# Stolz定理

**Stolz定理，$\frac{\infty}{\infty}$型**

设$\{b_n\}$是严格递增且趋于$+\infty$的数列，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A,$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

其中 $A\in\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\pm\infty.$

**例**

设$\lim_{n\to\infty}a_n=a$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

**例**

举例说明Stolz定理的逆命题不成立。

**Stolz定理，$\frac{0}{0}$型**

设$\{a_n\}$是趋于0的数列，$\{b_n\}$是严格递减且趋于0的数列，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A,$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

其中 $A\in\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\pm\infty.$

# 函数的极限

## 极限过程$x \to +\infty$

设函数$f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$，$A \in \mathbb{R}$。如果对任意$\epsilon > 0$，存在$M$，使得当$x > M$时，$|f(x) - A| < \epsilon$。则称函数$f(x)$ 当$x$趋于$+\infty$时极限存在，且极限为$A$。记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A(x \to +\infty).$$

## 注

- 试与数列极限的定义做比较；
- $\epsilon$的任意性，$M$依赖于$\epsilon$的选取；
- “当$x \to +\infty$时，$f(x)$不存在极限”的数学描述；
- 定义$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$；
- 当$x \to +\infty$时，$f(x)$的敛散性与$f$在有限区间$[a,a']$上的定义无关

## 极限过程$x \to -\infty$

设函数$f\colon (-\infty, a] \to \mathbb{R}$，$A \in \mathbb{R}$。如果对任意$\epsilon > 0$，存在$M$，使得当$x < M$时，$|f(x) - A| < \epsilon$。则称函数$f(x)$ 当$x$趋于$-\infty$时极限存在，且极限为$A$。记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to -\infty).$$

## 极限过程$x \to \infty$

设函数$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$A \in \mathbb{R}$。如果对任意$\epsilon > 0$，存在$M$，使得当$|x| > M$时，$|f(x) - A| < \epsilon$。则称函数$f(x)$ 当$x$趋于$\infty$时极限存在，且极限为$A$。记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to \infty).$$

**注**

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\lim_{x\to+\infty} f(x) = A) \wedge (\lim_{x\to-\infty} f(x) = A)$

**例 (证明)**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

**例 (证明)**

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty.$$

**例 (证明)**

$\lim_{x\to\infty} \sin x$不存在。

## 极限过程 $x \to x_0$

设$x_0 \in \mathbb{R}$，函数$f$ 定义在$x_0$的某个空心邻域$U^\circ(x_0, \delta)$内，$A \in \mathbb{R}$。如果对于任何$\epsilon > 0$，都存在$\delta_1 > 0(\delta_1 < \delta)$，使得
当$0 < |x - x_0| < \delta_1$时，成立$|f(x) - A| < \epsilon$。则称当$x \to x_0$时，函数$f(x)$极限存在，极限为$A$。记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A(x \to x_0).$$

## 注

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U^\circ(x_0, \delta), |f(x) - A| < \epsilon$;
- $f$在$x_0$处的极限描述的是$f$在$x_0$附近的行为;
- 定义中要求$x \neq x_0$，$f$在$x_0$处是否有极限以及极限值与$f$在$x_0$处是否有定义、取值是多少无关。

## 例

计算$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ 在$x=0$处的极限。

## 极限过程 $x \to x_0^+$，右极限

设$x_0 \in \mathbb{R}$，函数$f$ 定义在$x_0$的某个右空心邻域$U_+^\circ(x_0,\delta)$内，$A \in \mathbb{R}$。如果对于任何$\epsilon > 0$，都存在$\delta_1 > 0(\delta_1 < \delta)$，使得当$x_0 < x < x_0 + \delta_1$时，成立$|f(x) - A| < \epsilon$。则称当$x \to x_0^+$时，函数$f(x)$右极限存在，右极限为$A$。记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0+0) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A(x \to x_0^+).$$

## 极限过程 $x \to x_0^-$，左极限

设$x_0 \in \mathbb{R}$，函数$f$ 定义在$x_0$的某个左空心邻域$U_-^\circ(x_0,\delta)$内，$A \in \mathbb{R}$。如果对于任何$\epsilon > 0$，都存在$\delta_1 > 0(\delta_1 < \delta)$，使得当$x_0 - \delta_1 < x < x_0$时，成立$|f(x) - A| < \epsilon$。则称当$x \to x_0^-$时，函数$f(x)$左极限存在，左极限为$A$。记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0^-).$$

## 注

- 左右极限统称为单侧极限；
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$。

## 例

计算函数$\mathrm{sgn}(x), D(x), R(x)$的单侧极限。

证明 $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n \quad (n\in\mathbb{N})$。

函数$f$有六种极限过程：

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x), & \lim\limits_{x\to-\infty} f(x), & \lim\limits_{x\to\infty} f(x), \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x), & \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), & \lim\limits_{x\to x_0} f(x). \end{array}$$

下面以极限过程$x\to x_0$为例，讨论极限的性质。

**唯一性**

如果函数$f$在$x_0$处存在极限，那么极限是唯一的。

### 局部有界性

如果函数$f$在$x_0$处存在极限，那么存在$x_0$的一个空心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，在该邻域上$f(x)$有界。

### 极限过程和序关系

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$，且$a<b$。那么存在$x_0$的一个空心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，在该邻域上$f(x)<g(x)$。

特别地，令$g(x)=0$。我们得到：
如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$，那么存在$x_0$的一个空心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，在该邻域上$f(x)<0$;
如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$，那么存在$x_0$的一个空心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，在该邻域上$f(x)>0$;

**推论：局部保号性**

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$，如果存在$x_0$的一个空心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，在该邻域上

- $f(x)<g(x)$，那么$a\le b$;
- $f(x)\le g(x)$，那么$a\le b$;
- $f(x)>g(x)$，那么$a\ge b$;
- $f(x)\ge g(x)$，那么$a\ge b$;

## 极限过程和四则运算

函数$f(x)$ 和$g(x)$在$x_0$处存在极限，那么

- $f \pm g$在$x_0$处有极限，且
$$\lim_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x);$$
- $f \cdot g$在$x_0$处有极限，且
$$\lim_{x\to x_0}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$
- 如果 $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$，那么$\dfrac{f}{g}$在$x_0$处有极限，且
$$\lim_{x\to x_0}(\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)};$$

### 极限过程和复合运算

设$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$，且在$x_0$的某个空心邻域上$g(x) \neq y_0$。设$\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A$,那么复合函数$f\circ g$在$x_0$处收敛，极限为$A$。即

$$\lim_{x\to x_0} (f\circ g)(x) = \lim_{y\to y_0} f(y) = A.$$

### 注

计算$\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]$的问题，可以通过变量替换$y = g(x)$，化为求$\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$的极限问题，其中$y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

### 例

计算

$$\lim_{x\to x_0} P(x), \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中$P(x), Q(x)$是多项式函数。

### Heine 定理，数列极限和函数极限的关系

函数$f$在$x_0$处收敛，当且仅当任意数列$\{x_n\}$满足$x_n \neq x_0$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，数列$\{f(x_n)\}$收敛。

### 注

定理中$f(x)$在$x_0$处收敛于$A$，当且仅当任意数列$\{x_n\}$满足$x_n \neq x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，数列$\{f(x_n)\}$收敛于$A$。

### Heine定理的应用

- 证明函数极限和四则运算的关系；
- 通常用来证明函数不收敛，e.g. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$不存在。

### 单调函数极限存在准则

设$f$是$(a,b)$上单调递增函数，那么

- 如果函数$f$无上界，那么 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$;
- 如果函数$f$有上界，那么 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{(a,b)} f(x)$。

### 迫敛性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，且在$x_0$的某空心邻域上$f(x) \le h(x) \le g(x)$, 那么 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$。

### 两个常用的极限

$\lim\limits_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

### 例

计算
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-2})^x$$

### Cauchy收敛准则

极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是对于任何$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，对任何$x_1,x_2\in U^\circ(x_0,\delta)$，成立 $|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$。

### 注

- 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$不存在$\Leftrightarrow \exists\epsilon>0,\forall\delta>0,\exists x_1,x_2\in U^\circ(x_0,\delta)$ 成立 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\epsilon$;
- 敛散性的判定不需要事先知道极限值。

利用极限理论定义指数函数、对数函数和幂函数。

## 定义指数函数$y=a^x$，$(a>1, x\in\mathbb{R})$，参考《数学分析》卓里奇

1. 在自然数集$\mathbb{N}$ 上定义$y=a^x$,并且有$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;
2. 将指数函数推广到整数集上，并且有$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;
3. 当$a>0, n, k\in\mathbb{N}$时，$a$有唯一的$n$次算术根，即存在唯一的$x>0$，满足$x^n=a$，由此将指数函数推广到有理数集上;
4. 对于$x, y>0$，由归纳原理验证，
   当$n\in\mathbb{N}$时，$(x<y)\Leftrightarrow(x^n<y^n)$;
   特别地，$(x=y)\Leftrightarrow(x^n=y^n)$.
5. 证明在有理数集上指数函数是良好定义的，即
   $\forall k, m, n\in\mathbb{Z}, n\neq 0, a^{mk/nk}=a^{m/n}$;
   对任意有理数$r_1.r_2\in\mathbb{Q}$，成立 $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$;

6. 当$r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$时，$(r_1 < r_2) \Leftrightarrow (a^{r_1} < a^{r_2})$;
7. 证明对于$r_0 \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{\mathbb{Q} \ni r \to r_0} a^r = a^{r_0}$.

**Summary**

至此，我们在$\mathbb{Q}$上定义了具有以下性质的函数$a^r$:

i. $a^1 = a > 1$;
ii. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;
iii. 当$r_1 < r_2$时， $a^{r_1} < a^{r_2}$;
iv. 当$\mathbb{Q} \ni r_1 \to r_2$时，$a^{r_1} \to a^{r_2}$.

接下来我们将其延拓到整个实数轴上。

8. 设$x \in \mathbb{R}$，$s = \sup\limits_{\mathbb{Q} \ni r < x} a^r, i = \inf\limits_{\mathbb{Q} \ni r > x} a^r$，那么$s = i$。我们定义$a^x = s = i$；
9. 证明$a^x = \lim\limits_{\mathbb{Q} \ni r \to x} a^r$；
10. 对于任何$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，$(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (a^{x_1} < a^{x_2})$；
11. 对于任何$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，都有$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$；
12. $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$；
13. $y = a^x$的值域是整个实数集；
14. 在$0 < a < 1$的情况下，可以类似地构造指数函数$y = a^x$。

## Summary

当$a > 0, a \neq 1$时，我们在实数集$\mathbb{R}$上构造了实值函数$x \mapsto a^x$，它具有以下性质：

i. $a^1 = a$;
ii. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$;
iii. 当$x \to x_0$时，$a^x \to a^{x_0}$;
iv. 如果$a > 1$，则$(a^{x_1} < a^{x_2}) \Leftrightarrow (x_1 < x_2)$,
如果$0 < a < 1$，则$(a^{x_1} > a^{x_2}) \Leftrightarrow (x_1 < x_2)$;
v. 函数$x \mapsto a^x$的值域是$\mathbb{R}_+$。

## 指数函数

映射$x \mapsto a^x$称为以$a$为底的指数函数。当$a = e$时，函数特别常见，常记作$\exp x$，因此，函数 $x \mapsto a^x$有时也记作$\exp_a x$。

## 对数函数

映射$\exp_a\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$的逆映射称为以$a$（$0<a\neq 1$）为底的对数函数或者对数，记作

$$\log_a\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}.$$

以$a=e$为底的对数函数称为自然对数，记作：

$$\ln\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}.$$

对数函数和指数函数互为反函数，对任意$x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}_+$，我们有

$$\log_a(a^x)=x,\quad a^{\log_a y}=y.$$

## 对数函数的性质

1. $\log_a a = 1$;
2. $\log(y_1 \cdot y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$;
3. 当$\mathbb{R}_+ \ni y \to y_0 \in \mathbb{R}_+$时，$\log_a y \to \log_a y_0$;
4. 当$a > 1$时，$(\log_a y_1 < \log_a y_2) \Leftrightarrow (y_1 < y_2)$,
   当$0 < a < 1$时，$(\log_a y_1 > \log_a y_2) \Leftrightarrow (y_1 < y_2)$;
5. 函数$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$的值域时整个实数集$\mathbb{R}$。

## 对数的性质

对于任何$b > 0, \alpha \in \mathbb{R}$，成立$\log_a(b^\alpha) = \alpha \log_a b$。

## Corollary

对于任意$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a > 0$，成立$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$。

## 幂函数

如果认为$1^\alpha = 1$，那么对于任何$x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$，都定义了$x^\alpha$。
在整数集$\mathbb{R}_+$上定义的函数$x \mapsto x^\alpha$称为幂函数，数$\alpha$称为幂指数。

易见

$$x^\alpha = a^{\log_a(x^\alpha)} = a^{\alpha \log_a x}.$$

### 无穷小，以极限过程$x \to x_0$为例

设$f$是定义在$x_0$的某个空心邻域上的函数，如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称函数$f$是$x \to x_0$时的无穷小，记为$f(x) = o(1) \quad (x \to x_0)$。

### 注意

- 无穷小依赖于极限过程；
- $o(1)$是极限值为0的一类函数，“$=$”应理解为“属于”

### 例

当$x \to 0$时，$\sin x = o(1), \tan x = o(1)$。

## 注

- 相同极限过程的无穷小的和差积仍然是无穷小:

$$o(1) \pm o(1) = o(1), \quad o(1) \cdot o(1) = o(1);$$

- 无穷小量不是很小的量，只是极限为0的量；
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \beta \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \beta) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \beta$是$x \to x_0$时的无穷小$\Leftrightarrow f(x) = \beta + \alpha(x)$ 其中$\alpha(x) = o(1) \quad (x \to x_0)$

## 有界量

如果$f$在$x_0$的某个空心邻域上，则称$f$是$x \to x_0$的有界量，记为$f = O(1)$。

## 注

- 有界量不一定有极限；
- 有界量的和差积仍然是有界量：

$$O(1) \pm O(1) = O(1), \quad O(1) \cdot O(1) = O(1);$$

- 无穷小量是有界量，无穷小量和有界量的积是无穷小量：

$$o(1) = O(1), \quad o(1) \cdot O(1) = o(1).$$

## 无穷小量的比较

设$f,g$是$x\to x_0$时的无穷小量：

1. 如果在$x_0$附近，$f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$，其中$\alpha(x)$是$x\to x_0$时的无穷小量，则称$x\to x_0$时，$f$是比$g$更高阶的无穷小，或$g$是比$f$更低阶的无穷小。记作$f=o(g)\quad(x\to x_0)$；
2. 如果在$x_0$附近，$f(x)=\beta(x)\cdot g(x)$，其中$\beta(x)$是$x\to x_0$时的有界量，则记$f=O(g)\quad(x\to x_0)$；
3. 如果$f=O(g)$ 且 $g=O(f)$，即存在$a,b>0$，在$x_0$附近有$a|g(x)|\le|f(x)|\le b|g(x)|$，则称$x\to x_0$时 $f,g$是同阶无穷小；

   特别地，如果$g$在$x_0$附近不为0，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\gamma\neq 0$，那么$f,g$是同阶无穷小；
4. 如果在$x_0$附近，$f(x)=\gamma(x)\cdot g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\gamma(x)=1$，则称当$x\to x_0$时，$f$和$g$是等阶无穷小，记作$f\sim g$。

## 注

1. 如果在$x_0$附近$g(x)\neq 0$，那么当$x\to x_0$，
$$f=o(g)\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=o(1);$$
2. 如果在$x_0$附近$g(x)\neq 0$，那么当$x\to x_0$，
$$f=O(g)\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=O(1);$$
3. $g\cdot o(f)=o(f\cdot g), g\cdot O(f)=O(f\cdot g)$;
4. $f\sim g\Leftrightarrow f=g+o(g)$;
5. 等阶关系是等价关系；

## 常见的等阶关系

1. 当$x\to 0$时，$x\sim \sin x\sim \tan x\sim \ln(x+1)\sim e^x-1$;
2. 当$x\to 0$时，$1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2$

**例 (等阶替换)**

计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

**无穷大**

设函数$f$在$x_0$的某个空心邻域上有定义，

1. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称函数$f$是$x\to x_0$时的无穷大；
2. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$，则称函数$f$是$x\to x_0$时的正无穷大；
3. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$，则称函数$f$是$x\to x_0$时的负无穷大；

## 注

- 无穷大不是很大的数，而是有非正常极限的函数；
  若$f$是$x \to x_0$时的无穷大，那么$f$在$x_0$附近无界，反之不一定成立；
- 若$f$ 在$x_0$附近不为0，那么$f$是$x \to x_0$时的无穷大当且仅当$1/f$是$x \to x_0$时的无穷小。

## 无穷大的比较

设, $g$是$x \to x_0$时的无穷大：

1. 如果在$x_0$附近，$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$，其中$\alpha(x)$是$x \to x_0$时的无穷小量，则称$x \to x_0$时，$f$是比$g$更低阶的无穷大，或$g$是比$f$更高阶的无穷大。记作$f = o(g) \quad (x \to x_0)$；
2. 如果在$x_0$附近，$f(x) = \beta(x) \cdot g(x)$，其中$\beta(x)$是$x \to x_0$时的有界量，则记$f = O(g) \quad (x \to x_0)$；
3. 如果$f = O(g)$ 且 $g = O(f)$，即存在$a, b > 0$，在$x_0$附近有$a|g(x)| \leq |f(x)| \leq b|g(x)|$，则称$x \to x_0$时 $f, g$同阶无穷大；

   特别地，$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \gamma \neq 0$，那么$f, g$是同阶无穷大；
4. 如果$x_0$附近，$f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = 1$，则称当$x \to x_0$时，$f$和$g$是等阶无穷大，记作$f \sim g$。

## 例

证明:当$x \to +\infty$时，$e^x$是比多项式函数$P(x)$ 高阶的无穷大。