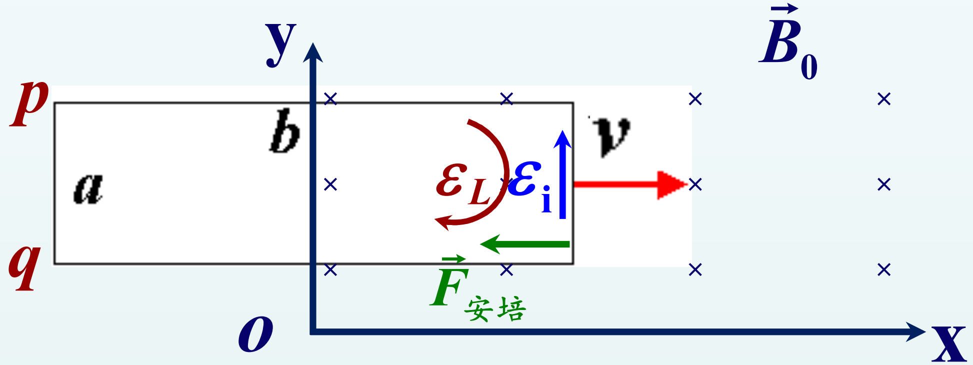
自感

例：一矩形金属线框，边长为 a、b（b足够长），线框质量为 m 自感系数为 L，电阻忽略，线框以初速度 v_0 沿 x 轴方向从磁场外进入磁感应强度大小为B_0 的均匀磁场中，求矩形线圈在磁场内的速度与时间的关系式 $v=v(t)$ 和沿 x 轴方向移动的距离与时间的关系式 $x=x(t)$。

解：线圈的一部分进入磁场后，线圈内有动生电动势和自感电动势。



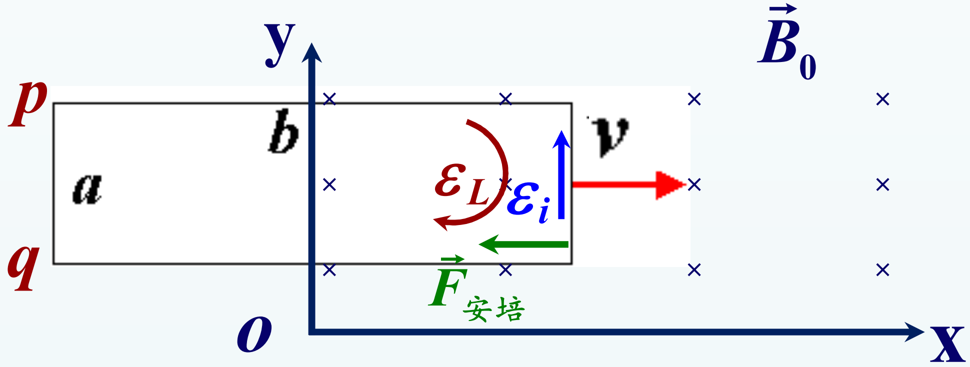
$$\left.\begin{aligned} V_p - |\varepsilon_i| + |\varepsilon_L| &= V_q \\ V_p &= V_q \end{aligned}\right\} |\varepsilon_L| = |\varepsilon_i| \rightarrow L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - B_0 a v = 0$$

安培定律 $B_0 a I = -m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{B_0 a}{m}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{B_0^2 a^2}{mL} v = 0$$

自感

解：$$\frac{d^2v}{dt^2}+\overbrace{\boxed{\frac{B_0^2a^2}{mL}}}^{\omega^2}v=0 \qquad B_0aI=-m\frac{dv}{dt}$$



$$\frac{d^2v}{dt^2}+\omega^2v=0 \longrightarrow v=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$$

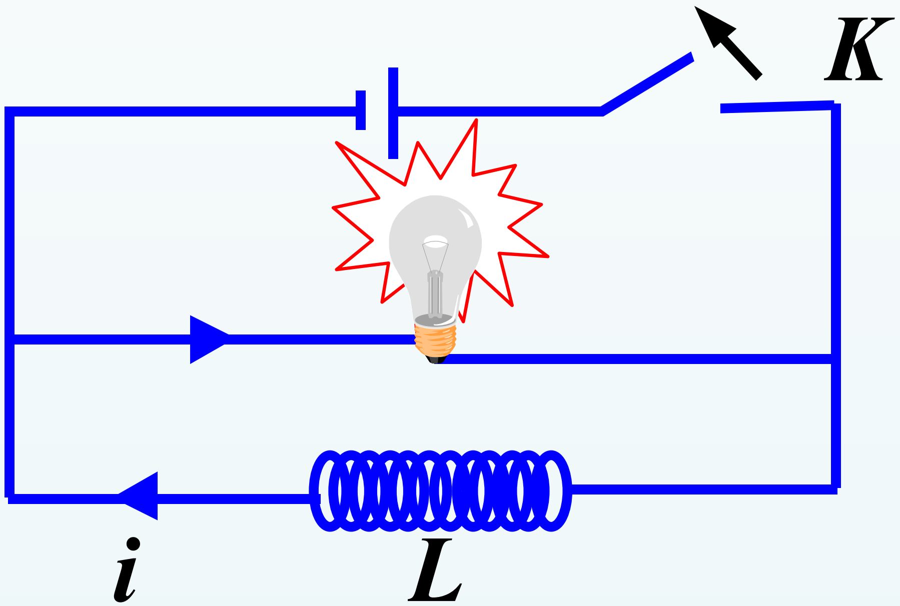
当$t=0$时，$v=v_0 \longrightarrow C_2=v_0$

$$\frac{dv}{dt}=C_1\omega\cos\omega t-C_2\omega\sin\omega t=-\frac{B_0aI}{m}$$

当$t=0$时，$I=0 \longrightarrow C_1=0$

$$\longrightarrow \begin{cases} v=v_0\cos\omega t \\ x=\dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t \end{cases}$$

自感



一个问题

断开电源，会有发生什么？

灯会突然强烈地闪亮一下再熄灭

这个现象说明了什么？

多匝线圈支路中的较大的电流在开关断开后通过灯泡然后又逐渐消失的缘故。

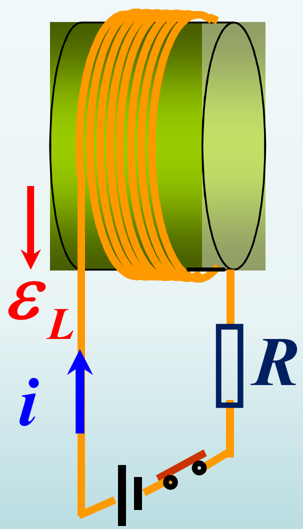
线圈中磁场具有能量(自感磁能)

磁场的能量

□ 磁场的能量

回顾： 电场的能量 ⟶ 储存在电容器中 $W_e = \frac{1}{2}CU^2$

- **自感存储磁能**

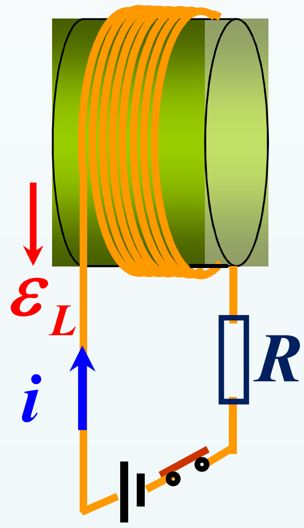


外电源电动势 $\begin{cases} \text{线圈发热（焦耳热）} \\ \text{对抗自感电动势}\boxed{\text{做功}} \end{cases}$ → **存储的磁能**

建立稳定磁场的过程中

磁场的能量

- **定量表示自感存储的磁能**



计算电路在建立电流 I 的过程中，电源的电动势对抗自感所做的功。

若回路电流以 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t>0$ 变化时，

电流增加$\mathrm{d}i$，电源克服ε_L作功为$\mathrm{d}A$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}A &= -\varepsilon_L \mathrm{d}q = -\varepsilon_L i\mathrm{d}t \\ \varepsilon_L &= -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\} \mathrm{d}A = Li\mathrm{d}i$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}A &= Li\mathrm{d}i \\ A &= \int \mathrm{d}A\end{aligned}\right\} A = \int Li\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2$$

存储

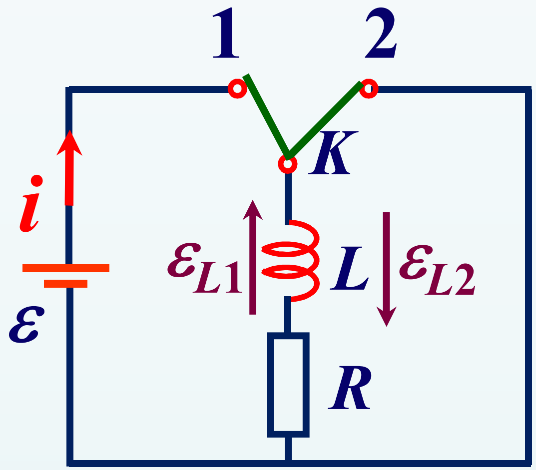
电感存储的磁能

$$\boxed{W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}LI^2}$$

磁场的能量

克服自感电动势做的功 ＝ 存储的磁能

怎么证明?



自感电动势所做的功，通过电阻R以热能形式散发:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \int Ri^2 \mathrm{d}t \\ i &= \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L} \end{aligned}\right\} Q = \int R\left(I^2 e^{-2\frac{R}{L}t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= RI^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} L I^2$$

磁场的能量

磁能W_m与$\vec{B}$、$\vec{H}$有何联系?

- **磁能与磁能密度**

由上可知，通有电流I的自感线圈中储能：

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

以长直螺线管为例： 已知其自感为 $L = \mu_0 n^2 V$

当螺线管中通有电流I时，其存储的磁能为：

$$\left.\begin{array}{l} W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 V \cdot I^2 \\ \text{螺线管中磁感应强度} \quad B = \mu_0 n I \end{array}\right\} W_m = \frac{B^2}{2\mu_0}V$$

磁场的能量

$W_{\mathrm{m}}=\dfrac{B^2}{2\mu_0}V$ ——长直螺线管通电流 I 时储存的磁能

∵ 长直螺线管管内为均匀磁场!

∴ **单位体积储存的磁场能量为**

$$\left.\begin{aligned} w_{\mathrm{m}}=\frac{W_{\mathrm{m}}}{V}=\frac{B^2}{2\mu_0} \\ \vec{B}=\mu_0\vec{H} \end{aligned}\right\} w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$ —— 磁能密度

以上结论对任意形式的磁场都成立!

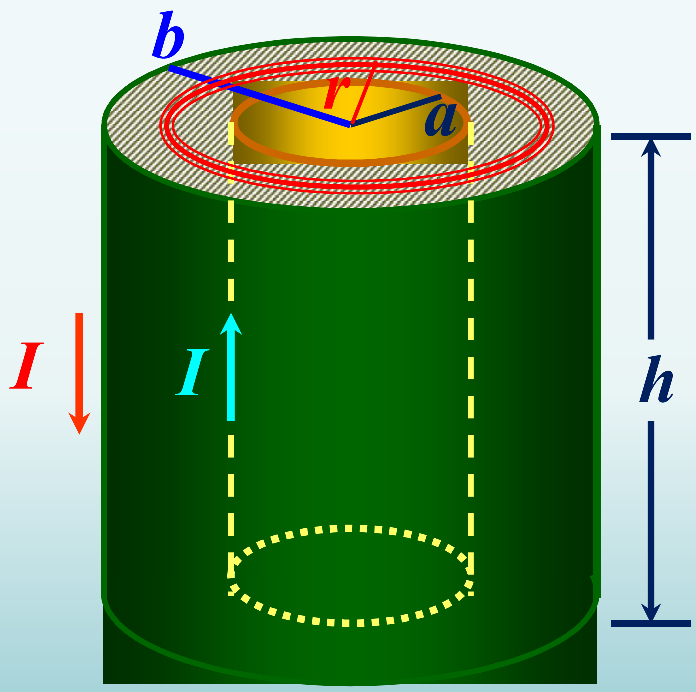
一般地，对非均匀磁场：$W_{\mathrm{m}}=\int w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V$

磁场的能量

- **磁能的计算**

例. 一圆柱形同轴电缆,由半径为a、b的薄圆筒构成,其间充满磁导率为μ介质,并通有电流I。

求:长度为h的电缆内磁场的能量W_m和L?



解:两圆柱面间的磁场为 $B=\dfrac{\mu I}{2\pi r}$

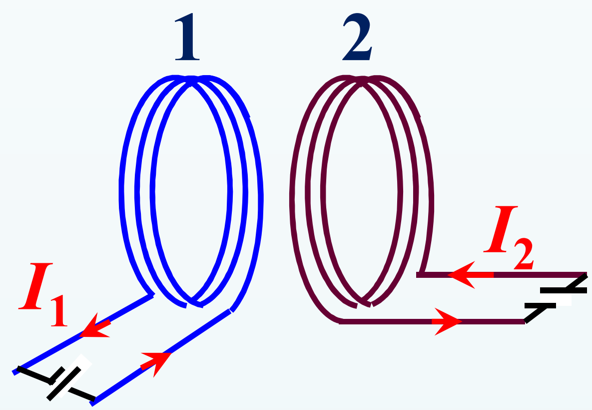
$$W_m=\int\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\mathrm{d}V=\int\frac{1}{2\mu}B^2\mathrm{d}V$$

$$=\int_a^b\frac{1}{2}\frac{\mu I^2}{(2\pi r)^2}h2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\mu I^2 h}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2\longrightarrow L=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{\mu h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

磁场的能量

例. 证明两个导体回路的互感系数相等。



解：初始：两个回路处在开路状态

先接通回路1，其电流从$0 \to I_1$

电源作功,储存的磁场能量为 $W_1 = \dfrac{1}{2} L_1 I_1^2$

再接通回路2，其电流从$0 \to I_2$

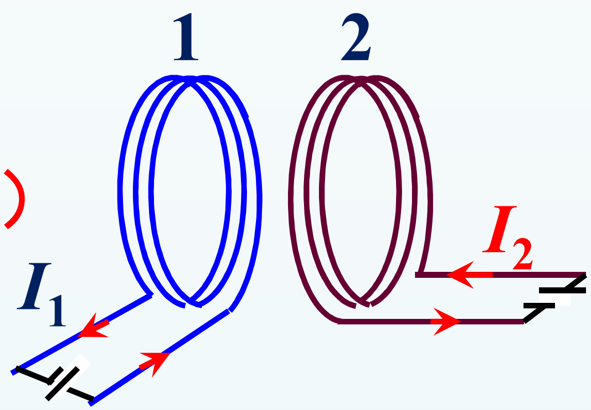
电源作功,储存的磁场能量为 $W_2 = \dfrac{1}{2} L_2 I_2^2$

但此过程在回路1中产生了互感电动势

$$\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

磁场的能量

$$W_1=\frac{1}{2}L_1I_1^2 \qquad W_2=\frac{1}{2}L_2I_2^2 \qquad \varepsilon_{21}=-M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$



接通回路2时，为保持I_1不变（会发生什么？）

回路1的电源要克服互感电动势作功：

$$A=\int-\varepsilon_{21}\mathrm{d}q=\int M_{21}\frac{\mathrm{d}i_2}{\cancel{\mathrm{d}t}}I_1\cancel{\mathrm{d}t}=\int_0^{I_2}M_{21}I_1\mathrm{d}i_2=M_{21}I_1I_2$$

两回路电流分别达到I_1, I_2时整个稳定系统，其磁能为

$$W_\mathrm{m}=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+M_{21}I_1I_2$$

若将前述整个过程反过来，先接通回路2的电源，同理可得

$$W_\mathrm{m}=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+M_{12}I_1I_2$$

而系统的总能量与建立电流的过程无关 $\longrightarrow$ $M_{21}=M_{12}=M$

作业：8T12～8T15

作业要求

1. 独立完成作业。
2. 图和公式要有必要的标注或文字说明。
3. 作业纸上每次都要写学号(或学号末两位)。
4. 课代表收作业后按学号排序，并装入透明文件袋。
5. 每周四交上周的作业。迟交不改。
6. 作业缺交三分之一及以上者综合成绩按零分计。