Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **<u>Ultima Prova in Itinere</u>** **21 giugno 2019**	**Prof. L. Dedè** **Prof. A. Manzoni** **Prof. S. Micheletti**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 1h 30m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Siano assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots, x_4$ nell'intervallo [0,4] e i corrispondenti valori $y_0 = -4$, $y_1 = -2$, $y_2 = -2$, $y_3 = 0$ e $y_4 = -2$. Si consideri il polinomio di Lagrange $\Pi_4(x)$ interpolante tali dati ai precedenti nodi e si riporti il valore di $\Pi_4(2.5)$.

$$\boxed{\Pi_4(2.5) = -1{,}1094}$$

2. *(1 punto)* Si approssimi l'integrale $I = \int_{-4}^{4} (3 - 7\,x^3)\, dx$ con la formula semplice del punto medio e si riporti l'approssimazione I_{PM} ottenuta.

$$\boxed{I_{PM} = 24}$$

3. *(2 punti)* Si consideri la formula dei trapezi composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_0^3 e^x \, dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero M di sottointervalli equispaziati di $[0{,}3]$ tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-3}$.

$$\boxed{M \geq 213}$$

4. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 1 - 3^{8x}$. Si riporti il valore approssimato di $f'(\overline{x})$ in $\overline{x} = 0$ mediate le differenze finite all'indietro, ovvero $\delta_- f(\overline{x})$, usando il passo $h = 1/8$.

$$\boxed{\delta_- f(\overline{x}) = -\frac{16}{3} = -5{,}3333}$$

5. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 3 - 5\,x^2$. Si riporti l'errore associato all'approssimazione di $f'(\overline{x})$ in un generico punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ mediate le differenze finite in avanti, ovvero $E_+ f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_+ f(\overline{x})$, usando il passo $h = 1/2$.

$$\boxed{E_+ f(\overline{x}) = \frac{5}{2} = 2{,}5}$$

6. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema differenziale di diffusione:

$$\begin{cases} -u''(x) = 6 & x \in (0{,}1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N = 1$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{3}{4} = 0{,}75}$$

7. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema differenziale di diffusione–reazione:

$$\begin{cases} -u''(x) + 5\,u(x) = 8\,\sin(\pi x) & x \in (0{,}1), \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 1. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N = 1$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{12}{13} = 0{,}923\,077}$$

Esercizio 1.

10 punti

(a) *(3 punti)* Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, si definisca e si riporti con precisione l'espressione del polinomio interpolante composito lineare $\Pi_H^1 f$ considerando $N+1$ nodi equispaziati in $[a,b]$, ovvero $x_0 = a, x_1, \dots, x_N = b$, con passo $H = (b-a)/N$. Si interpreti graficamente $\Pi_H^1 f$.

Si riporti il risultato (teorema) di convergenza dell'interpolazione composita lineare.

(b) *(2 punti)* Utilizzando opportunamente la funzione `interp1` di Matlab® , si approssimi la funzione

$$f(x) = 8\left[e^{x/10} + \sin\left(\pi\, x + \sqrt{3}\right)\right] \quad \text{definita in } [a,b] = [0,10],$$

mediante il polinomio interpolante composito *lineare* $\Pi_H^1 f$ su nodi equispaziati con passi di ampiezza $H = 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125$. Si riportino, al variare di H, i valori delle approssimanti corrispondenti $\Pi_H^1 f$ valutate in $\overline{x} = \sqrt{2}$.

per $H = 0.25$: $\Pi_H^1 f(\overline{x}) =$ 8,455 342 per $H = 0.125$: $\Pi_H^1 f(\overline{x}) =$ 8,358 985

per $H = 0.0625$: $\Pi_H^1 f(\overline{x}) =$ 8,355 487 per $H = 0.03125$: $\Pi_H^1 f(\overline{x}) =$ 8,351 64

(c) *(2 punti)* In seguito al punto (b), si calcolino e si riportino gli errori $E_H(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_H^1 f(x)|$ associati alle corrispondenti approssimanti $\Pi_H^1 f$ (al fine del calcolo dell'errore in Matlab® si valutino $f(x)$ e $\Pi_H^1 f(x)$ in 1000 punti con il comando `linspace(0, 10, 1000)`).

per $H = 0.25$: $E_H(f) = 59{,}423\,491 \cdot 10^{-2}$ per $H = 0.125$: $E_H(f) = 15{,}393\,128 \cdot 10^{-2}$

per $H = 0.0625$: $E_H(f) = 38{,}5389 \cdot 10^{-3}$ per $H = 0.03125$: $E_H(f) = 9{,}647\,382 \cdot 10^{-3}$

Alla luce del teorema di convergenza di cui al punto (a), si stimi *algebricamente* l'ordine di convergenza p del metodo e si commentino i risultati ottenuti.

(d) *(1 punto)* Si considerino ora le coppie di dati $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ con $\{x_i\}_{i=0}^n$ nodi distinti e $n \gg 1$. Si definisca il polinomio $p_m(x) \in \mathbb{P}_m$ approssimante tali dati nel senso dei *minimi quadrati*, dove $m \geq 0$.

(e) *(2 punti)* Si considerino le coppie di dati $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ generate da $n+1 = 11$ nodi equispaziati in $[0,10]$ e dalle corrispondenti valutazioni della funzione $f(x)$ definita al punto (b). Si calcolino e si riportino le espressioni dei polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ che approssimano tali dati nel senso dei minimi quadrati.

$p_1(x) = \underline{\quad 1{,}3585\, x + 7{,}7844 \quad}$ $\qquad$ $p_2(x) = \underline{\quad 0{,}2514\, x^2 - 1{,}1554\, x + 11{,}5553 \quad}$

Per quale valore di m il polinomio approssimante nel senso dei minimi quadrati $p_m(x)$ coincide con l'interpolante polinomiale delle $n+1 = 11$ coppie di dati precedenti?

$m = \underline{\quad 10 \quad}$

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & t \in (0,t_f], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

12 punti

con $t_f > 0$ e il dato iniziale y_0 assegnati.

(a) *(4 punti)* Si considerino il problema di Cauchy (1) e la sua approssimazione mediante il metodo di *Eulero in avanti*. Si riporti l'algoritmo del metodo di *Eulero in avanti* (non in stretto linguaggio Matlab®) definendo con precisione tutta la notazione utilizzata.

Si definisca con precisione l'*errore di troncamento locale* τ_n e se ne riporti la sua epressione.

Si riporti ora la definizione di *zero stabilità* del metodo di *Eulero in avanti*; si definisca con precisione tutta la notazione.

(b) *(1 punto)* Si riporti ora l'algoritmo del metodo di *Crank-Nicolson* (non in stretto linguaggio Matlab®) per l'approssimazione del problema di Cauchy (1); si definisca con precisione tutta la notazione utilizzata.

(c) *(2 punti)* Per il problema di Cauchy (1) con $t_f = +\infty$ e $f(t,y) = \lambda\, y$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda < 0$, si fornisca la definizione di assoluta stabilità del metodo di *Crank-Nicolson.* Per quali valori del passo temporale h tale metodo è assolutamente stabile? Si motivi la risposta utilizzando la funzione di stabilità del metodo.

(d) *(3 punti)* Si consideri ora il problema di Cauchy (1) con $f(t,y) = 5\left[3\cos(3t)\,e^{-t/2} + \dfrac{1}{2}\right] - \dfrac{y}{2}$, $t_f = 3$ e $y_0 = 5$. Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare tale problema mediante il metodo di *Crank-Nicolson* con diversi passi temporali $h_1 = 0.5$, $h_2 = 0.25$, $h_3 = 0.125$ e $h_4 = 0.0625$. Si riportino i valori della soluzione approssimata $u_{N_{h,i}}$ corrispondente all'istante finale t_f per ciascuno dei precedenti valori di h_i (si riportino almeno 4 cifre decimali).

$u_{N_{h,1}} = 5{,}575\,97$ $\quad$ $u_{N_{h,2}} = 5{,}489\,37$

$u_{N_{h,3}} = 5{,}467\,209$ $\quad$ $u_{N_{h,4}} = 5{,}461\,639$

(e) *(2 punti)* Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = 5\left[1 + \sin(3t)\,e^{-t/2}\right]$, si calcolino e si riportino gli errori E_{h_i} associati alle soluzioni $u_{N_{h,i}}$ al tempo t_f ottenuti per ciascun valore di h_i specificato al punto (d) (si riportino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

$E_{h_1} = 11{,}618\,921 \cdot 10^{-2}$ $\quad$ $E_{h_2} = 2{,}959\,014 \cdot 10^{-2}$

$E_{h_3} = 7{,}428\,352 \cdot 10^{-3}$ $\quad$ $E_{h_4} = 18{,}589\,687 \cdot 10^{-4}$

Si utilizzino tali risultati per stimare *graficamente* l'ordine di convergenza del metodo di *Crank-Nicolson*. Si motivi la risposta riportando con completezza la procedura seguita e il corrispondente grafico ottenuto.