那是否存在最小上界（resp.最大上界）呢？

上确界

如果E存在最小上界，我们称之为E的上确界。换而言之，如果存在数$\eta \in \mathbb{R}$满足以下两个条件：

- η是上界：任何$x \in E$, 有$x \leq \eta$;
- η是上界中最小的：$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 使得 $x_0 > \eta - \epsilon$

那么称η 是E的上确界，记作

$$\eta = \sup E, \quad 或\eta = \sup_{x \in E} x.$$

下确界

如果E存在最大下界，我们称之为E的下确界。换而言之，如果存在数$\xi \in \mathbb{R}$满足以下两个条件：

- ξ是下界：任何$x \in E$, 有$x \geq \xi$;
- ξ是下界中最大的：$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 使得 $x_0 < \xi + \epsilon$

那么称ξ 是E的下确界，记作

$$\xi = \inf E, \quad \text{或}\xi = \inf_{x \in E} x.$$

例 (求以下集合的上下确界)

$\mathbb{N}, \quad [0,1], \quad (0,1), \quad \mathbb{Q} \cap (0,1).$

如果数集E没有上界，我们约定$\sup E=+\infty$，类似地，如果E没有下界，$\inf E=-\infty$。$\emptyset$既没有上确界也没有下确界，我们约定$\inf\emptyset=+\infty$，　$\sup\emptyset=-\infty$。

确界原理

非空有上界（resp. 下界）的数集在$\mathbb{R}$中存在上确界（resp. 下确界）。

例

假设E_1,E_2是非空数集，如果对于所有$x\in E_1,y\in E_2$成立$x\le y$。

证明：$\sup E_1\le\inf E_2$。

例

假设E_1,E_2是非空有界数集，定义$E_1+E_2:=\{z\colon z=x+y,x\in E_1,,y\in E_2\}$。
证明：　$\sup(E_1+E_2)=\sup E_1+\sup E_2$。

最大元素和最小元素

假设$E \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$，如果$a$满足以下两个条件：

1. $a \in E$;
2. $\forall x \in E, x \leq a$ （resp. $\forall x \in E, x \geq a$）;

那么a 叫做E的最大元素（resp. 最小元素），记作 $a = \max E$（resp. $a = \min E$）。

例 (找出下列集合的最大元素和最小元素)

$[0, 1], \quad (0, 1), \quad \mathbb{N}$

注

- E是一个有界非空数集，那么$\sup E = \min\{E \text{ 的上界}\}, \inf E = \max\{E \text{ 的下界}\}$;
- 非空有界数集不一定存在最大元素和最小元素，但是上下确界一定存在;

注

- 数集E 如果存在最大元素，那么该最大元素一定是E的上确界；
- 有界数集E的上确界（resp.下确界）不一定属于E。如果它属于E，那么它也是E的最大元素（resp. 最小元素）。

确界原理的几个推论

1. 自然数集的任何非空有上界子集都有最大元素；
2. 自然数集没有上界；
3. 整数集的任何非空有上界子集都有最大元素，非空有下界子集都有最小元素；
4. 整数集既没有上界也没有下界

Archimedes原理

如果h 是任何固定的正数，那么对于任何实数x，存在唯一的整数k，使得$(k-1)h \leq x < kh$。

Archimedes原理的几个推论

1. 对于任何正数ϵ，存在自然数n，使得$0 < 1/n < \epsilon$;
2. 如果数$x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，并且对于任何$n \in \mathbb{N}$，有$x < 1/n$，那么$x = 0$;
3. 对于满足$a < b$的任何数$a, b \in \mathbb{R}$，存在有理数$r \in \mathbb{Q}$，使得$a < r < b$;

取整函数

$\forall x \in \mathbb{R}$，$\exists! k \in \mathbb{Z}$，使得$k \leq x < k+1$。这个数$k$ 称为数x 的整数部分，记为$[x]$。$x - [x]$称为x的小数部分，记为$\{x\}$。
因此 $x = [x] + \{x\}$, $[x]$是不大于x的最大整数，$\{x\} > 0$。

Dedekind 分割和$\mathbb{R}$的构造

有理数集$\mathbb{Q}$的分割

假设有两个非空有理数集合A, B，如果它们满足：

- $A \cup B = \mathbb{Q}$;
- $\forall a \in A, \forall b \in B$，成立 $a < b$;

那么称A和B构成$\mathbb{Q}$的一个Dedekind分割，记为A/B。

实数集

有理数集的所有Dedekind分割的集合称为实数集，记为$\mathbb{R}$。
注意，有理数r对应两个Dedekind分割：$(\infty, r)/[r, +\infty)$ 和 $(\infty, r]/(r, +\infty)$，在这里我们将其视为同一个分割。
实数$A_1/B_1 \leq A_2/B_2$ 当且仅当 $A_1 \subset A_2$。

实数的分割

假设有两个非空实数集合$\overline{A}, \overline{B}$，如果它们满足：

- $\overline{A} \cup \overline{B} = \mathbb{R}$;
- $\forall a \in \overline{A}, \forall b \in \overline{B}$，成立 $a < b$;

那么称$\overline{A}$和$\overline{B}$构成$\mathbb{R}$的一个Dedekind分割，记为$\overline{A}/\overline{B}$。

Dedekind分割定理

设$\overline{A}/\overline{B}$是实数集$\mathbb{R}$的一个分割，那么或者$\overline{A}$有最大数，或者$\overline{B}$有最小数。

实数连续性的等价描述

Dedekind分割定理和确界原理等价。

证明（Dedekind分割定理）

设$A = \overline{A} \cap \mathbb{Q}, B = \overline{B} \cap \mathbb{Q}$,那么$A/B$是$\mathbb{Q}$的Dedekind分割。
记$c = A/B$，不妨假设$c \in \overline{A}$。
下面证明c是$\overline{A}$的最大元。
反证法，假设不是。
那么存在$c_1 = A_1/B_1 \in \overline{A}$使得$c_1 > c$。
因此$A \subsetneq A_1$，所以A_1中有有理数r 满足$r \notin A$。
一方面，$r = (-\infty, r)/[r, +\infty) \leq A_1/B_1 \in \overline{A}$，可知$r \in \overline{A}$。
另一方面$A < r$，与假设矛盾。
因此假设不成立，c是$\overline{A}$的最大元。