Test – 50pt – 60’

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

1 — 0 pt

Inserire il numero di matricola.

2 — 0 pt

Selezionare la *penultima* cifra X del numero di matricola.

3 — 2 pt

Si determini il più grande numero positivo x_{max} rappresentabile nell’insieme $\mathbb{F}(2, 7, -6, 6)$. Si riporti il risultato in base decimale.

63.5

4 — 2 pt

Si consideri il sistema lineare $L\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{x}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{10}$ e $L \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ è una matrice non singolare tale che $(L)_{i,j} = 0$ per $j > i$ oppure $j < (i-1)$ (ovvero L è bidiagonale inferiore). Si determini il costo computazionale corrispondente all’applicazione dell’algoritmo delle sostituzioni in avanti a tale sistema lineare.

28

5 — 3 pt

Sia dato un sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} (2\gamma) & 2 & -4 \\ \gamma & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una matrice dipendente da un parametro $\gamma > 0$ e $\mathbf{b} = (1\ 2\ 4)^T$. Si risolva il sistema tramite il metodo della fattorizzazione LU con pivoting per righe. Si riportino, in funzione di γ, gli elementi $l_{21} = (L)_{21}$ e $u_{33} = (U)_{33}$ dei fattori L ed U della matrice *permutata* e la seconda componente y_2 del vettore ausiliario $\mathbf{y}$ associato alla soluzione del sistema triangolare inferiore che compare durante l’applicazione del metodo.

$l_{21} = \dfrac{1}{\gamma}$ $\qquad u_{33} = 6$ $\qquad y_2 = 4 - \dfrac{1}{\gamma}$

6 — 3 pt

Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1)^T$, si consideri il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, per $k = 0, 1, \ldots$, dato $\mathbf{x}^{(0)}$. Sapendo che il metodo è fortemente consistente e la matrice di precondizionamento è $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, si calcoli e si riporti $\mathbf{x}^{(1)}$, avendo posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

$(2/3,\ 2/3,\ 1/5)^T$

7 — 2 pt

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Quale tra le seguenti affermazioni è *falsa*?

A) La matrice di precondizionamento associata al metodo di Jacobi corrisponde alla matrice diagonale estratta da A.

B) Per la matrice A, i metodi di Jacobi e Gauss–Seidel sono entrambi convergenti o non convergenti per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.

C) Il metodo di Jacobi converge per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.

D) Il metodo di Jacobi non converge per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.

D

8 — 3 pt (***)

Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ è la matrice di Hilbert assegnata col comando Matlab® `A=hilb(3)`, si stimi il minimo numero di iterazioni N del metodo del gradiente che garantisce un abbattimento dell'errore iniziale $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$ di un fattore 200.

1389

9 — 2 pt (***)

Dato il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1)^T$, si consideri il metodo del gradiente coniugato per l'approssimazione di $\mathbf{x}$. Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `pcg` e si riporti il valore di $\mathbf{x}^{(2)}$ avendo posto l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$(0.406250,\ 0.40625,\ 0.343750)^T$

10 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e il metodo delle potenze (dirette) per approssimare l'autovalore di modulo massimo. Assegnato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 0)^T$, si riportino i valori approssimati $\lambda^{(0)}$ e $\lambda^{(1)}$ dell'autovalore ottenuti rispettivamente all'iterata iniziale e dopo l'applicazione di un'iterazione del metodo.

4, 3.4

11 — 3 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. Per quali valori dello shift $s \in \mathbb{R}$ è possibile approssimare l'autovalore $\lambda_2(A) = -4$ tramite il metodo delle potenze inverse con shift?

$s < -2.5$

12 — 3 pt (***)

Il metodo delle corde approssima lo zero α di una funzione $f(x)$ applicando la seguente iterata:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{q_c} \qquad \text{per } k \geq 0,$$

dati $x^{(0)}$ e $q_c = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ per $\alpha \in (a, b)$. Posti $f(x) = \log\left(\dfrac{x-2}{3}\right)$, $a = 4$, $b = 6$ e $x^{(0)} = a$, si riporti il valore dell'iterata $x^{(2)}$ ottenuta applicando il metodo.

5.010953

13 — 3 pt

Si consideri l'interpolante polinomiale $\Pi_4 f(x)$ della funzione $f(x) = \cos(3\,x + \sqrt{5})$ ai nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots, x_4$ nell'intervallo $I = [0,1]$. Senza costruire esplicitamente $\Pi_4 f(x)$, si stimi l'errore di interpolazione corrispondente, ovvero $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_4 f(x)|$.

0.0118652

14 — 2 pt **(***)**

Si consideri la funzione $f(x) = e^x$ e il suo interpolante *quadratico* a tratti $\Pi_H^2 f(x)$ sull'intervallo $[-2, 2]$ con passo $H = 1$. Si riporti il valore di $\Pi_H^2 f(1.5)$.

4.481689

15 — 3 pt

Si considerino le coppie di dati $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{10}$, dove $x_i = i$, per $i = 0, 1, \ldots, 10$, e $f(x) = e^{x/10} + 0.1\,\sin(\pi\,x + \sqrt{2})$. Si approssimino tali dati nel senso dei minimi quadrati con un polinomio di grado $m = 2$, $\widetilde{f}_2(x)$, e si riporti il valore $\widetilde{f}_2(11)$.

3.038957

16 — 2 pt

Si consideri l'integrale $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e la sua approssimazione tramite una formula di quadratura interpolatoria $I_{q,n}(f) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, f(x_j)$, dove $\{\alpha_j\}_{j=0}^n$ sono i pesi di quadratura e $\{x_j\}_{j=0}^n \in [a,b]$ sono i nodi di quadratura, per $n \geq 0$. Quale tra le seguenti affermazioni è *vera*?

A) Il grado di esattezza della formula è $r = n + 1$ per ogni $n \geq 0$, se i nodi di quadratura sono equispaziati.

B) Se $n = 1$, allora la formula di quadratura coincide con la formula del punto medio semplice.

C) Se $f = 1$, allora $I(f) \equiv I_{q,n}(f)$ quando $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j = b - a$.

D) Per tutte le formule di quadraura il nodo x_0 è sempre tale che $x_0 = a$ per ogni $n \geq 0$.

C

17 — 3 pt

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ attraverso la fomula di quadratura semplice di Gauss–Legendre con 3 nodi; tali nodi di quadratura riferiti all'intervallo $[-1,1]$ sono $\widehat{x}_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\widehat{x}_1 = 0$ e $\widehat{x}_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$, mentre i corrispondenti pesi di quadratura sono $\widehat{\alpha}_0 = \frac{5}{9}$, $\widehat{\alpha}_1 = \frac{8}{9}$ e $\widehat{\alpha}_2 = \frac{5}{9}$. Posti $a = 0$, $b = 4$ e $f(x) = e^x$, si riporti l'approssimazione di $I(f)$ così ottenuta.

53.530349

18 — 2 pt (***)

Si consideri la funzione $f(x) = \gamma\, x^3 - 4$ dipendente dal parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ e l'approssimazione di $f'(\overline{x})$ tramite le differenze finite centrate $\delta_c f(\overline{x})$ in un generico punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ con passo $h = 1/3$. Si riporti l'espressione dell'errore $E_c f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_c f(\overline{x})$ in funzione del parametro γ.

$-\gamma/9$

19 — 2 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 3\, e^{y(t)} - 19\, t & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero in avanti con passo $h = 0.1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

0.3

20 — 3 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 5\, u(x) = 1 & x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N + 1 = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_5, ovvero l'approssimazione di $u(x_5)$.

0.377544

21 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (a,b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Si supponga di approssimare tale problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h_1 > 0$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$, cui corrisponde un errore $E_{h_1} = \max\limits_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j| = 8 \cdot 10^{-3}$. Assumendo ora di considerare il passo di discretizzazione $h_2 = h_1/2$, si riporti il valore stimato dell'errore E_{h_2}.

$2 \cdot 10^{-3}$

22 — 3 pt (***)

Si consideri il seguente problema di diffusione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 3\,\sin(\pi\, x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Si consideri l'approssimazione di tale problema tramite il metodo delle differenze finite con passo di discretizzazione spaziale $h = 1/2$ e il metodo di Eulero all'indietro con passo di discretizzazione temporale $\Delta t = 1/8$. Si calcoli u_1^1, ovvero l'approssimazione di $u(1/2, 1/8)$.

1.5