上次课要点：

$$a = f(x) \rightarrow f(x) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$f(x)\mathrm{d}x = v\mathrm{d}v$$

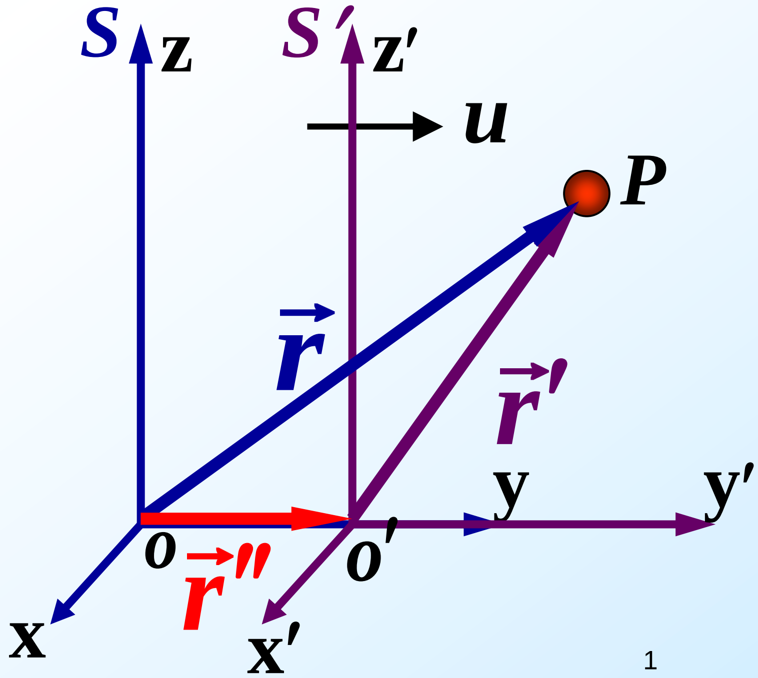
分离变量
两边积分
（上下限对应）

相对运动

$$\vec{r}_{绝} = \vec{r}_{相} + \vec{r}_{牵}$$

$$\vec{v}_{绝} = \vec{v}_{相} + \vec{v}_{牵}$$

$$\vec{a}_{绝} = \vec{a}_{相} + \vec{a}_{牵}$$

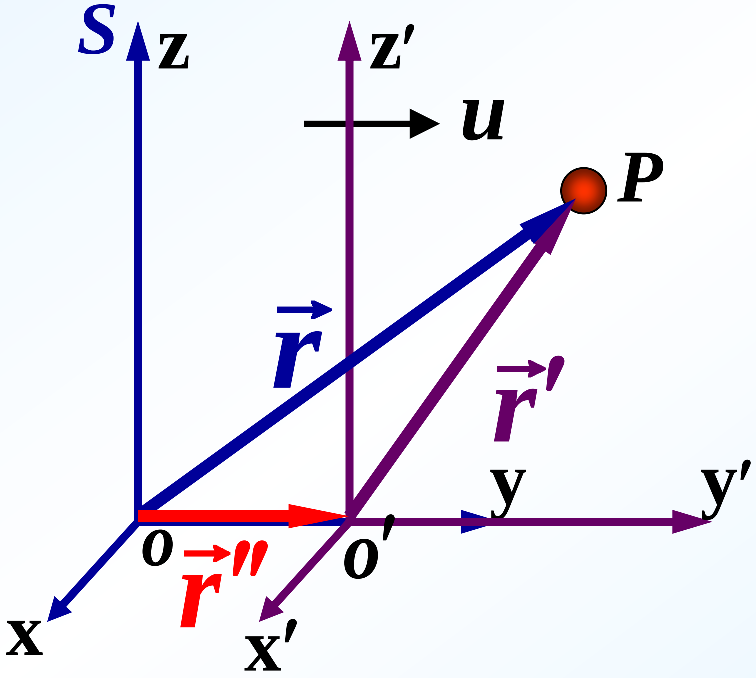


相对运动

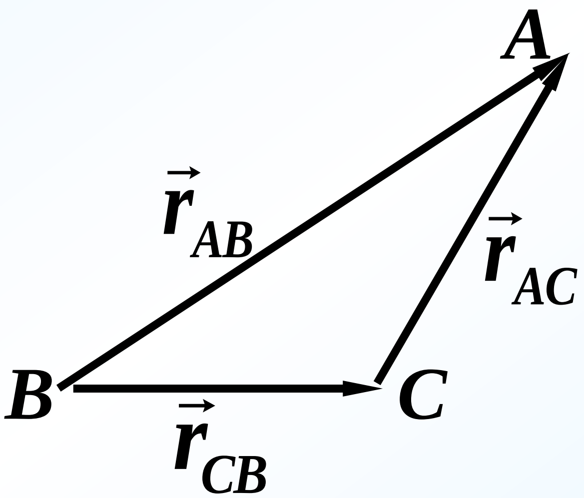
$$\vec{r}_{绝} = \vec{r}_{相} + \vec{r}_{牵}$$

$$\vec{v}_{绝} = \vec{v}_{相} + \vec{v}_{牵}$$

$$\vec{a}_{绝} = \vec{a}_{相} + \vec{a}_{牵}$$



$\vec{r}_{AB}$ ： A相对B的位矢

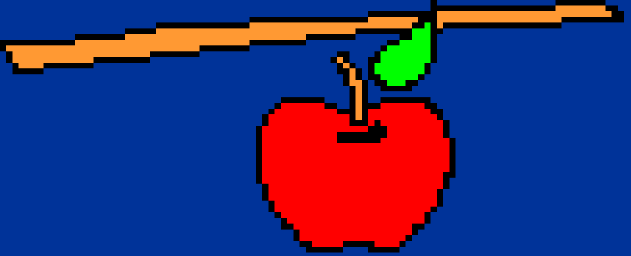


$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{AC} + \vec{r}_{CB}$$

$$\Delta\vec{r}_{AB} = \Delta\vec{r}_{AC} + \Delta\vec{r}_{CB}$$

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AC} + \vec{v}_{CB}$$

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_{AC} + \vec{a}_{CB}$$



Mechanics

第一篇 力学

第2章 牛顿运动定律

内容提要

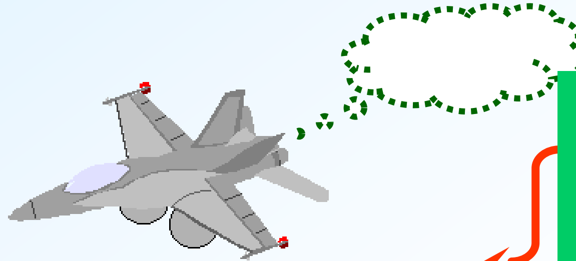
三个定律
- 牛顿第一定律
- 牛顿第二定律
- 牛顿第三定律

三个定理
- 动量定理
- 角动量定理
- 动能定理

三个守恒定律
- 动量守恒定律
- 角动量守恒定律
- 机械能守恒定律

1. 牛顿第二定律

（1）公式



$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

2° $m=f(t)$

m为常量时 $\boxed{\vec{F}=m\vec{a}}$ ——瞬时效应

$\vec{F}$与$\vec{a}$ 同时产生、同时变化、同时消失

注： 惯性质量与引力质量?

$\vec{F}=m\vec{a}$ m_I: 物体惯性大小的量度 ～惯性质量

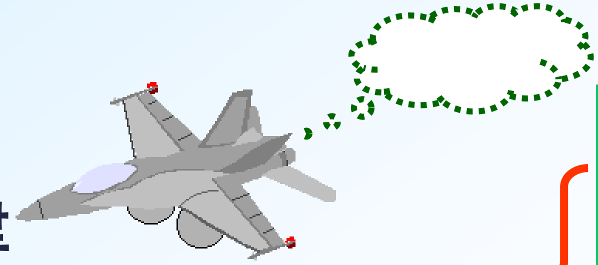
$\vec{F}=G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$ m_g: 感受引力作用的能力～引力质量

同一物体：$m_I \overset{?}{=} m_g$

TABLE 1.3 EQUALITY OF m_I AND m_G

Experimenter(s)	Year	Method	$\lvert m_I - m_G \rvert / m_I$
Galileo[13]	~1610	pendulum	$<2 \times 10^{-3}$
Newton[14]	~1680	pendulum	$<10^{-3}$
Bessel[15]	1827	pendulum	$<2 \times 10^{-5}$
Eötvös[16]	1890	torsion-balance	$<5 \times 10^{-8}$
Eötvös et al.[17]	1905	torsion-balance	$<3 \times 10^{-9}$
Southerns[18]	1910	pendulum	$<5 \times 10^{-6}$
Zeeman[19]	1917	torsion-balance	$<3 \times 10^{-8}$
Potter[20]	1923	pendulum	$<3 \times 10^{-6}$
Renner[21]	1935	torsion-balance	$<2 \times 10^{-10}$
Dicke et al.[22]	1964	torsion-balance; sun	$<3 \times 10^{-11}$
Braginsky et al.[23]	1971	torsion-balance; sun	$<9 \times 10^{-13}$

1. 牛顿运动定律



（1）牛顿第二定律

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$2^{\circ}\quad m=f(t)$

m为常量时 $\boxed{\vec{F}=m\vec{a}}$

$\vec{F}$与$\vec{a}$ 同时产生、同时变化、同时消失

注： 惯性质量与引力质量?

$\vec{F}=m\vec{a}$ m_{I}: 物体惯性大小的量度 ～惯性质量

$\vec{F}=G\frac{Mm}{r^{3}}\vec{r}$ m_{g}: 感受引力作用的能力～引力质量

同一物体：$m_{I}\overset{?}{=}m_{g}$——在10^{-14}的精度内

（2）牛顿定律的适用范围及条件

1） 惯性参考系

2） 宏观低速运动范围

3） 质点

1. 惯性系

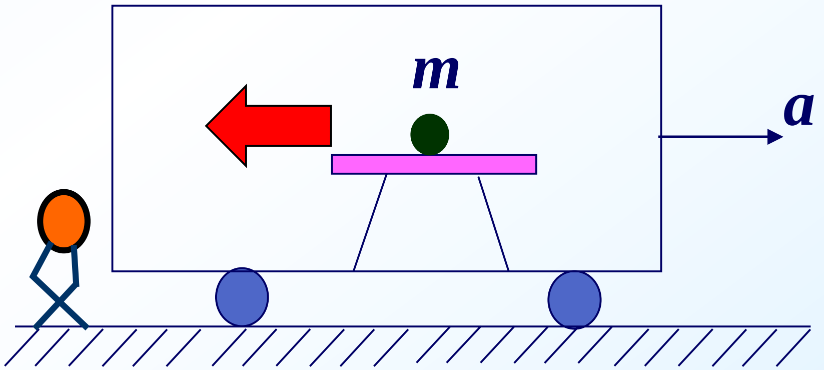
惯性系：牛顿第一定律成立的参考系

加速运动的火车？

地面（地球）？

太阳系、银河系……？

绝对的惯性系？



近似（相对而言）惯性系：地球、太阳系、银河系….

定义：

牛顿第一定律成立的参照系～惯性系

相对惯性系作匀速直线运动的参照系

～惯性系

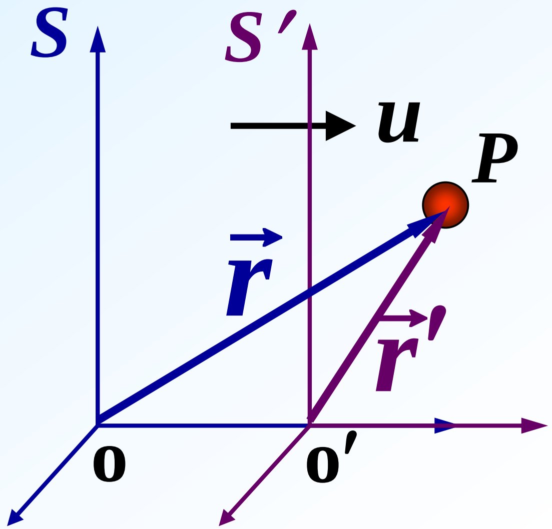
相对惯性系作加速运动的参照系

～非惯性系

2. 伽利略相对性原理

设S'系相对于惯性系S 系作匀速直线运动

两系测同一质点的运动满足伽利略变换：



坐标 $\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \\ t' = t \end{cases}$

速度 $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$

加速度 $\vec{a}' = \vec{a}$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}'$$

一切惯性系中，测量同一物体的加速度相同。

伽利略相对性原理：一切惯性系中力学规律相同

伽利略相对性原理的进一步阐述：

一切惯性系中力学规律相同

- 相对某惯性系作匀速直线运动的另一个参考系而言，其内部所发生的一切力学物理过程，都不受系统作为整个的匀速直线运动的影响。
- 不可能在惯性系内部进行任何力学物理实验来确定该系统作匀速直线运动的速度。
- 惯性系的绝对速度不可测量。
- 力学规律而言，一切惯性系等价。

牛顿运动定律（质点动力学）P17

	第一定律	第二定律	第三定律
表述	任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态。除非有力加于其上迫使它改变这种状态	物体运动的改变与所加的力成正比，并且发生在该力所沿直线的方向。	两物体间的相互作用永远相等，并且指向对方。
要点	1.惯性—物体保持原有状态的性质。 2.惯性参考系 3.力（物体之间相互作用）是改变运动状态的原因。	1.惯性质量m 2.反映合力F和动量P之间的定量关系。 3.合力F具有瞬时性、矢量性、迭加性。	1.作用力和反作用力是成对出现，成对消失 2.作用力和反作用力必定属同一性质，作用在不同物体上。
关系	给出了运动状态改变，惯性及受力的定性关系，是三大定律中的前提和基础	给出了运动状态改变及受力的定量关系，是三大定律中的核心。	给出了物体相互作用之间的定量关系，是对第二定律的补充。

2. 基本力简介（P20）

1. 万有引力：

   “无处不在”，在宏观领域作用显著。

2. 电磁力：

   带电体间相互作用

   （弹性力、摩擦力、分子力、浮力、流体压力）

3. 强力

   核子、介子和超子间，是一种短程力

4. 弱力

   核子、电子、中微子等大多数粒子间，是一种短程力

3. 牛顿定律的应用

质点动力学中也有两类基本问题

	已知	一般方法	求
第一类	质量为 m 的质点运动方程 $\vec{r}=\vec{r}(t)$	求导 $\longrightarrow$ $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	所受合外力 $\vec{F}\,(=m\vec{a})$
第二类	质量为 m 的质点受力情况及初始条件	积分 $\longrightarrow$ $\vec{F}\rightarrow\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$	质点的运动规律 $\vec{v}(t)$，$\vec{r}(t)$ 或 $\vec{v}(\vec{r})$ 等

3. 牛顿定律在惯性参照系的应用

常用步骤:

P(22)

定对象

看运动

查受力

建坐标

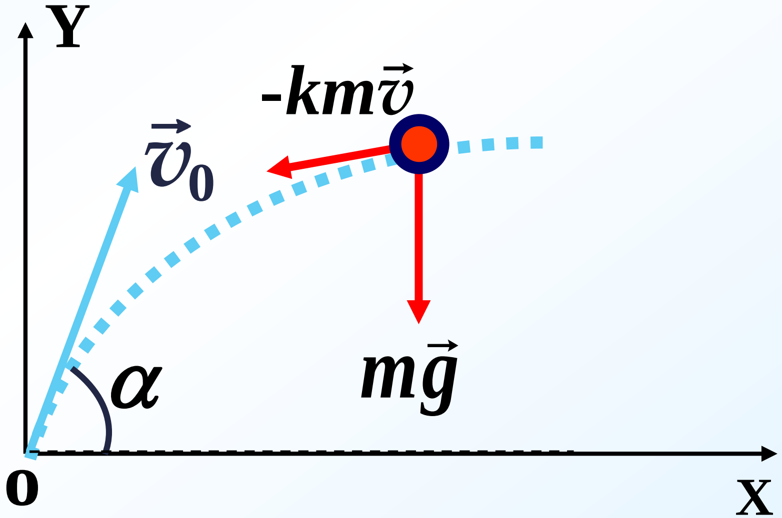
列方程

分量指向与坐标轴正方向相同者为正，相反者为负。

例. 一质量为 m 的物体在重力的作用下, 以v_0的初速度沿与水平方向成α角的方向抛出，空气的阻力与物体的动量成正比，比例系数为k 。

求 物体的运动轨迹。

解: 建立坐标系如图



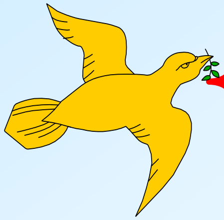
物体m受力： $m\vec{g}$、$-km\vec{v}$

牛顿方程

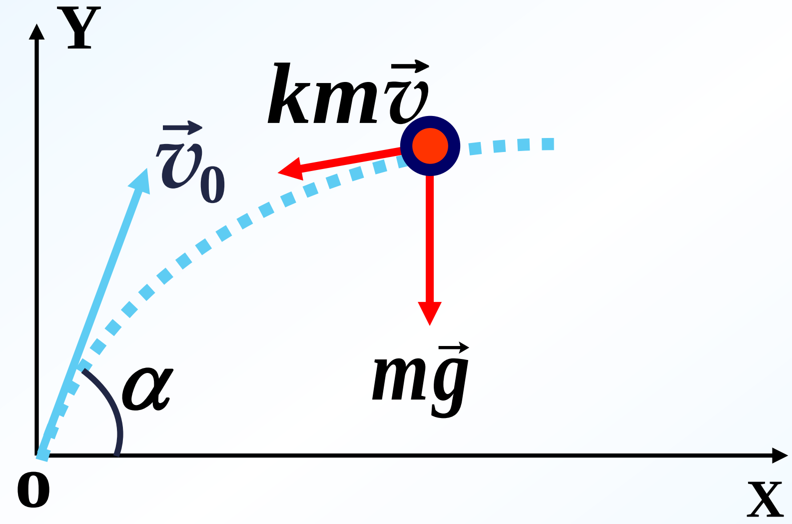
$$m\vec{g}-km\vec{v}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

分量式

$$\begin{cases} -k\cancel{m}v_x=\cancel{m}\dfrac{dv_x}{dt} \\ -\cancel{m}g-k\cancel{m}v_y=\cancel{m}\dfrac{dv_y}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -kv_x=\dfrac{dv_x}{dt} & (1) \\ -g-kv_y=\dfrac{dv_y}{dt} & (2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} -kv_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} & (1) \\ -g - kv_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} & (2) \end{cases}$$



对（1）（2）分别积分

$$\begin{cases} v_x = v_0 e^{-kt}\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y = \dfrac{1}{k}[(g + kv_0\sin\alpha)e^{-kt} - g] = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

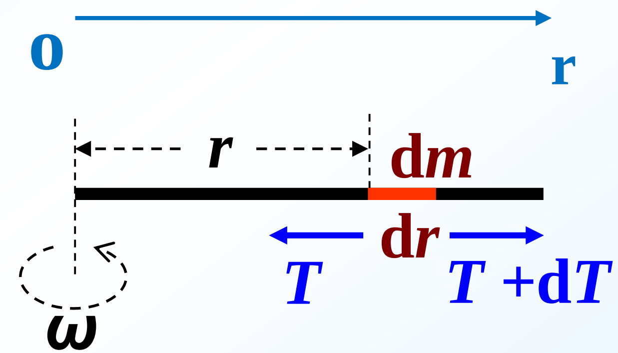
再积分可得

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}) \\ y = \dfrac{1}{k^2}(g + kv_0\sin\alpha)(1 - e^{-kt}) - \dfrac{gt}{k} \end{cases}$$

例：一条均匀的绳子，质量为m，长度为 l，将它栓在转轴上，以角速度ω 旋转，试证明，略去重力时，绳中的张力分布为

$$T(r)=\frac{m\omega^2}{2l}(l^2-r^2)$$

式中r 为到转轴的距离。



解：

dm所受的合外力： $F=(T+\mathrm{d}T)-T$

dm的加速度： $a=-\frac{v^2}{\rho}=-\frac{(r\omega)^2}{r}=-r\omega^2$

$$\boxed{\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\mathrm{d}r}$$

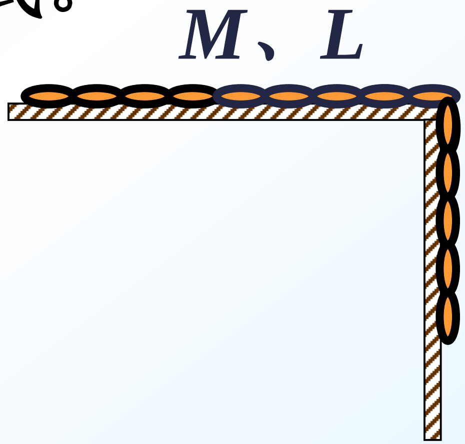
由牛顿第二定律得：$(T+\mathrm{d}T)-T=-\mathrm{d}m\cdot r\omega^2 \quad =-r\omega^2\frac{m}{l}\mathrm{d}r$

$$-\mathrm{d}T=\frac{m\omega^2}{l}r\mathrm{d}r \qquad \therefore -\int_T^0 \mathrm{d}T=\int_r^l \frac{m\omega^2}{l}r\mathrm{d}r$$

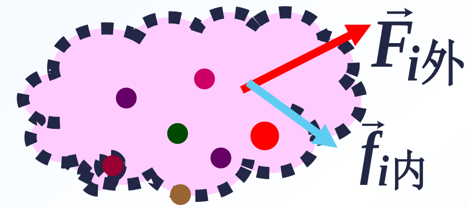
于是： $T=\frac{m\omega^2}{2l}(l^2-r^2)$ 证毕。

例. 一条质量为M长为L的均匀链条, 放在一光滑的水平桌面上，链子的一端有极小的一段长度被推出桌子的边缘在重力作用下开始下落，试求在下列情况下链条刚刚离开桌面时的速度:

（1）下落前，链条为一直线形式。



对于质点系



外力　　内力

对质点系中任一质点有： $\vec{F}_i+\vec{f}_i=\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}_i}{\mathrm{d}t}$

$$\sum_i\vec{F}_i+\cancel{\sum_i\vec{f}_i}=\sum_i\frac{\mathrm{d}\vec{P}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\sum_i\vec{P}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_i\vec{f}_i=0,\ \text{记}\vec{F}=\sum_i\vec{F}_i,\ \vec{P}=\sum_i\vec{P}_i$$

质点系的总动量

则 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$　　质点系所受的合外力

若每一质点速度相等，

$$\vec{v}_i=\vec{v}$$

$$\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i=\sum_i m_i\vec{v}$$

$$=\vec{v}\sum_i m_i=M\vec{v}$$

$v<<c$时有

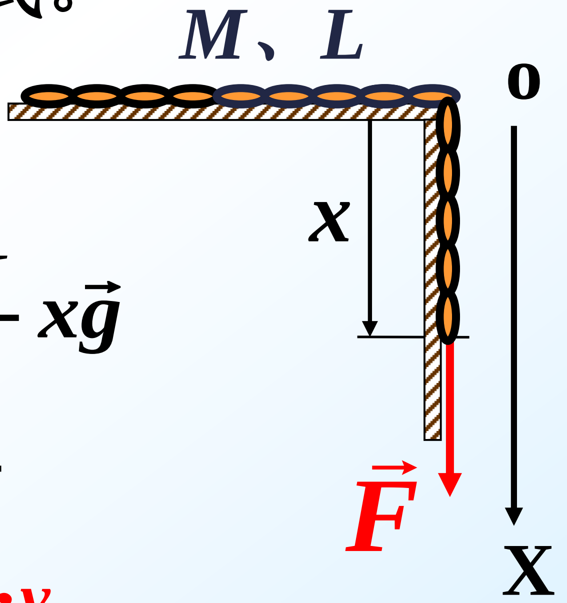
$$\vec{F}=M\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=M\vec{a}$$

质点系的总质量

(注意：仅对无质点或质量进出的情况)

例. 一条质量为M长为L的均匀链条, 放在一光滑的水平桌面上，链子的一端有极小的一段长度被推出桌子的边缘在重力作用下开始下落，试求在下列情况下链条刚刚离开桌面时的速度:

（1）下落前，链条为一直线形式。



解: 链条各部分的速度、加速度都相同，建立坐标系：如图

任意t 时刻受力$=\vec{F}=m_x\vec{g}=\dfrac{M}{L}x\vec{g}$

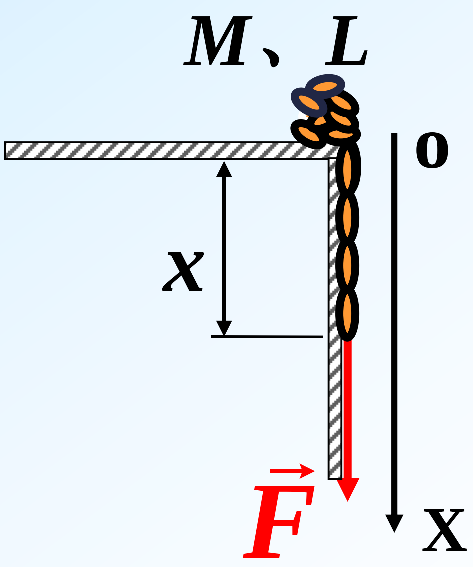
运动方程 $\dfrac{\cancel{M}}{L}xg=\cancel{M}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{g}{L}x=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\qquad \int_0^L\frac{g}{L}x\,\mathrm{d}x=\int_0^v v\,\mathrm{d}v$$

$$v=\sqrt{gL}$$

（2）在刚刚下落时，链条盘在桌子边缘。$v \overset{?}{=} \sqrt{gL}$

如图建立坐标，



哪个受力方程是正确的？

(A) $m_x g = M\dfrac{dv}{dt}$

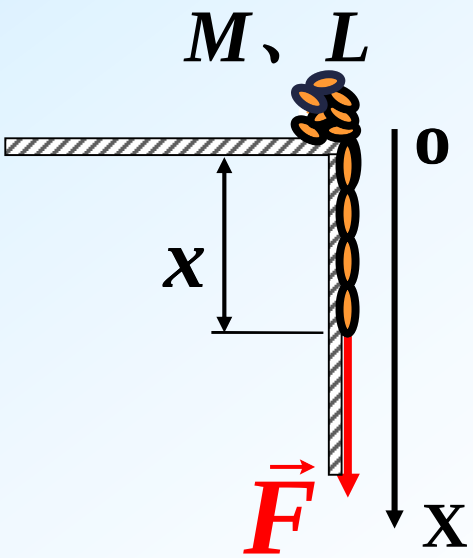
(B) $m_x g = m_x\dfrac{dv}{dt}$

(C) $m_x g = \dfrac{d(m_x v)}{dt}$

(D) $Mg = \dfrac{d(Mv)}{dt}$

（2）在刚刚下落时，链条盘在桌子边缘。$v \overset{?}{=} \sqrt{gL}$

如图建立坐标，链条在任意t时刻受力为



$$F = m_x g = \frac{M}{L} xg$$

牛顿方程 $F = \cancel{M\frac{dv}{dt}} = \cancel{m_x \frac{dv}{dt}}$

$$F = \frac{d(m_x v + m' \cdot 0)}{dt}$$

即 $\dfrac{d(m_x v)}{dt} = \dfrac{M}{L} xg$

$$\frac{d}{dt}(\cancel{\frac{M}{L}} xv) = \cancel{\frac{M}{L}} xg \qquad d(xv) = xg\,dt$$

两边同乘 xv $\quad \dfrac{1}{2} d(x^2 v^2) = x^2 v g \cdot dt$

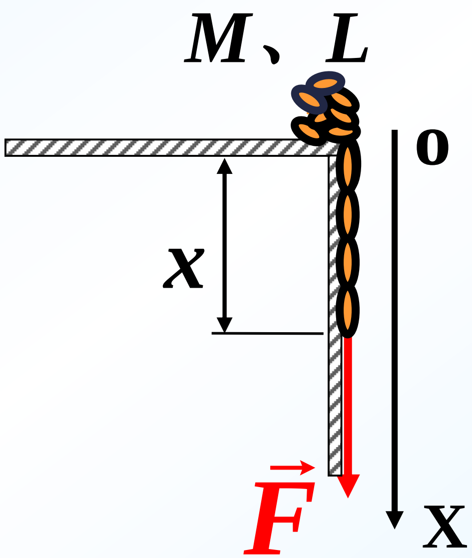
$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2v^2) = x^2vg\cdot\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2v^2) = x^2vg\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = x^2g\cdot\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{v^2L^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2v^2) = \int_0^L x^2g\cdot\mathrm{d}x$$

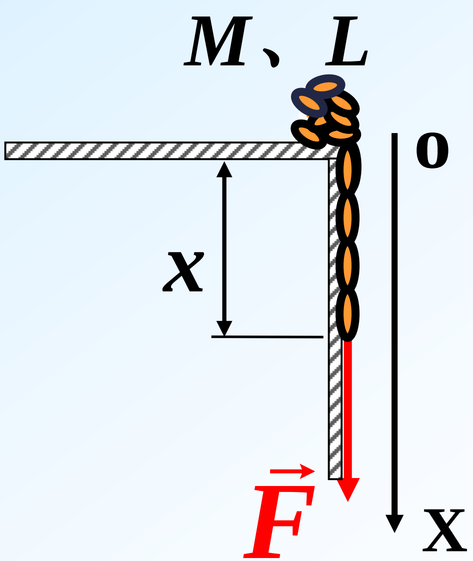
$$\frac{1}{2}v^2L^2 = \frac{1}{3}gL^3$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gL}$$



（2）在刚刚下落时，链条盘在桌子边缘。$v \overset{?}{=} \sqrt{gL}$

如图建立坐标，链条在任意t时刻受力为



$$F = m_x g = \frac{M}{L} x g$$

牛顿方程 $F = \cancel{M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}} = \cancel{m_x \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$

$$F = \frac{\mathrm{d}(m_x v + m' \cdot 0)}{\mathrm{d}t}$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}(m_x v)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{M}{L} x g$

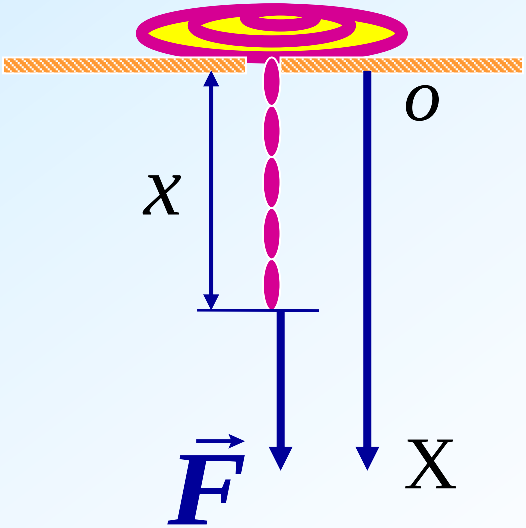
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\cancel{\frac{M}{L}} x v\right) = \cancel{\frac{M}{L}} x g \qquad \mathrm{d}(xv) = xg\,\mathrm{d}t$$

两边同乘 xv $\quad \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(x^2 v^2) = x^2 v g \cdot \mathrm{d}t$

$$\begin{cases} v = \sqrt{\dfrac{2}{3} gL} \\ v = \sqrt{gL} \end{cases}$$

两种情况的速度为什么不同？

（3）在刚刚下落时，链条盘在桌子边缘。



情况和（2）一样，结果

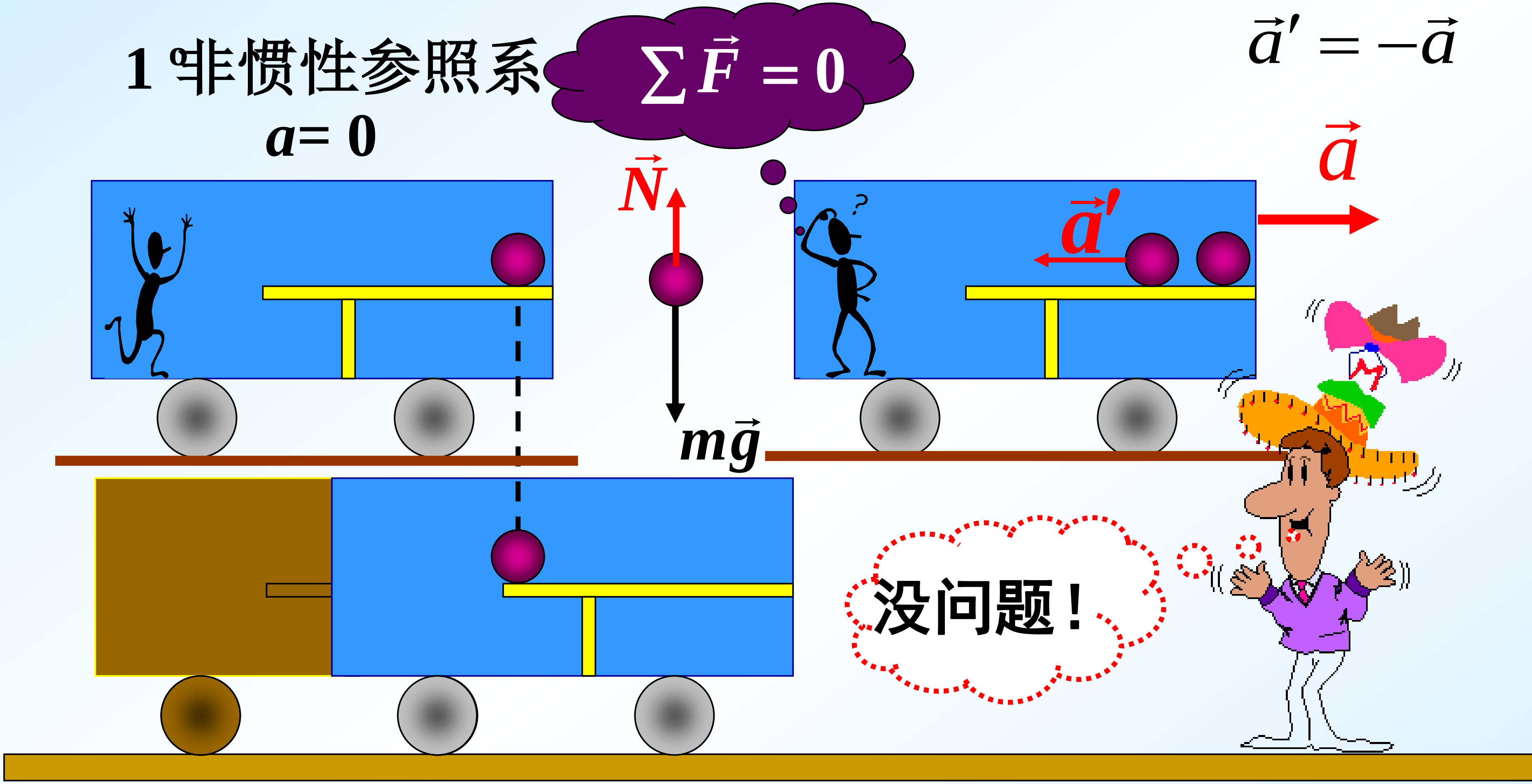
$$v=\sqrt{\frac{2}{3}gL}$$


@爆笑gif图

4. 牛顿定律在非惯性参照系的应用

1 非惯性参照系

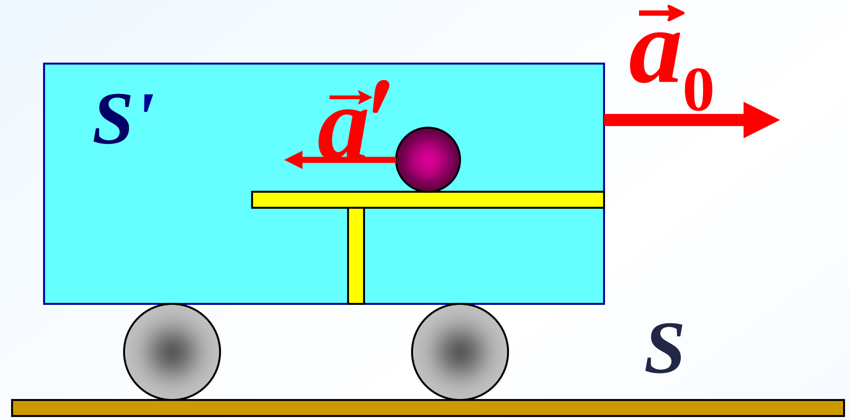
$$\vec{a}' = -\vec{a}$$



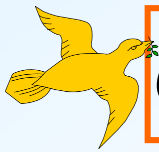
牛顿定律在非惯性系中不成立！

2° 惯性力

(*a*) 加速平动的非惯性系 S'



S系 $\vec{F} = m\vec{a}$



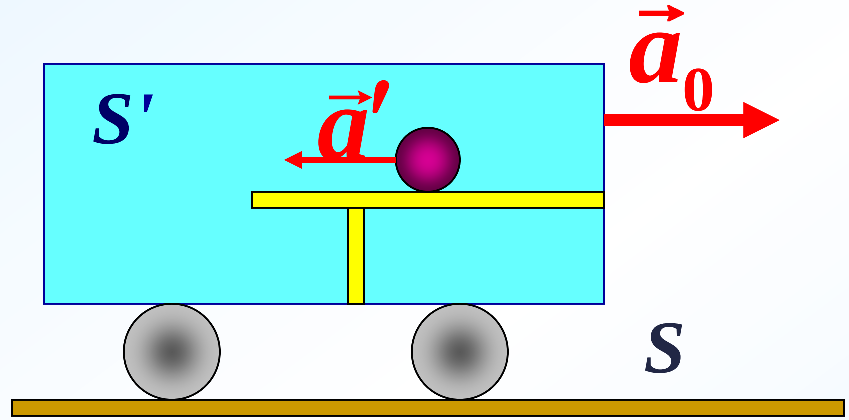
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0}$$

S'系 $$\vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = m\vec{a}' + \underline{m\vec{a}_0}$$

上式表明, 在S'系中看，质点受的合外力$\vec{F}$并不等于 $m\vec{a}'$，而是多了一项 $m\vec{a}_0$, 故牛顿第二定律在非惯性参考系S'中不成立。

2° 惯性力

(*a*) 加速平动的非惯性系 S'



S 系 $\quad \vec{F}=m\vec{a}$

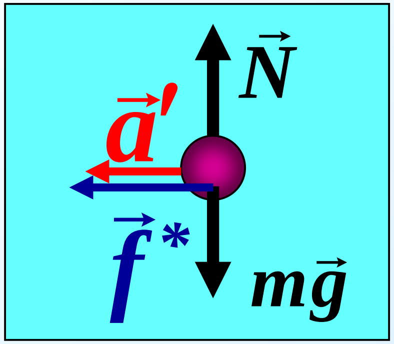
$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}'+\vec{a}_0}$$

S' 系

$$\vec{F}=m(\vec{a}'+\vec{a}_0)$$

$$=m\vec{a}'+\underline{m\vec{a}_0}$$

假想质点还受到另外一个力 $-m\vec{a}_0$ 的作用，
而质点所受合外力等于 $m\vec{a}'$



$$\vec{F}-m\vec{a}_0=m\vec{a}'$$

真实力

$$\vec{f}^*=(-m\vec{a}_0)$$

惯性力

注： 非惯性系中，引入“**惯性力**”的概念，牛顿第二定律就能继续沿用。

非惯性系的牛顿第二定律：

$$\boxed{\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F}_{真实力} + \vec{f}^{*}_{惯性力}}$$

表观力

$$\begin{cases} \vec{F}_{真实力} = m\vec{a} \\ \vec{f}^{*}_{惯性力} = -m\vec{a}_0 \end{cases}$$

物体间的相互作用

物体的惯性在非惯性系中的表现

虚拟力

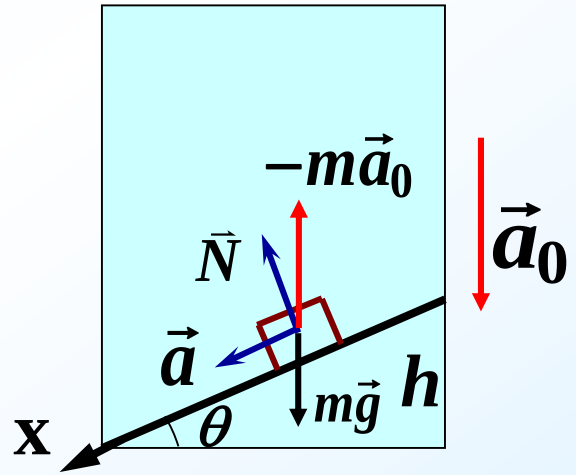
无施力者

他们被谁甩了出去？

例3. 升降机以加速度 a_0=1.8m·s^{-2} 下降。升降机内有一个与地板成θ=30°角的光滑斜面, 一物体从斜面顶端由相对静止下滑。设斜面顶端离地板高h=1m, 求物体滑到斜面末端所需的时间。

解： 选升降机为参考系

惯性力 $\vec{f}_i = -m\vec{a}_0$



形式上应用牛顿第二定律

$$mg\sin\theta - ma_0\sin\theta = ma$$

$\therefore \quad a = (g - a_0)\sin\theta$ 匀加速直线运动

$$S = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(g-a_0)\sin\theta \cdot t^2 = \frac{h}{\sin\theta}$$

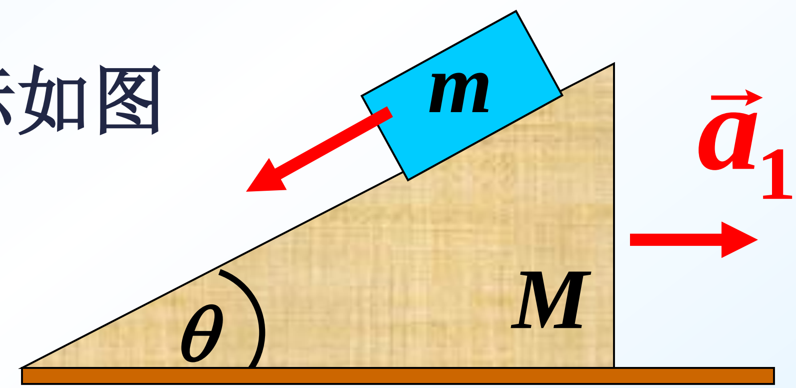
$$t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g-a_0}} = 1\text{（s）}$$

例. 一光滑的劈,质量为M, 斜面倾角为θ, 并位于光滑的水平面上, 另一质量为m 的小块物体, 沿劈的斜面无摩擦地滑下， 求两物对地的加速度。

解： 研究对象：m 、M

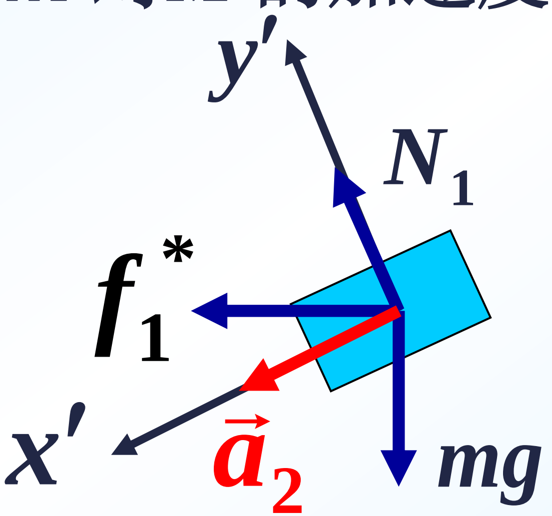
以劈为参照系，建立坐标如图

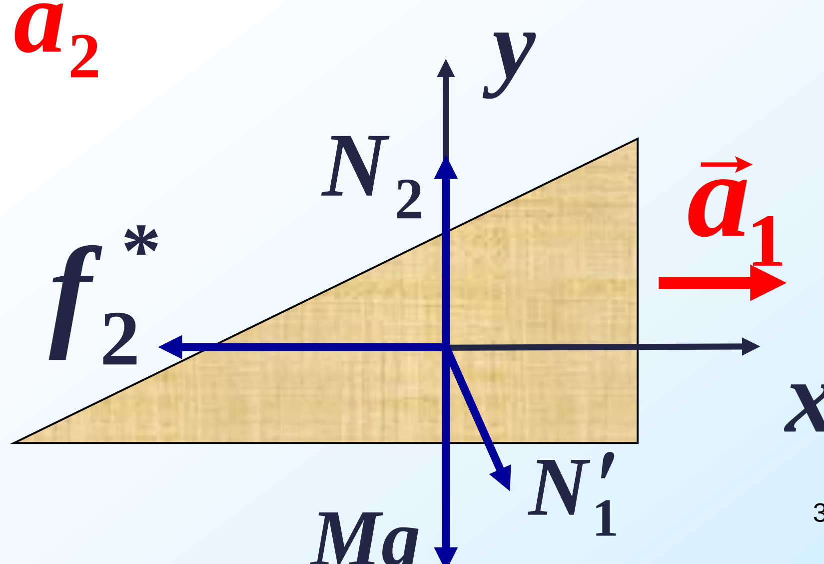
受力分析

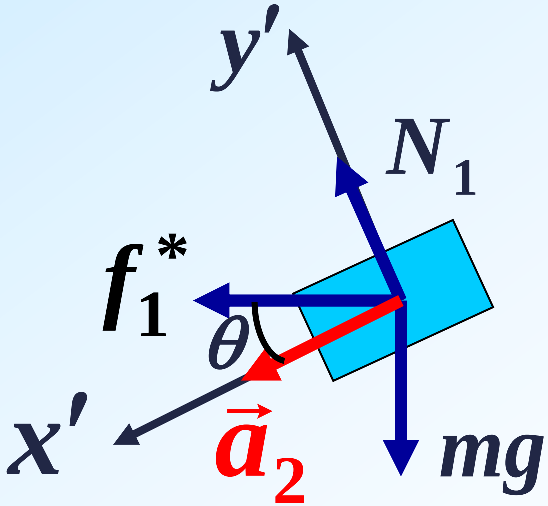


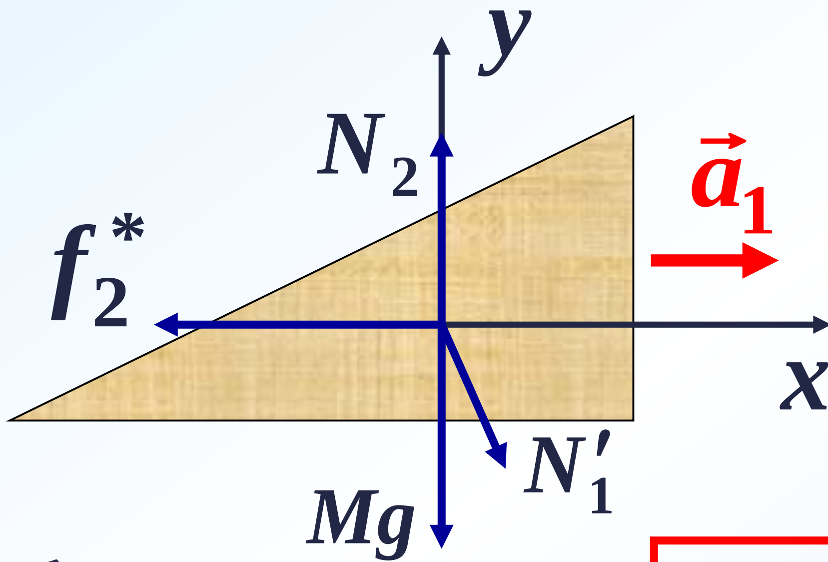
设M 对地的加速度为 $\vec{a}_1$

m 对M 的加速度为 $\vec{a}_2$









列方程（以劈为参照系）

m对M

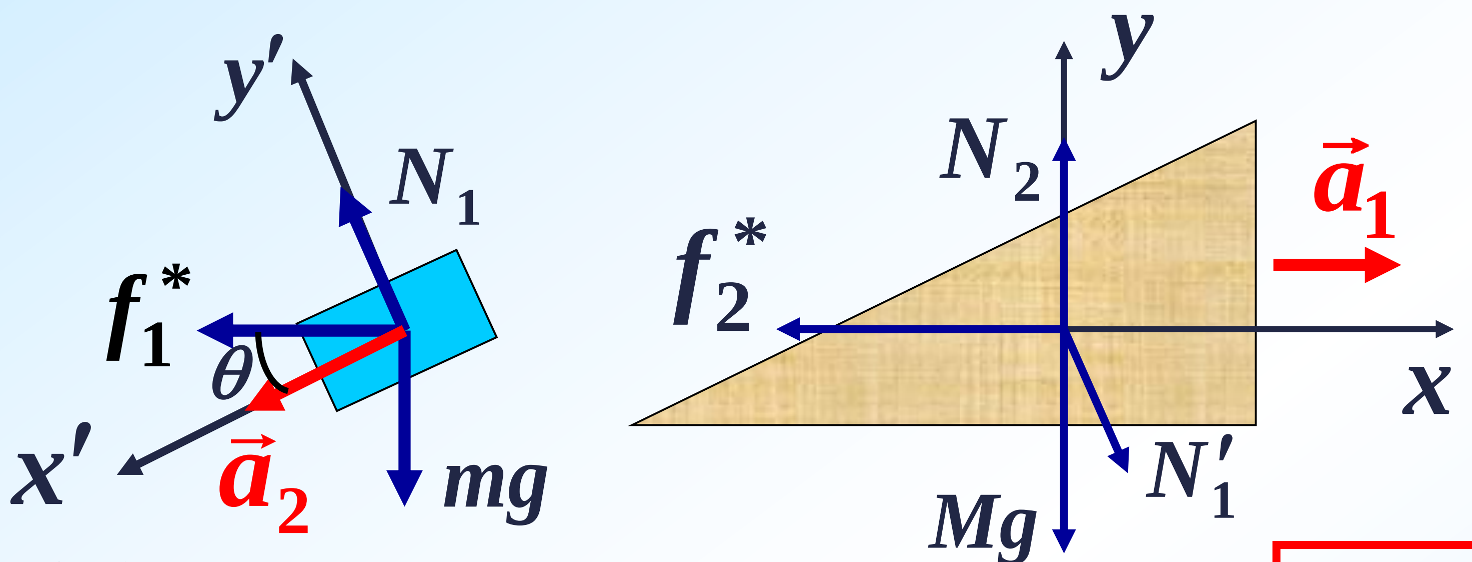
$$\text{对}m\left\{\begin{array}{l} x':\quad mg\sin\theta + f_1^*\cos\theta = ma_2 \quad \cdots(1) \\ y':-mg\cos\theta + N_1 + f_1^*\sin\theta = 0 \quad \cdots(2) \end{array}\right.$$

<u>以M为参照系</u>，关于M的x方向动力学方程正确的是

（A） $N'_1\sin\theta = Ma_1$

（B） $N'_1\sin\theta - f_2^* = Ma_1$

（C） $N'_1\sin\theta - f_2^* = 0$



列方程（以劈为参照系）

m对M

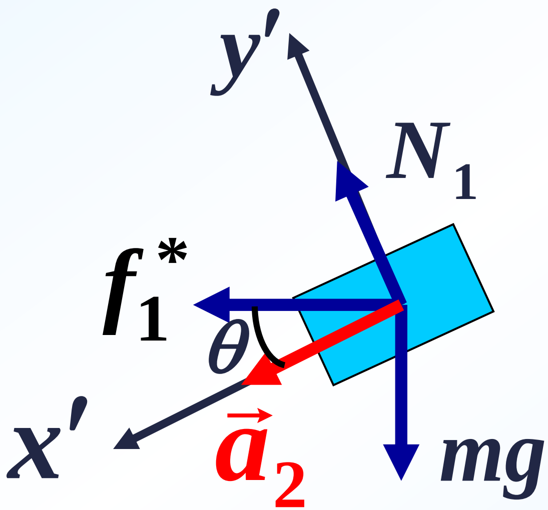
对m
$$\begin{cases} x':\quad mg\sin\theta + f_1^*\cos\theta = ma_2 & \cdots(1) \\ y':\ -mg\cos\theta + N_1 + f_1^*\sin\theta = 0 & \cdots(2) \end{cases}$$

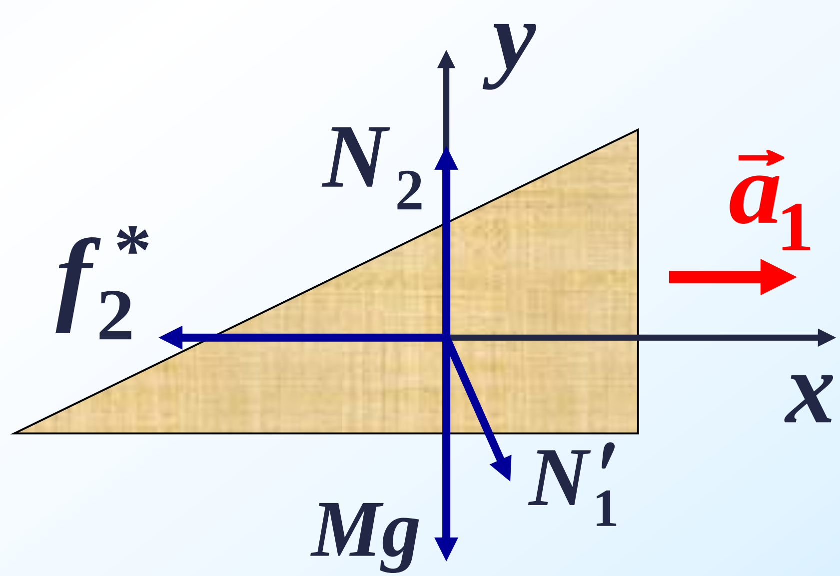
对M
$$\begin{cases} x:\ N_1'\sin\theta - f_2^* = \cancel{Ma_1} = 0 & \cdots(3) \\ y:\quad N_2 - N_1'\cos\theta - Mg = 0 & \cdots(4) \end{cases}$$

M 对M

$$\begin{cases} mg\sin\theta + f_1^*\cos\theta = ma_2 & (1) \\ -mg\cos\theta + N_1 + f_1^*\sin\theta = 0 & (2) \\ N_1'\sin\theta - f_2^* = 0 & (3) \\ N_2 - N_1'\cos\theta - Mg = 0 & (4) \end{cases}$$

将 $N_1' = N_1$，$f_1^* = ma_1$，$f_2^* = Ma_1$代入(2) (3)：



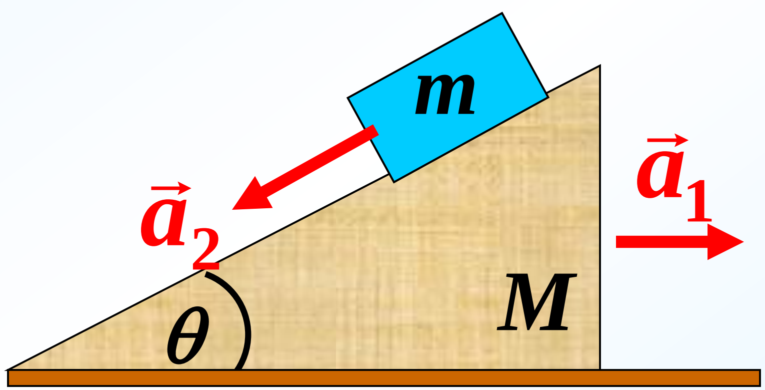


$$\begin{cases} mg\sin\theta + f_1^*\cos\theta = ma_2 & (1) \\ -mg\cos\theta + N_1 + f_1^*\sin\theta = 0 & (2) \\ N_1'\sin\theta - f_2^* = 0 & (3) \\ N_2 - N_1'\cos\theta - Mg = 0 & (4) \end{cases}$$

将 $N_1' = N_1$，$f_1^* = ma_1$，$f_2^* = Ma_1$ 代入(2) (3):

$$\left.\begin{array}{l} N_1 = mg\cos\theta - ma_1\sin\theta \\ N_1\sin\theta = Ma_1 \end{array}\right\} a_1 = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$$

将a_1代入(1)得m对M $\quad a_2 = \dfrac{(M+m)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}\cdot g$



m对地

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

……

上次课要点：

- 牛顿定律成立的参照系 ～惯性系

  相对惯性系作匀速直线运动的参照系 ～惯性系

  相对惯性系作加速运动的参照系 ～非惯性系

  伽利略相对性原理：一切惯性系中力学规律相同

对于质点系

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \vec{F}=M\frac{d\vec{v}}{dt}=M\vec{a}$$

质点系的总动量

质点系的总质量

质点系所受的合外力

已学知识回顾（第2章 牛顿运动定律 ）

牛顿定律在不同参照系的应用

（1）在惯性参照系 $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

力学规律对所有惯性系都是一样

伽利略相对性原理

建立坐标系

画受力分析图

列牛顿方程

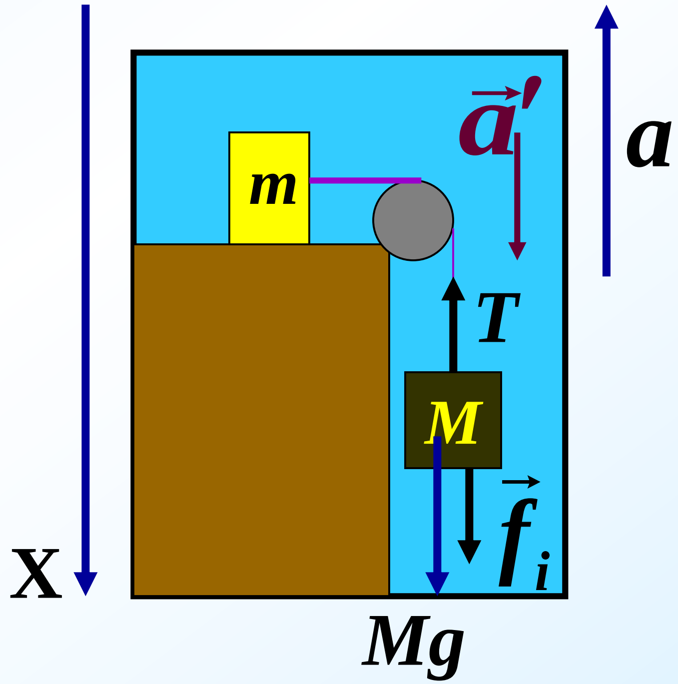
（2）在非惯性参照系

$$\boxed{\vec{F}' = m\vec{a}'} \qquad \vec{F}' = \vec{F}_{真实力} + \vec{f}^{*}_{惯性力}$$

(a) 加速平动的非惯性系S' $\quad \vec{f}^{*}_{惯性力} = -m\vec{a}_{牵}$

例: 升降机内物体m=100克，M=0.2千克用滑轮连接，升降机以加速度a=0.5g上升。求 (1)在机内观察者测得两物的加速度？(2)在地面的观察者测得的加速度？

解:（1）设物M相对升降机的加速度为 $\vec{a}'$



$$\begin{cases} 对M：F'_M = Mg - T + Ma = Ma' \\ 对m：F'_m = T = ma' \end{cases}$$

$$a' = \frac{M}{m+M}\cdot\frac{3}{2}g = g$$

（2）在地面的观察者

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{M地} = \vec{a}_{M机} + \vec{a}_{机地}$$

$$a_M = a' - a$$

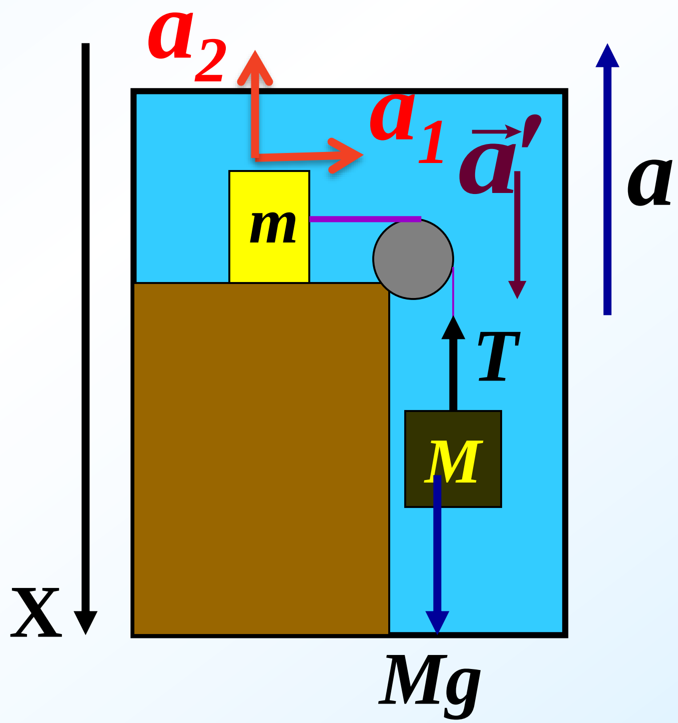
$$a_M = a' - a = \frac{1}{2}g$$

$$\vec{a}_m \begin{cases} a_m = \sqrt{a'^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}g \\ \theta = tg^{-1}\frac{a}{a'} = 26^o34' \end{cases}$$

若直接在地面参考系求解呢？

例:升降机内物体m=100克，M=0.2千克用滑轮连接，升降机以加速度a=0.5g上升。求 (1)在机内观察者测得两物的加速度？(2)在地面的观察者测得的加速度？

解：在地面参考系中，设m在水平和竖直方向上的加速度分别为a_1和a_2，M加速度为a_M则



对m：$a_2 = -a$

$$T = ma_1 = m(a_M + a)$$

对M：$Mg - T = Ma_M$

$$\therefore Mg - m(a_M + a) = Ma_M$$

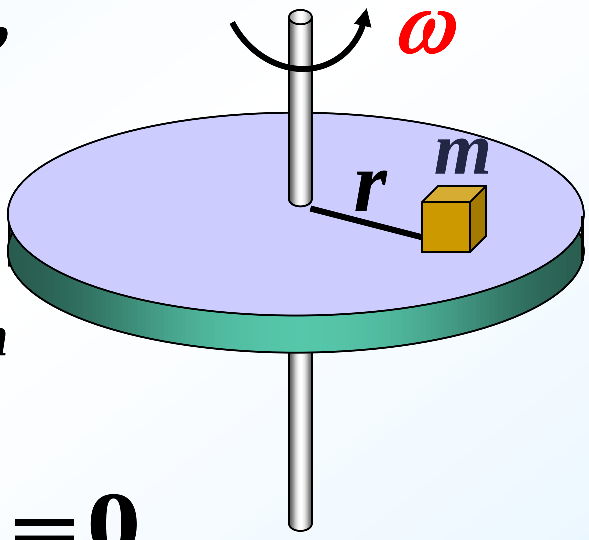
$$a_M = \frac{1}{2}g$$

$$a_1 = g$$

$$a_1 = a_{M机} = a_{M地} + a_{地机} = a_M + a$$

（b）匀速转动的非惯性系S'

①如图一铁块静止在一个水平匀速转动的转盘上，转盘相对地面以角速度ω转动，求：在转动参照系的惯性力。



在地面参照系：

铁块作匀速圆周运动 $f_{向心} = ma_n$

$$\vec{f}_{向心} = \vec{f}_{静摩擦} = -m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r = -mr\omega^2\vec{e}_r$$

在转盘上： 铁块静止不动，即 $\vec{a}' = 0$

表观力 $\vec{F}' = m\vec{a}' = 0 = \vec{F}_{真} + \vec{f}^*_{惯}$

$\therefore \quad \vec{f}^*_{惯} = -\vec{F}_{真} = -\vec{f}_{静摩擦} = mr\omega^2\vec{e}_r$

即 $\vec{f}^*_{惯} = -m\vec{a}_n$ —— 惯性离心力

NO！

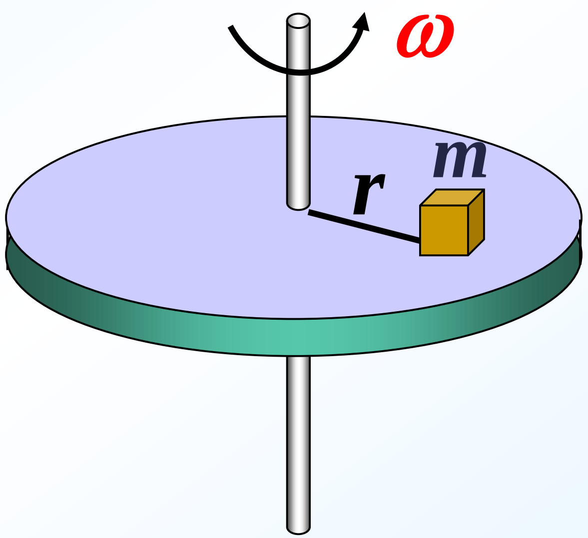
惯性离心力 = – 向心力 → 作用与反作用？

惯性力：加速系的运动学效应等效为动力学效应

静止在匀速转动盘上的物体

$$\vec{f}^{\,*}_{惯} = m r \omega^2 \vec{e}_r$$ ——惯性离心力

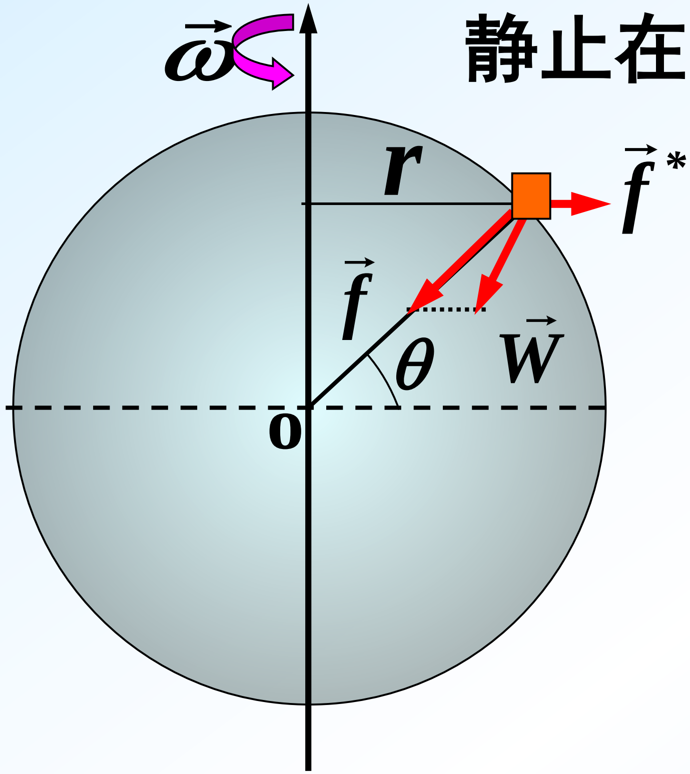
或 $$\vec{f}^{\,*}_{惯} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$



例. 一艘货轮从荷兰某港口开出，船上装了500吨重的黄金。经历漫长的海上跋涉，货轮到达非洲在赤道上的一个港口。卸货并过磅后的结果让船主大吃一惊：**黄金少了1吨!**

被谁偷了???!!!

谁偷走了这吨黄金???!!!



静止在自转地球物体的重量

地球自转导致

$$\vec{f} = m\vec{g}_0$$

$$\vec{f}^* = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{W} = \vec{f} + \vec{f}^* = m\vec{g}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$g \approx g_0 - \omega^2 R\cos^2\theta$$

$$g \approx g_0 - \omega^2 R\cos^2\theta$$

$$g = g_0(1 - 3.44\times 10^{-3}\cos^2\theta)$$

阿姆斯特丹　　北纬52度22分41秒

各纬度海平面的重力加速度（m/s2）

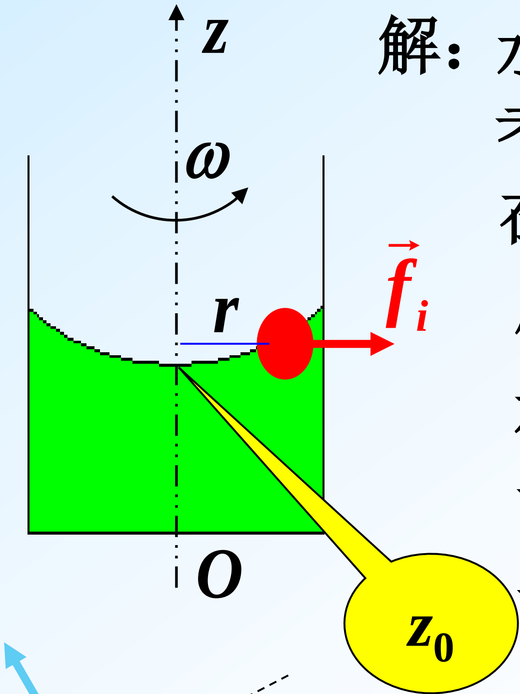
纬度	重力加速度	纬度	重力加速度
0	9.78030	30	9.79321
10	9.78186	40	9.80166
20	9.78634	50	9.81066
60	9.81914	80	9.83058
70	9.82606	90	9.83218

$$\frac{9.81066-9.78030}{9.81066}\times 500 = 1.5(t)$$

例：水桶以角速度ω旋转，求水面的形状?

$$\boxed{\vec{f}_i = -m\vec{a}_n}$$

$$\boxed{a_n = r\omega^2}$$



解：水面关于z 轴对称。

考虑水面任一质元m.

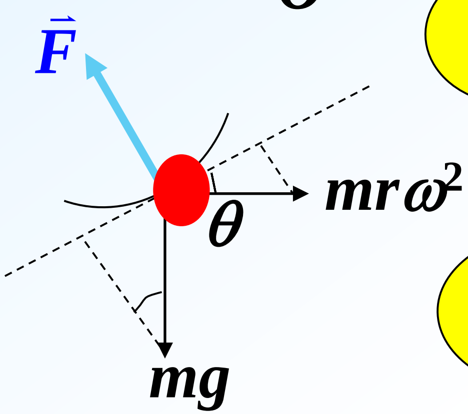
在水面参考系中看，质元m静止. $\boxed{F_i = ma_i}$

质元m周围的水对其的作用力?

水是流体, 无切向应力，

故周围的水对质元m的作用力必垂直于液面。

于是，沿水面的切线方向有:



$$mg\sin\theta - mr\omega^2\cos\theta = 0$$

斜率

$$\tan\theta = \frac{r\omega^2}{g} \quad \therefore \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{r\omega^2}{g}$$

$$\int_{z_0}^{z}\mathrm{d}z = \int_0^r \frac{r\omega^2}{g}\mathrm{d}r \quad \therefore z = z_0 + \frac{r^2\omega^2}{2g}$$

水面为抛物面

亦可以地面为参考系求解。

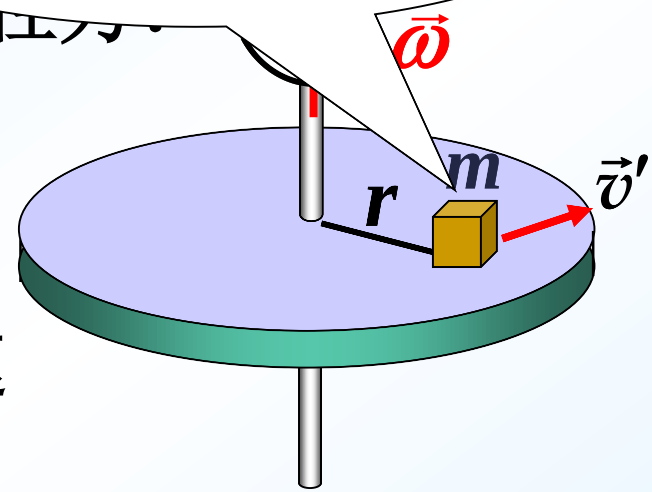
（*b*）匀速转动的非惯性系*S′*

② 当物体相对于*S′*系以……动

参考系内该物体受到的惯……

惯性力：惯性离心力

科里奥利力



加速度变换

$$\vec{a}_{绝} = \vec{a}_{相} + \vec{a}_{牵}$$

对相对转动参考系上以速度 $\vec{v}'$ 运动的物体有

$$\vec{a} = \vec{a}' + \mathrm{d}\vec{\omega} / \mathrm{d}t \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

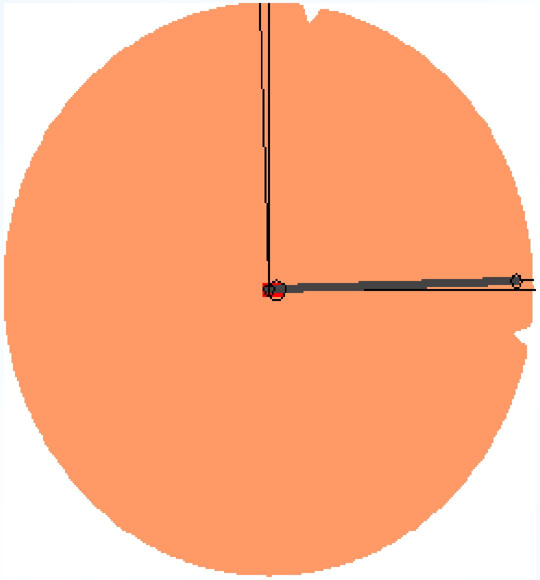
相对加速度

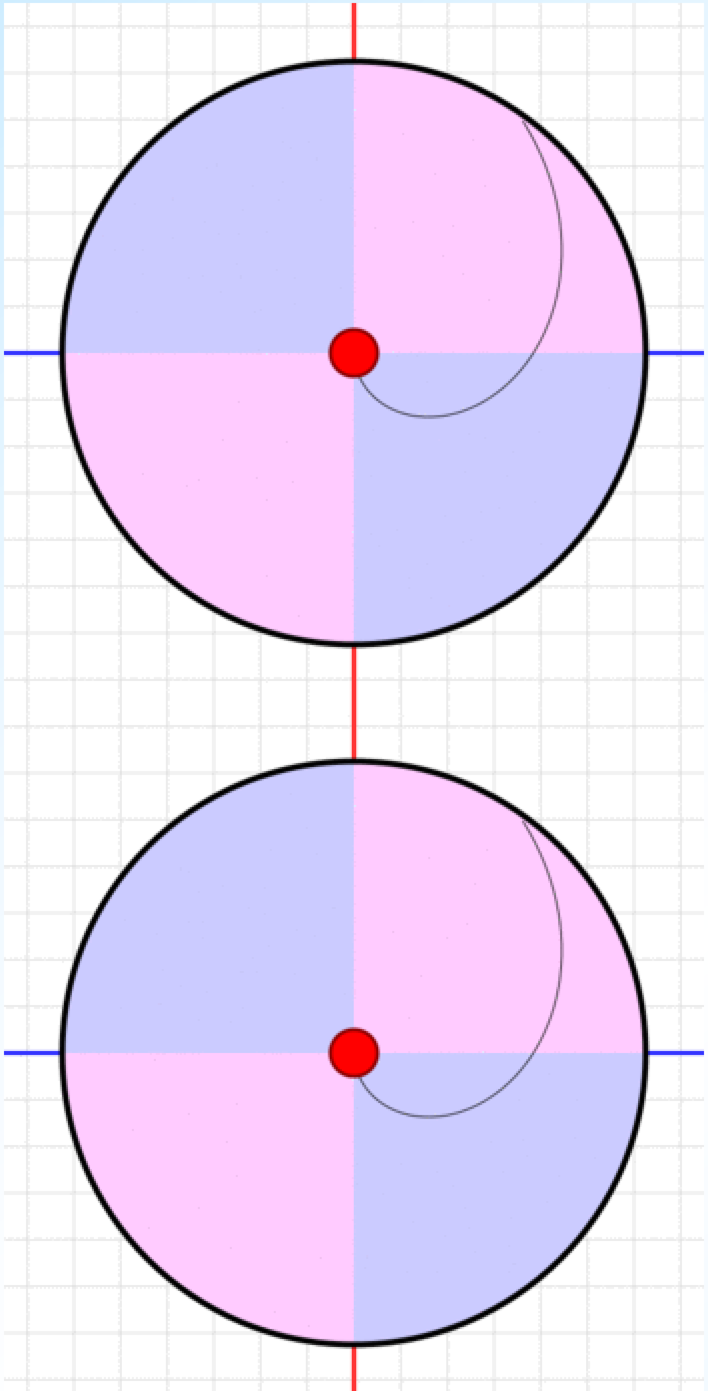
牵连横向加速度　　牵连向心加速度　　科里奥利加速度

牵连加速度 *参阅专业《力学》书*

对匀速转动的*S′*系　$\vec{a}_{牵} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

科里奥利力(**Coriolis force**) ——**科氏力**






CORIOLIS
EFFECT
WHEN YOU TRY TO THROW SOMETHING
IN A STRAIGHT LINE ON A SPINNING
PLATFORM, IT SEEMS TO CURVE.


CCTV 1
综 合
好看视频
81.4
小志扔错了一个
东风汽车

判断转台旋转方向？

科里奥利力(Coriolis force) ——科氏力

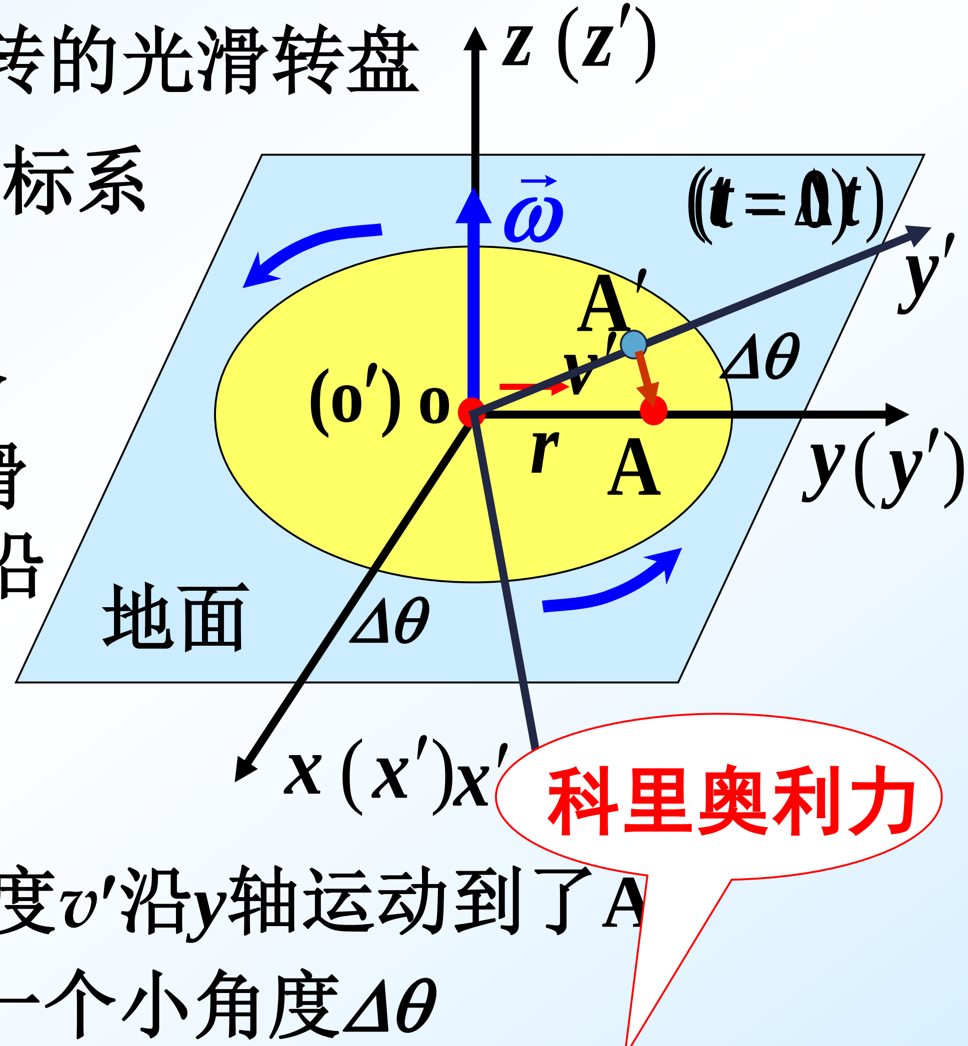
设地面上有一逆时针旋转的光滑转盘

在参考系建立固定的坐标系

o-xyz 和 o-$x'y'z'$,

设$t = 0$时，两系重合

并且将一质量为m的小滑块从坐标原点在转盘上沿y' 轴以v' 的速度射出。



经过△t时间后：

S系上看，小滑块以速度v'沿y轴运动到了A

S'系转过了一个小角度$\Delta\theta$

S'系上看，m受到了垂直y'轴的力 ——惯性力

科里奥利力(Coriolis force) ——科氏力

S'系上看，设科氏力产生的加速度为a'

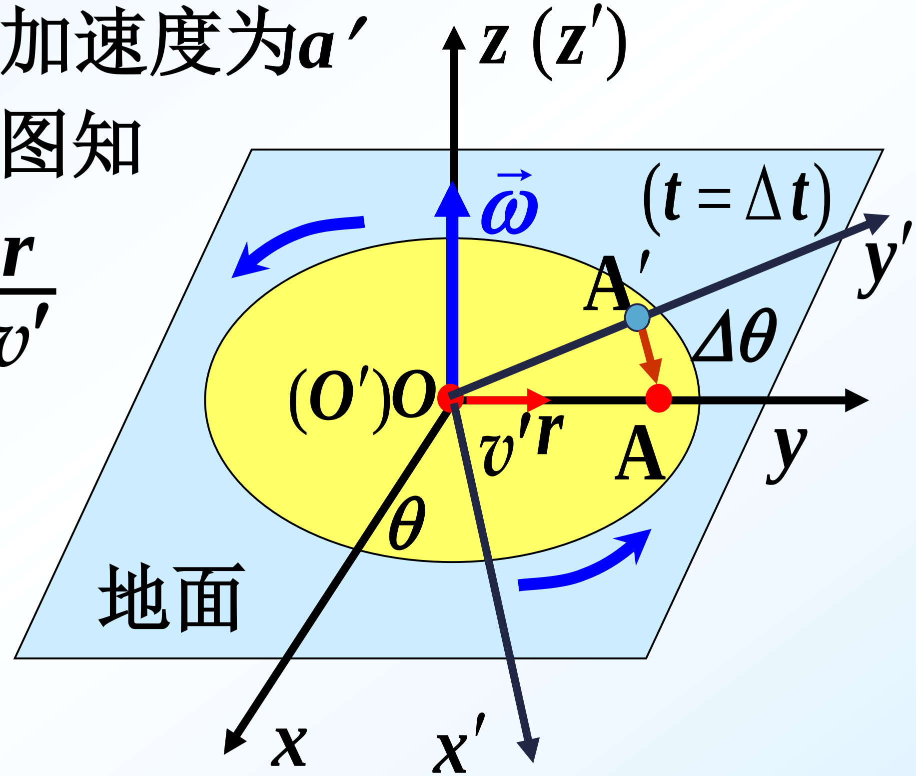
Δt 很短, $\Delta\theta$ 角很小，由图知

$$\overset{\frown}{A'A} = \frac{1}{2}a'(\Delta t)^2 \quad \Delta t = \frac{r}{v'}$$

$$\overset{\frown}{A'A} = \frac{a'r^2}{2v'^2}$$

又 $\overset{\frown}{A'A} = r\Delta\theta = r\omega\Delta t = \frac{r^2\omega}{v'}$

$$a' = 2v'\omega$$

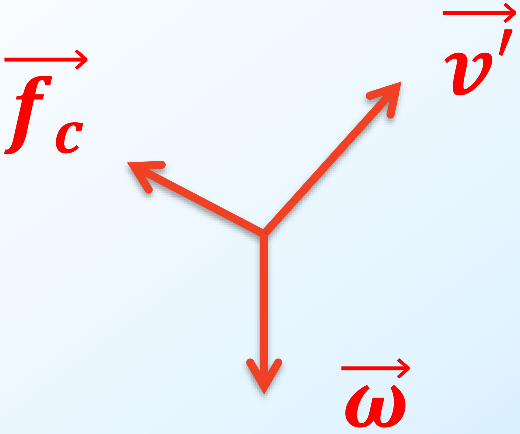


故，此科氏力的大小为 $f_C = ma' = 2mv'\omega$

若考虑方向 $\vec{\omega} = \omega\vec{k}'$ $\vec{v}' = v'\vec{j}'$ $\vec{a}' = a'\vec{i}' = 2\vec{v}'\times\vec{\omega}$

可得 $\boxed{\vec{f}_C = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}}$

判断转台旋转方向？



$$\boxed{\vec{f}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}}$$

$$\vec{f}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

科里奥利力的效应（一）

在地球上验证地球自转的著名的实验

傅科摆：1851年

摆长 $L = 67\text{m}$，

质量 $m = 28\text{kg}$ 的铁球

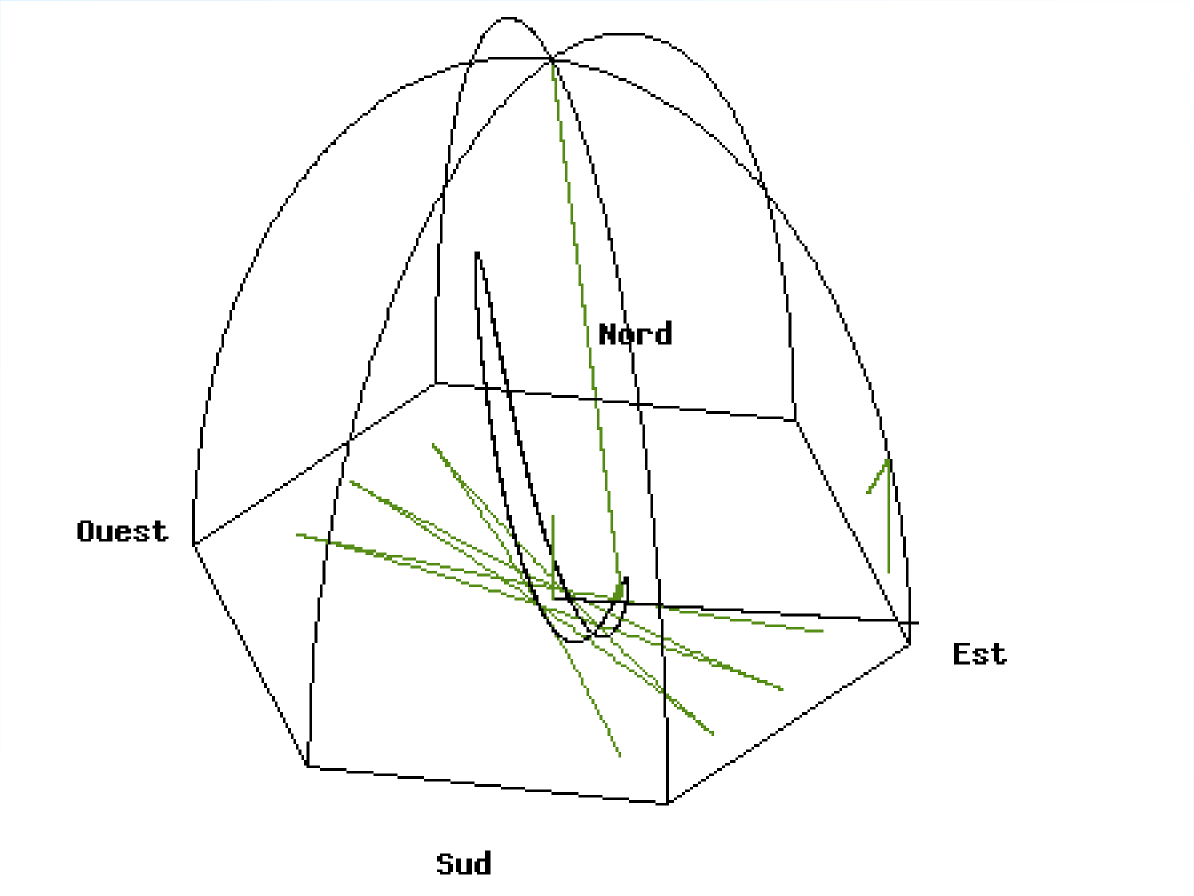
摆的振动周期: 16s

旋转的周期约: 32h

首次显示了地球的自转

实物视频

$$\boxed{\vec{f}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}}$$



北京天文馆的傅科摆

摆平面转动周期

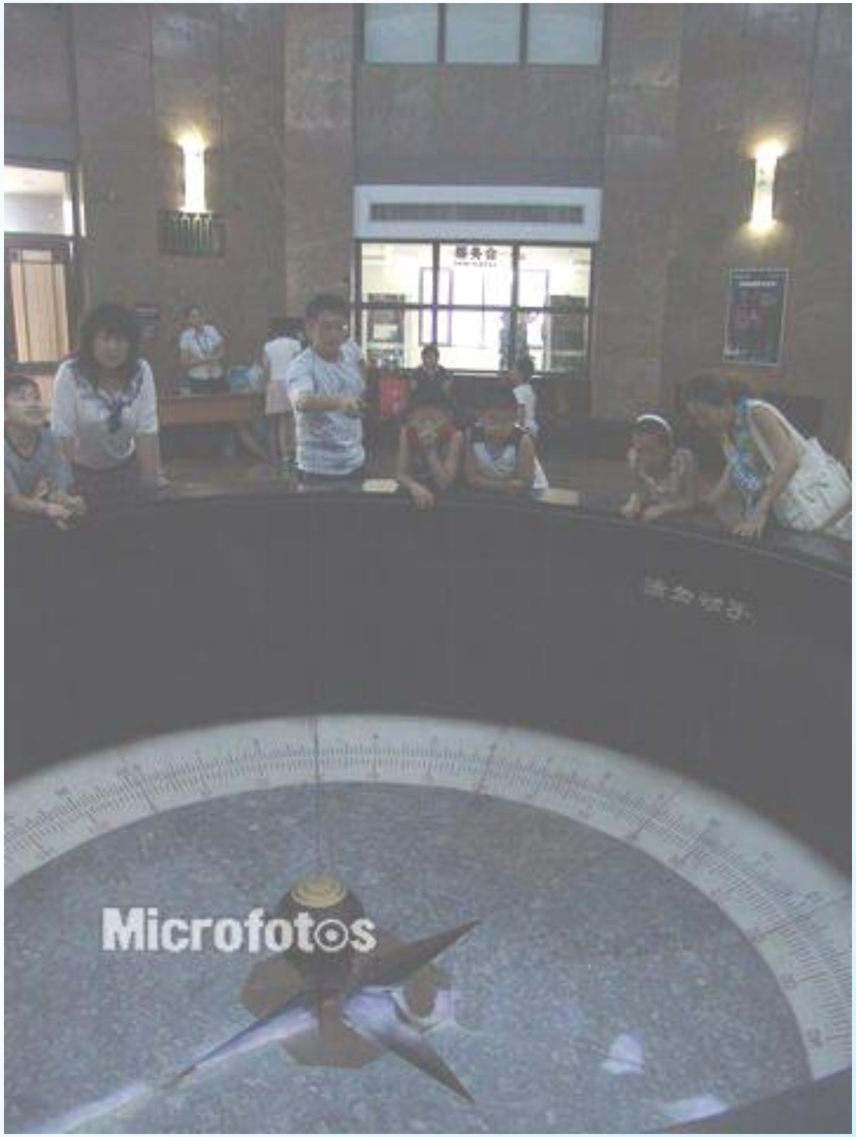
$$\boxed{T=\frac{24\ \text{小时}}{\mathrm{Sin}\,\theta}}$$

北京 $\theta \approx 40°$

$$T = 37\text{小时}\ 15\text{分}$$

巴黎 $\theta \approx 49°$

$$T = 31\text{小时}\ 52\text{分}$$

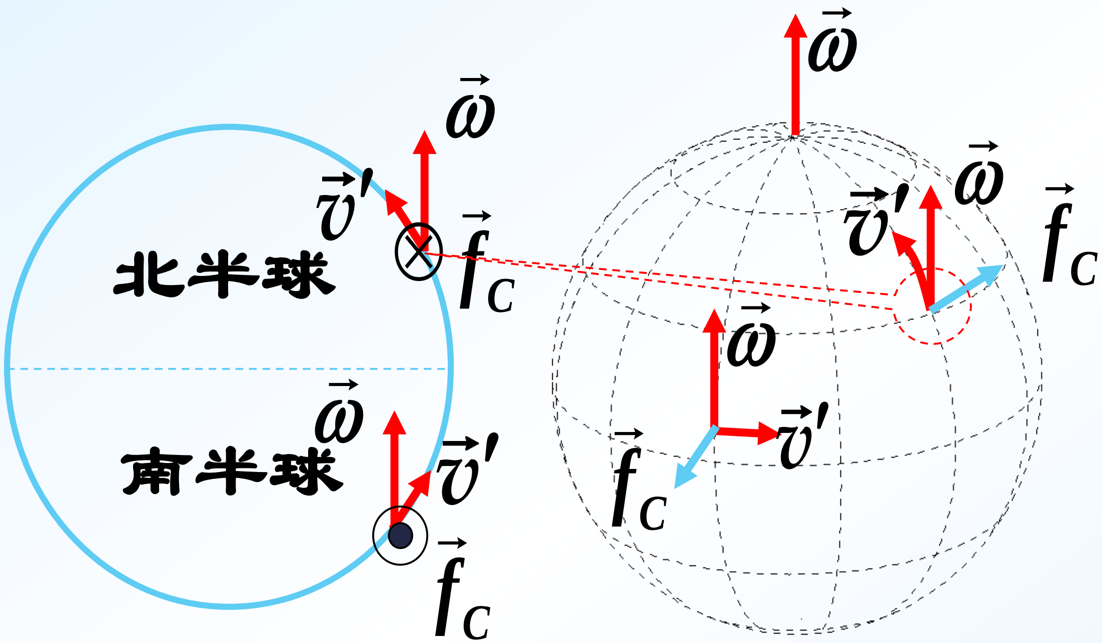


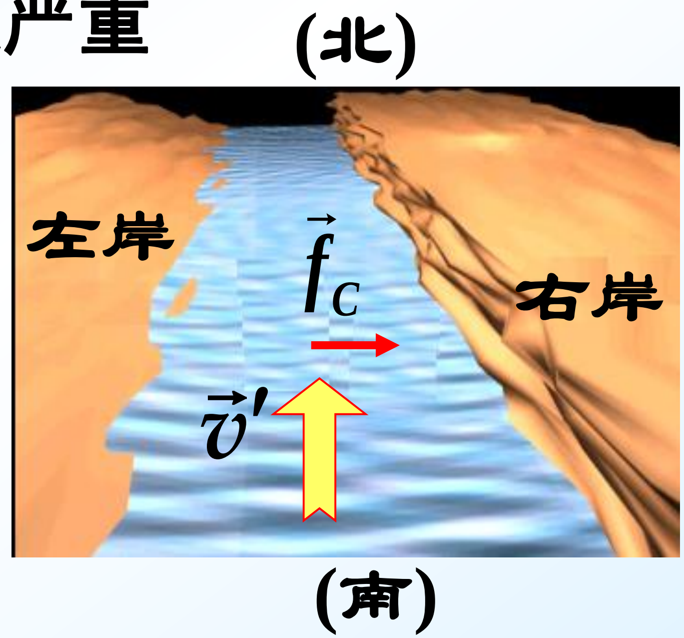
$$\vec{f}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

科里奥利力的效应（二）

北半球，河流冲刷右岸比较严重

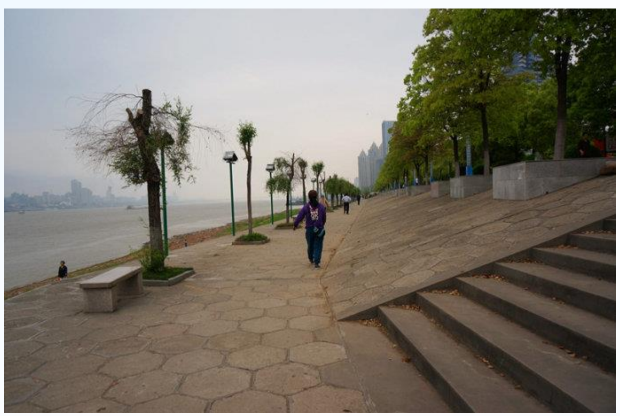
南半球，河流冲刷左岸比较严重

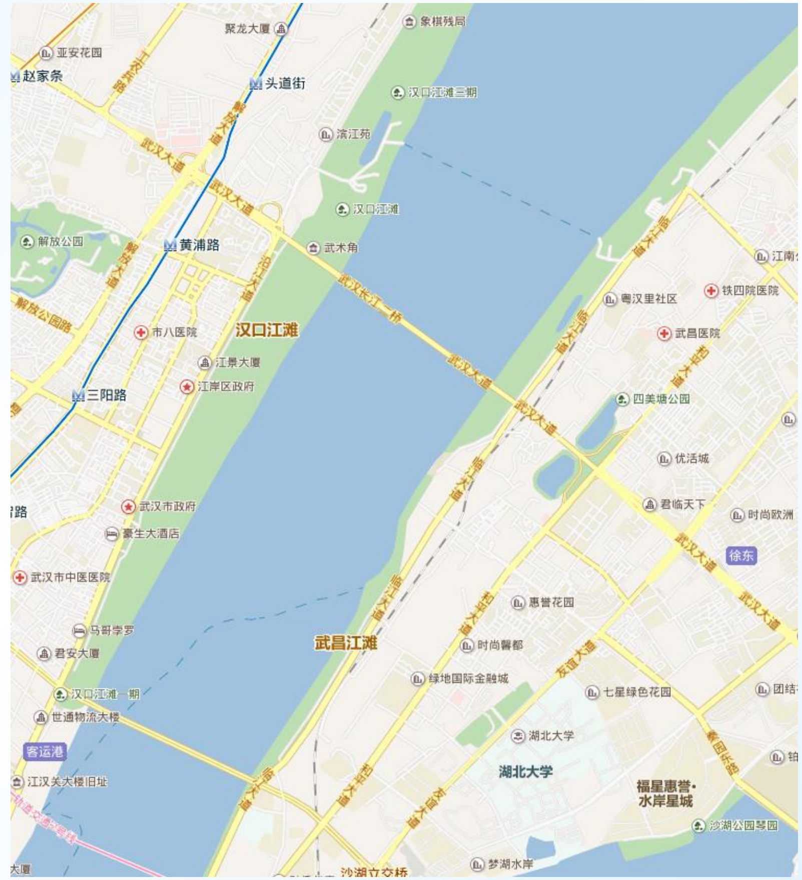




北半球其它流向的河流有相同的结论

实例：
- 汉口江滩（左岸）：平缓
- 武昌江滩（右岸）：陡峭





数量级估算 地球自转 $\omega \approx 7.27\times10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$，河水流速 $v' \approx 1\,\mathrm{m/s}$

河道宽~2km，则右岸每单位面积受到的力 $f_C \approx 300\mathrm{N}$

又比如：在北半球火车行驶时对右侧铁轨磨损得厉害些。

科里奥利力的效应（三）

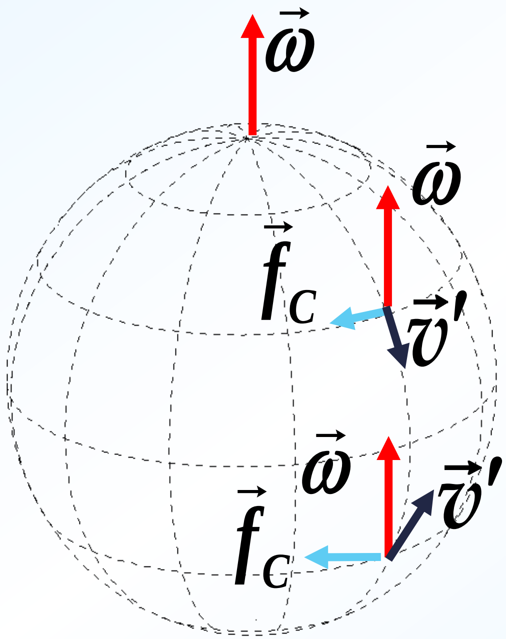
$$\vec{f}_C = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$$

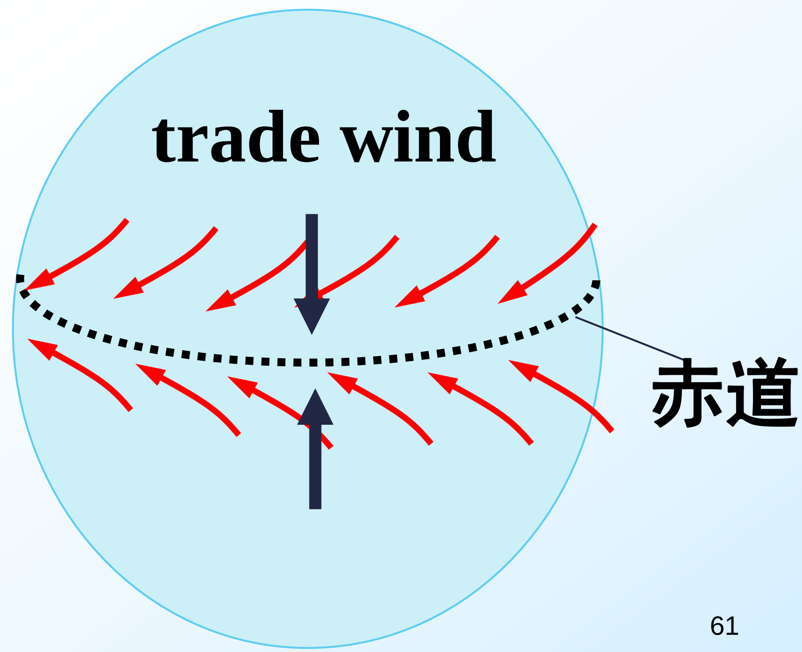
信风的形成（ trade wind ）

赤道附近的信风：在北半球是东北风

在南半球是东南风

赤道附近日照强烈，空气受热上升，引起赤道两边的空气向赤道流动。



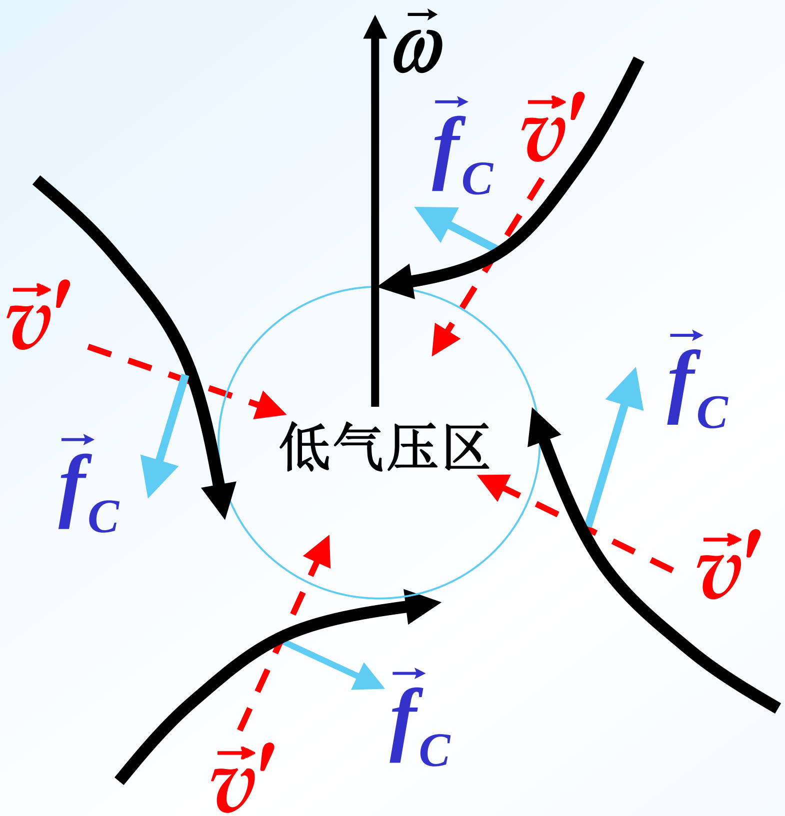


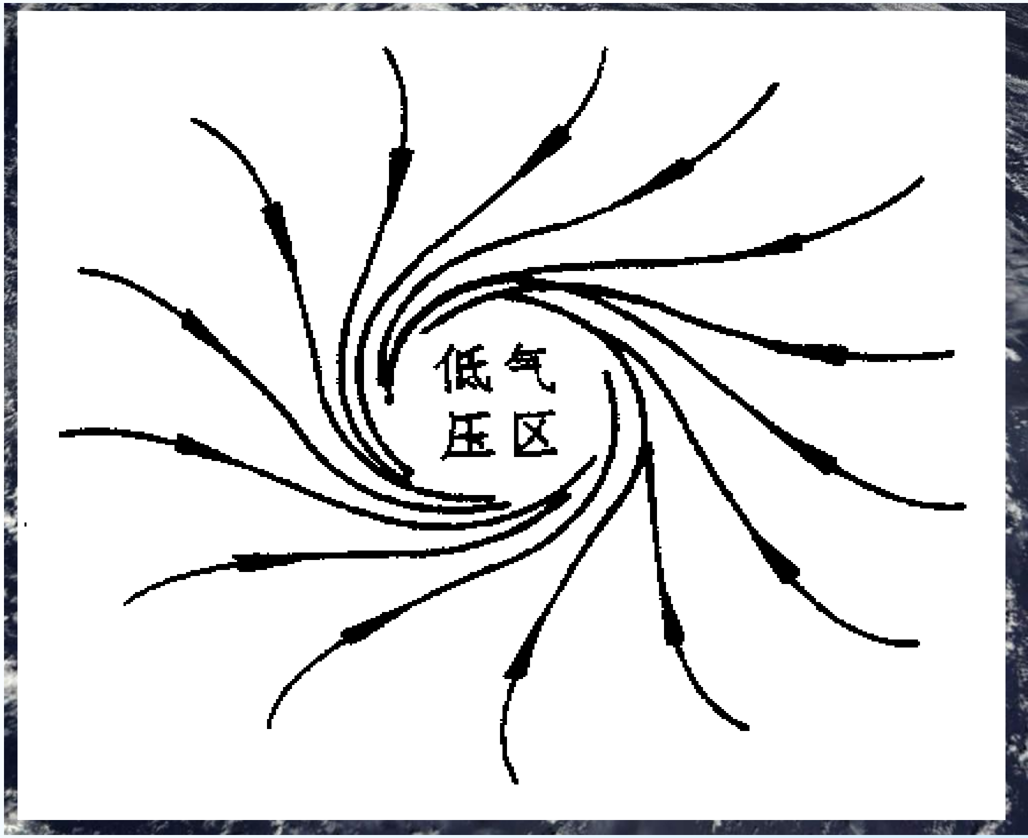
科里奥利力的效应（四）

$$\vec{f}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

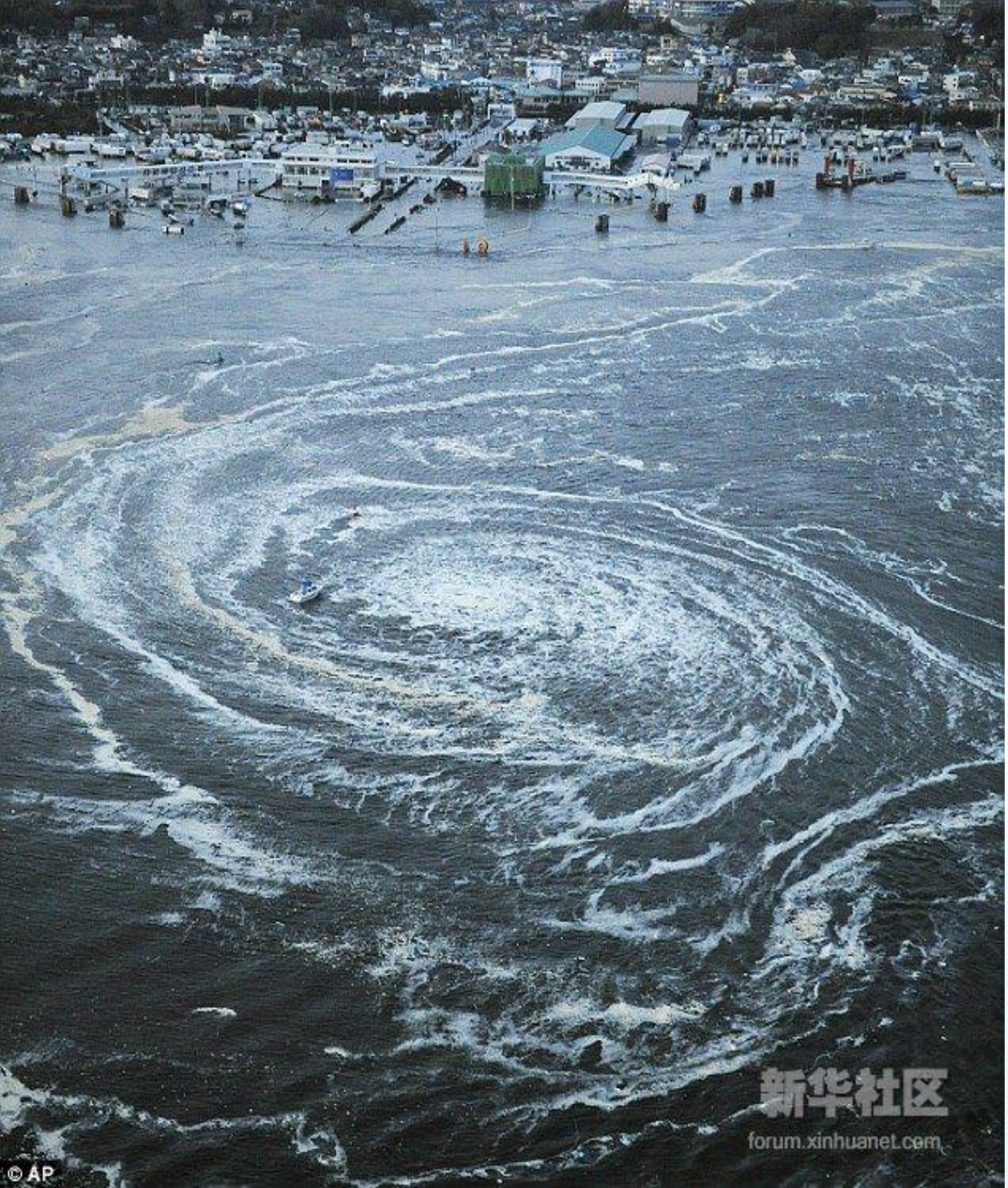
强热带风暴

强热带风暴是在热带低气压中心附近形成的





北半球



2011-03-11
日本大地震
造成的
海面漩涡

南京遭遇暴雨袭击后，龙蟠路上一个排水口处形成一个巨大的漩涡(2011年7月18日)

科里奥利力的复习题

1. 当水池放水时，在底部放水孔的上方会形成漩涡，这是由于科里奥利力的作用导致的。在北半球形成的漩涡方向是<u>顺/逆时针</u>的；在南半球，漩涡方向是<u>顺/逆时针</u>方向的。

2. 汉口有平缓的江滩，而一江之隔的武昌却是江岸陡峭。这是千万年以来江水在科里奥利力的作用下不断冲刷<u>左/右</u>的江岸所造成的。

3. 由于科里奥利力的作用，在北半球，自由下落的物体的落点会偏<u>填方向</u>；由于同样的原因，南半球自由下落的物体的落点会偏<u>填方向</u>。

4. 地球的赤道附近会定期形成季候风，即信风。这是由于科里奥利力的作用，北半球的贸易风总是<u>填方向</u>风；而南半球的贸易风总是<u>填方向</u>风。

1-T3 一物体沿 x 轴做直线运动，其加速度为 $a=-kv^2$，k 是大于零的常数。在 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=0$。求速度随坐标变化的规律。

$$\vec{v}-\vec{v}_0=\int_0^t \vec{a}\,dt \qquad v=\frac{dx}{dt}$$

$$-kv^2=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx} \qquad \frac{1}{kt}\,dt=dx$$

$$+k\,dt=-\frac{dv}{v^2} \qquad x=\frac{1}{k}\ln t$$

$$-k\,dx=\frac{1}{v}\,dv \qquad t=e^{kx}$$

$$kt=\frac{1}{v} \qquad \Rightarrow v=\frac{1}{k}e^{-kx}$$

$$v=\frac{1}{kt} \qquad \int_0^x k\,dx=\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v}\,dv$$

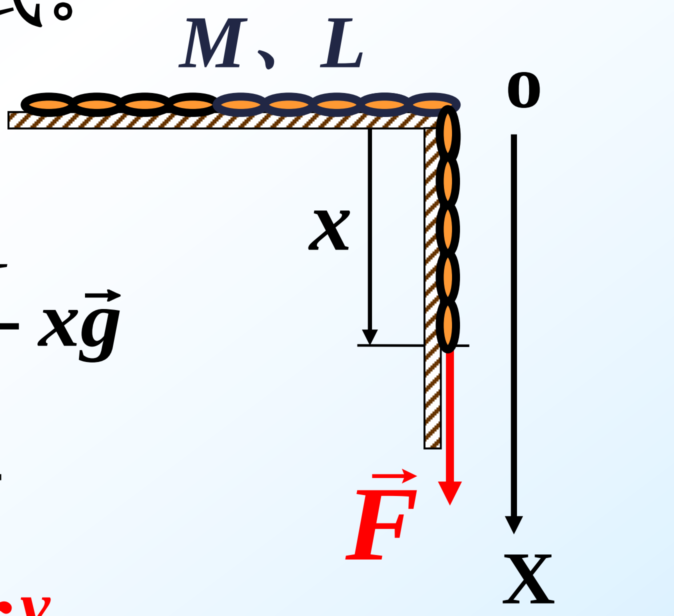
$$v=v_0e^{-kx}$$

关心v和x的关系，可以直接构造v和x的关系式。

例. 一条质量为M长为L的均匀链条，放在一光滑的水平桌面上，链子的一端有极小的一段长度被推出桌子的边缘在重力作用下开始下落，试求在下列情况下链条刚刚离开桌面时的速度:

（1）下落前，链条为一直线形式。

解: 链条各部分的速度、加速度都相同，建立坐标系：如图

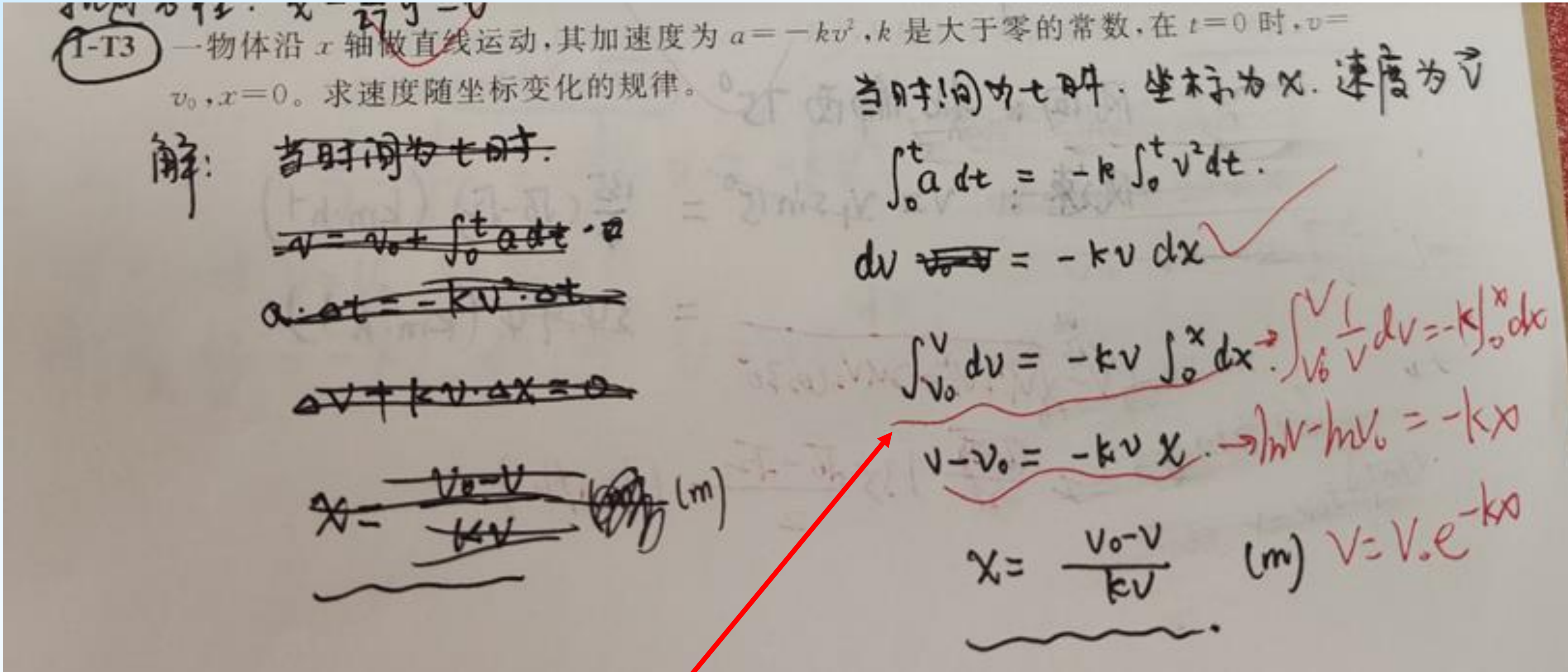


任意t时刻受力$=\vec{F}=m_x\vec{g}=\dfrac{M}{L}x\vec{g}$

运动方程 $\dfrac{\cancel{M}}{L}xg=\cancel{M}\dfrac{dv}{dt}$

$$\frac{g}{L}x=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\qquad \int_0^L\frac{g}{L}x\,dx=\int_0^v v\,dv$$

$$v=\sqrt{gL}$$



分离变量漏掉
了等号右边的v

1-T3 一物体沿 x 轴做直线运动，其加速度为 $a=-kv^2$，k 是大于零的常数，在 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=0$。求速度随坐标变化的规律。

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{d\vec{t}} = \frac{d\vec{v}}{d\vec{x}}\cdot\vec{v} = -kv^2$$

$$\int_0^x \cancel{\vec{a}}\, d\vec{x} = \int_{v_0}^{v} \frac{\vec{v}}{\vec{a}}\, d\vec{v}$$

$$x = -\frac{1}{k}\ln v + \frac{1}{k}\ln v_0$$

1. 不是矢量
2. 要v=f(x)的形式

1-T4 一质点沿半径 $R=2$ m 的圆周运动，其速率 $v=KRt^2$ $(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$，K 为常数，已知第 2 秒的速率为 $32\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求 $t=0.5$ s 时质点的速度和加速度的大小。

解：$t=2s$ 时，$v=32(m/s)$，解得 $K=4(s^{-3})$

$t=0.5s$ 时，$v'=2(m/s)$

切向 $a=2KRt=8(m/s^2)$

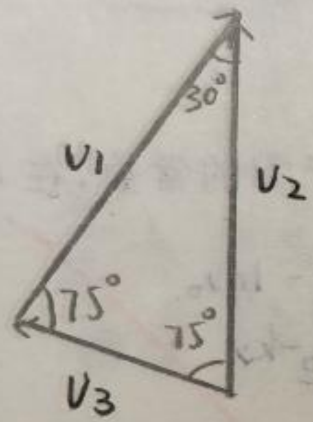
法向 $a=\frac{v^2}{R}=2m/s^2$

$a_{总}=\sqrt{a_{切}^2+a_{法}^2}$

加速度是矢量，还有法向分量。

1-T5 一架飞机在静止空气中的速率为 $v_1=135\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$。在刮风天气下，飞机以 $v_2=135\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ 的速率向正北方向飞行，机头指向北偏东 30°。请协助驾驶员判断风向和风速。

解. 速度合成如图所示：



v_3为风速

$\therefore v_3 = 2\cdot\sin 15°\cdot v_1 = \sqrt{18225(2-\sqrt{3})}$ km/h

风向北偏西75°

- 速度是矢量，还有方向；
- 好多同学把东、西弄反了。

上次课要点：

- 在以 $\vec{a}_0$ 加速平动的非惯性系中：

$$\vec{F}=m(\vec{a}'+\vec{a}_0)=m\vec{a}'+m\vec{a}_0$$

$$\vec{F}-m\vec{a}_0=m\vec{a}'$$

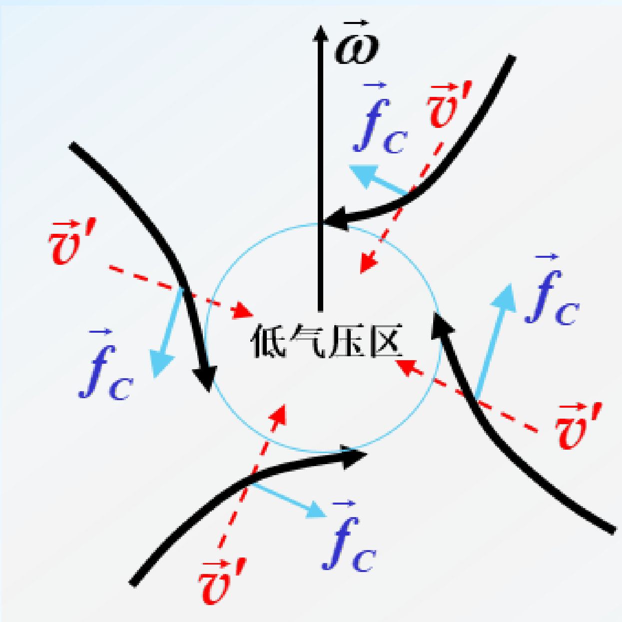
真实力

$$\vec{f}^*=(-m\vec{a}_0)$$

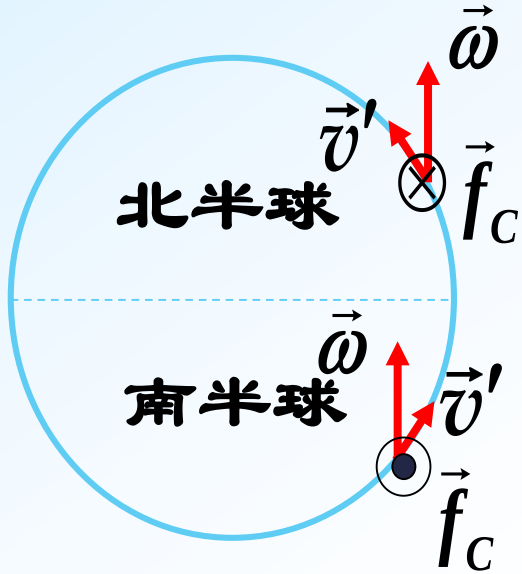
惯性力

虚拟力

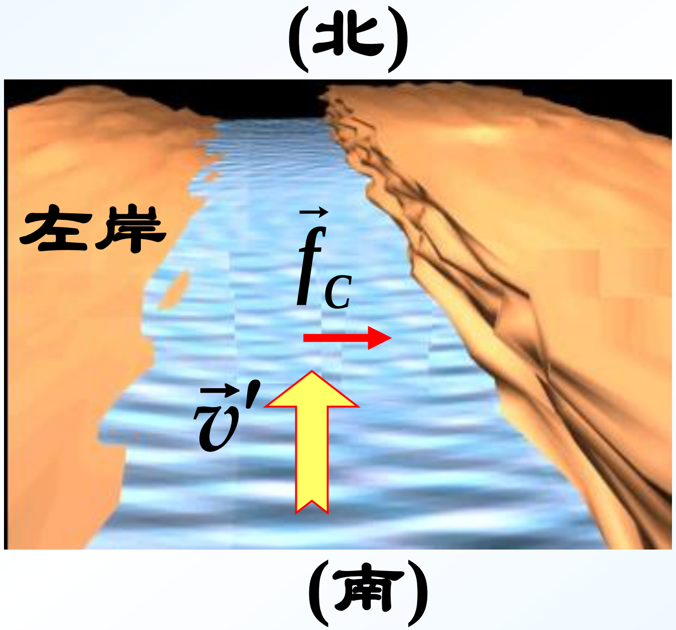
惯性力
- 加速平动的S'系 $\vec{f}^*_{惯}=-m\vec{a}_{牵}$
- 匀速转动的S'系 $\vec{f}^*_{惯}=\begin{cases}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) & 离心力\\ 2m\vec{v}'\times\vec{\omega} & 科氏力\end{cases}$



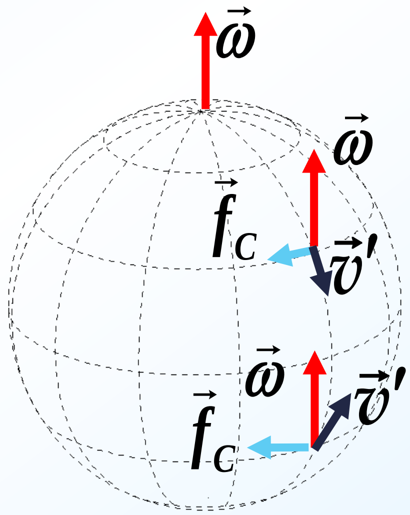
$\vec{\omega}$
$\vec{f}_C$
$\vec{v}'$
低气压区



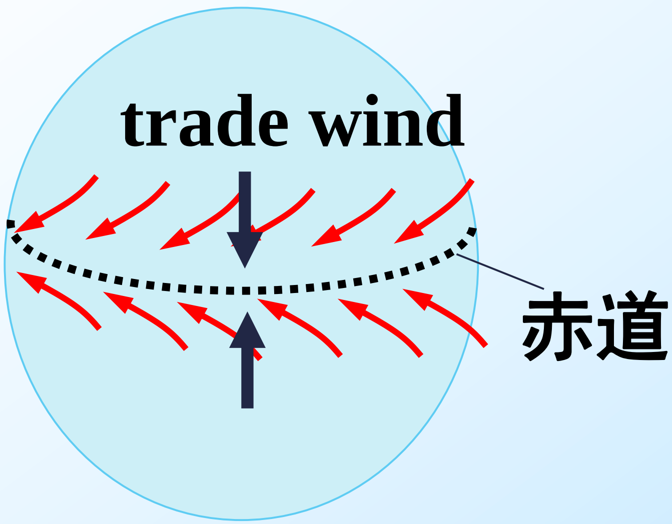
$\vec{\omega}$
$\vec{v}'$
北半球
$\vec{f}_C$
南半球



(北)
左岸
$\vec{f}_C$
$\vec{v}'$
(南)



$\vec{\omega}$
$\vec{f}_C$
$\vec{v}'$



trade wind
赤道

科里奥利力的复习题

1. 当水池放水时，在底部放水孔的上方会形成漩涡，这是由于科里奥利力的作用导致的。在北半球形成的漩涡方向是__逆时针__的；在南半球，漩涡方向是__顺时针__方向的。

2. 汉口有平缓的江滩，而一江之隔的武昌却是江岸陡峭。这是千万年以来江水在科里奥利力的作用下不断冲刷__右__的江岸所造成的。

3. 由于科里奥利力的作用，在北半球，自由下落的物体的落点会偏__东__；由于同样的原因，南半球自由下落的物体的落点会偏__东__。

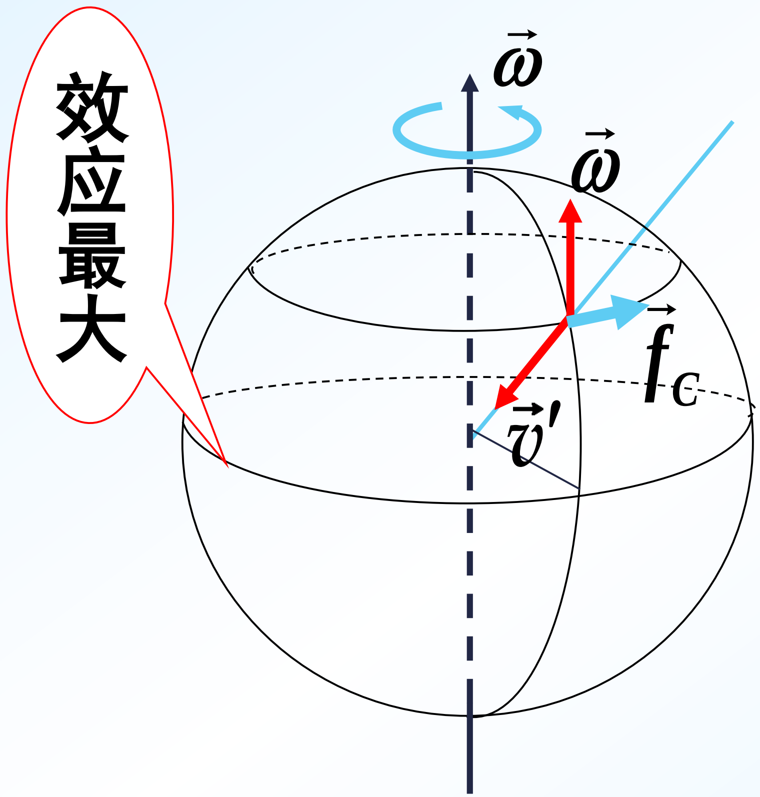
4. 地球的赤道附近会定期形成季候风，即信风。这是由于科里奥利力的作用，北半球的贸易风总是__东北__风；而南半球的贸易风总是__东南__风。

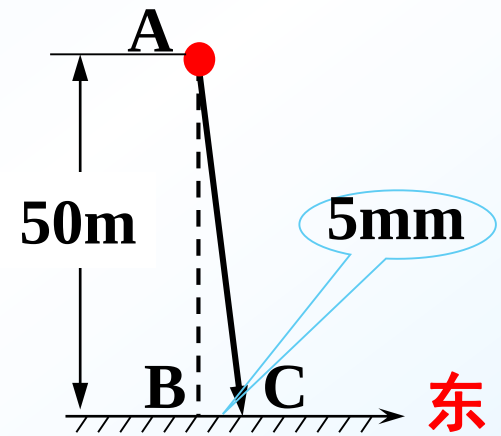
科里奥利力的效应（五）

$$\vec{f}_C = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$$

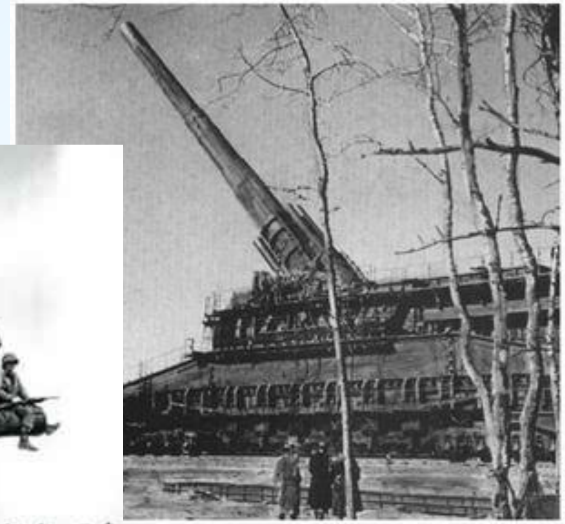
落体偏东

物体从高处自由下落，所受科里奥利力的方向均向东，因此使落点偏东。





A物体并不垂直下落到地面B点，而是稍稍偏向东方的C点。




一战期间，德国为轰炸法国首都巴黎曾专门制造了一座超远程的“巴黎大炮 ”。炮筒有34米长、1米粗，炮身重750吨，炮弹初速度达1.7公里/秒。但是，当德军从110公里外用巨型火炮轰击巴黎时，炮弹偏离了目标1.6公里多。

思考题：

科里奥利力在多大程度上影响投篮的准确性？

惯性力的认识:

惯性力并不是由物体的相互作用引起的，而是在非惯性系中为沿用牛顿定律而引入的“虚拟力”。惯性力不存在施力者，因而也不存在反作用力。

加速参考系的运动学效应
等效为动力学效应（惯性力）！