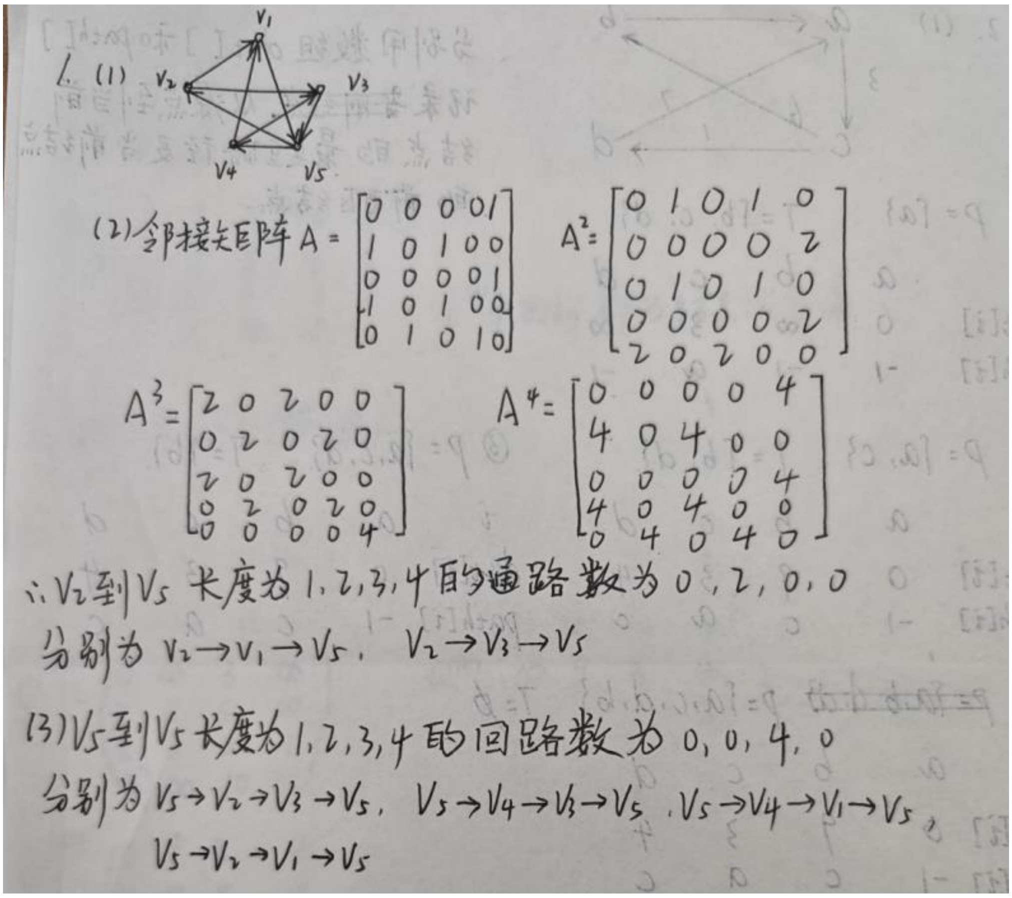
离散数学一（第六次作业）

1. 给定有向图 G1=（V，E），其中 V={v1,v2,v3,v4,v5}，边 E={<v1,v5>,<v2,v1>,<v2,v3>,<v3,v5>,<v4,v1>,<v4,v3>,<v5,v4>,<v5,v2>}。要求：(1) 请画出该图的图形表示；（2）请求出 v2 到 v5 长度为 1,2,3,4 的通路数，并列出相应通路；（3）请求出 v5 到 v5 长度为 1,2,3,4 的回路数，并列出相应回路；（4）请写出该图中所有长度为 4 的通路（包含回路）；（5）请写出该图的可达矩阵。



1. (1)

(2) 邻接矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&2\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&2\\ 2&0&2&0&0 \end{bmatrix}$

$A^3 = \begin{bmatrix} 2&0&2&0&0\\ 0&2&0&2&0\\ 2&0&2&0&0\\ 0&2&0&2&0\\ 0&0&0&0&4 \end{bmatrix}$ $A^4 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&4\\ 4&0&4&0&0\\ 0&0&0&0&4\\ 4&0&4&0&0\\ 0&4&0&4&0 \end{bmatrix}$

∴ V_2 到 V_5 长度为 1, 2, 3, 4 的通路数为 0, 2, 0, 0

分别为 $V_2 \to V_1 \to V_5$，$V_2 \to V_3 \to V_5$

(3) V_5 到 V_5 长度为 1, 2, 3, 4 的回路数为 0, 0, 4, 0

分别为 $V_5 \to V_2 \to V_3 \to V_5$，$V_5 \to V_4 \to V_3 \to V_5$，$V_5 \to V_4 \to V_1 \to V_5$，$V_5 \to V_2 \to V_1 \to V_5$

（4）较为简单，不再详细列出（共 32 条）

（5）5 阶方阵，元素均为 1

2. (1) 请用 Dijkstra 算法求下图 1 的从节点 a 到所有其它节点的距离；（2）请分别用课件中矩阵乘法方法和 Floyd-Warshall 算法求该图所有节点对之间距离。需要写出具体过程。

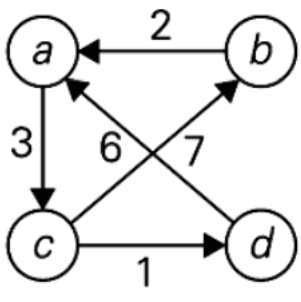
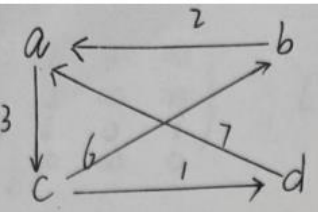


图 1: 带权有向图（这里 d->a 的权值为 7，c->b 的权值为 6）

2. (1)



分别用数组 dist[ ] 和 path[ ] 记录~~当前结点~~从源点到当前结点的最短路径及当前结点的前驱结点。

① P = {a}　T = {b, c, d}

i	a	b	c	d
dist[i]	0	∞	3	∞
path[i]	-1	-1	a	-1

② P = {a, c}　T = {b, d}

i	a	b	c	d
dist[i]	0	9	3	4
path[i]	-1	c	a	c

③ P = {a, c, d}　T = {b}

i	a	b	c	d
dist[i]	0	9	3	4
path[i]	-1	c	a	c

④ ~~P = {a, b, d, d}~~ P = {a, c, d, b}　T = $\emptyset$

i	a	b	c	d
dist[i]	0	9	3	4
path[i]	-1	c	a	c

即　$a \to c$　3

$a \to c \to d$　4

$a \to c \to b$　9

(2) 矩阵乘法

$$L^{(1)}=\begin{pmatrix}0&\infty&3&\infty\\2&0&\infty&\infty\\\infty&6&0&1\\7&\infty&\infty&0\end{pmatrix}\quad L^{(2)}=\begin{pmatrix}0&9&3&4\\2&0&5&\infty\\8&6&0&1\\7&\infty&10&0\end{pmatrix}$$

$$L^{(3)}=\begin{pmatrix}0&9&3&4\\2&0&5&6\\8&6&0&1\\7&16&10&0\end{pmatrix}$$

$L^{(3)}$中的l_{ij}即为结点间距离

Floyd-Warshall 算法

$$D^{(0)}=\begin{pmatrix}0&\infty&3&\infty\\2&0&\infty&\infty\\\infty&6&0&1\\7&\infty&\infty&0\end{pmatrix}\quad D^{(1)}=\begin{pmatrix}0&\infty&3&\infty\\2&0&5&\infty\\\infty&6&0&1\\7&\infty&10&0\end{pmatrix}$$

$$D^{(2)}=\begin{pmatrix}0&\infty&3&\infty\\2&0&5&\infty\\8&6&0&1\\7&\infty&10&0\end{pmatrix}\quad D^{(3)}=\begin{pmatrix}0&9&3&4\\2&0&5&6\\8&6&0&1\\7&16&10&0\end{pmatrix}$$

$$D^{(4)}=\begin{pmatrix}0&9&3&4\\2&0&5&6\\8&6&0&1\\7&16&10&0\end{pmatrix}$$

3. 某个关系 R 的关系图如图 2 所示，请用 Floyd-Warshall 算法求该关系的传递闭包，请写出具体计算过程。

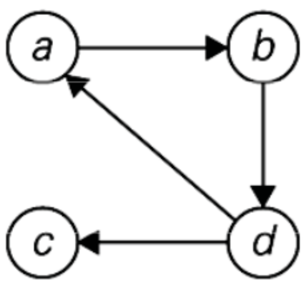
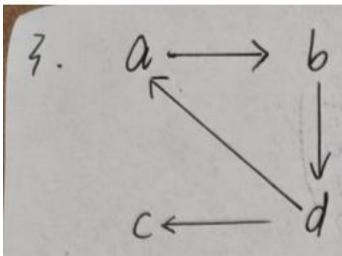


图 2：某个关系 R 的关系图

3.



$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)})$$

$$T^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$