《离散数学二》第四次作业

1. 用双计数的组合证明方法证明恒等式$\sum_{k=1}^{n} k * \binom{n}{k}^2 = n * \binom{2n-1}{n-1}$，这里$\binom{n}{k}$表示从 n 个元素里选 k 个元素。[提示：某班有 n 个男生和 n 个女生，现要从这 2n 个人里选 n 个人组成班委，且其中 1 人为班长，要求为女生，恒等式两边表示两种不同的计数方法] **(10 分)**

参考答案：恒等式右边表示先从 n 个女生中选一位班长，然后从剩下的 2n-1 人中选 n-1 人的其他班委成员，乘法原则，得到$n * \binom{2n-1}{n-1}$；恒等式左边意义：先从 n 人的女生中选 k 位班委成员，再从这 k 人中选一位班长，然后从 n 人的男生中选 n-k 位班委成员，先用乘法原则后用加法原则即得到恒等式左边式子。

2. 下列不定方程有多少个解？给出求解过程

x1+x2+x3+x4+x5+x6=29，其中 x1⩾1, x2⩾2, x3⩾3, x4⩾4, x5>5, x6⩾6，均为整数。**(10 分)**

参考答案：设 y1=x1,y2=x2-1,y3=x3-2,y4=x4-3,y5=x5-5,y6=x6-5，则 y1+y2+y3+y4+y5+y6=13，则原方程的解为 C(12,5)=792。

3. SEERESS 中的字母可以组成多少个包含五个或更多字符的字符串？即分别计算用这 7 个字符中的 5 个（6 个或 7 个）字符组成长度为 5 （6 或 7）的字符串，然后求和。（15 分）

参考答案：首先看 SEERESS 中有 3 个 S，3 个 E 和 1 个 R。长度为 5 的字符串有 90 个：去掉两个 S 有：5!/3!=20；去掉 1 个 S 和 1 个 E 有：5!/(2!*2!)=30；去掉 1 个 S 和 1 个 R 有：5!/(2!*3!)=10;去掉两个 E 有：5!/3!=20；去掉 1 个 E 和 1 个 R 有：5!/(3!*2!)=10；长度为 6 的字符串有 140 个：去掉 1 个 S 有：6!/(3!*2!)=60；去掉 1 个

E 有：6!/(3!*2!)=60；去掉 1 个 R 有：6!/(3!*3!)=20；长度为 7 的字符串有 140 个：7!/(3!*3!)=140。所以公有 90+140*2=370 个。

4. 有多少种方法可以将五个可区分的物体放到三个无法区分的盒子里？**(10 分)**

参考答案：可利用第二类斯特林数，该题答案就是求 S(5,1)+S(5,2)+S(5,3)=1+15+25=41。S(n,k)就是把 n 个元素的集合划分成 k 个非空子集的个数。利用递推式 S(n,k)=k*S(n-1,k)+S(n-1,k-1)，其中 S(0,0)=1,S(n,0)=0,S(0,k)=0；递推求解过程如下：

S(2,1)=S(3,1)=S(4,1)=S(5,1)=1;

S(2,2)=2*S(1,2)+S(1,1)=1;

S(3,2)=2*S(2,2)+S(2,1)=2+1=3;

S(3,3)=3*S(2,3)+S(2,2)=1

S(4,2)=2*S(3,2)+S(3,1)=6+1=7

S(4,3)=3*S(3,3)+S(3,2)=3+3=6

S(5,2)=2*S(4,2)+S(4,1)=2*7+1=15;

S(5,3)=3*S(4,3)+S(4,2)=3*6+7=25

5. (1)有多少种方法可以将两个可区分的物体放到三个有标号的盒子？(2) 有多少种方法可以将两个无法区分的物体放到三个有标号的盒子？(3) 有多少种方法可以将两个无法区分的物体放到三个有标号的盒子？该小题要求每个盒子**至多**放一个球。分别写出具体求解过程。（15 分）

参考答案：(1) 每个物体有 3 种放法，两个物体有 3*3=9 种放法；譬如有物体 A 和 B，以及 1,2,3 三个盒子，则放法为(A-1,B-1；A-1, B-2；A-1,B-3；A-2,B-1；A-2, B-2；A-2,B-3；A-3,B-1；A-3, B-2；A-3,B-3；(2) 如果两个物体不可区分，则我们只关心每个盒子里有多少个球，而不是哪个具体的球在哪个盒子，因此上述 (1) 里方案的 A-2,B-1 和 A-1, B-2 一样，A-1，B-3 和 A-3, B-1 一样， A-2,B-3 和 A-3,B-2 一样，则剩下 6 种方案 (9 种减去 3 种)，这相当于有重复的组合求解，即从 3 个不同的元素 (盒子) 中选择 2 个元素 (每个球选择一个盒子)，但每个元素可以被重复选择，即求不定方程 x1+x2+x3=2 的解个数，其中 x1,x2 和 x3 均为非负整数；答案为 C(4,2)=6；(3)相当于从三个盒子里选 2 个盒子放球，每个盒子放一个，即 C(3,2)=3 种放法，两个球分别放入 1-2，1-3 或 2-3 两个盒子。

6. (1)有多少种方法可以将五个无法区分的物体放到三个没有标号的盒子？(2)有多少种方法可以将五个无法区分的物体放到三个没有标号的盒子？该小题要求每个盒子至少放一个物体。(3)有多少种方法可以将五个无法区分的物体放到五个没有标号的盒子里？此小题要求用生成函数方法求解。（15 分）

参考答案：(1)相当于把整数 5 拆分成三个非负整数的和 d1+d2+d3，其中 d1⩾d2⩾d3，一共 5 种：5,0,0；4,1,0；3,2,0；3,1,1；2,2,1。

(2)先把每个箱子放 1 个物体，则题目变为问有多少种方法可以将两个无法区分的物体放到三个没有标号的盒子？相当于把整数 2 拆分成 3 个非负整数的和 d1+d2+d3，其中 d1⩾d2⩾d3，一共 2 种：2,0,0;

1,1,0。即是求(1+x+x^2)(1+x^2)展开式中 x^2 的系数，为 2.

(3) 相当于把整数 5 拆分成五个非负整数的和 d1+d2+d3+d4+d5，其中 d1⩾d2⩾d3⩾d4⩾d5，一共 7 种：5,0,0；4,1,0；3,2,0；3,1,1；2,2,1；2,1,1,1；1,1,1,1,1。

即是求

(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)展开式中 x^5 的系数，其系数为 7；这里 1 最多选五个，2 最多选两个，3,4,5 均最多选一个。

7. （1）将整数 6 允许重复地有序拆分成四个正整数的方案有几个？写出具体方案；（2）将整数 4 允许重复地有序拆分成仅由 1,2 或 3 组成的方案有几个？写出具体方案，该小题用生成函数方法求解。（15 分）

参考答案：（1）即是求 x1+x2+x3+x4=6 的不定方程解的个数，这里 x1,x2,x3 和 x4 均≥1，因此方案个数为 C(5,3)=10 个，即 （1 1 3 1），（1 1 1 3），（1 2 1 2），（1 2 2 1），（1 3 1 1），（2 1 1 2），（2 1 2 1），（2 2 1 1），（3 1 1 1）和（1 1 2 2）。

（2）即求 $1+(x^1+x^2+x^3)+(x^1+x^2+x^3)^2+(x^1+x^2+x^3)^3+(x^1+x^2+x^3)^4$ 中 x^4 的系数。经过求解，x^4 的系数为 7，具体拆分方案为：(3,1)，(1,3)，(2,2)，(2,1,1)，(1,2,1)，(1,1,2)，(1,1,1,1)。

8. 设有 6 个数字，其中三个数字 1，两个数字 6，一个数字 8，问能组成多少个四位数?用指数型生成函数求解。（10 分）

参考答案：$g(x)=(1+x+x^2/2!+x^3/3!)(1+x+x^2/2!)(1+x)$

$=1+3x+8(x^2/2!)+19(x^3/3!)+38(x^4/4!)+60(x^5/5!)+60(x^6/6!)$

由此可得 $a_4=38$，即可组成 38 个四位数。