纳米光子学及其应用 (*Fall 2022*) November 9, 2022

第二次作业：11个思考题

张豪
202221050516
Z_Howe94@163.com

思考题

思考 1

什么是近场和远场？近场和远场各具有什么特点？

Answer:

近场指的是从物体表面到一个波长以内距离的电磁场，而远场指的是从近场以外一直延伸到无穷远区域的电磁场。

波在近场中是被局域化的，且结构具有较小的空间尺度，不向外辐射能量，但可以通过相互作用传递能量，近场具有更大的波矢分量，即有$k_x > k$，可以用来探测精细的结构信息；

波在远场中是辐射化的，且结构具有较大的空间尺度，在真空中能无损失地辐射能量，远场具有较小的波矢分量，即有$k_x < k$，可以用来探测粗略的结构信息。

思考 2

为什么利用近场可以探测超越分辨率极限的精细结构信息？

Answer:

根据测不准原理可知，若波矢分量大于其模量，则可以突破衍射极限，即$\Delta x < \lambda/2$。因此问题变为了为什么近场具有波矢分量大于其模量的特点。

假定物体表面为$x-y$平面$(z=0)$，位于(x,y)处的光场可以表示为：

$$E(x,y,0) = \frac{1}{2\pi}\iint U_0(k_x,k_y)e^{i(k_x x + k_y y)}dk_x dk_y \tag{.2.1}$$

由亥姆赫兹方程$\nabla^2 E + k^2 E = 0$，可以得到在(x,y,z)处的角谱为：

$$U(k_x,k_y,z) = U_0(k_x,k_y)\exp(iz\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}) = U_0(k_x,k_y)e^{ik_z z} \tag{.2.2}$$

当$k_x^2 + k_y^2 > k^2, k_z = i\kappa$时，式(.2.2)为：

$$U(k_x,k_y,z) = U_0(k_x,k_y)e^{-\kappa z} \tag{.2.3}$$

场在z方向衰减，故为局限于表面的隐失场(即近场)。假定物体表面为一系列不同周期光栅的叠加，则衍射光波矢分量(a、b为可能的x、y方向的光栅周期)有：

$$k_x = \frac{2n\pi}{a}, k_y = \frac{2m\pi}{b}, n,m = 1,2,3... \tag{.2.4}$$

如果$a,b < \lambda$，则$k_x,k_y > k$对应隐失场，即小于波长的精细结构对应隐失场，不能传播到远处，故利用近场可以探测超越分辨率极限的精细结构信息。

思考 3

原子力显微镜(AFM)有几种工作模式?各模式的优、缺点是什么?

Answer:

原子力显微镜(AFM)有三种工作模式,分别为接触模式,非接触模式和轻敲模式。这三种模式各自的优缺点如下表(1)所示。

Table 1: AFM三种模式的优缺点

工作模式	优点	缺点
接触	快速扫描、适用于与较粗糙坚硬样品 摩擦力分析,可在液体中扫描	摩擦力会损害或改变表面形貌 特别是柔软的表面
非接触	不损坏样品和尖端	分辨率低,受环境影响大
轻敲	适用于表面容易受损、表面松弛的样品 特别是生物样品	扫描速度慢,难以在溶液中扫描

思考 4

为什么对于扫描电子显微镜和透射电子显微镜,电子加速电压越高,分辨率越好?为什么采用场发射电子源后,分辨率可以得到极大的提高(相比于热电子发射)?

Answer:

电子在加速电压作用下的能量为:

$$E = eU - W_e \tag{.4.1}$$

其中W_e为逸出能。当加速电压U增大,则电子能量E增大,根据$E = hc/\lambda$,可知此时电子的波长变短,故电子束光斑变小,图像的分辨率提升。

电子是费米子,因此满足费米——狄拉克分布:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{k_B T}}} \tag{.4.2}$$

为了便于电子从普通材料中逸出,给电子发射材料加热,使电子在高于费米能级有更多的电子存在。但是,随着温度的升高(热电子发射),电子在离开费米能级附近的分布愈加弥散,导致从材料中出射的电子的能量存在一个很大的范围ΔE,温度越高,范围越大,相当于德布罗意波长分布广,最终使电镜图片的质量变差。而对于场发射电镜,并不需要对电子发射材料加热,因此,电子在费米能级附近的分布更加集中,出射能量集中在一个小的区间,德布罗意波长更加集中,更接近单色,电镜图片得到显著提高。

思考 5

试列举近场光学显微镜的三个应用?

Answer:

1、高分辨荧光成像;

2、表面等离子体激元激发与成像;

3、高分辨近场光电导;

思考 6

对于FDTD,什么是"蛙跳算法"?Yee网格有什么优势?

Answer:

在对有限差分近似公式进行离散化时,为了满足精度要求,按半步长时间交错进行$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的更新,解得场的时间微分,即在时间半步长$n+1/2$处写$\boldsymbol{H}$场,在时间整步长n处写$\boldsymbol{E}$场,更新方程变为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}^{n+1} = \boldsymbol{E}^{n} + \dfrac{\Delta t}{\varepsilon}[\nabla \times \boldsymbol{H}]^{n+1/2} \\ \boldsymbol{H}^{n+3/2} = \boldsymbol{H}^{n+1/2} - \dfrac{\Delta t}{\mu}[\nabla \times \boldsymbol{E}]^{n+1} \end{cases}$$

算法示意图如下图所示:

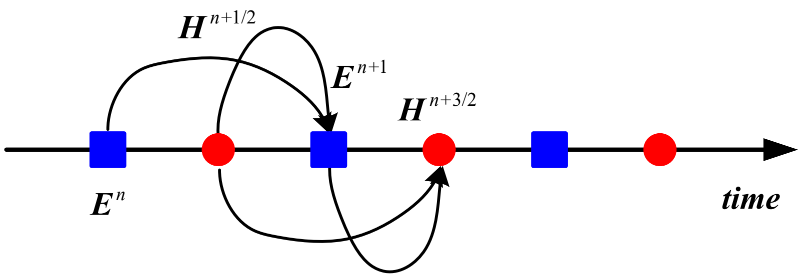

Figure 1: 蛙跳算法

Yee网格的优势有:

1、Yee网格算法隐含地执行了两个高斯定律,同时保证了无源区域中电场和磁场都是无散的;
2、物理边界条件($\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的连续性)是自然满足的;
3、采用耦合的Maxwell旋度方程,同时在时间和空间求解电场和磁场,获得的解更加稳定;
4、在三维空间中的各物理场分量位于不同的位置,每一个$\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{H}$分量由四个$\boldsymbol{H}$或$\boldsymbol{E}$循环的分量所环绕,保证了该算法同时模拟了Maxwell方程的微分形式和积分形式;
5、即使场分量位于同一个单元内,场分量也可以在不同的材料中;
6、场分量间不同相;
7、与时间上的电场、磁场交叠一致。

思考 7

如何由平面波展开法得到二维光子晶体的本征方程(考虑TM波)?

Answer:

平面波展开法的基本思想是,将电磁场在倒格矢空间以平面波叠加的形式展开,将麦克斯韦方程组化成一个本征方程,求解该方程的本征值便得到传播光子的本征频率。

周期性的介电常数表示为$\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \varepsilon(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})$,$\boldsymbol{R}$为晶格平移矢量,其中介电常数的倒数也是周期性的,可将其表示成一系列平面波的迭加(傅里叶级数):

$$\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})} = \sum_{\boldsymbol{G}} \eta_{\boldsymbol{G}} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{.7.1}$$

其中$\boldsymbol{G}$是光子晶体的倒格矢,相应的傅里叶展开系数$\eta_{\boldsymbol{G}}$为:

$$\eta_{\boldsymbol{G}} = \frac{1}{\Omega}\int_{\mathrm{wsc}} \frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})} \times e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{.7.2}$$

以TM模式为例，二维光子晶体中TM模电磁波的电矢量都平行于介电柱的方向（即对应的电矢量与坐标z无关），因此有：

$$\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0 \tag{.7.3}$$

由于电矢量与坐标z无关，故有：

$$\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})\boldsymbol{E}_z(\boldsymbol{r})=-\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E}_z(\boldsymbol{r}) \tag{.7.4}$$

根据Bloch定理，电场分量可以表示成一系列平面波的迭加。将下式

$$\boldsymbol{E}_z(\boldsymbol{r})=\sum_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{E}_{z,\boldsymbol{G}}e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{r}} \tag{.7.5}$$

和级数形式(.7.1)代入式(.7.4)，进行适当的空间积分和代换，得到矩阵形式的本征方程：

$$\sum_{\boldsymbol{G'}}\eta(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G'})|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G'}||\boldsymbol{k}+\boldsymbol{G}|\times\boldsymbol{E}_{z,\boldsymbol{G'}}=\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E}_{z,\boldsymbol{G'}} \tag{.7.6}$$

思考 8

自然界中哪些现象与光子晶体相关，试举两个例子？

Answer:

自然界与光子晶体相关的有：蝴蝶的翅膀、变色龙的变色机理、象鼻虫外壳结构和孔雀羽毛结构等。

思考 9

光子晶体带隙的物理起源是什么？三维光子晶体，哪些结构最有希望产生完全光子带隙？要获得全向带隙，除了晶体结构以外，还希望哪个参数大？

Answer:

光子带隙的物理起源是入射光频率满足布拉格条件($e^{\mathrm{i}2ka}=1, k=\pi/a$)，此时所有反射波叠加之后的反射率$R=1$(仅考虑入射光有反射)，光波不能在晶体中传播，故产生了光子带隙。

面心立方(fcc)结构是产生光子带隙最理想的结构，目前最有希望产生完全光子带隙的是fcc，金刚石和木堆积结构。

要获得全向带隙，除了晶体结构以外，还希望光子晶体的折射率差越大越好。

思考 10

为什么相对介电常数和磁导率都为负，材料的折射率为负？

Answer:

光在任何非理想材料中传输都有损耗，假设介电常数和磁导率满足：

$$\varepsilon=\varepsilon_r+\mathrm{i}\delta_1, \mu=\mu_r+\mathrm{i}\delta_2 \tag{.10.1}$$

假定损耗很小，即δ_i为小量，则有：

$$n^2=\varepsilon\mu\approx\varepsilon_r\mu_r+\mathrm{i}(\varepsilon_r\delta_2+\mu_r\delta_1) \tag{.10.2}$$

若$\varepsilon_r<0, \mu_r<0$，根据式(.10.2)可得：

$$n=\pm\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}[1-\mathrm{i}\frac{(|\varepsilon_r|\delta_2+|\mu_r|\delta_1)}{2\varepsilon_r\mu_r}] \tag{.10.3}$$

介质必然是损耗介质，故折射率虚部应该大于0，因此可得：

$$n = -\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} + \mathrm{i}\frac{(|\varepsilon_r|\delta_2 + |\mu_r|\delta_1)}{2\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \tag{.10.4}$$

此时，$n_r = -\sqrt{\varepsilon_r \mu_r} < 0$，因此如果相对介电常数和磁导率都为负，材料的折射率为负。

思考 11

试推导使折射率为负的必要条件。

Answer:

假设$n = n_r + \mathrm{i} n_i$，故有：

$$n^2 = n_r^2 - n_i^2 + 2\mathrm{i} n_r n_i \tag{.11.1}$$

假设$\varepsilon = \varepsilon_r + \mathrm{i}\varepsilon_i, \mu = \mu_r + \mathrm{i}\mu_i$，故有：

$$\varepsilon\mu = (\varepsilon_r + \mathrm{i}\varepsilon_i)(\mu_r + \mathrm{i}\mu_i) = (\varepsilon_r\mu_r - \varepsilon_i\mu_i) + \mathrm{i}(\varepsilon_r\mu_i + \varepsilon_i\mu_r) \tag{.11.2}$$

由于$n^2 = \varepsilon\mu$，故对应虚部相等，即：

$$2n_r n_i = \varepsilon_r\mu_i + \varepsilon_i\mu_r \tag{.11.3}$$

因为$n_i > 0$，故若使$n_r < 0$，则只需$\varepsilon_r\mu_i + \varepsilon_i\mu_r < 0$即可，此即为使折射率为负的必要条件。