波函数

电子衍射是大量电子事件的统计结果。

电子波
(非经典波) ⟵ **波函数**

1926年，玻恩提出波函数的统计意义！

电子位置的概率分布正比于波函数的模平方：

$$P(x,t) \propto |\psi(x,t)|^2$$

波函数描述概率分布 ⟶ **概率波**

概率分布 ⟶ 粒子性
波函数 ⟶ 波动性

波动性和粒子性的统一

Max Born (1882-1970)

1954年获诺贝尔奖

波函数

- **量子客体的状态描述**

量子力学的基本假设：

假设一：一个系统的状态可以用一个波函数完全描述。该波函数包含了该系统处于该状态时的所有物理信息。

假设二：量子态叠加原理

如果ψ_1和ψ_2是系统的两个可能的状态，那么它们的线性叠加$\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2$也是系统的一个可能状态。c_1和c_2是任意复数。

叠加态的意义：如果粒子处于上述叠加态，它同时处于ψ_1和ψ_2表示的状态。

波函数

- **波函数的统计解释**

微观粒子的运动状态用波函数描述。

波函数描写的是处于相同条件下的大量粒子的一次行为，

或一个粒子的多次重复行为。

波函数是统计意义下的概率波。

如果一个粒子系统处在波函数 $\psi(\vec{r},t)$ 表示的状态，那么 t 时刻在 $\vec{r}$ 点体积元中粒子出现的概率为：

$$\mathrm{d}P(\vec{r},t)=\underbrace{\boxed{\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2}}_{\text{概率密度}}\mathrm{d}V$$

波函数不仅把粒子与波统一起来，同时以概率密度的形式描述粒子的量子运动状态。

波函数

波函数的物理意义：

① 波函数本身表示了微观粒子的波动性，而它的模的绝对值的平方又描述了微观粒子的空间位置概率分布（粒子性）。

波函数是微观粒子波粒二象性的数学表述。

② 已知波函数可得微观粒子在空间出现的位置概率分布；

位置概率密度：$\rho(x,t)\propto|\psi(x,t)|^2$

定态波函数：$\Psi_E(x,t)=\psi_E(x)\mathrm{e}^{-iEt/\hbar}$ $\quad |\Psi_E|^2=|\psi_E(x)|^2$

定态波函数的概率密度不随时间变化，能量取确定值。

③ 已知波函数可求动量、动能、能量以及角动量等力学量的概率分布，进而可求它们的平均值。——→ 确定了粒子的力学状态

波函数

- **波函数的标准化和归一化条件**

标准化条件

- **单 值** t 时刻，在空间某点附近的单位体积内，粒子出现的概率应有唯一的确定值。
- **有 限** 保证波函数平方可积
- **连 续** 波函数及其导数都要连续可微

归一化条件：$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 \mathrm{d}V = \int_{\infty} \psi\psi^* \cdot \mathrm{d}V = 1$

波函数的独特性质：ψ与$\psi^*=c\,\psi$描述同一个微观状态！

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 \mathrm{d}V = N \longrightarrow \Psi(\vec{r},t) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{N}}}\psi(\vec{r},t)$$ **(归一化)**

(未归一化)

归一化常数

波函数

- **自由粒子的波函数**

自由粒子：不受任何外力作用、也不处在任何外力场中的粒子

$$\begin{cases} E = \text{恒量} & E = h\nu = \hbar\omega \longrightarrow \nu\text{或}\omega\text{恒定} \\ \vec{p} = \text{恒量} & p = \dfrac{h}{\lambda} = \hbar k \longrightarrow \lambda\text{恒定} \end{cases}$$

自由粒子的波动特征：波长λ不变；波的传播方向不变。

与经典波动类比： 描述自由粒子的波应为单色平面波。

经典的单色平面波： $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$

自由粒子的波函数： $\psi(x,t) = Ae^{-i(\omega t - kx)} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$

$|\psi|^2 = A^2$　　　波函数必须为**复数**，不可观测。

波函数

在量子力学中取复数形式的波函数

$$\left.\begin{aligned}\psi(x,t)&=Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}\\ \psi(y,t)&=Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-py)}\\ \psi(z,t)&=Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-pz)}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\vec{p}\cdot\vec{r}=p_x x+p_y y+p_z z}\psi(\vec{r},t)=Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}$$

描写微观自由粒子

行为状态的波函数

$$\text{微观粒子}\left\{\begin{array}{l}\text{粒子性体现在“位相”中　　有能量、有动量}\\ \\ \text{波动性体现在}\boxed{\text{函数的形式上}}\longrightarrow\text{波函数}\end{array}\right.$$

作业：15T1 ~T6

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周四交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。