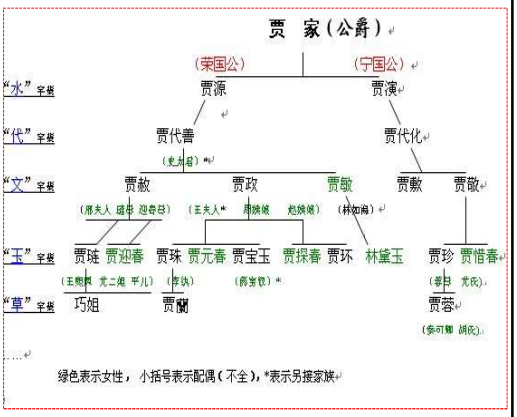
第六章 树和二叉树

线性结构： 线性表,栈,队列

串,数组,广义表

非线性结构：树和二叉树

图，网



树/层次关系结构的典型实例：

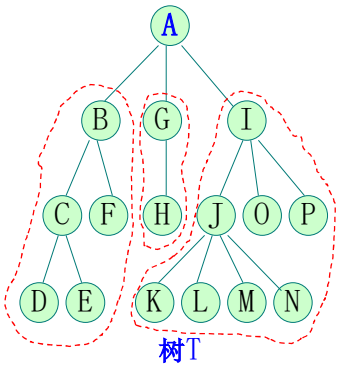
人物家谱结构、社会组织结构、文件目录结构、html文档结构 …… …

1

6.1树的定义

6.1.1 定义和术语

1.树（tree）：



树T

树是n(n≥0)个结点的有限集T,

当n=0时，T为空树；

当n>0时,

(1)有且仅有一个称为T的根的结点,

(2)当n>1时,余下的结点分为m(m>0)个互不相交的有限集

$T_1, T_2, \ldots, T_m$，每个T_i(1≤i≤m)也是一棵树,且称为根的子树。

2

例1. 一个结点的树

T_1＝{A}

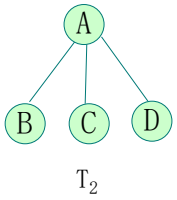
例2. 四个结点的树

T_2＝{A,B,C,D}

T_{21}={B}

T_{22}={C}

T_{23}={D}



3

例3. 有16个结点的树

T={A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P}

T_1={B, C, D, E, F}

T_{11}={C, D, E}

T_{111}={D}

T_{112}={E}

T_{12}={F}

T_2={G, H}

T_{21}={H}

T_3={I, J, K, L, M, N, O, P}

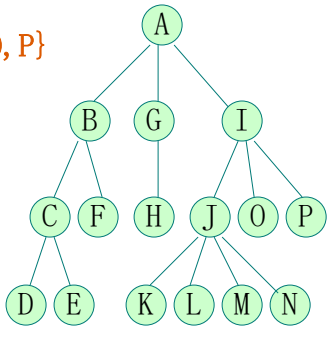
T_{31}={J, K, L, M, N}

T_{311}={K}

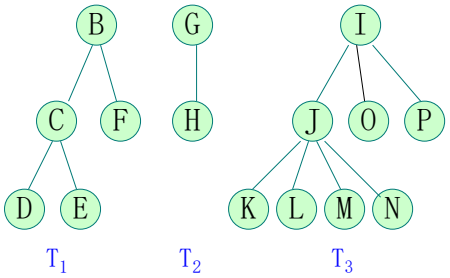
T_{312}={L} …

T_{32}={O}

T_{33}={P}



树T



4

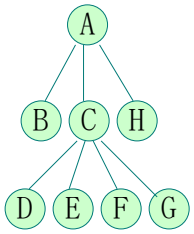
2. 结点的度(degree)：结点的子树数目

3. 树的度：树中各结点的度的最大值

4. n度树：度为n的树

5. 叶子(终端结点)：度为0的结点

6. 分枝结点(非终端结点,非叶子)：度不为0的结点



4度树

7. 双亲(父母,parent)和孩子(儿子,child)：

若结点C是结点P的子树的根,称P是C的双亲，C是P的孩子。

5

8. 结点的层(level)：

规定树T的根的层为1，其余任一结点的层等于其双亲的层加1。

9. 树的深度(depth,高度)：

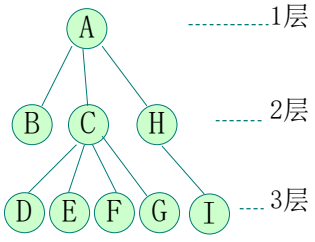
树中各结点的层的最大值。

10. 兄弟(sibling)：

同一双亲的结点之间互为兄弟。

11. 堂兄弟：

同一层号的结点互为堂兄弟。

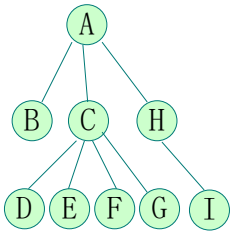


树T

6

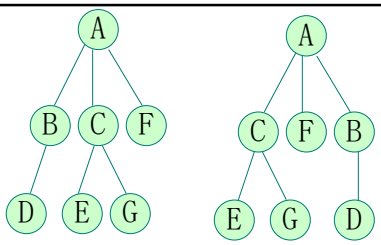
12. 祖先：从树根到某结点所经分枝上的所有结点为该结点的祖先。

13. 子孙：一个结点的所有子树的结点为该结点的子孙。



树T

7



无序树T_3　无序树T_4　有序树T_1　有序树T_2

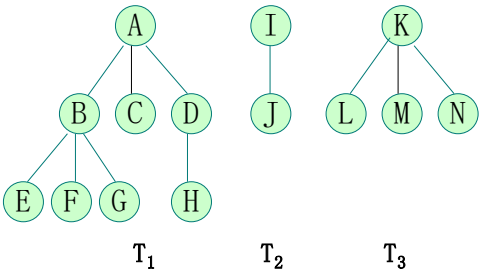
14. 有序树：若任一结点的各棵子树，规定从左至右是有次序的，即不能互换位置，则称该树为有序树。（图中T_1与T_2不同）

15. 无序树：若任一结点的各棵子树，规定从左至右是无次序的，即能互换位置，则称该树为无序树。（图中T_3与T_4相同）

8

16. 森林：

m(m≥0)棵互不相交的树的集合。



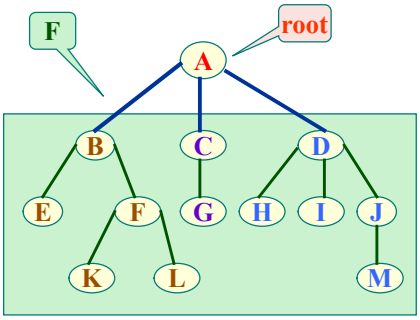
T_1 T_2 T_3

森林F=$\{T_1, T_2, T_3\}$

任何一棵非空树可表示为一个二元组　Tree =（root，F）

其中：root 为根结点

F 被称为子树森林



9

6.1.3 树的基本操作

查找类：

Root(T)　　// 求树的根结点

Value(T, cur_e)　　// 求当前结点的元素值

Parent(T, cur_e)　　// 求当前结点的双亲结点

LeftChild(T, cur_e)　　// 求当前结点的最左孩子

RightSibling(T, cur_e)　　// 求当前结点的右兄弟

TreeEmpty(T)　　// 判定树是否为空树

TreeDepth(T)　　// 求树的深度

TraverseTree(T, Visit( ))　　// 遍历

分为三类：
查找类
插入类
删除类

10

插入类：

InitTree(&T)　　// 初始化置空树

CreateTree(&T, definition)　　// 按定义构造树

Assign(T, cur_e, value)　　// 给当前结点赋值

InsertChild(&T, &p, i, c)
　　// 将以c为根的树插入为结点p的第i棵子树

删除类：

ClearTree(&T)　　// 将树清空

DestroyTree(&T)　　// 销毁树的结构

DeleteChild(&T, &p, i)　　// 删除结点p的第i棵子树

11

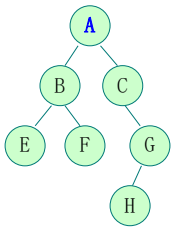
树结构的特点

线性结构	树型结构
第一个数据元素 （无前驱）	根结点 （无前驱）
最后一个数据元素 （无后继）	多个叶子结点 （无“后继”）
其它数据元素 （一个前驱、 一个后继）	其它数据元素 （一个前驱、 多个“后继”）

12

6.2 二叉树(binary tree)

6.2.1 定义和术语



1. 二叉树的递归定义

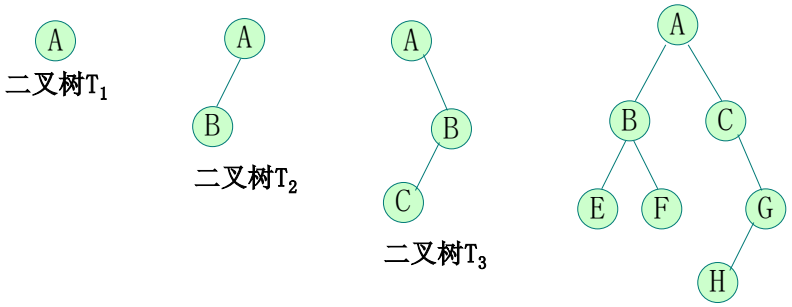
- 定义：二叉树是n(n≥0)个结点的有限集，

  它或为空树(n=0)；或由一个根结点和两棵分别称为左子树和右子树的互不相交的二叉树构成。

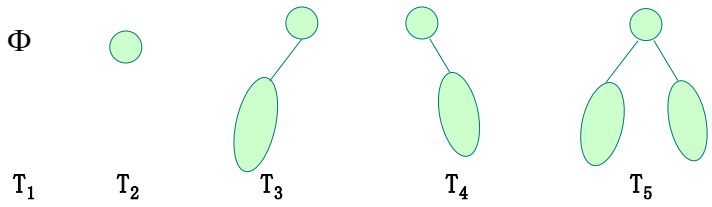
- 特点
  - 每个结点至多有二棵子树(即不存在度大于2的结点)；
  - 二叉树的子树有左、右之分，且其次序不能任意颠倒。

13

例:



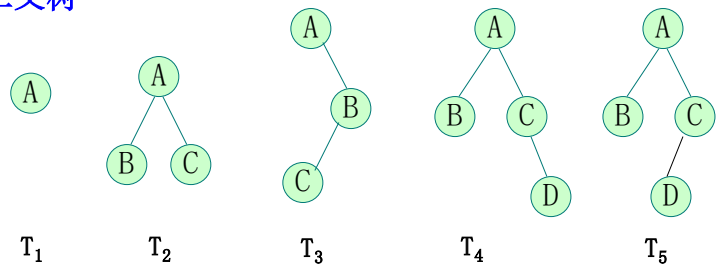
2. 二叉树的5种基本形态:



14

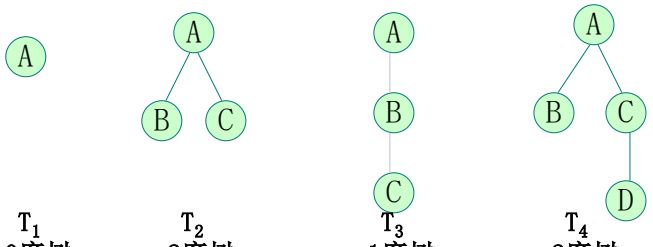
3.二叉树与2度树的区别

(1)二叉树



T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

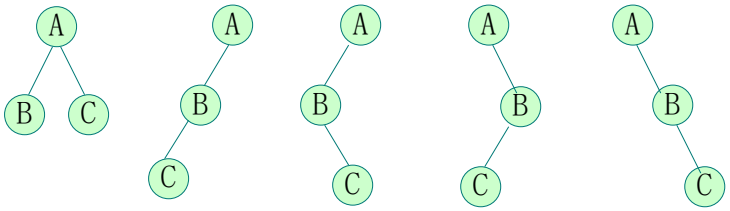
(2)树



T_1 0度树　T_2 2度树　T_3 1度树　T_4 2度树

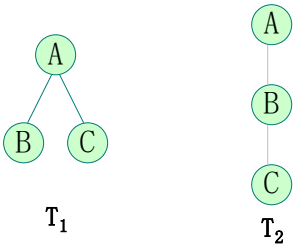
15

4. 三个结点不同形态的二叉树(5种)



T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

5. 三个结点不同形态的树(2种)



T_1 T_2

16

6.二叉树的基本操作

分为三类：
查找类　插入类　删除类

1. 置T为空二叉树：T={ }
2. 销毁二叉树T
3. 生成二叉树T：生成哈夫曼树、二叉排序树、平衡二叉树、堆
4. 遍历二叉树T：
   按某种规则访问T的每一个结点一次且仅一次的过程。
5. 二叉树 ←→ 树
6. 二叉树 → 平衡二叉树
7. 求结点的层号　8. 求结点的度　9. 求二叉树T的深度
10. 插入一个结点　11. 删除一个结点
12. 求二叉树T的叶子/非叶子 .....

17

Root(T);　Value(T, e);　Parent(T, e);

LeftChild(T, e);　RightChild(T, e);

LeftSibling(T, e);　RightSibling(T, e);

BiTreeEmpty(T);　BiTreeDepth(T);

PreOrderTraverse(T, Visit());

InOrderTraverse(T, Visit());

PostOrderTraverse(T, Visit());

LevelOrderTraverse(T, Visit());

18

InitBiTree(&T);

Assign(T, &e, value);

CreateBiTree(&T, definition);

InsertChild(T, p, LR, c);

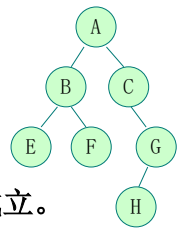
ClearBiTree(&T);

DestroyBiTree(&T);

DeleteChild(T, p, LR);

19

6.2.2 二叉树的性质和特殊二叉树



性质1. 在二叉树的第i层上至多有2^{i-1}个结点(i≥1)。

证明：用归纳法

1. 当i=1,即第一层只有一个根结点,显然 $2^{i-1}= 2^0=1$成立。
2. 假设对所有的j(1≤j<i)上述性质成立,

   即第j层上至多有2^{j-1}个结点(1≤j<i)。
3. 要证明j=i时,命题也成立。

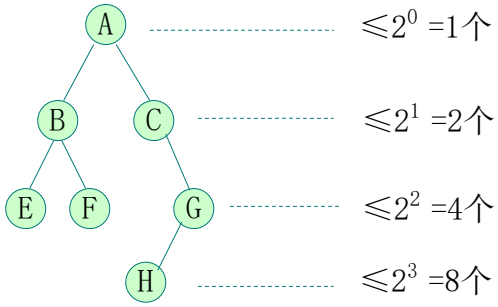
   由归纳假设：第i-1层上至多有2^{i-2}个结点，又由于二叉树每个结点的度最大为2，所以第i层上结点总数最多为第i-1层最大结点数的2倍，即 $2*2^{i-2}=2^{i-1}$.

   根据归纳原理，性质1成立。

20

二叉树性质续

性质1 二叉树的第i(i≥1)层最多有2^{i-1}个结点。

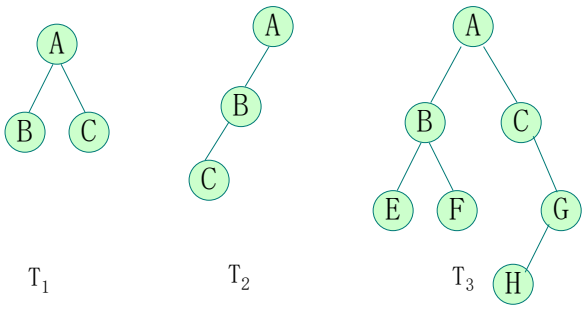


深度为k的二叉树最多共有多少个结点？

$$2^0+2^1+\ldots+2^{k-1}=\frac{2^0(1-2^k)}{1-2}=2^k-1$$

性质2 深度为k的二叉树最多有2^k-1个结点。

21



T_1: n_0=2, n_2=1, 2=1+1

T_2: n_0=1, n_2=0 1=0+1

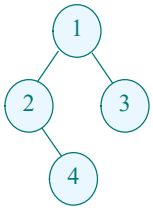
T_3: n_0=3, n_2=2 3=2+1

叶子的数目
= 度为2的结点数目+1
$n_0 = n_2 + 1$

22

性质3. 二叉树中,终端结点数n_0与度为2的结点数n_2 有如下关系:

$n_0=n_2+1$.



证明:设二叉树中度为i的结点数为n_i,

则结点总数 $n= n_0+n_1+n_2$ （1）

除根结点外,每个结点都是另一结点的孩子

孩子数=n-1; （2）

度为i（i=0，1，2）的结点，有i个孩子。

孩子数=$2n_2+n_1$, （3）

由（3）=（2）得 $n-1= 2n_2+n_1$, （4）

由（4）-（1）得 $-1=n_2-n_0$, 故 $n_0= n_2+1$.

23

满二叉树（full binary tree)----

深度为k且有2^k-1个结点的二叉树。

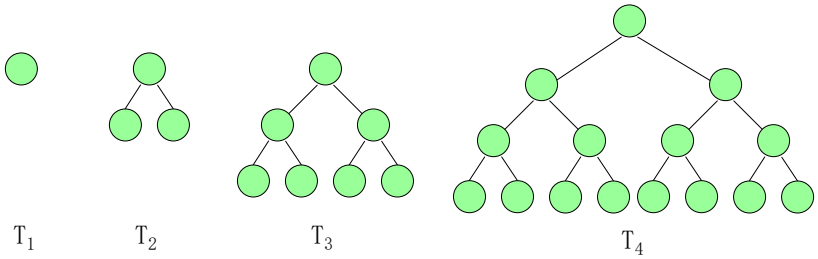
特点：（1）每一层上结点数都达到最大；叶子结点都在第k层。

（2）度为1的结点$n_1=0$

（3）n个结点的满二叉树的深度=$\log_2(n+1)$

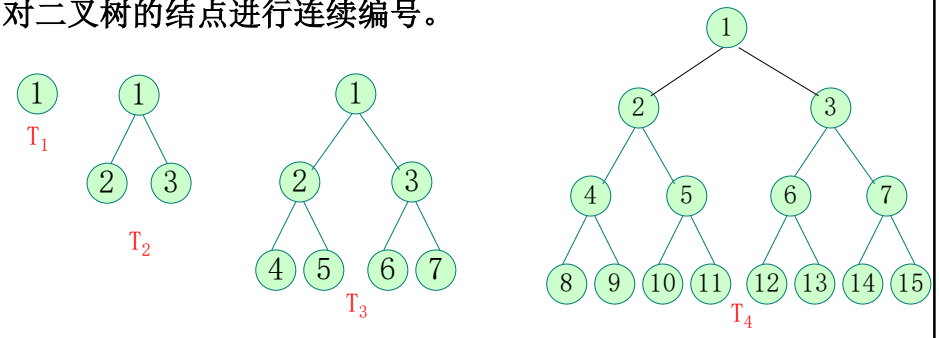
设深度为k，∵ $2^k - 1=n$，即 $2^k=n + 1$

∴ $k=\log_2(n+1)$



24

顺序编号的满二叉树：自根结点起从上到下逐层（层内从左到右）对二叉树的结点进行连续编号。



设满二叉树有n个结点，编号为1, 2, . . . , n

- 左小孩为偶数，右小孩为奇数；
- 结点i的左小孩是2i，2i≤n；结点i的右小孩是2i+1，2i+1≤n；
  结点i的双亲是 ⌊i/2⌋，2≤i≤n；
- 结点i的层号 = $\lfloor \log_2 i \rfloor + 1 = \lceil \log_2 (i+1) \rceil$，　　1≤i≤n

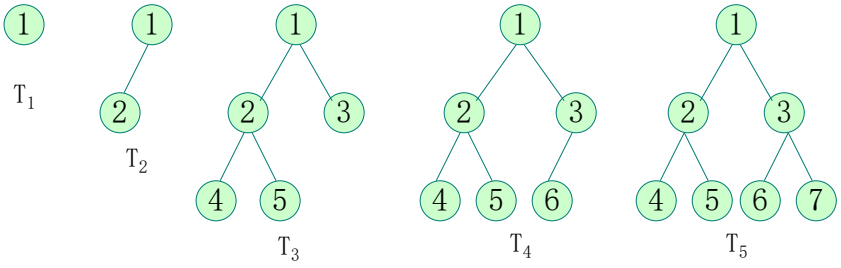
25

完全二叉树：

深度为k有n个结点的二叉树，当且仅当每一个结点都与同深度的满二叉树中编号从1至n的结点一一对应，则称之为完全二叉树（或称为“顺序二叉树”）。

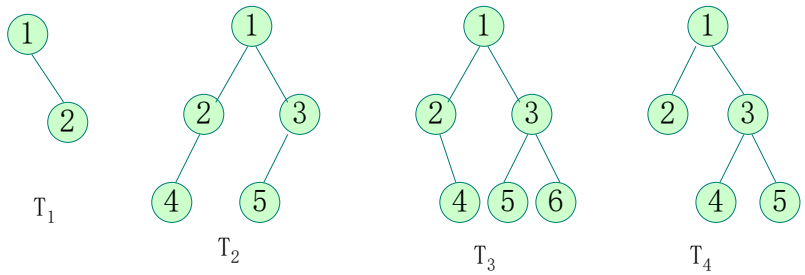
例. 完全二叉树：

满二叉树一定是完全二叉树，反之不成立。

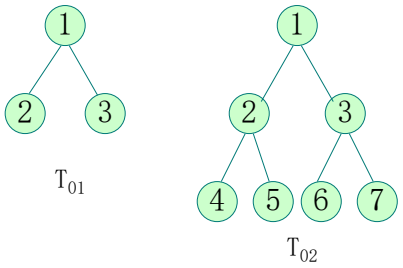


26

例 非完全二叉树：



例 满二叉树：



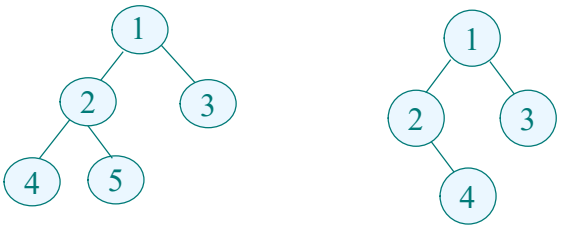
27

深度为 k 的完全二叉树的特点或性质：

（1）任意结点i，其左右子树的深度分别表示为Lh_i与Rh_i，则Lh_i-Rh_i等于0或1。

（2）叶结点只可能出现在层次最大或次最大的两层上。

（3）完全二叉树结点数n满足 $2^{k-1}-1<n\leqslant 2^k-1$.



$LH_2-RH_2=0-1=-1$

28

性质4. 结点数为n的完全二叉树，其深度为

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 = \lceil \log_2 (n+1) \rceil$$

证明：设深度为k，则由性质2和完全二叉树定义有：

结点数n满足：$2^{k-1} - 1 < n \leqslant 2^k - 1$

或写为$2^{k-1} \leqslant n < 2^k$

于是有：$k-1 \leqslant \log_2 n < k$

因为 k-1和k均为整数

显然有 $\lfloor \log_2 n \rfloor = k-1$, 故 $k = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

类似地，可以证明深度也等于$\lceil \log_2 (n+1) \rceil$。

29

性质 5 ：

若对含 *n* 个结点的完全二叉树从上到下且自左至右进行 *1* 至 *n* 的编号，则对完全二叉树中任意一个编号为 *i* 的结点：

(1) 若 *i=1*，则该结点是二叉树的根，无双亲，

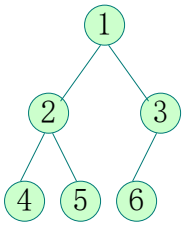
否则，编号为 $\lfloor i/2 \rfloor$ 的结点为其双亲结点；

(2) 若 *2i>n*，则该结点无左孩子，

否则，编号为 *2i* 的结点为其左孩子结点；

(3) 若 *2i+1>n*，则该结点无右孩子结点，

否则，编号为 *2i+1* 的结点为其右孩子结点。



30

基于性质5思考如下问题：

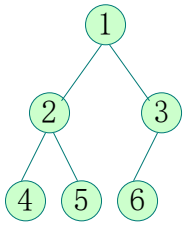
若对含 *n* 个结点的完全二叉树从上到下且从左至右进行 *1* 至 *n* 的编号，则：

(1) ***n*号结点的双亲结点编号是多少？**

(2) **最后一个非终端节点编号是多少？**

(3) **度为1的结点具有什么特征？**

(4) **最小的叶子节点编号是多少？**



31

例：

一棵完全二叉树有1000个结点，则它必有~~499~~ 500 个叶子结点，有~~488~~ 499 个度为2的结点，有 1 个结点只有非空左子树，有 0 个结点只有非空右子树。

分析：已知n=1000，求n_0和n_2，判断末叶子是挂在左边还是右边？

请注意：叶子结点总数≠末层叶子数！！！

正确答案：

全部叶子数 = ⌈1000/2⌉ = 500个。

度为2的结点 = 叶子总数 - 1 = 499个。

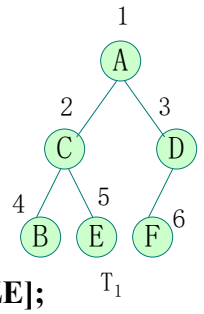
因为最后一个结点坐标是偶数，所以必为左子树。

32

6.2.3 二叉树的存储结构

1. 顺序结构

(1) 使用一维数组存储完全二叉树：




```
#define  MAX_TREE_SIZE  100
                    // 二叉树的最大结点数
typedef  TElemType  SqBiTree[MAX_TREE_SIZE];
                    // 0号或1号单元存储根结点
SqBiTree  bt;
```

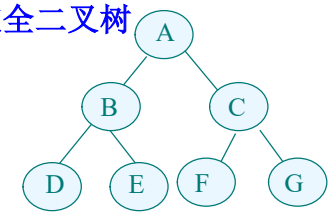
A	C	D	B	E	F	//
0	1	2	3	4	5	6

T_1的顺序存储结构

33

顺序存储特点：用一组地址连续的存储单元，以层序顺序存放二叉树的数据元素， 结点的相对位置蕴含着结点之间的关系。

完全二叉树



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	B	C	D	E	F	G	0	0	0	0

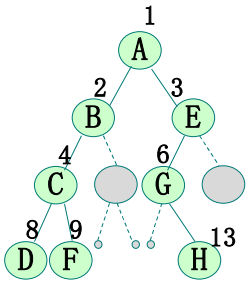
若数组从“1”编址, 对于i =3，

- bt[i]的双亲为 ⌊3/2⌋ =1， 即在b t[1]中；
- 其左孩子在bt[2i]=bt[6]中；
- 其右孩子在bt[2i+1]=bt[7]中。

34

(2) 一般二叉树：

按完全二叉树形式存储,没结点处用0表示, 表示“虚结点”。



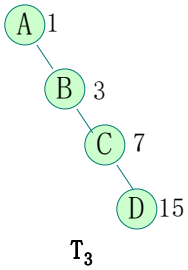
T_2

A	B	E	C	0	G	0	D	F	0	0	0	H
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

T_2的顺序结构

35

(3) 右单枝树



T_3

A	0	B	0	0	0	C	0	0	0	0	0	0	0	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

T_3的顺序结构

缺点：①浪费空间；②插入、删除不便

深度为k的二叉树，最多需长度为2^k-1的一维数组。

若是右单枝树，空间利用率为:

$$\alpha = \frac{k}{2^k - 1}$$

k=4, α=4/15 ;

k=10, α=10/1023 ≈ 0.0098

36

Review

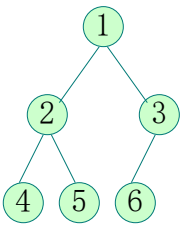
完全二叉树：深度为k有n个结点的二叉树，当且仅当每个结点都与同深度的满二叉树中编号从1至n的结点一一对应，则称之为完全二叉树。

性质5：若对含 *n* 个结点的完全二叉树从上到下且自左至右进行 *1* 至 *n* 的编号，则对完全二叉树中任意一个编号为 *i* 的结点：

(1) 若 *i=1*，则该结点是二叉树的根，无双亲，
否则，编号为 $\lfloor i/2 \rfloor$ 的结点为其双亲结点；

(2) 若 *2i>n*，则该结点无左孩子，
否则，编号为 *2i* 的结点为其左孩子结点；

(3) 若 *2i+1>n*，则该结点无右孩子结点，
否则，编号为 *2i+1* 的结点为其右孩子结点。

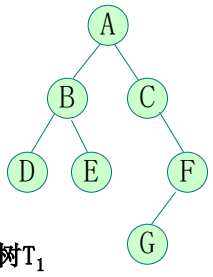


37

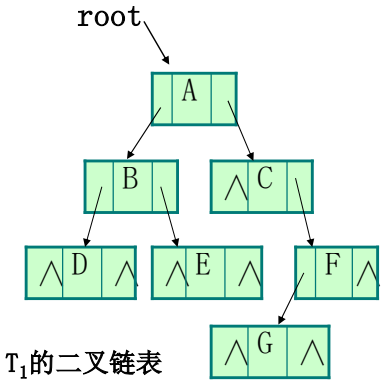
2. 链式存储结构

(1) 二叉链表


```
typedef struct BiTNode { // 结点结构
    TElemType      data;
    struct BiTNode  *lchild, *rchild;
                          // 左右孩子指针
} BiTNode, *BiTree;
```



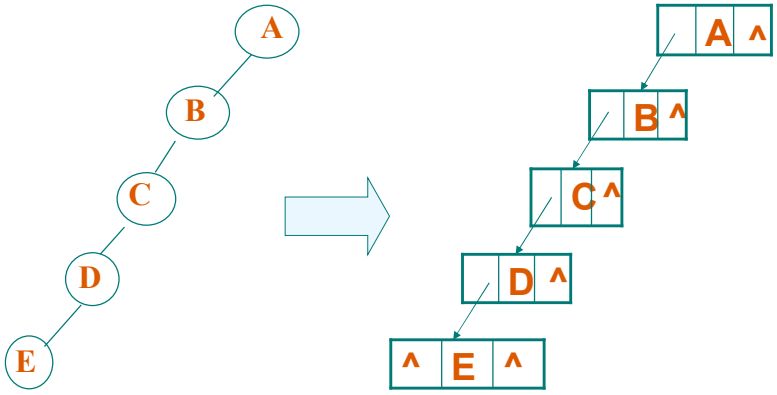
二叉树T_1



T_1的二叉链表

38

例：二叉树链式存储



优点：①不浪费空间；②插入、删除方便

39

性质6. 含有n个结点的二叉链表中，有n+1个空链域。

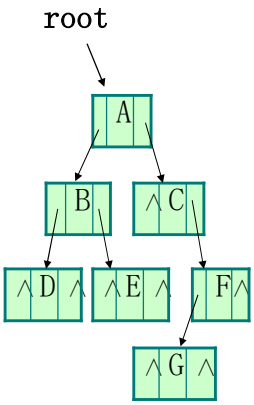
证明一：空链域数=$2n_0+n_1$ ＝$n_0+n_1+n_0$ (1)

又有 $n_0=n_2+1$

所以（1）式空链域数＝$n_0+n_1+n_2+1$

又因为 $n=n_0+n_1+n_2$

故空链域数=n+1.



证明二：

有n-1个结点有链引入，所以非空链域数为：n-1,

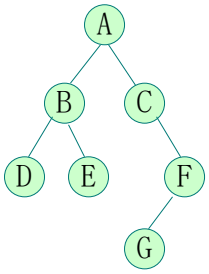
而n个结点共有2n个链域，故空链域数：n+1.

40

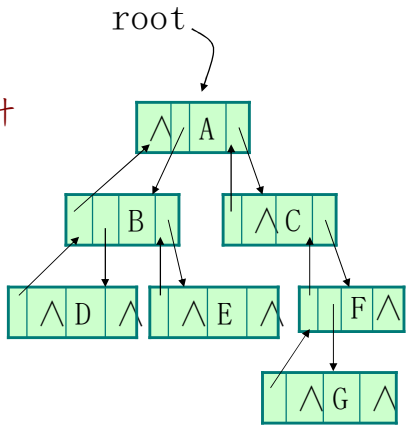
(2) 三叉链表

parent	lchild	data	rchild

```
typedef struct TriTNode { // 结点结构
  TElemType      data;
  struct TriTNode  *lchild, *rchild;
                    // 左右孩子指针
  struct TriTNode  *parent;  //双亲指针
} TriTNode, *TriTree;
```



二叉树T_2



T_2的三叉链表

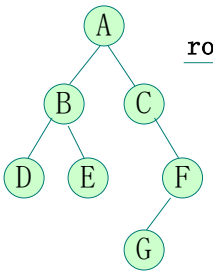
41

- 思考：含n个结点的三叉链表有多少个空链域？
- 线索链表

42

(3)静态链表

```
struct SBiTNode
{ ElemType data;
  int lchild,rchild;
 }SBiTree[n+1];
```



二叉树

root

	lchild	data	rchild
0	///	///	///
1	2	A	3
2	4	B	5
3	0	C	6
4	0	D	0
5	0	E	0
6	7	F	0
7	0	G	0

一维数组t[0..7]

43

6.3 遍历二叉树和线索二叉树

6.3.1 遍历二叉树

按某种规则访问二叉树的每一个结点一次且仅一次的过程。

- “遍历”是任何类型均有的操作，对线性结构而言，只有一条搜索路径(因为每个结点均只有一个后继)。
- 二叉树是非线性结构，每个结点有两个后继，则存在如何遍历即按什么样的搜索路径遍历的问题。
- 一次遍历后，使树中结点的非线性排列，按访问的先后顺序变为某种线性排列。
- 遍历是树结构插入、删除、修改、查找等运算的基础。

44

设：D----访问根结点,输出根结点；

L----递归遍历左二叉树；R----递归遍历右二叉树。

遍历规则(方案)：

- 先左后右

  DLR----先序遍历(先根,preorder)

  LDR----中序遍历(中根,inorder)

  LRD----后序遍历(后根,postorder)

- 先右后左

  DRL----逆先序遍历　RDL----逆中序遍历

  RLD----逆后序遍历

45

先序遍历

先序遍历二叉树递归定义：

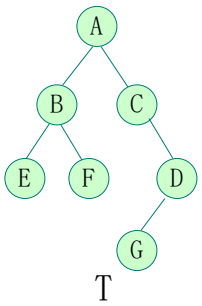
若二叉树为空，则遍历结束；

否则，执行下列步骤：

(1)访问根结点；

(2)先序遍历根的左子树；

(3)先序遍历根的右子树。

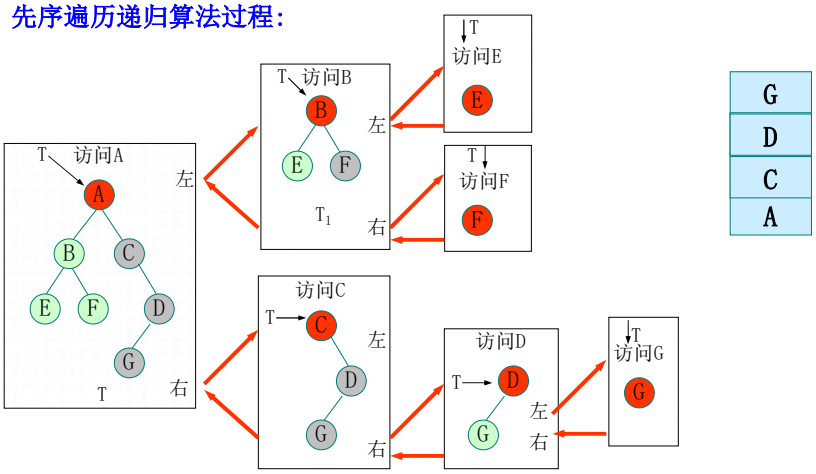


T

A B E F C D G

46

先序遍历递归算法过程：



47

先序遍历递归算法(基于二叉链表)：

```
typedef  struct BiTNode *BiTree;  //结点指针类型
status  PreOrderTraverse(BiTree T, status( *visit)(TElemType &e))
{ // 先序遍历二叉树
  if (T) {
    if ( visit(T->data));          // 访问结点
      if ( PreorderTraverse (T->lchild, visit)); // 遍历左子树
        if ( PreorderTraverse (T->rchild, visit)) return OK; // 遍历右子树
    return ERROR;
  } else return OK;
}
```

时间复杂度的近似分析T(n)= 2T(n/2)+0(1)=0(n)

最坏情形空间复杂度S(n)=0(n)　需要递归工作栈

48

中序遍历

中序遍历二叉树递归定义：

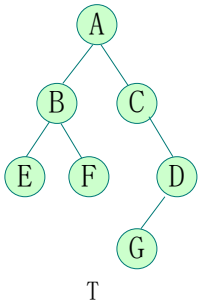
若二叉树为空，则遍历结束；

否则，执行下列步骤：

(1)中序遍历根的左子树；

(2)访问根结点；

(3)中序遍历根的右子树。



T

E B F A C G D

49

中序遍历递归算法

```
typedef  struct BiTNode *BiTree;   //结点指针类型

void  InOrderTraverse(BiTree T)
      //T是指向二叉链表根结点的指针
{
   if (T)
  {
   InOrderTraverse(T->lchild);  //递归访问左子树
   printf("%c",T->data);        //访问结点
   InOrderTraverse(T->rchild);  //递归访问右子树
   }
  return;
 }
```

50

后序遍历

后序遍历二叉树递归定义：

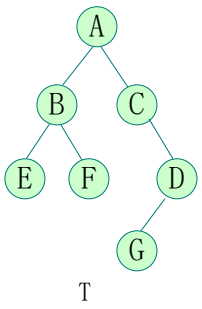
若二叉树为空，则遍历结束；

否则，执行下列步骤：

(1)后序遍历根的左子树；

(2)后序遍历根的右子树；

(3)访问根结点。



T

E F B G D C A

51

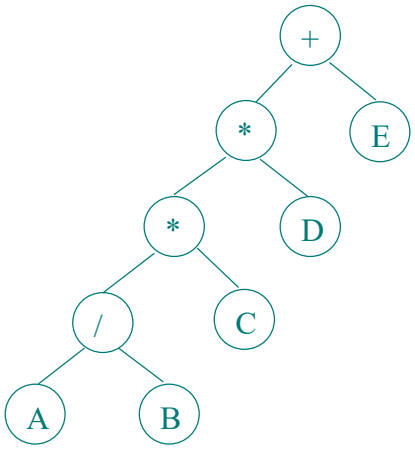
后序遍历递归算法

```
typedef  struct BiTNode *BiTree;  //结点指针类型

void  PostOrderTraverse(BiTree T)
                        //T是指向二叉链表根结点的指针
{
   if (T)
  {
   PostOrderTraverse(T->lchild);  //递归访问左子树
   PostOrderTraverse(T->rchild);  //递归访问右子树
   printf("%c",T->data);    //visit(T->data),访问结点
   }
  return;
 }
```

52

例：用二叉树表示算术表达式 (A/B)*C*D+E



先序遍历结果
+ * * / A B C D E
—前缀表示法（波兰式）

中序遍历结果
A / B * C * D + E
—中缀表示法

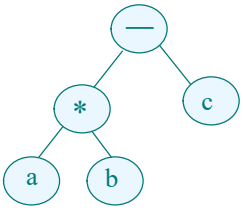
后序遍历结果
A B / C * D * E +
—后缀表示法（逆波兰式）

层次遍历结果
+ * E * D / C A B

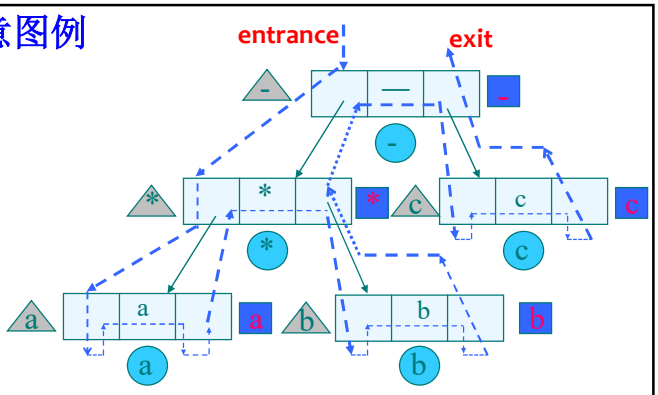
讨论：利用栈如何建立表达式的二叉树结构？

53

三种遍历过程示意图例



a*b−c



- 虚线表示执行过程/搜索路径:
  - ✓ 向下表示更深层的递归调用;
  - ✓ 向上表示递归调用返回;
- 沿虚线记下各类符号,便得到遍历的结果。

54

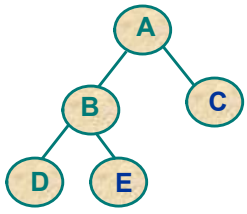
非递归算法(中序遍历)

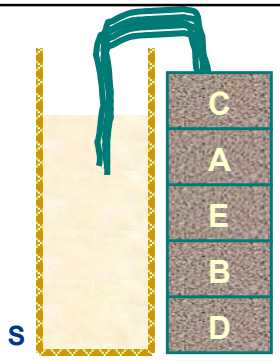
- 递归算法简明精炼，但效率较低；
- 某些高级语言不支持递归；
- 非递归算法思想：
  1. 设置栈S存放所经过的根结点指针信息；初始化S；
  2. 首次遇到根结点并不访问，而是入栈；
  3. 中序遍历它的左子树；

     左子树遍历结束后，将根结点指针退栈，并访问根结点；

     然后中序遍历它的右子树。
  4. 当需要退栈时，如果栈为空则结束。

55



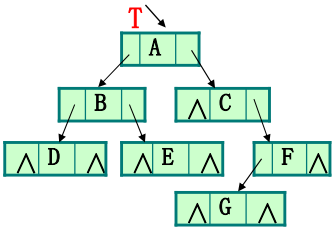


关键循环过程

- 循环判断 遍历是否结束/栈S是否为空；
  - ✓ 搜索到第一个访问结点/最左下方结点：循环执行 p=p→lchid;
  - ✓ 栈顶为空指针，则退空指针；
  - ✓ 栈S非空，退栈并访问结点/visit(p->data)；
  - ✓ 进入p的右子树/push(S,p->rchild)；

56

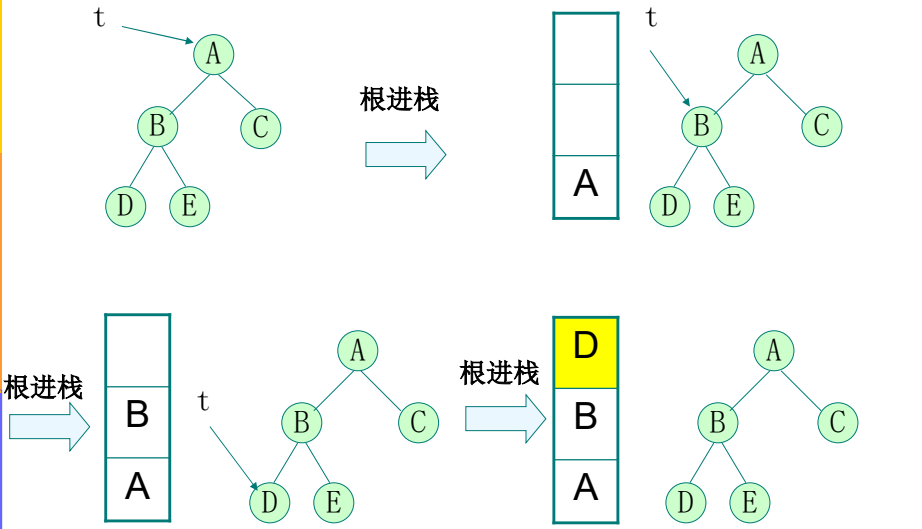
```
Status InOrderTraverse (BiTree T, status( *visit)(TElemType &e)))
{//中序遍历非递归算法,s为存储二叉树结点的指针栈
 InitStack(S); push(S,T);     //根指针进栈（空指针也进栈）
 while (!StackEmpty(S)){
  while (GetTop(S,p)&& p) push(S,p->lchild);   //向左走到尽头
  pop(S,p);      //空指针退栈
  if (!StackEmpty(S)){    //访问结点与其右子树
    pop(S,p); visit(p->data);   push(S,p->rchild);
  }//if
 }//while
 return OK;
}//InOrderTraverse
```



- 根先进栈，左孩子紧随其后进栈，右孩子在根出栈后入栈
- 每个结点都进一次和出一次栈，且总访问栈顶元素，故时间复杂度为 O(n)

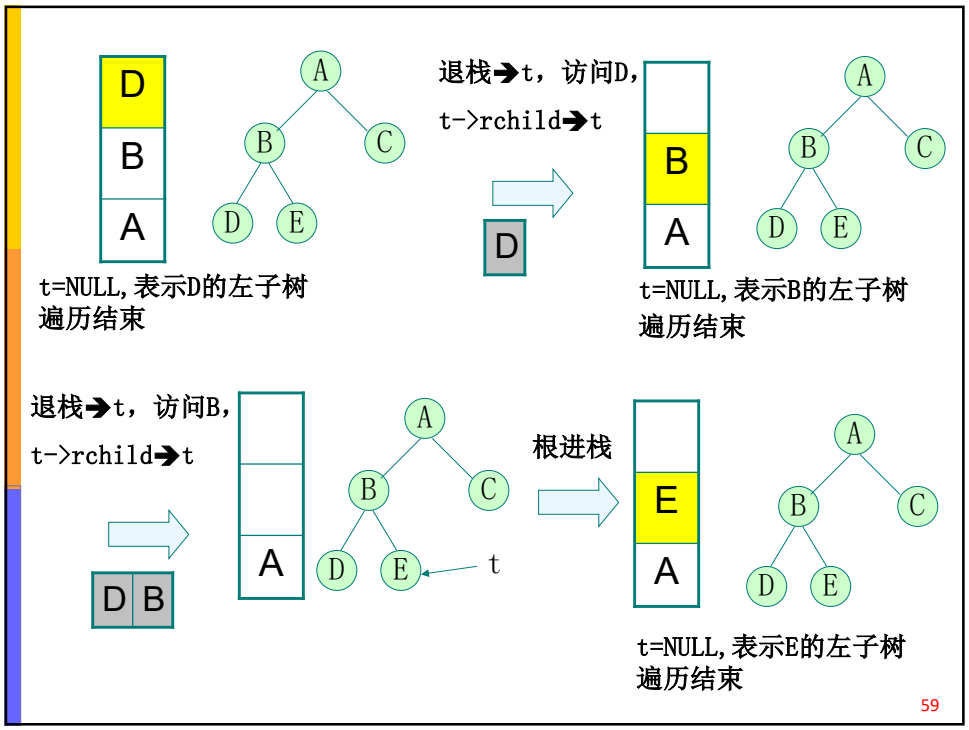
57

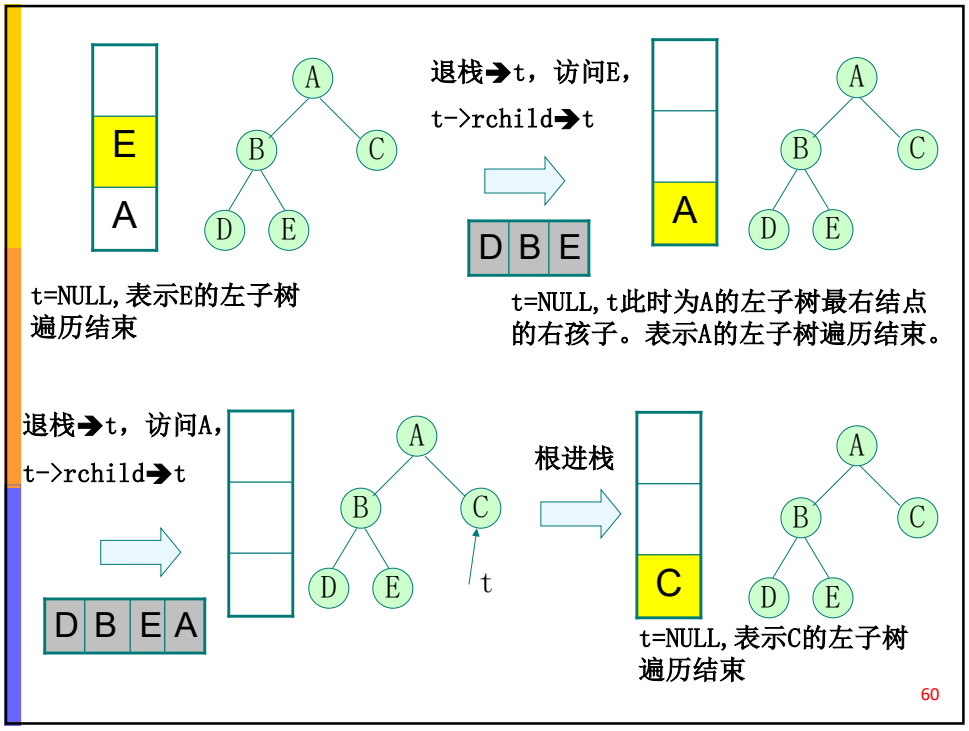
中序遍历非递归的另一种形式：只有非空指针进栈

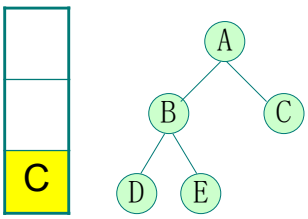


t=NULL，表示D的左子树遍历结束

58


D
B
A
A
B
C
D
E
t=NULL,表示D的左子树
遍历结束
退栈➔t，访问D，
t->rchild➔t
D
B
A
t=NULL,表示B的左子树
遍历结束
退栈➔t，访问B，
t->rchild➔t
D B
A
t
根进栈
E
A
t=NULL,表示E的左子树
遍历结束
59

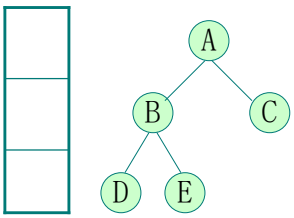

E
A
t=NULL,表示E的左子树
遍历结束
退栈➔t，访问E，
t->rchild➔t
D B E
A
t=NULL,t此时为A的左子树最右结点
的右孩子。表示A的左子树遍历结束。
退栈➔t，访问A，
t->rchild➔t
D B E A
t
根进栈
C
t=NULL,表示C的左子树
遍历结束
60



t=NULL,表示C的左子树遍历结束

退栈➔t，访问C，

t->rchild➔t



t=NULL,并且栈S为空，遍历结束

61

```
void Inorder(struct BiTNode *t)     //t为根指针，用顺序栈
{ struct BiTNode *st[maxleng+1];    //定义指针栈st[1..maxleng]
  int top=0;                        //置空栈
  do
  { while(t)                  //根指针t表示的为非空二叉树
    { if (top==maxleng) exit(OVERFLOW); //栈已满,退出
      st[++top]=t;              //根指针进栈(非空指针)
      t=t->lchild;              //t移向左子树
    }          //循环结束表示搜索达到以t为根指针的二叉树的最左下方
    if (top)                    //为非空栈
    {t=st[top--]; printf("%c",t->data);  //弹出根指针访问根结点
     t=t->rchild;               //遍历右子树
     }
   } while(top||t);             //父结点未访问，或右子树未遍历
}
```

62

讨论：

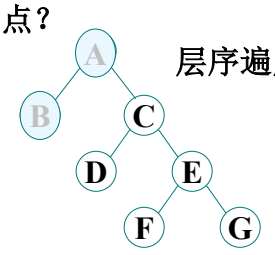
- 如何实现先序、后序非递归遍历算法？
- （选择题）根据前面描述的搜索路径，在中序遍历的非递归算法中，栈中结点都未被访问；那么如果利用栈设计先序遍历的非递归算法，栈中结点临出栈前的访问情况是：

（1）都未被访问　（2）都已被访问　（3）不确定

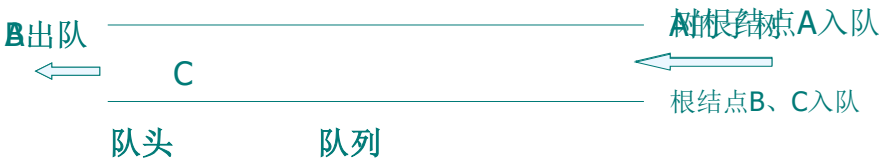
63

层序遍历算法

- 按从上往下逐层，同层从左至右的次序访问各结点
- 访问根之后，通过根获取并保存其左孩子，然后右孩子
- 如何暂存没访问过的结点？
- 采用队列



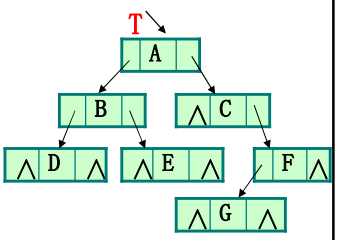
层序遍历序列：　A B



64

层序遍历算法(利用队列)

```
void LayerOrder(Bitree T)
{ InitQueue(Q);                 //初始化队列
  if(T) EnQueue(Q,T);           //T非空则入队
  while( !QueueEmpty(Q) )
  { DeQueue(Q, &p);  //队首结点出队(送入p)
    visit(p);                   //出队后即刻访问该结点
    if(p->lchild) EnQueue(Q,p->lchild);
    if(p->rchild) EnQueue(Q,p->rchild);
  }
}//LayerOrder
```



- 根先进队，出队后即访问；之后其非空左右孩子依次进队
- 每个结点都进一次和出一次队，且总是访问出队元素，故时间复杂度为 O(n)

当孩子为空时不将空指针入队

65

基于遍历的应用举例

1、建立二叉树的存储结构

2、基于遍历序列构造二叉树

3、求二叉树的深度(后序遍历)

66

1. 建立(生成)二叉树

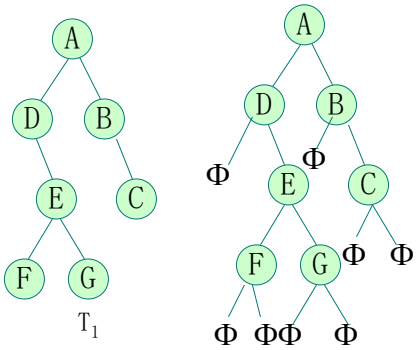
- 二叉树T_1的先序序列：

  "ADEFGBC"

  带空二叉树的先序序列：

  "ADΦEFΦΦGΦΦBΦCΦΦ"

  其中：'Φ'表示空二叉树

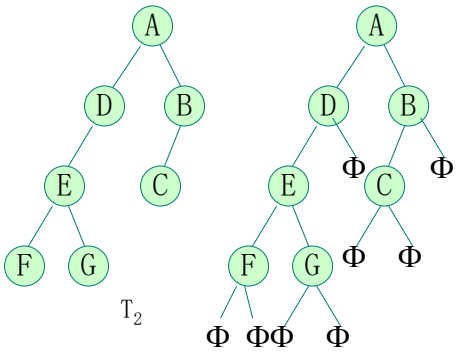


- 二叉树T_2的先序序列：

  "ADEFGBC"

  带空二叉树的先序序列：

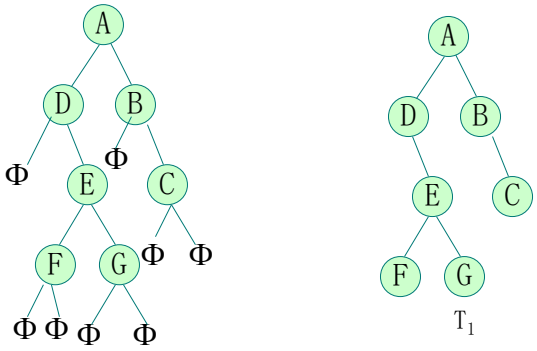
  "ADEFΦΦGΦΦΦBCΦΦΦ"



67

输入二叉树的先序遍历次序序列，建立对应的二叉树：

A D Φ E F Φ ΦG Φ ΦB Φ C Φ Φ



性质6. 含有n个结点的二叉链表中，有n+1个空链域。

因此，n个结点的序列中需补充n+1个空格符。

68

算法：创建二叉树

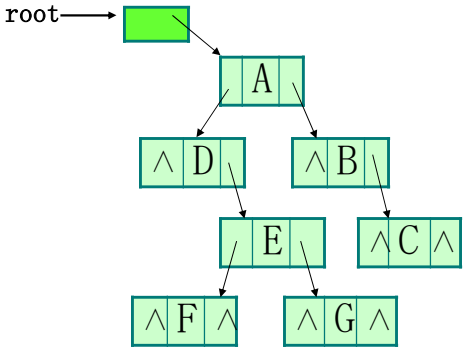
输入：带空结点的二叉树的先序序列

输出：二叉树的根指针

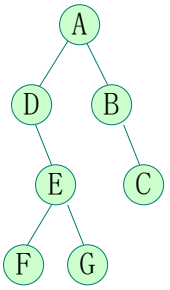
分析创建二叉树的递归逻辑

```
#define leng sizeof(BiTNode) //结点所占空间大小
```

假设输入先序序列：ADΦEFΦΦGΦΦBΦCΦΦ

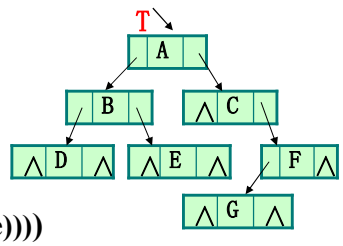


二叉链表



二叉树

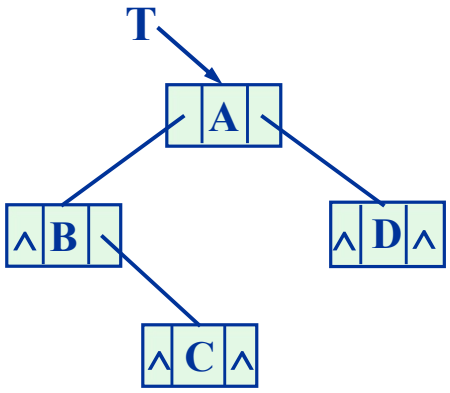
先序序列：ABDΦΦEΦΦCΦFGΦΦΦ




```
Status CreateBiTree(BiTree &T) {
//输入带空格符的先序序列，构造其二叉链表
 scanf(&ch);
 if (ch=='Φ') T = NULL;
 else {
  if (!(T = (BiTNode *) malloc(sizeof(BiTNode))))
      exit(OVERFLOW);
  T->data = ch;                  // 生成根结点
  CreateBiTree(T->lchild);       // 构造左子树
  CreateBiTree(T->rchild);       // 构造右子树
 }
 return OK;  //C语言程序如何将T返回给主调函数
} // CreateBiTree
```

上页算法执行过程举例如下：

A B ■ C ■ ■ D ■ ■



71

```
void CreatBiTree1(BiTree *T)
{ char ch;
  scanf("%c",&ch);
  if (ch=='Φ') (*T)=NULL;
  else
  {
  (*T)=(BiTree) malloc(leng);
  (*T)->data=ch;
  CreatBiTree1(&(*T)->lchild);
  CreatBiTree1(&(*T)->rchild);
  }
}
```

```
BiTree CreatBiTree2( )
 { char ch;  BiTree T;
   scanf("%c",&ch);
   if (ch==' Φ ') T=NULL;
   else {
     T=(BiTree) malloc(leng);
     T->data=ch;
     T->lchild=CreatBiTree2();
     T->rchild=CreatBiTree2();
       }
  return T;
 }
```

```
void CreatBiTree3(BiTree &T)
{ char ch;
  scanf("%c",&ch);
  if (ch==' Φ ') T=NULL;
  else { T=(BiTree) malloc(leng); T->data=ch;
    CreatBiTree3(T->lchild);
    CreatBiTree3(T->rchild); }
}
```

```
main( )
{
  BiTree  T1,T2,T3;
  CreatBiTree1(&T1);
  T2=CreatBiTree2();
  CreatBiTree3(T3);
}
```

```
status CreatBiTree1(BiTree *T, char *definition)
status CreatBiTree4(BiTree *T, char **definition)
status CreatBiTree3(BiTree &T, char *definition)
```

definition 作为参数后，需对前面算法进行改写。

形式1可用非递归算法实现，或引入全局下标变量/局部静态变量对数组字符进行逐个处理；

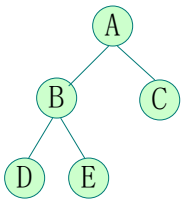
形式3与4可用递归实现，通过definition++易处理对左右子树的递归创建。

用非递归算法创建二叉树

输入：各结点的值及其在满二叉树中的编号

如：1,A; 2,B; 3,C; 4,D; 5,E

输出：二叉树根指针 root




```
#define MAXSIZE 100
BiTree CreatTree()
{ BiTree s[MAXSIZE+1],root,q;  //指针数组
  int i,j;     //j表示i的双亲编号
  ElemType x;
  printf("i,x=");
  scanf("%d%c",&i,&x);
```

74

```
  while(i!=0)
     { q=(BiTNode *) malloc(sizeof(BiTNode));
       q->data=x; q->lchild=q->rchild=NULL;
       s[i]=q;
       if (i==1) root=q;
       else  { j=i/2;
               if (i%2)    s[j]->rchild=q;
               else        s[j]->lchild=q;   }
       printf("i,x="); scanf("%d%d",&i,&x);
     }
  return root;
}
```

75

讨论：若知先序（或后序）遍历结果和中序遍历结果，能否“恢复”出二叉树？

证明：由一棵二叉树的先序序列和中序序列可唯一确定这棵二叉树。

76

2、已知二叉树的中序序列和后序序列分别是BDCEAFHG 和DECBHGFA，请画出这棵二叉树。

分析：

①由后序遍历特征，根结点必在后序序列尾部（即A）；

②由中序遍历特征，根结点必在其中间，而且其左部必全部是左子树的子孙（即BDCE），其右部必全部是右子树的子孙（即FHG）；

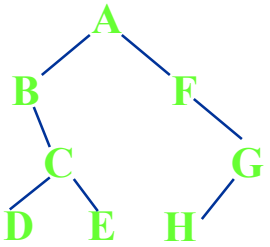
③继而，根据后序中的DECB子树可确定B为A的左孩子，根据HGF子串可确定F为A的右孩子；以此类推。

④显然，这易于表示为递归处理过程。

77

已知中序遍历：B D C E A F H G

已知后序遍历：D E C B H G F A



（D C E）　　（F H G）

讨论：如何写出对应的算法?

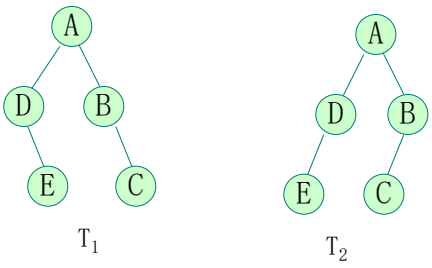
CreateBiTree(BiTree &T,char *inList,char *postList, int n)

78

由先序序列：A D E B C

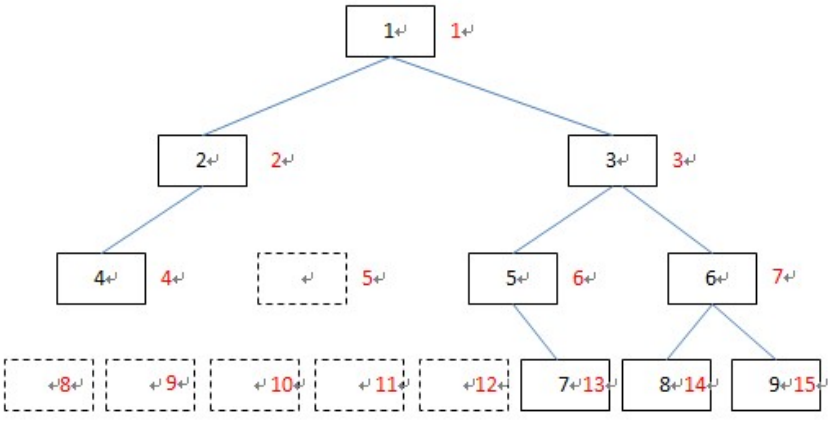
和(或)后序序列：E D C B A

能否确定唯一棵二叉树？　不能



79

讨论：如何将一棵二叉树通过网络传输给另一个客户端，并且在该客户端恢复为原始二叉树。

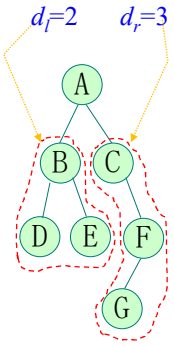


http://blog.csdn.net/hinyunsin/article/details/6292539

80

3、求二叉树的深度

$d = \max(d_l, d_r)+1$



算法基本思想:基于后序遍历

“访问结点”：求左、右子树深度的最大值，再加1.

```
int Depth (BiTree T ){
  if ( !T )   depthval = 0;
  else  {
    depthLeft = Depth( T->lchild );
    depthRight= Depth( T->rchild );
    depthval = 1 +
          (depthLeft > depthRight  ?depthLeft : depthRight);
  }
  return depthval;
}
```

81

6.3.2 线索二叉树

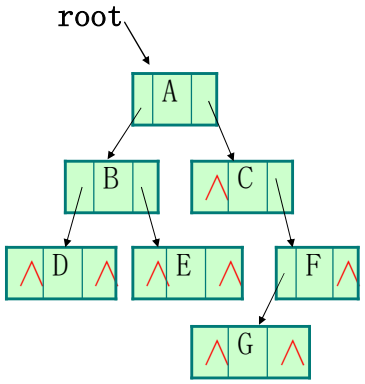
遍历二叉树是按某种规则将非线性结构的二叉树结点线性化。

- 遍历二叉树可得到结点的一个线性序列，在线性序列中，就存在结点的前驱和后继，但是在二叉链表上只能找到结点的左孩子、右孩子。
- 二叉树结点中没有相应前驱和后继的信息。
  - ✓ 结点的前驱和后继只有在每次遍历时动态产生。
  - ✓ 能否通过结点的两个链域查找出任一结点的前驱和后继?

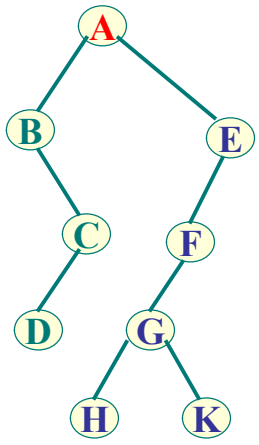
82

6.3.2 线索二叉树

- n个节点的二叉链表：
  - ✓ 有： n＊2 个指针域
  - ✓ 使用：n-1 个指针，除根以外，每个结点被一个指针指向
- 空指针域数： n＊2-(n-1)=n+1
- 线索二叉树：利用n+1个空链域存放结点的前驱和后继信息。



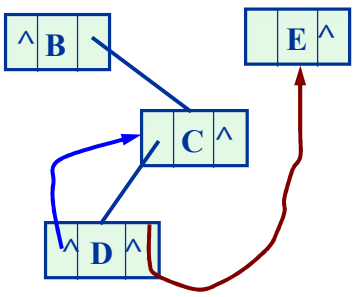
83



先序序列： A B C D E F G H K

指向该序列中的“前驱”和“后继”的指针，称作“线索”。

A B C D E F G H K



84

(1) 结点结构

在二叉链表中增加 Ltag 和 Rtag 两个标志域

lchild	Ltag	data	Rtag	rchild

- 考虑结点的左子树
  - ✓若有，则左链域lchild指示其左孩子（Ltag= 0）；
  - ✓否则，令左链域指示其前驱（Ltag=1）；
- 考虑结点的右子树
  - ✓若有，则右链域rchild指示其右孩子（Rtag= 0）；
  - ✓否则，令右链域指示其后继（Rtag= 1）.

85

（2）整体结构

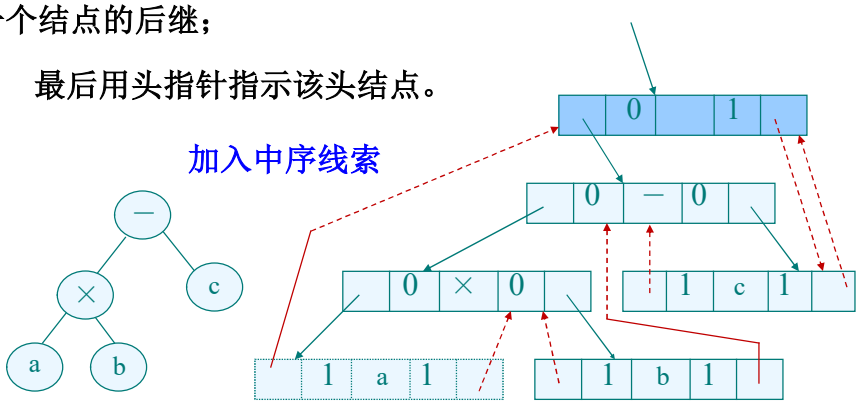
讨论：空二叉树的线索链表形态？

增设一个头结点，令其lchild指向二叉树的根结点，Ltag=0、Rtag=1；

并将该结点作为遍历访问的第一个结点的前驱和最后一个结点的后继；

最后用头指针指示该头结点。

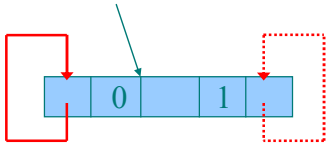
加入中序线索



86

（3）空二叉树的线索链表

只有一个头结点，其Ltag=0、Rtag=1； lchild与rchild都指向头结点自身。



87

线索链表的类型描述：

```
typedef enum { Link, Thread } PointerTag;
            // Link==0:指针，Thread==1:线索

typedef struct BiThrNode {
  TElemType       data;
  struct BiThrNode  *lchild, *rchild;  // 左右指针
  PointerTag          LTag, RTag;      // 左右标志
} BiThrNode, *BiThrTree;
```

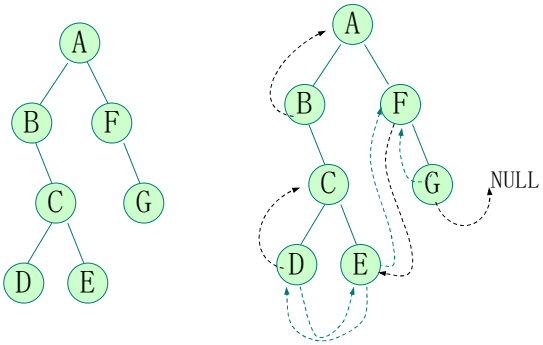
88

- 称以这种结点结构构成的二叉链表为二叉树的线索链表；
- 其中指示前驱和后继的链域称为线索；
- 加上线索的二叉树称为线索二叉树；
- 对二叉树以某规则遍历使其变为线索二叉树的过程称为线索化。
  - ✓ 按中序遍历得到的线索二叉树称为中序线索二叉树；
  - ✓ 按先序遍历得到的线索二叉树称为先序线索二叉树；
  - ✓ 按后序遍历得到的线索二叉树称为后序线索二叉树。

89

先序线索二叉树：线索指向先序遍历中前趋、后继的线索二叉树。

例. T的先序序列：A, B, C, D, E, F, G



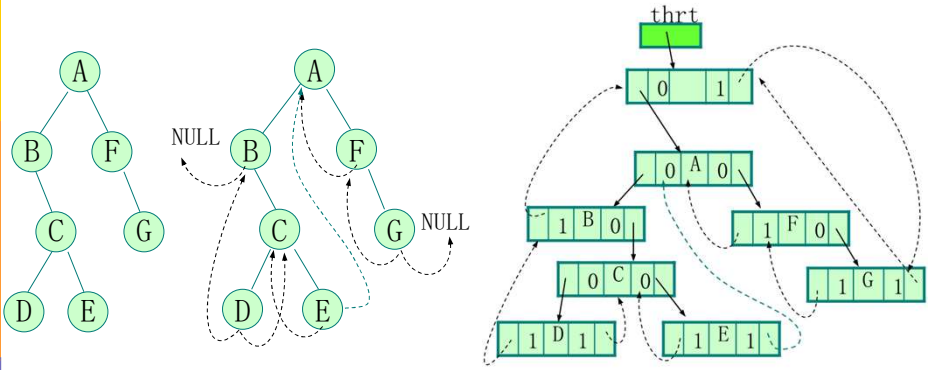
二叉树T　　T的先序线索二叉树

讨论：如何在先序线索二叉树/链表中访问当前结点的
（1）在先序序列的后继？（2）在先序序列的前驱？
（3）哪一种更方便？

90

中序线索二叉树:线索指向中序遍历中前趋、后继的线索二叉树。

例. T的中序序列：B, D, C, E, A, F, G



二叉树T　　T的中序线索二叉树　　T的中序线索二叉树链表

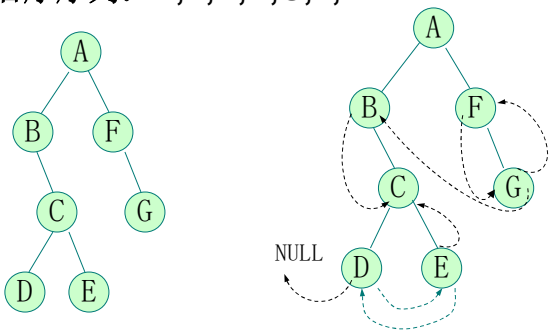
讨论：如何在中序线索二叉树/链表中访问当前结点的

（1）在中序序列的后继？（2）在中序序列的前驱？

91

后序线索二叉树: 线索指向后序遍历中前趋、后继的线索二叉树。

例. T的后序序列：D,E,C,B,G,F,A



二叉树T　　T的后序线索二叉树

讨论：如何在后序线索二叉树/链表中访问当前结点的

（1）在后序序列的后继？（2）在后序序列的前驱？

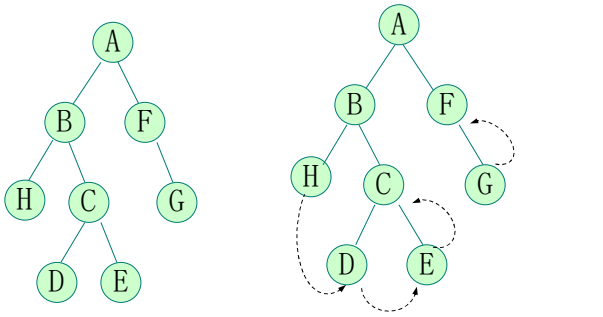
（3）哪一种更方便？

92

后序后继线索二叉树:

只设指向后序遍历中后继线索的线索二叉树。

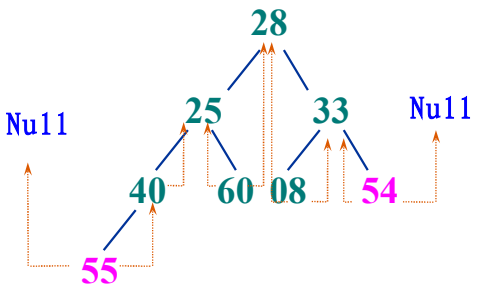
例. T的后序序列：H,D,E,C,B,G,F,A



二叉树T　　T的后序后继线索二叉树

93

例：给定如图所示二叉树T，请画出与其对应的中序线索二叉树。



解：因为中序遍历序列是：55 40 25 60 28 08 33 54

对应线索树应当按此规律连线，即在原二叉树中添加虚线。

94

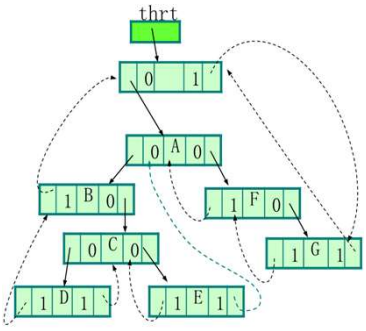
线索链表的遍历算法：（无需堆栈）

由于在线索链表中添加了遍历中得到的“前驱”和“后继”的信息，从而简化了遍历算法。

例：对中序线索链表的遍历算法

中序遍历的第一个结点？

左子树上处于“最左下”（没有左子树）的结点。



T的中序线索二叉树链表

在中序线索链表中结点的后继？

若无右子树，则为后继线索所指结点；

否则为对其右子树进行中序遍历时访问的第一个结点。

95

中序线索二叉树遍历步骤：

有后继找后继，无后继找右子树的最左子孙

1）设置一个搜索指针p；

2）先寻找中序遍历之首结点（即最左下角结点）：

当LTag=0时（表示有左孩子），p=p->lchild；直到LTag=1（无左孩子，已到最左下角）；首先访问p->data；

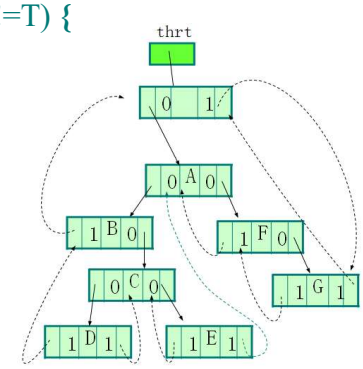
3）接着进入该结点的右子树，检查RTag 和p->rchild ；

4）若该结点的RTag=1(表示有后继线索)，则p=p->rchild；访问p->data ；并重复4），直到后继结点的RTag=0；

5）当RTag=0时（表示有右孩子），则应从该结点的右孩子开始(p=p->rchild）查找左下角的子孙结点；即重复2）。

96

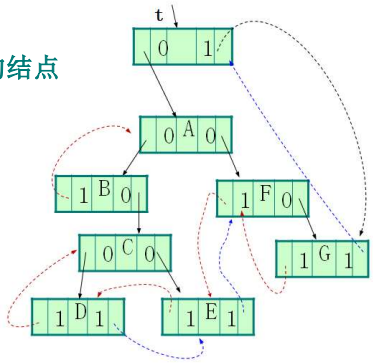
```
Status InOrderTraverse_Thr(BiThrTree T, Status (*Visit)(TElemType e)) {
  p = T->lchild;      // p指向根结点
  while (p != T) {    // 空树或遍历结束时，p==T
    while (p->LTag==Link)  p = p->lchild;  // 第一个结点
     if(!visit(p->data)) return ERROR;  //访问其左子树为空的节点
    while (p->RTag==Thread && p->rchild!=T) {
       p = p->rchild;  Visit(p->data);
    }                    // 访问后继结点
    p = p->rchild;    // 处理其右子树
  }
  return OK;
} // InOrderTraverse_Thr
```



97

先序线索二叉树的先序遍历：

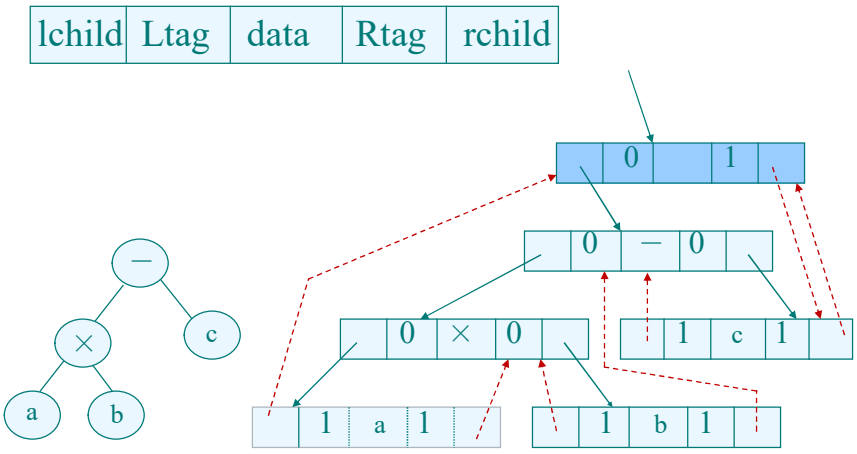
```
void PreOrderTraverse_Thr(preBiThrTree t, void (*Visit)(TElemType e)) {
{ p=t->lchild;
  while (p!=t)       //非空或遍历未结束
   {  visit(p->data);
      if (p->ltag==Link) //有左孩子时， p移向左孩子结点
          p=p->lchild;
      else  //p移向右孩子或右线索指向的结点
          p=p->rchild;
   }
}
```



98

线索链表复习

讨论：如何建立二叉树的中序线索链表？

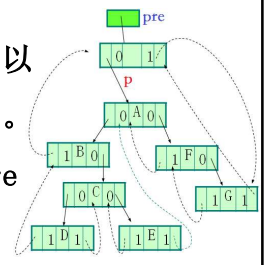


中序线索链表

99

如何建立线索链表？

- 在中序遍历过程中修改结点的左、右指针域，以保存当前访问结点的“前驱”和“后继”信息。
- 遍历过程中，附设指针pre，并始终保持指针pre指向当前访问的、指针p所指结点的前驱。



每次只修改前驱结点的右指针(后继)和本结点的左指针(前驱)。

若p->lchild = NULL, 则 {p->Ltag=1; p->lchild = pre;}

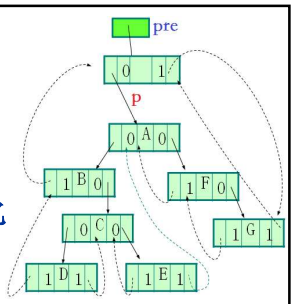
//p的前驱线索应存p结点的左边

若pre->rchild = NULL, 则 {pre->Rtag = 1; pre->rchild=p;}

//pre的后继线索应存pre结点的右边

100

```
void InThreading(BiThrTree pre, p) {
      //对以p为根的非空二叉树进行线索化
 if (p) {
  InThreading(pre, p->lchild); //左子树线索化
  if (!p->lchild)              //建前驱线索
   { p->LTag = Thread;   p->lchild = pre; }
  if (!pre->rchild)            //建后继线索
   { pre->RTag = Thread;  pre->rchild = p; }
  pre = p;          //保持 pre 指向 p 的前驱
  InThreading(pre, p->rchild); //右子树线索化
 }              //if，退出时，pre指向中序遍历的最后结点
} // InThreading
```

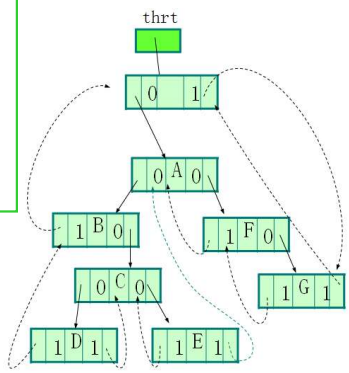


101

```
Status InOrderThreading (BiThrTree &Thrt,  BiThrTree T)
{ // 构建中序线索链表
  if (!(Thrt = (BiThrTree)malloc(sizeof(BiThrNode))))
        exit (OVERFLOW);
  Thrt->LTag = Link;  Thrt->RTag =Thread;
  Thrt->rchild = Thrt;              // 添加头结点
  if (!T)  Thrt->lchild = Thrt;     // T为空二叉树
     …  …
  return OK;
} // InOrderThreading
```

102

```
if (!T)  Thrt->lchild = Thrt;    // T为空二叉树
else {
  Thrt->lchild = T;   pre = Thrt;
  InThreading(pre, T);
  pre->rchild = Thrt;  // 处理最后一个结点
  pre->RTag = Thread;
  Thrt->rchild = pre;
}
```



103

建立线索链表的非递归算法（用顺序栈，基于中序遍历）

```
void creat_thread(struct BiTNode *t)
{ struct BiTNode *st[maxleng+1];  //指针栈
  int top=0;                      //置空栈，0号单元不用
  struct BiTNode *pre=NULL;  //前驱结点指针，未建头结点
  do
  { while(t)          //根指针t表示的为非空二叉树
    { if (top==maxleng)
            exit(OVERFLOW);      //栈已满,退出
      st[++top]=t;               //根指针进栈
      t=t->lchild;               //t移向左子树
     }
```

104

```
if (top)                                          //为非空栈
   { t=st[top--];                                 //弹出根指针
     printf("%c",t->data);                        //访问根结点
     if (t->lchild!=NULL)  t->ltag=0;     //左指针为孩子
     else {t->ltag=1; t->lchild=pre; }    //左指针为线索
     if (pre!=NULL)
        if (pre->rchild!=NULL) pre->rtag=0;  //右指针为孩子
        else {pre->rtag=1; pre->rchild=t; } //右指针为线索
     pre=t;                                       //pre与t保持前后
     t=t->rchild;                                 //遍历右子树
    }
  } while(top||t);
pre->rtag=1;                              //最后一节点右标记线索
}
```

105

6.4 树和森林

6.4.1 树的存储结构

一、双亲表示法/顺序表示法

二、孩子表示法/链接表表示法

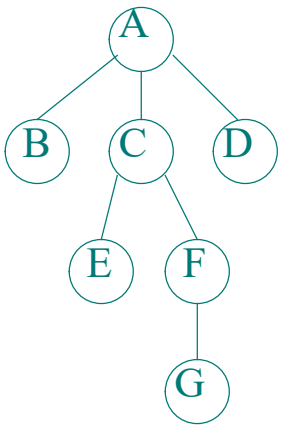
三、孩子链表表示法

四、带双亲的孩子链表表示法

五、树的二叉链表(孩子-兄弟）存储表示法

106

1. 双亲表示法/数组表示法/顺序表示法 ：



	data	parent
0	A	-1
1	B	0
2	C	0
3	D	0
4	E	2
5	F	2
6	G	5

r =0
n =7

107

C语言的类型描述：

```
#define MAX_TREE_SIZE  100
```

结点结构：

```
typedef struct PTNode {
    TElemType  data;
    int    parent;  // 双亲位置域
} PTNode;
```

data	parent

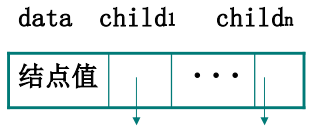
树结构：

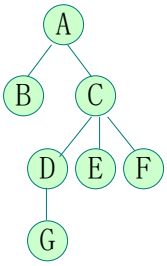
```
typedef struct {
    PTNode  nodes[MAX_TREE_SIZE];
    int    r, n;  //  根结点的位置和结点个数
} PTree;
```

108

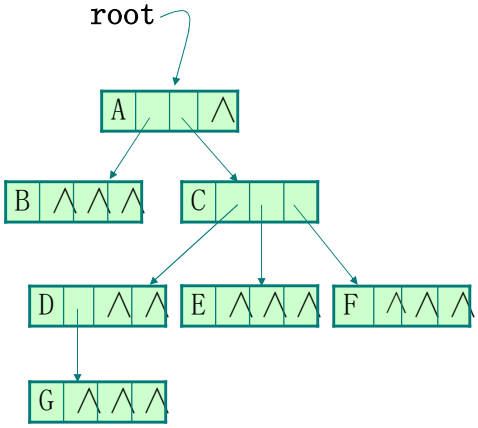
2. 孩子表示法/链接表表示法

(1) 固定大小的结点格式，设树T的度为n





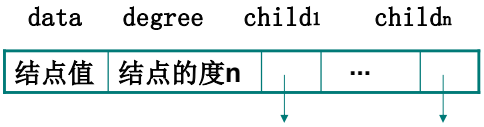
树T

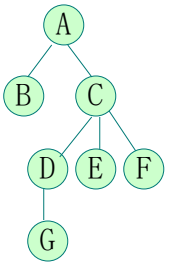


T的链接表

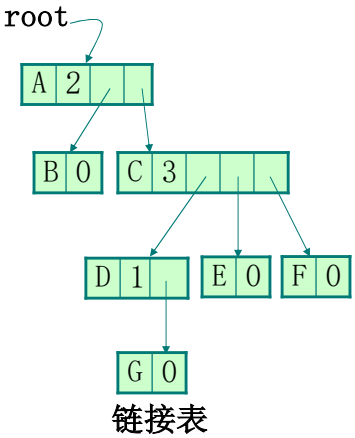
109

(2) 非固定大小的结点格式





树T



链接表

110

3. 孩子链表表示法/单链表表示法

data first

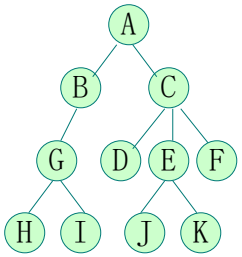
结点值 | → 第一个孩子

表头结点

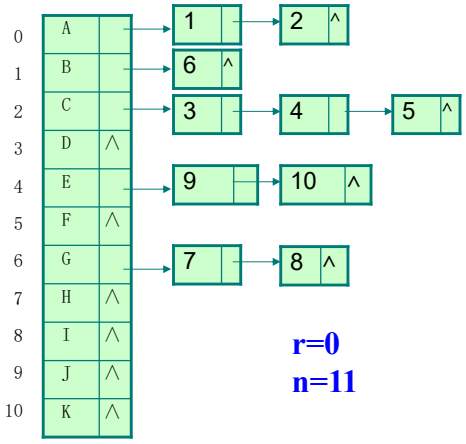
child next

序号值 | → 下一个孩子

孩子结点/表结点



树T



r=0
n=11

表头结点数组

4.带双亲的孩子链表表示法

data parent first

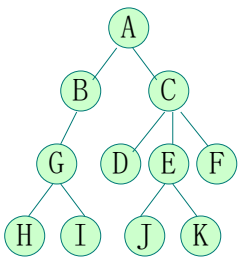
结点值 | | → 第一个孩子

表头结点

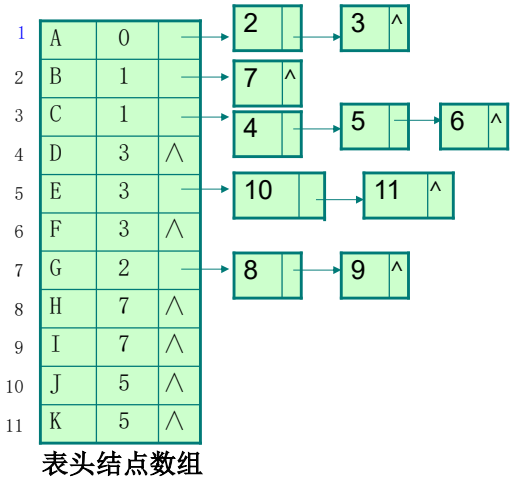
child next

序号值 | → 下一个孩子

孩子结点/表结点



树T



表头结点数组

孩子表示法C语言的类型描述：

```
typedef struct CTNode {
   int        child;
   struct CTNode *next;
 } *ChildPtr;
```

孩子结点结构

child	next

```
typedef struct {
   TElemType    data;
   ChildPtr  firstchild;  // 孩子链的头指针
} CTBox;
```

双亲结点结构

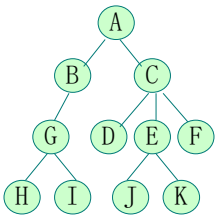
data	firstchild

```
typedef struct {
    CTBox  nodes[MAX_TREE_SIZE];
    int    n, r;     // 结点数和根结点的位置
  } CTree;
```

树结构

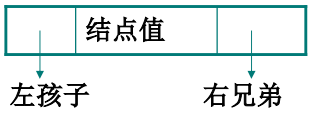
113

5. 孩子兄弟表示法/二叉链表

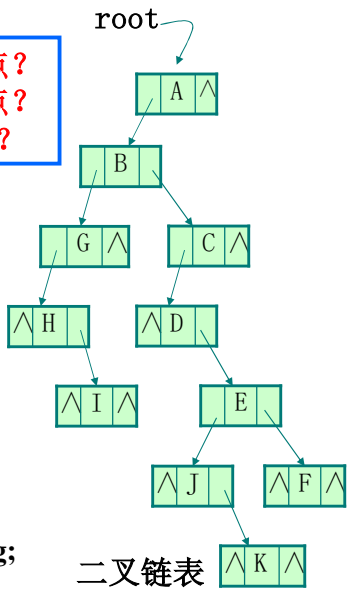


如何找孩子结点？
如何找兄弟结点？
找值为*x*的叶子？

firstchild data nextsibling




```
typedef struct CSNode{
   ElemType        data;
   struct CSNode *firstchild, *nextsibling;
} CSNode, *CSTree;
```



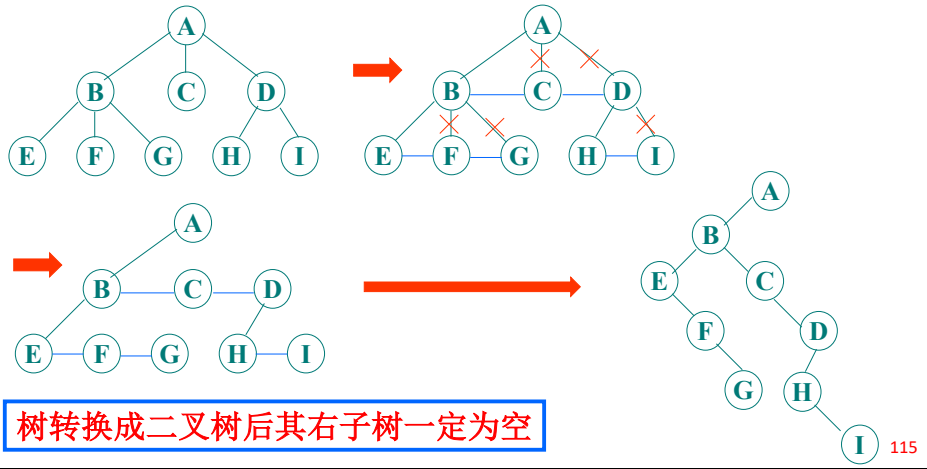
二叉链表

树的根结点在二叉链表中右指针一定为空，树的叶子结点呢？

114

6.4.2 树与二叉树的转换

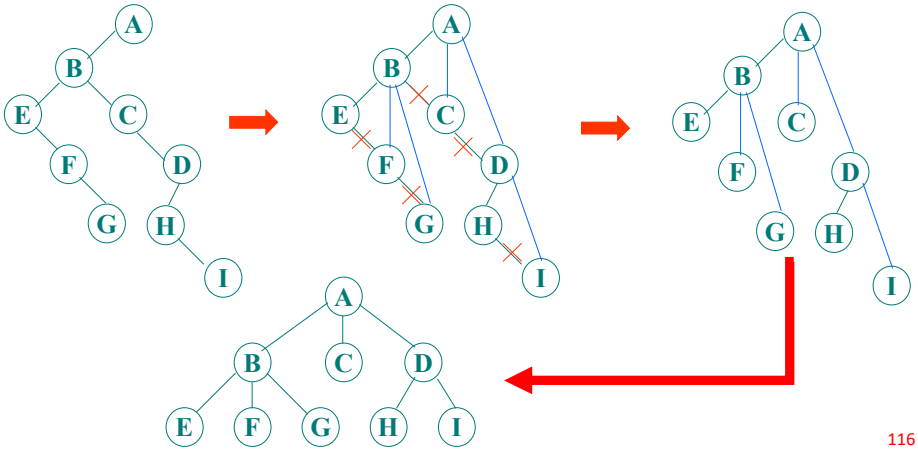
- 将树转换成二叉树（基于树的二叉链表表示）
  - ✓ 加线：在兄弟之间加一连线
  - ✓ 抹线：对每个结点，除了其左孩子外，去除其与其余孩子间的关系
  - ✓ 旋转：以树的根结点为轴心，将整树顺时针转45°



树转换成二叉树后其右子树一定为空

115

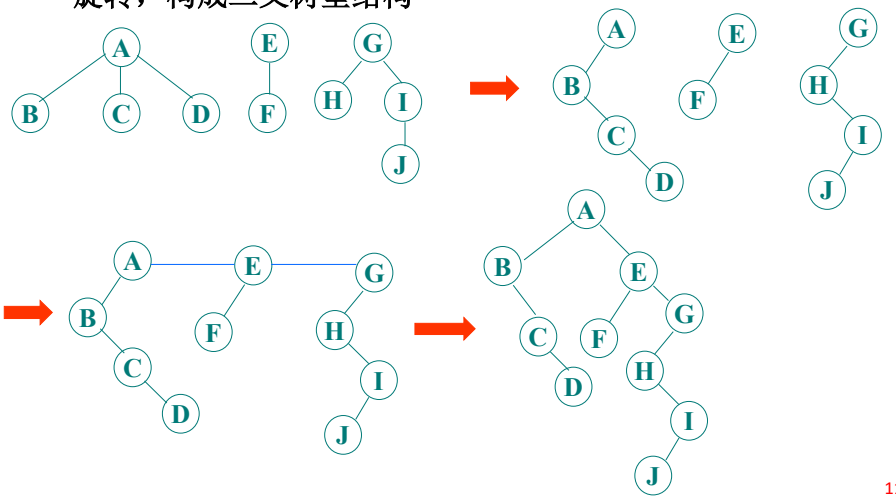
- 将二叉树转换成树
  - ✓ 加线：若p结点是双亲结点的左孩子，则将p的右孩子，右孩子的右孩子，…，沿分支找到的所有右孩子都与p的双亲用线相连
  - ✓ 抹线：抹掉原二叉树中双亲与右孩子之间的连线
  - ✓ 调整：将结点按层次排列，形成树结构



116

❑ 森林转换成二叉树

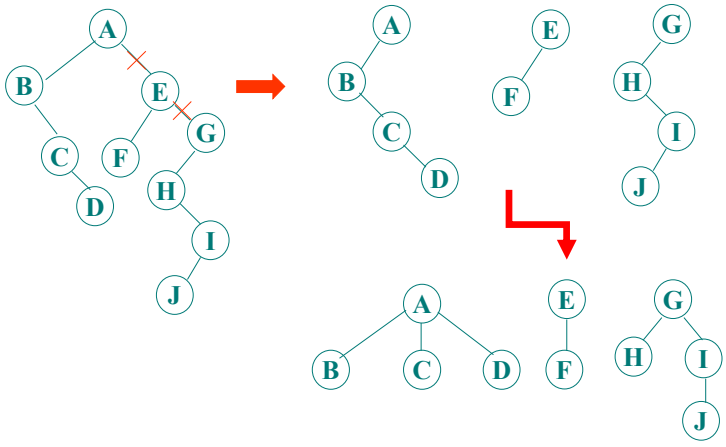
- ✓ 将各棵树分别转换成二叉树
- ✓ 将每棵树的根结点用线相连
- ✓ 以第一棵树根结点为二叉树的根，再以根结点为轴心，顺时针旋转，构成二叉树型结构



117

❑ 二叉树转换成森林

- ✓ 抹线：将二叉树中根结点与其右孩子连线，及沿右分支搜索到的所有右孩子间连线全部抹掉，使之变成孤立的二叉树
- ✓ 还原：将孤立的二叉树还原成树



118

- 树的各种操作均可对应二叉树的操作来完成。
- 注意：
  - ✓和树对应的二叉树，其左、右子树的概念已改变为：

    左是孩子，右是兄弟

119

森林和二叉树的对应关系

森林

$F = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$;

$T_1 = (root, T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1m})$;

$F_1 = (T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1m})$;

二叉树

$B = (root, LBT, RBT)$;

由森林转换成二叉树的转换规则为：

若 $F = \Phi$，则 $B = \Phi$;

否则，

由 $ROOT(T_1)$ 对应得到 root;

由 $F_1 = (T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1m})$ 对应得到 LBT;

由 $(T_2, T_3, \ldots, T_n)$ 对应得到 RBT。

120

由二叉树转换为森林的转换规则为：

若 $B=\Phi$， 则 $F=\Phi$;

否则，

由 root 对应得到 ROOT(T_1);

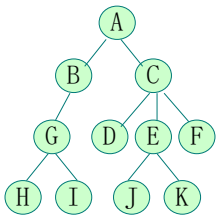
由LBT 对应得到 $F_1=(T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1m})$;

$T_1=(root, T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1m})$;

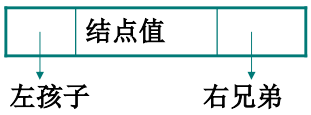
由RBT 对应得到 $(T_2, T_3, \ldots, T_n)$。

121

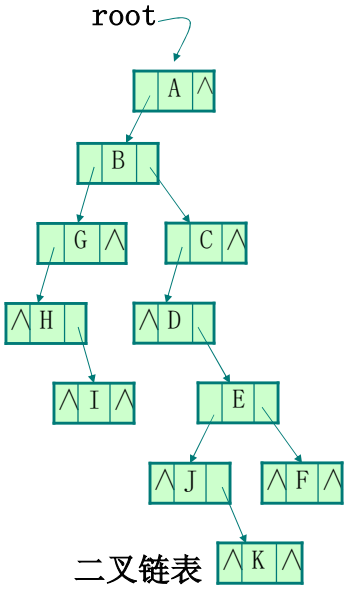
复习：二叉树与树及森林的相互转换



firstchild data nextsibling



树 ⇔ 二叉树
森林 ⇔ 二叉树



二叉链表

122

树和森林的遍历

一、树的遍历

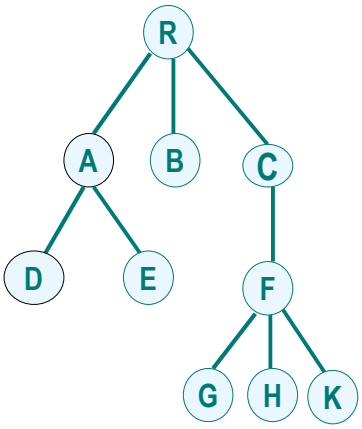
❑ 先根遍历

若树为空，则空操作

否则

（1）访问树的根结点

（2）依次先根遍历每棵子树



例：右图所示树的先根遍历序列：

RADEBCFGHK

❑后根遍历

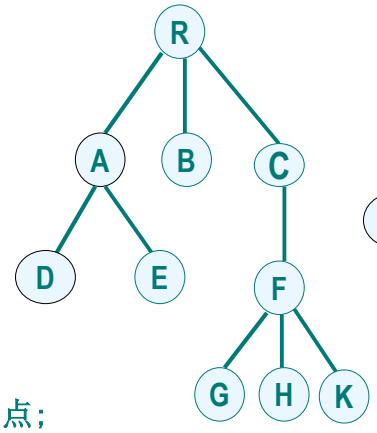
若树为空，则空操作；

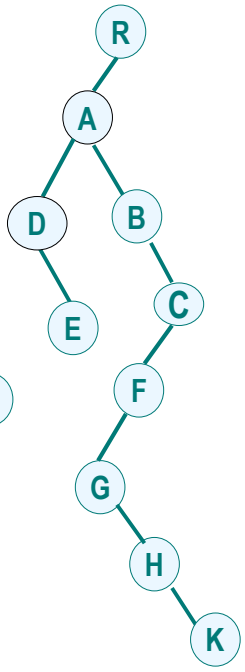
否则

（1）依次后根遍历

每棵子树；

（2）访问树的根结点；





例：右图所示树的后根遍历序列：

DEABGHKFCR

与对应二叉树的中序遍历序列一致

二、森林的遍历

❑ 先序遍历森林（相当于对对应的二叉树进行先序遍历）

若森林为空，则空操作，否则

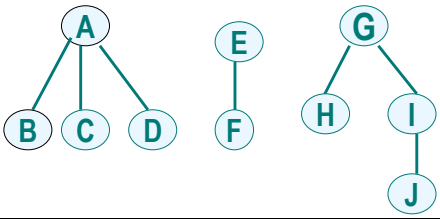
（1）访问第一棵树的根结点

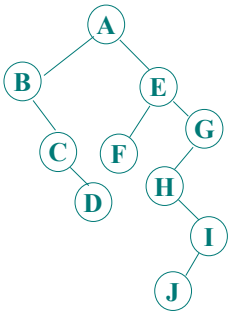
（2）先序遍历第一棵树中根结点的子树森林

（3）先序遍历除去第一棵树后余下的树构成的森林

例：下图所示森林的先序遍历序列为：

ABCDEFGHIJ





125

❑ 中序遍历森林（相当于对对应的二叉树进行中序遍历）

若森林为空，则空操作，否则

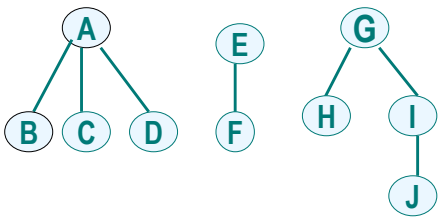
（1）中序遍历第一棵树根结点的子树森林

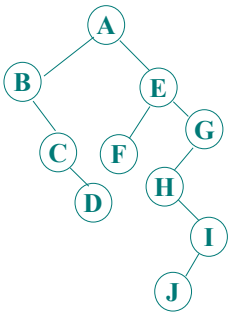
（2）访问第一棵树的根结点

（3）中序遍历除第一棵树后余下的树构成的森林

例：下图所示森林的中序遍历序列为：

BCDAFEHJIG





126

树的遍历和二叉树遍历的对应关系

树	森林	对应的二叉树
先根遍历	先序遍历	先序遍历
后根遍历	中序遍历	中序遍历

127

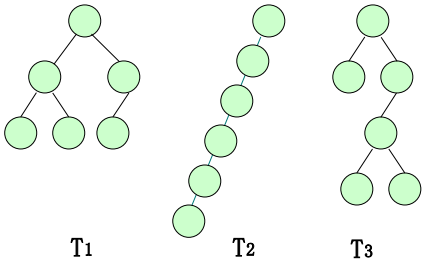
6.6 哈夫曼（Huffman)树及其应用

6.6.1.最优二叉树（ Huffman树）

❑路径长度

从树中一个结点到另一个结点之间的分支构成这两个结点之间的路径， 路径上的分支数目称做路径长度。

❑树的路径长度：从树根到每一结点的路径长度之和。



PL(T1)=1+1+2+2+2=8

PL(T2)=1+2+3+4+5=15

PL(T3)=1+1+2+3+3=10

128

- 当n个结点的二叉树为完全二叉树时,PL(T)具有最小值

  ∵ 结点i的层 = $\lfloor \log_2 i \rfloor + 1$

  树T的根到结点i的路径长度 = 结点i的层-1

  $= \lfloor \log_2 i \rfloor$

  ∴ $PL(T) = \lfloor \log_2 1 \rfloor + \lfloor \log_2 2 \rfloor + \ldots + \lfloor \log_2 n \rfloor$

  $= \sum_{i=1}^{n} \lfloor \log_2 i \rfloor$

- 当**n**个结点的二叉树为单枝树时,**PL(T)**具有最大值：

  PL(T)=0+1+2+...+(n-1) = n(n-1)/2

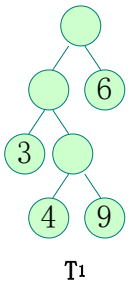
129

- 树或二叉树T的带权路径长度----每个叶子的权与根到该叶子的路径长度的乘积之和，记作WPL(T)。

$$WPL = \sum_{k=1}^{n} w_k l_k$$

其中：n --- 树T的叶子数目　　w_k--- 叶子k的权

l_k--- 树T的根到叶子k的路径长度



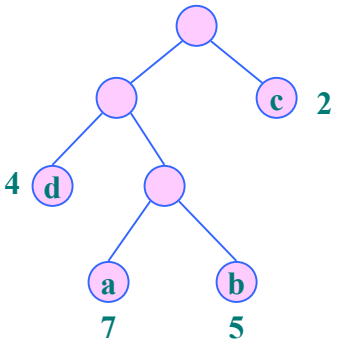
T_1

$WPL(T_1)=3*2+4*3+9*3+6*1=51$

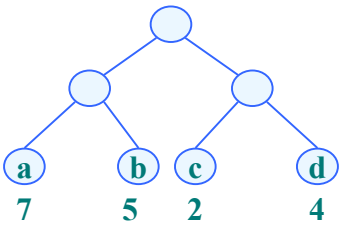
130

例　以权值分别为7，5，2，4 的4个结点为叶子结点构造二叉树

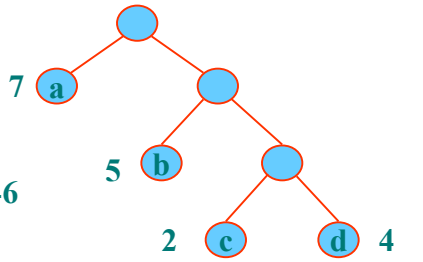
$$WPL=\sum_{k=1}^{n}W_K L_K$$



WPL=7*3+5*3+2*1+4*2=46



WPL=7*2+5*2+2*2+4*2=36



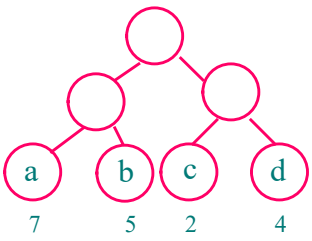
WPL=7*1+5*2+2*3+4*3=35

带权路径长度达到最小

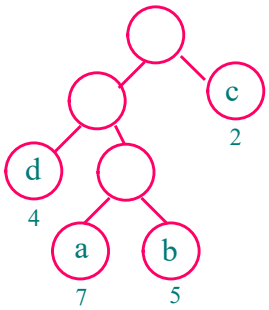
❑ 哈夫曼树/最佳树/最优树

在具有n个相同叶子的各二叉树中，WPL最小的二叉树。

完全二叉树

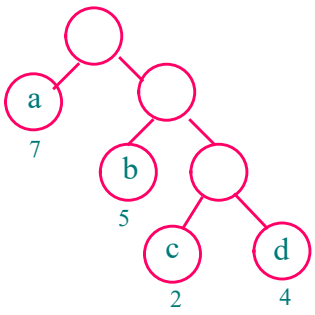


WPL_a =36



WPL_b =46

Huffman 树



WPL_c =35

=7*1+5*2+2*3+4*3

（1）完全二叉树并不一定是Huffman树；

（2）在赫夫曼树中，权值大的结点离根近；

（3）Huffman树不唯一，但WPL一定相等。

132

Huffman算法

(1) 以权值分别为$W_1,W_2,\ldots,W_n$的 n 个结点，构成n棵二叉树 $T_1,T_2,\ldots,T_n$,并组成森林$F=\{T_1,T_2,\ldots,T_n\}$,

- ✓ 每棵二叉树 T_i仅有一个权值为 W_i的根结点；

(2) 在F中选取两棵根结点权值最小的树作为左右子树构造一棵新二叉树，并且置新二叉树根结点权值为左右子树上根结点的权值之和

- ✓ 根结点的权值=左右孩子权值之和，
- ✓ 叶结点的权值= W_i

(3) 从F中删除这两棵二叉树，同时将新二叉树加入到F中；

(4) 重复(2)，(3)直到F中只含一棵二叉树为止(这棵就是Huffman树)。

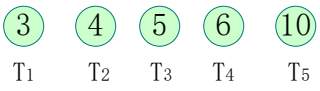
133

下面实例中在哈夫曼算法基础上引入了排序(排序并非必要)

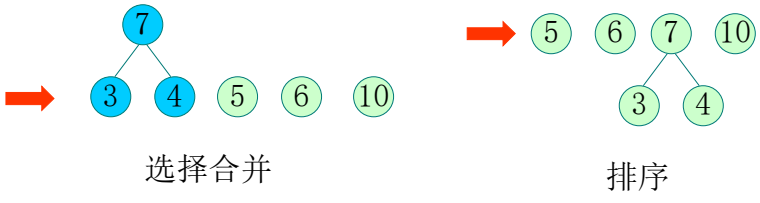
例 给定权集合{4, 5, 3, 6, 10}，构造哈夫曼树

1. 按权值大小排序： 3, 4, 5, 6, 10

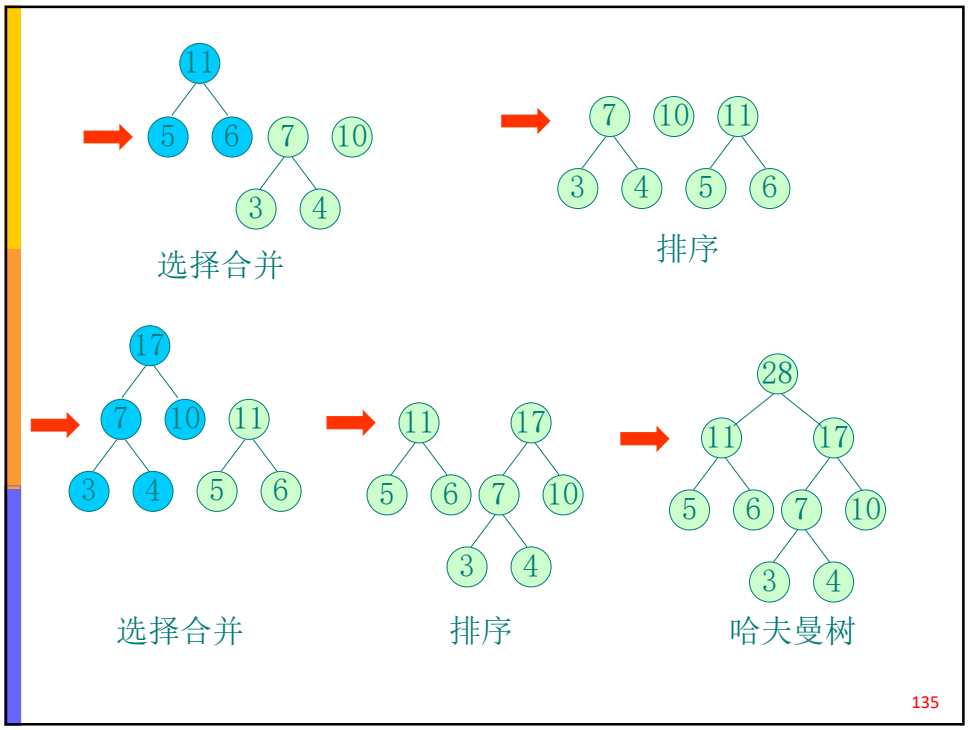
2. 生成森林：



3. 合并两棵权最小的二叉树, 并排序, 直到为一棵二叉树：



134



135

6.6.2 哈夫曼编码/最小冗余码

- ASCII码/定长码

ab12: 01100001 01100010 00110001 00110010

97 98 49 50

- 哈夫曼码/不定长码

能按字符的使用频度,使文本代码的总长度具有最小值。

136

例. 给定有18个字符组成的文本：

A A D A T A R A E F R T A A F T E R

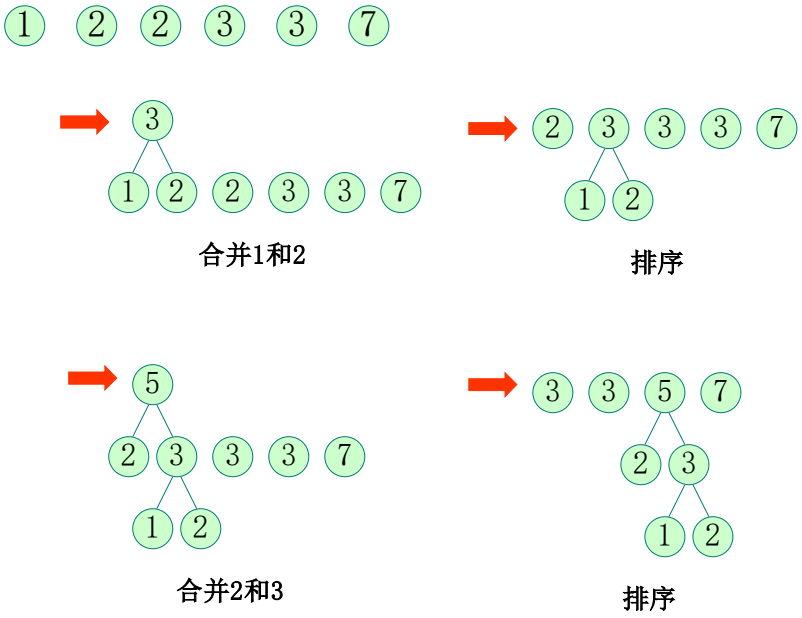
求各字符的哈夫曼码。

(1) 统计：

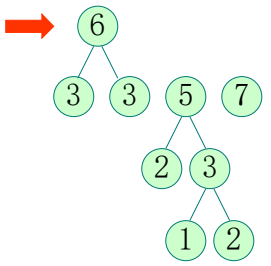
字符	A	D	E	F	T	R
频度	7	1	2	2	3	3

(2) 构造Huffman树：

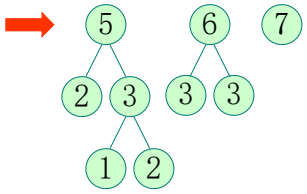
137



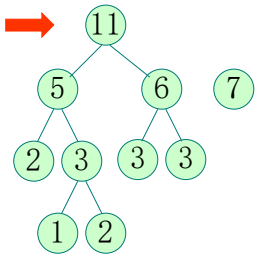
138



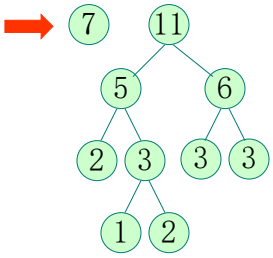
合并3和3



排序

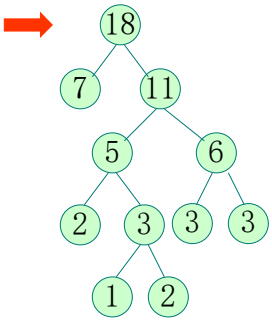


合并5和6

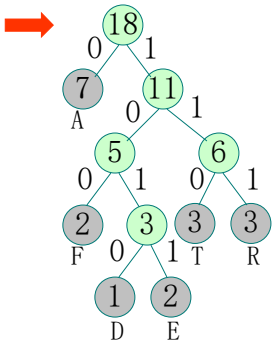


排序

139



合并7和11得Huffman树



叶结点根据权值附上字符，分支标数的Huffman树

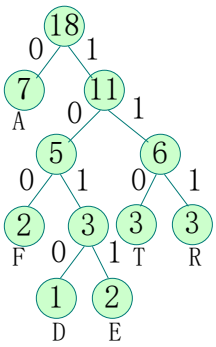
(4) 确定Huffman编码：

字 符	A	D	E	F	T	R
频 度	7	1	2	2	3	3
编 码	0	1010	1011	100	110	111

特点：任一编码不是其它编码的前缀（前缀编码）

140

如何译码？



Huffman树

例. 给定代码序列：

0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 10

文本为：A A F A R A D E T

141

哈夫曼编码算法的实现

Huffman树和编码的特点：

- 哈夫曼树中没有度为1的结点。
- 若有n个叶子结点，则其共有2n-1个结点。
- Huffman编码时是从叶子走到根；而译码时又要从根走到叶子，因此每个结点需要增开双亲指针分量。
- 实现时，要用到顺序和链式两种存储结构。

```
typedef struct{
unsigned int weight;  //权值分量（可放大取整）
unsigned int parent，lchild，rchild;  //双亲和孩子分量
}HTNode，*HuffmanTree;  //用动态数组存储Huffman树
typedef  char **HuffmanCode;  //动态数组存储Huffman编码表
```

142

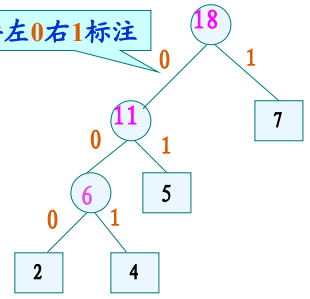
先构造Huffman树HT，再求出n个字符的Huffman编码HC。

Void HuffmanCoding(HuffmanTree &HT, HuffmanCode &HC,
int *w, int n)

*w存放n个字符的权值

	w	P	L	R
1	7	7	0	0
2	5	6	0	0
3	2	5	0	0
4	4	5	0	0
5	6	6	3	4
6	11	7	5	2
7	18	0	6	1

按左0右1标注



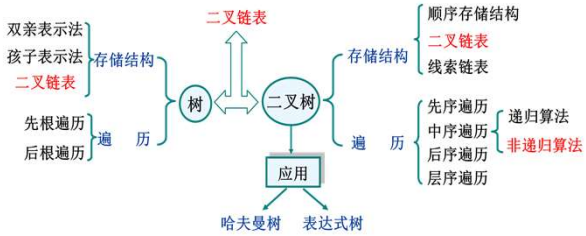
W	7	5	2	4
Code	1	01	000	001

143

- 树的定义和术语
  - ✓ 掌握树的相关概念，包括树、结点的度、树的度、分支结点、叶子结点、孩子结点、双亲结点、树的深度、森林等定义。
- 二叉树的定义及性质
  - ✓ 二叉树、满二叉树和完全二叉树的定义与性质
- 重点掌握二叉树、树的存储结构
  - ✓ 二叉树顺序存储结构和链式存储结构（二叉链表、线索链表）
  - ✓ 树的双亲表示法、孩子表示法、二叉链表表示法
- 重点掌握二叉树的基本运算和各种遍历算法的实现
- 掌握线索二叉树的概念和相关算法的实现
- 树、森林与二叉树之间的相互转换
- 最优二叉树(哈夫曼树)的定义、构造及应用
- 灵活运用二叉树解决一些综合应用问题

本章小结

144



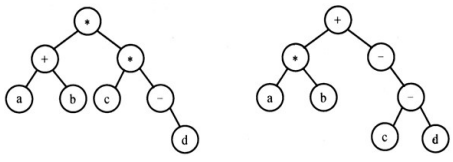
课外思考（严）

6. 13	6.25
6.26	6.27
6.37	6.44

145

请设计一个算法，将给定的表达式树(二叉树)转换为等价的中缀表达式(通过括号反映操作符的计算次序)并输出。例如，当下列两棵表达式树作为算法的输入时：
输出的等价中缀表达式分别为
(a+b) * (c * (-d))和(a * b)+(-(c-d))。
二叉树结点定义如下：

```
typedef struct node
{ char data[10]; //存储操作数或操作符
  struct node *left, *right;
} BTree;
```



要求：
(1)给出算法的基本设计思想。
(2)根据设计思想，用C或C++语言描述算法，关键处给出注释。

思想：表达式树的中序序列加上必要的括号即为等价的中缀表达式。可以基于二叉树的中序遍历策略得到所需的表达式。