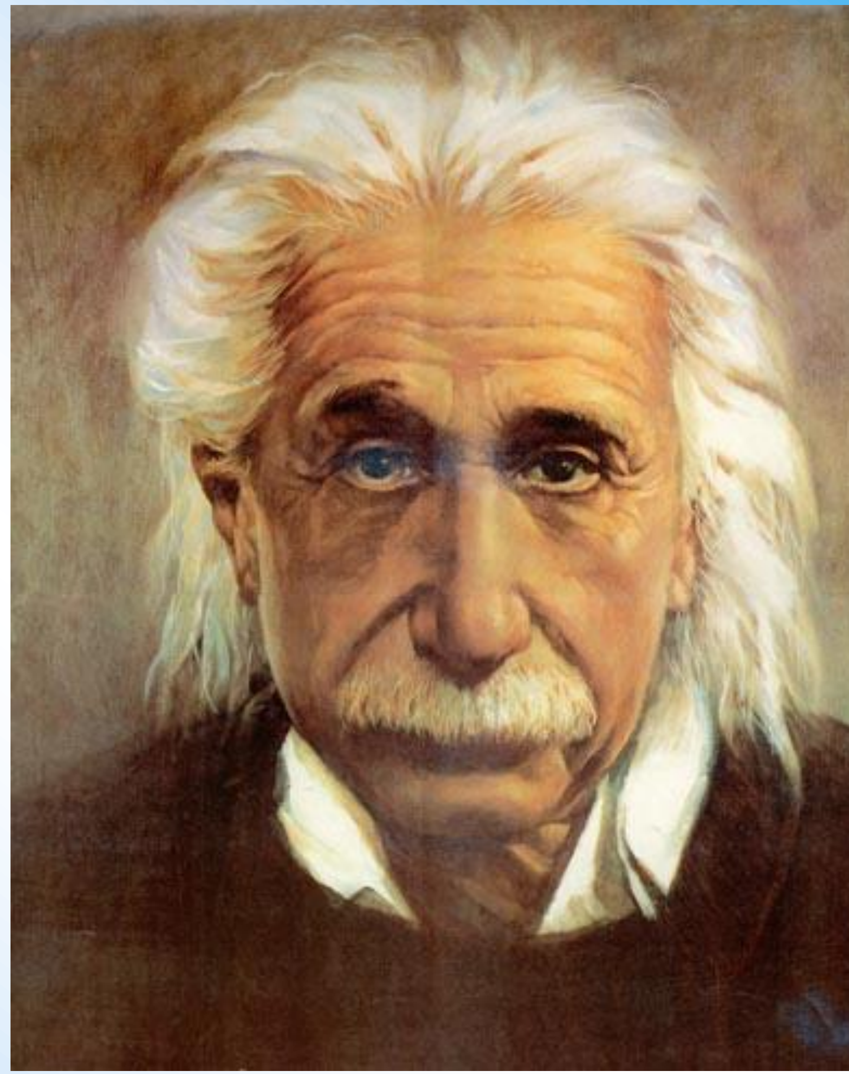
五 章

狭义

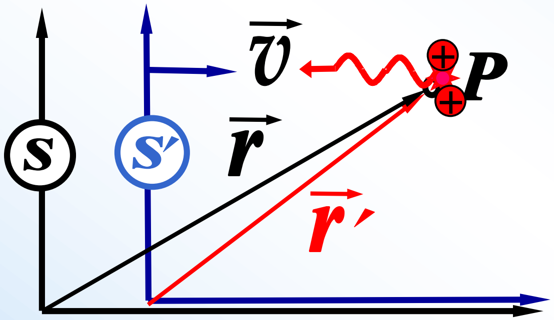
相对论

special

theory of relativity



伽利略变换



$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ t' = t \end{cases}$$

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\vec{a}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{a}$$

?

力学规律

如：牛顿定律

在S 惯性系观察

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

在S'惯性系观察

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a}$$

在一切惯性系中，力学规律相同。

称为

伽利略相对性原理

?

电磁学规律

P处有两个点电荷

对S惯性系，电荷间的相互作用——静电力

对S'惯性系,是两个运动电荷,还有磁力作用。

规律不相同

若P 处有一光源，迎着 $\vec{v}$ 发射光波（电磁波）

S系看光速　$u = c$

S'系看光速

$$u' = c + v > c$$

无实验根据

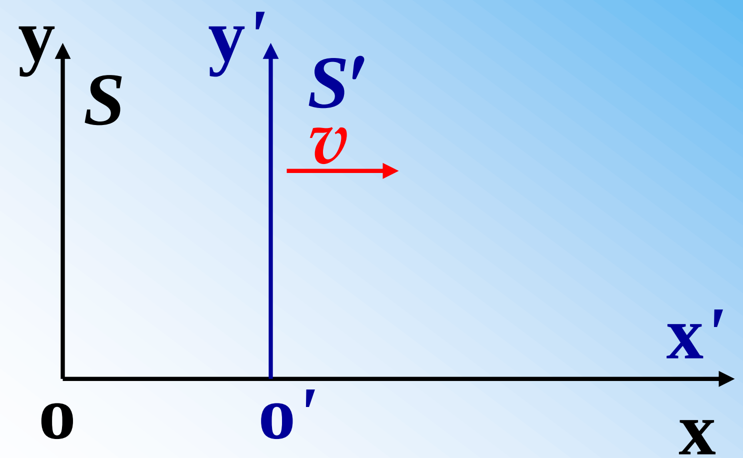
?

自洽

不自洽

四、洛仑兹变换

（1）坐标变换



设S'系与S系

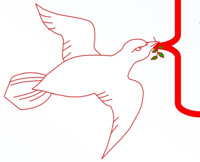
$t = t' = 0,\ x_0 = x_0' = 0$

并且有 $\begin{cases} x' = ax + bt + \cancel{g} \\ t' = et + fx + \cancel{h} \end{cases}$　　$\begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$

S 系看 $x' = 0$ 点　$v = \dfrac{x}{t}$

S' 系看$x = 0$ 点　$-v = \dfrac{x'}{t'}$

代入方程组可得 $\begin{cases} x' = a(x - vt) & （1） \\ t' = a(t + kx) & （2） \end{cases}$



$$\begin{cases} x' = a(x - vt) & (1) \\ t' = a(t + kx) & (2) \end{cases}$$

[推导中用了什么条件？]

$t = t' = 0$ 时o、o′点发一光信号，在两系测光行程：

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \\ r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \end{cases} \xrightarrow[z=z']{y=y'} c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

将(1)(2)式代入可得 $a = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ $\quad k = -\dfrac{v}{c^2}$

则有 **洛仑兹变换**

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{cases}$$

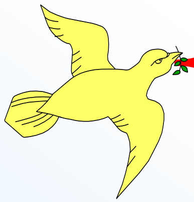
令：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \dfrac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

相对论因子



$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{cases} \qquad y' = y \quad z' = z$$

—— 洛仑兹变换

讨论

当 $v \ll c$ 时

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

$$x' = x - vt \longrightarrow \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x - vt)$$

$$u'_{相} = u_{绝} - v_{牵}$$

—— 伽利略变换

结论

1 °伽利略变换只是洛仑兹变换的一个近似

2 °相对论中时空测量不可分离 $\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \dfrac{v}{c^2}x) \end{cases}$

3 °c 是一切实物运动速度的极限

如 $t = 0$ $\quad x' = \dfrac{x}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ 则必须 $v < c$

即 **任何物体相对另一物体的速度不等于或超过真空中的光速**

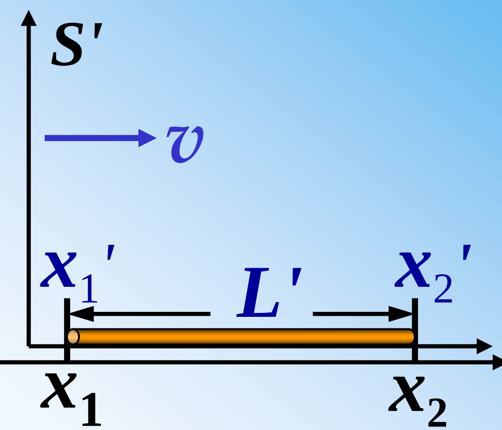
4 °从S' 系 $\rightarrow$ S 系的变换 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \dfrac{v}{c^2}x') \end{cases}$

若：

$$x_2=\frac{(x_2'+vt_2')}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \qquad x_1=\frac{(x_1'+vt_1')}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$t_2'=t_1'$$

$$x_2-x_1=\frac{x_2'-x_1'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \qquad L\overset{?}{=}\frac{L'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$



利用洛伦兹变换

$$x_2'=\frac{x_2-vt_2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$x_1'=\frac{x_1-vt_1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

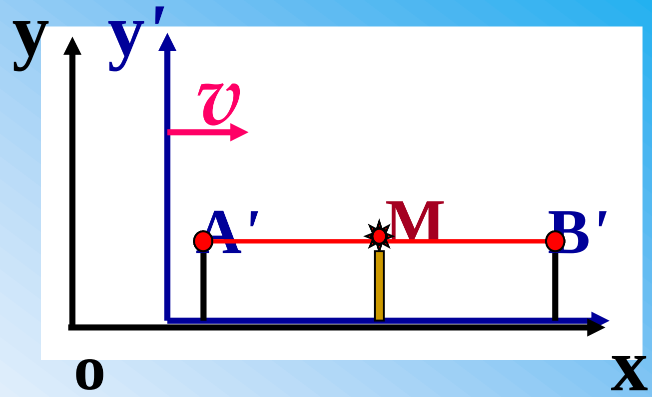
$$t_2=t_1$$

$$x_2'-x_1'=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$L'=\frac{L}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$ 或 $$L=L'\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

原长最长

（2）洛仑兹变换下的相对论效应



b. 时间效应

S' 系发生两事件的坐标:

$$A'\,(x_1', 0, 0, t_1') \quad B'\,(x_2', 0, 0, t_2')$$

S系测得对应两事件的坐标:

$$A\,(x_1, 0, 0, t_1) \quad B\,(x_2, 0, 0, t_2)$$

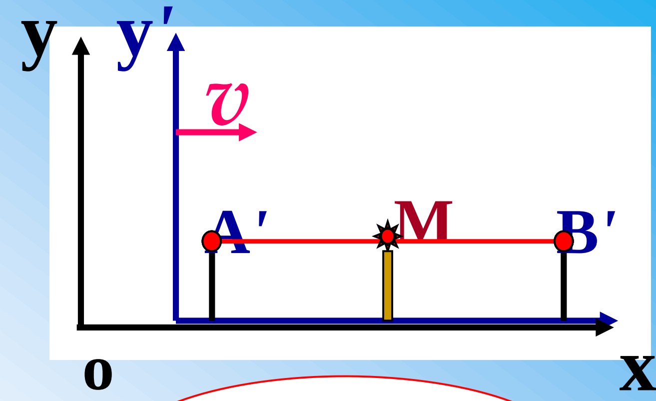
两事件的时间间隔

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Delta t = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Delta t=\frac{(t_2'-t_1')+\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$



讨论

同时发生

1° 在 S' 系中 A′, B′ 不同地，即 $x_1' \neq x_2'$　但 $t_1' = t_2'$

$$\Delta t=\frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \neq 0 \qquad t_1 \neq t_2$$

→ **同时性的相对性**

若 $x_2' > x_1'$　则　$t_2 > t_1$

沿两惯性系相对运动方向发生的两个事件，在一个惯性系中表现同时，在另一惯性系中观察总是在前一惯性系运动的后方那一事件先发生。

讨论

$$\Delta t=\frac{(t_2'-t_1')+\frac{v}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

2 º若在S' 系中A', B' 同地发生

但不同时, 即 $x_2'=x_1'$, $t_2'\neq t_1'$

在S系看

$$\Delta t=\frac{(t_2'-t_1')}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

原时 —— 最短

$\Delta t>\Delta t'$

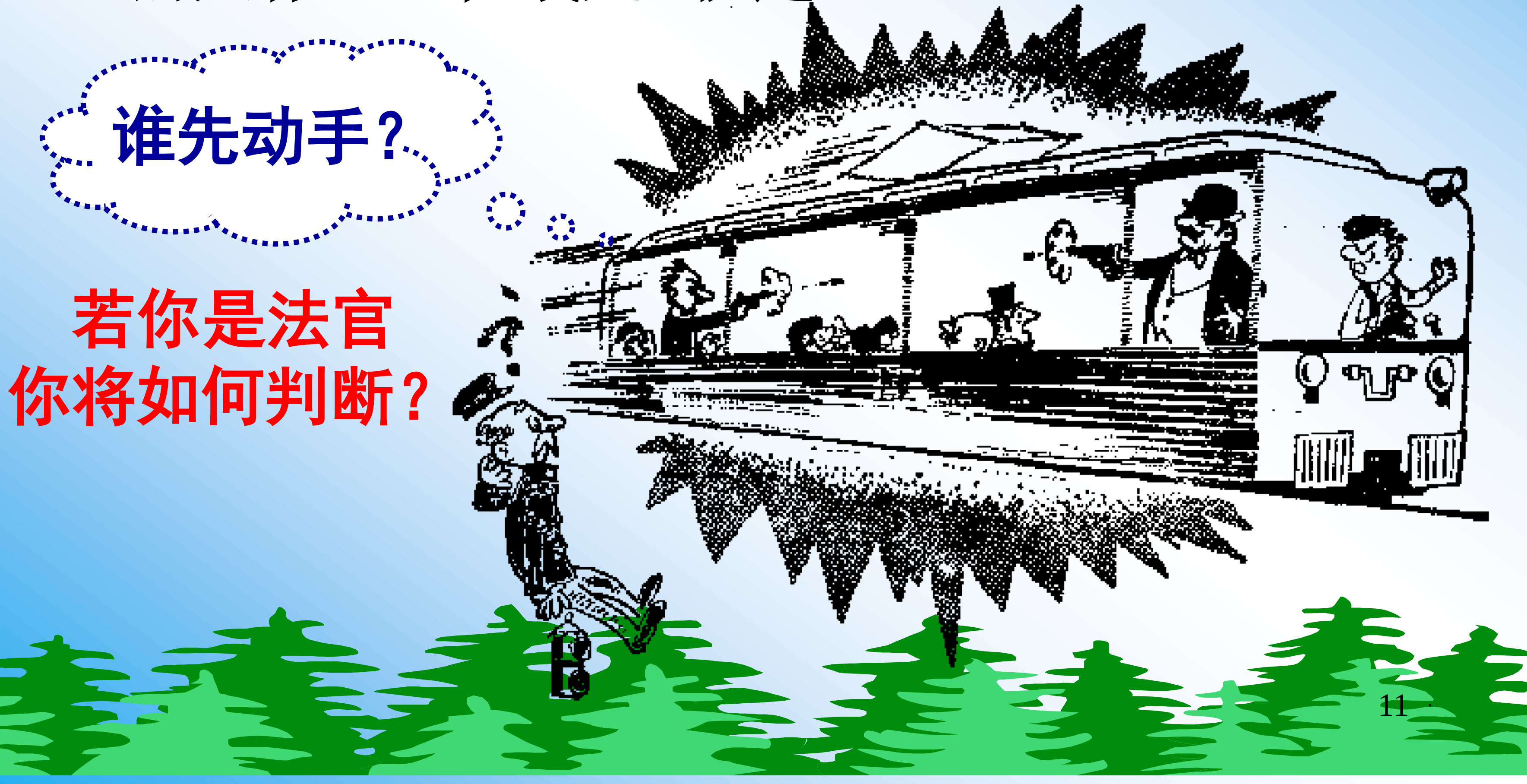
运动时钟变慢

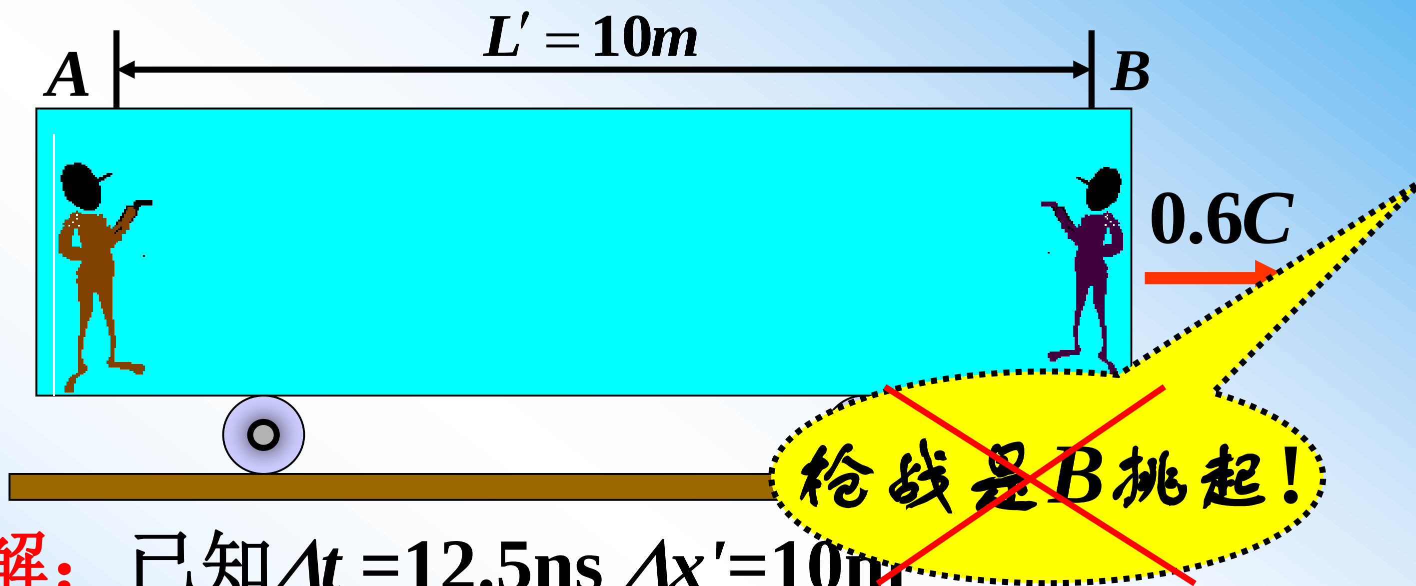
3 º在 S' 系中, 若A' 事件先于B' 事件发生$t_2'>t_1'$, 对不同的$(x_2'-x_1')$, 在S 系可得:

$$t_2-t_1=\begin{cases}>0 & \text{A先于B}\\ =0 & \text{A与B同时发生}\\ <0 & \text{A比B后发生}\end{cases}$$

例

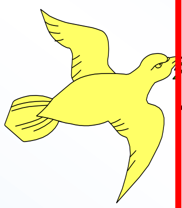
例. 一高速列车v =0.6c, 沿平直轨道运动, 车上A、B两人相距L=10m。B在车前、A在车后，当列车通过一站台时突然发生枪战事件，站台上的人看到A先向B开枪, 过12.5ns, B才向A开枪。站台上的人作证，枪战是A挑起。





解： 已知 $\Delta t = 12.5\text{ns}$ $\Delta x' = 10\text{m}$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$



$$\boxed{\Delta t = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}}$$

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} - \frac{v}{c^2}\Delta x' = -10^{-8}\,\text{s} < 0$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{10}{10^{-8}} = 10^9\,\text{m/s} > c$$

结论

两人开枪射击是独立事件，即两人都是挑衅对方！

讨论

4^{o}自然界的“因果律”在相对论中不会颠倒！

从事件A $\longrightarrow$ 事件B, 传递一种“作用”或“信号”

传递的时间 $\Delta t = t_2 - t_1$

传递的距离 $\Delta x = x_2 - x_1$

传递的速度 $u = \Delta x / \Delta t \le c$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\left[1 - \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{u}\frac{v}{c^2}\right]$$

若 $x_2 < x_1$，则$\Delta x < 0$，$u < 0$，Δt 与$\Delta t'$同号

若 $x_2 > x_1$，则$\Delta x > 0$，$u > 0$，由于 $u \le c$

那么: Δt 与 $\Delta t'$总是同号!

结论:

因果律在惯性系是绝对的!

4-T2 水从一截面为 10 cm^2 的水平管 A 流入两根并联的水平支管 B 和 C，它们的截面积分别为 8 cm^2 和 6 cm^2。如果水在管 A 中的流速为 1.00 $m \cdot s^{-1}$，在管 C 中的流速为 0.50 $m \cdot s^{-1}$，问：(1)水在管 B 中的流速是多大？(2)B、C 两管中的压强差是多少？(3)哪根管中的压强最大？

(1) $S_A V_A = S_B V_B + S_c V_c$

$V_B = \frac{7}{8} m/s$

(2) $P_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 = P_c + \frac{1}{2}\rho V_c^2$

$\Delta P = 258 Pa$

(3) $\cancel{P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = P_B + P_c + \frac{1}{2}\rho(V_B^2 + V_c^2)}$ 分支管道伯努利方程

$P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2$

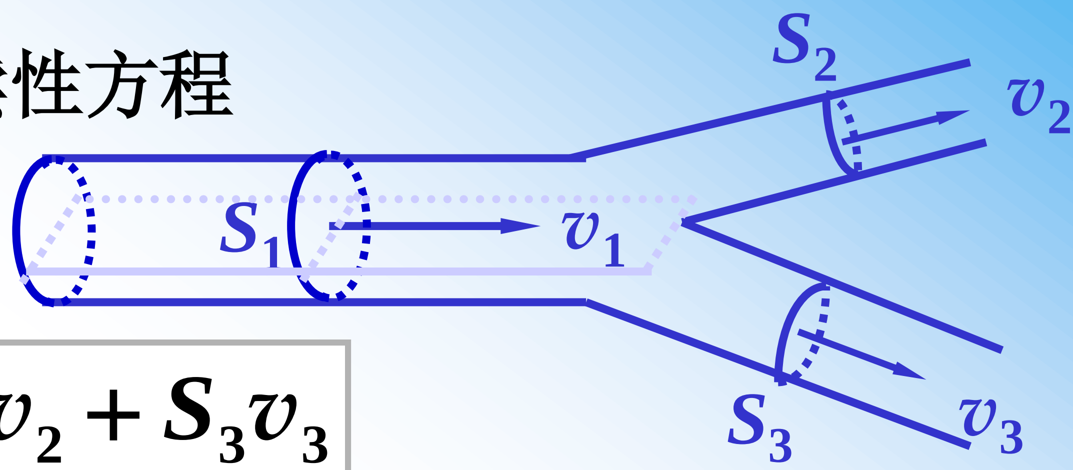
$P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = P_c + \frac{1}{2}\rho V_c^2$

$P_A = P_B + P_c + 8$

$\therefore$ ~~A管最大~~

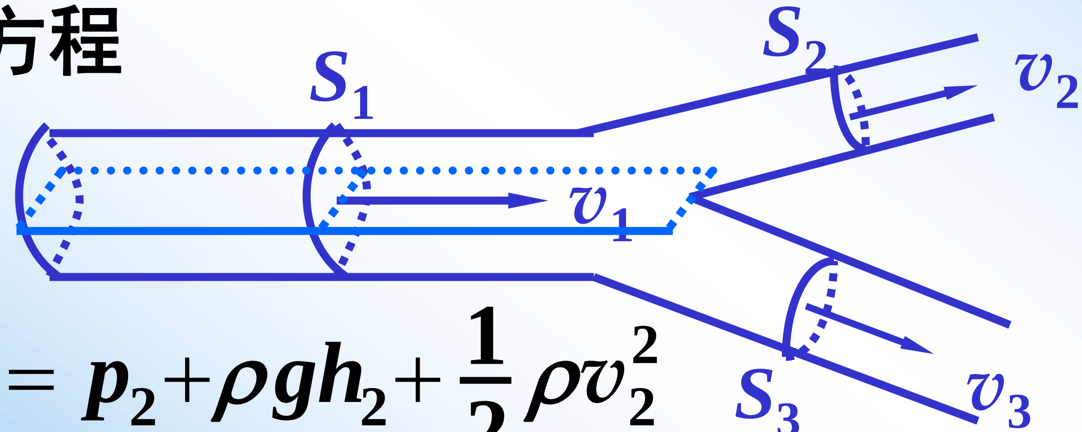
C

分支流管的连续性方程



$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2 + S_3 v_3}$$

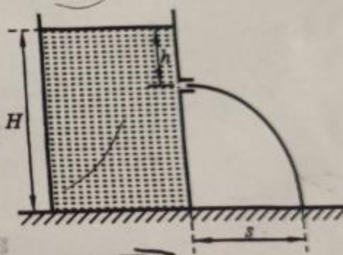
分支管道的伯努利方程



$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_3 + \rho g h_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

4-T3 如图所示，一开口水槽中的水深为 H，在水槽侧壁水面下 h 深处开一小孔。问：(1) 从小孔射出的水流在地面上的射程 s 为多大？(2) 能否在水槽侧壁水面下的其他深度处再开一小孔，使其射出的水流有相同的射程？(3) 分析小孔开在水面下多深处射程最远？(4) 最远射程为多少？



$\rho g h_1 + P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_2 + P_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2$

$v_1 s_1 = v_2 s_2$

$s_1 >> s_2$

$v_0 = \sqrt{2gh}$

(1) 对那一水平面，在极短时间 Δt 内

$\rho g h S \Delta t = \rho S v_0 \Delta t v_0$?

$\cancel{v_0 = \sqrt{gh}}$

$\frac{1}{2} g t^2 = H - h$

$v_0 t = s$

$\cancel{s = \sqrt{2h(H-h)}}$

(2) 设下降高度 ΔH $\quad v_1 = \sqrt{g(H - \Delta H)}$

$\frac{1}{2} g t^2 = \Delta H \quad v_1$ 解得 $\Delta H = H - h$

$v_1 t = s$ 则在距离上端 $H-h$ 处 $(H-\Delta$

则 $v_1^2 t^2 = s^2$ 即可

$\frac{2v_1^2}{g} = \frac{s^2}{\Delta H}$

(3) 由 $s = \sqrt{2h(H-h)}$

可知，当 $h = \frac{1}{2}H$，s 最大值

解：(1) 设小孔面积 S，水射出流速 v_0，

水密度 ρ，极短时间 t_0

由液体压强公式知小孔截压强 $P = \rho g h$ ①

动量定理：$F t_0 = \rho g h S t_0 = m v_0$ ②

解得：$v_0 = \sqrt{gh}$ $\quad v_0 = \sqrt{2gh}$

远？(4) 最远射程为多少？

(1) 设小孔面积 S，水流射出速度为 v_0，

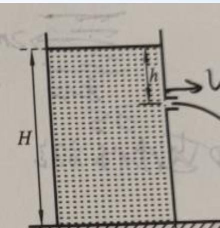
$P = \rho g h$.

由动量定理知 $F \Delta t = m v_0$.

$\Rightarrow \rho g h \cdot S \Delta t = m v_0 = \rho S v_0 \Delta t \cdot v_0$

$\Rightarrow gh = v_0^2 \Rightarrow \cancel{v_0 = \sqrt{gh}}$ $\quad v_0 = \sqrt{2gh}$

则 $\begin{cases} s = \sqrt{gh} \cdot t \\ H - h = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow s = \sqrt{gh}\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = \cancel{\sqrt{2h(H-h)}}$



4-T4 在一个顶部开启、高度为 0.1 m 的直立圆柱形水箱内装满水，水箱底部开有一小孔，知小孔的横截面积是水箱的横截面积的 1/400。问通过水箱底部的小孔将水箱内的水流尽需要多少时间？

解：$\rho g h \cancel{+\frac{1}{2}\rho v_1^2} = \frac{1}{2}\rho V_2^2$

$V_2 = \sqrt{2gh}$ 是一个变量 随h变化

得，$V_2 = \sqrt{2}\ m/s$

$q_v = V_2 \cdot \frac{S}{400} = \frac{\sqrt{2}S}{400}$

$V = 0.1S$

$t = \frac{V}{q_V} = 20\sqrt{2}\ s = 28.28\ s$

解：$\begin{cases} S_{孔} = \frac{1}{400}V \\ S_{孔}V_{孔} = S \cdot V \end{cases} \Rightarrow V_{孔} = 400V$

$P_0 + \rho g H = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_{孔}^2$

水位H是变量，V孔也会变化

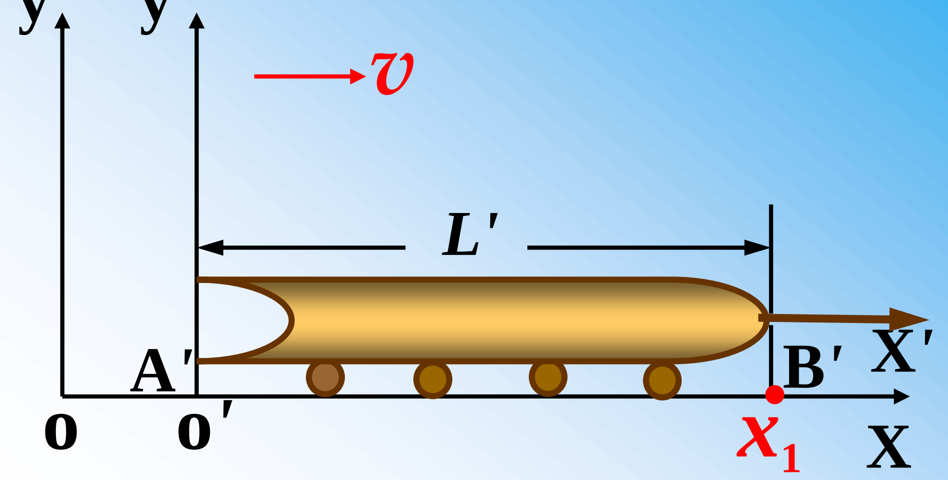
$\therefore V_{孔} = \sqrt{2}\ m/s$

$\therefore V = \frac{\sqrt{2}}{400}\ m/s$

$\therefore t = \frac{s h}{V} = 20\sqrt{2}\ s.$

上节课内容回顾

运动的尺度缩短



原长最长

$$L = v\Delta t = v\Delta t'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = L'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} < L'$$

相对某一参照系静止的车的长度为L', 在另一参照系看要短一些, 即$L < L'$

定义：物体相对参照系静止时，测得物体的长度为原长。

相对论效应之三：运动的尺度缩短

上节课内容回顾

- 由光速不变原理得出的有关结论

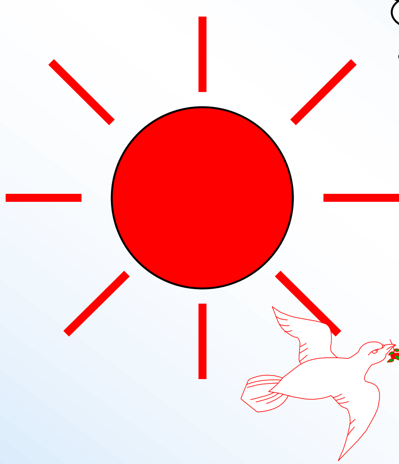
同时性的相对性 $\Delta t' = 0,\ \Delta t \neq 0$

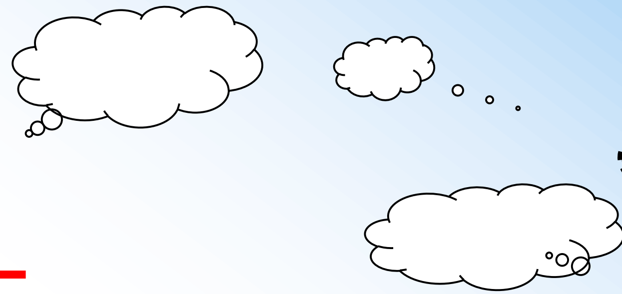
运动的尺子缩短 $L = L'\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$

运动的时钟变慢 $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

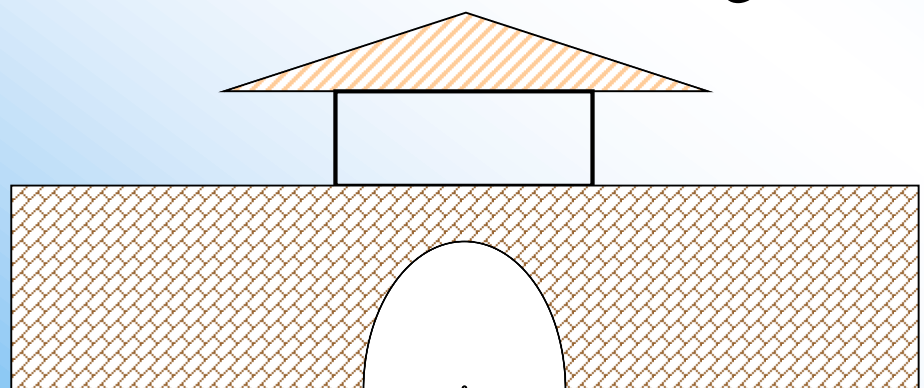
- 洛伦兹变换

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c} \qquad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \end{cases}$$



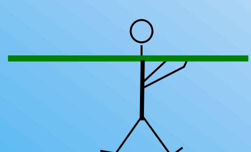


$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \dfrac{v}{c^2}x) \end{cases}$$



x_1 x_2

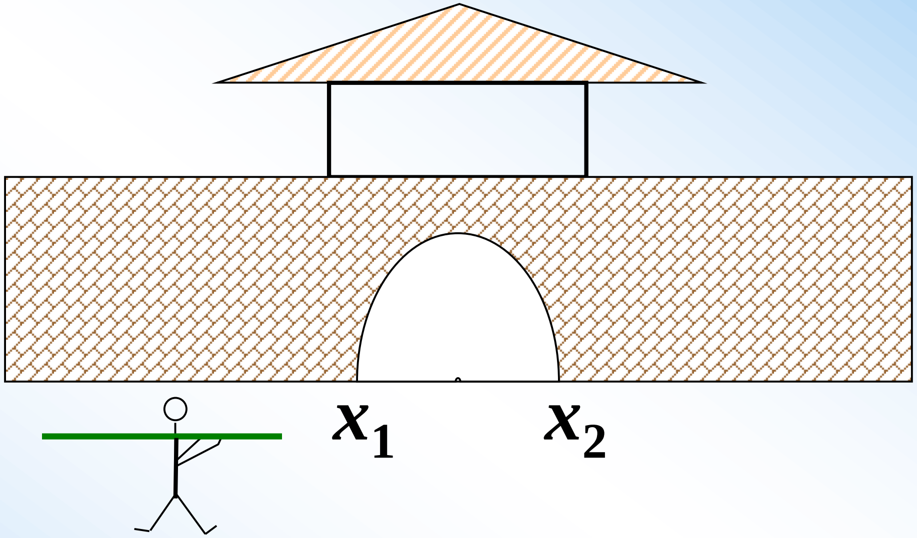
t_1 t_2



$$t_1' = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)$$

$$t_2' = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2)$$

$$\boxed{\Delta t' = \frac{(t_2 - t_1) - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - (\dfrac{v}{c})^2}}}$$



$$\Delta t' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

问题实质：

竹竿两端是否能同时与城门的两边对齐？

地面系(S系)看：竹竿两端同时与城门的两边对齐

竿子系(S'系)看：竹竿两端不是同时与城门的两边对齐，而只能是一先一后。

$$t_1 = t_2, x_2 > x_1 \rightarrow \Delta t' = t'_2 - t'_1 < 0$$

（后面事件先发生）

（3） 洛仑兹速度变换

$$S\text{系}\begin{cases} u_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ u_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ u_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{cases} \qquad S'\text{ 系}\begin{cases} u'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \\ u'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \\ u'_z = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma\left(x - vt\right) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}}$$

根据 $x' = \gamma(x - vt)$

得 $\cancel{\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \gamma\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v\right)}$

$\cancel{u'_x = \gamma(u_x - v)}$?

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$$

$$= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}$$

洛仑兹速度变换

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x} \\ u'_y = \dfrac{u_y}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \\ u'_z = \dfrac{u_z}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \end{cases}$$

$$\because\ y = y' \quad z = z'$$

$$\therefore\ u_y \cancel{=} u'_y \ ?\ u_z \cancel{=} u'_z$$

$$u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$$

$$u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$$

讨论

1°若 $v \ll c$，则
$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}}$$

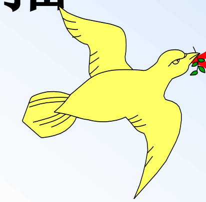
伽利略速度变换

讨论

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u'_y=\frac{u_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$u'_z=\frac{u_z}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$



2 °若一束光沿S 系的x轴传播

$$u_x=c \quad u_y=0 \quad u_z=0$$

在S' 系看这一束光

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{c-v}{1-\frac{v}{c}}=c$$

$$u'_y=u_y=0$$

$$u'_z=u_z=0$$

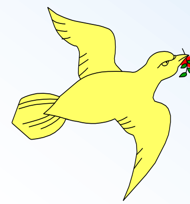
$$u'=c$$

光速不变

讨论

3° 从S' 系变换S 系的速度

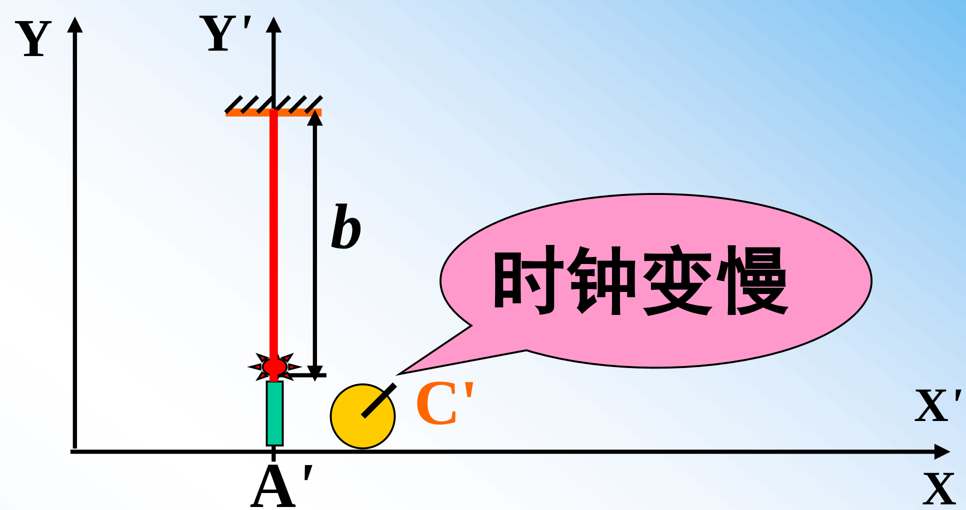
$$
\begin{cases}
u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2}u'_x} \\[2ex]
u_y = \dfrac{u'_y}{1 + \dfrac{v}{c^2}u'_x}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \\[2ex]
u_z = \dfrac{u'_z}{1 + \dfrac{v}{c^2}u'_x}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}
\end{cases}
$$



$$
\begin{cases}
u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x} \\[2ex]
u'_y = \dfrac{u_y}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \\[2ex]
u'_z = \dfrac{u_z}{1 - \dfrac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}
\end{cases}
$$

时间膨胀（运动的时钟变慢）

设S'系中，A'点有一闪光光源和一接收器，并在Y'轴放一反射镜



在S'系看

两事件时间间隔

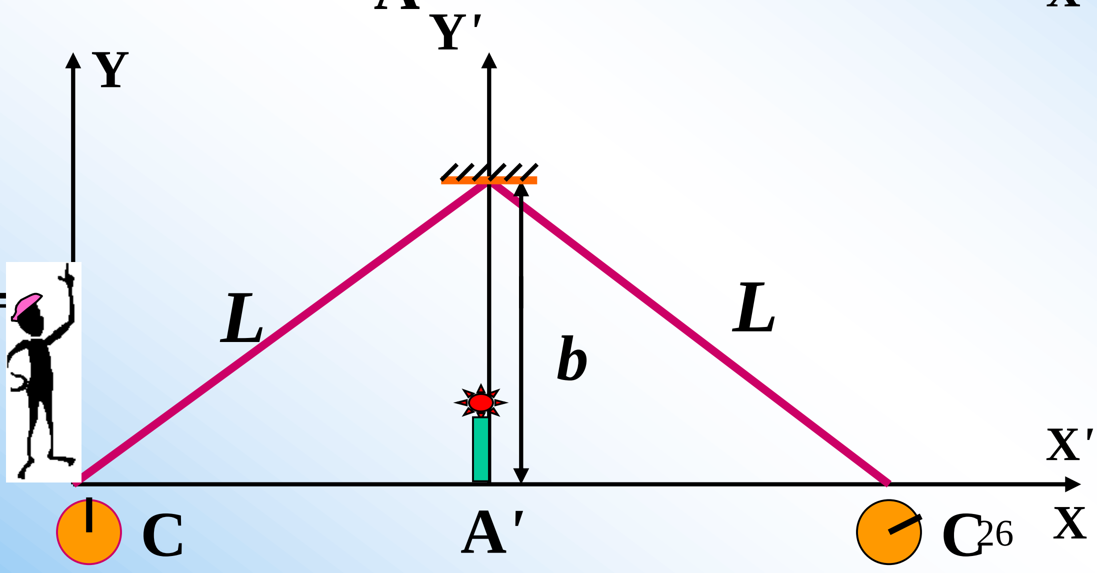
$$\Delta t' = \frac{2b}{c}$$

在S系看

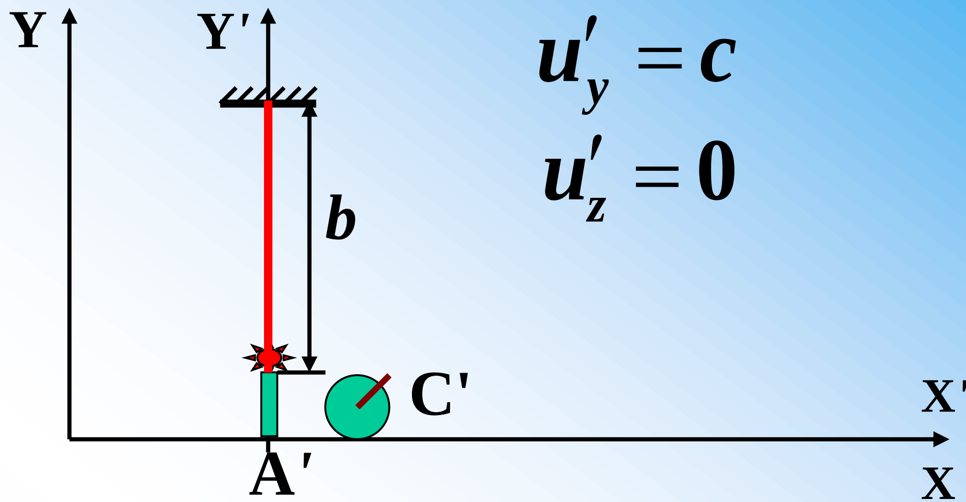
$$L = \sqrt{b^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}$$

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{\dfrac{2b}{c}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$$

显然 $\Delta t > \Delta t'$

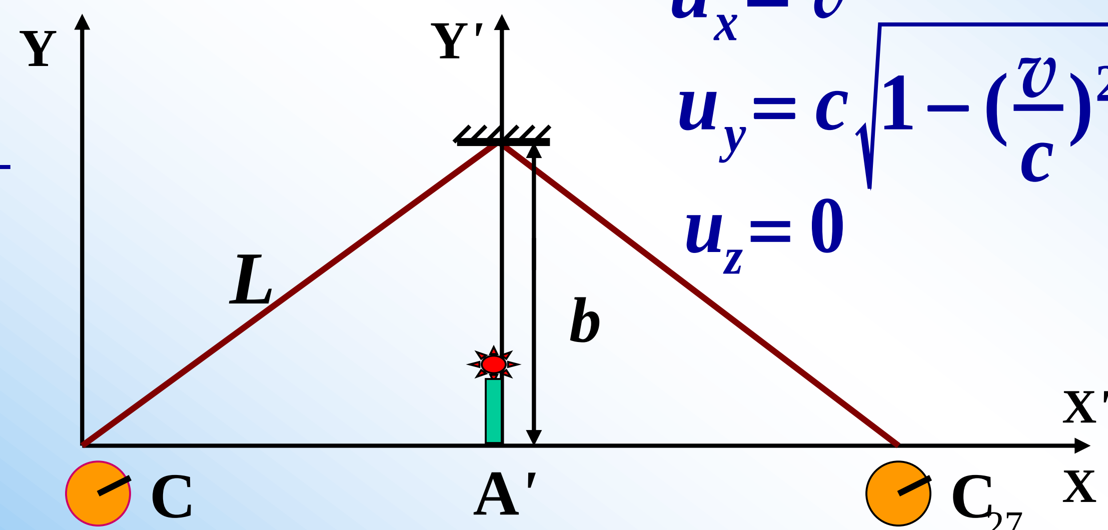


$$
\begin{cases}
u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \\
u_y = \dfrac{u'_y}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \\
u_z = \dfrac{u'_z}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}
\end{cases}
$$



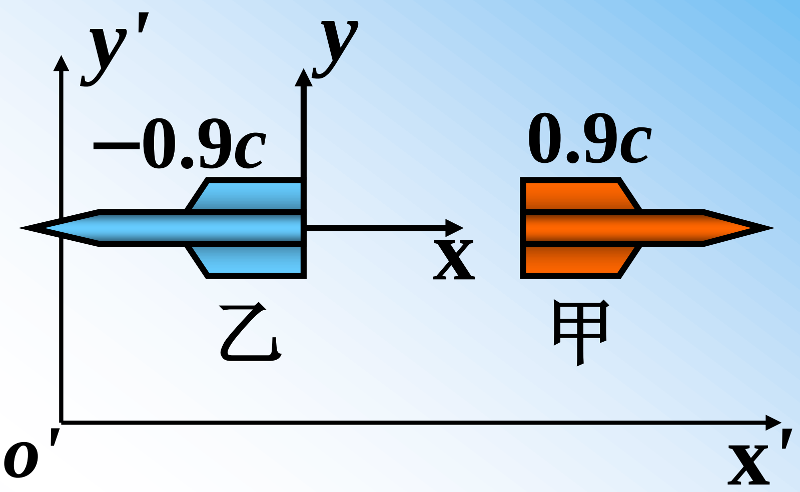
$$u'_x = 0$$
$$u'_y = c$$
$$u'_z = 0$$

$$u_x = v$$
$$u_y = c\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$
$$u_z = 0$$



$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$
$$= c$$

例. 在地面测到两个飞船分别以0.9c和–0.9c的速度向相反方向飞行，求其中一飞船看另一飞船的速度是多少？



解：设S系静止在乙飞船上

S' 系静止在地面上

S'系相对S系的速度

$$v = 0.9c$$

甲船相对S' 系的速度 $u'_x = 0.9c$

甲船相对S系（乙船）的速度

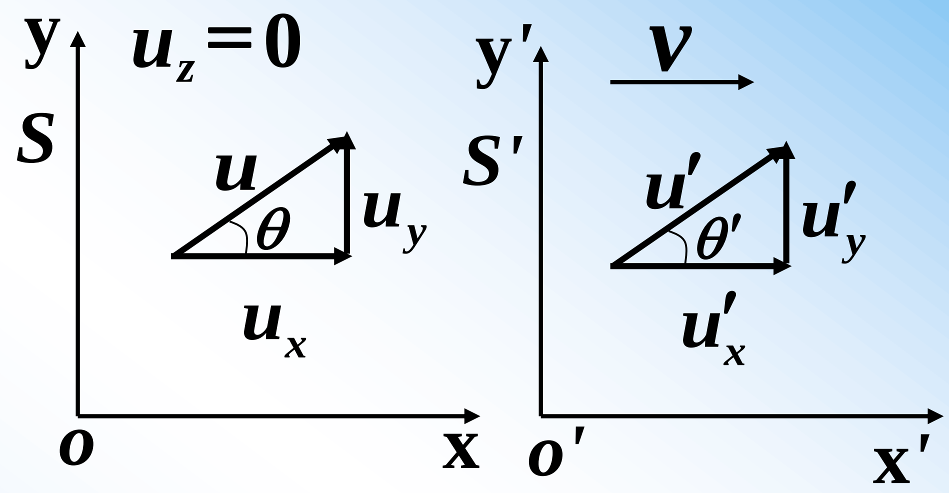
$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + 0.9 \times 0.9} = 0.994475c$$

$u_y = u'_y = 0 \quad u_z = u'_z = 0 \longrightarrow u = 0.994475c < c$

4° 速度方向的变换关系

质点运动速度的方向, 经过洛仑兹变换后, 不仅速度的大小，而且速度的方向也会改变。

设质点在S系中的xy平面内运动 。



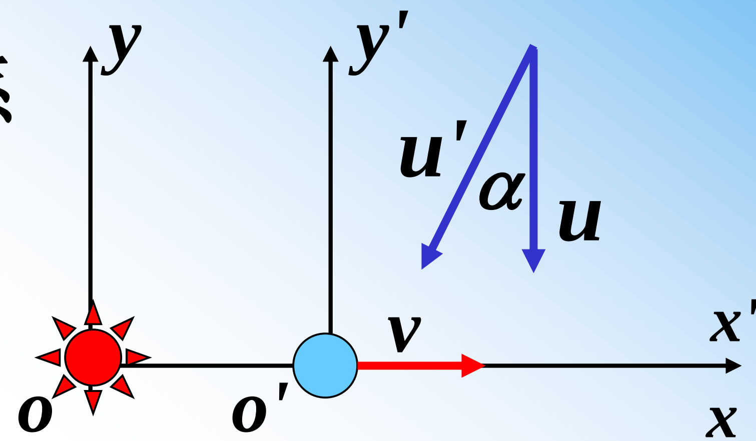
$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

$$u'_y=\frac{u_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} \qquad u'_z=\frac{u_z}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}=0$$

$$\tan\theta'=\frac{u'_y}{u'_x}=\frac{u_y}{u_x-v}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}=\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta-v}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

例. 在太阳系中观察一束星光垂直射向地面,速率 c, 而地球以速率v 垂直光线运动, 求地面上测量这束星光的速度大小方向？

解: 设太阳系为S系, 地球S'系



在S系看星光的速度

$$u_x=0,\quad u_y=c,\quad u_z=0$$

在S'系看星光的速度

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=-v \qquad u'_y=\frac{u_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}=c\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

$$u'_z=\frac{u_z}{1-\frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}=0 \qquad u'=\sqrt{u_x'^2+u_y'^2}=c$$

$$\alpha'=tg^{-1}\frac{u'_x}{u'_y}$$

五、 狭义相对论动力学简介

1. 相对论质量

相对论认为：质量是一个与参考系有关的物理量，在不同的惯性系所测得的同一物体的质量是不同的。

理论分析和实验事实表明

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

静止质量

m: 当物体相对于观察者以速度u运动时的质量;

m_0: 当物体相对于观察者静止(u=0)时的质量。

讨论

$$\boxed{m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}}$$ ——质速关系式

1 º同一物体速度u 不同, 则质量不同 $u\uparrow, m\uparrow$。

2 º$u << c$ 则 $m = m_0$ ———牛顿力学

例：$v = 10^4$ m/s $\frac{m-m_0}{m_0} \approx \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2 \approx 10^{-10}$

但是：当电子 $v = 0.98c$ 时，$m = 5.03m_0$

3 º限制了虚时空的出现

$u = 0$ $m = m_0$ $u = c$ $m \to \infty$ 则必有 $m_0 = 0.$

以光速运动的物体, 其静止质量m_0只能是零.
如：光子、中微子等。

$u > c$ m为虚数 ——无意义

2. 相对论动量和动力学方程

动量 $\vec{P} = m\vec{v} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\vec{v}$

动力学方程

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{v}\right)$$

可以证明

上式对洛仑兹变换是不变的，对任何惯性系都适用。当 $v << c$ 时，回到经典力学。

3. 相对论动能 (P113)

动能定理 $\Delta E_k=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$

若物体从静止状态, 到速度增加到v，则

$$E_k=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_0^v \frac{d(m\vec{v})}{dt}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_0^v \vec{v}\cdot d(m\vec{v}) = mc^2-m_0c^2$$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}=\frac{m_0c}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

$$\boxed{E_k=mc^2-m_0c^2}$$

讨论

相对论动能 $E_k = mc^2 - m_0c^2$

若 $v << c$

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1\right)$$

$$[1-(\frac{v}{c})^2]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2 + \cdots$$

$$= m_0c^2 \cdot \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2$$

即 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ——牛顿力学中的形式

4. 相对论能量

$\boxed{\text{相对论动能：} E_k = mc^2 - m_0c^2}$

相对论意义上的总能量：

$$E = mc^2 = E_k + m_0c^2$$

$$E_0 = m_0c^2$$ ——静止能量

$$\boxed{E = mc^2}$$ ——相对论质能关系式

由 $E=mc^2$ 可得

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

爱因斯坦： $\boxed{E_0 = m_0 c^2} \longrightarrow \boxed{\Delta E_0 = \Delta m_0 c^2}$

就一个粒子来说，若由于自身内部过程使它的能量减少了，那么它的静止质量也将相应地减少。

例：在核反应中，反应前 m_{01}、E_{k1}

反应后 m_{02}、E_{k2}

反应前后能量守恒

$$E_{k2} + m_{02}c^2 = E_{k1} + m_{01}c^2$$

即 $$E_{k2} - E_{k1} = (m_{01} - m_{02})c^2$$

$$\Delta m = m_{01} - m_{02} \longrightarrow \text{质量亏损}$$

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} \longrightarrow \text{释放的能量}$$

通常记 $$\boxed{\Delta E = \Delta m_0 c^2}$$

例. 在参照系S中, 有两个静止质量都是m_0的粒子A、B, 分别以速度 $\vec{v}_A = v\vec{i}$, $\vec{v}_B = -v\vec{i}$ 运动。相碰后合在一起,成为一个静止质量为M_0的粒子。求M_0.

解: 设合成粒子的速度为 $\vec{u}$

由动量守恒 $m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = M\vec{u}$

粒子是一维运动 $m_A v_A - m_B v_B = Mu$

$\because$ $m_A = m_B$, $v_A = v_B$

$\therefore$ $u=0$ 即合成粒子是静止的

由能量守恒 $M_0c^2 = m_Ac^2 + m_Bc^2$

则得 $M_0 = m_A + m_B = \dfrac{2m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

显然 $M_0 \neq 2m_0$，且 $M_0 > 2m_0$

例. 在一种核聚变反应中：$_{1}^{2}H+_{1}^{3}H\rightarrow_{2}^{4}He+_{0}^{1}n$

已知各原子核的静止质量：$m_D=3.3437\times10^{-27}$kg，$m_T=5.00\times10^{-27}$kg，$m_{He}=6.64\times10^{-27}$kg，$m_n=1.67\times10^{-27}$kg。求这一反应释放的能量。

解：反应前后质量的改变为

$$\Delta m_0=(m_D+m_T)-(m_{He}+m_n)=0.0311\times10^{-27}\ \text{kg}$$

相应释放的能量

$$\Delta E=\Delta m_0c^2=0.0311\times10^{-27}\times9\times10^{16}=2.799\times10^{-12}\ \text{J}$$

1kg这种核燃料所释放的能量为

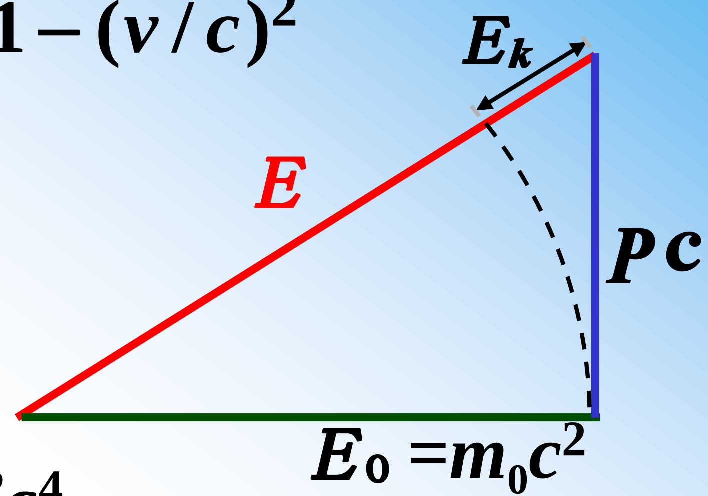
$$\frac{\Delta E}{m_D+m_T}=3.35\times10^{14}\ \text{J/kg}$$

相当于每公斤汽油燃烧时所放出的热量的728万倍

5. 相对论的能量与动量的关系

从 $E=mc^2$，$P=mv$ 及 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

可得 $E^2=P^2c^2+m_0^2c^4$



对动能为E_k的粒子

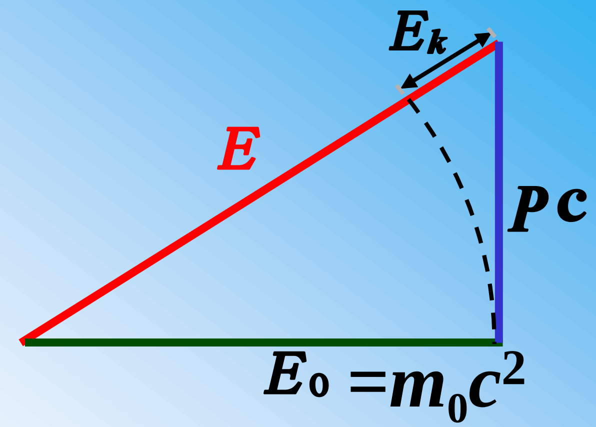
$$E=E_k+m_0c^2$$

则有 $(E_k+m_0c^2)^2=P^2c^2+m_0^2c^4$

$$E_k^2+2E_km_0c^2=P^2c^2$$

当$v<<c$时 $E_k=m_0c^2[\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}-1]<<m_0c^2$

$$2E_km_0c^2=P^2c^2 \qquad E_k=\frac{P^2}{2m_0}$$



对光子：$E^2 = P^2c^2$

光的粒子性 $\begin{cases} P = \dfrac{E}{c} \\ m = \dfrac{E}{c^2} \end{cases}$ 光子可用m、E、P 来描述

反映了光的物质性

例15. 试计算能量为1 MeV的电子的动量。（1MeV=10^6eV, 电子的静止能m_ec^2=0.511MeV）

解：$E^2 = P^2c^2 + (m_ec^2)^2$

$$(10^6\times1.6\times10^{-19})^2 = P^2(3\times10^8)^2 + (0.511\times10^6\times1.6\times10^{-19})^2$$

$$P = 4.58\times10^{-22}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

狭义相对论基本公式归纳

洛仑兹变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ u'_y = \dfrac{u_y}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} \\ u'_z = \dfrac{u_z}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} \end{cases}$$

相对论效应

时间效应 $\Delta t = \gamma \Delta t'$

原时最短！

其中 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

空间效应 $L = \dfrac{L'}{\gamma}$

原长最长

质量效应 $m = \gamma m_0$

相对论动量 $\vec{P}=m\vec{v}=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\vec{v}$

相对论动能 $E_k=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=mc^2-m_0c^2$

相对论能量 $E=mc^2$ ——相对论质能关系

$E=E_k+m_0c^2$

能量与动量的关系

$E^2=(Pc)^2+E_0^2$

$E_k^2+2E_km_0c^2=P^2c^2$