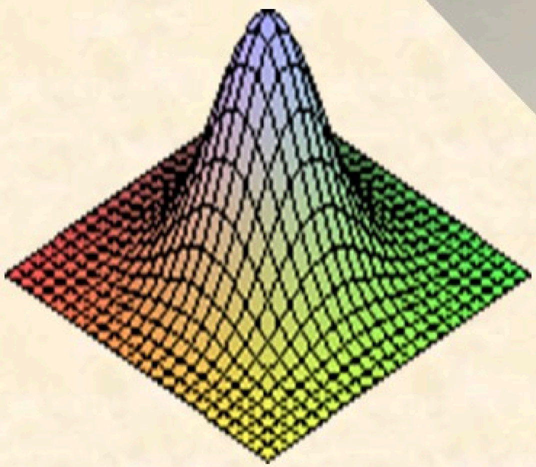
概率论与数理统计

制作人：叶鹰　吴娟

主讲人： 吴 娟

wujuan@hust.edu.cn



第四章　随机变量的数字特征

X的概率分布$F(x)$：精确 ⟶ $E(X)$：简洁

§ 4.1 数学期望(Expectation)

- 数学期望的定义
- 随机变量函数的数学期望
- 数学期望的重要性质
- 应用——蒙特卡洛方法

§ 4.1 数学期望(Expectation)

问题：车工小张每天生产的废品数是X，

如何定义随机变量 X 的平均值?

X	0	1	2	3
天数	32	30	17	21

$$0\cdot\frac{32}{100}+1\cdot\frac{30}{100}+2\cdot\frac{17}{100}+3\cdot\frac{21}{100}=1.27$$

单选题 50分

以频率为权重的加权平均值能否作为X的平均值 ?

A 能

B 不能

定义1 设D.R.V.X的分布律为$P(X=x_i)=p_i$，i=1,2,…,

若$\sum_i x_i p_i$ 绝对收敛，则称$E(X)=\sum_i x_i p_i$为X的数学期望.

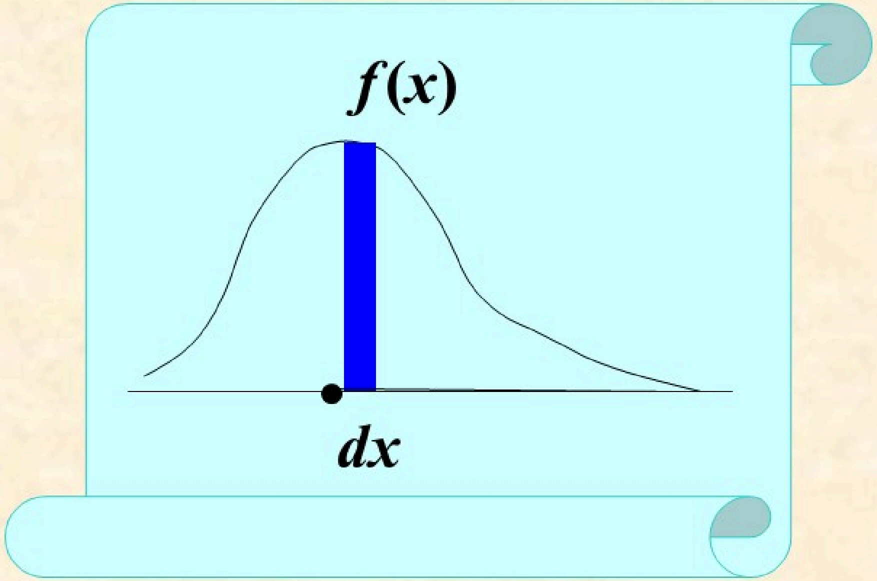
注：非绝对收敛级数的和与求和顺序有关，例如：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots=\ln 2$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2$$

定义2　设C.R.V. X的密度函数为$f(x)$，若 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

绝对收敛，则称 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx$ 为X的数学期望(均值).



例 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $E(X)$.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \xlongequal{t=\frac{x-\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma t+\mu}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu$$

例 设 $X \sim f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，求 $E(X)$.

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}d\left(x^2+1\right)=\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{+\infty}=+\infty$$

$E(X)$ 不存在.

Cauchy分布

随机变量函数的数学期望

定理1 设$g(x)$为连续函数，则

对D.R.V.： $P(X=x_i)=p_i \quad \Rightarrow \quad E[g(X)]=\sum_i g(x_i)p_i$

对C.R.V.： $X \sim f_X(x) \quad \Rightarrow \quad E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$

定理2 设$g(x,y)$连续，则

对D.R.V.： $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij} \quad \Rightarrow$

$$E[g(X,Y)]=\sum_i \sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$$

对C.R.V.： $(X,Y) \sim f(x,y) \Rightarrow$

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

例 设需求量$X \sim U[10,30]$，正常销售获利500元/单位； 削价处理亏损100元/单位； 调剂销售获利300元/单位，求最少进货量，使所获利润的期望值不少于9280元.

解：设进货量为a，则利润额为

$$g(X)=\begin{cases} 500X-100\cdot(a-X)=600X-100a & 10\le X<a \\ 500a+300\cdot(X-a)=300X+200a & a<X\le 30 \end{cases}$$

$$E[g(X)]=\int_{10}^{30} g(x)\frac{1}{30-10}dx$$

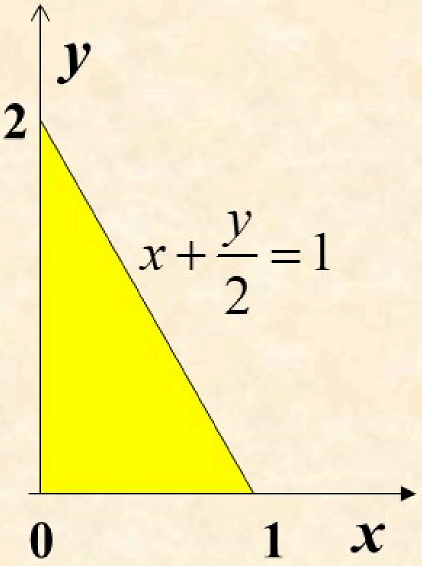
$$=\int_{10}^{a}\frac{1}{20}(600x-100a)dx+\int_{a}^{30}\frac{1}{20}(300x+200a)dx$$

$$=-7.5a^2+350a+5250 \quad \ge 9280$$

$$\Rightarrow 20\frac{2}{3}\le a\le 26 \qquad \Longrightarrow a=21$$

例 设(X,Y)在区域A上服从均匀分布，其中A是由直线$x=0$，$y=0$和 $x+y/2=1$ 围成的三角形区域.求$E(X)$，$E(Y)$，$E(X+Y)$，$E(XY)$.

解：
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2(1-x)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



$$E(X)=\int_0^1[\int_0^{2(1-x)}xdy]dx=\frac{1}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^2[\int_0^{1-\frac{y}{2}}ydx]dy=\frac{2}{3}$$

$$E(X+Y)=\int_0^2[\int_0^{1-\frac{y}{2}}(x+y)dx]dy=\int_0^2[\int_0^{1-\frac{y}{2}}xdx]dy+\int_0^2[\int_0^{1-\frac{y}{2}}ydx]dy=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

$$E(XY)=\int_0^2[\int_0^{1-\frac{y}{2}}xydx]dy=\int_0^2\frac{y}{2}(1-\frac{y}{2})^2dy=\frac{1}{6}\neq\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$$

单选题 50分

下列说法错误的是:

A 对任何实数a和b，有 $E(aX+b)=aE(X)+b$

B $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

C $E(\sum_i X_i)=\sum_i E(X_i)$

D $E(XY)=E(X)E(Y)$

定理3 数学期望有下面基本性质:

1° 对任何实数*a*，*b*，有 $E(aX+b)=aE(X)+b$

2° $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$. 一般 $E(\sum_i X_i)=\sum_i E(X_i)$

3° X与Y独立 $\Rightarrow$ $E(XY)=E(X)E(Y)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\cdot yf_Y(y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(Y)dy$$

4° Cauchy-Schwarz不等式:

$$E^2(XY)\le E(X^2)E(Y^2)$$

等式成立 $\Leftrightarrow$ 存在t_0使 $E(t_0X-Y)^2=0$

例 设$X\sim B(n,p)$，求$E(X)$.

解：记$X_i\sim B(1,p)$，$i=1,2,\cdots,n$，相互独立，则

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p) \text{ 故 } E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p=np$$

例 把数字1,2,…,n任意地排成一列，如果数字k恰好出现在第k个位置上，则称为一个巧合，求巧合个数的数学期望.

解: 设巧合个数为X，引入

$$X_k=\begin{cases}1 & k\text{在第}k\text{位置上}\\ 0 & \text{否}\end{cases} \qquad k=1,2,\ldots,n$$

则 $$X=\sum_{k=1}^{n}X_k,\quad E(X)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

思考题

MC: 蒙特卡洛模拟

计算积分

$$I=\int_a^b g(x)dx \qquad X\sim U(a,b),\ f_X(x)=1/(b-a),\ a<x<b$$

$$I=(b-a)\int_a^b g(x)\frac{1}{b-a}dx=(b-a)\int_a^b g(x)f_X(x)dx=(b-a)E(g(X))$$

$$\hat{I}=(b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(x_i)$$

MC.xlsx