已学知识回顾

动量定理 $\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{P}_t - \vec{P}_0$ 动量守恒

角动量定理（积分形式） $\int_0^t \vec{M}\mathrm{d}t = \int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}_t} \mathrm{d}\vec{L} = \vec{L}_t - \vec{L}_0$ 角动量守恒

动能定理 $A_{外} + A_{内} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k$

保守力做功 $A_{ab} = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_p$

功能关系

$$A_{外} + A_{内非保} = (E_{kb} + E_{pb}) - (E_{ka} + E_{pa}) = \Delta E$$

机械能守恒

已学知识回顾

时间累积效应

角动量

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\cdot \mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

$\vec{M}=0$

$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$ 角动量守恒

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}t = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

$\vec{F}=0$

$\vec{P}_1 = \vec{P}_2$ 动量守恒

$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$

解决问题的思路可按此顺序倒过来！

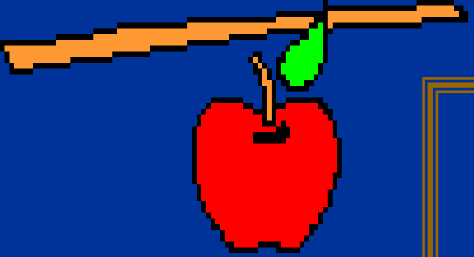
$\int_1^2 \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_{k_2} - E_{k_1}$

$\int_1^2 \vec{F}_{外}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_1^2 \vec{f}_{内非}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_2 - E_1$

$A_{外}=0 \quad A_{内非}=0$

$E_1 = E_2$ 机械能守恒

空间累积效应



第一篇 力学

第3章

刚体的定轴转动

Mechanics

第3章 刚体的定轴转动

Rotation of rigid-body with a fixed axis

本章要点

- 刚体的定轴转动定律
- 刚体的转动动能、角动量的概念
- 刚体的角动量及角动量守恒定律

一. 刚体的平动和转动

1. 刚体 —— 固体的理想模型

在外力作用下，物体的形状和大小保持不变

——— **刚体**

刚体 → **无穷质点组合（质点系）**——特殊的质点系

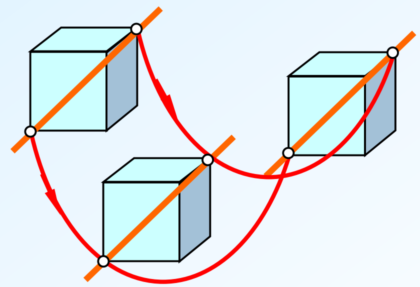
任意质点间相对位置不变！

刚体运动 → **质点系的运动**

研究基础：**牛顿力学（质点动力学）！**

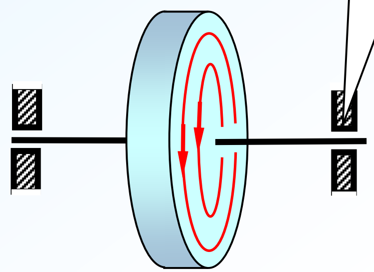
2. 刚体的运动

平动

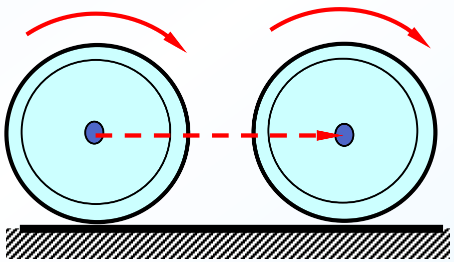


转动

定轴转动

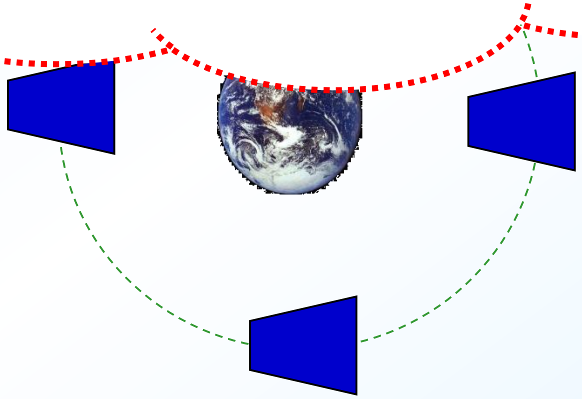


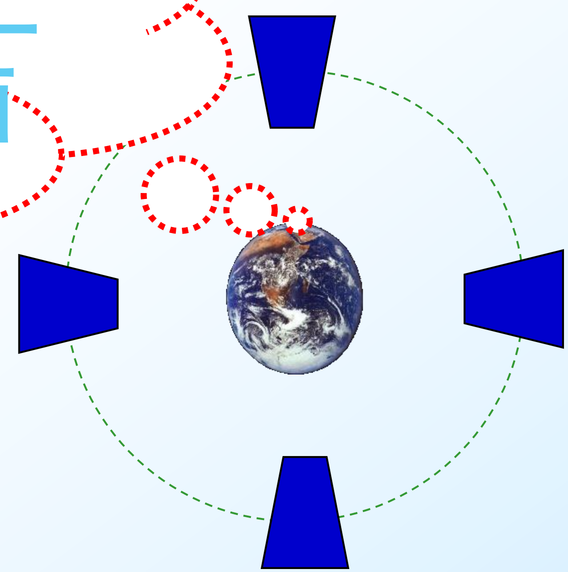
滚动



平动+转动

为什么我们在地球上总是只能看到月球的一面





3. 刚体的平动

用质心运动来代表整体的运动——质心

（1）质心的位矢

质点系 N个质点的质量分别为 $m_1, m_2, \ldots, m_N$

对应的位矢分别为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots \vec{r}_N$

定义：质心的位矢 $\vec{r}_c = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$

质点系的总质量

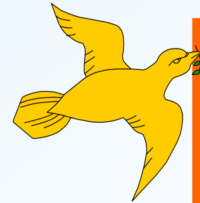
$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{m}\sum m_i x_i \\ y_c = \dfrac{1}{m}\sum m_i y_i \\ z_c = \dfrac{1}{m}\sum m_i z_i \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_c = \dfrac{1}{m}\int x\mathrm{d}m \\ y_c = \dfrac{1}{m}\int y\mathrm{d}m \\ z_c = \dfrac{1}{m}\int z\mathrm{d}m \end{cases}$$

注

均匀分布体：质心 → 几何对称中心

质心 $\neq$? 重心

（2）质心运动定理



$$\boxed{\vec{r}_c=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}}$$

质心的速度

$$\vec{v}_c=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}\right)=\frac{1}{m}\sum m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{m}\sum m_i\vec{v}_i$$

质心的加速度

$$\vec{a}_c=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_c}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{m}\right)=\frac{1}{m}\sum m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{m}\sum m_i\vec{a}_i$$

设m_i受外力$\vec{F}_i$，内力$\vec{f}_i$，则 $\quad m_i\vec{a}_i=\vec{F}_i+\vec{f}_i$

对所有质点求和 $m\underbrace{\frac{\sum m_i\vec{a}_i}{m}}_{\vec{a}_c}=\sum\vec{F}_i+\overset{0}{\sum\vec{f}_i}=\vec{F}_{合外}$

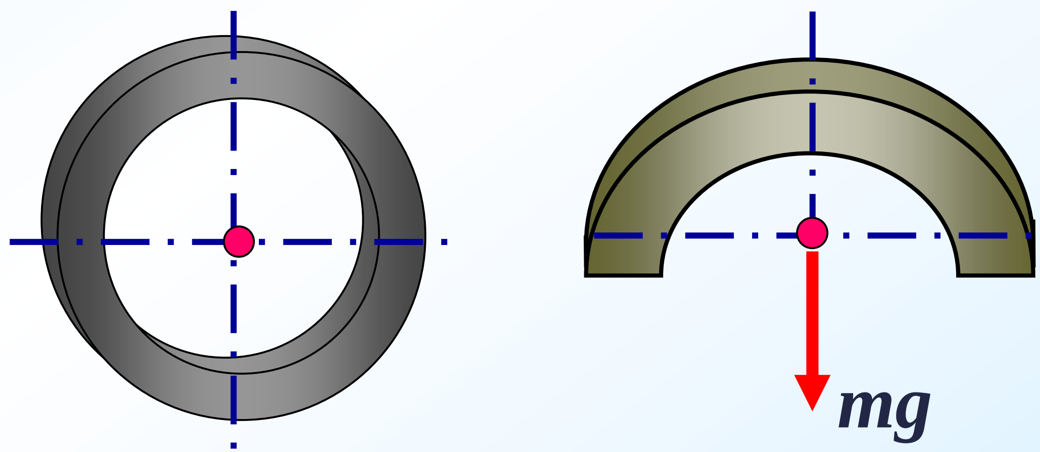
$\therefore\ \boxed{\vec{F}_{合外}=m\vec{a}_c}$ —— 质心运动定理

$\boxed{\vec{F}_{合外} = m\vec{a}_c}$ ——质心运动定理

即：质心运动如同一质点，只是将质量全部集中于该点，所受的力是质点系受的所有外力。

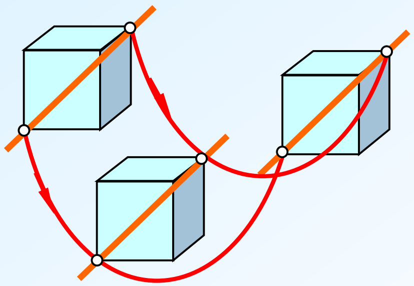
注：质心上可能既无质量，又未受力。

例

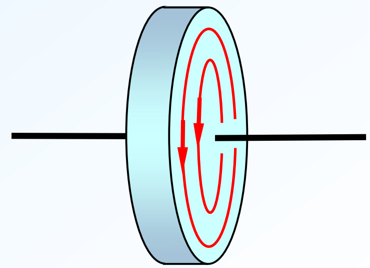


演示实验视频

平动



转动



$$\boxed{\vec{F}_{合外} = m\vec{a}_c}$$

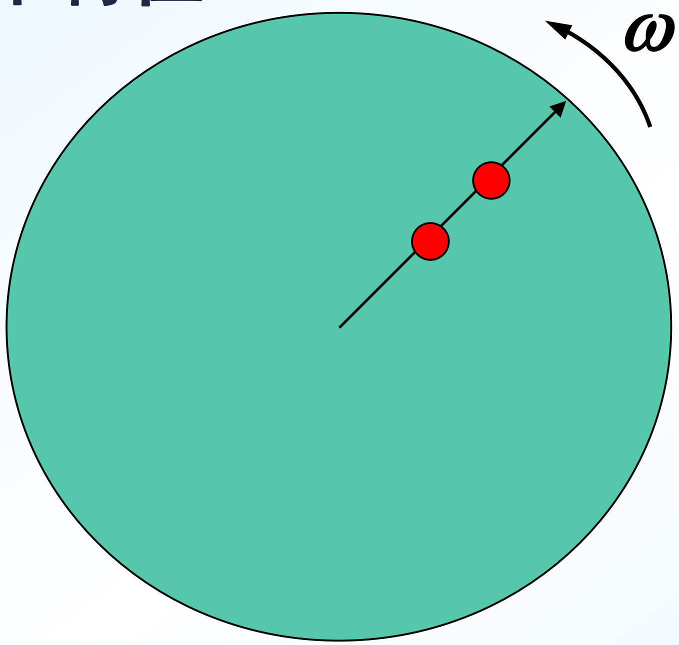
——质心运动定理

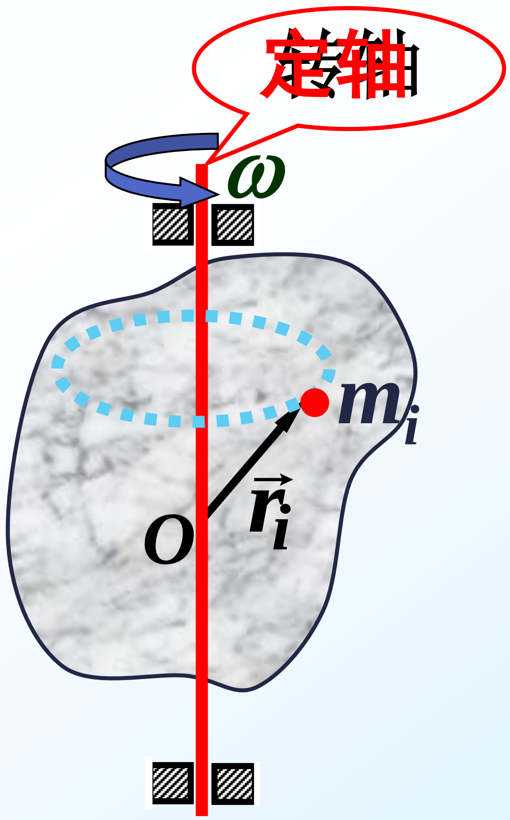
4. 刚体的转动

转动：体内各点都绕同一直线作圆周运动

（1）定轴转动

基本特征



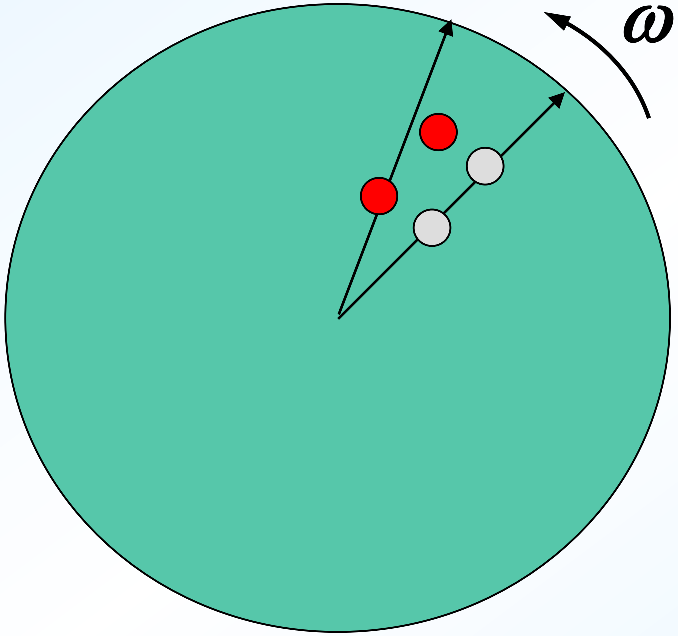


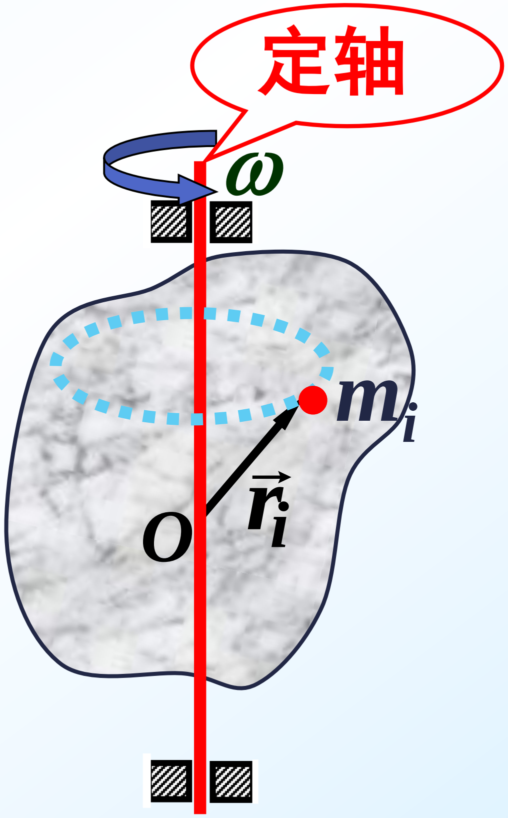
4. 刚体的转动

转动：体内各点都绕同一直线作圆周运动

（1）定轴转动

基本特征



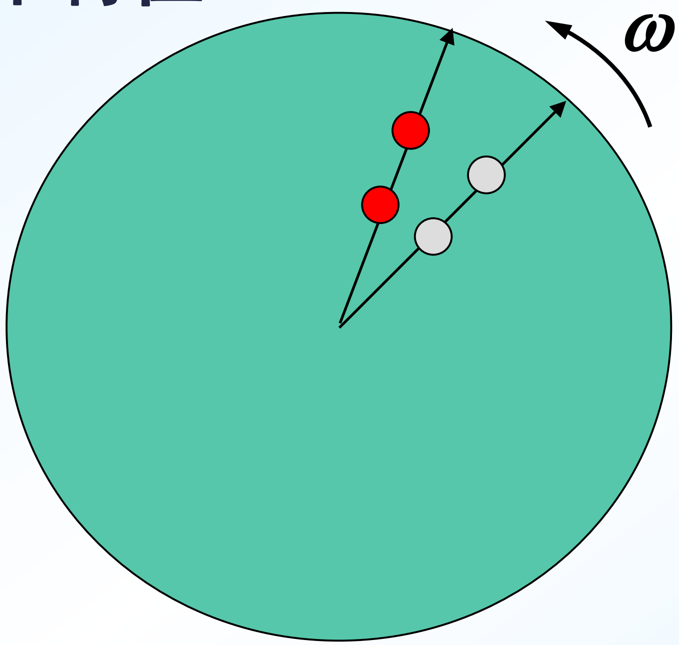


4. 刚体的转动

转动：体内各点都绕同一直线作圆周运动

（1）定轴转动

基本特征

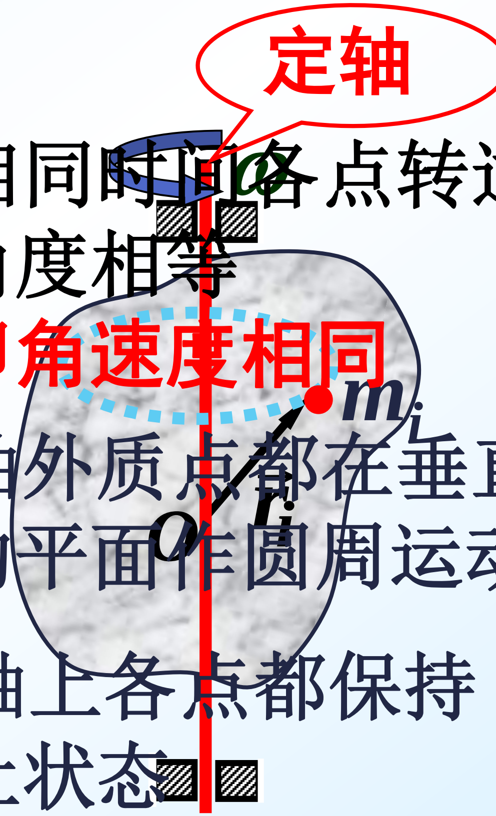


1 在相同时间各点转过的角度相等

即角速度相同

2 转轴外质点都在垂直于轴的平面作圆周运动

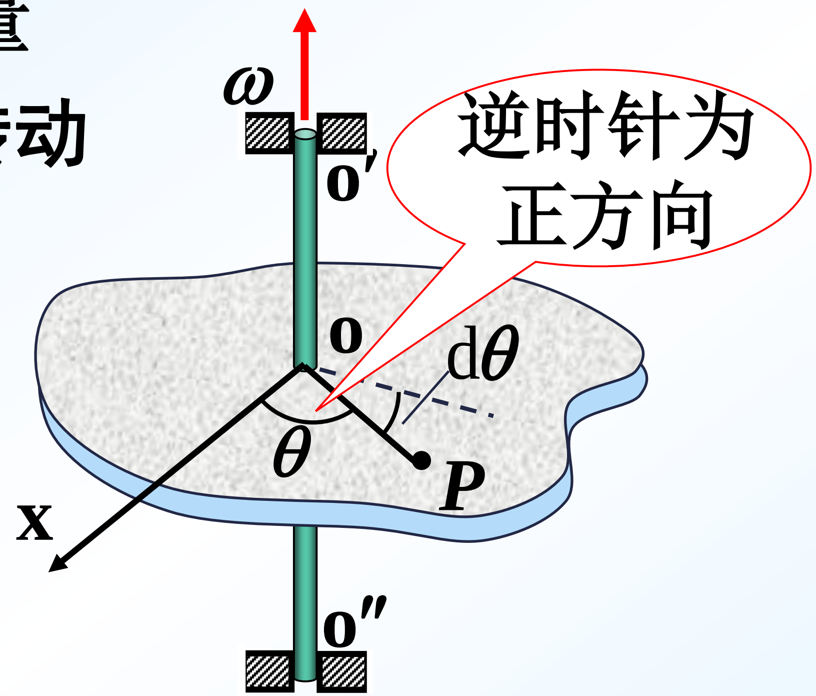
3 转轴上各点都保持静止状态



角速度 成为刚体重要的运动特征，它在刚体运动中占有 特殊显要 的地位。

（2）描述刚体转动的物理量

设某刚体绕定轴o′o″转动



1 °角坐标 θ

单位：**rad(弧度)**

$$\theta_P = \theta(t)$$

—— 刚体运动方程

2 °角位移dθ

$$\mathrm{d}\theta = \theta(t+\mathrm{d}t) - \theta(t)$$

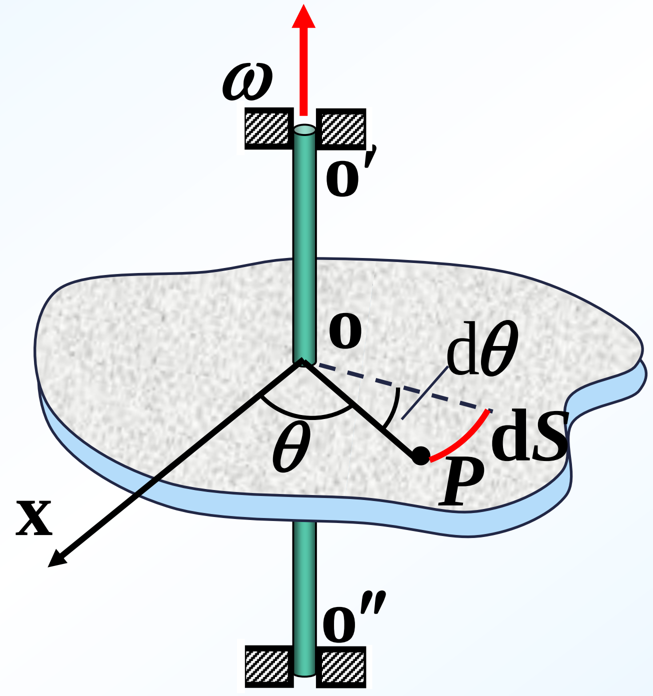
角速度方向与刚体转动方向是两回事

3 °角速度 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

——方向与角位移成右手螺旋关系

4 °角加速度 $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

5 º角量与线量之间的关系



路程 $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta$

速率 $v = \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\omega$

加速度 $a_n = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\beta$$

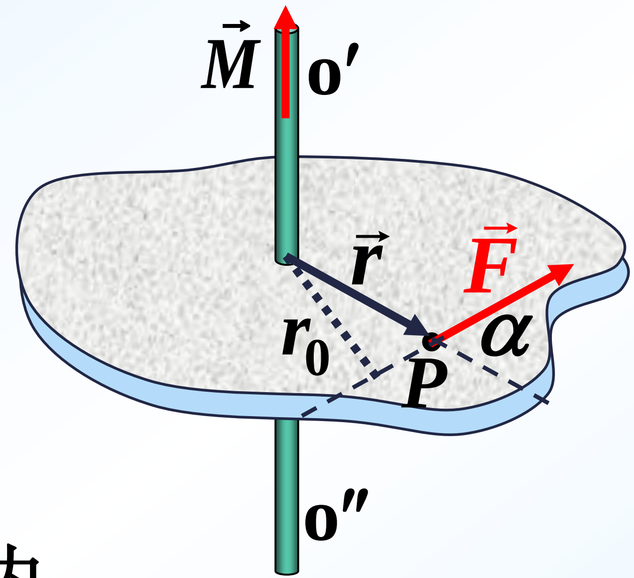
如同一维运动各物理量的方向由"+" "–"号表示

质点直线运动	刚体的定轴转动
位移 $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$	角位移 $\Delta\theta = \theta(t_2) - \theta(t_1)$
速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	角速度 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	角加速度 $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
匀速直线运动 $s = vt$	匀角速定轴转动 $\theta = \omega t$
匀变速直线运动	匀变角速定轴转动
$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
$v^2 - v_0^2 = 2as$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\theta$

二、刚体的定轴转动定律

1.力矩 （P61）

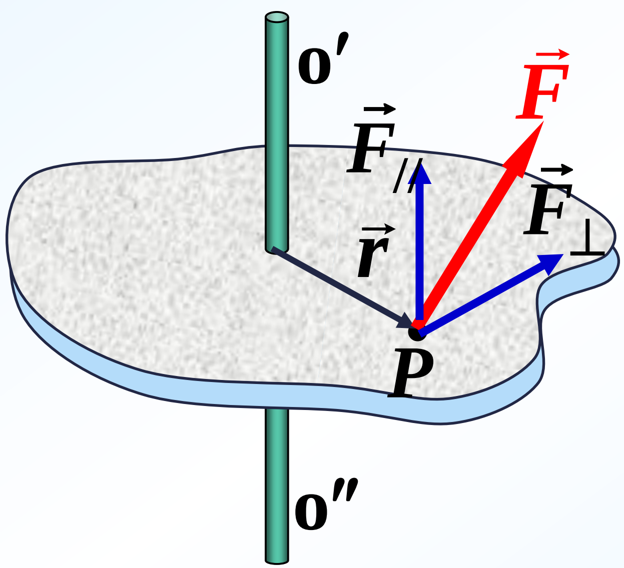
定义： $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$



（1）$\vec{F}$ 在垂直o′o″ 的平面内

$$M=rF\sin\alpha=r_0F$$

（2）$\vec{F}$ 不在垂直o′o″ 的平面内



$\vec{F}$ 总可分解成两个分量

$$\vec{F}=\vec{F}_{\perp}+\vec{F}_{//}$$

对刚体绕
o′o″轴转动
无贡献

$\therefore$ 计算$\vec{M}$ 时

只需考虑 $\vec{F}_{\perp}$的力矩

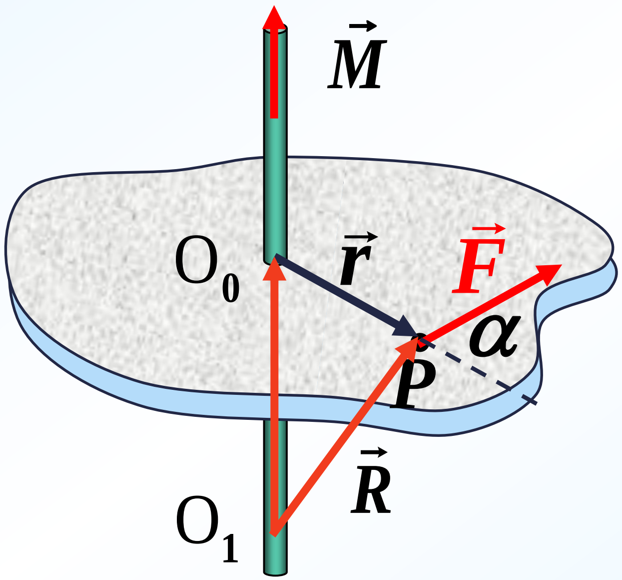
（3）对转轴上的任意定点

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$$

$$= (\overrightarrow{O_1 O_0} + \vec{r}) \times \vec{F}$$

$$= \overrightarrow{O_1 O_0} \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= O_1 O_0 \cdot F \vec{e}_n + \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}$$

P62：F相对于整个z轴上所有点的力矩的z分量相等，故这个力矩z分量成为力F相对于转轴（z轴）的力矩。

2.定轴转动定律 （P62）

质点系的角动量定理 $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $\begin{cases}\vec{L}=\sum\vec{L}_i=\sum\vec{r}_i\times\vec{p}_i\\ \vec{M}=\sum\vec{M}_i=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i\end{cases}$

只有力矩的z向分量对定轴转动有作用，故求此分量M_z的表达式。

$$M_z=(M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k})\cdot\vec{k}=\vec{M}\cdot\vec{k}$$

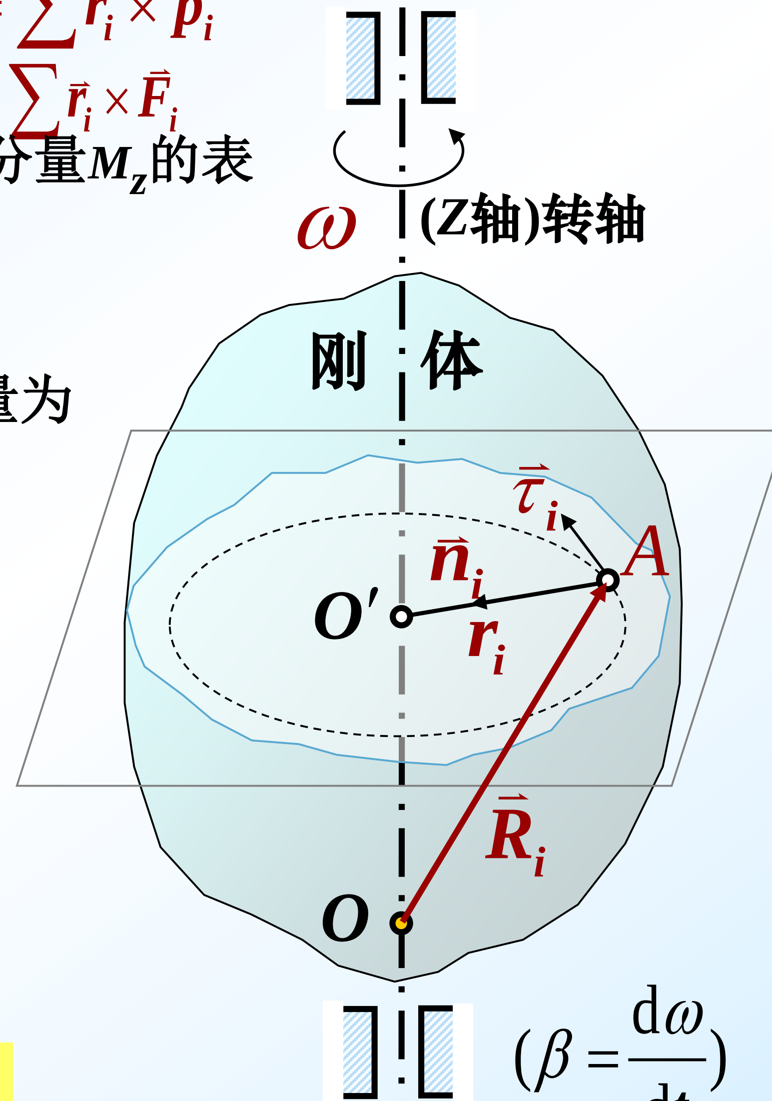
对轴上任选一参考点O，任一质元A对O的角动量为

$$\vec{L}_i=\vec{R}_i\times m_i\vec{v}_i=m_i(z_i\vec{k}-r_i\vec{n}_i)\times r_i\,\omega\,\vec{\tau}_i$$

$$=m_i\,\omega\,r_i(z_i\vec{k}\times\vec{\tau}_i+r_i\vec{k})$$

$$M_z=\vec{M}\cdot\vec{k}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k}=\frac{\mathrm{d}\sum\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k}=\frac{\mathrm{d}\sum\vec{L}_i\cdot\vec{k}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}(\sum m_i r_i^2\,\omega)}{\mathrm{d}t}=\beta\sum m_i r_i^2$$



$$(\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t})$$

令$J=\sum m_i r_i^2$ 转动惯量 $\boxed{M_z=J\beta}$

$$L_z=\sum\vec{L}_i\cdot\vec{k}=\sum m_i\,\omega\,r_i(z_i\vec{k}\times\vec{\tau}_i+r_i\vec{k})\cdot\vec{k}=J\omega$$

$$\boxed{L_z=J\omega}$$

定轴转动定律：

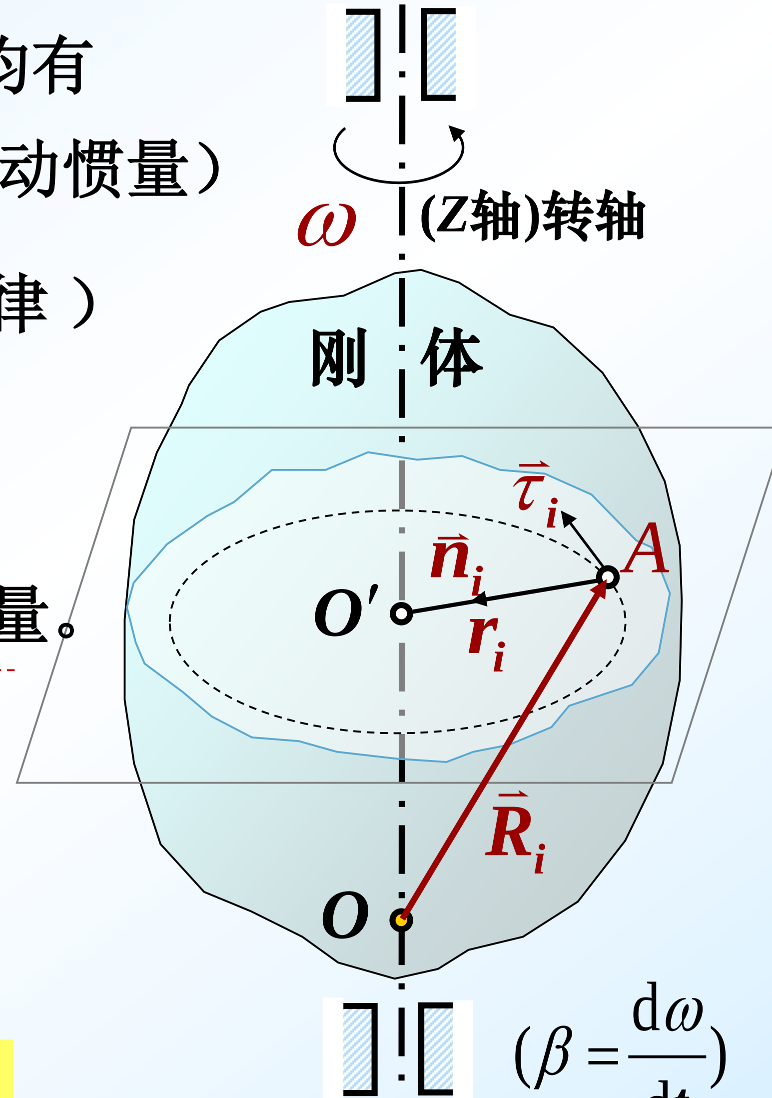
显然，对于整个轴上任意参考点O，均有

$$M_z = J\beta \quad L_z = J\omega \quad J = \sum m_i r_i^2$$（转动惯量）

$$M_z \to M \qquad \boxed{M = J\beta}$$（定轴转动定律）

$$L_z \to L \qquad \boxed{L = J\omega}$$

M、L分别是对轴的力矩、对轴的角动量。



$$M_z = \vec{M}\cdot\vec{k} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k} = \frac{\mathrm{d}\sum \vec{L}_i}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{k} = \frac{\mathrm{d}\sum \vec{L}_i\cdot\vec{k}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}(\sum m_i r_i^2 \omega)}{\mathrm{d}t} = \beta\sum m_i r_i^2$$

$$(\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t})$$

令$J = \sum m_i r_i^2$ 转动惯量 $M_z = J\beta$

$$L_z = \sum \vec{L}_i\cdot\vec{k} = \sum m_i \omega r_i (z_i\vec{k}\times\vec{\tau}_i + r_i\vec{k})\cdot\vec{k} = J\omega$$

$$L_z = J\omega$$

定轴转动定律: $\boxed{M = J\beta}$

$J = \sum m_i r_i^2$——刚体对定轴（z 轴）的转动惯量

由刚体上各质元相对于固定转轴的分布决定，与外力无关，是表征刚体本身特性的特征量

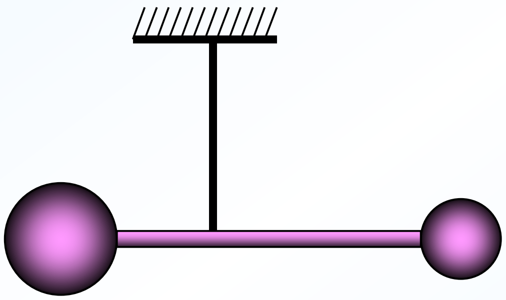
与牛顿定律比较: $\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad$ $M = J\beta$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{M} \longrightarrow \vec{F} \\ \vec{\beta} \longrightarrow \vec{a} \\ J \longrightarrow m \end{array} \right.$

m反映质点的平动惯性，J反映刚体的转动惯性。

3. 转动惯量的计算

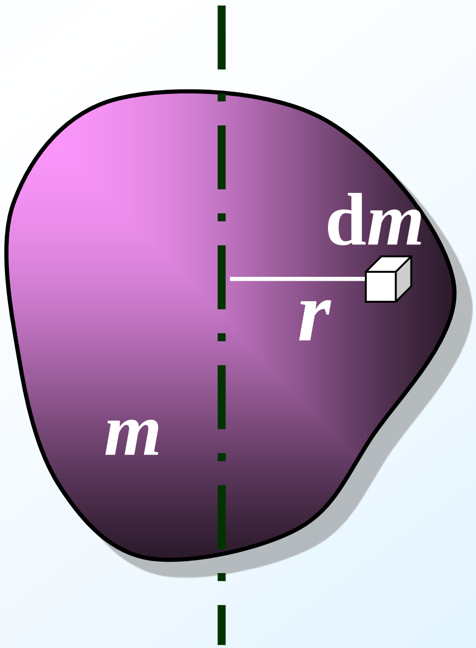
（1）构成刚体的质量元是分立的

$$J = \sum m_i r_i^2$$



（2）刚体的质量是连续分布的

$$J = \int_m r^2 \cdot \mathrm{d}m$$



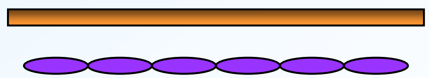
与转动惯量有关的因素

刚体的质量
转轴的位置

$$J=\int_m r^2 \cdot \mathrm{d}m$$

质量元dm 的计算方法如下：

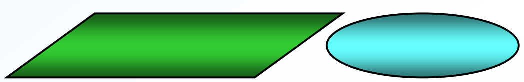
质量为线分布



$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l$

线密度

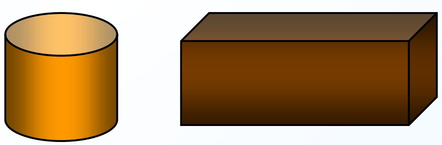
质量为面分布



$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S$

面密度

质量为体分布



$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$

体密度

例. 求质量为m, 半径为R的均匀圆环的转动惯量。设转轴与圆环平面垂直并通过圆心。

$$\boxed{J=\int_m r^2\cdot \mathrm{d}m}$$

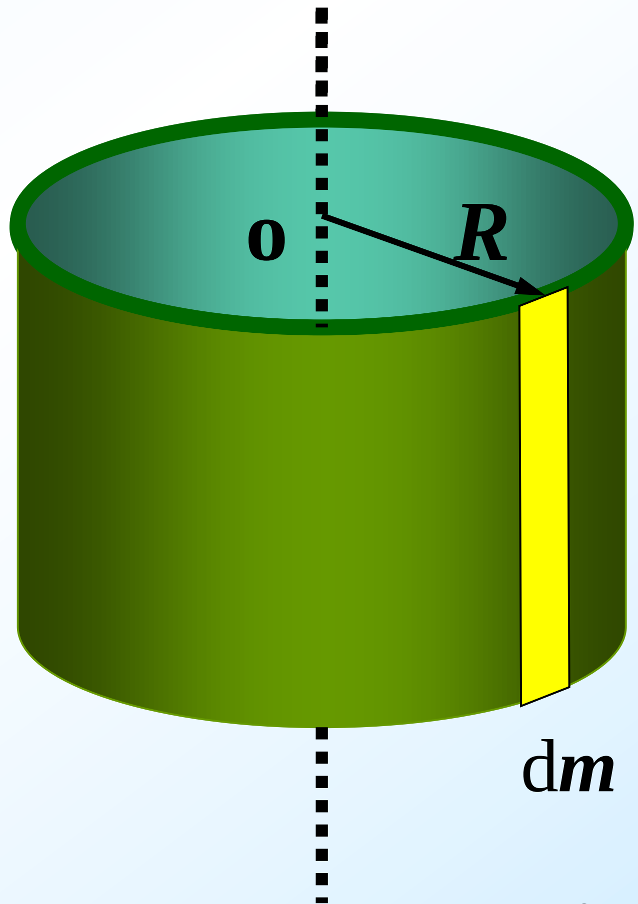
解： 在圆环上取质量元dm

$$J=\int R^2\mathrm{d}m=R^2\int \mathrm{d}m$$

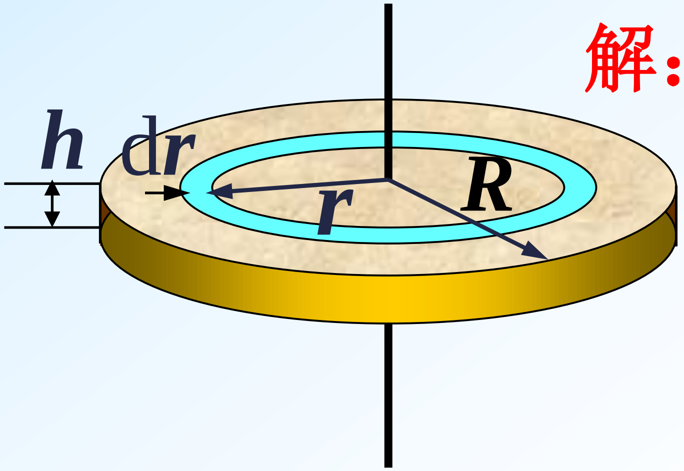
$$\therefore \quad J=mR^2$$

若是半径为R 的薄圆筒（不计厚度）结果如何？

结论同上



例. 求质量为m、半径为R、厚为h 的均匀圆盘的转动惯量。转轴与盘平面垂直并通过盘心。



解：取半径为r宽为dr 的薄圆环

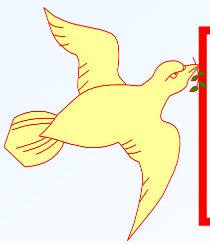
其质量为

$$\mathrm{d}m=\rho\cdot \mathrm{d}V=\rho\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\cdot h$$

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int_0^R \rho\cdot 2\pi h r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\rho\pi R^4 h$$

$$\because \rho=\frac{m}{\pi R^2 h} \quad \therefore J=\frac{1}{2}mR^2$$



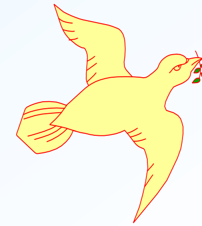
$$\boxed{J=\int_m r^2\cdot \mathrm{d}m}$$

$$\mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}V$$

J与h无关，实心圆柱对其轴 $J_{柱}=\frac{1}{2}mR^2$

结论： 同质量的物体绕对称轴的转动惯量不同!

例. 求长为L质量为m的均匀细棒对图中不同轴的转动惯量。

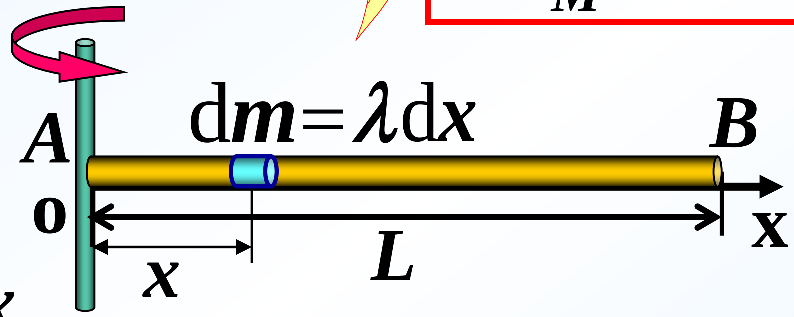


$$J = \int_M r^2 \cdot dm$$

解： 取如图坐标

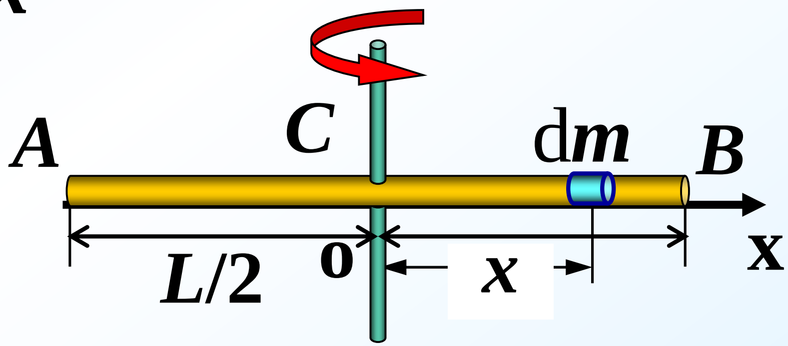
$$dm = \lambda dx$$

$$J_A = \int_m x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx$$



$$J_A = \frac{1}{3} mL^2$$

绕过质心的转轴的 J

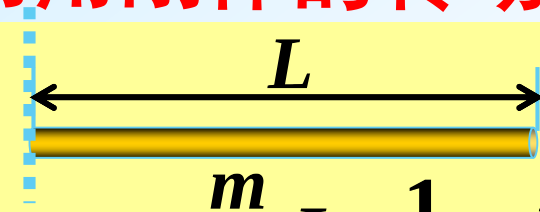


$$J_C = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda dx \qquad J_C = \frac{1}{12} mL^2$$

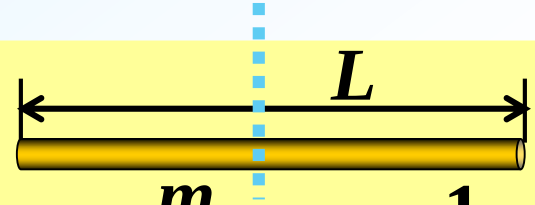
结论： 同一物体绕不同转轴的转动惯量不同！

几种常用刚体的转动惯量

细棒

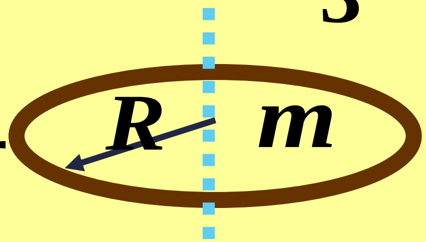


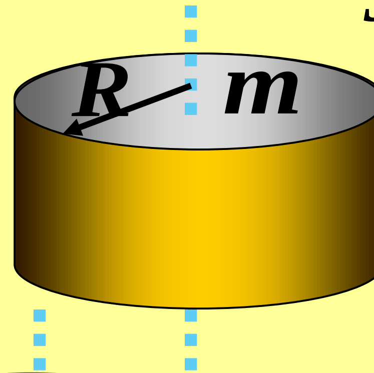
$$J=\frac{1}{3}mL^2$$



$$J=\frac{1}{12}mL^2$$

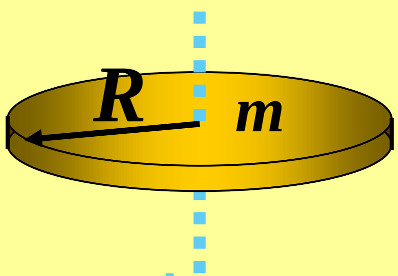
薄圆环
或薄圆筒

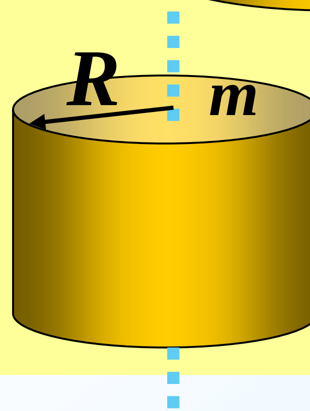




$$J=mR^2$$

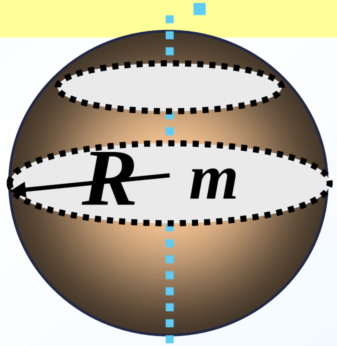
圆盘或
圆柱体





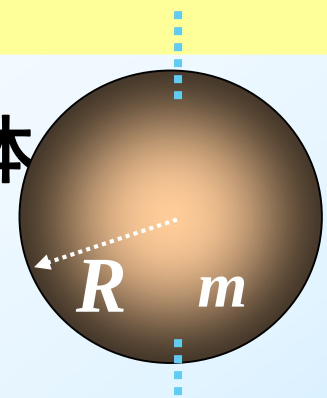
$$J=\frac{1}{2}mR^2$$

薄球壳



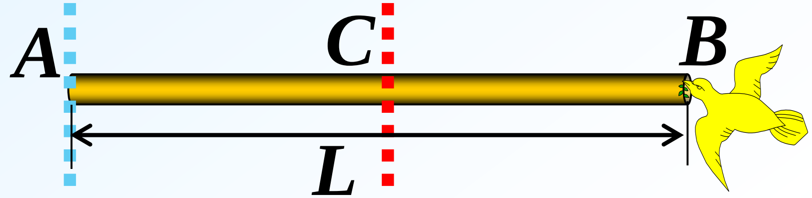
$$J=\frac{2}{3}mR^2$$

球体



$$J=\frac{2}{5}mR^2$$

（3）平行轴定理



$$\begin{cases} J_C = \dfrac{1}{12} mL^2 \\ J_A = \dfrac{1}{3} mL^2 \end{cases}$$

J_C是通过质心的轴的转动惯量

J_A是通过棒端的轴的转动惯量

两轴平行, 相距 $\frac{L}{2}$

$$J_A - J_C = \frac{1}{3}mL^2 - \frac{1}{12}mL^2 = m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$J_A = J_C + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

推广上述结论 (推导见P65):

若有任一轴A与过质心C的轴平行、相距为d，刚体对其转动惯量为J_A，则有：

$$\boxed{J_A = J_C + md^2}$$

——平行轴定理

2-T10 水平桌面上盘放着一根不能拉伸的均匀柔软的长绳。今用手将绳的一端以恒定速度 v_0 竖直上提，试求当提起的绳长为 L 时，手的提力 F 的大小。（设此绳单位长度的质量为 λ。）

解 $F = \frac{dp}{dt}$ ✗ 考虑绳的重力 $F - \lambda x g = \frac{dp}{dt}$

$$= \frac{d(\lambda L v_0 - 0)}{d\,\cancel{t}\,\frac{L}{v_0}} = \lambda v_0^2$$

2-T10 水平桌面上盘放着一根不能拉伸的均匀柔软的长绳。今用手将绳的一端以恒定速度 v_0 竖直上提，试求当提起的绳长为 L 时，手的提力 F 的大小。（设此绳单位长度的质量为 λ。）

解：$\vec{F} + \lambda y \vec{g} = 0$ ✗ $|\vec{F}| - \lambda y |\vec{g}| = \frac{dp}{dt}$

$t = \frac{y}{v_0}$

$\vec{p} = \lambda y \vec{v_0} = \int_0^t F\,dt$ $P = \lambda v_0 \frac{dy}{dt} = \lambda v_0^2$

解得 $|\vec{g}| = \frac{2v_0^2}{L}$.

$\therefore |\vec{F}| = \lambda y g + \lambda v_0^2$

$|\vec{F}| = 2\lambda v_0^2$

动力学方程列错；
矢量？标量？

T8 水管有一段弯曲成90°，已知管中水的流量为 3×10^3 kg·s^{-1}，流速为 10 m·s^{-1}，求水流对此弯管的压力之大小和方向。

解：$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}=3\sqrt{2}\times10^4 N$

∴大小为 $3\sqrt{2}\times10^4 N$

方向沿90°的角平分线向内 外

管有一段弯曲成90°，已知管中水的流量为 3×10^3 kg·s^{-1}，流速为 10 m·s^{-1}，求水对此弯管的压力之大小和方向。

在t时间内

$m=Qt=3\times10^3 t$

$\Delta P=m\vec{v}-m\vec{v}_0$ 而 $m|\vec{V}|=3\sqrt{2}\times10^4 t$（方向与管道成45°角指向90°内侧）

由 $\int_0^t F\,dt=\Delta P$

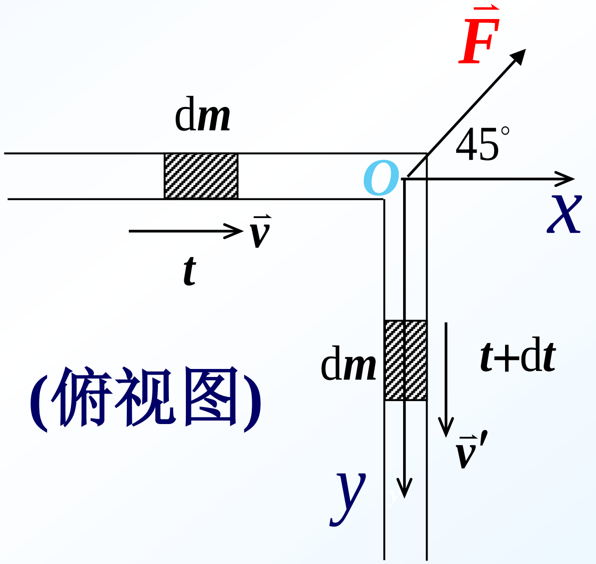
$F=\frac{d\Delta P}{dt}=3\sqrt{2}\times10^4\,(N)=4.24\times10^4\,(N)$ 外

由牛顿第三定律 $F'=F=4.24\times10^4 N$，方向与两管道成45°角指向90°内侧

方向写错，有的忘记回答方向。

例: 水管有一段弯曲成90°。已知管中水的流量为3×10^3kg/s，流速为10m/s。求水流对此弯管的压力之大小和方向。

解: 如图所示，考虑质量为dm的一小段水柱临通过直角弯曲处和刚通过直角弯曲处这两个状态。设时间间隔为dt，水管对dm的力为 $\vec{f}$



(俯视图)

(水在水平面内流)

则 $\vec{v}=v\vec{i}$ $\quad \vec{v}'=v\vec{j}$ $\quad v=10$m/s

由动量定理得 $\vec{f}\mathrm{d}t=\mathrm{d}m\cdot(\vec{v}'-\vec{v})$

$$\boxed{\vec{F}_{合}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}}$$

依牛顿第三定律，水对水管的作用力为 $\vec{F}$

$$\vec{F}=-\vec{f}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v}-\vec{v}')=3\times10^3(10\vec{i}-10\vec{j})=3\times10^4(\vec{i}-\vec{j})(N)$$

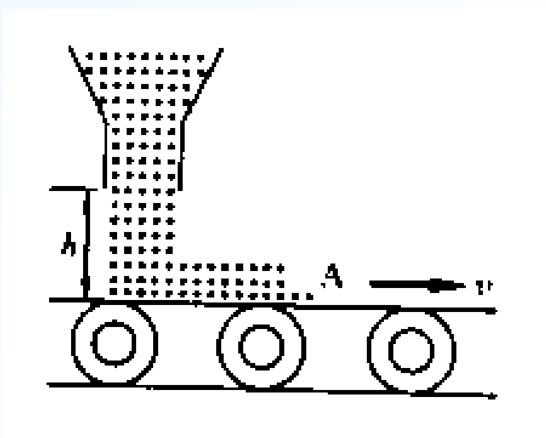
所以，$\vec{F}$ 的大小为 $3\sqrt{2}\times10^4N$ ，方向沿直角的平分线指向右上方。

例： 矿砂由料槽均匀落在水平运动的传送带上，落砂流量为q=50kg/s. 传送带匀速移动，速率v=1.5m/s. 求电动机拖动皮带的功率。

解：

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

即 $P=\vec{F}\cdot\vec{v}=F_x v$



$$\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\Delta\vec{P}$$

由动量定理，皮带在水平方向给予落砂的冲量为

$$I=F_x\cdot\Delta t=q\Delta t\cdot(v-0)$$

$$\therefore F_x=qv$$

$$P=F_x v=qv^2$$

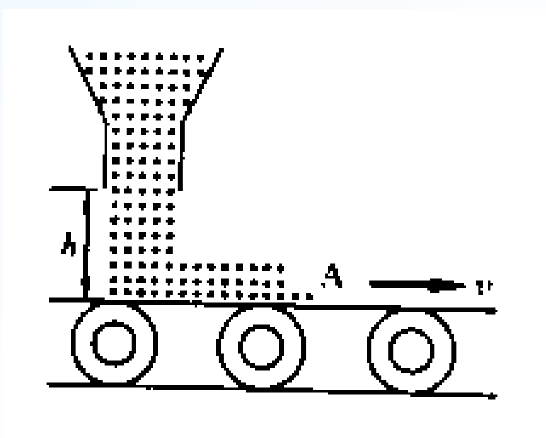
例： 矿砂由料槽均匀落在水平运动的传送带上，落砂流量为q=50kg/s. 传送带匀速移动，速率v=1.5m/s. 求电动机拖动皮带的功率。这一功率是否等于单位时间内落砂获得的动能？为什么？

$$\boxed{\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\mathrm{d}t=\Delta\vec{P}}$$

解：

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

即 $P=\vec{F}\cdot\vec{v}=F_x v$



由动量定理，皮带在水平方向给予落砂的冲量为

$$I=F_x\cdot\Delta t=q\Delta t\cdot(v-0)$$

$$\therefore F_x=qv$$

$$P=F_x v=qv^2$$

单位时间内落砂获得的动能为

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}\Delta m\cdot v^2$$

$$=\frac{1}{2}q\Delta t\cdot v^2=\frac{1}{2}qv^2$$

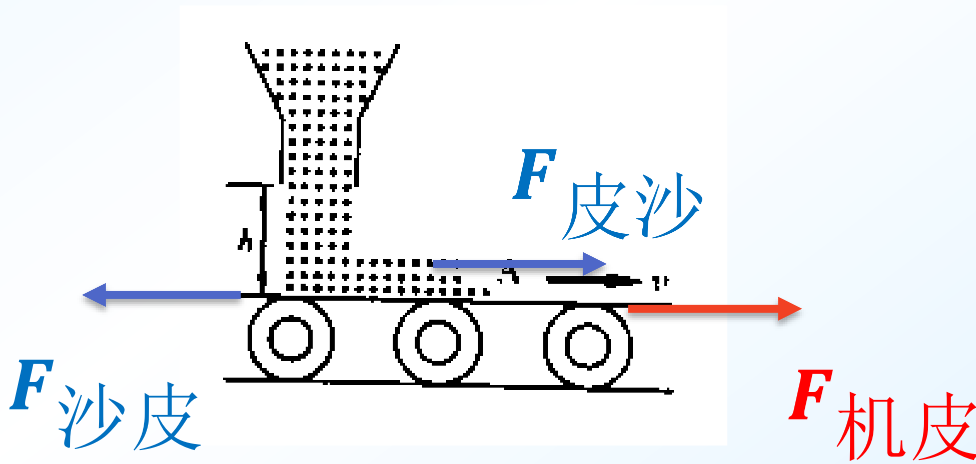
仅一半

另一半转化成了热能

例：矿砂由料槽均匀落在水平运动的传送带上，落砂流量为q=50kg/s. 传送带匀速移动，速率v=1.5m/s. 求电动机拖动皮带的功率。这一功率是否等于单位时间内落砂获得的动能？为什么？

解：

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$



即 $P=\vec{F}\cdot\vec{v}$

电机对皮带的力　　皮带的速度

如果考虑沙呢？

- 沙在力F的作用下速度从0变化到v（即皮带对沙的力做功）
- 最后会得到$\int Fv_{沙}(t)dt=\frac{1}{2}qv^2$

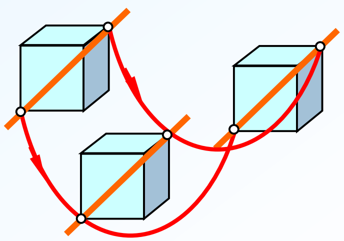
作业中还要考虑y分量，有的同学忘了求方向，或求错。

已学知识回顾

刚体　在外力作用下，物体的形状和大小保持不变

任意质点间相对位置不变！

平动

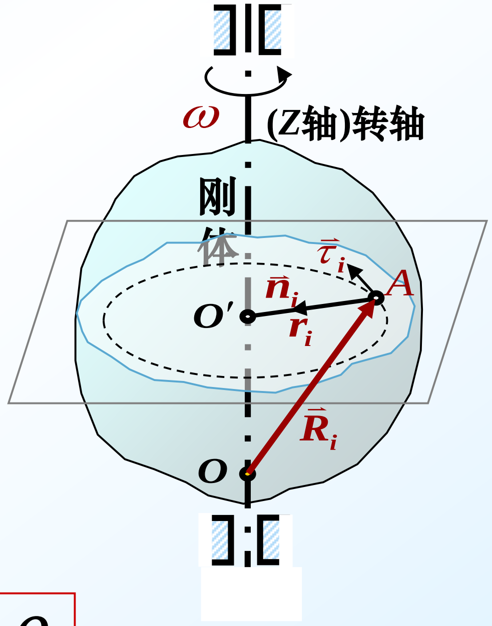


$$\boxed{\vec{F}_{合外} = m\vec{a}_c}$$

——质心运动定理

锥体上滚

转动



$$\boxed{M = J\beta}$$

——定轴转动定律

已学知识回顾

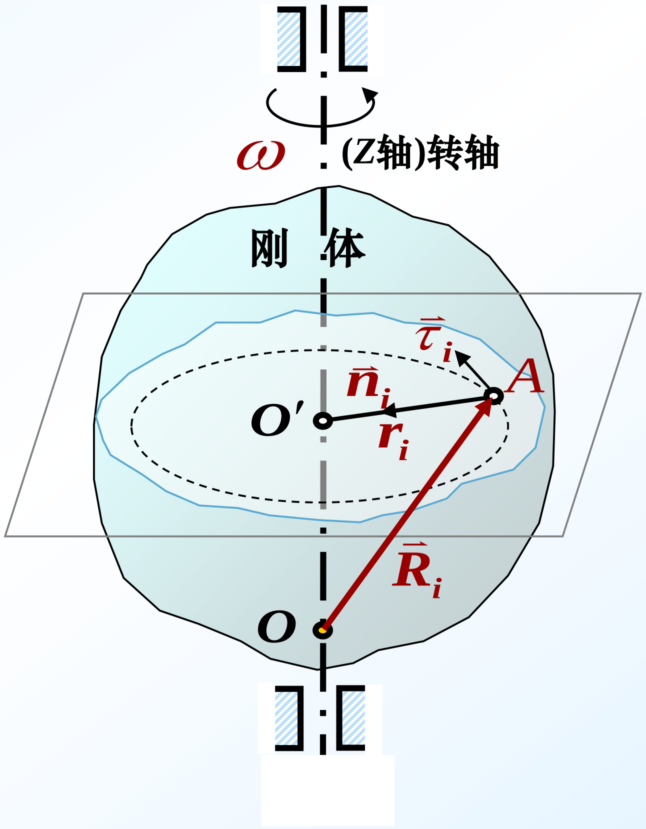
对于整个轴上任意参考点O，均有

$M_z \to M$　$\boxed{M = J\beta}$ （定轴转动定律）

$L_z \to L$　$\boxed{L = J\omega}$

M、L分别是对轴的力矩、对轴的角动量。

$J = \sum m_i r_i^2$ （转动惯量）

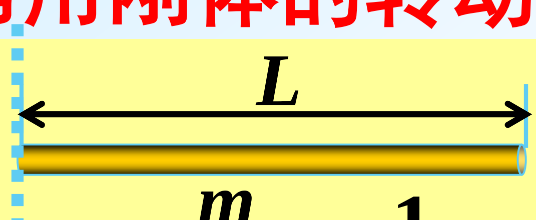


若有任一轴A与过质心C的轴平行、相距为d，刚体对其转动惯量为J_A，则有：

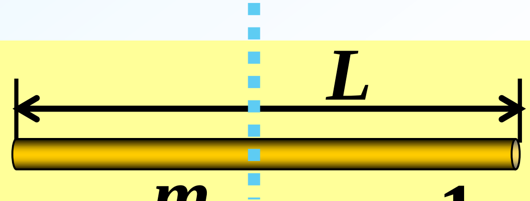
$\boxed{J_A = J_C + md^2}$ ——平行轴定理

几种常用刚体的转动惯量

细棒



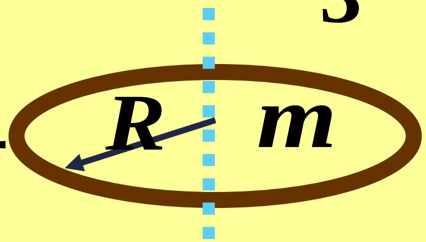
$J=\frac{1}{3}mL^2$

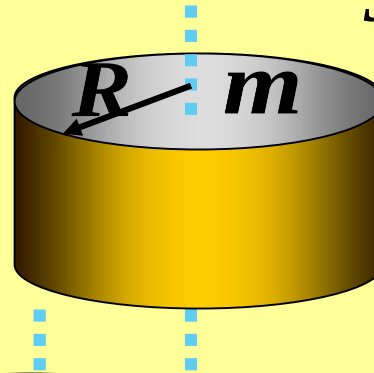


$J=\frac{1}{12}mL^2$

薄圆环

或薄圆筒

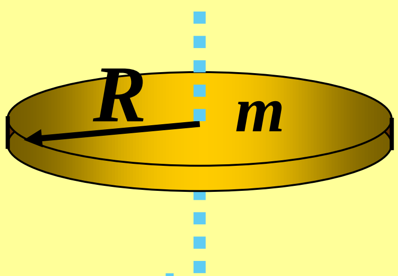


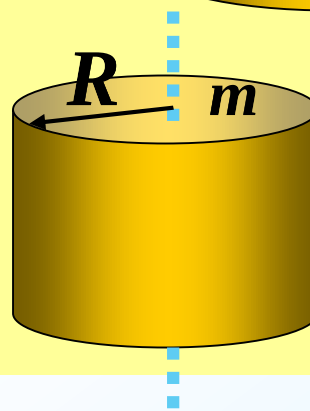


$J=mR^2$

圆盘或

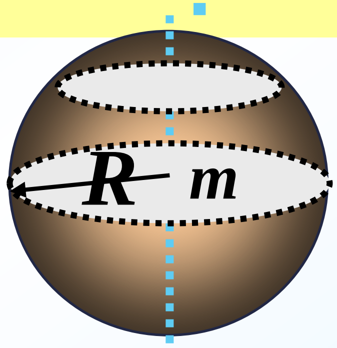
圆柱体





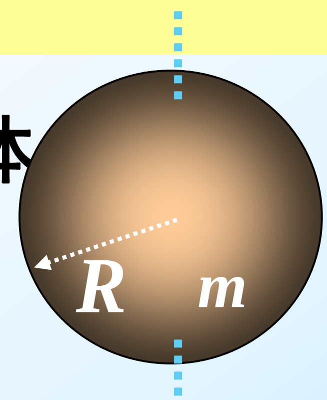
$J=\frac{1}{2}mR^2$

薄球壳



$J=\frac{2}{3}mR^2$

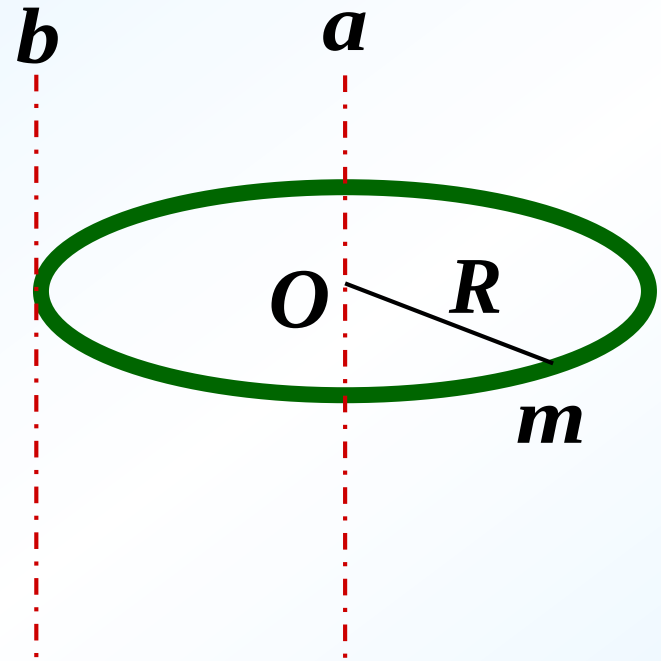
球体



$J=\frac{2}{5}mR^2$

$\boxed{J_A = J_C + md^2}$

计算右图中半径为R的均匀圆环对b轴（与a轴平行）的转动惯量。



对过质心的转轴a的转动惯量：

$$J_a = mR^2$$

$$\boxed{J = \int r^2 \mathrm{d}m}$$

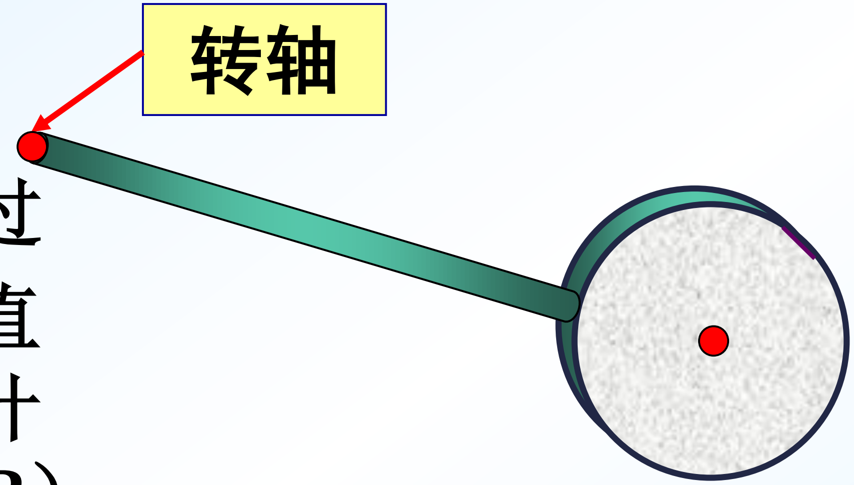
对转轴b的转动惯量：

$$J_b = J_a + md^2 = mR^2 + mR^2$$

$$= 2mR^2$$

$$J_A = J_C + md^2$$

右图所示，刚体对经过棒端且与棒垂直的轴在竖直面内转动的转动惯量如何计算？（棒长为L、圆半径为R）



细棒的转动惯量 $J_1 = \dfrac{1}{3} m_L L^2$

圆盘对过质心转轴的转动惯量 $J_C = \dfrac{1}{2} m_0 R^2$

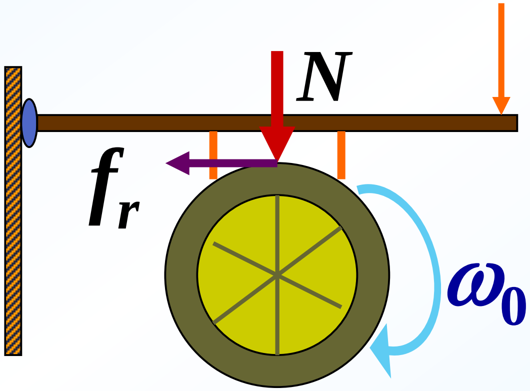
圆盘相对棒端转轴的转动惯量 $J_2 = J_C + m_0 d^2$

系统的转动惯量

$$J = \frac{1}{3} m_L L^2 + \frac{1}{2} m_0 R^2 + m_0 (L + R)^2$$

例：一个飞轮m=69kg，半径R =0.25m，正在以每分1000转的转速转动。现在要制动飞轮，要求在5.0秒内使它均匀减速而最后停下来。闸瓦与轮子间的摩擦系数μ= 0.46。求闸瓦对轮子的压力N为多大？

$$\boxed{\omega=\omega_0+\int_0^t \beta \mathrm{d}t}$$



解：飞轮制动时有角加速度 $\beta=\dfrac{\omega-\omega_0}{t}$

$$\boxed{M=J\beta}$$

$$\omega_0=1000\mathrm{r/min}=104.7\mathrm{rad/s}$$

$$t=5\mathrm{s}\quad \omega=0\quad \therefore \beta=-20.9\,\mathrm{rad/s^2}$$

外力矩是摩擦阻力矩，角加速度为负值。

$$\left.\begin{aligned} M &= J\beta=\frac{1}{2}mR^2\beta \\ M &= -f_r R=-\mu NR \end{aligned}\right\}\quad N=-\frac{mR\beta}{2\mu}=392(\mathrm{N})$$

例. 在半径为$R, J=\frac{1}{2}mR^2$的滑轮上挂一细绳，细绳两端各挂两物 $m_1>m_2$。求两物的 a及轮子的β？

解：m_1、m_2可作为质点，若假设轮子忽略质量

各物受力情况如图

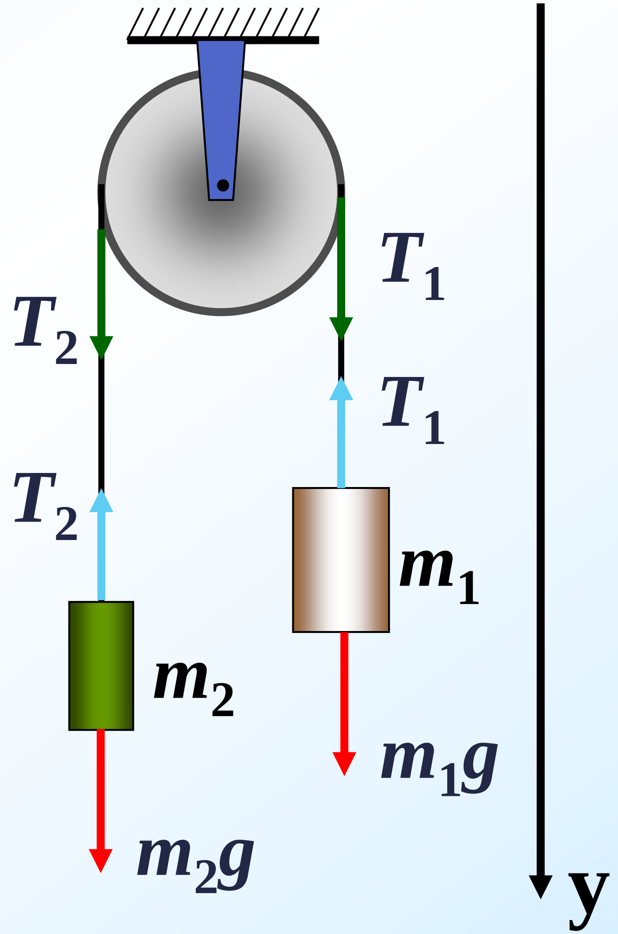
根据牛顿定律

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2(-a) \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

解得

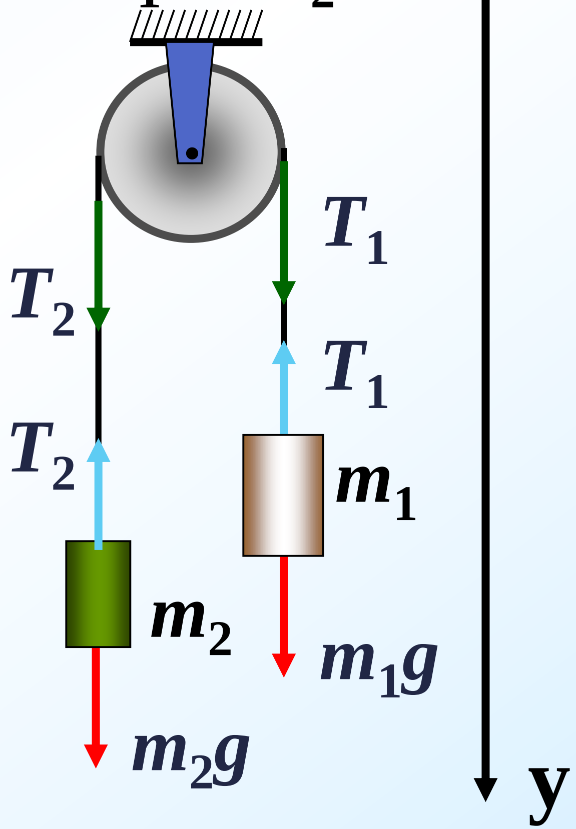
$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$$

$$T_1=T_2=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$$



例. 在半径为R, $J=\frac{1}{2}mR^2$的滑轮上挂一细绳，细绳两端各挂两物 $m_1>m_2$。求两物的 a及轮子的β？

解：m_1、m_2可作为质点，轮子作刚体 $T_1 \overset{?}{=} T_2$



由牛顿定律

由转动定律

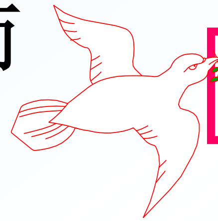
$$\begin{cases} m_1g-T_1=m_1a \\ m_2g-T_2=m_2(-a) \\ T_1R-T_2R=J\beta \\ a=a_\tau=R\beta \end{cases}$$

解得 $$a=\frac{m_1-m_2}{\frac{1}{2}m+m_1+m_2}g$$

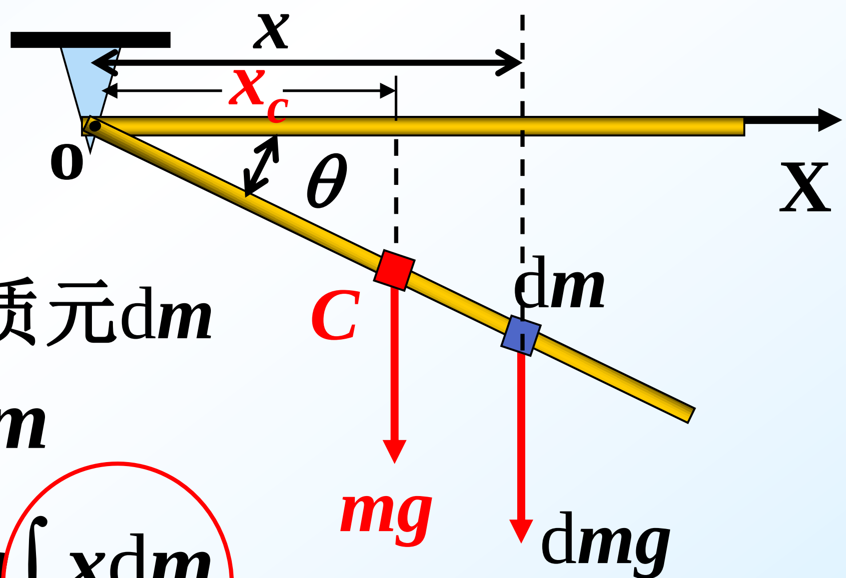
$$\beta=\frac{m_1-m_2}{\frac{1}{2}m+m_1+m_2}\frac{g}{R}$$

$$T_1=\frac{\frac{1}{2}mm_1+2m_1m_2}{\frac{1}{2}m+m_1+m_2}g \qquad T_2=\frac{\frac{1}{2}mm_2+2m_1m_2}{\frac{1}{2}m+m_1+m_2}g$$

例. 一根长为L, 质量为m的均匀细直棒, 其一端有一固定的光滑水平轴, 因而可以在竖直平面内转动。最初棒静止在水平位置, 求它由此下摆θ角时的角加速度和角速度。



$$\boxed{M=J\beta}$$



解: 重力对o点有力矩, 棒下摆为加速过程

处在θ 角时, 棒上质元dm的重力矩为 $\mathrm{d}M=xg\mathrm{d}m$

合力矩 $M=\int xg\mathrm{d}m = mg\underbrace{\dfrac{\int x\mathrm{d}m}{m}}_{x_c}$

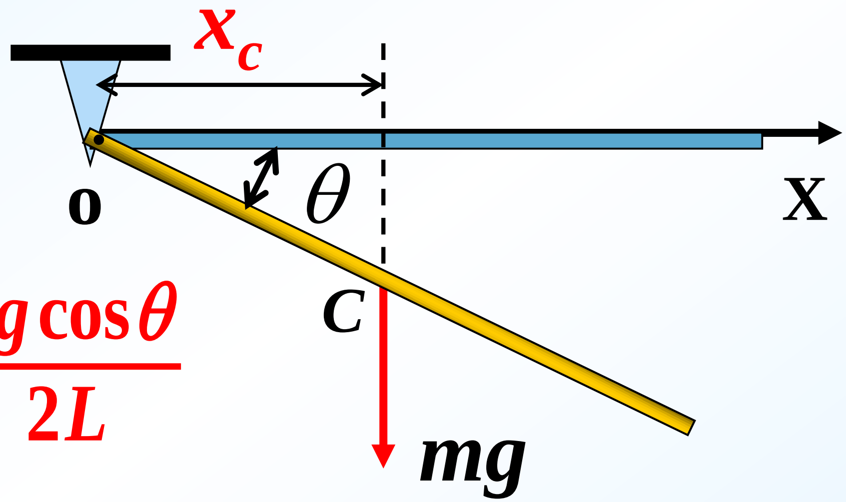
$\therefore M=mgx_c$ $\left\{\begin{array}{l}\text{重力对整个棒的合力矩与全部重力}\\ \text{集中作用在质心所产生的力矩一样。}\end{array}\right.$

$$M = mgx_c$$

$$\vec{M} = J\vec{\beta}$$

棒处在θ角时，质心位置：

$$x_c = \frac{1}{2}L\cos\theta$$



$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{\frac{1}{2}mgL\cos\theta}{\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2L}$$

求角速度ω?

由 $\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 即 $\beta = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$

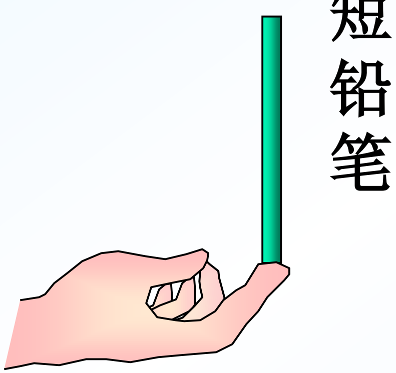
$$\int_0^\theta \frac{3g\cos\theta}{2L}\mathrm{d}\theta = \int_0^\omega \omega \mathrm{d}\omega$$

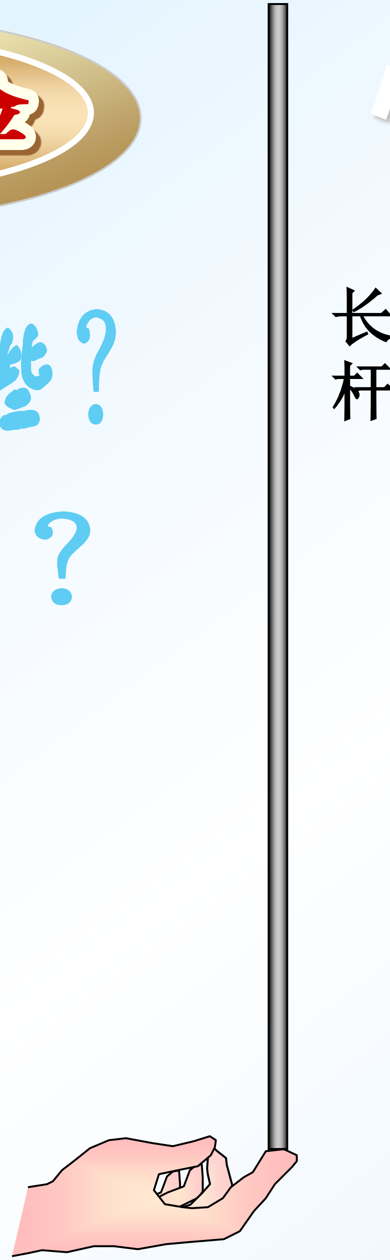
$$\frac{3g}{2L}\sin\theta = \frac{1}{2}\omega^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{L}}$$

小实验

哪个易控些？

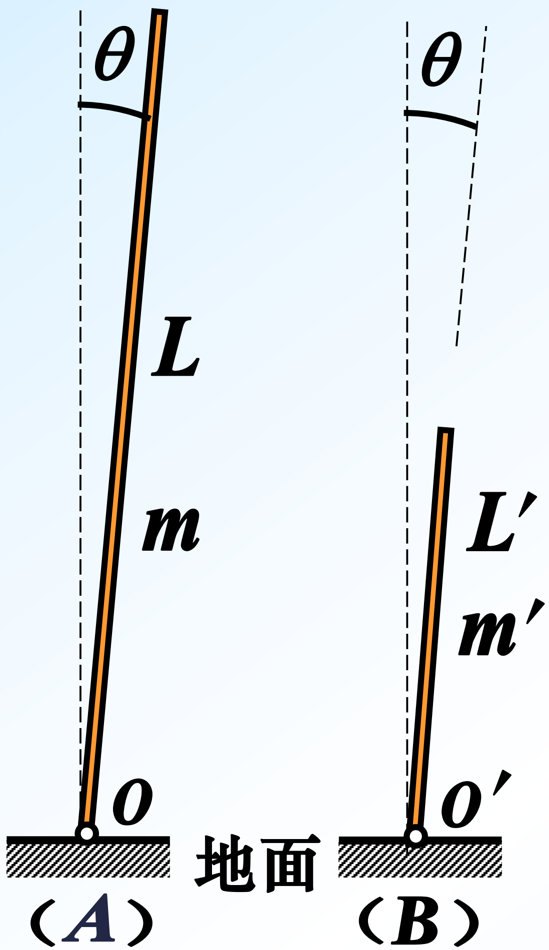
为什么？





例：已知

两匀直细杆 $L=2L'$



从小倾角 θ 处静止释放

求 两者瞬时角加速度之比 β'/β

解： 根据 $M=J\beta$

$$\frac{\beta'}{\beta}=\frac{M'/J'}{M/J}$$

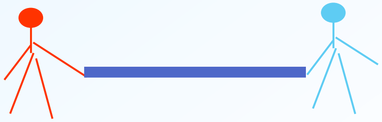
$$=\frac{\cancel{m'}g\cdot\frac{1}{2}L'\sin\theta\Big/\frac{1}{3}\cancel{m'}L'^{2}}{\cancel{m}\,g\cdot\frac{1}{2}L\sin\theta\Big/\frac{1}{3}\cancel{m}\,L^{2}}$$

$$=\frac{1/L'}{1/L}=\frac{L}{L'}=2$$

短杆的角加速度大

且与匀质直杆的质量无关

问题：



若一人突然松手，另外一人手上的力在这一瞬间如何变化?

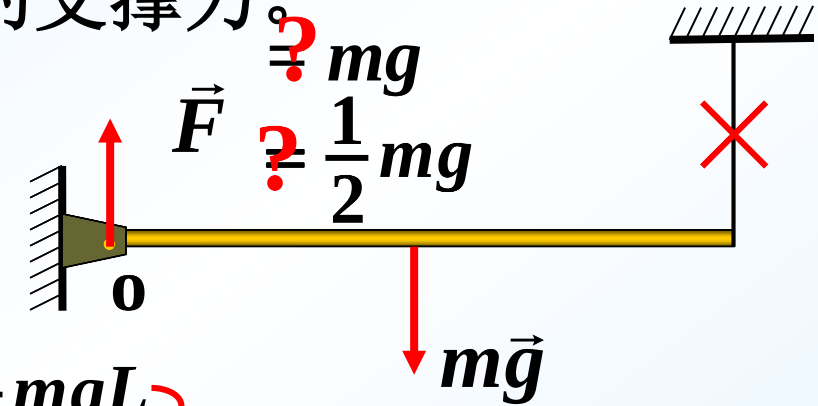
例. 质量为m、长为L的匀质细杆水平放置，一端为铰链，另一端用绳悬挂。求剪断绳子瞬时，杆的角加速度以及铰链的支撑力。

分析： 剪断时 $\omega=0$　$\beta \overset{?}{=} 0$

$M \neq 0$

$\vec{F} \overset{?}{=} mg$

$\overset{?}{=} \frac{1}{2}mg$



解： 剪断时杆绕o点的力矩

由定轴转动定律

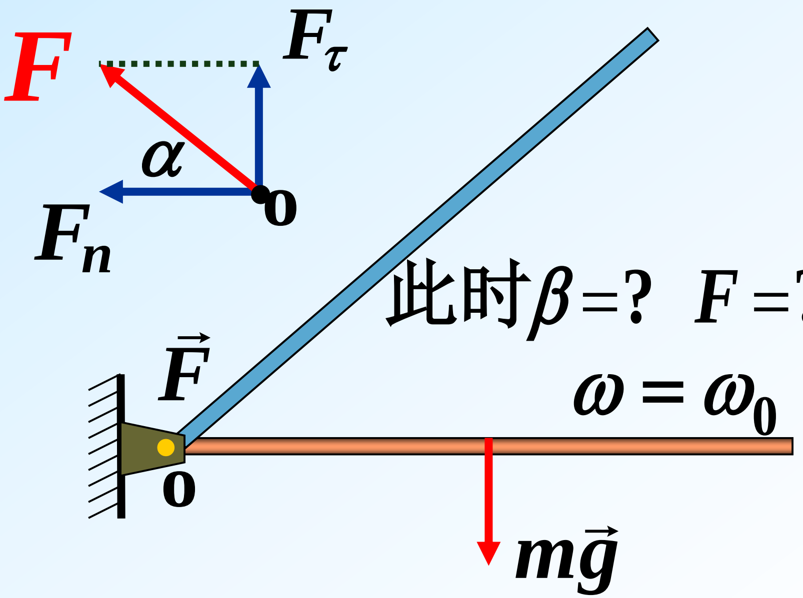
$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}mgL \\ M &= J\beta \\ J &= \frac{1}{3}mL^2 \end{aligned}\right\} \beta = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

质心平动

$$\left.\begin{aligned} mg - F &= ma_c \\ a_c &= \frac{1}{2}L\beta \end{aligned}\right\} F = m(g-a_c) = \frac{1}{4}mg$$

问： 若杆从上方转下来到水平位子时 $\omega=\omega_0$

$\beta = ?$　$F = ?$



此时$\beta=?$ $F=?$

水平位子时力矩仍为

$$M = \frac{1}{2}mgL$$

$$\beta = \frac{M}{J} \quad J = \frac{1}{3}mL^2$$

$$\left.\begin{array}{l} M = \frac{1}{2}mgL \\ J = \frac{1}{3}mL^2 \end{array}\right\} \beta = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

此时质心的加速度为

$$\vec{a}_c \overset{?}{=} \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$$a_\tau = r\beta = \frac{1}{2}L\beta = \frac{3}{4}g \longrightarrow F_\tau = mg - ma_\tau = \frac{1}{4}mg$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega_0)^2}{r} = \frac{1}{2}L\omega_0^2 \longrightarrow F_n = ma_n = \frac{1}{2}mL\omega_0^2$$

$$F_{合} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}mg)^2 + (\tfrac{1}{2}mL\omega_0)^2}$$

$$tg\alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{1}{2}\frac{g}{L\omega_0}$$