第 5 章　纠 错 编 码

计算机科学与技术学院　孙伟平

第5章

5.1 纠 错 编 码 的 基 本 概 念

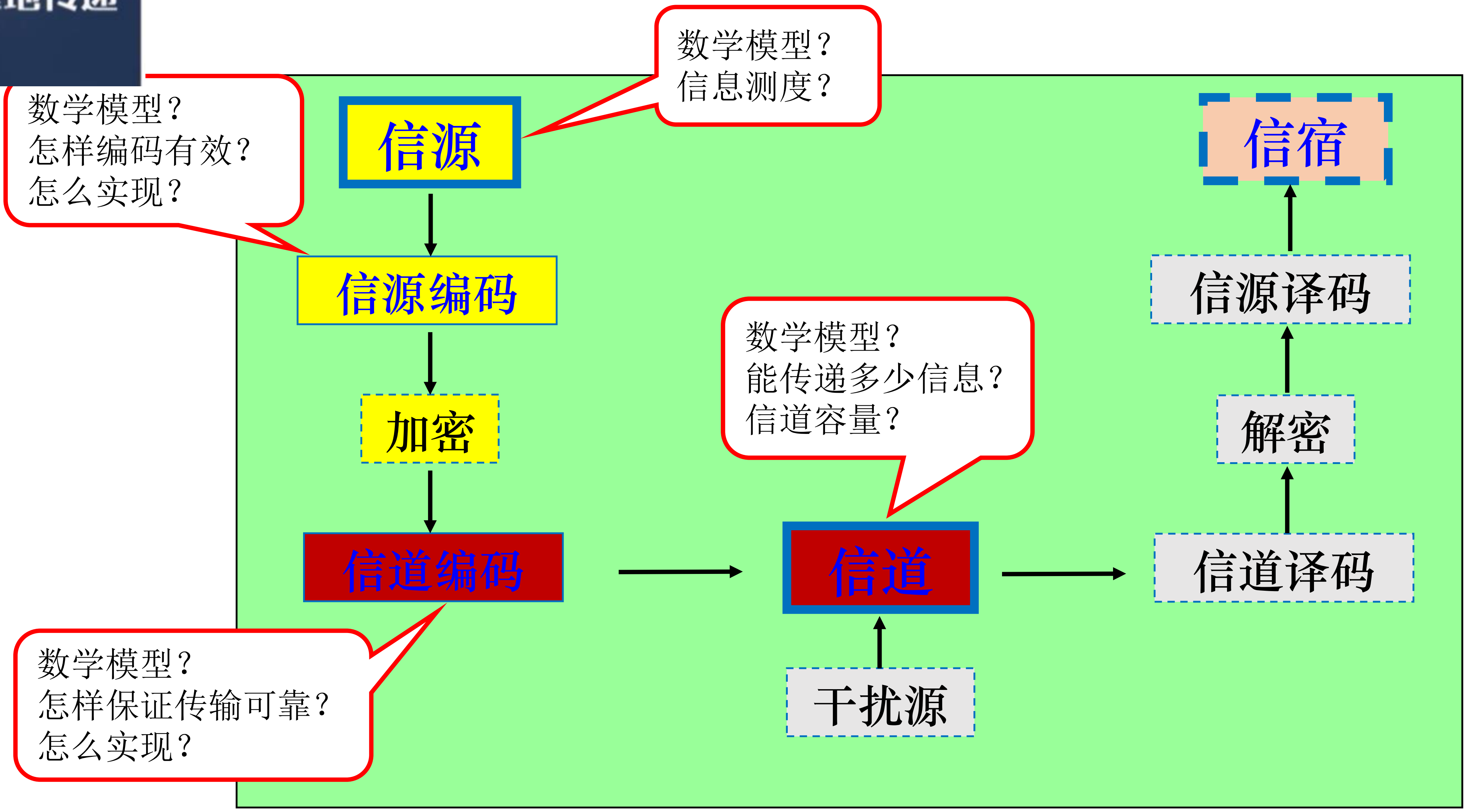
5.2 线 性 分 组 码

5.3 循 环 码

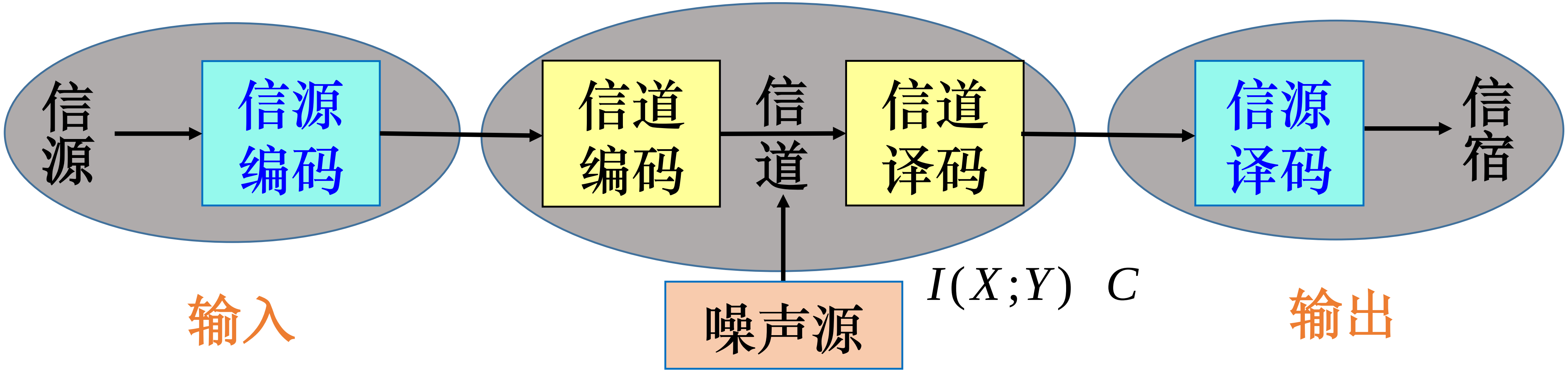
5.4 卷 积 码

基本内容

在信息可以量度的基础上，研究有效地和可靠地传递信息的科学。



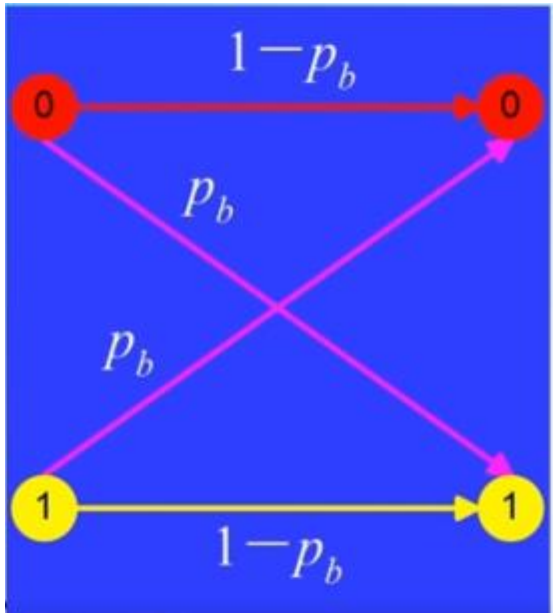
信道编码器在通信系统中的位置



$I(X;Y) \quad C$

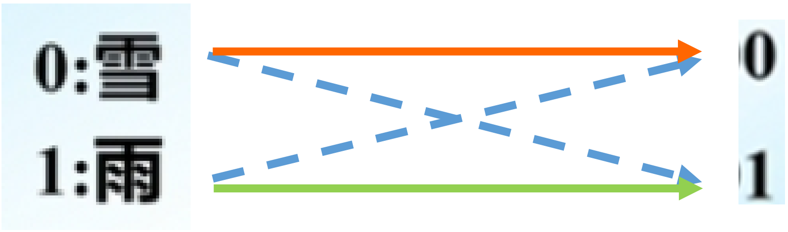
$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$ 提高信息传输时的抗干扰能力

- **目的** 增加信息传输的可靠性
- **手段** 增加信息冗余度
- **名称** 信道码、数据传输码、差错控制码



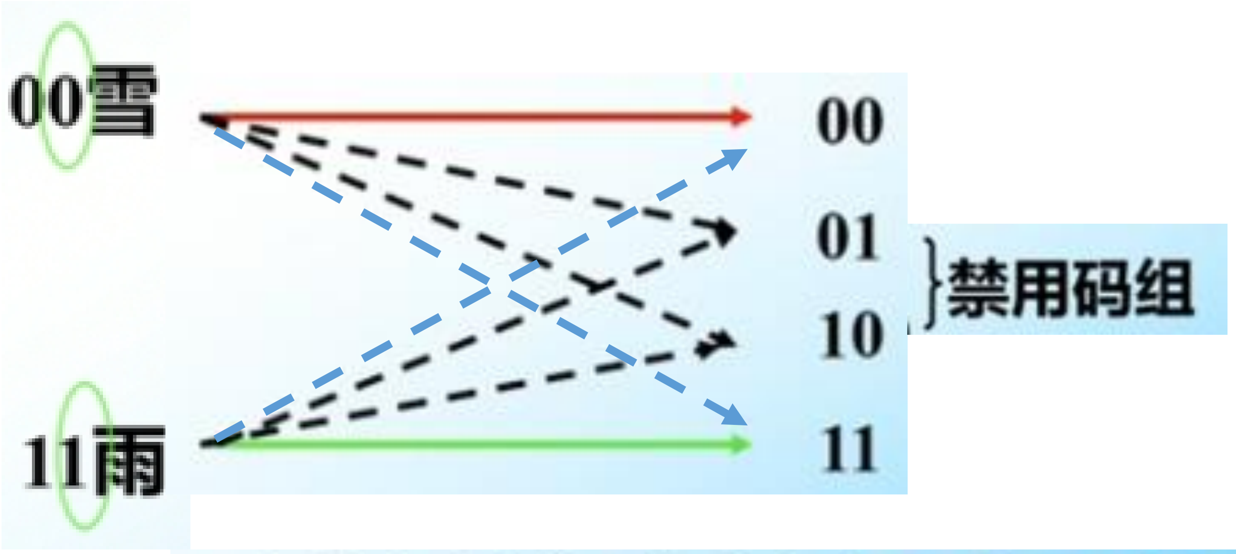
$p_b = 0.01$

记译码错误概率为 p_E



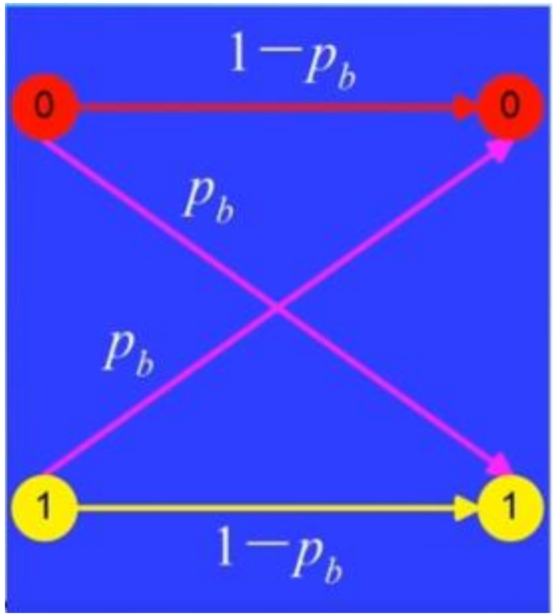
若1→0,0→1，收端无法发现错误

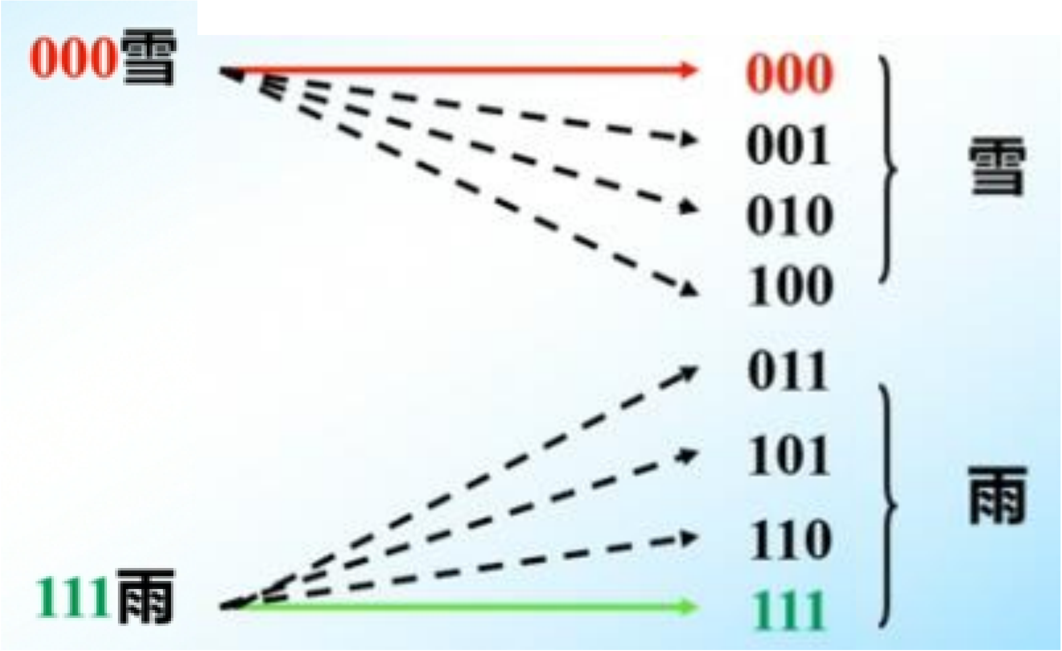
$p_E = 0.01$



具有检出1位错码的能力,但不能予以纠正。

$p_E = 10^{-4}$





采用ARQ方式 $p_E = 10^{-6}$

采用FEC方式 $p_E \approx 10^{-4}$

$p_b = 0.01$

记错误译码概率为 p_E

在只有1位错码的情况下,可以判决哪位是错码并予以纠正；可以检出2位或2位以下的错码。

单个的字无法检错：扪→?

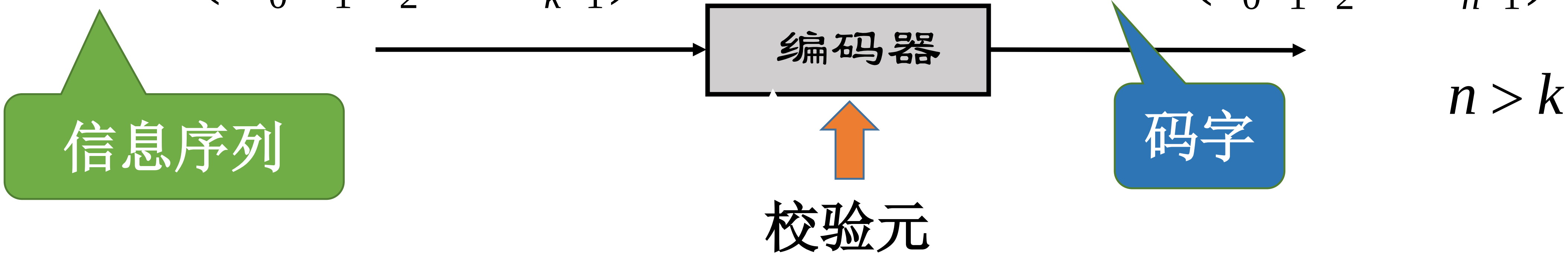
词汇能够检错：我扪的→我扪的

词汇能够纠错：我扪的→我们的，我等的，我辈的，
我班的，…

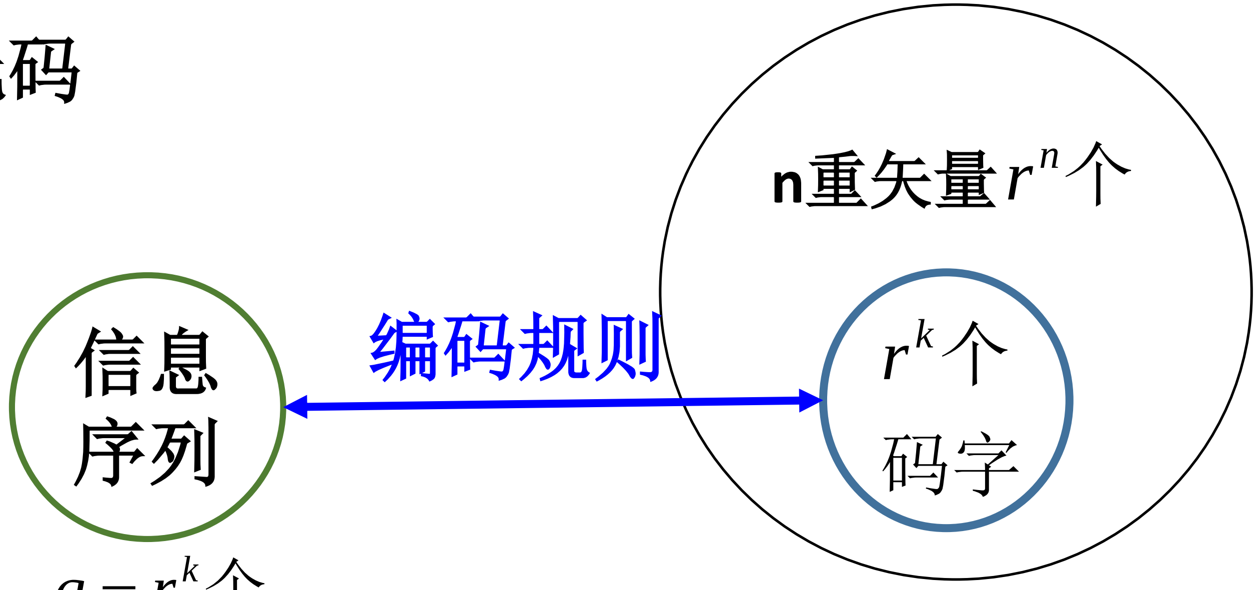
结论：加入冗余后，根据词汇的概率分布稀疏性可以用来检错和纠错。

$$M=(m_0m_1m_2\cdots m_{k-1})$$

$$C=(c_0c_1c_2\cdots c_{n-1})$$



假设采用r元码



$q=r^k$个

k维矢量

5.1.1 差错控制系统模型及分类

1 前向纠错方式

图5.1.1 FEC方式差错控制系统模型

2 反馈重传方式

图5.1.2 ARQ方式差错控制系统

3 混合纠错方式

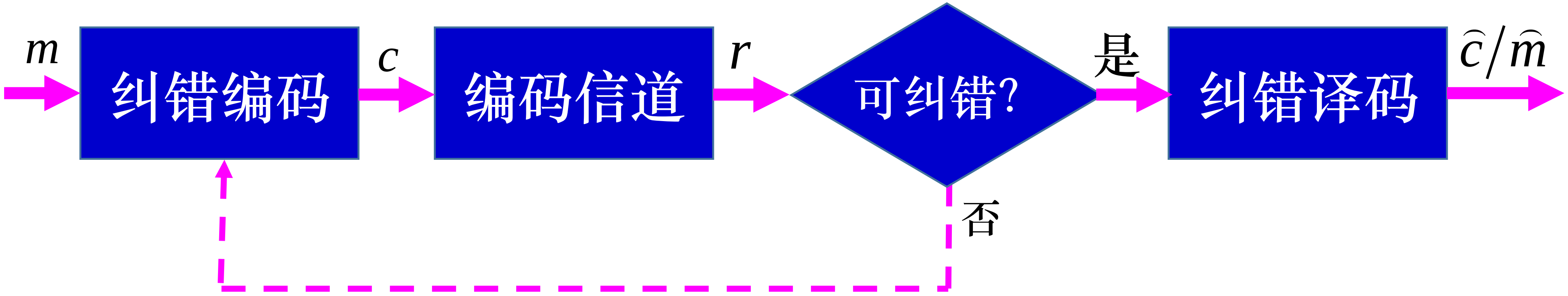


图5.1.3 HEC方式差错控制系统

5.1.2 纠错编码分类

分组码 卷积码

线性码 非线性码

检错码 纠错码

纠随机差错码 纠突发差错码

代数码 几何码 组合码

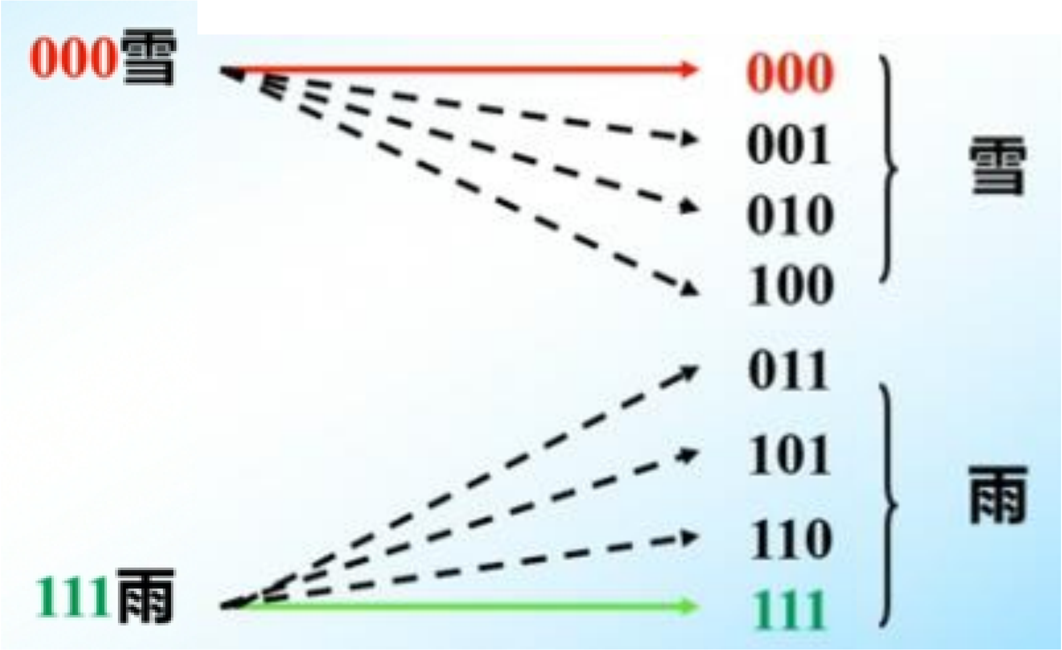
线性分组码 —— 群码

5.1.3 分组码的译码准则

目的：降低错误译码概率P_E。

对象：信息序列（设码元间彼此无关且等概出现）。

方法：　在传输的信息码之中按一定规律产生一些附加码元，经信道传输，在传输中若码字出现错误，收端能利用编码规律发现码的内在相关性受到破坏，从而按一定的译码规则自动纠正或发现错误，降低误码率。



译码准则就是分类准则，即当信道的输出为 r 时，将其译为哪个码字 c 最合理?

最小差错概率准则

$$\min p_E$$

最大后验概率准则

$$\max_{i=1,2,\ldots,2^k} p(C_i / R) \qquad p(C_i / R) = \frac{p(C_i)\,p(R / C_i)}{p(R)}$$

最大似然译码准则

$$\max_{i=1,2,\ldots,2^k} p(R / C_i)$$

最小距离译码准则

最大似然译码准则

1. 它不要消息先验概率。

2. 在消息先验概率等概条件下，它等价于最大后验概率译码，因而也是最佳的。但若消息先验概率不确定时，采用最大似然译码不一定保证译码错误概率最小。

3. 实际系统中，信源发出的序列传送到信道之前都已进行信源编码，经过有效的信源编码，输出码元的概率分布会均匀化，所以信道的输入近似等概，因此工程应用中常常采用最大似然译码。

练习题

5.1.4 信道编码定理 （香农第二编码定理）

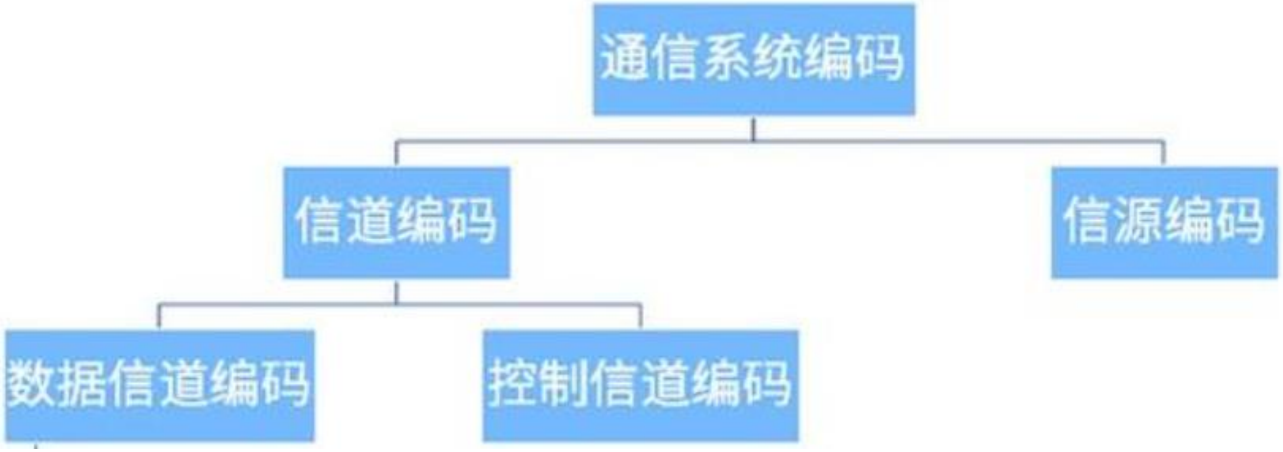
若一离散平稳无记忆信道，其容量为C，输入序列长度为L，只要待传送的信息率$R<C$,总能找到一种编码。当L足够长时，译码差错概率 $p_e < \varepsilon$ 。

ε 为任意正数。反之，当$R>C$，任何编码的p_e必大于0，当 $L \to \infty$，$p_e \to 1$

结论：信道容量C是一个临界值。

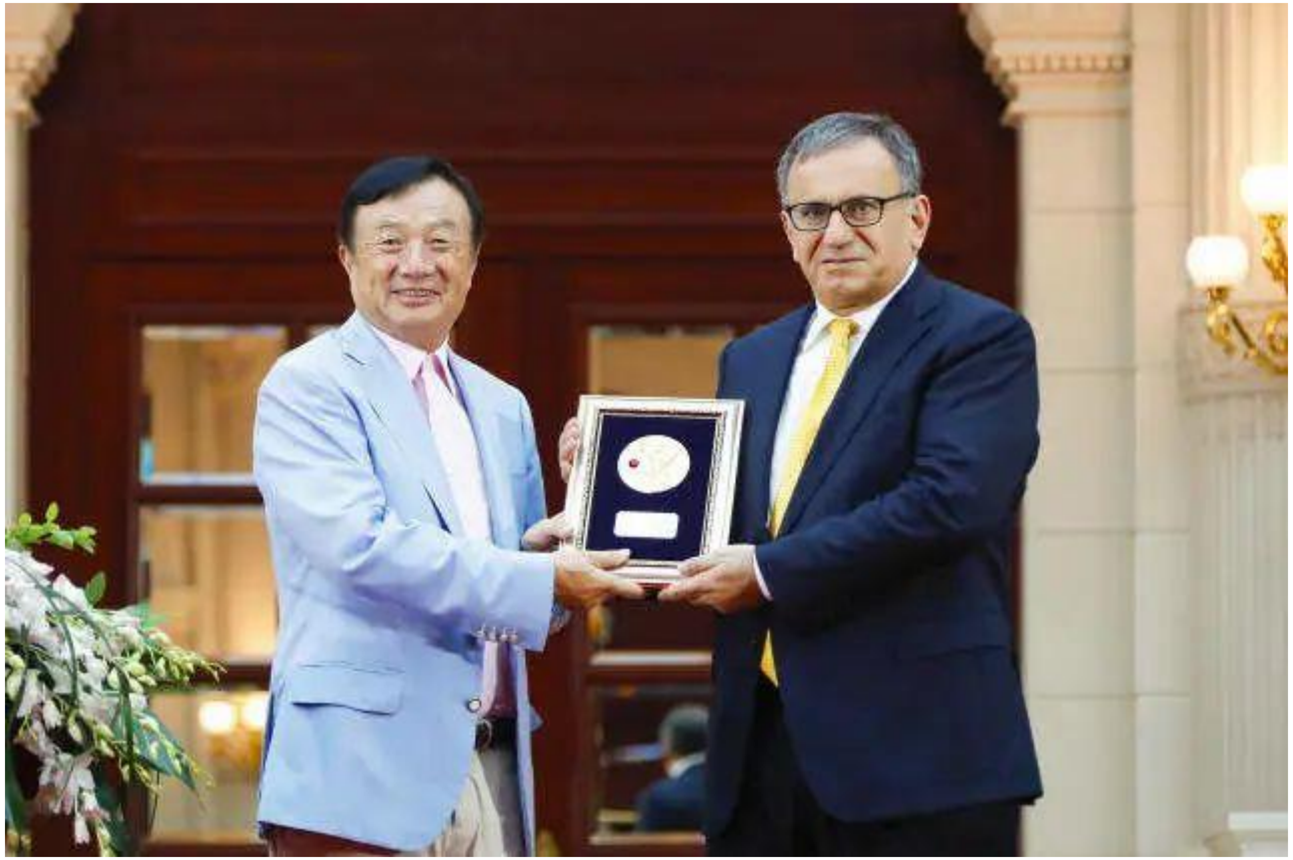
对离散无记忆平稳信道，信息在有干扰信道中传输时，只要信息传输率不超过这个临界值，信道就可几乎无失真地把信息传送过去，否则就会产生失真。

1993年，日内瓦IEEE通信国际会议，法国电机工程师C.Berrou和A.Glavieux声称发明了接近香农极的限编码方法——Turbo码



1999年，人们重燃了对LDPC的兴趣。LDPC于1962年由Gallager提出，然后被人们遗忘了几十年。直到Turbo码被提出后，人们才发现它从某种角度上说也是一种LDPC码

2007年，土耳其比尔肯大学教授E.Arikan提出Polar码，该码字是迄今发现的唯一一类能够达到香农限的编码方法



第5章

5.1 纠 错 编 码 的 基 本 概 念

5.2 线 性 分 组 码

5.3 循 环 码

5.4 卷 积 码

5.2.1 线性分组码的基本概念

信道编译码方法的最初范例

基本思路： 将码字分成两段

二元分组码信息位	校验位

信息位： 含有信源信息的比特位(红色部分)，长度用k表示。

校验位： 按一定规则添加的码位。用于监督码组内部码元的关联关系，可发现或纠正传输错误(蓝色部分)，亦称监督位。

码　字： 信息位和校验位组成的相对独立码组(红色和蓝色整体)，长度用n表示。

汉明重量： 码字中非零码元的个数，亦称码重。

1	0	1	1	0	1	0	1

汉明重量(码重)= 5

汉明距离： 两个码字相应码元取不同数值的码元数，也称码距。

1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1

汉明距离(码距)= 4

两个等长码字c和c′之间的汉明距离可用公式表示为

$$d(c,c') = \sum_{i=1}^{n} c_i \oplus c_i', \quad c_i \neq c_i'$$

码的最小距离： 任意两码字之间的最小汉明距离，简称最小码距。

$$d_{\min} = \min_{c \neq c'} d(c,c')$$

例

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0

1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(4,3)偶校验码的最小码距= 2

分组码： 将信息序列以k为长度进行等长划分，然后按编码规则添加一定数目冗余位的编码方法，冗余位亦称校验位。

线性分组码： 信息位和校验位之间满足线性关系的分组码。

为评估编码效率，定义 **码率**：$R=\frac{k}{n}$

总结线性分组码的基本参数如下：

码　　长：n

信息位长：k

码 字 数：M

监督位长：r

最小码距：d_{min}

信息序列 $\longrightarrow$ 分组码 $\longrightarrow$ 码字

$$M=(m_0m_1m_2\cdots m_{k-1})$$

$$C=(c_0c_1c_2\cdots c_{n-1})$$

校验/监督元

$$\{M\}\xrightarrow{f(\cdot)}\{C\}$$

线性映射

$$f(\alpha M+\beta M')=\alpha f(M)+\beta f(M')$$

其中 $\alpha,\beta\in GF(2)=\{0,1\}$， $M,M'\in\{M\}$

信息	码字
00	11100
01	01011
10	10110
11	01101

$$\begin{cases} c_0 = m_0 \\ c_1 = m_1 \\ c_2 = m_0 \oplus m_1 \\ c_3 = \bar{m}_0 \\ c_4 = \bar{m}_1 \end{cases}$$

信息	码字
00	00011
01	01110
10	10101
11	11000

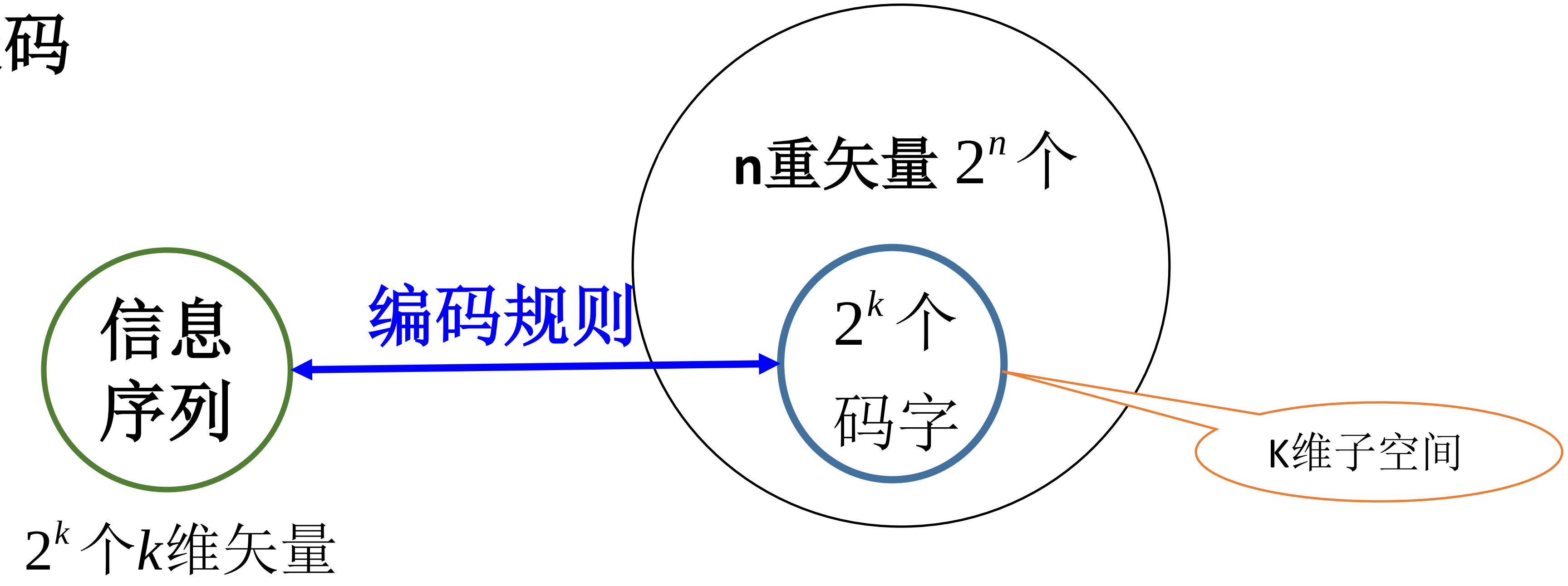
$$\begin{cases} c_0 = m_1 \\ c_1 = m_0 \oplus m_1 \\ c_2 = m_0 \\ c_3 = m_1 \\ c_4 = m_0 \oplus m_1 \end{cases}$$

信息	码字
00	00000
01	11011
10	01101
11	10110

$$\begin{cases} c_0 = m_0 \oplus m_1 \\ c_1 = m_0 \\ c_2 = m_1 \\ c_3 = m_0 \\ c_4 = m_1 \end{cases}$$

信息	码字
00	00000
01	10101
10	11010
11	01111

设采用二元码



矢量空间与基底

- 一组线性无关的矢量$V_1, V_2, \ldots, V_n$，它们的线性组合构成了一个矢量空间**V**，这组矢量$V_1, V_2, \ldots, V_n$就是这个矢量空间的基底。
- ***n***维矢量空间应包含***n***个基底
- 基底不是唯一的，例：线性无关的两个矢量**(1,0)**和**(0,1)**以及**(-1,0)**和**(0,-1)**可张成同一个二维空间 。

二元域GF(2)上三重矢量空间

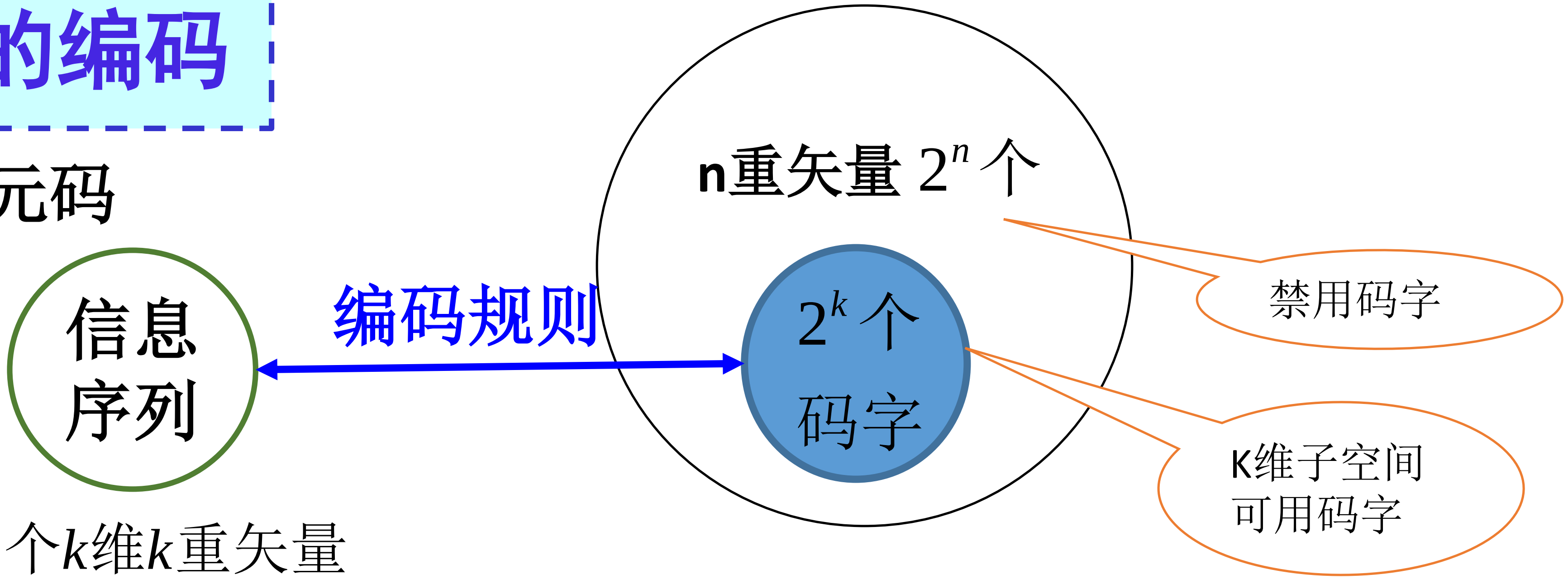
- 以（100）为基底可张成一维三重子空间V_1，含$2^1=2$ 个元素，即 $$V_1=\{(000),(100)\}$$
- 以(010)(001)为基底可张成二维三重子空间V_2，含 $2^2=4$个元素，即
$$V_2=\{(000),(001),(010),(011)\}$$
- 以(100)(010)(001)为基底可张成三维三重空间V,含 $2^3=8$个元素，V_1和V_2都是V的子空间。
$$V_3=\{(000),(001),\cdots,(111)\}$$

矢量空间

- 每个矢量空间或子空间中必然包含零矢量
- 两个矢量正交：$V_1 \cdot V_2 = 0$
- 两个矢量空间正交：某矢量空间中的任意元素与另一矢量空间中的任意元素正交
- 正交的两个子空间V_1、V_2互为对偶空间 (Dual Space)，其中一个空间是另一个空间的零空间（null space，也称零化空间）。

5.2.2 线性分组码的编码

设采用二元码



2^k 个k维k重矢量

线性分组编码的任务：

- 选择一个 k 维n重子空间作为码空间。
- 确定由k维k重信息空间到 k 维n重码空间的映射方法。

码空间的不同选择方法，以及信息组与码组的不同映射算法，就构成了不同的分组码。

$$\begin{cases} c_0 = m_1 \\ c_1 = m_0 \oplus m_1 \\ c_2 = m_0 \\ c_3 = m_1 \\ c_4 = m_0 \oplus m_1 \end{cases}$$

信息	码字
00	00000
01	11011
10	01101
11	10110

(5,2)线性分组码

$$\begin{cases} c_0 = m_0 \oplus m_1 \\ c_1 = m_0 \\ c_2 = m_1 \\ c_3 = m_0 \\ c_4 = m_1 \end{cases}$$

信息	码字
00	00000
01	10101
10	11010
11	01111

(5,2)线性分组码

$$(c_0 c_1 c_2 c_3 c_4)_{1\times 5} = (m_0 \quad m_1)_{1\times 2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 5}$$

生成矩阵

$$(c_0 c_1 c_2 c_3 c_4)_{1\times 3} = (m_0 \quad m_1)_{1\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 5}$$

生成矩阵

生成矩阵

设$\boldsymbol{m}$为k维信息矢量，$\boldsymbol{c}$为n维码矢量，一般线性分组码可以 (n,k) 两个参数表示。线性分组码的编码规则很简单：

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}\boldsymbol{G}$$

式中$\boldsymbol{G}$是k行n列$(n \geq k)$的秩为k的矩阵，称为生成矩阵。

$$G=\begin{bmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1,0} & \cdots & g_{k-1,n-1} \end{bmatrix}_{k\times n}$$

对于二元编码， $\boldsymbol{c}$和$\boldsymbol{m}$都是二元向量，$\boldsymbol{G}$为GF(2)上的 $k\times n$矩阵，$g_{i,j} \in \{0,1\}$，向量与矩阵之间，矩阵与矩阵之间均为模2运算。

生成矩阵G($k\times n$)的特点

- 想要保证 (n,k)线性分组码能够构成k维n重子空间，G 的k个行矢量g_0 , g_1 ,…, g_{k-1}必须是线性无关的。
- 由于基底不是唯一的，所以G也不是唯一的。
- 不同的基底有可能生成同一码集，但因编码涉及码集和映射两个因素，若码集一样而映射方法不同，则不能说是同样的码。

例5.2.1 (4,3)偶校验码是一个(4,3)线性分组码，其生成矩阵

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$，当$\boldsymbol{m}=(m_0,m_1,m_2)=(101)$时，求其码字。

解：

$$(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3)=(101)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=(1010)$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_0\\\boldsymbol{g}_1\\\boldsymbol{g}_2\end{bmatrix}\qquad(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3)=(\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2)\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_0\\\boldsymbol{g}_1\\\boldsymbol{g}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{g}_0\oplus\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{g}_1\oplus\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{g}_2$$

码字$\boldsymbol{c}$是$\boldsymbol{G}$的行向量$\mathrm{g}_0,\mathrm{g}_1,\cdots,\mathrm{g}_{k-1}$的线性组合

例5.2.1 (4,3)偶校验码是一个(4,3)线性分组码，其生成矩阵

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$，当$\boldsymbol{m}=(m_0,m_1,m_2)=(101)$时，求其码字。

解：

$$\left(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3\right)=(101)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=(1010)$$

$$G=\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

单位矩阵

系统码

例5.2.1 (4,3)偶校验码是一个(4,3)线性分组码，其生成矩阵

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$，当$\boldsymbol{m}=(m_0,m_1,m_2)=(101)$时，求其码字。

解：

$$\left(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3\right)=(101)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=(1010)$$

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow G'=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

这两个生成矩阵张成的码空间是一样的

$$\left(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3\right)=(101)\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=(0110)$$

但信息与码字的映射关系不一样

例5.2.1 (4,3)偶校验码是一个(4,3)线性分组码，其生成矩阵

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$，当$\boldsymbol{m}=(m_0,m_1,m_2)=(101)$时，求其码字。

解:

$$(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3)=(101)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=(1010)$$

验证 $\boxed{GH^T=\theta}$

$$(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3)=(\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{m}_0\quad\boldsymbol{m}_1\quad\boldsymbol{m}_2\quad\boldsymbol{m}_0+\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2)$$

$$\Downarrow$$

$$H=(1111)\Leftarrow(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=0\Leftarrow c_0+c_1+c_2+c_3=0\Leftarrow c_3=c_0+c_1+c_2$$

一致校验矩阵

一致校验方程

当G给定时，线性分组码有如下**性质**：

1. 零向量$\boldsymbol{\theta}=(0,0,\cdots,0)$一定是一个码字，称为零码字；

2. 任意两码字的和或差仍是一个码字； **封闭性**

3. 任意码字c是G的行向量$g_0, g_1, \cdots, g_{k-1}$的线性组合；

4. 线性分组码的最小距离等于最小非零码字重量，即

$$d_{\min}=\min_{c\neq\theta} w(c)$$

最小码距 ⟷ 最小码重

有何好处？

一致校验矩阵

对于GF(2)上的$k\times n$矩阵$\boldsymbol{G}$，存在$(n\text{-}k)\times n$矩阵$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} h_{0,0} & \cdots & h_{0,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-k-1,0} & \cdots & h_{n-k-1,n-1} \end{bmatrix}$，

使得

$$\boldsymbol{GH}^T=[0]_{k\times(n-k)}$$

$\boldsymbol{H}$：一致校验矩阵。$\boldsymbol{H}^T$为$\boldsymbol{H}$的转置。且有

$$\boldsymbol{cH}^T=\boldsymbol{mGH}^T=\boldsymbol{m}[0]_{\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}=\boldsymbol{\theta}$$

θ为$(n\text{-}k)$维零向量。

用来校验接收到的码字是否正确

如果生成矩阵G具有形式

$$G_s = \begin{bmatrix} I_k & Q_{k\times(n-k)} \end{bmatrix}$$

则称该码为系统码，其中I_k为$k \times k$单位阵。

系统码的前k位就是信息位。

系统码的一致校验矩阵H_S

$$H_s = \begin{bmatrix} Q^T & I_{(n-k)} \end{bmatrix}_{(n-k)\times n}$$

系统码的一致校验矩阵好求。

G_S与H_S满足 $G_s H_s^T = [0]_{k\times(n-k)}$

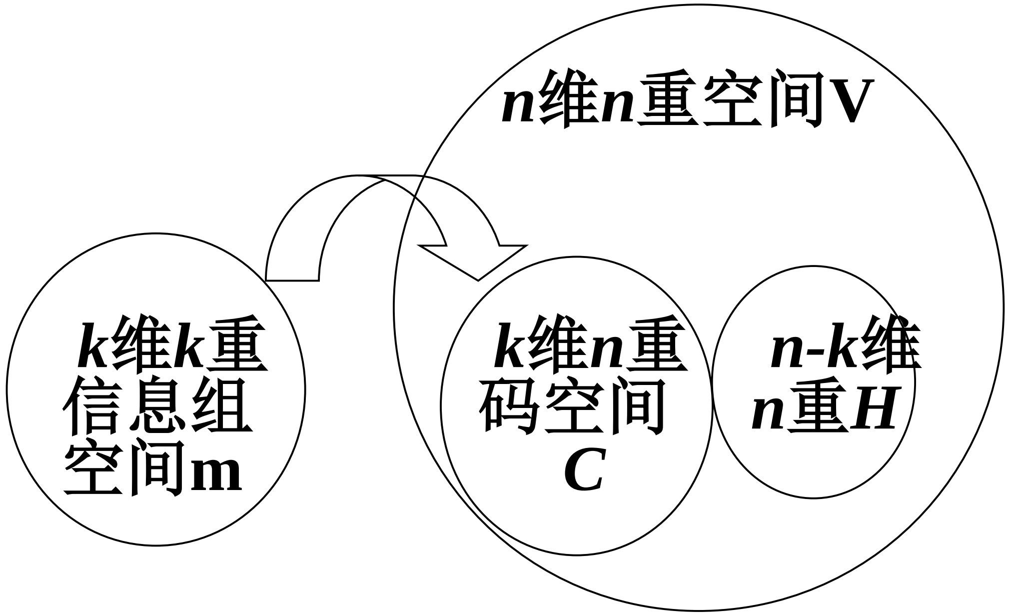
对二元码来说，$H = H_S$

G和H的角色可以互换，即H作为生成矩阵，G为校验矩阵。由H生成的码字称为c的对偶码。

深入理解G和H

- n维n重空间有相互正交的n个基底
- 选择k个基底构成G，生成码空间C
- 选择另外的(n-k)个基底构成H
- C和H是对偶的

$$CH^T = 0,\ GH^T = 0$$



例　设二元(7,4) 码的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

求其一致校验矩阵H。

例　设二元(5,3) 码的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\1&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

求其一致校验矩阵H。

解：先求其系统码生成矩阵。

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\1&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{G}_s=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_s=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&1&0\\1&1&1&0&1\end{array}\right]=\boldsymbol{H}$$

验证 GH^T

例5.2.3 一个(5,3)线性分组码的生成矩阵$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\\1&1&0&1&0\end{bmatrix}$。求对应的$\boldsymbol{G}_s$和$\boldsymbol{H}_s$。

对$\boldsymbol{G}$进行初等变换，用R_i表示$\boldsymbol{G}$的第i行

$$R_3 \leftarrow R_2 \oplus R_3, R_1 \leftarrow R_1 \oplus R_3, R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\\1&1&0&1&0\end{array}\right] \qquad H_s=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

验证：

$$\boldsymbol{G}_s\boldsymbol{H}_s^T=[0]_{3\times 2}$$

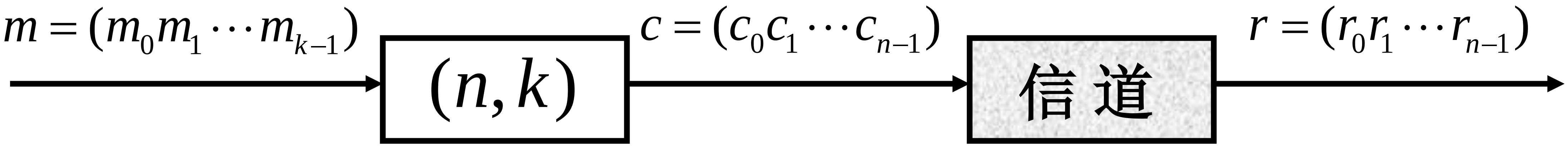
$$G=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\\1&1&0&1&0\end{bmatrix}\quad G_s=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{H}_s=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

(5,3)线性分组码码字

消息m	000	001	010	011	100	101	110	111
G生成码字	00000	11010	01011	10001	10110	01100	11101	00111
G_S生成码字	00000	00111	01011	01100	10001	10110	11010	11101
对偶码码字			00000	11101	01110	10011		

- G与G_S 两个生成矩阵生成的码字集合相同，消息与码字的对应关系不同。
- 由G_S生成的码字中，前3位就是对应的消息。

5.2.3 线性分组码的译码



定义 **差错图案/图样*e*** 来定量描述出现的差错：

$$e=(e_0e_1\cdots e_{n-1})=r-c=(r_0-c_0,r_1-c_1,\cdots,r_{n-1}-c_{n-1})$$

错误图案中某位为“ 1 ”表明该位出错。

二进制码中模2加与模2减等价，故一般记成

$$e=c\oplus r \quad \text{或} \quad c=r\oplus e$$

译码器从接收矢量中确定错误图案e，进而得到码字的估计值。若估计值正确则译码正确，否则译码错误。

译码准则:

最小差错概率准则
最大后验概率准则
最大似然译码准则
最小距离译码准则

译码方法:

- 伴随式译码
- 标准阵列译码

伴随式译码

因为 $cH^T = 0$

所以 $rH^T = (c \oplus e)H^T = cH^T \oplus eH^T = eH^T$

如果收码无误：必有 $r = c$ 则 $e = 0$，

且 $rH^T = eH^T = 0$

如果收码有误：即 $e \neq 0$，

则 $rH^T = eH^T \neq 0$

在H^T固定的前提下，rH^T 仅仅与差错图案 e 有关，而与发送码 c 无关。定义伴随式 s

$$s = (s_0, s_1, \cdots, s_{n-k-1}) = rH^T = cH^T \oplus eH^T = eH^T$$

码字通过信道传输可能出错，接收矢量可表示成码矢量和差错图案的线性叠加。

接收矢量：$\boldsymbol{r}=(r_0,r_1,\cdots,r_{n-1})$　　**码矢量**：$\boldsymbol{c}=(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$

差错图案：$\boldsymbol{e}=(e_0,e_1,\cdots,e_{n-1})$　　**伴随式**：$\boldsymbol{s}=(s_0,s_1,\cdots,s_{n-k-1})$

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{H}^T=\boldsymbol{c}\boldsymbol{H}^T\oplus\boldsymbol{e}\boldsymbol{H}^T=\boldsymbol{e}\boldsymbol{H}^T$$

若$\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{\theta}$，则传输中一定有错误发生；若$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\theta}$，传输中无差错或错误图案恰好为一个码字。

若能由伴随式 s 得到差错图样 e，则可得到码矢量的估值：

$$\overset{\frown}{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{r}\oplus\boldsymbol{e}=(c_0\oplus e_0,c_1\oplus e_1,\cdots,c_{n-1}\oplus e_{n-1})$$

差错图案的求解

可以通过解线性方程求解错误图案：

$$s = (s_0, s_1, \ldots, s_{n\text{-}k\text{-}1}) = e\boldsymbol{H}^T$$

$$= (e_0, e_1, \ldots, e_{n\text{-}1}) \begin{bmatrix} h_{00} & \cdots & h_{10} & h_{(n-k-1)0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{0i} & \cdots & h_{1i} & h_{(n-k-1)1} \\ h_{0(n-1)} & \cdots & h_{i(n-1)} & h_{(n-k-1)(n-1)} \end{bmatrix}_{n\times(n-k)}$$

得到的线性方程组：

有***n***个未知数，有***n-k***个方程 有多组解

- 在有理数或实数域中，少一个方程就可能导致无限多个解，而在二元域中，少一个方程导致两个解，少两个方程四个解，以此类推，少$n-(n-k)=k$个方程导致每个未知数有2^k个解。
- 因此，由上述方程组解出的e可以有2^k个解。到底取哪一个作为附加在收码r上的差错图案e的估值呢？
- 概率译码：把所有2^k个解的重量(差错图案e中1的个数)作比较，选择其中最轻者作为e的估值。

依据： 若BSC信道的差错概率是p，则长度n的码中错误概率：

0个错	1个错	2个错	…	n个错
$(1-p)^n$	$p(1-p)^{n-1}$	$p^2(1-p)^{n-2}$		p^n

由于$p \ll 1$, $\gg$ $\gg$ $\gg$ … $\gg$

出错越少的情况，发生概率越大，e的重量越轻，汉明距离越小，该译码方法实际上体现了最小距离译码准则。

伴随式纠错译码步骤:

1. 根据最可能出现的差错图案计算相应的伴随式，构造伴随式-差错图案表 (s,e)；
2. 对接收向量计算伴随式: $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{H}^T$；
3. 查 $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{e})$ 表得差错图案 $\boldsymbol{e}$;
4. 纠错: $\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{r} \oplus \boldsymbol{e}$；
5. 译码，得到信息矢量估值: $\widehat{\boldsymbol{m}}$

例5.2.4 (6,3)线性分组码，系统生成矩阵 $\boldsymbol{G}_S=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&1\end{bmatrix}$，接收矢量 $\boldsymbol{r}$=(111001)，对其译码。

解：求系统校验矩阵。

$$\boldsymbol{H}_s=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{H}_s^T=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

1 根据最可能出现的差错图案，由 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{e}\boldsymbol{H}_S^T$，构造($\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{e}$)表。

差错图案*e*	000000	100000	010000	001000	000100	000010	000001
伴随式*s*	000	110	011	101	100	010	001

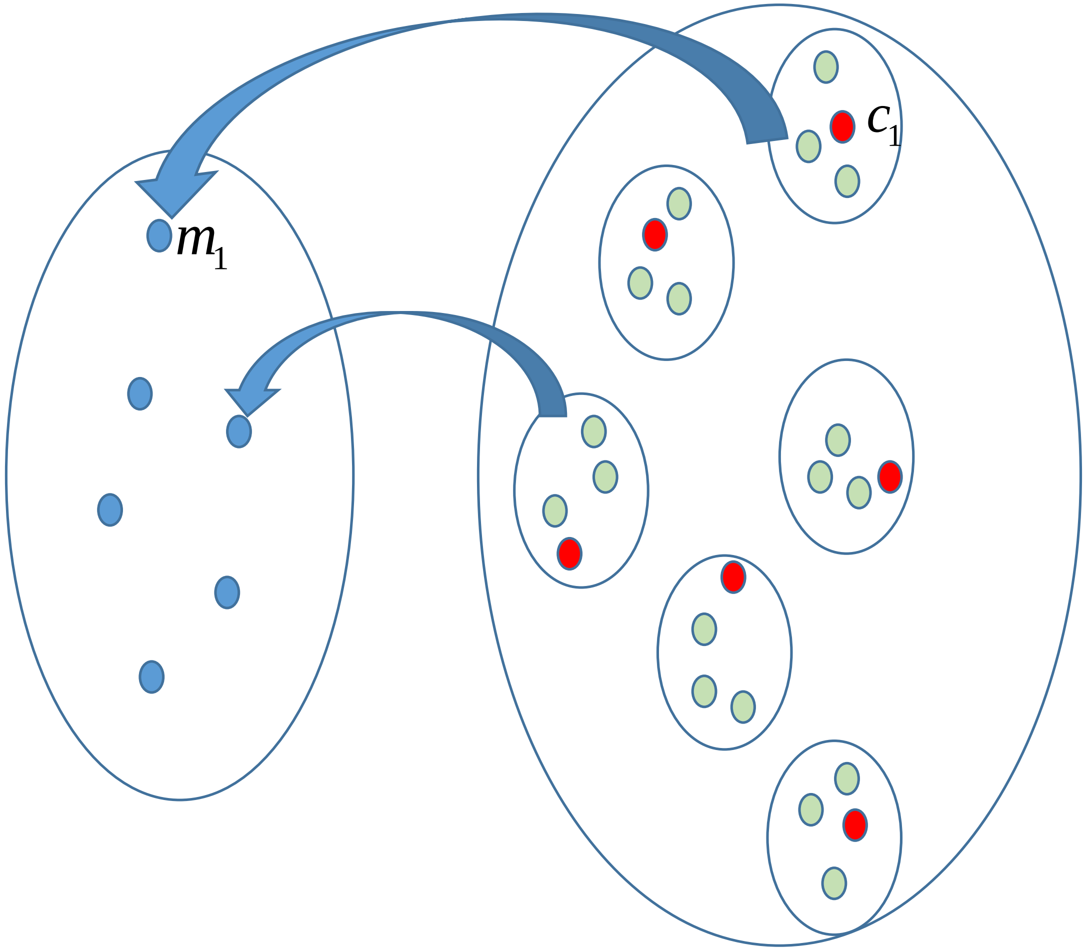
2 由式$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}\boldsymbol{H}_s^T$计算接收向量 $\boldsymbol{r}$=(111001)的伴随式，得 $\boldsymbol{s}$=(001)。

3 查($\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{e}$)表可知，对应的差错图案 $\boldsymbol{e}$=(000001)。

4 纠错计算得码字估值

$$\hat{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{r}\oplus\boldsymbol{e}=111001\oplus 000001=111000$$

5 译码。对于系统(6,3)码，前三位即发送消息，即m=(111)。
非系统码需要查消息-码字对照表恢复原始消息。



信息	m_1	m_2	…	m_{2^k}
许用码字	c_1	c_2		c_{2^k}
2^n-2^k 个禁用码字				

译码表

标准阵列译码

- 从伴随式译码可以看出，伴随式s的数目是有限的2^{n-k}个.
- 如果n-k不太大，我们可以预先把不同s下的方程组解出来，把各种情况下的最大概率译码输出列成一个码表。
- 这样，在实时译码时只要象查字典那样查一下码表就可以了。
- 这样构造的表格叫做标准阵列译码表。

标准阵列译码表

伴随式

全零码字

伴随式							
$s_0=\theta$	$e_0+c_0=0$	$e_0+c_1=c_1$	$\cdots$	$e_0+c_j=c_j$	$\cdots$	$e_0+c_{2^k-1}=c_{2^k-1}$	许用码字
s_1	e_1+c_0	e_1+c_1		e_1+c_j		$e_1+c_{2^k-1}$	禁用码字
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
s_i	e_i+c_0	e_i+c_1	$\cdots$	e_i+c_j	$\cdots$	$e_i+c_{2^k-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
$s_{2^{n-k}-1}$	$e_{2^{n-k}-1}+c_0$	$e_{2^{n-k}-1}+c_1$		$e_{2^{n-k}-1}+c_j$		$e_{2^{n-k}-1}+c_{2^k-1}$	

有多少个伴随式？　　不同行元素有交集吗？

有多少个码字？　　不同列元素有交集吗？

例 (4,2)线性分组码，编码规则如右所示。生成标准阵列译码表，分析其纠检错能力。

$$\begin{cases} c_0 = m_0 \\ c_1 = m_1 \\ c_2 = m_0 \oplus m_1 \\ c_3 = m_1 \end{cases}$$

解：

信息	码字
00	0000
01	0111
10	1010
11	1101

0000	0111	1010	1101
1000	1111	0010	0101
0100	0011	1110	1001
0001	0110	1011	1100

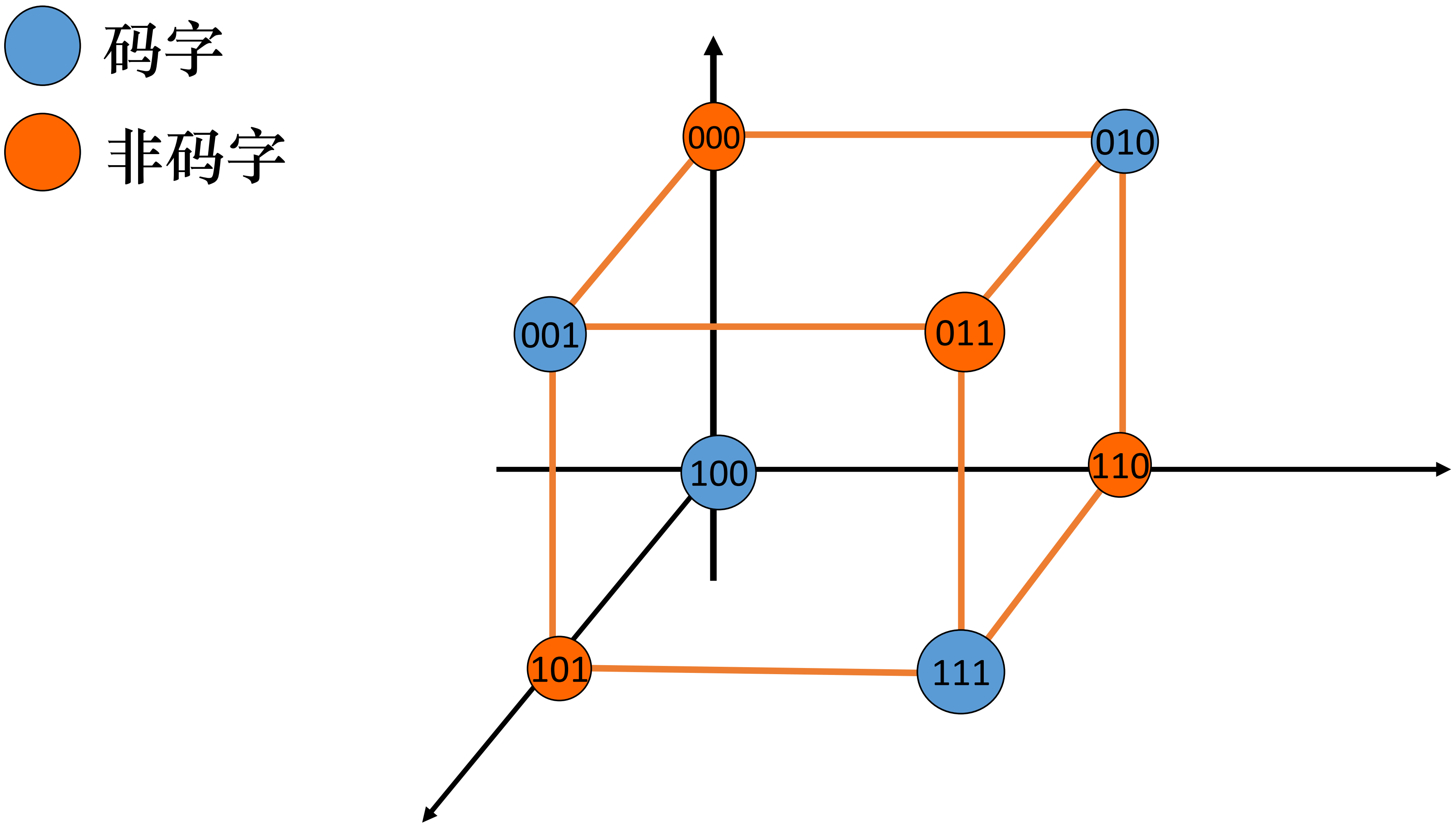
纠检错能力：

能检出所有1位差错，不能检出所有2位差错。
能纠部分1位差错，但不是所有1位差错都能纠正。

纠错码的纠检错能力

如果一种码的任一码字内出现了e位或e位以内的错误，能自动发现，则称该码的**检错能力**为e。

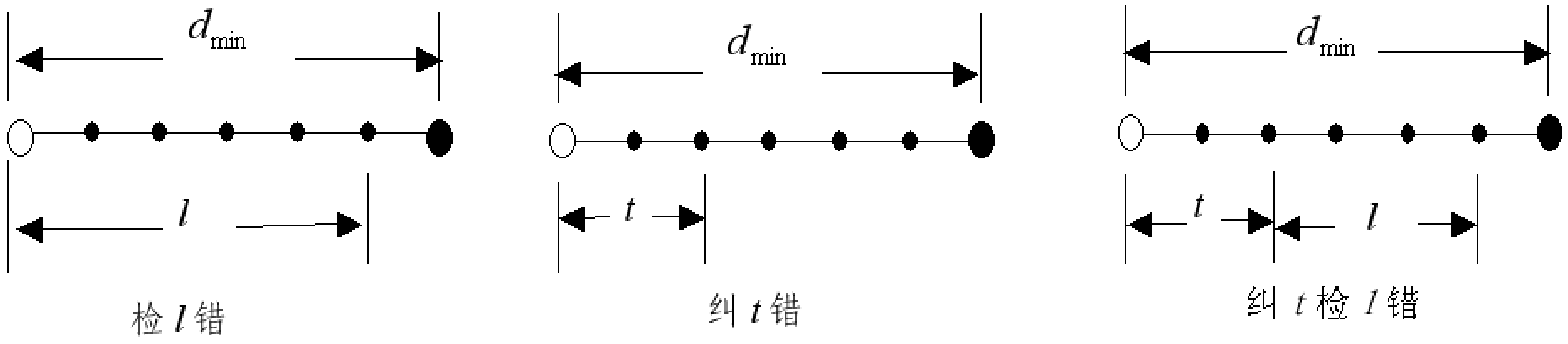
如果一种码的任一码字内出现了t位或t位以内的错误，能自动纠正，则称该码的**纠错能力**为t。



检、纠错能力图示

定理： 若纠错码的最小距离为 $d_{\min}$，如下任何一个结论独立成立。

1. 可以检测出任意小于等于$l=d_{\min}-1$个差错； $(d_{\min} \geq l+1)$
2. 可以纠正任意小于等于$t=\left\lfloor \dfrac{d_{\min}-1}{2} \right\rfloor$个差错； $(d_{\min} \geq 2t+1)$
3. 可以检测出任意小于等于l同时纠正小于等于t个差错，其中l和t满足$l+t \leq d_{min}-1$，$t<l$。 $(d_{\min} \geq t+l+1)$



最小码距与检错和纠错能力

思考： 分组码的最小码距为 d_{min} ，则

$d_{min}=1$：　　无纠检错能力

$d_{min}=2$：　　检1位错

$d_{min}=3$：　　纠1位错，或检2位错

$d_{min}=4$：　　纠1位错，同时检2位错

若(n,k)线性分组码的最小码距为 4，则该码一定不能纠正2个错误吗?

5.2.4 典型码例

多个校验位的汉明码

每个校验位是部分或全部信息位按模2和规则确定。汉明码满足下列条件

码　　长：$n=2^r-1$

信息位长：$k=n-r=2^r-r-1$

码 字 数：$M=2^k$

监督位长：$r=n-k$

最小码距：$d_{min}=3$

纠错能力：$t=1$

定理：若线性分组码能纠正所有1位错误，当且仅当校验矩阵没有全零列，且任意两列都不相同。

■ 汉明界

任何一个二元(n,k)线性分组码，有2^k个码字，$2^{n-k}=2^r$个伴随式矢量。若要纠正所有小于等于t个错误，伴随式的个数必须满足：

$$2^{n-k} \geq C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^t = \sum_{i=0}^{t} C_n^i$$

这个关系式称为汉明界。它是构造纠正t位错的(n,k)码的必要条件。

如果一个(n,k)线性分组码使汉明界的等号成立，即伴随式的个数与所有可纠正的错误图样数正好相等，说明校验位得到了充分的利用，这种码称为完备码。

例5.2.5 二元(7,4)汉明码的系统码生成矩阵和校验矩阵分别为

$$G_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

等价编码方程 $\begin{cases} c_i = m_i, i = 0,1,2,3 \\ c_4 = m_0 \oplus m_1 \oplus m_2 \\ c_5 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \\ c_6 = m_0 \oplus m_1 \oplus m_3 \end{cases}$

伴随式方程 $\begin{cases} s_0 = r_0 \oplus r_1 \oplus r_2 \oplus r_4 \\ s_1 = r_1 \oplus r_2 \oplus r_3 \oplus r_5 \\ s_2 = r_0 \oplus r_1 \oplus r_3 \oplus r_6 \end{cases}$

$\boldsymbol{u} = (1101)$

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{G}_s = (1101001)$

若传输无差错：

$$cH^{\mathrm{T}} = [1101001]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

译码得：

$$\boldsymbol{u} = (1101)$$

对消息序列$\boldsymbol{m}=(m_0,m_1,m_2,m_3)$=(1101)编码，若传输过程中第4个比特出错，对接收矢量译码。

m_0	m_1	m_2	m_3	c_4	c_5	c_6
c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6

1. C=(1100001)
2. 计算(*s*,*e*)表
3. 计算伴随式*s*=(011)
4. 查(*s*,*e*)表，得错误图案*e*=(0001000)
5. 码估值，$\hat{c}=r\oplus e$=(1101000)
6. 恢复消息，*m*=(1101)

(*s*,*e*)表

e	*s*
0000000	000
1000000	101
0100000	111
0010000	110
0001000	011
0000100	100
0000010	010
0000001	001

第5章 小 结

1. 掌握信道编码的基本概念

   纠错编码的分类

   差错控制方式

   译码准则

2. 了解信道编码定理

   临界值C

3. 掌握线性分组码

基本概念：信息位、校验位、码字、汉明重量、汉明距离、码率

编码：生成矩阵G　系统码生成矩阵Gs

译码：译码准则、译码规则、错误译码概率

一致校验矩阵H，Hs，对偶码

码矢量，接收矢量，差错图案，伴随式

伴随式纠错译码、标准阵列译码

最小汉明距离与纠、检错能力