Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **Appello** **31 agosto 2017**	**Prof. P.F. Antonietti** **Prof. L. Dedè** **Prof. M. Verani**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il valore dell'epsilon macchina ε_M (riferito al numero reale 1) associato all'insieme di numeri floating–point $\mathbb{F}(2, 6, -2, 3)$.

2. *(1 punto)* Determinare il costo computazionale dell'algoritmo di eliminazione in avanti per la soluzione del sistema lineare $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{30}$ e $L = (\ell_{i,j}) \in \mathbb{R}^{30\times 30}$ è una matrice triangolare superiore tale che $\ell_{i,j} = 0$ se $j > i$.

3. *(2 punti)* Sia $A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha - 2 & 0 \\ 7\alpha & \alpha + 2 \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro α reale. Per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice A_α risulta simmetrica e definita positiva?

4. *(2 punti)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = (1\ \ 1)^T$ e $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Assegnato $\mathbf{x}^{(0)} = (1\ \ 1)^T$ si riporti la prima iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ del metodo di Jacobi.

5. *(2 punti)* Si consideri la funzione $f(x) = \log(x + 6/7)$ dotata dello zero $\alpha = 1/7$ e il metodo di bisezione per la sua approssimazione. Senza applicare esplicitamente il metodo, si *stimi* l'errore commesso dopo $k = 5$ iterazioni partendo dall'intervallo iniziale [0,3].

6. *(1 punto)* Si consideri una funzione $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ dotata dello zero α. Sapendo che, per l'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, il metodo di Newton converge ad α e che si hanno $f'(\alpha) = 0$ e $f''(\alpha) = \frac{1}{2}$, si determini l'ordine di convergenza p atteso dal metodo.

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = \frac{1}{3}\,(6 + xe^{3-x})$. Scegliendo l'iterata iniziale $x^{(0)} = 2$ si applichi un'iterazione di punto fisso e si riporti il valore corrispondente di $x^{(1)}$.

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, essendo $n \geq 1$.

11 punti

(a) *(3 punti)* Assumendo che la matrice A sia simmetrica e definita positiva, si riporti l'algoritmo (*non* in stretto linguaggio Matlab®) del metodo del *gradiente* per la soluzione del *sistema lineare* $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si definisca tutta la notazione utilizzata.

(b) *(2 punti)* Si riporti il risultato (teorema) di convergenza del metodo del *gradiente* (si definisca tutta la notazione utilizzata), discutendo in particolare la velocità di convergenza a $\mathbf{x}$.

(c) *(2 punti)* Sia ora $n = 250$ la dimensione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (5,5,\ldots,5)^T$ e la matrice

$$
\mathrm{A} = \begin{bmatrix}
5 & -1 & -1 & & & & 0 \\
-1 & 5 & -1 & -1 & & & \\
-1 & -1 & 5 & -1 & -1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & \\
 & & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\
 & & & -1 & -1 & 5 & -1 \\
0 & & & & -1 & -1 & 5
\end{bmatrix}.
$$

Il metodo del *gradiente coniugato* risulta convergente alla soluzione $\mathbf{x}$ per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{250}$? Si motivi dettagliatamente e con completezza la risposta data.

(d) *(2 punti)* Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `pcg` per approssimare la soluzione del sistema lineare di cui al punto (c) mediante il metodo del *gradiente coniugato*; si considerino la tolleranza `tol`$= 10^{-6}$ e `nmax`$= 1000$ (`pcg` considera di default la guess iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,\ldots,0)^T$).

Si riportino: il numero di iterazioni N effettuato, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo relativo $r_{rel}^{(N)}$ in formato esponenziale.

$N =$ __________ $\quad x_3^{(N)} =$ ____________________ $\quad r_{rel}^{(N)} =$ ____________________

(e) *(2 punti)* Si commenti la velocità di convergenza a $\mathbf{x}$ attesa per il metodo del *gradiente coniugato* applicato al sistema lineare di cui al punto (c).

Esercizio 2. Si consideri il metodo delle *potenze* (*dirette*) per l'approssimazione dell'autovalore di modulo massimo $\lambda_1(A)$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

11 punti

(a) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo delle potenze (non in stretto linguaggio Matlab®) definendo in modo preciso tutta la notazione utilizzata.

(b) *(3 punti)* Si enunci e si *dimostri* il teorema di convergenza del metodo delle potenze (specificare in modo dettagliato tutte le ipotesi e la tesi del teorema).

(c) *(1 punto)* Si verifichi (motivandola) l'applicabilità del metodo delle potenze alla matrice A assegnata in Matlab® col comando $A =$ `full(delsq(numgrid('L',7)))`.

(d) *(4 punti)* Si implementi in Matlab® la funzione `potenze.m` per l'approssimazione di $\lambda_1(A)$ mediante il metodo delle potenze. Si utilizzi il criterio d'arresto basato sulla differenza tra due approssimazioni successive dell'autovalore. La struttura della funzione è la seguente.

```
function [x,lambdavect,Nit] = potenze(A,x0,nmax,tol)
```

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `x0`, il vettore iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, l'autovettore approssimato; `lambdavect`, il vettore contenente tutte le iterate $\{\lambda_1^{(k)}\}$ dell'autovalore approssimato; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `potenze.m` per approssimare $\lambda_1(A)$ per la matrice A definita al punto (c). Si utilizzino $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ come vettore iniziale, una tolleranza `tol`$= 10^{-6}$ e `nmax`$= 1000$.

Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, l'autovalore approssimato $\lambda_1^{(N)}$, la terza componente dell'autovettore corrispondente $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e i valori delle iterate $\lambda_1^{(0)}$ e $\lambda_1^{(1)}$.

$N =$ ______________ $\lambda_1^{(N)} =$ ______________ $x_3^{(N)} =$ ______________

$\lambda_1^{(0)} =$ ______________ $\lambda_1^{(1)} =$ ______________

(e) *(1 punto)* Si immagini di applicare il metodo delle *potenze inverse* con *shift* alla matrice A di cui al punto (c). Quale autovalore $\lambda_i(A)$ della matrice A verrà approssimato con il metodo delle potenze inverse usando un valore di *shift* $s = 2$?

$\lambda_i(A) =$ __________________

Parte II - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Assegnati i nodi $x_0 = -3$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 2$, si consideri il polinomio caratteristico di Lagrange $\varphi_3(x)$. Si riporti il valore di $\varphi_3(x_2)$.

2. *(2 punti)* Siano assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots, x_4$ nell'intervallo [0,4] e i corrispondenti valori $y_0 = 2$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ e $y_4 = 1$. Si consideri il polinomio di Lagrange $\Pi_4(x)$ interpolante tali dati ai precedenti nodi e si riporti il valore di $\Pi_4(2.5)$.

3. *(1 punto)* Sia $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$. Si approssimi $\int_1^6 f(x)dx$ con la formula semplice di Simpson. Si riporti l'approssimazione I_S ottenuta.

4. *(2 punti)* Si consideri la formula del punto medio composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_0^1 (1 - \cos(\pi x))\, dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero minimo M di sottointervalli equispaziati di [0,1] tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-5}$.

5. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 3\,(2^{5x} - 1)$. Si riporti il valore approssimato di $f'(\overline{x})$ in $\overline{x} = 0$ ottenuto mediate le differenze finite in avanti, ovvero $\delta_+ f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{5}$.

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 4x + 1$. Si riporti l'errore associato all'approssimazione di $f'(\overline{x})$ in un generico valore $\overline{x} \in \mathbb{R}$ ottenuta mediate le differenze finite centrate, ovvero $E_c f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_c f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{4}$.

7. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 8\,t + 7\,y(t) & t \in (0{,}8], \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero Implicito con passo $h = 0.1$, si calcoli u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$ (si riporti il risultato con almeno 6 cifre decimali).

Parte II - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy:

12 punti

$$\begin{cases} y'(t) = f(t{,}y) & t \in (0{,}t_f], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \qquad (1)$$

con $t_f > 0$ e il dato iniziale y_0 assegnati.

(a) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo del metodo di Heun (non in stretto linguaggio Matlab®) per l'approssimazione del problema di Cauchy (1); si definisca con precisione tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Si discuta sinteticamente l'ordine di convergenza dell'errore del metodo di Heun.

(c) *(2 punti)* Si consideri il problema modello, ovvero $f(t,y) = \lambda\, y$ in (1) con $\lambda \in \mathbb{R}$, e si riporti la definizione di assoluta stabilità. Sotto quali condizioni il metodo di Heun è assolutamente stabile?

(d) *(4 punti)* Si consideri il problema di Cauchy (1) con $f(t,y) = \left(\dfrac{180}{36\, t^2 + 1}\, e^{-6\, t} - 6\, y \right)$, $t_f = 1$ e $y_0 = 0$. Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare tale problema mediante il metodo di Heun con diversi passi temporali $h_1 = 0.05$, $h_2 = 0.025$, $h_3 = 0.0125$ e $h_4 = 0.00625$. Si riportino i valori della soluzione approssimata $u_{N_{h,i}}$ corrispondente all'istante finale t_f per ciascuno dei precedenti valori di h_i (si riportino almeno 4 cifre decimali).

$u_{N_{h,1}} =$ ____________________ $u_{N_{h,2}} =$ ____________________

$u_{N_{h,3}} =$ ____________________ $u_{N_{h,4}} =$ ____________________

(e) *(1 punto)* Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = 30\, \mathrm{atan}(6\, t)\, e^{-6\, t}$, si calcolino e si riportino gli errori E_{h_i} associati alle soluzioni $u_{N_{h,i}}$ al tempo t_f ottenuti per ciascun valore di h_i specificato al punto (d) (si riportino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

$E_{h_1} =$ ____________________ $E_{h_2} =$ ____________________

$E_{h_3} =$ ____________________ $E_{h_4} =$ ____________________

(f) *(2 punti)* Si utilizzino i risultati ottenuti al punto (e) per stimare *graficamente* l'ordine di convergenza del metodo di Heun. Si motivi la risposta riportando con completezza la procedura seguita e il corrispondente grafico ottenuto.

Esercizio 2.

Si consideri il seguente problema a valori ai limiti (di diffusione–reazione):

10 punti

$$
\begin{cases}
-u''(x) + \sigma\, u(x) = f(x) \quad \text{in } (a,b),\\
u(a) = \alpha,\\
u(b) = \beta.
\end{cases}
\tag{2}
$$

(a) *(3 punti)* Si approssimi il problema ai limiti (2) con uno schema alle differenze finite centrate (del second'ordine) su una griglia di $N+2$ nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, con $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\,h$ per $i = 0,\ldots,N+1$ e passo $h = (b-a)/(N+1)$. Si riportino le equazioni del sistema risultante in forma esplicita definendo tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Si riporti la controparte algebrica dell'approssimazione di cui al punto (a), ovvero il sistema lineare $A\,\mathbf{u} = \mathbf{b}$, fornendo l'espressione dei coefficienti della matrice A, del vettore del termine noto $\mathbf{b}$ e del vettore delle incognite $\mathbf{u}$.

(c) *(1 punto)* Si considerino ora i seguenti dati per il problema (2): $\sigma = 4$, $a = 0$, $b = \pi$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e $f(x) = 4\, e^{-4\,x}\, [\sin(4x) + 8\, \cos(4x)]$. Si verifichi che la soluzione esatta del problema è data da $u(x) = e^{-4x}\, \sin(4x)$; si riporti la procedura seguita.

(d) *(4 punti)* Si risolva il problema ai limiti (2) con i dati di cui al punto (c) tramite il metodo descritto al punto (a), ovvero risolvendo il sistema lineare definito al punto (b), per i valori di $N = 9$, 19, 39 e 79 (per risolvere il sistema lineare si utilizzi il comando "back-slash" di Matlab® \). Usando la soluzione esatta $u(x)$ di cui al punto (c), si calcolino e si riportino per ogni N gli errori $E_N = \max_{i=0,\ldots,N+1} |u_i - u(x_i)|$ (si riportino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

per $N = 9$ $\quad E_N =$ ____________________

per $N = 19$ $\quad E_N =$ ____________________

per $N = 39$ $\quad E_N =$ ____________________

per $N = 79$ $\quad E_N =$ ____________________

(e) *(1 punto)* Dopo aver risposto al punto (d), si stimi *algebricamente* l'ordine di convergenza p del metodo rispetto ad h (ovvero $(b-a)/(N+1)$) riportando sinteticamente la procedura seguita.

$p =$ __________