Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **Appello** **10 luglio 2019**	**Prof. L. Dedè** **Prof. A. Manzoni** **Prof. S. Micheletti**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il più grande numero x_{max} rappresentabile nell'insieme $\mathbb{F}(2,4,-7,6)$; riportare il risultato in base decimale.

$$\boxed{x_{max} = 60}$$

2. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare i valori degli elementi $l_{32} = (L)_{32}$ e $u_{33} = (U)_{33}$ rispettivamente delle matrici triangolari *inferiore* L e *superiore* U.

$$\boxed{l_{32} = 5 \qquad u_{33} = 9}$$

3. *(1 punto)* Si consideri un metodo diretto per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $n \geq 1$. Sapendo che il numero di condizionamento di A è $K_2(A) = 10^8$, $\|\mathbf{b}\| = 10^2$ e il residuo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ calcolato usando la soluzione approssimata $\widehat{\mathbf{x}}$ ha norma $\|\mathbf{r}\| = 10^{-9}$, si stimi l'errore relativo $e_{rel} = \dfrac{\|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

$$\boxed{e_{rel} \lesssim 10^{-3} = 0{,}001}$$

4. *(1 punto)* Quale tra gli autolavori della matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 3 \\ 0 & 23 & -41 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$ può essere determinato applicando il metodo delle *potenze inverse*? Se ne riporti il valore.

$$\boxed{\lambda_1(A) = -1}$$

5. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ e il metodo delle *potenze inverse*. Posta l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 1)^T$, si riporti l'approssimazione dell'autovettore normalizzato $\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}/\|\mathbf{x}^{(1)}\|$.

$$\boxed{\mathbf{y}^{(1)} = (9,\ -1)^T / \sqrt{82}}$$

6. *(2 punti)* Si consideri la funzione $f(x) = 1 - e^{(x-10/9)}$ con un unico zero α e il metodo di bisezione per la sua approssimazione. Senza applicare esplicitamente il metodo, si *stimi* l'errore commesso dopo $k = 6$ iterazioni partendo dall'intervallo iniziale $[-2{,}3]$.

$$\boxed{|x^{(k)} - \alpha| \leq 0{,}039\,062\,5}$$

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x^2 \,/\, (2\,x - 4)$ e il metodo delle iterazioni di punto fisso per l'approssimazione del punto fisso $\alpha = 4$. Si riporti il valore della prima iterata $x^{(1)}$ del metodo assumendo l'iterata iniziale $x^{(0)} = 16/3$.

$$\boxed{x^{(1)} = \tfrac{64}{15} = 4{,}266\,667}$$

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$. Inoltre, si consideri la soluzione di tale sistema lineare mediante un metodo iterativo.

12 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo con matrice di iterazione $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (si definisca in modo preciso tutta la notazione usata).

(b) *(2 punti)* Si *dimostri* che la condizione di cui al punto (a) è necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo iterativo per ogni iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (suggerimento: si introduca l'errore $\mathbf{e}^{(k)}$ associato all'iterata $\mathbf{x}^{(k)}$).

(c) *(2 punti)* Si consideri il metodo di Gauss–Seidel per la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si presenti l'algoritmo in forma matriciale.

(d) *(5 punti)* Si implementi il metodo di *Gauss–Seidel* in forma matriciale in Matlab® nella funzione `GaussSeidel.m` (si usi il comando "back-slash" di Matlab® \ laddove necessario). Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato (detto anche residuo relativo). La struttura della funzione è:

```
function [x,Nit] = GaussSeidel(A,b,x0,nmax,tol).
```

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `GaussSeidel.m` per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (6, 6, \ldots, 6)^T \in \mathbb{R}^{100}$ e $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ definita come

$$A = \text{tridiag}\,(-5, 11, -5)\,;$$

si consideri l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 1000$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo normalizzato $r_{rel}^{(N)}$.

$N =$ 20 $\qquad x_3^{(N)} =$ 4,4177 $\qquad r_{rel}^{(N)} =$ $8{,}3899 \cdot 10^{-4}$

Infine, utilizzando opportunamente la funzione `GaussSeidel.m`, si riportino i valori della terza componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_3^{(1)}$ e $x_3^{(2)}$.

$x_3^{(1)} =$ 5,436 514 $\qquad x_3^{(2)} =$ 5,087 246

(e) *(2 punti)* Si commenti la velocità di convergenza a $\mathbf{x}$ attesa per il metodo del *gradiente coniugato* applicato al sistema lineare di cui al punto (d). Si riporti e si discuta il teorema di convergenza corrispondente.

10 punti

Esercizio 2. Si consideri una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dotata dello zero $\alpha \in [a,b]$.

(a) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo del metodo di *Newton* per la ricerca dello zero α di $f(x)$ utilizzando il criterio d'arresto basato sulla *differenza tra iterate successive*.

(b) *(2 punti)* Sia $f(x) = x^4 - 8\,x^2 + 16$. Assumendo il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = 4$, si applichino $N = 10$ iterazioni del metodo di *Newton*. Si riportino i valori delle iterate $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(N)}$ (utilizzando almeno 4 cifre decimali per indicare il risultato).

$x^{(1)} =$ 3,25 $\qquad$ $x^{(2)} =$ 2,745 192 $\qquad$ $x^{(N)} =$ 2,004 001

(c) *(4 punti)* Dopo aver risolto il punto (b) e sapendo che $\alpha = 2$, si calcolino e si riportino i valori dei rapporti:

$$\frac{x^{(N)} - \alpha}{x^{(N-1)} - \alpha} = \frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{x^{(N-1)} - \alpha}{x^{(N-2)} - \alpha} = \frac{1}{2}$$

Si utilizzino tali rapporti per determinare l'ordine di convergenza p del metodo di Newton applicato al punto (b) per la ricerca di α. Infine, si giustifichi il valore di p determinato sulla base delle proprietà teoriche di convergenza del metodo di Newton.

$p =$ 1

(d) *(2 punti)* Si consideri ora il seguente metodo iterativo per la ricerca dello zero $\alpha = 2$ della funzione $f(x) = e^{(x/2-1)} - 1$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{\theta} f(x^{(k)}) \qquad \text{per } k = 0,1,2,\ldots,$$

dove l'iterata iniziale $x^{(0)}$ è "sufficientemente" vicino a $\alpha = 2$ e $\theta \in \mathbb{R}$ è un opportuno parametro. Per quale valore di θ il metodo iterativo precedente converge ad $\alpha = 2$ con ordine $p = 2$? Si motivi la risposta data.

$\theta =$ 1/2

Parte II - Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Siano assegnati i nodi equispaziati x_0, $x_1, \ldots, x_4$ nell'intervallo [0,4] e i corrispondenti valori $y_0 = -5$, $y_1 = -5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ e $y_4 = 5$. Si consideri il polinomio di Lagrange $\Pi_4(x)$ interpolante tali dati ai precedenti nodi e si riporti il valore di $\Pi_4(-0.1)$.

$$\boxed{\Pi_4(-0.1) = -3{,}743\,25}$$

2. *(2 punti)* Si consideri l'interpolante polinomiale lineare a tratti $\Pi_1^H f(x)$ della funzione $f(x) = 1 + \sin(10\,x)$ nell'intervallo $I = [0{,}1]$. Senza costruire esplicitamente $\Pi_1^H f(x)$, si stimi il numero n di sottointervalli equispaziati di [0,1] tali per cui l'errore di interpolazione è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-6}$.

$$\boxed{n \geq 3536}$$

3. *(1 punto)* Sia $f(x) = 1 + \sin(\pi\,x/3)$. Si approssimi $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ con la formula semplice dei trapezi e si riporti l'approssimazione $I_T(f)$ ottenuta.

$$\boxed{I_T(f) = 6}$$

4. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 1 - 3\,x^2$. Si riporti l'errore associato all'approssimazione di $f'(\overline{x})$ in un generico punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ mediate le differenze finite in avanti, ovvero $E_+ f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_+ f(\overline{x})$, usando il passo $h = 1/4$.

$$\boxed{E_+ f(\overline{x}) = \tfrac{3}{4} = 0{,}75}$$

5. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -4\,y(t) - 21\,t & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero in avanti (Eulero Esplicito) con passo $h = 1/10$ e $u_0 = y_0 = 2$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \tfrac{6}{5} = 1{,}2}$$

6. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema differenziale di diffusione:

$$\begin{cases} -u''(x) = 6\,x & x \in (0{,}1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N = 1$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

$$\boxed{u_1 = \tfrac{3}{8} = 0{,}375}$$

7. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema differenziale di diffusione–reazione:

$$\begin{cases} -u''(x) + 5\,u(x) = 8 & x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \qquad u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N = 1$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{12}{13} = 0{,}923\,077}$$

Parte II - Esercizi

Esercizio 1.

10 punti

(a) *(2 punti)* Si descriva la formula di quadratura di *Simpson composita* per l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$; si definisca tutta la notazione utilizzata e si fornisca l'interpretazione grafica della formula.

(b) *(3 punti)* Si definiscano l'ordine di accuratezza p e il grado di esattezza r di una generica formula di quadratura (composita).

Inoltre, per la formula di quadratura di *Simpson composita*, si riportino i valori di p e r; si giustifichino con precisione le risposte date.

(c) *(3 punti)* Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^1 5 \left[x^3 + \sin\left(10\,\pi\,x + \sqrt{3}\right)\right]\,dx$$

mediante la formula di quadratura di *Simpson composita* con $M \geq 1$ sottointervalli equispaziati di $[0,1]$. Si calcolino e si riportino i valori approssimati $I_M(f)$ dell'integrale utilizzando i valori $M = 1$ (formula semplice) e $M = 10$ (formula composita).

$I_1(f) =$ $-0{,}395\,044$ $\qquad$ $I_{10}(f) =$ $1{,}25$

Per il caso $M = 10$ si riporti il valore dell'errore *stimato*, ovvero $\widetilde{E}_{10}(f)$.

$$\widetilde{E}_{10}(f) \leq 0{,}169\,113$$

(d) *(2 punti)* Si consideri ora la formula di quadratura di *Gauss–Legendre* (semplice) con $n+1$ nodi per approssimare l'integrale $I(f)$ di cui al punto (c); si indichi con $I_n^G(f)$ il valore approssimato dell'integrale corrispondente. Si usi tale formula nel caso $n = 1$ sapendo che nell'intervallo di riferimento $\widehat{I} = [-1{,}1]$ i nodi di quadratura sono $\widehat{y}_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\widehat{y}_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$, mentre i pesi di quadratura sono $\widehat{\alpha}_0 = \widehat{\alpha}_1 = 1$. Si riporti il valore dell'integrale così approssimato, ovvero $I_1^G(f)$.

$$I_1^G(f) = 5{,}876\,069$$

Qual è il grado di esattezza r di tale formula?

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy:

12 punti

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & t \in (0,t_f], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

con $t_f > 0$ e il dato iniziale y_0 assegnati.

(a) *(2 punti)* Si considerino il problema di Cauchy (1) e la sua approssimazione mediante il metodo di *Heun*. Si riporti l'algoritmo del metodo (non in stretto linguaggio Matlab®) definendo con precisione tutta la notazione utilizzata.

(b) *(2 punti)* Posti per il problema di Cauchy (1) $f(t,y) = \lambda\, y$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda < 0$, e $t_f = +\infty$, si definisca l'*assoluta stabilità* per il metodo di *Heun*. Se ne discutano inoltre, motivandole, le proprietà di assoluta stabilità.

(c) *(3 punti)* Si consideri il problema di Cauchy (1) con $f(t,y) = [4 - y - 2\cos(t)]\,/(t+1)$, $t_f = 10$ e $y_0 = 4$. Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare tale problema mediante il metodo di *Heun* con diversi passi temporali $h_1 = 1$, $h_2 = 0.5$, $h_3 = 0.25$ e $h_4 = 0.125$. Si riportino i valori della soluzione approssimata $u_{N_{h,i}}$ corrispondente all'istante finale t_f per ciascuno dei precedenti valori di h_i (si riportino almeno 4 cifre decimali).

$u_{N_{h,1}} =$ 4,090 529 $\qquad u_{N_{h,2}} =$ 4,096 844

$u_{N_{h,3}} =$ 4,098 397 $\qquad u_{N_{h,4}} =$ 4,098 784

(d) *(2 punti)* Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = 2\,[2 - \sin(t)/(t+1)]$, si calcolino e si riportino gli errori E_{h_i} associati alle soluzioni $u_{N_{h,i}}$ al tempo t_f ottenuti per ciascun valore di h_i specificato al punto (c) (si riportino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

$E_{h_1} =$ $8{,}3835 \cdot 10^{-3}$ $\qquad E_{h_2} =$ $2{,}0693 \cdot 10^{-3}$

$E_{h_3} =$ $5{,}1571 \cdot 10^{-4}$ $\qquad E_{h_4} =$ $12{,}8826 \cdot 10^{-5}$

Si utilizzino tali risultati per stimare *graficamente* l'ordine di convergenza del metodo di *Heun*. Si motivi la risposta riportando con completezza la procedura seguita e il grafico ottenuto.

(e) *(3 punti)* Si consideri ora un metodo di *Runge–Kutta* per approssimare il generico problema di Cauchy (1). Se ne riporti l'approssimazione associata alla seguente tabella di Butcher:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 0 \\ \hline & 1/3 & 2/3 \end{array}$$

Si indichi, motivandolo, se tale metodo di Runge–Kutta è esplicito o implicito.

Con riferimento al problema di Cauchy (1) con i dati di cui al punto (c), si riporti il valore calcolato di u_1^{RK}, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$ ottenuta utilizzando il metodo di Runge–Kutta di cui sopra con $h = 1$.

$u_1^{RK} =$ 3,3473