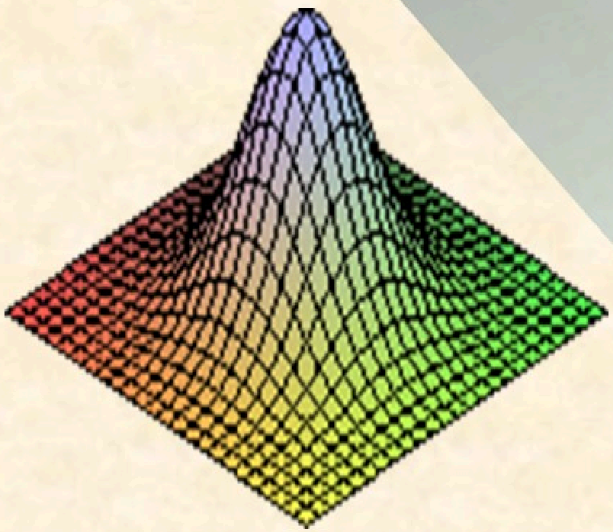
概率论与数理统计



主讲人： 吴 娟

制作人：叶鹰 吴娟

wujuan@hust.edu.cn

§ 3.5 多维随机变量函数的分布（续）

- **连续型卷积公式：**

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

$$\overset{X与Y独立}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

- **正态分布可加性：**

若$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$且相互独立，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

- **正态分布的线性组合性质：**

若 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$, $i=1,2,\ldots,n$, 相互独立，则对任何实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2\right)$$

例3 设 $X \sim U(0,1)$，$Y \sim U(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立，求 $Z = X + Y$ 的密度函数.

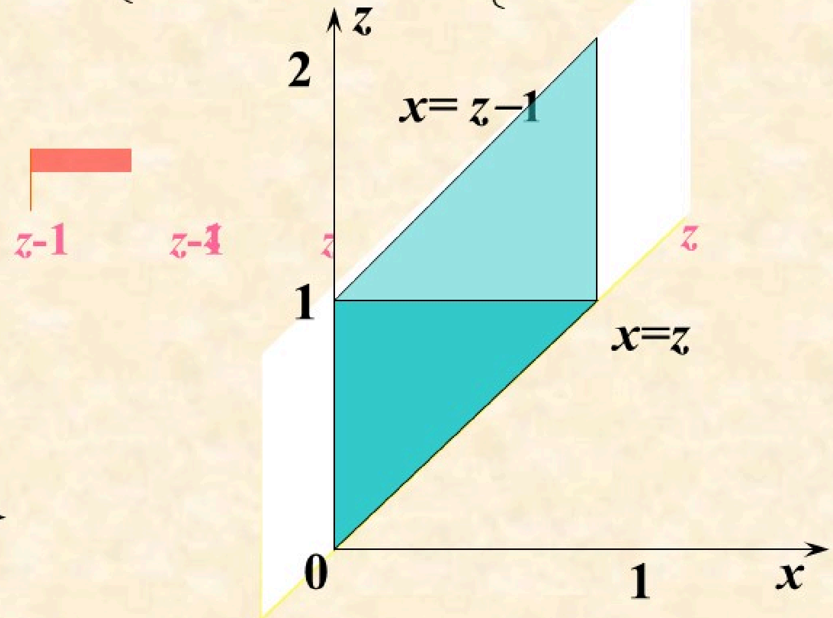
解 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ $\qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

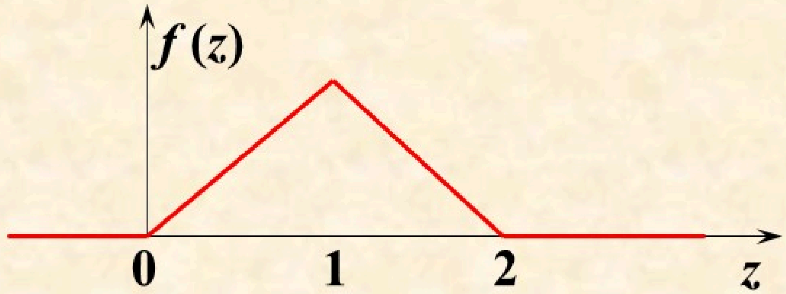
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

注意到被积函数的非零区域为:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z - x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ z-1 \le x \le z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \int_0^z dx = z, & 0 \le z < 1 \\ \int_{z-1}^1 dx = 2 - z, & 1 \le z < 2 \\ 0, & z \ge 2 \end{cases}$$





投票(匿名) 最多可选2项

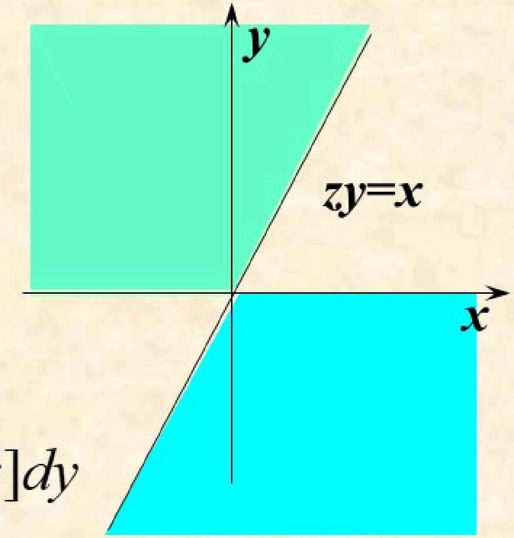
利用连续型卷积公式求独立随机变量和的概率密度

- A 在一维空间讨论被积函数的非零区域，已掌握
- B 在二维空间讨论被积函数的非零区域，已掌握
- C 不懂

二、商的分布

例4 设(X,Y)的联合概率密度如下，求$Z=X/Y$的分布.

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



解 $F_Z(z)=P(\frac{X}{Y}\le z)=\iint_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)dxdy$

$$=\iint_{y>0,\ x\le zy} f(x,y)dxdy$$

$$+\iint_{y<0,\ x\ge zy} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}[\int_{-\infty}^{zy} f(x,y)dx]dy+\int_{-\infty}^{0}[\int_{zy}^{+\infty} f(x,y)dx]dy$$

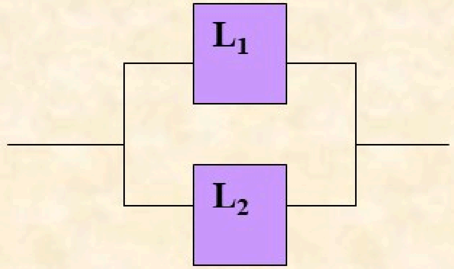
$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_0^{+\infty} yf(zy,y)dy+\int_{-\infty}^{0} -yf(zy,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)dy$$

$$\begin{cases}0<zy<1\\ 0<y<zy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<y<1/z\\ 1<z\end{cases}\qquad f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 1\\ \int_0^{1/z} y\cdot 3zydy=z^{-2}, & z>1\end{cases}$$

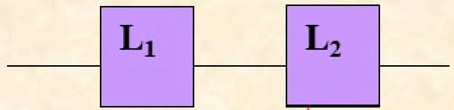
三、最大（小）值的分布

例5 设系统L由两个独立的子系统L_1，L_2构成，子系统的寿命 $X_i \sim E(\lambda)$，$i=1,2$，且相互独立.就下面构成系统的方法分别求L的寿命Z 的分布：(1)并联；(2)串联；(3)备用.

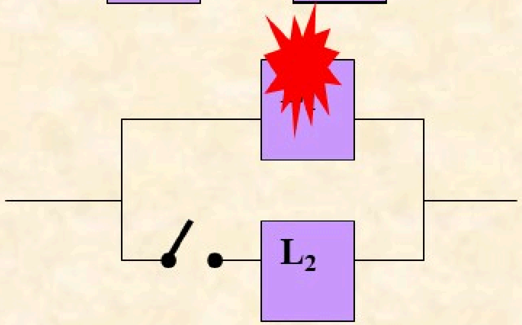
（1）并联$Z=\max(X_1, X_2)$



（2）串联 $Z=\min(X_1, X_2)$



（3）备用$Z=X_1+X_2$



单选题 100分

下列说法正确的是

A $\max(X_1, X_2)$是X_1或X_2，且与X_1, X_2同分布

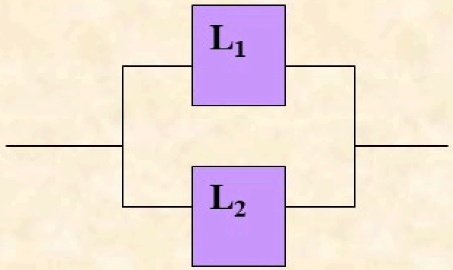
B $\max(X_1, X_2)$是(X_1, X_2)的函数

三、最大（小）值的分布

例5 设系统L由两个独立的子系统L_1，L_2构成，子系统的寿命 $X_i \sim E(\lambda)$，$i=1,2$，且相互独立.就下面构成系统的方法分别求L的寿命Z 的分布：(1)并联；(2)串联；(3)备用.

解 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $\quad F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(1)并联 $Z=\max(X_1, X_2)$



$$F_Z(z) = P(\max(X_1, X_2) \le z)$$

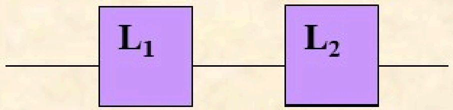
$$= P(X_1 \le z,\ X_2 \le z) \quad = [F_X(z)]^2\ P(X_2 \le z)$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = 2F_X(z)\,f_X(z) = \begin{cases}2(1-e^{-\lambda z})\lambda e^{-\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

一般

若$X_1, X_2,\ldots, X_n$独立同分布，则 $f_{max}(x) = n[F(x)]^{n-1} f_X(x)$

（2）串联 $Z=\min(X_1,X_2)$



$$F_Z(z)=P(\min(X_1,X_2)\le z)=1-P(\min(X_1,X_2)>z)$$
$$=1-P(X_1>z,\ X_2>z)=1-[1-F_X(z)]^2$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=2[1-F_X(z)]f_X(z)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

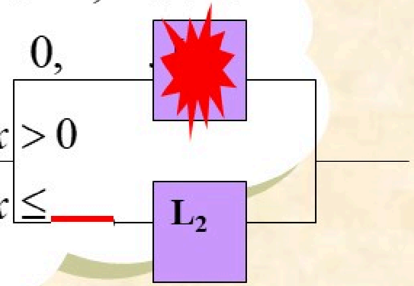
一般

若$X_1,X_2,\ldots,X_n$独立同分布，则 $f_{min}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f_X(x)$

（3）备用 $Z=X_1+X_2$

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \end{cases}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le\end{cases}$$



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^z\lambda^2e^{-\lambda z}dx=\lambda^2ze^{-\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

例6 若$X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$，且$X,Y$相互独立，

求 $Z=XY$ 的分布.

解： $F_Z(z) = P(XY \le z)$

$$= P(Y=-1)P(XY \le z \mid Y=-1) + P(Y=1)P(XY \le z \mid Y=1)$$

$$= \frac{1}{3}P(X \ge -z) \qquad + \frac{2}{3}P(X \le z \qquad)$$

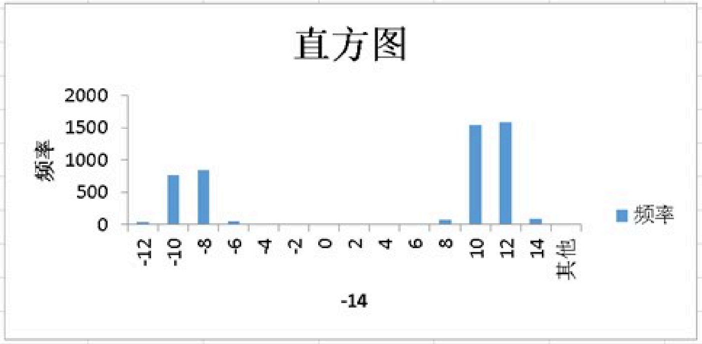
$$= \frac{1}{3}\Phi\left(\frac{z+\mu}{\sigma}\right) \qquad + \frac{2}{3}\Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f_Z(z) = F_Z'(z)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(z+\mu)^2}{2\sigma^2}\right] + \frac{2}{3\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

混合高斯模型

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X~N(10,1)	Y	-1	0.33	Z=XY			
2	8.68926352	1	1	0.67	8.689264	-14		
3	9.57385626	1			9.573856	-12	-14	频率
4	9.31618959	-1			-9.31619	-10	-12	39
5	11.8460651	-1			-11.8461	-8	-10	769
6	11.1601719	1			11.16017	-6	-8	848
7	8.78884864	-1			-8.78885	-4	-6	45
8	9.95113626	1			9.951136	-2	-4	1
9	10.6647974	1			10.6648	0	-2	0
10	10.1375565	-1			-10.1376	2	0	0
11	10.4328547	1			10.43285	4	2	0
12	8.96329882	1			8.963299	6	4	0
13	9.88103241	1			9.881032	8	6	0
14	8.99117483	1			8.991175	10	8	83
15	8.82774773	1			8.827748	12	10	1546
16	10.7276776	-1			-10.7277	14	12	1581
17	9.79497147	1			9.794971		14	88
18	10.1959745	1			10.19597		其他	0
19	10.2428396	1			10.24284			
20	8.15308911	-1			-8.15309			
21	10.9196833	1			10.91968			
22	11.6009926	1			11.60099			
23	9.317929	1			9.317929			
24	9.68983047	1			9.68983			
25	9.11412033	1			9.11412			
26	10.5608376	1			10.56084			
27	8.73790784	1			8.737908			



基本特征 混合高斯 Sheet2 Sheet3

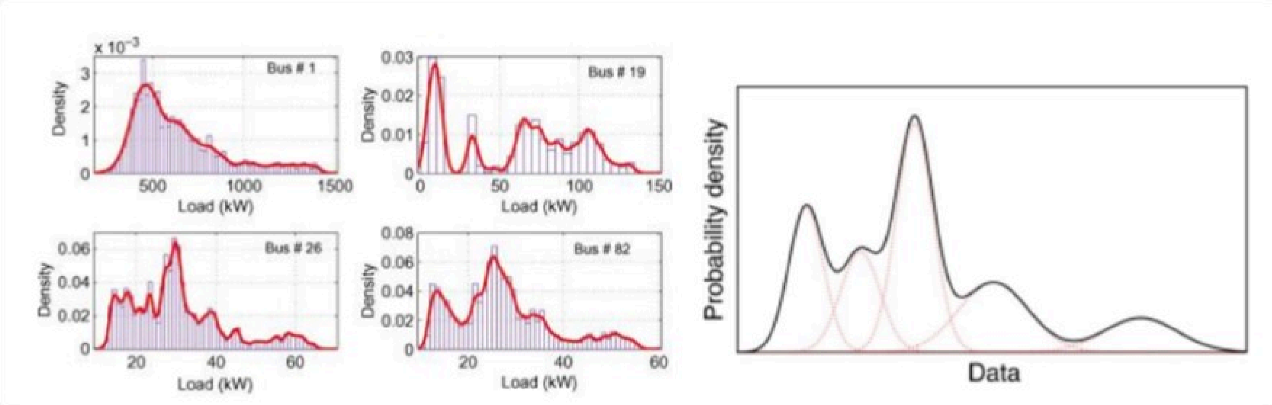


图4 利用高斯混合模型分析电力负载

来源：Singh, R., Pal, B. C., & Jabr, R. A. (2009). Statistical representation of distribution system loads using Gaussian mixture model. IEEE Transactions on Power Systems, 25(1), 29-37.

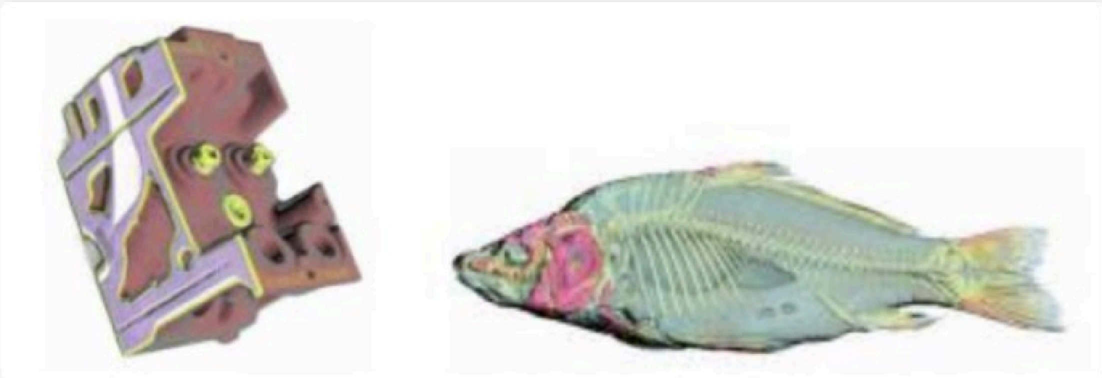


图5 利用高斯混合模型建模

来源：Wang, Y., Chen, W., Zhang, J., Dong, T., Shan, G., & Chi, X. (2011). Efficient volume exploration using the gaussian mixture model. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 17(11), 1560-1573.

例7 若$X_1,\ldots,X_n$独立同分布，分布函数与概率密度分别为$F(x)$, $f(x)$, 求 (X_n^*, X_1^*)的分布.

解: $y < z,\ f(y,z) = 0$;　　$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$

$$y \ge z,\ F(y,z) = P(\max\{X_1,\ldots,X_n\} \le y, \min\{X_1,\ldots,X_n\} \le z)$$

$$= P(\max\{X_1,\ldots,X_n\} \le y) - P(\max\{X_1,\ldots,X_n\} \le y, \min\{X_1,\ldots,X_n\} > z)$$

$$= P(X_1 \le y,\ldots,X_n \le y) - P(z < X_1 \le y,\ldots,z < X_n \le y)$$

$$= [F(y)]^n - [F(y) - F(z)]^n,$$

$$f(y,z) = \frac{\partial^2 F(y,z)}{\partial y \partial z} = n(n-1)(F(y) - F(z))^{n-2} f(y) f(z).$$