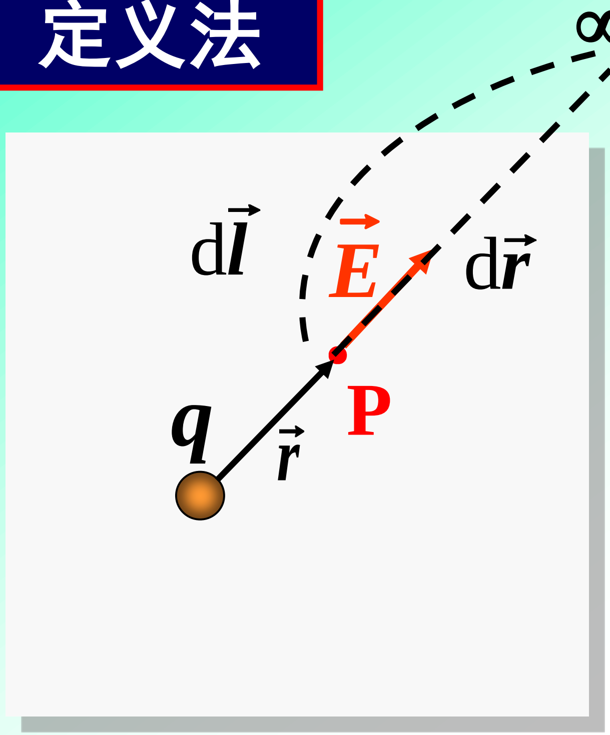
闪电击中自由女神像

- 摄影师等了40年
- 2010年9月22日拍成

避雷针

上节课的相关内容

定义法

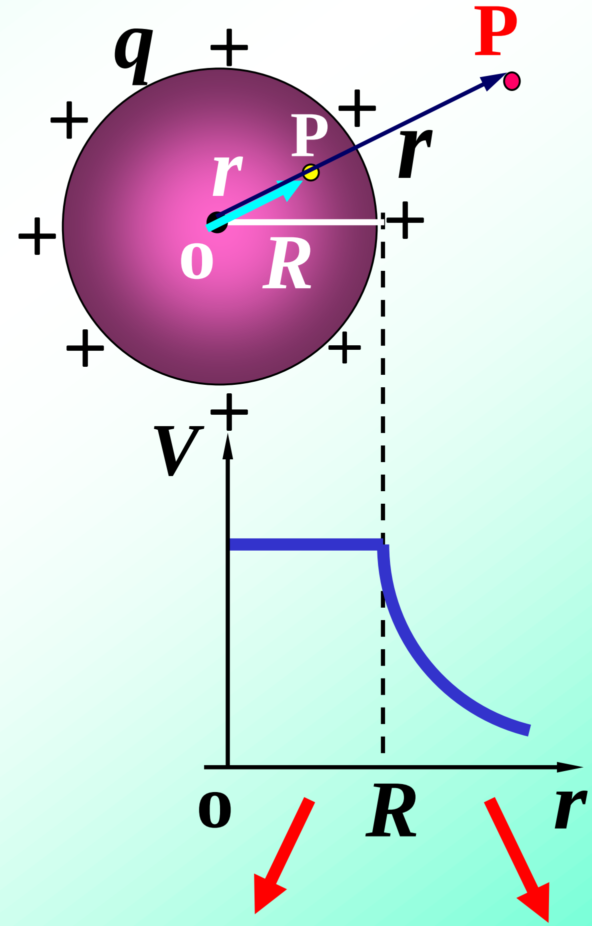


$$V_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_P}$$

电势叠加原理

$$\boxed{V_P=\int_q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$V_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{r_P}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$



$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

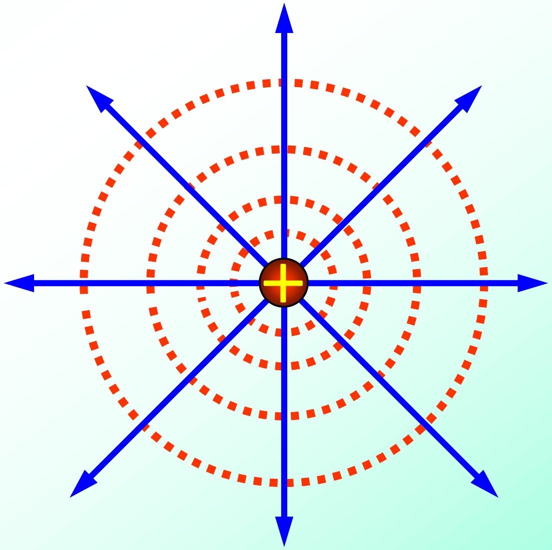
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

上节课的相关内容

电场强度与电势的关系

积分关系： $V_a = \int_a^{V=0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

微分关系： $\vec{E} = -grad\ V$



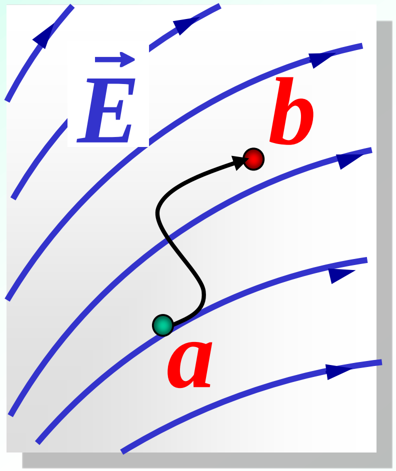
等势面与电场线的关系：

（1）电场线与等势面处处正交

（2）电场线方向指向电势降低方向

（3）若相邻等势面电势差相等

上节课的相关内容



电场力作功 ＝ 静电势能的减少

$$A_{ab}=\int_a^b q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=q(V_a-V_b)=\boxed{qV_a}-\boxed{qV_b}$$

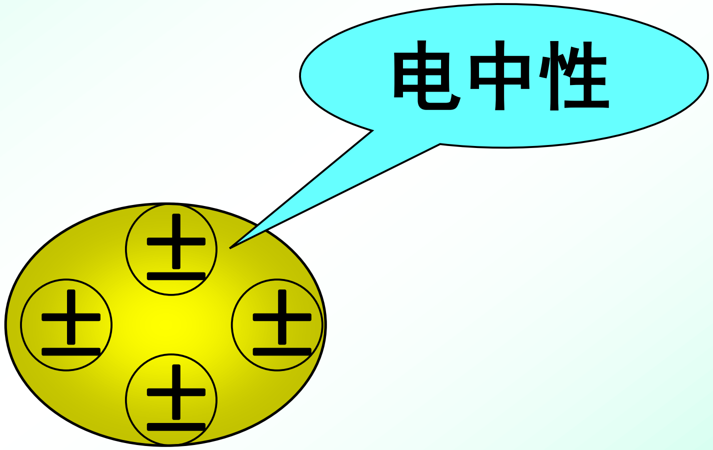
q在电场中的静电势能 $\boxed{W=qV}$

七、静电场中的导体

1. *导体的静电平衡*

（1）静电感应

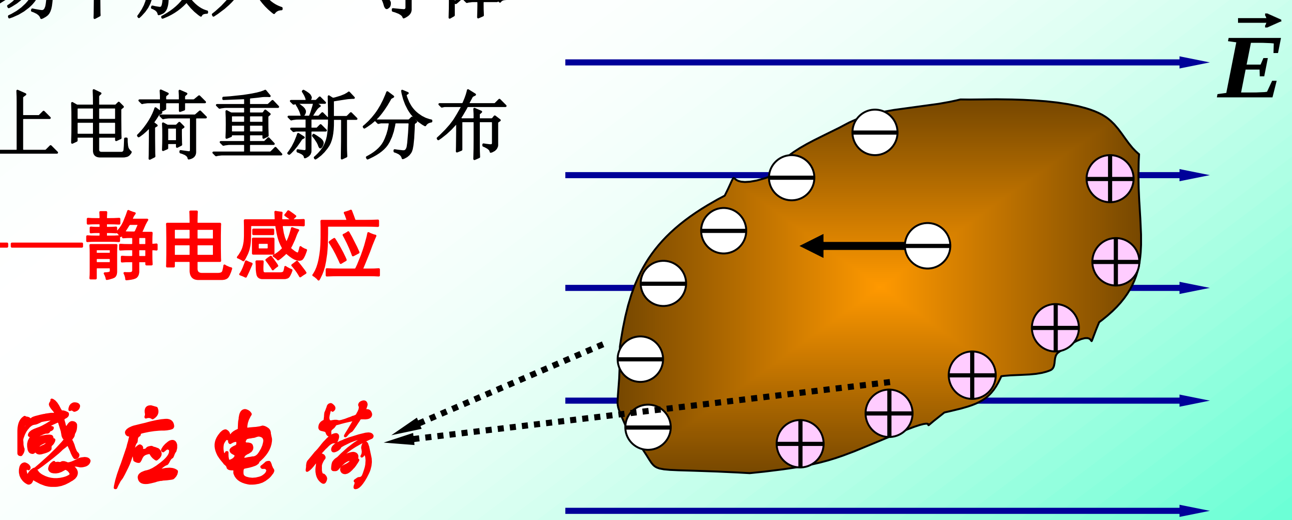
$\vec{E}=0$，导体不带电时



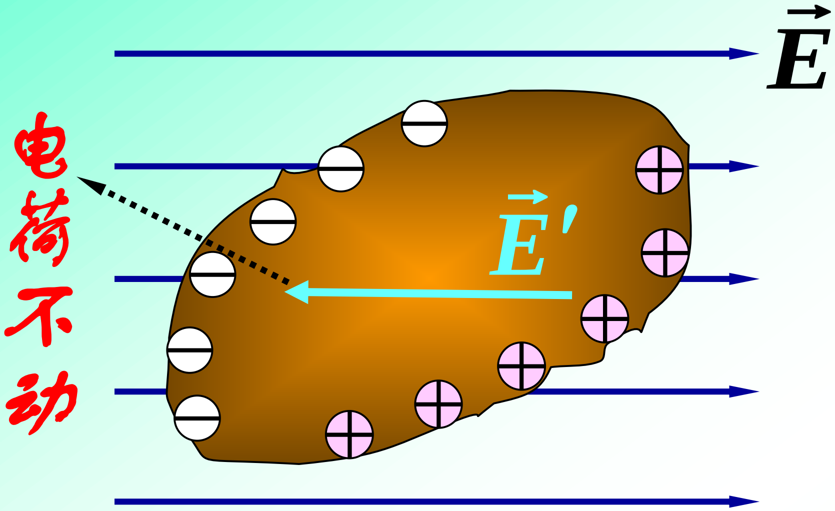
在电场中放入一导体

导体上电荷重新分布

——静电感应



（2）静电场与导体的相互作用

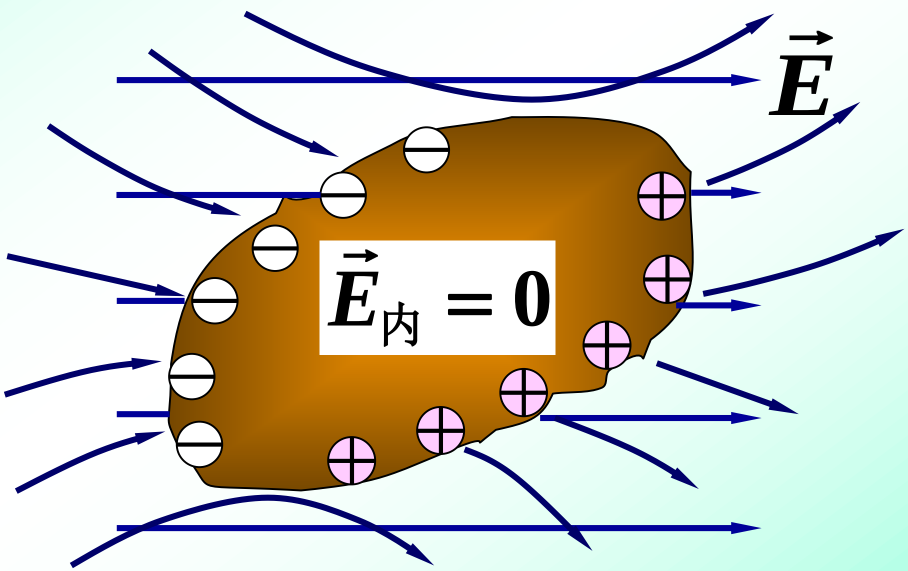


电荷积累到一定程度

$$\vec{E}' = -\vec{E}$$

$$\vec{E}_{内} = \vec{E} + \vec{E}' = 0$$

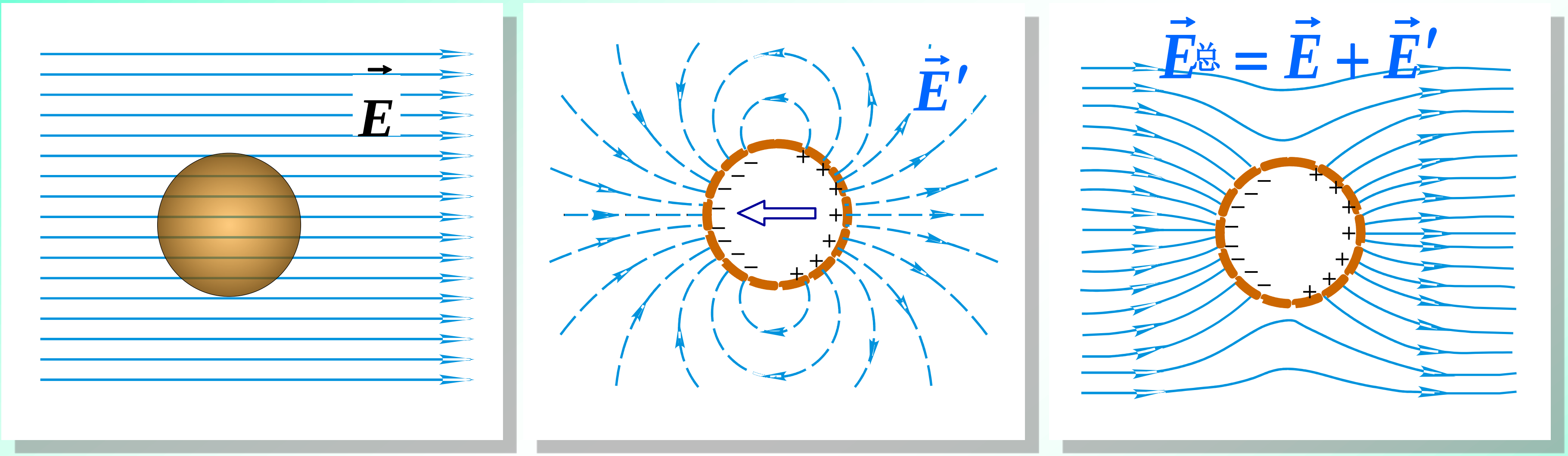
—— **导体达静电平衡**



导体外的电场

$$\vec{E}_{外} = \vec{E}'_{外} + \vec{E}$$

导体球在均匀电场中



导体在电场中的特点：

1 º导体内的自由电荷，在电场力作用下移动，从而改变原有的电荷分布。

2 º电荷分布不同，影响电场分布。

（3）导体的静电平衡条件

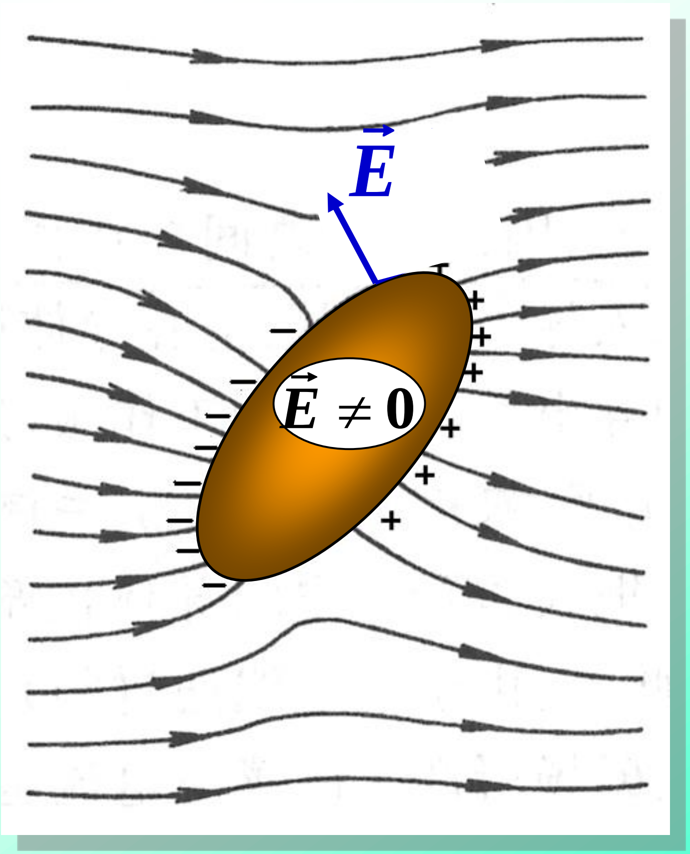
静电平衡状态

——导体表面和内部都没有电荷的定向运动

静电平衡条件

① 导体内部任何一点处的电场强度 $\vec{E}=0$

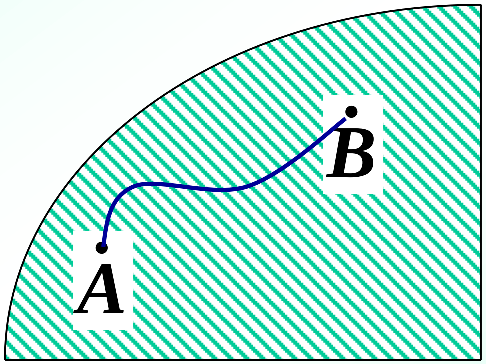
② 导体外表面处电场强度的方向垂直表面



反证法
可证明

（3）导体的静电平衡条件

推论：① 导体是等势体



证明：∵ 导体内处处 $\vec{E}=0$

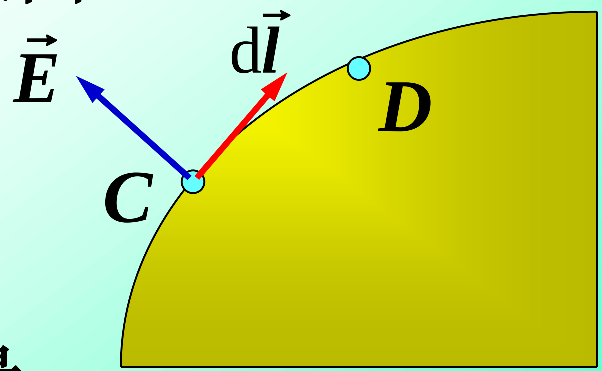
任意两点的电势差

$$\Delta V_{AB}=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$ ∴ 导体内 V = 常量

② 导体表面是等势面

证明：∵ 导体表面处处 $\vec{E}\perp$ 表面

任意两点的电势差



$$\Delta V_{CD}=\int_C^D \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

∴ 导体表面上 V = 常量

2. *静电平衡时导体上的电荷分布*

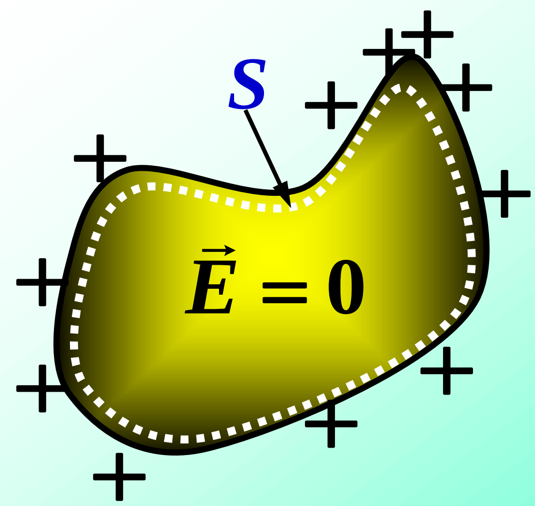
（1）导体内部没有净电荷, 电荷分布在外表面上

证明：1 °体内无空腔

紧贴导体表面内作高斯面 S 如图

根据高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$



静电平衡时，导体内部各处

$$\vec{E}=0$$

那么 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$ 则有 $\sum_{S内} q_i = 0$

∴ 导体内部没有净电荷

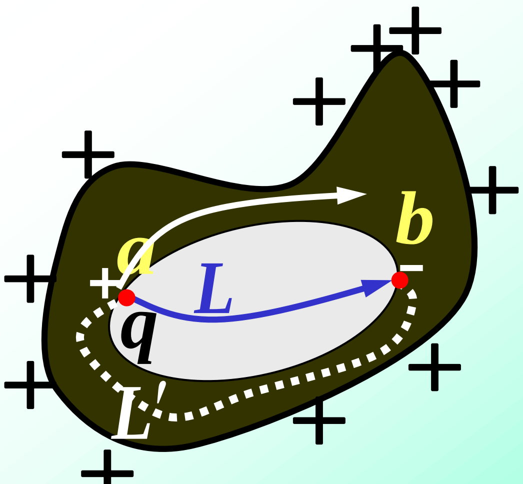
2°体内有空腔，腔内无其它带电体时，电荷全分布在导体外表面上

反证法：假设内表面的a点处有电荷q (>0)

从q发出的一条电场线 L,

设其在内表面交于b点

则a、b两点的电势差为



$$V_a - V_b = \int_{a\,(沿L)}^{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} > 0$$

又 $$V_a - V_b = \int_{a\,(沿L')}^{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

相矛盾

因此内表面上无电荷!

电荷在外表面如何分布？

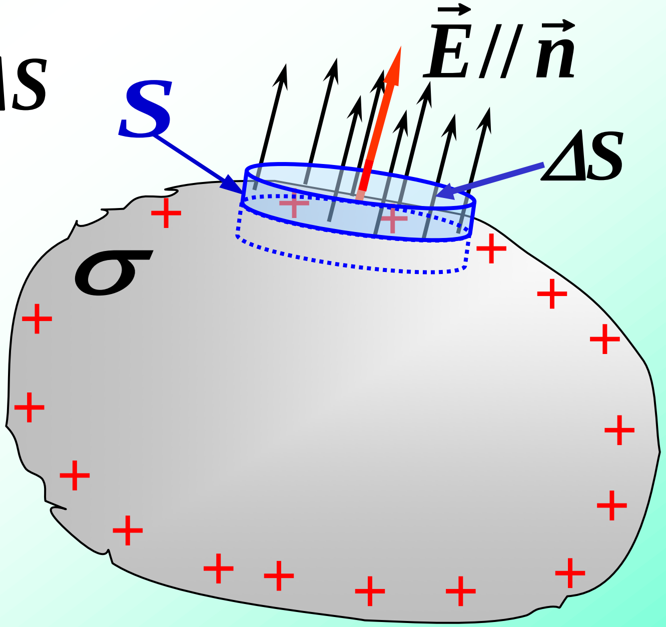
∴导体上的电荷全分布在外表面！

（2）表面上的面电荷密度σ 与该处的E成正比

证明：如图取高斯面S，根据高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{体内} \cancelto{0}{\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}} + \int_{外侧} \cancelto{0}{\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}} + \int_{外上} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad = E\Delta S$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta S$$



则有 $E\cancel{\Delta S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\cancel{\Delta S}$

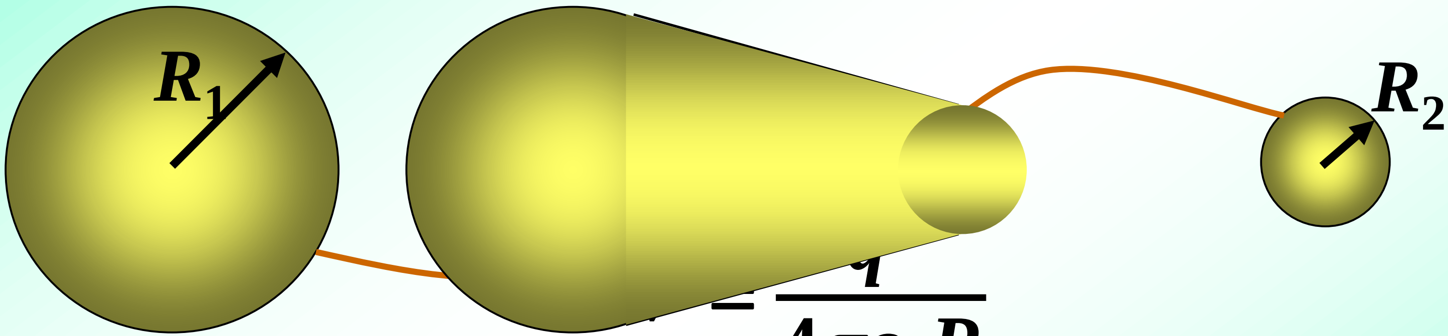
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$ 即 $\sigma = \varepsilon_0 E$

注

1°$\vec{E}$ 是导体表面电荷及外面电荷的合场强！

2°上式并没有给出σ的分布！

（3）孤立导体表面上各处的面电荷密度σ 与各处表面曲率半径 R 成反比 即 $\sigma \propto \frac{1}{R}$



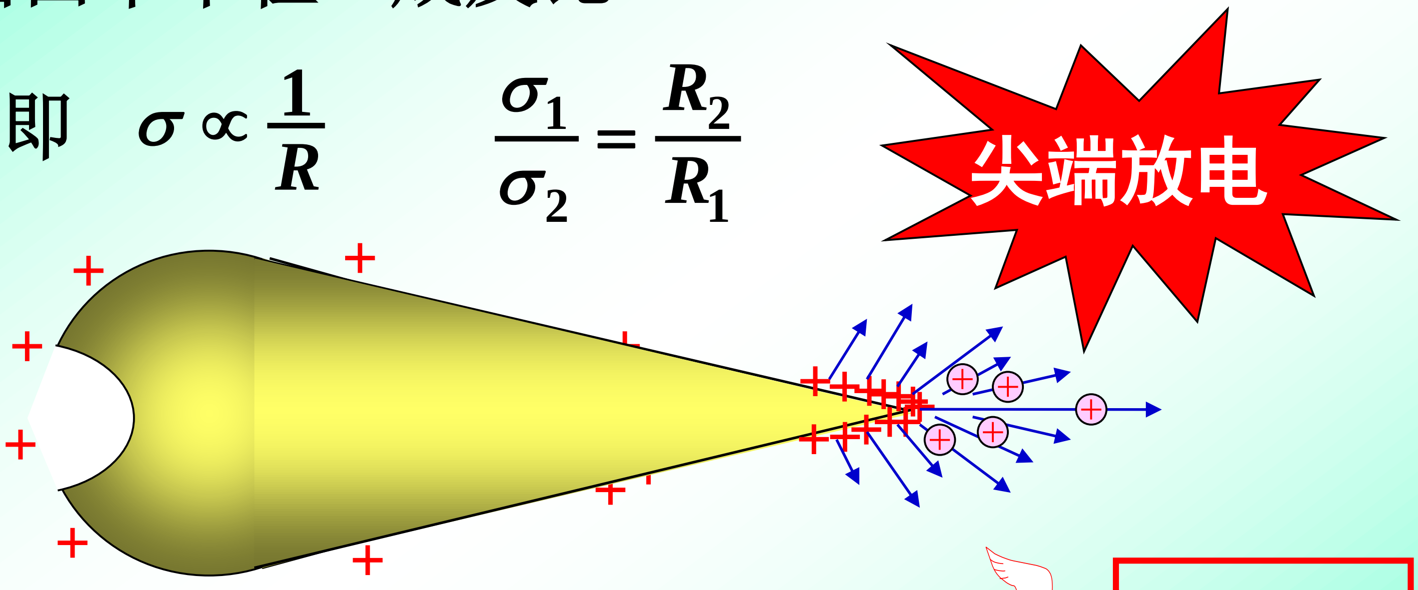
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

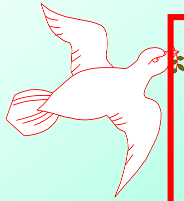
两球用导线相连 $V_1 = V_2$ $\qquad \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$

$$\frac{\sigma_1 \cdot 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 \cdot 4\pi R_2^2}{R_2} \qquad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

（3）孤立导体表面上各处的面电荷密度σ 与各处表面曲率半径R 成反比

即 $\sigma \propto \dfrac{1}{R}$　　$\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$





$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

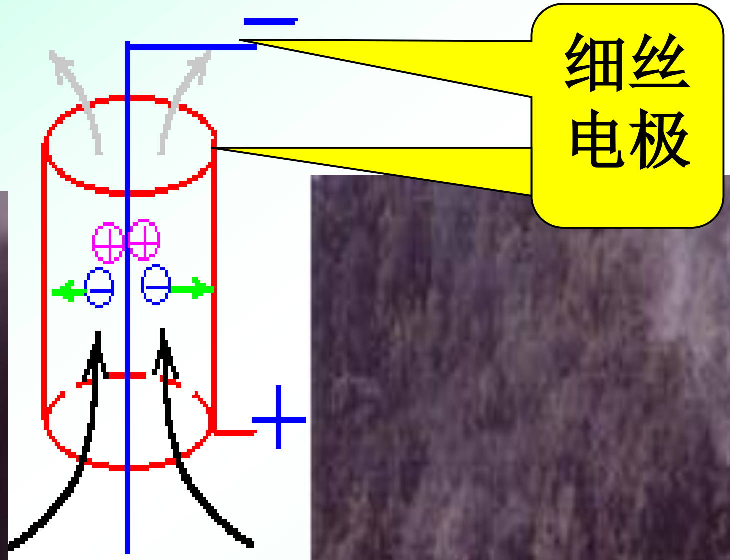
平坦处： R大 σ 小，则E 小；

尖端处： R 很小，σ很大，则E 很强；

凹面处： 曲率为负值，σ更小，则E 很弱.

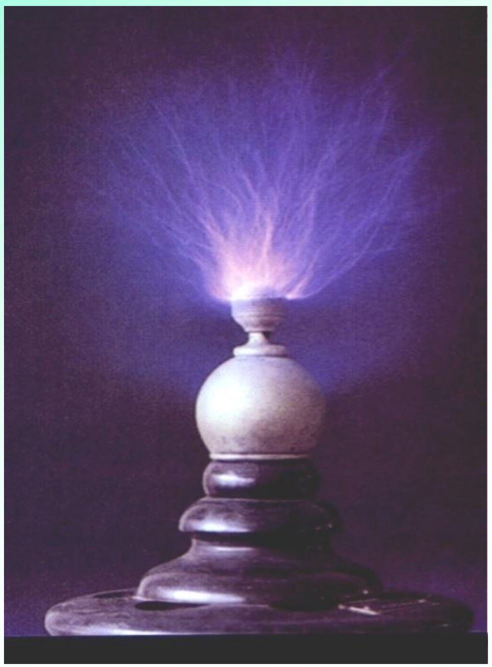
尖端放电的应用与防止：

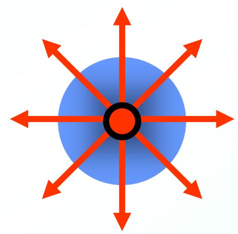
静电除尘

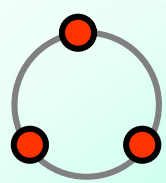


尖端放电的应用与防止：

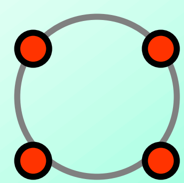
分裂导线　　（减少电晕放电损失）



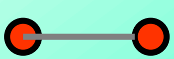




三分裂



四分裂



两分裂

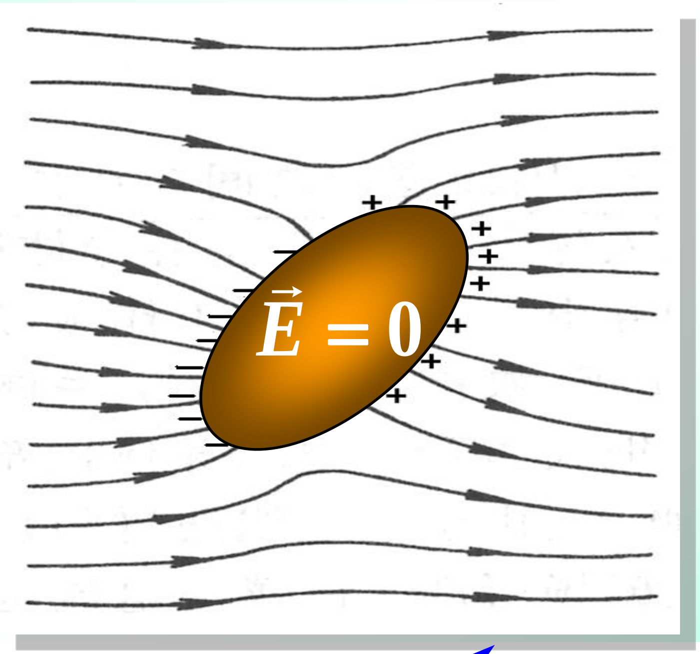
3. *静电屏蔽*

导体壳：（静电平衡时）

（1）腔内无带电体情况

内表面无电荷

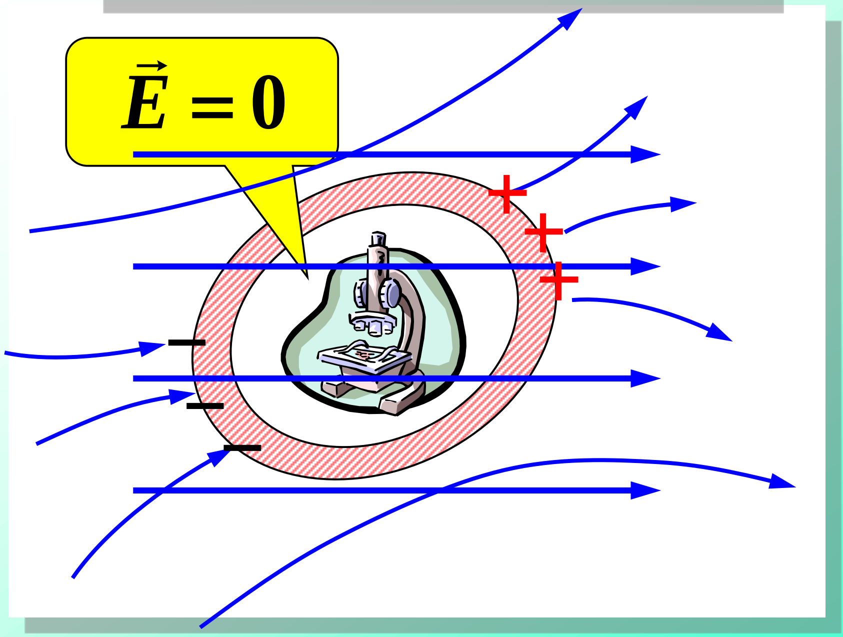
腔内 $\vec{E}=0$（无场区）



外部电场不影响内部

——静电屏蔽

→ 屏蔽外场



汽车是个静电屏蔽室

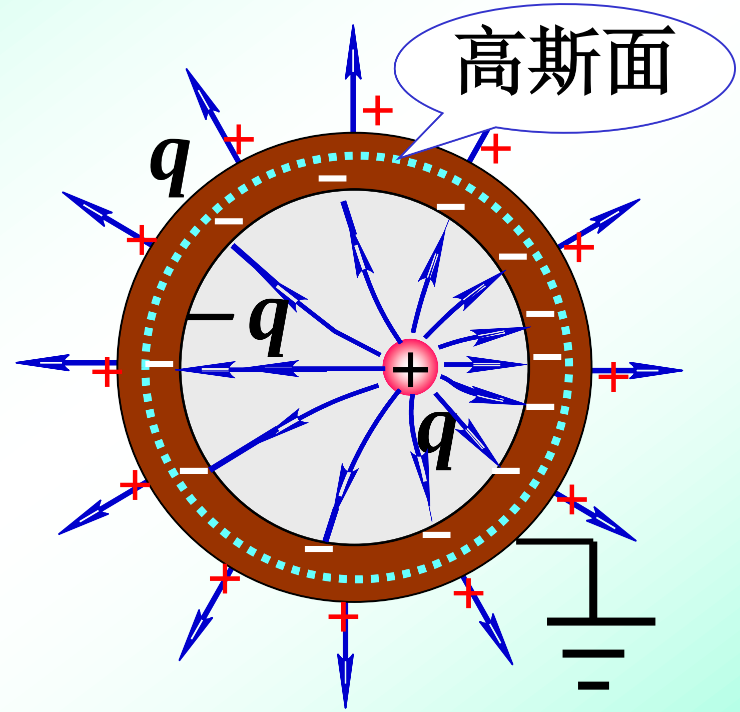
（2）腔内有带电体情况

导体壳感应带电：

内表面电荷与腔内电荷**等值异号**

外表面电荷与腔内电荷**等值同号**

（若导体壳带电Q 则外表面上电荷为 $Q+q$ ）

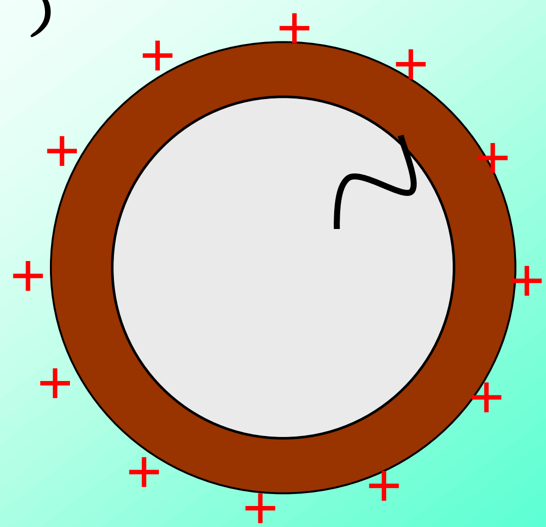


导体壳接地：

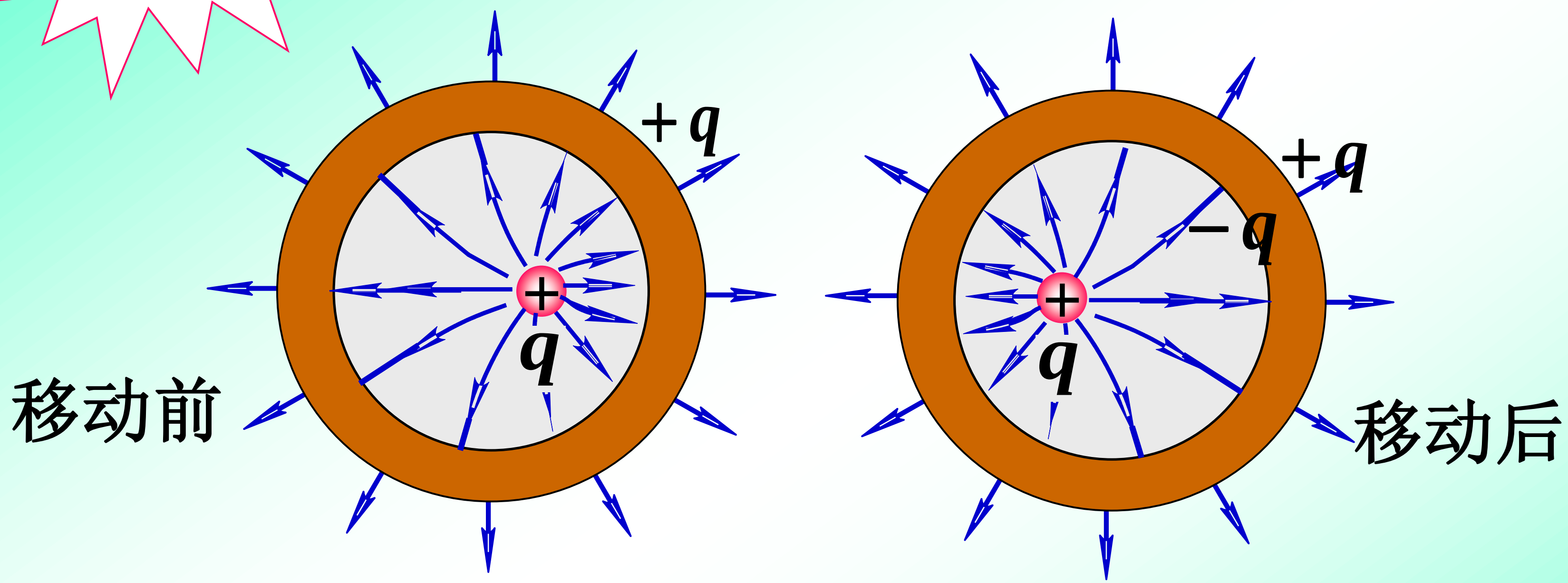
内部电场不影响外部

——**静电屏蔽**

→ **屏蔽内场**



讨论　腔内电荷q 移动时：

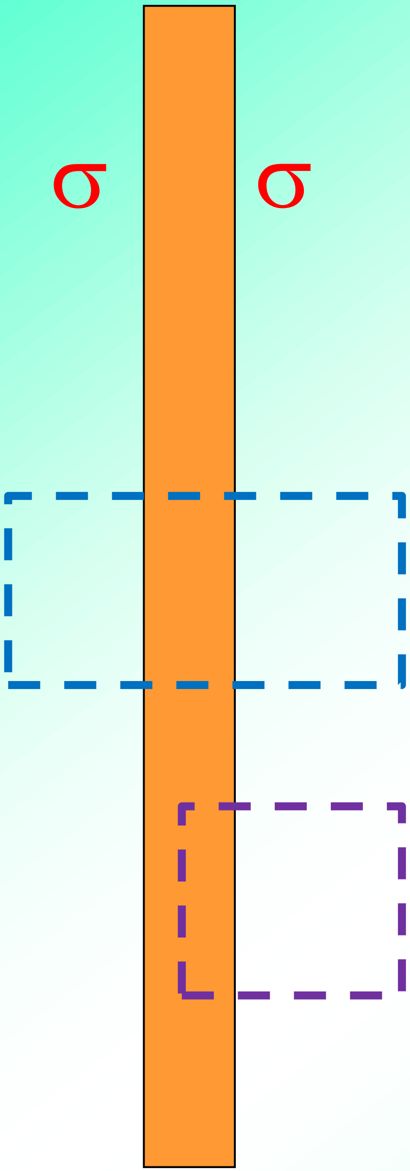


内表面带电总量“ $-q$ ”不变

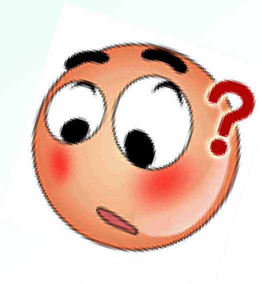
$\sigma_{内}$ 改变，腔内电场分布情况改变

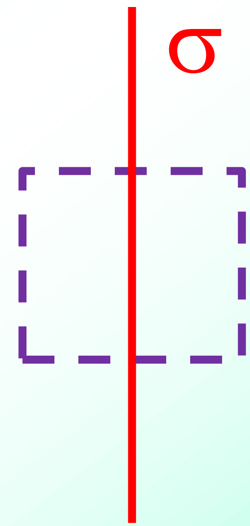
外表面带电总量“ $+q$ ”不变

$\sigma_{外}$ 不变，壳外电场分布不变。



$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\qquad E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$





每个面的面电荷密度为σ

板的面电荷密度为2σ

1. 在两边取对称的高斯面

$$ES+ES=\frac{1}{\varepsilon_0}2\sigma S \qquad E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_{面}}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_{板}}{2\varepsilon_0}$$

2. 高斯面一侧取在金属板内

$$ES=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S \qquad E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_{面}}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_{板}}{2\varepsilon_0}$$

6-T6 一半径为 R 的带电球，其电荷体密度为 $\rho=\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)$，$\rho_0$ 为一常量，r 为空间某点至球心的距离。试求：(1)球内、外的场强分布；(2)r 为多大时，场强最大，等于多少。

解 (1) 球外场强 E_1

$$E\int ds=\int\frac{dq}{\varepsilon_0}=\int_0^R\frac{\rho_0(1-\frac{r}{R})4\pi r^2}{\varepsilon_0}dr$$

$$=\cancel{\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)dr}$$

$$=\cancel{\frac{R\rho_0}{2\varepsilon_0}}\ \frac{1}{3\varepsilon_0}\pi\rho_0R^3$$

$\cancel{E\,4\pi d^2}$

$$E\cdot4\pi d^2=\frac{\pi\rho_0R^3}{3\varepsilon_0}\qquad E_1=\frac{\pi\rho_0R^3}{12\pi d^2\varepsilon_0}$$ d为点到球心距离 d>R

6-T8 在两个同心球面之间($a<r<b$)，电荷体密度 $\rho=$

腔的中心($r=0$)，有一个点电荷 Q，问 A 应为何

数？

$$\oint_S E\,dS=\int_V\frac{\rho}{\varepsilon_0}dV$$

$$E\cdot4\pi r^2=\int_a^r\frac{A}{r\varepsilon_0}4\pi r^2dr$$

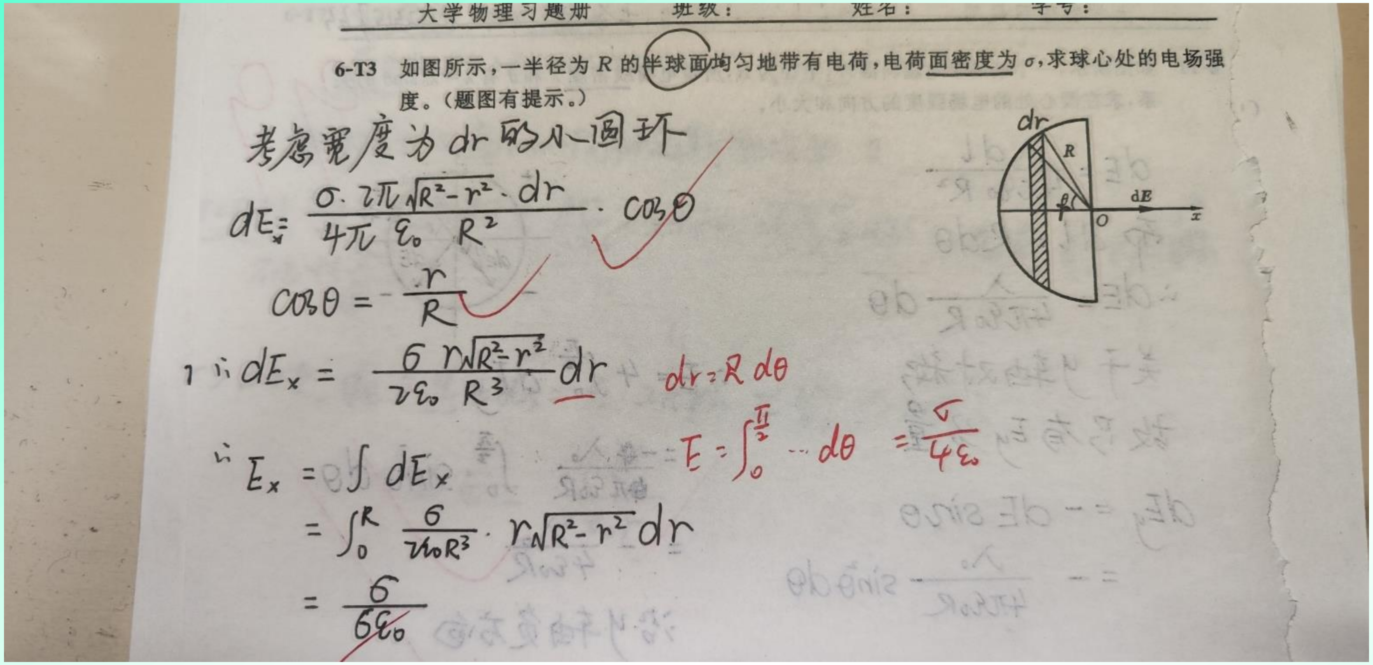
$$E=\frac{A(r^2-a^2)}{2r^2}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

$$-Aa^2\cdot2\pi\varepsilon_0+Q=0$$

$$A=\frac{Q}{2\pi\cancel{\varepsilon_0}a^2}$$

$$\Phi_E=\int_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q_i$$

千万、千万、千万不要忘记



大学物理习题册　　班级：　　姓名：　　学号：

6-T3　如图所示，一半径为 R 的半球面均匀地带有电荷，电荷面密度为 σ，求球心处的电场强度。（题图有提示。）

考虑宽度为 dr 的小圆环

$$dE_x = \frac{\sigma\cdot 2\pi\sqrt{R^2-r^2}\cdot dr}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{r}{R}$$

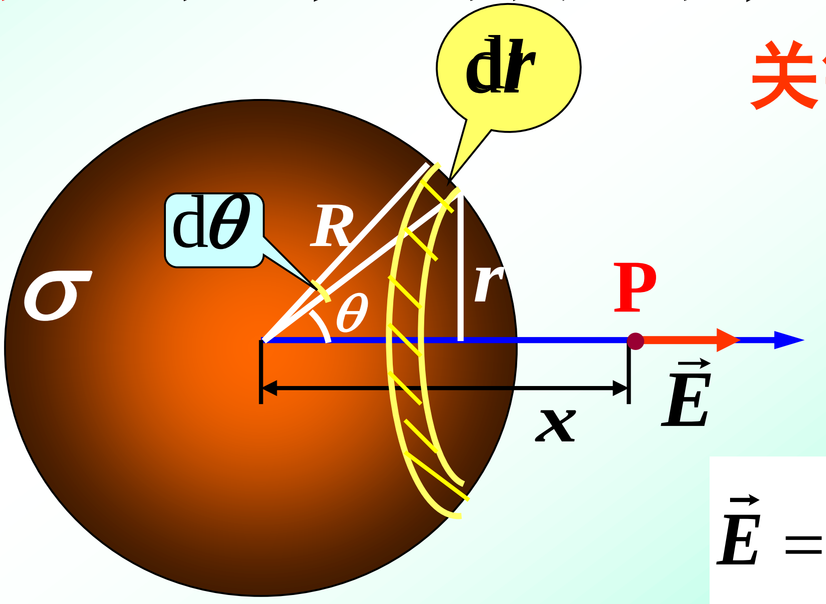
$$\therefore dE_x = \frac{\sigma r\sqrt{R^2-r^2}}{2\varepsilon_0 R^3}dr \qquad dr = R\,d\theta$$

$$\therefore E_x = \int dE_x \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdots d\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

$$= \int_0^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 R^3}\cdot r\sqrt{R^2-r^2}\,dr$$

$$= \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}$$

例10. 均匀带电球面，求轴上$\vec{E}$ = ？ (P201)



关键：圆环宽度 $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta$

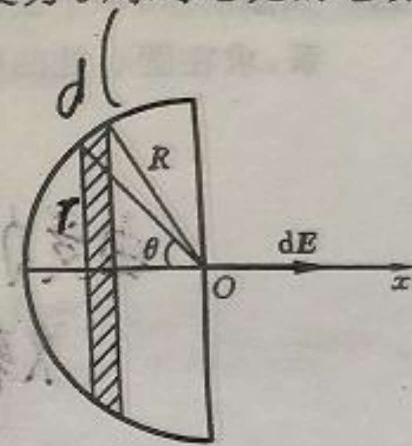
圆环电量

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r\,\mathrm{d}l$$

$$= \sigma 2\pi R\sin\theta R\,\mathrm{d}\theta$$

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 x^2}\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{e}_r$$

6-T3 如图所示，一半径为 R 的半球面均匀地带有电荷，电荷面密度为 σ，求球心处的电场强度。（题图有提示。）



$$dq = \sigma 2\pi r dl = \sigma 2\pi R\sin\theta d\theta$$

$$dE = \frac{x dq}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{3/2}}$$

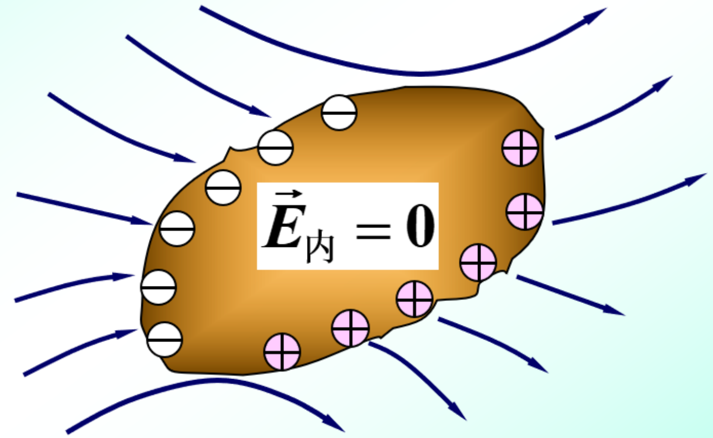
$$x = R\cos\theta$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

电场强度大小为 $\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$，方向向右

上节课的相关内容



导体的静电平衡

- 导体内部的电场处处为零
- 导体表面上的电场强度处处垂直于表面

推论

- 导体是等势体
- 导体表面是等势面

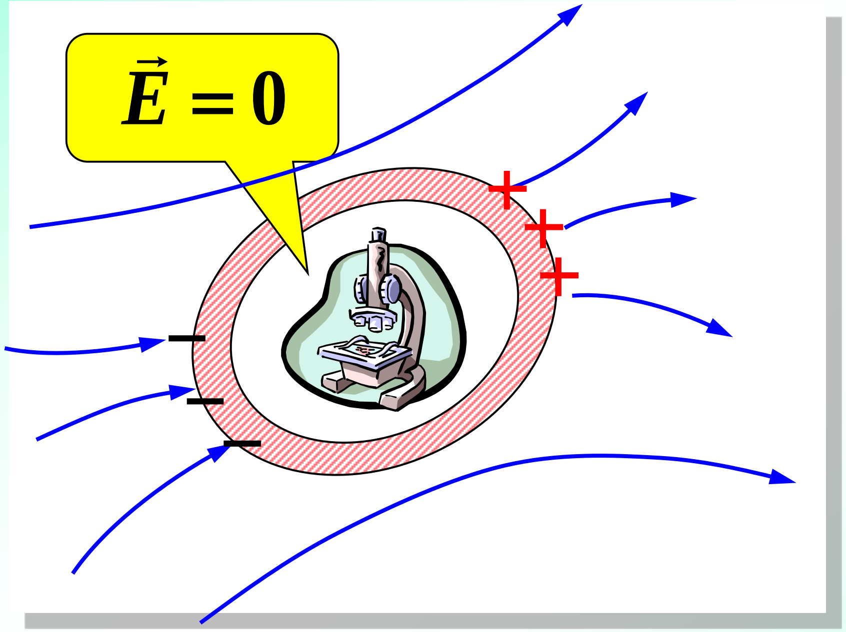
$$\boxed{E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

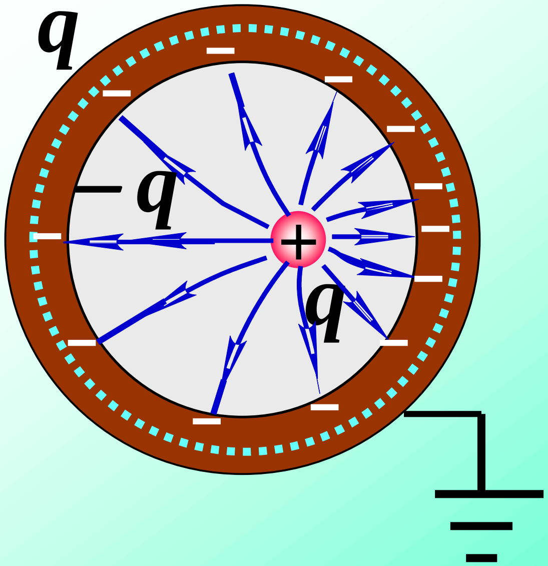
$$\boxed{\sigma \propto \frac{1}{R}}$$

尖端放电

上节课的相关内容

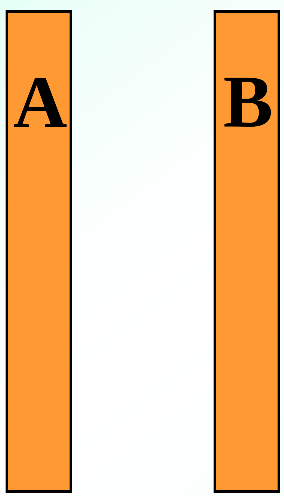
静电屏蔽





4. *有导体存在时静电场的分析与计算*

例20. 将两块均匀带电的金属平板A、B平行放置，A板单位面积带电为$\sigma_A = 3\ \mu C/m^2$， B板单位面积带电为$\sigma_B = 7\ \mu C/m^2$。求静电平衡时，电荷分布及电场分布。（忽略边缘效应）



分析：**静电平衡条件**

电场迭加原理

电荷守恒

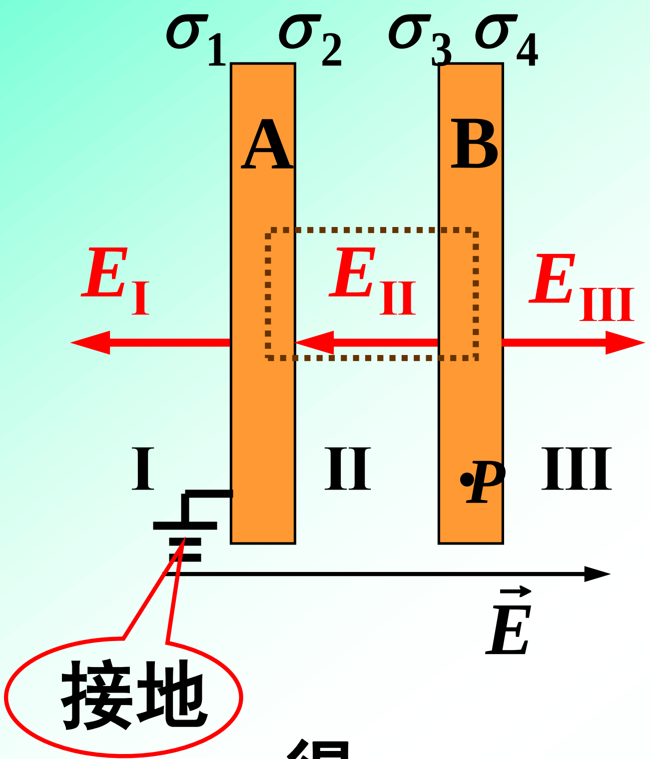
高斯定理

电势迭加

等计算

$\sigma_A = 3\mu C/m^2$
$\sigma_B = 7\mu C/m^2$

解： 设四个面上电荷面度为 $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ \sigma_4$



则有 $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_A$

$\sigma_3 + \sigma_4 = \sigma_B$

如图取高斯柱面可得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \sum_i q_i = 0$$

即 $\sigma_2 + \sigma_3 = 0$

导体内任意一点P，其电场 $E = 0$

即 $\dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$

联立求解

得 $\sigma_1 = \sigma_4 = \dfrac{\sigma_A + \sigma_B}{2} = 5\mu C/m^2 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = -2\mu C/m^2$

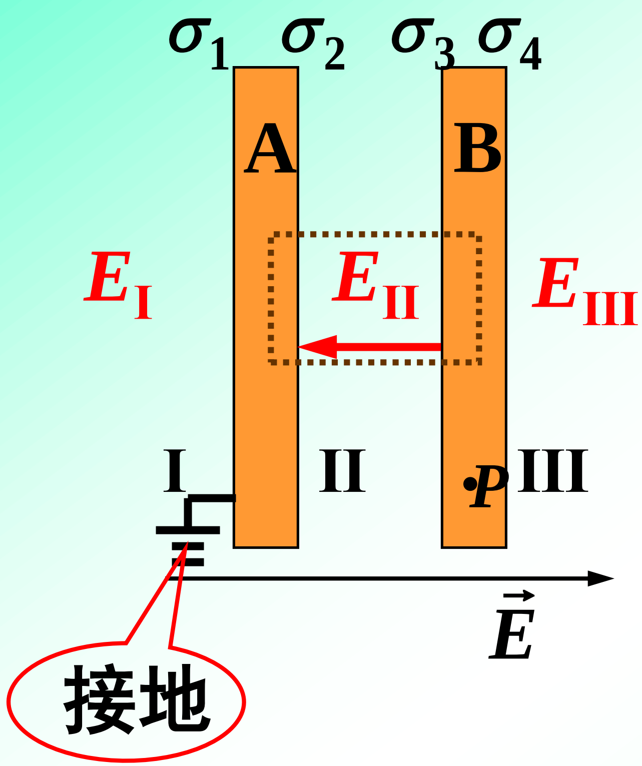
按电场叠加原理可求得

$$E_{\mathrm{I}} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_4}{2\varepsilon_0} \qquad E_{\mathrm{II}} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2\varepsilon_0} \qquad E_{\mathrm{III}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_4}{2\varepsilon_0}$$

$\sigma_A = 3\mu C/m^2$
$\sigma_B = 7\mu C/m^2$

解： 若A板接地，其与大地构成一导体

$$\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 \cancel{=} 0 \qquad \sigma_2 \stackrel{?}{=} \sigma_A$$



仍有 $\sigma_3 + \sigma_4 = \sigma_B$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

导体内任意一点P，其电场$E = 0$

$$\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

可得

$$\sigma_4 = 0 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = -7\mu C/m^2$$

按电场叠加原理可求得

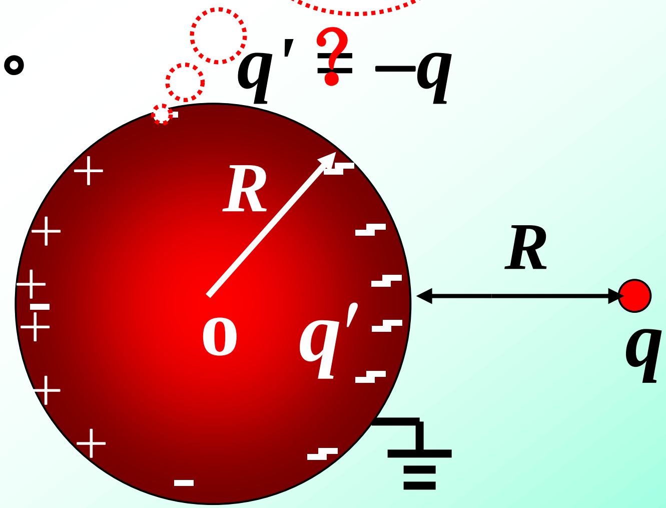
$$E_{\mathrm{I}} = E_{\mathrm{III}} = 0 \qquad E_{\mathrm{II}} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2\varepsilon_0}$$

例21. 半径为R的金属球与地相连接，在与球心相距$d=2R$处有一点电荷$q(>0)$，

问：球上的感应电荷$q'=?$

金属球接地 q'全部跑掉？

不一定！要受“$+q$”的制约。



解： 球上 q'分布不均匀

需保证球体上处处电势

$$V=0$$

球心处： $V_o=0=V_q+V_{q'}$

$$V_q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2R)}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$V_{q'}=\int_{q'}\frac{\mathrm{d}q'}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

代入上式 $\dfrac{q'}{R}=-\dfrac{q}{2R}$

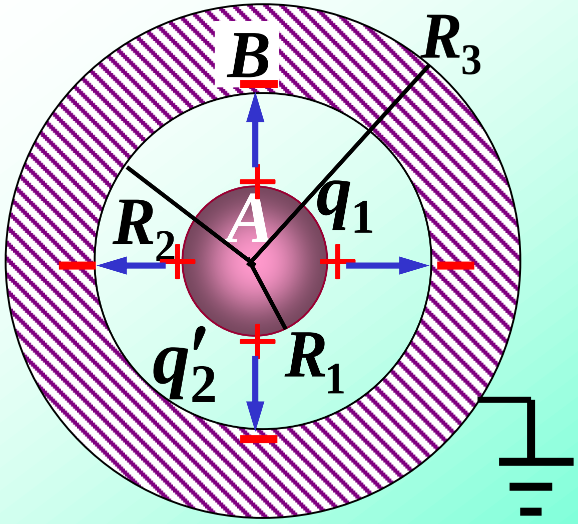
$$\therefore q'=-\frac{q}{2}$$

问题的关键是： **球心** $V_o=0$

例22. 金属球 A 带电 $q_1=1\times10^{-9}$C, 外有一同心金属球壳 B 带电 $q_2=-3\times10^{-9}$C，并且 R_1=2cm，R_2=5cm，R_3=10cm。

求（1）若 B 接地，V_A、V_B 各等于多少？

（2）若 A 接地 (地在无限远), A、B 球上电荷分布及电势？



解:（1）B 接地 $V_B=0$ $E_{外}=0$

静电感应

$$q_2'=-q_1=-1\times10^{-9}\text{ C}$$

$$q_{2外}=0$$

$$E_{AB}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

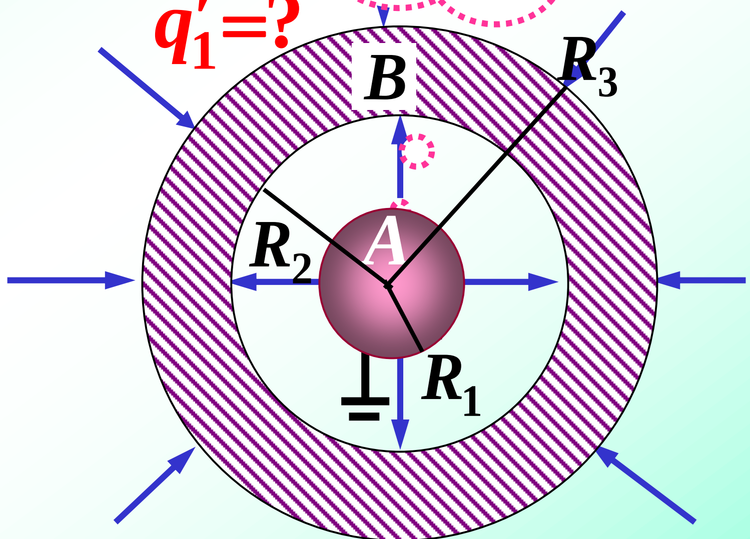
$$V_A=\int_A^{V=0}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=270\text{V}$$

（2）若A 接地, A、B球上电荷分布及电

q_1是否全跑掉？

解:（2）$V_A = 0 \quad E_{AB} \overset{?}{\neq} 0 \quad V_\infty = 0$

$q_1' = ?$



则有 $V_{BA} = V_{B\infty}$

$$\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_{AB} \cdot d\vec{r} = \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_{B\infty} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{R_2}^{R_1} \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr = \int_{R_3}^{\infty} \frac{q_1' + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr$$

$$-\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q_1' + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$q_1 = 1\times10^{-9}$C

$q_2 = -3\times 10^{-9}$C

$$q_1' = 0.75\times10^{-9}\ \mathrm{C}$$

球壳B内表面带电 $q_2' = -q_1' = -0.75\times10^{-9}$ C

球壳B外表面带电 $q_2 - q_2' = -2.25\times10^{-9}$ C

$$V_B = \int_{R_3}^{\infty} E \cdot dr = \int_{R_3}^{\infty} \frac{q_1' + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1' + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = -202.5\mathrm{V}$$