回顾

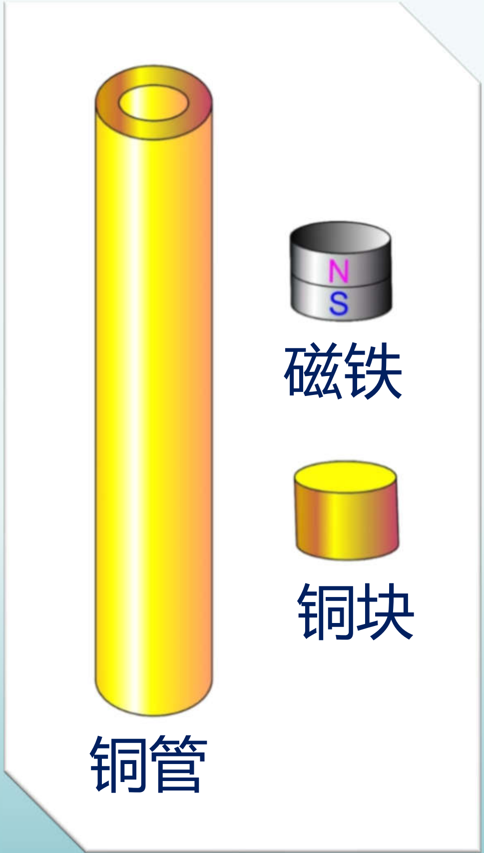
电磁感应现象

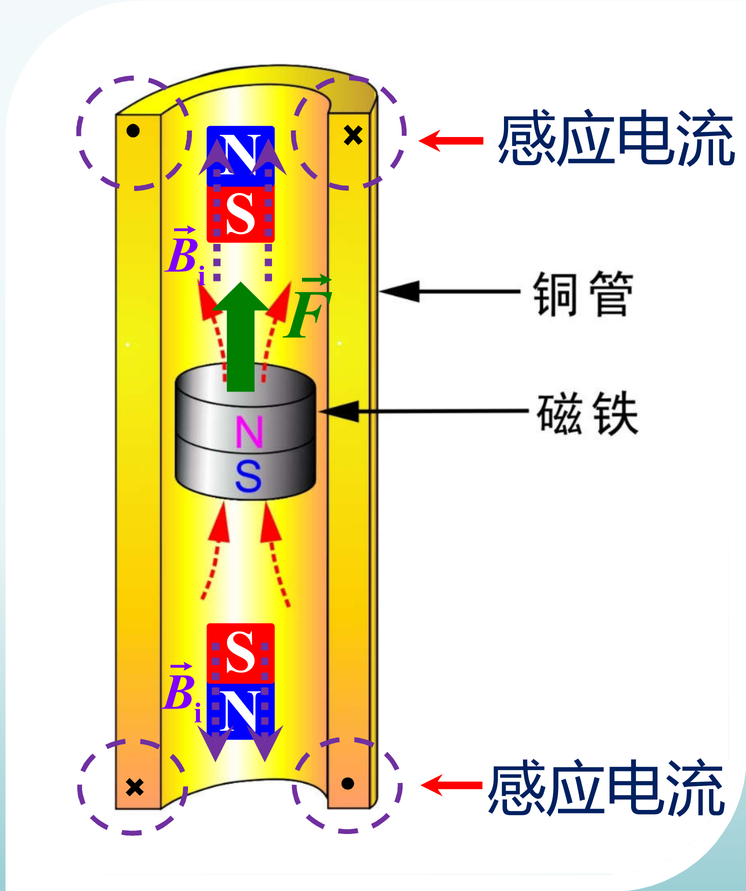
- **法拉第电磁感应定律** → $\varepsilon_{\mathrm{i}} = \boxed{-}\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
- **楞次定律** 感应电流的**效果**，总是反抗引起感应电流的**原因**。

电磁感应

□ 楞次定律 感应电流的**效果**，总是反抗引起感应电流的**原因**。

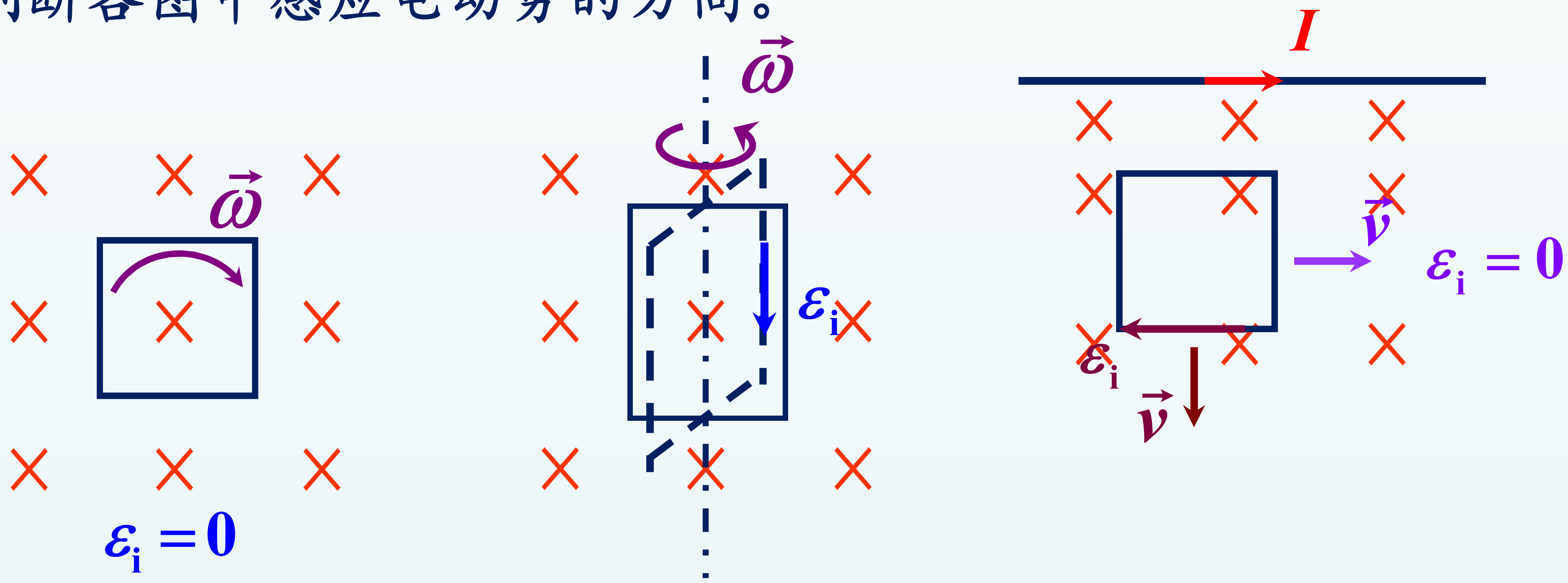
演示实验



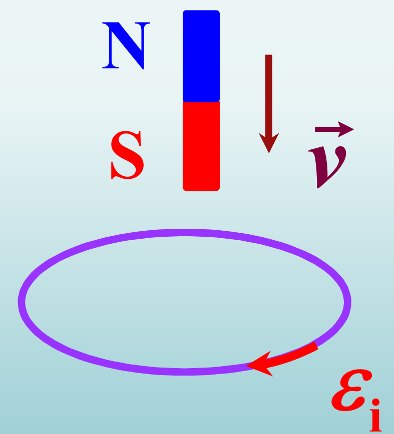


电磁感应

例. 判断各图中感应电动势的方向。



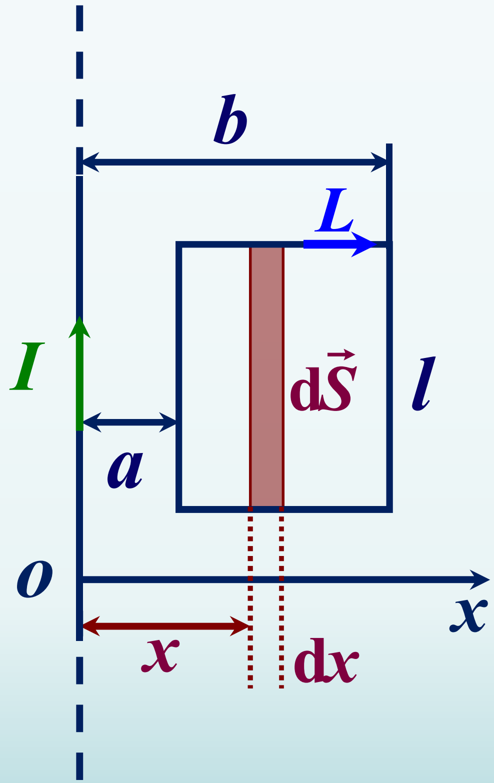
例、将磁铁插入非金属环中，环内有无感应电流？环内将发生何种现象？



有感应电场存在，将引起介质极化，而无感应电流。

例. 长直导线通电流$I=I_0\sin\omega t$（I_0和ω均是大于零的常数），求与其共面的N匝矩形回路中的感应电动势。

解：感应电动势 $\varepsilon_{\mathrm{i}}=-N\dfrac{\mathrm{d}\boxed{\Phi}}{\mathrm{d}t}$ → 解题关键



设 $I>0$时，电流方向如图，

选顺时针方向为回路L的正方向，

建坐标系如图，

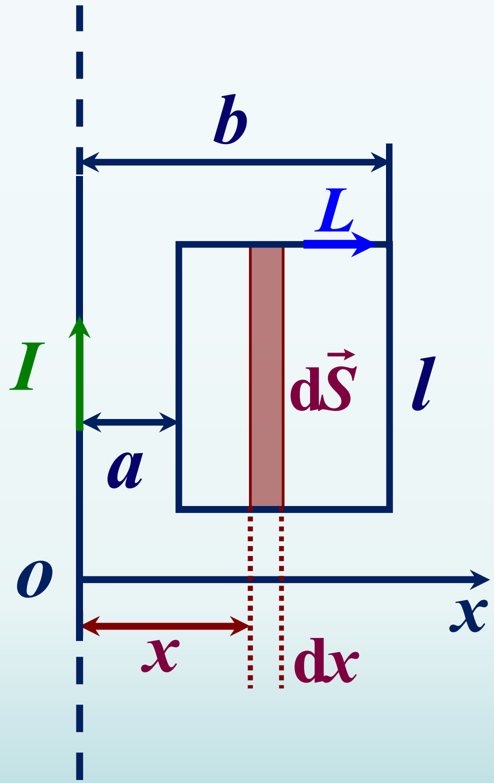
在任意坐标处取一面元 $\mathrm{d}\vec{S}$

$$\psi=N\Phi=N\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=N\int_a^b\frac{\mu_0 I}{2\pi x}l\mathrm{d}x$$

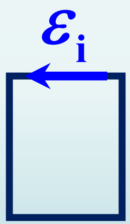
电磁感应

$$\begin{cases} \psi = N\Phi = N\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = N\int_a^b \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x} l\,\mathrm{d}x = \dfrac{N\mu_0 I l}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a} \\ I = I_0 \sin\omega t \end{cases}$$

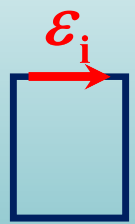
$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{N\mu_0 I_0 l}{2\pi}\sin\omega t \ln\frac{b}{a} \\ \varepsilon_{\mathrm{i}} &= -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mu_0 N I_0 l\omega}{2\pi}\cos\omega t \ln\frac{b}{a}$$



若 $-\dfrac{\pi}{2} < \omega t < \dfrac{\pi}{2} \longrightarrow \varepsilon_{\mathrm{i}} < 0$



若 $\dfrac{\pi}{2} < \omega t < \dfrac{3\pi}{2} \longrightarrow \varepsilon_{\mathrm{i}} > 0$



上题中，若I=常数，回路以v向右运动，$\varepsilon_i=?$

解：

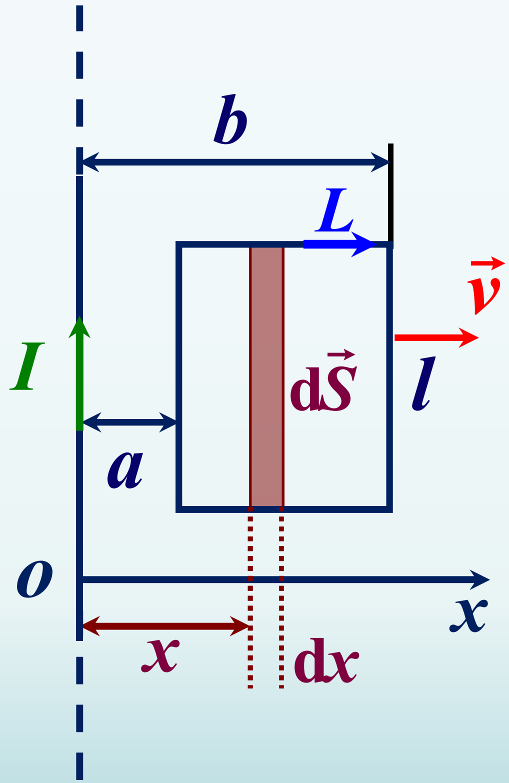
$$\begin{cases}\psi = N\Phi = N\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = N\int_{a(t)}^{b(t)} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x} l\,dx \\ a(t)=a+vt \qquad b(t)=b+vt\end{cases}$$

$$\psi = \frac{N\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{b+vt}{a+vt}$$

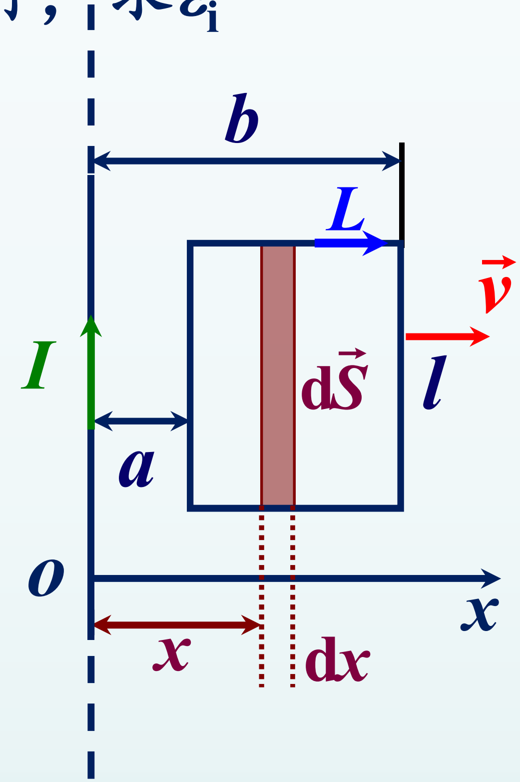
$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt} = \frac{\mu_0 NIl}{2\pi}\frac{(b-a)v}{(a+vt)(b+vt)}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\mu_0 NIlv}{2\pi}\left(\frac{1}{a+vt}-\frac{1}{b+vt}\right) > 0$$

顺时针方向



上题中，若$I=I_0\sin\omega t$，且回路又以v向右运动时，求ε_i



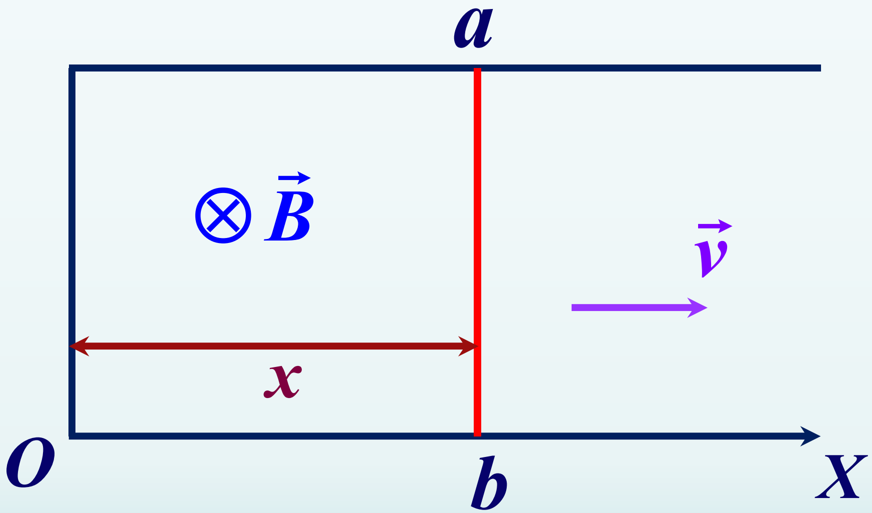
解：$$\psi=\frac{N\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{b+vt}{a+vt}$$

t 时刻回路的磁通：

$$\psi=\frac{N\mu_0 I_0 l}{2\pi}\sin\omega t\ln\frac{b+vt}{a+vt}$$

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 N I_0 l}{2\pi}\left(\frac{(b-a)v\sin\omega t}{(a+vt)(b+vt)}-\omega\cos\omega t\ln\frac{b+vt}{a+vt}\right)$$

例. 均匀磁场B中有一与之垂直的矩形导体回路。B随时间线性增加，即$B=kt$（$k>0$），ab边长为L且以速度v向右滑动，另三边不动。求任意时刻回路中的感应电动势的大小($t=0$时，$x=0$)。



解：ε_i求解关键在于t时刻Φ的计算

$$\Phi=\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_0^x kt\cdot L\mathrm{d}x$$

0~t 内磁通量的累积

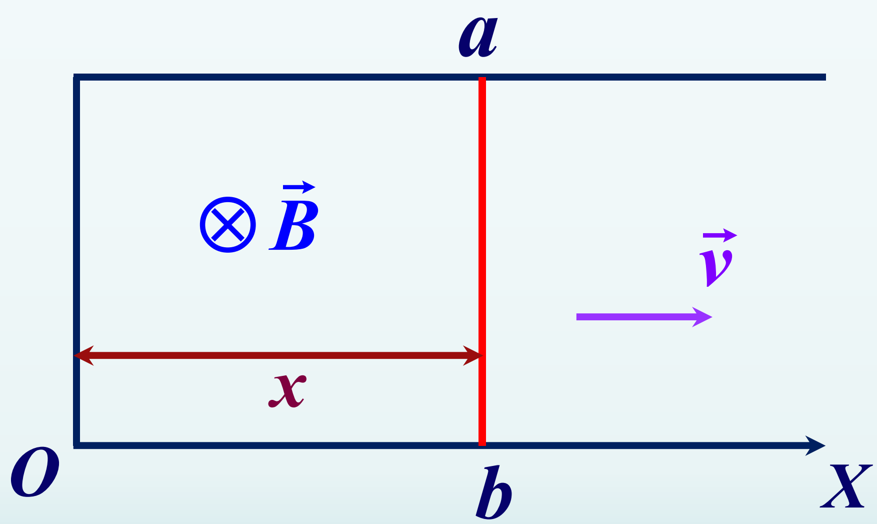
$$=\int_0^t ktL\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t$$

v

$$\Phi=\int_0^t ktLv\mathrm{d}t=\frac{1}{2}kvLt^2 \longrightarrow \varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-kvLt$$

电磁感应

例. 均匀磁场B中有一与之垂直的矩形导体回路。B随时间线性增加，即$B=kt$（$k>0$），ab边长为L且以速度v向右滑动，另三边不动。求任意时刻回路中的感应电动势的大小($t=0$时，$x=0$)。



解：ε_i求解关键在于t时刻Φ的计算

$$\Phi=\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\vec{B}\int_S \mathrm{d}\vec{S}=\vec{B}\cdot Lx$$

$$=kt\cdot Lvt=kLvt^2$$

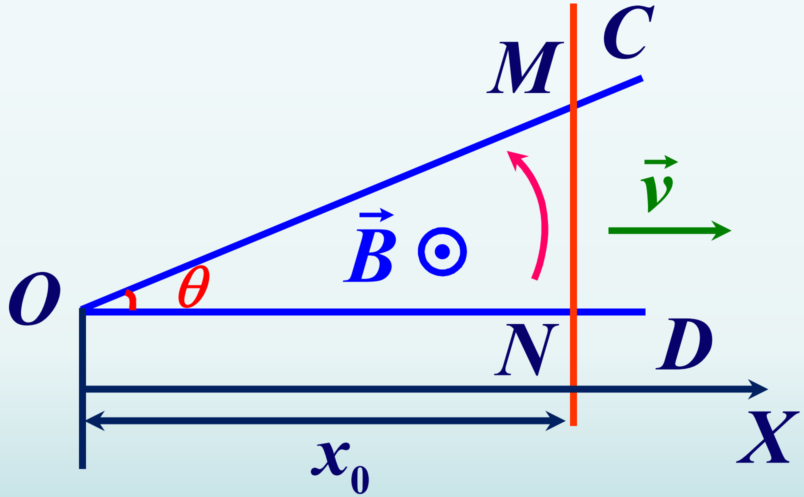
$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-2kvLt$$

电磁感应

例. 弯成θ角的金属架COD, 导体棒MN垂直OD以恒定速度v在金属架上向右滑动，且$t=0, x=0$，已知磁场的方向垂直纸面向外，求下列情况中金属架内的ε_i .

(1) 磁场分布均匀，且磁场不随时间变化。

(2) 非均匀时变磁场，$B=kx\cos\omega t$。



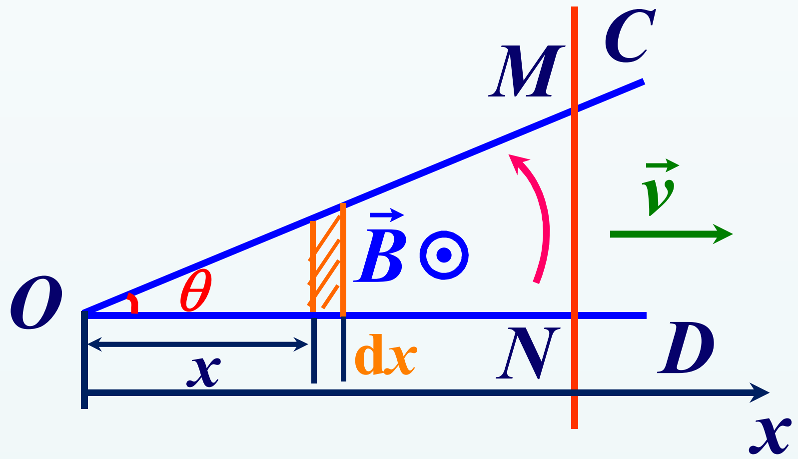
解：设回路绕向为逆时针

(1) t 时刻，$x_0=vt$

$$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=B\cdot\frac{1}{2}x_0\cdot x_0\tan\theta$$

$$=\frac{1}{2}Bv^2t^2\tan\theta$$

解：设回路绕向为逆时针



(1) t 时刻，$x_0 = vt$

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot\frac{1}{2}x_0\cdot x_0\tan\theta$$

$$= \frac{1}{2}Bv^2t^2\tan\theta$$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Bv^2t\cdot\tan\theta < 0$$ 方向与绕向相反

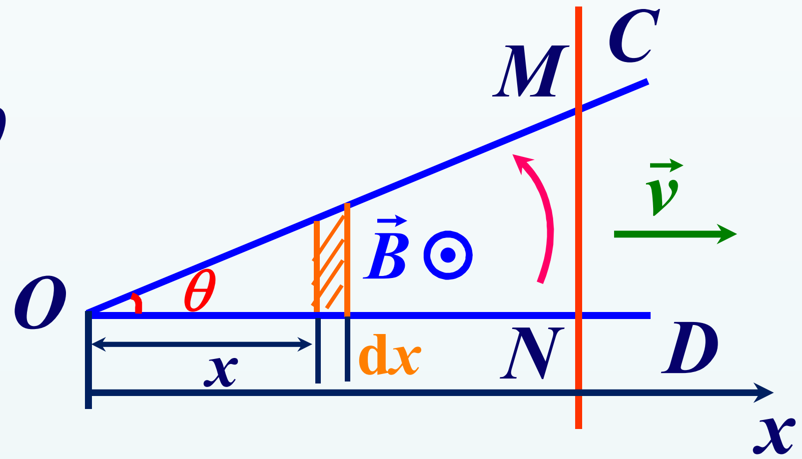
(2) B不均匀， $B=kx\cos\omega t$

$$\Phi = \int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_0^{x_0} kx\cos\omega t\cdot x\tan\theta\cdot\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}kx_0^{\ 3}\cos\omega t\cdot\tan\theta$$

解： (2) B不均匀， $B=kx\cos\omega t$

$$\Phi=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{3}kx^3\cos\omega t\cdot\tan\theta$$



$$\varepsilon_{\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{3}k\omega\tan\theta\sin\omega t\cdot v^3t^3-k\tan\theta\cos\omega t\cdot v^3t^2$$

ε_{i}根据上式参量取值，可正可负

若$\varepsilon_{\mathrm{i}}>0$，则与绕向相同

若$\varepsilon_{\mathrm{i}}<0$，则与绕向相反

感应电动势

- 感应电动势 $\left\{\begin{array}{l}\text{动生电动势} \\ \\ \text{感生电动势}\end{array}\right\}$ 二者产生的微观机理不一样

- **两种电动势的微观机理**

动生电动势：

导体或回路切割磁感线，其内自由电荷受到洛伦兹力定向移动，从而产生感应电动势。

感生电动势:

涡旋电场（有旋场）

↑

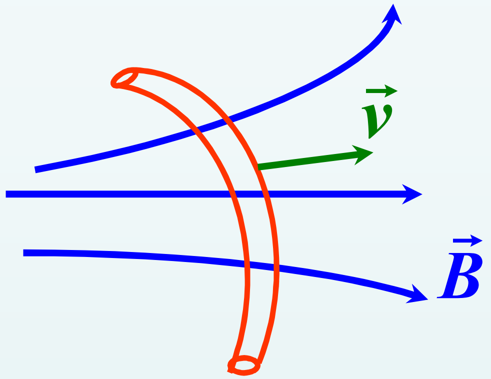
磁场变化 → 回路中磁通量变化 → $\boxed{\text{感应电场}}$ → 回路中电荷定向移动 → $\varepsilon_{i感}$

感应电动势

- **动生电动势**

导体在磁场中运动时产生的感应电动势。

(1) 等效非静电场 $\vec{E}_{\mathrm{k}}$



非静电力：$\vec{f}_{洛} = -e(\vec{v}\times\vec{B})$

类比静电场定义：$\vec{E}_{\mathrm{e}} = \dfrac{\vec{F}}{q} \longrightarrow \vec{F} = q\vec{E}_{\mathrm{e}}$

等效非静电场：$\vec{E}_{\mathrm{k}} = \dfrac{\vec{f}_{洛}}{-e} = \vec{v}\times\vec{B}$

$$\begin{cases} \text{大小} & \left|\vec{E}_{\mathrm{k}}\right| = vB\sin\theta \\ \text{方向} & \vec{v}\times\vec{B} \end{cases}$$

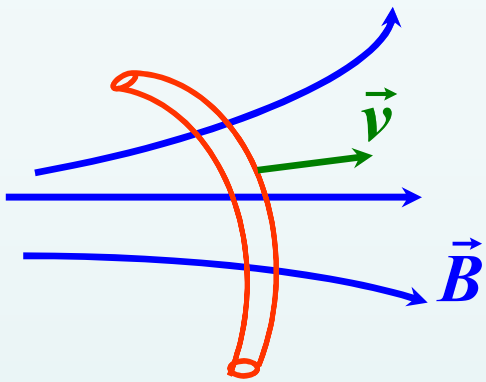
等效非静电场 $\xrightarrow{\text{电荷移动}}$ 动生电动势

感应电动势

- **动生电动势**

导体在磁场中运动时产生的感应电动势。

(1) 等效非静电场 $\vec{E}_k$



等效非静电场：$\vec{E}_k = \dfrac{\vec{f}_{洛}}{-e} = \vec{v}\times\vec{B}$

$$\begin{cases} 大小 \ \left|\vec{E}_k\right| = vB\sin\theta \\ 方向 \ \ \vec{v}\times\vec{B} \end{cases}$$

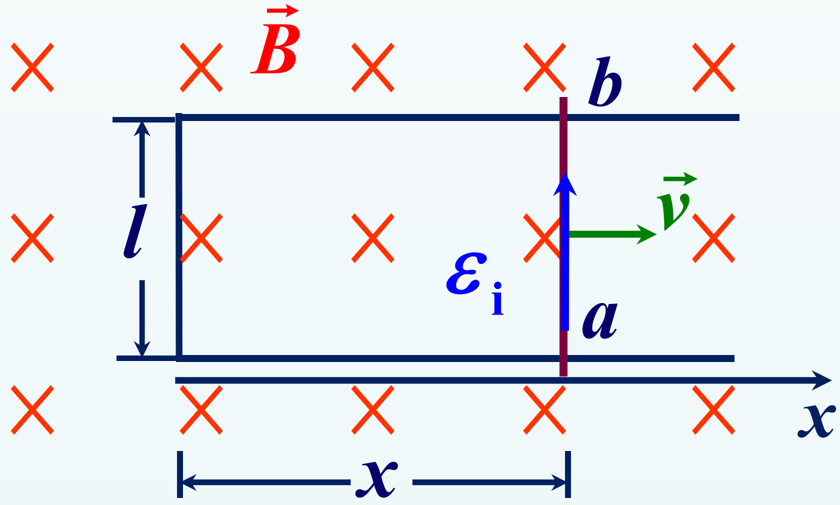
(2) 动生电动势定义

$$\varepsilon_i = \int_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

dt 时间内扫过面积的磁通量

感应电动势

例. 均匀磁场中ab棒沿导体框向右以v运动，求其上的ε_i。



解： 用法拉第定律求解

$$\left|\varepsilon_i\right| = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Blx)}{\mathrm{d}t} = Blv$$

用动生电动势定义求

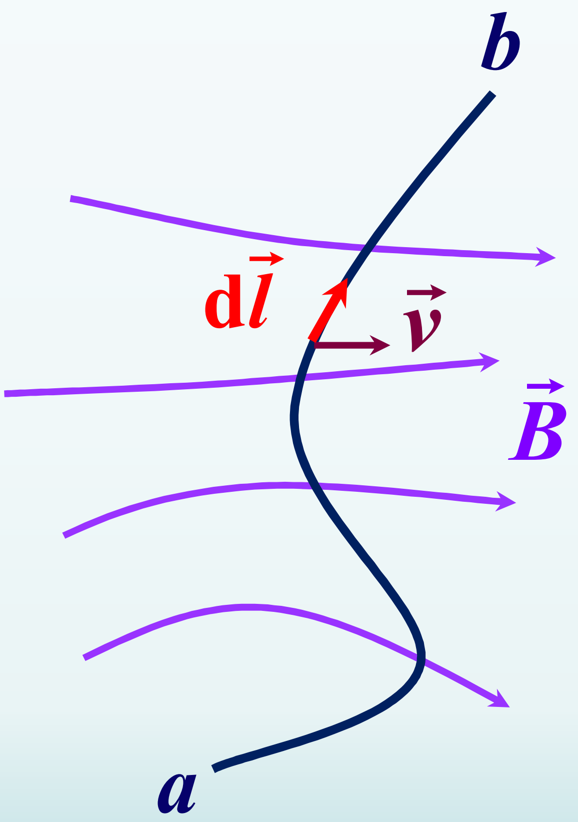
$$\left|\varepsilon_i\right| = \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b vB\mathrm{d}l = Blv$$

动生电动势集中于导体回路中运动的一段内，这一段相当于整个回路的电源部分。

方向：右手螺旋定则判定$\vec{v}\times\vec{B}$　　b端电势高于a端电势

感应电动势

- **任意导体的动生电动势计算**



$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

① 取线元 $\mathrm{d}\vec{l}$ （同时也假定ε_{i}的方向）

② 确定线元处的$\vec{B}$和$\vec{v}$。

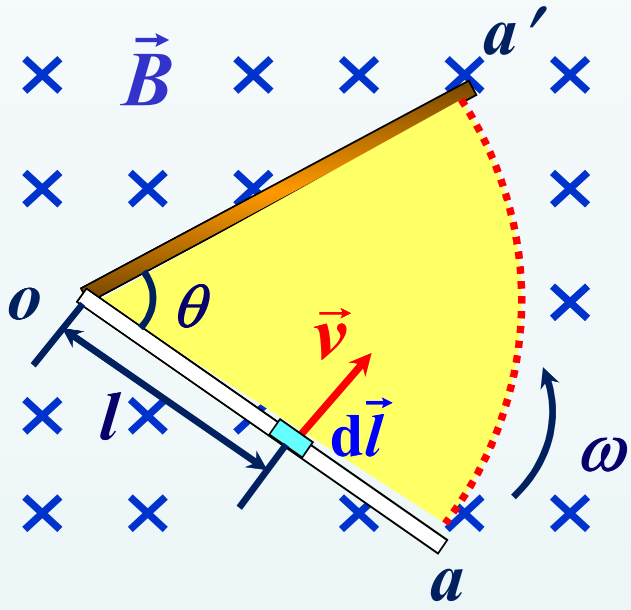
③ 计算 $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

④ 沿导线完成线积分

⑤ 确定电动势的方向 (根据ε_{i}的符号)

感应电动势

例. 金属杆oa长L，在匀强磁场B中以角速度ω逆时针绕o点转动。求杆中的感应电动势。



解： 用动生电动势公式，任取线元$\mathrm{d}\vec{l}$

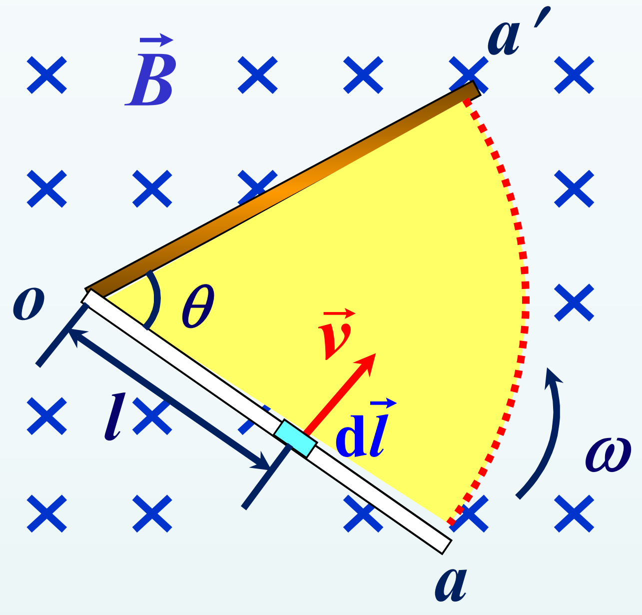
元电动势 $\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{i}} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\omega l B\cdot\mathrm{d}l$

总电动势

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\int_o^a \omega l B\cdot\mathrm{d}l = -\frac{1}{2}\omega B L^2$$

方向：$a \longrightarrow o$

例. 金属杆oa长L，在匀强磁场B中以角速度ω逆时针绕o点转动。求杆中的感应电动势。



法II: 用法拉第电磁感应定律

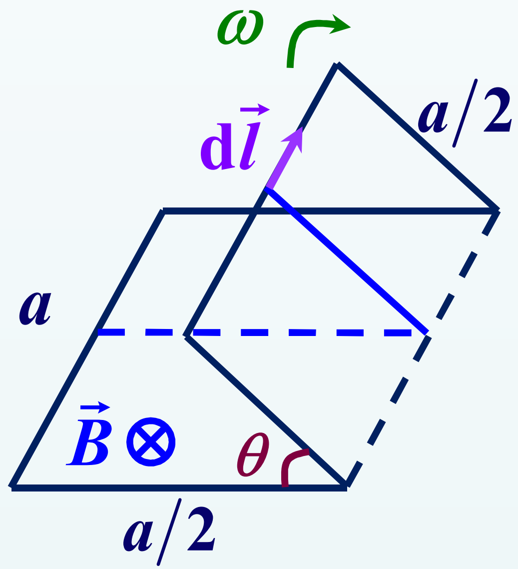
$$\begin{cases} \varepsilon_i = -\dfrac{\boxed{\mathrm{d}\Phi}}{\mathrm{d}t} \\ \mathrm{d}\Phi = B\cdot\dfrac{1}{2}L\cdot\left(L\omega\mathrm{d}t\right) \end{cases}$$

dt时间内扫过面积的磁通量

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{2}\omega BL^2$$

感应电动势

例. 边长为a的正方形回路，磁场与回路垂直，空间磁场均匀分布，导体在打开过程中回路里电动势是多少？

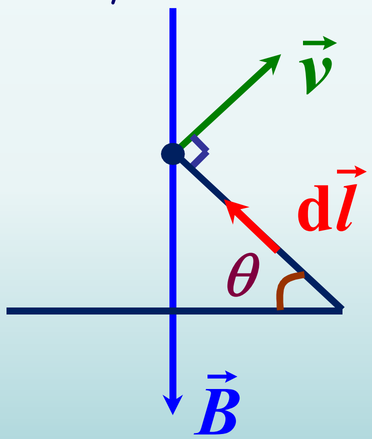


解: 在转动的三段导线中，对长度为$a/2$的两段，始终有 $(\vec{v}\times\vec{B})\perp \mathrm{d}\vec{l}$

$\therefore\quad (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$（不切割磁感线）

故只需考虑导线中长为a一段。

对于这段导线有 $(\vec{v}\times\vec{B})//\mathrm{d}\vec{l}$

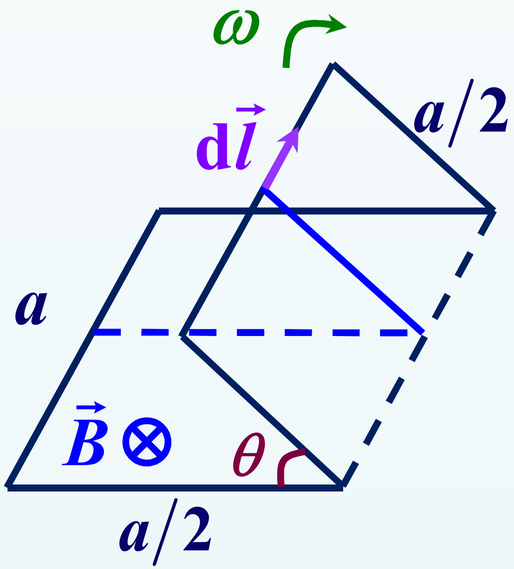


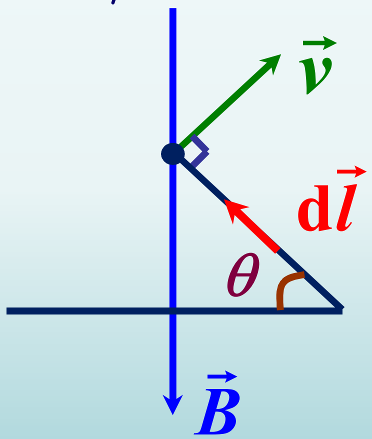
$$(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\left|\vec{v}\times\vec{B}\right|\cdot\mathrm{d}l$$

$$=\left|vB\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|\cdot\mathrm{d}l=\frac{a}{2}\omega\cdot B\sin\theta\cdot\mathrm{d}l$$

感应电动势

例. 边长为a的正方形回路，磁场与回路垂直，空间磁场均匀分布，导体在打开过程中回路里电动势是多少？





解：$(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \left|\vec{v}\times\vec{B}\right|\cdot \mathrm{d}l$

$$= \left|vB\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta)\right|\cdot \mathrm{d}l$$

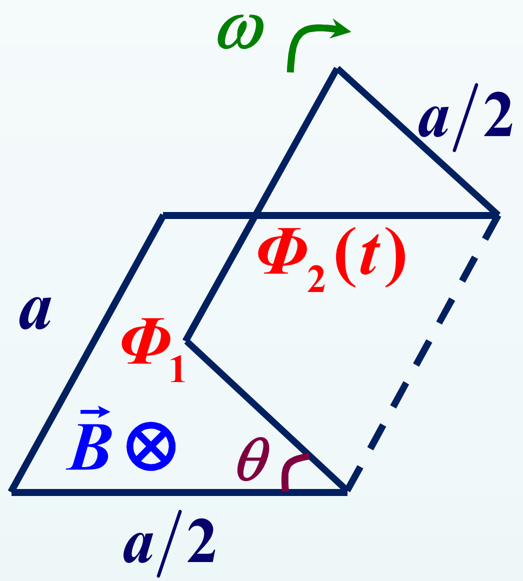
$$= \frac{a}{2}\omega\cdot B\sin\theta\cdot \mathrm{d}l$$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^a \frac{a}{2}\omega\cdot B\sin\theta\cdot \mathrm{d}l$$

$$= \frac{a}{2}\omega\cdot B\sin\theta\int_0^a \mathrm{d}l = \frac{\omega B a^2}{2}\sin\theta$$

感应电动势

例. 边长为a的正方形回路，磁场与回路垂直，空间磁场均匀分布，导体在打开过程中回路里电动势是多少？



法II： 法拉第电磁感应定律

线圈总的磁通量

$$\Phi = \Phi_1 + \boxed{\Phi_2(t)} \longrightarrow BS\cos\theta$$

$$= \Phi_1 + B\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\cos\theta$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Phi_1 + B\cdot a\cdot\frac{a}{2}\cos\theta\right)$$

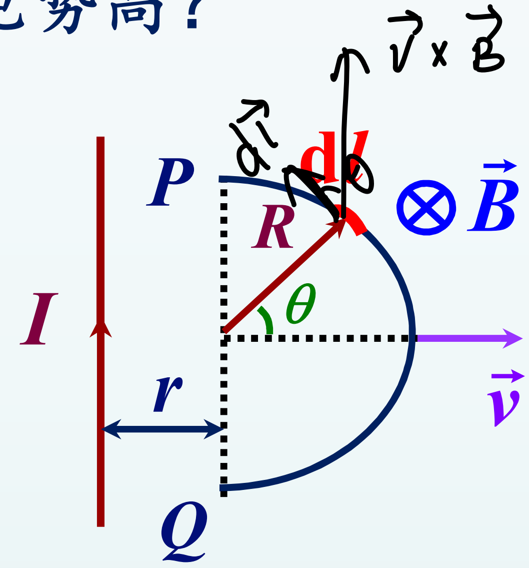
$$= -B\frac{a^2}{2}\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t} = B\frac{a^2}{2}\sin\theta\underbrace{\boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}}_{\omega} = \frac{\omega Ba^2}{2}\sin\theta$$

方向如何？

楞次定律

感应电动势

例:在真空中，有一无限长直导线电流I旁，有一半圆弧导线以v向右运动。已知r，R。求E_{k}、ε_{QP}，P与Q哪点电势高?



解：(1) 在导线上任意dl处的E_{k}

距电流为r'：$r' = r + R\cos\theta$

$$E_{\text{k}} = \left|\vec{v}\times\vec{B}\right| = vB = v\frac{\mu_0 I}{2\pi r'}$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi\left(r + R\cos\theta\right)}$$

(2) 求ε_{QP}

$$\varepsilon_{QP} = \int \vec{E}_{\text{k}}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int \frac{\mu_0 I v}{2\pi\left(r + R\cos\theta\right)}\cdot\cos\theta\cdot\boxed{\mathrm{d}l} \longrightarrow R\,\mathrm{d}\theta$$

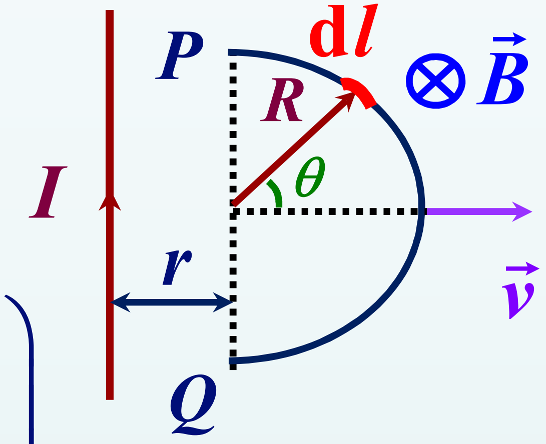
感应电动势

例:在真空中，有一无限长直导线电流I旁，有一半圆弧导线以v向右运动。已知r，R。求E_k、ε_{QP}，P与Q哪点电势高？

解：$$\varepsilon_{QP}=\int \vec{E}_k\cdot d\vec{l}$$

$$=\int \frac{\mu_0 I v}{2\pi\left(r+R\cos\theta\right)}\cdot\cos\theta\cdot \boxed{dl} \longrightarrow R d\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I v}{2}\left(1-\frac{4r}{\pi\sqrt{r^2-R^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{r-R}{r+R}}\right)$$



电动势方向向上

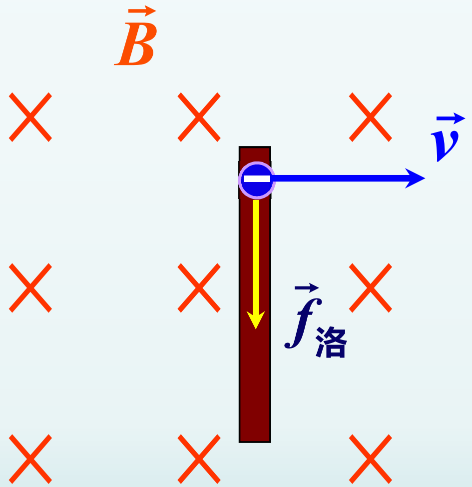
(3) 电动势ε_{QP}的方向：$\boxed{Q\longrightarrow P}\longrightarrow V_P > V_Q$

能否用直线$\overline{PQ}$来代替$\overset{\frown}{PQ}$？否！ $\varepsilon_{\overline{PQ}}=\dfrac{\mu_0 I v}{2\pi r}2R\neq\varepsilon_{\overset{\frown}{PQ}}$

感应电动势

一个问题

磁场中运动导体 → 感应电动势 / 感应电流 → 电 能



洛伦兹力

$$\vec{f}_{洛}=-e\vec{v}\times\vec{B}\perp\vec{v}$$

侧向力

→ 不做功

矛 盾？

谁为回路提供电能？