# 光栅衍射

- **平行光斜入射光栅方程**

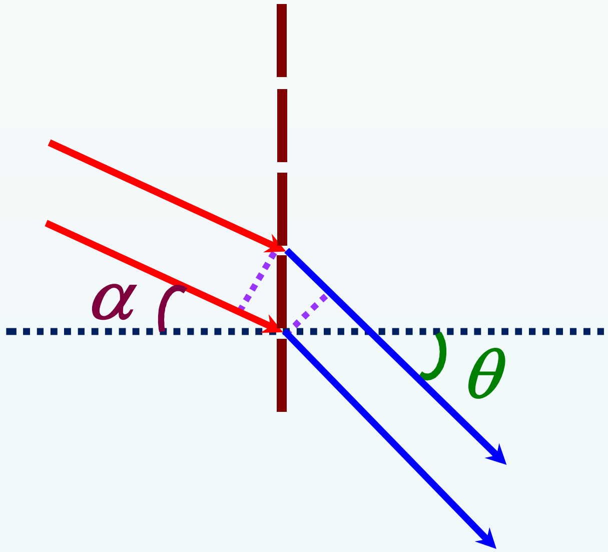
$$d(\sin\theta \pm \sin\alpha) = \pm k\lambda$$

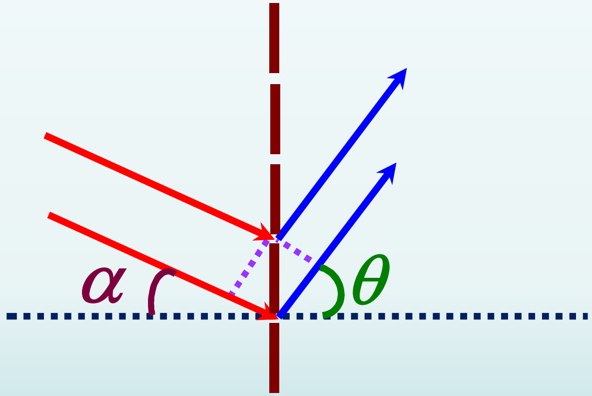
$\alpha$与$\theta$在法线同侧取+

$\alpha$与$\theta$在法线异侧取-

**0级主极大：**$\sin\theta = \sin\alpha$

条纹将向下方平移（间距不变）。




- **最高级次**

$$d\sin\theta = \pm k\lambda \qquad \text{其中} -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{d}{\lambda} < k < \frac{d}{\lambda} \longrightarrow |k_{\max}| < \frac{d}{\lambda}$$ 取小于此值的整数。

斜入射比垂直入射可以观察到更高级次的主极大。

# 光栅衍射

例. 波长为 $\lambda$=590nm的平行光正入射到每毫米500条刻痕的光栅上时，屏幕上最多可以看到多少条明纹？

解：光栅常数

$$d=\frac{10^{-3}}{500}=2\times10^{-6}\,\mathrm{m}$$

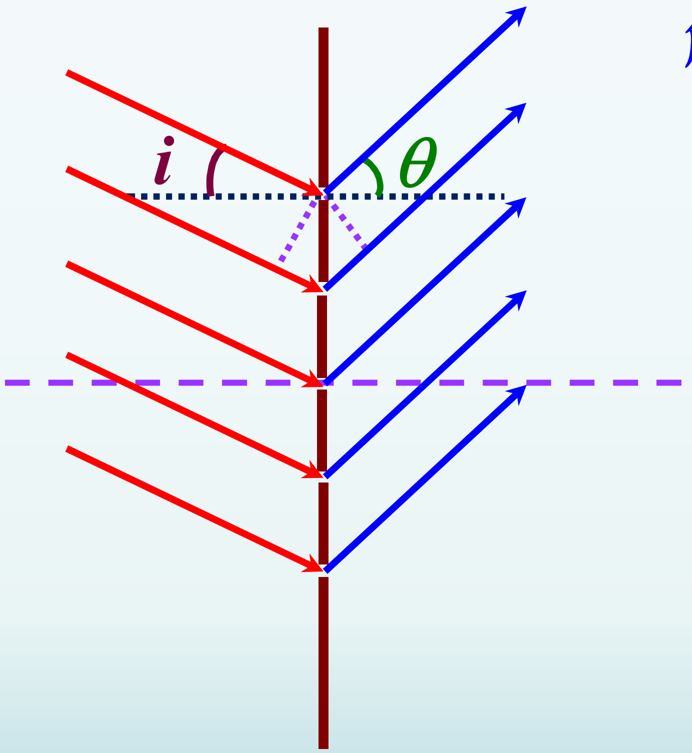
$$d\sin\theta=\pm k\lambda \qquad k=0,1,\cdots\cdots\max$$

$$|k_{\max}|<\frac{d}{\lambda}=\frac{2\times10^{-6}}{590\times10^{-9}}=3.4 \qquad \text{取整 } k_{\max}=3$$

可以看到2×3+1=7条明纹

# 光栅衍射

例. 在上题条件下，平行光斜入射 $i=\pi/6$时，屏幕上最多可以看到哪些条明纹？




解：光栅方程为

$$d\sin\theta + d\sin i = \pm k\lambda \quad k = 0,1\cdots\max$$

当 $\theta=\pi/2$时

$$d(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{6}) = k\lambda \longrightarrow k = 5.1 \quad \text{取}5$$

当 $\theta=-\pi/2$时

$$d(-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{6}) = -k\lambda \longrightarrow k = 1.6 \quad \text{取}1$$

总共见到7条，上方5条，下方2条

若平行光斜向上入射呢？ 总共见到7条，上方2条，下方5条

# 光栅衍射

## □ 光栅光谱，光栅的色散本领

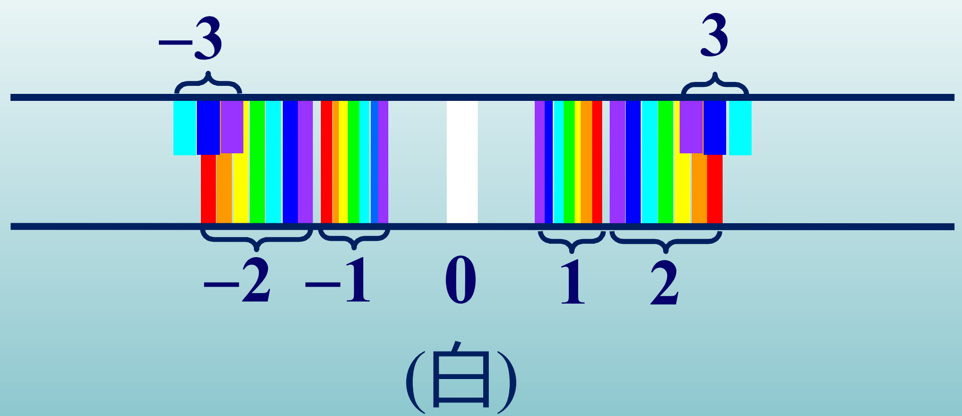
- **光栅光谱**

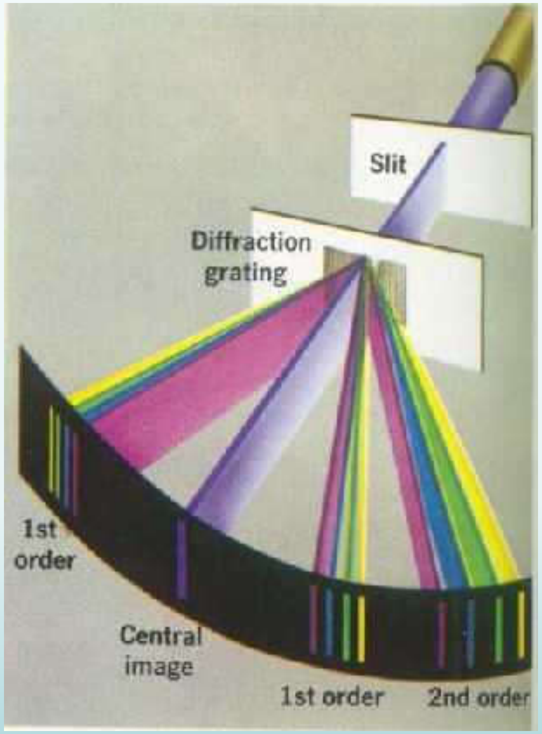
正入射: $d\sin\theta = \pm k\lambda,\ \ k = 0,1,2,\cdots$

$k$ 一定时 $\lambda\uparrow \longrightarrow \theta\uparrow$

同一级光谱中，不同颜色光的主极大位置不同。

白光（350~770nm）的光栅光谱是连续谱:




汞的光栅光谱

# 光栅衍射

- **光栅的色散本领**

把不同波长的光在谱线上**分开**的能力。

设波长为$\lambda$的谱线， 衍射角为$\theta$， 位置为$x$；

波长$\lambda+\Delta\lambda$的谱线，衍射角$\theta+\Delta\theta$，位置 $x+\Delta x$

**定义：** 角色散本领 $D_\theta=\dfrac{\Delta\theta_k}{\Delta\lambda}$

干涉明纹 $d\sin\theta_k=k\lambda \longrightarrow \Delta\theta_k=\dfrac{k\Delta\lambda}{d\cos\theta_k}$

$$D_\theta=\frac{k}{d\cos\theta_k}$$

线色散本领 $D_l=\dfrac{\Delta l_k}{\Delta\lambda}=f\dfrac{\Delta\theta_k}{\Delta\lambda}=fD_\theta$

# 光栅衍射

角色散本领 $D_\theta = \dfrac{k}{d\cos\theta_k}$

线色散本领 $D_l = \dfrac{\Delta l_k}{\Delta\lambda} = f\dfrac{\Delta\theta_k}{\Delta\lambda} = fD_\theta$

**色散本领的影响因素：**

① 与光栅缝数$N$无关。

② 减小$d$，选择更高级次$k$的光谱，可增大角色散本领。

③ 谱线都有一定的宽度，散得开不一定能分辨。

能分辨的，不一定散得很开。

谱线半角宽度 $\Delta\theta_\lambda = \dfrac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$

1 双缝衍射

2 光栅衍射

3 X射线衍射和布喇格公式

4 圆孔衍射光学仪器的分辨率

# X射线衍射和布喇格公式

## □ X 射线衍射

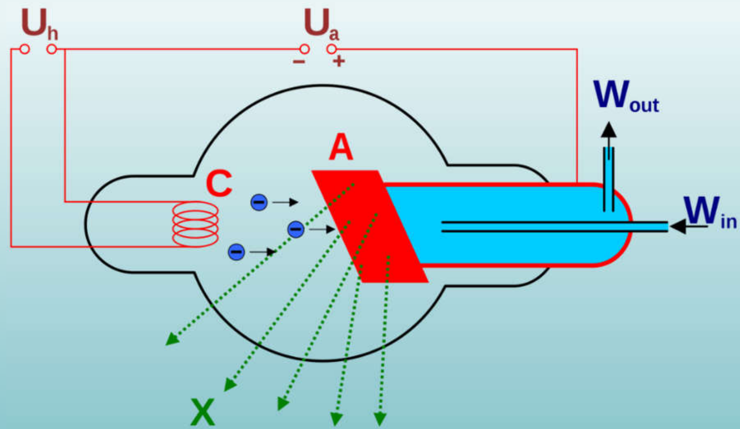
- **X 射线的产生**

高速电子轰击金属原子中的内层电子使其能级跃迁而产生的电磁辐射，称为**X 射线。**

威廉.伦琴 Wilhelm C. Röntgen

(1845-1923)

- ◆ 德国维尔茨堡大学物理学家
- ◆ 1895年发现X射线
- ◆ 1901年获诺贝尔物理学奖（首届）



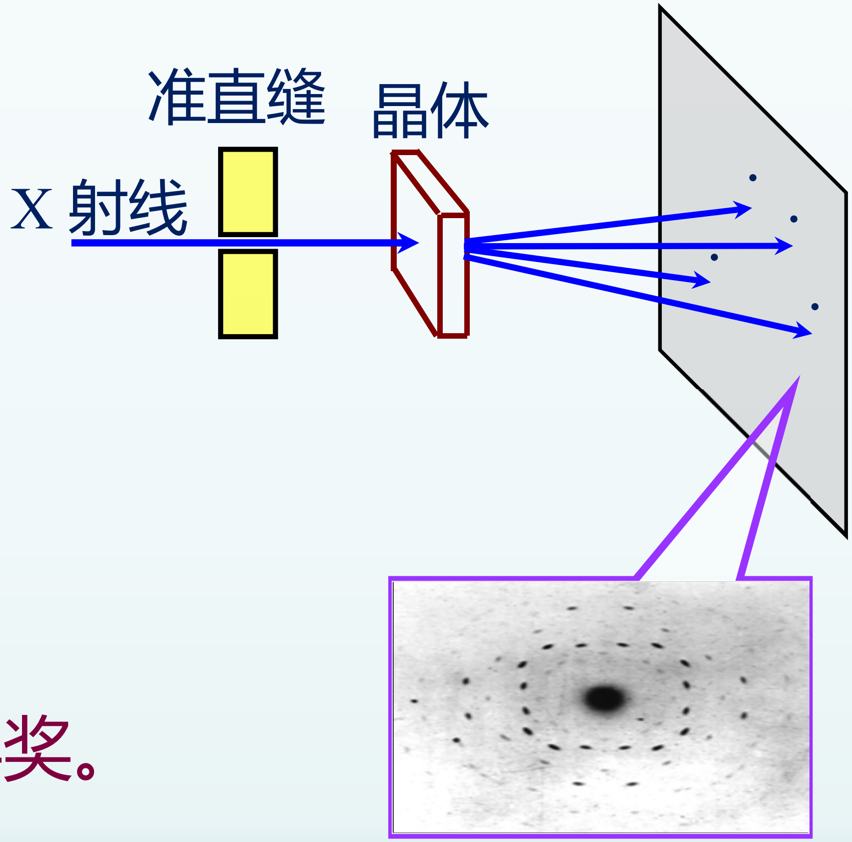
# X射线衍射和布喇格公式

- **X 射线晶体衍射**

Max von Laue

(1879-1960)

- 劳厄1912年提出X射线是一种电磁波。
- 天然晶体可以看作是光栅常数很小的空间三维衍射光栅。
- 1914年诺贝尔物理学奖。

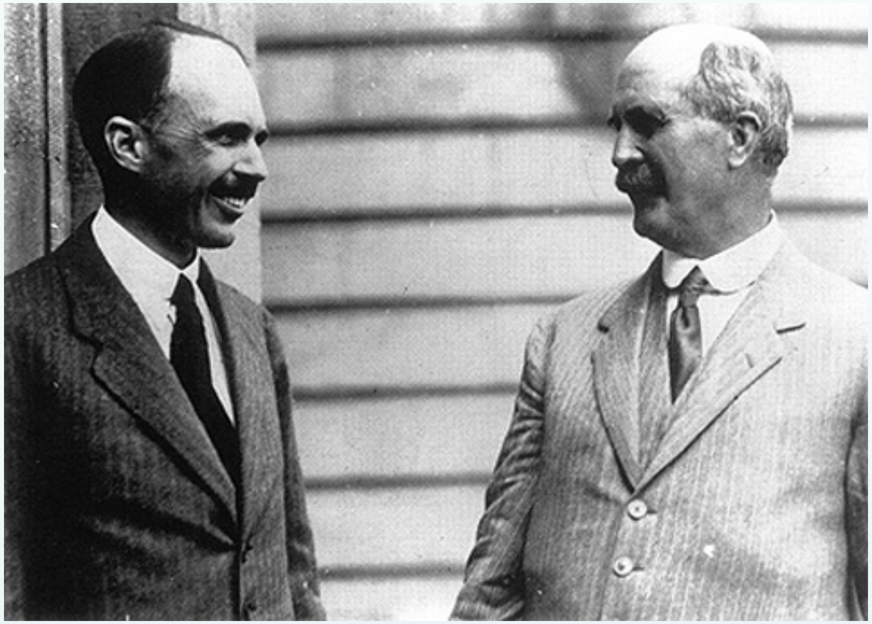



在照相底片上形成对称分布的若干衍射斑点，称为**劳厄斑。**

**证实了X射线的波动性。**

# X射线衍射和布喇格公式

## □ 布喇格公式



Sir William Henry Bragg
（1862-1942）
Sir William Lawrence Bragg
（1890-1971）

- 1913年布喇格父子提出了晶体衍射的理论解释。
- 1915年诺贝尔物理学奖

——X射线晶体结构分析

# X射线衍射和布喇格公式

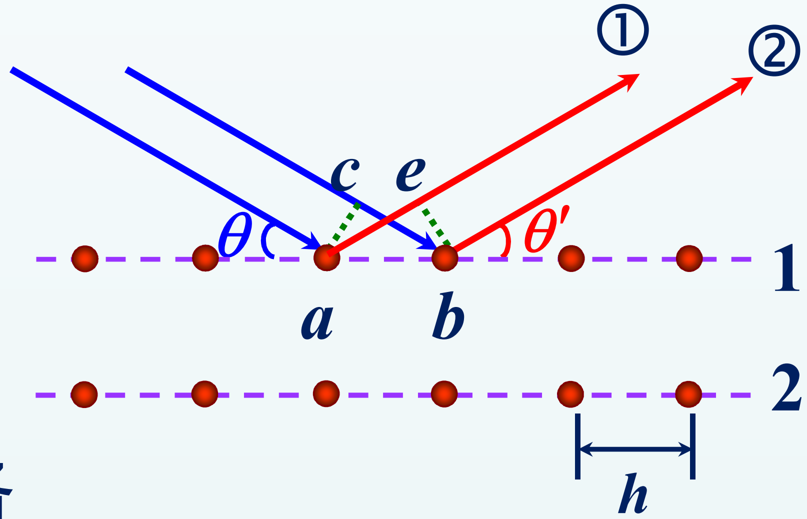
**晶 体** ⟶ 晶 格 (框架结构的基本单元)

原子在晶体中按晶格点阵排列

晶体由一系列平行的原子层所组成。

↓

晶 面




当**X 射线**照射时，每个原子都是向各方向发出子波的子波源。 ——入射波被原子散射了。

**① 同一晶面上（点间干涉）**

相邻原子散射的X射线干涉极大条件：

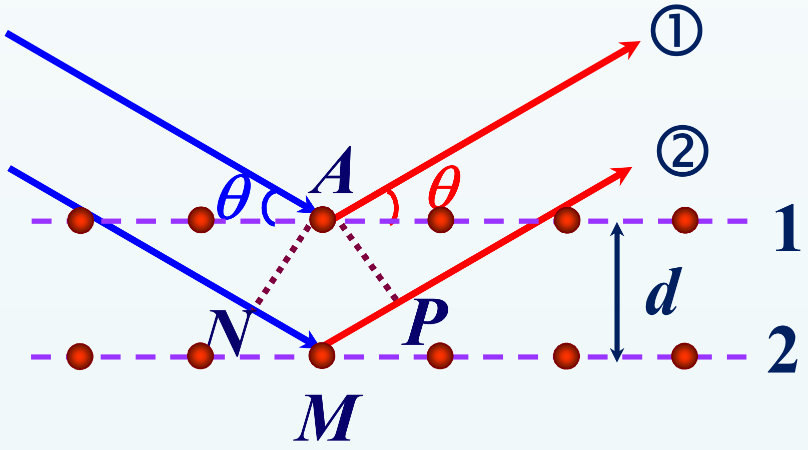
$$\delta = bc - ae = h(\cos\theta - \cos\theta') = n\lambda \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

零级主极大：$\theta = \theta'$ 镜面反射

# X射线衍射和布喇格公式

沿镜面反射方向，同一晶面上相邻原子散射的光波的光程差零，它们相干加强。

**② 不同晶面上（面间干涉）**




在镜面反射方向上不同晶面上原子散射光相干加强，必须满足：

$$\delta = NM + MP = k\lambda \qquad k = 1,2,3\cdots$$

根据几何关系 $\boxed{2d \cdot \sin\theta = k\lambda}$ 布喇格公式

当满足布喇格公式时，各层面上的反射光相干加强，形成亮点，称为 $k$ 级干涉主极大。

晶体有多组平行晶面 ⟶ 距离$d$不同 ⟶ 劳厄斑的空间分布

# X射线衍射和布喇格公式

- **X射线衍射的应用** $2d \cdot \sin\theta = k\lambda$

① 已知$d$ 及亮斑的位置$\theta$，可求 X 射线的波长。

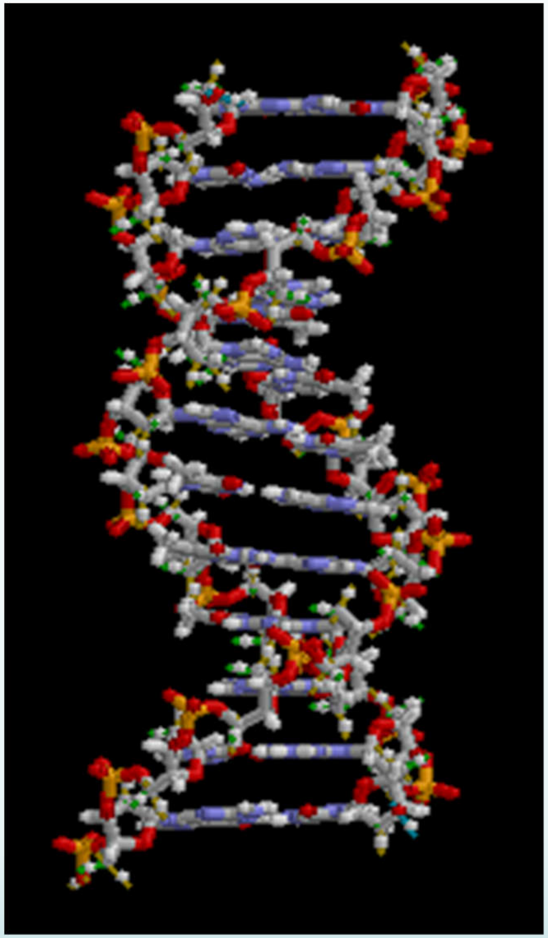
——X射线光谱分析

② 根据图样及$\lambda$，可测$d$，研究晶格结构。

——X射线晶体结构分析

1953年威尔金斯等利用X射线的结构分析得到了DNA的**双螺旋结构**。

诺贝尔生物和医学奖



# X射线衍射和布喇格公式

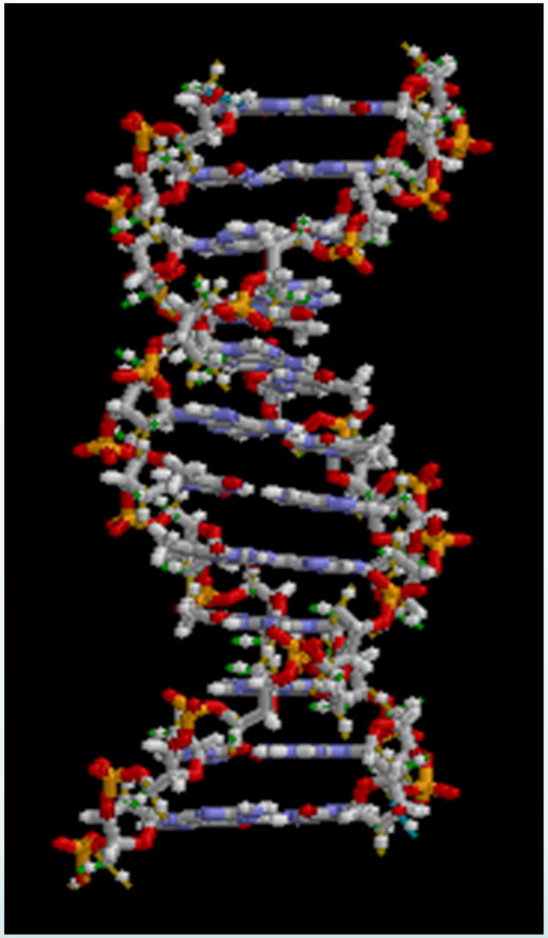
- **X射线衍射的应用**　　$2d \cdot \sin\theta = k\lambda$

① 已知$d$及亮斑的位置$\theta$，可求 X 射线的波长。

——X射线光谱分析

② 根据图样及$\lambda$，可测$d$，研究晶格结构。

——X射线晶体结构分析



**注意：** ① 通常采用连续X射线谱入射。

单色X射线，很难正好满足布喇格公式。

② X射线衍射中也存在缺级现象。

1 双缝衍射

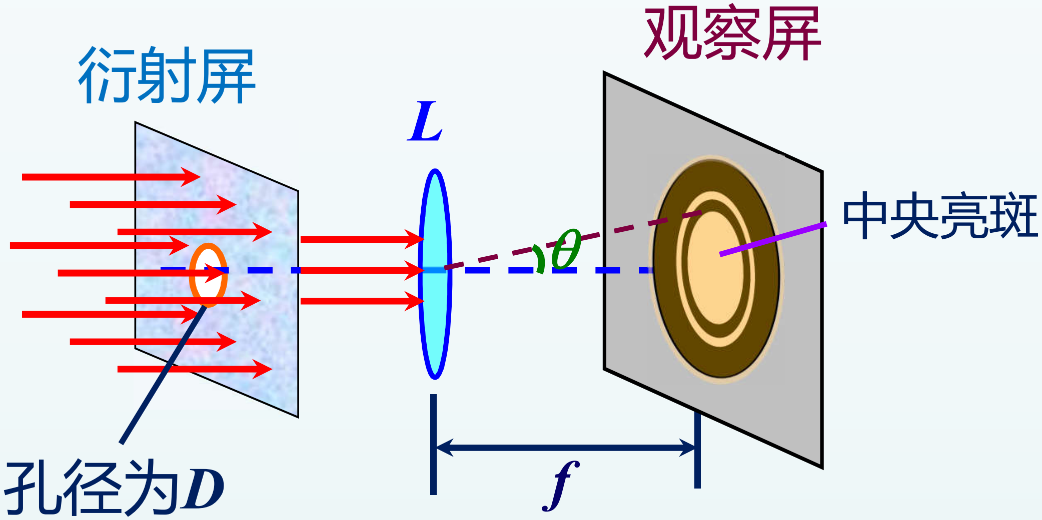
2 光栅衍射

3 X射线衍射和布喇格公式

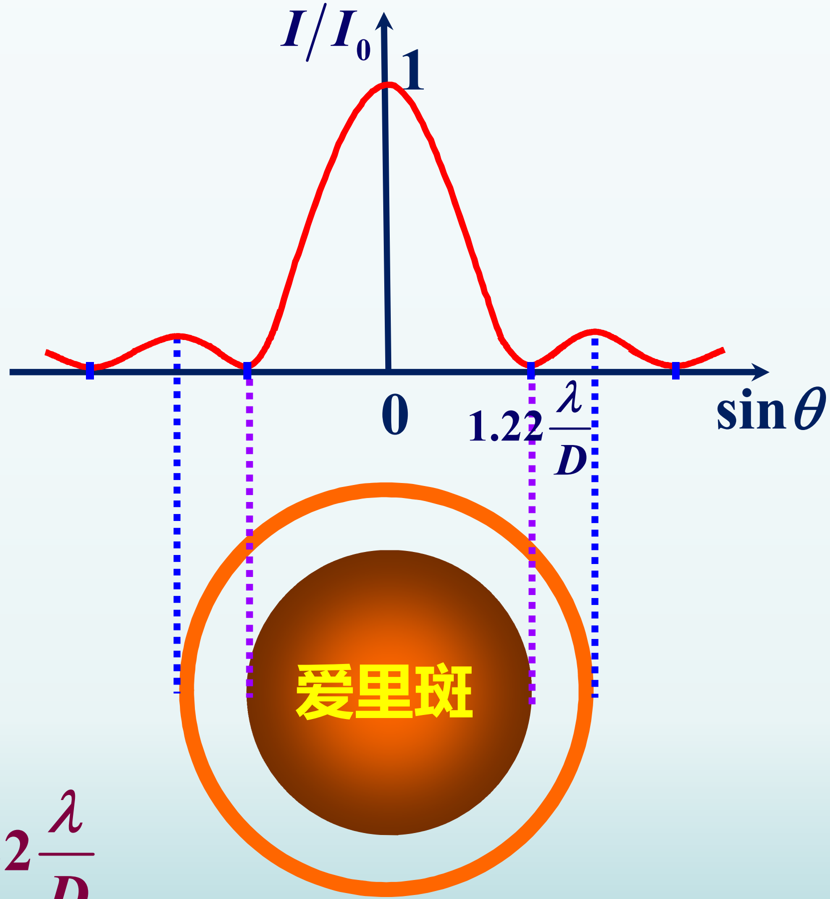
4 圆孔衍射和光学仪器的分辨率

# 圆孔衍射和光学仪器的分辨率

## □ 圆孔衍射（夫琅禾费衍射）




相对光强曲线




衍射第一级极小：$D\sin\theta_1 \approx 1.22\lambda$

中央亮斑的角半径：$\theta_1 = \sin^{-1}\left(1.22\frac{\lambda}{D}\right) \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$

爱里斑半径：$R \approx f\theta_1 = 1.22\frac{f\lambda}{D}$

缩小爱里斑 $\rightarrow \begin{cases} D\uparrow \\ \lambda\downarrow \end{cases}$

# 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

- **圆孔径光学仪器分辨率** ⟶ 描述成像质量的指标之一

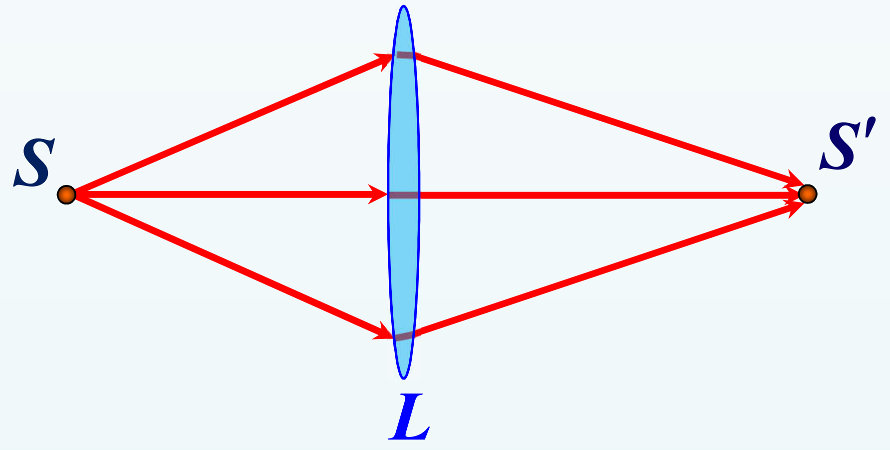
- **成像**

**几何光学:**

$$\text{物点} \xrightarrow{\text{经透镜}} \text{象点}$$

物点 —集合→ 物；象点 —集合→ 象

物 ⟶ 象

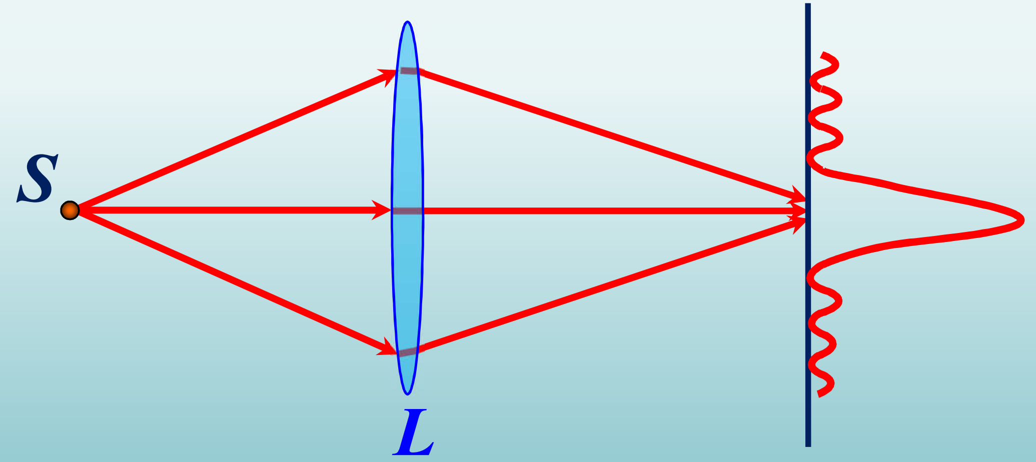



**波动光学:**

$$\text{物点} \xrightarrow{\text{经透镜}} \textbf{象斑}$$

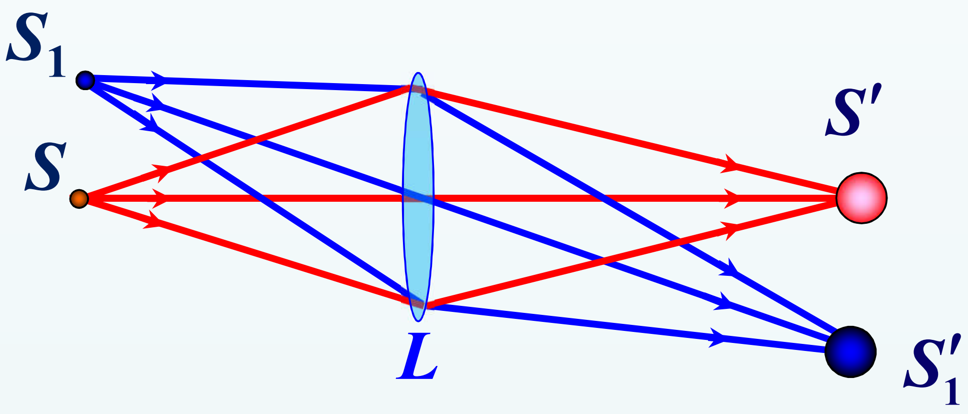
物点 —集合→ 物；象斑 —集合→ 象

物 ⟶ 象



# 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

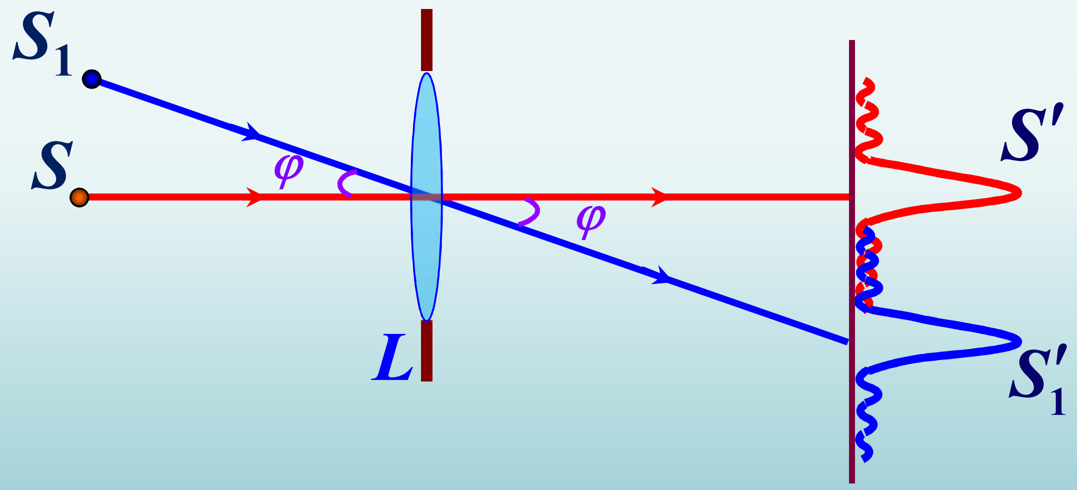
能够区分两个物点的最小距离，是光学仪器的重要性能。




当两个物点彼此足够远时，是可分辨这两个物点的。

当两个物点距离较小时，就有能否分辨的问题。

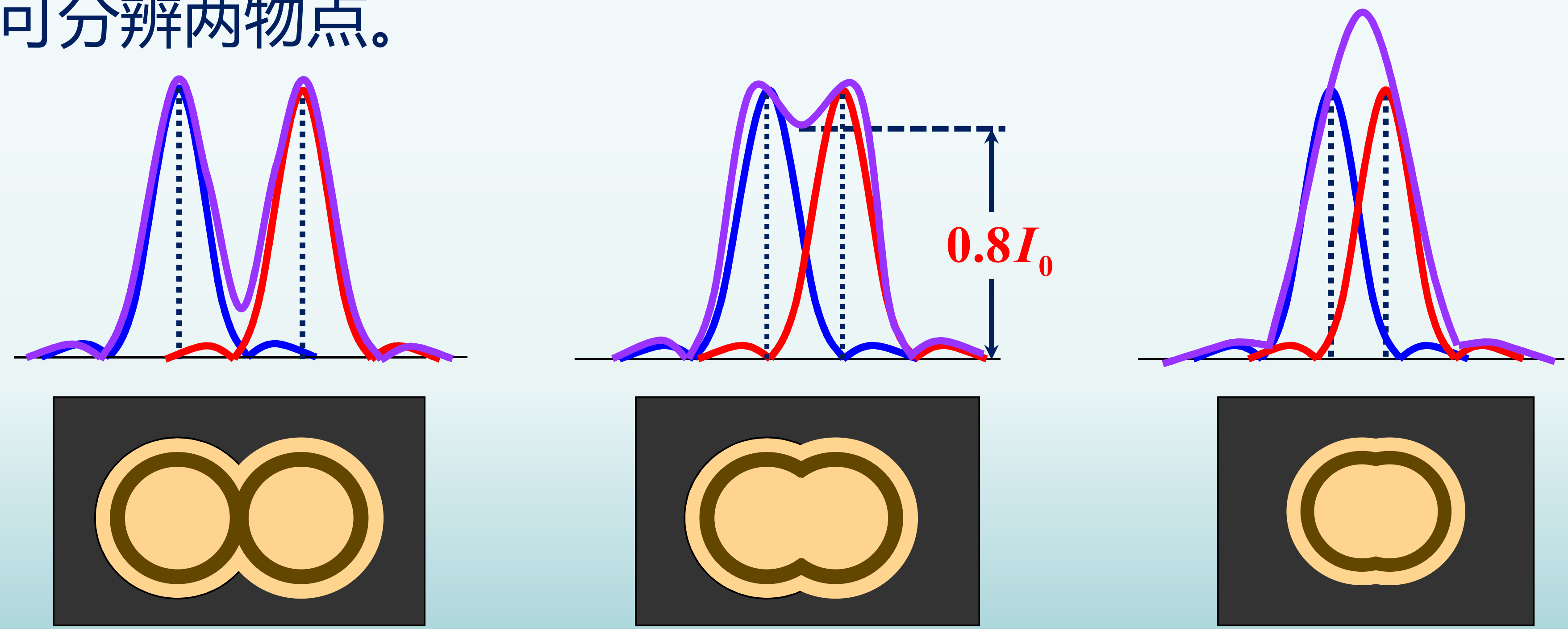
需要一个标准



# 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

- **瑞利判据**

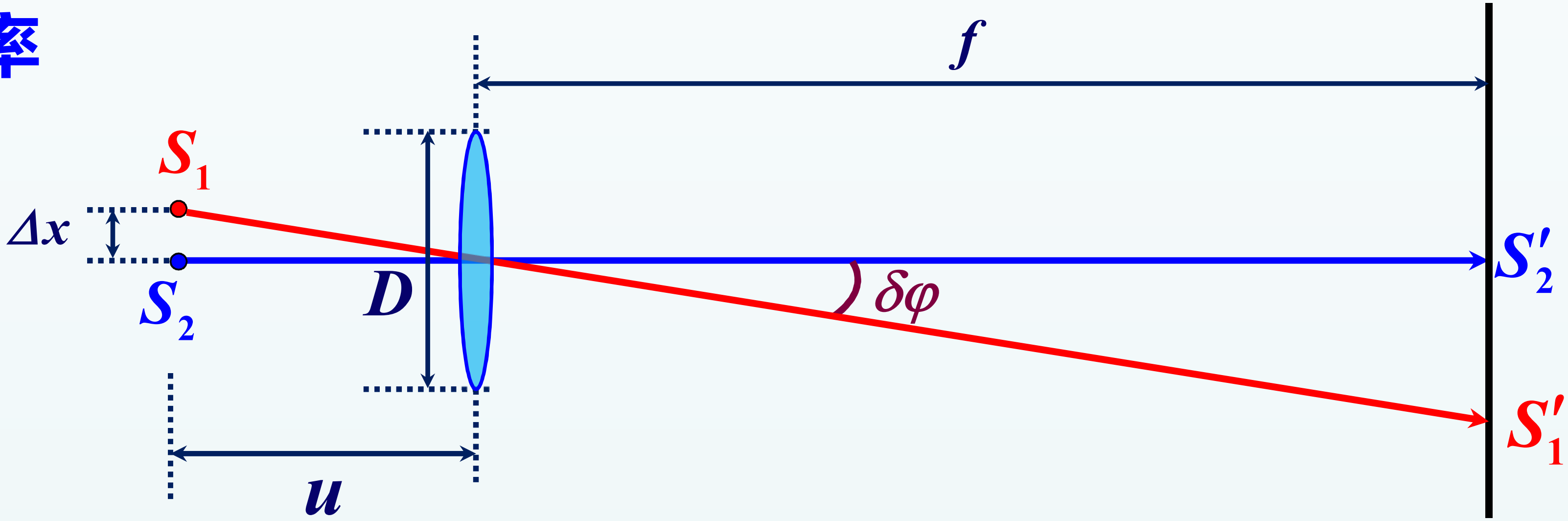
对于两个等光强的非相干物点，点物$S_1$的爱里斑中心恰好与另一个点物$S_2$的爱里斑边缘（第一衍射极小）相重合时，恰可分辨两物点。




可分辨　　恰可分辨　　不可分辨

# 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

- **分辨率**




刚好能分辨时，$S_1$、$S_2$ 两点间的距离是光学仪器的可分辨的最小距离$\Delta x$， $\delta\varphi$是最小分辨角。

$$\delta\varphi = 1.22\frac{\lambda}{\boxed{D}}$$ → 孔径

光学仪器中将最小分辨角的**倒数**称为仪器的**分辨率**。→ 分辨的本领

$$R = \frac{1}{\delta\varphi} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

提升分辨率的途径 $\begin{cases} D\uparrow \\ \lambda\downarrow \end{cases}$

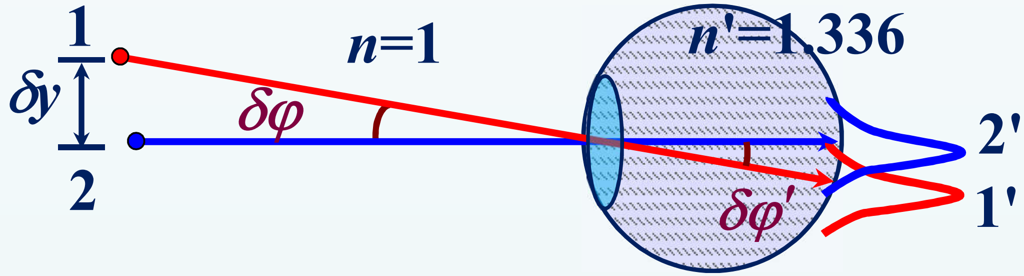
最小分辨距离：$\Delta x = u\delta\varphi$

# 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

## □ 光学仪器的分辨率

- **人眼**

设人眼瞳孔直径为$D$，玻璃体折射率为$n'$，可把人眼看成一枚凸透镜，焦距20毫米。




成象为夫琅和费衍射的图样

由瑞利判据得：$\delta\varphi' = 1.22\lambda'/D = 1.22\lambda/(n'D)$

由折射定律得：$n \cdot \sin(\delta\varphi) = n'\sin(\delta\varphi') \longrightarrow (\delta\varphi) = n'(\delta\varphi')$

$$\delta\varphi = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

$\delta\varphi$为眼外两个恰可分辨的物点对瞳孔中心所张的角，称为眼外最小分辨角。

# 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

- **光栅的$\boxed{\text{分辨本领}}$** ⟶ 分辨率　色散?

色散本领只反映谱线主极大中心分离的程度，但不能说明谱线是否重叠，因为谱线本身有宽度，为此引入色分辨本领。

**定义：** 恰能分辨的两条谱线的平均波长$\lambda$与它们的波长差$\delta\lambda$之比为光栅的分辨本领$R$

$$R \equiv \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

根据瑞利判据：波长为$\lambda$的第$k$级谱线，能与波长为$\lambda+\delta\lambda$的第$k$级谱线分辨清楚的极限是：

$$\left.\begin{aligned} &\text{极大：} & d\sin\theta &= k(\lambda+\delta\lambda) \\ &\text{相邻极小：} & d\sin\theta &= (k+1/N)\lambda \end{aligned}\right\} R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nk$$

光栅分辨本领$R$表示分辨两条谱线的能力。

# 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

例.人眼直径约为3 mm，问人眼的最小分辨角是多大？远处两根细丝之间的距离为2.0 mm，问细丝离开多远时人眼恰能分辨？

解：对视觉最敏感的绿光，人眼的最小分辨角为：

$$\delta\varphi = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\times\frac{550\times10^{-9}}{3\times10^{-3}} = 2.24\times10^{-4}(\mathrm{rad}) \approx 0.01^{\circ}$$

设细丝间距离为$\Delta s$，人与细丝相距$L$，则两丝对人眼的张角为：$\theta = \Delta s/L$

恰能分辨时 $\theta = \delta\varphi$

$$L = \frac{\Delta s}{\delta\varphi} = 8.9\mathrm{m}$$

# 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

例. 光栅A 的$d_A$=2 微米，光栅宽度$W_A$=4厘米，另一光栅B 的$d_B$=4 微米，光栅宽度 $W_B$=10厘米，现有波长为 500nm和500.01nm的平面波垂直照射这两块光栅，选定在第二级工作。试问：这两块光栅分别将这两条谱线分开多大的角度？能否分辨这两条谱线？

解：光栅方程 $d\sin\theta_k = k\lambda$

$$\text{第二级对应的衍射角}\begin{cases}\text{光栅A：}\ \theta_A = 30^0 \\ \text{光栅B：}\ \theta_B = 14.5^0\end{cases}$$

$$\text{角色散}\quad D = \frac{\Delta\theta_k}{\Delta\lambda} = \frac{k}{d\cos\theta_k} \longrightarrow \begin{cases} D_A = 1.155\times10^6\,\text{rad/m} \quad \Delta\theta_A = 2.38'' \\ D_B = 0.516\times10^6\,\text{rad/m} \quad \Delta\theta_B = 1.06'' \end{cases}$$

# 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

$\Delta\theta_A = 2.38''$　　　$\Delta\theta_B = 1.06''$

$$光栅分辨率: R = Nk = \frac{W}{d}k \begin{cases} R_A = N_A k = \dfrac{W_A}{d_A}k = 40000 \\ R_B = N_B k = \dfrac{W_B}{d_B}k = 50000 \end{cases}$$

要分辨500nm和 500.01nm这两条谱线，分辨本领需大于

$R = \dfrac{\lambda}{\delta\lambda} = 50000 \longrightarrow$ 光栅A不能分辨，光栅B能分辨

虽然光栅B将这两条谱线分开的角度小于光栅A的，但B光栅恰能分辨这两条谱线，而A光栅则不能分辨。

# 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

例. 两光谱线波长分别为λ和λ+Δλ，其中Δλ << λ，证明：它们在同一级光栅光谱中的角距离：$\Delta\theta \approx \Delta\lambda\Big/\sqrt{d^2/k^2-\lambda^2}$

证明：光栅方程 $d\sin\theta = k\lambda$

$$d\sin(\theta+\Delta\theta) = k(\lambda+\Delta\lambda)$$

$$\sin(\theta+\Delta\theta)-\sin\theta \approx \Delta(\sin\theta) = \cos\theta\cdot\Delta\theta$$

$$\Delta\theta \approx \frac{k\Delta\lambda}{d\cos\theta} = \frac{k\Delta\lambda}{d\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{k\Delta\lambda}{\sqrt{d^2-k^2\lambda^2}}$$

# 作业：13T20 ~T30

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周四交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。