Seconda Prova in Itinere

15/06/2021 — versione 1 — ◇♡♣♠◇♠♣♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = e^{(2x+\sin(\pi\, x))}$ e il suo interpolante polinomiale $\Pi_5 f(x)$ su $n+1 = 6$ nodi equispaziati in $[-1, 1]$. Si riportino il valore massimo dell'errore $e_5(f) = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - \Pi_5 f(x)|$ e il punto $\overline{x} \in [-1, 1]$ dove questo è realizzato.

1.6122, 0.8588

2 — 1 pt (***) No Multichance

Siano date le $n+1 = 5$ coppie di dati $\{(0, 1), (0.25, 0.5), (0.5, 1.5), (0.75, -0.25), (1, 1)\}$. Qual è valore massimo dell'interpolante polinomiale lineare a tratti $\Pi_1^H(x)$ dei dati precedenti per $x \in [0, 1]$?

1.5

3 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = 2\,|\sin(\pi\, x)|$ e il suo interpolante polinomiale quadratico a tratti $\Pi_2^H f(x)$ su 4 sottointervalli equispaziati di $[0, 4]$. Si riporti il valore $\Pi_2^H f(1.75)$.

3/2

4 — 2 pt (***) No Multichance

Dati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 2$, sia $\varphi_0(x)$ la funzione caratteristica di Lagrange associata al nodo x_0. Quanto vale l'approssimazione dell'integrale $\int_{x_0}^{x_2} \varphi_0(x)\, dx$ ottenuta con il metodo di Simpson?

$-1/3$

5 — 1 pt

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, dove $f \in C^\infty([a,b])$, tramite una formula di quadratura composita. Sapendo che per $M_1 = 10$ sottointervalli equispaziati di $[a,b]$ si ha un errore pari a $e_1(f) = 10^{-1}$, mentre per $M_2 = 100$ sottointervalli si ha un errore $e_2(f) = 10^{-4}$, si stimi l'ordine di accuratezza p della formula.

3

6 — 1 pt

Si consideri l'approssimazione dell'integrale doppio $I(f) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$ tramite la formula dei trapezi, ovvero

$$I_t(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{4}\,[f(a,c) + f(a,d) + f(b,c) + f(b,d)]\,.$$

Posti $a = c = 0$, $b = d = 1$ e $f(x,y) = 2^{(x+3y)}$, si riporti il valore di $I_t(f)$.

6.7500

7 — 2 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -\sqrt{\dfrac{10\,y(t)}{10+t}} & t \in (0,4), \\ y(0) = 9. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Heun con passo $h = 0.2$, si riporti il valore calcolato di u_{N_t}, ovvero l'approssimazione di $y(4)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, \ldots, N_t$.

1.3664

8 — 1 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + \eta\,u'(x) = f(x) & x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases}$$

dove $\eta > 0$. Si supponga di approssimare tale problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con tecnica *Upwind* e passo di discretizzazione $h > 0$, ottenendo così la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$. Assumendo che la soluzione esatta $u \in C^4([a,b])$ sia nota e che l'errore per $h = h_1 = 0.1$ sia $E_{h_1} = \max_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j| = 2 \cdot 10^{-2}$, si riporti il valore stimato dell'errore E_{h_2} corrispondente alla scelta $h = h_2 = 0.05$.

10^{-2}

9 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 3\,u(x) = 10\,\sin(\pi x) & x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_2, ovvero l'approssimazione di $u(x_2)$.

1.1442

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema di diffusione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 6\,\sin(\pi\,x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Si consideri l'approssimazione di tale problema tramite il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione spaziale $h = 0.5$ e il metodo di Crank-Nicolson con passo di discretizzazione temporale $\Delta t = 0.1$. Si calcoli u_1^5, ovvero l'approssimazione di $u(0.5, 0.5)$.

0.0867

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il seguente problema differenziale, che rappresenta un sistema massa-molla-smorzatore in condizioni di risonanza:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}(t) + 4\,\dfrac{dx}{dt}(t) + 100\,x(t) = 200\,\cos(10\,t) & t \in (0,5), \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 50, \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

di cui $x(t)\,:\,[0,5] \to \mathbb{R}$ è la soluzione.

Punto 1) — 3 pt

Si riscriva il problema (1) come un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t) & t \in (0,t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{2}$$

con $\mathbf{y}(t) = (w(t),\ x(t))^T$, dove $w(t) = \dfrac{dx}{dt}(t)$ per $t \in (0,t_f)$. Si riportino le espressioni di $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{g}(t)\,:\,(0,t_f) \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y}_0$ e t_f.

$A = [-4,\ -100;\ 1,\ 0]$, $\mathbf{g}(t) = (200\,\cos(10\,t),\ 0)^T$, $\mathbf{y}_0 = (50,\ 0)^T$, $t_f = 5$

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 2 pt

Con riferimento a un generico sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (2), si riporti la definizione di zero-stabilità in relazione al metodo di Eulero in avanti. Si definisca tutta la notazione utilizzata.

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 3 pt

Si approssimi il problema (2) del Punto 1) tramite il metodo di Eulero in avanti usando opportunamente la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m` con passo $h = 10^{-2}$. Si riportino:

- i valori delle approssimazioni u_1 e u_{N_h} rispettivamente di $x(t_1)$ e $x(t_f)$, dove $t_n = n\,h$ per $n = 0,1,\ldots,N_h$, $h = \dfrac{t_f}{N_h}$;
- il valore minimo $u_m = \min\limits_{n=0,\ldots,N_h} u_n$ e il tempo discreto $t_m = \mathrm{argmin}_{n=0,\ldots,N_h} u_n$ corrispondente a u_m.

$u_1 = 0.5000$, $u_{N_h} = -2.0510$, $u_m = -6.6617$, $t_m = 4.8700$

Spazio per risposta breve

Punto 4) — 2 pt

Dopo aver risposto al Punto 3) e sapendo che la soluzione esatta del problema (1) è

$$x(t) = 5\,\sin(10\,t),$$

si calcolino gli errori $E_h = |u_{N_h} - x(t_f)|$ ottenuti con il metodo di Eulero in avanti e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-3}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-4}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-4}$, essendo u_n l'approssimazione di $x(t_n)$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \dots, 4$.

0.0583,   0.0288,   0.0143,   0.0071

Spazio per risposta breve

Punto 5) — 2 pt

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al Punto 4) per stimare algebricamente l'ordine di convergenza p del metodo di Eulero in avanti. Si giustifichi la risposta data e la si motivi alla luce della teoria.

$p = 1.0042$

Spazio per risposta lunga

Punto 6) — 2 pt   (***) No Multichance

Con riferimento al sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (2) del Punto 1) con $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, per quali valori di $h > 0$ il metodo di Eulero in avanti risulta assolutamente stabile?

$0 < h < 0.04$

Spazio per risposta breve

Punto 7) — 3 pt   (***) No Multichance

Si vuole ora applicare a un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (2) il metodo di Runge-Kutta associato alla seguente tabella di Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

Si scriva un'opportuna funzione Matlab® che implementi il metodo precedente per un sistema di EDO con il generico passo $h > 0$.

Si utilizzi la funzione precedentemente implementata per risolvere il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (2) di cui al Punto 1) usando il passo $h = 10^{-2}$. Si riportino i valori delle approssimazioni u_1 e u_{N_h} rispettivamente di $x(t_1)$ e $x(t_f)$.

$u_1 = 0.4992, \quad u_{N_h} = -1.3117$

Spazio per risposta breve