定义

设函数$f(x)$ 在x_0的某个邻域上有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在x_0处连续。

注

- $f(x)$在x_0处有定义；
- 函数$f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow$ 对任意包含$f(x_0)$的开区间I，存在一个包含x_0的开区间J，使得$J \subset f^{-1}(I)$；
- 当$\Delta x = x - x_0 \to 0$时，$\Delta y = f(x) - f(x_0) = o(1)$；
- 函数$f(x)$在x_0处连续，那么极限号和函数可以交换：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x).$$

左连续

设函数f在x_0的某个左邻域上有定义，如果：

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在x_0处左连续。

右连续

设函数f在x_0的某个右邻域上有定义，如果：

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在x_0处右连续。

函数$f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow$ f在x_0处既左连续又右连续。

例

讨论函数$D(x), xD(x), \mathrm{sgn}(x), R(x)$的连续性。

间断点

设函数f在x_0的某空心邻域上有定义。如果函数$f(x)$在x_0处不连续，则称f在x_0处间断，x_0是f的不连续点或间断点。

间断点的分类

设x_0是函数f的间断点，根据函数f在x_0处左右极限的情况，有以下三种情况：

1. 如果函数f在x_0处左右极限都存在，那么x_0称为是f的第一类间断点：
   i. 如果$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$ 或$f(x_0+0)=f(x_0-0)$且$f(x_0)$没有定义，称x_0是可去间断点。此时可以通过改变f在x_0处的函数值或者补充在x_0处的定义，使得 f在x_0处连续；
   ii. 如果$f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$ ，则称x_0是f的跳跃间断点；
2. 如果函数f在x_0处左右极限至少有一个不存在，那么x_0称为是f的第二类间断点。

例

判断下述函数间断点的类型：

$$\mathrm{sgn}(x), D(x), R(x), \frac{\sin x}{x}, \sin(\frac{1}{x}).$$

命题

开区间上的单调函数的间断点都是跳跃间断点。

区间上的连续函数

f是定义在区间I上的函数。如果f在区间内部连续，在区间端点处单侧连续，那么称f在区间I上连续。

分段连续

函数f定义在闭区间$[a,b]$上。如果f只有有限个第一类间断点，那么称f在区间$[a,b]$上分段连续。

符号函数$\mathrm{sgn}(x)$在有限闭区间上分段连续。

连续函数的性质

局部有界性

若函数$f(x)$在x_0处连续，那么$f(x)$在x_0的某个邻域上有界。

局部保号性

若函数$f(x)$在x_0处连续，且$f(x_0) > 0$（resp.$f(x_0) < 0$），那么存在x_0的某个邻域，在其上 $f(x) > 0$（resp.$f(x) < 0$）。

四则运算

若函数$f(x), g(x)$在点x_0处连续，那么$f \pm g, f \cdot g, f/g$(当$g(x_0) \neq 0$时) 也在x_0处连续。

复合函数的连续性

如果函数$f(x)$在点x_0处连续，$f(x_0) = u_0$；函数$g(u)$在u_0处连续。那么复合函数$g \circ f$在x_0处连续。

例

假设函数f, g是定义在实数集上的连续函数。
证明：$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}, G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$也是连续的。

基本初等函数的连续性

常量函数、指数函数、对数函数、幂函数和三角函数在其定义域上是连续的。

例

计算极限

$$\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0).$$

有界闭区间上连续函数的性质

定理：有界性

闭区间上的连续函数有界。

对其他类型的区间或者无界闭区间不一定成立。

例

设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$内连续，且

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\alpha, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\beta.$$

证明：函数$f(x)$在$(a,+\infty)$上有界。

定理：最值性

闭区间上的连续函数可以取到最值。

开区间上的连续函数不一定存在最大值和最小值。

根的存在性定理，零点定理

假设函数f是定义在闭区间$[a, b]$上的连续函数，
且$f(a) \cdot f(b) < 0$，那么至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

例

证明：奇数次多项式一定存在实根。

例

试证方程$x = a\sin x + b$，其中$a, b > 0$，至少存在一个根$\xi \leq a + b$。

定理：介值性

区间上连续函数的值域是一个区间（可缩为一点）。

例

区间上的连续单射一定是严格单调的。

Summary

有界闭区间上连续函数的值域是有界闭区间。

定理：反函数的连续性

假设函数f是$[a,b]$上的严格单调连续函数，那么它存在反函数，f^{-1}是$[f(a),f(b)]$或$[f(b),f(a)]$上的严格单调连续函数。

反三角函数的连续性

反三角函数在其定义域上是连续的，因此所有的基本初等函数都是连续的。

初等函数的连续性

初等函数是基本初等函数经过有限次的复合和四则运算得到的，所以所有的初等函数在其定义域上都是连续的。

指数函数连续性在求极限中的应用

- 设 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a>0,\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}=a^b$;
- 1^∞不定型：设 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=1,\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}=\exp(\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\cdot(u(x)-1)))$;

例

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x_n}{n})^n=e^a$。

例

假设$a_1, a_2, \cdots, a_k > 0$，求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n.$$

例

求极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n.$$

一致连续性

假设f定义在某个区间I上，如果对于任意$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得对于任意$x_1, x_2 \in I$ 且$|x_1 - x_2| < \delta$, 都成立$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$，则称函数$f$在区间$I$上一致连续。

注

1. $f(x)$在区间I上不一致连续$\Leftrightarrow$ 存在$\epsilon > 0$，对任意$\delta > 0$，都存在$x_1, x_2 \in I$且$|x_1 - x_2| < \delta$，满足$|f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon$;
2. 一致连续可以推出连续，反之不成立;
3. 一致连续是整体性质，连续是局部性质。

例

函数$y = \dfrac{1}{x}$在区间$(0, +\infty)$上不是一致连续的，在区间$[a, +\infty)$上是一致连续的，其中$a > 0$。

一致连续性

有界闭区间上的连续函数是一致连续的。

例

函数f在(a,b)上连续，且$f(a+0), f(b-0)$存在，求证：f在区间(a,b)上一致连续。

例 (Cauchy方程)

函数$f(x)$定义在$\mathbb{R}$上，满足Cauchy方程$f(x+y)=f(x)+f(y)$。如果$f(x)$在$x=0$处连续，求证$f(x)=xf(1)$。