华中科技大学 2020～2021 学年第一学期

“ 微积分（A）（上） ”考试试卷(A 卷)

考试方式： 闭卷 **考试日期：** 2021/01/10 **考试时长：** 120 分钟

院（系）：________ **专业班级：**________

学　号：________ **姓　名：**________

题号	一	二	三	四	总分
分数					

分　数	
评卷人	

一、选择题（每题 4 分，共 16 分）

解答内容不得超过装订线

1. 曲线$y = x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$的拐点为

A. $(0,0)$　　B. $(1,0)$

C. $(2,0)$　　D. $(3,0)$

2. 计算$\int_0^2 \max\{x^2, x\}\, dx$

A. 2　　B. $\frac{17}{6}$

C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{11}{6}$

3. 下列那个点不是$f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)\arctan t\, dt$的极值点

A. $x = 0$　　B. $x = 1$

C. $x = 2$　　D. $x = 3$

4. 已知$\int_0^{x-\sin x} \ln(1+t)\, dt$是$x^n$在$x = 0$处的同阶无穷小，则$n$为

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

分　数	
评卷人	

二、　填空题（每题 5 分，共 20 分）

5. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt[4]{n^3}+\sqrt[4]{2n^3}+\cdots+\sqrt[4]{n^4}\right)=$ ______________。

6. 设$f(x)$连续，且$\int_0^{x^3-1}f(t)\,dt=x$，则$f(7)=$ ___________。

7. 已知两曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$在点$(0,0)$处的切线相同，其中

$$g(x)=\int_0^{\arcsin x}e^{t^2}\,dt，x\in[-1,1]，$$

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{4}{n}\right)=$ ____________。

8. 由曲线$y=2x$，$y=\frac{1}{2}x$，$y=1$，$y=2$所围成的图形面积为___________。

分　数	
评卷人	

三、计算题（每题 8 分，共 40 分）

9. 计算$\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$。

10.计算$\int_0^1 x \arctan x \, dx$。

解答内容不得超过装订线

11.计算$\int_{-\sqrt{2}}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$。

12.求抛物线$y^2 = x$与$x^2 + y^2 = 6$所围成的图形的面积并计算该区域绕x轴旋转而成的立体的体积。

13.设$f(x)$在$(0, +\infty)$上二阶连续可微，$f(0) = f'(0) = 0$，且$f''(x) > 0(0 \leq x < +\infty)$。若$\psi(x)$表示曲线$y = f(x)$过切点$(x, f(x))$的切线在$x$轴上的截距，求极限$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{\psi(x)} f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$。

分　数	
评卷人	

四、证明题（每题 8 分，共 24 分）

14.设$f(x)$为定义在$[a,b]$区间上的非负连续函数。若

$$\int_a^b f(x)\ dx = 0，$$

证明：在区间$[a,b]$上$f(x) \equiv 0$。

15.设$I_n = \int \sec^n x\ dx$，应用分部积分证明

$$I_n = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}。$$

解答内容不得超过装订线

16.若函数$f(x)$，$g(x)$在$[\alpha,\beta]$上可积，应用

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

证明 Schwarz 不等式：

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\ dx\right)^2 \le \left(\int_\alpha^\beta f^2(x)\ dx\right)\left(\int_\alpha^\beta g^2(x)\ dx\right)。$$