# 1.

### 转移矩阵(M)

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

### 初始PageRank

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

### 迭代计算

$$r^{(1)} = M \cdot r^{(0)}$$

$$r^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{5}{18} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

---

# 2.

### 转移矩阵(M)

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

### 初始PageRank

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

### 迭代计算

$$r^{(1)} = \beta M \cdot r^{(0)} + \frac{(1-\beta)}{N}\mathbf{e}$$

$$r^{(1)} = \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{45} \\ \frac{13}{45} \\ \frac{19}{45} \end{bmatrix}$$

---

## 3.

### *转移矩阵（M）*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### *初始PageRank*

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

### *迭代计算*

$$r^{(1)} = \beta M \cdot r^{(0)} + \frac{(1-\beta)}{|S|} v$$

$$r^{(1)} = \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

---

## 4.

### *原始情况（所有支持网页链向目标网页）*

- 设目标网页的 **PageRank** 为 **y**
- 设从其他可访问页面贡献给目标页面的 PageRank 为 **x**
- 设 **farm** 页面数量为 **M**, 总页面数为 **N**
- 阻尼因子为 **β**

每个 **farm** 页面的 **PageRank** 为:

$$\text{Rank of farm page} = \frac{\beta y}{M} + \frac{1-\beta}{N}$$

目标页面的 **PageRank** 方程为:

$$y = x + \beta M \left( \frac{\beta y}{M} + \frac{1-\beta}{N} \right) + \frac{1-\beta}{N}$$

解得:

$$y = \frac{x}{1-\beta^2} + c\frac{M}{N}, \quad \text{其中 } c = \frac{\beta}{1+\beta}$$

### *变体 (a)：每个支持网页只链向自己*

在这种情况下：

- 每个 **farm** 页面的出链指向自己。
- 目标页面不再从 **farm** 页面获得任何 **PageRank**

每个 **farm** 页面只从自己获得 **PageRank**：

$$r_{\text{farm}} = \beta \cdot r_{\text{farm}} + \frac{1-\beta}{N}$$

解得：

$$r_{\text{farm}} = \frac{1-\beta}{N} \cdot \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{N}$$

目标页面只从可访问页面和随机跳转获得 **PageRank**：

$$y = x + \frac{1-\beta}{N}$$

### *变体 (b)：每个支持网页不链向任何网页（dangling 节点）*

在这种情况下：

- 每个 **farm** 页面没有出链，它们的 **PageRank** 会均匀分配给所有页面（包括目标页面）
- 目标页面除了从可访问页面获得 **PageRank**，还会从 **farm** 页面获得额外的贡献

所有 **farm** 页面都是 dangling 节点，它们的 **PageRank** 最终会收敛到：

$$r_{\text{farm}} = \frac{1-\beta}{N} + \beta \cdot (\text{来自 dangling 节点的均匀分配})$$

由于 **farm** 页面互相不传递 **PageRank**，最终：

$$r_{\text{farm}} = \frac{1}{N}$$

目标页面从以下来源获得 **PageRank**：

1. **可访问页面**（贡献 **x**）
2. **随机跳转**
3. **Farm 页面的 dangling 分配:**

$$M \cdot \left( \frac{\beta}{N} \cdot \frac{1}{N} \right) = \frac{\beta M}{N^2}$$

因此，目标页面的 **PageRank** 为：

$$y = x + \frac{1-\beta}{N} + \frac{\beta M}{N^2}$$

### *变体 (c)：每个支持网页同时链向自己和目标网页*

在这种情况下：

- 每个 **farm** 页面有 **两条出链**：
  - 一条指向 **自己**（权重**1/2**）
  - 一条指向 **目标页面**（权重**1/2**）

- 目标页面从 **farm** 页面获得部分 **PageRank**，同时 **farm** 页面也会保留部分 **PageRank**

每个 **farm** 页面的 **PageRank** 来源：

1. **来自自己**（权重**1/2** ）
2. **随机跳转**（权重**(1-β)/N**）

因此：

$$r_{\text{farm}} = \frac{\beta}{2} r_{\text{farm}} + \frac{1-\beta}{N}$$

解得：

$$r_{\text{farm}} = \frac{1-\beta}{N} \cdot \frac{1}{1-\frac{\beta}{2}} = \frac{2(1-\beta)}{N(2-\beta)}$$

目标页面的 **PageRank** 来源：

1. **可访问页面**
2. **随机跳转**
3. **farm 页面的贡献**

$$M \cdot \left( \frac{\beta}{2} \cdot \frac{2(1-\beta)}{N(2-\beta)} \right) = \frac{\beta M(1-\beta)}{N(2-\beta)}$$

因此，目标页面的 **PageRank** 为：

$$y = x + \frac{1-\beta}{N} + \frac{\beta M(1-\beta)}{N(2-\beta)}$$

可以进一步整理为：

$$y = x + \frac{1-\beta}{N} \left( 1 + \frac{\beta M}{2-\beta} \right)$$

---

# 5.

- 导航度得分(**hub**)是链出网页的权威度得分之和
- 权威度得分(**authority**)是链入网页的导航度之和

### *邻接矩阵（A）*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{\top} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### *初始导航度和权威度*

$$Initialize \quad h_{\text{i}} = a_{\text{i}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$h^{(0)} = a^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

### *迭代计算*

$$h^{(1)} = A \cdot a^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a^{(1)} = A^{\top} \cdot h^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Normalize \quad h^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad a^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$