Appello – Parte 1

03/09/2021 — versione 1 — ♢♣♡♠♢♡♣♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 1 pt

Dato l'insieme dei numeri floating point $\mathbb{F}(2, 6, -4, U)$, con il parametro $U \geq 4$, si stimi l'errore relativo $\dfrac{|x - fl(x)|}{|x|}$ commesso tra il numero reale x e la sua rappresentazione $fl(x)$ in artimetica floating point.

$2^{-6} = 0.0156$

2 — 1 pt

Si consideri il seguente algoritmo: dati a_1 e $b_1 \in \mathbb{R}$ positivi si pongano

$$a_{2n} = \frac{2\,a_n\,b_n}{a_n + b_n} \quad \text{e} \quad b_{2n} = \sqrt{a_{2n}\,b_n} \qquad \text{per } n = 1, 2, 4, 8, \ldots$$

Il valore a_{2n} fornisce un'approssimazione (dall'alto) di π per n "grande". Posti $a_1 = 4$ e $b_1 = 2\sqrt{2}$, si riporti il valore approssimato a_{16} ottenuto applicando l'algoritmo precedente.

3.1441

3 — 2 pt

Dato il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (3\ 4\ 5)^T$, si consideri la sua risoluzione tramite il metodo della fattorizzazione LU con pivoting per righe (permutazione della seconda e terza riga). Si riportino gli elementi $l_{21} = (L)_{21}$ e $u_{33} = (U)_{33}$ dei fattori L ed U della matrice *permutata* e la seconda componente y_3 del vettore ausiliario $\mathbf{y}$ associato alla soluzione del sistema triangolare inferiore che compare durante l'applicazione del metodo.

$l_{21} = \dfrac{2}{9} \qquad u_{33} = 5 \qquad y_3 = 3$

4 — 2 pt (***) No Multichance

Sia data una matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ con $\gamma \neq \frac{1}{4}$. Si determinino i valori di tale parametro γ per cui il metodo di Jacobi applicato alla soluzione di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge per ogni scelta dell'iterata iniziale.

$|\gamma| > \frac{1}{4}$

5 — 2 pt

Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$, si consideri il metodo del gradiente coniugato precondizionato con precondizionatore $P = \text{tridiag}(-1, 2, -1)$ per l'approssimazione di $\mathbf{x}$. Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `pcg` e si riporti il valore di $\mathbf{x}^{(2)}$ avendo posto l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$(0.3209,\quad 0.3240,\quad 0.3406,\quad 0.3705)^T$

6 — 1 pt

Si consideri un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica e definita positiva con numero di condizionamento $K_2(A) = 50$. Per la sua risoluzione si consideri il metodo del gradiente e, sapendo che l'errore iniziale è $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A = 1$, si fornisca una stima dell'errore commesso all'iterata $k = 100$, ovvero $\|\mathbf{x}^{(100)} - \mathbf{x}\|_A$.

0.0183

7 — 1 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & \gamma \\ \gamma & 3 \end{bmatrix}$, dipendente dal parametro $\gamma > 0$. Assumendo che $\mathbf{x} = (1\ \ 1)^T$ sia un'approssimazione di uno dei suoi autovettori, si riporti l'approssimazione dell'autovalore corrispondente λ in termini di γ.

$4 + \gamma$

8 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. Si applichi il metodo delle potenze (dirette) per l'approssimazione di $\lambda_1(A)$ a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1}$. Si riportino i valori delle approssimazioni $\lambda^{(0)}$ e $\lambda^{(3)}$ di tale autovalore.

2, 5.2873

9 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & (\sqrt{10}-1) & 0 \\ -(\sqrt{10}+1) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Per quali valori dello shift $s \in \mathbb{R}$ è possibile applicare il metodo delle potenze inverse con shift per l'approssimazione dell'autovalore 6 di A?

$s > \dfrac{23}{8} = 2.8750$ e $s \neq 6$

10 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri la funzione $f(x) = \sin(x+\sqrt{2})$ e il metodo di bisezione per l'approssimazione dello zero $\alpha \in [-2, 0]$. Si riporti il valore dell'iterata $x^{(2)}$ ottenuta applicando il metodo.

-1.2500

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri la funzione

$$f(x) = \cos(\pi x)\left(x - \frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

e, tra gli altri, in particolare il suo zero $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Punto 1) — 2 pt

Si applichino i metodi di Newton e Newton modificato all'approssimazione di α con tolleranza sul criterio d'arresto basato sulla differenza tra iterate successive $tol = 10^{-6}$ e iterata iniziale $x^{(0)} = 0.9$. Si riportino i numeri delle iterazioni effettuate dai due metodi e si giustifichi il risultato ottenuto. Si riportino inoltre i comandi Matlab® utilizzati.

Spazio per risposta lunga

(num. it. Newton: 18 , num. it. Newton modificato: 4)

Punto 2) — 1 pt

Si discuta l'affidabilità del criterio d'arresto basato sulla differerenza tra iterate successive per il metodo di Newton applicandolo allo zero α della funzione $f(x)$ di Eq. (1).

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 3 pt

Il metodo delle secanti approssima lo zero α di $f(x)$ tramite una sequenza di iterate $\left\{x^{(k)}\right\}$ ottenute come segue:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{q_k} \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, \quad \text{con } q_k = \frac{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)}{x^{(k)} - x^{(k-1)}},$$

dove le iterate iniziali $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ sono entrambe assegnate.

Si applichi tale metodo alla funzione $f(x)$ di Eq. (1) precedentemente assegnata fino ad ottenere l'iterata $x^{(10)}$, a partire da $x^{(0)} = 0.9$ e $x^{(1)} = 0.7$. Si riportino i valori di $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ e $x^{(10)}$.

Si stimi inoltre l'ordine di convergenza p del metodo ad α, illustrando la procedura seguita. Si riportino i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga

($x^{(2)} = 0.6106$, $x^{(3)} = 0.5684$, $x^{(10)} = 0.5023$, $p = 1$)

Punto 4) — 3 pt

Si consideri ora la funzione di iterazione

$$\phi(x) = x + \frac{\mu}{2\pi} \cos(\pi x) \tag{2}$$

dipendente dal parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e dotata del punto fisso $\alpha = \frac{1}{2}$ coincidente con lo zero di $f(x)$.

Si determinino i valori di μ tali per cui il metodo delle iterazioni di punto fisso converge ad α per $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α. Si determini inoltre per quale valore di μ il metodo delle iterazioni di punto fisso converge con ordine p almeno pari a 2. Si giustifichino le risposte alla luce della teoria riportando il procedimento svolto.

Spazio per risposta lunga $(0 < \mu < 4,\ \mu = 2)$

Punto 5) — 2 pt (***) No Multichance

Per la funzione di iterazione $\phi(x)$ di Eq. (2) si determinino i valori di μ tali per cui è garantita una convergenza monotona ad α per ogni $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α. Si giustifichi la risposta data.

Spazio per risposta lunga $(\mu < 2)$

Punto 6) — 3 pt (***) No Multichance

Per la funzione di iterazione $\phi(x)$ di Eq. (2) con $\mu = 1$, si determinino i valori di $a < \alpha$ e $b > \alpha$ tali per cui la convergenza del metodo delle iterazioni di punto fisso è garantita per ogni scelta dell'iterata iniziale $x^{(0)} \in [a, b]$. Si giustifichi la risposta data sulla base della teoria.

Spazio per risposta lunga $(0 < a$ e $b < 1)$

Punto 7) — 3 pt

Si consideri ora il seguente sistema di equazioni non lineari

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin(\pi\, x_1) - x_2 \\ x_2^2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3^2 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

Si approssimi lo zero $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ del precedente sistema di equazioni non lineari implementando opportunamente il metodo di Newton in Matlab® . Si riportino:

- l'espressione della generica matrice Jacobiana $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$;
- i valori della prima e seconda iterata, ovvero $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ottenute applicando il metodo di Newton a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1/5,\, 1/5,\, 1/5)^T$;
- i comandi Matlab® utilizzati.

Spazio per risposta lunga
($\mathbf{x}^{(1)} = (-0.0392,\, -0.0201,\, -0.0480)^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.0004,\, -0.0019,\, -0.0003)^T$)