



华中科技大学 2020 ~ 2021 学年第一学期

《微积分 (A)(上)》考试试卷 (A 卷)

考试方式: 闭卷, 考试日期: 2020/11/28, 考试时长: 150 分钟

院(系): _____ 专业班级: _____

学 号: _____ 姓 名: _____

题 号	一	二	三	四	五	总 分
分 数						

阅卷人	
得 分	

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

- 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 下列说法正确的是 ()

A. $a_n < b_n$, 对任意 n 都成立 B. $b_n < c_n$, 对任意 n 都成立

C. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在 D. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在
- 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^x$ 等于 ()

A. 1 B. e C. e^{-3} D. e^3
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x^2)$ 是 ()

A. 比 $\sin(x^2)$ 高阶的无穷小 B. 比 $1 - \cos(2x)$ 低阶的无穷小

C. 与 $\tan(3x^2)$ 同阶的无穷小 D. 与 $\arcsin(4x^2)$ 等价的无穷小
- 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(x^2 - 3x + 2) + \sqrt{n}}$ ($-\infty < x < +\infty$) 间断点的个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = (\quad)$

A. -1 B. 0 C. 1 D. e

6. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则下列结论中不正确的是 ()

A. 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不一定存在 B. $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续
C. $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导 D. $y = f(x)$ 在点 x_0 处有定义

阅卷人	
得 分	

二、填空题 (每空 3 分, 共 15 分)

7. 设 $E = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 3} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$, 则 $\sup E = \underline{\hspace{2cm}}$, $\inf E = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin(ax)$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则 a, b 满足的关系式为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 设函数 $x = x(y)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{dx}{dy} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

阅卷人	
得 分	

三、计算题 (每题 6 分, 共 30 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[x]{a_1} + \sqrt[x]{a_2} + \dots + \sqrt[x]{a_{2020}}}{2020} \right)^x$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ 是正常数。

12. 设 $f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(x+2)^3}{(x+3)^4(x+4)^5}}$, 求 $f'(x)$.

13. 设函数 $y = (2+x)^{\sin x} + \frac{1}{x+1}$, 求函数在 $x=0$ 处的微分.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有界, 满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + f(x) \tan x} - 1}{e^{5x} - 1} = 4,$$

其中 m 为正整数, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

15. 对数螺线的极坐标方程为 $\rho = e^{\frac{\theta}{2}}$, 在螺线上任取一点 $M(\rho, \theta)$, 求该点处的切线方程。

阅卷人	
得分	

四、解答题 (共 9 分)

16. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

其中 $g(x)$ 具有二阶连续导函数, 且 $g(0) = 1$.

- (1) 确定 a 的值, 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;
- (2) 求 $f'(x)$;
- (3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

阅卷人	
得 分	

五、证明题 (每题 7 分, 共 28 分)

17. 用函数极限的 $\epsilon - \delta$ 语言证明:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}.$$

18. 设 a, b, c, d 为三个实数且 $a < 0$, 试问方程 $e^x = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的根有没有可能超过 3 个? 请证明你的结论。

19. (1) 利用微分中值定理证明

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

(2) 讨论数列极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$ 的存在性。

20. (1) 叙述 Heine-Borel 有限覆盖定理。

(2) 利用有限覆盖定理证明：有界闭区间上的连续函数一定有界。