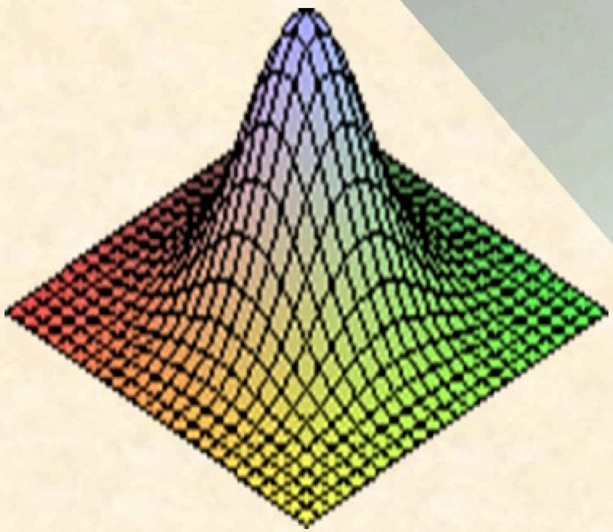
概率论与数理统计



主讲人：吴 娟

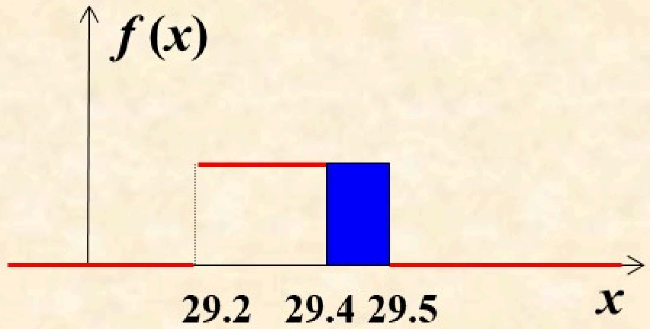
制作人：叶鹰　吴娟

wujuan@hust.edu.cn

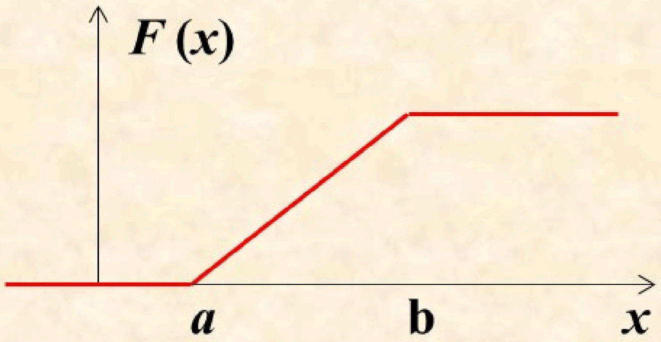
§ 2.3 连续型随机变量

1．均匀分布　$X \sim U[a,b]$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

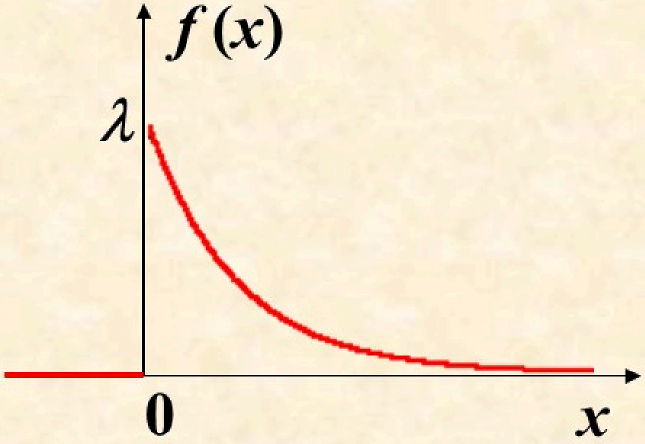


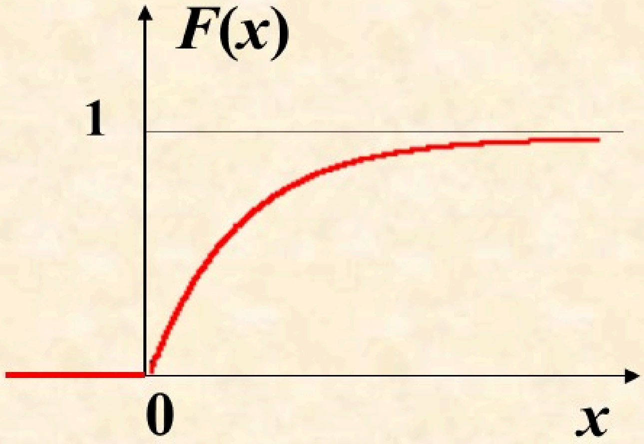
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b\end{cases}$$



2．指数分布 $X \sim E(\lambda)$, 其中$\lambda>0$为常数.

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$





例　设一大型设备在任何长为t时间内发生故障的次数 $N(t)\sim P(\lambda t)$.

（1）求相继两次故障之间的时间间隔T的概率分布.

（2）求在设备无故障工作8小时的条件下，再无故障工作10小时以上的概率P.

解（1）$F(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(N(t)=0)$

$$=1-\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t} \qquad t\geqslant 0$$

$t<0$时，$F(t)=P(\phi)=0$　　即 $T\sim E(\lambda)$

（2）$P=P(T>18/T>8)=\dfrac{P(T>18,T>8)}{P(T>8)}=\dfrac{P(T>18)}{P(T>8)}$

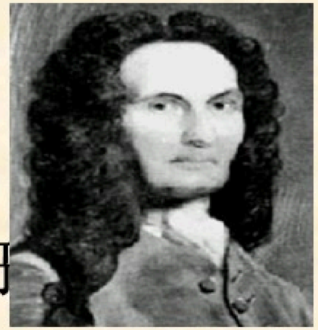
$$=\frac{1-F(18)}{1-F(8)}=\frac{e^{-18\lambda}}{e^{-8\lambda}}=e^{-10\lambda}=P(T>10)$$ 无记忆性

投票(匿名) 最多可选1项

了解几种分布具有无记忆性

- A 0
- B 1
- C 2
- D 3

3．正态分布



德莫弗

伽利略（G.Galileo，1564~1642）

《关于两个主要世界系统的对话——托雷密和哥

辛普森（Thomas Simpson，1710~1761）

《在应用天文学中取若干观察值的平均的好处》

德莫弗（Abraham De Moivre, 1667-1754）

拉格朗日（J.L.Lagrange，1736~1813）

《关于取平均方法的有用性……》

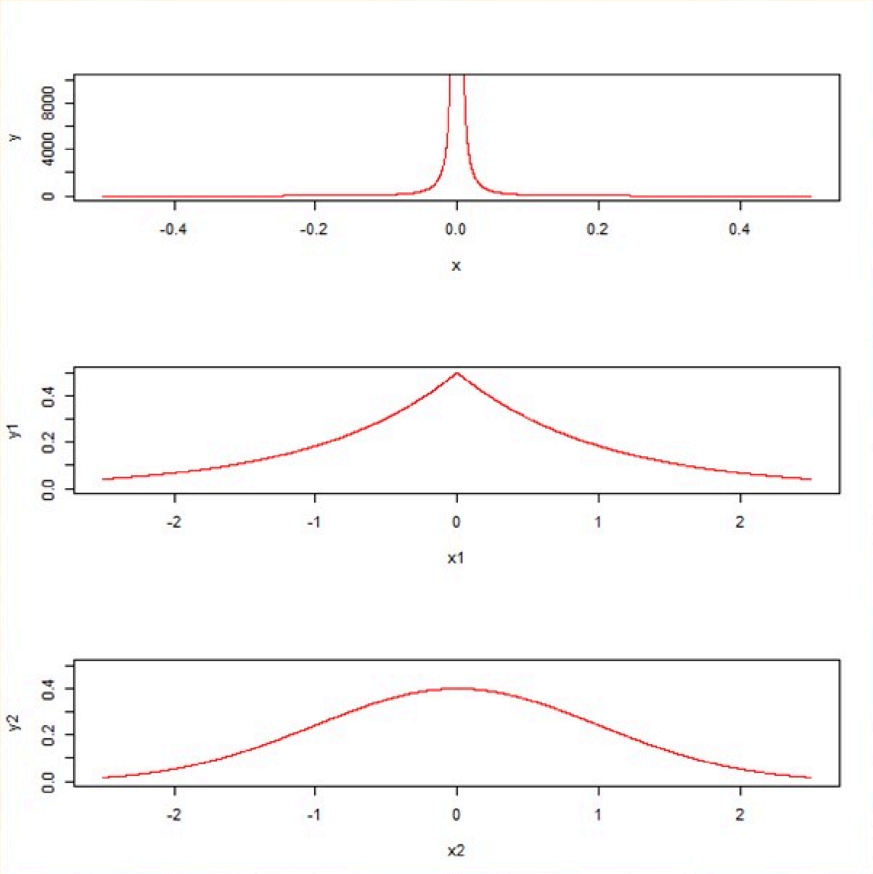
拉普拉斯（P.S.Laplace，1749~1827）

高斯（Carl Friedrich Gauss，1777~1855）

《绕日天体运动的理论》(1809)

主观题 100分

给出下列三个函数图形的共性和不同点

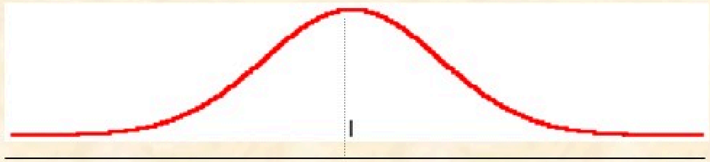


$$\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{2}e^{-|x|}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

正态分布

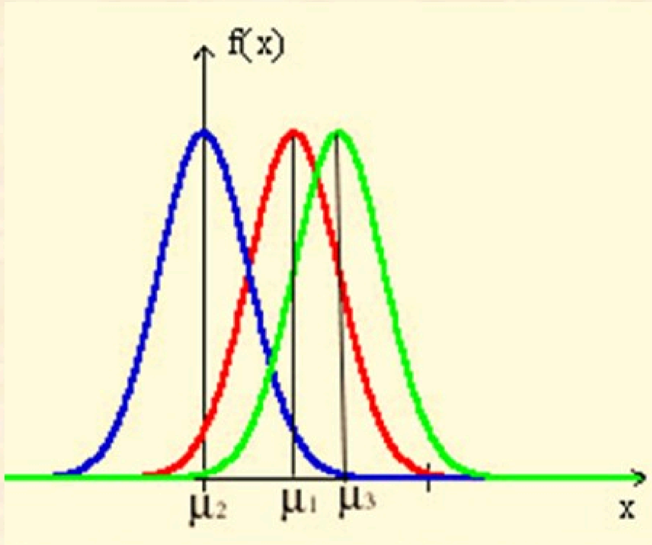


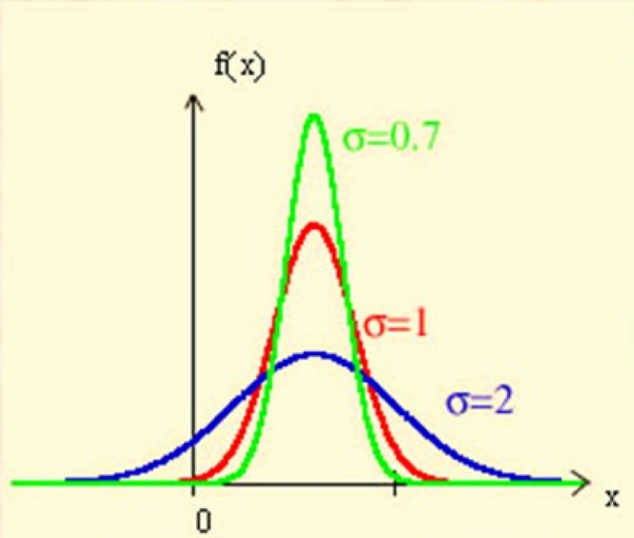
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = [\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy] = [\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy]^{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{x=r\cos\theta}} \atop {y=r\sin\theta} \quad [\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} rdrd\theta]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的图形特点





μ 决定了图形的中心位置，σ 决定了图形中峰的陡峭程度.

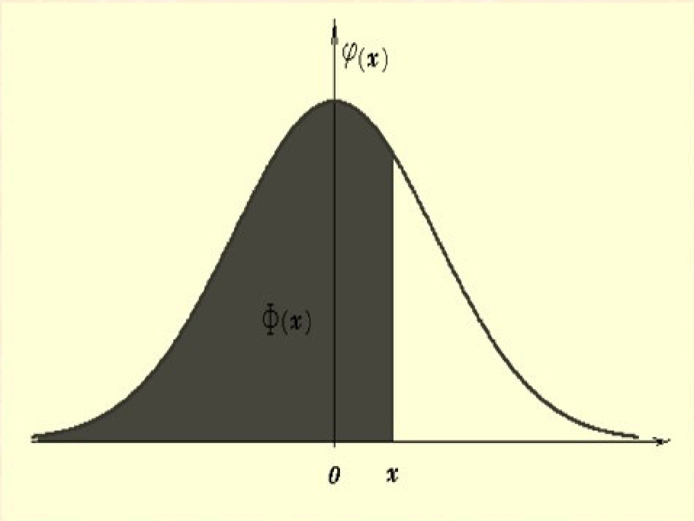
正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

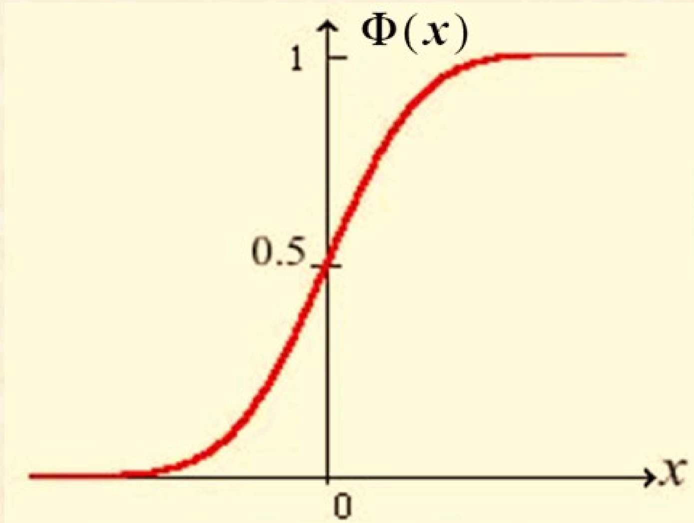
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \ ?$$

标准正态分布

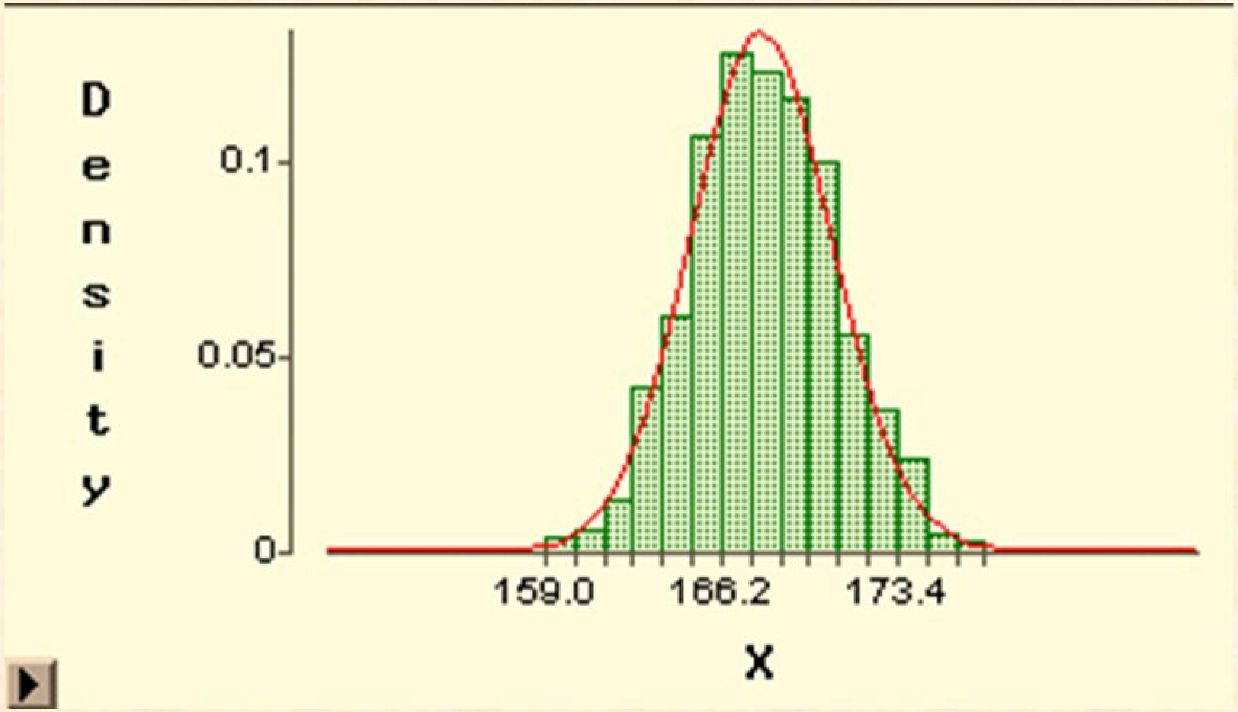
$X \sim N(0,1)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$





某零件尺寸的测量数据（*mm*）



频率直方图

3. 正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

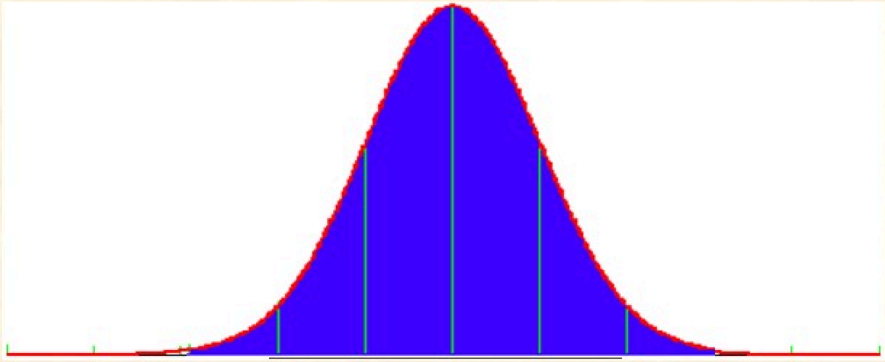
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

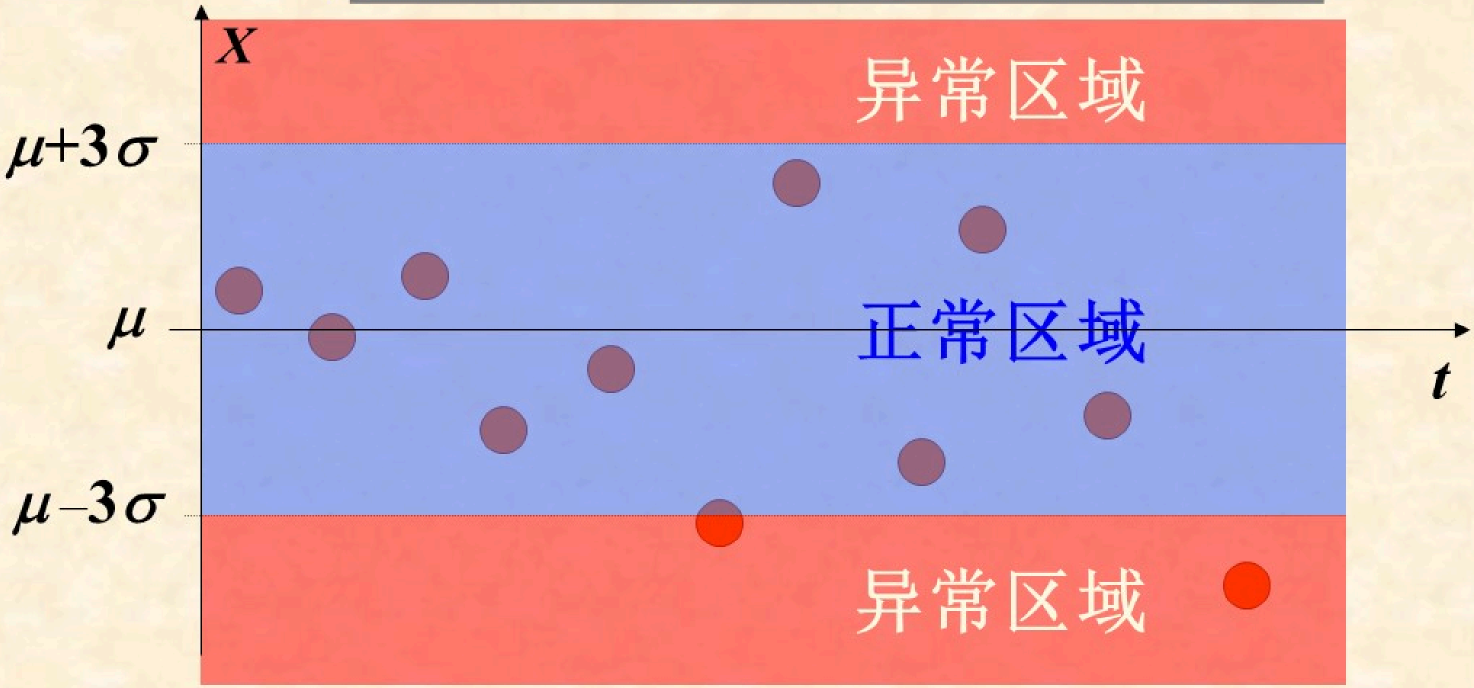
$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

3σ原则



a	1	2	3
$P(\|X-\mu\|<a\sigma)$	0.6827	0.9545	0.9973



例 由历史记录，某地区年降雨量 $X \sim N(600, 150^2)$（单位：mm）

问:(1) 明年降雨量在400mm~700mm之间的概率是多少?

(2) 明年降雨量至少为300mm的概率是多少?

(3) 明年降雨量小于何值的概率为0.1?

解 (1) $P(400 < X < 700) = \Phi(\frac{700-600}{150}) - \Phi(\frac{400-600}{150})$

$$= \Phi(0.67) - \Phi(-1.33) = 0.6568$$

(2) $P(X \geq 300) = 1 - \Phi(\frac{300-600}{150}) = 1 - \Phi(-2) = 0.9772$

(3) $P(X < a) = \Phi(\frac{a-600}{150}) = 0.1 \Rightarrow \Phi(-\frac{a-600}{150}) = 0.9,$

$$-\frac{a-600}{150} = 1.28, \quad \Rightarrow \quad a=408$$

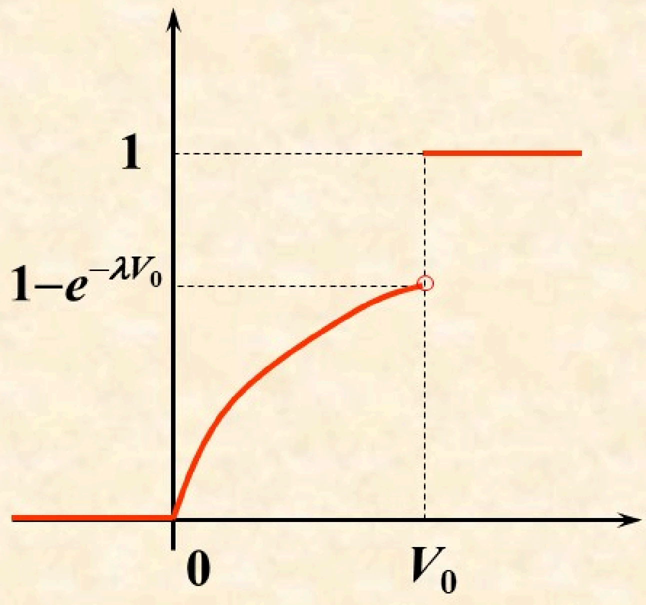
查表

思考题： 是否存在既不是离散型，也不是连续型的随机变量？

设某电路受外界刺激电压V随机波动且$V \sim E(\lambda)$. 现用电压表测量，电压表的最大读数为V_0. 则电压表的读数$X = \min\{V, V_0\}$.

解 由题意 $X = \min(V, V_0)$，故

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \le x < V_0, \\ 1, & x \ge V_0. \end{cases}$$



$$P(X = x) = \begin{cases} e^{-\lambda V_0}\ \alpha, & x = V_0, \\ 0, & x \ne V_0, \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (1 - e^{-\lambda x})/(1-\alpha), & 0 \le x < V_0, \\ 1, & x \ge V_0. \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < V_0, \\ 1, & x \ge V_0. \end{cases}$$

$$F(x) = (1-\alpha)F_1(x) + \alpha F_2(x)$$

——混合型随机变量