Esercizi 10 — 9 pt

1 — 1 pt

Si consideri l'approssimazione di $f'(\overline{x})$ tramite il seguente metodo delle differenze finite $\delta f(\overline{x}) = \dfrac{-3\,f(\overline{x}) + 4f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}+2h)}{2h}$, per $h > 0$. Dati $f(x) = (5 + 2^x)$, $\overline{x} = 0$ e $h = 1/4$, si riporti il valore dell'approssimazione $\delta f(\overline{x})$ così ottenuta.

0.6852

2 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = \left(\gamma\,x^3 + 7\,x - 53\right)$ dipendente dal parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ e l'approssimazione di $f'(\overline{x})$ tramite le differenze finite centrate $\delta_c f(\overline{x})$ in un generico punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ con passo $h = 1/2$. Si riporti l'espressione dell'errore $E_c f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_c f(\overline{x})$ in funzione del parametro γ.

$-\gamma/4$

3 — 2 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + 2\,t & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero in avanti con passo $h > 0$, si riporti l'espressione di u_3 in termini di h, ovvero l'approssimazione di $y(t_3)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots$.

$-3h^3 + 9h^2 - 3h + 1$

4 — 2 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + 2\,t & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero all'indietro con passo $h > 0$, si riporti l'espressione di u_3 in termini di h, ovvero l'approssimazione di $y(t_3)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots$.

$$\frac{6h^4 + 16h^3 + 12h^2 + 1}{(h+1)^3}$$

5 — 1 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -\left(1 + \dfrac{t}{2}\right) y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero all'indietro con passo $h = 0.1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

2.7149

6 — 2 pt

Per l'approssimazione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t)\, e^{t\, y(t)} & t \in (0,7), \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

si consideri il seguente metodo numerico:

$$\text{dato } u_0 = y_0, \qquad \begin{cases} u_{n+1/2} = u_n + \dfrac{h}{2} f(t_n, u_n) \\ q_n = f(t_n + \dfrac{h}{2}, u_{n+1/2}) \\ u_{n+1} = u_n + h\, q_n \end{cases} \qquad \text{per } n \geq 0,$$

essendo $h > 0$ il passo e $t_n = t_0 + n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots$.

Posto il passo $h = 0.1$, si riporti il valore dell'approssimazione u_3 di $y(t_3)$ così ottenuta applicando il precedente metodo.

1.3627