Esercizio – 25pt – Soluzioni della Simulazione d'Esame del 3/6/20

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}(t) = f\left(t, y(t), \dfrac{dy}{dt}(t)\right) & t \in (t_0, t_f), \\ \dfrac{dy}{dt}(t_0) = v_0, & \\ y(t_0) = y_0, & \end{cases} \tag{1}$$

dove y_0 e $v_0 \in \mathbb{R}$, mentre $f : (t_0, t_f) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è funzione di tre argomenti.

Punto 1 – 5pt

Si riscriva il problema (1) come un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine nella forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}(t)\right) & t \in (t_0, t_f), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, & \end{cases} \tag{2}$$

dove $\mathbf{y} : (t_0, t_f) \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{f} : (t_0, t_f) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è funzione di due argomenti. Si pongano $t_0 = 0$, $t_f = 1$, $f\left(t, y, \dfrac{dy}{dt}\right) = -2\,\dfrac{dy}{dt} - \left(1 + 9\pi^2\right)\, y + g(t)$, con $g(t) = 18\pi^2\, e^{-t}$, $v_0 = (3\pi - 2)$ e $y_0 = 2$. Si approssimi il problema (2) mediante il metodo di *Eulero in avanti* e lo si risolva usando opportunamente la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m` con passo $h = 10^{-1}$. Si riportino i valori delle approssimazioni u_1 e u_{N_h} rispettivamente di $y(t_1)$ e $y(t_f)$, dove $t_n = t_0 + n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$ e $h = \dfrac{t_f - t_0}{N_h}$.

$u_1 = 2.7424778, \quad u_{N_h} = 14.3470093$

Punto 2 – 4pt

Dopo aver risposto al punto 1) e sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = (2 + \sin(3\pi\, t))\, e^{-t}$, si calcolino gli errori $E_h = \|\mathbf{u}_{N_h} - \mathbf{y}(t_f)\|$ ottenuti con il metodo di Eulero in avanti e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-1}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-2}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-2}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-2}$, essendo $\mathbf{u}_n$ l'approssimazione di $\mathbf{y}(t_n)$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \ldots, 4$ e li si utilizzino per stimare graficamente l'ordine di convergenza p. Si giustifichi la risposta data e la si motivi alla luce della teoria (upload dell'immagine da eseguire al punto 3)).

$E_{h_1} = 42.461555, \quad E_{h_2} = 26.839304, \quad E_{h_3} = 7.062120, \quad E_{h_4} = 2.192036$

Riportiamo gli errori precedentemente ottenuti in un grafico (E_h vs. h) in scala logaritmica su entrambi gli assi (Figura 1). Notiamo che dal grafico è difficile dedurre l'ordine di convergenza in quanto gli errori calcolati corrispondono a valori di h non "sufficientemente" piccoli. Basta quindi ripetere il calcolo degli errori per valori di h più piccoli, per esempio $h_1 = 10^{-2}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-3}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-3}$, per ottenere il grafico di Figura 2, da cui si deduce l'ordine di convergenza $p = 1$. Infatti, in scala logaritmica su entrambi gli assi, la curva E_h vs. h è parallela a quella della retta (h, h). Il risultato era atteso dalla teoria, infatti per il metodo di Eulero in avanti abbiamo $E_h \leq C\,h$ se $\mathbf{y} \in C^2([t_0, t_f])$; osserviamo infatti che la soluzione analitica in questo caso è proprio $\mathbf{y}(t) = \left(\dfrac{dy}{dt}(t),\, y(t)\right)^T \in C^2([t_0, t_f])$.

Punto 3 – 1pt

Si alleghi il grafico ottenuto al punto 2)

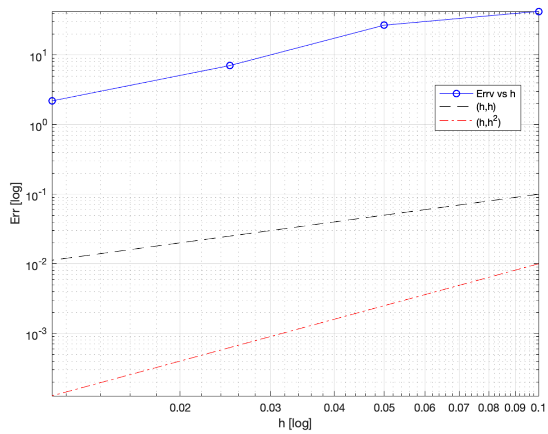

Figure 1: E_h vs. h e confronti grafici

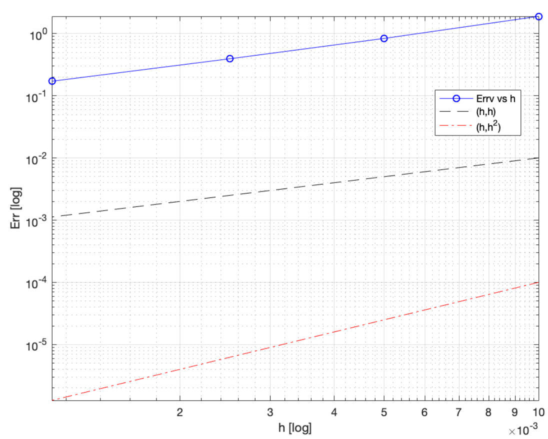

Figure 2: E_h vs. h e confronti grafici per $h_1 = 10^{-2}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-3}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-3}$

Punto 4 – 4pt

Con riferimento al problema (2) e ai dati di cui punto 1), ma per $g(t) = 0$, si determini la condizione di assoluta stabiltà del metodo di *Eulero in avanti*. Si motivi la risposta fornita.

Al punto 1) abbiamo riscritto il problema per esempio come $\mathbf{y}(t) = (v(t), y(t))^T$, dove $\dfrac{dy}{dt}(t) = v(t)$, e dunque con $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = A\,\mathbf{y}$ con $A = \begin{bmatrix} -2 & -(1+9\pi^2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. L'assoluta stabilità del metodo di Eulero in avanti è quindi legata agli autovalori della matrice A, che sono $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3\pi\,\iota$, essendo ι l'unità immaginaria. Sappiamo che il metodo di Eulero in avanti è condizionatamente assolutamente stabile e se $(h\,\lambda_1)$ e $(h\,\lambda_2) \in \mathcal{A}$, dove $\mathcal{A}$ è la regione di assoluta stabilità del metodo di Eulero in avanti; in particolare, abbiamo $\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |1 + z| < 1\}$. Richiediamo dunque che

$$|1 + (h\,\lambda_1)| < 1 \qquad \text{e} \qquad |1 + (h\,\lambda_2)| < 1.$$

Essendo $|1+(h\,\lambda_1)| = |(1-h)+3\pi\,h\,\iota| = \sqrt{(1-h)^2 + 9\pi^2\,h^2} = \sqrt{h\left((1+9\pi^2)h - 2\right) + 1}$, dobbiamo richiedere che $h\left((1+9\pi^2)h - 2\right) + 1 < 1$, da cui $h\left((1+9\pi^2)h - 2\right) < 0$. Infine, dato che $h > 0$, abbiamo:

$$h < h_{max} = \frac{2}{1 + 9\pi^2}.$$

Alla medesima condizione si giunge anche per $|1 + (h\,\lambda_2)| < 1$ e dunque la precedente rappresenta la condizione di assoluta stabilità del metodo di Eulero in avanti per questo problema.

Osserviamo dunque che la soluzione numerica ottenuta al punto 1) non è assolutamente stabile essendo il passo $h > h_{max}$.

Punto 5 – 5pt

Con riferimento al problema (2) e al metodo di *Eulero all'indietro*, si ricavi e si fornisca l'espressione dell'errore di troncamento locale $\tau_n(h)$.

Nel caso vettoriale, l'errore di troncamento locale è definito come $\tau_n(h) = \dfrac{\|\mathbf{y}_n - \mathbf{u}_n^*\|}{h}$ per $n = 1, \ldots, N_h$, dove $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}(t_n)$ e $\mathbf{u}_n^*$ è la soluzione numerica estrapolata a $t = t_n$, ovvero ottenuta imponendo il soddisfacimento del metodo numerico da parte della soluzione esatta; nel caso del metodo di Eulero all'indietro, $\mathbf{u}_n^* = \mathbf{y}_{n-1} + h\,\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$ per $n = 1, \ldots, N_h$. Abbiamo dunque:

$$\tau_n(h) = \frac{\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1} - h\,\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)\|}{h} \qquad \text{per } n = 1, \ldots, N_h.$$

Sviluppiamo in serie di Taylor troncata al secondo ordine $\mathbf{y}_{n-1}$ rispetto a $t = t_n$, assumendo che $\mathbf{y} \in C^2([t_0, t_f])$; abbiamo:

$$\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{y}_n - h\,\frac{d\mathbf{y}}{dt}(t_n) + \frac{h^2}{2}\,\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2}(\eta_n) \qquad \text{per qualche } \eta_n \in [t_{n-1}, t_n].$$

Dato che $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t_n) = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$, otteniamo:

$$\tau_n(h) = \frac{\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n + h\,\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) - \frac{h^2}{2}\,\frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2}(\eta_n) - h\,\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)\|}{h} \qquad \text{per } n = 1, \ldots, N_h$$

e infine

$$\tau_n(h) = \frac{h}{2} \left\| \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2}(\eta_n) \right\| \qquad \text{per } n = 1, \ldots, N_h.$$

Abbiamo dunque mostrato che il metodo di Eulero all'indietro è consistente di ordine 1.

Punto 6 – 6pt

Il metodo di Newmark approssima direttamente un problema di Cauchy del secondo ordine nella forma di Eq. (1) fornendo le approssimazioni u_n e w_n rispettivamente di $y(t_n)$ e $\frac{dy}{dt}(t_n)$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$, secondo la notazione introdotta in precedenza. Un caso particolare di tale metodo è riportato nel seguente algoritmo:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, w_n + \dfrac{h^2}{2}\, f(t_n, u_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{h}{2}\, [f(t_n, u_n, w_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}, w_{n+1})] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0, 1, \ldots, N_h - 1, \\ u_0 = y_0, \qquad w_0 = v_0. \end{cases}$$

Si utilizzi Matlab® per applicare tale algoritmo alla soluzione del problema (1) con i dati di cui al punto 1) e $h = 0.01$. Si riportino i valori u_1, w_1, u_{N_h} e w_{N_h} con almeno 4 cifre decimali.

$u_1 = 2.0734053, \quad w_1 = 7.2165575, \quad u_{N_h} = 0.73438710, \quad w_{N_h} = -4.2014601$