Lagrange中值定理的推论

函数f在(a,b)上可导，且f'处处非负(resp.正)，那么f在(a,b)上单调递增(resp.严格单调递增)。

逆问题

该推论的逆命题是否成立？

单调性与导数的符号

函数f在(a,b)上可导，那么$f(x)$在(a,b)上单调递增(resp.单调递减)当且仅当在(a,b)上$f'(x)\geq 0$（resp.$f'(x)\leq 0$）。

注意

f在区间上严格递增(resp.严格递减)$\not\Rightarrow f' > 0$(resp.$f < 0$)。

例 (反例)

函数$y = x^3$。

定理

f在(a,b)内可导，那么

- $f(x)$在(a,b)上严格递增*(resp.*严格递减*)*当且仅当 $f'(x) \geq 0$*(resp.*$f'(x) \leq 0$*)*，且在任何子区间上$f'(x) \neq 0$;
- 特别地，若$f' \geq 0$且在有限个点处取值为0，则f严格递增。

推论

函数f, g在$[a,b]$上连续，在(a,b)可导。如果$f(a)=g(a)$且在(a,b)上，$f'(x)<g'(x)$，那么在$(a,b]$上有$f(x)<g(x)$。

极值的充分非必要条件

若f在x_0的左邻域上单调递增(resp.单调递减)，在右邻域上单调递减(resp.单调递增)，那么f在x_0处取到极大值(resp.极小值)。

定理 (极值的第一充分条件)

函数f在x_0处连续，在空心邻域$U^0(x_0,\delta)$上可导，

- 如果当$x\in U^0(x_0,\delta)$时，有$(x-x_0)f'(x)\geq 0$，则f在x_0处取到极小值;
- 如果当$x\in U^0(x_0,\delta)$时，有$(x-x_0)f'(x)\leq 0$，则f在x_0处取到极大值;

定理 (极值的第二充分条件)

函数f在x_0的邻域上一阶可导，在x_0处二阶可导，而且$f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$:

- 如果$f''(x_0) < 0$，则f在x_0处取到极大值;
- 如果$f''(x_0) > 0$，则f在x_0处取到极小值;

推广

函数f在x_0的邻域上$n-1$阶可导，在x_0处n阶可导，且$f^{(k)}(x_0) = 0(k = 1, 2, \cdots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0$:

- 当n是偶数时，f在点x_0处取到极值，且$f^{(n)}(x_0) < 0$时为极大值，$f^{(n)}(x_0) > 0$时为极小值;
- 当n是奇数时，f在x_0处不是极值。

例 (计算单调区间)

设$f(x) = (x-1)^2(x-2)^3$，讨论函数$f(x)$的单调区间。

例 (极值点与极值)

求函数$f(x) = (2x-5)\sqrt[3]{x^2}$的极值点与极值。

求极值点的步骤

- 找出可能的极值点(驻点、不可导的点)；
- 判断极值点(极值的定义、极值的第一第二充分条件)。

例 (求最大值和最小值)

求函数$f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 18x - 1$在闭区间$[-2, 4]$上的最大值与最小值。

求最值的步骤

- 求可能的最值点（驻点、端点和不可导点）；
- 计算在这些点处的函数值；
- 比较函数值，选取最大和最小的。

例 (Jordan不等式)

证明：当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$。

例

证明：当$x > 0$时，成立不等式

$$(1+\frac{1}{x})^x < e < (1+\frac{1}{x})^{x+1}.$$

例 (Jensen不等式)

证明：当$x, y > 0, 0 < \alpha < \beta$时，成立不等式：

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

推广

假设$x_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n), 0 < \alpha < \beta$，那么

$$(\sum_{i=1}^n x_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (\sum_{i=1}^n x_i^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

凸函数

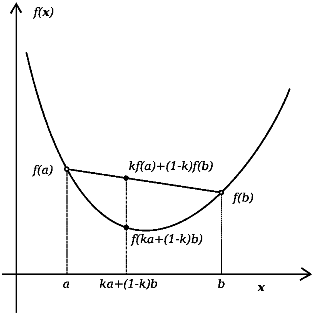
凸函数与凸集是研究最优化理论、不动点理论的重要内容。

定义 (凸函数与凹函数)

$f(x)$定义在区间I上，如果对任意$x_1, x_2 \in I, \lambda \in (0,1)$，有

- $$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$
  则称函数$f(x)$是区间I上的凸函数；
- $$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$
  则称函数$f(x)$是区间I上的凹函数；

如果不等式是严格的，称$f(x)$为严格凸函数或者严格凹函数。



几何意义

- 函数图像上两点之间的部分位于两点连线的下方；
- f是凸函数当且仅当$-f$是凹函数；
- 凸函数也称为下凸（上凹）函数，凹函数也称为上凸（下凹）函数。

凸函数的等价条件

函数$f(x)$在区间I上是凸函数当且仅当：

- 对于任意三点$A, C, B(x_A < x_C < x_B)$有$k_{AC} \leq k_{CB}$；
- 对于任意三点$A, C, B(x_A < x_C < x_B)$有$k_{AC} \leq k_{AB}$；
- 对于任意三点$A, C, B(x_A < x_C < x_B)$有$k_{AB} \leq k_{CB}$。

凸函数的连续性

开区间上的凸函数处处连续，而且任意点处的单侧导数都存在。

注意

闭区间上的凸函数在端点处不一定连续！

定义 (支撑线)

函数$f(x)$定义在(a,b)上，$x_0 \in (a,b), k \in \mathbb{R}$，若对于所有$x \in (a,b)$成立：

$$f(x) \geq (resp. \leq) f(x_0) + k(x - x_0),$$

则称$y = f(x_0) + k(x - x_0)$是f在$(x_0, f(x_0))$的下方(resp.上方)支撑线。

凸函数的充要条件

f定义在(a,b)上，f是凸函数当且仅当f处处都有下方支撑线。

注

- 支撑线的斜率介于该点的左右导数之间；
- 当函数在该点处可导时，支撑线是唯一的。

定理 (可微函数的凸性判定)

函数f在(a,b)上可导，下述结论等价：

- $f(x)$是$[a,b]$上的凸函数；
- $f'(x)$在$[a,b]$单调递增；
- 对任意$x_1, x_2 \in [a,b]$，有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

即函数图像总是位于切线的上方。

推论

如果f在(a,b)上二阶可导，
那么f在(a,b)上是凸函数当且仅当在(a,b)上$f''(x) \geq 0$。

例

f在$[a,+\infty)$上二阶可导，
$f(a)>0, f'(a)<0$，在$(a,+\infty)$上$f''(x)\leq 0$。
证明：在$(a,+\infty)$上$f(x)$有且只有一个实根。

定理 (凸性的应用：Jensen不等式)

$f(x)$是区间I上的凸函数，当且仅当
对$\forall x_i\in I, \lambda_i\in(0,1)(i=1,2,\cdots,n)$且$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$，有

$$f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)\leq\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i),$$

当$f(x)$是严格凸函数时，等号成立当且仅当所有x_i都相等。

定理 (加权平均值不等式)

假设$a_i > 0, 0 < \lambda_i < 1, i = 1, 2, \cdots, n$且$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，成立：

$$\frac{1}{\frac{\lambda_1}{a_1} + \frac{\lambda_2}{a_2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{a_n}} \le a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n} \le \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n.$$

推论

令$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$，得到常见的均值不等式：

$$H_n \le G_n \le An.$$

定理 (分析学中常用不等式)

- Young 不等式
  假设$a \geq 0, b \geq 0, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，成立
  $$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q};$$
  等号成立当且仅当$a^p = b^q$；
- Hölder 不等式
  假设$a_i, b_i \geq 0 (i = 1, 2 \cdots, n), p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，成立
  $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}},$$
  等号成立当且仅当$(a_1^p, a_2^p, \cdots, a_n^p)$和$(b_1^q, b_2^q, \cdots, b_n^q)$平行。

定理 (分析学中常用不等式)

- Minkowski不等式
  假设$a_i, b_i \geq 0 (i = 1, 2 \cdots, n), p > 1$，成立
$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^p)^{\frac{1}{p}},$$
  等号成立当且仅当$(a_1^p, a_2^p, \cdots, a_n^p)$和$(b_1^p, b_2^p, \cdots, b_n^p)$平行。

注

当$0 < p < 1$时，Hölder不等式和Minkowski不等式反向。

定义 (拐点)

$y=f(x)$在x_0附近连续，若$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$ 凹与凸的分界点，则称点$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点。

注

- 函数f在其拐点处不一定可导；
- 当f在x_0处二阶可导时，$(x_0,f(x_0))$是拐点，当且仅当$f''(x_0)=0$。

例

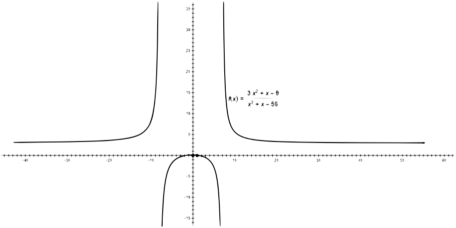
讨论函数$f(x)=\frac{1}{12}x^4-x^3-8x^2+x+1$的凸（凹）性和拐点。

定义 (渐近线)

如果直线l满足：当曲线C上的动点P沿着曲线无限地远离原点时，P与l的距离趋于0，则称l是C的渐近线。

(1)垂直渐近线

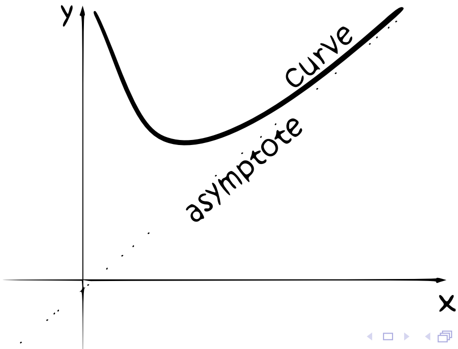
如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，那么直线$x=x_0$是曲线$y=f(x)$的垂直渐近线。



(2)斜渐近线

如果$y=kx+b$是曲线$y=f(x)$的斜渐近线，那么

$$\begin{cases} k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}, \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx). \end{cases}$$



例 (渐近线)

求曲线$f(x)=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$的渐近线。

例 (研究函数性态，作出函数大致图像)

讨论函数$f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x+1}{x-1}$的性态，并作出图像。

步骤

- 定义域;
- 特殊性质，如周期性、奇偶性;
- 特殊点，如不连续点、不可导点、与坐标轴的交点;
- 单调区间、极值点、凹凸性、拐点;
- 渐近线;
- 作出图像。