

24 算法-hw1

November 2024

1 算法渐进分析

1.1 对指数复杂度的三种情形，分别举一个例子，其穷举算法的复杂度对应为 $O(2^n)$, $O(n!)$, $O(n^n)$ 。

1.2 选用你认为最合理的方法证明 $f(n) \neq O(n)$ 和 $f(n) \neq \Omega(n^3)$ ，其中 $f(n) = 2n^2 + 6n + 5$ 。

2 匹配问题

2.1 稳定匹配是否一定存在？若一定存在，请说明理由，若不一定存在，请举出一个反例进行说明。

2.2 有 m 家医院和 n 个刚毕业的医学生，现在要把他们分配到医院里去工作。已知每个人都有自己对医院的喜好程度排序，医院对学生也有。每家医院可以招收若干学生（每家医院的名额是确定的），但名额总数严格小于学生总数，试问是否存在一个稳定匹配算法？这里的稳定匹配指的是，以下两种情况不会发生：(1) 学生 s 被分配到医院 h ，学生 s' 没有工作，但 h 青睐 s' 过于 s 。(2) 学生 s 、 s' 分别被分配到医院 h 、 h' ，但 h 青睐 s' 过于 s ，并且 s' 青睐 h 过于 h' 。

请先用自然语言描述稳定匹配算法，给出伪代码，并验证算法正确性。

2.3 请设计一个 5 个节点的例子，在该例子中用 GS 算法的男方追求版和女方追求版做出来的结果不一样

3 贪心算法-区间调度分析

3.1 有一些球形气球贴在一堵用 XY 平面表示的墙面上。墙面上的气球记录在整数数组 $points$ ，其中 $points[i] = [x_{start}, x_{end}]$ 表示水平直径在 x_{start} 和 x_{end} 之间的气球。不知道气球的确切 y 坐标。

一支弓箭可以在坐标 x 处沿着 y 轴完全垂直地射出一支箭。若有一个气球的直径的开始和结束坐标为 x_{start}, x_{end} ，且满足 $x_{start} \leq x \leq x_{end}$ ，则该气球会被引爆。可以射出的弓箭的数量没有限制。弓箭一旦被射出之后，可以无限地前进。

给定一个数组 $points$ ，请设计算法求出给出引爆所有气球所必须射出的最小弓箭数。

e.g. 若 $points = \{[10, 16], [2, 8], [1, 6], [7, 12]\}$ ，仅需在 $x = 6$ 或 $x = 11$ 处射箭即可。

请 (1) 自然语言描述算法，(2) 写出算法伪代码，(3) 给出算法的时间复杂度分析。