作业答案

1. 第 2.2-2.3 节，p.33，证明 $\mathrm{i}\hbar\dot{C}_{b0}(t)=H'_{ba}\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)C_{a0}(t)$。

证明：假设不存在外电磁场时，二能级原子哈密顿算符 $\hat{H}=\hat{H}_0$ 的本征态为 $|u_a\rangle$ 和 $|u_b\rangle$，分别对应本征值 E_a 和 E_b，即有 $\hat{H}_0|u_a\rangle=E_a|u_a\rangle$，$\hat{H}_0|u_b\rangle=E_b|u_b\rangle$，根据哈密顿算符的厄米性知它们满足正交归一化条件 $\langle u_i|u_j\rangle=\delta_{ij}\ \ (i,j=a,b)$，以及完备性关系 $\sum_i|u_i\rangle\langle u_i|=1$。因此存在外电磁场时，二能级原子的量子状态可以表达为：

$$|\varphi(t)\rangle=C_a(t)|u_a\rangle+C_b(t)|u_b\rangle,$$

其中展开系数满足归一化条件 $|C_a(t)|^2+|C_b(t)|^2=1$，令

$$C_a(t)=C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar),\quad C_b(t)=C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar),$$

于是有

$$|\varphi(t)\rangle=C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)|u_b\rangle$$

将上式代入存在外电磁场时薛定谔方程：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi(t)\rangle=(\hat{H}_0+\hat{H}')|\varphi(t)\rangle,$$

再对上式两边同时左乘以 $\langle u_b|$，利用正交归一化关系，有

$$\langle u_b|\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)|u_b\rangle]$$
$$=\langle u_b|(\hat{H}_0+\hat{H}')[C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)|u_b\rangle]$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)\langle u_b|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)\langle u_b|u_b\rangle]$$
$$=C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)\langle u_b|(\hat{H}_0+\hat{H}')|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)\langle u_b|(\hat{H}_0+\hat{H}')|u_b\rangle$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)]$$
$$=C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)\langle u_b|(E_a+\hat{H}')|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)\langle u_b|(E_b+\hat{H}')|u_b\rangle$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{i}\hbar\dot{C}_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)+E_b C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)$$
$$=C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)\langle u_b|\hat{H}'|u_a\rangle+E_b C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)\langle u_b|\hat{H}'|u_b\rangle$$

在电偶极矩近似下，相互作用的哈密顿算符$\hat{H}'$与电偶极矩算符成正比。由于原子处于上能级和下能级时的固有电偶极矩为零，故有$\langle u_b|\hat{H}'|u_b\rangle=0$，故上式变成：

$$\mathrm{i}\hbar\dot{C}_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)=C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)\langle u_b|\hat{H}'|u_a\rangle$$

令$\omega_0=(E_a-E_b)/\hbar$，$H'_{ba}=\langle u_b|\hat{H}'|u_a\rangle$是$\hat{H}'$的矩阵元，上式可以表达为：

$\mathrm{i}\hbar\dot{C}_{b0}(t)=H'_{ba}\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)C_{a0}(t)$。

证毕。

同理，可以证明$\mathrm{i}\hbar\dot{C}_{a0}(t)=H'_{ab}C_{b0}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)$。换一种叙述方式：

证明：已知薛定谔方程：$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi(t)\rangle=\hat{H}|\varphi(t)\rangle$，其中$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}'$，$\hat{H}'=-eZE_z$，

对方程两边同时左乘$\langle u_a|$得：

$$\langle u_a|\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi\rangle=\langle u_a|(\hat{H}_0+\hat{H}')|\varphi\rangle\Rightarrow\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u_a|\varphi\rangle=\langle u_a|\hat{H}_0|\varphi\rangle+\langle u_a|(-eE_zZ)|\varphi\rangle,$$

对上式代入$|\varphi\rangle=C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)|u_b\rangle$，

并且利用正交归一化条件$\langle u_a|u_a\rangle=\langle u_b|u_b\rangle=1,\langle u_a|u_b\rangle=\langle u_b|u_a\rangle=0$，得

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u_a|\varphi\rangle\\
&=\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)\langle u_a|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)\langle u_a|u_b\rangle]\\
&=\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)]=\mathrm{i}\hbar\dot{C}_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)+E_aC_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)
\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}
\text{右边}&=\langle u_a|\hat{H}_0|\varphi\rangle+\langle u_a|(-eE_zZ)|\varphi\rangle\\
&=\langle u_a|\hat{H}_0[C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)|u_b\rangle]\\
&+\langle u_a|(-eE_zZ)[C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)|u_b\rangle]\\
&=C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)\langle u_a|\hat{H}_0|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)\langle u_a|\hat{H}_0|u_b\rangle\\
&+C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)\langle u_a|(-eE_zZ)|u_a\rangle+C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)\langle u_a|(-eE_zZ)|u_b\rangle
\end{aligned},$$

考虑到正交归一化条件，以及：$\hat{H}_0|u_a\rangle=E_a|u_a\rangle$，$\hat{H}_0|u_b\rangle=E_b|u_b\rangle$，

于是有：$\langle u_a|\hat{H}_0|u_a\rangle=E_a\langle u_a|u_a\rangle=E_a$，$\langle u_a|\hat{H}_0|u_b\rangle=E_b\langle u_a|u_b\rangle=0\Rightarrow$

$$\text{右边} = E_a C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar) + C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)\langle u_a|(-eE_z Z)|u_a\rangle + C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)\langle u_a|(-eE_z Z)|u_b\rangle,$$

由于固有电偶极矩为零，即 $\langle u_a|eZ|u_a\rangle = \langle u_b|eZ|u_b\rangle = 0$，于是有

$$\text{右边} = E_a C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar) + C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)\langle u_a|(-eE_z Z)|u_b\rangle,$$

$$\text{左边} = \text{右边} \Rightarrow \mathrm{i}\hbar\dot{C}_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar) = C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)\langle u_a|(-eE_z Z)|u_b\rangle,$$

将相互作用哈密顿算符的矩阵元记为：$H'_{ab} = \langle u_a|\hat{H}'|u_b\rangle = \langle u_a|(-eZE_z)|u_b\rangle$，

定义原子频率（又称为共振频率）$\omega_0 = (E_a - E_b)/\hbar$，

那么上面方程可以表达为：$\mathrm{i}\hbar\dot{C}_{a0}(t) = H'_{ab}C_{b0}(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)$，

注：可以利用电偶极矩的矩阵元 $D_{ab} = \langle u_a|eZ|u_b\rangle$，将相互作用哈密顿算符的矩阵元表达为：$H'_{ab} = -E_z D_{ab}$。

2. 第 2.2-2.3 节，p.38，若假设原子初始处于上能级，在一阶近似下，推导出与(25)或(25')类似的表达式来。

解：已知存在外电磁场时，二能级原子的量子状态可以表达为

$$|\varphi(t)\rangle = C_a(t)|u_a\rangle + C_b(t)|u_b\rangle = C_{a0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_a t/\hbar)|u_a\rangle + C_{b0}(t)\exp(-\mathrm{i}E_b t/\hbar)|u_b\rangle,$$

其中系数满足如下方程组：

$$\begin{cases} \mathrm{i}\hbar\dot{C}_{a0}(t) = H'_{ab}\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)C_{b0}(t), & (1) \\ \mathrm{i}\hbar\dot{C}_{b0}(t) = H'_{ba}\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)C_{a0}(t), & (2) \end{cases}$$

若假设原子初始处于上能级，即有初始条件

$$|\varphi(0)\rangle = C_{a0}(0)|u_a\rangle + C_{b0}(0)|u_b\rangle = |u_a\rangle \Rightarrow C_{a0}(0) = 1,\ C_{b0}(0) = 0, \quad (3)$$

(3)式可以视为零阶近似下的结果。它满足方程(1)，将它代入(2)，得到一阶近似下的 $C_{b0}(t)$，即有

$$\mathrm{i}\hbar\dot{C}_{b0}(t) = H'_{ba}\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) \Rightarrow C^{(1)}_{b0}(t) = (1/\mathrm{i}\hbar)\int_0^t H'_{ba}\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t')\mathrm{d}t',$$

由于 $H'_{ba} = -E_z D_{ba}$，$E_z = (E_0/2)[\exp(\mathrm{i}\omega t) + \exp(-\mathrm{i}\omega t)]$，其中 D_{ba} 和 E_0 与时间无关。于是有：

$$C_{b0}^{(1)}(t)=\frac{-D_{ba}E_0}{2\mathrm{i}\hbar}\int_0^t[\exp(\mathrm{i}\omega t')+\exp(-\mathrm{i}\omega t')]\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t')\mathrm{d}t'$$
$$=\frac{\mathrm{i}D_{ba}E_0}{2\hbar}\{\int_0^t\exp[-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t']\mathrm{d}t'+\int_0^t\exp[-\mathrm{i}(\omega_0+\omega)t']\mathrm{d}t'\},$$
$$=\frac{D_{ba}E_0}{2\hbar}\{\frac{1-\exp[-\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t]}{(\omega_0-\omega)}+\frac{1-\exp[-\mathrm{i}(\omega_0+\omega)t]}{(\omega_0+\omega)}\}$$

使用旋转波近似，即略去上式中的第二项，得到 t 时刻原子处于下能级 $|u_b\rangle$ 的几率，即

$$P_b^{(1)}(t)=\left|C_b^{(1)}(t)\right|^2=\left|C_{b0}^{(1)}(t)\right|^2=(\frac{D_{ba}E_0}{2\hbar})^2\{\frac{[1-\cos(\omega_0-\omega)t]^2+\sin^2(\omega_0-\omega)t}{(\omega_0-\omega)^2}\}$$
$$=(\frac{D_{ba}E_0}{2\hbar})^2\{\frac{2[1-\cos(\omega_0-\omega)t]}{(\omega_0-\omega)^2}\}=(\frac{D_{ba}E_0}{2\hbar})^2\{\frac{\sin[(\omega_0-\omega)t/2]}{(\omega_0-\omega)/2}\}^2$$

令 $\Delta\omega=(\omega_0-\omega)/2$，上式可写成

$$P_b^{(1)}(t)=(\frac{D_{ba}E_0}{2\hbar})^2(\frac{\sin\Delta\omega t}{\Delta\omega})^2\xrightarrow{\Delta\omega\to 0}\max P_a^{(1)}(t)=(\frac{D_{ba}E_0}{2\hbar})^2t^2。$$

因此，在共振下，场与原子之间的相互作用是最强的（发生跃迁的几率最大）。

3. 第 3.1 节，p.26 题. 假设在混合系综中，系统处于各个微观状态 $|\psi_i\rangle$ 的概率 P_i 不随时间而改变（$i=1,2,3...,n$，$\sum_{i=1}^n P_i=1$），且 $|\psi_i\rangle$ 满足 Schrödinger 方程 $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_i\rangle=\hat{H}|\psi_i\rangle$，证明该混合系综的密度算符 $\hat{\rho}$ 满足以下量子 Liouville 方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}]$$

证明：由题意知，该混合系综的密度算符应该为：

$$\hat{\rho}=\sum_{i=1}^n P_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \tag{1}$$

对 Schrödinger 方程 $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_i\rangle=\hat{H}|\psi_i\rangle$ 两边同时取厄米共轭，并且利用哈密顿算符的厄米性 $\hat{H}^\dagger=\hat{H}$，得到

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_i| = \langle\psi_i|\hat{H}, \tag{2}$$

于是由 Schrödinger 方程和上式有：

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi_i\rangle = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}|\psi_i\rangle,\quad \frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_i| = -\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi_i|\hat{H}, \tag{3}$$

让(1)式两边同时对时间求导,考虑到 P_i 不随时间而改变，并且利用(3)得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} &= \sum_{i=1}^{n} P_i\frac{\partial}{\partial t}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = \sum_{i=1}^{n} P_i[(\frac{\partial}{\partial t}|\psi_i\rangle)\langle\psi_i| + |\psi_i\rangle(\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_i|)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} P_i[\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}|\psi_i\rangle\langle\psi_i| - \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{H}] \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}(\hat{H}\sum_{i=1}^{n} P_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| - \sum_{i=1}^{n} P_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{H}) \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}(\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}]
\end{aligned}, \tag{4}$$

证毕。

4-1. 第 4.1-4.2 节，p.24，证明二能级原子的 Bloch 矢量满足 $\boldsymbol{r} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\boldsymbol{\sigma})$，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利矩阵矢量，$\hat{\rho}$ 是原子的密度算符。

证明： 设二能级原子的状态矢量为 $|\psi\rangle = c_a|a\rangle + c_b|b\rangle$，其中 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 是原子的上下能级本征态。则原子的密度算符（矩阵）为

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix}\rho_{aa} & \rho_{ab}\\ \rho_{ba} & \rho_{bb}\end{pmatrix} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix}c_a\\ c_b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_a^* & c_b^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|c_a|^2 & c_a c_b^*\\ c_a^* c_b & |c_b|^2\end{pmatrix}$$，可见 $\rho_{ab} = \rho_{ba}^*$。

已知二能级原子的 Bloch 矢量和密度算符（矩阵）之间有以下关系：

$r_1 = \rho_{ab} + \rho_{ba}$，$r_2 = \mathrm{i}(\rho_{ab} - \rho_{ba})$，$r_3 = \rho_{aa} - \rho_{bb}$

已知泡利矩阵矢量 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 的三个分量为：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

于是

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\sigma_1) = \mathrm{Tr}[\begin{pmatrix}\rho_{aa} & \rho_{ab}\\ \rho_{ba} & \rho_{bb}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}] = \mathrm{Tr}[\begin{pmatrix}\rho_{ab} & \rho_{aa}\\ \rho_{bb} & \rho_{ba}\end{pmatrix}] = \rho_{ab} + \rho_{ba} = r_1,$$

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\sigma_2)=\mathrm{Tr}[\begin{pmatrix}\rho_{aa} & \rho_{ab}\\ \rho_{ba} & \rho_{bb}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}]=\mathrm{Tr}[\begin{pmatrix}\mathrm{i}\rho_{ab} & -\mathrm{i}\rho_{aa}\\ \mathrm{i}\rho_{bb} & -\mathrm{i}\rho_{ba}\end{pmatrix}]=\mathrm{i}(\rho_{ab}-\rho_{ba})=r_2,$$

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\sigma_3)=\mathrm{Tr}[\begin{pmatrix}\rho_{aa} & \rho_{ab}\\ \rho_{ba} & \rho_{bb}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}]=\mathrm{Tr}[\begin{pmatrix}\rho_{aa} & -\rho_{ab}\\ \rho_{ba} & -\rho_{bb}\end{pmatrix}]=\rho_{aa}-\rho_{bb}=r_3.$$

因此 Bloch 矢量 $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,r_3)$ 和泡利矩阵矢量 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ 之间存在以下关系：

$\boldsymbol{r}=\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\boldsymbol{\sigma})$.

反之：如果已知 $\boldsymbol{r}=\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\boldsymbol{\sigma})$，请证明 $r_1=\rho_{ab}+\rho_{ba}$， $r_2=\mathrm{i}(\rho_{ab}-\rho_{ba})$， $r_3=\rho_{aa}-\rho_{bb}$.

4-2. 第 4.1-4.2 节，p.24，证明(4.1-18)公式。

解：已知

$$\begin{cases}\dot{\rho}_{aa}=(H'_{ab}\rho_{ba}-H'_{ba}\rho_{ab})/\mathrm{i}\hbar\\ \dot{\rho}_{bb}=-(H'_{ab}\rho_{ba}-H'_{ba}\rho_{ab})/\mathrm{i}\hbar\\ \dot{\rho}_{ab}=-\mathrm{i}\omega_0\rho_{ab}-H'_{ab}(\rho_{aa}-\rho_{bb})/\mathrm{i}\hbar\\ \dot{\rho}_{ba}=\mathrm{i}\omega_0\rho_{ba}+H'_{ba}(\rho_{aa}-\rho_{bb})/\mathrm{i}\hbar\end{cases}, \tag{1}$$

根据 Bloch 矢量的定义式

$$\begin{cases}r_1=\rho_{ab}+\rho_{ba}\\ r_2=\mathrm{i}(\rho_{ab}-\rho_{ba})\\ r_3=\rho_{aa}-\rho_{bb}\end{cases}, \tag{2}$$

并且利用 $\rho_{aa}+\rho_{bb}=1$，可得到

$$\rho_{aa}=\frac{1}{2}(1+r_3),\ \rho_{bb}=\frac{1}{2}(1-r_3),\ \rho_{ab}=\frac{1}{2}(r_1-\mathrm{i}r_2),\ \rho_{ba}=\frac{1}{2}(r_1+\mathrm{i}r_2), \tag{3}$$

以及

$$\begin{cases}\dot{r}_1=\dot{\rho}_{ab}+\dot{\rho}_{ba}\\ \dot{r}_2=\mathrm{i}(\dot{\rho}_{ab}-\dot{\rho}_{ba})\\ \dot{r}_3=\dot{\rho}_{aa}-\dot{\rho}_{bb}\end{cases}, \tag{4}$$

将(1)代入(4)右边，并且利用(3)，整理得到

$$\begin{cases}\dot{r}_1=-\omega_0 r_2+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(H'_{ab}-H'_{ba})r_3\\ \dot{r}_2=\omega_0 r_1-\frac{1}{\hbar}(H'_{ab}+H'_{ba})r_3\\ \dot{r}_3=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(H'_{ab}-H'_{ba})r_1+\frac{1}{\hbar}(H'_{ab}+H'_{ba})r_2\end{cases}, \tag{5}$$

上式即是(4.1-18)。令

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(H'_{ab}+H'_{ba})/\hbar\\ \mathrm{i}(H'_{ab}-H'_{ba})/\hbar\\ \omega_0\end{pmatrix}. \tag{6}$$

代入(5)式得

$$\begin{pmatrix}\dot r_1\\ \dot r_2\\ \dot r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_2 r_3-\omega_3 r_2\\ \omega_3 r_1-\omega_1 r_3\\ \omega_1 r_2-\omega_2 r_1\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{7}$$

5. 第 4.1-4.2 节，p. 27，假设 $\boldsymbol{\omega}$ 与时间无关，证明 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 之间夹角与时间无关。

证明：已知 Bloch 矢量满足以下进动方程：$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，

对该方程两边同时点积 $\boldsymbol{\omega}$，由于 $\boldsymbol{\omega}$ 与时间无关，故有

$$\text{左}=\boldsymbol{\omega}\cdot(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t})=\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})=\frac{\partial}{\partial t}(|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\cos\theta)=\text{右}=\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=0,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角。由于 $|\boldsymbol{r}|=1$，而于 $\boldsymbol{\omega}$ 与时间无关且有 $|\boldsymbol{\omega}|\neq 0$，故有

$$\frac{\partial}{\partial t}\cos\theta=0$$

即 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 之间夹角与时间无关。证毕

6. 第 4.1-4.2 节，p. 42，利用(24)和(25)式，证明 $\langle\hat P_y\rangle=Dr_2$

证明：已知 $\hat P_y=(\hat P^+-\hat P^-)/2\mathrm{i}$，$|\psi\rangle=c_a|a\rangle|m+1\rangle+c_b|b\rangle|m\rangle$，

$\langle\psi|=\langle a|\langle m+1|c_a^*+\langle b|\langle m|c_b^*$，故有

$$\left\langle \hat{P}_y \right\rangle = \langle\psi|\hat{P}_y|\psi\rangle = \frac{1}{2\mathrm{i}}\langle\psi|(\hat{P}^+ - \hat{P}^-)|\psi\rangle$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\langle\psi|\hat{P}^+|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{P}^-|\psi\rangle)$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}[(\langle m+1|\langle a|c_a^* + \langle m|\langle b|c_b^*)\hat{P}^+(c_a|a\rangle|m+1\rangle + c_b|b\rangle|m\rangle)$$
$$-(\langle m+1|\langle a|c_a^* + \langle m|\langle b|c_b^*)\hat{P}^-(c_a|a\rangle|m+1\rangle + c_b|b\rangle|m\rangle)] \quad ,$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}[c_a^*c_a\langle m+1|\langle a|\hat{P}^+|a\rangle|m+1\rangle + c_a^*c_b\langle m+1|\langle a|\hat{P}^+|b\rangle|m\rangle$$
$$+c_b^*c_a\langle m|\langle b|\hat{P}^+|a\rangle|m+1\rangle + c_b^*c_b\langle m|\langle b|\hat{P}^+|b\rangle|m\rangle$$
$$-c_a^*c_a\langle m+1|\langle a|\hat{P}^-|a\rangle|m+1\rangle - c_a^*c_b\langle m+1|\langle a|\hat{P}^-|b\rangle|m\rangle$$
$$-c_b^*c_a\langle m|\langle b|\hat{P}^-|a\rangle|m+1\rangle - c_b^*c_b\langle m|\langle b|\hat{P}^-|b\rangle|m\rangle]$$

由于 $\hat{P}^+|m\rangle \to |m+1\rangle$， $\hat{P}^-|m\rangle \to |m-1\rangle$，利用本征态矢的正交归一性，有

$$\langle m+1|\langle a|\hat{P}^+|a\rangle|m+1\rangle = \langle m|\langle b|\hat{P}^+|b\rangle|m\rangle = \langle m|\langle b|\hat{P}^+|a\rangle|m+1\rangle = 0,$$

$$\langle m+1|\langle a|\hat{P}^-|a\rangle|m+1\rangle = \langle m|\langle b|\hat{P}^-|b\rangle|m\rangle = \langle m+1|\langle a|\hat{P}^-|b\rangle|m\rangle = 0,$$

$$D_{ab}^+ = \langle m+1|\langle a|\hat{P}^+|b\rangle|m\rangle = 2D, \quad D_{ba}^- = \langle m|\langle b|\hat{P}^-|a\rangle|m+1\rangle = 2D,$$

因此有

$$\left\langle \hat{P}_y \right\rangle = \frac{1}{2\mathrm{i}}[c_bc_a^*\langle m+1|\langle a|\hat{P}^+|b\rangle|m\rangle - c_ac_b^*\langle m|\langle b|\hat{P}^-|a\rangle|m+1\rangle]$$
$$= -\mathrm{i}D(c_bc_a^* - c_ac_b^*) = \mathrm{i}D(c_ac_b^* - c_bc_a^*) = D\mathrm{i}(\rho_{ab} - \rho_{ba})$$

由于 $r_2 = \mathrm{i}(\rho_{ab} - \rho_{ba})$， 故有 $\left\langle \hat{P}_y \right\rangle = \langle\psi|\hat{P}_y|\psi\rangle = Dr_2$。证毕

7. 第 4.3-4.7 节，p. 93，分析增益介质的自感应透明现象。

即，自感应透明现象发生时，在增益介质中稳定解的脉冲面积是多少，为什么（给出定量分析）？

答：设 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 分别表示二能级原子的上、下能级本征态，$|\psi\rangle = c_a|a\rangle + c_b|b\rangle$ 是原子系统的态矢，密度算符 $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ 在 $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ 表象下的对角元 $\rho_{aa}(t)$ 和 $\rho_{bb}(t)$ 分别代表原子处于上下能级的概率，在外场下它们是时间 t 的函数。在增益介质中，原子在初始时处于上能级，即满足初始条件 $\rho_{aa}(-\infty) = 1$ 和 $\rho_{bb}(-\infty) = 0$。

按照面积定理，脉冲面积 $A(z)$随传播距离 z 的变化满足方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}A(z)=\frac{a}{2}\sin A(z)\,, \tag{1}$$

其中 $a>0$ 是一个常数。设初始脉冲面积满足 $A(z)=m\pi+\delta$，其中 $0<|\delta|<\pi$，m=1, 3, 5…. 是奇数，则由(1)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}A(z)=\frac{a}{2}\sin(m\pi+\delta)=-\frac{a}{2}\sin\delta\,, \tag{2}$$

对(2)讨论如下：

1）当 $0<\delta<\pi$ 时，$\mathrm{d}A(z)/\mathrm{dz}=-(a\sin\delta)/2<0$，$A(z)$将随传播距离 z 的增加而变小，从而有 $A(z)=m\pi+\delta\to m\pi$，而当 $A(z)=m\pi$ 时，$\mathrm{d}A(z)/\mathrm{dz}=-(a\sin m\pi)/2=0$，即脉冲面积稳定下来不再变化，因此脉冲面积趋于 π 的奇数倍；

2）当 $-\pi<\delta<0$ 时，$\mathrm{d}A(z)/\mathrm{dz}=(a\sin\delta)/2>0$，$A(z)$将随传播距离 z 的增加而增大，从而有 $A(z)=m\pi+\delta\to m\pi$，而当 $A(z)=m\pi$ 时，$\mathrm{d}A(z)/\mathrm{dz}=-(a\sin m\pi)/2=0$，即脉冲面积稳定下来不再变化，因此脉冲面积趋于 π 的奇数倍。

以上 1）和 2）的讨论穷尽了所有的可能性，故在在增益介质中，脉冲面积为 π 的奇数倍是自感应透明现象的稳定解。

在下面，由于显示问题，有些数学表达式中的 $\hat{a}^{\dagger}$ 写成了 $\hat{a}^{+}$。

8-1. 第五章（上），p.8. 证明 $[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}]=1$

证明：将以下表达式

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^{\dagger}+\hat{a})\,,\quad \hat{p}=\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^{\dagger}-\hat{a})\,,$$

代入对易关系 $[\hat{x},\hat{p}]=\hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x}=\mathrm{i}\hbar$，则有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar &= \hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger+\hat{a})\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger-\hat{a})-\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger-\hat{a})\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger+\hat{a}) \\
&= \mathrm{i}\frac{\hbar}{2}[(\hat{a}^\dagger+\hat{a})(\hat{a}^\dagger-\hat{a})-(\hat{a}^\dagger-\hat{a})(\hat{a}^\dagger+\hat{a})] \qquad , \\
&= \mathrm{i}\frac{\hbar}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger+\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}-\hat{a}\hat{a}-\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger+\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}) \\
&= \mathrm{i}\hbar(\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a})=\mathrm{i}\hbar[\hat{a},\hat{a}^\dagger]
\end{aligned}
$$

即 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$。 证毕

8-2. 第五章（上），p.9. 证明 $\hat{H}=(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)\hbar\omega$

证明：已知谐振子的 Hamiltonian 算符为: $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$,

其中: $\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger+\hat{a})$, $\hat{p}=\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger-\hat{a})$.

其中产生算符和湮灭算符满足对易关系 $\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}=1$，因此有

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{p}^2}{2m} &= -\frac{1}{2m}\frac{m\hbar\omega}{2}(\hat{a}^+-\hat{a})(\hat{a}^+-\hat{a}) \\
&= -\frac{1}{4}\hbar\omega[(\hat{a}^+)^2+(\hat{a})^2-\hat{a}^+\hat{a}-\hat{a}\hat{a}^+]=\frac{1}{4}\hbar\omega[-(\hat{a}^+)^2-(\hat{a})^2+2\hat{a}^+\hat{a}+1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 &= \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}^++\hat{a})(\hat{a}^++\hat{a}) \\
&= \frac{1}{4}\hbar\omega[(\hat{a}^+)^2+(\hat{a})^2+\hat{a}^+\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^+]=\frac{1}{4}\hbar\omega[(\hat{a}^+)^2+(\hat{a})^2+2\hat{a}^+\hat{a}+1]
\end{aligned}
$$

因此

$$
\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2=\frac{1}{4}\hbar\omega[4\hat{a}^+\hat{a}+2]=\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})
$$

9. 第五章（上），p.12，证明 (5.1-9), 即证明 $\hat{N}(\hat{a}^\dagger)^l|n\rangle=(n+l)(\hat{a}^\dagger)^l|n\rangle$, $l=1,2,\ldots$.

证明: 由 $[\hat{N},\hat{a}^\dagger]=\hat{N}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{N}=\hat{a}^\dagger$， 可得

$$
\hat{N}\hat{a}^\dagger=\hat{a}^\dagger\hat{N}+\hat{a}^\dagger, \tag{1}
$$

用数学归纳法证明原式.

1) 当 $l=1$时，利用(1)式和 $\hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$ 有

$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle=(\hat{a}^\dagger\hat{N}+\hat{a}^\dagger)|n\rangle=\hat{a}^\dagger(\hat{N}+1)|n\rangle=(n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$，

原式成立。

2）假设当$l=m\ge 1$时，原式成立，即有

$$\hat{N}(\hat{a}^\dagger)^m|n\rangle=(n+m)(\hat{a}^\dagger)^m|n\rangle, \qquad (2)$$

则当$l=m+1$时，利用(1)和(2)有

$\hat{N}(\hat{a}^+)^{m+1}|n\rangle=\hat{N}\hat{a}^+(\hat{a}^+)^m|n\rangle=(\hat{a}^+\hat{N}+\hat{a}^+)(\hat{a}^+)^m|n\rangle$

$=\hat{a}^+\hat{N}(\hat{a}^+)^m|n\rangle+(\hat{a}^+)^{m+1}|n\rangle$

$=\hat{a}^+(n+m)(\hat{a}^+)^m|n\rangle+(\hat{a}^+)^{m+1}|n\rangle$

$=(n+m)(\hat{a}^+)^{m+1}|n\rangle+(\hat{a}^+)^{m+1}|n\rangle$

$=(n+m+1)(\hat{a}^+)^{m+1}|n\rangle$

原式成立。综合以上 1)和 2)可知原式得证。证毕。

注：如果要求先证明$[\hat{N},\hat{a}^\dagger]=\hat{a}^\dagger$，则利用公式$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$和$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$，有$[\hat{N},\hat{a}^\dagger]=[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}^\dagger]=\hat{a}^\dagger[\hat{a},\hat{a}^\dagger]+[\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger]\hat{a}=\hat{a}^\dagger[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=\hat{a}^\dagger$

10. 第五章（上），p.60，证明$[\hat{N},\cos\hat{\phi}]=-\mathrm{i}\sin\hat{\phi}$，$[\hat{N},\sin\hat{\phi}]=\mathrm{i}\cos\hat{\phi}$。

即已知光子数算符$\hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$与产生/湮灭算符满足对易关系$[\hat{a}^\dagger,\hat{N}]=-\hat{a}^\dagger$和$[\hat{a},\hat{N}]=\hat{a}$，$\cos\hat{\phi}$和$\sin\hat{\phi}$是同一光场的相位算符：

$$\cos\hat{\phi}=\frac{1}{2}[(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}+\hat{a}^+(\hat{N}+1)^{-1/2}],\quad \sin\hat{\phi}=\frac{1}{2\mathrm{i}}[(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}-\hat{a}^+(\hat{N}+1)^{-1/2}]$$

证明对易关系$[\hat{N},\cos\hat{\phi}]=-\mathrm{i}\sin\hat{\phi}$，$[\hat{N},\sin\hat{\phi}]=\mathrm{i}\cos\hat{\phi}$.

证明：

由$[\hat{a}^\dagger,\hat{N}]=-\hat{a}^\dagger$和$[\hat{a},\hat{N}]=\hat{a}$分别可得：$\hat{N}\hat{a}^\dagger=\hat{a}^\dagger\hat{N}+\hat{a}^\dagger$，$\hat{a}\hat{N}=\hat{N}\hat{a}+\hat{a}$，利用它们以及$[\hat{N},(\hat{N}+1)^{-1/2}]=0$，有

$$[\hat{N},\cos\hat{\phi}]=\hat{N}\cos\hat{\phi}-\cos\hat{\phi}\hat{N}$$

$$=\frac{1}{2}[\hat{N}(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}+\hat{N}\hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}-(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}\hat{N}-\hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{N}]$$

$$=\frac{1}{2}[(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{N}\hat{a}+\hat{N}\hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}-(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}\hat{N}-\hat{a}^{+}\hat{N}(\hat{N}+1)^{-1/2}]$$

$$=\frac{1}{2}[(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{N}\hat{a}+(\hat{a}^{+}\hat{N}+\hat{a}^{+})(\hat{N}+1)^{-1/2}-(\hat{N}+1)^{-1/2}(\hat{N}\hat{a}+\hat{a})-\hat{a}^{+}\hat{N}(\hat{N}+1)^{-1/2}],$$

$$=\frac{1}{2}[(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{N}\hat{a}+\hat{a}^{+}\hat{N}(\hat{N}+1)^{-1/2}+\hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}$$

$$-(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{N}\hat{a}-(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}-\hat{a}^{+}\hat{N}(\hat{N}+1)^{-1/2}]$$

$$=\frac{1}{2}[\hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}-(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}]=-\mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}}[(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}-\hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}]=-\mathrm{i}\sin\hat{\phi}$$

同理，

$$[\hat{N},\sin\hat{\phi}]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\hat{N}(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}-\hat{N}\hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}-(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}\hat{N}+\hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{N}]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}[(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{N}\hat{a}-\hat{N}\hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}-(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}\hat{N}+\hat{a}^{+}\hat{N}(\hat{N}+1)^{-1/2}]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}[(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{N}\hat{a}-(\hat{a}^{+}\hat{N}+\hat{a}^{+})(\hat{N}+1)^{-1/2}-(\hat{N}+1)^{-1/2}(\hat{N}\hat{a}+\hat{a})+\hat{a}^{+}\hat{N}(\hat{N}+1)^{-1/2}]$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}[(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{N}\hat{a}-\hat{a}^{+}\hat{N}(\hat{N}+1)^{-1/2}-\hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}-(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{N}\hat{a}-(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}+\hat{a}^{+}\hat{N}(\hat{N}+1)^{-1/2}]$$

$$=\mathrm{i}\frac{1}{2}[(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}\ +\ \hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}]=\mathrm{i}\cos\hat{\phi}$$

11. 第五章（上）， p.73. 证明：$\left\langle\cos\hat{\phi}\right\rangle=\langle n|\cos\hat{\phi}|n\rangle=0$ 以及

$$\left\langle\cos^2\hat{\phi}\right\rangle=\langle n|\cos^2\hat{\phi}|n\rangle=\begin{cases}1/2,\ n\neq 0\\ 1/4,\ n=0\end{cases}。$$

证明，由于

$\cos\hat{\phi}=(\hat{A}\ +\hat{A}^{\dagger})/2$， $\hat{A}=(\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}$， $\hat{A}^{\dagger}=\hat{a}^{\dagger}(\hat{N}+1)^{-1/2}$，

$(\hat{N}+1)^{-1/2}|n\rangle=(n+1)^{-1/2}|n\rangle$， $\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$， $\hat{a}^{\dagger}|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$，

$\langle n|(\hat{N}+1)^{-1/2}=\langle n|(n+1)^{-1/2}$， $\langle n|\hat{a}^{\dagger}=\langle n-1|\sqrt{n}$， $\langle n|\hat{a}=\langle n+1|\sqrt{n+1}$，

$$(\cos\hat{\phi})^2=\frac{1}{4}(\hat{A}\hat{A}+\hat{A}^{+}\hat{A}^{+}+\hat{A}\,\hat{A}^{+}+\hat{A}^{+}\hat{A})$$

故当 $n\neq 0$ 时，

$$\hat{A}\left|n\right\rangle = (\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}(\hat{N}+1)^{-1/2}\left|n-1\right\rangle = \sqrt{n}(n-1+1)^{-1/2}\left|n-1\right\rangle = \left|n-1\right\rangle,$$

$$\hat{A}^{+}\left|n\right\rangle = \hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}\left|n\right\rangle = (n+1)^{-1/2}\hat{a}^{+}\left|n\right\rangle = (n+1)^{-1/2}\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle = \left|n+1\right\rangle,$$

$$\hat{A}\left|n\right\rangle = \left|n-1\right\rangle \Rightarrow \left\langle n\right|\hat{A}^{\dagger} = \left\langle n-1\right|，\quad \hat{A}^{\dagger}\left|n\right\rangle = \left|n+1\right\rangle \Rightarrow \left\langle n\right|\hat{A} = \left\langle n+1\right|$$

从而有

$$\begin{aligned}\left\langle n\right|(\cos\hat{\phi})^{2}\left|n\right\rangle &= \frac{1}{4}(\left\langle n\right|\hat{A}\hat{A}\left|n\right\rangle + \left\langle n\right|\hat{A}^{+}\hat{A}^{+}\left|n\right\rangle + \left\langle n\right|\hat{A}\,\hat{A}^{+}\left|n\right\rangle + \left\langle n\right|\hat{A}^{+}\hat{A}\left|n\right\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\left\langle n+1|n-1\right\rangle + \left\langle n-1|n+1\right\rangle + \left\langle n+1|n+1\right\rangle + \left\langle n-1|n-1\right\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(0+0+1+1) = \frac{1}{2}\end{aligned},$$

当 $n=0$ 时，

$$\hat{A}\left|0\right\rangle = (\hat{N}+1)^{-1/2}\hat{a}\left|0\right\rangle = 0，\quad \hat{A}^{+}\left|0\right\rangle = \hat{a}^{+}(\hat{N}+1)^{-1/2}\left|0\right\rangle = \hat{a}^{+}\left|0\right\rangle = \left|1\right\rangle,$$

$$\hat{A}\left|0\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle 0\right|\hat{A}^{\dagger} = 0，\quad \hat{A}^{\dagger}\left|0\right\rangle = \left|1\right\rangle \Rightarrow \left\langle 0\right|\hat{A} = \left\langle 1\right|$$

从而有

$$\begin{aligned}\left\langle 0\right|(\cos\hat{\phi})^{2}\left|0\right\rangle &= \frac{1}{4}(\left\langle 0\right|\hat{A}\hat{A}\left|0\right\rangle + \left\langle 0\right|\hat{A}^{+}\hat{A}^{+}\left|0\right\rangle + \left\langle 0\right|\hat{A}\,\hat{A}^{+}\left|0\right\rangle + \left\langle 0\right|\hat{A}^{+}\hat{A}\left|0\right\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\left\langle 1|0+0|1\right\rangle + \left\langle 1|1\right\rangle + 0) = \frac{1}{4}(0+0+1+0) = \frac{1}{4}\end{aligned},$$

因此有

$$\left\langle \cos^{2}\hat{\phi}\right\rangle = \left\langle n\right|\cos^{2}\hat{\phi}\left|n\right\rangle = \begin{cases}1/2,\ n\neq 0\\ 1/4,\ n=0\end{cases},$$

证毕。

其他习题

1、设某系统的量子力学状态为 $\left|\varphi(t)\right\rangle = C_{a}(t)\left|u_{a}\right\rangle + C_{b}(t)\left|u_{b}\right\rangle$，其中 $\left|u_{a}\right\rangle$ 和 $\left|u_{b}\right\rangle$ 是系统哈密顿算符的两个正交归一且完备的本征态，分别对应本征值 E_a 和 E_b，证明在无外场作用下，薛定谔方程的解能够给出以下结果

$$C_{a}(t) = C_{a}(0)\exp(-\mathrm{i}\,E_{a}t/\hbar)$$

证明：由于本征态 $\left|u_{a}\right\rangle$ 和 $\left|u_{b}\right\rangle$ 是正交归一和完备的，即满足关系

$$\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = I, \quad i, j = a, b, \tag{1}$$

没有外场时，系统的量子力学状态$|\varphi(t)\rangle$满足如下薛定谔方程：

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\varphi(t)\rangle = \hat{H}_0|\varphi(t)\rangle, \tag{2}$$

其中$\hat{H}_0$是没有外场时的哈密顿算符，按照题意有：

$$\hat{H}_0|u_a\rangle = E_a|u_a\rangle, \quad \hat{H}_0|u_b\rangle = E_b|u_b\rangle, \tag{3}$$

将$|\varphi(t)\rangle = C_a(t)|u_a\rangle + C_b(t)|u_b\rangle$代入(2)，并且利用(3), 有

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial C_a}{\partial t}|u_a\rangle + \mathrm{i}\hbar \frac{\partial C_b}{\partial t}|u_b\rangle = C_a E_a|u_a\rangle + C_b E_b|u_b\rangle, \tag{4}$$

对上式两边同时左乘$\langle u_a|$ ，并利用正交归一关系(1), 得到：

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} C_a(t) = E_a C_a(t), \tag{5}$$

即有：$C_a(t) = C_a(0)\exp(-\mathrm{i}\, E_a t/\hbar)$，证毕。

2、课件第五章(下)公式(5.6-20)的推导。

背景交代：考虑由单模光场与二能级原子构成的系统，其中Ω是光场的频率，$\hat{a}^\dagger$和$\hat{a}$是光子的产生和湮灭算符，$|a\rangle$和$|b\rangle$是二能级原子上下能级本征态，分别对应能量本征值$E_a = \hbar\omega_a$和$E_b = \hbar\omega_b$，$\omega_0 = \omega_a - \omega_b$ 是原子频率，$|a\rangle$和$|b\rangle$满足正交归一和完备性关系：$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$，$i, j = a, b$，$|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = I$。定义上升算符$\hat{\sigma}^\dagger = |a\rangle\langle b| = \hat{\eta}$和下降算符$\hat{\sigma} = |b\rangle\langle a| = \hat{\eta}^\dagger$，它们满足反对易子$\{\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^\dagger\} = \{\hat{\eta}^\dagger, \hat{\eta}\} = I$，其中反对易子定义为$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$。 已知采用相互作用图像时，从薛定谔图像变换到相互作用图像的演化算符为

$\hat{U}_0(t) = \exp\{-\mathrm{i}t[\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2) + \omega_a\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \omega_b\hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger]\}$，

在薛定谔图像下的相互作用哈密顿算符为$\hat{H}_{\mathrm{af}} = \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma})$，

问题：证明在相互作用图像下，相互作用哈密顿算符为：

$\hat{H}^I_{\mathrm{af}}(t) = \hbar g\{\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}\exp[\mathrm{i}(\Omega - \omega_0)t] + \hat{a}\hat{\sigma}^\dagger\exp[-\mathrm{i}(\Omega - \omega_0)t]\}$。

提示：从 $\hat{H}_{\mathrm{af}} = \hbar g(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^{\dagger})$ 出发，对最后结果去掉不满足能量守恒的项。

证明：

1）已知

$$\exp(\lambda\hat{A})\hat{B}\exp(-\lambda\hat{A}) = \hat{B} + \lambda[\hat{A},\hat{B}] + \frac{\lambda^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{\lambda^3}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \dots, \quad (1)$$

光子数算符 $\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ 满足 $[\hat{N},\hat{a}^{\dagger}] = \hat{a}^{\dagger}$，$[\hat{N},\hat{a}] = -\hat{a}$，因此有

$$[\hat{N},[\hat{N},\hat{a}]] = [\hat{N},-\hat{a}] = \hat{a}，\ [\hat{N},[\hat{N},[\hat{N},\hat{a}]]] = [\hat{N},\hat{a}] = -\hat{a}\ \dots, \quad (2)$$

即在以上多重对易子中，含有偶数重对易子括号的项（含有偶数个 $\hat{N}$），结果为 $\hat{a}$；含有奇数重对易子括号的项（含有奇数个 $\hat{N}$），结果为 $-\hat{a}$，故由(1)有

$$\exp(\lambda\hat{N})\hat{a}\exp(-\lambda\hat{N}) = \hat{a} - \lambda\hat{a} + \frac{\lambda^2}{2!}\hat{a} - \frac{\lambda^3}{3!}\hat{a} + \dots = \hat{a}(1-\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}-\frac{\lambda^3}{3!}+\dots) = \hat{a}\exp(-\lambda), \quad (3)$$

同理由 $[\hat{N},\hat{a}^{\dagger}] = \hat{a}^{\dagger}$ 得

$$[\hat{N},[\hat{N},\hat{a}^{\dagger}]] = [\hat{N},\hat{a}^{\dagger}] = \hat{a}^{\dagger}，\ [\hat{N},[\hat{N},[\hat{N},\hat{a}^{\dagger}]]] = [\hat{N},\hat{a}^{\dagger}] = \hat{a}^{\dagger}\ \dots, \quad (4)$$

即在以上多重对易子中，不管多少重对易子括号的项，结果均为 $\hat{a}^{\dagger}$，故由(1)有

$$\exp(\lambda\hat{N})\hat{a}^{\dagger}\exp(-\lambda\hat{N}) = \hat{a}^{\dagger}(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\dots) = \hat{a}^{\dagger}\exp(\lambda). \quad (5)$$

令 $\lambda = \mathrm{i}t\Omega$，由(3)和(5)可得

$$\exp(\mathrm{i}t\Omega\hat{N})(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})\exp(-\mathrm{i}t\Omega\hat{N}) = \hat{a}\exp(-\mathrm{i}t\Omega) + \hat{a}^{\dagger}\exp(\mathrm{i}t\Omega). \quad (6)$$

2) 定义算符 $\hat{M}_1 = \hat{\sigma}^{\dagger}\hat{\sigma} = |a\rangle\langle a|$ 和 $\hat{M}_2 = \hat{\eta}^{\dagger}\hat{\eta} = |b\rangle\langle b|$，正交归一化关系 $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$，$i,j = a,b$，可以证明

$$[\hat{M}_1,\hat{\sigma}] = -\hat{\sigma}，\ [\hat{M}_1,\hat{\sigma}^{\dagger}] = \hat{\sigma}^{\dagger}, \quad (7)$$

$$[\hat{M}_2,\hat{\eta}] = -\hat{\eta}，\ [\hat{M}_2,\hat{\eta}^{\dagger}] = \hat{\eta}^{\dagger}, \quad (8)$$

与证明(3)和(5)类似，利用(7)和(8)式同样可以证明

$$\exp(\beta\hat{M}_1)\hat{\sigma}\exp(-\beta\hat{M}_1)=\hat{\sigma}\exp(-\beta)，\exp(\beta\hat{M}_1)\hat{\sigma}^{\dagger}\exp(-\beta\hat{M}_1)=\hat{\sigma}^{\dagger}\exp(\beta)，\quad(9)$$

$$\exp(\gamma\hat{M}_2)\hat{\eta}\exp(-\gamma\hat{M}_2)=\hat{\eta}\exp(-\gamma)，\exp(\gamma\hat{M}_2)\hat{\eta}^{\dagger}\exp(-\gamma\hat{M}_2)=\hat{\eta}^{\dagger}\exp(\gamma)，\quad(10)$$

在下面利用(9)和(10)式进行计算时，$\beta=\mathrm{i}t\omega_a$，$\gamma=\mathrm{i}t\omega_b$。

3) 从薛定谔图像变换到相互作用图像的演化算符可以表达为

$$\hat{U}_0(t)=\exp[-\mathrm{i}t\Omega(\hat{N}+1/2)-\mathrm{i}t\omega_a\hat{M}_1-\mathrm{i}t\omega_b\hat{M}_2],\quad(11)$$

薛定谔图像下的相互作用哈密顿算符表达为$\hat{H}_{\mathrm{af}}=\hbar g(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^{\dagger})$，在相互作用图像下，它变为$\hat{H}_{\mathrm{af}}^{I}=\hat{U}_0^{-1}\hat{H}_{\mathrm{af}}\hat{U}_0$。考虑到$\hat{U}_0^{\dagger}=\hat{U}_0^{-1}$，算符$\hat{N}$、$\hat{M}_1$和 $\hat{M}_2$均为厄米算符且两两对易，利用(6)、(9)和(10), 且令$\beta=\mathrm{i}t\omega_a$，$\gamma=\mathrm{i}t\omega_b$，可以求得$\hat{H}_{\mathrm{af}}^{I}=\hbar g\hat{G}_1\hat{G}_2$，其中

$$\hat{G}_1=\exp(\mathrm{i}t\Omega\hat{N})(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger})\exp(-\mathrm{i}t\Omega\hat{N})=\hat{a}\exp(-\mathrm{i}t\Omega)+\hat{a}^{\dagger}\exp(\mathrm{i}t\Omega),$$

$$\begin{aligned}\hat{G}_2&=\exp(\mathrm{i}t\omega_a\hat{M}_1)[\exp(\mathrm{i}t\omega_b\hat{M}_2)(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^{\dagger})\exp(-\mathrm{i}t\omega_b\hat{M}_2)]\exp(-\mathrm{i}t\omega_a\hat{M}_1)\\
&=\exp(\mathrm{i}t\omega_a\hat{M}_1)[\exp(\mathrm{i}t\omega_b\hat{M}_2)(\hat{\eta}^{\dagger}+\hat{\eta})\exp(-\mathrm{i}t\omega_b\hat{M}_2)]\exp(-\mathrm{i}t\omega_a\hat{M}_1)\\
&=\exp(\mathrm{i}t\omega_a\hat{M}_1)[\hat{\eta}^{\dagger}\exp(\mathrm{i}t\omega_b)+\hat{\eta}\exp(-\mathrm{i}t\omega_b)]\exp(-\mathrm{i}t\omega_a\hat{M}_1)\\
&=\exp(\mathrm{i}t\omega_a\hat{M}_1)[\hat{\sigma}\exp(\mathrm{i}t\omega_b)+\hat{\sigma}^{\dagger}\exp(-\mathrm{i}t\omega_b)]\exp(-\mathrm{i}t\omega_a\hat{M}_1)\\
&=\hat{\sigma}\exp[-\mathrm{i}t(\omega_a-\omega_b)]+\hat{\sigma}^{\dagger}\exp[\mathrm{i}t(\omega_a-\omega_b)]\\
&=\hat{\sigma}\exp(-\mathrm{i}t\omega_0)+\hat{\sigma}^{\dagger}\exp(\mathrm{i}t\omega_0)\end{aligned}$$

于是

$$\hat{H}_{\mathrm{af}}^{I}=\hbar g[\hat{a}\exp(-\mathrm{i}t\Omega)+\hat{a}^{\dagger}\exp(\mathrm{i}t\Omega)][\hat{\sigma}\exp(-\mathrm{i}t\omega_0)+\hat{\sigma}^{\dagger}\exp(\mathrm{i}t\omega_0)],$$

去掉不满足能量守恒的项之后，得到.

$$\hat{H}_{\mathrm{af}}^{I}(t)=\hbar g\{\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}\exp[\mathrm{i}(\Omega-\omega_0)t]+\hat{a}\hat{\sigma}^{\dagger}\exp[-\mathrm{i}(\Omega-\omega_0)t]\}。$$

证毕。

3、设$|a\rangle$和$|b\rangle$分别表示二能级原子的上、下能级本征态，满足正交归一化条件，$\hat{\sigma}=|b\rangle\langle a|$和$\hat{\sigma}^{\dagger}=|a\rangle\langle b|$分别表示下降和上升算符，$\hat{M}=\hat{\sigma}^{\dagger}\hat{\sigma}$，证明：

$$\exp(\mathrm{i}t\omega\hat{M})\hat{\sigma}\exp(-\mathrm{i}t\omega\hat{M})=\hat{\sigma}\exp(-\mathrm{i}t\omega)$$

提示：先证明$[\hat{M},\hat{\sigma}]=-\hat{\sigma}$，再利用如下公式：

$$\exp(\lambda\hat{A})\hat{B}\exp(-\lambda\hat{A})=\hat{B}+\lambda[\hat{A},\hat{B}]+\frac{\lambda^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]+\frac{\lambda^3}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]]+\dots$$

证明：由于$|a\rangle$和$|b\rangle$满足正交归一化条件，利用$\hat{\sigma}=|b\rangle\langle a|$和$\hat{\sigma}^\dagger=|a\rangle\langle b|$有

$$\hat{M}=\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}=|a\rangle\langle b|b\rangle\langle a|=|a\rangle\langle a|, \tag{1}$$

利用$\hat{\sigma}=|b\rangle\langle a|$和$\hat{M}=|a\rangle\langle a|$，考虑$|a\rangle$和$|b\rangle$满足的正交归一化条件，有

$$\hat{M}\hat{\sigma}=|a\rangle\langle a|b\rangle\langle a|=0，\ \hat{\sigma}\hat{M}=|b\rangle\langle a|a\rangle\langle a|=|b\rangle\langle a|=\hat{\sigma},$$

从而有

$$[\hat{M},\hat{\sigma}]=\hat{M}\hat{\sigma}-\hat{\sigma}\hat{M}=-\hat{\sigma} \tag{2}$$

由（2）可知，

$$[\hat{M},\hat{\sigma}]=-\hat{\sigma},\ [\hat{M},[\hat{M},[\hat{M},\hat{\sigma}]]]=-\hat{\sigma}\ \dots(\text{奇数重对易子}) \tag{3}$$

$$[\hat{M},[\hat{M},\hat{\sigma}]]=\hat{\sigma},\ [\hat{M},[\hat{M},[\hat{M},[\hat{M},\hat{\sigma}]]]]=\hat{\sigma}\ \dots(\text{偶数重对易子}) \tag{4}$$

将(3)和（4）代入公式

$$\exp(\lambda\hat{A})\hat{B}\exp(-\lambda\hat{A})=\hat{B}+\lambda[\hat{A},\hat{B}]+\frac{\lambda^2}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]+\frac{\lambda^3}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]]+\dots$$

得

$$\exp(\lambda\hat{M})\hat{\sigma}\exp(-\lambda\hat{M})=\hat{\sigma}+\lambda[\hat{M},\hat{\sigma}]+\frac{\lambda^2}{2!}[\hat{M},[\hat{M},\hat{\sigma}]]+\frac{\lambda^3}{3!}[\hat{M},[\hat{M},[\hat{M},\hat{\sigma}]]]+\dots$$
$$=\hat{\sigma}-\lambda\hat{\sigma}+\frac{\lambda^2}{2!}\hat{\sigma}-\frac{\lambda^3}{3!}\hat{\sigma}+\dots=\hat{\sigma}(1-\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}-\frac{\lambda^3}{3!}+\dots)=\hat{\sigma}\exp(-\lambda\hat{M})$$

将$\lambda=\mathrm{i}t\omega$代入上式，得

$$\exp(\mathrm{i}t\omega\hat{M})\hat{\sigma}\exp(-\mathrm{i}t\omega\hat{M})=\hat{\sigma}\exp(-\mathrm{i}t\omega\hat{M})$$

证毕。

4、设有频率为Ω的光场和二能级原子构成的系统，其中原子的上下能级本征态分别是|*a*>和|*b*>（正交归一），分别对应能量本征值$E_a=\hbar\omega_a$和$E_b=\hbar\omega_b$，$\hat{a}$和$\hat{a}^\dagger$是

光子的湮灭算符和产生算符，|n>是光子数为 n 的本征态，g 是光子与原子之间的耦合系数，系统的总哈密顿算符为：

$$\begin{cases}\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_{\mathrm{af}} \\ \hat{H}_0=\hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)+\hbar\omega_a|a\rangle\langle a|+\hbar\omega_b|b\rangle\langle b|, \\ \hat{H}_{\mathrm{af}}=\hbar g(\hat{a}|a\rangle\langle b|+\hat{a}^\dagger|b\rangle\langle a|)\end{cases}$$

设|a, n>=|a>|n>和|b, n+1>=|b>|n+1>是系统两个可能的量子状态，且 $\Omega=\omega_a-\omega_b$.

1) 系统的一般状态|ψ>应该如何表达？当系统处于|ψ>状态时，原子处于上能级、且光场光子数为 n 的概率是多少？

2) 证明|a, n>和|b, n+1>是 $\hat{H}_0$ 的本征态，并且是二重简并的。

3) 在 $\{|a,n\rangle,\ |b,n+1\rangle\}$ 给出的表象下，求 $\hat{H}$ 的本征值和本征态。

4) 对比问题 2)和问题 3)，说说其物理意义。

解：1) 系统的一般状态可以表达为：$|\psi\rangle=C_{a,n}|a,n\rangle+C_{b,n+1}|b,n+1\rangle$，其中原子处于上能级、且光场光子数为 n 的概率是 $|C_{a,n}|^2$.

2) 由于 $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle=n|n\rangle$，$\langle i|j\rangle=\delta_{ij}\quad(i,j=a,b)$，有

$$\begin{aligned}\hat{H}_0|a,n\rangle&=[\hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)+\hbar\omega_a|a\rangle\langle a|+\hbar\omega_b|b\rangle\langle b|]|a\rangle|n\rangle \\ &=\hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2)|n\rangle|a\rangle+\hbar\omega_a|a\rangle\langle a|a\rangle|n\rangle+\hbar\omega_b|b\rangle\langle b|a\rangle|n\rangle. \\ &=[\hbar\Omega(n+1/2)+\hbar\omega_a]|a,n\rangle=E_{01}|a,n\rangle\end{aligned}$$

同理有

$$\hat{H}_0|b,n+1\rangle=[\hbar\Omega(n+1+1/2)+\hbar\omega_b]|b,n+1\rangle=E_{02}|b,n+1\rangle.$$

可见|a, n>和|b, n+1>是 $\hat{H}_0$ 的两个不同的本征态。由于 $\Omega=\omega_a-\omega_b$，故 $E_{01}=E_{02}=E_0$，即两个不同的本征态对应同一个本征值，因此是二重简并的。

3) 在 $\{|a,n\rangle,\ |b,n+1\rangle\}$ 给出的表象下，设 $\hat{H}$ 的矩阵表示为

$$\hat{H}=\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{pmatrix},$$

利用 $\hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$，$\hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$，$\langle n|m\rangle=\delta_{mn}$，$\langle i|j\rangle=\delta_{ij}\quad(i,j=a,b)$，求得矩阵元分别为

$$H_{11}=\langle a,n|\hat{H}|a,n\rangle=\langle a,n|(\hat{H}_0+\hat{H}_{\mathrm{af}})|a,n\rangle,$$

由于

$$\begin{aligned}&\langle a,n|\hat{H}_{\mathrm{af}}|a,n\rangle=\langle a|\langle n|(\hat{a}|a\rangle\langle b|+\hat{a}^\dagger|b\rangle\langle a|)|a\rangle|n\rangle\\&=\langle a|a\rangle\langle b|a\rangle\langle n|\hat{a}|n\rangle+\langle a|b\rangle\langle a|a\rangle\langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle=0\end{aligned},$$

故 $H_{11}=\langle a,n|\hat{H}_0|a,n\rangle=E_0$

同理有 $H_{22}=\langle b,n+1|\hat{H}|b,n+1\rangle=\langle b,n+1|(\hat{H}_0+\hat{H}_{\mathrm{af}})|b,n+1\rangle=E_0$，

$$\begin{aligned}&H_{12}=H_{21}^*=\langle a,n|(\hat{H}_0+\hat{H}_{\mathrm{af}})|b,n+1\rangle=\langle a,n|\hat{H}_{\mathrm{af}}|b,n+1\rangle\\&=\hbar g\langle a|\langle n|(\hat{a}|a\rangle\langle b|+\hat{a}^\dagger|b\rangle\langle a|)|b\rangle|n+1\rangle\\&=\hbar g[\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle\langle n|\hat{a}|n+1\rangle+\langle a|b\rangle\langle a|b\rangle\langle n|\hat{a}^\dagger|n+1\rangle]\\&=\hbar g\sqrt{n+1}\end{aligned},$$

因此有

$$\hat{H}=\begin{pmatrix}E_0 & \hbar g\sqrt{n+1}\\ \hbar g\sqrt{n+1} & E_0\end{pmatrix},$$

令 $\hat{H}|\psi\rangle=E|\psi\rangle$，得到久期方程

$\begin{vmatrix}E_0-E & \hbar g\sqrt{n+1}\\ \hbar g\sqrt{n+1} & E_0-E\end{vmatrix}=0$，从而得到本征值 $E_\pm=E_0\pm\hbar g\sqrt{n+1}$，

进而由 $\hat{H}|\psi\rangle=E_\pm|\psi\rangle$ 求得正交归一本征态为

$|\psi_+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$|\psi_-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，即 $|\psi_\pm\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|a,n\rangle\pm|b,n+1\rangle)$.

4) 当不考虑光和原子之间的相互作用时，光和原子构成的系统处于 $\hat{H}_0$ 的二重简并状态，此时两个不同的本征态具有相同的能量，整个体系对应一个等价双态系统；当考虑光和原子之间的相互作用时，两个本征态之间产生叠加干涉，此时光和原子构成的系统发生能级分裂：$E_0\to E_\pm=E_0\pm\hbar g\sqrt{n+1}$，形成一个由 $\{|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle\}$ 描述的二能级系统（注意这个二能级系统，指的是光和原子构成的总系统，不是二能级的原子系统）。由 $\hat{H}_0$ 的二重简并意味着存在某种对称，到 $\hat{H}$ 的简并消除意味着对称破缺，是由于光与原子之间的相互作用导致的。从一个二

重简并的等价双态系统，到能级分裂形成一个二能级系统，是量子信息与量子计算中，从物理上实现量子比特的一个重要途径。BTW, 2020 年 12 月 4 日潘建伟做的那个量子模拟，可以视为基于光学的专用量子计算（但还不是通用量子计算机），比当前经典的超级计算机快一百万亿倍！

5、如果 $u(\tau,\xi)=\mathrm{sech}(\tau)\exp(\mathrm{i}\,\xi/2)$ 是非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+|u|^2 u=0, \qquad (1)$$

的一个解，根据方程的标度不变性，证明 $u(\tau,\xi)=B_c\,\mathrm{sech}(B_c\tau)\exp(\mathrm{i}\,B_c^2\xi/2)$ 也是该方程的一个解。

证明：根据方程的标度不变性，$u'(\tau',\xi')=B_c u(\tau,\xi)$ 是非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u'}{\partial \xi'}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u'}{\partial \tau'^2}+|u'|^2 u'=0, \qquad (2)$$

的一个解，其中 $\tau'=B_c^{-1}\tau$， $\xi'=B_c^{-2}\xi$，由此得 $\tau=B_c\tau'$， $\xi=B_c^2\xi'$，于是

$$u'(\tau',\xi')=B_c u(\tau,\xi)=B_c\,\mathrm{sech}(\tau)\exp(\mathrm{i}\,\xi/2)=B_c\,\mathrm{sech}(B_c\tau')\exp(\mathrm{i}\,B_c^2\xi'/2)\,, \quad (3)$$

是非线性薛定谔方程(2)的解，将(2)和(3)表达式中的带撇的符号改写为不带撇符号(改变数学符号的标记方式，不会改变物理内容)，于是(2)变成(1)，(3)变成

$$u(\tau,\xi)=B_c\,\mathrm{sech}(B_c\tau)\exp(\mathrm{i}\,B_c^2\xi/2), \qquad (4)$$

即(4)也是非线性薛定谔方程(1)的一个解。证毕。