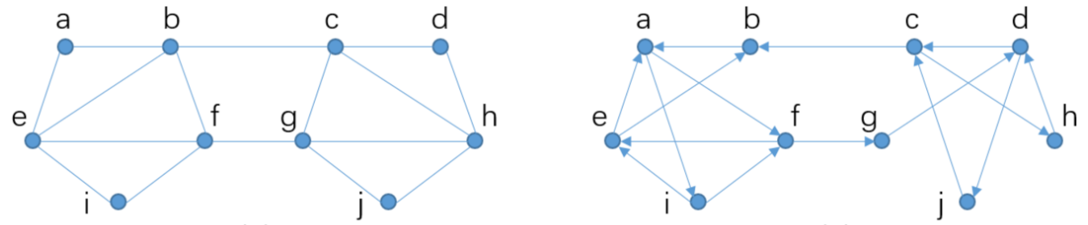
离散数学一（第七次作业）

1.

试确定下方所示各图是否具有欧拉回路。若存在欧拉回路，则构造出一条欧拉回路。若不存在，试确定这个图是否具有欧拉通路。若存在欧拉通路，则构造出一条欧拉通路。



(1) (2)

(1)有欧拉回路：$e \to f \to i \to e \to f \to g \to j \to h \to g \to c \to h \to d \to c \to b \to a \to e$

图(2)i点b点入度不等于出度，所以没有欧拉回路。

欧拉通路：$i \to e \to a \to i \to f \to e \to b \to a \to f \to g \to d \to c \to h \to d \to j \to c \to b$

2.

(1)证明任何竞赛图(tournament，有向图且底图为完全图)均具有哈密顿通路；(2)请给一个具体算法在竞赛图中找到任一条这样的哈密顿通路。

证明：考虑数学归纳法：

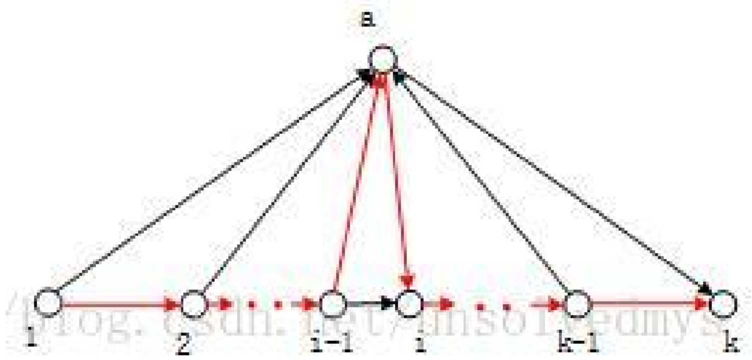
1.$n = 1, 2, 3$时候的竞赛图上均有一条哈密顿路径

2.若结论在$k(k \le 3)$的时候成立，此时有路径$\tau = v_1 v_2 .. v_k$，考虑加入一个点，分三种情况讨论：

情况1.若原哈密顿路的终点有一条向当前加入点的连边，则直接让当前点成为新哈密顿路的终点.

情况2.若当前点向原哈密顿路的起点有连边，则直接让当前点成为新哈密顿路的起点.

情况3.若均不满足。则一定存在一点$i(1 < i \le k)$，使得图中存在边(v_{i-1}, a)和边(a, v_i)(反证法易知)。此时可有哈密顿路径$\tau' = v_1 v_2 .. v_{i-1} a v_i ... v_k$，得证。



（2）找到一条长度为2的路径，按（1）中三种情况逐步加长即可。

3.

证明以下结论：设 G = <V, E>是具有 n 个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点 u, v∈V，均有 deg(u)+deg(v)≥n，则 G 中存在哈密顿回路。

引理 1 设$\tau = v_1 v_2 .. v_l$为图G中的一条极大路径$(l \le n)$，则一定存在回路C经过τ上的所有点。

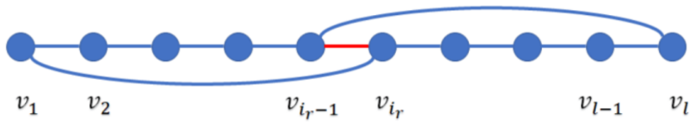
证明 1 *(1)若v_1, v_l相邻，将二者相连即可找到回路C*

(2)若v_1, v_l不相邻。

设v_1与τ上的$v_{i_1}(v_2), v_{i_2}, v_{i_3}, ..., v_{i_k}$,相邻，则$k \geq 2$。否则$d(v_1)+d(v_l) \leq 1+l-2 \leq n-1$。*(*与题设不符*)*

而v_l又至少与$v_{i_2-1}, v_{i_3-1}, ..., v_{i_k-1}$之一相邻。否则$d(v_1)+d(v_l) \leq k+[l-2-(k-1)] \leq n-1$。*(*与题设不符*)*

设v_l与v_{i_r-1}相邻，则得到回路$v_1v_2...v_{i_r-1}v_lv_{l-1}...v_{i_r}v_1$。如下图所示。



原命题证明：

(1)证明G是连通图

反证法：若G不是连通图，则至少存在两个分支。设连通分支G_1, G_2的阶数为n_1, n_2。不妨设两点$u \in V_{G_1}, v \in V_{G_2}$，则有$d(u)+d(v) \leq (n_1-1)+(n_2-1)=n-2$，此与题设矛盾，所以G是连通图。

(2)设$\tau = v_1v_2..v_l$为图G中的一条极大路径$(l \leq n)$。

① 若$l=n$，则找到一条哈密顿路径τ_l，此时应用引理1即可找到回路；

② 若$l<n$，则必定存在一点v_{out}与τ_l上除v_1, v_l外的端点相连（连通图）。此时，根据引理1，存在回路C刚好经过τ_l上的所有点，则回路C又可与v_{out}组合成更长的极大路径 。

重复上述①②过程，最终找到一条哈密顿回路。