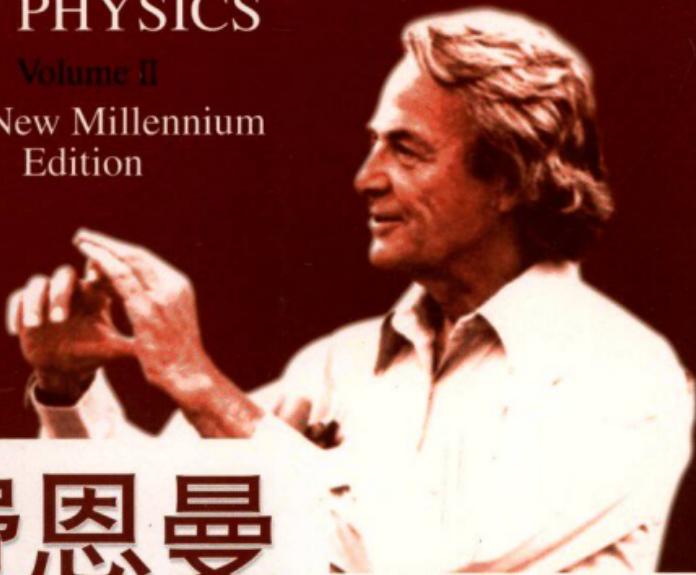


THE  
*Feynman*  
LECTURES  
ON PHYSICS

Volume II  
The New Millennium  
Edition



费恩曼  
物理学讲义 第②卷

新千年版

[美]费恩曼(R.P.Feynman) 莱顿(R.B.Leighton) 桑兹(M.Sands) 著

李洪芳 王子辅 钟万蘅 译



上海科学技术出版社



责任编辑 赵伟  
封面设计 房惠平

# 费恩曼物理学讲义

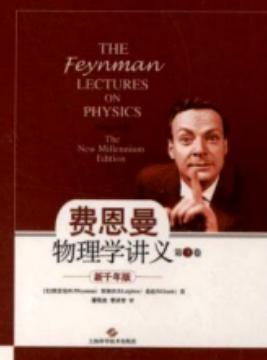
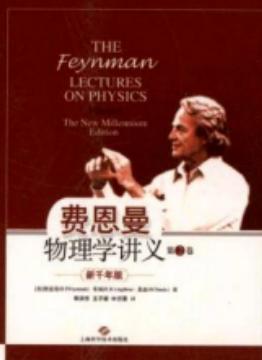
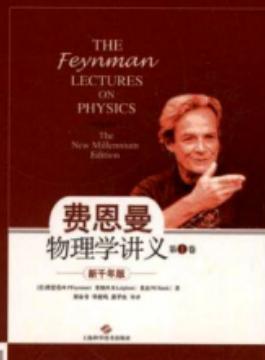
第三卷

新千年版

## THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS

Volume III

The New Millennium Edition



上海科学技术出版社  
[www.sstpcn](http://www.sstpcn)

上架建议：物理学

ISBN 978-7-5478-1637-0

9 787547 816370 >

定价：98.00元

易文网 [www.ewen.cc](http://www.ewen.cc)



The Feynman Lectures on Physics(The New Millennium Edition, Volume II)

# 费恩曼物理学讲义

## (新千年版)

### 第 2 卷

[美]费恩曼(R. P. Feynman)

莱顿(R. B. Leighton) 著

桑兹(M. Sands)

李洪芳 王子辅 钟万衡 译

04-43  
18(7)

上海科学技出版社

V2

---

**图书在版编目(CIP)数据**

费恩曼物理学讲义：新千年版。第2卷 / (美)费恩曼 (Feynman, R. P.), (美)莱顿 (Leighton, R. B.), (美)桑兹 (Sands, M.)著；李洪芳, 王子辅, 钟万衡译。—上海：上海科学技术出版社，2013.4

The Feynman lectures on physics: The new millennium edition

ISBN 978 - 7 - 5478 - 1637 - 0

I. ①费… II. ①费… ②莱… ③桑… ④李… ⑤王…  
⑥钟… III. ①物理学—教材 ②电磁学—教材 IV. ①04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 031568 号

---

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS: The New Millennium Edition, Volume II  
By Richard P. Feynman, Robert B. Leighton and Matthew Sands

© 1964, 2010 by California Institute of Technology. Michael A. Gottlieb, and Rudolf Pfeiffer

Simplified Chinese translation copyright © 2013 by Shanghai Scientific & Technical Publishers

Published by arrangement with Basic Books, a Member of Perseus Books Group

Through Bardon-Chinese Media Agency

博达著作权代理有限公司

ALL RIGHTS RESERVED

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行  
上 海 科 学 技 术 出 版 社

(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)

新华书店上海发行所经销

苏州望电印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 39

字数：870 千字

2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5478 - 1637 - 0 / O · 19

定价：98.00 元

---

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，  
请向工厂联系调换

# 译者序

20世纪60年代初,美国一些理工科大学鉴于当时的大学基础物理教学与现代科学技术的发展不相适应,纷纷试行教学改革,加利福尼亚理工学院就是其中之一。该校于1961年9月至1963年5月特请著名物理学家费恩曼主讲一二年级的基础物理课,事后又根据讲课录音编辑出版了《费恩曼物理学讲义》。本讲义共分3卷,第1卷包括力学、相对论、光学、气体分子运动论、热力学、波等,第2卷主要是电磁学,此外还有弹性、流体的流动及弯曲空间等内容,第3卷是量子力学。全书内容十分丰富,在深度和广度上都超过了传统的普通物理教材。

当时美国大学物理教学改革试图解决的一个主要问题是,基础物理教学应尽可能反映近代物理的巨大成就。《费恩曼物理学讲义》在基础物理的水平上对20世纪物理学的两大重要成就——相对论和量子力学——作了系统的介绍,对于量子力学,费恩曼教授还特地准备了一套适合大学二年级水平的讲法。教学改革试图解决的另一个问题是按照当前物理学工作者在各个前沿研究领域所使用的方式来介绍物理学的内容。在《费恩曼物理学讲义》一书中对一些问题的分析和处理方法,反映了费恩曼自己以及其他在前沿研究领域工作的物理学家所通常采用的分析和处理方法。全书对基本概念、定理和定律的讲解不仅生动清晰、通俗易懂,而且特别注重从物理上做出深刻的叙述。为了扩大学生的知识面,全书还列举了许多基本物理原理在各个方面(诸如天体物理、地球物理、生物物理等)的应用,以及物理学的一些最新成就。由于全书是根据课堂讲授的录音整理编辑的,它在一定程度上保留了费恩曼讲课的生动活泼、引人入胜的独特风格。

《费恩曼物理学讲义》从普通物理水平出发,注重物理分析,深入浅出,避免运用高深繁琐的数学方程,因此具有高中以上物理水平和初等微积分知识的读者阅读起来不会感到十分困难。至于大学物理系的师生和物理工作者更能从此书中获得教益。为此我们特将此书译成中文,以飨读者。

原书第一版发行后,深受广大读者欢迎。1989年,为了纪念费恩曼教授逝世一周年,编者重新出版了本书,并加了新的序言及介绍费恩曼生平的短文。本卷在课程内容上则增加了弯曲空间一章,使得《费恩曼物理学讲义》这套书的内容更为完整。2010年,编者根据五十多年来世界各国在阅读和使用本书过程中提出的意见,对全书(三卷)存在的错误和不当之处(885处)进行了订正,并使用新的电子版语言和现代作图软件对全书语言文字、符号、方程及插图进行重新编辑出版,称为新千年版。本书就是根据新千年版翻译的。

本书中的费恩曼自序由郑永令在吴子仪译稿的基础上重译,前言由李洪芳翻译,潘笃武校阅,关于费恩曼和《费恩曼物理学讲义》另序以及新千年版序言由潘笃武翻译。本卷正文由李洪芳、钟万衡在王子辅译稿的基础上重新翻译,第42章由郑永令校阅。由于译者水平所限,错误在所难免,欢迎广大读者批评指正。

译者

2012年11月

# 关于费恩曼

理查德·费恩曼(R. P. Feynman)1918年生于纽约市,1942年在普林斯顿大学获得博士学位。第二次世界大战期间,尽管当时他还很年轻,就已经在洛斯阿拉莫斯的曼哈顿计划中发挥了重要作用。以后,他在康奈尔大学和加利福尼亚理工学院任教。1965年,因在量子电动力学方面的工作和朝永振一郎及施温格尔(J. Schwinger)同获诺贝尔物理学奖。

费恩曼博士获得诺贝尔奖是由于成功地解决了量子电动力学的理论问题。他也创立了说明液氦中超流动性现象的数学理论。此后,他和盖尔曼(M. Gell-Mann)一起在 $\beta$ 衰变等弱相互作用领域内做出了奠基性的工作。在以后的几年里,他在夸克理论的发展中起了关键性的作用,提出了高能质子碰撞过程的部分子模型。

除了这些成就之外,费恩曼博士将新的基本计算技术及记号法引进物理学,首先是无处不在的费恩曼图,在近代科学历史中,它比任何其他数学形式描述都更大程度地改变了对基本物理过程形成概念及进行计算的方法。

费恩曼是一位卓越的教育家。在他获得的所有奖项中,他对1972年获得的奥斯特教学奖章特别感到自豪。在1963年第一次出版的《费恩曼物理学讲义》被《科学美国人》杂志的一位评论员描写为“难啃的但却富于营养并且津津有味”。25年后它仍是教师和最优秀的初学学生的指导书”。为了使外行的公众增加对物理学的了解,费恩曼博士写了《物理定律和量子电动力学的性质:光和物质的奇特理论》。他还是许多高级出版物的作者,这些都成为研究人员和学生的经典参考书和教科书。

费恩曼是一个活跃的公众人物。他在挑战者号调查委员会里的工作是众所周知的,特别是他的著名的O型环对寒冷的敏感性的演示,这是一个优美的实验,除了一杯冰水和C形钳以外其他什么也不需要。费恩曼博士1960年在加利福尼亚州课程促进会中的工作却很少人知道,他在会上指责教科书的平庸。

仅仅罗列费恩曼的科学和教育成就还没有充分抓住这个人物的本质。即使是他的最最技术性的出版物的读者都知道,费恩曼活跃的多面的人格在他所有的工作中都闪闪发光。除了作为物理学家,在各种不同的时候:他是无线电修理工,是锁具收藏家、艺术家、舞蹈家、邦戈(bongo)鼓手,以至玛雅象形文字的破译者。他的世界是永远的好奇,他是一个典型的经验主义者。

费恩曼于1988年2月15日在洛杉矶逝世。

# 新千年版前言

自理查德·费恩曼在加利福尼亚理工学院讲授物理学导论课程以来，已经过去快 50 年了。这次讲课产生了这三卷《费恩曼物理学讲义》。在这 50 年中，我们对物理世界的认识已经大大改变了，但是《费恩曼物理学讲义》的价值仍旧存在。由于费恩曼对物理学独到的领悟和教学方法，费恩曼的讲义今天仍像第一次出版时那样具有权威性。这些教本已在全世界范围内被初学者，也被成熟的物理学家研读；它们已被翻译成至少 12 种语言，仅仅英语的印刷就有 150 万册以上。或许至今为止还没有其他物理学书籍有这样广泛的影响。

新千年版迎来了《费恩曼物理学讲义 (FLP)》的新时代：21 世纪的电子出版物时代。FLP 改变为 eFLP，本文和方程式用 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 电子排字语言表示，所有的插图用现代绘图软件重画。

这一版的印刷本的效果并没有什么特别之处，它看上去几乎完全和学物理的学生都已熟悉并热爱的最初的红色书一样。主要的差别在于扩大并改进了的索引，以前的版本第一次印刷以来的 50 年内读者们发现的 885 篇错误的改正，以及改正未来的读者可能发现的错误的便利。关于这一点我以后还要谈到。

这一版的电子书版本以及加强电子版不同于 20 世纪的大多数技术书籍的电子书，如果把这种书籍的方程式、插图、有时甚至包括课文，放大以后都成为多个像素。新千年版的 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 稿本有可能得到最高质量的电子书，书页上的所有的面貌特征（除了照片）都可以无限制地放大而始终保持其精确的形状和细锐度。带有费恩曼原初讲课的声音和黑板照相、还带有和其他资源的联接的加强电子版是新事物，（假如费恩曼还在世的话）这一定会使他极其高兴。<sup>\*</sup>

## 费恩曼讲义的回忆

这三卷书是一套完备的教科书。它们也是费恩曼在 1961—1964 年给本科生上物理学课的历史记录，这是加利福尼亚理工学院的一年级和二年级学生，无论他们主修什么课程，都必须上的一门课。

读者们可能和我一样很想知道，费恩曼的讲课对听课的学生的影响如何。费恩曼在这几本书的前言中提供了多少有些负面的看法。他写道：“我不认为我对学生做得很好”。马修·桑兹在他的《费恩曼物理学指导手册》的回忆文章中给出了完全正面的观点。出于好

\* 原文“What would have given Feynman great pleasure”是虚拟式的句子，中文没有相当于英语虚拟式的句法，所以加上括号内的句子。——译者注

奇,2005年春天,我和从费恩曼1961—1964班级(大约150个学生)中半随机地挑选一组17位学生通过电子邮件或面谈联系——这些学生中有些在课堂上有很大的困难,而有一些很容易掌握课程;他们主修生物学,化学,工程,地理学,数学及天文学,还包括物理学。

经过了这些年,可能已经在他们的记忆中抹上了欣快的色彩,但大约有80%回忆起费恩曼的讲课觉得是他们大学时光中精彩的事件。“就像上教堂。”听课是“一个变形改造的经历”,“一生的重要阅历,或许是我从加利福尼亚理工学院得到的最重要的东西。”“我是一个主修生物学的学生,但费恩曼的讲课在我的本科生经历中就像在最高点一样突出……虽然我必须承认当时我不会做家庭作业并且总是交不出作业。”“我当时是课堂上最没有希望的学生之一,但我从不缺一堂课……我记得并仍旧感觉到费恩曼对于发现的快乐……他的讲课具有一种……感情上的冲击效果,这在印刷的讲义中可能失去了。”

相反,好些学生,主要由于以下两方面问题,而具有负面的记忆。(I)“你无法通过上课学会做家庭作业。费恩曼太灵活了——他熟知解题技巧和可以作哪些近似,他还具有基于经验和天赋的直觉,这是初学的学生所不具备的。”费恩曼和同事们在讲课过程中知道这一缺陷,做了一些工作,部分材料已编入《费恩曼物理学指导手册》:费恩曼的三次习题课以及罗伯特·莱顿和罗各斯·沃格特(Rochus Vogt)选编的一组习题和答案。(II)由于不知道下一节课可能会讨论什么内容产生一种不安全感,缺少与讲课内容有任何关系的教科书或参考书,其结果是我们无法预习,这是十分令人丧气的……我发现在课堂上的演讲是令人激动但却是很难懂,但(当我重建这些细节的时候发现)它们只是外表上像梵文一样难懂。当然,有了这三本《费恩曼物理学讲义》,这些问题已经得到了解决。从那以后的许多年,它们就成了加州理工学院学生学习的教科书,直到今天它们作为费恩曼的伟大遗产还保持着活力。

## 改错的历史

《费恩曼物理学讲义》是费恩曼和他的合作者罗伯特·莱顿及马修·桑兹非常仓促之中创作出来的,根据费恩曼的讲课的录音带和黑板照相(这些都编入这新千年版的增强电子版)加工扩充而成\*。由于要求费恩曼、莱顿和桑兹高速度工作,不可避免地有许多错误隐藏在第一版中。在以后几年中,费恩曼收集了加州理工学院的学生和同事以及世界各地的读者发现的、长长的、确定的错误列表。在20世纪60年代和70年代早期,费恩曼在他的紧张的生活中抽出时间来核实第1卷和第2卷中确认的大多数,不是全部错误,并在以后的印刷中加入了勘误表。但是费恩曼的责任感从来没有高到超过发现新事物的激情而促使他处理第3卷中的错误。\*\*在1988年他过早的逝世后,所有三卷的勘误表都存放到加州理工学院档案馆,它们躺在那里被遗忘了。

\* 费恩曼的讲课和这三本书的起源的说法请参阅这三本书每一本都有的《费恩曼自序》和《前言》,也可参看《费恩曼物理学指导手册》中马修·桑兹的回忆以及1989年戴维·古德斯坦(David Goodstein)和格里·诺格鲍尔(Gerry Neugebauer)撰写的《费恩曼物理学讲义纪念版》特刊前言,它也刊载在2005年限定版中。

\*\* 1975年,他开始审核第3卷中的错误,但被其他事情所分心,因而没有完成这项工作,所以没有作出勘误。

2002 年,拉尔夫·莱顿(Ralph Leighton)(已故罗伯特·莱顿的儿子,费恩曼的同胞)告诉我,拉尔夫的朋友迈克尔·戈特里勃(Michael Gottlieb)汇编了老的和长长的新的勘误表。莱顿建议加州理工学院编纂一个改正所有错误的《费恩曼物理学讲义》的新版本,并将他和戈特里勃当时正在编写的新的辅助材料——《费恩曼物理学指导手册》一同出版。

费恩曼是我心目中的英雄,也是亲密的朋友。当我看到勘误表和提交的新的一卷的内容时,我很快就代表加州理工学院(这是费恩曼长时期的学术之家,他、莱顿和桑兹已将《费恩曼物理学讲义》所有的出版权利和责任都委托给她了)同意了。一年半以后,经过戈特里勃细微工作和迈克尔·哈特尔(Micheal Hartl)(一位优秀的加州理工学院博士后工作者,他审校了加上新的一卷的所有错误)仔细的校阅,《费恩曼物理学讲义》的 2005 限定版诞生了,其中包括大约 200 处勘误。同时发行了费恩曼、戈特里勃和莱顿的《费恩曼物理学指导手册》。

我原来以为这一版是“定本”了。出乎我意料的是全世界读者热情响应。戈特里勃呼吁大家鉴别出更多错误,并通过创建的费恩曼讲义网站 [www.feynmanlectures.info](http://www.feynmanlectures.info) 提交给她。从那时起的五年内,又提交了 965 处新发现的错误,这些都是从戈特里勃、哈特尔和纳特·博德(Nate Bode)(一位优秀的加州理工学院研究生,他是继哈特尔之后的加州理工学院的错误检查员)的仔细校对中遗漏的。这些 965 处被检查出来的错误中 80 处在《定本》的第四次印刷(2006 年 8 月)中改正了,余下的 885 处在这一新千年版的第一次印刷中被改正(第 1 卷中 332 处,第 2 卷中 263 处,第 3 卷 200 处)\*,这些错误的详情可参看 [www.feynmanlectures.info/flp-errata.html](http://www.feynmanlectures.info/flp-errata.html) 上。

显然,使《费恩曼物理学讲义》没有错误已成为全世界的共同事业。我代表加州理工学院感谢 2005 年以来作了贡献的 50 位读者以及更多的在以后的年代里会作出贡献的读者。所有贡献者的名字都公示在 [www.feynmanlectures.info/flp-errata.html](http://www.feynmanlectures.info/flp-errata.html) 上。

几乎所有的错误都可分为三种类型:(Ⅰ)文字中的印刷错误;(Ⅱ)公式和图表中的印刷和数学错误——符号错误,错误的数字(例如,应该是 4 的写成 5),缺失下标、求和符号、括号和方程式中一些项;(Ⅲ)不正确的章节、表格和图的参见条目。这几种类型的错误虽然对成熟的物理学家来说并不特别严重,但对于初识费恩曼的学生,就可能造成困惑和混淆。

值得注意的是,在我主持下改正的 1 165 处错误中只有不多几处我确实认为是真正物理上的错误。一个例子是第二卷,5—9 页上一句话,现在是“……接地的封闭导体内部没有稳定的电荷分布不会在外部产生[电]场”(在以前的版本中漏掉了接地一词)。这一错误是好些读者都曾向费恩曼指出过的,其中包括威廉和玛丽学院(The College of William and Mary)学生比尤拉·伊丽莎白·柯克斯(Beulah Elizabeth Cox),她在一次考试中依据的是费恩曼的错误的段落。费恩曼在 1975 年给柯克斯女士的信中写道:“你的导师不给你分數是对的,因为正像他用高斯定律证明的那样,你的答案错了。在科学中你应当相信逻辑和论据、仔细推理而不是权威。你也正确阅读和理解了书本。我犯了一个错误,所以书错了。当时我或许正想着一个接地的导电球体,或别的;使电荷在(导体球)内部各处运动而不影响外部的事物。我不能确定当时是怎样做的。但我错了。你由于信任我也错了。”\*\*

\* 原版如此。——译者注

\*\* 《与习俗完全合理的背离,理查德·P·费恩曼的信件》288~289 页,米歇尔·费恩曼(Michelle Feynman)编,Basic Books,纽约,2005。

## 这一新千年版是怎样产生的

2005年11月到2006年7月之间,340个错误被提交到费恩曼讲义网站 [www.feynmanlectures.info](http://www.feynmanlectures.info)。值得注意的是,其中大多数来自鲁道夫·普法伊弗(Rudolf Pfeiffer)博士一个人:当时是奥地利维也纳大学的物理学博士后工作者。出版商艾迪生·卫斯利(Addison Wesley),改正了80处错误,但由于费用的缘故而没有改正更多的错误:由于书是用照相胶印法印刷的,用1960年代版本书页的照相图出版印刷。改正一个错误就要将整个页面重新排字并要保证不产生新的错误,书页要两个不同的人分别各排一页,然后由另外几个人比较和校读。——如果有几百个错误要改正,这确是一项花费巨大的工作。

戈特里勃、普法伊弗和拉尔夫·莱顿对此非常不满意,于是他们制定了一个计划,目的是便于改正所有错误,另一目的是做成电子书的《费恩曼物理学讲义》的加强电子版。2007年,他们将他们的计划向作为加州理工学院的代理人的我提出,我热心而又谨慎。当我知道了更多的细节,包括《加强电子版本》中一章的示范以后,我建议加州理工学院和戈特里勃、普法伊弗及莱顿合作来实现他们的计划。这个计划得到三位前后相继担任加州理工学院物理学、数学和天文学学部主任——汤姆·汤勃列罗(Tom Tomlrello)、安德鲁·兰格(Andrew Lange)和汤姆·索伊弗(Tom Saifer)——的支持;复杂的法律手续及合同细节由加州理工学院的知识产权法律顾问亚当·柯奇伦(Adam Cochran)完成。《新千年版》的出版标志着该计划虽然很复杂但已成功地得到执行。尤其是:

普法伊弗和戈特里勃已将所有三卷《费恩曼物理学讲义》(以及来自费恩曼的课程并收入《费恩曼物理学指导书》的1 000多道习题)转换成 $\text{\LaTeX}$ 。《费恩曼物理学讲义》的图是在书的德文译者亨宁·海因策(Henning Heinze)的指导下,为用于德文版,在印度用现代的电子方法重画的。为了将海因策的插图的非独家使用于新千年英文版,戈特里勃和普法伊弗购买了德文版[奥尔登博(Oldenbourg)出版]的 $\text{\LaTeX}$ 方程式的非独家的使用权,普法伊弗和戈特里勃不厌其烦地校对了所有 $\text{\LaTeX}$ 文本和方程式以及所有重画的插图,并必要时作了改正。纳特·博德和我代表加州理工学院对课文、方程式和图曾作过抽样调查,值得注意的是,我们没有发现错误。普法伊弗和戈特里勃是惊人的细心和精确。戈特里勃和普法伊弗为约翰·沙利文(John Sullivan)在亨丁顿实验室安排了将费恩曼在1962—1964年黑板照相数字化,以及乔治·布卢迪·奥迪欧(George Blood Audio)将讲课录音磁带数字化——从加州理工学院教授卡弗·米德(Carver Mead)获得财政资助和鼓励,从加州理工学院档案保管员谢利·欧文(Shelly Erwin)处得到后勤支持,并从柯奇伦处得到法律支持。

法律问题是很严肃的。20世纪60年代,加州理工学院特许艾迪生·卫斯利发表印刷版的权利,20世纪90年代,给予分发费恩曼讲课录音和各种电子版的权利。在21世纪初,由于先后取得这些特许证,印刷物的权利转让给了培生(Pearson)出版集团,而录音和电子版转让给珀修斯(Perseus)出版集团。柯奇伦在一位专长于出版的律师艾克·威廉姆斯(Ike Williams)的协助下,成功将所有这些权利和珀修斯结合在一起,使这一新千年版成为可能。

## 鸣 谢

我代表加州理工学院感谢这许多使这一新千年版成为可能的人们。特别是,我感谢上面提到的关键人物:拉尔夫·莱顿,迈克尔·戈特里勃,汤姆·汤勃列罗,迈克尔·哈特尔,鲁道夫·普法伊弗,亨宁·海因策,亚当·柯奇伦,卡弗·米德,纳特·博德,谢利·欧文,安德鲁·兰格,汤姆·索伊弗,艾克·威廉姆斯以及提交错误的 50 位人士(在 [www.feynmanlectures.info](http://www.feynmanlectures.info) 中列出)。我也要感谢米歇尔·费恩曼(Michelle Feynman)(理查德·费恩曼的女儿)始终不断的支持和建议,加州理工学院的艾伦·赖斯(Alan Rice)的幕后帮助和建议,斯蒂芬·普奇吉(Stephan Puchegger)和卡尔文·杰克逊(Calvin Jackson)给普法伊弗从《费恩曼物理学讲义》转为 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X的帮助和建议。迈克尔·菲格尔(Michael Figl)、曼弗雷德·斯莫利克(Manfred Smolik)和安德烈斯·斯坦格(Andreas Stangl)关于改错的讨论,以及珀修斯的工作人员和(以前版本)艾迪生·卫斯利的工作人员。

基普·S·桑尼(Kip S. Thorne)  
荣休理论物理费恩曼教授  
加州理工学院  
2010 年 10 月

# 费恩曼自序

这是我前年与去年在加利福尼亚理工学院对一二年级学生讲授物理学的讲义。当然，这本讲义并不是课堂讲授的逐字逐句记录，而是已经经过了编辑加工，有的地方多一些，有的地方少一些。我们的课堂讲授只是整个课程的一部分。全班 180 个学生每周两次聚集在大教室里听课，然后分成 15 到 20 人的小组在助教辅导下进行复习巩固。此外，每周还有一次实验课。

在这些讲授中，我们想要抓住的特殊问题是，要使充满热情而又相当聪明的中学毕业生进入加利福尼亚理工学院后仍旧保持他们的兴趣。他们在进入学院前就听说过不少关于物理学是如何有趣以及如何引人入胜——相对论、量子力学以及其他的新概念。但是，一旦他们学完两年我们以前的那种课程后，许多人就泄气了，因为教给他们意义重大、新颖的现代的物理概念实在太少。他们被安排去学习像斜面、静电学以及诸如此类的内容，两年过去，没什么收获。问题在于，我们是否有可能设置一门课程能够顾全那些比较优秀的、兴致勃勃的学生，使其保持求知热情。

我们所讲授的课程丝毫也不意味着是一门概况性的课程，而是极其严肃的。我想这些课程是对班级中最聪明的学生而讲的，并且可以肯定，这可能是对的，甚至最聪明的学生也无法完全消化讲课中的所有内容——其中加入了除主要讨论的内容之外的有关思想和概念多方面应用的建议。不过，为了这个缘故，我力图使所有的陈述尽可能准确，并在每种场合都指明有关的方程式和概念在物理学的主体中占有什么地位，以及——随着他们学习深入——应怎样作出修正。我还感到，重要的是要向这样的学生指出，他们应能理解——如果他们够聪明的话——哪些是从已学过的内容中推演出来的，哪些是作为新的概念而引进的。当出现新的概念时，假若这些概念是可推演的，我就尽量把它们推演出来，否则就直接说明这是一个新的概念，它根本不能用已学过的东西来阐明，也不可能予以证明，而是直接引进的。

在讲授开始时，我假定学生们在中学已学过一些内容，如几何光学、简单的化学概念，等等。我也看不出有任何理由要按一定的次序来讲授。就是说没有详细讨论某些内容之前，不可以提到这些内容。在讲授中，有许多当时还没有充分讨论过的内容出现。这些内容比较完整的讨论要到以后学生的预备知识更齐全时再进行。电感和能级的概念就是例子，起先，只是以非常定性的方式引入这些概念，后来再进行较全面的讨论。

在针对那些较积极的学生的同时，我也要照顾到另一些学生，对他们来说，这些外加的五彩缤纷的内容和不重要的应用只会使其感到头痛，也根本不能要求他们掌握讲授中的大部分内容。对这些学生而言，我要求他们至少能学到中心内容或材料的脉络。即使他不理解一堂课中的所有内容，我希望他也不要紧张不安。我并不要求他理解所有的内容，只要求他理解核心的和最确切的面貌。当然，对他来说也应当具有一定的理解能力，来领会哪些是主要定理和主要概念，哪些则是更高深的枝节问题和应用，这些要过几年他才会理解。



在讲课过程中有一个严重困难：在课程的讲授过程中一点也没有学生给教师的反馈来指示讲授的效果究竟如何。这的确是一个很严重的困难，我不知道讲课的实际效果的好坏。整个事件实质上是一种实验。假如要再讲一次的话，我将不会按同样的方式去讲——我希望我不会再来一次！然而，我想就物理内容来说，第一年的情形看来还是十分满意的。

但在第二年，我就不那么满意了。课程的第一部分涉及电学和磁学，我想不出什么真正独特的或不同的处理方法，也想不出什么比通常的讲授方式格外引人入胜的方法。因此在讲授电磁学时，我并不认为自己做了很多事情。在第二年末，我原来打算在电磁学后多讲一些物性方面的内容，主要讨论这样一些内容如基本模式、扩散方程的解、振动系统、正交函数等等，并且阐述通常称为“数学物理方法”的初等部分内容。回顾起来，我想假如再讲一次的话，我会回到原来的想法上去，但由于没有要我再讲这些课程的打算，有人就建议介绍一些量子力学——就是你们将在第3卷中见到的——或许是有益的。

显然，主修物理学的学生们可以等到第三年学量子力学。但是，另一方面，有一种说法认为许多听我们课的学生是把学习物理作为他们对其他领域的主要兴趣的背景；而通常处理量子力学的方式对大多数学生来说这些内容几乎是无用的，因为他们必须花费相当长的时间来学习它。然而，在量子力学的实际应用中——特别是较复杂的应用中，如电机工程和化学领域内——微分方程处理方法的全部工具实际上是用不到的。所以，我试图这样来描述量子力学的原理，即不要求学生首先掌握有关偏微分方程的数学。我想，即使对一个物理学家来说，我想试着这样做——按照这种颠倒的方式来介绍量子力学——是一件有趣的事，由于种种理由，这从讲课本身或许会明白。不过我认为，在量子力学方面的尝试不是很成功，这主要是因为在最后我实际上已没有足够的时间（例如，我应该再多讲三四次来比较完整地讨论能带、概率幅的空间的依赖关系等这类问题）。而且，我过去从未以这种方式讲授过这部分课程，因此缺乏来自学生的反馈就尤其严重了。我现在相信，还是应当迟一些讲授量子力学。或许有一天我会有机会再来讲授这部分内容，到那时我将会讲好它。

在这本讲义中没有列入有关解题的内容，这是因为另有辅导课。虽然在第一年中，我的确讲授过三次关于怎样解题的内容，但没有将它们收在这里。此外，还讲过一次惯性导航，应该在转动系统后面，遗憾的是在这里也略去了。第五讲和第六讲实际上是桑兹讲授的，那时我正外出。

当然，问题在于我们这个尝试的效果究竟如何。我个人的看法是悲观的，虽然与学生接触的大部分教师似乎并不都有这种看法。我并不认为自己在对待学生方面做得很出色。当我看到大多数学生在考试中采取的处理问题的方法时，我认为这种方式是失败了。当然，朋友们提醒我，也有一二十个学生——非常出人意外地——几乎理解讲授的全部内容，并且非常积极地攻读有关材料，兴奋地、感兴趣地钻研许多问题。我相信，这些学生现在已具备了一流的物理基础，他们毕竟是我想要培养的学生。但是，“教育之力量鲜见成效，除非施之于天资敏悟者，然若此又实为多余。”[吉本(Gibbon)<sup>\*</sup>]

但是，我并不想使任何一个学生完全落在后面，或许我曾经这样做的。我想，我们能够更好地帮助学生的一个办法是，多花一些精力去编纂一套能够阐明讲课中的某些概念的习题。习题能够充实课堂讲授，使讲过的概念更加实际，更加完整和更加易于牢记。

\* Edward Gibbon (1737—1794)，英国历史学家。——译者注

然而,我认为要解决这个教育问题就要认识到最佳的教学只有当学生和优秀的教师之间建立起个人的直接关系,在这种情况下,学生可以讨论概念、考虑问题、谈论问题,除此之外,别无他法。仅仅坐在课堂里听课或者只做指定的习题是不可能学到许多东西的。但是,现在我们有这么多学生要教育,因此我们必须尽量找出一种代替理想情况的办法。或许,我的讲义可以作出一些贡献;也许在某些小地方有个别教师和学生会从讲义中受到一些启示或获得某些观念,当他们彻底思考讲授内容,或者进一步发展其中的一些想法时,他们或许会得到乐趣。

R. P. 费恩曼

1963 年 6 月

# 前　　言

近 40 年来，费恩曼一直把他的好奇心集中在物理世界产生的奥秘上，而把他的聪明才智全部用于探寻物理世界的混乱中的秩序。现在，他花了两年的心血和精力为低年级的学生讲授物理课。为了他们，他把自己知识的精华提取出来，并创造条件使他们有望在听课期间能够了解物理学家关于宇宙的图像。他把他卓越而清晰的思想、独创性和生气勃勃的思想方法以及演讲中富有感染力的热情都带到了他的讲授中。看到这些非同寻常之处是令人高兴的。

第一年的讲授构成了这套书第 1 卷的基础。在这第 2 卷中我们尽力对第二年讲授的部分录音做了整理加工，这部分内容是供 1962—1963 学年中大学二年级学生用的。第二学年讲授的其余部分将编辑成第 3 卷。

在第二年的讲授中，前面三分之二的内容致力于对物理学中的电学和磁学部分做相当完整的处理。讲授的这种形式想要达到两个目的。首先，我们希望就这个物理学中极为重要的章节——从富兰克林的早期摸索，到贯穿麦克斯韦的伟大综合；从关于物质性质的洛伦兹电子论，到最后仍不能解决的电磁自能的两难处境问题——给学生一个完整的观念。其次，我们希望通过一开始引进矢量场的微分运算，从而为场论数学提供一个坚实可靠的导论。为了强调数学方法普遍的统一性，有时把物理学其他部分的内容与它在电学中相类似的内容放在一起进行分析。我们不断设法把数学的普遍性讲透彻（相同的方程具有相同的解）。同时，通过本课程所提供的各类练习和测验来加强这个观点。

继电磁学之后是弹性和流体的流动<sup>\*</sup>，这两部分各有两章。每个部分的前面一章处理基本而实际方面的情况，后一章试图对这部分内容所涉及现象的整个范围给出一个概述。这四章完全可以略去不讲而不会有严重的损失，因为它们对第 3 卷来说并不全是必备的。

第二学年后面大约四分之一的内容用于介绍量子力学。这些材料已经编入第 3 卷。

我们期望在编写这本费恩曼讲义中所记录的内容，要比仅仅提供他谈话录音做得更好一些。我们希望使得这个编写本尽可能清楚地阐述原始讲授中的根本思想。对于讲授的某些内容，可能仅对原始录音中的措辞做了较小的校正；对另外一些讲授内容，则需要对有关的材料做较大的改编和重新安排。有时感到为了使保留的内容变得更清晰和协调，应该添加一些新材料。在这整个过程中，费恩曼教授不断地帮助和建议使我们受益良多。

在很紧的日程内要将一百多万字的口头语言转化成相互协调的课文，是一个非常艰巨的任务，尤其是随着新课程的采用，带来了其他繁重的负担——备课、会见和指导学生、设计练习和考试题目等等。许多人都被卷入到这个工作中来了。我相信，我们在某些场合已经

\* 在本书新版中，电磁学后面除弹性和流动的流体外，新增加了一章——弯曲空间。——译者

能够描绘出原始作者费恩曼的真实形象——稍微修饰的肖像画；在另外的场合，还远没有达到这个理想情形。我们的成就应归功于所有帮助过我们的人。对于不足之处，我们表示抱歉。

正如在第1卷编者的话中所详细说明的那样，这套讲义仅是加州理工学院课程改革委员会的莱顿(R. B. Leighton)主席、内尔(H. V. Neher)及桑兹(M. Sands)拟订和支持的教学大纲的一个方面，这个大纲得到福特基金会的财政资助。另外，对第2卷正文材料准备工作的不同方面提供帮助的有下列人员：考伊(T. K. Caughey)、克莱顿(M. L. Clayton)、柯西奥(J. B. Curcio)、哈特尔(J. B. Hartle)、哈维(T. W. H. Harvey)、伊斯雷尔(M. S. Israel)、卡泽斯(W. J. Karzas)、卡瓦诺(R. W. Kavanagh)、R. B. 莱顿、马修斯(J. Mathews)、普莱西特(M. S. Plesset)、沃伦(F. L. Warren)、惠林(W. Whaling)、威尔茨(C. H. Wilts)及齐默尔曼(B. Zimmerman)。由于他们的工作而对本课程做出间接贡献的其他人员有：布卢(J. Blue)、查普林(G. F. Chapline)、克劳泽(M. J. Clauser)、多伦(R. Dolen)、希尔(H. H. Hill)及蒂特勒(A. M. Title)。诺伊格鲍尔(G. Neugebauer)教授以他的勤奋、热心和极端负责为我们这个任务的各个方面做出了贡献。

然而，要不是费恩曼的非凡才能和勤奋，物理学上的这个故事就不存在了。

M. 莱顿

1964年3月

# 目 录

<b>第 1 章 电磁学 .....</b>	1	<b>§ 4-3 电势 .....</b>	44
§ 1-1 电力 .....	1	§ 4-4 $E = -\nabla \phi$ .....	46
§ 1-2 电场和磁场 .....	3	§ 4-5 $E$ 的通量 .....	48
§ 1-3 矢量场的特征 .....	4	§ 4-6 高斯定理; $E$ 的散度 .....	51
§ 1-4 电磁学定律 .....	6	§ 4-7 带电球体的场 .....	52
§ 1-5 场是什么 .....	10	§ 4-8 场线;等势面 .....	52
§ 1-6 科学技术中的电磁学 .....	12		
<b>第 2 章 矢量场的微分运算 .....</b>	13	<b>第 5 章 高斯定律的应用 .....</b>	55
§ 2-1 对物理学的理解 .....	13	§ 5-1 静电学就是高斯定律加.....	55
§ 2-2 标量场和矢量场—— $T$ 与 $h$		..... .....	55
	14	§ 5-2 静电场中的平衡 .....	55
§ 2-3 场的微商——梯度 .....	16	§ 5-3 有导体时的平衡 .....	56
§ 2-4 算符 $\nabla$ .....	19	§ 5-4 原子的稳定性 .....	57
§ 2-5 $\nabla$ 的运算 .....	20	§ 5-5 线电荷的场 .....	57
§ 2-6 热流的微分方程 .....	21	§ 5-6 面电荷;平行板 .....	58
§ 2-7 矢量场的二阶微商 .....	22	§ 5-7 带电球体;球壳 .....	60
§ 2-8 陷阱 .....	25	§ 5-8 点电荷的场是否精确	
		为 $1/r^2$ .....	60
<b>第 3 章 矢量积分运算 .....</b>	27	§ 5-9 孤立导体的场 .....	63
§ 3-1 矢量积分; $\nabla \psi$ 的线积分 .....	27	§ 5-10 导体空腔内的场 .....	64
§ 3-2 矢量场的通量 .....	29		
§ 3-3 来自小立方体的通量;		<b>第 6 章 在各种情况下的电场 .....</b>	66
高斯定理 .....	31	§ 6-1 静电势的方程组 .....	66
§ 3-4 热传导;扩散方程 .....	33	§ 6-2 电偶极子 .....	67
§ 3-5 矢量场的环流 .....	35	§ 6-3 矢量方程述评 .....	69
§ 3-6 围绕一正方形的环流;		§ 6-4 偶极子势的梯度表示 .....	70
斯托克斯定理 .....	36	§ 6-5 任意电荷分布的偶极子近似	
§ 3-7 无旋度场与无散度场 .....	38	..... .....	72
§ 3-8 总结 .....	39	§ 6-6 带电导体的场 .....	74
<b>第 4 章 静电学 .....</b>	41	§ 6-7 镜像法 .....	74
§ 4-1 静电 .....	41	§ 6-8 导电平面附近的点电荷 .....	75
§ 4-2 库仑定律;叠加原理 .....	42	§ 6-9 导电球体附近的点电荷 .....	77
		§ 6-10 电容器与平行极板 .....	78

§ 6-11 高(电)压击穿	80	§ 11-7 铁电现象;BaTiO <sub>3</sub>	141
§ 6-12 场致发射显微镜	81	<b>第 12 章 静电模拟</b>	145
<b>第 7 章 在各种情况下的电场(续)</b>	83	§ 12-1 相同的方程组具有相同的解	145
§ 7-1 求静电场的各种方法	83	§ 12-2 热流;无限大平面边界附近的点源	146
§ 7-2 二维场;复变函数	84	§ 12-3 绷紧的薄膜	149
§ 7-3 等离子体振荡	88	§ 12-4 中子扩散;均匀媒质中的均匀球形源	151
§ 7-4 电解质内的胶态粒子	90	§ 12-5 无旋流体的流动;从球旁经过的流动	154
§ 7-5 栅极的静电场	93	§ 12-6 照度;对平面的均匀照明	156
<b>第 8 章 静电能</b>	95	§ 12-7 自然界的“基本统一性”	157
§ 8-1 电荷的静电能;均匀带电球	95	<b>第 13 章 静磁学</b>	159
.....	95	§ 13-1 磁场	159
§ 8-2 电容器的能量;作用于带电导体上的力	96	§ 13-2 电流;电荷守恒	159
§ 8-3 离子晶体的静电能	99	§ 13-3 作用于电流上的磁力	161
§ 8-4 核内的静电能	101	§ 13-4 恒定电流的磁场;安培定律	162
§ 8-5 静电场中的能量	104	§ 13-5 直导线与螺线管的磁场;原子电流	163
§ 8-6 点电荷的能量	107	§ 13-6 磁场与电场的相对性	165
<b>第 9 章 大气中的电学</b>	109	§ 13-7 电流与电荷的变换	170
§ 9-1 大气的电势梯度	109	§ 13-8 叠加原理;右手定则	171
§ 9-2 大气中的电流	110	<b>第 14 章 在各种不同情况下的磁场</b>	173
§ 9-3 大气电流的来源	112	§ 14-1 矢势	173
§ 9-4 雷暴雨	113	§ 14-2 已知电流的矢势	176
§ 9-5 电荷分离的机制	116	§ 14-3 直导线	177
§ 9-6 闪电	119	§ 14-4 长螺线管	178
<b>第 10 章 电介质</b>	122	§ 14-5 一个小电流回路的场;磁偶极子	180
§ 10-1 介电常量	122	§ 14-6 电路的矢势	182
§ 10-2 极化矢量 $\mathbf{P}$	124	§ 14-7 毕奥-萨伐尔定律	182
§ 10-3 极化电荷	124	<b>第 15 章 矢势</b>	184
§ 10-4 有电介质时的静电力方程	127	§ 15-1 作用于一电流回路上的力;偶极子能量	184
§ 10-5 有电介质时的场和力	129	§ 15-2 机械能与电能	186
<b>第 11 章 在电介质内部</b>	132		
§ 11-1 分子偶极子	132		
§ 11-2 电子极化强度	132		
§ 11-3 极性分子;取向极化	135		
§ 11-4 电介质空腔里的电场	137		
§ 11-5 液体的介电常数;克劳修斯-莫索提方程	139		
§ 11-6 固态电介质	140		

§ 15-3 恒定电流的能量 .....	189	第 21 章 有电流和电荷时麦克斯韦方程组的解 .....	275
§ 15-4 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$ 的对比 .....	190	§ 21-1 光与电磁波 .....	275
§ 15-5 矢势与量子力学 .....	192	§ 21-2 由点源产生的球面波 .....	276
§ 15-6 对静态是对的而对动态 将是错的 .....	198	§ 21-3 麦克斯韦方程组的通解 .....	278
<b>第 16 章 感生电流 .....</b>	<b>201</b>	§ 21-4 振荡偶极子的场 .....	280
§ 16-1 电动机与发电机 .....	201	§ 21-5 运动电荷的势; 李纳和 维谢尔通解 .....	284
§ 16-2 变压器与电感 .....	204	§ 21-6 匀速运动电荷的势; 洛伦 兹公式 .....	287
§ 16-3 作用于感生电流上的力 .....	206	<b>第 22 章 交流电路 .....</b>	<b>290</b>
§ 16-4 电工技术 .....	210	§ 22-1 阻抗 .....	290
<b>第 17 章 感应定律 .....</b>	<b>213</b>	§ 22-2 发电机 .....	294
§ 17-1 感应的物理过程 .....	213	§ 22-3 理想元件网络; 基尔霍夫 法则 .....	297
§ 17-2 “通量法则”的一些例外 .....	215	§ 22-4 等效电路 .....	300
§ 17-3 感生电场使粒子加速; 电子 感应加速器 .....	216	§ 22-5 能量 .....	302
§ 17-4 一个佯谬 .....	218	§ 22-6 梯形网络 .....	303
§ 17-5 交流发电机 .....	219	§ 22-7 滤波器 .....	305
§ 17-6 互感 .....	222	§ 22-8 其他电路元件 .....	308
§ 17-7 自感 .....	224	<b>第 23 章 空腔共振器 .....</b>	<b>312</b>
§ 17-8 电感与磁能 .....	225	§ 23-1 实际电路元件 .....	312
<b>第 18 章 麦克斯韦方程组 .....</b>	<b>230</b>	§ 23-2 在高频时的电容器 .....	314
§ 18-1 麦克斯韦方程组 .....	230	§ 23-3 共振空腔 .....	318
§ 18-2 新的项是如何起作用的 .....	232	§ 23-4 腔模 .....	321
§ 18-3 全部经典物理学 .....	234	§ 23-5 空腔与共振电路 .....	323
§ 18-4 行移场 .....	235	<b>第 24 章 波导 .....</b>	<b>326</b>
§ 18-5 光速 .....	238	§ 24-1 传输线 .....	326
§ 18-6 求解麦克斯韦方程组; 势和 波动方程 .....	239	§ 24-2 矩形波导 .....	329
<b>第 19 章 最小作用量原理 .....</b>	<b>243</b>	§ 24-3 截止频率 .....	331
§ 19-1 专题演讲(完全按演讲记录付 印) .....	243	§ 24-4 导波的速率 .....	333
§ 19-2 演讲后补充的一段笔记 .....	258	§ 24-5 导波的观测 .....	334
<b>第 20 章 麦克斯韦方程组在自由空间 中的解 .....</b>	<b>259</b>	§ 24-6 波导管 .....	334
§ 20-1 自由空间中的波; 平面波 .....	259	§ 24-7 波导模式 .....	337
§ 20-2 三维波 .....	266	§ 24-8 另一种看待导波的方法 .....	337
§ 20-3 科学的梦想 .....	268	<b>第 25 章 用相对论符号表示的电动力学</b> .....	<b>341</b>
§ 20-4 球面波 .....	270	§ 25-1 四维矢量 .....	341
		§ 25-2 标积 .....	343

§ 25-3 四维梯度	346	§ 29-8 在交叉的电场和磁场中的运动	404
§ 25-4 用四维符号表示的电动力学	349	<b>第 30 章 晶体的内禀几何</b>	405
§ 25-5 运动电荷的四维势	350	§ 30-1 晶体的内禀几何	405
§ 25-6 电动力学方程组的不变性	351	§ 30-2 晶体中的化学键	407
<b>第 26 章 场的洛伦兹变换</b>	353	§ 30-3 晶体生长	407
§ 26-1 运动电荷的四维势	353	§ 30-4 晶格	408
§ 26-2 匀速点电荷的场	355	§ 30-5 二维对称性	409
§ 26-3 场的相对论变换	358	§ 30-6 三维对称性	412
§ 26-4 用相对论符号表示的运动方程	364	§ 30-7 金属强度	414
<b>第 27 章 场的能量和场的动量</b>	368	§ 30-8 位错与晶体生长	415
§ 27-1 局域守恒	368	§ 30-9 布拉格-奈晶体模型	416
§ 27-2 能量守恒与电磁学	369	<b>第 31 章 张量</b>	417
§ 27-3 电磁场中的能量密度和能流	370	§ 31-1 极化张量	417
§ 27-4 场能的不确定性	373	§ 31-2 张量分量的变换	419
§ 27-5 能流实例	374	§ 31-3 能量椭球	420
§ 27-6 场的动量	377	§ 31-4 其他张量; 惯量张量	423
<b>第 28 章 电磁质量</b>	381	§ 31-5 叉积	425
§ 28-1 点电荷场的能量	381	§ 31-6 应力张量	426
§ 28-2 运动电荷场的动量	382	§ 31-7 高阶张量	429
§ 28-3 电磁质量	383	§ 31-8 电磁动量的四维张量	430
§ 28-4 电子作用于其自身上的力	384	<b>第 32 章 稠密材料的折射率</b>	433
§ 28-5 改进麦克斯韦理论的尝试	387	§ 32-1 物质的极化	433
§ 28-6 核力场	393	§ 32-2 在电介质中的麦克斯韦方程组	435
<b>第 29 章 电荷在电场和磁场中的运动</b>	395	§ 32-3 电介质中的波	437
§ 29-1 在匀强电场或匀强磁场中的运动	395	§ 32-4 复折射率	440
§ 29-2 动量分析	395	§ 32-5 混合物的折射率	441
§ 29-3 静电透镜	397	§ 32-6 金属中的波	442
§ 29-4 磁透镜	398	§ 32-7 低频近似与高频近似; 趋肤深度与等离子体频率	444
§ 29-5 电子显微镜	398	<b>第 33 章 表面反射</b>	448
§ 29-6 加速器中的导向场	399	§ 33-1 光的反射与折射	448
§ 29-7 交变梯度聚焦法	402	§ 33-2 稠密材料中的波	449
		§ 33-3 边界条件	452
		§ 33-4 反射波与透射波	455
		§ 33-5 金属上的反射	460
		§ 33-6 全内反射	461
		<b>第 34 章 物质的磁性</b>	464

§ 34-1	抗磁性和顺磁性	464	§ 38-5	弯折	534
§ 34-2	磁矩与角动量	466	第 39 章	弹性材料	536
§ 34-3	原子磁体的进动	467	§ 39-1	应变张量	536
§ 34-4	抗磁性	468	§ 39-2	弹性张量	539
§ 34-5	拉莫尔定理	470	§ 39-3	在弹性体中的运动	542
§ 34-6	经典物理不会提供抗磁性 或顺磁性	471	§ 39-4	非弹性行为	545
§ 34-7	量子力学中的角动量	472	§ 39-5	计算弹性常量	547
§ 34-8	原子的磁能	474	第 40 章	干水的流动	552
<b>第 35 章</b>	<b>顺磁性与磁共振</b>	<b>476</b>	§ 40-1	流体静力学	552
§ 35-1	量子化磁态	476	§ 40-2	运动方程	553
§ 35-2	斯特恩-格拉赫实验	478	§ 40-3	定常流——伯努利定理	557
§ 35-3	拉比分子束法	479	§ 40-4	环流	561
§ 35-4	大块材料的顺磁性	482	§ 40-5	涡线	563
§ 35-5	绝热退磁冷却法	485	<b>第 41 章</b>	<b>湿水的流动</b>	<b>566</b>
§ 35-6	核磁共振	486	§ 41-1	黏性	566
<b>第 36 章</b>	<b>铁磁性</b>	<b>489</b>	§ 41-2	黏性流动	569
§ 36-1	磁化电流	489	§ 41-3	雷诺数	570
§ 36-2	$H$ 场	494	§ 41-4	经过一圆柱体的流动	572
§ 36-3	磁化曲线	495	§ 41-5	零黏性极限	575
§ 36-4	铁芯电感	497	§ 41-6	库埃特流动	576
§ 36-5	电磁铁	499	<b>第 42 章</b>	<b>弯曲空间</b>	<b>579</b>
§ 36-6	自发磁化	501	§ 42-1	二维弯曲空间	579
<b>第 37 章</b>	<b>磁性材料</b>	<b>507</b>	§ 42-2	三维空间的曲率	584
§ 37-1	已知的铁磁性	507	§ 42-3	我们的空间是弯曲的	585
§ 37-2	热力学性质	510	§ 42-4	时空中的几何学	587
§ 37-3	磁滞回线	512	§ 42-5	引力与等效原理	587
§ 37-4	铁磁材料	517	§ 42-6	在引力场中钟的快慢	588
§ 37-5	特殊磁性材料	518	§ 42-7	时空的曲率	591
<b>第 38 章</b>	<b>弹性学</b>	<b>522</b>	§ 42-8	在弯曲时空中的运动	592
§ 38-1	胡克定律	522	§ 42-9	爱因斯坦的引力理论	594
§ 38-2	均匀应变	523	<b>索引</b>		596
§ 38-3	扭转的棒; 剪切波	527	<b>附录</b>		602
§ 38-4	弯曲的梁	531			

# 第1章 电 磁 学

## § 1-1 电 力

现在来考虑一种力，它也像引力那样与距离平方成反比地变化，但比引力要强约一万亿亿亿倍。另外，还有一个区别，即存在两种我们可称之为正的和负的“物质”，种类相同的相斥，不同的相吸。这就不像引力，那里只存在吸引。这样，会出现什么情景呢？

一堆正的物质会以巨力互相排斥，并向四面八方散开，一堆负的物质亦是如此。但一堆正、负物质的均匀混合物就完全不同了。相反的物质会以巨大的吸引力互相拉挽着，净结果将把那些可怕的斥力差不多完全抵消了，这是通过形成紧密而精致的正、负物质的混合体而达到的，而这样两堆分开着的混合体之间实际上就不再存在任何引力或斥力了。

确实存在这样一种力——电力。世间万物都是由此种巨力互相吸引和排斥着的正的质子与负的电子所组成的混合物。然而，平衡竟是那么完善，以致当你站在别人旁边时也根本没有任何受力的感觉。这时，即使只有一点点不平衡，你都会觉察到。例如，要是你站在别人旁边相距只有一臂之遥，而且各自都具有比本身的质子仅多出百分之一的电子，那两人间的排斥力就会大得不得了！多大呢？足以举起那座帝国大厦\*？不！举起珠穆朗玛峰？不！这个斥力应足以举起相当于整个地球的“重量”！

由于在这种致密混合物中这些巨力完善地达到了平衡，所以我们就不难理解：当物质试图保持其正、负电荷最细致的平衡时，它能具有多大的硬度与强度。例如，帝国大厦在风中之所以摇摆小于一英寸，是因为电力把每一个电子与质子或多或少地保持在其适当位置上。另一方面，如果我们在一个足够小的尺度范围内观察物质，使得只能看到几个原子，那么任一小部分就往往不会有相等数目的正电荷和负电荷，从而会存在强大的剩余电力。即使在相邻两小部分中两种电荷的数目相等，也仍然有可能拥有巨大的净电力，因为各电荷之间的力是与距离的平方成反比的。如果一部分中的负电荷，与另一部分中的正电荷靠得较近、而与负电荷离得较远，则净力就会产生。因此，吸引力可能大于排斥力，从而在两个不带额外电荷的小块中就有一个净吸引力存在。那种把各原子结合在一起的力，以及把各分子保持在一起的化学力，其实都是电力，它们在电荷的平衡不够完善、或在距离十分微小的那些区域里才起作用。

当然，你会知道，原子是由位于其核内的正的质子和核外的负电子所构成的。你也许会问：“如果这种电力那么厉害，为什么质子和电子不会正好一个紧挨着一个呢？如果它们想要形成一个紧密的混合体，为什么不会更紧密些呢？”这问题必须用量子效应回答。要是试图把电子限制在一个很接近于质子的区域中，那么按照不确定性原理它们就得拥有一个均方动量，若我们把它们限制得越紧，这个均方动量就越大。正是这一种由量子力学规律所

\* 帝国大厦指美国纽约市第五大街上的一座建筑物，地面上共 102 层，高 1 454 英尺。——译者注

支配的运动，才使得电的吸引力不会把这两个电荷移得更接近些。

还有一个问题。在原子核内有若干个质子，它们全都带着正电荷，为什么它们不会互相推开呢？“是什么东西把它们结合在一起的呢？”事实是，在原子核内部，除了电力之外还存在一种称为核力的非电力，它比电力还要大，因而尽管有电的排斥力，它仍然能够把那些质子维持在一起。然而，核力是短程力——该力下降得比  $1/r^2$  急剧得多。这就产生了一个重要后果：如果一个核所含质子过多，则该核就变得太大，它便不会持久维持。铀就是这么一个例子，它含有 92 个质子。核力主要在每个质子（或中子）与其最近邻质子（或中子）之间起作用，而电力则在较大的距离范围内起作用，使每个质子与核内所有其他质子之间都具有排斥力。在一个核内质子的数目越多，这电的排斥作用就越强，直到铀那种情况，平衡是那么脆弱，以致于排斥性电力使得核几乎就要飞散了。这么一个核，如果稍微“轻轻敲”一下（就像曾经送进一个慢中子那样），则它就会破裂成各带有正电荷的两片，而这些裂片由于电的排斥力而飞散开去。释放出来的能量就是原子弹的能量。这种能量通常称为“核”能，但实际上却是当电力克服了吸引性核力时所释放出来的“电”能。

最后，我们还可能会问，是什么东西把带负电的电子保持在一起呢（因为它没有核力）？如果电子全都是由一种物质构成的，那它的每一部分理应排斥其他各部分，但又为什么不会飞散呢？不过，电子是否还含有“各部分”？也许，我们应该说电子只是一个点，而电力只是在不同的点电荷之间起作用，以致电子不会作用于其本身。或许是这样吧。关于电子由什么东西束缚在一起，我们只能说到这里。这个问题对于试图建立一套完整的电磁学理论产生了不少困难，而且至今没有做出解答。我们将在以后某些章节中对这一课题多做些讨论，以为我们大家助兴。

正如我们已经见到的那样，应该指望电力与量子力学效应相结合来确定整块材料的细致结构，从而确定它们的特性。有的材料硬，有的材料软。有的是电的“导体”——因为它们中的电子能够自由运动；其他则是“绝缘体”——因为其中的电子被牢固地束缚在各个原子内。这些性质是如何得来的？那是一个十分复杂的课题，我们将在以后加以讨论。因而现在仅就一些简单情况下的电力进行考察，也就是说，现在着手处理电方面——也包括磁方面（那实际上是同一课题的另一个部分）——的规律。

我们曾经说过，和引力相似，电力与电荷间距离的平方成反比地减弱，这一关系叫作库仑定律。但当电荷运动时，这一定律就不完全准确——电力也以一种复杂的方式依赖于电荷的运动。运动电荷之间的作用力，有一部分我们称之为磁力，事实上，它是电效应的一个方面。这也是为什么要把这一课题叫作“电磁学”的缘故。

由于存在着一个重要的普遍原理，因而有可能以相对简单的方式来处理电磁力。我们从实验发现，作用于某一特定电荷上的力——不管其他电荷的数量和运动方式如何——只取决于该特定电荷的位置、速度以及所带的电荷量。我们可把作用于一个以速度  $v$  运动的电荷  $q$  上的力  $F$  写成：

$$F = q(E + v \times B). \quad (1.1)$$

式中  $E$  和  $B$  分别叫做电荷所在处的电场和磁场。重要的是，来自宇宙中所有其他电荷的力都可用刚才给出的这两个矢量叠加而成。它们的值将取决于这一电荷位于何处，并且可能随时间而改变。此外，如果我们用另一个电荷来代替该电荷，只要世界上所有其他电荷都不改变其位置和运动，则作用于这一新电荷上的力恰好与其电荷量成正比。当然，在实际情况

中,每一电荷对邻近的所有其他电荷都产生力,从而可能引起这些电荷运动。所以在某些情况下,如果我们用另一个电荷来代替该特定电荷,则场可能改变。

我们从第1卷已经懂得若知道了作用在一个质点上的力,应怎样去求出该质点的运动。可以把式(1.1)和运动方程相结合而得出:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mv}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right] = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.2)$$

因此若  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  已知,则可以求得运动。现在我们需要弄清楚  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  是怎样产生的。

关于电磁场产生方法最重要的简化原理之一是:假设若干个以某种方式运动的电荷产生一个场  $\mathbf{E}_1$ ,而另一组电荷产生场  $\mathbf{E}_2$ ,而这两组电荷同时被置于原来的位置(保持它们被分别考虑时具有的相同的位置和相同的运动),那么所产生的场恰好是两个场的和,即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (1.3)$$

这一个事实称为场的叠加原理。这原理也适用于磁场。

这一原理意味着,如果知道了关于以任意方式运动的单个电荷所产生的电场和磁场的规律,那么所有电动力学的规律就告齐全了。如果我们想要知道作用于电荷 A 上的力,就只需算出由 B, C, D 等各电荷所产生的  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ ,然后把所有电荷产生的  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  分别相加而求得总场,再从这两个总场求得作用于电荷 A 的力。只要结果证明,由单个电荷产生的场很简单,那么这就是描写电动力学规律的最简洁方法。可惜,我们已给出了这一定律的描述(第1卷第28章),那是相当复杂的。

事实证明,电动力学规律在其中最为简单的那一种形式,并非是人们可以期望的。要写出一个电荷对另一个电荷所产生的力的公式,并非那么容易。的确,当电荷静止不动时,库仑力的定律是十分简单的。但当电荷运动时,由于时间上的延迟和加速度的影响以及其他一些缘故,关系就变得复杂了。因此,我们并不希望仅仅凭作用于各电荷间的力的规律来介绍电动力学;而发现更方便的是去考虑另一个观点——那是电动力学规律表现得最易于处理的一种观点。

## § 1-2 电 场 和 磁 场

首先,我们必须对电和磁矢量即  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的概念稍做推广。依据一个电荷所感受到的力,我们已对  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  下了定义。现在我们想要谈谈即使没有电荷存在的某一点的电场和磁场。实际上,既然有力“作用在”电荷上,则当电荷移去时,那里仍存在“某种东西”。如果位于点  $(x, y, z)$  上的电荷、在时刻  $t$  感受到由式(1.1)所给出的力  $\mathbf{F}$ ,则我们便可以把矢量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  与空间中该点  $(x, y, z)$  联系起来。可以认为  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  和  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$  给出了力,即可被位于  $(x, y, z)$  点的电荷、在时刻  $t$  体验到那个力,同时满足这样一个条件:在那里放置该电荷,并不扰动产生这场的所有其他电荷的位置或运动。

根据这一概念,我们把空间中每一点  $(x, y, z)$  与两个矢量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  相联系,它们也可能随时间而改变,于是,电场和磁场就可视作  $x, y, z$  和  $t$  的矢量函数。既然一个矢量由其各分量所确定,所以场  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  就代表了  $x, y, z$  和  $t$  的三个数学函数。

正因为  $\mathbf{E}$ (或  $\mathbf{B}$ )可以在空间每一点被规定下来,所以它才被称为“场”。所谓“场”,就是

在空间不同点上会取不同值的一种物理量。例如，温度就是一种场——在这一情况下是一标量场，我们把它写成  $T(x, y, z)$ 。温度也可能随时间变化，那么我们应称温度场与时间有关，从而把它写成  $T(x, y, z, t)$ 。另一例为流动液体的“速度场”，我们把时刻  $t$  空间每一点的液体速度写成  $v(x, y, z, t)$ ，它是一个矢量场。

回到电磁场方面来，虽然它们是按复杂公式由电荷所产生的，但却具有如下重要特性：在空间一点的场值与一邻近点的场值之间存在十分简单的关系。仅凭几个以微分方程表达的这种关系，我们就能把场完整地描述出来。正是依靠这样的方程式，电动力学规律才得以被最简洁地写出。

曾有过种种发明，试图帮助人们把场的行为形象化。其中最正确也最抽象的一种是：仅认为场是位置与时间的数学函数。我们可以尝试通过在空间的许多点各画出一些矢量来获得一个关于场的思维图像，其中每一矢量给出该点场的强度和方向。这一表达方式如图 1-1 所示。另外，我们还可以进一步画出处处都与那些矢量相切的一些线，比如，这些线沿着那些箭头并跟踪着场的方向。当我们这样做时，就已丧失了矢量长度的痕迹，但可通过如下办法来记录场的强度即对于弱场把场线画得较疏，而对于强场则把场线画得较密。我们按惯例使通过垂直于线的每单位面积的线数与场强成正比。当然，这只是一种近似，一般说来，有时还需要在某处画一些新线以保持线数与场强相配。这样，图 1-1 所示的场就可由图 1-2 所示的场线来表示。

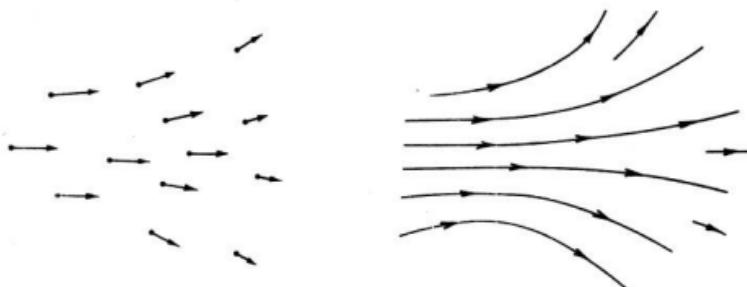


图 1-1 矢量场可用一组箭头来表示。每支箭头的大小和方向为所画箭头的那一点的矢量场之值

图 1-2 矢量场可用一些线来表示，这些线在每一点与场矢量的方向相切，而线的密度则与场矢量的大小成正比

### § 1-3 矢量场的特征

矢量场在数学上有两个重要性质，我们将利用它们从场的观点来描述电学定律。若我们想象某种闭合面，并试问是否有“某种东西”从里面流失；这就是说，该场是否有一个“流出”的量？例如，对于速度场，我们也许要问，该面上的速度是否总是向外，或更普遍地问，是否（每单位时间）流出的流体比流入的多。我们把单位时间流经该面的净流体量称为通过该面的“速度通量”。流经一个面积单元的流量恰好等于垂直该面积的速度分

量乘以该面积。对于任一个闭合面,净流出量(或通量)等于速度向外的法向分量的平均值乘以该闭合曲面的面积:

$$\text{通量} = (\text{平均法向分量}) \cdot (\text{曲面的面积}). \quad (1.4)$$

在电场的情况下,我们可以在数学上定义与流出量相类似的东西,又称作通量,但这当然不是任何物质的流动,因为电场并不是任何东西的速度。然而,事实证明,场法向分量的平均值这个数学上的量仍有其实用意义。于是,我们来谈谈电通量——这也是由式(1.4)定义的。最后,不仅谈论通过一个完全闭合曲面的通量,而且还谈论通过任一个有边界的曲面的通量,这也是很有用处的。综上所述,通过这样一个面的通量被定义为矢量的法向分量的平均值乘以该曲面的面积。这些概念如图1-3所示。

矢量场还有第二个性质,它必须用一条曲线而不是用一个面才能得出。让我们再来看看一下描写液体流动的速度场,也许会提出这样一个有趣的问题:该液体是否存在环流?我们所说的环流,是指是否有围绕某个环路的净旋转运动?如图1-4所示,假定除在一条口径均匀的环状闭合管子里的液体外,液体突然处处都被冻结了。也就是说,管外的液体都停止了流动,但由于被禁锢的流体内存在着动量(这就是说,围绕管子沿一个方向的动量大于沿另一个方向的动量),所以管内的液体仍可继续流动。我们把管内液体的有效速率乘以该管周长这个量定义为环流。我们再把上述概念加以引申,而定义任一矢量场的

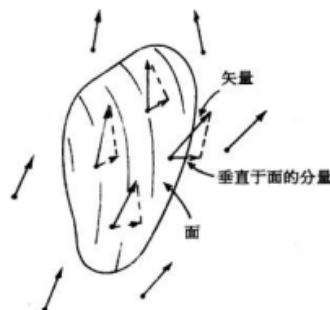


图1-3 矢量场通过一个曲面的通量,定义为矢量的法向分量的平均值乘以该曲面的面积

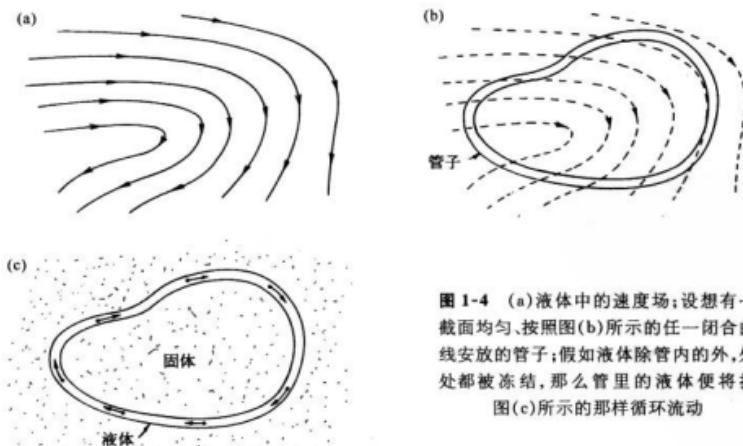


图1-4 (a)液体中的速度场;设想有一截面均匀、按照图(b)所示的任一闭合曲线安放的管子;假如液体除管内的外,处处都被冻结,那么管里的液体便将按图(c)所示的那样循环流动

“环流”(即使没有任何东西在流动亦然)。对于任一矢量场,绕任一想象中的闭合曲线的环流可以定义为矢量(沿一致向指)的平均切向分量乘以该回路的周长(图 1-5),即

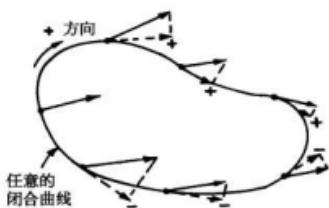


图 1-5 矢量场的环流等于矢量(沿一致向指)的切向分量平均值乘以该回路的周长

$$\text{环流} = (\text{平均切向分量}) \cdot (\text{绕行距离}). \quad (1.5)$$

你们将会看到,这一定义确实给出了一个正比于上述迅速被冻结的管子里的环流速度的数值。

只要利用这两个概念——通量与环流——我们就能立即描述电学和磁学的所有定律。你可能不会一下子就理解其意义,但它们将给出有关电磁方面物理学基本描述方法的一些概念。

## § 1-4 电磁学定律

电磁学第一个定律对电场通量是这样描述的:

$$\mathbf{E} \text{ 通过任一闭合曲面的通量} = \frac{\text{曲面内的净电荷}}{\epsilon_0}. \quad (1.6)$$

式中  $\epsilon_0$  是一常数。如果在闭合曲面内没有电荷,即使在曲面外附近存在电荷, $\mathbf{E}$  的法向分量的平均值仍然等于零,所以并没有净通量通过该曲面。为了证明这种表述是强有力的,只要再加上来自单个电荷的场是球对称的这个概念做准备,就可以证明式(1.6)与库仑定律是等同的。对于一个点电荷,我们做一个包围该电荷的球面,那么,平均法向分量就正好等于  $\mathbf{E}$  在任一点的量值,因为这个场必定是径向的,并且在球面上的任一点具有相同的强度。现在法则讲,在球面上的电场乘以球面面积——即跑出去的通量——正比于球面内的电荷。要是使球的半径增大,则面积按半径的平方增加;电场的平均法向分量乘以该面积仍需等于球面内的电荷,因而该场必定随距离的平方减弱。这就得到了一个“负二次方的”场。

在空间如果我们有一条任意而不动的曲线,并测量电场绕该曲线的环流,那么将发现它一般不等于零(虽则对于库仑定律它为零)。更确切地说,对于电学还存在第二条定律,即对于任一以曲线  $C$  为边缘的(非闭合)曲面  $S$ ,

$$\mathbf{E} \text{ 绕 } C \text{ 的环流} = \frac{d}{dt}(\text{通过 } S \text{ 的 } \mathbf{B} \text{ 的通量}). \quad (1.7)$$

再写出下面两个有关磁场  $\mathbf{B}$  的相应方程,我们就能完成电磁场的全部规律。

$$\mathbf{B} \text{ 通过任何闭合曲面的通量} = 0. \quad (1.8)$$

对于以曲线  $C$  为边界的曲面  $S$ ,

$$c^2 (\mathbf{B} \text{ 绕 } C \text{ 的环流}) = \frac{d}{dt}(\text{通过 } S \text{ 的 } \mathbf{E} \text{ 的通量}) + \frac{\text{通过 } S \text{ 的电流通量}}{\epsilon_0}. \quad (1.9)$$

式(1.9)中出现的常数  $c^2$  为光速的平方,它之所以出现是由于磁实际上是电的一种相对论效应。至于插入常数  $\epsilon_0$ ,则是为了方便地导出电流的单位。

式(1.6)~(1.9)以及式(1.1)都是电动力学的定律\*。牛顿定律写起来虽然简单,但它会引出一大堆复杂的结果,而你要深入地学习就得花费很长时间。现在这些定律既然写起来就没有那么简单,那当然意味着其结果将更为复杂,所以我们将花大量时间才能把它们全部弄清楚。

通过做一系列小实验(这些实验在定性上表明电场和磁场的关系),我们就能验证某些电动力学定律。当你梳头时,将会对式(1.1)中的第一项有所体验,因而我们就不去证明这一项了。如图 1-6 所示,给悬挂在一条形磁铁上面的导线输入电流,式(1.1)中的第二项可得以演示。当电流接通时,导线由于受力  $F = qv \times B$  作用而发生了运动;当存在电流时,线里的电荷在运动,所以它们有一速度  $v$ ,磁铁产生的磁场就会对它们施加作用力,结果把导线推向一旁。

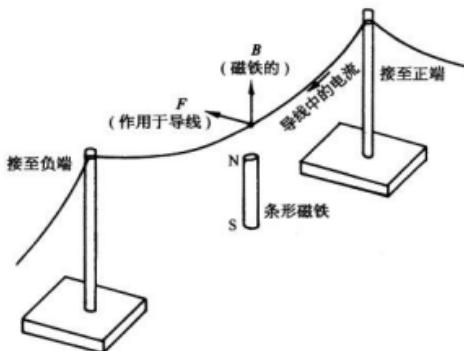


图 1-6 一条形磁铁在导线处给出了磁场  $B$ 。当有电流沿导线流动时,该导线由于受力  $F = qv \times B$  的作用而运动

当导线被推向左边时,我们会预料到磁铁必定感受到被推向右边。否则就可将整套设备装在一輛车子上而构成一个动量不守恒的推进系统! 虽然这力太小、不足以使磁铁的运动看得见,但被更加灵敏地支撑着的一根磁铁,比如像指南针那样,就会显现出运动来。

导线为什么会推磁铁呢? 导线里的电流会产生它自身的磁场,从而施力于磁铁上。按照式(1.9)中的第二项,电流必有一个  $B$  的环流——在这种情况下, $B$  线就是环绕该导线的回路,如图 1-7 所示。作用于磁铁上的力,就是由这  $B$  产生的。

式(1.9)还告诉我们,对于通过导线的一个恒定电流,对围绕导线的任何曲线  $B$  的环流都相同。由于曲线——比方说是一圆周——距离导线越远,则其周长越长, $B$  的切向分量就必然减小。你可以看到,事实上我们该期待  $B$  随着离开长直导线的距离线性地减弱。

现在,我们已经说过,流经导线的电流会产生磁场;而当有磁场存在时,就有一力作用于载有电流的导线上。于是我们也预料到,如果用导线中的电流来产生磁场,则它会对另一载流导线施一作用力。这可由采用如图 1-8 所示的两根悬挂导线来做演示。当两电流同向时,两导线相吸;但当两电流方向相反时,它们将相斥。

\* 我们仅需加上关于环流符号某些规定的说明。

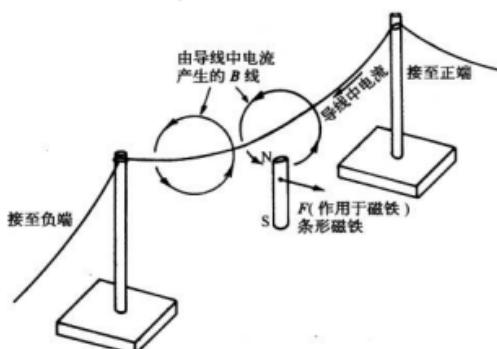


图 1-7 导线的磁场施力于磁铁

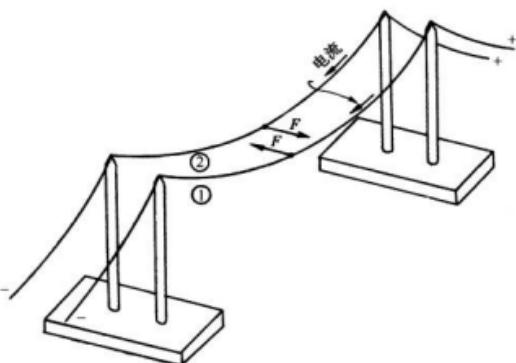


图 1-8 两条通电流的导线互相有力作用着

简言之，电流和磁铁均会产生磁场。且慢！试问磁铁究竟是什么？如果磁场是由运动电荷产生的，那么，来自一块磁铁的磁场是否有可能也是由于电流的原因呢？看来的确是这样。我们可以将实验中的条形磁铁用一个导电线圈来代替，如图 1-9 所示。当电流通过线圈——同时也有电流通过在线圈上面的那根直导线——时，我们便会观察到导线的运动与以前用磁铁而不用线圈时完全一样。换言之，线圈里的电流模仿了一块磁铁。因此，看来一块磁铁的作用就如同它含有一种永恒的环行电流一样。事实上，我们可以用铁原子中的恒定电流来理解磁铁。在图 1-7 中，作用在磁铁上的力就是由式(1.1)中的第二项引起的。

究竟这些电流是从哪里来的呢？一种可能来自原子轨道中电子的运动。实际上虽然对于某些材料来说这是正确的，但对铁来说却是不正确的。一个电子，除了在原子中环行之外，还绕它本身的轴旋转——有些像地球的自转——正是由于自旋所产生的电流才为铁提供了磁场（我们说“有些像地球的自转”，是因为这一问题在量子力学中竟是那么奥妙，以致

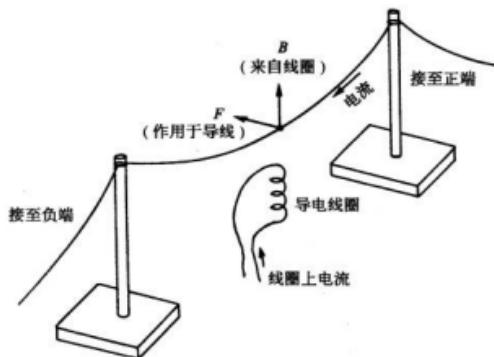


图 1-9 图 1-6 中的磁铁可用一个载流线圈来代替,有一相似的力作用在导线上

一些经典概念并不能真正恰当地描述这些事物)。在大多数物质中,有些电子这样自旋,另一些电子那样自旋,所以磁性互相抵消;可是在铁里——由于某个我们将在以后加以讨论的神秘原因——有许多电子却绕着它们的排列整齐的轴旋转着,这正是磁性的起源。

由于磁铁的场都是来自电流,所以我们无需因存在磁铁而在式(1.8)和(1.9)中引进任何额外的项。我们只要取所有的电流,包括自旋电子的环行电流,那么该定律就对了。但你亦应注意,式(1.8)说明不存在与出现在式(1.6)右边的电荷相类似的磁“荷”。没有人曾发现过磁荷。

式(1.9)右边的第一项是由麦克斯韦从理论上发现的,而且十分重要。它说明一个变化着的电场会产生磁场。事实上,若没有这一项,该方程便毫无意义。若无此项,则在一非完整的回路中便不会有电流。但正如我们在下述例子中将见到的这样的电流确实存在。设想一个由两块平行板构成的电容器,它正在充电,电流流向其中一极板而流出另一极板,如图 1-10 所示。若围绕着其中一条导线画一条曲线  $C$ ,并用一个被该导线贯穿的、如图中所示的  $S_1$  面来盖满这条曲线,按照式(1.9), $\mathbf{B}$  绕  $C$  的环流由导线中的电流乘以  $c^2$  给出。可是若我

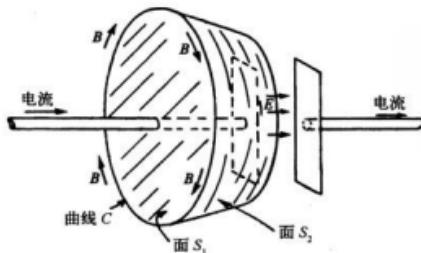


图 1-10  $\mathbf{B}$  绕曲线  $C$  的环流,既可以由通过面  $S_1$  的电流给出,也可以由通过面  $S_2$  的  $E$  的通量变化率给出

们用另一个形状像碗、并通过电容器两板间、始终保持在导线外面的一个不同的曲面  $S_2$  来盖满，那又将怎样呢？肯定不会有任何电流通过这一个曲面。然而，仅仅改变一下想象中的曲面位置，总绝不会改变一个实际的磁场吧！ $\mathbf{B}$  的环流必然和以前一样。是的，对于  $S_1$  和  $S_2$  两个面，式(1.9)右边的第一项和第二项相结合，确实会给出相同的结果。对于  $S_2$  来说， $\mathbf{B}$  的环流由电容器两板间  $\mathbf{E}$  的通量的变化率给出。可以通过计算证明，正在变化着的  $\mathbf{E}$  与电流之间是用那种使式(1.9)保持正确所必需的方式相联系的。麦克斯韦看到了它的必要性，因而首先写出了完整方程。

采用图 1-6 所示的那种装置，我们可以演示另一个电磁学定律。将悬挂导线两端从电池上断开，接在一个电流计上，它会告诉我们何时有电流通过该导线。当在磁铁产生的磁场中向旁推动导线时，便会观察到电流。这样一个效应恰恰是式(1.1)的另一个结果——导线中的电子感受到了力  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 。电子之所以具有侧向速度，是因为它们随导线一起运动。这个  $\mathbf{v}$  同来自磁铁的垂直方向的  $\mathbf{B}$  一起产生了一个作用于电子上的、沿导线方向的力，此力引起电子向电流计运动。

然而，假定我们移动的不是导线而是磁铁，从相对性来讲，可猜测到这不应当产生任何差别。的确，我们在电流计中观察到一个相似电流。磁场怎么会产生作用于静止电荷上的力呢？按照式(1.1)一定存在一个电场。一根运动的磁铁必定产生电场。这过程怎样发生，可以由式(1.7)定量地给予说明。这个方程描述了许多具有巨大实际价值的现象，诸如那些出现在发电机和变压器中的现象。

我们的方程组最引人注目的一个结果是，式(1.7)和(1.9)包含着关于在很大距离范围内的电磁辐射效应的解释。解释大致如下：假设由于导线里电流突然接通，就使得某处的磁场增大；于是，根据式(1.7)就必然存在一个电场的环流；当这建立起来的电场产生环流时，根据式(1.9)又一个磁的环流将形成；可是，这个磁场的建立又将产生一个新的电场环流……依此类推。就这样，场在通过空间前进时，除了在它们的发源之外，并不需要电荷或电流。这就是我们都能够互相看见的关键所在！这一切都存在于电磁场的方程组中。

## § 1-5 场 是 什 么

现在就我们对这一课题的看法讲几点意见。你也许会说：“所有这种关于通量和环流的概念太抽象了。由于空间每一点存在电场，所以才有这些‘定律’。但实际发生的情况是什么？为什么你不能用（例如）有什么东西在电荷之间起作用来加以解释呢？”唔，这与你的偏见有关。许多物理学家经常说，中间没有任何东西的那种直接作用是不可思议的。（既然某一概念已经被想象出来，他们怎么能断定它是不可思议的呢？）他们会说：“看！我们现在知道这种单独的力就是一个物体对另一个物体的直接作用。不可能存在一种无需由媒质来传递的力。”但当我们研究一个物体紧靠着另一个物体的“直接作用”时，真正发生的是什么呢？我们发现，并不是一个物体紧靠着另一个物体，而是彼此稍微有点分开，而在微小尺度内有电力起着作用。这样，我们知道将要用电力的图像来解释所谓的直接接触作用。既然肌肉的推拉力将要用电力来加以说明，那么还试图坚持认为得把电力看成像那种古老的、大家所熟悉的肌肉推拉力，那肯定是不合理的！唯一通情达理的问题是，什么才是看待电效应的最

方便途径？有些人宁可把这些效应表达成在电荷间距的互作用，从而采用一个复杂定律。另外一些人则喜欢利用场线。他们老是画场线，而感到写出  $E$  和  $B$  则是太抽象了。然而，场线只不过是描写场的一种粗略的办法，要用场线直接给出那些正确而又定量的定律是很困难的。而且，场线概念并不含有电动力学最深刻的原理，即叠加原理。即使我们已知道了一组电荷的场线看起来是怎么回事，而另一组电荷的场线看来像什么，但当两组电荷同时存在时场线的图样究竟会怎么样，我们就毫无概念了。另一方面，从数学的观点看，叠加很容易——我们只需把两矢量相加起来。场线对于提供一个生动图像具有某种优点，可是也有一些缺点。当认为电荷处于静止状态时直接相互作用的想法固然有极大优点，但当涉及迅速运动的电荷时就具有一些重大缺点。

最好的办法是采用抽象的场概念。抽象虽然可惜，但却是必要的。尝试把电场用某种齿轮的运动、或用线、或用某种材料的张力来表示的企图所耗费的物理学家们的精力，比起仅仅获得电动力学的正确答案所必需的大概要多得多。有趣的是，关于晶体中的光的行为的正确方程已由麦卡洛于 1839 年得出。可是人们却对他说：“是的，但没有任何实际物质其机械性能满足那些方程，而且由于光应当是在某种东西中的一种振动，所以我们不可能相信这个抽象的方程式。”要是人们稍微虚心一点，他们也许在早得多的时候就相信关于光的行为的正确方程了。

对于磁场的情况，我们可提出如下要点：假定你最后已能够成功地用某种线或某种通过空间运转的齿轮构成一幅关于磁场的图像；然后，你尝试说明两个以相同速率互相平行地在空间运动的电荷所发生的情况。既然它们在运动，那么它们就将起两个电流一样的作用，并会有磁场和它们联系在一起（就像图 1-8 中导线里的电流那样）。可是，一个跟随这两个电荷做曲线运动的观察者将会把它们看作是静止不动的，从而会说那里没有磁场。当你随同物体一道运动时，就连“齿轮”或“线”也都消失不见了！上面我们所做的只是为了想出一个新问题。那些齿轮怎么能消失呢？那些画场线的人们也陷入了同样的困境。不仅不能说明场线是否随着电荷一起运动，而且在某些参照系中这些场线可能完全消失。

于是，我们讲，磁性实际上是一种相对论效应。就我们刚才所考虑的两个做平行运动的电荷的情况来说，我们应期望对于它们的运动得用数量级为  $v^2/c^2$  的项来做相对论修正。这些修正应当与磁力相一致。但在我们的实验（图 1-8）中，出现于两根导线间的力是怎么回事呢？那里的磁力是全部磁力。这看来似乎不像是一种“相对论修正”。而且，倘若我们估计一下导线里电子的速度（你们可自行算出来），则我们求得它们沿导线的平均速率约为  $0.01 \text{ cms}^{-1}$ 。所以  $v^2/c^2$  约等于  $10^{-25}$ ，这肯定是一个可以忽略的“修正”。可是不对！尽管在这一情况下，磁力仅等于两运动电荷的“正常”电力的  $10^{-25}$  倍，但应当记住，由于几乎完全中和——即由于导线里存在相同数目的质子和电子，“正常”电力已经完全消失了。由于中和的程度远较  $1/10^{25}$  来得准确，从而那个我们称之为磁力的小小相对论项就是唯一剩下来的项，所以它变成了主要的项。

正是由于电效应几乎完全抵消，才使得相对论效应（即磁现象）受到研究，而其正确方程组——准确至  $v^2/c^2$ ——才被发现，虽则当时物理学家还不懂得发生的是什么事情。而这就是为什么当相对论被发现时，电磁学定律并不需要改变。它们——不像力学——已准确至  $v^2/c^2$  的精度了。

## § 1-6 科学技术中的电磁学

让我们指出下述事件来结束本章。希腊人所研究的许多种现象中有两种是十分奇特的：如果你擦擦琥珀，你就可用它来吸起一些小纸片；又有一种来自麦尼西亚(Magnesia)岛的奇怪石头会吸铁。这是为希腊人所知道的、电磁效应表现得很明显的、仅有的现象，想起就令人惊奇。之所以仅仅出现这两种现象，其原因主要在于早先提到的电荷间异常精确的中和作用。通过希腊人之后的科学家的研究，发现了一个又一个的新现象，而这些实际上都不过是这些琥珀和(或)磁石效应的某些方面而已。现在我们认识到，化学作用的现象、以及最终生命本身的现象都要用电磁学来加以理解。

在人们对电磁学这一课题的认识正在提高的同时，以往不敢去想象的一些技术上可能发生的事出现了，从而，下述这些事就成为可能：在超长距离之间通讯；同几英里外中间没有任何联线的另一个人说话；以及开动巨大的电力系统——一个巨大的水轮，用数百英里以上的细线与别的发动机相连接，该发动机随主轮而转动——无数支线在上万的地方与成万台发动机相连，开动着工厂和家庭中的机器——所有这些，都是由于电磁学定律的知识而运转起来的。

今天我们应用着更为精细的效应。电力既可巨大，也可以十分微小，而我们都能够控制它们，并在许多方面加以利用。我们的仪器是如此精密，以致某人对数百英里外的一根细小金属棒中的电子施以影响的同时，你就能说出他正在干什么。我们只要把该金属棒作为电视机的天线就可！

从人类历史的长远观点来看——例如过一万年之后回头来看——毫无疑问，在19世纪中发生的最有意义事件将被认为是麦克斯韦对电磁学定律的发现。与这一重大科学事件相比，同一个十年中发生的美国内战<sup>\*</sup>，将降为一个地区性琐事而黯然失色。

\* 美国内战也叫美国南北战争，1861年开始至1865年结束。——译者注

## 第2章 矢量场的微分运算

### § 2-1 对物理学的理解

对物理学家来说，要有从不同观点去观察问题的能力。因为对实际物理问题的准确分析往往非常复杂，任何特定的物理情况都可能因过于复杂，以致不能直接通过解微分方程来进行分析。然而如果人们对于在不同情况下方程解的特性有某些了解，则对于一个系统的行为仍可以获得良好的概念。如场线、电容、电阻以及电感等概念，对此目的来说都是十分有用的。因此，我们将花不少时间对它们进行分析。通过分析，对于在不同电磁情况下会发生什么事情我们就会获得一种感觉。另一方面，例如像场线这类启发式模型，没有一种会对所有情况都是真正适用和准确的。只有一种表达定律的准确方式，那就是表示成微分方程。就我们所知微分方程具有两个优点，即它既是基本的，又是准确的。如果你已学习过那些微分方程，便可以经常复习查对，就不必重新学习了。

要了解在不同情况下会发生什么事情，将花费你一些时间。你不得不去求解方程。你每次解方程，都将对解的性质有所体会。为了把这些解牢记在心，利用场线及其他概念来研究解的意义也是有益的。这就是你将真正“理解”方程式的途径，也是数学和物理学的区别所在。数学家，或者很有数学头脑的人，在“研究”物理学的过程中往往由于看不见物理而误入歧途。他们说：“看，这些微分方程——麦克斯韦方程组——就是电动力学的一切；物理学家已经承认，没有什么东西不包含在这些方程式之内。这些方程尽管复杂，但毕竟仅是一些数学方程式，要是我能在数学上对它们彻底理解，那我对物理学也就理解透彻了。”事实却并非如此。大凡抱着这种观点研究物理的数学家——也有过不少这样的人——往往对物理学的贡献不大，而实际上对数学的贡献也很可怜。他们之所以失败，是由于在现实世界里实际的物理情况是如此复杂，需要对方程式具有更为充分的理解。

真正理解一个方程式——即不仅在严格的数学意义上——意味着什么，狄拉克对此早就有所评述。他说：“如果没有实际解一个方程而对其解的特性已有一种估计办法，那我就懂得了该方程的意义。”因此，若我们无需实际解那个方程而对在给定情况下会发生什么便已有一种了解的办法，则我们便算“理解”了应用到这些情况上去的那个方程了。物理上的理解乃是一种完全非数学性、不精确和不严格的事，但对于一个物理学家来说却是绝对必需的。

通常，像这样一种课程是按照逐步阐明物理概念的方式——即从简单的情况开始逐渐过渡到越来越复杂的情况——来编排的。这就要求读者要不断忘记以前学过的东西——忘记在某些情况下正确、而在一般情况下却不正确的那些东西。例如，电力取决于距离的平方那一条“定律”就不是一贯正确的。所以我们在本书中更喜欢相反的途径。我们宁愿一开始就采用那些完整定律，然后回过头来把它们应用于一些简单情况，从而在前进过程中发展物理概念。这就是我们将要做的事情。

我们所采取的途径与历史的途径完全相反，人们在后一途径中通过实验获得知识，依靠实验来发展学科。但物理学这一学科在过去二百年中是由一些非常有创造才能的人发展起来的，而当我们仅以有限时间去获得知识时，就不可能涉及他们曾经做过的每件事情。可惜，在这些讲课中可能会丢失的东西之一就是有关事件的历史及实验发展。希望某些不足在实验室中能够得到补偿。你也可以通过阅读《大英百科全书》来补充我们所不得不割爱的东西，那里载有很好关于电学及物理学其他部分历史的条目。你也会在有关电磁学的许多教科书中找到一些历史知识。

## § 2-2 标量场和矢量场—— $T$ 与 $\mathbf{h}$

现在我们从电磁理论抽象的、数学的观点开始。目的是解释第1章中所给出的那些定律的意义。而为了做到这一点，必须首先对一种将要用到的、新的特殊符号加以解释。所以就让我们暂时忘却电磁学而讨论矢量场的数学。这不但对于电磁学而且对于所有物理情况都是十分重要的。正如通常微积分学对于所有物理部门都那么重要一样，矢量的微分学也是如此。我们就转到这么一个科目上来吧。

下面列举一些来自矢量代数的等式，并假定你们都已知道了。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{标量} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \text{矢量} \quad (2.2)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_x B_y - A_y B_x$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_y B_z - A_z B_y$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_z B_x - A_x B_z$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

我们也要用到从微分学方面得来的下列两个等式：

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z; \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \quad (2.8)$$

当然，第一个等式(2.7)只有在  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  都趋于零的极限时才正确。

可能存在的最简单的物理场是标量场。你应当记得，我们所说的场是指取决于空间位置的一个量。所谓标量场，仅指每点由单一的数值——一个标量——标志的场。当然这个数值可随时间而变，但眼前我们还无需为此操心。我们将只谈论在某一给定时刻场看来是个什么样子。作为标量场的一个例子，试考虑一块固体材料，其中某些地方加热而另一些地方受冷，使得该物体的温度以一种复杂的方式逐点改变。于是温度将是在某直角坐标系中测得的空间位置( $x, y, z$ )的函数，所以温度是一标量场。

考虑标量场的一种办法是去设想一些“等值面”，即通过所有相同值的场点画成的想

象中的面,正如在地图上那些由等高点连成的等高线一样。对于一个温度场来说,这些等值面被称为“等温面”或等温线。图 2-1 表示一温度场,并表明在  $z = 0$  处  $T$  对  $x$  和  $y$  的关系。在该图上画出了几条等温线。

还存在一种矢量场,概念也十分简单,就是在空间的每一点给出一个矢量,这个矢量逐点变化。作为一个例子,可考虑一个旋转物体。在任意点物体中物质的速度便是一个矢量,它是位置的函数(图 2-2)。作为第二个例子,考虑在一块材料里的热流。如果在材料中某处的温度较高另一处的温度较低,则热量就会从较热处流至较冷处。在材料中的不同位置热量将朝不同的方向流动。这一热流就是一个有方向的量,我们称其为  $\mathbf{h}$ 。它的大小是多少热量在流动的量度。关于热流矢量的例子也如图 2-1 所示。

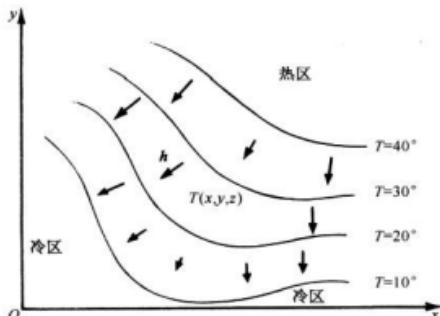


图 2-1 温度  $T$  是标量场的一个例子。与空间每一点  $(x, y, z)$  相联系的是一个数值  $T(x, y, z)$ 。处于标记着  $T = 20^\circ$  的曲面上(图中所示为  $z = 0$  处的一条曲线)上所有的点都有相同温度。箭头是热流矢量  $\mathbf{h}$  的一些样品

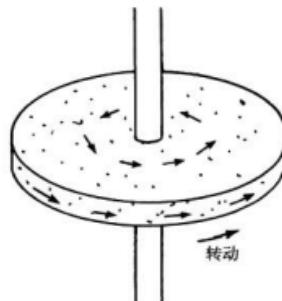


图 2-2 旋转物体中原子的速度是矢量场的一个例子

让我们对  $\mathbf{h}$  下一个更准确的定义:热流矢量在一点的大小就是在单位时间内通过垂直于流动方向的无限小面积元上单位面积的热能。这个矢量指向热量流动的方向(见图 2-3)。用符号表示为:若  $\Delta J$  为单位时间内通过面积元  $\Delta a$  的热能,则

$$\mathbf{h} = \frac{\Delta J}{\Delta a} \mathbf{e}_f, \quad (2.9)$$

式中  $\mathbf{e}_f$  是沿流动方向的单位矢量。

矢量  $\mathbf{h}$  也可按另一种方式——用它的分量——来下定义。我们试问,有多少热量会通过一个与流动方向成任意角度的小面积。在图 2-4 中,我们表示一个小面积元  $\Delta a_2$  与垂直于热流的另一个小面积元  $\Delta a_1$  相倾斜。单位矢量  $\mathbf{n}$  与面积元  $\Delta a_2$  垂直。 $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{h}$  之间的夹角就等于两个面积元之间的角度(因为  $\mathbf{h}$  垂直于  $\Delta a_1$ )。那么,每单位时间内通过  $\Delta a_2$  的热量有多少呢?通过  $\Delta a_2$  的热量就等于通过  $\Delta a_1$  的,只不过面积不同罢了。事实上,  $\Delta a_1 = \Delta a_2 \cos \theta$ 。因此,通过  $\Delta a_2$  的热流为

$$\frac{\Delta J}{\Delta a_2} = \frac{\Delta J}{\Delta a_1} \cos \theta = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.10)$$

我们对式加以说明：通过单位法线为  $\mathbf{n}$  的任何面积元的热流（单位时间、单位面积）为  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ 。同样可以说：垂直于面积元  $\Delta a_2$  的热流分量为  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ 。如果愿意，也可以认为这些说法定义了  $\mathbf{h}$ 。我们也将把这些相同概念应用于其他矢量场。

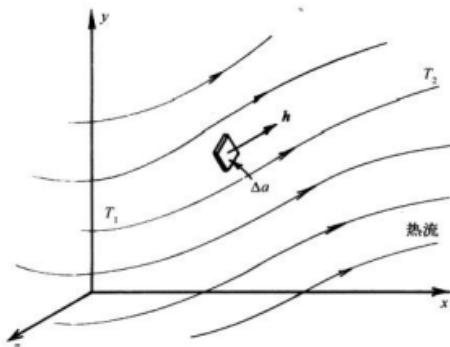


图 2-3 热流是一种矢量场。矢量  $\mathbf{h}$  指向热量流动的方向。它的大小则是单位时间内流过垂直于流动方向的面元的能量除以该面元的面积

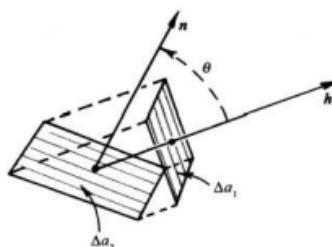


图 2-4 流经  $\Delta a_2$  的热量与流经  $\Delta a_1$  的相同

### § 2-3 场的微商——梯度

当场随时间变化时，可通过给出场对时间的微商加以描述。我们希望用同样办法来描述场对位置的变化，因为对于例如在一点的温度与在邻近一点的温度间的关系，我们是感兴趣的。怎样求温度对位置的微商呢？我们求温度对  $x$  的微商吗？还是对  $y$ ，或是对  $z$ ？

有用的物理定律应当不依赖于坐标系的取向。因此，它们应被写成两边都是标量或两边都是矢量的一种形式。一个标量场的微商，比如说  $\partial T / \partial x$ ，究竟是什么呢？是标量、矢量，还是其他什么东西？它既不是标量，也不是矢量，因为正如你能容易领会的，假如我们取不同的  $x$  轴， $\partial T / \partial x$  肯定会不同。可是要注意，微商可能有三个： $\partial T / \partial x$ ， $\partial T / \partial y$  和  $\partial T / \partial z$ 。由于有这三个微商，而我们又知道要形成一矢量需要三个数，也许这三个微商就是一个矢量的分量：

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) ? = \text{矢量.} \quad (2.11)$$

当然，一般并非任何三个数都能构成为一矢量。只有当我们旋转坐标系，矢量的各个分量按照正确的方式变换时，这才成立。所以需要分析坐标系旋转时，这些微商究竟是如何变换的。我们将证明式(2.11)确实是一个矢量。当坐标系转动时，这些微商的确按正确的方式变换。

我们可用几种方法来看这个问题。一个方法是，提一个答案与坐标系无关的问题，并尝试用“不变量”的形式来表示这一答案。例如，若  $S = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ，而且若  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  都是矢量，则我们知道——因为我们已在第1卷第11章中加以证明—— $S$  是一个标量。无需研究它是否

会随坐标系改变而改变,我们就已知道  $S$  是一个标量,因为它是两个矢量的标积,所以它不可能改变。与此相仿,如果我们有三个数  $B_1, B_2, B_3$ ,并且对每一个矢量  $\mathbf{A}$  都能找出

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = S, \quad (2.12)$$

式中  $S$  对于任何坐标系都相同。那么,这三个数  $B_1, B_2, B_3$  必定是某一矢量  $\mathbf{B}$  的分量  $B_x, B_y, B_z$ 。

现在让我们考虑温度场。假设取  $P_1$  和  $P_2$  两点,它们分开一小间距  $\Delta\mathbf{R}$ 。 $P_1$  处的温度为  $T_1$  而  $P_2$  处的为  $T_2$ ,彼此间的差  $\Delta T = T_2 - T_1$ 。在这些实际的物理点,温度肯定与为测量其坐标而选取的各坐标轴无关。尤其是, $\Delta T$  为一个与坐标系无关的数值。所以它是一个标量。

如果我们选取一组方便的坐标轴,则能写出

$T_1 = T(x, y, z)$  和  $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ , 其中  $\Delta x, \Delta y$  和  $\Delta z$  是矢量  $\Delta\mathbf{R}$  的分量(图 2-5)。记住式(2.7),我们便可以写出:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z. \quad (2.13)$$

式(2.13)的左边是一个标量。右边是各含有  $\Delta x, \Delta y$  和  $\Delta z$ (一个矢量的分量)的三个乘积之和。这样我们得出结论,这三个数值

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

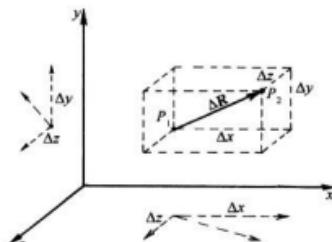


图 2-5 矢量  $\Delta\mathbf{R}$ ,其分量为  $\Delta x, \Delta y$  和  $\Delta z$

也是一矢量的  $x, y$  和  $z$  分量。我们用符号  $\nabla T$  描写这个新矢量。这个符号  $\nabla$  是  $\Delta$  的颠倒,这会使我们回忆起微分来。人们用各种不同方式来读  $\nabla T$ :“del-T”,或“ $T$  的梯度”,或“grad  $T$ ”,

$$\text{grad } T = \nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^*. \quad (2.14)$$

利用这个符号,可以把式(2.13)重写成一个更简洁的形式:

$$\Delta T = \nabla T \cdot \Delta\mathbf{R}. \quad (2.15)$$

口头上这个式子说,两邻近点之间的温度差等于  $T$  的梯度与两点间位移矢量的点积。式(2.15)的形式也清楚地说明了上面我们关于  $\nabla T$  确是一个矢量的证明。

也许你还未相信吧! 让我们用另一种办法来证明它(不过,如果你仔细加以考察,你可能会看到这实际上是兜一个更大圈子的同一种证法)。我们将证明,  $\nabla T$  的分量会按照与  $\mathbf{R}$  的分量完全相同的方式变换。如果它们的确是这样,则按照第 1 卷第 11 章里我们关于矢量的原来定义,  $\nabla T$  就是一矢量。试取一个新坐标系  $x', y', z'$ , 并用这一新系统算出  $\partial T / \partial x'$ ,  $\partial T / \partial y'$  和  $\partial T / \partial z'$ 。为了使事情稍微简单些,我们令  $z = z'$ , 以便可以忘记  $z$  坐标。你尽可

\* 在我们的符号中,表示式  $(a, b, c)$  代表一个具有分量  $a, b$  和  $c$  的矢量。如果你喜欢用单位矢量  $i, j$  和  $k$  的话,那么可以写成:

$$\nabla T = i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z}.$$

以自己检验更普遍的情况。

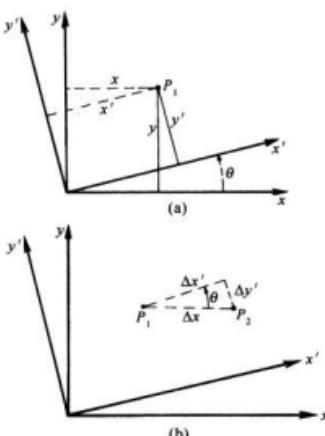


图 2-6 (a) 变换到一个已转动了的坐标系上去; (b) 距间  $\Delta R$  与  $x$  轴平行的一个特殊情况

呢? 我们应写成

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y'. \quad (2.21)$$

看一看图 2-6(b), 即可知道

$$\Delta x' = \Delta x \cos \theta \quad (2.22)$$

和

$$\Delta y' = -\Delta x \sin \theta, \quad (2.23)$$

因为  $\Delta x$  为正时  $\Delta y'$  为负。把这些代入式(2.21), 得:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \theta \quad (2.24)$$

$$= \left( \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta \right) \Delta x. \quad (2.25)$$

比较式(2.25)和(2.20), 我们看到

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \theta. \quad (2.26)$$

这个式说明:  $\partial T / \partial x$  可从  $\partial T / \partial x'$  和  $\partial T / \partial y'$  获得, 正如同式(2.18)中的  $x$  可以从  $x'$  和  $y'$  获得那样。因此  $\partial T / \partial x$  就是一个矢量的  $x$  分量。同样的论据也可以证明,  $\partial T / \partial y$  和  $\partial T / \partial z$  分别为一个矢量的  $y$  和  $z$  分量。所以  $\nabla T$  肯定是一个矢量, 它是从标量场  $T$  导出

我们取一个相对于  $xy$  系转过角度  $\theta$  的  $x'y'$  系, 如图 2-6(a)所示。对于点  $(x, y)$ , 在加撇系统中其坐标为:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta; \quad (2.16)$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta. \quad (2.17)$$

或者,解出  $x$  和  $y$ , 则得:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta; \quad (2.18)$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \quad (2.19)$$

如果任何一对数字在用这些方程进行变换时, 其方式与  $x$  和  $y$  的变换方式一样, 那么它们便是一个矢量的分量。

现在让我们来看看如图 2-6(b)所选取的两个邻近点  $P_1$  和  $P_2$  的温度差。若我们用  $x$  和  $y$  坐标来计算, 则可以写成

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x, \quad (2.20)$$

因为  $\Delta y$  等于零。

在那个加撇的系统里进行计算, 会得出个什么

的一个矢量场。

## § 2-4 算 符 $\nabla$

现在我们就能够做一件非常有趣而巧妙的事情——并且是使数学绚丽多彩的一些事物的标志。前面对  $T$  的梯度或  $\nabla T$  是一个矢量的论证，与我们究竟对哪—个标量场进行微分无关。假若  $T$  被任一标量场代替，所有论证可以同样进行。既然不管我们对什么求导，那些变换公式都相同，那么就可以略去  $T$  而由一个算符方程

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \theta \quad (2.27)$$

来代替式(2.26)，正如金斯(Jeans)曾经说过的那样，我们让算符“忙于对某事物求导”。

由于这些微分算符本身就已如同一个矢量的分量那样进行变换，所以我们可以称它们为一个矢量算符的分量，即可以写成：

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (2.28)$$

当然，它意味着

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.29)$$

我们已经把  $T$  去掉而使梯度抽象化了——这是一个绝妙的想法。

当然，你必须始终记住  $\nabla$  是个算符。它单独没有什么意义。如果  $\nabla$  本身没有什么意义，那么要是乘以一标量——比如  $T$ ——那乘积  $T \nabla$  又会有什么意义呢(我们总可以用一标量乘一矢量)？它仍然不具有什么意义。它的  $x$  分量是

$$T \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.30)$$

它不是一个数，而仍然是某种算符。然而，按照矢量代数，我们仍可以把  $T \nabla$  称为一个矢量。

现在让我们在  $\nabla$  的另一边乘上一标量，使之形成乘积( $\nabla T$ )。在普通代数中

$$TA = AT, \quad (2.31)$$

但我们得记住，算符代数稍有别于普通的矢量代数。用算符时，必须时刻保持正确顺序，以便使运算构成适当的意义。如果你真正记住了算符  $\nabla$  遵循与微商符号相同的惯例，那你就不会有任何困难。凡要求导的东西一定要放在  $\nabla$  的右边。这里，先后次序是重要的。

记牢了这个次序问题，我们就懂得  $T \nabla$  是一个算符，但  $\nabla T$  却不再是一个饥饿的算符，该算符已完全被满足了。并且它确实是一个有意义的物理矢量，代表  $T$  的空间变化率。 $\nabla T$  的  $x$  分量就是  $T$  在  $x$  方向上变化得多快。矢量  $\nabla T$  的方向是什么？我们知道， $T$  在任一方向上的变化率等于  $\nabla T$  在该方向的分量，参见式(2.15)，由此可以推知， $\nabla T$  的方向是它最大而可能存在的分量的方向——换句话说，是  $T$  变化得最快的方向。 $T$  的梯度具有(在  $T$  处)最急剧上升的斜率的方向。

## § 2-5 $\nabla$ 的运算

矢量算符 $\nabla$ ,能否用作其他方面的代数运算?让我们尝试把它同一个矢量组合起来。可以通过点积来组合两个矢量,这可构成这样两种点积:

$$(矢量) \cdot \nabla; 或 \nabla \cdot (矢量).$$

第一种还没有什么意义,因为它仍然是一个算符。最终的含意取决于它所运算的对象如何。第二种乘积则是某个标量场( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  总是一个标量)。

让我们就用一个已知的矢量场、比如  $\mathbf{h}$ , 来试试它与  $\nabla$  的点积吧。把它写成分量为:

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z \quad (2.32)$$

或

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}. \quad (2.33)$$

这个和式在坐标变换之下是不变的。假如我们选择一个不同的坐标系(通过加撇来表明),则我们会有\*

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h'_x}{\partial x'} + \frac{\partial h'_y}{\partial y'} + \frac{\partial h'_z}{\partial z'}, \quad (2.34)$$

上式与式(2.33)尽管看起来不同,但所得的值相同。这就是说,对于在空间每一点,

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (2.35)$$

因此, $\nabla \cdot \mathbf{h}$  是一个标量场,它必定代表某个物理量。你会认识到,在  $\nabla \cdot \mathbf{h}$  中,各微商的组合方式相当特殊。此外,还有许多像  $\partial h_x / \partial x$  的其他各种组合,它们既不是标量,也不是矢量的分量。

标量  $\nabla \cdot (\text{矢量})$  在物理学中非常有用。它的名称叫做散度。例如,

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{h} = “\mathbf{h} \text{ 的散度”}. \quad (2.36)$$

就像在上面对  $\nabla T$  所做的那样,也可以赋予  $\nabla \cdot \mathbf{h}$  一个物理意义。然而,我们将把这项工作推迟到以后。

首先,我们希望看看,由矢量算符  $\nabla$  是否还能设计些别的什么。我们必然指望

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{一个矢量}. \quad (2.37)$$

它是一个矢量,其分量可按照有关叉积的通常规则[参见式(2.2)]写出:

$$(\nabla \times \mathbf{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}. \quad (2.38)$$

\* 我们把  $\mathbf{h}$  设想成一个取决于空间位置的物理量,而不是把它设想成一个严格的含有三个变量的数学函数。当  $\mathbf{h}$  对于  $x, y, z$  或对于  $x', y', z'$  求微商时,  $\mathbf{h}$  的数学表达式就必须先表示为合适的变量的函数。

同理，

$$(\nabla \times \mathbf{h})_x = \nabla_z h_x - \nabla_y h_z = \frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_z}{\partial z}, \quad (2.39)$$

$$(\nabla \times \mathbf{h})_y = \nabla_z h_y - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_y}{\partial z} - \frac{\partial h_x}{\partial x}. \quad (2.40)$$

组合  $\nabla \times \mathbf{h}$  称为“ $\mathbf{h}$  的旋度”，其命名原因及物理意义都将在以后讨论。综上所述，同  $\nabla$  的组合有三种：

$$\nabla T = \text{grad } T = \text{矢量};$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{h} = \text{标量};$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{curl } \mathbf{h} = \text{矢量}.$$

利用这些组合，我们可以用一种常规的方法——一种并不依赖于任何特定坐标系的普遍方法——来写出关于场的空间变化。

作为对矢量微分算符  $\nabla$  应用的一个例子，我们写出一组矢量方程，它们包含着我们在第 1 章口头上的相同的电磁学定律，它们被称为麦克斯韦方程组。

麦克斯韦方程组：

$$(1) \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0};$$

$$(2) \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (2.41)$$

$$(3) \nabla \cdot \mathbf{B} = 0;$$

$$(4) c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}.$$

式中， $\rho$  为“电荷密度”，即单位体积的电量； $\mathbf{j}$  为“电流密度”，即每秒通过单位面积的电荷流。这四个方程式包含了电磁场完整的经典理论。你们看到，采用这种新符号，我们可能得到多么优美而又简洁的形式！

## § 2-6 热流的微分方程

让我们举出用矢量符号描写物理定律的另一个例子。这一定律虽不十分精确，但对于金属和若干种导热的其他物质来说还是很准确的。你知道，如果取一厚片材料，将其一面加热至温度  $T_2$ ，而另一面冷却至温度  $T_1$ ，那么热量将通过材料从  $T_2$  流向  $T_1$  [图 2-7(a)]。热流将与板的面积成正比，也与温差成正比，而与板的厚度  $d$  成反比（对于给定的温差，板越薄热流就越大）。令  $J$  为单位时间通过那块板的热能，我们可以写成

$$J = \kappa(T_2 - T_1) \frac{A}{d}, \quad (2.42)$$

比例常数  $\kappa$  称为热导率。

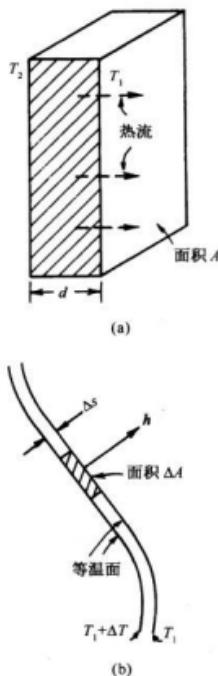


图 2-7 (a)通过一块板的热流;(b)在一大块材料中平行于等温面的一个无限小薄片

在一较复杂的情况下将会发生什么呢? 比方说, 在一块奇形怪状的材料中, 温度以独特的方式变化。假设我们注意这块材料中的一小部分, 并设想有一块在微小尺度上像图 2-7(a)那样的薄片。把这薄片旋转至与等温面平行的方向, 像在图 2-7(b)中的情形, 使得式(2.42)对于这一小片是正确的。

若这一薄片的面积为  $\Delta A$ , 则每单位时间所流过的热量为

$$\Delta J = \kappa \Delta T \frac{\Delta A}{\Delta s}, \quad (2.43)$$

式中  $\Delta s$  是该薄片的厚度。我们已在前面把  $\Delta J / \Delta A$  定义为  $\mathbf{h}$  的大小, 其方向则为热流方向。热流将从  $T_1 + \Delta T$  流向  $T_1$ , 所以热流就应当垂直于如图 2-7(b)所画出的那些等温面。并且,  $\Delta T / \Delta s$  恰好就是  $T$  对位置的变化率。又由于位置变化垂直于等温面, 所以这个  $\Delta T / \Delta s$  便是最大变化率。因此, 它恰好就是  $\nabla T$  的大小。现在既然  $\nabla T$  与  $\mathbf{h}$  反向, 所以可将式(2.43)写成一个矢量方程:

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla T, \quad (2.44)$$

负号是必需的, 因为热量流向温度“下降”方向。式(2.44)是大块材料中热传导的微分方程。你看到, 这是一个真正的矢量方程。如果  $\kappa$  仅仅是一个数, 上式两边都是矢量。这是由矩形板的特殊关系[式(2.42)]推广至一任意情况的普遍化过程。我们以后还应该学习把所有像式(2.42)那样的基本物理关系用更为高级的矢量符号写出来。这种符号之所以有用, 不仅是由于它会使方程看起来比较简单, 而且它也无需参考任何自主选取的坐标系而最清楚地表明方程的物理内容。

## § 2-7 矢量场的二阶微商

迄今我们只有一阶微商。为什么就没有二阶微商呢? 我们可以有下列几种组合:

- (a)  $\nabla \cdot (\nabla T);$
  - (b)  $\nabla \times (\nabla T);$
  - (c)  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h});$
  - (d)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h});$
  - (e)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}).$
- (2.45)

你可以核实一下, 这些全是可能的组合。

让我们首先看一看第二式(b)。与它相同的形式为

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A}T) = (\mathbf{A} \times \mathbf{A})T = 0,$$

因为  $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$  恒为零。因此，我们就有：

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} T) = \nabla \times (\nabla T) = 0. \quad (2.46)$$

如果用分量来计算一遍，便可以看出这个式是怎样产生的：

$$[\nabla \times (\nabla T)]_x = \nabla_x(\nabla T)_y - \nabla_y(\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (2.47)$$

上式等于零[根据式(2.8)]。对于其他分量也是如此。因此，对任何一种温度分布(实际上，对于任何标量函数)， $\nabla \times (\nabla T) = 0$ 。

现在让我们举出另一个例子，看看能否找到别的等于零的等式。一个矢量与一个其中含有该矢量的矢积的点积为零，即

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.48)$$

因为  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  垂直于  $\mathbf{A}$ ，所以在  $\mathbf{A}$  方向上就没有  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  的分量。与此相同的一种组合出现在式(2.45)的(d)中，因而我们有：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = \operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{h}) = 0. \quad (2.49)$$

此外，用分量进行运算来证明上式为零并不困难。

现在我们将不加证明地陈述两个数学定理。它们是物理学家已经知道的十分有趣而又有用的定理。

在一个物理问题中，我们经常发现某一个量——比如矢量场  $\mathbf{A}$ ——的旋度为零。如我们已由式(2.46)看到，一个梯度的旋度为零，这是很容易记住的，因为这种情形是矢量造成的。于是，有可能肯定  $\mathbf{A}$  是某一个量的梯度，这样它的旋度才必然等于零。这个有趣的定理说明，如果  $\operatorname{curl} \mathbf{A}$  等于零，则  $\mathbf{A}$  总是某种东西的梯度——存在某一标量场  $\psi$  使得  $\mathbf{A}$  等于  $\operatorname{grad} \psi$ 。换句话说，我们有

定理：

$$\text{如果 } \nabla \times \mathbf{A} = 0,$$

就有一个  $\psi$

$$\text{使得 } \mathbf{A} = \nabla \psi. \quad (2.50)$$

若  $\mathbf{A}$  的散度为零，则有一个相似的定理。我们已从式(2.49)看到，某个矢量旋度的散度总是零。如果你遇到  $\operatorname{div} \mathbf{D}$  为零的一个矢量场  $\mathbf{D}$ ，那你就可以得出结论， $\mathbf{D}$  是某个矢量场  $\mathbf{C}$  的旋度。

定理：

$$\text{如果 } \nabla \cdot \mathbf{D} = 0,$$

就有一个  $\mathbf{C}$

$$\text{使得 } \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{C}. \quad (2.51)$$

在考察两个  $\nabla$  算符的可能组合中，我们已经找出其中有两种组合总是等于零。现在来

看看那些不等于零的组合。取出表上所列的第一个组合  $\nabla \cdot (\nabla T)$ 。我们把它写成分量式：

$$\nabla T = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T).$$

于是

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla_x(\nabla_x T) + \nabla_y(\nabla_y T) + \nabla_z(\nabla_z T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (2.52)$$

上式一般应给出某个数，它是一个标量场。

你看到，上式无需保留那个括号，因而在不会引起混乱的情况下它可以写成：

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (2.53)$$

这里我们把  $\nabla^2$  看成一个新的算符。这是一个标量算符。由于它经常出现在物理学中，因而已被赋予一个专用名称，即拉普拉斯算符。

$$\text{拉普拉斯算符} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.54)$$

由于拉普拉斯算符是一个标量算符，就可以用它来对一矢量进行运算——这意味着对在直角坐标系的每一个分量进行同一种运算：

$$\nabla^2 \mathbf{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z).$$

让我们再来看另一个可能性： $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h})$ ，那是表(2.45)中的(e)。现在如果我们应用矢量等式(2.6)：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.55)$$

便可以把一个旋度的旋度写成不同的形式。为了使用这一公式，我们应当用算符  $\nabla$  来代替其中的  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$ ，并令  $\mathbf{C} = \mathbf{h}$ 。这样就得到：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\nabla \cdot \nabla) \dots ???$$

但请等一等！有点不对了。前两项不错，那都是矢量（算符被满足了），可是末项就不知会产生出什么东西来。它仍然是一个算符。麻烦在于我们曾经不够小心，以致不能保持各项的前后次序。然而，若你再看一看式(2.55)，就会见到我们同样可以把它写成：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (2.56)$$

这几项的次序看来要好些。现在在式(2.56)中做代换，便得：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{h}. \quad (2.57)$$

这个形式看来不错。事实上，它是正确的，例如你可以通过计算分量给以证明。末项就是拉普拉斯算符，因而我们同样可以写成：

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}. \quad (2.58)$$

除了(c) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})$ 以外，我们对于表中的双 $\nabla$ 的组合全都谈过一些了。它可能是一个矢量场，但却没有什么特殊情况可说的。那不过是偶尔会出现的一种矢量场罢了。

把我们的结论列成一表将很方便：

- (a)  $\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T =$  标量场；  
 (b)  $\nabla \times (\nabla T) = 0;$   
 (c)  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) =$  矢量场；  
 (d)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0;$  (2.59)  
 (e)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h};$   
 (f)  $(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{h} = \nabla^2 \mathbf{h} =$  矢量场。

你可能会注意到，我们从未试图发明一个新的矢量算符( $\nabla \times \nabla$ )。你看这是为什么？

## § 2-8 陷 阱

我们正在把关于一般矢量代数的知识应用到算符 $\nabla$ 的代数上来，可是必须当心，因为有可能误入歧途。存在两个即将提到的陷阱，虽然它们并不会出现于本课程中。对于含有两个标量函数 $\psi$ 和 $\phi$ 的下列表示式：

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\phi),$$

你该说些什么呢？你也许会说：它必然等于零，因为它恰巧像

$$(Aa) \times (Ab),$$

而两个相同矢量的叉积始终是零。但是在这个例子中两个算符 $\nabla$ 却并不相同！前一个算符作用于函数 $\psi$ 上；而另一个则作用于一个不同的函数 $\phi$ 上。所以尽管所用的是同一个符号 $\nabla$ ，但它们仍应被认为是不同的算符。很明显， $\nabla\psi$ 的方向取决于函数 $\psi$ ，因而它不大可能平行于 $\nabla\phi$ 。因此，

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\phi) \neq 0 \quad (\text{一般地}).$$

幸而，我们今后无需用到这些表示式（刚才所说的不会改变这么一个事实，即对于任一标量场 $\psi$ ， $\nabla \times \nabla\psi = 0$ ，因为这里两个 $\nabla$ 是对同一函数的作用）。

第二号陷阱（在这门课程中我们没有必要去研究它）如下：当应用直角坐标系时这里提出的法则既简单而又美妙。比方，若有了 $\nabla^2 \mathbf{h}$ ，而希望获得它的 $x$ 分量，那便是

$$(\nabla^2 \mathbf{h})_x = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) h_x = \nabla^2 h_x. \quad (2.60)$$

但如果我们所要求的是 $\nabla^2 \mathbf{h}$ 的径向分量，则这同一个表式就不行了。 $\nabla^2 \mathbf{h}$ 的径向分量并不等于 $\nabla^2 h_r$ 。原因是，如果我们同矢量代数打交道，矢量的方向就都是十分确定的。但当我们与矢量场打交道时，它们的方向则处处不同。如果我们试图用（比如说）极坐标来描述一个矢量场，则称为“径向”的那个方向便会逐点不同。因此，当我们开始对它的分量进行微分时，就会陷入一大堆麻烦之中。例如，甚至对一恒定不变的矢量场，它的径向分量仍然逐点变化。

坚持只用直角坐标系往往是最保险和最简单的做法，而且避免了麻烦，但有一个例外值

得一提：由于拉普拉斯算符 $\nabla^2$ 是一个标量，所以我们就可能在我们想要的任意坐标系（例如在极坐标系）中把它写出来；但由于它是一个微分算符，所以只可以把它用到其分量各保持在固定方向上——即在直角坐标上——的那些矢量。因此，当我们用分量来写出矢量微分方程时，就必须把矢量场全部用它们的 $x$ ,  $y$ ,  $z$ 分量来表达。

# 第3章 矢量积分运算

## § 3-1 矢量积分; $\nabla\psi$ 的线积分

在第2章中, 我们已找到对场进行微商的各种方法, 结果有的得出矢量场, 有的得出标量场。虽然我们曾导出许多不同公式, 但从第2章所得的一切中可以归纳成一个法则: 算符  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$  和  $\partial/\partial z$  就是一个矢量算符  $\nabla$  的三个分量。现在我们希望对场的微商的意义获得某种理解, 然后才会对矢量场方程的含义有更深的体会。

我们已讨论过梯度运算( $\nabla$ 作用于一标量上)的意义, 现在将转到散度和旋度运算的意义上来。对于这些量的解释最好用某些矢量积分及与这些积分有关的方程来进行。可惜这些方程并不能通过某种简单的代入法从矢量代数中求得, 因而只得将其当作新的东西来学习。在这些积分公式中, 有一个实际上是不重要的, 但其他两个则不是这样, 我们将导出它们并解释其涵义。下面将要研究的方程其实都是数学定理, 它们不但对于解释散度与旋度的意义及其内容将会有用, 而且对从事一般的物理理论工作也同样有用。这些数学定理对于场的理论的作用, 正如能量守恒定理对于质点力学的作用一样。像这类普遍定理对更深刻地理解物理学是很重要的。然而, 你将发现, 它们对于求解问题——除去那些最简单情况——用处并不很大。但令人高兴的是, 在我们这一课程的开头, 就有许多简单问题可用我们即将处理的三个积分公式来求解。可是, 我们也将看到, 当问题变得较困难时, 就不能再用这些简单方法了。

首先着手处理涉及梯度的一个积分公式, 这个关系式含有一个非常简单的概念。既然梯度代表一个场量的变化率, 如果我们对这一变化率进行积分, 则可能获得总的变化。假设有标量场  $\psi(x, y, z)$ , 在任意两点(1)和(2)处, 函数  $\psi$  将分别取值  $\psi(1)$  和  $\psi(2)$ [我们采用一种方便的符号, 用(2)代表点  $(x_2, y_2, z_2)$ , 而  $\psi(2)$  意味着和  $\psi(x_2, y_2, z_2)$  相同]。如果  $\Gamma$  是连接(1)和(2)两点间的任意曲线, 如图3-1所示, 则下述关系就是正确的。

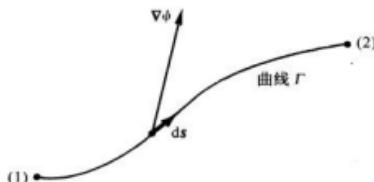


图 3-1 式(3.1)中的各项。矢量  $\nabla\psi$  是在  
线元  $ds$  处计算出来的

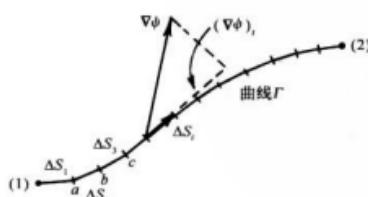


图 3-2 线积分是和的极限

定理 1:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\text{沿}\Gamma}^{(2)} (\nabla\psi) \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.1)$$

这个积分是一线积分, 它是对矢量  $\nabla\psi$  和另一个代表沿曲线  $\Gamma$  的无限小线元的矢量  $d\mathbf{s}$  [从点(1)指向点(2)] 点积的积分, 积分沿着由点(1)至点(2)的曲线  $\Gamma$  进行。

首先, 我们应该复习一下线积分的含义是什么。试考虑一个标量函数  $f(x, y, z)$  和一条连结(1)和(2)两点间的曲线  $\Gamma$ 。在曲线上划分出许多点, 再用直线段连接这些点, 如图 3-2 所示。每段具有长度  $\Delta s_i$ , 其中  $i$  是依次取 1, 2, 3, … 等值的下脚标。所谓线积分

$$\int_{(1)}^{(2)} f d\mathbf{s},$$

是指这么一个和的极限:

$$\sum i f_i \Delta s_i,$$

其中  $f_i$  是在第  $i$  段上的函数值。极限值就是当所分的段数越来越增加时(说得明显些, 就是使最大的  $\Delta s_i \rightarrow 0$ )这个和所趋近的数值。

在上述定理中的积分, 即式(3.1), 也是指同样的事, 虽然看起来稍有不同。我们不用  $f$ , 而用另一个标量—— $\nabla\psi$  在  $\Delta\mathbf{s}$  方向上的分量。如果我们把这一分量写成  $(\nabla\psi)_i$ , 则很清楚,

$$(\nabla\psi)_i \Delta s = (\nabla\psi)_i \cdot \Delta\mathbf{s}. \quad (3.2)$$

式(3.1)中的积分就意味着对这种项求和。

现在让我们看看为什么式(3.1)是正确的。在第 2 章中, 我们曾证明,  $\nabla\psi$  沿一小位移  $\Delta\mathbf{R}$  的分量乃是  $\psi$  在  $\Delta\mathbf{R}$  方向上的变化率。考虑图 3-2 中由点(1)至点( $a$ )间的线段  $\Delta\mathbf{s}$ , 按照我们的定义,

$$\Delta\psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta s_1. \quad (3.3)$$

同样, 我们有

$$\psi(b) - \psi(a) = (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta s_2. \quad (3.4)$$

当然, 上式中的  $(\nabla\psi)_1$  是指在线段  $\Delta s_1$  处计算出来的梯度, 而  $(\nabla\psi)_2$  则是在  $\Delta s_2$  上计算出来的梯度。如果我们把式(3.3)和(3.4)相加, 便得:

$$\psi(b) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta s_1 + (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta s_2. \quad (3.5)$$

你可以看到, 若继续加进这样的项, 就能获得结果:

$$\psi(2) - \psi(1) = \sum i (\nabla\psi)_i \cdot \Delta s_i. \quad (3.6)$$

左边并不与我们所选取的间隔有关——如果(1)和(2)两点始终保持固定不变的话——所以我们可以取右边的极限。这样, 我们就已经证明了式(3.1)。

你可从上述的证明中看到, 正如该等式并不依赖于点  $a, b, c \dots$  如何选取, 同样它也不依赖于我们所选取的用以连接(1)和(2)间的曲线  $\Gamma$ 。对于由点(1)至点(2)间的任何曲线, 我们的定理都是正确的。

关于符号的一点说明：你将会看到，如果为了方便而将上式写成

$$(\nabla\psi) \cdot ds = \nabla\psi \cdot ds, \quad (3.7)$$

将不致引起混乱。利用这一符号，上述定理为

定理1：

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\psi \cdot ds. \quad (3.8)$$

从(1)至(2)  
的任何曲线

## § 3-2 矢量场的通量

在讨论下一个积分定理——关于散度方面的定理——之前，我们想学习一下物理意义较明显的关于热流的某种概念。我们曾定义过矢量  $\mathbf{h}$ ，它代表单位时间内通过单位面积的热量。假设在一块材料内部，有一个包围着体积  $V$  的某闭合曲面  $S$ （图 3-3）。我们希望求出从这个体积里流出去的热量有多少。当然，我们可以通过

计算流出表面  $S$  的总热量来求得它。

我们用  $da$  记为一个面积元的面积，这符号代表一个二维微分，例如，若该面积碰巧处在  $xy$  面上，则应有

$$da = dx dy.$$

由于以后还将对体积进行积分，所以，为方便起见，考虑一个小立方体的微分体积。这样，当我们写出  $dV$  时，指的就是

$$dV = dx dy dz.$$

有些人不喜欢写成  $da$ ，而喜欢写成  $d^2 a$  以提醒人们注意那是一个二级量。他们同样不想用  $dV$  而要用  $d^3 V$ 。我们则将采用那种较简单的符号，并假定你确能记住面积具有二维，而体积具有三维。

通过面积元  $da$  流出的热量等于该面积乘以垂直于  $da$  的  $\mathbf{h}$  分量。我们已把  $\mathbf{n}$  定义为与表面成直角而指向外的单位矢量（图 3-3）。希望得到的  $\mathbf{h}$  分量为：

$$h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.9)$$

于是，通过  $da$  流出的热量为

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.10)$$

为了得到通过任意表面的总热量，我们对来自所有面积元的贡献求和。换句话说，将在整个表面对式(3.10)进行积分：

$$\text{通过 } S \text{ 向外流出的总热量} = \int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.11)$$

我们将把这个面积分称为“ $\mathbf{h}$  通过该表面的通量”。通量这个词的原有意义是流量，因而面积分恰好意味着  $\mathbf{h}$  通过该表面的流量。可以认为： $\mathbf{h}$  是热量流动的“流密度”，而它的面

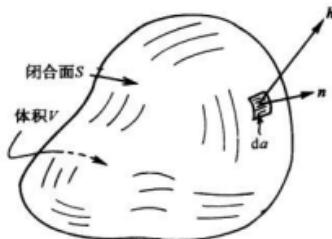


图 3-3 闭合面  $S$  规定了体积  $V$ 。单位矢量  $n$  是面积元  $da$  的外法线，而  $\mathbf{h}$  则是该面积元处的热流矢量

积分则是指向表面外的总热量流，也就是单位时间流出的热能(每秒的焦耳数)。

我们希望把这一概念推广到矢量并不代表任何流动的东西那种情况。例如，它或许是电场。如果我们乐意的话，肯定也能对电场的法向分量在一个面上积分。尽管这并不是什么东西的流动，但我们仍称之为“通量”。我们说，

$$\mathbf{E} \text{ 通过曲面 } S \text{ 的通量} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.12)$$

这就把“通量”这一词推广到指一矢量的“法向分量的面积分”了。即使所考虑的表面不是闭合的情况，我们也将使用同样的定义，就像这里讨论闭合面那样。

回到热流的特殊情况，让我们以热量守恒的情况为例。例如，设想有某件材料初始加热以后就不再有热量产生或吸收。于是，如有净热量从闭合表面流出去，则该体积内热的含量就一定会减少。所以，在这种情况下热量应该守恒，我们说：

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{dQ}{dt}, \quad (3.13)$$

式中  $Q$  是表面  $S$  内的热量。从  $S$  面出来的热通量等于  $S$  面内总热量  $Q$  对于时间变化率的负值。这种解释是可行的，因为我们正在谈论热流，而且已假定热量是守恒的。当然，假如那时热量正在产生，则我们也许就不能谈论该体积内的总热量了。

现在我们要指出一个关于任意矢量的通量的有意义的事实。如果愿意，你可以认为这矢量是热流矢量，但我们所要讲的内容对任一矢量场  $\mathbf{C}$  都将是正确的。设想有一包围体积  $V$  的闭合曲面  $S$ ，现用如图 3-4 所示的某种“截面”将体积分成两部分，我们就有两个闭合曲面和体积。体积  $V_1$  被曲面  $S_1$  包围，由原来表面的一部分  $S_a$  和截面  $S_a$  构成。体积  $V_2$  被曲面  $S_2$  包围，由原来表面的其余部分  $S_b$  再加上截面  $S_a$  构成。现在考虑下述问题：假设要计算通过曲面  $S_1$  的向外通量，再加上通过曲面  $S_2$  的向外通量。这个总和是否会等于通过开始时那个完整表面的通量呢？答案是肯定的。通过  $S_1$  和  $S_2$  所共有的  $S_a$  面部分的通量恰好互相抵消。关于从  $V_1$  出来的矢量  $\mathbf{C}$  的通量，我们可以写成：

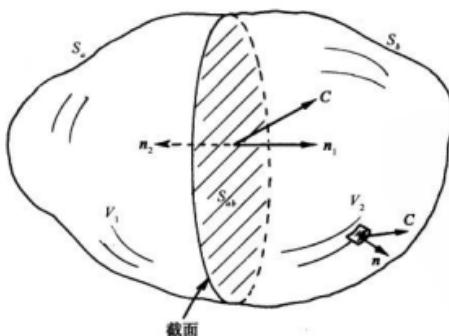


图 3-4 包围在  $S$  面内的体积  $V$  被一“截面” $S_a$  分成两半。现在就有了包围在  $S_1 = S_a + S_a$  面内的体积  $V_1$  和包围在  $S_2 = S_b + S_a$  面内的体积  $V_2$

$$\text{通过 } S_1 \text{ 的通量} = \int_{S_1} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da + \int_{S_2} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 da. \quad (3.14)$$

而从  $V_2$  流出的通量，则是：

$$\text{通过 } S_2 \text{ 的通量} = \int_{S_2} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da + \int_{S_1} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.15)$$

注意！在这两个积分中， $\mathbf{n}_1$  表示  $S_2$  属于  $S_1$  时的外法线，而  $\mathbf{n}_2$  则表示  $S_2$  属于  $S_2$  时的外法线，分别如图 3-4 所示。显然， $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ ，因而

$$\int_{S_2} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 da = - \int_{S_2} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 da. \quad (3.16)$$

现在若把式(3.14)和(3.15)相加，则通过  $S_1$  和  $S_2$  两通量之和恰好等于那两个积分之和，而把这两个积分合在一起，就给出通过原来的曲面  $S = S_1 + S_2$  的通量。

我们看到，通过整个外表面  $S$  的通量，总可以认为是该体积分成两部分后所得到的通量之和。还可以照样再分割下去——例如把  $V_1$  再分成两块，你会看到同样的论证仍然适用。因此，不管将原来体积按何种方式分割，普遍正确的结果应该是：由原来积分表示的、通过外表面的通量，等于出自内部所有各小块的通量之和。

### § 3-3 来自小立方体的通量；高斯定理

现在考虑一个小立方体<sup>\*</sup> 的特殊情况，并求出其通量的一个令人感兴趣的公式。设想各边与坐标轴平行而构成的一个立方体，如图 3-5 所示。假设最接近于原点的那个角点的坐标为  $x, y, z$ 。令  $\Delta x$  为该立方体在  $x$  方向上的长度， $\Delta y$  为  $y$  方向的长度，而  $\Delta z$  为在  $z$  方向的长度。希望求出矢量场  $\mathbf{C}$  通过该立方体表面的通量，这将由算出通过小立方体每个面的通量之和而获得。首先，考虑图中标明为 1 的面。在这个面上，向外的通量等于  $\mathbf{C}$  的  $C_x$  分量的负值对该面面积的积分。这个通量为

$$-\int C_x dy dz.$$

由于我们考虑的是一个小立方体，所以可用该面中心——我们称之为点(1)——的  $C_x$  值乘以该面面积  $\Delta y \Delta z$  作为这一积分的近似：

$$\text{出自面 1 的通量} = -C_x(1)\Delta y \Delta z.$$

同理，出自面 2 的通量，也可以表达为：

$$\text{出自面 2 的通量} = C_x(2)\Delta y \Delta z.$$

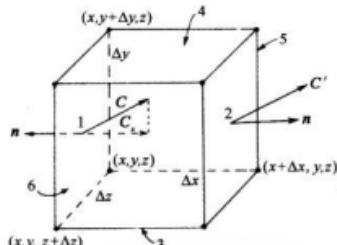


图 3-5 来自一小立方体的通量的计算

\* 下面的推导也同样适用于任何一个直角平行六面体。

以上两式中的  $C_x(1)$  和  $C_x(2)$ , 一般说来, 是有点差别的。如果  $\Delta x$  足够小, 则可以写成:

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x.$$

当然, 还有更多的项, 不过它们将包含  $(\Delta x)^2$  和更高幂次的项, 因而如果只考虑小量  $\Delta x$  的极限情况, 则它们都可以被忽略。所以, 通过面 2 的通量就是:

$$\text{出自面 2 的通量} = \left[ C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z.$$

把通过面 1 和面 2 的通量相加, 得:

$$\text{出自面 1 和 2 的通量} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

上式中的微商, 实在应在面 1 的中心处、即在点  $[x, y + (\Delta y/2), z + (\Delta z/2)]$  处计算。但在一个无限小立方体的极限情况下, 即使在角点  $(x, y, z)$  处计算, 所造成的误差也是可以忽略的。

依此类推, 对其他每一对面, 我们也会得到:

$$\text{出自面 3 与面 4 的通量} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z;$$

$$\text{出自面 5 与面 6 的通量} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

通过所有面的总通量是这些项之和。我们得出:

$$\int_{\text{立方体}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} d\alpha = \left( \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

而式中微商之和恰好就是  $\nabla \cdot \mathbf{C}$ 。并且,  $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$ , 即该立方体的体积。所以对于一个无限小立方体, 可以讲

$$\int_{\text{表面}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} d\alpha = (\nabla \cdot \mathbf{C}) \Delta V. \quad (3.17)$$

这就证明, 一无限小立方体表面向外的通量等于该矢量的散度乘以该立方体的体积。现在我们看到了一个矢量的散度的“意义”。一个矢量在  $P$  点的散度就是  $P$  点附近单位体积的通量—— $\mathbf{C}$  的向外“流量”。

我们已把  $\mathbf{C}$  的散度与每个无限小体积向外的  $\mathbf{C}$  通量联系起来了。对于任何有限体积来说, 我们可用上面证明过的事实——来自一体积的总通量等于从其中每一部分出来的通量之和。这就是说, 我们可遍及整个体积对散度进行积分。它向我们提供了这样一个定理: 任何矢量的法向分量对任何闭合曲面的积分, 也可以写成该矢量的散度对该曲面所包围的体积的积分。这个定理以高斯命名。

高斯定理:

$$\int_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} d\alpha = \int_V \nabla \cdot \mathbf{C} dV, \quad (3.18)$$

式中  $S$  是任一闭合曲面, 而  $V$  是这个曲面内的体积。

### § 3-4 热传导; 扩散方程

仅仅为了熟悉高斯定理, 让我们考虑应用该定理的一个例子。仍然举金属中的热流为例, 假定其中所有热量都已预先输入、而此刻正在冷却的那种简单情况。这里没有热源, 所以热量是守恒的。那么, 在任意时刻存在于某个特定体积里的热量到底有多少呢? 它所减少的量必须恰好等于从该体积表面流出的量。如果我们的体积是一个小立方体, 则根据式(3.17)就应该写成:

$$\text{流出的热量} = \int_{\text{表面}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = \nabla \cdot \mathbf{h} \Delta V. \quad (3.19)$$

这必然要等于小立方体内部热量的损失率。设  $q$  为单位体积内的热量, 则在该立方体内的热量为  $q\Delta V$ , 其损失率则为:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(q\Delta V) = -\frac{\partial q}{\partial t}\Delta V. \quad (3.20)$$

比较式(3.19)和(3.20), 我们见到:

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{h}. \quad (3.21)$$

仔细注意这个方程的形式, 它是物理学中经常出现的形式, 即表达了一个守恒定律——这里是热量守恒。我们曾经在式(3.13)中以另一种方式表示过相同的物理事实。这里是守恒方程的微分形式, 而式(3.13)则是一种积分形式。

我们通过把式(3.13)应用于一无限小立方体而获得了式(3.21)。我们也可用别的方法去做。对于一个以  $S$  面为边界的大体积  $V$ , 高斯定理表达为:

$$\int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{h} dV. \quad (3.22)$$

应用式(3.21), 得出右边的积分恰是  $-dQ/dt$ , 因而我们又一次得到了式(3.13)。

现在让我们考虑一个不同的情况。想象在一大块材料中有一个很小的洞, 里面正在进行某种产生热量的化学反应。我们也可以这样设想, 用导线连接一个小小的电阻器, 然后通电使之发热。我们将假设热量实际上是在一点上产生的, 并令  $W$  代表在该点每秒释放出来的能量。我们还假定在体积的其余部分热量始终守恒, 而且该热量的产生也已持续了足够长的时间——使得现在任何一处的温度都不再发生变化了。问题是: 金属里各处的热流矢量  $\mathbf{h}$  是什么样子? 在每一点有多少热量流过?

我们知道, 如果在包围着该热源的闭合曲面上对  $\mathbf{h}$  的法向分量进行积分, 则总会得到  $W$ 。所有在该点源处陆续产生的所有热量都必定通过该表面流出, 因为我们已假定其流动是稳定的。这里有一个困难问题, 即要找出一个矢量场, 在包围源的任意曲面上积分时该矢量场总给出  $W$ 。然而, 我们可以取一个稍微有点特殊的曲面而使场相当容易地求出。比如取一个半径为  $R$  而其中心在源处的球面, 并设想热流是沿着径向的(图 3-6)。直觉告诉我们, 如果该块材料足够大, 而我们又不令所取的球面太接近边缘, 则  $\mathbf{h}$  应该是径向的, 而且, 在球面上所有点其值的大小均应相同。你看, 我们正在加入一些猜测工作——常称为“物理

直觉”——于数学方面来说,是为了获得答案。

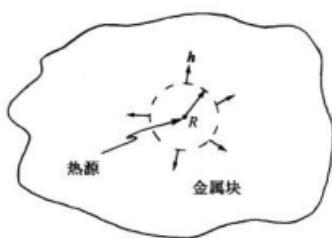


图 3-6 在临近一个点热源的区域中,热流沿径向朝外

或

$$h = \frac{W}{4\pi R^2} e_r,$$

(3.24)

式中  $e_r$  照例代表沿径向的单位矢量。我们的结果说明,  $h$  与  $W$  成正比而与离源的距离的平方成反比。

刚才所得到的结果,仅适用于点热源附近的热流。现在让我们尝试寻求那种仅在热量守恒的条件下,对最普遍的热流类型也能适用的方程式。这样,我们将只与在任何热源或热吸收体之外的那些地方所发生的情况打交道。

关于热传导的微分方程,曾在第 2 章中推导过了。根据式(2.44)

$$h = -\kappa \nabla T. \quad (3.25)$$

应记住这一关系式是近似的,不过对于某些像金属之类的材料该近似相当好。当然,它只在材料里那些没有热量产生或吸收的区域内才适用。我们已在上面导出了另一个关系,即式(3.21),它在热量守恒情况下成立。如果把该方程与式(3.25)相结合,则可得:

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \nabla \cdot h = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T).$$

若  $\kappa$  是一常数,则

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T. \quad (3.26)$$

你会记得,  $q$  是单位体积内的热量,而  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$  是拉普拉斯算符

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

如果我们另外做一个假定,便可得到一个十分有趣的方程式。假定材料中的温度与单位体积的热容成正比——即该材料有确定的比热。当这一假定有效时(往往如此),就可以写成:

$$\Delta q = c_v \Delta T,$$

或

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c_v \frac{dT}{dt}. \quad (3.27)$$

热量的变化率正比于温度的变化率。这里的比例常数  $c_v$  就是单位体积材料的比热。应用式(3.27)和(3.26), 得:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c_v} \nabla^2 T. \quad (3.28)$$

我们已求得, 每一点上  $T$  的时间变化率与  $T$  的拉普拉斯算符成正比, 即与  $T$  的空间关系的二阶微商成正比。这样, 我们就有一个以  $x, y, z$  和  $t$  为变量的关于温度  $T$  的微分方程。

微分方程式(3.28)称为热扩散方程。它经常被写成:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T, \quad (3.29)$$

式中  $D$  叫扩散常数, 在这里等于  $\kappa/c_v$ 。

这个扩散方程在许多物理问题中都会出现——气体扩散、中子扩散以及其他各种扩散, 我们曾在第1卷第43章中讨论过这类现象的物理性质。现在你们有了一个在最普遍合理的情况下描述扩散的完整方程。往后某个时候我们还将学习一些求解该微分方程的方法, 以便找出在特定条件下温度是怎样变化的。现在我们回来考虑有关矢量场的其他一些定理。

### § 3-5 矢量场的环流

现在, 我们想用某些考虑散度的同样方法来看待旋度。通过考虑在一个曲面上的积分, 我们得到了高斯定理, 尽管当初我们打算处理散度时这事还不太明显。我们当时怎么会知道为了得到散度必须在曲面上进行积分呢? 根本不清楚会是这个结果。而现在由于显然同样缺乏正当的理由, 所以我们还将对矢量做某些计算并证明它与旋度有关。这次计算的将是所谓矢量场的环流。如果  $\mathbf{C}$  是任意矢量场, 取其沿一曲线的分量, 并对这一分量自始至终绕整个回路进行积分。这一积分被称为该矢量场绕该回路的环流。在本章的开头, 我们曾经讨论过  $\nabla\psi$  的线积分, 现在我们将对任一种矢量场  $\mathbf{C}$  求线积分。

设  $\Gamma$  为空间中的任意闭合回路——当然是在想象中的。有一个例子如图 3-7 所示。 $\mathbf{C}$  的切向分量绕该回路的线积分可写成:

$$\oint_{\Gamma} C_t ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot ds. \quad (3.30)$$

你应该注意, 这积分是始终绕回路取的, 并不像以前那样从一点至另一点。在积分符号上的那个小圈便是为了提醒人们, 该积分是始终绕回路进行的。这一积分叫作该矢量场绕曲线  $\Gamma$  的环流。这个名称原本是从考虑液体的环流来的。但这一名字——正如通量一样——已被推广应用于即使没有物质做“环流”的任何场了。

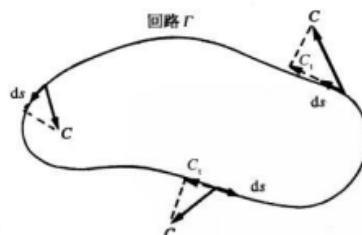


图 3-7  $\mathbf{C}$  绕曲线  $\Gamma$  的环流为  $C_t$ (即  $\mathbf{C}$  的切向分量)的线积分

用对待通量同样的手法,我们可以证明,绕一个回路的环流等于绕两个分回路的环流之和。假设我们在原来曲线上的(1)和(2)两点间用如图3-8所示的割线来连结,就可以将图

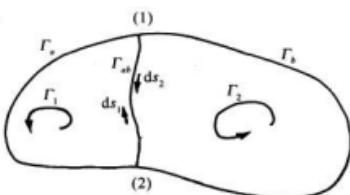


图3-8 绕整个回路的环流等于绕两个回路( $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$  和  $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$ )的环流之和

3-7所示的曲线分成两个回路。现在存在两个回路  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ 。 $\Gamma_1$  是由处在(1)和(2)左边部分的原有曲线  $\Gamma_a$  再加上“捷径” $\Gamma_{ab}$  而构成的。 $\Gamma_2$  则是由原有曲线的其余部分加上该捷径而构成的。

绕  $\Gamma_1$  的环流等于沿  $\Gamma_a$  和沿  $\Gamma_{ab}$  两个积分之和。同理,绕  $\Gamma_2$  的环流也是两部分之和,其一沿  $\Gamma_b$  而另一沿  $\Gamma_{ab}$ 。对于曲线  $\Gamma_2$  来说,沿  $\Gamma_{ab}$  的积分具有与对曲线  $\Gamma_1$  中沿  $\Gamma_{ab}$  的积分相反的符号,因为它们的绕行方向相反——必须按相同的旋转“指向”来进行这两项线积分。

按照我们以前使用过的同样类型的论据,你们可以看到,这两个环流之和将恰好给出绕原来曲线  $\Gamma$  的线积分。那来自  $\Gamma_{ab}$  的部分互相抵消了。绕其中一部分的环流再加上绕第二部分的环流等于绕整条外环线的环流。我们可以重复这一过程,把原有回路分割成任意数目的小回路。当将这些小回路的环流相加时,在它们的相邻部分总会互相抵消,从而使其总和相当于绕原来单个回路的环流。

现在让我们假设该原有回路就是某一个曲面的边界。当然,会有无限多个曲面全都以该原有回路为边界。然而,我们的结果将与所选取的曲面无关。首先,将原有回路分割成若干条全都落在所选取的曲面上的小回线,如图3-9所示。不管该曲面形状如何,如果我们选取的小回路足够小,则可以假定每一小回路包围的面基本上是平面。并且,我们也能选取那些小回路使得每个都非常接近正方形。现在就可以通过求绕所有小回路的环流,再取其和,从而算出绕回路  $\Gamma$  的环流。

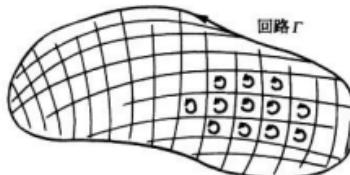


图3-9 选取某一被回路  $\Gamma$  包围着的表面。这个面被分割成若干个小面积,每个近似于一正方形。绕行  $\Gamma$  的环流就等于绕行各小回路的环流之和

### § 3-6 围绕一正方形的环流;斯托克斯定理

我们将怎样求得沿每一小正方形的环流呢?首先就要问,这一正方形在空间中的取向如何?要是它有一个特殊取向,那计算起来就会方便得多。例如,假使它位于一个坐标平面内。由于对坐标轴的取向我们还未做过任何假设,因此就可以这样选取坐标轴,使此刻我们正专注的那个小正方形正好落在  $xy$  面内,如图3-10所示。若该结果用矢量符号来表示,那就可以说,不管该面的特殊取向如何,结果都是一样的。

现在我们希望求出场  $C$  绕该小正方形的环流。如果令该正方形足够小,使得矢量  $C$  沿它的任一边都不会改变很多,进行线积分就较容易(正方形越小,这个假定就越好,而实际所谈的正是无限小的正方形)。从位于图的左下角那一点  $(x, y)$  出发,按照箭头所指的方向绕行一周。沿标记为(1)的第一条边,其切向分量为  $C_x(1)$  而长度为  $\Delta x$ 。该积分的

第一部分就是  $C_x(1)\Delta x$ 。沿第二条边，我们获得  $C_y(2)\Delta y$ 。沿第三条边得  $-C_x(3)\Delta x$ ，而沿第四条边得  $-C_y(4)\Delta y$ 。这些负号是需要的，因为这里要求的是沿绕行方向的切向分量。因此，整个线积分就是：

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = C_x(1)\Delta x + C_y(2)\Delta y - C_x(3)\Delta x - C_y(4)\Delta y. \quad (3.31)$$

现在让我们注意第一和第三部分。它们合起来就是：

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x. \quad (3.32)$$

你也许认为，对我们的近似程度来说这个差值为零。这对于一级近似是对的。然而可以更精确一些，计及  $C_x$  的变化率。如果这样便可以写出：

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta y. \quad (3.33)$$

假如把次级近似也包括进去，则会涉及到  $(\Delta y)^2$  等项，但由于我们最终将取  $\Delta y \rightarrow 0$  时的极限，所以这样的项都可以忽略。将式(3.33)和(3.32)结合起来，会得出

$$[C_x(1) - C_x(3)]\Delta x = -\frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta x \Delta y. \quad (3.34)$$

对于我们的近似，上式中的微商可以在  $(x, y)$  处计算出来。

同理，环流中的其他两项，也可以写成：

$$C_y(2)\Delta y - C_y(4)\Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x} \Delta x \Delta y. \quad (3.35)$$

于是，绕上述那个小正方形的环流为：

$$\left( \frac{\partial C_x}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y. \quad (3.36)$$

这很有趣，因为括号内两项恰好就是旋度的  $z$  分量。并且，我们还注意到， $\Delta x \Delta y$  就是该正方形的面积。因此，可以将环流式(3.36)写为：

$$(\nabla \times \mathbf{C})_z \Delta a.$$

这个  $z$  分量实际上就是沿该表面元法向的分量。因此，还可以将绕一个微分正方形的环流写成一种不变的矢量形式：

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = (\nabla \times \mathbf{C})_z \Delta a = (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \Delta a. \quad (3.37)$$

我们的结果是：任一矢量  $\mathbf{C}$  绕一个无限小正方形的环流，等于  $\mathbf{C}$  的旋度垂直于表面的

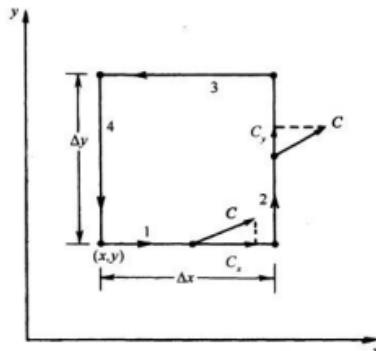


图 3-10 计算绕行一个小正方形的  $\mathbf{C}$  的环流

分量乘以该正方形面积。

现在, 绕任一条回路  $\Gamma$  的环流, 可以轻而易举地同矢量场的旋度联系起来了。用任意合适的曲面  $S$  将回路填满, 如图 3-11 所示, 并把绕这个面上一系列无限小正方形的环流加起来。这个和可以写成一个积分。其结果是以斯托克斯命名(为纪念斯托克斯先生)的一个十分有用的定理。

斯托克斯定理:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{C})_n da, \quad (3.38)$$

式中  $S$  是以  $\Gamma$  为边界的任意曲面。

现在必须谈谈关于符号的一个惯例。在图 3-10 中, 采用“常用”的——也即“右手”的——坐标系统,  $z$  轴将指向你们。当按照旋转的“正”指向进行线积分时, 我们发现环流等于  $\nabla \times \mathbf{C}$  的  $z$  分量。要是我们绕行的方向相反, 即会获得一个相反的符号。那么, 一般说来, 我们怎么会知道应选取哪个方向作为  $\nabla \times \mathbf{C}$  的法向分量的正向呢? 正法线始终必须与旋转的指向联系起来, 如图 3-10 所示的。对于普遍情况, 则如图 3-11 所示。

图 3-11  $C$  绕  $\Gamma$  的环流等于  $\nabla \times C$  的法向分量的面积分

要是我们绕行的方向相反, 即会获得一个相反的符号。那么, 一般说来, 我们怎么会知道应选取哪个方向作为  $\nabla \times \mathbf{C}$  的法向分量的正向呢? 正法线始终必须与旋转的指向联系起来, 如图 3-10 所示的。对于普遍情况, 则如图 3-11 所示。

“右手法则”是记住这个关系的一种办法。如果你用右手手指围绕曲线  $\Gamma$ , 指尖指向  $d\mathbf{s}$  的正方向, 那么你的大拇指就指向  $S$  面的正法线方向。

### § 3-7 无旋度场与无散度场

现在我们要来讨论上述新定理的某些结果。首先, 考虑一个矢量其旋度处处为零的情况。这时斯托克斯定理说, 绕任何回路的环流等于零。现在若在一闭合曲线上选取两点(1)和(2)(图 3-12), 则从(1)至(2)的切向分量的线积分将与这两条可能路线中选取哪一条无关。我们可以断定, 从(1)至(2)的积分只取决于这两点的位置——也就是说, 它仅是位置的函数。同样的推理方法也曾在第 1 卷第 14 章中使用过, 在那里我们曾证明如果某量绕一闭合回路的积分总是零, 则该量对任一曲线的积分可以表达为两端点位置的某一函数之差。这一事实使我们创立了势的概念。而且, 我们证明该矢量场就是这一势函数的梯度[见第 1 卷式(14.13)]。

由此可见, 任一旋度为零的矢量场等于某个标量函数的梯度。这就是说, 如果处处  $\nabla \times \mathbf{C} = 0$ , 则存在某个  $\psi$ , 使得  $\mathbf{C} = \nabla \psi$ , 这是一个有用的概念。如果愿意, 我们可以用一个标量场来描述这一特殊类型的矢量场。

让我们再来证明另一件事。假设有任意的标量场  $\phi$ 。如果取它的梯度即  $\nabla \phi$ , 那么这个矢量绕任意闭合回路的积分就必然为零。这矢量从点(1)至点(2)的线积分为  $[\phi(2) - \phi(1)]$ 。如果(1)和(2)是同一点, 那么定理 1、即式(3.8)告诉

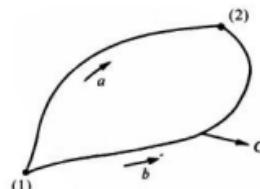


图 3-12 如果  $\nabla \times \mathbf{C} = 0$ , 则绕一闭合曲线  $\Gamma$  的环流等于零。从(1)至(2),  $\mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$  沿  $a$  的线积分与沿  $b$  的线积分必相同

我们,该线积分等于零:

$$\oint_{\text{回路}} \nabla \phi \cdot ds = 0.$$

应用斯托克斯定理,我们可以得出结论:在任何曲面上

$$\int \nabla \times (\nabla \phi) da = 0.$$

但如果在任何曲面上的积分都等于零,则该被积函数必定为零。所以,总有

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0.$$

这个结果与我们在 § 2-7 中应用矢量代数证明过的结果相同。

现在让我们考虑一种特殊情况,即用一个大曲面  $S$  来填满一个小回路  $\Gamma$ ,如图 3-13 所示。实际上我们希望看看,当该回路缩小至一点、使得曲面的边缘消失不见而成为一闭合曲面时,究竟会发生什么情况。现在,如果矢量  $C$  处处有限,则当我们缩小该回路时,绕  $\Gamma$  的线积分应该趋于零——该积分大体上正比于  $\Gamma$  的周长,而周长趋于零。按照斯托克斯定理, $(\nabla \times C)_*$  的面积分也必为零。不知为什么,当我们把曲面关闭时,就会加进一些贡献将以前那里存在的东西抵消掉。因而我们得到一个新的定理:

$$\int_{\text{任意闭合曲面}} (\nabla \times C)_* da = 0. \quad (3.39)$$

这看来很有意思,因为我们已经有一个关于矢量场曲面积分的定理。按照高斯定理,即式(3.18),这样的面积分等于该矢量的散度的体积分。当应用于  $\nabla \times C$  上时,高斯定理表明:

$$\int_{\text{闭合曲面}} (\nabla \times C)_* da = \int_{\text{曲面内体积}} \nabla \cdot (\nabla \times C) dV. \quad (3.40)$$

所以我们得出结论,第二个积分也应等于零,即

$$\int_{\text{任意体积}} \nabla \cdot (\nabla \times C) dV = 0, \quad (3.41)$$

这对于任何矢量场  $C$  都正确。由于式(3.41)对于任何体积都正确,所以在空间每一点该被积函数为零就必然正确。因此,我们就恒有

$$\nabla \cdot (\nabla \times C) = 0,$$

但这是 § 2-7 中我们曾从矢量代数方面得到过的相同结果。现在我们开始来看看如何把每样东西配合起来。

## § 3-8 总 结

让我们把所得到的关于矢量微积分的结果做个总结。这些结果,实际上是第 2 章和

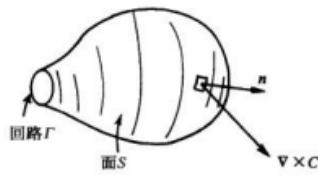


图 3-13 在趋向于一个闭合曲面的极限上,我们发现  $(\nabla \times C)_*$  的面积分必为零

## 第3章的要点：

1. 算符  $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$  可以认为是矢量算符  $\nabla$  的三个分量，而把这一算符

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

作为矢量处理后，从矢量代数所获得的那些公式都是正确的。

2. 标量场在两点的差值等于该标量梯度的切向分量沿连接(1)和(2)这两点间任意曲线的线积分：

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(2) \\ \text{任意曲线}} \atop (1)} \nabla \psi \cdot ds. \quad (3.42)$$

3. 任意矢量的法向分量在一个闭合曲面上的面积分等于该矢量的散度对该闭合曲面内体积的积分：

$$\int_{\text{闭合曲面}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\text{曲面内体积}} \nabla \cdot \mathbf{C} dV. \quad (3.43)$$

4. 任意矢量的切向分量绕一闭合回路的线积分，等于该矢量旋度的法向分量对以该回路为边界的任意曲面的面积分，即

$$\int_{\text{边界}} \mathbf{C} \cdot ds = \int_{\text{曲面}} (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} da. \quad (3.44)$$

# 第4章 静电学

## § 4-1 静电

现在我们开始对电磁学理论做详细的研究。全部电磁学都包含在麦克斯韦方程组中。  
麦克斯韦方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (4.2)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}; \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.4)$$

由这些方程所描述的情况可能十分复杂。我们将首先考虑那些相对简单的情况，以便在研究更复杂的问题以前，学会如何去处理这些简单情况。其中最容易处理的是任何事物都与时间无关——叫作静态——的情况。所有电荷都永远固定在空间里，即使它们确实在运动，也只是作为电路中的恒定电流而运动（使得  $\rho$  和  $\mathbf{j}$  都不随时间而变）。在这种情况下，麦克斯韦方程组中所有场对时间微商的项都等于零。这样，麦克斯韦方程组变成：

### 静电学

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.6)$$

### 静磁学

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}; \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.8)$$

关于这四个方程组，你将会注意到一个有趣情节。这组方程可以分成两对，电场  $\mathbf{E}$  仅出现在前两个方程中，而磁场  $\mathbf{B}$  仅出现在后两个方程中， $\mathbf{E}$  场和  $\mathbf{B}$  场并不互相关联。这意味着，只要电荷和电流是静止的，则电和磁就是两个性质不同的现象。直到诸如电容器充电或移动磁铁引起电荷或电流的变化， $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  的相关性仍不会显露出来。只有变化足够迅速，使得麦克斯韦方程组中那些时间微商变得显著时， $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{B}$  才会相互关联起来。

现在，如果你注意那些静止情况的方程，你将会看到，从弄清楚关于矢量场的数学特性的观点来看，学习这两门称为静电学与静磁学的学科是理想的。因为静电学是矢量场具有零旋度和某一给定散度的一个极佳例子；而静磁学则是矢量场具有零散度和某一给定旋度

的极佳例子。更规范的——而你可能认为是更满意的——表达电磁学理论的方法是先从静电学出发,于是学习有关散度方面的知识;稍后再处理静磁学和旋度;最后,才把电学和磁学结合起来。我们已决意从矢量运算的完整理论开始。现在就把这种理论应用于静电学的特殊情况,场  $\mathbf{E}$  由第一对方程给出。

我们将从最简单的情况——即所有各电荷的位置都已被规定的情况——开始。要是只需学这种水平的静电学(就像下面两章中所做的那样),那生活将显得多么简单,事实上,几乎毫无价值。正如你将会看到的,一切事情都可以从库仑定律和某个积分得出。但事实并非如此,在许多实际的静电学问题中,开始时我们并不知道电荷在哪里,只知道它是按照物性所规定的方式来分布的。电荷所占据的位置取决于场  $\mathbf{E}$ ,而这个场反过来又取决于电荷的位置。于是,事情可能变得很复杂。例如,如果把一个带电物体移近导体或绝缘体,导体或绝缘体中的电子和质子就会到处运动。式(4.5)中的电荷密度  $\rho$ ,有一部分可能是我们原先就已知的带上去的电荷,另外一部分则是那些在导体中到处运动的电荷所引起的。要是所有这些电荷都必须考虑进去的话,将会把人们引入到一些相当微妙而又有趣的问题中去。所以尽管这一章是关于静电学方面的,但它仍将不会包括这一课题中的那些更瑰丽而微妙的部分,而只是处理我们能够假定一切电荷位置均已知的那种情况。自然,你应当在试图处理其他问题之前就能对付这一情况。

## § 4-2 库仑定律;叠加原理

把式(4.5)和(4.6)作为我们的起点,照理应该是合乎逻辑的。然而,如从另外的某处出发再回到这些方程式上来,将会容易一些,而所得的结果是相同的。我们就从已谈及的那个被称为库仑定律的定律着手,它表明在两静止不动的电荷间有一个与这两个电荷之积成正比而与它们之间距离的平方成反比的力,这个力沿着从一电荷至另一电荷的直线。

### 库仑定律

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2. \quad (4.9)$$

$\mathbf{F}_1$  是作用于电荷  $q_1$  上的力;  $\mathbf{e}_{12}$  是从  $q_2$  至  $q_1$  的方向上的单位矢量; 而  $r_{12}$  则是  $q_1$  与  $q_2$  间的距离。作用于  $q_2$  上的力  $\mathbf{F}_2$  与  $\mathbf{F}_1$  大小相等而方向相反。

基于历史原因,比例常数写成  $1/4\pi\epsilon_0$ 。在我们采用的单位制——米·千克·秒(mkgs)制——中,它被定义为精确地等于  $10^{-7}$  乘光速平方。光速近似地等于  $3 \times 10^8$  ms<sup>-1</sup>,因此这个常数近似地为  $9 \times 10^9$ ,而其单位则可证明为 Nm<sup>2</sup>C<sup>-2</sup>,或者是 VmC<sup>-1</sup>。

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 10^{-7} c^2 (\text{根据定义}) \\ &= 9.0 \times 10^9 (\text{通过实验}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

单位:Nm<sup>2</sup>C<sup>-2</sup> 或 VmC<sup>-1</sup>。

当存在两个以上的电荷时——唯一真正有意义的时候——我们就必须用自然界的另一事实来补充库仑定律。这个事实是:作用于任一电荷上的力等于其他每一电荷对它所施库仑力的矢量和。这个事实叫做“叠加原理”。这就是静电学所包含的全部内容了。如果把库仑定律和叠加原理结合起来,就不再有别的东西了。式(4.5)和(4.6)——静电学方程——

正好包含这些。

应用库仑定律能很方便地引进电场的概念。我们说，场  $\mathbf{E}(1)$  是作用于  $q_1$  上单位电荷的力（由所有其他电荷所施）。对于除  $q_1$  外存在另一个电荷的情况，我们对式(4.9)除以  $q_1$ ，便得

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}. \quad (4.11)$$

此外我们还认为，即使  $q_1$  不存在， $\mathbf{E}(1)$  仍描述了有关点(1)的某些情况——假设所有其他电荷都保持其原有位置。我们讲： $\mathbf{E}(1)$  是点(1)处的电场。

电场  $\mathbf{E}$  是一个矢量，因而式(4.11)实际指的是三个方程式——对于每一分量就是一个方程。把其中的  $x$  分量清楚地写出时，式(4.11)便意味着

$$E_x(x, y, z) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}, \quad (4.12)$$

其他分量均与此相仿。

如果有许多电荷，则在任意一点(1)处的场  $\mathbf{E}$  就是其他每个电荷的贡献之和。这个总和中的每一项，看来都像式(4.11)或(4.12)。令  $q_j$  为第  $j$  个电荷的大小，而  $\mathbf{r}_{1j}$  为从  $q_j$  至点(1)的位移，则可以写出

$$\mathbf{E}(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^2} \mathbf{e}_{1j}. \quad (4.13)$$

当然，该式意味着

$$E_x(x, y, z) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j(x_1 - x_j)}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{3/2}}, \quad (4.14)$$

等等。

不把电荷看作像电子和质子那样的组成单元，而把它们想象成是铺展开的连续涂片或连续“分布”，往往会很方便。只要不去关注在尺度过小的范围内所发生的事情，这是可行的。这样，我们便可通过“电荷密度” $\rho(x, y, z)$  来描述电荷分布。如果在点(2)处一个小体积  $\Delta V_2$  内含有电量  $\Delta q_2$ ，则  $\rho$  便由下式定义

$$\Delta q_2 = \rho(2) \Delta V_2. \quad (4.15)$$

为了将这种描述方法用到库仑定律上去，我们将式(4.13)、(4.14)中的那些求和，用对包含电荷的全部体积的积分来代替。这样就得到

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{全部空间}} \frac{\rho(2) \mathbf{e}_{12} dV_2}{r_{12}^2}. \quad (4.16)$$

有些人却喜欢写成

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}},$$

式中  $\mathbf{r}_{12}$  是从(2)至(1)的位移矢量，如图 4-1 所示。因此，对于  $\mathbf{E}$  的积分就可以写成

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{全部空间}} \frac{\rho(2) \mathbf{r}_{12} dV_2}{r_{12}^3}. \quad (4.17)$$

当我们要用这个积分进行具体计算时,通常还得详尽地把它写明白,对于式(4.16)或(4.17)的  $x$  分量,该写成

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \int_{\text{全部空间}} \frac{(x_1 - x_2)\rho(x_2, y_2, z_2)}{4\pi\epsilon_0[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}} dx_2 dy_2 dz_2. \quad (4.18)$$

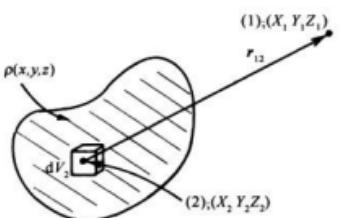


图 4-1 分布电荷在点(1)处产生的电场  $E$ , 可由对该分布的积分求得。点(1)也可以落在该分布区域之内

这个公式我们不会常用。之所以把它写在这里,只是为了强调,电荷位置都已知的所有静电学问题,我们已完全解决了。给定了电荷,场怎么样呢?  
答案:算出这一积分。因此,对于这一课题便再没有什么可说了,那只是一个复杂的三维积分工作——严格说来,是一项计算机的工作!

借助这些积分,我们就能够求出各种电荷产生的场:面电荷、线电荷、球面电荷或任何特殊分布的电荷。重要的是要知道:当我们画场线、谈论电势或计算散度时,我们所有的答案都已在这里了。不过问题在于,有时某些聪明的猜测工作,比直接计算这个积分还要容易。这种猜测工作要求人们学习各种奇妙的东西。实践中,比较容易做的也许还是忘记追求聪明、总是直接而不是灵巧地把那些积分算出来。然而,我们打算尝试做得巧妙点。下面将继续讨论有关电场的某些其他特点。

### § 4-3 电势

首先,我们讲讲电势的概念,它与电荷从一点移至另一点所做的功有关。设有某种电荷分布,产生了一电场。我们要问:如把一个小电荷从一处移至另一处需做多少功?沿某一路径移动电荷反抗电力所做的功,等于这电力在运动方向分量的负值沿该路径的积分。如果我们把一电荷从点  $a$  移至点  $b$ ,则

$$W = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

式中  $\mathbf{F}$  是在每一点施于电荷上的电力,而  $d\mathbf{s}$  则是沿路径的微分位移矢量(见图 4-2)。

对于我们来说,考虑移动一个单位电荷所做的功会更有意义。因此,作用于电荷上的力在数值上就等于电场。在这种情况下反抗电力所做的功称为  $W$ (单位电荷),我们写为

$$W(\text{单位电荷}) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.19)$$

一般地说,用这类积分所得的结果与所取的路径有关。但是,假如式(4.19)的积分与从  $a$  至  $b$  的路径有关的话,那我们就可通过把电荷沿一条路径从  $a$  移至  $b$ 、然后又沿另一条路径返回到  $a$  而从场中获得功。这样,可以沿  $W$  较小的那条路线达到  $b$ ,而沿另一条路线返回来,这样我们所得到的功就会大

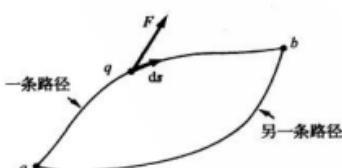


图 4-2 把电荷从  $a$  移至  $b$  所做的功,等于  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  沿所取路径进行积分的负值

于所付出的功。

原则上说，从场中得到能量并不是不可能的。事实上，我们将遇到有这种可能的场。有可能当你移动电荷时，你就对这部“机器”的另一部分施加了力。若这部机器抵抗此力而运动，则它会损失能量，从而保持世界上的总能量不变。然而，对于静电学来说，并没有这样一种“机器”存在，我们对反作用于场源上的力也很清楚，它们是作用于产生该场的那些电荷上的库仑力。如果其他电荷都固定在其位置上——这是静电学中我们所做的唯一假设——这些反作用力就不能对它们做功，因而无法从它们那里获得能量——当然，这是以能量守恒原理对静电学的情况有效为条件的。我们相信它是有效的，请让我们证明，从力的库仑定律必然可以得出它来。

首先，考虑在一个起源于单个电荷  $q$  的场中所发生的情况。令点  $a$  与电荷  $q$  间的距离为  $r_a$ ，而点  $b$  与  $q$  的距离为  $r_b$ 。现在选择另一个大小为 1 个单位、称为“试验”电荷的电荷，从  $a$  移至  $b$ ，我们开始用最简易的可能路径来计算。使试验电荷最初沿一圆弧、然后再沿某一半径移动，如图 4-3(a) 所示。求在这一条特殊路径所做之功，和小孩玩游戏一样简单（否则我们就不会选择这条路线了）。首先，在从  $a$  至  $a'$  的路径上根本没有做功。场是沿径向的（根据库仑定律），因而它与移动的方向成直角。其次，在从  $a'$  至  $b$  的路径上，场与移动方向相同，大小随  $1/r^2$  变化。于是，把试验电荷从  $a$  移至  $b$  所做之功应为

$$\begin{aligned} -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

现在，再让我们取另一条简易路径。例如，取图 4-3(b) 所示的那条路径。它一会儿沿一圆弧，一会儿沿某一半径，然后又沿一圆弧，又沿一半径，等等。每次当我们沿圆周部分移动时，并没有做功。而当沿径向部分移动时，就只需对  $1/r^2$  积分。沿第一径向线段，我们从  $r_a$  积至  $r_{a'}$ ，然后沿第二径向线段，又从  $r_{a'}$  积至  $r_{a''}$ ，如此等等。所有这些积分之和与直接从  $r_a$  至  $r_b$  的单一积分相同。对于这一路径所得答案与上面对第一条路径所得的一样。很清楚，对于任一条由任意数目的同种线段构成的路径，我们将会得出相同答案。

若是一条光滑路径又将如何呢？会得出相同的答案来吗？在第 1 卷第 13 章中，我们就曾经讨论过这一点。应用与那里所用的相同论据，可以得出结论：把一单位电荷从  $a$  移至  $b$  所做的功应与所经历的路径无关，即

$$W(\text{单位电荷}) \left. \right\} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad \text{任意路径}$$

由于该功只与端点有关，所以它就可以表示为两个数值之差。我们可按下述办法看到这一

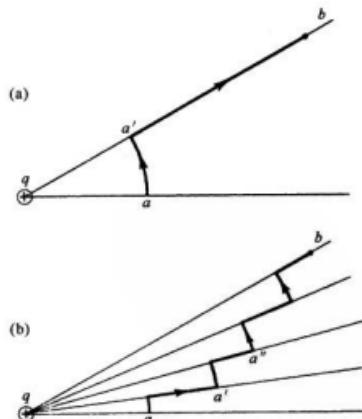
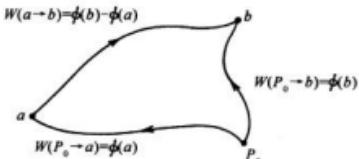


图 4-3 把一试验电荷从  $a$  移至  $b$  时，无论沿哪一条路径所做的功都相等

点。试选定一参考点  $P_0$ ，并约定用一条总会经过  $P_0$  点的路径来计算我们的积分。令  $\phi(a)$  代表从  $P_0$  至点  $a$  反抗场力所做的功，并令  $\phi(b)$  为从  $P_0$  至点  $b$  所做的功(图 4-4)。这样，从

$a$  点(在去  $b$  的路上)至  $P_0$  点所做的功就会等于  $\phi(a)$  的负值，所以我们有



$$-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \phi(b) - \phi(a). \quad (4.21)$$

图 4-4 沿任意路径从  $a$  至  $b$  所做的功，等于从某点  $P_0$  至  $a$  的功的负值加上从  $P_0$  点至  $b$  的功  
一点的静电势。

静电势

$$\phi(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.22)$$

为了方便，我们常把参考点选在无限远。于是，对于位于原点的单个电荷来说，应用式(4.20)，任意点( $x, y, z$ )处的势  $\phi$  为

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (4.23)$$

若干个电荷所产生的电场，可写为第一个、第二个、第三个等等电荷所产生的电场之和。当对和进行积分以求电势时，我们便得到一些积分之和。其中每个积分就是一个电荷所产生的势的负值。我们断定，许多电荷所产生的势  $\phi$  等于所有各个电荷所产生的势之和。这也就是势的叠加原理，应用过去求一群电荷或分布电荷的电场的相同论据，就可得出称为点(1)处电势的完整公式：

$$\phi(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}}, \quad (4.24)$$

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{全空间}} \frac{\rho(2)dV_2}{r_{12}}. \quad (4.25)$$

记住势  $\phi$  的物理意义：它是单位电荷在空间从某个参考点被移至指定点时所具有的势能。

#### § 4-4 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

谁在乎  $\phi$  呢？因为作用于电荷上的力都是由电场  $\mathbf{E}$  提供的。关键在于， $\mathbf{E}$  可以容易地由  $\phi$  求得——事实上，这如同取微商那样容易。试考虑两个点，一点在  $x$  处，另一点在  $(x + \Delta x)$  处，而这两点处于相同的  $y$  和  $z$ 。试问把一单位电荷从一点移至另一点时做了多少功？该路径是沿  $x$  至  $x + \Delta x$  的一条水平线，所做之功等于这两点的电势之差：

$$\Delta W = \phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x.$$

而对相同路径抵抗电场力所做的功为

$$\Delta W = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - E_x \Delta x.$$

可见

$$\mathbf{E}_x = - \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (4.26)$$

同理,  $E_y = -\partial\phi/\partial y$ ,  $E_z = -\partial\phi/\partial z$ 。或者, 用矢量分析的符号把它们综合起来, 则

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (4.27)$$

这个方程是式(4.22)的微分形式。任何具有确定电荷的问题, 都可以通过式(4.24)或(4.25)算出电势, 再用式(4.27)求场加以解决。式(4.27)与我们从矢量微积分学所求得的式子相符, 即对于任一标量场  $\phi$ ,

$$\int_a^b \nabla\phi \cdot d\mathbf{s} = \phi(b) - \phi(a). \quad (4.28)$$

根据式(4.25), 标量势  $\phi$  由一个三维积分给出, 它同我们以往对  $\mathbf{E}$  的积分相似。算  $\phi$  是否比算  $\mathbf{E}$  有优点呢? 有的! 对于  $\phi$  来说, 只用到一个积分, 而对于  $\mathbf{E}$  则有三个积分——因为它是一个矢量。而且, 对  $1/r$  的积分往往比对  $x/r^3$  的积分稍微方便。在许多实际情况中, 先算出  $\phi$ , 然后取其梯度以求得电场, 比计算  $\mathbf{E}$  的三个积分较为容易。当然这仅仅是一个实际问题。

$\phi$  这个势还有更深刻的物理意义。我们已经证明, 当  $\phi$  由式(4.22)给出时, 库仑力中的  $\mathbf{E}$  可以由  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  获得。但如果  $\mathbf{E}$  等于一个标量场的梯度, 那么, 我们从矢量运算知道  $\mathbf{E}$  的旋度必定等于零:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.29)$$

这恰好就是静电学中第二个基本方程, 即式(4.6)。我们已经证明, 由库仑定律会给出一个满足该条件的  $\mathbf{E}$  场。到目前为止, 事事都很顺利。

我们在定义电势之前, 实际上已经证明  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 。我们曾经指出, 绕一闭合路径所做的功为零。这就是说, 对于任何路径,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

在第3章中, 我们曾见到对任何这类场,  $\nabla \times \mathbf{E}$  必定处处为零。静电学中的电场是无旋场的一个例子。

你可以用另一种方法——对于由式(4.11)所给出的点电荷的场, 计算  $\nabla \times \mathbf{E}$  的分量——证明  $\nabla \times \mathbf{E}$  等于零, 借以练习你们的矢量运算。如果你得到零, 则叠加原理告诉说, 对于任何电荷分布的场, 其旋度你也会得到零。

应当指出一个重要事实: 对于任何径向力, 做的功与路径无关, 因而存在着势。如果你想到这一点, 上面为证明功的积分与路径无关的全部论据, 仅有赖于来自单个电荷的力是径向和球对称的这个事实。它并不取决于与距离的关系为  $1/r^2$  的事实——很可能存在与  $r$  的任何依赖关系。势的存在以及  $\mathbf{E}$  的旋度等于零的事实, 实际上只是由于静电力具有方向及

对称性的缘故。基于此，式(4.28)或式(4.29)只可能包含了电学规律的一部分。

## § 4-5 $E$ 的通量

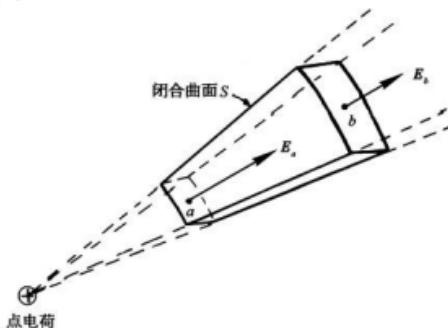
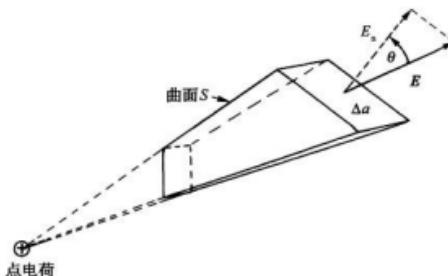
我们现在要来导出一个场方程式，它明确而又直接地与力的平方反比规律这个事实有关。场随距离的平方反比地变化，这对于某些人来说，似乎是“理所当然的”，因为“那是事情扩展的途径”。试考虑一个光源及正从它发射出的光：通过一个顶端位于源处的锥体所割出的面的光量，不管这个面所在处的半径大小如何，处处相等。只要光能守恒，这就是必然的。单位面积的光量——光强——必然与锥体所割出的面积成反比地变化，也就是与光源的距离的平方成反比。由于同样的理由，电场肯定会与距离的平方反比地变化！可是，这里并没有“同样的理由”这种东西。没有人能够讲，电场就像光那样，是某种守恒的东西流动的量度。假如有一个电场“模型”，其中电场矢量代表流或某种飞出去的小“子弹”的运动方向和速率，而且如果模型要求这些子弹守恒，即一旦被射出去就没有一颗子弹会丢失，那么也许我们能够“看到”该平方反比定律是必需的。另一方面，要求有某种能够表达这一物理概念的数学方式。假如电场像发射出去的守恒的子弹，那么它就将随距离的平方成反比地变化，而我们也将可能用一个方程——那纯粹是一种数学形式——来描写那种行为了。现在不妨想想这个方法，只要我们不说电场是由子弹构成的，但要认识到，我们是在用一个模型协助求得正确的数学答案。

甚至假定，我们想象一下电场确实代表某种守恒东西的流——在除了电荷所在处处外的一切地方(电场总得从某处开始产生!)。我们设想，不管什么东西，都是从电荷流出进入周围空间的。如果  $E$  就是这种流的矢量(正如热流中的  $\mathbf{h}$ )，那么在点源附近它将有一个  $1/r^2$  的依赖关系。现在，我们要用这个模型找出如何用一种更深刻或更抽象的办法来陈述这一平方反比定律，而不仅仅是说“平方反比”(你也许觉得奇怪，我们为什么要避免对这么一个简单定律的直接陈述，而要用另一种方式隐蔽地暗示同样的事情。但请忍耐一点！它将会证明确实很有用)。

我们要问：从点电荷附近的任一个闭合曲面出来的  $E$ “流”是什么？首先，让我们取一个简易闭合面——如图 4-5 所示的一个。如果  $E$  场像流，则从这一个箱子里出来的净流应该等于零。只要从这一个面跑出去的所谓“流量”指的是  $E$  的法向分量的面积分——即  $E$  的通量，则我们就得到上述结果。在那些侧向面上，法向分量为零。而在那些球面上，法向分量  $E_n$  恰好就是  $E$  的大小——对于那个较小的面为负，而对于那个较大的面为正。 $E$  的大小随  $1/r^2$  而减少，但表面积却正比于  $r^2$ ，因而两者之积就与  $r$  无关了。进入  $a$  面的  $E$  的通量恰好被跑出  $b$  面的那个通量所抵消。从  $S$  出来的总流量为零，也就是说，对于这个曲面，

$$\int_S E_n d\alpha = 0. \quad (4.30)$$

其次，我们将证明两个端面可以相对于径线倾斜而不会改变该积分式(4.30)。尽管这是普遍正确的，但对于我们的目的来说，却只需证明当两个端面很小，以致它们对着来自源心的一个小角——实际上是一个无限小角——时，它是对的就行了。在图 4-6 中，我们画出了一个其“侧面”为径向而其“端面”倾斜着的曲面  $S$ 。在这图中的端面不小，但你仍想象端

图 4-5 从曲面  $S$  出来的  $E$  的通量为零图 4-6 从曲面  $S$  出来的  $E$  的通量为零

面非常小的情况。因此，在面上场  $E$  将足够均匀，以致我们可以只用它在曲面中心处的值。当我们把该面倾斜一个角度  $\theta$  时，它的面积会增大一个因子  $1/\cos \theta$ 。但  $E$  垂直于该面的分量  $E_n$  则减少一个因子  $\cos \theta$ ，乘积  $E_n \Delta a$  保持不变。这样，从整个曲面  $S$  出来的通量仍为零。

到此不难看出，从任何曲面  $S$  包围着的体积中出来的通量必为零。任何一个体积都可认为是由如图 4-6 所示的单元构成的。整个体积的表面完全可分割成一对一对的端面，而由于进出这些端面的通量成对地互相抵消，所以从整个曲面  $S$  出来的总通量就等于零。这个意思由图 4-7 说明。这样，我们就有了一个普遍的结果。那就是，在一个点电荷的场中，从任何闭合曲面  $S$  出来的通量均为零。

可是要注意！上述证明只是在曲面  $S$  不包围电荷时做出的。假如有一个点电荷位于该曲面之内，那将会怎样呢？我们仍可将该曲面分割成由通

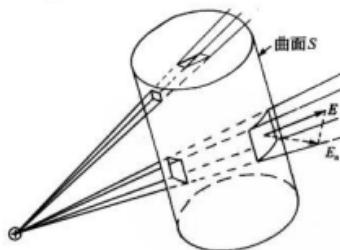


图 4-7 任一个体积都可想象成完全由无限多个削去两头的锥体构成。从每一锥体断面一端的  $E$  的通量与从另一端的通量相等而相反。因此，从曲面  $S$  出来的总通量就是零

过电荷  $q$  的各径向线所围成的各成对面积,如图 4-8 所示。通过这两个面的通量仍旧相等——用与上面同样的论证——只是现在这两个通量有了相同的符号,因此从包围一个电荷的曲面出来的通量并不等于零。那么,它等于什么呢?我们可用一点小小技巧把它求出来。假想一个完全在原来曲面  $S$  之内的小曲面  $S'$  包围该电荷,如图 4-9 所示。这样,就将此电荷从“内部”移出,从而在由  $S$  和  $S'$  两个曲面之间所包围的体积内就没有电荷了。应用与上面所给出的相同的论证,从这一个体积出来的总通量(包括通过  $S'$  的)就是零。这些论证实际上告诉我们,通过  $S'$  面而进入该体积的通量与通过  $S$  面跑出去的通量彼此相等。

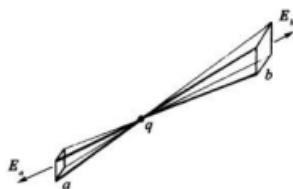


图 4-8 如果曲面内存在电荷,则出来的通量不等于零

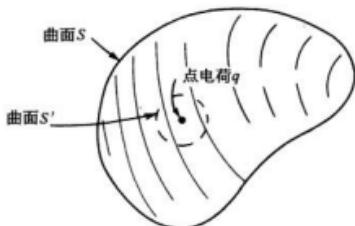


图 4-9 通过  $S$  面的通量与通过  $S'$  面的通量相同

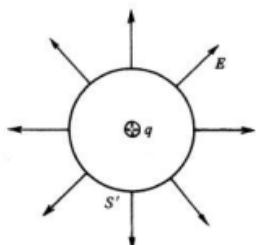


图 4-10 通过一个含有点电荷  $q$  的球面的通量为  $q/\epsilon_0$

由于我们可以任意选取任何形状的  $S'$  面,所以就让我们使它成为一个以该电荷为中心的、如图 4-10 所示的那种球面吧。这样,便可以很容易地算出通过这个面的通量。如果该小球面的半径为  $r$ ,则在球面上的  $E$  值处处都是

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

其方向始终垂直于球面。如果把  $E$  的法向分量乘以该面面积,则可以求出通过  $S'$  面的总通量:

$$\text{通过 } S' \text{ 面的通量} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (4.31)$$

这是一个与球面半径无关的数值!因此,我们知道:通过  $S$  面出来的通量也为  $q/\epsilon_0$ ——一个与  $S$  的形状无关的值,条件是电荷  $q$  必须处在该面之内。

可以把此结论写为:

$$\int_{\text{任何曲面 } S} E_n da = \begin{cases} 0, & q \text{ 在 } S \text{ 之外;} \\ \frac{q}{\epsilon_0}, & q \text{ 在 } S \text{ 之内.} \end{cases} \quad (4.32)$$

让我们回到“子弹”的比拟上来,并看看它是否有意义。上述定理说明:如果闭合曲面内没有那支发射子弹的枪,则穿过该面的净子弹流为零;但若枪已包围在曲面之内,则无论该面的大小及形状如何,穿出去的子弹数目相同——它由枪的子弹产生率给出。对于守恒的子弹来说,所有这一切似乎很合理。这个模型告诉我们的东西,是否比仅仅由式(4.32)得到

的东西要多呢？迄今还没有谁能成功地使这些“子弹”除了产生这一定律以外，还能完成其他任务。此后，它们就只会产生错误。这就是今天我们宁愿完全抽象地去表达电磁场的原因。

## § 4-6 高斯定理； $E$ 的散度

我们的优美结果——式(4.32)，是为单个点电荷而证明的。现在，假设存在两个电荷，电荷  $q_1$  位于一点，而电荷  $q_2$  位于另一点，问题看来比较困难。为了求得通量，我们要对电场的法向分量取积分，而这电场是由两个电荷产生。这就是说，如果  $\mathbf{E}_1$  代表由  $q_1$  单独产生的电场，而  $\mathbf{E}_2$  代表由  $q_2$  单独产生的电场，则总电场为  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ 。通过任一闭合曲面  $S$  的通量为

$$\int_S (E_{1n} + E_{2n}) da = \int_S E_{1n} da + \int_S E_{2n} da. \quad (4.33)$$

两个电荷存在时的通量，等于单个电荷的通量加上另一个电荷的通量。如果两个电荷都在  $S$  面之外，则通过  $S$  面的通量为零。如果  $q_1$  在  $S$  面内而  $q_2$  在  $S$  面外，则第一个积分为  $q_1 / \epsilon_0$ ，而第二个积分为零。如果两电荷都包围在曲面内，则每一电荷都将做出自己的贡献，因而通量为  $(q_1 + q_2) / \epsilon_0$ 。普遍的法则显然是，从一个闭合曲面出来的总通量等于在该曲面内的总电荷除以  $\epsilon_0$ 。

我们的结果是静电场一条重要而普遍定律，称为高斯定律。

高斯定律：

$$\int_{\substack{\text{任一闭合} \\ \text{曲面 } S}} E_n da = \frac{\text{曲面内电荷的总和}}{\epsilon_0}, \quad (4.34)$$

或

$$\int_{\substack{\text{任一闭合} \\ \text{曲面 } S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{Q_{\text{内}}}{\epsilon_0}, \quad (4.35)$$

式中

$$Q_{\text{内}} = \sum_{\text{在 } S \text{ 内}} q_i. \quad (4.36)$$

如果我们用电荷密度  $\rho$  来描述电荷的位置，则可认为每个无限小体积  $dV$  内含有“点”电荷  $\rho dV$ 。这样，对所有电荷的和，就是积分

$$Q_{\text{内}} = \int_{\text{S内体积}} \rho dV. \quad (4.37)$$

从上述的推导可以看出，高斯定律乃起因于库仑力中的幂指数精确地等于 2 这个事实。 $\frac{1}{r^3}$  或任何  $n \neq 2$  的  $1/r^n$  的场，不可能给出高斯定律。因此，高斯定律只不过是用一种不同形式来表述两电荷间力的库仑定律而已。事实上，如果倒过来，你将会从高斯定律导出库仑定律。这两定律完全等价，只要我们记住电荷之间的作用力是径向的。

现在，我们想用微商来写出高斯定律。为此，把高斯定律应用于一个无限小的立方体表面。在第 3 章中，我们曾经证明过，从这样一个立方体表面出来的  $\mathbf{E}$  的通量仍等于  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  乘以该立方的体积  $dV$ 。按照  $\rho$  的定义，在  $dV$  内的电荷等于  $\rho dV$ ，所以高斯定律给出

$$\nabla \cdot E dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0},$$

或

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.38)$$

高斯定律的这个微分形式,是静电学的四个基本场方程式中的第一个,即式(4.5)。现在我们已经证明,静电学的两个方程式(4.5)和(4.6)与库仑定律等价。下面将要讨论应用高斯定律的一个例子(以后我们将碰到更多的例子)。

### § 4-7 带电球体的场

过去我们学习引力吸引理论时,遇到的困难问题之一就是要证明:一个实心球体物体所产生的力,与所有物质都集中在其中心或位于球面所产生的力是相同的。牛顿经过了许多都没有把他的引力理论公诸于世,就是因为他当时还不敢肯定这个定理是正确的。我们在第1卷第13章中,曾经通过算出关于势的积分,然后利用梯度求得引力来证明这个定理。现在,我们能够用最简单的方式来证明它,只是这次将证明关于一个均匀带电球体的相应定理(由于静电学定律与引力定律相同,所以同样的证法也可用于引力场)。

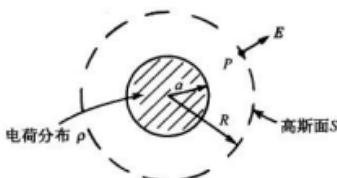


图 4-11 应用高斯定律求一个均匀带电球体的场

我们要问,在一个充满均匀分布电荷的球体外面任一点  $P$  处的电场  $E$  是什么?既然不存在“特殊”的方向,我们便可以假定  $E$  处处都是从球心向外。考虑一个与该带电球体同心的、并通过  $P$  点的球面(图 4-11)。对于这个面,向外通量为

$$\int E_n da = E \cdot 4\pi R^2.$$

高斯定律告诉我们,这一通量等于该带电球体的总电荷  $Q$ (除以  $\epsilon_0$ ):

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

或

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}. \quad (4.39)$$

这与一个点电荷  $Q$  的公式相同。我们比求积分更容易地证明了牛顿的问题。当然,这种容易是不真实的——由于你已花了某些时间才能理解高斯定律,所以你也可以认为实际上没有节省时间。但是当你越来越多地应用这一定理以后,便会开始有所收获。这是一个效率问题。

### § 4-8 场线;等势面

现在,我们想要给出静电场的一种几何描述。静电学的两定律,一个为通量正比于内部

电荷，另一个表明电场是势的梯度，它们也可以用几何方法来表示。下面用两个例子来说明。

首先，我们取一个点电荷的场为例。在场方向画线——总是与场相切的线，如图 4-12 所示。这些线称为场线，它们处处指明电矢量的方向。但我们还希望表达出该矢量的大小。为此，我们可以制定这样的规则：电场强度将由场线的“密度”表示。所谓场线的密度，是指通过与该线垂直的单位面积的线的数目。应用这两条规则就可以得出一幅电场图像。对于一个点电荷来说，场线的密度必须按  $1/r^2$  减少。但在任何半径  $r$  处与线垂直的球面面积却会随  $r^2$  而增大，所以如果对于离电荷的一切距离处我们都保持线的数目相同，则密度将保持与场的大小成正比。只要我们坚持所画出来的线是连续的——即一旦线已从电荷发出，它就永远不会停止，那么，我们就能保证在每个距离处线的数目都相同。依赖场线，高斯定律说，这些线只应从正电荷出发而终止于负电荷。离开电荷  $q$  的线的数目一定等于  $q/\epsilon_0$ 。

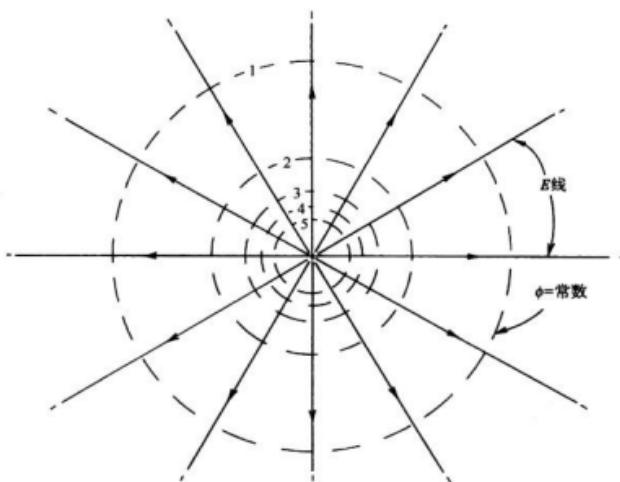


图 4-12 一个正点电荷的场线和等势面

现在，对于势  $\phi$  来说，我们也能找到一个相似的几何图像。表达势最方便的方法是画出  $\phi$  为常数的那些面。这种面称为等势面——势相等的面。那么，等势面与场线间的几何关系又是如何呢？电场是势的梯度。梯度是在势变化最迅速的那个方向，所以它垂直于等势面。假如  $E$  并不垂直于这种面，那么它会有一个沿面分量。此时，势会在面上发生变化，于是该面就不会是等势的了。因此，等势面必然处处与电场线成直角。

对于一个孤立的点电荷来说，等势面是以该电荷为中心的球面。我们已在图 4-12 中显示出这些球面与一个通过该电荷的平面的交线。

作为第二个例子，我们考虑在两个大小相等而符号相反的电荷附近的场。要获得这个场挺容易。总场由该两电荷各自的场叠加而成。因此，我们可以取两幅如 4-12 那样的图并把它们叠加起来——不可能！这样我们会有彼此相交的场线，而这是不可能的，因为  $E$  不能

在同一点上有两个方向。场线图的缺点现在就显而易见了。根据几何论证不可能用十分简单的方法去分析那些新场线的去向。从两个独立图像我们不能获得一个综合的图像。叠加原理固然是关于静电场的一个简单而又深刻的原则，但在场线的图像方面，还没有一个容易的表达方式。

#### 关于单位的备忘录

<u>量</u>	<u>单位</u>	<u>量</u>	<u>单位</u>
$F$	N	$1/f_0 \sim FL^2/Q^2$	$\text{Nm}^2\text{C}^{-2}$
$Q$	C	$E \sim F/Q$	$\text{NC}^{-1}$
$L$	m	$\phi \sim W/Q$	$\text{JC}^{-1} = \text{V}$
$W$	J	$E \sim \phi/L$	$\text{Vm}^{-1}$
$\rho \sim Q/L^3$	$\text{Cm}^{-3}$	$1/f_0 \sim EL^2/Q$	$\text{VmC}^{-1}$

然而，场线图形毕竟有它的用途，所以对于一对相等（而相反的）电荷我们也许仍乐于去画出其图像来。若我们由式(4.13)算出场，又由式(4.24)算出势，那么，便可描绘出场线和等势面。图 4-13 显示这个结果。但我们得先在数学上解决这个问题！

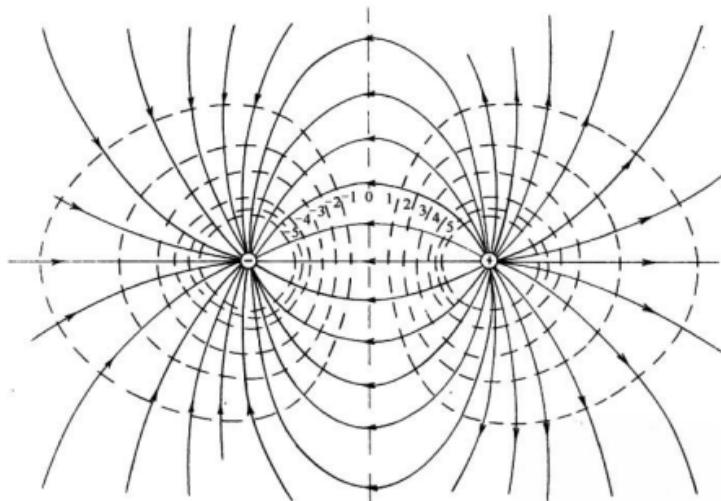


图 4-13 两个相等而相反的点电荷的场线和等势面

# 第5章 高斯定律的应用

## § 5-1 静电学就是高斯定律加……

静电学有两个定律：从某一体积出来的通量正比于其中的电荷——高斯定律；电场的环流等于零—— $E$  是一种梯度。所有静电学的预言都可以从这两个定律推出。但这些事情从数学上来说是一回事；而熟练地、巧妙地应用这些定律，却是另一回事。在本章中，我们将完成若干项可以直接由高斯定律进行的计算。我们将证明一些定理，并描述一些效应，特别是在导体中，这些可以很容易从高斯定律得到理解。高斯定律本身不能对任何一个问题提供答案，因为还有另一条定律必须遵守。因此，当我们应用高斯定律解决某些特定问题时，还得对它加点东西。例如，将必须假定场看来会怎样的某些概念——基于诸如对称性的论据。不然的话，我们可能就不得不明确地引入场是势的梯度这么一个概念了。

## § 5-2 静电场中的平衡

首先，考虑下述问题：一个处于其他电荷的电场中的点电荷何时才能处于稳定的力学平衡状态呢？作为一个例子，试设想在一水平面上有一个等边三角形，在每个角上各放置一负电荷。一个置于该三角形中心处的正电荷是否会保持在那里（如果暂时略去重力，问题就会简单些，尽管把它包括进去也不会改变所得结果）？作用于该正电荷上的力为零，但这个平衡稳定吗？要是稍微移动一下电荷，它会回到平衡位置上来吗？答案是否定的。

在任何静电场中都不会有稳定的平衡点——除非这一点恰好叠在一个电荷上。应用高斯定律很容易看出其原因。首先，要使电荷在任一特定  $P_0$  点上处于平衡，场就必须等于零。其次，如果平衡是一稳定平衡，则还要求若把电荷沿任一方向移离  $P_0$  点，便应有一个与位移反向的恢复力。在一切邻近点的电场都必须指向内——即指向  $P_0$  点。但如果在  $P_0$  点没有电荷存在，那就会违反高斯定律，这点我们可以很容易看出来。

考虑一个包围着  $P_0$  点的小想象面，如图 5-1 所示。若在  $P_0$  点附近的电场处处都指向它，则对场的法向分量的面积分就肯定不会等于零。在上图所示的情况下，通过该面的通量必然是一负值。但高斯定律说明，通过任何曲面的电场通量正比于在该面内的总电荷。如果在  $P_0$  点处没有电荷，则我们想象出来的场便违反了高斯定律。在一个空的空间里，在那里的某一点不存在一些负电荷，使位于该点的一个正电荷处于平衡是不可能的。如果一个正电荷处于某一分布的负电荷中间，则它可以达到平衡。当然，那些负电荷的分布就必须由电力以外的力把它们固定在适当的位置上！



图 5-1 如  $P_0$  对于一个正电荷来说是一个稳定平衡点，那么在其附近每一处的电场就都应指向  $P_0$  点

对于一个点电荷我们得到了上述结果。这同一结论是否也适用于被固定——比如用棍子来固定——在相对位置上分布复杂的电荷呢？我们考虑关于固定在一条棍子上的两个相等电荷的问题。这个组合在某个静电场中能否处于平衡呢？答案再次是否定的。因为作用于棍子上的总力不可能对于每一方向上的位移都具有恢复作用。

设作用于棍子上任意位置的总力为  $\mathbf{F}$ ——因此， $\mathbf{F}$  就是一个矢量场。根据上面所用的论据，我们断定：在一个稳定平衡的位置上， $\mathbf{F}$  的散度必定是一个负值。但作用于棍子上的总力则等于第一个电荷乘以在其位置上的电场，加上第二个电荷乘以在其位置上的电场：

$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E}_1 + q_2 \mathbf{E}_2. \quad (5.1)$$

$\mathbf{F}$  之散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = q_1 (\nabla \cdot \mathbf{E}_1) + q_2 (\nabla \cdot \mathbf{E}_2).$$

倘若  $q_1$  和  $q_2$  两电荷中每一个都处在自由空间里，则  $\nabla \cdot \mathbf{E}_1$  和  $\nabla \cdot \mathbf{E}_2$  均等于零，因而  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  也就等于零——不是负值，而负值是对于平衡所要求的。可以看到，这论证的引申表明：在自由空间的静电场中，由任意数目电荷的刚性组合都不可能有一个稳定的平衡位置。

我们至今没有证明，即使有一些支点或其他机械约束，平衡仍然是不可能的。作为一个例子，考虑一根空心管，其中有一电荷可以自由往复运动，但却不能向旁移动。现在，不难设计出这么一个电场：在管两端处场都指向内，而容许在管中心附近场可以从管侧面指向外。我们只要将正电荷置于管的两端，如图 5-2 所示。眼下虽然  $\mathbf{E}$  的散度仍等于零，但可能有一个平衡点。当然，假如不是由于从管壁所加的“非电”力，则该电荷对于侧向运动来说还是不会处于稳定平衡的。

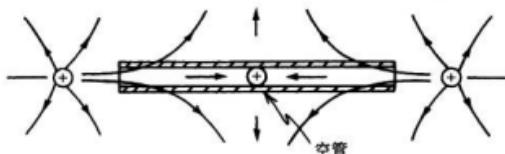


图 5-2 如果有一些机械约束，电荷就可处于平衡

### § 5-3 有导体时的平衡

在固定电荷系统所产生的场中不存在稳定点。那么，对于带电导体的系统会怎样呢？由各带电导体组成的系统，能否产生对于一个点电荷来说会有稳定平衡点的那种场呢（当然，我们所指的不是在导体上的点）？你知道，导体具有其中电荷能够自由活动的那种性质。也许当该点电荷稍微移动一下时，导体上其他的电荷就会以一种将给予该点电荷一恢复力的方式移动？答案仍然是否定的——尽管刚才所给出的那种证法仍未对此有所证明。在这种情况下证明比较困难，我们将仅仅指出证明的方法。

首先，我们注意到：当电荷在导体上重新分布时，只有在电荷的运动会减少其总势能的情况下才能进行（当电荷在导体中移动时，有些能量损失于发热）。现在我们已经证明了：如果那些产生场的电荷都是固定不动的，则在场中任一个零点  $P$  附近，就会有某一个方向，沿该方向要把一个点电荷移离  $P$ 。点会降低系统的能量（因为力从  $P$  指向外）。导体上任何

电荷的调整都只能更多地降低势能,从而(按照虚功原理)它们的运动就只能在离开  $P$  点的特定方向上增大该力,而不是相反。

我们的结论并非意味着,不可能用电力来平衡一个电荷。只要人们愿意采取适当措施,控制那些支承电荷的位置或大小,那便是可能的。你知道,竖立在引力场中的一根棍子是不会稳定的,但这并未证明它就不能在手指尖上达到平衡。同理,一个电荷可能会被一些电场固定在一点上,只要那些场是可变的。但电荷决不会为一个被动的——也即是静止不动的——系统所固定。

### § 5-4 原子的稳定性

如果电荷不能够稳定地保持在它们的位置上,那么把物质想象成由受静电学定律支配的静止点电荷(电子和质子)所构成,肯定是不合适的。诸如这样的静止组态不可能存在,它是会坍塌的!

有人曾经建议过,原子的正电荷可以均匀地分布在一个球体中,而负电荷(各电子)则可静止地处于该正电荷之中,如图 5-3 所示。这是第一个原子模型,由汤姆孙所倡议。但卢瑟福却从盖革和马斯登的实验中得出结论:正电荷是很集中的,集中于他所称之为核的地方。汤姆孙的静止模型就不得不放弃了。于是卢瑟福和玻尔建议平衡可能是动力学的,电子在轨道上环行,就像图 5-4 所示的那种情况。通过轨道运动,电子将避免跌落到核里去。对于这样一种图像我们已知道至少有一点困难。电子这样运动就会有加速度(由于圆周运动),从而会辐射能量。它们将丧失待在轨道上所需要的动能,从而会螺旋式地趋向核,再度出现不稳定!

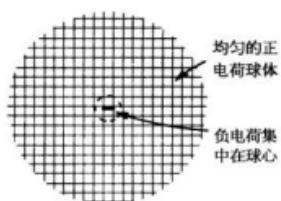


图 5-3 原子的汤姆孙模型

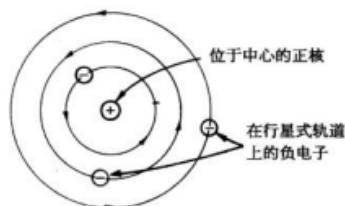


图 5-4 原子的卢瑟福-玻尔模型

原子的稳定性现在可由量子力学给予解释。静电力把电子尽可能拉近核,但电子却被迫持续在空间中扩展一定距离,那是由不确定性原理规定的。假如它被禁锢在一个太小的空间里,它便有一个大的动量不确定性。但这意味着它会拥有高的期待能量——将被用来摆脱电的引力的影响,净结果是与汤姆孙想法没有太大差别的电的平衡——只是现在扩展开来的是负电荷(因为电子质量比质子质量小得多)。

### § 5-5 线电荷的场

高斯定律可以用来解决许多其中包括某种特殊对称性——通常是球形、圆柱形或平

面形的对称性——的静电场问题。在本章的剩下部分，我们将用高斯定律来处理几个这样的问题。应用高斯定律很容易解决这些问题，这可能会引起一种错误印象，以为这种方法非常有效，人们将能够继续用它去对付其他许多问题。可惜情况并非如此。人们很快就搜索尽能够用高斯定律容易加以解决的问题。在以后几章中，我们将发展一些研究静电场的更强有力的方法。

作为第一个例子，我们考虑一个具有圆柱形对称性的系统。假设有一根十分长而均匀带电的棒，电荷沿一无限长直线均匀地分布着，单位长度所带的电荷为  $\lambda$ ，我们希望知道电场。当然，问题可以通过对来自线的每一部分对场的贡献进行积分而加以解决。但我们准备不用积分，而通过应用高斯定律以及某种推测来求解。首先，推测该电场会从直线径向地向外。这是因为，从线中一边的电荷所产生的场的任何轴向分量，将伴随着从线的另一边电

荷产生的场的相等的轴向分量，结果就只能为径向场。在与直线等距离的所有各点上，场应有相同大小，这似乎也是合理的，而且很明显（这一点可能不容易证明，但如果空间是对称的——正如我们所确信的那样——则它便是正确的）。

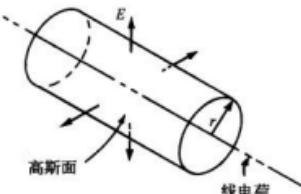
我们可按下述方式来应用高斯定律。考虑一个与该线同轴的圆柱形假想曲面，如图 5-5 所示。按照高斯定律，从这一个面出来的  $E$  的总通量等于其内部电荷除以  $\epsilon_0$ 。由于场假定是垂直于该面的，所以其法向分量就是场的大小，叫作  $E$ 。令该柱面的半径为  $r$ ，为了方便起见其长度取为一个单位。通过该柱面的通量等于  $E$  乘以该面面积（即  $2\pi r$ ）。因为电场与之相切，通过两个端面的通量等于零。因为在其中的线长为一单位，在该曲面之内总电荷恰好是  $\lambda$ 。于是高斯定律给出

$$E \cdot 2\pi r = \lambda / \epsilon_0,$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.2)$$

图 5-5 与线电荷同轴的一个圆柱形  
高斯面

便起见其长度取为一个单位。通过该柱面的通量等于  $E$  乘以该面面积（即  $2\pi r$ ）。因为电场与之相切，通过两个端面的通量等于零。因为在其中的线长为一单位，在该曲面之内总电荷恰好是  $\lambda$ 。于是高斯定律给出



线电荷的电场与从线至该处的距离的一次幕成反比。

## § 5-6 面电荷；平行板

作为另一个例子，我们现在来计算均匀面电荷所产生的场。假设该面延伸至无限远，而且单位面积的电荷为  $\sigma$ 。我们要做一种推测：考虑到对称性，我们相信场的方向处处与该平面垂直，而倘若没有来自世界上任何其他电荷的场，则两边的场（大小）应相等。这次我们选取的高斯面是一个穿过该平面的四方盒子，如图 5-6 所示。平行于该平面的两个表面面积相等，比如说  $A$ 。场垂直于此两面，而与其他的四个面平行。总通量等于  $E$  乘以第一个面的面积，加上  $E$  乘以其对面的面积——其他四个面都没有做任何贡献。包含在该盒子里的总电荷为  $\sigma A$ 。使通量与其内部电荷相等，我们便有

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

由此得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (5.3)$$

这是一个简单而又重要的结果。

你或许记得,这同样的结果曾在前面一章中通过对整个面进行积分而获得。在这个例子中,高斯定律更迅速地给出了答案(虽则它并不如以前的方法那么普遍适用)。

必须强调,这一结果仅适用于面电荷的场。如果在面电荷附近还有别的电荷,则靠近该面的总场就应等于式(5.3)与其他电荷的场之和。此时,高斯定律只会告诉我们:

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.4)$$

式中  $E_1$  和  $E_2$  分别代表从该面每侧指向外之场。

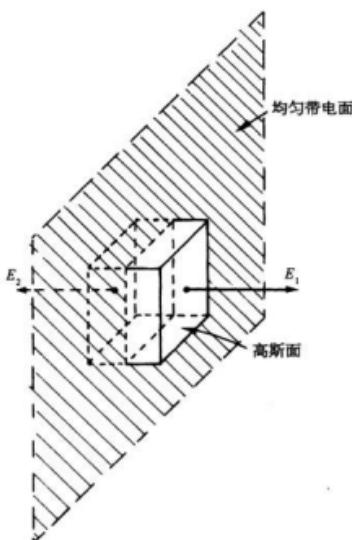


图 5-6 在一均匀带电面附近的电场,可通过应用高斯定律于一个想象的盒子而求得

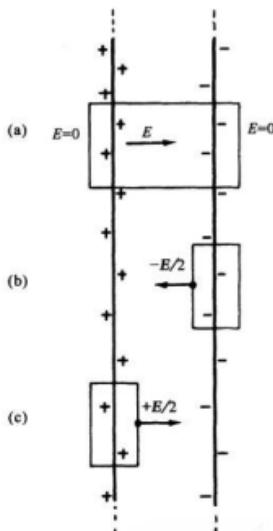


图 5-7 两块带电板之间的场为  $\sigma/\epsilon_0$

只要我们再次假定其外部世界是对称的,带有相等相反电荷(密度分别为  $+\sigma$  和  $-\sigma$ )的两平行板问题也同样简单。通过对由单块板所得的两结果叠加,或者通过构成一个包括两板在内的高斯盒,都不难见到,在该两板之外的电场为零[图 5-7(a)]。由考虑一个只包括这块或那块板在内的盒,如图 5-7(b)或(c)所示的那样,则能看出两板间的场应两倍于单独一块板的场。结果是:

$$E(\text{在两板之间}) = \sigma/\epsilon_0; \quad (5.5)$$

$$E(\text{在两板之外}) = 0. \quad (5.6)$$

### § 5-7 带电球体; 球壳

我们曾(在第4章中)应用高斯定律求得一个均匀带电球体外的场。用同一方法也能给出球内各点的场。例如,这种计算方法可用来得到对原子核内部场的良好近似。尽管核里的质子互相排斥,但由于强大核力的作用,它们还是几乎均匀地分布在核体内的。

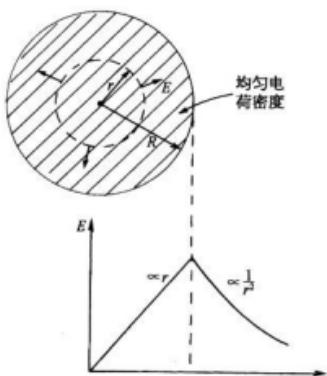


图 5-8 高斯定律可用来求一个均匀带电球体内的场

假设有一个半径为  $R$  并均匀地充满着电荷的球,令  $\rho$  为单位体积的电荷。再利用对称性的论证,假定场是径向的,并且在与球心等距离的一切点上这个场的大小都相等。要求与球心的距离为  $r$  处的场,我们取一个半径为  $r$  ( $r < R$ ) 的球形高斯面,如图 5-8 所示。从这个面出来的通量为

$$4\pi r^2 E.$$

在我们的高斯面内的电荷等于其内部体积乘  $\rho$ ,或

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

应用高斯定律,可以推得场的大小由下式给出:

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} (r < R). \quad (5.7)$$

你可以看到,这一公式对于  $r = R$  也会给出恰当的结果。电场与半径成正比,并沿径向指向外。

刚才对于一个均匀带电球体所提供的论证,也可应用于一个带电薄球壳。假定场是处处径向的并且具有球对称性,那便可以立即从高斯定律获得在球壳外的场与一个点电荷的场相似,而球壳内的场则处处为零(在球壳内的高斯面将不会包含电荷)。

### § 5-8 点电荷的场是否精确为 $1/r^2$

如果对球壳内的场为何会等于零这一点更详细地查看一下,我们就能更加清楚地看出,高斯定律之所以成立只是由于库仑力精确地依赖于距离的平方。考虑一个均匀带电球壳里面的任一点  $P$ ,想象出一个以  $P$  为顶点的小锥形伸展至球壳表面,在那里它割出一个小面积  $\Delta a_1$ ,如图 5-9 所示。一个从  $P$  的相对一边发散出去的完全对称锥形,将会从球面割出一个面积  $\Delta a_2$ 。如果从  $P$  至这两个小面积元的距离分别为  $r_1$  和  $r_2$ ,那么它们的面积比为

$$\frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

对于在球面内的任一点  $P$ ,可以用几何学来证明这一点。

如果球面是均匀带电的,则在每一面积元上的电荷  $\Delta q$  就正比于各面积,因而

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1}.$$

于是库仑定律讲,由这两面积元在  $P$  点上所产生的场其大小之比为

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Delta q_2 / r_2^2}{\Delta q_1 / r_1^2} = 1.$$

这两个场恰好互相抵消。由于面上所有各部分都可按此办法配成对,因此,在  $P$  点的总场就应等于零。但你还可以看出,假如在库仑定律中  $r$  的幂数不精确等于 2,那就不会这样了。

高斯定律的正确性取决于平方反比的库仑定律。若该力的定律不精确是平方反比,则在一个均匀带电球面内部的场严格为零这一说法就不正确了。例如,要是力变化得更快一些,比如与  $r$  的立方成反比,那么较接近于球内某一点的那部分面积产生的场将比较远部分面积所产生的场更大,对于正的面电荷结果会形成一个径向的、指向内的场。这些结论提示了一个检验平方反比定律是否完全正确的优越办法,我们只需确定在一个均匀带电球壳里的场是否精确为零。

很幸运存在这样一种方法。通常要高精度测量一个物理量是很困难的——要求精度达百分之一可能不太困难,但比如要测量库仑定律达到十亿分之一的精度,那该怎么着手呢?用目前所能达到的最优良技术测量两带电物体间的库仑力,要达到这样的精度几乎肯定是不可能的。但是只要确定在一个带电球面内部的电场小于某个数值,我们就能对高斯定律的正确性做出一个高精度的测量,因而这也是对库仑定律平方反比关系的高精度测量。实际上,人们所做的就是将具体力的定律与一标准的平方反比定律做比较。

相等或几乎相等的事件的这种比较,往往是最精密的物理测量的基础。

我们将怎样来观察一个带电球面内的场呢?一种方法是,拿一物体与一球形导体的内部接触而试图使之带电。你知道,如果使一个小金属球接触到一个带电物体,然后将它同一静电计接触,则静电计就会带电,其指针将离开零点,如图 5-10(a) 所示。小球采得一些电荷是由于在该带电球壳外面存在电场,而这电场又会驱使电荷跑至(或跑出)小球。你如果将小球接触该带电球壳内部来做这同样的实验,则发现并没有什么电荷会被带至静电计上。用这样一个实验,你就可容易地证明:在内部的场至多是外场的百分之几,因而高斯定律至少是近似正确的。

似乎是富兰克林最早注意到导体壳内的场为零

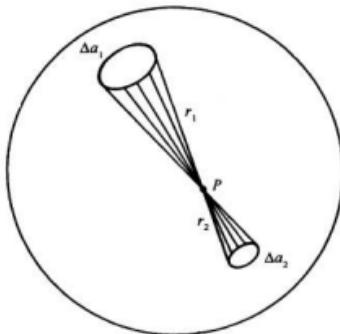


图 5-9 在带电球壳内的任一点  $P$  处,场都等于零

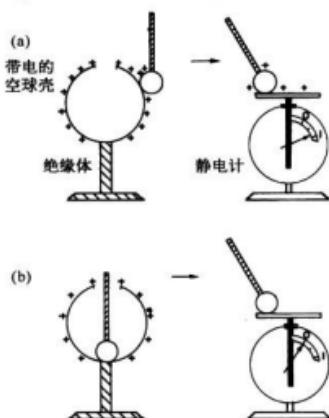


图 5-10 在一个闭合的导体壳内电场为零

的。这一结果似乎令他奇怪。当他把观察结果报告给普里斯特利时,后者提出可能与平方反比定律有关,因为当时已知道一个物质球壳在其内部不产生引力场。但一直到了18年后,库仑才测量出那个平方反比关系,而高斯定律的出现就更晚了。

高斯定律曾被仔细地加以检查,即把一静电计放在一个大球壳中,观察当用高压使球壳带电时静电计是否会发生偏转,但结果总是否定的。知道了仪器的几何尺寸以及静电计的灵敏度,便有可能算出被观察到的最小的场。从这个数值就可以对幕指数与2的歧离设置一个上限。如果把静电力写成与 $r^{-2+}$ 有关,则我们便能把上限放在 $\epsilon_0$ 上。通过这个办法,麦克斯韦曾测定了 $\epsilon_0$ 小于 $1/10\,000$ 。这个实验于1936年由普林顿和劳顿两人重新做过并加以改进。他们发现库仑幕数与2的差小于十亿分之一。

现在,由此可提出一个有趣问题:在各种不同情况下,我们是否知道这库仑定律有多准确呢?刚才所描述的实验测量了在几十厘米的距离上场与距离的关系,但对于原子内部的距离——比如在氢原子中,我们相信那里的电子受核的吸引也是按相同的平方反比定律发生的一——又究竟如何呢?诚然,关于电子行为的力学部分必须运用量子力学,但力依然是寻常的静电力。在此问题用公式来表示时,电子的势能必须被认为是与核距离的函数,而库仑定律给出随距离的一次幕成反比变化的势能。对于这么小的距离来说,这幕指数会准确到什么程度呢?由于在1947年兰姆和莱索福对氢的能级的相对位置进行了极为仔细的测量,所以我们知道,在这种原子尺度上——也即在 $1\text{ \AA}$ ( $10^{-8}\text{ cm}$ )数量级的距离上——该幕指数也准确到十亿分之一。

兰姆-莱索福这一测量的准确性所以成为可能,又是由于一次物理“偶发事件”。氢原子的两个态被预期具有几乎相等的能量,只要势能是严格随 $1/r$ 变化。这个十分微小的能量差别是通过测量从一态至另一态的跃迁时所发射或吸收的光子的频率 $\omega$ ,应用能差 $\Delta E = h\omega$ 测出来的。计算的结果表明,假如在力的定律 $1/r^2$ 中的幕指数与2会有十亿分之一那么大的误差,则 $\Delta E$ 会显著地与观察到的结果不同。

这同一幕指数对更短的距离是否仍然正确?从核物理中的测量发现:在典型的核距离——约 $10^{-13}\text{ cm}$ ——处静电力仍然存在,而且它们仍近似地与距离的平方成反比。在以后一章中将有一些例证。我们知道,在 $10^{-13}\text{ cm}$ 量级距离内,库仑定律至少在某种程度上仍然是有效的。

对于 $10^{-14}\text{ cm}$ 的距离又如何呢?这一范围可以通过质子与很高能量电子的碰撞及观察它们如何被散射来加以研究。迄今所得到的结果似乎指出,该定律在这种距离上失败了。电力在小于 $10^{-14}\text{ cm}$ 的距离上,似乎显得比预期的要弱十倍。现在有两种可能的解释:其一,是库仑定律在这样小的距离上已失效;另一种可能解释,则是我们的客体——电子和质子——并不是点电荷。也许电子或质子,或两者,都是某种涂抹物。大多数物理学家倾向于认为质子的电荷是涂抹上去的。质子与介子反应十分激烈,这暗示一个质子时时会作为被一个 $\pi^+$ 介子所包围的一个中子而存在。像这样一个组态就该——在平均上——表现得如同一个带正电的小球。起因于一个荷电球体之场并非按 $1/r^2$ 一直变化至球心的,质子的电荷很可能是涂抹物。但关于介子的理论仍然很不完整,所以库仑定律在极小距离上失效也有可能。这一问题仍然未确定。

还有一点:平方反比定律在像 $1\text{ m}$ 和 $10^{-10}\text{ m}$ 的距离上都有效;但系数 $1/(4\pi\epsilon_0)$ 是否也都相同呢?答案是肯定的,至少达到兆分之十五的精度。

现在,我们回到在上面谈及对高斯定律的实验验证时曾被忽视的一件重要事情上来。你可能还不知道麦克斯韦或普林顿和劳顿的实验怎么会得到那么精确的结果,除非他们所用的球形导体是一个十分完美的球壳。十亿分之一精度确实是个辉煌成就,而你也许要问他们能否做成那么精密的一个球壳。任何一个实际球体都肯定会有一些微小的不规则性,而如果有了不规则性,还不会在球内产生出一些场来吗?现在我们想要证明,并不需要有一个完美的球壳。事实上也能够证明,在任何形状的一个闭合导体壳中都不会有场存在。换句话说,实验与  $1/r^2$  有关,而与面是否是球面却没有什么关系(用球面的原因是,假如库仑定律有错,用球面容易算出~~场会~~是什么样)。所以我们现在就来处理这一课题。要证明这一点,必须知道导电体的某些性质。

### § 5-9 孤立导体的场

导电体是含有许多“自由”电子的固体。电子能够在材料中各处自由地运动,但却不能离开其表面。在一块金属中存在那么多的自由电子,以致任何电场都能使它们大量地进行运动。这样所建立的电子电流必须由外界能源不断来维持运动,或者会由于这些电子对那个曾产生初始电场之源放电而停止运动。在“静电”情况下,我们并不考虑连续性电流源(以后学习静磁学时才将考虑到),所以电子仅运动到它们自己被安排得在导体内部处处都产生零场为止(这通常是在远小于 1 s 的时间里发生的)。假如还有任何场存在的话,这个场则应该会推动更多的电子运动,唯一的静电态答案就是场在导体内部处处为零。

现在考虑带电导体的内部情况(所谓“内部”我们指的就是金属本身)。由于金属是导体,其内部的场必然为零,即势  $\phi$  的梯度为零。这意味着说,  $\phi$  不会逐点变化。每个导体是一个等势区,而它的表面是一个等势面。由于在导电性材料中电场处处为零,所以  $E$  的散度也为零,而根据高斯定律在导体内部的电荷密度一定等于零。

如果在导体中不可能有电荷,那它怎么还能够带电呢?当我们说某一导体“带电”时,其意思到底是指什么呢?电荷在哪里?答案是:它们会存在于导体的表面上,那里有强大的力把它们保持住而不致离开——它们并非完全“自由”的。今后,当我们学习固体物理时将发现,在任何导体上的附加电荷平均来说都位于表面的一两个原子层内。对于我们眼前的目的来说,这样说就已经足够准确,即如果任何电荷被放上或放进导体之内,它将聚集在表面上,在导体内部没有电荷。

我们也注意到,正好在导体表面外的电场必定与表面垂直,不可能有切向分量。假如有切向分量,电子就会沿表面运动,没有任何力来阻止它们。按另一种方式讲,我们知道,电场线必须始终与等势面成直角。

利用高斯定律,我们又可把刚好在导体外面的场强同表面的局部电荷密度联系起来。作为高斯面,我们取一半在面内、一半在面外的一个小柱形盒,如图 5-11 所

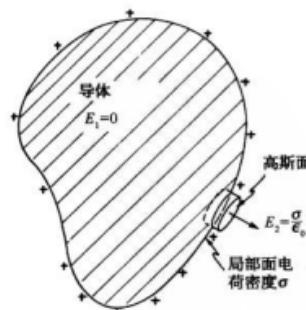


图 5-11 紧贴导体表面的电场与局部面电荷密度成正比

示。对于  $E$  的总通量的贡献就只有来自导体外的盒子的一边。于是，贴近导体外表面的场为在导体外

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (5.8)$$

式中  $\sigma$  是局部面电荷密度。

为什么在导体表面上的一片电荷所产生的场会不同于仅仅一片电荷所产生的场呢？换句话说，为什么式(5.8)是式(5.3)的两倍呢？原因当然是，对于该导体我们并未曾说过附近没有“其他”电荷。事实上，必然存在一些电荷使得导体里面的  $E = 0$ 。在表面  $P$  点附近的电荷的确给出表面内外两边的场  $E_{\text{局部}} = \sigma_{\text{局部}} / 2\epsilon_0$ 。但在导体表面上的所有其他电荷“策划”在  $P$  点产生一个大小等于  $E_{\text{局部}}$  的附加场。使得在内部的总场变成零而外部的场变成  $2E_{\text{局部}} = \sigma / \epsilon_0$ 。

## § 5-10 导体空腔内的场

现在，我们转到一个中空容器——导体内留有空腔——的问题。虽然在金属中不存在场，但在其空腔里怎样呢？我们将证明：如果空腔是空的，则不管导体或空腔的形状如何——比方说如图 5-12 所示的那种形状——在其中不存在场。考虑一个高斯面，像图 5-12 中的  $S$ ，它包围着该空腔，但还处处落在导电材料之内。由于在  $S$  上的任何地方场均为零，所以并没有通量通过  $S$  面，因而在  $S$  面内的总电荷等于零。对于一个球壳来说，人们可以从对称性论证其内部没有电荷。但在一般情况下，我们只能说在导体的内表面上

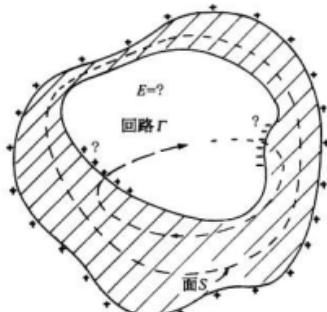
存在等量的正电荷与负电荷。即可能其中一部分内表面存在正的面电荷而另一部分存在负的面电荷，如图 5-12 所指出的那样。高斯定律并不能排除这种情况。

当然，实际发生的情形是，任何在内表面上出现的等量异号电荷都会向四周滑动而彼此相遇，从而完全抵消掉。我们可通过应用  $E$  之环流始终等于零这个(静电学)定律来证明，它们必定完全抵消掉。假定在内表面的某些部分上存在电荷，则我们知道，在其他地方也得有与之数目相等而符号相反的电荷。那么任何  $E$  线就必须从那些正电荷出发而终止于那些负电荷上(因为我们所考虑的只是在空腔里并没有自由电荷的那种情况)。现在设想有这么一条回路  $\Gamma$ ，它沿一条从某一正电荷至某一负电荷的力线穿过空腔，并经由导体回到原来的出发点(如图 5-12 所示)。沿这条力线从正电荷至负电荷所取的积分不会等于零。而经过金属里的积分则为零，因为  $E = 0$ 。因此，我们就应该有

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0 ???$$

图 5-12 在一个任意形状的导体空腔里其电场如何

但在静电场中， $E$  绕任一闭合回路的线积分总是为零。因此，在空腔里不可能存在任何场，



而在内表面上也不会有任何电荷。

应当仔细地注意我们所做出的一个重要限制条件。上面我们总是说在一个“空的腔里”，但如果有些电荷被置于腔里的某些固定位置上——诸如被置在一个绝缘体上或一个与该主导体绝缘的小导体上——那么腔里就可以有场，但此时这个腔已经不是“空”的了。

我们已经证明：如果一个空腔给导体完全包围住，则任何外部静止的电荷分布都不可能在其内部产生出任何场。这说明了通过将电气设备放在一个金属盒内就能把它们“屏蔽”起来的原理。同样某些论证也可用来证明，在一导体闭合面内部的任何静电荷分布不可能在其外部产生出任何场。屏蔽对双方都有效！在静电学中——但不是在变化着的场中——一个闭合导体壳两边的场是完全独立的。

现在你明白，为什么以往在核对库仑定律时能够达到那么高的精度。所用空壳的形状是无关重要的，并不一定是球形，立方的也可以！如果高斯定律严格正确，则里面的场始终为零。现在你也懂得，为什么坐在那百万伏范德格拉夫起电机的高压套管内可以安然无恙，并不必担心会受到电击——这是由于高斯定律的缘故。

# 第6章 在各种情况下的电场

## § 6-1 静电势的方程组

本章将描述在几种不同情况下电场的行为。它将向我们提供有关电场表现方式的一些经验，并将描述求解这种电场的某些数学方法。

首先我们要指出，全部数学问题在于解静电学的两个麦克斯韦方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (6.2)$$

实际上，上述两方程也可合并成一个方程。从第二个方程我们立即知道可以把场描述为标量的梯度（见 § 3-7）：

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (6.3)$$

如果我们乐意，就可以用势  $\phi$  完整地描写任一个特定电场。将式(6.3)代入式(6.1)中，便可得到  $\phi$  所应服从的微分方程

$$\nabla \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.4)$$

$\phi$  梯度的散度与用  $\nabla^2$  对  $\phi$  进行运算的结果相同，即

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (6.5)$$

因此，我们便可将式(6.4)写成

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.6)$$

算符  $\nabla^2$  称为拉普拉斯算符，而式(6.6)则称为泊松方程。从数学的观点看，静电学整个课题只不过是学习这一方程式(6.6)的解。一旦  $\phi$  由解方程式(6.6)得出，便可立即由式(6.3)求得  $\mathbf{E}$ 。

我们将首先提出其中  $\rho$  作为  $x, y, z$  的函数是已知的那种特殊类型的问题。在这种情况下问题几乎是琐碎肤浅的，因为我们已知道式(6.6)的一般解了。以前就曾证明过：若  $\rho$  在每点均为已知，则在点(1)处的势就是

$$\phi(1) = \int \frac{\rho(2)dV_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \quad (6.7)$$

式中  $\rho(2)$  和  $dV_2$  分别代表点(2)处的电荷密度和体积元，而  $r_{12}$  则为(1)与(2)两点间的距离。

微分方程(6.6)的解已简化成对整个空间的积分。式(6.7)这种解应加以特别注意,因为在物理学中就有许多情况都会引导到如

$$\nabla^2(\text{某件东西}) = (\text{另一件东西})$$

这样一种方程,而式(6.7)便是任何这类问题解的典型。

这样,当所有电荷的位置都已知时,静电场问题的解就完全是直截了当的。让我们在下述几个例子中看看这是怎么回事吧!

## § 6-2 电偶极子

首先,取相距为  $d$  的两个点电荷  $+q$  和  $-q$ 。令  $z$  轴沿这两电荷的连线,并选取原点在其中间,如图 6-1 所示。于是,应用式(4.24),则来自这两电荷的势就是

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{[z - (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{[z + (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \right]. \quad (6.8)$$

我们不打算把电场的公式写出,因一旦有了势,就总可以把场算出来。因此,我们已解决了两电荷的问题。

存在两电荷靠得非常近的一种重要特殊情况——即是说,我们所感兴趣的仅仅是在与这两电荷的距离远比它们的间距为大的那些地方的场。我们称这样靠近的一对电荷为偶极子。偶极子是十分常见的。

例如,“偶极”天线常用互相分开一小段距离的两电荷来做近似——如果我们不去过问太接近于天线地方的场的话(我们经常对带有运动电荷的天线感兴趣,但这里静电学方程组实际上已不适用了。对于某些目的来说,那还是足够近似的)。

也许更重要的还是原子偶极子。在任何材料中,如果有一电场存在,则电子和质子将感受到方向相反的力并做相对移动。你会记起,导体中有些电子会移向表面,使内部的场变为零。在绝缘体中,电子不能

够移得很远,它们将被核

吸引回来。然而,它们的确会移动一点点。因此,尽管一个原子或分子在外加电场中仍然保持中性,但它的正电荷和负电荷间会出现一个十分微小的间隔,从而成为一个微观的电偶极子。如果我们所感兴趣的是这些原子偶极子在普通大小物体附近的场,那么,我们正在与比这些电荷对的间隔大得多的距离正常地打交道。

在某些分子中,即使没有外电场存在,电荷也还是有点分开,这是由于分子的形状所致。例如,在一水分子中,氧原子附近有净负电荷,而两个氢原子附近则都有净正电荷,它们并非对称地排列着,而是如图 6-2 所示。尽管整个分子的电荷为零,但却形

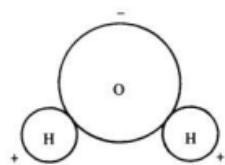


图 6-2 水分子  $\text{H}_2\text{O}$ 。两个氢原子各拥有稍微少于其份额的电子云;氧原子则稍微多些

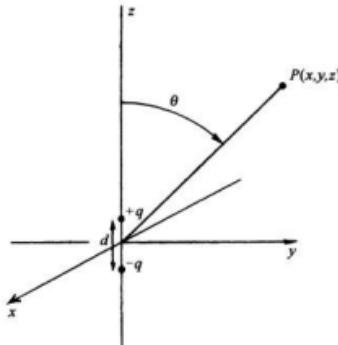


图 6-1 偶极子: 相距为  $d$  的两个电荷  $+q$  和  $-q$

成这样一种分布：在一方有稍微多一点的负电荷而在另一方则有稍微多一点的正电荷。这种排列肯定不会像两个点电荷那么简单，但从远处看时，这个系统的作用就像一个偶极子一样。正如稍后我们便将见到的，在远距离处场对于这种细节并不敏感。

那么，就让我们来看看，具有小间距  $d$  的两个异号电荷所产生的场。如果  $d$  变为零，两电荷互相重叠，两势则互相抵消，因而也就没有场了。但如果它们并不严格互相重叠，那就可通过将式(6.8)中各项(应用二项式展开法)展开成小量  $d$  的幂级数，从而可以得到势的一个优良近似。若仅仅保留  $d$  的一级项，便可以写成

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd.$$

按如下写法很方便，即

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

因此  $\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2 \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)$ ,

和  $\frac{1}{\sqrt{[z - (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2 [1 - (zd/r^2)]}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}$ .

对于  $[1 - (zd/r^2)]^{-1/2}$ ，可再应用二项式展开——并丢掉  $d$  的平方及更高幕次的项——我们便得

$$\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right).$$

同理， $\frac{1}{\sqrt{[z + (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right)$ .

这两项之差就给出了势

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^2} qd. \quad (6.9)$$

得到这个势，也就有了电场(那是势的微商)，它们都会正比于  $qd$ ，即电荷与间距的乘积。这个积被定义为这两个电荷的偶极矩，我们用符号  $p$ (切勿与动量混淆!)表示，即

$$p = qd. \quad (6.10)$$

式(6.9)也可写成

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}, \quad (6.11)$$

因为  $z/r = \cos \theta$ ，其中  $\theta$  是偶极子轴与指向点  $(x, y, z)$  的径向矢量之间的夹角——见图6-1。在对轴给定的方向上，偶极子的势按  $1/r^2$  下降(但对于一个点电荷，则按  $1/r$  下降)。于是偶极子的电场  $E$  便会按  $1/r^3$  减弱。

如果定义一个大小为  $p$ 、方向沿偶极子轴从  $-q$  指向  $+q$  的矢量  $p$ ，则我们可把上式写成矢量形式。这样，

$$p \cos \theta = p \cdot e_r, \quad (6.12)$$

式中  $e_r$  为单位径向矢量(图 6-3)。我们也可用  $r$  代表点  $(x, y, z)$ 。于是

### 偶极子势

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}. \quad (6.13)$$

这一公式对于具有任何指向和位置的偶极子都适用,只要  $r$  代表从偶极子至所关注之点的矢量。

若想要得到电偶极子的电场,便可通过取  $\phi$  的梯度获得。例如,场的  $z$  分量为  $-\partial\phi/\partial z$ 。对于一个沿  $z$  轴指向的电偶极子,我们可以应用式(6.9):

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right),$$

或

$$E_z = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}. \quad (6.14)$$

$x$  分量和  $y$  分量则分别为:

$$E_x = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5}; \quad E_y = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}.$$

这两个分量还可合成一个垂直于  $z$  轴的分量,我们将称其为横向分量  $E_{\perp}$ :

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2}$$

或

$$E_{\perp} = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos\theta\sin\theta}{r^3}. \quad (6.15)$$

这横向分量  $E_{\perp}$  处在  $xy$  平面内,而且从偶极子轴直指向外。总场当然是

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_{\perp}^2}.$$

偶极子场与距离的立方成反比。在轴上,即当  $\theta = 0$  时,它比在  $\theta = 90^\circ$  处要强两倍。在这两个特殊角度上电场仅有  $z$  分量,但在这两处场的符号却相反(图 6-4)。

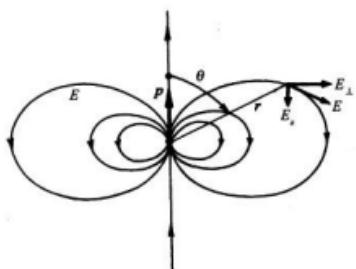


图 6-4 偶极子的电场

## § 6-3 矢量方程述评

到此我们对矢量分析做个一般性评述挺合适。那些基本证明,可用一些具有普遍形式的优美方程式来表达。但在进行各种计算和分析时,以某种便当方式去选择坐标轴,总是个

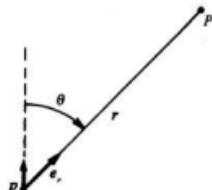


图 6-3 电偶极子的矢量符号

好主意。这里要注意,刚才在求偶极子的势时,我们曾选取  $z$  轴沿着偶极子方向,而不是在某个任意角度上,这使工作容易得多。可是后来我们却又把方程写成矢量形式,以便使其不再依赖于任何一个特定的坐标系。此后,就可以选择我们所要的任何坐标系了,因为已知道该关系式是普遍正确的。对于某一特定问题——假如结果最后能表达成一个矢量方程,当能够选取一个简洁的坐标系时却还去费神用一个在某一复杂角度上的任意坐标系,显然毫无意义。因此,务必利用矢量方程式与任一坐标系无关的这一事实。

另一方面,如果你不是仅对  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  望一望和仅想知道它是什么(而是正在试图算出一个矢量的散度),那便不要忘记它总是可以展开成下式的:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

这时,你若能算出电场的  $x$ ,  $y$  和  $z$  各分量并对它们微商,那你就会得到一个散度了。往往似乎有这样一种感觉:若将各分量写出,就会存在某种不太优美的——牵涉到某种失败的——东西;不管怎样,总会有办法用矢量算符去做每件事情。但这种想法往往没有什么好处。当初次碰到一个特殊问题时,诚然,我们熟悉将发生什么,它有助于我们写出分量。把数字代入方程之内并不见得不优美,而用微商代替某些悦目符号也未必不文雅。实际上,具体写出分量这一件事情就往往是一种智慧。当然,当你在专业杂志上刊登文章时,如果你能把一切东西都写成矢量形式,那将会美观些——而也更易于理解。此外,还节省篇幅。

## § 6-4 偶极子势的梯度表示

关于偶极子公式(6.13),我们愿意指出一件相当愉快的事情。该势也可写成

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right). \quad (6.16)$$

如果你算出  $1/r$  的梯度,你便可以得到

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2},$$

而式(6.16)与(6.13)就彼此相同了。

怎么会想到这一点呢?我们刚好记得, $e_r/r^2$  曾出现在有关点电荷的场公式中,而场又是那具有  $1/r$  依赖关系的势的梯度。

之所以能够将偶极子势写成式(6.16)的形式,有其物理原因。假设有一个位于原点的点电荷  $q$ ,则在点  $P(x, y, z)$  处的势为

$$\phi_0 = \frac{q}{r}.$$

让我们在做这些论证时先丢下  $1/(4\pi\epsilon_0)$ ,最后可以把它插进去。现在若把电荷  $+q$  向上移动距离  $\Delta z$ ,那么在  $P$  点的势就将改变一点点,比如说  $\Delta\phi_+$ 。这  $\Delta\phi_+$  有多大呢?唉呀!这恰好就是——假如让电荷留在原点上不动,而将  $P$  向下移过同样距离  $\Delta z$ ——电势将要改变的数量(图 6-5)。也就是说,

$$\Delta\phi_+ = -\frac{\partial\phi_0}{\partial z} \Delta z,$$

式中  $\Delta z$  指的是与  $d/2$  相同的间距。因此, 引用  $\phi_0 = q/r$ , 我们就有该正电荷的势

$$\phi_+ = \frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q}{r} \right) \frac{d}{2}. \quad (6.17)$$

对于该负电荷的势, 应用同样的道理可写出

$$\phi_- = \frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{-q}{r} \right) \frac{d}{2}. \quad (6.18)$$

总电势等于式(6.17)与(6.18)两者之和:

$$\phi = \phi_+ + \phi_- = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q}{r} \right) d = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) q d. \quad (6.19)$$

对于其他指向的偶极子, 可以将正电荷的位移表示为  $\Delta r_+$ 。然后, 我们应该把式(6.17)写成

$$\Delta\phi_+ = -\nabla\phi_0 \cdot \Delta r_+,$$

式中  $\Delta r_+$  以后被  $d/2$  代替。和上面一样, 在完成了推导过程之后, 式(6.19)就会变成

$$\phi = -\nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot q d.$$

如果我们代入  $qd = p$ , 并插进  $1/(4\pi_0)$ , 则上式与式(6.16)正好相同。按另一种方式来看, 我们见到偶极子势, 即式(6.13), 可以解释为

$$\phi = -p \cdot \nabla\phi_0, \quad (6.20)$$

其中  $\phi_0 = 1/(4\pi_0 r)$  仍是一单位点电荷的势。

尽管对一已知的电荷分布, 我们总能够通过积分求得其势, 但有时却可能运用一点聪明手法来获得答案, 以便节省时间。例如, 我们经常可利用叠加原理。如果有这样一个电荷分布, 它是由两个电势已知的电荷分布构成的, 那么只要将所知的两个势相加起来就能很容易地求得所需的电势。这方面的一个例子是关于式(6.20)的推导, 另一个例子如下所述。

假定有一个球面, 其表面电荷的分布随极角的余弦而变化。对这么一个分布积分是相当麻烦的。可是令人惊奇, 这样的一个分布却可通过叠加原理来加以分析。试设想有一个带着均匀正电荷体密度的球体, 而另一个球体则带有相等的、均匀的负电荷体密度, 它们原来就是互相叠合, 形成一个中性——也就是不带电——的球体。然后, 若该带正电荷球体相对那个带负电荷的球体稍微移动, 则不带电的那部分球体仍将保持中性, 但有少量正电荷会出现在一边, 而少量负电荷则出现在相反的一边, 如图 6-6 所示。若两球的相对位移很小, 则净电荷相当于(在球面上的)面电荷, 而该面电荷密度将与极角的余弦成正比。

现在, 如果我们要得到来自这种分布的势, 则不必再去做积分。因为我们知道来自每一个荷电球的势——对于在球外的点——与来自一个点电荷之势相同。这两个移动过的球与

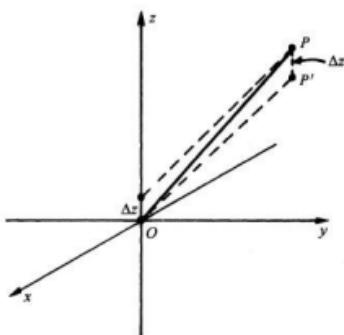


图 6-5 来自原点顶上  $\Delta z$  处一个点电荷在  $P$  点上的势, 等于来自原点处同一电荷在  $P'$  点(比  $P$  点低下  $\Delta z$ )上的势

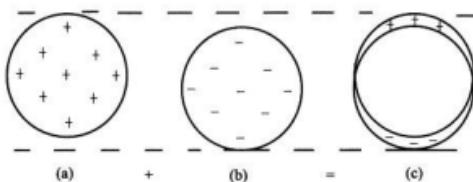


图 6-6 彼此间有一微小位移的两个均匀带电球体互相叠加, 相当于表面电荷的非均匀分布

两个点电荷相似, 其势恰好就是一个电偶极子的势。

用这样的方法, 你可以证明: 在一个半径为  $a$  的球面上面电荷密度的分布为

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta,$$

在球外产生的场恰好就是偶极矩为

$$p = \frac{4\pi\sigma_0 a^3}{3}$$

的偶极子产生的场。也能够证明, 在该球内的电场是常数, 其值为

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}.$$

若  $\theta$  为相对正  $z$  轴的角, 则在球内的电场在负  $z$  方向。我们刚才考虑的例子并不像它表面看来那么带有人为性, 以后将在电介质理论中再次碰到它。

## § 6-5 任意电荷分布的偶极子近似

偶极子场还出现在另一个既有趣而又重要的场合中。假设有一个具有复杂电荷分布的物体——像水分子(图 6-2)那样——而我们仅仅对远处的场感兴趣。我们将证明, 对于距离比物体尺寸要大的情况有可能找到关于场的一个恰当而相对简单的表示式。

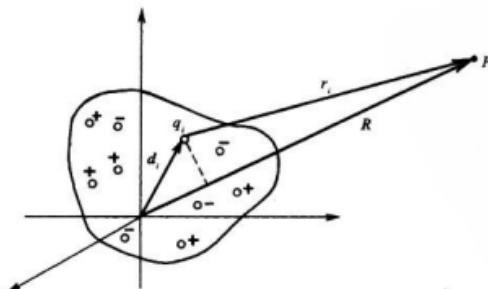


图 6-7 一群点电荷在一遥远点  $P$  处产生的势的计算

我们可将该物体设想成在某一有限区域里的一群点电荷  $q_i$ , 如图 6-7 所示(以后若我们愿意, 可以用  $\rho dV$  来代替  $q_i$ )。令每一电荷  $q_i$  被置于距原点(选取在该群电荷中间的某处)的位移为  $\mathbf{d}_i$  的地方。在  $\mathbf{R}$ ( $\mathbf{R}$  远大于最大的  $d_i$  值)处的  $P$  点, 势究竟如何呢? 来自整个电荷群的势由下式给出:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (6.21)$$

式中  $r_i$  是从  $P$  点至电荷  $q_i$  的距离(即矢量  $\mathbf{R}-\mathbf{d}_i$  的长度)。现在, 如果这些电荷至观察点  $P$  的距离巨大, 则每个  $r_i$  都可以用  $R$  来作近似。每一项就都变成  $q_i/R$ , 从而可将  $1/R$  取出作为在求和符号前的一个因子。这将向我们提供一个简便的结果

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum_i q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (6.22)$$

式中,  $Q$  恰好就是整个物体的总电荷。这样我们发现: 从距离任意一堆电荷足够远的各点上来看, 该堆电荷就像一个点电荷似的。这一结果并不太令人惊异。

但若有等量的正电荷和负电荷又该怎么样呢? 此时物体的总电荷  $Q$  为零。这并不是一种罕见的情况。事实上, 正如你们所知道的, 物体往往具有电中性。水分子就是电中性的, 但其中诸电荷并非完全位于同一点, 因而若站得足够近, 就应能见到那些分开着的电荷的某些效应。对于来自电中性物体中一个任意电荷分布的势, 我们需要一个比式(6.22)更好的近似式。式(6.21)仍然是准确的, 不过不能再只是令  $r_i = R$ , 我们需要一个更准确的  $r_i$  表达式。如果  $P$  点位于遥远距离处,  $r_i$  与  $R$  的差异可以通过  $\mathbf{d}$  在  $\mathbf{R}$  上的投影而得到一个良好近似, 正如从图 6-7 就可以看得出来的那样(你应该设想, 实际上  $P$  比图上所示的还要遥远得多)。换句话说, 若  $\mathbf{e}_R$  是在  $\mathbf{R}$  方向上的单位矢量, 则我们对于  $r_i$  的二级近似为

$$r_i \approx R - \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_R. \quad (6.23)$$

我们所真正需要的乃是  $1/r_i$ , 由于  $d_i \ll R$ , 对我们的近似程度来说,  $1/r_i$  就可写成

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_R}{R} \right). \quad (6.24)$$

以此代入式(6.21)中, 便可得到势

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{e}_R}{R^2} + \dots \right). \quad (6.25)$$

上式中最后三点代表已略去的有关  $d_i/R$  的较高次项。这些项, 再加上已获得的那些, 就是  $1/r_i$  在  $1/R$  附近以  $d_i/R$  为幕进行的泰勒展开中的相继的项。

式(6.25)中的第一项, 就是在上面获得的, 如果物体具有电中性, 这一项则取消。第二项依赖于  $1/R^2$ , 正如偶极子那种情况。事实上, 如果定义

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i \quad (6.26)$$

为该电荷分布的一种特性, 那么势式(6.25)的第二项便是

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}. \quad (6.27)$$

这恰好就是一个偶极子势。 $p$  这个量称为该分布的电偶极矩。它是对以前的定义的推广，而在两个点电荷的特殊情况下，它才简化成以前那样。

上述结果是：若距离整体是电中性的任一团电荷足够远，势就是一偶极子势。它按  $1/R^2$  递降，并随  $\cos\theta$  变化——而其强度与该电荷分布的偶极矩有关。正是由于这些缘故，偶极子场才那么重要。因为一对点电荷的那种简单情况是极为罕见的。

例如，水分子就有相当强的偶极矩，由于这偶极矩而产生的电场导致了水的某些重要性质。在许多种分子，诸如  $\text{CO}_2$  中，由于分子结构的对称性使得其偶极矩为零。因此，对于这些分子我们理应展开得更为准确些，得到势中随  $1/R^3$  递降之项，而这称为四极子势。对于这些情况我们将在以后讨论。

## § 6-6 带电导体的场

现在已完成了我们希望涉及的一些例子，它们是从一开始就知道了电荷分布的那些情况。那是一种不太复杂的问题，至多只牵涉到某些积分。现在，我们将转到一类全新的问题，即对带电导体附近的场的确定。

假设总电荷  $Q$  被置于一任意导体之上，在这种情况下，我们将不可能确切地说出电荷的位置，它们将以某种方式分散在该导体表面上。我们怎能知道电荷在表面上是如何分布的呢？它们必须把自己分布得使该表面之势是一常数。假如该面不是一个等势面，则在导体内便会有电场，而电荷就会继续运动直到电场变为零。这一类普遍问题可以按下述的方法得到解决。我们先猜测有某一电荷分布而算出了势。若所算出的势在该表面上处处是常数，则问题便算了结。如果该表面不是一个等势面，那就说明我们对电荷分布所做的猜测有误。应该再进行猜测——希望得到一个有所改善的猜测！如果我们对逐步猜测不明智，则这一过程可以不断地继续下去。

如何猜测分布的问题在数学上相当困难。当然，自然界自有其完成此事的时间，电荷推来挽去直到它们互相平衡为止。然而，当我们试图求解该问题时，要做出一次尝试就得花很长的时间。这办法十分繁冗，对于任意一群导体和任意电荷来说，这一问题可能变得十分复杂。一般说来，如果没有相当复杂的数值计算方法就无从加以解决。目前，这一类的数值计算是由计算机完成的，它能为我们代劳，只要先告诉它怎样去进行计算就行。

另一方面，有许多细小的实用情况，如果通过某种更直接的方法——不必为计算机编制程序——就能够找到答案，那该多么好。幸而，有若干种场合，其答案可以利用某些巧计或其他办法把它从自然界挤出来。我们将要描述的第一个巧计就涉及对已知解的应用，这些解是我们以前在各电荷的位置都已被规定的情况下获得的。

## § 6-7 镜像法

比方说，我们以前就曾经解出过两个点电荷的场。图 6-8 表示第 4 章中通过计算而获得的某些场线和等势面。现在考虑标明为 A 的那个等势面。假设我们造成一个其形状恰巧与这个面吻合的金属薄片。若把它准确地安放在该面上并调整其势至恰当数值，那就没有谁能够知道它是放在哪里了，因为一切都不会改变。

可是要注意！实际上我们已经解决了一个新的问题。我们有这么一种情况：一块具有给定势的弯曲导体面被放在一个点电荷附近。如果被放置在该等势面上的金属片最终能自行闭合（或实际上伸展得足够远），那么就有一种在§5-10中曾考虑过的那样情况，其中空间被分隔成两个区域，其一是在闭合导体壳之内，另一则在其外。我们在那里已经知道这两个区域里的场是互相独立的。因而不管里面怎么样，在导体外面我们应该有相同的场。我们甚至可以用导电材料来填充整个内部。因此，就已找到了图6-9那种结构的场。在导体外部的空间里，场同图6-8中所示的两个点电荷之场一样。在导体内部，场等于零。并且——正应该如此——刚好在导体外面的电场会与该面正交。

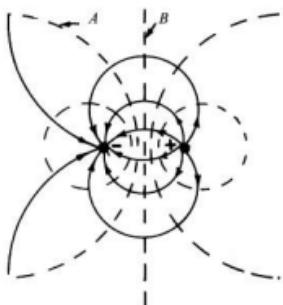


图 6-8 两个点电荷的场线和等势面

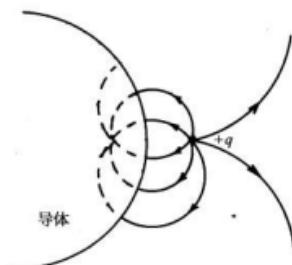


图 6-9 在一个形状像图 6-8 中的等势面 A 的导体之外的电场

这样，我们便能通过计算  $q$  以及在适当位置上一个想象的点电荷  $-q$  所产生的场来算出图6-9中的场了。那个我们“想象”其存在于导体表面背后的点电荷称为镜像电荷。

从书本中你可以找到有关双曲面形状的导体以及其他形状复杂的导体的各种解的长长名单，因而会觉得奇怪，怎么有人竟解决了这些可怕形状的导体问题。原来他们是倒过来求解的！有人解决了给定电荷的一个简单问题。然后，他看到有某一个等势面表现出新的形状，于是就写出一篇论文，指明在这种特定形状的导体外的场可以用某种方法来描述。

### § 6-8 导电平面附近的点电荷

作为这种方法最简单的应用之一，让我们利用图6-8中的等势面B。有了它，便能求解在一块导电板面前放置一个电荷的问题。我们只需勾消该图左边的一半。有关这一解答的场线如图6-10所示。注意该平面，由于在两电荷的正中间，所以具有零势。这样，我们就解决了在一接地的导电板附近有一个正电荷的问题。

对于整个电场至今我们已告解决，但造成这场的真实电荷究竟怎样呢？除了这个正点电荷之外，由于受到该正电荷（从老远处起）所吸引，所以在导电板上出现一些感生负电荷。现在，假定由于某种技术原因——或出自好奇心——你想知道那些负电荷在该表面上是怎样分布的。那你可以利用我们在§5-9中由高斯定律所算出的结果求出面电荷密度，贴近导体外面的电场法向分量就等于面电荷密度  $\sigma$  除以  $\epsilon_0$ 。从表面处电场的法向分量倒过来计算，

我们可以获得表面上任一点的电荷密度。因为我们已知道各处的场，所以就知道面电荷密度。

考虑板面上一点，它与正对着正电荷的那一点距离为  $\rho$ （图 6-10）。在这一点的电场垂直指向该表面。来自该正电荷的场其法向分量为

$$E_{\perp} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (6.28)$$

对此还必须加上由那个负的镜像电荷产生的电场。这不过使该法向分量加倍（并抵消了所有其他之场），因而在该表面任一点的电荷密度  $\sigma$  就是

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E(\rho) = -\frac{2aq}{4\pi(a^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (6.29)$$

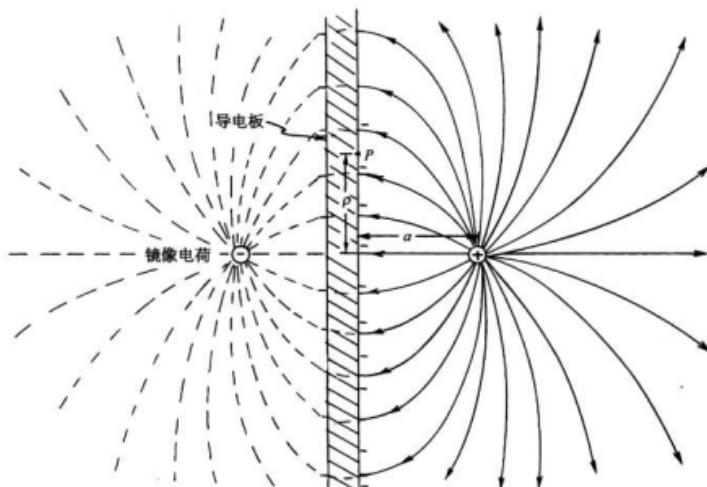


图 6-10 在一导电平面附近一个电荷的场，用镜像法求得

对上述结果的一种有趣核对，仍是在整个面上对  $\sigma$  进行积分。我们求得总感生电荷为  $-q$ ，理应如此。

还有另一个问题：是否有力作用在点电荷上？有的，因为有来自板上的感生负电荷的吸引力。现在我们已知道面电荷的分布（式 6.29），本来可通过积分算出对该正点电荷的作用力。但我们也知道，作用于该正电荷上的力应该与用一负的镜像电荷来代替那块平板所产生的力完全相同，因为在正电荷附近的场在这两种情况下都相同。该点电荷会感到一个指向板面的力而其大小为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2}, \quad (6.30)$$

这样，比对所有负电荷取积分而求得力要容易得多。

## § 6-9 导电球体附近的点电荷

除了平面以外,还有哪些面具有简单解呢? 第二种最简单的形状是球。如图 6-11 所示,在一金属球附近有一个点电荷  $q$ ,让我们求出该球体周围的场。现在,我们必须寻找给出的等势面为球面的那种简单物理情况。如果我们事前仔细考虑人们已经解决的那些问题,就会发现,已有人注意到两个不相等的点电荷的场会有一个球形的等势面。啊哈! 如果选择那个镜像电荷的位置——并选出适量的电荷量——那么也许就能使一个等势面符合我们的球面。事实上,的确可以用下述方法做到这一点。

假设你希望有这样一个等势面:半径为  $a$  而其中心与电荷  $q$  相距为  $b$  的球面。试放置一个大小为  $q' = -q(a/b)$  的镜像电荷于该真实电荷与球心的连线上,与球心的距离为  $a^2/b$ 。这样,球面就将处于零势。

数学方面的理由来源于这样的事实:球面是与两固定点的距离之比始终保持常数的所有各点的轨迹。参考图 6-11,在  $P$  点由  $q$  与  $q'$  所产生之势正比于

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}.$$

因此,势就将在下述一切点上为零:

$$\frac{q'}{r_2} = -\frac{q}{r_1} \text{ 或 } \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q'}{q}.$$

如果我们把  $q'$  置于距离球心为  $a^2/b$  的一点,那么比  $r_2/r_1$  就有常数值  $a/b$ 。因此,若

$$\frac{q'}{q} = -\frac{a}{b}, \quad (6.31)$$

则球面便是一等势面了。事实上,它的势为零。

如果我们感兴趣的是一個不处于零势的球,情况又会怎么样呢? 原来只有在其总电荷碰巧等于  $q'$  时才会有零势。当然,如果球是接地的,则在其上面所感生的电荷就恰好是那些。但如果它是被绝缘的,并且不带电荷,那又会怎么样呢? 或者已知它带有总电荷  $Q$  呢? 或者它具有的给定的势正好不等于零呢? 所有这些问题都不难回答。我们总可以加一个点电荷  $q''$  于球心上,通过叠加,该球面就仍保持为一等势面,只是势的大小将改变罢了。

例如,若有一个原来并没有带电而且与其他任何东西都绝缘的导电球,并将一个正的点电荷  $q$  带至其附近,那么球带的总电荷将保持为零。和以前一样通过用一个镜像电荷  $q'$ ,但除此之外在球心再加上一个电荷  $q''$  而找到解。选取

$$q'' = -q' = \frac{a}{b}q. \quad (6.32)$$

在球外每一处的场由  $q$ ,  $q'$  与  $q''$  的场叠加而成。问题就这样解决了。

现在我们能够看到,将有一吸引力存在于球与点电荷  $q$  之间。尽管在中性球上没有电

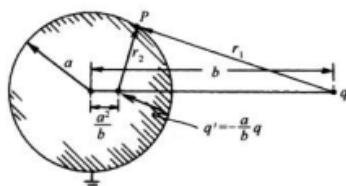


图 6-11 点电荷  $q$  在一个接地的导电球体上感生了电荷,这些电荷的场就是被置在图中所示那一点上的一个镜像电荷  $q'$  所产生的

荷,力仍不会等于零的。这吸引力来自何处呢?当你把一正电荷带到一导电球外面时,该正电荷会把负电荷吸引到靠近它自己的一边而把正电荷留在较远的另一边的面上。受负电荷的吸引作用大于受正电荷的排斥作用,因而就有一净的吸引作用。可以通过计算算出在 $q'$ 和 $q''$ 所产生的场中作用在 $q$ 上的力,而找出该吸引作用有多大。总力等于这两者之和: $q$ 与置在 $b - (a^2/b)$ 距离上的电荷 $q' = -(a/b)q$ 之间的吸引力,以及 $q$ 与置在 $b$ 距离上的电荷 $q'' = +(a/b)q$ 之间的排斥力。

那些曾在童年时代对一个发酵粉盒上的商标里画上一个发酵粉盒,而在此盒的商标里又画上另一个发酵粉盒……感到赏心悦目的人可能对下述问题感兴趣。两个相等的球,一个带有总电荷 $+Q$ ,而另一个带有总电荷 $-Q$ ,被置在某一距离上。它们间的互作用力有多大呢?这问题可以用无限个镜像电荷来解决。最初人们用球心上的电荷对每个球做近似,这些电荷将在另一个球中有其镜像电荷,这些镜像电荷又有其镜像电荷,如此等等。这个解就很像那发酵粉盒上的图画似的——收敛得相当快。

## § 6-10 电容器与平行极板

现在,我们提出另一类与导体有关的问题。考虑两块大的金属板,彼此互相平行并相隔一个比它们的宽度小得多的距离。而且,假定它们分别带有等量异号电荷。这样,每一板上的电荷将被另一板上的电荷所吸引,而这些电荷都将均匀地散布于板内侧表面上。两板将

分别具有电荷密度 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ ,如图6-12所示。从第5章我们知道:两板之间的场为 $\sigma/\epsilon_0$ ,而在两板外面的场则为零。两板将有不同的势 $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 。为了方便起见,我们将称这差为 $V$ ,它常叫作“电压”

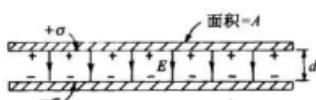


图 6-12 平行板电容器

$$\phi_1 - \phi_2 = V.$$

你将发现,有时人们把 $V$ 当作电势用,但我们却选用 $\phi$ 作为电势。

势差 $V$ 是单位电荷从一板移至另一板所需的功,因而

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d = \frac{d}{\epsilon_0 A}Q, \quad (6.33)$$

式中 $\pm Q$ 为每板上的总电荷, $A$ 为板的面积,而 $d$ 为两板间距。

我们发现电压与电荷成正比。对于在空间中的任何两个导体,只要一个带正电而另一个带等量负电, $V$ 与 $Q$ 之间的这种正比性都能找到。它们间的势差——也就是电压——将与电荷成正比(我们假定在其周围没有其他电荷)。

为什么会有这一种正比性呢?这只不过是叠加原理在起作用。假定我们已知道关于一组电荷的解,然后把两个这样的解叠加起来。电荷加倍,场也加倍,因此,将单位电荷从一点移至另一点所做的功也加倍。因此,在任何两点之间的势差就正比于电荷。特别是,两导体之间的势差正比于它们上面的电荷。当初有人把这个正比的式子写成了另一种形式。也就是说,他们写成

$$Q = CV,$$

式中  $C$  是一常数。这个比例常数叫做电容，而这样一种两个导体的系统则叫作电容器\*。对于我们的平行板电容器来说，

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \text{ (平行板).} \quad (6.34)$$

这个公式并非严格准确，因为在两板之间场并不像我们设想的那样真正处处均匀。在边缘处场并非刚好突然消失，而实际上更像图 6-13 所示的那种情形。总电荷不像我们所假定的为  $\sigma A$ ——对于边缘效应有一个小的修正。为了求得这个修正，我们得更准确地算出场并找出在边缘处究竟发生了什么。然而，这是一个复杂的数学问题，它可以用技巧解决，我们现在就不加以描述了。这种计算的结果表明，接近两极板边缘处电荷密度会比中间稍微高些。(这意味着平板电容器的电容比我们计算的稍大。)

我们仅仅谈及了关于两导体的电容。有时人们会谈到单个物体的电容。例如，他们会说，一个半径为  $a$  的球体有  $4\pi\epsilon_0 a$  的电容。他们把另一端设想为是一个半径无限大的球——即当有一电荷  $+Q$  放在球面上时，相反的电荷  $-Q$  则在一个无限大的球面上。人们也可以谈论当有三个或更多个导体时的电容，然而关于这方面的讨论我们将要推迟。

假设我们希望有一个电容很大的电容器，那就可以通过取极大面积但间距极小而获得。我们可以将浸过蜡的纸片夹在铝质薄膜之间而卷起来(如果把它密封在一个塑料盒中，那就会形成一个典型的无线电方面用的电容器了)。它有什么好处呢？好处在于能贮存电荷。比如，若我们试图把电荷贮存在一个球上，则当它充电时电势会很快升高，甚至可能高到电荷开始通过火花逃逸到空气中去。可是，若我们把等量电荷放在一个电容十分大的电容器上，则电容器间所形成的电压会很小。

在电子线路的许多种应用中，凡能吸收或释放大量电荷而又不大会怎样改变其电势的东西都是有用的，而这就是电容器。在电子仪器以及计算机中，电容器还有许多种应用。其中，有的被用来随着电荷的某一特定变化，从而相应地得到电压的一种特殊变化。在第 1 卷第 23 章中我们曾在描述共振电路特性的地方见到一种相似应用。

我们从  $C$  的定义可以看出，它的单位是  $CV^{-1}$ 。这个单位也叫法(F)。考察式(6.34)，我们见到  $\epsilon_0$  的单位可表达为  $Fm^{-1}$ ，这是最常用的单位。电容器的典型容量约在  $1 \mu F$  至  $1 mF$  之间。几皮法的那种小电容器常用于高频调谐电路中，而高达成百上千个微法的电容器

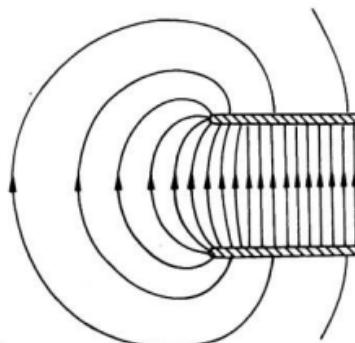


图 6-13 在两平行板边缘附近的电场

\* 有人认为电容“capacitance”和电容器“capacitor”这两个较新名词应分别代替电容“capacity”和电容器“condensor”那两个词。我们决定采用那较古老的一套名称，因为在物理实验室中——即使不是在书本里——这套旧名称仍会普遍用到。