

本硕博2301

王蒙乐

U202315763



# 华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Wuhan 430074, Hubei, P.R.China 中国·武汉 Tel: (027)

1.1  $O(2^n)$ : 给定一个含  $n$  个元素的集合, 找出其所有的子集

$O(n!)$ : TSP 旅行商问题, 对于  $n$  个城市, 路径数为  $n!$

$O(n^n)$ : 破解一个  $n$  位密码, 每位字符有  $n$  种可能取值, 总共需测试  $n^n$  个

1.2 假设  $f(n) = O(n)$ , 那么,  $\exists C, n_0 \in \mathbb{R}^+$

s.t.  $f(n) \leq C \cdot n$  对  $\forall n \geq n_0$  成立

$\therefore n^2 + 6n + 5 \leq cn$  对  $\forall n \geq n_0$  成立

$n^2 + (6-c)n + 5 \leq 0$  对  $\forall n \geq n_0$  成立

然而, 这样的  $n_0$  是不存在的

$\therefore f(n) \neq O(n)$

假设  $f(n) = \Omega(n^3)$ , 那么,  $\exists C, n_0 \in \mathbb{R}^+$

s.t.  $f(n) \geq C \cdot n^3$  对  $\forall n \geq n_0$  成立

$\therefore n^2 + 6n + 5 \geq C \cdot n^3$  对  $\forall n \geq n_0$  成立

$\therefore -C \cdot n^3 + n^2 + 6n + 5 \geq 0$  对  $\forall n \geq n_0$  成立

显然, 这样的  $n_0$  也不存在

$\therefore f(n) \neq \Omega(n^3)$

2.1 稳定匹配一定存在, 证明如下:

根据 Gale-Shapley 算法一定能得到一个完美匹配  $M$

对任意一个不属于匹配  $M$  的配对  $(a, b)$

那么会有以下两种情况:

①  $a$  还没有对  $b$  提出过请求, 由于  $a$  提出请求的顺序

1701572



6 944192 704305

华中科技大学附属印刷厂

第 页



极速扫描, 就是高效



是按满意度降序, 那么  $a$  对当前匹配对象  $b'$  的满意度大于  $b$ , 因此  $(a, b)$  不是一个不稳定配对

②  $a$  向  $b$  提出过请求但被拒绝了, 那么  $b$  对当前匹配对象  $a$  的满意度大于  $a$ , 因此  $(a, b)$  不是一个不稳定配对

综上, 所有不属于当前匹配的配对都不是不稳定配对, 稳定匹配一定存在.

2.2 ① 初始化匹配集合为空

② 每个未饱和的医院按自己偏好顺序向毕业生发出邀请

③ 若该毕业生未被匹配, 则暂时与该医院匹配

④ 若该毕业生已于其他医院匹配, 则比较毕业生对当前医院和现匹配医院的偏好  
1> 若更偏好当前医院, 则解除原有匹配与当前医院匹配  
2> 若更偏好现匹配医院, 则拒绝当前邀请

⑤ 重复②-④直至所有医院都饱和

伪代码:

start with  $M = \{ \}$

for each  $h$  in  $\{ \text{hospitals} \}$  with  $h$  is unfilled:

for each  $s$  in  $\{ \text{students} \}$  with highest rank  $(h, s)$  and  $h$  has not proposed to  $s$ :

if  $s$  is unmatched:

$M += (h, s)$

else if  $s$  prefers  $h$  to current partner  $h'$ :

$M -= (h', s)$

$M += (h, s)$

else:

$s$  rejects  $h$

return  $M$







# 华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

由于名额总数严格小于毕业生总数  
Wuhan, 430074, Hubei, P. R. China 中国 · 武汉 Tel: (027)

证明: 算法会在有限步内终止, 终止时所有医院都已满额.

下面证明该算法得到的匹配是稳定的.

①  $s$  被分配到  $h$ , 而  $s'$  没有工作

则  $s'$  未接受到来自  $h$  的邀请, 而  $h$  发出邀请的顺序是按偏好降序的, 因此  $h$  青睐  $s$  过于  $s'$

② 假设  $s, s'$  被分配到  $h, h'$  ( $(h, s), (h', s')$ ) 不稳定 ( $h, s'$ )

1)  $h$  未向  $s'$  发出邀请

而  $h$  已和  $s$  匹配, 说明  $h$  青睐  $s$  过于  $s'$

2)  $h$  已向  $s'$  发出过邀请但被拒绝

说明  $s'$  青睐  $h'$  过于  $h$

因此, 不可能出现  $h$  青睐  $s$  过于  $s'$  且  $s'$  青睐  $h'$  过于  $h$

综上, 算法正确.

2.3 5个男性 ( $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$ ) 5个女性 ( $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$ )

偏好顺序:

$m_1: w_1 > w_2 > w_3 > w_4 > w_5$

$w_1: m_2 > m_1 > m_3 > m_4 > m_5$

$m_2: w_2 > w_3 > w_1 > w_4 > w_5$

$w_2: m_3 > m_2 > m_1 > m_5 > m_4$

$m_3: w_3 > w_1 > w_2 > w_5 > w_4$

$w_3: m_1 > m_4 > m_5 > m_2 > m_3$

$m_4: w_4 > w_5 > w_2 > w_3 > w_1$

$w_4: m_5 > m_4 > m_2 > m_1 > m_3$

$m_5: w_5 > w_1 > w_4 > w_2 > w_3$

$w_5: m_4 > m_3 > m_1 > m_2 > m_5$

根据GS算法, 男方追求版: ( $m_1, w_1$ ) ( $m_2, w_2$ ) ( $m_3, w_3$ ) ( $m_4, w_4$ ) ( $m_5, w_5$ )

女方追求版: ( $m_1, w_3$ ) ( $m_2, w_1$ ) ( $m_3, w_2$ ) ( $m_4, w_5$ ) ( $m_5, w_4$ )

1701572



华中科技大学附属印刷厂

第 页

6 944192 704305



极速扫描, 就是高效



3.1

(1) ①将所有气球  $X_{end}$  从小到大排序

②初始化弓箭数量  $arrows$  为 0, 并设置上一箭的位置  $last$  为负无穷

③遍历排序后的气球

④如果当前气球  $X_{start}$  大于  $last$ , 那么  $arrows$  加 1 并更新  $last$  为当前气球  $X_{end}$

⑤返回  $arrows$

(2)

伪代码:

~~$arrows = 0$~~

~~$last = -\infty$~~

$sort(points, by\ X_{end})$

$arrows = 0$

$last = -\infty$

for each interval in sorted-points:

if interval.  $X_{start} > last$ :

$arrows += 1$

$last = interval.X_{end}$

return  $arrows$

(3) 时间复杂度 < 排序:  $O(n \log n)$

遍历:  $O(n)$

因此, 整体时间复杂度为  $O(n \log n)$

