5、冲量与动量定理（力的时间累积效应）

对质点有： （适用范围：惯性系）

$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}$ 或 $\boxed{\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t=\vec{P}_t-\vec{P}_0}$ 冲量 $\vec{I}=\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t$

从t到$t+\mathrm{d}t$时刻质点受合外力$\vec{F}$的作用,动量的增量为$\mathrm{d}\vec{P}$.

动量定理：质点所受合外力的冲量等于这段时间内质点动量的增量。 $\boxed{\vec{I}=\Delta\vec{P}}$

分量形式
$$\begin{cases}\int_0^t F_x\mathrm{d}t=P_{xt}-P_{x0}\\ \int_0^t F_y\mathrm{d}t=P_{yt}-P_{y0}\\ \int_0^t F_z\mathrm{d}t=P_{zt}-P_{z0}\end{cases}$$

$$\Delta\vec{P}=\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\overline{\vec{F}}\cdot\Delta t$$

$$\overline{\vec{F}}\cdot\Delta t=m\vec{v}-m\vec{v}_0$$

$$\overline{\vec{F}}=\frac{m\vec{v}-m\vec{v}_0}{\Delta t}$$

0

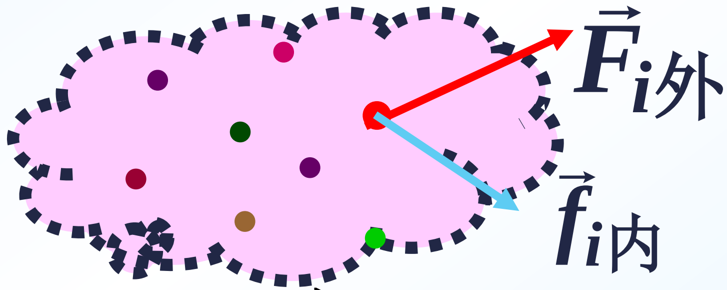
用于研究打击、碰撞问题

平均冲力

质点系的动量定理

对质点系：

设N个质点构成的质点系



$$
\left.\begin{aligned}
(\vec{F}_{外1}+\vec{f}_{内1})\mathrm{d}t &= \mathrm{d}\vec{P}_1\\
(\vec{F}_{外2}+\vec{f}_{内2})\mathrm{d}t &= \mathrm{d}\vec{P}_2\\
&\vdots\\
(\vec{F}_{外N}+\vec{f}_{内N})\mathrm{d}t &= \mathrm{d}\vec{P}_N
\end{aligned}\right\}
$$

$\vec{F}_{合外} = \vec{F}$ $\quad\quad$ $\vec{P}$

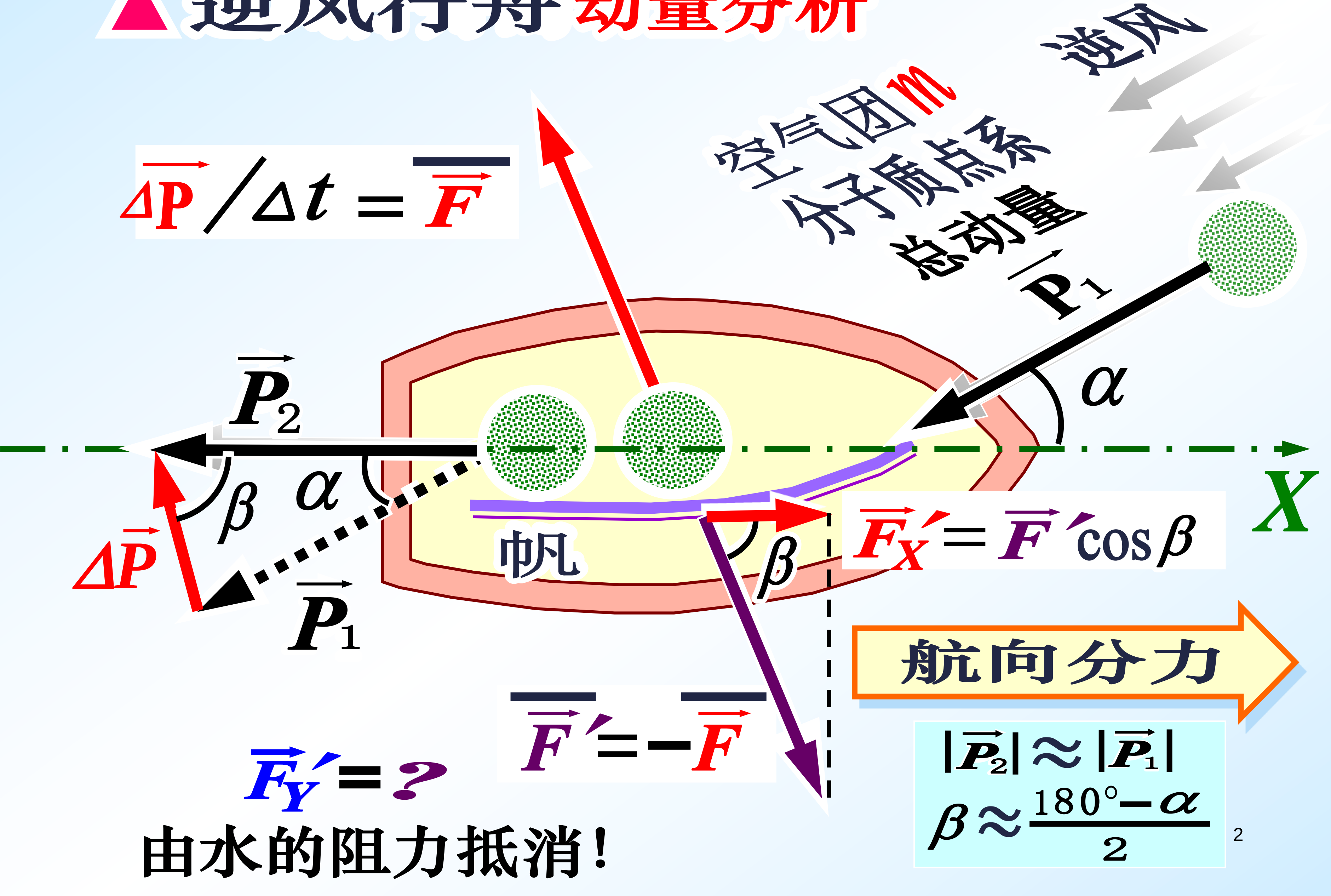
$$(\sum \vec{F}_{外i} + \cancelto{0}{\sum \vec{f}_{内i}})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boxed{\sum \vec{P}_i}$$

$$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}$$

$$\boxed{\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{P}_t - \vec{P}_0}$$

内力对质点系的动量改变没有贡献！

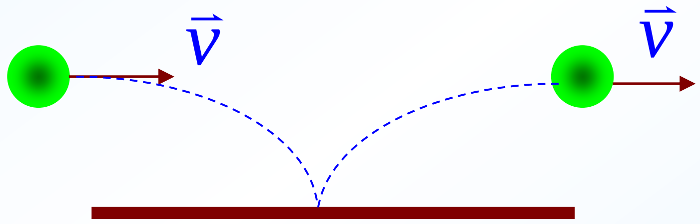
▲逆风行舟 动量分析



$\Delta\vec{P}/\Delta t=\overline{\vec{F}}$
逆风
空气团 m
分子质点系
总动量 $\vec{P}_1$
α
$\vec{P}_2$
α
β
$\Delta\vec{P}$
$\vec{P}_1$
帆
β
X
$\vec{F}_X'=\vec{F}'\cos\beta$
航向分力
$|\vec{P}_2|\approx|\vec{P}_1|$
$\beta\approx\frac{180^\circ-\alpha}{2}$
$\overline{\vec{F}'}=-\overline{\vec{F}}$
$\vec{F}_Y'=?$
由水的阻力抵消!

例: t=0时刻水平抛出一小球，经过 Δt 后由地面弹回原高度，且恢复原速度。求地面给小球的冲量的大小。

解: 总冲量 $\vec{I}=\Delta\vec{P}=0$



设地面给小球的作用力为 $\vec{f}$ ，

则由定义有

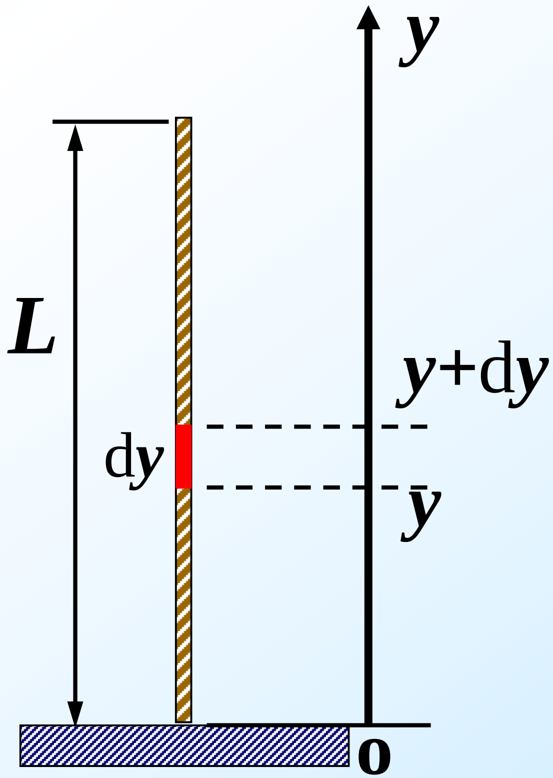
$$\vec{I}=\int_0^{\Delta t}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_0^{\Delta t}(m\vec{g}+\vec{f})\mathrm{d}t=\int_0^{\Delta t}m\vec{g}\mathrm{d}t+\int_0^{\Delta t}\vec{f}\mathrm{d}t$$

$$=\vec{I}_g+\vec{I}_{地}=0$$

$$\therefore\vec{I}_{地}=-\vec{I}_g=-m\vec{g}\cdot\Delta t$$

$$\therefore I_{地}=mg\cdot\Delta t$$

例. 一铅直悬挂着的匀质柔软细绳长为L, 下端刚好触及水平桌面, 现松开绳的上端, 让绳落到桌面上。试证明:在绳下落的过程中, 任意时刻作用于桌面的压力N, 等于已落到桌面上的绳重G的三倍。



解: 考虑dy段的下落

$$F\mathrm{d}t = \Delta P = \mathrm{d}m \cdot v = \frac{M}{L}\mathrm{d}y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

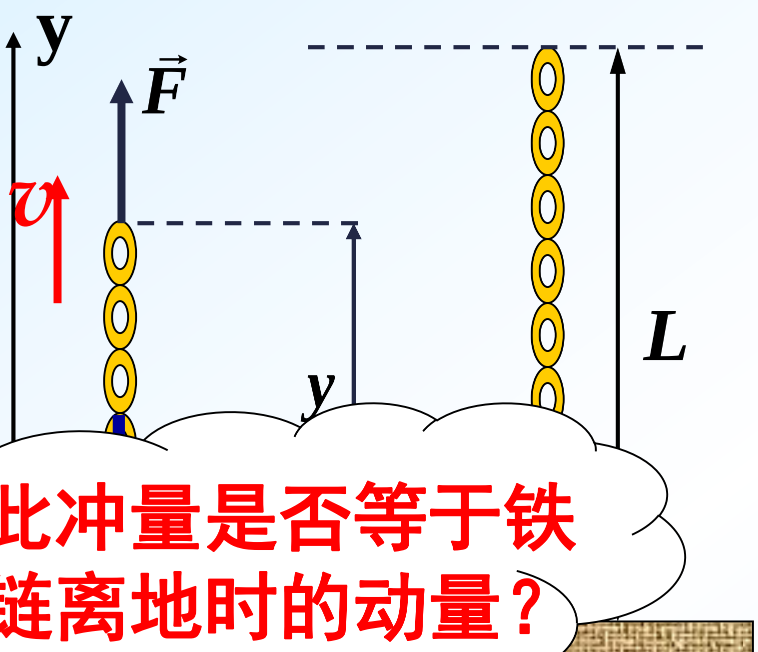
$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{M}{L}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{M}{L}v^2 \\ v^2 &= 2gy \end{aligned}\right\} F = 2\frac{y}{L}Mg$$

依牛顿第三定律, dy段对桌面的作用力大小亦为F

$$\therefore G = \frac{y}{L}Mg \rightarrow N = G + F = 3G$$

例. 一根长L均质铁链平放桌上，质量线密度为ρ。今用手提起链的一端使之以匀速v 铅直上升。

求: 从一端离地到全链离地，手的拉力的冲量?



此冲量是否等于铁链离地时的动量?

解: 由牛顿第二定律

$$F-\rho g y=\frac{\mathrm{d}(mv+0)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\rho y v)}{\mathrm{d}t}$$

$$=\rho v^2+\rho y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad 0$$

$$\therefore 有\ F=\rho g y+\rho v^2$$

$$\mathrm{d}I=F\mathrm{d}t=F\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=\frac{F}{v}\mathrm{d}y$$

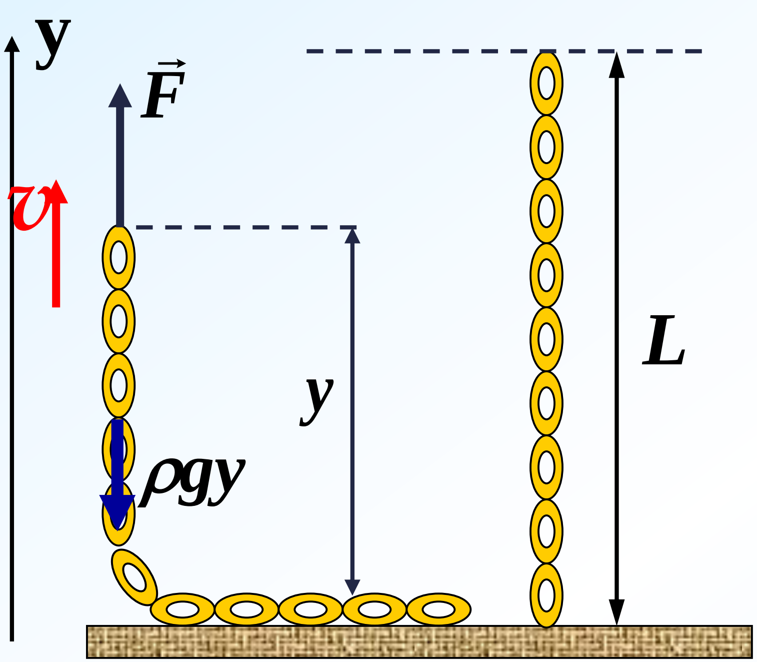
$$\mathrm{d}I=\left(\frac{\rho g y}{v}+\rho v\right)\mathrm{d}y$$

$$I=\int_0^t F\mathrm{d}t=\int_0^L\left(\frac{\rho g}{v}y+\rho v\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\frac{\rho g}{v}L^2+\rho v L$$

全链离地时的动量

例. 一根长L均质铁链平放桌上，质量线密度为ρ。今用手提起链的一端使之以匀速v 铅直上升。

求: 从一端离地到全链离地，手的拉力的冲量?



解: 由牛顿第二定律

$$F-\rho g y=\frac{\mathrm{d}(mv+0)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\rho y v)}{\mathrm{d}t}$$

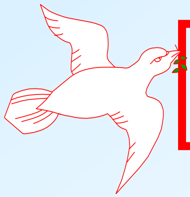
$$=\rho v^2+\rho y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad 0$$

$\therefore$ 有 $F=\rho g y+\rho v^2$

1. 从受力的角度分析，为什么F>mg?
   - 还有下面链条的拉力。
2. 为什么这里没有考虑链条间的拉力T?
   - 对于研究对象（链条，质点系）而言，T是内力。

6、动量守恒定律

对质点或质点系



$$\boxed{\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}}\ \boxed{\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{P}_t - \vec{P}_0}\ \left\{\begin{array}{l} \int_0^t F_x \mathrm{d}t = P_{x_t} - P_{x_0} \\ \int_0^t F_y \mathrm{d}t = P_{y_t} - P_{y_0} \\ \int_0^t F_z \mathrm{d}t = P_{z_t} - P_{z_0} \end{array}\right.$$

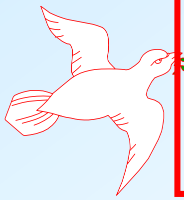
当 $\vec{F} = 0$ 时，$\vec{P}_t = \vec{P}_0$

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{恒矢量}$$

注：

（1）系统的总动量守恒并不意味着系统内各个质点的动量不变，而是指系统动量总和不变。

（2）当外力作用远小于内力作用时，可近似认为系统的总动量守恒。（如：碰撞、打击等）



$$\vec{P}=\sum_i \vec{P}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i=\text{恒矢量}$$

动量守恒的分量式：

$$F_x=0 \quad P_x=\sum_i m_i v_{ix}=\text{常量}$$

$$F_y=0 \quad P_y=\sum_i m_i v_{iy}=\text{常量}$$

$$F_z=0 \quad P_z=\sum_i m_i v_{iz}=\text{常量}$$

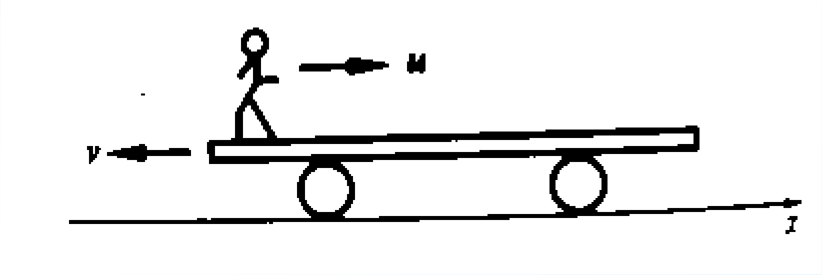
动量守恒定律是物理学中最重要、最普遍的规律之一，它不仅适合宏观物体，同样也适合微观物体。

例： 在光滑的冰面上停放着一节长为L、质量为M的车厢，一质量为m的人静止站在车厢的后端。若人从车厢的后端走到前端，求人和车厢各自相对地面移动的距离。

解： 设车厢和人相对于地面的移动位移分别为ΔL_1和ΔL_2,相对于地面的速度分别是v和u。

水平方向动量守恒

$$-Mv + mu = 0$$



变换得到 $$v = \frac{m}{M} u$$

两边积分 $$\int_{t_0}^{t} v\,dt = \frac{m}{M}\int_{t_0}^{t} u\,dt$$ 即 $$\Delta L_1 = \frac{m}{M}\Delta L_2 \qquad (1)$$

又 $L_{人地} = L_{人车} + L_{车地}$ 即 $$\Delta L_2 = L - \Delta L_1 \qquad (2)$$

联立(1)(2)式得： $$\Delta L_1 = \frac{m}{M+m} L \qquad \Delta L_2 = \frac{M}{M+m} L$$

例2. 质量为M、长为L的船浮在静止的水面上, 船上有一质量为m的人, 开始时人与船也相对静止, 然后人以相对于船的速度u从船尾走到船头, 当人走到船头后人就站在船头上, 经长时间后, 人与船又都静止下来了。设船在运动过程中受到的阻力与船相对水的速度成正比, 即f=-kv. 求在整个过程中船的位移L。

定义向右为正方向

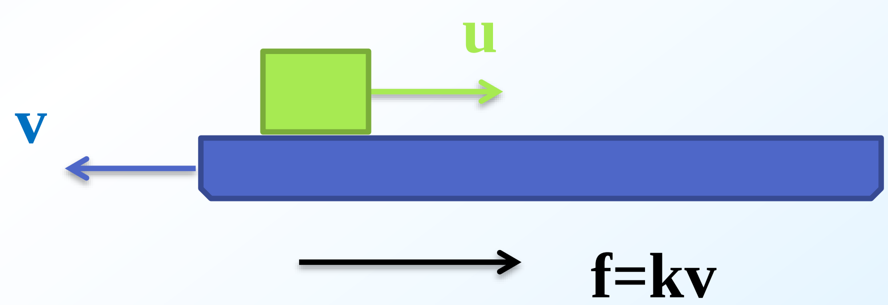
$\longrightarrow$ +x

解： 以人和船整个系统为研究对象

水平方向动量守恒？ 否

分两个阶段：

1. 人从船尾走向船头停下来，船向左移动



在整个过程中，船和人的系统受到的合外力不为0，受到了向右的摩擦力f，系统获得的动量增量：

$$\Delta p_1 = \int_t f dt = \int_t -k\underline{(\text{-}v)dt} = \int_{x_0}^{x_1} k\underline{dx} = kL_1$$

船的位移

例2. 质量为M、长为L的船浮在静止的水面上，船上有一质量为m的人，开始时人与船也相对静止，然后人以相对于船的速度u从船尾走到船头，当人走到船头后人就站在船头上，经长时间后，人与船又都静止下来了。设船在运动过程中受到的阻力与船相对水的速度成正比，即f=-kv. 求在整个过程中船的位移L。

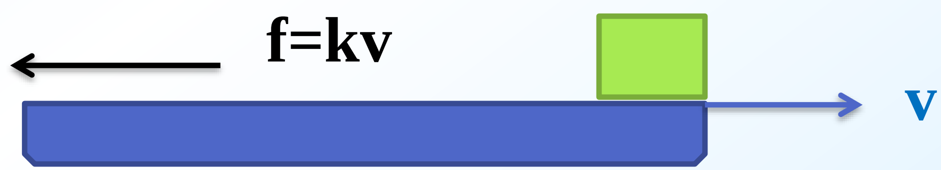
定义向右为正方向

解： 以人和船整个系统为研究对象

+x

水平方向动量守恒？ 否

分两个阶段：



2. 船开始向右移动

人和船组成的系统一起向右滑行并且减速，这个过程中受到的合外力为水的阻力向左。在整个过程中，船的动量又变回为0。即，系统获得动量的增量$\Delta p_1+\Delta p_2=0$。

$$\Delta p_2 = \int_t - f dt = \int_t kv dt = \int_{x_1}^{x_2} k dx = kL_2$$

船的总位移： $L = L_1 + L_2 = 0$

例2. 质量为M、长为L的船浮在静止的水面上，船上有一质量为m的人，开始时人与船也相对静止，然后人以相对于船的速度u从船尾走到船头，当人走到船头后人就站在船头上，经长时间后，人与船又都静止下来了。设船在运动过程中受到的阻力与船相对水的速度成正比，即f=-kv. 求在整个过程中船的位移L。

定义向右为正方向

解： 以人和船整个系统为研究对象

$\longrightarrow$ +x

直接考虑全过程，初始和末动量相等，即整个过程冲量为0

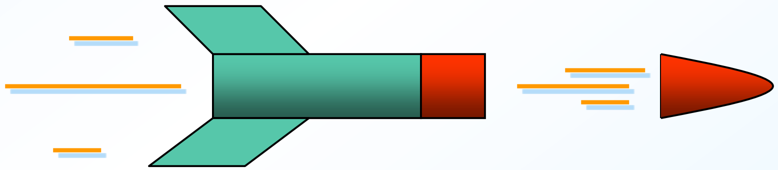
$$\Delta p = \int_t f dt = \int_t -kv dt = -\int_{x_0}^{x_1} k dx = -kL = 0$$

例. 火箭以2.5×10^3m/s的速率水平飞行， 由控制器使火箭分离。头部仓m_1=100kg, 相对于火箭的速率为10^3 m/s , 火箭容器仓质量m_2=200 kg。

求：容器仓和头部仓相对于地面的速率。

解：已知 $v = 2.5\times10^3$ m/s

$v' = 10^3$ m/s



设头部仓和容器仓相对地的速率分别为v_1、v_2

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v' + v_2 \\ \text{动量守恒}\quad (m_1+m_2)v &= m_1v_1 + m_2v_2 \end{aligned}\right\}$$

$$v_2 = v - \frac{m_1v'}{m_1+m_2} = 2.17\times10^3\ \text{m/s}$$

$$v_1 = v_2 + v' = 3.17\times10^3\ \text{m/s}$$

3. 变质量问题（动量定理与火箭飞行原理）

神舟六号发射成功

$$\vec F\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec P$$

设t时刻箭体质量为m，取为研究的质点系。

t 时刻动量： $\vec P_1 = m\vec v$

$t+\mathrm{d}t$ 时刻动量： $\vec P_2 = (m+\mathrm{d}m)(\vec v+\mathrm{d}\vec v)+(-\mathrm{d}m)\vec v'$

(此处dm<0)

火箭受外力为： $\vec F$

由动量定理得： $\vec F\mathrm{d}t = \vec P_2 - \vec P_1$

$$= (m+\mathrm{d}m)(\vec v+\mathrm{d}\vec v)+(-\mathrm{d}m)\vec v' - m\vec v$$

化简得： $\vec F = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec v)}{\mathrm{d}t} - \vec v'\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$

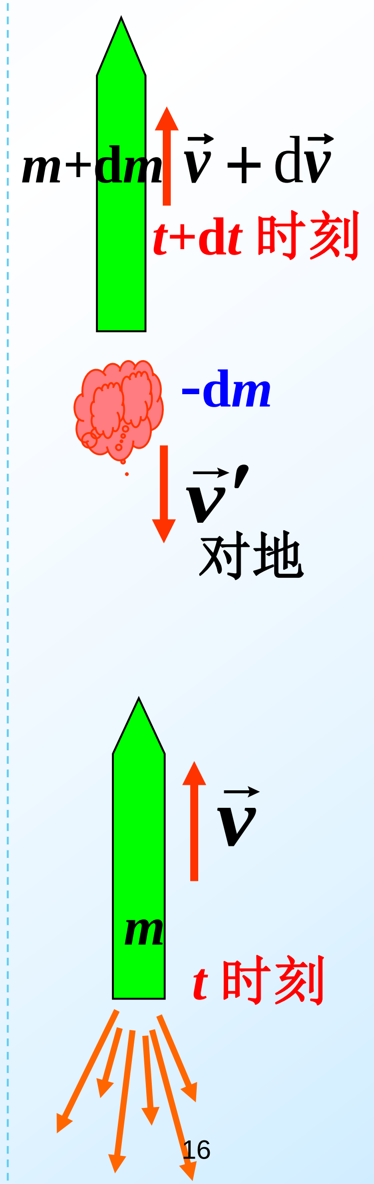
(略去二阶无穷小)

——密歇尔斯基方程

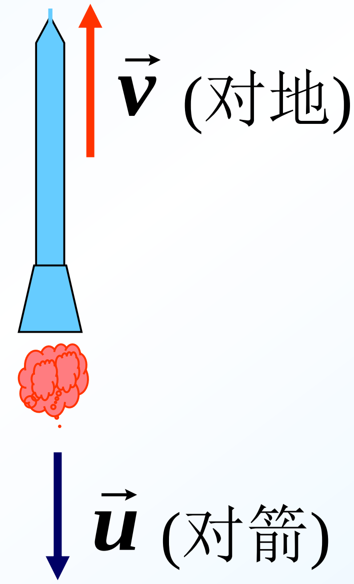
或： $\vec F = m\dfrac{\mathrm{d}\vec v}{\mathrm{d}t} - \vec u\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ $(\vec u = \vec v' - \vec v)$

气地 地箭

喷出的气体相对箭体的速度



$$\boxed{\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$$



若火箭在自由空间沿直线飞行，

$$F = 0 \qquad \therefore \quad 0 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v = u\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

若喷出的气体相对火箭的速率u恒定, 开始时火箭的质量为m_0, 初速度为v_0, 燃料耗尽时火箭的质量为m_f, 速度为v_f, 则

$$\int_{v_0}^{v_f}\mathrm{d}v = \int_{m_0}^{m_f} u\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

$$v_f = v_0 + u\ln\frac{m_f}{m_0}$$

注意:
v_0与u方向相反。
若前者为正，则后者为负。

如何提高火箭的飞行速度？

$$v_f = v_0 + u\ln\frac{m_f}{m_0}$$

要使v→大 $\begin{cases} \text{增加 } u \quad u_{Max} = 4.1\text{km/s} \\ \text{增加}\dfrac{m_0}{m_f} \text{ 即 } m_0 >> m_f \left(\dfrac{m_0}{m_f}\right)_{Max} = 15 \end{cases}$

对于三级火箭

$$v = u_1\ln\frac{m_0}{m_1} + u_2\ln\frac{m_1}{m_2} + u_3\ln\frac{m_2}{m_3}$$

$$\boxed{\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}}$$

自由空间中火箭所受推力

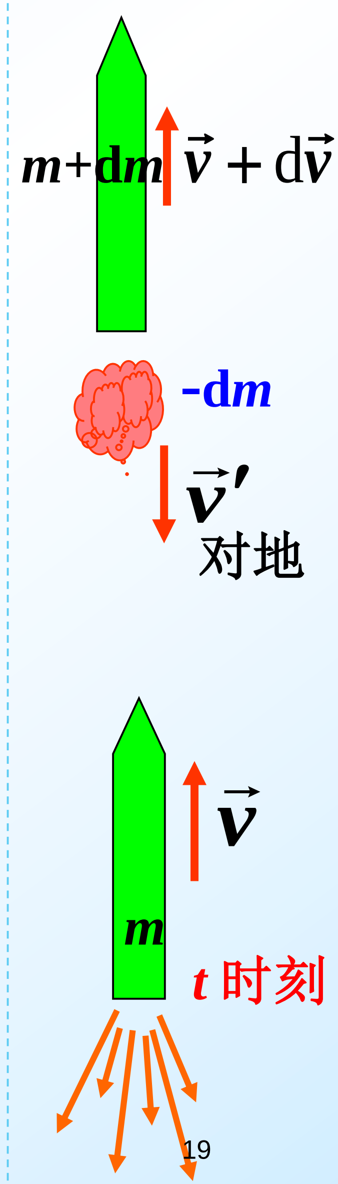
对于喷出的气体：

$$dp = (-dm)(u + v + dv) - (-dm)v$$

$$F_{气} = \frac{dp}{dt} \approx -u\frac{dm}{dt}$$

火箭所受推力：

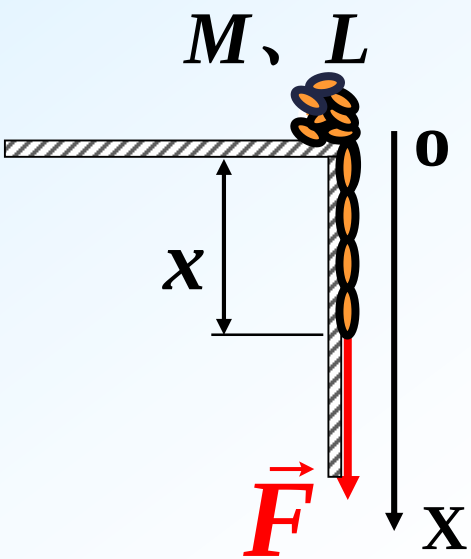
$$F_{推} = -F_{气} = u\frac{dm}{dt}$$



例：链条盘在桌子边缘的问题。

$$\boxed{\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}-\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}$$

用密歇尔斯基方程



$\mathrm{d}m$相对主体的速度为 $u=-v$

$$F=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}$$

任意 t 时刻受力为 $F=\dfrac{M}{L}xg$

$$m=\frac{M}{L}x$$

$$\cancel{\frac{M}{L}}xg=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\cancel{\frac{M}{L}}xv\right)$$

$$xg\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}(xv)\qquad v=\sqrt{\frac{2}{3}gL}$$

已学知识回顾

动量定理：

$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}$ 或 $\boxed{\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t=\vec{P}_t-\vec{P}_0}$ 冲量 $\vec{I}=\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t$

质点所受合外力的冲量等于这段时间内质点动量的增量。

$\boxed{\vec{I}=\Delta\vec{P}}$

质点、质点系

求冲量的两个思路：

$$\left\{\begin{aligned}&\vec{I}=\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t\\&\vec{I}=\vec{P}_t-\vec{P}_0\end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}}$$

已学知识回顾

动量定理：

$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}$ 或 $\boxed{\int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t=\vec{P}_t-\vec{P}_0}$

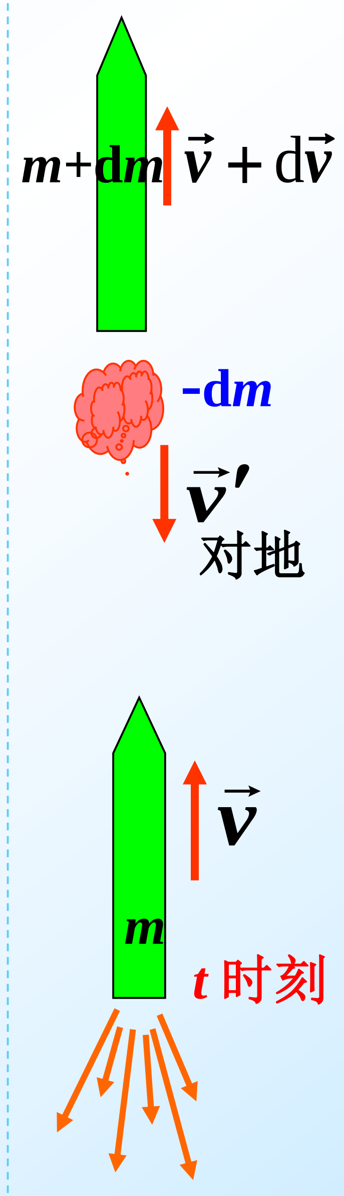
动量守恒定律：

当 $\vec{F}=0$ 时，

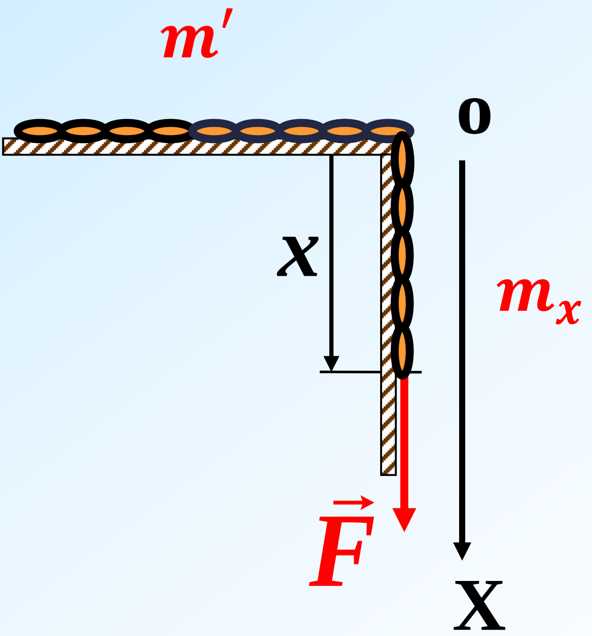
$$\vec{P}=\sum_i \vec{P}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i=\text{恒矢量}$$

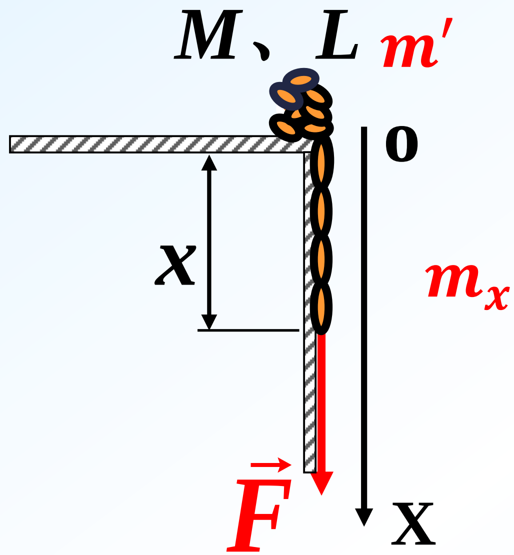
变质量问题：

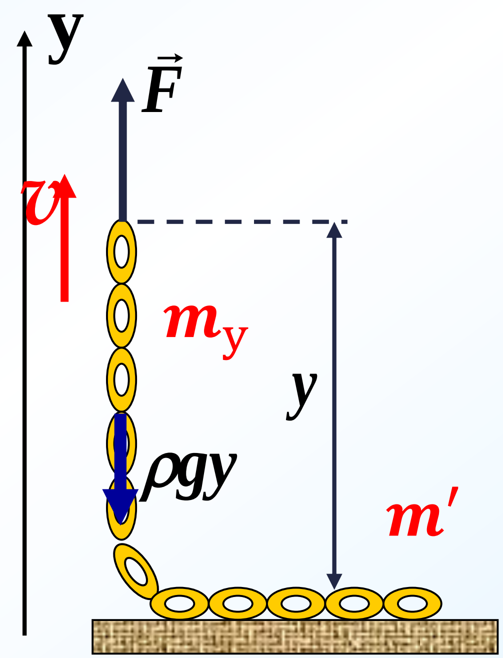
$$\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{P}_2-\vec{P}_1 \Rightarrow \vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}-\vec{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$



研究对象是整个链条！！





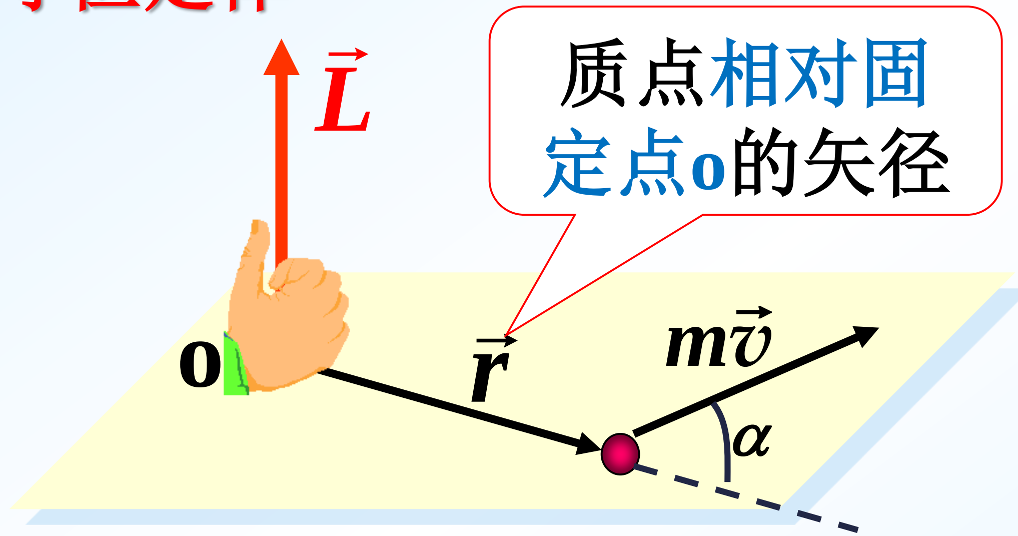


$$F=\frac{dp}{dt}$$
$$=\frac{d(m_x\cdot v+m'\cdot v)}{dt}$$
$$=\frac{d(m_{总}v)}{dt}$$
$$=m_{总}\frac{dv}{dt}$$

$$F=\frac{dp}{dt}$$
$$=\frac{d(m_x\cdot v+m'\cdot 0)}{dt}$$
$$=\frac{d(m_x v)}{dt}$$

$$F=\frac{dp}{dt}$$
$$=\frac{d(m_y\cdot v+m'\cdot 0)}{dt}$$
$$=\frac{d(m_y v)}{dt}$$

7. 角动量定理 角动量守恒定律



（1）角动量

定义：

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$$

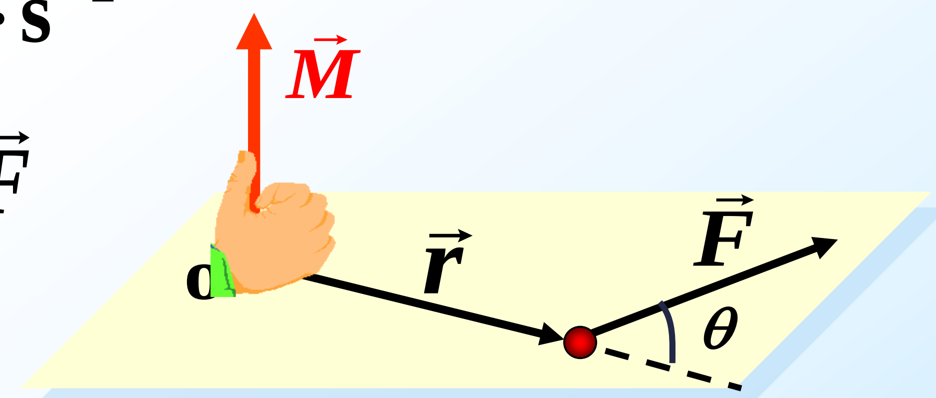
动量矩

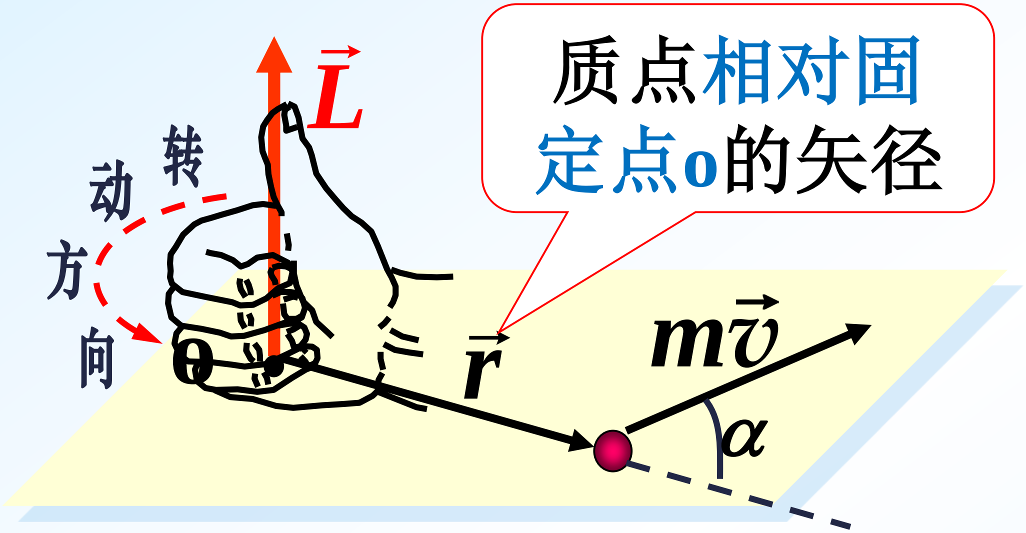
$$=\vec{r}\times m\vec{v}$$

$\vec{L}$

- 大小：$|\vec{L}|=rmv\sin\alpha$
- 方向：垂直于$\vec{r},\vec{P}$共同决定的平面
- 单位：$\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$

力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$





注意：

① 同一质点对不同定点的角动量是不同的

② 质点作圆周运动时对圆心的角动量

$$L = rmv = rm(r\omega) = mr^2\omega$$

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$$

（2）角动量定理

对 $\vec{L}$ 求时间的导数

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{P})=\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{P}}_{0}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\longrightarrow\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}}$$

（3）冲量矩 $\int_0^t\vec{M}\mathrm{d}t=\int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}_t}\mathrm{d}\vec{L}=\vec{L}_t-\vec{L}_0$

注：

1°分量式
$$\begin{cases}\int_0^t M_x\mathrm{d}t=L_{x_t}-L_{x_0}\\ \int_0^t M_y\mathrm{d}t=L_{y_t}-L_{y_0}\\ \int_0^t M_z\mathrm{d}t=L_{z_t}-L_{z_0}\end{cases}$$

2°力矩 $\vec{M}$ 与角动量 $\vec{L}$ 是对同一固定点。

3°冲量矩是矢量，其方向与 $\Delta\vec{L}$ 的方向一致。

4°对非惯性系，需引入“**惯性力**”的力矩。

$$\int_0^t \vec{M}\mathrm{d}t = \vec{L}_t - \vec{L}_0$$

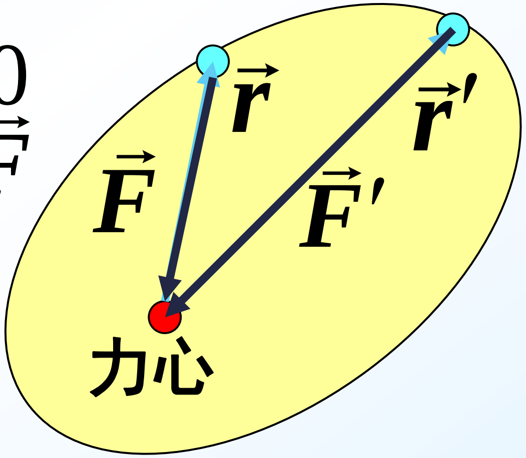
（4）角动量守恒定律

若 $\vec{M}=0$ 则 $\vec{L}_t=\vec{L}_0$ 或 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=$恒矢量

——角动量守恒定律

注意：

① $\vec{M}=(\vec{r}\times\vec{F})=0$ $\quad \vec{F}=0$ 或 $\begin{matrix}\vec{r}=0\\ \vec{r}\,//\,\vec{F}\end{matrix}$



② **有心力：** 质点所受的力总是通过一个固定点

特征： $\vec{r}\,//\,-\vec{F}$ $\quad \vec{L}=$恒矢量

质点对力心的角动量永远守恒！

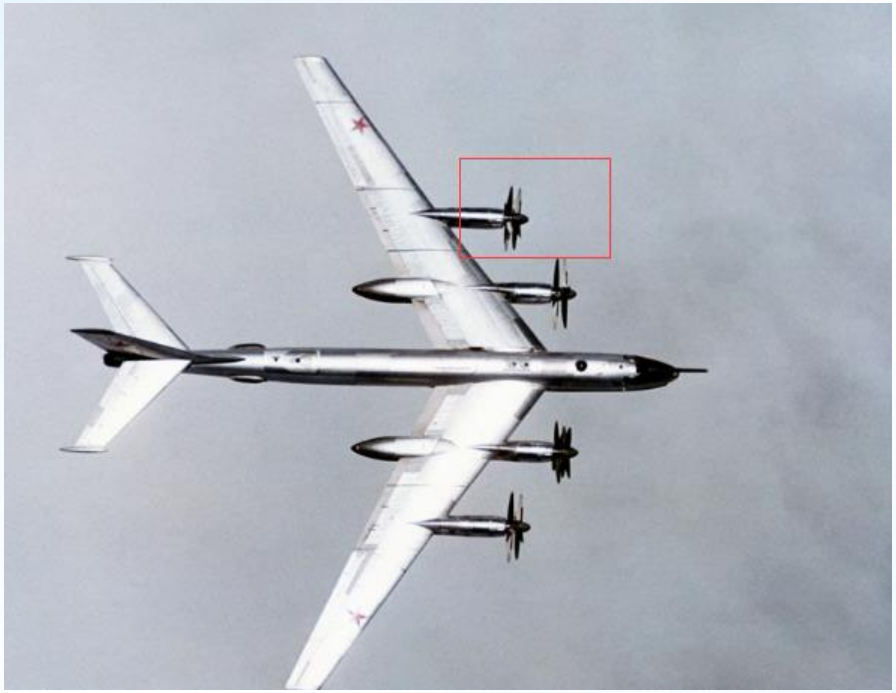
③ 角动量守恒，不见得动量守恒。对某点角动量守恒，对另一点不一定守恒。

④ 角动量守恒定律是自然界的一条普遍定律，它有着广泛的应用。

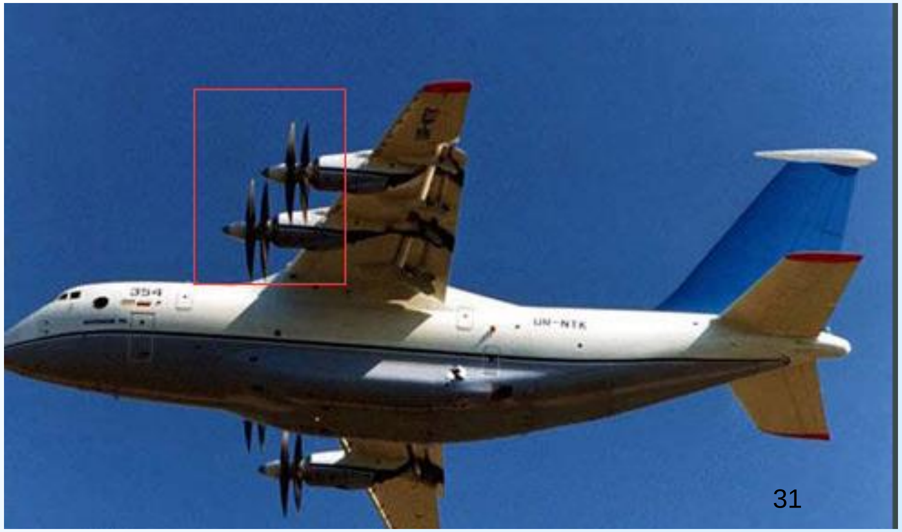
克服直升飞机机身反转的措施：

装置尾浆推动大气产生克服机身反转的力矩, 破坏角动量守恒。

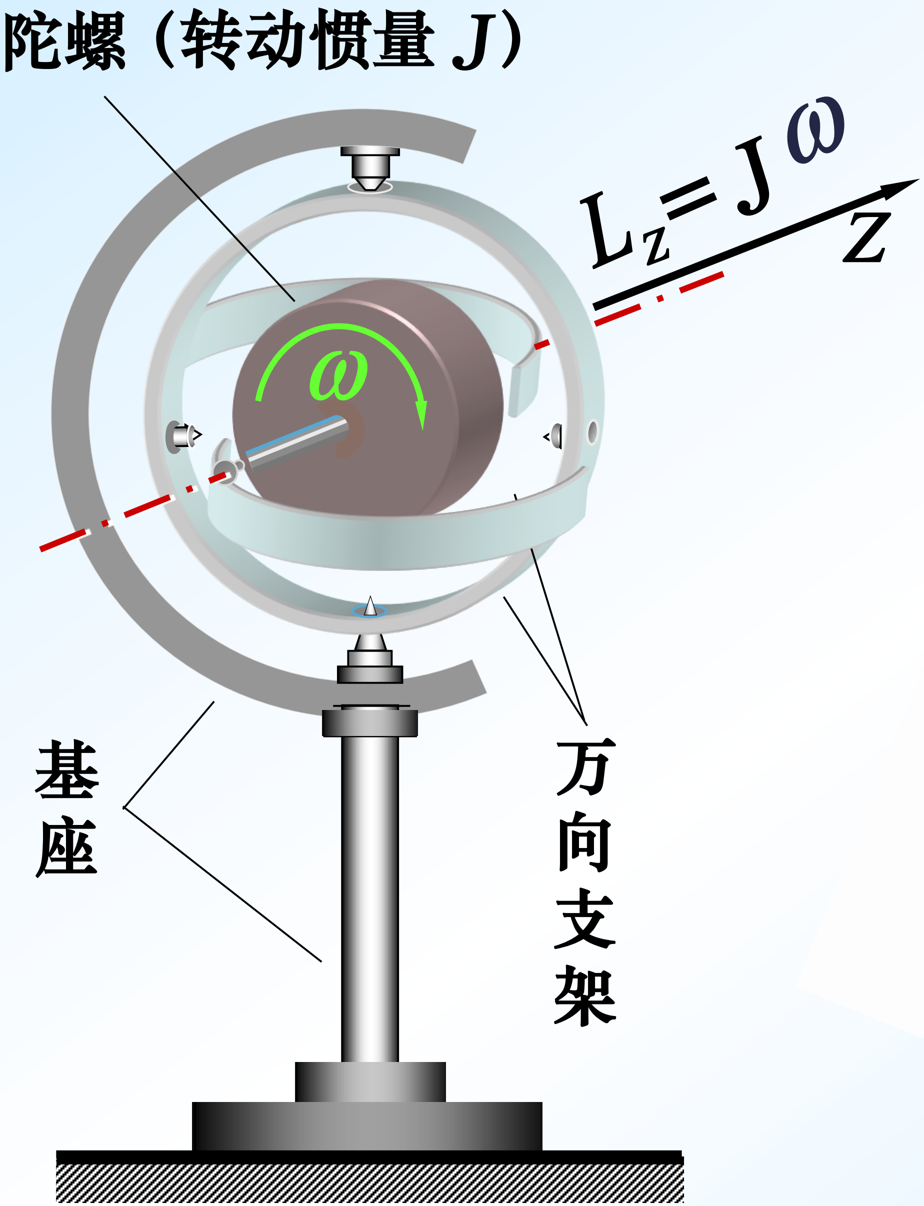
装置反向转动的双旋翼产生反向角动量而相互抵消



共轴反向旋转的螺旋桨

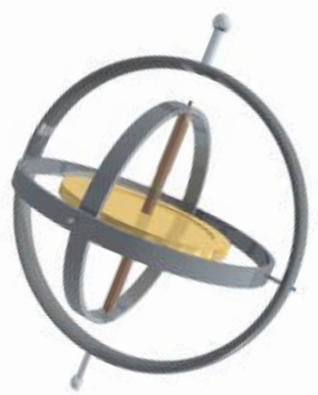


陀螺仪



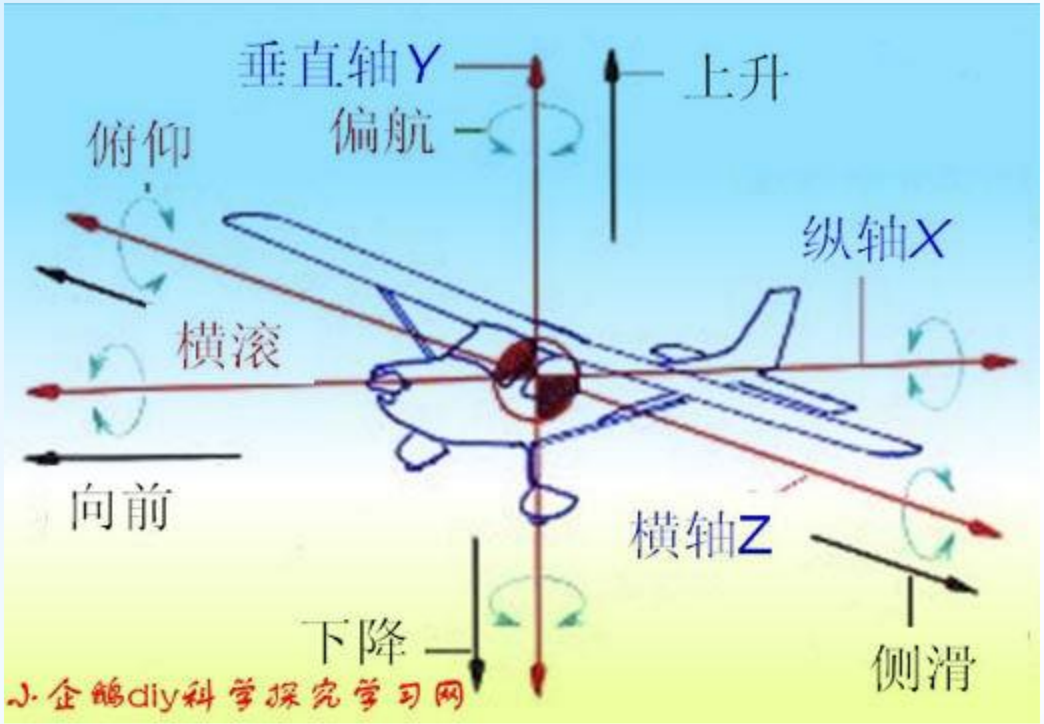
回转体质量呈轴对称分布；
轴摩擦及空气阻力很小。

受合外力矩为零，角动量守恒。



不论基座如何运动，转轴将保持该方向不变。

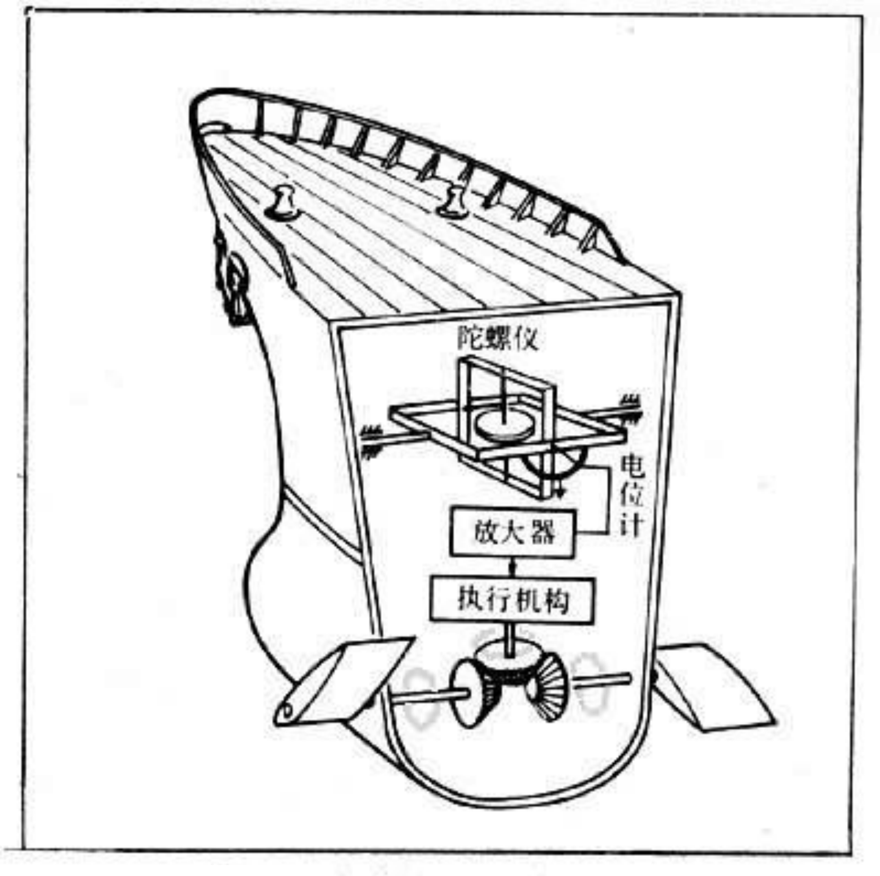
陀螺仪的应用



利用三个轴互相垂直的陀螺仪，可以实现对飞机飞行姿态的监控。

陀螺仪的应用

2015年6月1日21时30分，东方之星轮，遇强对流天气，在湖北监利水域沉没。442人遇难，12人生还。



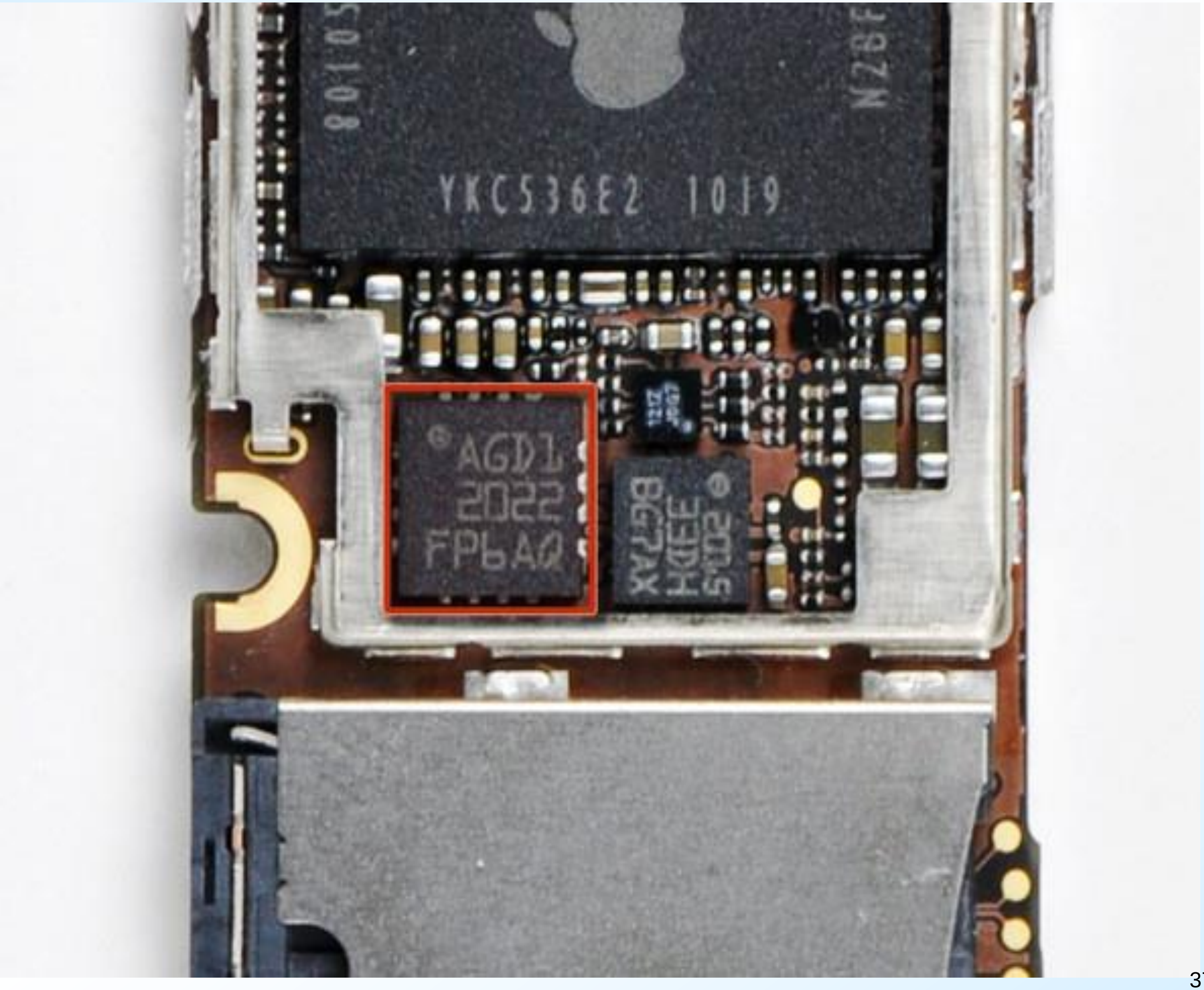
船舶消摇系统示意图

利用陀螺仪实现船舶的稳定控制。


P_Y
P_Y
中国海监51
ZHONG GUO HAI JIAN
减摇鳍

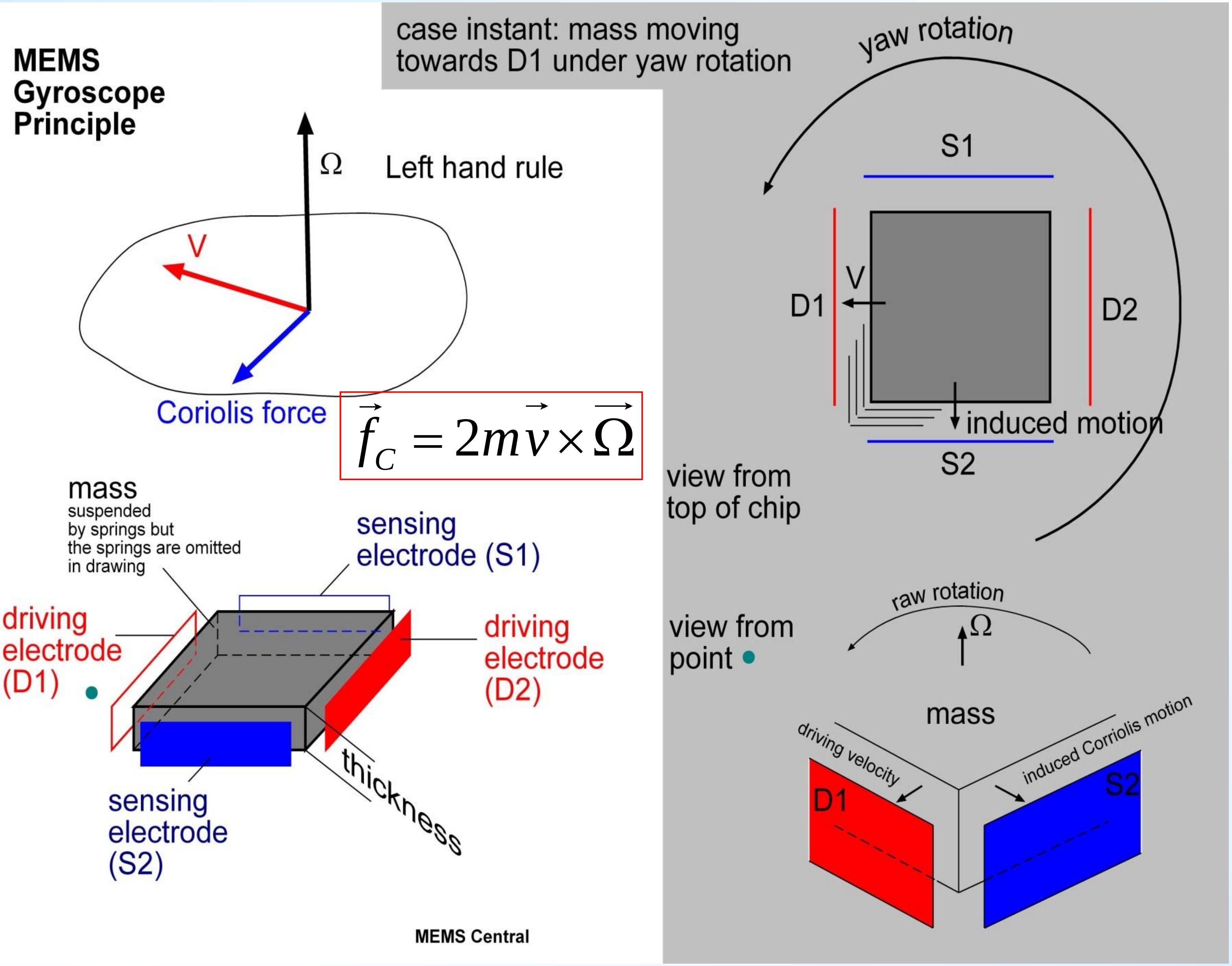

yaw
pitch
MEMS
gyroscope
roll

MEMS （Micro-Electro-Mechanical Systems）陀螺仪



MEMS 陀螺仪 原理

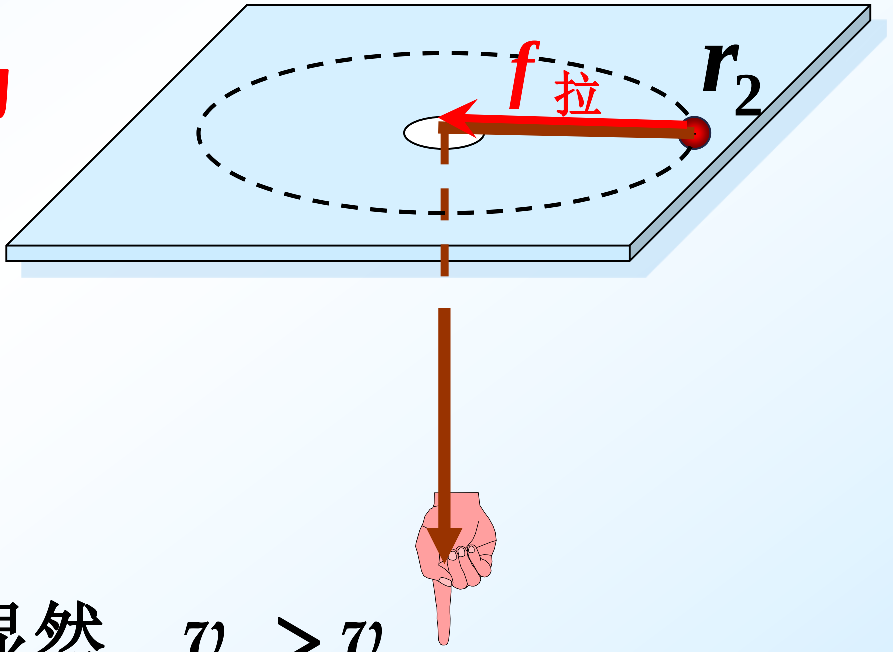
利用科里奥利力——旋转物体在有径向运动时所受到的切向力



例. 在光滑的水平桌面上有一小孔o，一细绳穿过小孔, 其一端系一小球放在桌面上，另一端用手拉绳。开始时小球绕孔运动, 速率为 v_1，半径为r_1。当半径变为r_2时，求小球的速率v_2=?

解：小球受力

$f_{拉}$ —— 有心力



角动量守恒

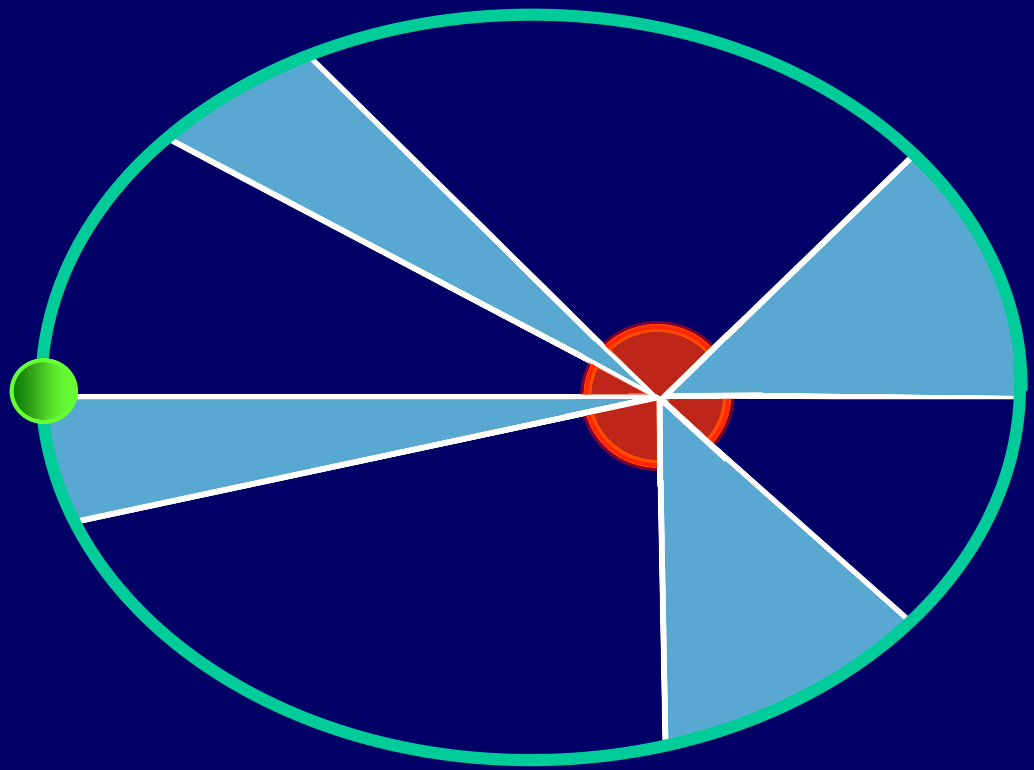
$$L_2 = L_1$$

$$r_1 m v_1 = r_2 m v_2$$

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$$ 显然 $v_2 > v_1$

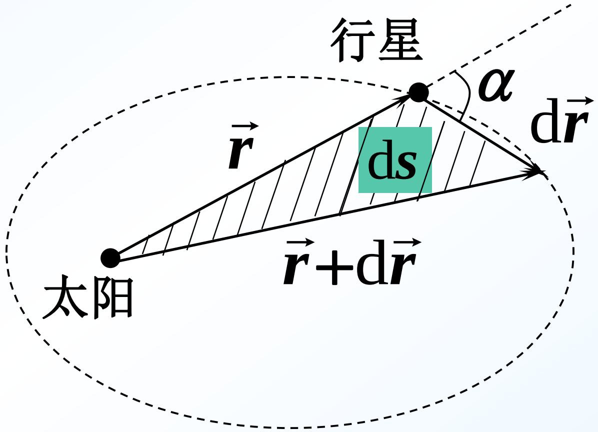
应用质点的角动量守恒定律可以证明

开普勒第二定律



行星与太阳的连线在相同时间内扫过相等的面积

例: **用角动量守恒定律推导行星运动的开普勒第二定律：行星对太阳的位置矢量在相等的时间内扫过相等的面积，即行星的矢径的面积速度为恒量。**



解: **在很短的时间dt内，行星的矢径扫过的面积可以近似地认为是图中阴影所示的三角形的面积，即**

$$\mathrm{d}s=\frac{1}{2}r\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\sin\alpha=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

面积速度 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|$

由于行星对太阳中心的角动量守恒，即 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$ **＝恒矢量**

所以面积速度 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|$ **也是恒量。开普勒第二定律得证。**

另外，由行星对太阳中心的角动量守恒还可以得出行星运动的另一特点。根据角动量的定义，行星对太阳的角动量应垂直于它对太阳的位置矢量和动量所决定的平面，角动量守恒，则角动量的方向不变，所以行星绕太阳的运动必然是平面运动。

例： 两只重量相等的猴子争夺顶部的香蕉，同时沿着一根跨过无摩擦轻滑轮的绳子向上爬，问：谁先抢到香蕉？

分析：$\vec{M} = \vec{r}_A \times m\vec{g} + \vec{r}_B \times m\vec{g} = 0$

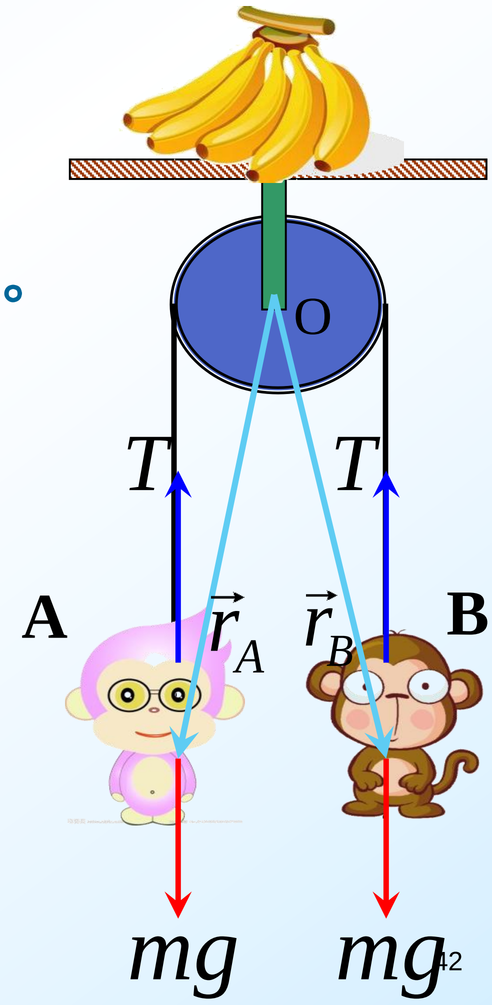
系统合外力矩为零，系统角动量守恒。

设两猴对轴承的速率分别为v_A, v_B

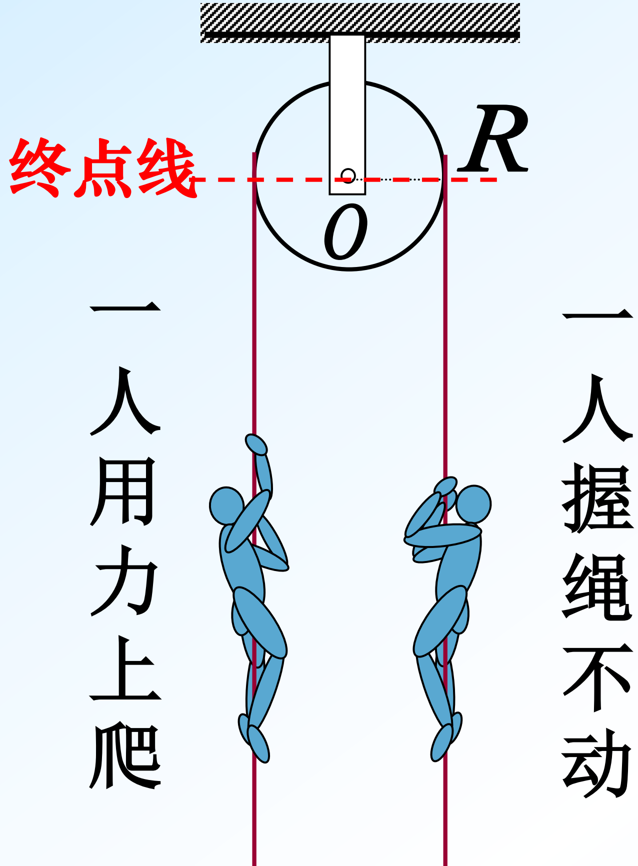
$$\vec{r}_A \times m\vec{v}_A + \vec{r}_B \times m\vec{v}_B = 0$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

不论小猴对绳的速度如何，他们对地的速度都相同，故将同时到达！



例. 两人质量相等,忽略滑轮质量及轮绳之间摩擦。



可能出现的情况是:

(A) 两人同时到达;

(B) 用力上爬者先到;

(C)握绳不动者先到;

(D)以上结果都不对。

$\because m_1 = m_2$

相对o点的合外力矩为零

——角动量守恒

同高从静态开始往上爬

系统的末态角动量	=	系统的初态角动量

$$m_2 v_2 R - m_1 v_1 R = 0$$

$$\therefore\ v_2 = v_1$$

两人等速上升!