课程介绍

教材

刘斌、李楚进《新编微积分（上）》，华中科技大学出版社

参考书

- 雷冬霞、韩志斌、黄永忠《一元分析学学习指导》，湖北科学技术出版社；
- 陈纪修、於崇华、金路《数学分析》，高等教育出版社；
- 卓里奇《数学分析》，高等教育出版社；
- 吉米多维奇《数学分析习题集》；
- 周民强《数学分析习题演练》，科学出版社；
- 裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》，高等教育出版社

课程介绍

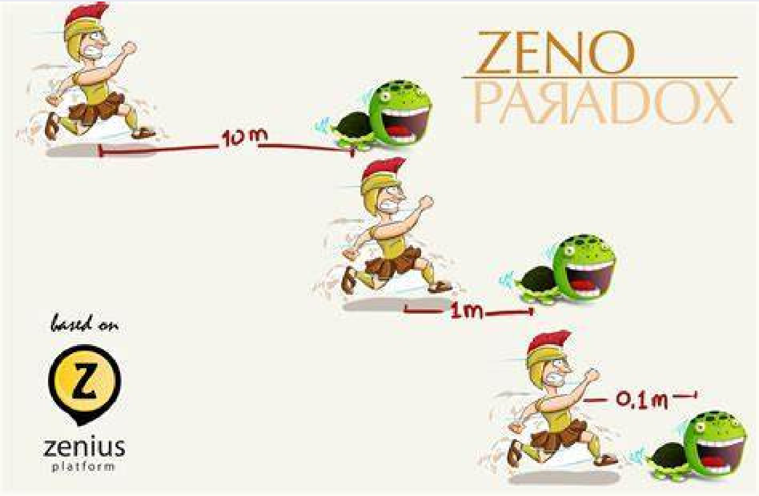
考核方式

- 最终成绩 = 0.3*平时成绩 + 0.7*期末成绩；
- 每周交一次作业，作业完成情况作为平时成绩；

一些建议

- 注重数学思维的培养，重视证明题；
- 多做题，多思考

Zeno 悖论



在十七世纪，Issac Newton（1643-1727）和 Gottfried Wilhelm Leibniz （1646-1716）先后独立发明了微积分。

Kepler三定律

1. 轨道定律：所有行星绕恒星运动的轨道都是椭圆，且恒星处在椭圆的某个焦点上；
2. 面积定律：对于任意一个行星来说，其与恒星的连线扫过的面积与运动时间成正比;
3. 周期定律：所有行星轨道的半长轴的三次方与其公转周期的二次方的比值都相等，且比值只与其绕转天体有关.

Question

如何由Newton力学第二定理$F = ma$和万有引力定律$F = \frac{GMm}{r^2}$推导出Kepler三定律？

若干约定

数集

- $\mathbb{N}$(natural numbers), $\mathbb{Z}$ (zahl), $\mathbb{Q}$ (quotient), $\mathbb{R}$(real numbers), $\mathbb{C}$(complex numbers);
- $\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_{>0}, \mathbb{Q}_{\geq 0}, \mathbb{Q}^\times, \mathbb{Q}^*$

逻辑符号，P, Q是两个命题

- $\forall$ (for all), $\exists$(exist), $\exists!$;
- $P \wedge Q, P \vee Q, \neg P$;
- "$\forall a \in A$, a 满足条件..." 的否定是 "$\exists a \in A$, a不满足条件";
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

若干约定

Descartes乘积

假设A, B 是两个集合，

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\};$$

求和、积、并、交

$\sum, \prod, \cup, \cap$，例如

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

极坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

极坐标下圆锥曲线的方程

- 定义: 给定平面上一点O和一条直线L，距离为$h>0$, 平面上某一点到O的距离为r，到L 的距离为 a，常数$e>0$，则满足 $r=ae$ 的所有点组成的曲线称为圆锥曲线。e称做离心率，O 是焦点，L 是准线;
- 当$0<e<1$时曲线是椭圆，$e=1$ 时是抛物线，$e>1$时是双曲线。
- 圆锥曲线的极坐标方程为

$$r=\frac{eh}{1-e\cos\theta}.$$

若干约定

数学归纳法

用于证明对于任意自然数n,命题$P(n)$成立。
证明分下面两步：

- 证明当$n = 1$时命题$P(1)$成立。
- 假设$n = k$时命题$P(k)$成立，那么可以推导出在$n = k + 1$时命题$P(k + 1)$也成立。（这里$k \in \mathbb{N}$）

Bernoulli 不等式

$\alpha > -1$, 对所有 $n \in \mathbb{N}$，有 $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$。等号成立当且仅当 $n = 1$ 或$\alpha = 0$。

缩写

- s.t. = such that ;
- i.e. = that is;
- e.g.= for example;
- iff = if and only if;
- Q.E.D =$\square$ = quod erat demonstrandum;
- etc
- resp. =respectively

实数和函数

微积分分为微分和积分两个部分，研究对象是定义在实数集上的一类“性质好”的函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。

实数

有限小数或无限循环小数称为有理数，无限不循环小数称为无理数，有理数和无理数统称实数。实数集用数学符号$\mathbb{R}$表示。

实数是如何构造的？

实数的性质

- $\mathbb{R}$对四则运算封闭；
- $\mathbb{R}$ 存在序关系；
- $\mathbb{R}$ 是完备的（确界原理$\Leftrightarrow$ Dedekind 分割定理 $\Leftrightarrow$ 单调有界定理$\Leftrightarrow$致密性定理 $\Leftrightarrow$ Cauchy收敛准则 $\Leftrightarrow$ Weierstrass 聚点定理$\Leftrightarrow$ 闭区间套定理 $\Leftrightarrow$ 有限覆盖定理）

绝对值

$\alpha \in \mathbb{R}$，数轴上它与原点的距离定义为其绝对值，记为$|\alpha|$。即我们有

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0, \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$$

绝对值的性质

- $|\alpha| \geq 0$，且$|\alpha| = 0$ iff $\alpha = 0$;
- $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$.

三角不等式

- $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$;
- $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$

Cauchy 不等式

假设$a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n$，那么

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{1/2},$$

等号成立当且仅当$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$平行。

均值不等式

假设$a_i \in \mathbb{R}_{>0}, i = 1, 2, \cdots, n$,定义算术平均 $A_n = 1/n \sum_{i=1}^{n} a_i$，几何平均$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$, 调和平均 $H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$,那么

$$H_n \leq G_n \leq A_n,$$

等号成立当且仅当所有a_i相等。

区间与邻域

有限区间

假设$a, b \in \mathbb{R}, a < b$，我们有如下四类有限区间：

- 开区间 $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$;
- 闭区间 $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \le x \le b\}$;
- 左开右闭区间 $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \le b\}$;
- 左闭右开区间 $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \le x < b\}$.

无限区间

- 开区间
  $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \colon x > a\}, \quad (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \colon x < a\}$;
- 闭区间
  $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \colon x \ge a\}, \quad (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \colon x \le a\}$;
- 即开又闭区间 $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$.

有限区间和无限区间统称为区间。

实数的邻域

假设$x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$，定义

- x_0的δ邻域
  $U(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \colon |x - x_0| < \delta\}$，
- x_0的δ空心邻域
  $U^\circ(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x - x_0| < \delta\}$，
- x_0的δ右邻域 $U_+(x_0, \delta) := [x_0, x_0 + \delta)$，
- x_0的δ左邻域 $U_-(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0]$，
- x_0的δ右空心邻域 $U_+^\circ(x_0, \delta) := (x_0, x_0 + \delta)$，
- x_0的δ左空心邻域 $U_-^\circ(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0)$，

无穷的邻域

假设$M \in \mathbb{R}$, 定义

- ∞的M邻域
  $U(\infty, M) := \{x \in \mathbb{R}\colon |x| > M\}$;
- $+\infty$的M邻域
  $U(+\infty, M) := \{x \in \mathbb{R}\colon x > M\}$;
- $-\infty$的M邻域
  $U(-\infty, M) := \{x \in \mathbb{R}\colon x < M\}$;

有界集

假设$E \subset \mathbb{R}$是一个数集，如果存在实数M（resp. L)，使得对于所有$x \in E$，成立 $x \le M$(resp. $x \ge L$)，则称 E是有上界（resp. 有下界）集，称M（resp.L）是E 的一个上界（resp 下界）。
如果E既有上界又有下界，则称E是一个有界集，否则称E为无界集。

例子

- 有限区间是有界集，无限区间是无界集；
- $\mathbb{N}$有下界，但没有上界；
- 有限个元素的数集是有界集;
- 空集是有界集，任何实数都既是它的上界也是它的下界。

注

- E是有界集，当且仅当存在$M \in \mathbb{R}$使得对于所有$x \in E$成立 $|x| \le M$;
- 如果E有上界（resp. 下界），那么它有无穷多的上界（resp.下界），不存在最大的上界（resp.最小下界）