Esercizi – 50pt – 75' – CN AER 23/06/20

Esercizio 1 – 30pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dove: $n = 100$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 10 & 0 & & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 10 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 10 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & \\ & & 0 & -1 & 97 & -2 & 10 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 98 & -2 & 10 \\ & & & & 0 & -1 & 99 & -2 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & -1 & 100 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.1 – 5 pt

Il metodo di Gauss–Seidel applicato al sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risulta convergente per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$? Si motivi la risposta data definendo tutta la notazione utilizzata.

$\rho_{B_{GS}} = 0.729799 < 1$

Spazio per risposta lunga

1.2 – 3 pt

Si utilizzi la funzione Matlab® `gs.m` per risolvere il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tramite il metodo di Gauss–Seidel con criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato. Si pongano: $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, `nmax`$= 1000$ e la tolleranza sul criterio d'arresto `tol`$= 10^{-4}$. Si riportino: il numero di iterazioni N effettuate, le prime due componenti della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)} = \left(x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \ldots\right)^T$ e il residuo normalizzato $r_{norm}^{(N)}$ corrispondente. Si riportino i risultati con almeno 4 cifre decimali.

$N = 49$ $\qquad \mathbf{x}^{(N)} = (0.057096,\ 0.101700,\ \ldots)^T$ $\qquad r_{norm}^{(N)} = 8.378606 \cdot 10^{-5}$

Spazio per risposta breve

1.3 – 3 pt

Dopo aver risposto al punto 2, si stimi e si riporti il valore dell'errore relativo $e_{rel}^{(N)} = \dfrac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(N)}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ con almeno 4 cifre decimali. Si motivi la risposta data.

$e_{rel}^{(N)} \leq 0.136618 \qquad (K_2(A) = 1.630564 \cdot 10^3)$

Spazio per risposta lunga

1.4 – 6 pt

Consideriamo lo splitting di una generica matrice A nella sua parte diagonale D, triangolare inferiore (con valori nulli sulla diagonale) $-E$ e triangolare superiore (con valori nulli sulla diagonale) $-F$, tale che $A = D - E - F$. Si vuole risolvere un *generico* sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tramite il seguente metodo iterativo:

$$\begin{cases} (D - E)\,\mathbf{x}^{(k+1/2)} = F\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\,\mathbf{x}^{(k)} + \omega\,\mathbf{x}^{(k+1/2)}, \end{cases} \qquad \text{per } k = 0, 1, \ldots,$$

dato $\mathbf{x}^{(0)}$, dove $\omega \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Si riscriva il precedente metodo iterativo come:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_\omega\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_\omega, \qquad \text{per } k = 0, 1, \ldots,$$

dato $\mathbf{x}^{(0)}$, fornendo le espressioni della matrice B_ω e vettore $\mathbf{g}_\omega$ di iterazione in funzione di ω. Si fornisca inoltre l'espressione del precondizionatore corrispondente P_ω.

$B_\omega = \omega\,(D-E)^{-1}\,F + (1-\omega)\,I, \quad \mathbf{g}_\omega = \omega\,(D-E)^{-1}\,\mathbf{b}, \quad P_\omega = \dfrac{1}{\omega}\,(D-E)$

Caricamento file

1.5 – 4 pt

Si mostri che il metodo iterativo di cui al punto 4 è fortemente consistente per ogni $\omega \neq 0$.

Caricamento file

1.6 – 4 pt

Si implementi il metodo iterativo di cui al punto 4 in una funzione Matlab® `metodoiterativo.m` usando il criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato. La funzione `metodoiterativo.m` avrà gli stessi inputs e outputs della funzione Matlab® `gs.m`, ricevendo in aggunta in ingresso il parametro ω. Si suggerisce pertanto di modificare opportunamente la funzione `gs.m`.

Si utilizzi la funzione `metodoiterativo.m` per risolvere il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con gli stessi dati di cui al punto 2 e $\omega = 0.6$. Si riportino: il numero di iterazioni N effettuate, le prime due componenti della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)} = \left(x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \ldots\right)^T$ e il residuo normalizzato $r_{norm}^{(N)}$ corrispondente. Si riportino i risultati con almeno 4 cifre decimali.

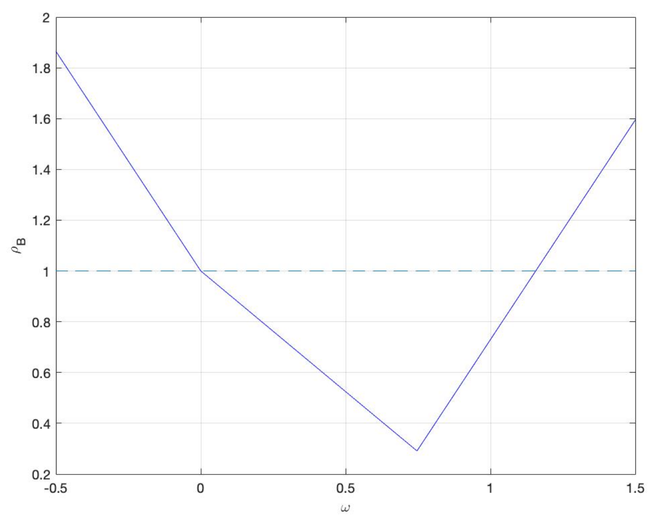
$k = 14$ $\quad \mathbf{x}^{(N)} = (0.057690,\ 0.102043,\ \ldots)^T$ $\quad r_{norm}^{(N)} = 7.060284 \cdot 10^{-5}$

Spazio per risposta breve

1.7 – 5 pt

Per quali valori di $\omega \in \mathbb{R}$ è garantita la convergenza del metodo iterativo di cui al punto 4 per ogni $\mathbf{x}^{(0)}$? Per quale valore ω_{opt} la convergenza del metodo è ottimale? Si risponda svolgendo un opportuno studio grafico tramite Matlab® ; si motivi la risposta data. Si riporti il grafico su foglio con la risposta.

Convergenza: $0 < \omega < 1.1562$, $\quad \omega_{opt} = 0.7464$



Caricamento file

Esercizio 2 – 20pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -\mu\, u''(x) + \sigma\, u(x) = f(x) & x \in (a,b), \\ \mu\, u'(a) = \delta, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $\sigma \geq 0$, δ, $\beta \in \mathbb{R}$.

2.1 – 6 pt

Si approssimi il problema (1) usando il metodo delle differenze finite centrate, partizionando l'intervallo $[a,b]$ in $N+1$ sottointervalli di uguale ampiezza $h = \dfrac{b-a}{N+1}$ delimitati da $N+2$ nodi $x_j = a + j\,h$ per $j = 0, 1, \ldots, N, N+1$. Per l'approssimazione di $u'(a)$ si utilizzi lo schema delle differenze finite in avanti.

Si riportino le equazioni del sistema risultante in forma esplicita definendo tutta la notazione utilizzata e illustrando la procedura seguita. Si riportino inoltre le espressioni della controparte algebrica, ovvero del sistema lineare $A\,\mathbf{u}_h = \mathbf{b}$, in forma condensata, dove $A \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, $\mathbf{u}_h, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N+1}$, essendo $\mathbf{u}_h = (u_0, u_1, \ldots, u_N)^T$.

Caricamento file

2.2 – 4 pt

Si pongano per il problema (1) i seguenti dati: $a = 0$, $b = 1$, $\mu = 2$, $\sigma = 1$, $f(x) = 1 - x + (4 + 2\pi^2)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\,x\right)$, $\delta = -2$, $\beta = 0$. Si approssimi il problema con il metodo di cui al punto 1 con $h = \dfrac{1}{10}$. Si riporti il valore di u_0 con almeno 4 cifre decimali.

$u_0 = 4.573077$

Spazio per risposta breve

2.3 – 3 pt

Dopo aver risposto al punto 2, si utilizzi opportunamente il vettore $\mathbf{u}_h$ ottenuto per approssimare $I(u) = \displaystyle\int_0^1 u(x)\,dx$ attraverso la formula dei trapezi composita. Si riporti il valore ottenuto con almeno 4 cifre decimali.

2.837222

Spazio per risposta breve

2.4 – 3 pt

Si risolva ora il problema con i dati di cui al punto 2 per $h = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005$ e, sapendo che la soluzione esatta è $u(x) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 - x$, si calcolino gli errori corrispondenti $e_h = \max_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j|$; si riportino i risultati con almeno 4 cifre decimali.

0.17031671 0.08507298 0.04251427 0.02125147

Spazio per risposta breve

2.5 – 4 pt

Si usino gli errori e_h calcolati al punto 4 per stimare *algebricamente* l'ordine di convergenza p del metodo di cui al punto 1 applicato al problema (1). Si illustri schematicamente la procedura seguita per la stima e si commenti il risultato ottenuto alla luce della teoria.

$p = 1$

Spazio per risposta lunga