Appello – Parte 1

02/09/2022 — versione 1 — ◇♡♣♠◇♠♣♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 1 pt (***) No Multichance

Dato l'insieme dei numeri floating point $\mathbb{F}(2, 6, -7, 7)$, si *stimi* l'errore relativo $\dfrac{|x - fl(x)|}{|x|}$ commesso tra il generico numero reale x e la sua rappresentazione in artimetica floating point $fl(x)$.

$2^{-6} = 1.5625 \cdot 10^{-2}$

2 — 1 pt

Dato $A \in \mathbb{R}$, con $A > 1$, la serie $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{A}\right)^n$ rappresenta, per $N \in \mathbb{N}$ "sufficientemente" grande, un'approssimazione di $\log(A)$. Posto $A = 8$, per quale valore minimo di N si ottiene un errore inferiore a 0.01?

24

3 — 2 pt (***) No Multichance

Dato il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (3\ 2\ 1)^T$, si consideri la sua risoluzione tramite il metodo della fattorizzazione LU con pivoting per righe (permutazione della seconda e terza riga). Si riportino gli elementi $l_{21} = (L)_{21}$ e $u_{33} = (U)_{33}$ dei fattori L ed U della matrice *permutata* e la terza componente y_3 del vettore ausiliario $\mathbf{y}$ associato alla soluzione del sistema triangolare inferiore che compare durante l'applicazione del metodo.

$l_{21} = -1/8$ $\quad u_{33} = -95/31$ $\quad y_3 = 12/31$

4 — 2 pt

Si consideri il metodo di Richardson stazionario per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{1}$. Si calcoli il valore ottimale del parametro $\alpha_{opt} \in \mathbb{R}$ e lo si utilizzi per determinare l'iterata $\mathbf{x}^{(4)} \in \mathbb{R}^3$ del metodo usando opportunamente la funzione Matlab® `richardson.m` e avendo scelto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$. Si riportino α_{opt} e $\mathbf{x}^{(4)}$.

$\alpha_{opt} = 0.2060$, $\mathbf{x}^{(4)} = (0.3262 \;\; 0.3824 \;\; 0.6048)^T$

5 — 2 pt

Si consideri la matrice di Hilbert $A =$ `hilb(5)` $\in \mathbb{R}^{5\times5}$. Si applichi il metodo delle potenze inverse con shift $s = 0.5$ per l'approssimazione di $\lambda_2(A)$ a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^5$. Si riportino i valori delle approssimazioni $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$ di tale autovalore.

1.2913, 0.5253, 0.2380

6 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$. Indicata con ι l'unità immaginaria, per quali valori del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ è possibile applicare il metodo delle potenze inverse con shift $s = \mu\,\iota$ per l'approssimazione dell'autovalore $(1 + 6\,\iota)$ di A?

$\mu > 3$

7 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = \log\left(\frac{x}{6}\right)$ e il metodo di Newton approssimare lo zero $\alpha = 6$. Scelto $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, qual è l'ordine di convergenza p atteso per il metodo?

2

8 — 1 pt

Si consideri il metodo di *Newton modificato* per l'approssimazione dello zero $\alpha = 6$ della funzione $f(x) = (x - 6)^3$. Si riporti il valore dell'iterata $x^{(1)}$ ottenuta applicando il metodo a partire da $x^{(0)} = 5$.

6

9 — 1 pt

Si consideri una funzione $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, dotata dello zero *semplice* α. Si supponga di approssimare α tramite il metodo di Newton e che all'iterata k-esima sia associato l'errore $\left|x^{(k)} - \alpha\right| = 0.5$. Assumendo che $\left|x^{(k+1)} - \alpha\right| = 0.05$, si riporti il valore stimato dell'errore $\left|x^{(k+2)} - \alpha\right|$.

$5 \cdot 10^{-4}$

10 — 2 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x + \mu \left(1 - e^{3x-1}\right)$, dipendente dal parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e dotata del punto fisso $\alpha = \frac{1}{3}$. Per quali valori di μ è garantita la convergenza del metodo delle iterazioni di punto fisso ad α in maniera *monotona*, scegliendo l'iterata iniziale "sufficientemente" vicina a α?

Conv. $\mu \in (0, 2/3)$; Conv. monotona $\mu \in (0, 1/3)$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \text{tridiag}\left(-\frac{3}{2}, 3, -\frac{3}{2}\right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$.

Punto 1) — 2 pt

- Si definisca il numero di condizionamento spettrale $K(A)$ di A.
- Sapendo che gli autovalori di A sono $\lambda_j(A) = 3 + 3\cos\left(\pi \frac{j}{n+1}\right)$ per $j = 1, \ldots, n$, dove $\lambda_1(A) > \lambda_2(A) > \cdots > \lambda_n(A)$, si utilizzi Matlab® per calcolare $K(A)$ in funzione di $n = 10, 20, 30, \ldots, 100$. Come si comporta $K(A)$ per $n \to +\infty$?

$K(A) \approx \frac{4}{\pi^2}(n+1)^2$

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 2 pt

Quale metodo *diretto* utilizzereste per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ indicato? Si motivi dettagliatamente la risposta data e si *descriva* sinteticamente tale metodo.

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 3 pt (***) No Multichance

Si intende risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sapendo che $\mathbf{x} = \mathbf{5}$. Supponiamo che, a causa degli errori di arrotondamento, il vettore $\mathbf{b}$ sia affetto da una perturbazione $\delta\mathbf{b} = 10^{-9}\mathbf{c}$, dove $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\|\mathbf{c}\|_2 = 1$, e che si risolva dunque il sistema lineare perturbato $A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$.

Posto $n = 1000$, si *stimi* l'errore relativo $\|\delta\mathbf{x}\|_2/\|\mathbf{x}\|_2$ commesso. Inoltre, si verifichi con Matlab® la validità di tale stima *commentando* il risultato ottenuto. Per la verifica in Matlab® , si utilizzi il seguente vettore $\mathbf{c}$:

```
>> c = rand(size(b));
>> c = c./norm(c);
```

e si risolva il sistema lineare con il comando \ di Matlab® .

$err_{stim} = 3.8287 \cdot 10^{-5}$, $err_{vero} = 3.3382 \cdot 10^{-7}$

Spazio per risposta lunga

Punto 4) — 2 pt

Per la matrice A con $n = 1000$ e il vettore $\mathbf{b}$ assegnato al Punto 3), si applichi il metodo del *gradiente* implementato nella funzione Matlab® `richardson.m` usando la tolleranza sul criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato $tol = 10^{-2}$, il numero massimo di iterazioni pari a 10^3 e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$. Si riportino: i comandi Matlab® usati, il numero N di iterazioni effettuate, la prima componente della soluzione approssimata $x_1 = \left(\mathbf{x}^{(N)}\right)_1$, il valore del residuo normalizzato $r_{norm}^{(N)} = \dfrac{\|\mathbf{r}^{(N)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ e l'errore relativo $e_{rel}^{(N)} = \dfrac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(N)}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

$N = 307$, $x_1 = 4.7736$, $r_{norm}^{(N)} = 0.01$, $e_{rel}^{(N)} = 0.9804$

Spazio per risposta lunga

Punto 5) — 3 pt

Si ripeta il Punto 4) considerando ora il metodo del *gradiente coniugato* usando opportunamente la funzione Matlab® `pcg`.

Si confrontino e si discutano i risultati con quelli ottenuti al Punto 4) alla luce delle proprietà teoriche dei due metodi.

$N = 99$, $x_1 = 4.9504$, $r_{norm}^{(N)} = 0.0099$, $e_{rel}^{(N)} = 0.9308$

Spazio per risposta lunga

Punto 6) — 2 pt (***) No Multichance

Sempre considerando il metodo del *gradiente coniugato* applicato alla soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con i dati del Punto 4), si riportino gli angoli $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$ formati rispettivamente tra le direzioni di discesa $\mathbf{p}^{(0)}$ e $\mathbf{p}^{(1)}$ dell'algoritmo e tra $\mathbf{p}^{(1)}$ e $\mathbf{p}^{(2)}$. Si verifichi inoltre che le direzioni di discesa sono A–coniugate. Si riportino i comandi Matlab® usati.

$\theta^{(1)} = 77.3912^o$, $\theta^{(2)} = 67.7005^o$

Spazio per risposta lunga

Punto 7) — 3 pt

Dato un generico sistema di equazioni non lineari $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$, si può approssimare lo zero $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ tramite il metodo di Broyden descritto nel seguente algoritmo.

Algorithm 1: Metodo di Broyden

Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$;
Assegnata la matrice $B_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
for $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *fino a che un criterio d'arresto è soddisfatto* **do**
  risolvere il sistema lineare $B_k\, \boldsymbol{\delta}^{(k)} = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$;
  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$;
  $B_{k+1} =$
  $B_k + \dfrac{1}{\boldsymbol{\delta}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\delta}^{(k)}} \left(\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k+1)}\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) - B_k\, \boldsymbol{\delta}^{(k)}\right) \left(\boldsymbol{\delta}^{(k)}\right)^T$;
end

Si implementi il precedente algoritmo in una funzione Matlab® `broyden.m`, dove $\mathbf{x}^{(k)}$ fornisce un'approssimazione di $\boldsymbol{\alpha}$, mentre B_k è un'approssimazione della matrice Jacobiana di $\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$.
Si consideri ora il seguente sistema di equazioni non lineari per $n = 100$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + e^{-\mathbf{x}/20} - \mathbf{1} = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{100} \to \mathbb{R}^{100}$ e la matrice A è stata definita precedentemente. Si approssimi lo zero $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{100}$ usando la funzione Matlab® `broyden.m` implementata, scegliendo $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1,\, 0.1, \ldots,\, 0.1)^T \in \mathbb{R}^{100}$ e $B_0 = A$.

Si riportino i valori della prima componente della prima, seconda e terza iterata, ovvero $(\mathbf{x}^{(1)})_1$, $(\mathbf{x}^{(2)})_1$ e $(\mathbf{x}^{(3)})_1$, ottenute applicando il metodo e i comandi Matlab® usati.

0.1663, 0.0277, 0.0605

Spazio per risposta lunga