

Esercizi 04 — 9 pt

1 — 1 pt

Si consideri il sistema lineare $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Quale tra le seguenti affermazioni è *falsa*?

- A) La matrice di preconditionamento associata al metodo di Jacobi corrisponde alla matrice diagonale estratta da A .
- B) Per la matrice A , i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono entrambi convergenti o non convergenti per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.
- C) Il metodo di Jacobi converge per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.
- D) Il metodo di Gauss-Seidel non converge per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.

D

2 — 2 pt

Si consideri il sistema lineare $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \gamma \\ \gamma & 1 & \gamma \\ \gamma & \gamma & 1 \end{bmatrix}$ dipende dal parametro $\gamma \in \mathbb{R}$. Sapendo che gli autovalori di A sono $1 + 2\gamma$, $1 - \gamma$ e $1 - \gamma$, si riporti il raggio spettrale della matrice di iterazione associata al metodo di Jacobi in funzione di γ . Inoltre, si determinino i valori di γ tali per cui il metodo di Jacobi risulta convergente per ogni scelta dell'iterata iniziale.

$$\rho_{BJ} = 2|\gamma|, \quad -\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$$

3 — 1 pt

Si consideri il sistema lineare $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \text{tridiag}(-1, 3, 2) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^4$. Si applichino 5 iterazioni del metodo di Gauss-Seidel con vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ e si riporti l'iterata $\mathbf{x}^{(5)}$ ottenuta.

$$(0.0112, 0.1512, 0.0996, 0.3665)^T$$

4 — 1 pt

Si consideri il sistema lineare $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^2$ e un metodo iterativo per l'approssimazione di \mathbf{x} che coinvolga la matrice di preconditionamento $P = \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, dipendente da un parametro $\beta \neq 0$. Per quali valori del parametro β il metodo iterativo risulta convergente per ogni scelta dell'iterata iniziale?

$$\beta > \frac{5}{4}$$

5 — 2 pt

Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ è la matrice di Hilbert assegnata col comando Matlab[®] `hilb`, si stimi il minimo numero di iterazioni N del metodo di Richardson stazionario (non preconditionato) con parametro ottimale che garantisce un abbattimento dell'errore iniziale $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$ di un fattore 1000.

53583

6 — 2 pt

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \text{pentadiag}(-1, -3, 8.1, -3, -1) \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ è simmetrica e definita positiva e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{100}$. Si consideri per la sua risoluzione il metodo di Richardson stazionario con parametro ottimale e con preconditionatore $P = \text{tridiag}(-1, \beta, -1) \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ dipendente da un parametro $\beta \in \mathbb{R}$ tale che P sia simmetrica e definita positiva. Si stimi il valore di $\beta \in [2, 2.5]$ tale per cui è garantita la convergenza più rapida del metodo.

[Suggerimento: si determini graficamente con Matlab[®] il valore di β]

2.0345