Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **Appello** **21 gennaio 2020**	**Prof. L. Dedè** **Prof. A. Manzoni** **Prof. S. Micheletti**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il valore dell'epsilon macchina ε_M (riferito al numero reale 1) associato all'insieme di numeri floating–point $\mathbb{F}(2, 3, -4, 5)$.

$$\boxed{\varepsilon_M = 2^{-2}}$$

2. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare i valori degli elementi $l_{32} = (L)_{32}$ e $u_{33} = (U)_{33}$ rispettivamente delle matrici triangolari *inferiore* L e *superiore* U.

$$\boxed{l_{32} = \frac{17}{7} \qquad u_{33} = -\frac{27}{7}}$$

3. *(1 punto)* Determinare il costo computazionale (numero di operazioni) dell'algoritmo di sostituzione in avanti per la soluzione del sistema lineare $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{40}$ e $L = (\ell_{i,j}) \in \mathbb{R}^{40\times 40}$ è una matrice triangolare superiore tale che $\ell_{i,j} = 0$ se $j > i$.

$$\boxed{\textbf{costo} = 1600}$$

4. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e il metodo delle potenze (dirette) per approssimare l'autovalore di modulo massimo. Assegnato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1\ 0)^T$, si riportino i valori approssimati $\lambda^{(0)}$ e $\lambda^{(1)}$ dell'autovalore ottenuti rispettivamente all'iterata iniziale e dopo l'applicazione di un'iterazione del metodo.

$$\boxed{\lambda^{(0)} = 9 \qquad \lambda^{(1)} = \frac{633}{85} = 7{,}447\,059}$$

5. *(1 punto)* Quale tra gli autolavori della matrice $A = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ -11 & -23 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$ può essere determinato applicando il metodo delle potenze *inverse*? Se ne riporti il valore.

$$\boxed{\lambda_3(A) = -4}$$

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 5\,(e^{x-5} - 1)$ e il metodo di bisezione per l'approssimazione dello zero $\alpha = 5$ nell'intervallo [3,6]. Si riporti il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)}$ del metodo.

$$\boxed{x^{(0)} = 4{,}5}$$

7. *(2 punti)* Si consideri la funzione $f(x) = x^2 + 4\,x - 45$ e il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 5$. Si riportino i valori della prima e della seconda iterata $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ del metodo assumendo l'iterata iniziale $x^{(0)} = 2$.

$x^{(1)} = 6{,}125 \qquad x^{(2)} = 5{,}077\,885$

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$. Inoltre, si consideri la soluzione di tale sistema lineare mediante un metodo iterativo.

12 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo con matrice di iterazione $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (si definisca in modo preciso tutta la notazione usata).

(b) *(2 punti)* Si *dimostri* che la condizione di cui al punto (a) è necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo iterativo per ogni iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (suggerimento: si introduca l'errore $\mathbf{e}^{(k)}$ associato all'iterata $\mathbf{x}^{(k)}$).

(c) *(2 punti)* Si presenti il criterio d'arresto per un metodo iterativo basato sul *residuo normalizzato* (detto anche residuo relativo). Inoltre, se ne discuta la sua affidabilità.

(d) *(2 punti)* Si consideri il metodo di *Jacobi* per la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si presenti l'algoritmo in forma matriciale.

(e) *(5 punti)* Si implementi il metodo di *Jacobi* in forma matriciale in Matlab® nella funzione `Jacobi.m` (si usi il comando "back-slash" di Matlab® \ laddove necessario). Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato (detto anche residuo relativo). La struttura della funzione è:

`function [x,Nit] = Jacobi(A,b,x0,nmax,tol)`.

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `Jacobi.m` per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (4,\, 4,\, \ldots,\, 4)^T \in \mathbb{R}^{100}$ e $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ definita come

$$A = \mathrm{tridiag}\,(-17, 21, -3)\,;$$

si consideri l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 1000$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la seconda componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_2^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo normalizzato $r_{rel}^{(N)}$.

$N =$ 122 $\qquad x_2^{(N)} =$ 0,509 087 $\qquad r_{rel}^{(N)} =$ $9{,}740\,675 \cdot 10^{-4}$

Infine, utilizzando opportunamente la funzione `Jacobi.m`, si riportino i valori della seconda componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_2^{(1)}$ e $x_2^{(2)}$.

$x_2^{(1)} =$ 4 $\qquad x_2^{(2)} =$ 1,378 685

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione di iterazione

$$\phi(x) = \operatorname{atan}\left[e^{(x-2)} - 1\right] + 2 \qquad (1)$$

10 punti

dotata di due punti fissi $\alpha > 3$ e $\beta = 2$.

(a) *(1 punto)* Si tracci e si riporti qualitativamente il grafico della funzione di iterazione $\phi(x)$ data in Eq. (1) per $x \in [1,4]$ e si evidenzino i punti fissi α e β.

(b) *(1 punto)* Si riporti l'algoritmo del metodo delle iterazioni di punto fisso.

(c) *(2 punti)* Si enunci con precisione un risultato di convergenza *locale* per il metodo delle iterazioni di punto fisso considerando una *generica* funzione di iterazione $\phi(x)$.

(d) *(1 punto)* Si consideri ora la funzione di iterazione ϕ data in Eq. (1). Sulla base del risultato teorico dato al punto (c), il metodo delle iterazioni di punto fisso è adeguato per approssimare il punto fisso $\beta = 2$? Si motivi la risposta data.

(e) *(2 punti)* Posta l'iterata iniziale $x^{(0)} = 3$, si applichino $k = 4$ iterazioni del metodo delle iterazioni di punto fisso per $\phi(x)$ data in Eq. (1). Si calcolino i valori delle iterate $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ e $x^{(4)}$ (si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

$x^{(1)} =$ 3,043 735 $\qquad x^{(2)} =$ 3,072 929

$x^{(3)} =$ 3,091 459 $\qquad x^{(4)} =$ 3,102 835

(f) *(3 punti)* Si considerino la funzione di iterazione $\phi(x)$ di Eq. (1) e il suo punto fisso $\alpha > 3$. Si mostri che esiste una costante positiva $C < 1$ tale per cui, per ogni $x^{(0)} \geq 3$, vale

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq C^k \, |x^{(0)} - \alpha| \qquad \text{per } k = 0,1,\ldots.$$

Si riporti inoltre il valore di C. (Suggerimento: si studi graficamente la funzione $\phi'(x)$ per $x \geq 3$)

$C =$ 0,687 739

In tal caso, qual è l'ordine di convergenza atteso del metodo ad α? Perché?

Parte II - Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots x_5$ nell'intervallo [0,10] e la funzione $f(x) = 2\,(x+1)^2$, si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H f(x)$ della funzione $f(x)$ nei precedenti nodi. Si riporti il valore di $\Pi_1^H f(3)$.

$$\boxed{\Pi_1^H f(3) = 34}$$

2. *(1 punto)* Sia $f(x) = 2\,x^4$; si approssimi $f'(3)$ mediante la formula delle differenze finite in avanti utilizzando il passo $h = 0.1$; si riporti il valore $\delta_+ f(3)$ di tale approssimazione.

$$\boxed{\delta_+ f(3) = 227{,}042}$$

3. *(1 punto)* Sia $f(x) = 3\,x^2$. Si approssimi $\int_0^6 f(x)dx$ con la formula semplice del trapezio. Si riporti l'approssimazione $I_T(f)$ ottenuta.

$$\boxed{I_T(f) = 324}$$

4. *(2 punti)* Si consideri la formula del punto medio composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_0^1 (3 - \cos(\pi x))\,dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero minimo M di sottointervalli equispaziati di [0,1] tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-5}$.

$$\boxed{M \geq 203}$$

5. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 40\,t^2 + 7\,t\,y(t) & t \in (0{,}100], \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero all'indietro (Eulero Implicito) con passo $h = 1/5$ e $u_0 = y_0 = 3$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{83}{18} = 4{,}611\,111}$$

6. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 10\,t + 2\,y(t) & t \in (0{,}10], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Crank–Nicolson con passo $h = 1/10$ e $u_0 = y_0 = 1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{23}{18} = 1{,}277\,778}$$

7. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A\,\mathbf{y}(t) & t \in (0, +\infty), \\ \mathbf{y}(0) = (3\ \ 7)^T. \end{cases}$$

dove $A = \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$. Si riporti la condizione di assoluta stabilità del metodo di Eulero in avanti per il precedente problema di Cauchy.

$\boxed{0 < h < 0{,}285\,714}$

Parte II - Esercizi

Esercizio 1.

12 punti

(a) *(2 punti)* Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\{x_i\}_{i=0}^n$ un insieme di nodi distinti nell'intervallo $[a,b]$. Si definisca con precisione il polinomio di Lagrange interpolante $f(x)$ ai nodi $\{x_i\}_{i=0}^n$, ovvero $\Pi_n f(x)$, e se ne fornisca l'espressione.

(b) *(3 punti)* Si consideri la seguente funzione $f(x) = \dfrac{8}{2+x^2}$ definita in $[a,b] = [-5{,}5]$. Si utilizzi Matlab® per approssimare $f(x)$ mediante polinomi interpolanti di Lagrange $\Pi_n f$ su nodi *equispaziati* di $[a,b]$ con $n = 4, 6, 8, 10$. Si riportino, al variare di n, i valori delle approssimanti corrispondenti $\Pi_n f$ valutate in $\bar{x} = 9/2$ (si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 4$: $\Pi_n f(\bar{x}) =$ $-0{,}727\,273$ per $n = 6$: $\Pi_n f(\bar{x}) =$ $1{,}992\,08$

per $n = 8$: $\Pi_n f(\bar{x}) =$ $-1{,}836\,576$ per $n = 10$: $\Pi_n f(\bar{x}) =$ $3{,}047\,201$

Si calcolino e si riportino gli errori $E_n(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ associati alle corrispondenti approssimanti $\Pi_n f$ (al fine del calcolo dell'errore in Matlab® si valutino $f(x)$ e $\Pi_n f(x)$ in 1000 punti con il comando `linspace(-5, 5, 1000)`; si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 4$: $E_n(f) =$ 1,400 743 per $n = 6$: $E_n(f) =$ 1,655 022

per $n = 8$: $E_n(f) =$ 2,283 294 per $n = 10$: $E_n(f) =$ 3,373 479

(c) *(1 punto)* Si interpreti e si motivi il risultato ottenuto al punto (b).

(d) *(1 punto)* Si definiscano i nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto $\{x_i^{CGL}\}_{i=0}^n$ nel generico intervallo $[a,b]$ e per $n \geq 0$.

(e) *(2 punti)* Si ripeta il punto (b) utilizzando ora i nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto nell'intervallo $[a,b] = [-5,5]$ per costruire le approssimanti $\Pi_n^{CGL} f$ con $n = 4, 6, 8, 10$. Si calcolino e si riportino gli errori $E_n^{CGL}(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_n^{CGL} f(x)|$ (si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

per $n = 4$: $E_n^{CGL}(f) =$ 1,283 425 per $n = 6$: $E_n^{CGL}(f) =$ 0,718 728

per $n = 8$: $E_n^{CGL}(f) =$ 0,387 587 per $n = 10$: $E_n^{CGL}(f) =$ 0,205 092

(f) *(2 punti)* Si considerino ora le coppie di dati $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ con $\{x_i\}_{i=0}^n$ nodi distinti e $n \gg 1$. Si definisca il polinomio $p_m(x) \in \mathbb{P}_m$ approssimante tali dati nel senso dei minimi quadrati, dove $m \geq 0$.

Si riporti e si descriva dettagliatamente il problema di minimizzazione associato a $p_m(x)$.

(g) *(1 punto)* Siano ora assegnate le coppie di dati $(-1,0)$, $(0,8)$, $(1,8)$, $(2,0)$ e $(3,16)$. Si calcoli e si riporti l'espressione della retta di regressione lineare $p_1(x)$ che approssima tali dati.

$$p_1(x) = \frac{12}{5}\,x + 4 = 2{,}4\,x + 4$$

Esercizio 2.

10 punti

Si consideri il seguente problema a valori ai limiti (di diffusione–trasporto):

$$\begin{cases} -u''(x) + V\,u'(x) = f(x) & \text{in } (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

dove a, b, α, β e $V \in \mathbb{R}$, con $V > 0$.

(a) *(3 punti)* Si approssimi il problema ai limiti (1) con uno schema alle differenze finite centrate (del second'ordine) su una griglia di $N+2$ nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, con $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\,h$ per $i = 0,\ldots,N+1$ e passo $h = (b-a)/(N+1)$. Si riportino le equazioni del sistema risultante in forma esplicita definendo tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Si riporti la controparte algebrica dell'approssimazione di cui al punto (a), ovvero il sistema lineare $A\,\mathbf{u} = \mathbf{b}$, fornendo l'espressione dei coefficienti della matrice A, del vettore del termine noto $\mathbf{b}$ e del vettore delle incognite $\mathbf{u}$.

(c) *(1 punto)* Si considerino ora i seguenti dati per il problema (1): $V = 10$, $f = 12\,x^2\,(10\,x - 3)$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$ e $\beta = 3$. Si verifichi che la soluzione esatta del problema assume l'espressione seguente $u(x) = 3\,x^4$; si riporti la procedura seguita.

(d) *(4 punti)* Si risolva il problema ai limiti (1) con i dati di cui al punto (c) tramite il metodo descritto al punto (a), ovvero risolvendo il sistema lineare definito al punto (b), per il valore $N = 9$ (per risolvere il sistema lineare si utilizzi il comando "back-slash" di Matlab® \). Si riporti il valore della soluzione approssimata nel nodo x_8, ovvero u_8.

$u_8 =$ 1,192 932

Si risolva ora il problema per $N = 9$, 19, 39 e 79 e, usando la soluzione esatta $u(x)$ al punto (c), si calcolino e si riportino per ogni N gli errori corrispondenti $E_N = \max_{i=0,\ldots,N+1} |u_i - u(x_i)|$ (si usino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

per $N = 9$: $E_N =$ 0,035 867 66

per $N = 19$: $E_N =$ 0,008 662 13

per $N = 39$: $E_N =$ 0,002 151 61

per $N = 79$ $E_N =$ 0,000 537 35

(e) *(1 punto)* Dopo aver risposto al punto (d), si stimi *algebricamente* l'ordine di convergenza p del metodo rispetto ad h (ovvero $(b-a)/(N+1)$) riportando sinteticamente la procedura seguita.

$p =$ 2,0015