定义 (极大值、极小值)

设f是定义在区间(a,b)上且$x_0 \in (a,b)$。如果存在x_0的邻域$U(x_0,\delta) \subset (a,b)$，使得当$x \in U(x_0,\delta)$时，

$$f(x) \le f(x_0) \quad (resp. f(x) \ge f(x_0)),$$

则称x_0是函数f的极大值点(resp.极小值点)，函数f在x_0处取到极大值（极小值）。

定义 (极大值、极小值)

设f是定义在区间(a,b)上且$x_0 \in (a,b)$。如果存在x_0的邻域$U(x_0,\delta) \subset (a,b)$，使得当$x \in U(x_0,\delta)$时，

$$f(x) \le f(x_0) \quad (resp. f(x) \ge f(x_0)),$$

则称x_0是函数f的极大值点(resp.极小值点)，函数f在x_0处取到极大值（极小值）。

极值、极值点

极大值和极小值统称极值，极大值点和极小值点统称极值点。

定义 (极大值、极小值)

设f是定义在区间(a,b)上且$x_0 \in (a,b)$。如果存在x_0的邻域$U(x_0,\delta) \subset (a,b)$，使得当$x \in U(x_0,\delta)$时，

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (resp. f(x) \geq f(x_0)),$$

则称x_0是函数f的极大值点(resp.极小值点)，函数f在x_0处取到极大值（极小值）。

极值、极值点

极大值和极小值统称极值，极大值点和极小值点统称极值点。

例

找出函数$y=x^2, y=\sin x$的极值点。

注

区间内部的最值点一定是极值点，极值点不一定是最值点。

注

区间内部的最值点一定是极值点，极值点不一定是最值点。

定理 (Fermat定理)

假设x_0是函数f的极值点，且f在x_0处可导，那么$f'(x_0) = 0$。

注

区间内部的最值点一定是极值点，极值点不一定是最值点。

定理 (Fermat定理)

假设x_0是函数f的极值点，且f在x_0处可导，那么$f'(x_0) = 0$。

几何意义

经过极值点的切线一定平行于x轴。

注

区间内部的最值点一定是极值点，极值点不一定是最值点。

定理 (Fermat定理)

假设x_0是函数f的极值点，且f在x_0处可导，那么$f'(x_0) = 0$。

几何意义

经过极值点的切线一定平行于x轴。

驻点、稳定点

- 导数为0的点称为驻点或者稳定点；
- 驻点不一定是极值点。

例 (导函数的零点定理)

函数f在区间$[a,b]$上可导，并且$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$。
那么存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=0$。

例 (导函数的零点定理)

函数f在区间$[a,b]$上可导，并且$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$。
那么存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=0$。

定理 (Darboux定理：导函数的介值性)

f在$[a,b]$上可导，若$f'_+(a)<c<f'_-(b)$（或$f'_-(b)<c<f'_+(a)$），
那么存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=c$。
即区间上的导数的值域也是区间。

例 (导函数的零点定理)

函数f在区间$[a,b]$上可导，并且$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$。
那么存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=0$。

定理 (Darboux定理：导函数的介值性)

f在$[a,b]$上可导，若$f'_+(a)<c<f'_-(b)$（或$f'_-(b)<c<f'_+(a)$），
那么存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)=c$。
即区间上的导数的值域也是区间。

推论

区间上的导函数不存在跳跃间断点。(导函数不一定连续！)

定理 (Rolle定理)

函数f在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)上可导，且$f(a)=f(b)$。那么存在点$\xi\in[a,b]$,使得$f'(\xi)=0$。

定理 (Rolle定理)

函数f在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)上可导，且$f(a)=f(b)$。那么存在点$\xi\in[a,b]$,使得$f'(\xi)=0$。

几何、物理中的意义

- 端点处取值相等且处处可导的曲线存在水平的切线；
- 将物体从地面垂直向上抛出，最后落回地面，该过程中存在速度为0的时刻。

定理 (Rolle定理)

函数f在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)上可导，且$f(a)=f(b)$。那么存在点$\xi\in[a,b]$,使得$f'(\xi)=0$。

几何、物理中的意义

- 端点处取值相等且处处可导的曲线存在水平的切线；
- 将物体从地面垂直向上抛出，最后落回地面，该过程中存在速度为0的时刻。

思考题：Rolle定理的推广

假设$a,b,A\in\overline{\mathbb{R}}$，函数$f(x)$在区间$(a,b)$上可导，满足：
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=A$，
那么存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$。

定理 (Lagrange中值定理)

函数f在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)上可导。那么存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

定理 (Lagrange中值定理)

函数f在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)上可导。那么存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

几何意义

处处可导的曲线存在平行于连接端点的割线的切线。

定理 (Lagrange中值定理)

函数f在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)上可导。那么存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

几何意义

处处可导的曲线存在平行于连接端点的割线的切线。

常用形式

$$f(b)-f(a) = f'(a+\theta(b-a))(b-a), \quad \theta \in (0,1).$$

推论

- 若f在区间内导数处处为0，那么f是常值函数;
- 若f和g的导数处处相等，那么$f = g + C$，其中C是常数;
- 若f'非负(正)，那么f是单调增(严格单调增)的函数。

定理 (Lagrange中值定理)

如果函数f在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)上可导。那么在区间(a,b)内至少有一点ξ,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明.

考虑辅助函数$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$ □

Lagrange中值定理的几何意义

处处可导的曲线上一定存在某点$(\xi,f(\xi))$ 使得经过该点的切线平行于连接端点的割线。

注

Lagrange 中值公式也写成

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a), \quad \theta \in (0,1).$$

推论

- 若f在区间内导数处处为0，那么f是常值函数;
- 若g是另一个函数，也满足定理的条件，而且f和g的导数处处相等，那么$f = g + C$，其中C是一个常数;
- 若f的导数非负（正），那么f是单调增（严格单调增）的函数。

定理 (单侧导数极限定理)

设f 在(a,b)上可微，在a点处右连续。如果导函数$f'(x)$在点a处存在右极限，那么f在a处存在右导数，且$f'_+(a)=f'(a+0)$，此时导函数在点a处右连续。

注

- 当$f'(x)$在a处的右极限为$\pm\infty$时，f在a处的右导数也为$\pm\infty$;
- 当a在区间内部时，我们有如下定理：

定理 (单侧导数极限定理)

设f 在(a,b)上可微，在a点处右连续。如果导函数$f'(x)$在点a处存在右极限，那么f在a处存在右导数，且$f'_+(a)=f'(a+0)$，此时导函数在点a处右连续。

注

- 当$f'(x)$在a处的右极限为$\pm\infty$时，f在a处的右导数也为$\pm\infty$;
- 当a在区间内部时，我们有如下定理：

定理 (导数极限定理)

函数f在a的邻域上连续，在a的空心邻域上可导。如果导函数f'在a点有极限，那么f在a处也可导，而且f'在a处连续。

Darboux定理+导数极限定理的推论

函数f在开区间上可导，那么导函数f'不存在第一类间断点。

Darboux定理+导数极限定理的推论

函数f在开区间上可导，那么导函数f'不存在第一类间断点。

定理 (Cauchy中值定理)

函数f, g在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)上可导，那么存在$\xi \in (a, b)$，使得

$$f'(\xi)[g(b) - g(a)] = g'(\xi)[f(b) - f(a)].$$

Darboux定理+导数极限定理的推论

函数f在开区间上可导，那么导函数f'不存在第一类间断点。

定理 (Cauchy中值定理)

函数f, g在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)上可导，那么存在$\xi \in (a, b)$，使得

$$f'(\xi)[g(b) - g(a)] = g'(\xi)[f(b) - f(a)].$$

注

当在(a, b)上$g'(x) \neq 0$时(此时g在区间(a, b)上严格单调)，Cauchy中值定理可以写成如下形式：

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

三个中值定理的关系

- Lagrange中值定理是Cauchy中值定理的特殊情形：
  Cauchy中值定理中令$g(x) = x$, 得到Lagrange中值定理；
- Rolle中值定理是Lagrange中值定理的特殊情形：
  Lagrange中值定理中令$f(a) = f(b)$，得到Rolle中值定理。

三个中值定理的关系

- Lagrange中值定理是Cauchy中值定理的特殊情形：
  Cauchy中值定理中令$g(x) = x$, 得到Lagrange中值定理；
- Rolle中值定理是Lagrange中值定理的特殊情形：
  Lagrange中值定理中令$f(a) = f(b)$，得到Rolle中值定理。

微分中值定理的应用

- 用Lagrange中值定理证明不等式

三个中值定理的关系

- Lagrange中值定理是Cauchy中值定理的特殊情形：
  Cauchy中值定理中令$g(x)=x$, 得到Lagrange中值定理；
- Rolle中值定理是Lagrange中值定理的特殊情形：
  Lagrange中值定理中令$f(a)=f(b)$，得到Rolle中值定理。

微分中值定理的应用

- 用Lagrange中值定理证明不等式

例 (证明不等式)

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}<\ln(1+\alpha)<\alpha,\quad \alpha>-1,\alpha\neq 0.$$

例

假设$0 < \alpha < \beta$,证明不等式

$$\frac{\beta-\alpha}{1+\beta^2} < \arctan\beta - \arctan\alpha < \frac{\beta-\alpha}{1+\alpha^2}.$$

例

假设$0 < \alpha < \beta$,证明不等式

$$\frac{\beta-\alpha}{1+\beta^2} < \arctan\beta - \arctan\alpha < \frac{\beta-\alpha}{1+\alpha^2}.$$

- 利用Lagrange中值定理证明等式

例

假设$0 < \alpha < \beta$,证明不等式

$$\frac{\beta-\alpha}{1+\beta^2} < \arctan\beta - \arctan\alpha < \frac{\beta-\alpha}{1+\alpha^2}.$$

- 利用Lagrange中值定理证明等式

例

证明：$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in (-1, 1).$

- 用Rolle定理证明函数$f(x)$根的存在性

用Rolle定理证明函数$f(x)$根的存在性

例

设$a_1 - \frac{a_2}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1} = 0$，证明：方程

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \cdots + a_n \cos(2n-1)x = 0,$$

在$(0, \frac{\pi}{2})$中至少有一个实根。

用Rolle定理证明函数$f(x)$根的存在性

例

设$a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$，证明：方程

$$a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0,$$

在$(0,\frac{\pi}{2})$中至少有一个实根。

例

函数f,g在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，
证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)[g(b)-g(\xi)]=g'(\xi)[f(\xi)-f(a)].$$

注

难点在于构造辅助函数F。

注

难点在于构造辅助函数F。

常见的辅助函数

$$
\begin{aligned}
&f'(x)+\lambda f(x)=0, && F(x)=f(x)e^{\lambda x};\\
&f(x)+xf'(x)=0, && F(x)=xf(x);\\
&f(x)-xf'(x)=0, && F(x)=\frac{f(x)}{x};\\
&f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0, && F(x)=\frac{f(x)}{g(x)};\\
&\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(x)}{g''(x)}, && F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x).
\end{aligned}
$$

例 (多次使用Rolle中值定理)

函数f在$[x_0, x_n]$上有连续的$n-1$阶导数，在(x_0, x_n)上有n阶导数，且满足：

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n).$$

证明：在区间(x_0, x_n)内至少有一点ξ，使得$f^{(n)}(\xi) = 0$。

例 (多次使用Rolle中值定理)

函数f在$[x_0, x_n]$上有连续的$n-1$阶导数，在(x_0, x_n)上有n阶导数，且满足：

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n).$$

证明：在区间(x_0, x_n)内至少有一点ξ，使得$f^{(n)}(\xi) = 0$。

- 用Lagrange定理证明等式

例 (多次使用Rolle中值定理)

函数f在$[x_0,x_n]$上有连续的$n-1$阶导数，在(x_0,x_n)上有n阶导数，且满足：

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)\quad(x_0<x_1<\cdots<x_n).$$

证明：在区间(x_0,x_n)内至少有一点ξ，使得$f^{(n)}(\xi)=0$。

- 用Lagrange定理证明等式

例 (分离两个变量)

假设$0<a<b$，
证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得$2\xi\eta\ln(b/a)=b^2-a^2$。

例 (Lagrange中值定理的变式)

函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(0)=0, f(1)=1$，那么在$(0,1)$上存在点ξ,η，使得

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2.$$

例 (Lagrange中值定理的变式)

函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(0)=0, f(1)=1$，那么在$(0,1)$上存在点ξ,η，使得

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2.$$

- 用Cauchy中值定理证明等式

例 (Lagrange中值定理的变式)

函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(0)=0, f(1)=1$，那么在$(0,1)$上存在点ξ,η，使得

$$\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2.$$

- 用Cauchy中值定理证明等式

例 (分离两个变量)

$a,b>0$，函数f在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，
证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'(\eta)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi)\frac{\sin\eta}{\cos\xi}.$$

例 (构造函数)

$a>0$，证明：方程 $x^3+x=\dfrac{a^2}{2\arctan a}$ 在$(0,a)$上至少有一个根。

例 (构造函数)

$a>0$，证明：方程 $x^3+x=\dfrac{a^2}{2\arctan a}$ 在$(0,a)$上至少有一个根。

- 其他

例 (构造函数)

$a>0$，证明：方程 $x^3+x=\frac{a^2}{2\arctan a}$ 在$(0,a)$上至少有一个根。

- 其他

例

函数f在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，f不是线性函数，
证明：存在$c\in(a,b)$，使得 $|f'(c)|>|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$。

例 (构造函数)

$a>0$，证明：方程 $x^3+x=\dfrac{a^2}{2\arctan a}$ 在$(0,a)$上至少有一个根。

- 其他

例

函数f在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，f不是线性函数，
证明：存在$c\in(a,b)$，使得 $|f'(c)|>|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}|$。

例

f在$[0,1]$上可导，$f(0)=0$，当$x\in[0,1]$时，$|f'(x)|\le|f(x)|$，
证明：$f(x)\equiv 0$。

L'Hospital法则适用的问题

求以下七种类型的不定型极限：

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}, \infty_1 - \infty_2,$$

其中后五种类型的极限都可以转化成前两种类型的极限。

L'Hospital法则适用的问题

求以下七种类型的不定型极限：

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}, \infty_1 - \infty_2,$$

其中后五种类型的极限都可以转化成前两种类型的极限。

定理 (L'Hospital法则，以极限过程$x \to a+$为例)

$A \in \overline{\mathbb{R}}$，函数$f, g$满足以下条件：

- 函数f, g在a的某个右空心邻域上可导，且$g' \neq 0$;
- $\displaystyle\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$;
- $\displaystyle\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$ 或者 $\displaystyle\lim_{x \to a+} g(x) = \pm\infty$;

那么 $\lim_{x \to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$。

注

对其余五种极限过程，L'Hospital法则同样成立。

注

对其余五种极限过程，L'Hospital法则同样成立。

例

- $\frac{0}{0}$型：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x-\beta^x}{x}\quad(\alpha>0,\beta>0);$$
- $\frac{0}{0}$型：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x};$$
- $\frac{\infty}{\infty}$型：
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}.$$

例

- $\frac{\infty}{\infty}$型：
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x};$$
- $0\cdot\infty$型：
$$\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+\beta}{x-\beta} \quad (\beta\neq 0);$$
- 1^∞型：
$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}};$$
- 0^0型：
$$\lim_{x\to 0+}(\tan x)^{\sin x}.$$

例

- ∞^0型：
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}};$$
- $\infty-\infty$型：
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right).$$

例

- ∞^0型：

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}};$$

- $\infty-\infty$型：

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right).$$

注意

用L'Hospital法则时可以结合换元法、等阶替换等简化计算，直接用L'Hospital法则可能会陷入繁琐的计算！

例

- ∞^0型：

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}};$$

- $\infty-\infty$型：

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right).$$

注意

用L’Hospital法则时可以结合换元法、等阶替换等简化计算，直接用L’Hospital法则可能会陷入繁琐的计算！

例

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}.$$

问题的引入

- 当f在x_0处连续时，存在常值函数作近似：

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad (x \to x_0);$$

问题的引入

- 当f在x_0处连续时，存在常值函数作近似：

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad (x \to x_0);$$

- 当f在x_0处可导时，存在线性函数作近似：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0);$$

问题的引入

- 当f在x_0处连续时，存在常值函数作近似：

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad (x \to x_0);$$

- 当f在x_0处可导时，存在线性函数作近似：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0);$$

- 当f有更高阶导数时，是否存在更好的近似？具体地，函数f是否存在多项式函数近似？

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

注

f在x_0处n阶可导，如果n次近似多项式存在，它是唯一的：

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f'(x_0)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

注

f在x_0处n阶可导，如果n次近似多项式存在，它是唯一的：

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f'(x_0)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Taylor多项式

设函数f在点x_0处有直到n阶的导数，定义多项式P_n:

$$\begin{aligned} P_n(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

称P_n为f在x_0处的n阶Taylor多项式，其系数称为Taylor系数。

定理 (带Peano型余项的Taylor公式)

设函数$f(x)$在x_0处存在直到n阶导数，那么

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0). \end{aligned}$$

定理 (带Lagrange型余项的Taylor公式)

设函数$f(x)$在(a,b)上存在$n+1$阶导数，那么当$x, x_0 \in (a,b)$，存在ξ介于x, x_0之间，使得

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

注

- ξ 有时也写成$\theta x + (1-\theta)x_0 \quad (0 < \theta < 1)$的形式；
- Lagrange中值定理对应$n=0$的情况。

Maclaurin公式

函数f 在$x_0 = 0$处的Taylor公式也称为Maclaurin公式:

- 带Peano型余项：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n);$$

- 带Lagrange型余项：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中$0 < \theta < 1$。

Maclaurin公式：$e^x, \sin x$，其中$0<\theta<1$

- $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
  $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

- $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m})$$
  $$\begin{aligned}\sin x =& x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ &+ (-1)^m\frac{\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1},\end{aligned}$$

Maclaurin公式：$\cos x$

- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$$

  $$\begin{aligned}\cos x = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ & + (-1)^{m+1} \frac{\cos \theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2},\end{aligned}$$

Maclaurin公式：$\cos x$

- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$$
  $$\begin{aligned}\cos x = & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \\ & + (-1)^{m+1} \frac{\cos \theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2},\end{aligned}$$

推论：Euler公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

推论：e^x的级数展开

$$e^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

推论：e^x的级数展开

$$e^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

推论：

- 偶函数的Maclaurin公式中所有奇数次项的系数为0，奇函数的Maclaurin公式中所有偶数次项的系数为0;
- 函数$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$，其导函数$f'$的Maclaurin公式可以通过逐项求导得到，即

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Maclaurin公式：$\ln(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$

- $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

- $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Maclaurin公式：$(1+x)^\alpha$

- $$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n),$$

其中 $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$。

Maclaurin公式：$(1+x)^\alpha$

- $$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n),$$

其中 $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$。

推论

- 当$\alpha \in \mathbb{N}$，我们得到Newton 二项式展开；
- 当$\alpha = -1$时，

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n);$$

推论

- 当$\alpha=-2$时，

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x-4x^3+\cdots+(-1)^n(n+1)x^n+o(x^n);$$

- 当$\alpha=\frac{1}{2}$时，

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+o(x^n);$$

当$\alpha=-\frac{1}{2}$时，

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o(x^n).$$

例 (将x_0处的Taylor展开转化成Maclaurin公式)

求函数$\ln x$在$x=2$处的Taylor公式。

例 (将x_0处的Taylor展开转化成Maclaurin公式)

求函数$\ln x$在$x=2$处的Taylor公式。

计算Maclaurin公式的常用方法

例 (将x_0处的Taylor展开转化成Maclaurin公式)

求函数$\ln x$在$x=2$处的Taylor公式。

计算Maclaurin公式的常用方法

例 (代入法)

写出$f(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$的四阶Maclaurin公式，$f^{(4)}(0)$是多少？

例 (将x_0处的Taylor展开转化成Maclaurin公式)

求函数$\ln x$在$x=2$处的Taylor公式。

计算Maclaurin公式的常用方法

例 (代入法)

写出$f(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$的四阶Maclaurin公式，$f^{(4)}(0)$是多少？

例 (代入法/比较系数法/直接法)

计算$\tan x$的5阶Maclaurin公式。

例 (直接法/利用导数的Maclaurin展开)

计算$f(x) = \arctan x$的Maclaurin展开。

例 (直接法/利用导数的Maclaurin展开)

计算$f(x) = \arctan x$的Maclaurin展开。

思考题

计算$\arcsin x$的Maclaurin公式。

例 (直接法/利用导数的Maclaurin展开)

计算$f(x) = \arctan x$的Maclaurin展开。

思考题

计算$\arcsin x$的Maclaurin公式。

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!(2n-1)}x^{2n-1} + o(x^{2n}).$$

例 (直接法/利用导数的Maclaurin展开)

计算$f(x) = \arctan x$的Maclaurin展开。

思考题

计算$\arcsin x$的Maclaurin公式。
$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!(2n-1)}x^{2n-1} + o(x^{2n}).$

例 (Taylor公式)

求极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

例

假设$f \in \mathrm{C}^{(n+1)}(\mathbb{R})$，且$f^{(n+1)}(x) \neq 0$,
$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$,
证明：

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

例

假设$f \in \mathrm{C}^{(n+1)}(\mathbb{R})$，且$f^{(n+1)}(x) \neq 0$,
$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$,
证明：

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

例

假设f在$[a,b]$上连续，在(a,b)上二阶可导，$f(a) = f(b) = 0$,

- 在闭区间上f的最大值$M > 0$,
  证明：存在$\xi \in (a,b)$使得 $f''(\xi) \leq -\frac{8M}{(b-a)^2}$。
- 当$x \in (a,b)$时，有$|f''(x)| \geq m > 0$。
  证明：$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \geq \frac{m}{8}(b-a)^2$。