2019 ～2020 学年第一学期

《微积分（一)》（上）期中考试试卷(A 卷) (闭卷，启明学院用)

院(系) 启明学院 专业班级__________ 学号__________ 姓名__________

考试日期: 2019-11-15　　　　考试时间: AM

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a_n > 0 (n = 1,2,\cdots)$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} =$ ____a____.

2. $\inf\left\{\cos x : x \in Q \cap (0, e+1)\right\} =$ ____0____.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2} =$ ____1____.

4. 设 $y = \cos\left(u^2(x) + v^2(x)\right)$，$u(x), v(x)$ 可微，

则 $dy =$ ____$-\sin(u^2+v^2)\cdot(uu'+vv')dx$____.

5. 已知函数的参数表示 $x = 10\cos 3t + 120\cos t$，$y = 10\sin 3t + 120\sin t$，则 $\dfrac{dy}{dx} =$ ____$-\dfrac{\cos 3t + 4\cos t}{\sin 3t + 4\sin t}$____.

得　分	
评卷人	

二. 单项选择题(每小题 4 分，共 12 分)

1. 当 $n \to \infty$，如下发散的是(　D　).

A. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$　　　B. $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}$

C. $\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}$　　　D. $\sin n(\pi+1)$

2. 下列叙述错误的是(　C　).

A. 单调数列如果无界，一定是发散的　　　B. 有界数列的子列不一定是收敛的

C. $o(x^2) = O(x)(x \to 0)$　　　D. $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致连续

3. 函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a) < 0$，$f'(b) > 0$，则下列叙述正确的是(　B　).

A. $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)$ 为函数的最大值　　　B. $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)$ 为函数的最小值

C. f 在 $[a,b]$ 上可能没有极大值　　　D. f' 在 $[a,b]$ 上可能有跳跃点

得　分	
评卷人	

三. 计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}n^3\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}n^2\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^4}}{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{\ln(1+\sin x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+\mathrm{n}^p}{n^{p+1}}$ (p 为自然数)

由 Stolz

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\mathrm{n}+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\mathrm{n}+1)^p}{(p+1)n^p+\dfrac{(p+1)p}{2}n^{p-1}+\cdots+1}=\frac{1}{p+1}.$$

4. 设 $y=\left(\arcsin x\right)^2$，求 $y^{(n)}(0)$.

解：由 $y'=2\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 得 $\left(1-x^2\right)\left(y'\right)^2=4y$，再次求导并整理，

$-xy'+\left(1-x^2\right)y''=2$. 应用 Leibniz 公式，求 n 阶导数：

$-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}+\left(1-x^2\right)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}=0$. 综上，令 $x=0$，得

$y'(0)=0, y''(0)=2, y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$，从而

$y^{(2k+1)}(0)=0(k=0,1,2,\cdots)$，

$y^{(2k)}(0)=\left[(2k-2)!!\right]^2\cdot 2(k=1,2,\cdots)$.

5. 设 $ye^{xy}-x+1=0$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

解：两边对 x 求导得：

$\dfrac{dy}{dx}e^{xy}+ye^{xy}(y+x\dfrac{dy}{dx})-1=0$，

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-y^2e^{xy}}{e^{xy}+xye^{xy}}$，另外解方程 $x=0$ 时，$y=-1$，代入得

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0.$

得　分	
评卷人	

四. 解答题（每小题 7 分, 共 14 分）

1． n 在什么条件下，函数 $f(x)=\begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $(n\text{为自然数})$

(1) 在点 $x=0$ 处连续？ (2) 在点 $x=0$ 处可导？ (3) 在点 $x=0$ 处导函数连续？

解：(1) 因为 $0\le\left|x^n\sin\dfrac{1}{x}\right|\le|x|^n$. 而当 $n>0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}|x|^n=0$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$.

即当 $n>0$ 时，在点 $x=0$ 处连续.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$. 可以看出当且仅当 $n>1$ 时，在点 $x=0$ 处可导.

(3) 经计算可得 $f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{n-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $(n>1\text{且为自然数})$，

可以看出当 $n>2$ 时在点 $x=0$ 处导函数连续.

2. 已知函数在区间 (a,b) 上可导但无界，请讨论其导函数在 (a,b) 上的有界性.

解：其导函数也一定无界。证明用反证法：设函数为 $f(x)$，而 $f'(x)$ 在 (a,b) 上有界，即 $\exists M>0$，使得 $f'(x)\le M$，$\forall x\in(a,b)$. 任意给定一点 $x_0\in(a,b)$，由中值公式 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$，其中 ξ 在 x 与 x_0 之间. 从而 $|f(x)|\le|f(x_0)|+|f'(\xi)|\cdot|x-x_0|\le|f(x_0)|+M(b-a)$，得出 $f(x)$ 有界，从而与假设矛盾。所以知，导函数一定无界。

得　分	
评卷人	

五. 证明题（每小题 8 分, 共 24 分）

1．依据极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^2+n+1}=\frac{3}{2}$.

证明：$\forall\varepsilon>0$，

$$\left|\frac{3n^2+2}{2n^2+n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{1-3n}{4n^2+2n+2}\right|<\frac{3n}{4n^2+2n+2}<\frac{1}{n}.$$

令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，有

$\left|\frac{3n^2+2}{2n^2+n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon.$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n^2+n+1}=\frac{3}{2}$.

2. 设函数 $f(x)=\frac{x+2}{x+1}\sin\frac{1}{x}$，证明其在区间 $(0,1)$ 上不一致连续.

证明：令 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$， $y_n=\frac{1}{2n\pi}$，则

$$|x_n-y_n|=\frac{\frac{\pi}{2}}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})(2n\pi)}\to 0,\ n\to\infty$$，但是

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\frac{4n\pi+\pi+1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}+1}-0>1$$，所以不一致连续.

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负且三阶可导，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,b\right)$ 内有两个不同实根，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f^{(3)}(\xi)=0$.

证明：$f(x)=0$ 在 $\left(a,b\right)$ 内两个不同实根为 $x_1<x_2$，即 $f(x_1)=f(x_2)=0$. 由罗尔定理，存在 $c\in\left(a,b\right)$，使得 $f'(c)=0$. 因为 $f(x)\geq 0$，从而 x_1,x_2 为 $f(x)$ 的极小值点，由费马定理，$f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

再对 $f'(x)$ 在 $[x_1,c]$ 和 $[c,x_2]$ 上用罗尔定理，则存在 $x_3\in[x_1,c]$，$x_4\in[c,x_2]$ 使得 $f''(x_3)=f''(x_4)=0$.

再一次对 $f''(x)$ 在 $[x_3,x_4]$ 上用罗尔定理，$\exists\xi\in(x_3,x_4)\subset(a,b)$, 使 $f^{(3)}(\xi)=0$.