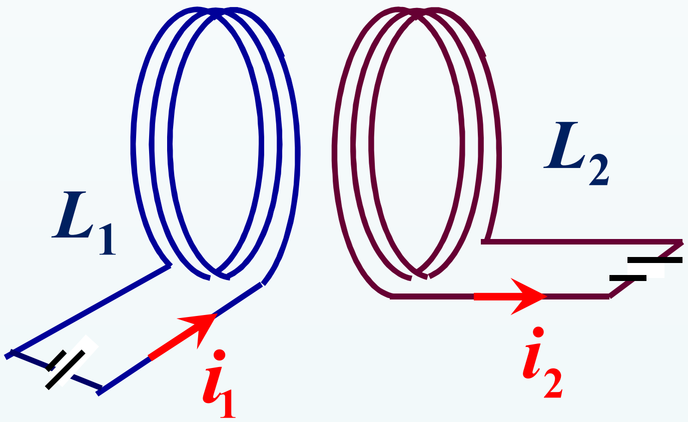
互感

- **互感现象**

描 述:

一个回路中的电流变化，在邻近的另一回路中产生感生电动势的现象。



若两线圈的相对位置确定

设L_1的电流为i_1，在L_2中产生的总磁通量为ψ_{12}

$\because B_1 \propto i_1 \longrightarrow \Psi_{12} \propto B_1 \propto i_1$

引入比例系数M_{12}

$$\Psi_{12} = \boxed{M_{12}} i_1$$

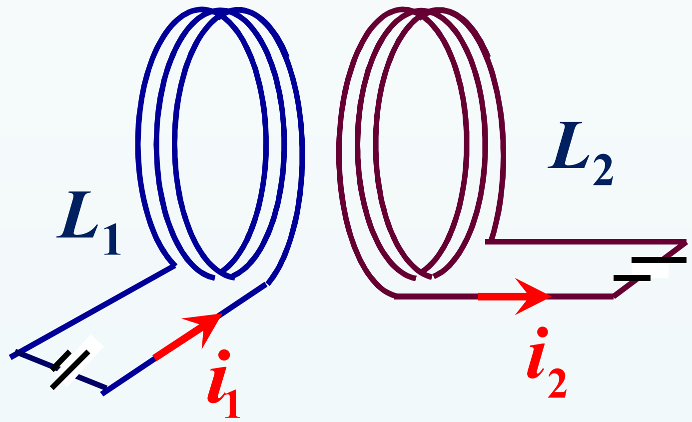
同 理

$$\Psi_{21} = \boxed{M_{21}} i_2$$

互感系数 $M_{12} = M_{21} = M$

互感

$\Psi_{12} = M_{12} i_1 \qquad \Psi_{21} = M_{21} i_2$



互感系数 $\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$

互感电动势 $\varepsilon_M = -\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - i\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$

当 $M =$ **常数**时 $\varepsilon_M = -M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \begin{cases} \varepsilon_{12} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_{21} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

单位：亨利（H） $1\,\mathrm{H} = 1\dfrac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = 1\dfrac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{A}} = 1\,\Omega\cdot\mathrm{s}$

互感

- **互感的应用**

通过互感线圈使能量或信号由一个线圈传递到另一个线圈。

利用互感： 电源变压器、输入\输出变压器、电压\电流互感器、无线充电等

抑制互感： 由于互感，电路之间会互相干扰。可采用磁屏蔽等方法来减小这种干扰。

为什么用磁屏蔽抑制?

磁场是互感作用传递的桥梁

互感

- **互感的计算**

根据互感的定义式 $\varepsilon_M = -M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

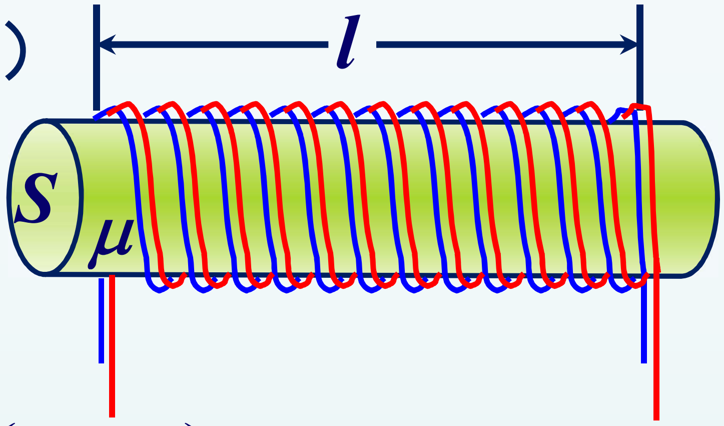
$$\begin{cases} \Psi_{12} = M_{12} i_1 \\ \Psi_{21} = M_{21} i_2 \end{cases}$$

$$M = \left|\frac{\varepsilon_{12}}{\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t}\right| = \left|\frac{\varepsilon_{21}}{\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t}\right|$$

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \frac{\Psi_{21}}{i_2}$$

互感

例. 很长的螺线管，其为 l，截面积为S，管内充满磁导率为 μ 的磁介质，两线圈匝数分别为N_1、N_2。计算该同轴螺线管的互感。



解：两线圈命名为线圈1（蓝）和线圈2（红）

设线圈1中的电流为I_1，

产生磁场为 $B_1 = n_1 \mu I_1 = \dfrac{N_1}{l}\mu I_1$

该磁场通过线圈2的总磁通量为 $\psi_{12} = N_2\left(\dfrac{N_1}{l}\mu I_1\right)S$

由互感定义：$M_{12} = \dfrac{\psi_{12}}{I_1} = \dfrac{\mu N_1 N_2 S}{l} = \mu n_1 n_2 V$

同理可求出：$M_{21} = \dfrac{\psi_{21}}{I_2} = \dfrac{\mu N_2 N_1 S}{l} = \mu n_2 n_1 V$

$M_{12} = M_{21}$

互感

例. 求下列情况的M。

解：设直导线通电流 I,

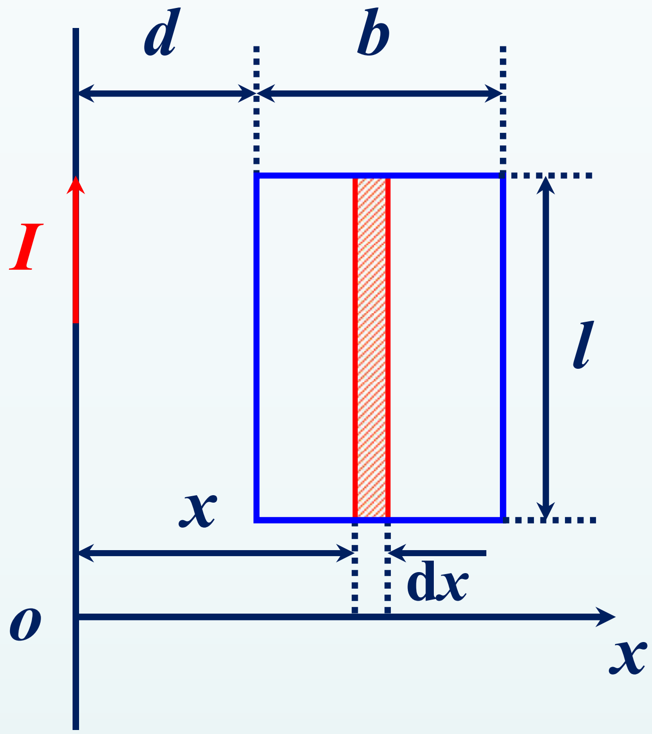
其磁场：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$

矩形线圈的磁通量Φ：

$$\Phi=\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_d^{d+b}\frac{\mu_0 Il}{2\pi x}\mathrm{d}x$$

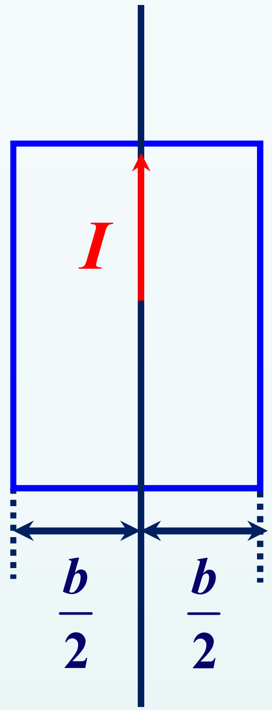
$$=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}$$

互感为：$M=\dfrac{\Phi}{I}=\dfrac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\dfrac{d+b}{d}$



互感

例. 求下列情况的M。



解：载流导线在矩形线圈对称线上

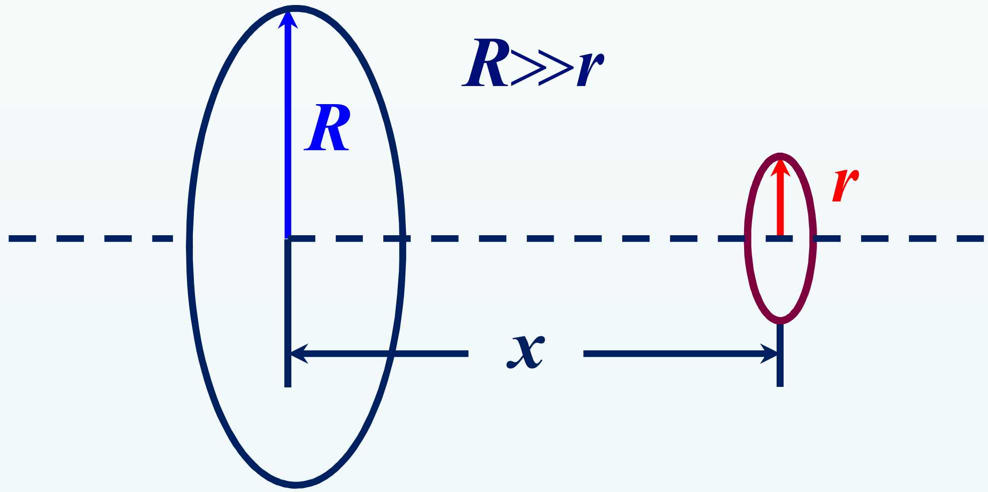
根据对称性，线圈的磁通量

$$\Phi = 0 \longrightarrow M = 0$$

线圈间的互感，不仅与它们的形状、大小、磁介质有关，还与它们的相对位置有关。

互感

例. 求M。



解: 设大线圈中有电流I_1

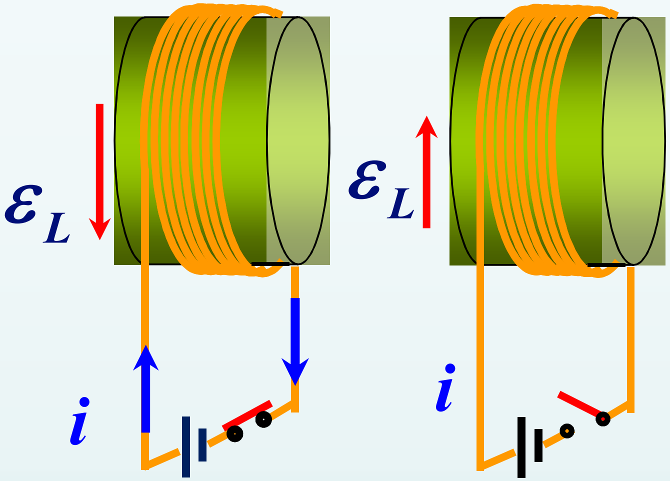
小圈中 $\Phi_{12} = B \cdot \pi r^2 = \dfrac{\mu_0 R^2 I_1}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \pi r^2$

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R^2 r^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

自感

- **自感** (自感应)

由于通电线圈中电流发生变化导致电流产生的磁通量发生变化，而在线圈自身产生感应电动势的现象(自感)。



i 增加　　i 减少

自感电动势

$\Psi \propto B \propto i$

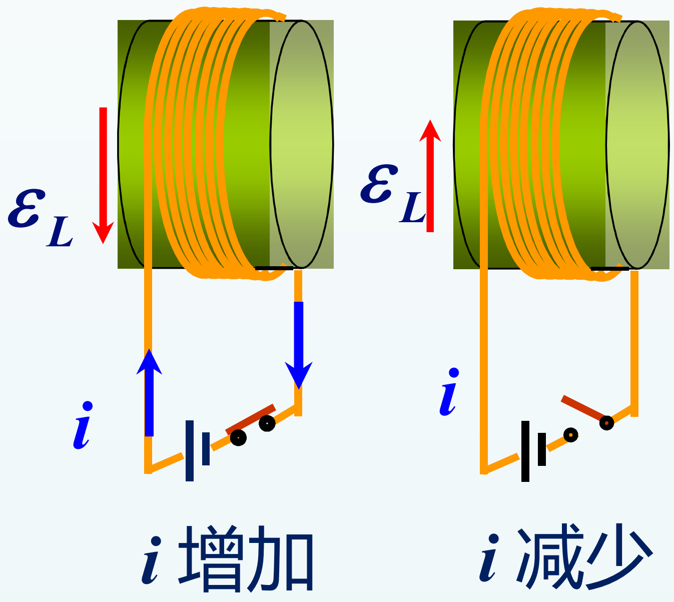
全磁通 $\Psi = Li$　L—自感系数或自感

$L = \dfrac{\Psi}{i}$　单位: 亨利H

取决于回路的大小形状、匝数以及μ

自感

全磁通 $\Psi = Li$　　自感系数 $L = \dfrac{\Psi}{i}$



回路自感电动势为

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - i\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

若L=常量

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

反抗回路中电流的改变

ε_L**的方向**

- 电流增加时，自感电动势与原电流方向相反
- 电流减小时，自感电动势与原电流方向相同

自感

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} \qquad L = \frac{\Psi}{i}$$

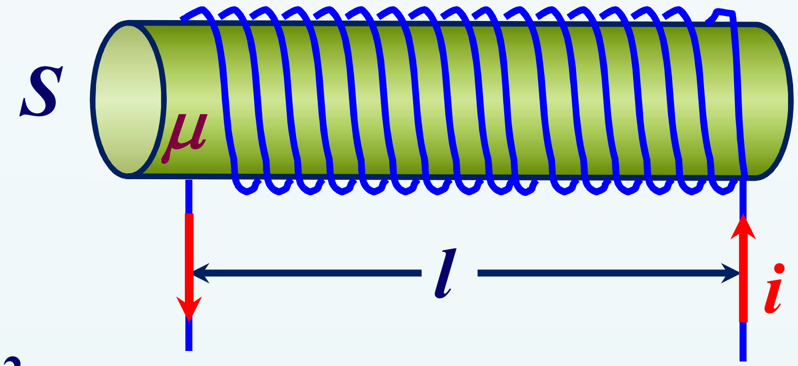
注 意:

- $\varepsilon_L \propto \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} \longrightarrow$ 线圈电流的变化是自感电动势的产生原因
- $\varepsilon_L \propto L \begin{cases} L\text{大} \longrightarrow \varepsilon_L\text{大} \longrightarrow \text{阻碍电路变化的阻力大} \\ L\text{小} \longrightarrow \varepsilon_L\text{小} \longrightarrow \text{阻碍电路变化的阻力小} \end{cases}$
- 自感的物理意义: **对电路“电磁惯性”的度量**
- 若线圈通单位电流时, **全磁通=自感系数**

自感

- **自感的计算**

例. 求长直密绕螺线管的自感系数，已知l，S，N，μ。



解： 设通电流 i，

$$B=\mu n i=\mu\frac{N}{l}i$$

$$\psi=N\Phi=NBS=\frac{\mu N^2 S}{l}i=\mu n^2 V i$$

$$L=\frac{\psi}{i}=\mu n^2 V\left\{\begin{array}{l}\text{介质}\\ \\ \text{几何条件}\end{array}\right\}$$

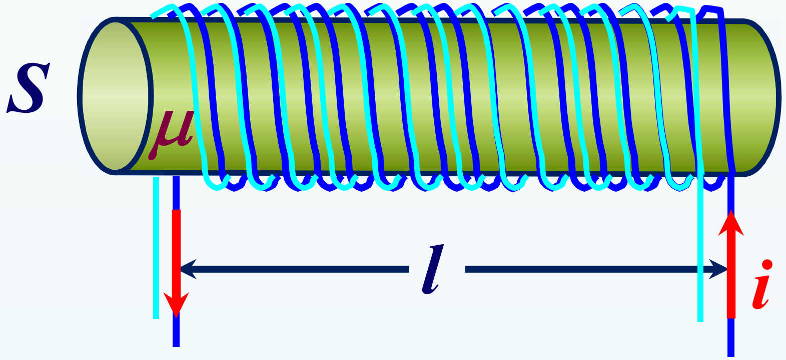
自感是一种固有的特性，与外界电磁场无关。

电磁惯性

自感

两线圈自感分别为：

$$L_1 = \mu n_1^2 V \qquad L_2 = \mu n_2^2 V$$



前例题求得双线圈螺线管互感为：

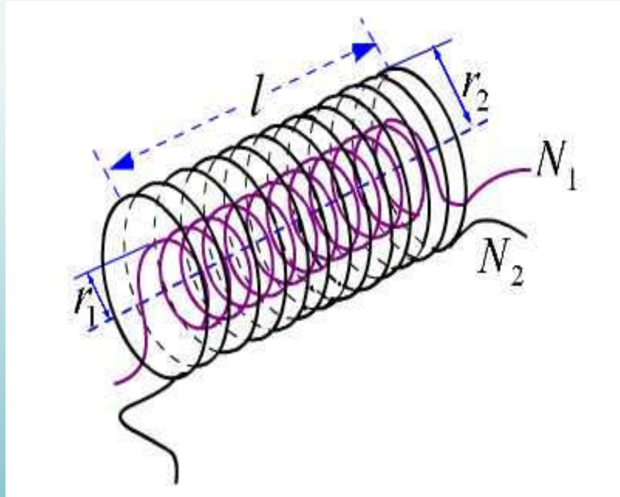
$$M = M_{21} = M_{12} = \mu n_1 n_2 V$$

对比可得 $M = \sqrt{L_1 L_2}$ （理想耦合）→ 两线圈紧密缠绕，彼此磁场完全穿过。**（无漏磁）**

当有漏磁时（通常情形）：

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

$0 \le k \le 1$ 耦合系数 → 与线圈的相对位置有关



自感

例. 计算同轴电缆单位长度的自感。设金属芯线内的磁场可略。

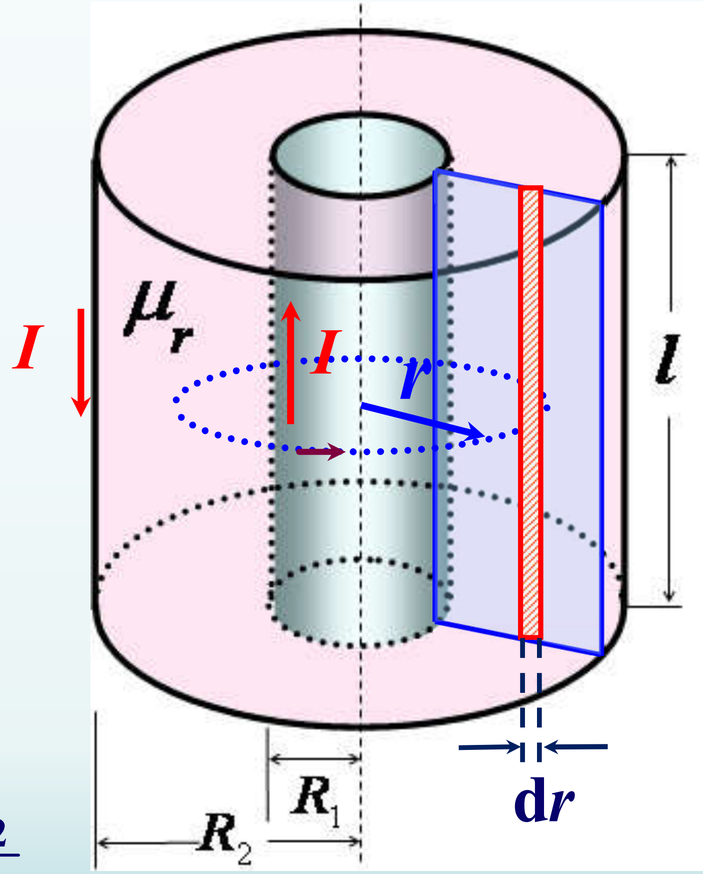
解：设电流I由内筒流入，外筒流回。

两筒间磁场为

$$B=\frac{\mu I}{2\pi r} \qquad R_1\le r\le R_2$$

l长电缆通过面元 $l\mathrm{d}r$ 的磁通量

$$\mathrm{d}\Phi=Bl\mathrm{d}r=\frac{\mu I}{2\pi r}l\mathrm{d}r$$



全磁通为 $\Psi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_o\mu_r I}{2\pi r}l\mathrm{d}r=\frac{\mu Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

电缆单位长度的自感：$L=\frac{\Psi}{l\cdot I}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

自感

例. 两个线圈串联的自感系数。

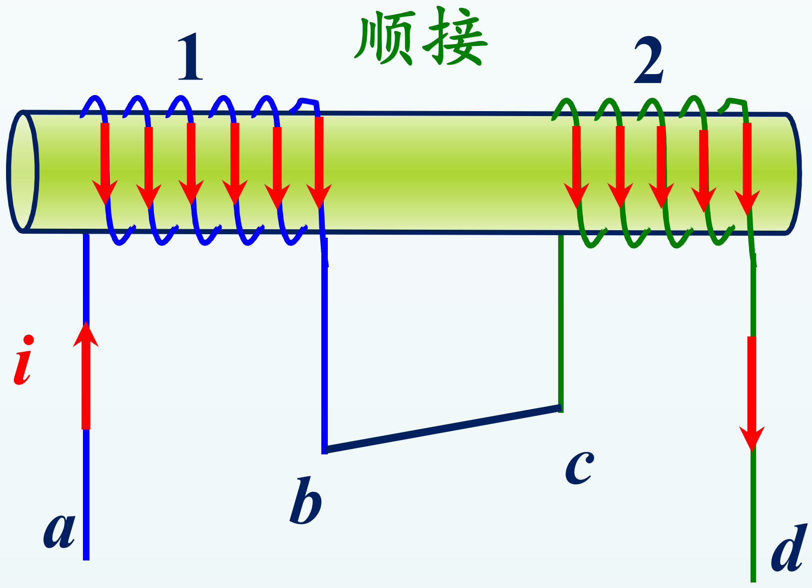
解：自感电动势 $\varepsilon=-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

顺接时，线圈组自感电动势

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}$$

$$=-L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$L=L_1+L_2+2M$$



磁场彼此加强，自感电动势和互感电动势同向。

自感

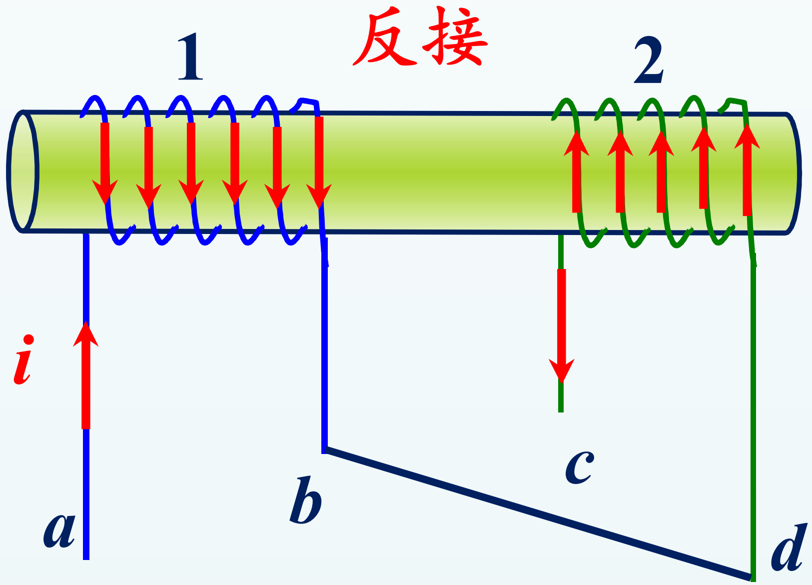
例. 两个线圈串联的自感系数。

解：自感电动势 $\varepsilon = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

反接时，线圈组自感电动势

$$|\varepsilon| = \left(|\varepsilon_1| - |\varepsilon_{21}|\right) + \left(|\varepsilon_2| - |\varepsilon_{12}|\right)$$

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

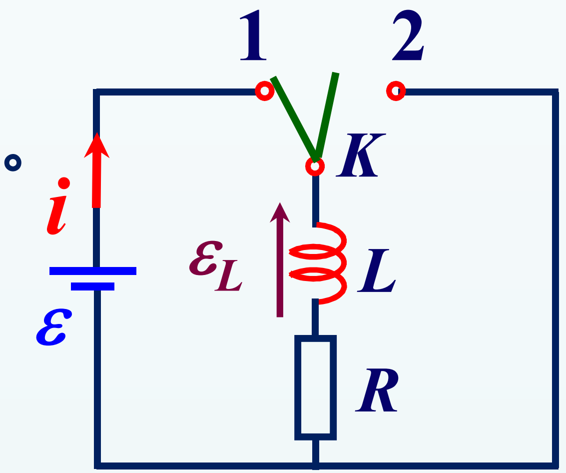


磁场彼此减弱，自感电动势和互感电动势相反。

自感

- ***LR*电路**

由自感线圈L，电阻R，与电源ε组成的电路。



分析：开关K接1上一段时间后，

又接到2上回路里 i 的变化。

$$K\rightarrow 1\longrightarrow i\boxed{\nearrow}I\longrightarrow L\text{上产生}\varepsilon_L$$

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{总}=\varepsilon+\boxed{\varepsilon_L}=iR\\ \varepsilon_L=-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\end{array}\right\}\varepsilon-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=iR\longrightarrow\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=\frac{\varepsilon}{L}$$

则回路中的电流 $i=\dfrac{\varepsilon}{R}+Ce^{-Rt/L}\xrightarrow[C=-\varepsilon/R]{t=0,\ i=0}i=\dfrac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L})$

自感

$$i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L})$$

讨 论:

(1) 在有电感的电路中，接通电源，电流是逐渐增大的。

(2) $t\to\infty$, $i=\dfrac{\varepsilon}{R}=I$

(3) $\boxed{t=L/R}$, $i=\dfrac{\varepsilon}{R}(1-\dfrac{1}{e})=0.63I$

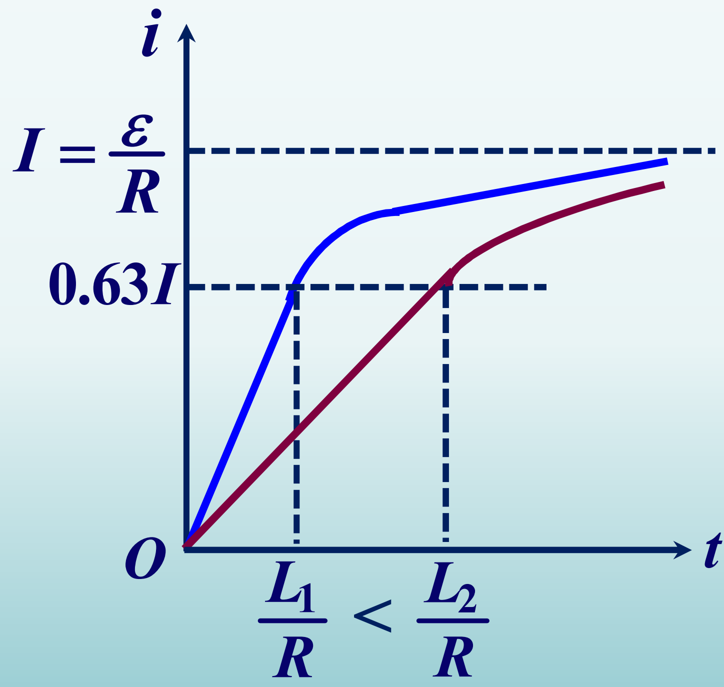
时间常数 i 从 $0\to0.63I$ 所需时间

自感

讨 论：

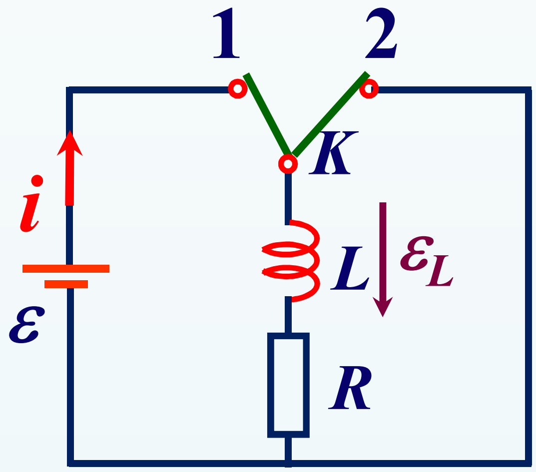
(3) $t=L/R$，$i=\frac{\varepsilon}{R}(1-\frac{1}{e})=0.63I$

$\begin{cases} t=L/R\text{大} \rightarrow i\text{增长慢} \rightarrow \varepsilon_L\text{阻力大} \rightarrow \text{电磁惯性大} \\ t=L/R\text{小} \rightarrow i\text{增长快} \rightarrow \varepsilon_L\text{阻力小} \rightarrow \text{电磁惯性小} \end{cases}$



自感

$i \to I$后，$k \to 2$　电路电压有了阶跃式改变$\varepsilon \to 0$



自感电动势将使电流维持一段时间

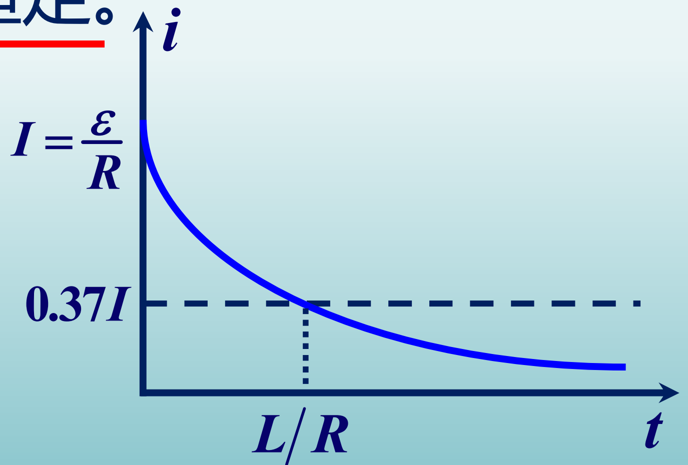
$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_L &= -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\\ \varepsilon_L &= iR\end{aligned}\right\} -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = iR$$

初始条件：$t=0$，$i=I$，$C=I=\varepsilon/R$

$$i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-Rt/L}$$

自感的作用使电路中的电流缓慢变化趋于恒定。

暂态过程



时间常数

$\boxed{t=L/R}$时，$i=0.37I$

当 $t \gg L/R$，暂态过程基本结束。

自感

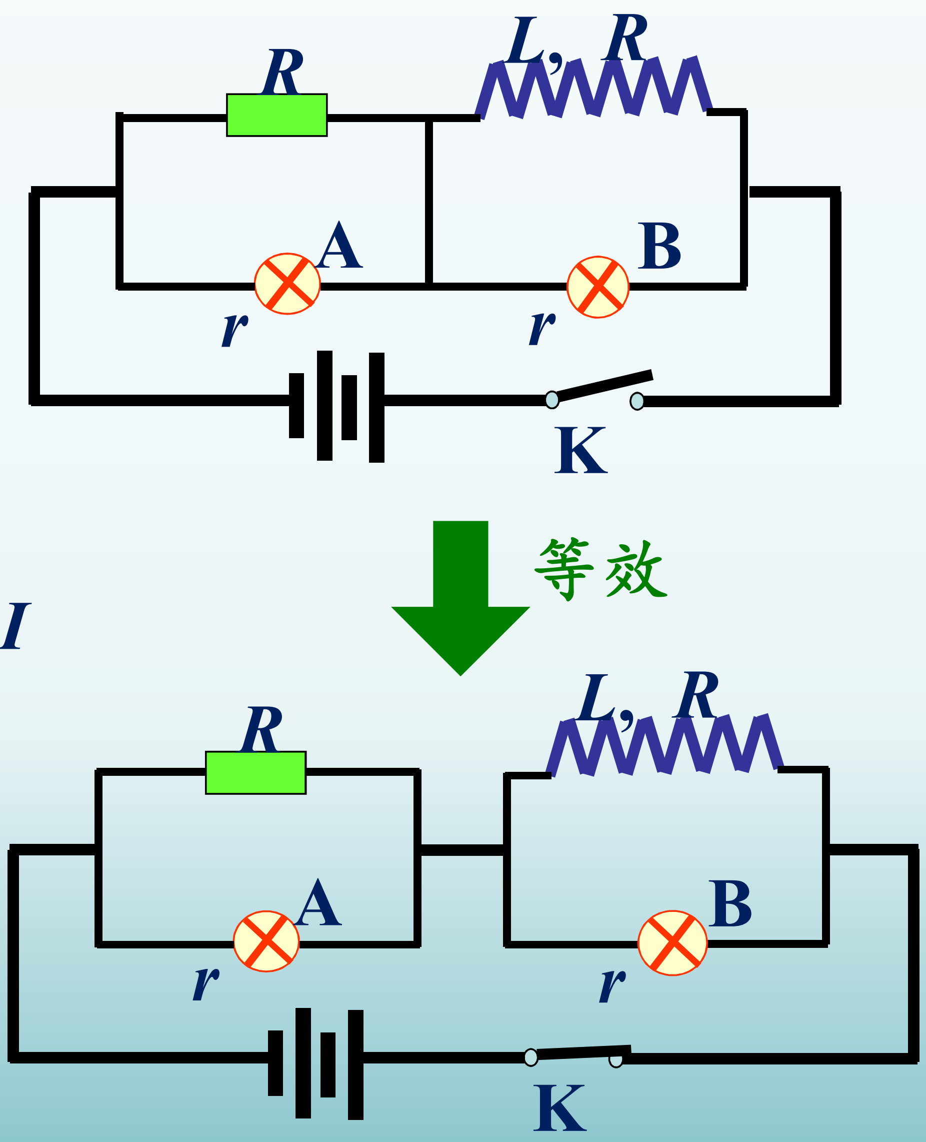
例：A、B是相同的两灯泡，内阻$r>>R$，线圈的电阻为R，L很大。则下面正确的是[A]。

(A) K接通时，$I_A<I_B$

(B) K接通时，$I_A=I_B$

(C) K断开时，A、B同时灭

(D) K断开时，$I_A=I_B$



解析：K接通时，因$r>>R$，故$I_A<<I$

又∵ L很大，故 ε_L 大，

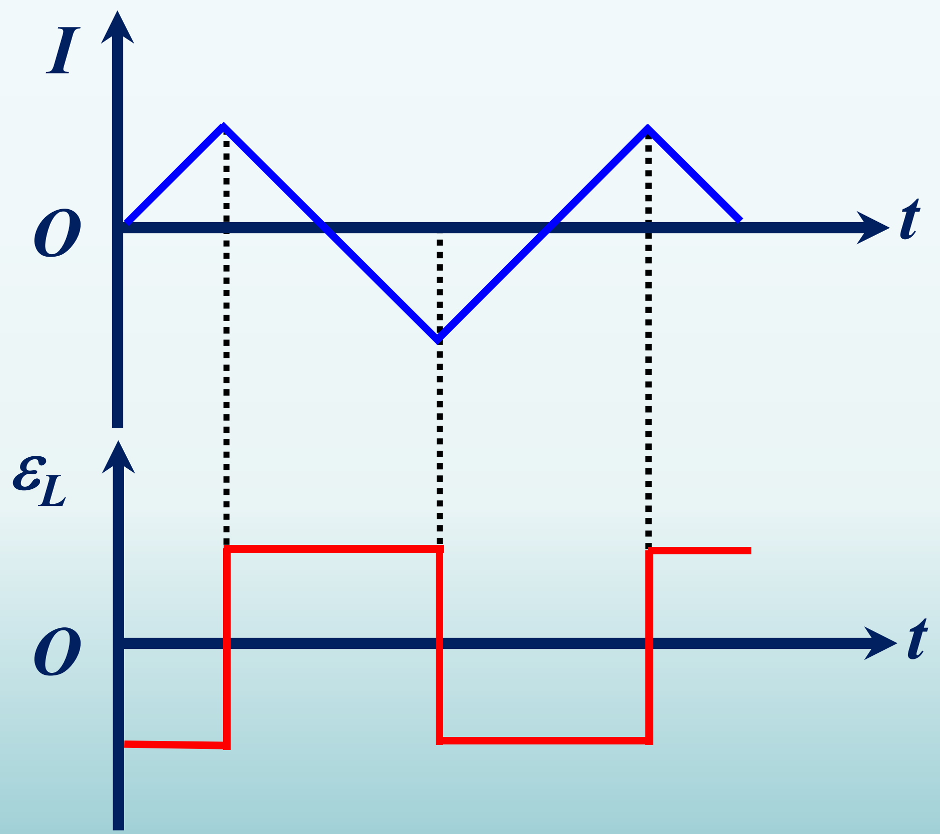
所以$I_L\approx 0$，$I_B\approx I$

K接通时，$I_B>I_A$

K断开时，仍有$I_B>I_A$

自感

例. 一线圈中通过的电流I随时间t变化的规律如图，试画出自感电动势ε_L随时间t变化的规律(以I的正方向为ε_L的正向)。



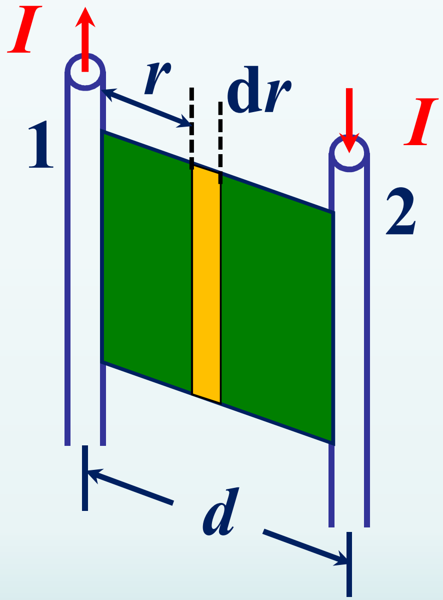
解析：根据 $\varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

可得 ε_L随t变化的曲线。

自感

例. 两根足够长的平行导线，中心距离为d，半径为a，在导线中保持大小相等，方向相反的恒定电流。

求：两导线间单位长度上的自感系数（$d>>a$）。



解：设导线中电流为I。

单位长度上的两导线之间的磁通量：

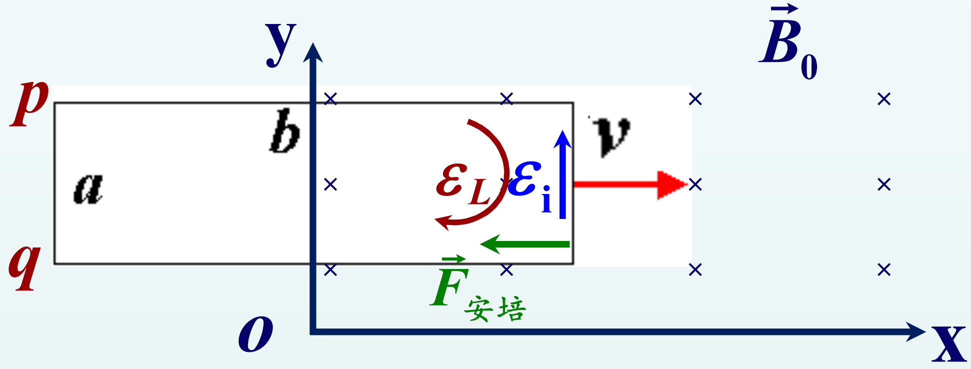
$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr + \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)} dr = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \xrightarrow{d>>a} L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a}$$

自感

例：一矩形金属线框，边长为 a、b（b足够长），线框质量为 m 自感系数为 L，电阻忽略，线框以初速度 v_0 沿 x 轴方向从磁场外进入磁感应强度大小为B_0 的均匀磁场中，求矩形线圈在磁场内的速度与时间的关系式 $v=v(t)$ 和沿 x 轴方向移动的距离与时间的关系式 $x=x(t)$。



解：线圈的一部分进入磁场后，线圈内有动生电动势和自感电动势。