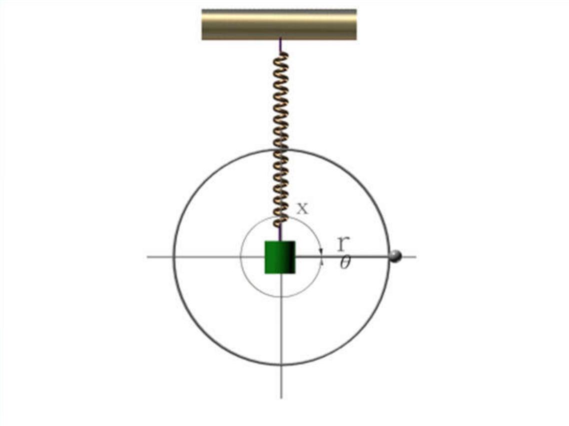
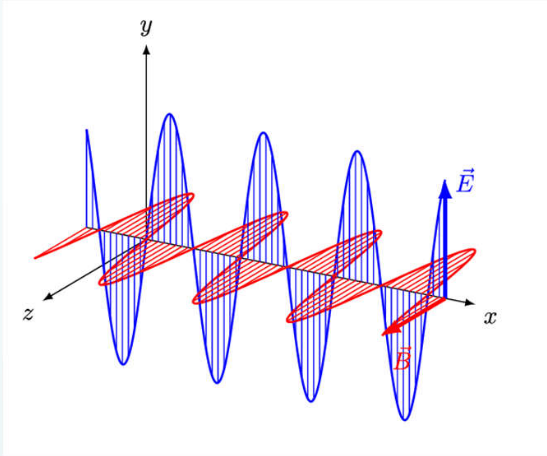
大 学 物 理



第11章-2
振动与波动



主 讲: 尹 航

华中科技大学 物理学院

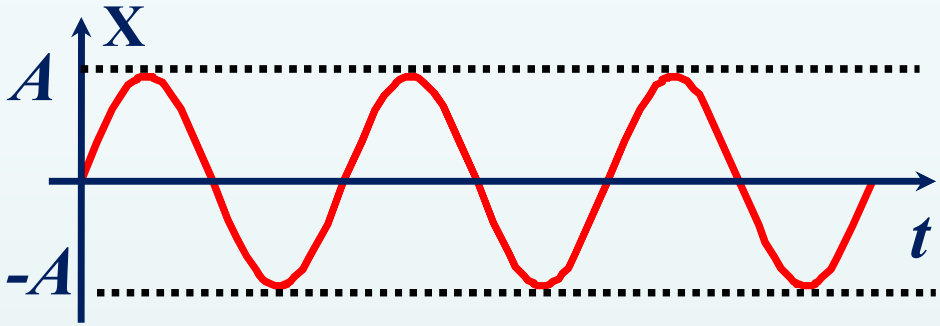
回顾

一切运动的

组成单元

谐振动 表示 →

- **公式法**
  - 运动方程 $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0{}^2x=0$$
  - 振动方程 $$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$
- **图像法** → 振动曲线



- **几何法** 旋转矢量
  - 振幅A：圆周半径
  - 圆频率ω_0: 匀角速度
  - 位相$\omega_0 t+\varphi$：与x轴的夹角

本节内容

1 振动的能量

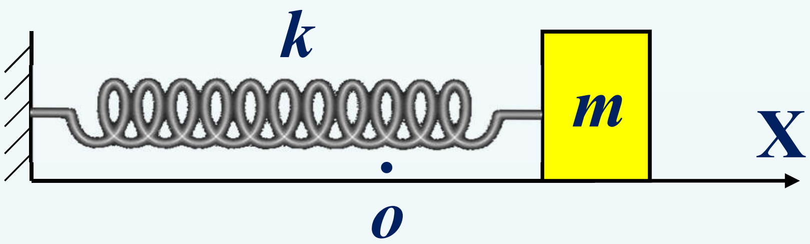
2 振动的合成

振动的能量

□ **机械谐振动的能量 = 动能 + 势能**

$\underbrace{\text{动能} + \text{势能}}_{\text{振动系统}}$

- **弹簧振子的能量**



$$\Rightarrow \begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ v = -\omega A\sin(\omega t+\varphi) \end{cases} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

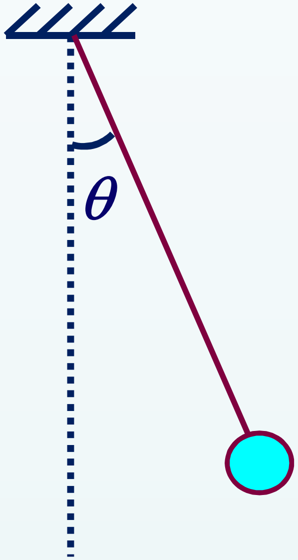
水平弹簧振子的能量 $\quad E_{总} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

任意 t 时刻 $\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{动能：} E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ \text{势能：} E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{array} \right\}$ 随时间变化

总能量：$E_{总} = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m(\omega A)^2 =$ 常量

振动的能量

- **单摆系统的能量**



小振幅摆动 $\sin\theta \approx \theta$

振动方程： $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$ $\boxed{\omega = \sqrt{g/l}} \longrightarrow (\omega l)^2 = gl$

总能量： $E_{总} = E_k + E_p = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgh$

$$= \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl\underbrace{(1-\cos\theta)}_{\approx \frac{\theta^2}{2}}$$

任意 t 时刻

$$\left.\begin{cases} 动能：E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m(l\omega\theta_0)^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\ 势能：E_p = mgh = \dfrac{1}{2}m(l\omega\theta_0)^2\cos^2(\omega t + \varphi) \end{cases}\right\} 随时间变化$$

总能量：$E_{总} = E_k + E_p = \dfrac{1}{2}m(l\omega\theta_0)^2 = \dfrac{1}{2}mgl\theta_0^2 = $ 常量

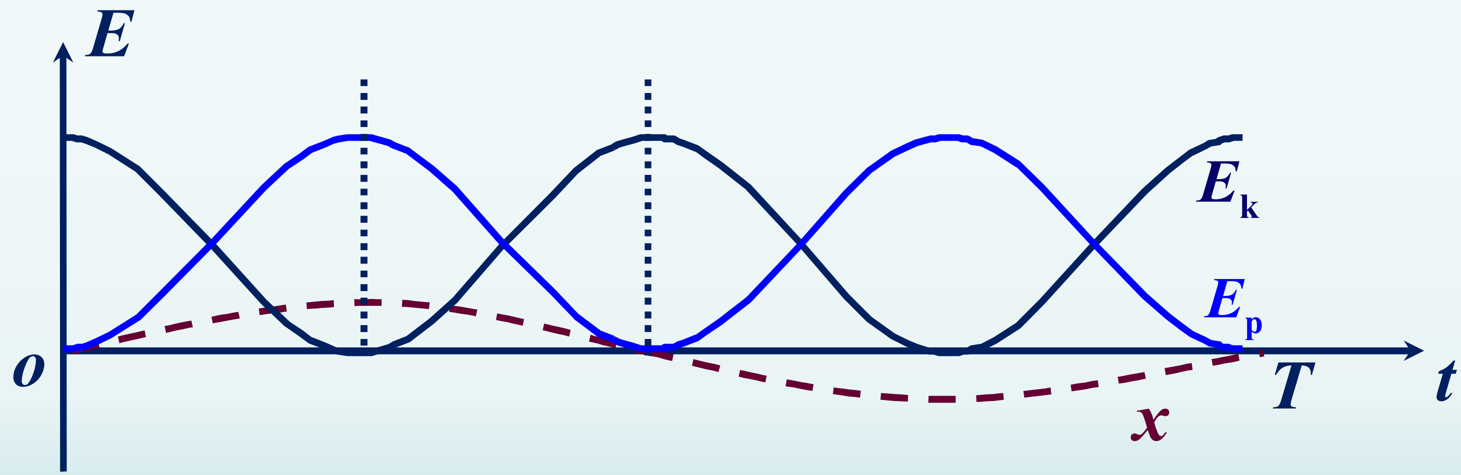
振动的能量

- **谐振动系统能量的特点**

动能：$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

势能：$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

E_{k}、E_{p}各自随时间作周期性变化

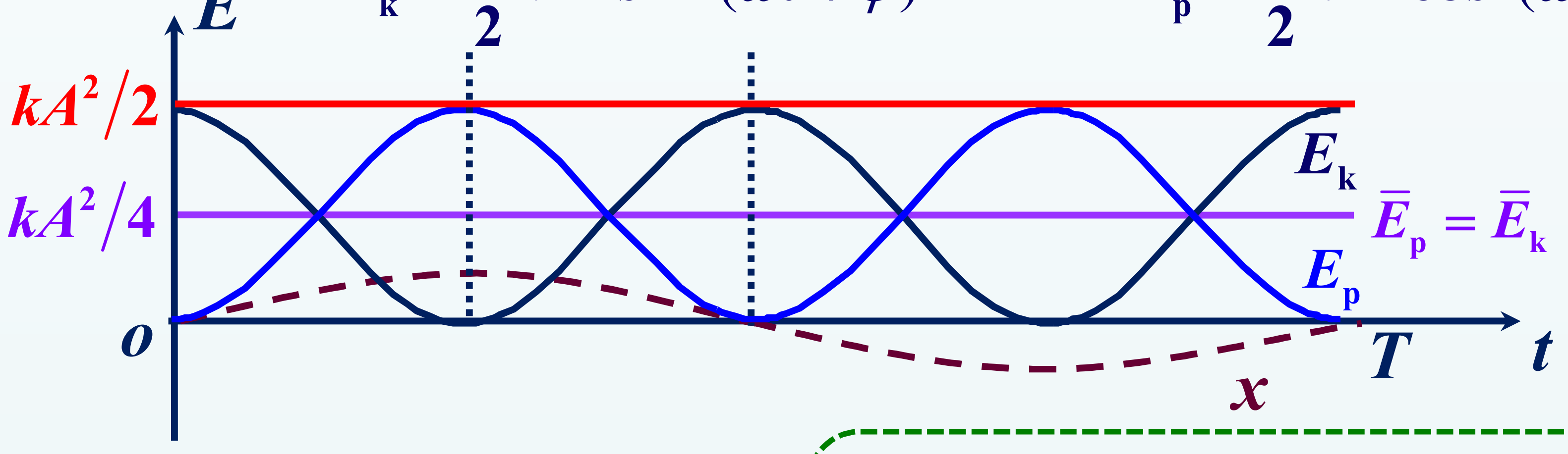


可见

- E_{k}、E_{p}总是此消彼长
- 谐振动的过程是动能与势能相互转换的过程

振动的能量

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) \qquad E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$



总能量： $E_{总}=\frac{1}{2}kA^2$

回顾： 分子平均能量

$$E=\frac{t+r+\boxed{2s}}{2}\nu RT \rightarrow \begin{cases}\text{平均振动动能}\\ \text{平均振动势能}\end{cases}$$

动能与**势能**的时间平均值:

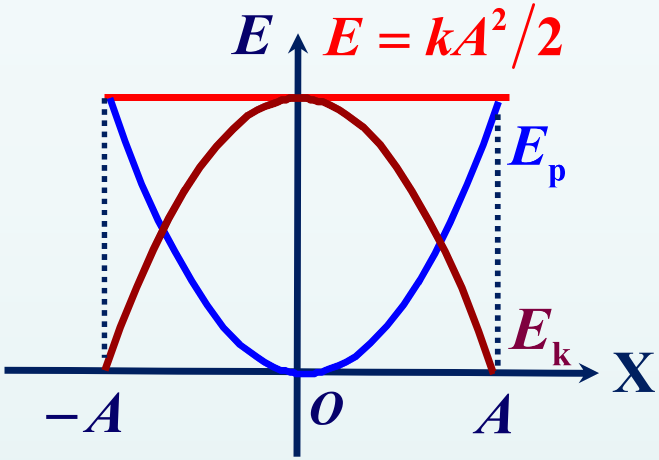
$$\overline{E_k}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_\varphi^{2\pi+\varphi}\sin^2 x\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E_p}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{kA^2}{2T\omega_0}\int_\varphi^{2\pi+\varphi}\cos^2 x\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\left.\begin{matrix}\overline{E_k}\\ \overline{E_p}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}E_{总}$$

振动的能量

$$E_{\text{总}}=\frac{1}{2}kA^2\begin{cases}E_p=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)\longrightarrow E_p=\frac{1}{2}kx^2\\E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)\longrightarrow E_k=\frac{1}{2}k\left(A^2-x^2\right)\end{cases}$$



① 弹簧振子的动能和势能的平均值相等, 均为总机械能的一半。

② 谐振动的**总能量**与**振幅的平方**成正比。

③ 振幅不仅给出谐振动**运动的范围**，而且还反映了振动系统**总能量的大小**及**振动的强度**。

以上结论适合所有谐振动

振动的合成

□ 振动的合成

- **同振动方向、同频率的两个谐振动的合成** → 代数法 / 几何法

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{合成}} x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi)$$

合振动的振幅A $$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

合振动的初相位φ $$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

结论

① 合振动仍是同频率的谐振动。

② 合振幅不仅与**分振幅**有关还与$\Delta\varphi$有关

振动的合成

- **同振动方向、同频率的两个谐振动的$\boxed{\text{合成}}$→代数法**

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= A_1\cos\omega t\cos\varphi_1 - A_1\sin\omega t\sin\varphi_1 + A_2\cos\omega t\cos\varphi_2 - A_2\sin\omega t\sin\varphi_2$$

$$= \underline{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}\cos\omega t - \underline{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}\sin\omega t$$

$$= \underline{B_1}\cos\omega t - \underline{B_2}\sin\omega t$$

$$= \sqrt{B_1^{\,2} + B_2^{\,2}}\left(\frac{B_1}{\sqrt{B_1^{\,2} + B_2^{\,2}}}\cos\omega t - \frac{B_2}{\sqrt{B_1^{\,2} + B_2^{\,2}}}\sin\omega t\right)$$

$$= A(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t)$$

$$= A\cos(\omega t + \varphi)$$

振动的合成

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= \underline{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}\cos\omega t - \underline{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}\sin\omega t$$

$$= \underline{B_1}\cos\omega t - \underline{B_2}\sin\omega t$$

$$= \sqrt{B_1{}^2 + B_2{}^2}\left(\frac{B_1}{\sqrt{B_1{}^2 + B_2{}^2}}\cos\omega t - \frac{B_2}{\sqrt{B_1{}^2 + B_2{}^2}}\sin\omega t\right)$$

$$= A(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

合振动振幅 $A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

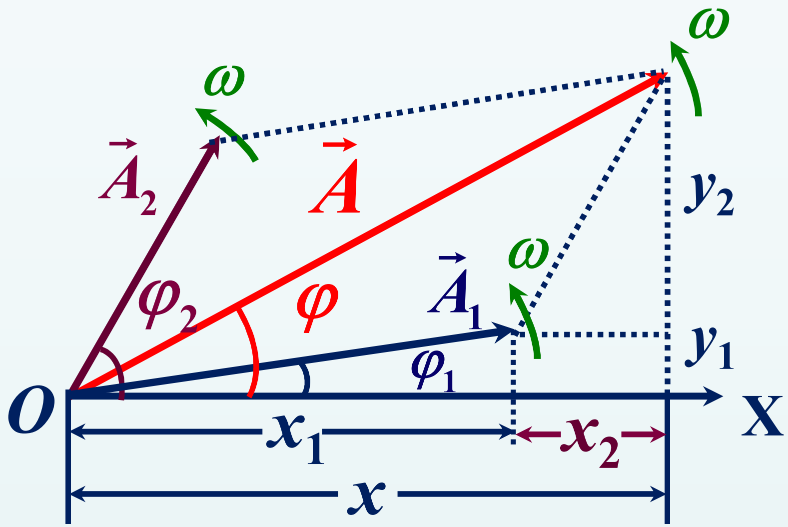
合振动初始相位 $\tan\varphi = \dfrac{B_2}{B_1} = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

振动的合成

- **同振动方向、同频率的两个谐振动的$\boxed{\text{合成}}$** → 旋转矢量法

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

将两个振动用旋转矢量表示



矢量合成得 $\vec{A}$ $\quad |\vec{A}| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$y = A_1\sin(\omega t+\varphi_1) + A_2\sin(\omega t+\varphi_2)$$

$$\therefore \quad |\vec{A}| = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

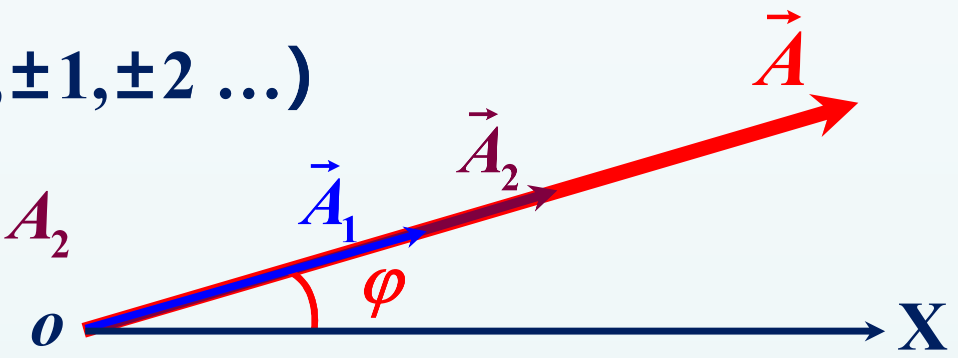
$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

振动的合成

$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

两个重要的特例：

① **两分振动同相** $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2\ \ldots)$



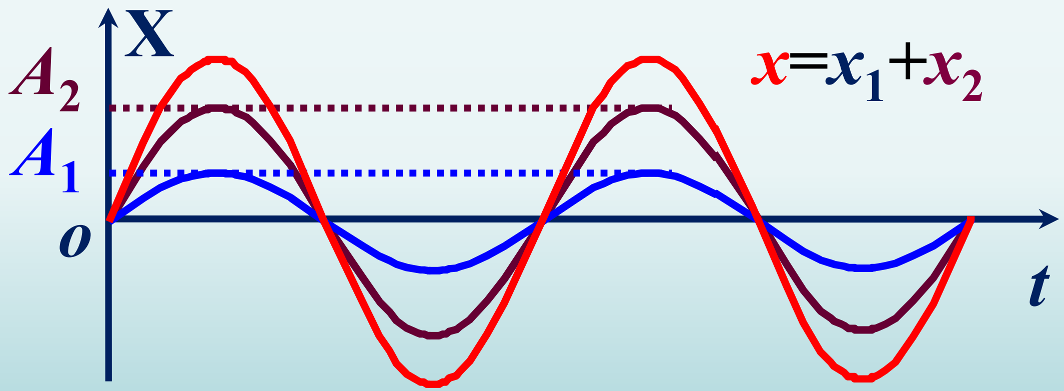
$\vec{A}_1$和$\vec{A}_2$重合　　合振幅 $A = A_1 + A_2$

合振动初位相：$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$

合振动方程：

$$x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \varphi_1)$$



合振动的振幅最大

两振动的合成效果：使振动加强

振动的合成

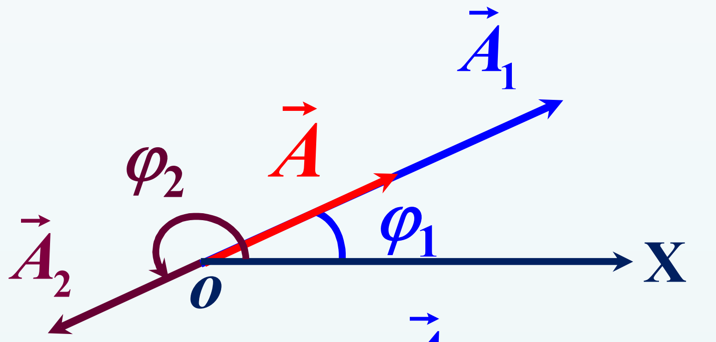
$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

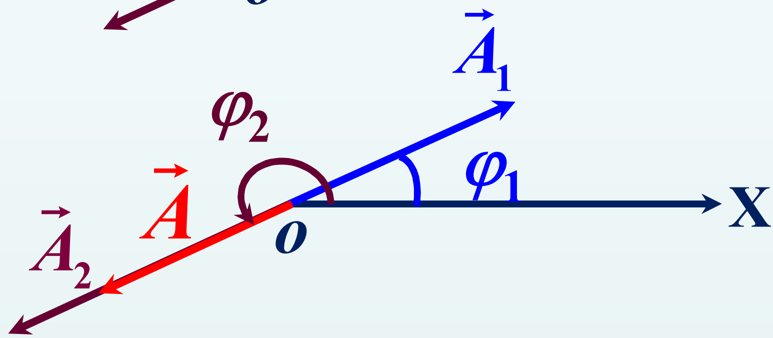
两个重要的特例：

② **两分振动反相** $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$

$\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 共线反向

合振幅 $A = |A_1 - A_2|$ $\begin{cases} A_1 > A_2 & \varphi = \varphi_1 \\ A_1 < A_2 & \varphi = \varphi_2 \end{cases}$

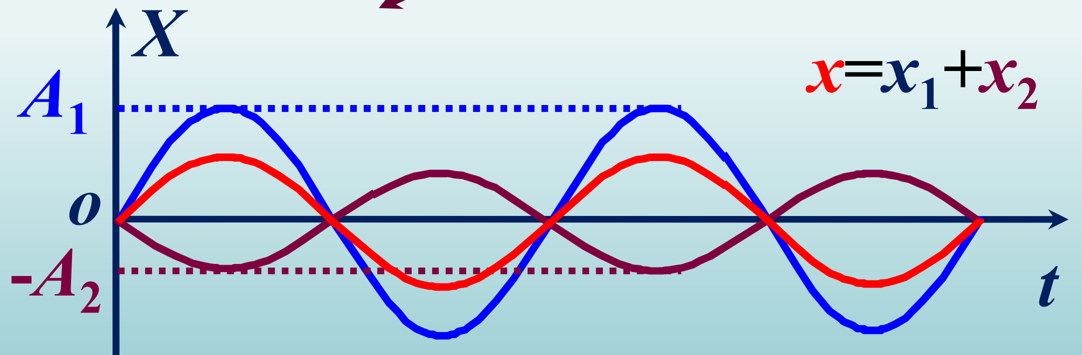




合振动的振幅最小

合成效果：使振动减弱

一般地，$\varphi_2 - \varphi_1 \neq k\pi$



合振幅 $|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$

振动的合成

- **同振幅和振动方向，不同频的两个谐振动合成**

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega_1 t+\varphi) \\ x_2 &= A_1\cos(\omega_2 t+\varphi) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\omega_1 \neq \omega_2]{\text{合 成}} x = \boxed{2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)}\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

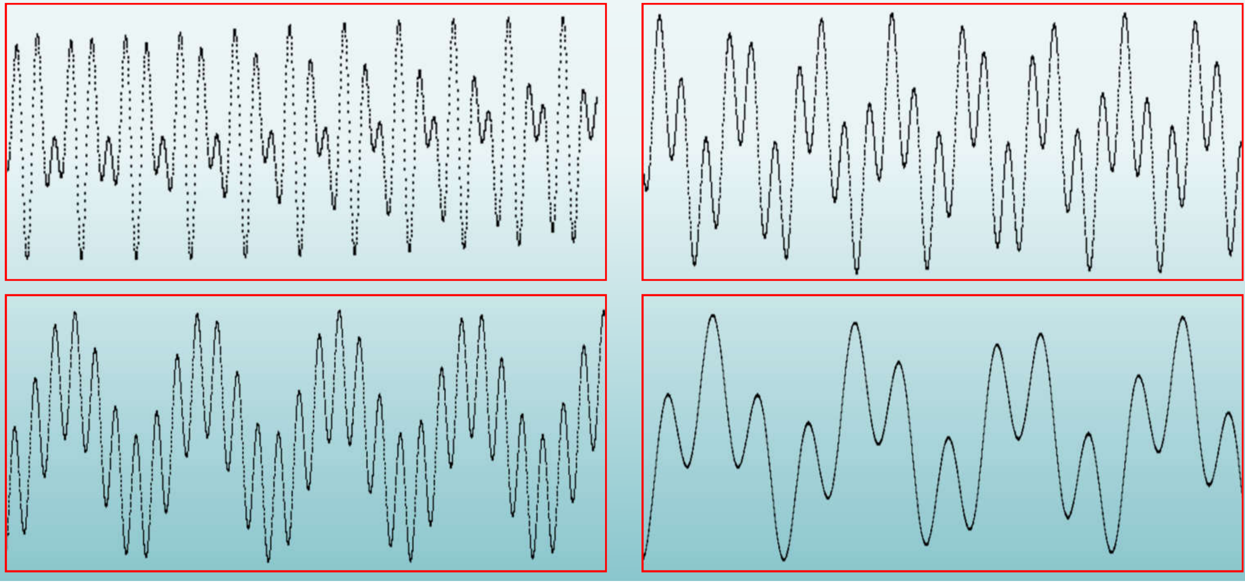
合振动的振幅

$0 \le A \le 2A_1$

合振动的圆频率

显然，合振动不是谐振动

振动曲线复杂且取决于频率差

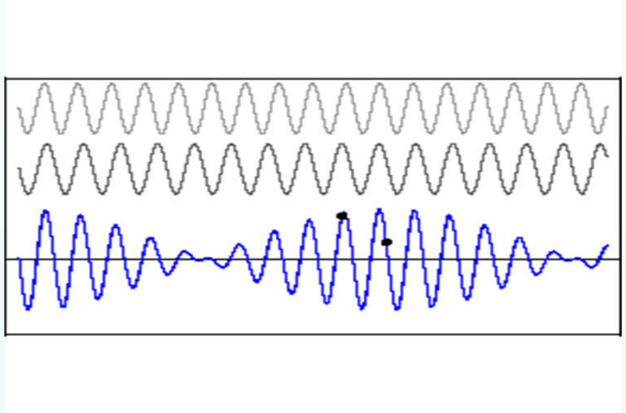


若频率差很小?

振动的合成

$$x=\boxed{2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)}\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

振幅按余弦函数变化



若ω_1和ω_2相差很小，振幅将出现明显的加强和减弱现象 —— **拍**

使频率 $\frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ 和 $\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$ 有足够的区分度