Serie 6
Integrazione Numerica

Esercizio 1

Si vuole calcolare numericamente il volume V del solido di rotazione in Figura 1, la cui sezione nel piano (x, y) è definita dalla funzione:

$$f(x) = \cosh\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

nell'intervallo $0 \leq x \leq 0.8$. L'espressione analitica di V è

$$V = \int_0^{0.8} \pi f^2(x)dx = \pi\left(\frac{\sinh(1) + \sinh(3/5)}{4} + \frac{2}{5}\right).$$

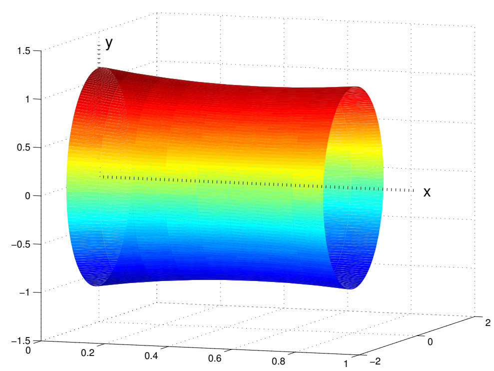

Figura 1: Solido di rotazione.

1. Disegnare il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0, 0.8]$.
2. Scrivere la funzione `pmedcomp.m` che implementa la formula di *quadratura del punto medio composita su intervalli equispaziati.* La funzione `pmedcomp.m` prende in input:
   - gli estremi di integrazione `a,b`;
   - il numero di sottointervalli `N` in cui si vuole suddividere il dominio di integrazione;
   - la funzione `fun` da integrare (function handle);

   e restituisce in uscita il valore approssimato dell'integrale. L'intestazione di `pmedcomp.m` sarà quindi:

   ```
   function I = pmedcomp(a,b,N,fun)
   ```

3. Scrivere la funzione `trapcomp.m` che implementa la formula di *quadratura del trapezio composita su intervalli equispaziati.* L'intestazione della funzione sarà:

```
function I = trapcomp(a,b,N,fun),
```

dove gli input sono gli stessi del punto 2.

4. Scrivere la funzione `simpcomp.m` che implementa la formula di *quadratura di Simpson composita su intervalli equispaziati*. L'intestazione sarà:

```
function I = simpcomp(a,b,N,fun).
```

dove gli input sono gli stessi del punto 2.

5. Utilizzando le tre funzioni scritte ai punti precedenti, calcolare il valore approssimato V_N del volume del solido di rotazione per $N = 1, \dots, 20$ suddivisioni uniformi dell'intervallo $[0, 0.8]$. Riportare su un grafico l'andamento del valore dell'integrale approssimato V_N in funzione di N.

6. Conoscendo il valore esatto V del volume, si indichi con $E_N = |V - V_N|$ il valore assoluto dell'errore nel calcolo dell'integrale. Partendo dai valori di V_N trovati al punto precedente al variare dell'ampiezza dei sottointervalli, riportare su un grafico, con entrambi gli assi in scala logaritmica, l'andamento dell'errore utilizzando le formule di quadratura implementate. Verificare che ci sia accordo con i risultati teorici per ciascuno dei tre metodi utilizzati.

7. Per ciascuna delle tre formule considerate, fornire una stima del numero minimo N di sottointervalli per cui $E_N \leq \mathit{toll}$, con $\mathit{toll} = 10^{-5}$, e verificare sperimentalmente tali risultati.
   Suggerimento: il numero N verrà trovato usando le seguenti formule per una funzione g "sufficientemente" regolare:

$$|I(g) - I^c_{pm}(g)| \leq \frac{b-a}{24}\left(\frac{b-a}{N}\right)^2 \max_{x\in[a,\,b]} |g''(x)| \leq \mathit{toll},$$
$$|I(g) - I^c_{t}(g)| \leq \frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{N}\right)^2 \max_{x\in[a,\,b]} |g''(x)| \leq \mathit{toll},$$
$$|I(g) - I^c_{s}(g)| \leq \frac{b-a}{16\cdot 180}\left(\frac{b-a}{N}\right)^4 \max_{x\in[a,\,b]} |g^{(4)}(x)| \leq \mathit{toll}.$$

8. Scrivere la funzione `gausscomp.m` che implementa la formula di *quadratura di Gauss(–Legendre) composita a due punti*. L'intestazione sarà:

```
function I = gausscomp(a,b,N,fun).
```

dove gli input sono gli stessi del punto 2. Ricordiamo che sull'intervallo di riferimento $[-1, 1]$ la formula di quadratura di Gauss a due punti per approssimare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(y)dy$ è definita da:

$$\overline{I}_G(g) = \sum_{i=0}^{1} \overline{\omega}_i\, g(\overline{y}_i), \quad \overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_1 = 1, \quad \overline{y}_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \overline{y}_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Per applicare questa formula su un generico intervallo $[a, b]$ basta utilizzare il cambio di variabile

$$\phi(y) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} y;$$

Ponendo $g(y) \equiv f(\phi(y))$, ricaviamo la formula di quadratura di Gauss a due punti per approssimare $\int_a^b f(x)dx$:

$$I_G(f) = \sum_{i=0}^{1} \omega_i \, f(y_i), \qquad \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{b-a}{2} \overline{\omega}_0 = \frac{b-a}{2}, \quad \omega_1 = \frac{b-a}{2} \overline{\omega}_1 = \frac{b-a}{2}, \\ y_0 &= \phi(\overline{y}_0) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \\ y_1 &= \phi(\overline{y}_1) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \left(+\frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

9. Ripetere i Punti 5 e 6 utilizzando questa formula di quadratura e confrontare l'ordine di convergenza con quello ottenuto applicando la formula del trapezio composita (anch'essa formula di quadratura a due punti) e quella di Simpson composita.

Esercizio 2

Sia g una funzione continua definita sull'intervallo $[-1, 1]$. Si prendano tre punti di interpolazione $t_0 = -1, t_1 = \alpha$ e $t_2 = 1$, dove α è un numero reale tale che $|\alpha| < 1$. Per approssimare l'integrale $\int_{-1}^{1} g(t)\, dt$, si consideri la formula di quadratura seguente:

$$I_2(g) = \sum_{j=0}^{2} w_j g(t_j) = w_0 g(-1) + w_1 g(\alpha) + w_2 g(1). \tag{1}$$

a) Trovare i pesi w_0, w_1 ed w_2 in funzione di α tali che la formula (1) abbia grado di esattezza 2.

b) Trovare inoltre α tale che $I_2(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\, dt$ per tutti i polinomi p di grado 3.

c) Riscrivere la formula per approssimare l'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$, utilizzando il cambio di variabili

$$T : [-1, 1] \to [a, b], \quad x = T(t) = \frac{1}{2} \left[(a+b) + t(b-a) \right],$$

e ponendo $g(t) = f(T(t))$. Cosa si osserva?

Esercizio 3

Si considerino le funzioni

$$p_1(x) = x^4 - 2x + 1, \quad p_2(x) = 3x^9 - 5x^4 + 1, \quad g(x) = \frac{10}{x+2}, \quad z(x) = \sqrt{x}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

1. Calcolarne gli integrali utilizzando la formula di quadratura di Gauss–Legendre semplice di ordine $n \geq 0$

   $$I_{G,n}(f) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \, f(y_i),$$

   per $n = 0, \ldots, 7$. Per calcolare nodi $\{y_i\}_{i=0}^n$ e pesi $\{\omega_i\}_{i=0}^n$ della formula di quadratura gaussiana utilizzare la funzione Matlab® `zplege.m` come

   ```
   function [x, w] = zplege(n, x_a, x_b)
   ```

   dove n indica l'ordine della formula ($n + 1$ sono il numero di nodi di quadratura), `x_a`, `x_b` sono gli estremi dell'intervallo di integrazione, `x` è un vettore contenente i nodi di quadratura e `w` è il vettore contenente i relativi pesi.

2. Tracciare un grafico in scala semilogaritmica degli errori di quadratura al variare di $n = 0, \ldots, 7$; commentare il risultato alla luce della teoria.

3. Si confrontino gli errori di quadratura precedentemente ottenuti con quelli associati alle formule del punto medio, trapezi e Simpson semplici.