# Appello – Parte 2

## 15/02/2022 — versione 1 — ◇♣♡♠◇♡♣♠♣

## 32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

## TEST – 15 pt

### 1 — 1 pt

Si considerino le coppie di dati $\{(0,3), (1,1), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ e l'interpolante polinomiale $\Pi_4(x)$ di tali dati avente grado $n = 4$. Si riporti il valore di $\Pi_4(1.5)$.

1.9531

### 2 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri la funzione $f(x) = e^x$. Si *stimi* l'errore commesso dall'interpolante polinomiale di $f(x)$ avente grado $n = 4$ e costruito su nodi equispaziati nell'intervallo $[0, 2]$.

0.0115

### 3 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = x^3 + \sin(\pi x)$ e il suo interpolante polinomiale a tratti di grado 2, ovvero $\Pi_2^H f(x)$ su 3 sottointervalli equispaziati di $[0, 3]$ e con tutti i nodi equispaziati. Si riporti il valore $\Pi_2^H f(1.5)$.

2.3750

### 4 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = x^2 + |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e il polinomio approssimante nel senso dei minimi quadrati $\widetilde{f}_2(x)$ di grado $m = 2$ di tale funzione su 5 nodi equispaziati. Quanto vale l'approssimazione di $\int_{-1}^{1} \widetilde{f}_2(x)\, dx$ tramite la formula di Simpson (semplice)?

1.5810

## 5 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, dove $f \in C^\infty([a,b])$, tramite la formula del punto medio composita. Sapendo che per $M_1 = 10$ sottointervalli equispaziati di $[a,b]$ si ha un errore pari a $e_1(f) = 10^{-1}$, si stimi l'errore $e_2(f)$ commesso con $M_2 = 100$ sottointervalli equispaziati.

$10^{-3} = 0.001$

## 6 — 1 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -t^2\, y(t) & t \in (0,10), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero all'indietro con passo $h > 0$, si riporti il valore calcolato di $u_1$ in termini di $h$, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, \ldots, N_h$.

$$\frac{1}{1+h^3}$$

## 7 — 1 pt

Per l'approssimazione numerica del generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

si consideri il metodo di Runge–Kutta corrispondente alla seguente tabella di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Posti $f(t,y) = -(t+1)\,y^3$, $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$, si approssimi il problema con il metodo precedentemente descritto e si riporti il valore dell'approssimazione $u_1$ di $y(t_1)$, dove $t_i = t_0 + i\,h$ per $i = 0, 1, \ldots$, essendo il passo $h = 0.1$.

0.9100

## 8 — 2 pt

Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = A\,\mathbf{y} & t \in (0,1), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

dove $\mathbf{y}(t) = (y_1(t),\, y_2(t))^T$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y}_0 = (1,\, 3)^T$ Si approssimi il problema utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 0.1$. Si riporti l'approssimazione $\mathbf{u}_{N_h}$ così ottenuta, ovvero l'approssimazione di $\mathbf{y}(t_{N_h})$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, \ldots, N_h$.

$(0.6011,\ 0.6357)^T$

## 9 — 2 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy del secondo ordine:

$$\begin{cases} y''(t) + 2\, y'(t) + y(t) = 0 & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 4, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Si riscriva il problema precedente come un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine e lo si approssimi tramite il metodo di Eulero in avanti con passo $h = 0.1$. Si riporti $u_1$, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$ così ottenuta, essendo $t_1 = h$.

$u_1 = 4.1000$

## 10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema di Cauchy del secondo ordine:

$$\begin{cases} y''(t) = -y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = w_0. \end{cases}$$

dove $y_0$ e $w_0 \in \mathbb{R}$. La sua approssimazione tramite il metodo di Leap-Frog si scrive come

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, v_n - \dfrac{h^2}{2}\, u_n \\ v_{n+1} = v_n - \dfrac{h}{2}\,(u_n + u_{n+1}) \end{cases} \qquad \text{per } n = 0, 1, \ldots,$$

con $u_0 = y_0$ e $v_0 = w_0$, dove $h > 0$ è il passo, $u_n$ è l'approssimazione di $y(t_n)$ e $v_n$ l'approssimazione di $y'(t_n)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots$.

Dopo aver posto $y_0 = 5$, $w_0 = 0$ e $h = 0.1$, si riportino i valori delle approssimazioni $u_1$, $u_2$ e $u_3$ così ottenute.

$u_1 = 4.9750,\ \ u_2 = 4.9002,\ \ u_3 = 4.7765$

# ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + V\,u'(x) + \sigma\,u(x) = f(x) & x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \\ u'(1) = e, \end{cases} \tag{1}$$

dove $V > 0$ e $\sigma > 0$ sono due parametri.

## Punto 1) — 3 pt

Si approssimi il problema (1) usando il metodo delle differenze finite centrate, partizionando l'intervallo $[a,b]$ in $N+1$ sottointervalli di uguale ampiezza $h = \dfrac{b-a}{N+1}$ delimitati da $N+2$ nodi $x_j = a + j\,h$ per $j = 0, 1, \ldots, N, N+1$. Per l'approssimazione di $u'(1)$ si utilizzi lo schema delle differenze finite all'indietro.

Si riportino le equazioni del sistema risultante in forma esplicita definendo la notazione utilizzata e illustrando la procedura seguita.

Spazio per risposta lunga

## Punto 2) — 2 pt

Dopo aver risposto al Punto 1), si riportino le espressioni della controparte algebrica del sistema di equazioni, ovvero del sistema lineare $A\,\mathbf{u}_h = \mathbf{b}$, in forma condensata, dove $A \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, $\mathbf{u}_h, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N+1}$, essendo $\mathbf{u}_h = (u_1, u_2, \ldots, u_{N+1})^T$.

Spazio per risposta lunga

## Punto 3) — 3 pt

Si pongano per il problema (1) i seguenti dati: $V = \sigma = 1$ e $f(x) = e^x$. Si approssimi tale problema con il metodo di cui al Punto 1) per $h = 0.1$. Si riportino: i valori di $u_1$ e $u_{N+1}$ con almeno 4 cifre decimali, oltre ai principali comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga ($u_1 = 1.1090$, $u_{N+1} = 2.7930$)

## Punto 4) — 1 pt (***) No Multichance

Dopo aver risposto al Punto 3), si utilizzi opportunamente il vettore $\mathbf{u}_h$ ottenuto per approssimare $I(u) = \int_0^1 u(x)\,dx$ attraverso la formula dei trapezi composita. Si riportino il valore ottenuto con almeno 4 cifre decimali e i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga (1.7488)

## Punto 5) — 2 pt

Con i dati di cui al Punto 3), si risolva il problema per $h = 0.1$, $0.05$, $0.025$, $0.0125$ e, sapendo che la soluzione esatta è $u(x) = e^x$, si calcolino gli errori corrispondenti $e_h = \max_{j=0,\dots,N+1} |u(x_j) - u_j|$; si riportino i risultati con almeno 4 cifre decimali e i principali comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga $(e_h = 0.0747,\ 0.0367,\ 0.0182,\ 0.0091)$

## Punto 6) — 2 pt

Si usino gli errori $e_h$ calcolati al Punto 5) per stimare *algebricamente* l'ordine di convergenza $p$ del metodo di cui al punto 1 applicato al problema (1). Si illustri schematicamente la procedura seguita per la stima e si commenti il risultato ottenuto alla luce della teoria.

Spazio per risposta lunga $(p = 1.0066)$

## Punto 7) — 4 pt (***) No Multichance

Si consideri nuovamente il problema (1), ma questa volta con $V = 1000$, $\sigma = 0$ e $f(x) = 0$.

- Quale fenomeno numerico si può verificare approssimando tale problema tramite le differenze finite centrate di cui al Punto 1) con $h = 0.1$? Perché?
- Come è possibile eliminare tale fenomeno numerico sempre usando $h = 0.1$?
- Si implementi in Matlab® il rimedio proposto. Si riportino il valore $u_{N+1}$ dell'approssimazione così ottenuta con almeno 4 cifre decimali e i principali comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga (1.2745)