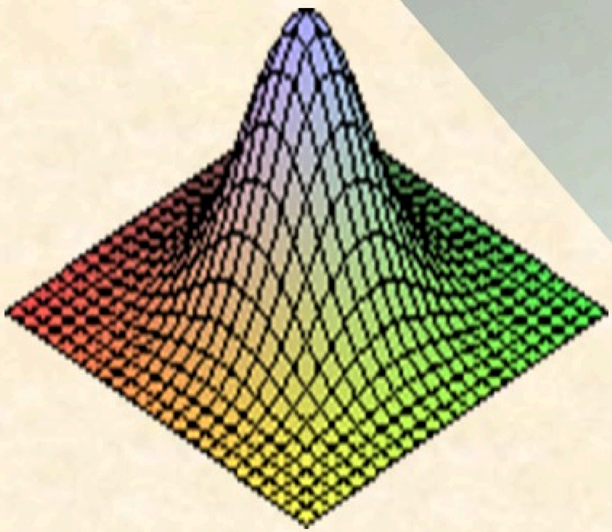
概率论与数理统计

主讲人：吴 娟

制作人：叶鹰　吴娟

wujuan@hust.edu.cn



§1.4 条件概率与事件的独立性（续）

一、乘法公式

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

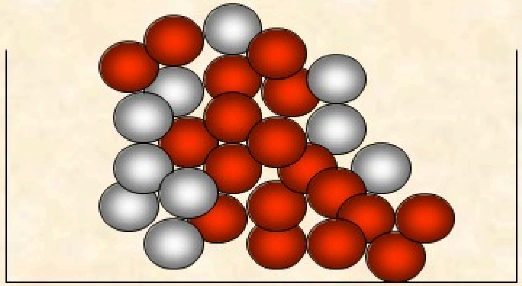
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &P(AB)=P(B)P(A|B) \quad && P(B)\neq 0 \\ &P(AB)=P(A)P(B|A) \quad && P(A)\neq 0 \end{aligned}$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$$

例 （波里亚罐子模型）

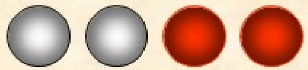
一个罐子中有 b 个白球和 r 个红球. 随机抽一个，观看颜色后放回罐中，且再加进 c 个与之同色的球. 这种手续进行四次，试求第一、二次取到白球且第三、四次取到红球的概率.



b个白球, r个红球

解：设 W_i = { 第 i 次取出是白球}, i=1,2,3,4

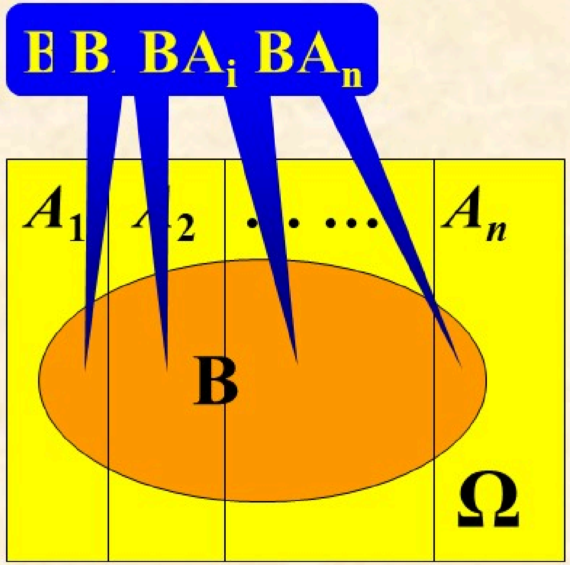
R_j = { 第 j 次取出是红球}, j=1,2,3,4



$$P(W_1W_2R_3R_4) = P(W_1)P(W_2|W_1)P(R_3|W_1W_2)P(R_4|W_1W_2R_3)$$

$$= \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r+2c}\cdot\frac{r+c}{b+r+3c}$$

二、全概率公式



设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是对Ω的一个划分：

(1) $A_iA_j = \phi \;,\quad i \neq j$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$

则对任何事件B有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

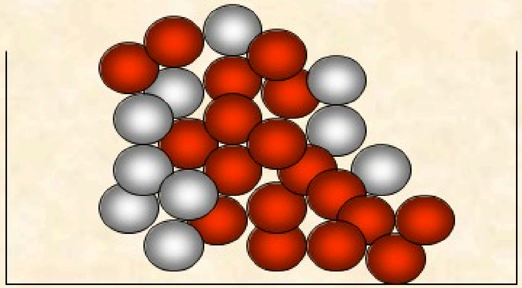
证明

$$P(B)=P(B\Omega)=P(B\sum_{i=1}^{n}A_i)=P(\sum_{i=1}^{n}BA_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

例（续） （波里亚罐子模型）

一个罐子中有 b 个白球和 r 个红球. 随机抽一个，观看颜色后放回罐中，且再加进 c 个与之同色的球；重复n次。



b个白球, r个红球

设$R_i = \{$ 第 i 次取出是红球$\}$, $i=1,\ldots,n$. 求

$$P(R_2) = ?\ldots,\ldots,P(R_n) = ?$$

解：

$$P(R_2) = P(R_1)P(R_2 \mid R_1) + P(\bar{R}_1)P(R_2 \mid \bar{R}_1)$$

$$= \frac{r}{b+r} \cdot \frac{r+c}{b+r+c} + \frac{b}{b+r} \cdot \frac{r}{b+r+c}$$

$$= \frac{r}{b+r} = P(R_1)$$

$P(R_n) = ?$ n次“传播”后的感染率，$n=1,2,\ldots$

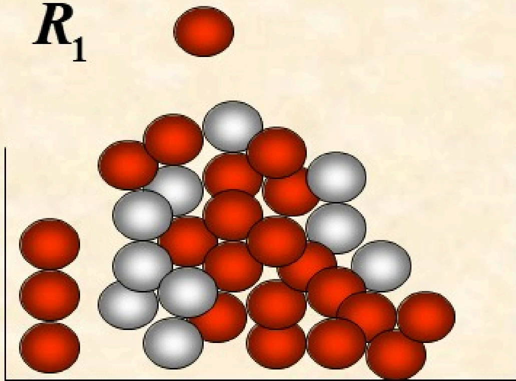
数学归纳法

假设n=m时成立

$$P(R_{m+1})=P(R_m)P(R_{m+1}\mid R_m)+P(\bar{R}_m)P(R_{m+1}\mid \bar{R}_m)$$ **“此路” 不通！**

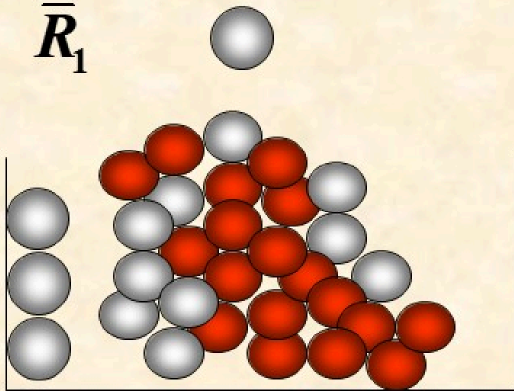
$$=P(R_1)P(R_{m+1}\mid R_1)+P(\bar{R}_1)P(R_{m+1}\mid \bar{R}_1)=\frac{r}{b+r}$$

R_1



$b_1=b$ 个白球,
$r_1=r+c$ 个红球

$\bar{R}_1$



$b_2=b+c$ 个白球,
$r_2=r$ 个红球

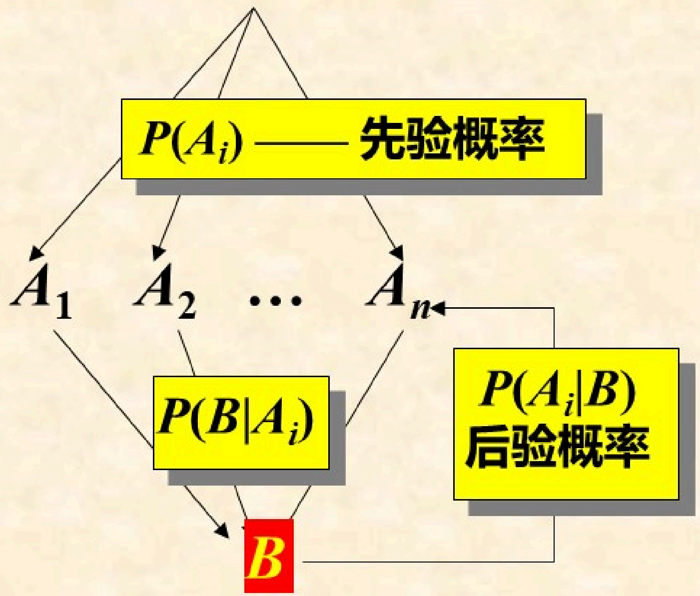
$$P(R_{m+1}\mid R_1)=\frac{r_1}{b_1+r_1}=\frac{r+c}{b+r+c}\qquad P(R_{m+1}\mid \bar{R}_1)=\frac{r_2}{b_2+r_2}=\frac{r}{b+r+c}$$

三、贝叶斯公式

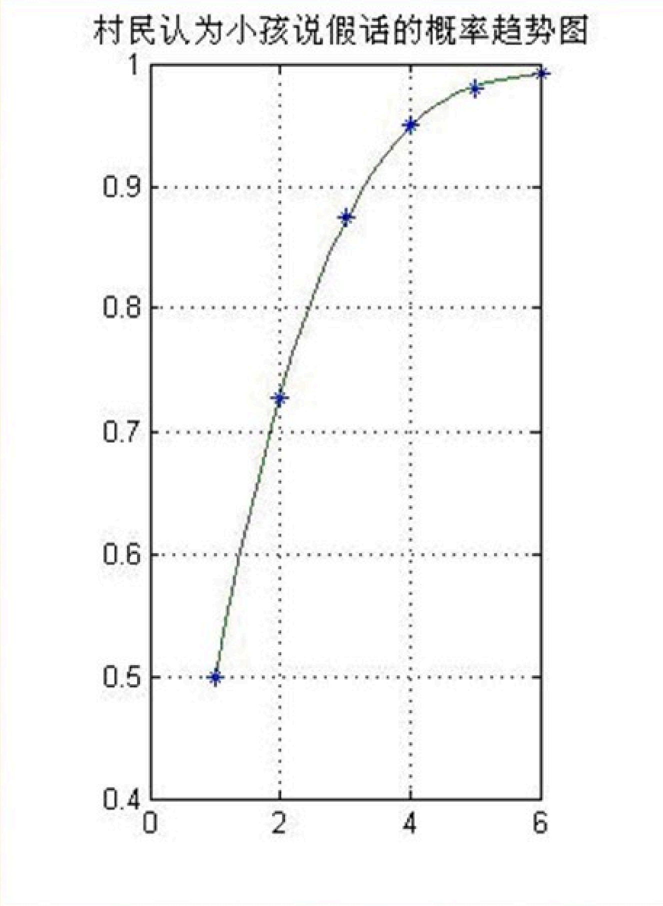
设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$是对Ω的一个划分，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$$i=1,2,\ldots,n$$



例（孩子与狼）假定孩子喊“狼来了”时是半真半假，孩子说谎时狼真的来了的概率是1/3，而孩子说真话时狼真的来了的概率是0.75。当村民发现狼没有来时，试分析村民认为小孩说谎的概率。



解：设 A_i 代表孩子第i次说谎，B_i 代表第i次狼没有来，$i=1,2,\ldots,n$.

$$P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(A_1)P(B_1|A_1)+P(\bar{A}_1)P(B_1|\bar{A}_1)}$$

$$=\frac{0.5\times(1-1/3)}{0.5\times(1-1/3)+0.5\times0.25}$$

$$=\frac{8}{11}\approx0.7273$$

3_2_狼来了.xlsx

玛丽莲问题　参与者换不换位置?

（限制条件：主持人事先知情，开的门后一定是羊）

不妨假设参与者随机选择了1号门后，主持人开3号门（B_3）

A_1	(1)车	(2)羊	(3)羊
A_2	(1)羊	(2)车	(3)羊
A_3	(1)羊	(2)羊	(3)车

$$P(A_1|B_3)=\frac{P(A_1)P(B_3|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_3|A_i)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+1+0)}=\frac{1}{3}$$

四、事件的独立性

引例　彩票中奖与选择投注站点

$$P(A)=P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad\Rightarrow\quad P(AB)=P(A)P(B)$$

定义 若事件A、B满足：$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A与B相互独立。

例 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张,记A={抽到K}, B={抽到的牌是黑色的}，试判断A，B的独立性。

解：由于 $P(A)=4/52=1/13$, $P(B)=26/52=1/2$

$$P(AB)=2/52=1/26=P(A)\,P(B)$$ 故A、B独立.

另解　由于 $P(A)=1/13$, $P(A|B)=2/26=1/13$

$P(A)=P(A|B)$, 说明事件A、B独立.

单选题 100分

互不相容与相互独立的关系，正确的是

A 若事件A和B互不相容，则一定不独立

B 若 $AB \neq \varnothing$，则A和B一定不独立

C $AB \neq \varnothing$ ，A和B可能相互独立

注：互不相容与相互独立是两个不同的概念

互不相容：$AB=\phi \Rightarrow \quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

相互独立：$P(AB)=P(A)P(B)\Rightarrow P(A/B)=P(A)$

$A=\{1,3,5\},\ B=\{1,2,3,4\}$

***A,B*独立，但不是互不相容的。**

一般称$A_1, A_2,\ldots, A_n$相互独立，是指下面 $2^n ?n-1$个等式成立：

$$P(A_{i1} A_{i2}\ldots A_{ik})=P(A_{i1}) P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik}),$$

$$1\le i_1< i_2<\ldots< i_k\le n,\ 2\le k\le n.$$

例 设某人玩破译密码游戏，每次破译成功的概率是0.001，求他独立地破译n次能成功（至少一次）的概率。

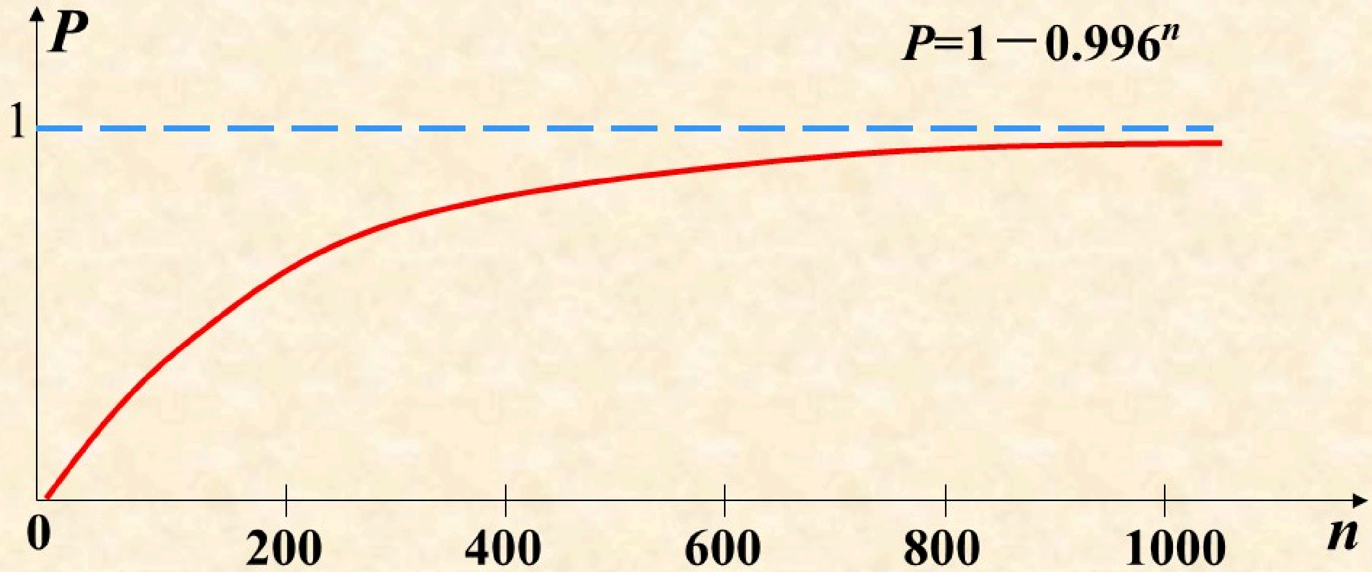
再问：破译多少次才能保证至少成功一次的概率为99%？

解：记A_i ={第i次破译密码成功}，i=1,2,…n.

A ={密码被破译}，则

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i})=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i)$$

$$=1-0.999^n\ge 0.99 \qquad \Rightarrow n\ge \frac{\ln 0.01}{\ln 0.999}=4602.87$$



P: 0　0.511　0.799　0.910　0.960　0.981