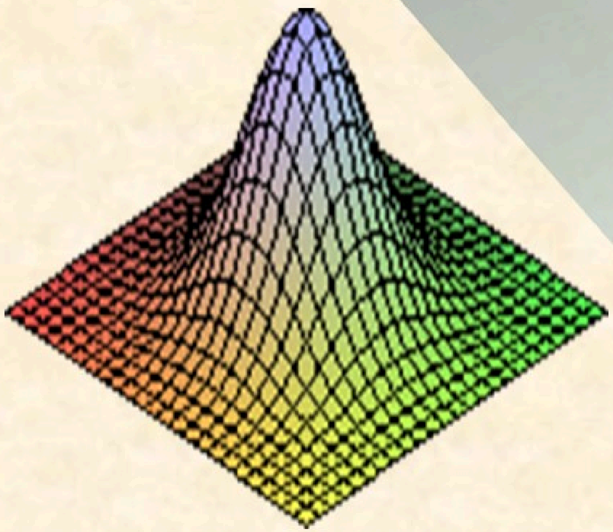
概率论与数理统计

主讲人：吴 娟

制作人：叶鹰　吴娟

wujuan@hust.edu.cn



§1.3 事件的概率及其计算

一、概率的公理化定义

柯尔莫哥洛夫，A. H.

定义 设$\mathcal{F}$是样本空间Ω的一个事件域，

$P=P(\cdot)$定义在$\mathcal{F}$上的实函数，满足

1° 非负性： $P(A)\geq 0$，$\forall A \in \mathcal{F}$；

2° 规范性： $P(\Omega)=1$；

3° 可列可加性：若$A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j)$，则 $P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

则称P是$\mathcal{F}$上的一个**概率**（测度），$P(A)$称为事件A的**概率**.

$1^{\circ} P(A) \geqslant 0$;

$2^{\circ} P(\Omega) = 1$;

$3^{\circ}\ P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

二、 概率的性质

（1） $P(\varnothing) = 0$

证： 取 $A_i = \varnothing$， $i=1,2,\ldots$，则 $P(\varnothing) = P(\sum_{i=1}^{\infty} \varnothing) \overset{3^0}{=\!=} \sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing) = 0$

$1^{\circ}\ P(A)\geqslant 0$;

$2^{\circ}\ P(\Omega)=1$;

$3^{\circ}\ P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

二、 概率的性质

（1） $P(\varnothing)=0$

（2）有限可加性： $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$，则 $P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

证：取 $A_{n+i}=\varnothing$， $i=1,2,\ldots$，则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i+\varnothing+\cdots+\varnothing+\cdots)$$

$$\overset{3^0}{=\!=}\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing)+\cdots$$

$$\overset{(1)}{=\!=}\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

$1^{o}P(A)\geqslant 0$;

$2^{o}P(\Omega)=1$;

$3^{o}\ P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

二、 概率的性质

（1） $P(\varnothing)=0$

（2） 有限可加性：$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

（3） 逆事件概率：$P(\overline{A})=1-P(A)$

证： $1\overset{2^0}{=\!=\!=}P(\Omega)=P(A+\overline{A})\overset{(2)}{=\!=\!=}P(A)+P(\overline{A})$

投票(匿名) 最多可选1项

生日聚会，若其中至少两人在同一天过生日的概率超过50%，则聚会人数n至少是

A 13

B 23

C 53

D 183

解析 求n个人中至少两人在同一天过生日的概率.

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365\times 365\times\cdots\times 365}=1-\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}$$

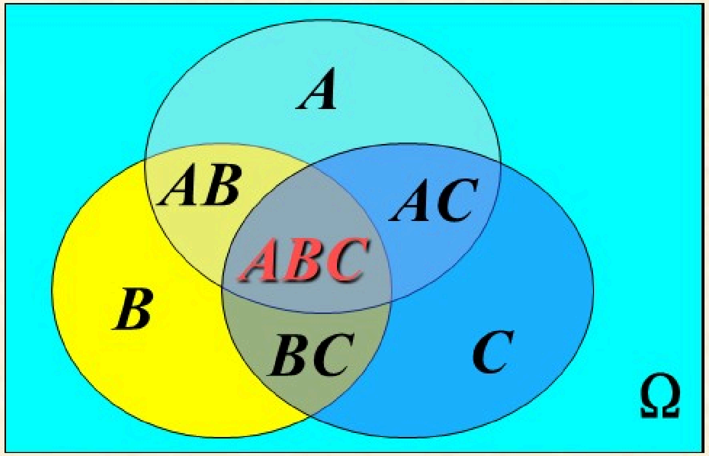
人数	10	20	23	30	40	50	57
P	0.12	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97	0.99

（4）差公式 $A\subset B \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

证 $P(B)=P(B-A+A)$

$$\overset{(2)}{=}P(B-A)+P(A)$$

推论 $A\subset B \overset{(4)}{\Rightarrow} P(A)\leqslant P(B)$



（5）加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证 $P(A\cup B)=P(A+B\overline{A})\overset{(2)}{=}P(A)+P(B-AB)\overset{(4)}{=}P(A)+P(B)-P(AB)$

推广：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

一般：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i\neq j}P(A_iA_j)+\sum_{i\neq j\neq k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

主观题 50分

例2 已知$AB=\phi$，$P(A)=p$，$P(B)=q$，

求下列概率：

(1) $P(A\cup B)$

(2) $P(\overline{A}\cup B)$

(3) $P(\overline{A}B)$

(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})$

例2 已知$AB=\phi$，$P(A)=p$，$P(B)=q$，

解析

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=p+q$

(2) $P(\overline{A}\cup B)\overset{\overline{A}\supset B}{=\!=\!=}P(\overline{A})=1-p$

(3) $P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)=q$

(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-p-q$

单选题 50分

从5双不同的鞋子中任意取4只，求这4只鞋子中至少有2只配成一双的概率.

A 8/21

B 13/21

C 其它

例3 从5双不同的鞋子中任意取4只，求这4只鞋子中至少有2只配成一双的概率.

解 记A为所求事件

法1 $P(\bar{A})=\dfrac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}\overset{或}{=\!=\!=}\dfrac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$， $P(A)=1-P(\bar{A})=\dfrac{13}{21}$

法2 记A_1={只有2只配成一双} A_2={4只恰好配成两双}

$$P(A_1)=\frac{C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{12}{21},\quad P(A_2)=\frac{C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{1}{21}\overset{A_1A_2=\phi}{\Longrightarrow}P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{13}{21}$$

法3 记B_i={取到第i双鞋} $i=1,2,3,4,5$ 则 $A=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4\cup B_5$

$$P(B_i)=\frac{C_8^2}{C_{10}^4},\quad i=1,2,3,4,5\qquad P(B_iB_j)=\frac{1}{C_{10}^4},\ i\neq j\qquad P(B_iB_jB_k)=0,\ i\neq j\neq k$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{5}P(B_i)-\sum_{i\neq j}P(B_iB_j)+0-0+0=5\times\frac{2}{15}-10\times\frac{1}{210}=\frac{14}{21}-\frac{1}{21}=\frac{13}{21}$$

推广　设某影厅有n个座位，晚8点这场电影票售罄.若这n个购票者随意地坐到座位上，求至少有一个人手里的号码恰好与座位的号码相同的概率.

解：记A={至少有一个人的号码恰好与座位的号码相同}，

B_i={第i个人的号码恰好与座位的号码相同}，$i=1,2,\ldots,n$，则

$$P(B_i)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n,\ P(B_iB_j)=\frac{(n-2)!}{n!},\ i\neq j,\cdots,\ P(B_1B_2\cdots B_n)=\frac{1}{n!}$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)-\sum_{i\neq j}P(B_iB_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(B_1B_2\cdots B_n)$$

$$=n\cdot\frac{1}{n}-C_n^2\cdot\frac{(n-2)!}{n!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\frac{1}{i!}$$

思考：(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}P(A)=?$　　(2) 若只有m $(m<n)$个购票者呢？

§1.4 条件概率与事件的独立性

一、 条件概率

1． 问题 E~足球比赛

A=“明星队取胜” $P(A)$

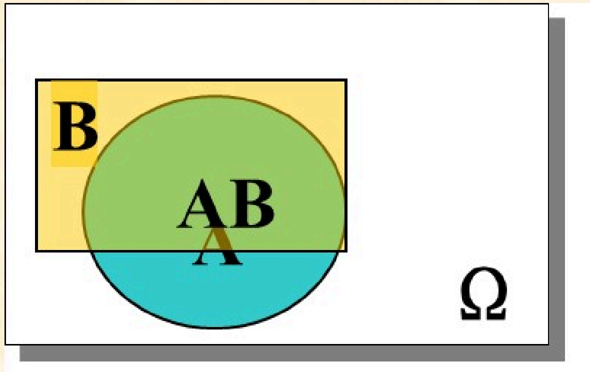
B=“比赛前甲因伤而无法上场”

如果甲是明星队的主力前锋，则 $P(A/B) \le P(A)$

如果甲是对方的主力前锋，则 $P(A/B) \ge P(A)$

2．**定义**　设A、B为两随机事件，且$P(B)>0$，则称

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$



为在B发生的条件下，

A发生的<u>条件概率</u>.

注1．$P(A/B)$是将样本空间Ω 压缩成B后计算概率；

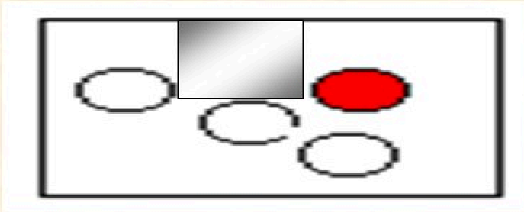
注2．条件概率确实是概率，即实数$P(A/B)$满足三条公理.

例1 设袋中有3个白球，2个红球，现从袋中任意抽取两次，每次取一个，取后不放回，

（1）已知第一次取到红球，求第二次也取到红球的概率;

（2）求第二次取到红球的概率

（3）求两次均取到红球的概率



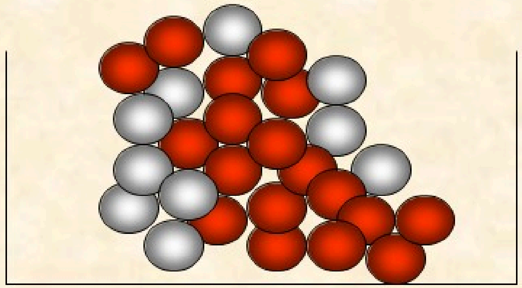
解：设A：第一次取到红球，B：第二次取到红球

$$(1)P(B|A)=1/4 \qquad (2)P(B)=\frac{2\times1+3\times2}{A_5^2}=\frac{2}{5}$$

$$(3)P(AB)=\frac{2\times1}{A_5^2}=\frac{1}{10}$$

例2（波里亚罐子模型）

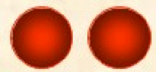
一个罐子中有 b 个白球和 r 个红球. 随机抽一个，观看颜色后放回罐中，且再加进 c 个与之同色的球. 重复多次.



b个白球, r个红球

分析：设W_i = { 第 i 次取出是白球}, i=1,2,…

R_j = { 第 j 次取出是红球}, j=1,2,…



特别地，c=0, 有放回抽样； c= -1, 无放回抽样

这是一个初略刻画传染病扩散的模型，

被感染者（初始人数 r）

正常者　（初始人数 b）

c 是1个被感染者可能传染的人数，假设 $c>0$,

$$P(R_1)=\frac{r}{b+r} \quad < \quad P(R_2\mid R_1)=\frac{r+c}{b+r+c}$$

若不与外界隔离，则每次发现一个被感染者，都会增加再传染的概率.

思考：$P(R_2)=?$