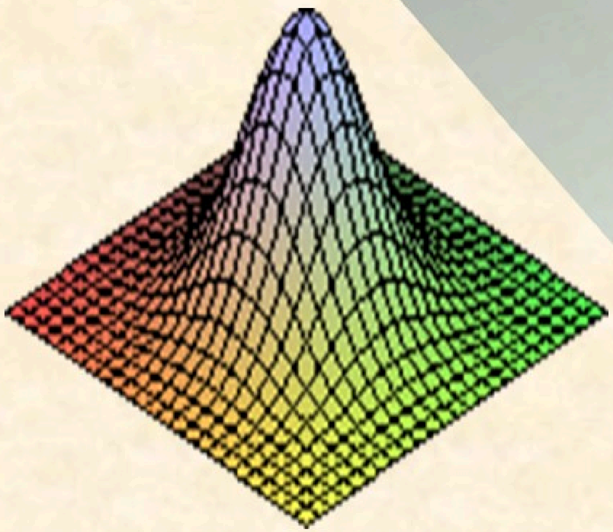
概率论与数理统计



主讲人：吴 娟

制作人：叶鹰　吴娟

wujuan@hust.edu.cn

§3.4 随机变量的独立性

一、 定义 设 X,Y是两个$r.v.$，若对任意的x,y,有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称X,Y相互独立.

等价定义

$$\text{若} \ F(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad -\infty < x, y < \infty \quad \begin{cases} \text{D.R.V.} & p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j} \\ \text{C.R.V.} & f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \end{cases}$$

则称随机变量 X 与 Y 相互独立.

例 讨论D.R.V. (X,Y)的独立性.

$X \backslash Y$	-1	0	2	$p_{i\bullet}$
1/2	$2/20$	$1/20$	$2/20$	$1/4$
1	$2/20$	$1/20$	$2/20$	$1/4$
2	$4/20$	$2/20$	$4/20$	$1/2$
$p_{\bullet j}$	$2/5$	$1/5$	$2/5$	

$\because\ p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j} \quad i,j=1,2,3$ 故X与Y独立.

例 已知$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ ，

证明：X与Y相互独立的充分必要条件是$\rho=0$

证明： $\rho=0 \quad \Rightarrow \quad f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$$f(x,y)=\frac{\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \quad \Rightarrow \quad f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2)$$

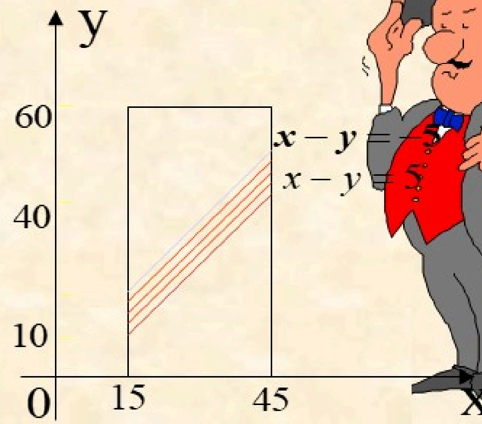
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \Rightarrow \sqrt{1-\rho^2}=1 \Rightarrow \rho=0$$

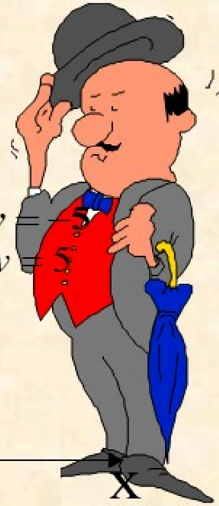
例　甲乙约定：12:30会面. 甲到达时刻X：12:15—12:45，乙到达的时刻Y：12:00—13:00，两人独立到达. 试求：

（1）先到者等待的时间不超过5分钟的概率.

（2）甲先到的概率是多少？

解：以12时为起点，以分为单位，则

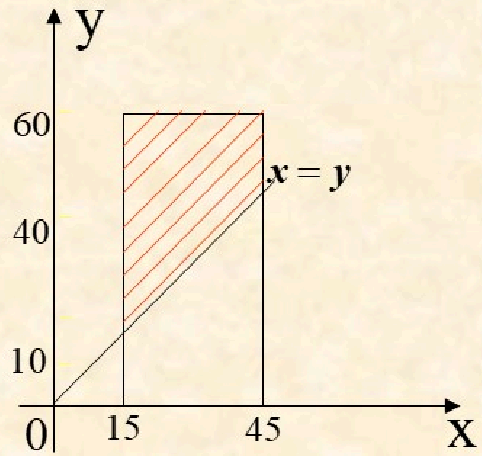




$$X \sim U(15,45),\ Y \sim U(0,60)$$

$$P(|X-Y| \le 5) = \iint_{|x-y|\le 5} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{15}^{45} [\int_{x-5}^{x+5} \frac{1}{1800} dy] dx \ =1/6$$



$$P(X<Y) = \int_{15}^{45} [\int_{x}^{60} \frac{1}{1800} dy] dx \ =1/2$$

三、n个随机变量的独立性

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x_i),\quad -\infty<x_1,x_2,\cdots,x_n<\infty.$$

定理

（1）若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，则其中任意$k(k=2,3,\ldots,n)$个R.V.相互独立.

（2）若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，则$g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n)$相互独立.

例

$$(X,Y,Z)\sim f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z), & 0\le x,y,z\le 2\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)dz=\frac{1}{4\pi^2},\quad 0\le x,y\le 2\pi,$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{(X,Y)}(x,y)dy=\frac{1}{2\pi},\quad 0\le x\le 2\pi.$$

X,Y,Z两两独立，但不相互独立.

从含有n个黑球和n个白球的袋中任取k个球，记X为取到的白球数，则

$$P(X=i)=\frac{C_n^i C_n^{k-i}}{C_{2n}^k} \qquad i=0,1,2,\ldots,k$$

由 $\sum_{i=0}^{k} P(X=i)=1$ 得 $\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_n^{k-i}=C_{2n}^k$

或由$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$比较$x^k$的系数得

的分

$X+Y$

$i)$

$(1-p)^{n-k+i}$

$$\left[\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_n^{k-i}\right] p^k (1-p)^{2n-k}$$

$$= C_{2n}^k p^k (1-p)^{2n-k} \qquad k=0,1,2\cdots,2n$$

$Z \sim B(2n,p)$

- 离散型卷积公式：

$$P(X+Y=k)=\sum_i P(X=i,Y=k-i)$$

$$\xlongequal{X\text{与}Y\text{独立}} \sum_i P(X=i)P(Y=k-i)$$

- 二项分布可加性：

若$X\sim B(m，p), Y\sim B(n，p)$且相互独立，则$X+Y\sim B(m+n,p)$.

- 泊松分布可加性：

若$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$且相互独立，则

$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

卷积公式

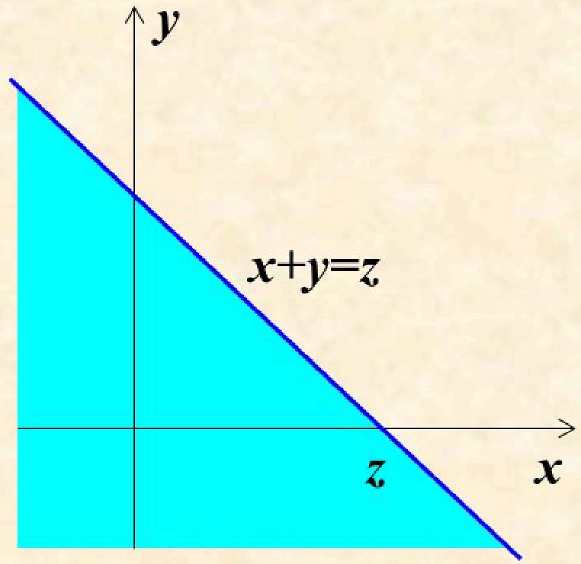
连续型随机变量和的分布 $Z=X+Y$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,\ y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,\ y)dy\right]dx$$ 令 $u=x+y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(x,\ u-x)du\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ u-x)dx\right]du$$



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)dx \ \overset{X与Y独立}{=\!=\!=}\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例 设$X\sim N(0,1)$与$Y\sim N(0,1)$独立，求$Z=X+Y$的分布.

解 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-y)^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(1/\sqrt{2}\right)}\exp\left[-\frac{\left(y-z/2\right)^2}{2\left(1/\sqrt{2}\right)^2}\right]dy\right]e^{-\frac{z^2}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

$$X+Y\sim N(0,2)$$