离散数学一（第八次作业）

1.某地区的街道分布如图 1 所示，图中的数字表示相应街道的长度（单位：百米）。派出所位于 G 处，一巡逻车从派出所出发，每条街道至少经过一次，最后会到派出所。请设计一条长度最短的巡逻路线。

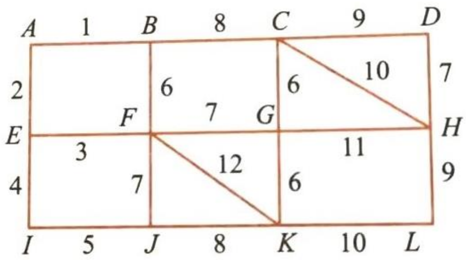
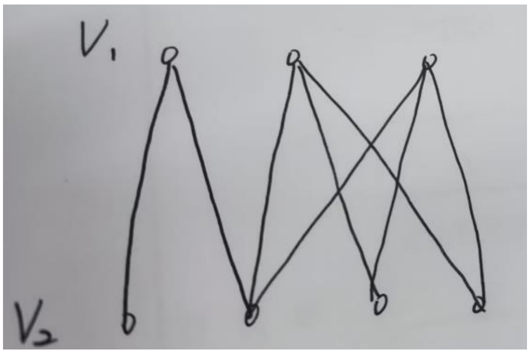


图 1:　街道分布图

1. 图中度为奇数的点有$BEJF$。将BE配对，基本通路为BAE，将JF配对，基本通路为JF，通路选择满足两个条件。故添加BA, AE, JF三条平行边的图中任一欧拉回路的长度最短。

给出一条参考$GCDHLKGHCBFJKFEABAEIJFG$

2. 请举例说明满足相异性条件的二部图(对偶图)，不一定存在正整数 t，使其满足 t 条件。



3. 设一连通对偶平面简单图有 m 条边和 n 个点，请证明当 n≥3 时 m≤2n-4。

3. 题目应为连通平面简单图且为偶图。

由于为偶图，不存在边界长度≤ 3的面，每个面的边界长度不小于4。即$2m \ge 4k$，再结合欧拉公式，有$m \le 2n - 4$

4. 假定一有 n 个点和 m 条边的简单平面图不包含长度小于或等于 4 的基本回路，请证明当 n≥4 时，m≤(5/3)*n-(10/3)。

4. 若图连通，同第三题：每个面的边界长度不小于5。即$2m \ge 5k$，再结合欧拉公式，可得证$m \le \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$

若图不连通，设图有k($k \ge 2$)个连通分支，图中每一个连通分支的点边数分别为$(n_1, m_1), ...(n_k, m_k)$。我们需证明每个连通分支均满足$m_i \le \frac{5}{3}n_i - \frac{10}{3k}$。

当$n_i = 1$时，$m_i = 0$, $m_i \le \frac{5}{3}n_i - \frac{10}{3*2} \le \frac{5}{3}n_i - \frac{10}{3k}$。

当$n_i = 2$时，$m_i \le 1$, $m_i \le \frac{5}{3}n_i - \frac{10}{3*2} \le \frac{5}{3}n_i - \frac{10}{3k}$。

当$n_i = 3$时，$m_i \le 2$, $m_i \le \frac{5}{3}n_i - \frac{10}{3*2} \le \frac{5}{3}n_i - \frac{10}{3k}$。

当$n_i \ge 4$时，同连通图，$m_i \le \frac{5}{3}n_i - \frac{10}{3} \le \frac{5}{3}n_i - \frac{10}{3k}$。

每个连通分支均满足$m_i \le \frac{5}{3}n_i - \frac{10}{3k}$，相加即得$m \le \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$