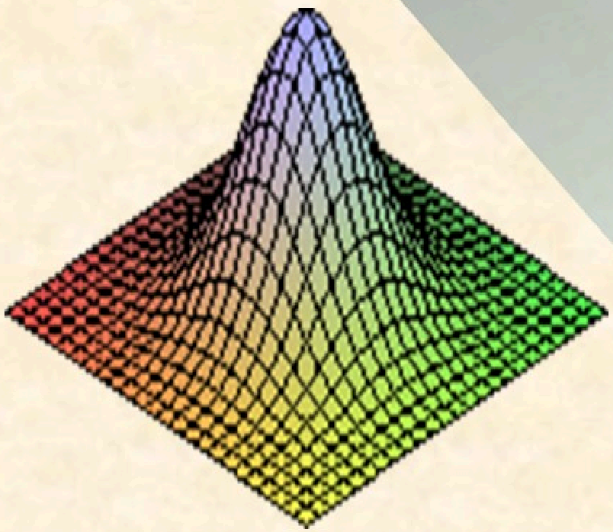
概率论与数理统计



主讲人：吴 娟

制作人：叶鹰 吴娟

wujuan@hust.edu.cn

§ 3.2 边缘分布

一、边缘分布函数

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X < +\infty, Y \le y) = F(+\infty, y)$$

二、D.R.V.的边缘分布

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j p_{ij} \triangleq p_{i\bullet}$$

$$P(Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_i p_{ij} = p_{\bullet j}$$

例1 在有1件次品和5件正品的产品中，分别进行有放回和不放回地任取两次，定义随机变量(X,Y)如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取到正品}\\ 0, & \text{第一次取到次品}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取到正品}\\ 0, & \text{第二次取到次品}\end{cases}$$

求(X,Y)的联合概率分布和两个边缘概率分布。

解（1）有放回抽样：

$$P(X=0,Y=0)$$
$$=P(X=0)P(Y=0/X=0)$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
0	$1/36$	$5/36$	$1/6$
1	$5/36$	$25/36$	$5/6$
$p_{\bullet j}$	$1/6$	$5/6$	1

（2）不放回抽样：

$$P(X=0,Y=0)$$
$$=P(X=0)P(Y=0/X=0)$$
$$=\frac{1}{6}\times 0=0$$

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
0	0	$\frac{1}{6}\times 1$ $1/6$	$1/6$
1	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}$ $1/6$	$\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}$ $2/3$	$5/6$
$p_{\bullet j}$	$1/6$	$5/6$	1

联合分布可以导出边缘分布，但反之不然。

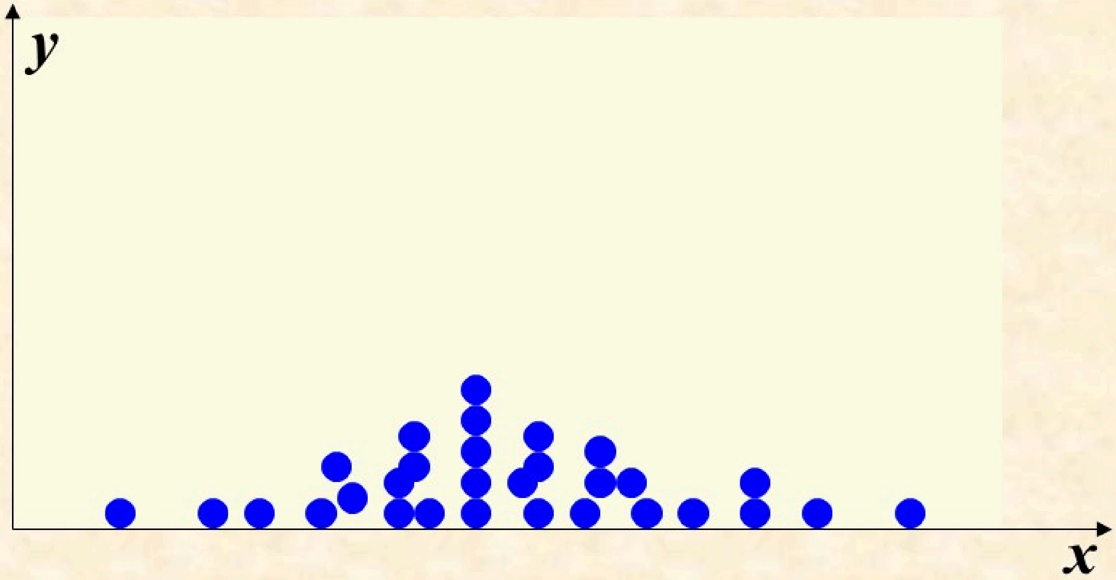
$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	

三、C.R.V.的边缘分布

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv]du$$

故X的边缘密度函数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

同理Y的边缘密度函数 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$



例2 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求$X$和$Y$的边缘密度函数。

解 (X,Y)的联合密度函数

$$f(x,y)=\frac{\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}$$

令 $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\ v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ ，则

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}]dv$$

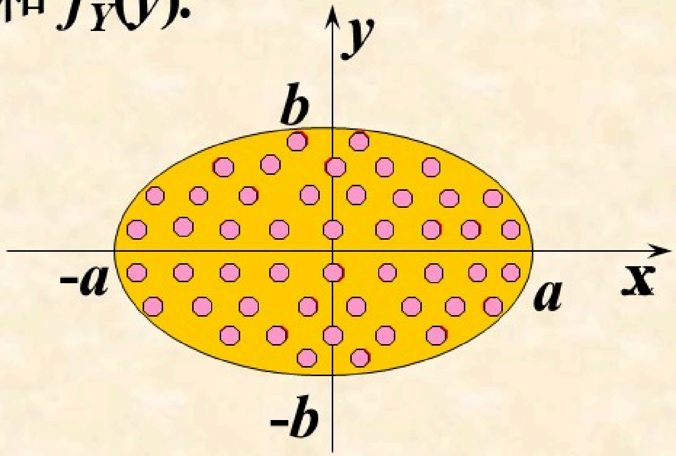
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{(v-\rho u)^2}{2(\sqrt{1-\rho^2})^2}]dv\ \exp[-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，同理 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

例3 设(X,Y)在G上服从均匀分布，其中

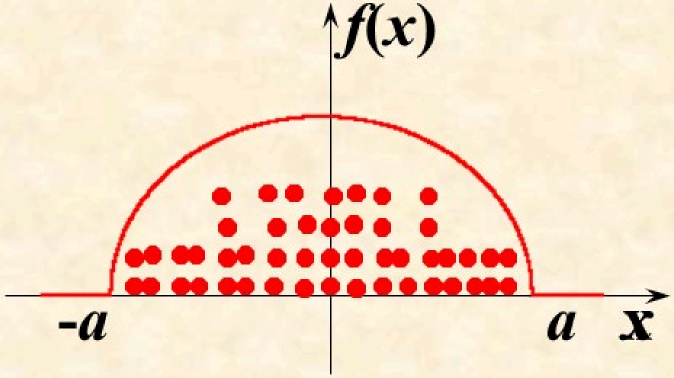
$$G=\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\},$$ 求$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.



解

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{ab\pi}, & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\frac{1}{ab\pi}dy=\frac{2}{a^2\pi}\sqrt{a^2-x^2}\qquad -a<x<a$$



$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{b^2\pi}\sqrt{b^2-y^2}, & -b<y<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

§ 3.3 条件分布

一、问题

身高$X\sim N(170,4^2)$，体重$Y\sim N(59,2^2)$, $X|Y=50\sim N(?,?)$

二、D.R.V.的条件分布

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}\quad P(X=x_i)=p_{i\bullet},\ P(Y=y_j)=p_{\bullet j}$$

则定义给定$Y=y_j$下，X的**条件分布律（列）**为

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\qquad i=1,2,\ldots$$

给定$X=x_i$下，Y的**条件分布律（列）**为

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},\qquad j=1,2,\ldots$$

例1 $P(X=m)=\frac{1}{4}$， $m=1,2,3,4$，

$P(Y=n\mid X=m)=\frac{1}{m}$， $n=1,2,\ldots m$.

求条件分布 $X|Y=n$.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$p_{i\bullet}$	$X/Y=1$	$X/Y=2$	$X/Y=3$	$X/Y=4$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$1/4$	$12/25$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$1/4$	$6/25$	$6/13$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$1/4$	$4/25$	$4/13$	$4/7$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$1/4$	$3/25$	$3/13$	$3/7$	1
$p_{\bullet j}$	$25/48$	$13/48$	$7/48$	$3/48$	1	1	1	1	1
$Y/X=2$	$1/2$	$1/2$	0	0					

例2 设某医院一天出生的婴儿数为X，其中男婴数为Y，已知(X,Y)的联合分布列为：

$$P(X=n,Y=m)=e^{-14}\frac{7.14^m}{m!}\cdot\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}\qquad n=0,1,\cdots\quad m=0,1,\cdots,n$$

求X与Y的边缘分布和条件分布。

解 $$P(X=n)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}7.14^m 6.86^{n-m}\frac{e^{-14}}{n!}=\frac{(7.14+6.86)^n}{n!}e^{-14}$$

$n=0,1,\cdots$ 即 $X\sim P(14)$

$$P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}e^{-6.86}\times\frac{7.14^m}{m!}e^{-7.14}=\frac{7.14^m}{m!}e^{-7.14}\qquad m=0,1,\cdots$$

$Y\sim P(7.14)$

$$P(Y=m/X=n)=\frac{e^{-14}\dfrac{7.14^m}{m!}\cdot\dfrac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}}{\dfrac{14^n}{n!}e^{-14}}=C_n^m\left(\frac{7.14}{14}\right)^m\left(\frac{6.86}{14}\right)^{n-m}$$

$m=0,1,\cdots n$ （n固定）

$Y/X=n\sim B(n,0.51)$

三、C.R.V.的条件分布

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_{Y/X}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

例3 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求 $f_{X/Y}(x/y)$与$f_{Y/X}(y/x)$.

解

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{[x-(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(y-\mu_2))]^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\}$$

即 $X/Y=y\sim N(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(y-\mu_2),\quad \sigma_1^2(1-\rho^2))$

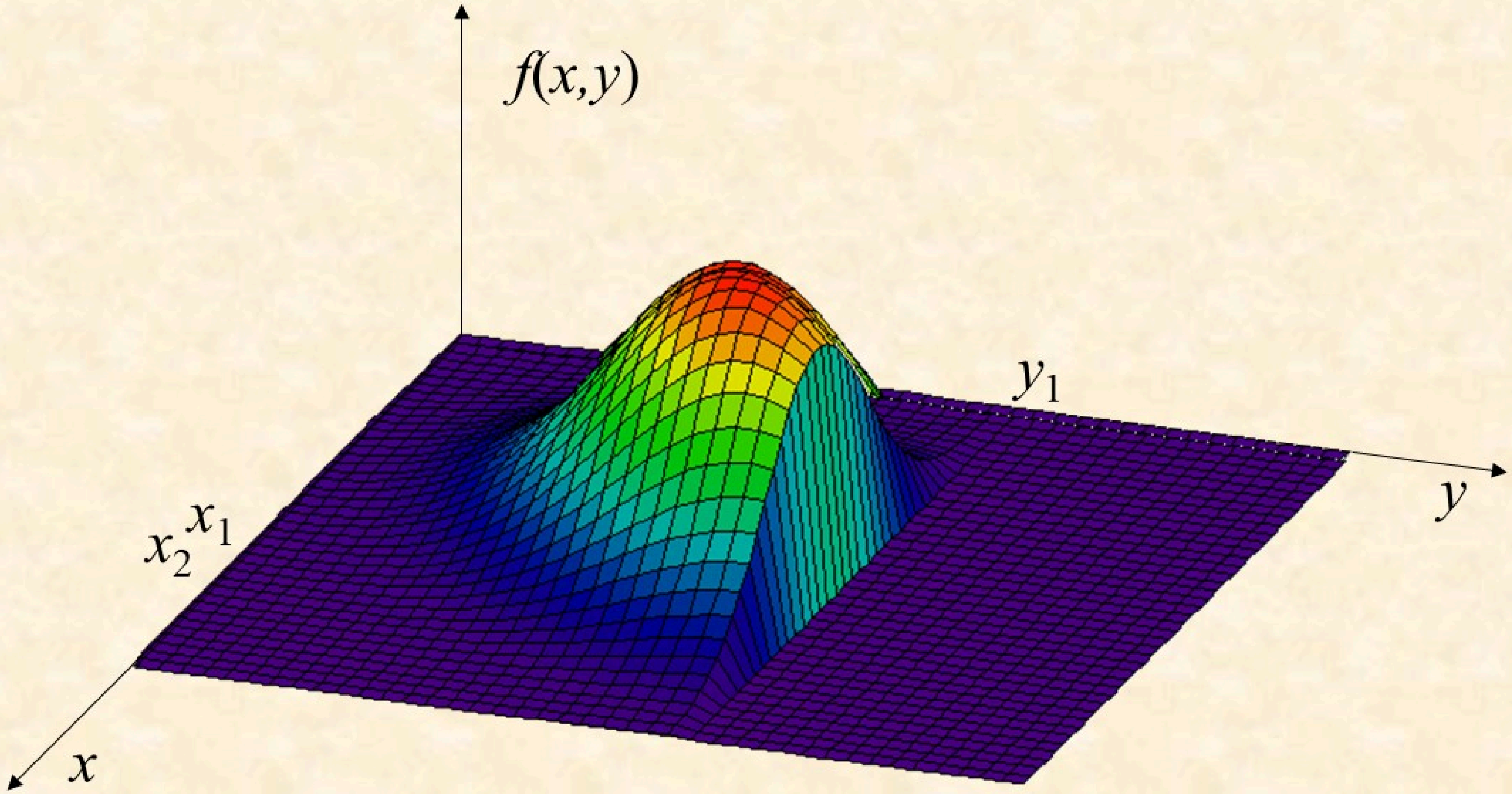
同理 $Y/X=x\sim N(\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1),\quad \sigma_2^2(1-\rho^2))$

单选题 100分

条件概率密度函数 $f_{X/Y}(x/y)$

A 是一元实函数

B 是二元实函数


$f(x,y)$
y_1
y
x_1
x_2
x

例4 已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{ab\pi}, & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求条件密度函数 $f_{X/Y}(x/y)$.

解

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{b^2\pi}\sqrt{b^2-y^2}, & -b<y<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $-b<y<b$ 时

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{b}{2a}\dfrac{1}{\sqrt{b^2-y^2}}, & -\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}<x<\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\\ 0\,, & \text{其他}\end{cases}$$

即 $X\,|\,Y=y\sim U\left(-\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},\ \dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)$

思考题

设随机变量X_1,X_2的概率分布为

$$X_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad X_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

且$P(X_1X_2=0)=1$，求（X_1,X_2）的联合分布。

解

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{i\bullet}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	