Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **Appello** **09 febbraio 2018**	**Prof. P.F. Antonietti** **Prof. L. Dedè** **Prof. M. Verani**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il più grande numero x_{max} rappresentabile nell'insieme $\mathbb{F}(2,5,-1,5)$; riportare il risultato in base decimale.

2. *(2 punti)* Sia $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quali valori di α la matrice A_α è *invertibile* e ammette un'unica fattorizzazione *LU senza pivoting*?

3. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare il valore dell'elemento $u_{33} = (U)_{33}$ della matrice triangolare *superiore* U.

4. *(2 punti)* Si consideri la funzione $f(x) = e^{(4/3-x)} - 1$ con un unico zero α e il metodo di bisezione per la sua approssimazione. Senza applicare esplicitamente il metodo, si *stimi* l'errore commesso dopo $k = 5$ iterazioni partendo dall'intervallo iniziale [0,2].

5. *(1 punto)* Si consideri una funzione $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ dotata dello zero α. Sapendo che, per l'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, il metodo di Newton converge ad α e che si hanno $f'(\alpha) = 0$ e $f''(\alpha) = \frac{3}{5}$, si determini l'ordine di convergenza p atteso dal metodo.

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = 2 + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Si riporti il valore della prima iterata del metodo delle iterazioni di punto fisso $x^{(1)}$ ottenuta per il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = 5$.

7. *(1 punto)* Si consideri una funzione $\phi(x) \in C^2(\mathbb{R})$ dotata del punto fisso α. Sapendo che, per l'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, il metodo delle iterazioni di punto fisso converge ad α e che si hanno $\phi'(\alpha) = \frac{1}{3}$ e $\phi''(\alpha) = \frac{3}{8}$, si determini l'ordine di convergenza p atteso dal metodo.

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$. Inoltre, si consideri la soluzione di tale sistema lineare mediante un metodo iterativo.

11 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo con matrice di iterazione $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (si definisca in modo preciso tutta la notazione usata).

(b) *(2 punti)* Si consideri il metodo di Gauss–Seidel per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si presenti l'algoritmo in forma matriciale.

(c) *(5 punti)* Si implementi il metodo di Gauss–Seidel in forma matriciale in Matlab® nella funzione `GaussSeidel.m` (si usi il comando "back-slash" di Matlab® \ laddove necessario). Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo relativo (detto anche residuo normalizzato). La struttura della funzione è:

```
function [x,Nit] = GaussSeidel(A,b,x0,nmax,tol).
```

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `GaussSeidel.m` per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (3,\, 3,\, \ldots,\, 3)^T \in \mathbb{R}^{100}$ e $A \in \mathbb{R}^{100\times100}$ definita come

$$A = \mathrm{tridiag}\,(-4, 9, -4)\,;$$

si consideri l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 1000$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo relativo $r_{rel}^{(N)}$.

$N =$ ________ $\qquad x_3^{(N)} =$ ________________ $\qquad r_{rel}^{(N)} =$ ________________

Infine, utilizzando opportunamente la funzione `GaussSeidel.m`, si riportino i valori della terza componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_3^{(1)}$ e $x_3^{(2)}$.

$x_3^{(1)} =$ ________________ $\qquad x_3^{(2)} =$ ________________

(d) *(3 punti)* Si riporti l'algoritmo del metodo del *gradiente precondizionato* per risolvere il sistema lineare generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Inoltre, assumendo la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ assegnati al punto (c), la matrice di precondizionamento $P = 9\,I$, con $I \in \mathbb{R}^{100\times100}$ la matrice d'identità, e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (3, 3, \ldots, 3)^T \in \mathbb{R}^{100}$, si calcoli il valore del parametro dinamico ottimale α_0 associato a $\mathbf{x}^{(0)}$ per determinare $\mathbf{x}^{(1)}$.

$\alpha_0 =$ ________________

Esercizio 2. Si consideri il metodo delle potenze inverse per l'approssimazione dell'autovalore di modulo minimo $\lambda_n(A)$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

11 punti

(a) *(3 punti)* Si riporti l'algoritmo delle potenze inverse definendo in modo preciso la notazione utilizzata.

(b) *(2 punti)* Si commenti e discuta sinteticamente il costo computazionale del metodo delle potenze inverse confrontandolo con quello del metodo delle potenze dirette. Inoltre, si proponga (motivandola brevemente) una strategia computazionalmente efficiente per l'implementazione dell'algoritmo delle potenze inverse.

(c) *(2 punti)* Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

Utilizzando il comando Matlab® `eig`, si calcolino e si riportino gli autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^4$ di A. Si commenti l'applicabilità del metodo delle potenze inverse per l'approssimazione dell'autovalore di modulo minimo di A.

$\lambda_1(A) =$ ____________________ $\lambda_2(A) =$ ____________________

$\lambda_3(A) =$ ____________________ $\lambda_4(A) =$ ____________________

(d) *(2 punti)* Per la matrice A di cui al punto (c) e assegnato il vettore $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$, si riporti la prima iterata dell'autovettore (di modulo unitario) $\mathbf{y}^{(1)}$ ottenuta tramite il metodo delle potenze inverse.

$\mathbf{y}^{(1)} =$ ____

(e) *(1 punto)* Sulla base delle informazioni ottenute al punto (c) per la matrice A, si immagini di applicare il metodo delle potenze inverse con *shift*. Quale autovalore $\lambda_i(A)$ della matrice A verrà approssimato con il metodo delle potenze inverse usando un valore di *shift* $s = 14{,}1$?

$\lambda_i(A) =$ ____________________

(f) *(1 punto)* Quali autovalori della matrice A di cui al punto (c) possono essere calcolati con il metodo della fattorizzazione QR?

Parte II - Pre Test

---

10 punti

1. *(1 punto)* Assegnati i nodi distinti $x_0,\ x_1,\ldots,x_9$ e i dati corrispondenti $y_0,\ y_1,\ldots,y_9$, si riporti il grado n del polinomio $\Pi_n(x)$ interpolante tali dati.

2. *(2 punti)* Assegnati i nodi equispaziati $x_0,\ x_1,\ldots x_5$ nell'intervallo [0,10] e la funzione $f(x) = (x+4)^2$, si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H(x)$ interpolante $f(x)$ ai precedenti nodi. Si riporti il valore di $\Pi_1^H(5)$.

3. *(1 punto)* Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$ e i dati corrispondenti $y_0 = 0$, $y_1 = 4$, $y_2 = 0$, $y_3 = 8$ e $y_4 = 12$, si determini l'espressione della retta di regressione $p_1(x)$ approssimate tali dati nel senso dei minimi quadrati.

4. *(1 punto)* Sia $f(x) = 3+\sin(7\,x)$. Si approssimi $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ con la formula semplice del punto medio. Si riporti l'approssimazione I_{PM} ottenuta.

5. *(2 punti)* Si consideri la formula dei trapezi composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_{-2}^{2} e^x\,dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero M di sottointervalli equispaziati di [−2,2] tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-1}$.

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 3x - 6$. Si riporti l'errore associato all'approssimazione di $f'(\overline{x})$ in un generico valore $\overline{x} \in \mathbb{R}$ mediate le differenze finite all'indietro, ovvero $E_{-}f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_{-}f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{3}$.

7. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -3\,y(t) & t \in (0{,}30], \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passo di discretizzazione $h = 0.1$ e $u_0 = 5$ si calcoli u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

Parte II - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy:

12 punti

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & t \in (0,t_f], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

con $t_f > 0$ e il dato iniziale y_0 assegnati.

(a) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo del metodo di Eulero Implicito (non in stretto linguaggio Matlab®) per l'approssimazione del problema di Cauchy (1); si definisca con precisione tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Si discuta sinteticamente l'ordine di convergenza dell'errore del metodo di Eulero Implicito.

(c) *(2 punti)* Si consideri il problema modello, ovvero $f(t,y) = \lambda\, y$ in (1) con $\lambda \in \mathbb{R}$, e si riporti la definizione di assoluta stabilità. Si discuta inoltre l'assoluta stabilità del metodo di Eulero Implicito.

(d) *(4 punti)* Si consideri il problema di Cauchy (1) con $f(t,y) = 9\,\pi\, \sin(\pi t)\, e^{-t/2} - \dfrac{y}{2}$, $t_f = 4$ e $y_0 = 9$. Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare tale problema mediante il metodo di Eulero Implicito con diversi passi temporali $h_1 = 0.05$, $h_2 = 0.025$, $h_3 = 0.0125$ e $h_4 = 0.00625$. Si riportino i valori della soluzione approssimata $u_{N_{h,i}}$ corrispondente all'istante finale t_f per ciascuno dei precedenti valori di h_i (si riportino almeno 4 cifre decimali).

$u_{N_{h,1}} =$ ____________________ $u_{N_{h,2}} =$ ____________________

$u_{N_{h,3}} =$ ____________________ $u_{N_{h,4}} =$ ____________________

(e) *(1 punto)* Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = 9\;(2 - \cos(\pi\, t))\; e^{-t/2}$, si calcolino e si riportino gli errori E_{h_i} associati alle soluzioni $u_{N_{h,i}}$ al tempo t_f ottenuti per ciascun valore di h_i specificato al punto (d) (si riportino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

$E_{h_1} =$ ____________________ $E_{h_2} =$ ____________________

$E_{h_3} =$ ____________________ $E_{h_4} =$ ____________________

(f) *(2 punti)* Si utilizzino i risultati ottenuti al punto (e) per stimare *graficamente* l'ordine di convergenza del metodo di Eulero Implicito. Si motivi la risposta riportando con completezza la procedura seguita e il corrispondente grafico ottenuto.

Esercizio 2.

Si consideri il seguente problema a valori ai limiti (di diffusione–reazione):

10 punti

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma\, u(x) = f(x) & \text{in } (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta. \end{cases} \tag{2}$$

(a) *(3 punti)* Si approssimi il problema ai limiti (2) con uno schema alle differenze finite centrate (del second'ordine) su una griglia di $N+2$ nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, con $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\,h$ per $i = 0,\ldots,N+1$ e passo $h = (b-a)/(N+1)$. Si riportino le equazioni del sistema risultante in forma esplicita definendo tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Si riporti la controparte algebrica dell'approssimazione di cui al punto (a), ovvero il sistema lineare $A\,\mathbf{u} = \mathbf{b}$, fornendo l'espressione dei coefficienti della matrice A, del vettore del termine noto $\mathbf{b}$ e del vettore delle incognite $\mathbf{u}$.

(c) *(1 punto)* Si considerino ora i seguenti dati per il problema (2): $\sigma = 3$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e $f(x) = 2\,e^x \left[2\,\sin(\pi\,x) - 2\,\pi\,\cos(\pi\,x) + \pi^2\,\sin(\pi\,x)\right]$. Si verifichi che la soluzione esatta del problema è data da $u(x) = 2\,e^x\,\sin(\pi\,x)$; si riporti la procedura seguita.

(d) *(4 punti)* Si risolva il problema ai limiti (2) con i dati di cui al punto (c) tramite il metodo descritto al punto (a), ovvero risolvendo il sistema lineare definito al punto (b), per i valori di $N = 9$, 19, 39 e 79 (per risolvere il sistema lineare si utilizzi il comando "back-slash" di Matlab® \). Usando la soluzione esatta $u(x)$ di cui al punto (c), si calcolino e si riportino per ogni N gli errori $E_N = \max_{i=0,\ldots,N+1} |u_i - u(x_i)|$ (si riportino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

per $N = 9$ $\qquad E_N =$ ____________________

per $N = 19$ $\qquad E_N =$ ____________________

per $N = 39$ $\qquad E_N =$ ____________________

per $N = 79$ $\qquad E_N =$ ____________________

(e) *(1 punto)* Dopo aver risposto al punto (d), si stimi *algebricamente* l'ordine di convergenza p del metodo rispetto ad h (ovvero $(b-a)/(N+1)$) riportando sinteticamente la procedura seguita.

$p =$ __________