Test – 50pt – 60'

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

1 — 0 pt

Inserire il numero di matricola.

2 — 0 pt

Selezionare l'*ultima* cifra X del numero di matricola.

3 — 2 pt (***)

Dato l'insieme $\mathbb{F}(2,3,-2,3)$, si determini il minimo numero z che sommato a 1 restituisce un numero maggiore di 1 in $\mathbb{F}$. Si riporti il risultato in base decimale.

0.25

4 — 3 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A) Esiste unica la fattorizzazione LU di A (senza pivoting per righe).

B) È possibile effettuare la fattorizzazione LU di A con pivoting per righe permutando la prima e la seconda riga di A.

C) L'applicazione della fattorizzazione LU di A con pivoting per righe restituisce una matrice L il cui elemento $(L)_{21} = \frac{1}{2}$.

D) Indicata con P la matrice di permutazione per righe ottenuta dalla fattorizzazione LU di A con pivoting per righe, si ha $\det(PA) = \det(U) = 3$.

D

5 — 3 pt

Dato il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ è la matrice di Hilbert assegnata col comando Matlab® `hilb`, si stimi il minimo numero di iterazioni N del metodo del gradiente che garantisce un abbattimento dell'errore iniziale $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$ di un fattore 1000.

53583

6 — 3 pt (***)

Dato il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$, si consideri il metodo del gradiente coniugato precondizionato con precondizionatore $P = \mathrm{tridiag}(-1, 7, -1)$ per l'approssimazione di $\mathbf{x}$. Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `pcg` e si riporti il valore di $\mathbf{x}^{(2)}$ avendo posto l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$(0.3372,\quad 0.3350,\quad 0.3337,\quad 0.3270)^T$

7 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Dato un vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 1)^T$, poniamo $\mathbf{x}^{(k)} = A^k\,\mathbf{x}^{(0)}$ per $k = 0, 1, \ldots$, dove A^k significa moltiplicare k volte la matrice A per se stessa. Si riporti il valore atteso di $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{\mathbf{x}^{(k)} \cdot \left(A\,\mathbf{x}^{(k)}\right)}{\mathbf{x}^{(k)} \cdot \mathbf{x}^{(k)}}$ in artimetica esatta.

10.4244

8 — 3 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e il metodo delle potenze inverse per approssimare l'autovalore di modulo minimo. Assegnato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 0)^T$, si riportino i valori approssimati $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$ dell'autovalore ottenuti rispettivamente all'iterata iniziale, dopo l'applicazione di un'iterazione del metodo, oltre che della seconda iterazione.

4, 1, 0.4706

9 — 3 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & \gamma & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che $2 < \gamma < 10$. Per quali valori dello shift $s \in \mathbb{R}$ è possibile approssimare l'autovalore $\lambda_2(A) = \gamma$ tramite il metodo delle potenze inverse con shift?

$\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) < s < \left(5 + \frac{\gamma}{2}\right)$

10 — 2 pt

Si considerino la funzione $f(x) = (e^x - 1)^\beta$ dipendente da un parametro $\beta \in \mathbb{N}$ e il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 0$. Posto $x^{(0)} = 10^{-1}$ e indicata con $x^{(k)}$ la generica iterata del metodo, qual è il valore atteso di $\lim_{k \to +\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha}$? Quale sarebbe invece il valore atteso dal precedente limite applicando il metodo di Newton modificato?

$(1 - \frac{1}{\beta})$ $\quad 0$

11 — 2 pt (***)

Il metodo delle corde approssima lo zero α di una funzione $f(x)$ applicando l'iterata seguente:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{q_c} \qquad \text{per } k \geq 0,$$

dati $x^{(0)}$ e $q_c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ per $\alpha \in (a, b)$. Posti $f(x) = e^x - 1$, $a = -1$, $b = 1$ e $x^{(0)} = 1$, si riportino i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ ottenute applicando il metodo.

$-0.4621 \quad -0.1472$

12 — 2 pt

Si consideri la funzione $\phi(x) = \frac{1}{6}(e^{-6x} - 1) + x$. Qual è l'ordine di convergenza p atteso applicando il metodo delle iterazioni di punto fisso per l'approssimazione del punto fisso $\alpha = 0$ di $\phi(x)$ per un'iterata iniziale $x^{(0)}$ sufficientemente vicina ad α?

2

13 — 2 pt

Siano assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots, x_{10}$ nell'intervallo $[0,5]$ e la funzione $f(x) = x + \sin(\pi\, x + 1)$. Si consideri il polinomio di grado 1, $\widetilde{f}_1(x)$, approssimante nel senso dei minimi quadrati la funzione $f(x)$ ai nodi $\{x_j\}_{j=0}^{10}$; si riporti il valore di $\widetilde{f}_1(6)$.

5.7278

14 — 3 pt

Si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H f(x)$ della funzione $f(x) = e^x$ sull'intervallo $[0,2]$. Si stimi il numero minimo di sottointevalli equispaziati M affinché l'errore di interpolazione $e_1^H(f) = \max_{x \in [0,2]} |f(x) - \Pi_1^H f(x)|$ sia inferiore a 10^{-2}. Usando poi tale valore di M si calcoli e si riporti l'errore effettivo $e_1^H(f)$ ottenuto costruendo l'interpolante $\Pi_1^H f(x)$.

$M = 20, \quad e_1^H(f) = 0.0088$

15 — 2 pt

Si considerino le coppie di dati seguenti $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,0)$, $(4,1)$ e $(5,2)$, da interpolare tramite una spline cubica $s_3(x)$ di tipo “not-a-knot”. Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `spline` per costruire tale spline $s_3(x)$; si riporti il valore di $s_3(4.5)$.

1.7031

16 — 2 pt

Si consideri la formula del punto medio composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_{-2}^{2} \left[\beta\, x^3 + \gamma\, x^2 + 1\right] dx$, dove β e $\gamma \in \mathbb{R}$ sono due parametri. Considerando $M = 2$ sottointervalli equispaziati, si riporti il valore dell'integrale approssimato con tale formula in funzione dei parametri β e γ.

$4\,(1 + \gamma)$

17 — 3 pt (***)

Si consideri l'integrale $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ e la formula di quadratura semplice $I_q(f) = \frac{2}{3}\left[2\,f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(0) + 2\,f\left(+\frac{1}{2}\right)\right]$ per la sua approssimazione. Si determini il grado di esattezza r di tale formula.

3

18 — 2 pt (***)

Si consideri l'approssimazione di $f'(\overline{x})$ tramite il seguente metodo delle differenze finite $\delta f(\overline{x}) = \dfrac{-3\,f(\overline{x}) + 4f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}+2h)}{2h}$, per $h > 0$. Dati $f(x) = 2^x$, $\overline{x} = 0$ e $h = 1/4$, si riporti il valore dell'approssimazione $\delta f(\overline{x})$.

0.6852

19 — 2 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + t\,y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 0.1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

1.1055

20 — 3 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + (1 + 10\,x)\,u(x) = 5 & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_5, ovvero l'approssimazione di $u(x_5)$.

0.3830

21 — 3 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma\, u(x) = f(x) & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Si supponga di approssimare tale problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h > 0$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$.

Quale delle seguenti affermazioni è <u>vera</u>?

A) Si tratta di un problema di diffusione–trasporto, la cui soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ potrebbe mostrare oscillazioni numeriche incontrollabili.

B) Se $f(x) = 0$ e $\sigma > 0$, allora la soluzione *esatta* è $u(x) = \dfrac{x}{2}(1-x)$.

C) Se $f(x) = 1$ e $\sigma = 0$, allora la soluzione *numerica* è $u_j = \dfrac{x_j}{2}(1-x_j)$ per ogni $j = 0, \ldots, N+1$.

D) Se la soluzione esatta $u \in C^4([0,1])$ è nota e l'errore per $h = h_1 = 10^{-1}$ è $E_{h_1} = \max\limits_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j| = 10^{-3}$, allora l'errore stimato per $h = h_2 = 10^{-2}$ è $E_{h_2} = 10^{-4}$.

C

22 — 3 pt (***)

Si consideri il seguente problema di diffusione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 5\,\sin(\pi\, x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Si consideri l'approssimazione di tale problema tramite il metodo delle differenze finite con passo di discretizzazione spaziale $h = 0.5$ e il metodo di Eulero in avanti con passo di discretizzazione temporale $\Delta t = 0.1$. Si calcoli $u_1^{N_t}$, ovvero l'approssimazione di $u(0.5, 1)$, essendo $N_t = 1/\Delta t = 10$.

0.0302