转移矩阵(M)

$$M = egin{bmatrix} rac{1}{3} & rac{1}{2} & 0 \ rac{1}{3} & 0 & rac{1}{2} \ rac{1}{3} & rac{1}{2} & rac{1}{2} \end{bmatrix}$$

初始PageRank

$$r^{(0)} = egin{bmatrix} rac{1}{3} \ rac{1}{3} \ rac{1}{3} \end{bmatrix}$$

迭代计算

$$r^{(1)} = M \cdot r^{(0)}$$
 $r^{(1)} = egin{bmatrix} rac{1}{3} & rac{1}{2} & 0 \ rac{1}{3} & 0 & rac{1}{2} \ rac{1}{3} & rac{1}{2} & rac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot egin{bmatrix} rac{1}{3} \ rac{1}{3} \ rac{1}{3} \end{bmatrix} = egin{bmatrix} rac{5}{18} \ rac{5}{18} \ rac{4}{9} \end{bmatrix}$

2.

转移矩阵(M)

$$M = egin{bmatrix} rac{1}{3} & rac{1}{2} & 0 \ rac{1}{3} & 0 & rac{1}{2} \ rac{1}{3} & rac{1}{2} & rac{1}{2} \end{bmatrix}$$

初始PageRank

$$r^{(0)} = egin{bmatrix} rac{1}{3} \ rac{1}{3} \ rac{1}{3} \end{bmatrix}$$

迭代计算

$$r^{(1)} = eta M \cdot r^{(0)} + rac{(1-eta)}{N} \mathbf{e}$$
 $r^{(1)} = rac{4}{5} \cdot egin{bmatrix} rac{1}{3} & rac{1}{2} & 0 \ rac{1}{3} & 0 & rac{1}{2} \ rac{1}{3} & rac{1}{2} & rac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot egin{bmatrix} rac{1}{3} \ rac{1}{3} \ rac{1}{3} \end{bmatrix} + egin{bmatrix} rac{1}{15} \ rac{1}{15} \ rac{1}{15} \end{bmatrix} = egin{bmatrix} rac{13}{45} \ rac{13}{45} \ rac{19}{45} \end{bmatrix}$

转移矩阵(M)

$$M = egin{bmatrix} 0 & rac{1}{2} & 1 & 0 \ rac{1}{3} & 0 & 0 & rac{1}{2} \ rac{1}{3} & 0 & 0 & rac{1}{2} \ rac{1}{3} & rac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

初始PageRank

$$r^{(0)} = egin{bmatrix} rac{1}{4} \ rac{1}{4} \ rac{1}{4} \ rac{1}{4} \end{bmatrix}$$

迭代计算

$$r^{(1)} = \beta M \cdot r^{(0)} + \frac{(1-\beta)}{|S|} v$$

$$r^{(1)} = \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

4.

原始情况(所有支持网页链向目标网页)

- 设目标网页的 PageRank 为 y
- 设从其他可访问页面贡献给目标页面的 PageRank 为 x
- 设 farm 页面数量为 M, 总页面数为 N
- 阻尼因子为β

每个 farm 页面的 PageRank 为:

$$ext{Rank of farm page} = rac{eta y}{M} + rac{1-eta}{N}$$

目标页面的 PageRank 方程为:

$$y = x + eta M \left(rac{eta y}{M} + rac{1-eta}{N}
ight) + rac{1-eta}{N}$$

解得:

$$y=rac{x}{1-eta^2}+crac{M}{N},\quad
ot \exists \pitchfork c=rac{eta}{1+eta}$$

变体(a):每个支持网页只链向自己

在这种情况下:

- 每个 farm 页面的出链指向自己。
- 目标页面不再从 farm 页面获得任何 PageRank

每个 farm 页面只从自己获得 PageRank:

$$r_{ ext{farm}} = eta \cdot r_{ ext{farm}} + rac{1-eta}{N}$$

解得:

$$r_{ ext{farm}} = rac{1-eta}{N} \cdot rac{1}{1-eta} = rac{1}{N}$$

目标页面只从可访问页面和随机跳转获得 PageRank:

$$y = x + \frac{1 - \beta}{N}$$

变体(b): 每个支持网页不链向任何网页 (dangling 节点)

在这种情况下:

- 每个 farm 页面没有出链,它们的 PageRank 会均匀分配给所有页面(包括目标页面)
- 目标页面除了从可访问页面获得 PageRank, 还会从 farm 页面获得额外的贡献

所有 farm 页面都是 dangling 节点,它们的 PageRank 最终会收敛到:

$$r_{ ext{farm}} = rac{1-eta}{N} + eta \cdot ($$
来自 dangling 节点的均匀分配 $)$

由于 farm 页面互相不传递 PageRank, 最终:

$$r_{
m farm} = rac{1}{N}$$

目标页面从以下来源获得 PageRank:

- 1. **可访问页面**(贡献 x)
- 2. 随机跳转
- 3. Farm 页面的 dangling 分配:

$$M \cdot \left(\frac{\beta}{N} \cdot \frac{1}{N}\right) = \frac{\beta M}{N^2}$$

因此,目标页面的 PageRank 为:

$$y = x + \frac{1 - \beta}{N} + \frac{\beta M}{N^2}$$

变体(c):每个支持网页同时链向自己和目标网页

在这种情况下:

- 每个 farm 页面有 **两条出链**:
 - 一条指向 自己 (权重1/2)
 - 一条指向 **目标页面** (权重**1/2**)

• 目标页面从 farm 页面获得部分 PageRank,同时 farm 页面也会保留部分 PageRank

每个 farm 页面的 PageRank 来源:

- 1. 来自自己 (权重1/2)
- 2. **随机跳转** (权重(1-β)/N)

因此:

$$r_{ ext{farm}} = rac{eta}{2} r_{ ext{farm}} + rac{1-eta}{N}$$

解得:

$$r_{ ext{farm}} = rac{1-eta}{N} \cdot rac{1}{1-rac{eta}{2}} = rac{2(1-eta)}{N(2-eta)}$$

目标页面的 PageRank 来源:

- 1. 可访问页面
- 2. 随机跳转
- 3. **farm 页面的贡献**

$$M \cdot \left(rac{eta}{2} \cdot rac{2(1-eta)}{N(2-eta)}
ight) = rac{eta M(1-eta)}{N(2-eta)}$$

因此,目标页面的 PageRank 为:

$$y=x+rac{1-eta}{N}+rac{eta M(1-eta)}{N(2-eta)}$$

可以进一步整理为:

$$y = x + rac{1-eta}{N}igg(1 + rac{eta M}{2-eta}igg)$$

5.

- 导航度得分(hub)是链出网页的权威度得分之和
- 权威度得分(authority)是链入网页的导航度之和

邻接矩阵(A)

$$A = egin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 1 \ 1 & 0 & 0 & 1 \ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hspace{0.5cm} A^ op = egin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \ 1 & 0 & 0 & 1 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

初始导航度和权威度

$$Initialize \;\; h_{
m i} = a_{
m i} = rac{1}{\sqrt{N}}$$

$$h^{(0)}=a^{(0)}=egin{bmatrix} rac{1}{2} \ rac{1}{2} \ rac{1}{2} \ rac{1}{2} \ rac{1}{2} \ \end{pmatrix}$$

迭代计算

$$h^{(1)} = A \cdot a^{(0)} = egin{bmatrix} 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{bmatrix} \qquad a^{(1)} = A^ op \cdot h^{(1)} = egin{bmatrix} rac{3}{2} \ 1 \ rac{1}{2} \ 1 \end{bmatrix}$$

$$Normalize \hspace{0.2cm} h^{(1)} = egin{bmatrix} rac{1}{2} \ rac{1}{2} \ rac{1}{2} \ rac{1}{2} \end{bmatrix} \hspace{0.2cm} a^{(1)} = egin{bmatrix} rac{\sqrt{2}}{2} \ rac{\sqrt{2}}{3} \ rac{\sqrt{2}}{6} \ rac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$