华中科技大学
《概率论与数理统计》习题集

2024 年第 1 版

学数华科

目录

序言

《概率论与数理统计》是华中科技大学工科、部分理科、经管等专业学生的必修课，其知识点众多且概念性强，对初学者来说通常难以驾驭，加之课程通常在短短十周内完成，复习周期紧张，这无疑对同学们的备考效率提出了更高的要求。

基于我个人的学习经验，以及从前辈们的反馈中获悉，市面上的《概率论与数理统计学解》存在着性价比不高，错误繁多，题目缺漏等问题，加上配套的作业题、学习辅导书难度梯度与考试有一定差距，所以为了帮助有需要的同学高效完成本课程，我整理了这套习题集。所有题目均来自于近十年的华科期末考试真题，主要分为考点分类训练和套卷练习，既可以用于平时巩固，也可以用于期末复习。

按照规律，教材 §4.3，§4.4.3，§4.5，6.2.5，§7.4.4 后面的章节并不包括在期末考试的范围内。题目中涉及的微积分知识点主要有求导、定积分、二重积分、级数等，尤其是一些重要的积分在微积分课程里面接触较少，但在概率论中需要同学们熟练掌握。

另外，由于时间关系，习题集的答案部分暂时没有呈现在本文件中，我会尽量在本学期（2024 年春季）整理出来，也欢迎有兴趣的学弟学妹/ldx 提供答案。如果发现题目存在的各种问题，可以联系我进行更正（QQ:3022293904），最后祝同学们能够取得满意的成绩！

管理学院 2022 级 黄景弘

分类练习

考点一　　排列组合问题

1. 一标靶画有 1 到 5 环，某投标者投中 k 环的概率是 $\dfrac{6-k}{20}$, 则他独立投两次环数之和至少为 8 的概率为 (　　)

A. 小于 0.01;　**B.** 0.01 至 0.05 之间;　**C.** 0.05 至 0.1 之间;　**D.** 大于 0.1.

2. 一个盒子中共有 3 个球，其中有 2 个白球和 1 个黑球，现从盒子中有放回地每次取 1 个球，则直到第 3 次才取出第 2 个白球的概率为 (　　)

A. $\dfrac{8}{27}$　**B.** $\dfrac{4}{9}$　**C.** $\dfrac{2}{3}$　**D.** $\dfrac{1}{3}$

3. 疫情期间，组织部门拟派甲. 乙. 丙. 丁 4 名志愿者参加周一至周五的公共服务工作，每天派 1 人，每人至少工作 1 天，则甲连续工作 2 天的概率是 (　　)

A. $\dfrac{1}{10}$　**B.** $\dfrac{1}{5}$　**C.** $\dfrac{1}{4}$　**D.** $\dfrac{1}{8}$

4. 有 5 条线段，长度分别为 1,2,3,4,5 ，从中任取 3 条，能够构成直角三角形的概率是______.

5. 把 6 本不同的书任意地放在书架上，其中指定的 2 本书放在一起的概率为______.

6. 在 1,2,3,4,5,8 六个数字中任取两个组成一个分数,则该分数不可约分的概率为______.

7. 将一个圆周分为 4 个圆弧，再给每个圆弧标上 1,2,3 中任意一个数字，则任意两个相邻圆弧所标数字不同的概率是______.

考点二　　概率基本概念与计算

1. 设 A,B 是任意两个随机事件，则 (　　)

A. $P(A+B) \le P(A\cup B) \le P(A)+P(B)$;

B. $P(A)+P(B)-1 \le P(AB) \le P(A\cup B) \le P(A)+P(B)$;

C. $P(A)+P(B)-1 \le P(A\cup B) \le P(AB) \le P(A)+P(B)$;

D. $1-P(A)-P(B) \le P(AB) \le P(A)+P(B) \le P(A\cup B)$.

2. 若事件 A 与事件 B 独立，且 $P(B)>0$, 则 (　　)

A. A 与 B 不互斥;　　**B.** A 与 B 互斥;

C. $P(A|B)=P(A)$;　　**D.** $P(A|B)\neq P(A)$.

3. 设 A,B 为任意两事件且 $A\subset B$，$P(B)>0$，则下列结论一定正确的是 (　　)

A. $P(A)\ge P(A|B)$;　　**B.** $P(A)>P(A|B)$;

C. $P(A)<P(A|B)$　　**D.** $P(A)\le P(A|B)$.

4. 下列叙述正确的是 (　　)

A. “$P(A)=0$”是“$A=\varnothing$”的充分条件，但不是必要条件;

B. “$P(A)=0$”是“$A=\varnothing$”的必要条件，但不是充分条件;

C. “$P(A)=0$”是“$A=\varnothing$”的充要条件;

D. “$P(A)=0$”既不是“$A=\varnothing$”的必要条件，也不是它的充分条件.

5. 设 A,B 为随机事件，且 $P(B)>0$，$P(A|B)=1$，则必有 (　　)

A. $P(A\cup B)>P(A)$; **B.** $P(A\cup B)>P(B)$;

C. $P(A\cup B)=P(A)$; **D.** $P(A\cup B)=P(B)$.

6. 若事件 A 与 A 独立，则 (　　)

A. A 是必然事件; **B.** A 是不可能事件;

C. $P(\overline{A})=0$; **D.** $P(A)=0$ 或 1.

7. 设两事件 A，B 满足 $A\subset B$，$P(A)>0$, 则 (　　)

A. $P(A)=0.5$; **B.** $P(A|B)=0.5$;

C. $P(B)=1$; **D.** $P(B|A)=1$.

8. 当事件 A 与 B 既互不相容又相互独立时，不能保证 (　　)

A. $\min\{\mathrm{P(A),P(B)}\}=0$; **B.** $\max\{\mathrm{P(A),P(B)}\}=1$;

C. $P(\mathrm{A\cup B})=\mathrm{P(A)+P(B)}$; **D.** $\mathrm{P(AB)=P(A)P(B)}$.

9. 设 A、B 为两个随机事件，则下列关系恒成立的是 (　　)

A. $(A-B)\cup B=A$; **B.** $(A-B)-B=A$;

C. $(A-B)-AB=A$; **D.** $(A-B)\cup(AB)\cup(B-A)=A\cup B$.

10. 已知事件 A,B 满足 $P(A)=0,P(B)=1$, 则下列表述一定正确的是 (　　)

A. A,B 互不相容; **B.** A,B 独立;

C. $P(A|B)<P(A)$; **D.** A 是 B 的子集.

11. 已知三个随机事件 A,B,C, 若 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{8},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，则 A,B,C 中恰有一个发生的概率为 (　　)

A. $\dfrac{1}{8}$ **B.** $\dfrac{1}{16}$ **C.** 0 **D.** $\dfrac{1}{32}$

12. 为了了解疫情期间的心理需求，心理健康辅导员设计了一份调查问卷，问卷有两个问题：(1) 你的生日在 7 月 1 日之前吗？(2) 你需要心理疏导吗？被调查者在保密的情况下抛掷一枚质地均匀的骰子，当出现 1 点或 2 点时问题回答 (1), 否则回答问题 (2), 由于不知道被调查者回答的是哪一个问题，因此当回答“是”时，别人无法知道它是否需要心理疏导，这种调查既保护隐私，也得到诚实的问卷反馈. 某校 7800 名大一学生参加了该问卷调查，全部为有效答卷. 发现有 1390 人回答“是”, 由此可估计该校大一学生需要心理疏导的学生人数最可能是 (　　)

A. 180 **B.** 135 **C.** 210 **D.** 230

13. 设 A,B 为随机事件,已知 $P(A)=0.3,P(B)=0.7,P(B|A)=0.4,P\left(A\cup\overline{B}\right)=$______.

14. 设长方形 $ABCD$ 的长 $AB=10cm$， $AD=5cm$，在长方形 $ABCD$ 中任取一点 E，则 $P\left(\angle AEB\geq\dfrac{\pi}{2}\right)=$______.

15. 设 X_n 表示某种生物群的第 n 代数目，事件 $A_n=\{X_n=0\},n=1,2,\ldots$，则 A_n ______A_{n+1} (填关系).

16. 事件 A,B 满足：$P(AB)=P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right),P(A)=0.1$，则 $P(B)=$______.

17. 设随机事件 $A,B,A\cup B$ 的概率分别为 0.4，0.3，0.6, 则 $P\left(\overline{A}B\right)=$______.

18. 设随机事件 $A,B,P(A)=0.6,P(B|\overline{A})=0.5$，则 $P(A\cup B)=$______.

19. 设 $P(A)=0.8,P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$ ______.

20. 已知 $P(AB)=P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=\dfrac{1}{4}, P(A)=\dfrac{1}{2}$, 则 $P(B)=$ ______.

21. 将一枚骰子重复独立抛 3 次，设随机事件 $A=\{3$ 次中恰有一次点数为 $2\}$，$B=\{3$ 次出现的点数不同 $\}$，则 $P(B|A)=$______.

考点三　　贝叶斯公式

1. 统计资料显示，在出口罐头导致的索赔事件中，有 50% 是质量问题，30% 是数量问题，20% 是包装问题，而在这三类问题各引起的索赔事件中，不经过法律诉讼解决而通过协商解决的索赔事件分别占该类问题事件的 40%，60% 和 75%.

(1) 索赔事件通过协商解决的概率是多少？

(2) 已知一索赔事件通过协商解决了，求该事件不是包装问题的概率.

2. 传递两个编码为 A, B 的信息传递出去，由于受到随机干扰，接收站收到时，A 被误收为 B 的概率为 0.03，B 被误收为 A 的概率为 0.01，信息 A, B 传送的频繁程度为 2:3.

(1) 求接收站收到信息是 B 的概率.

(2) 若接收站收到信息是 B，求原发信息是 B 的概率.

3. 设某社区一对夫妇的孩子数是 0, 1, 2, 3 个的比例为 1:6:2:1, 假定孩子是男孩或女孩的机会相同且独立. 对于该社区中的任意一对夫妇，求下列事件的概率，结果用既约分数表示。

(1) 若该夫妇有 3 个孩子，求其中恰有 2 个男孩的概率；

(2) 求该夫妇男孩数是 1 的概率；

(3) 若该夫妇男孩子数是 1, 求该夫妇有 3 个孩子的概率.

4. 设有 8 件产品，其中 4 件不合格，从中任意取出 4 件放入甲盒，剩余 4 件放入乙盒，现从两盒中各取一件.

(1) 求取出的两件产品恰有 1 件不合格品的概率；

(2) 已知取出的两件产品恰有 1 件不合格品，求甲、乙两盒各有 2 件不合格品的概率.

考点四　　随机变量及其分布

1. 随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 定义为 (　　)

A. $P(X < x)$;　**B.** $P(X \leq x)$;　**C.** $P(X > x)$;　**D.** $P(X \geq x)$.

2. 连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$, 则 (　　)

A. X 是连续函数;　　**B.** $f(x)$ 是连续函数;

C. $F(x)$ 是连续函数;　**D.** 对任意实数 x, 有 $f(x) = F'(x)$.

3. 设随机变量 $X \sim B(3, 0.5)$, X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $F(1) - F(1^-) =$(　　)

A. $\frac{3}{8}$　　**B.** $\frac{1}{4}$　　**C.** $\frac{1}{2}$　　**D.** $\frac{3}{4}$

4. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，则 (　　)

A. X 是连续型或离散型随机变量;　**B.** $F(x)$ 严格单调递增;

C. $F(x)$ 连续;　**D.** $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

5. 设随机变量 X 满足 $\mathrm{P(X \leqslant 0) = P(X > 0)}$, 则其分布函数 F(x) 满足 (　　)

A. $F(0) = \frac{1}{2}$;　**B.** $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;　**C.** $F(0) \neq \frac{1}{2}$;　**D.** $F(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

6. 已知随机变量 X, Y 同分布，且期望存在，则下列表述可能有误的是 (　　)

A. $E(X) = E(Y)$;　**B.** $P(X > 1) = P(Y > 1)$;

C. $P(X = 1) = P(Y = 1)$;　**D.** $P(X = Y) = 1$.

7. 设 X_1, X_2 是两个连续性随机变量，它们的概率密度函数分别为 $f_1(x), f_2(x)$, 概率分布函数分别为 $F_1(x), F_2(x)$, 则 (　　)

A. $f_1(x) + f_2(x)$ 必为密度函数;　**B.** $f_1(x)f_2(x)$ 必为密度函数;

C. $F_1(x) + F_2(x)$ 必为分布函数;　**D.** $F_1(x)F_2(x)$ 必为分布函数.

8. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a-1 \\ ax & , a-1 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$, 则 a 的取值为 (　　)

A. 1　　**B.** 0　　**C.** -1　　**D.** 无法确定

9. 已知二维随机变量 (x,y) 的概率分布函数为 $F(x,y)$, 概率密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$, 则 $F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)=(\quad)$

A. $\dfrac{1}{8}$ **B.** $\dfrac{3}{16}$ **C.** $\dfrac{3}{8}$ **D.** $\dfrac{3}{32}$

10. 设随机变量 X,Y 独立同分布，则下列叙述错误的是 $(\quad)$

A. 当 X,Y 是连续型随机变量时，$P(X<Y)=P(X>Y)=\dfrac{1}{2}$;

B. 当 X,Y 是连续型随机变量时，$P(X<Y)=P(X\ge Y)$;

C. 当 X,Y 是离散型随机变量时，$P(X=Y)=0$;

D. 当 X,Y 是离散型随机变量时，$P(X<Y)$=$P(X>Y)$.

11. 设随机变量 X 的概率密度函数为公式 $f(x)=\begin{cases}Ax & 1<X<2,\\ B & 2\le X\le 3,\\ 0 & 其他,\end{cases}$, 且 $P(1<X<2)=P(2<X<3)$, 试求：

(1) 常数 A,B; (2) 分布函数 $F(x)$; (3) 概率 $P(2\le X<4)$.

12. 连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax^2+bx, & 0<x<1;\\ 1 & x\ge 1,\end{cases}$

且 $P\left(X<\dfrac{1}{3}\right)=P\left(X>\dfrac{1}{3}\right)$.

(1) 求常数 a 和 b; (2) 求 X 的密度函数.

13. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}Ae^x, & x<0,\\ B, & 0\leqslant x<1,\\ 1-Ae^{-(x-1)}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

求: (1) 常数 A,B 的值；(2)X 的概率密度函数；(3)EX.

考点五　　离散型随机变量的分布

1. 设随机变量 $X \sim P(5)$,　$Y \sim P(3)$, 且 X,Y 独立，则 (　　)

A. $X+Y \sim P(2)$;　　**B.** $X-Y \sim P(2)$;

C. $X+Y \sim P(8)$;　　**D.** $X-Y \sim P(8)$.

2. 设随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=\dfrac{Ca^k}{(1+a)^{k+1}}, a>0, k=0,1,...,$ 则常数 C 的值为 (　　)

A. 1　　**B.** 0.5　　**C.** 0.3　　**D.** 0.2

3. 已知 $X \sim P(3)$，$P(X \geq 1)=$______.

4. 设随机变量 X,Y 相互独立，且同分布于 $B(1,\dfrac{1}{3})$, 则 $P(X=Y)=$______.

5. 设随机变量 X,Y 都服从 $P(1)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $P(X+Y=1)=$______.

6. 设 $X \sim B(1,\dfrac{1}{4}), Y \sim B(1,\dfrac{1}{3})$，且 X,Y 独立，则 $P(X \neq Y)$=______.

7. 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 $P(X=k)=\dfrac{1}{2^k}(k=1,2,3,...)$，则 $P(X>Y)=$______.

考点六　　连续型随机变量的分布

1. 设某电路受外界刺激，电压 V(单位：伏特) 随机波动，且 $V \sim E(\lambda)$. 现用电压表测量，一只电压表的最大读数为 15, 则电压表的读数为 15 的概率是 (　　)

A.0　　**B.**$e^{-15\lambda}$　　**C.**$1-e^{-15\lambda}$　　**D.**1

2. 设 $F(x)$ 为某连续性随机变量的分布函数，$f(x)$ 为相应的密度函数，则 (　　)

A. $F(x)$ 连续但不一定可导;　**B.** $F(x)$ 可导;　**C.** $f(x)$ 连续;　**D.** $0 \leq f(x) \leq 1$.

3. 设随机变量 $X \sim N(\mu, 3^2)$, 则 $P(|X-\mu|<3)=$ (　　)

A.$\Phi(1)$　**B.**$\Phi(-1)$　**C.**$2\Phi(1)-1$　**D.**$2\Phi(-1)-1$

4. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，Φ(x) 为 X 的分布函数，则 $P\left(\Phi(X)>\dfrac{2}{3}\right)=$______.

5. 设一批元件的寿命独立同分布，其概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0, \\ 0 & x<0, \end{cases}$ 系统开始工作时只有一个元件工作，在它损坏后立即更换一个新元件接替工作，求系统从开始工作到时刻 $T(T>0)$ 为止，恰更换了一个元件的概率.

6. 设随机变量 $X \sim E(\lambda), Y \sim P(\lambda)$, 已知 $P(X>1)=P(Y=1)$.

(1) 确定参数 λ;　(2) 求常数 t 使 $P(X \leqslant t)=P(Y \leqslant 1)$.

7. 设某产品有两个型号，I 型产品的寿命 $X \sim E(6)$, II 型产品的寿命 $Y \sim E(2)$.

(1) 求 $P(X \leqslant Y)$;

(2) 依据两种产品平均寿命的比例为这两种产品定价;

(3) 厂商称“II 型产品寿命至少是 I 型产品寿命的 3 倍”, 这话可信吗？为什么？

考点七　　随机变量函数的分布

1. 一辆新车装有 4 个轮胎并配有 1 个备胎，当使用的轮胎损坏时就用备胎更换. 设所有轮胎的寿命均服从参数为 0.2 的指数分布且相互独立，记 T 为开始使用备胎的时间，求 T 的分布函数.

考点八　　多维随机变量与条件分布

1. 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(1,2,1,1,0.5)$, 则 $\{X=1\}$ 的概率密度函数值是 (　　)

A. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$　　**B.**$\frac{1}{2\pi}$　　**C.**$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1}$　　**D.**$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$

2. 下列叙述中正确的是 (　　)

(1) 二维正态分布的边缘分布是正态分布，条件分布也是正态分布;

(2) 二维正态分布的边缘分布是正态分布，但条件分布不是正态分布;

(3) 二维均匀分布的边缘分布是均匀分布，条件分布是均匀分布;

(4) 二维均匀分布的边缘分布不一定是均匀分布，条件分布也不一定为均匀分布.

A.$(1),(3)$　　**B.**$(2),(3)$　　**C.**$(1),(4)$　　**D.**$(2),(4)$

3. 已知 (X,Y) 在区域 $D\{|X| \le a, |Y| \le a\}$ 上服从均匀分布,则 $P\{X^2+Y^2 \le a^2\}$(　　)

A. 随 a 的增大而增大;　　**B.** 随 a 的增大而减小;

C. 是与 a 无关的常数;　　**D.** 随 a 的变化增减不定.

4. 设甲乙两台设备的寿命分别服从参数为 2 与 3 的指数分布，且相互独立，则甲比乙先坏的概率为 (　　)

A. 0.2　　**B.** 0.4　　**C.** 0.6　　**D.** 0.8

5. 设一维随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从均匀分布，那么下列随机变量中服从

均匀分布的是 (　　)

A. XY　　**B.** $X-Y$　　**C.** (X,Y)　　**D.** $X+Y$

6. 已知随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 且 $P(X<\mu_1,Y>\mu_2)=\frac{1}{3}$, 则 $P(\max\{X-\mu_1,Y-\mu_2\}>0)=$(　　)

A. $\dfrac{1}{4}$　　**B.** $\dfrac{5}{6}$　　**C.** $\dfrac{1}{6}$　　**D.** $\dfrac{2}{3}$

7. 设 $(X,Y)\sim N(1,0,1,4,0.5)$, 则随机变量 X 的概率密度函数为________.

8. 设随机变量 (X,Y) 服从单位圆上的二维均匀分布，则 $P(X>0|Y>0)=$ ________.

9. [注：判断相关性需要用到协方差相关内容] 在区间 [0.5,1] 中任取一个值 x, 再在区间 $[-x,x]$ 中任取一个值 y, 构成二维随机变量 (X,Y).

(1) 求 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$, 关于 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$, 并判断 X,Y 是否独立；

(2) 求 $Cov(X,Y)$, 并据此判断 X,Y 是否相关.

10. 设二维随机变量 (X,Y) 在由直线 $y=x+1$, $y=-x-1$ 及 $x=1$ 所围成的区域内服从均匀分布.

(1) 求 X,Y 的边缘概率密度函数 $f_x(x)$,$f_Y(y)$;　(2) 判断 X,Y 的独立性和相关性.

11. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$, 已知 $X=x$ 时，Y 服从 $(x,1)$ 上的均匀分布，求：

(1) $P(0.2<Y<0.6|X=0.5)$; (2)(X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$;

(3) (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$.

12. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}ae^{-(2x+3y)}, & x,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

求:(1) 参数 a;(2) 边缘分布 X 的概率密度 $f_X(x)$;(3)$W=\min(X,Y)$ 的分布函数.

13. 已知 (X,Y) 的概率密度函数为 $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, & x^2+y^2>1\\ \dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+\dfrac{xy}{100}, & x^2+y^2\leqslant 1\end{cases}$

(1) 求边缘密度函数 $f_X(x),f_X(y)$;

(2)X,Y 是否独立，为什么？若不独立，求 X,Y 的相关系数.

考点九　　随机变量的独立性

本考点为高频考点之一，但通常不单独出题，相关题型可参考上面第 13 题等。

考点十　　多维随机变量函数的分布

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从 $E(1)$，则 $P(\max\{X,Y\}>1)=$________.

2. 设随机变量 X,Y 相互独立，且均服从区间 [0,3] 上的均匀分布，则 $P(min(X,Y)\leq 1)=$________.

3. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} & x>0,y>0,\\ 0 & \text{其他},\end{cases}$

(1) 求边缘概率密度 $f_X\left(x\right),f_Y\left(y\right)$;

(2) X,Y 是否独立？为什么？

(3) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_z(z)$.

4. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 随机变量 $Y \sim E(4)$, 且 X 与 Y 相互独立，试求:
$Z = X + Y$ 的概率密度函数.

5. 设随机变量 $X \sim E(2), Y \sim B(1, \dfrac{2}{3})$, 且二者相互独立. 试求 $Z = X + 3Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从 [0,1] 区间上的均匀分布，试求：
(1)$Z = X + Y$ 的概率密度；(2)$P(X + Y < 1.5)$.

7. 设 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x,y) = \begin{cases} 4e^{-2(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$
(1) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数; (2) 求 $P(X + Y < 1)$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim E(1)$, Y 的概率分布为 $P(Y = -1) = \dfrac{1}{2}$,
$P(Y = 1) = \dfrac{1}{2}$，令 $Z = XY$.
求：(1) Z 的分布；　(2)X 与 Z 是否不相关；

9. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

(1) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数；(2) 求 $P\left(Y\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

考点十一　期望与方差

1. 随机变量 X,Y，假设相应的矩都存在，则下列不等式不成立的是 (　　)

A. $(EXY)^2\leq EX^2EY^2$;　　**B.** $EX^2\leq (EX)^2$;

C. $DX\leq E\left(X-C\right)^2$;　　**D.** $1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}\leq P\left(|X-EX|<\varepsilon\right)$.

2. 对于任意两个随机变量 X 和 Y, 若 $E(XY)=EXEY$, 则 (　　)

A. X,Y 相互独立;　　**B.** X,Y 不相互独立;

C. $D\left(XY\right)=DX\cdot DY$;　　**D.** $D\left(X+Y\right)=DX+DY$.

3. 设 X 的数学期望 μ 和方差 σ^2 均为有限常数,则由切比雪夫不等式,有 $P\left(|X-\mu|<3\sigma\right)$(　　)

A.$\geq\dfrac{1}{9}$　　**B.**$\leq\dfrac{1}{9}$　　**C.**$\geq\dfrac{8}{9}$　　**D.**$\leq\dfrac{8}{9}$

4. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$,$Y\sim P(\lambda)$, 且 X,Y 不相关，则 (　　)

A. $E(X+Y)=p+\lambda$;　　**B.** $X+Y\sim P(p\lambda)$;

C. $D(X+Y)=np\left(1-p\right)+\lambda$;　　**D.** $E(XY)=p\lambda$.

5. 设随机变量 X 满足 $P(X>t)=e^{-3t}(t\geq 0)$, 则 $EX=$(　　)

A.2　　**B.**$\dfrac{1}{2}$　　**C.**3　　**D.**$\dfrac{1}{3}$

6. 随机变量 X,Y 均服从标准正态分布，则 $E[\max(X,Y)+\min(X,Y)]=$(　　)

A.0　　**B.**1　　**C.**2　　**D.**3

7. 设随机变量 $X\sim U(0,6),Y\sim P(\lambda)$, 且 X,Y 不相关，则下列选项错误的是 (　　)

A. $E(X+Y)=3+\lambda$;　　**B.** $X+Y\sim P(3\lambda)$;

C. $D(X+Y)=3+\lambda$;　　**D.** $E(XY)=3\lambda$.

8. 在下面的分布中，对所有的参数其期望都等于方差的分布是 (　　)

A.$B(n,p)$　　**B.**$P(\lambda)$　　**C.**$U(a,b)$　　**D.**$E(\lambda)$

9. 设随机变量 X 有正方差存在，则概率 $P((X-EX)^2\leq 0.01)$ (　　)

A. 为 DX 的非降函数;　**B.** 为 DX 的非增函数;　**C.** 等于 $\dfrac{DX}{0.01}$;　**D.** 与 DX 无关

10. 设随机变量 $X\sim E\left(\frac{1}{2}\right)$, 其概率分布函数为 $F(x)$, 则 $E[[F(X)]^2+X]=$ (　　)

A. $\dfrac{3}{2}$　　**B.** $\dfrac{5}{2}$　　**C.** $\dfrac{7}{3}$　　**D.** 1

11. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P(X=EX^2)=$________.

12. 设随机变量 $X\sim B(2,0.1)$, 则 $E\left(2^X\right)=$________.

13. 二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,1,4,9,-0.5)$，$Z=\dfrac{1}{2}X-\dfrac{1}{3}Y$ ，则 Z 的方差 $DZ=$________.

14. 设随机变量 $X\sim B(4,p)$，$EX=2DX$，X 的分布函数是 $F(x)$，则 $F(1)=$________.

15. 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$， $P(X=1)=P(X=2)$，则 EX^2=________.

16. 设随机变量 $X-U(-1,2)$，由切比雪夫不等式得 $P(|X-0.5|<1)$ ________.

17. 从长度为 3 的线段上任取两点，则两点间距离的期望是________，方差是________.

18. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $E(X^2)=$________.

19. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，若 $P(X=1)=3\cdot EX\cdot P(X=0)$，则 p=________.

20. 设随机变量 X,Y 独立，且 $X\sim P(2)$，$Y\sim U(-1,1)$，则 $E(X^2Y^2)=$________.

21. 设随机变量 $X\sim E(\lambda)$, 求：

(1) $Y=[X]+1$ 的分布，其中 [ ] 为取整函数； (2) 随机变量 Y 的期望.

22. 已知 X,Y 服从标准正态分布，并且独立，设 $Z=|X-Y|$

求：(1)Z 的概率密度 $f_z(x)$; (2)EZ; (3)DZ

考点十二　协方差与相关系数

1. 若随机变量 X,Y 都服从正态分布，且它们不相关，则 (　　)

A. (X,Y) 服从二维正态分布;　**B.** $D(X-Y)=D(X+Y)$;

C. $X+Y$ 服从一维正态分布;　**D.** X,Y 相互独立.

2. 设 X 与 Y 同分布，且期望、方差都存在，如果对任意的实数 c, 都有 $D(cX+Y)=D(cX-Y)$, 则下面说法中一定正确的是 (　　)

A. X 与 Y 相互独立;　**B.** X 与 Y 不相互独立;

C. X 与 Y 不相关;　**D.** $D(X)=0$.

3. 设 $(X,Y)\sim N(0,1,\sigma^2,\sigma^2,1)$，则 (　　)

A. $P(Y=X)=1$;　　**B.** $P(Y=X+1)=1$;
C. $P(Y=-X+1)=1$;　**D.** $P(Y=-X)=1$.

4. 若随机变量 X 和 Y 满足 $D(X-Y)=D(X+Y)$，则 (　　)

A. $EX=EY$;　**B.** $DX=DY$;　**C.** X 和 Y 不相关;　**D.** X 和 Y 相互独立.

5. 设随机变量 X 服从两点分布 $B(1,p)$, 其中 $p\in(0,1)$, 设 $Y=-X$, 则 X,Y 的相关系数为 (　　)

A.0　　**B.**1　　**C.**-1　　**D.**$\frac{1}{2}$

6. 设两随机变量 X,Y 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$, 则下列说法中一定正确的是 (　　)

A. X,Y 独立;　**B.** X,Y 不独立;　**C.** X 和 Y 相关;　**D.** $EXY=EXEY$.

7. 设 X,Y 为两个随机变量，且 $DX=1$，$DY=2$，$Cov(X,Y)=0$，则随机变量 $X-2Y$ 的方差是_______.

8. 设 X,Y 相互独立，且二阶矩存在，则 X,Y 的相关系数为_______.

9. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,2017,2^2,4^2,0.5)$, 则 $E(XY)=$_______.

10. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,2,9,16,0.5)$, 则 $E(X-Y)^2=$_______.

11. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,3,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$, 则 $E(XY)=$_______.

12. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则 $(X+Y)$ 与 $(X-Y)$ 不相关的充分必要条件是_______.

13. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,1,4,9,0.5)$, 则 $D(X+Y)=$_______.

14. 将一个均匀骰子重复独立投掷 100 次，X 表示出现 1 点的次数，Y 表示出现 2 点的次数.

(1) 分别写出 X,Y 的分布列；

(2) $X+Y$ 表示什么事件发生的次数？它的分布列是什么？

(3) 试利用 (1) 与 (2) 的结果求 $Cov(X,Y)$.

15. 设 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} x+y & 0<x<1,0<y<1, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$

(1) 求 X,Y 的边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$, 并判断 X,Y 是否独立；

(2) 求 X,Y 的相关系数.

考点十三　大数定律和中心极限定理

1. 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 相互独立，且均服从泊松分布 $P(2)$, 则由林德伯格—列维中心极限定理，$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 2n}{\sqrt{n}} < 2\right)$=(　　)

A.$\Phi\left(\sqrt{2}\right)$　**B.**$\Phi(2)$　**C.**$\Phi(1)$　**D.**1

2. 设 $X_1, X_2...X_n$ 均服从 $E(2)$ 且相互独立，则由独立同分布的中心极限定理，可得 $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \geq 2\right)$=(　　)

A.$\Phi(1)$　**B.**$\Phi(-1)$　**C.**$\Phi(2)$　**D.**$\Phi(-2)$

3. 设 $(X_1, X_2, ..., X_{50})$ 是取自泊松分布 $P(2)$ 的样本，则 $P\left(120 < \sum_{i=1}^{50} X_i < 130\right)$ 约等于 (　　)

A. $\Phi(130) - \Phi(120)$　**B.** $\Phi(30) - \Phi(20)$　**C.** $\Phi(3) - \Phi(2)$　**D.** $\Phi(0.3) - \Phi(0.2)$

4. 设随机变量序列 $\{X_i, i \geq 1\}$ 独立同分布，且 X_1 的期望为 0, 方差为 $\frac{1}{2}$, 如果常数 C 使 $\lim_{n\to+\infty} P\left\{C\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $C =$(　　)

A. 1　**B.** 2　**C.** $\sqrt{2}$　**D.** $\sqrt{3}$

5. 设随机变量序列 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 独立且都服从标准正态分布，如果常数 C 使 $\lim_{n\to+\infty} P\left\{C \cdot \frac{\Sigma_{i=1}^{n}(X_i - X_{n+i})^2 - 2n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $C =$(　　)

A. 1　**B.** 2　**C.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$　**D.** $\sqrt{2}$

6. 公司设有 500 部电话，每部电话使用内线的概率是 0.9, 且每部电话是否拨打外线之间是相互独立的，那么有______ 部电话拨打外线的概率最大.

7. 河北某中学一宿舍楼按 400 名学生的规模建造，该校学生每天洗漱时间是有规定的，按每人在规定的时间内大约有 10% 的时间占用一个水龙头计算，为能以 95% 的概率保证用水需要，该宿舍至少要安装多少个水龙头？(假设每人用水情况相互独立)

8. 某网络公司计划在某大学校园经营自行车租赁 APP 业务，市场数据调查表明 60% 的学生愿意注册这项 APP, 若该大学在校生 10000 名，试估计将注册这项 APP 的人数超过 5900 人的概率.

(参考: $\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right) = 0.996$, $\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right) = 0.979$, $\Phi\left(\frac{5}{6}\right) = 0.798$, $\Phi\left(\frac{6}{5}\right) = 0.885$)

9. 检验员逐个检查某产品、每查一个需要花 10 秒钟，但某些产品需要重复检查一次，重复检查的时间也是 10 秒钟，若每个产品需重复检查的概率为 0.5.
(1) 用 X_k 表示检查第 k 个产品所花的时间 (单位：秒), 求 EX_k, DX_k;
(2) 用中心极限定理估算检验员检查 1900 个产品所花时间不多于 8 小时的概率.
参考值：$\Phi(\frac{6}{19}) = 0.62$, $\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{19}}\right) = 0.92$.

10. 设 $n \geq 1$, 随机变量 $X_n \sim B(n, \frac{1}{2})$, $Y_n \sim P(n)$, 已知 X_n 与 Y_n 独立。试求：
(1)$X_1 + Y_1$ 的分布列；(2) $X_{100} + Y_{100}$ 的近似分布.

11. 一位职工乘坐公交车上班，他每天上班等公交车的时间服从均值为 5 分钟的指数分布，试估算他在一年上班的 288 天中等车时间之和大于 24 小时的概率.

考点十四　总体与样本

1. 设 $(X_1, X_2, ..., X_{10})$ 为来自总体 $X \sim E(1)$ 的简单随机样本，则 $D\overline{X}$ 和 ES^2 分别为 (　　)
A. 1,1　**B.** 0.1,1　**C.** 0.1,2　**D.** 1,0.2
2. 设总体 $X \sim B(1, P), (X_1, X_2, X_3)$ 是该总体的样本，$U = X_1 + X_2, V = 2X_3$, 则 (　　) **A.**$U = V$;　**B.**$P(U = V) = 1$;　**C.**$DU = DV$;　**D.** $EU = EV$.
3. 设 $X_1 \sim X_{10}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$EX = 4, DX = 0.9$, 则 (　　)
A.$E\overline{X} = 4, D\overline{X} = 0.09$;　**B.**$E\overline{X} = 4, D\overline{X} = 0.9$;
C.$E\overline{X} = 0.4, D\overline{X} = 0.09$; **D.**$E\overline{X} = 0.4, D\overline{X} = 0.9$.
4. 设 (X_1, X_2, X_3) 为取自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，σ^2 为未知参数，$T_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $T_2 = \dfrac{X_3 - X_1}{2}$, $T_3 = \sum_{i=1}^{n} X_i/\sigma$ 和 $T_4 = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ 中不是统计量的为 (　　)
A. T_1　**B.** T_2　**C.** T_3　**D.** T_4
5. 设 (X_1, X_2, X_3, X_4) 为取自总体 $E(3)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $D\overline{X}$ =(　　)

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{36}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{1}{12}$

6. 设 (X_1,X_2,X_3) 为取自总体的样本，σ^2 已知，μ 为未知参数，则 $T_1=X_1+X_2+X_3$、$T_2=\dfrac{X_3-\mu}{2}$、$T_3=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{X_i}{S}$ 和 $T_4=\max\{X_1,X_2,X_3\}$ 中不是统计量的是 (　　)

A. T_1 **B.** T_2 **C.** T_3 **D.** T_4

7. 设 $(X_1,X_2,...,X_N),(Y_1,Y_2,...,Y_N)$ 为分别取自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的独立样本，相应的样本方差记为 S_1^2,S_2^2, 则 $P(S_1^2>S_2^2)$ =(　　)

A. 0.1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 0.5

8. 设 $(X_1,X_2...X_{10})$ 为取自二项总体 $B(25,\frac{1}{5})$ 的样本，S^2 为样本方差，则 ES^2=(　　)

A. $\frac{1}{5}$ **B.** 5 **C.** 25 **D.** 4

9. 设总体 $X\sim P(2)$, 设 $X_1,X_2,...,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，记
$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, 则 $D\overline{X}=$ (　　)

A. $\frac{2}{n^2}$ **B.** $\frac{2}{n}$ **C.** $\frac{4}{n}$ **D.** $\frac{4}{n^2}$

10. 从总体 $U(\theta-1.5,\theta+1.5)$ 抽取样本 $X_1,X_2,...,X_n$，用样本均值 $\overline{X}$ 估计未知参数 θ，当样本容量 n______ 时，$\mathrm{D}\overline{\mathrm{X}}\leqslant 0.01$.

11. 设 $(X_1,X_2,...,X_{10})$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,2^2)$ 的简单随机样本，其中 μ 未知，$\overline{X},S^2$ 分别为样本均值、样本方差，则 $D(\overline{X}+S^2)=$______.

考点十五　三大分布

1. 设 $X_1\sim X_{10}$ 相互独立，均服从 $N(0,1)$.$Z=c\times\dfrac{X_1}{X_2^2+X_3^2+X_4^2}$ 服从 F 分布，则常数 c=(　　)

A. 3 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 1

2. 在正态分布，指数分布，均匀分布，泊松分布，χ^2 分布，t 分布和 F 分布这 7 个一维分布中，具有可加性的有 (　　)

A. 2 个 **B.**3 个 **C.**4 个 **D.** 5 个

3. 设随机变量 $X\sim\chi^2(5)$, 若 $P(X<x)=0.9$, 则 $x=$(　　)

A. $\chi^2_{0.1}(5)$ **B.** $\chi^2_{0.9}(5)$ **C.** $-\chi^2_{0.9}(5)$ **D.** $-\chi^2_{0.1}(5)$

4. 设 $(X_1,X_2,...,X_6)$ 是取自正态总体 $N(0,2)$ 的样本，若 $\dfrac{a(X_1+X_3-X_5)}{\sqrt{X_2^2+X_4^2+X_6^2}}\sim t$ 分布，则常数 $a=$(　　)

A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ **B.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **C.** 1 **D.** $\sqrt{\frac{1}{2}}$

5. 设 $(X_1,...,X_n)$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,$\overline{X}$ 为样本均值,则 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 和 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 分别服从的分布为 (　　)

A. $\chi^2(n),\chi^2(n)$ **B.** $\chi^2(n),\chi^2(n-1)$ **C.** $\chi^2(n-1),\chi^2(n-1)$ **D.** $\chi^2(n-1),\chi^2(n)$

6. 设随机变量 $T\sim t(6)$, 若 $P(|T|<x)=0.8$, 则 $x=$(　　)

A. $t_{0.2}(6)$ **B.** $t_{0.8}(6)$ **C.** $t_{0.1}(6)$ **D.** $t_{0.3}(6)$

7. 设 $(X_1, X_2 ... X_{10})$ 为取自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，则统计量
$Y=\frac{1}{S}\left(\sum_{k=1}^{S} X_k\right)^2+\sum_{k=6}^{10} X_k^2$ 服从的分布为 (　　)

A. $\chi^2(5)$　　**B.** $\chi^2(6)$　　**C.** $N(0,5)$　　**D.** $N(0,6)$

8. 设 $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ 为来自正态总体 $N(0,9)$ 的简单随机事件，X, S^2 分别为样本的均值和方差，则 $\frac{n\overline{X}^2}{S^2}$ 服从_______ 分布.(要带参数)

9.$X_1, X_2, ..., X_8$，$Y_1, Y_2, ..., Y_{16}$ 分别来自 $N(-1,2^2)$ 和 $N(2,5^2)$ 的样本且相互独立，S_1^2, S_2^2 分别为两个样本的样本方差，则 $\frac{25S_1^2}{4S_2^2}\sim$_______.

10. 设 $(X_1, X_2, ..., X_{17})$ 为来自 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本,S^2 为样本方差,则 $DS^2=$_______.

11. 设 $X_1, X_2, ..., X_5$ 为取自总体 $N(\mu,\frac{1}{6})$ 的样本，则当 $c=$_______ 时，统计量 $c(X_1-X_2)^2+(X_3-2X_4+X_5)^2$ 服从 χ^2 分布.

12. 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$, $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$, 则 T 服从自由度为_______ 的 t 分布.

13. 已知随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)=N(1,0,1,1,0)$, 求：

(1)$P(XY\leqslant Y)$;

(2) 如果有来自总体 (X,Y) 的简单随机样本 $((X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n))$, 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}X_i, \overline{Y}=\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}Y_i, S_X^2=\frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2, S_Y^2=\frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$, 则$T=\sqrt{n}\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-1}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}$ 服从什么分布？(说明理由)

考点十六　矩估计和极大似然估计、估计量评选标准

1. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1, X_2, ..., X_n$ 和 $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，且同分布，样本方差分别是 S_X^2, S_Y^2, 则 σ^2 的一个无偏估计是 (　　)

A. $S_X^2+S_Y^2$　　**B.** $(m-1)\,S_X^2+(n-1)\,S_Y^2$

C.$\frac{S_X^2+S_Y^2}{m+n-2}$　　**D.**$\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}$

2. 设 $(X_1, X_2, ..., X_N)$ 为取自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则 σ^2 的极大似然估计是 (　　)

A. S^2 **B.** $\frac{n-1}{n}S^2$ **C.** $\overline{X}^2$ **D.** $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

3. 下面说法正确的是 (　　)

①样本均值总是总体期望的无偏估计;

②样本 k 阶原点矩是总体 k 阶原点矩的无偏估计;

③样本方差是总体方差的无偏估计;

④样本 k 阶中心矩是总体 k 阶中心矩的无偏估计;

A. ①②③ **B.**①③④ **C.** ①②④ **D.** ①②③④

4. 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是取自总体 $P(\lambda)$ 的一个样本，X 为其样本均值，则 λ^2 的一个无偏估计为 (　　)

A. $\overline{X}^2 - \overline{X}$ **B.** $\overline{X}^2 + \overline{X}$

C. $\overline{X}^2 - \frac{1}{n}\overline{X}$ **D.** $\overline{X}^2 + \frac{1}{n}\overline{X}$

5. 对于总体 $X \sim P(\lambda)$，下面说法正确的是 (　　)

①样本均值与样本 2 阶中心矩都是 λ 的矩估计量；②样本均值是 λ 的无偏估计；

③样本方差是 λ 的无偏估计；④样本 2 阶中心矩是 λ 的无偏估计.

A. ①②③ **B.**①③④ **C.** ①②④ **D.** ①②③④

6. 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是取自指数分布总体 $E(\frac{1}{\theta})$ 的一个样本，X 为其样本均值，X_1^* 为样本最小次序统计量，则 θ 的一个无偏估计是 (　　)

A. $\overline{X}^2$ **B.** $\sqrt{X}$ **C.** X_1^* **D.** nX_1^*

7. 设 $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ 为取自总体 X 的简单随机样本，X 的概率密度为

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$. 求参数 θ 的极大似然估计.

8. 设 $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ 为取自总体 X 的简单随机样本，X 的概率密度函数为

$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x) & 0 \le x \le \theta, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$, 求参数 θ 的矩估计 θ_M ，并证明它是 θ 的无偏一致估计量.

9. 设总体 X 的分布列如下：其中 θ 为未知参数，X 的一组样本观察值为 $X_1=1, X_2=2, X_3=1$ ，求 θ 的矩估计值和极大似然估计值.

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

10. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{\theta-x}, x>\theta, \\ 0, x\le\theta, \end{cases}$ θ 是未知参数，$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 为取自总体 X 的样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 θ_M; (2) 求 θ 的极大似然估计量 θ_L; (3) 比较 θ_M 与 θ_{L} 的优劣。

11. 设 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 是来自总体 X 的样本,X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数，求 θ 的矩估计量 θ_M 和 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

12.$(X_1, X_2, ..., X_n)$ 是来自总体 X 的样本，X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-(x-a)}, & x\ge a, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

其中 a 为参数.

(1) 假设 a 已知，求 $E(\min\{X_1, X_2, .., X_n\}), D(\min\{X_1, X_2, .., X_n\})$;

(2) 假设 a 未知，令 $\widehat{a_1}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$, 证明：$\widehat{a_1}$ 是 a 的无偏估计；

(3) 令 $\widehat{a_2}=\min\{X_1,X_2,...,X_n\}-\dfrac{1}{n}$, 问当 $n>1$ 时 ,a_1 和 a_2 哪一个更有效？为什么？

13. 设总体 X 的密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\theta^2}{x^3}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$ $(\theta>0$ 为未知参数$)$,$(X_1,X_2,...,X_n)$ 为取自总体 X 的样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$; (2) 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

14. 设总体 X 的密度函数 $f(x)=\dfrac{3x^2}{\theta^3},0\leq x\leq\theta$, 其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,...,X_n$ 为取自该总体的样本.

(1) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$; (2) 求 θ 的极大似然估计 θ_2;

(3) 寻求一个新估计量 $\hat{\theta}_3$, 使其在均方误差 $\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}\right)=\mathrm{E}\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2$ 标准下优于 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$, 即 $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_3)\leqslant\min\{\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1),\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_2)\}$.

15. 设 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 为取自总体 X 的样本,X 的密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2}, & 0 \le x \le \theta \\ 0, & 其他, \end{cases}$

求:(1) 参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$; (2) 参数 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$;
(3) 讨论 $\hat{\theta}_M$ 和 $\hat{\theta}_L$ 两个估计量的无偏性。

16. 设总体 $X \sim B(1, p)$, 其中 $p \in (0, 1)$ 是未知参数,设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.
(1) 求 p 的矩估计量 $\hat{p}_M$;(2) 验证 $\hat{p}_M$ 是否为 p 的无偏估计;
(3) 验证 $(\hat{p}_M)^2$ 是否为 p^2 的无偏估计.

17. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\theta|}, & \theta < x < \theta + |\theta|, \\ 0, & 其他, \end{cases}$, 其中 $\theta \neq 0$, 是未知参数,$X_1, X_2, ..., X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.
(1) 若 $\theta < 0$, 求 θ 的极大似然估计量; (2) 若 $\theta > 0$, 求 θ 的极大似然估计量.

考点十七　区间估计

1. 未知参数的最小置信区间的长度随着置信度的增加而 (　　)
A. 增加　**B.** 减小　**C.** 不变　**D.** 不能确定
2. 未知参数的最小置信区间的长度随着样本容量的增加而 (　　)

A. 增加　**B.** 减小　**C.** 不变　**D.** 不能确定

3. 设 $(X_1, X_2 ... X_9)$ 为取自正态总体 $N(\mu, 9)$ 的样本，则 μ 的置信水平为 95% 的置信区间的长度为 (　)$(\mu_{0.025} = 1.96, \mu_{0.05} = 1.64)$

A. 3.28　**B.** 3.92　**C.** 1.96　**D.** 1.64

4. 正态总体方差未知时，均值的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$. 给定 n 和样本，则该区间长度 (　)

A. 随 α 增大而增大; **B.** 随 α 增大而减小;

C. 与 α 的大小无关; **D.** 无法确定与 α 的关系.

5. 设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ, σ^2 均未知，$\overline{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \Sigma_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$. 则 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间的置信下限为 (　)

A. $\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1)$; **B.** $\overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1)$;

C. $\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{0.05}(n-1)$; **D.** $\overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{0.05}(n-1)$.

6. 设有来自总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ 的容量为 9 的简单随机样本，样本均值 $\overline{X} = 6$, 则未知参数 μ 的置信区间为 0.95 的单侧置信区间的下限为_______. ($u_{0.025} = 1.96, u_{0.05} = 1.65$)

7. 已知一批零件的长度 X(单位：cm) 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 从中随机地抽取 9 个零件，如果的置信度为 0.95 的最短置信区间是 [0.5,1.5], 则该样本的样本均值为_______.

8. 设 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$.

(1) 求 X 的数学期望 EX；

(2) 总体 X 的一组样本观察值为 0.50, 1.25, 0.80, 2.00, 试求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

参考分位点：$u(0.025) = 1.96$, $u(0.05) = 1.645$, $t_{0.025}(3) = 3.1824$, $t_{0.05}(3) = 2.3534$

考点十八　综合题

1. 下列叙述中不正确的是 (　)

A. 若 $P(A) = 1$，$P(B) = 1$，则 $P(AB)$ 不一定等于 1；

B. $P(A+B) \geq P(AB)$；

C. 当随机变量 X,Y 同分布时，$P(X = Y) = 1$ 不一定成立；

D. 通过增加样本容量可以提高区间估计精度.

2. 下面表述正确的有 (　) 个

(1) 设 A, B 为任意两个随机事件，则 $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

(2) 连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 不一定是连续函数

(3) 一维随机变量的概率分布函数 $F(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$

(4) 设随机变量 X,Y 均服从 χ^2 分布，则随机变量 $X+Y$ 也服从 χ^2 分布

(5) 二维正态分布的条件分布一定服从正态分布

(6) 二维均匀分布的边缘分布一定服从均匀分布

A. 2　　**B.** 3　　**C.** 4　　**D.** 5

3. 下面表述正确的有 (　　) 个

(1) 设 A 为随机事件，若 $P(A)=1$, 则 A 为必然事件;

(2) 常数与任意随机变量独立;

(3) 设随机变量 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$, 且相互独立，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$;

(4) 设 X,Y 为随机变量，如果 X^2 与 Y^2 相互独立，则 X,Y 也相互独立;

(5) 设随机变量 X,Y 分布相同，则 $P(X=Y)=1$.

A. 2　　**B.** 3　　**C.** 4　　**D.** 5

4. 由统计物理学知，分子运动速度的绝对值 X 服从 Maxwell 分布，其密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases} Cx^2e^{-x^2/a^2}, & x>0; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(1) 确定常数 C; (2) 求质量为一个单位的分子动能 $Y=0.5X^2$ 的概率密度函数；

(3) 求 DX 和 EY.

(4) 设总体 X 具有上述密度函数，a 是未知参数，$X_1,X_2...X_n$ 是来自总体的一个样本. 求 a 的矩估计量 $\hat{a}_M$ 与 a 的极大似然估计量 $\hat{a}_\mu$.

5. 设随机变量 $X\sim E(\lambda),Y\sim P(\lambda)$, 已知 $E(X+Y)=2$.

(1) 求 λ 的值；　(2) 若 X,Y 独立，求 $P(X+Y\leqslant 1)$.

套卷练习

2018-2019 学年第二学期期末考试 A 卷

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设随机事件 A 的概率 $P(A)=1$, 则对任意的随机事件 B，必有 (　　)

A. $P(A\cup B)=P(B)$　　**B.** $P(A-B)=P(B)$

C. $P(B-A)=P(B)$　　**D.** $P(AB)=P(B)$

2. 将离散型随机变量 X 的取值按由小到大的顺序排列为 $x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,...$, 设 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $P(X=x_n^*)$=(　　)

A. $P(x_{n-1}^*\leq X\leq x_n^*)$　　**B.** $F(x_n^*)-F(x_{n-1}^*)$

C. $P(x_{n-1}^*<X<x_n^*)$　　**D.** $F(x_{n+1}^*)-F(x_{n-1}^*)$

3. 将一个 8 寸蛋糕随机地切成两块，则这两块面积的相关系数为 (　　)

A. 0　　**B.** 0.5　　**C.** 1　　**D.** -1

4. 设随机变量 $X\sim\chi^2(\mathrm{n})$, 则由林德伯格-列维中心极限定理,$\lim_{n\to\infty}P\left(\dfrac{X-n}{\sqrt{2n}}\leqslant 2\right)=$ (　　)

A. $\phi(\sqrt{2})$　　**B.** $\phi(1)$　　**C.** $\phi(2)$　　**D.** 1

5. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布，服从 $N(0,1)$, 且 $T=\sqrt{c}\dfrac{X_1}{\sqrt{X_2^2-X_3^2-X_4^2}}$ 服从 t 分布，则常数 $c=$(　　)

A. $\dfrac{1}{3}$　　**B.** 3　　**C.** $\dfrac{2}{3}$　　**D.** 1

二、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1. 从 3 枝不同的鸢尾花中随机等可能地选出 1 枝，有放回地选择 4 次，则同一枝至少连续 3 次被选出的概率是________.

2. 设 A、B 为随机事件,$P(A)=0.5,P(B)=0.2,P(A\overline{B})=0.4$, 则 $P(A\mid B)=$________.

3. 设随机变量 $X\sim P(2)$，则 $P(X=2EX)=$ ________.

4. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=kexp(-x^2+2x-1)$，则 EX=________，k=________.

5. 设随机变量 X 的期望和方差存在 $EX=\mu,DX=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式可知 $P(|X-\mu|<3\sigma)$ 的取值范围是________.

三、（10 分）设市场上存在两种技术 A 和 B 生产某种产品，次品率分别为 $1\%,2\%$, 市场占有率分别为 $40\%,60\%$。随机抽取一件产品。

(1) 求该产品是次品的概率；

(2) 若该产品是次品，求它是 A 技术生产的概率。

四、（10 分）设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\quad Y = \begin{cases} -1, & X < 1 \\ 1, & X \geq 1 \end{cases}$, 求 Y 的概率分布函数。(结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

五、（15 分）设随机变量 X 与 Y 独立同分布，服从参数为 1 的指数分布。
(1) 求 $Z = 2X + 3Y$ 的概率密度函数 $f_x(x)$; (2) 求 $U = \min(X, Y)$ 的数学期望 EU.

六、（12 分）设随机变量 X 在 (1,2) 上服从均匀分布，随机变量 Y 在 $X = x$ 条件下服从参数为 x 的指数分布。
(1) 求 (X, Y) 的联合概率密度函数; (2) 求 $Z = XY$ 的数学期望;
(3) 判断 X 与 Y 是否相关，并给出理由。

七、（10 分）设总体 X 的期望 μ 及方差 σ^2 均存在且是有限的常数，已知样本 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的观察值是 $(x_1, x_2, ..., x_n), Z = g(X_1, X_2, ..., X_n)$ 是样本的函数，z 是其观察值，令目标函数为 $L = \sum_{i=1}^{n} (x_i - z)^2$, 当函数 L 取最小值时，求 z，EZ, DZ.

八、（10 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}$, 其中 θ 为未知参数，已知样本 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的观察值是 $(x_1, x_2, ..., x_n)$。
(1) 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$; (2) 判断 $\hat{\theta}$ 的无偏性，并给出理由。

2019-2020 学年第二学期期末考试 B 卷

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 $DX \neq DY$, 则 (　　)

A. X 与 Y 一定独立;　　　　**B.** X 与 Y 一定不独立;

C. $X+Y$ 与 $X-Y$ 一定独立;　　**D.** $X+Y$ 与 $X-Y$ 一定不独立.

2. 设随机变量 $X \sim N(100,100)$, 随机抽取一个容量为 10 的样本，令样本均值为 Y, 则 (　　)

A. $EY=100,\ DY=100$;　　**B.** $EY=100,\ DY=10$;

C. $EY=10,\ DY=100$;　　**D.** $EY=10,\ DY=10$.

3. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ x^2-3b, & a<x\le 2\\ c, & x>2\end{cases}$, 则 a 的值为 (　　)

A. $-\sqrt{3}$　　**B.** $\sqrt{3}$　　**C.** 1　　**D.** 0

4. 设随机变量序列 $\{X_i, u\ge 1\}$ 独立且都服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的泊松分布，如果常数 C 使得 $\lim_{n\to+\infty} P\left\{C\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{2i}-X_{2i-1})}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $C=$(　　)

A. 1　　**B.** 2　　**C.** $\sqrt{2}$　　**D.** $\sqrt{3}$

5. 设 $X_1,X_2,...,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$, $S_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$, $S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$, $S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$, 则服从 $t(n)$ 分布的随机变量是 (　　)

A. $T_1=\frac{\bar{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　**B.** $T_2=\frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$　**C.** $T_3=\frac{\bar{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　**D.** $T_4=\frac{\bar{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

6. 某人向一个目标射击，直到击中 r 次目标. 假设每次射击命中目标的概率为 p $(0<p<1)$.X 为射击停止时未命中目标的次数，则对 $k=0,1,2,...,P(X=k)=$(　　)

A. $C_{k+r}^{r}p^r(1-p)^k$　　**B.** $C_{k+r-1}^{r}p^r(1-p)^k$　　**C.** $C_{k+r}^{r-1}p^r(1-p)^k$　　**D.** $C_{k+r-1}^{k}p^r(1-p)^k$

7. 从一批灯泡中随机地抽取 n 只做寿命试验,测得寿命 (单位:小时) 分别为 $X_1,X_2,...,X_n$, $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$。设灯泡的寿命服从正态分布，则灯泡寿命均值的置信水平为 0.95 的置信上限为 (　　)

A. $\bar{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)$　**B.** $\bar{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)$

C. $\bar{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$　**D.** $\bar{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$

8. 设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1)$, 则必有 (　　)

A. $X+Y$ 服从正态分布;　　**B.** X^2+Y^2 服从 χ^2 分布;

C. X^2, Y^2 都服从 χ^2 分布;　**D.** $\frac{X^2}{Y^2}$ 服从 F 分布.

9. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则随着 σ 的增大，概率 $P(X-\mu<2\sigma)$(　　)

A. 单调增大　**B.** 单调减小　**C.** 增减不定　**D.** 保持不变

10. 下列表述正确的有 (　　) 个

(1) 设 A, B 为任意两个随机事件，则 $A + (B - A) = B$.

(2) 连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 是连续函数.

(3) 设 $F(x)$ 是任意一维随机变量 X 的概率分布函数，则 $F(x)$ 的定义域是实数域.

(4) 设随机变量 X, Y 均服从一维正态分布，则随机变量 $X + Y$ 也服从正态分布.

(5) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，则它们独立.

(6) 设 X, Y 的相关系数为 1，则存在常数 a, b, 使得 $Y = aX + b$.

A. 2　**B.** 3　**C.** 4　**D.** 5

二、填空题（每空 3 分，共 12 分）

1. 设随机变量 $X_i(i=1,2)$ 的分布列 $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = \dfrac{1}{4}, P(X_i = 0) = \dfrac{1}{2}$, $P(X_1X_2 = 0) = 1$, 则 $P(X_1 = X_2) =$________.

2. 设随机变量 X, Y 都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 且 $P(X \leq 1, Y \leq -1) = \dfrac{1}{5}$, 则 $P(X > 1, Y > -1) =$________.

3. 在区间 (0,1) 上随机独立地取出 n 个数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 记最大数与最小数之间距离为 S, 用 Y 表示 $X_1, X_2, ..., X_n$ 中大于 $\dfrac{1}{3}$ 的个数，则 $ES =$________，$DY =$________.

三、（10 分）新型冠状病毒可以通过咽拭子进行核酸检查，但因各种干扰因素影响，检测结果存在一定比例的假阳性和假阴性。假阴性是指受测试者是感染者但核酸检测结果为阴性，假阳性是指受测试者不是感染者但核酸检测结果为阳性。在我国公布的数据中，密切接触者被感染的概率是 10%, 核酸检测中假阴性比例为 20%, 假阳性的比例为 0.001%。现对一密切接触者进行核酸检测。

(1) 求此人检测结果为阴性的概率；

(2) 求若此人的检测结果为阴性，此人未被感染的概率；

(3) 求若此人的检测结果为阳性，此人已被感染的概率。

四、（14 分）已知 (X, Y) 在以点 (0,1),(1,-1),(1,1) 为顶点的三角形区域上服从均匀分布。求：(1) 边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$ (2) 条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$

(3)$P\left(X > \dfrac{1}{2}|Y > 0\right)$ (4)X, Y 是否独立？是否相关？为什么？

五、（12 分）已知随机变量 X 与 Y 相互独立，其分布函数分别为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{4}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

记 $Z = Y - X$, 其概率分布为 $F_Z(z)$, 求：

(1)$F_Z(z)$ (2)DZ (3)$Cov(Z, X)$

六、（10 分）记随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求:(1)$Z = X + Y$ 的密度函数；(2)$W = \dfrac{(X+Y)}{3}$ 的密度函数.

七、（12 分）设总体 X 的概率密度函数为 $f(x, \theta) = \begin{cases} 2\theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - 2\theta, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，其中 $\theta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 是未知参数，$X_1, X_2, ..., X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本 $X_1, X_2, ..., X_n$ 中小于 1 的个数。

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$; (2) 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$;

(3) 验证 θ_M 与 θ_L 是否具有无偏性.

2021-2022 学年第一学期期末考试 A 卷

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 袋中装有标记编号为 1 到 10 的 10 个球，现随机地抽出 4 个并按照标记的编号从小到大排列，现排在第二的球的编号为 6 的概率是 (　　)

A. $\frac{1}{4}$　　**B.** $\frac{1}{5}$　　**C.** $\frac{1}{6}$　　**D.** $\frac{1}{7}$

2. 设 A, B 为两个随机事件，$P(B) > 0$, 则下列选项一定正确的是 (　　)

A. $P(A) \leqslant P(A|B)$;　　**B.** $P(A) \geqslant P(A|B)$;

C. $P(AB) \leqslant P(A|B)$;　　**D.** $P(AB) \geqslant P(A|B)$;

3. 已知三个随机事件 A, B, C, 若事件 A, B 同时发生时，事件 C 一定发生，则下列选项一定正确的是 (　　)

A. $P(C) = P(AB)$;　　**B.** $P(C) \leq P(AB)$;　　**C.** $P(C) \geq P(AB)$;　　**D.** $P(C) \neq P(AB)$.

4. 设函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{2}(x-1), & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2, \end{cases}$ 则 $F(x)$(　　)

A. 是离散型随机变量的分布函数;　　**B.** 是连续型随机变量的分布函数;

C. 不是离散型也不是连续型随机变量的分布函数;　　**D.** 不是随机变量的分布函数.

5. 设随机变量 $X_1, X_2, ..., X_{100}$ 独立且都服从 $B(1, 0.2)$, 则 $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ 的分布函数 $F_Y(y) \approx$(　　)

A. $\Phi\left(\frac{y-20}{4}\right)$　　**B.** $\Phi\left(\frac{y-20}{16}\right)$　　**C.** $\Phi(4y+20)$　　**D.** $\Phi(16y+20)$.

6. 已知 X, Y 为两个随机变量，且 $P\{X \leqslant 0, Y \leqslant 0\} = \frac{2}{5}, P\{X \leqslant 0\} = \frac{3}{5}$, $P\{Y \leqslant 0\} = \frac{4}{5}$, 则 $P\{\min(X,Y) > 0\} =$(　　)

A. $\frac{2}{25}$　　**B.** 0　　**C.** $\frac{3}{5}$　　**D.** 1

7. 设随机变量 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，则

$\dfrac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$ 的分布是 (　　)

A. $F(1, n-1)$　　**B.** $F(n-1, 1)$　　**C.** $F(1, n)$　　**D.** $F(n, 1)$

8. 设随机变量 X, Y 相互独立,期望和方差均存在,令 $U = \min(X, Y), V = \max(X, Y)$, 则下列叙述错误的是 (　　)

A. $E(U+V) = E(U) + E(V)$　　**B.** $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

C. $D(U+V) = D(U) + D(V)$　　**D.** $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

9. 设随机变量 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，此中 μ, σ^2 均未知，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$, 则 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 (　　)

A. $\left(\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}}, \sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)}}\right)$ **B.** $\left(\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)}}, \sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}}\right)$

C. $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)}\right)$ **D.** $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$

10. 设随机变量 $X \sim E(1), Y \sim E\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 且相关系数 $\rho_{XY}=1$, 则 $P\{Y=cX\}=1$, 其中 $c=$(　　)

A. 0　**B.** $\dfrac{1}{2}$　**C.** 1　**D.** 2

二、填空题（每空 3 分，共 12 分）

1. 假设生男生女的概率均为 $\dfrac{1}{2}$, 已知某家庭有两个孩子，设随机事件 $A=\{$ 该家庭有男孩 $\}$，$B=\{$ 该家庭有女孩 $\}$，则 $P(B|A)=$________.

2. 设 A, B 为随机事件，$0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，且 A, B 相互独立，则 $P(A|B)+P\left(\bar{A}|\bar{B}\right)=$________.

3. 设随机变量 X 服从标准正态分布，则 $P\{X \leqslant E(X^2-1)\}=$________.

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $P\{X=0\}=P\{Y=0\}=\dfrac{1}{3}$, $P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\dfrac{2}{3}$, 则 $P\{X=Y\}=$________.

三、(10 分）设房间 A 中有 3 只白猫和 2 只黑猫，房间 B 中有 2 只白猫和 3 只黑猫，房间 C 中有 4 只白猫和 6 只黑猫。现在随机选取一个房间并从中随机选择一只猫，(1) 求选择的猫为白猫的概率；(2) 已知选择的猫为白猫，求此猫来自房间 A 的概率。

四、(12 分）已知 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} a(x+y), & |x| \leqslant y, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

求: (1) 常数 a 的值；(2) 边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$.

五、（12 分）已知 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

求:(1)$Z_1=X+Y$ 的概率密度函数；(2)$Z_2=\begin{cases}1, X\leqslant 2Y\\ 0, X>2Y\end{cases}$ 的分布.

六、（12 分）设随机变量 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X_1,X_2 相互独立，令 $Y=\alpha X_1+\beta X_2, Z=\alpha X_1-\beta X_2$，　和 β 是不为 0 的常数。求：(1)Y 和 Z 的分布列：(2)Y 和 Z 的相关系数.

七、（12 分）设某种元器件的标准长度为 μ_0(已知), 现抽取 n 个元器件对长度进行测量，假设测量结果 $X_1,X_2,...X_n$ 为来自正态分布 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，并记录绝对误差：$Y_i=|X_i-\mu_0|, i=1,2,\cdots,n$，求:

(1)Y_1 的密度函数；(2) 基于 $X_1,X_2,...X_n$, 求 σ^2 的极大似然估计;

(3) 基于 $Y_1,Y_2,...,Y_n$, 求 σ^2 的极大似然估计.

2021-2022 学年第二学期期末考试 A 卷

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设 A 与 B 为两随机事件，$P(A)=1$, 则 (　　)

A. A 为必然事件;　　**B.** $AB=B$;　　**C.** $P(A-B)=P(\overline{B})$;　　**D.** $P(B-A)=P(B)$;

2. 将一枚硬币独立重复掷 2 次，$A=\{$ 第一次出现正面 $\}$，$B=\{$ 第二次出现反面 $\}$ $C=\{$ 最多出现一次正面 $\}$, 则 (　　)

A. A、B、C 两两独立;　**B.** A 与 BC 独立;　**C.** B 与 AC 独立;　**D.** C 与 AB 独立;

3. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$, 则 (　　)

A. $E\left(X-\dfrac{1}{3}\right)^2<\dfrac{1}{12}$;　　**B.** $E\left(X-\dfrac{1}{4}\right)^2>\dfrac{1}{12}$;

C. $E\left(X-\dfrac{1}{5}\right)^2=\dfrac{1}{12}$;　　**D.** $E\left(X-\dfrac{1}{7}\right)^2<\dfrac{1}{12}$;

4. 设随机变量 $X\sim E(\lambda)$，$Y\sim P(\lambda)$，$Cov(X,Y)=0$，则下列结论错误的是 (　　)

A. $E(XY^2)=\lambda+1$;　**B.** $E(XY)=1$;　**C.** $D(\lambda X+Y)=\lambda+1$;　**D.** $Cov(X,X+\lambda Y)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

5. 已知随机变量 $X\sim\Phi(2x+1)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数,则 $X\sim$(　　)

A. $N(-1,1)$　　**B.** $N(-\frac{1}{2},2)$　　**C.** $N(\frac{1}{2},2)$　　**D.** $N(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

6. 设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim N(1,4)$，相关系数 $\rho_{XY}=1$; 则下列正确的是 (　　)

A. $P\{Y=-2X+1\}=1$　　**B.** $P\{Y=2X+1\}=1$

C. $P\{Y=-2X-1\}=1$　　**D.** $P\{Y=2X-1\}=1$

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ cx, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geq 1,\end{cases}$，且 $P\{X=1\}=0.1$; 则下列结论正确的是 (　　)

A. $c=\dfrac{1}{10}$　　**B.** $X\sim U(0,1)$　　**C.** $c=\dfrac{9}{10}$　　**D.** $c=\dfrac{19}{10}$

8. 已知二维离散型随机向量 (X,Y) 的联合概率分布列如下表, 则当事件 $\{X=0\}$ 与

$X\backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

$\{X+Y=1\}$ 独立时，$\alpha+6b=$(　　)

A. 1　　**B.** 1.2　　**C.** 2　　**D.** 2.4

9. 设 $\xi\sim U(0,10)$, 对 ξ 做了两次独立观测，用 X 表示事件 $\{0\leq\xi\leq 3\}$ 发生的次数，Y 表示事件 $\{2\leq\xi\leq 8\}$ 发生的次数，则 $P\{X+Y=3\}=$(　　)

A. 0.56　　**B.** 0.81　　**C.** 0.14　　**D.** 0.3

10. 设独立同分布的随机变量序列 $\{X_n,n\geq 1\}$，其中 $X_1\sim\chi^2(2)$(自由度为 2 的卡方分布), 则 $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$ 依概率收敛于 (　　)

A. 4　　**B.** 8　　**C.** 16　　**D.** 20

二、填空题（每空 3 分，共 12 分）

1. 已知 $P(A)=0.8, P(B)=0.7, P(A|B)=0.8$, 则 $P(\overline{A}\ \ \overline{B})=$________.

2. 设 $X\sim E(\lambda), Y\sim E(\lambda)$，且相互独立，则 $P\{Y<X-3|X>3\}=$________.

3. 设二维随机向量 (X,Y) 服从区域 $D=\left\{(x,y)|0\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\right\}$ 上的均匀分布，对 (X,Y) 的 3 次独立重复观察中，事件 $\{X\geq Y\}$ 出现次数为 2 的概率是________.

4. 随机选取两组学生各 60 人，分别在两个实验室测定某一化合物的 PH 值，假定每个人的测量的结果是一随机变量，相互独立且服从同一分布，其期望值为 5，方差为 0.3, 用 $\overline{X}$,$\overline{Y}$ 分别表示两组测量结果的平均值，则 $P\{|X-Y|<0.1\}=$________.
(结果用标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

三、（10 分）每箱有 10 件产品，其中有 0 件、1 件、2 件次品的概率均为 $\dfrac{1}{3}$；开箱检验时从箱中任取一件，如果该件产品的检验结果是次品，则认为该箱产品不合格而拒收，否则就认为合格而接收；由于检验误差，正品被误判为次品的概率为 0.02，次品被误判为正品的概率为 0.1；

（1）求一箱产品被接收的概率; (2) 检验 10 箱产品，求接收不少于 9 箱的概率.

四、（12 分）(1) 某小型卡车的载重量为 2 吨，水泥的袋装量 $X\sim N\left(50,2.5^2\right)$(单位：kg), 为了 95% 以上的概率保证卡车不超载，写出卡车能装水泥的袋数 n 满足的条件；
(2) 某汽车公司生产的电动汽车充电一次可行驶的路程 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$(单位：千米), 其中 σ 已知。甲、乙两测试组分别有放回地随机抽取了该公司生产的电动汽车 100 辆和 400 辆，统计每辆充电一次可行驶的路程，样本均值分别为 X_1, X_2 , 甲测试组得 μ 的置信水平为 95% 的置信区间 $[a,b]$, 乙测试组得 μ 的置信水平为 99% 的置信区间 $[a,c]$, 若 $\overline{X_1}-\overline{X_2}=1.34$, 求 $b-a$.(注：已知 $u_{0.025}=1.96$, $\quad u_{0.005}=2.58$)

五、（12 分）设二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求：(1)$P(X+Y\geq 1)$; (2) 边缘概率密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$; (3) 随机变量 X 与 Y 是否

独立，为什么？

六、（12 分）设二维随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数; (2) 求 $Cov(X,Y)$;

七、（12 分）设总体 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)|0\le x,y\le\theta\}$ 上的均匀分布，其中 $\theta>0$ 为总体未知参数，$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n)$ 是来自总体 (X,Y) 的样本，

(1) 根据 $X_1,X_2,..,X_n$, 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta_M}$;

(2) 根据 (X_1,Y_1),$(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n)$, 求参数 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta_L}$;

(3) $\hat{\theta_M}$ 与 $\hat{\theta_L}$ 是否为总体参数 θ 的无偏估计.

2022-2023 学年第一学期期末考试 A 卷

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设有 A、B、C 三个事件，A、C 相互独立，B、C 相互独立，则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是 (　　)

A. A、B 相互独立;　**B.** $AB=\varnothing$;　**C.** AB 与 C 相互独立;　**D.** AB 与 C 互不相容.

2. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} a+be^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 $P\{X>6|X\geq 4\}$=(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　**B.** e^{-2}　**C.** $1-e^{-2}$　**D.** $\dfrac{1}{2e}$

3. 已知 $X\sim\Phi\left(\dfrac{x}{4}-2\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $X\sim$(　　)

A. $N(2,16)$　**B.** $N(8,4)$　**C.** $N(2,4)$　**D.** $N(8,16)$

4. 新冠疫情期间，全球每 24 小时内被新冠病感染的人数 $X\sim P(\lambda)$; 被感染的人群中出现无症状者占比 $\dfrac{1}{4}$, 用 Y 表示全球每 24 小时内被病毒感染后无症状者的人数，则下列 4 个结论中，正确的是 (　　)

(1)X、Y 相互独立;(2)$Y\sim P(\dfrac{\lambda}{4})$; (3)$E\left(X^2\right)=\lambda^2+\lambda$; (4)$P\{Y=2500|X=10000\}=1$.

A. (1)(2)　**B.** (2)(3)　**C.** (3)(4)　**D.** (1)(4)

5. 设 $X\sim U\left(1,3\right)$, $F(x)$ 为 X 的分布函数，在下列 4 种说法中，正确的是 (　　)

(1)$F(x)\sim U(1,3)$; (2)$X^2\sim U(1,9)$; (3)$\left|F(x)-\dfrac{1}{2}\right|\sim U(0,\dfrac{1}{2})$; (4)$D(X)=\dfrac{1}{3}$.

A. (1)(2)　**B.** (2)(3)　**C.** (3)(4)　**D.** (1)(4)

6. 设两个二维随机向量 (X_1,Y_1) 与 (X_2,Y_2) 相互独立且同分布，则下列结论不一定成立的是 (　　)

A. X_1 与 Y_1 独立;　**B.** X_1 与 Y_2 独立;　**C.** X_1 与 X_2 同分布;　**D.** Y_1 与 Y_2 同分布.

7. 设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是来自总体 $N(0,3^2)$ 的独立同分布样本，$\overline{X}$,S^2 分别为其样本均值与样本方差, 则下列结论正确的是 (　　)

A. $E\left(\overline{X}\cdot S^2\right)=9$;　**B.** $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}\sim T(2)$;　**C.** $2\dfrac{\overline{X}}{S}\sim t(4)$;　**D.** $\dfrac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2}\sim F(2,1)$.

8. 设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列，$E(X_n^k)$=μ_k,$k=1,2,3,4$; 则下列结论成立的是 (　　)

A. $P\left\{|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-\mu_2|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$;　**B.** $P\left\{|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-\mu_2|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{\mu_3^2-\mu_2^2}{n^2\varepsilon^2}$;

C. $P\left\{|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-\mu_2|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{n^2\varepsilon^2}$;　**D.** $P\left\{|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2-\mu_2|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$.

9. 设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 为相互独立的随机变量序列,根据辛钦大数定律的条件,$\{X_n,n\geq 1\}$ 服从大数定律，则只要 $\{X_n,n\geq 1\}$ 满足 (　　)

A. 有相同的数学期望;　**B.** 服从同一离散型分布;

C. 服从同一泊松分布;　**D.** 服从同一连续型分布.

10. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中：参数 μ 未知，参数 σ^2 已知；若给定了样本容量 n 以及置信水平 1-$\alpha(0<\alpha<1)$ 时，则参数 μ 的双侧置信区间的长度随样本均值 $\overline{X}$ 的

增加而 (　　)

A. 不变;　**B.** 增加;　**C.** 减少;　**D.** 无法确定增减.

二、填空题（每空 3 分，共 12 分）

1. 已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$, 则 $P(B|A\cup\overline{B})$=________.

2. 设 (X_1,X_2) 是来自总体 $X\sim B(1,p)$ 的独立同分布样本，$Y=\max(X_1,X_2)+\min(X_1,X_2)$, 则 $P\{Y=1\}=$________.

3. 设 $X\sim N(1,2^2)$, $P\{Y=-2\}=p, P\{Y=2\}=1-p, 0<p<1$, 且 X 与 Y 相互独立，则随机变量 $\dfrac{X-1}{Y}\sim$________.

4. 设 $(X_1,X_2,..,X_{10})$ 是来自总体 X 的独立同分布样本，$E(X^2)<+\infty$, $\overline{X}$ 为其样本均值，如果 $E\left(X_1\overline{X}\right)=35$, $D\left(X_1-\overline{X}\right)=90$, 则$\mathrm{E}\left(X^2\right)=$________.

三、（12 分）有两批数量相同的产品，其中第一批产品全部合格，第二批有 25% 不合格，从两批中任取一件产品，试求：

(1) 取出的一件产品是合格品的概率；(2) 如果取得的一件产品是合格品，放回原处，再从其所在批次中任取一件是不合格品的概率.

四、（12 分）在人群中，用 Y 表示性别指标 (0 表示男性，1 表用示女性), 用 X 表示色盲指标 (0 表示无色盲，1 表示有色盲)。已知 (X,Y) 的联合分布为：

X \ Y	0	1
0	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{32}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$

(1) 求 $P\{Y=0|X=1\}$; (2) 求相关系数 ρ_{XY};

五、（12 分）设二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}exp\{-\frac{x^2+(y-x)^2}{2}\},$$

(1) 试求 (X,Y) 的边缘概率密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$;

(2) 判断 X 与 Y 是否相互独立，为什么？

(3) 试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度函数.

六、（10 分）设 $(X_1,X_2,...,X_n)$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的独立同分布样本，$\overline{X},S^2$ 分别为样本均值与样本方差，

(1)$\overline{X}$ 和 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 分别服从什么分布？它们是否相互独立？

(2) 利用上面的结论，证明 X_1+X_2 与 $|X_1-X_2|$ 独立，且 $\dfrac{X_1+X_2}{|X_1-X_2|}\sim t(1)$.

七、（12 分）在可列 n 重伯努利试验中，每次试验成功的概率为 p, 用 X 表示第 2 次成功以前失败的次数。设 $(X_1,X_2,...,X_n)$ 是来自总体 X 的独立同分布样本，求：

(1) 总体 X 的概率分布列; (2) 总体参数 p 的极大似然估计量 p_L.

2022-2023 学年第二学期期末考试 A 卷

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设有 A、B、C 三个事件，$P(B)=0$、$P(A)=1$ ，则下列说法错误的是 (　　)

A. AB、A 相互独立;　　**B.** A、B、C 相互独立;

C. $A\overline{B}C$ 与 C 相互独立;　　**D.** A 与 $\overline{A}$ 不独立.

2. 随机变量 $X \sim N(1,4)$, 且 $\dfrac{x-a}{b} \sim N(0,1)$, 则下列一定成立的是 (　　)

A. $a=1, b=2$　**B.** $a=1, b=-2$　**C.** $a=1, b=\pm 2$　**D.** $a=-1, b=-2$

3. 随机变量 (X, Y) 服从区域 $G=\{(x,y)\colon \max(0, x-1) \leqslant y \leqslant \min(1,x)\}$ 上的均匀分布，$F(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合分布函数. 则 (　　)

A. $F\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)=0$　**B.** $F\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$　**C.** $F(3,2)=0$　**D.** $F\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)=\dfrac{7}{8}$

4. 离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=n)=\dfrac{1}{2^n}, n=1,2,...$，随机变量 Y 与 X 独立同分布，则 (　　)

A. $P(X<Y)=\dfrac{1}{2}$　**B.** $P(Y>X)=\dfrac{1}{3}$　**C.** $P(X=Y)=0$　**D.** $P(X=Y)=1$

5. 已知随机变量 $X \sim B\left(1, \dfrac{1}{4}\right), Y \sim P(1)$, 且 X，Y 独立，则 (　　)

A. $P(XY=0)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}e^{-1}$　**B.** $D(XY)=\dfrac{3}{16}$

C. $D(4X+Y)=5$　**D.** $P(Y>X)=1-2e^{-1}$

6. 设 $X \sim E(\lambda), Y=\min(X,2)$, 则 (　　)

A. Y 为连续型随机变量;　**B.** Y 为离散型随机变量;

C. Y 的分布函数有跳跃间断点;　**D.** Y 的分布函数无跳跃间断点.

7. 随机变量 $(X_1,Y_1) \sim N\left(0,0,1,1,\dfrac{3}{4}\right)$ ，其联合密度函数为 $f_1(x,y)$ ；随机变量 $(X_2,Y_2) \sim N\left(0,0,1,1,\dfrac{1}{4}\right)$, 其联合密度函数为 $f_2(x,y)$. 如果 (X_3,Y_3) 的联合密度函数为 $\dfrac{1}{2}f_1(x,y)+\dfrac{1}{2}f_2(x,y)$, 则 (　　)

A. X_1, X_2, Y_3 分布不相同;　**B.** $\rho_{X_3Y_3}=\dfrac{1}{2}$;　**C.** $E(X_1Y_3)=0$;　**D.** X_3, Y_3 独立同分布.

8. 设来自总体 $X \sim N(0,4)$ 的简单随机样本为 (X_1,X_2,X_3,X_4), 则 (　　)

A. $E\left(\overline{X}\cdot S^2\right) \neq 0$　**B.** $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}} \sim t(2)$　**C.** $2\dfrac{\overline{X}}{S} \sim t(4)$;　**D.** $\dfrac{X_1^2+X_2^2}{X_2^2} \sim F(2,1)$

9. 设 $(X_1,X_2,...,X_n)$ 为来自总体 $X \sim N(0,2^2)$ 的简单随机样本，则 (　　)

A. $P\left\{|\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^n X_i^2-n| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{2n}{\varepsilon^2}$　**B.** $P\left\{|\sum_{i=1}^n X_i^2-4n| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{2n}{\varepsilon^2}$

C. $P\left\{|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{4}{n^2\varepsilon^2}$　**D.** $P\left\{|\dfrac{1}{4n}\sum_{i=1}^n X_i^2-1| \geq \varepsilon\right\} \leq \dfrac{2}{n\varepsilon^2}$

10. 设有来自总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本 $(X_1,X_2,...,X_n)$, 其中 μ,σ 未知，关于 u 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，下面说法正确的是 (　　)

A. 区间中点与 α 有关，区间长度随 α 增加而增加;

B. 区间中点与 α 有关，区间长度随 α 减小而增加;

C. 区间中点与 α 无关，区间长度随 α 增加而减小;

D. 区间中点与 α 无关，区间长度随 α 减小而减小.

二、填空题（每空 3 分，共 12 分）

1. 已知 $P(AB)=P(AC)=\dfrac{1}{4},P(BC)=0$，则 A,B,C 至少有两个发生的概率为________.

2. 设 $X\sim B(n,p),Y\sim B(m,p)$, X,Y 独立，则 $P(X+Y$ 为奇数$)=$________.

3. 设随机变量 $X\sim U(0,1),Y=-2lnX,Y$ 的密度函数为记为 $f_Y(y)$. 则当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=$________.

4. 设 $(X_1,X_2,...,X_{10})$ 是总体 $X\sim N(0,2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$, S^2 分别为样本均值，样本方差，则 $E(\overline{X}^2S^2)=$________.

三、（10 分）假设某类多项选择题共有四个选项，评分规则是：全部选对的得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分，根据小明的经验，每道多项选择题都是有两个或三个正确的选项。因此，小明在做这类题时，会选择一个选项，也会选择两个或三个选项，永远不会选择四个选项。据历史数据，小明选一个、两个和三个选项的概率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. 某次考试中，小明遇到了一道有两个正确选项的多项选择题，但他四个选项都没有判断出正误，只好根据自己的经验去答题。用 X 表示小明这道题的得分，(1) 求 $P(X=0)$; (2) 已知小明此题得了 0 分，求小明选了 2 个选项的概率.

四、（12 分）设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xe^{-x(2+y)}, & x,y\geqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求两个边缘密度函数 $f_x(x)$ 和 $f_Y(y)$;　(2)X,Y 是否独立？说明理由.

五、（12 分）设随机变量 $X_1, X_2, ..., X_n$ 独立同分布，都服从参数为 $\dfrac{1}{\theta}$ 的指数分布，其中 $\theta > 0$. 令 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

求：(1)S_2 的概率密度函数 $f(s)$; (2)X_1, S_n 的相关系数;(3)$\lim_{n\to\infty} P\left(\dfrac{S_n - \theta n}{\sqrt{n}\theta} \leqslant 0\right)$

六、（12 分）已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 3 \\ \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}, & 2 < x < 3 \\ \dfrac{[x]}{a}, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$

其中 $a > 0$ 为常数，$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，试求：

(1) 常数 a;　(2)$P(X = 1)$;　(3) $A = \left(X \leqslant \dfrac{3}{2}\right)$, $B = \left(\dfrac{3}{2} < X \leqslant 2\right)$, $C = (X > 2)$, 对随机变量 X 作 5 次独立重复观测，求事件 A, B, C 恰好分别发生 1, 2, 2 次的概率.

七、（12 分）设总体 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\theta^2} e^{-\frac{y}{\theta x}}, & 0 < x \leq \theta, y \geqslant 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$((X_1, X_2), (X_1, X_2), ..., (X_n, X_n))$ 为来自该总体的简单随机样本，试求：

(1)θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$ (2)$\hat{\theta}_{MLE}$ 是否为 θ 的无偏估计量？给出理由.

参考答案