函数

假设X, Y是两个数集。如果存在对应法则f，使得对于X中的任何一个数x，都有Y中唯一的数y与之对应，则称f是定义在数集X上的函数，记作

$$\begin{aligned} f:\quad & X \to Y \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{或} \quad y = f(x)$$

其中x称为自变量，y称为因变量，$f(x)$称为函数f在x处的函数值，X称为函数的定义域，Y称为函数的到达域。

注

- 有时函数也叫做映射，$f(x)$也称为x的像，x是$f(x)$的一个原像；
- 两个函数相同当且仅当它们的定义域和对应法则一样；
- 有时为了方便，我们会省略函数的定义域，此时函数的定义域默认为使函数有意义的所有实数的集合。

多值函数

定义中的函数也称为单值函数。有时会存在同一个x对应于多个y的情况，我们称此类函数为多值函数。这门课程我们只研究单值函数。

像集和原像集

假设$A \subset X, B \subset Y$，定义A的像集 $f(A) := \{f(x) \colon x \in A\}$, B的原像集$f^{-1}(B) := \{x \in X \colon f(x) \in B\}$，特别地， $f(X)$ 称为函数的值域。

函数的限制与扩展

假设$A \subset X$, 用$f|A$ 或者$f|_A$ 表示在集合A上与f相等的函数。函数$f|_A$称为函数f在集合A上的限制或者收缩，而相对于函数$f|_A$来说，函数$f \colon X \to Y$称为其在集合X上的扩展或延拓。

函数的图像

给定函数$f\colon X\to Y$，平面点集

$$\{(x,y)\colon x\in X, y=f(x)\}\subset\mathbb{R}^2$$

称为函数f的图像。函数f由其图像唯一决定。反之，平面点集$D\subset\mathbb{R}^2$是否一定是某个函数的图像？

函数的表示方法

- 分段表示，e.g.符号函数、Dirichlet函数、Riemann函数；
- 隐式表示，通过方程$F(x,y)=0$确定变量x,y的函数关系；
- 参数表示

函数的四则运算

给定函数$f\colon X_1 \to \mathbb{R}$ 和$g\colon X_2 \to \mathbb{R}$，如下定义它们的四则运算：

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$;
- $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$;
- $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$;
- $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$.

函数的复合

给定函数$f\colon X_1 \to \mathbb{R}$ 和$g\colon X_2 \to \mathbb{R}$，如下定义它们的复合运算：

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

试确定这些函数的定义域。

确定函数$D\circ R$ 和 $R\circ D$。

单射、满射和双射

给定函数$f\colon X\to Y$，我们称：

- f 是单射，如果$f(x_1)=f(x_2)$ 可以推出$x_1=x_2$；
- f 是满射，如果$f(X)=Y$，即Y中的任意元素都存在原像；
- f 是双射，如果f既是单射又是满射。双射有时也叫做一一对应。

假设存在集合A到B的单射，也存在B到A的单射。证明：A和B之间存在双射。

反函数

给定单射函数$f\colon X\to\mathbb{R}$，那么f 是X 和$f(X)$之间的一一对应，对于每个$y\in f(X)$，存在唯一的x 满足$f(x)=y$。由此我们得到新的函数：$y\mapsto x$（x是y唯一的原像），我们称为f 的反函数，记为f^{-1}。它的定义域是$f(X)$。

注

- f 存在反函数的充要条件是f是单射；
- f 和 f^{-1} 互为反函数；
- 我们有$f\circ f^{-1}=1_{f(X)}, f^{-1}\circ f=1_X$；
- f 和其反函数的图像关于$y=x$对称。

基本初等函数

我们将以下六类函数称为基本初等函数：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。

初等函数

基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数称为初等函数。

双曲函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\mathrm{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \mathrm{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

例

求$\sinh x$ 和 $\cosh x$的反函数。

函数的性质

有界性

给定函数$f\colon E\to\mathbb{R}$。如果存在数实数M（resp. m），使得对于任何$x\in E$，成立$f(x)\le M$（resp. $f(x)\ge m$），那么称$f(x)$在数集E上是上有界函数（resp. 下有界函数）。称M（resp.m）是函数$f(x)$的一个上界（resp. 下界）。如果函数f 既有上界又有下界，那么称f是有界函数。否则，称f是无界函数。

注

- 如果函数f有上界，那么它有无穷多个上界；
- 函数f无上界，当且仅当对于任意$M\in\mathbb{R}$，存在$x\in E$，使得$f(x)>M$;
- 函数f有界，当且仅当存在$M>0$，使得对于任意$x\in E$成立$|f(x)|\le M$；
- 函数f的有界性和其值域$f(E)$的有界性是一致的

单调性

给定函数$f: E \to \mathbb{R}$，如果对于任意$x_1, x_2 \in E$ 且 $x_1 < x_2$，总有

- $f(x_1) \leq f(x_2)$，则称函数$f(x)$是数集E上的单调递增函数；
- $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数$f(x)$是数集E上的严格单调递增函数；
- $f(x_1) \geq f(x_2)$，则称函数$f(x)$是数集E上的单调递减函数；
- $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数$f(x)$是数集E上的严格单调递减函数；

注

- 函数的单调性依赖于定义域的选取；
- 严格单调函数是单射，存在反函数。它的反函数与原来函数的单调性一致。

奇偶性

给定函数$f: E \to \mathbb{R}$，且定义域E关于原点对称。如果对于任意$x \in E$ 有

- $f(x) = f(-x)$，那么称f是E上的偶函数；
- $f(x) = -f(-x)$，那么称f是E上的奇函数

注

- 奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于y轴对称；
- 定义域关于原点对称的函数可以写成奇函数和偶函数的和。

周期性

假设函数f 定义在数集E上，T 是一个正实数，而且对于任意$x \in E$，都有$x \pm T \in E$，且 $f(x \pm T) = f(x)$。那么称$f(x)$是周期函数，T是它的一个周期。

注

周期函数f的周期不是唯一的，如果T是一个周期，那么$nT, n \in \mathbb{N}$也是周期。如果最小正周期存在，通常将其称为f的周期。

例

证明 $f(x) = x \cos x$不是周期函数。