电路理论基础

—电路理论（基础篇）

华中科技大学 · 电气学院

ccsfm@hust.edu.cn

第10章 正弦稳态分析

第10章 正弦稳态分析

●重点

正弦电量

相量法

阻抗与导纳

复杂正弦稳态电路分析

为什么要研究正弦信号？

主要考虑以下几点：

1. 正弦量是最简单的周期信号之一，同频正弦量在加、减、微分、积分运算后得到的仍为同频正弦量；

2. 正弦信号应用广泛（如市电，载波等）；

3. 非正弦量用傅立叶级数展开后得到一系列正弦函数。

10.1 概述

正弦量 → 相量（复数）

相量（复数）、电路 → 相量模型

↓

相量方程（复数方程）

↓

相量解

↓

正弦量

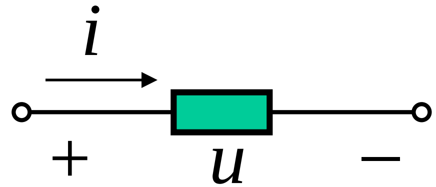
实现上述思路，要解决哪些关键问题?

1. 正弦量与相量的对应
2. 正弦量运算的相量方法
3. 电路基本方程的相量形式

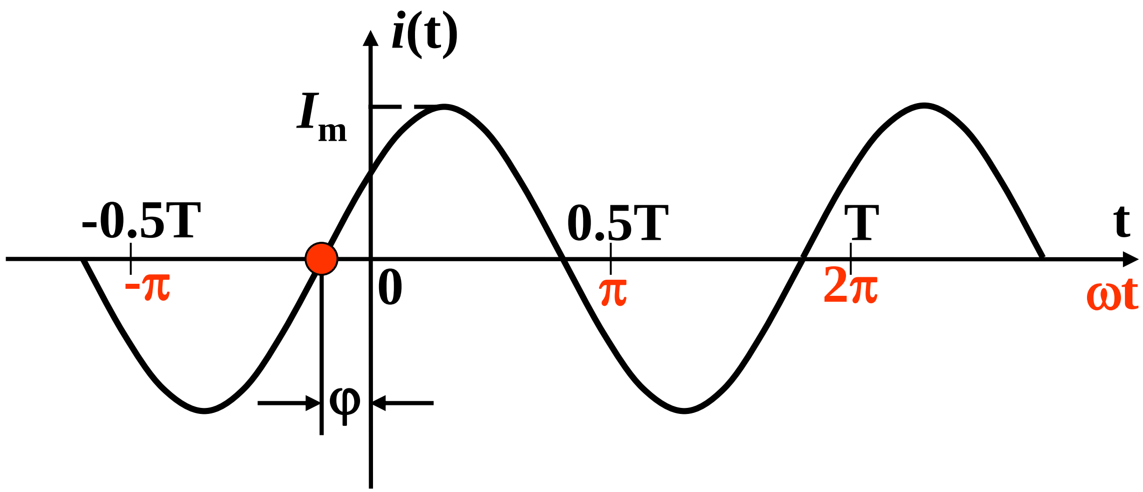
同频率的正弦量 ⟷ 恒定的复数

定义一种变换

◆ 正弦电量三要素：



$i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi)$



(1) **幅值** (*amplitude*) (振幅、 最大值) I_m

(2) **角频率**(*angular frequency*) ω

(3) **初相位**(*initial phase angle*) φ

◆ 正弦电量三要素之一：　振幅(幅值)

$$\boxed{i = I_m \sin(\omega t + \varphi)}$$

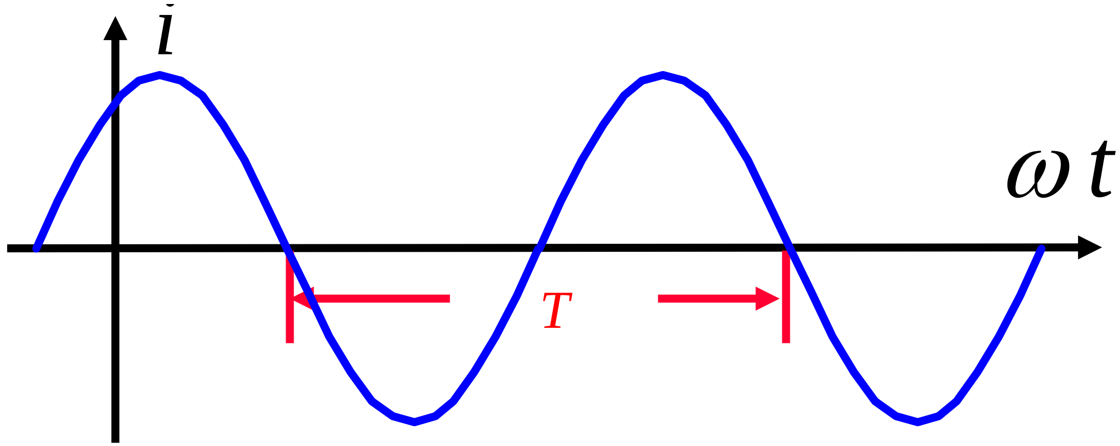
I_m　为正弦电流的最大值

最大值

电量名称必须大写，
下标加 m。
如：U_m、I_m

振幅恒为正值。

◆ 正弦电量三要素之二：角频率



描述变化周期的几种方法：

1. **周期** T： 变化一周所需的时间　　单位：秒，毫秒..
2. **频率** f： 每秒变化的次数　　单位：赫兹，千赫兹 ...
3. **角频率** ω： 每秒变化的弧度　　单位：弧度/秒

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

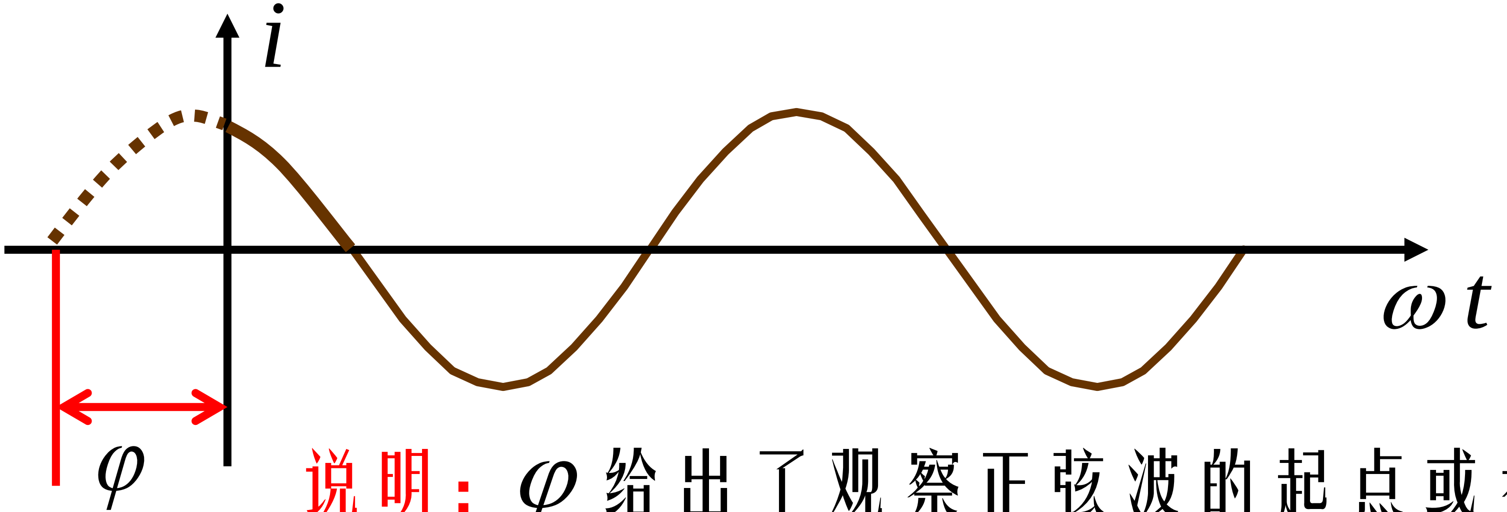
$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

◆ 正弦电量三要素之三：初相位

$$\boxed{i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi)}$$

$(\omega t + \varphi)$：正弦波的相位角或相位。

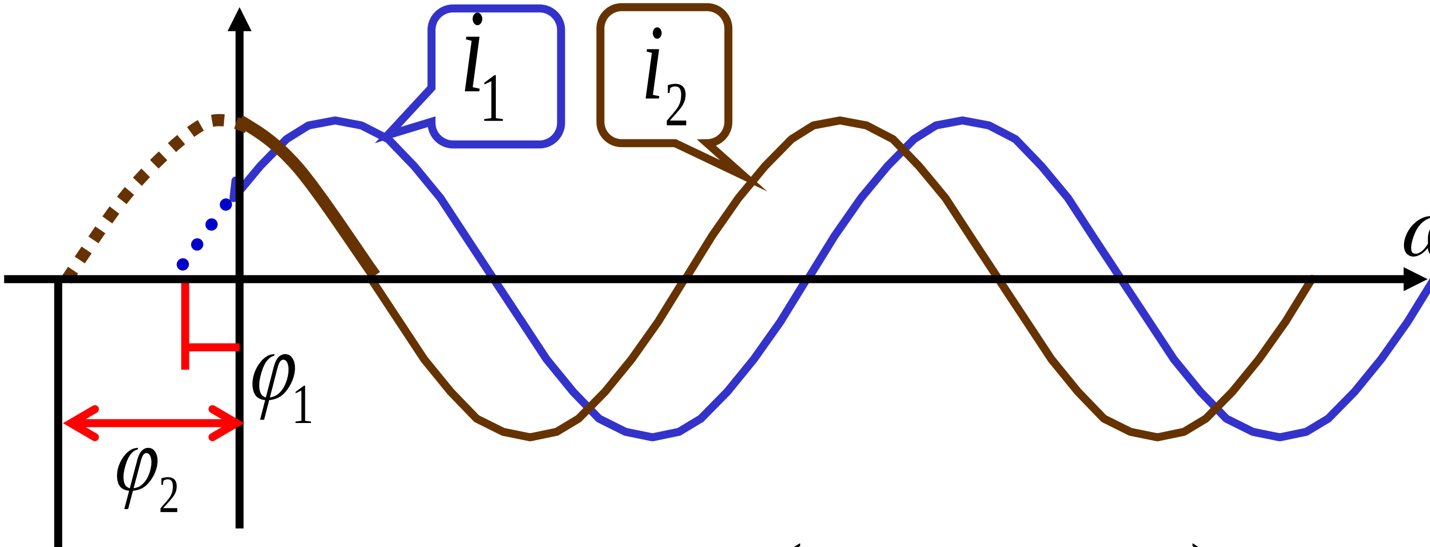
φ：$t = 0$ 时的相位，称为初相位或初相角。



说明：φ 给出了观察正弦波的起点或参考点

常用于描述多个正弦波相位间的关系

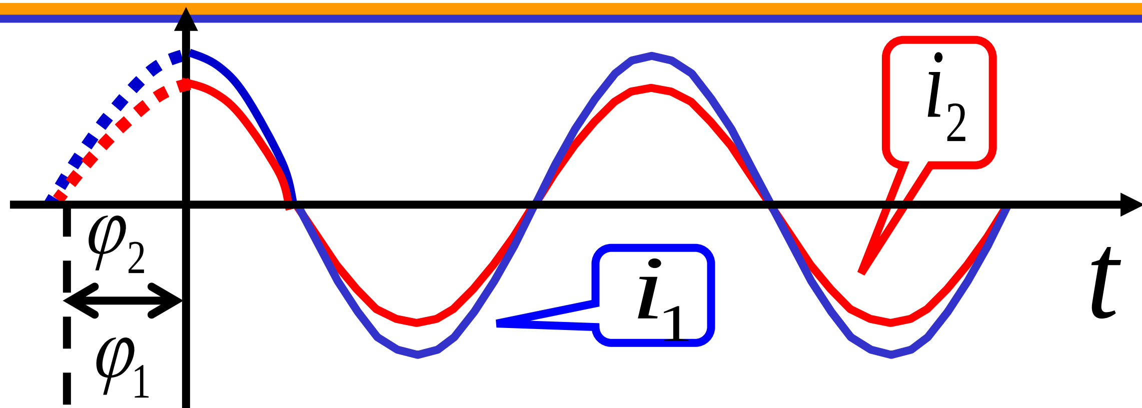
两个同频率正弦量间的相位差(初相差)



$$\begin{cases} i_1 = I_{m1}\sin(\omega t + \varphi_1) \\ i_2 = I_{m2}\sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

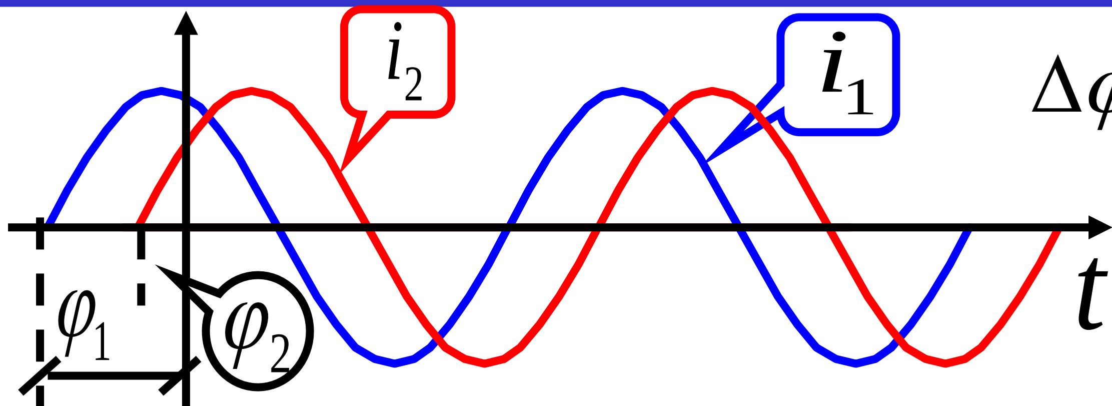
$$\boxed{\phi = (\omega t + \phi_1) - (\omega t + \phi_2) = \phi_1 - \phi_2} \quad \leq \pi \ (180^\circ)$$

同相位



$$\varphi_1 = \varphi_2$$

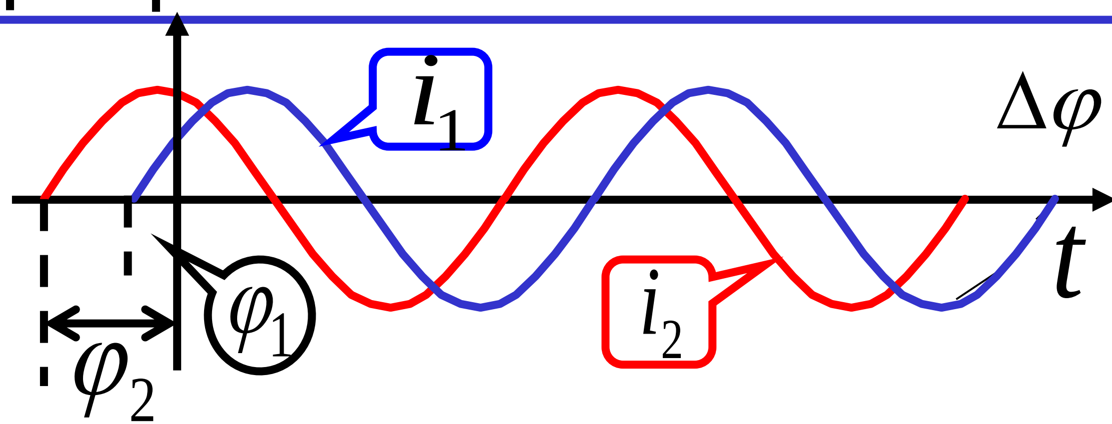
相位超前



$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$$

$\boxed{i_1 \text{ 超前于 } i_2}$

相位滞后

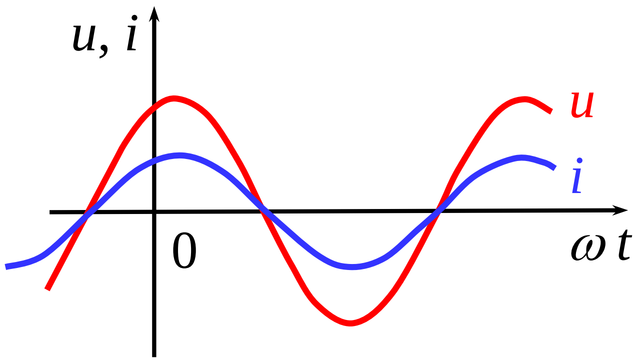


$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 < 0$$

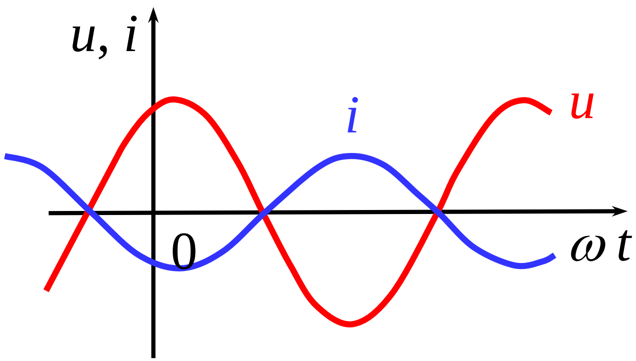
$\boxed{i_1 \text{ 滞后于 } i_2}$

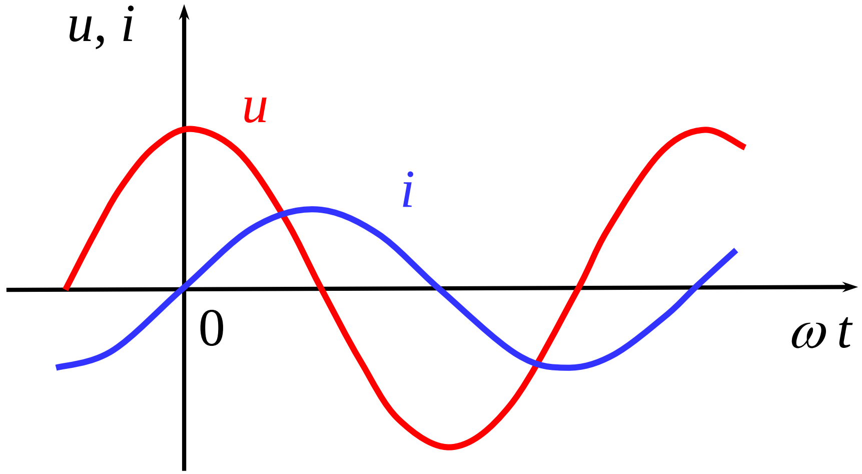
◆ 特殊相位关系：

$\varphi = 0$，同相：



$\varphi = \pm\pi\ (\pm 180^{o})$，反相：





$\varphi = 90°$

u 领先 i 90°

或 i 落后 u 90°

规定：$|\varphi| \le \pi\ (180°)$

◆ 周期性电量的有效值

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了确切的衡量其大小工程上采用有效值来衡量。

◆ 有效值(*effective value*)定义

定义：若周期性电流 i 流过电阻 R，在一周期T 内产生的热量，等于一直流电流I 流过R，在时间T 内产生的热量，则称电流I 为周期性电流 i 的有效值。

有效值概念

热效应相当

$$\underbrace{\int_0^T i^2 R\,dt}_{\text{交流}} = \underbrace{I^2 RT}_{\text{直流}}$$

有效值

电量必须大写

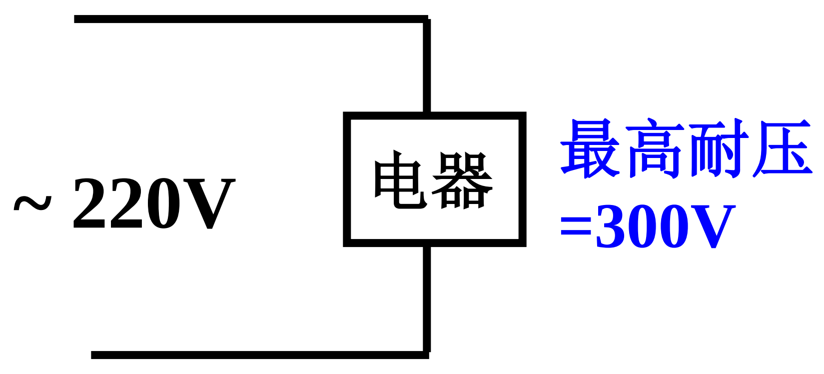
如：U、I

则有 $\boxed{I = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T i^2 \mathrm{d}t}}$ （均方根值）

当 $\boxed{i = I_m \sin(\omega t + \phi)}$ 时，可得 $\boxed{I = I_m / \sqrt{2}}$

工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备铭牌额定值、电网的电压等级等。但绝缘水平、耐压值指的是最大值。因此，在考虑电器设备的耐压水平时应按最大值考虑。

若购得一台耐压为300V的电器，是否可用于220V的线路上?



第10章 正弦稳态分析

10.1 概述

10.2 正弦电量

10.3 相量法

10.4 阻抗与导纳

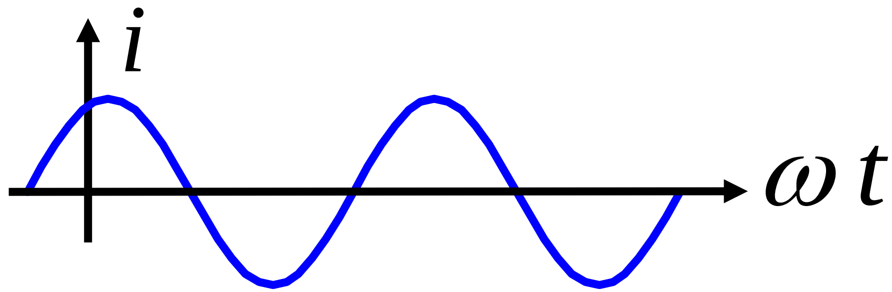
10.5 复杂正弦稳态电路分析

10.6 位形相量图

10.7 拓展与应用

◆ 正弦电量的表示方法

◆波形图



◆瞬时值表达式 $\boxed{i = I_{\mathrm{m}}\sin(1000t + 30^\circ)}$

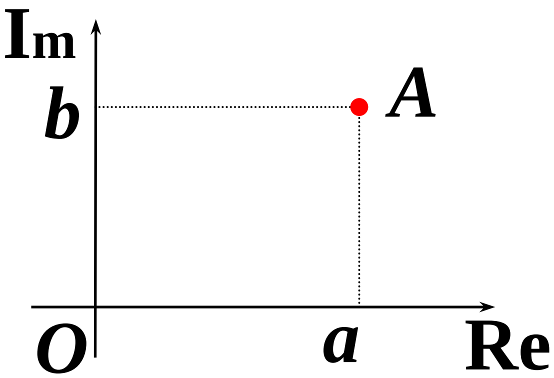
必须小写

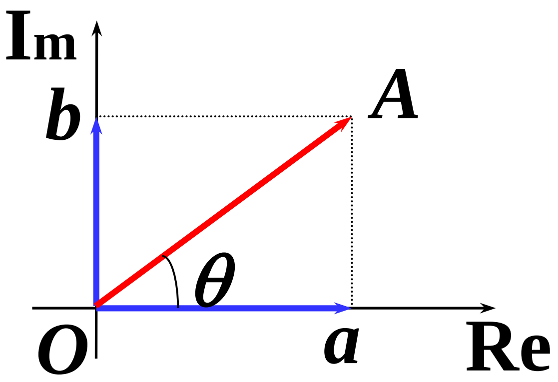
◆相量

重点

前两种不便于运算，重点介绍相量表示法。

◆ 复数A表示形式： $A=a+jb$ ($j=\sqrt{-1}$ 为虚数单位)





一个复数A可以在复平面上表示为从原点到A的向量，此时a可看作与实轴同方向的向量，b可看作与虚轴同方向的向量。由平行四边形法则。则$a+jb$即表示从原点到A的向量，其模为$|A|$，幅角为θ。所以复数A又可表示为 $A=|A|e^{j\theta}=|A|\underline{/\theta}$

三种表示法的关系：

$$\begin{cases} A=a+\mathrm{j}b \\ A=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=|A|\angle\theta \end{cases}$$

代数式–直角坐标表示

指数式和极坐标式

$$\begin{cases} |A|=\sqrt{a^2+b^2} \\ \theta=\mathrm{arctag}\dfrac{b}{a} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a=|A|\cos\theta \\ b=|A|\sin\theta \end{cases}$$

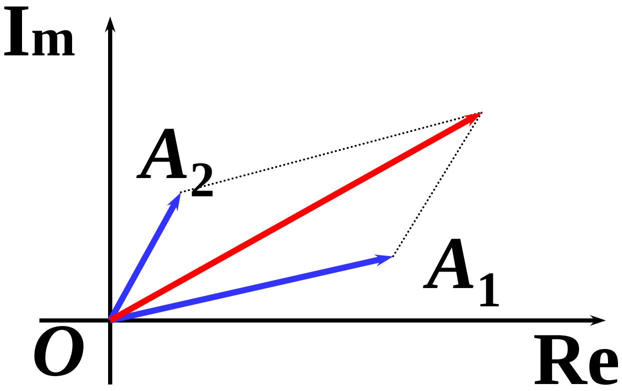
◆ 复数运算

(1)加减运算——直角坐标

若 $A_1=a_1+\mathrm{j}b_1$， $A_2=a_2+\mathrm{j}b_2$

则 $A_1 \pm A_2=(a_1 \pm a_2)+\mathrm{j}(b_1 \pm b_2)$

加减法可用图解法。



(2) 乘除运算——极坐标式或指数式较方便

若 $A_1=|A_1|\angle\theta_1$ ，若$A_2=|A_2|\angle\theta_2$

则 $A_1 A_2 =|A_1||A_2|\angle\theta_1+\theta_2$

$$\frac{A_1}{A2}=\frac{|A_1|\angle\theta_1}{|A2|\angle\theta_2}=\frac{|A_1|e^{j\theta_1}}{|A2|e^{j\theta 2}}=\frac{|A_1|}{|A2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)}=\frac{|A_1|}{|A2|}\angle\theta_1-\theta_2$$

乘法：模相乘，角相加；

除法：模相除，角相减。

例. $5\angle 47° + 10\angle -25° = (3.41+j3.657) + (9.063-j4.226)$

$=12.47-j0.567 = 12.48\angle -2.61°$

例.

$$220\angle 35^{\circ}+\frac{(17+j9)(4+j6)}{20+j5}$$

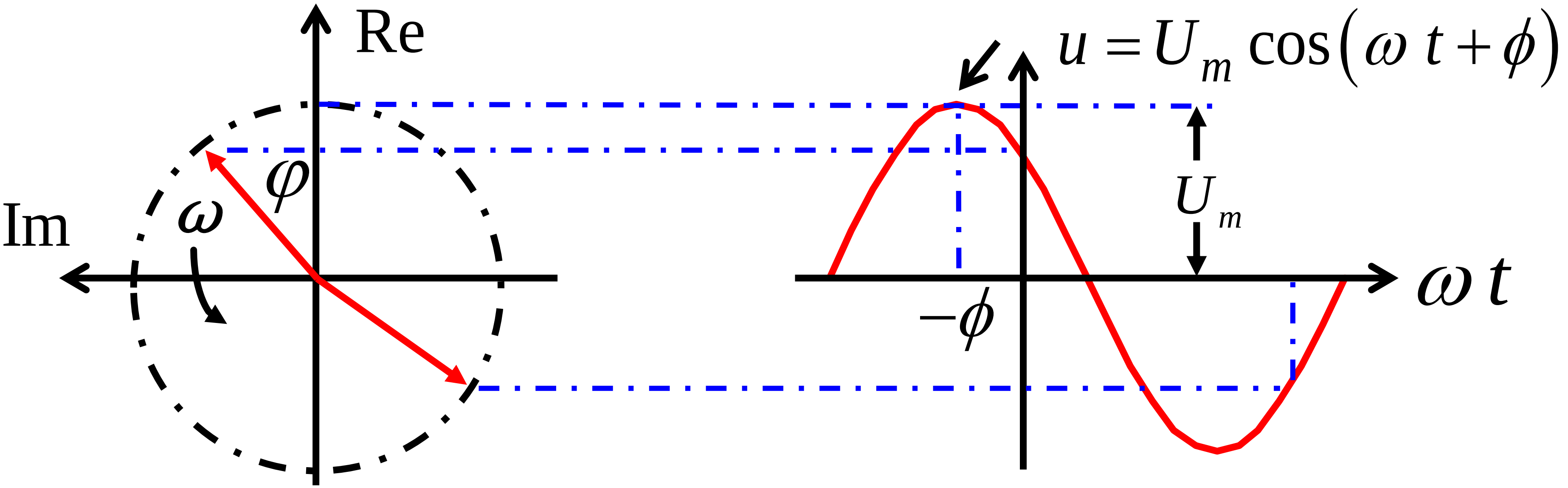
$$=180.2+j126.2+\frac{19.24\angle 27.9^{\circ}\times 7.211\angle 56.3^{\circ}}{20.62\angle 14.04^{\circ}}$$

$$=180.2+j126.2+6.728\angle 70.16^{\circ}$$

$$=180.2+j126.2+2.238+j6.329$$

$$=182.5+j132.5=225.5\angle 36^{\circ}$$

概念：一个正弦量的瞬时值可以用一个旋转的矢量在实轴上的投影值（相量）来表示。



矢量长度 = $\boxed{U_m}$

矢量与实轴夹角 = 初相位 φ

矢量以角速度 ω **按逆时针方向旋转**

构造一个复函数 $A(t) = \sqrt{2}U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\Psi)}$ ◆没有物理意义

$$= \sqrt{2}U\cos(\omega t + \Psi) + \mathrm{j}\sqrt{2}U\sin(\omega t + \Psi)$$

若对$A(t)$取实部：

$\mathrm{Re}[A(t)] = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \Psi)$ **是一个正弦量，有物理意义。**

对于任意一个正弦时间函数都可以找到唯一的与其对应的复指数函数：

$$u = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \Psi) \leftrightarrow A(t) = \sqrt{2}Ue^{\mathrm{j}(\omega t+\Psi)}$$

$A(t)$还可以写成 $A(t) = \sqrt{2}\underbrace{U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}}_{\text{复常数}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \sqrt{2}\,\dot{U}\,e^{\mathrm{j}\omega t}$

$A(t)$包含了三要素：U、Ψ、w，复常数包含了U，Ψ。

称 $\dot{U}=U\angle\Psi$ 为正弦量 **u(t)** 对应的相量。

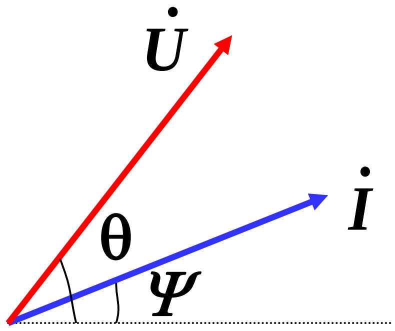
$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\Psi\ )\ \Leftrightarrow\ \dot{U}=U\angle\Psi$$

加一个小圆点是用来和普通的复数相区别(强调它与正弦量的联系)，同时也改用“相量”，而不用“向量”，是因为它表示的不是一般意义的向量，而是表示一个正弦量。

同样可以建立正弦电压与相量的对应关系：

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta\ )\ \Leftrightarrow\ \dot{U}=U\angle\theta$$

相量图(相量和复数一样可以在平面上用向量表示)：



$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi\ )\ \Leftrightarrow\ \dot{I}=I\angle\Psi$$

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\theta\ )\ \Leftrightarrow\ \dot{U}=U\angle\theta$$

◆不同频率的相量不能画在一张相量图上。

◆ 取实部运算算子 Re 的几个定理

1）线性 $\mathrm{Re}[\alpha_1 Z_1(t)+\alpha_2 Z_2(t)]=\alpha_1\,\mathrm{Re}[Z_1(t)]+\alpha_2\,\mathrm{Re}[Z_2(t)]$

2）$\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}[\dot{A}e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[j\omega\dot{A}e^{j\omega t}]$（可推广）

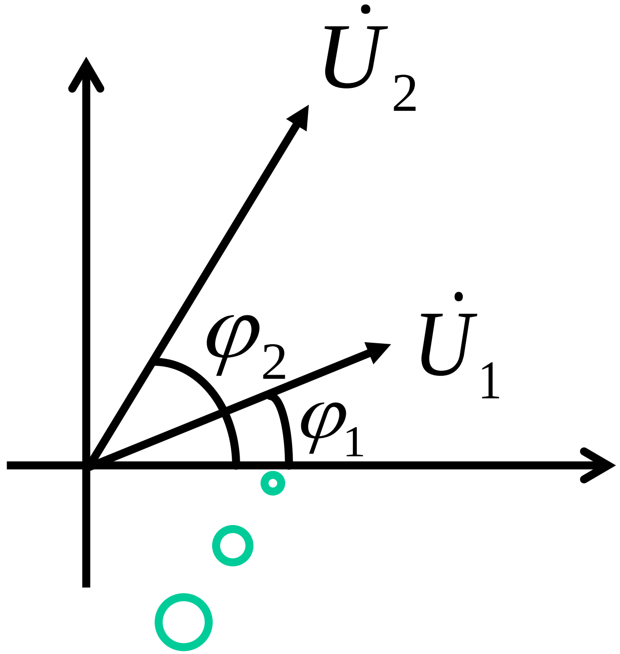
3）$\int \mathrm{Re}[\dot{A}e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dfrac{1}{j\omega}\dot{A}e^{j\omega t}]$

4）若 $\mathrm{Re}[\dot{A}e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{B}e^{j\omega t}]$，则 $\dot{A}=\dot{B}$

◆ 正弦波的相量表示法举例

例： 将 u_1、u_2 用相量图表示。

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{2}U_1\cos(\omega t+\phi_1) \\ u_2 &= \sqrt{2}U_2\cos(\omega t+\phi_2) \end{aligned}}$$



设：$\begin{cases} \text{幅度：相量大小} & U_2 > U_1 \\ \text{相位：} & \varphi_2 > \varphi_1 \end{cases}$

$\dot{U}_2$ 超前 / 滞后 $\dot{U}_1$?

$\boxed{\dot{U}_1 \text{ 滞后于 } \dot{U}_2}$

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{I}=I\angle\psi$$

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{U}=U\angle\psi$$

正弦量的相量表示：
- 相量的模表示正弦量的有效值
- 相量的幅角表示正弦量的初相位

例. 已知

$$i=141.4\cos(314t+30^{o})\text{A}$$

$$u=311.1\cos(314\text{t}-60^{o})\text{V}$$

试用相量表示 ***i*, *u*** 。

解：

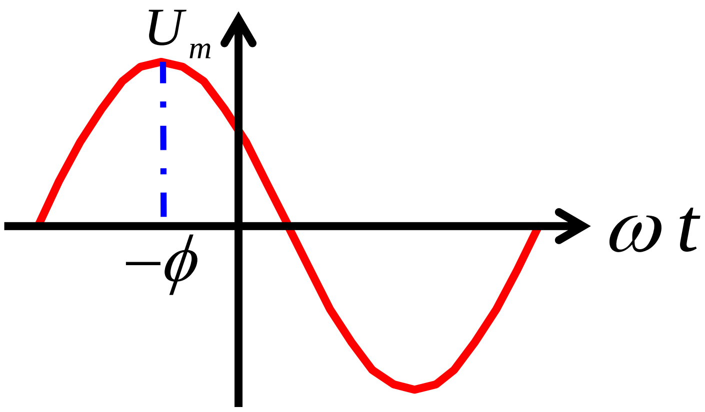
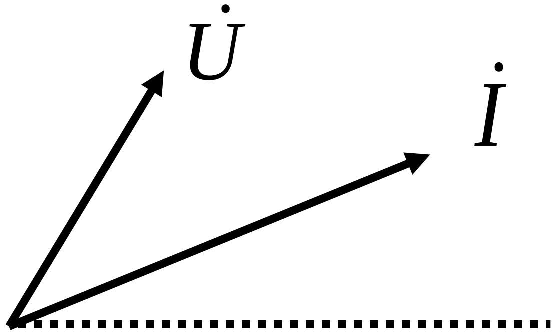
$$\dot{I}=100\angle 30^{o}\,\text{A}$$

$$\dot{U}=220\angle -60^{o}\,\text{V}$$

例. 已知 $\dot{I}=50\angle 15^{\circ}\ \text{A},\ \ f=50\text{Hz}$.

试写出电流的瞬时值表达式。

解： $i=50\sqrt{2}\cos(314t+15^{\circ})\ \text{A}$

波形图	
瞬时值	$u = U_m \cos(\omega t + \phi)$
相量图	
复数表示法	$\dot{U} = a + \mathrm{j}b = U e^{\mathrm{j}\varphi} \Rightarrow U \angle\varphi$

符号说明

瞬时值 --- 小写 u、i

有效值 --- 大写 U、I

最大值 --- 大写+下标 U_m

相　量 --- 大写 + “.” $\dot{U}$

正误判断

已知： $i = 10\cos(\omega t + 45^\circ)$

$$\dot{I} \cancel{=} \frac{10}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ \;?$$

有效值

j45°

$$\dot{I}_m \cancel{=} 10 e^{45^\circ} \;?$$

正误判断

已知：$u = \sqrt{2}\,10\cos(\omega t - 15^\circ)$

则：

$$U = 10$$ ？

-15°

$$\dot{U} \cancel{=} 10\,e^{j15^\circ}$$ ？

正误判断

已知： $\dot{I} = 100\angle 50^\circ$

则： $i \cancel{=} 100\cos(\omega t + 50^\circ)$ ？

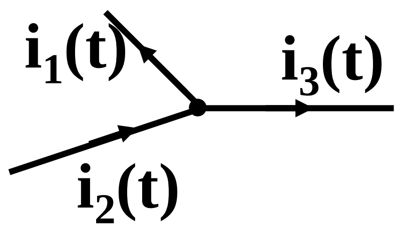
最大值

$I_m = \sqrt{2}I = 100\sqrt{2}$

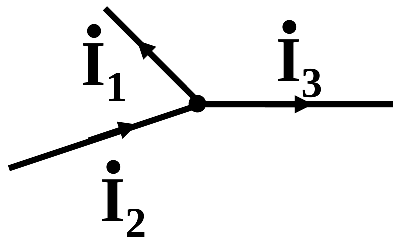
◆ KCL的相量形式

$$\sum i_k(t)=0 \qquad i_k(t)=\sqrt{2}\, I_k\cos(\omega t+\varphi_k)=Re\,[\sqrt{2}\,\dot{I}_k e^{j\omega t}]$$

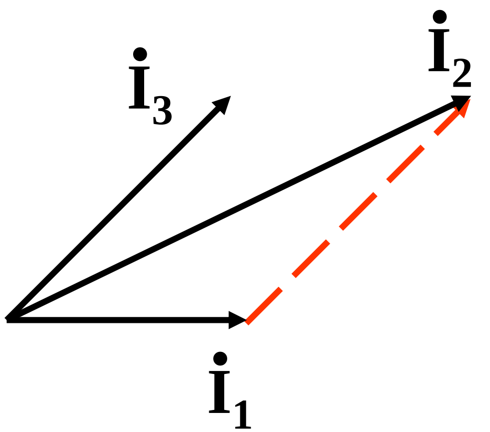
$$\sum \dot{I}_k=0$$



例：已知i_1和i_3，求i_2



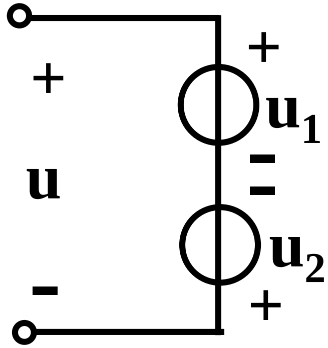
$$\dot{I}_1-\dot{I}_2+\dot{I}_3=0$$



10.3.3 基尔霍夫定律的相量形式

◆ KVL的相量形式

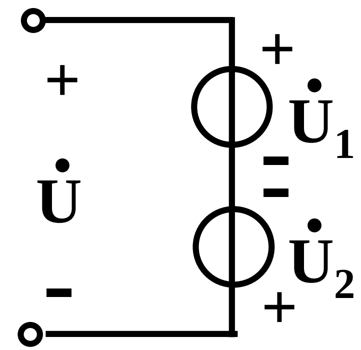
$$\sum \dot{U}_k = 0$$



$u_1 = 220\sqrt{2}\cos\omega t$

$u_2 = 220\sqrt{2}\cos(\omega t - 120^\circ)$

求电压u

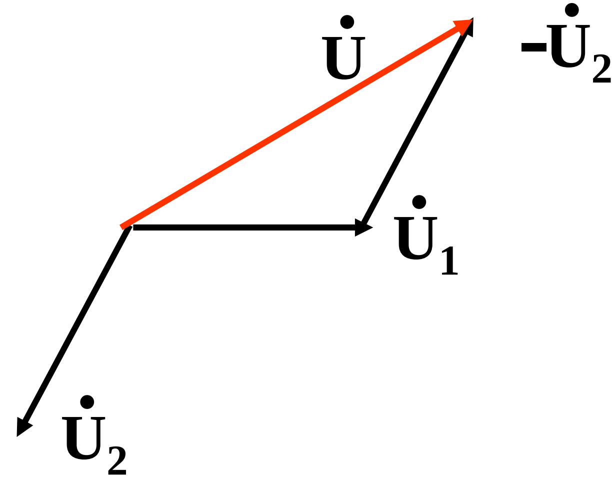


$\dot{U}_1 = 220\angle 0^\circ \quad \dot{U}_2 = 220\angle -120^\circ$

$\dot{U} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 220\angle 0^\circ - 220\angle -120^\circ$

$= 220(1 + 0.5 + j0.87)$

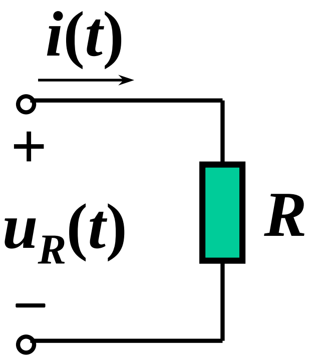
$= 220 \times 1.73\angle 30^\circ$



10.3.4 电路的相量模型

◆ 电阻

已知 $i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi)$



则 $u_R(t)=Ri(t)=\sqrt{2}RI\cos(\omega t+\psi)$

相量形式：

$\dot{I}=I\angle\Psi$

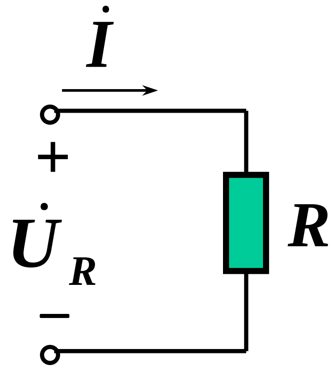
$\dot{U}_R=R\dot{I}=RI\angle\Psi$

有效值关系：$U_R=RI$

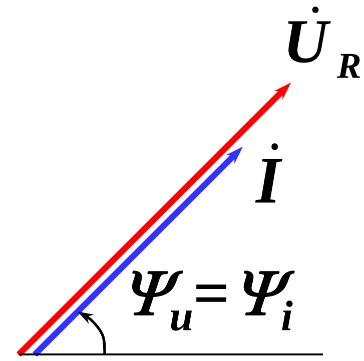
相位关系：u , i 同相

相量关系

$\dot{U}_R=R\dot{I}$



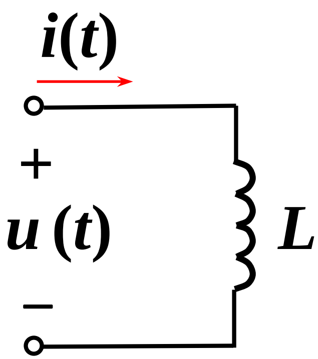
相量模型



相量图

◆ 电感

时域



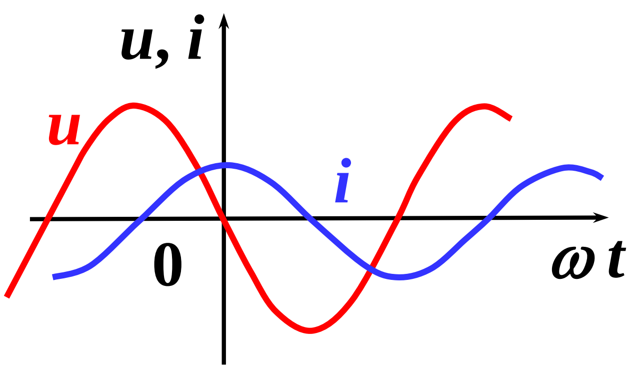
时域模型

$$i(\mathrm{t})=\sqrt{2}I\cos wt$$

$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\sqrt{2}\omega L\,I\sin\omega t$$

$$=\sqrt{2}\omega L\,I\cos(\omega t+90^{\mathrm{o}})$$

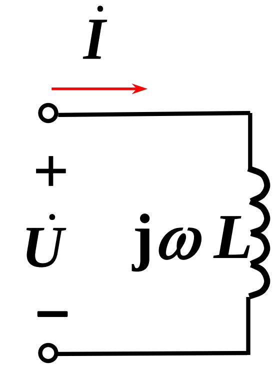


波形图

频域

$$\dot{I}=I\angle 0^{\mathrm{o}}$$

$$\dot{U}=\mathrm{j}\omega L\,\dot{I}$$



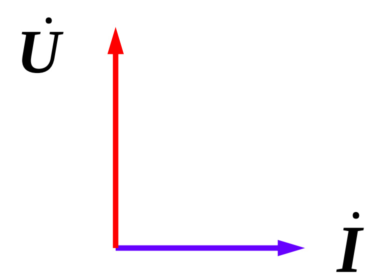
相量模型

有效值关系

$U=\omega L I$

相位关系

u 超前 i 90°



相量图

◆ 感抗

错误的写法

$$\omega L \cancel{=} \frac{u}{i}$$

$$\omega L \cancel{=} \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

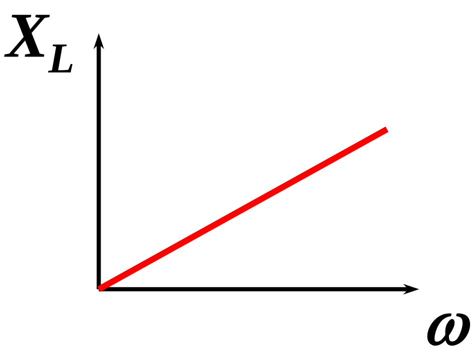
$U=\omega L I$

$X_L = U/I = \omega L = 2\pi f L$， 单位: 欧

感抗的物理意义:

(1) 表示限制电流的能力;

(2) 感抗和频率成正比。



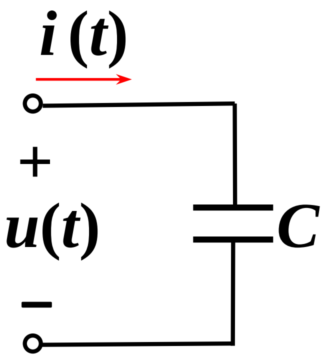
$\omega = 0$(直流), $X_L = 0$, 短路;

$\omega \to \infty$, $X_L \to \infty$, 开路;

(3) 由于感抗的存在使电流落后电压。

◆电容

时域



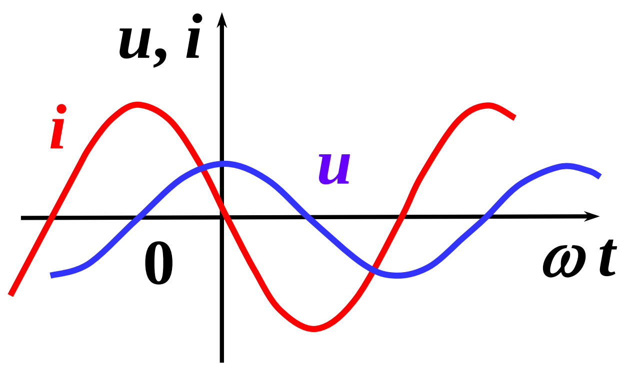
时域模型

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos\omega t$$

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\sqrt{2}\omega CU\sin\omega t$$

$$=\sqrt{2}\omega CU\cos(\omega t+90^{\mathrm{o}})$$

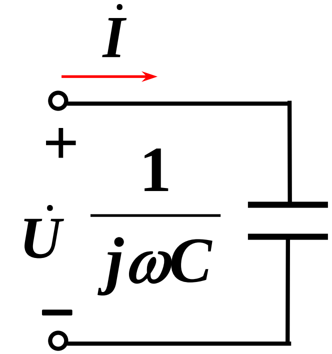


波形图

频域

$$\dot{U}=U\angle 0^{\mathrm{o}}$$

$$\dot{I}=\mathrm{j}\omega C\dot{U}$$



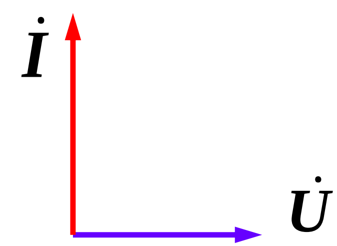
相量模型

有效值关系

$I=\omega CU$

相位关系

i 超前 u 90°



相量图

◆ 容抗

错误的写法

$$\frac{1}{\omega C} \cancel{=} \frac{u}{i}$$

$$\frac{1}{\omega C} \cancel{=} \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

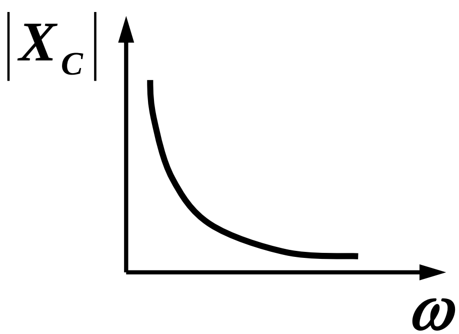
$I=\omega CU$ $\quad \dfrac{U}{I}=\dfrac{1}{\omega C}$

$$X_C \overset{\text{定义}}{=} \frac{1}{\omega C}$$

容抗的物理意义：

(1) 表示限制电流的能力；

(2) 容抗的绝对值和频率成反比。



$\omega=0$(直流), $|X_{\mathrm{C}}|\to\infty$, 隔直作用;

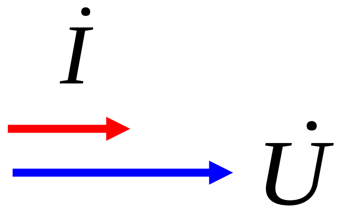
$\omega\to\infty$, $X_C\to 0$, 短路，旁路作用;

(3) 由于容抗的存在使电流领先电压。

10.3.4 电路的相量模型

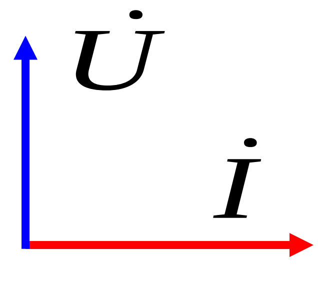
电阻元件 **R** 基本关系 $u = iR$

复阻抗 R



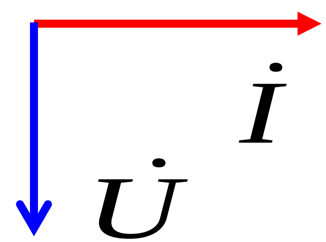
电感元件 **L** 基本关系 $u = L\dfrac{di}{dt}$

复阻抗 $jX_L = j\omega L$

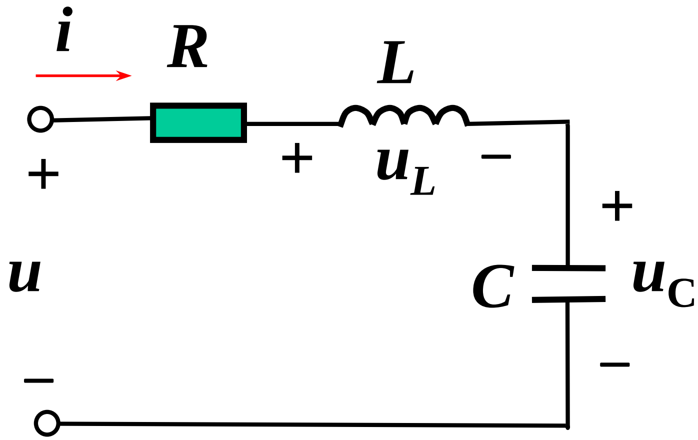


电容元件 **C** 基本关系 $i = C\dfrac{du}{dt}$

复阻抗 $-jX_C = -j\dfrac{1}{\omega C}$



例.

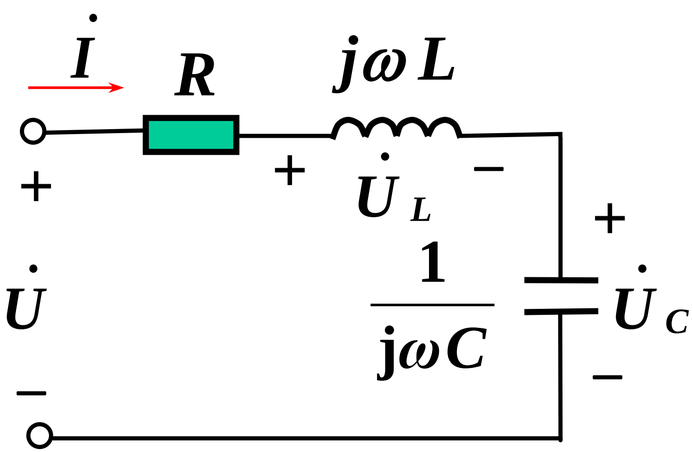


已知：**R=100Ω, L=0.2H, C=10μF,**

$$u = 50\sqrt{2}\cos(1000t + 60^\circ)$$

求各元件的阻抗及支路阻抗.

解：相量模型为



$$\dot{U} = 50\angle 60^\circ \ \mathrm{V}$$

$$\mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}1000 \times 0.2 = \mathrm{j}200\ \Omega$$

$$\frac{1}{j\omega C} = -\mathrm{j}\frac{1}{1000 \times 10 \times 10^{-6}} = -\mathrm{j}100\ \Omega$$

$$R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 100 + \mathrm{j}200 - \mathrm{j}100 = 141.4\angle 45^\circ\ \Omega$$

第10章 正弦稳态分析

10.1 概述

10.2 正弦电量

10.3 相量法

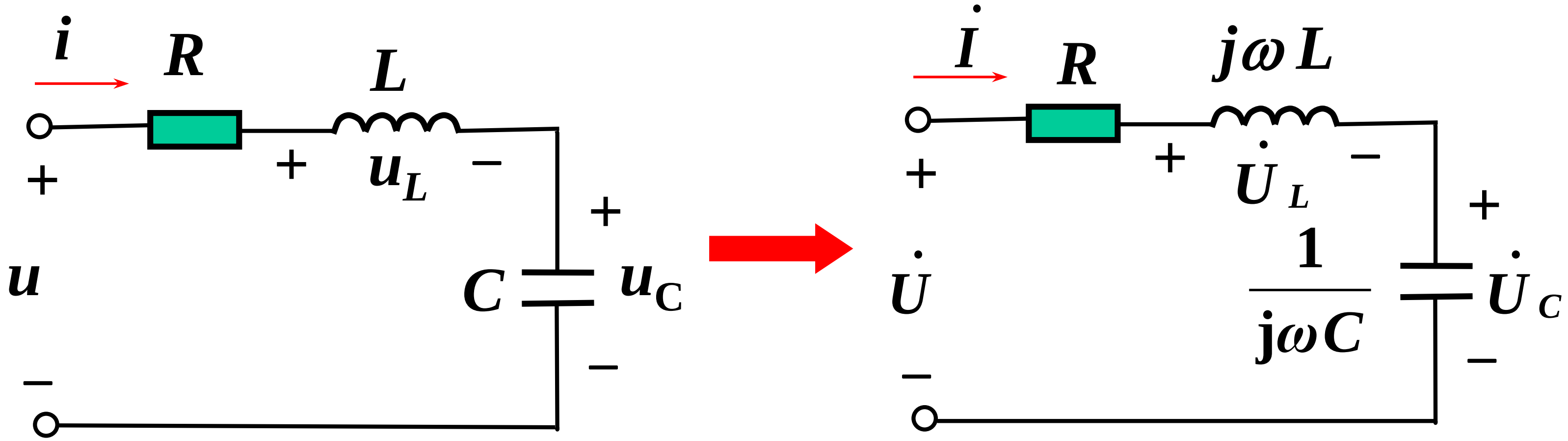
10.4 阻抗与导纳

10.5 复杂正弦稳态电路分析

10.6 位形相量图

10.7 拓展与应用

◆ 用相量法分析*R*、*L*、*C* 串联电路的正弦稳态响应。



由KVL： $\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L+\dot{U}_C=R\dot{I}+\mathrm{j}\omega L\dot{I}-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}$

$$=(R+\mathrm{j}\omega L-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C})\dot{I}$$

$$=[R+\mathrm{j}(X_L-X_C)]\dot{I}$$

$$=(R+\mathrm{j}X)\dot{I}$$

令 $$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + \mathrm{j}X = |Z|\angle\varphi$$

Z— 复阻抗；***R***—电阻(阻抗的实部)；***X***—电抗(阻抗的虚部)；

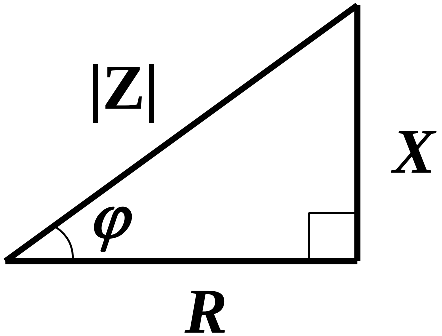
|Z| —复阻抗的模；*φ*—阻抗角。

关系：

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{X}{R} \end{cases}$$ 或 $$\begin{cases} R = |Z|\cos\varphi \\ X = |Z|\sin\varphi \end{cases}$$

$|Z| = U/I$

$\varphi = \psi_u - \psi_i$



阻抗三角形

具体分析一下 *R-L-C* 串联电路

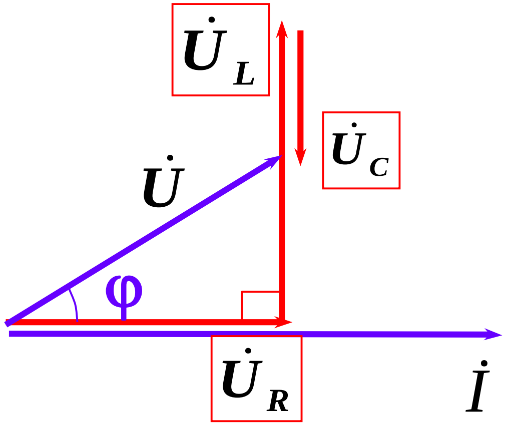
$$Z=R+j(\omega L-1/\omega C)=|Z|\angle\varphi$$

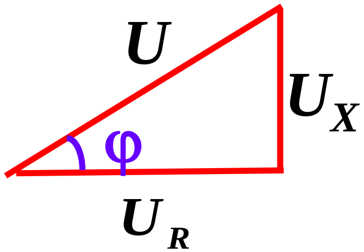
$\omega L > 1/\omega C$，$X>0$，$\varphi>0$，电压领先电流，电路呈感性；

$\omega L<1/\omega C$，$X<0$，$\varphi<0$，电压落后电流，电路呈容性；

$\omega L=1/\omega C$，$X=0$，$\varphi=0$，电压与电流同相，电路呈电阻性。

画相量图：选电流为参考向量($\omega L > 1/\omega C$)

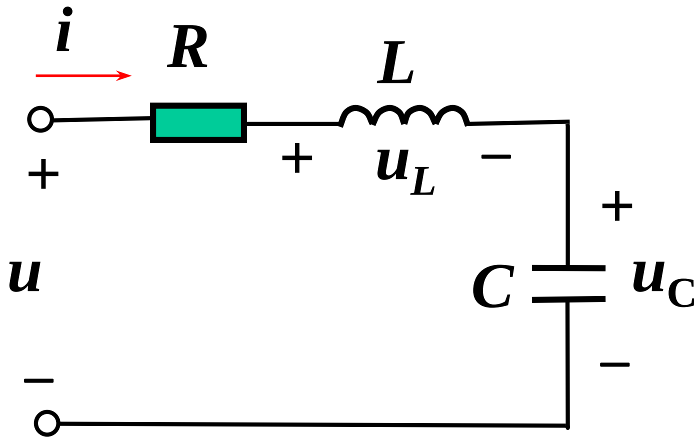




$$U=\sqrt{U_R^2+U_X^2}$$

电压三角形

例.

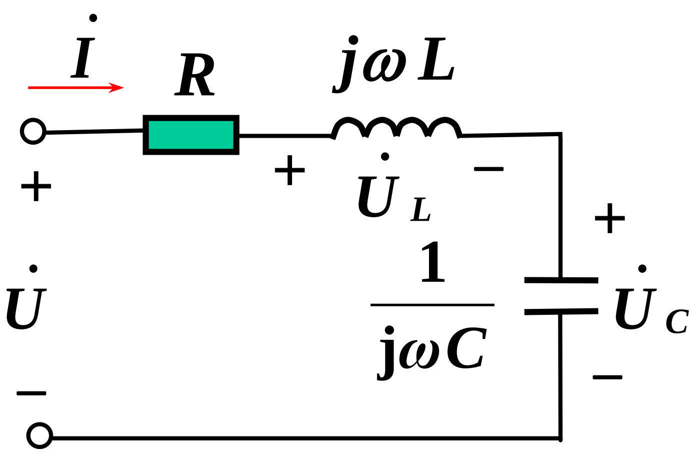


已知：R=15Ω, L=0.3mH, C=0.2μF,

$u = 5\sqrt{2}\cos(\omega t + 60^\circ)$, $f = 3\times 10^4$Hz .

求 i, u_R, u_L, u_C .

解：相量模型为



$$\dot{U} = 5\angle 60^\circ \text{ V}$$

$$j\omega L = j2\pi\times 3\times 10^4 \times 0.3\times 10^{-3} = j56.5\Omega$$

$$-j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{2\pi\times 3\times 10^4\times 0.2\times 10^{-6}} = -j26.5\Omega$$

$$Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = 15 + j56.5 - j26.5 = 33.54\angle 63.4^\circ\ \Omega$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{5\angle 60^{\circ}}{33.54\angle 63.4^{\circ}}=0.149\angle -3.4^{\circ}\ \mathrm{A}$$

$$\dot{U}_R=R\dot{I}=15\times 0.149\angle -3.4^{\circ}=2.235\angle -3.4^{\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=56.5\angle 90^{\circ}\times 0.149\angle -3.4^{\circ}=8.42\angle 86.4^{\circ}\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_C=\frac{1}{\mathrm{j}\omega \mathrm{C}}\dot{I}=26.5\angle -90^{\circ}\times 0.149\angle -3.4^{\circ}=3.95\angle -93.4^{\circ}\ \mathrm{V}$$

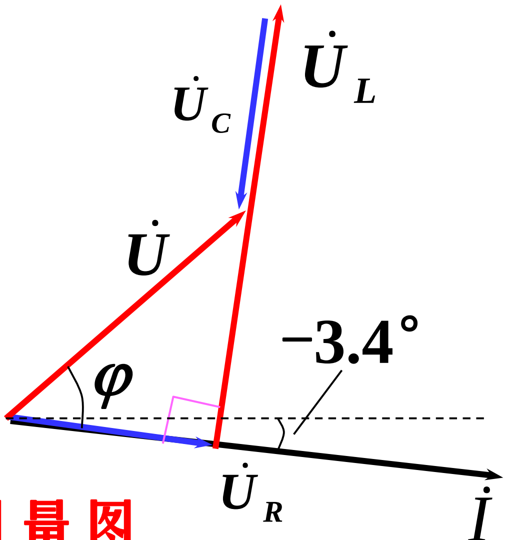
则

$$i=0.149\sqrt{2}\cos(\omega t-3.4^{\circ})\ \mathrm{A}$$

$$u_R=2.235\sqrt{2}\cos(\omega t-3.4^{\circ})\ \mathrm{V}$$

$$u_L=8.42\sqrt{2}\cos(\omega t+86.6^{\circ})\ \mathrm{V}$$

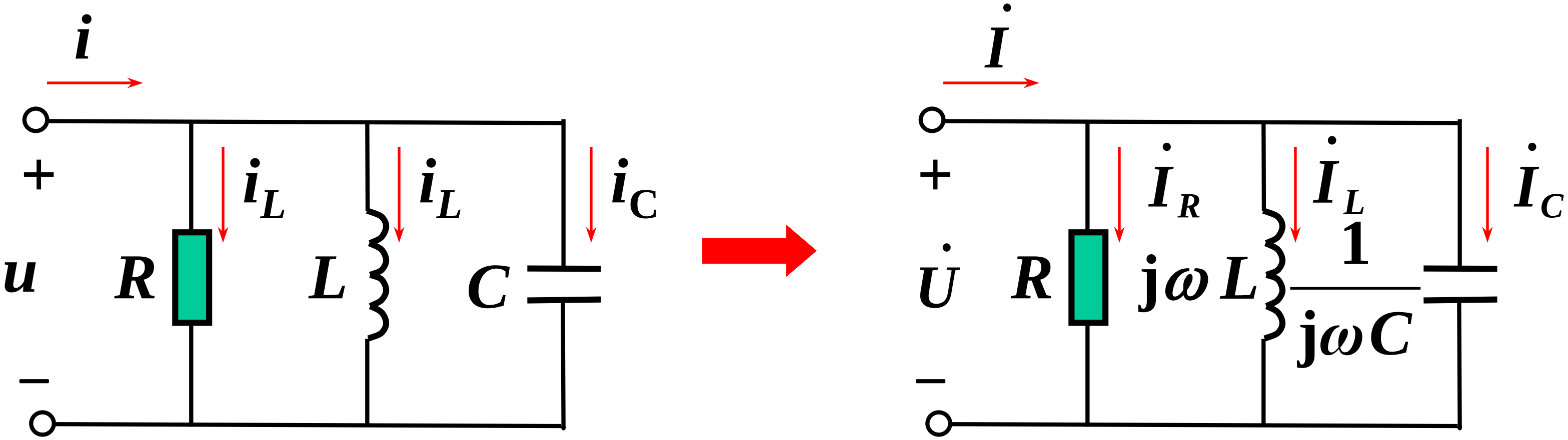
$$u_C=3.95\sqrt{2}\cos(\omega t-93.4^{\circ})\ \mathrm{V}$$



U_L=8.42>U=5，分电压大于总电压

相量图

◆ 用相量法分析*R*、*L*、*C* 并联电路的正弦稳态响应。



由KCL： $\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C=G\dot{U}-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega L}\dot{U}+\mathrm{j}\omega C\dot{U}$

$$=(G-\mathrm{j}\frac{1}{\omega L}+\mathrm{j}\omega C)\dot{U}$$

$$=[G+\mathrm{j}(B_C-B_L)]\dot{U}$$

$$=(G+\mathrm{j}B)\dot{U}$$

令 $$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=\frac{I\angle\psi_i}{U\angle\psi_u}=\frac{I}{U}\angle\psi_i-\psi_u=G+\mathrm{j}B=|Y|\angle\varphi_y$$

Y— 复导纳；***G***—电导(导纳的实部)；***B***—电纳(导纳的虚部)；

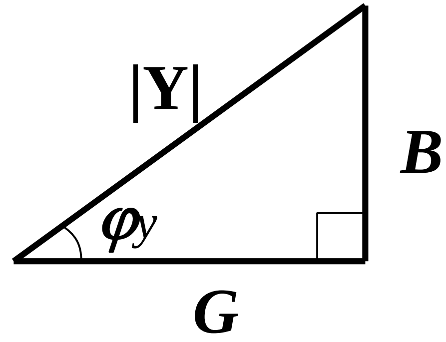
|Y| —复导纳的模；φ_y —导纳角。

关系：

$$\begin{cases}|Y|=\sqrt{G^2+B^2}\\ \varphi_y=\arctan\dfrac{B}{G}\end{cases}$$

$$\begin{cases}G=|Y|\cos\varphi_y\\ B=|Y|\sin\varphi_y\end{cases}$$

$$\begin{cases}|Y|=I/U\\ \varphi_y=\Psi_i-\Psi_u\end{cases}$$



导纳三角形

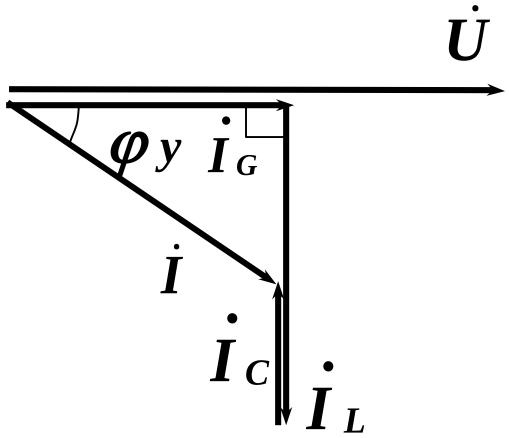
$Y=G+j(\omega C-1/\omega L)=|Y|\angle\varphi_y$

$\omega C>1/\omega L$，$B>0$，$\varphi_y>0$，电路为容性，i 领先u；

$\omega C<1/\omega L$，$B<0$，$\varphi_y<0$，电路为感性，i 落后u；

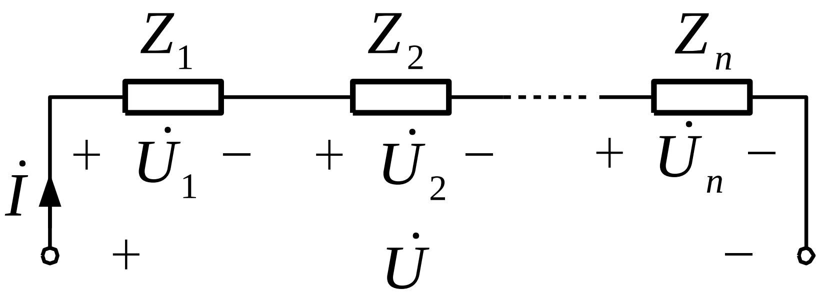
$\omega C=1/\omega L$，$B=0$，$\varphi_y=0$，电路为电阻性，i与u同相。

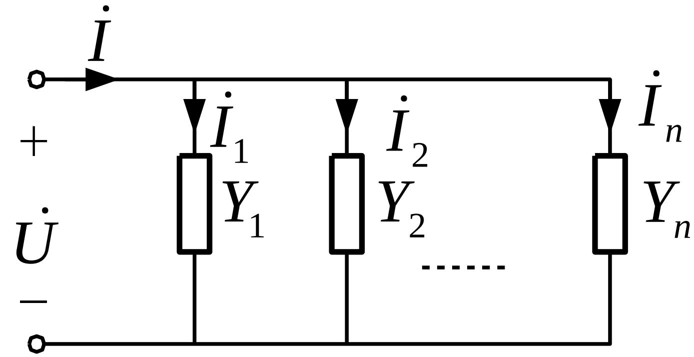
画相量图：选电压为参考向量($\omega C<1/\omega L$，$\varphi_y<0$)



$$I=\sqrt{I_G^2+I_B^2}=\sqrt{I_G^2+(I_L-I_C)^2}$$

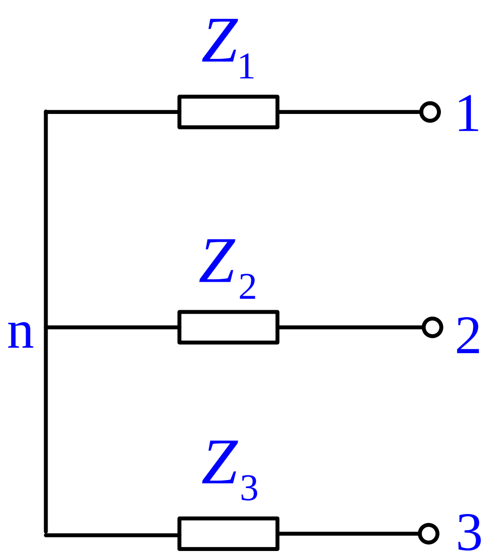
◆ 阻抗的连接





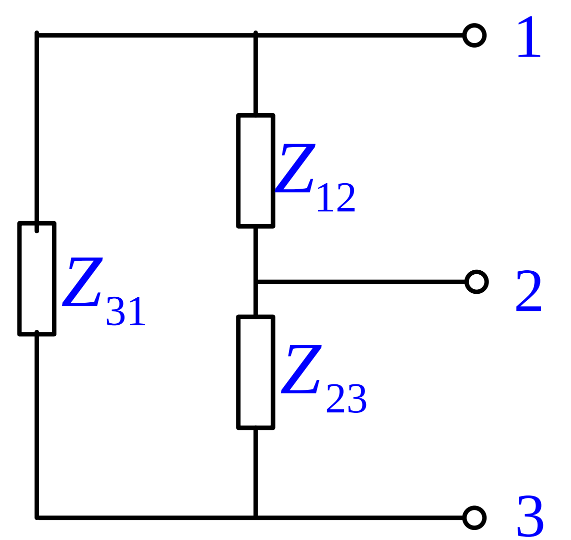
$$Z = \sum Z_k \qquad \dot{U}_k = \frac{Z_k}{\sum Z_k}\dot{U}$$

$$Y = \sum Y_k \qquad \dot{I}_k = \frac{Y_k}{\sum Y_k}\dot{I}$$

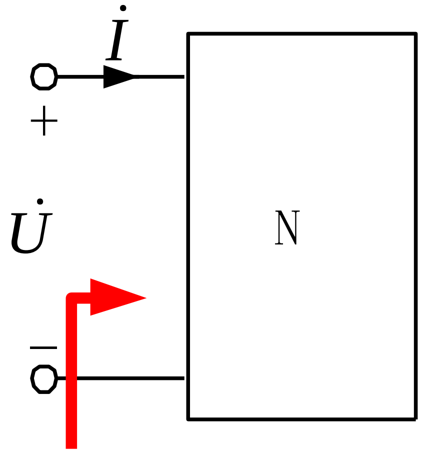


$$Y_{12} = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$Z_1 = \frac{Z_{12} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$



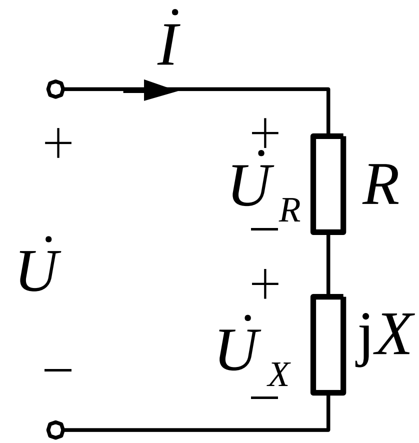
◆ 无源网络的等效模型

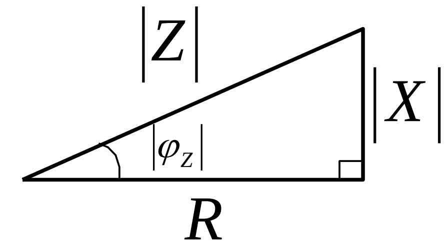


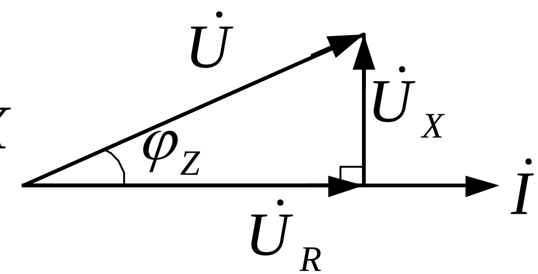
Z or Y

$$Z=\frac{\dot U}{\dot I}=R+\mathrm{j}X$$

$$=|Z|\angle\varphi_Z$$



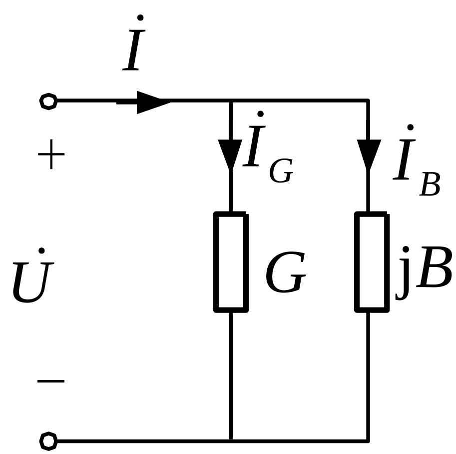


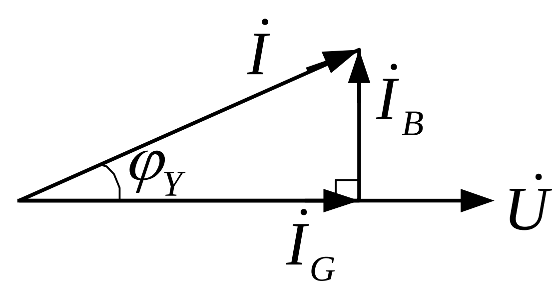


感性网络

$$Y=\frac{\dot I}{\dot U}=G+\mathrm{j}B$$

$$=|Y|\angle\varphi_Y$$





容性网络

第10章 正弦稳态分析

10.1 概述

10.2 正弦电量

10.3 相量法

10.4 阻抗与导纳

10.5 复杂正弦稳态电路分析

10.6 位形相量图

10.7 拓展与应用

10.5 复杂正弦稳态电路分析

◆线性电阻性网络各种分析方法的适用性

1、两种情况下电路分析基本依据的比较

	线性电阻性网络	正弦稳态网络相量形式
KCL	$\sum i_k(t)=0$	$\sum \dot{I}_k=0$
KVL	$\sum u_k(t)=0$	$\sum \dot{U}_k=0$
支路或端口特性	$u(t)=Ri(t)$	$\dot{U}=Z\dot{I}$ $\left\{\begin{matrix}\dot{U}=R\dot{I}\\ \dot{U}=j\omega L\dot{I}\\ \dot{U}=\dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}\end{matrix}\right\}$
	或 $i(t)=Gu(t)$	$\dot{I}=Y\dot{U}$

2、正弦稳态电路的相量模型，线性电阻性网络各种分析方法的适用性

正弦稳态电路（时域模型） $\longrightarrow$ 相量模型

电压源$u_S(t)$、电流源$i_S(t)$ $\longrightarrow$ $\dot{U}_S$ $\dot{I}_S$

待求电压或电流$u_K(t)$、$i_K(t)$ $\longrightarrow$ $\dot{U}_K$ $\dot{I}_K$

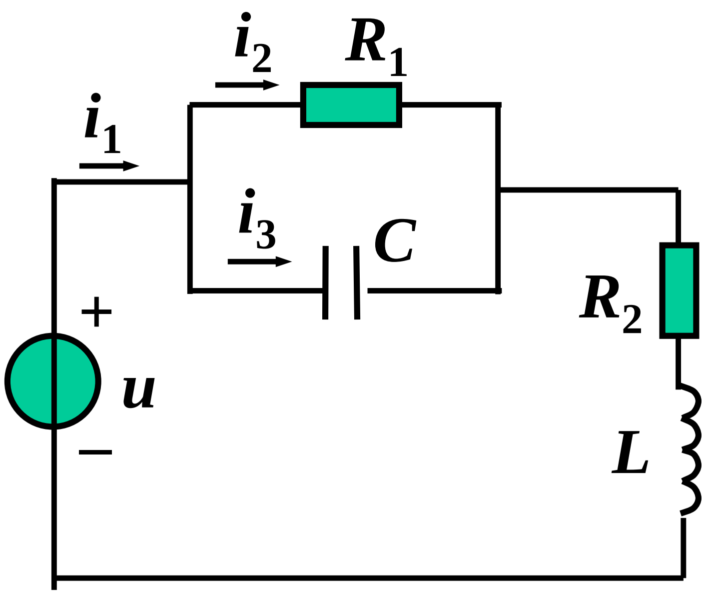
R、L、C $\longrightarrow$ Z或Y

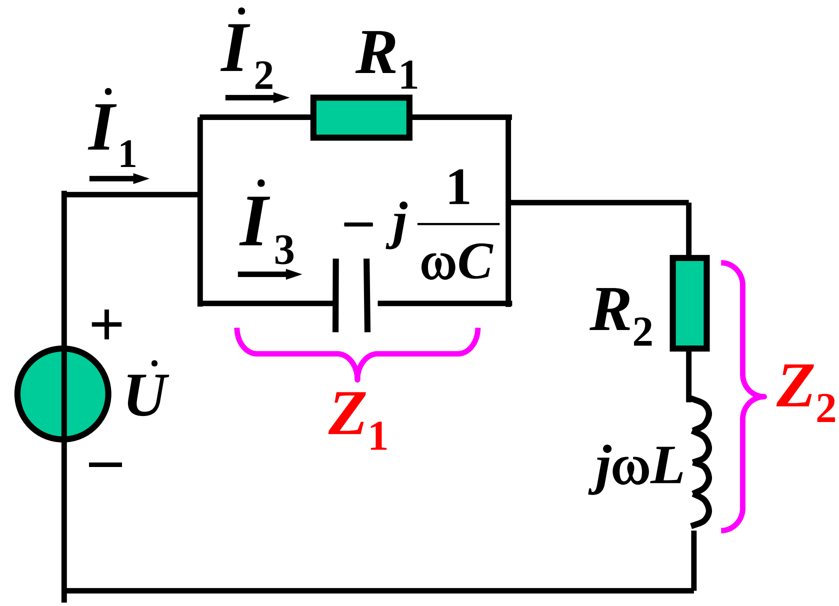
3、应注意的两个问题

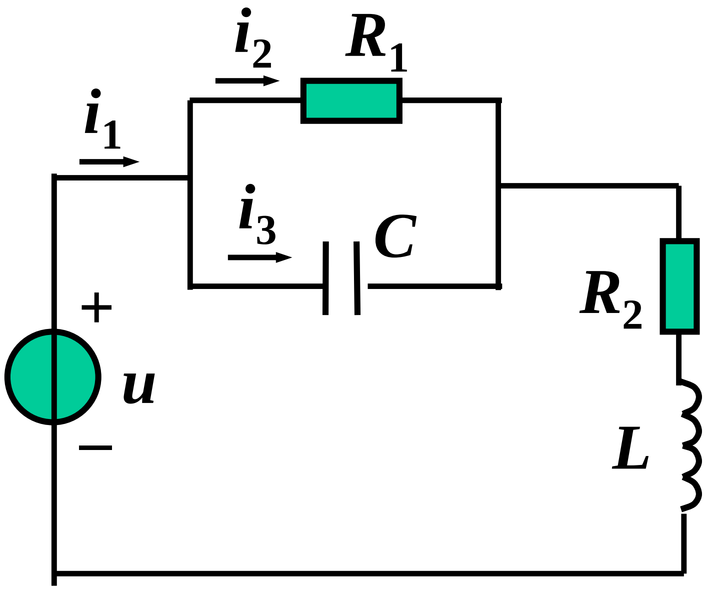
分析方法的考虑（等效变换、电路方程、电路定理等）

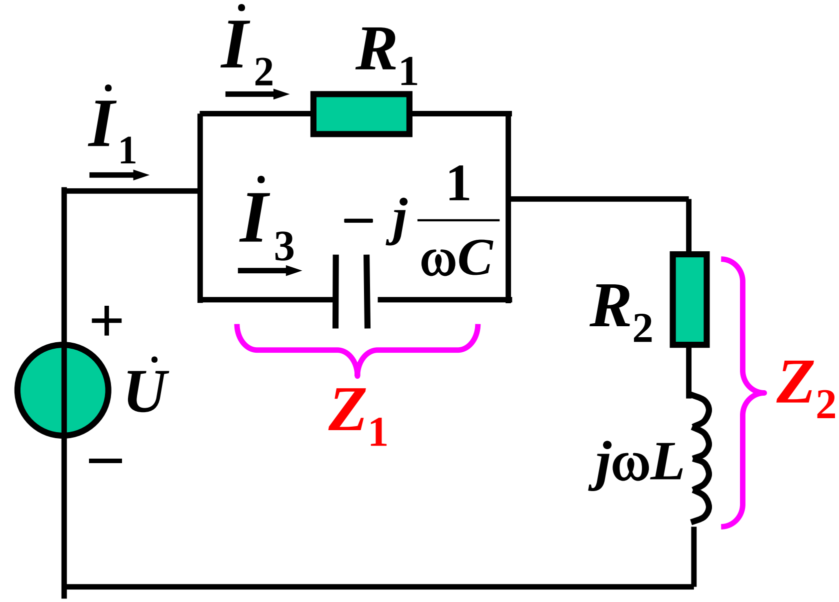
充分利用相量图

例：已知 $R_1 = 1000\Omega,\ R_2 = 10\Omega,\ L = 500\text{mH},\ C = 10\mu\text{F},$
$U = 100\text{V},\ \omega = 314\text{rad/s},$ **求：各支路电流**









解：画出电路的相量模型

$$Z_1=\frac{R_1(-j\,{}^{1}\!/_{\omega C})}{R_1-j\,{}^{1}\!/_{\omega C}}=\frac{1000\times(-j318.5)}{1000-j318.5}=\frac{318.5\times10^3\angle-90^\circ}{1049\angle-17.67^\circ}$$

$$=303.6\angle-72.32^\circ=92.20-j289.3\,\Omega$$

$$Z_2=R_2+j\omega L=10+j157\,\Omega$$

$$Z = Z_1 + Z_2 = 92.20 - j289.3 + 10 + j157 = 102.2 - j132.3$$

$$= 167.2\angle -52.31^o$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{100\angle 0^\circ}{167.2\angle -52.31^\circ} = 0.598\angle 52.3^\circ \ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\,{}^{1}\!/_{\omega C}}{R_1 - j\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1 = \frac{-j318.5}{1049\angle -17.67^\circ}\times 0.598\angle 52.3^\circ = 0.182\angle -20.0^\circ \ A$$

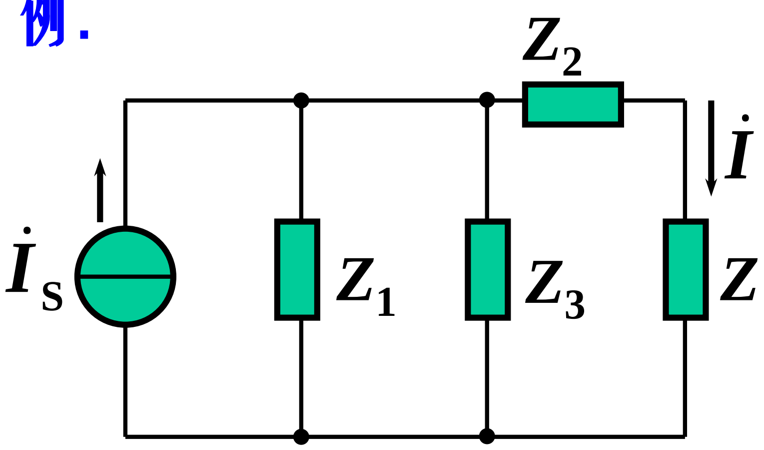
$$\dot{I}_3 = \frac{R_1}{R_1 - j\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1 = \frac{1000}{1049\angle -17.67^\circ}\times 0.598\angle 52.3^\circ = 0.570\angle 70.0^\circ \ A$$

瞬时值表达式为：

$$i_1 = 0.598\sqrt{2}\cos(314t + 52.3^\circ)\ A$$

$$i_2 = 0.182\sqrt{2}\cos(314t - 20^\circ)\ A \qquad i_3 = 0.57\sqrt{2}\cos(314t + 70^\circ)\ A$$

例.

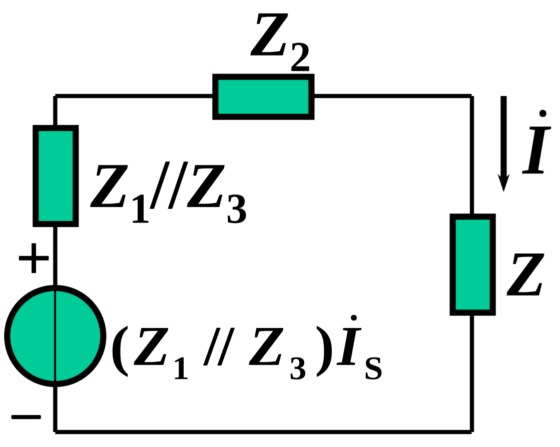


已知：$\dot{I}_S = 4\angle 90^\circ \text{ A}，Z_1 = Z_2 = -\text{j}30\Omega$

$Z_3 = 30\Omega，Z = 45\Omega$

求：$\dot{I}$.

方法一：等效变换法

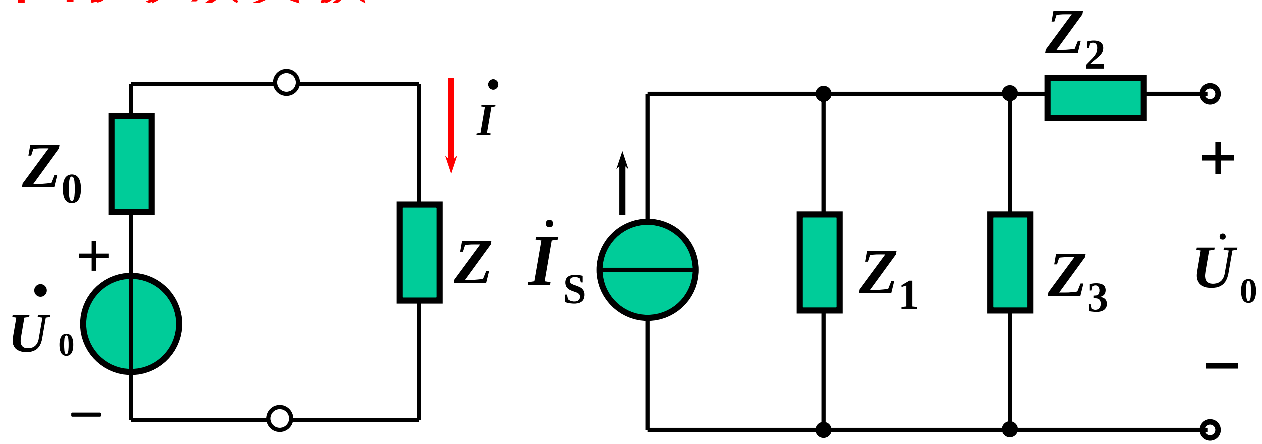


$$Z_1 // Z_3 = \frac{30(-\text{j}30)}{30-\text{j}30} = 15-\text{j}15\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_S(Z_1 // Z_3)}{Z_1 // Z_3 + Z_2 + Z} = \frac{\text{j}4(15-\text{j}15)}{15-\text{j}15-\text{j}30+45}$$

$$= \frac{5.657\angle 45^\circ}{5\angle -36.9^\circ} = 1.13\angle 81.9^\circ \text{ A}$$

方法二：戴维南等效变换



求开路电压：

$$\dot{U}_0 = \dot{I}_S (Z_1 // Z_3)$$
$$= 84.86\angle 45^{\circ}\ \mathrm{V}$$

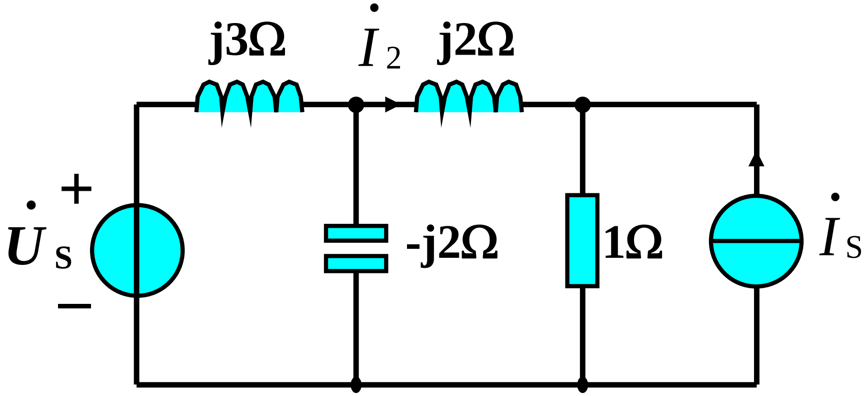
求等效电阻：

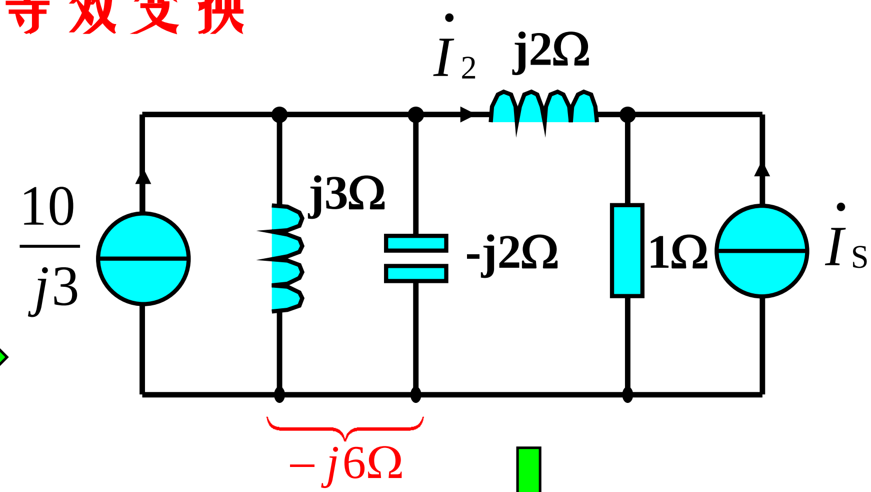
$$Z_0 = Z_1 // Z_3 + Z_2$$
$$= 15 - \mathrm{j}45\Omega$$

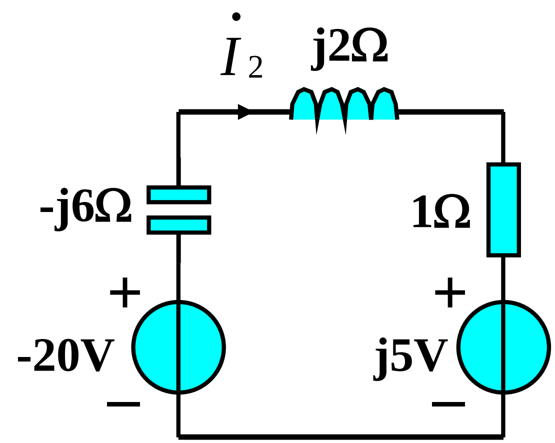
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_0}{Z_0 + Z} = \frac{84.86\angle 45^{\circ}}{15 - j45 + 45} = 1.13\angle 81.9^{\circ}\ \mathrm{A}$$

$(\dot{U}_S = 10\angle 0^\circ V, \dot{I}_S = 5\angle 90^\circ A)$ **例:计算电流** $\dot{I}_2$

(1)等效变换



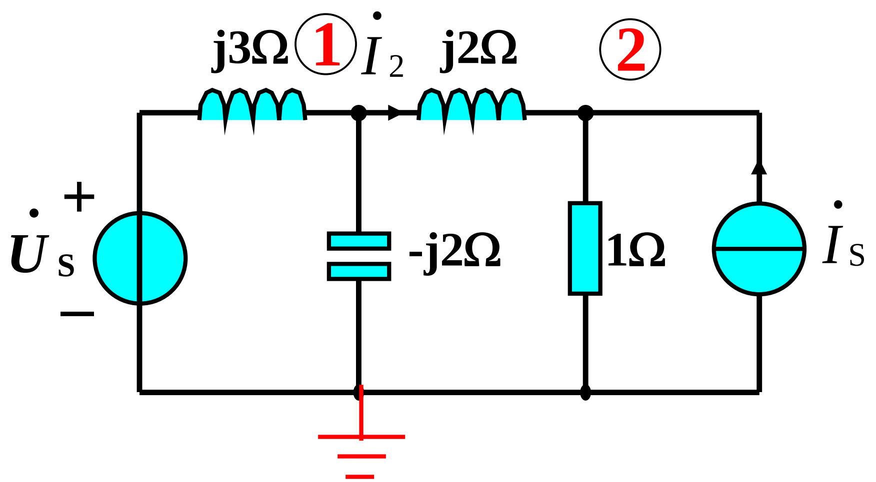




电流为:

$$\dot{I}_2 = \frac{-20 - j5}{1 + j2 - j6} = -j5(A)$$

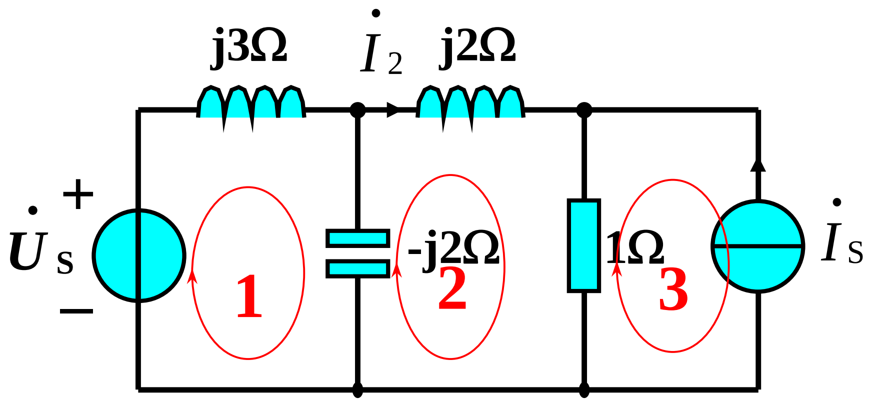
(2)结点法



$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{j3}+\dfrac{1}{-j2}+\dfrac{1}{j2}\right)\dot{\varphi}_1-\dfrac{1}{j2}\dot{\varphi}_2=\dfrac{10}{j3}\\ -\dfrac{1}{j2}\dot{\varphi}_1+\left(1+\dfrac{1}{j2}\right)\dot{\varphi}_2=j5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{\varphi}_1=10\\ \dot{\varphi}_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{I}_2=\frac{\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2}{j2}=-j5(A)$$

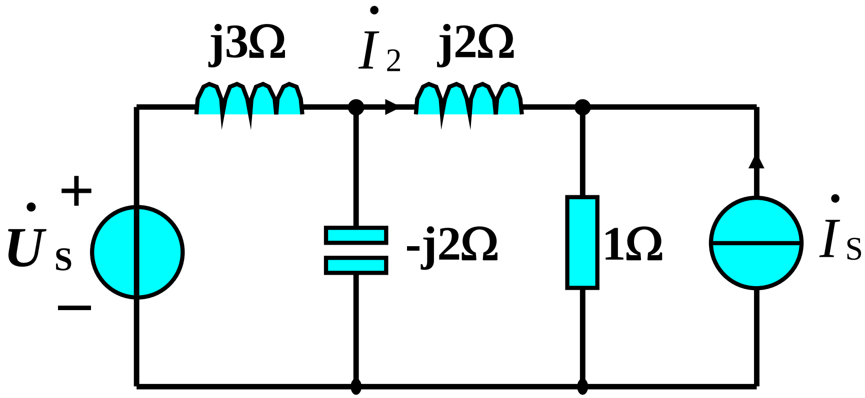
(3)网孔法



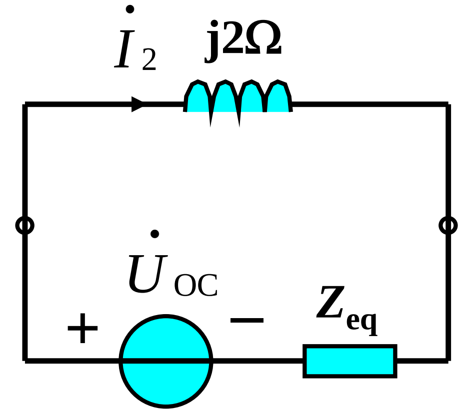
$$\begin{cases} (j3-j2)\dot{I}_1-(-j2)\dot{I}_2=10 \\ -(-j2)\dot{I}_1+(j2-j2+1)\dot{I}_2-\dot{I}_3=0 \\ \dot{I}_3=-j5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{I}_2=-j5(A)$$

(4)戴维南定理

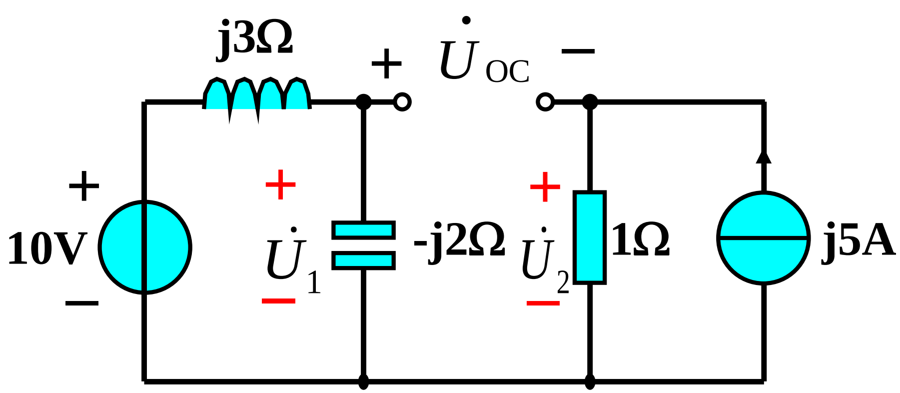


采用戴维南定理：



$$\dot{U}_{oc}=-20-j5$$

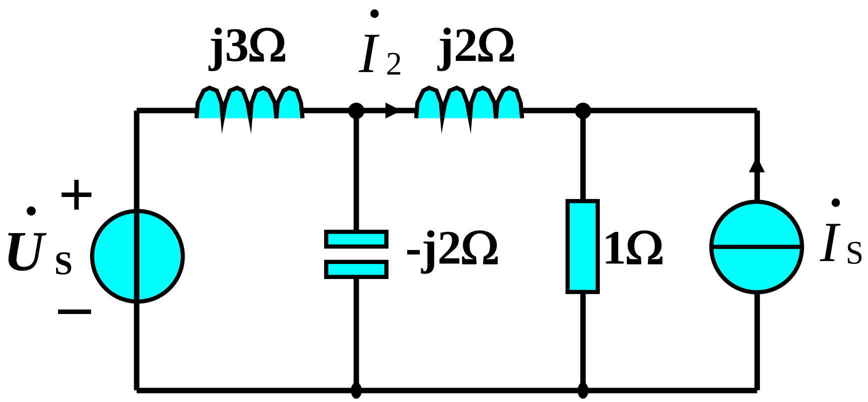
①求开路电压

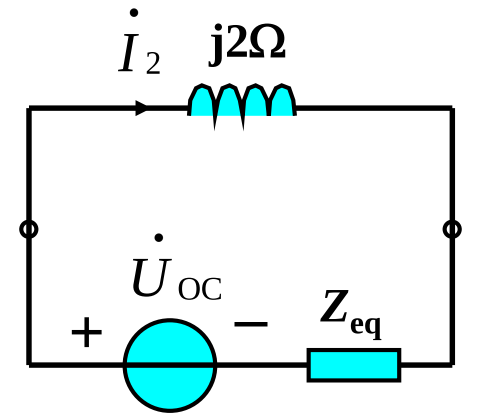


$$\dot{U}_{oc}=\dot{U}_1-\dot{U}_2$$

$$=\frac{-j2}{j3-j2}\times 10-j5\times 1$$

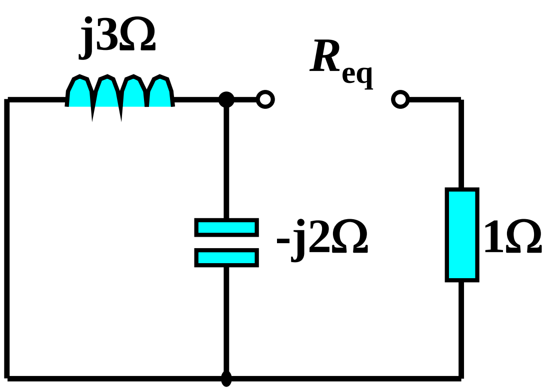
=-20-j5(V)





$$\dot{U}_{oc} = -20 - j5$$

②求等效阻抗

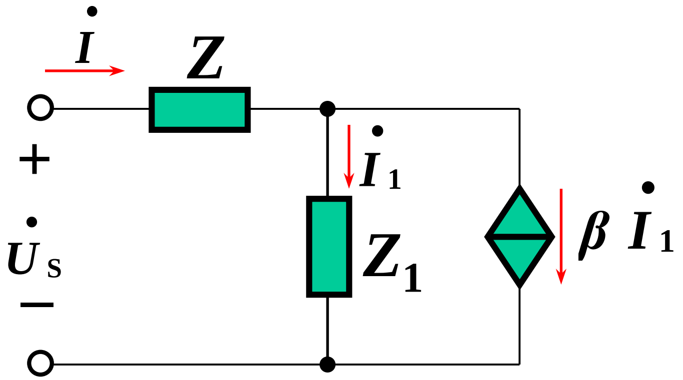


$$Z_{eq} = 1 + \frac{j3(-j2)}{j3 - j2} \quad \mathbf{=1\text{-}j6(\Omega)}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{OC} / (Z_{eq} + j2)$$

$$= \frac{-20 - j5}{1 - j6 + j2} = -j5(A)$$

例.



已知：Z=10+j50Ω，Z_1=400+j1000Ω。

问：β等于多少时，$\dot{I}_1$和$\dot{U}_S$相位差90°？

分析：找出$\dot{I}_1$和$\dot{U}_S$关系：$\dot{U}_S = Z_{转}\dot{I}_1$

$Z_{转}$实部为零，$\dot{U}_s$与$\dot{I}$相位差为90°.

解：$$\dot{U}_S = Z\dot{I} + Z_1\dot{I}_1 = Z(1+\beta)\dot{I}_1 + Z_1\dot{I}_1$$

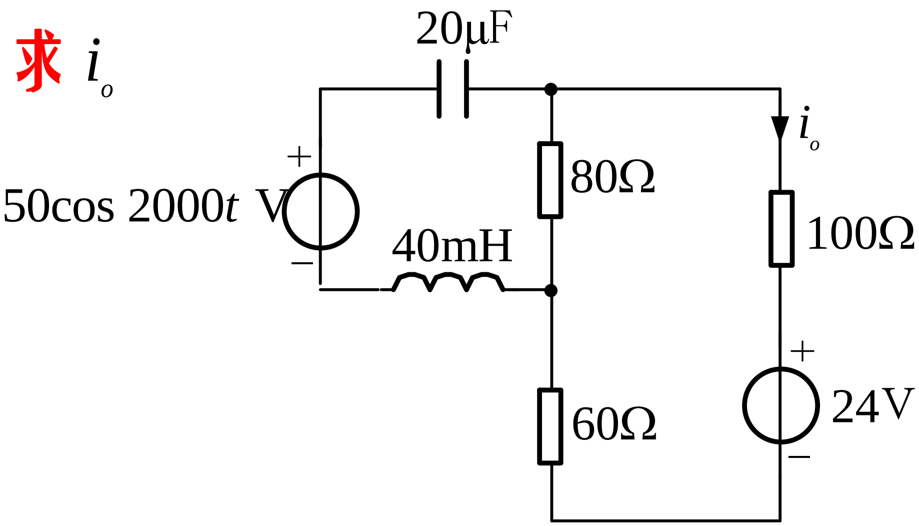
$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = (1+\beta)Z + Z_1 = 410+10\beta + \mathrm{j}(50+50\beta+1000)$$

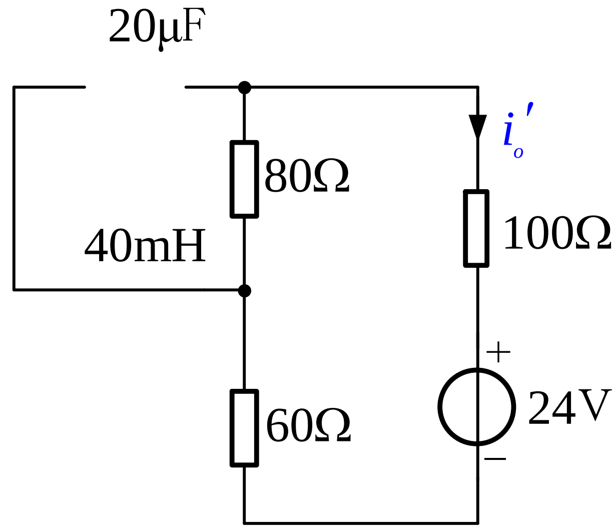
令 $410+10\beta = 0$ ，$\beta = -41$

$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = -\mathrm{j}1000$$ 故电流领先电压90°.

10.5 复杂正弦稳态电路分析

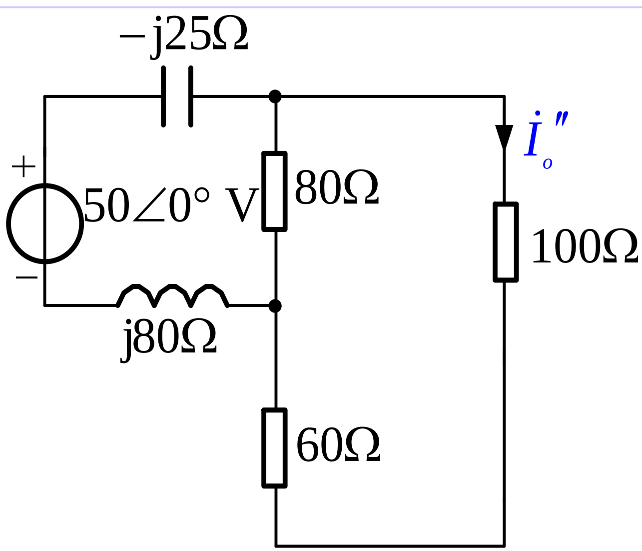
求 i_o





$$i_o' = \frac{24}{240} = 0.1\text{A}$$

应用阻抗分流



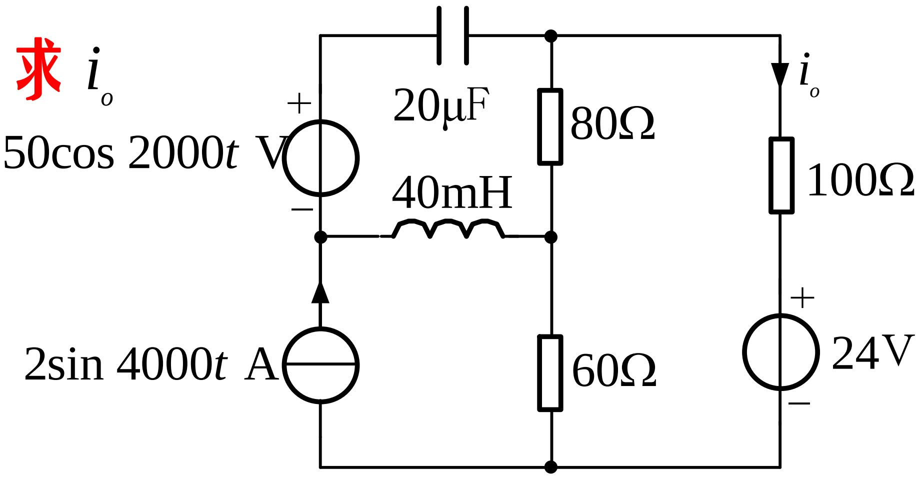
$$\dot I_o'' = \frac{50\angle 0^\circ}{53.33 + j55} * \frac{80}{80+160}$$

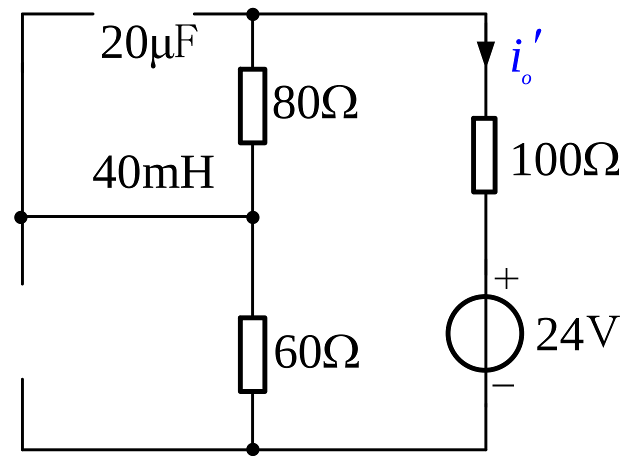
$$= 0.22\angle -45.88^\circ \text{ A}$$

$i_o' = A \qquad \dot I_o'' = B\angle\alpha \qquad i_o = \left[A + B\cos(2000t + \alpha)\right]\text{A}$

10.5 复杂正弦稳态电路分析

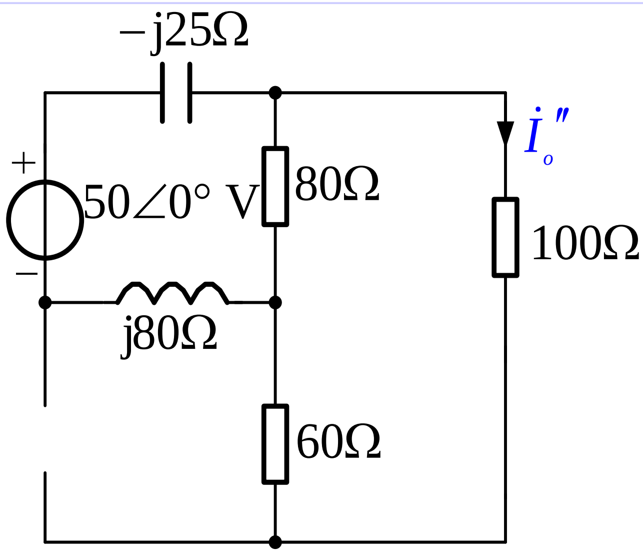
求 i_o

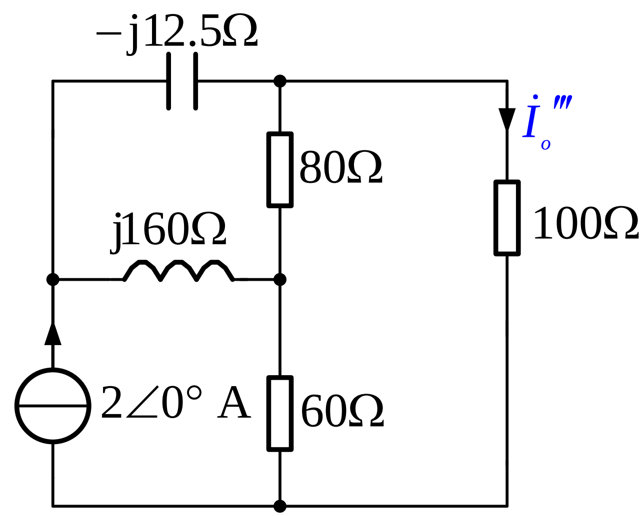




$$i_o' = \frac{24}{240} = 0.1\text{A}$$

应用阻抗分流





应用戴维南定理

$i_o' = A$ $\quad \dot{I}_o'' = B\angle\alpha$ $\quad \dot{I}_o''' = C\angle\beta$

$$i_o = [A + B\cos(2000t+\alpha) + C\sin(4000t+\beta)]\text{A}$$

谢 谢!