华中科技大学 2022～2023 学年第一学期

“微积分（A）”期中考试试卷(A 卷)

考试方式：<u>闭卷</u>　考试日期: <u>2022.11.13.</u>　　考试时长: <u>150</u> 分钟

院（系）：________专业班级：______　学　号：_______　姓　名：__________

题号	一	二	三	总分
分数				

解答内容不得超过装订线

分　数	
评卷人	

一、计算题（每小题 10 分，共 6 题）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

解 1： 由 Stolz 定理

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}=2.$$

解 2：由，$k=1,2,\cdots,n$，

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

对k求和，得

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$$

显然

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=2.$$

根据夹逼定理

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=2.$$

2. 设函数$f(x)$在点337处可导，$f(337)=\frac{1}{2},f'(337)=1$，求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(337+\frac{1}{n}\right)}{f(337)}\right)^{\frac{1}{\ln\left(337+\frac{1}{3n}\right)-\ln 337}}.$$

解：由$f(x)$在点 337 处可导

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(337+\frac{1}{n}\right)-f(337)}{\ln\left(337+\frac{1}{3n}\right)-\ln 337}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(337+\frac{1}{n}\right)-f(337)}{\frac{1}{3\cdot 337\cdot n}}=1011$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(337+\frac{1}{n}\right)}{f(337)}\right)^{\frac{1}{\ln\left(337+\frac{1}{3n}\right)-\ln 337}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{f\left(337+\frac{1}{n}\right)-f(337)}{f(337)}\right)^{\frac{f(337)}{f\left(337+\frac{1}{n}\right)-f(337)}}\right]^{\frac{f\left(337+\frac{1}{n}\right)-f(337)}{\ln\left(337+\frac{1}{3n}\right)-\ln 337}\cdot\frac{1}{f(337)}}$$

$=e^{2022}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}3^x\cdot\frac{e^{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\sin x\right)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{2}{3}\sin x\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}\sin x}{x}=\frac{2}{3}$.

4.求由方程$y=1+xe^y$确定的隐函数$y=y(x)$的二阶导数.

解：方程两边对x求导

$$y'=e^y+xe^y y'$$

解得

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}.$$

对y'再求导

$$y''=\left(\frac{e^y}{1-xe^y}\right)'=\frac{e^y y'(1-xe^y)-e^y(-e^y-xe^y y')}{(1-xe^y)^2}$$

将y'代入上式

$$y''=\frac{2e^{2y}+\frac{xe^{3y}}{1-xe^y}}{(1-xe^y)^2}=\frac{2e^{2y}-xe^{3y}}{(1-xe^y)^3}.$$

5. 设$\begin{cases}x=3t\cos t,\\ y=3t\sin t.\end{cases}$求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：由

$$\frac{dx}{dt}=3\cos t-3t\sin t,\frac{dy}{dt}=3\sin t+3t\cos t$$

得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$$

于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(2\cos t-t\sin t)(\cos t-t\sin t)-(\sin t+t\cos t)(-2\sin t-t\cos t)}{3(\cos t-t\sin t)^3}$$

$$=\frac{2+t^2}{3(\cos t-t\sin t)^3}$$

6. 设$y=\frac{x}{4x^2-1}$，求$y^{(n)}$.

解：由

$$y=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$

以及

$$\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1}},\qquad \left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n+1}},$$

得

$$y^{(n)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^{(n)}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{8}\left(\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}+\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right).$$

分　数	
评卷人	

二、证明题（每小题 10 分，共 3 题）

7. 已知$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. 试用$\varepsilon-N$证明$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{a}$

证：（1）$a=0$情形：由$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$有$\forall\varepsilon>0$，显然$\varepsilon^3>0$，故$\exists N$，当$n>N$时

$$|x_n|<\varepsilon^3.$$

于是有

$$\left|\sqrt[3]{x_n}\right|<\varepsilon.$$

从而$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{x_n}=0$.

（2）$a\neq0$情形: 由$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，$\forall\varepsilon>0$，存在$N$使得当$n>N$时$|x_n|\geq\frac{1}{2^3}|a|$，并且

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

于是

$$\left|\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{a}\right|=\frac{|x_n-a|}{\left|\sqrt[3]{x_n^2}+\sqrt[3]{x_n}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right|}<\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{a^2}}$$

即有$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{x_n}=\sqrt[3]{a}$. 证毕.

8. (1) 证明导函数的介值性质：若$f(x)$在区间$[a,b]$上可导，$x_1,x_2\in(a,b)$，且$f'(x_1)<0<f'(x_2)$，则存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=0$.

证：不妨设$x_1<x_2$. 根据导数定义，存在$0<\delta<\frac{x_2-x_1}{2}$，当$x_1<x<x_1+\delta$时，

解答内容不得超过装订线

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{1}{2}f'(x_1)<0,$$

即

$$f(x)<f(x_1)+\frac{1}{2}f'(x_1)(x-x_1)<f(x_1),$$

以及当$x_2-\delta<x<x_2$时，

$$\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}>\frac{1}{2}f'(x_2)>0.$$

即

$$f(x)<f(x_2)+\frac{1}{2}f'(x_2)(x-x_2)<f(x_2).$$

由此可见，函数$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$的最小值不可能在端点上取到，因此，在区间(x_1,x_2)内存在最小值点$\xi\in(x_1,x_2)$. 根据 Fermat 引理，知$f'(\xi)=0$.
证毕.

9．设$f(x)$在(a,b)内可导，且$f'(x)>0,\forall x\in(a,b)$. 试用确界存在原理，有限覆盖定理，单调有界收敛定理之一证明：函数$f(x)$在(a,b)内是严格单调增的.
证：任取α,β满足$a<\alpha<\beta<b$. 构造集合

$$E=\{x\in[\alpha,\beta]|f(t)>f(\alpha),\forall t\in(\alpha,x]\}.$$

显然集合E有界. 由导数定义，存在$\delta>0$，使得当$\alpha<t\le\alpha+\delta\le\beta$时

$$\frac{f(t)-f(\alpha)}{t-\alpha}>\frac{1}{2}f'(\alpha)>0,$$

即有

$$f(t)>f(\alpha)+\frac{1}{2}f'(\alpha)(t-\alpha)>f(\alpha).$$

可见$E\neq\emptyset$. 由确界存在原理，集合E有上确界，记

$$\beta_0=\sup E.$$

显然$\beta_0>\alpha$.
往证$\beta_0=\beta$. 若不然，则有$\beta_0<\beta$.
一方面，由于β_0是的上确界，有$\forall t\in(\alpha,\beta_0)$，$f(t)>f(\alpha)$.

另一方面，根据导数定义，存在$0<\delta_0<\min(\beta_{0,}\beta_0-\alpha)$，使得当$0<|t-\beta_0|<\delta_0$时有

$$\frac{f(t)-f(\beta_0)}{t-\beta_0}>\frac{1}{2}f'(\beta_0)>0.$$

当$t\in(\beta_0-\delta_0,\beta_0)$时

$$f(\beta_0)>f(t)+\frac{1}{2}f'(\beta_0)(\beta_0-t)>f(t)>f(\alpha),$$

且当$t\in(\beta_0,\beta_0+\delta_0)$时

$$f(t)>f(\beta_0)+\frac{1}{2}f'(\beta_0)(t-\beta_0)>f(\beta_0)>f(\alpha).$$

可见$\beta_0+\frac{1}{2}\delta_0\in E$，矛盾.

最后证明$f(\beta)>f(\alpha)$.

事实上，由上确界定义，可知$f(t) > f(\alpha), \forall t \in [\alpha, \beta)$.
再根据导数定义，存在$0 < \delta_1 < \beta - \alpha$, 使得当$\beta - \delta_1 < t < \beta$时有

$$\frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta} > \frac{1}{2} f'(\beta) > 0.$$

于是有

$$f(\beta) > f(t) + \frac{1}{2} f'(\beta)(\beta - t) > f(t) > f(\alpha).$$

证毕.

分　数	
评卷人	

三、探究题（每小题 10 分，共 1 题）

10. 设$f(x): [a, b] \to [a, b]$.
(1) 若$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x, y \in [a, b]$, $x \neq y$.
问：是否存在常数$0 < M < 1$，使得

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|, \forall x, y \in [a, b]?$$

请说明理由.
(2) 若函数可导，且$|f'(x)| < 1, \forall x \in [a, b]$. 问：是否存在常数$0 < M < 1$，使得

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|, \forall x, y \in [a, b]?$$

请说明理由.
（1）回答是否定的. 令$f(x) = \sin x, x \in [0,1]$.
（2）回答是否定的. 令$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \sin \frac{2}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

易知

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x} \sin \frac{2}{x} + x e^{-x} \sin \frac{2}{x} - e^{-x} \cos \frac{2}{x}$$

且

$$|f'(x)| \le e^{-x} \left(1 + x + \frac{1}{2} x^2\right) < 1, \forall x \in (0,1],$$

考察$x_n = \frac{1}{n\pi}, y_n = \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), n = 1, 2, \cdots$. 由

$$\left| \frac{f\left(\frac{1}{n\pi}\right) - f\left(\frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)}{\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \right| = \left| \frac{0 - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2\pi^2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2 e^{-\frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \sin 2n\pi\left(1 - \frac{1}{n^2 + 1}\right)}{-\frac{1}{n^3\pi}} \right|$$

知

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{f\left(\frac{1}{n\pi}\right) - f\left(\frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)}{\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{n^3\pi}{n^2\pi^2} \cdot \frac{2n\pi}{n^2 + 1} = 1$$

因此不存在常数$0 < M < 1$，使得

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|, \forall x, y \in [0,1].$$

解答内容不得超过装订线