电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

量子力学与统计物理

张希仁，孙启明

2021

光电科学与工程学院

整体结构

第一章 量子力学的诞生

第二章 波函数和薛定谔方程

第三章 量子力学中的力学量

第四章 态和力学量的表象

第五章 求解定态薛定谔方程实例

第六章 微扰理论

第七章 自旋与全同粒子

第八章 统计物理

第三章 量子力学中的力学量

✓ 力学量的平均值与算符的引进

✓ 算符的运算规则与特性

✓ 厄密算符的性质

✓ 算符的对易关系与不确定性原理

● 角动量算符的本征值与本征函数

攻心联

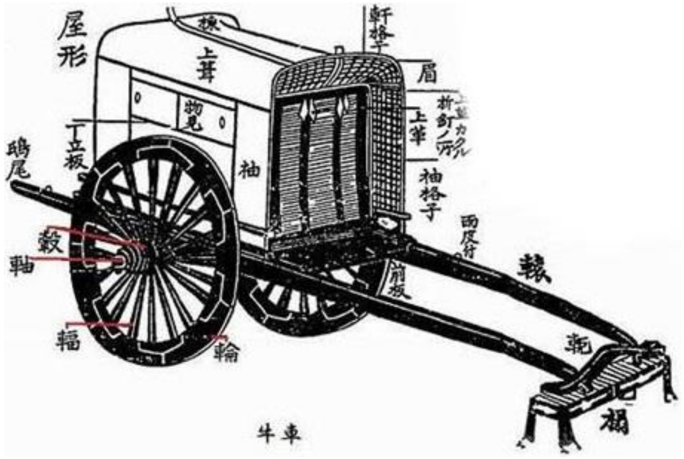

不審勢即寬嚴皆誤後來治蜀要深思
權四川鹽茶使者劍川趙藩敬撰


武侯祠
一番晤對古今情
三顧頻煩天下計


能攻心則反側自消從古知兵非好戰
光緒二十八年冬十一月上旬之吉

从古知兵非好战

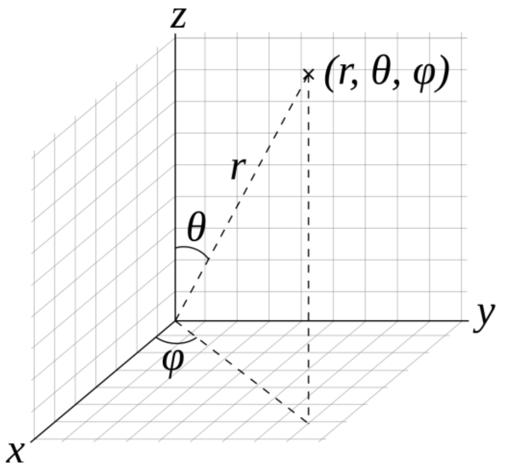
辏力场



- 辏：如车辐集中于车毂，引申为聚集；如辐辏，辏力。
  - ✓ 班固《汉书·孙叔通传》：“人人奉职，四方辐辏。”
  - ✓ 韩愈《南山诗》：“或散若瓦解，或赴若辐辏。”
  - ✓ 梁启超《中国学术思想变迁之大势》：“及战国之末，诸侯游士，辐辏走集，秦一一揖而入之。”
- 辏力场：对场中任意位置上的质点的作用力恒通过场中某一固定点的力场（势能与角度无关，只与径向距离有关）。

$$V(\mathbf{r}) = V(r) \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) \qquad [-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

角动量算符



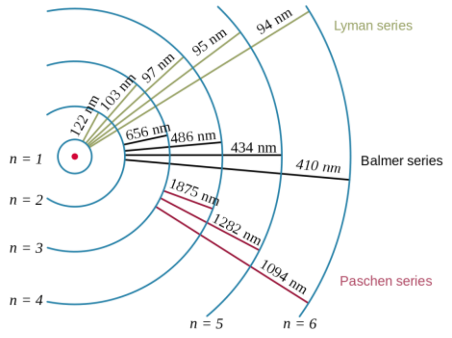
$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \mathbf{r}\times(-i\hbar\nabla) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix} \qquad \hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

$$\hat{L}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

角动量平方算符



$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

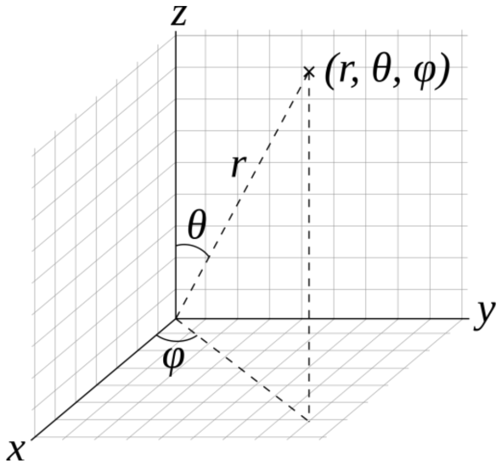
$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2\mu r^2} + V(r) = \hat{T}_x + \hat{T}_y + \hat{T}_z + V$$

径向动能　　转动动能　　势能　　方圆之间

形而下者谓之器

形而上者谓之道

球坐标系中的定态Schrödinger方程



$$[-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2\mu r^2}+V(r)]\psi(r,\theta,\varphi)=E\psi(r,\theta,\varphi)$$

分离变量： $\psi(r,\theta,\varphi)\equiv R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$

$$[-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2\mu r^2}+V(r)]R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=ER(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\mathrm{Y}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r})+R\frac{\hat{\mathbf{L}}^2\mathrm{Y}}{2\mu r^2}=[E-V(r)]R\mathrm{Y}$$

两边同除$R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$，得：

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r})+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[E-V(r)]=\frac{1}{\mathrm{Y}}\frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{\hbar^2}\mathrm{Y}\equiv\lambda$$

λ是一个无量纲的常数！

第二次分离变量

$$\begin{cases}\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial R}{\partial r})+\dfrac{2\mu r^2}{\hbar^2}[E-V(r)]=\lambda \\ \dfrac{1}{\mathrm{Y}}\dfrac{\hat{\mathbf{L}}^2}{\hbar^2}\mathrm{Y}=\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial R}{\partial r})+\{\dfrac{2\mu}{\hbar^2}[E-V(r)]-\dfrac{\lambda}{r^2}\}R=0 \\ \hat{\mathbf{L}}^2\mathrm{Y}=\lambda\hbar^2\mathrm{Y}\end{cases}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}=-\lambda\mathrm{Y}$$

$$\mathrm{Y}(\theta,\varphi)\equiv\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\lambda\sin^2\theta+\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta})=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\equiv m^2$$

***m*是一个无量纲的常数！**

似曾相识

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+(\lambda-\dfrac{m^2}{\sin^2\theta})\Theta=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=-m^2\Phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^x=1\mathrm{e}^x \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(3\cos x)=-3\cos x \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sin x+\cos x)=-(\cos x+\sin x) \end{cases}$$

3.5 角动量算符的本征值与本征函数

似曾相识

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta})+(\lambda-\dfrac{m^2}{\sin^2\theta})\Theta=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=-m^2\Phi \end{cases}$$

$$\Phi=\begin{cases} C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}+C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} \\ C_1\cos m\varphi+C_2\sin m\varphi \end{cases}$$

简并带来的迷茫

简并（degeneracy）

- 对易力学量完全集的选取，可以消除本征函数的简并问题。
- 简并：一个本征值有不只一个彼此线性无关的本征函数（本征矢）。
- （举例）一维自由粒子能量本征值和本征函数问题：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)=E\psi(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi=-k^2\psi \qquad k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_1(x)=C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \qquad \psi_2(x)=C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \qquad \psi_3(x)=C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$

$$\psi_4(x)=\sin kx \qquad \psi_5(x)=\cos kx \qquad \psi_6(x)=C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+C_2\cos kx$$

- 简并度：一个本征值所拥有的线性无关的本征矢的数目。

虽然一维自由粒子哈密尔顿算符属于某一本征值E_0的本征函数有多种表示方法（简并度为2），但是，它和动量算符$\hat{p}_x$的共同本征函数可以唯一确定：

$$\psi(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

CSCO的指引

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y = \lambda\hbar^2 Y$$

$$Y(\theta,\varphi) \equiv \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

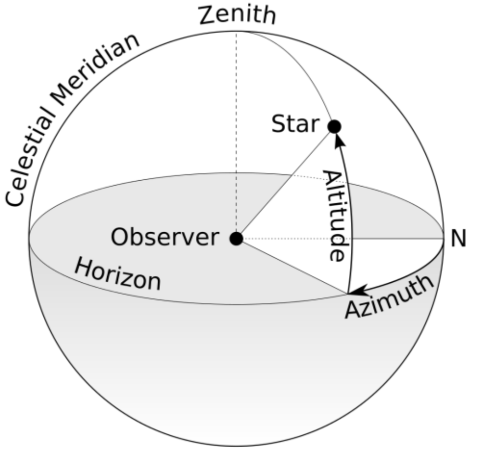
$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi$$

$$\Phi = \begin{cases} C_1 e^{im\varphi} + C_2 e^{-im\varphi} \\ C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi \end{cases}$$

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, L_\alpha] = 0$$

翻谁的牌？

$$\begin{cases} \hat{L}_x = i\hbar(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}) \\ \hat{L}_y = i\hbar(-\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}) \\ \hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{cases}$$



$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi = l_z\Phi$$

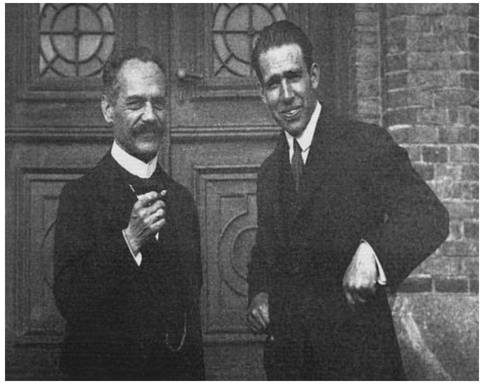
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi = \frac{i}{\hbar} l_z \Phi \quad \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = Ce^{\frac{i}{\hbar}l_z\varphi}$$

角动量量子化

$$\begin{cases}\Phi(\varphi)=C\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}l_z\varphi}\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)\end{cases}$$

基操 勿6

真香



$$\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}l_z 2\pi}=1\quad\Rightarrow\quad l_z=m\hbar,\quad m\in\mathrm{Z}$$

$$\Rightarrow\quad \Phi_m(\varphi)=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\qquad \left(\Phi_m,\Phi_n\right)=\int_0^{2\pi}C^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\varphi}\mathrm{d}\varphi=C^2 2\pi\delta_{mn}\quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\begin{cases}l_z=m\hbar,\quad m\in\mathrm{Z}\\ \Phi_m(\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\end{cases}$$

- 当体系处于Φ_m态时，测量$\hat{L}_z$必有确定值，为$l_z=m\hbar$；
- 当体系处于任意态时，测量$\hat{L}_z$的结果必为$m\hbar$其中的一个；而多次测量的平均值则由展开系数决定。

不再迷茫，继续前进

$$\hat{L}^2 Y = \lambda\hbar^2 Y \qquad Y(\theta,\varphi) \equiv \Theta(\theta)e^{im\varphi} \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) + (\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta})\Theta = 0$$

令 $\xi \equiv \cos\theta$ 则有 $\sin\theta = \sqrt{1-\xi^2}$ 以及 $d\xi = -\sin\theta d\theta$

$$\frac{d}{d\xi}[(1-\xi^2)\frac{d\Theta}{d\xi}] + (\lambda - \frac{m^2}{1-\xi^2})\Theta = 0 \quad \text{或} \quad (1-\xi^2)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\Theta}{d\xi} + (\lambda - \frac{m^2}{1-\xi^2})\Theta = 0$$

- $m = 0$时，上式为Legendre Equation；$m \neq 0$时，上式为Associated Legendre Equation;
- 为了使Θ在定义域(–1,1)内都是有限的，只有当λ和m满足以下条件时才有一个多项式解:

（一）$\lambda = l(l+1),\ \ l \in N$ （二）$-l \le m \le l,\ \ m \in Z$

Associated Legendre polynomials

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}-2\xi\frac{d\Theta}{d\xi}+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-\xi^2}]\Theta=0$$

- 多项式解为Associated Legendre polynomials
- Associated：伴随、关联、连带、缔合

$$\Theta(\xi)=N_{lm}P_l^m(\xi),\quad l\in N,\quad |m|\le l$$

$$P_l^{-m}=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m$$

n	Legendre polynomials $P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35)$
9	$\frac{1}{128}(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x)$
10	$\frac{1}{256}(46189x^{10}-109395x^8+90090x^6-30030x^4+3465x^2-63)$

$$P_0^0(x)=1$$

$$\begin{cases}P_1^0(x)=x\\ P_1^1(x)=-\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}P_2^0(x)=(3x^2-1)/2\\ P_2^1(x)=-3x\sqrt{1-x^2}\\ P_2^2(x)=3(1-x^2)\end{cases}$$

Spherical harmonics

研究正交归一性： $$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(\xi)\mathrm{P}_{l'}^m(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'},\ \ 0 \le m \le l$$

Condon-Shortley phase

于是： $$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta),\ \ l \in \mathrm{N},\ \ |m| \le l$$

$$\mathrm{Y}(\theta,\varphi) \equiv \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\ \ l \in \mathrm{N},\ \ |m| \le l$$

Spherical harmonics

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi},\quad l\in N,\quad |m|\le l$$

$l=0$

$$Y_0^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$l=1$

$$Y_1^{-1}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cdot e^{-i\varphi}\cdot\sin\theta$$
$$Y_1^{0}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cdot\cos\theta$$
$$Y_1^{1}(\theta,\varphi)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cdot e^{i\varphi}\cdot\sin\theta$$

$l=2$

$$Y_2^{-2}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{-2i\varphi}\cdot\sin^2\theta$$
$$Y_2^{-1}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{-i\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$$
$$Y_2^{0}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\cdot(3\cos^2\theta-1)$$
$$Y_2^{1}(\theta,\varphi)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{i\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$$
$$Y_2^{2}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{2i\varphi}\cdot\sin^2\theta$$

$l=3$

$$Y_3^{-3}(\theta,\varphi)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\cdot e^{-3i\varphi}\cdot\sin^3\theta$$
$$Y_3^{-2}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\cdot e^{-2i\varphi}\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta$$
$$Y_3^{-1}(\theta,\varphi)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}}\cdot e^{-i\varphi}\cdot\sin\theta\cdot(5\cos^2\theta-1)$$
$$Y_3^{0}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}\cdot(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$
$$Y_3^{1}(\theta,\varphi)=-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}}\cdot e^{i\varphi}\cdot\sin\theta\cdot(5\cos^2\theta-1)$$
$$Y_3^{2}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\cdot e^{2i\varphi}\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta$$
$$Y_3^{3}(\theta,\varphi)=-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\cdot e^{3i\varphi}\cdot\sin^3\theta$$

$$Y_l^{-m}=(-1)^m(Y_l^m)^*$$

Spherical harmonics

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

$l=0$

$$Y_0^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$l=1$

$$Y_1^{-1}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cdot e^{-i\varphi}\cdot\sin\theta$$

$$Y_1^{0}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cdot\cos\theta$$

$$Y_1^{1}(\theta,\varphi)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cdot e^{i\varphi}\cdot\sin\theta$$

$l=2$

$$Y_2^{-2}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{-2i\varphi}\cdot\sin^2\theta$$

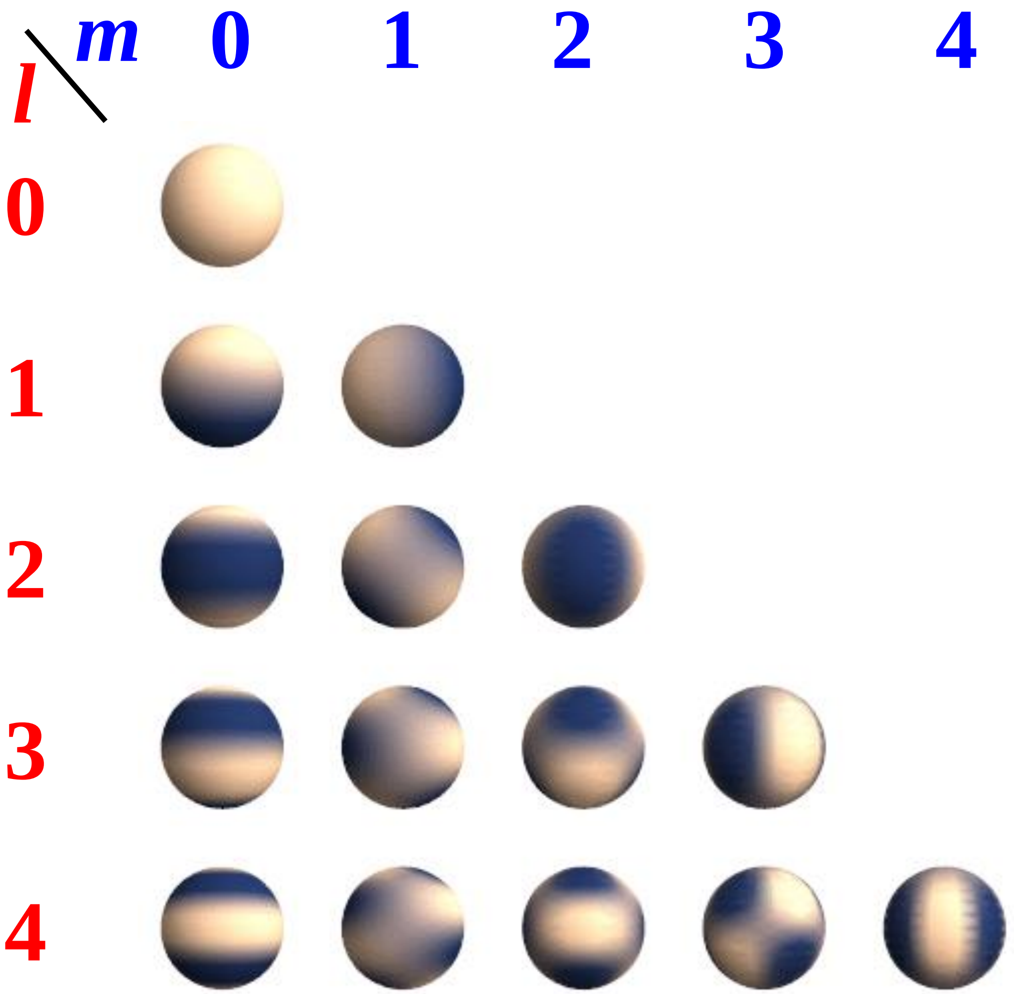
$$Y_2^{-1}(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{-i\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$Y_2^{0}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\cdot(3\cos^2\theta-1)$$

$$Y_2^{1}(\theta,\varphi)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{i\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$Y_2^{2}(\theta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cdot e^{2i\varphi}\cdot\sin^2\theta$$

$$Y_l^{-m}=(-1)^m(Y_l^m)^*$$



本征值与本征函数（考试重点）

$$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\quad l\in\mathrm{N},\quad |m|\le l$$

$$\begin{cases}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}(\mathrm{Y}_l^m)^*\mathrm{Y}_{l'}^{m'}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\delta_{ll'}\delta_{mm'}\\ \hat{\mathbf{L}}^2\mathrm{Y}_l^m=\lambda\hbar^2\mathrm{Y}_l^m=l(l+1)\hbar^2\mathrm{Y}_l^m\\ \hat{L}_z\mathrm{Y}_l^m=m\hbar\mathrm{Y}_l^m\end{cases}$$

- 球谐函数是$\hat{L}^2$和$\hat{L}_z$的共同本征函数；
- 辏力场中能量本征函数含角度部分都是这个样；
- $\hat{L}^2$的本征值为$l(l+1)\hbar^2$，$\hat{L}_z$的本征值为$m\hbar$；
- l称为（轨道）角量子数（**Azimuthal quantum number**）；
- m称为磁量子数（**Magnetic quantum number**）；
- 每个l下是$2l+1$重简并；
- $\hat{L}_z$的本征值和本征函数帮助确定简并态（**CSCO**）。

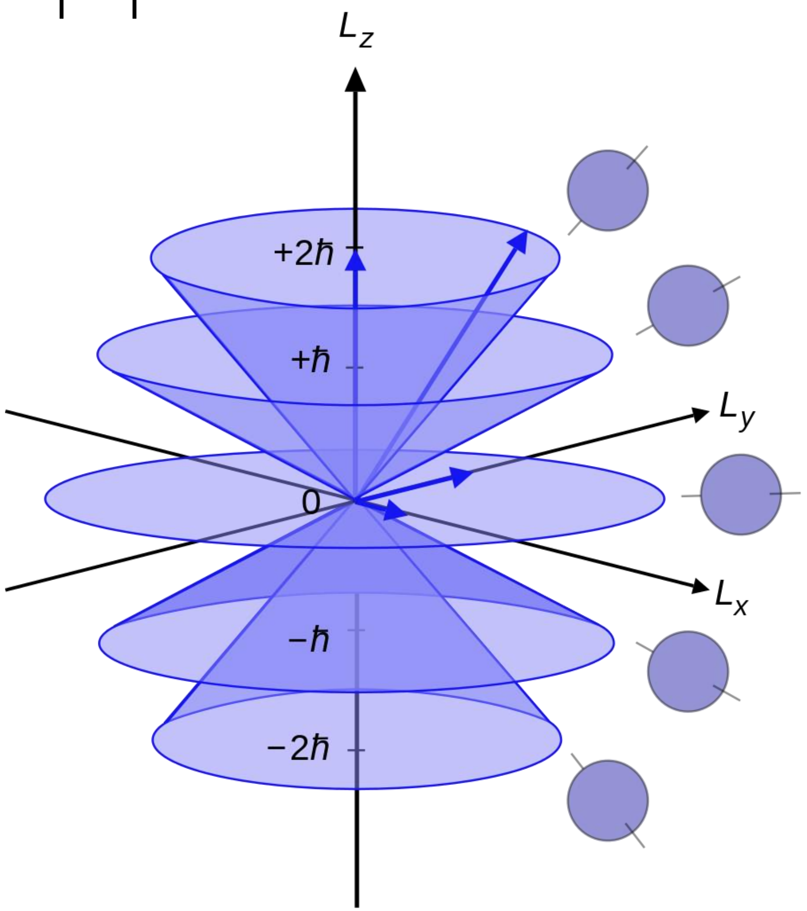
本征值与本征函数（考试重点）

$$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi)=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\quad l\in\mathrm{N},\quad |m|\le l$$

$$|\mathbf{L}|=\sqrt{6}\hbar$$

$$\begin{cases}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}(\mathrm{Y}_l^m)^*\mathrm{Y}_{l'}^{m'}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\delta_{ll'}\delta_{mm'}\\ \hat{\mathbf{L}}^2\mathrm{Y}_l^m=\lambda\hbar^2\mathrm{Y}_l^m=l(l+1)\hbar^2\mathrm{Y}_l^m\\ \hat{L}_z\mathrm{Y}_l^m=m\hbar\mathrm{Y}_l^m\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\hat{L}_x,\hat{L}_y]=\mathrm{i}\hbar\hat{L}_z\\ [\hat{L}_y,\hat{L}_z]=\mathrm{i}\hbar\hat{L}_x\\ [\hat{L}_z,\hat{L}_x]=\mathrm{i}\hbar\hat{L}_y\end{cases}$$



$$[\hat{O},\hat{U}]=\mathrm{i}\hat{c}\quad\Rightarrow\quad\sigma_O\sigma_U\ge\frac{|\bar{\hat{c}}|}{2}$$

$$\sigma_{L_x}\sigma_{L_y}\ge\frac{\hbar}{2}\left|\overline{\hat{L}_z}\right|$$

练习题（考试重点）

➢ 已知体系处于如下状态，问：（1）Ψ是否是$\hat{L}^2$的本征态？（2）Ψ是否是$\hat{L}_z$的本征态？（3）在Ψ态下分别测量$\hat{L}^2$和$\hat{L}_z$时的可能值及相应的几率；（4）求$\hat{L}^2$的平均值。

$$\Psi=\frac{1}{3}\mathrm{Y}_1^1(\theta,\varphi)+\frac{2}{3}\mathrm{Y}_2^1(\theta,\varphi)$$

$$\Psi(x,y)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p_x x+p_y y)}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(2p_x x+p_y y)}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{L}}^2\Psi&=\hat{\mathbf{L}}^2[\frac{1}{3}\mathrm{Y}_1^1(\theta,\varphi)+\frac{2}{3}\mathrm{Y}_2^1(\theta,\varphi)]\\&=\frac{1}{3}1(1+1)\hbar^2\mathrm{Y}_1^1+\frac{2}{3}2(2+1)\hbar^2\mathrm{Y}_2^1\\&=2\hbar^2(\frac{1}{3}\mathrm{Y}_1^1+2\mathrm{Y}_2^1)\neq\lambda\Psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{L}_z\Psi&=\hat{L}_z[\frac{1}{3}\mathrm{Y}_1^1(\theta,\varphi)+\frac{2}{3}\mathrm{Y}_2^1(\theta,\varphi)]\\&=\frac{1}{3}1\hbar\mathrm{Y}_1^1+\frac{2}{3}1\hbar\mathrm{Y}_2^1\\&=\hbar(\frac{1}{3}\mathrm{Y}_1^1+\frac{2}{3}\mathrm{Y}_2^1)=\hbar\Psi\end{aligned}$$

练习题（考试重点）

➢ 已知体系处于如下状态，问：（1）Ψ是否是$\hat{L}^2$的本征态？（2）Ψ是否是$\hat{L}_z$的本征态？（3）在Ψ态下分别测量$\hat{L}^2$和$\hat{L}_z$时的可能值及相应的几率；（4）求$\hat{L}^2$的平均值。

$$\Psi=\frac{1}{3}Y_1^1(\theta,\varphi)+\frac{2}{3}Y_2^1(\theta,\varphi)$$

凡是题目问“可能值”及“相应几率”，如临深渊，如履薄冰；兵马未动，归一先行!

$$(C\Psi,C\Psi)=1 \Rightarrow C=\frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow \Psi=\frac{1}{\sqrt{5}}[Y_1^1+2Y_2^1]$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2\Rightarrow\begin{cases}2\hbar^2, & 20\% \\ 6\hbar^2, & 80\%\end{cases} \qquad \hat{L}_z\Rightarrow\hbar,\ \ 100\% \qquad \overline{\hat{\mathbf{L}}^2}=\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 2\hbar^2+\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|^2 6\hbar^2=\frac{26}{5}\hbar^2$$

期中附加题（截止时间：4月17日21:30）

- 证明在$\hat{L}_z$的本征态Y_l^m下，$\hat{L}_x$的平均值为0。（5分）
- 计算在$\hat{L}_z$的本征态Y_l^m下，$\hat{L}_x$和$\hat{L}_y$的不确定度。（5分）