Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **Appello** **26 giugno 2017**	**Prof. P.F. Antonietti** **Prof. L. Dedè** **Prof. M. Verani**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

1. *(1 punto)* Determinare il più piccolo numero (positivo) x_{min} rappresentabile nell'insieme $\mathbb{F}(2, 3, -2, 5)$; riportare il risultato in base decimale.

2. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 10 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU senza pivoting. Riportare il valore dell'elemento $l_{32} = (L)_{32}$ della matrice triangolare inferiore L.

3. *(2 punti)* Siano $\alpha \in (-1{,}8)$ e $\beta \in (-1{,}6)$. Determinare i valori di α e β per cui esiste unica la fattorizzazione LU (senza pivoting) della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha+\beta & 0 \\ \alpha+\beta & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = (x-4)^4 \sin(x-4)$. Qual è l'ordine di convergenza p atteso applicando il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 4$ per un'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicina ad α?

5. *(1 punto)* Sia $\phi(x) = \frac{1}{6}x + 6$ una funzione di iterazione con un unico punto fisso $\alpha \in \mathbb{R}$. Si determini per quali valori dell'iterata iniziale $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, il metodo delle iterazioni di punto fisso converge ad α.

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = \sin(3x)$ e si scriva la funzione di iterazione $\phi_N(x)$ associata al metodo di Newton.

7. *(2 punti)* Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = \frac{x}{3}e^{1-x} + \frac{2}{3}$ dotata del punto fisso $\alpha = 1$. Il metodo delle iterazioni di punto fisso converge ad α per ogni iterata iniziale $x^{(0)} \in [0,2]$? Perchè?

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$. Inoltre, si consideri la soluzione di tale sistema lineare mediante un metodo iterativo.

12 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo con matrice di iterazione $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (si definisca in modo preciso la notazione usata).

(b) *(2 punti)* Si *dimostri* che la condizione di cui al punto (a) è necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo iterativo per ogni iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (suggerimento: si introduca l'errore $\mathbf{e}^{(k)}$ associato all'iterata $\mathbf{x}^{(k)}$).

(c) *(2 punti)* Si presenti il criterio d'arresto per un metodo iterativo basato sulla differenza tra due iterate successive. Inoltre, se ne discuta la sua affidabilità.

(d) *(2 punti)* Si consideri il metodo di Gauss–Seidel per la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si presenti l'algoritmo in forma matriciale.

(e) *(5 punti)* Si implementi il metodo di Gauss–Seidel in forma matriciale in Matlab® nella funzione `GaussSeidel.m` (si usi il comando "back-slash" di Matlab® $\backslash$ laddove necessario). Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo relativo (detto anche residuo normalizzato). La struttura della funzione è:

```
function [x,Nit] = GaussSeidel(A,b,x0,nmax,tol).
```

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `GaussSeidel.m` per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1\ 1\ \cdots\ 1)^T \in \mathbb{R}^{10}$ e $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ definita come

$$A = \text{tridiag}\,(-1, 10, 2)\,;$$

si consideri l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 1000$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo relativo $r_{rel}^{(N)}$.

$N =$ __________ $\qquad x_3^{(N)} =$ ____________________ $\qquad r_{rel}^{(N)} =$ ____________________

Infine, utilizzando opportunamente la funzione `GaussSeidel.m`, si riportino i valori della terza componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_3^{(1)}$ e $x_3^{(2)}$.

$x_3^{(1)} =$ ____________________ $x_3^{(2)} =$ ____________________

Esercizio 2. Si consideri il metodo delle potenze inverse per l'approssimazione dell'autovalore di modulo minimo $\lambda_n(A)$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

10 punti

(a) *(3 punti)* Si riporti l'algoritmo delle potenze inverse definendo in modo preciso la notazione utilizzata.

(b) *(2 punti)* Si commenti e discuta sinteticamente il costo computazionale del metodo delle potenze inverse confrontandolo con quello del metodo delle potenze dirette. Inoltre, si proponga (motivandola brevemente) una strategia computazionalmente efficiente per l'implementazione dell'algoritmo delle potenze inverse.

(c) *(2 punti)* Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Utilizzando il comando Matlab® `eig`, si calcolino e si riportino gli autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^4$ di A. Si commenti l'applicabilità del metodo delle potenze inverse per l'approssimazione dell'autovalore di modulo minimo di A.

$\lambda_1(A) =$ ____________________ $\lambda_2(A) =$ ____________________

$\lambda_3(A) =$ ____________________ $\lambda_4(A) =$ ____________________

(d) *(2 punti)* Per la matrice A di cui al punto (c) e assegnato il vettore $\mathbf{x}^{(0)} = (1\ 1\ 1\ 1)^T$, si riportino la prima e la seconda iterata dell'autovettore (di modulo unitario) $\mathbf{y}^{(1)}$ e $\mathbf{y}^{(2)}$ ottenute tramite il metodo delle potenze inverse.

$\mathbf{y}^{(1)} =$ _________________________

$\mathbf{y}^{(2)} =$ _________________________

(e) *(1 punto)* Sulla base delle informazioni ottenute al punto (c) per la matrice A, si immagini di applicare il metodo delle potenze inverse con *shift*. Quale autovalore $\lambda_i(A)$ della matrice A verrà approssimato con il metodo delle potenze inverse usando un valore di *shift* $s = 2.9$?

$\lambda_i(A) =$ ____________________

Parte II - Pre Test

1. *(1 punto)* Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$ si consideri il polinomio caratteristico di Lagrange $\varphi_0(x)$. Si riporti il valore di $\varphi_0(3)$.

2. *(2 punti)* Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $x_2 = 3$ e $x_3 = 7$ e i dati corrispondenti $y_0 = 6$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ e $y_3 = 1$, si consideri il polinomio $\Pi_3(x)$ interpolante tali dati ai nodi. Si riporti il valore di $\Pi_3(6)$.

3. *(1 punto)* Sia $f(x) = 3x^3$. Si approssimi $\int_1^5 f(x)dx$ con la formula semplice del punto medio. Si riporti l'approssimazione I_{PM} ottenuta.

4. *(2 punti)* Si consideri la formula dei trapezi composita per l'approssimazione di $\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero M di sottointervalli equispaziati di [0,1] tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-5}$.

5. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 5x^2 - 4x + 4$. Si riporti l'errore associato all'approssimazione di $f'(\overline{x})$ in un generico valore $\overline{x} \in \mathbb{R}$ mediate le differenze finite in avanti, ovvero $E_+ f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_+ f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{4}$.

6. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 2\,t^3 + 2\,y(t) & t \in (0,5], \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero Implicito con passo $h = 0.1$ e $u_0 = y_0 = 5$ si calcoli u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

7. *(2 punti)* Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) & t \in (t_0,t_f], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero Esplicito con passo $h > 0$ si ottiene l'approssimazione $u_1^{EE} = 6$ di $y(t_1)$, mentre con il metodo di Eulero Implicito si ottiene $u_1^{EI} = 7{,}333\,333$. Si riporti il valore dell'approssimazione corrispondente u_1^{CN} ottenuta mediante il metodo di Crank-Nicolson.

Parte II - Esercizi

Esercizio 1.

11 punti

(a) *(3 punti)* Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisca e si fornisca l'espressione del polinomio interpolante composito lineare $\Pi_H^1 f$ considerando $N+1$ nodi equispaziati nell'intervallo $[a,b]$, ovvero $x_0 = a, x_1, \ldots, x_N = b$, con passo $H = (b-a)/N$. Si riporti inoltre il risultato (teorema) di convergenza dell'interpolazione composita lineare.

(b) *(2 punti)* Utilizzando la funzione `interp1` di Matlab® , si approssimi la funzione

$$f(x) = e^{(1-3x)}\,(x+1)^2 \quad \text{definita in } [a,b] = [0,4],$$

mediante il polinomio interpolante composito lineare $\Pi_H^1 f$ su nodi equispaziati con passi di ampiezza $H = 0.1, 0.05$, 0.025, 0.0125. Si riportino, al variare di H, i valori delle approssimanti corrispondenti $\Pi_H^1 f$ valutate in $\bar{x} = \pi/3$.

per $H = 0.1$ $\qquad \Pi_H^1 f(\bar{x}) =$ ____________________

per $H = 0.05$ $\qquad \Pi_H^1 f(\bar{x}) =$ ____________________

per $H = 0.025$ $\qquad \Pi_H^1 f(\bar{x}) =$ ____________________

per $H = 0.0125$ $\qquad \Pi_H^1 f(\bar{x}) =$ ____________________

(c) *(2 punti)* In seguito al punto (b), si calcolino e si riportino gli errori $E_H(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_H^1 f(x)|$ associati alle corrispondenti approssimanti $\Pi_H^1 f$ (al fine del calcolo dell'errore in Matlab® si valutino $f(x)$ e $\Pi_H^1 f(x)$ in 1000 punti con il comando `linspace(0, 4, 1000)`). Si interpretino e si commentino i risultati ottenuti alla luce della stima teorica dell'errore di cui al punto (a).

per $H = 0.1$ $\qquad E_H(f) =$ ____________________

per $H = 0.05$ $\qquad E_H(f) =$ ____________________

per $H = 0.025$ $\qquad E_H(f) =$ ____________________

per $H = 0.0125$ $\qquad E_H(f) =$ ____________________

(d) *(3 punti)* Si considerino le coppie di dati $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ con $\{x_i\}_{i=0}^n$ nodi distinti e $n \gg 1$. Si definisca la retta di regressione lineare $p_1(x)$ che approssima tali dati. Inoltre, si riporti (non è richiesta la dimostrazione) e si descriva dettagliatamente la struttura del sistema lineare associato (nella forma generale $A\,\mathbf{a} = \mathbf{q}$), la cui soluzione determina $p_1(x)$.

(e) *(1 punto)* Siano ora assegnate le coppie di dati $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,8)$, $(3,27)$ e $(4,64)$. Si calcoli e si riporti l'espressione della retta di regressione lineare $p_1(x)$ che approssima tali dati.

$p_1(x) =$ ____________________

Esercizio 2. Si consideri il problema a valori ai limiti (di Poisson)

11 punti

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{in } (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

(a) *(3 punti)* Si approssimi il problema di Poisson con uno schema alle differenze finite centrate (del second'ordine) su una griglia di $N+2$ nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, con $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\,h$ per $i = 0,\ldots,N+1$ e passo $h = (b-a)/(N+1)$. Si riportino le equazioni del sistema risultante.

(b) *(1 punto)* Si riporti la controparte algebrica dell'approssimazione di cui al punto (a), ovvero il sistema lineare $A\,\mathbf{u} = \mathbf{b}$, fornendo l'espressione dei coefficienti della matrice di rigidezza A, del vettore del termine noto $\mathbf{b}$ e del vettore delle incognite $\mathbf{u}$.

(c) *(2 punti)* Si dimostri che la matrice di cui al punto (b) è simmetrica e definita positiva.

(d) *(4 punti)* Si considerino ora i seguenti dati per il problema di Poisson (4): $a = 0$, $b = \pi/2$, $\alpha = 4$, $\beta = 0$ e $f(x) = -4\,e^{-4\,x}\,(15\,\cos(x) + 8\,\sin(x))$.

Si risolva tale problema tramite il metodo di cui al punto (a), ovvero risolvendo il sistema lineare definito al punto (b), per diversi valori di $N = 9$, 19, 39 e 79 (per risolvere il sistema lineare si consideri il comando"back-slash" di Matlab® \\). Sapendo che la soluzione esatta del problema è data da $u(x) = 4\,e^{-4x}\,\cos(x)$, si calcolino e si riportino per ogni N gli errori $E_N = \max_{i=0,\dots,N+1} |u_i - u(x_i)|$.

per $N = 9$ $E_N =$ ____________________

per $N = 19$ $E_N =$ ____________________

per $N = 39$ $E_N =$ ____________________

per $N = 79$ $E_N =$ ____________________

(e) *(1 punto)* Dopo aver risposto al punto (d), si stimi l'ordine di convergenza p del metodo rispetto ad h (ovvero $(b - a)/(N + 1)$) riportando sinteticamente la procedura seguita.

$p =$ ____________________