Appello – Parte 2

07/07/2022 — versione 1 — ◇♡♣♠◇♠♣♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 2 pt (***) No Multichance

Data la funzione $f(x) = \sin\left(x + \sqrt{2}\right)$, si costruisca il suo polinomio interpolante $\Pi_3 f(x)$ sull'intervallo $[0, \pi]$ e si riportino i valori di $\Pi_3 f(2)$ e $\dfrac{d\Pi_3 f}{dx}(2)$.

$-0.2698, \ -0.9562$

2 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = e^{3x}$ e il suo interpolante polinomiale $I_3 f(x)$ su nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto in $[-1, 1]$. Senza costruire esplicitamente $I_3 f(x)$, si fornisca la *stima* dell'errore di interpolazione $\widetilde{e}_3(f)$.

16.9472

3 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} (x/\pi)^2 & \text{se } x \in [0, \pi) \\ (2 - x/\pi)^2 & \text{se } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$ e la sua spline cubica interpolante $s_3(x)$ definita sui nodi $x_i = \dfrac{2\pi}{n}\, i$, per $i = 0, 1, \ldots, n$. Posto $n = 5$, si riporti il valore di $s_3(x_3)$.

0.64

4 — 1 pt

Si considerino $n+1 = 5$ coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} = \{(0, 2), (1, 2), (2, 0), (3, 1), (4, 0)\}$. Per quali valori $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, lo scarto quadratico $\Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} (a_1 x_i + a_0 - y_i)^2$ assume valore minimo?

$2, \ -0.5$

5 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[-1, 3]$ e il suo interpolante lineare a tratti $\Pi_1^H f(x)$ su intervalli di uguale ampiezza $H = 1$. Quanto vale l'approssimazione di $\displaystyle\int_{-1}^{3} \Pi_1^H f(x)\,dx$ tramite la formula dei trapezi composita con $H = 1$?

21.3340

6 — 1 pt

Si consideri l'integrale $I(f) = \displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$, dove $f(x) = x^3$, e la sua approssimazione tramite la formula di quadratura $I_q(f) = 3\,(f(3+c) + f(3-c))$ dipendente dal parametro $c > 0$. Per quale valore di c si ottiene che $I_q(f) \equiv I(f)$?

$\sqrt{3}$

7 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -2\,y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 7. \end{cases}$$

Utilizzando il θ-metodo con parametro $\theta = \dfrac{3}{4}$ e passo $h = 0.1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots$.

5.7826

8 — 1 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti di diffusione-trasporto:

$$\begin{cases} -u''(x) + u'(x) = 200 & x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \beta, \end{cases}$$

dipendente dal parametro $\beta > 0$. Si supponga di approssimare tale problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate e passo di discretizzazione $h > 0$, ottenendo così la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$. Assumendo che la soluzione esatta $u \in C^4([0, 1])$ sia nota e che l'errore per $h = h_1 = 10^{-2}$ sia $E_{h_1} = \max_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j| = 4 \cdot 10^{-3}$, per quale valore di h_2 è possibile ottenere un valore stimato dell'errore $E_{h_2} = 10^{-3}$?

$5 \cdot 10^{-3}$

9 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + (1 + 19\,x)\;u(x) = 5 & x \in (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ e il metodo delle differenze finite in avanti e all'indietro (di ordine 1) per l'approssimazione di $u'(0)$ e $u'(1)$, ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N + 1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_5, ovvero l'approssimazione di $u(0.5)$.

0.5195

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema ai limiti con condizione di Robin:

$$\begin{cases} -u''(x) = 6 & x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u'(1) + 3\,u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ e il metodo delle differenze finite all'indietro (di ordine 1) per l'approssimazione di $u'(1)$, ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N + 1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_{10}, ovvero l'approssimazione di $u(1)$.

0.6750

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il seguente problema con soluzione $x(t) : [0, 10] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\,\dot{x}(t) + 10\,x^2(t) = z(t) & t \in (0, 10), \\ \dot{x}(0) = 2, \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

dove $z(t) = e^{-t/2}\left(2\,\cos(t) - \dfrac{7}{2}\,\sin(t)\right) + 40\,e^{-t}\,\sin^2(t)$.

Punto 1) — 2 pt

Si riscriva il problema (1) come un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{g}(t) & t \in (0, t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{2}$$

con $\mathbf{y}(t) = (w(t),\ x(t))^T$, dove $w(t) = \dot{x}(t)$ per $t \in (0, t_f)$. Si riportino le espressioni di $\mathbf{f}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g}(t) : (0, t_f) \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y}_0$ e t_f.

$\mathbf{f} = (-2y_1 - 10\,y_2^2,\ y_1)^T, \quad \mathbf{g}(t) = (z(t),\ 0)^T, \quad \mathbf{y}_0 = (2,\ 0)^T, \quad t_f = 10$

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 3 pt

Si approssimi il problema (2) del Punto 1) tramite il metodo di Eulero in avanti usando opportunamente la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m` con passo $h = 10^{-2}$. Si riportino, oltre ai comandi Matlab® usati:

- i valori delle approssimazioni u_1 e u_{N_h} rispettivamente di $x(t_1)$ e $x(t_f)$, dove $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$, $h = \dfrac{t_f}{N_h}$;
- il tempo discreto $t_m \geq 0$ tale per cui $|u_n| < 0.1$ per ogni $n \geq m$.

$u_1 = 0.0200, \quad u_{N_h} = -0.0688, \quad t_m = 5.68$

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 2 pt

Dopo aver risposto al Punto 2) e sapendo che la soluzione esatta del problema (1) è $x(t) = 2\,e^{-t/2}\,\sin(t)$, si calcolino gli errori $E_h = \max\limits_{n=0,\ldots,N_h} |u_n - x(t_n)|$ ottenuti con il metodo di Eulero in avanti e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-3}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-4}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-4}$, essendo u_n l'approssimazione di $x(t_n)$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \ldots, 4$.

$0.0046,\ 0.0023,\ 0.0011,\ 0.0006$

Spazio per risposta lunga

Punto 4) — 2 pt

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al Punto 3) per stimare algebricamente l'ordine di convergenza p del metodo di Eulero in avanti. Si riportino i comandi Matlab® , si giustifichi la risposta data e la si motivi alla luce della teoria.

$p = 1.0034$

Spazio per risposta lunga

Punto 5) — 3 pt

Con riferimento al sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (2) del Punto 1) e sapendo che la soluzione esatta $x(t)$ è data al Punto 3), per quali valori di $h > 0$ il metodo di Eulero in avanti risulta assolutamente stabile? Si riportino il procedimento e gli eventuali comandi Matlab® usati.

$0 < h < 0.0972$

Spazio per risposta lunga

Punto 6) — 3 pt (***) No Multichance

Si vuole ora applicare a un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (2) il seguente metodo *multipasso*, scritto di seguito per un problema di Cauchy scalare con $y'(t) = f(t, y(t))$ per $t \in (t_0, t_f)$ e condizione iniziale $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \dfrac{3}{2}\, h\, f\,(t_n, u_n) - \dfrac{1}{2}\, h\, f\,(t_{n-1}, u_{n-1}) & \text{per } n = 1, 2, \ldots, N_h - 1, \\ u_1 = u_0 + h\, f(t_0, u_0), \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

Si scriva un'opportuna funzione Matlab® che implementi il metodo precedente per un sistema di EDO con il generico passo $h > 0$.

Si utilizzi la funzione precedentemente implementata per risolvere il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (2) di cui al Punto 1) usando il passo $h = 10^{-2}$. Si riportino i valori delle approssimazioni u_1, u_2 e u_{N_h} rispettivamente di $x(t_1)$, $x(t_2)$ e $x(t_f)$, oltre ai comandi e alla funzione Matlab® implementata.

$0.0200, \;\; 0.0397, \;\; -0.0073$

Spazio per risposta lunga

Punto 7) — 2 pt (***) No Multichance

Dopo aver risposto al Punto 6), si ripetano i Punti 3) e 4) per stimare l'ordine di convergenza p atteso dal metodo. Si riportino, oltre ai comandi Matlab® usati, gli errori E_{h_i} e l'ordine p stimato.

$0.2020e-5, \;\; 0.0505e-5, \;\; 0.0126e-5, \;\; 0.0032e-5, \;\; p = 2$

Spazio per risposta lunga