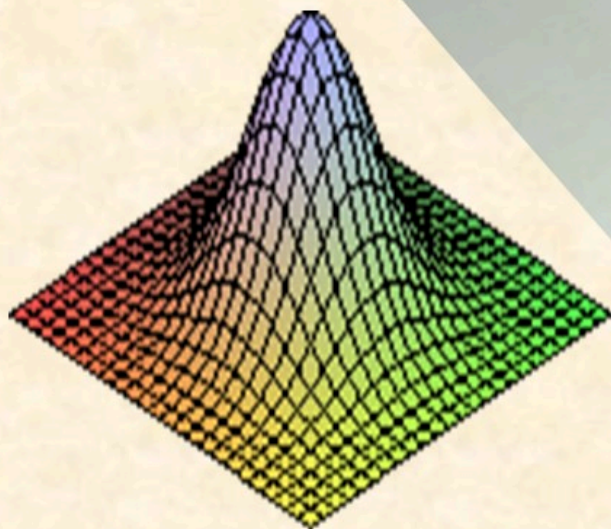


# 概率论与数理统计



主讲人：吴娟

制作人：叶鹰 吴娟

[wujuan@hust.edu.cn](mailto:wujuan@hust.edu.cn)

**Poisson定理** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda \ (\lambda > 0)$  , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

证:  $C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{np_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{n-k}$

$$= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(np_n)^k}{k!} \left[\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{-\frac{n}{np_n}}\right]^{-np_n \cdot \frac{n-k}{n}}$$
$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

应用: 设  $X \sim B(n, p)$ , 当  $n \geq 10$ ,  $p \leq 0.1$  时, 有

$$P(X = k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$$



**例** 某射手向一远处活动目标射击，其命中率 $p=0.005$ . 求他独立地射击**200**次能命中**5**次以上的概率。

解 记 $X$ 为命中次数，则 $X \sim B(200, 0.005)$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^5 C_{200}^k 0.005^k 0.995^{200-k}$$

$$P(X = k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} = 0.000564$$

注意到

$$1^0 \quad \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geq 0$$

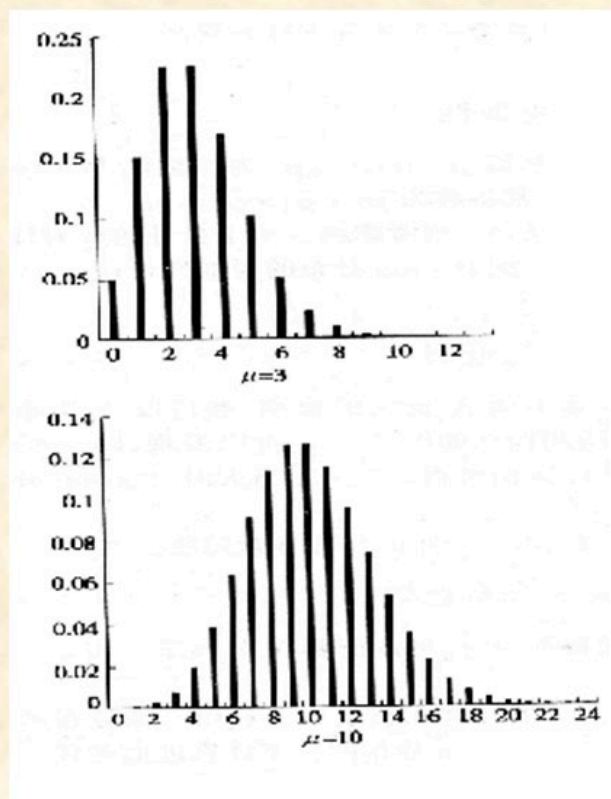
$$\approx 1 - \sum_{k=0}^5 \frac{(200 \times 0.005)^k}{k!} e^{-200 \times 0.005}$$

$$2^0 \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1$$

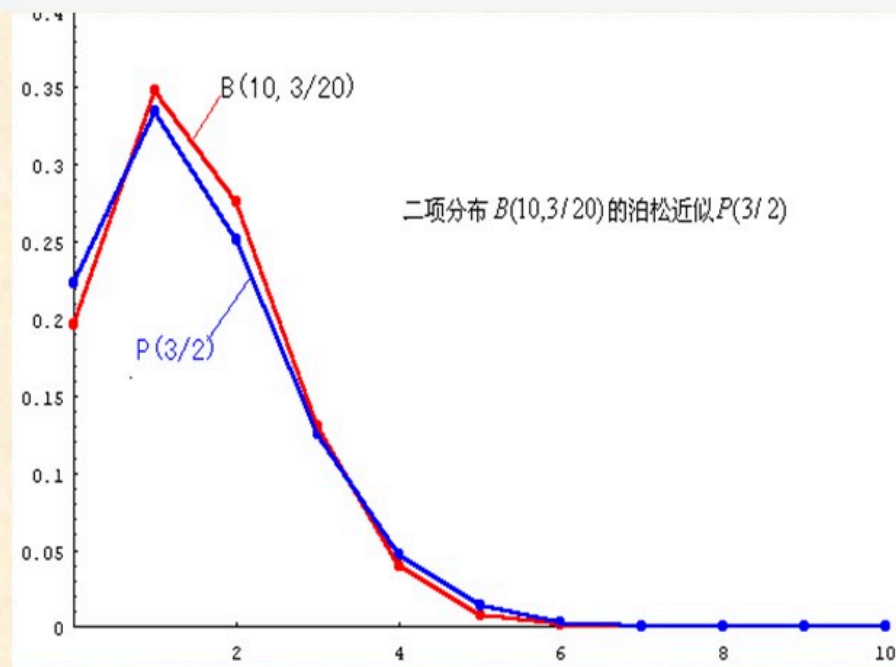
$$= \sum_{k=6}^{\infty} \frac{1^k}{k!} e^{-1} \xrightarrow{\text{查表}} 0.000594$$

### 3. 泊松 (Poisson) 分布 $X \sim P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



## 投票 最多可选1项



A

泊松近似效果好

B

泊松近似效果不好



**例** 由某商店过去的销售记录可知，某种商品每月的销售量（单位：件）可用参数为 $\lambda=5$ 的泊松分布描述。为了有99%以上的把握保证不脱销，问商店在月底至少要进货多少件？

解 记 $X$ 为该商品的月销售量（件），由题设 $X \sim P(5)$  设月底进货 $N$ 件，则不脱销的概率为

$$P(X \leq N) = \sum_{k=0}^N \frac{5^k}{k!} e^{-5} \geq 0.99$$

查表得 $N+1 \geq 12$ ，即 $N \geq 11$ 。

$x$	.....	$\lambda=4.5$	$\lambda=5.0$
$\vdots$	$\sum_{r=x}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$	$\vdots$	$\vdots$
10	.....	0.017093	0.031828
<b>11</b>	.....	0.006669	<b>0.013695</b>
<b>12</b>	.....	0.002404	<b>0.005453</b>
13	.....	0.000805	0.002019
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

## 4. 几何分布

设每次试验的“成功”率均为 $p$ ， $X$ 为进行独立试验首次“成功”的试验次数，则

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad k=1,2,\dots$$

### 几何分布的无记忆性

取正整数值的随机变量 $X$ 服从几何分布的充要条件是：

$$P(X > m + n | X > m) = P(X > n), \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

必要性：假设 $X$ 服从几何分布，则对任意的正整数 $m, n$ ，有

$$\begin{aligned} P(X > m + n | X > m) &= \frac{P(X > m + n)}{P(X > m)} = \frac{(1 - p)^{m+n}}{(1 - p)^m} = (1 - p)^n \\ &= P(X > n). \end{aligned}$$



## § 2.3 连续型随机变量

### 一、问题的提出

● 出生于元月一日零点？ ● 灯管寿命为200小时？

**例** 设飞机投弹至多命中目标一次，命中时命中点与目标的距离为半径的平方 $r^2$ 成正比，求 $X$ 的分布函数。

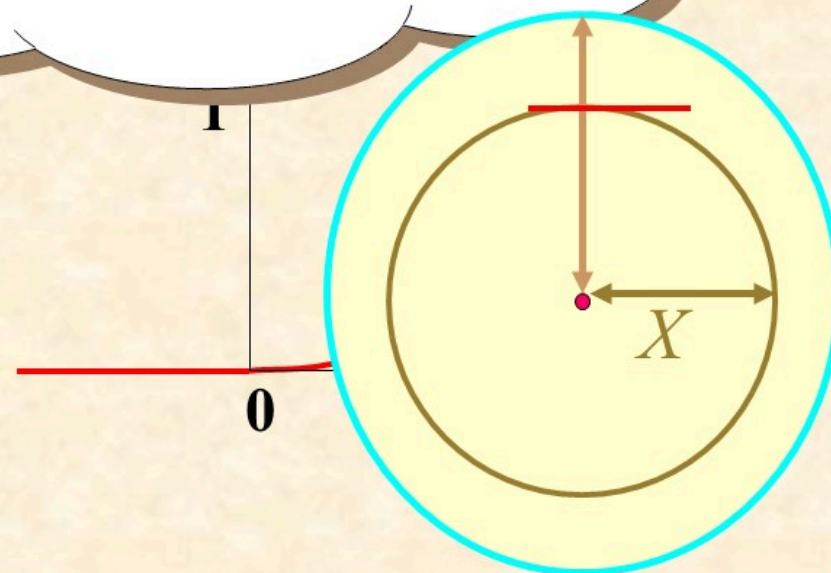
$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i \xrightarrow{\text{连续化}} \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad f(x) = \frac{1}{2}x, \quad x \geq 0.$$

解：  $F(x)$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ kx^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

且  $P(X \leq 2) = P(\Omega)$

$$\Rightarrow k2^2 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$





## 二、定义

如果对随机变量 $X$ 存在一(非负)函数 $f(x)$ , 使其分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad -\infty < x < +\infty$$

则称 $X$ 为连续型随机变量, 记为**C.R.V. (Continuous Random Variable)**, 并称 $f(x)$ 为 $X$ 的概率密度函数。

## 三、性质

(1) C.R.V.的分布函数 $F(x)$ 为连续函数;

$$P(X = a) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{证: } 0 \leq P(X = a) &= F(a) - F(a-) \\ &\leq P(a - \Delta x < X \leq a) \\ &= \int_{a-\Delta x}^a f(t)dt \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

下列选项正确的是：

A  $P(A) = 0 \Rightarrow A = \phi$

B  $A = \phi \Rightarrow P(A) = 0$

C  $P(B) = 1 \Rightarrow B = \Omega$

D  $B = \Omega \Rightarrow P(B) = 1$



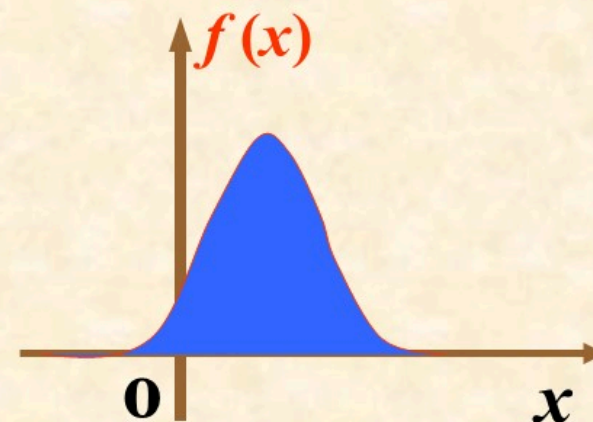
$$(2) P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

(3) 若  $f(x)$  在  $x$  处连续, 则  $F'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$P\{x < X \leq x + \Delta x\} \approx f(x) \Delta x$$

$$(4) \quad f(x) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



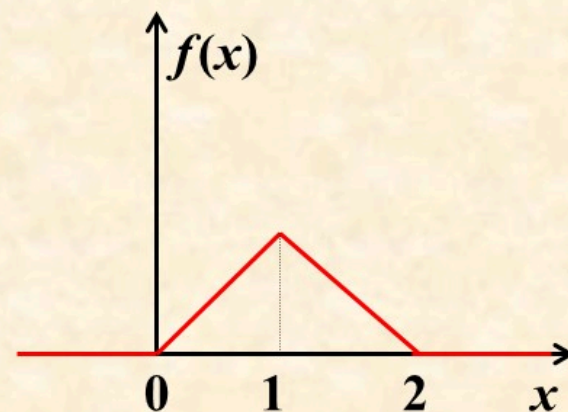
例 设 $X$ 的密度函数 
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ A - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求 (1) 常数 $A$ ; (2)  $P(-1 < X < 3/2)$ ; (3)  $F(x)$ .

解 (1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (A - x) dx = A - 1 = 1 \Rightarrow A = 2$

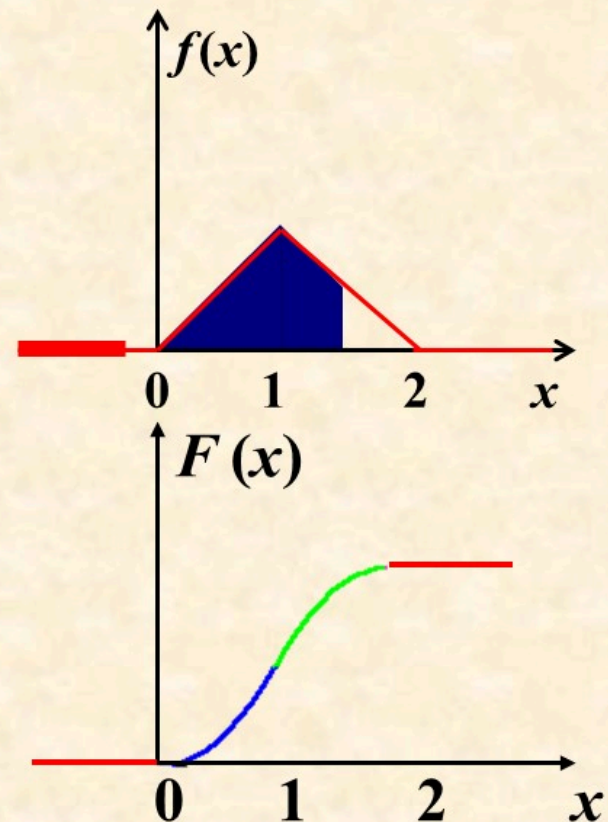
$$\begin{aligned} (2) \quad P(-1 < X < \frac{3}{2}) &= \int_{-1}^{3/2} f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^{3/2} (2 - x) dx \\ &= \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$





$$(3) \quad F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x f(x)dx = 0, & x < 0 \\ \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_0^x xdx = \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \int_0^1 xdx + \int_1^x (2-x)dx \\ \quad = 1 - \frac{1}{2}(2-x)^2 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$



**例** 设 $X$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

**注意：** $F(x)$ 在1处导数不存在