电磁学

第8章
静电场

Electrostatic Field

本篇内容

第8章　静电场

第9章　稳恒磁场

第10章　电磁感应

第8章 静电场

Chapter 8 Electrostatic Field

本章要点

- ▲静电场 电场强度
- ▲静电场的高斯定理
- ▲电势差和电势
- ▲静电场中的导体
- ▲静电场中的电介质
- ▲静电势能

一、电荷 (electric charge)

1.什么是电荷？ 电荷→ 有两种

电荷是物质的基本属性

- 质量→**引力相互作用**
- 电荷→**电磁相互作用**

2.电荷是量子化的 **(charge quantization)**

量子化：某物理量的值不是连续可取值而只能取一些分立值，则称其为**量子化**。

1906-1917年,密立根用液滴法首先从实验上证明了微小粒子带电量的变化不连续。

电荷量子

自然界物体所带电荷：

$$q = ne \begin{cases} e = 1.602\times10^{-19}\mathrm{C} \\ n = \pm1, \pm2, \pm3 \ldots \end{cases}$$

注：**宏观电磁现象中电荷的不连续性表现不出来**

3. *电量是相对论不变量*

电子加速到 $v = 0.9999999997c$

$$m = 4.0825 \times 10^4 m_0$$

但是电子的电量：$q = e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ 保持不变

4. *电荷遵从守恒定律*

(*Law of conservation of charge*)

在一个和外界没有电荷交换的系统内，正负电荷的代数和在任何物理过程中保持不变。

$$\boxed{\sum q_i = C}$$ ——电荷守恒定律

✦电荷守恒定律是物理学中普遍的基本定律

二、库仑定律

理想模型

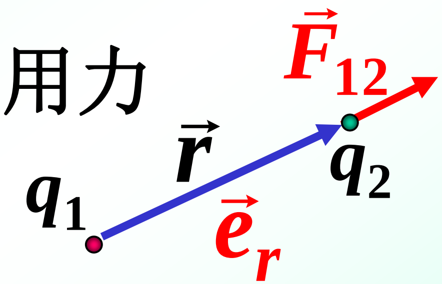
1. *库仑定律* （1785年库仑通过扭称实验得到）

真空中两个点电荷q_1, q_2之间的相互作用力为：

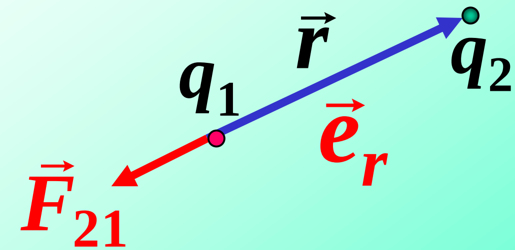
$$\boxed{\vec{F} = k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r}$$

电荷q_1对电荷q_2的作用力

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r$$



电荷q_2对电荷q_1的力 $\vec{F}_{21} = -k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r$

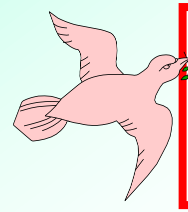


国际单位制中：$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.988\times10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$

真空中的介电常量

$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$

注：



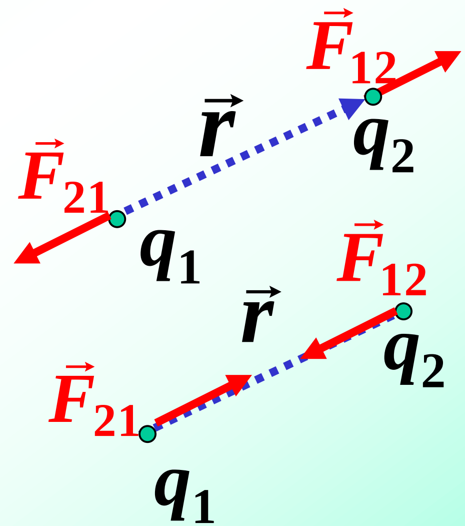
$$\boxed{\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$

1°遵从牛顿第三定律 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

2°库仑定律只适用两个**静止点电荷**

q_1、q_2 同号, 排斥力 $\vec{F} \parallel \vec{r}$

q_1、q_2 异号, 吸引力 $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{r}$



3°若q_1、q_2在介质中，介电常数 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

空气中：$\varepsilon \approx \varepsilon_0$

4°基本实验规律

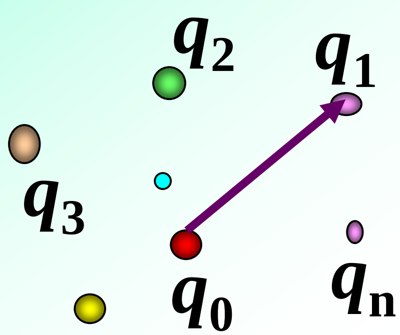
在宏观、微观领域都适用！

$$\boxed{F \propto \frac{1}{r^{2+\delta}}}$$

2. *电场力叠加原理*

实验证明：

多个点电荷存在时，任意一个点电荷受的静电力等于其它各个点电荷单独存在时对它的作用力的矢量和。



即 $$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

库仑定律

电力叠加原理

是静止电荷相互作用的基本定律

三、静电场、电场强度

Electrostatic Field Electric field strength

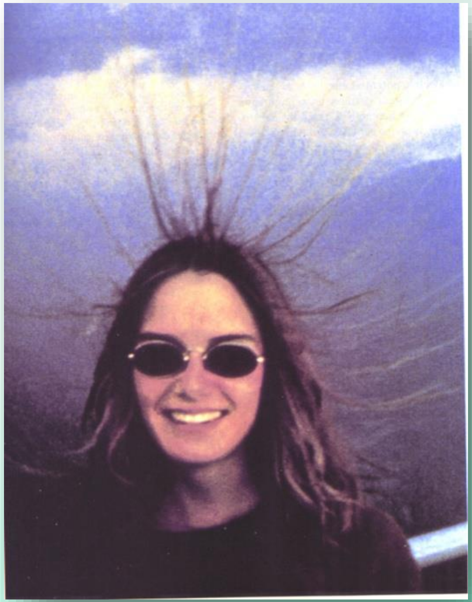
1. *电场*

库仑力如何传递?

近距作用: “以太”

不存在!

超距作用: 不需要介质、传递时间



近代物理学证明:

电荷q_1 $\rightleftarrows$ 电场 $\rightleftarrows$ 电荷q_2

F_{12}

F_{21}

电场的基本性质：

1 °对电场内的任何电荷都有作用力

2 °电场力移动电荷作功

——电场具有能量

3 °电场 $\begin{cases} \text{对导体产生静电感应现象} \\ \text{对绝缘体(电介质) 产生极化现象} \end{cases}$

静电场：

相对观察者静止的电荷激发的电场

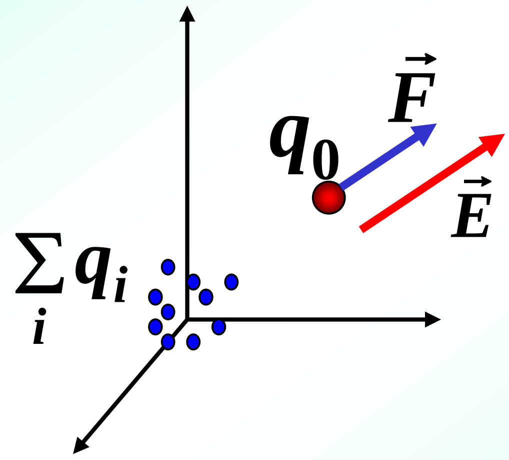
——**是电磁场的一种特殊形式**

特点： 静电场与电荷相伴而生

2. 电场强度矢量 $\vec{E}$

（1）$\vec{E}$的定义 $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$

（q_0是很小的实验点电荷）



即 $\vec{E}$ {等于单位正电荷在该处受力大小
方向为单位正电荷在该处受力方向

单位：N/C (牛顿/库仑) 或 V/m(伏特/米)

一般地

电场空间不同点的场强 $\vec{E}$ 大小方向都不同

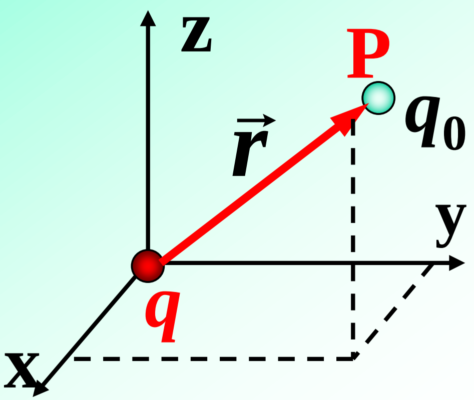
若场中各点的$\vec{E}$ 大小方向都相同 ⟶ **均匀电场**

（2）$\vec{E}$的计算

$\vec{E}$ 的定义：$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$

a. 带电粒子的电场

例1.求一带电q位于原点处的粒子的电场$\vec{E}$＝？



在任意点P放入一点电荷q_0

根据库仑定律q_0受力

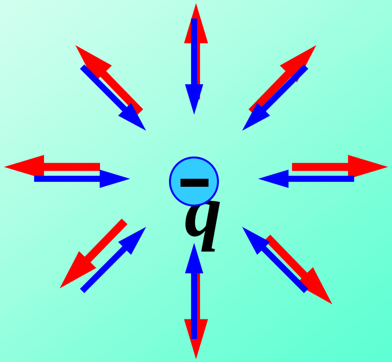
$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

P点处的场强

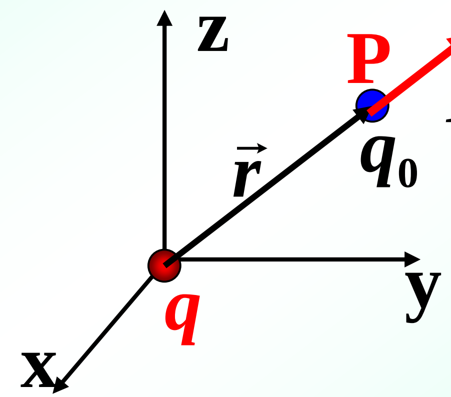
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \begin{cases} q > 0 & \vec{E} \,//\, \vec{e}_r \\ q < 0 & \vec{E} \uparrow\downarrow \vec{e}_r \end{cases}$$

电场分布特点：

1° $\vec{E}$ 的方向，处处是以 q 为中心的矢径方向（或反方向）



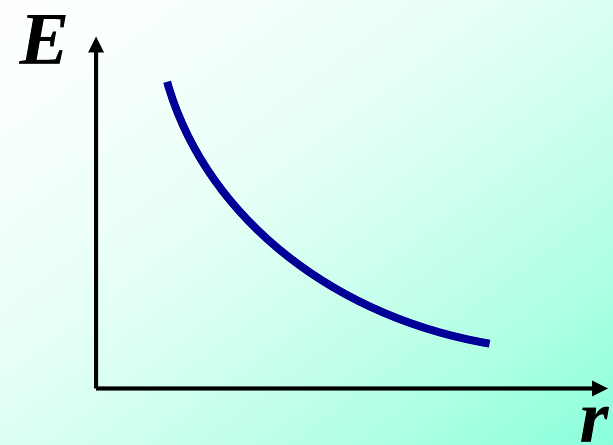
P点处的场强：$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$



电场分布特点：

2 o q 一定时，$\vec{E}$ 的大小只与r 有关；在相同 r 的球面上 $\vec{E}$ 大小相等 ——球对称电场！

3 o $E\propto\dfrac{1}{r^2}\begin{cases} r\to\infty & E\to 0 \\ \boxed{r\to 0 \quad E\to\infty} \end{cases}$ ？



4 o 电场中每一点都对应有一个矢量 $\vec{E}$，这些矢量的总体构成一个矢量场。

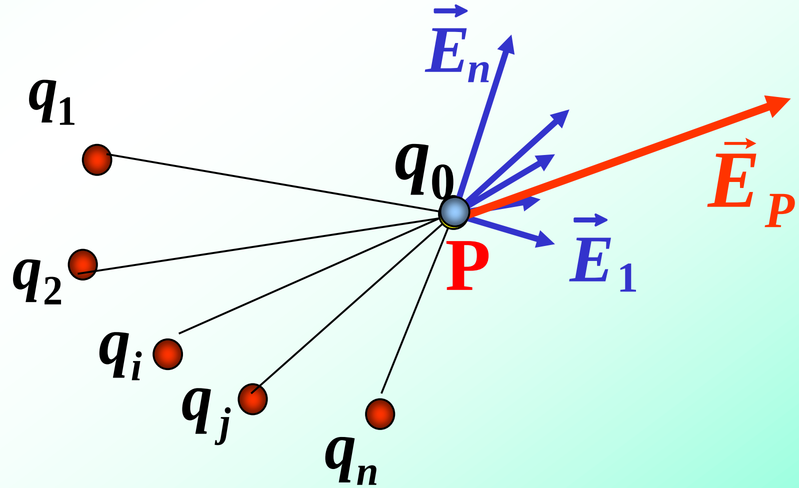
因此在研究电场时，不是只着眼于个别地方的场强，而是求它与空间坐标的矢量函数。

例2. 求点电荷系q_1、q_2、…q_n在空间任一点P处的电场强度.

解：设P点放一点电荷q_0，由电力叠加原理：

q_0受合力 $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n$

P点的电场



$$\vec{E}_P=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{\vec{F}_1+\vec{F}_2\cdots+\vec{F}_n}{q_0}$$

$$=\frac{\vec{F}_1}{q_0}+\frac{\vec{F}_2}{q_0}+\cdots\frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

$$=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n=\sum_{i=1}^{k}\vec{E}_i$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{e}_{r_i}$$

场强叠加原理

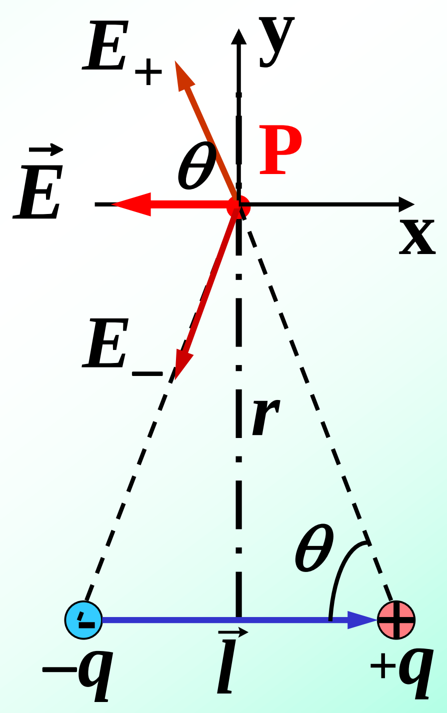
即：电场中一点的场强 = 各点电荷在该点各自产生的场强的矢量和

例3. 求电偶极子中垂线上任一点的电场强度。

电偶极子：相隔一定距离的等量异号点电荷结构

$\vec{l}$: 从负电荷到正电荷的矢量线段

$\vec{p}=q\vec{l}$ ——电偶极矩



解：$\pm q$ 在P点产生的场强

$$E_+=E_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+\frac{l^2}{4})}$$

在P点取坐标系 $E_y=0$

$$\cos\theta=\frac{\frac{l}{2}}{(r^2+\frac{l^2}{4})^{\frac{1}{2}}}$$

$$E=E_x=-2E_+\cos\theta$$

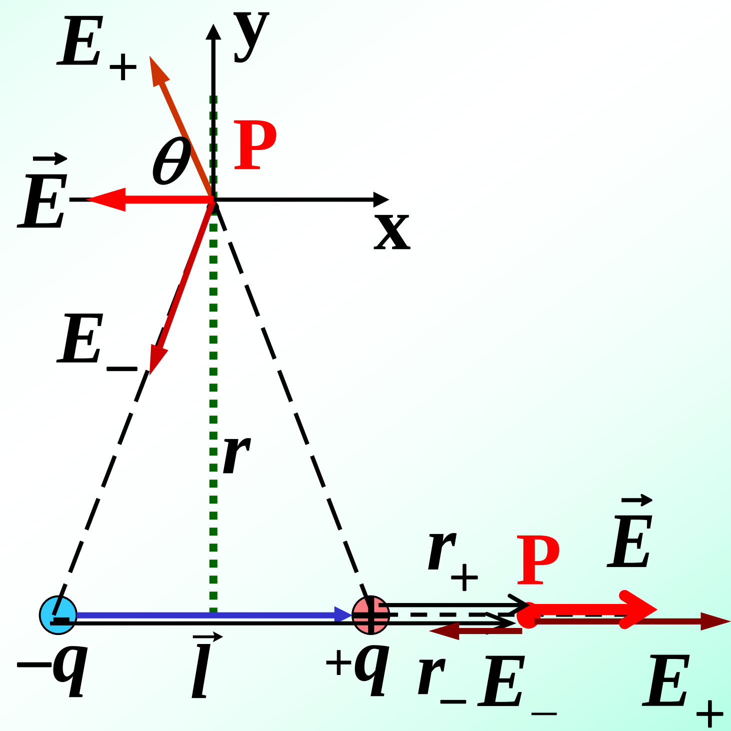
P点的场强 $E=-\dfrac{ql}{4\pi\varepsilon_0(r^2+\frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}}$ 方向沿x轴负向!

$$E=-\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

讨论

1^{o} 当 $r>>l$

$$\vec{E}=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



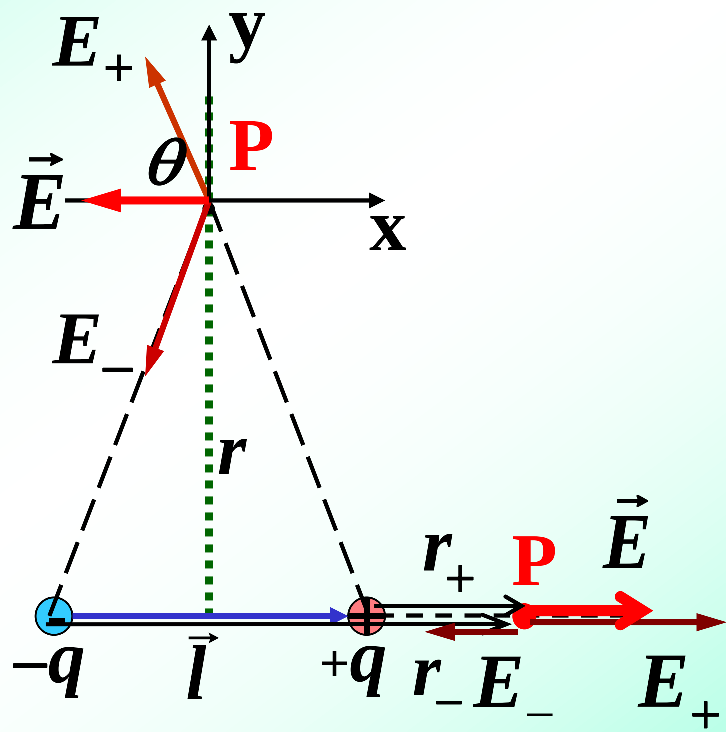
2^{o} 若P点在电偶极子连线方向上

$$E_+=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+^2}\qquad E_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-^2}$$

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-l/2)^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+l/2)^2}$$

$$r>>l\qquad \vec{E}\approx\frac{2qrl\vec{e}_l}{4\pi\varepsilon_0 r^4}=\frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E=-\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$



讨论

当 $r \gg l$

中垂线上 $\vec{E}=-\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

延长线上 $\vec{E}=\frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$

则有 E 与 r^3 成反比，比点电荷电场递减的快

3^o $E \propto p$ 若 $p=ql$ 保持不变

$q\uparrow l\downarrow$ 或 $q\downarrow l\uparrow$ E 在远处不变

$\boxed{\vec{p}=q\vec{l}}$ 是描述电偶极子属性的物理量

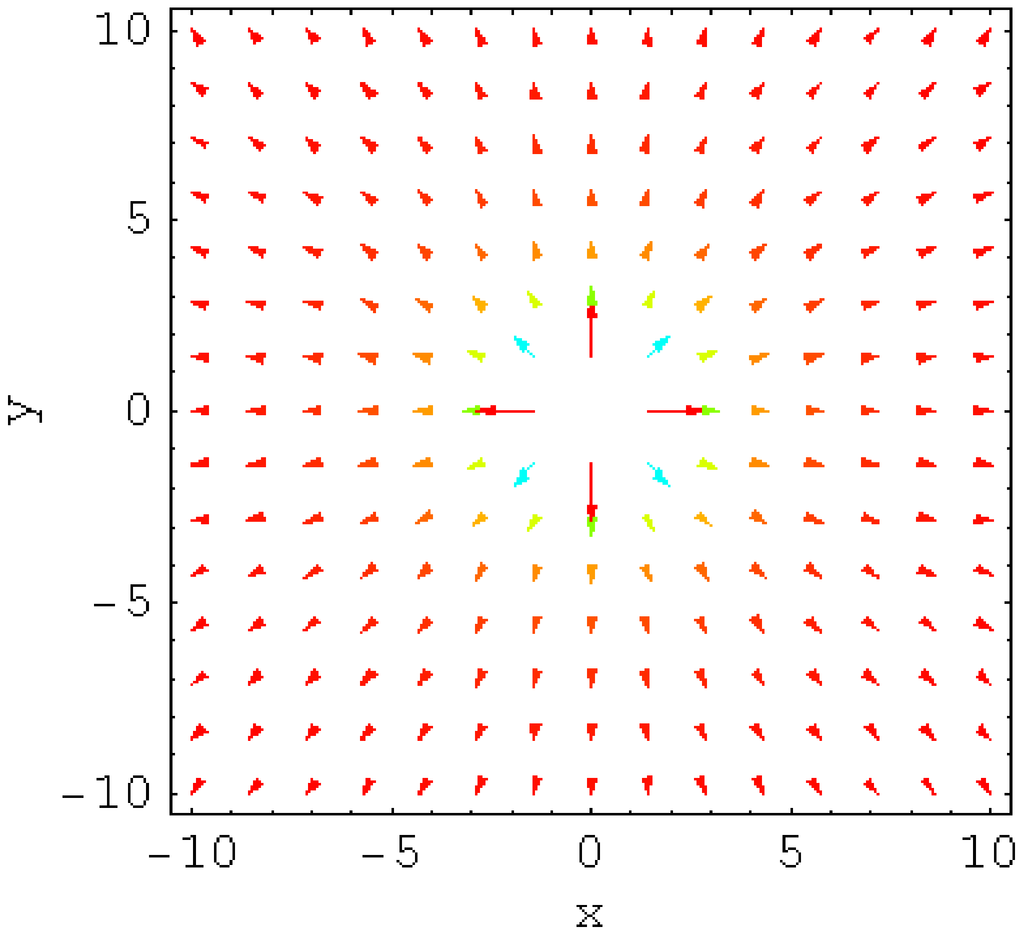
■ 点电荷的电场

```
Needs["Graphics`PlotField`"]
```

$\epsilon = 8.85 \times 10^{-12}$; $q = 10$;

$ep = \left\{\frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{q}{(x^2+y^2)^{3/2}}\times x, \frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{q}{(x^2+y^2)^{3/2}}\times y\right\}$;

```
p1 = PlotVectorField[ep, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotPoints → 15, Frame → True, ColorFunction → Hue,
    FrameLabel → {"x", "y"}, TextStyle → FontSize → 20, ImageSize → {600, 400}];
```



■ 电偶极子的电场

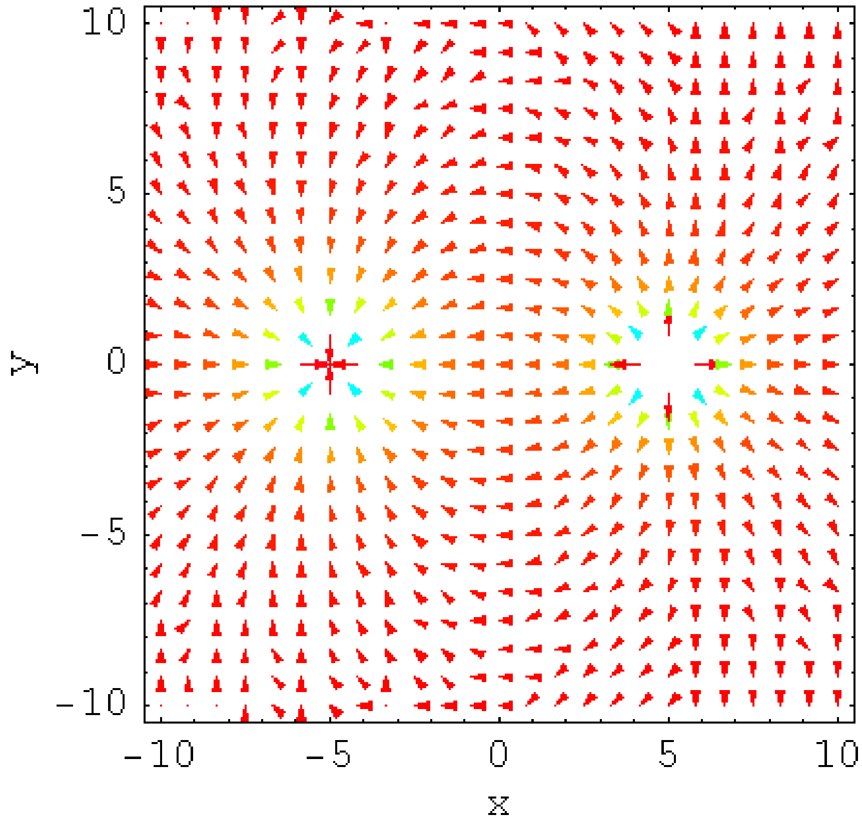
$$\epsilon = 8.85\times10^{-12};\ q = 10;\ l = 10;$$

$$ea = \left\{\frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{q}{((x-l/2)^2+y^2)^{3/2}}\times(x-l/2),\ \frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{q}{((x-l/2)^2+y^2)^{3/2}}\times y\right\};$$

$$eb = \left\{\frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{-q}{((x+l/2)^2+y^2)^{3/2}}\times(x+l/2),\ \frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{-q}{((x+l/2)^2+y^2)^{3/2}}\times y\right\};$$

$$ep = ea + eb;$$

```
PlotVectorField[ep, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotPoints → 25, Frame → True, ColorFunction → Hue, FrameLabel → {"x", "y"},
  TextStyle → FontSize → 20, ImageSize → {600, 400}, ScaleFunction → None, MaxArrowLength → Automatic, ScaleFactor → Automatic];
```



■ 四电偶极子的电场

```
Needs["Graphics`PlotField`"]
```

$\epsilon = 8.85\times10^{-12};\ q = 10;\ l = 10;$

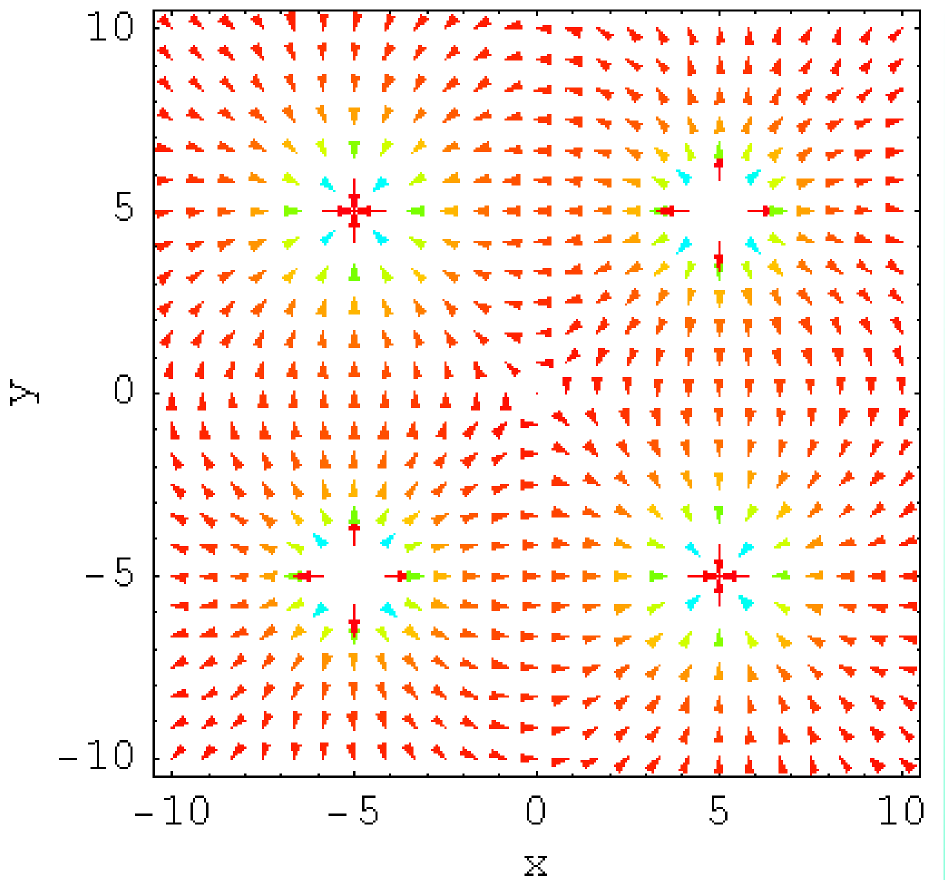
$$ea = \left\{\frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{q}{((x-l/2)^2+(y-l/2)^2)^{3/2}}\times(x-l/2),\ \frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{q}{((x-l/2)^2+(y-l/2)^2)^{3/2}}\times(y-l/2)\right\};$$

$$eb = \left\{\frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{-q}{((x+l/2)^2+(y-l/2)^2)^{3/2}}\times(x+l/2),\ \frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{-q}{((x+l/2)^2+(y-l/2)^2)^{3/2}}\times(y-l/2)\right\};$$

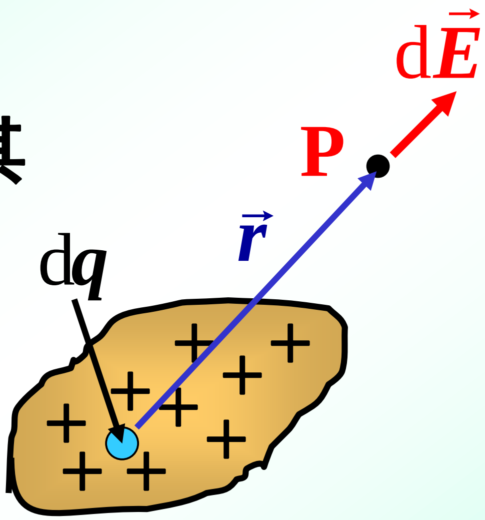
$$ec = \left\{\frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{q}{((x+l/2)^2+(y+l/2)^2)^{3/2}}\times(x+l/2),\ \frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{q}{((x+l/2)^2+(y+l/2)^2)^{3/2}}\times(y+l/2)\right\};$$

$$ed = \left\{\frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{-q}{((x-l/2)^2+(y+l/2)^2)^{3/2}}\times(x-l/2),\ \frac{1}{4\pi\times\epsilon}\times\frac{-q}{((x-l/2)^2+(y+l/2)^2)^{3/2}}\times(y+l/2)\right\};$$

```
ep = ea + eb + ec + ed;
PlotVectorField[ep, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotPoints → 25, Frame → True, ColorFunction → Hue, FrameLabel → {"x", "y"},
  TextStyle → FontSize → 20, ImageSize → {600, 400}, ScaleFunction → None, MaxArrowLength → Automatic, ScaleFactor → Automatic];
```



*b.*任意带电体的电场 $\vec{E}$ 的计算



对连续分布的带电体，可将其无限划分成许多电荷元 dq 组成

dq 在任意点P处产生的电场为

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

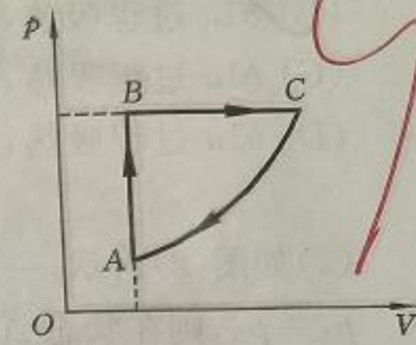
所有dq在P点产生的电场

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

矢量积分

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} \quad \begin{cases} E_x = \int \mathrm{d}E_x \\ E_y = \int \mathrm{d}E_y \\ E_z = \int \mathrm{d}E_z \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \\ |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \\ tg\alpha = \dfrac{E_y}{E_x} \cdots \end{cases}$$

10-T3 如图所示，系统从状态 A 沿 ABC 变化到状态 C 的过程中，外界有 326 J 的热量传递给系统，同时系统对外做功 126 J。如果系统从状态 C 沿另一曲线 CA 回到状态 A，外界对系统做功 52 J，则此过程中系统是吸热还是放热？传递热量是多少？



$Q_1=\Delta E+A_1 \Rightarrow \Delta E = 200(J)$

$Q_2=\underbrace{\Delta E}_{-\Delta E}+A_2 \Rightarrow Q_2 = \cancel{+148(J)}\ -252\,J$

$\therefore$ ~~吸热，148 J~~

放热 252 J

99

- 好习惯，先写公式；
- 要弄清楚谁减谁。

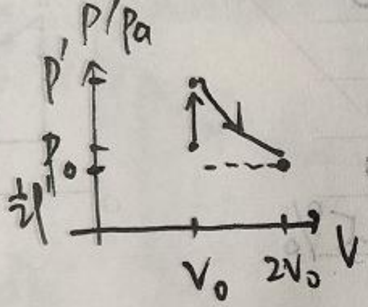
10-T4 1 mol 氢气，在压强为 1.0×10^5 Pa，温度为 20 ℃时，其体积为 V_0。今使它经以下两种过程达同一状态：

(1) 先保持体积不变，加热使其温度升高到 80 ℃，然后令它做等温膨胀，体积变为原体积的 2 倍；

(2) 先使它做等温膨胀至原体积的 2 倍，然后保持体积不变，加热到 80 ℃。

试分别计算以上两种过程中吸收的热量、气体对外做的功和内能的增量，并作出 p-V 图。

解：(1)



$\Delta E =$

$\cancel{Q = \nu C_{v,m}\Delta T = 20.78\times 60 = 1246.8\ J}$

$\cancel{A = \Delta p\cdot V_0 = \nu R\Delta T = 498.622\ J}$

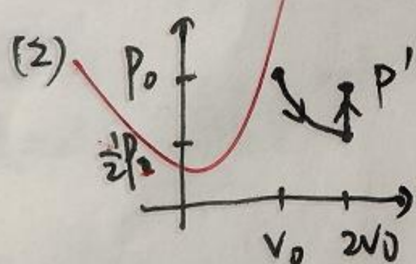
$A = RT\ln\frac{V}{V_0} = 2033\ J$

$\cancel{\Delta U = Q = 1246.8}$

$\Delta U = Q - A = 747.38\ J$

$Q = \Delta E + A = 3279\ J$

(2)



$\Delta E\ Q = \nu C_{v,m}\Delta T = 1246.8\ J$

$\cancel{A = \int_{V_0}^{2V_0}\frac{nTR}{V}dV = 1687.70\ J}$

$\cancel{\Delta U = Q - A = -440.90}\ J$

$Q = \Delta E + A = 2933\ J$

等温过程做功，
谁吸热、谁做功，
基本功！！！

(1)先保持体积不变，加热使其温度升高到 80 ℃，然后令它做等温膨胀，体积变为原体积的 2 倍；

(2)先使它做等温膨胀至原体积的 2 倍，然后保持体积不变，加热到 80 ℃。

试分别计算以上两种过程中吸收的热量、气体对外做的功和内能的增量，并作出 p-V 图。

(1) ① $C_{V,m}=\frac{iR}{2}=\frac{5R}{2}$

ΔE $dQ=\nu C_{V,m}dT \Rightarrow$ ΔE $Q_1=1\times\frac{5R}{2}\times 60=150\times 8.31=1246.5J$. $A=0$.

② $Q_2=A=\int_{V_1}^{V_2}pdV=\int_{V_0}^{2V_0}\frac{\nu RT}{V}dV=\nu RT\ln 2=\cancel{940J}\ \cancel{3442.8J}$ $T=273+80=353K$ $\cancel{4147.9}J$

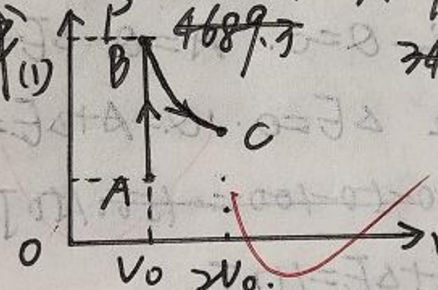
4147.9J

$A=RT\ln\frac{V}{V_0}=2033J$

$\therefore Q=Q_1+Q_2=\cancel{2186.5J}$ 5394.4J. $A=\cancel{940J}$ 4147.9J! $\Delta E=Q-A=1246.5J$

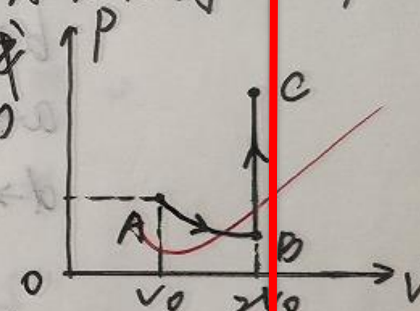
$Q=\Delta E+A=3279J$

pv曲线 (1)



~~4689.3J~~

~~3442.8~~ pv曲线 (2)



(2) $\Delta E=1246J$

$A=1687J$

$Q=\Delta E+A=2933J$

(2) ① $Q_1=A_1=\int_{V_0}^{2V_0}pdV=\int_{V_0}^{2V_0}\frac{\nu RT}{V}dV=\nu RT\ln 2=3442.8J$

② $A=0$. $C_{V,m}=\frac{5R}{2}$. $Q_2=\nu C_{V,m}\Delta T=\frac{5R}{2}\times 60=1246.5J$.

$\therefore Q=Q_1+Q_2=4689.3J$. $A=3442.8J$

$\Delta E=Q-A=1246.5J$

先分两个过程分别计算是好习惯

单位换算！！

10-T5 (1)如图(1)所示，bca 为理想气体绝热过程，$b1a$ 和 $b2a$ 是任意过程，则上述两过程中气体做功与吸收热量的情况是

(A) $b1a$ 过程放热，做负功；$b2a$ 过程放热，做负功

(B) $b1a$ 过程吸热，做负功；$b2a$ 过程放热，做负功

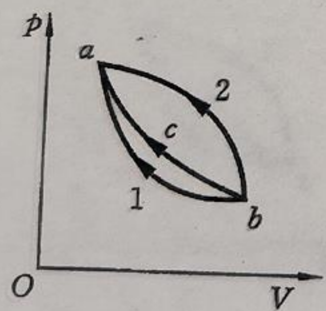
(C) $b1a$ 过程吸热，做正功；$b2a$ 过程吸热，做负功

(D) $b1a$ 过程吸热，做正功；$b2a$ 过程吸热，做正功

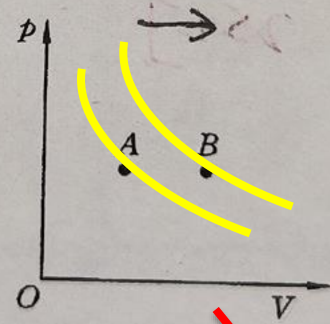
答案[A]

(2)如图(2)所示，一定量的理想气体，由平衡态 A 变到平衡态 B，且它们的压强相等，即 $p_A = p_B$，则在状态 A 和状态 B 之间，气体无论经过的是什么过程，气体必然

(A) 对外做正功　(B) 内能增加　(C) 从外界吸热　(D) 向外界放热



图(1)



图(2)

$$Q = \Delta U + W$$

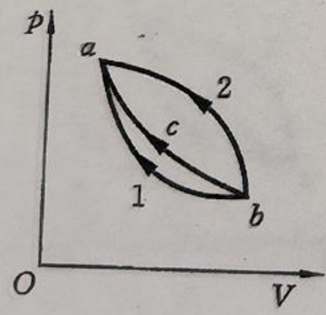
	Q	ΔU	W
bca	0	(+)	(−)
		=	<
b1a	(+)	(+)	(−)

1. 过程完全未知，不一定是准静态过程。
2. 只有ΔE是状态量，是确定的。
3. 从低等温线到高等温线。

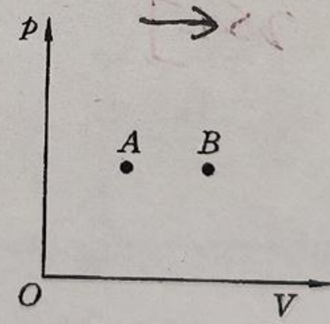
(2)如图(2)所示,一定量的理想气体,由平衡态 A 变到平衡态 B,且它们的压强相等,即 $p_A=p_B$,则在状态 A 和状态 B 之间,气体无论经过的是什么过程,气体必然

(A) 对外做正功　　(B) 内能增加　　(C) 从外界吸热　　(D) 向外界放热

C

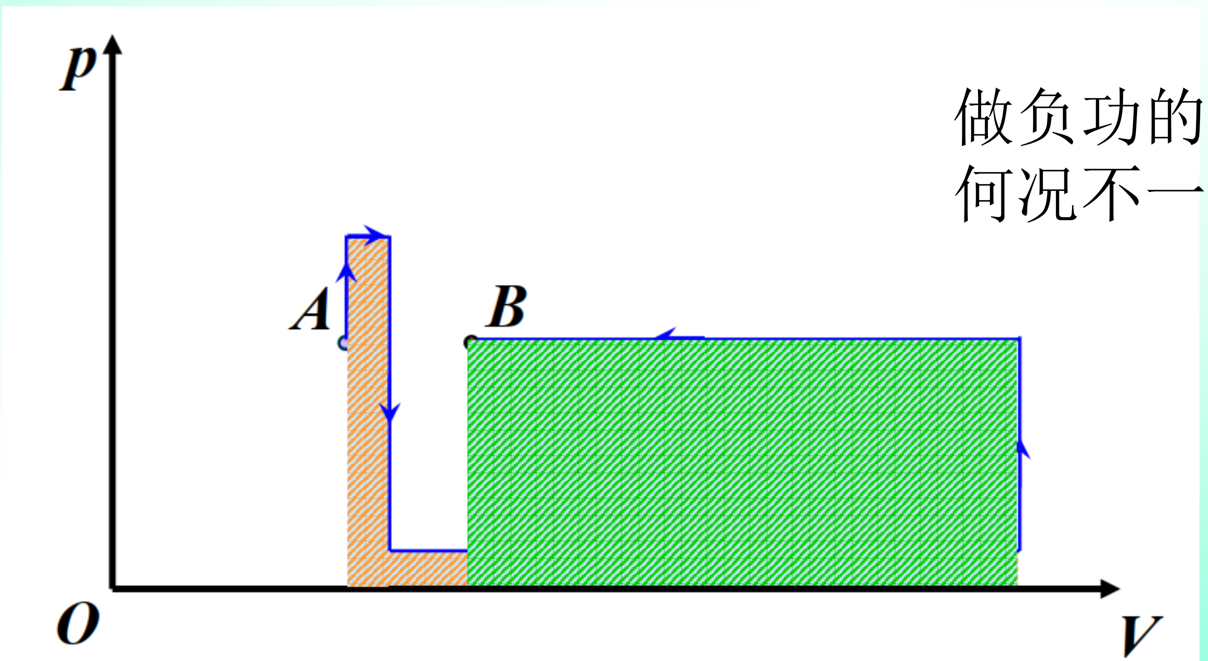


图(1)



图(2)

B



做负功的例子；

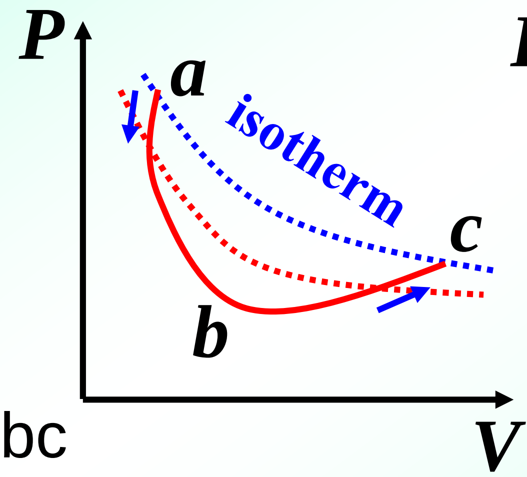
何况不一定是准静态过程。

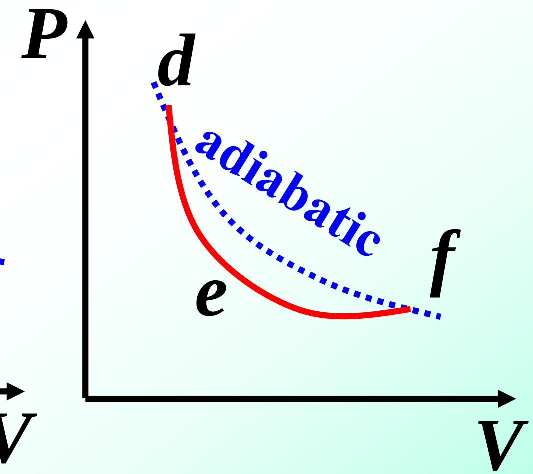
EXAMPLE 1 An ideal gas experiences different processes, abc and def as shown in the PV diagram. Determine whether the net heat flow into or out of the gas.

Solution

Process abc: $Q = \Delta U + W$

ac:	(+)	0	(+)
abc:	(+)	0	(+)





Thus through the process abc

Q >0: heat flow into the system

How does internal energy change during the process?

U is a state variable!

Process def: $Q = \Delta U + W$

df :	0	(−)	(+)	$\Delta U = -W_{df}$
		$\parallel$	$\vee$	
def :	$(\cancel{0}-)$	(−)	(+)	$W_{df} > W_{def}$

$\therefore$ **Q < 0 heat leaves the system**

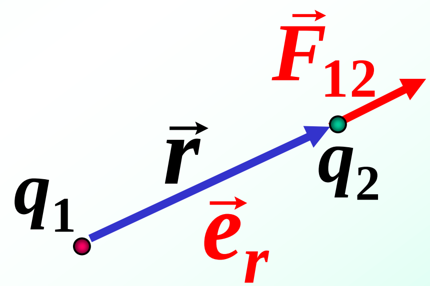
上节课的相关内容

真空中两个点电荷q_1, q_2之间的相互作用力为：

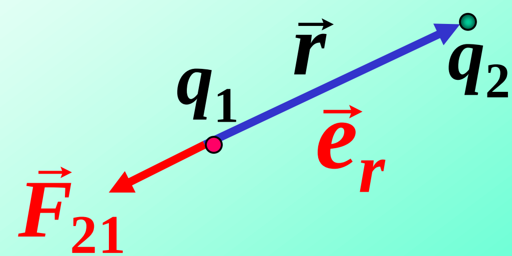
$$\boxed{\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r}$$

电荷q_2受电荷q_1的力

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$



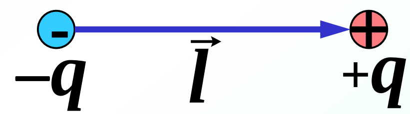
电荷q_1受电荷q_2的力 $\vec{F}_{21} = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$



上节课的相关内容

- 静电场、电场强度

定义 $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q_0}$



电偶极子

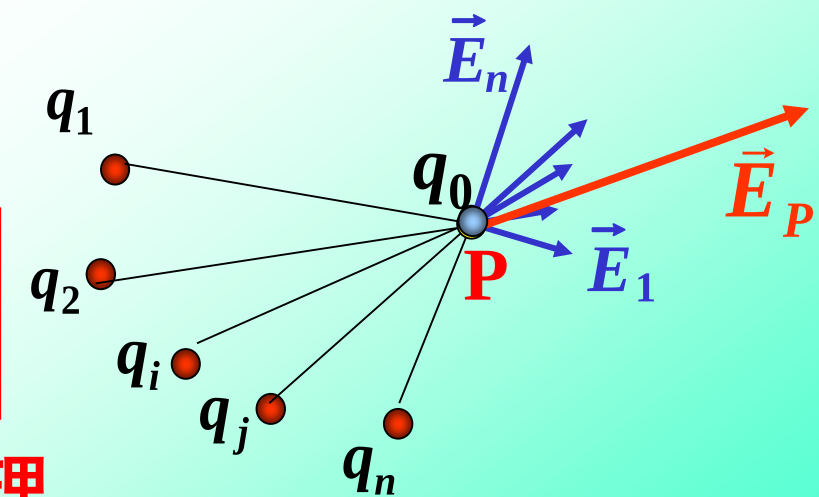
$\vec{p}=q\vec{l}$ —电偶极矩

点电荷的电场

球对称电场！

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

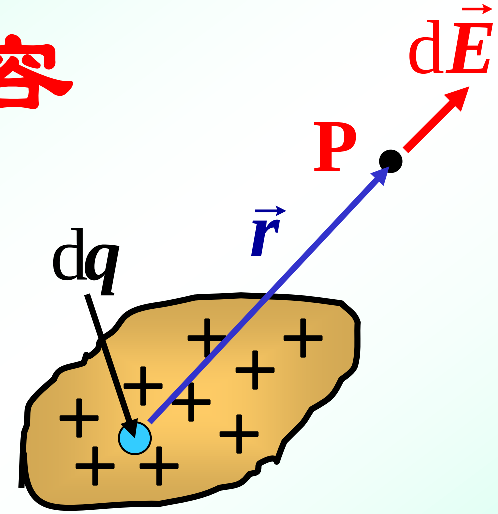
点电荷系的电场



$$\boxed{\vec{E}=\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^{\,2}}\vec{e}_{r_i}}$$

——场强叠加原理

上节课的相关内容



$\mathrm{d}q$ 在任意点P处产生的电场为

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

所有$\mathrm{d}q$在P点产生的电场

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

矢量积分

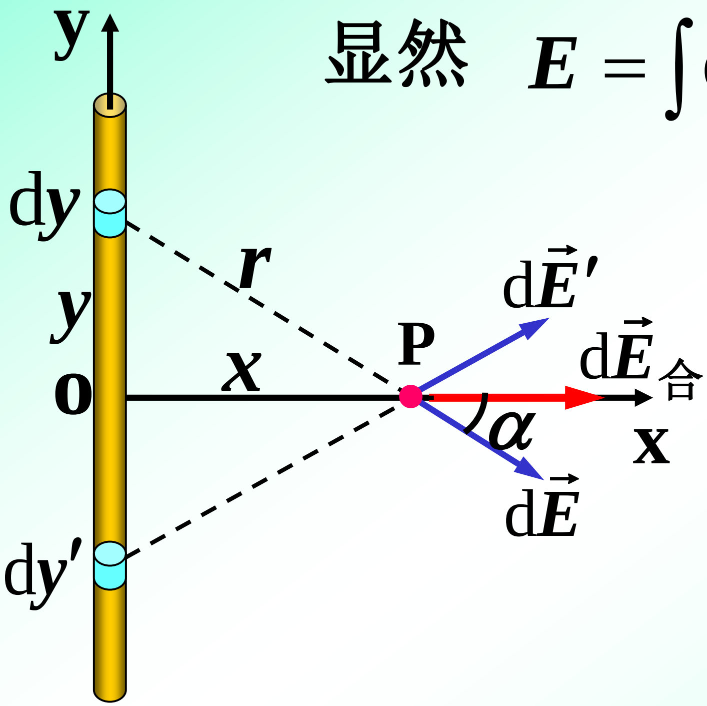
$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} \begin{cases} E_x = \int \mathrm{d}E_x \\ E_y = \int \mathrm{d}E_y \\ E_z = \int \mathrm{d}E_z \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \\ |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \\ tg\alpha = \dfrac{E_y}{E_x} \cdots \end{cases}$$

例4. 求长为L，单位长度上带电荷为λ的均匀细棒中垂面上电场分布。

$$\boxed{\vec{E}=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$

解： 设坐标系，取电荷元$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}y$

由对称性将细棒分成一对对线元$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}y'\end{array}\right.$



显然 $E=\int\mathrm{d}E_x=2\int\cos\alpha\,\mathrm{d}E$

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\lambda\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{\lambda x\mathrm{d}y}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

积分可得 $E=\dfrac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 x\sqrt{x^2+\dfrac{L^2}{4}}}$ 方向沿x轴!

$$\int_0^{L/2} \frac{\lambda x\,dy}{2\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} = \int_0^{L/2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{d\,y/x}{x\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{3/2}}$$

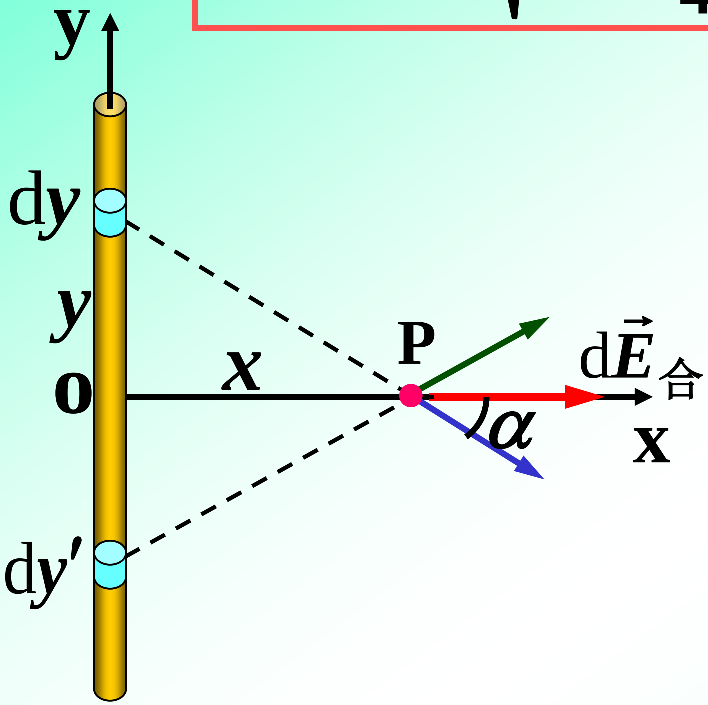
$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left.\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right|_0^{L/2}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{L/2}{x\sqrt{x^2+(L/2)^2}}$$

$$= \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 x\sqrt{x^2+L^2/4}}$$

$$E = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 x\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}}$$

讨论



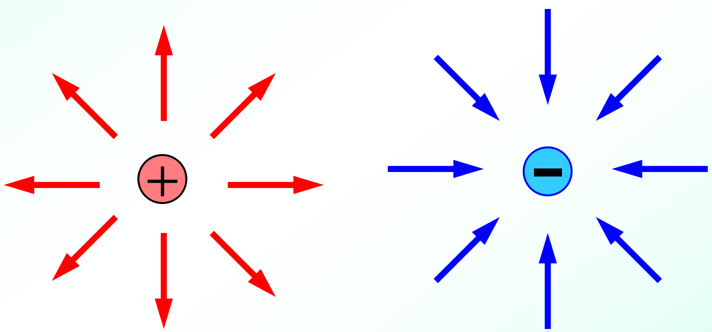
当 $L \to \infty$ (或$L >> x$)

则 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$

若令 $x = r$ $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$\lambda > 0$ 方向沿径向向外

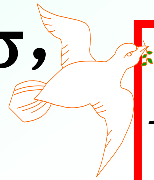
$\lambda < 0$ 方向沿径向向内



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

——柱对称电场

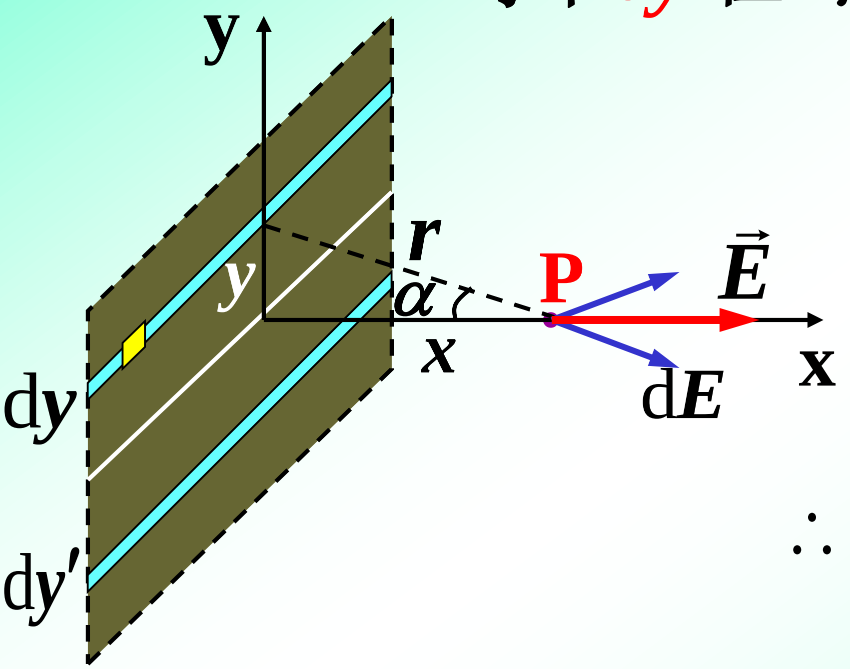
例5. 一无限大带电平面, 面电荷密度为σ, **求** 其电场分布。



$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

解: 平面可看成无数条宽为dy 的细线组成

每个dy 在P点产生的场为



$$\mathrm{d}E=\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}\qquad \lambda'=\sigma\mathrm{d}y$$

由对称性

$$E_y=\int \mathrm{d}E_y=0$$

$$\therefore\ E=\int \mathrm{d}E_x=\int \mathrm{d}E\cos\alpha$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sigma\,\mathrm{d}y}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$ 方向垂直平面!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sigma\, dy}{2\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)} = \int_0^{\infty} \frac{\cancel{x}\sigma\, dy/x}{\cancel{x}^2 \pi\varepsilon_0 \left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} \frac{dz}{(1+z^2)}$$

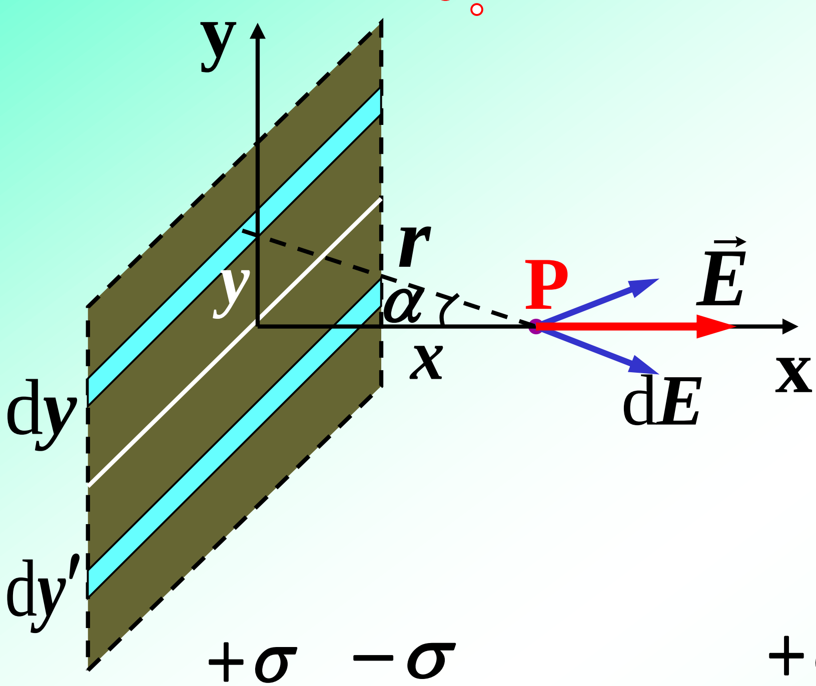
$$= \int_0^{\infty} \frac{d}{dz}(\arctan z)\, dz \quad \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}$$

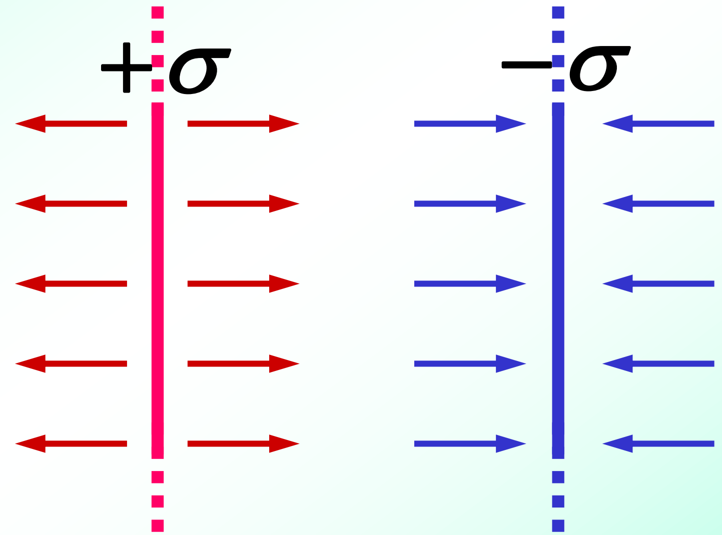
$$= \arctan z \Big|_0^{\infty} \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}$$

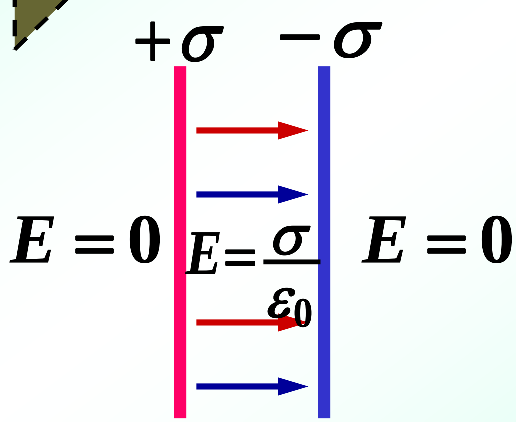
$$= \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

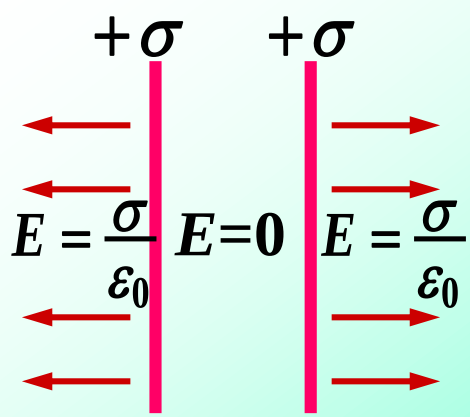
讨论：

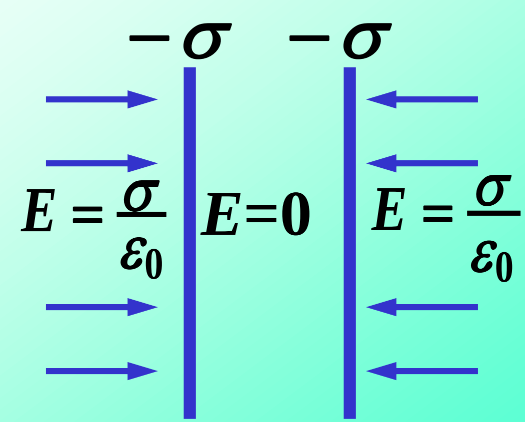
$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \longrightarrow \text{均匀场}$$











例6. 一无限长圆柱面，其电荷面密度为 $\sigma=\sigma_0\cos\varphi$ ，式中 φ 角为半径R与x轴的夹角，求圆柱轴线上一点的电场强度。

解： $$\mathrm{d}E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma R\mathrm{d}\varphi}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

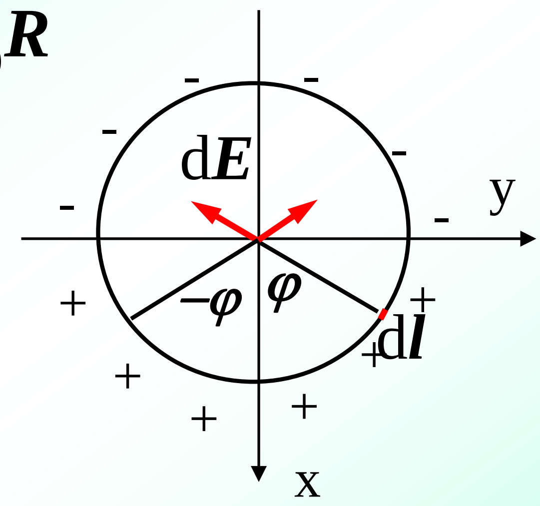
对称性可知 $E_y=0$

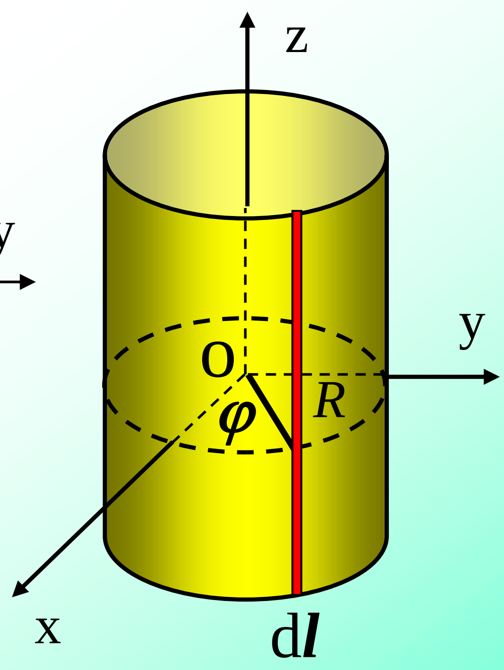
$$E=E_x=-4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}E\cos\varphi$$

$$=-4\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma R\mathrm{d}\varphi}{2\pi\varepsilon_0 R}\cos\varphi$$

$$=-\frac{2\sigma_0}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi$$

$$=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$



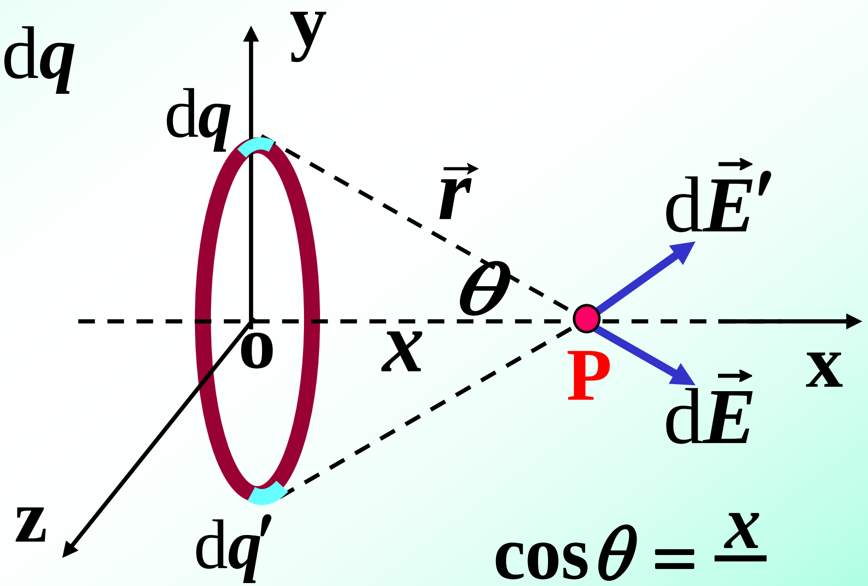


负号表示该点电场强度沿x轴负向

例7. 求一均匀带电圆环轴线上的电场强度E=？

已知：圆环半径为R，带电量为Q。

解：在圆环上任取电荷元dq



$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

由对称性知 $E_{\perp x} = 0$

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$E = E_x = \int \mathrm{d}E_x$$

$$= \int_{(Q)} \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_{(Q)} \mathrm{d}q$$

$$= \frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$ 方向沿x轴

点电荷

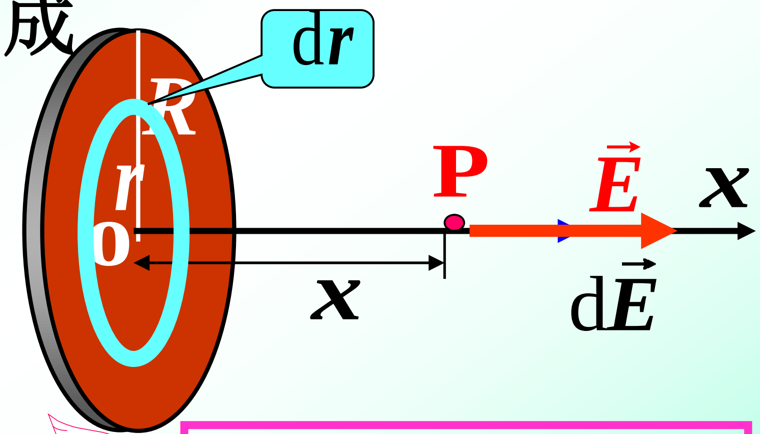
若 $x >> R$ $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$

若$x \to 0$ $E = 0$

例8. 半径为 R 的均匀带电圆盘，面电荷密度为σ。

求 圆盘轴线上任一点 **P** 的场强。

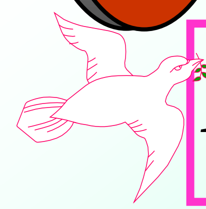
解： 圆盘可视为许多小圆环组成



取半径为 r 宽为$\mathrm{d}r$ 的圆环

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$$

以$\mathrm{d}q$ 代替右式中的Q 得：



$$\boxed{E = \frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}}$$

$$\mathrm{d}E = \frac{x\cdot\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E = \int \mathrm{d}E = \int_0^R \frac{\sigma x r \mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

无限大
带电平面

方向：

σ>0, 沿x轴指向外

σ<0, 沿x轴指向盘心

$$x \ll R \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad x \gg R \quad E = \frac{q}{\pi R^2 2\varepsilon_0}\frac{R^2}{2x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

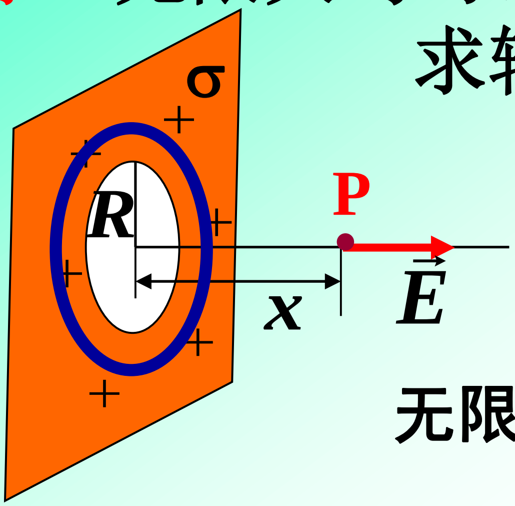
$$E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \int_0^R x\,(x^2 + r^2)^{-3/2}\, d(x^2 + r^2)$$

$$= \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0} \cdot (-2) \cdot (x^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^R$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + 0}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right]$$

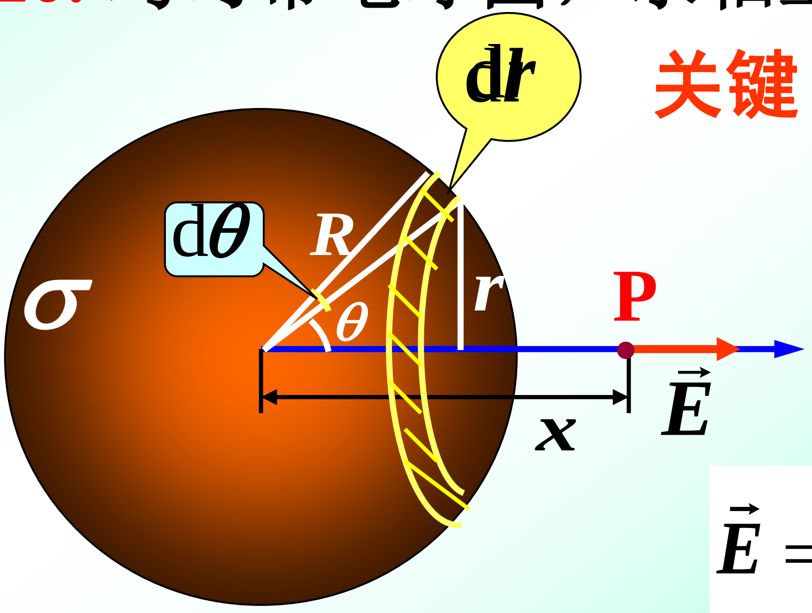
例9. 无限大均匀带电平面中间有一圆孔，求轴上 $\vec{E}$ =?



两种方法 $\begin{cases} \text{圆环} \int_R^{\infty} \\ \text{相减法} \end{cases}$

无限大带电平面–带电圆盘 $= \dfrac{\sigma x}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$

例10. 均匀带电球面，求轴上 $\vec{E}$ = ? (P201)



关键：圆环宽度 $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta$

圆环电量

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r\,\mathrm{d}l$$
$$= \sigma 2\pi R\sin\theta R\,\mathrm{d}\theta$$

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 x^2}\vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\vec{e}_r$$