Serie 8
Problemi ai limiti e ai valori iniziali

1 Differenze finite per problemi ai limiti

Consideriamo il seguente problema ai limiti di diffusione (problema di Poisson monodimensionale) con condizioni al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} -\mu\, u''(x) = f(x) \qquad x \in (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Consideriamo inoltre il seguente problema ai limiti di diffusione–reazione con condizioni al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} -\mu\, u''(x) + \sigma(x)\, u(x) = f(x) \qquad x \in (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{2}$$

dove $\sigma(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

Consideriamo l'approssimazione numerica dei precedenti problemi usando il metodo delle differenze finite centrate. A questo scopo, partizioniamo l'intervallo $[a,b]$ in $N+1$ sottointervalli di uguale ampiezza $h = \frac{b-a}{N+1}$ delimitati da $N+2$ nodi $x_j = a + j\,h$ per $j = 0, 1, \ldots, N, N{+}1$. Ricordiamo che l'approssimazione di $u''(x)$ nel nodo x_j secondo le differenze finite centrate si scrive come:

$$u''(x_j) \simeq \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, N.$$

Tale approssimazione dà luogo a un sistema lineare nella forma:

$$\widetilde{A}\, \widetilde{\mathbf{u}}_h = \widetilde{\mathbf{b}},$$

dove $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}$, $\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{N+2}$, essendo $\widetilde{\mathbf{u}}_h = (u_0, u_1, \ldots, u_N, u_{N+1})^T$, con u_j l'approssimazione di $u(x_j)$. Sfruttando il fatto che il problema ai limiti prevede condizioni al contorno di Dirichlet, si può scrivere un sistema lineare in forma condensata:

$$A\, \mathbf{u}_h = \mathbf{b}, \tag{3}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{u}_h, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$, essendo $\mathbf{u}_h = (u_1, \ldots, u_N)^T$.

Esercizio 1.1

Si considerino per il problema di diffusione (1) i seguenti dati: $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\mu = 1$ e $f(x) = e^{3x} \left(-4 + 3x + 9x^2\right)$. La soluzione esatta (analitica) del problema è:

$$u_{ex}(x) = e^{3x}(x - x^2) + 1 - 3x.$$

1. Si verifichi che $u_{ex}(x)$ è la soluzione esatta del problema di diffusione con i dati indicati.

2. Si ricavino le espressioni generali della matrice A e del vettore $\mathbf{b}$ che compaiono nel sistema lineare condensato (6) e ottenuto mediante approssimazione con le differenze finite centrate.

3. Si scriva uno script o funzione Matlab® per risolvere il problema ai limiti ponendo $(N + 1) = 20$. Confrontare in un grafico la soluzione approssimata con quella esatta u_{ex}.

4. Si risolva ora il problema per $(N + 1) = 10, 20, 40, 80, \ldots, 160$. Si rappresenti graficamente, in funzione di h, l'andamento dell'errore

   $$e_h = \max_{j=0,\ldots,N+1} |u_{ex}(x_j) - u_j|. \tag{4}$$

   Si confronti il risultato ottenuto con quanto previsto dalla teoria.

5. Come varia il numero di condizionamento $K_2(A)$ per $(N + 1) = 10, 20, 40, 80, \ldots, 160$, ovvero per $h \to 0$? Con quale metodo numerico è computazionalmente conveniente risolvere il sistema lineare condensato (6)? Posto $(N + 1) = 160$, come si confronta l'errore computazionale associato alla soluzione del sistema lineare tramite metodo diretto con l'errore di troncamento e_h (7) associato allo schema alle differenze finite?

Esercizio 1.2

Si considerino per il problema di diffusione–reazione (2) i seguenti dati: $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = e^3$, $\mu = 1$, $\sigma(x) = 1 + \sin(2\pi x)$ e $f(x) = e^{3x}\ (\sin(2\pi x) - 8)$. La soluzione esatta (analitica) del problema è:

$$u_{ex}(x) = e^{3x}.$$

1. Si verifichi che $u_{ex}(x)$ è la soluzione esatta del problema di diffusione–reazione con i dati indicati.

2. Si ricavino le espressioni generali della matrice A e del vettore $\mathbf{b}$ che compaiono nel sistema lineare condensato (6) e ottenuto mediante approssimazione con le differenze finite centrate.

3. Si scriva uno script o funzione Matlab® per risolvere il problema ai limiti ponendo $(N + 1) = 20$. Confrontare in un grafico la soluzione approssimata con quella esatta u_{ex}.

4. Si risolva ora il problema per $h = 0.04,\ 0.02,\ 0.01, \ldots, 0.0025$. Si rappresenti graficamente, in funzione di h, l'andamento dell'errore e_h (7). Si confronti il risultato ottenuto con quanto previsto dalla teoria.

Esercizio 1.3

Lo spostamento verticale $u(x)$ di un filo elastico può essere descritto tramite il problema di diffusione (1), dove μ è la costante elastica e $f(x)$ la forza verticale per unità di lunghezza del filo. La deformazione del filo elastico è $\varepsilon(x) = u'(x)$, mentre lo sforzo $\sigma(x) = \mu\,\varepsilon(x) = \mu\, u'(x)$. Per il filo elastico con spostamento imposto ai bordi (condizioni di Dirichlet), è dunque possibile determinare le reazioni vincolari $q_a = -\sigma(a)$ e $q_b = +\sigma(b)$, rispettivamente in $x = a$ e $x = b$, che garantiscono l'equilibrio statico del filo; infatti:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b \left(\mu\, u'(x)\right)'\,dx = -\int_a^b \sigma'(x)\,dx = -\left(q_b + q_a\right).$$

Si pongano $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = \beta = 0$ e $\mu = 1$.

1. Posto $f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)$, si approssimi il problema tramite lo schema alle differenze finite centrate con un passo $h = 0.05$ e si rappresenti la soluzione approssimata. Inoltre, si determini opportunamente lo sforzo approssimato $\sigma(x)$ e si determinino i valori delle reazioni vincolari q_a e q_b.

2. Si ripeta il punto 1) con $f(x) = -\left(2x-1\right)\,H\left(x-\frac{1}{2}\right)$, dove $H(x)$ è la funzione scalino (funzione Heaviside) tale che $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

2 Problemi di diffusione e trasporto

Consideriamo il seguente problema ai limiti di diffusione–trasporto con condizioni al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} -\mu\, u''(x) + \eta\, u'(x) = f(x) & x \in (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{5}$$

dove $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Consideriamo l'approssimazione numerica del precedente problema usando il metodo delle differenze finite centrate. A questo scopo, partizioniamo l'intervallo $[a,b]$ in $N+1$ sottointervalli di uguale ampiezza $h = \frac{b-a}{N+1}$ delimitati da $N+2$ nodi $x_j = a + j\,h$ per $j = 0, 1, \ldots, N, N+1$. Ricordiamo che l'approssimazione di $u''(x)$ nel nodo x_j secondo le differenze finite centrate si scrive come:

$$u''(x_j) \simeq \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, N,$$

mentre l'approssimazione $u'(x)$ nel nodo x_j secondo le differenze finite centrate è:

$$u'(x_j) \simeq \frac{u(x_{j+1}) - u(x_{j-1})}{2h} \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, N.$$

Tale approssimazione dà luogo a un sistema lineare nella forma:

$$\widetilde{A}\,\widetilde{\mathbf{u}}_h = \widetilde{\mathbf{b}},$$

dove $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}$, $\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{N+2}$, essendo $\widetilde{\mathbf{u}}_h = (u_0, u_1, \ldots, u_N, u_{N+1})^T$, con u_j l'approssimazione di $u(x_j)$. Sfruttando il fatto che il problema ai limiti prevede condizioni al contorno di Dirichlet, si può scrivere un sistema lineare in forma condensata:

$$A\,\mathbf{u}_h = \mathbf{b}, \tag{6}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{u}_h, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$, essendo $\mathbf{u}_h = (u_1, \ldots, u_N)^T$.

Esercizio 2.1

Si considerino per il problema di diffusione (5) i seguenti dati: $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $f(x) = 0$; μ, $\eta \in \mathbb{R}$. La soluzione esatta (analitica) del problema è:

$$u_{ex}(x) = \frac{e^{\eta/\mu\, x} - 1}{e^{\eta/\mu} - 1}.$$

1. Si verifichi che $u_{ex}(x)$ è la soluzione esatta del problema di diffusione–trasporto con i dati indicati e per ogni μ, $\eta \in \mathbb{R}$.

2. Si ricavino le espressioni generali della matrice A e del vettore $\mathbf{b}$ che compaiono nel sistema lineare condensato (6) e ottenuto mediante approssimazione con le differenze finite centrate.

3. Si scriva uno script o funzione Matlab® per risolvere il problema ai limiti ponendo $\mu = 1$, $\eta = 1$, $(N+1) = 20$. Confrontare in un grafico la soluzione approssimata con quella esatta u_{ex}.

4. Posto ora $\mu = 10^{-2}$, si ripeta il punto 3). Si commenti il risultato ottenuto. Come è possibile garantire l'assenza di oscillazioni numeriche con lo schema alle differenze finite centrate agendo sul valore di h?

5. Si risolva ora il problema con i dati di cui al punto 4) per $(N+1) = 30, 60, 120, 240, 480$. Si rappresenti graficamente, in funzione di h, l'andamento dell'errore

   $$e_h = \max_{j=0,\ldots,N+1} |u_{ex}(x_j) - u_j|. \tag{7}$$

   Si confronti il risultato ottenuto con quanto previsto dalla teoria.

6. Si ricavino le espressioni generali della matrice A e del vettore $\mathbf{b}$ che compaiono nel sistema lineare condensato (6) considerando l'uso della tecnica *upwind*. Per il caso $\eta > 0$, ciò corrisponde ad approssimare $u'(x_j)$ tramite le differenze finite all'indietro, ovvero:

   $$u'(x_j) \simeq \frac{u(x_j) - u(x_{j-1})}{h} \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, N.$$

   Se invece $\eta < 0$, ciò corrisponde ad approssimare $u'(x_j)$ tramite le differenze finite in avanti, ovvero:

   $$u'(x_j) \simeq \frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, N.$$

   Si mostri che tale tecnica coincide con l'uso delle differenze finite centrate con *viscosità artificiale* $\mu_h = \mu\,(1 + \mathbb{P}e_h)$, dove $\mathbb{P}e_h = \frac{|\eta|\,h}{2\mu}$ è il numero di Péclet locale.

7. Si ripetano i punti 4) e 5) tramite l'uso della tecnica di *upwind*.

3 Differenze finite per problemi ai limiti con condizioni al contorno miste

Consideriamo il seguente problema ai limiti di diffusione–trasporto–reazione con condizioni al contorno miste di Dirichlet–Neumann:

$$\begin{cases} -\mu\, u''(x) + \eta\, u'(x) + \sigma(x)\, u(x) = f(x) \qquad x \in (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ \mu\, u'(b) = \gamma, \end{cases} \tag{8}$$

dove $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\sigma(x) \geq 0$, α, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Consideriamo l'approssimazione numerica del precedente problema usando il metodo delle differenze finite centrate. A questo scopo, partizioniamo l'intervallo $[a,b]$ in $N+1$ sottointervalli di uguale ampiezza $h = \frac{b-a}{N+1}$ delimitati da $N+2$ nodi $x_j = a + j\,h$ per $j = 0, 1, \ldots, N, N+1$. Ricordiamo che il valore $u(x_{N+1})$ è incognito. La condizione di Neumann in $x = b$ richiede un'approssimazione del tipo:

$$u'(x_{N+1}) \simeq \frac{u(x_{N+1}) - u(x_N)}{h}, \tag{9}$$

usando le differenze finite all'indietro (uno schema accurato di ordine 1). È possibile usare in alternativa il seguente schema accurato di ordine 2:

$$u'(x_{N+1}) \simeq \frac{3u(x_{N+1}) - 4u(x_N) + u(x_{N-1})}{2h}. \tag{10}$$

Tali approssimazioni danno luogo a un sistema lineare nella forma:

$$\widetilde{A}\, \widetilde{\mathbf{u}}_h = \widetilde{\mathbf{b}},$$

dove $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}$, $\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{N+2}$, essendo $\widetilde{\mathbf{u}}_h = (u_0, u_1, \ldots, u_N, u_{N+1})^T$, con u_j l'approssimazione di $u(x_j)$. Sfruttando il fatto che il problema ai limiti prevede una condizione al contorno di Dirichlet per $x = a$, si può scrivere un sistema lineare in forma condensata:

$$A\, \mathbf{u}_h = \mathbf{b}, \tag{11}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, $\mathbf{u}_h, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N+1}$, essendo $\mathbf{u}_h = (u_1, \ldots, u_N, u_{N+1})^T$.

Esercizio 3.1

Si consideri il problema (8) con condizioni al contorno miste e con i seguenti dati: $\mu = 1$, $\eta = \sigma = 0$, $f(x) = e^{3x}\left(-4 + 3x + 9x^2\right)$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 1$, e $\gamma = -e^3$. La soluzione esatta del problema è:

$$u_{ex}(x) = e^{3x}(x - x^2) + 1.$$

1. Si verifichi che $u_{ex}(x)$ è la soluzione esatta del problema con i dati indicati.
2. Si ricavino le espressioni generali della matrice A e del vettore $\mathbf{b}$ che compaiono nel sistema lineare condensato (11) ottenuto mediante approssimazione con le differenze finite centrate e lo schema (9) per l'approssimazione di $u'(x_{N+1})$.

3. Si scriva uno script o funzione Matlab® per risolvere il problema ai limiti di cui al punto 2) con $(N+1) = 100$. Confrontare in un grafico la soluzione approssimata con quella esatta u_{ex}.

4. Si risolva ora il problema con lo schema di cui al punto 2) per $(N+1) = 50, 100, 200, 400, 800$. Si rappresenti graficamente, in funzione di h, l'andamento dell'errore (7). Si confronti il risultato ottenuto con quanto previsto dalla teoria.

5. Si ripetano i punti 2), 3) e 4) usando ora lo schema (10) per l'approssimazione di $u'(x_{N+1})$.

Esercizio 3.2

Si consideri ora il seguente problema con condizioni miste di Neumann–Dirichlet:

$$\begin{cases} -\mu\, u''(x) + \eta\, u'(x) + \sigma(x)\, u(x) = f(x) & x \in (a,b), \\ \mu\, u'(a) = \delta, \\ u(b) = \beta, \end{cases}$$

dove β, $\delta \in \mathbb{R}$. Osserviamo che il valore $u(x_0)$ è incognito. La condizione di Neumann in $x = a$ richiede un'approssimazione tramite differenze finite in avanti:

$$u'(x_0) \simeq \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h},$$

oppure, in alternativa, possiamo usare uno schema accurato di ordine 2:

$$u'(x_0) \simeq \frac{-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)}{2h}.$$

Si ripeta l'Esercizio 3.1 con $\mu = \frac{1}{2}$, $\eta = 2$, $\sigma(x) = x$, $f(x) = 2\, e^{2x} + x\, \left(e^{2x} - 1\right)$, $a = 0$, $b = 1$, $\beta = e^2 - 1$ e $\delta = 1$. La soluzione esatta è $u_{ex}(x) = e^{2x} - 1$.

4 Differenze finite per il problema di Poisson in 2D

Si consideri il seguente problema di Poisson con condizioni di Dirichlet in 2D:

$$\begin{cases} -\mu\, \Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases}, \tag{12}$$

dove $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\partial\Omega$ è il suo bordo, $f(\mathbf{x})$ è la forzante assegnata e $g(\mathbf{x})$ è il dato di Dirichlet; $\mu \in \mathbb{R}$ con $\mu > 0$. Ricordiamo che $\Delta = \nabla^2$ è l'operatore differenziale Laplaciano del secondo ordine, ovvero tale che

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y).$$

Il modello matematico può essere usato ad esempio per rappresentare lo spostamento verticale u di una membrana elastica in Ω con spostamento g imposto al bordo $\partial\Omega$ (dato di Dirichlet) e soggetta a una forza per unità di area f agente in Ω.

Se $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ è un rettangolo, l'approssimazione del problema (12) può essere realizzata tramite uno schema alle differenze finite centrate, detto schema a cinque punti. Partizioniamo $[a, b]$ in $N_x + 1$ sottointervalli di ampiezza h_x, delimitati dai nodi $\{x_i\}_{i=0}^{N_x+1}$; in maniera simile, partizioniamo $[c, d]$ in N_y+1 sottointervalli di ampiezza h_y, delimitati dai nodi $\{y_j\}_{j=0}^{N_y+1}$. Otteniamo dunque una griglia computazionale $\mathcal{T}_h = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N_x}, x_{N_x+1}\} \times \{y_0, y_1, \ldots, y_{N_y}, y_{N_y+1}\}$, con elementi di ampiezza caratteristica $h = \max\{h_x, h_y\}$. Indichiamo il generico nodo $\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j)$, da cui l'approssimazione con le differenze finite centrate di $\Delta u(\mathbf{x}_{i,j})$ è:

$$
\begin{aligned}
\Delta u(\mathbf{x}_{i,j}) \quad \approx \quad & \tfrac{u(x_{i-1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i+1},y_j)}{h_x^2} \\
& + \tfrac{u(x_i,y_{j-1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j+1})}{h_y^2} \qquad \text{per } i = 1, \ldots, N_x, \quad j = i = 1, \ldots, N_y.
\end{aligned}
$$

Ciò porta allo schema a cinque punti seguente, dove $u_{i,j}$ rappresenta l'approssimazione di $u(x_i, y_j)$:

$$
\begin{cases}
-\mu \left[\tfrac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}u_{i+1,j}}{h_x^2} \right. & \\
\qquad\qquad \left. + \tfrac{u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j+1}}{h_y^2} \right] = f(x_i, y_j) & i = 1, \ldots, N_x, \ j = 1, \ldots, N_y, \\
u_{i,j} = g(x_i, y_j) & i = 0, \ldots, N_x + 1, \ j = 0, \\
& i = 0, \ldots, N_x + 1, \ j = N_y + 1, \\
& i = 0, \ j = 1, \ldots, N_y, \\
& i = N_x + 1, \ j = 1, \ldots, N_y.
\end{cases}
$$

Lo schema numerico è accurato di ordine 2, se $u \in C^4(\overline{\Omega})$.

Il metodo è implementato nella funzione Matlab® `Poisson_Dirichlet_diff_finite_5punti.m`, che può essere chiamata come segue:

```
[X, Y, U] = Poisson_Dirichlet_diff_finite_5punti(mu, f, g, Omega, hx, hy)
```

La funzione prende in ingresso: $\mu \in \mathbb{R}$; la forzante definita come anonymous function (si noti che $f(x, y)$ è una funzione di due variabili); il dato al bordo di Dirichlet definito come anonymous function (si noti che $g(x, y)$ è una funzione di due variabili); il dominio computazionale Ω passato come un vettore di quattro elementi contente gli estremi del dominio: `Omega = [a, b, c, d]`; ampiezza degli intervalli equispaziati lungo x ed y (h_x e h_y). La funzione restituisce: matrici contenenti i nodi della griglia computazionale (`X, Y`); una matrice `U` contenente la soluzione approssimata u nei nodi della griglia.

Esercizio 4.1

Si consideri il problema di Poisson (12) con $\Omega = (0, 1)^2$, $\mu = 1$, $f(x, y) = 5\pi^2 \sin(\pi x) \sin(2\pi y)$ e $g = 0$.

1. Si mostri che $u_{ex}(x, y) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y)$ è la soluzione esatta del problema di Poisson (12).

2. Si rappresenti in Matlab® la soluzione esatta del problema (si utilizzi opportunamente il comando `surf`) su una griglia con $h_x = h_y = 0.1$.

3. Si approssimi il problema di Poisson (12) con i dati precedenti tramite lo schema alle differenze finite centrate a cinque punti. In particolare, si utilizzi la funzione Matlab® `Poisson_Dirichlet_diff_finite_5punti.m` con $h = h_x = h_y = 0.1$. Si rappresenti la soluzione approssimata ottenuta.

4. Si risolva ora il problema con lo schema al punto 3) per

$$h = h_x = h_y = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625.$$

Si rappresenti graficamente, in funzione di $h = h_x = h_y$, l'andamento dell'errore:

$$e_h = \max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u_{ij}|.$$

Si confronti il risultato ottenuto con quanto previsto dalla teoria.

5 Differenze finite e θ–metodo per l'equazione del calore

Si consideri l'equazione del calore:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = f(x,t) & x \in (a,b),\ t \in (0,T], \\ u(x,0) = g_0(x) & x \in [a,b], \\ u(a,t) = u_s(t),\ u(b,t) = u_d(t) & t \in (0,T]. \end{cases} \tag{13}$$

Per la discretizzazione della derivata spaziale è possibile utilizzare le differenze finite centrate come nel caso del problema stazionario. Partizioniamo l'intervallo $[a,b]$ in $N+1$ sottointervalli di ampiezza $h = \frac{b-a}{N+1}$ tramite i nodi $x_0 = a, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} = b$. Indicando con $u_i(t)$ l'approssimazione di $u(x_i,t)$ e con $f_i(t) = f(x_i,t)$, si ottiene il sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) + A\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) & t \in (0,T], \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{g}_0, \end{cases} \tag{14}$$

in cui

$$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_N(t))^T \in \mathbb{R}^N,$$

$$\mathbf{g}_0 = (g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_N))^T \in \mathbb{R}^N,$$

$$\mathbf{F}(t) = (f_1(t) + (\mu\, u_s(t))/h^2, f_2(t), \ldots, f_{N-1}(t), f_N(t) + (\mu\, u_d(t))/h^2)^T \in \mathbb{R}^N,$$

e $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ è la matrice ottenuta dalla discretizzazione della derivata seconda come nel problema ai limiti; osserviamo che ci stiamo riferendo al caso del sistema lineare condensato.

Per risolvere (14), è possibile utilizzare un θ-metodo. Fissato un passo di discretizzazione temporale Δt, suddividiamo l'intervallo $[0,T]$ negli istanti $t^{(0)} = 0$, $t^{(k)} = k\Delta t$, per $k =$

$0, 1, \ldots, N_t = \frac{T}{\Delta t}$. Indicando con $\mathbf{u}^{(k)}$ l'approssimazione di $\mathbf{u}(t^{(k)})$ e con $\mathbf{F}^{(k)} = \mathbf{F}(t^{(k)})$, si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{(k+1)}-\mathbf{u}^{(k)}}{\Delta t} + A(\theta \mathbf{u}^{(k+1)} + (1-\theta)\mathbf{u}^{(k)}) = \theta \mathbf{F}^{(k+1)} + (1-\theta)\mathbf{F}^{(k)} \qquad k = 0, 1, \ldots, N_t - 1, \\ \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{g}_0, \end{cases}$$

che si può riscrivere in forma compatta come:

$$\begin{cases} A_\theta \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k+1)} \qquad k = 0, 1, \ldots, N_t - 1, \\ \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{g}_0, \end{cases} \tag{15}$$

dove:

$$A_\theta = (I + \Delta t \theta A),$$

$$\mathbf{b}^{(k+1)} = (I - \Delta t(1-\theta)A)\mathbf{u}^{(k)} + \Delta t \theta \mathbf{F}^{(k+1)} + \Delta t(1-\theta)\mathbf{F}^{(k)}.$$

La soluzione numerica si ottiene risolvendo, per ogni $k = 0, \ldots, N_t - 1$, il sistema lineare (15).

Esercizio 5.1

Si consideri il problema (13) e si assumano $a = 0$, $b = 1$, $T = 1$, $\mu = 1$ e

$$f(x,t) = \left(-\sin(t) + \frac{1}{4}\cos(t)\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$u_s(t) = 0, \qquad u_d(t) = \sin\left(\frac{1}{2}\right)\cos(t),$$

$$g_0(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

così che la soluzione esatta del problema (13) è data da

$$u_{ex}(x,t) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(t).$$

1. Si implementi la function Matlab®

   `[u, x, t] = EqCalore_DiffFin_Theta(mu, f, a, b, us, ud, g0, T, h, delta_t, theta)`

   che risolve il problema con lo il metodo delle differenze finite centrate e il θ–metodo. La funzione prende in input:

   - il coefficiente $\mu \in \mathbb{R}$;
   - la forzante $f(x,t)$;
   - gli estremi a e b dell'intervallo;
   - i dati ai limiti $u_s(t)$ e $u_d(t)$;
   - il dato iniziale $g_0(x)$;
   - il tempo finale T;
   - il passo di discretizzazione spaziale h e quello di discretizzazione temporale Δt;
   - il parametro θ del θ-metodo;

e restituisce la soluzione approssimata `u` (una matrice), i nodi di discretizzazione spaziale `x` e gli istanti di discretizzazione temporale `t`.

2. Si risolva il problema (13) con la funzione appena implementata utilizzando il metodo di Eulero implicito ($\theta = 1$), $h = 0.01$, $\Delta t = 0.1$, e si rappresentino in un grafico la soluzione esatta e la soluzione numerica al tempo finale T.

3. Si risolva il problema (13) utilizzando il metodo di Eulero esplicito ($\theta = 0$) prima con $h = 0.01$ e $\Delta t = 0.1$ e, poi, con $h = 0.1$ e $\Delta t = 0.001$. Si commenti il risultato ottenuto.

4. Indicando con $e_T = \max_{i=0,\dots,N+1} |u_{ex}(x_i, T) - u_i(T)|$ l'errore di discretizzazione al tempo finale T, studiare l'andamento di e_T al variare di Δt per i metodi di Eulero implicito, Eulero esplicito, Crank-Nicolson ($\theta = 1/2$), usando come parametri

   - $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625, 0.003125$ per Eulero implicito e Crank-Nicolson;
   - $h = 0.1$, $\Delta t = 0.001, 0.005, 0.00025, 0.000125, 0.00003125$ per Eulero esplicito.