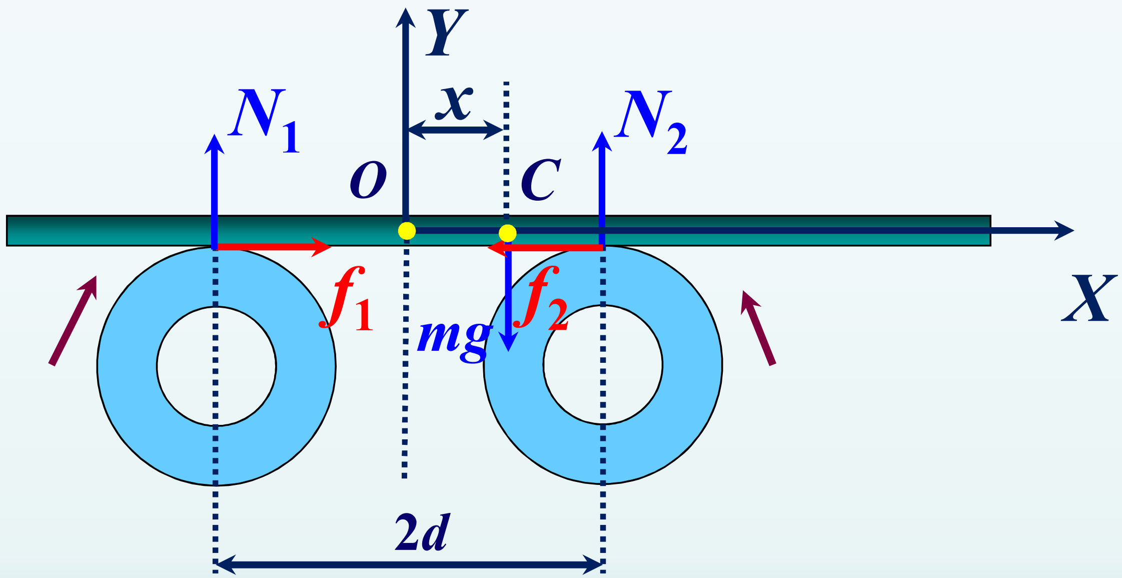
谐振动例题

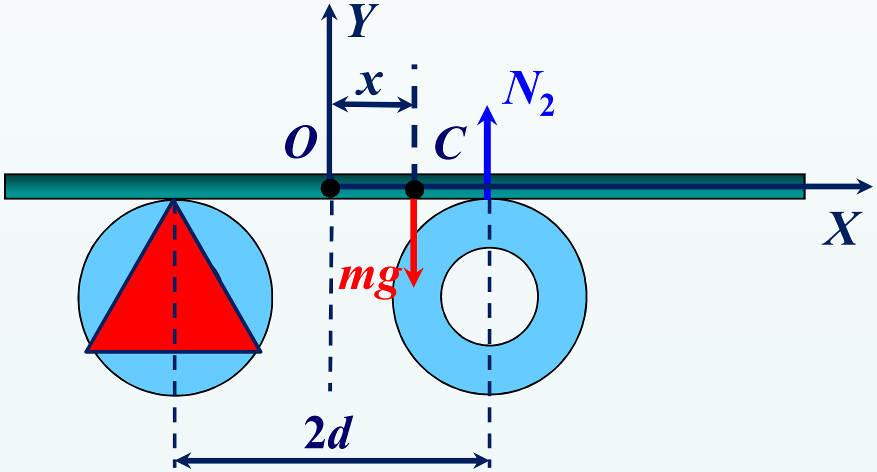
例. 两轮的轴互相平行，相距 $2d$，两轮转速相同而方向相反，将质量为 m 的一匀质薄板搁在两轮上，板与轮的摩擦系数为 μ，板的质心 C 初始时刻距一轮较近（如图）。试证明薄板作简谐振动并求周期。



Y轴向合力　　$F_{合\_y}=N_1+N_2-mg=0$

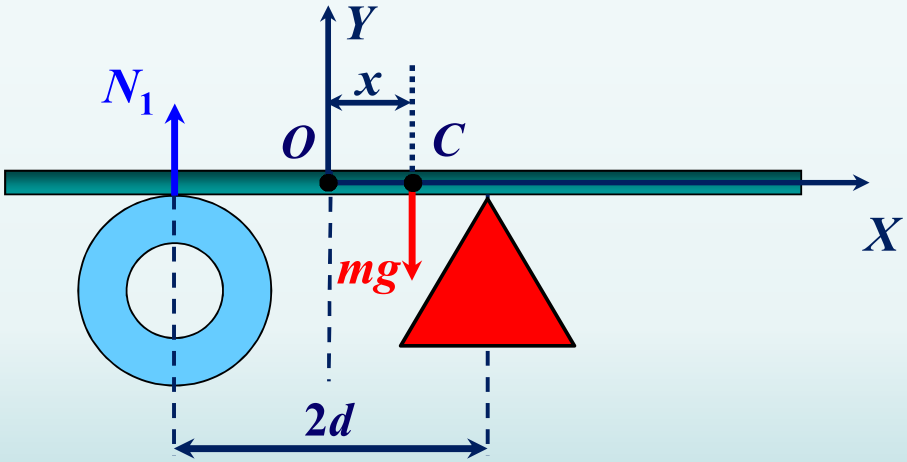
X轴向合力　　$F_{合\_x}=f_1-f_2=\mu N_1-\mu N_2$　　N_1? N_2?

谐振动例题



力矩平衡条件

$$N_2 2d = mg(d+x) \longrightarrow N_2 = \frac{mg(d+x)}{2d}$$



力矩平衡条件

$$N_1 2d = mg(d-x) \longrightarrow N_1 = \frac{mg(d-x)}{2d}$$

$$F_{合\_X} = \mu(N_1 - N_2) = -\frac{mg\mu}{d}x$$

简谐振动

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu g}{d}x = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu g}{d}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

旋转矢量表示法

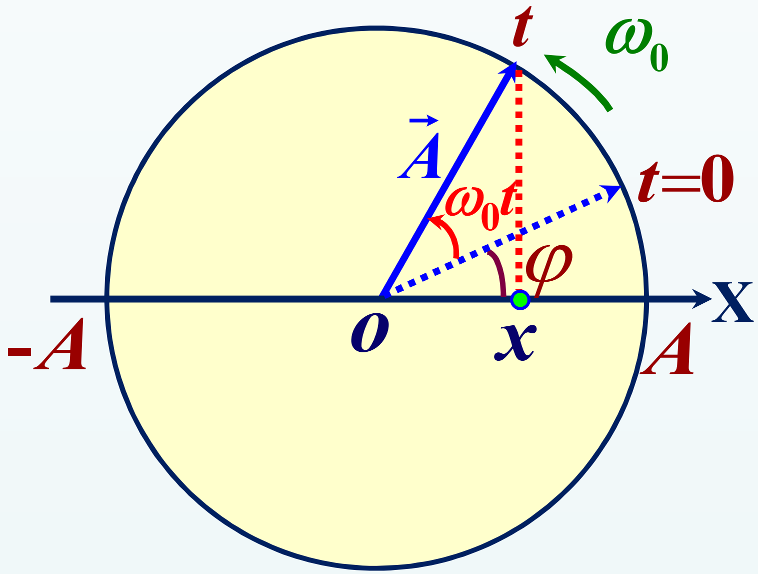
□ 旋转矢量表示法

$t=0$ 时：$\vec{A}$与X轴的夹角为φ

任意 t 时刻，$\vec{A}$与X轴的夹角为$\omega_0 t+\varphi$

旋转矢量的末端在X轴上的投影：

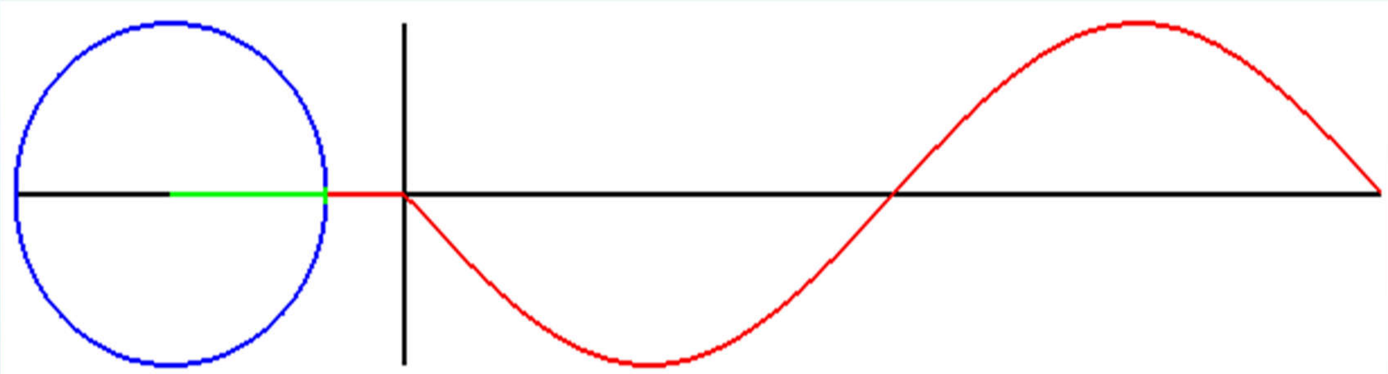
$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$ 振动方程



旋转矢量$\vec{A}$

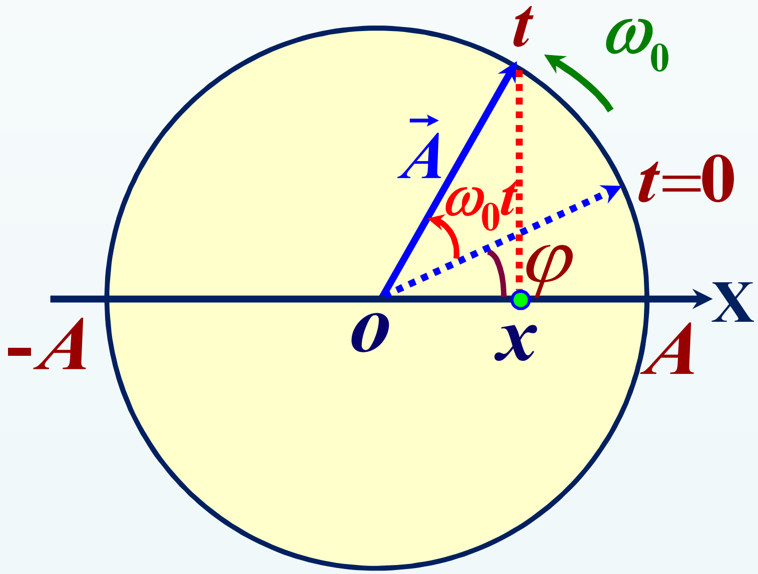
以匀角速ω_0

逆时针转动



旋转矢量表示法

□ 旋转矢量表示法



$t=0$ 时：$\vec{A}$与X轴的夹角为φ

任意 t 时刻,$\vec{A}$与X轴的夹角为$\omega_0 t+\varphi$

旋转矢量的末端在X轴上的投影：

$$x = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$ **振动方程**

三个特征量的含义
- **振幅**A：圆周半径
- **圆频率**ω_0：匀角速度
- **相位**$\omega_0 t+\varphi$：旋转矢量与x轴的夹角

v，a是否也有类似的表示？？

旋转矢量表示法

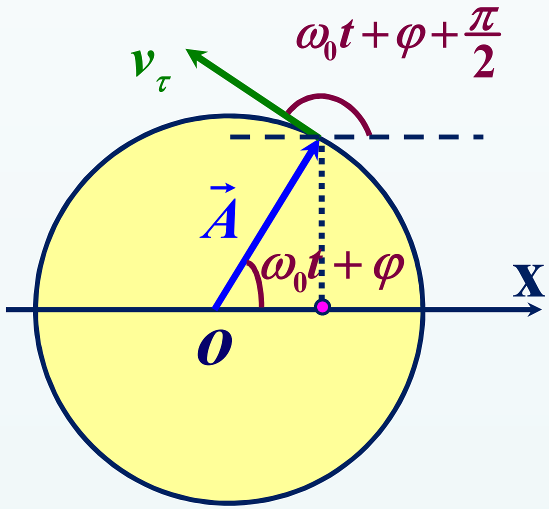
- **旋转矢量与速度v, 加速度a**

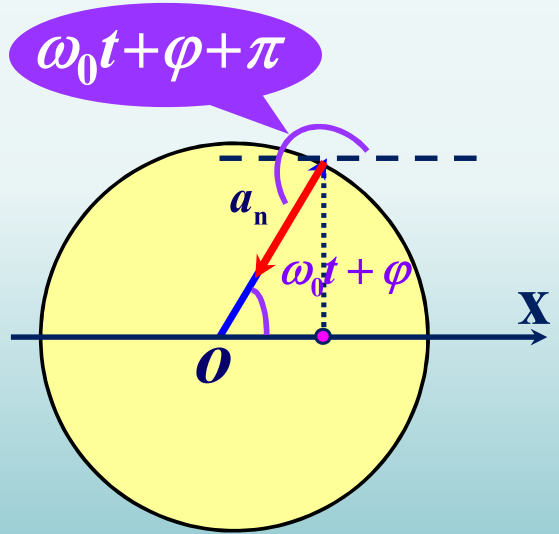
旋转矢量端点的速度：$v_\tau = \omega_0 A$

v_τ在X轴上的投影 $v_x = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

端点在X轴投影点的速度

$$v = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$





旋转矢量端点的加速度:

$$a = a_n = \frac{v^2}{A} = \omega_0^2 A$$

a_n在X轴上的投影

$$a_x = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

旋转矢量表示法

旋转矢量端点的投影坐标： $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

投影点的速度： $v = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

投影点的加速度： $a = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

结论

旋转矢量作匀速转动时，其端点：

位置的投影------谐振动振子的位置

速度的投影------谐振动振子的速度

加速度的投影------谐振动振子的加速度

旋转矢量表示法

□ 归纳—振动表示方法

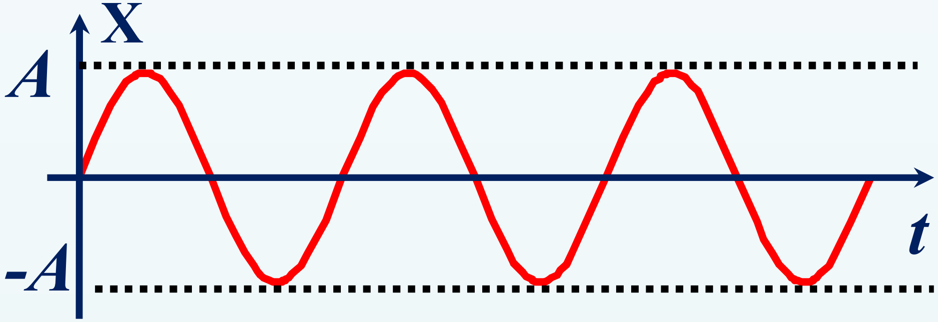
✓ **振动方程**

(公式法)

$$\boxed{x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)}$$

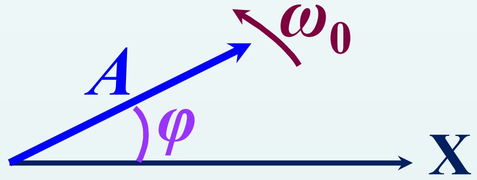
✓ **振动曲线**

(图像法)



✓ **旋转矢量法**

(几何法)



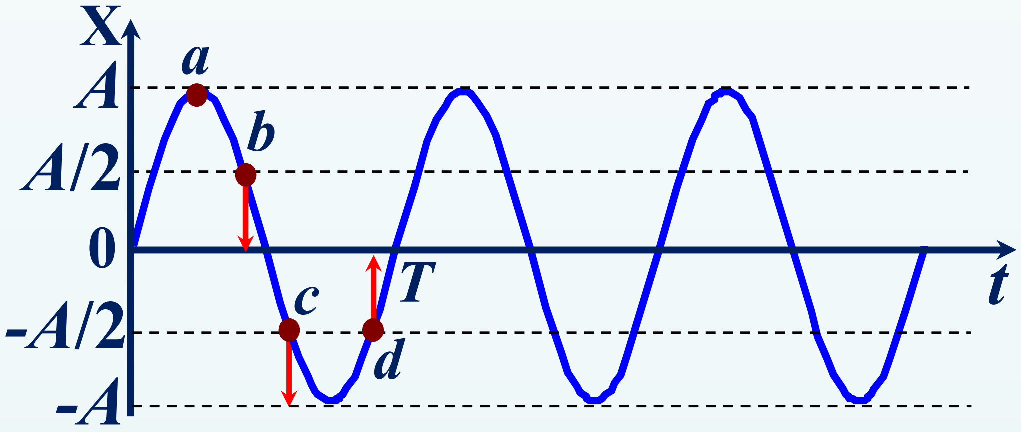
给定A，ω_0，φ，将唯一确定简谐振动

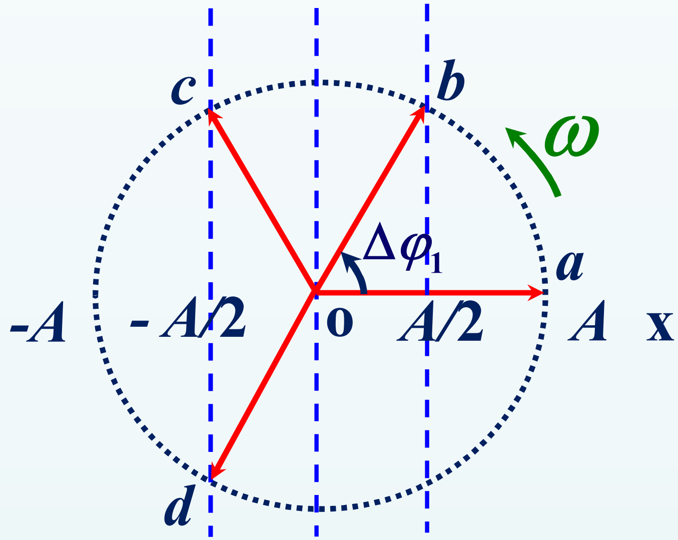
特点

- 利用匀速圆周运动直观描述简谐振动
- 赋予特征量A，ω_0，φ具体的几何意义；
- 矢量化，几何化是振动合成与分解的有力工具。

例题

例：在下图的振动曲线中标出a、b、c和 d 点在矢量分析图中的位置；并求它们的相位差。





$\varphi_a = 0$ $\quad \varphi_b = \dfrac{\pi}{3}$ $\quad \varphi_c = \dfrac{2\pi}{3}$ $\quad \varphi_d = \dfrac{4\pi}{3}$ $\quad \varphi_d = -\dfrac{2\pi}{3}$

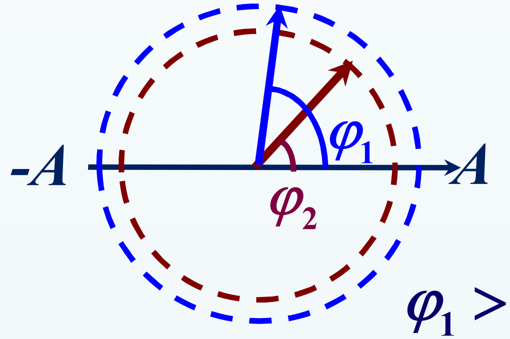
a和b相位差 $\Delta\varphi_1 = \varphi_b - \varphi_a = \dfrac{\pi}{3}$ 其他相位差以此类推

振子从a运动到b的时间？$\Delta t = \dfrac{\Delta\varphi_1}{\omega} = \dfrac{\varphi_b - \varphi_a}{\omega} = \dfrac{\pi}{3\omega}$

旋转矢量表示法

- **关于相位差**

设两频率相等的简谐振动



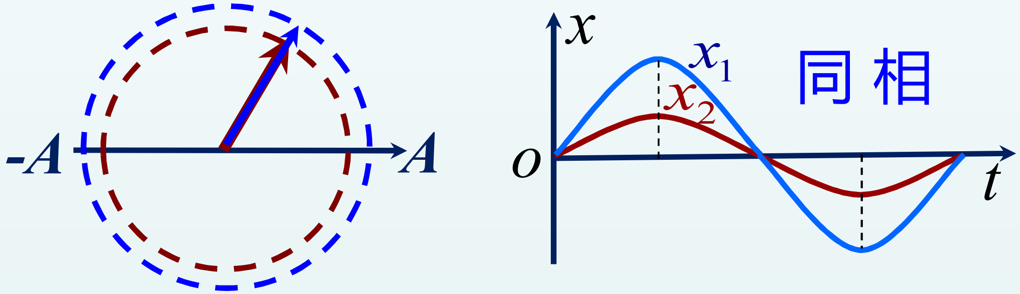
$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1)$　$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_2)$

$\varphi_1 > \varphi_2$

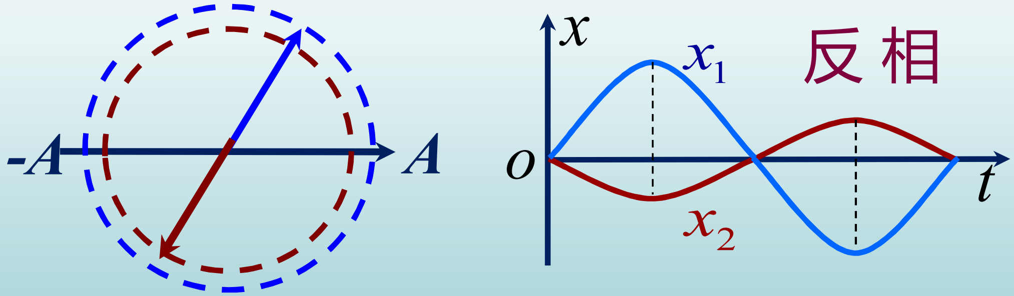
x_1比x_2超前$\Delta\varphi$ 的相位　x_2比x_1落后$\Delta\varphi$ 的相位　$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2$

- **特殊的相位差**

(1) $\Delta\varphi = 2k\pi$ ——**同相**



(2) $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ ——**反相**



(3) **推广：** 不同物理量也可比较振动的步调

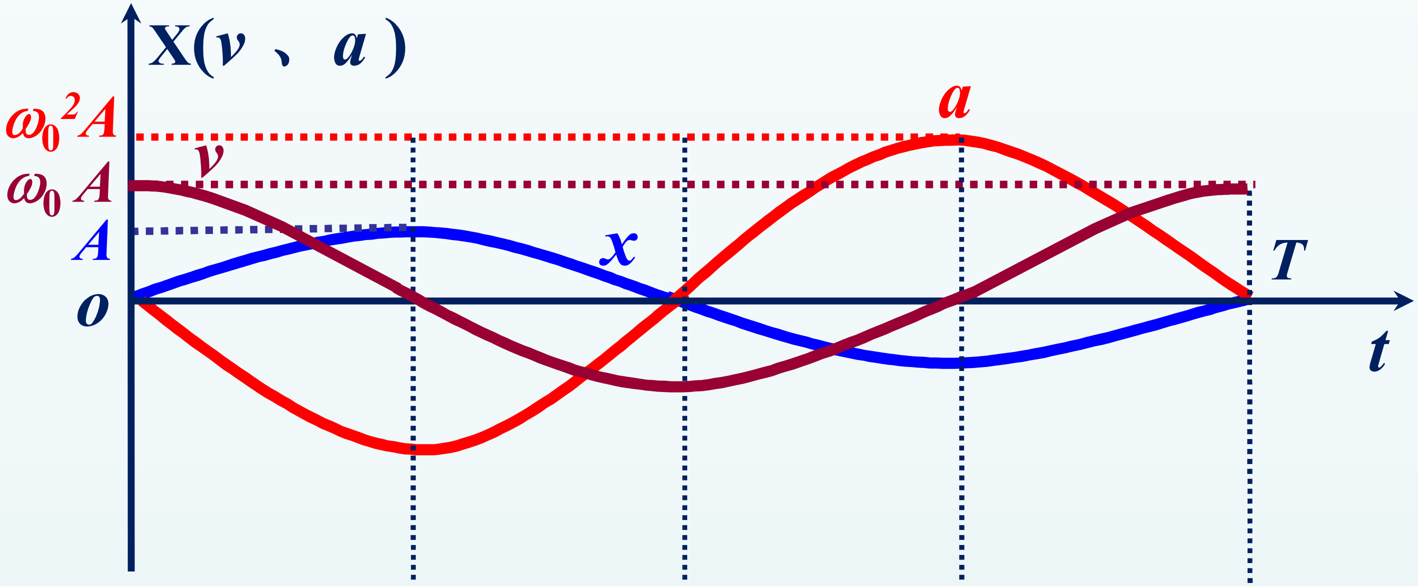
旋转矢量表示法

- **不同物理量比较振动步调的例子**

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$



v比x超前0.5π

a比x超前π **—反相**

特别注意：

比较两个振动的步调时，必须将所比的简谐振动化成**标准形式**

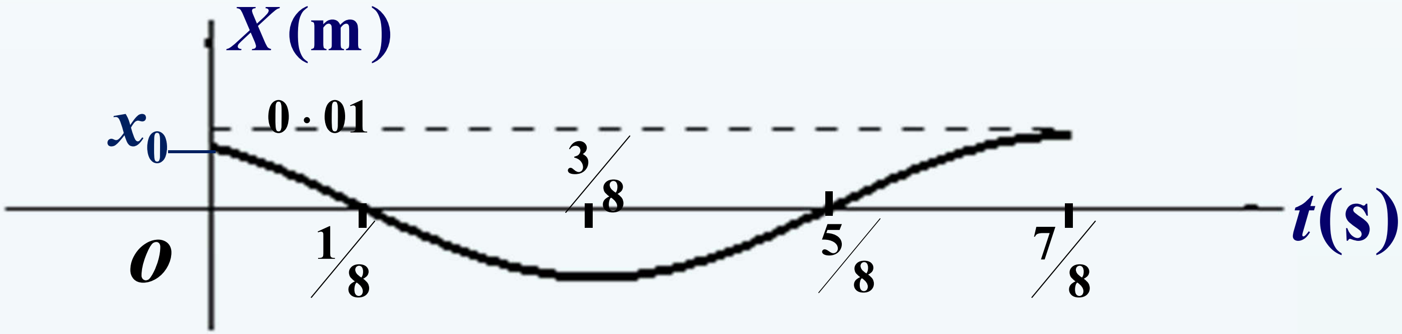
$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

切记！！

旋转矢量表示法

例：已知振动曲线，求任一时刻的x、v：

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$



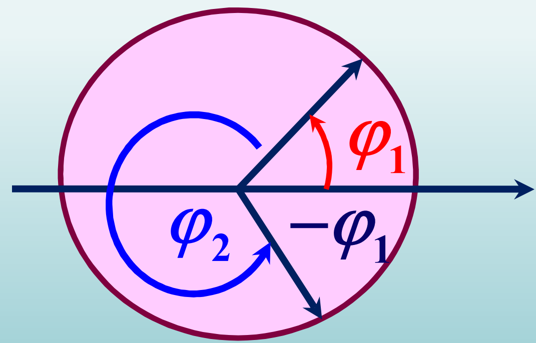
先从振动曲线上找出 $A = 0.01$ m

$T = 1$ s ➡ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi$

由 $t = 0$ 找出 x_0 $\quad \varphi = \pm\left|\cos^{-1}\left(\dfrac{x_0}{A}\right)\right|$

$$? \begin{cases} \varphi_1 \\ \varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 = -\varphi_1 \end{cases}$$

x、v 可求……



课堂小结

单一谐振动运动规律相关知识点

- 谐振动的动力学和运动学表示，振动方程
- 旋转矢量法分析谐振动

谐振动能量关系

多个谐振动合成

阻尼振动

受迫振动，共振

且 听 下 回 分 解

作业：11T1 ~T6

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周四交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。