Serie 4
Equazioni Non Lineari

1 Metodo di bisezione

Sia data una funzione f continua, con una radice nel punto $x = \alpha$ all'interno dell'intervallo $I = (a, b)$, dove a e b sono tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Il metodo di bisezione calcola un'approssimazione $\tilde{x}$ dello zero α tramite il seguente algoritmo: posto $a^{(0)} = a$ e $b^{(0)} = b$, per $k = 0, \ldots, n_{max}$

$$
\begin{aligned}
&x^{(k)} = (a^{(k)} + b^{(k)})/2 \\
&\texttt{if } (f(x^{(k)}) == 0) \\
&\quad \tilde{x} = x^{(k)} \\
&\quad \texttt{return} \\
&\texttt{elseif } (f(a^{(k)})f(x^{(k)}) < 0) \\
&\quad a^{(k+1)} = a^{(k)} \\
&\quad b^{(k+1)} = x^{(k)} \\
&\texttt{else} \\
&\quad a^{(k+1)} = x^{(k)} \\
&\quad b^{(k+1)} = b^{(k)} \\
&\texttt{end}
\end{aligned}
$$

Il criterio d'arresto si basa sulla semiampiezza dell'intervallo: fissata una tolleranza ε_1, il metodo si arresta quando

$$\frac{1}{2}(b^k - a^k) < \varepsilon_1. \tag{1}$$

Di conseguenza il numero massimo di iterazioni che vengono eseguite è

$$n_{max} = \left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon_1}\right) - 1 \right\rceil, \tag{2}$$

dove $\lceil m \rceil$ indica il più piccolo numero intero maggiore di m (arrotondamento per eccesso).

Per rendere più efficiente lo schema si controlla anche il residuo, cioè si arresta il metodo non appena $|f(x_k)| < \varepsilon_2$ (nella pratica spesso si considera un solo valore di tolleranza, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$).

Esercizio 1

Vogliamo risolvere il problema della ricerca degli zeri dell'equazione non lineare $f(x) = 0$, dove f è definita da:

$$f(x) = x^3 - (2+e)x^2 + (2e+1)x + (1-e) - \cosh(x-1), \quad x \in [0.5, 6.5] \tag{3}$$

1. Disegnare il grafico della funzione f nell'intervallo $[0.5, 6.5]$ ed evidenziare le radici dell'equazione. (Suggerimento: utilizzare il comando `grid on`).

2. Si dica per quali radici il metodo di bisezione è applicabile a partire dal grafico della funzione.

3. Scrivere una function Matlab® `bisez.m` che implementi il metodo di bisezione. Tale funzione

   - riceve in input gli estremi `a` e `b` dell'intervallo di ricerca, la tolleranza `toll` richiesta sul residuo e la funzione `fun`.
   - restituisce in output il vettore `xvect` delle iterate e il numero `it` delle iterazioni effettivamente eseguite.
   - si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo, accoppiato ad un controllo sul massimo numero di iterate, determinato come in (2), assumendo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 =$ `toll`.

   L'intestazione della funzione sarà ad esempio:

   ```
   [xvect,it] = bisez(a,b,toll,fun)
   ```

   (Suggerimento: definire la funzione `fun` da passare alla funzione `bisez.m` tramite i comandi `inline` o `@`).

4. Calcolare le radici di f per le quali il metodo di bisezione risulta applicabile, utilizzando la funzione `bisez.m` con una tolleranza di 10^{-12}.

2 Metodo di Newton

Il metodo di Newton per la ricerca dello zero α di un'equazione non lineare $f(x) = 0$ è un metodo iterativo che necessita della conoscenza della derivata prima $f'(x)$ della funzione $f(x)$.

Dato $x^{(0)}$, la formula della generica iterazione k del metodo di Newton si esprime come:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad \text{se } f'(x^{(k)}) \neq 0,\ k \geq 0. \tag{4}$$

Nel caso in cui α sia uno zero semplice di f ($f'(\alpha) \neq 0$) il metodo di Newton converge quadraticamente. Se invece la molteplicità è maggiore di uno, il metodo di Newton converge linearmente.

Metodo di Newton modificato

Detta m la molteplicità dello zero α, la convergenza quadratica può essere recuperata modificando la formula generale del metodo di Newton nel modo seguente:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad \text{se } f'(x^{(k)}) \neq 0,\ k \geq 0. \tag{5}$$

Il metodo (5) si chiama *Newton modificato.*

Criterio d'arresto

Per arrestare il metodo di Newton si può utilizzare il criterio seguente, detto della differenza tra iterate successive: ad ogni iterazione k si valuta se la differenza tra due iterate successive è inferiore ad una certa soglia ε:

$$|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \varepsilon \tag{6}$$

Esercizio 2

Si consideri l'equazione non lineare $f(x) = 0$ dell'Esercizio 1. Sappiamo che essa ammette tre zeri nell'intervallo indicato.

1. Dal grafico di f e di f' discutere le proprietà di convergenza del metodo di Newton per tutti gli zeri, valutando l'opportunità di applicare il metodo di Newton modificato. Noto il valore esatto della radice $\alpha_1 = 1$ si valuti la molteplicità della radice.

2. Scrivere una funzione Matlab® `newton.m` che implementi il metodo di Newton; la funzione

   - riceve in input la guess iniziale `x0`, la tolleranza `toll`, il numero massimo di iterazioni `nmax`, la funzione `fun`, la sua derivata `dfun` e la molteplicità della radice `mol`.
   - restituisce in output il vettore `xvect` delle iterate e il numero `it` di iterazioni effettivamente eseguite.

   Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul modulo della differenza tra due iterate successive. La function `newton.m` deve comportarsi come il metodo di Newton classico nel caso in cui non venga specificata la molteplicità della radice e come il metodo di Newton modificato se viene espressamente passata in ingresso la variabile `mol` (utilizzare a tal proposito la `function nargin`).

   L'intestazione della funzione sarà ad esempio la seguente:

   ```
   [xvect,it]=newton(x0,nmax,toll,fun,dfun,mol)
   ```

3. Risolvere il problema della ricerca degli zeri di f tramite il metodo di Newton, utilizzando la funzione `newton.m` con tolleranza 10^{-6}. Si utilizzi per il calcolo di ogni radice un opportuno valore `x0`. Nel caso della radice $\alpha_1 = 1$ si riporti su un grafico in scala semilogaritmica l'andamento degli errori in funzione del numero di iterazioni per il metodo di Newton standard e per quello modificato.

Esercizio 3

Si consideri l'equazione non lineare $f(x) = 0$, in cui f è definita come:

$$f(x) = \arctan\left(7\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right), \quad x \in [-1, 6]. \tag{7}$$

1. Si disegni il grafico della funzione f nell'intervallo $[-1, 6]$.

2. Si verifichi che l'unico zero α della funzione f è semplice e si utilizzi la funzione `newton.m` implementata nel laboratorio precedente per calcolarlo. Si assuma una tolleranza pari a 10^{-10} e guess iniziale `x0` $= 1.5$. Successivamente si ripeta tale calcolo partendo da `x0` $= 4$. Sapendo che $\alpha = \pi/2$, si calcolino gli errori assoluti nei due casi e si motivino i risultati ottenuti.

3. Verificate la possibilità di utilizzare il metodo di bisezione; si utilizzi la funzione `bisez.m` implementata nel laboratorio precedente sull'intervallo $[a, b] = [-1, 6]$ con tolleranza `toll` $= (b - a)/2^{31}$. Si riporti l'errore ottenuto.

4. Si implementi una function `biseznewton.m` che combini il metodo di bisezione e di Newton. In particolare si adotti il metodo di bisezione per l'avvicinamento allo zero e successivamente il metodo di Newton per calcolare α. La funzione richiesta

   - riceve in input gli estremi dell'intervallo di ricerca `a` e `b`, la tolleranza richiesta `toll`, il numero massimo di iterazioni `nmax_b` per le iterazioni con il metodo di bisezione, il numero massimo di iterazioni `nmax_n` per le iterazioni con il metodo di Newton, la funzione `fun` e la sua derivata `dfun`.
   - restituisce in output il vettore delle iterate `xvect` e il numero `it` di iterazioni effettivamente eseguite.

   L'intestazione della funzione sarà, ad esempio, la seguente:

   ```
   [xvect,it]=biseznewton(a,b,nmax_b,nmax_n,toll,fun,dfun)
   ```

5. Si calcoli utilizzando la funzione `biseznewton` lo zero α di f, impiegando 5 iterazioni del metodo di bisezione. Si mantengano i valori precedentemente utilizzati per tutti gli altri parametri di input.

3 Metodo delle iterazioni di punto fisso

Consideriamo il problema: data una funzione $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, trovare $\alpha \in [a, b]$ tale che:

$$\alpha = \phi(\alpha).$$

Se un tale α esiste, viene detto *punto fisso* di ϕ. Se la funzione di iterazione è sufficientemente regolare e $|\phi'(\alpha)| < 1$ la successione definita da

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), \quad k \geq 0 \tag{8}$$

converge ad α per ogni scelta del dato iniziale $x^{(0)}$ in un intorno opportuno di α. Tale successione soddisfa la condizione di convergenza

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha), \tag{9}$$

ovvero (per k grande) l'errore al passo $(k + 1)$ è uguale all'errore al passo k moltiplicato per una costante $\phi'(\alpha)$ il cui valore assoluto è minore di 1 (ordine di convergenza uguale almeno ad 1, o convergenza almeno *lineare*).

In maniera del tutto generale si può dimostrare che se le derivate i-esime della funzione ϕ valutate in α si annullano per $i = 1, \cdots, p$ con $p \geq 1$ e $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, allora il metodo di punto fisso converge con ordine $(p + 1)$, se $x^{(0)}$ è "sufficientemente vicino ad α, e vale:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!}\,\phi^{(p+1)}(\alpha). \tag{10}$$

Ad esempio, se $\phi'(\alpha) = 0$, (ma $\phi''(\alpha) \neq 0$) il metodo di punto fisso è convergente di ordine 2.

Le iterazioni di punto fisso possono essere applicate all'approssimazione degli zeri di una funzione $f(x)$. In generale, la funzione di iterazione ϕ deve essere scelta in modo tale che

$$\phi(\alpha) = \alpha \text{ ogni volta che } f(\alpha) = 0.$$

La scelta di ϕ ovviamente non è unica. Si può ricorrere infatti a manipolazioni algebriche differenti di f per ottenere delle possibili funzioni di iterazione ϕ. Ad esempio, ogni funzione della forma $\phi(x) = x + F(f(x))$ è una funzione di iterazione ammissibile, purchè F sia una funzione continua tale che $F(0) = 0$. Inoltre, ricordiamo che il metodo di Newton può essere riletto come un algoritmo di iterazioni di punto fisso per la funzione di iterazione

$$\phi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)};$$

se $f'(\alpha) \neq 0$ (ovvero α è zero semplice), si ha $\phi'(\alpha) = 0$, ovvero il metodo è di ordine 2.

Una semplice implementazione dell'algoritmo delle iterazioni di punto fisso è la seguente:

```
function [succ, it] = ptofis(x0, phi, nmax, toll)
%
% [succ, it] = ptofis(x0, phi, nmax, toll)
% Metodo di punto fisso x = phi(x)
%
```

```
% --------Parametri di ingresso:
% x0      Punto di partenza
% phi     Funzione di punto fisso (definita inline o anonimous)
% nmax    Numero massimo di iterazioni
% toll    Tolleranza sul test d'arresto
%
% --------Parametri di uscita:
% succ   Vett. contenente tutte le iterate calcolate
%         (l'ultima componente e' la soluzione)
% it      Iterazioni effettuate
err   = 1 + toll;
it    = 0;
succ  = x0;
xv    = x0;
while (it < nmax && err > toll)
   xn    = phi(xv);
   err   = abs(xn - xv);
   succ = [succ; xn];
   it    = it + 1;
   xv    = xn;
end
fprintf(' \n Numero di Iterazioni    : %d \n',it);
fprintf(' Punto fisso calcolato   : %12.13f \n',succ(end));
```

Spesso può essere interessante visualizzare le iterate successive dell'algoritmo di punto fisso; anzichè visualizzare i valori generati $x^{(k)}$ al variare dell'indice k, si preferisce costruire un grafico formato da una linea spezzata che congiunge i punti di coordinate:

$$\left(x^{(k)}, \phi(x^{(k)})\right) \longrightarrow \left(x^{(k+1)}, x^{(k+1)}\right) \longrightarrow \left(x^{(k+1)}, \phi(x^{(k+1)})\right) \cdots, \; k \geq 0.$$

Il grafico così ottenuto consente di distinguere immediatamente ipunti fissi attrattori dai punti fissi repulsori.

Esercizio 4

Si consideri la funzione $f(x) = \cos^2(2x) - x^2$.

1. Si disegni la funzione e si individuino graficamente i punti in cui $f(x) = 0$.

2. Si consideri la funzione di iterazione seguente, dipendente da un parametro $A \in \mathbb{R}$ (costante)
$$\phi(x) = x + A\, f(x).$$
Si verifichi teoricamente per quale intervallo di valori della costante A il metodo delle iterazioni punto fisso, qui usato per la ricerca degli zeri α di $f(x)$, può convergere allo zero $\alpha > 0$ per una scelta opportuna del dato iniziale.

3. Si utilizzi ora la `function` `ptofis.m` con $A = 0.1$ e $x^{(0)} = 0.1$ per ottenere un valore dello zero α, scegliendo come tolleranza 10^{-10}. Si usi il valore dello zero ottenuto per verificare numericamente il range di valori ammissibili per A ottenuto teoricamente al punto precedente. Si studi la sensibilità della convergenza del metodo al variare di A e $x^{(0)}$.

4. Stimare l'ordine di convergenza e il fattore di convergenza del metodo di punto fisso al variare di A utilizzando la funzione `stimap.m`, verificando l'affidabilità delle stime teoriche.

5. Fornire un valore di A tale da ottenere un metodo convergente del secondo ordine.

6. Ricordando che il metodo di Newton può essere riletto come metodo di punto fisso, implementarlo utilizzando la `function ptofis.m`. Determinare sperimentalmente gli intervalli in cui scegliere il dato iniziale in modo che il metodo converga allo zero α positivo.

Esercizio aggiuntivo

Esercizio 5

Si consideri la funzione

$$f(x) = \cos(\pi x)\left(x - \frac{1}{2}\right) \tag{11}$$

e, tra gli altri, in particolare il suo zero $\alpha = \frac{1}{2}$.

1. Si applichino i metodi di Newton e Newton modificato all'approssimazione di α con tolleranza sul criterio d'arresto basato sulla differenza tra iterate successive $tol = 10^{-6}$ e iterata iniziale $x^{(0)} = 0.9$, riportando i numeri delle iterazioni effettuate dai due metodi e giustificando il risultato ottenuto.

2. Il criterio d'arresto utilizzato per il metodo di Newton applicandolo allo zero α della funzione $f(x)$ di Eq. (11) è affidabile?

3. Il metodo delle secanti approssima lo zero α di $f(x)$ tramite una sequenza di iterate $\{x^{(k)}\}$ ottenute come segue:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{q_k} \quad \text{per } k = 1, 2, \ldots, \quad \text{con } q_k = \frac{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)}{x^{(k)} - x^{(k-1)}},$$

   dove le iterate iniziali $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ sono entrambe assegnate. Si applichi il metodo delle secanti alla funzione $f(x)$ di Eq. (11) precedentemente assegnata fino ad ottenere l'iterata $x^{(10)}$, a partire da $x^{(0)} = 0.9$ e $x^{(1)} = 0.7$. Si stimi inoltre l'ordine di convergenza p del metodo delle secanti ad α, illustrando la procedura seguita.

4. Si consideri ora la funzione di iterazione

$$\phi(x) = x + \frac{\mu}{2\pi}\cos(\pi\, x) \tag{12}$$

   dipendente dal parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e dotata del punto fisso $\alpha = \frac{1}{2}$ coincidente con lo zero di $f(x)$. Si determinino i valori di μ tali per cui il metodo delle iterazioni di punto fisso converge ad α per $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α. Si determini inoltre per quale valore di μ il metodo delle iterazioni di punto fisso converge con ordine p almeno pari a 2, giustificando le risposte alla luce della teoria.

5. Per la funzione di iterazione $\phi(x)$ di Eq. (12) si determinino i valori di μ tali per cui è garantita una convergenza monotona ad α per ogni $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α.

6. Per la funzione di iterazione $\phi(x)$ di Eq. (12) con $\mu = 1$, si determinino i valori di $a < \alpha$ e $b > \alpha$ tali per cui la convergenza del metodo delle iterazioni di punto fisso è garantita per ogni scelta dell'iterata iniziale $x^{(0)} \in [a, b]$, giustificando la risposta data sulla base della teoria.