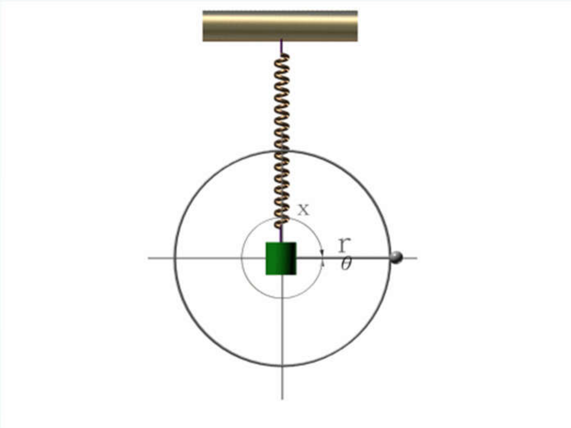
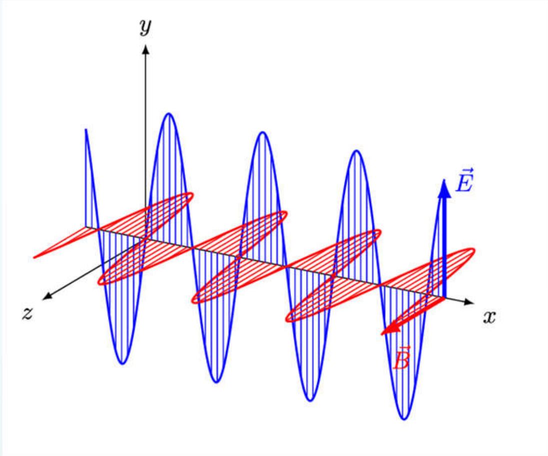
大 学 物 理



第11章-3
振动与波动



主 讲: 尹 航
华中科技大学 物理学院

回顾

振动的能量

- $E \propto A^2$
- 谐振动是动能与势能相互转换的过程
- $\overline{E_k} = \overline{E_p} = \dfrac{1}{2} E_{总}$

谐振动合成

- 同向同频 ⟶ 合振动为谐振动 ⟶
  - 同相：合振幅最大
  - 反相：合振幅最小
- 同向、同振幅、不同频 ⟶ 非谐振动 $\xrightarrow[\text{率相近}]{\text{分振动频}}$ **拍**
- 振动方向正交
  - 同频
    - 同相或反相 ⟶ 过原点的直线
    - $0 < \Delta\varphi < \pi$ ⟶ 右旋椭圆
    - $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$ ⟶ 左旋椭圆
  - 不同频 ⟶ 李萨如图

回顾

非理想环境中的谐振动

- **阻尼振动**
  - 弱阻尼 $(\beta < \omega_0)$ 振幅指数衰减的振动
  - 临界阻尼 $(\beta = \omega_0)$ 无振动 快速逼近 x_0
  - 过阻尼 $(\beta > \omega_0)$ 无振动 缓慢逼近 x_0

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$

- **受迫振动**
  - 暂态 + $\boxed{\text{稳态}}$ → 与驱动力同频的谐振动
  - **共振**
    - 振幅极大值，振动剧烈的现象
    - 共振频率与阻尼相关
    - 原因：驱动力与速度同相

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = h\cos\omega t$$

本节内容

1 机械波

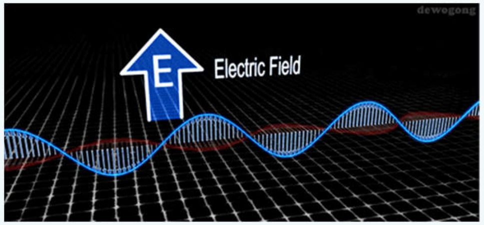
2 波的传播

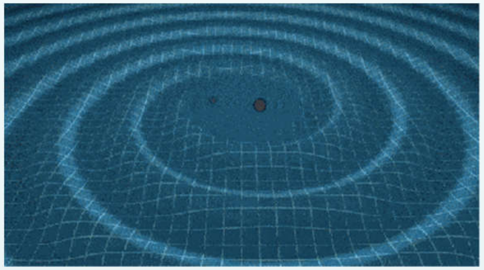
引子

□ 波动

按性质分类

- **机械波** 机械振动在弹性媒质中的传播
- **电磁波** 电磁场周期性变化在空间的传播
- **引力波** 时空形变，以c的速度在空间传播





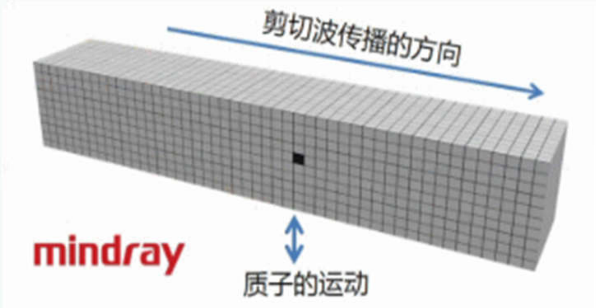
按振动与传播方向分类

- **横波**：振动方向与传播方向垂直　如:电磁波
- **纵波**：振动方向与传播方向相同　如:声波
- **混合波**: 如：水波、地震波

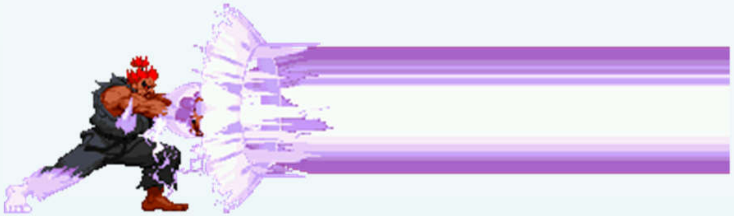
引子

- **波的普遍共性**

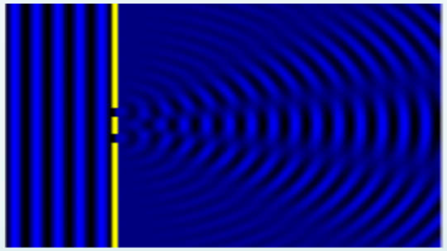
1. 有一定的传播速度；



2. 有能量的传播；



3. 能产生反射、折射、干涉和衍射等现象；



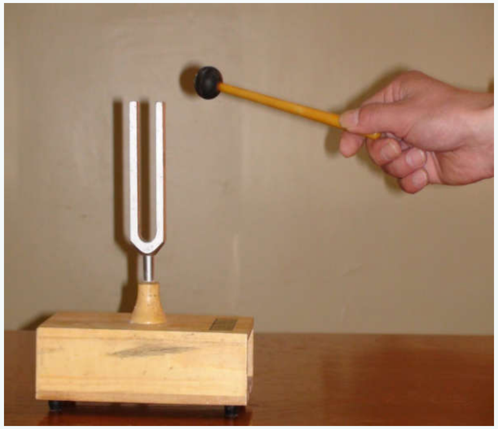
4. 类似的波动方程

机械波

□ 机械波的产生条件

波源：激发波动的振动系统。

振动是波的根源



介质中的各点相对位置可改变

弹性介质（固体、液体、气体）

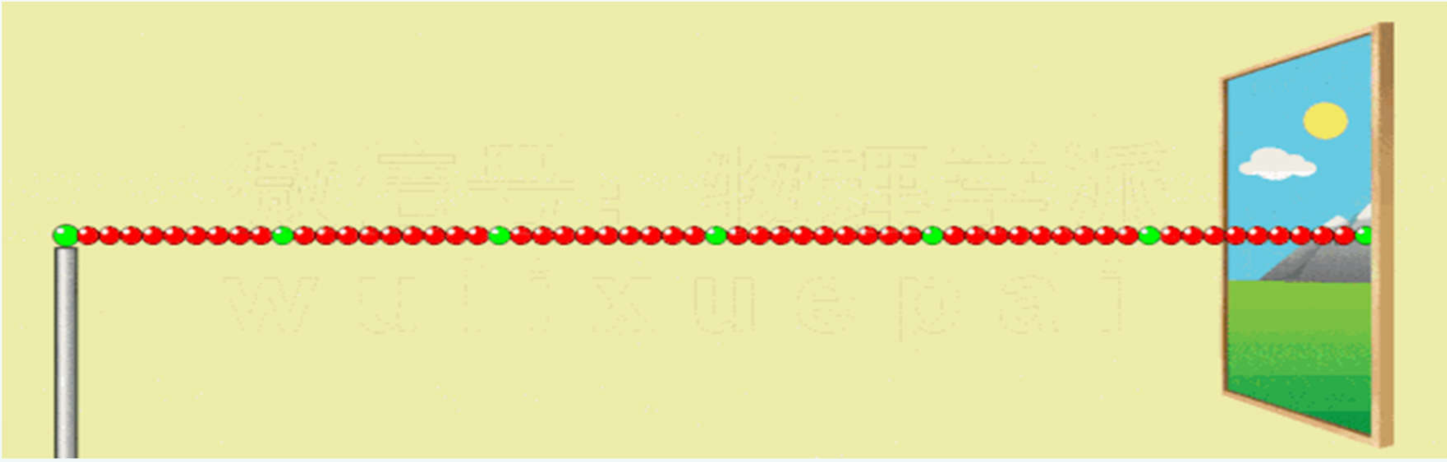
无穷多质点通过相互之间的弹性力作用组合在一起而形成的连续介质。

波源处质点的振动通过弹性介质中的弹性力，将振动状态在介质中由近及远地传播开去，从而形成机械波。

机械波

- **波动的解读**

机械波



① 各质元仅在各自的平衡位置附近振动；

② “上游”的质元依次带动“下游”的质元振动；

③ 各质元振动的差别→下游质元步调落后于上游质元

沿波的传播方向，各质元的相位依次落后。

④ 所有质点同一时刻位移不同，形成一个波形。

机械波

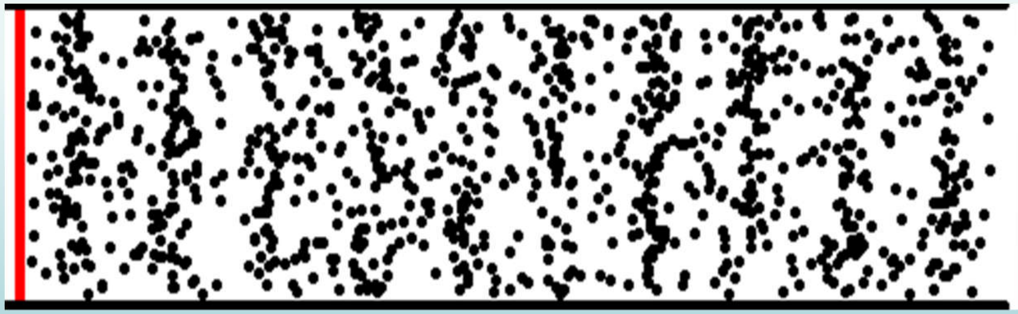
- **横波**

有波峰、波谷

只存在于**固体**中

切向弹性力

- **纵波**

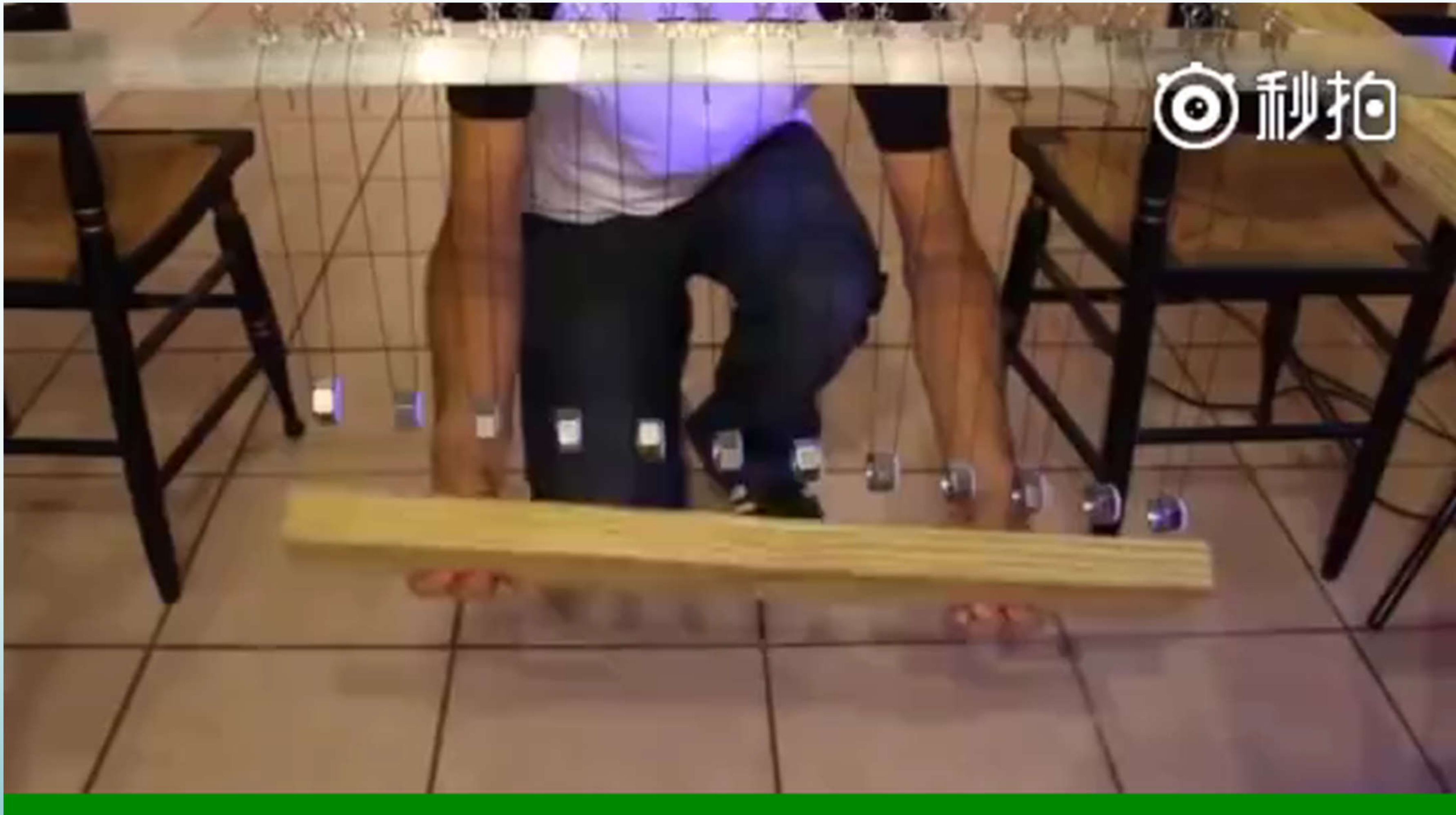


有**疏密**（相间）之分

可存在于固、液、气体中

机械波

振动与波动



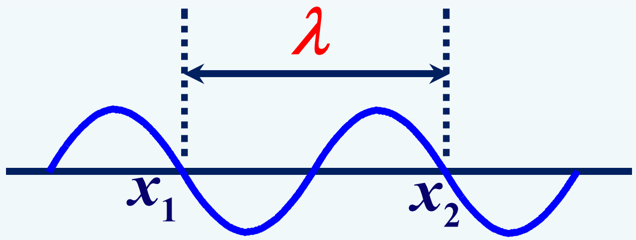
机械波

□ 波动的描述

- **几个概念**

空间周期

波长λ：在波的传播方向上，两相邻的相位差为 2π 的质点间的距离。



波速u：
(相速)

- 振动状态（相位）在媒质中的传播速度。 宏观速度
- 大小取决于媒质的**密度**和**弹性模量**
- $u_{波} \neq u_{振}$

周期T：波向前传播一个波长所用的时间 = 介质中单个质点的振动周期

时间周期 ← $\boxed{T_{波}} = \frac{\lambda}{u} = \frac{2\pi}{\omega} = T_{振}$

机械波

频率 ν
- 振动：单位时间内的振动次数
- 可以不取整
- 波动：
  - 单位时间内通过波线上一点的波长个数
  - 波单位时间传播距离中包含的波长个数

$$\nu=\frac{u}{\lambda}=\frac{u}{uT}=\frac{1}{T_{波}}=\frac{1}{T_{振}}\longrightarrow \nu_{波}=\nu_{振}$$

波数k
- 2π长度内包含的波长的个数 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$
- 传播方向上
- 单位长度内包含的波长的个数 $k=\dfrac{1}{\lambda}$

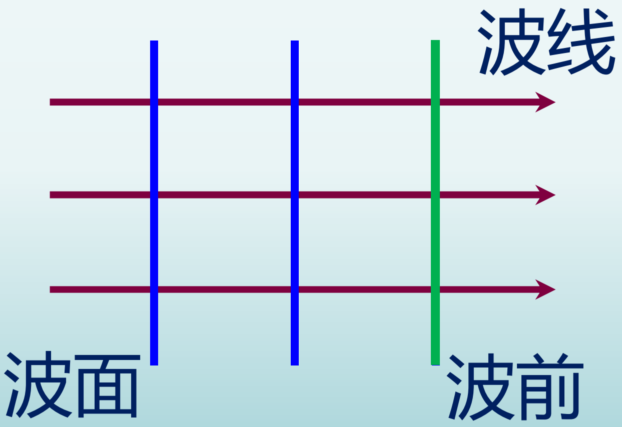
机械波

波阵面（波面）：振动相位相同的点组成的**面**。

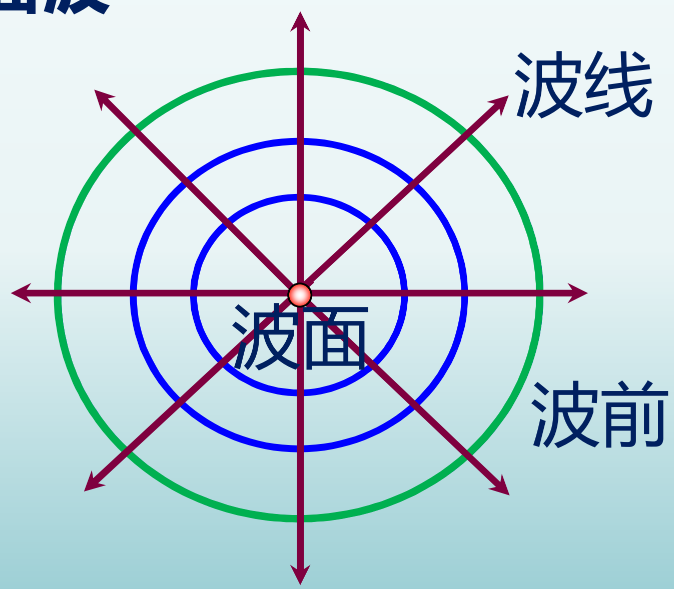
波前：传播在最前的波面

波线：发自波源，与波面垂直，指向波的传播方向的射线。

平面波



球面波



机械波

- **各参量的决定因素**（概念小结）

① 波的T或ν取决于波源。

② 波速u取决于传输介质

固体中：
- 纵波 $u=\sqrt{Y/\rho}$
- 横波 $u=\sqrt{G/\rho}$
- 绳波 $u=\sqrt{T/\mu}$

Y – 杨氏模量
G – 剪切模量
T – 绳张力
ρ – 质量密度
μ – 质量线密度

气、液中 $u=\sqrt{\dfrac{\boxed{K}}{\rho}}$ K → 体弹模量

电磁波波速：$u=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

④ 波长λ由$\underset{\uparrow}{\overset{T}{}}$波源和$\underset{\uparrow}{\overset{u}{}}$传输介质共同决定。

⑤ 波速不等同于质点的振动速度 $u_{波}\neq u_{振}$

波的传播

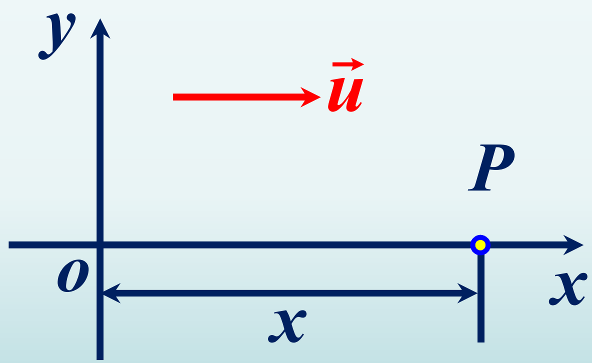
□ **平面简谐波**（一维机械简谐波）

媒质中各质点都作谐振动，并且向一个方向传播。

- **波函数**（描述波的工具）

表示 t 时刻时，空间任一质元 x 的位移 y。 $y = f(x,t)$

设波源在原点，以速度u向x轴方向传播。



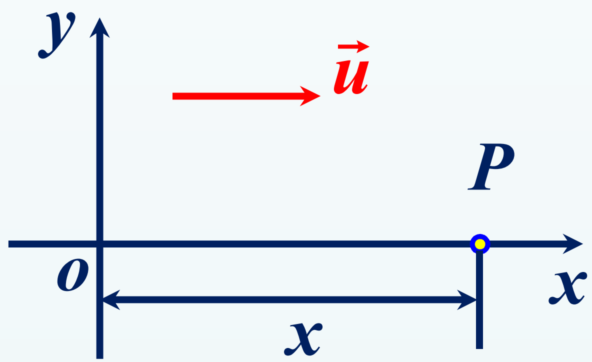
波源的振动方程为： $y_o = A\cos\omega t$

任意 P点重复O点振动，振动相位落后于O

振动时间： P 比O晚Δt $\Delta t = \dfrac{x}{u}$ $\xrightarrow[P\text{点相位}]{t\text{ 时刻}}$ $\omega(t - \dfrac{x}{u})$

□ 平面简谐波

波源的振动方程为： $y_o = A\cos\omega t$



任意 P点重复O点振动，振动相位落后于O

振动时间： P 比O晚Δt $\Delta t = \dfrac{x}{u}$ $\xrightarrow[P\text{点相位}]{t\text{ 时刻}}$ $\omega(t-\dfrac{x}{u})$

振动相位： P落后于O $\omega\Delta t = \omega\dfrac{x}{u}$

P点 t 时刻振动位移为: $y = A\cos\left[\omega(t-\dfrac{x}{\boxed{u}})\right]$ ——波函数

波速的大小(取正)

描述了整个空间**任意质点**在**任意时刻**的振动状态。

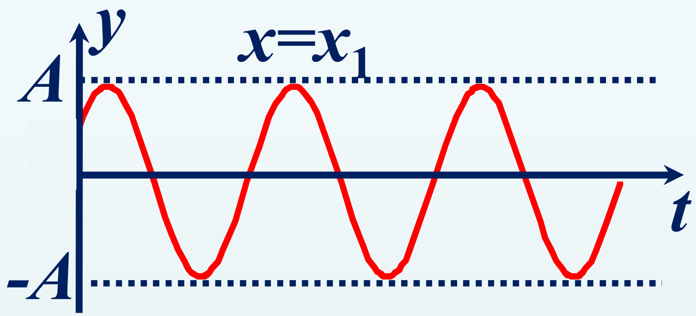
波的传播

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]$$

- **波函数的意义**

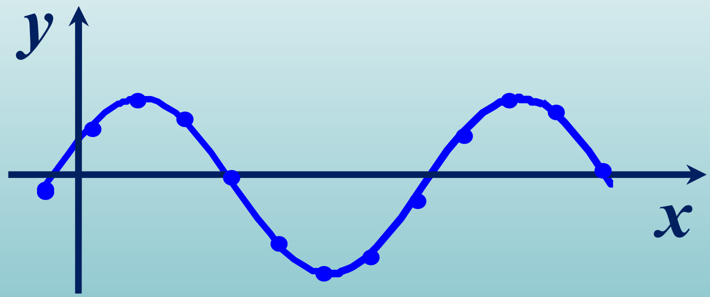
① x 一定时，$x = x_1 \longrightarrow y = A\cos(\omega t - \omega\frac{x_1}{u})$ x_1处质点**振动方程**

$\omega\frac{x_1}{u}$ → 初始相位



振动曲线

② t 一定时，$t = t_1 \longrightarrow y = A\cos(\omega t_1 - \omega\frac{x}{u})$ t_1时刻**波形方程**



波形曲线

波的传播

③ 当 x 和 t 都变化时，波函数描述了波形的传播。

t_1时刻波形方程 $y_1 = A\cos\omega(t_1 - \frac{\boxed{x}}{u})$

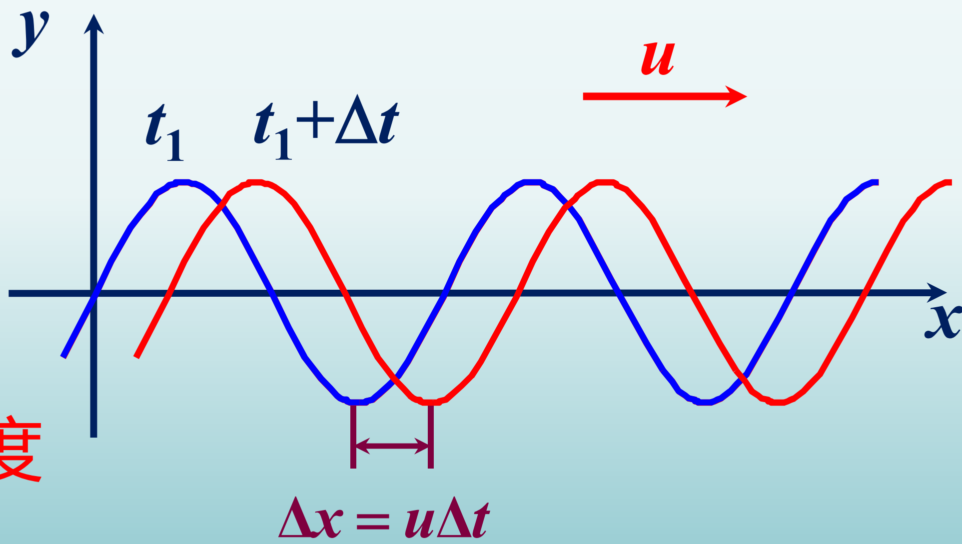
$t_2=t_1+\Delta t$ 时刻波形方程

$$y_2 = A\cos\omega(t_2 - \frac{x'}{u}) = A\cos\omega[(t_1+\Delta t) - \frac{x'}{u}] = A\cos[\omega t_1 - \frac{\omega(\boxed{x' - u\Delta t})}{u}]$$

若 $x' = x + u\Delta t \longrightarrow y_1 = y_2$

经Δt 时间，整个波形向前

平移了一段距离$\Delta x=u\Delta t$。



波速u = 相速 = 波形的传播速度

波的传播

$$y_o = A\cos\omega t$$

$$y = A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$$

讨 论:

① **一维简谐波的一般形式**（考虑波源振动初始相位）

波源O的初相位 $\varphi \neq 0$时，波源的振动方程为：

$$y_o = A\cos\left(\omega t+\varphi\right)$$

传播方向上 x 处P点落后O的相位： $\omega\Delta t = \omega\frac{x}{u}$

一维简谐波的**波函数**为：

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

机械波

$$y_o = A\cos\omega t$$

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

讨 论:

② 波函数的几种标准形式

$$\left.\begin{aligned} & y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] \\ & \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{u} \longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{u} \end{aligned}\right\} y = A\cos(\omega t - \boxed{\frac{2\pi}{\lambda}}x + \varphi)$$

波数k

$$y = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

波的传播

$$y_o = A\cos\omega t$$

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

讨 论:

③ 相位差与波程差的关系

$\Delta\varphi$ Δx

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \left(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \varphi\right) - \left(\omega t - \frac{2\pi x_2}{\lambda} + \varphi\right)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = k\Delta x$$

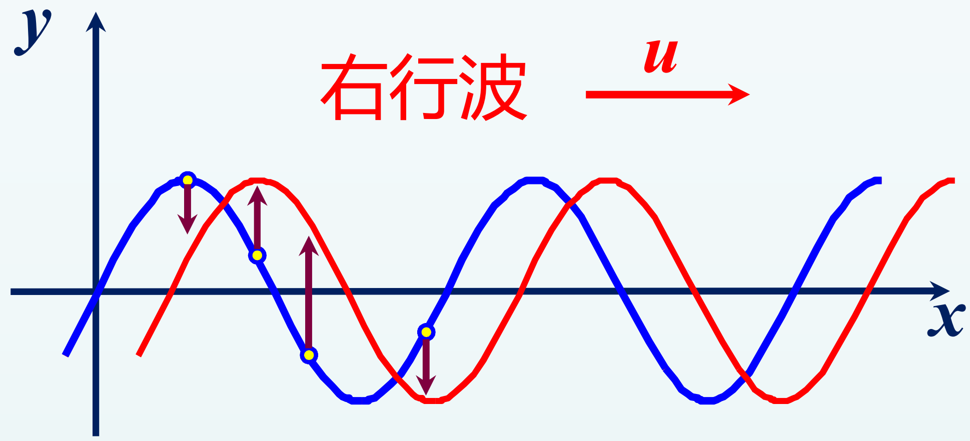
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = k\Delta x$$

波的传播

④ 质点振动方向和波传播方向的判断

波的传播方向 ⇄ 质点振动方向

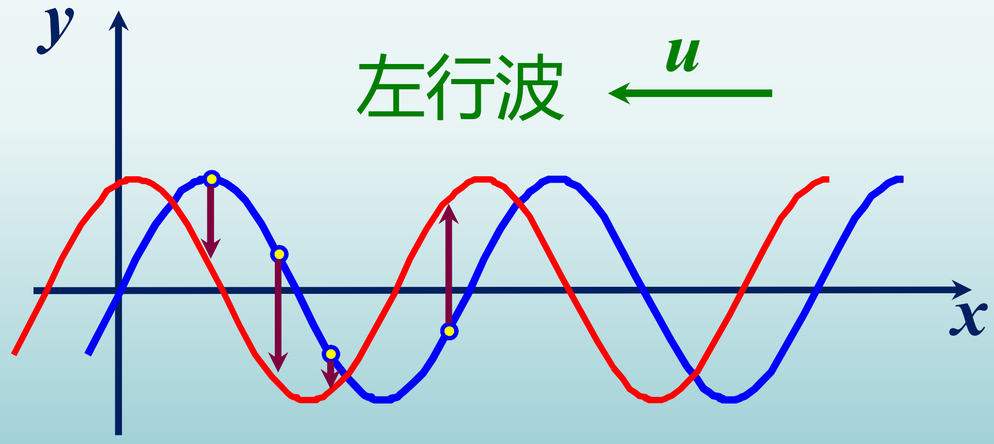
判断各点的振动方向



常规方法：

借助下一邻近时刻的波形曲线。

沿波的传播方向平移波形。

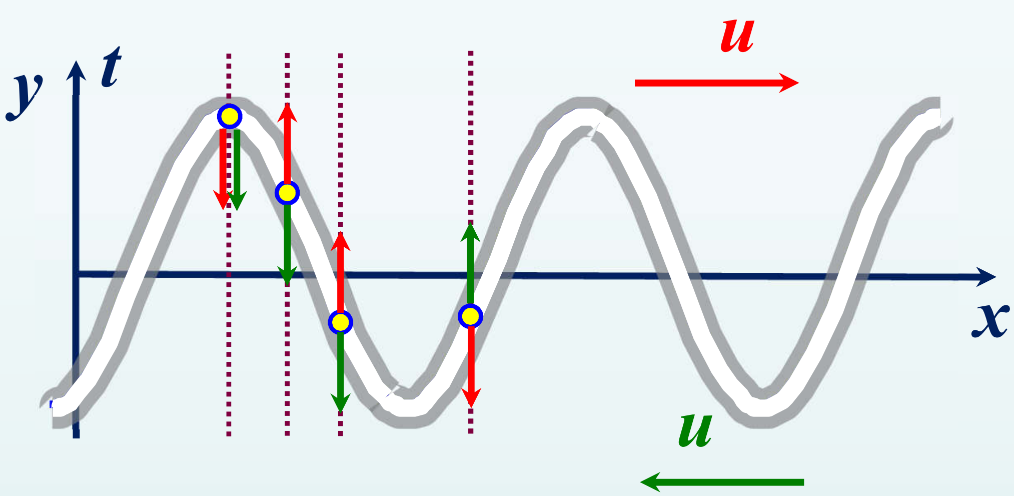


波的传播

④ 质点振动方向和波传播方向的判断

波的传播方向 ⇄ 质点振动方向

判断各点的振动方向



尹老师的方法：

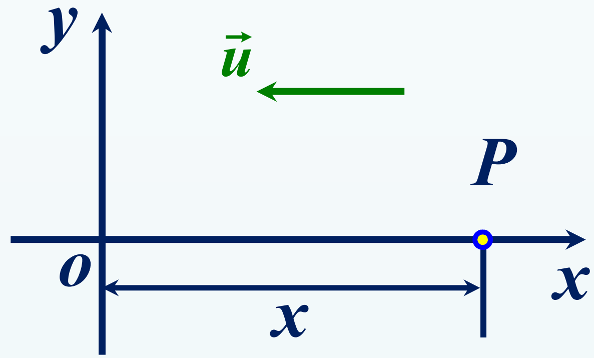
把波形看做是导轨

质点看作约束在导轨内的小球

质点在移动导轨的作用下，上下移动

波的传播

⑤ **波沿 x 轴反向传播，波函数如何?**



原点振动方程：$y_o = A\cos\omega t$

P点比O点早振动， 早 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$

振动相位P 超前O：$\omega\Delta t = \omega\dfrac{x}{u}$

沿x轴负向传播的波函数：$y = A\cos\omega(t + \dfrac{x}{u})$

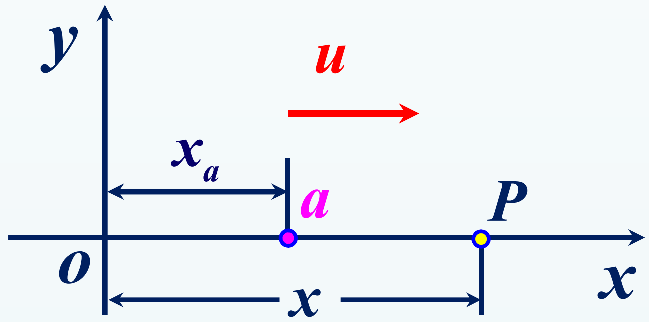
$$y = A\cos\omega(t \boxed{\mp\frac{x}{u}})\begin{cases}\text{“}-\text{”} & \text{沿}x\text{正向} \text{——右行波}\\ \text{“}+\text{”} & \text{沿}x\text{负向} \text{——左行波}\end{cases}$$

左加右减

波的传播，数学上是函数图像的平移。

波的传播

⑥ 由任意参考点的振动方程写波函数



任意参考点均可作为准波源

空间任意点相对于参考点的振动情况

振动时间
- 任意点比参考点晚振动，减去传播时间
- 任意点比参考点早振动，加上传播时间

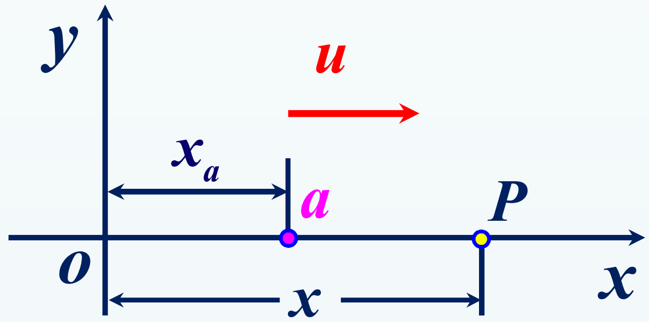
$$\Delta t = \frac{|x - x_a|}{u}$$

$$\left.\begin{matrix} y_a = A\cos(\omega t + \varphi) \\ P\text{比}a\text{晚振动}\Delta t \end{matrix}\right\} y = A\cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi] \longrightarrow y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{|x - x_a|}{u}\right) + \varphi\right]$$

若为左行波，P比a早振动Δt $\quad y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{|x - x_a|}{u}\right) + \varphi\right]$

波的传播

⑥ 由任意参考点的振动方程写波函数



任意参考点均可作为准波源

空间任意点相对于参考点的振动情况

振动相位
- 任意点比参考点晚振动，相位落后，减去$\Delta\varphi$
- 任意点比参考点早振动，相位超前，加上$\Delta\varphi$

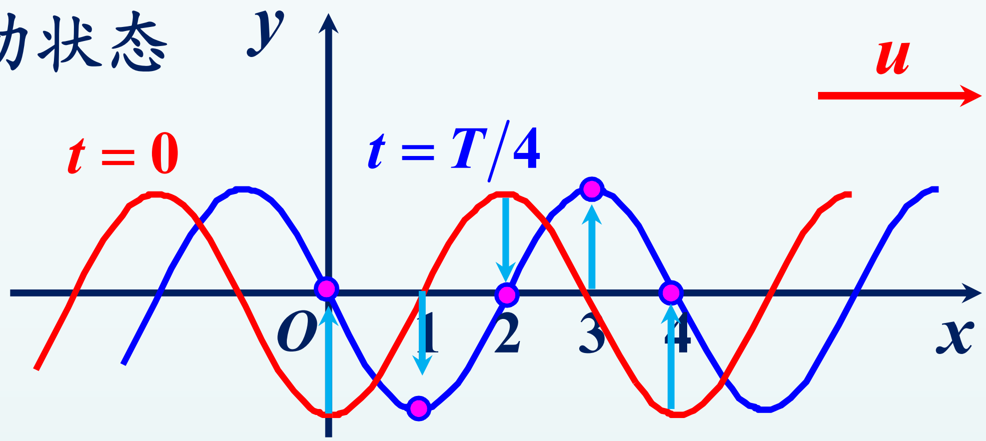
任意点与参考点的相位差：$\Delta\varphi=\omega\left|\dfrac{\Delta x}{u}\right|=\dfrac{2\pi}{\lambda}|\Delta x|$

- 右行波$\longrightarrow P$比a晚振动 $\longrightarrow y=A\cos[\omega t-\dfrac{2\pi|x-x_a|}{\lambda}+\varphi]$
- 左行波$\longrightarrow P$比a早振动 $\longrightarrow y=A\cos[\omega t+\dfrac{2\pi|x-x_a|}{\lambda}+\varphi]$

波的传播

例. 一简谐波沿x轴正向传播，已知$t=T/4$时的波形曲线，若振动以余弦函数表示，确定各点的初相。

解：要确定$t=0$时刻各点的运动状态



向左平移波形曲线Δx

$$\Delta x = u\Delta t = u\frac{T}{4} = \frac{\lambda}{4}$$

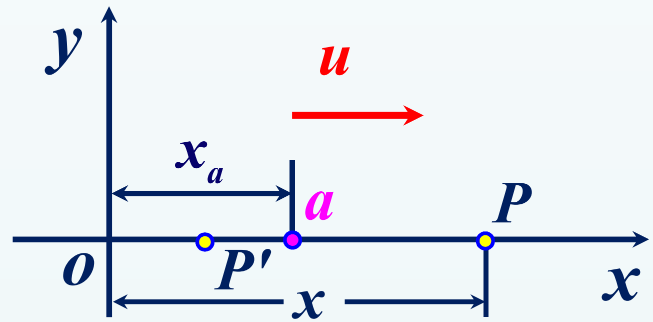
得到$t=0$时刻波形曲线

O: $\varphi = \pi$　　1: $\varphi = \frac{\pi}{2}$　　2: $\varphi = 0$

3: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$　　4: $\varphi = \pi$

波的传播

例. 已知波沿x正向传播，波长为λ，$x=x_a$处质点的振动方程为$y_a=\cos(\omega t+\varphi)$，写出其波函数。



解：任意P点，相位落后于a点

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\left|x-x_a\right|$$

波函数 $y=A\cos[\omega t-\dfrac{2\pi}{\lambda}\left|x-x_a\right|+\varphi]$

$x>x_a$

$$y=A\cos[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-x_a\right)+\varphi]$$

任意P'点，相位超前于a点 $\Delta\varphi=\dfrac{2\pi}{\lambda}\left|x-x_a\right|$

结论一致

与任意点选取无关

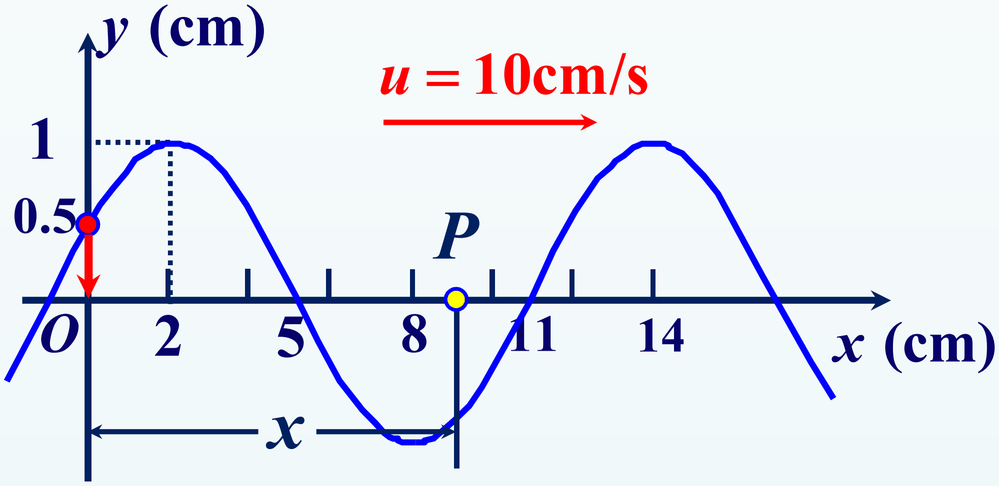
波函数 $y=A\cos[\omega t+\dfrac{2\pi}{\lambda}\left|x-x_a\right|+\varphi]$

$x<x_a$

$$y=A\cos[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-x_a\right)+\varphi]$$

波的传播

例. t=0波形如图

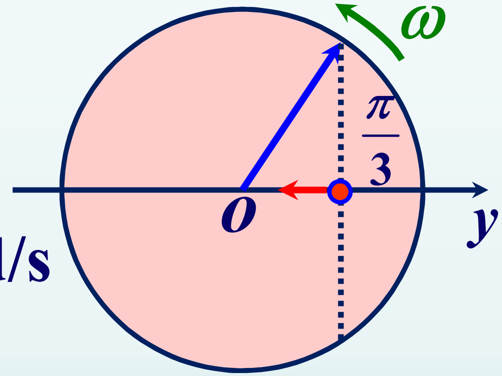


(1) 写出波函数

解：先写O点的振动方程

$$y_o = A\cos(\omega t+\varphi)$$

由图可知 $\begin{cases} A = 1\ \text{cm} \\ \lambda = 12\ \text{cm} \\ T = \dfrac{\lambda}{u} = \dfrac{12}{10} = 1.2\ \text{s} \end{cases} \longrightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{5\pi}{3}\ \text{rad/s}$



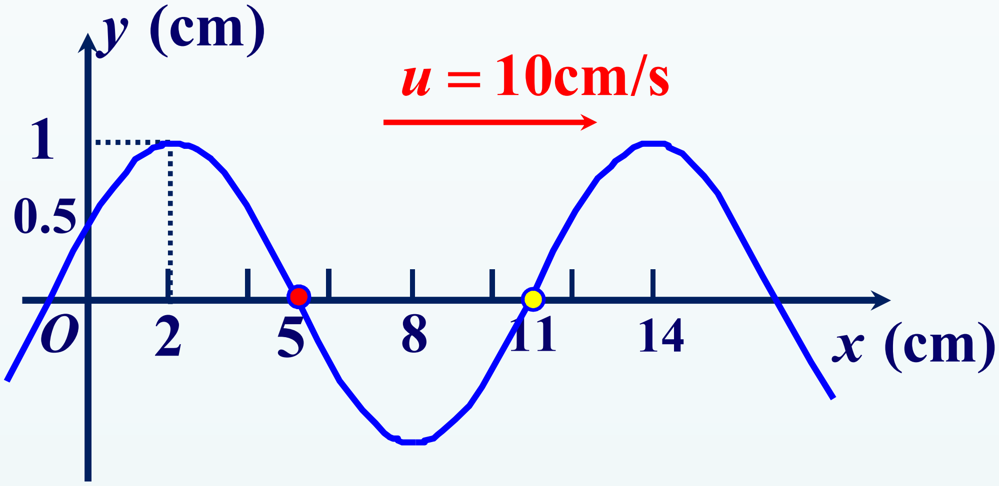
关键是确定波源初始相位 $\varphi_o = \dfrac{\pi}{3}$

O点的振动方程 $y_o = 0.01\cos(\dfrac{5\pi}{3}t+\dfrac{\pi}{3})\ \text{m}$

波函数：$y = 0.01\cos[\dfrac{5\pi}{3}(t-\dfrac{x}{u})+\dfrac{\pi}{3}] = 0.01\cos[\dfrac{5\pi}{3}(t-10x)+\dfrac{\pi}{3}]\ \text{m}$

波的传播

(2)求同一时刻$x_1 = 5$ cm, $x_2 = 11$ cm 两处质点振动相位差。



解：波函数：

$$y = 0.01\cos[\frac{5\pi}{3}(t - \frac{x}{u}) + \frac{\pi}{3}]$$

$$= 0.01\cos[\frac{5\pi}{3}(t - 10x) + \frac{\pi}{3}] = 0.01\cos[\frac{5\pi}{3}t \underbrace{- \frac{50\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}}_{\varphi_x}]$$

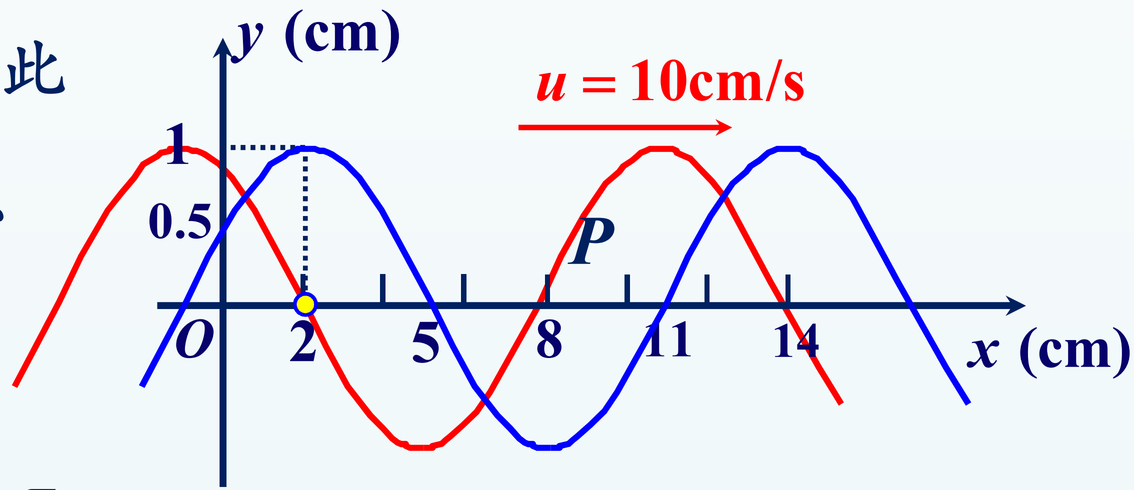
$$\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = \left|\left(-\frac{50\pi}{3}x_2 + \frac{\pi}{3}\right) - \left(-\frac{50\pi}{3}x_1 + \frac{\pi}{3}\right)\right| = \pi$$ 反相

另解：相位差与波程差的关系

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{12}(11-5) = \pi$$

波的传播

(3) 画 $t=3T/4$ 时波形曲线，此刻 x =2 cm 处质点振动位移、速度、加速度？



解：根据前例题，波函数为

$$y = 0.01\cos[\frac{5\pi}{3}(t-10x)+\frac{\pi}{3}]\ \text{m}$$

x =2 cm 处质点的振动方程

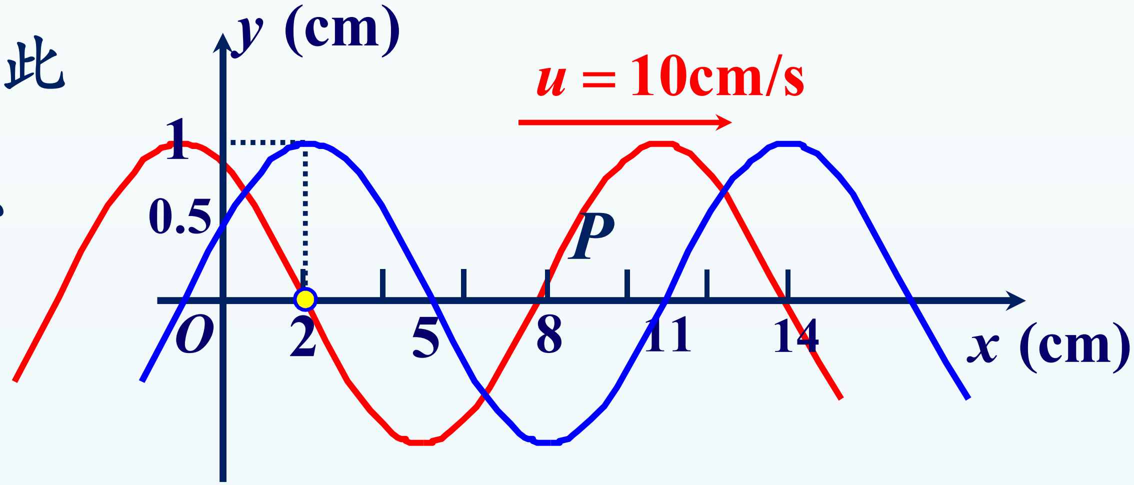
$$y = 0.01\cos[\frac{5\pi}{3}(t-0.2)+\frac{\pi}{3}]\ \text{m} \longrightarrow y = 0.01\cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right)\ \text{m}$$

t=3T/4时，该处质点的位移　　$T = 1.2\ \text{s}$

$$y = 0.01\cos\left(\frac{5\pi}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\right) = A\cos\frac{3}{2}\pi = 0$$

波的传播

(3) 画 $t=3T/4$ 时波形曲线，此刻 x =2 cm 处质点振动位移、速度、加速度？



解： $y=0.01\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}t\right)$ m

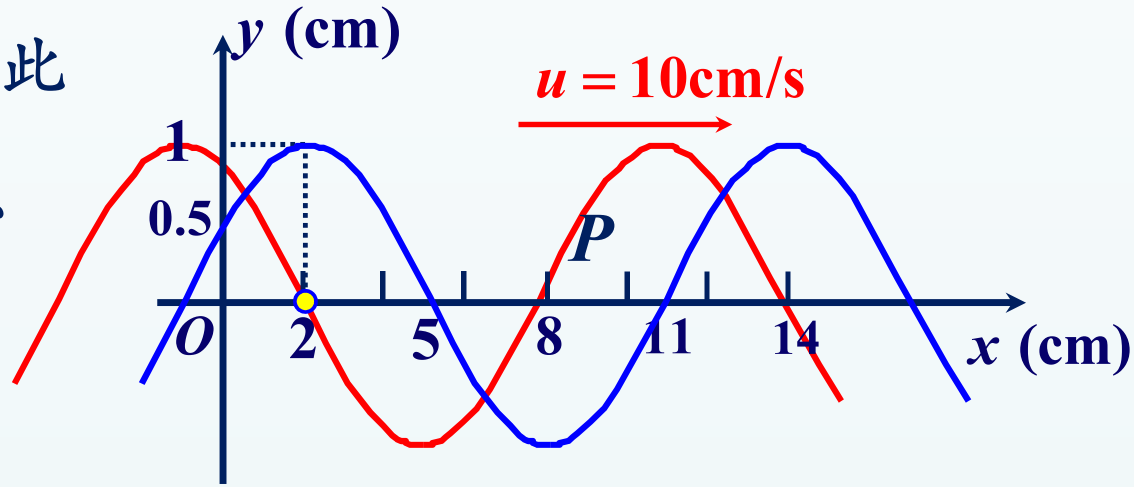
t=3T/4时，该处质点的位移 $y=0.01\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{6}{5}\right)=0$

振动速度：$v=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{5\pi}{3}A\sin\dfrac{5\pi}{3}t=-\dfrac{5\pi}{3}A\sin\dfrac{3\pi}{2}=0.052\ \ \mathrm{m/s}$

振动加速度：$a=\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-(\dfrac{5\pi}{3})^2 A\cos\dfrac{5\pi}{3}t=0$

波的传播

(3) 画 $t=3T/4$ 时波形曲线，此刻 x =2 cm 处质点振动位移、速度、加速度？



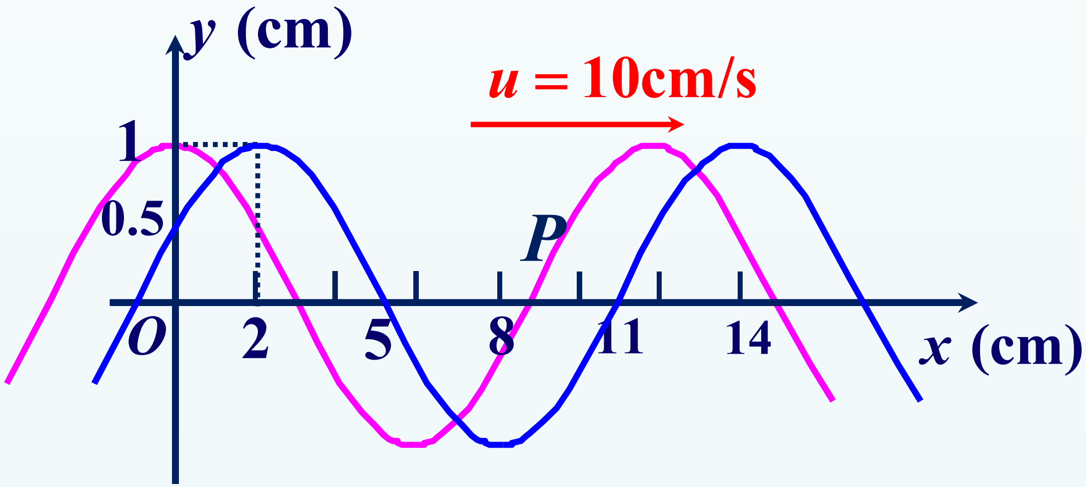
解：

振动方程：$f(t)$ 解决质点（振子）何时在何地的问题

波函数：$f(t,x)$ 解决行波中，何处质点何时在何地的问题

波的传播

(4) 若图为 t=0.2 s 的波形，波函数如何？



解：关键是求O点的初相位！

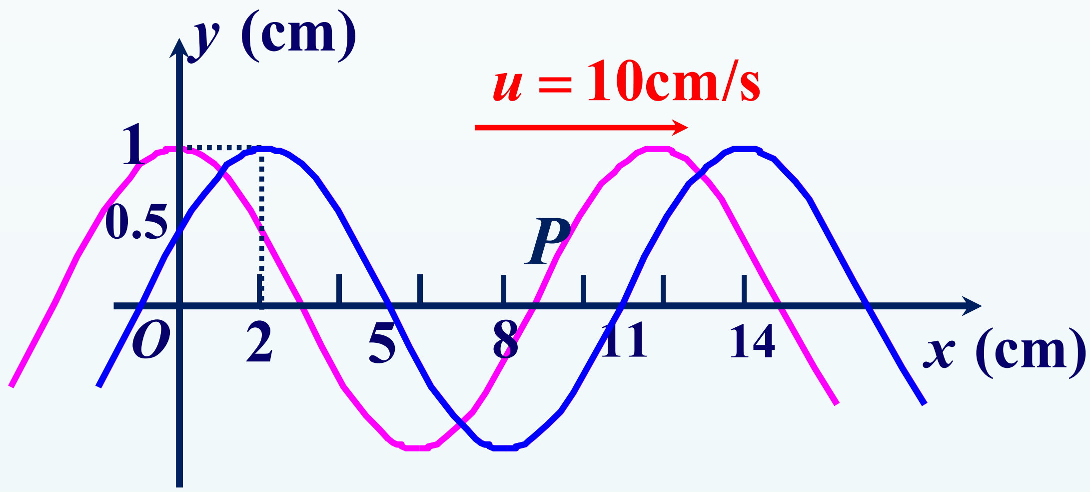
根据t=0.2 s时的波形曲线可得O点的相位

$$\omega t+\varphi_o=\frac{\pi}{3}\longrightarrow\frac{2\pi}{T}\frac{T}{6}+\varphi_o=\frac{\pi}{3}\longrightarrow\varphi_o=0$$

$$y_o=0.01\cos(\frac{5\pi}{3}t)\ \mathrm{m}\longrightarrow y=0.01\cos[\frac{5\pi}{3}(t-10x)]\ \mathrm{m}$$

波的传播

(4) 若图为 t=0.2 s的波形，波函数如何？



另解：t =0.2 s =T/6

波向右传播了$\dfrac{\lambda}{6}$

故，将波向左退回λ/6，可得到t=0 时的波形

从波形中可得 $\varphi_o = 0$

波函数 $y = 0.01\cos[\dfrac{5\pi}{3}(t - 10x)]\ \mathrm{m}$