《离散数学二》第五次作业

1. a) 找到包含两个连续 0 或两个连续 1 的长度为 n 的三元字符串的数量的递推关系。三元字符串指仅包含 0、1、2 的字符串。

b) 初始条件是什么?

c) 计算有多少长度为 3 的三元字符串包含两个连续的 0 或两个连续的 1，并写出这些字符串；另计算有多少长度为 6的这样的字符串？。**(30分)**

参考答案:

a) 设 a_n 为包含两个连续的 0 或两个连续的 1 的三进制字符串的数量。要构造这样的字符串，我们可以以一个 2 开头，然后跟随一个包含两个连续的 0 或两个连续的 1 的字符串，有 a_{n-1} 种方式。以 02或 12开头的，有 a_{n-2} 种方式；以 012 或 102 开头的，有 a_{n-3}种方式；以 0102 或 1012 开头的，有 a_{n-4} 种方式；以 01012 或 10102 开头的，有 a_{n-5} 种方式；依此类推，当 2前面有 n-1-k 个交替的 0和 1开头（k 是从 n-2到 0），后面接上长度为 k 的包含两个连续 0或两个连续 1的三进制字符串；这样的字符串的数量都是 $2a_k$，系数为 2是因为有两种交替的方式。还有一种可能：当字符串以 n-k-2个交替的 0和 1组成，然后后面接上一对 0或一对 1，再后面接上任何长度为 k 的字符串，则这样的字符串有 2×3^k个（这里 k 也是从 n-2到 0），由于这是一个等比数列，求和为 $3^{n-1}-1$。将这些放在一起，我们得到了以下递推关系：$a_n=a_{n-1}+2a$

$_{n-2}+2a_{n-3}+\cdots+2a_0+3^{n-1}-1$.（通过将这个递推关系从将 n − 1 代入 n 的相同关系中减去，我们可以得到以下针对这个问题的闭式递推关系：$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+2*3^{n-2}$）

b） 初始条件：$a_0=a_1=0$;

c） a_2=a1+2a0+2=2;

a3=a2+2a1+2a0+8=2+8=10

这 10个字符串为：000,100,200,001,002,011,111,211,112,110

a4=a3+2a2+2a1+2a0+26=10+4+26=40

a5=a4+2a3+2a2+80=40+20+4+80=144

a6=a5+2a4+2a3+2a2+242=144+80+20+4+242=490

2. 请给出如下递推关系的通解：$a_n=7a_{n-1}-16a_{n-2}+12a_{n-3}+n4^n$，初始条件为：$a_0=-2,a_1=0,a_2=5$；再通过该递推式和通解，验证$a_3$的值。**(20分)**

参考答案:

相关齐次递推关系是 $a_n=7a_{n-1}-16a_{n-2}+12a_{n-3}$。为了解它，我们找到特征方程 $r^3-7r^2+16r-12=0$。通过因式分解，得 r1=r2=2,r3=3。因此，齐次递推关系的通解是 $a_n^{(h)}=\alpha 2^n+\beta n2^n+\gamma 3^n$。因为 4 不是特征根，递推关系的特解 $a_n^{(p)}=(cn+d)4^n$. 把该特解代入递推式，可以求得 c=16,d=-80。因此特解 $a_n^{(p)}=(16n-80)4^n$。因此，$a_n=\alpha 2^n+\beta n2^n+\gamma 3^n+(16n-80)4^n$ 。通过三个初始条件，可得 α= 17, β = 39/2, andγ= 61，因此 $a_n=17*2^n+39*n2^{n-1}+61*3^n+(16n-80)4^n$ 。

通过递推式，可得 a3=7a2+16a1+12a0+3*64=35-24+192=203；而从通解看

a3=17*8+39*3*4+61*27+(48-80)*64=136+468+1647-2048=203。

3. 找到当 $n=2^k$ 时， f(n)的通解，其中 f 满足递推关系 f(n) = 8f(n/2) +

n^2，且 f(1) = 1。**(10分)**

参考答案：可通过直接迭代计算或者主定理，求得 $f(n)=2n^3-n^2$。

4. 使用生成函数方法给出递推式 $a_k=3a_{k-1}+4^{k-1}$ 的通解，其中初始条件 $a_0=1$.

(20分)

参考答案：

Let $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Then $xG(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k$ (by changing the name of the variable from k to $k+1$). Thus

$$
\begin{aligned}
G(x)-3xG(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 3a_{k-1}x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k-3a_{k-1})x^k = 1+\sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1}x^k \\
&= 1 + x\sum_{k=1}^{\infty} 4^{k-1}x^{k-1} = 1 + x\sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k = 1 + x\cdot\frac{1}{1-4x} = \frac{1-3x}{1-4x}.
\end{aligned}
$$

Thus $G(x)(1-3x)=(1-3x)/(1-4x)$, so $G(x)=1/(1-4x)$. Therefore $a_k=4^k$

这里主要用到了下表最后一行常用生成函数（此表课件 qq群所发 kenneth Rosen 教材，利用了等比数列求和，但数列无穷时 q的幂值为 0,q<1）：

TABLE 1 Useful Generating Functions.

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n,k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k = 1 + C(n,1)ax + C(n,2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk} = 1 + C(n,1)x^r + C(n,2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n,k/r)$ if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 if $k \le n$; 0 otherwise
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$	a^k

5. 利用容斥原理求解下述问题：

Find the number of solutions of the equation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$, where x_i, $i = 1, 2, 3, 4$, are nonnegative integers such that $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$, $x_3 \leq 5$, and $x_4 \leq 8$.

(20分)

参考答案：

设 P1为 x1>3,P2为 x2>4,P3为 x3>5,P4为 x4>8，全集为 x1,x2,x3和 x4均≥ 0，则全集 U解的个数 N(U)=C(4+17-1,17)。

N(P1)=C(4+13-1,13),N(P2)=C(4+12-1,12),N(P3)=C(4+11-1,11),N(P4)=C(4+8-1,8)；

N(P1 ∩ P2)=C(4+8-1,8),N(P1 ∩ P3)=C(4+7-1,7),N(P1 ∩ P4)=C(4+4-1,4),N(P2 ∩ P3)=C(4+6-1,6),N(P2 ∩ P4)=C(4+3-1,3),N(P3 ∩ P4)=C(4+2-1,2),N(P1 ∩ P2 ∩ P3)=C(4+2-1,2),N(P1 ∩ P2 ∩ P4)=N(P1 ∩ P3 ∩ P4)=N(P2 ∩ P3 ∩ P4)=N(P1 ∩ P2 ∩ P3 ∩ P4)=0，则利用容斥原理得下式：

$$C(4+17-1,17)-C(4+13-1,13)-C(4+12-1,12)-C(4+11-1,11)-C(4+8-1,8)+C(4+8-1,8)+C(4+7-1,7)+C(4+4-1,4)+C(4+6-1,6)+C(4+3-1,3)+C(4+2-1,2)-C(4+2-1,2)=20$$