计算机改卷注意事项

•正确填涂学号正确填写学生的学号、姓名等信息；

•学号、客观题或者判断题填涂时，要注意使用**2B**铅笔填涂，

•且填涂区域要丰满、不要使用划线、打钩、打叉等错误填涂方式；

•修改客观题答题时，要注意使用橡皮擦擦除干净；

•不要使用涂改液、涂改纸、透明胶粘贴等方式修改主、客观题的答题；

•主观题使用黑色中性笔/钢笔，在正确的答题区域答题，且不要使用附加纸进行答题；

•答题卡严禁折叠、装订.

一、事件的概率

1. 概率的定义：①非负性；②规范性；③可列可加性.

2. 计算公式：① $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

② $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, $P(AB) = P(A)P(B \mid A)$;

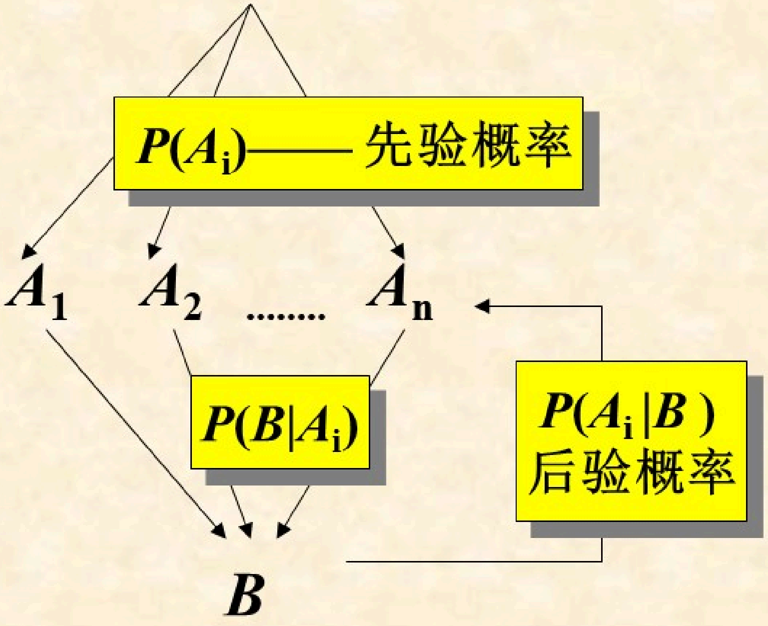
③ $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$, $P(A_i \mid B) = \dfrac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)}$

3. 两个概念：

A与B独立 $\rightarrow P(AB)=P(A)P(B) \rightarrow P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$

A与B互不相容 $\rightarrow AB=\varnothing \rightarrow P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

例1 设甲、乙、丙三人的命中率分别为0.3，0.2，0.1.现三人独立地向目标各射击一次，结果有两次命中目标，试求丙没有命中目标的概率.



解 记A、B、C分别为甲、乙、丙命中目标，D为目标被命中两次，则

$$P(D)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$$

$$=0.3\times0.2\times0.9+0.3\times0.8\times0.1+0.7\times0.2\times0.1 \ \mathbf{=0.092}$$

$$P(\overline{C}|D)=\frac{P(\overline{C}D)}{P(D)}=\frac{0.3\times0.2\times0.9}{0.092}=0.587$$

例2　填空：

(1) 设$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$ <u>0.6</u>

$$\because P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3, \therefore P(AB)=0.7-0.3=0.4$$

(2) 若A与B独立，且A与B互不相容，则

$\min\{P(A), P(B)\}=$ <u>0</u>.　　$\because P(\phi)=P(AB)=P(A)P(B)$

(3) 已知$P(A)=0.3$，$P(B)=0.5$.则当A与B相互独立时，有$P(A\cup B)=$ <u>0.65</u>；当A与B不相容时，有$P(B-A)=$ <u>0.5</u>；当$P(A|B)=0.4$时，有$P(\overline{A}\,\overline{B})=$ <u>0.4</u>.

$$\because P(A\cup B)=0.3+0.5-0.3\times 0.5$$

$$\because P(AB)=P(B)P(A\mid B)=0.5\times 0.4=0.2$$

$$\therefore P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-(0.3+0.5-0.2)$$

二、随机变量及其分布

1. 设置随机变量

2. 常用分布　　$B(n,p)$，$P(\lambda)$，$U(a,b)$，$E(\lambda)$，$N(\mu,\sigma^2)$

3. 联合分布与边缘分布 $F_X(x)=F(x,+\infty)$ $\begin{cases} p_{i\bullet}=\sum_j p_{ij} \\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \end{cases}$

4. 随机变量函数的分布

①公式法：

$$f_X(x) \underset{x=h(y)}{\overset{y=g(x)}{\Longrightarrow}} f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(X+Y=k)=\sum_i P(X=i,Y=k-i) \overset{X\text{与}Y\text{独立}}{=} \sum_i P(X=i)p(Y=k-i) \\ f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx \overset{X\text{与}Y\text{独立}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \end{cases}$$

②分布函数法：$F_Z(z)=P\{g(X)\le z\} \Rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)$ （注意分段）

例3 设每袋水泥的重量$X \sim N(50,2.5^2)$（单位：kg），卡车的载重量为2吨，为了以0.95的概率保证不超载，一车最多能装多少袋水泥?

解 设一车装n袋水泥，则总重量为

$$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(50n,\ 2.5^2 n\ )$$

$$P(Y\leq 2000)=\Phi\left(\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}}\right)\geq 0.95$$

$$\frac{2000-50n}{2.5\sqrt{n}}\geq 1.645 \quad \Rightarrow \quad n\leq\ \mathbf{39.483}$$

故一车最多能装39袋水泥.

例4 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x,y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量$Z=X+Y$的密度函数$f(z)$.

解

$$f_X(x)=\begin{cases} x+1/2, & 0\le x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} y+1/2, & 0\le y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} \int_0^z (x+1/2)(z-x+1/2)dx=\dfrac{z^3}{6}+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z}{4}, & 0<z<1 \\ \int_{z-1}^1 (x+1/2)(z-x+1/2)dx=?, & 1\le z<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例4 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x,y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量$Z=X+Y$的密度函数$f(z)$.

解

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

$$=\begin{cases} \int_0^z zdx = z^2, & 0<z<1 \\ \int_{z-1}^1 zdx = z(2-z), & 1<z<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

三、数字特征

1. 计算

$$E(X)=\begin{cases}\sum_i x_i p_i & D.R.V\\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & C.R.V\end{cases}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$COV(X,Y)=E(XY)-EXEY$$

$$\rho_{XY}=COV(X,Y)/\sqrt{D(X)D(Y)}$$

2. 性质

(1) $E(aX+b)=aE(X)+b$，$D(aX+b)=a^2D(X)$

(2) $E(\sum_i X_i)=\sum_i E(X_i)$，$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2COV(X,Y)$

(3) X与Y相互独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\begin{cases}COV(X,Y)=\rho_{XY}=0\\ E(XY)=E(X)E(Y)\\ D(X+Y)=D(X)+D(Y)\end{cases}$ 不相关

3. 中心极限定理

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\underset{n\to\infty}{\sim}N(0,1)\xrightarrow{X\sim B(n,p)}P\{a<X\le b\}=\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

例5　将一枚硬币抛掷10000次，出现正面5800次，认为这枚硬币不均匀是否合理?
试说明理由.

解：　设X为10000次试验中出现正面的次数，

若硬币是均匀的，　$X \sim B(10000, 0.5)$.

采用正态近似，

$$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X-5000}{50} \sim N(0,1)$$

$$P(X \geq 5800) \approx 1-\Phi\left(\frac{5800-5000}{50}\right) = 1-\Phi(16) \approx 0$$

故认为这枚硬币不均匀是合理的.

例6 设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，Y服从参数为λ的指数分布，且X与Y不相关，则（ D ）

（A）X与Y相互独立.　（B）$E(X-Y)=0$.

（C）$E(XY)=\lambda^2$.　（D）$D(X+\lambda Y)=\lambda+1$.

四、数理统计

1. 三个概念：总体、样本、统计量 $(\overline{X}, S^2)$

2. 三个分布：

$$\begin{tikzcd}
N(0,1) \arrow[r] \arrow[dr] & \chi^2(n) \arrow[r] \arrow[d] & F(n_1,n_2) \\
 & t(n) &
\end{tikzcd}$$

3. 三个结论：

$$X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$$

① $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$；

② $\dfrac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$；

③ $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立

4. 二个方法：**矩估计；极大似然估计**

5. 三个标准：**无偏性；有效性；一致性**

6. 置信区间**（三个公式）**：（注意 α 和 n 与区间长度 L 的关系）

$$\mu \in (\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \qquad \sigma^2 \in (\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$$

例7 设总体 $X \sim E(1/\theta)$，试证明 $\hat{\theta} = nX_1^*$ 是 θ 的无偏估计量.

证

$$f_{X_1^*}(x) = n[1-F_X(x)]^{n-1} f_X(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} e^{-\frac{n}{\theta}x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}) = nE(X_1^*) = \theta$$

$$D(\hat{\theta}) = n^2 D(X_1^*) = \theta^2 > \frac{\theta^2}{n} = D(\bar{X})$$

谢谢同学们！