华中科技大学计算机与科学技术学院 2023~2024 第二学期

“离散数学（一）”期中考试试卷

考试方式 闭卷　考试日期 **2024-03-27**　考试时长 **50** 分钟

专业班级 ______　学　号 ______　姓　名 ______

1. 给出集合表达式(A-C)∪B=A∪B 成立的充要条件。（10 分）

方法 1：

$(A-C)\cup B = A\cup B$

$\Leftrightarrow (A\cap \bar{C})\cup B = A\cup B$

$\Leftrightarrow (A\cup B)\cap(\bar{C}\cup B) = A\cup B$

$\Leftrightarrow \bar{C}\cup B \supseteq A\cup B$

$\Leftrightarrow A\subseteq (B\cup \bar{C})$

方法 2：

充要条件：$A\cap C\subseteq B$

先证 $A\cap C\subseteq B \Rightarrow (A-C)\cup B = A\cup B$：

左式 $\Rightarrow B\cup(A\cap C) = B$

$\Rightarrow (A-C)\cup(B\cup(A\cap C)) = (A-C)\cup B$

$\Rightarrow (A\cap\bar{C})\cup B\cup(A\cap C) = (A-C)\cup B$

$\Rightarrow (A\cap\bar{C})\cup(A\cap C)\cup B = (A-C)\cup B$

$\Rightarrow A\cup(C\cap\bar{C})\cup B = (A-C)\cup B$

$\Rightarrow A\cup B = (A-C)\cup B =$ 右式

再证 $(A-C)\cup B = A\cup B \Rightarrow A\cap C\subseteq B$：

$\because A\cap C\subseteq A\subseteq A\cup B$

$\therefore \forall x\in A\cap C$，有 $x\in A\cup B$ …①

由已知条件 $(A-C)\cup B = A\cup B$ 和①式可推出：

$\forall x\in A\cap C$，有 $x\in (A-C)\cup B$ …②

当 $x\in A\cap C$ 时，一定有 $x\notin A\cap\bar{C}$

即 $x\notin A-C$ …③

由②③可推出：$\forall x\in A\cap C$，有 $x\in B$

即 $A\cap C\subseteq B$

综上 $A\cap C\subseteq B \Leftrightarrow (A-C)\cup B = A\cup B$

注意证明过程需要条理清晰，每一步推导都尽量根据课上学习到的定义、定理，思路不要太过跳跃。在以上基础上尽量简洁。

解答内容不得超过装订线

2. 设 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in N$ 并且 $x+3y=12\}$，求 R^2。（10 分）

$R=\{\langle 0,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 12,0\rangle\}$

$R^2=R\circ R=\{\langle 3,3\rangle,\langle 12,4\rangle\}$

3. 设 f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 C 的函数，如果 fog 是 A 到 C 的满射，证明 g 是 B 到 C 的满射；举反例说明 f 不一定是 A 到 B 的满射。（20 分）

证：∵ fog 是 A 到 C 的满射

∴ $\forall z\in C$，$\exists x\in A$，使 $(f\circ g)(x)=z$ —①

∴ $\exists y\in B$ 使 $f(x)=y$ 且 $g(y)=z$ —②

由①②得 $\forall z\in C$，$\exists y\in B$，使 $g(y)=z$

∴ g 是 B 到 C 的满射

反例：$A=\{1,2\}$，$B=\{3,4,5\}$ $C=\{5,6\}$

$f(1)=4$ $f(2)=3$

$g(3)=g(5)=5$ 则 fog 是 A 到 C 的满射时

$g(4)=6$ f 不一定是 A 到 B 满射

4. 现有表 1 和表 2 分别表示关系 R 和 S（表中第 1 行表示各列属性，不是关系中的序偶），求 R×S 的集合表示，并用表的形式进行表示。(20 分)

表 1

A	B
1	2
3	4

表 2

A	B	C
a	b	c
d	e	f
g	h	k

$R\times S=\{\langle\langle 1,2\rangle,\langle a,b,c\rangle\rangle,\langle\langle 1,2\rangle,\langle d,e,f\rangle\rangle,\langle\langle 1,2\rangle,\langle g,h,k\rangle\rangle,$
$\langle\langle 3,4\rangle,\langle a,b,c\rangle\rangle,\langle\langle 3,4\rangle,\langle d,e,f\rangle\rangle,\langle\langle 3,4\rangle,\langle g,h,k\rangle\rangle\}$

表的形式如下（5 列）：

A	B	A	B	C
1	2	a	b	c
1	2	d	e	f
1	2	g	h	k
3	4	a	b	c
3	4	d	e	f
3	4	g	h	k

5. 设 S={1, 2, 3}，并设 A=S×S。在 A 上定义关系 R 为：⟨a, b⟩ R ⟨c, d⟩ 当且仅当 a+b=c+d。（1）证明 R 是等价关系；（2）计算出商集 A/R。（20 分）

(1) 证：

<1> 设 $\forall \langle a,b\rangle \in A$
有 $a+b=a+b$
$\therefore \langle\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle\rangle \in R$
$\therefore$ R有自反性

<2> 设 $\forall \langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle \in R$
有 $a+b=c+d$
显然 $c+d=a+b$
有 $\langle\langle c,d\rangle,\langle a,b\rangle\rangle \in R$
$\therefore$ R有对称性

<3> 设 $\forall \langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle \in R$
且 $\langle\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\rangle \in R$ 成立
则 $a+b=c+d$，$c+d=e+f$
显然 $a+b=e+f$
有 $\langle\langle a,b\rangle,\langle e,f\rangle\rangle \in R$ $\therefore$ R有传递性

综上R是等价关系.

(2) $A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\,\langle 2,2\rangle\,\langle 2,3\rangle\,\langle 3,1\rangle\,\langle 3,2\rangle\,\langle 3,3\rangle\}$

$R=I_A\cup\{\langle\langle 1,2\rangle\langle 2,1\rangle\rangle,\langle\langle 2,1\rangle\langle 1,2\rangle\rangle,\langle\langle 1,3\rangle\langle 2,2\rangle\rangle$
$\langle\langle 1,3\rangle\langle 3,1\rangle\rangle,\langle\langle 3,1\rangle\langle 2,2\rangle\rangle,\langle\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle\rangle$
$\langle\langle 2,2\rangle\langle 1,3\rangle\rangle,\langle\langle 2,2\rangle\langle 3,1\rangle\rangle,\langle\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\rangle$
$\langle\langle 3,2\rangle,\langle 2,3\rangle\rangle\}$

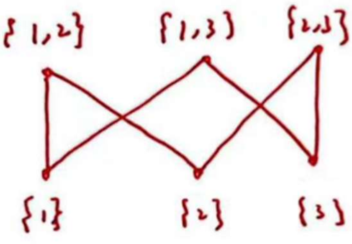
$\therefore [\langle 1,1\rangle]_R=\{\langle 1,1\rangle\}$
$[\langle 1,2\rangle]_R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$
$[\langle 2,2\rangle]_R=\{\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle\,\langle 3,1\rangle\}$
$[\langle 2,3\rangle]_R=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$.
$[\langle 3,3\rangle]_R=\{\langle 3,3\rangle\}$

$[\langle 3,3\rangle]_R=\{\langle 3,3\rangle\}$

$\therefore A/R=\{\{\langle 1,1\rangle\},\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\},$
$\{\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\},$
$\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\},\{\langle 3,3\rangle\}\}$

6. 设 A={1,2,3}，B=P(A)-{∅}-{A}，要求：(1)画出偏序集(B, ⊆)的哈斯图；(2)对集合 B 分别求最大、极大、最小、极小元以及上界、下界、上确界和下确界。**(20 分)**

6.(1) $B=P(A)-\{\phi\}-\{A\}$
$=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$



极大元：{1,2} {1,3} {2,3}
极小元：{1} {2} {3}
其它均无

解
答
内
容
不
得
超
过
装
订
线