数列的极限

数列

定义在$\mathbb{N}$上的函数f称为数列。记$a_n = f(n)$，数列也通常写成$\{a_n\}$ 或者

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

数列极限，$\epsilon - N$语言

假设$\{a_n\}$是一个数列，$a \in \mathbb{R}$。如果对于任意$\epsilon > 0$，总存在正整数N，使得当$n > N$时有 $|a_n - a| < \epsilon$, 则称数列$\{a_n\}$收敛于a，a称为数列$\{a_n\}$的极限。记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{或} \quad a_n \to a(n \to \infty).$$

如果数列$\{a_n\}$没有极限，则称数列$\{a_n\}$不收敛或者发散，称$\{a_n\}$是发散数列。

- $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon;$$
- $$a\text{不是数列的极限} \Leftrightarrow \exists\epsilon > 0, \forall N, \exists n > N, |a_n - a| \geq \epsilon;$$
- $$\text{数列没有极限} \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \exists\epsilon > 0, \forall N, \exists n > N, |a_n - a| \geq \epsilon.$$

极限的理解

- 数列$\{a_n\}$的极限是a，当且仅当对于a的任何一个邻域，数列只有有限项落在该邻域之外；
- 改变数列有限项不影响它的敛散性和极限；
- ϵ 用来衡量数列的项与a的接近程度，可以假设$0 < \epsilon < 1$，可以用$2\epsilon, \epsilon^2, \epsilon^2 + \epsilon$ 等等代替； N依赖于 ϵ ，并不唯一。

约定

- $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists N, \forall n > N, a_n > M;$$
- $$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists N, \forall n > N, a_n < M;$$
- $$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists N, \forall n > N, |a_n| > M;$$

例

证明下列极限：

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3};$$
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+n-4}{2n^3-3} = \frac{5}{2}.$$

例

$(-1)^n$是否有极限？

两个常用极限

- $\lim_{n\to\infty} q^n$；
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \quad (a>0)$.

例

假设数列$\{a_n\}$极限是a，求证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a.$$

例

假设正项数列$\{a_n\}$的极限是a，求证：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a.$$

唯一性

若数列$\{a_n\}$收敛，那么极限是唯一的。

有界性

收敛数列都是有界的。

有界性是数列收敛的必要非充分条件。

极限过程与不等式的关系

设$\{x_n\},\{y_n\}$是两个收敛数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$。如果 $A > B$，那么存在N，使得对于任何$n > N$，有$x_n > y_n$。特别地，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > 0$，那么存在$N$，使得对任何$n > N$，有$x_n > 0$。

Corollary

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，如果存在$N$，对于任何$n > N$，

- $x_n < y_n$，那么$A \le B$;
- $x_n \le y_n$，那么$A \le B$;
- $x_n > y_n$，那么$A \ge B$;
- $x_n \ge y_n$，那么$A \ge B$;

取极限号后，严格不等号变成不严格的不等号。

极限过程与算术运算

设$\{x_n\},\{y_n\}$是两个收敛数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$。那么，

- $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B$;
- 当$B \neq 0$时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$.

例

假设$P(x), Q(x)$是多项式，计算下列极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}.$$

数列极限存在性的判定

追敛性、夹逼定理、sandwich theorem

设数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足条件：对于$\forall n > N$，有$x_n \le y_n \le z_n$。如果数列 $\{x_n\},\{z_n\}$收敛于同一个极限A，那么$\{z_n\}$也收敛于该极限A。

例 (常用极限)

假设$q > 0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0.$$

例 (常用极限)

证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

子列

设$\{x_n\}$是一个数列，$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$是一个严格递增的自然数列，则称数列$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$是数列$\{x_n\}$的一个子列。注意：$n_k \geq k$。

定理

数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是它的所有子列都收敛。此时，所有子列的极限都相等。

推论

如果$\{x_n\}$中有一个子列不收敛，或者两个子列收敛但极限不等，那么$\{x_n\}$发散。

例 (证明下述数列发散)

$\{(-1)^n\}$，$\{\sin \frac{n\pi}{4}\}$

单调数列

数列$\{x_n\}$满足：

- $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$，则称$\{x_n\}$是单调递增数列；
- $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$，则称$\{x_n\}$是严格单调递增数列；
- $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$，则称$\{x_n\}$是单调递减数列；
- $x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$，则称$\{x_n\}$是严格单调递减数列；

有时我们也将从某项开始单调的数列视为单调数列，

有界数列

- 如果存在M，使得对于$\forall n \in \mathbb{N}$，$x_n \leq M$，则称数列$\{x_n\}$是有上界数列；
- 如果存在L，使得对于$\forall n \in \mathbb{N}$，$x_n \geq M$，则称数列$\{x_n\}$是有下界数列；
- 如果数列既有上界又有下界，则称它是有界数列。

单调有界定理

（从某项开始）单调递增有上界的数列收敛，（从某项开始）单调递减有下界的数列收敛。

确界原理$\Rightarrow$ 单调有界定理

例 (证明下述极限：)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0 \quad (|q| > 1);$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \quad (q \in \mathbb{R})$

Cauchy列

设$\{x_n\}$是一个数列，如果$\forall \epsilon > 0, \exists N$，使得$\forall m, n > N$，成立$|x_m - x_n| < \epsilon$，则称$\{x_n\}$是一个Cauchy列。

注

- 可以将m, n 改成$n, n+p$；
- 数列$\{x_n\}$不是Cauchy 列的数学表述；
- Cauchy收敛准则的优点在于不需要先知道极限值

Cauchy收敛准则

数列收敛当且仅当它是Cauchy列。

例

证明：如果对于$\forall n \in \mathbb{N}$，成立 $|x_{n+1} - x_n| \le c\rho^n$，其中$c > 0, 0 < \rho < 1$。那么数列$\{x_n\}$收敛。

例

定义$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$，（$p \in \mathbb{R}$）。判断数列$\{S_n\}$的敛散性。

Bernoulli不等式

假设$x_1, x_2, \cdots, x_n > -1$且同号，成立

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots x_n.$$

自然常数e

- 数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$严格单调递增且收敛，记其极限为e，即
$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n;$$
- 数列$\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$严格单调递减且
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e;$$
- $$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!},\quad 0<\theta_n<1,$$
特别地，
$$e=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

推论

e是无理数。

实数连续性的八个等价命题

以下八个命题等价：

- Dedekind分割定理；
- 确界原理；
- 单调有界定理；
- 闭区间套定理；
- 有限覆盖定理；
- 聚点定理；
- 致密性定理；
- Cauchy收敛准则；

等价性证明

- 已证：Dedekind分割定理$\Leftrightarrow$ 确界原理 $\Rightarrow$ 单调有界定理；
- 下证：单调有界定理$\Rightarrow$ 闭区间套定理 $\Rightarrow$ 有限覆盖定理 $\Rightarrow$ 聚点定理 $\Rightarrow$ 致密性定理 $\Rightarrow$ Cauchy收敛准则 $\Rightarrow$ 单调有界定理；
  闭区间套定理 $\Rightarrow$ Dedekind 分割定理

闭区间套

设区间列$\{[a_n, b_n]\}$满足以下性质：

- $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], \forall n \in \mathbb{N}$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$,

则称$\{[a_n, b_n]\}$是闭区间套。

闭区间套定理

如果$\{[a_n,b_n]\}$是闭区间套，那么存在唯一的$\xi\in[a_n,b_n$，$\forall n\in\mathbb{N}$，且

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \xi.$$

证明

单调有界定理$\Rightarrow$ 闭区间套定理$\Rightarrow$ Dedekind 分割定理

注意

闭区间换成开区间，定理不成立！

Cantor定理

不存在$\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$的双射。

开覆盖

设$E\subset\mathbb{R}$是一个数集，$\mathscr{H}=\{I_\lambda\colon I_\lambda$是开区间$,\lambda\in\Lambda\}$。如果$E$中的任何一点都在$\mathscr{H}$的某个开区间里，即$E\subset\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$。那么称$\mathscr{H}$ 是 E的一个开覆盖，$\mathscr{H}$ 覆盖了E。

如果$\mathscr{H}$ 是一个有限集，则称$\mathscr{H}$ 是一个有限覆盖。

如果$\mathscr{H}'\subset\mathscr{H}$ 也是E的一个覆盖，则称$\mathscr{H}'$是$\mathscr{H}$的一个子覆盖。

Heine-Borel有限覆盖定理

有界闭区间的开覆盖存在有限子覆盖。

证明

闭区间套定理$\Rightarrow$ 有限覆盖定理

注意

闭区间换成开区间，定理不成立!

聚点、极限点

设$E \in \mathbb{R}$ 是一个数集， $\xi \in \mathbb{R}$。如果ξ 的任何邻域里都存在E中的无限多个点，那么称ξ 是 E的一个极限点。

聚点的等价描述

可以将定义中“ξ 的任何邻域里都存在E中的无限多个点”改成

- ξ的任何空心邻域中有E中的点；
- 存在各项互异的数列$\{x_n\} \subset E$收敛于ξ。

Weierstrass聚点定理

有界无限数集至少有一个聚点。

证明

有限覆盖定理$\Rightarrow$ 聚点定理

无界数列$\{x_n\}$必存在子列$\{x_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$。或者存在子列$\{x_{n_{k'}}\}$ 使得 $\lim\limits_{k'\to\infty} x_{n_{k'}} = +\infty$，或者存在子列$\{x_{n_{k''}}\}$ 使得 $\lim\limits_{k''\to\infty} x_{n_{k''}} = -\infty$。

致密性定理

有界数列必有收敛子列。

证明

聚点定理$\Rightarrow$ 致密性定理$\Rightarrow$ Cauchy收敛准则$\Rightarrow$ 单调有界定理