24 算法-hw4

2024年12月4日

1 动态规划

1. 加权区间调度问题中,给定子区间 I_i ,该区间开始和结束时间 s_i 、 f_i ,及 其权重 w_i ,目标是选择一组互不冲突的区间,且其权重和最大。

求解该问题时,贪心算法往往是不可行的。下面给出了三个贪心策略,请分别举出一个反例,说明这三个贪心策略不能得到最优解。

- (1) 结束时间早的区间优先。
- (2) 权重高的区间优先。
- (3) 冲突少的区间优先。
- **2.** 在矩阵链乘法中,给定四个固定规模的矩阵 A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 ,计算 $S = A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$,不同的计算顺序影响了计算复杂度。表 1给出了两 组不同的矩阵规模,请分别填写图 1中表空白部分的 opt(i,j),并给出最优的计算顺序。

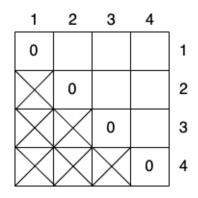


图 1: opt(i,j) 表

表 1: 两组矩阵问题规模

	A_1	A_2	A_3	A_4
(1)	3×6	6×9	9×5	5×4
(2)	2×5	5×10	10×7	7 × 8

3. 最短路问题中,给定了源点 s 和终点 t,在课堂上给出了一种子问题的拆分方式,即固定终点 t,opt(v,k) 用于保存从点 v 到终点 t,经过 $\leq k$ 条边的最短路长度,且

$$opt(v,k) = \begin{cases} opt(v,k-1) \\ min_w \ opt(w,k-1) + c_{vw} \end{cases}$$

该算法的输出 opt(v, n-1) 即为得到的最优解。

- (1) 请给出子问题存储的数据结构,和子问题的求解顺序。
- (2) 对于子问题的另外一种拆分方式,即固定源点 s 的情况下,opt(v,k) 用于保存从源点 s 到 v,经过 $\leq k$ 条边的最短路长度。请给出该拆分方式下 opt(v,k) 的更新式和边界条件,并给出问题的输出。
- **4.** 在 0/1 背包问题中,有从前向后处理的 DP 与从后向前处理的 DP 两种请仿照课堂上讲的从前向后处理的 DP,写出从后向前处理的 DP 递归表达式、初始条件、最终返回值。
- **5.** 假设你正在爬楼梯,需要 n 阶才能爬到顶,你每次可以爬 1 或 2 阶,请问你爬到楼顶一共有多少种方法。请给出递推关系式,写出算法**伪代码** (查一下伪代码的形式,最近的作业发现有同学不会写伪代码) 并进行复杂度分析。
- **6.** 给定 n 个非负整数表示每个宽度为 1 的柱子的高度,计算按此排列的柱子,下雨之后能接多少雨水。
 - (1) 请使用动态规划算法写出求解思路,并写出状态转移方程。
 - (2) 给定柱子高度 h=[0,1,0,2,1,0,1,3,2,1,2,1], 求解能够接多少雨水。
- **7.** 公司购买钢条,将其切成短钢条进行出售,不同长度的短钢条都对应了不同的收益,因此不同的切割方案下,带来的收益是不同的。假定一段长度为i的钢条收益为 p_i ,请设计动态规划算法,用于求出给定长度L的长钢条能够带来的最大收益。请写出算法设计思路,并给出伪代码。