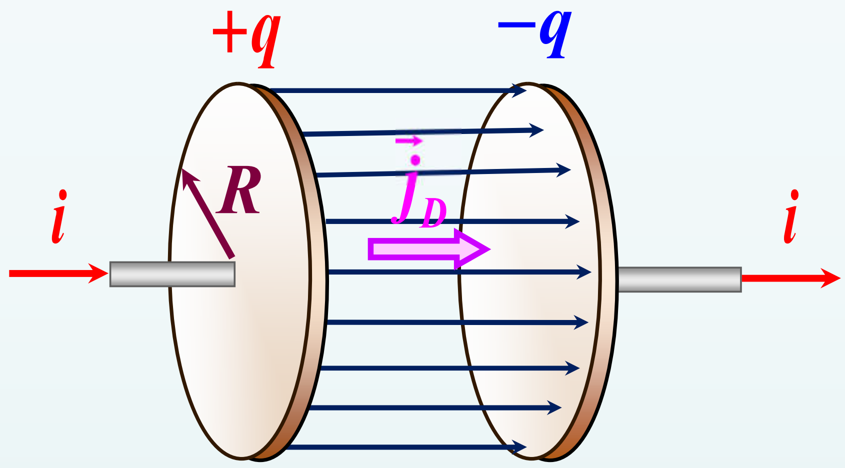
麦克斯韦方程组

例. 半径为R的圆形平行板电容器均匀充电，板间$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$=常数，内部充满介质ε、μ。求充电时(1) 两极板间的位移电流；(2)离轴线r处的磁应感强度。



解： (1) 充电时 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} > 0$

位移电流密度与电场同方向

$$j_D = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

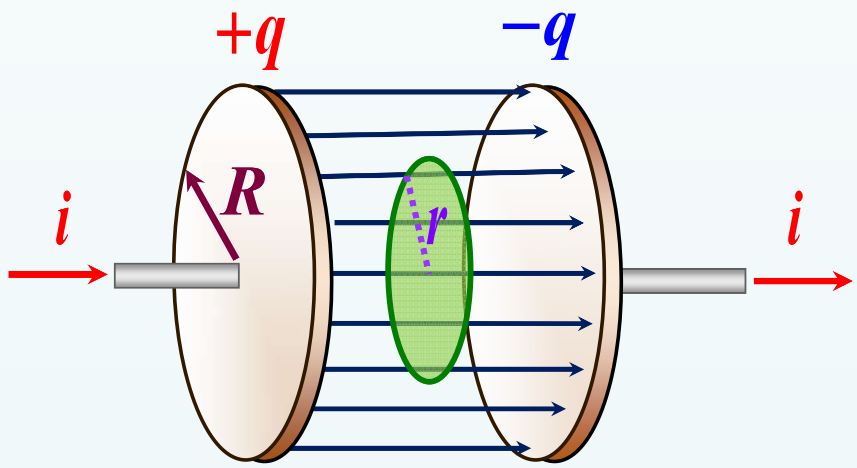
$$I_D = \int \vec{j}_D \cdot \mathrm{d}\vec{S} = j_D \cdot S = \varepsilon\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\pi R^2$$

另解：

$$\boxed{I_D = \frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(D\pi R^2\right) = \varepsilon\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\pi R^2$$

麦克斯韦方程组

解： $j_D=\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ $\qquad I_D=\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\pi R^2$



(2) 根据全电流定理：

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S\left(\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

由E的特征知：B具有轴对称性！

同一圆周上B的大小相等，方向沿切线方向。

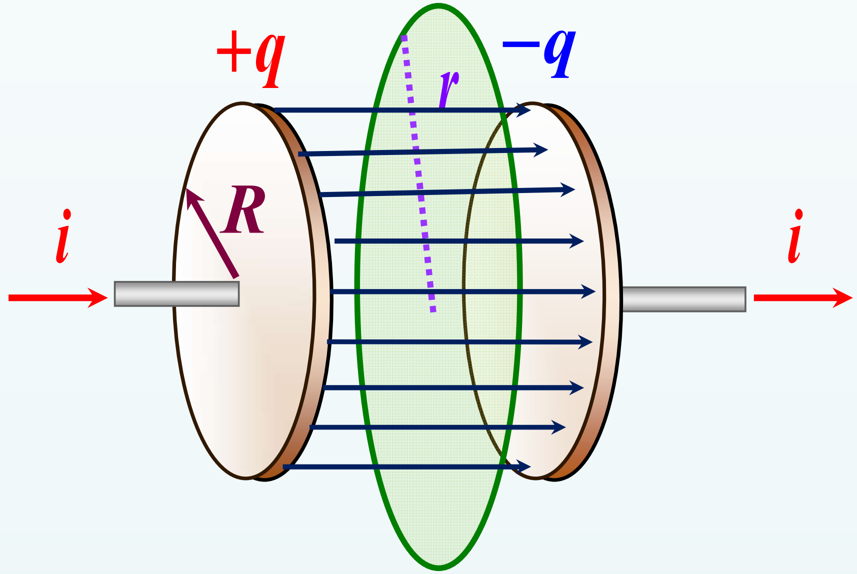
垂直轴线作一半径为r的圆环：

当$r\le R$时 $\left.\begin{cases}\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=H2\pi r\\ I_D=j_D\cdot\pi r^2=\pi r^2\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\end{cases}\right\}H=\dfrac{\varepsilon r}{2}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ $\qquad B=\mu H=\dfrac{\mu\varepsilon r}{2}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$

麦克斯韦方程组

解：

当 $r \le R$ 时
$$\begin{cases} H = \dfrac{\varepsilon r}{2}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \\ B = \mu H = \dfrac{\mu\varepsilon r}{2}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$



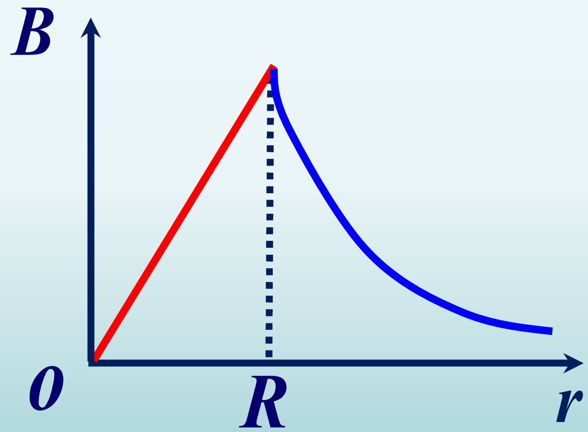
当 $r \ge R$ 时 $\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_{全}$

$$\downarrow$$

$$H 2\pi r = j_D \pi R^2 = \pi R^2 \varepsilon \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

$$H = \frac{\varepsilon R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

$$B = \frac{\varepsilon\mu R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$



麦克斯韦方程组

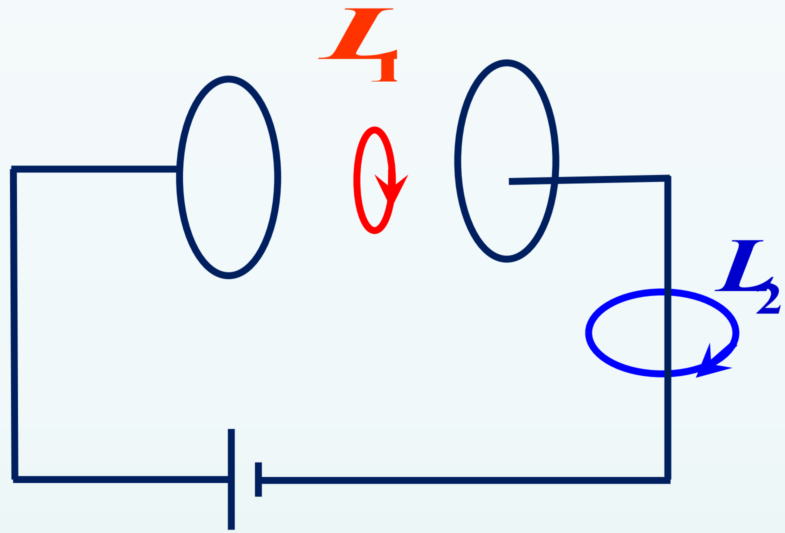
例. 针对右图下面说法哪个正确

A. $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} > \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

B. $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

C. $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} < \oint_{L_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}$

D. $\oint_{L_1}\vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$



麦克斯韦方程组

□ 麦克斯韦方程组

稳恒情况

$$\begin{cases}\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_{自由} \\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \\ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_i I_i\end{cases}$$

非稳恒情况

$$\vec{E}=\vec{E}_{静电}+\vec{E}_{感应}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} \longrightarrow \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\vec{H}=\vec{H}_{传导}+\vec{H}_{位移}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} \longrightarrow \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{j}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

电场、磁场的通量推广到一般 $\begin{cases}\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho dV \\ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0\end{cases}$

麦克斯韦方程组

任意电场

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V \longrightarrow \text{有源场}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \longrightarrow \text{有旋场}$$

任意磁场

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \longrightarrow \text{无源场}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} \longrightarrow \text{有旋场}$$

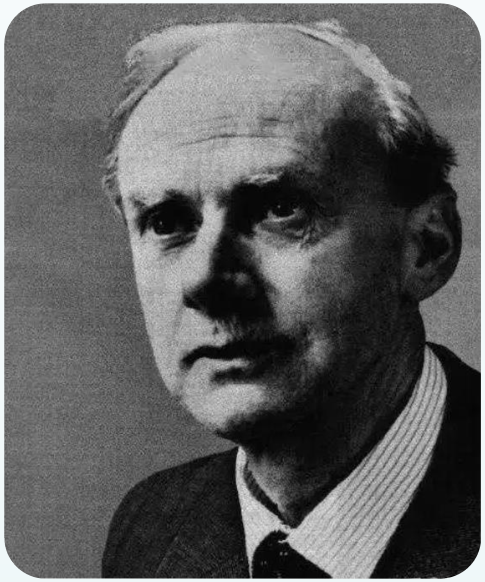
麦克斯韦方程组

麦氏电磁理论是物理学史上的一次**重大突破**。

- **解释：**一切宏观电磁现象
- **预言：**电磁波的存在
- **指出：**光波就是电磁波

方程组并非完全对称，你是否想作修改

麦克斯韦方程组



狄拉克

1931年预言：磁单极子 $\xrightarrow{\text{定向移动}}$ 磁流

是否存在?

$$
\begin{cases}
\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV \\
\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_m - \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \\
\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_m\, dV \\
\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}
\end{cases}
$$

注 意:

- 磁单极子的存在与否，不影响麦克斯韦方程组的**正确性**。
- 它是接受了实践的检验，是电磁场理论的基石和精髓。

麦克斯韦方程组

积分形式

$$
\begin{cases}
\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V \\
\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \\
\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\
\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}
\end{cases}
$$

$\Rightarrow$

微分形式（自学）

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \vec{D} = \rho \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{cases}
$$

直角坐标系 $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

麦克斯韦方程组

例. 积分形式的麦克斯韦方程组表示如下

A. $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_i q_i$

B. $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}$

$\phi_D = D\cdot S$

C. $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

D. $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_i I_i + \dfrac{d\Phi_D}{dt}$

判断下列结论是等效于哪一个麦克斯韦方程式

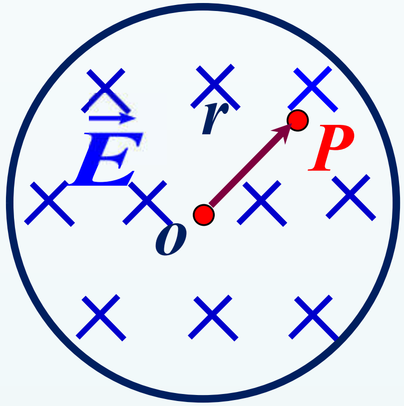
1. 变化的磁场一定伴随有电场___B___；

2. 磁感应线是无头无尾的___C___；

3. 电荷总伴随有电场___A___；

麦克斯韦方程组

例. 一圆柱体内有一均匀电场E，其方向垂直纸面内，E的大小随时间线性增加。P为柱体内与轴线相距为r的一点。则P点的位移电流密度的方向为 垂直纸面向里 ；P点感生磁场的方向为 绕O点，顺时针方向 。



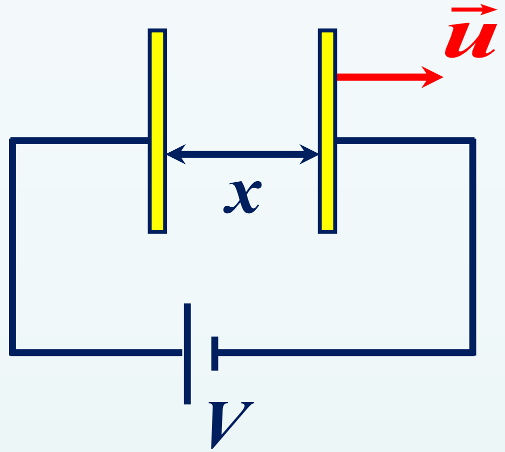
例. 空气平行板电容器的两极板都是半径为R的圆形导体片，在充电时板间电场强度的变化率为$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t > 0$，若略去边缘效应。

求两板间的位移电流：$I_D = \varepsilon \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \pi R^2$

位移电流密度的方向：与电场同向

麦克斯韦方程组

例. 一平行板电容器与电压为V的电源相连。若将电容器的一极板以速率u拉开，则当极板间的距离为x时，求电容器内的位移电流密度。



解：设极板间的距离为x时，板内电场为E，则有：

$$V = Ex \longrightarrow E = \frac{V}{x}$$

位移电流密度大小为

$$\left|j_D\right| = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\varepsilon_0 \frac{V}{x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon_0 \frac{Vu}{x^2}$$

方向向左

作业：8T16～8T24

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周四交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。