但后面的一只钟却迎着光信号而去，所以这段距离就较短。因此，信号会先到达后面一只钟，虽然S′中的人认为信号是同时到达的。因此我们看到，当宇宙飞船中的人认为两个地方的时间是同时的时候，在他的坐标系中的两个相等的t'值，必须对应于另一个坐标系中的两个不同的t值！

§15-7 四维矢量

让我们再看看，从洛伦兹变换中还可以发现一些什么。有趣的是，可以注意到x项与t项之间的变换在形式上与我们在第11章中对于坐标系的转动曾研究过的x项和y项的变换非常相似。在那里我们有

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \end{aligned} \tag{15.8}$$

可见新的x'项混合了原来的x与y，新的y'项也混合了原来的y与x；与此相似，在洛伦兹变换中，我们发现新的x'是x与t的混合项，新的t'是t与x的混合项。这样，洛伦兹变换就类同于一种转动，不过这是一种在空时中的“转动”。这看来是一个奇怪的概念。这种与转动的类比，可以由下列量的计算而得到核实

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{15.9}$$

在这个等式中，每一边的前三项在三维几何中所代表的是一点与原点之间的距离(一个球面)的平方。这个平方在坐标轴的转动下保持不变(不变量)。与此相似，式(15.9)表明，存在着包含时间在内的某一种组合，它在洛伦兹变换下也是不变的。这样，与转动的类比就完全了，而且这是这样一种类比，即矢量，也就是其中包含与坐标和时间以同样方式转换的“分量”的那些量；对于相对论也是有用的。

于是我们试图把矢量的观念加以扩展，使其包括时间的分量，而在此以前，我们认为它只有空间分量。这就是说，我们期望将有一种具有四个分量的矢量，其中三个同一般矢量的分量一样，而与这些分量一起还加上第四个分量，它是时间部分的类比项。

这个概念将在后面几章中继续加以分析，在那里我们将看到，如果把前一节中的观点应用于动量时，那么变换将给予我们三个空间部分，它们如同通常的动量分量一样，另外还有第四个分量，也就是时间部分，那正是能量。

§ 15-8 相对论动力学

我们现在已经为更一般地研究在洛伦兹变换下力学定律将采取什么形式作好了准备。[到目前为止,我们说明了长度和时间如何变化,但没有说明我们是如何得到 m 的修正公式(式 15.1)的。我们将在下一章中来加以说明。]为了看出爱因斯坦对牛顿力学的质量 m 进行修正的重要意义,我们从牛顿第二定律出发,即力是动量的变化率为

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}.$$

动量仍然是 $m\boldsymbol{v}$,但当我们用新的 m 时,它就变为

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}=\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{15.10}$$

这就是爱因斯坦对牛顿定律的修正。在这种修正下,如果作用和反作用仍然相等(这不一定指每个时刻,而就最终结果来说是相等),那么动量守恒仍像以前一样成立,但是守恒的量,不再是原来的具有不变质量的 $m\boldsymbol{v}$,而是如式(15.10)所表示的,具有经过修正的质量的量,如果在动量公式中考虑到这种变化,那么动量守恒定律仍然有效。

现在我们来看看,动量如何随速度而变化。在牛顿力学中,它正比于速度,而且按照式(15.10)在速度与光速相比甚小的一个相当大的范围内,它在相对论力学中近乎与之相同,也正比于速度,因为平方根这个因子与 1 相差甚微。但是当 v 几乎等于 c 时,分母的平方根趋向于零,因此动量趋向于无穷大。

如果有一个恒力作用在一个物体上很长时间,那么会出现什么情况?牛顿力学认为,物体将不断获得速度,直到它的运动超过光速。但是在相对论力学中,这是不可能的。在相对论中,物体不断得到的不是速度,而是动量。动量可以因为质量在不断增加而持续增大。经过一定时间后,实际上已不存在那种在速度变化含义上的加速运动,但是动量却继续在增加。自然,如果一个力只使物体的速度产生非常小的变化,我们就说这个物体具有很大的惯性。这正是我们的相对论质量公式所指出的[见式(15.10)]:当 v 大到接近于 c 时,惯性是非常大的。作为这种效应的一个例子,我们举出,在加利福尼亚理工学院所使用的同步加速器中,为了要偏转高速电子,所需的磁场的强度要比依据牛顿定律所预言的大 2 000 倍。换句话说,同步加速器中的电子的质量为它们正常质量的 2 000 倍,就如同一个质子的质量那么大! m 是 m_0 的 2 000 倍,意味着 $(1-v^2/c^2)$ 必定为 1/4 000 000,也就是说 v^2/c^2 与 1 的差别只是四百万分之一。或者说 v 与 c 的差别只有 c 的八百万分之一。所以电子的速度非常接近于光的速度。如果电子与光同时开始从这个加速器射到邻近一个实验室(约 700 ft 远),那么谁先到达呢?当然是光,因为光总是跑得更快一些*。但是早到多少时间呢?回答起来太麻烦了,我们还是说光所超前的路程有多少:约为 1/1 000 in,或者说一张纸的厚度的 1/4!当电子跑得这样快时,它们的质量是非常巨大的,然而它们的速度不会超过光的速度。

现在我们再看看质量的相对论效应所具有的其他一些结果。考虑在一个小的容器中气

* 在同可见光的比赛中,由于空气的折射率,实际上电子将赢得胜利。但 γ 射线会稳操胜券!

体分子的运动。当气体被加热时,分子的速度就增加,因此,它的质量也会增加,而气体变重了。当速度较小时,表示质量增加的一个近似公式,可以利用二项式定理把

$$m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}=m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

展开为幂级数而得到。我们得到

$$m_0(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}=m_0\left(1+\frac{1}{2}v^2/c^2+\frac{3}{8}v^4/c^4+\cdots\right).$$

从这个表示式可以清楚看出,当 v 较小时,级数收敛得很快,在前二项或前三项之后的各项可以忽略不计。因而我们可以写为

$$m\approx m_0+\frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right), \tag{15.11}$$

其中,右端的第二项表示由分子的速度而来的质量的增加。由于温度升高时,v^2 与之成正比地增加,所以我们可以说,质量的增加正比于温度的增加。由于 $m_0v^2/2$ 在原来的牛顿含义中是动能,所以我们也可以说,整个气体的质量的增加,等于动能增加的量除以 c^2,或者说 $\Delta m=\Delta(\mathrm{K.E.})/c^2$。

§15-9 质能相当性

上面的观察给了爱因斯坦一个启发,使他想到,如果我们说物体的质量等于该物体总的能量含量除以 c^2,那么一个物体的质量就可以表示得比式(15.1)更为简单。如果式(15.11)乘以 c^2,则结果为

$$mc^2=m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2+\cdots, \tag{15.12}$$

这里,左端的一项表示一个物体的总能量,右端的后面一项可以认为是通常的动能。爱因斯坦把很大的常数项 m_0c^2 解释为该物体总能量的一部分,是一种通常称为“静能”的内在能量。

让我们跟着爱因斯坦来探究物体的能量总是等于 mc^2 这个假设会得出一些什么结论。作为一个有趣的结果,我们将找出表示质量随速度而变化的公式(15.1),而迄今为止我们只是把它作为一个假设来看待。我们从处于静止状态的一个物体出发,其能量为 m_0c^2。然后对这个物体施加一个力。这个力使物体开始运动,并给予它动能;因此,由于能量增加,质量也增加——这已包含在原来的假设之中。只要力继续作用在物体上,能量和质量两者都会继续增加。我们已经看到(第13章),能量对时间的变化率等于力乘以速度,或

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{15.13}$$

我们还看到[第9章,式(9.1)] $F=\mathrm{d}(mv)/\mathrm{d}t$。当这些关系与 E 的定义结合在一起,式(15.13)就变为

$$\frac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}. \tag{15.14}$$

我们希望解这个关于 m 的方程。为此，我们先用一点数学技巧，即在式子两端各乘以 $2m$，这就把方程变为

$$c^2(2m)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=2mv\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}. \tag{15.15}$$

我们要除去微商，这可以在两端用积分来做到。可以看出量 $(2m)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 是 m^2 的时间微商，而 $(2mv)\cdot\mathrm{d}(mv)/\mathrm{d}t$ 则是 $(mv)^2$ 的时间微商。这样，等式(15.15)就等于

$$\frac{c^2\mathrm{d}(m^2)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m^2v^2)}{\mathrm{d}t}. \tag{15.16}$$

假如两个量的微商相等，它们本身最多只差一个常数，比如说 C. 这就使我们能写成

$$m^2c^2=m^2v^2+C. \tag{15.17}$$

现在必须把这个常数 C 定义得更清楚一点。由于式(15.17)必须对所有的速度都成立，所以我们可以选择 $v=0$ 这个特殊情况，并且说这时的质量是 m_0。将这些值代入等式(15.17)，得出

$$m_0^2c^2=0+C.$$

现在我们可以把这个 C 值代入式(15.17)中，于是得到

$$m^2c^2=m^2v^2+m_0^2c^2. \tag{15.18}$$

除以 c^2，再把各项整理一下后得

$$m^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=m_0^2,$$

由此便得

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{15.19}$$

这就是式(15.1)，也正是为了使式(15.12)中质量与能量之间相符合所必要的一个公式。

通常说来，能量的这种变化只表示质量上极其微小的变化，因为平时我们不可能从一定量的物质中产生很多能量；但是，在原子弹爆炸中，如果其能量相当于 20 000 t TNT 炸药，就可以知道爆炸后的尘埃将比反应材料的原有质量轻1 g，因为，按照关系式 $\Delta E=\Delta(mc^2)$，所释放的能量相当于 1 g 的质量。这种质能等价性的理论已为由物质湮没而完全转化为能量的实验出色地证实了：一个负电子与一个正电子在静止时质量各为 m_0，当它们碰到一起时，会蜕变成两束 γ 射线，测得各带有 m_0c^2 的能量。这个实验为确定与粒子的静止质量的存在相关的能量提供了一个直接的方法。

第 16 章　相对论中的能量与动量

§ 16-1　相对论与哲学家

在这一章中，我们将继续讨论爱因斯坦和庞加莱的相对性原理，因为它们影响着我们的物理观念以及人类思维的其他分支。

庞加莱以如下方式表述了相对性原理："按照相对性原理，对于一个固定的观察者与对于一个相对于他作匀速运动的观察者来说，描述物理现象的定律必须是相同的，因而我们没有，也不可能有任何一种方法去辨认我们是否参与了这样一种运动。"

当这种观念披露于世时，在哲学家中引起了很大的骚动，特别是那些"鸡尾酒会哲学家"。他们说："噢，这很简单：爱因斯坦的理论表明，一切都是相对的！"事实上，不仅是在鸡尾酒会上所见到的那些哲学家（为了不使他们难堪，我们就称他们为"鸡尾酒会哲学家"），而且数目多得令人吃惊的哲学家们都纷纷声称："一切皆相对，此乃爱因斯坦之推论，它给予吾等之观念以深远的影响。"他们还补充说："物理学亦已表明，现象有赖于人们的参照系。"诸如此类的话我们已听得很多，但是要弄清楚它们的含义则非常困难。大概原来所指的参照系，就是指我们在对相对论的分析中所用到的坐标系。这样，"事物有赖于人们的参照系"这个事实，就被设想为曾给于现代观念以深刻的影响。人们很可能对此感到不解，因为归根结底，事物依赖于一个人所抱的观点这件事是如此简单，为了要发现它，肯定不会有什么必要到物理学的相对论中去找麻烦。任何一个在街上散步的人肯定都明白，他所看到的一切取决于他的参照系，因为当一个过路人走近他时，他首先看到的是那个人的前面，而后再看到其后面；在据说是源出于相对论的大多数哲学中，没有比"一个人从前面看与从后面看不同"这种说法更深刻的了。几位盲人把大象描写成几种不同的样子，这个古老的故事或许是哲学家对相对论所抱有的观点的另一个例子。

但是在相对论中，一定具有比刚才"一个人从前面看与从后面看不同"那种简单的说法更为深刻的含义。相对论当然要比这种说法深刻得多，因为我们能够借助于它作出确定的预言。如果单从这样简单的观察居然能够预知自然界的行为，那么它一定是相当令人吃惊的。

也有另一学派的哲学家，他们对于相对论感到很不舒服，因为相对论断定如果不往外看，我们就无法确定我们运动的绝对速度，而这些人则说："一个人不往外看就不能测出他的速度，那是很明显的。不往外看而去谈论一个物体的速度毫无意义，这也是不证自明的一件事；物理学家相当笨拙，因为他们的想法不是这样，可是现在总算使他们明白过来情况就是这样。只要我们哲学家认识到物理学家所思考的问题是什么，那么我们就会立即通过大脑来判断，不往外看就不可能说出一个人的运动有多快，这样我们就会对物理学作出巨大贡献了。"这样的哲学家总是有的，他们在我们周围喋喋不休地企图告诉我们一点什么东西，但是，实际上他们从未理解过这类问题的细致和深刻之处。

我们之所以无法鉴别绝对运动，乃是实验的一个结果，而不是像我们所能很容易想象的那种只是单纯思维的结果。首先，牛顿就已确实认为，假如一个人沿直线作匀速运动，那么他就不能说出自己跑得多快。事实上，牛顿最早说明了相对性原理，上一章中的一段引文就是他对此的陈述。那么，为什么在牛顿时代哲学家们就没有提出"一切都是相对的"或其他别的什么来喧哗一番呢？这是因为直到麦克斯韦提出电动力学理论，才有物理定律认为人们不往外看能够测定他的速度；不久就从实验上发现，这是不行的。

那么，一个人不往外看就无法知道他究竟运动得多快这一点是绝对的，肯定的，哲学上必然的吗？相对论的结果之一是发展了一种哲学，这种哲学认为："你只能定义你所能测量的东西！因为非常明显，一个人如果不去看他相对于什么在测量速度，那么就无法测量这个速度，所以很清楚，谈论绝对速度是毫无意义的。物理学家应该领会到，他们所能谈论的只是那些他们所能测量的东西。"但是整个问题在于：人们是否能定义绝对速度这个问题是与下一个问题相同的，即人们是否在一个实验中能不往外看就觉察到他是否在运动。换句话说，某一事物是否可以测量，并不是由纯粹思维所能先验地予以决定，而是只能由实验来决定。假定我们已知光的速度为 186 000 $\mathrm{mi \cdot s^{-1}}$，那么人们将会发现，没有几个哲学家会沉着地说："这是不证自明的，如果光在汽车中的传播速度为 186 000 $\mathrm{mi \cdot s^{-1}}$，汽车的车速为 100 000 $\mathrm{mi \cdot s^{-1}}$，那么对于地面上的观察者来说，光的速度也是 186 000 $\mathrm{mi \cdot s^{-1}}$。"对于这些哲学家来说这是一个令人吃惊的事实；正是这些认为这是很明显的人，当你告诉他们一件特殊的事实的时候，他们就认为这不是那么明显了。

最后，甚至还有这么一种哲学，它认为除非我们往外看，否则我们就不能觉察任何运动。在物理学中这是根本不正确的。诚然，人们无法觉察沿直线的匀速运动，但是如果整个房间在转动，那么我们就一定能知道它，因为每个人将被掷到墙上——这里有各种各样的"离心"效应。利用所谓傅科(Foucault)摆的方法，地球的绕轴转动可以不用观察星体而加以确定。因此，"一切都是相对的"这句话并不正确；只有匀速运动在不往外看时是觉察不到的。绕固定轴的匀速转动是可以觉察到的。当把这一点告诉一个哲学家时，他会十分心烦意乱；他实在不能理解这件事，因为在他看来，不往外看而能确定绕轴转动似乎是不可能的。如果这个哲学家是一个相当出色的哲学家，那么过一段时间后他可能会回过头来对我们说："我明白了！我们确实并没有绝对转动这样一种事；你知道，实际上我们是相对于星体在转动。因而星体对物体所施加的某种影响必然引起了离心力。"

现在就我们所知的一切情况来说，那是对的；目前我们还没有办法可以告诉你，如果周围没有星体或星云，那么是否还会存在离心力。我们没有可能去做这样一个实验，先把所有的星云移开，而后去测量地球的转动，所以我们也就不知道。我们必须承认这位哲学家可能是对的。因此他高兴地回转身来说："世界最终变成这个样子是绝对必要的，即绝对的转动是毫无意义的，它只是相对于星云而言的。"于是我们对他说："那么，我的朋友，相对于星云所作的匀速直线运动，不应该在一辆汽车内产生任何效应这一点是明显的还是不明显的呢？"现在，运动已不再是绝对的，而是相对于星云的，它变成了一个神秘的问题，即一个只能用实验来回答的问题。

那么，什么是相对论对哲学的影响呢？如果我们只限于去谈这种意义上的影响，例如相对论原理给物理学家带来了哪些新的观念和启示，那么我们可讲一下其中的如下几点。首先，我们的一个发现主要是，有些概念即使在长时期内都被认为适用，并且得到了十分准确

的验证,然而它们仍然可能是错误的。牛顿定律在这么多年被视为似乎是正确的之后,居然被说成是错误的,这显然是一件使人震惊的发现。当然,很清楚不是实验错了,而只是因为这些实验是在有限的速度范围内完成的,而这些速度之小,不可能使相对论效应明显地表现出来。但无论如何,我们现在对于物理定律已抱有一种远为谦逊的见解,即任何一件事都可能是错的!

第二,如果我们有一些"奇特"的观念,比如时间会随着运动而变慢,等等,那么,究竟我们是喜欢它们还是不喜欢它们,则是与此不相干的另一个问题。唯一与之有关的问题,便是这些观念是否与实验上的发现相一致。换句话说,"奇特的观念"只要符合于实验就行,而我们必须讨论钟的行为等等,其唯一的理由就是要说明,虽然时间膨胀的概念是多么奇怪,但它与我们测量时间的方式是协调的。

最后,第三个启示虽然略带一些技术性,但在我们研究其他物理定律时它证明是非常有用的,这就是要注意定律的对称性,或者更明确地说,就是要寻找这样一种方式使得定律在变换时能保持其原有形式不变。在讨论矢量理论时,我们曾看到,在转动坐标系时,运动的基本定律并没有改变,而现在我们又知道,在以一种特有的由洛伦兹变换所提供的方法改变时间和空间变量时,它们的形式也没有改变。因而,这个观念,即在什么形式或作用下基本定律仍保持不变,已被证明是一个非常有用的观念。

§ 16-2 孪生子佯谬

为了继续讨论洛伦兹变换和相对论效应,我们来考虑一个著名的所谓彼得(Peter)和保罗(Paul)的"佯谬",并假定他们是同时出生的一对孪生子。当他们成长到能操纵宇宙飞船时,保罗以很快的速度飞了出去,彼得则仍留在地面。由于彼得看到保罗运动得这么快,所以从彼得的观点看来,保罗的钟似乎走慢了,他的心跳变慢了,思维也迟缓了,每件事都延迟了。当然,保罗自己并没有感到出现任何异常情况,但是如果他在外面漫游了一段时间之后再回到地面,他将比在地面上的彼得年轻!这确实是对的,它是相对论的结论之一,而相对论是被清楚地证实了的。正像 μ 子运动时,它的寿命要延长一样,当保罗运动时,他的寿命也会延长。这件事只有在这些人眼光中才称为是一种"佯谬",因为他们认为,相对论原理意味着一切运动都是相对的,他们说:"好,好,好,从保罗的观点看来,难道我们不是也可以说彼得正在运动,因而他应当衰老得慢一点吗?由于对称性,唯一可能的结果是,当他们会面时,大家的年龄应当相同。"但是,为了使他们能重新相遇并进行比较,保罗必须要么在旅途的终点停下来,并且将钟进行比较,要么更简单一些,他必须返回,而返回的那个人必定是正在飞行(或运动)的那个人,他知道这一点,因为他必须转过身来飞行。当他转过身来的时候,他的飞船上各种不寻常的事情就发生了——火箭射了出去,东西向墙上撞了过去,等等——而彼得则一点也没有感到什么。

所以,如果要叙述这条规则的话,就可以说:感觉到加速度和看到东西向墙上撞了过去等等的那个人,将是比较年轻的一个;这就是他们之间在"绝对"意义上的一个差别,而这肯定是正确的。当我们讨论运动的 μ 子的寿命变长这个事实时,作为例子我们使用了它们在大气中的直线运动。但是我们也可以在实验室里产生 μ 子,并用磁铁来使它们作曲线运动,即使在这种加速运动下,它们的寿命的延长与在直线运动的情况下完全一样。虽然还没

有一个人具体地安排过一个实验，使我们能消除这个佯谬，但是我们可以把一个静止的 μ 子同一个跑完整个一圈的 μ 子相比较，这时肯定将会发现绕过整个一圈的 μ 子的寿命要长一些。虽然我们实际上还没有用整个一圈做过这样的实验，但其实这并不必要，因为一切事情都符合得很好。对于那些坚持认为每个单独的事实都要直接得到证实的人，这或许不能使他得到满足。但是我们有充分把握来预言保罗转过整个一圈的那个实验的结果。

§16-3　速度的变换

爱因斯坦相对性与牛顿相对性之间的主要差异，在于把两个处于相对运动中的系统之间的坐标与时间联结起来的变换规律是不同的。正确的变换规律，也就是洛伦兹变换方程为

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{16.1}$$

这些等式对应于一种比较简单的情况，即其中两个观察者的相对运动沿着它们共同的 x 轴。当然也有可能沿着其他方向运动，但是最一般的洛伦兹变换则将由于所有四个量都混杂在一起而变得相当复杂。我们将继续使用这个较为简单的形式，因为它包含了相对论的所有主要特点。

我们现在来进一步讨论这个变换的推论。首先，有趣的是倒过来解这些等式。这就是说，这里有一组线性方程，它们是四个方程和四个未知数，可以倒过来解这些方程，即用 x', y', z', t' 来表示 x, y, z, t。结果是非常有意思的，因为它告诉我们，从“运动”坐标系的观点来看，“静止”坐标系会是什么样子。当然，由于运动是相对的和匀速的，所以“运动”的那个人，如果愿意的话也可以说：实际上是另一个人在运动，而他自己则静止着。因为这另一个人是在沿着反方向运动，所以他应当得到同样的变换，但是速度要用相反的符号。这与我们在演算中所得到的完全相同，因而是协调的。假如得出的结果不是如此，那我们倒真有理由要担心了！

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'+ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t'+ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{16.2}$$

其次，我们来讨论相对论中速度的叠加这个有趣的问题。我们还记得一个奇特的难题，即对于所有系统来说，光速都是 186 000 $\mathrm{mi\cdot s^{-1}}$，即使它们处于相对运动之中也是如此。像如下例子所说明的那样，这是较普遍的问题中的一个特殊情况。假定宇宙飞船内有一个

物体以 100 000 mi · s^{-1}运动,飞船本身的速度是 100 000 mi · s^{-1};从外部观察者的观点看来,飞船内这个物体是以多大的速度在运动?我们也许要说 200 000 mi · s^{-1},这就要比光速还快。这是非常使人沮丧的,因为不能设想它会跑得比光速还快!普遍的问题则如下所述。

假设在飞船内有一个物体,从飞船内一个人的观点看来,它以速度 v 运动,而飞船本身则相对于地面有一速度 u。我们所要知道的是从地面上一个观察者的观点看来,这个物体以多大的速度 v_x 运动。当然,这还是一个在 x 方向上运动的特殊情况。此外,还存在着在 y 方向或任何方向上的速度变换;这些都可以在需要时加以导出。在飞船内物体的速度是 $v_{x'}$这就说明位移 x'等于速度乘以时间,即

$$x' = v_{x'}t'. \tag{16.3}$$

现在我们只要对一个在 x'和 t'之间具有关系式(16.3)的物体去计算它从外部观察者的观点看来的位置与速度是多少,因而我们只要简单地把式(16.3)代入式(16.2),就得到

$$x = \frac{v_{x'}t' + ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{16.4}$$

但是我们在这里看到 x 是用 t'表示的。为了得到外部观察者所看到的速度,我们必须用他的时间,而不是用另一个人的时间去除他的距离!所以我们也必须计算外部观察者所看到的时间,即

$$t = \frac{t' + u(v_{x'}t')/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{16.5}$$

现在必须找出 x 与 t 之比,这就是

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u + v_{x'}}{1 + uv_{x'}/c^2}, \tag{16.6}$$

其中平方根已被消去。这就是我们所要求的定律:合速度,即两个速度之"和",并不恰巧是两个速度的代数和(我们知道,不可能是两者的代数和,否则就会使我们陷于困境),而是为 $(1 + uv/c^2)$ 所"校正"了的。

现在我们来看看将会发生什么。假定你们在宇宙飞船内以光速的一半在运动,而飞船本身也在以光速的一半飞行。因此,$u = c/2$,$v = c/2$,而分母中的 $uv/c^2 = 1/4$,于是

$$v = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}c.$$

所以在相对论中,"1/2"加"1/2"并不等于 1,而只等于"4/5"。当然,低速可以很容易用熟悉的方法相加,因为只要速度与光速相比很小,我们就可忘掉 $(1 + uv/c^2)$ 这个因子;但是在高速情况下,事情就完全不同,而且也变得非常有趣了。

我们来考虑一个极限情况。开一个玩笑吧!宇宙飞船里的那个人正在观察光本身。也就是说 $v = c$,而飞船是在以 u 运动。那么从地面上的人看来将会怎样?回答是

$$v = \frac{u + c}{1 + uc/c^2} = \frac{c(u + c)}{u + c} = c.$$

因此,如果飞船里有什么东西在以光速运动,那么从地面上的观察者的观点看来,它还是以光速运动！这很好,因为事实上,这正是爱因斯坦相对论首先打算要做到的——可见这个理论不错！

当然,也有一些情况,运动并不是在匀速移动的那个方向上进行的。比如飞船中可能有一个物体正好相对于飞船以速度 $v_{y'}$“朝上”运动,而飞船则在“水平”地飞行着。这时,我们只要按照同样的方法去做,不过用 y 项而不用 x 项就是了,结果是

$$y = y' = v_{y'}t',$$

所以,如果 $v_{x'} = 0$, 则

$$v_y = \frac{y}{t} = v_{y'}\sqrt{1-u^2/c^2}. \tag{16.7}$$

因此,侧向的速度不再是 $v_{y'}$,而是 $v_{y'}\sqrt{1-u^2/c^2}$。这个结果我们是用代入与组合变换方程得到的,但我们也能由于如下理由而直接从相对论原理看出这个结果(再去探索一下总是好的,看看我们是否能找出其理由来)。我们已经讨论过(图 15-3)一只钟在运动时如何走动的;在固定的地面坐标系看来,光线以速度 c 沿一定偏角前进,而在运动坐标系看来,则只是以同样速度沿垂直方向运动。我们曾经看到,在固定坐标系中光速的垂直分量比光速本身小一个因子 $\sqrt{1-u^2/c^2}$ (见图15-3)。但现在我们假定,让一个实物粒子在这同一只“钟”内来回跑动,其速度为光速的整分数 $1/n$(图 16-1),那么当粒子来回跑一次时,光将恰好走过 n 次。也就是说:“粒子”钟每一次的“滴答”声恰好与光钟的第 n 次“滴答”声相符合。当整个系统在运动时,这个事实仍然正确,因为符合一致的物理现象在任何参照系中仍将是符合一致的。因此,由于 c_y 小于光速 c,粒子的速度 v_y 也必然要比对应的速度小同一个平方根因子！这就是平方根所以会出现在任何一个垂直速度中的原因所在。

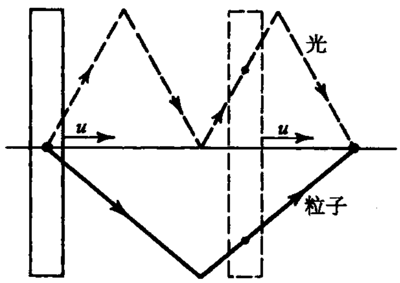


图 16-1 光和“粒子”在一只运动的钟内的运动轨迹

§ 16-4 相对论性质量

在上一章中我们已经看到一个物体的质量随着其速度的变大而增加,但没有对此加以说明,这就是说,我们没有进行过类似于对钟的行为所作出的那样的论证。然而,我们能够证明,作为相对论加上少数几个其他合理的假设的结果,质量是必须按照这种方式变化的(我们必须说“少数几个其他假设”,因为只要我们还打算进行有意义的推理,那么,除非假定有某些定律已经成立,不然就不可能证明任何东西)。为了避免要去研究力的变换定律,我们将研究碰撞这个问题,在那里,除了假设动量和能量都守恒外,不需要知道有关力的任何定律。同样,我们将假设运动粒子的动量是一个矢量,而且总是指向速度的方向。然而我们将不像牛顿所做的那样,把动量假设为一个常数乘上速度,而只是把它假设为速度的某一函数。因此我们把动量矢量写成某一个系数乘上速度矢量

$$\boldsymbol{p} = m_v\boldsymbol{v}. \tag{16.8}$$

我们在系数上记一个下标“v”,为的是要提醒大家,它是速度的一个函数,而且我们也同意把这个系数 m_v 称为“质量”。当然,当速度很小时,它与我们过去在低速实验中所测得的质量是相同的。现在,我们试图从物理定律必须在每个坐标系中都相同这个相对论原理来论证 m_v 的公式必须是 $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$。

假定我们有两个粒子,比如两个质子,它们完全相同,并且以精确相等的速率相向运动,它们的总动量为零。现在,可能出现什么情况呢?碰撞以后,它们的运动方向必须正好相反,因为如果不是正好相反,那么总的动量矢量就不会是零,动量也就不会守恒。它们还必须具有相同的速率,因为彼此之间是完全相类似的;事实上,它们的速率必须都与碰撞前相同,因为我们假定能量在这些碰撞中是守恒的。所以这种弹性碰撞是一个可逆碰撞,如图16-2(a)所示:所有的箭矢长度相等,所有的速率大小相等。我们假定,这种碰撞总是可以任意安排的,即在这样一种碰撞中,可以出现任何角度 θ,也可以用任何大小的速度。其次,我们注意到这同一个碰撞可以通过坐标轴的转动从不同的角度来观察。正是为了方便起见,我们将这样来转动坐标轴,使水平轴把它平均分成两半,如图16-2(b)所示。图中只是把坐标轴转动后的同一个碰撞重新画出而已。

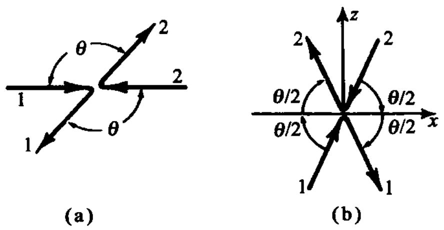


图 16-2 两个以相等速率、相向运动的相同粒子所发生的弹性碰撞的两种视图

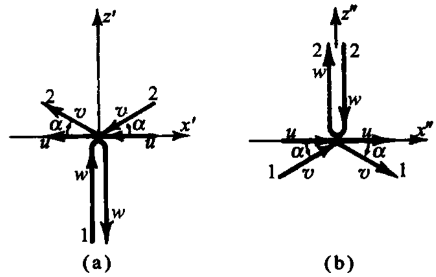


图 16-3 从运动汽车上看上去的碰撞的另外两种视图

真正的技巧在于:我们从某个驱车前进的人的角度来观察这个碰撞,汽车的速度等于粒子1的速度的水平分量。那么,这个碰撞看上去像什么呢?就粒子1而言,它看上去在径直朝上跑,因为它已经没有那个水平分量,然后它又垂直往下落,这也是因为它没有那个水平分量。也就是说,碰撞看上去就如图16-3(a)所示那样。然而,粒子2却按另一种方式飞行,当我们驱车经过时,它看来以更大的速度和较小的角度飞行,但是我们可以判断出碰撞前后的角度是相同的。我们以 u 表示粒子2的速度的水平分量,以 w 表示粒子1的垂直速度。

现在,问题是粒子2的垂直速度 $u\tan\alpha$ 是什么?假如我们知道的话,就可以利用垂直方向的动量守恒定律来得到动量的正确表示式。很清楚,水平方向的动量分量是守恒的:对于两个粒子来说碰撞前后都相同,对于粒子1来说,水平分量为零。所以我们只需要对垂直向上的分速度 $u\tan\alpha$ 应用守恒定律。但是,只要以另一种方式观察同样的碰撞,我们就可以求得朝上的速度!如果我们从以速率 u 向左边运动的车来观察图16-3(a)的碰撞,那么所看到的只是将图16-3(a)的情况“翻转过来”而已,如图16-3(b)所示。现在粒子2以速度 w 飞下又飞上,而粒子1得到了水平速度 u。当然,现在我们知道速度 $u\tan\alpha$ 等于什么了:它就是 $w\sqrt{1-u^2/c^2}$ [参见式(16.7)]。我们还知道图16-3(b)中垂直运动粒子的垂直动量变化是

$$\Delta p = 2m_w w.$$

(上式乘以 2 是因为它的运动先朝下再朝上。)而斜向运动的粒子具有一定的速度 v，它的分量我们发现是 u 和 $w\sqrt{1-u^2/c^2}$，它的质量为 m_v。因此这个粒子垂直动量的变化是 $\Delta p' = 2m_v w\sqrt{1-u^2/c^2}$，因为，按照我们假设的定律式(16.8)，动量分量等于与速度数值相应的质量乘以速度在该方向上的分量。于是为了使总动量为零，垂直方向上的两个动量必须相抵消，因此，以速度 v 运动的质量与以速度 w 运动的质量之比必须为

$$\frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1-u^2/c^2}. \tag{16.9}$$

我们取一个 w 是无限小的极限情况。如果 w 确实很小，那么很清楚，v 与 u 实际上是相等的。在这种情况下，$m_w \to m_0$，而 $m_v \to m_u$，于是，就得到一个重大的结果

$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{16.10}$$

作为一个有趣的练习，我们现在检验一下，假定式(16.10)是正确的质量公式，那么式(16.9)是否对任意的 w 值都确实成立。注意，式(16.9)中所需的速度 v 可由直角三角形算出

$$v^2 = u^2 + w^2(1-u^2/c^2).$$

经过适当计算后，我们发现式(16.9)确实成立，虽然起先我们只是在 w 很小的极限情况下利用了这个等式。

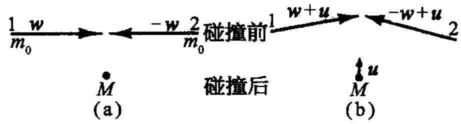


图 16-4　质量相同的物体之间的非弹性碰撞的两种看法

现在，我们承认动量是守恒的，质量与速度的关系是由式(16.10)决定的，然后再继续看看我们是否还能得出别的什么结论。我们来考虑一种通常称为非弹性碰撞的过程。为了简单起见，假设属于同一类型的两个物体，以相同的速率 w 相向运动，彼此碰撞后结合在一起成为新的静止的物体，如图 16-4(a)所示。我们知道对应于 w 的每个物体的质量 m 是 $m_0/\sqrt{1-w^2/c^2}$。如果我们假定动量守恒和相对论原理，就可以论证一件有关这个所形成的物体质量的有趣事实。我们设想有一个垂直于 w 的无限小的速度 u(对于有限的 u 值也可以同样处理，但是对无限小速度的情形更易于理解)，并在一个速度为($-u$)的电梯上来观察这一碰撞。我们所见到的情况如图 16-4(b)所示。复合物体的质量 M 是未知的。现在物体 1 以朝上的分速度 u 和实际上就等于 w 的水平分速度运动，物体 2 也是如此。碰撞后，质量为 M 的物体以速度 u 朝上运动，u 与光速相比是极小的，与 w 相比也很小。由于动量必须守恒，所以我们估算一下在朝上的方向上碰撞前后的动量。在碰撞前，动量 $p \approx 2m_w u$，碰撞后的动量显然为 $p' = M_u u$，但由于 u 是这样小，所以 M_u 基本上可以认为是 M_0。这些动量按照守恒定律必须相等，所以

$$M_0 = 2m_w. \tag{16.11}$$

两个相等的物体碰撞后所形成的那个物体的质量必定为进行碰撞的物体质量的两倍。你们也许会说："当然，这就是质量守恒嘛。"但是并不那样容易，因为这些质量虽然比起它们静止

时的质量来增加了,但对总的 M,它们提供的不是处于静止时的质量,而是更多一些。令人惊奇的是,为了使两个物体碰撞时动量守恒成立,即使在碰撞后形成的物体处于静止状态,其质量也必须大于物体的静止质量!

§16-5 相对论性能量

在上一章中,我们论证了作为物体质量对速度的依赖关系与牛顿定律的结果,力对一个物体所做的总功引起的动能改变总是

$$\Delta T=(m_u-m_0)c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-m_0c^2. \tag{16.12}$$

我们甚至还进一步推测全部能量是总质量乘以 c^2。现在我们来继续这个讨论。

假定在 M 内仍可以"看见"发生碰撞的两个等质量的物体。例如,一个质子和一个中子"粘合在一起",但仍在 M 内来回运动。虽然起初预料 M 的质量是 $2m_0$,但结果我们发现它并不是 $2m_0$,而是 $2m_w$。由于 $2m_w$ 是形成 M 时加入的质量,而 $2m_0$ 是在 M 中的物体的静止质量,因此复合物的过剩质量就等于带进去的动能。当然,这意味着能量有惯性。前面一章中我们讨论过气体的加热,说明了由于气体分子在运动,而运动的物体质量增大,当我们对气体加入能量后,它的分子运动就加快,因而气体质量也变大。其实上述论证完全是一般性的,我们关于非弹性碰撞的讨论表明无论动能是否存在,这部分质量总是存在的。换句话说:如果两个粒子彼此靠近,产生势能或任何其他形式的能量,或者这两部分由于越过势垒、克服内力做功等等而使速度变慢,这时质量总是等于加入到物体中的总能量这一点仍然正确。因而我们可以看到上面所推导的质量守恒等价于能量守恒。所以严格地说,像牛顿力学中那样的非弹性碰撞在相对论中是不存在的。按照牛顿力学两个物体碰撞后组成一个新的质量为 $2m_0$ 的物体是毋庸置疑的,它与将这两个物体慢慢地放在一起所形成的物体毫无区别。当然,从能量守恒定律我们知道,在这个新的物体内有较多的动能,但是按照牛顿定律,这并不影响质量。然而现在我们看到这是不可能的;因为在碰撞中包含了动能,结果所产生的物体的质量将更大一些,因此,可以说,它是一个不同的物体。当我们轻轻地把物体组合在一起时,所产生的物体的质量为 $2m_0$;当我们用力将物体组合在一起时,所产生的物体的质量更大一些。当质量不同时,我们就能识别出来。所以,在相对论中能量的守恒必定与动量守恒一同成立。

上面的讨论会产生一些有趣的结果。例如,假设我们有一个已测得质量为 m 的物体,如果发生某种情况使它分成两个相等的部分,各以速度 w 飞出,于是每个部分的质量将为 m_w。现在如果这两块裂片沿途碰上许多物体从而使速度变慢直至停止,那时它们的质量将为 m_0。试问当它们停止时,给予其他物体多少能量?按照我们前面证明过的定理,每一部分提供的能量是 $(m_w-m_0)c^2$。这么多能量就以热、势能或者别的什么形式留在其他物体里。由于 $2m_w=M$,所以释放的能量是 $E=(M-2m_0)c^2$。这个等式曾用来估计原子弹中的核裂变会释放多少能量(虽然许多碎片并不正好相等,而是近似相等)。铀原子的质量是已知的——在事前已测定过——铀原子裂变后产生的碘、氙等的质量也已知。这里的质量不是指原子运动时的质量,而是指它们静止的质量。换句话说,M 和 m_0 都已知。这样,将

有关两个数相减，我们就能计算如果 M 可以分裂为“两半”的话将会释放多少能量。由于这个理由，在所有的报纸上都曾将可怜的老爱因斯坦称为原子弹之“父”。当然，所有这些只是意味着，倘若我们告诉他会有什么反应发生的话，他就能在事先告诉我们会有多少能量被释放出来。一个铀原子裂变时应当释放的能量大约在第一次直接试验前六个月就估计出来了，后来能量真的释放时，立即有人直接作了测量(如果爱因斯坦公式不起作用，他们不管怎样也得测量能量)，当他们测量出能量时，就不再需要这个公式了。当然，我们不应该贬低爱因斯坦，而是应该批评报界和许多报道文章对在物理和技术的发展过程中究竟是什么促成什么所提出的议论。至于怎样使事情更有效地和更迅速地出现，这完全是另一回事。

这个结果在化学上也同样有效，比方说，如果我们测定二氧化碳的质量，并与碳和氧的质量相比，我们就能算出，当碳和氧组成二氧化碳时，会释放出多少能量。这里唯一的麻烦在于质量上的差别是如此之小，以致这件事在技术上很难实现。

现在，我们回到这个问题上来：是否应当把 m_0c^2 加到动能上，从今以后就说一个物体的总能量是 mc^2 呢？首先，假如我们仍能在 M 内看出静止质量为 m_0 的组成部分，那么我们就可以说，复合物体的质量 M 中有一些是各组成部分的力学静止质量，有一些是各组成部分的动能，有一些是各组成部分的势能。但是我们发现，自然界中经历上述那种反应的各种粒子，在世界各国无论用什么方式来进行研究，都还没有能看到内部的组成成分。例如，K 介子蜕变成两个 π 介子时，的确遵从定律式(16.11)，但是认为一个 K 介子由两个 π 介子组成则是无价值的观点，因为它也能蜕变为三个 π 介子！

因此我们有一种新的想法：我们毋须知道物体的内部结构；我们不能够，也不需要识别在粒子内部，哪一部分能量是粒子行将蜕变成的那些部分的静止能量。将一个物体的总能量 mc^2 分为内部组成部分的静止能量、动能和势能，既不方便，也常常不可能，我们只是简单地说粒子的总能量。我们对每个物体加上一个常数 m_0c^2 来“改变能量原点”，并且说，一个粒子的总能量是运动质量乘以 c^2，而当物体静止时，其能量就是静止质量乘以 c^2。

最后，我们发现速度 v，动量 P，总能量 E 能以一个相当简单的方式联系起来。很奇怪，以速率 v 运动的物体的质量等于静止质量 m_0 除以$\sqrt{1-v^2/c^2}$这样一个公式却很少使用。相反，下面两个式子很容易证明，结果则很有用：

$$E^2 - P^2c^2 = m_0^2c^4 \tag{16.13}$$

和

$$Pc = \frac{Ev}{c}. \tag{16.14}$$

第 17 章 时　　空

§ 17-1 时空几何学

相对论告诉我们在两个不同的坐标系里测得的位置和时间的关系与我们根据直观概念所想象的不一样。透彻理解洛伦兹变换所包含的空间和时间的关系是十分重要的，因此，在本章中我们将较为深入地研究这个问题。

“静止”的观察者测得的位置和时间(x, y, z, t)和在以速度u“运动”的宇宙飞船里的观察者所测得的相应的坐标和时间(x', y', z', t')之间的洛伦兹变换为

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\\
y' &= y,\\
z' &= z,\\
t' &= \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.
\end{aligned}
\tag{17.1}
$$

我们来比较一下这些式子和式(11.5)。式(11.5)也涉及在两个坐标系中的测量关系，不过在那里一个坐标系相对于另一个坐标系作转动

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\theta + y\sin\theta,\\
y' &= y\cos\theta - x\sin\theta,\\
z' &= z.
\end{aligned}
\tag{17.2}
$$

在此特例中，莫和乔用的坐标轴中的x-轴和x'-轴之间有一夹角θ。在上述各种情况中，我们看到带撇的量是不带撇的量“混合”：新的x'是x和y的混合，新的y'也是x和y的混合。

打一个比方来说：当我们观察一个物体时，有一个我们称之为“视宽度”和另一个我们称之为“深度”的概念。但是，宽度和深度这两个概念不是物体的基本特性，因为如果我们走开一点，从不同的角度来观察同一物体，就得到不同的宽度和深度，并且我们可以建立一些从旧的量和有关角度来计算新的量的公式。式(17.2)就是这样的一些公式。人们可以认为一个给定的深度是所有宽度和所有深度的一种混合。假如物体是永远不能移动的，而且我们总是从同一位置来观察一个给定物体，这时情况就完全不同了——我们将总是看到“真实”的宽度和“真实”的深度，它们好像具有完全不同的性质，因为一个表现为视张角，而另一个与眼睛的聚焦或直觉有关；它们好像是非常不同的两件事，而且永远不会混合。但是，由于我们能够从不同的角度进行观察，所以我们认识到深度和宽度从某种意义上来说，正好是同

一事物的两个不同方面。

我们能否用同样的方式来看待洛伦兹变换呢？这里也有一个位置和时间的混合。空间量度和时间量度之间的差值产生了一个新的空间量度。换句话说，某人的空间量度，在另一个人看来，却掺入了一些时间的量度。上述比方使我们产生这样的概念：我们所观察的客体的“实际”（粗略地、直观地说）总是比它的“宽度”和“深度”更为重要，因为“宽度”和“深度”与我们如何观察物体有关；当我们移动到一个新的位置时，我们可以立即重新算出它的宽度和深度。但是，当我们以高速运动时，不能立即重新算出坐标和时间，因为我们还没有以接近光速运动的实际经验，来鉴别时间和空间也具有相同的性质。这就像我们只能总是固定在一定的位置上来看某一物体的宽度，而不能这样或那样明显地移动我们的位置；如果我们能够的话，那么按照现在的理解，我们就应当能够看到一些别人的时间——比方说“滞后的”，即便是一点点。

因此，就像物体在普通的空间世界里是实在的，并能从不同的方向上被观察到一样，我们将试图在一种空间和时间混合在一起的新的世界里来想象客体。我们将认为，占有空间并延续了某一时间间隔的物体在新的世界里占有一个“小块”，而当我们以不同的速度运动时，我们就能从不同的角度观察到这个“小块”。这个新的世界是这样的几何实体，其中每一小块都占有位置并包含一定量的时间。我们称这个新的世界为时空。在时空中的一个给定点(x, y, z, t)称为一个事件。例如，可以设想，在水平方向作 x 轴，在另外两个方向作 y 和 z 轴，其中两两互成“直角”，并且“垂直”于纸面(!)，在竖直方向上作时间轴。那么一个运动粒子在这个图中会是什么样子呢？如果粒子是静止的，它具有某一 x 值；随着时间的推移，它具有的 x 值不变，因此，它的“轨迹”是平行于 t 轴的一条直线[见图 17-1(a)]。另一方面，如果它向前漂移，则随着时间的推移，x 将增大[图 17-1(b)]。如果有一个粒子，开始时向外漂移，以后又逐渐地缓慢下来，那么它具有的运动就像图 17-1(c)所示的那样。换句话说，一个永久的不蜕变的粒子在时空中用一条线表示。一个蜕变的粒子要用一条分叉线来表示，因为它在分叉点处开始变成两个粒子。

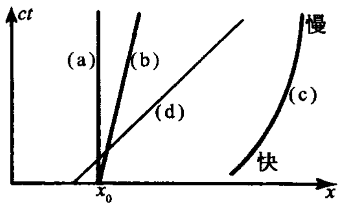


图 17-1 三个粒子在时空中的轨迹：(a) 静止在 $x = x_0$ 处的粒子轨迹；(b) 以恒定速度在 $x = x_0$ 处开始运动的粒子轨迹；(c) 以高速开始运动，但逐步缓慢下来的粒子轨迹；(d) 光线运动的轨迹

光的情况怎样呢？光是以速度 c 运动的，因而应该用具有一定斜率的直线来表示[图 17-1(d)]。

现在按照我们的新概念，假如一个粒子发生了某一给定事件，比如说，它在某一时空点突然蜕变成两个新粒子，并沿某些新的轨迹运动，而且这一有趣事件是发生在某一确定的 x 和 t 值处，那么我们或许会预期，如果这是有意义的话，只要取一对新的轴，并把它们转过一个角度，在这个新的系统里，我们将得到新的 t 和新的 x，如图 17-2(a)所示。但是，这是错误的，因为式(17.1)和(17.2)并不是完全相同的数学变换。例如，两者之间的符号就不一样，事实上一个是用 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 项来表示，而另一个是一些代数量（当然，把代数量写成余弦和正弦的形式并不是不可能的，但实际上

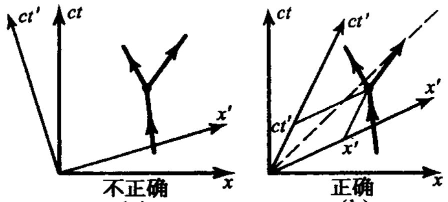


图 17-2 对一个蜕变粒子的两种看法