第二章　逻辑代数

秦磊华　计算机学院

逻辑函数的表达式形式不唯一，从应用角度出发，需讨论基本形式、标准形式及其相互转换。

2.5 逻辑函数的表达形式

1. 逻辑函数表达式的基本形式

1) 与-或”表达式

◆由若干“与项”进行“或”运算构成的表达式；

$$F=\overline{A}B+A\overline{B}C+\overline{C}$$

◆每个“与项”可以是单个变量的原变量或者反变量，也可由多个原变量或者反变量相“与”组成。

◆ “与项”也称“积项”， “与-或”表达式又称“积之和”表达式。

1. 逻辑函数表达式的基本形式

2）“或-与”表达式

♦由若干“或项”进行“与”运算构成的表达式；

$$F(A,B,C,D)=(\overline{A}+B)(B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)D$$

♦每个“或项”可以是单个变量的原变量或者反变量，也可以由多个原变量或者反变量相“或”组成；

♦“或项” 也称“和项”，“或—与”表达式也称“和之积”表达式。

现实中的逻辑函数表达式可以被表示成任意的混合形式

$$F(A,B,C)=(A\overline{B}+C)(A+B\overline{C})+B$$

2. 逻辑函数表达式的标准形式

1) 逻辑函数基本形式的特性

逻辑函数的基本形式不唯一。

$$F=A\cdot B+\overline{A}\cdot C+B\cdot C=A\cdot B+\overline{A}\cdot C$$

（不唯一的因素有哪些？）

- 为在逻辑问题研究与实践中，使逻辑功能与逻辑表达式唯一对应具有重要意义
- 为此，有必要引入逻辑函数表达式的标准形式(引入最小项和最大项来表达)

2.5 逻辑函数的表达形式

2. 逻辑函数表达式的标准形式

2) 最小项

- ♦具有n个变量的函数的“与项”包含全部n个变量；
- ♦每个变量都以原变量或反变量形式出现一次，且仅出现一次；
- ♦ n个变量可以构成多少个最小项?
- ♦ 给出3个变量的全部最小项：

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\ ,\ \bar{A}\bar{B}C\ ,\ \bar{A}B\bar{C},\ \bar{A}BC,\ A\bar{B}\bar{C}\ ,\ A\bar{B}C\ ,\ AB\bar{C}\ ,\ ABC$$

2. 逻辑函数表达式的标准形式

2) 最小项

(1) 最小项的表示

3变量A、B、C构成的最小项 $A\overline{B}C$

$$\begin{array}{ccccc} A & \overline{B} & C & \longrightarrow & m_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 1 & 0 & 1 & \longrightarrow & (5)_{10} \end{array}$$

2. 逻辑函数表达式的标准形式

2) 最小项

(2) 最小项的性质

性质1: 任意一个最小项，其相应变量有且仅有一种取值使这个最小项的值为1。最小项不同，使其值为1的变量取值不同。

如使$m_5=1$ 的变量取值ABC=101,此时，该变量的其余最小项取值为0

性质2: 相同变量构成的两个不同最小项相“与”为0。

即 $m_i \cdot m_j = 0 \ (i \neq j)$

2. 逻辑函数表达式的标准形式

2) 最小项

(2) 最小项的性质

性质3：n个变量的全部最小项之和(相或)”为1，记为：

$$F(A,B,C,\ldots)=\sum_{i=1}^{2^n-1} m_i = 1$$

性质4：n个变量构成的最小项有n个相邻最小项。

♦相邻最小项：最小项中除一个变量互为相反外，其余部分均相同。

♦ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}C$, $\bar{A}B\bar{C}$, $\bar{A}BC$, $A\bar{B}\bar{C}$, $A\bar{B}C$, $AB\bar{C}$, ABC （找各最小项的相邻项）

2.5 逻辑函数的表达形式

2. 逻辑函数表达式的标准形式

2) 最小项

C \ AB	00	01	11	10
0	$\bar A\bar B\bar C$	$\bar A B\bar C$	$AB\bar C$	$A\bar B\bar C$
1	$\bar A\bar B C$	$\bar A BC$	ABC	$A\bar B C$

(2) 最小项的性质

- ♦相邻最小项: 最小项中除一个变量互为相反外，其余部分均相同的最小项。
- ♦ $\bar A\bar B\bar C$, $\bar A\bar B C$, $\bar A B\bar C$, $\bar A BC$, $A\bar B\bar C$, $A\bar B C$, $AB\bar C$, ABC
- ♦相邻最小项的用途

$$\bar A\bar B\bar C + \bar A B\bar C + AB\bar C + A\bar B\bar C$$
$$= \bar A\bar C(\bar B + B) + A\bar C(B + \bar B)$$
$$= \bar A\bar C + A\bar C$$
$$= \bar C$$

2. 逻辑函数表达式的标准形式

3) 最大项及其表示

(1) 最大项

- ♦具有n个变量的函数的“或项”包含全部n个变量；
- ♦每个变量都以原变量或反变量形式出现一次，且仅出现一次；
- ♦n个变量可以构成多少个最大项?

2. 逻辑函数表达式的标准形式

3) 最大项及其表示

(2) 最大项表示

最大项表示M5 （原变量取0，反变量取1）

$$
\begin{array}{ccccccc}
\overline{A} & + & B & + & \overline{C} & \longrightarrow & M_5 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & & 0 & & 1 & \longrightarrow & (5)_{10}
\end{array}
$$

2. 逻辑函数表达式的标准形式

3) 最大项及其表示

(3) 最大项的性质

性质1: 任意一个最大项，其相应变量有且仅有一种取值使这个最大项的值为0。最大项不同，使其值为0的变量取值不同。

如使$(\overline{A} + B + \overline{C})$ $M_5=0$ 的变量取值ABC=101

性质2: 相同变量构成的两个不同最大项相“或”为1。

$$M_i + M_j = 1$$

2.5 逻辑函数的表达形式

2. 逻辑函数表达式的标准形式

3) 最大项及其表示

(3) 最大项的性质

性质3: n个变量的全部最大项相“与”为0。

$$F(A,B,C,\ldots)=\prod_{i=1}^{2^n-1} Mi = 0$$

性质4: n个变量构成的最大项有n个相邻最大项。

$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ $\overline{A}+\overline{B}+C$ $A+\overline{B}+\overline{C}$ $\overline{A}+B+\overline{C}$ $\overline{A}+B+C$ $A+\overline{B}+C$ $A+B+\overline{C}$ $A+B+C$

2. 逻辑函数表达式的标准形式

4) 最小项与最大项的关系

2变量最小项、最大项真值表

变 量		最 小 项				最 大 项			
A	B	$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	AB	$A+B$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}+B$	$\overline{A}+\overline{B}$
		m_0	m_1	m_2	m_3	M_0	M_1	M_2	M_3
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0

2. 逻辑函数表达式的标准形式

4) 最小项与最大项的关系

同一自变量问题中，下标相同的最小项和最大项互为反函数，即相同变量构成的最小项mi和最大项Mi之间存在互补关系：

$$\overline{m_i} = M_i \qquad 或 \qquad m_i = \overline{M_i}$$

如3变量A、B、C构成的最小项m3和最大项M3之间有

$$\overline{m_3} = \overline{\overline{A}BC} = A + \overline{B} + \overline{C} = M_3$$

$$\overline{M_3} = \overline{A + \overline{B} + \overline{C}} = \overline{A}BC = m_3$$

2. 逻辑函数表达式的标准形式

6)标准“与 - 或”表达式

由若干最小项相“或”构成。

一个3变量函数的标准“与-或”表达式

$$F(A,B,C)=\overline{A}\cdot\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\cdot\overline{C}+ABC$$

$$=m_1+m_2+m_4+m_7$$

$$=\sum m(1,2,4,7)$$

2.5 逻辑函数的表达形式

2. 逻辑函数表达式的标准形式

7)标准“或 -与”表达式

由若干最大项相“与”构成，也称为最大项表达式

$$F(A.B.C) = (A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$= \prod M(1,5,7)$$

逻辑函数表达式的标准形式解决了基本表达形式存在的问题吗?

2.6 逻辑函数表达式的转换

转换目的: 将任意逻辑函数表达式转换成标准表达式

转换方法: 逻辑代数转化、真值表转换

1.代数转换法求标准“与-或” 式的一般步骤

(1)将函数表达式变换成一般“与-或”表达式;

公理 3 $A + BC = (A+B)(A+C)$ ； $A(B + C) = AB + AC$

定理6 $\overline{A + B} = A \cdot B$ $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

(2)反复使用$X=X(Y+\overline{Y})$ 将表达式中所有非最小项的“与项”扩展成最小项;

2.6 逻辑函数表达式的转换

1.代数转换求标准“与-或” 式的一般步骤

例1:将逻辑函数表达式 $F(A,B,C)=\overline{(A\bar{B}+B\bar{C})\cdot\overline{AB}}$ 转换成标准“与-或”表达式。(代数法)

- 将函数表达式变换成“与-或”表达式:

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= \overline{(A\overline{B}+B\overline{C})\cdot\overline{AB}} \\
&= \overline{A\overline{B}+B\overline{C}}+AB \\
&= (\overline{A}+B)(\overline{B}+C)+AB \\
&= \overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}C+BC+AB
\end{aligned}
$$

- 把上式中非最小项的“与项”扩展成最小项并合并相同的项:

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= m_0+m_1+m_3+m_6+m_7 \\
&= \sum m(0,1,3,6,7)
\end{aligned}
$$

1.求标准“与-或” 式的一般步骤

2)真值表转换法求标准“与-或”式

例2 将函数表达式 $F(A,B,C)=A\overline{B}+B\overline{C}$ 变换成标准"与-或"式。

解:列出F的真值表，可直接写出F的最小项表达式:

函数F的真值表

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$F=\sum m(2,4,5,6)$

2.6 逻辑函数表达式的转换

2.求标准“或-与” 式的一般步骤

1)代数转换法求标准“或-与”式的一般步骤

(1)将函数表达式转换成一般“或-与”表达式;

(2)反复用 $A=(A+B)(A+\overline{B})$把表达式中所有非最大项的“或项”扩展成最大项。

例3将函数表达式 $F(A,B,C)=\overline{A}C+A\overline{B}\cdot\overline{C}$ 表示成最大项表达式形式。

2.6 逻辑函数表达式的转换

2.求标准“或-与” 式的一般步骤

2)真值表法求标准“或-与”式方法

真值表上使函数值为0的变量取值组合对应的最大项相“与”即可。

例2 将函数表达式 $F(A,B,C)=A\overline{B}+B\overline{C}$ 变换成标准"或-与"式。

解:列出F的真值表，可直接写出F的最大项表达式:

函数F的真值表

A B C	F	
0 0 0	0	→ M_0
0 0 1	0	→ M_1
0 1 0	1	
0 1 1	0	→ M_3
1 0 0	1	
1 0 1	1	
1 1 0	1	
1 1 1	0	→ M_7

$$F=\prod M(0,1,3,7)$$

$$=(A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

2.7 逻辑函数化简

♦实现某一逻辑功能的逻辑电路的复杂性与描述该功能的逻辑表达式的复杂性直接相关。

♦一般说，逻辑函数表达式越简单，设计出来的相应逻辑电路也就越简单，可降低系统成本、减小复杂度、提高可靠性；

♦重点讨论“与-或”表达式的化简，常用方法包括代数化简法、卡诺图化简法（列表化简法）。

1.代数化简法

运用逻辑代数的公理、定理和规则对逻辑函数进行化简，无固定步骤可遵循；主要取决于对逻辑代数中公理、定理和规则的熟练掌握及灵活运用的程度。

1)最简“与-或”表达式的判断条件

- ♦表达式中的“与”项个数最少；
- ♦在满足上述条件的前提下，每个“与”项中的变量个数最少。

2.7 逻辑函数化简

1.代数化简法

2) 代数化简常用方法

◆并项法（定理7）

利用 $A\overline{B}+AB=A$ ，合并一个“与”项并后消去一个变量：

$$\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}=\overline{A}B$$

◆吸收法(定理3)

利用定理3中 $A+AB=A$ ，吸收多余的项：

$$\overline{A}B+\overline{A}B\overline{C}=\overline{A}B$$

2.7 逻辑函数化简

•消去法（定理4）

利用定理4中 $A+\overline{A}B=A+B$ 消去多余变量。

问题：能确定是最简“与或式”吗？！具有唯一性吗？

例如，$AB+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}=AB+\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\cdot\overline{C}$

$$=AB+\overline{AB}\cdot\overline{C}$$

$$=AB+\overline{C}$$

•配项法

利用A·1=A及 $A+\overline{A}=1$，为某些“与”项配上其所缺变量，再利用并项、吸收和消去等方法进行化简。

$$A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B$$

$$=A\overline{B}+B\overline{C}+\left(A+\overline{A}\right)\cdot\overline{B}C+\overline{A}B\cdot\left(C+\overline{C}\right)$$

$$=A\overline{B}+B\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}$$

$$=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}C$$

实际应用中遇到的逻辑函数往往比较复杂，化简时应灵活使用所学的公理、定理及规则，综合运用各种方法。

例1 化简 $F=BC+D+\overline{D}\cdot\left(\overline{B}+\overline{C}\right)\cdot\left(AD+B\overline{C}\right)$

解：

$$\begin{aligned}F&=BC+D+\overline{D}\cdot\left(\overline{B}+\overline{C}\right)\cdot\left(AD+B\overline{C}\right)\\&=BC+D+\left(\overline{B}+\overline{C}\right)\cdot\left(AD+B\overline{C}\right)\\&=BC+D+\overline{BC}\cdot\left(AD+B\overline{C}\right)\\&=BC+D+AD+B\overline{C}\end{aligned}$$

体会：逻辑函数化简的工程意义！

2.7 逻辑函数化简

例2 化简 $F=\overline{\overline{A}(B+\overline{C})}(A+\overline{B}+C)\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$

解

$$
\begin{aligned}
F&=\overline{\overline{A}(B+\overline{C})}\cdot(A+\overline{B}+C)\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}\\
&=(A+\overline{B+\overline{C}})(A+\overline{B}+C)(A+B+C)\\
&=(A+\overline{B}C)\cdot(A+C)\\
&=A+\overline{B}C\cdot C\\
&=A+\overline{B}C
\end{aligned}
$$

3)“或-与”表达式最简的条件

- 表达式中的“或”项个数最少；
- 在满足上述条件的前提下，每个“或”项中的变量个数最少。

4)“或-与”表达式化简的常用方法

- 直接运用公理、定理中的“或-与”形式，并综合运用前面介绍“与-或”表达式化简时提出的各种方法进行化简；

- **也可以采用两次对偶法：**

(1)求函数F求对偶，得到“与-或”表达式F’

(2)求出F’的最简“与-或”表达式

(3)对F’再次求对偶,即可得到F的最简“或-与”表达式。

1.代数化简法

2) 代数化简常用方法- “或-与”表达式化简

例3:化简 $F=(A+B)\cdot(\overline{B}+C)\cdot(A+C+\overline{D})\cdot(A+C)$

解: $F=(A+B)\cdot(\overline{B}+C)\cdot(A+C+\overline{D})\cdot(A+C)$

$=(A+B)\cdot(\overline{B}+C)\cdot(A+C)$ 定理3

$=(A+B)(\overline{B}+C)$ 定理8

例4：化简 $F=(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)\cdot(B+C)\cdot(\overline{A}+C)$

解：第一步：求F的对偶式F’；

$$F'=A\overline{B}+\overline{A}B+BC+\overline{A}C$$

第二步：化简F’；

$$\begin{aligned}F' &= A\overline{B}+\overline{A}B+BC+\overline{A}C\\ &= A\overline{B}+\overline{A}B+(B+\overline{A})C\\ &= A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{A\overline{B}}C\\ &= A\overline{B}+\overline{A}B+C\end{aligned}$$

第三步：对F‘求对偶, 得到F的最简“或-与”表达式

$$F=(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)\cdot C$$

2.卡诺图化简法

1) 卡诺图的构成（由若干最小项构成）

B \ A	0	1
0	m_0	m_2
1	m_1	m_3

CD \ AB	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

请按此规律画出5变量卡诺图！

2.卡诺图化简法

DE \ ABC	000	001	011	010	100	101	111	110
00	0	4	12	8	16	20	28	24
01	1	5	13	9	17	21	29	25
11	3	7	15	11	19	23	31	27
10	2	6	14	10	18	22	30	26

2.卡诺图化简法

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8	m_{24}	m_{28}	m_{20}	m_{16}
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9	m_{25}	m_{29}	m_{21}	m_{17}
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}	m_{27}	m_{31}	m_{23}	m_{19}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}	m_{26}	m_{30}	m_{22}	m_{18}

2.卡诺图化简法

2) 基于卡诺图化简的理论依据

- 从卡诺图上可直观找出相邻最小项；
- 利用 $A\overline{B}+AB=A$ 进行合并。

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	m_5	m_{13}	0
11	0	m_7	m_{15}	0
10	0	0	0	0

$$\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BCD+AB\overline{C}D+ABCD$$

$$\overline{A}BD+ABD$$

$$BD$$

2.卡诺图化简法

3) 基于卡诺图的与或表达式化简

- 根据逻辑函数表达式，画出卡诺图;

- 在覆盖函数中所有最小项的前提下，卡诺圈的个数应尽可能少(每个最小项可以被多个卡诺圈包围)、卡诺圈要尽量大;

B \ A	0	1
0	0	0
1	1	1

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	0

B \ A	0	1
0	1	1
1	1	0

特别注意:

- 卡诺图中所有的1都必须圈到,
- 不能合并的 1 必须单独画圈。

2.卡诺图化简法

例1 用卡诺图化简逻辑函数 $F(A,B,C,D)=\sum m(0,3,5,6,7,10,11,13,15)$

解 用卡诺图化简给定函数的过程如下：

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	1	0
11	1	1	1	1
10	0	1	0	1

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

BD

CD

$\bar{A}BC$

$A\bar{B}C$

$$F(A,B,C,D)=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}BC+A\bar{B}C+BD+CD$$

2.卡诺图化简法

例2 将$Y_1=A\overline{C}+\overline{A}C+B\overline{C}+\overline{B}C$ 化简为最简与或式。

Y \ A BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

1

Y \ A BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

$$Y_1=A\overline{B}+\overline{A}C+B\overline{C}$$

$$Y_1=A\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B$$

虽然可以得到最简式，但形式也不唯一！

2.卡诺图化简法

例3 用卡诺图求逻辑函数 $F(A,B,C,D)=\sum m(0,1,2,5,8,9,10)$ 的最简“或-与”表达式。

解：画出给定函数的卡诺图

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$B\overline{D}$

AB

CD

对卡诺图中的0构建全覆盖最大卡诺圈，得到F反函数的最简与或表达式。

$$\overline{F}=AB+CD+B\overline{D}$$

$$F=\overline{\overline{F}}=\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\cdot\left(\overline{C}+\overline{D}\right)\cdot\left(\overline{B}+D\right)$$

2.卡诺图化简法

4) 基于卡诺图的或-与表达式化简

- 作出F对偶式F' 的卡诺图，并求出F'的最简“与-或”表达式；
- 对F'的最简“与-或”表达式取对偶，即得F的最简“或-与”表达式。

2.卡诺图化简法

例4 用卡诺图求逻辑函数 $F(A,B,C,D)=(\bar{A}+D)(B+\bar{D})(A+B)$ 的最简“或-与”表达式。

解：求出逻辑函数F的对偶函数F’，画出其卡诺图；

$$F'(A,B,C,D)=\overline{A}D+B\overline{D}+AB$$

F'的最简“与-或”表达式为

$$F'(A,B,C,D)=B+\overline{A}D$$

对F’的最简“与-或”表达式取对偶:

$$F(A,B,C,D)=(F')'=B(\overline{A}+D)$$

B

$\overline{A}D$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

卡诺图化简有哪些不足?