定义 (常微分方程)

含自变量x，未知函数$y(x)$，及其各阶导数$y', y', \cdots, y^{(n)}$的方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为常微分方程，简称微分方程。
其中导数出现的最高阶数称为微分方程的阶。

定义 (线性微分方程)

若方程关于函数$y, y' \cdots, y^{(n)}$都是一次的：

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = b(x),$$

则称该微分方程是线性的。否则，则称该微分方程是非线性的。

例

- 衰变方程
$$y' = -ay;$$
- 带电粒子在电场中运动
$$mx''(t) = E(x(t))q;$$
- Bernoulli方程
$$y' + p(x)y = f(x)y^n \quad (n \neq 0, 1);$$
- Clairaut 方程
$$y = xy' + f(y'),$$
其中$f(t)$连续可微。

定义 (微分方程的解)

函数$y=\varphi(x)$在区间I上n阶可微，如果它满足上述微分方程：

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0,\quad \forall x\in I,$$

则称$y=\varphi(x)$是微分方程$F(x,y,y'\cdots,y^{(n)})=0$的一个解。
微分方程可以存在多个解。

例

函数$y=\exp(-ax)$是衰变方程$y'=-ay$的一个解。

定义

如果对于任意$C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathbb{R}$，
$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ $(\text{resp.}\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0)$
都是微分方程$F(x, y, y' \cdots, y^{(n)}) = 0$的解，
则称φ(resp.Φ)为该微分方程的一个通解(resp.隐式通解)。

例

函数$y = C\exp(-ax), C \in \mathbb{R}$是衰变方程$y' = -ay$的通解。

定义 (初值问题)

求下述方程解的问题称为初值问题：

$$\begin{cases} F(x, y, y' \cdots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_0) = A_0, \\ y'(x_0) = A_1, \\ \dots \\ y^{(n)}(x_0) = A_n. \end{cases}$$

分离变量法

适用范围：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \quad \text{或} \quad M_1(x)N_1(y)dx = M_2(x)N_2(y)dy$$

可以将变量x, y分离的方程。

分离变量法

关于方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

- 特殊解：设$y_1, y_2 \cdots, y_n$是$g(y)$的实根，
  则函数$y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ 都是该方程的解；
- $g(y) \neq 0$时：原方程化为

$$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x,$$

该方程的通解：

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C.$$

例

求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - 1}{2}$$

分别满足初始条件$y(0) = 0, y(0) = 1$的解。

例

解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 10^{x+y}.$$

分离变量法

$$M_1(x)N_1(y)dx = M_2(x)N_2(y)dy$$

- 特殊解：设$x_1, x_2, \cdots, x_m$是$M_2(x)$的实根，$y_1, y_2, \cdots, y_n$是$N_1(y)$的实根，则函数$x = x_1, x = x_2, \cdots, x = x_m$，$y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$都是该方程的解；
- 当$N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$时，方程化为

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}x = \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\mathrm{d}y,$$

原方程的通解：

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}\mathrm{d}y + C.$$

例 (解微分方程)

$$x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0.$$

例 (解微分方程)

$(1+x)y\mathrm{d}x+(1-y)x\mathrm{d}y=0.$

一阶线性微分方程

- 一阶线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = f(x);$$

- 当$f(x) = 0$时，该方程称为线性齐次方程；当$f(x) \neq 0$时，称为线性非齐次方程。

一阶线性齐次方程：分离变量法

线性齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0$的通解是：

$$y = C\exp(-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t).$$

一阶线性非齐次方程：常数变易法

- 假设$y = C(x)\exp(-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t)$；
- 代入方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = f(x)$，得到：

$$C'(x) = f(x)\exp(-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t)\text{œ}$$

- 解得：

$$C(x) = C_1 + \int_{x_0}^{x} f(u)\exp(-\int_{x_0}^{u} p(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}u;$$

- 线性非齐次方程的通解：

$$y = \exp(-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t)[C_1 + \int_{x_0}^{x} f(u)\exp(-\int_{x_0}^{u} p(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}u].$$

Bernoulli方程：可化为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = f(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

- 方程两边除以y^n，得到

$$\frac{1}{y^n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y^{1-n} = f(x);$$

- 令$u = y^{1-n}$，原方程化为

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + p(x)u = f(x).$$

例 (解微分方程)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + x^2.$$

例 (解微分方程)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = 4x.$$

齐次方程

- 齐次方程：
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x});$$
- 换元$u = \frac{y}{x}$：
$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) - u$$
- 特殊解：设$u_1, u_2, \cdots, u_n$是方程$f(u) - u = 0$的实根，那么函数$y = u_1 x, y = u_2 x, \cdots, y = u_n x$ 是原方程的解；
- 当$f(u) - u \neq 0$时，
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C.$$

例 (解微分方程)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

例 (解微分方程)

$$(y^2 - 2xy)\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = 0.$$

方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}{\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2})$

令$\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$,

- 当$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$时，此时方程是齐次方程：

$$\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y}{\alpha_2 x + \beta_2 y} = \frac{\alpha_1 + \beta_1\frac{y}{x}}{\alpha_2 + \beta_2\frac{y}{x}};$$

- 当γ_1, γ_2不全为0且$\Delta = 0$时，$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$平行，不妨设存在$\lambda \in \mathbb{R}$: $\alpha_1 x + \beta_1 y = \lambda(\alpha_2 x + \beta_2 y)$。换元$u = \alpha_2 x + \beta_2 y$，原方程变成

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \alpha_2 + \beta_2 f(\frac{\lambda u + \gamma_1}{u + \gamma_2}),$$

方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}{\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2})$

- 当γ_1, γ_2不全为0且$\Delta \neq 0$时，此时存在唯一的(a, b)满足

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 = 0; \\ \alpha_2 b + \beta_2 b + \gamma_2 = 0; \end{cases}$$

换元$x = u + \xi, y = v + \eta$，原方程变成

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = f(\frac{\alpha_1 u + \beta_1 v}{\alpha_2 u + \beta_2 v}).$$

例 (解微分方程)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

例 (解微分方程)

$$(2x - 4y + 6)\mathrm{d}x + (x + y - 3)\mathrm{d}y = 0.$$

参数法：$F(y, y') = 0$

- 找到函数$\varphi(t), \psi(t)$使得$F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$;
- 换元$y = \varphi(t), y' = \psi(t)$：

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t, \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t + C.$$

- 原方程的通解：

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t + C, \\ y = \varphi(t) \end{cases} \quad (t\text{是参数}).$$

例 (解微分方程)

$$y - (y')^5 - (y')^3 - y' - 5 = 0.$$

参数法：$G(x, y') = 0$

- 找到函数$\varphi(t), \psi(t)$，使得$G(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$；
- 换元$x = \varphi(t), y' = \psi(t)$得到：$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$；
- 原方程的通解:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \displaystyle\int \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t + C \end{cases} \quad (t\text{是参数}).$$

例 (解微分方程)

$\exp(y') + y' - x = 0$。

例 (Clairaut方程)

$y = xy' + f(y')$，其中$f(t)$是连续可微函数。

方程降阶：$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$

换元$z = y^{(n-2)}$，原方程变成：$z'' = f(z)$。

例 (解微分方程)

$y''' = 2y''$.

方程降阶：$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}. \cdots, y^{(n)}) = 0 \quad (k \geq 1)$

换元$z = y^{(k)}$，原方程变成：$F(x, z, z', \cdots, z^{(n-k)}) = 0$.

例 (解微分方程)

$y'' - y' = e^x$.

方程降阶：$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

换元$z = y'$，原方程变成：$F(y, z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}y^{n-1}}) = 0.$

例 (解微分方程)

$yy'' + (y')^2 = 0.$