激光物理 (*Fall 2022*) October 17, 2022

第四次作业：证明题

张豪
202221050516
Z_Howe94@163.com

证明题

证明 1

利用(24)式和(25)式，证明$\langle \hat{P}_y \rangle = Dr_2$，要写带有文字表述的具体解题步骤，要把$\langle \psi |$和$| \psi \rangle$的展开式代入求平均值的表达式$\langle \hat{P}_y \rangle = \langle \psi | \hat{P}_y | \psi \rangle$，关键的计算步骤不能省略。

(24)式为：

$$D_{ab}^{-} = \langle a, m+1 | \hat{P}^{-} | b, m \rangle = 0$$

$$D_{ba}^{+} = \langle b, m | \hat{P}^{+} | a, m+1 \rangle = 0$$

(25)式为：

$$D_{ab}^{+} = \langle a, m+1 | \hat{P}^{+} | b, m \rangle = 2D$$

$$D_{ba}^{-} = \langle b, m | \hat{P}^{-} | a, m+1 \rangle = 2D$$

证明：

不妨假设上、下能级的磁量子数分别为$(m+1)$和m，于是上能级态矢为$|a, m+1\rangle = |a\rangle |m+1\rangle$，下能级态矢为$|b, m\rangle = |b\rangle |m\rangle$，此时粒子的波函数可以写为：

$$\begin{cases} |\psi\rangle = c_a |a\rangle |m+1\rangle + c_b |b\rangle |m\rangle \\ \langle\psi| = \langle a| \langle m+1| c_a^* + \langle b| \langle m| c_b^* \end{cases} \tag{.1.1}$$

电偶极矩的x和y分量满足以下式：

$$\begin{cases} \hat{P}^{+} = \hat{P}_x + i\hat{P}_y \\ \hat{P}^{-} = \hat{P}_x - i\hat{P}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{P}_x = (\hat{P}^{+} + \hat{P}^{-})/2 \\ \hat{P}_y = (\hat{P}^{+} - \hat{P}^{-})/2i \end{cases} \tag{.1.2}$$

将式(.1.1)和(.1.2)代入$\langle \hat{P}_y \rangle = \langle \psi | \hat{P}_y | \psi \rangle$中，有：

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}_y \rangle &= \langle \psi | \hat{P}_y | \psi \rangle \qquad (.1.3) \\ &= [\langle a| \langle m+1| c_a^* + \langle b| \langle m| c_b^*](\hat{P}^{+} - \hat{P}^{-})[c_a |a\rangle |m+1\rangle + c_b |b\rangle |m\rangle]/2i \qquad (.1.4) \\ &= [\langle a| \langle m+1| c_a^*(\hat{P}^{+} - \hat{P}^{-}) c_a |a\rangle |m+1\rangle + \langle a| \langle m+1| c_a^*(\hat{P}^{+} - \hat{P}^{-}) c_b |b\rangle |m\rangle]/2i \\ &\quad + [\langle b| \langle m| c_b^*(\hat{P}^{+} - \hat{P}^{-}) c_a |a\rangle |m+1\rangle + \langle b| \langle m| c_b^*(\hat{P}^{+} - \hat{P}^{-}) c_b |b\rangle |m\rangle]/2i \qquad (.1.5) \end{aligned}$$

由于算符$\hat{P}^+$作用于$|m\rangle$会变成$|m+1\rangle$，而算符$\hat{P}^-$作用于$|m\rangle$会变成$|m-1\rangle$，而$\langle m,m+1\rangle = \langle m,m-1\rangle = 0$，故上式标红的两项为0：

$$\begin{aligned}
\langle \hat{P}_y\rangle &= \langle\psi|\,\hat{P}_y\,|\psi\rangle && (.1.6)\\
&= [\langle a|\,\langle m+1|\,c_a^*(\hat{P}^+ - \hat{P}^-)c_a\,|a\rangle\,|m+1\rangle + \langle a|\,\langle m+1|\,c_a^*(\hat{P}^+ - \hat{P}^-)c_b\,|b\rangle\,|m\rangle]/2i\\
&+ [\langle b|\,\langle m|\,c_b^*(\hat{P}^+ - \hat{P}^-)c_a\,|a\rangle\,|m+1\rangle + \langle b|\,\langle m|\,c_b^*(\hat{P}^+ - \hat{P}^-)c_b\,|b\rangle\,|m\rangle]/2i && (.1.7)\\
&= \langle a|\,\langle m+1|\,c_a^*(\hat{P}^+ - \hat{P}^-)c_b\,|b\rangle\,|m\rangle/2i + \langle b|\,\langle m|\,c_b^*(\hat{P}^+ - \hat{P}^-)c_a\,|a\rangle\,|m+1\rangle/2i && (.1.8)\\
&= [c_a^*c_b\,\langle a|\,\langle m+1|\,\hat{P}^+\,|b\rangle\,|m\rangle - c_a^*c_b\,\langle a|\,\langle m+1|\,\hat{P}^-\,|b\rangle\,|m\rangle\\
&+ c_b^*c_a\,\langle b|\,\langle m|\,\hat{P}^+\,|a\rangle\,|m+1\rangle - c_b^*c_a\,\langle b|\,\langle m|\,\hat{P}^-\,|a\rangle\,|m+1\rangle]/2i && (.1.9)
\end{aligned}$$

由PPT中的(24)式和(25)式可知：

$$\begin{cases}
D_{ab}^- = \langle a,m+1|\,\hat{P}^-\,|b,m\rangle = 0\\
D_{ba}^+ = \langle b,m|\,\hat{P}^+\,|a,m+1\rangle = 0\\
D_{ab}^+ = \langle a,m+1|\,\hat{P}^+\,|b,m\rangle = 2D\\
D_{ba}^- = \langle b,m|\,\hat{P}^-\,|a,m+1\rangle = 2D
\end{cases} \tag{.1.10}$$

将式(.1.10)代入式(.1.9)，可以得到：

$$\begin{aligned}
\langle \hat{P}_y\rangle &= \langle\psi|\,\hat{P}_y\,|\psi\rangle && (.1.11)\\
&= [c_a^*c_b\,\langle a|\,\langle m+1|\,\hat{P}^+\,|b\rangle\,|m\rangle - c_a^*c_b\,\langle a|\,\langle m+1|\,\hat{P}^-\,|b\rangle\,|m\rangle\\
&+ c_b^*c_a\,\langle b|\,\langle m|\,\hat{P}^+\,|a\rangle\,|m+1\rangle - c_b^*c_a\,\langle b|\,\langle m|\,\hat{P}^-\,|a\rangle\,|m+1\rangle]/2i && (.1.12)\\
&= (c_a^*c_b\,\langle a|\,\langle m+1|\,\hat{P}^+\,|b\rangle\,|m\rangle - c_b^*c_a\,\langle b|\,\langle m|\,\hat{P}^-\,|a\rangle\,|m+1\rangle)/2i && (.1.13)\\
&= D(c_a^*c_b - c_b^*c_a)/i && (.1.14)\\
&= Di(c_b^*c_a - c_a^*c_b) && (.1.15)
\end{aligned}$$

在纯系综中，密度矩阵表示为：

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_3 & r_1 - ir_2\\ r_1 + ir_2 & 1-r_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_{aa} & \rho_{ab}\\ \rho_{ba} & \rho_{bb}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|c_a|^2 & c_b^*c_a\\ c_a^*c_b & |c_b|^2\end{pmatrix} \tag{.1.16}$$

故式(.1.15)可以化简为：

$$\begin{aligned}
\langle \hat{P}_y\rangle &= \langle\psi|\,\hat{P}_y\,|\psi\rangle && (.1.17)\\
&= Di(c_b^*c_a - c_a^*c_b) && (.1.18)\\
&= Di(\rho_{ab} - \rho_{ba}) && (.1.19)\\
&= Di(r_1 - ir_2 - r_1 - ir_2)/2 = Dr_2 && (.1.20)
\end{aligned}$$

综上，证得$\langle \hat{P}_y\rangle = Dr_2$。