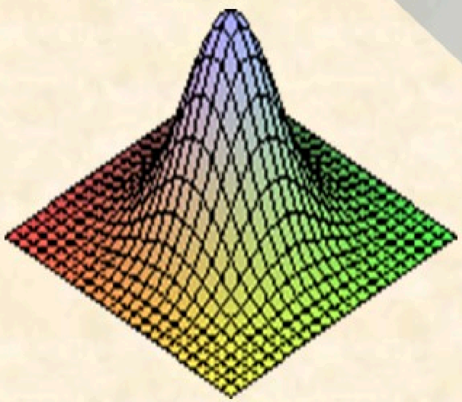
概率论与数理统计

制作人：叶鹰　吴娟

主讲人：吴 娟

wujuan@hust.edu.cn



§6.2　抽样分布

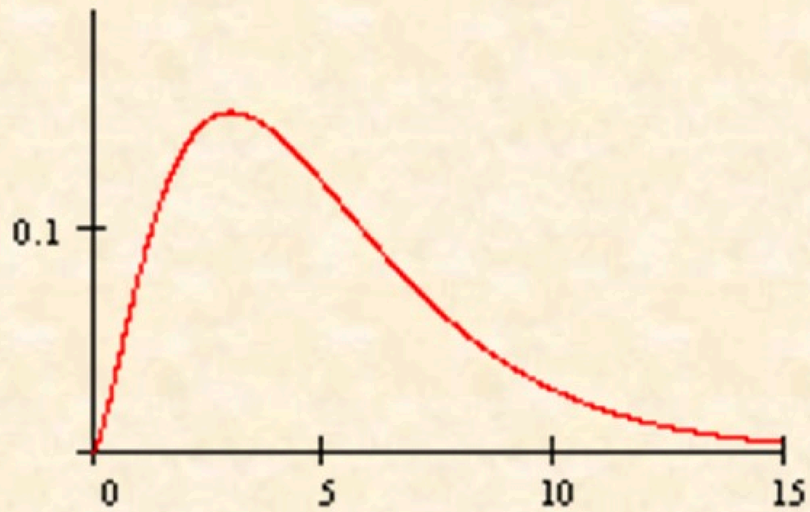
一、χ^2分布

设X_1，X_2，…，X_n独立同分布于N（0，1），则称

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

服从自由度为n的χ^2分布，记$\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}, & x \geq 0 \\ 0\,, & x < 0 \end{cases}$$

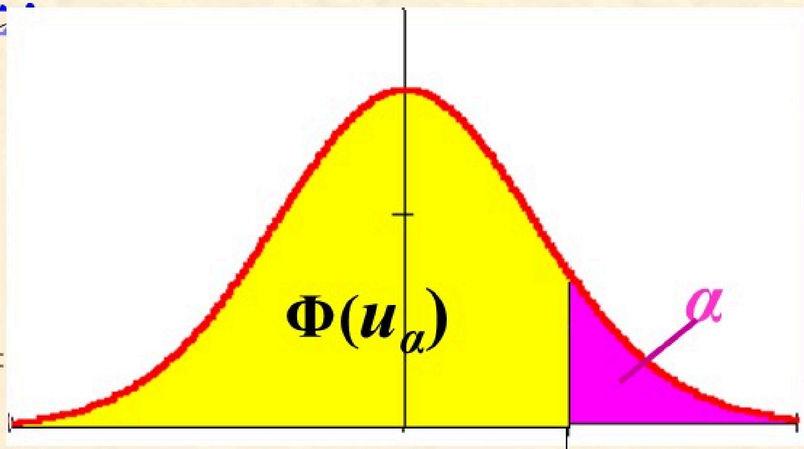


$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

•数字特征：

$E(\chi^2) =$

$D(\chi^2) = \ldots)] = \sum_{i=1}^{n}(3-1) = 2n$



$\Phi(u_\alpha)=1-\alpha$

•可加性：

$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1)$与$\chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$ 独立 $\Rightarrow$ $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

•上侧分位点：

$P(\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)) = \alpha$　　　$\chi_{0.01}^2(20) = 37.566$

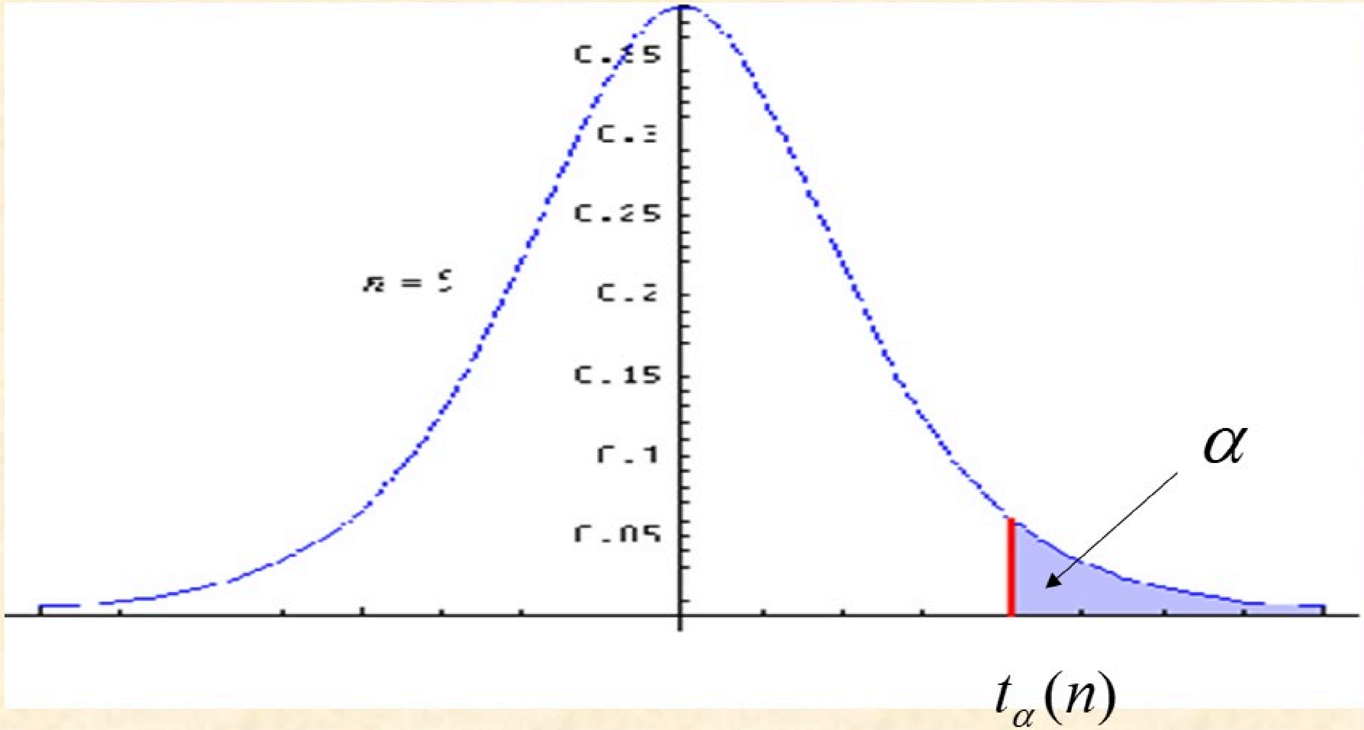
当n>45时，有 $\chi_\alpha^2(n) \approx \frac{1}{2}(u_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$

查表

二、t分布

设 $X \sim N(0,1)$ 与 $Y \sim \chi^2(n)$ 独立，则称 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$

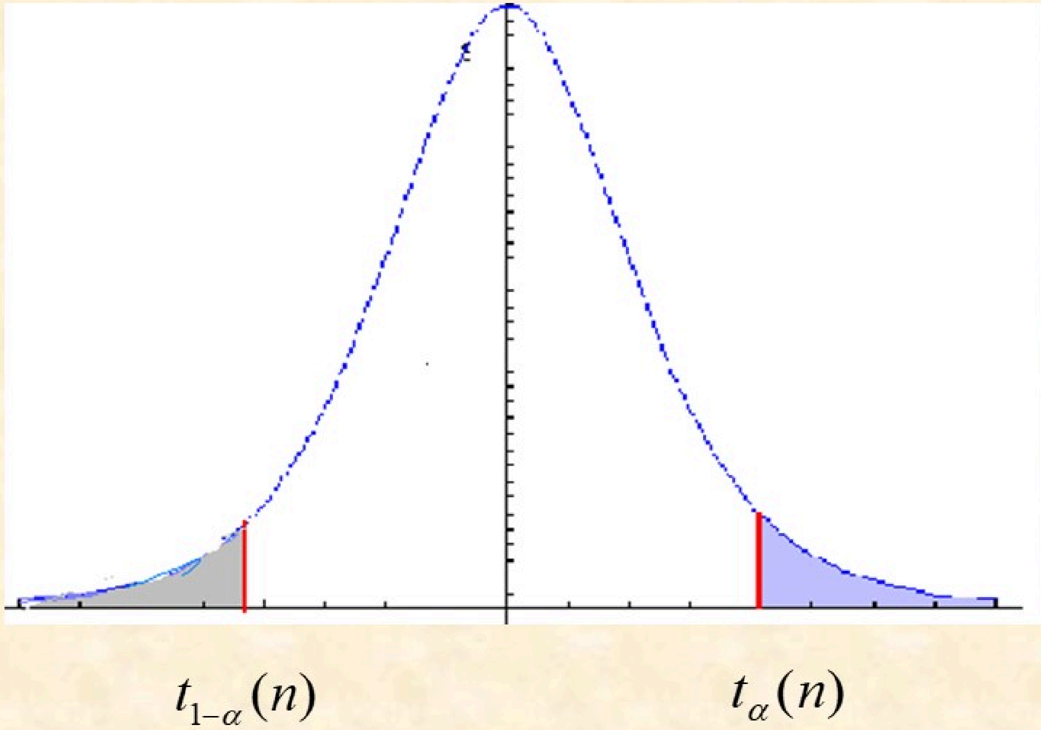
服从自由度为 n 的 t 分布，记 $T \sim t(n)$.



渐进正态

$$P(T > t_\alpha(n)) = \alpha$$

注意： $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$



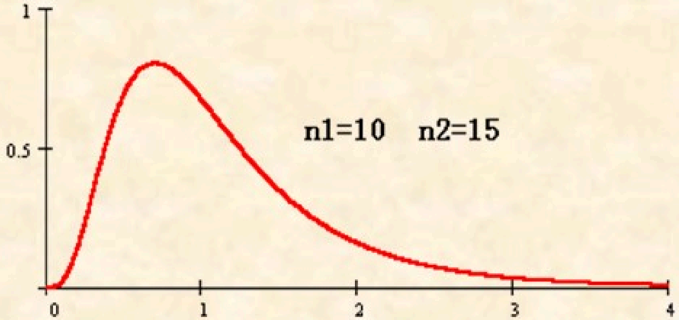
三、 F分布

设$X \sim \chi^2(n_1)$与$Y \sim \chi^2(n_2)$相互独立，则称

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \qquad \frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$$

服从自由度为（n_1，n_2）的**F分布**，记$F \sim F(n_1, n_2)$。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} \dfrac{(\frac{n_1}{n_2})(\frac{n_1}{n_2}x)^{\frac{n_1}{2}-1}}{(1+\frac{n_1}{n_2}x)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



•上侧分位点：$P(F > F_\alpha(n_1, n_2)) = \alpha$

$$P(\frac{1}{F} > F_{1-\alpha}(n_2, n_1)) = P(\frac{1}{F} > \frac{1}{F_\alpha(n_1, n_2)}) = 1-\alpha$$

查表

基本抽样定理

定理 设X_1，X_2，…，X_n是取自总体$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，则

(1) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;

(2) $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 = \sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n-1)$;

(3) $\bar{X}$ 与S^2相互独立.

证明(1) $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n})^2\sigma_i^2) \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;

说明(2) $\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \sim N(0, ?)$，且 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^{n}X_i - n\bar{X} = 0$

说明(3) $\bar{X} \to \mu, \quad S^2 \to \sigma^2$

推论1　$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$

证明：由定理知 (1) $\bar{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})\Rightarrow\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\sim N(0,1)$,

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, **(3) 两者独立，故**

$$T=\frac{(\bar{X}-\mu)\Big/\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/n-1}}\sim t(n-1)$$

推论2 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}) \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$： $\bar{X}$ S_1^2

$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}) \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$： $\bar{Y}$ S_2^2

则

(1) $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

(2) $\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\dfrac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Big/ \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\dfrac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \sim F(n_1, n_2)$

证明：由定理知$\dfrac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2(n_i-1)$，$i=1,2,$ 且两者相互独立，

故

$$F=\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

例1 设 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 分别是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的容量为 n 的两个样本（X_{11}，X_{12}，…，X_{1n}）和（X_{21}，X_{22}，…，X_{2n}）的样本均值.试确定 n 使两个样本均值之差的绝对值超过 σ 的概率大于0.01.

解 由 $\overline{X}_i \sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$ $n=1,2$，相互独立知

$$\overline{X}_1-\overline{X}_2 \sim N(0,\ 2\frac{\sigma^2}{n})$$

$$P(|\overline{X}_1-\overline{X}_2|>\sigma)=P\{\underbrace{\frac{|\overline{X}_1-\overline{X}_2|}{\sqrt{2\sigma^2/n}}}_{|N(0,1)|}>\frac{\sigma}{\sqrt{2\sigma^2/n}}\}=2[1-\Phi(\sqrt{\frac{n}{2}})]>\mathbf{0.01}$$

$$\Rightarrow \Phi(\sqrt{\frac{n}{2}})<0.995 \Rightarrow \sqrt{\frac{n}{2}}<2.576 \Rightarrow \quad \boldsymbol{n<13.27}$$

例2 分别从方差为20和35的两个独立的正态总体中抽取容量为8和10的两个样本,估计第一个样本方差S_1^2不小于第二个样本方差S_2^2两倍的概率.

解 由题意

$$(X_1, X_2, \cdots, X_8) \overset{iid}{\sim} N(\mu_1, 20) \qquad (Y_1, Y_2, \cdots, Y_{10}) \overset{iid}{\sim} N(\mu_2, 35):$$

由推论2知 $\dfrac{S_1^2/20}{S_2^2/35} \sim F(7,9)$ ，所以

$$P(S_1^2 \geqslant 2S_2^2) = P\left(\frac{S_1^2/20}{S_2^2/35} \geq 2 \times \frac{35}{20}\right) = P(F \geqslant 3.5) = 0.0423$$

查表有，$F_{0.05}(7,9) = 3.29$，$F_{0.025}(7,9) = 4.20$，所以

$$0.025 < P(S_1^2 \geqslant 2S_2^2) < 0.05$$