2021 级《微积分》(A)(上)课程期末考试试题

(2022 年 1 月 3 日， 用时 120 分钟)

专业班级________________ 学号_____________________ 姓名________________

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

阅卷人	
得 分	

一、选择题 (每题 4 分，共 16 分)

1. 下列说法正确的是 (D)

   A. 有界数列一定收敛;

   B. 有限区间上的连续函数一定一致连续;

   C. 函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上处处可导，它的导函数 f' 一定是连续的;

   D. 有界数集一定存在上确界。

2. 下列哪个极限不存在 (B)

   A.$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

   B.$\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{D}(x)$，其中 $\mathrm{D}(x)$ 是 Dirichlet 函数

   C.$\lim\limits_{x\to 0} |\mathrm{sgn}(x)|$

   D. $\lim\limits_{n\to +\infty}(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})$

3. 当 $x\to 0$ 时，下面哪个函数不是与 $y=x$ 等阶的无穷小 (D)

   A. $\sin x$

   B. $\arcsin x$

C. $\ln(1+x)$

D. $1-\cos x$

4. 函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，在 x_0 处可导而且 $f(x_0)>0$。下列说法错误的是（A ）

A. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的微分是 $f'(x_0)$;

B. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续;

C. 存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0)$，使得在该邻域内 $f(x)>0$;

D. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)=f(x_0)+o(1)$。

阅卷人	
得　分	

二、填空题 (每题 4 分，共 20 分)

5. 集合 $A=\{(1+\frac{1}{n})^n|n\in\mathbb{N},n>0\}$，那么 $\inf A=$ __2__，$\sup A=$ __e__。

6. 函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导，而且 $\varphi'(t)\neq 0$。由参数方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 确定了函数关系 $y=y(x)$。那么 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ __$\psi'(t)/\varphi'(t)$__，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ __$\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$__。

7. 函数 $y=2x^3+3x^2-12x+18$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最大值是 __63__，最小值是 __11__。

8. 函数 $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$ 图像的垂直渐近线是 __$x=-1$__，斜渐近线是 __$y=x$__。

9. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的连续，$F(x)=\int_0^x f(x+t)dt$，那么 $F'(x)=$ __$2f(2x)-f(x)$__。

阅卷人	
得　分	

三、计算与解答题 (**每题** 6 **分，共** 36 **分**)

10. 求函数 $f(x) = \arctan x$ 的 10 阶带 Peano 型余项的 Maclaurin 展开。

解: 由

$$\tfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + o(x^9), \quad \arctan'(x) = \tfrac{1}{1+x^2},$$

可知

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + o(x^{10}).$$

注：也可以直接求 $\arctan x$ 在 0 处前 10 阶导数。

11. 计算不定积分:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

解:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{1-\cos^2 x} \\ &= -\frac{1}{2}\int (\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x})\mathrm{d}\cos x \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.\end{aligned}$$

12. 计算 Euler 积分:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x,$$

其中 m, n 都是正整数。

解: 当 $n = 1$ 时,

$$B(m,1) = \int_0^1 x^{m-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{m};$$

当 $n \geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}B(m,n) &= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)^{n-1}\mathrm{d}\frac{x^m}{m} \\ &= \frac{(1-x)^{n-1}x^m}{m}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^m}{m}\mathrm{d}(1-x)^{n-1} = \frac{n-1}{m}B(m+1,n-1).\end{aligned}$$

因此

$$B(m,n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}B(m+n-1,1)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

13. 利用 Riemann 积分求下述极限值：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad (p>0).$$

解:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p\cdot\frac{1}{n}\ =\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.$$

14. 计算将圆 $x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$ 绕 x 轴旋转一周得到环体的体积 V 和表面积 S。

解：引入参数 θ，圆周方程为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=R+\sin\theta \end{cases}\quad t\in[0,2\pi]$$

那么

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^\pi(R+r\sin\theta)^2\cdot r\sin\theta\mathrm{d}\theta-\pi\int_0^\pi(R-r\sin\theta)^2\cdot r\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &=4\pi Rr^2\int_0^\pi\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=2\pi^2Rr^2. \\ S&=2\pi\int_0^\pi\sqrt{[(r\cos\theta)']^2+[(R+r\sin\theta)']^2}(R+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta+ \\ &\quad 2\pi\int_0^\pi\sqrt{[(r\cos\theta)']^2+[(R-r\sin\theta)']^2}(R-r\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\ &=4\pi^2Rr. \end{aligned}$$

15. 求解下述初值问题：

$$\begin{cases} y'+y=x, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

解：齐次方程 $y+y'=0$ 的通解是 $y=Ce^{-x}$。
假设 $y=C(x)e^{-x}$ 是方程 $y'+y=x$ 的解，代入得到

$$C'(x)=xe^{x},$$

解出 $C(x)=(x-1)e^{x}+C_1$，因此非齐次方程 $y'+y=x$ 的通解为

$$y=C_1e^{-x}+x-1,$$

代入初始条件，得到 $C_1=1$，所以初值问题的解是 $y=e^{-x}+x-1$。

阅卷人	
得　分	

四、证明题 (16-19 **每题** 7 **分，附加题** 10 **分，共** 38 **分**)

16. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，在 (a,b) 上二阶可导。假设 $f(a)=f(b)=0, M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)>0$。证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f''(\xi)\leqslant-\frac{8M}{(b-a)^2}.$$

证明：由条件可知，$f(x)$ 的最大值在区间内部取到，不妨设最大值点是 x_0。由 Fermat 定理，可知 $f'(x_0)=0$。考虑在 x_0 处的 Taylor 展开，有

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{f''(\eta_1)}{2}(a-x_0)^2;$$
$$f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{f''(\eta_2)}{2}(b-x_0)^2;$$

其中 η_1 介于 a,x_0 之间，η_2 介于 x_0,b 之间。因而

$$f''(\eta_1)=-\frac{2M}{(a-x_0)^2},\quad f''(\eta_2)=-\frac{2M}{(b-x_0)^2}.$$

当 $x_0\leqslant\frac{a+b}{2}$ 时，$f''(\eta_1)\leqslant-\frac{8M}{(b-a)^2}$；
当 $x_0\geqslant\frac{a+b}{2}$ 时，$f''(\eta_2)\leqslant-\frac{8M}{(b-a)^2}$。

17. 假设 $a,b\geqslant0,p,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，证明 Young 不等式：

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

证明：不妨设 $a,b>0$，令 $A=a^p, B=b^q$，原不等式等价于

$$A^{1/p}B^{1/q}\leqslant A/p+B/q,$$

由于函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 是凹函数，所以

$$1/p\ln A+1/q\ln B\leqslant \ln(A/p+B/q),$$

由于 $y=\ln x$ 是单调递增函数，所以

$$A^{1/p}B^{1/q}\leqslant A/p+B/q.$$

18. 假设 $0\leqslant a<b$，函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，单调增加，证明：

$$2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x-a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

证明：令 $F(x)=x\int_0^x f(t)dt$，不等式右边可以写成

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[xf(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}x.$$

不等式左边减去右边等于

$$\int_a^b[xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}x.$$

由于 f 单调递增，所以被积函数

$$xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

因而

$$\int_a^b[xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}x\geqslant 0$$

原不等式得证。

19. 证明下述广义积分是条件收敛的：

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x$$

证明：对于任意 $A>1$，$|\int_1^A \cos x \mathrm{d}x| \leqslant 2$，同时当 $x \to +\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法可知广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x$ 收敛。
另一方面，

$$\int_1^A \frac{|\cos x|}{x} \mathrm{d}x \geqslant \int_1^A \frac{\cos^2 x}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\cos 2x}{x} \mathrm{d}x.$$

当 $A \to +\infty$ 时，由 Dirichlet 判别法 $\int_1^A \frac{\cos 2x}{x} \mathrm{d}x$ 收敛；另一方面，$\int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 趋于 $+\infty$。
所以 $\int_1^A \frac{|\cos x|}{x} \mathrm{d}x$ 趋于 $+\infty$。
所以 $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} \mathrm{d}x$ 发散；因而 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x$ 条件收敛。

20.（附加题）

(a) 请陈述通过振幅给出的可积性判定准则；

(b) 函数 f, g 在 $[a,b]$ 上可积，证明：它们的乘积 $f \cdot g$ 也在 $[a,b]$ 上可积。

证明：(1)f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的有界函数，那么 f 可积当且仅当对于任意 $\epsilon > 0$，存在区间 $[a,b]$ 的一个分割 $T\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \epsilon,$$

其中 $\omega_i(f)$ 是函数 f 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 是区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度。
（2）由于 f, g 可积，不妨设在区间 $[a,b]$ 上 $|f|, |g| \leqslant M$。
给定 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当分割 $T\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 的模小于 δ 时，有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \tfrac{\epsilon}{2M}, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i(g) \Delta x_i < \tfrac{\epsilon}{2M}$$

取定这样的一个分割，由

$$|(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| \cdot |g(x)| + |f(y)| \cdot |g(x) - g(y)|,$$

可知
$$\omega_i(f\cdot g)\leqslant M\omega_i(f)+M\omega(g).$$
因此
$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f\cdot g)\Delta x_i\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i+M\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i<\epsilon.$$
因而 $f\cdot g$ 也可积。