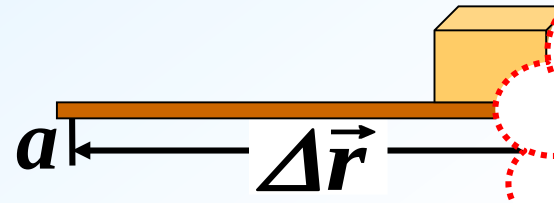
8. 功 功率（力在空间上的累积效应）

1. 功 ——过程量



$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r$

$|\mathrm{d}\vec{r}| \neq \mathrm{d}r$

$|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}S$

恒力的功：$A = F\,|\Delta\vec{r}|\cos\alpha = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$

变力的功：$\vec{F}(\vec{r})$ 将质点从 a 点移动到 b 点

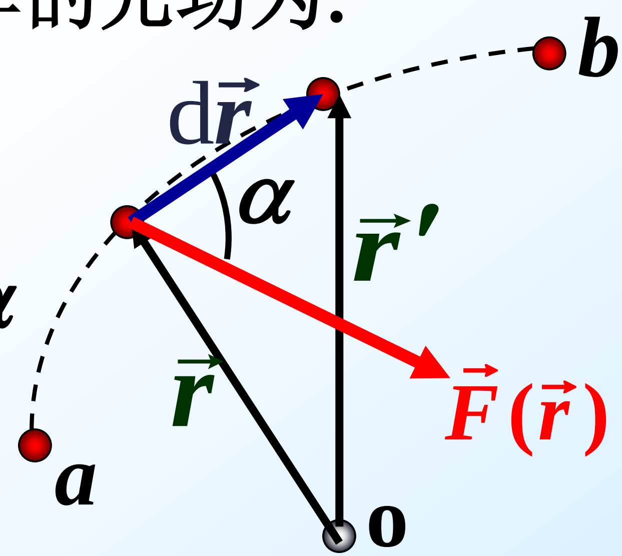
在线元 $\mathrm{d}\vec{r}$ 上力 $\vec{F}(\vec{r})$ 对质点所作的元功为:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

所作的总功:

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F(r)\,|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\alpha$$

$$= \int_a^b F(r)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$



结论：一般力对质点所作的功，不仅与始、末位置有关，而且与路径有关。

2. 功率 ——做功的快慢

功率：力在单位时间内所做的功。

平均功率： $\bar{P}=\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$

$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

瞬时功率(功率)：

$$P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\therefore\ \boxed{P=\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

当额定功率一定时，负荷力越大，可达到的速率就越小；负荷力越小，可达到的速率就越大。

在SI制中，功率的单位是瓦特，符号是W:

$$1\mathrm{W}=1J\ s^{-1}$$

例： 风力$\vec{F}_0$作用于向正北运动的摩托艇，风力的方向变化规律是$\alpha = BS$，其中α是力$\vec{F}_0$的方向与位移$\vec{S}$之间的夹角，B为常数。如果运动中风的方向自南变到东，求风力做的功。

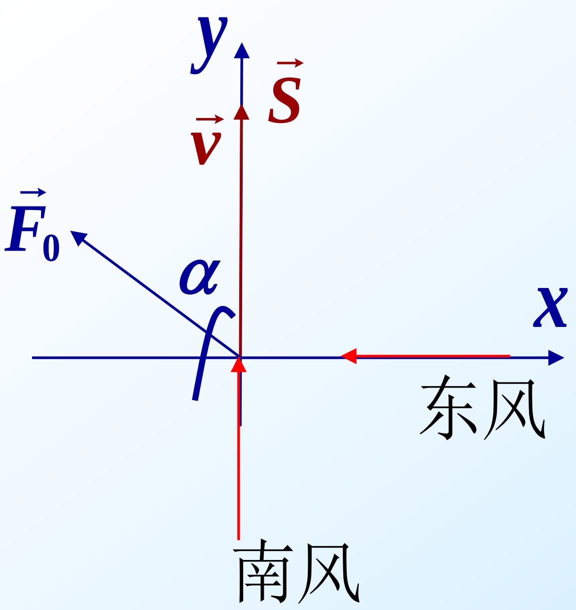
解： 风的方向自南变到东，
则图中所示的夹角的变化为 $0 \to \dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

$$A = \int_0^{\vec{S}} \vec{F}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_0^{\vec{S}} F_0 \cos\alpha \, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2B}} F_0 \cos\alpha \, \mathrm{d}S$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2B}} F_0 \cos(BS) \, \mathrm{d}S = \frac{F_0}{B}$$



例：速度大小为v_0＝20m/s的风作用于面积为s＝25m²的船帆上，作用力 $F=as\rho(v_0-v)^2/2$ ，其中a为无量纲常数，ρ为空气密度，v为船速。(1)求风的功率最大时的条件；(2)如果a＝l，v＝15m/s，$\rho=1.2\,\mathrm{kg/m^3}$ ，求t＝60s内风力所做的功。

解：$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv$

$$=as\rho(v_0-v)^2v/2$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v}=0$

即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}[as\rho(v_0-v)^2v/2]=0$

$$\therefore (v-v_0)(3v-v_0)=0$$

即 $v=\dfrac{v_0}{3}$ 时，P最大。

$$A=\int_{t_0}^{t}P\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\Delta t}\frac{as\rho(v_0-v)^2v}{2}\mathrm{d}t$$

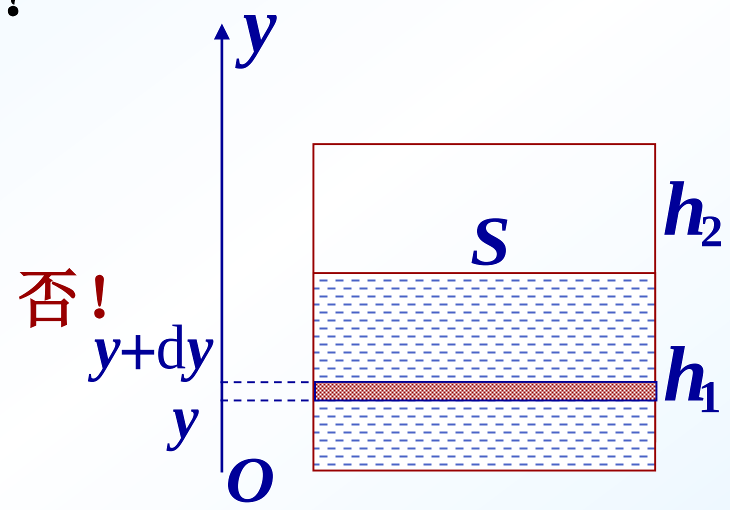
$$=\frac{as\rho(v_0-v)^2v}{2}\Delta t$$

$$=\frac{1\times25\times1.2\times(20-15)^2\times15}{2}\times60$$

$$=3.38\times10^5(J)$$

例：一长方体蓄水池，面积$S=50\text{m}^2$，储水深度$h_1=1.5\text{m}$。假定水表面低于地面的高度是$h_2=5\text{m}$。若要将这池水全部抽到地面上来，抽水机需做多少功? 若抽水机的效率为80%。输入功率$P=35\text{kW}$，则抽完这池水需要多长时间？

解：建立如图所示的坐标系y。



$$A=\int_0^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$ ——适用于质点

池中的水整体上可以看做质点吗？

在任意位置y处取很薄一层水，则可当做质点处理。

将y处这层水抽到地面需做功为

$$dA=\int_y^{h_1+h_2}dm\cdot g\,dr$$

$$=\int_y^{h_1+h_2}\rho S\,dy\cdot g\,dr$$

$$=\rho gS\,dy\cdot(h_1+h_2-y)$$

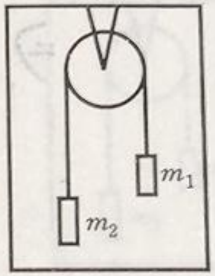
$$\therefore A=\int_0^{h_1}\rho gS\cdot(h_1+h_2-y)dy$$

$$=\rho gS[(h_1+h_2)h_1-\frac{h_1^2}{2}]\approx 4.2\times10^6(\text{J})$$

$$A/0.8=P\cdot\Delta t$$

$$\therefore\Delta t=\frac{A}{0.8P}\approx151(s)$$

2-T6 如图所示，一根绳子跨过电梯内的定滑轮，两端悬挂质量不等的物体，$m_1>m_2$，滑轮和绳子的质量忽略不计。求当电梯以加速度 a 上升时绳子的张力 T 和 m_1 相对于电梯的加速度 a_r。



解：设 m_1，m_2 相对于电梯加速度为

a_1，a_2　　$a_1=-a_2$

$\Rightarrow a+a_1=a_2-a$

$$\begin{cases} \cancel{T-m_1 g=m_1 a_1} \\ \cancel{m_2 g-T=m_2\cdot a_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_1 g+m_1 a+T=m_1 a_r \\ -m_2 g-m_2 a+T=m_2 a_r \end{cases}$$

$$a_1=\frac{(m_2-m_1)g-2m_2 a}{m_1+m_2}$$

$$T=\cancel{\frac{2m_1 m_2(g-a)}{m_1+m_2}}$$

$$a_2=\frac{(m_1+m_2)g-2m_1(g-a)}{m_1+m_2}$$

— 4 —

既然a_1和a_2是相对加速度，以非惯性系为参照系，牛二方程列的不对。（助教在这里写的公式也有一个小错误，正确答案看下几页）

2-T6 如图所示，一根绳子跨过电梯内的定滑轮，两端悬挂质量不等的物体，$m_1 > m_2$，滑轮和绳子的质量忽略不计。求当电梯以加速度 a 上升时绳子的张力 T 和 m_1 相对于电梯的加速度 a_r。

解：以电梯为参考系，有

由运动分析：$a_2 = a_r$，由 $m_1 > m_2$，有

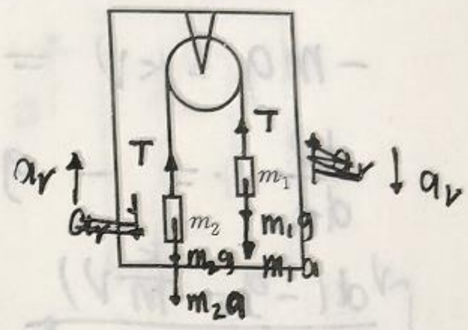
对 m_1，$-T + m_1 g + m_1 a = m_1 a_r$.

对 m_2，$T - m_2 g - m_2 a = m_2 a_r$.

得，$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g+a)$.

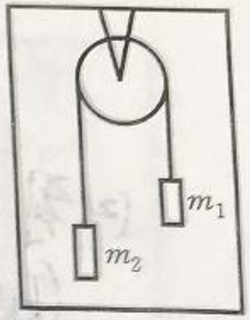
$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g+a)$.

a_r 方向竖直向下。



优点和推荐：先画好图，帮助自己做好受力分析。

2-T6 如图所示，一根绳子跨过电梯内的定滑轮，两端悬挂质量不等的物体，$m_1 > m_2$，滑轮和绳子的质量忽略不计。求当电梯以加速度 a 上升时绳子的张力 T 和 m_1 相对于电梯的加速度 a_r。



由于电梯变速运动，以电梯为参考系时，

m_1, m_2 受到方向向下的惯性力，

大小分别为 $f_1^* = m_1 a$，$f_2^* = m_2 a$.

对 m_1：$m_1 g + f_1^* - T = m_1 a_r$

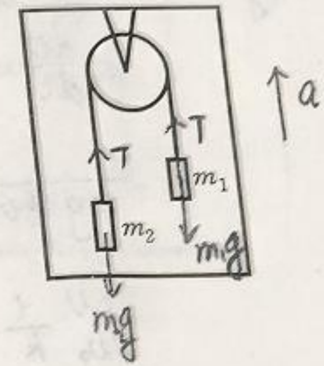
对 m_2：$T - m_2 g - f_2^* = m_2 a_r$.

$\Rightarrow a_r = \dfrac{(m_1 - m_2)(a+g)}{m_1 + m_2}$ 方向相对向下.

$T = \dfrac{2 m_1 m_2 (g+a)}{m_1 + m_2}$.

优点和推荐：中间结果（潜在得分点）清晰。

2-T6 如图所示，一根绳子跨过电梯内的定滑轮，两端悬挂质量不等的物体，$m_1>m_2$，滑轮和绳子的质量忽略不计。求当电梯以加速度 a 上升时绳子的张力 T 和 m_1 相对于电梯的加速度 a_r。



以向上为正方向

$$\begin{cases} T-m_1g=m_1a_r+m_1a \\ T-m_2g=-m_2a_r+m_2a \end{cases}$$

$$-(m_1-m_2)g=(m_1+m_2)a_r+(m_1-m_2)a.$$

$$a_r=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}(a+g)$$

$$T=\frac{m_1^2+m_1m_2+m_1m_2-m_1^2}{m_1+m_2}(a+g)$$

$$=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}(a+g)$$

这是一个形式上，以惯性系（地面）为参照系列方程的例子。

等号右边：$a_{m地}=a_{m梯}+a_{梯地}$

2-T3 将质量为 m 的物体以初速度 v_0 竖直上抛。设空气的阻力正比于物体的速度，比例系数为 k。求：(1)任一时刻物体的速度；(2)物体能达到的最大高度。

设竖直向上为正方向

$f = kv$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$

$-mg - kv = ma$

$-g - \frac{k}{m}v = \frac{dv}{dt}$

$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$

$\Rightarrow v = e^{-\int_0^t \frac{k}{m}dt}\left(v_0 + \int_0^t -g e^{\int_0^t \frac{k}{m}dt} dt\right)$

$V = e^{-\frac{k}{m}t}\left(v_0 - \frac{gm}{k}\left(e^{\frac{k}{m}t} - 1\right)\right)$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k}\left[(mg + kv_0)e^{-\frac{k}{m}t} - mg\right]$

$\Rightarrow x = \frac{m}{k^2}(g + \frac{k}{m}v_0)\cdot m\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mgt}{k}$

当高度最大时 $v = 0$

代入 $t = \frac{m}{k}\ln\frac{mg + kv_0}{mg}$

代回

$x =$

另一种方法

$-mg - kv = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dv}{dx} = mv\frac{dv}{dx}$ 分离变量 求积分

9. 动能 动能定理

单个质点的动能定理:

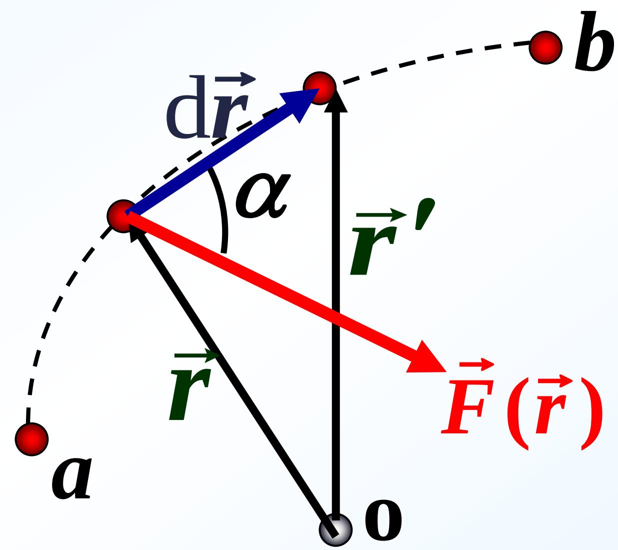
$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}$$

$$= m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$= d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{v_a}^{v_b} d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)$$

$$\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$



$$\boxed{\text{即：}\quad A_{ab(外)} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k}$$

单个质点的动能定理 $\boxed{A_{外} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k}$

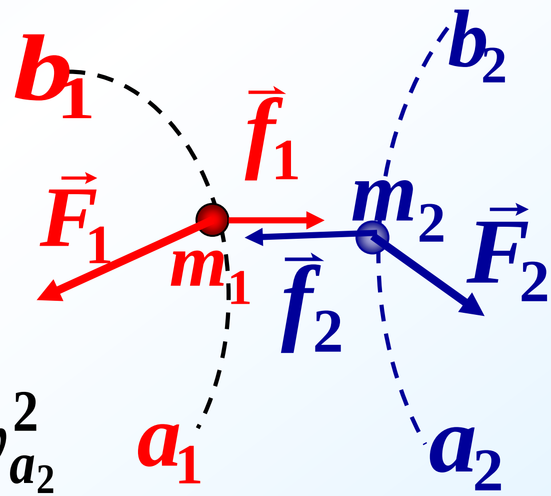
质点系的动能定理：以两个质点为例

对m_1 $\qquad A_{外} \qquad A_{内} \neq 0$?

$$\int_{a_1}^{b_1} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{a_1}^{b_1} \vec{f}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2} m_1 v_{b_1}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{a_1}^2$$

对m_2

$$\int_{a_2}^{b_2} \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{a_2}^{b_2} \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2} m_2 v_{b_2}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{a_2}^2$$



两式相加 $\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k}$

结论

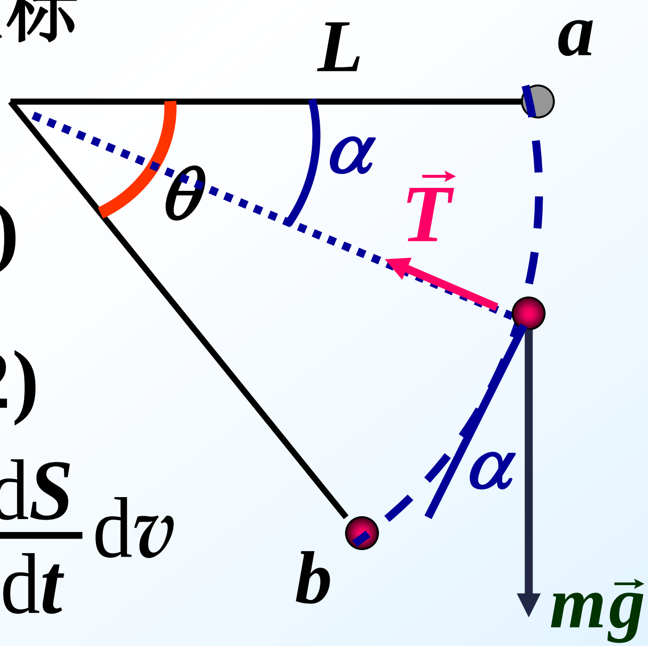
内力可以改变系统的总动能，

但不改变其总动量。

例. 质量为m的小球系在线长为L的一端，线的另一端固定，先使线水平张直, 然后松手让小球落下, 求线摆下θ角时小球的速率和线的张力。

解： 用牛顿第二定律 建立自然坐标

受力 $m\vec{g}, \vec{T}$



$$\begin{cases} mg\cos\alpha = ma_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdots (1) \\ -mg\sin\alpha + T = ma_n = m\dfrac{v^2}{L} \cdots (2) \end{cases}$$

(1)右边上下乘dS $\quad g\cos\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{d}S}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v$

$$\int_0^\theta g\cos\alpha \cdot L\mathrm{d}\alpha = \int_0^v v\mathrm{d}v$$

$$gL\sin\theta = \frac{1}{2}v^2 \qquad v = \sqrt{2gL\sin\theta}$$

将上述结果代入(2) $\quad T = 3mg\sin\theta$

解法二：用动能定理

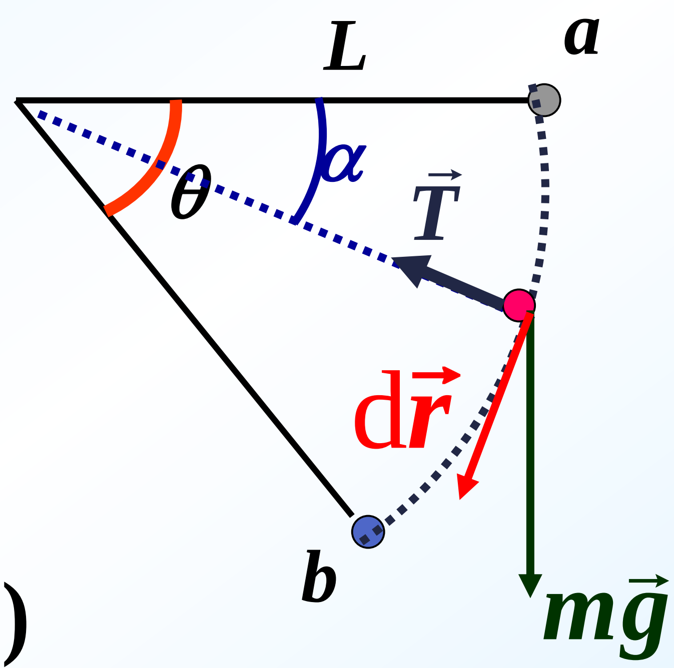
$$A_{ab外} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \cancelto{0}{\frac{1}{2}mv_a^2}$$

$$A_{ab外} = \int_a^b m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_a^b mg\cos\alpha\, \mathrm{d}S$$

$$= \int_0^\theta mg\cos\alpha (L\mathrm{d}\alpha)$$

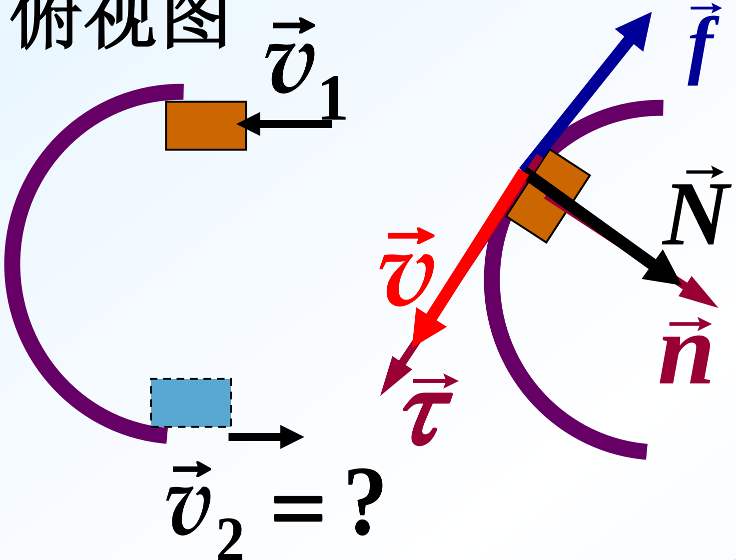
$$= mgL\sin\theta$$



$$mgL\sin\theta = \frac{1}{2}mv^2 \qquad v = \sqrt{2gL\sin\theta}$$

例. 在光滑的水平桌面上, 固定着如图所示的半圆形屏障，质量为m 的滑块以初速 v_1 沿屏障一端的切线方向进入屏障内, 滑块与屏障间的摩擦系数为 μ。求当滑块从屏障另一端滑出时，摩擦力对它所作的功。

俯视图



分析： 受力 $\vec{f}$，$\vec{N}$

$$f \rightarrow \mu N \rightarrow a_n \rightarrow v \rightarrow f$$

变力作功, 用动能定理

必须先找出末态的v_2！

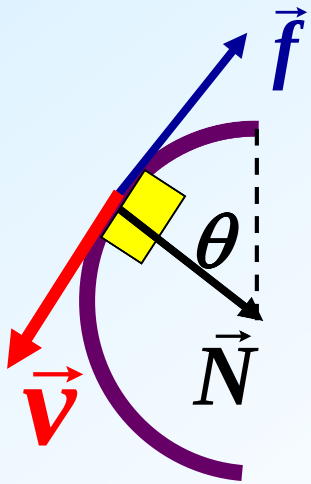
解： 建立自然坐标系

运动方程

$$\begin{cases} \text{法向} & N = ma_n = m\dfrac{v^2}{R} \\ \text{切向} & -f = ma_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu N \end{cases}$$

联立 $\begin{cases} N = ma_n = m\dfrac{v^2}{R} \\ -f = ma_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu N \end{cases}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu\frac{v^2}{R}$$ 积分?



设t时刻滑块沿屏障转了θ角，则

$$\underline{-\mu\frac{v^{\cancel{2}}}{\cancel{R}}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = \underline{\frac{\cancel{v}}{\cancel{R}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}}$$

$$\int_{v_1}^{v_2}\frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_0^{\pi} -\mu\,\mathrm{d}\theta \qquad \underline{v_2 = v_1 e^{-\mu\pi}}$$

根据动能定理 $A_{外} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2(e^{-2\mu\pi} - 1)$

因只有摩擦力作功, N 不作功:

$$\therefore A_{摩} = \frac{1}{2}mv_1^2(e^{-2\mu\pi} - 1)$$

试分析一种“气功”表演：

将上百斤重的大石块平压在仰卧于地上的人的胸上，用一数公斤重的铁锤猛击石块，石块裂开，而人完好无损！

美国一教授在上海交大表演“胸口碎大石”

试分析一种“气功”表演：

将上百斤重的大石块平压在仰卧于地上的人的胸上，用一数公斤重的铁锤猛击石块，石块裂开，而人完好无损！

（根据资料，通常人的肋骨平均能承受5000 N的力，如果将肋骨压下0.02 m，肋骨就要断裂。）

解：估算欲使肋骨断裂所需的能量E

$$E=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=5000\times 0.02=100(\mathrm{J})$$

石块所获得的能量?

设大石块质量为M，铁锤质量为m，从h高度下落

铁锤击中石块后与石块一起运动，则由动量守恒（理由?）

$$(m+M)v=mv_0 \qquad v_0=\sqrt{2gh}$$

$$\therefore v=\frac{mv_0}{m+M}\approx\frac{m}{M}v_0=\frac{m}{M}\sqrt{2gh}\ \left(\because m<<M\right)$$

试分析一种"*气功*"

用

果

郑重警告：

未经专门训练，切勿尝试！！

以免造成伤害！！！

$$.02 = 100(\mathrm{J})$$

石块获得的速度 $\sqrt{2gh}$ M

石块获得的动能 $E_k = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{m^2}{M}gh$

估算：$M = 100\,\mathrm{kg},\ m = 5\,\mathrm{kg},\ h = 4\,\mathrm{m}$

可得石块的动能：$E_k = 10\,\mathrm{J}$

可见，$E_k < E$，此种情况下表演者的安全有保障!

10. 保守力 势能

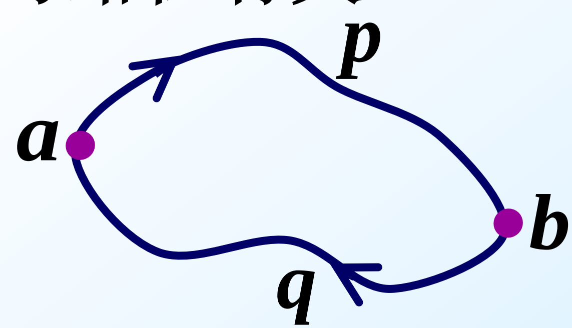
1. 保守力与非保守力

保守力：对质点做功的大小只与质点的始末位置有关，而与路径无关。

比如：重力、弹性力、万有引力等。

非保守力：对质点做功的大小不但与质点的始末位置有关，而且还与路径有关。

如：摩擦力、粘滞力等。

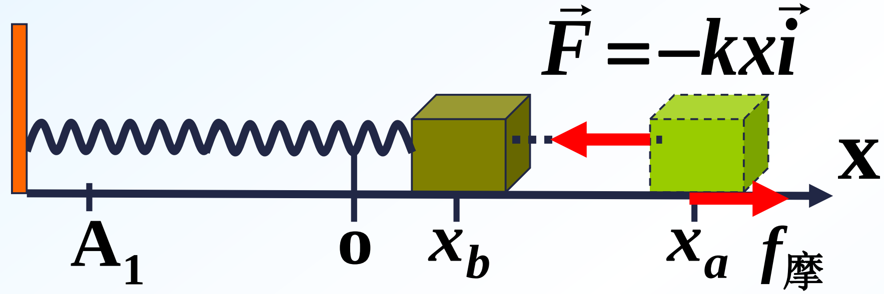


如图: 当质点在保守力的作用下沿闭合路径*apbqa*绕行一周时，

$$\int_{apb} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{aqb} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{bqa} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad \int_{apb} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{bqa} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

即： $\boxed{\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0}$ 保守力的环流为零

弹性力与摩擦力做功



弹性力做功

$$A_{ab}=\int_{x_a}^{x_b}F\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

只与始末位置有关

若质点从$x_a\to x_b\to A_1\to x_b$

$$A_{aA_1b}=\int_{x_a}^{A_1}F\mathrm{d}x+\int_{A_1}^{x_b}F\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}kA_1^2-\frac{1}{2}kx_a^2\right)-\left(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kA_1^2\right)$$

摩擦力做功

还与路径有关

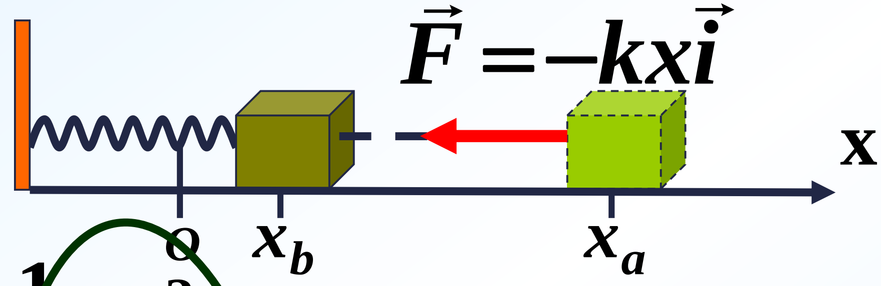
$$A_{ab}=\int_{x_a}^{x_b}f_{摩}\mathrm{d}x=\int_{x_a}^{x_b}\mu N\mathrm{d}x=\mu N(x_b-x_a)$$

注意正负号

$$A_{aA_1b}=\int_{x_a}^{A_1}f_{摩}\mathrm{d}x+\int_{A_1}^{x_b}f_{摩}\mathrm{d}x=\mu N(A_1-x_a)-\mu N(x_b-A_1)$$

2.势能

$$\vec{F}=-kx\vec{i}$$



弹性力做功 $A_{ab}=\int_{x_a}^{x_b}F\mathrm{d}x$

$$=-(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2)$$

作功只与始末位置有关的力 ——保守内力

重力的功 $A_{ab}=-(mgy_b-mgy_a)$

引力的功 $A_{ab}=-[(-\frac{GMm}{r_b})-(-\frac{GMm}{r_a})]$

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p=mgy$$

$$E_p=-\frac{GMm}{r}$$

$$A_{ab}=-(E_{pb}-E_{pa})=-\Delta E_p$$

势能

状态量

结论

保守力作功，以势能减少为代价！

说明

(1) 势能是相互作用有保守内力的系统的属性

(2) 势能的大小只有相对的意义，相对于势能零点而言。势能零点可以任意选取，势能差有绝对意义。

例如：

$$A_{ab}=-(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2)$$

$$A_{ab}=-(mgy_b-mgy_a)$$

$$A_{ab}=-[(-\frac{GMm}{r_b})-(-\frac{GMm}{r_a})]$$

若选b点为势能零点，则a点的势能为

$$E_{pa}=\int_a^{E_{pb}=0}\vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}\begin{cases}弹性势能\ E_{pa}=\frac{1}{2}kx_a^2\\ 重力势能\ E_{pa}=mgy_a\\ 引力势能\ E_{pa}=-\frac{GMm}{r_a}\end{cases}$$

几点说明：

1.以上所讨论的动能定理、动量定理、角动量定理都是来自牛顿定律, 所以只适用惯性系, **在非惯性系必须加惯性力的作用**, 才可用这些定理。

2.**功** → **过程量**, **能量**是**状态量**, 功与能量交换过程相联系, 即**功是能量交换或变化的一种量度**。

3.动能定理是牛顿第二定律的直接结果，在力学中它并不比第二定律给我们更多的知识。但它已对第二定律进行了一次数学处理，所以求解问题时，用它比较简便些。

说明

（3）已知势能函数，可以计算保守力

保守力做功等于势能增量的负值。

所以，$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_P(x, y, z)$

$$\therefore \mathrm{d}A = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial E_P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial E_P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$$

又 $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$= (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) \cdot (\vec{i}\,\mathrm{d}x + \vec{j}\,\mathrm{d}y + \vec{k}\,\mathrm{d}z) = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$

比较以上式子可得

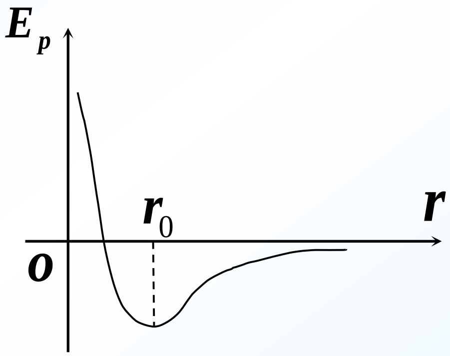
$$\left(F_x + \frac{\partial E_P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(F_y + \frac{\partial E_P}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(F_z + \frac{\partial E_P}{\partial z}\right)\mathrm{d}z = 0$$

要求上式对任意**dx,dy,dz**成立，必有：

$$F_i = -\frac{\partial E_P}{\partial i} \quad (i = x, y, z)$$

保守力分量等于势能对此坐标导数的负值

例：已知双原子分子的势能曲线如下图所示。图中r为原子间距离或一原子相对于另一原子的位置矢量的大小。试分析此种分子内原子间相互作用力的规律。



解：

$$F_i = -\frac{\partial E_p}{\partial i} \quad (i = x, y, z)$$

本题中，作用力为：

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}$$

斜率

因而，

$r < r_0$，作用力为斥力；

$r = r_0$，作用力为零；

$r > r_0$，作用力为吸引力。

11. 功能原理 机械能守恒定律

3.机械能

$$\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k}$$

定义： $E = E_k + E_p$——**机械能**

则 $A_{外} + A_{内保} + A_{内非保} = E_{kb} - E_{ka}$

$$A_{内保} = -(E_{pb} - E_{pa})$$

$$\boxed{A_{外} + A_{内非保} = (E_{kb} + E_{pb}) - (E_{ka} + E_{pa}) = \Delta E}$$

——**功能原理**

4.机械能守恒定律

由上式 $\begin{cases} 若\ A_{外} + A_{内非保} = 0 \quad \Delta E = 0 \\ E_b = E_a = 恒量 \end{cases}$

只有保守内力作功，
系统的总机械能保持不变。

守恒定律的意义：

守恒定律是关于变化过程的规律，只要过程满足一定整体条件可不究细节而对系统始末状态的某些特征下结论。

动量守恒

当 $\vec{F}=0$ 时，则 $\vec{P}_t=\vec{P}_0=$ 恒矢量

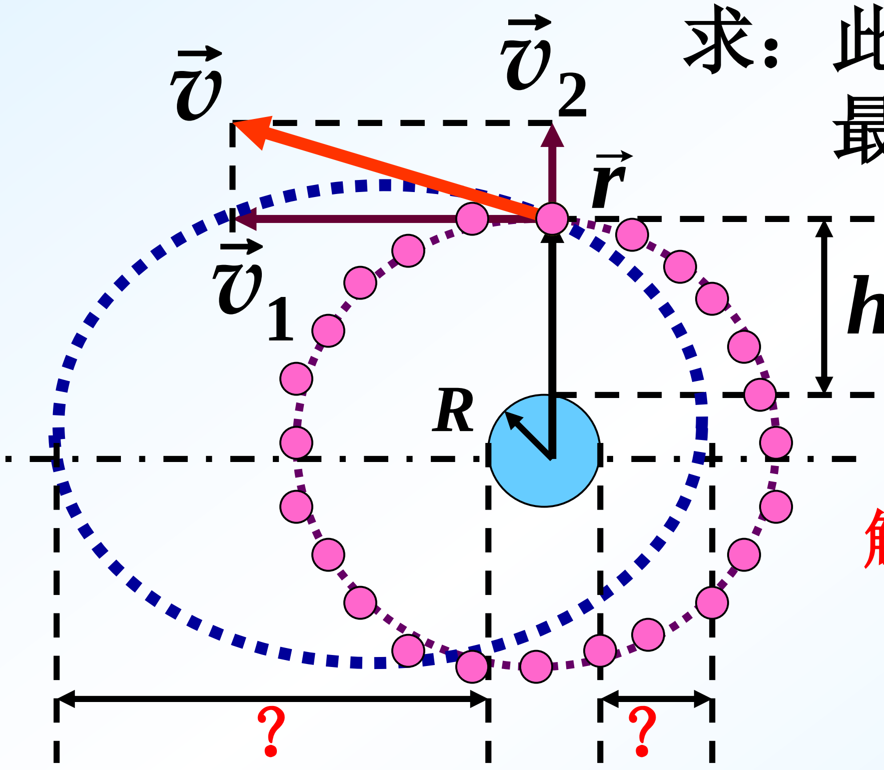
角动量守恒

当 $\vec{M}=0$ 则 $\vec{L}_t=\vec{L}_0$ 或 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=$恒矢量

机械能守恒

当 $A_{外}+A_{内非保}=0$ $\quad E_t=E_0=$恒量

例. 地球可看作是半径 R= 6400 km的球体, 一颗人造地球卫星在地面上空h=800km的圆形轨道上，以 v_1=7.5km/s的速度绕地球运动。突然点燃一火箭, 其冲力使卫星附加一个向外的径向分速度 v_2=0.2 km/s 使卫星的轨道变成椭圆形。

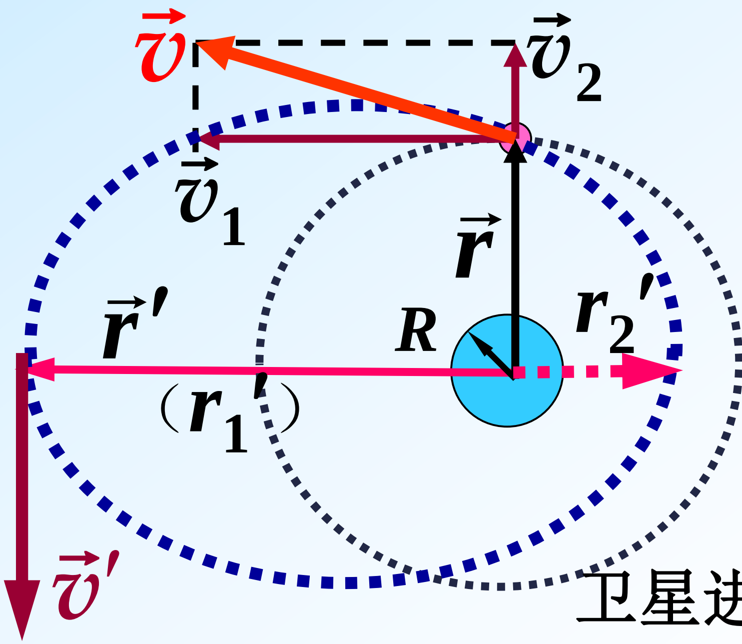


求：此后卫星轨道的最低点和最高点位于地面上空多高？

分析：

卫星所受万有引力、火箭反冲力均通过地心

解：卫星在火箭点燃前后对地心的角动量始终不变,是守恒的。



根据角动量守恒定律：

卫星进入椭圆轨道后

$$\vec{r}\times m(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=\vec{r}'\times m\vec{v}'$$

$$\because \vec{r}\,//\,\vec{v}_2 \quad \vec{r}\perp\vec{v}_1 \quad \vec{r}'\perp\vec{v}'$$

$$\therefore \quad \cancel{m}v_1 r=\cancel{m}v'r' \qquad (1)$$

卫星进入椭圆轨道后,卫星、地球系统只有万有引力作用, **机械能守恒：**

$$\frac{1}{2}\cancel{m}(v_1^2+v_2^2)-G\frac{M\cancel{m}}{r}=\frac{1}{2}\cancel{m}v'^2-G\frac{M\cancel{m}}{r'} \qquad (2)$$

对卫星原来的圆运动有 $$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v_1^2}{r} \qquad (3)$$

联立解得

$$\begin{cases} \text{远地点高度} & h_1=r_1'-R=997\,\text{km} \\ \text{近地点高度} & h_2=r_2'-R=613\,\text{km} \end{cases}$$

本章归纳

时间累积效应

角动量

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

$\vec{M}=0$ → $\vec{L}_1=\vec{L}_2$ 角动量守恒

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\vec{P}_2-\vec{P}_1$$

$\vec{F}=0$ → $\vec{P}_1=\vec{P}_2$ 动量守恒

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

解决问题的思路可按此顺序倒过来！

$$\int_1^2\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=E_{k_2}-E_{k_1}$$

$$\int_1^2\vec{F}_{外}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_1^2\vec{f}_{内非}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=E_2-E_1$$

$A_{外}=0\quad A_{内非}=0$ → $E_1=E_2$ 机械能守恒

空间累积效应

已学知识回顾

牛顿第二定律 $\vec{F}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}$

冲量定理 $\int_0^t \vec{F}dt=\vec{P}_t-\vec{P}_0$

动量守恒定律 当 $\vec{F}=0$ 时，$\vec{P}_t=\vec{P}_0$

角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$

力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

角动量定理 $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$ $\int_0^t \vec{M}dt=\vec{L}_t-\vec{L}_0$

角动量守恒定律 若 $\vec{M}=0$ 则 $\vec{L}_t=\vec{L}_0$

功 $A_{ab}=\int_a^b \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$

功率 $P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta A}{\Delta t}=\dfrac{dA}{dt}=\vec{F}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

动能定理 $A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k$

功能原理（机械能守恒） $A_{外}+A_{内非保}=(E_{kb}+E_{pb})-(E_{ka}+E_{pa})=\Delta E$