10-T11 使 4.00 mol 的理想气体由体积 V_1 膨胀到体积 $V_2(V_2=2V_1)$。(1)如果膨胀是在 400 K 的温度下等温进行的，求膨胀过程中气体所做的功；(2)求上述等温膨胀过程的熵变；(3)如果气体的膨胀不是等温膨胀而是可逆的绝热膨胀，则熵变是多少？

解：

(1) $W = nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

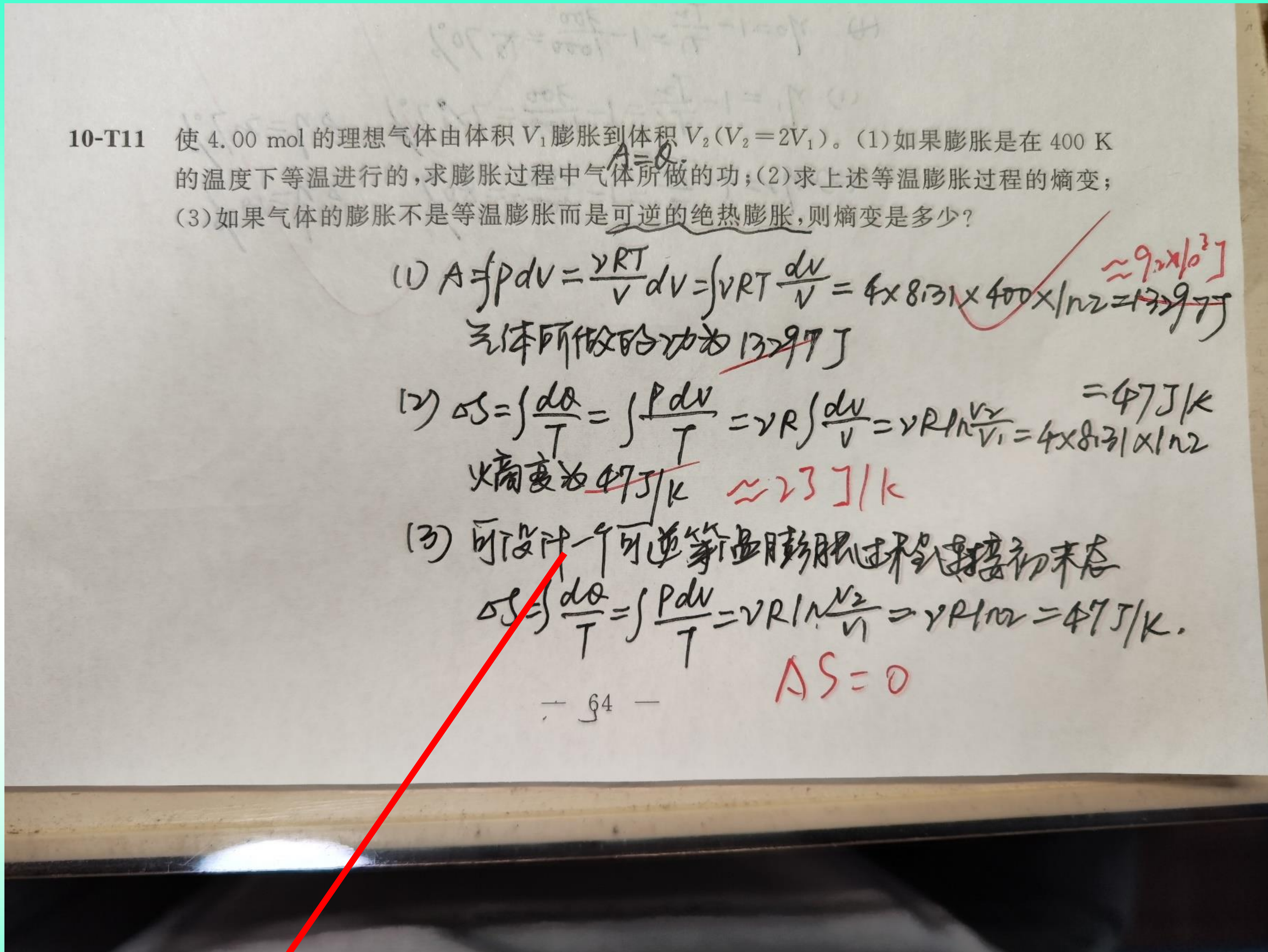
$= \cancel{19956.9\,\mathrm{J}}$ $9216\,\mathrm{J}$

(2) $\Delta S = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \cancel{9.866\,\mathrm{J/K}}$ $23.04\,\mathrm{J/K}$

(3) $\cancel{\Delta S = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 9.866\,\mathrm{J/K}}$

$\Delta S = 0$

没有过程？？



10-T11 使 4.00 mol 的理想气体由体积 V_1 膨胀到体积 V_2($V_2=2V_1$)。(1)如果膨胀是在 400 K 的温度下等温进行的，求膨胀过程中气体所做的功；(2)求上述等温膨胀过程的熵变；(3)如果气体的膨胀不是等温膨胀而是可逆的绝热膨胀，则熵变是多少？

$A=Q$

(1) $A=\int p\,dV=\int\frac{\nu RT}{V}dV=\int\nu RT\frac{dV}{V}=4\times8.31\times400\times\ln2=\cancel{13297}\text{ J}$ $\approx 9.2\times10^3$ J

气体所做的功为 ~~13297~~ J

(2) $\Delta S=\int\frac{dQ}{T}=\int\frac{p\,dV}{T}=\nu R\int\frac{dV}{V}=\nu R\ln\frac{V_2}{V_1}=4\times8.31\times\ln2=47\text{ J/K}$

熵变为 ~~47 J/K~~ ≈ 23 J/K

(3) 可设计一个可逆等温膨胀过程连接初末态

$\Delta S=\int\frac{dQ}{T}=\int\frac{p\,dV}{T}=\nu R\ln\frac{V_2}{V_1}=\nu R\ln2=47\text{ J/K}.$

$\Delta S=0$

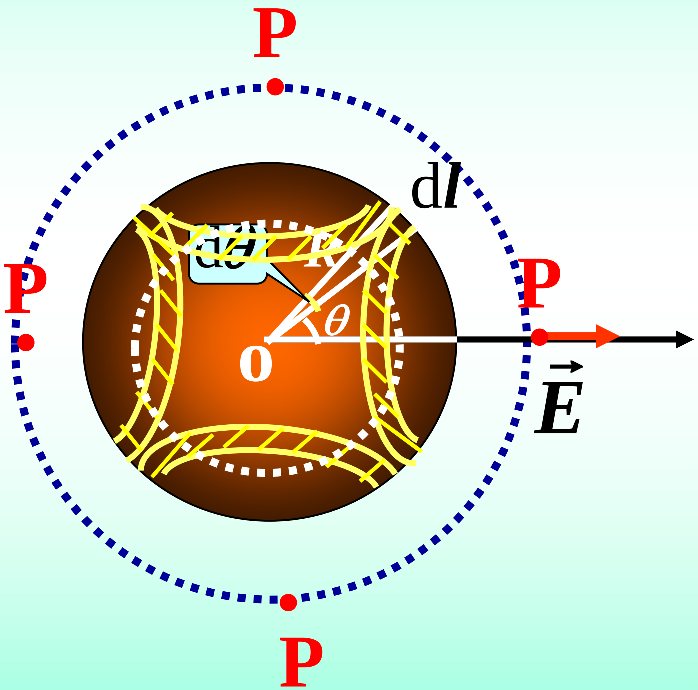
— 64 —

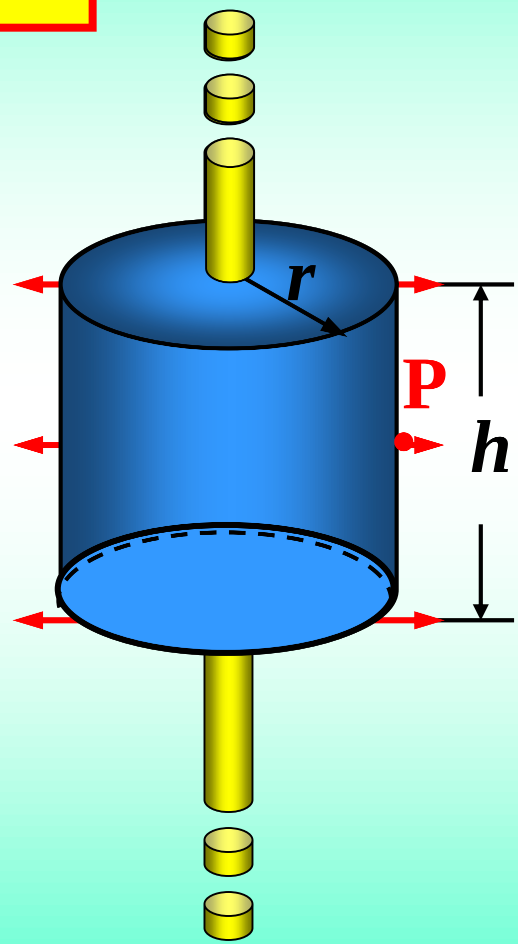
绝热膨胀过程中，牺牲内能做功，温度发生变化。

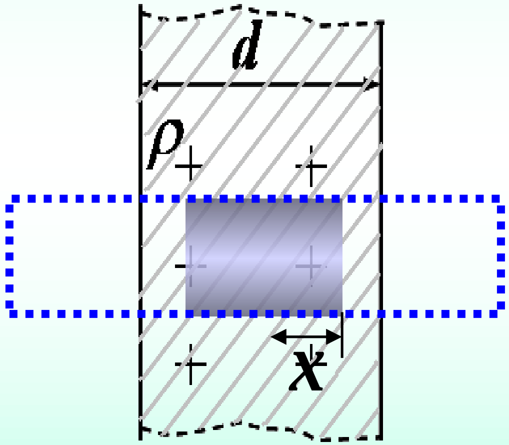
上节课的相关内容

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

——静电场的基本规律之一







电场力 $\vec{F} = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}q$

上节课的相关内容

静电场做功 $A=\int\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

$$\therefore A=\int_L q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

——静电力是保守力

静电场两个基本性质：

高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$ 有源场

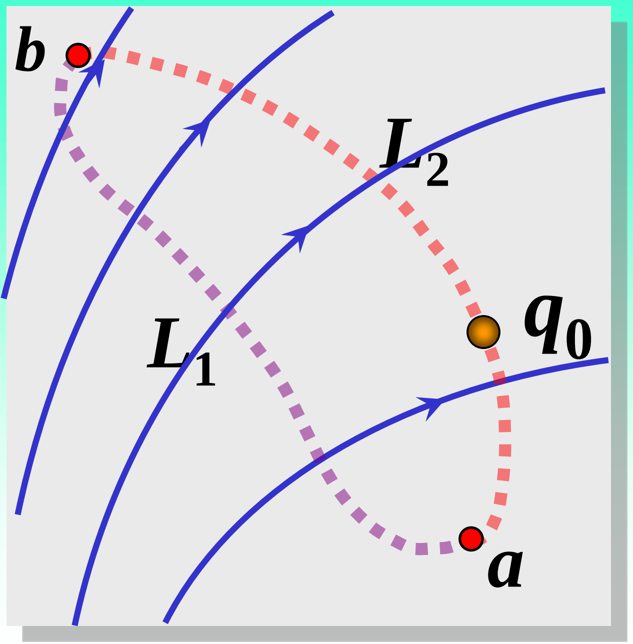
环路定理 $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$ 无旋场

静电场是保守场

可以引入“**电势**”、“**电势能**”的概念

六、电势、电势能

$$\int_{a \atop L_1}^{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a \atop L_2}^{b} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



存在与位置有关的标量函数

1.电势差、电势

定义： *a*、*b*两点的电势分别为 V_a、V_b，则两点间的电势差为

$$\boxed{V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

即 *a*、*b*两点的电势差 = 将单位正电荷从$a \rightarrow b$电场力作的功

电场中任意点*P*的电势

$$V_P = \int_P^{V=0} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

单位：V或J/C

注

$$V_P=\int_P^{V=0}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

1°电场中某点的“V”由场源电荷及场点位置决定，与 q_0 无关（类同E 与q_0无关）。它描述的是电场“**能的性质**”。

2°由定义式 $V_a-V_b=\dfrac{A_{ab}}{q_0}$ 有 $A_{ab}=q_0(V_a-V_b)$

3°电势是标量，有正、有负。

4°电势是相对量，相对于 $V=0$ 处而言。

原则上可选电场中任意一点的电势为零。

电势零点的选取
- 理论上
  - 电荷分布在**有限**空间，取无穷远点为 $V=0$
  - 电荷分布在**无限**空间，取有限远点为 $V=0$
- 一般工程上

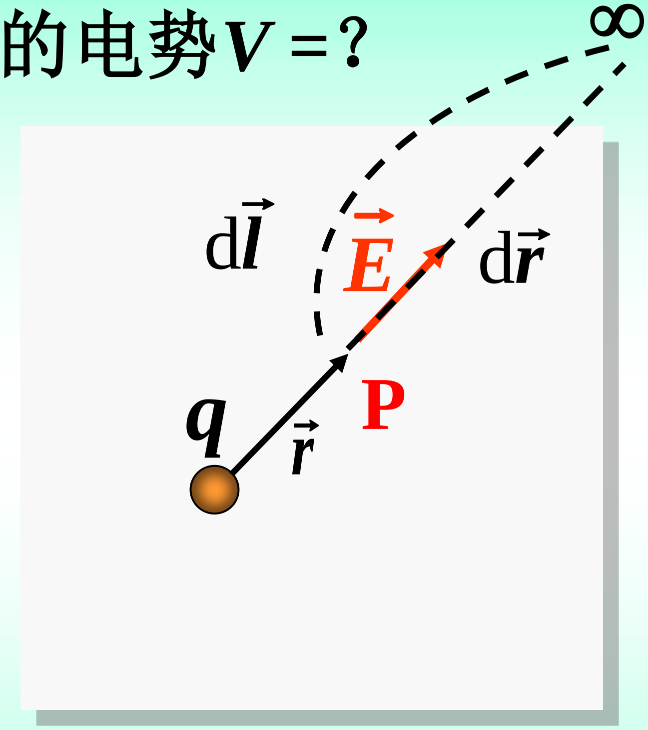
选大地或设备外壳为$V=0$点

2. 电势的计算

$$V_P = \int_P^{V=0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

（1）用定义法求V

例19. 点电荷q电场中任意一点**P** 的电势$V=?$



解： 设 $r \to \infty \quad V = 0$

已知q的电场 $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

则**P**点的电势为

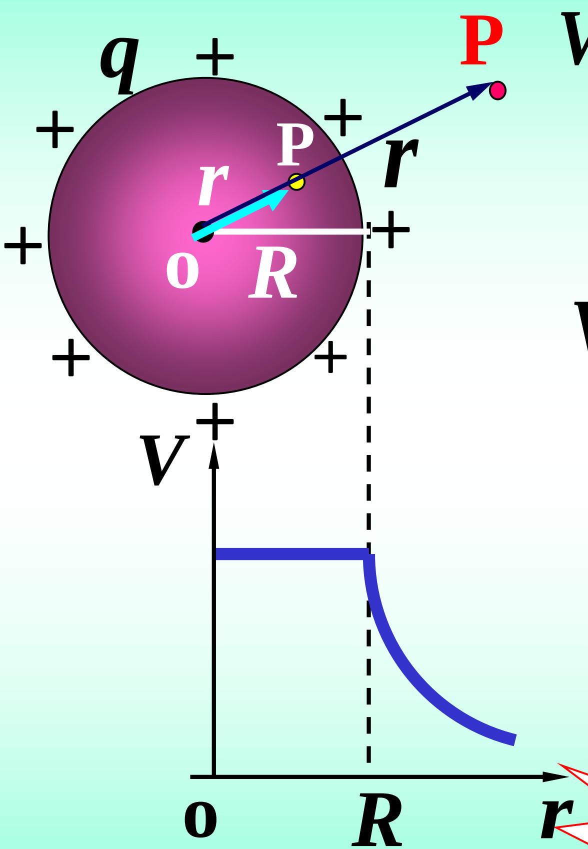
$$V_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\,\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{r_P}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_P}$$

$$\begin{cases} q > 0\text{时}, V_P\text{为正}, \; r\uparrow \; V\downarrow, \; r_\infty\text{处}V_\infty = 0 \quad min \\ q < 0\text{时}, V_P\text{为负}, \; r\uparrow \; V\uparrow, \; r_\infty\text{处}V_\infty = 0 \quad max \end{cases}$$

例20. 计算均匀带电球面电场中任一点**P**的电势。

解: 用定义法, 选$V_\infty = 0$, $r \geq R$处



$$V_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_P}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$r \leq R$处

$\cancel{=0}$?

0

$$V_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}$$

0

$$= \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$r = R$ 处 $V_R = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

无场区是等势区 与点的位置无关

注意

$E = 0$ 的区域 "V"不见得为零

例21. 求半径为R，电荷体密度为ρ的无限长均匀带电圆柱体的电势分布？

解： 由高斯定理求得各处的电场

$$\begin{cases} 柱外\ r \geq R & E = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \\ 柱内\ r < R & E = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0} \end{cases}$$

若令$\cancel{V_\infty = 0}$ 则有

$$r \geq R \quad V_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_P}^\infty \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{\infty}{r_P}$$

无意义

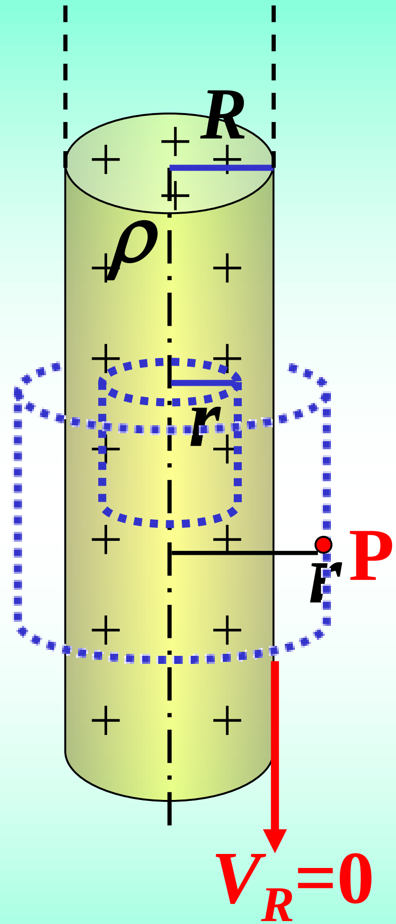
∞

令柱面处$V_R=0$，则

$$r > R \quad V = \int_r^R \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r} < 0$$

$$r < R \quad V = \int_r^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2) > 0$$

$$r = 0处 \quad V = V_{max} = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R^2$$



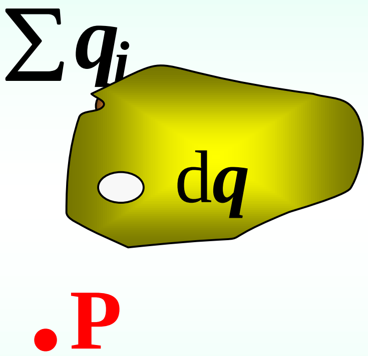
（2）用叠加法求V

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

点电荷系电场中的电势

在点电荷系 $q_1, q_2\cdots q_k$ 的电场中，

任意点P处的电势：



$$V_P=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_P^{\infty}(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_k)\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_P^{\infty}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\int_P^{\infty}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\cdots+\int_P^{\infty}\vec{E}_k\cdot d\vec{l}$$

$$=V_1+V_2+\cdots+V_k$$

$$=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\cdots+\frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_k}$$

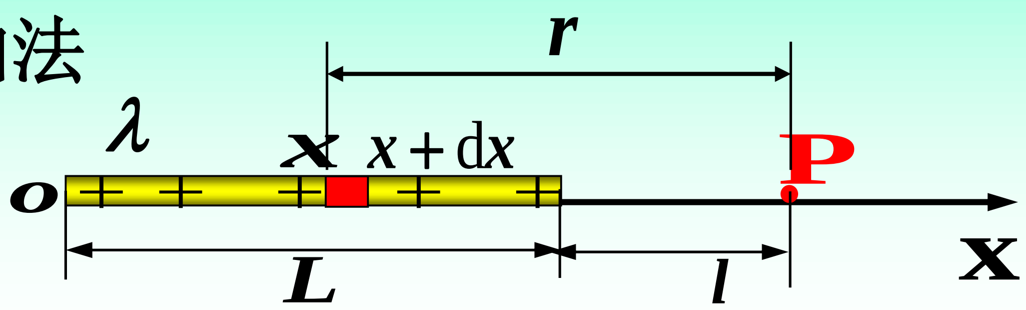
$$\boxed{V_P=\sum_i V_i=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$$ → **电势叠加原理**

任意带电体场中的电势 $$\boxed{V_P=\int_q\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

例22.长为L 的均匀带电导线, 电荷线密度为+λ。

求:延长线上任意一点 P 的电势?

解: 用迭加法



取电荷元 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$

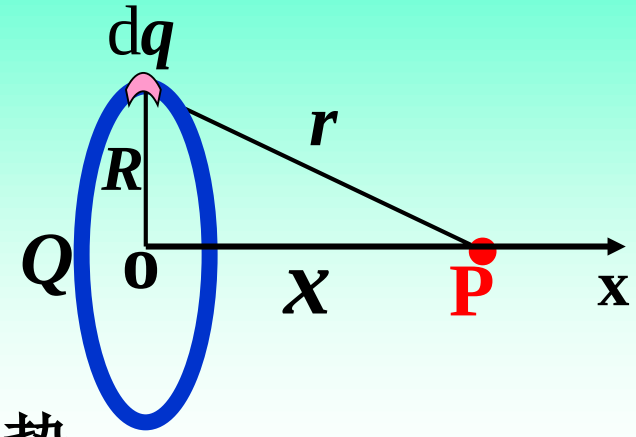
$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (L + l - x)}$$

P点的电势 $V_P = \int \mathrm{d}V = \int_0^L \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 (L + l - x)}$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{L + l}{l}$$

例23.求一均匀带电圆环轴线上任意点P 的电势。

解：用迭加法，取电荷元dq,



其在P点产生的电势为

$$\mathrm{d}V_P = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所有电荷在P产生的电势

$$V_P = \int_0^Q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

讨论

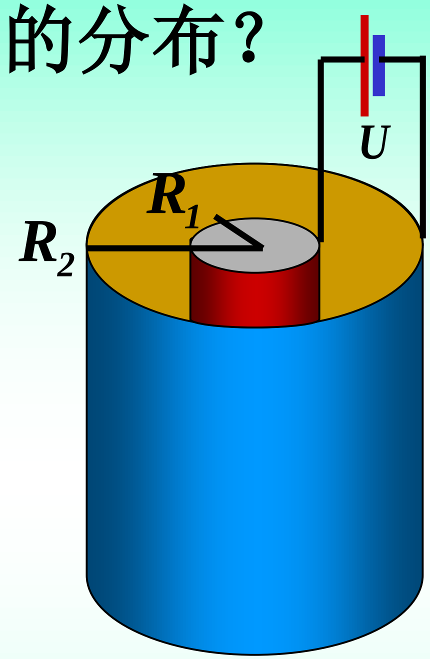
1° $|x| >> R$, $V_P = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |x|}$ 相当于点电荷

2° $x = 0$, $V_P = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

3° $x \to \infty$, $V_P = 0$

4 °若是一带电圆盘？

例24. 真空中半径分别为 R_1、 R_2的两金属圆筒电极间电压为U。求（1）静止电子从外圆筒到内圆筒时的速度？（2）两圆筒间电场强度E 的分布？

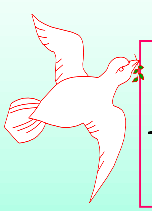


解:（1） $A_{R_2R_1}=(-e)(V_2-V_1)=(-e)(-U)$

$$A_{R_2R_1}=\frac{1}{2}mv^2-0$$

$$eU=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

（2） $U=V_{R_1}-V_{R_2}=\int_{+}^{-}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

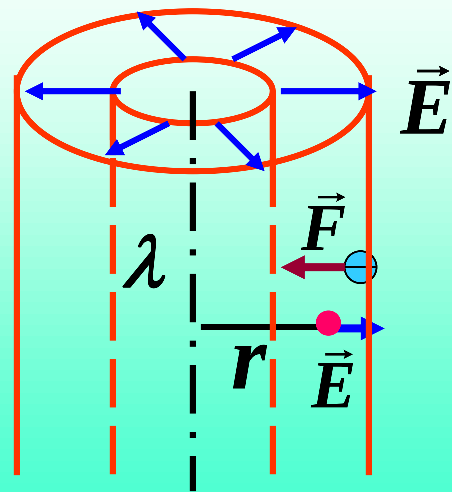


$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

?

$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\lambda=\frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln R_2/R_1}$$



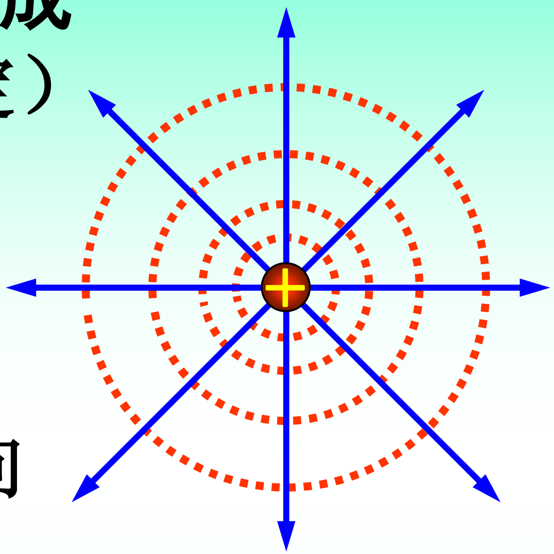
代入E 中，得$E=\dfrac{U}{r\ln R_2/R_1}$

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

3. *等势面*

电场中所有电势相等的点构成的曲面叫等势面（可由实验测定）



等势面与电场线的关系：

（1）电场线与等势面处处正交

（2）电场线方向指向电势降低方向

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

3. *等势面*

电场中所有电势相等的点构成的曲面叫等势面（可由实验测定）

等势面与电场线的关系：

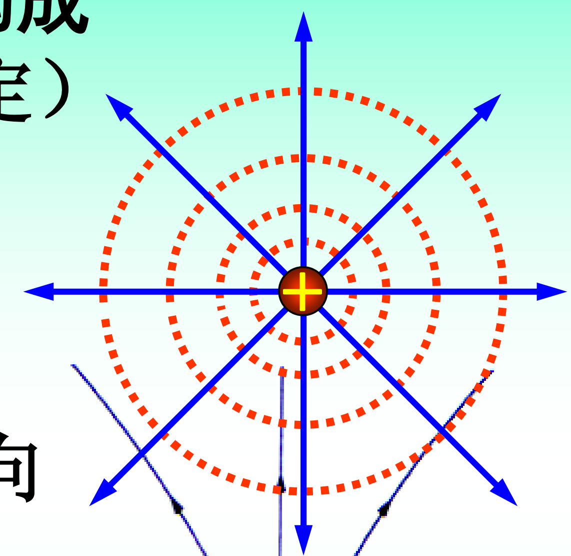
（1）电场线与等势面处处正交

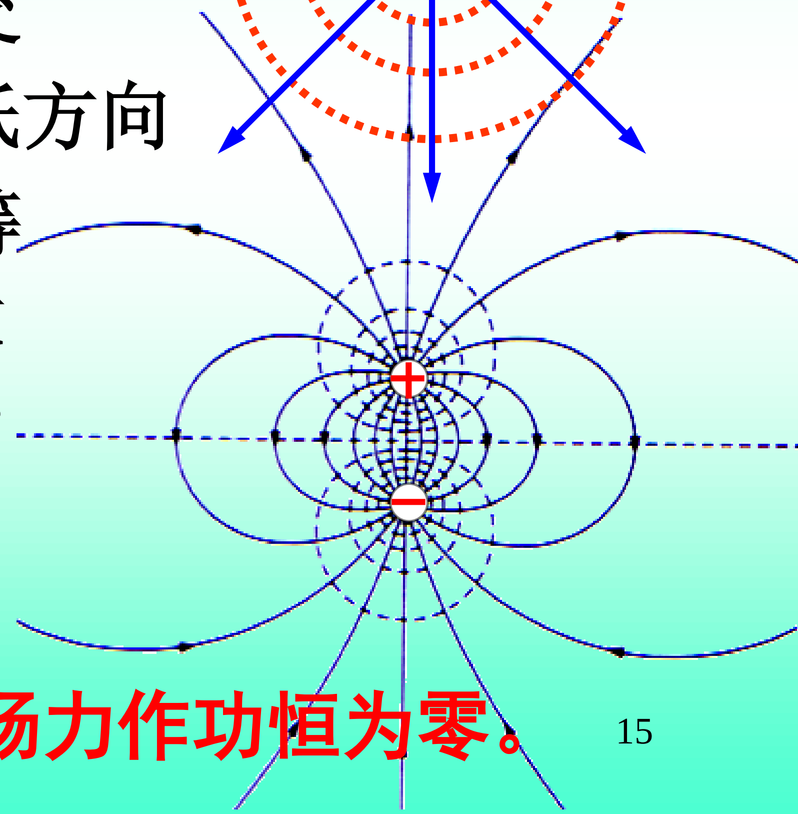
（2）电场线方向指向电势降低方向

（3）若相邻等势面电势差相等

等势面密集处场强大

等势面稀疏处场强小



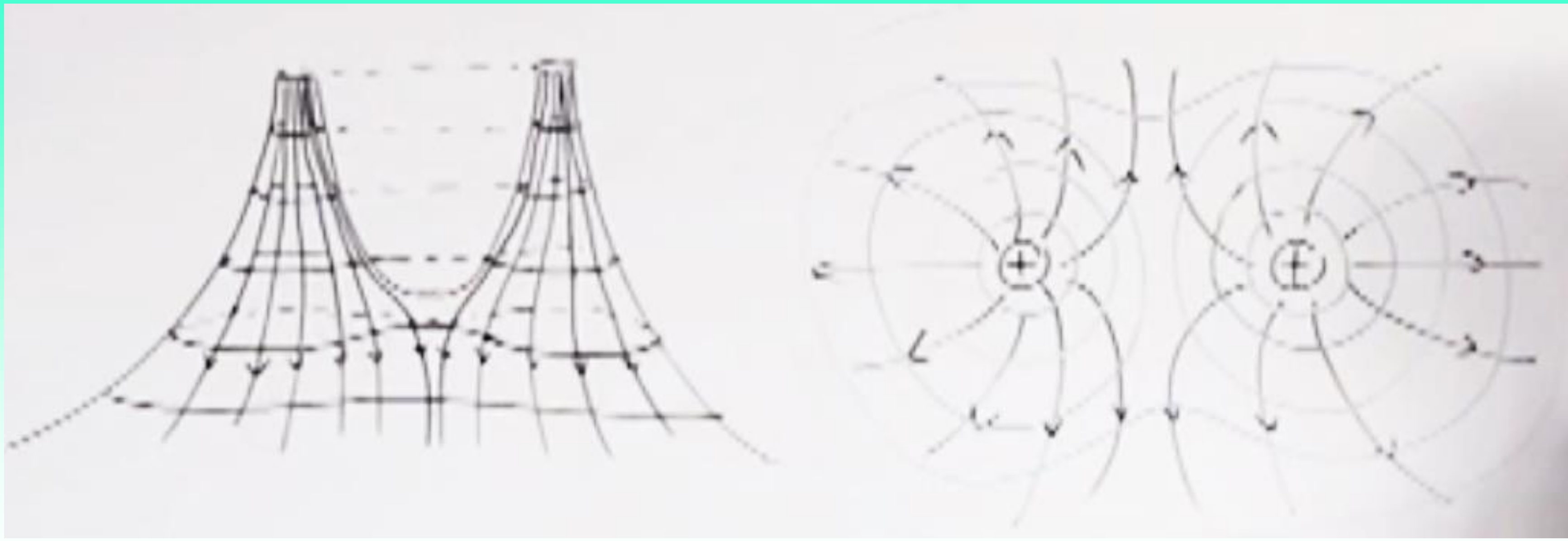


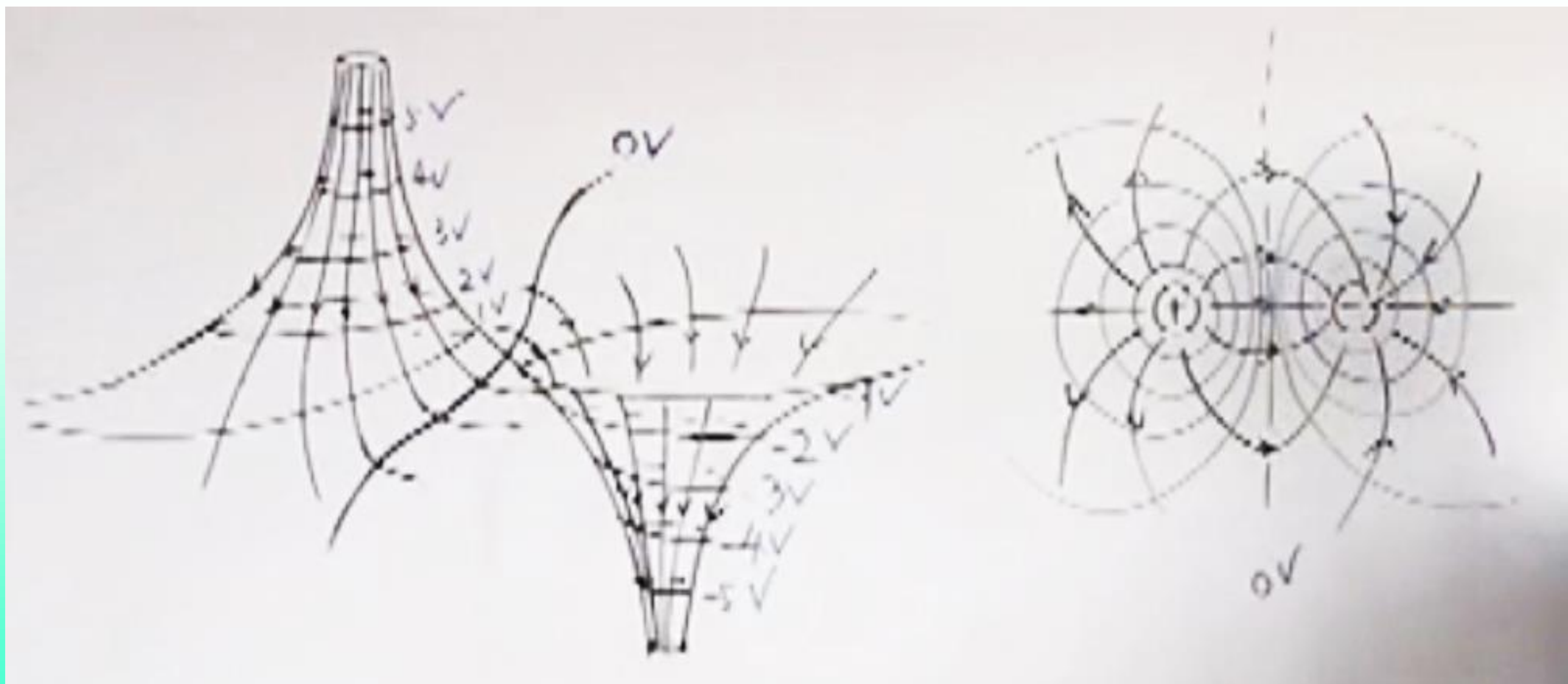
注意

$$A_{ab} = q_0\int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

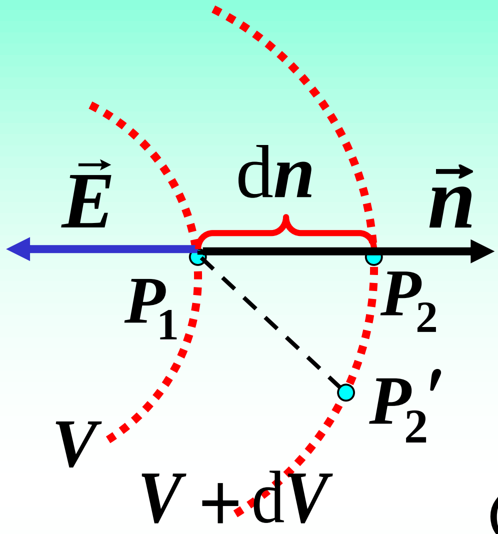
$$A_{ab} = q_0(V_a - V_b)$$

在同一等势面上移动电荷，电场力作功恒为零。




5V
4V
3V
2V
1V
0V
-2V
-3V
-4V
-5V
0V

4. *电势梯度矢量*（ *grad V* ）(P219)



dV：两等势面电势之差

dn：两等势面间在P_1点处的最短距离

（等势面间在P_1点处的法向距离）

$\vec{n}$：P_1点处法线方向上的单位矢量

指向电势升高的方向

（1）电势梯度的定义

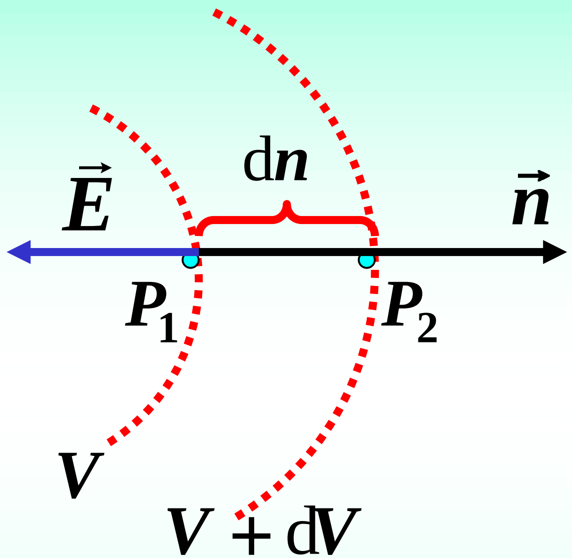
电场中某点的电势沿法线方向的空间变化率叫该点的电势梯度。（是一个矢量）

定义式 $grad\,V=\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\vec{n}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{大小：}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\\ \text{方向：与}\vec{n}\text{同向}\end{array}\right.$

即:该点电势在两等势面间的最大空间变化率

（2）电场强度与电势梯度的关系

根据电势差的定义，把单位正电荷从P_1移到P_2电场力所作的功为



$$\mathrm{d}A = \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n} = V - (V + \mathrm{d}V)$$

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n} = -\mathrm{d}V$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}$$

$$\vec{E} = -\underbrace{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\vec{n}}_{grad\ V}$$

即：$\boxed{\vec{E} = -grad\ V}$

电场中某点的场强$\vec{E}$等于该点电势梯度的负值

归纳

电场强度与电势的关系

积分关系：$V_a=\int_a^{V=0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

微分关系：$\vec{E}=-grad\ V$

注

已知 $\vec{E}$ 可以求V，已知V 可以求$\vec{E}$ 。

求 $\vec{E}$ 的方法又增加一个！

具体的作法是 $\because \vec{E}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\vec{n}$

$$\therefore E_x=-\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

直角坐标系中

$$\vec{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)=-\nabla V$$

例25. 求一均匀带电圆环轴线上的电场强度E=？

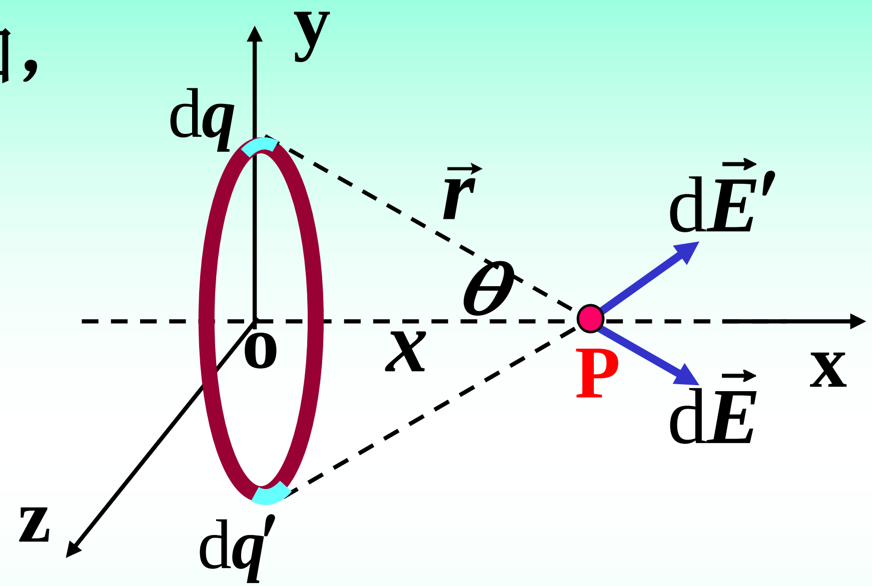
已知：圆环半径为R，带电量为Q。

解：根据点电荷电势叠加，

P点的电势

$$V_P = \int_Q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

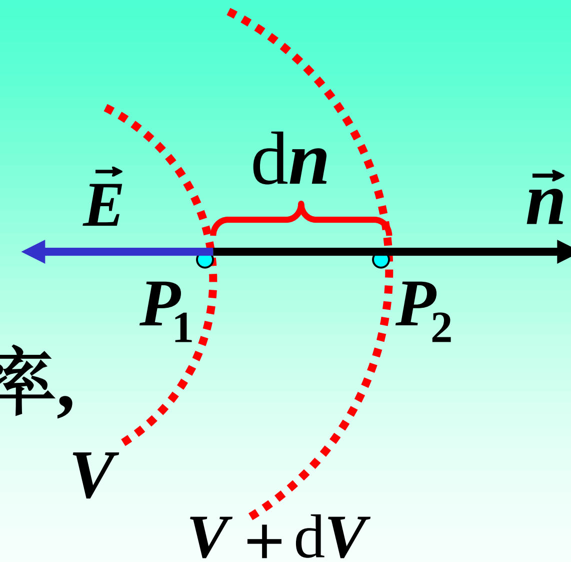


P点的电场 $\because \frac{\partial V}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial V}{\partial z}=0$

$$\therefore \quad E_P = E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

方向沿x轴！

小结



（1） $\vec{E} = -\mathbf{grad}\,V$

取决于V 在该点的空间变化率,
而与该点V 值大小无关。

（2）电场强度E 的又一单位：**V/m = N/C**

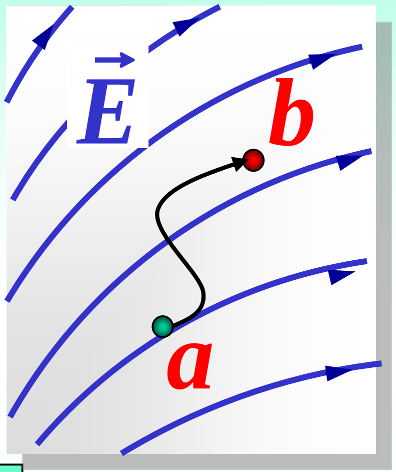
（3）求E 的三种方法

- **点电荷电场叠加** $\vec{E} = \int \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$
- **用高斯定理求对称场** $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$
- **电势梯度法** $\vec{E} = -\mathbf{grad}\,V$

5. *电荷在外电场中的电势能*

任何电荷在静电场中都具有势能 ——**静电势能**

设点电荷q在电场中a、b两点的电势能分别为W_a、W_b



若电场力将点电荷q从$a \to b$

电场力作功 ＝ 静电势能的减少

$$A_{ab} = \int_a^b q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q(V_a - V_b) = \boxed{qV_a} - \boxed{qV_b}$$

又 $A_{ab} = -(W_b - W_a) = \boxed{W_a} - \boxed{W_b}$

比较两式得： $W_a = qV_a$ $W_b = qV_b$

q在电场中的静电势能 $\boxed{W = qV}$

电荷与场源电荷的相互作用能

点电荷系在外电场中具有电势能

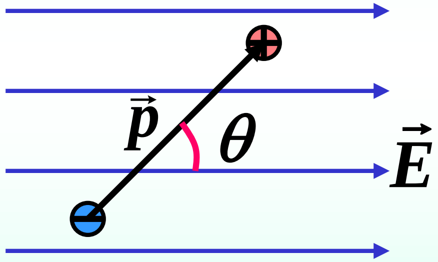
$$\boxed{W=qV}$$

分立点电荷系的电势能 $W=\sum q_i V_i$

连续分布带电体的电势能 $W=\int V\mathrm{d}q$

例25. 求一电偶极子 $\vec{p}=q\vec{l}$ 在均匀电场 $\vec{E}$ 中的电势能。

解： 两电荷的电势能分别是



$$W_+=qV_+ \qquad W_-=-qV_-$$

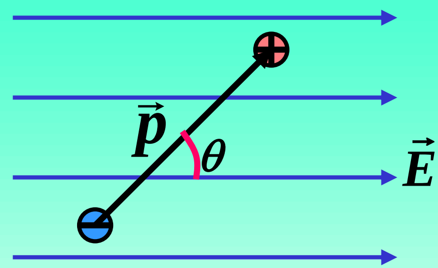
$$W=W_++W_-=q(V_+-V_-)$$

$$=q\int_+^-\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-q\int_-^+\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=-q\int_-^+E\cos\theta\,\mathrm{d}l=-qlE\cos\theta=-pE\cos\theta$$

即 $$\boxed{W=-\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

讨论



$$\boxed{W=-\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

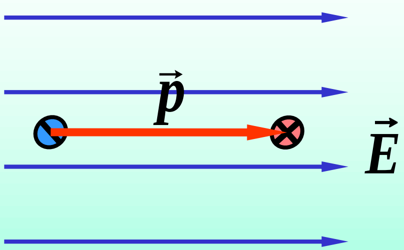
$$\boxed{\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}}$$

1° $\theta=0$ $\cos\theta=1$ $W=-pE$ 能量最低 **稳定平衡态**

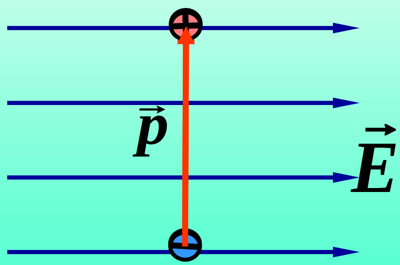
2° $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ $\cos\theta=0$ $W=0$ $\vec{F}=0$ $\vec{M}\neq 0$ 非平衡态

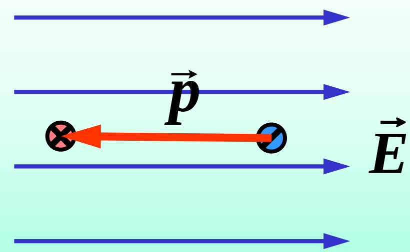
3° $\theta=\pi$ $\cos\theta=-1$ $W=pE$ 能量最高 **非稳定平衡态**

4° $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ $\cos\theta=0$ $W=0$ $\vec{F}=0$ $\vec{M}\neq 0$ 非平衡态



$\vec{F}=0$ $\vec{M}=0$





$\vec{F}=0$ $\vec{M}=0$