

24 算法-hw4

2024 年 12 月 4 日

1 动态规划

1. 加权区间调度问题中，给定子区间 I_i ，该区间开始和结束时间 s_i 、 f_i ，及其权重 w_i ，目标是选择一组互不冲突的区间，且其权重和最大。

求解该问题时，贪心算法往往是不可行的。下面给出了三个贪心策略，请分别举出一个反例，说明这三个贪心策略不能得到最优解。

(1) 结束时间早的区间优先。

(2) 权重高的区间优先。

(3) 冲突少的区间优先。

2. 在矩阵链乘法中，给定四个固定规模的矩阵 A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 ，计算 $S = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ ，不同的计算顺序影响了计算复杂度。表 1 给出了两组不同的矩阵规模，请分别填写图 1 中表空白部分的 $opt(i, j)$ ，并给出最优的计算顺序。

	1	2	3	4	
1	0				1
2		0			2
3			0		3
4				0	4

图 1: $opt(i, j)$ 表

表 1: 两组矩阵问题规模

	A_1	A_2	A_3	A_4
(1)	3×6	6×9	9×5	5×4
(2)	2×5	5×10	10×7	7×8

3. 最短路问题中，给定了源点 s 和终点 t ，在课堂上给出了一种子问题的拆分方式，即固定终点 t ， $opt(v, k)$ 用于保存从点 v 到终点 t ，经过 $\leq k$ 条边的最短路长度，且

$$opt(v, k) = \begin{cases} opt(v, k-1) \\ \min_w opt(w, k-1) + c_{vw} \end{cases}$$

该算法的输出 $opt(v, n-1)$ 即为得到的最优解。

(1) 请给出子问题存储的数据结构，和子问题的求解顺序。

(2) 对于子问题的另外一种拆分方式，即固定源点 s 的情况下， $opt(v, k)$ 用于保存从源点 s 到 v ，经过 $\leq k$ 条边的最短路长度。请给出该拆分方式下 $opt(v, k)$ 的更新式和边界条件，并给出问题的输出。

4. 在 0/1 背包问题中，有从前向后处理的 DP 与从后向前处理的 DP 两种请仿照课堂上讲的从前向后处理的 DP，写出从后向前处理的 DP 递归表达式、初始条件、最终返回值。

5. 假设你正在爬楼梯，需要 n 阶才能爬到顶，你每次可以爬 1 或 2 阶，请问你爬到楼顶一共有多少种方法。请给出递推关系式，写出算法伪代码（查一下伪代码的形式，最近的作业发现有同学不会写伪代码）并进行复杂度分析。

6. 给定 n 个非负整数表示每个宽度为 1 的柱子的高度，计算按此排列的柱子，下雨之后能接多少雨水。

(1) 请使用动态规划算法写出求解思路，并写出状态转移方程。

(2) 给定柱子高度 $h=[0,1,0,2,1,0,1,3,2,1,2,1]$ ，求解能够接多少雨水。

7. 公司购买钢条，将其切成短钢条进行出售，不同长度的短钢条都对应了不同的收益，因此不同的切割方案下，带来的收益是不同的。假定一段长度为 i 的钢条收益为 p_i ，请设计动态规划算法，用于求出给定长度 L 的长钢条能够带来的最大收益。请写出算法设计思路，并给出伪代码。