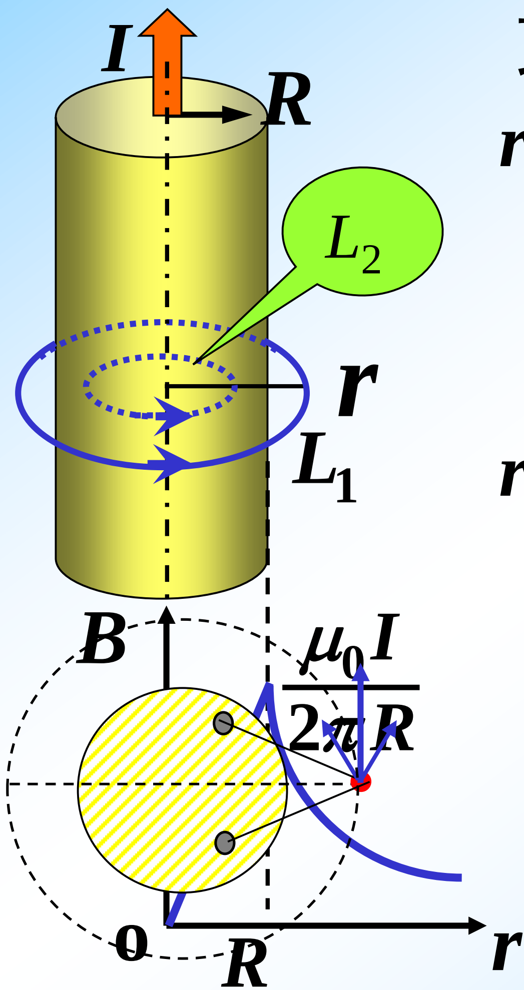
3. *安培环路定理的应用*

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i$$

例6. 求无限长载流圆柱体(I、R)内、外的磁场。

解: 与轴等距离的圆环上B相等，方向沿圆环的切向



取以r为半径的同心环路、积分

$r > R$时 $\rightarrow$ 环路L_1

$$\left.\begin{aligned}&\oint_{L_1} \vec{B}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B_1\cdot 2\pi r\\ &\mu_0\sum I_i = \mu_0 I\end{aligned}\right\} \quad B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向：沿L_1

$r < R$时 $\rightarrow$ 环路L_2

$$\left.\begin{aligned}&\oint_{L_2} \vec{B}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B_2\cdot 2\pi r\\ &\mu_0\sum I_i = \mu_0\cdot\frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2\end{aligned}\right\} B_2 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

问:若是通电柱面？
$$\begin{cases} B_{外} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\\ B_{内} = 0\end{cases}$$

讨论

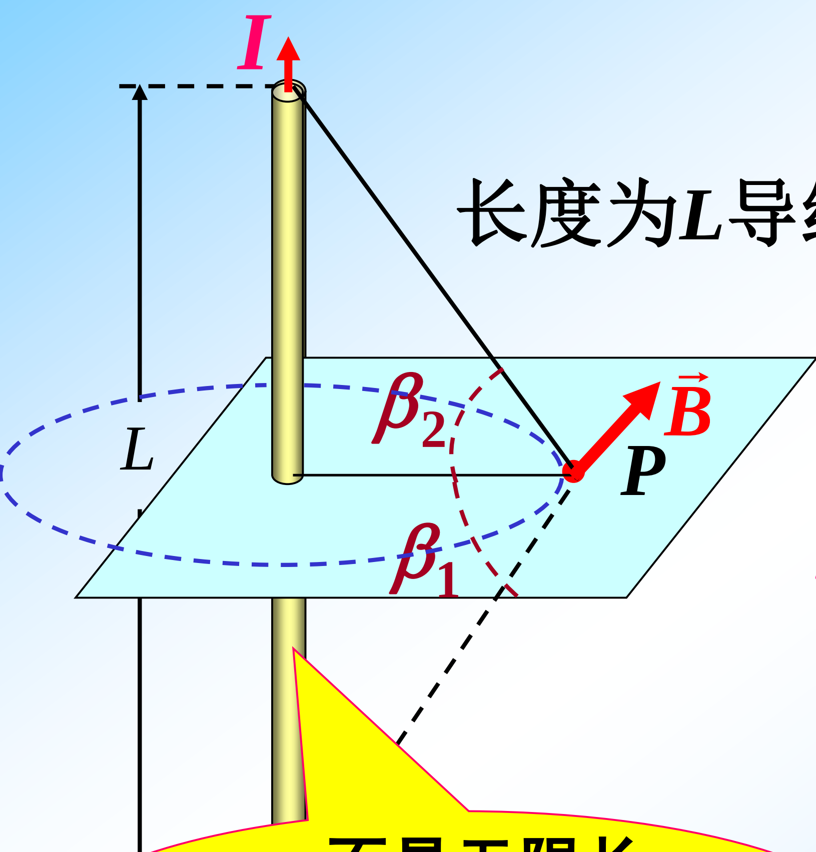
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i$$

无限长导线外任意点的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

长度为L导线中垂面上的磁场

$$B \cancel{=} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad ?$$



$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}[\sin\beta_2 - \sin\beta_1]}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}[\sin\beta_2 - \sin(-\beta_2)]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\sin\beta_2$$

不是无限长

电流与积分回路不构成套环

不可用环路定理

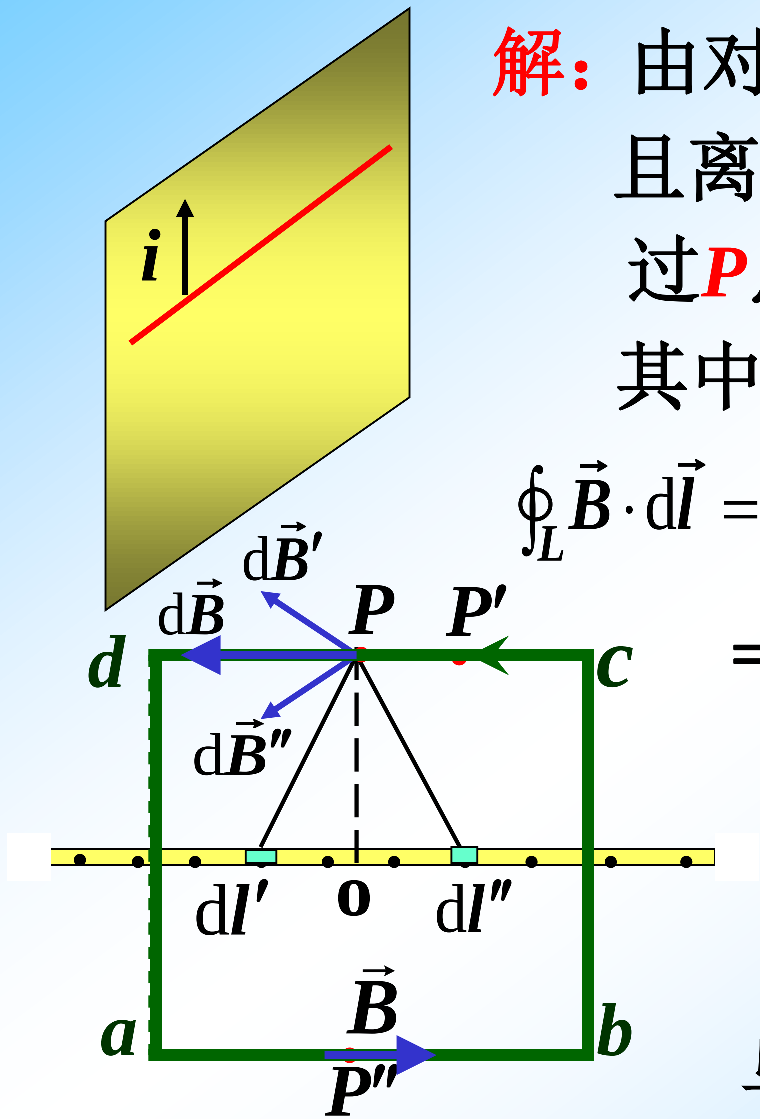
例7. 均匀分布面电流的无限大平面，其横截线的电流线密度为 i (面电流密度)，求平面外 $\vec{B}=?$

解： 由对称可知 $\vec{B}\perp\vec{i}$ ，$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_i}$

且离平面等距离处的 B 大小相等

过 P 点取矩形回路 $abcd\rightarrow L$

其中 ab、cd 与板面等距离



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l}+\overset{0}{\cancel{\int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l}}}+\int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l}+\overset{0}{\cancel{\int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l}}}$$

$$\left.\begin{aligned}&=B\cdot ab+B\cdot cd=2B\cdot ab\\ &\text{而}\quad \mu_0\sum I_i=\mu_0 i\cdot ab\end{aligned}\right\}$$

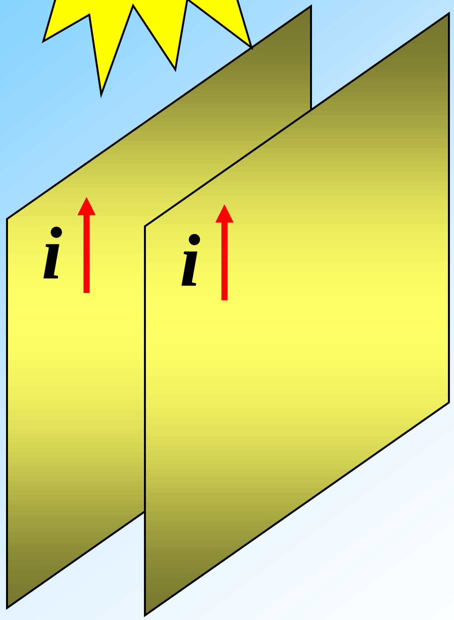
$$B=\frac{1}{2}\mu_0 i$$

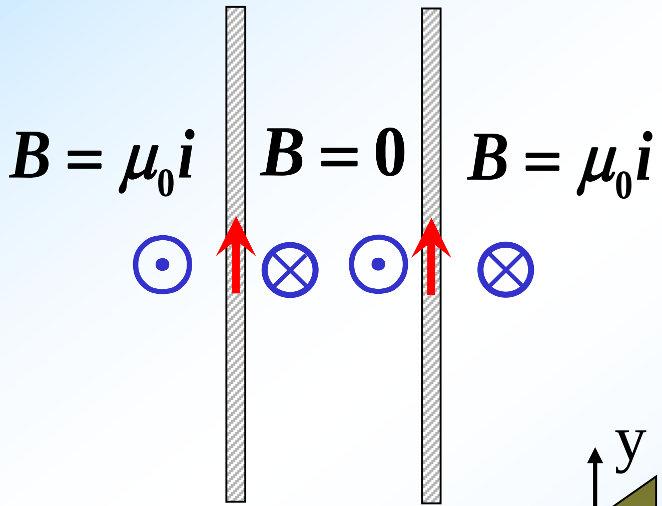
均匀场

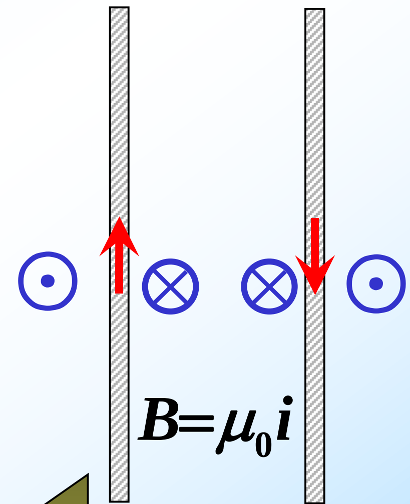
与 P 点到平板的距离无关!

讨论

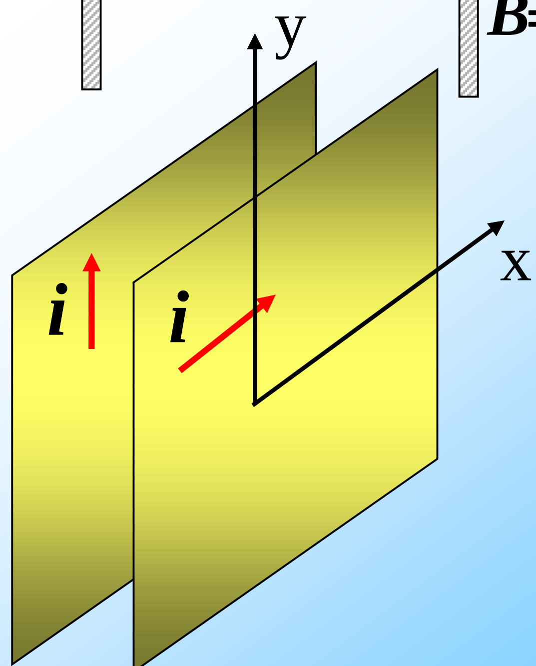
1 º两块无限大平面通同向电流的磁场





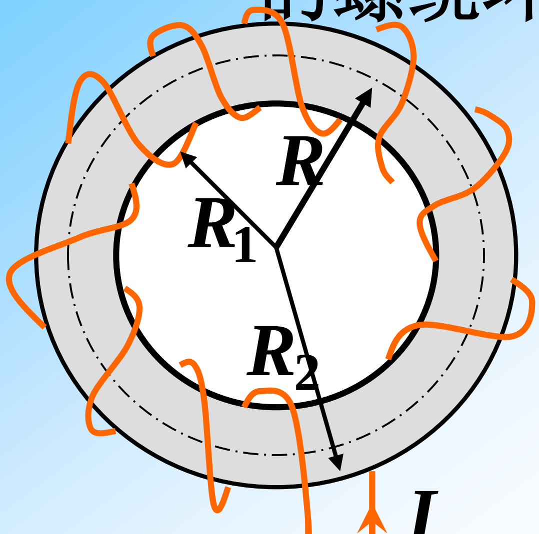


2 º两块无限大载流平面电流互相垂直的磁场

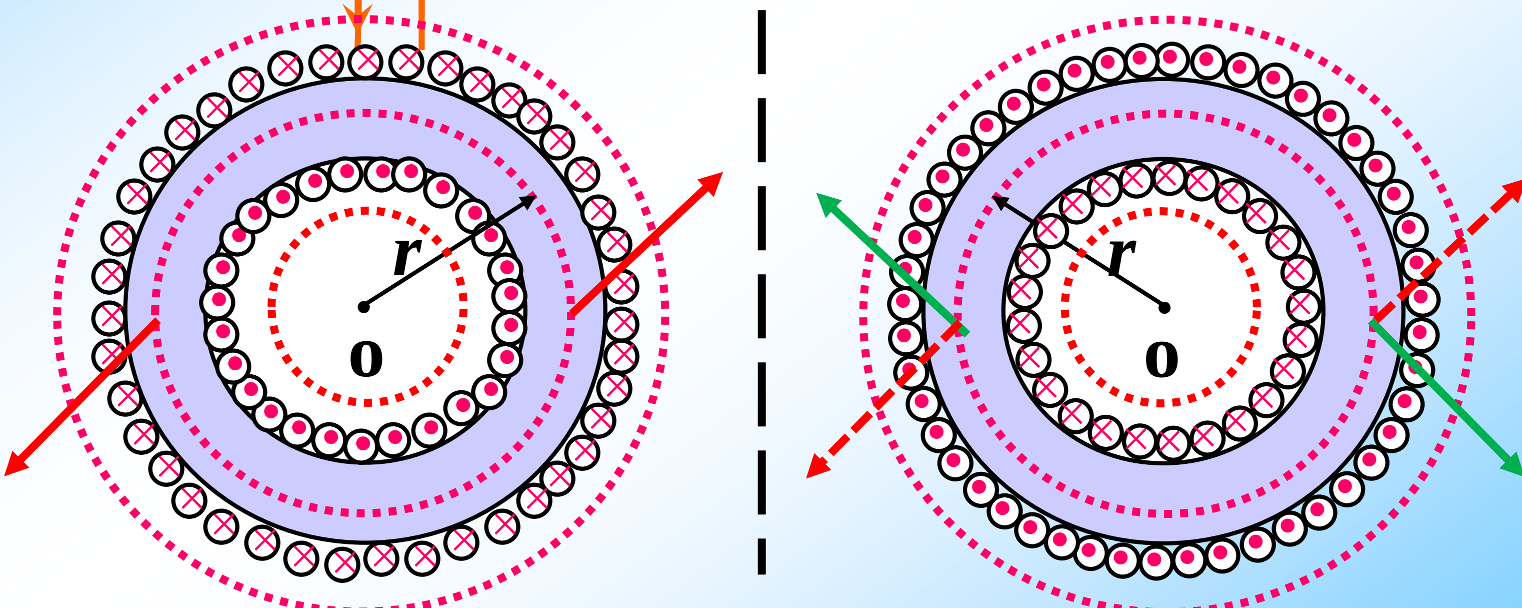


例8. 求通电流I, 环管轴线半径为R、总匝数为N的螺绕环的磁场分布。

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$$



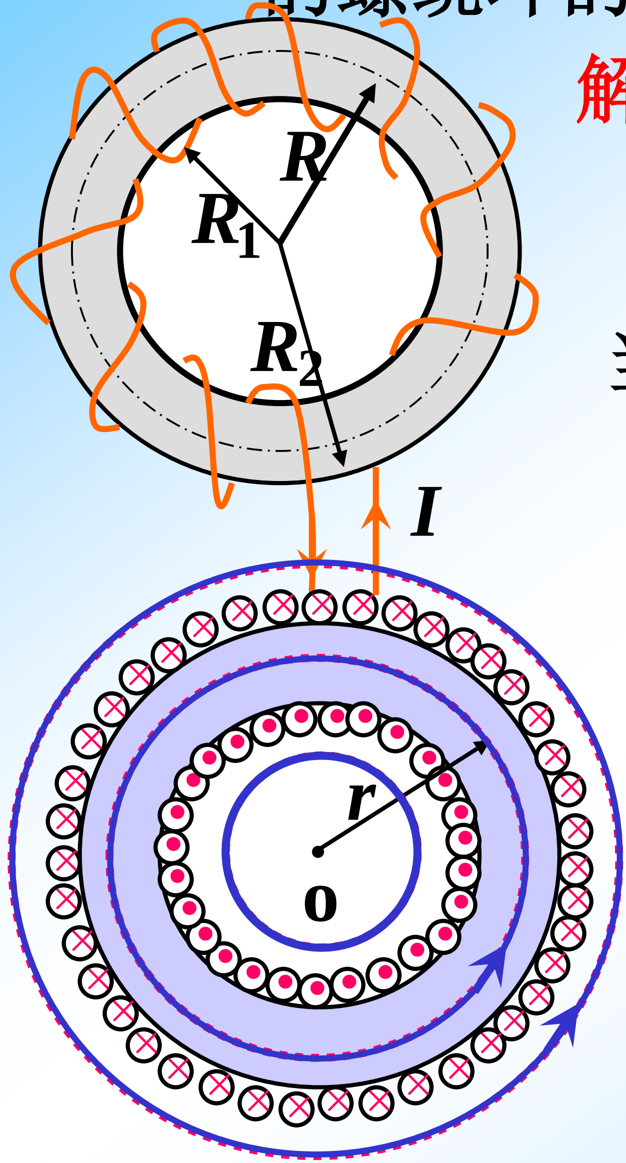
解： 由电流对称性,与 …… 上各点B大小相 …… 方向沿切 ……



与镜像叠加磁场应为0

例8. 求通电流I, 环管轴线半径为R、总匝数为N的螺绕环的磁场分布。

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_i}$$



解： 由电流对称性,与环共轴的圆周上各点B大小相等,方向沿切线。

取以o为中心r为半径的圆周为L

当$R_1 < r < R_2$

$$\left.\begin{aligned} &\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\mathrm{d}l = B\cdot 2\pi r \\ &\text{而}\quad \mu_0 \sum I_i = \mu_0 NI \end{aligned}\right\} B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

若 $r < R_1$ $\because \mu_0 \sum I_i = 0$ $\therefore B=0$

若 $r > R_2$ $\because \mu_0 \sum I_i = \mu_0(NI - NI) = 0$

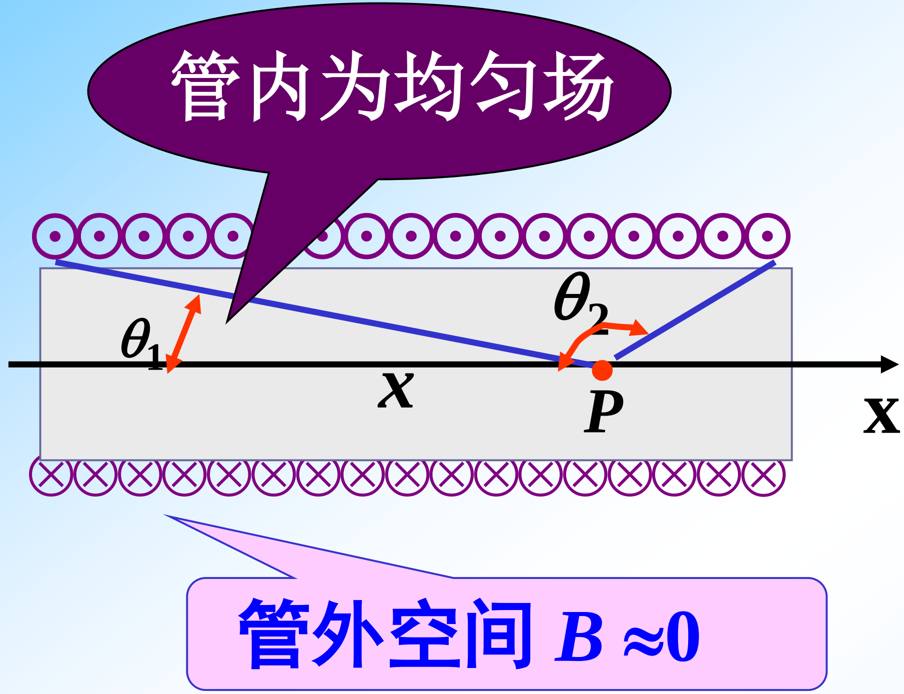
$\therefore B=0$

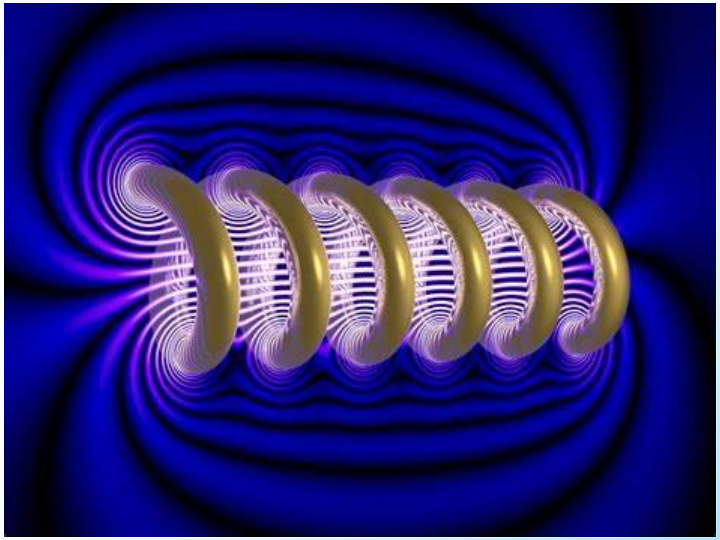
当 $R_{\text{管截面}} << R$ 则 $r \approx R$

$$B = \mu_0 nI \qquad n = \frac{N}{2\pi R}$$

用环路定理和高斯定理分析无限长螺线管磁场：P273

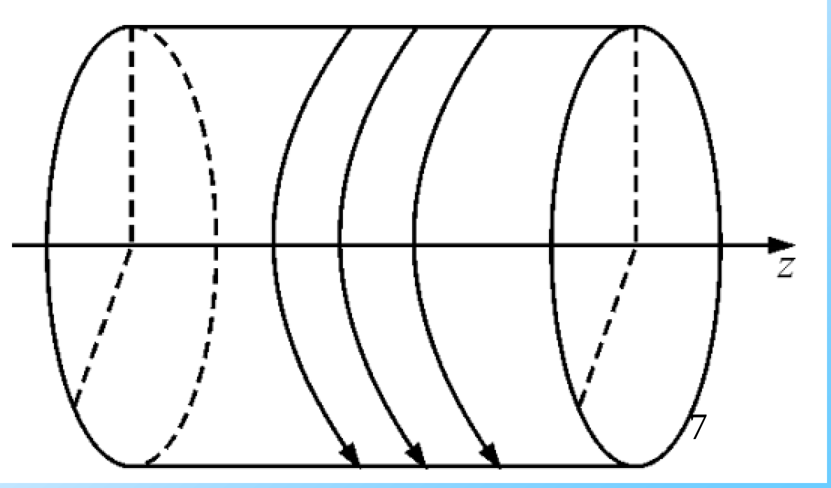
（直接给出内部B方向与OO’平行，外部B=0）

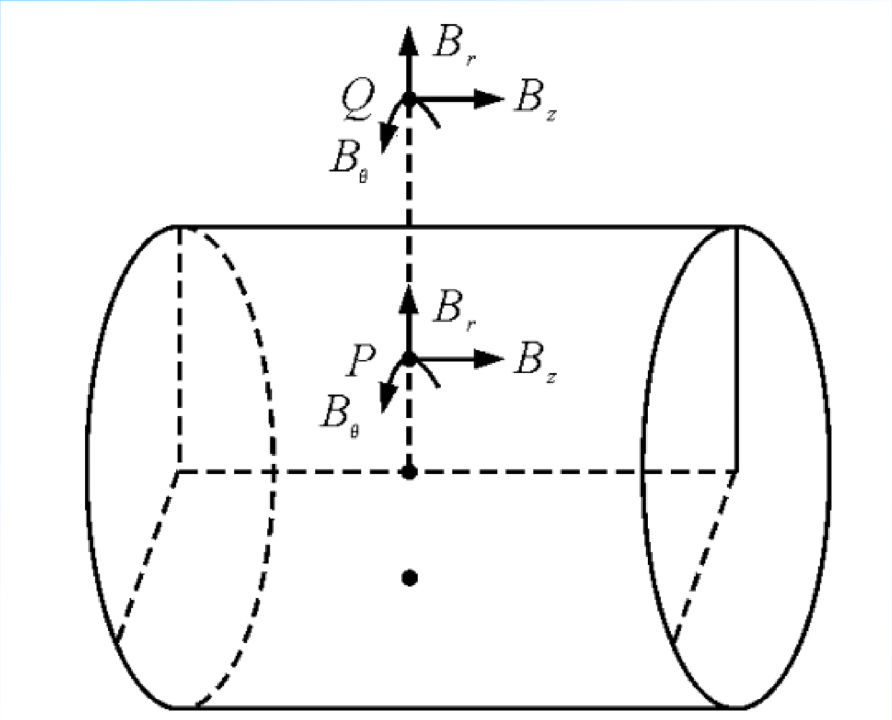




a) 忽略螺线管轴向电流；

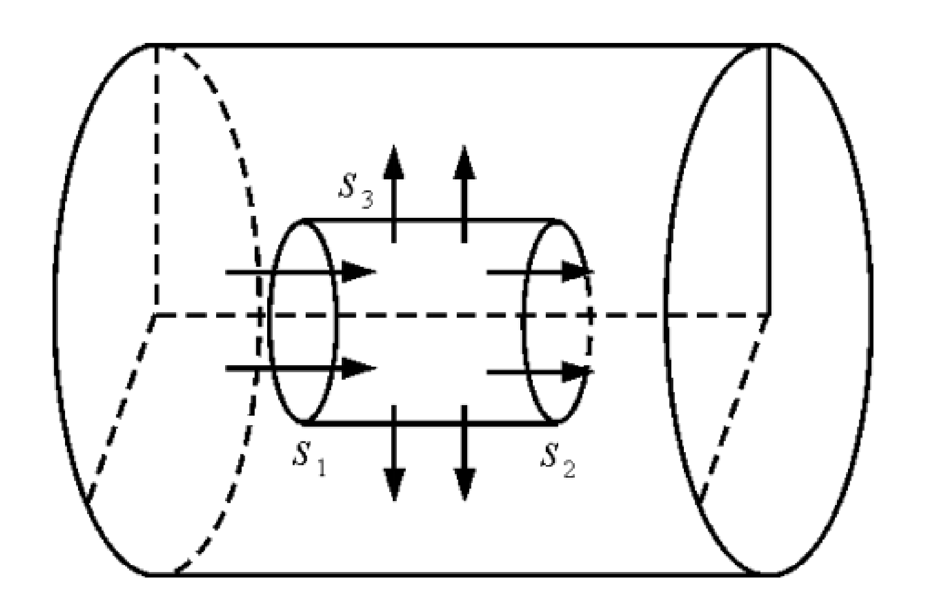
密绕螺线管简化为
环形面电流





螺线管内外任意一点的磁场均可分解为3个方向: 轴向B_z ,径向B_r和角向B_θ 。由于螺线管无限长, 由对称性可知任意位置磁场大小都与坐标z和θ无关, 仅可能是r的函数。

b) 径向磁场$B_r = 0$；

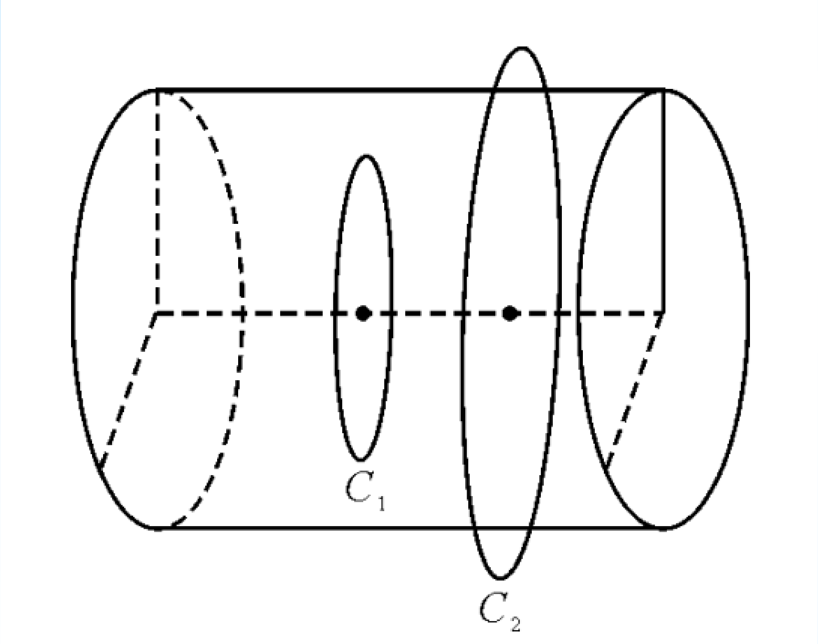


B_z场在S_1和S_2处完全相同, $\boldsymbol{B_r}$与S_3处处垂直且大小相等。

$$\oiint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$\cancel{\iint \boldsymbol{B}_z \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{S}_1 + \iint \boldsymbol{B}_z \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{S}_2} + \iint \boldsymbol{B}_r \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{S}_3 = 0$$

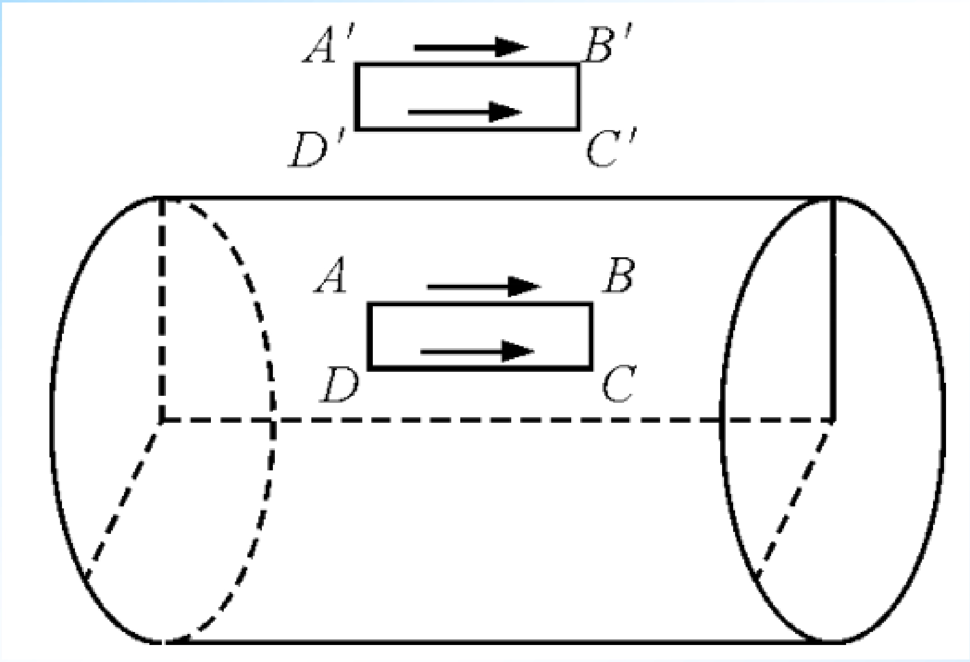
c) 角向磁场$B_{\theta} = 0$；



$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint \boldsymbol{B}_{\theta} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

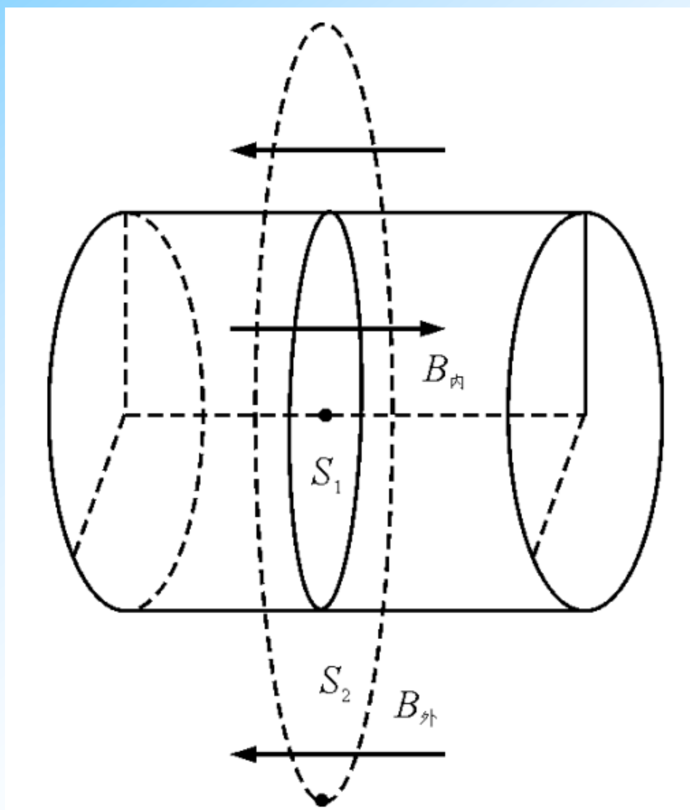
$$\oint \boldsymbol{B}_{\theta} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B_{\theta} \times 2\pi r = 0$$

d) 轴向磁场B_z匀强；



$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{AB} \boldsymbol{B}_z \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \cancel{\int_{BC} \boldsymbol{B}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}} + \int_{CD} \boldsymbol{B}_z \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \cancel{\int_{DA} \boldsymbol{B}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}} = 0$$

e) 螺线管外部磁场为零；

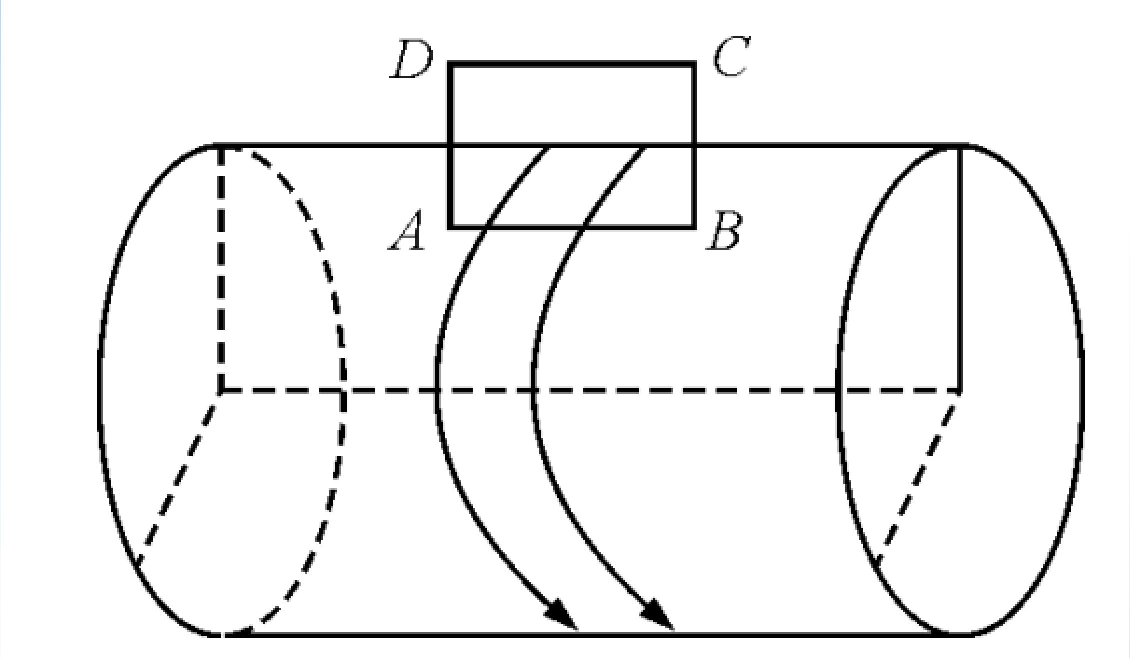


由于磁场的无源性质, 穿过该无限大平面的磁通量为零

$$B_{内} S_1 - B_{z外} S_2 = 0$$

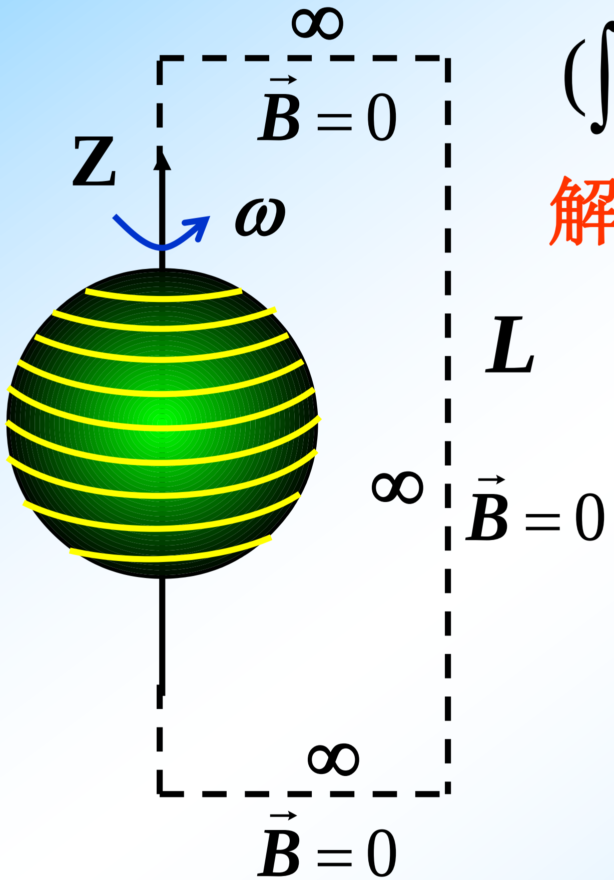
$$B_{外} = B_{内}\frac{S_1}{S_2} = 0$$

f) 螺线管内部磁感应强度$B=\mu_0 nI$ (P274)



$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{AB}\boldsymbol{B}_z\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B_z L=\mu_0 I=\mu_0 n I_0 L$$

例9. 如图所示，电荷$q(>0)$ 均匀分布在半径为R的薄球壳外表面上。Z轴过球心。若球壳以恒定的角速度ω绕Z轴转动。则沿着Z轴从$-\infty$到$+\infty$磁感应强度的线积分是多少？



$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{B}\cdot d\vec{l}=?\right)$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_i}$$

解： 取如图所示的闭合回路L，则

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_i$$

$$\sum I_i=q\frac{\omega}{2\pi}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{B}\cdot d\vec{l}+0+0+0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_i=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi}$$