定义 (原函数)

函数f, F定义在区间I上。若$F' = f$，称F是f的一个原函数。

注

- 求导和求不定积分互为逆运算；
- 原函数不唯一：如果F是f的原函数，那么$F + C, C \in \mathbb{R}$也是原函数；
- 两个原函数之间相差一个常数：如果F, G是f在区间上的两个原函数，那么存在$C \in \mathbb{R}$，使得$F = G + C$；
- 区间上f的全体原函数的集合是$\{F + C | C \in \mathbb{R}\}$。

定义 (不定积分)

f在区间I上的全体原函数的集合是$\{F+C|C\in\mathbb{R}\}$，称其$f(x)$在区间I上的不定积分，记作

$$\int f(x)dx,$$

其中$\int$是积分号，$f(x)$是被积函数，$f(x)dx$是被积表达式，x是积分变量。

注

- $\int f(x)dx = F(x) + C$，常数C不要漏掉！
- 如果F是f原函数，称F的图像是f的一条积分曲线，f的不定积分在图像上是f的一条积分曲线沿纵轴方向平移得到的积分曲线族。
- 若$f_1, f_2, \cdots f_n$存在原函数，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$，那么$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$也存在原函数：

$$\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x) dx.$$

不定积分公式

$$\int 0dx = C; \qquad \int 1dx = x + C;$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \qquad \int \frac{1}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \cos\beta x dx = \frac{1}{\beta}\sin\beta x + C; \qquad \int \sin\beta x dx = -\frac{1}{\beta}\cos\beta x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C; \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

例 (计算不定积分)

- $\int (5x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 2x + 4)dx$;
- $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

注

- 存在第一类间断点的函数没有原函数(Darboux定理、导数极限定理);
- 区间上的连续函数存在原函数(Newton-Leibniz公式);
- 原函数不一定是初等函数(椭圆积分$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx$);
- 求不定积分需要凑。

第一换元积分法

如果$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$：
$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(\varphi(x))d\varphi(x)$,
令$u = \varphi(x)$，设$g(u)$的原函数是$F(u)$：

$$\int f(x)dx = \int g(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

第二换元积分法

令$x = \varphi(t)$： $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi(t)'dt$,
设$f(\varphi(t))\varphi(t)'$的原函数是$\tilde{F}(t)$：

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi(t)'dt = \tilde{F}(t) + C = \tilde{F}(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

注意

第一换元积分法和第二换元积分法本质上是一样的。难点在于选择合适的换元函数。

例 (第一积分换元法)

$$\int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx; \qquad \int \tan x dx.$$

例 (第二积分换元法：三角换元)

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx.$$

例 (计算下列不定积分)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}};\quad \int \frac{dx}{\sin x},\quad \int \frac{dx}{\cos x};$$

例 (分段函数)

$$\int \max\{1, x^2\}dx.$$

分部积分法

由Leibniz法则$(uv)' = u'v + uv'$，可以得到分部积分法：

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

例 (分部积分)

$$\int \ln x dx; \quad \int x^2 e^{-x} dx.$$

有理函数

- $$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n=1} + \cdots + a_{n-1}x + an}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m},$$

  其中$m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_i, b_j \in \mathbb{R}, a_0b_0 \neq 0$;
- 当$n \geq m$时，称R为假分式；当$n < m$时，称R为真分式。

下面介绍有理函数求不定积分的步骤：

I：有理函数=多项式函数+真分式

Euclid除法：$P(x) = Q(x)q(x) + r(x), \mathrm{deg} r(x) < \mathrm{deg} Q(x)$，所以

$$R(x) = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}.$$

不妨设R是真分数，且$a_0 = b_0 = 1$。

II：因式分解$Q(x)$

代数学基本定理：

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_s)^{k_s} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{\mu_1} \cdots (x^2 + \beta_t x + \gamma_t)^{\mu_t}.$$

III：待定系数法确定系数

$$
\begin{aligned}
R(x) =& \frac{A_1^1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2^1}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}^1}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \\
& \cdots + \\
& \frac{A_1^s}{x-\alpha_s} + \frac{A_2^s}{(x-\alpha_s)^2} + \cdots + \frac{A_{k_s}^s}{(x-\alpha_s)^{k_s}} + \\
& \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{B_2^1 x + C_2^1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{B_{\mu_1}^1 x + C_{\mu_1}^1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{\mu_1}} \\
& \cdots + \\
& \frac{B_1^t x + C_1^t}{x^2+\beta_t x+\gamma_t} + \frac{B_2^t x + C_2^t}{(x^2+\beta_t x+\gamma_t)^2} + \cdots + \frac{B_{\mu_t}^t x + C_{\mu_t}^t}{(x^2+\beta_t x+\gamma_t)^{\mu_t}}.
\end{aligned}
$$

IV：两种类型的不定积分

$$(1)\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}dx;$$

$$(2)\int \frac{Lx+M}{(x^2+\beta x+\gamma)^\mu}dx \quad (\beta^2-4\gamma<0).$$

积分(1)

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}dx=\begin{cases}\ln|x-\alpha|+C, & k=1,\\ \dfrac{1}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}}+C, & k>1.\end{cases}$$

积分(2)

换元$t = x + \frac{\beta}{2}$：

$$\int \frac{Lx + M}{(x^2 + \beta x + \gamma)^\mu} dx = \int \frac{Lt + N}{(t^2 + r^2)^\mu} dt$$
$$= L \int \frac{t}{(t^2 + r^2)^\mu} dt + N \int \frac{1}{(t^2 + r^2)^\mu} dt.$$

第一部分：

$$\int \frac{t}{(t^2 + r^2)^\mu} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(t^2 + r^2) + C, & \mu = 1; \\ \frac{1}{2(1-\mu)(t^2 + r^2)^{\mu-1}} + C, & \mu \geq 2. \end{cases}$$

积分(2)

第二部分：令 $I_\mu = \int \frac{1}{(t^2+r^2)^\mu} dt$。

- 当$\mu = 1$时，有

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+r^2} dt = \frac{1}{r} \arctan \frac{t}{r} + C;$$

- 当$\mu \geq 2$时，由分部积分法：

$$I_\mu = \frac{t}{2r^2(\mu-1)(t^2+r^2)^{\mu-1}} + \frac{2\mu-3}{2r^2(\mu-1)} I_{\mu-1}.$$

注

有理函数的原函数是初等函数。

例

$$\int \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)}dx.$$

答案.

$$\ln|x^2-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

□

二元有理函数

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

其中$P(x,y), Q(x,y)$是二元多项式。

不定积分：$\int R(\sin x, \cos x)dx$

换元$t=\tan\frac{x}{2}$:

$$\begin{cases} dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt; \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

代入得到:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt.$$

例

$$\int \frac{\cot x}{\sin x + \cos x + 1} dx.$$

改进的换元法

- 当$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$时，换元$t = \sin x$;
- 当$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$时，换元$t = \cos x$;
- 当$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$时，换元$t = \tan x$.

例

$$\int \frac{\tan x \cos^6 x}{\sin^4 x} dx.$$

不定积分：$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}), \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$

换元$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$：

$$\begin{cases} x = \dfrac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n} = \varphi(t); \\ dx = \varphi'(t)dt, \end{cases}$$

代入得到：

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}) = \int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt.$$

例

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx.$$

不定积分：$\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})$
当$\alpha > 0$时$\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$,当$\alpha < 0$时$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$

换元$u = x + \frac{\beta}{2\alpha}$，记$\Lambda = \sqrt{\left|\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right|}$。三种可能：

- $\alpha > 0, \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2} > 0$：
  $\int R(u, \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{u^2 + \Lambda^2})du$，换元$u = \Lambda \tan\theta$；
- $\alpha > 0, \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2} < 0$：
  $\int R(u, \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{u^2 - \Lambda^2})du$，换元$u = \Lambda \sec\theta$；
- $\alpha < 0, \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2} > 0$：
  $\int R(u, \sqrt{-\alpha} \cdot \sqrt{\Lambda^2 - u^2})du$，换元$u = \Lambda \sin\theta$；

将原问题转化为求$\int \tilde{R}(\sin x, \cos x)dx$不定积分。

例

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}dx.$$

答案.

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{\sqrt{3}(x+1)}+C.$$

□

Euler 代换：$\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})$：

- 当$\alpha > 0$时，换元$\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \pm\sqrt{\alpha}x + t$；
- 当$\gamma > 0$时，换元$\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = xt \pm \sqrt{\gamma}$；
- 当$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$存在根$x_1, x_2$时，换元$\sqrt{\alpha(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_1)$。

例

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 2x - 3}} dx.$$