Appello – Parte 2

08/07/2021 — versione 1 — ◇♡♣♠◇♠♣♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = e^{2x}$ e il suo interpolante polinomiale $\Pi_5 f(x)$ su $n+1 = 6$ nodi equispaziati in $[-1, 1]$. Senza costruire l'interpolante $\Pi_5 f(x)$, si fornisca una *stima* dell'errore di interpolazione $e_5(f) = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - \Pi_5 f(x)|$.

0.0807

2 — 1 pt (***) No Multichance

Il numero dei nuovi casi di positività al Covid19 in Italia nel periodo 29 Giugno – 6 Luglio 2021 è riportato nel vettore seguente:

```
>> giorni = [1:8];
>> casi = [679 776 882 794 932 808 480 907];
```

Si stimi il valore dei nuovi casi di positività atteso per la giornata di oggi, 8 Luglio, utilizzando un polinomio di grado 2 che approssimi i dati nel senso dei minimi quadrati.

584.6429

3 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = e^{x/2}$ e il suo interpolante polinomiale quadratico a tratti $\Pi_2^H f(x)$ su 3 sottointervalli equispaziati di $[0, 3]$ e con tutti i nodi equispaziati. Si riporti il valore $\Pi_2^H f(0.75)$.

1.4563

4 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[-1, 2]$ e il suo interpolante polinomiale $\Pi_n f(x)$ di grado $n \geq 1$ su $n+1$ nodi equispaziati. Quanto vale l'approssimazione di $\int_{-1}^{2} \Pi_n f(x)\, dx$ tramite la formula dei trapezi (semplice)?

11.6354

5 — 1 pt

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, dove $f \in C^\infty([a,b])$, tramite una formula di quadratura composita accurata di ordine $p = 2$. Sapendo che per $M_1 = 10$ sottointervalli equispaziati di $[a,b]$ si ha un errore pari a $e_1(f) = 10^{-1}$, si stimi l'errore $e_2(f)$ commesso con $M_2 = 100$ sottointervalli.

10^{-3}

6 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri l'approssimazione dell'integrale doppio $I(f) = \displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$ tramite la formula del punto medio *composita*, ovvero

$$I_{pm}^c(f) = \frac{(b-a)\,(d-c)}{M} \sum_{k=1}^{M} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k),$$

dove M è il numero dei rettangoli di uguale area in cui è partizionato il rettangolo $[a,b] \times [c,d]$, mentre $(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$ sono i corrispondenti punti medi.

Posti $a = c = 0$, $b = d = 1$ e $f(x,y) = e^{(2x+y)}$, si riporti il valore di $I_{pm}^c(f)$ per $M = 4$.

5.2124

7 — 1 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -\sqrt{\dfrac{17\,y(t)}{17+t^2}} & t \in (0,10), \\ y(0) = 9. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero in avanti con passo $h > 0$, si riporti il valore calcolato di u_1 in termini di h, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, \ldots, N_t$.

$9 - 3\,h$

8 — 1 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) - 1000\,u'(x) = \gamma & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

dove $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro. Si supponga di approssimare tale problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate e passo di discretizzazione $h > 0$, ottenendo così la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$. Assumendo che la soluzione esatta $u \in C^4([0,1])$ sia nota e che l'errore per $h = h_1 = 10^{-3}$ sia $E_{h_1} = \max_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j| = 4 \cdot 10^{-3}$, si riporti il valore stimato dell'errore E_{h_2} corrispondente alla scelta $h = h_2 = 5 \cdot 10^{-4}$.

10^{-3}

9 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 40\, u'(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 3, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con tecnica *Upwind* e passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_9, ovvero l'approssimazione di $u(x_9)$.

2.4

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -\big(\mu(x)\, u'(x)\big)' = 5 & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad \text{dove } \mu(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1/2), \\ 2 & x \in [1/2, 1), \end{cases}$$

Dato il passo $h > 0$ e un generico nodo $\overline{x}$, il termine $-\big(\mu(x)\, u'(x)\big)'$ può essere approssimato nel nodo $\overline{x}$ tramite il seguente schema alle differenze finite

$$-\frac{1}{h^2}\left[\mu(\overline{x}+h/2)\,(u(\overline{x}+h) - u(\overline{x})) - \mu(\overline{x}-h/2)\,(u(\overline{x}) - u(\overline{x}-h))\right].$$

Si approssimi il problema ai limiti utilizzando il metodo delle differenze finite precedente con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 2$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(0.5)$.

$\frac{5}{12} = 0.4167$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il seguente sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t) & t \in (0, t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\mathbf{y}(t) = (y_1(t),\, y_2(t),\, \ldots, y_m(t))^T$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{g}(t) : (0, t_f) \to \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, per $m \geq 1$.

In particolare, consideriamo $m = 9$ e $A = \mathrm{tridiag}\,(5/2,\, -2,\, -1/2)$.

Punto 1) — 2 pt (***) No Multichance

Con riferimento al generico *sistema* di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (1), si riporti la definizione di *zero-stabilità* in relazione al metodo di *Eulero in avanti*. Si definisca tutta la notazione utilizzata.

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 3 pt

Per il problema (1) con $t_f = +\infty$ e $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ si ricavi la condizione di *assoluta stabilità* per il metodo di Eulero in avanti. Si illustri la procedura seguita.

$0 < h < 0.4693$

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 3 pt

Si pongano ora $t_f = 10$, $\mathbf{g}(t) = (1 + 2\sin(\pi\, t))\,\mathbf{1}$ e $\mathbf{y}_0 = \mathbf{2}$ per il problema (1).

Si approssimi tale problema tramite il metodo di Eulero in avanti con passo di discretizzazione $h = 0.1$ utilizzando la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m`. Dopo aver indicato i tempi discreti $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$ e $h = \dfrac{t_f}{N_h}$, si riportino:

- i valori delle approssimazioni $u_{5,1}$ e u_{5,N_h} rispettivamente di $(\mathbf{y}(t_1))_5$ e $(\mathbf{y}(t_f))_5$;
- il valore minimo $u_{5,min} = \min\limits_{n=0,\ldots,N_h} u_{5,n}$ e il tempo discreto $t_{5,min} = \mathrm{argmin}_{n=0,\ldots,N_h} u_{5,n}$ corrispondente a $u_{5,min}$.

$u_{5,1} = 2.1000, \quad u_{5,N_h} = 1.1223, \quad u_{5,min} = 1.0721, \quad t_{5,min} = 8.1$

Spazio per risposta breve

Punto 4) — 2 pt

Con i dati di cui al Punto 3) e assumendo che la soluzione esatta al tempo $t_f = 10$ del problema (1) nella componente 5 sia

$$y_5(t_f) = (\mathbf{y}(10))_5 = 1.01702435,$$

si calcolino gli errori $E_h = |u_{5,N_h} - y_5(t_f)|$ ottenuti con il metodo di Eulero in avanti e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-2}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-3}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-3}$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \ldots, 4$.

0.0063, 0.0030, 0.0015, 0.0007

Spazio per risposta breve

Punto 5) — 2 pt

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al Punto 4) per stimare algebricamente l'ordine di convergenza p del metodo di Eulero in avanti. Si giustifichi la risposta data e la si motivi alla luce della teoria.

$p = 1.0171$

Spazio per risposta lunga

Punto 6) — 2 pt

Si vuole ora approssimare il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (1) con i dati di cui al Punto 3) tramite il metodo di *Eulero all'indietro* con passo $h = 0.1$. Si riporti il valore dell'approssimazione $u_{5,1}$ di $(\mathbf{y}(t_1))_5$ così ottenuta.

$u_{5,1} = 2.1610$

Spazio per risposta breve

Punto 7) — 3 pt (***) No Multichance

Si vuole ora applicare al sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (1) il metodo di Runge-Kutta associato alla seguente tabella di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Si implementi in Matlab® il metodo precedente e lo si utilizzi per risolvere il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (1) con i dati di cui al Punto 3) usando il passo $h = 0.1$. Si riportino i valori delle approssimazioni $u_{5,1}$ e u_{5,N_h} così ottenute.

$u_{5,1} = 2.1312$, $u_{5,N_h} = 1.0171$

Spazio per risposta breve