# Esercizi 12 — 15 pt

### 1 — 2 pt

Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = A\,\mathbf{y} \qquad t \in (0,1), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

dove $\mathbf{y}(t) = (y_1(t),\, y_2(t))^T$, $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y}_0 = (7,\, 2)^T$ Si approssimi il problema utilizzando il metodo di Eulero all'indietro con passo $h = 0.1$. Si riporti l'approssimazione $\mathbf{u}_{N_h}$ così ottenuta, ovvero l'approssimazione di $\mathbf{y}(t_{N_h})$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, \ldots, N_h$.

$(0.5539,\ 0.8997)^T$

### 2 — 2 pt

Si consideri il sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad t \in (t_0, t_f), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

Dopo aver posto $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T \in \mathbb{R}^3$, $t_0 = 0$, $t_f = 1$, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{1}$ e $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = (-e^{-t}\,y_1 + y_2,\ -y_2 + t,\ y_1 - 2y_3)^T$, si approssimi il problema usando il metodo di Crank–Nicolson con passo $h = 0.1$. Si riporti il valore dell'approssimazione $\mathbf{u}_{N_h}$ di $\mathbf{y}(t_f)$ così ottenuta.

$(1.1178,\ 0.7351,\ 0.5889)^T$

### 3 — 1 pt

Si consideri il sistema di equazioni differenziali ordinarie seguente

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A\,\mathbf{y}(t) \quad t \in (t_0, +\infty), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

dove $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^3$. Per quali valori di $h > 0$ il metodo di Eulero in avanti applicato al problema precedente risulta assolutamente stabile?

$0 < h < \dfrac{3}{5}$

**4 — 2 pt**

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -2\,u''(x) = 10x^2 & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 4 \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N+1 = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica $u_9$, ovvero l'approssimazione di $u(x_9)$.

3.7013

**5 — 2 pt**

Dato il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} -u''(x) + \pi^2\,u(x) = \pi^2\,(x + 2\,\sin(\pi x)) & x \in (0,1), \\ u'(0) = 1 + \pi, \qquad u'(1) = 1 - \pi, \end{cases}$$

si consideri la sua approssimazione numerica tramite metodi delle differenze finite che garantiscano ordine di accuratezza pari a 2 rispetto al passo di discretizzazione $h > 0$. Posto $h = \dfrac{1}{N+1} = 0.1$, si riporti il valore di $u_{N+1}$, ovvero l'approssimazione di $u(1)$ così ottenuta.

1.0405

**6 — 1 pt**

Dato il seguente problema differenziale di diffusione–trasporto:

$$\begin{cases} -3\,u''(x) - 100\,u'(x) = 0 & x \in (-1,1), \\ u(-1) = 5, \qquad u(1) = 0, \end{cases}$$

si consideri (senza applicarla) la sua approssimazione numerica mediante il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h > 0$. Qual è la condizione sul passo di discretizzazione $h$ che garantisce l'assenza di oscillazioni (instabilità) numeriche per la soluzione approssimata del problema?

$0 < h < \dfrac{3}{50} = 0.06$

**7 — 2 pt**

Dato il seguente problema differenziale di diffusione–trasporto:

$$\begin{cases} -u''(x) - 100\,u'(x) = 0 & x \in (-1,1), \\ u(-1) = 7, \qquad u(1) = 0, \end{cases}$$

si consideri la sua approssimazione numerica mediante il metodo delle differenze finite centrate con tecnica upwind e passo di discretizzazione $h = 0.2$. Si riporti il valore dell'approssimazione $u_1$ di $u(-0.8)$ così ottenuta.

0.3333

**8 — 1 pt**

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 3\,u(x) = f(x) & x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Si supponga di approssimare tale problema con il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h > 0$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$. Si assuma che la soluzione analitica sia nota e tale che $u \in C^4([a,b])$; inoltre, si assuma che l'errore per $h = h_1 = 0.1$ sia $E_{h_1} = \max_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j| = 4 \cdot 10^{-2}$. Si riporti il valore stimato dell'errore $E_{h_2}$ corrispondente alla scelta $h = h_2 = 0.05$.

$10^{-2}$

**9 — 2 pt**

Si consideri il seguente problema di diffusione (equazione del calore):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 7\,\sin(\pi\,x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Si consideri l'approssimazione di tale problema tramite il metodo delle differenze finite con passo di discretizzazione spaziale $h = 0.5$ e il metodo di Eulero all'indietro con passo di discretizzazione temporale $\Delta t = 0.2$. Si calcoli $u_1^{N_t}$, ovvero l'approssimazione di $u(0.5, 1)$, essendo $N_t = 1/\Delta t = 5$.

0.0589