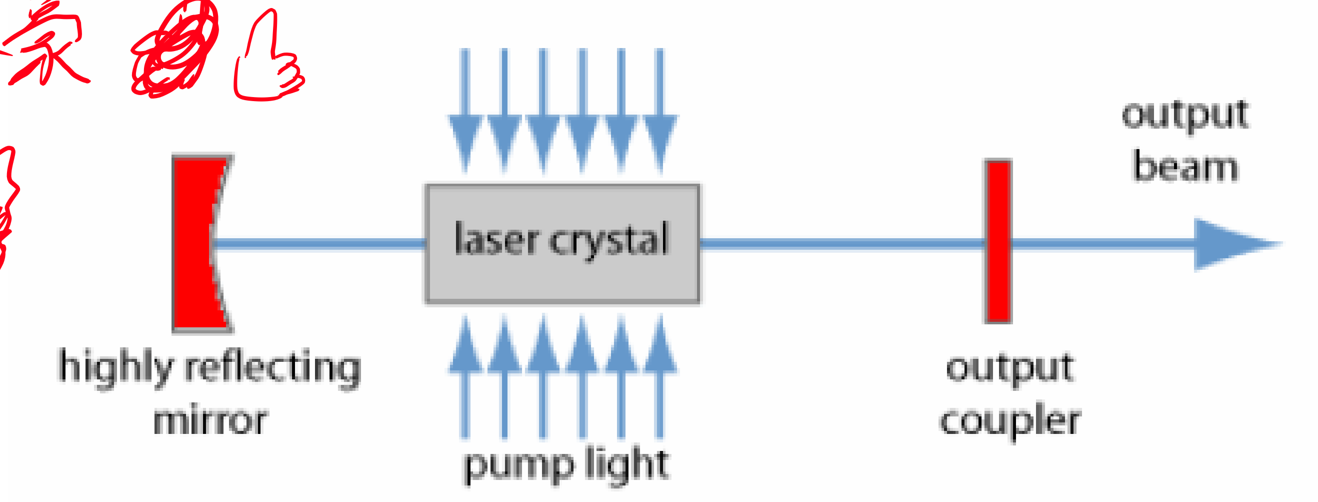
诺贝尔物理奖

3.3 激光场的振荡方程

张豪



激光器三个主要部分：

泵浦源—— 提供能量，产生粒子数反转，最后转化成激光能量

增益介质——激光工作物质实现粒子数反转，提供受激放大

谐振腔—— 选模，限制波形，提供反馈、增益，提供稳定振荡

下面我们将利用前面提供的理论工具，研究激光场的振荡方程。

- 研究谐振腔中场与物质相互作用所产生的激光放大及振荡现象。
- 假设在谐振腔中，均匀地充满了已经形成粒子数反转的激活介质.

$L=m\lambda$

3.3.1 激光振荡条件

在介质中引入外场

$\boldsymbol{P} = \chi\varepsilon_0\boldsymbol{E}$

$\Downarrow$ 与线性关系

辐射场

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},t) \longrightarrow \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t) \longrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) \longrightarrow \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r},t)$$

感生电偶极矩　　电极化强度

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{u^2\partial t^2} = 0,\ u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \Leftrightarrow \nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{c^2\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}$$

场　源　场　源

考虑没有自由电荷的非磁性均匀介质($\sigma=0,\ \mu=\mu_0$)。初始入射的外场能量被介质吸收，产生电极化强度，它随外场一起随时间振荡，产生新的辐射场。如果没有继续补充外来场，介质中的场，就是这个新的辐射场。这个新的辐射场反过来又令产生新的介质极化，产生新的极化强度，进而又产生新的辐射场...互为因果

自洽场

进入介质的外场，产生随外场一起振荡的电偶极矩；振荡的电偶极矩，又在介质中产生新的辐射场。

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},t) \arrow[r] & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t) \arrow[r] & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) \arrow[r] & \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r},t) \arrow[lll, bend left]
\end{tikzcd}
$$

感生电偶极矩　　电极化强度

- 往复影响，在适当的条件下最终形成稳定的电磁场。
  $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_i$
- 稳定振荡时，在介质中激发电偶极矩的场$\boldsymbol{E}_0$，正是介质中电偶极矩辐射所产生的场$\boldsymbol{E}_i$。此时介质中的场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_i$，称为自洽场。

激活介质在单位长度上的增益系数g

$$g=\alpha_1-\frac{1}{2L}\ln r_1 r_2=\frac{\delta}{L} \qquad (3.3.1)$$

除了耦合之外的损耗

- α_1是除耦合损耗以外的其他损耗，L是激光谐振腔的腔长，r_1和r_2分别为谐振腔两面反射镜的反射率，δ被称为谐振腔的单程损耗因子。
- 当形成激光振荡时，单位长度上的增益等于单位长度上的损耗。即要求激活介质提供的增益，刚好能补偿腔内的损耗，这是激光振荡的振幅条件（注意能量密度正比于振幅的平方）

$g>\delta$ 是增加不稳定，是逐渐增大的

振幅满足二元方程

相位满足二元方程

自洽场方程的推导与求解

- 推导激光的电磁场方程，又称兰姆自洽场方程
- 求解兰姆方程。为此必须知道介质的宏观极化强度。
- 由于工作物质是由大量处于不同运动状态的粒子所组成．所以在求宏观极化强度时，要采用量子统计中的密度矩阵方法。

3.3.2 激光振荡的自恰场方程

假定激光腔内的介质，是均匀的非磁性介质（磁导率$\mu=\mu_0$），电导率为σ，介质在外场作用下产生的电极化强度为$\boldsymbol{P}$，介质中的电场强度为$\boldsymbol{E}$，则有

$$-\nabla^2\boldsymbol{E}+\mu_0\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{c^2\partial t^2}=-\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}\qquad(3.3.2)$$

相当于腔损耗的一个阻尼因子

扮演场源角色

设激光场是线偏振的，谐振腔内的电磁场主要沿z轴方向传播，而且在垂直于腔轴线的方向上变化不大，即

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \approx 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \approx 0 \qquad (3.3.3)$$

则 $$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\mu_0\sigma\frac{\partial E}{\partial t}-\frac{\partial^2 E}{c^2\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (3.3.4)$$

设激光谐振腔为平行平面腔，腔长为L，腔的轴线为z轴。由于谐振腔的存在，只有沿z轴并且满足驻波条件的光波才能在腔内形成稳定模式($E\propto A\sin kz+B\cos kz\rightarrow B=0$)。

$$\sin kz\Big|_{z=0}=\sin kz\Big|_{z=L}=0\Rightarrow kL=n\pi\Rightarrow$$

$$k_n=n\pi/L,\ \Omega_n=k_n c,\ n=1,2,\ldots \quad (3.3.5)$$

每给定一个n=1, 2, 3…，就对应一个波数k_n和频率Ω_n，由此定义一个电磁模式

于是第n个模可写成下述驻波形式(此时可以分离变量)：

$$A_n(t)\sin(k_n z),\ k_n = n\pi/L,\ n = 1, 2, \ldots$$

- 在无源无损腔(P=0，σ=0)情形下

$$E_n(z,t) = \underbrace{E_{0n}\cos(\Omega_n t + \varphi_n)}_{\text{缓变近似}}\sin(k_n z),\ \Omega_n = k_n c \quad (3.3.6)$$

- 在有源有损腔(P≠0，σ≠0)情形下，

(1)、由于阻尼和场源的存在，腔内场可能被放大或衰减，从而场的振幅E_{0n}将随时间变化；&相位 都随时、空变化 -

(2)、由于激活介质的色散，有源腔的谐振频率ω_n相对于无源腔的谐振频率Ω_n稍有偏移(频率牵引)，即振荡模的工作频率，会向激活介质的中心频率稍微靠近(see later)。

因此有源腔的辐射场表示为(ω_n是有源腔的频率):

由于有源腔代来的变化

$$E(z,t)=\sum_n E_n(t)\sin(k_n z), \qquad (3.3.7)$$

$\sin[\omega t-kz+\varphi(t)]$

$=\sin\theta(t,z)$

$$E_n(t)=E_{0n}(t)\cos[\omega_n t+\varphi_n(t)] \qquad (3.3.8)$$

$\omega=\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$(有$\varphi(t)$的贡献)

(3)、通常$E_{0n}(t)$和$\varphi_n(t)$为时间t的缓变函数。将上式代入(3.3.4)，即

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2}-\mu_0\sigma\frac{\partial E(z,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 E(z,t)}{c^2\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2} \qquad (3.3.4)$$

对上式两端同乘$\sin(k_m z)$，在区间$[0, L]$上对z积分，并且利用:

$$(2/L)\int_0^L \sin(k_m z)\sin(k_n z)\mathrm{d}z=\delta_{mn} \qquad (3.3.9)$$

3.4式动态

空间的表达

(波动方程)

可以得到（如果介质电导率与频率有关则$\sigma\to\sigma_m$):

$$k_m^2 E_m(t)+\mu_0\sigma\dot{E}_m(t)+\mu_0\varepsilon_0\ddot{E}_m(t)=-\mu_0\ddot{P}_m(t) \qquad (3.3.10)$$

记住

$k_m=\dfrac{m\pi}{L}$ 方K=P

其中 $P_m(t)=(2/L)\int_0^L P(z,t)\sin(k_m z)\mathrm{d}z$

计算空间

$$E(z,t)=\sum_n E_n(t)\sin(k_n z) \quad (3.3.7)$$

$$E_n(t)=E_{0n}(t)\cos[\omega_n t+\varphi_n(t)]$$

$$P_m(t)=(2/L)\int_0^L P(z,t)\sin(k_m z)\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2}-\mu_0\sigma\frac{\partial E(z,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2 E(z,t)}{c^2\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial t^2} \quad (3.3.4)$$

$$k_m^2 E_m(t)+\mu_0\sigma\dot{E}_m(t)+\mu_0\varepsilon_0\ddot{E}_m(t)=-\mu_0\ddot{P}_m(t) \quad (3.3.10)$$

- 场量随时间的变化，主要还是体现在振荡因子上。(3.3.7)式是用不同模式展开的表达式，可以视为由动量表象变换到位置表象的傅里叶变换式。
- 把位置空间中的波动方程(3.3.4)，傅里叶变换到动量空间中的方程(3.3.10)，即分解为每个模式所满足的方程。由于线性方程解的叠加原理，只需研究场的某一个傅里叶分量。

$$E(z,t)=\sum_n E_n(t)\sin(k_n z),\ E_n(t)=E_{0n}(t)\cos[\omega_n t+\varphi_n(t)] \quad (3.3.7)$$

其中 $$P_m(t)=(2/L)\int_0^L P(z,t)\sin(k_m z)\mathrm{d}z \quad (3.3.11)$$

$P_m(t)$为极化强度$P(z, t)$的空间傅里叶分量

(4)、在各向同性的线性均匀介质中，极化强度$\boldsymbol{P}$与激发它的电场强度$\boldsymbol{E}$成正比，因此与$\boldsymbol{E}(z, t)$有相同的函数形式，所以令(余弦函数改写为复指数函数形式，c.c代表前一项的复共轭):

$$P(z,t)=(1/2)\sum_n \tilde{P}_n(t)\sin(k_n z)\exp\{\mathrm{i}[\omega_n t+\varphi_n(t)]\}+\mathrm{c.c.} \quad (3.3.12)$$

由于介质的色散，$\tilde{P}_n(t)$ 一般为复函数

$$\tilde{P}_n(t)=C_n(t)+\mathrm{i}S_n(t) \quad (3.3.13)$$

下面将(3.3.12)代入(3.3.11)，并利用(3.3.13)

将(3.3.12)代入(3.3.11)，并利用(3.3.13)，得到

$$P_m(t) = C_m(t)\cos[\omega_m t + \varphi_m(t)] + S_m(t)\sin[\omega_m t + \varphi_m(t)] \quad (3.3.14)$$

(5)、 $C_m(t)$与$S_m(t)$也是时间的缓变化函数，忽略$C_m(t)$、$S_m(t)$以及$\varphi_m(t)$一阶和二阶导数，于是(3.3.14)满足：

$$\ddot{P}_m(t) = -\omega_m^2 P_m(t) \quad (3.3.15)$$

式(3.3.10)变为（注意$\Omega_m = k_m c$ 是无源无损腔的本征频率）

$$\ddot{E}_m(t) + \frac{\omega_m}{Q_m}\dot{E}_m(t) + \Omega_m^2 E_m(t) = \frac{\omega_m^2}{\varepsilon_0} P_m(t) \quad (3.3.16)$$

其中：$Q_m = \varepsilon_0\,\omega_m/\sigma$，$\Omega_m = ck_m$

Q_m为谐振腔对频率为ω_m时的模式品质因子

式(3.3.16)推导如下：

$$k_m^2 E_m(t)+\mu_0\sigma\dot{E}_m(t)+\mu_0\varepsilon_0\ddot{E}_m(t)=-\mu_0\ddot{P}_m(t)=\mu_0\omega_m^2 P_m(t)$$

$$\xrightarrow{\text{除以}\mu_0\varepsilon_0=1/c^2}\ddot{E}_m(t)+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\dot{E}_m(t)+c^2k_m^2E_m(t)=\frac{\omega_m^2}{\varepsilon_0}P_m(t)$$

$$\Rightarrow\ddot{E}_m(t)+\frac{\omega_m}{Q_m}\dot{E}_m(t)+\Omega_m^2E_m(t)=\frac{\omega_m^2}{\varepsilon_0}P_m(t)\qquad(3.3.16)$$

其中：$Q_m=\varepsilon_0\,\omega_m/\sigma$，$\Omega_m=ck_m$

Q_m为谐振腔对频率为ω_m时的模式品质因子 Q↑ 衰减越慢

注： Q因子描述振子能量损失的快慢，振动的持续时间长短。它的一般定义是共振频率除以频率的带宽。电导对应衰减因子，从而与寿命有关，由能量与时间测不准原理，进而与频率带宽有关。Q因子越大，能量损失越慢，振动持续时间越长

$$E_m(t) = E_{0m}(t)\cos[\omega_m t + \varphi_m(t)] \quad (3.3.8)$$

$$P_m(t) = C_m(t)\cos[\omega_m t + \varphi_m(t)] + S_m(t)\sin[\omega_m t + \varphi_m(t)] \quad (3.3.14)$$

将(3.3.8) 和 (3.3.14)代入

$$\ddot{E}_m(t) + \frac{\omega_m}{Q_m}\dot{E}_m(t) + \Omega_m^2 E_m(t) = \frac{\omega_m^2}{\varepsilon_0} P_m(t)$$

同时根据前边的缓变假设，忽略

$$\ddot{E}_{0m}(t),\ \frac{\omega_m}{Q_m}\dot{E}_{0m}(t),\ \frac{\omega_m}{Q_m}\dot{\varphi}_m(t),\ \ddot{\varphi}(t),\ \dot{\varphi}(t)\dot{E}_{0m}(t)$$

并且让方程两端的正弦项和余弦项分别相等，可得：

$$\begin{cases} \dot{E}_{0m}(t) + \omega_m E_{0m}(t)/2Q_m = -\omega_m S_m(t)/2\varepsilon_0 \\ \{\Omega_m^2 - [\omega_m + \dot{\varphi}_m(t)]^2\}E_{0m}(t) = C_m(t)\omega_m^2/\varepsilon_0 \end{cases} \quad (3.3.17)$$

含有平方，需进一步化简…

$$
\begin{cases}
\dot{E}_{0m}(t)+\omega_m E_{0m}(t)/2Q_m=-\omega_m S_m(t)/2\varepsilon_0 & \text{振幅方程} \\
\{\Omega_m^2-[\omega_m+\dot{\varphi}_m(t)]^2\}E_{0m}(t)=C_m(t)\omega_m^2/\varepsilon_0 & \text{频率方程}
\end{cases}
\quad (3.3.17)
$$

考虑到激活腔模的频率与无源腔模的频率相差很小

$$\Omega_m^2-(\omega_m+\dot{\varphi}_m)^2\approx 2\omega_m(\Omega_m-\omega_m-\dot{\varphi}_m)$$

将上式代入(3.3.17)式的第二式左边，可得到

$$(\omega_m+\dot{\varphi}_m-\Omega_m)E_{0m}=-\omega_m C_m/2\varepsilon_0 \quad (3.3.18)$$

注意

$$k_m=\Omega_m/c,\ c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0},\ Q_m=\varepsilon_0\omega_m/\sigma$$

于是得到

$$(3.3.19)\quad \begin{cases} [\omega_m + \dot{\varphi}_m(t) - \Omega_m] E_{0m}(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{\varepsilon_0} C_m(t) & \text{频率方程} \\ \dot{E}_{0m}(t) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{Q_m} E_{0m}(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{\varepsilon_0} S_m(t) & \text{振幅方程} \end{cases}$$

(3.3.19)就是半经典理论中激光场所满足的自洽场方程。

注意：上式是利用场的空间傅里叶分量表达出来的。它们对应相应场量用指数函数或正弦函数展开时的展开系数

$$P(z,t) = (1/2)\sum_m \tilde{P}_m(t)\exp\{\mathrm{i}[\omega_m t + \varphi_m(t)]\}\sin(k_m z) + \mathrm{c.c.}$$

位置表象与动量表象之间的变换

$$E(z,t) = (1/2)\sum_m E_{0m}(t)\exp\{\mathrm{i}[\omega_m t + \varphi_m(t)]\}\sin(k_m z) + \mathrm{c.c.}$$

$$P(z,t) = \varepsilon_0 \chi E(z,t) \Rightarrow \tilde{P}_m(t) = C_m(t) + \mathrm{i}S_m(t) \equiv \varepsilon_0 \chi_m E_{0m}(t)$$

$$k_m = \Omega_m / c,\ c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0},\ Q_m = \varepsilon_0 \omega_m / \sigma$$

复极化系数

3.3.3 自洽方程的物理意义

$$\begin{cases} [\omega_m + \dot{\varphi}_m(t) - \Omega_m]E_{0m}(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{\varepsilon_0}C_m(t) & \text{频率方程} \\ \dot{E}_{0m}(t) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{Q_m}E_{0m}(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{\varepsilon_0}S_m(t) & \text{振幅方程} \end{cases}$$

$$\Omega_m = k_m c,\ Q_m = \varepsilon_0\omega_m/\sigma$$

(1) 当不存在激活介质时，辐射场强度 $I_m \propto E_{om}^2$ 满足

$$\tilde{P}_m(t) = C_m(t) + \mathrm{i}S_m(t) = 0 \Rightarrow I_m(t) = I_m(0)\exp(-\omega_m t/Q_m)$$

即随时间指数衰减。即没有能量补充时，介质中电磁场的能量随着介质的吸收而衰减。品质因子Q_m越大，随时间衰减得越慢，从而寿命越长，带宽越窄。

(2) 当存在激活介质时，$\tilde{P}_m(t) \neq 0$， 由电极化强度与电场强度之间的关系有（对每个模式分量都成立，线性叠加原理）

$$\tilde{P}_m(t) = \varepsilon_0 \chi_m E_{0m}(t) = \varepsilon_0 (\chi_m' + \mathrm{i}\chi_m'') E_{0m}(t)$$

$$\tilde{P}_m(t) = C_m(t) + \mathrm{i} S_m(t) \Rightarrow$$

$$C_m(t) = \varepsilon_0 \chi_m' E_{0m}(t),\ S_m(t) = \varepsilon_0 \chi_m'' E_{0m}(t)$$

$$\begin{cases} [\omega_m + \dot{\varphi}_m(t) - \Omega_m] E_{0m}(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{\varepsilon_0} C_m(t) & \text{频率方程} \\ \dot{E}_{0m}(t) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{Q_m} E_{0m}(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{\varepsilon_0} S_m(t) & \text{振幅方程} \end{cases}$$

于是以上自洽场方程又可以用极化系数χ写成

注：$E(z, t), P(z, t), E_m(t)$都是实函数，$\tilde{P}_m(t)$ 是复函数，因为极化系数是复数。

自洽方程 $$\begin{cases} \omega_m + \dot{\varphi}_m - \Omega_m = -\dfrac{1}{2}\omega_m \chi'_m, & (1) \\ \dot{E}_{0m}(t) + \dfrac{\omega_m}{2Q_m} E_{0m}(t) = -\dfrac{1}{2}\omega_m \chi''_m E_{0m}(t), & (2) \end{cases}$$

$Q_m = \varepsilon_0 \omega_m / \sigma$ 为谐振腔在频率为ω_m时的品质因数

讨论

频率方程 $\omega_m + \dot{\varphi}_m - \Omega_m = -\omega_m \chi'_m / 2,\quad (1)$

在(1)中，$(\omega_m + \dot{\varphi}_m)$ 是激活腔振荡频率。

由(1)知，激活介质将使激光振荡频率 $\omega_m + \dot{\varphi}_m$ 偏离非激活腔的本征频率Ω_m，即发生频率牵引或频率排斥现象

振幅方程 $$\dot{E}_{0m}(t)+\frac{\omega_m}{2Q_m}E_{0m}(t)=-\frac{1}{2}\omega_m\chi''_m E_{0m}(t),\quad (2)$$

已知光强$\propto I_m = E_{0m}^2$，由(2)式知（上式两边同时乘以E_{0m}）

$$\dot{I}_m=-\frac{\omega_m}{Q_m}I_m-\omega_m\chi''_m I_m,\quad (3)$$

因此，当$\chi''_m<0$时，介质对场具有“增益”作用。

极化系数的实部影响到折射率，与介质色散有关；其虚部则与介质的吸收有关。但是当虚部为负时，对于“负吸收”，即有增益作用。

激活腔模的波矢仍由腔的驻波条件所决定

$$k_m = \frac{m\pi}{L} = \frac{\Omega_m}{c} = \frac{\omega_m + \dot{\varphi}_m}{u_m},\quad u_m - \text{介质中的波速}$$

从而激活媒质的折射率为(利用频率方程(1)，以及利用(3))

$$n = \frac{c}{u_m} = \frac{\Omega_m}{\omega_m + \dot{\varphi}_m} = \frac{\Omega_m}{\Omega_m - \omega_m \chi'_m / 2},\quad u_m = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{n}$$

与频率有关

$$\dot{I}_m = -\frac{\omega_m}{Q_m} I_m - \omega_m \chi''_m I_m \Rightarrow \frac{1}{I_m}\frac{\mathrm{d}I_m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{I_m}\frac{\mathrm{d}I_m}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_m}{Q_m} - \omega_m \chi''_m$$

定义净增益系数 $g_e = \frac{1}{I_m}\frac{\mathrm{d}I_m}{\mathrm{d}z} = -\frac{n\omega_m}{cQ_m} - \frac{n\omega_m}{c}\chi''_m$

(单位光强传播单位距离时的增益)

净增益系数

$$g_e = \frac{1}{I_m}\frac{\mathrm{d}I_m}{\mathrm{d}z} = -\boxed{\frac{n\omega_m}{cQ_m}} - \frac{n\omega_m}{c}\chi''_m$$

$$= -\alpha_m + g_m$$

吸收 **增益**

$$\tilde{P}_m(t) = \varepsilon_0 \chi_m E_{0m}(t) = \varepsilon_0(\chi'_m + \mathrm{i}\chi''_m)E_{0m}(t)$$

极化系数实部χ'_m与介质色散有关

极化系数虚部χ''与介质吸收($\chi'' > 0$) 或者增益($\chi'' < 0$) 有关

小结

源

$$\begin{cases}[\omega_m+\dot{\varphi}_m(t)-\Omega_m]E_{0m}(t)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{\varepsilon_0}C_m(t) & \text{频率方程}\\[2ex] \dot{E}_{0m}(t)+\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{Q_m}E_{0m}(t)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{\varepsilon_0}S_m(t) & \text{振幅方程}\end{cases}$$

复函数

$$\begin{cases}\tilde{P}_m(t)=C_m(t)+\mathrm{i}S_m(t)\\ =\varepsilon_0(\chi'_m+\mathrm{i}\chi''_m)E_{0m}(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_m+\dot{\varphi}_m-\Omega_m=-\dfrac{1}{2}\omega_m\chi'_m\\[2ex] \dot{E}_{0m}(t)+\dfrac{\omega_m}{2Q_m}E_{0m}(t)=-\dfrac{1}{2}\omega_m\chi''_mE_{0m}(t)\end{cases}$$

- 自洽方程说明，激光振荡特性与介质极化强度之间存在着简单的关系；
- 只要能确定介质的极化状态，利用自洽方程就可求出场模的振幅特性和频率特性。

3.3.3 自洽场方程的基本求解步骤概述

求解自洽场方程，就得知道电极化强度

1. 利用(3.2.16)

泵浦 衰减

$$
\begin{cases}
\dot{\rho}_{aa} = \lambda_a - \gamma_a \rho_{aa} - \dfrac{\mathrm{i}DE}{\hbar}(\rho_{ab} - \rho_{ba}) \\
\dot{\rho}_{bb} = \lambda_b - \gamma_b \rho_{bb} + \dfrac{\mathrm{i}DE}{\hbar}(\rho_{ab} - \rho_{ba}) \\
\dot{\rho}_{ab} = \dot{\rho}_{ba}^{*} = -(\mathrm{i}\omega_0 + \gamma_{ab})\rho_{ab} - \dfrac{\mathrm{i}DE}{\hbar}(\rho_{aa} - \rho_{bb})
\end{cases}
$$

求出ρ_{ab}及ρ_{ba}(从给定的初始条件出发，求一阶、三阶近似)

2. 利用电偶极矩公式$p=D(\rho_{ab}+\rho_{ba})$（后面章节将给出此关系式），得到极化强度$P(z, t)$的一阶以及三阶近似。

$\Omega_m = k_m c$

$k_m = \frac{m\pi}{L}$

3. 将$P(z,t)$的一阶以及三阶近似代入(3.3.11)

$$P_m(t) = (2/L)\int_0^L P(z,t)\sin(k_m z)\mathrm{d}z$$

动量自由度

得一阶和三阶近似$P^{(1)}{}_m(t)$与$P^{(3)}{}_m(t)$，将$P^{(1)}{}_m(t)$以及$P^{(3)}{}_m(t)$表达为如下标准形式，求出$C_m(t)$和$S_m(t)$的一阶以及三阶近似

$$P_m(t) = C_m(t)\cos[\omega_m t + \varphi_m(t)] + S_m(t)\sin[\omega_m t + \varphi_m(t)]$$

4. 在一阶近似下，将$C^{(1)}{}_m(t)$以及$S^{(1)}{}_m(t)$分别代入(3.3.19)

$$\begin{cases}(\omega_m+\dot{\varphi}_m-\Omega_m)E_{0m}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{\varepsilon_0}C_m(t)\\ \dot{E}_{0m}(t)+\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{Q_m}E_{0m}(t)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_m}{\varepsilon_0}S_m(t)\end{cases}\qquad(3.3.19)$$

即可得激光器振荡一阶近似下的理论结果（频率与振幅确定了，自洽场就确定了）。同理，将三阶近似下的结果，代入(3.3.19)即可得激光器振荡三阶近似下的理论结果。

$$E(z,t)=\sum_m E_m(t)\sin(k_m z),$$

$$E_m(t)=E_{0m}(t)\cos[\omega_m t+\varphi_m(t)]$$

课外阅读

旋转波近似：设ω是外场频率，$\omega_0=(\varepsilon_a-\varepsilon_b)/\hbar$是原子频率，在研究光与二能级原子体系相互作用时，只考虑近共振项 (含时谐因子$\exp[\pm i(\omega-\omega_0)t]$)，而忽略远离共振的项(含时谐因子$\exp[\pm i(\omega+\omega_0)t]$)，因为后者随时间起伏更快，其时间平均更接近于零。

"旋转波近似"名称由来：在绘制光场与原子的相图时，它们的相角分别是ωt和$\omega_0 t$，若二者在相平面内同方向旋转，二者相位角之差为$|\omega t-\omega_0 t|$；反方向旋转时，则是$|\omega t+\omega_0 t|$。旋转波近似就相当于只考虑光场与原子的矢量在相平面内同方向旋转情况。

$$(1/2\pi)\int \exp[\pm i(\omega-\eta)t]dt=\delta(\omega-\eta)$$

$$\delta(\omega-\eta)=0 \text{ for } \omega>0 \text{ and } \eta=-\omega_0<0$$