《微积分（一）》（下）考试试卷(A 卷)参考答案

一. 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设 $a>0$，则 $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-at^2} dt = \underline{\dfrac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{a^3}}}$.

2. 设 $\Gamma: \begin{cases} x+z=1 \\ x^2+2y^2=1 \end{cases}$，从 x 轴正向看为顺时针，则

$$\oint_\Gamma (y-\mathrm{z})\,\mathrm{d}\,x+(z-x)\,\mathrm{d}\,y+(x-y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{z}=\underline{4\pi}.$$

3. 函数 $f(x)=1-\sin\dfrac{x}{2}\,(x\in[0,\pi])$ 的正弦级数中 Fourier 系数 $b_2=\underline{\dfrac{16}{15\pi}}$.

4. 若 $\nabla u=(yze^{xyz}+2x, zxe^{xyz}+3y^2, xye^{xyz}+4z^3)$，则 $u=\underline{x^2+y^3+z^4+e^{xyz}+C}$.

5. 设 $S: x^2+4y^2+6z^2=3$，外侧，则 $\oiint\limits_S \dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+4y^2+z^2)^{3/2}}=\underline{2\pi}$.

6. 微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解为 $\underline{y=\sqrt{x}}$.

二. 计算题(每小题 6 分，共 24 分)

7. 设直线 $l: \begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay=z+3 \end{cases}$ 在平面 Π 上，而平面 Π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a，b.

解 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,-2,5)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(2,-4,-1)$，所以切平面方程为 $2x-4y-z=5$．直线 l 的方向向量为 $\vec{\tau}=\{1,1,0\}\times\{1,a,-1\}=\{-1,1,a-1\}$．(4 分)于是由 $\vec{n}\cdot\vec{\tau}=0$ 可得 $a=-5$．在 l 上取点 $(-b,0,-b-3)$，代入切平面方程，可得 $b=-2$．(6 分)

另解：曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,-2,5)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(2,-4,-1)$，所以切平面方程为 $2x-4y-z=5$．由 $l: \begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay=z+3 \end{cases}$ 得 $y=-x-b, z=x-3-a(x+b)$，代入切平面方

程得$(5+a)x+4b+ab-2=0$，所以$5+a=0,\quad 4b+ab=2$．解得$a=-5,\ b=-2.$

8． 求函数$z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$在由直线$x+y=6$，x轴和y轴所围成的区域D上的最大值和最小值.

解 由$z_x=0$和$z_y=0$解得D内唯一驻点$(2,1)$，并得$f(2,1)=4$． (2 分)

在x轴和y轴上恒有$z=0$.

在直线段$x+y=6\ (0\le x\le 6)$上，$z=2x^2(x-6)$，其驻点为$x=4$，从而$y=2$，$f(4,2)=-64$．(5 分) 因此，函数z在区域D上的最大值为$f(2,1)=4$，最小值为$f(4,2)=-64$.

9. 设区域Ω由$x=-\sqrt{1-y^2-z^2}$，$y^2+z^2=1$以及$x=1$围成，计算$\iiint\limits_{\Omega} x\sqrt{1-y^2}\,dxdydz$.

解 $\iiint\limits_{\Omega} x\sqrt{1-y^2}\,dxdydz=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1-y^2}\,dydz\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{1}xdx=\dfrac{1}{2}\iint\limits_{D_{xz}}(y^2+z^2)\sqrt{1-y^2}\,dydz$ (3 分)

$=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}(y^2+z^2)dz=\dfrac{1}{3}\int_{-1}^{1}(-2y^4+y^2+1)dy=\dfrac{28}{45}$.(6 分)

10. 设$f(x,y)=x^2-xy+y^2$，L为抛物线$y=x^2$从原点到点$A(1,1)$的有向弧段，$\vec{n}$为L的切向量顺时针旋转$\dfrac{\pi}{2}$所得的单位法向量，计算$\int\limits_L\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial n}ds.$

解 注意到$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial n}=\{2x-y,2y-x\}\cdot\vec{n}$，$\vec{n}ds=\{dy,dx\}$，（2 分）得

$$\int\limits_L\frac{\partial f(x,y)}{\partial n}ds=\int\limits_L\{2x-y,2y-x\}\cdot\{dy,-dx\}=\int\limits_L(x-2y)dx+(2x-y)dy$$

$=\int_0^1[x-2x^2+2x(2x-x^2)]dx=\dfrac{2}{3}$.（6 分）

注：设L的单位切向量为$\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，顺时针旋转$\dfrac{\pi}{2}$得单位法向量$\vec{n}=(\cos\beta,-\cos\alpha)$.

因此$\vec{n}ds=\{ds\cos\beta,-ds\cos\alpha\}=\{dy,-dx\}$.

三． 证明题（三个小题，共 24 分）

11. （7 分）设 $\alpha<1$， $f_n(x)=\dfrac{x(\ln n)^{\alpha}}{n^x}$. 证明函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证 让 $f_n{}'(x)=0$ 解得驻点 $x_0=\dfrac{1}{\ln n}$，且 $f_n(x_0)=\dfrac{(\ln n)^{\alpha-1}}{e}$ 是 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值. 极限函数 $f=0$，（4 分）于是

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)^{\alpha-1}}{e}=0$.（6 分）

因此由一致收敛的余项准则，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.（7 分）

12.（7 分）设 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq 0$.

证明： z 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

证 由 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续知，它必有最大值和最小值.（2 分）

假设 $f(x,y)$ 在 D 的内部点 P_0 取得最大值或最小值，则 $f(P_0)$ 必为极值. 由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq 0$ 知 $z_{xx}(P_0)z_{yy}(P_0)\le 0,\ z_{xy}(P_0)\neq 0$,（5 分）从而有 $z_{xx}(P_0)z_{yy}(P_0)-z_{xy}(P_0)^2<0$,

这与 $f(P_0)$ 为极值矛盾，因而 $f(x,y)$ 的最大最小值在 D 的边界上取得.（7 分）

13. （10 分）证明 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 连续(要求用 $\varepsilon-\delta$ 定义)， $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 均存在，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微.

证 (1) 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\sqrt{|xy|}\le\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon,$$

故 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 连续.（4 分）

(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0,$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y}=0,$

因此 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 均存在，且都等于零.（6 分）

(3) 令 $h(x,y):=\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

则 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} h(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{|k|}{1+k^2}}=\sqrt{\dfrac{|k|}{1+k^2}}$ 与 k 有关，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ 不存在，所以

$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微.（10 分）

四. 解答题(三个小题，共 28 分)

14. （7 分）确定幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+5}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域，并求其和函数.

解 收敛域为 $(-1,1)$.（2 分）和函数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+5}{2n+1}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{2n}=\dfrac{x^2}{(1-x^2)^2}$， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{1}{1-x^2}$，且对 $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

以及 $S(0)=5$，所以

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{2}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1,\\ 5, & x=0.\end{cases}\qquad（7 分）$$

15.（7 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，$f(0)=1$，且 $D_t=\{(x,y)\,|\,0\le y\le t-x, 0\le x\le t\}$，$0\le t\le 1$. 若 $\iint\limits_{D_t}f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t}f(t)dxdy$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 $\iint\limits_{D_t}f'(x+y)dxdy=\int_0^t dx\int_0^{t-x}f'(x+y)dy=\int_0^t[f(t)-f(x)]dx=tf(t)-\int_0^t f(x)dx,$

$$\iint_{D_t} f(t)dxdy = f(t)\iint_{D_t} dxdy = \frac{t^2}{2}f(t),\ \text{于是}\ tf(t) - \int_0^t f(x)dx = \frac{t^2}{2}f(t).\ \text{（4 分）}$$

两边求导并整理，得到$(2-t)f'(t) = 2f(t)$，解得$f(t) = \dfrac{C}{(2-t)^2}$. 由$f(0)=1$得$C=4$，

故$f(x) = \dfrac{4}{(2-x)^2}$，$0 \le x \le 1$. （7 分）

注：作代换$u = x+y,\ v = x-y$也是可以的.

16.（14 分）设$u_n - v_n \sim c_n\ (n \to \infty)$.

（1）证明：若$\sum c_n$绝对收敛，则级数$\sum u_n$和$\sum v_n$同时收敛或同时发散.

（2）举例说明结论（1）中$\sum c_n$绝对收敛不能改为$\sum c_n$收敛.

（3）用结论（1）判定$\sum \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+(-1)^{n-1}}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$的收敛性（并指明绝对收敛或条件收敛）.

解 （1）记$\beta_n = u_n - v_n$，则由已知，$\sum \beta_n$绝对收敛，从而$\sum \beta_n$收敛. 由级数的线性性质，得证.（4 分）

（2）设$u_n = c_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$v_n = \dfrac{1}{n}$，则$u_n - v_n \sim c_n$，$\sum c_n$条件收敛但$\sum u_n$收敛而$\sum v_n$发散.（8 分）

（3）因
$$\frac{\sqrt{n}}{n+(-1)^{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{n} + o(\frac{1}{n})\right)\quad (n\to\infty),$$

所以$\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+(-1)^{n-1}} - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$，而$\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$收敛，$\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛，从而由结论（1）知级数$\sum \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+(-1)^{n-1}}$收敛. （10 分）又数列$\{\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\}$单调有界，再由 Abel 判别法知原级数收敛.（12 分） 因为$\dfrac{\sqrt{n}}{n+(-1)^{n-1}}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n}(n\to\infty)$，所以原级数是条件收敛的.（14 分）