Appello – Parte 1

08/07/2021 — versione 1 — ◇♡♣♠◇♠♣♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 1 pt (***) No Multichance

Sia dato l'insieme dei numeri floating point $\mathbb{F}(2, t, -2, 3)$ dipendente dal parametro $t \in \mathbb{N}$. Sapendo che il valore dell'epsilon macchina (in base 10) con tale insieme è $\epsilon_M = \frac{1}{16}$, si determini il valore assunto da t.

5

2 — 1 pt

Si consideri il seguente algoritmo: dati $A \in \mathbb{R}$, positivo, e $x_0 = A$, si ponga $x_{n+1} = \frac{2}{3}\, x_n + \frac{A}{3\,(x_n)^2}$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Il valore x_n fornisce un'approssimazione di $A^{1/3}$ per n "grande". Posto $A = 17$, si riporti il valore approssimato x_6 ottenuto applicando l'algoritmo precedente.

2.6000

3 — 1 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & \gamma \\ \gamma & 3 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$. Per quali valori di γ è possibile risolvere un generico sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tramite il metodo della fattorizzazione di Cholesky?

$-\sqrt{15} < \gamma < \sqrt{15}$

4 — 2 pt (***) No Multichance

Sia data una matrice $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & \gamma & 1 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ con $\gamma \neq -\dfrac{17}{8}$. Si determinino i valori di tale parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ tali per cui il metodo di Gauss–Seidel applicato alla soluzione di un sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge per ogni scelta dell'iterata iniziale.

$-\dfrac{17}{8} < \gamma < \dfrac{9}{4}$

5 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. Si applichi il metodo delle potenze per l'approssimazione di $\lambda_1(A)$ a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1}$. Si riportino i valori delle approssimazioni $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$ di tale autovalore.

4.3333, 6.2179, 6.1543

6 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & (\sqrt{17}-1) & 0 \\ -(\sqrt{17}+1) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$. Per quali valori dello shift $s \in \mathbb{R}$ è possibile applicare il metodo delle potenze inverse con shift per l'approssimazione dell'autovalore -5 di A?

$s < -\dfrac{5}{14} = -0.3571$ e $s \neq -5$

7 — 1 pt

Si consideri il metodo di bisezione per l'approssimazione dell'unico zero $\alpha \in (-3, 6)$ di una funzione $f(x) \in C^0([-3, 6])$ tale che $f(-3) < 0$ e $f(6) > 0$. Qual è l'errore stimato dopo l'applicazione di $k = 9$ iterazioni del metodo?

0.0088

8 — 2 pt

Si consideri il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 4$ della funzione $f(x) = (x-4)\log\left(\dfrac{x}{4}\right)$. Si riportino i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ ottenute applicando il metodo a partire da $x^{(0)} = 6$.

4.9024, 4.4286

9 — 1 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x\,(3 - 3x + x^2)$. Qual è l'ordine di convergenza p atteso dal metodo delle iterazioni di punto fisso al punto fisso $\alpha = 1$ partendo dall'iterata iniziale $x^{(0)} = 1.10$?

3

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x + \gamma \left(e^{-5(x-3)} - 1\right)$ dipendente dal parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ e dotata del punto fisso $\alpha = 3$. Per quali valori di γ il metodo delle iterazioni di punto fisso converge ad α, scegliendo l'iterata iniziale "sufficientemente" vicina a α?

$0 < \gamma < \dfrac{2}{5}$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è

$$A = \mathrm{tridiag}(-1,\,2,\,-1)$$

e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$.

Punto 1) — 3 pt

- Sapendo che gli autovalori di A sono $\lambda_j(A) = 2 + 2\cos\left(\pi\,\dfrac{j}{n+1}\right)$ per $j = 1, \ldots, n$, dove $\lambda_1(A) > \lambda_2(A) > \cdots > \lambda_n(A)$, si *stimi* il numero di condizionamento spettrale $K(A)$ di A in funzione di n per $n \to +\infty$.
- Si utilizzi Matlab® per calcolare $K(A)$ in funzione di n, con $n = 10, 20, 30, \ldots, 100$. Si riportino i valori calcolati per $n = 20$ e $n = 100$.
- Si confrontino e si commentino i risultati precedenti.

Spazio per risposta lunga

$$\left(K(A) \approx \frac{4}{\pi^2} n^2,\; K_{20}(A) = 178.0643,\; K_{100}(A) = 4.1336 \cdot 10^3\right)$$

Punto 2) — 1 pt

Quale metodo diretto utilizzereste per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? Si motivi dettagliatamente la risposta data.

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 3 pt

Si intende risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$, sapendo che $\mathbf{x} = \mathbf{2}$. Supponiamo che, a causa degli errori di arrotondamento, il vettore $\mathbf{b}$ sia affetto da una perturbazione $\delta\mathbf{b} = 10^{-6}\mathbf{c}$, dove $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\|\mathbf{c}\|_2 = 1$, e che si risolva dunque il sistema lineare perturbato $A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$.

Si stimi l'errore relativo $\|\delta\mathbf{x}\|_2/\|\mathbf{x}\|_2$ commesso per $n = 1000$ e si verifichi con Matlab® la validità di tale stima commentando il risultato ottenuto. Per la verifica in Matlab® , si utilizzi il seguente vettore $\mathbf{c}$:

```
>> c = rand(size(b));
>> c = c./norm(c);
```

e si risolva il sistema lineare con il comando \ di Matlab® .

Spazio per risposta lunga $\quad (err_{stim} = 0.1436,\ err_{vero} = 0.0012)$

Punto 4) — 2 pt

Si consideri il metodo del *gradiente* per la soluzione del sistema lineare con la matrice A per $n = 1000$. Senza applicare esplicitamente l'algoritmo, si stimi il fattore di abbattimento dell'errore in norma A, ovvero $\dfrac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A}$, dopo $k = 2000$ iterazioni del metodo. Si giustifichi la risposta data definendo tutta la notazione utilizzata.

Spazio per risposta lunga (0.9902)

Punto 5) — 3 pt (***) No Multichance

Si consideri ora il metodo del *gradiente precondizionato* per risolvere il sistema lineare associato alla matrice A con $n = 1000$. In particolare, si consideri la seguente matrice di precondizionamento simmetrica e definita positiva:

$$P = \text{pentadiag}\,(\,1,\ -16,\ \beta, -16, 1\,) \in \mathbb{R}^{1000\times 1000},$$

dipendente dal parametro $\beta > 0$. Per quale valore del parametro β a scelta tra 30, 45 e 60, il metodo del gradiente precondizionato converge più rapidamente alla soluzione per ogni scelta dell'iterata iniziale? Si motivi dettagliatamente la risposta data.

Spazio per risposta lunga $(\beta = 30)$

Punto 6) — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri ora il metodo del *gradiente coniugato* (non precondizionato) per risolvere il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b}$ definito al Punto 3), usando opportunamente la funzione Matlab® `pcg` con vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, tolleranza $tol = 10^{-3}$ e un opportuno numero massimo di iterazioni. Si risolva il problema per $n = 10, 20, 30, \ldots, 100$, e si riporti il numero di iterazioni effettuato per $n = 10$, 20 e 100. Come si giustifica l'andamento del numero di iterazioni ottenuto rispetto a n alla luce della teoria?

Spazio per risposta lunga (5, 10, 50)

Punto 7) — 3 pt

Si consideri ora il seguente sistema di equazioni non lineari

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + \sin(\pi\,\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la matrice $A = \mathrm{tridiag}(-1,\, 2,\, -1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è stata definita precedentemente.

Posto $n = 10$, si approssimi lo zero $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{10}$ del precedente sistema di equazioni non lineari implementando opportunamente il metodo di Newton in Matlab® .

Si riportino:

- l'espressione della generica matrice Jacobiana $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$;
- i valori della decima componente della prima e seconda iterata, ovvero $(\mathbf{x}^{(1)})_{10}$ e $(\mathbf{x}^{(2)})_{10}$, ottenute applicando il metodo di Newton a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \dfrac{1}{50}\,(1,\, 2,\, \ldots, 10)^T$.

Spazio per risposta breve
$(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = A + \pi\,\mathrm{diag}\,(\cos(\pi\,\mathbf{x})),\ (\mathbf{x}^{(1)})_{10} = -0.0220,\ (\mathbf{x}^{(2)})_{10} = 2.6359 \cdot 10^{-5})$