Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi CdL Ingegneria Aerospaziale Appello 24 gennaio 2019	Prof. L. Dedè Prof. A. Manzoni Prof. S. Micheletti	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Sia $A = \begin{bmatrix} 6 & \beta & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro $\beta \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice A ammette un'unica fattorizzazione LU (senza pivoting)?

$\boxed{\beta \neq 18}$

2. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Si riporti il valore dell'elemento $u_{33} = (U)_{33}$ della matrice triangolare *superiore* U.

$\boxed{u_{33} = -3 = -3}$

3. *(2 punti)* Sia $A = \begin{bmatrix} 5\,\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro $\alpha > 0$. Si riporti il valore del numero di condizionamento spettrale di A in termini di α, ovvero $K(A)$ ($K_{sp}(A)$).

$\boxed{K(A) = 6{,}854\,102 \quad \forall \alpha > 0}$

4. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e il metodo delle potenze (dirette). Assegnato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1\ 0)^T$, si riportino i valori approssimati $\lambda^{(0)}$ e $\lambda^{(1)}$ dell'autovalore ottenuti rispettivamente all'iterata iniziale e dopo l'applicazione di un'iterazione del metodo.

$\boxed{\lambda^{(0)} = 5 \qquad \lambda^{(1)} = \frac{117}{29} = 4{,}034\,483}$

5. *(1 punto)* Quale tra gli autolavori della matrice $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 11 & -35 & 0 \\ 42 & 1 & 15 \end{bmatrix}$ può essere determinato applicando il metodo delle potenze *inverse*? Se ne riporti il valore.

$\boxed{\lambda_3(A) = -5}$

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x+1}$. Si riporti il valore della prima iterata del metodo di Newton $x^{(1)}$ ottenuta per il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = \frac{1}{5}$.

$\boxed{x^{(1)} = -\frac{1}{61} = -0{,}016\,393}$

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = (5-x)^3$. Qual è l'ordine di convergenza p atteso applicando il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 5$ per un'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicina ad α?

$$\boxed{p = 1}$$

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$. Inoltre, si consideri la soluzione di tale sistema lineare mediante un metodo iterativo.

12 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo con matrice di iterazione $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (si definisca in modo preciso tutta la notazione usata).

(b) *(2 punti)* Si consideri il metodo di *Jacobi* per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si presenti l'algoritmo in forma matriciale.

(c) *(5 punti)* Si implementi il metodo di *Jacobi* in forma matriciale in Matlab® nella funzione `Jacobi.m` (si usi il comando "back-slash" di Matlab® \ laddove necessario). Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato (detto anche residuo relativo). La struttura della funzione è:

`function [x,Nit] = Jacobi(A,b,x0,nmax,tol).`

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `Jacobi.m` per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (6, 6, \ldots, 6)^T \in \mathbb{R}^{100}$ e $A \in \mathbb{R}^{100\times100}$ definita come

$$A = \text{tridiag}\,(-3, 10, -3)\,;$$

si consideri l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 1000$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo normalizzato $r_{rel}^{(N)}$.

$N =$ 16 $\qquad x_3^{(N)} =$ 1,4451 $\qquad r_{rel}^{(N)} =$ $8{,}1389 \cdot 10^{-4}$

Infine, utilizzando opportunamente la funzione `Jacobi.m`, si riportino i valori della terza componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_3^{(1)}$ e $x_3^{(2)}$.

$x_3^{(1)} =$ 4,2 $\qquad x_3^{(2)} =$ 3,12

(d) *(2 punti)* Il metodo di *Gauss–Seidel* per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di cui al punto (c) risulta convergente per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$? Cosa è possibile dire della velocità di convergenza del metodo di Gauss–Seidel rispetto a quella del metodo di Jacobi? Si motivino le risposte date.

(e) *(2 punti)* Si riporti l'*algoritmo* del metodo del *gradiente* per risolvere il sistema lineare generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Inoltre, assumendo la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ assegnati al punto (c) e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (6, 6, \ldots, 6)^T \in \mathbb{R}^{100}$, si calcoli il valore del parametro α_0 associato a $\mathbf{x}^{(0)}$ da utilizzarsi per determinare $\mathbf{x}^{(1)}$.

$\alpha_0 =$ 0,233 480 18

Esercizio 2. Si consideri una funzione di iterazione $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dotata del punto fisso $\alpha \in [a,b]$.

10 punti

(a) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo del metodo di punto fisso per la ricerca del punto fisso α di $\phi(x)$ utilizzando il citerio d'arresto basato sulla differenza tra iterate successive.

(b) *(2 punti)* Sia $\phi(x) = \dfrac{24\,x - x^4}{16}$. Assumendo il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = 1$, si applichino $N = 10$ iterazioni di punto fisso. Si riportino i valori delle iterate $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(N)}$ (utilizzando almeno 4 cifre decimali per indicare il risultato).

$x^{(1)} =$ 1,4375 $\qquad x^{(2)} =$ 1,889 373 $\qquad x^{(N)} =$ 2

(c) *(4 punti)* Dopo aver risolto il punto (b) e sapendo che $\alpha = 2$, si calcolino e si riportino i valori dei rapporti:

$$\frac{x^{(N)} - \alpha}{x^{(N-1)} - \alpha} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{x^{(N-1)} - \alpha}{x^{(N-2)} - \alpha} = -\frac{1}{2}$$

Si utilizzino tali rapporti per determinare l'ordine di convergenza p del metodo delle iterazioni di punto fisso applicato al punto (b) per la ricerca di α. Infine, si giustifichi il valore di p determinato sulla base delle proprietà teoriche di convergenza *locale* del metodo delle iterazioni di punto fisso.

$p =$ 1

(d) *(2 punti)* Si consideri ora la funzione di iterazione $\phi(x) = \dfrac{(3-\theta)\,x^3 + 8\,\theta}{3\,x^2}$ dipendente dal parametro $\theta \in \mathbb{R}$. Per quale valore di θ il metodo delle iterazioni di punto fisso converge per ogni iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino al punto fisso $\alpha = 2$ con ordine $p = 2$? Si motivi la risposta data.

$\theta =$ 1

Parte II - Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Assegnati i nodi equispaziati x_0, $x_1, \ldots x_4$ nell'intervallo [0,8] e la funzione $f(x) = 4\,(1-\sqrt{x})$, si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H(x)$ interpolante $f(x)$ ai precedenti nodi. Si riporti il valore di $\Pi_1^H(7)$.

$$\boxed{\Pi_1^H(7) = -6{,}555\,834}$$

2. *(2 punti)* Siano assegnati i nodi equispaziati x_0, $x_1, \ldots, x_5$ nell'intervallo [0,5] e i corrispondenti valori $y_0 = 1$, $y_1 = 3$, $y_2 = 3$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$ e $y_5 = 0$. Si consideri il polinomio di Lagrange $\Pi_5(x)$ interpolante tali dati ai precedenti nodi e si riporti il valore di $\Pi_5(2.5)$.

$$\boxed{\Pi_5(2.5) = 2{,}0625}$$

3. *(1 punto)* Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$ e i dati corrispondenti $y_0 = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 3$ e $y_4 = 9$, si determini l'espressione della retta di regressione $r(x)$ approssimante tali dati nel senso dei minimi quadrati.

$$\boxed{r(x) = 0{,}6 + 1{,}5\,x}$$

4. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 3^{4x} - 1$. Si riporti il valore approssimato di $f'(\overline{x})$ in $\overline{x} = 0$ ottenuto mediate le differenze finite in avanti, ovvero $\delta_+ f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{4}$.

$$\boxed{\delta_c f(\overline{x}) = 8}$$

5. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -4\,y(t) + 50\,t & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero in avanti (Eulero Esplicito) con passo $h = 1/8$ e $u_0 = y_0 = 5$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{5}{2} = 2{,}5}$$

6. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 2\,y(t) + 10\,t & t \in (0{,}10], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Crank–Nicolson con passo $h = 1/10$ e $u_0 = y_0 = 1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{23}{18} = 1{,}277\,778}$$

7. *(1 punto)* Si consideri l'approssimazione mediante il metodo di Eulero in avanti (Eulero esplicito) del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -8\,y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 7. \end{cases}$$

Qual è la condizione sul passo di discretizzazione h che garantisce assoluta stabilità?

$0 < h < \frac{1}{4}$

Parte II - Esercizi

Esercizio 1. | 12 punti

(a) *(2 punti)* Si descriva la formula di quadratura del *punto medio composita* per l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$; si definisca tutta la notazione utilizzata e si fornisca l'interpretazione grafica della formula.

(b) *(3 punti)* Si definiscano l'ordine di accuratezza p e il grado di esattezza r di una *generica formula* di quadratura (composita).

Inoltre, per la formula di quadratura del *punto medio composita*, si riportino i valori di p e r; si giustifichino con precisione le risposte date.

(c) *(2 punti)* Si ricavi l'espressione dell'errore della formula di quadratura del *punto medio semplice*.

(d) *(3 punti)* Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^1 4\,(1 + x^2 - x^4)\,dx$$

mediante la formula di quadratura del punto medio composita con $M \geq 1$ sottointervalli equispaziati di [0,1]. Si calcolino e si riportino i valori approssimati $I_M(f)$ dell'integrale utilizzando i valori $M = 1$ (formula semplice) e $M = 10$ (formula composita).

$I_1(f) =$ 4,75 $\qquad\qquad$ $I_{10}(f) =$ 4,536 655

Per il caso $M = 10$ si riporti il valore dell'errore *stimato*, ovvero $\widetilde{E}_{10}(f)$.

$$\widetilde{E}_{10}(f) \leq \frac{1}{60} = 0{,}016\,667$$

(e) *(2 punti)* Si consideri ora la formula di quadratura di *Gauss–Legendre* (semplice) con $n+1$ nodi per approssimare l'integrale $I(f)$ di cui al punto (d); si indichi con $I_n^G(f)$ il valore approssimato dell'integrale corrispondente. Si usi tale formula nel caso $n = 1$ sapendo che nell'intervallo di *riferimento* $\widehat{I} = [-1,1]$ i nodi di quadratura sono $\widehat{y}_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\widehat{y}_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$, mentre i pesi di quadratura sono $\widehat{\alpha}_0 = \widehat{\alpha}_1 = 1$. Si riporti il valore dell'integrale così approssimato, ovvero $I_1^G(f)$.

$$I_1^G(f) = \underline{\quad 4{,}555\,556 \quad}$$

Qual è il grado di esattezza r di tale formula?

ESERCIZIO 2.

10 punti

Si consideri il seguente problema a valori ai limiti (di diffusione–trasporto):

$$\begin{cases} -u''(x) + V\,u'(x) = f(x) & \text{in } (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

dove a, b, α, β e $V \in \mathbb{R}$, con $V > 0$.

(a) *(3 punti)* Si approssimi il problema ai limiti (1) con uno schema alle differenze finite centrate (del second'ordine) su una griglia di $N+2$ nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, con $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\,h$ per $i = 0,\ldots,N+1$ e passo $h = (b-a)/(N+1)$. Si riportino le equazioni del sistema risultante in forma esplicita definendo tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Si riporti la controparte algebrica dell'approssimazione di cui al punto (a), ovvero il sistema lineare $A\,\mathbf{u} = \mathbf{b}$, fornendo l'espressione dei coefficienti della matrice A, del vettore del termine noto $\mathbf{b}$ e del vettore delle incognite $\mathbf{u}$.

(c) *(1 punto)* Si considerino ora i seguenti dati per il problema (1): $V = 10$, $f = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$ e $\beta = 7$. Si verifichi che la soluzione esatta del problema è data da $u(x) = 7\,\left(e^{10\,x} - 1\right) / \left(e^{10} - 1\right)$; si riporti la procedura seguita.

(d) *(4 punti)* Si risolva il problema ai limiti (1) con i dati di cui al punto (c) tramite il metodo descritto al punto (a), ovvero risolvendo il sistema lineare definito al punto (b), per il valore $N = 9$ (per risolvere il sistema lineare si utilizzi il comando "back-slash" di Matlab® \). Si riporti il valore della soluzione approssimata nel nodo x_8, ovvero u_8.

$$u_8 = \underline{\quad 0{,}777\,672\,4 \quad}$$

Si risolva ora il problema per $N = 9$, 19, 39 e 79 e, usando la soluzione esatta $u(x)$ data al punto (c), si calcolino e si riportino per ogni N gli errori corrispondenti $E_N = \max_{i=0,\dots,N+1} |u_i - u(x_i)|$ (si usino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

per $N = 9$: $E_N = \underline{\quad 0{,}241\,700\,89 \quad}$ per $N = 19$: $E_N = \underline{\quad 0{,}055\,118\,99 \quad}$

per $N = 39$: $E_N = \underline{\quad 0{,}013\,494\,19 \quad}$ per $N = 79$ $E_N = \underline{\quad 0{,}003\,356\,3 \quad}$

(e) *(1 punto)* Dopo aver risposto al punto (d), si stimi *algebricamente* l'ordine di convergenza p del metodo rispetto ad h (ovvero $(b-a)/(N+1)$) riportando sinteticamente la procedura seguita.

$$p = \underline{\quad 2{,}0074 \quad}$$