Seconda Prova in Itinere

21/06/2022 — versione 1 — ◇♡♣♠◇♠♣♠♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 2 pt

Siano date le 3 coppie di dati $\{(0,2),(0.5,1),(1,1.5)\}$. Si costruisca il polinomio interpolante $\Pi_2(x)$ di tali dati e si riportino i valori di $\Pi_2(0.25)$ e $\dfrac{d\Pi_2}{dx}(0.25)$.

$1.3125, \quad -2$

2 — 1 pt

Siano date le $n+1 = 5$ coppie di dati $\{(0,3),(0.25,0.5),(0.5,1.5),(0.75,-0.5),(1,1)\}$. Qual è valore minimo dell'interpolante polinomiale lineare a tratti $\Pi_1^H(x)$ dei dati precedenti per $x \in [0,1]$?

-0.5

3 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = \sin(\pi\, x)$ e il suo interpolante polinomiale lineare a tratti $\Pi_1^H f(x)$ su 4 sottointervalli equispaziati di $[0,2]$. Si riporti il valore $\Pi_1^H f(1.6)$.

-0.8

4 — 2 pt (***) No Multichance

Si considerino le coppie di dati nella forma $\{(x_j,\, y_j)\}_{j=0}^{n}$, tali per cui $n+1 = 5$ e specificamente $\{(0,3),(0.25,0.5),(0.5,1.5),(0.75,-0.5),(1,1)\}$. Si costruisca il polinomio $p_2(x)$ di grado 2 approssimante tali dati nel senso dei minimi quadrati e si riporti il valore dello scarto quadratico $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (p_2(x_j) - y_j)^2$.

2.4143

5 — 1 pt

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$, con $f(x) = \sqrt{2 + |x|}$, tramite la formula dei trapezi composita per sottointervalli equispaziati di ampiezza $H = 1$. Si riporti il valore approssimato dalla formula $I_t^H(f)$ così ottenuto.

5.0123

6 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$, dove $f \in C^\infty([a,b])$, tramite una formula di quadratura composita accurata di ordine $p = 2$ rispetto all'ampiezza H dei sottointervalli. Sapendo che per $M_1 = 20$ sottointervalli equispaziati di $[a,b]$ si ha un errore pari a $e_1(f) = 10^{-1}$, per quanti sottointervalli M_2 si ha un errore stimato $e_2(f) = 10^{-3}$?

200

7 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -\dfrac{1}{81}\,(1+\sin(t))\,(y(t))^2 & t \in (0,5), \\ y(0) = 9. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero all'indietro basato sul metodo di Newton implementato nella funzione `eulero_indietro_newton.m` e passo $h = 0.2$, si riporti il valore calcolato di u_{N_t}, ovvero l'approssimazione di $y(5)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, \ldots, N_t$.

5.5989

8 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 2\,u(x) = 3 + x & x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \quad u'(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ e il metodo delle differenze finite all'indietro (di ordine 1) per l'approssimazione di $u'(1)$, ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_{10}, ovvero l'approssimazione di $u(1)$.

1.4207

9 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) - 50\,u'(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 3. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con tecnica *Upwind* e passo di discretizzazione $h = 1/10$, ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

2.5000

10 — 1 pt

Si consideri il seguente problema di diffusione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - 3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 6\,\sin(\pi\,x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Si consideri l'approssimazione di tale problema tramite il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione spaziale $h = 0.2$ e il metodo di Eulero in avanti con passo di discretizzazione temporale $\Delta t > 0$. Per quali valori di Δt è garantita l'assoluta stabilità?

$\Delta t < 0.0067$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\left(\mathbf{y}(t)\right)\, \mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t) & t \in (0, t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\mathbf{y}(t) = (y_1(t),\, y_2(t))^T$, $\mathbf{y}_0 = \left(-\dfrac{3}{4},\, 3\right)^T$, $A(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -1 & -\left(\dfrac{147}{16} + K\, y_2\right) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ per un parametro $K \in \mathbb{R}$, $\mathbf{g} = \left(-9\, e^{-t/2}\, \left(\sin^2(3\,t) - 1\right) - \dfrac{9}{2}\, e^{-t/4}\, \sin(3\,t),\, 0\right)^T$ e $t_f = 5$.

Punto 1) — 2 pt (***) No Multichance

Con riferimento a un generico sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (1), si riporti la definizione di zero-stabilità in relazione al metodo di Eulero in avanti. Si definisca tutta la notazione utilizzata.

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 3 pt

Dopo aver posto $K = 1$, si approssimi il problema (1) tramite il metodo di Eulero in avanti usando opportunamente la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m` con passo $h = 10^{-2}$. Si riportino, oltre ai comandi Matlab® :

- i valori delle approssimazioni $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_{N_h}$ rispettivamente di $\mathbf{y}(t_1)$ e $\mathbf{y}(t_f)$, dove $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$, $h = \dfrac{t_f}{N_h}$;
- il valore minimo $u_{2,min} = \min\limits_{n=0,\ldots,N_h} (\mathbf{u}_n)_2$ e il tempo discreto t_{min} a cui si ottiene tale valore $u_{2,min}$.

$\mathbf{u}_1 = (-1.0181,\, 2.9925)^T$, $\mathbf{u}_{N_h} = (-1.6865,\, -0.7539)^T$, $u_{2,min} = -2.4321$, $t_{min} = 1.0300$

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 2 pt

Dopo aver risposto al Punto 2) e sapendo che la soluzione esatta del problema (1) è

$$\mathbf{y}(t) = 3\, e^{-t/4} \left(-\frac{1}{4}\, \cos(3t) - 3\, \sin(3t),\; \cos(3t)\right)^T$$

si calcolino gli errori $E_h = \|\mathbf{u}_{N_h} - \mathbf{y}(t_f)\|$ ottenuti con il metodo di Eulero in avanti e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-3}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-4}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-4}$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \ldots, 4$ e i comandi Matlab® usati.

0.0182, 0.0090, 0.0045, 0.0023

Spazio per risposta lunga

Punto 4) — 2 pt

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al Punto 3) per stimare algebricamente l'ordine di convergenza p del metodo di Eulero in avanti. Si giustifichi la risposta data e la si motivi alla luce della teoria. Si riportino i comandi Matlab® considerati.

$p = 1.0018$

Spazio per risposta lunga

Punto 5) — 3 pt

Si vuole ora applicare a un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (1) il metodo di Runge-Kutta associato alla seguente tabella di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Si scriva un'opportuna funzione Matlab® che implementi il metodo precedente per un sistema di EDO con il generico passo $h > 0$.

Si utilizzi la funzione precedentemente implementata per risolvere il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (1) con $K = 1$ e usando il passo $h = 10^{-2}$. Si riportino i valori delle approssimazioni $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_{N_h}$ rispettivamente di $\mathbf{y}(t_1)$ e $\mathbf{y}(t_f)$. Si riportino i comandi Matlab® considerati.

$\mathbf{u}_1 = (-1.0171,\ 2.9912)^T$, $\mathbf{u}_{N_h} = (-1.5135,\ -0.6530)^T$

Spazio per risposta lunga

Punto 6) — 2 pt

Con riferimento al sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (1), ma col parametro $K = 0$ e $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, per quali valori di $h > 0$ il metodo di *Heun* risulta assolutamente stabile? Si giustifichi dettagliatamente la risposta data riportando gli eventuali comandi Matlab® usati.

$0 < h < 0.4247$

Spazio per risposta lunga

Punto 7) — 3 pt (***) No Multichance

Si consideri il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (1) col parametro $K = 0$ e $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Si approssimi tale problema con il metodo di *Crank-Nicolson* e passo $h = 10^{-2}$, scegliendo una strategia computazionalmente efficiente. Si riportino i valori delle approssimazioni $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_{N_h}$ rispettivamente di $\mathbf{y}(t_1)$ e $\mathbf{y}(t_f)$ e i comandi Matlab® considerati.

$\mathbf{u}_1 = (-1.0164,\ 2.9912)^T$, $\mathbf{u}_{N_h} = (-0.4706,\ -0.1642)^T$

Spazio per risposta lunga