Esercizi – 50pt – 75’

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

Esercizio 1 – 28pt

Si consideri l’equazione non lineare

$$f(x) = (x-2)\, e^{(x-1)} \tag{1}$$

dotata dello zero $\alpha = 2$.

Punto 1.1) – 2 pt

Si consideri il metodo delle iterazioni di punto fisso per l’approssimazione dello zero α di $f(x)$ usando la funzione di iterazione

$$\phi(x) = x - \frac{(x-2)\, e^{(x-2)}}{2\,e-1}. \tag{2}$$

Si mostri che lo zero α di $f(x)$ coincide con un punto fisso di $\phi(x)$.

Spazio per risposta lunga

Punto 1.2) – 5 pt

Si determini, motivando con completezza la risposta, se il metodo delle iterazioni di punto fisso per la funzione $\phi(x)$ di Eq. (2) converge ad α per ogni iterata iniziale $x^{(0)} \in [1.5, 3.5]$.

Spazio per risposta lunga

Punto 1.3) – 3 pt

Sempre considerando il metodo delle iterazioni di punto fisso e la funzione di iterazione $\phi(x)$ di Eq. (2), si stimi il valore $L \in \mathbb{R}$ tale che $|x^{(1)} - \alpha| \leq L\, |x^{(0)} - \alpha|$ questa volta per ogni $x^{(0)} \in [1.5, 2.5]$. Si motivi la risposta data.

$L = 0.931644$

Spazio per risposta lunga

Punto 1.4) – 3 pt

Sempre considerando il metodo delle iterazioni di punto fisso e la funzione di iterazione $\phi(x)$ di Eq. (2), si determini l'ordine di convergenza del metodo ad α per un'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α. Si motivi la risposta data.

$\phi'(\alpha) = 0.77460$

Spazio per risposta lunga

Punto 1.5) – 3 pt

Considerando la funzione di iterazione $\phi(x)$ di Eq. (2), si utilizi la funzione Matlab® `ptofis.m` con $x^{(0)} = 1.5$ e tolleranza sul criterio d'arresto basato sulla differenza tra iterate successive pari a 10^{-4}. Si riportino il numero di iterazioni eseguite N e i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$.

$N = 32, \qquad x^{(1)} = 1.568356, \qquad x^{(2)} = 1.631542$

Spazio per risposta breve

Punto 1.6) – 4 pt

Dopo aver risposto al punto 1.5) e sempre per $x^{(0)} = 1.5$, si determini se la differenza tra iterate successive $|x^{(k+1)} - x^{(k)}|$ fornisce una sovrastima o sottostima dell'errore vero $|x^{(k)} - \alpha|$ per una generica iterata $k \geq 0$. Si motivi la risposta data.

Spazio per risposta lunga

Punto 1.7) – 5 pt

Il metodo di accelerazione di Aitken consiste nell'applicare il metodo delle iterazioni di punto fisso alla seguente funzione di iterazione

$$\phi_\Delta(x) = \frac{x\,\phi(\phi(x)) - (\phi(x))^2}{\phi(\phi(x)) + x - 2\phi(x)}.$$

Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `ptofis.m` per approssimare il punto fisso α della funzione di iterazione $\phi(x)$ di Eq. (2) usando $x^{(0)} = 1.5$ e tolleranza sul criterio d'arresto basato sulla differenza tra iterate successive pari a 10^{-4}. Si riportino il numero di iterazioni eseguite N e i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$.

$N = 5, \qquad x^{(1)} = 2.403732, \qquad x^{(2)} = 2.080758$

Spazio per risposta breve

Punto 1.8) – 3 pt

Dopo aver risposto al punto 1.7), si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `stimap.m` per stimare l'ordine di convergenza del metodo di accelerazione di Aitken applicato alla funzione $\phi(x)$ di Eq. (2).

$p = 2.007$

Spazio per risposta breve

Esercizio 2 – 22pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}(t) = -2\,\dfrac{dx}{dt}(t) - 6\,x(t) + f(t) & t \in (0, t_f), \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 1, & \\ x(0) = 4, & \end{cases} \tag{3}$$

dove $f(t) = 10$ e $t_f = 5$.

Punto 2.1) – 3 pt

Si riscriva il problema (3) come un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t) & t \in (0, t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, & \end{cases} \tag{4}$$

con $\mathbf{y}(t) = (w(t),\ x(t))^T$, dove $w(t) = \dfrac{dx}{dt}(t)$ per $t \in (0, t_f)$. Si riportino le espressioni di $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{g}(t) : (0, t_f) \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{y}_0$.

$A = [-2,\ -6;\ 1,\ 0]$, $\quad \mathbf{g}(t) = (10,\ 0)^T$, $\quad \mathbf{y}_0 = (1,\ 4)^T$

Spazio per risposta breve

Punto 2.2) – 4 pt

Si approssimi il problema (4) tramite il metodo di Eulero in avanti usando opportunamente la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m` con passo $h = 0.1$. Si riportino i valori delle approssimazioni u_1 e u_{N_h} rispettivamente di $x(t_1)$ e $x(t_f)$, dove $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$ e $h = \dfrac{t_f}{N_h}$.

$u_1 = 4.100000$, $\quad u_{N_h} = 1.703313$

Spazio per risposta breve

Punto 2.3) – 4 pt (***)

Dopo aver risposto al punto 2.2) e sapendo che la soluzione esatta del problema è

$$x(t) = e^{-t}\left(\frac{7}{3}\cos(\sqrt{5}\,t) + \frac{10}{3\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}\,t)\right) + \frac{5}{3},$$

si calcolino gli errori $E_h = |u_{N_h} - x(t_f)|$ ottenuti con il metodo di Eulero in avanti e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-2}$, $h_2 = 5\cdot 10^{-3}$, $h_3 = 2.5\cdot 10^{-3}$ e $h_4 = 1.25\cdot 10^{-3}$, essendo u_n l'approssimazione di $x(t_n)$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1,\ldots,4$.

0.00141799, 0.00066221, 0.00031986, 0.00015717

Spazio per risposta breve

Punto 2.4) – 3 pt (***)

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al punto 2.3) per stimare algebricamente l'ordine di convergenza p del metodo di Eulero in avanti. Si giustifichi la risposta data e la si motivi alla luce della teoria.

$p = 1.0251$

Spazio per risposta lunga

Punto 2.5) – 4 pt (***)

Si approssimi ora il problema (4) tramite il metodo di Heun. Si implementi il metodo modificando opportunamente la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m`. Posto $h = 0.1$, si riportino i valori delle approssimazioni u_1 e u_{N_h} rispettivamente di $x(t_1)$ e $x(t_f)$, dove $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$ e $h = \dfrac{t_f}{N_h}$.

$u_1 = 4.020000$, $u_{N_h} = 1.661401$

Spazio per risposta breve

Punto 2.6) – 4 pt (***)

Posti ora per il problema (4) $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$ e $t_f = +\infty$, si verifichi che il metodo di Heun risulta assolutamente stabile per $h = 0.5$. Si giustifichi la risposta data.

$|1 + z + z^2/2| = 0.559017 < 1$

Spazio per risposta lunga