电路理论基础

——电路理论（高级篇）

华中科技大学·电气学院
ccsfm@hust.edu.cn

第15章 周期性非正弦稳态电路

15.1 概述

15.2 周期性函数的傅里叶级数与频谱

15.3 对称性对傅里叶级数的影响

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

15.5 对称三相非正弦稳态电路

15.5 拓展与应用

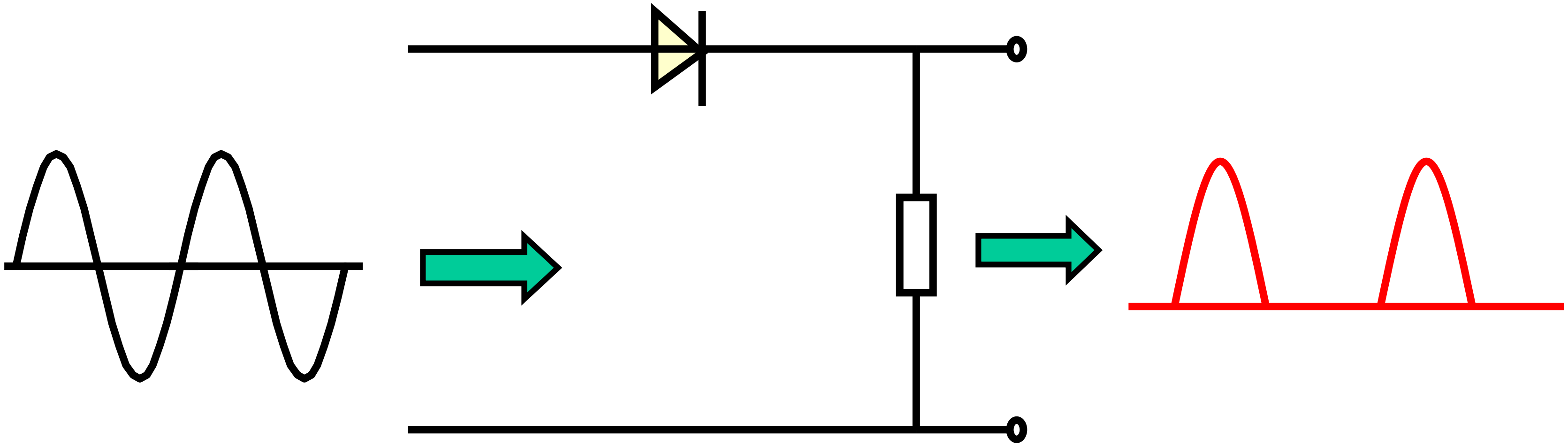
●重 点

1. 掌握周期函数的傅里叶级数与频谱

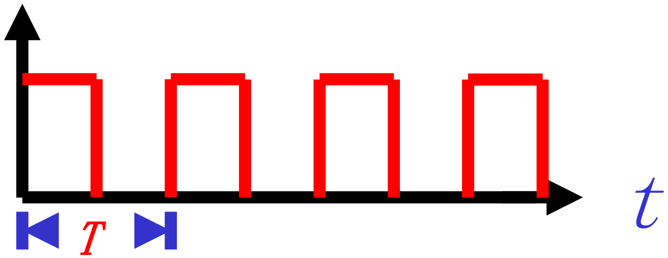
2. 熟练掌握周期性非正弦稳态电路分析

周期性非正弦信号的特点

半波整流电路的输出信号



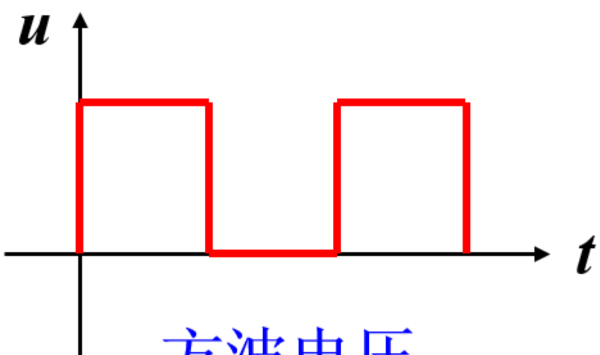
计算机内的脉冲信号



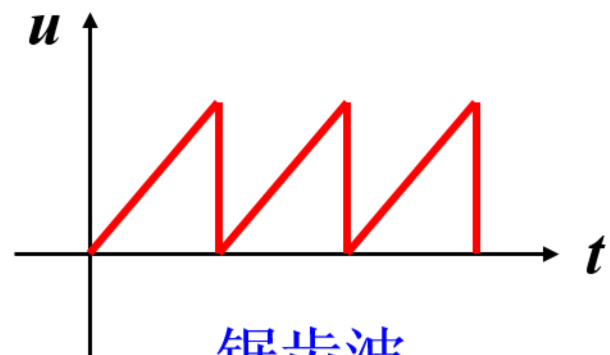
- 不是正弦波
- 按周期规律变化

◆ **特点：按周期规律变化，但不是正弦量。**

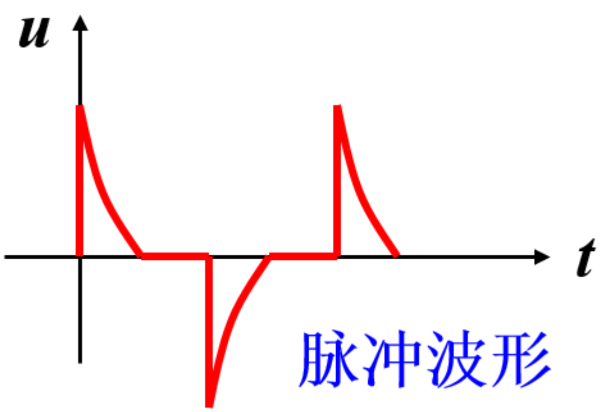
工程实际中，周期性非正弦波形较为常见，如：脉冲波形、三角波、方波、锯齿波、半波整流波形等等



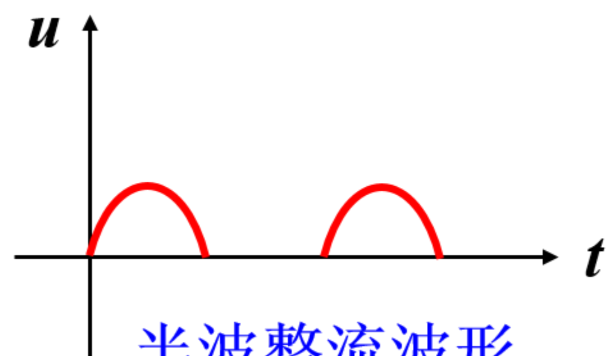
方波电压



锯齿波



脉冲波形



半波整流波形

分析方法

1.运用数学工具(傅里叶级数),将周期性非正弦电量分解成各种不同频率的正弦电量。运用正弦稳态电路分析方法进行计算。

2.运用叠加定理计算周期性非正弦稳态响应。

15.2 周期性函数的傅里叶级数与频谱

◆ 周期性非正弦函数

$$f(t)=f(t+nT)$$

式中T为周期函数 $f(t)$ 的周期

可以展开成下面的无穷级数

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t) \qquad \omega_0=2\pi/T$$

15.2 周期性函数的傅里叶级数与频谱

◆ 傅里叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t)\;=\underbrace{A_0}_{\textbf{DC}}+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{A_k\cos(k\omega_0 t+\phi_k)}_{\textbf{AC— harmonics}}$$

$$\omega_0=2\pi/T$$

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{d}t \\ a_k=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\mathrm{d}t \\ b_k=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin k\omega_0 t\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\boxed{A_k\angle\phi_k=a_k-\mathrm{j}b_k}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} A_0=a_0 \\ A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2} \\ \phi_k=-\arctan\dfrac{b_k}{a_k} \end{cases}$$

15.2 周期性函数的傅里叶级数与频谱

◆ 频谱

$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega t+\phi_k)$$

$$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\qquad \phi_k=-\arctan\frac{b_k}{a_k}$$

A_0 直流分量

当K=1时， $A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ 基波（和原函数同频）

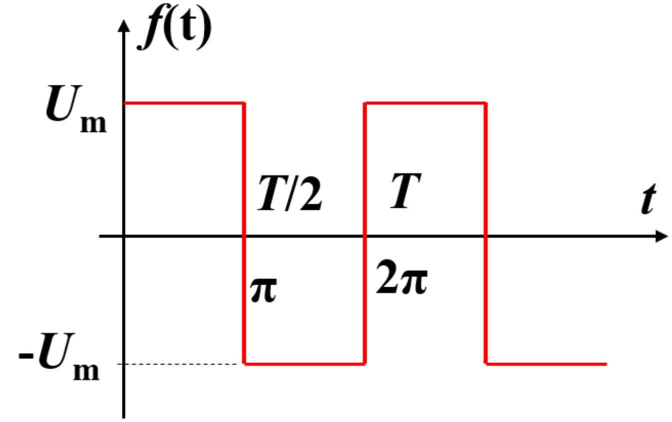
当K=2时， $A_2\cos(2\omega t+\varphi_2)$ 二次谐波（2倍频）

… 高次谐波

15.2 周期性函数的傅里叶级数与频谱

例：求图示周期性矩形信号的傅里叶级数展开式。

解：$f(t)$在第一个周期内的表达式为：



$$\begin{cases} U_m & 0 < t \le \pi \\ -U_m & \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(k\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} U_m \sin(k\omega t)d(\omega t) - \int_{\pi}^{2\pi} U_m \sin(k\omega t)d(\omega t) \right]$$

$$= \frac{2U_m}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k\omega t)d(\omega t) = \frac{2U_m}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(k\omega t) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2U_m}{k\pi}\left[1 - \cos(k\pi) \right]$$

当k为奇数时：$b_k = 4U_m / k\pi$

当k为偶数时：$b_k = 0$

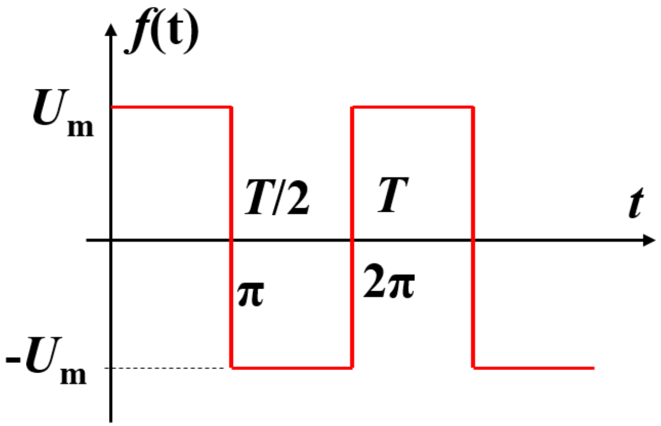
15.2 周期性函数的傅里叶级数与频谱

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} U_m\cos(k\omega t)d(\omega t) - \int_{\pi}^{2\pi} U_m\cos(k\omega t)d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{2U_m}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k\omega t)d(\omega t) = 0$$



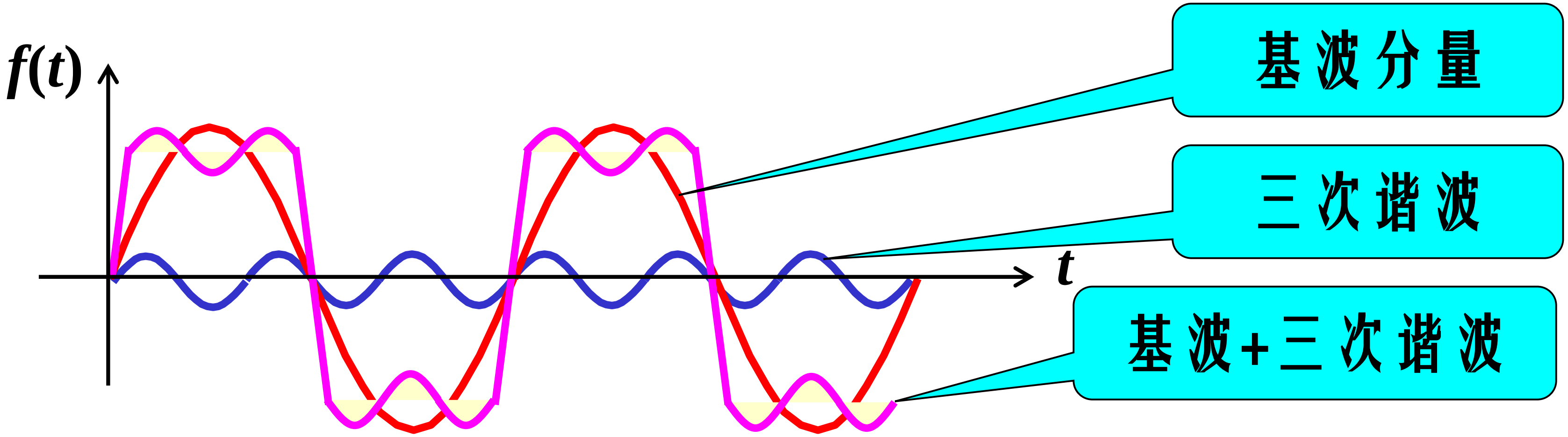
根据函数为奇函数，也可得到：$a_k=0$

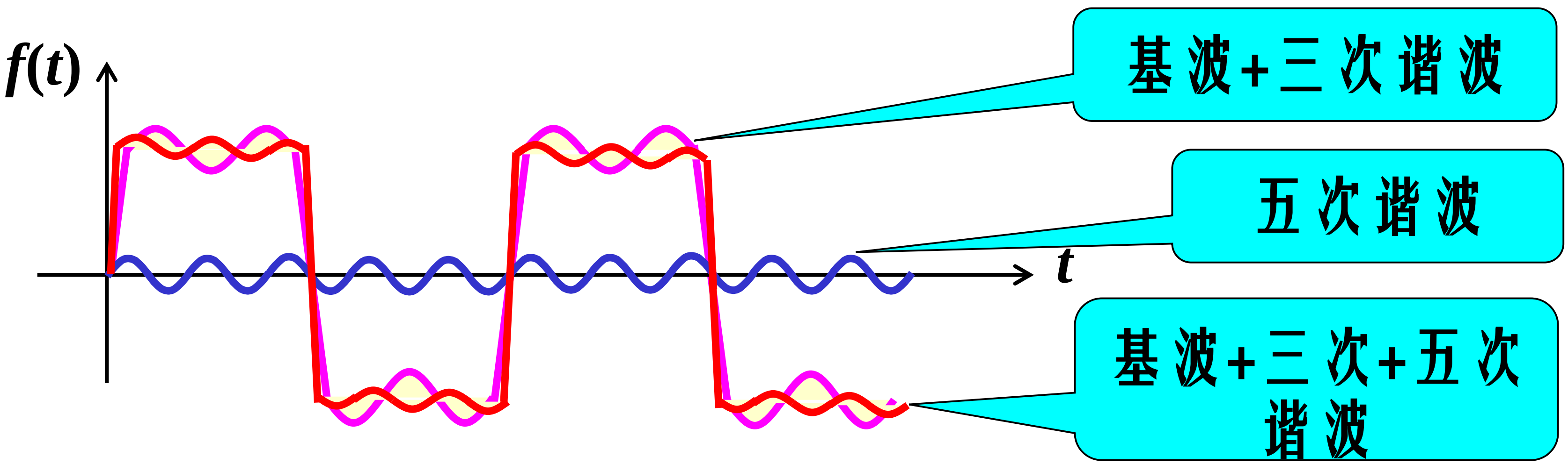
由此求得：

$$f(t) = \frac{4U_m}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \cdots\right]$$

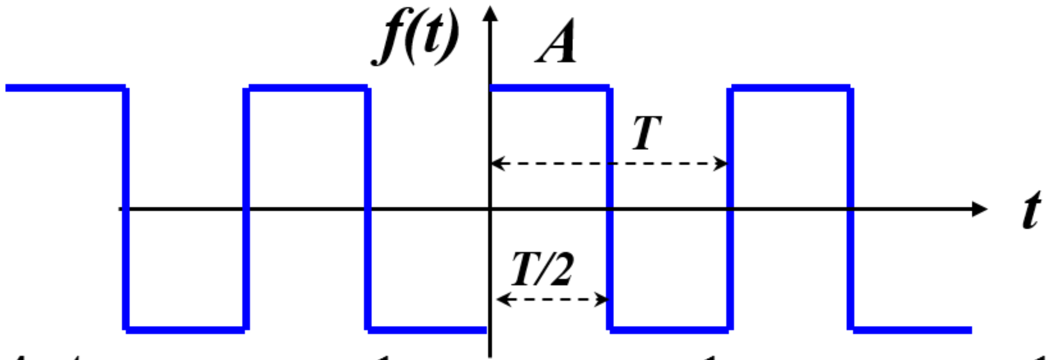
15.2 周期性函数的傅里叶级数与频谱

$$f(t)=\frac{4U_m}{\pi}\left[\sin(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega t)+\cdots\right]$$



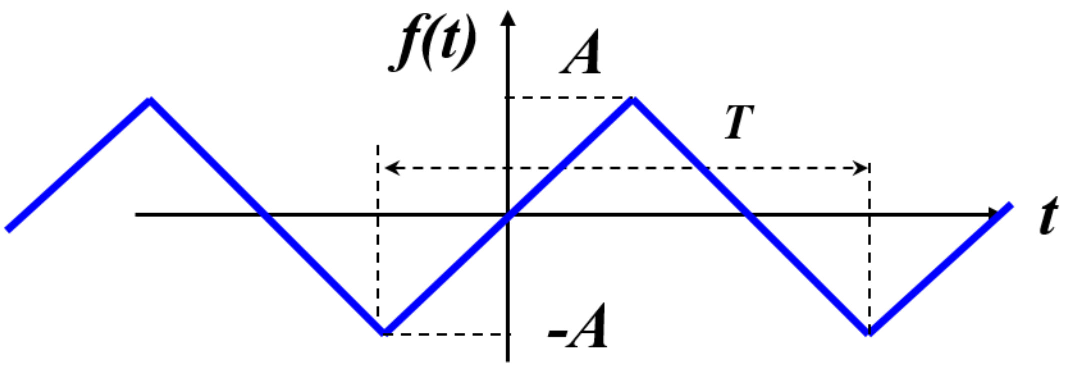


15.2 周期性函数的傅里叶级数与频谱



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + \cdots)$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2}(\sin\omega t - \frac{1}{9}\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\omega t - \frac{1}{49}\sin 7\omega t + \cdots)$$

第15章 周期性非正弦稳态电路

15.1 概述

15.2 周期性函数的傅里叶级数与频谱

15.3 对称性对傅里叶级数的影响

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

15.5 对称三相非正弦稳态电路

15.5 拓展与应用

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

相关数学知识(三角函数系及其正交性)

三角函数系：

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\cos nx,\sin nx,\cdots$$

◆ **对称性：正弦、余弦信号一个周期内的积分为0(k为整数)。**

$$\int_0^{2\pi}\sin k\omega t d(\omega t)=0 \qquad \int_0^{2\pi}\cos k\omega t d(\omega t)=0$$

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

◆ 正交性：任意两个不同函数之积在[−π，π]上的积分等于零。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx=0$$

(其中$m, n = 1, 2, \cdots$)

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

◆ 三角函数的正交性 (k≠p)

$$\int_0^{2\pi} \sin k\omega t \cdot \sin p\omega t d(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\omega t \cdot \cos p\omega t d(\omega t) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\omega t \cdot \sin p\omega t d(\omega t) = 0$$

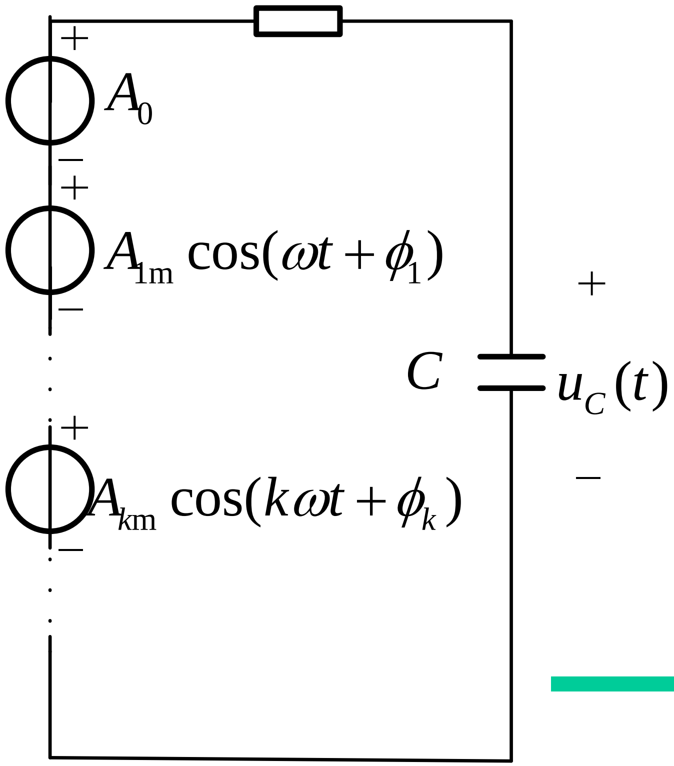
◆ 正弦、余弦的平方在一个周期内的平均值为1/2。

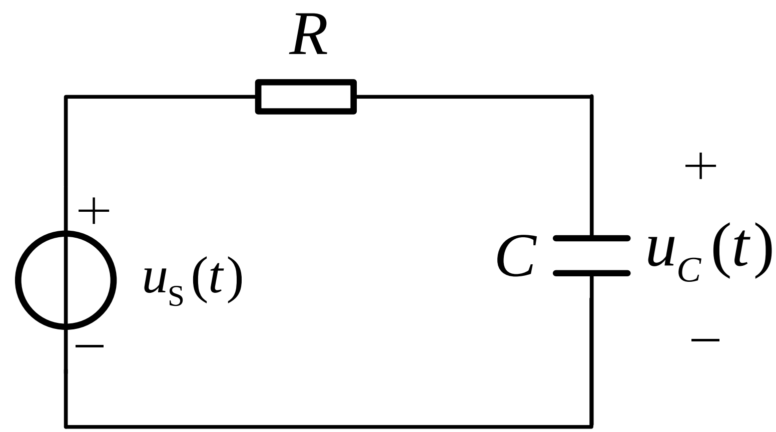
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 k\omega t d(\omega t) = \frac{1}{2}$$

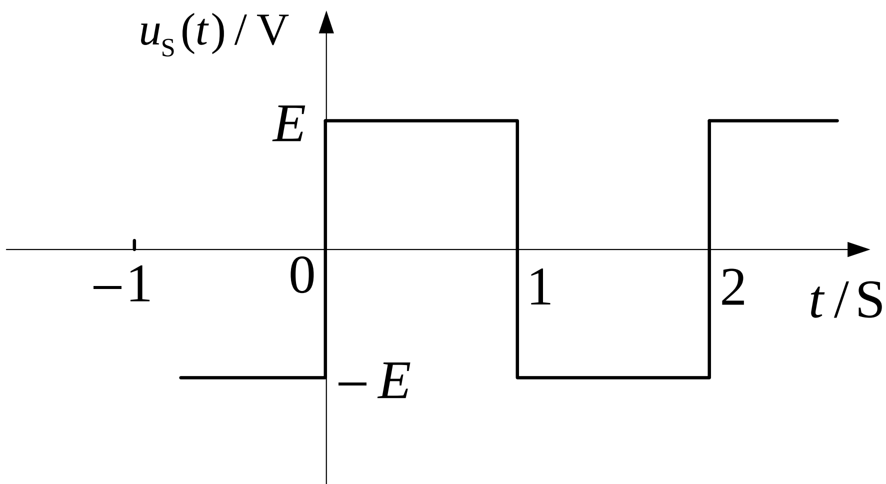
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 k\omega t d(\omega t) = \frac{1}{2}$$

◆ 电压、电流瞬时值计算

$$u_S(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km}\cos(k\omega t + \phi_k)$$



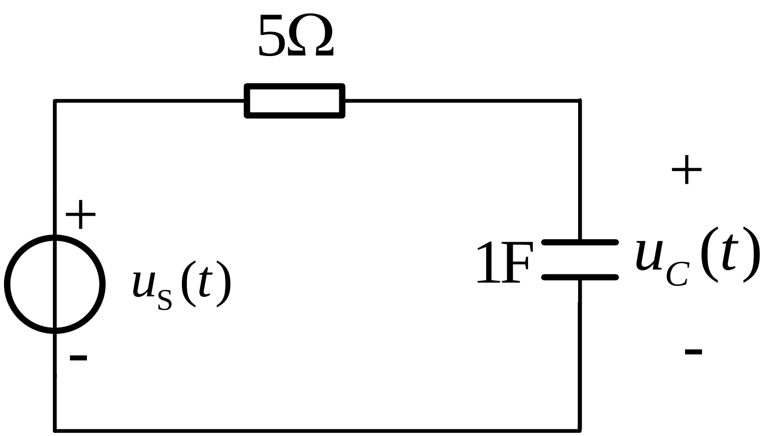


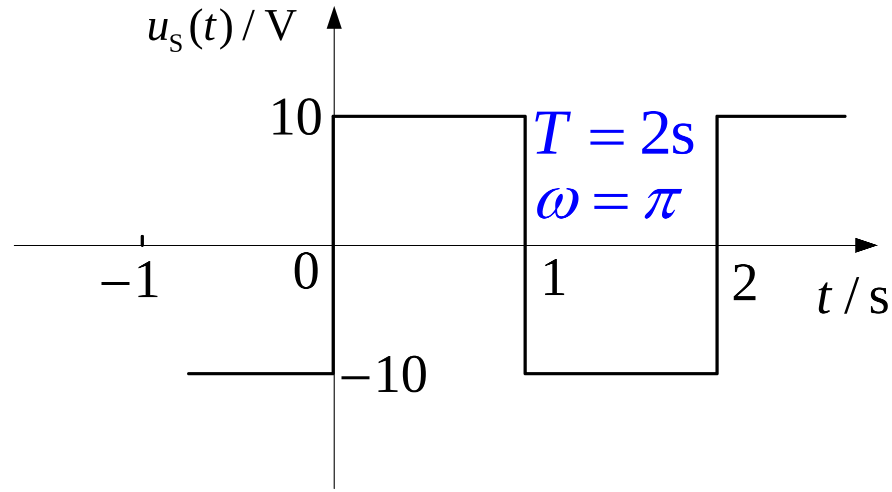


周期性非正弦电源

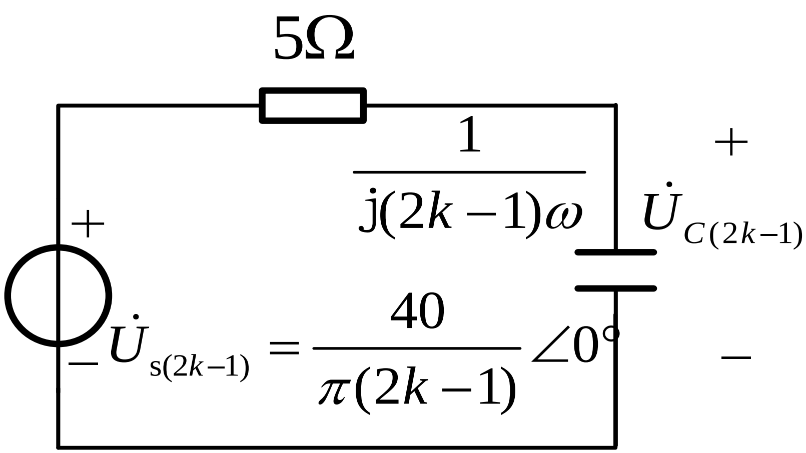
叠加定理

15.4 周期性非正弦稳态电路分析





$$u_S = \frac{40}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)\omega t$$

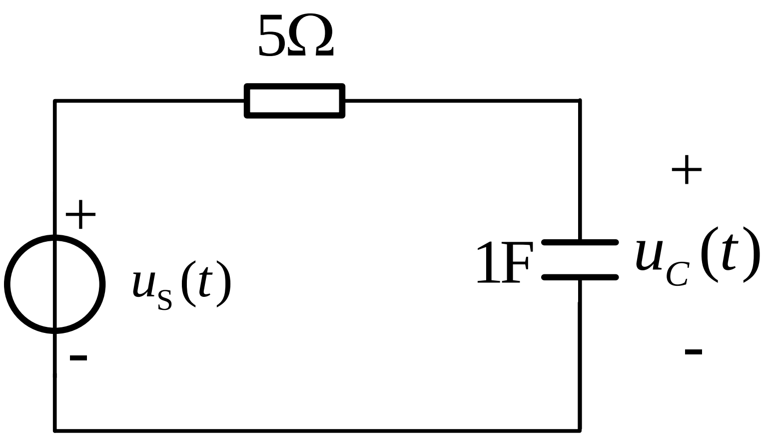


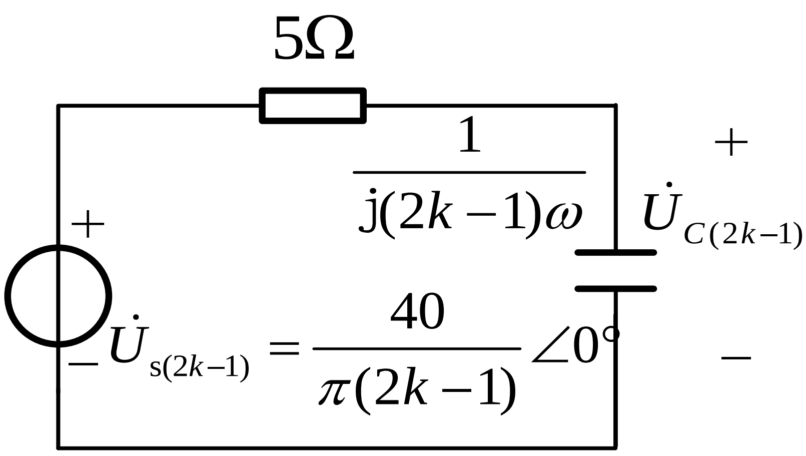
$$\dot{U}_{C(2k-1)} = \frac{-\mathrm{j}\dfrac{1}{(2k-1)\pi}}{5-\mathrm{j}\dfrac{1}{(2k-1)\pi}} \times \frac{40}{\pi(2k-1)}\angle 0^\circ$$

$$= A_{(2k-1)}\angle\theta_{(2k-1)}$$

$$u_C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{(2k-1)}\sin[(2k-1)\pi t + \theta_{(2k-1)}]$$

15.4 周期性非正弦稳态电路分析





无法获得稳态响应的具体波形。

只能通过有限项获得近似响应!

取多少项是可以接受的近似呢?

$$u_C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{(2k-1)} \sin[(2k-1)\pi t + \theta_{(2k-1)}]$$

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

◆ **有效值**

$$u(t)=U_0+\sum_1^{\infty}U_{km}\cos(k\omega t+\phi_k)$$

$$=U_0+\sum_1^{\infty}\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_k)$$

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\mathrm{d}t}$$

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T[U_0+\sum_1^{\infty}\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_k)]^2\mathrm{d}t}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T U_0^2\mathrm{d}t=U_0^2 \qquad \frac{1}{T}\int_0^T[U_0\cdot\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_k)]\mathrm{d}t=0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T[\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_k)\cdot\sqrt{2}U_q\cos(q\omega t+\phi_q)]\mathrm{d}t=0 \qquad k\neq q$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T[\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_k)]^2\mathrm{d}t=U_k^2$$

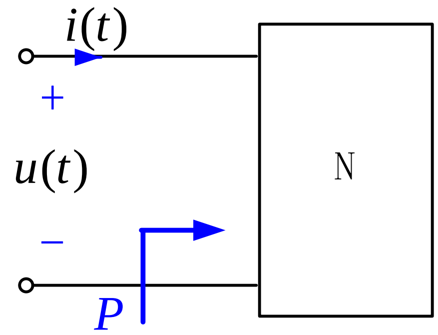
$$U=\sqrt{U_0^2+\sum_1^{\infty}U_k^2}$$

◆ 平均功率

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T ui\mathrm{d}t$$

$$u(t)=U_0+\sum_1^{\infty}\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_{uk})$$

$$i(t)=I_0+\sum_1^{\infty}\sqrt{2}I_k\cos(k\omega t+\phi_{ik})$$



$$\frac{1}{T}\int_0^T U_0 I_0\mathrm{d}t=U_0 I_0=P_0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T U_0\sum_1^{\infty}\sqrt{2}I_k\cos(k\omega t+\phi_{ik})\mathrm{d}t=0$$

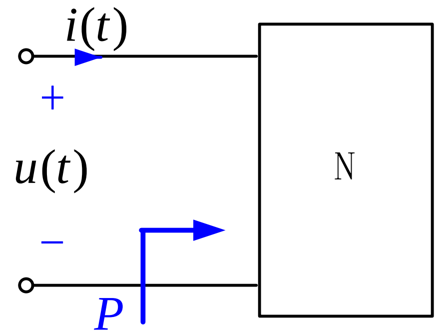
$$\frac{1}{T}\int_0^T I_0\sum_1^{\infty}\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_{uk})\mathrm{d}t=0$$

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

◆ 平均功率

$$u(t)=U_0+\sum_{1}^{\infty}\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_{uk})$$

$$i(t)=I_0+\sum_{1}^{\infty}\sqrt{2}I_k\cos(k\omega t+\phi_{ik})$$



$$\boxed{P=\frac{1}{T}\int_0^T uidt}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T[\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_{uk})][\sqrt{2}I_k\cos(k\omega t+\phi_{ik})]dt=U_kI_k\cos(\phi_{uk}-\phi_{ik})=P_k$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T[\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_{uk})][\sqrt{2}I_q\cos(q\omega t+\phi_{iq})]dt=0\qquad(k\neq q)$$

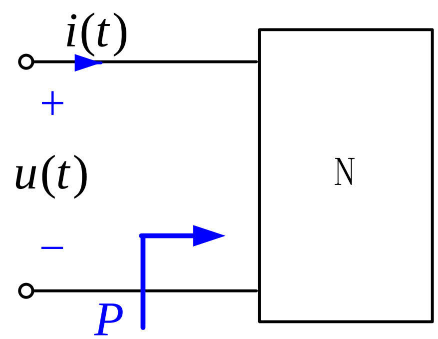
$$\boxed{P=U_0I_0+\sum_{1}^{\infty}U_kI_k\cos(\phi_{uk}-\phi_{ik})}\ \boxed{=P_0+P_1+P_2+P_3+\cdots}$$

功率符合叠加原理

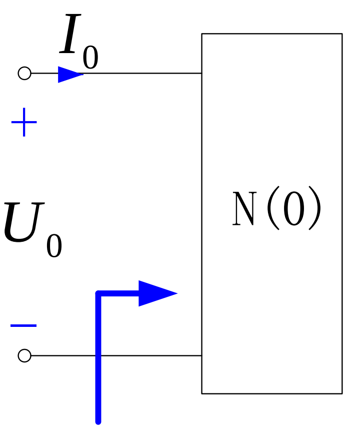
◆ 平均功率

$$u(t)=U_0+\sum_{1}^{\infty}\sqrt{2}U_k\cos(k\omega t+\phi_{uk})$$

$$i(t)=I_0+\sum_{1}^{\infty}\sqrt{2}I_k\cos(k\omega t+\phi_{ik})$$

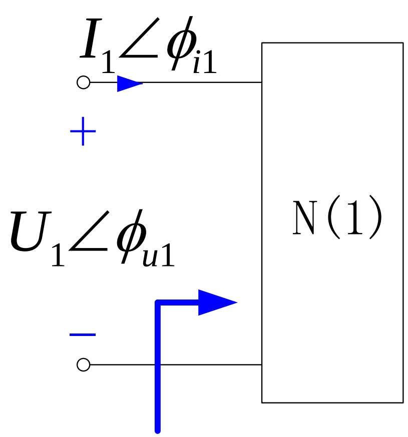


$$P=\frac{1}{T}\int_0^T ui\mathrm{d}t$$



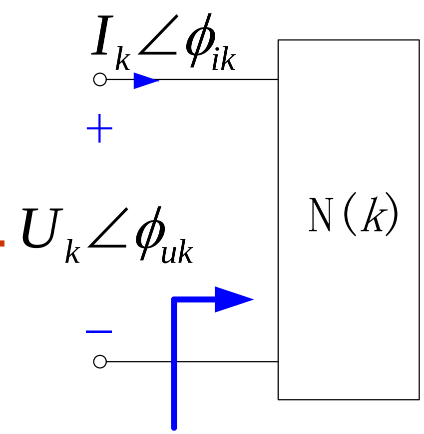
$$P_0=U_0I_0$$

+



$$P_1=U_1I_1\cos(\phi_{u1}-\phi_{i1})$$

+…+



$$P_k=U_kI_k\cos(\phi_{uk}-\phi_{ik})$$

+…

$$P=U_0I_0+\sum_{1}^{\infty}U_kI_k\cos(\phi_{uk}-\phi_{ik})=P_0+P_1+P_2+P_3+\cdots$$

功率符合叠加原理

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

1、周期性非正弦稳态电路的平均功率（有功功率）为各次谐波的平均功率的代数和，各次谐流的电压、电流所产生的平均功率具有可加性。

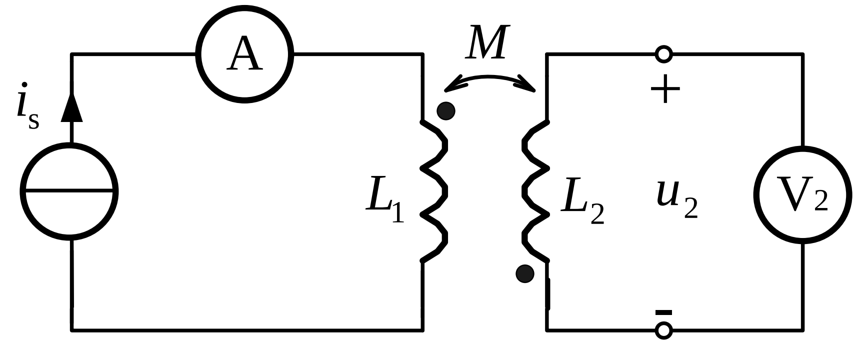
2、不同频率的电压、电流之间不产生有功功率，它们的平均功率为零。

3、当电路中的独立电源频率相同时，平均功率不符合叠加关系；当电路中的独立电源频率不同时，平均功率符合叠加关系。

例： $i_s = [5 + 10\cos(10t - 20°) - 5\sin(30t + 60°)]\text{A}$,

$L_1 = L_2 = 2\text{H}$，$M = 0.5\text{H}$。

求电压表和电流表的读数。



解： $i_{s(0)} = 5\text{A}$，$u_{2(0)} = 0$

$$\dot{I}_{s(1)m} = 10\angle -20°\text{A}$$

$$\dot{U}_{2(1)m} = -j\omega M \dot{I}_{s(1)m} = -j10 \times 0.5 \times 10\angle -20° = 50\angle -110°\text{V}$$

$$\dot{I}_{s(3)m} = 5\angle 60°\text{A}$$

$$\dot{U}_{2(3)m} = -j3\omega M \dot{I}_{s(3)m} = -j30 \times 0.5 \times 5\angle 60° = 75\angle -30°\text{V}$$

$$u_2 = [50\cos(10t - 110°) - 75\sin(30t - 30°)]\text{V}$$

$$I_s = \sqrt{5^2 + (10^2 + 5^2)/2} = 9.4\text{A}$$

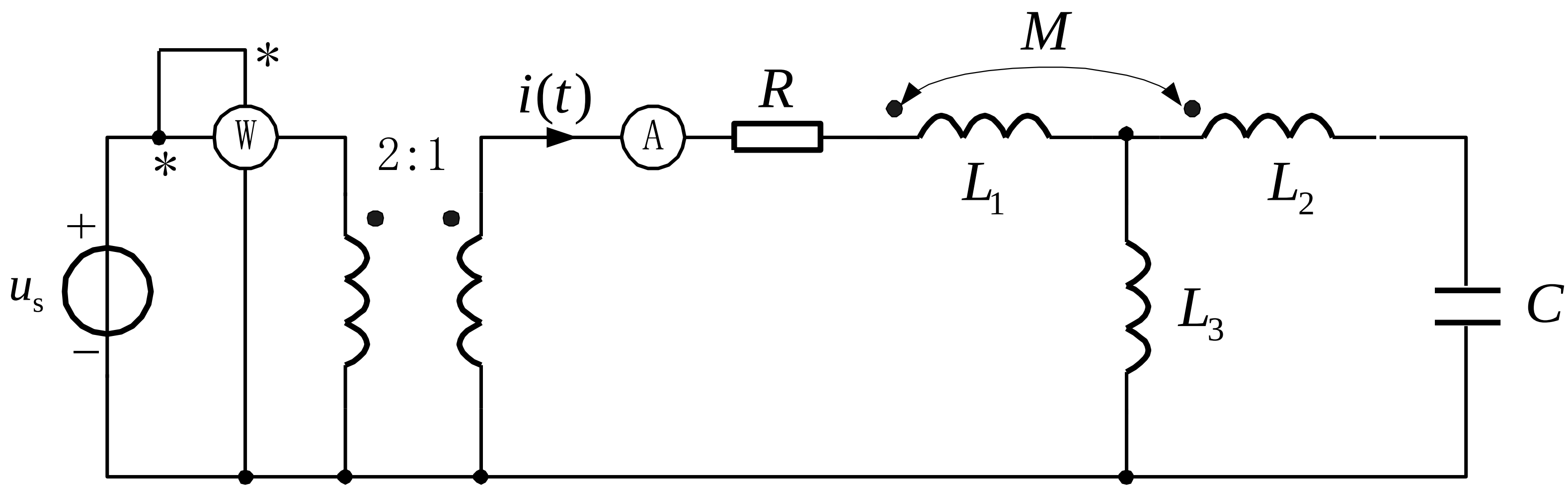
$$U_2 = \sqrt{(50^2 + 75^2)/2} = 63.7\text{V}$$

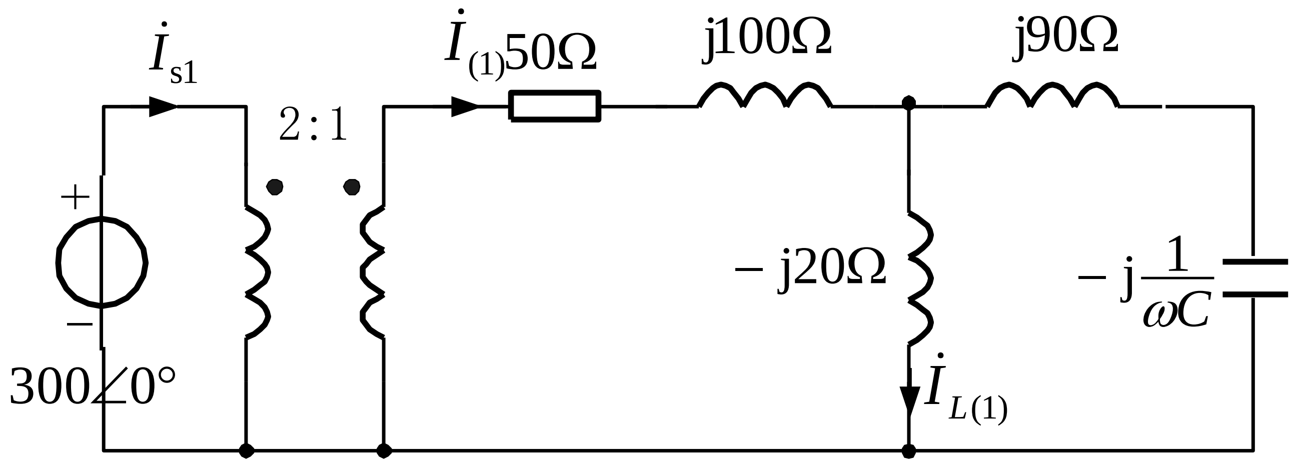
15.4 周期性非正弦稳态电路分析

例： $u_s(t)=(300\sqrt{2}\sin\omega t+200\sqrt{2}\sin 3\omega t)$ $R=50\Omega$

$\omega L_1=60\Omega$ $\omega L_2=50\Omega$ $\omega M=40\Omega$ $\omega L_3=20\Omega$

已知流过L_3的基波电流为零。求功率表和电流表的读数，以及$i(t)$的表达式。



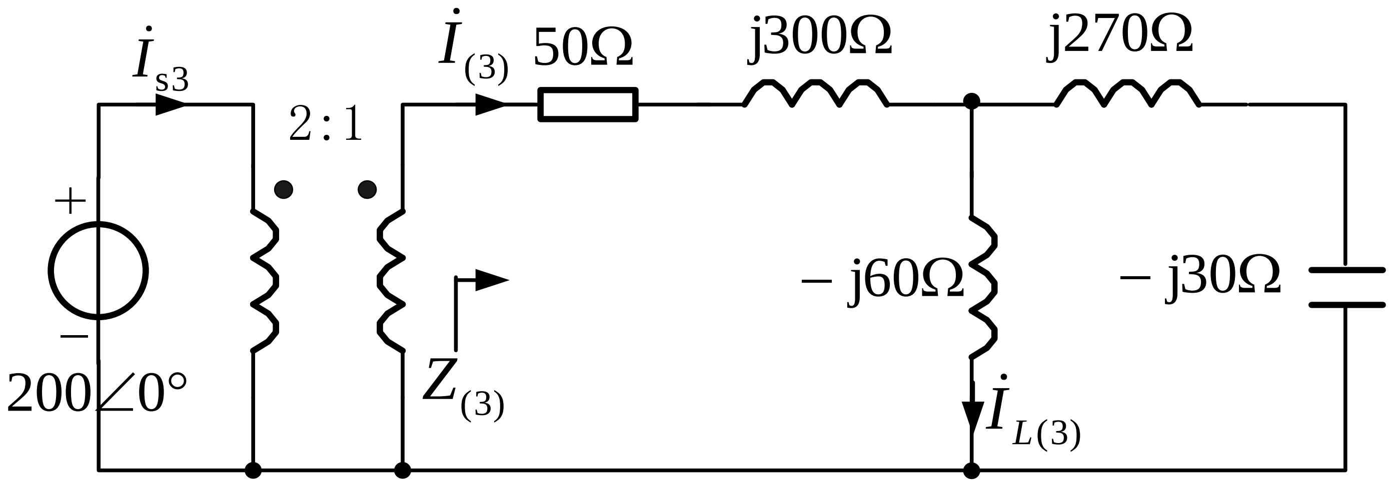


解： $\because \dot{I}_{L(1)} = 0 \qquad \therefore \dfrac{1}{\omega C} = 90$

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{150}{50 + \mathrm{j}100}$$

$$= 1.34\angle -63.4°$$

15.4 周期性非正弦稳态电路分析



$$Z_{(3)} = 50 + \mathrm{j}300 + \frac{-\mathrm{j}240 \times \mathrm{j}60}{\mathrm{j}240 - \mathrm{j}60} = 50 + j220$$

$$\dot{I}_{(3)} = \frac{100}{Z_{(3)}} = 0.44\angle -77.2^\circ$$

$$I = \sqrt{I_{(1)}{}^2 + I_{(3)}{}^2} = 1.41\mathrm{A}$$

$$P = 50 I^2 = 99.5\mathrm{W}$$

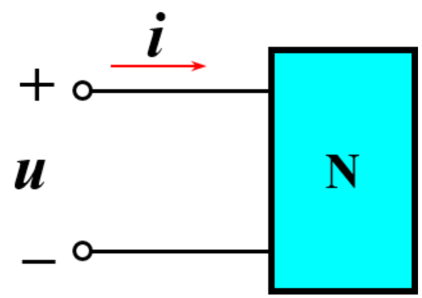
$$i(t) = 1.34\sqrt{2}\sin(\omega t - 63.4^\circ) + 0.44\sqrt{2}\sin(3\omega t - 77.2^\circ)\mathrm{A}$$

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

例：已知某线性无源单口网络N端口的电压、电流为：

$$u = 10\sin(\omega t + 90^\circ) + 10\sin(2\omega t - 45^\circ) + 10\sin(3\omega t - 60^\circ)\ V$$

$$i = 5\sin(\omega t) + 2\sin(2\omega t + 45^\circ) A$$



试求：（1）各频率网络N的输入阻抗。

（2）网络消耗的平均功率。

15.4 周期性非正弦稳态电路分析

解：(1) $\dot{U}_1 = 5\sqrt{2}\angle 90^\circ \quad \dot{I}_1 = 5\sqrt{2}/2$ ⇨

$Z_1 = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = 2\angle 90^0 = j2(\Omega)$ 此时网络N呈纯电感性。

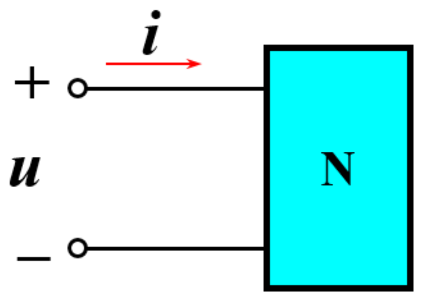
$\dot{U}_2 = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ \quad \dot{I}_2 = \sqrt{2}\angle 45^\circ$ ⇨

$Z_2 = \dot{U}_2/\dot{I}_2 = -j5(\Omega)$ 此时网络N呈纯电容性。

$\dot{U}_3 = 5\sqrt{2}\angle -60^\circ \quad \dot{I}_3 = 0$ ⇨ $Z_3 = \dot{U}_3/\dot{I}_3 = \infty$

此时网络N对三次谐波发生并联谐振。

15.4 周期性非正弦稳态电路分析



(2)

网络对各次谐波的阻抗都没有显示出电阻性质，说明该网络是由动态元件L、C 组成的。

其消耗的有功功率应为零。

$$
\begin{aligned}
P &= P_1 + P_2 + P_3 \\
&= U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + U_3 I_3 \cos\varphi_3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

谢 谢!