Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **Appello** **14 febbraio 2019**	**Prof. L. Dedè** **Prof. A. Manzoni** **Prof. S. Micheletti**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare il valore dell'elemento $u_{33} = (U)_{33}$ della matrice triangolare *superiore* U.

$$\boxed{u_{33} = -12}$$

2. *(2 punti)* Sia $A = \begin{bmatrix} 4\,\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro $\alpha > 0$. Si riporti il valore del numero di condizionamento spettrale di A in termini di α, ovvero $K(A)$ ($K_{sp}(A)$).

$$\boxed{K(A) = 6{,}171\,293 \qquad \forall \alpha > 0}$$

3. *(1 punto)* Si consideri il metodo del gradiente precondizionato per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice di precondizionamento, entrambe simmetriche e definite positive. Sapendo che il numero di condizionamento di $P^{-1}A$ è $K(P^{-1}A) = 10$ e l'errore associato all'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ è $\|\mathbf{e}^{(0)}\|_A = 1$, si *stimi* il valore dell'errore $\|\mathbf{e}^{(k)}\|_A = \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A$ dopo aver applicato $k = 32$ iterazioni del metodo.

$$\boxed{\|\mathbf{e}^{(k)}\|_A \leq 0{,}001\,626}$$

4. *(1 punto)* Si consideri il metodo di Richardson stazionario, con parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ simmetrica e definita positiva. Si determini il valore del parametro $\alpha_{opt} \in \mathbb{R}$ che garantisce la più rapida convergenza del metodo.

$$\boxed{\alpha_{opt} = 0{,}1667}$$

5. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e il metodo delle potenze (dirette) per approssimare l'autovalore di modulo massimo. Assegnato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1\ 0)^T$, si riportino i valori approssimati $\lambda^{(0)}$ e $\lambda^{(1)}$ dell'autovalore ottenuti rispettivamente all'iterata iniziale e dopo l'applicazione di un'iterazione del metodo.

$$\boxed{\lambda^{(0)} = 4 \qquad \lambda^{(1)} = \frac{17}{5} = 3{,}4}$$

6. *(1 punto)* Si consideri la matrice $A_\alpha = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & -3 \\ \alpha & 0 & 4 \end{bmatrix}$ dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quali valori di α è possibile applicare il metodo delle potenze inverse per l'approssimazione dell'autovalore di A_α avente modulo minimo, ovvero $\lambda_3(A_\alpha)$?

$$\boxed{\textbf{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}}$$

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = \log(x + 8/9)$ dotata dello zero $\alpha = 1/9$ e il metodo di bisezione per la sua approssimazione. Senza applicare esplicitamente il metodo, si *stimi* l'errore commesso dopo $k = 4$ iterazioni partendo dall'intervallo iniziale [0,3].

$$\boxed{|x^{(k)} - \alpha| \leq 0{,}093\,75}$$

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$. Inoltre, si consideri la soluzione di tale sistema lineare mediante un metodo iterativo.

12 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo con matrice di iterazione $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (si definisca in modo preciso tutta la notazione usata).

(b) *(2 punti)* Si *dimostri* che la condizione di cui al punto (a) è necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo iterativo per ogni iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (suggerimento: si introduca l'errore $\mathbf{e}^{(k)}$ associato all'iterata $\mathbf{x}^{(k)}$).

(c) *(2 punti)* Si presenti il criterio d'arresto per un metodo iterativo basato sulla differenza tra due iterate successive. Inoltre, se ne discuta la sua affidabilità.

(d) *(2 punti)* Si consideri il metodo di Gauss–Seidel per la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si presenti l'algoritmo in forma matriciale.

(e) *(5 punti)* Si implementi il metodo di *Gauss Seidel* in forma matriciale in Matlab® nella funzione `GaussSeidel.m` (si usi il comando "back-slash" di Matlab® \ laddove necessario). Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato (detto anche residuo relativo). La struttura della funzione è:

```
function [x,Nit] = GaussSeidel(A,b,x0,nmax,tol).
```

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `GaussSeidel.m` per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (2,\, 2,\, \ldots,\, 2)^T \in \mathbb{R}^{100}$ e $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ definita come

$$A = \text{tridiag}\,(-6, 10, -3)\,;$$

si consideri l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 1000$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo normalizzato $r_{rel}^{(N)}$.

$N =$ 14 $\qquad x_3^{(N)} =$ 1,0347 $\qquad r_{rel}^{(N)} =$ $8{,}1635 \cdot 10^{-4}$

Infine, utilizzando opportunamente la funzione `GaussSeidel.m`, si riportino i valori della terza componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_3^{(1)}$ e $x_3^{(2)}$.

$x_3^{(1)} =$ 1,568 $\qquad x_3^{(2)} =$ 1,334 72

Esercizio 2. Si consideri una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dotata dello zero $\alpha \in [a,b]$.

10 punti

(a) *(2 punti)* Si riporti con precisione l'algoritmo del metodo di Newton per la ricerca dello zero α di $f(x)$; si consideri il criterio d'arresto basato sulla differenza tra due iterate successive.

(b) *(4 punti)* Si implementi il metodo di Newton nella funzione Matlab® `newton.m` utilizzando il criterio d'arresto basato sulla differenza tra due iterate successive. La struttura della funzione è:

```
function [xvect,N] = newton(x0,nmax,tol,fun,dfun)
```

Si considerino come *input*: il valore dell'iterata iniziale `x0`; il numero massimo di iterazioni consentite `nmax`; la tolleranza sul criterio d'arresto `tol`; la funzione di cui si vuole calcolare lo zero `fun`; la sua funzione derivata `dfun`. Si considerino come *output*: un vettore `xvect` contenente tutte le iterate del metodo; il numero di iterazioni effettuate `N`.

Si utilizzi la funzione Matlab® `newton.m` implementata precedentemente per approssimare lo zero $\alpha \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = e^{(\pi/4 - x)} \left(\frac{\pi}{4} - x\right)^2.$$

Si considerino l'iterata iniziale $x^{(0)} = \dfrac{8 + 3\,\pi}{12}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e il numero massimo di iterazioni `nmax`$= 100$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, il valore approssimato $x^{(N)}$ dello zero, il residuo corrispondente $r^{(N)} = |f(x^{(N)})|$ e i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ (si utilizzino almeno 4 cifre decimali e il formato esponenziale per riportare i risultati).

$N =$ 9 $\qquad x^{(N)} =$ 0,785 947 $\qquad r^{(N)} =$ $3{,}005\,931 \cdot 10^{-7}$

$x^{(1)} =$ 0,952 065 $\qquad x^{(2)} =$ 0,861 156

(c) *(3 punti)* Si consideri la funzione $f(x)$ di cui al punto (b) per cui lo zero è $\alpha = \pi/4$. Qual'è l'ordine di convergenza p atteso dal metodo di Newton per la ricerca di α? Si giustifichi la risposta sulla base delle proprietà di convergenza del metodo; si enunci con precisione il risultato teorico corrispondente.

$p =$ 1

È possibile ottenere un ordine di convergenza più alto allo zero α? Come?

(d) *(1 punto)* Si consideri ora la funzione di iterazione $\phi(x) = x - f(x)$, dove la funzione $f(x)$ è data al punto (b). Si mostri che lo zero $\alpha = \pi/4$ di $f(x)$ è anche punto fisso di $\phi(x)$.

Parte II - Pre Test

1. *(2 punti)* Assegnati i nodi equispaziati $x_0,\ x_1, \ldots x_5$ nell'intervallo [0,10] e la funzione $f(x) = 2\,(x+1)^2$, si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H f(x)$ della funzione $f(x)$ nei precedenti nodi. Si riporti il valore di $\Pi_1^H f(1)$. *10 punti*

$$\boxed{\Pi_1^H f(1) = 10}$$

2. *(1 punto)* Sia $f(x) = 2\,x^3$; si approssimi $f'(3)$ mediante la formula delle differenze finite in avanti utilizzando il passo $h = 0.1$; si riporti il valore $\delta_+ f(3)$ di tale approssimazione.

$$\boxed{\delta_+ f(3) = 55{,}82}$$

3. *(1 punto)* Sia $f(x) = 3\,x^2$. Si approssimi $\int_4^8 f(x)dx$ con la formula semplice del trapezio. Si riporti l'approssimazione $I_T(f)$ ottenuta.

$$\boxed{I_T(f) = 480}$$

4. *(2 punti)* Si consideri la formula del punto medio composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_0^1 (\cos(\pi x) - 1)\,dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero minimo M di sottointervalli equispaziati di [0,1] tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-5}$.

$$\boxed{M \geq 203}$$

5. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = t\,[20\,t + 7\,y(t)] & t \in (0{,}10), \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero all'indietro (Eulero Implicito) con passo $h = 1/5$ e $u_0 = y_0 = 3$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{79}{18} = 4{,}388\,889}$$

6. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema differenziale di diffusione–reazione:

$$\begin{cases} -u''(x) + 4\,u(x) = x & x \in (0{,}1), \\ u(0) = 1, \qquad u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N = 1$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

$$\boxed{u_1 = 0{,}375}$$

7. *(1 punto)* Dato il seguente problema differenziale di diffusione–trasporto:

$$\begin{cases} -u''(x) + 40\,u'(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 9, \end{cases}$$

si consideri (senza applicarla) la sua approssimazione numerica mediante il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h > 0$. Qual è la condizione sul passo di discretizzazione h che garantisce l'assenza di oscillazioni (instabilità) numeriche per la soluzione approssimata del problema?

$$\boxed{0 < h < \tfrac{1}{20} = 0{,}05}$$

Parte II - Esercizi

Esercizio 1.

10 punti

(a) *(2 punti)* Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\{x_i\}_{i=0}^n$ un insieme di nodi distinti nell'intervallo $[a,b]$. Si definisca con precisione il polinomio di Lagrange interpolante $f(x)$ ai nodi $\{x_i\}_{i=0}^n$, ovvero $\Pi_n f(x)$, e se ne fornisca l'espressione.

(b) *(3 punti)* Si consideri la seguente funzione $f(x) = \dfrac{4}{2 + x^2}$ definita in $[a,b] = [-5,5]$.
Si utilizzi Matlab® per approssimare $f(x)$ mediante polinomi interpolanti di Lagrange $\Pi_n f$ su nodi *equispaziati* di $[a,b]$ con $n = 4, 6, 8, 10$. Si riportino, al variare di n, i valori delle approssimanti corrispondenti $\Pi_n f$ valutate in $\bar{x} = 9/2$ (si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 4$ $\qquad \Pi_n f(\bar{x}) =$ $-0{,}363\,636$

per $n = 6$ $\qquad \Pi_n f(\bar{x}) =$ $0{,}996\,04$

per $n = 8$ $\qquad \Pi_n f(\bar{x}) =$ $-0{,}918\,288$

per $n = 10$ $\qquad \Pi_n f(\bar{x}) =$ $1{,}5236$

Si calcolino e si riportino gli errori $E_n(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ associati alle corrispondenti approssimanti $\Pi_n f$ (al fine del calcolo dell'errore in Matlab® si valutino $f(x)$ e $\Pi_n f(x)$ in 1000 punti con il comando `linspace(-5, 5, 1000)`; si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 4$ $E_n(f) =$ 0,700 371

per $n = 6$ $E_n(f) =$ 0,827 511

per $n = 8$ $E_n(f) =$ 1,141 647

per $n = 10$ $E_n(f) =$ 1,686 74

(c) *(1 punto)* Si interpreti e si motivi il risultato ottenuto al punto (b).

(d) *(1 punto)* Si definiscano i nodi di Chebyshev $\{x_i^{CH}\}_{i=0}^{n}$ nel generico intervallo $[a,b]$ e per $n \geq 0$.

(e) *(2 punti)* Si ripeta il punto (b) utilizzando ora i nodi di Chebyshev nell'intervallo $[a,b] = [-5,5]$ per costruire le approssimanti $\Pi_n^{CH} f$ con $n = 4, 6, 8, 10$. Si calcolino e si riportino gli errori $E_n^{CH}(f) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_n^{CH} f(x)|$ (si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 4$ $E_n^{CH}(f) =$ 0,641 712

per $n = 6$ $E_n^{CH}(f) =$ 0,359 364

per $n = 8$ $E_n^{CH}(f) =$ 0,193 793

per $n = 10$ $E_n^{CH}(f) =$ 0,102 546

(f) *(1 punto)* Siano ora assegnate le coppie di dati $(0, -4)$, $(1, 0)$, $(2, 12)$, $(3, 8)$ e $(4, 8)$. Si calcoli e si riporti l'espressione della retta di regressione lineare $p_1(x)$ che approssima tali dati.

$p_1(x) = \frac{16}{5}x - \frac{8}{5} = 3{,}2\,x - 1{,}6$

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & t \in (0,t_f), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

12 punti

con $t_f > 0$ e il dato iniziale y_0 assegnato.

(a) *(2 punti)* Si riporti con precisione l'algoritmo del metodo di Eulero Esplicito per l'approssimazione del problema di Cauchy (1).

(b) *(4 punti)* Si consideri ora il problema modello, ovvero $f(t,y) = \lambda\, y$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. Si forniscano le definizioni di assoluta stabilità e di regione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero Esplicito.

Si ricavi e si disegni la regione di assoluta stabilità per il metodo di Eulero Esplicito.

Il metodo è $\mathcal{A}$-stabile? Perché?

(c) *(3 punti)* Si consideri il problema di Cauchy (2) con $f(t,y) = -5\,\pi\,e^{-t}\,\cos(\pi\,t) - y$, $t_f = 1$ e $y_0 = 10$. Si utilizzi Matlab® per approssimare tale problema mediante il metodo di Eulero Esplicito con diversi passi temporali $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.025$ e $h_4 = 0.0125$. Si riportino i valori della soluzione approssimata $u_{N_{h,i}}$ corrispondente all'istante finale t_f per ciascuno dei precedenti valori di h_i (si riportino almeno 5 cifre decimali in formato esponenziale).

$u_{N_{h,1}} =$ 2,929 937 $\qquad$ $u_{N_{h,2}} =$ 3,316 142

$u_{N_{h,3}} =$ 3,500 269 $\qquad$ $u_{N_{h,4}} =$ 3,590 215

(d) *(1 punto)* Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = 5\,e^{-t}\,(2 - \sin(\pi\,t))$, si calcolino e si riportino gli errori E_{h_i} associati alle soluzioni $u_{N_{h,i}}$ al tempo t_f ottenuti per ciascun valore di h_i specificato al punto (c).

$E_{h_1} =$ 0,748 857 $\qquad$ $E_{h_2} =$ 0,362 652

$E_{h_3} =$ 0,178 525 $\qquad$ $E_{h_4} =$ 0,088 579

(e) *(2 punti)* Si utilizzino i risultati ottenuti al punto (d) per stimare l'ordine di convergenza del metodo di Eulero Esplicito. Infine, si giustifichi la risposta data alla luce dei risultati teorici.