

化用衍射的

4.3 Maxwell-Bloch 方程

$$k\ell \approx 0$$

- 前面处理诸如光学章动现象等相干相互作用时，考虑的是~~光学薄介质~~内的效应，此时光场随空间位置的变化忽略不计，只需研究原子系统的运动方程
不考虑场随空间的变化
- 在下面考虑的相干相互作用中，例如光子回波、自感应透明等等，需要考虑场在介质中随位置的变化，此时需要同时联合场与原子系统的运动方程来进行研究

假设频率为 ω 、极化方向沿**X**轴方向的单色线偏振光，沿**Z**轴正向传播，其电场强度可以表达为：

$$E_x(z,t) = \frac{1}{2} E_0(z,t) \exp\{\mathrm{i}[kz - \omega t + \phi(z,t)]\} + \text{c.c.} \quad (4.3-1)$$

其中c.c.表示前一项的复共轭。该外电场在介质中激发的电极化强度可表达为

$$\begin{aligned} P_x(z,t) &= \chi \varepsilon_0 E_x = \frac{1}{2} \underbrace{P_0(z,t)}_{\text{复数}} \exp\{\mathrm{i}[kz - \omega t + \phi(z,t)]\} + \text{c.c.} \\ &= \frac{1}{2} [U(z,t) - \mathrm{i}V(z,t)] \exp\{\mathrm{i}[kz - \omega t + \phi(z,t)]\} + \text{c.c.} \\ &= \frac{1}{2} [U(z,t) - \mathrm{i}V(z,t)] \exp\{\mathrm{i}[kz - \omega t + \phi(z,t)]\} \\ &\quad + \frac{1}{2} [U(z,t) + \mathrm{i}V(z,t)] \exp\{-\mathrm{i}[kz - \omega t + \phi(z,t)]\} \quad (4.3-2) \end{aligned}$$

其中 $U(z,t)$ 和 $V(z,t)$ 都是实函数，它们分别代表极化强度的色散分量（与外场同相）与吸收分量（与外场相位相差 $\pi/2$ ，对应介质损耗）。由介质中的 Maxwell 方程组，可以得到电场强度与电极化强度满足的方程组

$$D = \epsilon E, \quad u^2 = 1/\epsilon\mu \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$D = \epsilon_0 E + P, \quad c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0, \quad \mu = \mu_0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} \quad (4.3-3)$$

其中 c 是真空中的光速 (u 是介质中的光速)，光学介质一般是非磁性介质，故其磁导率 μ 等于真空磁导率 μ_0 （相对磁导率 $\mu_r=1$ ）。

为了方便表述，下面统一用 $F(z,t)$ 表示 $E_0(z,t)$ 、 $U(z,t)$ 、 $V(z,t)$ 、 $\varphi(z,t)$ ，设它们都是时间和空间坐标的慢变函数（远慢于按照传播因子方式的时空变化），即有

$$|\partial F/\partial z| \ll kF, |\partial F/\partial t| \ll \omega F$$

$$|\partial^2 F/\partial z^2| \ll k|\partial F/\partial z|, |\partial^2 F/\partial t^2| \ll \omega|\partial F/\partial t|$$

上式称为“慢变振幅/慢变相位近似”。在该近似下，解方程 (4.3-3) 时略去 $F(z,t) = E_0(z,t)$ 、 $U(z,t)$ 、 $V(z,t)$ 、 $\varphi(z,t)$ 的所有二阶偏导数以及两个一阶偏导数的乘积。同时采用旋转波近似，只保留含指数因子 $\exp[i(kz - \omega t + \varphi)]$ 的项，忽略其他的项。例如， $|\partial U/\partial z||\partial V/\partial z| \approx 0$, $|\partial E_0/\partial z||\partial \varphi/\partial t| \approx 0$

$$|\partial U/\partial z||\partial U/\partial t| \approx 0, |\partial^2 U/\partial z^2| \approx 0, |\partial^2 E_0/\partial t^2| \approx 0, \dots$$

$d\{\exp[i(kz - \omega t)]\}/dz \propto k\{\exp[i(kz - \omega t)]\}, d\{\exp[i(kz - \omega t)]\}/dt \propto \omega\{\exp[i(kz - \omega t)]\}$

$$E_x = (E_0/2) \exp[i(kz - \omega t + \phi)] + \text{c.c.} \quad (4.3-1)$$

$$P_x = [(U - iV)/2] \exp[i(kz - \omega t + \phi)] + \text{c.c.} \quad (4.3-2)$$

代入

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} \quad (4.3-3)$$

(4.3-1)、(4.3-2)代入(4.3-3)，利用慢变振幅/相位近似以及旋转波近似，令两边的实部与虚部分别相等，得

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) E_0 = \frac{\omega c \mu_0}{2} U \quad (4.3-4)$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{\omega c \mu_0}{2} V \quad (4.3-5)$$

因此相位 $\phi(z, t)$ 的变化与色散分量 $U(z, t)$ 相联系，电场强度振幅 $E_0(z, t)$ 的变化与吸收分量 $V(z, t)$ 相联系。

求解思路概括如下：

For a single-mode field, let

$$E_x = (1/2) \textcolor{brown}{E}_0(z, t) \exp\{\text{i}[kz - \omega t + \phi(z, t)]\} + \text{c.c.}$$

$$P_x = (1/2)[\textcolor{brown}{U}(z, t) - \text{i}\textcolor{brown}{V}(z, t)] \exp\{\text{i}[kz - \omega t + \phi(z, t)]\} + \text{c.c.}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2}$$

$F = U, V, E_0, \phi$, let $|\partial^2 F / \partial z^2|, |\partial^2 F / \partial t^2|, |\partial F / \partial z| |\partial F / \partial t| \approx 0$, etc..

just retain the term with $\exp\{\text{i}[kz - \omega t + \phi(z, t)]\}$ (rotational wave approximation) \rightarrow

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \textcolor{brown}{E}_0 = \frac{\omega c \mu_0}{2} \textcolor{brown}{U}, \quad \frac{\partial \textcolor{brown}{E}_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \textcolor{brown}{E}_0}{\partial t} = \frac{\omega c \mu_0}{2} \textcolor{brown}{V}$$

例如 $|\partial U / \partial z| |\partial V / \partial z| \approx 0, |\partial E_0 / \partial z| |\partial \phi / \partial t| \approx 0$

$|\partial U / \partial z| |\partial U / \partial t| \approx 0, \dots$

在前面已经给出(注意到 ρ_{ab} 与 ρ_{ba} 互为复共轭)

$$\begin{aligned} P_x(z,t) &= \langle \psi | \hat{P}_x | \psi \rangle = \langle \hat{P}_x \rangle = D r_1 = D(\rho_{ab} + \rho_{ba}) \\ &= D\rho_{ab} + (D\rho_{ab})^* = D\rho_{ab} + \text{c.c} \end{aligned}$$

另一方面，由(4.3-2)式知

$$P_x(z,t) = \frac{1}{2} [U(z,t) - iV(z,t)] \exp[i(kz - \omega t + \phi)] + \text{c.c}$$

将以上两式两行对比，可得

$$\rho_{ab}(z,t) = \frac{1}{2D} [U(z,t) - iV(z,t)] \exp[i(kz - \omega t + \phi)] \quad (4.3-6)$$

为了有利于掌握相关内容，复习一下以下内容

复习

$$\left. \begin{aligned}
 |\psi\rangle &= c_a |a, m+1\rangle + c_b |b, m\rangle, \\
 \langle \psi | &= \langle a, m+1 | c_a^* + \langle b, m | c_b^*, \\
 \langle \psi | \hat{P}_x | \psi \rangle &= \langle \psi | (\hat{P}^+ + \hat{P}^-) | \psi \rangle / 2, \\
 \langle b, m | \hat{P}^+ | a, m+1 \rangle &= 0, \\
 \langle a, m+1 | \hat{P}^- | b, m \rangle &= 0, \\
 \langle a, m+1 | \hat{P}^+ | b, m \rangle &= 2D, \\
 \langle b, m | \hat{P}^- | a, m+1 \rangle &= 2D,
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases}
 \langle \hat{P}_x \rangle = \langle \psi | \hat{P}_x | \psi \rangle \\
 = D(c_a^* c_b + c_a c_b^*) \\
 = D(\rho_{ba} + \rho_{ab}) \\
 = Dr_1, \\
 r_1 = \rho_{ab} + \rho_{ba}
 \end{cases}$$

$$\rho = |\psi\rangle\langle \psi| = \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a^* & c_b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_a|^2 & c_a c_b^* \\ c_a^* c_b & |c_b|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix},$$

注意： 1) 虽然电极化强度的平均值只有 x 分量，相关算符的定义和等式仍然保持不变，即仍然有 $\langle \psi | \hat{P}_x | \psi \rangle = \langle \psi | (\hat{P}^+ + \hat{P}^-) | \psi \rangle / 2$ 如果给出表达式 $\hat{P}_x \pm i\hat{P}_y = \hat{P}_x = \hat{P}^+ = \hat{P}^-$ ，就会给出自相矛盾的结果（上标为+和-的算符，分别使得角动量投影增加和减少）。算符的本征值或者平均值为零，与算符本身为零是两回事。

$$\hat{P}^\pm = \hat{P}_x \pm i\hat{P}_y, \quad E^\pm = E_x \pm iE_y,$$

$$\hat{P}^+ |m\rangle = (\hat{P}_x + i\hat{P}_y) |m\rangle \rightarrow |m+1\rangle, \quad \hat{P}^- |m\rangle = (\hat{P}_x - i\hat{P}_y) |m\rangle \rightarrow |m-1\rangle$$

$$\langle a, m+1 | \hat{P}^+ | b, m \rangle = \langle b, m | \hat{P}^- | a, m+1 \rangle = 2D$$

$$\langle b, m | \hat{P}^+ | a, m+1 \rangle = \langle a, m+1 | \hat{P}^- | b, m \rangle = 0$$

$$\hat{H}' = -\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{E} = -(\hat{P}_x E_x + \hat{P}_y E_y) = -(\textcolor{blue}{E^-} \hat{P}^+ + \textcolor{green}{E^+} \hat{P}^-) / 2$$

$$\begin{cases} H'_{ab} = \langle a, m+1 | \hat{H}' | b, m \rangle = -\textcolor{blue}{E^-} D = -(E_x - iE_y) D \\ H'_{ba} = \langle b, m | \hat{H}' | a, m+1 \rangle = -\textcolor{blue}{E^+} D = -(E_x + iE_y) D \end{cases}$$

注意：2) 已经假定电场的极化方向垂直于传播方向z方向，从而感应出来的电偶极矩和电极化强度方向也垂直于传播方向z方向，此时电偶极矩算符中包含的位置算符只有横向坐标分量： $\hat{P} = e\mathbf{R}$, $\mathbf{R} = (x, y, 0)$

另一方面，电场强度 \mathbf{E} 只是纵向坐标 z 和时间 t 的函数，不包含横向坐标 x 和 y ，因此在计算相互作用哈密顿算符的矩阵元时，由于电场不含有电偶极矩算符中的位置算符 \mathbf{R} ，依然可以提到状态矢量外面来(此时是厚介质，不再取长波近似)。即在这里没有取从长波近似时仍然有

$$\begin{cases} H'_{ab} = \langle a, m+1 | \hat{\mathbf{H}}' | b, m \rangle = -\mathbf{E}^- D = -(E_x - iE_y) D \\ H'_{ba} = \langle b, m | \hat{\mathbf{H}}' | a, m+1 \rangle = -\mathbf{E}^+ D = -(E_x + iE_y) D \end{cases}$$

$E(z)$ $P(x, y)$ 两者可以拆开

注意：3) 虽然电偶极矩算符中包含的位置算符只有横向坐标分量： $\hat{P} = e\mathbf{R}$, $\mathbf{R} = (x, y, 0)$

但是，它的量子力学平均值却是纵向坐标 z 和时间 t 的函数，例如

$$P_x(z, t) = \langle \psi | \hat{P}_x | \psi \rangle = \frac{1}{2} [U(z, t) - iV(z, t)] \exp[i(kz - \omega t + \phi)] + \text{c.c}$$

这是因为状态矢量 $|\psi\rangle$ 含有纵向坐标 z 和时间 t 。这再次说明了，算符的本征值或者平均值，与算符本身是不同的概念。

另一方面，在半经典理论中，电场强度 \mathbf{E} 只是普通函数不是算符，因此对于电场而言，下式是成立的

$$\underbrace{\mathbf{E}^+}_{= \mathbf{E}^-} = E_x + iE_y = E_x - iE_y = E_x$$

总之我们有

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' = \hat{H}_0 - \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{E} = \hat{H}_0 - \hat{P}_x E_x - \hat{P}_y E_y \\ = \hat{H}_0 - (E^- \hat{P}^+ + E^+ \hat{P}^-)/2 \\ H = \begin{pmatrix} H_{aa} & H_{ab} \\ H_{ba} & H_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_a & H'_{ab} \\ H'_{ba} & \varepsilon_b \end{pmatrix} \\ \hat{H}_0 |a\rangle = \varepsilon_a |a\rangle, \hat{H}_0 |b\rangle = \varepsilon_b |b\rangle \\ H'_{ab} = \langle a, m+1 | \hat{H}' | b, m \rangle = -(E_x - iE_y) D \\ H'_{ba} = \langle b, m | \hat{H}' | a, m+1 \rangle = -(E_x + iE_y) D \\ H'_{ab} = H'_{ba} = H'^*_{{ab}} = -D E_x, E_y = 0 \end{array} \right.$$

Note: 外场与电偶极矩相互作用的哈密顿量，量纲为能量量纲。由于电极化强度是单位体积中的电偶极矩之和，有时候直接把电偶极矩与电极化强度等同起来，但在相互作用的哈密顿量中，涉及到的原始概念是电偶极矩。

将公式 $H'_{ab} = H'_{ba} = -DE_x$ 代入密度矩阵元的运动方程(4.1-12), 即有

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \rho_{aa} / \partial t = -i(H'_{ab} \rho_{ba} - H'_{ba} \rho_{ab}) / \hbar = -i DE_x (\rho_{ab} - \rho_{ba}) / \hbar \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \rho_{bb} / \partial t = i(H'_{ab} \rho_{ba} - H'_{ba} \rho_{ab}) / \hbar = i DE_x (\rho_{ab} - \rho_{ba}) / \hbar \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \rho_{ab} / \partial t = -i \omega_0 \rho_{ab} + i H'_{ab} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) / \hbar \\ = -i \omega_0 \rho_{ab} - i DE_x (\rho_{aa} - \rho_{bb}) / \hbar \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \rho_{ba} / \partial t = (\partial \rho_{ab} / \partial t)^* = i \omega_0 \rho_{ba} + i DE_x (\rho_{aa} - \rho_{bb}) / \hbar \end{array} \right. \quad (4)$$

(3)和(4)对应同一个方程, (1)-(2)可以组合成一个方程, 从而有

(3) → $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} = -i \omega_0 \rho_{ab} - i \frac{DE_x}{\hbar} (\rho_{aa} - \rho_{bb}) \end{array} \right.$

(1)-(2) → $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{\partial t} = -2i \frac{DE_x}{\hbar} (\rho_{ab} - \rho_{ba}) \end{array} \right.$

$$E_x(z, t) = (1/2)E_0(z, t)\exp[i(kz - \omega t + \phi)] + \text{c.c.} \quad (4.3-1)$$

$$\rho_{ab}(z, t) = (1/2D)(U - iV)\exp[i(kz - \omega t + \phi)] \quad (4.3-6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} = -i\omega_0 \rho_{ab} - i\frac{DE_x}{\hbar}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \\ \frac{\partial(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{\partial t} = -2i\frac{DE_x}{\hbar}(\rho_{ab} - \rho_{ba}) \end{cases}$$

将(4.3-1)和(4.3-6)代入上式，使用旋转波近似，令方程两边实部和虚部分别相等，并且定义粒子数函数

得到

$$\underbrace{W(z, t)}_{\text{由 } \times \text{ 旋转波近似.}} = D(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \quad (4.3-7)$$

$$(4.3-8) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = -V[(\omega_0 - \omega) + \frac{\partial \phi}{\partial t}] \\ \frac{\partial V}{\partial t} = U[(\omega_0 - \omega) + \frac{\partial \phi}{\partial t}] + \frac{DE_0}{\hbar} W \\ \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{DE_0}{\hbar} V \end{array} \right.$$

推导该方程的逻辑思路如下：

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{ab} = (\rho_{ba})^* = (1/2D)(U - iV) \exp[i(kz - \omega t + \phi)] \\ E_x = (1/2)E_0 \exp[i(kz - \omega t + \phi)] + \text{c.c.} \\ \frac{\partial \rho_{ab}}{\partial t} = -i\omega_0 \rho_{ab} - i\frac{DE_x}{\hbar}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \\ \frac{\partial(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{\partial t} = -2i\frac{DE_x}{\hbar}(\rho_{ab} - \rho_{ba}) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = -V[(\omega_0 - \omega) + \frac{\partial \phi}{\partial t}] \\ \frac{\partial V}{\partial t} = U[(\omega_0 - \omega) + \frac{\partial \phi}{\partial t}] + \frac{DE_0}{\hbar} W \\ \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{DE_0}{\hbar} V \\ W = D(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \end{array} \right.$$

方程(4.3-4)、(4.3-5)和(4.3-8)一起构成Maxwell-Bloch方程组，前面两个是场方程，最后一个描述介质的物质方程。

场相位方程
$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)E_0 = \frac{\omega c \mu_0}{2} U \quad (4.3-4)$$

场振幅方程
$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{\omega c \mu_0}{2} V \quad (4.3-5)$$

物质方程
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = -V[(\omega_0 - \omega) + \frac{\partial\phi}{\partial t}] \\ \frac{\partial V}{\partial t} = U[(\omega_0 - \omega) + \frac{\partial\phi}{\partial t}] + \frac{DE_0}{\hbar} W \\ \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{DE_0}{\hbar} V \end{cases} \quad (4.3-8)$$

$$(4.3-8) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = -V[(\omega_0 - \omega) + \frac{\partial \phi}{\partial t}] \\ \frac{\partial V}{\partial t} = U[(\omega_0 - \omega) + \frac{\partial \phi}{\partial t}] + \frac{DE_0}{\hbar} W \\ \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{DE_0}{\hbar} V, \Delta\omega = \omega_0 - \omega \end{array} \right.$$

讨论瞬态相干效应时，一般不涉及相位 $\phi(z, t)$ 随时间的变化，令 $\partial\phi/\partial t = 0$ ，此时不考虑关于相位的方程(4.3-4)，而由(4.3-8)与(4.3-5)一起构成简化的 Maxwell-Bloch 方程组：

$$(4.3-9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = -\Delta\omega V \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \Delta\omega U + \frac{DE_0}{\hbar} W \\ \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{DE_0}{\hbar} V \\ \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{\omega c \mu_0}{2} V \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{物质方程} \\ \text{场方程} \end{array}$$

其中 $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ 是失谐量。这是处理相干相互作用及传播效应的重要方程，也是量子光学的核心方程

$$(4.3-9) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\Delta\omega \mathbf{V} \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \Delta\omega \mathbf{U} + \frac{D\mathbf{E}_0}{\hbar} \mathbf{W} \\ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\frac{D\mathbf{E}_0}{\hbar} \mathbf{V} \\ \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = \frac{\omega c \mu_0}{2} \mathbf{V} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{物质方程} \\ \text{场方程} \end{array}$$

$E_x = (1/2)\mathbf{E}_0 \exp[i(kz - \omega t + \phi)] + \text{c.c.},$
 $P_x = (1/2)(\mathbf{U} - i\mathbf{V}) \exp[i(kz - \omega t + \phi)] + \text{c.c.},$
 $\mathbf{W} = D(\rho_{aa} - \rho_{bb}),$
 $\Delta\omega = \omega_0 - \omega, \text{ let } \partial\phi/\partial t \approx 0,$

只考虑(4.3-9)时，等价于令 $\phi=0$ ，此时电极化强度可写成

$$\begin{aligned} P_x &= (1/2)(U - iV) \exp[i(kz - \omega t)] + c.c. \\ &= (1/2)(U - iV) \exp[i(kz - \omega t)] + (1/2)(U + iV) \exp[-i(kz - \omega t)] \\ \Rightarrow P_x &= U \cos(kz - \omega t) + V \sin(kz - \omega t) \quad (1) \end{aligned}$$

另一方面，静止坐标系中的Bloch矢量 $\mathbf{r}=(r_1, r_2, r_3)$ ，与旋转坐标系中的Bloch矢量 $\mathbf{B}=(B_1, B_2, B_3)$ ，有关系(见(4.1-34)式)

$$r_1 = B_1 \cos \Omega t - B_2 \sin \Omega t,$$

在薄介质近似下($kz \approx 0$)且令 $\Omega = \omega$ 时，由4.2节知电极化强度为

$$P_x = D r_1 = D(B_1 \cos \omega t - B_2 \sin \omega t) \quad (2)$$

$$P_x = Dr_1 = D(B_1 \cos \omega t - B_2 \sin \omega t) \quad (2)$$

对于厚介质，需要在(2)中考虑辐射场随空间位置的变化，此时可以对(2)中的时间做推迟变换 $e^{-i\omega t + iVz}$ 物理意义

$$t \rightarrow t' = t - kz/\omega \Rightarrow \omega t \rightarrow \omega t' = \omega t - kz$$

(物理意义：在 $t'=0$ 时刻在源点产生的场，在 $t=kz/\omega$ 时刻传播到 z 位置)，此时(2)变为

$$P_x = DB_1 \cos \omega t - DB_2 \sin \omega t, \quad t' = t - kz/\omega \Rightarrow$$

$$P_x = DB_1 \cos(kz - \omega t) + DB_2 \sin(kz - \omega t) \quad (2')$$

将上式与(1)对比，即与下式对比

$$P_x = U \cos(kz - \omega t) + V \sin(kz - \omega t) \quad (1)$$

显然有 $U = DB_1, V = DB_2$ (4.3-10)

$$U = DB_1, \quad V = DB_2 \quad (4.3-10)$$

再结合由 (4.3-7) 定义的粒子数函数

$$W = D(\rho_{aa} - \rho_{bb}) = Dr_3 = DB_3 \quad (4.3-11)$$

可以由 U 、 V 和 W 构成一个三维矢量：

$$\underline{S} = \underline{(U, V, W)} = \underline{DB} = \underline{D(B_1, B_2, B_3)}$$

事实上，在旋转角速度为 $\Omega=\omega$ 的旋转坐标系中，可以定义如下两个矢量

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3) = (U, V, W) = D\mathbf{B} \\ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\omega}_e(z, t) = \left(\frac{-DE_0}{\hbar}, 0, (\omega_0 - \omega) \right) \end{array} \right. \quad (4.3-12)$$

注意在相同条件 $\Omega=\omega$ 下，虽然 $\boldsymbol{\beta}$ 与(4.2-3)中的 $\boldsymbol{\omega}_e$ 在形式上完全一样，但由于(4.3-12)中的 D 和 E_0 不再是常数，而是时空坐标 (z, t) 的函数，因而 $\boldsymbol{\beta}$ 是时空坐标 (z, t) 的函数，而(4.2-3)中的 $\boldsymbol{\omega}_e$ 是一个常数。

由于 $\boldsymbol{\beta}$ 相当于随时空位置 (z, t) 而变化的 $\boldsymbol{\omega}_e$ ，在后面我们将用 $\boldsymbol{\omega}_e(z, t)$ 替代 $\boldsymbol{\beta}$ 。

由于矢量 \mathbf{S} 跟 Bloch 矢量 \mathbf{B} 只是相差一个标量因子 D ，仍然可以看成是一个新的 Bloch 矢量。不难证明，Maxwell-Bloch 方程组 (4.3-9) 的前三式，可以写成新的 Bloch 矢量 $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3) = (U, V, W) = D(B_1, B_2, B_3)$ 满足的进动方程，即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\Delta\omega V \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \Delta\omega U + \frac{DE_0 W}{\hbar} \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{DE_0 V}{\hbar} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{S} & (4.3-13) \\ \mathbf{S}(z, t) = (U, V, W) = D\mathbf{B} \\ \boldsymbol{\omega}_e(z, t) = \left(\frac{-DE_0}{\hbar}, 0, \Delta\omega \right) \end{cases}$$

当 D 和 $\boldsymbol{\omega}_e$ 与时空坐标无关时，方程 (4.3-13) 与方程 (4.1-43) 完全等价

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{B} \quad (4.1-43)$$

综合复习

$$|\psi\rangle = c_a |a, m+1\rangle + c_b |b, m\rangle = \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix}, \langle \psi | = c_a^* \langle a, m+1 | + c_b^* \langle b, m | = \begin{pmatrix} c_a^* & c_b^* \end{pmatrix},$$

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |c_a|^2 & c_a c_b^* \\ c_a^* c_b & |c_b|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1-r_3 \end{pmatrix},$$

$$r_1 = \rho_{ab} + \rho_{ba}, r_2 = i(\rho_{ab} - \rho_{ba}), r_3 = \rho_{aa} - \rho_{bb}, \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3),$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \leftrightarrow \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \leftrightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

$$\begin{cases} B_1 = r_1 \cos \Omega t + r_2 \sin \Omega t \\ B_2 = -r_1 \sin \Omega t + r_2 \cos \Omega t, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{B}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{S} = \boldsymbol{\omega}_e(z, t) \times \mathbf{S}, \\ B_3 = r_3 = \rho_{aa} - \rho_{bb} \end{cases}$$

$$\mathbf{S} = (U, V, W) = D\mathbf{B}, P_x = U \cos(kz - \omega t) + V \sin(kz - \omega t), W = D(\rho_{aa} - \rho_{bb}),$$

$$\langle a, m+1 | \hat{P}^+ | b, m \rangle = \langle b, m | \hat{P}^- | a, m+1 \rangle \equiv 2D, \quad \hat{P}^\pm = \hat{P}_x \pm i\hat{P}_y,$$

matter: $|\psi\rangle = c_a |a, m+1\rangle + c_b |b, m\rangle$, $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, $r_1 = \rho_{ab} + \rho_{ba}$, $r_2 = i(\rho_{ab} - \rho_{ba})$

$$r_3 = B_3 = \rho_{aa} - \rho_{bb}, \langle \hat{P}_x \rangle = D r_1, \langle \hat{P}_y \rangle = D r_2, \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{B} = (\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}),$$

$$P_x(z, t) = (1/2)[U(z, t) - iV(z, t)] \exp[i(kz - \omega t)] + \text{c.c.}, \quad W = D(z, t) B_3,$$

field: $E_x(z, t) = (1/2)E_0(z, t) \exp[i(kz - \omega t)] + \text{c.c.} \Rightarrow E_0(z, t)$

matter equation: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$, $\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$, $\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{B}, \boldsymbol{\omega}_e = \left(-\frac{2DE_0}{\hbar}, 0, \Delta\omega\right), \Delta\omega = (\omega_0 - \omega), \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\Delta\omega V, \frac{\partial V}{\partial t} = \Delta\omega U + \frac{DE_0}{\hbar} W, \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{DE_0}{\hbar} V \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S} = \boldsymbol{\omega}_e(z, t) \times \mathbf{S} \quad (1)$$

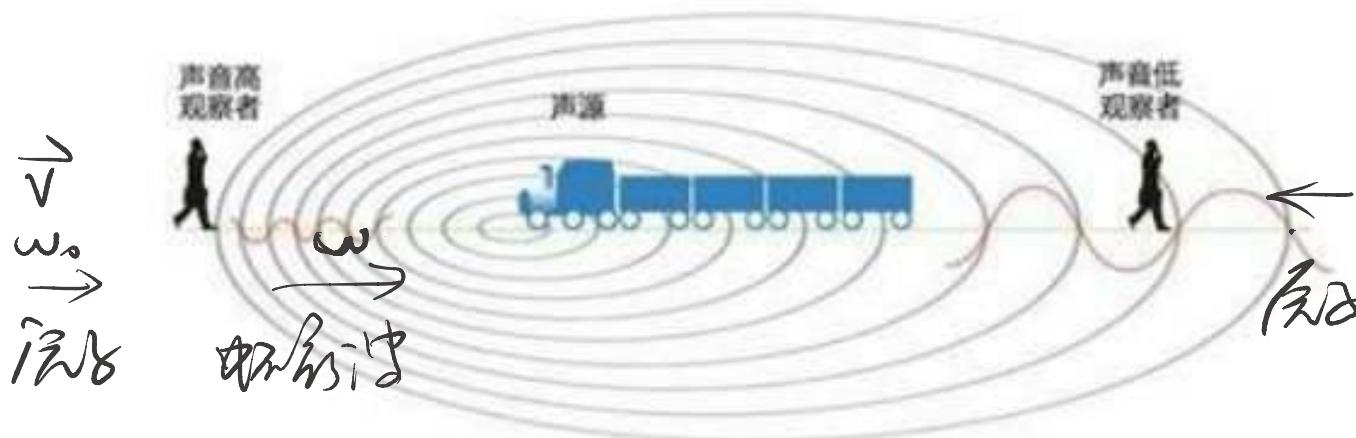
field equation: $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{\omega c \mu_0}{2} V \quad (2)$

Simplified Maxwell-Bloch equation = matter equation (1) + field equation (2)

去掉3个方程

已经忽略电磁场相位随时间的变化，并且忽略相位方程(4.3-4).

由于Doppler效应，不同运动速度的原子，有不同的共振频率，从而对于同一个频率的外场，不同原子的失谐量（包括正负和大小）都不同。因此必要时需要对失谐量求平均

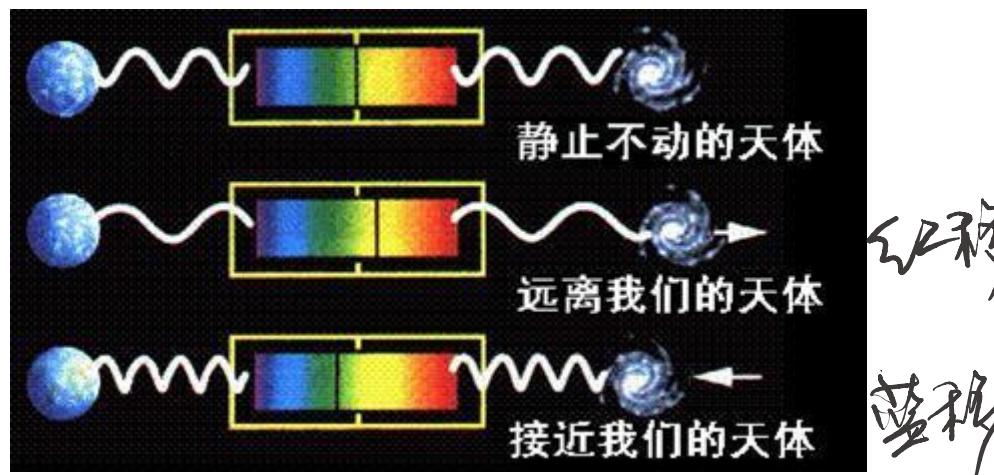


$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega$$

ω → $\Delta\phi$ 角移

$$\omega_0 = \omega'$$

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega'$$



在非均匀加宽介质中，原子频率中增加了Doppler频移部分，使得 $\Delta\omega \rightarrow \Delta\omega'$ ，设 $g(\Delta\omega')$ 表示非均匀加宽的线型函数，则在 Maxwell-Bloch 方程组中，色散分量与吸收分量应表达为（相当于对频谱求平均）

$$U(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\Delta\omega', z, t) g(\Delta\omega') d(\Delta\omega') \quad (4.3-14)$$

$$V(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\Delta\omega', z, t) g(\Delta\omega') d(\Delta\omega') \quad (4.3-15)$$

$$P_x = U(z, t) \cos(kz - \omega t) + V(z, t) \sin(kz - \omega t)$$

$$g(\Delta\omega) = \frac{P(\Delta\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(\Delta\omega) d\Delta\omega} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(\Delta\omega) d\Delta\omega = 1$$

$P(\Delta\omega)$ 为频率 $\Delta\omega$ 时的辐射功率密度

Maxwell-Bloch方程组描述了场与光学介质相干作用的规律，由不同的初始条件，可以求出不同的解析解。

例：假设初始时刻 $t=0$ ，原子处于下能级 ($B_3=r_3=-\rho_{bb}=-1$)，
Bloch矢量 $S=DB=D(0,0,-1)$ 平行于坐标系的第三轴，即

$$U(0)=V(0)=0, W(0)=-D \quad (4.3-16)$$

假设振幅为 E_0 的线偏振光，从 $t>0$ 时刻开始与原子发生相干相互作用，由 (4.3-13) 式描述，即，

$$\partial S / \partial t = \omega_e \times S,$$

$$S = (U, V, W),$$

$$\omega_e = (\omega_{e1}, 0, \omega_{e3}) = (-DE_0/\hbar, 0, \omega_0 - \omega)$$

我们将讨论如下：

1) 采用近似 $\partial\omega_e/\partial t \approx 0$ ，可解得

$$(4.3-17) \quad \begin{cases} U(z,t) = -D(\omega_{e1}\omega_{e3}/\omega_e^2)(1-\cos\omega_e t) \\ V(z,t) = D(\omega_{e1}/\omega_e)\sin\omega_e t \\ W(z,t) = -D[1-2(\omega_{e1}/\omega_e)^2 \sin^2(\omega_e t/2)] \\ \omega_{e1} = -DE_0/\hbar, \quad \omega_{e3} = \Delta\omega = \omega_0 - \omega \\ \omega_e = |\omega_e| = \sqrt{(DE_0/\hbar)^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \end{cases}$$

物理意义待补充

(4.3-17)与(4.2-6)形式上完全一致，但在(4.3-17)中， D 和 E_0 都是时空坐标(z, t)的函数，因而矢量 ω_e 是时空坐标(z, t)的函数，而在(4.2-6)中 ω_e 是一个常数。

$$S = (U, V, W) = DB \leftrightarrow B = (B_1, B_2, B_3)$$

$$\omega_e(z, t) \leftrightarrow \omega_e$$

2) 严格说来, 对于随 (z, t) 而变的 ω_e , 上式中的 $\omega_e t$ 要改为 ω_e 对时间 t 的积分。

$$\omega_e t \rightarrow \theta(z, t) = \int_0^t \omega_e(z, t') dt' \quad (4.3-18)$$

特别地, 在近共振下, $\omega = \omega_0 \rightarrow \omega_{e3} = \Delta\omega = 0$, 此时

$$\omega_e(z, t) = |\omega_e(z, t)| = DE_0(z, t)/\hbar$$

因此有

$$\omega_e t \rightarrow \theta(z, t) = \int_0^t \frac{DE_0(z, t')}{\hbar} dt' \quad (4.3-18')$$

于是问题概括为:

1) 外场 $\textcolor{blue}{E}_x$ 引起的介质极化强度 $\textcolor{blue}{P}_x$ 中, 与外场同相位的实部 $\textcolor{green}{U}$, 是色散分量; 与外场相差 $\pi/2$ 相位的虚部 $\textcolor{blue}{V}$, 是吸收分量; 粒子数函数 $\textcolor{green}{W}$ 与反转粒子数成正比。

$$\textcolor{green}{P}_x = \textcolor{blue}{U} \cos(kz - \omega t) + \textcolor{blue}{V} \sin(kz - \omega t) \quad \text{Bloch vector}$$

$$W = D(\rho_{aa} - \rho_{bb}), \quad \textcolor{magenta}{S} = (U, V, W) = \textcolor{blue}{D}\textcolor{blue}{B}$$

2) 假设初始时刻 $\textcolor{blue}{t}=0$, 原子处于下能级 ($B_3=-\rho_{bb}=-1$), $\textcolor{blue}{S}$ 矢量平行于坐标系的第三轴

$$\textcolor{blue}{S}(z, 0) = \textcolor{blue}{D}\textcolor{blue}{B} = (0, 0, -D), \quad \theta(z, 0) = \int_0^{t=0} \omega_e(z, t') dt' = 0,$$

3) 在上述给定的初始条件下求解下面方程

$$\begin{cases} \partial \textcolor{blue}{S} / \partial t = \boldsymbol{\omega}_e \times \textcolor{blue}{S} \\ \boldsymbol{\omega}_e = (\omega_{e1}, 0, \omega_{e3}) = (-DE_0/\hbar, 0, \Delta\omega) \\ \Delta\omega = \omega_0 - \omega \end{cases}$$

可得到如下解

$$(4.3-19) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = (U, V, W) = DB \\ U(z, t) = -D(\omega_{e1}\omega_{e3}/\omega_e^2)[1 - \cos \theta(z, t)] \\ V(z, t) = D(\omega_{e1}/\omega_e) \sin \theta(z, t) \\ W(z, t) = -D\{1 - 2(\omega_{e1}/\omega_e)^2 \sin^2[\theta(z, t)/2]\} \\ \omega_e = |\boldsymbol{\omega}_e| = \sqrt{(DE_0/\hbar)^2 + (\omega_0 - \underline{\omega})^2} \text{ 较小, 选取 } \underline{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}_e = (\omega_{e1}, 0, \omega_{e3}) = (-DE_0/\hbar, 0, \omega_0 - \underline{\omega}) \\ \theta(z, t) = \int_0^t \omega_e(z, t') dt' \approx \int_0^t DE_0(z, t')/\hbar dt' \text{ 为微幅量} \\ \underline{-DE_0/\hbar} \gg \underline{\omega_0 - \underline{\omega}}. \text{ 行积分} \end{array} \right.$$

下面我们将从上式出发，研究一些相干相互作用现象

4.4 光子回波

1. 脉冲面积

在近共振 $\omega=\omega_0$ 下，有

$$\omega_e(z, t) = |\omega_e| = \sqrt{(DE_0/\hbar)^2 + (\omega_0 - \omega)^2} = DE_0/\hbar$$

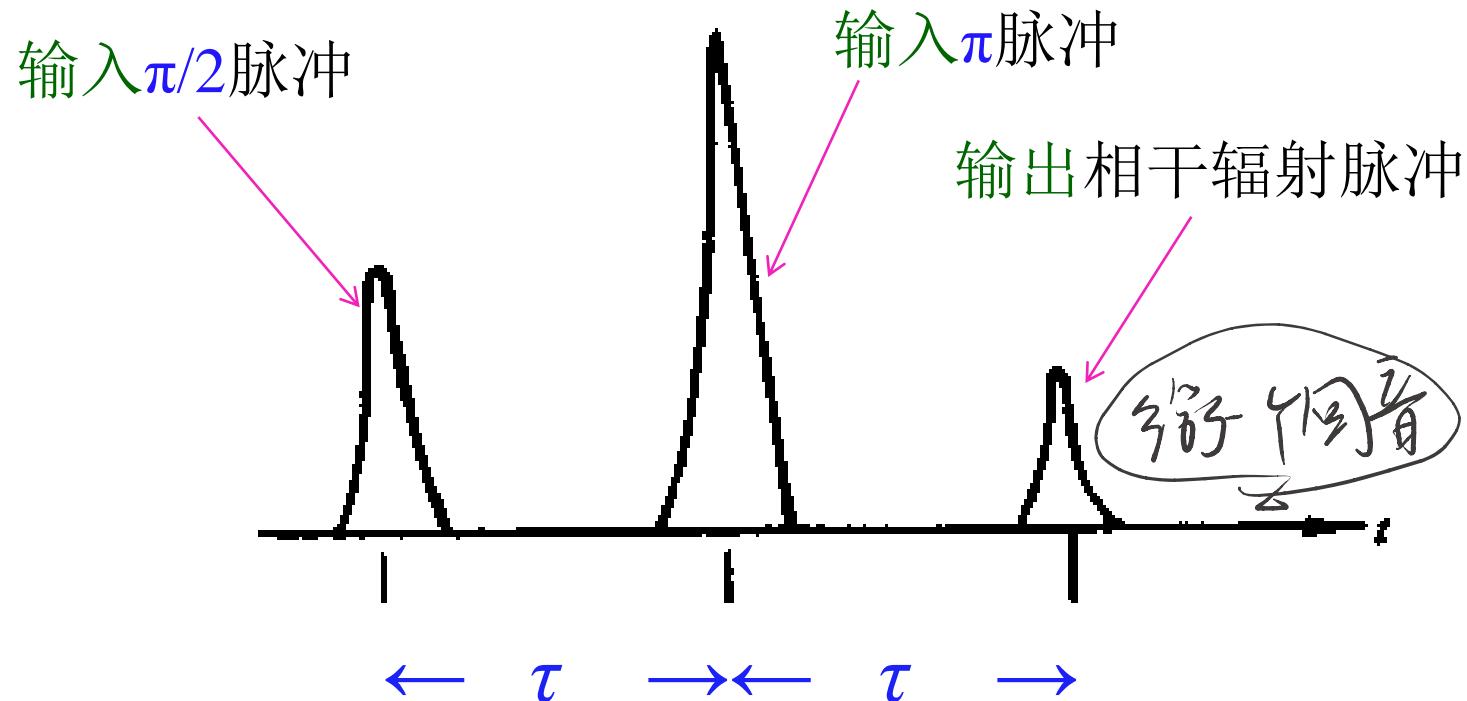
因此以下积分

$$\theta(z, t) = \int_0^t \omega_e(z, t') dt' = \int_0^t \frac{DE_0(z, t')}{\hbar} dt' \quad (4.4-1)$$

是脉冲场的振幅对时间的积分，积分的结果 $\theta(z, t)$ 称之为“脉冲面积”。脉冲面积分别为 $\theta(z, t)=\pi/2$ 和 π 的脉冲，可以简称为 $\pi/2$ 脉冲和 π 脉冲，依此类推。

2. 光子回波大意

如果向非均匀加宽介质先后输入 $\pi/2$ 脉冲和 π 脉冲，两次输入之间的时间间隔为 τ ，则经过延迟时间 τ 后，可以发现介质发射一个相干辐射脉冲。其中 $\tau \ll T_1, T_2$ (纵向和横向弛豫时间)。



光子回波的产生，可以利用Bloch矢量随时间变化的物理图像进行直观地描述。下面利用前面研究过的辐射场与二能级原子系统之间的相干相互作用，半定量地分析光子回波产生的机制。

3.多普勒非均匀加宽

以下的“相对静止”和“外场频率 ω ”，是相对于实验室观察者而言的。处于不同热运动状态的各个原子，由于多普勒效应而具有不同的共振频率，这就引起非均匀加宽。

- 1) 当原子相对静止时，它与频率为 ω 的外场产生共振的条件是 $\omega_0=\omega$ ，即原子频率 ω_0 等于外场频率 ω ；
- 2) 当原子运动速度为 v 、且 v 方向与外场传播方向相同时，由于多普勒效应，只有当外场频率变为 $\omega+\Delta\omega$ 时才能与原子产生共振，这等价于原子频率变为 $\omega_0=\omega+\Delta\omega$ ($\Delta\omega>0$)；因此对于频率为 ω 的外场而言，存在失谐量 $\omega_0-\omega=\Delta\omega$ ；
- 3) 反之，当原子运动速度为 $-v$ 时，只有当外场频率变为 $\omega-\Delta\omega$ 时才能与原子产生共振，这相等于原子频率变为 $\omega_0=\omega-\Delta\omega$ ，此时失谐量为 $\omega_0-\omega=-\Delta\omega$ 。即当原子运动速度与外场传播方向相反时，只有当外场频率变为 $\omega-\Delta\omega$ 时才能与原子产生共振。

注：在与原子相对静止的观测者看来，电磁场的频率始终为 ω

4. Bloch方程的解

考虑频率为 ω 、振幅为 $E_0(z,t)$ 的线偏振光，与原子频率为 ω_0 的二能级原子系统相干相互作用。在旋转角速度为 $\Omega=\omega$ 的旋转坐标系中，Bloch方程为($\Delta\omega=\omega_0-\omega$ 是失谐量)

$$(4.4-2) \begin{cases} \partial \mathbf{S} / \partial t = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{S} \\ \mathbf{S} = (U, V, W) = D \mathbf{B} \\ \boldsymbol{\omega}_e = (-DE_0/\hbar, 0, \Delta\omega) \end{cases}$$

即Bloch矢量 \mathbf{S} 绕进动轴 $\boldsymbol{\omega}_e$ 以进动频率 $\omega_e=|\boldsymbol{\omega}_e|$ 进动

假定在初始时刻 $t=0$, 原子处于下能级, 即有

$$\rho_{aa}=0, \rho_{bb}=1 \rightarrow B_3=r_3=\rho_{aa}-\rho_{bb}=-1$$

$$|\mathbf{B}|=|\mathbf{r}|=1 \Rightarrow |\mathbf{S}|=|D\mathbf{B}|=D$$

于是在 $t=0$ 时刻, Bloch 矢量 \mathbf{S} 沿第三坐标轴负向, 第1、第2 分量为零, 由于 $P_x=D\mathbf{r}_1$ 和 $P_y=D\mathbf{r}_2$ 只与 B_1 和 B_2 有关, 宏观电极化强度 $\mathbf{P}=(P_x, P_y, 0)$ 为零, 即

$$(4.4-3) \begin{cases} U(0)=V(0)=0, W(0)=-D \\ \mathbf{S}(0)=(U, V, W)=(0, 0, -D) \end{cases}$$

在此初始条件下，前面已经给出外场中的解

$$(4.3-19) \quad \left\{ \begin{array}{l} U(z,t) = -D(\omega_{e1}\omega_{e3}/\omega_e^2)[1 - \cos \theta(z,t)] \\ V(z,t) = D(\omega_{e1}/\omega_e)\sin \theta(z,t) \\ W(z,t) = -D\{1 - 2(\omega_{e1}/\omega_e)^2 \sin^2[\theta(z,t)/2]\} \\ \theta(z,t) = \int_0^t \omega_e(z,t') dt' \approx \int_0^t DE_0(z,t')/\hbar dt' \\ \omega_e = |\boldsymbol{\omega}_e| = \sqrt{(DE_0/\hbar)^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \\ \boldsymbol{\omega}_e = (\omega_{e1}, 0, \omega_{e3}) = (-DE_0/\hbar, 0, \omega_0 - \omega) \end{array} \right.$$

总结如下：

方程与初始条件

$$\left. \begin{array}{l} \partial \mathbf{S} / \partial t = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{S} \\ \mathbf{S} = (U, V, W), \quad \boldsymbol{\omega}_e = (\omega_{e1}, 0, \omega_{e3}) \\ \omega_{e1} = -DE_0/\hbar, \quad \omega_{e3} = \omega_0 - \omega = \Delta\omega \\ \omega_e = |\boldsymbol{\omega}_e| = \sqrt{(DE_0/\hbar)^2 + (\Delta\omega)^2} \\ \mathbf{S}(0) = (0, 0, -D) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{solution}}$$

$$(4.4-4) \left\{ \begin{array}{l} U(z, t) = -D(\omega_{e1}\omega_{e3}/\omega_e^2)[1 - \cos \theta(z, t)] \\ V(z, t) = D(\omega_{e1}/\omega_e) \sin \theta(z, t) \\ W(z, t) = -D\{1 - 2(\omega_{e1}/\omega_e)^2 \sin^2[\theta(z, t)/2]\} \\ \theta(z, t) = \int_0^t [DE_0(z, t')/\hbar] dt' \end{array} \right.$$

5. 用Bloch矢量描述光子回波

假定静止原子的失谐量满足 $\Delta\omega \approx 0$ ，而运动原子的失谐量 $\Delta\omega$ 满足

$$|\Delta\omega| = |\omega_{e3}| \ll |\omega_{e1}| = DE_0/\hbar$$

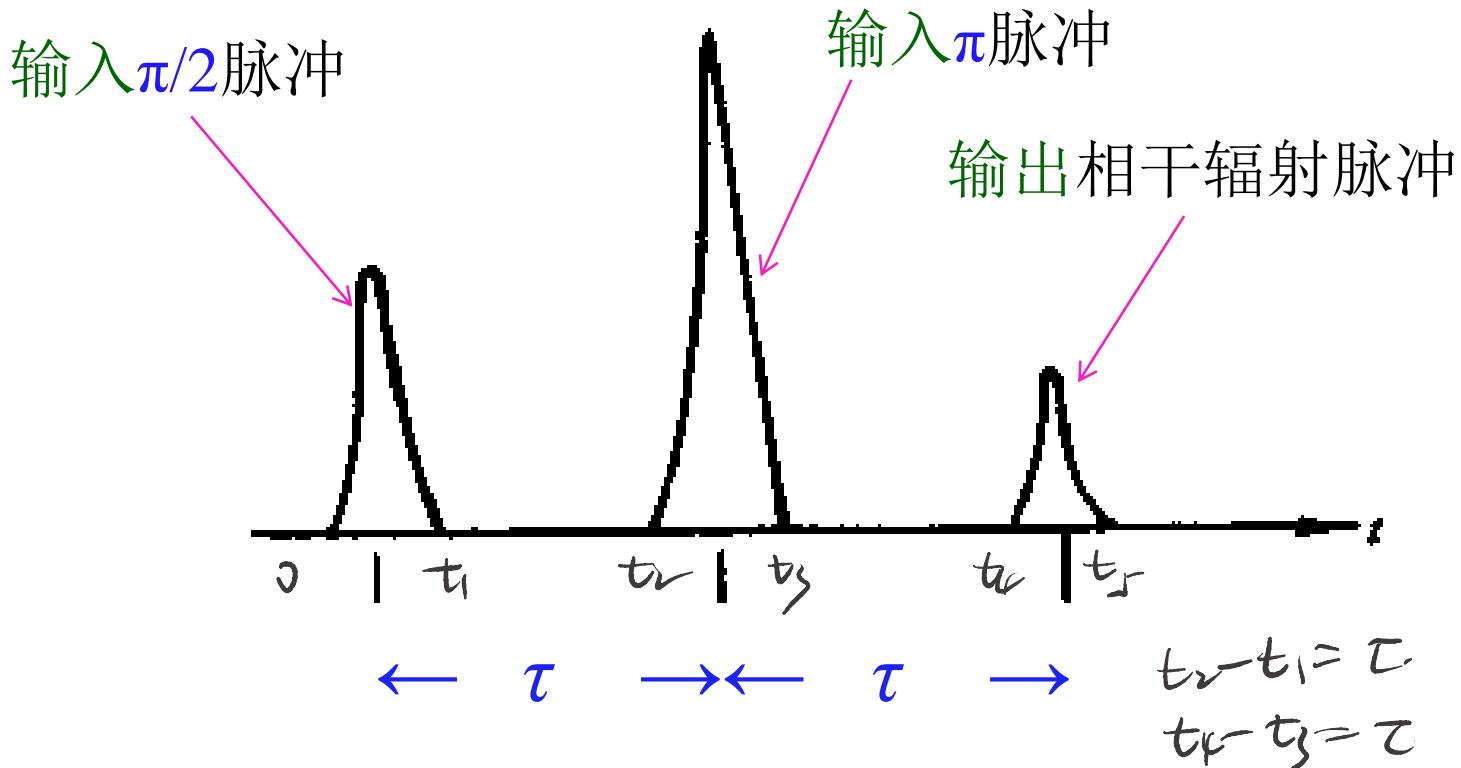
于是我们有

A) 存在外场时取近共振近似，即

$$\boldsymbol{\omega}_e = (\omega_{e1}, 0, \omega_{e3}) = (-DE_0/\hbar, 0, 0), \quad \omega_{e3} = \Delta\omega \approx 0$$

B) 不存在外场时有 $E_0=0$ ，因此取

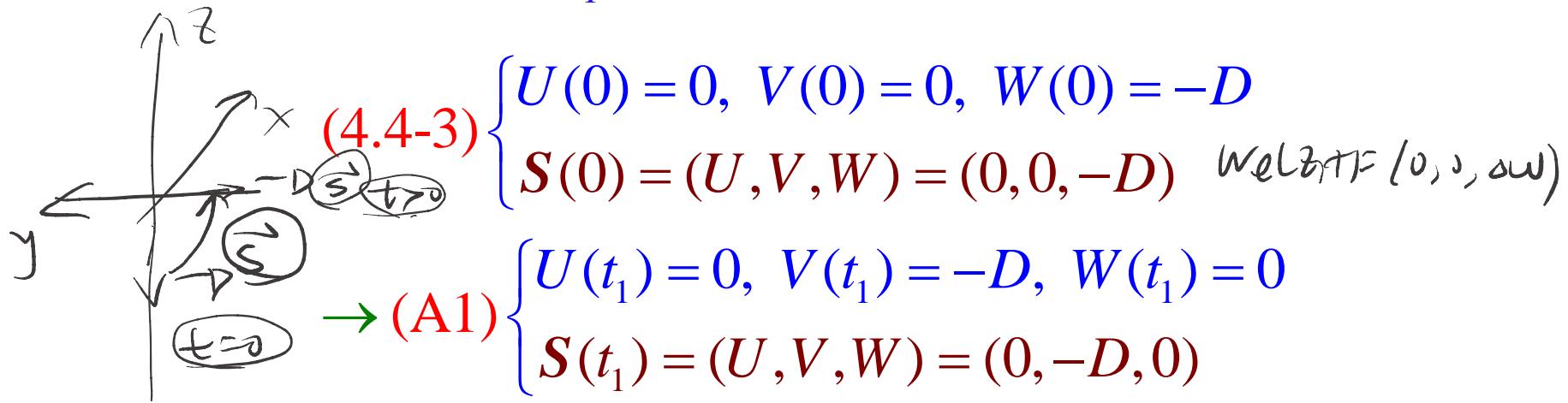
$$\boldsymbol{\omega}_e = (0, 0, \Delta\omega), \quad \omega_{e1} = 0$$



- 1) 在光子回波现象中，已知在 $0 < t < t_1$ 期间，有 $\pi/2$ 脉冲作用，将 $\theta(z,t)=\pi/2$ 代入(4.4-4)，并取近共振近似 $\omega_e=(-DE_0/\hbar, 0, 0)$ ，则(4.4-4)变为

$$\begin{cases} U(z,t) = -D \frac{\omega_{e1}\omega_{e3}}{\omega_e^2} (1 - \cos \theta) \\ V(z,t) = D \frac{\omega_{e1}}{\omega_e} \sin \theta \\ W(z,t) = -D [1 - 2(\frac{\omega_{e1}}{\omega_e})^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}] \\ \theta = \frac{\pi}{2}, \omega_e = |\boldsymbol{\omega}_e| = -\omega_{e1}, \omega_{e3} = 0 \end{cases} \Rightarrow (\text{A1}) \begin{cases} U(z,t_1) = 0 \\ V(z,t_1) = -D \\ W(z,t_1) = 0 \\ S(z,t_1) = (U,V,W) = (0,-D,0) \\ \boldsymbol{\omega}_e(z,t) = (-DE_0/\hbar, 0, 0) \end{cases}$$

将 $\pi/2$ 脉冲作用结束时 ($t=t_1$) 的 (A1) 与初始时刻 $t=0$ 的 (4.4-3) 进行对比



$$\mathbf{S}(0) = (U, V, W) = (0, 0, -D) \rightarrow \mathbf{S}(t_1) = (U, V, W) = (0, -D, 0)$$

$$\boldsymbol{\omega}_e(z, t) = (-DE_0/\hbar, 0, 0)$$

可见，即Bloch矢量 \mathbf{S} 在 $t=0$ 时刻沿第三轴负向， $t>0$ 开始绕第一轴旋转，在 $t=t_1$ 时刻旋转到沿第二轴的负向(见书上图4-1(a)和(b))。此时Bloch矢量 $\mathbf{S}(t_1)=(U, V, W) = (0, -D, 0)$ 意味着宏观极化强度达到最大(第一、二分量贡献极化强度，第三分量为零就意味着极化强度最大)，第三分量为零意味着上下能级粒子数相等。

$$P_x = U(z, t) \cos(kz - \omega t) + V(z, t) \sin(kz - \omega t)$$

$$U = DB_1 = 0, V = DB_2 = -D$$

$$W = D(\rho_{aa} - \rho_{bb}) = Dr_3 = DB_3 = 0$$

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \equiv D$$

2) 在 $t_1 < t < t_2$ 期间 (上一阶段的结束时刻 $t=t_1$, 是这一阶段的初始时刻), $\pi/2$ 脉冲作用结束, 此时不存在外场 $E_0=0$, 进动轴取 $\omega_e=(0, 0, \Delta\omega)$, 并且(A1)成为 $t=t_1$ 时的初始条件, 即在 $t=t_1$ 时刻, Bloch 矢量 S 沿第二轴的负向, 在 $t_1 < t < t_2$ 期间, Bloch 矢量 S 绕 $\omega_e=(0, 0, \Delta\omega)$ 、因而绕第三轴以角速度 $\omega_e=|\omega_e|=|\Delta\omega|$ 转动(进动), 此时的Bloch方程与初始条件为

进来是-起来, 后来由于这个脉冲, 才散开}.

$$(A2) \begin{cases} \partial S / \partial t = \omega_e \times S \\ S(t_1) = (0, -D, 0) \quad , \quad (t_1 < t < t_2) \\ \omega_e(z, t) = (0, 0, \Delta\omega) \end{cases}$$

$$(A2) \begin{cases} \partial \mathbf{S} / \partial t = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{S} \\ \mathbf{S}(t_1) = (0, -D, 0) \quad , \quad (t_1 < t < t_2) \\ \boldsymbol{\omega}_e(z, t) = (0, 0, \Delta\omega) \end{cases}$$

由(A2)可以看出，Bloch矢量 \mathbf{S} 绕 $\boldsymbol{\omega}_e=(0, 0, \Delta\omega)$ 进动的方向和进动的角速度大小，分别与失谐量 $\Delta\omega$ 的正负和大小有关，由于不同热运动速度的原子，造成的失谐量 $\Delta\omega$ 的正负和大小不同，因此不同原子的Bloch矢量 \mathbf{S} ，绕第三轴进动时的进动方向与进动速度各不相同，不同原子逐渐失去相位一致性(见图4-1(c))，到 $t=t_2$ 时刻，所有原子的Bloch矢量 \mathbf{S} 都位于由第1和第2坐标轴构成的坐标平面内，即都与第三轴垂直。

3) 在 $t_2 < t < t_3$ 期间 (上一阶段的结束时刻 $t=t_2$, 是这一阶段的初始时刻), 有 π 脉冲作用, 存在外场时取近共振近似, Bloch 矢量 \mathbf{S} 的进动轴为 $\omega_e = (-DE_0/\hbar, 0, 0)$ 。已知 $t=t_2$ 时刻所有原子的 Bloch 矢量 \mathbf{S} 都位于由第 1 和第 2 轴构成的坐标平面内, 在 $t_2 < t < t_3$ 期间, 在 π 脉冲作用下, 它们都绕 $\omega_e = (-DE_0/\hbar, 0, 0)$ (即绕第 1 坐标轴) 转动, 到 $t=t_3$ 时刻 π 脉冲作用结束时, 所有原子的 Bloch 矢量 \mathbf{S} 都绕第 1 轴转动 π 角, 使得 $t=t_3$ 时刻的 Bloch 矢量与 $t=t_2$ 时刻的 Bloch 矢量, 关于第 1、3 轴构成的坐标平面呈镜像对称(见图4-1(d))。

4) 从 $t=t_3$ 时刻往后, π 脉冲作用结束, 此时不存在外场 ($E_0=0$), 所有原子的 Bloch 矢量 \mathbf{S} 绕又开始绕 $\omega_e=(0, 0, \Delta\omega)$ 、因而绕第三轴进动。

此时跟在 $t_1 < t < t_2$ 期间绕第三轴进动的效果相反, 原来逐渐失去相位一致性的 Bloch 矢量, 此时相位变得逐渐趋于一致, 且趋于一致所花的时间等于原来失去一致时所花的时间。

原来失去一致的持续时间为 $\tau=t_2-t_1$, 因此从 $t=t_3$ 时刻开始, 再经历一段时间 $\tau=t_4-t_3$, 在时刻 $t=t_4$ 所有原子 Bloch 矢量变得一致: $\mathbf{S}(t_4)=(0, D, 0)$, \mathbf{S} 的第 2 分量达到最大, 因此又辐射一个相干光脉冲(见图4.4-1(e))。 (电极化强度达到极大值时, 其二阶导数也达到极大值, 从而产生极大辐射)

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} \quad (4.3-3)$$

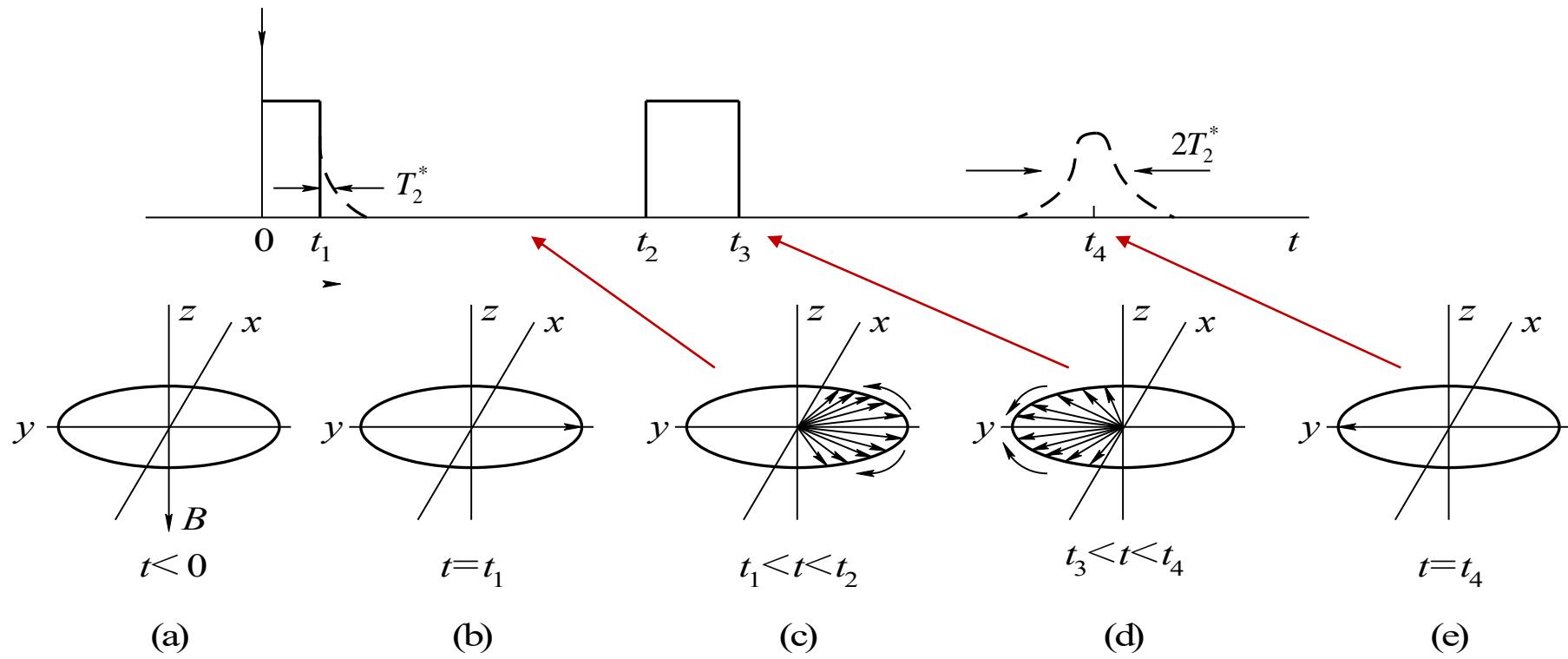


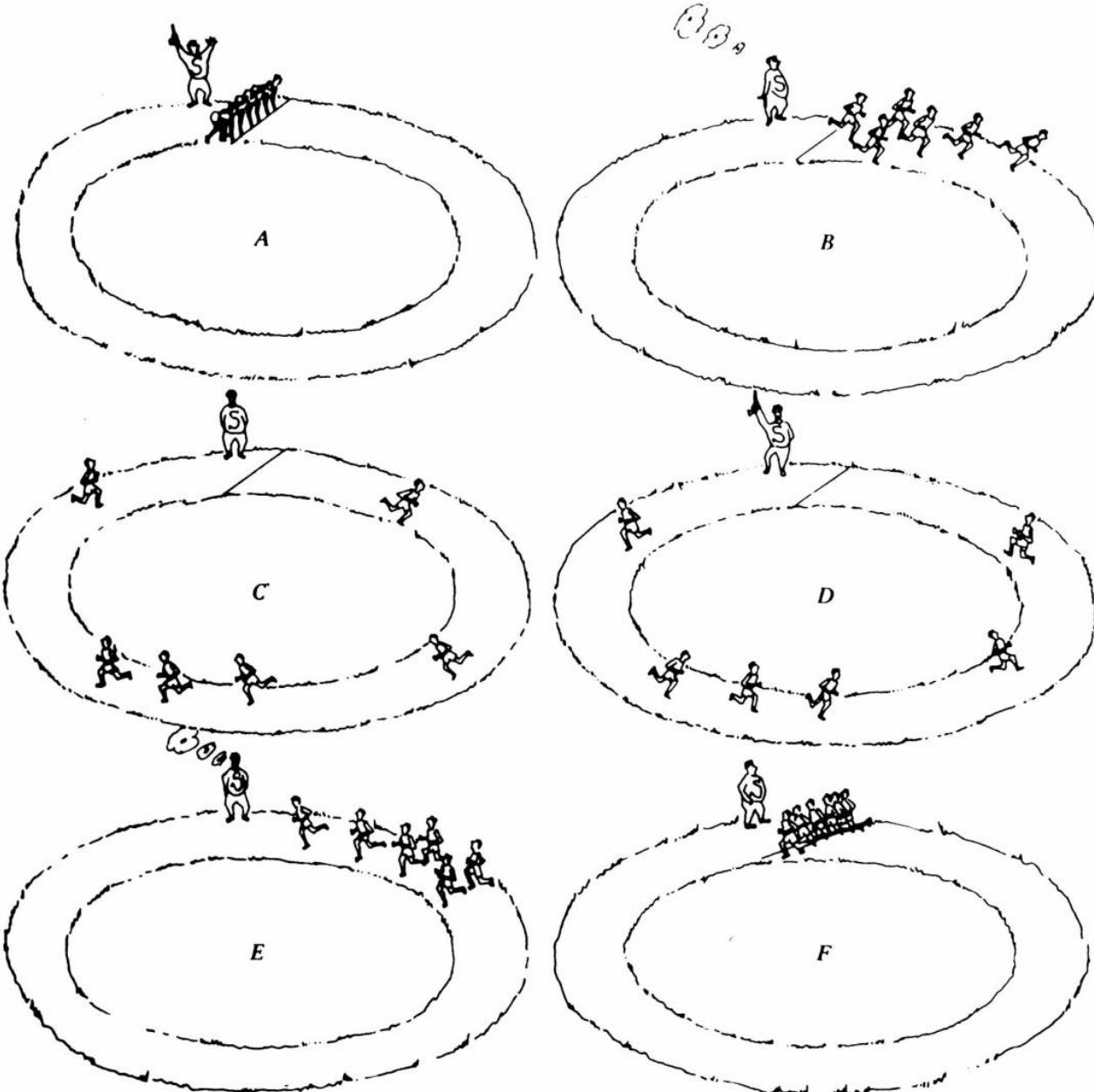
图4.4-1 布洛赫矢量描述回波现象原理

上图表示脉冲激发顺序

下图表示布洛赫矢量在旋转坐标系中的进动

在 $t_1 < t < t_2$ 和 $t_3 < t < t_4$ 期间，进动轴矢量方向因 $\Delta\omega$ 的正负而沿 z 轴正向或者负向，进动的角速度等于 $|\Delta\omega|$

回波現象比方



4.5 超辐射

1. 概述

- 在普通的自发辐射中，各个处于激发态的原子各自独立地辐射，各个原子辐射的光场相位是随机分布的，辐射光强与处于激发态的原子数目 N 成正比。普通的自发辐射是非相干的自发辐射。
- 超辐射则是相干的自发辐射，辐射的光强与 N^2 成正比。从相干性、方向性、短脉冲、高强度来看，超辐射具有激光的若干重要特征，但是激光是受激辐射，这是他们的区别。

超辐射

2. 超辐射与超荧光的区别（学生课外阅读）

超辐射：如果在初始时刻，处于激发态的各个原子振动频率相同、振幅相同、极化方向相同（例如用相干光脉冲照射原子样品，对原子系统进行相干激发），即原子偶极矩处于有序化状态，那么整个介质将呈现宏观极化强度，在初始时刻就产生很强的相干辐射（辐射方向与照射原子样品的激光脉冲相同），辐射过程很像纯经典的宏观偶极子辐射。这种合作辐射成为超辐射(super-radiance)。即各个原子的自发辐射以相同的方式一同发生。

超荧光: 如果在初始时刻，处于激发态的各个原子相位不相同，各个原子偶极矩在相位上没有关联，这时没有宏观极化强度。因此第一个光子发射时，与非相干自发辐射的光子没有任何区别。然而，在第一个光子发射之后，各个原子与辐射场相互作用的结果，它们的偶极矩相位产生了关联，这不仅增加了第二个光子的发射速率，而且在发射方向上也以第一个光子的发射方向为从优选择（即第一个光子是纯粹的自发辐射，而从第二个光子的辐射开始，与前面已经辐射的光子之间存在关联）。

随着发射光子数的增加，各个偶极矩之间的相位关联越来越强，发射速率继续增大，直到发射高峰出现，此时原子偶极矩相位达到了最大关联，辐射的光脉冲跟超辐射脉冲性质相同，这一辐射过程称为超荧光（super-fluorescence）。

4.5.1 超辐射的经典理论

我们主要目的是利用Bloch矢量进动模型，建立超辐射的半经典理论。但在这之前，我们简要提一下它的经典理论(具体参考书上pp.148-151)

由 N 个原子组成的体系，在外场激发下，成为由 N 个振荡的电偶极子构成的简谐振子系统，因而可以等效为 N 个具有相同频率、相同振幅、相同极化方向但相位不一定相同的电偶极谐振子组成的体系。在初始时刻，它们以相同的方式被激发。

以如下方式被激发

$$\vec{x}_l = (x_1, x_2, x_3)$$

设第 l 个偶极子的位置矢量为 \mathbf{x}_l , 偶极子之间的相互作用可以忽略不计, 该体系的电极化强度矢量为

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^N \mathbf{p}_l(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \quad (4.5-1)$$

$$\int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) d^3x = \sum_{l=1}^N \mathbf{p}_l(t)$$

其中, $\mathbf{p}_l(t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_l, t)$ 是位于 \mathbf{x}_l 处的电偶极矩矢量。 $(4.5-1)$ 式对整个空间积分, 即得全部 N 个电偶极矩矢量之和, 因此 $(4.5-1)$ 式的确是单位体积内的电偶极矩矢量之和, 即电极化强度矢量(注意字母大小写)。

事实上, 对于离散分布的点电荷(每个点电荷带电荷为 Q), 对应的电荷密度也可以表达为如下方式: $Q(a) \delta(r-a)$.

假设第 l 个偶极子 $\mathbf{p}_l(t)$ 的初相为 φ_l ， $\mathbf{p}_l(t)$ 可表达为

$$\mathbf{p}_l(t) = \mathbf{d}(t) \exp[i(\omega t - \varphi_l)] \quad (4.5-2)$$

其中， $\mathbf{d}(t)$ 是时间的慢变函数， φ_l 是常数相位因子。根据经典电动力学理论，可以得出由 N 个偶极子组成的系统产生的辐射功率 $A(t)$ 为

$$A(t) = \underbrace{N^2 M \omega^2 [d(0)/Q]^2}_{\text{括号部分}} (\mu/\tau_0) \exp(-t/\tau) \quad (4.5-3)$$

其中 M 与 Q 是单个偶极子的质量与电荷， $d(0)$ 是 $t=0$ 时刻的 $d(t)=|\mathbf{d}(t)|$ 。参数 μ 和 τ_0 见书上 p.150。特别地，(4.5-3) 式中

$$\tau = \underbrace{\tau_0 / N \mu}_{\text{括号部分}} \quad (4.5-4)$$

是系统的有效辐射寿命。

$\tau \propto \frac{1}{N}$ η 表示辐射效率。

$$A(t) = N^2 M \omega^2 [d(0)/Q]^2 (\mu/\tau_0) \exp(-t/\tau) \quad (4.5-3)$$

$$\tau = \tau_0 / N \mu \quad (4.5-4)$$

(4.5-3)和(4.5-4) 给出了超辐射的两个基本特征：

1) 辐射功率正比于参与辐射的电偶极子总数的平方，即

$$A(t) \propto N^2 ;$$

2) 有效辐射寿命反比于电偶极子总数，即 $\tau \propto 1/N$.

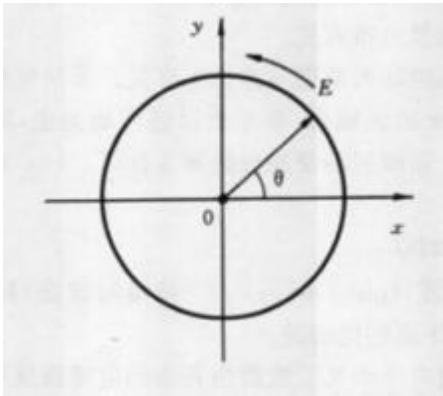
以上是根据经典电动力学理论给出的结果。下面我们将利用半经典理论进行研究

4.5.2 超辐射的半经典理论

在外场脉冲与二能级原子系统的相干相互作用中，假设 ω_0 是原子系统的共振频率，而外场脉冲是沿 z 轴方向传播的、频率为 ω 的圆极化光，即假设入射光表达为

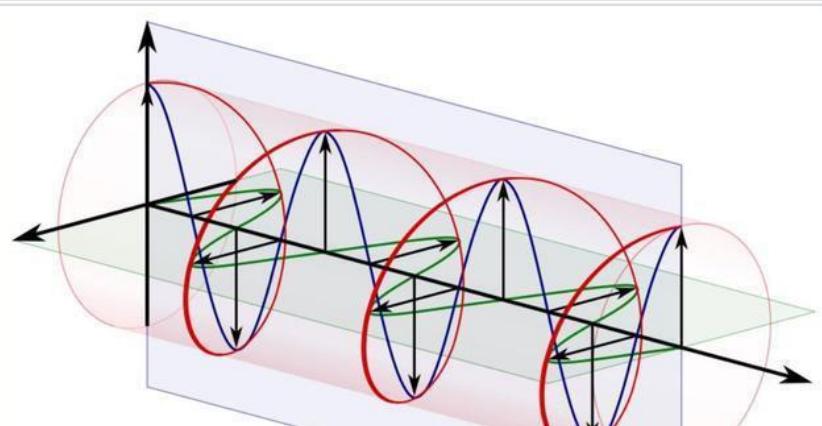
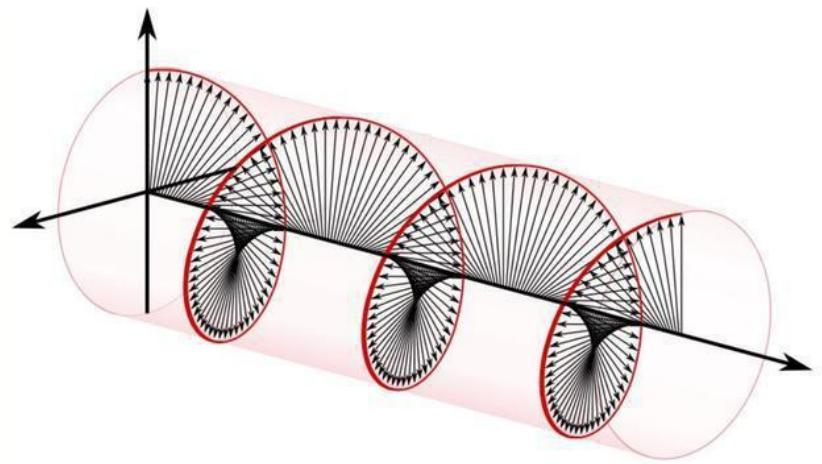
$$(4.5-5) \begin{cases} E_x(z, t) = E_0(z, t) \cos(\omega t - kz) \\ E_y(z, t) = E_0(z, t) \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

其中振幅 $E_0(z, t)$ 为时空坐标 (z, t) 的缓变函数



$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

圆极化光



椭圆极化光

$$\begin{cases} E_x = a \cos(\omega t - kz) \\ E_y = b \sin(\omega t - kz) \end{cases} \Rightarrow \frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1$$

在旋转角速度为 $\Omega=\omega$ 的旋转坐标系中， Bloch矢量 \mathbf{S} 方程为
 $(\Delta\omega=\omega_0-\omega)$

$$(4.5-6) \begin{cases} \partial \mathbf{S} / \partial t = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\omega}_e = (-2DE_0/\hbar, 0, \Delta\omega) \\ \mathbf{S} = D\mathbf{B} = D(B_1, B_2, B_3) \end{cases}$$

即在旋转坐标系中看来， Bloch矢量 $\mathbf{S}=D\mathbf{B}$ 随时间绕进动轴 $\boldsymbol{\omega}_e$ 进动，进动频率(单位时间内进动的圈数)为

$$\omega_e = |\boldsymbol{\omega}_e| = \sqrt{(2DE_0/\hbar)^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$$

为了产生超辐射，需要用相干光脉冲照射原子样品，对原子系统进行相干激发，使得原子偶极矩处于有序化（同相位）状态。为此，假设(4.5-5)给出的外场脉冲频率 $\omega=\omega_0$ ，从初始时刻 $t=0$ 开始入射原子系统，脉冲时间持续到 t_0 时刻，脉冲面积为 $\pi/2$ ，即

$$\theta(z, t_0) = \int_0^{t_0} \omega_e dt = \int_0^{t_0} \frac{2DE_0}{\hbar} dt = \frac{\pi}{2} \quad (4.5-7)$$

假设初始时刻原子处于下能级，则 $t=0$ 时的Bloch矢量 $\mathbf{B}(0)=(0,0,-1)$ ，从而 $\mathbf{S}(0)=D\mathbf{B}(0)=(0,0,-D)$ 。在 $0 \leq t < t_0$ 期间存在外场共振作用， $\Delta\omega=0$ ，(4.5-6)变为

$$(4.5-8) \begin{cases} \partial \mathbf{S} / \partial t = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\omega}_e(t) = (-2DE_0/\hbar, 0, 0) \\ \mathbf{S}(0) = D\mathbf{B}(0) = (0, 0, -D) \end{cases}$$

$$(4.5-8) \begin{cases} \partial \mathbf{S} / \partial t = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\omega}_e(t) = (-2DE_0/\hbar, 0, 0) \\ \mathbf{S}(0) = D\mathbf{B}(0) = (0, 0, -D) \end{cases}$$

(4.5-8) 表示，初始时刻沿第3轴负向的Bloch矢量 $\mathbf{B}(0)=(0,0,-1)$ ，在 $0 < t < t_0$ 期间绕进动轴 $\boldsymbol{\omega}_e=(-2DE_0/\hbar,0,0)$ (即绕第1轴) 进动。由于在 $0 < t < t_0$ 期间作用于原子系统的脉冲面积是 $\pi/2$ ，Bloch 矢量 \mathbf{B} 将从初始沿第3轴负向的位置，绕第1轴顺时针转动 $\pi/2$ 角，在 $t=t_0$ 时刻转到沿第2轴负向的位置，即 $\mathbf{B}(t_0)=(0,-1,0)$ 。注： $\omega_{e1}=-2DE_0/\hbar$ 是负的，按照进动方程判断，在右手坐标系中，应该是按照左手螺旋定则绕第一轴转动。

$\mathbf{B}(0)=(0,0,-1) \rightarrow \mathbf{B}(t_0)=(0,-1,0)$ 意味着在 $t=0$ 的初始时刻处于下能级的原子，通过外场脉冲的相干激发，在 $t=t_0$ 时刻变成反转粒子数为零的情形。由于 Bloch 矢量的第 1、2 分量，与电偶极矩的 x 、 y 分量成正比（电偶极矩由外场 $\mathbf{E}=(E_x, E_y, 0)$ 激发），故在 $t=0$ 时刻处于下能级的原子，通过外场脉冲的相干激发，在 $t=t_0$ 时刻有了电偶极矩。

$$\Omega = \omega \Rightarrow \begin{cases} r_1 = B_1 \cos \omega t - B_2 \sin \omega t \\ r_2 = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t \\ r_3 = B_3 = \rho_{aa} - \rho_{bb} \end{cases} \xrightarrow[B_1=B_3=0]{t=t_0, B_2=-1} \begin{cases} r_1(t_0) = \sin \omega t_0 \\ r_2(t_0) = -\cos \omega t_0 \\ r_3(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\langle \hat{P}_x \rangle = D r_1, \quad \langle \hat{P}_y \rangle = D r_2 \Rightarrow t = t_0, \quad \langle \hat{P}_x \rangle = D \sin \omega t_0, \quad \langle \hat{P}_y \rangle = -D \cos \omega t_0$$

(对此进一步的讨论见后面)

从 $t=t_0$ 时刻开始，外场脉冲对原子系统的相干激发作用结束， $E_0=0$ ，Bloch矢量 $\mathbf{B}(t_0)=(0,-1,0)$ 在旋转坐标系中保持不变(注意：前面已经作了共振假设 $\omega=\omega_0$ ，故 $\Delta\omega=0$)，即有：

$$(4.5-9) \begin{cases} \partial\mathbf{B}/\partial t = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{B} = 0 \\ \boldsymbol{\omega}_e(t) = (0, 0, 0) & (t \geq t_0) \\ \mathbf{B}(t) = (0, -1, 0) \end{cases}$$

接下来我们讨论如下：

1) 单个原子的电偶极矩平均值由(4.1-28)给出。利用静止坐标系中的Bloch矢量 $\mathbf{r}=(r_1, r_2, r_3)$ 与旋转坐标系中的Bloch矢量 $\mathbf{B}=(B_1, B_2, B_3)$ 之间的变换关系(i.e., (4.1-36) with $\Omega=\omega$)，并代入 $\mathbf{B}(t)=(0, -1, 0)$ for $t \geq t_0$ (取 $t \geq t_0$, 是以 t_0 为时间起点, 即做替换 $t \rightarrow t - t_0$)，得到：

$$(4.1-28) \quad \begin{cases} \langle \hat{P}_x \rangle = Dr_1 = -DB_2 \sin \omega(t - t_0) = D \sin \omega(t - t_0) \\ \langle \hat{P}_y \rangle = Dr_2 = DB_2 \cos \omega(t - t_0) = -D \cos \omega(t - t_0) \end{cases}$$

$$t \rightarrow t - t_0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = B_1 \cos \omega(t - t_0) - B_2 \sin \omega(t - t_0) \\ r_2 = B_1 \sin \omega(t - t_0) + B_2 \cos \omega(t - t_0) \\ r_3 = B_3, B_1 = B_3 = 0, B_2 = -1, \Omega = \omega \end{cases}$$

以上是 $t=0$ 时刻有一个原子处于下能级时，在 $t \geq t_0$ 时介质内的电偶极矩

2) 设在 $t=0$ 时刻单位体积内处于下能级的原子数为 N_b , 则在 $t \geq t_0$ 时介质内的电极化强度为

$$(4.5-10) \begin{cases} P_x = N_b \langle \hat{P}_x \rangle = N_b D \sin \omega(t - t_0) \\ P_y = N_b \langle \hat{P}_y \rangle = -N_b D \cos \omega(t - t_0) \end{cases}$$

3) 同理, 设在 $t=0$ 时刻单位体积内处于上能级的原子数为 N_a , 在 $0 < t < t_0$ 期间有 $\pi/2$ 脉冲作用于原子系统之后, 有 $\mathbf{B}(0)=(0,0,1) \rightarrow \mathbf{B}(t_0)=(0,1,0)$, 从而在 $t \geq t_0$ 时, 初始处于上能级的原子对电极化强度的贡献为

$$(4.5-11) \begin{cases} P_x = -N_a D \sin \omega(t - t_0) \\ P_y = N_a D \cos \omega(t - t_0) \end{cases}$$

4) 于是, 介质原子在 $0 < t < t_0$ 期间在 $\pi/2$ 脉冲相干激作用下, 在 $t \geq t_0$ 的任意时刻, 介质内感应出的电极化强度, 是以上两种贡献之和, 即为

$$(4.5-12) \begin{cases} P_x = -(N_a - N_b) D \sin \omega(t - t_0) \\ P_y = (N_a - N_b) D \cos \omega(t - t_0) \end{cases} \quad (t \geq t_0)$$

已知辐射功率密度 A

$$A \propto \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2} \right)^2 = (N_a - N_b)^2 \omega^4 D^2$$

小结

➤原来电偶极矩相位杂乱无章的原子系统，平均电偶极矩为零，宏观极化强度为零；在 $0 < t < t_0$ 期间经过 $\pi/2$ 脉冲的相干激发作用，原子偶极矩变成完全有序化（同相位）状态，在它们共同的方向上产生电极化强度的最大值，从而产生相干辐射，即超辐射，此时所有原子协同动作，相互关联。此时的“序”是用原子偶极矩的“序”来定义的。

注： $|B|=|r|=1$ 大小给定， $B_3=r_3=0$ 时，对电偶极矩有贡献的 $|r_1|^2+|r_2|^2$ 取最大值，此时产生的电极化强度 $|P|$ 最大； P 随时间呈正弦变化，这使得 $|P|$ 取极大值时， P 对时间二阶导数的大小也取极大值。因此在 $\pi/2$ 脉冲作用下， $|P|$ 达到最大时就产生最强烈的相干辐射。

$$A \propto \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2} \right)^2 = (N_a - N_b)^2 \omega^4 D^2 = N^2 \omega^4 D^2$$

➤ 由于辐射功率密度 A 与电极化强度矢量二阶时间导数的模平方成正比，因此在超辐射下， A 与单位体积内的反转粒子数 $N = (N_a - N_b)$ 的平方成正比。 

➤ 由于在二能级系统中，平均要消耗两个反转粒子才能辐射一个光子的能量 $\hbar\omega$ （注意还要考虑到受激吸收），因此在 $t=0$ 时刻原子系统的储能密度为 $\varepsilon(0) = (1/2)N\hbar\omega$ ，以超辐射方式辐射掉这部分能量所需要的时间，被定义为超辐射的衰减时间 τ ，即 $\tau = \varepsilon(0)/A \propto 1/N$ （即总的储能密度除以辐射功率密度）。 

总之，超辐射产生的辐射功率密度 A ，正比于反转粒子数的平方 N^2 ；原子系统储能密度的衰减时间 τ ，反比于反转粒子数 N 。

4.6 面积定理

概述

- 1969年麦卡尔(McCall)和哈恩(Hahn)推导出“面积定理”，它描述光脉冲在介质中传播时，脉冲面积随传播距离的变化规律。借助这一定理，无需求出Maxwell-Bloch方程的具体解，就可以直接得出讨论超短激光脉冲在吸收和放大介质中出现的某些现象，尤其是自感应透明现象。

- 具有一定脉冲面积的光脉冲，可以在吸收介质或增益介质中无损耗地传播，这种现象就是**自感应透明现象**，它与饱和吸收所呈现的透明有本质的区别，后者完全是非相干作用的结果，且二者在脉冲面积、传播速度等方面都有不同的性质。
- 自感应透明现象是厚介质中的相干现象，需要考虑到光脉冲的传播效应

饱和吸收：吸收介质中处于下能级的原子，在吸收进入介质中的光脉冲能量时，向上能级跃迁，最后导致处于上能级的原子和处于下能级的原子在数量相当，介质的增益作用和衰减作用抵消，此时介质对在其中传播的光脉冲而言，表现为透明的。

要点回顾

在4.3节中，已经研究过外场与二能级原子系统的相干相互作用，其中外场是

$$E_x(z,t) = E_0(z,t) \cos(\omega t - kz)$$

即频率为 ω 、振幅为 $E_0(z,t)$ 且沿 x 轴极化的光脉冲，它沿 z 轴正向传播。外场在厚介质中感应的电极化强度为

$$P_x = U(z,t) \cos(kz - \omega t) + V(z,t) \sin(kz - \omega t)$$

其中 $U(z, t)$ 和 $V(z, t)$ 分别描述介质的色散和吸收，分别与外场相位相同和相差 $\pi/2$

令 \hat{P}_x 是电偶极矩算符，且满足($|m\rangle$ 和 $|m+1\rangle$ 略去不写)

$$\langle a | \hat{P}_x | b \rangle = \langle b | \hat{P}_x | a \rangle = 2D$$

由密度矩阵对角元定义 $W(z, t) = D(\rho_{aa} - \rho_{bb})$

描述场与介质相互作用的Maxwell-Bloch方程组为

$$(4.6-1) \begin{cases} \partial U / \partial t = -\Delta\omega V \\ \partial V / \partial t = \Delta\omega U + (DE_0 / \hbar)W \\ \partial W / \partial t = -(DE_0 / \hbar)V \\ \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{\omega c \mu_0}{2} V \end{cases}$$

其中 $\Delta\omega=\omega_0-\omega$ 是失谐量， $\omega_0=(\varepsilon_a-\varepsilon_b)/\hbar$ 是原子频率。在静止坐标系和旋转坐标系中的Bloch矢量分别是 $\mathbf{r}=(r_1, r_2, r_3)$ 和 $\mathbf{B}=(B_1, B_2, B_3)$ 。前面已经定义新的Bloch矢量

$$\mathbf{S} = (U, V, W) = D\mathbf{B}$$

在旋转角速度 $\Omega=\omega$ 的旋转坐标系中，Maxwell-Bloch方程组(4.6-1)的前三个方程,可以重新用Bloch矢量 \mathbf{S} 表达成Bloch方程形式:

$$\begin{cases} \partial U / \partial t = -\Delta \omega V \\ \partial V / \partial t = \Delta \omega U + (DE_0 / \hbar) W \Rightarrow \\ \partial W / \partial t = -(DE_0 / \hbar) V \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial \mathbf{S} / \partial t = \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{S} \\ \mathbf{S} = (U, V, W) = D\mathbf{B} \\ \boldsymbol{\omega}_e = (-DE_0 / \hbar, 0, (\omega_0 - \omega)) \end{cases}$$

即 Bloch 矢量 \mathbf{S} 绕进动轴 $\boldsymbol{\omega}_e$ 以进动频率 $|\boldsymbol{\omega}_e|$ 进动。其中已经假定入射光脉冲的振幅 $E_0(z, t)$ 是时空坐标 (z, t) 的缓变函数。

两个出发点

假定失谐量 $\Delta\omega$ 满足 $|\Delta\omega|=|\omega_{e3}|<<|\omega_{e1}|=DE_0/\hbar$ ，即进动轴矢量 ω_e 的第三分量绝对值远小于第一分量的绝对值，那么

- 1) 存在外场时取近共振近似 $\Delta\omega=\omega_{e3}=0$ ，此时Bloch矢量 S 的进动轴矢量 $\omega_e=(-DE_0/\hbar, 0, 0)$ ，在第一坐标轴上；
- 2) 不存在外场时 $E_0=0$ ，从而 $\omega_{e1}=0$ ，此时不能取近共振近似，Bloch矢量 S 的进动轴矢量 $\omega_e=(0, 0, \Delta\omega)$ ，在第三坐标轴上。

下面把Bloch矢量 S 表达为失谐量 $\Delta\omega$ 和时空坐标 (z, t) 的函数，即 $S=S(\Delta\omega, z, t)$ 。为了推导面积定理，先给出两个引理。

两个引理

引理4.1 假设上述原子系统的Bloch矢量 \mathbf{S} 在 $t=-\infty$ 的初始条件为 $\mathbf{S}=(U, V, W)=(0, 0, S_3)$, 即

$$(4.6-2) \begin{cases} U(\Delta\omega, z, -\infty) = V(\Delta\omega, z, -\infty) = 0 \\ W(\Delta\omega, z, -\infty) = S_3 \end{cases}$$

假设在 $-\infty < t \leq t_0$ 期间有外场脉冲 $E_0(z, t)$ 作用, 此时取近共振近似 $\Delta\omega=0$, 代入方程 (4.6-1)的前三式, 即

$$\begin{cases} \partial U / \partial t = -\Delta\omega V \\ \partial V / \partial t = \Delta\omega U + (DE_0 / \hbar)W \\ \partial W / \partial t = -(DE_0 / \hbar)V \end{cases}$$

并以(4.6-2)为初始条件求解以上方程 (也可以直接用Bloch矢量 \mathbf{S} 绕第一轴旋转来分析), 得到(引理4.1)

$$(4.6-3) \quad \begin{cases} U(\Delta\omega, z, t) = 0 \\ V(\Delta\omega, z, t) = S_3 \sin \theta(z, t) \\ W(\Delta\omega, z, t) = S_3 \cos \theta(z, t) \quad (-\infty < t \leq t_0) \\ \theta(z, t) = \int_{-\infty}^t [DE_0(z, t')/\hbar] dt' \end{cases}$$

其中 $\theta(z, t)$ 是入射光脉冲从 $t=-\infty$ 到时间 $t=t$ 时的脉冲面积。上面的求解结果，还可以这样直观地分析得到：存在外场时取近共振近似 $\Delta\omega=0$ ，初始只有第三分量的 Bloch 矢量 $\mathbf{S}=(0, 0, S_3)$ 绕进动轴 $\boldsymbol{\omega}_e=(\omega_{e1}, 0, 0)$ 进动，即绕第一轴进动，此时 \mathbf{S} 的第一分量 $S_1=U=0$ 保持不变，且 \mathbf{S} 在进动中保持与第一轴垂直，转动 $\theta(z, t)$ 角时，转动的结果正是 (4.6-3)。

例如：垂直黑板为第一轴，水平向右为第三轴，从第三轴出发，在二三轴平面逆时针转 θ 角的变换得到 (4.6-3)

引理4.2 假设在 $t \geq t_0$ 时，上述外场脉冲停止对介质的作用，则在 $t=t_0$ 时，由(4.6-3)有以下新的初始条件：

$$\begin{cases} U(\Delta\omega, z, t_0) = 0 = U_0 \\ V(\Delta\omega, z, t_0) = S_3 \sin \theta(z, t_0) = V_0 \\ W(\Delta\omega, z, t_0) = S_3 \cos \theta(z, t_0) = W_0 \\ \theta(z, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} [DE_0(z, t)/\hbar] dt \end{cases}$$

则在 $t > t_0$ 时，Bloch方程的解为(引理4.2)

$$(4.6-4) \begin{cases} U(\Delta\omega, z, t) = -V_0 \sin \Delta\omega(t - t_0) \\ V(\Delta\omega, z, t) = V_0 \cos \Delta\omega(t - t_0) \\ W(\Delta\omega, z, t) = W_0 \quad (t \geq t_0) \end{cases}$$

垂直黑板为第三轴，水平向右为第一轴，初始在第二轴正半轴的 V_0 ，逆时针转一个角之后得到(4.6-4)

由于不存在外场 $E_0=0$ ，此时 $\omega_{e1}=0$ ，Bloch矢量 \mathbf{S} 的进动轴为 $\boldsymbol{\omega}_e=(0,0,\Delta\omega)$ ，即 \mathbf{S} 绕第3轴以角频率 $\Delta\omega$ 进动，此时 \mathbf{S} 的第3分量 $S_3=W_0$ 在转动中保持不变，而由初始时刻 $t=t_0$ 的分量 $S_1=U_0$ 和 $S_2=V_0$ 所形成的二维矢量 (U_0, V_0) ，在第1、2轴所形成的坐标平面内，绕第3轴以角速度 $\Delta\omega$ 转动。因此任意 t 时刻的 (U, V) ，相当于对 (U_0, V_0) 作一个旋转变换，且 t 时刻的转角为 $\theta=\Delta\omega(t-t_0)$ 。这就是(4.6-4)的来历。但要注意的是，此时 $U_0=0$

$$U(\Delta\omega, z, t) = U_0 \cos \Delta\omega(t - t_0) - V_0 \sin \Delta\omega(t - t_0)$$

$$= -V_0 \sin \Delta\omega(t - t_0)$$

$$V(\Delta\omega, z, t) = U_0 \sin \Delta\omega(t - t_0) + V_0 \cos \Delta\omega(t - t_0)$$

$$= V_0 \cos \Delta\omega(t - t_0)$$

将新的初始时刻 $t=t_0$ 的结果

$$\begin{cases} U(\Delta\omega, z, t_0) = 0 = U_0 \\ V(\Delta\omega, z, t_0) = S_3 \sin \theta(z, t_0) = V_0 \\ W(\Delta\omega, z, t_0) = S_3 \cos \theta(z, t_0) = W_0 \end{cases}$$

代入(4.6-4)，得到在 $t > t_0$ 期间满足(综合引理1和2的结果)

$$(4.6-4') \begin{cases} U(\Delta\omega, z, t) = -S_3 \sin \theta(z, t_0) \sin \Delta\omega(t - t_0) \\ V(\Delta\omega, z, t) = S_3 \sin \theta(z, t_0) \cos \Delta\omega(t - t_0) \\ W(\Delta\omega, z, t) = S_3 \cos \theta(z, t_0) \\ \theta(z, t) = \int_{-\infty}^t [DE_0(z, t')/\hbar] dt' \quad (t \geq t_0) \end{cases}$$

面积定理

定义脉冲面积

$$A(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(z, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t \frac{DE_0(z, t')}{\hbar} dt' \quad (4.6-5)$$

则有如下面积定理：

- 1) 在吸收介质中， $\rho_{aa}(-\infty)=0, \rho_{bb}(-\infty)=1$ ，脉冲面积 $A(z)$ 随传播距离 z 的变化满足方程

$$\frac{dA(z)}{dz} = -\frac{a}{2} \sin A(z) \quad (4.6-6a)$$

2) 在增益介质中, $\rho_{aa}(-\infty)=1$, $\rho_{bb}(-\infty)=0$, 脉冲面积 $A(z)$ 随传播距离 z 的变化满足方程

$$\frac{dA(z)}{dz} = \frac{a}{2} \sin A(z) \quad (4.6-6b)$$

(4.6-6)中的常数因子 a 为

$$a = \frac{\pi \mu_0 c \omega D^2 g(0)}{\hbar} \quad (4.6-7)$$

其中 c 为真空中的光速, μ_0 是真空介质的磁导率, $g(0)$ 为线型函数 $g(\Delta\omega)$ 在 $\Delta\omega=\omega_0-\omega=0$ 处的值。

(线型函数的定义见书上p.47)

面积定理的证明: 对脉冲面积定义式(4.6-5)的两边同时求 z 的导数, 有

$$\frac{dA(z)}{dz} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{D}{\hbar} \int_{-\infty}^t \frac{\partial E_0(z, t')}{\partial z} dt' \quad (4.6-8)$$

利用Maxwell-Bloch方程组(4.6-1)第四式, 以及考虑非均匀加宽之后的函数 $V(z, t)$ (即电极化强度振幅的虚部、Bloch矢量 \mathbf{S} 的第二分量)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{\omega c \mu_0}{2} V(z, t) \quad (4.6-1) \\ V(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\Delta\omega, z, t) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \quad (4.3-15) \end{array} \right.$$

线型函数 $g(\Delta\omega)$ 可理解为频率加宽导致的失谐量为 $\Delta\omega$ 时的概率, (4.3-15)式理解为对所有原子的多普勒加宽求平均。

式(4.6-8) 变为

$$\frac{dA(z)}{dz} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{D}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t'} + \frac{\omega c \mu_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\Delta\omega, z, t') g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \right]$$

由于规定在 $t=\pm\infty$ 时，场振幅 $E_0(z, t)=0$ ，可得上式右端第一项的时间积分为零。交换第二项的时间积分与频率 $\Delta\omega$ 积分的顺序，得 ($\Delta\omega$ 与时间无关)

$$\frac{dA(z)}{dz} = \frac{D\omega c \mu_0}{2\hbar} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^t V(\Delta\omega, z, t') dt' g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U = -\Delta\omega V \\ U(\Delta\omega, z, -\infty) = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^t V(\Delta\omega, z, t') dt' = \frac{-1}{\Delta\omega} U(\Delta\omega, z, t)$$

于是有

$$\frac{dA(z)}{dz} = -\frac{D\omega c \mu_0}{2\hbar} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\Delta\omega, z, t) \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} d(\Delta\omega) \quad (4.6-9)$$

假定在 $t \geq t_0$ 时，光脉冲场的振幅 $E_0(z, t) \approx 0$ ，即上述光脉冲在 $t \geq t_0$ 时近似停止对介质的作用，即在 $t \geq t_0$ 时布洛赫矢量绕第三轴转动，此时利用引理1和2的结果：

$$(4.6-4') \quad \begin{cases} U(\Delta\omega, z, t) = -S_3 \sin \theta(z, t_0) \sin \Delta\omega(t - t_0) \\ V(\Delta\omega, z, t) = S_3 \sin \theta(z, t_0) \cos \Delta\omega(t - t_0) \\ W(\Delta\omega, z, t) = S_3 \cos \theta(z, t_0) \\ \theta(z, t) = \int_{-\infty}^t [DE_0(z, t')/\hbar] dt' \quad (t \geq t_0) \end{cases}$$

即

$$\frac{dA(z)}{dz} = \frac{DS_3\omega c\mu_0}{2\hbar} \sin \theta(z, t_0) \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\Delta\omega) \frac{\sin \Delta\omega(t - t_0)}{\Delta\omega} d(\Delta\omega)$$

由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin \Delta\omega(t - t_0)}{\Delta\omega} = \pi\delta(\Delta\omega)$$

故

$$\frac{dA(z)}{dz} = \frac{DS_3\pi\omega c\mu_0}{2\hbar} g(0) \sin \theta(z, t_0) \quad (4.6-10)$$

$$A(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(z, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^t \frac{DE_0(z, t')}{\hbar} dt'$$

$$t \geq t_0, E_0(z, t) \approx 0 \Rightarrow A(z) \approx \theta(z, t_0)$$

故有

面积定理

$$\frac{dA(z)}{dz} = S_3 \frac{D\pi\omega c\mu_0}{2\hbar} g(0) \sin A(z) \Rightarrow$$

$$\frac{dA(z)}{dz} = \begin{cases} -\frac{a \sin A(z)}{2}, & S_3 = -D \\ \frac{a \sin A(z)}{2}, & S_3 = D \end{cases} \quad (4.6-11)$$

where $a \equiv \frac{D^2 \pi \omega c \mu_0}{\hbar} g(0)$

$$\frac{dA(z)}{dz} = \begin{cases} -\frac{a \sin A(z)}{2}, & S_3 = -D \\ \frac{a \sin A(z)}{2}, & S_3 = D \end{cases} \quad (4.6-11)$$

因为 $S_3=W(-\infty)$, $W(t)=D(\rho_{aa}-\rho_{bb})$, 故:

- 1) 对于吸收介质, 原子初始时刻处于下能级, 即 $t=-\infty$ 时 $\rho_{aa}=0, \rho_{bb}=1, S_3=W=-D$;
- 2) 对于增益介质, 原子初始时刻处于上能级, 即 $t=-\infty$ 时 $\rho_{aa}=1, \rho_{bb}=0, S_3=W=D$ 。

对(4.6-11)式分别取 $S_3=-D$ 和 $S_3=D$, 就分别得到面积定理中的方程(4.6-6a)和(4.6-6b). 证毕

面积定理的讨论

1) 当脉冲面积 $A(z)$ 比较小时, 利用 $\sin A \approx A$, 由吸收介质中的面积定理(4.6-6a)可得

$$\frac{dA(z)}{dz} = -\frac{aA(z)}{2} \Rightarrow A(z) = A(0) \exp\left(-\frac{az}{2}\right)$$

因此, 在吸收介质中, 当脉冲面积比较小时, 光脉冲能量($\propto DE_0 \propto A$)随传播距离呈指数衰减, 这就是光吸收的比尔定律。物理图像是: 光脉冲能量在传播中不断地被介质吸收, 导致其振幅越来越小。

同学思考：是否存在增益介质的面积定理？

当脉冲面积 $A(z)$ 比较小时，利用 $\sin A \approx A$ ，由增益介质中的面积定理(4.6-6b)可得

$$\frac{dA(z)}{dz} = \frac{aA(z)}{2} \Rightarrow A(z) = A(0) \exp\left(\frac{az}{2}\right)$$

于是，在增益介质中，当脉冲面积比较小时，光脉冲能量随传播距离呈指数增加，于是就存在光增益的“类比尔定律”。其物理图像是：光脉冲能量在传播中不断地从介质吸收中吸收能量，导致其振幅越来越大。

问题：以上论证成立否？

■当脉冲面积 $A(z)$ 变得比较大时，前提条件 $\sin A \approx A$ 不再成立，从而结论不再成立。但是在初始阶段，当 $A(z)$ 还比较小时，以上论证还是成立的。

2) 当脉冲面积为 π 的整数倍时，即 $A=m\pi, m=1,2,3\dots$ ，由面积定理知

$$\frac{dA(z)}{dz} = \pm \frac{a \sin A(z)}{2} = 0$$

因此，在光脉冲与原子的相干相互作用中，当脉冲面积 $A(z)$ 为 π 的整数倍时，脉冲面积将不随传播距离 z 而变化，该脉冲将无损耗地穿过介质，这种现象就称为自感应透明。

关于自感应透明现象的讨论

1) 对于吸收介质，只有当脉冲面积为 π 的偶数倍时，该脉冲的自感应透明才是稳定的；对于增益介质，只有当脉冲面积为 π 的奇数倍时，该脉冲的自感应透明才是稳定的。

例如：对于吸收介质，设初始脉冲面积满足 $A=m\pi+\delta$, $m=2,4,6\dots$ 为偶数，其中 $0<|\delta|<\pi$ 。由面积定理(4.6-6a)可得

$$dA(z)/dz = -(a/2)\sin(m\pi + \delta) = -(a/2)\sin \delta$$

- (1) 当 $\pi>\delta>0$ 时， $dA/dz<0$, A 将随传播距离 z 而减小，以至于 $A=m\pi+\delta\rightarrow m\pi$ (此时 $dA/dz=0$, 脉冲面积稳定在 $A=m\pi$ 上)；
- (2) 当 $-\pi<\delta<0$ 时， $dA/dz>0$, A 将随传播距离 z 而增大，以至于 $A=m\pi+\delta\rightarrow m\pi$ (此时 $dA/dz=0$, 脉冲面积稳定在 $A=m\pi$ 上)。

总之，在吸收介质中，脉冲面积趋向于 π 的偶数倍。

注意：对于吸收介质，如果令 $A=m\pi+\delta$ 中 $m=1, 3, 5\dots$ 为奇数（此时仍然有 $0<|\delta|<\pi$ ），给出的论证与上述论证等价。例如，此时由面积定理(4.6-6a)可得

$$dA(z)/dz = -(a/2)\sin(m\pi + \delta) = (a/2)\sin \delta$$

- (1) 当 $\pi>\delta>0$ 时 $dA/dz>0$, A 将随传播距离 z 而增大, 以至于 $A=m\pi+\delta\rightarrow(m+1)\pi$ (此时 $dA/dz=0$, 脉冲面积稳定在 $A=(m+1)\pi$ 上);
 - (2) 当 $-\pi<\delta<0$ 时 $dA/dz<0$, A 将随传播距离 z 而减小, 以至于 $A=m\pi+\delta\rightarrow(m-1)\pi$ (此时 $dA/dz=0$, 脉冲面积稳定在 $A=(m-1)\pi$ 上).
- 由(1)和(2)知，在吸收介质中，脉冲面积趋向于 π 的偶数倍。

2) 综合前面讨论可知:

(1) 吸收介质中的自感应透明现象，存在脉冲面积初始值必须大于 π 的阈值条件；

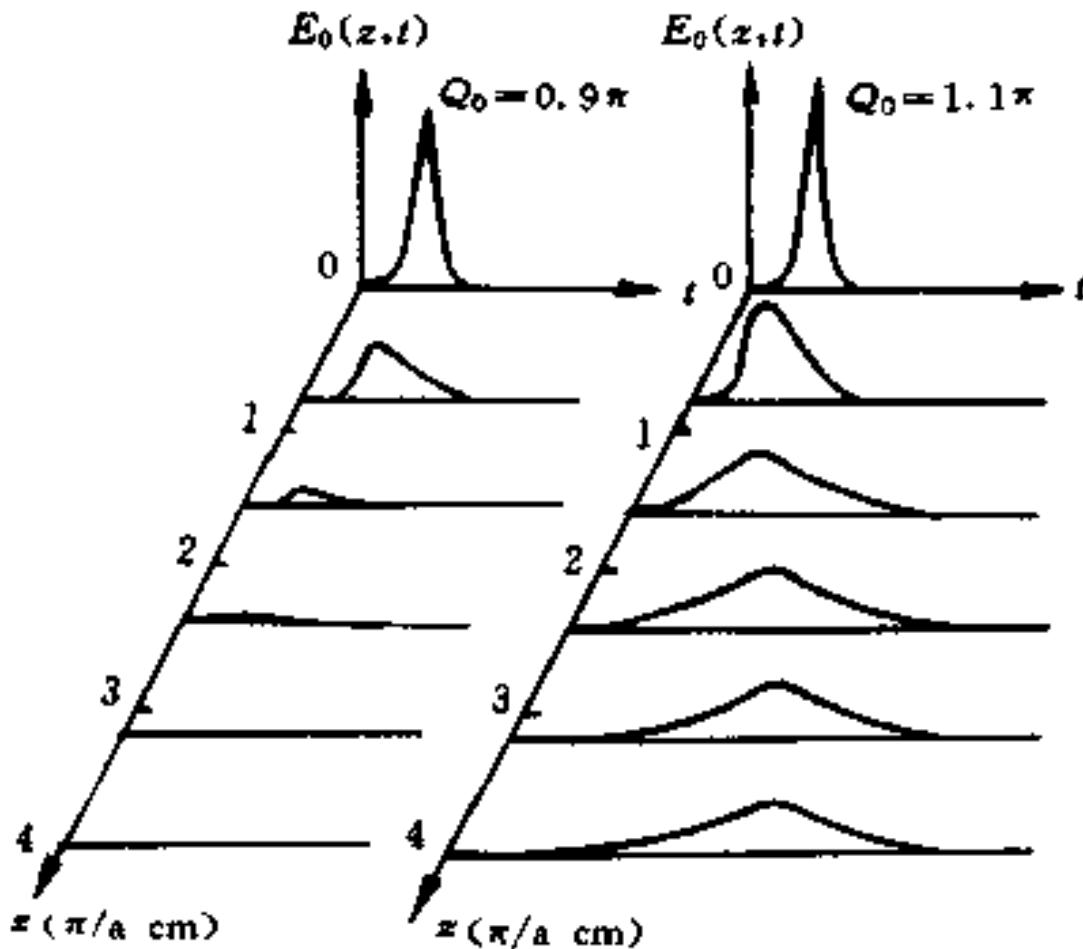
例如，当 $-\pi < \delta < 0$ 而 $m=1$ 时，

$$dA(z)/dz = -(a/2) \sin(\pi + \delta) = (a/2) \sin \delta < 0$$

于是 $A=m\pi+\delta \rightarrow (m-1)\pi=0$ 。脉冲面积趋于零，意味着脉冲被介质吸收，不再存在。

(2) 增益介质的自感应透明现象则不存在阈值。

学生作业：分析增益介质的自感应透明现象



(a)当输入值 $Q_0 = 0.9\pi$

(b)当输入值 $Q_0 = 1.1\pi$

图4.6.1 光脉冲在共振吸收介质中的传播(初始脉冲面积 $Q_0=1.1\pi$ 时, 最后脉冲面积稳定在 2π)

3) 对于在吸收介质中传播的光脉冲，在脉冲面积从初始值减小或增加、最后稳定在 π 的偶数倍的过程中，由于光脉冲不可能从介质中获取能量，唯一可能改变脉冲面积的途径是改变脉冲的宽度，因此可能出现脉冲的展宽与压缩。(就好比周长相同的长方形与正方形，后者面积更大)

4) 自感应透明现象可以用 π 脉冲的概念来解释。若初始时刻 $r_3=\rho_{aa}-\rho_{bb}=-1$ (即 $\rho_{bb}=1$, 原子处在下能级)， π 脉冲使之变为 $r_3=1$ (即 $\rho_{aa}=1$, 原子跃迁到上能级)；若初始时刻 $r_3=1$ (即 $\rho_{aa}=1$, 原子处在上能级)， π 脉冲使之变为 $r_3=-1$ (即 $\rho_{aa}=1$, 原子跃迁到下能级)。

(存在 π 脉冲的外场时，布洛赫矢量绕第一轴转动 π 角)

我们可以把一个 2π 脉冲看作是2个 π 脉冲：即把前半部分看成一个 π 脉冲，后半部分也看成一个 π 脉冲。当 2π 脉冲进入 $r_3=-1$ 的吸收介质时，前半部分 π 脉冲使 $r_3=-1$ 变为 $r_3=1$ ；后半部分的 π 脉冲，又使 $r_3=1$ 恢复为 $r_3=-1$ 。这就意味着，前半部分的 π 脉冲能量被介质吸收，使得初始位于下能级的原子跃迁到上能级；接着后半部分 π 脉冲的作用，使得位于上能级的原子又重新返回下能级，同时发生相干辐射，把吸收的能量又完全地奉还给光脉冲。

上述两步过程的总结果，是使得 2π 脉冲无损地通过吸收介质，这样介质就呈现为透明的。对于脉冲面积为 π 的偶数倍的其他脉冲场，它们通过吸收介质时发生的过程，只是上述 2π 脉冲通过时过程的多次重复。只有当脉冲面积为 π 的偶数倍时，初始位于下能级的原子才会在脉冲通过之后，又全部返回下能级。原子处于下能级时是稳定的，故对于吸收介质，只有面积为 π 的偶数倍的脉冲才是稳定的。

- 对于增益介质的自感应透明现象，不同的是，只有脉冲面积为 π 的奇数倍的光场，才能使得初始位于上能级的原子，在脉冲全部通过之后，全部跃迁到下能级。因此只有面积为 π 的奇数倍的脉冲才是稳定的。
- 面积为 $m\pi (m=1,3,5\dots)$ 脉冲通过增益介质时，增益介质不断地向光脉冲提供能量，同时光脉冲的脉冲面积维持不变，这使得脉冲的前沿得到线性放大，后沿得到饱和放大，使得脉冲波形不断地压缩，峰值功率不断地增加，但脉冲面积稳定在 π 的奇数倍。

- 在吸收介质中，电磁脉冲中的光子一路上不断地被吸收-发射、吸收-发射...、脉冲面积保持为 π 的偶数倍；在增益介质中，电磁脉冲中的光子一路上不断地被发射-吸收-发射，发射-吸收-发射...、脉冲面积保持为 π 的奇数倍。后者导致脉冲宽度越来越小，而振幅越来越大。
- 在吸收介质的自感应透明现象中，光子在介质中传播时，就好比沿途一路不断开小差，结果运动速度就慢了下来。
- 通过增益介质的自感应透明现象，可以产生高强度的超短脉冲，它可作为研究微观物质结构的光学探针，也可以用作微观尺度上的光学操控，因而存在许多潜在的应用。
2018年诺贝尔奖与此有关。此外，自感应透明现象为慢光研究和全光信息技术提供技术方案。

4.7 Maxwell-Bloch方程组的稳定解

——自感应透明现象的进一步研究

本节从求解Maxwell-Bloch方程组入手，进一步研究自感应透明现象，并对光脉冲的形状以及传播速度做定量分析

跟4.6节中一样，把Maxwell-Bloch方程组(4.3-9)或(4.6.1)中的Bloch矢量 $\mathbf{S}=(U,V,W)$ 和脉冲场振幅 E_0 表达为失谐量 $\Delta\omega=\omega_0-\omega$ 和时空坐标 (z, t) 的函数。

Maxwell-Bloch方程组在新变量下的表达

设光脉冲在介质中的传播速度为 v ，利用时空变量 (z, t) ，引入新变量（ t 相当于场点时间， γ 相当于源点时间）

$$\gamma = t - z/v \quad (4.7-1)$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \gamma} = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

把上式代入把 Maxwell-Bloch 方程组 (4.6-1)，得到 Maxwell-Bloch 方程组的新表达

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial}{\partial t} U = -\Delta \omega V, \quad \frac{\partial}{\partial t} V = \Delta \omega U + \frac{DE_0}{\hbar} W,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W = -\frac{DE_0}{\hbar} V, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_0 = \frac{\omega c \mu_0}{2} V \Rightarrow$$

$$(4.7-2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \gamma} = -\Delta \omega V(\Delta \omega, \gamma) \\ \frac{\partial V}{\partial \gamma} = \Delta \omega U(\Delta \omega, \gamma) + (DE_0/\hbar)W(\Delta \omega, \gamma) \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma} = -(DE_0/\hbar)V(\Delta \omega, \gamma) \\ \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{v} \right) \frac{\partial E_0}{\partial \gamma} = \frac{\omega c \mu_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\Delta \omega, \gamma) g(\Delta \omega) d(\Delta \omega) \end{array} \right.$$

其中第四式右边考虑了均匀加宽和非均匀加宽因素（对加宽求平均），而前三式不考虑加宽因素。为了求解(4.7-2)，先由第四式给出 $V(\Delta \omega, \gamma)$ 的表达式，再代入第一式和第三式。

为了求解(4.7-2), 令

$$V(\Delta\omega, \gamma) = V(0, \gamma) f(\Delta\omega) \quad (4.7-3)$$

$V(\Delta\omega, \gamma)$ 对应外场在介质中感应出的电极化强度虚部, 因而描述了介质的吸收函数, 而共振频率不同的原子其吸收是不同的。当 $\Delta\omega = \omega_0 - \omega = 0$ 时, 对应共振吸收, 此时 $f(\Delta\omega)$ 对应最大值, 不妨令 $f(0) = 1$ (这是(4.7-3)分离变量法的依据)。将(4.7-3)代入(4.7-2)第四式, 有

$$\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\nu}\right) \frac{\partial E_0}{\partial \gamma} = \frac{\omega c \mu_0}{2} V(0, \gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta\omega) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

$$\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\nu}\right) \frac{\partial E_0}{\partial \gamma} = V(0, \gamma) \frac{\omega c \mu_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta\omega) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

$$\Rightarrow V(0, \gamma) = -B \dot{E}_0 \quad (4.7-4)$$

其中

$$\dot{E}_0 = \partial E_0 / \partial \gamma, \text{ and so on}$$

$$B = \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{c}\right) \left[\frac{\omega c \mu_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta\omega) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \right]$$

(4.7-4)代入(4.7-3), 得

$$V(\Delta\omega, \gamma) = V(0, \gamma) f(\Delta\omega) = -B f(\Delta\omega) \dot{E}_0 \quad (4.7-5)$$

(4.7-5)代入(4.7-2)的第一、三式，即有

$$(4.7-6) \left\{ \begin{array}{l} \dot{U} = \frac{\partial U}{\partial \gamma} = -\Delta\omega V(\Delta\omega, \gamma) = \Delta\omega B f(\Delta\omega) \dot{E}_0 \\ \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \gamma} = -\frac{D E_0}{\hbar} V(\Delta\omega, \gamma) = \frac{D}{\hbar} B f(\Delta\omega) E_0 \dot{E}_0 \end{array} \right.$$

$\dot{E}_0 = \frac{\partial E_0}{\partial \gamma}$

对于吸收介质，考虑初始条件：当 $\gamma=-\infty$ 时，无外场，原子处于下能级，即

$$(4.7-7) \left\{ \begin{array}{l} U(\Delta\omega, -\infty) = V(\Delta\omega, -\infty) = E_0(-\infty) = 0 \\ W(\Delta\omega, -\infty) = W_0 = -D \end{array} \right.$$

使用以上初始条件，对(4.7-6)在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上对变量 γ 积分，得到

$$(4.7-8) \begin{cases} U(\Delta\omega, \gamma) = \Delta\omega B f(\Delta\omega) E_0(\gamma) \\ W(\Delta\omega, \gamma) = -D + \frac{D}{2\hbar} B f(\Delta\omega) E_0^2(\gamma) \end{cases}$$

下面分两种情况进行讨论

4.7.1 近共振近似下的解($S=(U, V, W)$, $\omega_e=(-DE_0/\hbar, 0, \Delta\omega)$)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} S = \omega_e \times S \\ S(0) = (0, 0, S_3) \\ \omega_e = \left(-\frac{DE_0}{\hbar}, 0, \Delta\omega\right) \end{cases} \Rightarrow (4.6-3) \begin{cases} U(\Delta\omega, z, t) = 0 \\ V(\Delta\omega, z, t) = S_3 \sin \theta(z, t) \\ W(\Delta\omega, z, t) = S_3 \cos \theta(z, t) \\ \theta(z, t) = \int_{-\infty}^t [DE_0(z, t')/\hbar] dt' \end{cases}$$

在近共振近似 $|\Delta\omega| \ll DE_0/\hbar$ 下, $\Delta\omega \rightarrow 0$, $f(\Delta\omega) \approx 1$, 且由引理 4.1 中(4.6-3)式知 (将时空变量(z, t)已经换成新变量 $\gamma = t - z/v$, 并且代入吸收介质的初始条件 $S_3 = -D$)

$$(4.7-9) \quad \begin{cases} \Delta\omega \rightarrow 0, f(\Delta\omega) = f(0) = 1 \\ U(\Delta\omega, \gamma) = U(0, \gamma) = 0 \\ V(\Delta\omega, \gamma) = V(0, \gamma) = -D \sin \theta(\gamma) \\ W(\Delta\omega, \gamma) = W(0, \gamma) = -D \cos \theta(\gamma) \\ \theta(\gamma) = \int_{-\infty}^{\gamma} [DE_0(\gamma')/\hbar] d\gamma' \end{cases}$$

(4.7-9)中第四式和(4.7-8)第二式($\Delta\omega \rightarrow 0$)，是从不同角度获得的同一个对象 $W(\Delta\omega, \gamma)$ ，因此有

$$W(0, \gamma) = -D + \frac{D}{2\hbar} BE_0^2(\gamma) = -D \cos \theta(\gamma) \Rightarrow$$

$$E_0^2(\gamma) = \frac{2\hbar[1 - \cos \theta(\gamma)]}{B} = \frac{4\hbar}{B} \sin^2 \frac{\theta(\gamma)}{2} \quad (4.7-10)$$

由上式可得

$$\begin{cases} E_0(\gamma) = 2\sqrt{\frac{\hbar}{B}} \sin \frac{\theta(\gamma)}{2} \\ \theta(\gamma) = \frac{D}{\hbar} \int_{-\infty}^{\gamma} E_0(\gamma') d\gamma' \end{cases}$$

于是有

$$\frac{d}{d\gamma} \theta(\gamma) = \frac{D}{\hbar} E_0(\gamma) = 2\sqrt{\frac{D^2}{\hbar B}} \sin \frac{\theta(\gamma)}{2}$$

即得到方程 $\frac{d}{d\gamma} \theta(\gamma) = \frac{2}{\tau} \sin \frac{\theta(\gamma)}{2}$ (4.7-11)

(where $\tau = \sqrt{\hbar B / D^2}$)

{对比面积定理 $\frac{dA(z)}{dz} = \pm \frac{a \sin A(z)}{2}$ (4.6-11) }

该方程有解

$$\theta(\gamma) = 4 \arctan[\exp(\frac{\gamma - \gamma_0}{\tau})] \quad (4.7-12)$$

其中 γ_0 是积分常数。由三角函数关系，从上式可得

$$\sin \frac{\theta(\gamma)}{2} = \operatorname{sech} \frac{\gamma - \gamma_0}{\tau}$$

因此光脉冲场的振幅可表达为

$$E_0(\gamma) = 2\sqrt{\frac{\hbar}{B}} \sin \frac{\theta(\gamma)}{2} = \frac{2\hbar}{D\tau} \operatorname{sech} \frac{\gamma - \gamma_0}{\tau} \quad (4.7-13)$$

不妨取积分常数 $\gamma_0=0$ (这涉及到了时空坐标原点的选取),
并且代入 $\gamma=t-z/v$ 得

$$E_0(z, t) = \frac{2\hbar}{D\tau} \operatorname{sech} \frac{t - z/v}{\tau} \quad (4.7-14)$$

其中双曲正割函数定义为

$$\operatorname{sech} x = 1/\cosh x = 2/[\exp(x) + \exp(-x)]$$

这里以频域分布为例，在频域空间是波包分布

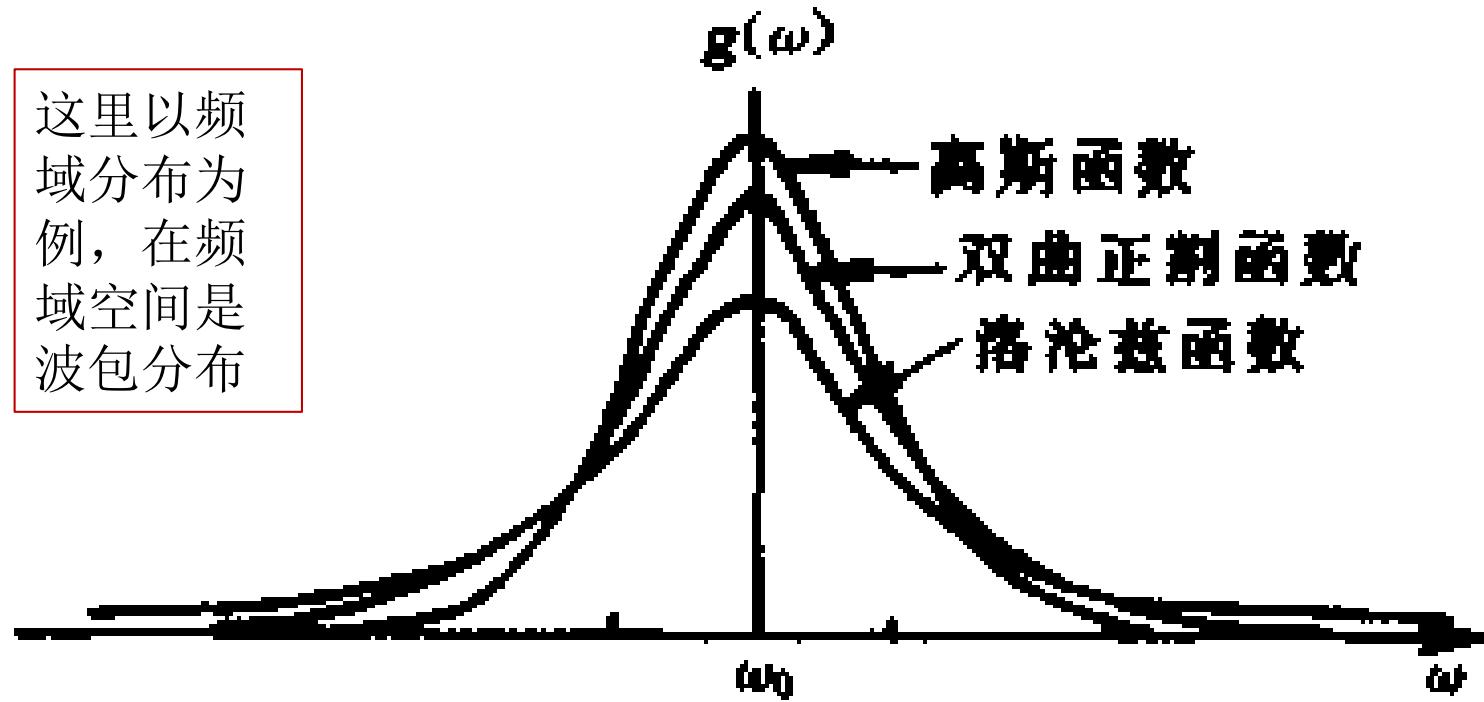


图4.7.1 双曲正割函数与Gaussian函数、Lorentzian函数

$$g(\omega) = L(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1/\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + (1/\Gamma)^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} L(\omega) d\omega = 1,$$

$$g(\omega) = G(\omega) = a \exp[-(\omega - \omega_0)^2 / 2c^2], \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) d\omega = ac\sqrt{\pi},$$

$$g(\omega) = \operatorname{sech} \omega = \frac{2}{\exp(\omega - \omega_0) + \exp(\omega_0 - \omega)}, \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech} \omega d\omega = 2\pi$$

4.7.2 非共振情况下的解

前面得到的(4.7-14)式，是近共振近似 $\Delta\omega \rightarrow 0$ 下得到的自感应透明解(直接的共振情形 $\Delta\omega = 0$ 可看作是近共振近似下的特例)。结果表明，光脉冲将以双曲正割曲线函数描述的形状在介质中传播。这其实就是光孤子解。

$$E_0(z, t) = \frac{2\hbar}{D\tau} \operatorname{sech} \frac{t - z/v}{\tau} \quad (4.7-14)$$

现在考虑一般情形。把(4.7-3)、(4.7-8)代入Maxwell-Bloch方程组(4.7-2)的第二式

始终注意 E_0 是电场的振幅。对于光孤子，场的振幅或者场的能量在空间局域化分布。

即把 (此时不直接取 $f(\Delta\omega)=1$)

$$V(\Delta\omega, \gamma) = V(0, \gamma) f(\Delta\omega) \quad (4.7-3)$$

$$\begin{cases} U(\Delta\omega, \gamma) = \Delta\omega B f(\Delta\omega) E_0(\gamma) \\ W(\Delta\omega, \gamma) = -D + \frac{D}{2\hbar} B f(\Delta\omega) E_0^2(\gamma) \end{cases} \quad (4.7-8)$$

代入Maxwell-Bloch方程组(4.7-2)的第二式, 即

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = \Delta\omega U + \frac{DE_0}{\hbar} W$$

两端同时除以 $f(\Delta\omega)$, 得到

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} V(0, \gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{\hbar} \right) E_0^3 B + \frac{DE_0}{\hbar} W_0 \left[\frac{1}{f(\Delta\omega)} + (\Delta\omega)^2 \frac{B\hbar}{DW_0} \right]$$

上式左边是 γ 的函数，与 $\Delta\omega$ 无关，因此右边也应该与 $\Delta\omega$ 无关，故右边第二项方括号中的取值，必定与 $\Delta\omega$ 的具体取值无关，令 $\Delta\omega=0$ ，由于 $f(0)=1$ ，方括号中的值必等于1，即有

$$\frac{1}{f(\Delta\omega)} + (\Delta\omega)^2 \frac{B\hbar}{DW_0} = 1$$

对于吸收介质， $W_0=-D$ ，上式变为

$$f(\Delta\omega) = [1 + (\Delta\omega\tau)^2]^{-1}, \quad \tau = \sqrt{B\hbar/D^2}$$

$$f(\Delta\omega) = [1 + (\Delta\omega\tau)^2]^{-1}, \quad \tau = \sqrt{B\hbar/D^2}$$

将上式和(4.7-9)第三式代入(4.7-3), 即

$$\left. \begin{array}{l} V(\Delta\omega, \gamma) = V(0, \gamma) f(\Delta\omega) \\ V(0, \gamma) = -D \sin \theta(\gamma) \\ f(\Delta\omega) = [1 + (\Delta\omega\tau)^2]^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$V(\Delta\omega, \gamma) = \frac{-D}{1 + (\Delta\omega\tau)^2} \sin \theta(\gamma) \quad (4.7-15)$$

同理，将

$$f(\Delta\omega) = [1 + (\Delta\omega\tau)^2]^{-1}, \quad \tau = \sqrt{B\hbar/D^2}$$

$$E_0(\gamma) = 2\sqrt{\frac{\hbar}{B}} \sin \frac{\theta(\gamma)}{2}$$

代入

$$(4.7-8) \begin{cases} U(\Delta\omega, \gamma) = \Delta\omega B f(\Delta\omega) E_0(\gamma) \\ W(\Delta\omega, \gamma) = -D + \frac{D}{2\hbar} B f(\Delta\omega) E_0^2(\gamma) \end{cases}$$

得到

$$(4.7-16) \begin{cases} U(\Delta\omega, \gamma) = \frac{2D\Delta\omega\tau}{1 + (\Delta\omega\tau)^2} \sin \frac{\theta(\gamma)}{2} \\ W(\Delta\omega, \gamma) = \frac{2D}{1 + (\Delta\omega\tau)^2} \sin^2 \frac{\theta(\gamma)}{2} - D \end{cases}$$

$$V(\Delta\omega, \gamma) = \frac{-D}{1 + (\Delta\omega\tau)^2} \sin \theta(\gamma) \quad (4.7-15)$$

结合(4.7-13)-(4.7-16)式，并且取积分常数 $\psi_0=0$ ，得到

$$\sin \frac{\theta(\gamma)}{2} = \operatorname{sech} \frac{\gamma - \gamma_0}{\tau}, \quad \gamma = t - z/v, \quad \gamma_0 = 0 \Rightarrow$$

$$(4.7-17) \left\{ \begin{array}{l} U(\Delta\omega, z, t) = \frac{2D\Delta\omega\tau}{1 + (\Delta\omega\tau)^2} \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/v}{\tau}\right) \\ V(\Delta\omega, z, t) = \frac{-2D}{1 + (\Delta\omega\tau)^2} \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/v}{\tau}\right) \tanh\left(\frac{t - z/v}{\tau}\right) \\ W(\Delta\omega, z, t) = \frac{2D}{1 + (\Delta\omega\tau)^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{t - z/v}{\tau}\right) - D \\ E_0(z, t) = \frac{2\hbar}{D\tau} \operatorname{sech}\left(\frac{t - z/v}{\tau}\right) \end{array} \right.$$

这就是Maxwell-Bloch方程组(4.7-2)在非共振情况下的解

它是由双曲正割函数描述的孤子解，其能量在空间局域分布

4.7.3 在自感应透明下脉冲的传播速度

$$B = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c} \right) \left/ \left[\frac{\omega c \mu_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta\omega) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega) \right] \right. \Rightarrow$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + B \frac{\omega c \mu_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta\omega) g(\Delta\omega) d(\Delta\omega)$$

其中 $f(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega\tau)^2}$, $\tau = \sqrt{B\hbar/D^2}$

由此得到脉冲的传播速度 v 满足

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + \frac{\alpha\tau^2}{2\pi g(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\Delta\omega)}{1+(\Delta\omega\tau)^2} d(\Delta\omega) \quad (4.7-18)$$

$$(\alpha = \omega\pi\mu_0 c D^2 g(0)/\hbar, \tau = \sqrt{B\hbar/D^2})$$

考虑均匀加宽介质， $g(\Delta\omega)$ 是Lorentz线型函数(如果考虑其他线型函数介质，推导过程如此类推)，半高度处的全宽度等于 $\Delta\omega_h$ ，即

$$g(\Delta\omega) = \frac{\Delta\omega_h}{2\pi[(\Delta\omega)^2 + (\Delta\omega_h/2)^2]}$$

$$g(\Delta\omega = \pm \frac{\Delta\omega_h}{2}) = \frac{1}{2} g(0) = \frac{1}{\pi(\Delta\omega_h)}$$

1) 对于宽带跃迁情形，即 $\Delta\omega_h \gg \Delta\omega$, $\Delta\omega/\Delta\omega_h \approx 0$, 此时上式变为

$$g(\Delta\omega) = 2/\pi\Delta\omega_h \quad (\Rightarrow g(0) = 2/\pi\Delta\omega_h)$$

将上式代入(4.7-18), 整理得

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + \frac{\alpha\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[1 + (\Delta\omega\tau)^2]} d(\Delta\omega\tau) \quad (4.7-19)$$

利用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[1 + (\Delta\omega\tau)^2]} d(\Delta\omega\tau) = \arctan(\Delta\omega\tau) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

(4.7-19)变成 $\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + \frac{\alpha\tau}{2}$ (4.7-20)

2) 对于窄带跃迁情形, $\Delta\omega \gg \Delta\omega_h$, 同理可得

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + \frac{1}{4}\alpha\Delta\omega_h\tau^2 \quad (4.7-21)$$

其中

$$\alpha = \frac{\omega\pi\mu_0 c D^2}{\hbar} g(0), \quad \tau = \sqrt{\frac{B\hbar}{D^2}}$$

宽带 跃迁 $\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + \frac{\alpha\tau}{2}$ (4.7-20)

窄带 跃迁 $\frac{1}{v} = \frac{1}{c} + \frac{1}{4}\alpha\Delta\omega_h\tau^2$ (4.7-21)

讨论

1) 由(4.7-20)和(4.7-21)可知，在吸收介质($\alpha>0$)中，脉冲传播速度总是小于真空中的光速 c 。对此可以解释为：在传播中，脉冲的前半部总是被介质吸收，而后能量被介质释放时使得脉冲后半部总是被放大（从而脉冲波包中心后移），形成了脉冲的相对滞后，因此速度就要小一些(吸收→释放→吸收→释放...)

2) 同理, 由(4.7-20)和(4.7-21)可知, 在增益介质中(此时 $W_0 = D \Rightarrow \alpha < 0$), 脉冲传播速度总是大于真空中的光速 c 。对此可以解释为: 在传播中, 脉冲前沿总是被线性放大、后沿饱和放大, 使得脉冲中心相对前移, 而且脉冲变窄, 峰值增加 (注意: 脉冲波包最大振幅处的移动速度, 代表脉冲传播速度)。

E_0 是电场的振幅, 它的运动速度代表能量传播的速度, 通常也是群速度。对于光孤子, 场的振幅或者场的能量在空间局域化分布。

小结

当足够强的、有适当波形的激光脉冲通过共振吸收的二能级介质时，介质对电磁脉冲的吸收为零，介质表现为透明的。这种现象就称为自感应透明。它与饱和吸收现象引起的透明截然不同。主要特征有：

- 1)自感应透明来自相干作用，而饱和吸收仅是反转粒子数决定的非相干作用。
- 2)自感应透明现象中的脉冲形状是双曲正割的、面积为 π 的整数倍的脉冲。

- 3) 在自感应透明现象中，一个面积较大的脉冲会分裂为若干小脉冲，而饱和吸收现象却不发生脉冲的分裂。
- 4) 在自感应透明现象中，光脉冲在吸收介质中的传播速度（即波包速度，群速度）可以比相速度低得多，可以低三个数量级。
- 5) 自感应透明与光学章动现象的不同在于，光学章动现象的处理是薄样品近似，可以不考虑传播效应。而自感应透明是非定态脉冲与“厚样品”的作用，光场随空间与时间变化，所以，必须研究传播效应。也就是要用Maxwell-Bloch方程组来描述。