离散数学一（第四次作业）

1. 函数 f 是集合 A 到 B 的函数，函数 g 是集合 B 到 C 的函数，请分别说明以下论断是否正确，如正确则给出证明；如错误则给出反例：(1)如 fog 是 A 到 C 的满射，则 f 是 A 到 B 的满射; (2)如 fog 是 A 到 C 的单射，则 g 是 B 到 C 的单射; (3)如 fog 是 A 到 C 的双射，则 f 是 A 到 B 的单射，g 是 B 到 C 的满射。(30 分)

(1)错误。

假设$A=\{1,2\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{x\}$，$f(1)=a$，$f(2)=a$，$g(a)=g(b)=x$，则f不是A到B的满射，但是$f\circ g$是A到C的满射。

(2)错误。

假设$A=\{1,2\}$，$B=\{a,b,c\}$，$C=\{x,y\}$，$f(1)=a$，$f(2)=c$，$g(a)=g(b)=x$，$g(c)=y$，则$f\circ g$是A到C的单射，但是g不是B到C的单射。

(3)正确。

若f不为单射, 则$\exists a_1,a_2\in A, a_1\neq q_2$使得$f(a_1)=f(a_2)$,即$g(f(a_1))=g(f(a_2))$, 这就与g(f)是单射矛盾. 所以f单射。

另一方面, 若g不为满射, 则$\exists c\in C$使得对$\forall b\in B$有$g(b)\neq c$. 即对于$\forall a\in A$,$g(f(a))\neq c$, 这就与g(f)是满射矛盾. 所以g满射. 证毕.

2. 设函数 f,g,h 均为实数集合 R 到 R 上的函数，其中 $f(x)=x^2-2$, $g(x)=x+4$, $h(x)=x^3-1$,（1）求 fog 和 gof，并分别判断这两个复合函数是否为单射、满射和双射；（2）f,g,h 中哪些有反函数，如果有请给出相应反函数。(40 分)

(1) $f\circ g=x^2+2$

$g\circ f=x^2+8x+14$

均不是单射 满射 双射

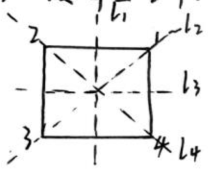
(2)函数g和函数h有反函数

$g^{-1}(y)=y-4$

$h^{-1}(y)=(x+1)^{\frac{1}{3}}$

3. 设有正方形田字格，求经过旋转和翻转能使之重合的所有置换函数。(30 分)

3. 设有正方形田字格，求经过旋转和翻转能使之重合的所有置换函数



逆时针旋转90°, 180°, 270°, 360°对应的置换为

$P_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ $P_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$ $P_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$

$P_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$

沿 l_1, l_2, l_3, l_4 翻转

$P_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ $P_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$ $P_7=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$

$P_8=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$