Test – 50pt – 60'

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

1 — 0 pt

Inserire il numero di matricola.

2 — 0 pt

Selezionare l'*ultima* cifra X del numero di matricola.

3 — 2 pt

Si determini la distanza fra il numero 2 (in base decimale) e il suo successivo rappresentato nell'insieme $\mathbb{F}(2, 4, -5, 5)$. Si riporti il risultato in base decimale.

0.25

4 — 2 pt

Si consideri il sistema lineare $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{x}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{100}$ e $U \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ è una matrice non singolare tale che $(U)_{i,j} = 0$ per $j > (i + 1)$ oppure $j < i$ (ovvero U è bidiagonale superiore). Si determini il costo computazionale corrispondente all'applicazione dell'algoritmo delle sostituzioni all'indietro a tale sistema lineare.

298

5 — 3 pt (***)

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \gamma \\ \gamma & 1 & \gamma \\ \gamma & \gamma & 1 \end{bmatrix}$ dipende dal parametro $\gamma \in \mathbb{R}$. Sapendo che gli autovalori di A sono $1 + 2\gamma$, $1 - \gamma$ e $1 - \gamma$, si riporti il raggio spettrale della matrice di iterazione associata al metodo di Jacobi in funzione di γ. Inoltre, si determinino i valori di γ tali per cui il metodo di Jacobi risulta convergente per ogni scelta dell'iterata iniziale.

$\rho_{BJ} = 2\,|\gamma| \qquad -\dfrac{1}{2} < \gamma < \dfrac{1}{2}$

6 — 3 pt

Si consideri il metodo di Richardson stazionario (non precondizionato) per risolvere il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ e $A = \texttt{tridiag}(1,4,1)$. Si calcoli e si riporti il raggio spettrale ρ_{opt} della matrice di iterazione associata al metodo ottenuta in corrispondenza del parametro ottimale di accelerazione α_{opt}.

0.4797

7 — 2 pt

Dato il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1)^T$, si consideri il metodo del gradiente coniugato per l'approssimazione di $\mathbf{x}$. Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `pcg` e si riporti il valore di $\mathbf{x}^{(2)}$ avendo posto l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$(0.2679,\ 0.2143,\ 0.1607)^T$

8 — 3 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 0 \\ 13 & 7 & -2 \end{bmatrix}$. Per quali valori dello shift $s \in \mathbb{R}$ è possibile approssimare l'autovalore $\lambda_2(A) = 4$ tramite il metodo delle potenze inverse con shift?

$1 < s < 5$

9 — 2 pt (***)

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, si consideri il metodo delle iterazioni QR per l'approssimazione dei suoi autovalori. Si utilizzi la funzione Matlab® `qrbasic.m` con `tol`$= 10^{-2}$ e `nmax`$= 100$ e si riportino le approssimazioni così ottenute degli autovalori di A.

$5.8447, \quad 3.7529, \quad -2.5975$

10 — 3 pt

Si consideri la funzione $f(x) = x\, e^x - 1$ dotata di un unico zero α e la funzione di iterazione corrispondente $\phi(x) = \dfrac{x+1}{e^x+1}$ Quale delle seguenti affermazioni inerenti la sua approssimazione numerica è vera?

A) La funzione di iterazione $\phi(x)$ coincide con quella del metodo di Newton applicato a $f(x)$.

B) Il metodo di Newton converge con ordine $p = 1$, per $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, dato che lo zero è multiplo.

C) Il metodo delle iterazioni di punto fisso con la funzione di iterazione $\phi(x)$ converge con ordine $p = 2$, per $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α.

D) Il metodo di bisezione non può essere applicato alla ricerca dello zero di $f(x)$ in quanto $f(x)$ non cambia segno negli intervalli $[a, b]$ che contengono α.

C

11 — 2 pt (***)

Il metodo delle corde approssima lo zero α di una funzione $f(x)$ applicando la seguente iterata:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{q_c} \qquad \text{per } k \geq 0,$$

dati $x^{(0)}$ e $q_c = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ per $\alpha \in (a, b)$. Posto $f(x) = e^x - 1$, per quali valori di q_c è garantita la convergenza del metodo per una scelta di $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicina ad $\alpha = 0$?

$q_c > \dfrac{1}{2}$

12 — 3 pt

Il metodo di accelerazione di Aitken consiste nell'applicare il metodo delle iterazioni di punto fisso alla seguente funzione di iterazione

$$\phi_\Delta(x) = \frac{x\,\phi(\phi(x)) - (\phi(x))^2}{\phi(\phi(x)) + x - 2\phi(x)}.$$

Si applichi il metodo per approssimare il punto fisso α della funzione di iterazione $\phi(x) = \cos(x)$ usando $x^{(0)} = 1.2$. Si riportino i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$.

$x^{(1)} = 0.7025, \quad x^{(2)} = 0.7389$

13 — 2 pt

Assegnati i nodi equispaziati x_0, $x_1, \ldots x_5$ nell'intervallo $[0, 10]$ e la funzione $f(x) = x^3 + 3$, si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H(x)$ della funzione $f(x)$ nei precedenti nodi. Si valuti e si riporti il valore di $\Pi_1^H(3)$.

39

14 — 3 pt

Si consideri l'interpolazione tramite una spline cubica interpolatoria $s_3(x)$ di una funzione $f(x) \in C^4([a, b])$ sull'intervallo $[a, b]$. Sapendo che con $M_1 = 10$ sottointervalli equispaziati di $[a, b]$, l'errore di inerpolazione $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - s_3(x)| \leq 10^{-2}$, si stimi il numero minimo di sottointervalli M_2 tale per cui il precedente errore risulti minore o uguale a 10^{-5}.

57

15 — 3 pt (***)

Si consideri la formula di Simpson composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_{-2}^{2} \left[\sin(\pi x) + 2x^4 - 7x^3\right] dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero M di sottointervalli equispaziati di $[-2, 2]$ tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-4}$.

27

16 — 3 pt

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_0^2 \left[5 + x^7\right] dx$ attraverso la formula di quadratura semplice di Gauss–Legendre con 3 nodi; tali nodi di quadratura riferiti all'intervallo $[-1, 1]$ sono $\hat{x}_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\hat{x}_1 = 0$, $\hat{x}_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$, con corrispondenti pesi di quadratura dati da $\hat{\alpha}_0 = \frac{5}{9}$, $\hat{\alpha}_1 = \frac{8}{9}$, $\hat{\alpha}_2 = \frac{5}{9}$. Si riporti l'approssimazione $I_{GL}(f)$ di $I(f)$ così ottenuta.

41.68

17 — 2 pt (***)

Si consideri la funzione $f(x) = \beta\, x^3 + \gamma\, x^2 + 1$ dipendente dai parametri β e $\gamma \in \mathbb{R}$ e l'approssimazione di $f'(\overline{x})$ tramite le differenze finite centrate $\delta_c f(\overline{x})$ in un generico punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ con passo $h = 1/4$. Si riporti l'espressione dell'errore $E_c f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_c f(\overline{x})$ in funzione dei parametri β e γ.

$-\beta/16$

18 — 2 pt

Si consideri il generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni inerenti la sua approssimazione numerica è <u>falsa</u>?

A) Se $f(t, y) = \lambda\, y$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda < 0$, allora un metodo numerico incondizionatamente assolutamente stabile è tale che $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ per ogni passo $h > 0$, anche se $(u_{n+1} \cdot u_n) < 0$ per $n = 0, 1, \ldots$, essendo u_n l'approssimazione di $y(t_n)$.

B) Se un metodo numerico è consistente e convergente, allora è anche zero–stabile.

C) I metodi di Runge–Kutta sono metodi a più stadi di tipo implicito.

D) Il metodo di Eulero in avanti è esplicito e accurato di ordine 1 se la soluzione del problema di Cauchy è "sufficientemente" regolare.

C

19 — 2 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -\,e^{y(t)} + 2\,t & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Heun con passo $h = 0.1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

1.8710

20 — 3 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 5\,u'(x) = 2 & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 3. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N+1 = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_9, ovvero l'approssimazione di $u(x_9)$.

1.9137

21 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Si supponga di approssimare tale problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h_1 > 0$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ tramite la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$ associato. Sapendo che $K_2(A) = 10^4$, si riporti il valore stimato di $K_2(A)$ assumendo ora di considerare il passo di discretizzazione $h_2 = h_1/10$.

10^6

22 — 3 pt (***)

Si consideri il seguente problema di diffusione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 3 & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 2\,\sin(\pi\,x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Si consideri l'approssimazione di tale problema tramite il metodo delle differenze finite con passo di discretizzazione spaziale $h = 1/2$ e il metodo di Eulero all'indietro con passo di discretizzazione temporale $\Delta t = 1/8$. Si calcoli u_1^1, ovvero l'approssimazione di $u(1/2, 1/8)$.

$\dfrac{19}{16} = 1.1875$