



第二章 逻辑代数

秦磊华 计算机学院

问题提出:

1.为什么要引入逻辑代数?

- 代数的作用: 使一个含有未知量的数学问题得到解决(有规律、有方法);

- 逻辑代数的作用: ?

2.逻辑代数有哪些规则?

3.逻辑代数有哪些表现形式?

4.逻辑代数如何应用?

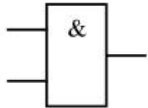

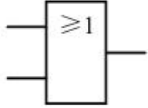
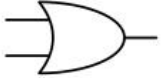
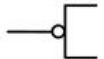
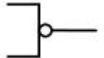
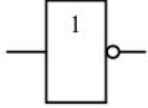
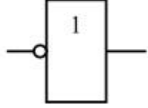


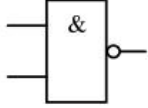

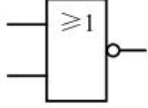
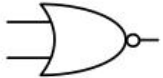
2.1 逻辑代数的基本概念

一个由逻辑变量集 K ，常量0和1以及“或”、“与”、“非”三种基本逻辑运算所构成的封闭系统 $L=\{K,+,·,-,0,1\}$ 。

- 常量：0,1表示逻辑值的假和真；
- 变量：变化的逻辑量（取值不同于一般代数中的取值范围）



2.1 逻辑代数的基本概念

序号	名称	GB/T 4728.12-1996		国外流行图形符号
		限定符号	国标图形符号	
1	与门	&		
2	或门	≥ 1		
3	非门	  逻辑非入和出	 	 
4	与非门			
5	或非门			

2.1 逻辑代数的基本概念

6	与或非门			
7	异或门	=1		
8	同或门	=		
9	集电极开路 OC 门、漏极 开路 OD 门	 L 型开路输出		
10	缓冲器			

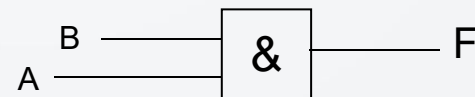
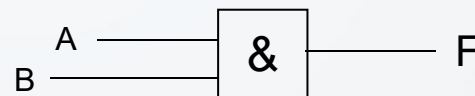
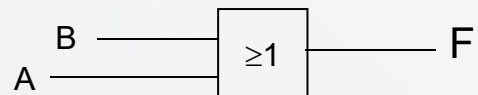
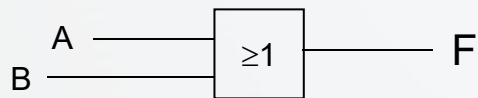
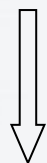
2.1 逻辑代数的基本概念

公理 1 交换律

对于任意逻辑变量A、B，有

$$A + B = B + A ;$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

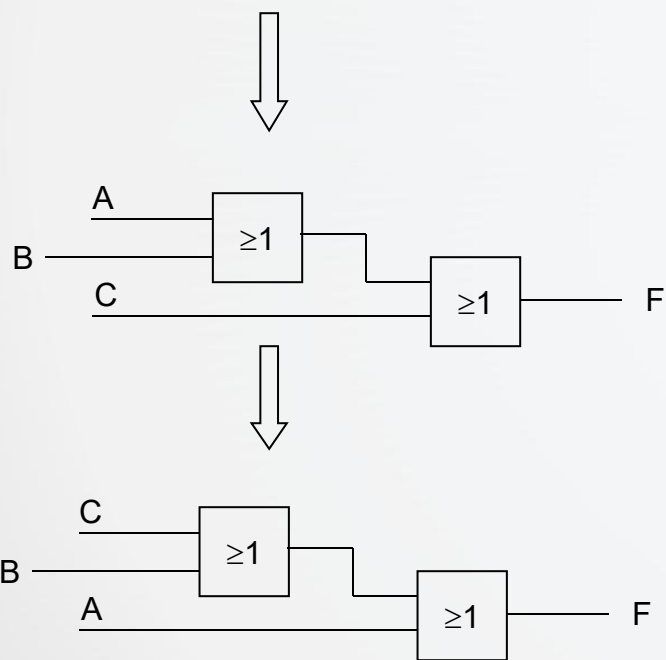


2.1 逻辑代数的基本概念

公理 2 结合律

对于任意的逻辑变量A、B、C，有

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$



?

2.1 逻辑代数的基本概念

公理 3 分配律

对于任意的逻辑变量A、B、C，有：

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C) ; A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

■ 画图

■ 工程意义？

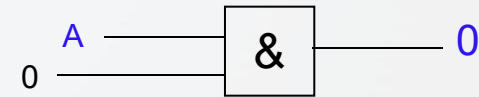
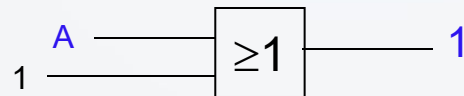
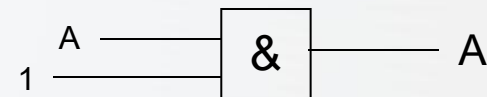
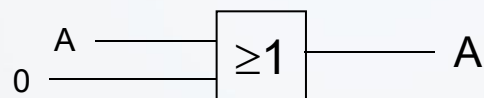
2.1 逻辑代数的基本概念

公理 4 0—1 律

对于任意逻辑变量A，有

$$A + 0 = A \quad ; \quad A \cdot 1 = A$$

$$A + 1 = 1 \quad ; \quad A \cdot 0 = 0$$



重要结论！ 关于逻辑门封锁与开放的控制

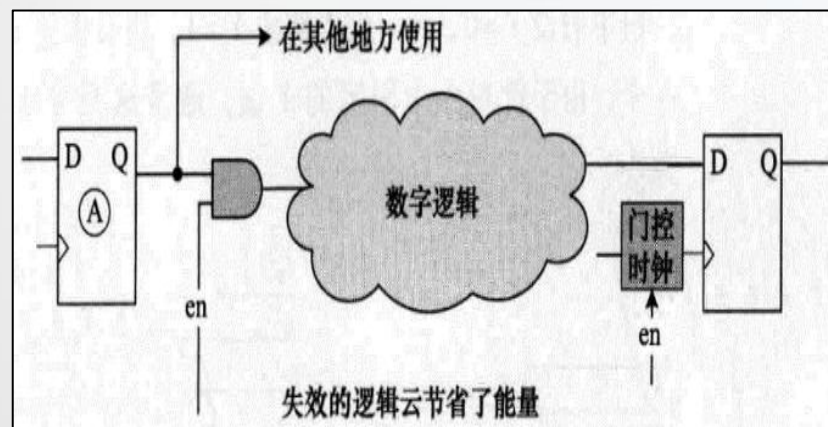
2.1 逻辑代数的基本概念

公理 4 0—1 律

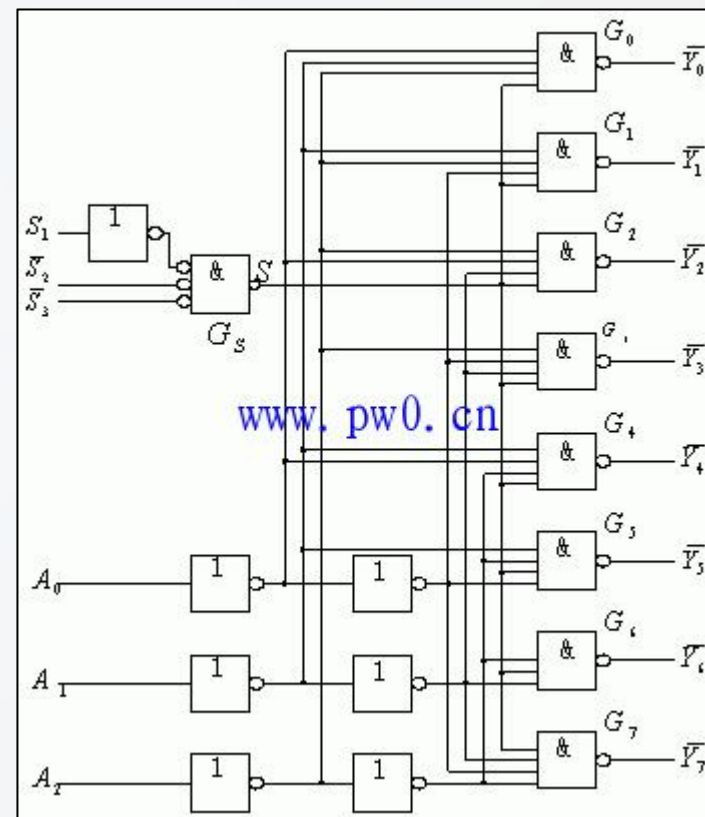
对于任意逻辑变量A, 有

$$A + 0 = A \quad ; \quad A \cdot 1 = A$$

$$A + 1 = 1 \quad ; \quad A \cdot 0 = 0$$



74LS138: 3-8译码器



2.1 逻辑代数的基本概念

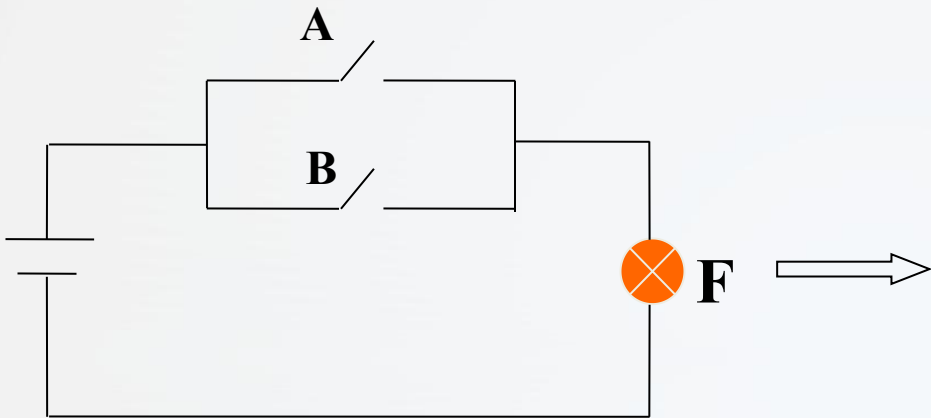
公理 5 互补律

对于任意逻辑变量A，存在唯一的 \overline{A} ，使得

$$\overline{A} + A = 1 \quad \overline{A} \cdot A = 0$$

2.2 逻辑运算

1) 基本逻辑运算-或运算



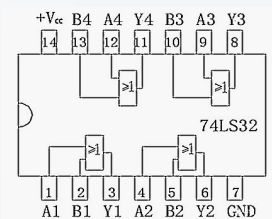
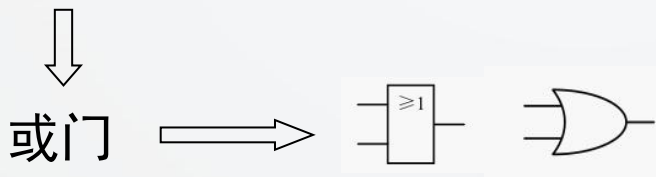
“或” 运算表		
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

“或” 运算法则:

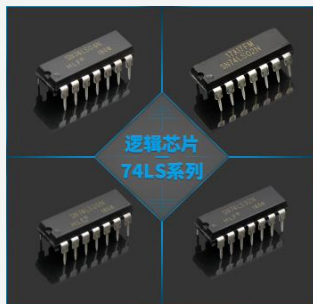
$$0 + 0 = 0 \quad 1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 1$$

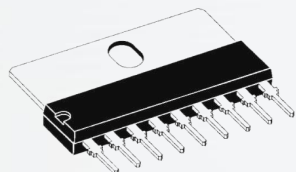
$$F = A + B \quad \text{或者} \quad F = A \vee B$$



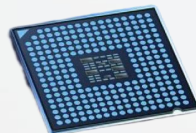
2.2 逻辑运算



双列直插小规模集成电路



单列直插小规模集成电路



贴片式集成电路

2.2 逻辑运算

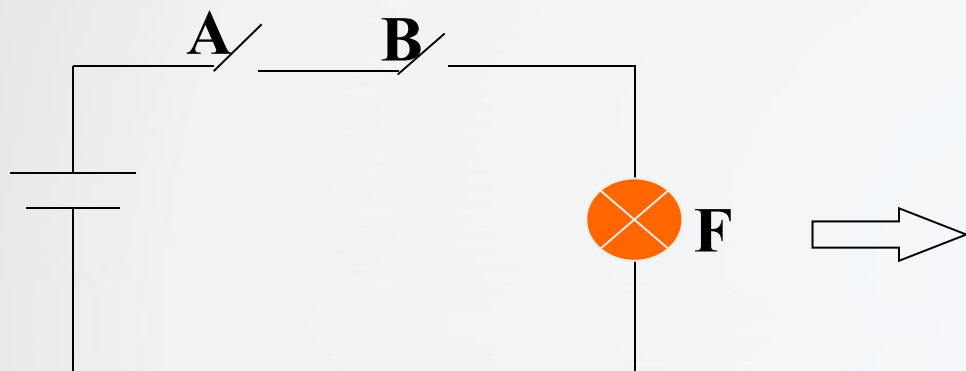
74HC/LS/HCT/F系列芯片的区别

- 1.LS是低功耗肖特基(Schottky), HC是高速COMS。LS的速度比HC略快。HCT输入输出与LS兼容, 但是功耗低; F是高速肖特基电路;
- 2.LS是TTL电平, HC是COMS电平。
- 3.LS输入开路为高电平, **HC输入不允许开路**, hc 一般都要求有上下拉电阻来确定输入端无效时的电平。
(工程实施过程中该怎么办?)
- 4.LS输出下拉强上拉弱(!), HC上拉下拉相同。
- 5.工作电压不同, LS只能用5V, 而HC一般为2V到6V;
- 6.电平不同。LS是TTL电平, 其低电平和高电平分别为0.8和V2.4, 而CMOS在工作电压为5V时分别为0.3V和3.6V, 所以CMOS可以驱动TTL, 但反过来是不行的
- 7.驱动能力不同, LS一般高电平的驱动能力为5mA, 低电平为20mA; 而CMOS的高低电平均为5mA;
- 8.CMOS器件抗静电能力差, 易发生栓锁问题, 所以CMOS的输入脚不能直接接电源。



2.2 逻辑运算

2) 基于逻辑运算-与运算



“与”运算表

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

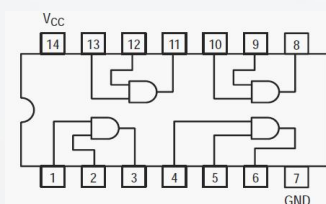
“与”运算法则:

$$0 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$$

$$F = A \cdot B \quad \text{或者} \quad F = A \wedge B$$

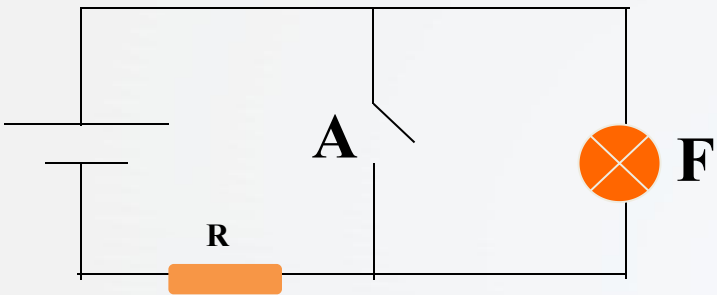
与门



(74LS08)

2.2 逻辑运算

3) 基于逻辑运算-非运算



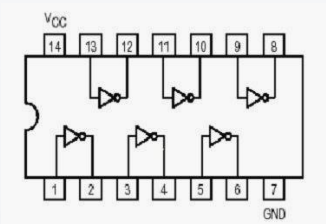
“非” 运算表	
A	F
0	1
1	0

“非” 运算法则:

$$\overline{0} = 1 \quad \overline{1} = 0$$

$$F = \overline{A}$$

非门



(74LS04)

2.2 逻辑运算

4) 复合逻辑运算-与非逻辑 $F = \overline{A \cdot B \cdot C \cdots}$

$$F = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot 1} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A \cdot B$$

与门

使用2个与非门

$$F = \overline{\overline{A} \cdot 1 \cdot \overline{B} \cdot 1} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$$

或门

使用3个与非门

$$F = \overline{A \cdot 1} = \overline{A}$$

非门

使用1个与非门

因此，与非门又称为通用门

2.2 逻辑运算

5) 复合逻辑运算-或非逻辑

$$F = \overline{A + B + C + \dots}$$

$$F = \overline{\overline{A + 0} + \overline{B + 0}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B \quad \text{与门} \quad \text{使用3个或非门}$$

$$F = \overline{\overline{A + B + 0}} = \overline{\overline{A + B}} = A + B \quad \text{或门} \quad \text{使用2个或非门}$$

$$F = \overline{A + 0} = \overline{A} \quad \text{非门} \quad \text{使用1个或非门}$$

或非门同样是通用门

2.2 逻辑运算

6) 复合逻辑运算-异或运算

$$F = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$A \oplus 0 = A \quad A \oplus 1 = \overline{A}$$

$$A \oplus A = 0 \quad A \oplus \overline{A} = 1$$

异或运算是两变量运算，若需多变量进行异或运算如何进行？

$$F = A \oplus B \oplus C \oplus D = (A \oplus B) \oplus (C \oplus D)$$

$$\text{或 } [(A \oplus B) \oplus C] \oplus D$$

两者在实现上有何异同点？

2.2 逻辑运算

6) 复合逻辑运算-异或运算

$$A \oplus 0 = A \quad A \oplus 1 = \bar{A}$$

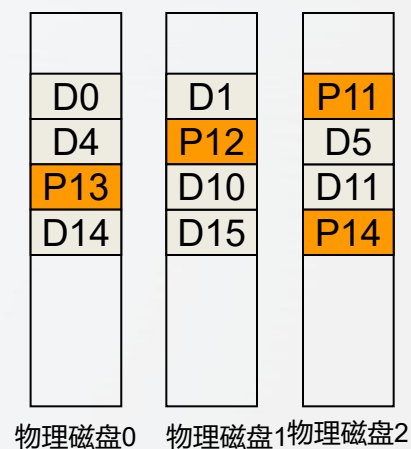
$$A \oplus A = 0 \quad A \oplus \bar{A} = 1$$

$$\begin{array}{ll} 1 \oplus 1 = 0 & 1 = 1 \oplus 0 \\ 0 \oplus 1 = 1 & 0 = 1 \oplus 1 \\ 0 \oplus 0 = 0 & 0 = 0 \oplus 0 \end{array}$$

磁盘阵列:

(Redundant Arrays of **Independent** Disks, RAID)

(Redundant Arrays of **Inexpensive** Disks, RAID)



UC Berkely大学的 David A.Paterson

2.2 逻辑运算

7) 复合逻辑运算-同或运算

$$F = A \odot B = \bar{A} \cdot \bar{B} + AB$$



2.3 基本定理和规则

定理1

$$\begin{array}{llll} 0 + 0 = 0 & 1 + 0 = 1 & 0 \cdot 0 = 0 & 1 \cdot 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 & 1 + 1 = 1 & 0 \cdot 1 = 0 & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

定理的证明只能使用前面出现的公理：

交换律(1)、结合律(2)、分配律(3)、0-1律(4)、互补律(5)



2.3 基本定理和规则

定理2 $A + A = A$; $A \cdot A = A$ 等幂律

证明	$A + A = (A + A) \cdot 1$	公理4
	$= (A + A) \cdot (A + \overline{A})$	公理5
	$= A + (A \cdot \overline{A})$	公理3
	$= A + 0$	公理5
	$= A$	公理 4

2.3 基本定理和规则

定理3 $A + A \cdot B = A$; $A \cdot (A + B) = A$ 吸收律(项、变量)

证明 $A + A \cdot B = A \cdot 1 + A \cdot B$ 公理4

$= A \cdot (1+B)$ 公理3

$= A \cdot 1$ 公理4

$= A$ 公理4

证明 $A \cdot (A + B) = A \cdot A + A \cdot B$ 公理3

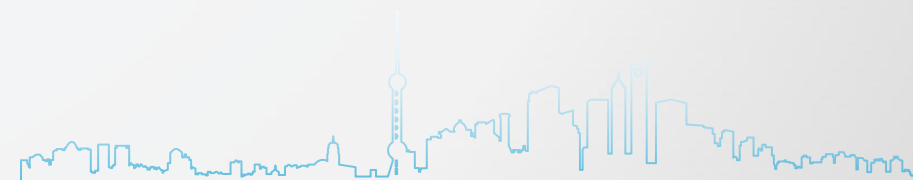
$= A + A \cdot B$ 定理2

$= A$ 定理3 (前式)

2.3 基本定理和规则

定理4 $A + \bar{A} \cdot B = A + B$ $A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$ 消去律

证明 $A + \bar{A}B = (A + \bar{A}) \cdot (A + B)$ 公理3
 $= 1(A + B)$ 公理5
 $= A + B$ 公理4



2.3 基本定理和规则

定理5 $\overline{\overline{A}} = A$

证明 令 $\overline{\overline{A}} = X$

因而 $\overline{A} \cdot X = 0$ $\overline{A} + X = 1$

但是 $\overline{A} \cdot A = 0$ $\overline{A} + A = 1$

根据公理 5 的唯一性有： $X = A$

2.3 基本定理和规则

定理6 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

摩根定理

证明 由于 $(\overline{A} \cdot \overline{B}) + (A + B) = (\overline{A} \cdot \overline{B} + A) + B$ 公理2

$$= (\overline{B} + A) + B \quad \text{定理4}$$

$$= A + (\overline{B} + B) \quad \text{公理1,2}$$

$$= A + 1 \quad \text{公理5}$$

$$= 1 \quad \text{公理4}$$

而且 $(\overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot (A + B) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot A + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot B$ 公理2

$$= 0 + 0 \quad \text{公理1,5}$$

$$= 0 \quad \text{定理1}$$

根据公理5的唯一性可得 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

2.3 基本定理和规则

定理7 $A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A$ $(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A$ 并项律

证明 $A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \cdot (B + \bar{B})$ 公理3
 $= A \cdot 1$ 公理5
 $= A$ 公理4



2.3 基本定理和规则

定理8 $A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$ $(A+B) \cdot (\overline{A}+C) \cdot (B+C) = (A+B) \cdot (\overline{A}+C)$

证明

$$\begin{aligned} & A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C \\ &= A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C \cdot (A + \overline{A}) && \text{公理 5} \\ &= A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C \cdot A + B \cdot C \cdot \overline{A} && \text{公理 3} \\ &= A \cdot B + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C && \text{公理 1} \\ &= A \cdot B(1 + C) + \overline{A} \cdot C(1 + B) && \text{公理 3} \\ &= A \cdot B + \overline{A} \cdot C && \text{公理 1,4} \end{aligned}$$

2.3 基本定理和规则

$$(A+B) \cdot (\bar{A}+C) \cdot (B+C) = (A+B) \cdot (\bar{A}+C)$$

$$(A+B) \cdot (\bar{A}+C) \cdot (B+C)$$

$$= (A+B)(\bar{A}+C)(A+B+C)(\bar{A}+B+C) \quad \text{定理7}$$

$$= (A+B)(A+B+C)(\bar{A}+C)(\bar{A}+B+C)$$

$$= (A+B)(\bar{A}+C) \quad \text{定理3}$$



2.3 基本定理和规则

规则1:代入规则

- ◆任何一个含有变量A的逻辑等式,如果将所有出现A的位置都代之以同一个逻辑函数F,则等式仍然成立;
- ◆代入规则的正确性: 任何逻辑函数都和逻辑变量一样, 只有0和1两种可能的取值;
- ◆ $A(B+C)=AB+AC \rightarrow A[B+(C+D)] = AB+A(C+D)$;
- ◆代入规则的意义: 可将逻辑代数公理、定理中的变量用任意逻辑函数代替, 推导出更多的等式;
- ◆ 代入规则使用时必须注意同一变量的全代入。

2.3 基本定理和规则

规则2: 反演规则

◆将逻辑函数表达式F中所有的“ \cdot ”变成“ $+$ ”，“ $+$ ”变成“ \cdot ”；“0”变成“1”，“1”变成“0”；原变量变成反变量，反变量变成原变量。保持原函数中运算顺序不变，得到的新函数为原函数的反函数 \overline{F} 。

即：“ \cdot ” \longleftrightarrow “ $+$ ”，“0” \longleftrightarrow “1”，原变量 \longleftrightarrow 反变量

$$F = \overline{A} \cdot B + C \cdot \overline{D}$$
$$\overline{F} = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{C} + D)$$

2.3 基本定理和规则

规则3：对偶规则

- ◆若将逻辑函数表达式F中所有的“ \cdot ”变成“ $+$ ”，“ $+$ ”变成“ \cdot ”，“0”变成“1”，“1”变成“0”，并保持原函数中的运算顺序不变，则所得到的新的逻辑表达式称为函数F的对偶式，并记作F'

$$F = A B + \bar{B} (C + 0) \quad ; \quad F' = (A + B)(\bar{B} + C \cdot 1)$$

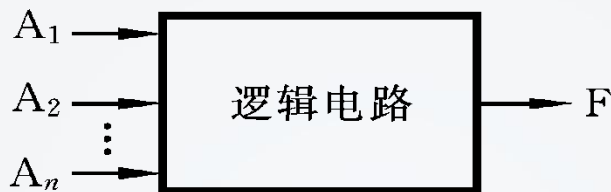
- ◆若两个逻辑函数表达式F和G相等，则其对偶式F' 和G' 也相等；利用对偶规则可以使定理、公式的证明减少一半。

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C) \quad ; \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{公理3}$$

$$\text{定理8} \quad A \cdot B + \bar{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + A \cdot \bar{C} \quad (A+B) \cdot (\bar{A}+C) \cdot (B+C) = (A+B) \cdot (\bar{A}+C)$$

2.4 逻辑函数

1. 逻辑函数的定义



$$F = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

- 逻辑函数和逻辑变量一样，取值只有0和1两种可能；
- 函数和变量之间的关系：“或”、“与”、“非”；
- 任何逻辑电路的功能都可由相应的逻辑函数完全描述，故可借助逻辑代数表达式分析研究电路。

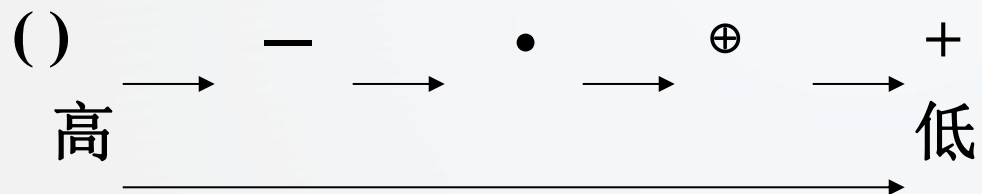
2.4 逻辑函数

2.逻辑函数的表示方法

1)逻辑表达式

$$F = f(A, B) = \bar{A}B + A\bar{B}$$

逻辑表达式中的运算优先级



2.4 逻辑函数

2.逻辑函数的表示方法

2) 真值表

$$F = A \overline{B} + \overline{A} C \quad \Rightarrow$$

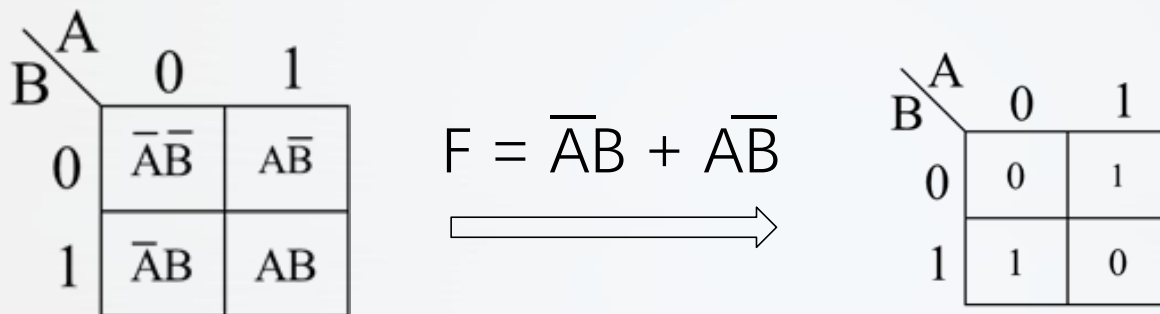
函数F的真值表			
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

寻找快速填写真值表的方法！

2.4 逻辑函数

2.逻辑函数的表示方法

3) 卡诺图



- ◆卡诺图是由逻辑变量所有取值组合的小方格所构成的平面图;
- ◆用图形描述逻辑函数的方法, 在逻辑函数化简中十分有用;

2.4 逻辑函数

2.逻辑函数的表示方法

3) 卡诺图

C \ AB	00	01	11	10
0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}\overline{C}$
1	$\overline{A}\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	ABC	$A\overline{B}C$

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

$$F = \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

→

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	0	0

2.4 逻辑函数

2.逻辑函数的表示方法

3) 卡诺图

CD \ AB	AB			
	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

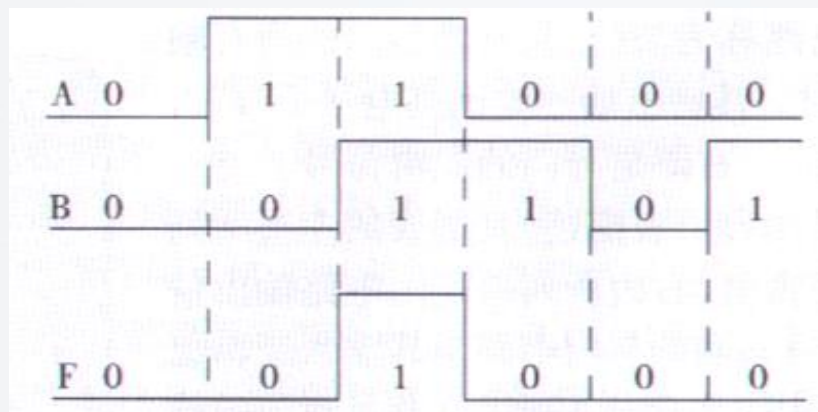
CD \ AB	AB			
	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	0	1	0

$$F(A, B, C, D) = AB + CD + \overline{A}\overline{B}C$$

2.4 逻辑函数

2.逻辑函数的表示方法

4) 波形图



$$F=AB$$