《离散数学二》第七次作业

1. 某岛上共有三种人：骑士总是说真话，骗子总是说谎，间谍可以说谎也可以说真话。你遇到了三个人，A、B 和 C。你知道这三个人中有一个是骑士，一个是骗子，一个是间谍。这三人中的每一个都知道其他两个人的身份。分别对以下三个小题分别判断谁是骑士、骗子和间谍。如不能判断，给出原因；如答案不唯一，给出所有答案**(20 分)**

(1) A 说："C 是那个骗子"，B 说："A 是那个骑士"，C 说："我是那个间谍"。

(2) A 说："我是那个骗子"，B 说："我是那个骗子"，C 说："我是那个骗子"。

(3) A 说："我是骑士"，B 说："A 不是骗子"，C 说："B 不是骗子"。

(4) A 说："我不是间谍"，B 说："我不是间谍"，C 说："A 是间谍"。

(1) A 是骑士，B 是间谍，C 是骗子

(2) 不能判断

(3) A 是骗子，B 是间谍，C 是骑士

(4) A 是骑士，B 是间谍，C 是骗子

2. 求下列公式的主合取范式，求其成假赋值，再利用主合取范式求主析取范式**(18分)**。

(1) $(p \wedge q) \rightarrow q$

(2) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$

(3) $\neg(r \rightarrow p) \wedge p \wedge q$

2. 解：(1) $(p\wedge q)\rightarrow q = (\neg(p\wedge q))\vee q$

$= (\neg p\vee \neg q)\vee q$

$= \neg p\vee(\neg q\vee q)$

$= 1$

∴ 永真式

∴ 主析取范式为 $(p\wedge q)\vee(\bar{p}\wedge q)\vee(p\wedge\bar{q})\vee(\bar{p}\wedge\bar{q})$

主合取范式为空

(2) $(p\leftrightarrow q)\rightarrow r = ((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p))\rightarrow r$

$= \neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p))\vee r$

$= (\neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg q\vee p))\vee r$

$= ((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p))\vee r$

$= ((p\vee q)\wedge(p\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge(\neg q\vee\neg p))\vee r$

$= ((p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q))\vee r$

$= (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

当 $p=0, q=0, r=0$ 或 $p=1, q=1, r=0$ 时，原式为假.

$(p\leftrightarrow q)\rightarrow r = (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

$= M_{000}\wedge M_{110}$

$= m_{001}\vee m_{010}\vee m_{011}\vee m_{100}\vee m_{101}\vee m_{110}$

$= (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

(3) $\neg(r\rightarrow p)\wedge p\wedge q = \neg(\neg r\vee p)\wedge p\wedge q = (r\wedge\neg p)\wedge p\wedge q = 0$

∴当 $p=0$或1，$q=0$或1，$r=0$或1时，均为假

∴ $\neg(r\rightarrow p)\wedge p\wedge q = (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge$

$(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

主析取范式为空

3. 用真值表求下列公式的主析取范式和主合取范式**(12分)**。

(1) $(p\vee q)\wedge r$

(2) $p\rightarrow(p\vee q\vee r)$

(3) $\neg(q\rightarrow\neg p)\wedge\neg p$

解: (1)

p	q	r	$F=(p\vee q)\wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$(p\vee q)\wedge r$

主析取范式为 $m_{011}\vee m_{101}\vee m_{111}$

$=(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

主合取范式为 $M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{010}\wedge M_{100}\wedge M_{110}$

$=(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)$

(2) $p\to(p\vee q\vee r)$

p	q	r	$p\to(p\vee q\vee r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

∴主析取范式为1

主合取范式为

$\vee\, m_{ijk}$

$=(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

(3) $\neg(q\to\neg p)\wedge\neg p=$

p	q	$\neg(q\to\neg p)\wedge\neg p$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

主析取范式为

$\wedge\, M_{ij}=(\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(p\vee q)$

主合取范式为

空

4. 用谓词逻辑将下列命题符号化**(20 分)**。

(1) 火车都比轮船快.

(2) 有的火车比有的汽车快.

(3) 不存在比所有火车都快的汽车.

(4) 说凡是汽车就比火车慢是不对的.

(4) $T(x)$: x是火车. $S(x)$: x是轮船, $F(x,y)$: x比y快, $C(x)$: x是汽车

(1) $(\forall x)(\forall y)(T(x)\wedge S(y)\rightarrow F(x,y))$

(2) $(\exists x)(\exists z)(T(x)\wedge C(z)\rightarrow F(x,z))$

(3) $\neg(\forall x)(\exists y)(T(x)\wedge C(y)\rightarrow F(y,x))$

(4) $\neg(\forall x)(\forall y)(T(x)\wedge C(y)\rightarrow F(x,y))$

5. 判断下列各式的真值**(12分)**。

(1) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$,其中,$P(x)$:$x=1$;$Q(x)$:$x=2$;而且个体域是$\{1,2\}$.

(2) $(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)$,其中,$P$:$2>1$;$Q(x)$:$x\leqslant 3$;$R(x)$:$x\geqslant 6$;$a=5$;而且个体域是$\{-2,3,6\}$.

(3) $(\exists x)(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge 1$,其中,$P(x)$:$x>2$;$Q(x)$:$x=0$;而且个体域是$\{1,2\}$.

(1) 真

(2) 假

(3) 真

6. 设解释 I 如下: $D=\{a, b\}$; $P(a,a)=1$; $P(b,b)=1$; $P(a,b)=0$, $P(b,a)=0$。试确定下列公式在解释 I 下的真值**(18 分)**。

(1) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$;

(2) $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$;

(3) $(\exists x)(\forall y)\ P(x,y)$;

(4) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y)\rightarrow P(y,x))$;

(5) $(\forall x)P(x,x)$;

(6) $(\exists y)\neg P(a,y)$.

(1) 真

(2) 假

(3) 假

(4) 真

(5) 真

（6）真