

第一篇 力学

第3章

刚体的定轴转动



Mechanics

第3章 刚体的定轴转动

三、刚体转动的功和能

1. 刚体的转动动能

质元 Δm_i 的动能

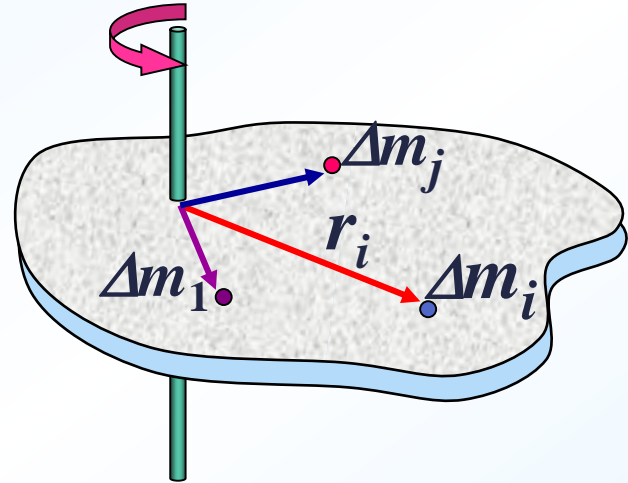
$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2$$

所有质元的动能之和为

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (r_i \omega)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

转动动能



注

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

转动动能

1° 转动动能 $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$ 是刚体上所有质点的平动动能之和，不是什么新能量，只是表示刚体转动中动能的一个简单表示方法。

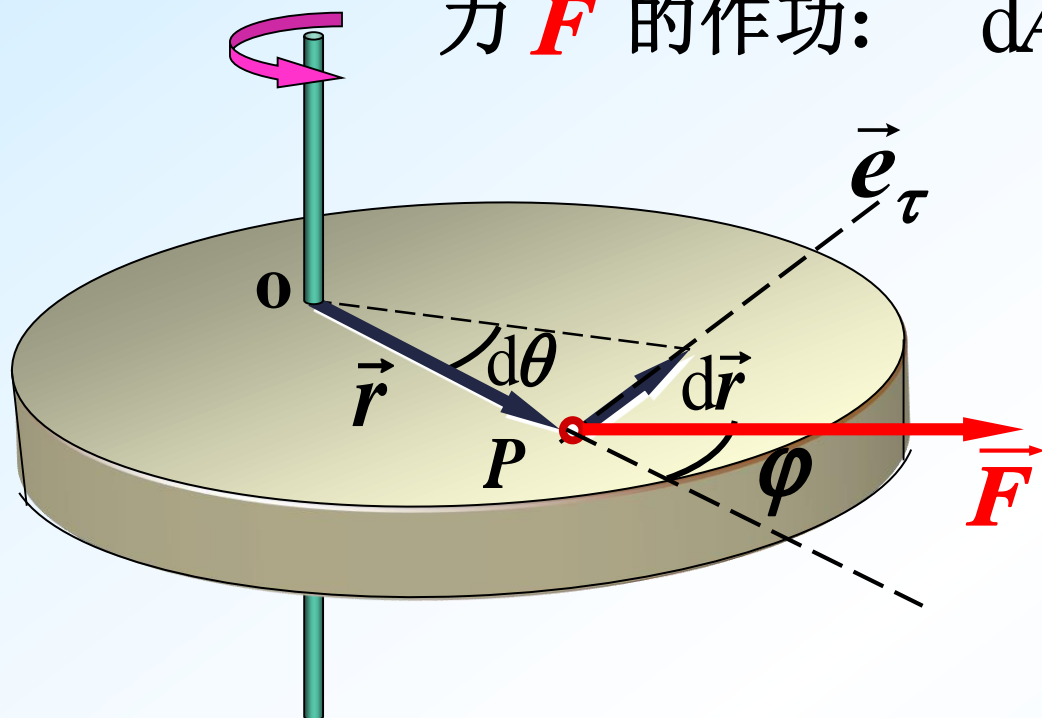
2° 将 $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$ 与 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ 比较

$$J \rightarrow m \quad \omega \rightarrow v$$

2. 力矩的功

力 \vec{F} 的做功:

$$\begin{aligned} dA &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= F |d\vec{r}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ &= F |d\vec{r}| \sin \varphi \\ &= F r \sin \varphi d\theta \\ &= M d\theta \end{aligned}$$

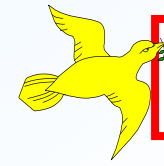


力对转动刚体所作的功用力矩的功来计算

$$dA = M d\theta \text{ —— 力矩的功}$$

$$M \text{ 作的总功为 } A = \int dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

$$\boxed{dA = M d\theta} \text{ —— 力矩的功}$$



$$\boxed{M = J\beta}$$

力矩做功的效果

$$\begin{aligned} A &= \int dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J \beta d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} J \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \omega d\omega \end{aligned}$$

即

$$\boxed{A = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 = E_{k_2} - E_{k_1}}$$

结论

—— 定轴转动的动能定理

合外力矩对一个绕固定轴转动的刚体所做的功等于刚体的转动动能的增量。

例. 已知半径为 R 、质量为 m 的匀质圆盘放置在一粗糙的水平面上, 并绕垂直于平面且过质心的轴转动, 圆盘与水平面间的摩擦系数为 μ 。

求: 圆盘转一周, 摩擦阻力矩的功。

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

解: 取环带面积元 $dS = 2\pi r dr$

$$dm = \rho dS l$$

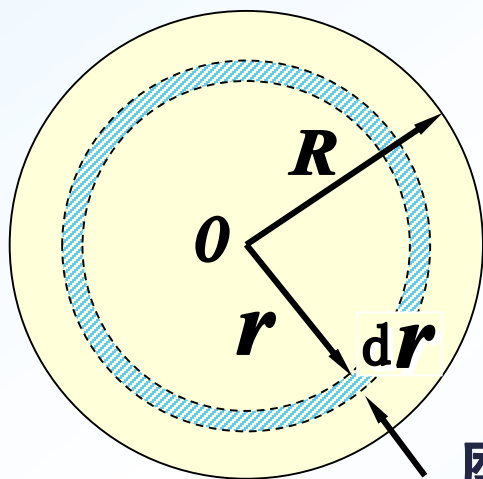
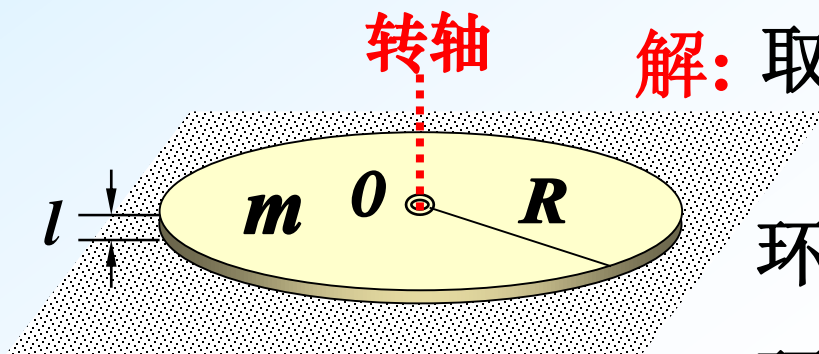
环带受摩擦力 $df = \mu g dm$

环带受摩擦力矩

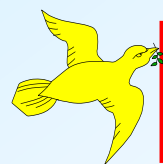
$$dM = r df = 2\pi \rho \mu g l r^2 dr$$

总摩擦力矩 $M = \int_0^R dM = \frac{2}{3} \mu m g R$

摩擦力矩做功 $A = \int_0^{2\pi} M d\theta = \frac{4}{3} \mu m g \pi R$



例. 半径为 R 、质量为 m_1 的匀质圆盘边缘固连一质点 m_2 , 质点处在水平线时静止释放, 系统通过盘心垂直盘面的水平轴转动。求圆盘转过 $\theta=30^\circ$ 时, 质点 m_2 的法向、切向加速度的大小?



$$\int M d\theta = \Delta E_k$$

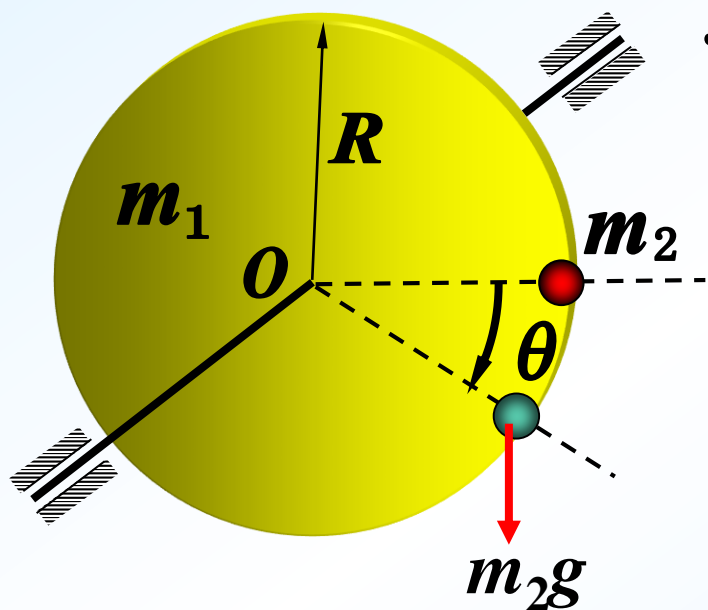
解: 外力矩做功

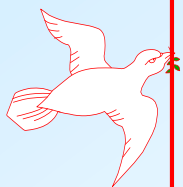
$$\begin{aligned} \int M d\theta &= \int_0^{30^\circ} m_2 g R \cos \theta d\theta \\ &= m_2 g R \sin 30^\circ \end{aligned}$$

系统转动动能增量

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) R^2 \omega^2$$

$$\text{解得 } \omega = \sqrt{\frac{2m_2 g}{(m_1 + 2m_2) R}}$$





$$\omega = \sqrt{\frac{2m_2g}{(m_1+2m_2)R}}$$

法向加速度

$$a_n = R\omega^2 = \frac{2m_2g}{m_1+2m_2}$$

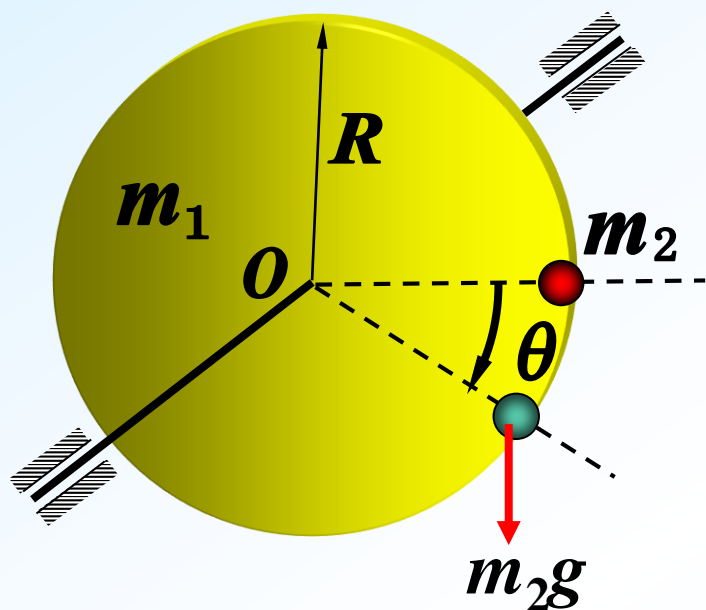
切向加速度?

根据定轴转动定律

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{M}{J} = \frac{m_2gR \cos 30^\circ}{(\frac{1}{2}m_1 + m_2)R^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}m_2g}{(m_1+2m_2)R}\end{aligned}$$

则切向加速度

$$a_\tau = R\beta = \frac{\sqrt{3}m_2g}{m_1+2m_2}$$



3.刚体的重力势能

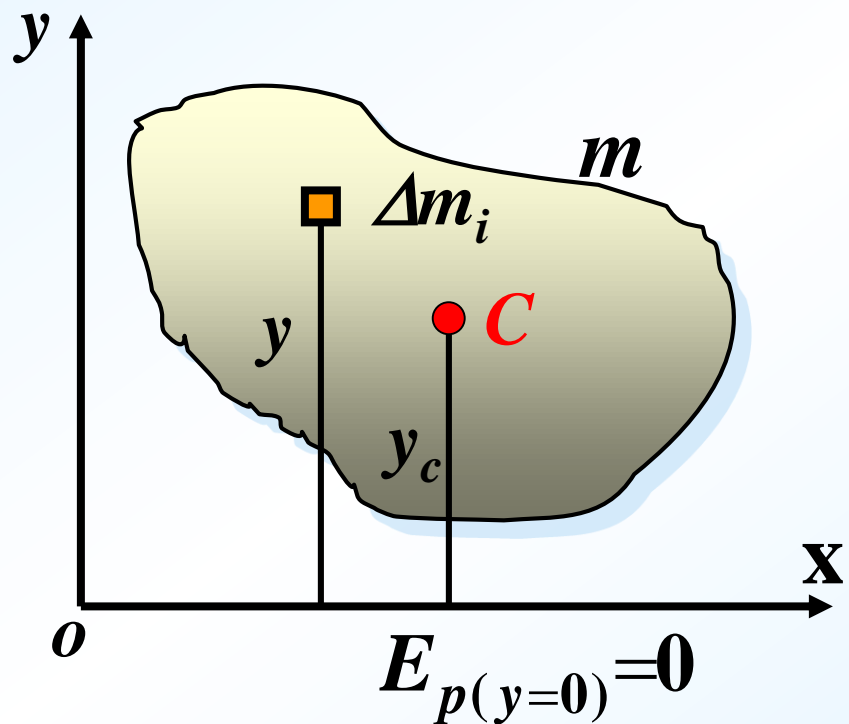
一个质元的势能

$$E_{pi} = \Delta m_i g y$$

整个刚体的势能

$$\begin{aligned} E_p &= \sum_i \Delta m_i g y \\ &= g \left(\sum_i \Delta m_i y \right) \frac{m}{m} \\ &= m g y_c \end{aligned}$$

刚体的重力势能=



它的全部质量都集中在质心时所具有的势能

定轴转动刚体的机械能 $E = E_k + E_p$

$A_{\text{外}} + A_{\text{内非保}} = E_b - E_a = \Delta E$ —— 功能原理

4. 机械能守恒

对于含有刚体的系统, 若 $A_{\text{外}} = 0$, $A_{\text{内非}} = 0$

只有 $A_{\text{内保}} \neq 0$, 则此系统的**机械能守恒**

$$\text{即 } E = E_k + E_p = \frac{1}{2} J \omega^2 + mgy_C = \text{常量}$$

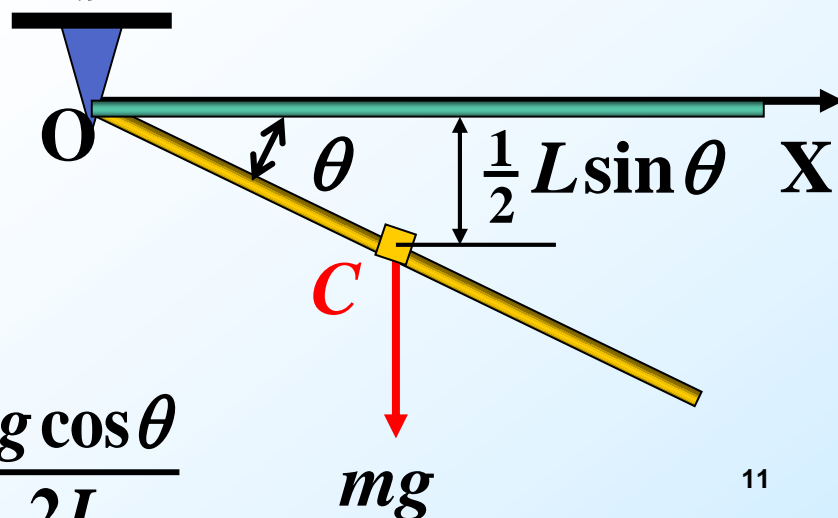
例. 一根长为 L 、质量为 m 的均匀细直棒, 其一端有一固定的光滑水平轴, 因而可以在竖直平面内转动。最初棒静止在水平位置, 求它由此下摆 θ 角时的角加速度和角速度。

解: 只有重力矩做功

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = mg \left(\frac{1}{2} L \sin \theta \right)$$

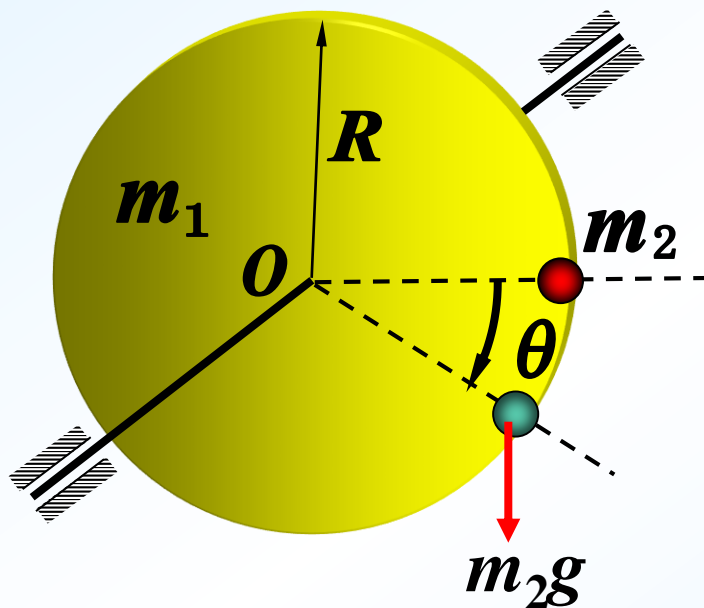
$$\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{L}}$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3g \cos \theta}{2L}$$



例. 半径为 R 、质量为 m_1 的匀质圆盘边缘固连一质点 m_2 , 质点处在水平线时静止释放, 系统通过盘心垂直盘面的水平轴转动。求圆盘转过 $\theta=30^\circ$ 时, 质点 m_2 的法向、切向加速度的大小?

 $\int M d\theta = \Delta E_k$ 解得 $\omega = \sqrt{\frac{2m_2 g}{(m_1 + 2m_2)R}}$



系统机械能守恒

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = m_2 g R \sin 30^\circ$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_2 g R}{J}}$$

已学知识回顾

$$M = J\beta \quad L = J\omega \quad \text{——定轴转动定律}$$

$$dA = M d\theta \quad \text{——力矩的功}$$

$$A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = E_{k_2} - E_{k_1}$$

——定轴转动的动能定理

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgy_c = \text{常量}$$

——机械能守恒定律

四、刚体的角动量定理和角动量守恒定律

1. 刚体定轴的角动量

质点对定点的角动量

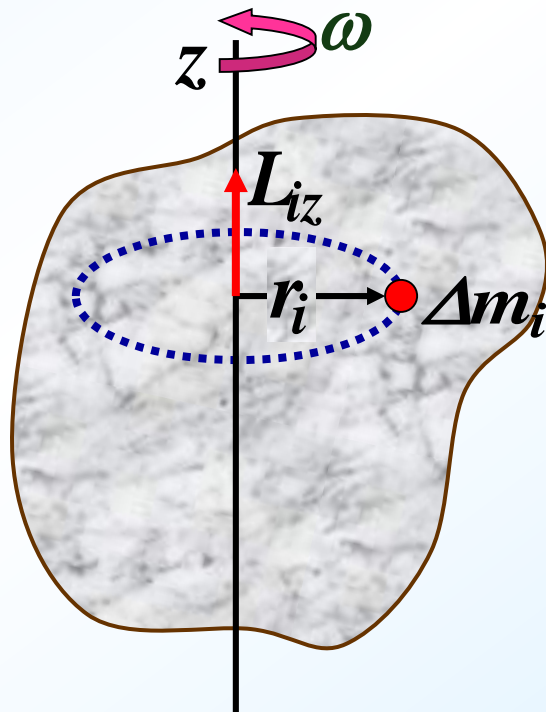
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

刚体上的一个质元绕固定轴
做圆周运动角动量为：

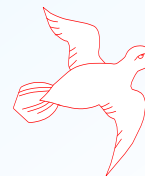
$$L_{iz} = r_i \Delta m_i v_i = r_i^2 \Delta m_i \omega$$

刚体绕此轴的角动量为

$$L_z = \sum_i L_{iz} = (\sum_i \Delta m_i r_i^2) \omega = J_z \omega$$



刚体对固定转动轴的角动量 L ,等于它对该轴的转动惯量 J 和角速度 ω 的乘积。



$$\boxed{L_z = J_z \omega}$$

2. 刚体绕定轴的角动量定理

质点的角动量定理 $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \vec{M}dt = d\vec{L}$

对质点系任意一质点 $\vec{M}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt}$ 定轴方向 $\longrightarrow M_{iz} = \frac{dL_{iz}}{dt}$

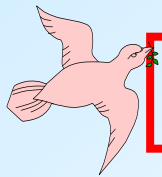
对质点系 $\sum \vec{M}_i = \sum \vec{M}_{i\text{外}} + \cancel{\sum \vec{M}_{i\text{内}}}$ 定轴转动 $\longrightarrow M_z = \sum M_{iz\text{外}}$

$$\underline{M_z = \sum \frac{dL_{iz}}{dt} = \frac{d\sum L_{iz}}{dt} = \frac{dL_z}{dt}}$$

定轴转动定律

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(J_z \omega) \begin{cases} J_z = \text{常量} & M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \beta \\ J_z \neq \text{常量} & M_z = \frac{d(J_z \omega)}{dt} \end{cases}$$

由上可得 $M_z dt = dL_z$ 为简便 $\longrightarrow \boxed{Mdt = dL}$



$$M dt = dL$$

——刚体绕定轴的角动量定理

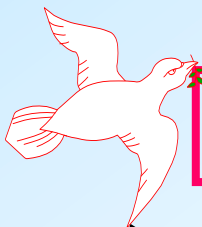
合外力矩 M 对刚体绕定轴的冲量矩

$$\int_0^t M dt = \int_{L_0}^{L_t} dL = L_t - L_0 = J\omega - J_0\omega_0$$

与动量定
理比较

$$\int \vec{F} dt = \int d\vec{P} = \vec{P}_t - \vec{P}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

即：对某个定轴的外力矩的作用在某段时间内的累积效果为刚体对同一转动轴的角动量的增量。



$$Mdt = dL$$

$$\int_0^t Mdt = \int dL = L_t - L_0$$

$$L = J\omega$$

3.角动量守恒定律

当合外力矩 $M=0$ 则 $L_t = L_0 = \text{常量}$

讨论

——角动量守恒

1° 当 $L = \text{常量}$, 若 $J = \text{常量}$, 则 $\omega = \text{常量}$

即: 刚体保持恒定的角速度 ω 转动。

2° 当 $L = \text{常量}$ $J\omega = \text{常量}$

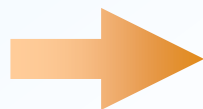
但 $J \neq \text{常量}$ 则 $\omega \neq \text{常量}$

由 $J_2\omega_2 = J_1\omega_1$ 可知 $J \uparrow \omega \downarrow$ 或 $J \downarrow \omega \uparrow$

花样滑冰中常见的例子

先使自己
转动起来

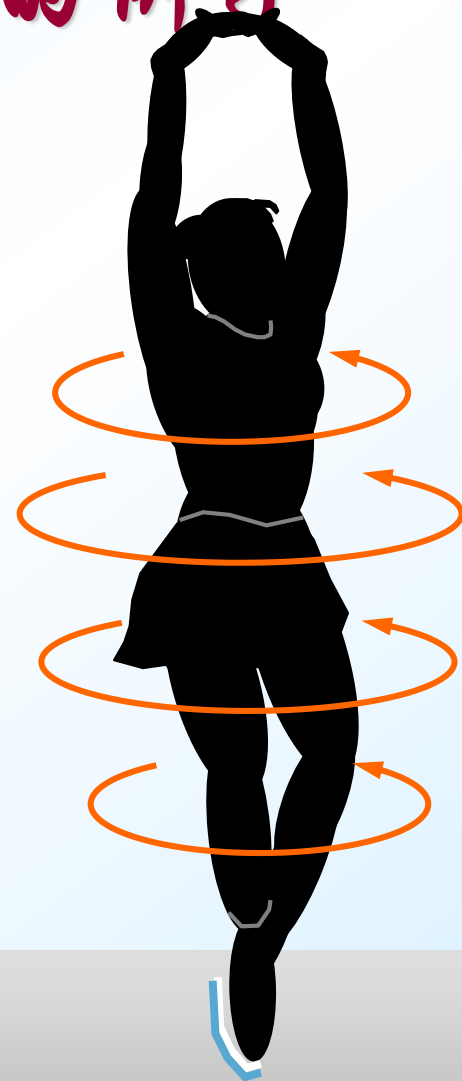
张臂



收臂

J 大
 ω 小

J 小
 ω 大



日本地震改变地球质量分布

一天缩短1.8微秒 [2011年03月16日报道]

- “日本9.0级特大地震，通过改变地球内部的质量分布，导致地球自转加速，从而缩短了一天的长度，幅度约为1.8微秒。”
- 日本地震使本州岛平移了8英尺(2.4米)，并使地球形状轴(figure axis)改变近17厘米。
- 自转轴--地球围绕其转动的轴；
形状轴--以地球质量分布为参考的轴；
围绕该轴，地球质量呈现对称分布
- “形状轴的改变不改变地球自转轴空间指向。
只有外部引力作用能改变自转轴指向”

离心节速器



在接下来的IDC委员会会议上，主席拿来了一把他安排人专门制造的伞，与故事中空灵画师送给公主的保护伞一样，是黑色的，有八根伞骨，每根的末端都有一只小石球。真正意义上的伞早就从现代生活中消失了，现代人遮雨使用一种叫避雨器的东西，如小手电筒般大小，向上吹出气流把雨吹开。人们当然知道伞这东西曾经存在，也在影视中见过，但很少有人见过实物。大家好奇地争相摆弄这东西，发现它可以像故事中描写的那样在旋转中借石球的离心力张开，在旋转速度过快或过慢时也能发出相应的声音报警。大家的第一感觉是这样旋转着打伞是件很累的事，公主的奶妈居然能这样打一天伞，很让人佩服。

“这不是伞！”程心指着旋转中的伞说，“我知道它是什么！”

旁边的毕云峰点点头，“我也知道了。”然后他转向在场的第三个公元人曹彬，“这是一种只有我们三个人才能想到的东西。”

“是的。”曹彬看着伞兴奋地说，“即使在我们那个时代，这东西也很陌生了。”

其余的与会者有的看着这三个活着的古人，有的看着伞，全都莫名其妙，但也都兴奋地期待着。

“蒸汽机离心调速器。”程心说。

离心节速器



儒可夫斯基凳（儒凳）

角动量守恒转台

当合外力矩 $M = 0$ 则 $L_t = L_0 = \text{常量}$

讨论

——角动量守恒

3° 此定律对多个刚体组成的系统也成立

例: 系统由两个刚体组成, 设初时刻 $L_0 = 0$

任意 t 时刻, $L_t = 0$

{ 系统无转动 $L_1 = L_2 = 0$

{ 系统有转动 $L_1 + L_2 = 0$ $L_1 = -L_2$

即 $J_1 \omega_1 = -J_2 \omega_2$

并且, 若 $J_1 > J_2$ 则 $\omega_1 < \omega_2$

同一转轴



对什么角动量守恒？

对转轴的角动量守恒！

刚体定轴转动与质点一维运动的对比

质点一维运动		刚体定轴转动	
位移	Δx	角位移	$\Delta \theta$
速度	$v = \frac{dx}{dt}$	角速度	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	角加速度	$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
质量	m	转动惯量	$J = \int r^2 dm$
力	\vec{F}	力矩	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
运动定律	$\vec{F} = m\vec{a}$	转动定律	$\vec{M} = J\vec{\beta}$
动量	$\vec{P} = m\vec{v}$	动量	$\vec{P} = m\vec{v}_C$
角动量	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$	角动量	$L = J\omega$
动量定理	$\int_{t_1}^{t_2} F dt = mv_2 - mv_1$	角动量定理	$\int_{t_1}^{t_2} M dt = J\omega_2 - J\omega_1$

质点一维运动

动量守恒定律

$$\sum F = 0 \text{ 时}$$
$$\sum m_i v_i = \text{恒量}$$

力做功 $A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

动能 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

动能定理

$$A_{\text{外}} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

重力势能 mgh

机械能守恒定律

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = 0 \text{ 时}$$
$$E_k + E_p = \text{恒量}$$

刚体定轴转动

角动量守恒定律

$$M = 0 \text{ 时}$$
$$\sum J \omega = \text{恒量}$$

力矩做功 $A = \int M d\theta$

转动动能 $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$

转动动能定理

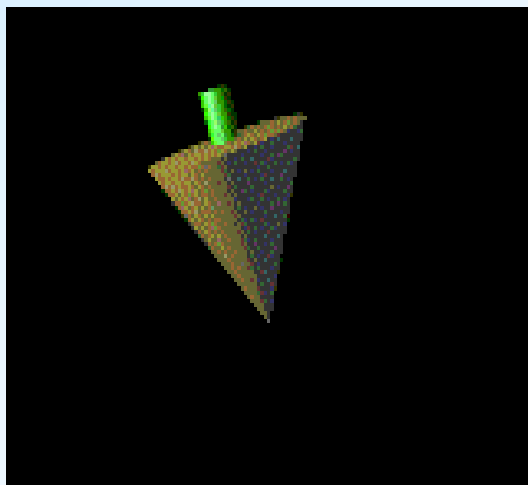
$$A_{\text{外}} = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

重力势能 $mgh_{\text{质心}}$

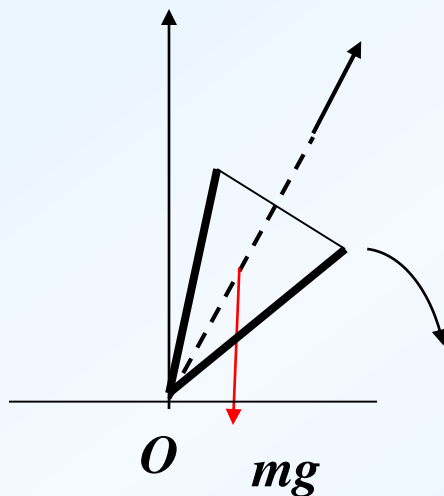
机械能守恒定律

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = 0 \text{ 时}$$
$$E_k + E_p = \text{恒量}$$

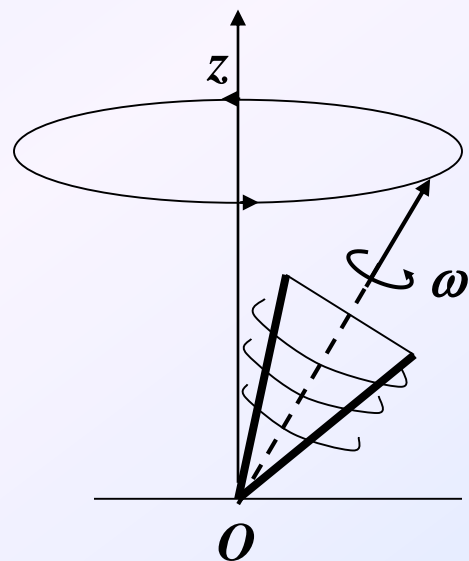
五、进动



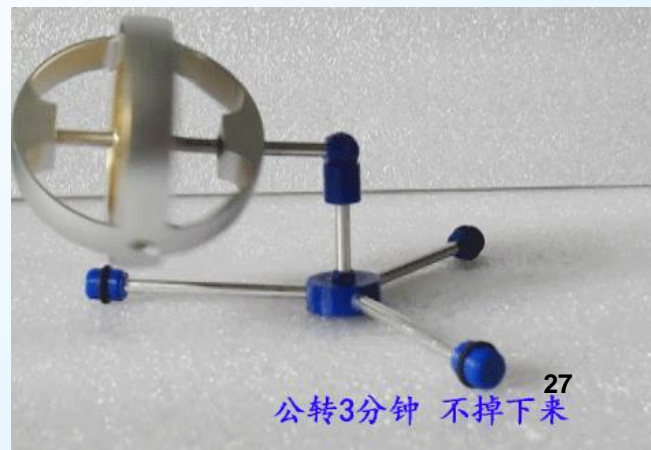
陀螺不转



陀螺高速旋转



旋转物体的自转轴在空间转动现象称为**进动**



陀螺自转角速度远大于进动角动量

$$\vec{L} = \cancel{\vec{L}_{\text{进动}}} + \vec{L}_{\text{自转}} \approx \vec{L}_{\text{自转}}$$

由质点系对定点
的角动量定理

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

对O点的重力矩:

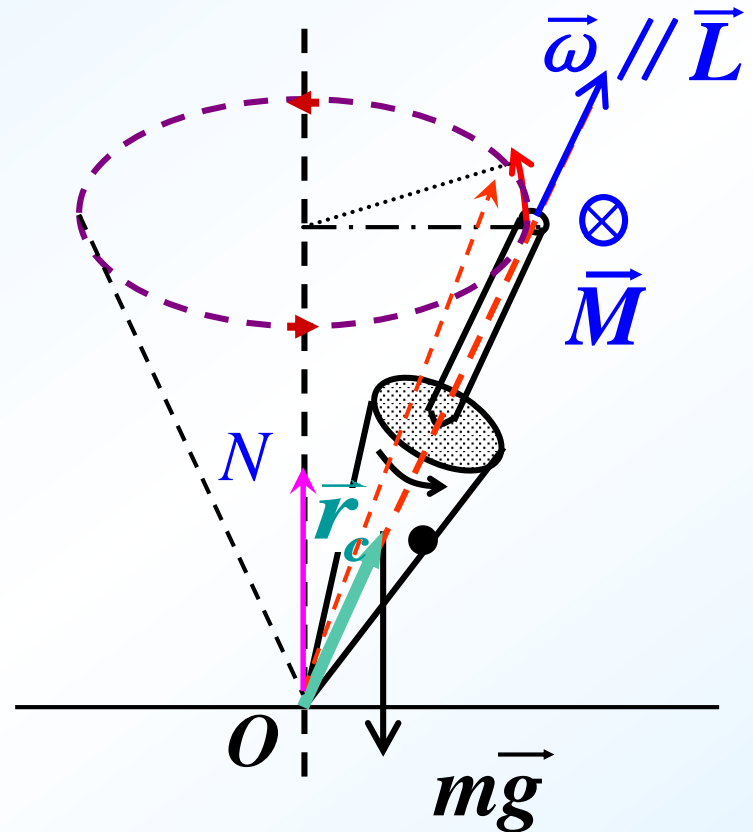
$$\vec{M} = \vec{r}_c \times m\vec{g} \rightarrow \vec{M} \perp \vec{L}$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt // \vec{M}$$

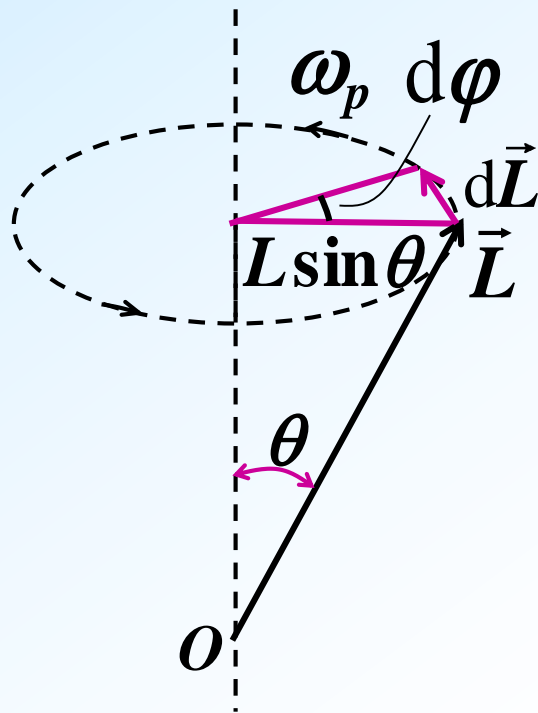
$d\vec{L}$ 与 \vec{M} 同方向

$$\therefore d\vec{L} \perp \vec{L}$$

⇒ 角动量 \vec{L} 顶端(自转轴)做一水平圆周运动



进动的角速度： $\omega_p = \frac{d\varphi}{dt}$



$$|d\vec{L}| = L \sin \theta d\varphi$$

$$M = \frac{|d\vec{L}|}{dt} = \frac{L \sin \theta d\varphi}{dt} \\ = L \sin \theta \cdot \omega_p$$

$$\omega_p = \frac{M}{L \sin \theta} = \frac{M}{J \omega \sin \theta}$$

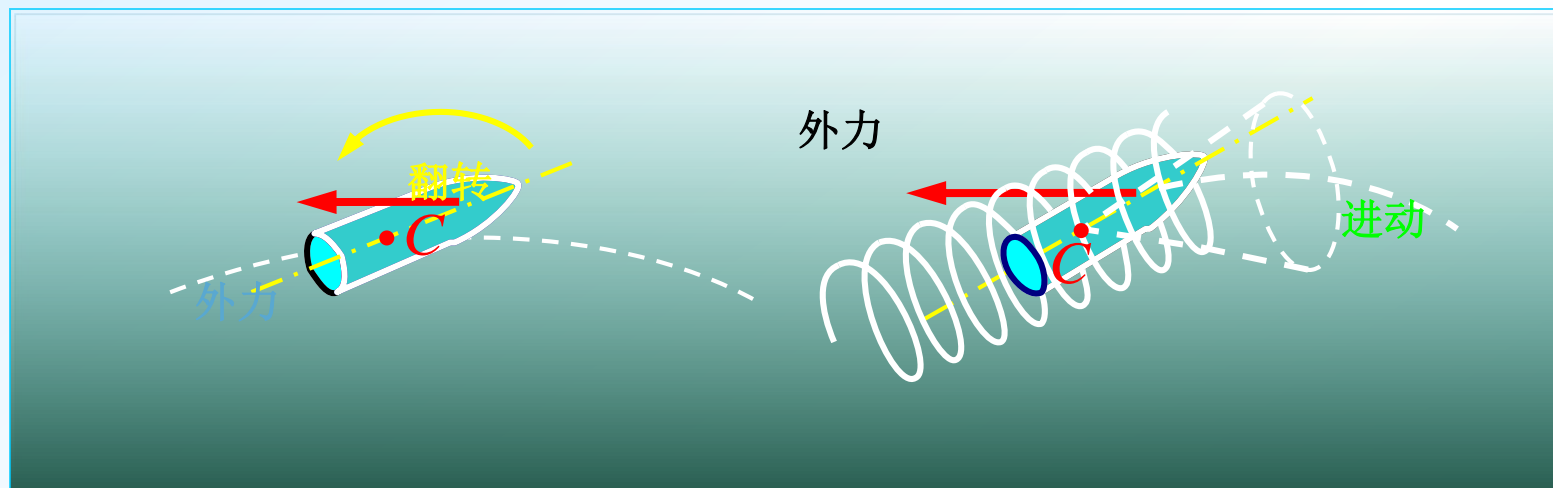
注意： 上述讨论中,将高速旋转的陀螺对O点的角动量近似成了陀螺对本身对称轴的角动量。

思考： 有时候看到车轮除了做圆周运动，还会上下摆动，
是哪里出了问题？

进动的应用

眼见为实

子弹飞行姿态的控制



30

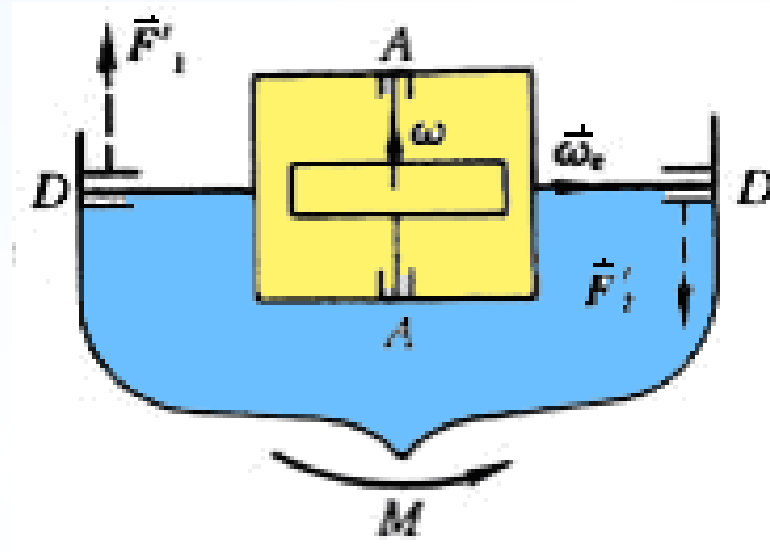
国产94式105毫米坦克炮的膛线

防止船舶侧翻

脑洞大开



2015年6月1日21时30分，东方之星轮，遇强对流天气，在湖北监利水域沉没。442人遇难，12人生还。



海船陀螺稳定器

其他应用： 绕核运动的电子在外磁场中的进动。

例. 一质量为 m_1 的子弹以水平速度射入一静止悬于顶端长棒的下端，穿出后速度损失 $3/4$ ，求子弹穿出后棒的角速度 ω 。已知棒长为 L ，质量为 m_2 。

解: 子弹对棒的冲量矩

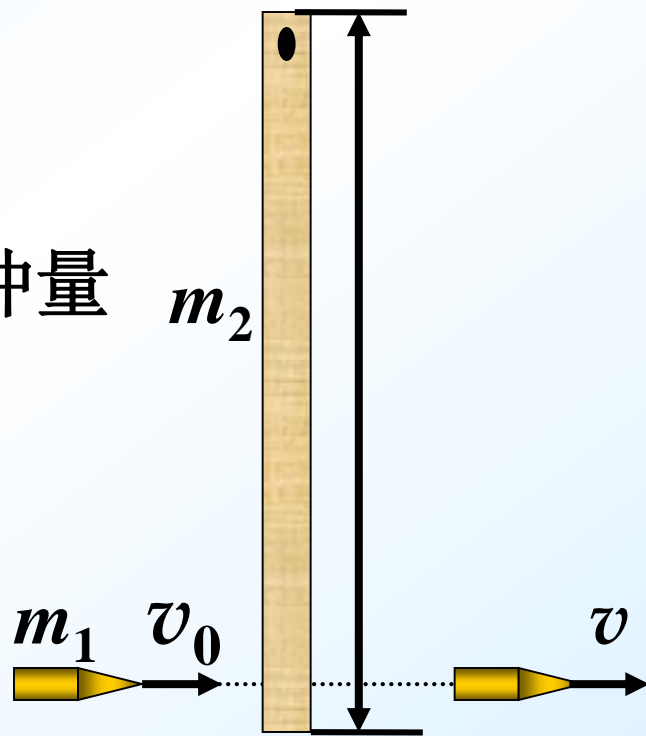
$$\int Lf dt = L \int f dt = J\omega$$

f 的反作用力 f' 对子弹的阻力冲量 m_2

$$\int f' dt = m_1(v - v_0) = -\frac{3}{4}m_1v_0$$

因 $f' = -f$ 由两式得:

$$\omega = \frac{3m_1v_0L}{4J} = \frac{9m_1v_0}{4m_2L}$$



问: 1°子弹和棒的总动量守恒吗？为什么？

2°总角动量守恒吗？若守恒,其方程应如何写？

$$J\omega + m_1vL = m_1v_0L$$

例. 将单摆和一等长的匀质直杆悬挂在同一点, 杆的质量 m 与单摆的摆锤相等, 开始时直杆自然下垂, 将单摆的摆锤拉到高度 h_0 , 令它自静止状态下落, 于铅垂位置和直杆作弹性碰撞。

求: 碰撞后直杆下端达到的高度 h 。

解: 碰撞前单摆的速度为 $v_0 = \sqrt{2gh_0}$

设碰撞后杆的角速度为 ω

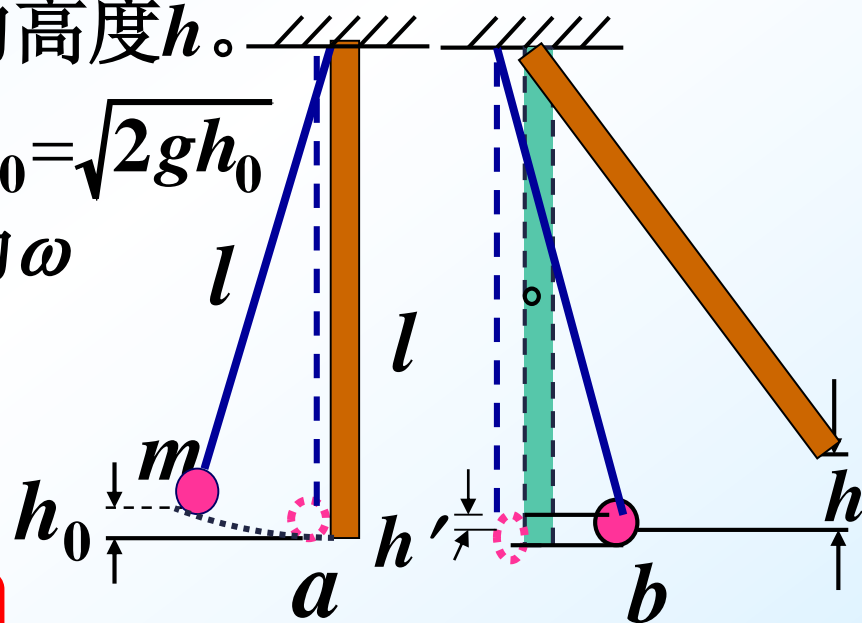
摆锤的速度为 v'

由 **角动量守恒** 有

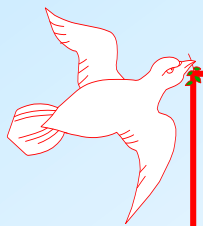
$$m l v_0 = J \omega + m l v'$$

碰撞过程中机械能也守恒

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v'^2$$



$$v' = \frac{v_0}{2}, \quad \omega = \frac{3v_0}{2l}$$



$$v_0 = \sqrt{2gh_0}, \quad v' = \frac{v_0}{2}, \quad \omega = \frac{3v_0}{2l}$$

按机械能守恒 $\frac{1}{2}mv'^2 = mgh'$

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = mgh_c$$

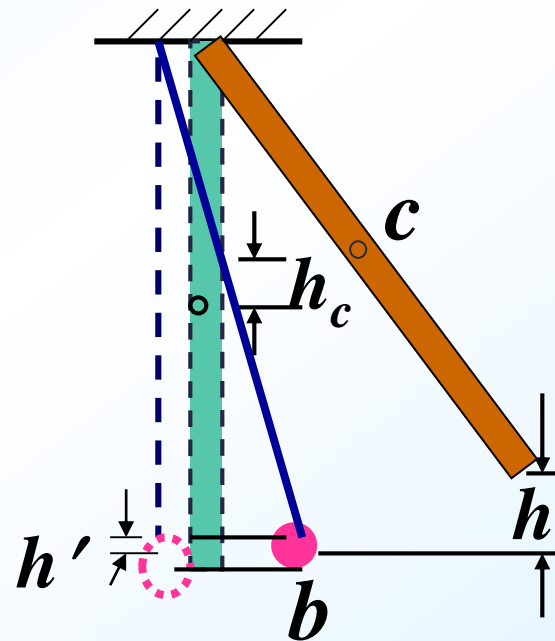
碰撞后摆锤达到的高度为

$$h' = \frac{h_0}{4}$$

而杆的质心达到的高度

$$h_c = \frac{3h_0}{4}$$

由此得 $h = 2h_c = \frac{3h_0}{2}$



本章小节

$$\vec{F}_{\text{合外}} = m\vec{a}_c \quad \text{——质心运动定理}$$

$$M = J\beta \quad L = J\omega \quad \text{——定轴转动定律}$$

$$dA = M d\theta \quad \text{——力矩的功}$$

$$A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = E_{k_2} - E_{k_1}$$

——定轴转动的动能定理

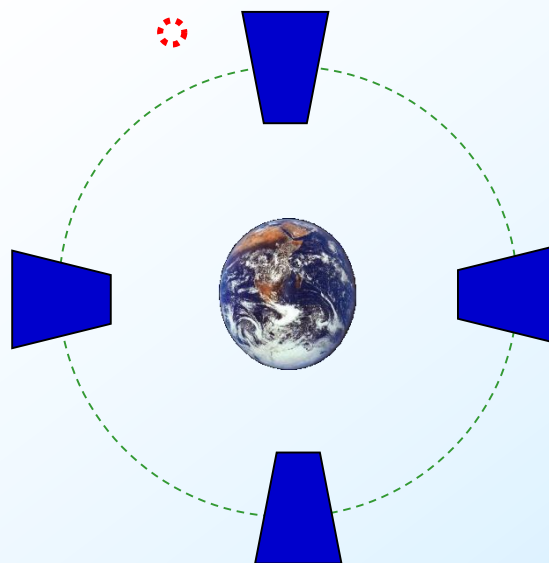
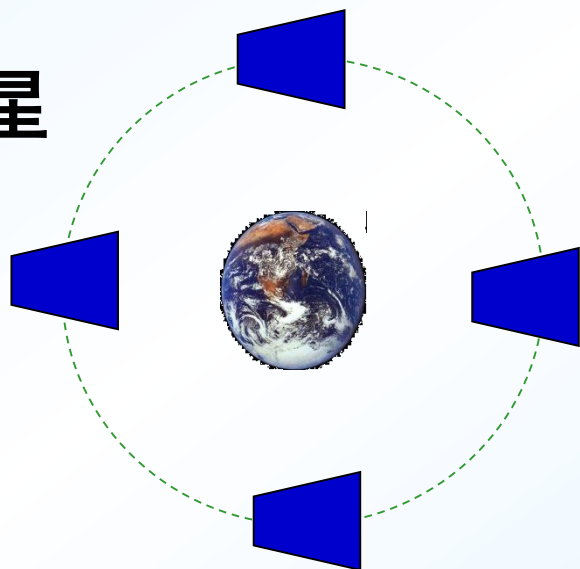
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgy_c = \text{常量}$$

——机械能守恒定律

$$M dt = dL \quad \text{——刚体绕定轴的角动量定理}$$

为什么我们在地球上 总是只能看到月球的一面

卫星



月球的公转与自转周期正好相同

