Esercizi 03 — 8 pt

1 — 2 pt

Sia dato un sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è tale che: $(A)_{i,i} = 2$ per $i = 1,\dots,n$, $(A)_{i,i+1} = -1$ per $i = 1,\dots,n-1$, $(A)_{n,1} = 1$ e zero altrimenti; $\mathbf{b} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$. Posto $n = 100$, si assegni la matrice A in Matlab® come matrice *sparsa* e si risolva il sistema lineare usando il metodo della fattorizzazione LU con pivoting totale. Si riportino l'elemento $l_{21} = (L)_{21}$ del fattore L della matrice A *permutata*, oltre alle componenti n-esime dei vettori ausiliari $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}^\star$, ovvero y_n e $x_n^\star$, associati rispettivamente alle soluzioni dei sistemi triangolari inferiore e superiore che compaiono durante l'applicazione del metodo.

$l_{21} = 0.5 \qquad y_{100} = 4 \qquad x^\star_{100} = 1$

2 — 1 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} (2\gamma) & \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma & \gamma \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\gamma > 0$. Si determini il valore del numero di condizionamento spettrale $K(A)$ in funzione di γ.

5

3 — 1 pt

Si consideri un metodo diretto per risolvere il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice non singolare e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Sapendo che $K_2(A) = 10^{10}$, $\|\mathbf{b}\| = 10$ e che il residuo associato alla soluzione numerica $\widehat{\mathbf{x}}$ è tale che $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{b} - A\,\widehat{\mathbf{x}}\| = 10^{-11}$, si stimi l'errore relativo comesso $e_{rel} = \dfrac{\|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

10^{-2}

4 — 2 pt

Per una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non–singolare, la sua fattorizzazione LU tramite metodo di eliminazione di Gauss (MEG) realizzata al calcolatore genera equivalentemente in aritmetica esatta una perturbazione δA tale che $\dfrac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq 8\,n^3\,\epsilon_M\,\rho_n$, dove ϵ_M è l'epsilon macchina e $\rho_n = \dfrac{\max_{i,j,k=1,\dots,n} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}|}$ è il fattore di crescita determinato durante il MEG. Per la matrice $A = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 10^6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, considerando la sua fattorizzazione LU tramite MEG senza pivoting e sapendo che $\epsilon_M = 2^{-52}$, si stimi la massima perturbazione relativa attesa $\dfrac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}$.

$4.7962 \cdot 10^{-8}$

5 — 2 pt

Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1)^T$, si consideri il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, per $k = 0, 1, \ldots$, dato $\mathbf{x}^{(0)}$. Sapendo che il metodo è fortemente consistente e la matrice di precondizionamento è $P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}$, si calcoli e si riporti $\mathbf{x}^{(2)}$, avendo posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

$(0.6694,\ 0.6399,\ 0.5491)^T$