Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi CdL Ingegneria Aerospaziale Ultima Prova in Itinere 19 giugno 2018	Prof. L. Dedè Prof. A. Manzoni Prof. S. Micheletti	Firma leggibile dello studente
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 1h 30m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots x_5$ nell'intervallo [0,10] e la funzione $f(x) = 5\,(x+4)^2$, si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H(x)$ interpolante $f(x)$ nei precedenti nodi. Si riporti il valore di $\Pi_1^H(1)$.

2. *(1 punto)* Sia $f(x) = 2\,x^2$. Si approssimi $\int_3^6 f(x)dx$ con la formula semplice del trapezio. Si riporti l'approssimazione $I_T(f)$ ottenuta.

3. *(2 punti)* Si consideri la formula dei trapezi composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_{-2}^{2} e^x \, dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero M di sottointervalli equispaziati di $[-2{,}2]$ tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-1}$.

4. *(1 punto)* Sia $f(x) = 5\,x^3$; si approssimi $f'(2)$ mediante la formula delle differenze finite in avanti utilizzando il passo $h = 0.1$; si riporti il valore $\delta_+ f(2)$ di tale approssimazione.

5. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A\,\mathbf{y}(t) & t \in (0, +\infty), \\ \mathbf{y}(0) = (3\ \ 2)^T. \end{cases}$$

dove $A = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$. Si riporti la condizione di assoluta stabilità del metodo di Eulero in avanti per il precedente problema di Cauchy.

6. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema differenziale di diffusione–reazione:

$$\begin{cases} -u''(x) + 2\,u(x) = x & x \in (0{,}1), \\ u(0) = 2, \qquad u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N = 1$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

7. *(1 punto)* Dato il seguente problema differenziale di diffusione–trasporto:

$$\begin{cases} -u''(x) + 50\,u'(x) = 0 & x \in (0{,}1), \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 2, \end{cases}$$

si consideri (senza applicarla) la sua approssimazione numerica mediante il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h > 0$. Qual è la condizione sul passo di discretizzazione h che garantisce l'assenza di oscillazioni (instabilità) numeriche per la soluzione approssimata del problema?

Esercizio 1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\{x_i\}_{i=0}^n$ un insieme di nodi distinti nell'intervallo $[a,b]$.

10 punti

(a) *(2 punti)* Si definisca con precisione il polinomio di Lagrange interpolante $f(x)$ nei nodi $\{x_i\}_{i=0}^n$, ovvero $\Pi_n f(x)$, e se ne fornisca l'espressione.

(b) *(3 punti)* Si consideri la seguente funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ definita in $[a,b] = [-4,4]$.
Si utilizzi Matlab® per approssimare $f(x)$ mediante polinomi interpolanti di Lagrange $\Pi_n f$ su nodi *equispaziati* di $[a,b]$ per $n = 6, 8, 10, 12$. Si riportino, al variare di n, i valori delle approssimanti corrispondenti $\Pi_n f$ valutate in $\bar{x} = 3.9$ (si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 6$: $\Pi_n f(\bar{x}) =$ ______________ per $n = 8$: $\Pi_n f(\bar{x}) =$ ______________

per $n = 10$: $\Pi_n f(\bar{x}) =$ ______________ per $n = 12$: $\Pi_n f(\bar{x}) =$ ______________

Si calcolino e si riportino gli errori $E_n(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ associati alle corrispondenti approssimanti $\Pi_n f$ (al fine del calcolo dell'errore in Matlab® si valutino $f(x)$ e $\Pi_n f(x)$ in 1000 punti con il comando `linspace(-4, 4, 1000)`; si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 6$: $E_n(f) =$ ______________ per $n = 8$: $E_n(f) =$ ______________

per $n = 10$: $E_n(f) =$ ______________ per $n = 12$: $E_n(f) =$ ______________

(c) *(1 punto)* Si interpreti e si motivi il risultato ottenuto al punto (b).

(d) *(1 punto)* Si definiscano i nodi di Chebyshev–Gauss–Lobatto $\left\{x_i^{CH}\right\}_{i=0}^{n}$ nel generico intervallo $[a,b]$ e per $n \geq 0$.

(e) *(2 punti)* Si ripeta il punto (b) utilizzando ora i nodi di Chebyshev nell'intervallo $[a,b] = [-4,4]$ per costruire le approssimanti $\Pi_n^{CH} f$ con $n = 6, 8, 10, 12$. Si calcolino e si riportino gli errori $E_n^{CH}(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_n^{CH} f(x)|$ (si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 6$: $E_n(f) =$ ______________ per $n = 8$: $E_n(f) =$ ______________

per $n = 10$: $E_n(f) =$ ______________ per $n = 12$: $E_n(f) =$ ______________

(f) *(1 punto)* Siano ora assegnati i nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ e $x_4 = 3$. Si calcoli e si riporti l'espressione della retta di regressione lineare $p_1(x)$ che approssima le coppie di dati $\{(x_i,f(x_i))\}_{i=0}^{4}$.

$p_1(x) =$ ____________________________

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy: *12 punti*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & t \in (0,t_f], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

con $t_f > 0$ e il dato iniziale y_0 assegnati.

(a) *(4 punti)* Si considerino il problema di Cauchy (1) e la sua approssimazione mediante il metodo di *Eulero in avanti*. Si riporti l'algoritmo del metodo di *Eulero in avanti* (non in stretto linguaggio Matlab®) definendo con precisione tutta la notazione utilizzata.

Si definisca con precisione l'*errore di troncamento locale* τ_n e si riporti la sua espressione.

Cosa significa che il metodo di Eulero in avanti per l'approssimazione del problema di Cauchy (1) è consistente? Qual è il suo ordine di consistenza?

(b) *(1 punto)* Sempre considerando il metodo di *Eulero in avanti* per il problema di Cauchy (1), ma per $t_f = +\infty$, si riporti la definizione di *assoluta stabilità* del metodo, introducendo il problema modello e definendo con precisione tutta la notazione utilizzata.

(c) *(1 punto)* Si riporti ora l'algoritmo del metodo di *Heun* (non in stretto linguaggio Matlab®) per l'approssimazione del problema di Cauchy (1); si definisca con precisione tutta la notazione utilizzata.

(d) *(3 punti)* Si consideri il problema di Cauchy (1) con $f(t,y) = \big(1440\,\cos(t)\,e^{-6\,t} - 6\,y\big)$, $t_f = 1$ e $y_0 = 0$. Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare tale problema mediante il metodo di Heun con diversi passi temporali $h_1 = 0.05$, $h_2 = 0.025$, $h_3 = 0.0125$ e $h_4 = 0.00625$. Si riportino i valori della soluzione approssimata $u_{N_{h,i}}$ corrispondente all'istante finale t_f per ciascuno dei precedenti valori di h_i (si riportino almeno 4 cifre decimali).

$u_{N_{h,1}} =$ ____________________ $u_{N_{h,2}} =$ ____________________

$u_{N_{h,3}} =$ ____________________ $u_{N_{h,4}} =$ ____________________

(e) *(2 punti)* Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = 1440\sin(t)\,e^{-6\,t}$, si calcolino e si riportino gli errori E_{h_i} associati alle soluzioni $u_{N_{h,i}}$ al tempo t_f ottenuti per ciascun valore di h_i specificato al punto (d) (si riportino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

$E_{h_1} =$ ____________________ $E_{h_2} =$ ____________________

$E_{h_3} =$ ____________________ $E_{h_4} =$ ____________________

Si utilizzino tali risultati per stimare *graficamente* l'ordine di convergenza del metodo di Heun. Si motivi la risposta riportando con completezza la procedura seguita e il corrispondente grafico ottenuto.

(f) *(1 punto)* Quale condizione occorre richiedere sul passo temporale h affinché il metodo di *Heun* applicato al problema del punto (d) risulti assolutamente stabile?