
电路理论基础

—电路理论（基础篇）

华中科技大学·电气学院

ccsfm@hust.edu.cn

第13章 含磁耦合的电路

13.1 概述

13.2 耦合电感

13.3 含耦合电感电路的分析

13.4 变压器原理

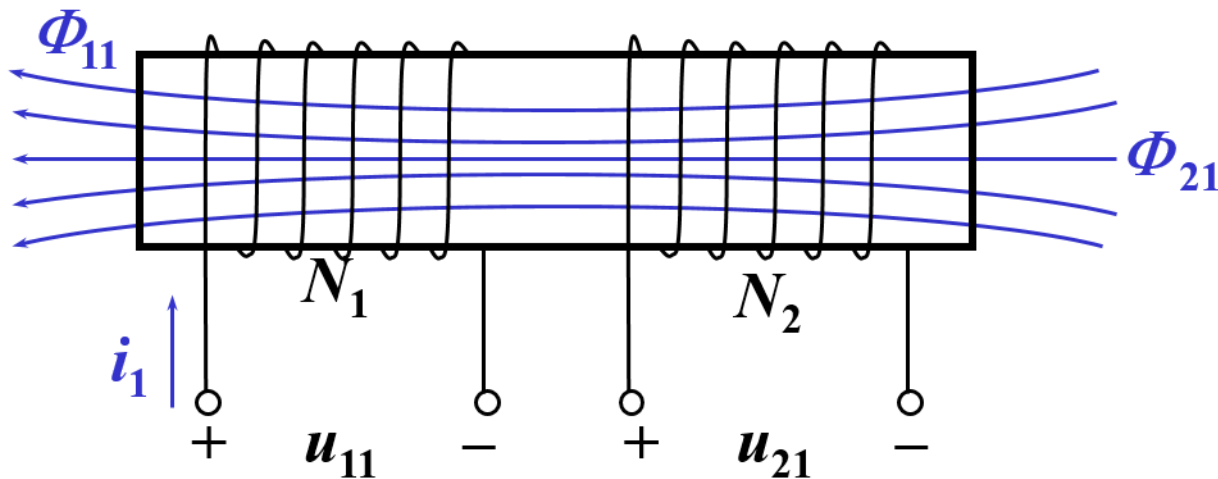
13.5 理想变压器

13.6 拓展与应用

● 重点

1. 熟练掌握耦合电感
2. 熟练掌握含耦合电感电路的分析
3. 熟练掌握变压器原理及理想变压器

◆ 自感与互感



当线圈1中通入电流 i_1 时，在线圈1中产生磁通，同时，有部分磁通穿过临近线圈2。当 i_1 为时变电流时，磁通也将随时间变化，从而在线圈两端产生感应电压。

13.2 耦合电感

当 i_1 、 u_{11} 、 u_{21} 方向与 Φ 符合右手定则时，根据电磁感应定律和楞次定律，则有

$$u_{11} = \frac{d\Psi_{11}}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} \quad u_{21} = \frac{d\Psi_{21}}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

u_{11} ：自感电压； u_{21} ：互感电压。 Ψ ：磁链

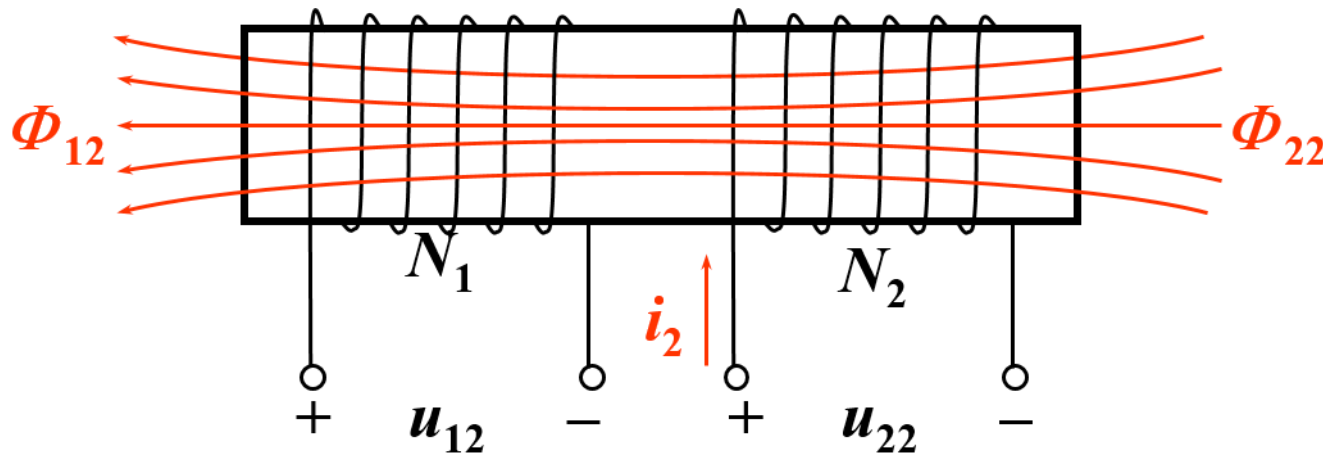
■ 假设线圈周围磁介质为线性，有

$$u_{11} = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1})$$
$$u_{21} = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1})$$

L_1 ：线圈1的自感系数； M_{21} ：线圈1对线圈2的互感系数。

13.2 耦合电感

同理，当线圈2中通电流 i_2 时会产生磁通 Φ_{22} ， Φ_{12} 。 i_2 为时变时，线圈2和线圈1两端分别产生感应电压 u_{22} ， u_{12} 。



$$u_{12} = \frac{d\Psi_{12}}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2})$$
$$u_{22} = \frac{d\Psi_{22}}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2})$$

可以证明： $M_{12} = M_{21} = M$ 。

13.2 耦合电感

◆ 耦合类型与特性方程

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \\ \phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} \end{cases}$$

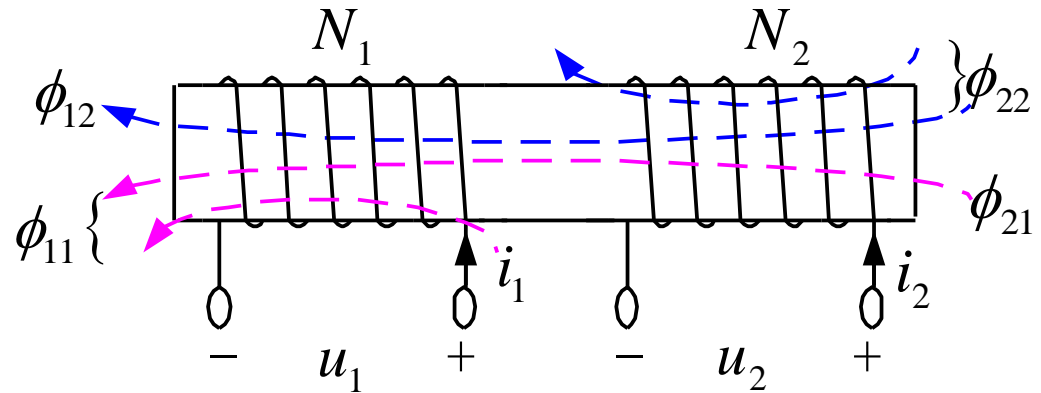
$$\begin{cases} \psi_1 = N_1 \phi_1 = N_1 \phi_{11} + N_1 \phi_{12} \\ \psi_2 = N_2 \phi_2 = N_2 \phi_{21} + N_2 \phi_{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = \psi_{11} + \psi_{12} \\ \psi_2 = \psi_{21} + \psi_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} \\ u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$



加强型耦合线圈

若两个线圈为**加强型耦合线圈**，当同时通以电流时，每个线圈两端的电压均包含自感电压和互感电压：

$$u_1 = u_{11} + u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$
$$u_2 = u_{21} + u_{22} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

在正弦交流电路中，其相量形式的方程为

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M_{21} \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

互感的性质

- ①从能量角度可以证明，对于线性电感 $M_{12}=M_{21}=M$
- ②互感系数 M 只与两个线圈的几何尺寸、匝数、相互位置和周围的介质磁导率有关

13.2 耦合电感

若两个线圈为**削弱型耦合线圈**，当同时通以电流时，每个线圈两端的电压均包含自感电压和互感电压：

$$u_1 = u_{11} - u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -u_{21} + u_{22} = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

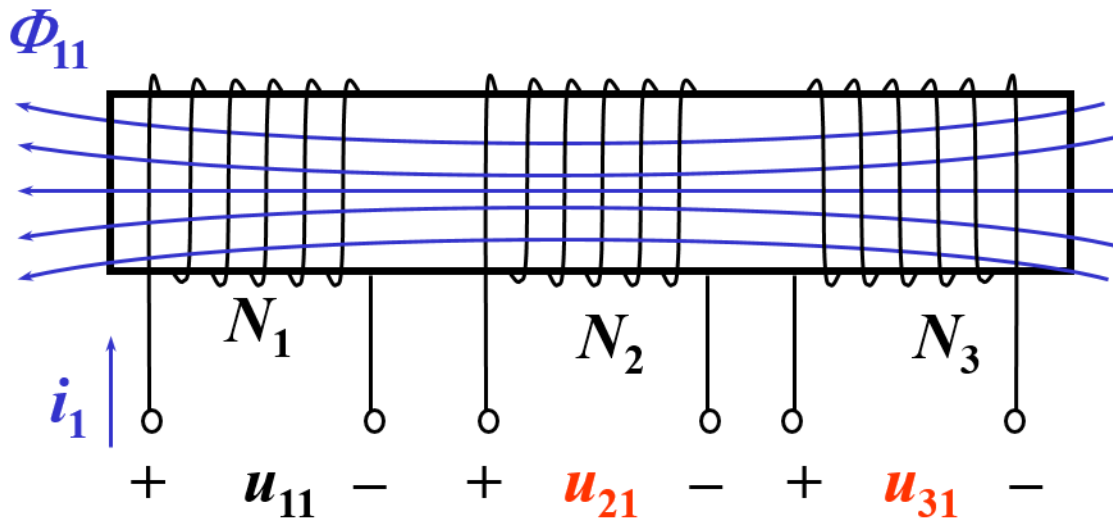
在正弦交流电路中，其相量形式的方程为

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M_{12} \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = -j\omega M_{21} \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

13.2 耦合电感

对互感电压，因产生该电压的的电流在另一线圈上，因此，要确定其符号，就必须知道两个线圈的绕向。这在电路分析中显得很不方便。



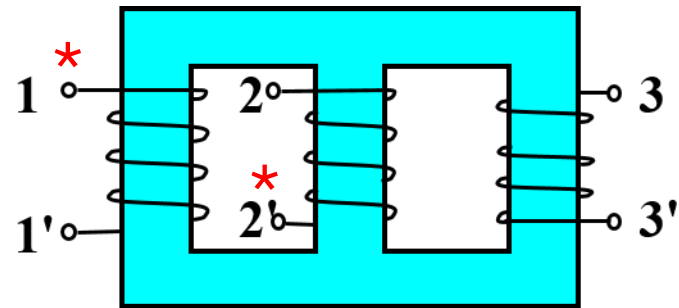
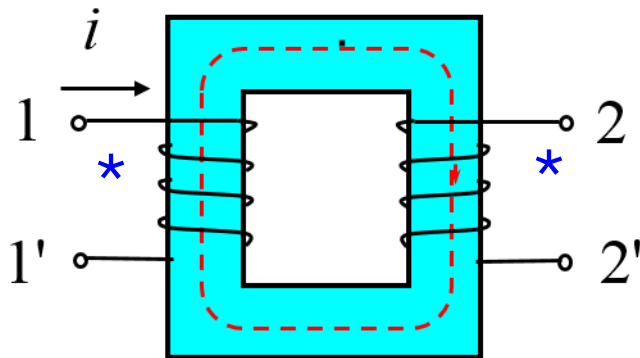
$$u_{21} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$
$$u_{31} = -M_{31} \frac{di_1}{dt}$$

引入同名端可以解决这个问题。

同名端约定：当电流同时流入（或同时流出）同名端时，耦合电感为加强型耦合。

确定同名端的方法：

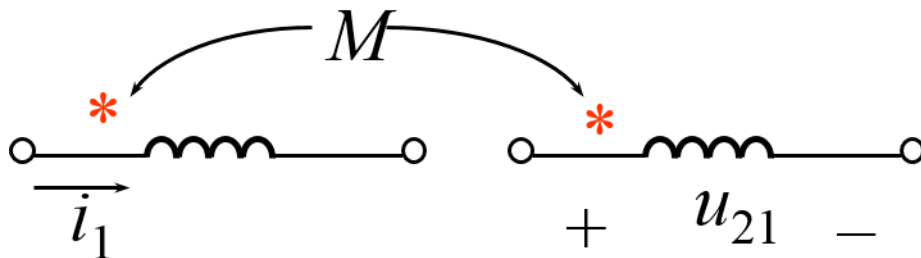
- (1) 当两个线圈中电流同时由同名端流入(或流出)时，两个电流产生的磁场相互增强。
- (2) 当随时间增大的时变电流从一线圈的一端流入时，将会引起另一线圈相应同名端的电位升高。



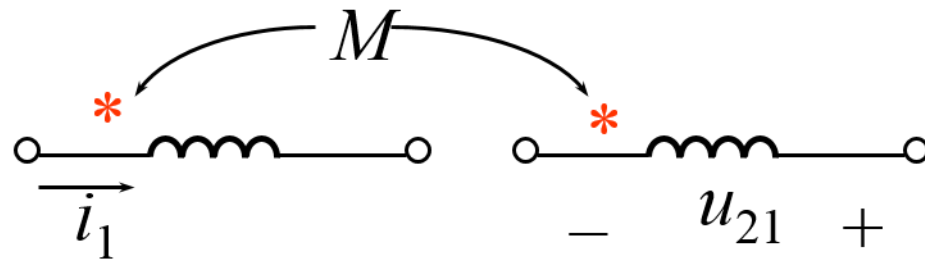
注意：线圈的同名端必须两两确定。

13.2 耦合电感

有了同名端，以后表示两个线圈相互作用，就不再考虑实际绕向，而只画出同名端及参考方向即可。(参考前图，标出同名端得到下面结论)。

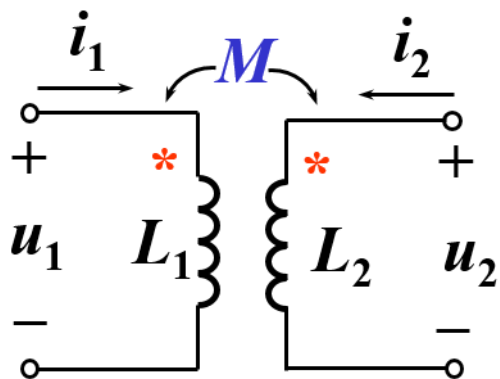


$$u_{21} = M \frac{di_1}{dt}$$



$$u_{21} = -M \frac{di_1}{dt}$$

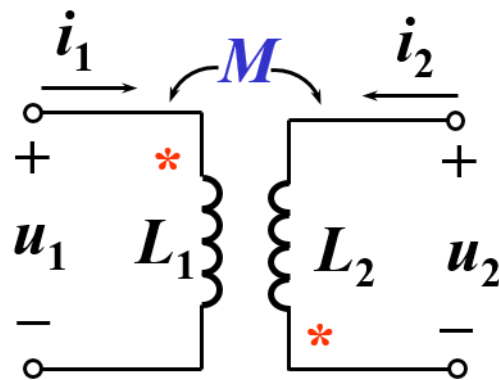
13.2 耦合电感



时域形式：

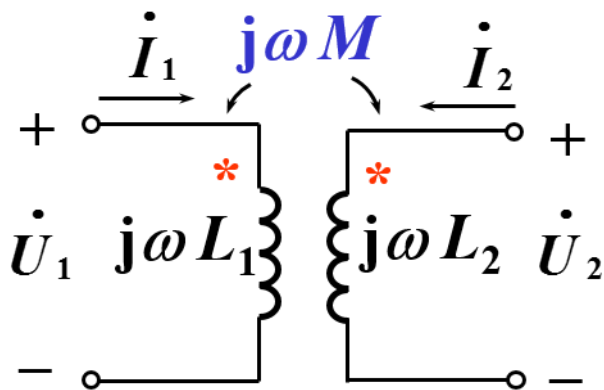
$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$



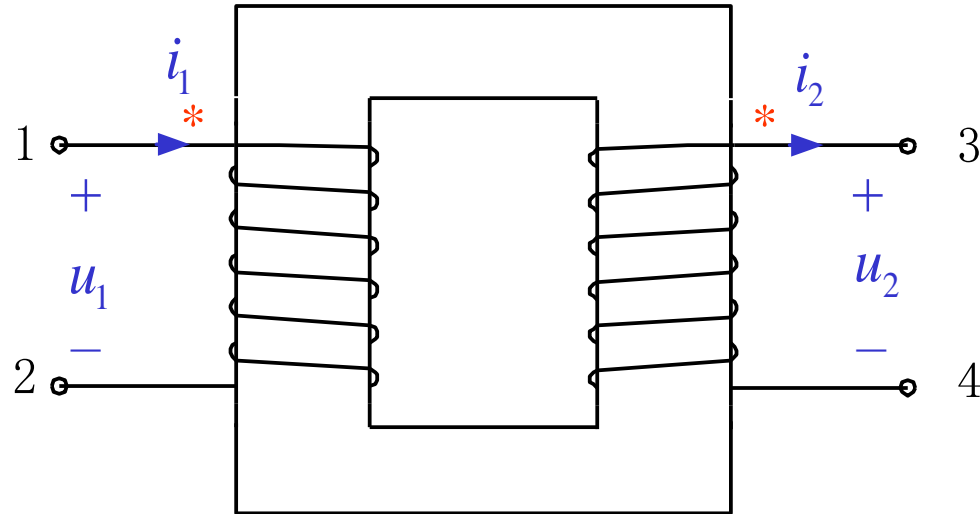
相量形式的方程为

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

13.2 耦合电感

例：求 u_1 和 u_2 的表达式

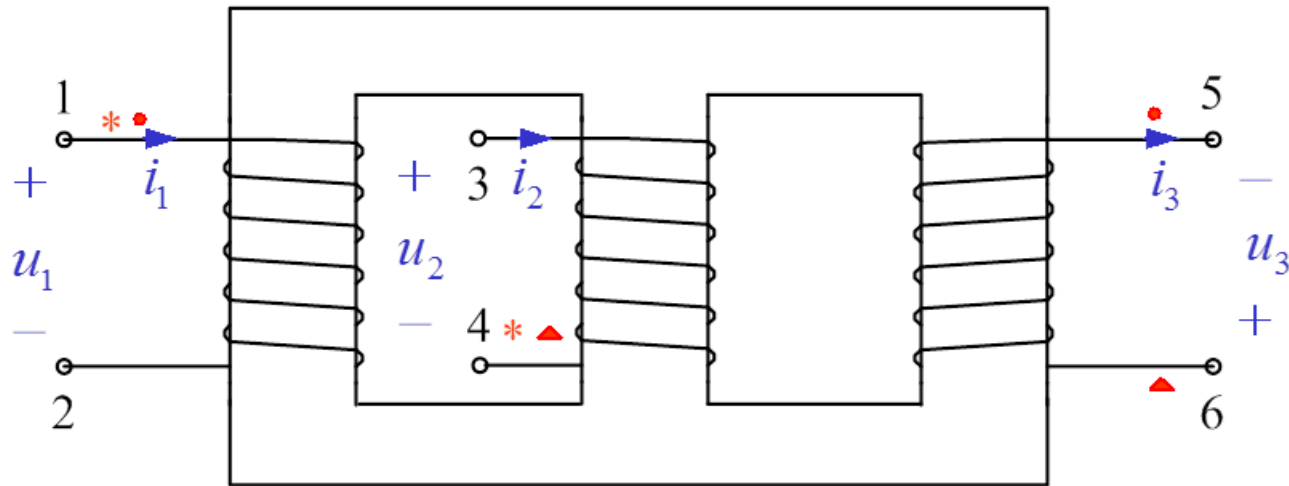


$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(-i_2)}{dt}$$

$$u_2 = +M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{d(-i_2)}{dt}$$

13.2 耦合电感

例：求 u_1 、 u_2 和 u_3



$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} - M_{13} \frac{di_3}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_3}{dt}$$

$$u_3 = L_3 \frac{di_3}{dt} - M_{13} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_2}{dt}$$

13.2 耦合电感

◆ 耦合系数 k

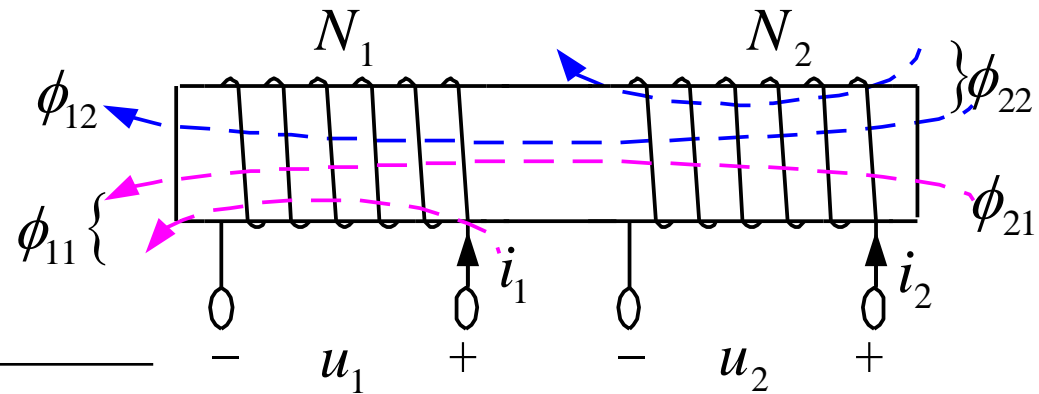
两个线圈磁耦合的紧密程度

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{M_{12} M_{21}}{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{\frac{\psi_{12}}{i_2} \cdot \frac{\psi_{21}}{i_1}}{\frac{\psi_{11}}{i_1} \cdot \frac{\psi_{22}}{i_2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{N_1 \phi_{12} \cdot N_2 \phi_{21}}{N_1 \phi_{11} \cdot N_2 \phi_{22}}} = \sqrt{\frac{\phi_{12} \cdot \phi_{21}}{\phi_{11} \cdot \phi_{22}}} \leq 1$$

$$0 \leq k \leq 1$$



互感小于两元件自感的几何平均值。

◆ 耦合电感的储能

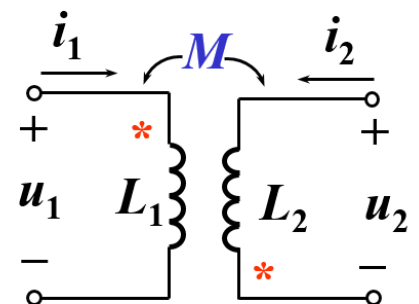
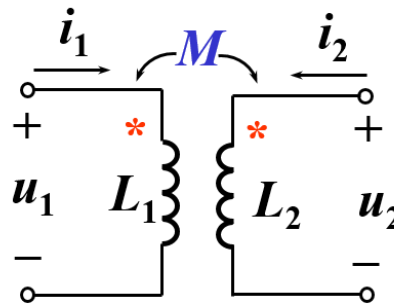
$$w = \int_{-\infty}^t p(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^t (u_1 i_1 + u_2 i_2) dt$$

$$= \int_{-\infty}^t \left[\left(L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \right) i_1 + \left(\pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) i_2 \right] dt$$

$$= \int_0^{i_1} L_1 i_1 di_1 + \int_0^{i_2} L_2 i_2 di_2 + \int_0^{i_1, i_2} \pm M d(i_1 i_2)$$

$$= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$



第13章 含磁耦合的电路

13.1 概述

13.2 耦合电感

13.3 含耦合电感电路的分析

13.4 变压器原理

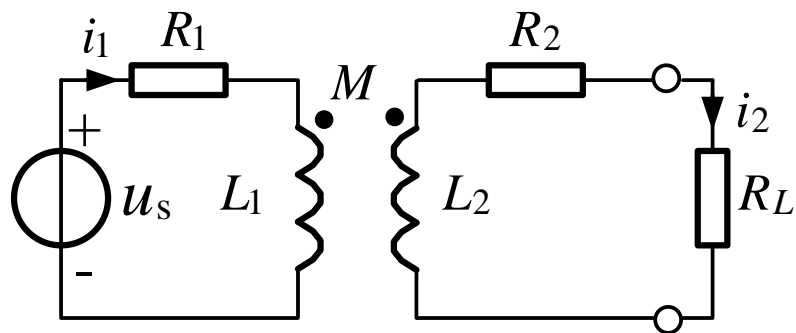
13.5 理想变压器

13.6 拓展与应用

13.3 含耦合电感电路的分析

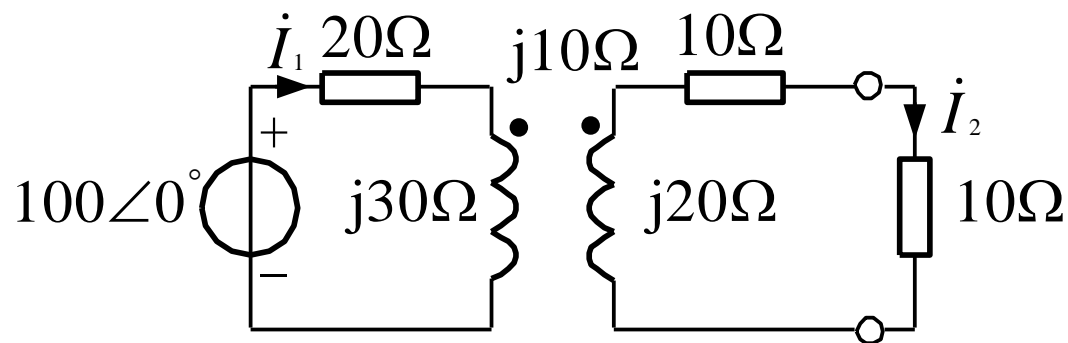
◆ 网孔分析法

$L_1 = 0.3\text{H}$, $L_2 = 0.2\text{H}$, $M = 0.1\text{H}$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 10\Omega$,
 $R_L = 10\Omega$, $u_s = 100\sqrt{2} \cos(100t)\text{V}$. 求 i_1 、 i_2 。



$$20\dot{I}_1 + j30\dot{I}_1 - j10\dot{I}_2 = 100\angle 0^\circ$$

$$10\dot{I}_2 + j20\dot{I}_2 - j10\dot{I}_1 + 10\dot{I}_2 = 0$$



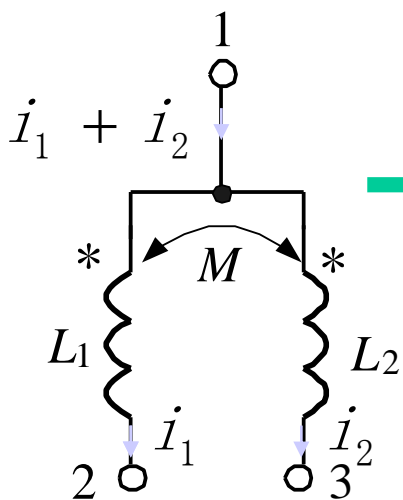
$$\dot{I}_1 = 2.82\angle -50.71^\circ\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = 0.995\angle 174.3^\circ\text{A}$$

13.3 含耦合电感电路的分析

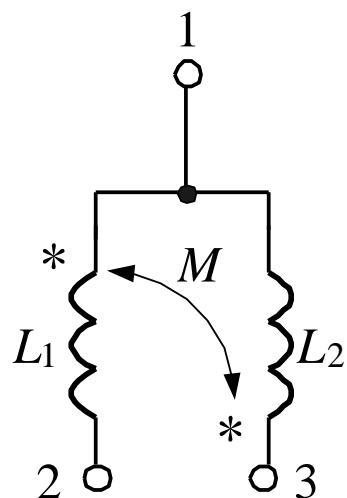
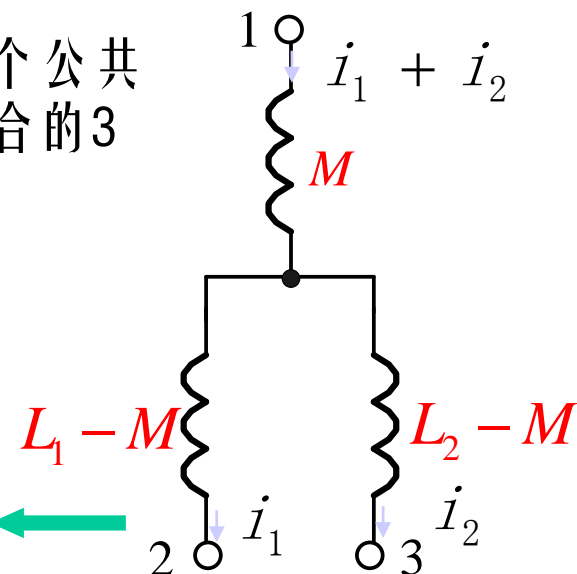
◆ 去耦合等效电路

当耦合的两个线圈有一个公共端时，可以等效为非耦合的3个电感相连。



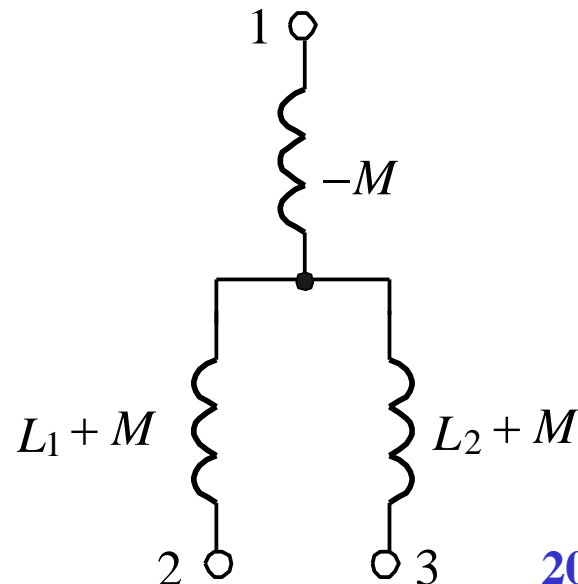
$$u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$= (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right)$$



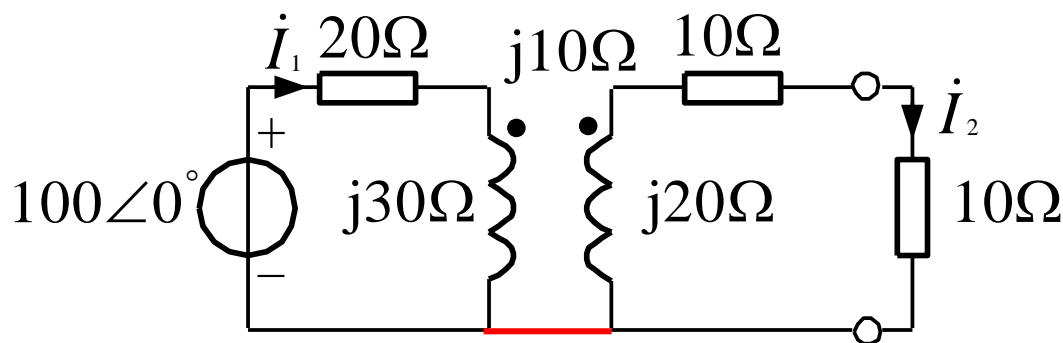
$$u_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$= (L_1 + M) \frac{di_1}{dt} - M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right)$$



13.3 含耦合电感电路的分析

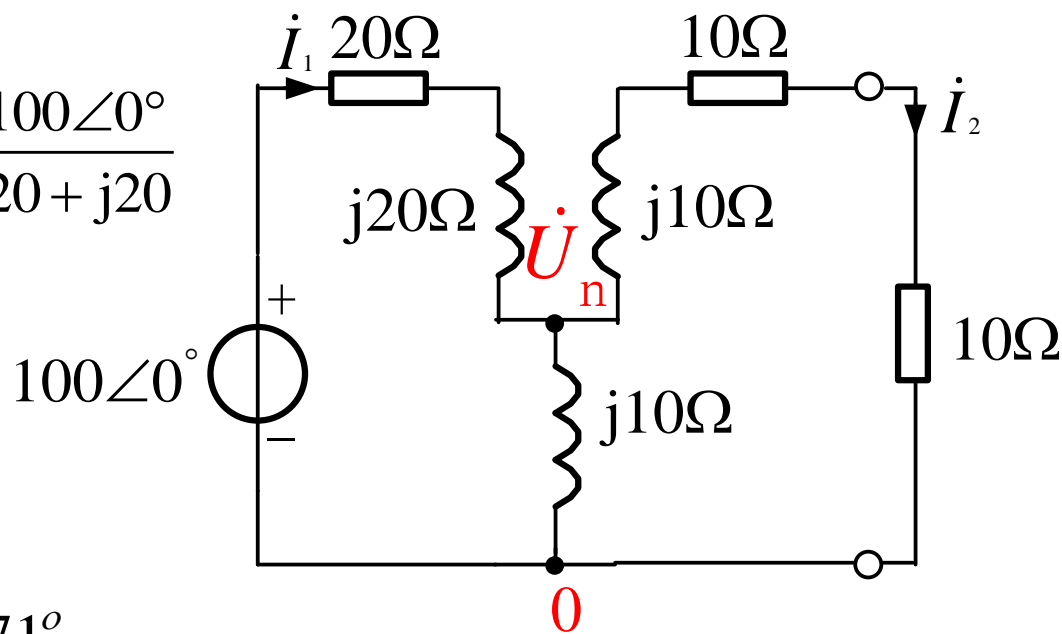
◆ 去耦合等效电路



$$\left(\frac{1}{20+j20} + \frac{1}{j10} + \frac{1}{20+j10}\right)\dot{U}_n = \frac{100\angle 0^\circ}{20+j20}$$

$$\dot{U}_n = \frac{2100 + j800}{101}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{100 - \dot{U}_n}{20 + j20} = 2.82\angle -50.71^\circ$$



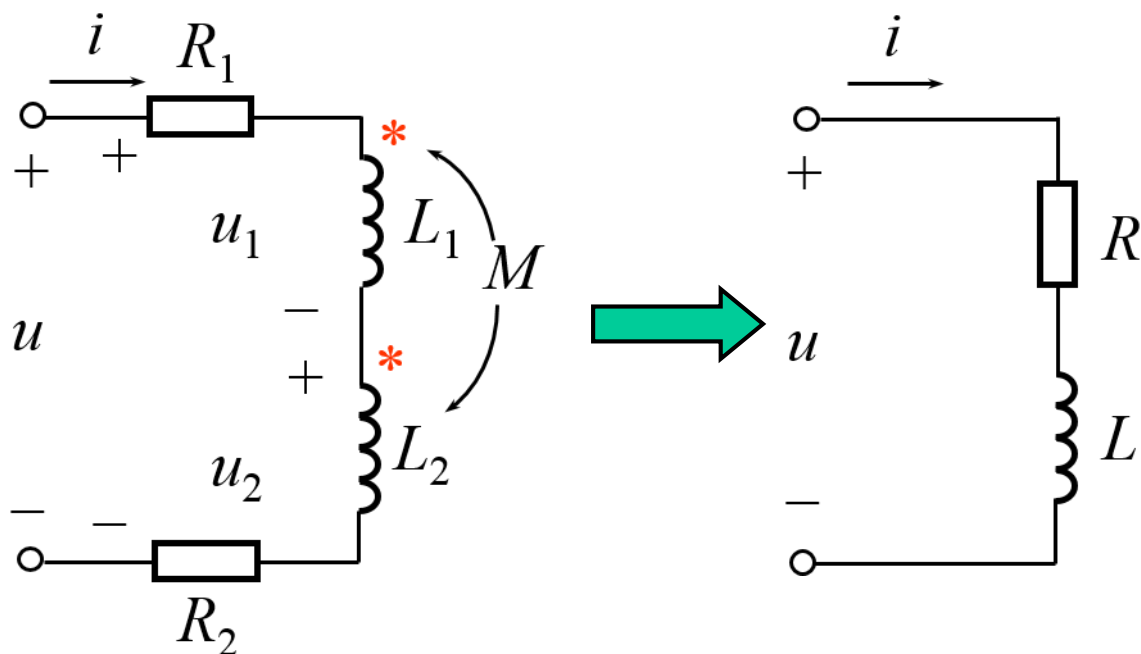
13.3 含耦合电感电路的分析

◆ 去耦合等效电路

- 两个耦合线圈有一个公共端时才可以去耦等效，去耦等效电路的参数与公共端是否为同名端相关。
- 原电路与去耦等效电路对应端子间的电压、对应支路的电流相等，去耦等效电路比原电路多一个结点，即3个电感的连接点。

13.3 含耦合电感电路的分析

◆ u-i 关系

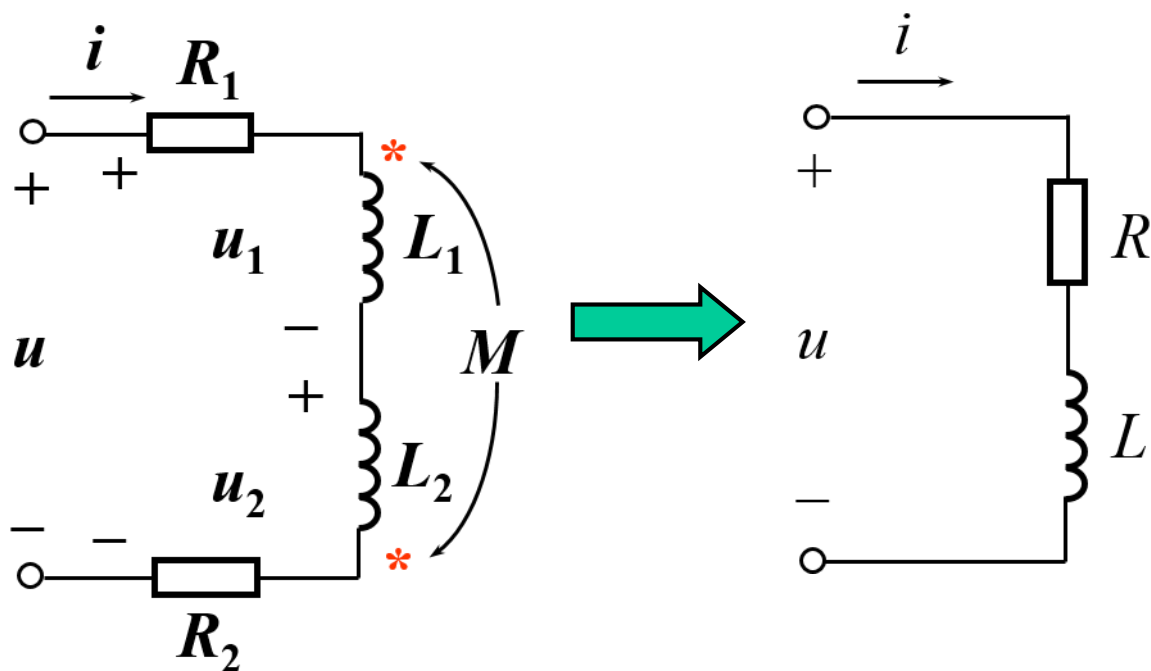


$$\begin{aligned} u &= R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i \\ &= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

$$\therefore R = R_1 + R_2 \quad L = L_1 + L_2 + 2M$$

13.3 含耦合电感电路的分析

◆ u-i 关系

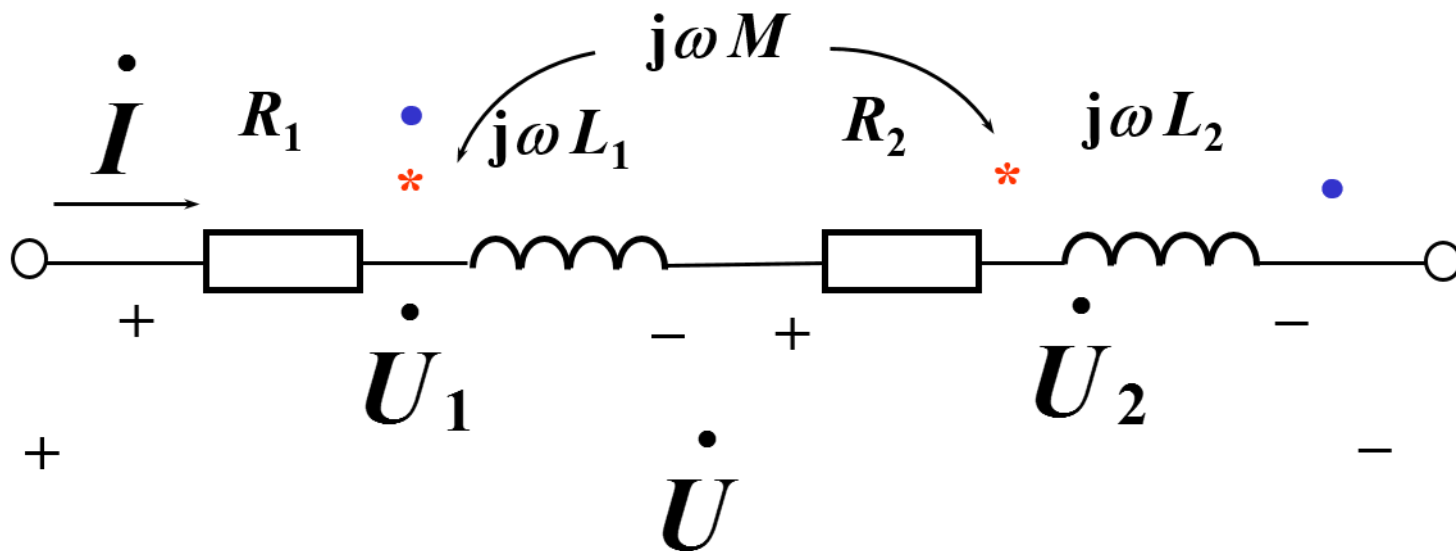


$$\begin{aligned} u &= R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + R_2 i \\ &= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

$$\therefore R = R_1 + R_2 \quad L = L_1 + L_2 - 2M$$

13.3 含耦合电感电路的分析

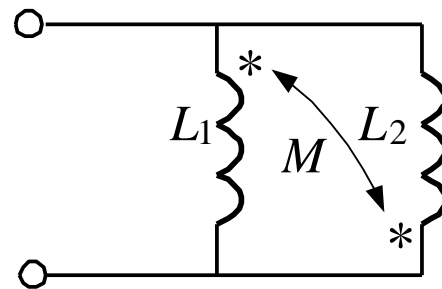
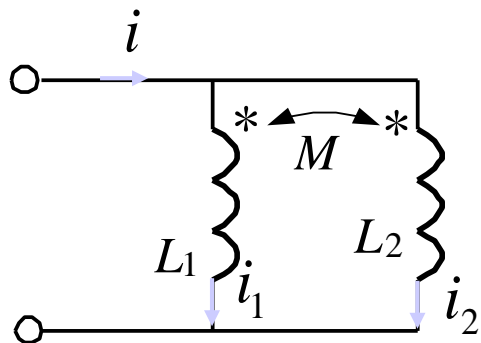
在正弦激励下：



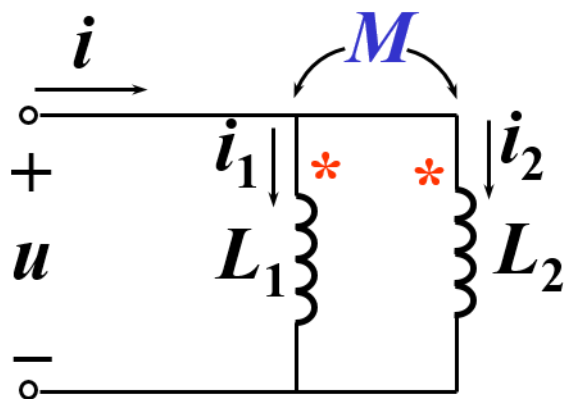
$$\dot{U} = (R_1 + R_2) \dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M) \dot{I}$$

13.3 含耦合电感电路的分析

◆ 计算等效电感



13.3 含耦合电感电路的分析



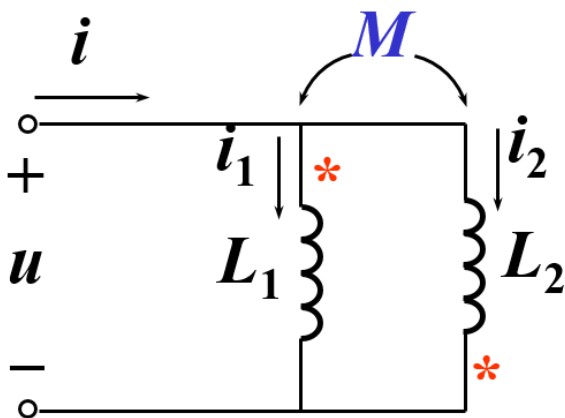
$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

解得 u, i 的关系：

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \geq 0$$

13.3 含耦合电感电路的分析



$$\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

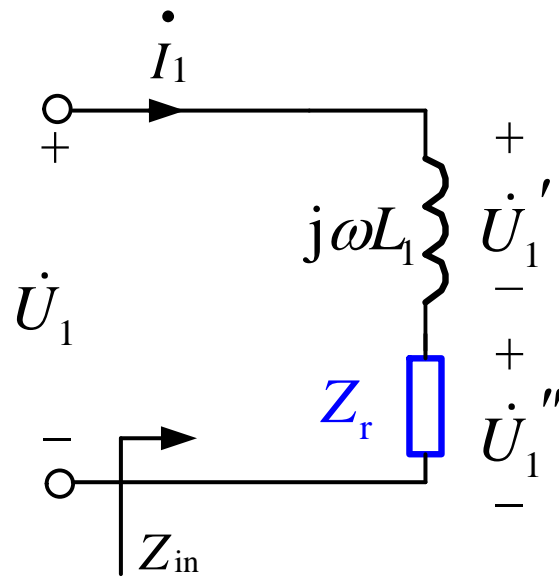
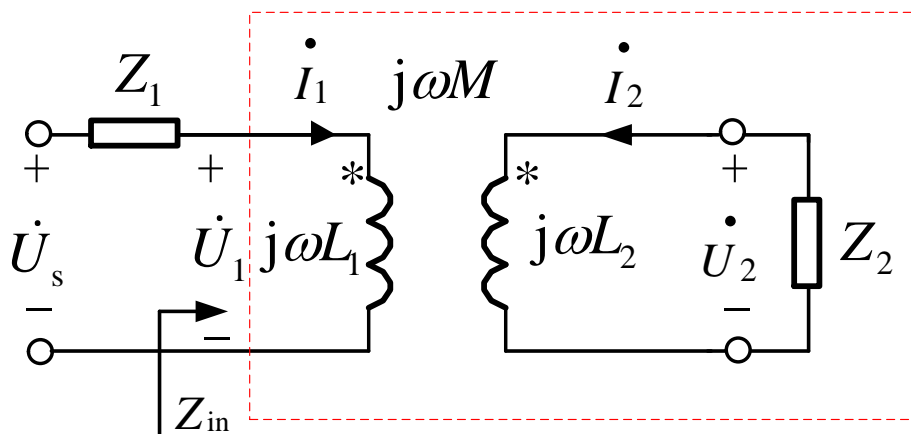
解得 u, i 的关系：

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \geq 0$$

13.3 含耦合电感电路的分析

◆ 映射阻抗



$$Z_{\text{in}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2}{\dot{I}_1} = j\omega L_1 + j\omega M \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = -Z_2 \dot{I}_2$$

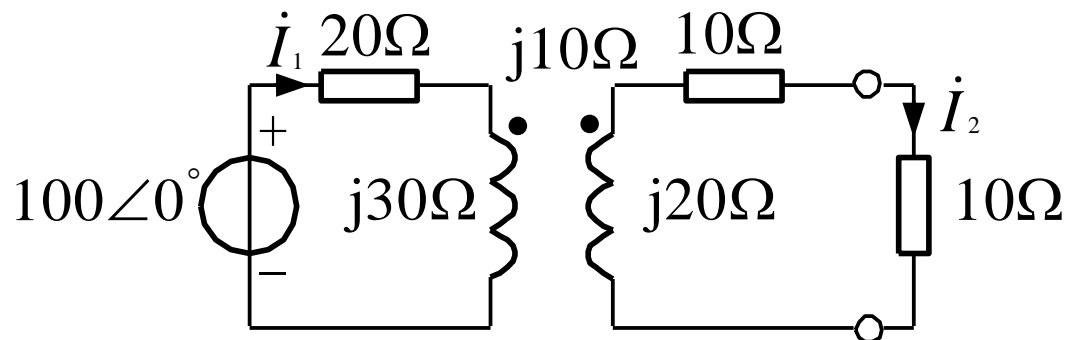
$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = -\frac{j\omega M}{Z_2 + j\omega L_2}$$

$$Z_{\text{in}} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2}$$

$$Z_r = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2}$$

13.3 含耦合电感电路的分析

◆ 映射阻抗



$$j30 + Z_r$$

$$Z_r = \frac{10^2}{10 + 10 + j20} \Omega = \frac{5 - j5}{2} \Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{100 \angle 0^\circ}{20 + j30 + Z_r} = 2.82 \angle -50.71^\circ$$

$$Z_{\text{in}} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2}$$

$$Z_r = \frac{(\omega M)^2}{Z_2 + j\omega L_2}$$

□ 映射阻抗与同名端状况无关

第13章 含磁耦合的电路

13.1 概述

13.2 耦合电感

13.3 含耦合电感电路的分析

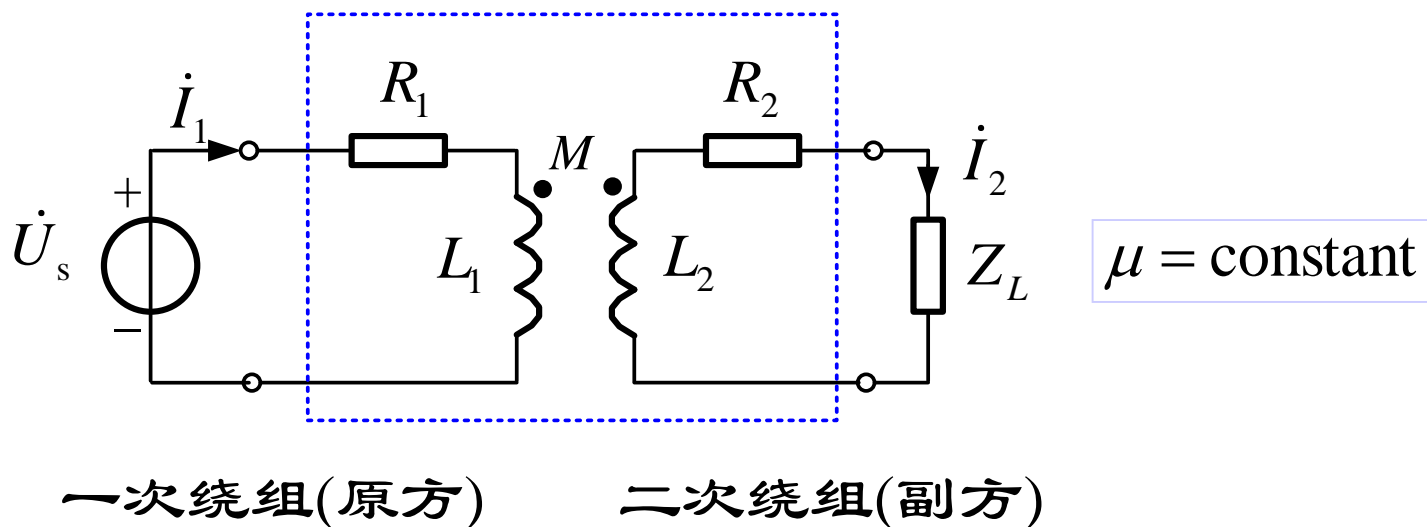
13.4 变压器原理

13.5 理想变压器

13.6 拓展与应用

13.4 变压器原理

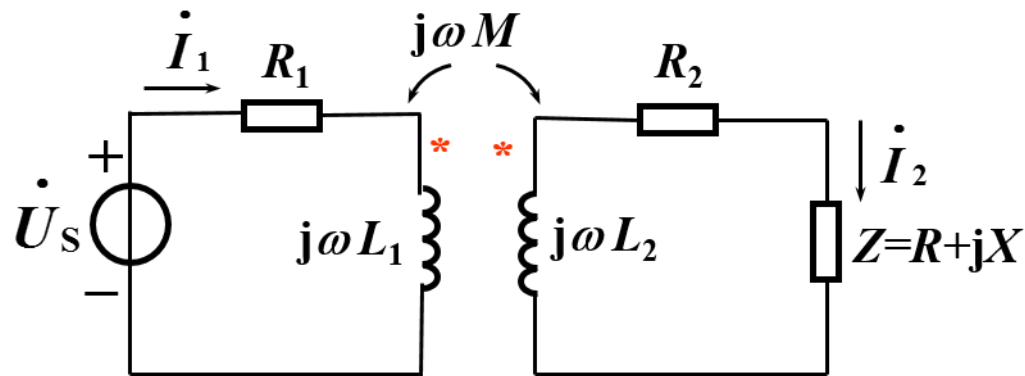
◆ 变压器



- ◆ **线性变压器** 自感不大，低频下自感抗低，因而线圈电流大。一般用在高频下。优点是没有铁心损耗。分析时用线性耦合电感为模型。
- ◆ 为了加大自感，采用铁心，即为**铁心变压器**，是**非线性耦合系统**。由于自感大，可以用于低频下。存在铁心损耗。分析时近似为**理想变压器**。

13.4 变压器原理

◆ 线性变压器



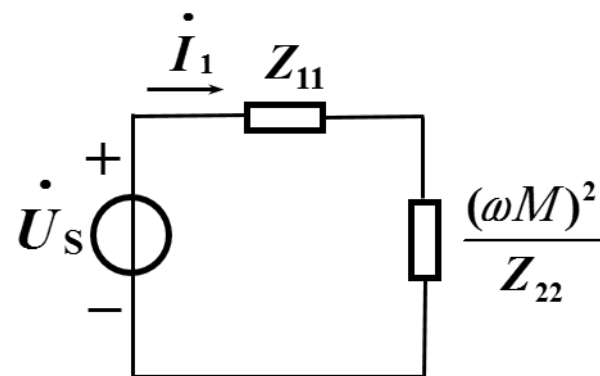
原边回路总抗阻 $Z_{11}=R_1+j\omega L_1$

副边回路总阻抗 $Z_{22}=(R_2+R)+j(\omega L_2+X)$

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_s \\ -j\omega M \dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$

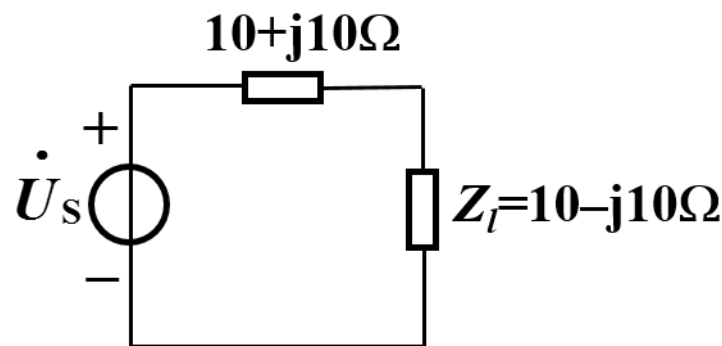
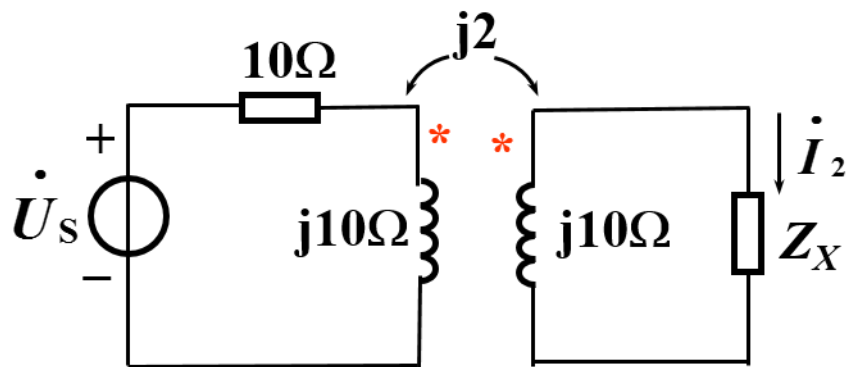
$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}}$$



13.4 变压器原理

例：已知 $U_S=20\text{ V}$ ，原边等效电路的映射阻抗 $Z_l=10-j10$ 。

求： Z_X 并求负载获得的有功功率。



解： $Z_l = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{4}{Z_X + j10} = 10 - j10$

$$\therefore Z_X = \frac{4}{10 - j10} - j10 = 0.2 - j9.8$$

此时负载获得的功率： $P = P_R = \left(\frac{20}{10 + 10} \right)^2 R_l = 10\text{ W}$

实际是最佳匹配： $Z_l = Z_{11}^*$, $P = \frac{U_S^2}{4R} = 10\text{ W}$

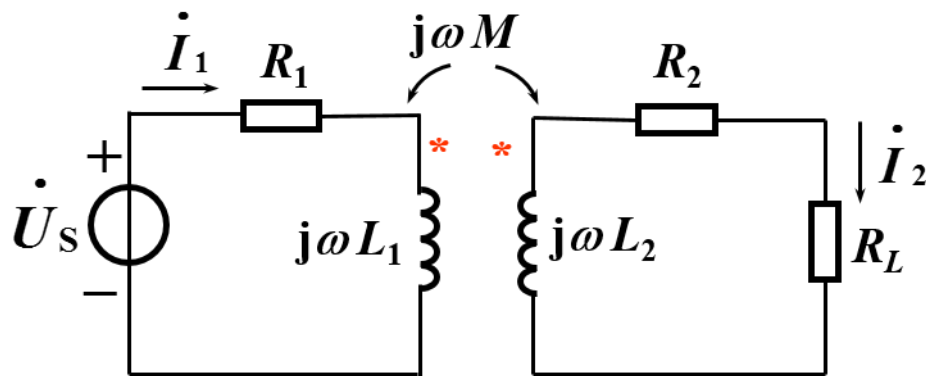
13.4 变压器原理

例： $L_1=3.6\text{H}$, $L_2=0.06\text{H}$, $M=0.465\text{H}$, $R_1=20\Omega$, $R_2=0.08\Omega$,

$R_L=42\Omega$, $\omega=314\text{rad/s}$,

$\dot{U} = 115\angle 0^\circ \text{ V}$

求： \dot{I}_1 , \dot{I}_2 .

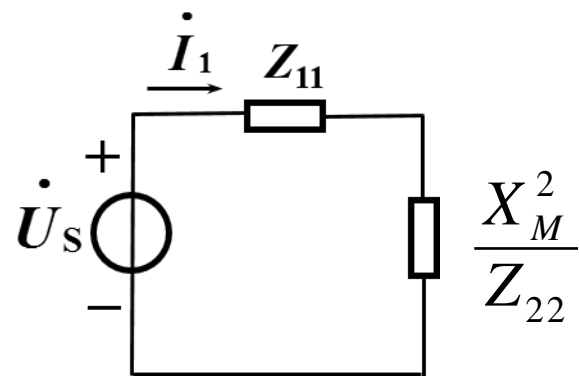


$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 = 20 + j1131 \Omega$$

$$Z_{22} = R_2 + R_L + j\omega L_2 = 42.08 + j18.85 \Omega$$

$$Z_1 = \frac{X_M^2}{Z_{22}} = 464\angle(-24.1^\circ) \Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + Z_1} \quad \dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}}$$



第13章 含磁耦合的电路

13.1 概述

13.2 耦合电感

13.3 含耦合电感电路的分析

13.4 变压器原理

13.5 理想变压器

13.6 拓展与应用

13.5 理想变压器

◆ 理想变压器

(a) $k = 1$ 线性全耦合系统

(b) $\mu \rightarrow \infty \rightarrow L_1, L_2 \rightarrow \infty$

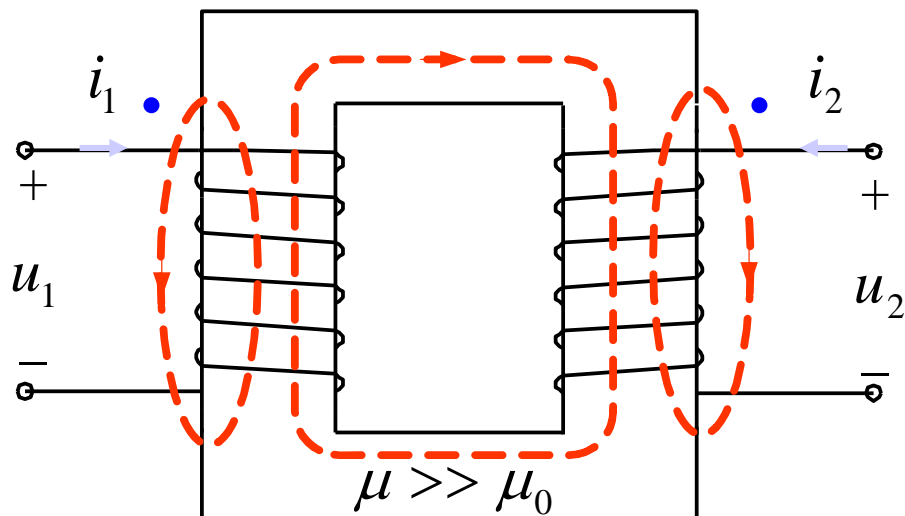
(c) $R_1 = 0 = R_2$ 没有损耗

$$u_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d(N_1\phi)}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d(N_2\phi)}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

功率方程

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$$



$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

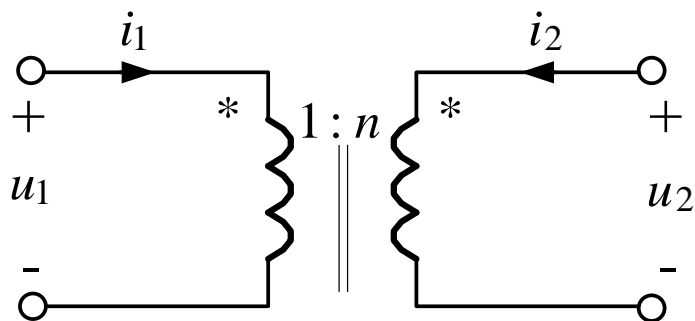
电压方程

$$i_1 = -\frac{N_2}{N_1} i_2 = -\frac{1}{n} i_2$$

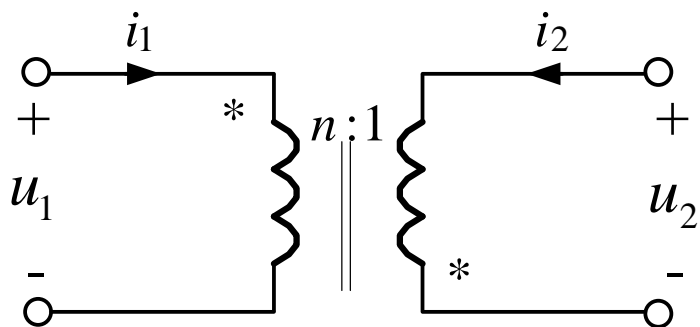
电流方程

13.5 理想变压器

◆ 电压比与电流比



$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{n} \quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{n}{1}$$

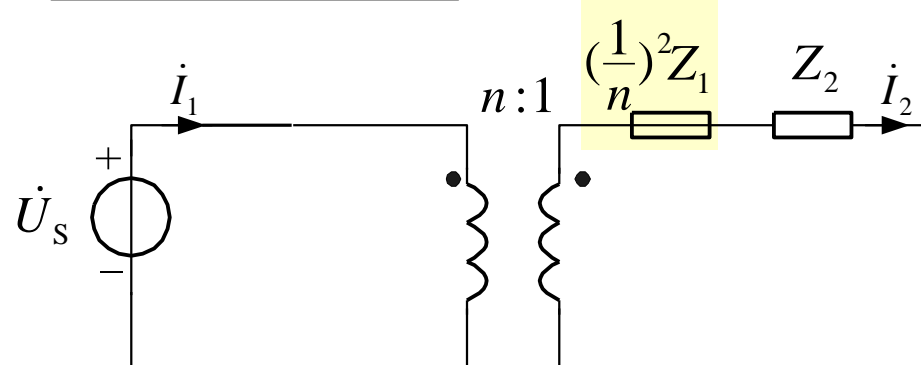
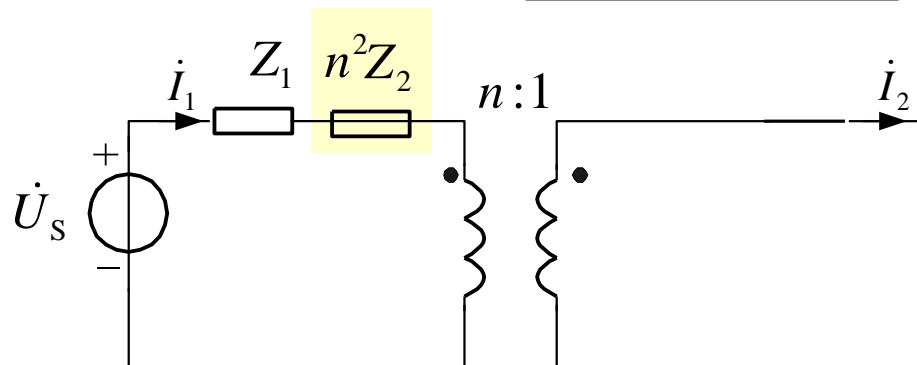
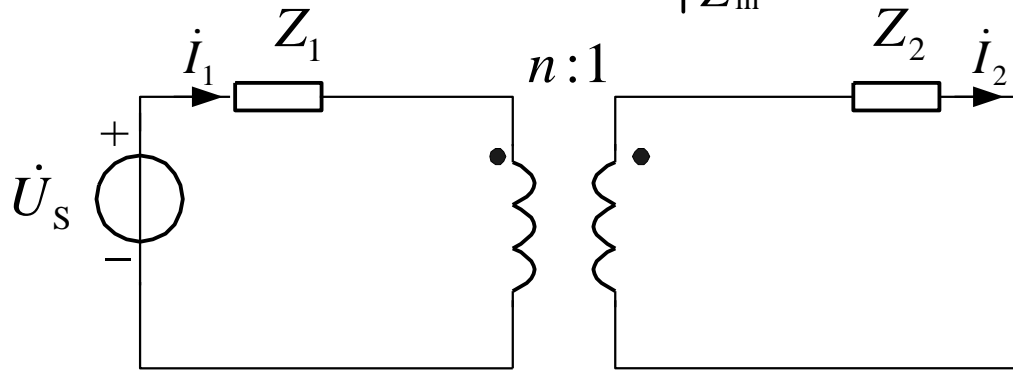
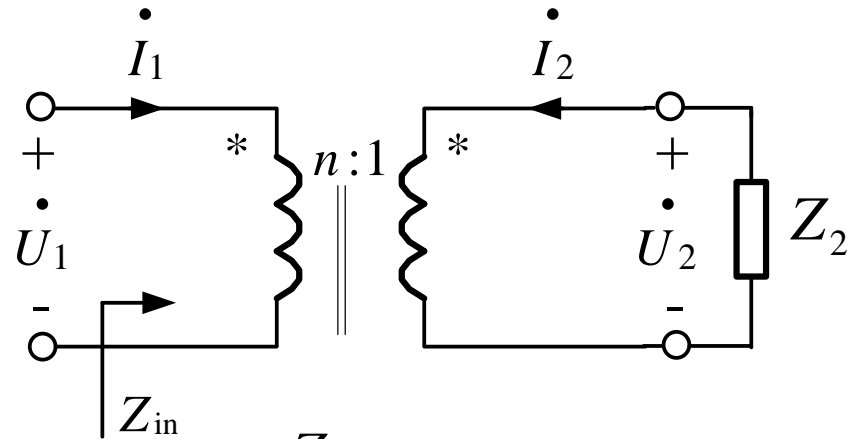


$$\frac{u_1}{u_2} = -n \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{n}$$

13.5 理想变压器

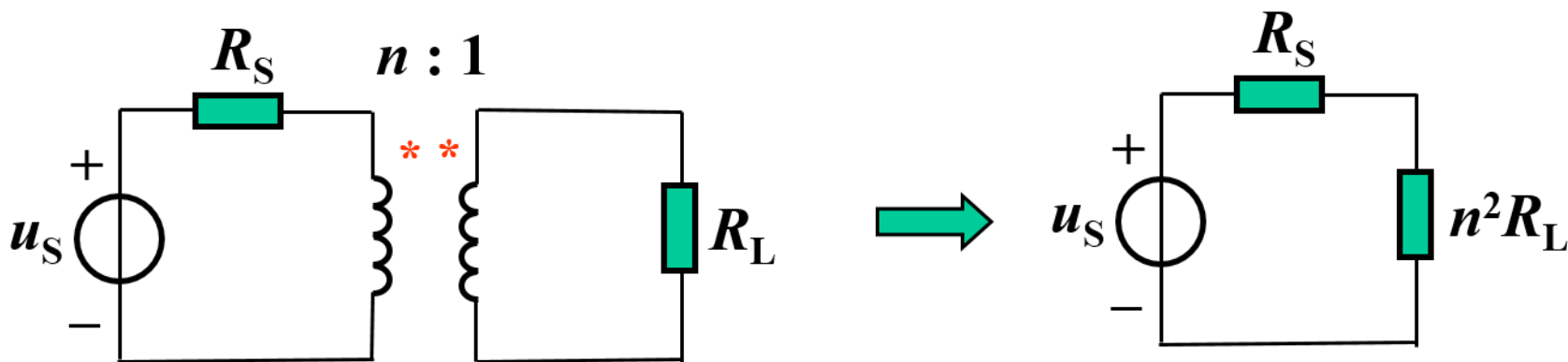
◆ 阻抗变换

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-\frac{1}{n}\dot{I}_2} = n^2 Z_2$$



13.5 理想变压器

例：已知电阻 $R_S=1\text{k}\Omega$ ，负载电阻 $R_L=10\Omega$ 。为使 R_L 上获得最大功率，求理想变压器的变比 n 。



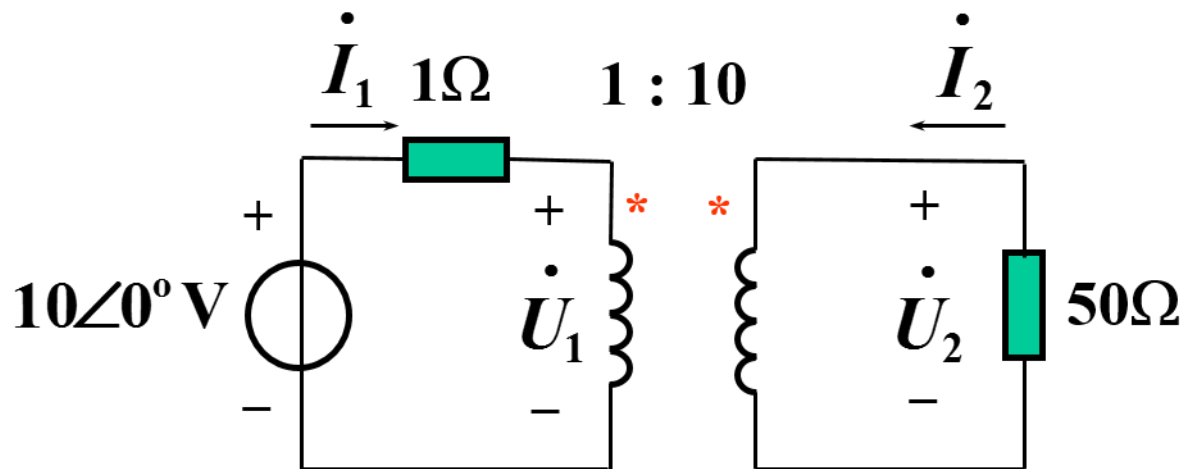
解：当 $n^2 R_L = R_S$ 时匹配，即

$$10n^2 = 1000$$

$$n^2 = 100 \quad n = 10$$

13.5 理想变压器

例：求 \dot{U}_2 .



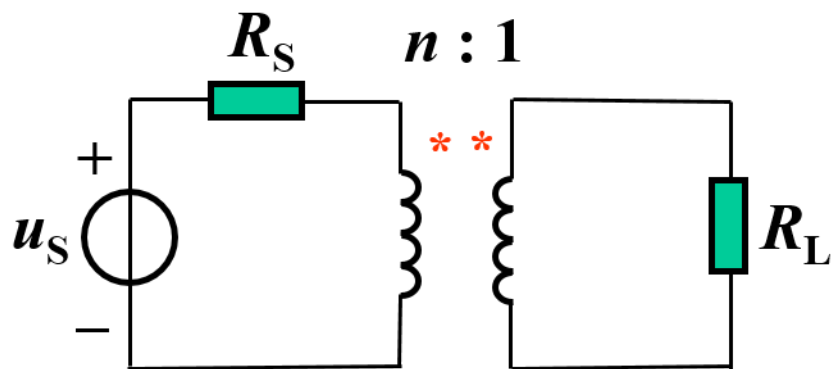
◆ 方法1：列方程

$$\begin{cases} 1 \times \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = 10\angle 0^\circ \\ \dot{U}_2 = -50\dot{I}_2 \\ \dot{U}_1 = \frac{1}{10}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -10\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \dot{U}_2 = 33.33\angle 0^\circ \text{ V}$$

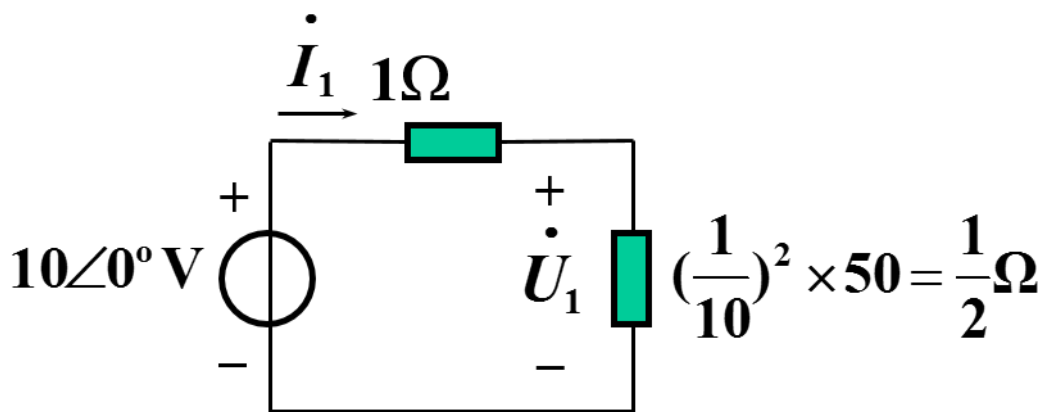
13.5 理想变压器

◆ 方法2：阻抗变换



$$\dot{U}_1 = \frac{10\angle 0^\circ}{1 + 1/2} \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3} \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= 10 \dot{U}_1 \\ &= 33.33 \angle 0^\circ \text{ V} \end{aligned}$$



13.5 理想变压器

◆ 方法3：戴维南等效

求 \dot{U}_{oc} :

$$\because \dot{I}_2 = 0, \therefore \dot{I}_1 = 0$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{oc} &= 10\dot{U}_1 \\ &= 100\angle 0^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

求 R_0 :

$$R_0 = 10^2 * 1 = 100$$

$$\dot{U}_2 = \frac{100\angle 0^\circ}{100 + 50} \times 50 = 33.33\angle 0^\circ \text{ V}$$

