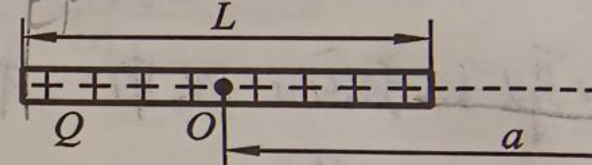
电量 $Q(Q>0)$ 均匀分布在长为 L 的细棒上(见图)，在细棒的延长线上至细棒
离为 a 的 P 点处放一带电量为 $q(q>0)$ 的点电荷，求带电细棒对该点电荷的



解：$dF = \dfrac{qQ\,dx}{L(a+\frac{L}{2}-x)^2\,4\pi\varepsilon_0}$

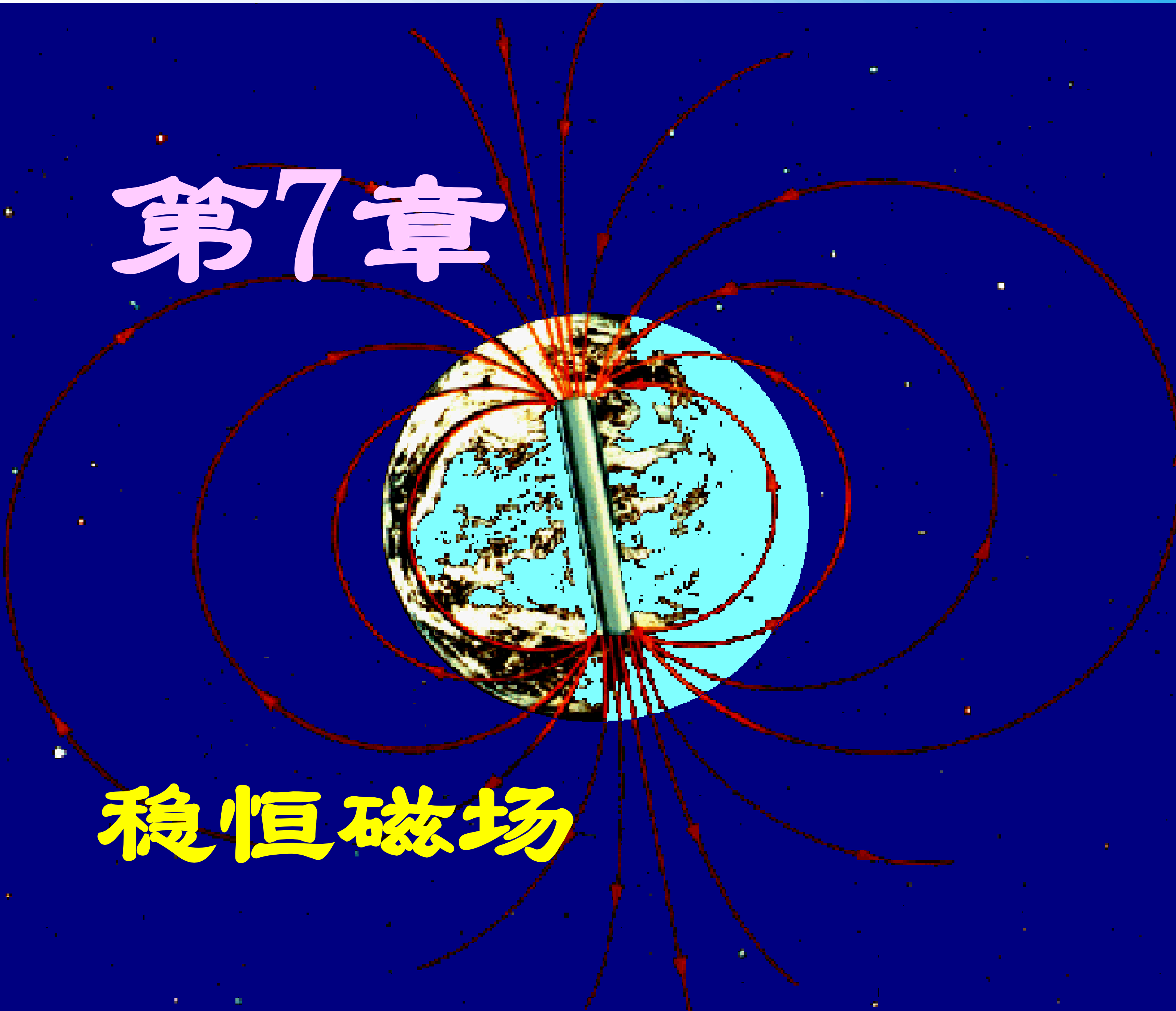
$$F = \int_0^L \frac{qQ}{L}\,\frac{dx}{(a+\frac{L}{2}-x)^2\,4\pi\varepsilon_0}$$

$$= \frac{qQ}{L}\left(\frac{1}{a-\frac{L}{2}} - \frac{1}{a+\frac{L}{2}}\right) = \frac{qQ}{(a^2-\frac{L^2}{4})(4\pi\varepsilon_0)}$$ 方向水平向右.

无论是库仑定律、毕奥萨伐尔定律，一定不要忘了**系数**！

第7章

稳恒磁场



第7章　稳恒磁场

一、磁场

二、毕奥 — 萨伐尔定律

三、磁场的高斯定理

四、安培环路定理

五、带电粒子在电磁场中的运动

六、磁介质

一、磁场 magnetic field

1. 基本的磁现象

磁铁、磁性、磁极(N, S)、磁力、
磁化、磁极与电荷的区别……

2. 电与磁的联系

奥斯特发现 * 电流（旁）——小磁针偏转

安培发现
- ** 磁铁（旁）——载流导线运动
- *** 载流导线 —— 载流导线

电与磁密切相关
- 运动电荷产生磁现象
- 运动电荷本身受磁力作用

3. *磁场*

运动电荷、电流与磁铁周围存在同一种磁场

电流（旁）——小磁针偏转
磁铁（旁）——载流导线运动
载流导线 —— 载流导线

三种情况的相互作用，依赖“**磁场**”完成

磁场的性质：

具有力和能的性质

磁场对其内的运动电荷有力的作用
载流导体在磁场中移动时，磁力对其作功

4.磁感应强度 $\vec{B}$

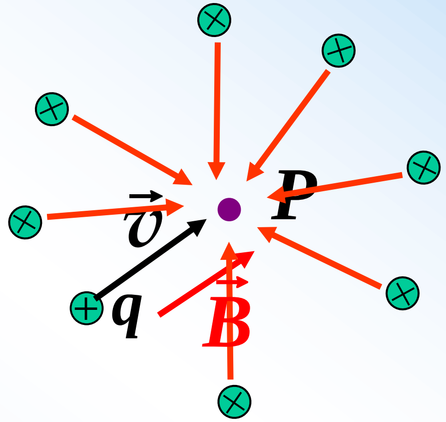
实验表明：点电荷q, 速度为v 时, 在静电场中受到与速度无关的力 $\vec{F}_e = q\vec{E}$。

在磁场中受到另一种与速度有关的力称为**洛仑兹力** $\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}$

描述磁场的基本物理量是磁感应强度$\vec{B}$

$\vec{B}$的定义:

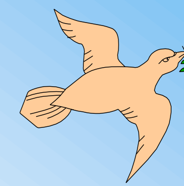
设电荷q以速度 $\vec{v}$ 进入磁场$\vec{B}$ 中的P点受力为零的方向, 定义$\vec{B}$ 的方向;



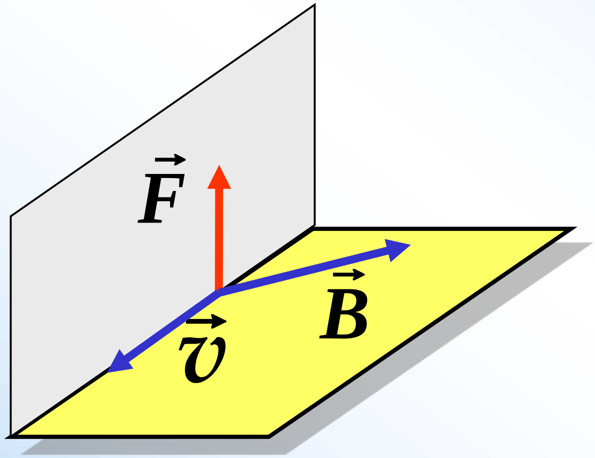
当 q_0沿$\vec{v}\perp\vec{B}$ 的方向运动时, $F = F_{Max}$

则 $B = \dfrac{F_{Max}}{qv}$

$\vec{F}$、$\vec{v}$、$\vec{B}$三者之间的关系如下：



$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}}$$



1° $\vec{F}\perp(\vec{v}、\vec{B})$ 决定的平面

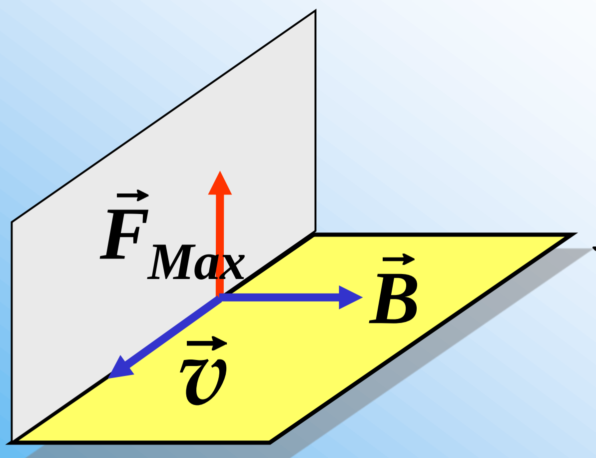
2° $\vec{v}\perp\vec{B}$ 时，$F=F_{\mathrm{Max}}$

3° $\vec{v}\,//\,\vec{B}$及 $v=0$ 时，$F=0$

$\vec{B}$：

- 大小 $\boxed{B=\dfrac{F_{Max}}{q_0 v}}$
- 方向 $\vec{F}_{Max}\times\vec{v}$

B如何计算？



单位：

SI制 T(特斯拉)

高斯制 G(高斯)

$1\mathrm{T} = 10^4\mathrm{G}$

二、毕奥 — 萨伐尔定律

The Biot-Savart law

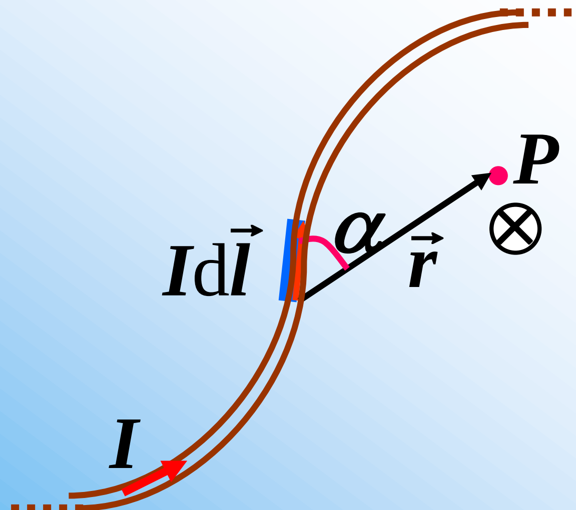
(Biot)

(Savart)

1.毕奥 — 萨伐尔定律

——电流激发磁场的规律

实验证明：真空中电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 在P点产生的磁场



大小 $\mathrm{d}B = k\dfrac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$

方向 $I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}$ 的方向

SI制中： $k = \dfrac{\mu_0}{4\pi}$

$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}$

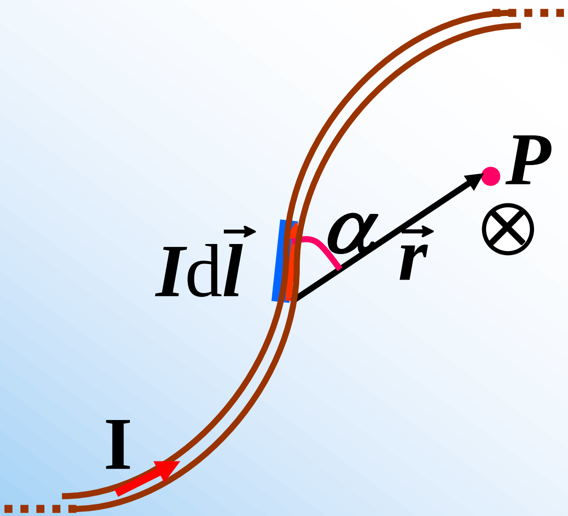
真空中的磁导率

写成矢量式 $$\boxed{\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}}$$ 毕—萨定律

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

毕 — 萨定律

长为L的载流导线, 在P点产生的磁感应强度



用迭加法得

$$\boxed{\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}}$$

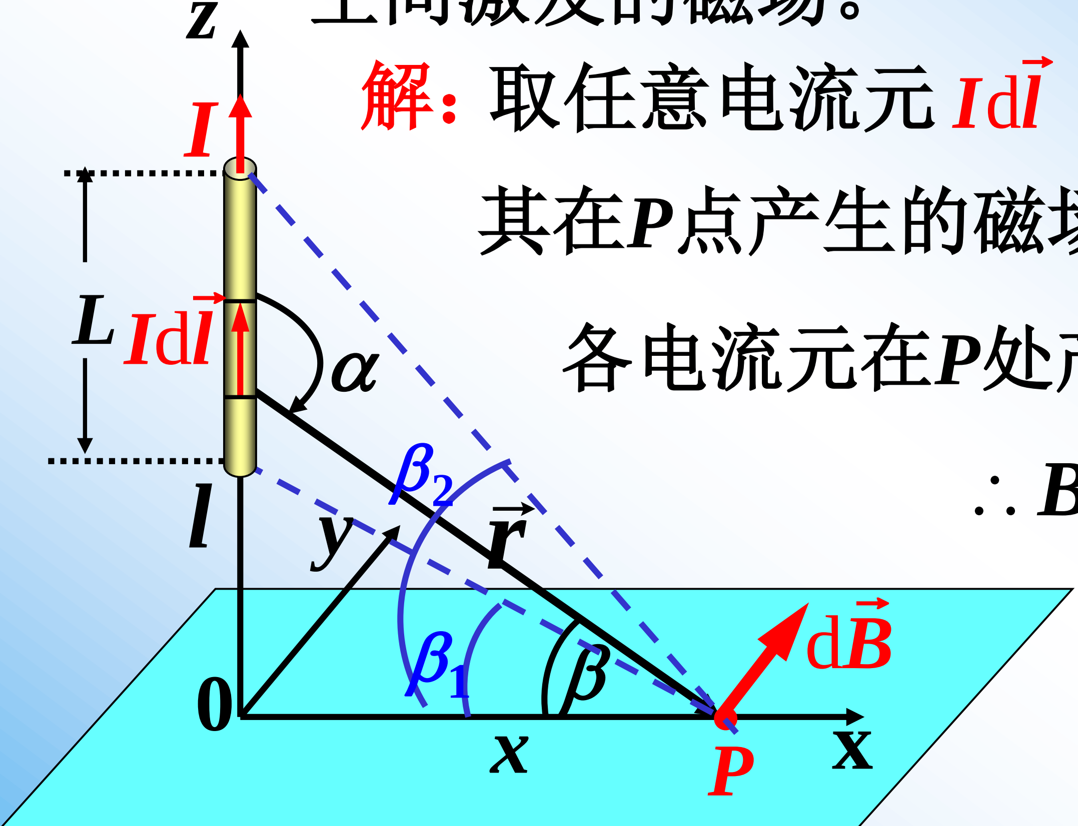
$$\vec{B}\begin{cases} B_x = \int_L \mathrm{d}B_x \\ B_y = \int_L \mathrm{d}B_y \\ B_z = \int_L \mathrm{d}B_z \end{cases}$$

2.*毕—萨定律的应用*

（下面讨论几种常见的电流结构）

例1. 求长为L的直线电流 I 在周围空间激发的磁场。

$$\boxed{d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}}$$



解： 取任意电流元 $Id\vec{l}$ 建立坐标系：

其在P点产生的磁场为 $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}\vec{j}$

各电流元在P处产生的dB方向一致

$$\therefore B=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta d\beta$$

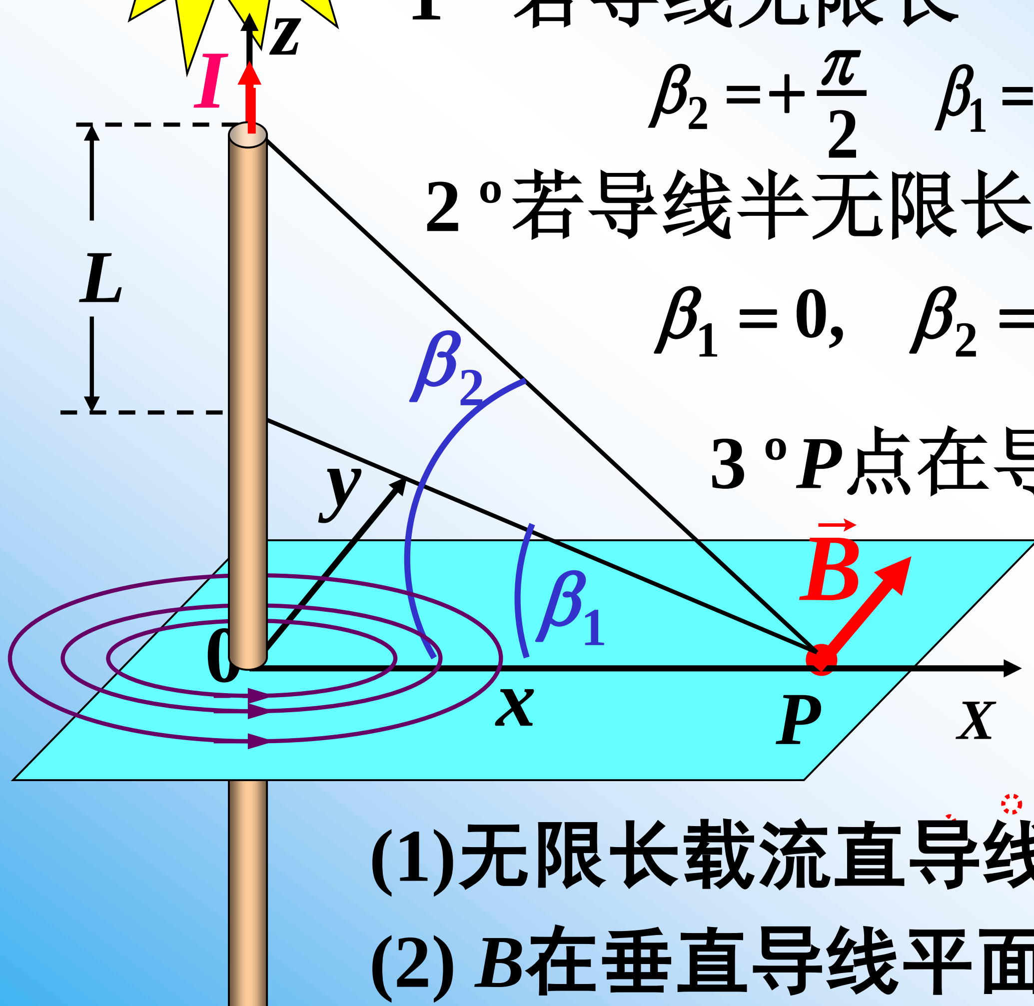
$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}[\sin\beta_2-\sin\beta_1]$$

$$\begin{cases}\sin\alpha=\cos\beta\\ r=x\sec\beta\\ l=x\,\mathrm{tg}\beta\\ dl=x\sec^2\beta\,d\beta\end{cases}$$

方向：沿 y 轴方向

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}[\sin\beta_2-\sin\beta_1]$$

讨论



1° 若导线无限长

$$\beta_2=+\frac{\pi}{2}\quad \beta_1=-\frac{\pi}{2}\quad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

比较:

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

2° 若导线半无限长

$$\beta_1=0,\quad \beta_2=\frac{\pi}{2}\quad B=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}$$

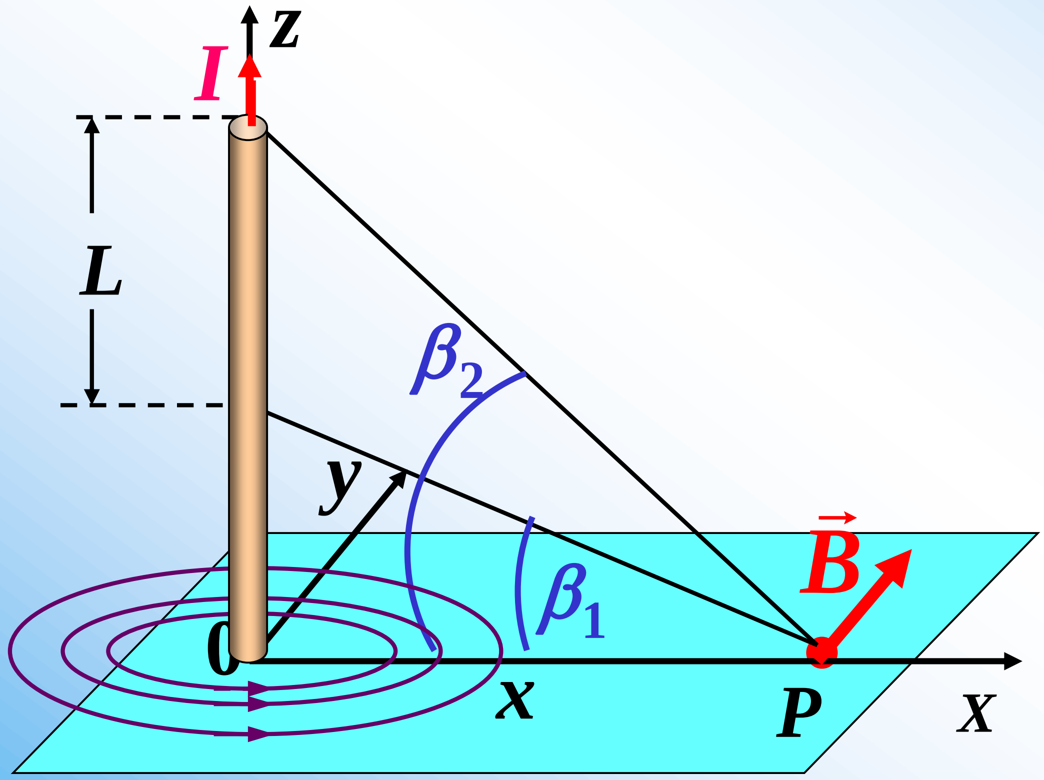
3° *P*点在导线的延长线上

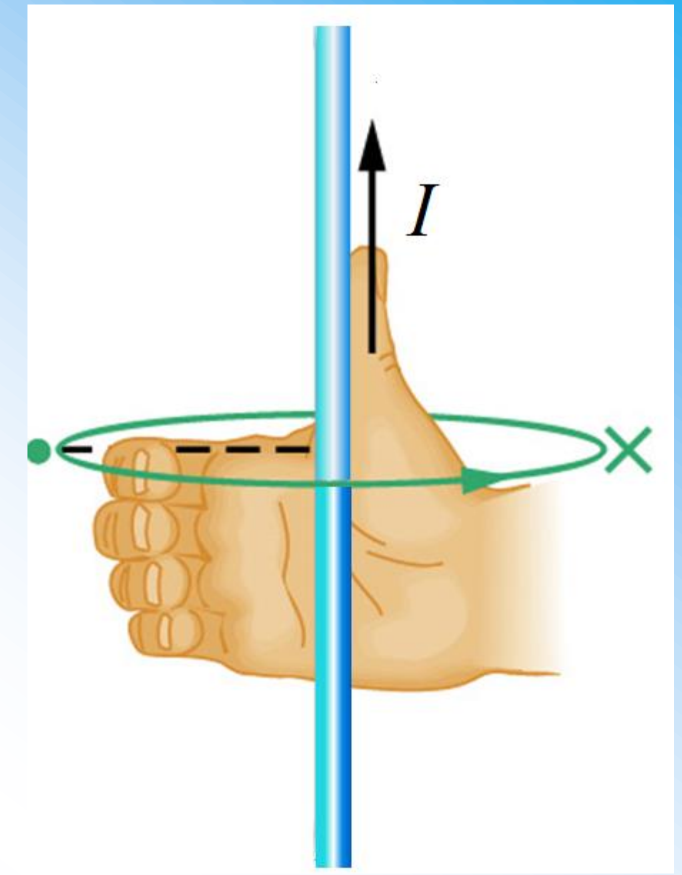
$$\beta_1=\beta_2=\pm\frac{\pi}{2}\qquad B=0$$

结论：

(1)无限长载流直导线周围*B*与*x*成反比

(2) *B*在垂直导线平面内沿同心圆切线方向，并与电流方向成右手螺旋关系





(1)无限长载流直导线周围B与x成反比

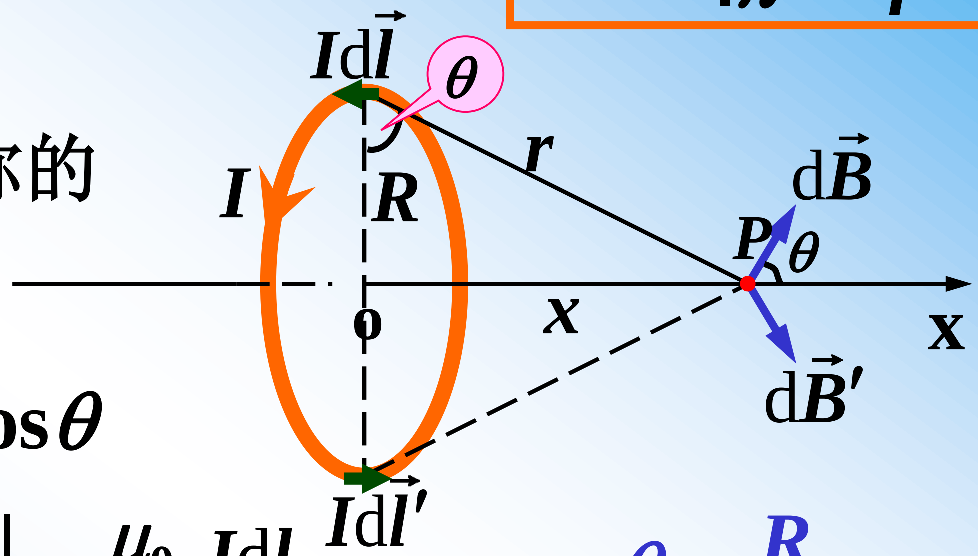
(2) B在垂直导线平面内沿同心圆切线方向，
并与电流方向成右手螺旋关系

例2. 求载流圆线圈轴线上的磁场$\vec{B}$，已知半径为R，通电电流为I。

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}}$$

解: 取任意电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{d}\vec{B}\\ \mathrm{d}\vec{B}'\end{array}\right\}$是对x轴对称的



$$\sum \mathrm{d}B_{\perp x}=0$$

$$\therefore B=\int \mathrm{d}B_x=\int \mathrm{d}B\cos\theta$$

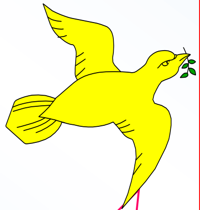
$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r|}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}$$

$$\cos\theta=\frac{R}{r}$$

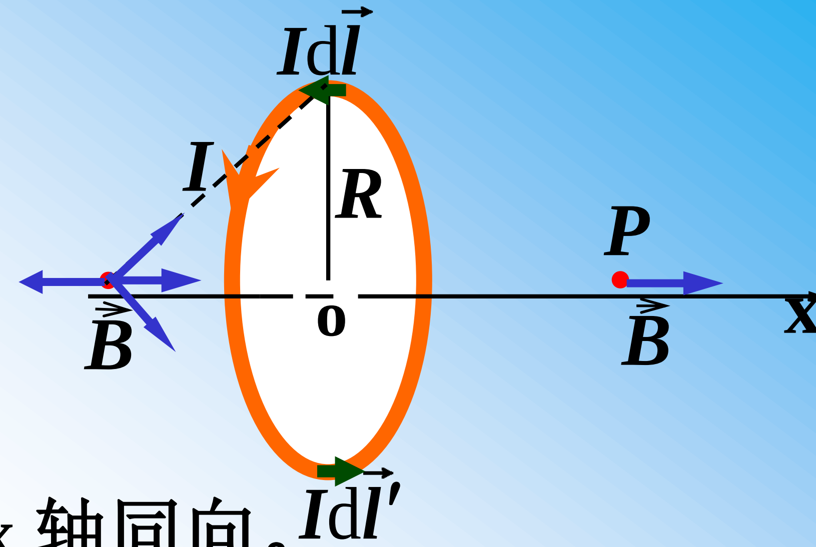
$$r^2=x^2+R^2$$

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi R}\frac{I\cos\theta\mathrm{d}l}{r^2}=\frac{\mu_0 I\cos\theta}{4\pi r^2}2\pi R$$

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$ 方向沿 x 轴正向



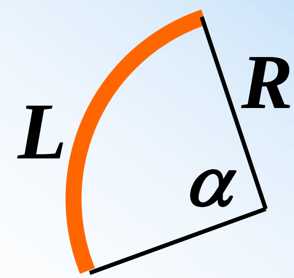
$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$



讨论：

1 º$x > 0$ 或 $x < 0$，$\vec{B}$与x 轴同向。

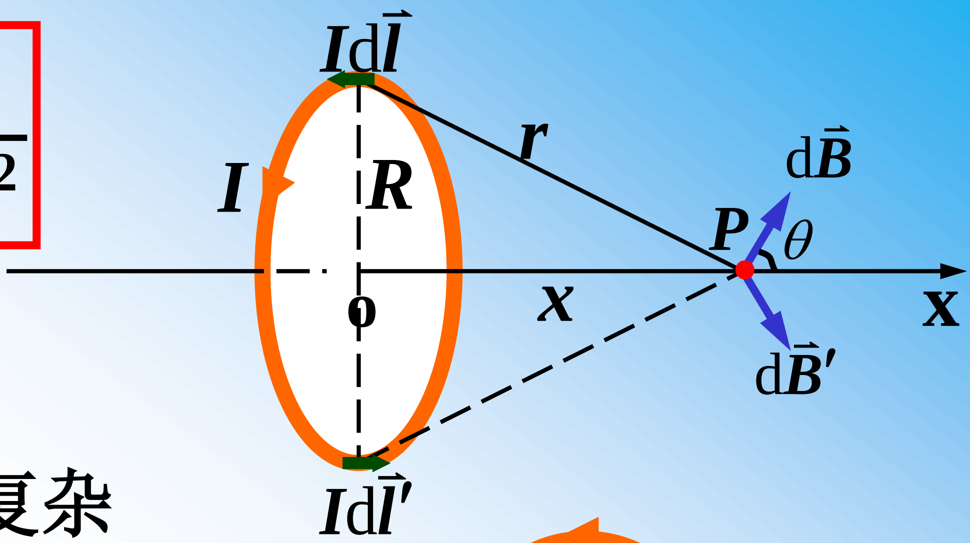
2 º当 $x = 0$时，圆心处 $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$



半圆环圆心处 $B = \frac{\mu_0 I}{4R}$

弧长L的圆心处 $B = \frac{\mu_0 I(L)}{2R(2\pi R)} = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi R}$

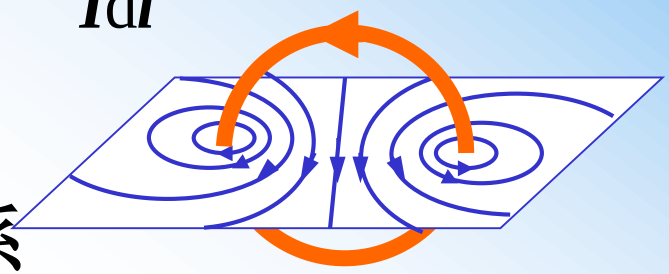
$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$



讨论:

3 º 轴线以外的磁场较复杂

可定性给出磁感应线



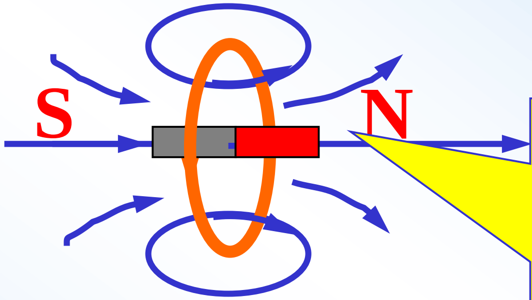
I与B线仍服从右手螺旋关系

定义：磁偶极矩

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

若有N 匝线圈总磁矩为:

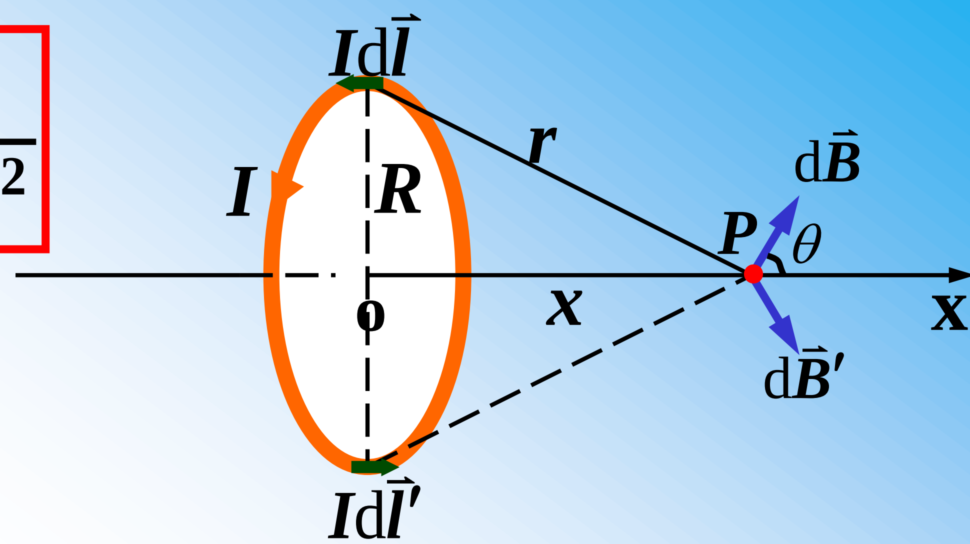
$$\vec{P}_m = NIS\vec{n} = N\,\vec{p}_m$$



n与I的方向成右手关系

磁偶极子

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$



讨论:

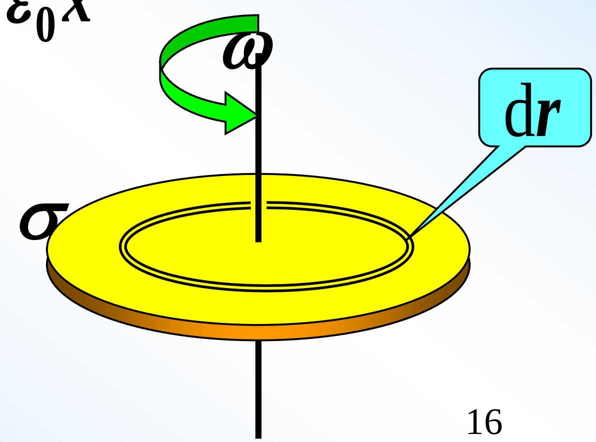
4 º $x>>R$ 时

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}=\frac{\mu_0 I S}{2\pi x^3}\qquad 即\quad \vec{B}=\frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi x^3}$$

比较电偶极子延长线上 $\vec{E}=\dfrac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$

5 º一个以角速度ω转动的带电圆盘轴线上的磁场 $\vec{B}=?$

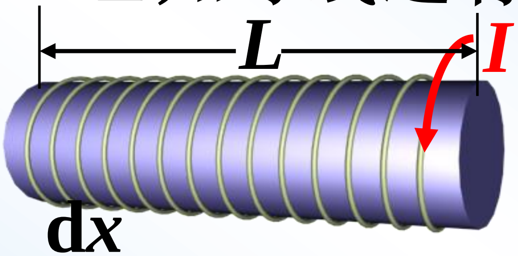
对应的磁偶极矩 $\vec{p}_m=?$

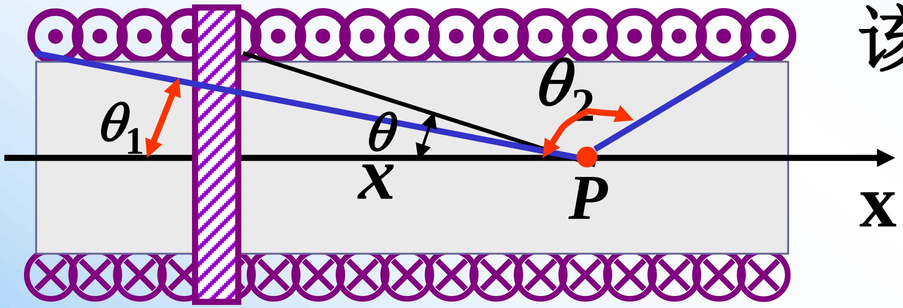


$$\mathrm{d}I=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r\,\frac{\omega}{2\pi}$$

例3. 求长为L的螺线管轴线上的磁场$\vec{B}=?$

已知导线通有电流I, 单位长度上匝数为n。



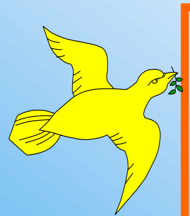


解: 在管上取一小段dx

电流为 $\mathrm{d}I = nI\mathrm{d}x$

该电流在P点的磁场为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 R^2 nI\mathrm{d}x}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

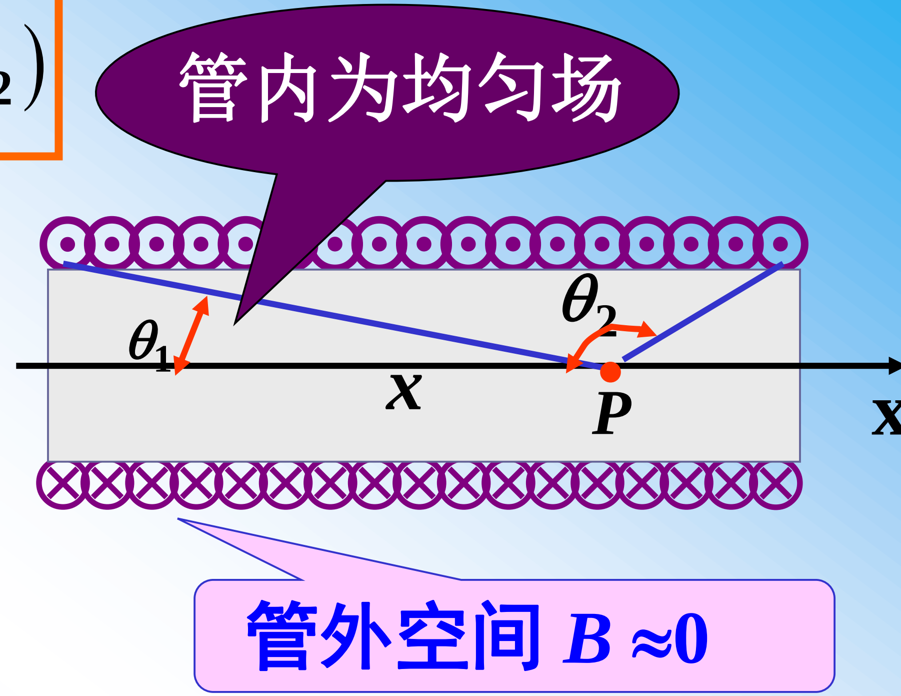
$$x = -R\mathrm{ctg}\theta \qquad \mathrm{d}x = \frac{R\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

则 $\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0 nI}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$

$$B = \int \mathrm{d}B = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_0 nI}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

方向沿 x 轴

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$



讨论：

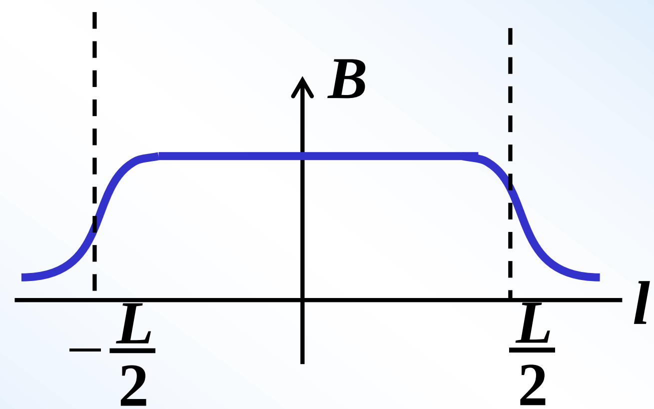
1° 无限长螺线管

$L\to\infty,\ \theta_1=0\ \ \theta_2=\pi$

$B=\mu_0 nI$　方向向右

2° 半无限长螺线管

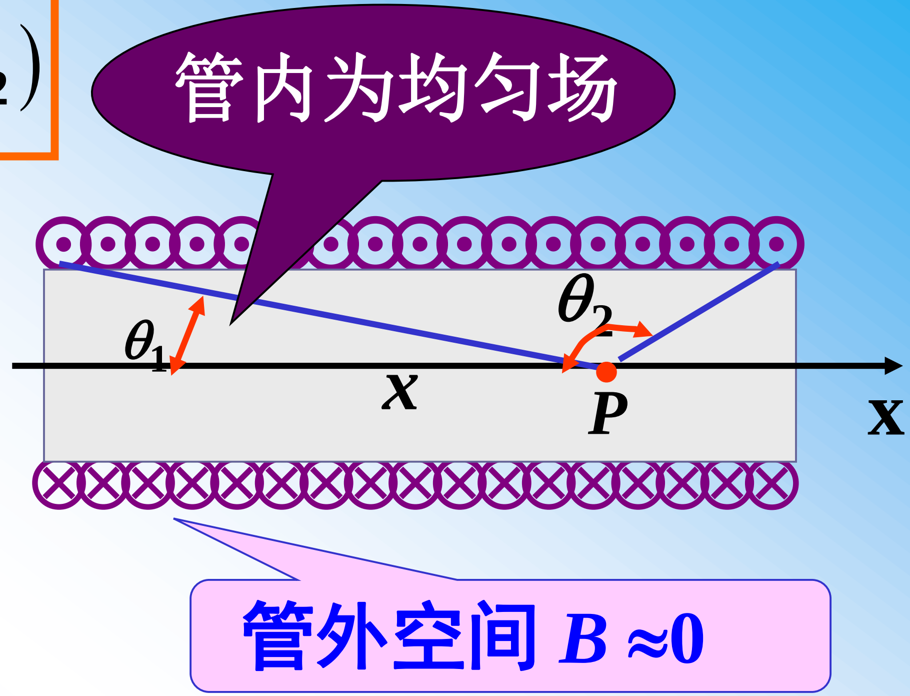
$$\left.\begin{aligned}\theta_1&=\frac{\pi}{2},\theta_2=\pi\\ \theta_1&=0,\theta_2=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}B=\frac{1}{2}\mu_0 nI$$



3° 若管长$L>>R$，管内有很大一部分场是均匀的。

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

讨论：



1° 无限长螺线管

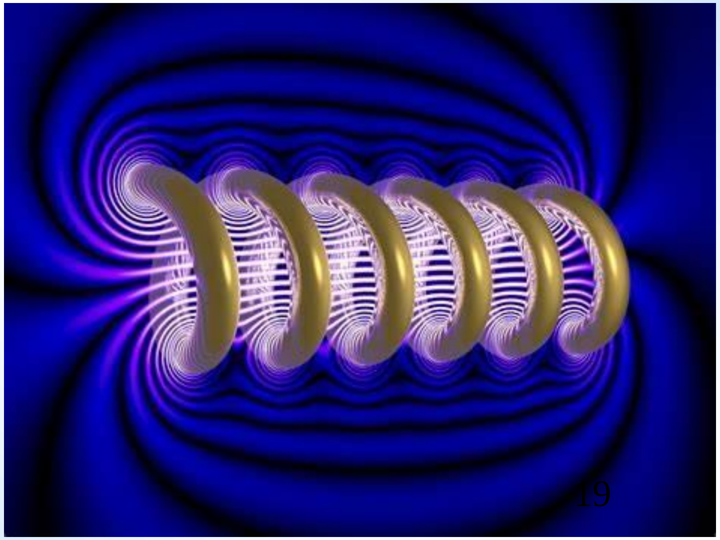
$$L\to\infty,\ \theta_1=0\ \ \theta_2=\pi$$

$B=\mu_0 nI$ 方向向右

2° 半无限长螺线管

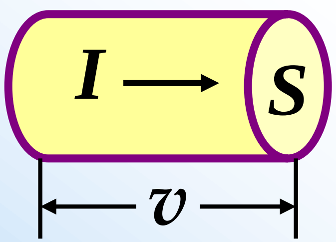
$$\left.\begin{array}{l}\theta_1=\dfrac{\pi}{2},\theta_2=\pi\\[2ex]\theta_1=0,\theta_2=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\}B=\frac{1}{2}\mu_0 nI$$

3° 若管长$L>>R$，管内有很大一部分场是均匀的。



例4. 求运动点电荷的磁场$B=?$

解：设导体截面积为S，电流中载流子密度为n，带电为q，以速度v沿电流I方向运动。



如图取一段长为v的导体，则有 $I=nqSv$

根据毕—萨定律

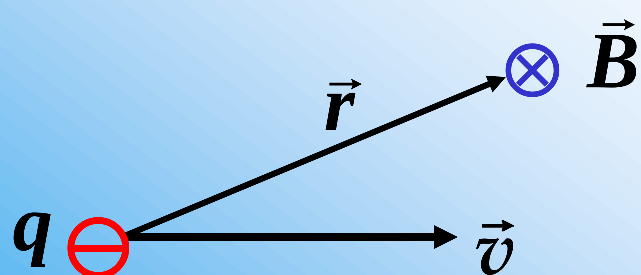
$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nqSv\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

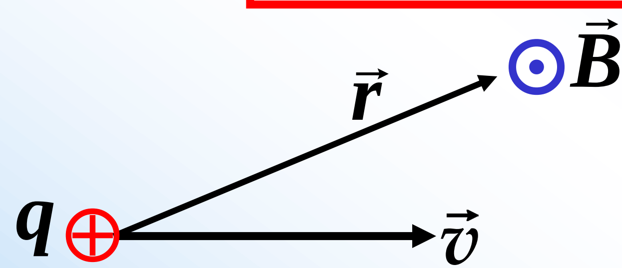
其中 $\mathrm{d}\vec{l}\parallel\vec{v}$

$nS\mathrm{d}l=\mathrm{d}N$

$$\therefore \mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\mathrm{d}N\,\vec{v}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

单个运动电荷所激发的磁场为 $\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{e}_r}{r^2}}$



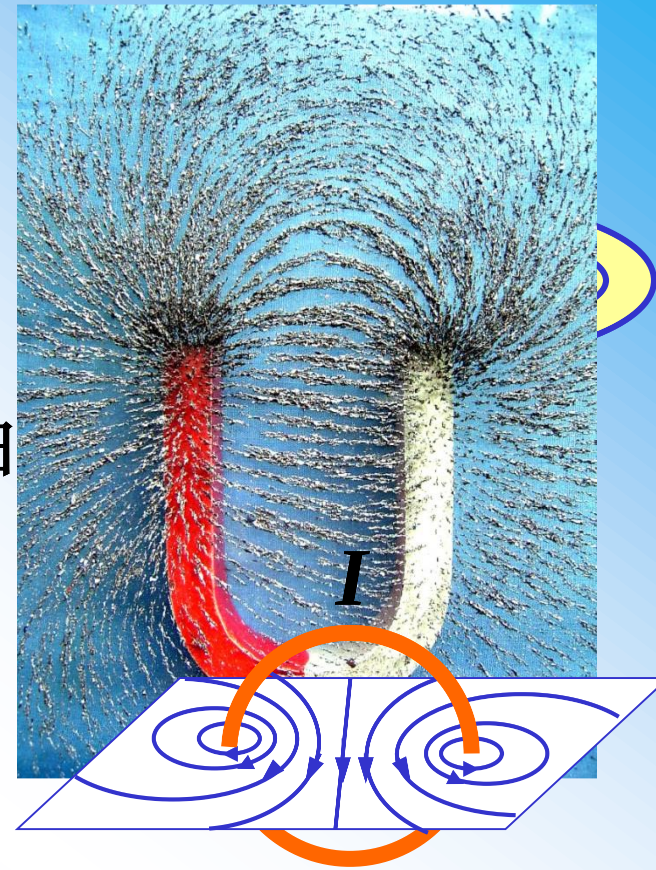


三、磁场的高斯定理

1.*磁通量*

（1）磁场线（**磁感应线、*B*线**）

1 º磁场线是无头无尾的闭合曲

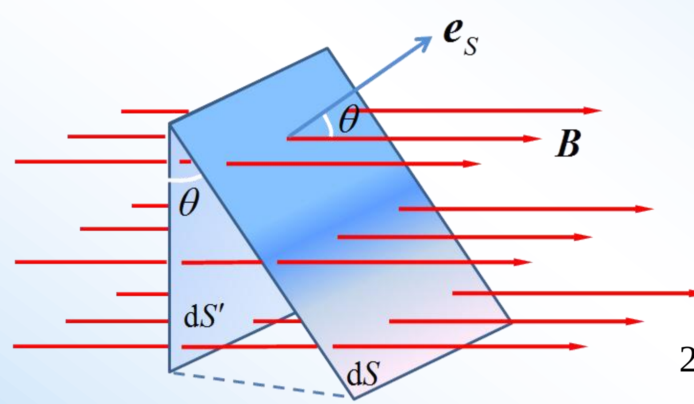


2 º不同电流产生不同磁场，
其磁场线的形状不同

3 º磁场线上任一点切线
方向是该点的磁场方向

4 º可用磁场线的疏密程度
表示磁场的强弱

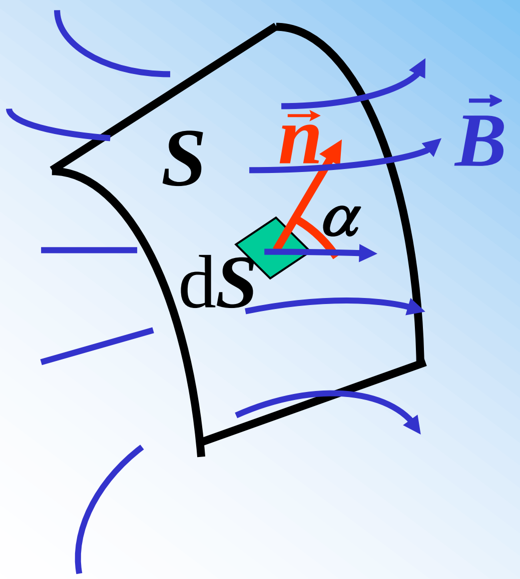
$$B = \frac{\Delta N}{S_{\perp}}$$



（2）磁通量（*B* 通量）

定义：通过一给定曲面的磁场线的总数

——该面的磁通量Φ_B



非均匀磁场中

取面积元d*S*

通过d*S*的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi_B = \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = B\cos\alpha \mathrm{d}S$$

*S*上的总磁通量为:

$$\Phi_B = \int \mathrm{d}\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Φ_B的单位：韦伯(Wb)

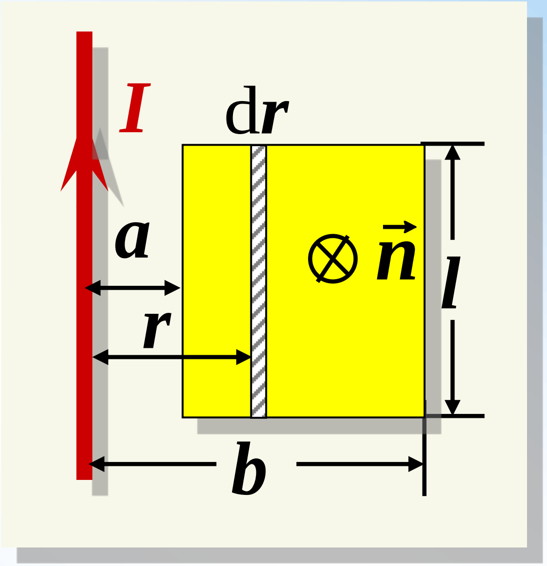
例5. 如图所示，在通有电流 I 的长直导线旁，有一矩形有一矩形平面。求:穿过该平面的Φ_B

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

解： 设该平面的法线方向垂直向里

距导线r处取一窄条dr，

其上的磁通为：$Bl\mathrm{d}r$



则该平面的总磁通为

$$\Phi=\int_a^b \vec{B}\,l\,\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

2.*磁场的高斯定理*

在任意磁场中，对任意闭合曲面S有:

$$\boxed{\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

磁场中的高斯定理

注

1° 静电场中，任意闭合曲面S的电通量:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{S内} q_i \neq 0$$

这是由于**有**单独存在的**自由电荷**

2°磁场中，任意闭合曲面S的磁通量:

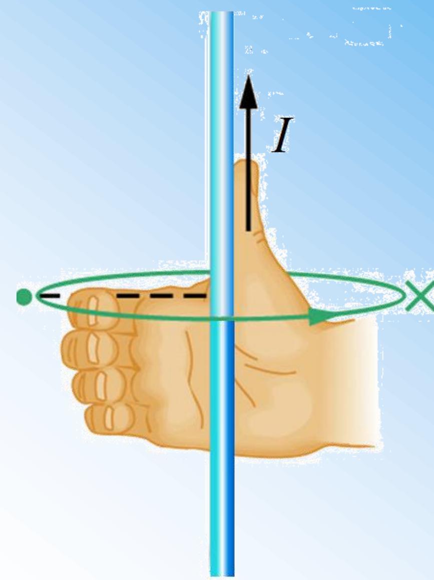
$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$ ——磁场是**无源场**

因为自然界**没有**单独存在的**自由磁荷**

上节课的相关内容

毕奥 — 萨伐尔定律

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}}$$



- 无限长载流导线的磁场

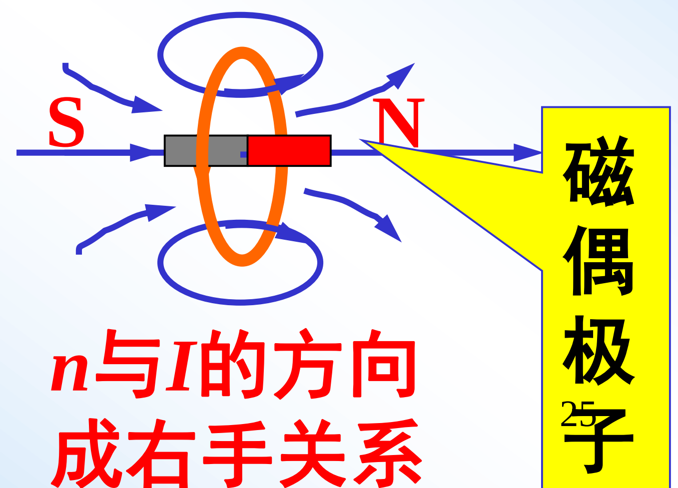
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- 磁偶极子

磁偶极矩

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi x^3}$$



n与I的方向成右手关系

四、安培环路定理 Ampere's Law

1.*安培环路定理*

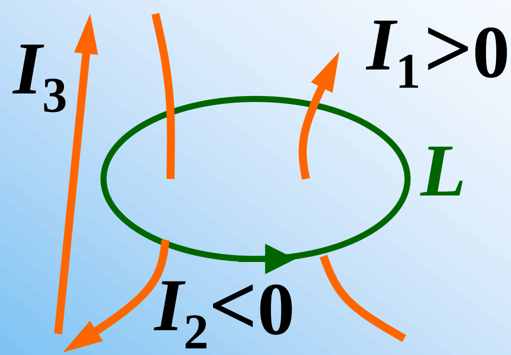
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i}$$

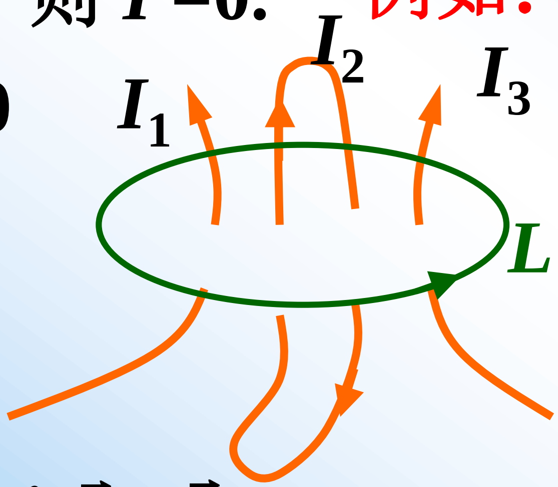
$\vec{B}$沿任意闭合曲线L的线积分**等于**穿过闭合曲线内电流强度代数和的 μ_0倍

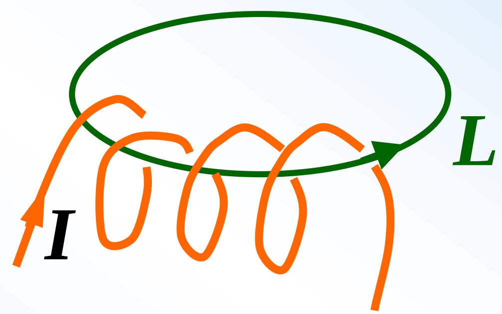
电流I 的正负规定：

（1）I与L的环饶方向成右手关系时$I>0$, 反之$I<0$.

（2）若I不穿过L，则 $I=0$. 例如：



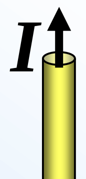




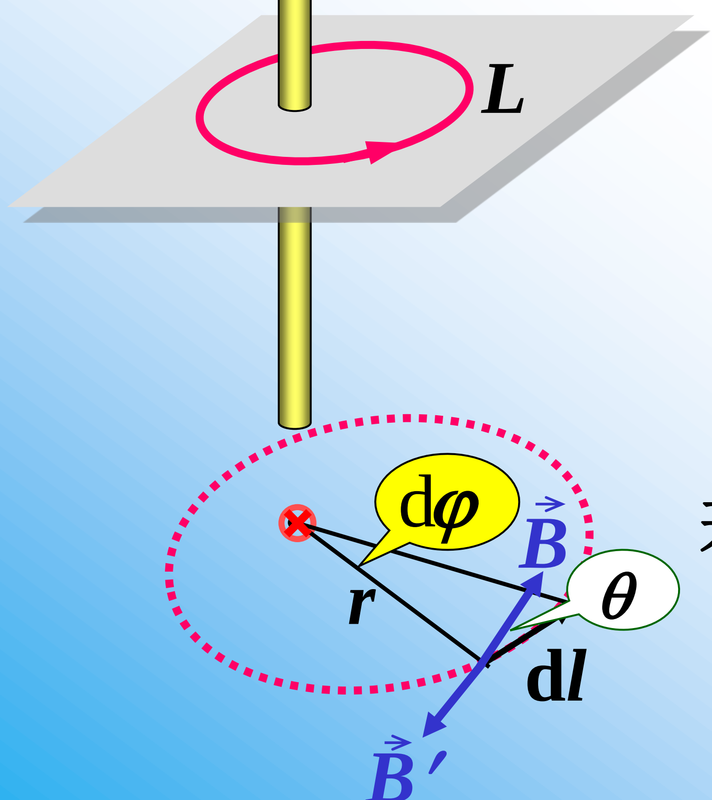
$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(I_1 - I_2)$　　$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(I_1 + I_3)$　　$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -4\mu_0 I$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i}$$ 以无限长载流导线为例

证明：（1）闭合曲线L围绕电流，且曲线所在平面垂直载流导线



由毕萨定理可求得长直导线旁 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$



$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}s = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cancel{r}}\cancel{r}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\therefore \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot \mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$$

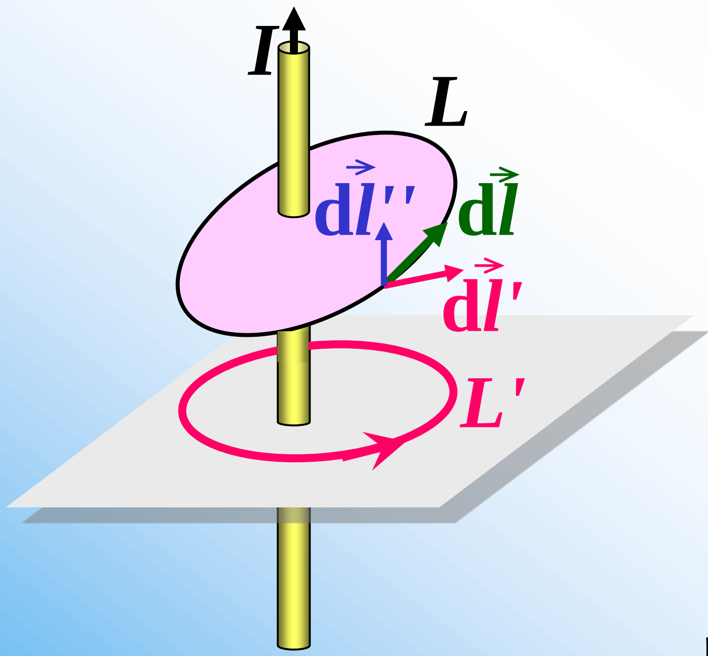
若L的方向不变，而电流反向：

则 $(\widehat{\vec{B}'\,\mathrm{d}\vec{l}}) = \theta' > 90^{\mathrm{o}}$ $\cos\theta' < 0$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\mu_0 I$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i}$$ 以无限长载流导线为例

证明：（2）若闭合曲线不在垂面上



$d\vec{l}$分解$\begin{cases} d\vec{l}' \\ d\vec{l}'' \end{cases}$

$$\therefore \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot(d\vec{l}' + d\vec{l}'')$$

$\begin{cases} \text{而 } \vec{B}\perp d\vec{l}'' \quad \vec{B}\cdot d\vec{l}'' = 0 \\ \text{所有 } d\vec{l}' \text{ 在垂面上形成 } L' \end{cases}$

即 $$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{L'} \vec{B}\cdot d\vec{l}' = \mu_0 I$$

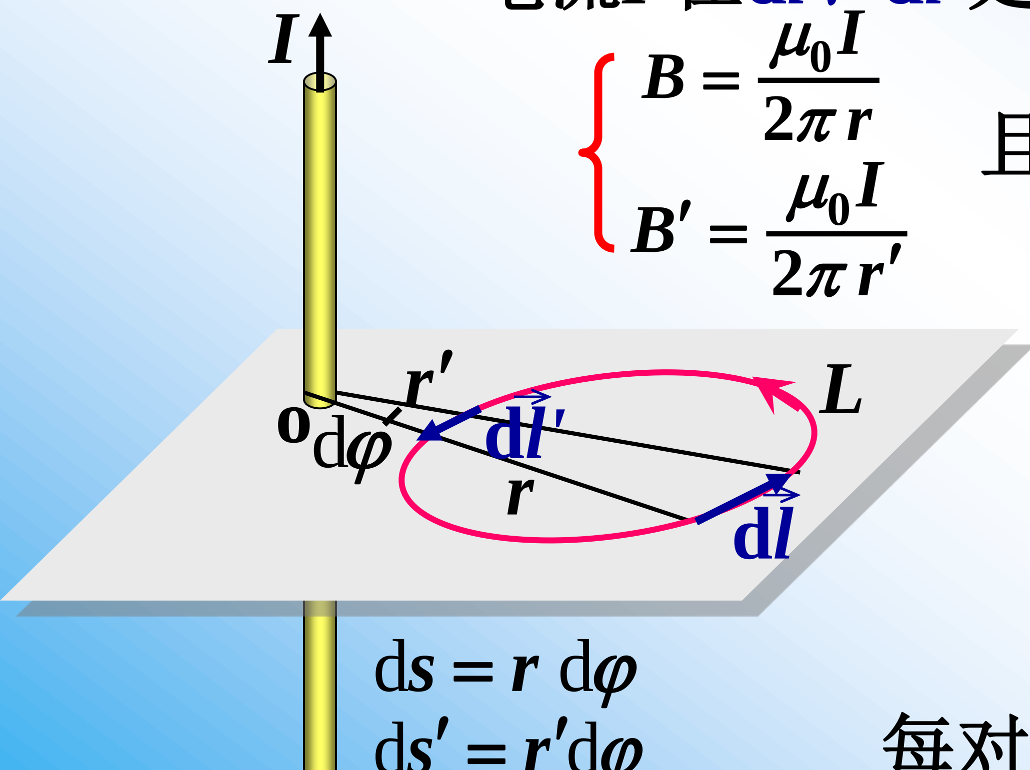
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i}$$ 以无限长载流导线为例

证明:（3）闭合曲线L不包围载流导线

从o点引出的两条射线, 在L上截得$d\vec{l}$、$d\vec{l}'$

电流I 在$d\vec{l}$、$d\vec{l}'$处的磁场分别为:

$$\begin{cases} B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ B' = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r'} \end{cases} \quad 且有 \quad \begin{cases} (\widehat{\vec{B}\, d\vec{l}}) < 90^\circ \\ (\widehat{\vec{B}'\, d\vec{l}'}) > 90^\circ \end{cases}$$



$$\begin{aligned} &\vec{B}\cdot d\vec{l} + \vec{B}'\cdot d\vec{l}' \\ &= B\,dl\cos\theta + B'dl'\cos\theta' \\ &= B\,ds - B'ds' \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \cancel{r}}\cancel{r}\,d\varphi - \frac{\mu_0 I}{2\pi \cancel{r'}}\cancel{r'}\,d\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$ds = r\,d\varphi$$
$$ds' = r'd\varphi$$

每对$\vec{B}$ $d\vec{l}$ 之和均为0

$\therefore$整个闭合路径积分 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i}$$ 以无限长载流导线为例

证明:（4）空间有 k 根载流导线, 其中$I_1 \ldots I_n$穿过 L, 而 $I_{n+1} \ldots I_k$不穿过L

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \ldots + \vec{B}_k)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \oint_L \vec{B}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{B}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

由（1）（2）可知

$$\oint_L \vec{B}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_1 \quad \oint_L \vec{B}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_2 \cdots \quad \oint_L \vec{B}_n\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I_n$$

由（3）可知: $\oint_L \vec{B}_{n+1}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \ \ldots \quad \oint_L \vec{B}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$

$$\therefore \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2 + \cdots + I_n)$$ **定理得证**

即 $$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i}$$ → 适用于任何稳恒磁场

证明见P268-P270

可以结合静电场中高斯定理的证明看。

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i}$$

适用于任何稳恒磁场

注：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i$$

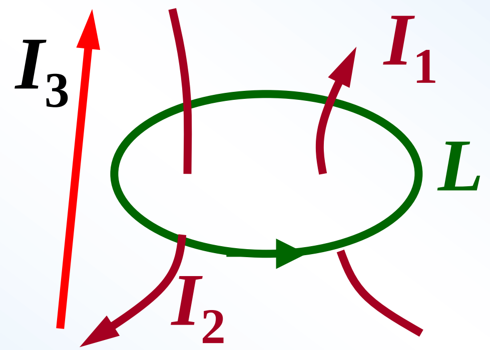
1°若穿过回路的电流是连续分布：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

2° 不穿过闭合回路L的电流I对$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$无贡献，但对回路$L$上各点的$\vec{B}$贡献不为0。

例如：

I_3在回路L上各点产生的B都不为0



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

2. *与静电场类比*

静电场的两个基本性质：

$$\begin{cases} \text{高斯定理} \quad \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \sum\limits_{S\text{内}} q_i & \text{有源场} \\ \text{环路定理} \quad \oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 & \text{无旋场} \end{cases}$$

稳恒磁场两个基本性质：

$$\begin{cases} \text{高斯定理} \quad \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 & \text{无源场} \\ \text{环路定理} \quad \oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum\limits_{L\text{内}} I_i & \text{有旋场} \end{cases}$$