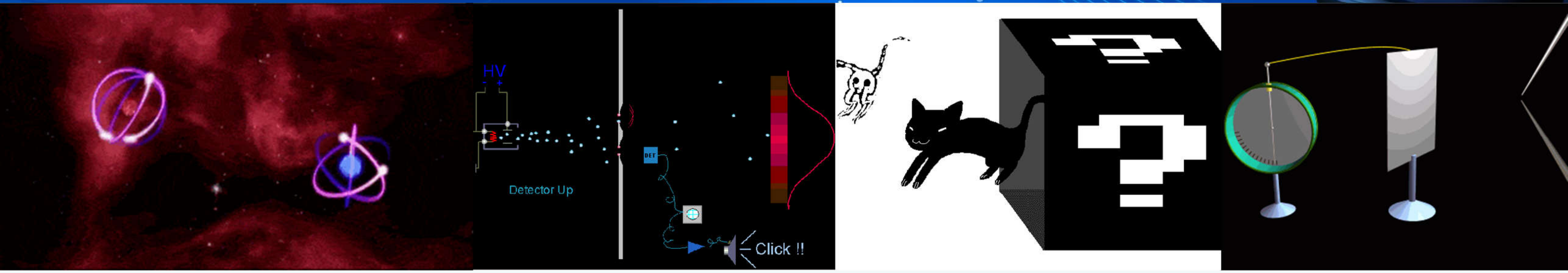
大学物理



第六篇 量子物理

第15章 量子力学基础-1

尹 航

华中科技大学 物理学院

回顾

经典物理： 证实了光的波动性　干涉、衍射、偏振

早期量子论： 证实光的波粒二象性

波动性 $\nu\ \lambda$ $\xleftrightarrow{h}$ **微粒性** $E\ p\ m$

早期量子论
- 普朗克的能量子假设
- 爱因斯坦的光子说、康普顿效应
- 玻尔的氢原子模型

玻尔原子理论局限性
- 引入量子化概念却未完全跳出经典物理
- 无法解释多电子体系、氢原子谱线精细结构

实物粒子是否也具备波动性?

1 德布罗意波

2 不确定关系

3 波函数

德布罗意波

□ 德布罗意波（物质波）

路易•德布罗意
Louis de Broglie
1892~1987

- 1892年8月15日生于法国迪埃普(Dieppe)，贵族。
- 由文转理的物理大师。历史、法律 ⟶ 物理学
- 经历一战、战后师从朗之万。
- 1922~1924 形成物质波思想、获博士学位。
- 1929年获诺贝尔物理学奖，唯一一个以博士论文获得诺贝尔奖的人。
- 1933年评选为法国科学学院院士。

1924年，德布罗意提出，实物粒子（电子、质子、中子、分子、介子、……）也具有波粒二象性。

量子力学诞生

德布罗意波

- **德布罗意物质波假设**

质量 m
速度 v
$\Big\}$ 粒子具有：

能量 E
动量 p

波长 λ
频率 ν ？

相互关系

德布罗意关系

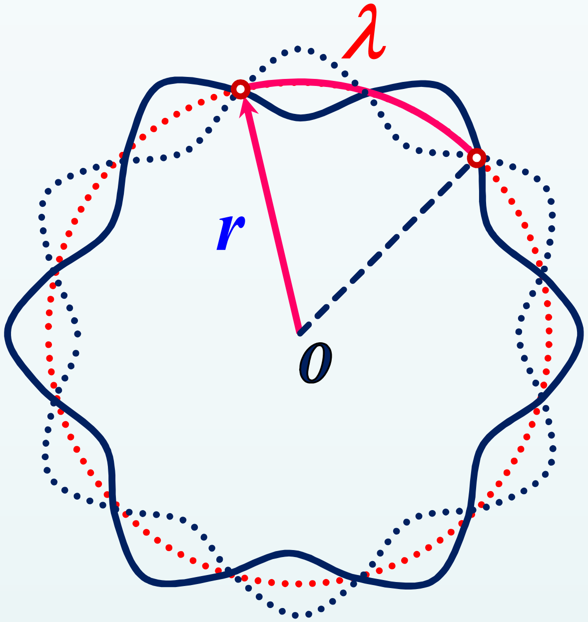
$$\begin{cases} E = h\nu = \hbar\omega \\ p = \dfrac{h}{\lambda} = \hbar k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu = \dfrac{E}{h} = \dfrac{mc^2}{h} \\ \lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv} \end{cases}$$

与粒子相联系的波称为**物质波**，或德布罗意波。

λ —— 德布罗意波长

德布罗意波

用物质波的概念成功地解释了玻尔提出的轨道量子化条件：



$$2\pi r = n\lambda \qquad \lambda = \frac{h}{p}$$

$$2\pi r = n\frac{h}{mv}$$

$$mvr = n\frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, \ldots\ldots)$$

和谐优美的电子驻波

轨道周长为波长的整数倍

角动量量子化条件

德布罗意波

- **如何理解物质波**

$$\boxed{E = h\nu \quad P = h/\lambda}$$ 德布罗意关系

静止质量为m_0的实物粒子，当以速度v 运动时，必有一单色平面波与之相伴，且此单色平面波的波长为λ

$$v \ll c \qquad \lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_\mathrm{k}}}$$

$$v \sim c \qquad \lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

波长与静止质量成反比

实物粒子的波动性是否真的存在呢？

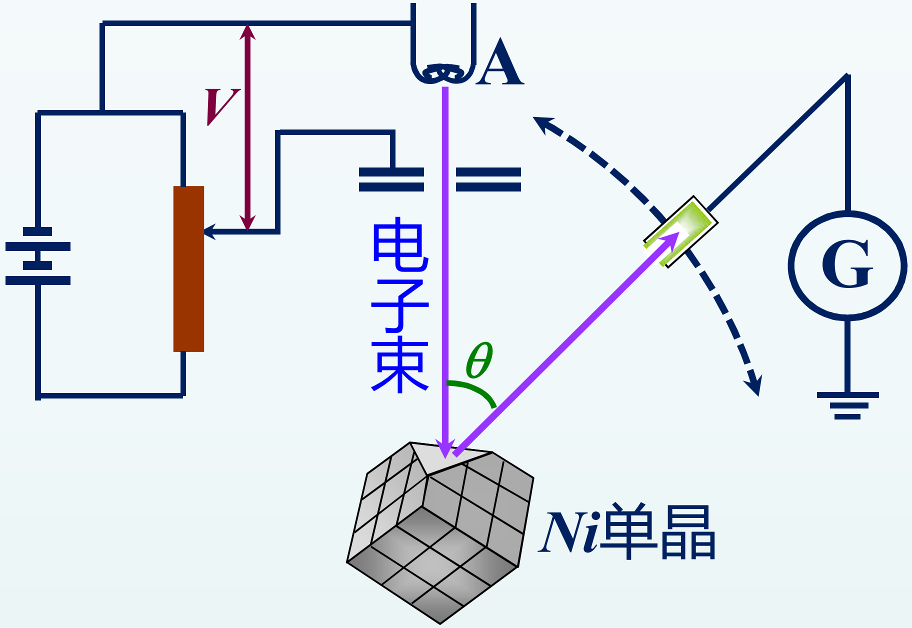
佩兰：这种波怎样用实验来证实呢？

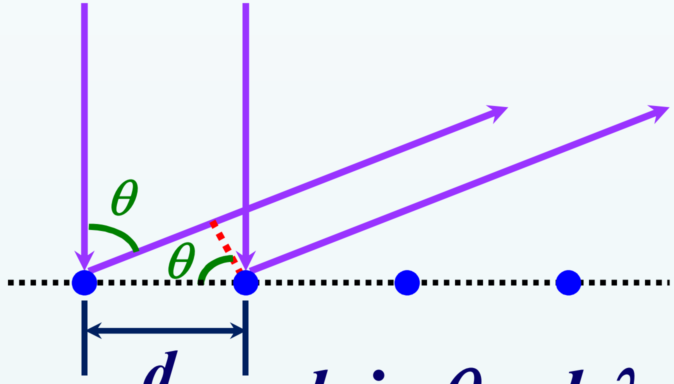
德布罗意：用电子在晶体上的衍射实验可以做到。

德布罗意波

□ 物质波的实验验证

戴维逊—革末电子衍射实验 (1927年):





$$d\sin\theta = k\lambda$$

$$k = 1, 2, \cdots$$

Ni 的晶格常数： $d = 2.15\text{Å}$　取 $k = 1$

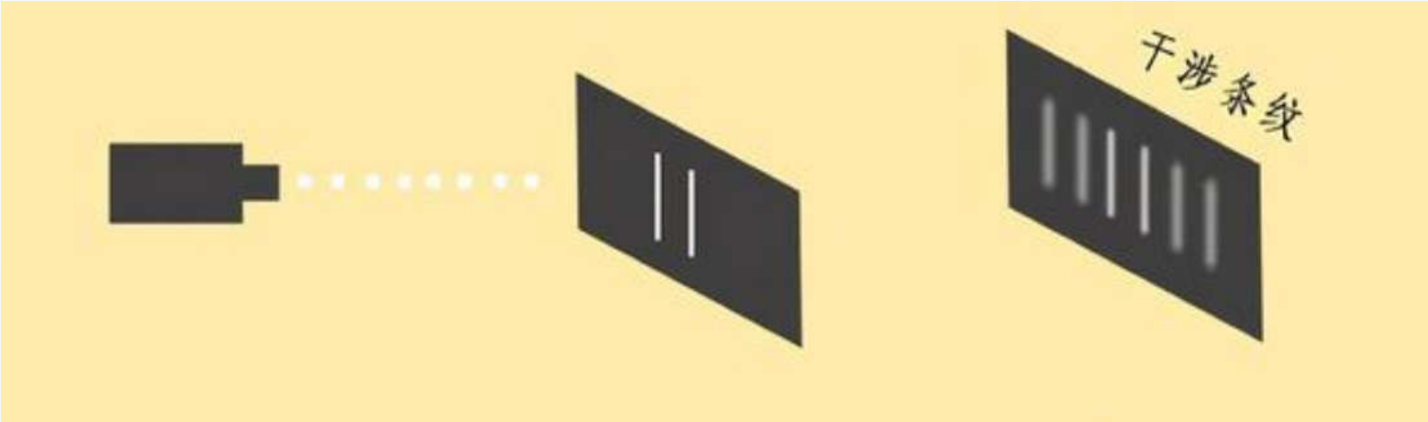
$$\lambda = d\sin\theta = d\sin 50^\circ = 1.65\text{Å}$$

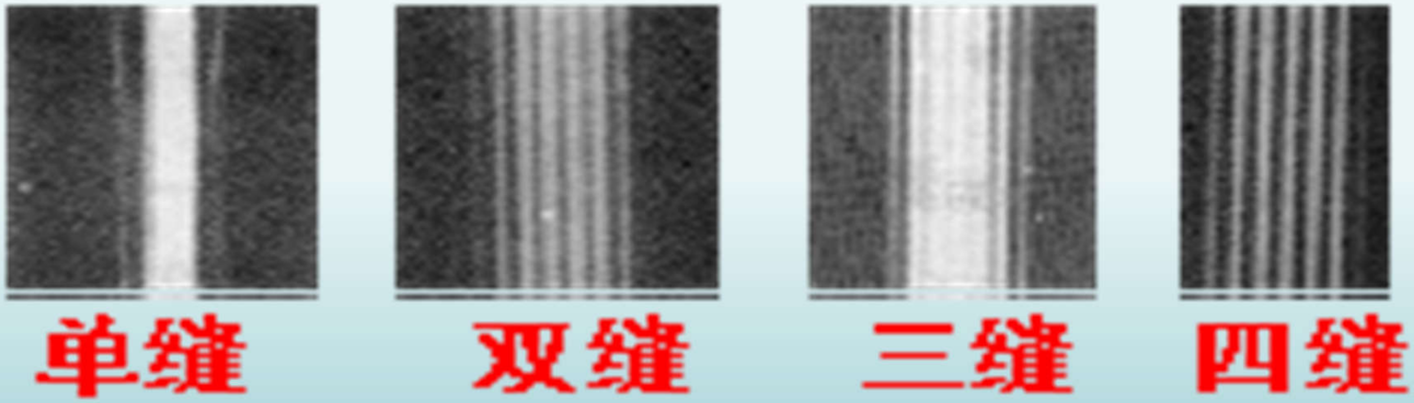
电子的波长： $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{\sqrt{2meV}} = 1.67\text{Å}$

理论值与实验值在误差范围内相符

德布罗意波

约恩逊 (1961) 电子双缝干涉实验

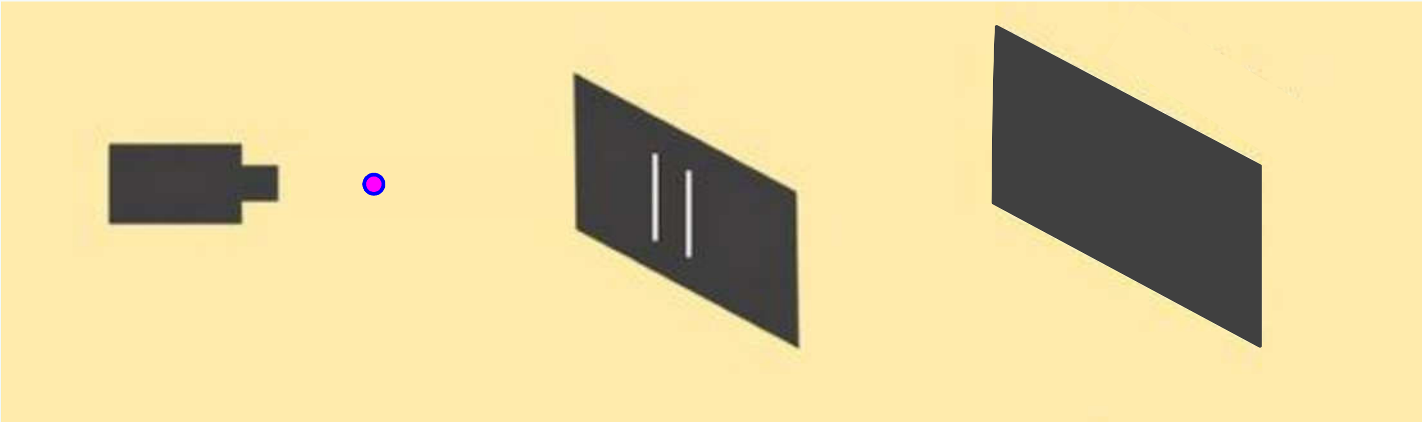




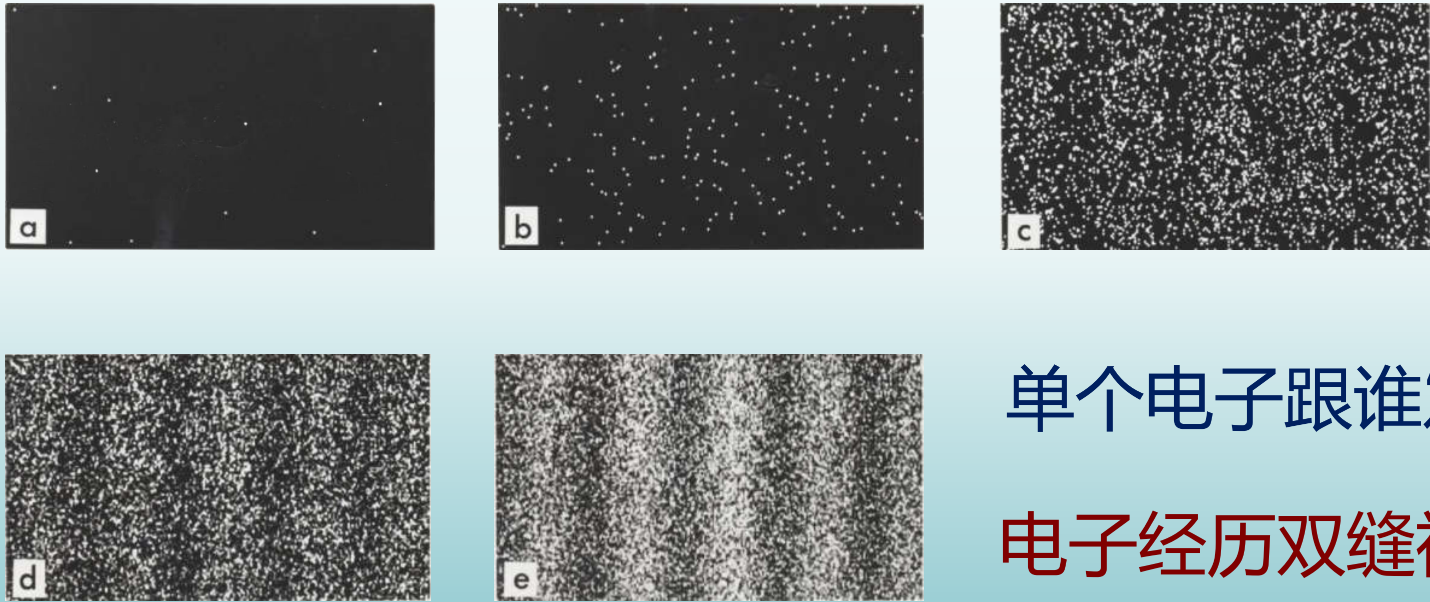
证实物质波的存在

电子双缝干涉

“升级版”的约恩逊实验



单电子发射



单个电子跟谁发生的干涉?

电子经历双缝被缝劈裂成两半?

电子双缝干涉

"升级版"的约恩逊实验

电子在不观测时呈现波动性，观测时呈现粒子性

诡异的不真实感　　虚拟世界的既视感

"月亮只有在你看它的时候才存在"

电子双缝干涉

“观察者效应”

薛定谔的猫

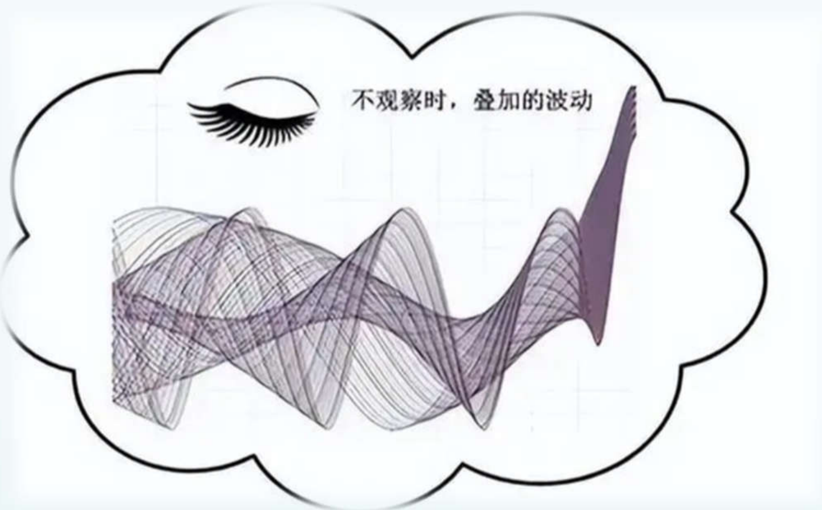
C. 罗是否进球取决于什么?

宏观世界：射门位置、发力大小、风速 ……

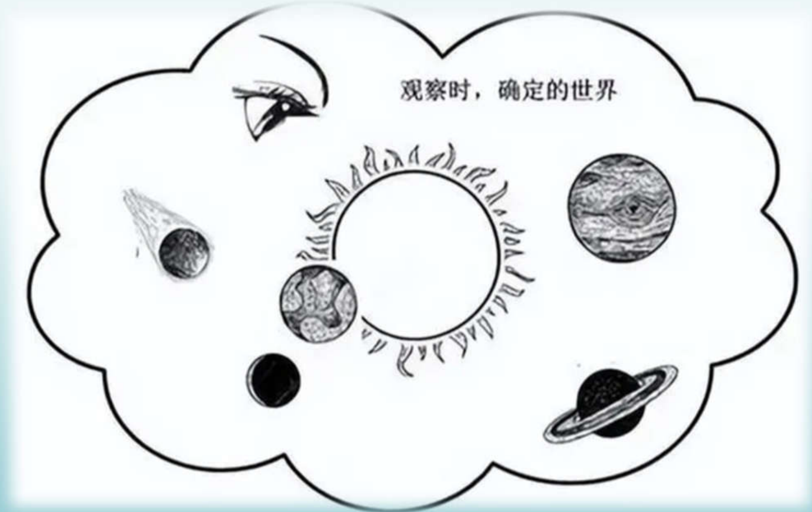
微观世界 → ~~你是否观看比赛~~

电子双缝干涉

“观察者效应”



多态叠加（哥本哈根解释）



坍缩为其中一种本征态

电子双缝干涉

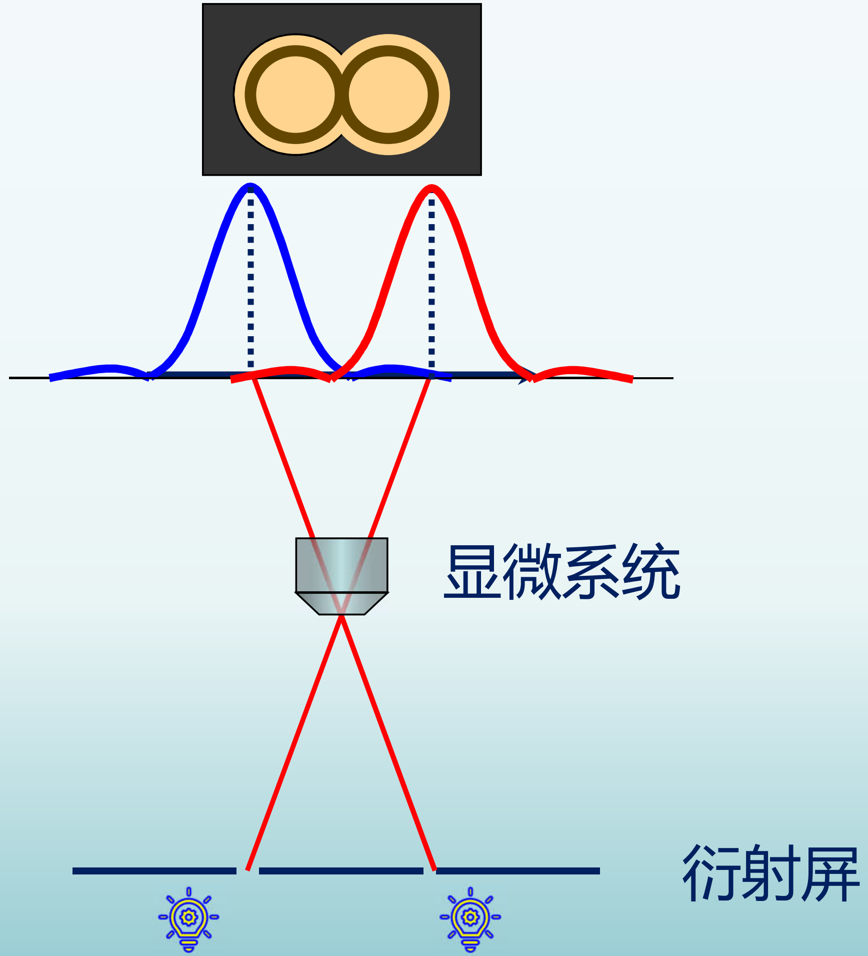
“理解量子态坍缩”

观察者是如何影响观测结果的

电子双缝干涉

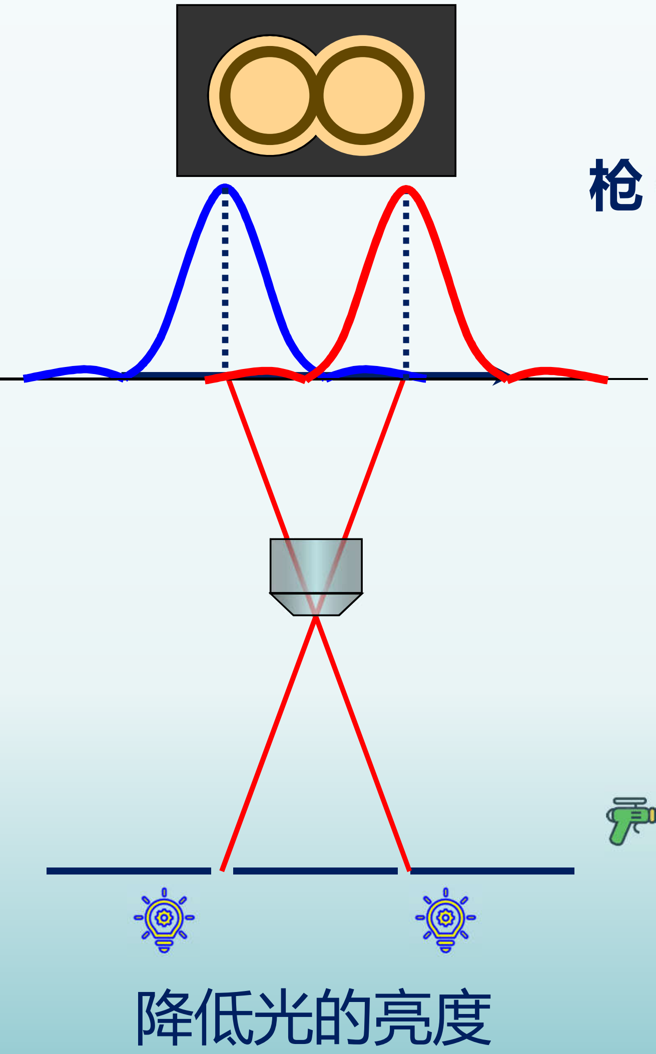
观察者是如何影响观测结果的

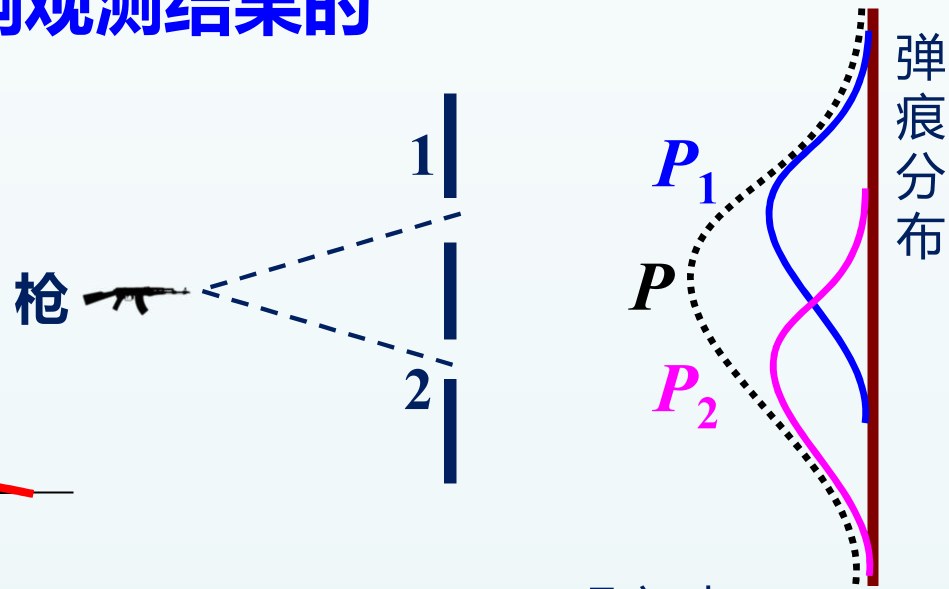
电子双缝实验中观测电子的原理



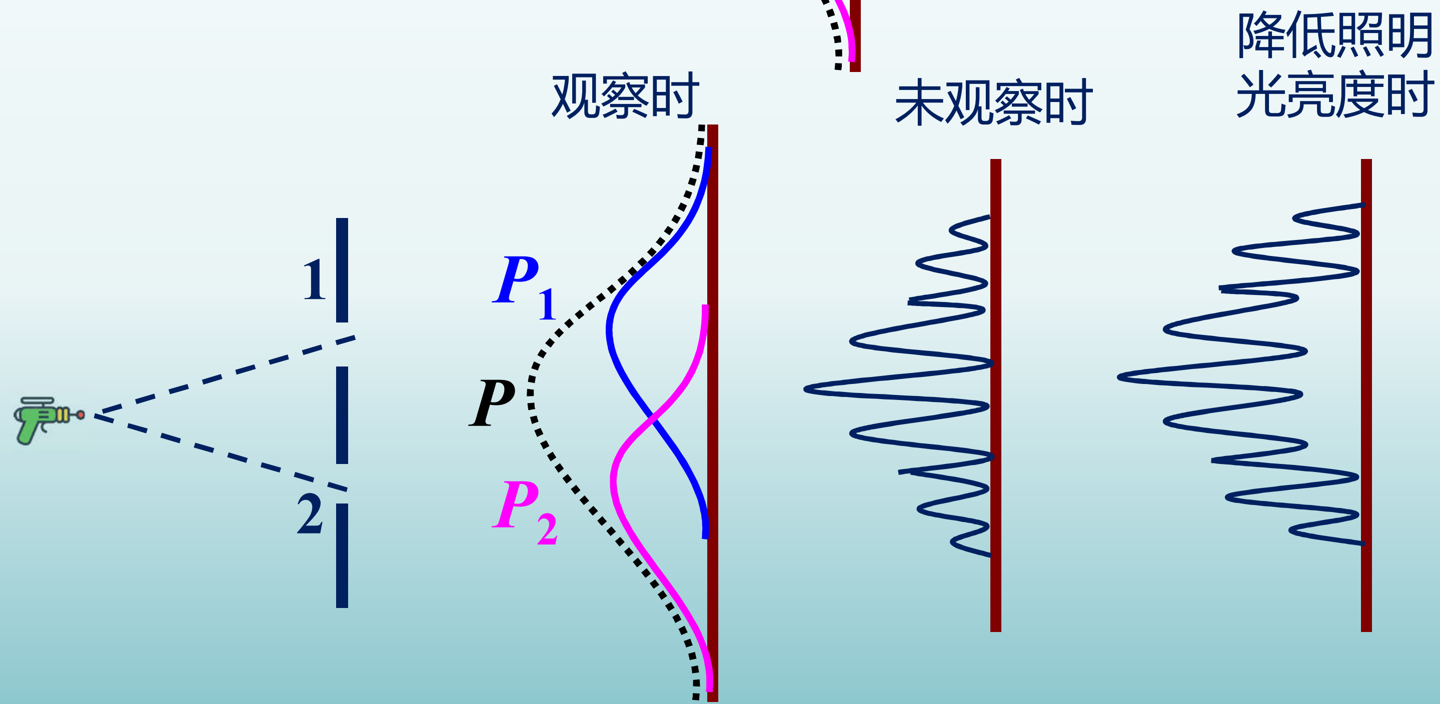
电子双缝干涉

观察者是如何影响观测结果的



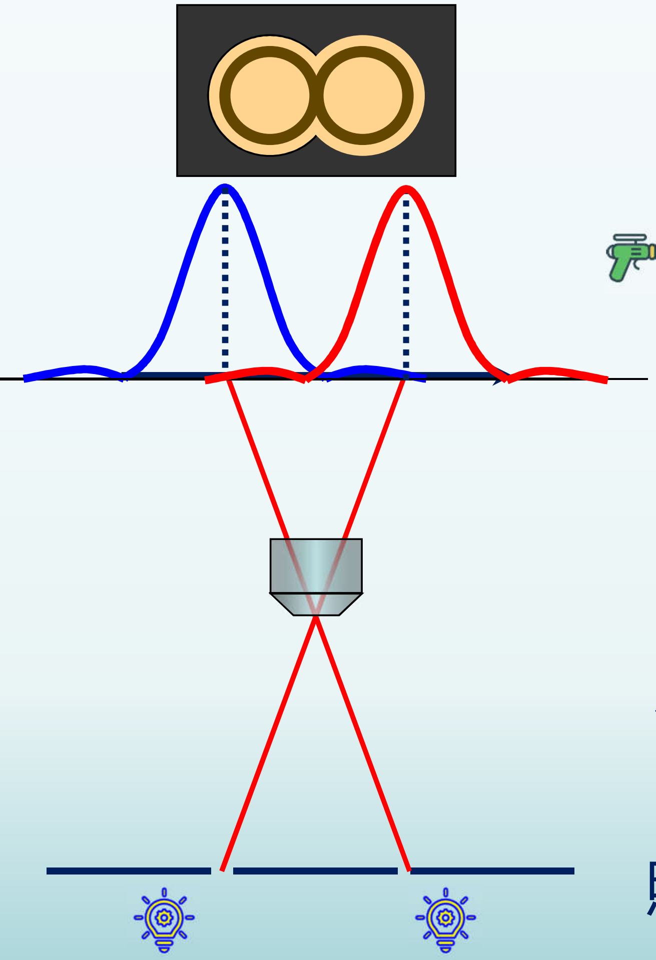


不论观察者是否存在，弹痕分布都是不变的。

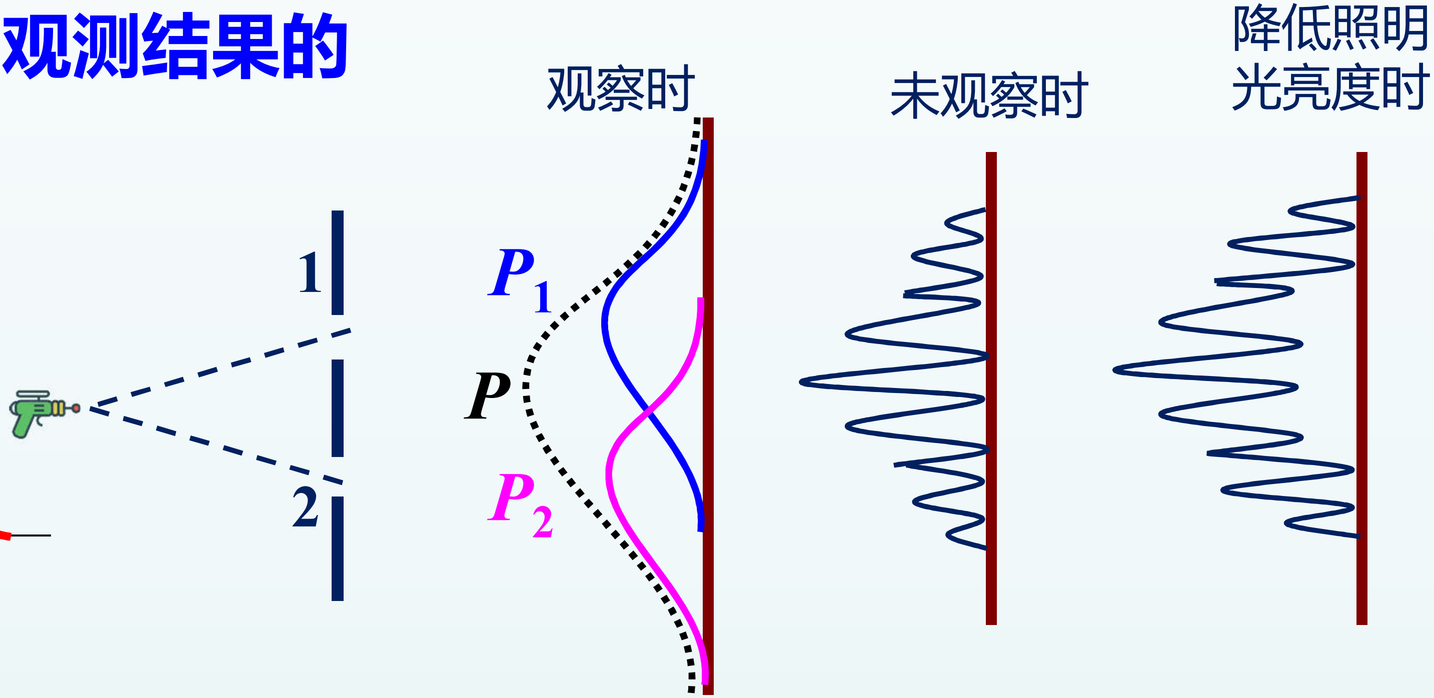


电子双缝干涉

观察者是如何影响观测结果的



降低光的亮度



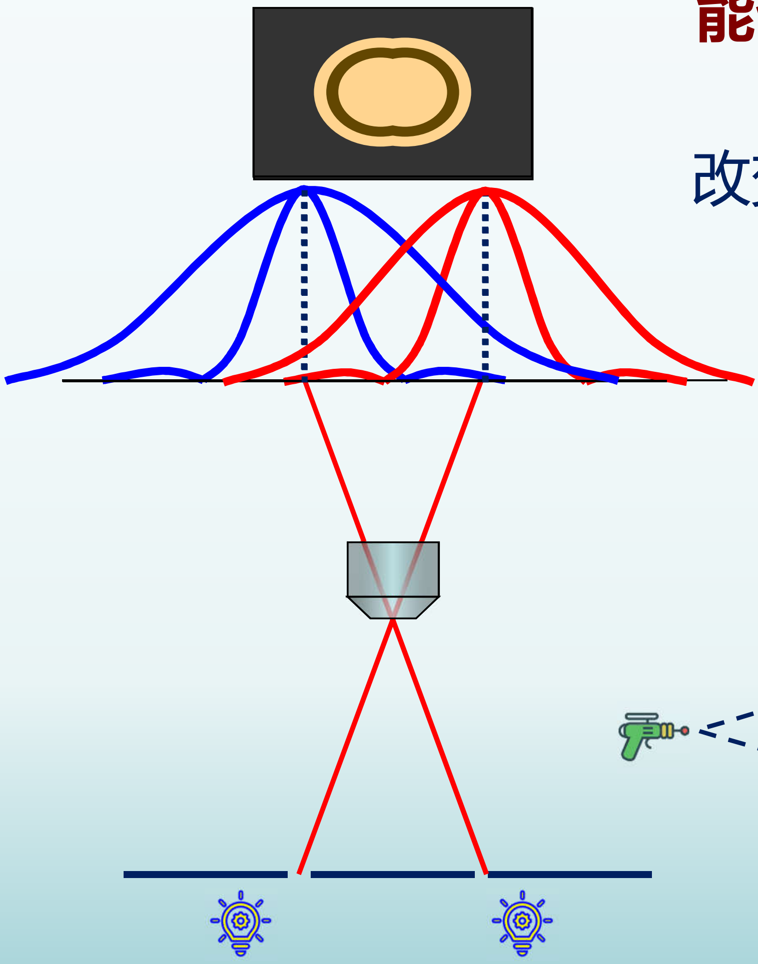
观察过程中光子与电子有碰撞，光子干扰了电子

照明光亮度降低 → 光子数减少 → 光子干扰部分电子

能否构造出一种不干扰电子的观察?

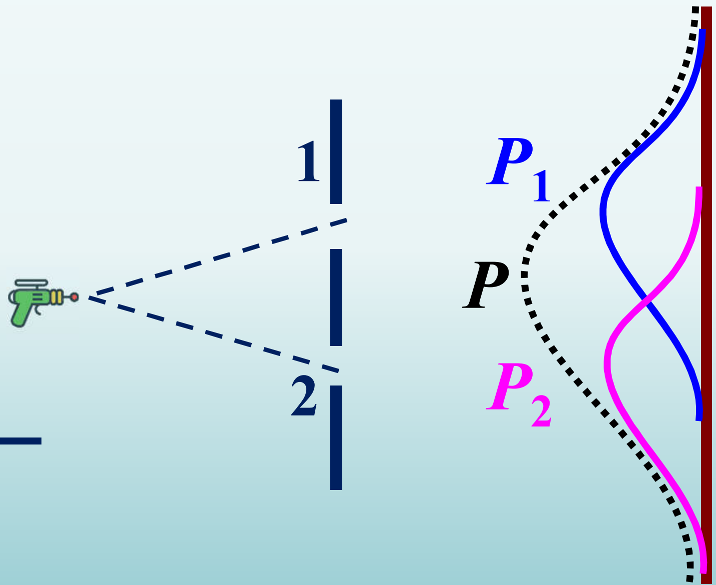
电子双缝干涉

观察者是如何影响观测结果的



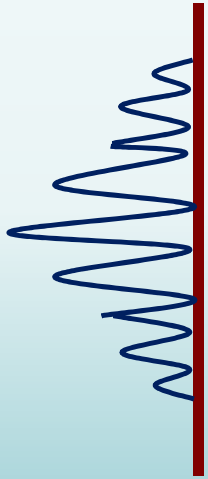
能否构造出一种不干扰电子的观察？ 降低光子能量

改变照明光波长 → 使用长波长的照明光



照明光波长导致

小孔不可分辨时



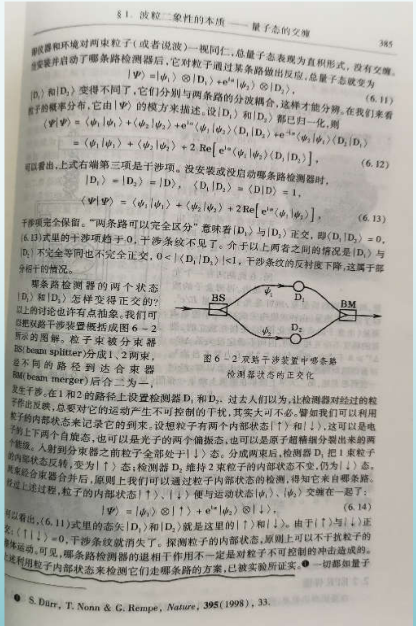
电子双缝干涉

观察者是如何影响观测结果的

能否构造出一种不干扰电子的观察？ **不可能！** **微观世界的客观规律**

- **玻尔：** 微观客体的观测，必然会给它待来不可控制的动量、能量干扰。
- **费曼：** 观测过程中是光子对电子带去了不可控制的冲击影响。
- **近现代：** 这种干扰来自于被探测客体与探测器之间量子态的交缠，传统看法中的能量-动量冲击不是必需的。

《量子物理》赵凯华



§1. 波粒二象性的本质——量子态的交缠　　385

即仪器和环境对两束粒子（或者说波）一视同仁，总量子态表现为直积形式，没有交缠。在安装并启动了哪条路检测器后，它对粒子通过某条路做出反应，总量子态就变为

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |D_1\rangle + e^{i\alpha}|\psi_2\rangle \otimes |D_2\rangle, \quad (6.11)$$

$|D_1\rangle$ 和 $|D_2\rangle$ 变得不同了，它们分别与两条路的分波耦合，这样才能分辨。在我们来看粒子的概率分布，它由 $|\Psi\rangle$ 的模方来描述。设 $|D_1\rangle$ 和 $|D_2\rangle$ 都已归一化，则

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\psi_1|\psi_1\rangle + \langle\psi_2|\psi_2\rangle + e^{i\alpha}\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle D_1|D_2\rangle + e^{-i\alpha}\langle\psi_2|\psi_1\rangle\langle D_2|D_1\rangle$$
$$= \langle\psi_1|\psi_1\rangle + \langle\psi_2|\psi_2\rangle + 2\,\mathrm{Re}\left[e^{i\alpha}\langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle D_1|D_2\rangle\right], \quad (6.12)$$

可以看出，上式右端第三项是干涉项。没安装或没启动哪条路检测器时，

$$|D_1\rangle = |D_2\rangle = |D\rangle, \quad \langle D_1|D_2\rangle = \langle D|D\rangle = 1,$$
$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\psi_1|\psi_1\rangle + \langle\psi_2|\psi_2\rangle + 2\,\mathrm{Re}\left[e^{i\alpha}\langle\psi_1|\psi_2\rangle\right], \quad (6.13)$$

干涉项完全保留。“两条路可以完全区分”意味着 $|D_1\rangle$ 与 $|D_2\rangle$ 正交，即 $\langle D_1|D_2\rangle = 0$，(6.13)式里的干涉项趋于 0，干涉条纹不见了。介于以上两者之间的情况是 $|D_1\rangle$ 与 $|D_2\rangle$ 不完全等同也不完全正交，$0 < |\langle D_1|D_2\rangle| < 1$，干涉条纹的反衬度下降，这属于部分相干的情况。

哪条路检测器的两个状态 $|D_1\rangle$ 和 $|D_2\rangle$ 怎样变得正交的？以上的讨论也许有点抽象。我们可以把双路干涉装置概括成图 6－2 所示的图解。粒子束被分束器 BS(beam splitter)分成 1、2 两束，经不同的路径到达合束器 BM(beam merger)后合二为一，发生干涉。在 1 和 2 的路径上设置检测器 D_1 和 D_2。过去人们以为，让检测器对经过的粒子作出反映，总要对它的运动产生不可控制的干扰，其实大可不必。譬如我们可以利用粒子的内部状态来记录它的到来。设想粒子有两个内部状态 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$，这可以是电子的上下两个自旋态，也可以是光子的两个偏振态，也可以是原子超精细分裂出来的两个能级。入射到分束器之前粒子全部处于 $|\downarrow\rangle$ 态。分成两束后，检测器 D_1 把 1 束粒子的内部状态反转，变为 $|\uparrow\rangle$ 态；检测器 D_2 维持 2 束粒子的内部状态不变，仍为 $|\downarrow\rangle$ 态。两束经合束器合并后，原则上我们可以通过粒子内部状态的检测，得知它来自哪条路。经过上述过程，粒子的内部状态 $|\uparrow\rangle$、$|\downarrow\rangle$ 便与运动状态 $|\psi_1\rangle$、$|\psi_2\rangle$ 交缠在一起了：

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\uparrow\rangle + e^{i\alpha}|\psi_2\rangle \otimes |\downarrow\rangle, \quad (6.14)$$

可以看出，(6.11)式里的态矢 $|D_1\rangle$ 和 $|D_2\rangle$ 就是这里的 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$。由于 $|\uparrow\rangle$ 与 $|\downarrow\rangle$ 正交：$\langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0$，干涉条纹就消失了。探测粒子的内部状态，原则上可以不干扰粒子的整体运动。可见，哪条路检测器的退相干作用不一定是对粒子不可控制的冲击造成的。上述利用粒子内部状态来检测它们走哪条路的方案，已被实验所证实。[1] 一切都如量子

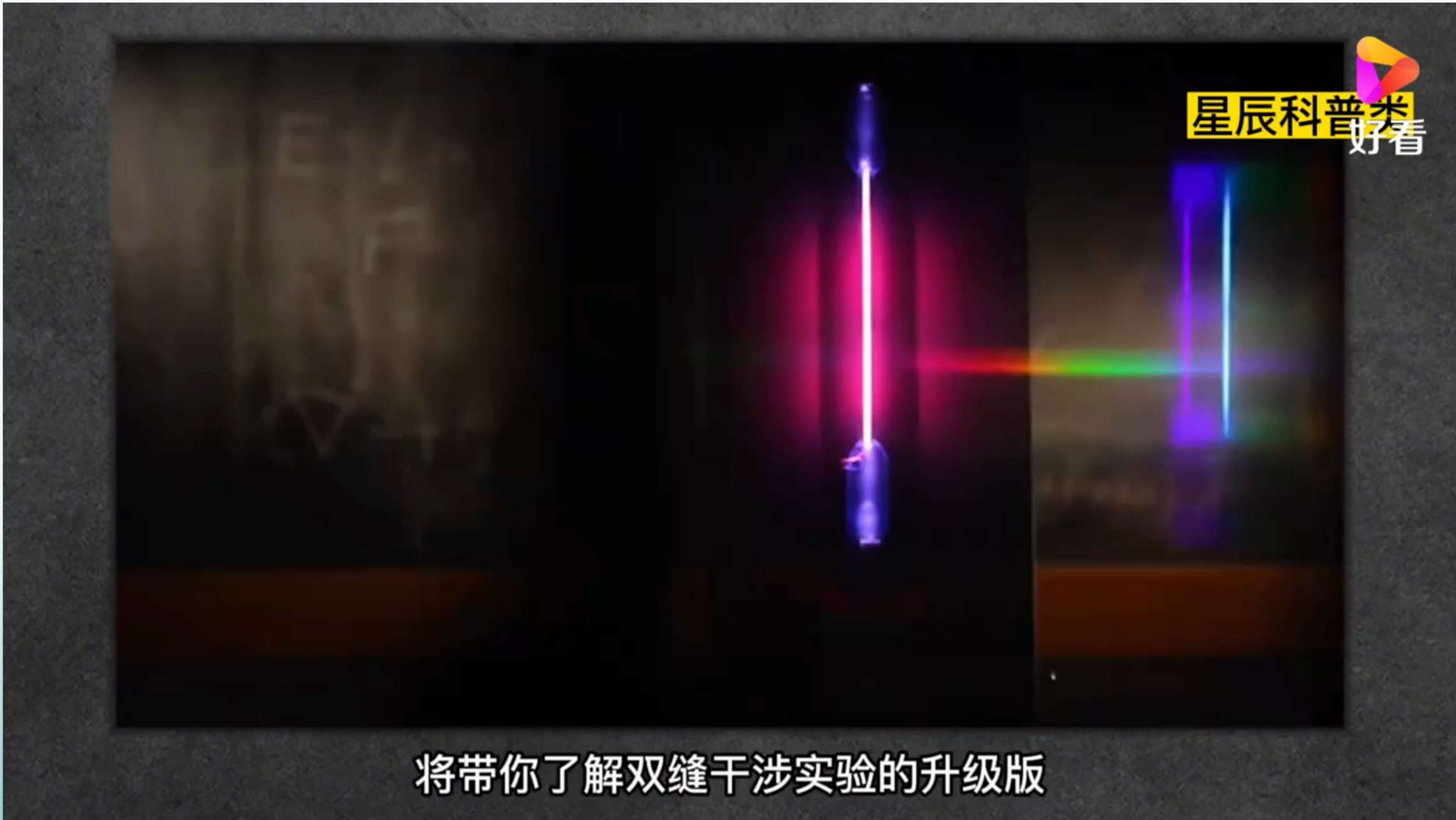
BS　ψ_1　D_1　BM　ψ_2　D_2

图 6－2 双路干涉装置中哪条路检测器状态的正交化

[1] S. Dürr, T. Nonn & G. Rempe, *Nature*, 395(1998), 33.

电子双缝干涉

"观测创造现实的例子"——惠勒选择延迟实验



德布罗意波

宏观粒子是否也具有波动性?

例：m=0.01kg，v=300 m/s的一颗子弹其波长 λ=?

$$\lambda=\frac{h}{P}=\frac{h}{mv}=\frac{6.63\times10^{-34}}{0.01\times300}\text{ m}=2.21\times10^{-34}\text{ m}$$

h 极其微小， 宏观物体的波长远小于观测尺度

宏观物体仅体现出粒子性

1 德布罗意波

2 不确定关系

3 波函数

不确定关系

□ 不确定关系（测不准原理）

经典粒子： 质点运动时，其坐标和动量是可以同时被测定。

（质点）

微观粒子：其坐标和动量不能同时被测定。

（如电子）　（微观粒子的波粒二象性）

不确定关系：微观粒子的位置和动量不能同时具有确定的值。

- **位置和动量的不确定关系式**

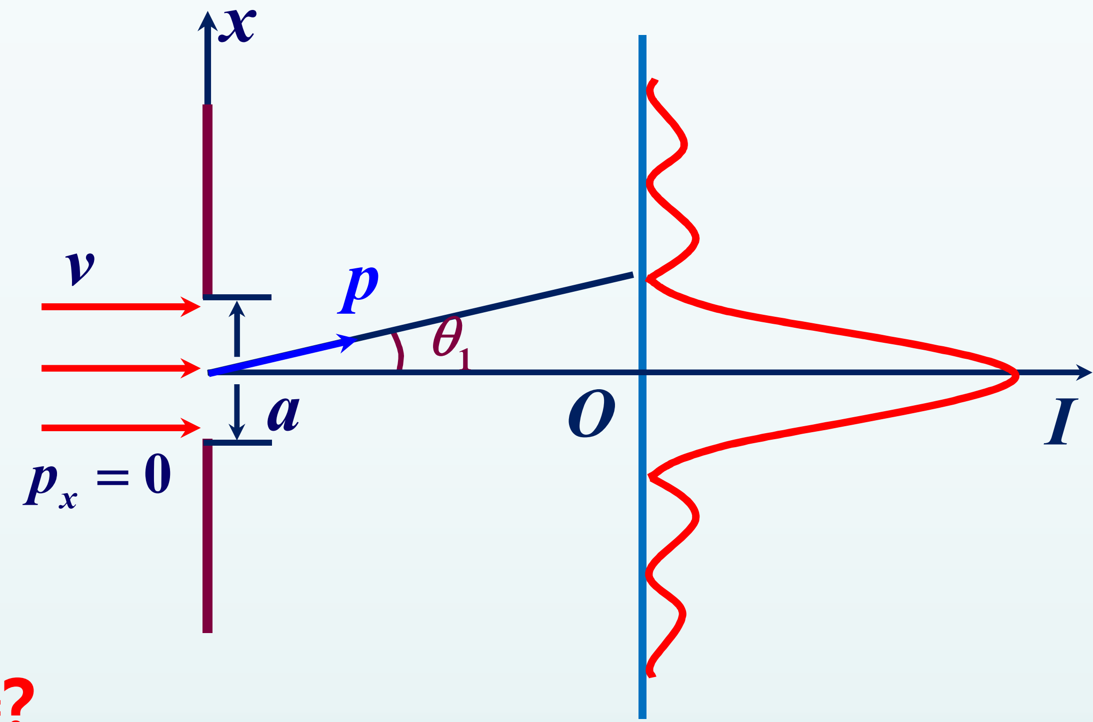
量子力学理论证明：

在某确定方向上(如x方向)粒子的位置有不确定量Δx，对应动量的不确定量Δp_x，两者有一关系： $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

不确定关系

- **电子单缝衍射说明不确定关系** $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

设一束动量为p的电子通过宽为$a=\Delta x$ 的单缝，产生衍射:



考虑其中一个电子从缝中通过电子的坐标不确定范围是:

$$\Delta x = a$$

电子动量在x方向的分量: $p_x=?$

若电子落在中央极大范围内: $|p_x| \leq p\sin\theta_1$

动量不确定范围: $\Delta p_x = p\sin\theta_1$

落在次极大的电子动量满足: $\Delta p_x > p\sin\theta_1$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta p_x = p\sin\theta_1 \\ \Delta p_x > p\sin\theta_1\end{array}\right\} \Delta p_x \geq p\sin\theta_1$$

不确定关系

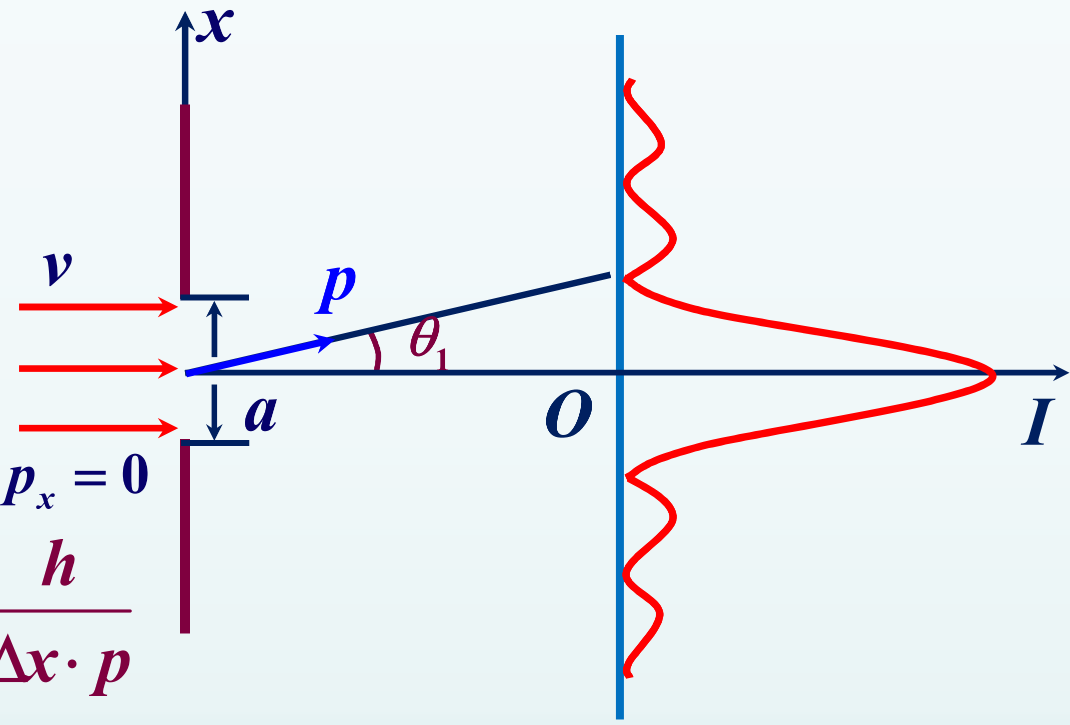
- **电子单缝衍射说明不确定关系**

$$\Delta x = a$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta p_x = p\sin\theta_1 \\ \Delta p_x > p\sin\theta_1\end{array}\right\}\Delta p_x \geq p\sin\theta_1$$

由单缝衍射第1级暗纹条件:

$$\left.\begin{array}{l} a\sin\theta_1 = \lambda \\ \text{由德布罗意关系} \\ E = h\nu \quad p = \dfrac{h}{\lambda}\end{array}\right\}\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{\Delta x \cdot p}$$



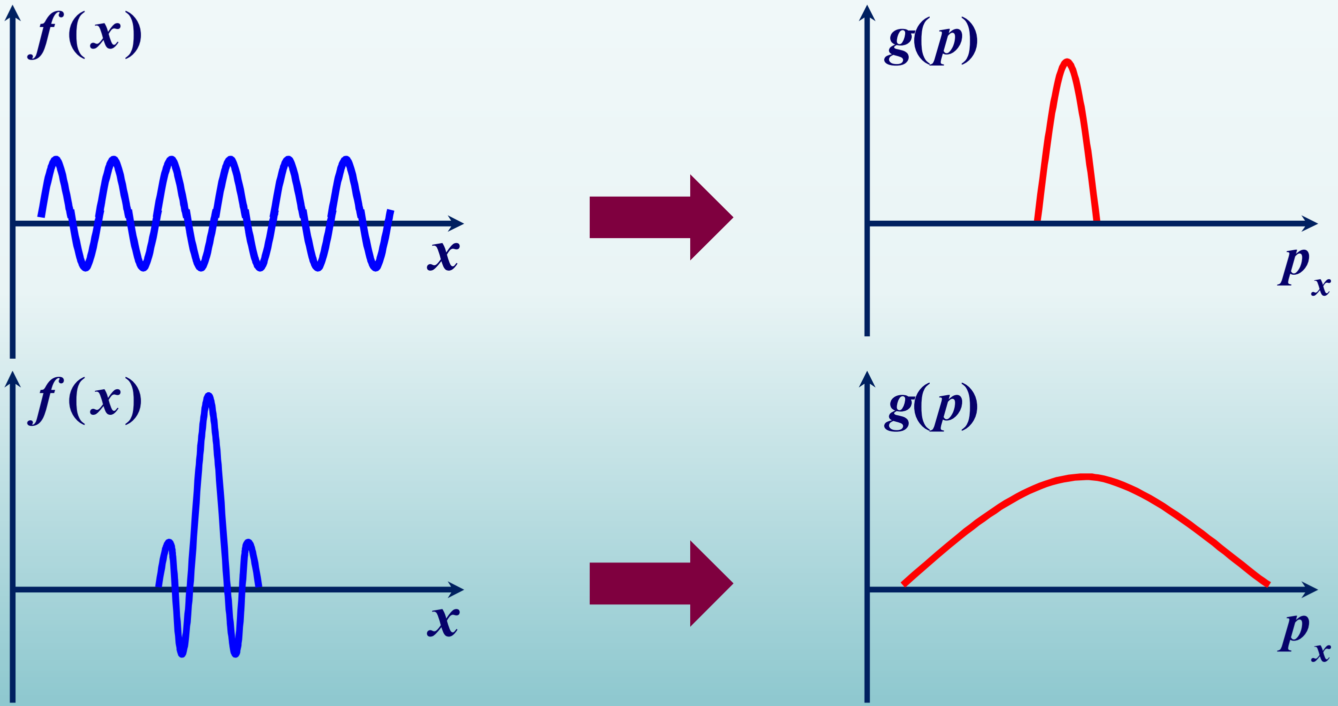
$$\Delta p_x \geq p\sin\theta_1 = \frac{h}{\Delta x} \longrightarrow \boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

不确定关系

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

物理意义：粒子坐标确定得越准确（Δx越小）的同时，粒子在这坐标方向上动量分量的准确度就越差（Δp_x越大）,反之亦然。

本质上是粒子波动性的体现



不确定关系

- **三维运动中的不确定关系**

$$\begin{cases}\Delta x \cdot \Delta p_x \ge h \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \ge h \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \ge h\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}\Delta x \cdot \Delta p_x \ge \hbar/2 \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \ge \hbar/2 \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \ge \hbar/2\end{cases}$$

海森堡“不确定关系”

海森堡“测不准原理”

(1927)

Werner Heisenberg

1932 诺贝尔奖

不确定关系是自然界的客观规律，不是测量技术和主观能力的问题。是微观粒子的波粒二象性的必然表现。

推论： $\Delta t \cdot \Delta E \ge \hbar/2$

时间与能量的不确定关系

不确定关系

例. 小球质量m=10^{-3}千克，速度v=0.1米/秒, Δx=10^{-6}米，求动量和速度的不确定范围。

解： $\Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{2\Delta x} = 5.28\times10^{-29}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ $\Delta v_x \geq 5.28\times10^{-26}\,\mathrm{m/s}$

因为普朗克常数在宏观尺度上很小，因此物理量的不确定性远在实验的测量精度之外。

例. 电子质量m_e=9.1×10^{-31} kg，在原子中电子的$\Delta x\leq10^{-10}$m，求Δv_x

解： $\Delta v_x \geq \dfrac{\hbar}{2m_e\Delta x} = 0.6\times10^{6}\,\mathrm{m/s}$ $v_e \approx 10^{6}\,\mathrm{m/s}$

原子中电子速度的不确定量与速度本身的大小相当，甚至更大。

原子中电子在任一时刻都没有确定的位置和速度，也没有确定的轨道，不能看成经典粒子。

不确定关系

例. 设子弹的质量为0.01kg，枪口的直径为0.5cm，试用不确定关系计算子弹射出枪口的横向速度。

解：不确定关系：

$$\left.\begin{aligned}\Delta x\cdot\Delta p_x &\geq \hbar/2\\ \Delta x &= 0.5\,\mathrm{m}\\ \Delta p_x &= m\Delta v_x\end{aligned}\right\}\Delta v_x=\frac{\hbar}{2\Delta x\cdot m}=1.0\times10^{-30}\,\mathrm{m/s}$$

例.电子显像管中，电子加速电压为9 kV，电子枪口直径为0.1 mm，求电子射出枪口的横向速度。

解：分析同上

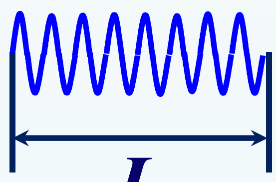
$$\left.\begin{aligned}&\Delta v_x=\frac{\hbar}{2\Delta x\cdot m}=0.09\,\mathrm{m/s}\\ &\text{电子加速后速度为：}v=5.6\times10^{7}\,\mathrm{m/s}\end{aligned}\right\}\Delta v_x \ll v$$

微观粒子在宏观尺度范围波动效应可忽略。

不确定关系

例. 用不确定关系，证明光波列长度 $L=\dfrac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda}$

相干长度

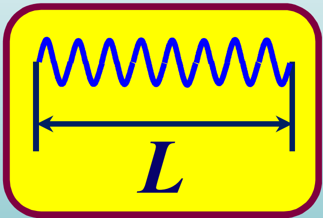


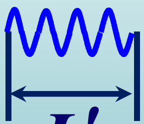
证明：光波列长度即为光子坐标的不确定量：$\Delta x = L$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta p_x \Delta x = \Delta p_x L \geq \dfrac{\hbar}{2} = \dfrac{h}{4\pi} \\[2ex] p_x = \dfrac{h}{\lambda} \longrightarrow \Delta p_x = -\dfrac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda \end{array}\right\} L \geq \frac{h}{4\pi\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda}$$

$$\therefore L = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

讨论：





哪个图中光子的动量准确度高？

不确定关系

例.关于不确定关系：$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$（多选）

A. 粒子的动量不可能确定；　　B. 粒子的坐标不可能确定；

C. 粒子的动量和坐标不可能同时确定；

D. 不确定关系不仅适用于电子和光子，也适用于其它粒子。

例. 波长λ=500 nm的光沿x轴正向传播，若光的波长的不确定量$\Delta\lambda=10^{-4}$ nm，利用不确定关系式$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$可得光子的$x$坐标的不确定量至少为：

A、25 cm　　B、50 cm

C、250 cm　　D、500 cm

$$\Delta p_x = -\frac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

1 德布罗意波

2 不确定关系

3 波函数

波函数

□ 微观粒子的状态描述

微观粒子 $\begin{cases} \text{粒子性} \quad \text{与经典粒子不同！} \\ \text{波动性} \quad \text{与经典波不同！} \end{cases}$

需寻求一种能同时反映微观粒子的粒子性和波动性的描述方法

经典力学	量子力学
粒子状态： $\vec{r} \rightarrow \vec{v}, \vec{a}, E_k, \vec{p} \cdots$	$\psi(\vec{r},t)$ —波函数
动力学方程： $\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{r}(t)$	薛定谔方程 $\rightarrow \psi(\vec{r},t)$

波函数

① 经典的波与波函数

机械波 $y(x,t)=A\cos(\omega t-kx)$

电磁波 $E(x,t)=E_0\cos(\omega t-kx)$

经典波为实函数: $y(x,t)=\mathrm{Re}[Ae^{-i(\omega t-kx)}]$

② 量子力学波函数（复函数）

描述微观粒子运动的波函数 $\psi(\vec{r},t)$

自由粒子平面波函数 $\psi(x,t)=\psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$

$$\boxed{\begin{gathered}E=h\nu=\hbar\omega\\ \vec{p}=\frac{h}{\lambda}\vec{e}_n=\hbar\vec{k}\end{gathered}}$$

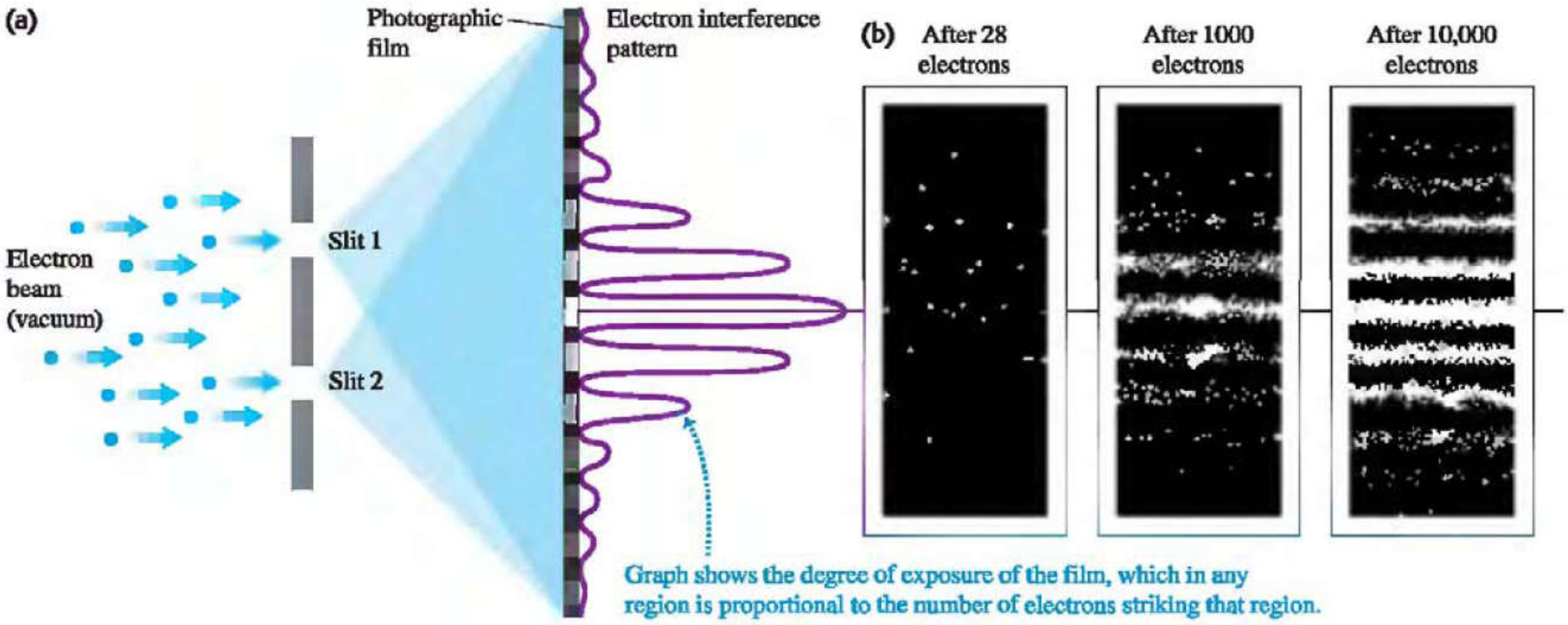
$$\psi(\vec{r},t)\begin{cases}\text{如何既描述微观粒子的粒子性又能表现出波动性?}\\ \text{不直接给出粒子的力学量，如何描述粒子状态?}\end{cases}$$

波函数

- **非经典波的描述**

电子双缝衍射实验结果

39.9 (a) Formation of an interference pattern for electrons incident on two slits, (b) after 28, 1000, and 10,000 electrons.



波函数

- **非经典波的描述**

光的双缝衍射实验：

衍射条纹——两衍射波在屏上的相干叠加。

无论入射波强度如何小，经典的波都显示强弱连续分布的衍射条纹，只是亮度微弱而已。

电子双缝衍射实验：

衍射图样与光的双缝衍射图样**完全一样！**　表明电子具有波动性。

粒子性？　条纹明暗的分布反映屏上的电子数目的分布。

明条纹——电子数多；　暗条纹——电子数少。

波函数

若减弱入射电子束的强度以致使一个一个电子依次通过双缝。

某个电子将落在屏上哪一点？ 落在屏上的亮纹区域

屏上各处明暗的不同表明落在各处的可能性不同。

概率

衍射图样反映了电子落点的分布概率。

概率分布由电子波的干涉和衍射图样中的强度分布决定。

电子衍射是大量电子事件的统计结果。

电子波
(非经典波)

波函数

波函数

电子衍射是大量电子事件的统计结果。

电子波
(非经典波) ← 波函数

1926年，玻恩提出波函数的统计意义！

电子位置的概率分布正比于波函数的模平方：

$$P(x,t) \propto |\psi(x,t)|^2$$

波函数描述概率分布 ⟶ **概率波**

概率分布 ⟶ 粒子性
波函数 ⟶ 波动性

波动性和粒子性的统一

Max Born (1882-1970)

1954年获诺贝尔奖