感应电动势

一个问题

磁场中运动导体 → 感应电动势 / 感应电流 → 电 能

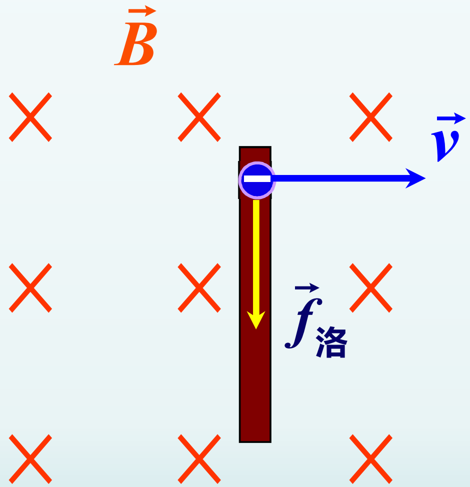
洛伦兹力

$\vec{f}_{洛}=-e\vec{v}\times\vec{B}\perp\vec{v}$

侧向力

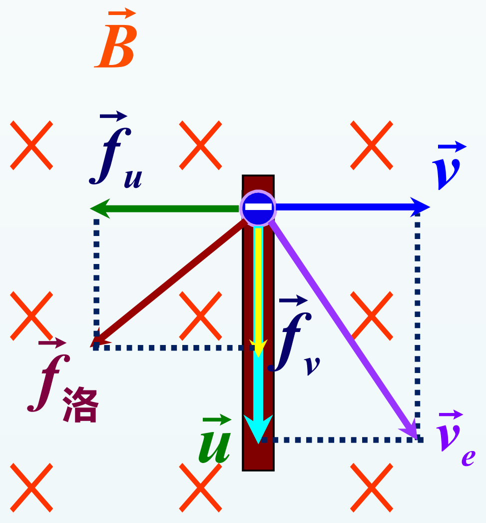
→ 不做功

矛 盾？



谁为回路提供电能？

感应电动势



每个电子受的洛仑兹力

$$\vec{f}_{洛} = \vec{f}_v + \vec{f}_u \longrightarrow \left|\vec{f}_{洛}\right| = e\vec{v}\times\vec{B} + e\vec{u}\times\vec{B}$$

$\vec{f}_v$ 对电子做**正功**

$\vec{f}_u$ 对电子做**负功**

$\left.\right\}$ $\vec{f}_{洛}$ 对电子**不做功**

要使棒ab保持速度v运动，则必有外力作功！

能量传递的桥梁

机械能 **电 能**

外 力 → 克服 f_u 做功 → 洛伦兹力分量 f_v → **动生电流**

能量守恒

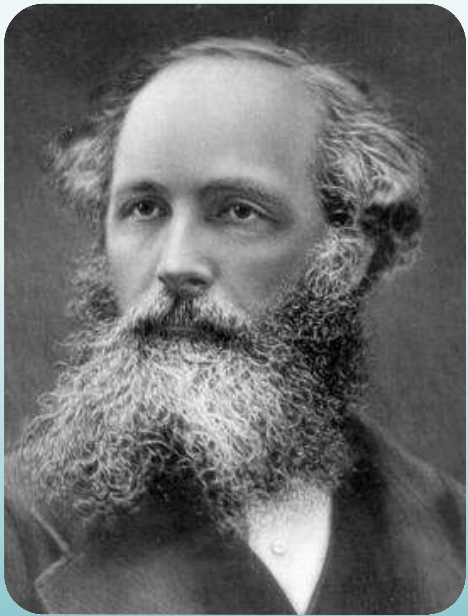
感应电动势

- **感生电动势** ⟵ 导体回路不动，B变化

数学表达

由法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



麦克斯韦（Maxwell）

敏锐地觉察到感生电动势的现象预示着有关电磁场的新的效应。

他相信即使不存在导体回路，变化的磁场在其周围空间也会激发出一种特殊的电场。

感应电动势

他相信即使不存在导体回路，变化的磁场在其周围空间也会激发出一种特殊的电场。 **感应电场**⟶产生感生电动势的原因

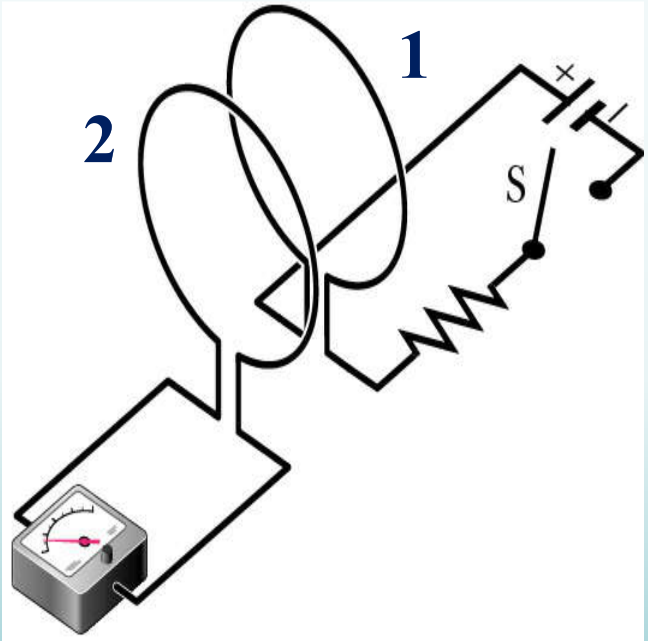
有导体回路时，$\boxed{\text{这种电场 } \vec{E}_i}$提供一种非静电力产生$\varepsilon_i$。

- **感应电场**

两个静止的线圈

线圈1中，I→变化时，

线圈2⟶ 感应电流 I_i



驱动线圈2中电荷运动的不是洛伦兹力

感应电动势

- **感应电场**

两个静止的线圈

线圈1中，I→变化时，

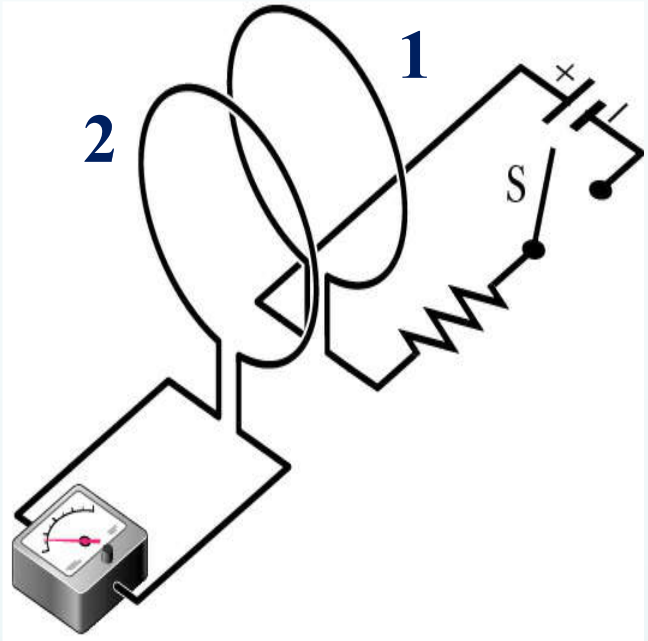
线圈2⟶ 感应电流 I_i

驱动线圈2中电荷运动的不是洛伦兹力

是不是静电场产生的力呢？ **否**

保守力场 ⟶ $\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \equiv 0$ 不符合线圈2的情况

变化磁场的物理效应：产生非静电场——感应电场



感应电动势

- **感应电场** ⟶ 真实存在，已得到实验证实

特 点　　**演示实验**

① 因磁场随时间变化而产生，电场线闭合，又称为涡旋电场。

$\mathrm{d}\vec{B}/\mathrm{d}t$

② $\vec{E}_\mathrm{i}$ 与静电场一样，对场中的电荷有力的作用　$\vec{F} = q\vec{E}_\mathrm{i}$

③ $\vec{E}_\mathrm{i}$ 不依赖空间是否有导体存在。$\dfrac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \neq 0 \longrightarrow \vec{E}_\mathrm{i}$ 全空间存在

④ $\vec{E}_\mathrm{i}$ 是非保守力场。$\oint \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$

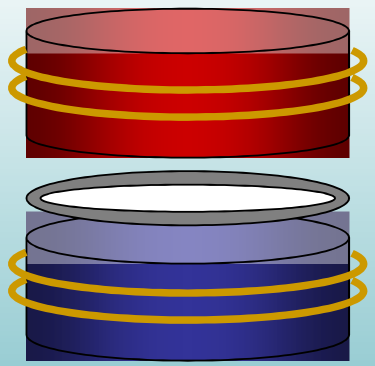
感应电动势

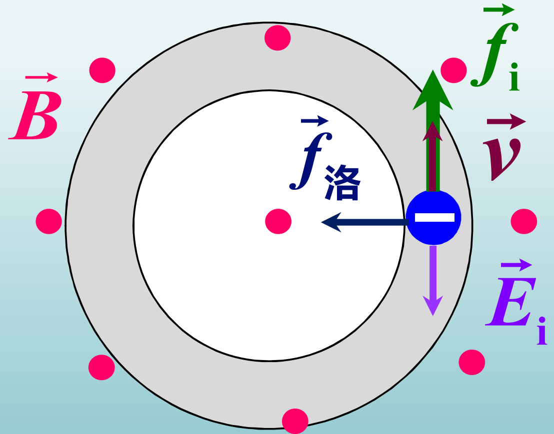
- **感应电场的实验验证与应用**

电子感应加速器

原理：
- 用变化磁场所激发的感应电场来加速电子
- 用洛伦兹力约束电子的运动，增加电子的运动行程

交流电在前 1/4周期时，? 管中的感应电场是顺时针的（俯视图）





电子受力：

$\vec{f}_{洛} = -e\vec{v}\times\vec{B}$ （向心力）

$\vec{f}_{\text{i}} = -e\vec{E}_{\text{i}}$ （切向加速）

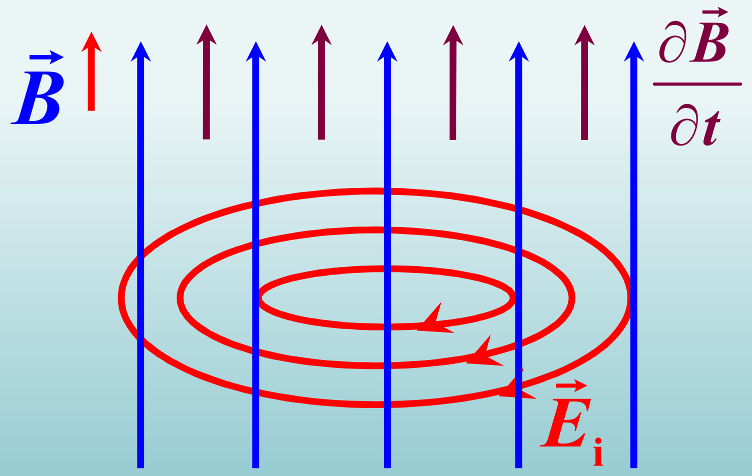
感应电动势

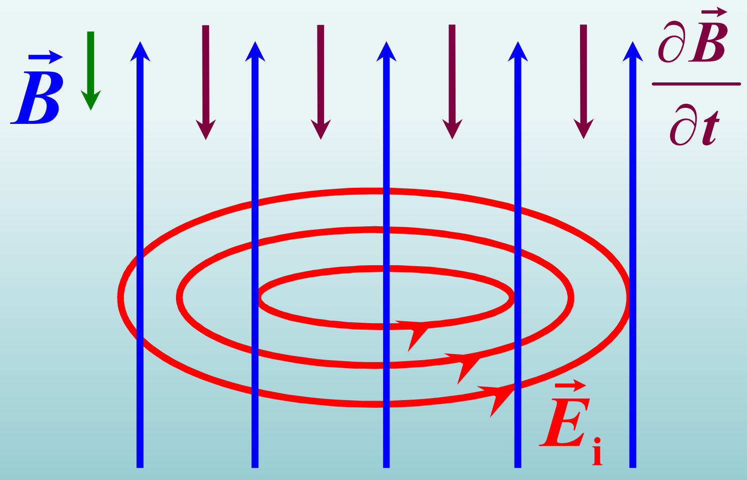
- **感生电动势的计算**

法拉第电磁感应定律 $\varepsilon_{\mathrm{i}}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\int_S\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

通常考虑闭合回路：$\boxed{\oint_L \vec{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_S\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$ ⟶ $\vec{E}_{\mathrm{i}}$ 的环路定理

感应电场方向判断：**楞次定律** 感应电场激发的磁场阻碍外场变化





感应电场与静电场对比

对场中的电荷有力的作用

	静电场	感应电场
产生原因	由静止的电荷激发	由变化的磁场激发
场中导体	静电感应 感应电场平衡静电场 等势体、无持续电流	电磁感应 感应电动势 持续的感应电流
电场线	不闭合	闭合、涡旋电场
场方程	$\oint_s \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i \Big/ \varepsilon_0 \neq 0$ 有源场 $\oint_L \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \equiv 0$ 无旋场	$\oint_s \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$ 无源场 $\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \neq 0$ 有旋场

感应电场与静电场对比

对场中的电荷有力的作用

静电场	感应电场

场方程

静电场：

$$\begin{cases} \oint_s \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i \Big/ \varepsilon_0 \neq 0 & \text{有源场} \\ \oint_L \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \equiv 0 & \text{无旋场} \end{cases}$$

感应电场：

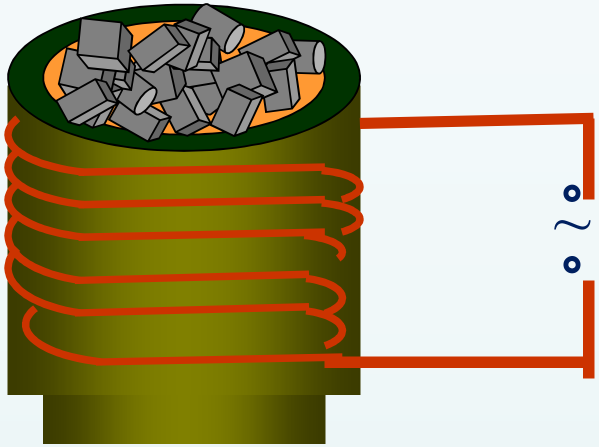
$$\begin{cases} \oint_s \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0 & \text{无源场} \\ \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \neq 0 & \text{有旋场} \end{cases}$$

保守场 、 可以引入电势

非保守场、不能引入电势

感应电动势

- **涡流** $\xrightarrow{\text{应 用}}$ 高频电磁感应炉



其他应用

金属探测器

探雷器

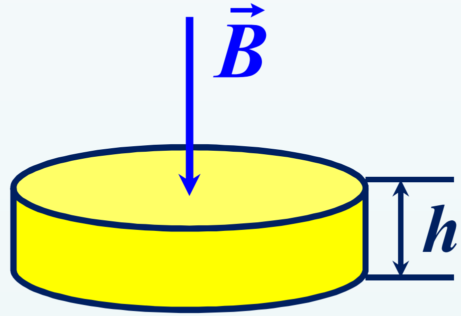
……

涡流的危害

涡流会消耗电功率， 而且降低设备能量利用效率。

感应电动势

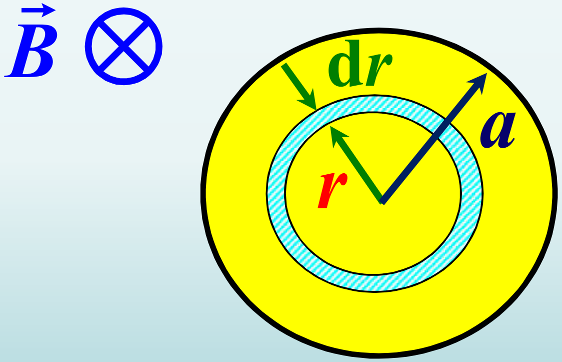
例. 将半径为a、厚为h、电导率为σ的金属圆盘, 同轴放置在轴对称匀强磁场B中, 且$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t>0$。求圆盘上的电流强度及产生的热功率。



解: 取半径为r,厚度为$\mathrm{d}r$的圆筒,其电动势

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B\cdot\pi r^2)=-\pi r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

其电阻为: $R=\dfrac{2\pi r}{\sigma\cdot h\cdot\mathrm{d}r}$



电流为: $\mathrm{d}I_{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{i}}}{R}=-\dfrac{r}{2}\sigma h\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}r$

总电流: $I_{\mathrm{i}}=\int\mathrm{d}I_{\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{4}a^2\sigma h\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

热功率: $P=\int\mathrm{d}P=\int R(\mathrm{d}I_{\mathrm{i}})^2=\dfrac{1}{8}\pi\sigma h a^4\left(\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right)^2$

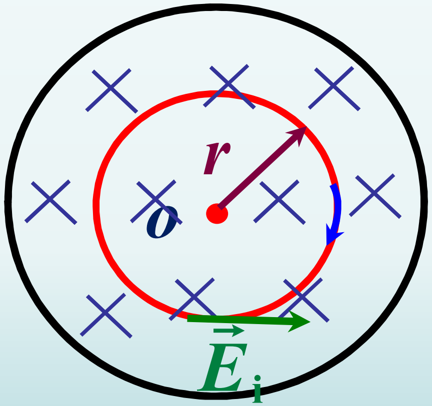
感应电动势

例. 求一个轴对称磁场变化时的涡旋电场。已知磁场均匀分布在半径为R的范围内，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，而且大于零。

求：(1) 任意距中心o为r处的E_i=?

(2)计算将单位正电荷从$a \to b$，E_i的功

解：(1) 由B的均匀及柱对称性可知，在同一圆周上E_i的大小相等，且沿切线方向,取半径为r的电力线为积分路径。定义顺时针为正方向。



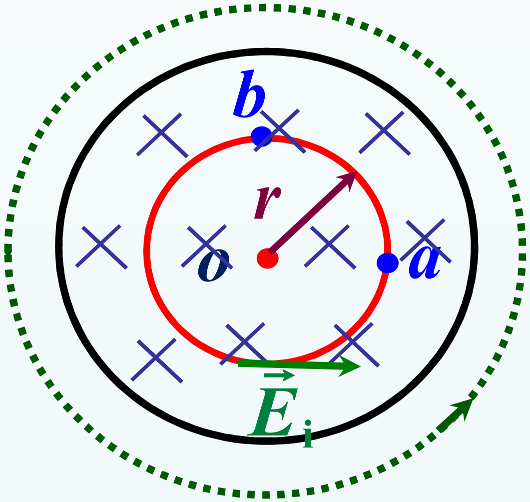
当$r<R$时：

$$\oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\left.\begin{aligned} \oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} &= E_i \cdot 2\pi r \\ -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot \pi r^2 \end{aligned}\right\} E_i = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

感应电动势

当$r<R$时：　$E_i=-\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

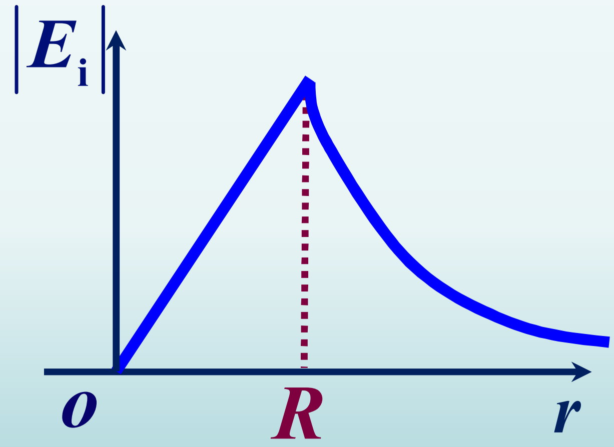


当$r>R$时：

$$\left.\begin{aligned}&\oint\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=E_i\cdot 2\pi r\\&-\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot\pi R^2\end{aligned}\right\}E_i=-\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

(2) 沿1/4圆周将单位正电荷从$a\rightarrow b$，E_i做功

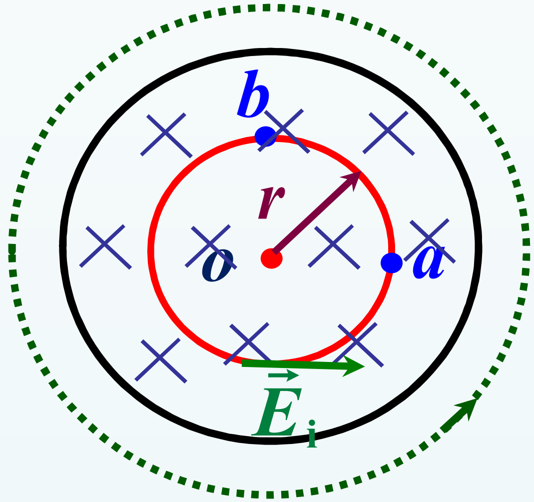
$$A_{\frac{1}{4}ab}=\int\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_0^{\pi r/2}\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}l=\frac{\pi}{4}r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



沿3/4圆周将单位正电荷从$a\rightarrow b$，E_i做功

$$A_{\frac{3}{4}ab}=\int\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_0^{3\pi r/2}\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}l=-\frac{3\pi}{4}r^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

感应电动势



(2) 沿1/4圆周将单位正电荷从$a\to b$，E_i做功

$$A_{\frac{1}{4}ab}=\int\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\int_0^{\pi r/2}\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\cdot dl=\frac{\pi}{4}r^2\frac{dB}{dt}$$

沿3/4圆周将单位正电荷从$a\to b$，E_i做功

$$A_{\frac{3}{4}ab}=\int\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=-\int_0^{3\pi r/2}\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\cdot dl=-\frac{3\pi}{4}r^2\frac{dB}{dt}$$

结论： ① $E_i\propto dB/dt$，与B大小无关

② $r>R$，磁场外$E_i\neq 0$。

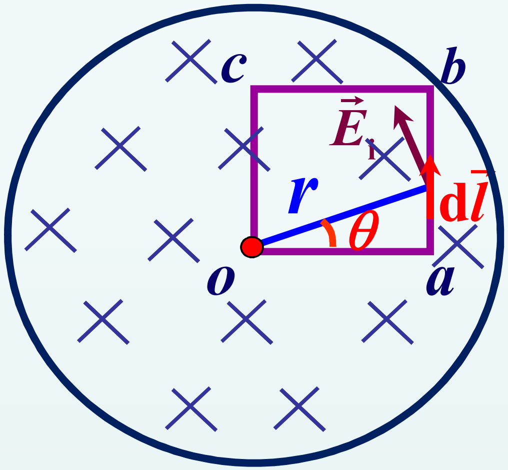
③ $A_{1/4ab}\neq A_{3/4ab}$

$\vec{E}_i$做功与路径有关 ⟶ 非保守力场

感应电动势

例. 在上例的磁场中,放入一边长为L的正方形导体回路$oabc$。

求：(1)回路各边的感应电动势；(2) $\varepsilon_{i总}$；(3)有静电场吗？若有，c与a哪点电势高？



$$E_i = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_i = \int_-^+ \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

解：(1)

$$\left.\begin{array}{l} oa \perp \vec{E}_i \\ oc \perp \vec{E}_i \end{array}\right\} \longrightarrow \varepsilon_{oa} = \varepsilon_{oc} = 0$$

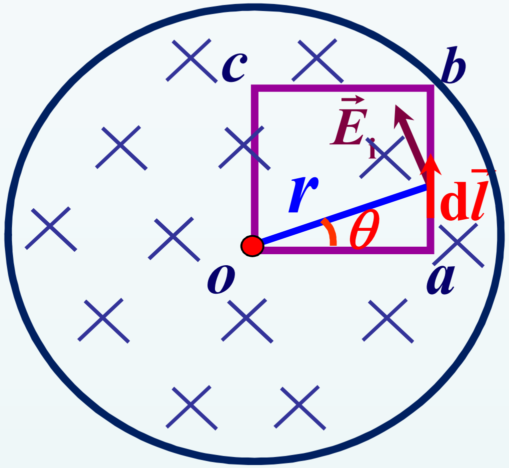
$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b E_i \cos\theta \mathrm{d}l = \int_a^b \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos\theta \mathrm{d}l$$

$$= \int_a^b \frac{L}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}l = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}L^2$$

同理：$\varepsilon_{bc} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}L^2$

感应电动势

解：$\varepsilon_{ab}=\int_a^b \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}L^2$　　$\varepsilon_{bc}=\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}L^2$



(2) 求$\varepsilon_{i总}$

$$\varepsilon_{i总}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bc}=\frac{dB}{dt}L^2$$

或根据法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon_{i总}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(\vec{B}\cdot\vec{S})=S\frac{dB}{dt}=L^2\frac{dB}{dt}$$

(3) 有静电场吗？若有，c与a哪点电势高？

令回路中电流为I_i，每条边长电阻为R

则从a到c的电势变化为：$V_a+|\varepsilon_{ab}|-I_iR+|\varepsilon_{bc}|-I_iR=V_c$

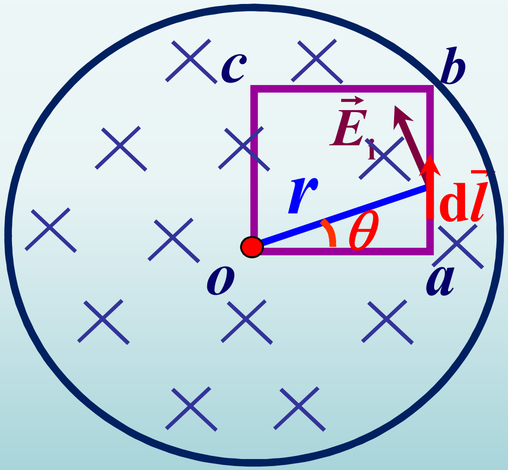
感应电动势

解：则从a到c的电势变化为：

$$V_a+\left|\varepsilon_{ab}\right|-I_{\mathrm{i}}R+\left|\varepsilon_{bc}\right|-I_{\mathrm{i}}R=V_c$$

$$\left.\begin{aligned}V_a-V_c&=2I_{\mathrm{i}}R-2\left|\varepsilon_{ab}\right|\\ I_{\mathrm{i}}&=\frac{2\left|\varepsilon_{ab}\right|}{4R}\end{aligned}\right\}V_a-V_c=\left|\varepsilon_{ab}\right|-2\left|\varepsilon_{ab}\right|=-\left|\varepsilon_{ab}\right|<0$$

$$V_c>V_a$$



在涡旋电场作用下，正电荷聚集在c点，负电荷聚集在a点

存在静电场

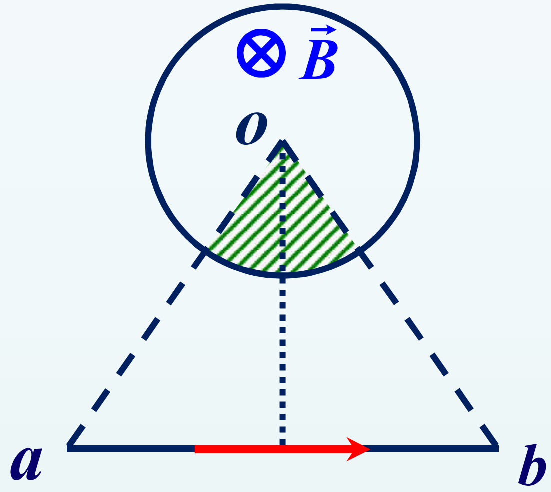
感应电动势

例. 磁力线限制在圆柱体内,沿轴向均匀分布， $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，而且大于零。求ε_{ab}

解：假想用导线连接oa、ob

根据涡旋电场特点，$\varepsilon_{oa}=0$ $\varepsilon_{bo}=0$

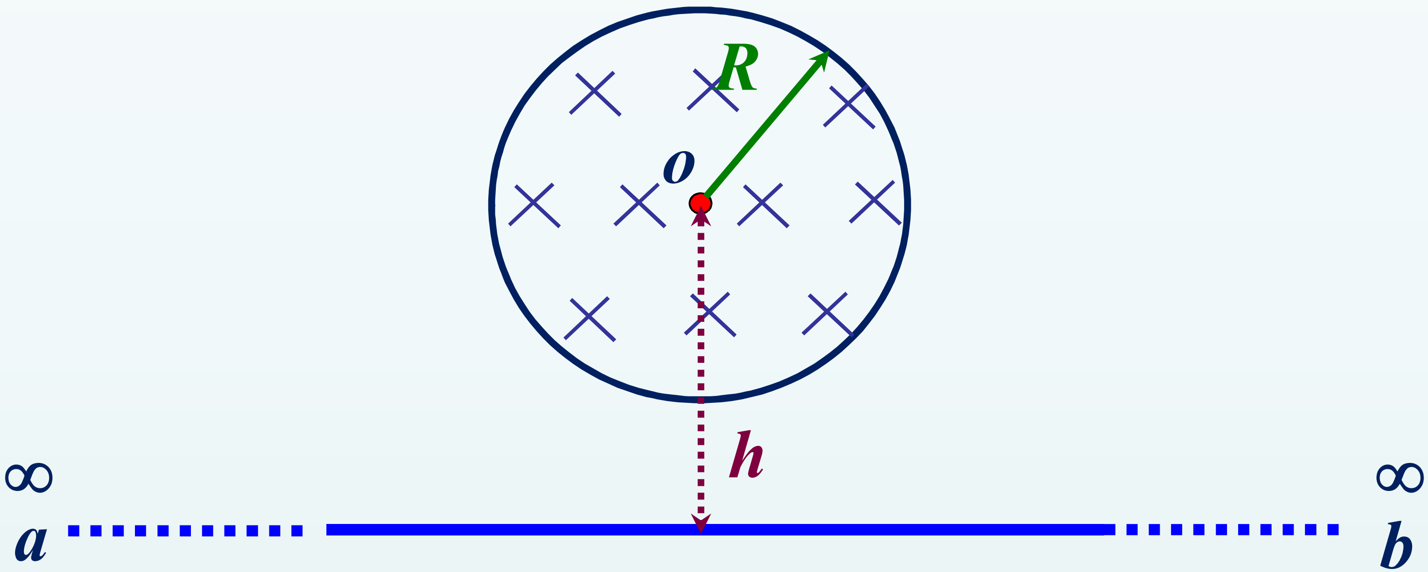
故新加入的导线在不影响ab电势的情况下构成了闭合回路。



$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{ab}&=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\\ \Phi&=BS_{扇形}\end{aligned}\right\}\varepsilon_{ab}=-S_{扇形}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

若ab无限长呢？

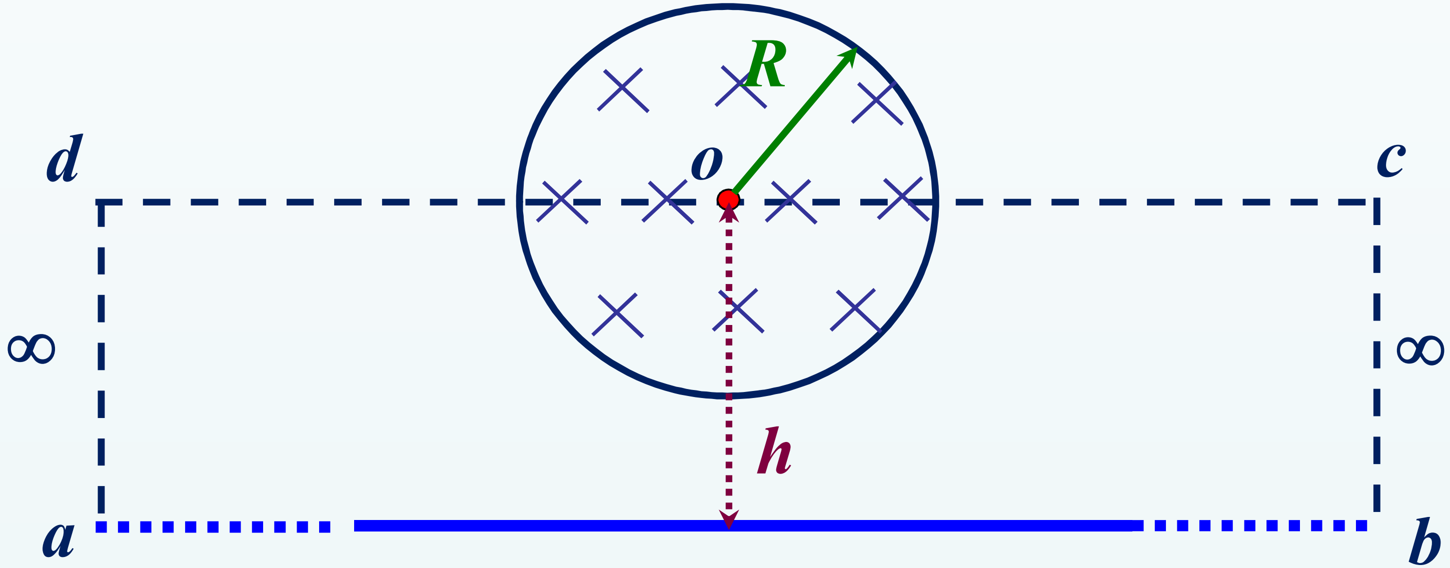
例. 磁场均匀分布在半径为R的范围，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$=常量，且大于零。求无限长直导线ab上的电动势。



解：常规解法。利用前面例题的结论

当$r>R$时，$E_i = \dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

感应电动势



另解：取如图所示的矩形回路。

$$\varepsilon_{abcd}=\varepsilon_{ab}+\underbrace{\boxed{\varepsilon_{bc}+\varepsilon_{cd}+\varepsilon_{da}}}_{=0}$$

$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{abcd}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\pi R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方向：由楞次定律判断 $a\longrightarrow b$

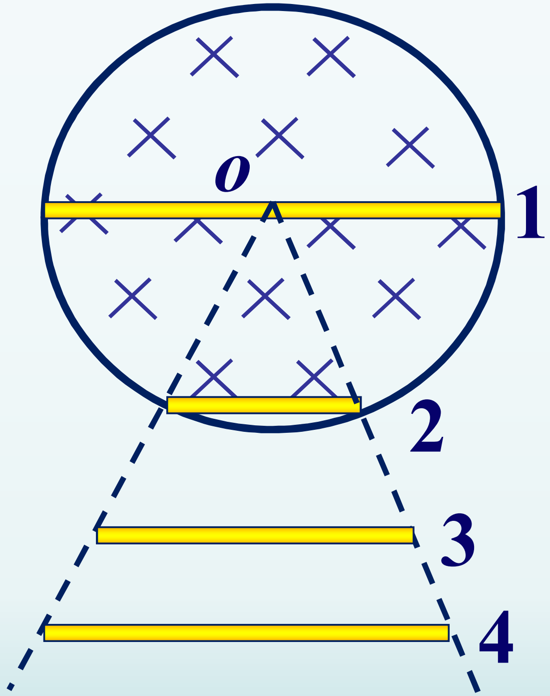
课堂练习

例. 有四根导体棒放置入磁场中， $dB/dt>0$。

(1) 比较各棒中的ε_i。

(2) 3，4连成通路I_i=?

(3) 棒中哪端电势高?



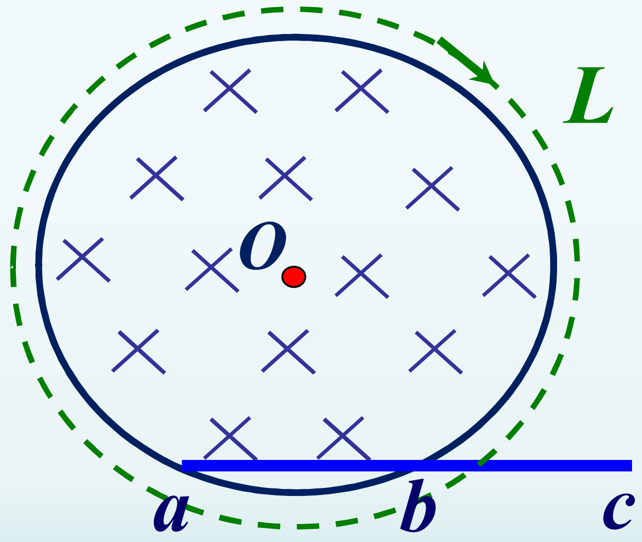
解：(1) $\varepsilon_3=\varepsilon_4>\varepsilon_2>\varepsilon_1=0$

(2) $I_i=0$

(3) $V_{右}>V_{左}$

感应电动势

例. 在半径为R的圆形区域内，有垂直向里的均匀磁场正在减小。有一金属棒abc放在图示位置，已知$ab=bc=R$，求(1) a、b、c三点感应电场的大小和方向（在图上标出）；(2) 棒上感应电动势ε_{abc}为多大；(3) a、c哪点电势高。



解：(1) 由楞次规律知，感应电场的方向是顺时针沿L回路。

$$\oint \vec{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

由对称性可知

$$\left.\begin{aligned} &\oint \vec{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_{\mathrm{i}} \cdot 2\pi r \\ &-\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot \pi R^2 \end{aligned}\right\} E_{\mathrm{i}} = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

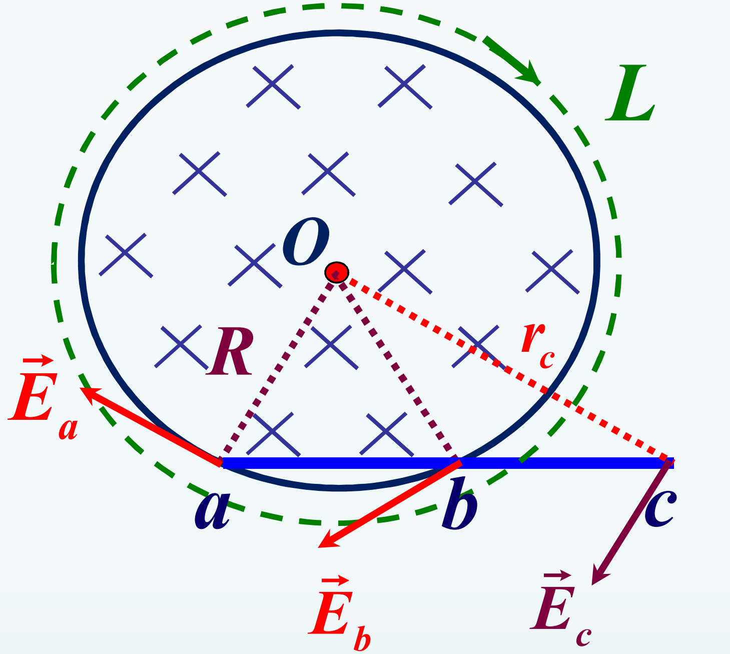
感应电动势

解： $E_\mathrm{i}=-\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

$r_a=r_b=R \longrightarrow E_a=E_b=-\dfrac{R}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

$r_c=2R\cos 30^\circ=\sqrt{3}R \longrightarrow E_c=-\dfrac{R}{2\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

方向：各自所在圆弧的切线方向



(2) 棒上的感应电动势多大

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{abc}&=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bc}\\ \varepsilon_\mathrm{i}&=-\boxed{S}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\}\varepsilon_{abc}=-\left(\frac{3\sqrt{3}+\pi}{12}\right)R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$S \to \frac{\sqrt{3}}{4}R^2+\frac{\pi}{12}R^2$$

涡旋电场E_i作用下，

正电荷向a端点聚集。

a为感应电动势正极

a点电势高

作业：8T1～8T11

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周四交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。