广义积分

推广Riemann积分，处理无穷区间和无界函数的情况。

定义 (无穷积分)

f是$[a,+\infty)$上的函数，在所有有限区间$[a,A]$上可积。

- 如果极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 存在，
  则称无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx;$$

- 如果上述极限不存在，则称无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。

注

类似定义：

- $$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{b} f(x)dx;$$
- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx;$$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f dx$收敛当且仅当$\int_{-\infty}^{a} f dx$和$\int_{a}^{+\infty} f dx$都收敛；
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$的定义不依赖于$a$的选取。

几何意义

当$f \geq 0$时，$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$是由曲线$y = f(x)$，直线$x = a$以及$x$轴所围无穷区域的面积。

例

计算下列无穷积分：

- $$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx;$$
- $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx.$$

例

讨论下面无穷积分的敛散性：

$$\int^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx.$$

定义 (瑕积分)

$f(x)$是$(a,b]$上的函数，在任何闭区间$[a+\delta,b]\subset(a,b]$上可积。

- 如果极限 $\lim_{\delta\to0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)dx$存在，
  则称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$收敛，定义

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta\to0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)dx;$$

- 如果极限$\lim_{\delta\to0^+}\int_{a+\delta}^b f(x)dx$发散，则称瑕积分$\int_a^b f(x)dx$发散。

其他情况

- f是$[a,b)$上的函数，定义：

$$\int_a^b f(x)dx :=\lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{b-\delta} f(x)dx;$$

- f是$[a,b]\backslash\{c\}$上的函数，$a<c<b$，定义：

$$\int_a^b f(x)dx :=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

- f是(a,b)上的函数，定义：

$$\int_a^b f(x)dx :=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

三大公式的推广

设$a < b, \alpha < \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x)$在(a,b)上连续,$F'(x) = f(x)$，则：

- Newton-Lebniz公式：

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x);$$

- 换元公式：

$$\int_a^b f(x)dx \overset{x=\varphi(t)}{=\!=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

其中 $\lim\limits_{t\to\alpha^+} \varphi(t) = a, \lim\limits_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b;$

三大公式的推广

- 分部积分公式：

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

其中$uv\Big|_a^b = \lim\limits_{x\to b^-} uv - \lim\limits_{x\to a^+} uv$。

例 (计算无穷积分)

$$\int_0^{+\infty} xe^{-px}dx, (p>0).$$

例 (计算下列瑕积分)

- $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$
- $$\int_0^1 \ln x dx.$$

例

讨论下述瑕积分的敛散性：

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx(a<b).$$

广义积分

- 瑕积分和无穷积分统称为广义积分；
- 广义积分可以统一成： $\int_a^\omega f(x)dx, \omega \in (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$。

广义积分性质

- 设$a < b < \omega$， $\int_a^\omega f(x)dx$ 与 $\int_b^\omega f(x)dx$ 敛散性相同：

$$\int_a^\omega f(x)dx = \int_b^\omega f(x)dx + \int_a^b f(x)dx.$$

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$，当$\int_a^\omega f_1(x)dx$和$\int_a^\omega f_1(x)dx$收敛时，$\int_a^\omega [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dx$也收敛，且：

$$\int_a^\omega [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)]dx = \lambda_1 \int_a^\omega f_1(x)dx + \lambda_2 \int_a^\omega f_2(x)dx.$$

Cauchy收敛准则

$\int_a^\omega f(x)dx$收敛当且仅当
对于任意$\epsilon > 0$，存在ω的左空心邻域$U(\omega)$，当$A_1, A_2 \in U(\omega)$时：

$$|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx| < \epsilon,$$

这里$+\infty$的左空心邻域是区间$(M, +\infty)$。

绝对收敛

函数$f(x)$在任何有限区间$[a, A]$上可积，且$\int_a^\omega |f(x)|dx$ 收敛。
那么$\int_a^\omega f(x)dx$也收敛，且：

$$|\int_a^\omega f(x)dx| \leq \int_a^\omega |f(x)|dx.$$

绝对收敛和条件收敛

- 当$\int_a^\omega |f(x)|dx$ 收敛时，称$\int_a^\omega f(x)dx$绝对收敛；
- 绝对收敛是收敛的充分非必要条件；
- 当$\int_a^\omega |f(x)|dx$ 发散而$\int_a^\omega f(x)dx$发散时，称$\int_a^\omega f(x)dx$条件收敛。

比较判别法

f, g在任何有限区间$[a, A] \subset [a, \omega)$上可积，且$|f(x)| \leq g(x)$。当$\int_a^\omega g(x)dx$收敛时，$\int_a^\omega f(x)dx$也收敛。此时：

$$\int_a^\omega |f(x)|dx \leq \int_a^\omega g(x)dx.$$

比较判别法的极限形式

f, g在有限区间$[a, A] \subset [a, \omega)$上可积，$g(x) > 0$且$\lim\limits_{x \to \omega} \frac{|f(x)|}{g(x)} = c$，

- 当$c \in \mathbb{R}_+$时，$\int_a^\omega |f(x)|dx$ 与 $\int_a^\omega g(x)dx$有相同的敛散性；
- 当$c = 0$时，由$\int_a^\omega g(x)dx$收敛可以推出$\int_a^\omega |f(x)|dx$收敛；
- 当$c = +\infty$时，由$\int_a^\omega g(x)dx$发散可以推知$\int_a^\omega |f(x)|dx$发散。

推论：和$\frac{1}{x^p}$比较

f在任何有限区间$[a, A]$上可积且$\lim\limits_{x \to +\infty} x^p |f(x)| = \lambda$：

- 如果$p > 1, 0 \leq \lambda < +\infty$，则$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$收敛；
- 如果$p \leq 1, 0 < \lambda \leq +\infty$，则$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$发散。

推论：和$\frac{1}{(x-a)^p}$比较

f在闭区间$[\mu, b] \subset [a, b]$上可积，且 $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)^p |f(x)| = \lambda$：

- 如果$0 < p < 1, 0 \le \lambda < +\infty$，则瑕积分$\int_a^b |f(x)| dx$收敛；
- 如果$p \ge 1, 0 < \lambda \le +\infty$，则瑕积分$\int_a^b |f(x)| dx$发散。

例 (讨论下面广义积分的敛散性)

- $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2}} dx;$$
- $$\int_1^2 \frac{1}{\ln x} dx, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

例 (Euler积分)

证明下述瑕积分收敛并求其值：

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx.$$

例 (Γ函数)

研究积分$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$的收敛性。

例

研究积分$\int_0^1 x^p\ln^q(1/x)dx$的收敛性。

注

比较判别法的不足之处在于只能判定绝对收敛性。

Dirichlet 判别法

函数f在任何有限区间$[a, A] \subset [a, \omega)$上可积, 如果

- $F(A) = \int_a^A f(x)dx$在$[a, \omega)$上有界;
- $g(x)$在$[a, \omega)$上单调而且$\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = 0$;

那么$\int_a^\omega f(x)g(x)dx$收敛。

Abel 判别法

函数f在任何有限区间$[a, A] \subset [a, \omega)$上可积, 如果

- $\int_a^\omega f(x)dx$收敛;
- $g(x)$在$[a, \omega)$上单调有界;

那么$\int_a^\omega f(x)g(x)dx$收敛。

例

证明下述无穷积分条件收敛：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

例

研究下述积分的敛散性：

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^p} dx \quad (p \geq 0)$$

例

求函数$f(x) = \sqrt{x}\sin x$在区间$(0, +\infty)$上的平均值：

$$M = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$