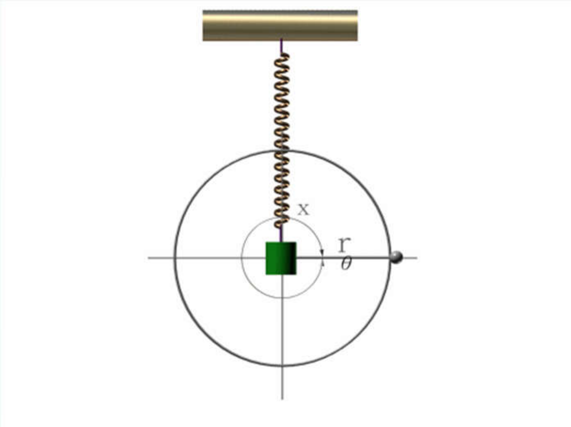
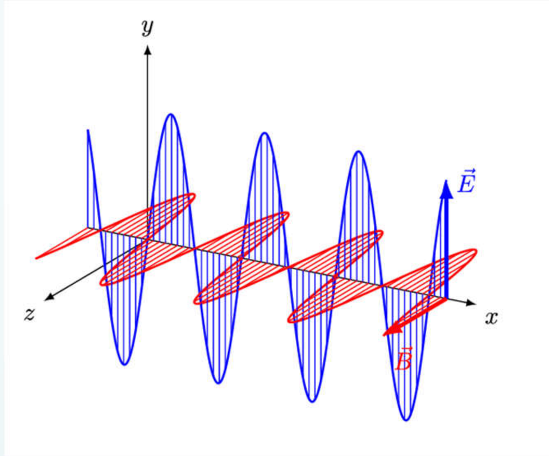


第11章
振动与波动



主 讲: 尹 航

华中科技大学 物理学院

纵观全局

学了什么?

还要学些什么？？

中 学

判定（动力学）

位移-时间关系

微积分

大 学

判定（动力学，运动学）

x-t，*v-t*，*a-t*，*E-t*…

振 动

（谐振动）

简单环境中的单一振动

旋转矢量法

微分方程

振动合成（非单一）

阻尼振动

受迫振动、共振

本节内容

1 谐振动

引子

什么是**振动**？什么是**波动**？

- **什么是机械振动?**

物体在某一位置附近、在同一路线上来回往复的运动。

例如：心脏的跳动、钟摆的运动、琴弦的振动

- **推广，什么是振动?**

任何物理量在某定值附近随时间的周期性变化

例如：电磁振荡

- **本章内容：谐振动**

最简单、最基本的振动

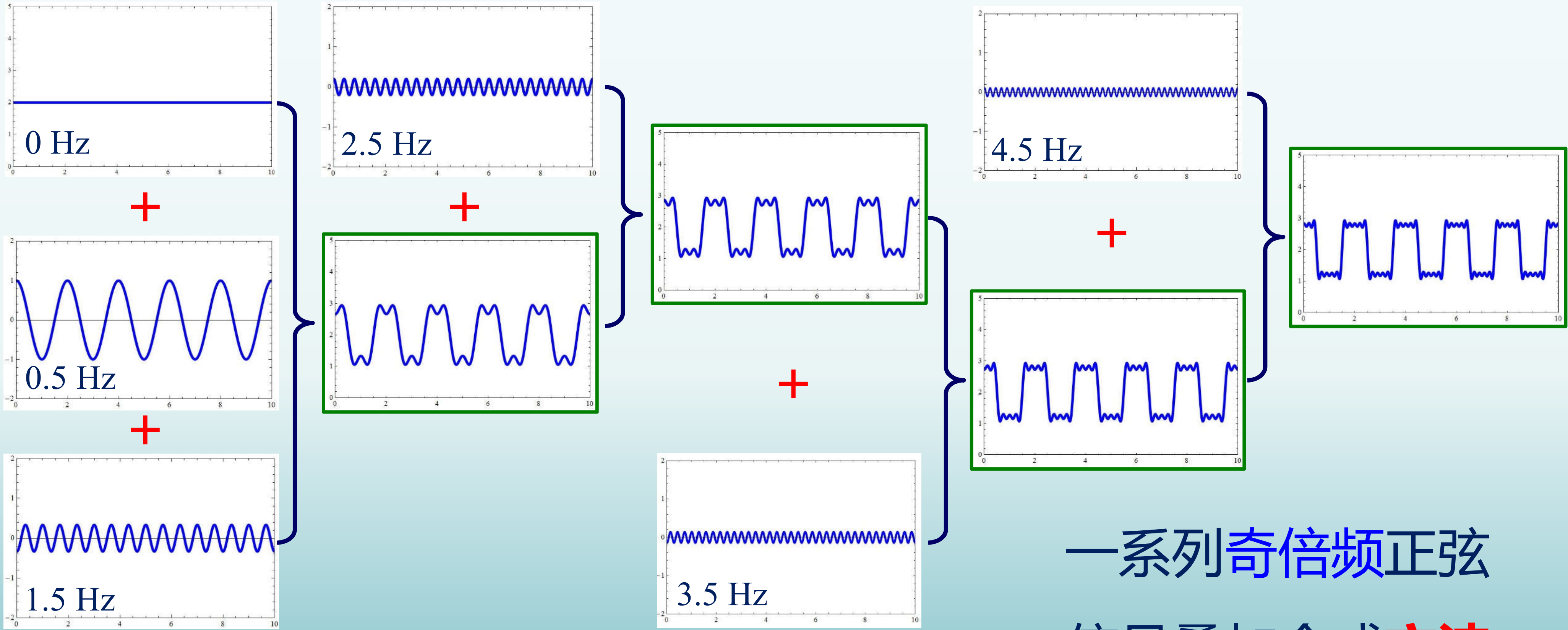
谐振动是一切复杂振动的**组成单元**

复杂振动可**分解**为许多谐振动

引子

最简单、最基本的振动

- 谐振动是一切复杂振动的**组成单元**
- 复杂振动可**分解**为许多谐振动



一系列**奇倍频**正弦

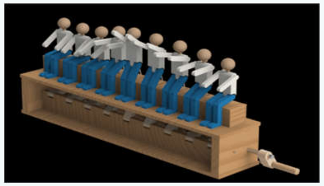
信号叠加合成**方波**

引子

什么是振动？什么是波动？

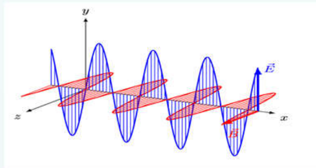
- **什么是波?**

振动的传递
- 机械振动的传递



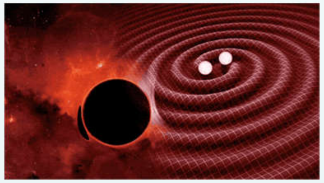
机械波

- 电磁振荡的传递



电磁波

- 时空形变的传递



引力波

(近期重大科学发现)

- ……

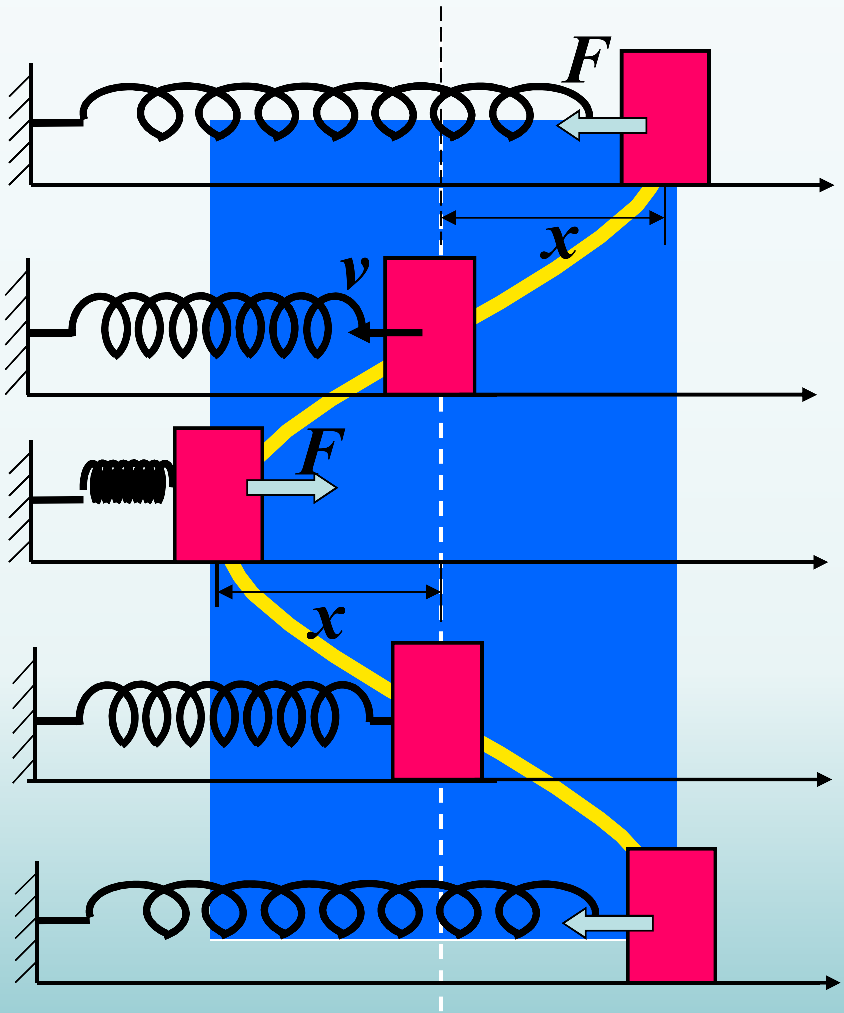
- **振动与波动的区别与联系**

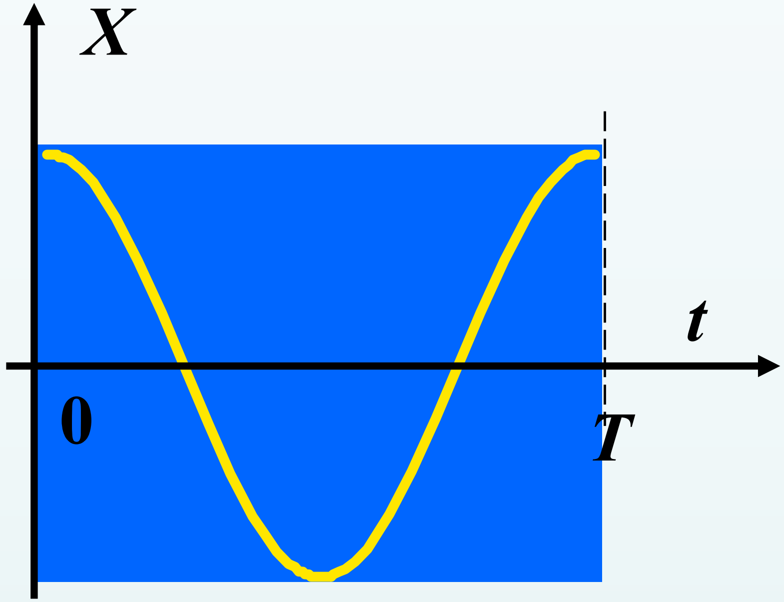
区别
- **振动：** 一个质点的运动
- **波动：** 大量有联系质点振动的集体表现

联系： 振动是波动的根源；波动是振动的传播。

谐振动的特征

理想弹簧振子：弹簧无质量、弹性范围内、运动无摩擦





- **受力特点**

在某位置受力为**零** — **平衡位置**

离开平衡位置，$F=-kx$ — **回复力**

谐振动的特征

回复力 $F=-kx$

(效果力)

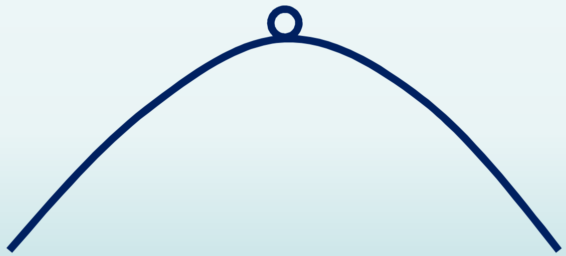
- **大小：**与位移大小成正比
- **方向：**与位移方向相反

效果：始终想把偏离平衡位置的物体拉回到平衡位置。 **稳定运动**

$F=kx$，还能否稳定？？ **No!**

$$F_x = -kx$$

(小范围线性近似)



$$F_x = kx$$

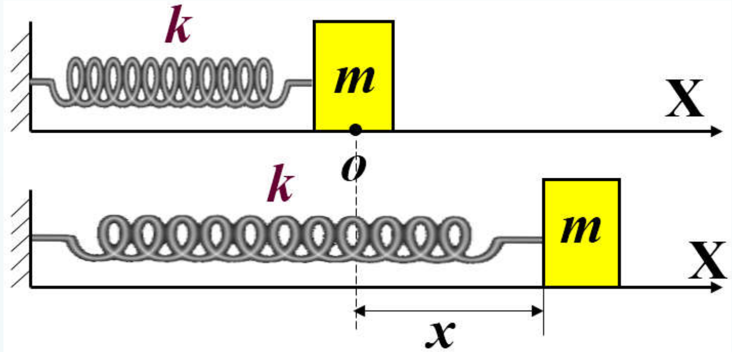
(小范围线性近似)

谐振动的特征

- **各种形式的谐振动**

谐振动的规律

□ 运动学规律——谐振动的运动方程



牛顿第二定律：$F = ma = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

回复力：$F = -kx$

所以：$m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{k}{m}x$　令：$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$　固有圆频率

能否利用能量关系得到?

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = c$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx\cancel{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0{}^2x = 0}$$

理想弹簧振子

运动方程

推广：$\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2Q = 0$

Q作简谐振动（Q为任意物理量）

谐振动的规律

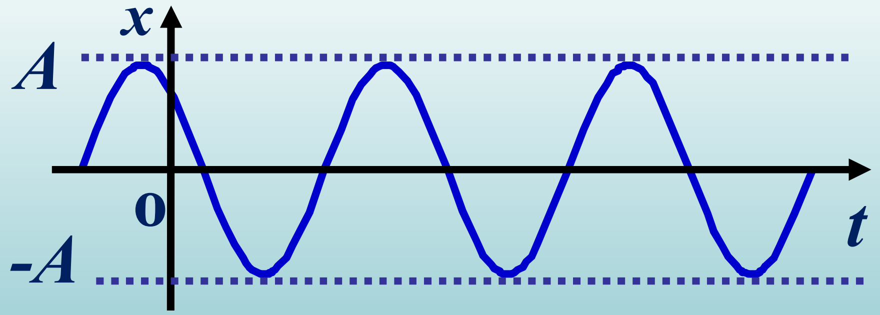
□ 运动学规律 —— x-t关系

振动方程

求解微分方程：$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0{}^2x=0 \longrightarrow \boxed{x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)}$

若 $t=0$时，$x=x_0$，$v=v_0$，则 $\begin{cases} A=\sqrt{x_0{}^2+v_0^2/\omega_0^2} & \text{振幅} \\ \tan\varphi=-\dfrac{v_0}{\omega_0 x_0} & \text{初始相位} \end{cases}$

若已知A、ω_0、φ就唯一确定了一个谐振动



振幅A： 振动的范围

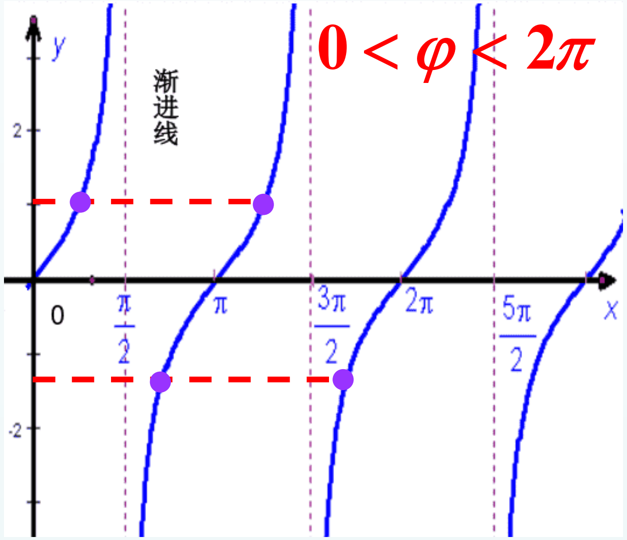
圆频率ω_0
周期T } 振动的快慢

初始相位φ 初始时刻振动状态

谐振动的规律

- **关于初始相位φ**

$$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \longrightarrow \varphi=\tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)\ ?$$



$$\varphi=\tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)\ \text{或}\ \varphi=\tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)+\pi$$

φ取值，还要看初始时刻x_0与v_0的符号

如何判断？？ **三步骤** $x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

1、$t=0$ $x_0=A\cos(\varphi) \longrightarrow \varphi=\pm\left|\cos^{-1}(x_0/A)\right|$

2、求速度表达式 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$

3、$t=0$ $v_0=-A\omega_0\sin(\varphi)$ $\begin{cases} v_0>0 \longrightarrow \varphi<0 \\ v_0<0 \longrightarrow \varphi>0 \end{cases}$ $-\pi<\varphi<\pi$

谐振动的规律

- **振子速度和加速度**

如何计算振子的速度和加速度　　**求导**

速度：位置对时间的一阶导数　　$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

加速度：位置对时间的二阶导数

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

振子的位置 x、速度 v、加速度 a 这三个物理量，哪几个量作简谐振动?

全部！！

谐振动

- **小结**
  - **动力学特征** $F_{合}=-kx$
  - **运动学特征**
    - 运动方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega_0{}^2x=0$
    - 振动方程 $x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

  符合以上三个方程中任意一个的运动即为简谐振动。

- **谐振动问题类型**

  谐振动判定，振动方程，求周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

  根据振动状态确定 A，ω_0，φ $A=\sqrt{x_0{}^2+v_0^2/\omega_0^2}$ $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

谐振动例题

例. 某物体沿X 轴(向右为正方向)作简谐振动，其振动周期T=π，t=0时，x_0=4 m，v_0=6 m/s，且向右运动。求物体的振动方程。

解： $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$　　$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\ \text{rad/s}$$　　$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2} = 5\ \text{m}$$

$$x_0 = A\cos(\varphi) \longrightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right) = \pm 36.8^{\circ}$$

$$v_0 = -A\omega_0 \sin(\varphi) > 0 \longrightarrow \varphi < 0$$

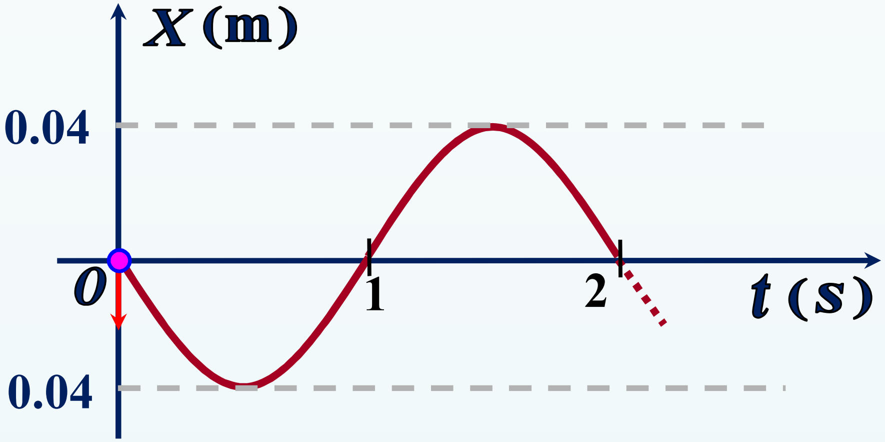
$$\varphi = -36.8^{\circ} = -0.64\ \text{rad}$$

振动方程为

$$x = 5\cos(2t - 0.64)\text{m}$$

谐振动例题

例2：简谐振动的x~t曲线，写出对应的简谐振动方程



解：振动方程写为：

$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

由图知：

$A = 0.04$ (m)

$T = 2$ (s)

故：

$\omega_0 = 2\pi / T = \pi$ (rad /s)

求φ

$t=0$ 时

$x_0=A\cos\varphi=0 \quad \varphi=\pm\pi/2$

$v=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$

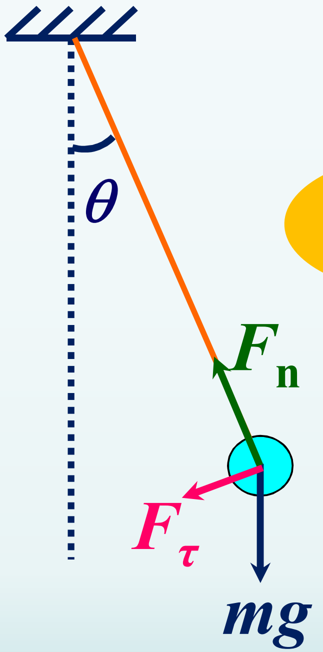
$t=0$ 时 $v_0=-A\omega_0\sin(\varphi)<0$

$\varphi=\pi/2$

$x=0.04\cos(\pi t+\pi/2)$ m

谐振动例题

例. 证明当单摆做小角度摆动时，其运动为简谐振动，并求其周期。（忽略空气摩擦）



证明： 单摆受力分析

切向力

$F_\tau=-mg\sin\theta \quad \theta<<1 \quad \sin\theta\approx\theta$

θ较大时不成立

$F_\tau=-mg\theta$

回复力

角位移

又 $\because$ $\left.\begin{aligned} F_\tau&=ma_\tau \\ a_\tau&=l\beta=l\frac{d^2\theta}{dt^2}\end{aligned}\right\} \longrightarrow ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\theta$

注：θ较大时系统不是简谐振动。

为什么？？

令 $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$， 则 $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta=0$

简谐振动

$T=2\pi/\omega_0=2\pi\sqrt{l/g}$

谐振动例题

引申： **物理前沿问题**

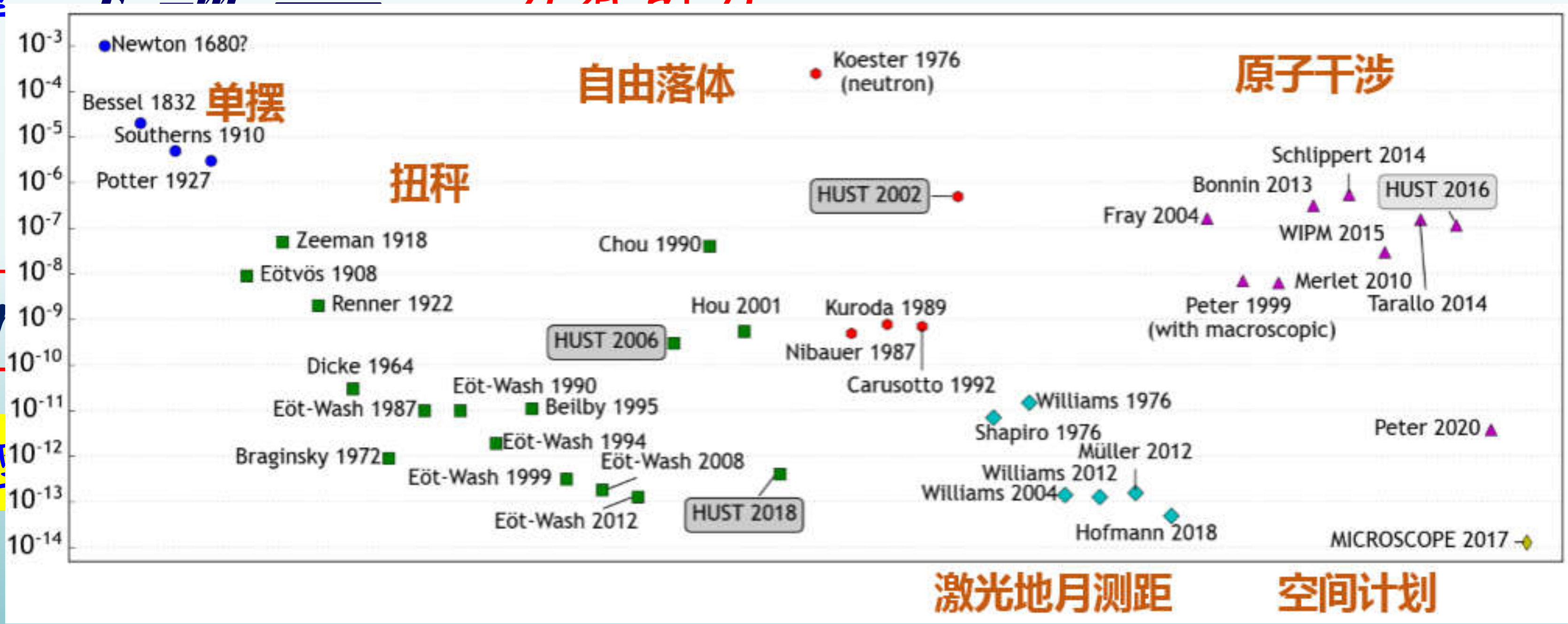
华中科技大学--引力中心

在单摆的讨论中，隐含了一个前提条件：

$$m_{惯}=m_{引}$$

惯性质量 $F_{\tau}=m_{惯}a_{\tau}$ 牛顿第二定律

引力质量 $F=m$ $\frac{GM}{}$ 万有引力



$m_{惯}\overset{?}{=}m$

等效原理