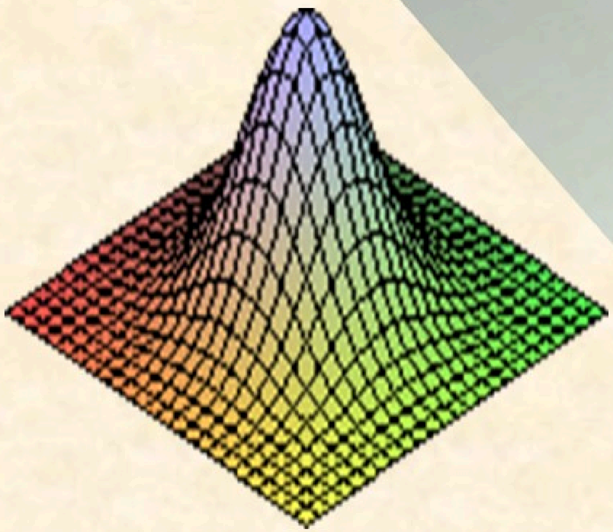
概率论与数理统计



主讲人：吴 娟

制作人：叶鹰　吴娟

wujuan@hust.edu.cn

雨课堂 Rain Classroom

投票 最多可选1项

已知$X \sim \mathrm{N}(0,1)$，问 $Y = X^2$ 服从正态分布吗？

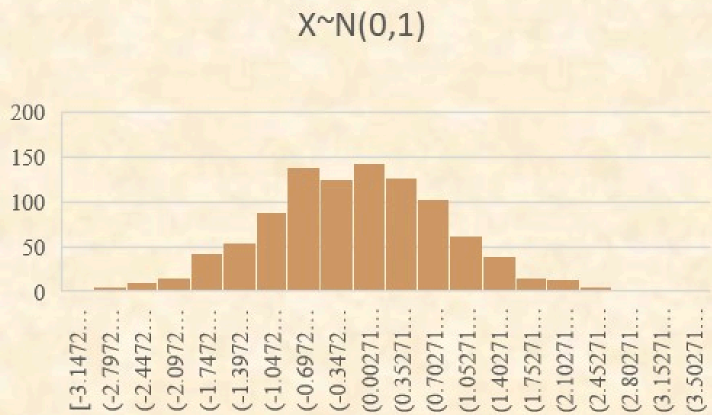
A 服从

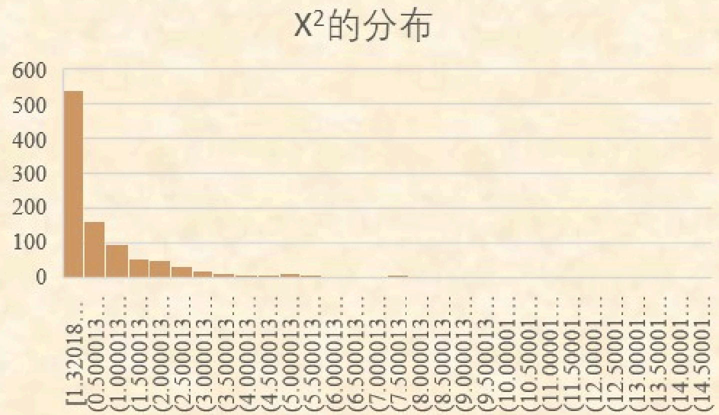
B 不服从

§ 2.4 随机变量函数的分布

问题

已知$X \sim N(0,1)$，问 $Y = X^2$ 服从正态分布吗？





例 已知X的分布列，求$Y_1=2X+1$，$Y_2=X^2$的分布。

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

解

$Y_1=2X+1$	-3	-1	1	3	5
$Y_2=X^2$	4	1	0	1	4

Y_2	0	1	4
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$

连续型随机变量函数的分布

例　设$X\sim N(0,1)$，求$Y=aX+b\ (a\neq 0)$的分布.

解：
$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)$$
$$=\begin{cases} P(X\le \dfrac{y-b}{a})=\Phi(\dfrac{y-b}{a}), & a>0 \\ P(X>\dfrac{y-b}{a})=1-\Phi(\dfrac{y-b}{a}), & a<0 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2}, & a>0 \\ -\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2}, & a<0 \end{cases}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a|}e^{-\frac{(y-b)^2}{2a^2}}$$

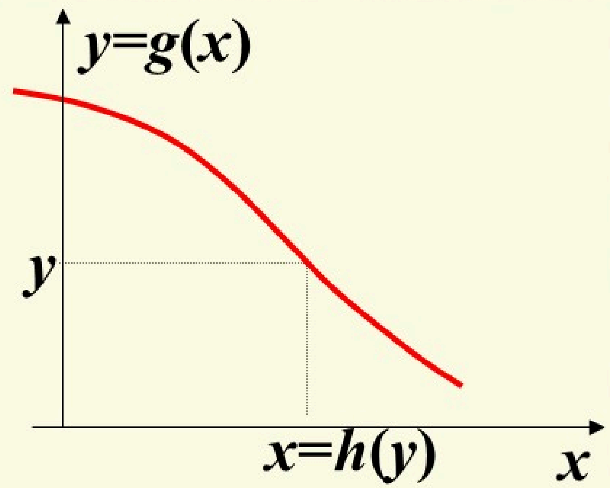
即$Y\sim N(b,a^2)$.

定理 设X的密度函数为$f_X(x)$，函数$y=g(x)$有反函数$x=h(y)$，且 $h'(y)$ 存在并保号，则$Y=g(X)$是连续型随机变量,且密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & y\in(\alpha,\beta) \\ 0\ , & 其它 \end{cases}$$

其中(α,β)为$g(x)$的值域.

证明： 若$h'(y)<0$，则 $g(x)\searrow$



$$F_Y(y)=P(g(X)\le y)=P(X\geqslant h(y))$$

$$=\int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)dx \qquad \alpha<y<\beta$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X[h(y)]\,|\,h'(y)\,|$$

$$\left.\begin{array}{ll} 当y>\beta时, & F_Y(y)=1 \\ 当y<\alpha时, & F_Y(y)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=0$$

$Y=g(X)$的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0\ , & \text{其他} \end{cases}$$

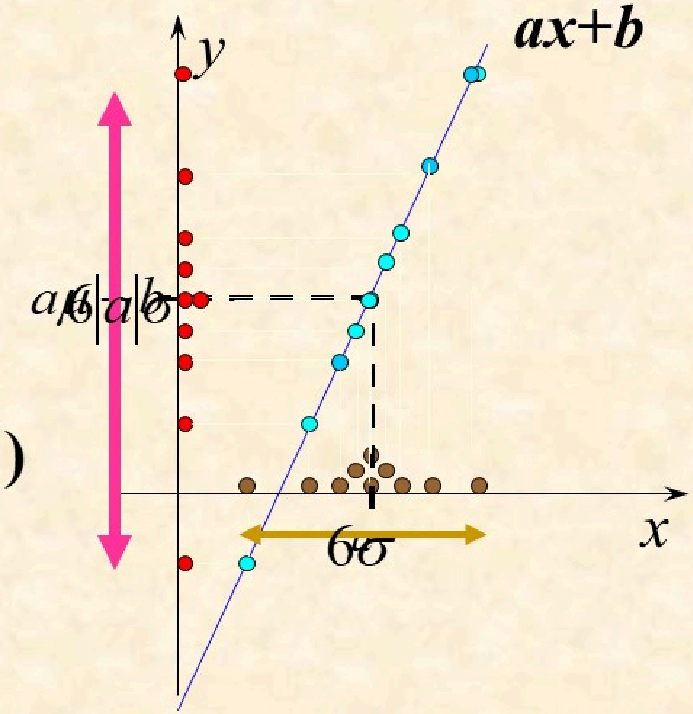
例 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $Y=aX+b\ (a\neq 0)$的分布。

解: $y=g(x)=ax+b,\ x=h(y)=\dfrac{y-b}{a},\ h'(y)=\dfrac{1}{a}$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left|\frac{1}{a}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma}e^{-\frac{(y-a\mu-b)^2}{2a^2\sigma^2}}$$

即 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,\ (|a|\sigma)^2)$



线性变换不变性

$Y=g(X)$的密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0\quad, & 其他 \end{cases}$

例 设 $X\sim E(\lambda)$，求 $Y=X^3$ 的分布。

解: $y=g(x)=x^3$, $x=h(y)=y^{\frac{1}{3}}$,

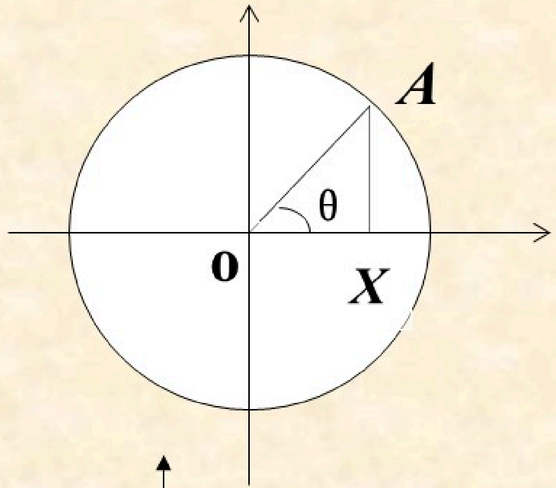
$$h'(y)=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\lambda e^{-\lambda\sqrt[3]{y}}\,\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\lambda e^{-\lambda\sqrt[3]{y}}, & y>0 \\ 0\quad, & y\leq 0 \end{cases}$$

例　设C是以原点为圆心的单位圆周，A为C上的任意一点，求A的横坐标的分布。



解　记θ为OA与x轴的夹角，

由题意 $\theta \sim U[-\pi,\pi]$，则$X=\cos\theta$

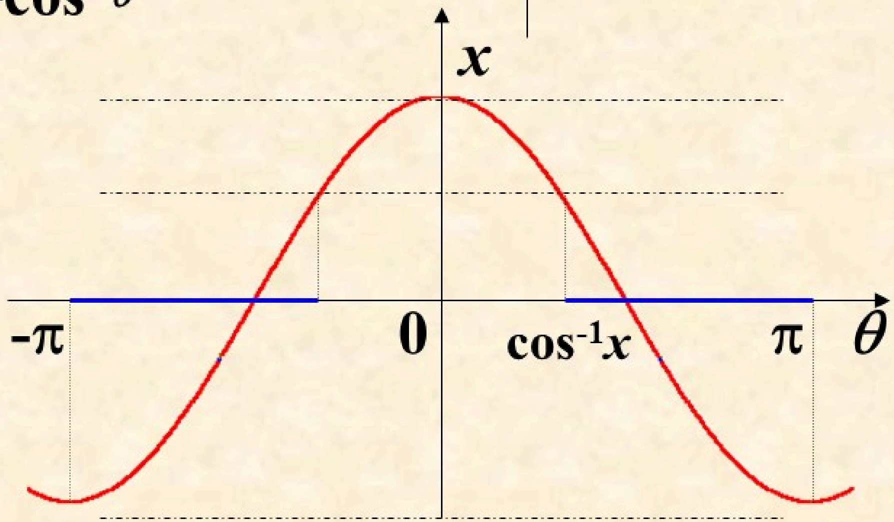
$$F_X(x)=P(\cos\theta\le x)$$

$$=\begin{cases}0 & x<-1\\ p & -1\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

$$p=P(-\pi<\theta\le-\arccos x)$$
$$+P(\arccos x<\theta\le\pi)$$

$$=2\times\frac{\pi-\arccos x}{2\pi}$$

$$=1-\frac{\arccos x}{\pi}$$



$$f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$