

概率论与数理统计

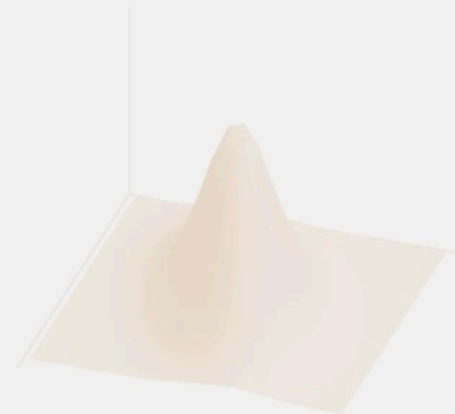
华中科技大学 概率统计系

 吴娟



07

参数估计



» 评选原则

无偏性

若 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量.

例 证明样本均值 \bar{X} 为总体期望 $\mu = E(X)$ 的无偏估计.

证

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = E(X) = \mu$$

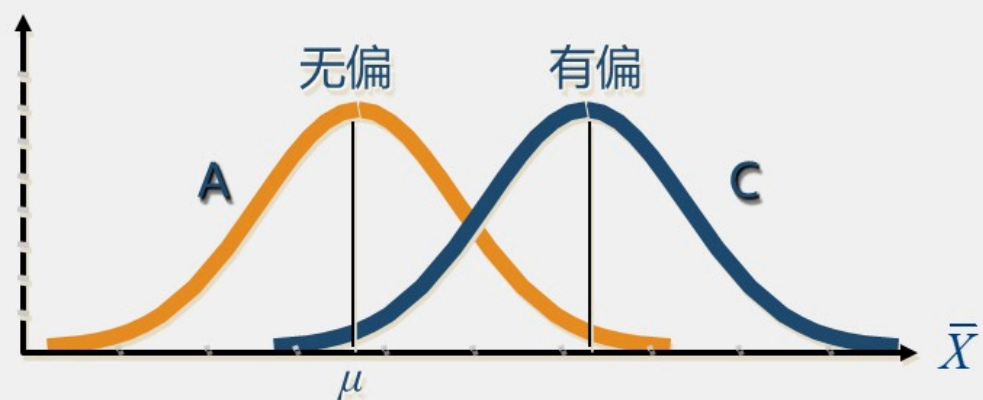
一般

$$E(A_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^k) = E(X^k) = \alpha_k$$

单选题 100分

若抽样一次，无偏估计量的结果会更好吗？

- Ⓐ 会
- Ⓑ 不一定



» 评选原则

例 证明样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是总体方差 $D(X) = \sigma^2$ 的无偏估计.
证

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{n-1} [nE(X^2) - nE(\bar{X}^2)] \\ \xrightarrow{D(X) = E(X^2) - (EX)^2} &= \frac{1}{n-1} [n(\sigma^2 + \mu^2) - n(D(\bar{X}) + \mu^2)] \\ &= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

» 评选原则

注1 \tilde{S}^2 不是 σ^2 的无偏估计.

$$E(\tilde{S}^2) = E\left(\frac{n-1}{n} S^2\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2 \quad \text{渐近无偏估计}$$

注2 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计, 但 $u(\hat{\theta})$ 不一定是 $u(\theta)$ 的无偏估计.

例 若 $D(X) > 0$, 则 $E[(\hat{\mu})^2] = E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 > [E(\bar{X})]^2 = \mu^2$

注3 无偏估计不唯一, 如 X_1 和 \bar{X} 均为 $\mu = E(X)$ 的无偏估计.

事实上对任何 c_1, c_2, \dots, c_n , 当 $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1$ 时,

$$E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \mu$$

» 评选原则

应用

对某种产品从1开始用整数连续编号，试估计产品的总量.

分析 设产品编号为 X , 则 X 1 2 ... N 样本: 20, 96, 190, 255

p $\frac{1}{N}$ $\frac{1}{N}$... $\frac{1}{N}$ 无偏估计: 317.75

$$L(N) = \frac{1}{N^n}, \quad 1 \leq x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^* \leq N, \quad \hat{N} = x_n^*$$

$$E(X_n^*) = \frac{n}{n+1}(N+1), \quad E\left(\frac{n+1}{n}X_n^* - 1\right) = N$$

» 评选原则

证明

$$E(X_n^*) = \frac{n}{n+1}(N+1)$$

$$1 \leq x_1^* \leq x_2^* \leq \cdots \leq x_n^* \leq N, \quad P(X_n^* = k) = C_{k-1}^{n-1} / C_N^n, \quad k = n, n+1, \dots, N$$

$$E(X_n^*) = \sum_{k=n}^N k P(X_n^* = k) = n \sum_{k=n}^N C_k^n / C_N^n = n C_{N+1}^{n+1} / C_N^n = \frac{n}{n+1}(N+1).$$

$$(C_k^n + C_k^{n+1} = C_{k+1}^{n+1} \Rightarrow \sum_{k=n}^N C_k^n = C_{N+1}^{n+1})$$

» 评选原则

有效性

定义 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量, 若

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ **有效**.

设 $\hat{\theta}_0$ 是参数 θ 的无偏估计量, 若对 θ 的任一无偏估计 $\hat{\theta}$ 有

$$D(\hat{\theta}_0) \leq D(\hat{\theta})$$

则称 $\hat{\theta}_0$ 是 θ 的**最小方差无偏估计**.

» 评选原则

有效性

例 证明 $\bar{U} = \{ \hat{\mu} = \sum_{i=1}^n k_i X_i \mid \sum_{i=1}^n k_i = 1 \}$ 是 $\mu = E(X)$ 的线性无偏估计类.

并在此无偏估计类里寻找 μ 的最小方差无偏估计.

证

$$E(\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^n k_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n k_i \mu = \mu, \quad \mu \in \bar{U}$$

➤ 评选原则

例 证明 $\bar{U} = \{ \hat{\mu} = \sum_{i=1}^n k_i X_i \mid \sum_{i=1}^n k_i = 1 \}$ 是 $\mu = E(X)$ 的线性无偏估计类.

在此无偏估计类里寻找 μ 的最小方差无偏估计.

分析

$$(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2) (\sum_{i=1}^n b_i^2)$$

$$\begin{aligned} D(\hat{\mu}) &= D(X) \sum_{i=1}^n k_i^2 = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n 1^2) (\sum_{i=1}^n k_i^2) D(X) \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n 1 \times k_i \right)^2 D(X) \\ &= \frac{1}{n} D(X) \end{aligned}$$

而 $D(\bar{X}) = \frac{1}{n} D(X)$ 故 $\hat{\mu}_0 = \bar{X}$ 是 μ 的最小方差无偏估计.

» 评选原则

一致性

定义 设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的估计量, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$$

即 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的 **一致估计量**.

» 区间估计

问题 如何让 $\hat{\theta}$ 与 θ 的误差体现在估计中?

办法 对给定的置信水平(置信度) $1-\alpha$

置信下限 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和置信上限 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$

使

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) \geq 1 - \alpha$$

称 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 为未知参数 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

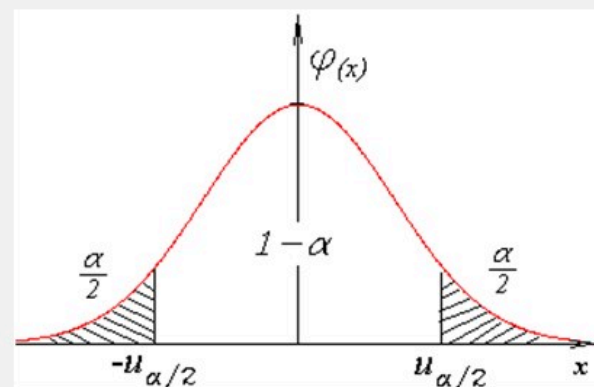
含义 若 $1 - \alpha = 0.95$, 抽样100次中约有95个 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 包含 θ .

区间估计

单个正态总体均值的区间估计

σ^2 已知 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$

$$P(\bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$



μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为 $(\bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$; $(\bar{X} \pm u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

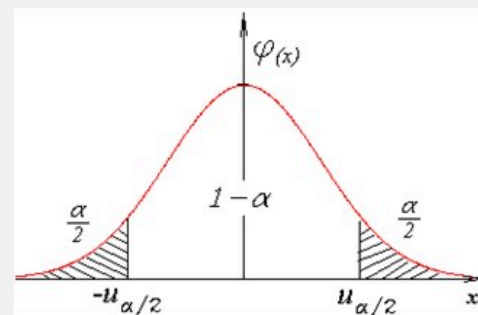
区间估计

单个正态总体均值的区间估计

注 $(\bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

➤ 置信区间长度

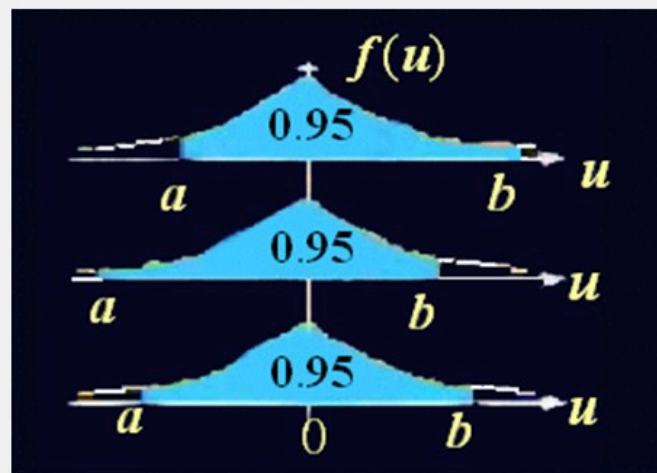
$$l = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}$$



投票(匿名) 最多可选1项

未知参数的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间唯一吗?

- ☐ A 唯一
- ☐ B 不唯一



区间估计

单个正态总体均值的区间估计

例 滚珠直径 $X \sim N(\mu, 0.0006)$, 从某天生产的滚珠中随机抽取6个, 测得直径为
(单位: mm) 1.46 1.51 1.49 1.48 1.52 1.51

求 μ 的置信度为95%的置信区间.

解 $(\bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$$\bar{x} = 1.495, \quad \alpha = 0.05, \quad u_{0.05/2} = u_{0.025} = 1.96$$

$$(1.495 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.0006}{6}}) = (1.4754, 1.5146)$$

区间估计

单个正态总体均值的区间估计

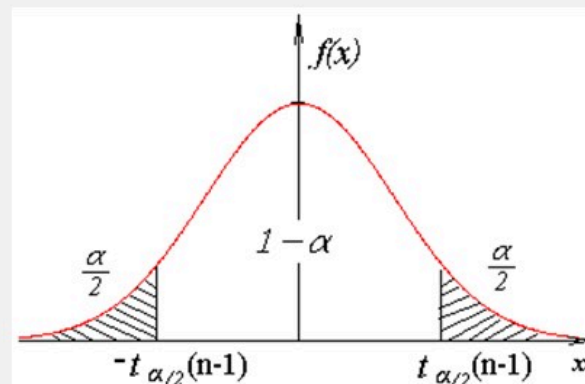
σ^2 未知

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$P(|T| < t_{\alpha/2}(n-1)) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}})$



区间估计

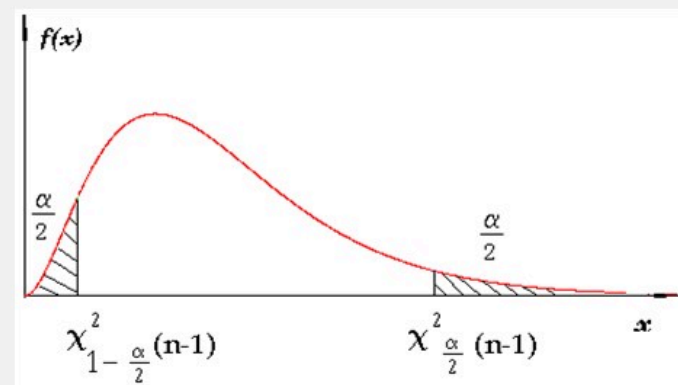
单个正态总体方差的区间估计

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = 1 - \alpha$$

$$\sigma^2 \text{ 的置信度为 } 1-\alpha \text{ 的置信区间为 } \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$$



区间估计

单个正态总体方差的区间估计

例 从自动车床加工的一批零件中随机的抽取16件，测得各零件长度为(单位：cm)

2.15 2.10 2.12 2.10 2.14 2.11 2.15 2.13

2.13 2.11 2.14 2.13 2.12 2.13 2.10 2.14

设零件长度服从正态分布，求零件长度标准差 σ 的置信度为95%的置信区间.

解 计算 $\bar{x}=2.125, S^2=0.000293, \alpha=0.05, \chi_{0.025}^2(15)=27.488, \chi_{0.975}^2(15)=6.262$

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}} \right) \\ = (0.01265, 0.02651)$$