可积函数的复合不一定可积

$g(x) = |\mathrm{sgn}|(x), \mathcal{R}(x)$的复合是Dirichlet 函数。

可数集

集合A称为可数集，如果$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$。

零测集

集合$E \subset \mathbb{R}$称为零测集，如果对于任何$\epsilon > 0$，存在可数个开区间$\{I_n\}, n \in \mathbb{N}$，使得

- $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$;

注

- 零测集的子集也是零测集；
- 可数个零测集的并也是零测集；
- 当$a < b$时，$[a, b]$不是零测集。

例 (Jensen不等式)

函数f在$[a, b]$上连续，函数φ在$\mathbb{R}$上是凸函数，证明：

$$\varphi(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx) \leq \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \varphi(f(x))dx.$$