电路理论基础

——电路理论（基础篇）

华中科技大学·电气学院
ccsfm@hust.edu.cn

第3章 电路方程法

3.1 概述

3.2 线性代数方程组的解

3.3 结点方程

3.4 网孔方程

3.5 结点法与网孔法对比

3.6 回路方程

3.7 拓展与应用

第3章 电路方程法

● 重点

1.熟练掌握电路的基本方程

2.熟练掌握结点方程（含电源支路的处理方法）

3.熟练掌握网孔方程（含电源支路的处理方法）

目的：找出一般(对任何线性电路均适用)的求解线性网络的系统方法(易于计算机编程序求解)。

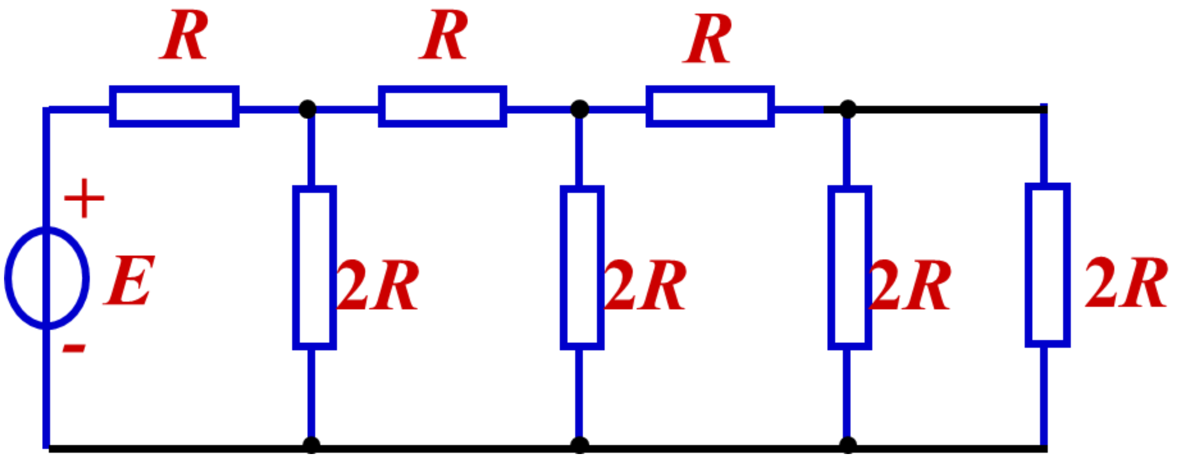
对象：含独立源、受控源的线性网络的直流稳态解。

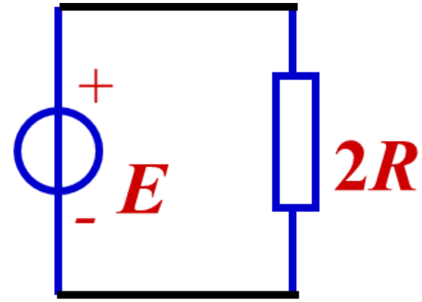
基础：电路性质{元件特性(约束)(对电阻电路，即欧姆定律)；电路结构—KCL，KVL} 相互独立

特点：不改变电路的结构，直接根据已知电路列写方程。

根据列方程时所选变量的不同可分为结点分析法、网孔分析法和回路分析法等。

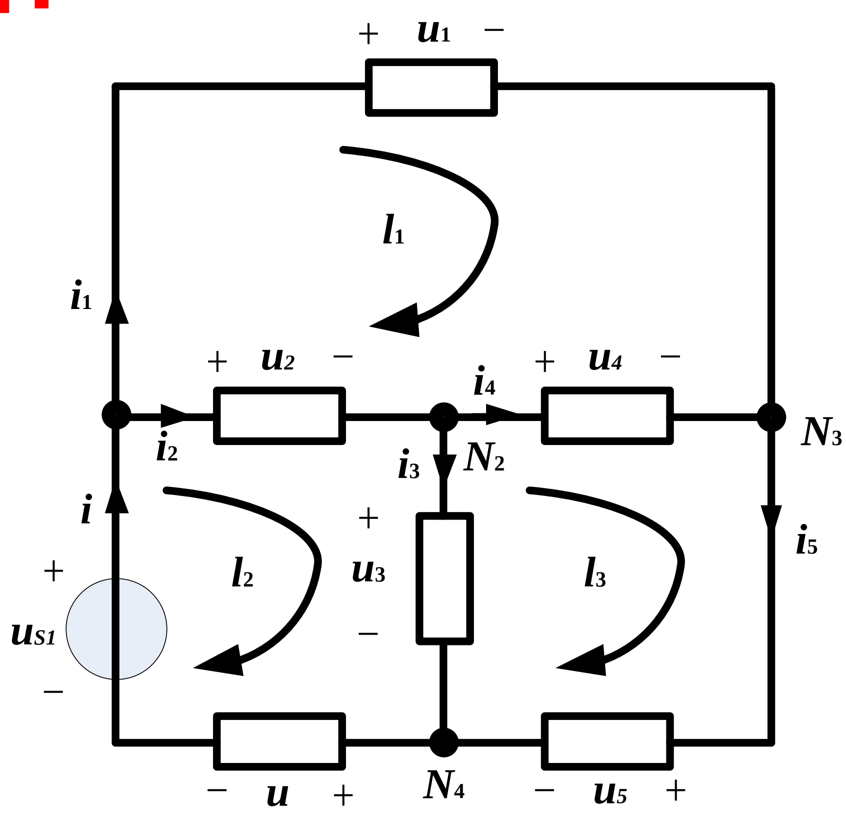
对于简单电路，通过串、并联关系即可求解。如：





对于复杂电路（如下图）仅通过串、并联无法求解，必须经过一定的解题方法，才能算出结果。

如：



未知变量：
各支路电压、支路电流。

解题思路： 根据KCL、KVL定律，列结点方程或者网孔方程，然后联立求解。

1 、对任一网络，可对所有的结点写出KCL方程

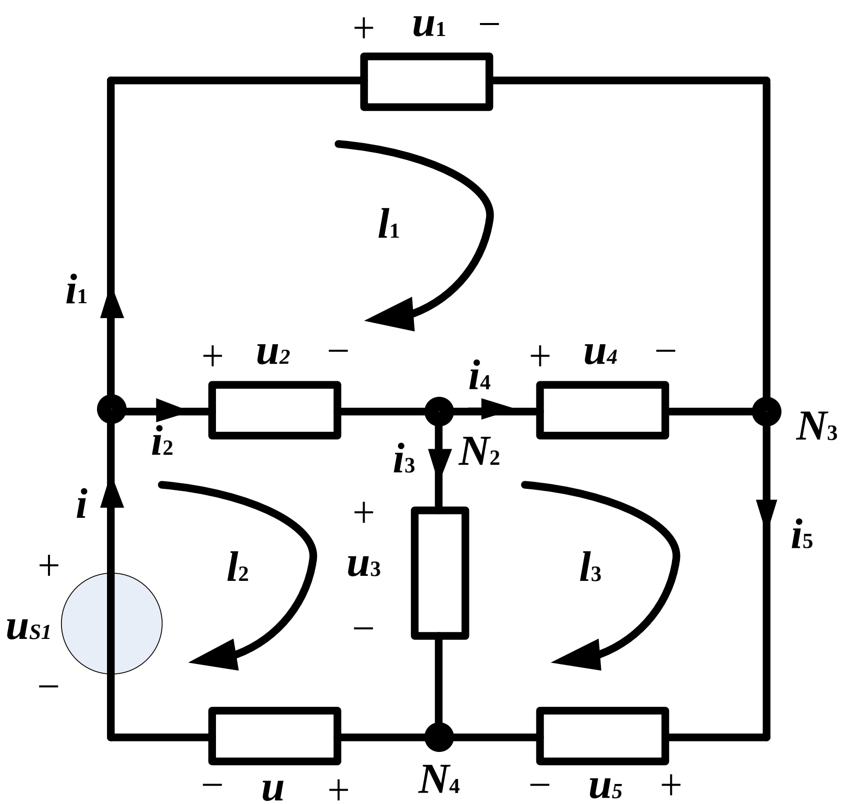
解：如右图所示，共有四个结点

$$N_1: \quad i_1 + i_2 - i = 0 \quad (1)$$

$$N_2: \quad i_3 + i_4 - i_2 = 0 \quad (2)$$

$$N_3: \quad i_1 + i_4 - i_5 = 0 \quad (3)$$

$$N_4: \quad i_3 + i_5 - i = 0 \quad (4)$$



但是，有一个是不独立的

(4)=(1)-(3)+(2)

若某网络有n个结点

➢ 独立的KCL方程数为 n-1

2 、对任一网络，可对所有的回路写出KVL方程

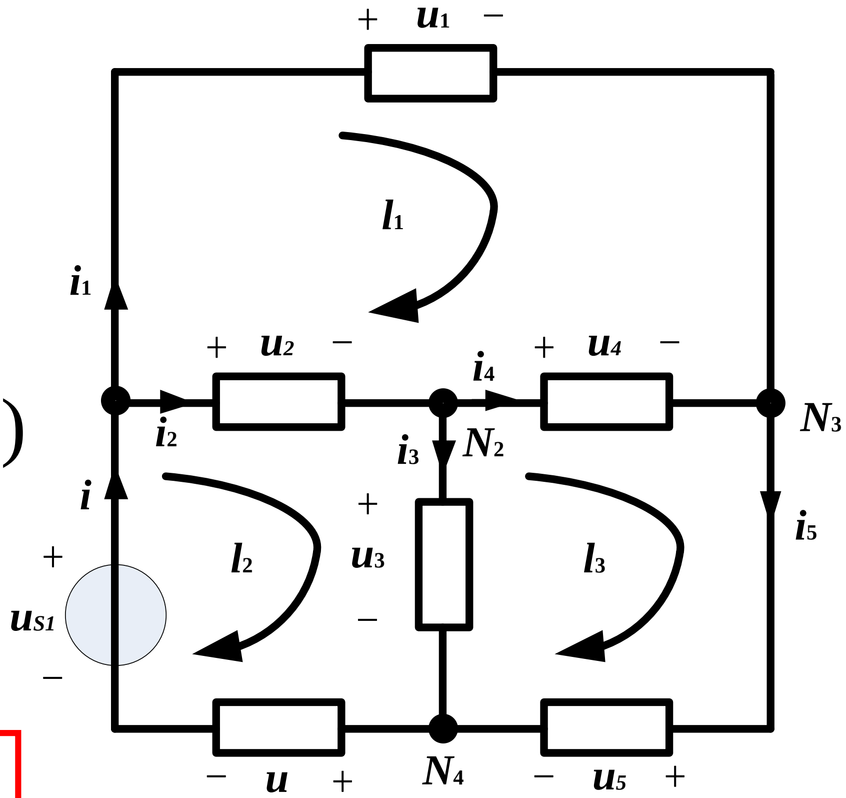
解：如右图所示，三个网孔和外回路的KVL方程为

$$l_1: \quad u_1 - u_2 - u_4 = 0 \quad (5)$$

$$l_2: \quad u_2 + u_3 + u - u_{S1} = 0 \quad (6)$$

$$l_3: u_4 + u_5 - u_3 = 0 \quad (7)$$

$$\text{外回路}: \quad u_1 + u_5 + u - u_{S1} = 0 \quad (8)$$



同样，有一个是不独立的

$$(8)=(5)+(6)+(7)$$

若某网络有 n 个结点，b 条支路

- **独立的KVL方程数为 b-(n-1)**

具有b条支路的电路，就有b个支路电压和b个支路电流

若某网络有 n 个结点

➢ 独立的KCL方程数为 n-1

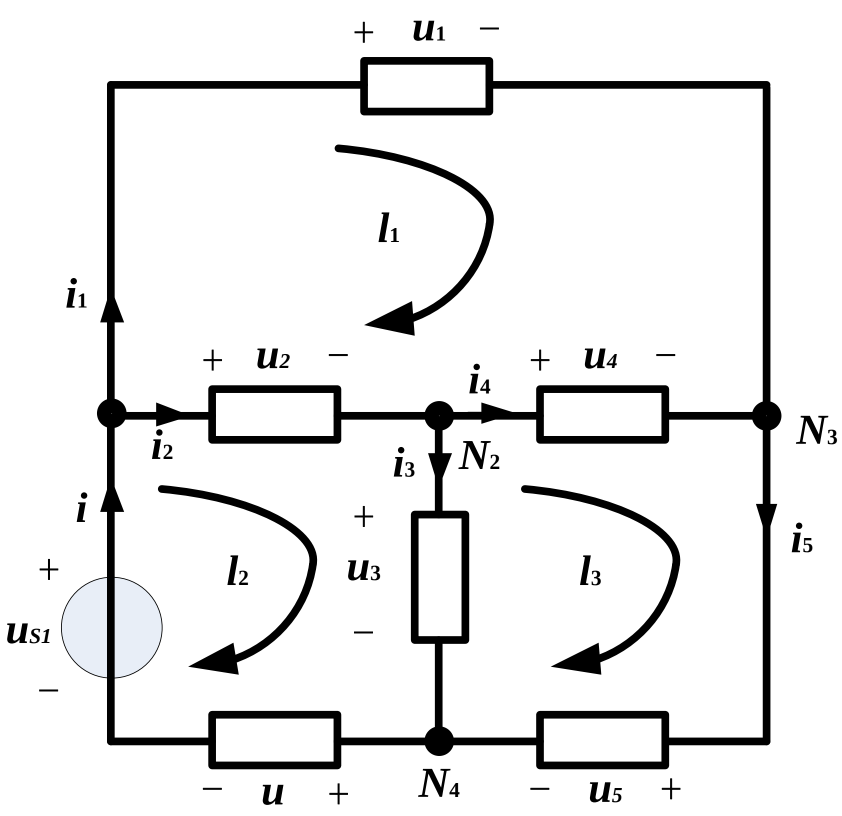
若某网络有 n 个结点，b 条支路

➢ 独立的KVL方程数为 b-(n-1)

b 个独立的支路方程

独立方程的总数为

(n-1)+（b-n+1)+b=2b



第3章 电路方程法

3.1 概述

3.2 线性代数方程组的解

3.3 结点方程

3.4 网孔方程

3.5 结点法与网孔法对比

3.6 回路方程

3.7 拓展与应用

结点分析法

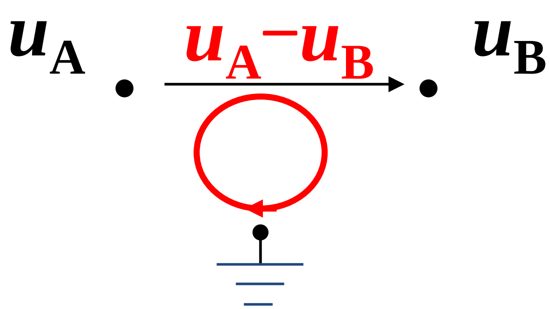
以结点电位为未知量列写电路方程分析电路的方法。适用于结点较少的电路。

●基本思想：

选结点电位为未知量，则KVL自动满足，无需列写KVL 方程。各支路电流、电压可视为结点电位的线性组合，求出结点电位后，便可方便地得到各支路电压、电流。

3.3 结点方程

任意选择参考点：其它结点与参考点的电压差即是结点电压(位)，方向为从独立结点指向参考结点。

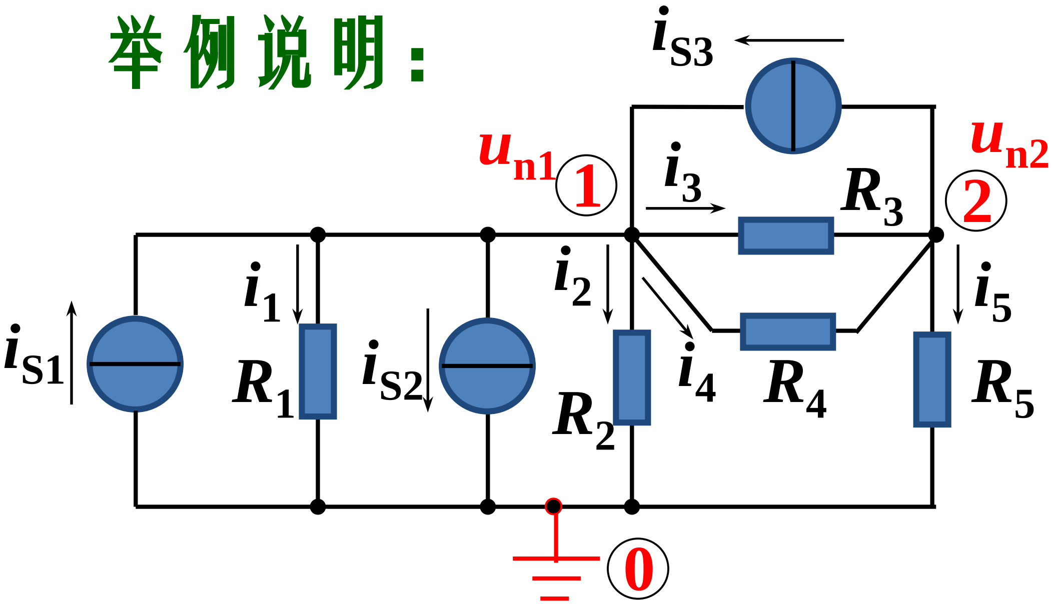


$$(u_A-u_B)+u_B-u_A=0$$

KVL自动满足

◆ 结点法的独立方程数为 $(n\text{-}1)$ 个。

举例说明：



(1) 选定参考结点，标明其余n-1个独立结点的电位

(2) 列KCL方程：

$$\sum i_{R出}=\sum i_{S入}$$

$$\begin{cases} i_1+i_2+i_3+i_4=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -i_3-i_4+i_5=-i_{S3} \end{cases}$$

代入支路特性（将支路电流用结点电位表示）：

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n1}}{R_1}+\dfrac{u_{n1}}{R_2}+\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}+\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}-\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}+\dfrac{u_{n2}}{R_5}=-i_{S3} \end{cases}$$

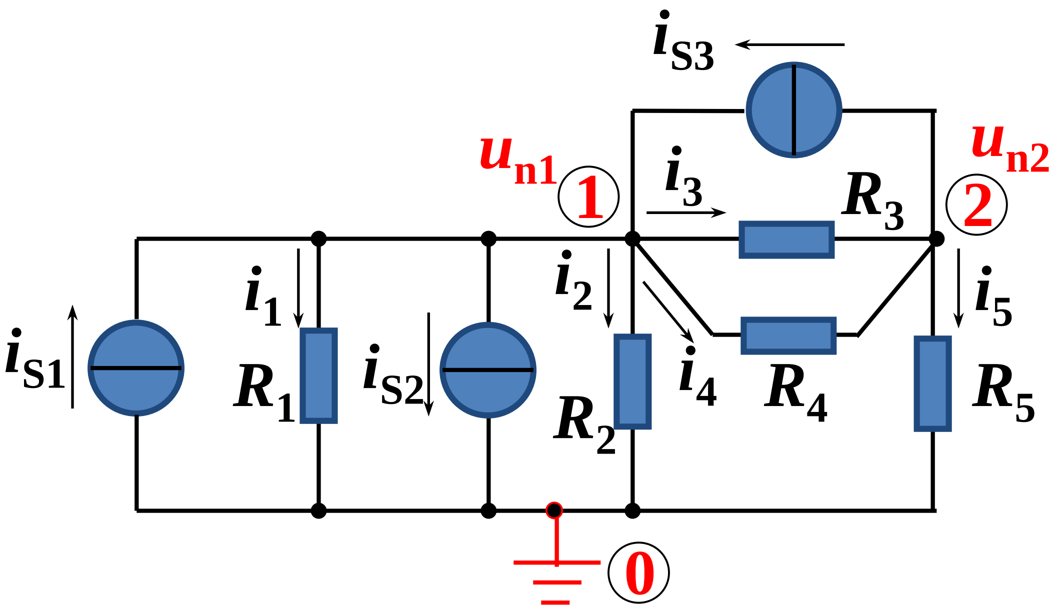
结点方程的形式：

结点方程是除参考结点以外所有结点的KCL方程，方程中的支路电流用结点电位表示。列写结点方程的步骤为：

(1) 选定参考结点，标明各独立结点电位变量；

(2) 用结点电位表示电流，列写各独立结点的KCL方程；

由结点方程求得各支路电压后，各支路电流可用结点电位表示：



$$i_1 = \frac{u_{n1}}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{u_{n1}}{R_2}$$

$$i_3 = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_3}$$

$$i_4 = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} \qquad i_5 = \frac{u_{n2}}{R_5}$$

整理，得

$$\begin{cases} (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n1}-(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n2}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_{n1}+(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5})u_{n2}=-i_{S3} \end{cases}$$

令 $G_k=1/R_k$， $k=1, 2, 3, 4, 5$

上式简记为

$$\begin{cases} G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}=i_{Sn1} \\ G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}=i_{Sn2} \end{cases} \Leftarrow$$

标准形式的结点方程

其中 $G_{11}=G_1+G_2+G_3+G_4$ —结点1的**自电导**，等于接在结点1上所有支路的电导之和。

$G_{22}=G_3+G_4+G_5$ —结点2的**自电导**，等于接在结点2上所有支路的电导之和。

$G_{12}=G_{21}=-(G_3+G_4)$ —结点1与结点2之间的**互电导**，等于接在结点1与结点2之间的所有支路的电导之和，并冠以负号。

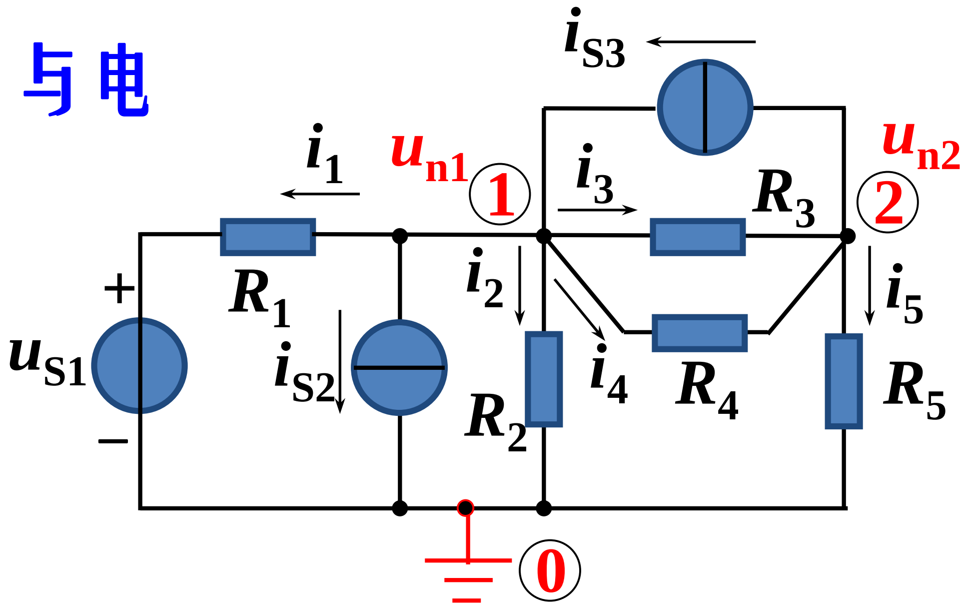
◆ 自电导总为正，互电导总为负。

$i_{Sn1}=i_{S1}-i_{S2}+i_{S3}$ — 流入结点1的电流源电流的代数和。

$i_{Sn2}=-i_{S3}$ — 流入结点2的电流源电流的代数和。

◆ 流入结点取正号，流出取负号。

◆ 若电路中含电压源与电阻串联的支路：



$$\begin{cases} \dfrac{u_{n1}-u_{S1}}{R_1}+\dfrac{u_{n1}}{R_2}+\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}+\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}=-i_{S2}+i_{S3} \\ -\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_3}-\dfrac{u_{n1}-u_{n2}}{R_4}+\dfrac{u_{n2}}{R_5}=-i_{S3} \end{cases}$$

等效电流源

$$\begin{cases} (G_1+G_2+G_3+G_4)u_{n1}-(G_3+G_4)\,u_{n2}=G_1\,u_{S1}-i_{S2}+i_{S3} \\ -(G_3+G_4)\,u_{n1}+(G_3+G_4+G_5)u_{n2}=-i_{S3} \end{cases}$$

结点方程快速列写法

一般情况：

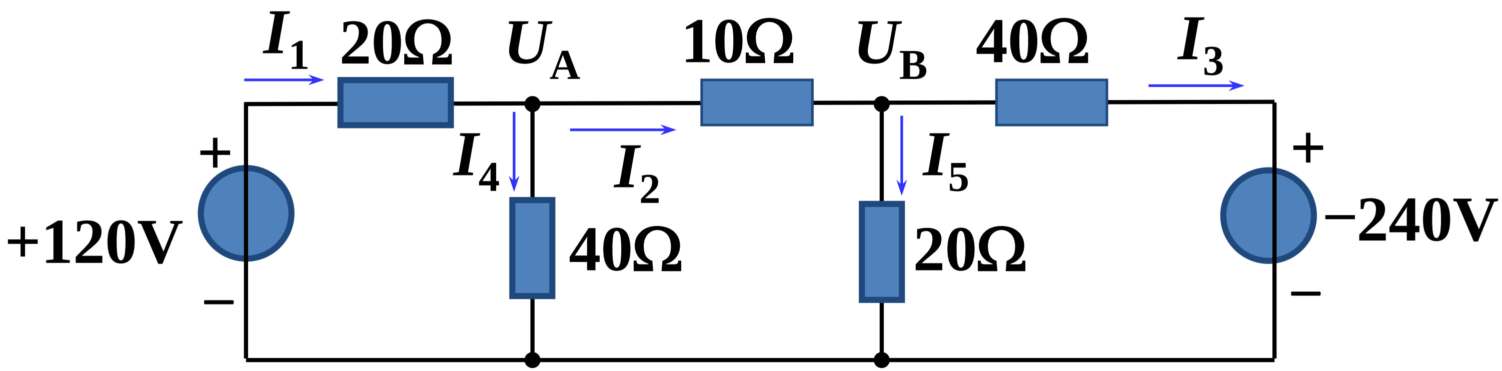
$$\begin{cases} G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+\ldots+G_{1,n-1}u_{n,n-1}=i_{Sn1} \\ G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+\ldots+G_{2,n-1}u_{n,n-1}=i_{Sn2} \\ \ldots\ldots \\ G_{n-1,1}u_{n1}+G_{n-1,2}u_{n2}+\ldots+G_{n-1,n-1}u_{n,n-1}=i_{Sn,n-1} \end{cases}$$

其中 G_{ii} —自电导，等于接在结点i上所有支路的电导之和(包括电压源与电阻串联支路)。总为正。

$G_{ij} = G_{ji}$—互电导，等于接在结点i与结点j之间的所有支路的电导之和，并冠以负号。

i_{Sni} — 流入结点i的所有电流源电流的代数和(包括由电压源与电阻串联支路等效的电流源)。

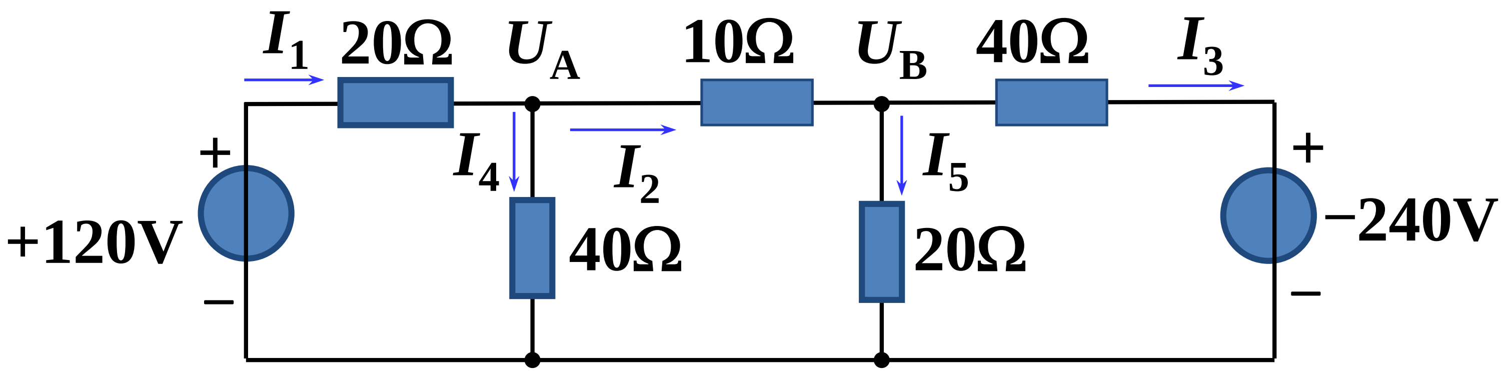
例 用结点法求各支路电流。



(1) 列结点方程：

$$\begin{cases}(0.05+0.025+0.1)U_A-0.1U_B=6\\-0.1U_A+(0.1+0.05+0.025)U_B=-6\end{cases}$$

例 用结点法求各支路电流。



(2) 解方程，得：U_A=21.82V， U_B=-21.82V

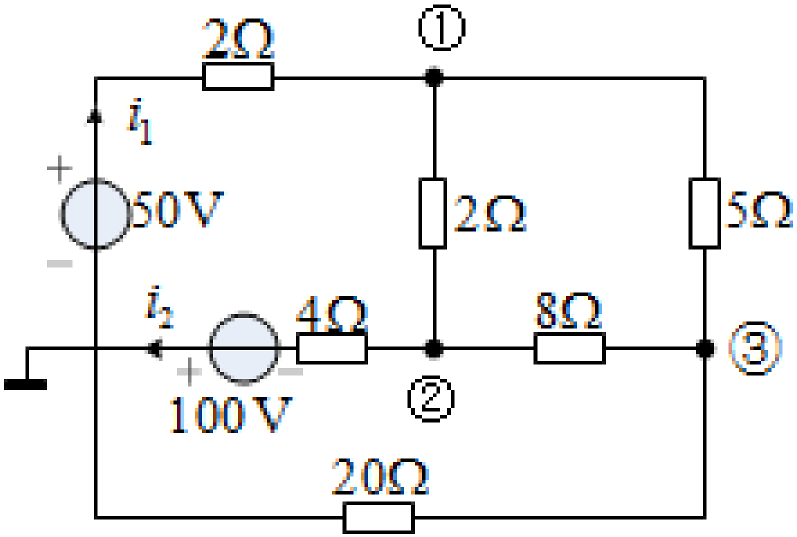
(3) 各支路电流：

$I_1=(120-U_A)/20=4.91\text{A}$　　$I_2=(U_A-U_B)/10=4.36\text{A}$

$I_3=(U_B+240)/40=5.45\text{A}$　　$I_4=U_A/40=0.55\text{A}$

$I_5=U_B/20=-1.09\text{A}$

例：应用结点分析法确定右图所示电路中由电源流出的电流。



解:列出所示电路的结点方程为

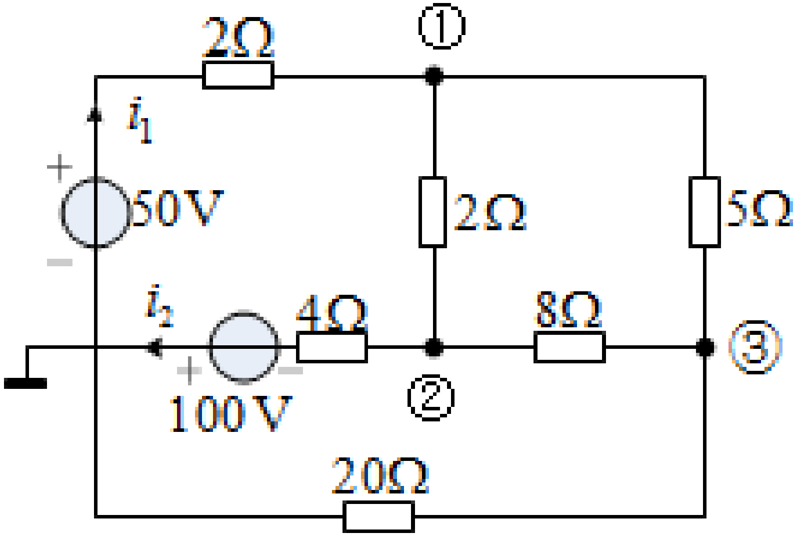
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{20}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{50}{2} \\ -\frac{100}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

解方程组得

v_{n1} = 11.30 V

v_{n2} = -22.32 V

例：应用结点分析法确定右图所示电路中由电源流出的电流。



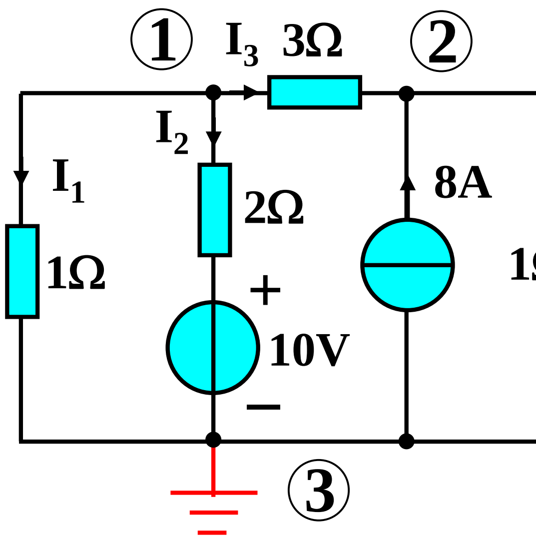
$$v_{n1} = 11.30 \text{ V}$$

$$v_{n2} = -22.32 \text{ V}$$

由电源流出的电流为

$$i_1 = \frac{1}{2}(50 - 11.30) = 19.35A, \qquad i_2 = \frac{1}{4}[100 + (-22.32)] = 19.42A$$

例：试用结点法求电路中各支路电流。



解：选结点③为参考结点。

应用结点法列出结点方程：

$$\begin{cases} (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\varphi_1 - \frac{1}{3}\varphi_2 = \frac{10}{2} \\ -\frac{1}{3}\varphi_1 + (\frac{1}{3}+1)\varphi_2 = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = 4(V) \\ \varphi_2 = 7(V) \end{cases} \Rightarrow$$

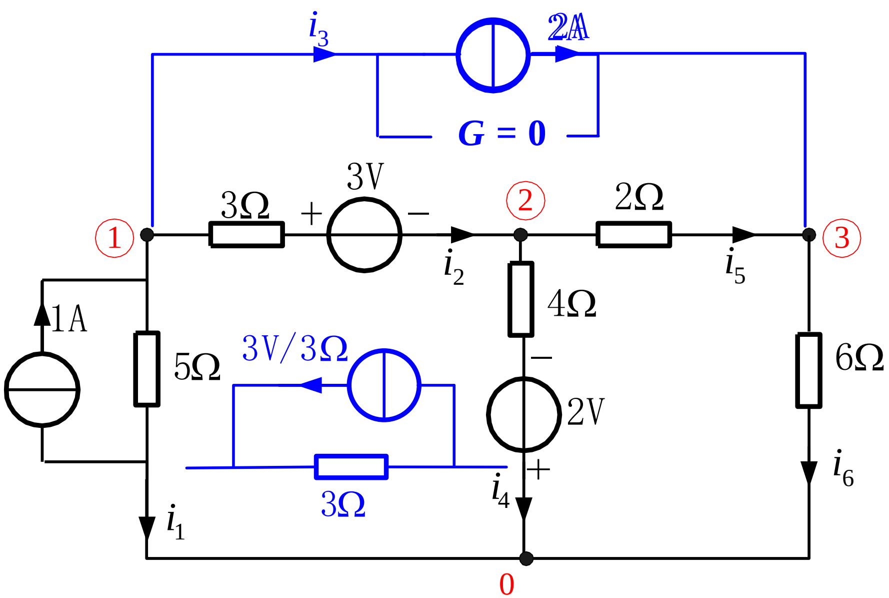
$$I_1 = \frac{\varphi_1}{1} = \frac{4}{1} = 4(A)$$

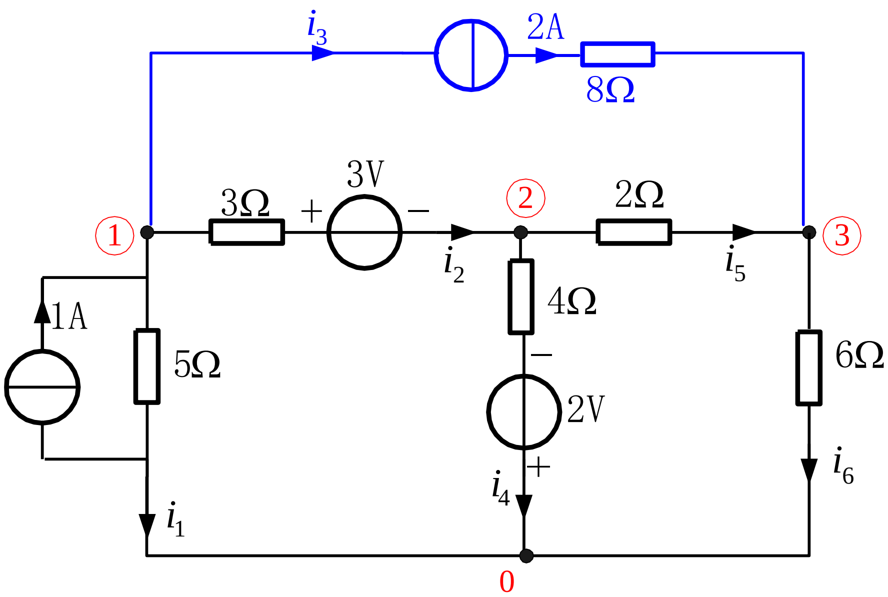
$$I_2 = \frac{\varphi_1 - 10}{2} = \frac{4-10}{2} = -3(A)$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{3} = \frac{4-7}{3} = -1(A)$$

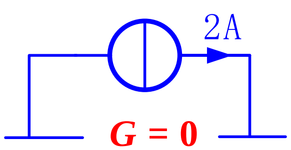
$$I_4 = \frac{\varphi_2}{1} = 7(A)$$

电流源支路的处理



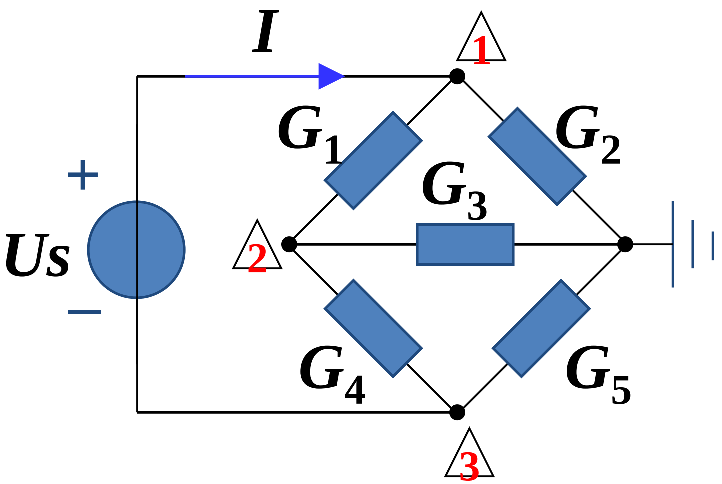


电流源支路视为电导为零的诺顿支路！



$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

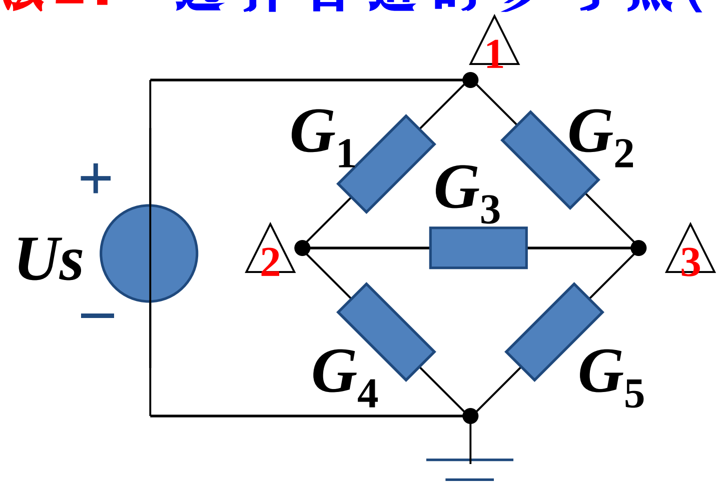
方法1:以电压源电流为变量，增加一个结点电位与电压源间的关系



$$\begin{cases} (G_1+G_2)U_1-G_1U_2 = I \\ -G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2-G_4U_3 = 0 \\ -G_4U_2+(G_4+G_5)U_3 = -I \\ U_1-U_3 = U_S \end{cases}$$

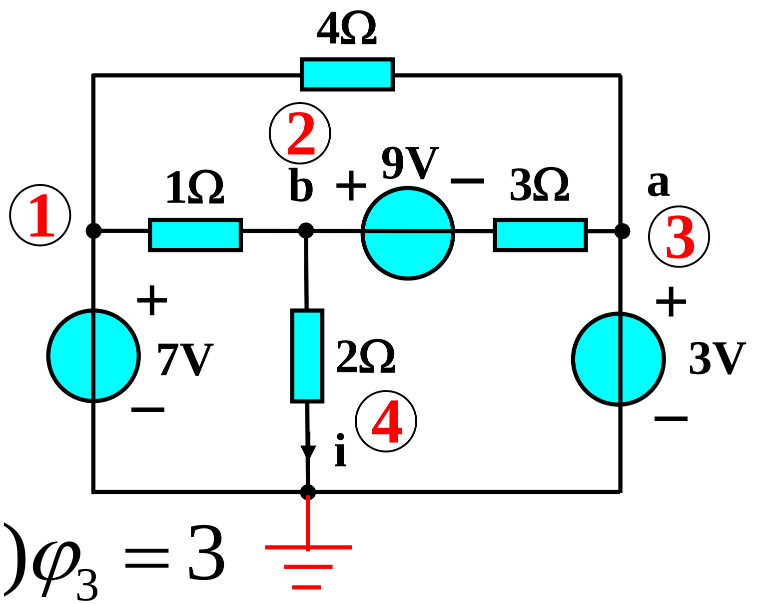
方法1（拓展）:广义结点方程。

方法2: 选择合适的参考点(电压源端点接地法)



$$\begin{cases} U_1 = U_S \\ -G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2- G_3U_3 = 0 \\ -G_2U_1-G_3U_2+(G_2+G_3+G_5)U_3 = 0 \end{cases}$$

例：试求电路中电流 i 和电压u_{ab}。



解：可选结点④为参考结点，则：

$$\varphi_1 = 7V, \varphi_3 = 3V$$

只需对结点②列写电压方程

$$(-1)\varphi_1 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})\varphi_2 + (-\frac{1}{3})\varphi_3 = 3$$

$$\Rightarrow -7 + \frac{11}{6}\varphi_2 - 1 = 3$$

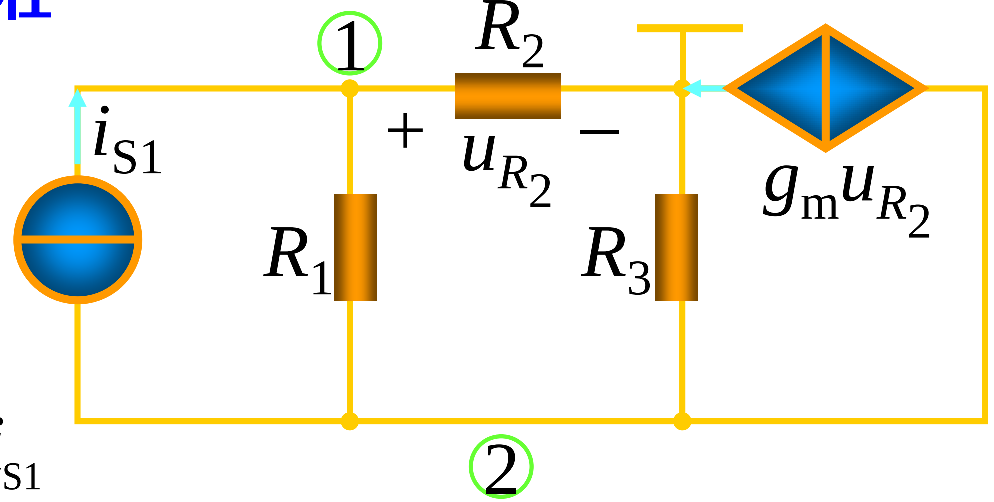
$$\varphi_2 = 6(V) \qquad i = \frac{\varphi_2}{2} = 3(A)$$

$$u_{ab} = \varphi_3 - \varphi_2 = 3 - 6 = -3(V)$$

◆ 受控电源支路的处理

对含有受控电源支路的电路，先把受控源看作独立电源列方程，再将控制量用结点电位表示。

例：列写电路的结点方程



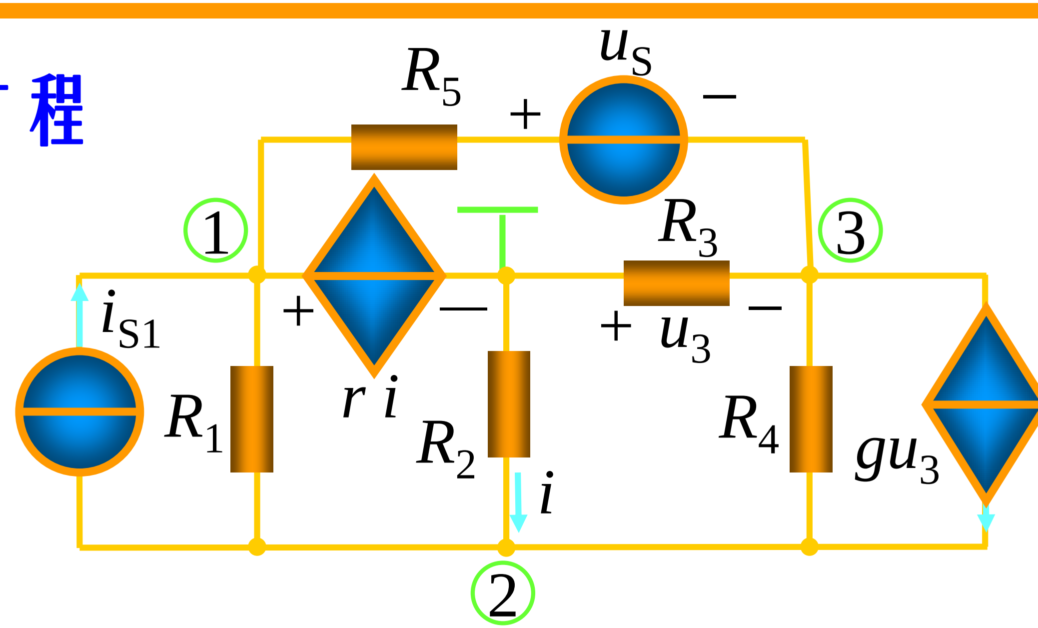
①先把受控源当作独立源列方程；

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u_{n1}-\frac{1}{R_1}u_{n2}=i_{S1} \\ -\frac{1}{R_1}u_{n1}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}\right)u_{n2}=-g_m u_{R_2}-i_{S1} \end{cases}$$

$$u_{R2}=u_{n1}$$

②用结点电位表示控制量。

例：列写电路的结点方程



解 ①设参考点

②把受控源当作独立源列方程；

$$
\begin{cases}
u_{n1} = ri \\
-\dfrac{1}{R_1}u_{n1} + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4}\right)u_{n2} - \dfrac{1}{R_4}u_{n3} = -i_{S1} + gu_3 \\
-\dfrac{1}{R_5}u_{n1} - \dfrac{1}{R_4}u_{n2} + \left(\dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_5}\right)u_{n3} = -gu_3 - \dfrac{u_S}{R_5}
\end{cases}
$$

③用结点电位表示控制量。

$$u_3 = -u_{n3}$$

$$i = -u_{n2}/R_2$$

建立结点方程的小结：

(1) 选定参考结点，给结点编号；

(2) 标示待求变量的参考方向；

(3) 对n-1个独立结点，以结点电位为未知量，列写其KCL方程；

(4) 求解上述方程，得到n-1个结点电位；

(5) 求得待求的变量，例如各支路电流或元件功率等。

第3章 电路方程法

3.1 概述

3.2 线性代数方程组的解

3.3 结点方程

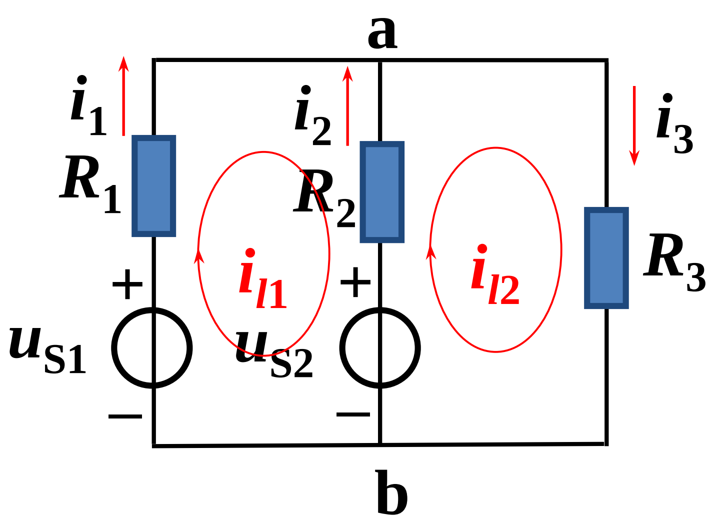
3.4 网孔方程

3.5 结点法与网孔法对比

3.6 回路方程

3.7 拓展与应用

网孔分析法：以网孔电流为未知量列写电路方程分析电路的方法。



网孔1：$R_1 i_{l1}+R_2(i_{l1}-i_{l2})-u_{S1}+u_{S2}=0$

网孔2：$R_2(i_{l2}-i_{l1})+R_3 i_{l2}-u_{S2}=0$

电压与网孔绕行方向一致时取"+"；否则取"−"。

整理得，

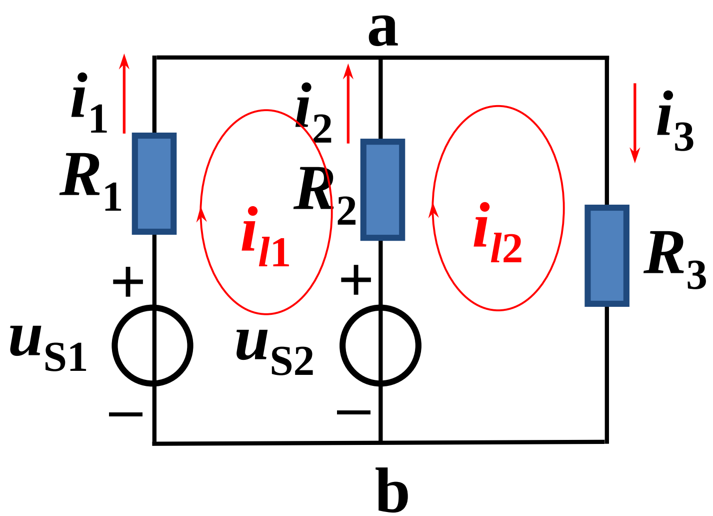
$$\begin{cases}(R_1+R_2)i_{l1}-R_2 i_{l2}=u_{S1}-u_{S2}\\ -R_2 i_{l1}+(R_2+R_3)i_{l2}=u_{S2}\end{cases}$$

网孔方程的形式：

网孔方程是平面电路中网孔的KVL方程，但KVL方程中的支路电压用网孔电流表示。列写网孔方程的步骤为：

(1) 选定网孔电流及其绕向；

(2) 列写各网孔的KVL方程，且将网孔中电阻的电压用网孔电流表示。

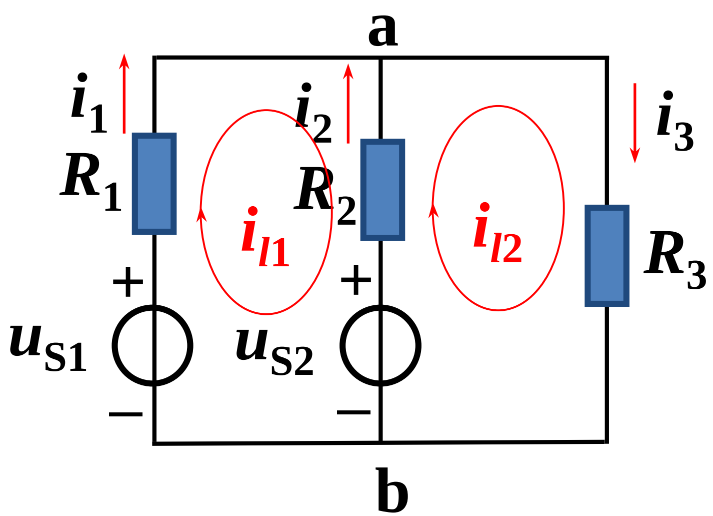


$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2)\,i_{l1}-R_2 i_{l2}&=u_{S1}-u_{S2}\\ -R_2 i_{l1}+(R_2+R_3)\,i_{l2}&=u_{S2}\end{aligned}\right\}$$

令 $R_{11}=R_1+R_2$——网孔1的自电阻。等于网孔1中所有电阻之和。

$R_{22}=R_2+R_3$——网孔2的自电阻。等于网孔2中所有电阻之和。

◆ 自电阻总为正。



$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2)\,i_{l1}-R_2 i_{l2}&=u_{S1}-u_{S2}\\ -R_2 i_{l1}+(R_2+R_3)\,i_{l2}&=u_{S2}\end{aligned}\right\}$$

$R_{12}= R_{21}= -R_2$ — 网孔1、网孔2之间的互电阻。

当网孔电流绕向一致时，互电阻总为负。

选取绕向一致（例如：顺时针）的网孔电流，网孔内电压源电压的参考方向与网孔绕向非关联取正，则由此可得标准形式的方程：

$$\left.\begin{aligned} R_{11}i_{l1}+R_{12}i_{l2}&=u_{Sl1} \\ R_{21}i_{l1}+R_{22}i_{l2}&=u_{Sl2} \end{aligned}\right\}$$

$u_{l1}= u_{S1}-u_{S2}$— 网孔1中所有电压源电压的代数和。

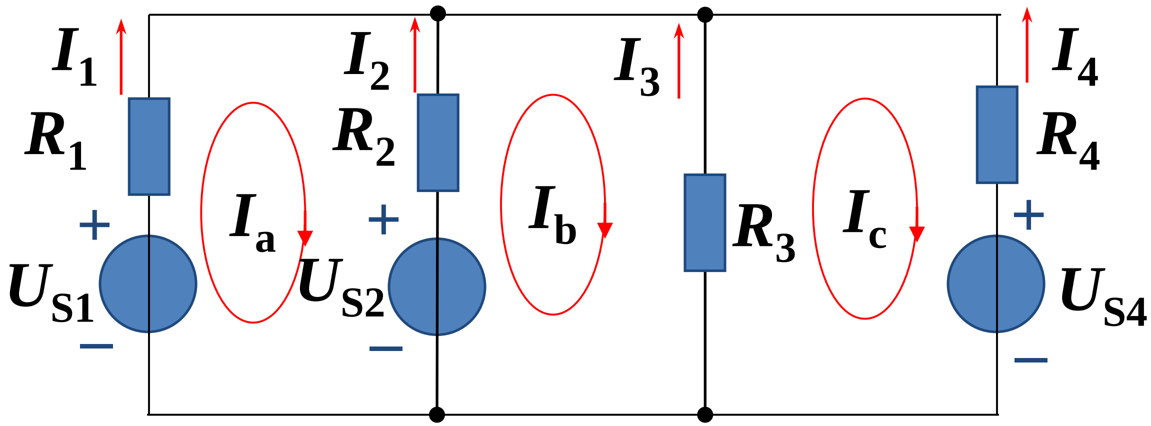
$u_{l2}= u_{S2}$— 网孔2中所有电压源电压的代数和。

网孔方程的快速列写法

对于具有 $l=b-(n-1)$ 个网孔的电路，选取绕向一致（例如：顺时针）的网孔电流，网孔内等效电压源电压的参考方向与网孔绕向非关联取正，则有

$$
\begin{cases}
R_{11}i_{l1}+R_{12}i_{l2}+\ldots+R_{1l}\,i_{ll}=u_{Sl1} \\
R_{21}i_{l1}+R_{22}i_{l2}+\ldots+R_{2l}\,i_{ll}=u_{Sl2} \\
\quad\cdots \\
R_{l1}i_{l1}+R_{l2}i_{l2}+\ldots+R_{ll}\,i_{ll}=u_{Sll}
\end{cases}
$$

例



解： (1) 设独立网孔电流(顺时针)

(2) 列 KVL 方程

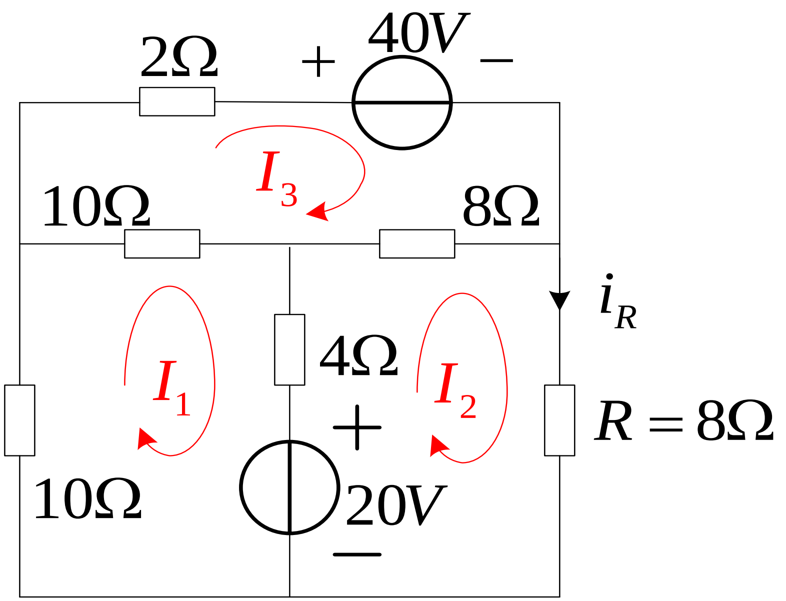
$$\left.\begin{aligned}(R_1+R_2)I_a \quad -R_2I_b \quad &= U_{S1}-U_{S2}\\ -R_2I_a+(R_2+R_3)I_b \quad -R_3I_c &= U_{S2}\\ -R_3I_b+(R_3+R_4)I_c &= -U_{S4}\end{aligned}\right\}$$

对称阵，且互电阻为负

(3) 求解网孔方程，得 I_a , I_b , I_c

(4) 求各支路电流： $I_1=I_a$ ，$I_2=I_b-I_a$ ，$I_3=I_c-I_b$ ，$I_4=-I_c$

例：试用网孔分析法求图示网络中通过R的电流 i_R

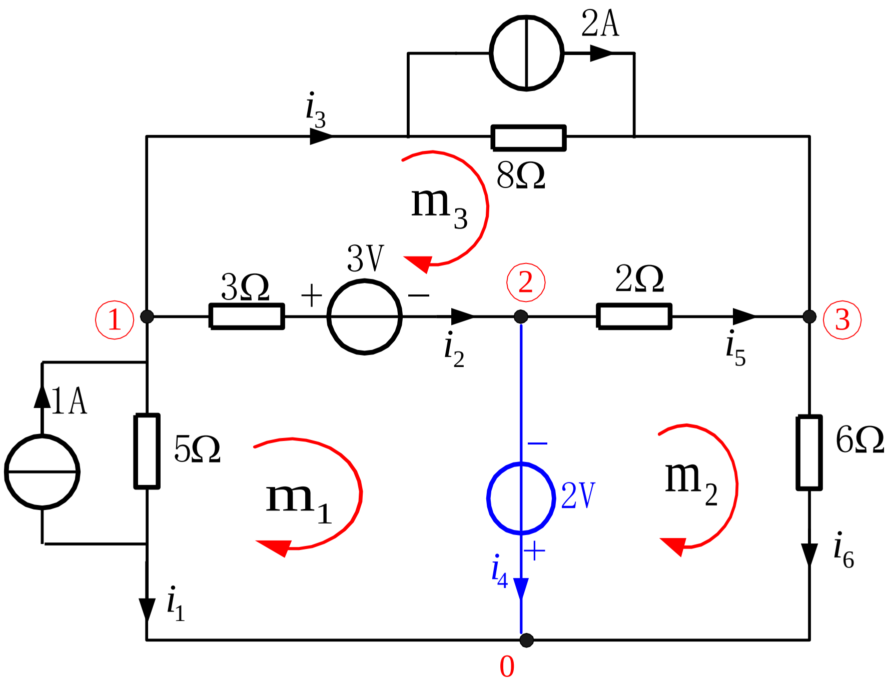


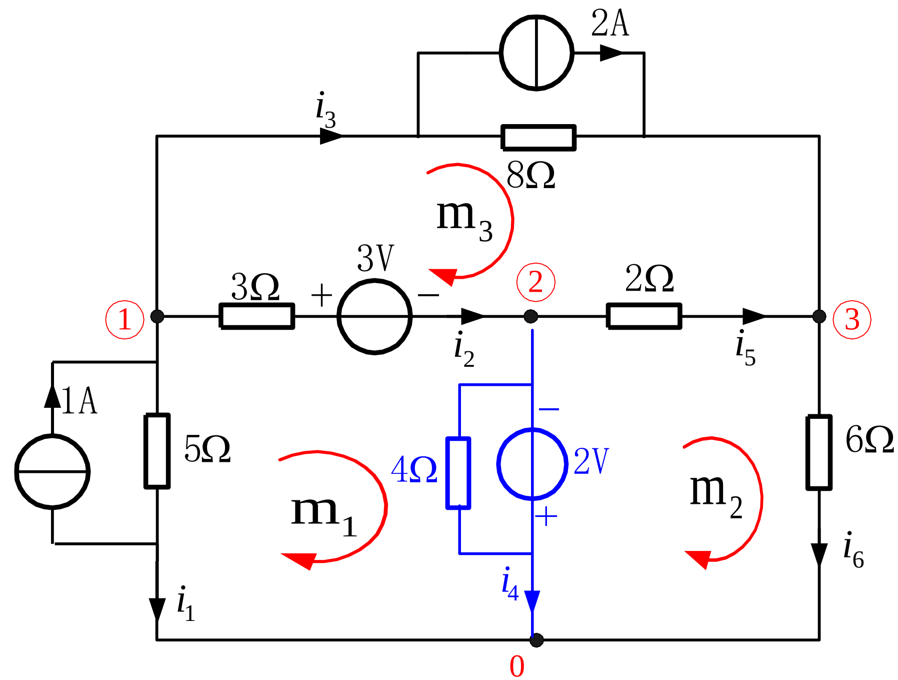
解:网孔矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} 24 & -4 & -10 \\ -4 & 20 & -8 \\ -10 & -8 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ -40 \end{bmatrix}$$

解得 $i_R = I_2 = -4880/5104 = -0.96\text{A}$

电压源支路的处理

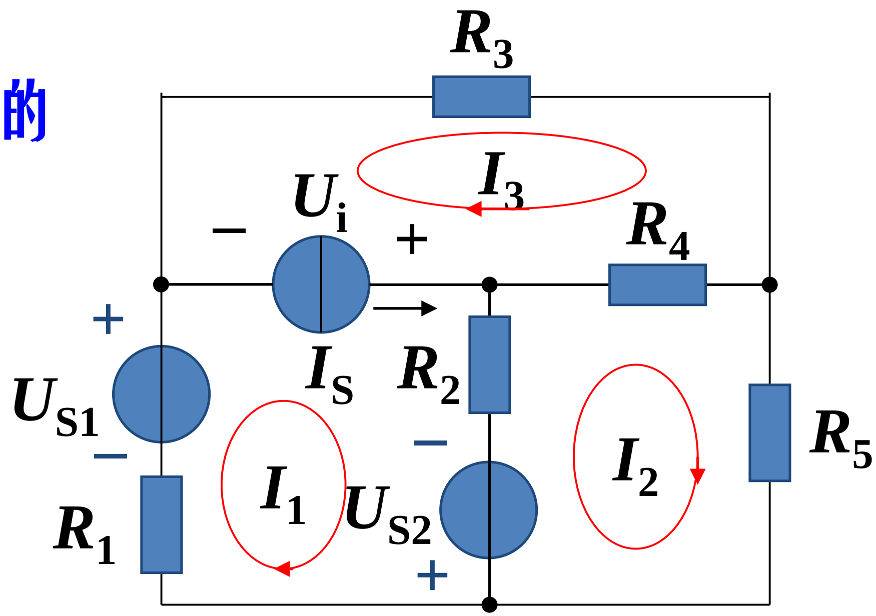




$$\begin{cases} (5+3)\,i_{m1} - 0i_{m2} - 3i_{m3} = 5\times 1 - 3 + 2 \\ 0i_{m1} + (2+6)\,i_{m2} - 2i_{m3} = -2 \\ -3i_{m1} - 2i_{m2} + (8+2+3)i_{m3} = 2\times 8 + 3 \end{cases}$$

电压源支路——视为电阻为零的戴维南支路

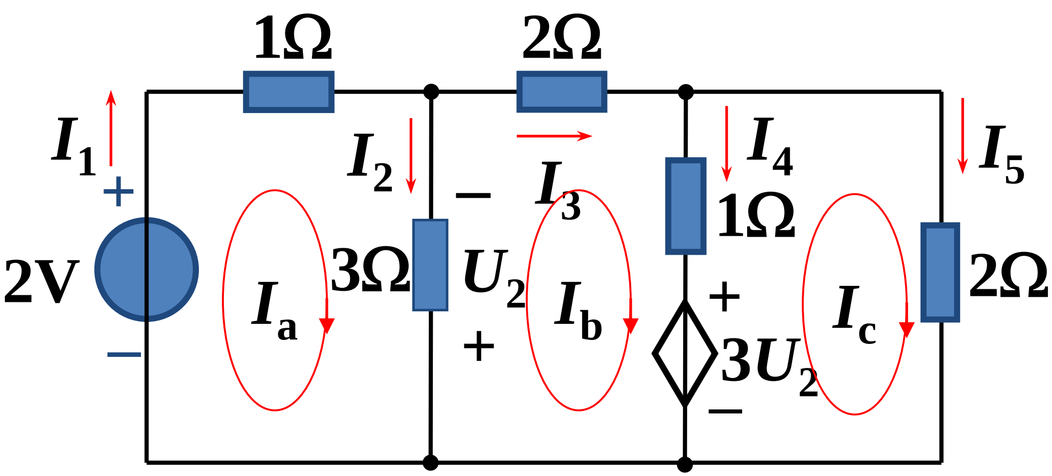
例：列写含有独立电流源支路的电路的网孔方程。



方法1：引入电流源电压为变量，增加网孔电流和电流源电流的关系方程。（广义网孔方程）

$$
\begin{cases}
(R_1+R_2)I_1-R_2I_2=U_{S1}+U_{S2}+U_i \\
-R_2I_1+(R_2+R_4+R_5)I_2-R_4I_3=-U_{S2} \\
-R_4I_2+(R_3+R_4)I_3=-U_i \\
I_S=I_1-I_3
\end{cases}
$$

例：用网孔法求含有受控电压源电路的各支路电流。



① 将VCVS看作独立源建立方程；

② 找出控制量和网孔电流关系。

解：

① $\begin{cases} 4I_a - 3I_b = 2 \\ -3I_a + 6I_b - I_c = -3U_2 \\ -I_b + 3I_c = 3U_2 \end{cases}$

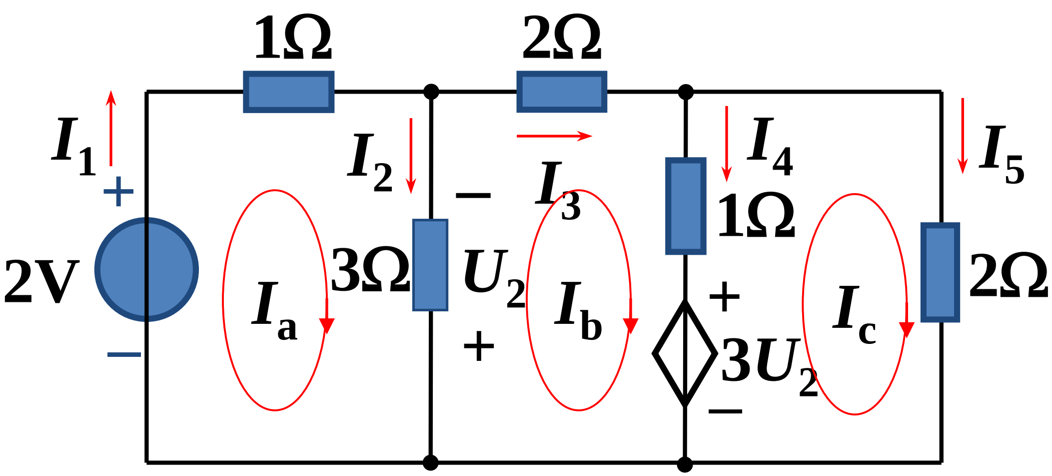
② $U_2 = -3(I_a - I_b)$

将②代入①，得

③ $\begin{cases} 4I_a - 3I_b = 2 \\ -12I_a + 15I_b - I_c = 0 \\ 9I_a - 10I_b + 3I_c = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} I_a = 1.19\text{A} \\ I_b = 0.92\text{A} \\ I_c = -0.51\text{A} \end{cases}$

* 由于含受控源，方程的系数矩阵一般不对称。

例：用网孔法求含有受控电压源电路的各支路电流。



各支路电流为：

$I_1 = I_a = 1.19\text{A}$, $I_2 = I_a - I_b = 0.27\text{A}$, $I_3 = I_b = 0.92\text{A}$,
$I_4 = I_b - I_c = 1.43\text{A}$, $I_5 = I_c = -0.51\text{A}$.

采用外网孔校核：　$1 \times I_1 + 2I_3 + 2I_5 = 2$　（$\sum U_{R\text{降}} = \sum E_{\text{升}}$）

小结

（1）网孔法的一般步骤：

①选网孔为独立回路，并确定其绕行方向；

②以网孔电流为未知量，列写网孔的KVL方程；

③求解上述方程，得到 l 个网孔电流；

④求各支路电流；

⑤其它分析。

（2）网孔法的特点：

仅适用于平面电路。

3.5 结点法与网孔法对比

(1) 方程数的比较，网络有 n 个结点，b条支路

	KCL方程	KVL方程	方程总数
基本方程	n-1	b-(n-1)	2b
网孔法	0	b-(n-1)	b-(n-1)
结点法	n-1	0	n-1

(2) 注意观察电压源支路与电流源支路

(3) 对于非平面电路，结点法较容易

谢 谢！