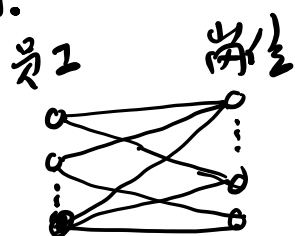


LN3. 稳定匹配问题.

. Gale & Shapley. 1950's, GS算法

Shapley, Roth. 1962. Nobel Prize, 自我强化机制.

1. 应用.



陈望远 电话 — 交换机
刘俊德 警官 — 被拘人
周煜杰 排字工:
教师 — 教室 — 学生

周煜杰 网卡 — IP地址

李学玮 停车 — 巡逻路线

嫌疑人 — 犯罪

施斌 男 — 女

施斌 学生 — 宿舍

李学玮 学生 — 宿舍

李昊轩 运动员 — 运动项目

学生 — 导师

宋科 学生 — 录取

丁树浩 打车: 人 — 车

李子龙 比赛队: 队伍 — 参赛

刘俊德 电商: 商品 — 购买人

李新毅 人 — 绝对居住(修屋)

病人 — 医院/病床

2. 问题定义: 男生

① 两个集合

W, M :

m_1, \dots, m_n

女生

w_1, \dots, w_n

② 每个 m_i 或 w_i 对
对于集合有一个全排序.

Def. 匹配: (m, w) , $m \in M, w \in W$, 每个个体只出现在一个 pair 里

Def. 对个体: 匹配了 / 自由的

Def. 完美匹配: 每个个体均被匹配了。

Def. 不稳定匹配: $m \text{---} w$ $m': w > w'$
 $m' \text{---} w'$ $w: m' > m$

Def. 稳定匹配: 完美匹配, 且非不稳定匹配。

3. 思考:

① 稳定匹配是否一定存在?

a) 对上述两个集合之间匹配, 稳定匹配一定存在。(Gale, Shapley, 1960s)

b) 扩展: 对于同一个集合内的匹配, 不一定。

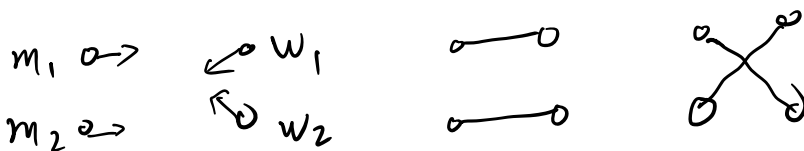
反例:

	1	2	3
A	B	C	D
B	C	A	D
C	A	B	D
D	A	B	C

hw: 给出所有可能的匹配。
 指出不稳定的对

② 对上面(两集合间), 能否快速(多项式)找到稳定的匹配?

③ 稳定匹配是否唯一? 不唯一。



李邵永

4. 算法(男手追求版)

初始化: 均单身。

循环:

1. 单身男生 m 向所有女生发生请求;
 m 向当前还未追求过的女生中, 排序最高的发生请求。

$w \rightarrow$ 拒绝, 则接受
 若匹配 m' $\begin{cases} m' > m, \text{ 则拒绝 } m \\ m > m', \text{ 则接收 } m, \text{ 拒绝 } m' \end{cases}$

5. 算法的正确性:

① GS算法会在有限步内终止. $O(n^2)$

② $|M| = |W|$, 每个人对对方集合的偏好是完整.
 则GS生成一个完美匹配.

反证法:

③ GS生成的是稳定匹配.

陈宇航

李邵永

反证法: $m \xrightarrow{\text{orange}} w$ $m' \xrightarrow{\text{orange}} w'$ $\begin{cases} \textcircled{1} m \text{ 之前} \rightarrow w': m' > m \\ \textcircled{2} m \text{ 没有} \rightarrow w': w > w' \end{cases}$

扩展内容:

Thm. GS (男方追求版) 对于男方来说是最优的.

Def. 有效的匹配 (Valid partner), 对于一个个体, 在任何稳定匹配中存在的匹配子构成的集合.

Pf. (反证法) 设 M^* 中有男方没有匹配到他的稳定匹配中最好的.

$\exists m$, 被拒绝

设 m 是第一个被 valid partner 拒绝的. 设拒绝者是 w .

则 \exists 另外一个稳定匹配 M , $m-w$

$$M^*: m \xrightarrow{*} w$$

$$m' \text{ --- } w$$

$$w: m' > m$$

$$M: m \text{ --- } w$$

$$m' \text{ --- } w'$$

$$m': w > w'$$

王一然

\Rightarrow 在 M 中, $m'-w$ 形成不稳定因素. M 不是稳定匹配. 矛盾.

$\Rightarrow M^*$, 每个 m 获得的均为最优的稳定匹配.

Thm. GS (男之追求版) 对于女之是最劣的.

[对于任一女 w , 所匹配 m 为所有可能稳定匹配中最差的]

Pf. (反证法) 在 M^* , $\exists w, m \text{ --- } w$, m 不是 w 的最差的 valid partner

$$\exists \text{ 稳定 } M, m' \text{ --- } w$$

$$w: m > m'$$

$$m \text{ --- } w'$$

$$m: w > w'$$

$\Rightarrow m-w$ 在 M 中形成不稳定因素. M 不是稳定匹配. 矛盾.

$\Rightarrow M^*$, 女之获得的是最劣的稳定匹配.

★ 相关知识点: 算法博弈论

$$\begin{aligned} a_1: b_1 > b_2 > b_3 \\ a_2: b_1 > b_3 > b_2 \\ a_3: b_2 > b_1 > b_3 \\ \underline{b_1: a_2 > a_1 > a_3} \\ b_2: a_1 > a_3 > a_2 \\ b_3: a_1 > a_2 > a_3 \end{aligned} \Rightarrow$$

