四种类型的问题

- 平面图形的面积；
- 利用平行截面面积求体积；
- 平面曲线的长度；
- 旋转曲面的面积。

方法：微元法

平面图形的面积

- 直角坐标系下的平面图形面积：
  $f(x)$是$[a, b]$上的非负连续函数，计算由曲线$y = f(x)$, 直线$x = a, x = b$和x轴围成的曲边梯形的面积S。

曲边梯形的面积

- 分割区间$[a,b]$：$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$;
- 设f在$[x_{i-1}, x_i]$上的最大值为M_i，最小值为m_i;
- 设区间$[x_{i-1}, x_i]$上曲边梯形的面积为S_i，则有：

$$m_i \Delta x_i \leq S_i \leq M_i \Delta x_i, \Delta_i = x_i - x_{i-1};$$

- 求和：

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq S \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i;$$

- 令$\|T\| \to 0$取极限：

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

问题

f_1, f_2是$[a,b]$上的连续函数，且$f_1(x) \geq f_2(x)$，
计算由曲线$y = f_1(x), y = f_2(x)$和直线$x = a, x = b$所围成的图形的面积S。

计算面积S

- 不妨设在$[a,b]$上，函数f_1, f_2非负；
- 记曲线$y = f_1(x)$下方曲边梯形的面积为S_1，曲线$y = f_2(x)$下方曲边梯形的面积为S_2，则有

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx.$$

推广

- 由连续曲线$y=f(x)$，直线$x=a, x=b$以及x轴所围成区域的面积是
$$S=\int_a^b |f(x)|dx;$$
- 由两条连续曲线$y=f_1(x), y=f_2(x)$，直线$x=a, x=b$所围成区域的面积是
$$S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx.$$

例

计算抛物线$y^2=x$和$y=x^2$在第一象限所围图形的面积。

例

求由抛物线$y=x^2$和直线$x-y-2=0$所围成区域的面积。

曲线所围成的平面图形的面积：参数方程

平面曲线C：

$$C:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta$$

其中$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续可导，$\varphi'(t)\neq 0$，$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续。
则由C，直线$x=\varphi(\alpha), x=\varphi(\beta)$和$x$轴所围区域的面积：

$$S=\int_\alpha^\beta |\psi(t)\varphi'(t)|dt.$$

例

设$a, b > 0$，计算椭圆的面积：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

例

求由摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), \quad (a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴所围平面图形的面积 .

Green公式

平面封闭曲线C没有自交点，其参数方程：

$$x = x(t), y = y(t), 0 \le t \le T,$$

其中$x(t), y(t)$分段连续可微。
当参数t从0递增到T时，点$(x(t), y(t)$按逆时针方向绕曲线C一周，曲线C包围的平面图形的面积:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T x(t)y'(t)dt \\ &= -\int_0^T y(t)x'(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt. \end{aligned}$$

平面图形的面积：极坐标

曲线C：$\rho = \rho(\theta), \quad \theta \in [\alpha, \beta]$，其中$\rho(\theta)$在$[\alpha, \beta]$上连续。
则由曲线C和两条射线$\theta = \alpha, \theta = \beta$所围成的区域的面积：

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta.$$

例

计算三叶玫瑰线$\rho = a\cos 3\theta (a > 0)$ 所围区域的面积。

例

计算螺线$r = a\theta (a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$与$\theta = 0$所围区域的面积。

例

计算心形线$r = a(1 + \cos\theta) \quad (a > 0)$所围图形的面积。

利用平行截面面积求体积

$\mathbb{R}^3$中立体Ω位于两平面$x=a, x=b(a<b)$之间。
$\forall t\in[a,b]$，Ω在$x=t$上的截面面积$A(t)$是$[a,b]$上的连续函数。
则Ω的体积：

$$V=\int_a^b A(t)dt.$$

祖暅（geng四声）原理

“夫叠棊(qi二声)成立积, 缘幂势既同，则积不容异”。
Ω_A,Ω_B是两立体，位于平面$z=a,z=b$之间。
如果对于$\forall t\in[a,b]$，平面$z=t$上截面面积相等$A(t)=B(t)$。
那么两个立体的体积也相等：$V_A=V_B$。

例 (椭球体)

计算由曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$所围立体的体积。

例

求两个圆柱面$x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$所围立体的体积。

例

求椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$以及平面$z=\frac{cx}{a}, z=0$所围成立体$z\geq 0$部分的体积。

旋转体的体积

$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，Ω是由 $0 \le |y| \le |f(x)|$， $a \le x \le b$，绕x轴旋转一周得到的旋转体。

- 截面面积$A(t) = \pi f(t)$， $t \in [a,b]$；
- Ω的体积：

$$V = \pi \int_a^b f^2(t)dt.$$

例

计算底面半径为r，高为h的锥体的体积。

例

求圆$x^2 + (y-R)^2 = r^2 \quad (r < R)$绕$x$轴一周所得环状体的体积。

光滑曲线的长度

平面曲线C：

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

其中$\varphi(t), \psi(t)$是$[a, b]$上的连续可微函数。

- 曲线C的长度：

$$l = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt;$$

- 特别地，曲线$y = f(x), x \in [a, b]$的长度：

$$l = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx.$$

弧长的微分

$dl = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}dt$ 或 $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

例

求下述星型线的全长，其中$a > 0$,

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta, \\ y = a\sin^3\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

例

计算半径为r的圆的周长。

椭圆的周长

- 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\geq b>0)$的周长：
  $l=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(1-\frac{b^2}{a^2})\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$;
- 第二类不完全椭圆积分：

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}d\psi, 0\leq k\leq 1;$$

- Liouville定理：$E(k,\varphi)$不是初等函数；
- 第二类全椭圆积分：$E(k)=E(k,\frac{\pi}{2})$;
- 椭圆的周长$l=4aE(1-\frac{b^2}{a^2})$。

旋转曲面的面积

- 曲线C：
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \psi(t) \geq 0;$$
将曲线C沿x轴旋转一周，得到的旋转曲面的面积：
$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt;$$
- 特别地，若曲线C的方程为$y = f(x), x \in [a, b], f(x) \geq 0$，旋转曲面的面积：
$$S = 2\pi \int_{a}^{b} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

例

计算将圆$x^2 + (y-2)^2 = 1$绕x轴一周得到的环面的面积。

例

计算半径为r的球面的面积。