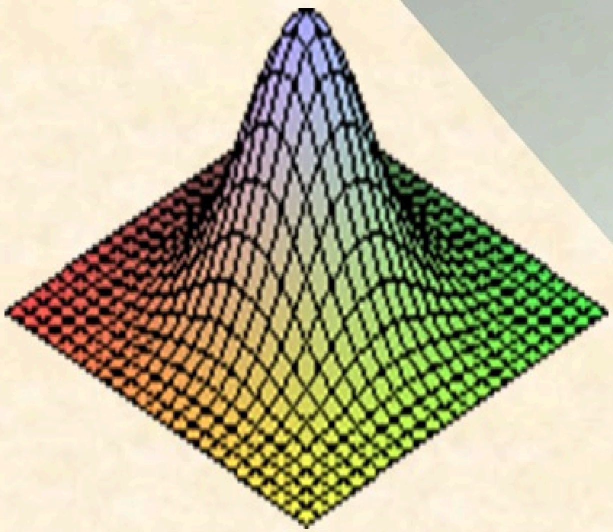
# 概率论与数理统计



主讲人： 吴 娟

制作人：叶鹰　吴娟

wujuan@hust.edu.cn

**Poisson定理** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda$（$\lambda>0$），则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n{}^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

证：
$$C_n^k p_n{}^k (1-p_n)^{n-k} = \boxed{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\frac{(\boxed{np_n/n})^k}{\boxed{k!}}(1-\boxed{\frac{np_n}{n}})^{n-k}$$

$$=1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})\frac{(np_n)^k}{k!}\left[(1-\frac{np_n}{n})^{-\frac{n}{np_n}}\right]^{-np_n\cdot\frac{n-k}{n}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

应用： 设$X\sim B(n,p)$，当$n\geq 10$，$p\leq 0.1$时，有

$$\boxed{P(X=k)\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}}$$

例 某射手向一远处活动目标射击，其命中率$p$=0.005. 求他独立地射击200次能命中5次以上的概率。

解 记$X$为命中次数，则$X \sim B(200，0.005)$

$$P(X>5)=1-P(X\le 5)$$

$$=1-\sum_{k=0}^{5} C_{200}^{k} 0.005^{k} 0.995^{200-k}$$

$$P(X=k)\approx \frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$$

=0.000564

注意到

$1^0$ $\quad \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ge 0$

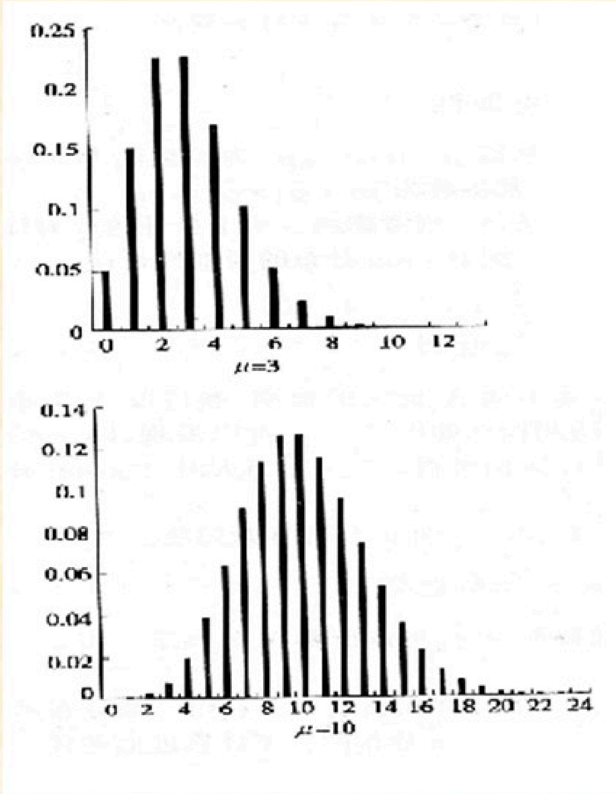
$2^0$ $\quad \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}}e^{-\lambda}=1$

$$\approx 1-\sum_{k=0}^{5}\frac{(200\times 0.005)^k}{k!}e^{-200\times 0.005}$$

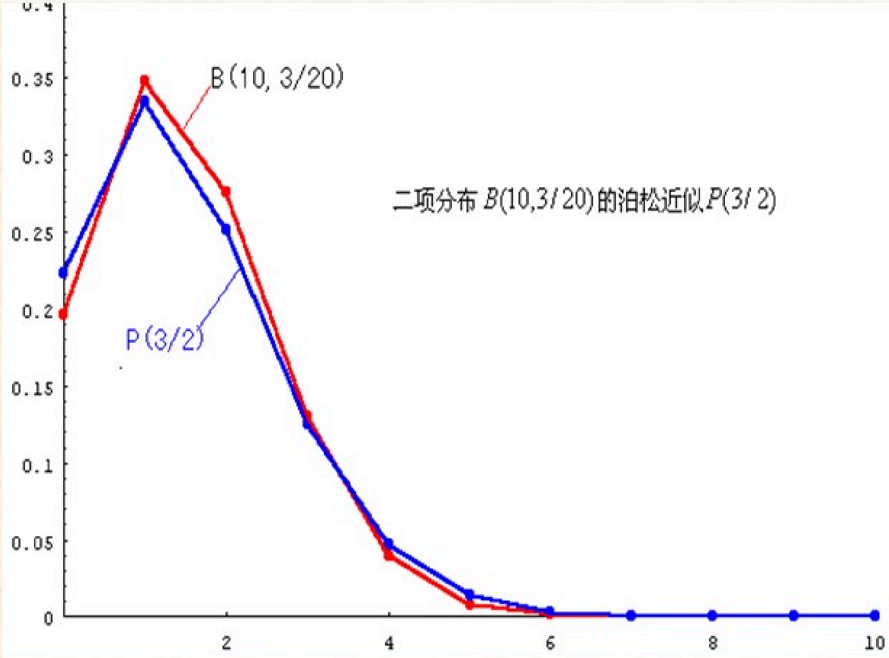
$$=\sum_{k=6}^{\infty}\frac{1^k}{k!}e^{-1} \overset{\text{查表}}{=\!=\!=} 0.000594$$

## 3．泊松（Poisson）分布　　$X \sim P(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (\lambda>0) \qquad k=0,1,2,\ldots$$



## 投票 最多可选1项




A 泊松近似效果好

B 泊松近似效果不好



雨课堂 Rain Classroom

例 由某商店过去的销售记录可知，某种商品每月的销售量（单位：件）可用参数为$\lambda=5$的泊松分布描述。为了有99%以上的把握保证不脱销，问商店在月底至少要进货多少件？

解 记$X$为该商品的月销售量（件），由题设$X\sim P(5)$

设月底进货$N$件，则不脱销的概率为

$$P(X \le N) = \sum_{k=0}^{N} \frac{5^k}{k!} e^{-5} \ge 0.99$$

查表得$N+1\geqslant 12$，即$N\geqslant 11$.

$$\sum_{r=x}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

| $x$ | ...... | $\lambda=4.5$ | $\lambda=5.0$ |
|---|---|---|---|
| ⋮ | | ⋮ | ⋮ |
| 10 | ...... | 0.017093 | 0.031828 |
| 11 | ...... | 0.006669 | 0.013695 |
| 12 | ...... | 0.002404 | 0.005453 |
| 13 | ...... | 0.000805 | 0.002019 |
| ⋮ | | ⋮ | ⋮ |

## 4．几何分布

设每次试验的“成功”率均为$p$，$X$为进行独立试验首次“成功”的试验次数，则

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \qquad k=1,2,\ldots$$

几何分布的无记忆性

取正整数值的随机变量$X$服从几何分布的充要条件是：

$$P(X>m+n \mid X>m)=P(X>n), \forall m,n\in Z^{+}.$$

必要性：假设$X$服从几何分布，则对任意的正整数$m,n$,有

$$P(X>m+n \mid X>m)=\frac{P(X>m+n \qquad )}{P(X>m)}=\frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^{m}}=(1-p)^{n}$$

$$=P(X>n).$$

# § 2.3 连续型随机变量

## 一、问题的提出

●出生于元月一日零点？ ●灯管寿命为200小时？

例　设飞机投弹落

半径的平方$r^2$成

求$X$的分布函

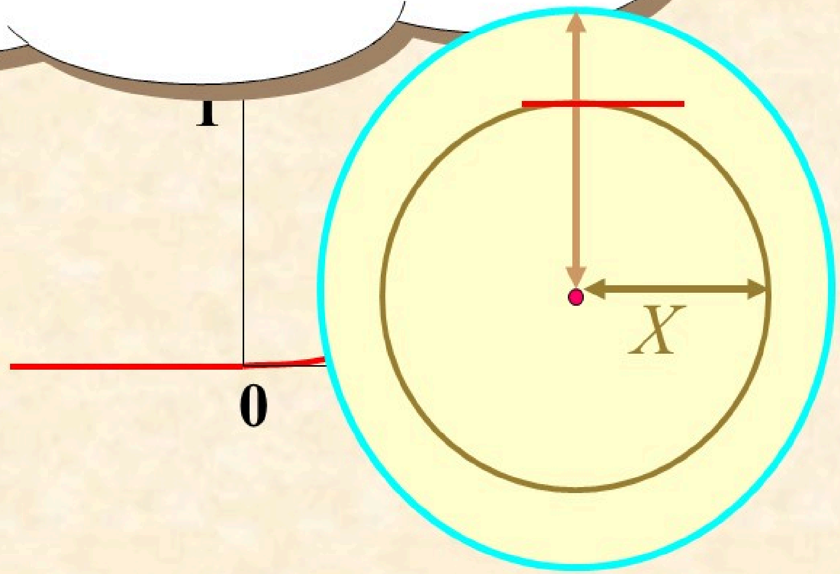
$$F(x)=\sum_{x_i\le x}p_i \xrightarrow{\text{连续化}} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ f(x)=\frac{1}{2}x,\ x\ge 0.$$

解：$F(x)$

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ kx^2, & 0\le x\le 2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

且 $P(X\le 2)=P(\Omega)$

$\Rightarrow k2^2=1 \Rightarrow k=\frac{1}{4}$



## 二、定义

如果对随机变量$X$存在一（非负）函数$f(x)$，使其分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad -\infty<x<+\infty$$

则称$X$为连续型随机变量，记为C.R.V.（Continuous Random Variable），并称$f(x)$为$X$的概率密度函数。

## 三、性质

（1）C.R.V.的分布函数$F(x)$为连续函数；

$$P(X=a)=0.$$

证：$$\begin{aligned} 0\le P(X=a) &= F(a)-F(a-) \\ &\le P(a-\Delta x<X\le a) \\ &=\int_{a-\Delta x}^{a} f(t)dt \to 0 \quad (\Delta x\to 0) \end{aligned}$$

## 多选题 100分

**下列选项正确的是：**

A $P(A)=0 \Rightarrow A=\phi$

B $A=\phi \Rightarrow P(A)=0$

C $P(B)=1 \Rightarrow B=\Omega$

D $B=\Omega \Rightarrow P(B)=1$

（2）$P(a \leqslant X \leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$

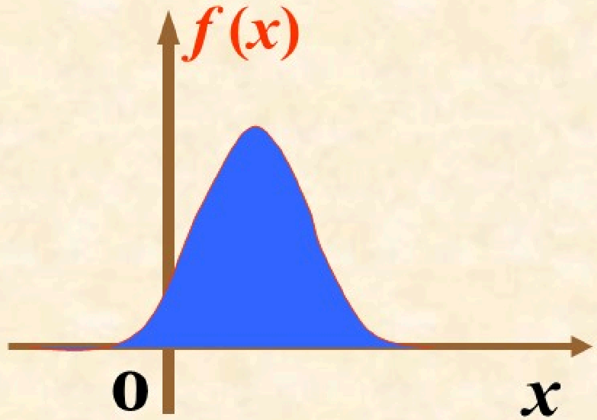
（3）若$f(x)$在$x$处连续，则 $F'(x)=f(x)$

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=f(x)$$

$$P\{x<X\le x+\Delta x\}\approx f(x)\Delta x$$

（4）$f(x)\geqslant 0$； $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$



例 设$X$的密度函数
$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ A-x, & 1\le x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

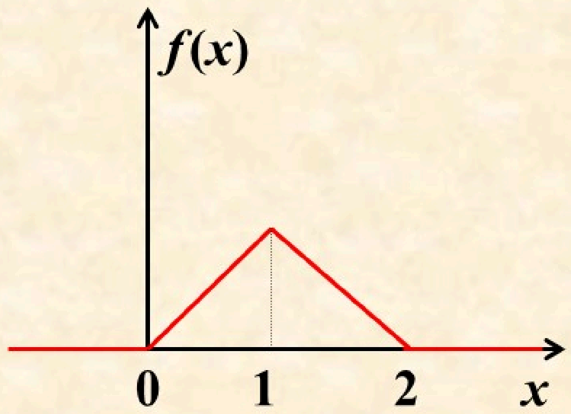
试求（1）常数$A$；（2）$P(-1<X<3/2)$；（3）$F(x)$.

解（1）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 (A-x)dx =A-1=1 \Rightarrow A=2$

（2）$P(-1<X<\frac{3}{2})=\int_{-1}^{3/2} f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^{3/2}(2-x)dx$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{5}{8}=\frac{7}{8}$$

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 2-x, & 1\le x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

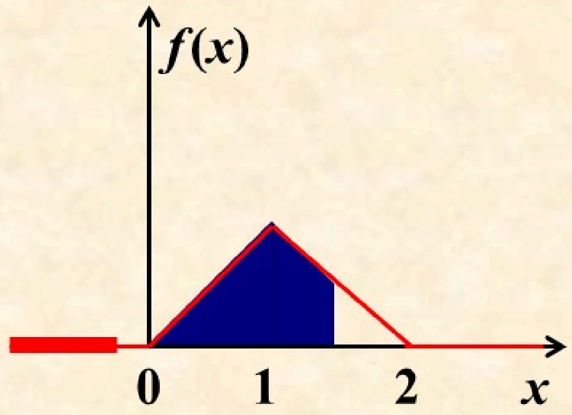


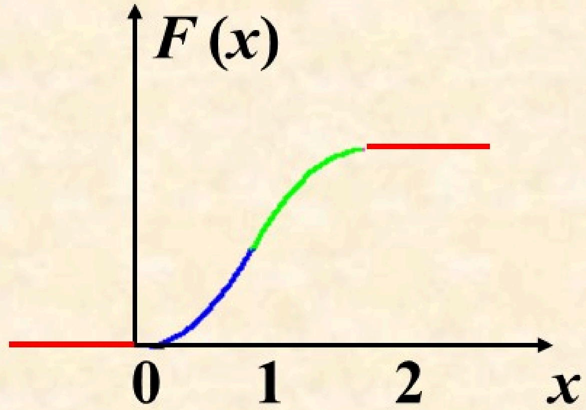


雨课堂 Rain Classroom

（3）

$$F(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\mathbf{0}, & x<0\\ \int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_0^x xdx=\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ \int_0^1 xdx+\int_1^x (2-x)dx=1-\frac{1}{2}(2-x)^2 & 1\le x<2\\ \mathbf{1} & 2\le x\end{cases}$$




例 设$X$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

注意：$F(x)$在1处导数不存在