离散数学一（第一次作业，共 100 分）

1.设 A, B, C 是任意 3 个集合，如果 $A \in B, B \in C$, 则 $A \in C$ 可能吗？ $A \in C$ 总是为真吗？举例说明。(10 分)

（1）可能，如 A={a}，B={b，{a}}，C={{a}，{b，{a}}};

（2）不总为真，如 A={a}，B={b，{a}}，C={{b，{a}}，c};

2.求集合 A={{∅}，{{∅}}}的幂集。(5 分)

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$$

3.给出下列命题成立的充分必要条件 (每小题 5 分，共 20 分)

（1）$(A-B)\cup(A-C)=A$

（2）$(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$

（3）$(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$

（4）$(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$

(1) $(A-B)\cup(A-C)=A \Leftrightarrow A-(B\cap C)=A$

$\Leftrightarrow A\cap(B\cap C)=\varnothing \Leftrightarrow A\cap B\cap C=\varnothing$

(2) $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing \Leftrightarrow A-(B\cap C)=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B\cap C$

(3) $(A-B)\cap(A-C)=\varnothing \Leftrightarrow A-(B\cup C)=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B\cup C$

（4）A 交 B = A 交 C 或 A-B = A-C （注意 A-B = A-C 和 B=C 不等价：比如集合 A{1，2，3}，集合 B{1，4}，集合 C{1，5}，A-B=A-C={2，3}，而 B≠C）

4.设 A, B 是任意 2 个集合，证明：(每小题 5 分，共 15 分)

（1） $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$

（2） $P(A)\subseteq P(B) \Rightarrow A\subseteq B$

（3） $P(A)=P(B) \Leftrightarrow A=B$

(1) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

对 $\forall x \in P(A)$ 都有 $x \subseteq A$，而 $A \subseteq B$

则 $x \subseteq B$ $\therefore x \in P(B)$

即，$P(A) \subseteq P(B)$

(2) $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$

对 $\forall x \in A$ 都有 $\{x\} \in P(A)$，而 $P(A) \subseteq P(B)$

则 $\{x\} \in P(B)$ $\therefore x \in B$

即，$A \subseteq B$

(3) $P(A) = P(B) \Leftrightarrow A = B$

$P(A) = P(B) \Rightarrow A = B$ $\because P(A) = P(B)$

$\therefore P(A) \subseteq P(B)$ 且 $P(B) \subseteq P(A)$

由 (2) 可知

$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$

$\therefore A = B$

$P(A) = P(B) \Leftarrow A = B$ $\because A = B$

$\therefore A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$

由 (1) 可知

$P(A) \subseteq P(B)$ 且 $P(B) \subseteq P(A)$

$\therefore P(A) = P(B)$

因此，$P(A) = P(B) \Leftrightarrow A = B$

5. A,B,C,D 为任意集合，判断下列等式是否成立，如果成立给出证明，不成立则给出反例：(每小题 5 分，共 25 分)

（1）$(A \cap B)\times(C \cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

（2）$(A \cup B)\times(C \cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

（3）$(A-B)\times(C-D)=(A\times C) - (B\times D)$

（4）$A\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$

（5）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(1) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

任取 $\langle x,y\rangle\in(A\cap B)\times(C\cap D)$

$\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\wedge y\in(C\cap D)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge(y\in C\wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\wedge\langle x,y\rangle\in(B\times D)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cap(B\times D)$

(2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

不成立．取 $A=\{0,1\}$ $B=\{1,2\}$ $C=\{3,4\}$ $D=\{4,5\}$

(3) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

不成立．取 $A=\{1,2\}$ $B=\{1\}$ $C=\{3,4\}$ $D=\{3\}$

(4) $A\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$

不成立，取 $A=\{1\}$ $B=\{2\}$ $C=\{3\}$

(5) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

任取 $\langle x,y\rangle\in A\times(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times B)\wedge\langle x,y\rangle\in(A\times C)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cap(A\times C)$

6. 分别举例给出一对不可数集合 A 与 B，使得 A∩B 具有以下性质：(每小题 5 分，共 15 分)

1) 有限
2) 可数无限
3) 不可数

1) $A=(0,1]$ $B=[1,2)$

2) $A=(0,1]\cup N$ $B=[1,2)\cup N$

3) $A=(0,2)$ $B=(1,3)$

7. 证明可数个可数集合的并集仍然是可数的。(10 分)

不妨设可数个可数集为 A_1、A_2 … 且互不相交

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots a_{1n} \dots\}$

$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23} \dots a_{2n} \dots\}$

$\vdots$

将他们并集中的元素按对角线方法排列

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

每条斜线上元素下标和相等

∴ A_1、A_2 … A_n … 中元素一一对应

∴ 他们的并集仍是可数集.