华中科技大学$2021\sim2022$学年第一学期

《微积分（A）（上）》期中考试

考试方式:闭卷　考试日期:2021/11/21　考试用时:150分钟

阅卷人	
得 分	

一、填空题 (每题 4 分，共 24 分)

1. 集合$E=\{(-1)^n+\frac{1}{n}:n=1,2,\cdots\}$,则$\sup E=$ $\underline{\quad\frac{3}{2}\quad}$; $\inf E=$ $\underline{\quad -1\quad}$

2. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=$ $\underline{\quad 2\quad}$

3. 极限$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x})=$ $\underline{\quad -\frac{1}{6}\quad}$

4. 用ϵ语言写出$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\neq+\infty$的定义: $\underline{\exists M_0\in\mathbb{R},\forall N\in\mathbb{R},\exists x_0<N,f(x_0)\leqslant M_0.}$

5. 设$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x}},x>0$;则$f'(x)=$ $\underline{\quad\frac{\sqrt{2x}+1}{2\sqrt{x+\sqrt{2x}}\sqrt{2x}}\quad}$

6. 摆线的参数方程为$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$,其中$a$为常数,则$\frac{d^2y}{dx^2}=$ $\underline{\quad -\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}\quad}$

阅卷人	
得 分	

二、计算 (每题 6分，共 24分)

7. 设函数$f(x)$在$x=a$处可微,且$f(a)\neq0$, 求$\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}]^x$.

解: $\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}]^x=\lim\limits_{x\to\infty}[1+\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{f(a)}]^x$

$= \lim\limits_{x\to\infty}[1+\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{f(a)}]^{\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}\cdot\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{f(a)}\cdot x}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{f(a)}\cdot x} = e^{\frac{1}{f(a)}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.(6')

8. 数列$\{x_n\}$满足$x_1>0, x_{n+1}=\frac{2}{3}(x_n+\frac{1}{x_n^2}), n=1,2,\cdots$求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解:已知$x_1>0$,若$x_k>0, k\geqslant 1$,则$x_{k+1}=\frac{2}{3}(x_k+\frac{1}{x_k^2})>0$. 所以对任意$n$, 有$x_n>0$.

$x_{n+1}=\frac{2}{3}(x_n+\frac{1}{x_n^2})=\frac{1}{3}(x_n+x_n+\frac{2}{x_n^2})\geqslant\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{x_nx_n\frac{2}{x_n^2}}=\sqrt[3]{2}$.

于是,对任意的$n\geqslant 1$, $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{3}(1+\frac{1}{x_n^3})\leqslant 1$.

所以数列x_n单调递减, 又x_n有下界,故x_n收敛..............(证明极限的存在性,4')

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,两端取极限得$a=\frac{2}{3}(a+\frac{1}{a^2})$,解得$a=\sqrt[3]{2}$.........(求出极限2')

9. 设定义在$\mathbb{R}$上的函数$f(x)=\begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,求$f''(x)$.

先求一阶导数,$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

$x\neq 0$时,有$f'(x)=4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}$.........$2'$

二阶导,$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(4x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x})=0$..$2'$

$x\neq 0$时,有$f''(x)=12x^2\sin\frac{1}{x}+4x^3\cos\frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})-2x\cos\frac{1}{x}-x^2(-\sin\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})=$ $12x^2\sin\frac{1}{x}-6x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}$........2'

10. 设方程$\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\arctan\frac{y}{x}}$, ($a>0$为常数)确定一个隐函数$y(x)$,求$y'$和$y''$

解：取对数得$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln a+\arctan\frac{y}{x}$,两边对$x$求导得：

$\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}$ 整理得$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{y'x-y}{x^2+y^2}$ 所以$y'=\frac{x+y}{x-y}$.........3'

继续对x求导得 $y''=\frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}$.........$3'$

阅卷人	
得 分	

三、解答题 (每题 10 分，共 20 分)

11. 给定数列$\{x_n\}$,若实数a是数列$\{x_n\}$的某个收敛子列的极限,则称a是数列$\{x_n\}$的部分极限.令 $L=\{$数列$\{x_n\}$的全体部分极限$\}$.

(1) 若数列$\{x_n\}$有界,证明L有上确界.

(2) 设$x_n=\sin\frac{n\pi}{2}$,求L.

(3) 是否存在数列$\{x_n\}$,满足$L=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$?若存在,给出例子;若不存在,请证明.

解:(1)数列$\{x_n\}$有界,由致密性定理,$\{x_n\}$有收敛子列,所以L非空.设$\{x_n\}$的上界为M,即$\forall n, x_n\leqslant M$,则对$\{x_n\}$的任意收敛子列 $\{x_{n_k}\}$有$\forall k, x_{n_k}\leqslant M$,由极限的保号性,$x_{n_k}$的极限值也不大于$M$.因此$M$为$L$的一个上界.由确界原理,$L$有上确界.........3'

(2)数列$\{x_n=\sin\frac{n\pi}{2}\}$为:$1,0,-1,0,1,0,-1,0,\cdots$所以$1,0,-1$都是部分极限.任取$x_n$的收敛子列,必含有无穷项1或0或$-1$.所以 x_n的部分极限只能是这3个数之一.所以$L=\{1,0,-1\}$..........3'

(3)不存在.........1'.假设存在这样的数列$\{x_n\}$,则$\forall k\in\mathbb{N}_+,\frac{1}{k}$是部分极限,所以有子列收敛到$\frac{1}{k}$,特别地, $\exists x_{n_k}$,满足$|x_{n_k}-\frac{1}{k}|<\frac{1}{k}$. 于是$|x_{n_k}|<\frac{2}{k}$.考虑子列$x_{n_k}$,由迫敛性得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=0$.而$0\notin L$,矛盾.所以不存在这样的数列.........3'

12. (1) 设f是区间I上的一致连续函数,g是区间I上的函数,但不是一致连续的.问:$f+g$在I上是否一致连续?说明理由.

(2) 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的连续周期函数,证明:$f(x)$在$\mathbb{R}$上一致连续.

(3) 利用上面两个结论说明$\sin x+\sin x^2$不是周期函数.

解:(1)$f+g$不是一致连续的..........1'

由$g(x)$不一致连续可得,$\exists\epsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x,y\in I$满足 $0<|x-y|<\delta$且$|g(x)-g(y)|\geqslant\epsilon_0$. 由$f$一致连续,取$\epsilon=\frac{\epsilon_0}{2}$,则$\delta_0>0$满足$\forall x,y\in I,0<|x-y|<\delta_0$时,有$|f(x)-f(y)|<\epsilon=\frac{\epsilon_0}{2}$. 不妨设$\delta\leqslant\delta_0$此时$\forall x,y\in I,0<|x-y|<\delta_0$时,有

$|(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))|\geqslant|g(x)-g(y)|-|f(x)-f(y)|>\frac{\epsilon_0}{2}$.

所以$f+g$不是一致连续的..........3'

(2)设$f(x)$的周期为$T>0$.由闭区间连续性质得$f(x)$在$[0,2T]$上一致连续,即 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,y\in[0,2T],0<|x-y|<\delta$时,有$|f(x)-f(y)|<\epsilon$. 现在考虑$f$在实数上的一致连续性:对这个$\epsilon>0$,取相同的$\delta>0$,则$\forall x,y\in\mathbb{R},0<|x-y|<\delta_0$,一定存

在 $x',y'\in[0,2T],0<|x-y|<\delta$,满足$f(x)=f(x'),f(y)=f(y')$,此时

$|f(x')-f(y')|=|f(x)-f(y)|<\epsilon$ 所以$f(x)$在$\mathbb{R}$上一致连续..........3'

(3)$|\sin x-\sin y|=|(\sin)'(\xi)(x-y)|=|\cos\xi||x-y|\leqslant|x-y|$.$\sin x$在$\mathbb{R}$上一致连续.

取$\epsilon_0=1,x_n=\sqrt{2n\pi},y_n=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}},n=1,2,\cdots$则

$0<y_n-x_n=\frac{\pi}{2}\frac{1}{x_n+y_n}<\frac{\pi}{2}\frac{1}{2x_n}=\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\to 0\ \ (n\to\infty)$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$.但是$|f(y_n)-f(x_n)|=1\geqslant\epsilon_0$.所以$\sin x^2$在$\mathbb{R}$上一致连续.

由(1)(2)可得$\sin x+\sin x^2$不是周期函数..........3'

阅卷人	
得 分	

四、证明题 (16题10分,其余每题 8 分，共42分)

13. 用ϵ语言证明下列命题:

(1) 若$a_n>0,n=1,2,\cdots$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{A}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x-1}=\frac{1}{2}$.

证明:(1)由条件$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$可得$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}>0,\forall n>N$,有$|a_n-A|<\epsilon$
由保号性,$A\geqslant 0$. 若$A=0$,取$N_1=N\in\mathbb{N}$,则$\forall n>N_1$,有$|\sqrt{a_n}-0|<\sqrt{\epsilon}$
所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=0$.........2'
若$A>0$,取$N_2=N\in\mathbb{N}$,则$\forall n>N_2$,有$|\sqrt{a_n}-\sqrt{A}|=\frac{|a_n-A|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}}<\frac{\epsilon}{\sqrt{A}}$.
以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{A}$.........2'
(2)$\forall\epsilon>0$,取$M=\max\{3,\frac{1}{2\epsilon}+\frac{2}{3}\}>0,\forall x:|x|>M$时,有
$|\frac{x^2+1}{2x^2+x-1}-\frac{1}{2}|=|\frac{x^2+1-(x^2+x/2-1/2)}{2x^2+x-1}|=|\frac{-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}{2x^2+x-1}|=|\frac{-1+\frac{3}{x}}{4x+2-\frac{2}{x}}|\leqslant\frac{1+|\frac{3}{x}|}{|4x|-2-|\frac{2}{x}|}<\frac{2}{4M-2-\frac{2}{3}}\leqslant\epsilon$
所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x-1}=\frac{1}{2}$..........4'

14. 设f是闭区间$[a,b]$上的可导函数,且存在$M>0$,满足 $\forall x\in[a,b],\ \ |f'(x)|\leqslant M$.
证明:$|f(x)-\frac{f(a)+f(b)}{2}|\leqslant\frac{1}{2}M(b-a)$.
由微分中值定理,$\forall x\in(a,b),\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b)$.满足
$f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a),\quad f(b)-f(x)=f'(\xi_2)(b-x)$.
因此$|f(x)-f(a)|=|f'(\xi_1)(x-a)|\leqslant M(x-a),\ \ |f(b)-f(x)|\leqslant M(b-x)$. 上面的不等式对$x=a,b$也显然成立,所以$\forall x\in[a,b]$,有
$|f(x)-\frac{f(a)+f(b)}{2}|=\frac{1}{2}|f(x)-f(a)+f(x)-f(b)|$
$\leqslant\frac{1}{2}|f(x)-f(a)|+\frac{1}{2}|f(x)-f(b)|\leqslant\frac{1}{2}M(x-a)+\frac{1}{2}M(b-x)=\frac{1}{2}M(b-a)$.........8'

15. (1) 叙述闭区间套定理.

(2) 利用闭区间套定理证明:闭区间$[a,b]$上的连续函数一定有界.

证明:(1)设有闭区间套$[a_1,b1]\supseteq[a_2,b2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,bn]\supseteq\cdots$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,则$\exists!c\in[a_n,b_n],\forall n\in\mathbb{N}_+$..........4'

(2)设$f(x)$是有界闭区间$[a,b]$上的连续函数,假设结论不成立,即f是无界函数.将$[a,b]$二等分得区间

$[a,\frac{a+b}{2}],[\frac{a+b}{2},b]$,则至少有一个区间满足$f$在该区间上无界,记为$[a_1,b_1]$.继续二等分区间$[a_1,b_1]$,得区间为$[a_2,b_2]$,满足$f$在上面无界.不断二等分得到闭区间套

$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots\qquad b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\ (n\to\infty)$

满足:$\forall n,f(x)$在$[a_n,b_n]$上无界.由闭区间套定理,$\exists!c\in[a_n,b_n],\forall n\in\mathbb{N}_+$.而$f(x)$在$c\in[a,b]$处连续,由连续函数的局部有界性得$\exists\delta>0,f(x)$在$(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$上有界.另一方面,$\exists N,\forall n>N$,有$[a_n,b_n]\subseteq(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$,这与$f(x)$在$[a_n,b_n]$上无界矛盾!所以$f$是有界函数..........4'

16. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$上可导,$f(0)=f(1)=0$且$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-1}{(x-\frac{1}{2})^2}=1$,证明:

(1) 存在$c\in(\frac{1}{2},1)$, 满足$f(c)=c$.

(2) 对任意的$\lambda\in\mathbb{R}$,都存在$a\in(0,1)$,满足$f'(a)-\lambda(f(a)-a)=1$.

(3) $f(x)$在$[0,1]$上的最大值大于1.

证明:(1)由$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-1}{(x-\frac{1}{2})^2}=1$,得$f(1/2)=1$.令$g(x)=f(x)-x$,则$g(x)$是$[0,1]$上的连续函数，且 $g(1/2)=f(1/2)-1/2=1/2>0,g(1)=f(1)-1=-1<0$,由界值定理,$\exists c\in(\frac{1}{2},1),g(c)=0$,即$f(c)=c$..........3'

(2)令$h(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x)$,则$h(x)$是$[0,1]$上的连续函数，在$(0,1)$上可导,且 $h(0)=h(c)=0$,由微分中值定理，存在$a\in(0,c)$, $h'(a)=e^{-\lambda a}(f'(a)-1-\lambda(f(a)-a))=0$,整理得 $f'(a)-\lambda(f(a)-a)=1$..........4'

(3)由$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-1}{(x-\frac{1}{2})^2}=1>\frac{1}{2}$得,存在$\delta>0$,满足$\forall x\in(\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}+\delta)$有$\frac{f(x)-1}{(x-\frac{1}{2})^2}\geqslant\frac{1}{2}>0$,特别地,$f(x)>1$. 又$f$能取到最大值,所以$f(x)$在$[0,1]$上的最大值大于1..........3'

17. 设$a_n>0,n=1,2,\ldots$令$b_n=n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1)$. 证明:$b_n$不可能收敛到0.

证明:假设b_n收敛到0,则对于$\varepsilon=1,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geqslant N,b_n<1$.即$n(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1)<1$. 所以$\frac{1+a_{n+1}}{a_n}<\frac{n+1}{n}$,于是$\frac{a_{n+1}}{n+1}<\frac{a_n}{n}-\frac{1}{n+1}$.设$M=\frac{a_N}{N}$,则对任意的正整数$k$,有

$\frac{a_{N+k}}{N+k}<\frac{a_{N+k-1}}{N+k-1}-\frac{1}{N+k}<\cdots<\frac{a_N}{N}-\frac{1}{N+k}-\frac{1}{N+k-1}-\frac{1}{N+1}=M-(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{N+k})$.

而$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{N+k}>\ln(1+\frac{1}{N+1})+\ln(1+\frac{1}{N+2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{N+k})=\ln\frac{N+k+1}{N+1}$,

取整数$k=[e^M(N+1)-N]$可得上式$>M$.所以对这个k,有$\frac{a_{N+k}}{N+k}<0$,这与$a_n>0,n=1,2,\ldots$矛盾！因此假设不成立,所以b_n不可能收敛到0..........8'