Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi CdL Ingegneria Aerospaziale Appello 26 gennaio 2018	Prof. P.F. Antonietti Prof. L. Dedè Prof. M. Verani	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il più piccolo numero (positivo) x_{min} rappresentabile nell'insieme $\mathbb{F}(2,5,-2,5)$; riportare il risultato in base decimale.

2. *(2 punti)* Sia $A_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{6}{7}\,\alpha & -\frac{\sqrt{5}}{7}\,\alpha \\ -\frac{\sqrt{5}}{7}\,\alpha & \frac{2}{7}\,\alpha \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro $\alpha > 0$. Si riporti il valore del numero di condizionamento spettrale di A_α in termini di α, ovvero $K(A_\alpha)$.

3. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare il valore dell'elemento $u_{33} = (U)_{33}$ della matrice triangolare *superiore* U.

4. *(1 punto)* Si consideri la matrice simmetrica e definita $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Quale o quali dei suoi autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^3$ possono essere approssimati mediante il metodo delle iterazioni QR?

5. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Assegnato $\mathbf{x}^{(0)} = (2 \quad 1)^T$ si riporti la prima iterata dell'autovettore (di *modulo unitario*) $\mathbf{y}^{(1)}$ del metodo delle *potenze dirette*.

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$. Si riporti il valore della prima iterata del metodo di Newton $x^{(1)}$ ottenuta per il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = \frac{1}{4}$.

7. *(1 punto)* Si consideri una funzione $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ dotata dello zero α. Sapendo che, per l'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, il metodo di Newton converge ad α e che si hanno $f'(\alpha) = \frac{1}{2}$ e $f''(\alpha) = \frac{1}{5}$, si determini l'ordine di convergenza p atteso dal metodo.

Parte I - Esercizi

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$. Inoltre, si consideri la soluzione di tale sistema lineare mediante un metodo iterativo.

11 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo con matrice di iterazione $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (si definisca in modo preciso tutta la notazione usata).

(b) *(2 punti)* Si consideri il metodo di Jacobi per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si presenti l'algoritmo in forma matriciale.

(c) *(5 punti)* Si implementi il metodo di Jacobi in forma matriciale in Matlab® nella funzione `Jacobi.m` (si usi il comando "back-slash" di Matlab® \ laddove necessario). Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo relativo (detto anche residuo normalizzato). La struttura della funzione è:

```
function [x,Nit] = Jacobi(A,b,x0,nmax,tol).
```

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `Jacobi.m` per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (4,\, 4,\, \ldots,\, 4)^T \in \mathbb{R}^{100}$ e $A \in \mathbb{R}^{100\times100}$ definita come

$$A = \mathrm{tridiag}\,(-4, 10, -4)\,;$$

si consideri l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 1000$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo relativo $r_{rel}^{(N)}$.

$N =$ ________ $x_3^{(N)} =$ ________________ $r_{rel}^{(N)} =$ ________________

Infine, utilizzando opportunamente la funzione `Jacobi.m`, si riportino i valori della terza componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_3^{(1)}$ e $x_3^{(2)}$.

$x_3^{(1)} =$ ________________ $x_3^{(2)} =$ ________________

(d) *(3 punti)* Si riporti l'algoritmo del metodo del *gradiente precondizionato* per risolvere il sistema lineare generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Inoltre, assumendo la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ assegnati al punto (c), la matrice di precondizionamento $P = 10\,I$, con $I \in \mathbb{R}^{100\times100}$ la matrice d'identità, e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (4, 4, \ldots, 4)^T \in \mathbb{R}^{100}$, si calcoli il valore del parametro dinamico ottimale α_0 associato a $\mathbf{x}^{(0)}$ per determinare $\mathbf{x}^{(1)}$.

$\alpha_0 =$ ________________

11 punti

Esercizio 2. Si consideri una funzione di iterazione $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dotata del punto fisso $\alpha \in [a,b]$.

(a) *(1 punto)* Si riporti l'algoritmo del metodo di punto fisso per la ricerca del punto fisso α di $\phi(x)$.

(b) *(3 punti)* Si presenti il citerio d'arresto basato sulla differenza tra iterate successive per il metodo delle iterazioni di punto fisso. Inoltre, si discutano dettagliatamente le proprietà di tale criterio.

(c) *(2 punti)* Sia $\phi(x) = \dfrac{x}{72}(108 - x^2)$. Assumendo il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = 2$, si applichino $N = 7$ iterazioni di punto fisso. Si riportino i valori delle iterate $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(N)}$ (utilizzando almeno 4 cifre decimali per indicare il risultato).

$x^{(1)} =$ ____________ $x^{(2)} =$ ____________ $x^{(N)} =$ ____________

(d) *(4 punti)* Dopo aver risolto il punto (c) e sapendo che $\alpha = 6$, si calcolino e si riportino i valori dei rapporti:

$$\frac{x^{(N)} - \alpha}{(x^{(N-1)} - \alpha)^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{x^{(N-1)} - \alpha}{(x^{(N-2)} - \alpha)^2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Si utilizzino tali rapporti per determinare l'ordine di convergenza p del metodo delle iterazioni di punto fisso applicato al punto (b) per la ricerca di α. Infine, si giustifichi il valore di p determinato sulla base delle proprietà teoriche di convergenza *locale* del metodo delle iterazioni di punto fisso.

$$p = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

(e) *(1 punto)* Si consideri il metodo delle secanti per l'approssimazione di uno zero $\alpha \in [a,b]$ di una funzione $f \in C^0([a,b])$. È possibile interpretare tale metodo come metodo delle iterazioni di punto fisso? Si motivi la risposta data.

Parte II - Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Assegnati i nodi equispaziati x_0, $x_1, \ldots x_5$ nell'intervallo [0,10] e la funzione $f(x) = (2+x)^{1/4}$, si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H(x)$ interpolante $f(x)$ ai precedenti nodi. Si riporti il valore di $\Pi_1^H(9)$.

2. *(1 punto)* Sia $f(x) = 2x^2$. Si approssimi $\int_1^7 f(x)dx$ con la formula semplice del trapezio. Si riporti l'approssimazione I_T ottenuta.

3. *(2 punti)* Si consideri la formula di Simpson composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_0^2 e^x \, dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero M di sottointervalli equispaziati di [0,2] tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-5}$.

4. *(1 punto)* Sia $f(x) = 2\,x^3$. Si riporti il valore approssimato di $f'(\overline{x})$ in $\overline{x} = 2$ ottenuto mediate la formula delle differenze finite centrate, ovvero $\delta_c f(\overline{x})$, usando il passo $h = 0.5$.

5. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -3\,y(t) & t \in (0{,}90], \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero Esplicito con passo di discretizzazione $h = 0.1$ e $u_0 = y_0 = 3$ si calcoli u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

6. *(1 punto)* Dato il seguente problema differenziale di diffusione–trasporto:

$$\begin{cases} -u''(x) + 80\,u'(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 4, \end{cases}$$

si consideri (senza applicarla) la sua approssimazione numerica mediante il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h > 0$. Qual è la condizione sul passo di discretizzazione h che garantisce l'assenza di oscillazioni (instabilità) numeriche per la soluzione approssimata del problema?

7. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema differenziale di diffusione–reazione:

$$\begin{cases} -u''(x) + 5\,u(x) = 2 & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 1. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N = 1$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

Parte II - Esercizi

Esercizio 1.

10 punti

(a) *(2 punti)* Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ un insieme di nodi distinti nell'intervallo $[a,b]$. Si definisca con precisione il polinomio di Lagrange interpolante $f(x)$ ai nodi $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, ovvero $\Pi_n f(x)$, e se ne fornisca l'espressione.

(b) *(3 punti)* Si consideri la seguente funzione $f(x) = \dfrac{10}{x^2+2}$ definita in $[a,b] = [-5,5]$.
Si utilizzi Matlab® per approssimare $f(x)$ mediante polinomi interpolanti di Lagrange $\Pi_n f$ su nodi *equispaziati* di $[a,b]$ con $n = 4, 6, 8, 10$. Si riportino, al variare di n, i valori delle approssimanti corrispondenti $\Pi_n f$ valutate in $\bar{x} = 9/2$ (si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 4$ $\quad \Pi_n f(\bar{x}) =$ ____________________

per $n = 6$ $\quad \Pi_n f(\bar{x}) =$ ____________________

per $n = 8$ $\quad \Pi_n f(\bar{x}) =$ ____________________

per $n = 10$ $\quad \Pi_n f(\bar{x}) =$ ____________________

Si calcolino e si riportino gli errori $E_n(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ associati alle corrispondenti approssimanti $\Pi_n f$ (al fine del calcolo dell'errore in Matlab® si valutino $f(x)$ e $\Pi_n f(x)$ in 1000 punti con il comando `linspace(-5, 5, 1000)`; si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 4$ $\quad E_n(f) =$ ____________________

per $n = 6$ $\quad E_n(f) =$ ____________________

per $n = 8$ $\quad E_n(f) =$ ____________________

per $n = 10$ $\quad E_n(f) =$ ____________________

(c) *(1 punto)* Si interpreti e si motivi il risultato ottenuto al punto (b).

(d) *(1 punto)* Si definiscano i nodi di Chebyshev $\left\{x_i^{CH}\right\}_{i=0}^{n}$ nel generico intervallo $[a,b]$ e per $n \geq 0$.

(e) *(2 punti)* Si ripeta il punto (b) utilizzando ora i nodi di Chebyshev nell'intervallo $[a,b] = [-5,5]$ per costruire le approssimanti $\Pi_n^{CH} f$ con $n = 4, 6, 8, 10$. Si calcolino e si riportino gli errori $E_n^{CH}(f) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_n^{CH} f(x)|$ (si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 4$ $\quad E_n^{CH}(f) =$ ________________

per $n = 6$ $\quad E_n^{CH}(f) =$ ________________

per $n = 8$ $\quad E_n^{CH}(f) =$ ________________

per $n = 10$ $\quad E_n^{CH}(f) =$ ________________

(f) *(1 punto)* Siano ora assegnate le coppie di dati $(0, -10)$, $(1, 0)$, $(2, 30)$, $(3, 20)$ e $(4, 20)$. Si calcoli e si riporti l'espressione della retta di regressione lineare $p_1(x)$ che approssima tali dati.

$p_1(x) =$ ________________________

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy:

12 punti

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & t \in (0,t_f], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \qquad (1)$$

con $t_f > 0$ e il dato iniziale y_0 assegnati.

(a) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo del metodo di Crank-Nicolson (non in stretto linguaggio Matlab®) per l'approssimazione del problema di Cauchy (1); si definisca con precisione tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Si discuta sinteticamente l'ordine di convergenza dell'errore del metodo di Crank-Nicolson.

(c) *(2 punti)* Si consideri il problema modello, ovvero $f(t,y) = \lambda\, y$ in (1) con $\lambda \in \mathbb{R}$, e si riporti la definizione di assoluta stabilità. Si discuta inoltre l'assoluta stabilità del metodo di Crank-Nicolson.

(d) *(4 punti)* Si consideri il problema di Cauchy (1) con $f(t,y) = -\big(6\,\pi\,\cos(\pi t)\,e^{-t} + y\big)$, $t_f = 1$ e $y_0 = 12$. Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare tale problema mediante il metodo di Crank-Nicolson con diversi passi temporali $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.025$ e $h_4 = 0.0125$. Si riportino i valori della soluzione approssimata $u_{N_{h,i}}$ corrispondente all'istante finale t_f per ciascuno dei precedenti valori di h_i (si riportino almeno 4 cifre decimali).

$u_{N_{h,1}} =$ ____________________ $u_{N_{h,2}} =$ ____________________

$u_{N_{h,3}} =$ ____________________ $u_{N_{h,4}} =$ ____________________

(e) *(1 punto)* Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = 6\,(2 - \sin(\pi\, t))\, e^{-t}$, si calcolino e si riportino gli errori E_{h_i} associati alle soluzioni $u_{N_{h,i}}$ al tempo t_f ottenuti per ciascun valore di h_i specificato al punto (d) (si riportino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

$E_{h_1} =$ ____________________ $E_{h_2} =$ ____________________

$E_{h_3} =$ ____________________ $E_{h_4} =$ ____________________

(f) *(2 punti)* Si utilizzino i risultati ottenuti al punto (e) per stimare *graficamente* l'ordine di convergenza del metodo di Crank-Nicolson. Si motivi la risposta riportando con completezza la procedura seguita e il corrispondente grafico ottenuto.