波动方程

□ 波动方程

以任意一个沿 x正方向传播的行波为例

波函数: $y = f(x,t) = A\cos[\omega\underbrace{(t-\frac{x}{u})}_{\alpha}+\varphi]$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}=-\frac{1}{u}\frac{\partial f}{\partial \alpha} \longrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0}$$

波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$ ——**波动方程**

讨 论:

① 描述经典波动过程的**普遍方程。**任何行波，包括平面简谐波，都是它的解。

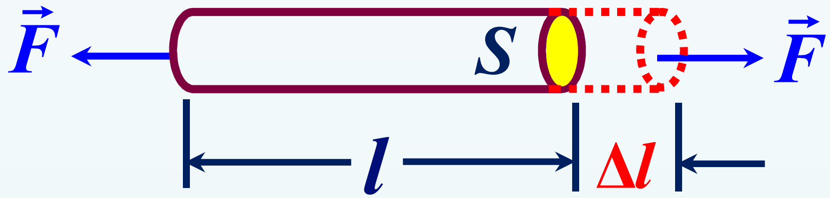
② 波动方程的解并不限于行波。满足上述方程的任何物理量，一定是波动过程。

波的能量

□ 波的能量

- **物体的弹性**

① 线性形变



在弹性限度内，**应力**与**应变**成正比。——**胡克定律**

$$\underbrace{\boxed{\frac{F}{S}}}_{\text{应力}} = \underbrace{\boxed{Y}}_{\text{杨氏模量}}\underbrace{\boxed{\frac{\Delta l}{l}}}_{\text{应变}}$$

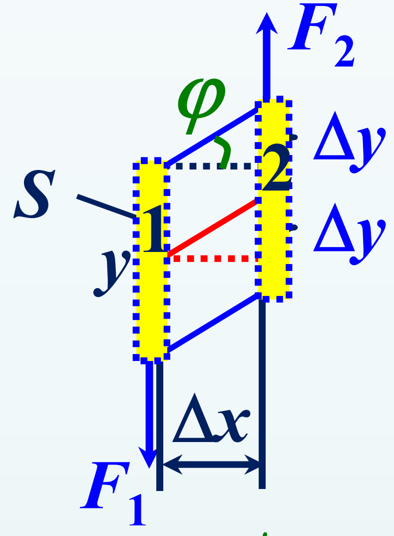
$$F = \frac{YS}{l}\Delta l = k\Delta l$$

$$k = \frac{YS}{l} \propto \frac{1}{l}$$ 弹性系数、倔强系数、刚度

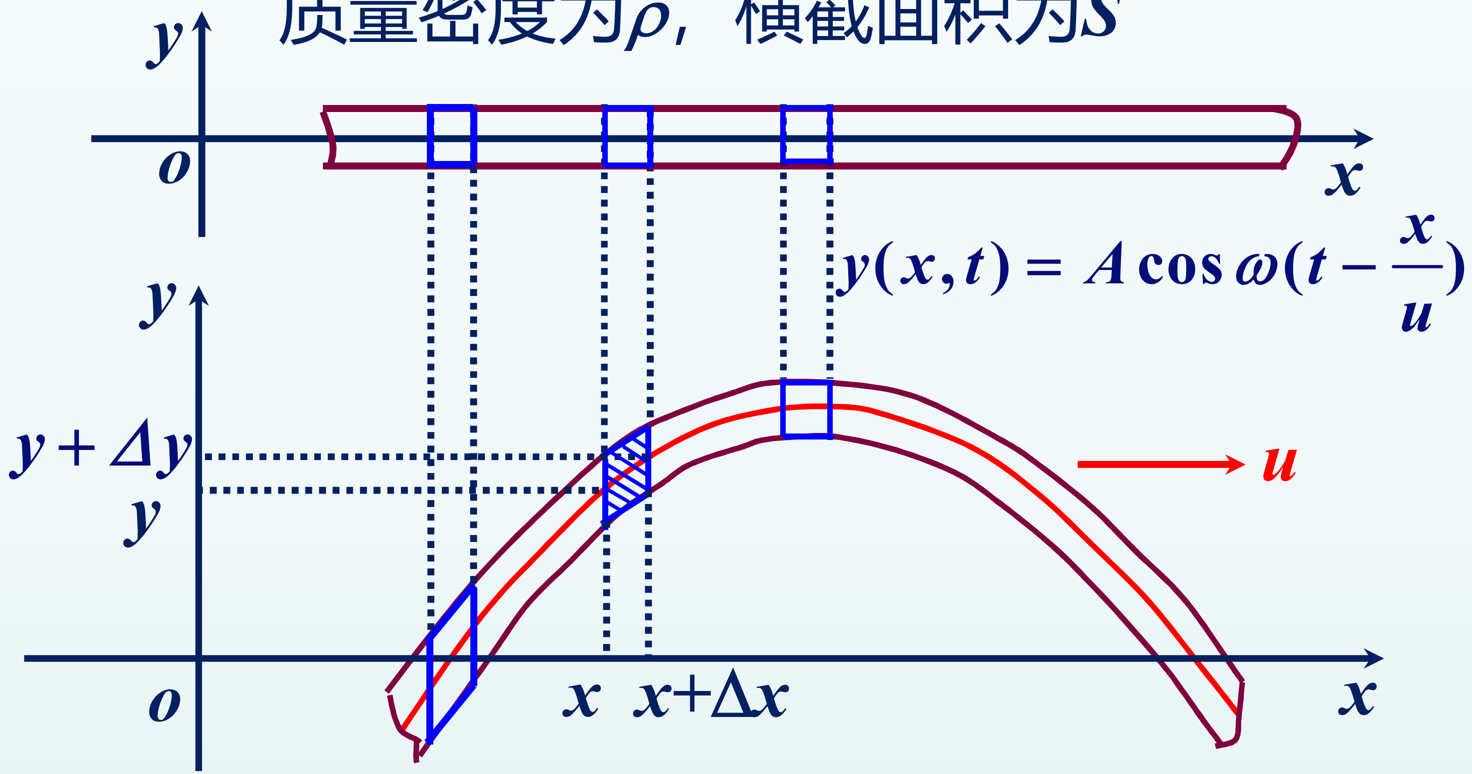
波的能量

② 剪切形变

质量密度为ρ，横截面积为S



$\varphi=\Delta y/\Delta x$



任意长度为Δx的质元， $\Delta m=\rho S\Delta x$ 。

剪应力与**剪应变**成正比

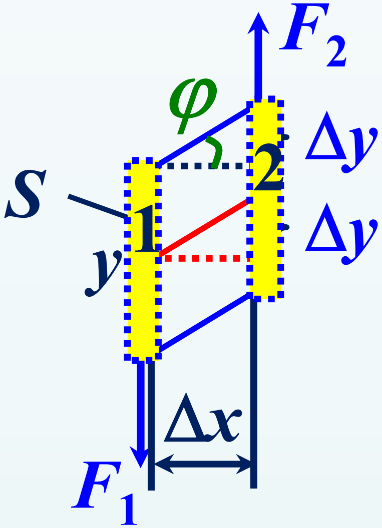
(在弹性限度内)

$$\frac{F}{S}=\boxed{G}\varphi \longrightarrow F=GS\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

剪切模量

波的能量

② 剪切形变



$\varphi=\Delta y/\Delta x$

$$F = GS\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\begin{cases}\text{薄层1对}\Delta x\text{质元力：}F_1 = SG\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_x \\ \text{薄层2对}\Delta x\text{质元力：}F_2 = SG\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}\end{cases}$$

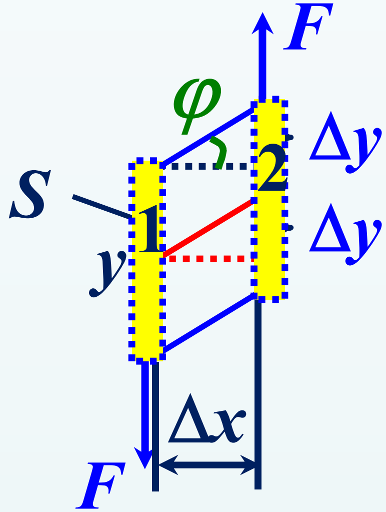
Δx质元受的合力为：

$$F_2 - F_1 = SG\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right]$$

$$= SG\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Delta x = SG\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

由牛顿第二定律得 $SG\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = \rho S\Delta x\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \longrightarrow \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{\rho}{G}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

② 剪切形变



$\varphi = \Delta y / \Delta x$

由牛顿第二定律得 $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

波动方程 $$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

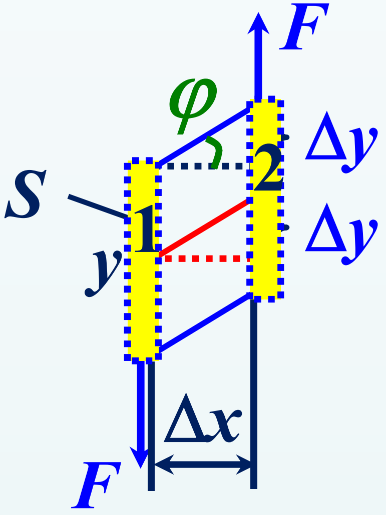
$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

传播速度大小取决于媒质的**密度**和**剪切模量**

声音的传播速度
- 空气: ~340 m/s
- 水中: ~1500 m/s
- 混凝土: ~4000 m/s

波的能量

- **波动能量的传播**



$\varphi=\Delta y/\Delta x$

弹性力 $F = GS\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k\Delta y$ $\qquad k = \dfrac{GS}{\Delta x}$

该质元的弹性势能ΔW_p为

$$\Delta W_p = \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}\frac{GS}{\Delta x}(\Delta y)^2$$

$$= \frac{1}{2}G\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\because \quad u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \longrightarrow G = u^2\rho$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta W_p = \frac{1}{2}G\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \\ G = u^2\rho \end{array}\right\} \Delta W_p = \frac{1}{2}u^2\rho\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

波的能量

弹性势能 $\Delta W_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} u^2 \rho \Delta V \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$

波函数 $y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$

$$\Delta W_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

函数形式完全相同！

$$\Delta W_{\mathrm{p}} = \Delta W_{\mathrm{k}}$$

该质元的振动动能ΔW_{k}为

$$\Delta W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

结 论

- ✓ **动能**和**势能**的关系与振动系统不同；
- ✓ 体元中**动能**和**势能**同相地随时间变化；
- ✓ 体元中**动能**和**势能**在任一时刻都具有相同的数值。

波的能量

质元总机械能

$$\left.\begin{aligned}\Delta W_{\mathrm{p}}&=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\\ \Delta W_{\mathrm{k}}&=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\end{aligned}\right\}\Delta W_{总}=\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

波动质元与**振动系统**对比讨论

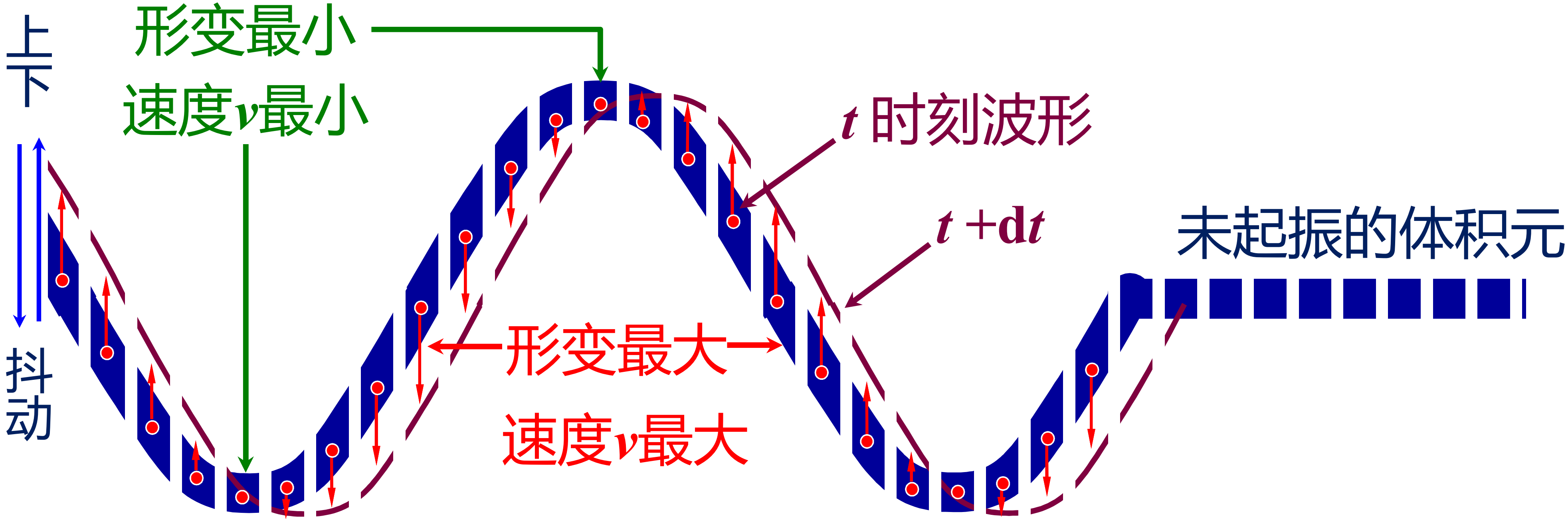
① 波动质元 $\Delta W_{\mathrm{k}}=\Delta W_{\mathrm{p}}$ $\quad \Delta W_{\mathrm{k}}+\Delta W_{\mathrm{p}}\neq \mathrm{const}$

每个质元都与周围媒质交换能量。

② **振动系统** $E_{\mathrm{k}}\neq E_{\mathrm{p}}$ $\quad E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\mathrm{const}$

系统与外界无能量交换（无阻尼自由振荡）

波的能量



波的能量

- **能量密度** ——介质中单位体积中的波动能量

介质中波动的总能量 $\Delta W_{总} = \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega (t - \frac{x}{u})$

能量密度：$w = \dfrac{\Delta W_{总}}{\Delta V} = \rho \omega^2 A^2 \boxed{\sin^2} \underbrace{\omega (t - \frac{x}{u})}_{\text{时间和位置的函数}} \propto \omega^2 A^2$

$T'_w = \dfrac{T}{2}$

平均能量密度：$\overline{w} = \dfrac{1}{T}\int_0^T w \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\rho \omega^2 A^2$

平面简谐波在各处的平均能量密度都相等

波的能量

- **关于波动能量的讨论**

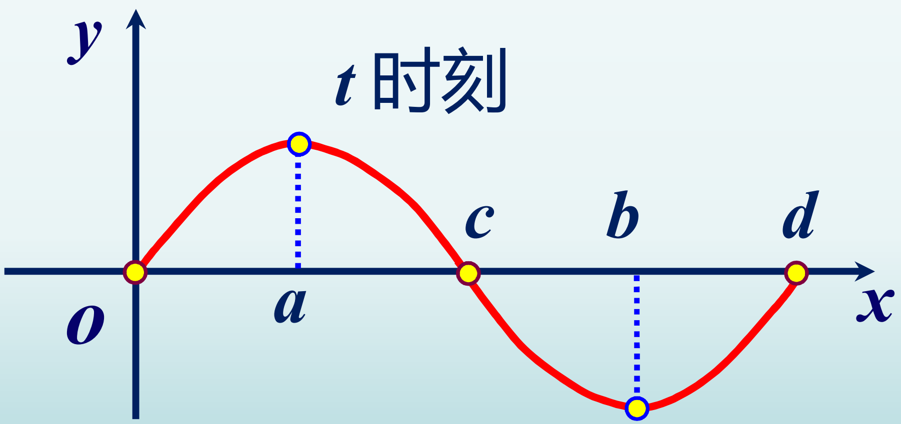
能量表达式
$$\begin{cases} \Delta W_k = \dfrac{1}{2}\rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \boxed{\omega(t-\dfrac{x}{u})} \\ \\ \Delta W_p = \dfrac{1}{2}\rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \boxed{\omega(t-\dfrac{x}{u})} \end{cases} \rightarrow \varphi$$

平衡位置处相位：$\varphi = \pm \dfrac{\pi}{2}$

动能最大、势能最大、**总能量最大！**

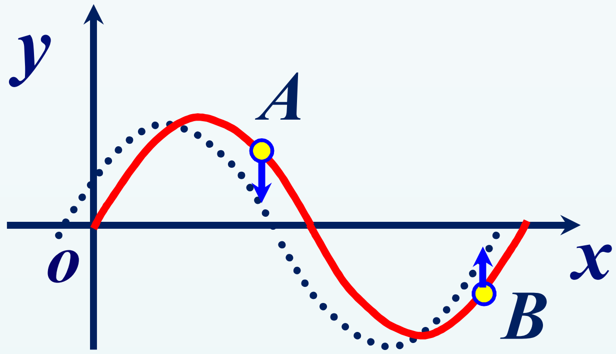
最大位移处相位：$\varphi = 0, or\ \pi$

动能为零、势能为零、**总能量为零！**



波的能量

例. 一平面简谐波在t时刻的波形曲线如图，若此时A处媒质质元的振动动能在增大，则：



~~A、~~ A处媒质质元的弹性势能在减小；

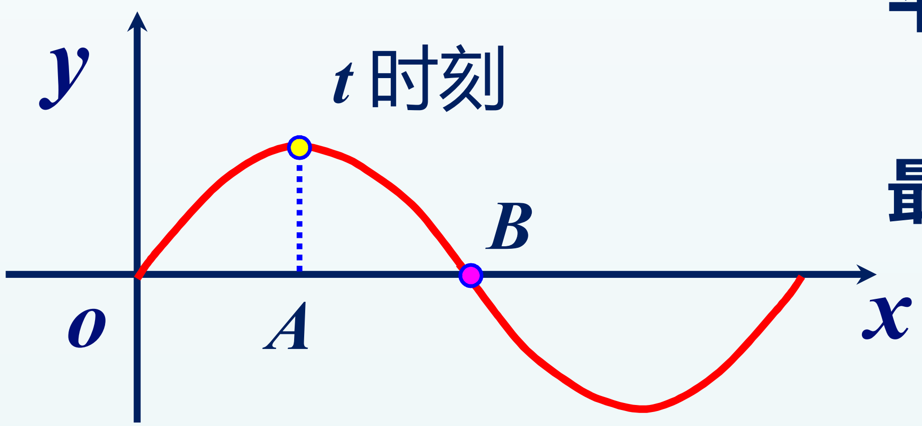
B、波沿x轴负向传播；

~~C、~~ B处质元的振动动能在减小；

~~D、~~ 各点的波的能量都不随时间变化。

波的能量

- **能量的来源**



平衡位置处： 动能最大、势能最大。

最大位移处： 动能为零、势能为零。

质元振动速度

波动动能： 源自质元的运动 $w_{\mathrm{k}} \propto \left(\boxed{\dfrac{\partial y}{\partial t}}\right)^2$

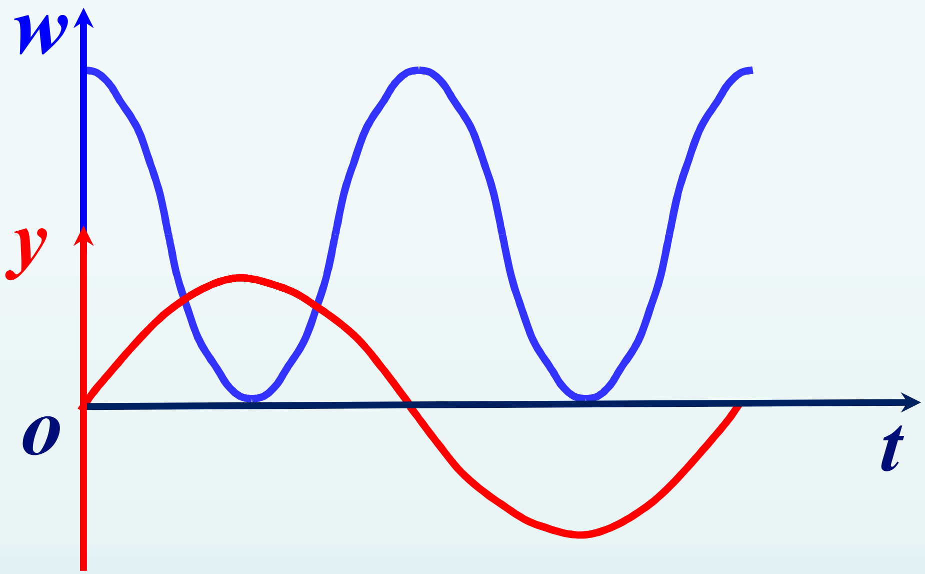
波动势能： 源于介质元的相对形变 $w_{\mathrm{p}} \propto \left(\boxed{\dfrac{\partial y}{\partial x}}\right)^2$

波形曲线斜率

波的能量

- **波是能量传播的一种形式**

能量密度：$w=\dfrac{\Delta W_{总}}{\Delta V}=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\dfrac{x}{u})$



◆ 体元ΔV中能量密度从0到ρw^2A^2，表明外部能量的**输入；**

◆ 体元ΔV中能量密度从ρw^2A^2到0，表明向外**输出；**

能量随着波动的行进，从介质的这一部分传到另一部分。

波动是能量传播的一种形式；（介质不积累能量）

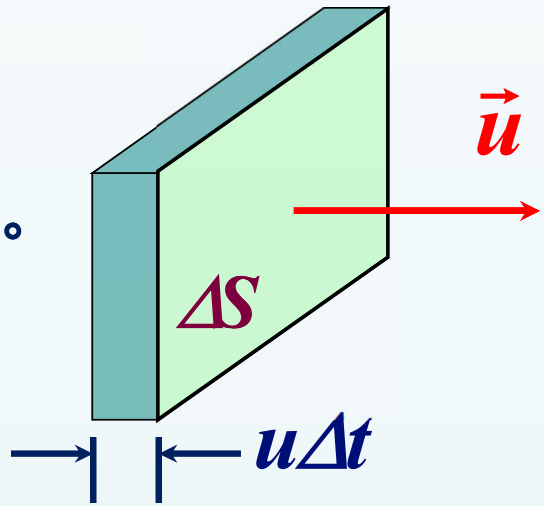
波动的能量沿波速方向传播。

波的能量

- **能流密度**

流动 ⟶ 单位时间通过截面的量

能流P：单位时间内垂直通过某一截面的能量。



Δt 时间内通过垂直波速截面ΔS的能量

$$\Delta W = u\Delta t\cdot\Delta S\cdot \boxed{w} \longrightarrow \text{能量密度}$$

能流： $P=\dfrac{\Delta W}{\Delta t}=u\Delta S\cdot w = u\Delta S\rho\underline{\omega^2 A^2}\sin^2[\omega(t-\dfrac{x}{u})]$

能流随时间周期性变化

单位：瓦特（W）

能流表征能量传递的快慢

波的能量

- **平均能流**

在一个周期内能流的平均值。 $\bar{P} = u\Delta S\bar{w}$ ——波源输出功率

能流密度 i： 单位时间内通过垂直于波速方向的**单位面积**的能量。

$$i = \frac{P}{\Delta S} = wu$$

单位面积的能流

平均能流密度 I： 通过垂直于波动传播方向的单位面积的平均能流。

$$\vec{I} = \frac{\bar{P}}{\Delta S} = u\bar{w} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \vec{u}$$

单位： $\mathrm{W/m^2}$

波的强度

（矢量）

与波速方向相同。

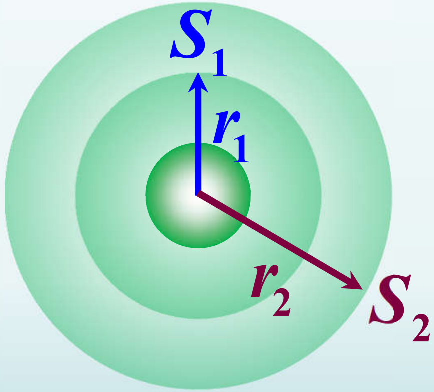
波的能量

$$\bar{P}=u\Delta S\bar{w}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2u\Delta S$$

无吸收的理想介质：穿过各波面(S_1, S_2 ...)的平均能流应相等。

对平面波：$\xrightarrow{u}$ S_1  S_2 $\dfrac{\bar{P}_1}{\bar{P}_2}=\dfrac{A_1^2}{A_2^2}\dfrac{S_1}{S_2}=1\xrightarrow{S_1=S_2}A_1=A_2$

对球面波：



$$\frac{\bar{P}_1}{\bar{P}_2}=\frac{A_1^2}{A_2^2}\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2}=1\rightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{r_2}{r_1}\rightarrow A_1\neq A_2$$

若距波源单位距离的振幅为A，则距波源r处的振幅为 A/r

球面简谐波的波函数：$y=\dfrac{A}{r}\cos\omega(t-\dfrac{r}{u})$

波的能量

例. 假设在一根弦线上传播的简谐波为$y=A\cos(kx-\omega t)$，式中$k=\omega/u$称为波数。（1）写出弦线中的能量密度与能流密度的表示式；（2）写出平均能量密度与平均能流密度（波强）的表示式。

解：（1）弦上质元的动能为

$$\Delta W_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\rho\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2(kx-\omega t)$$

动能等于势能，能量密度为

$$w=\frac{\Delta W_{总}}{\Delta V}=\rho\omega^2A^2\sin^2(kx-\omega t)\xrightarrow[i=uw]{\text{能流密度}}i=u\rho\omega^2A^2\sin^2(kx-\omega t)$$

（2）平均能量密度为 $\bar{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

平均能流密度为 $I=\bar{w}u=\frac{1}{2}\rho u\omega^2A^2$

作业：11T13 ~T18

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周四交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。