Appello – Parte 1

15/02/2022 — versione 1 — ◇♡♣♠◇♠♣♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 1 pt (***) No Multichance

Sia dato l'insieme dei numeri floating point $\mathbb{F}(2, 6, L, U)$ dipendente dai parametri $L < 0$ ed $U > 0$. Qual è il valore di $U \in \mathbb{N}$ tale per cui il più grande numero rappresentabile (in base 10) nell'insieme $\mathbb{F}$ è $x_{max} = 252$?

8

2 — 1 pt

Il numero di Nepero e si può ottenere come

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Qual è il minimo valore di $n \in \mathbb{N}$ tale che l'approssimazione $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ genera un'errore inferiore a 0.05?

27

3 — 1 pt

Si considerino 10 sistemi lineari $A\,\mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j$ per $j = 1, \ldots, 10$, dove la matrice $A \in \mathbb{R}^{30 \times 30}$ è simmetrica e definita positiva, mentre i vettori $\mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^{30}$ rappresentano diversi termini noti. Qual è il numero di operazioni stimato per la risoluzione di tali sistemi lineari per $j = 1, \ldots, 10$ attraverso un uso computazionalmente efficiente del metodo della fattorizzazione di Cholesky?

27000

4 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il metodo di Richardson stazionario precondizionato per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{1}$. Posto il precondizionatore $P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, si calcoli il valore ottimale del parametro $\alpha_{opt} \in \mathbb{R}$ e lo si utilizzi per determinare l'iterata $\mathbf{x}^{(4)} \in \mathbb{R}^3$ del metodo usando opportunamente la funzione Matlab® `richardson.m` e avendo scelto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. Si riportino α_{opt} e $\mathbf{x}^{(4)}$.

$\alpha_{opt} = 1.0909$, $\mathbf{x}^{(4)} = (0.6154 \;\; 0.3492 \;\; 0.1616)^T$

5 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. Si applichi il metodo delle potenze per l'approssimazione di $\lambda_1(A)$ a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1}$. Si riportino i valori delle approssimazioni $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$ di tale autovalore.

4.6667, 7.6083, 7.8258

6 — 2 pt (***) No Multichance

Si considerino la matrice $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e il metodo della fattorizzazione QR per l'approssimazione dei suoi autovalori λ_1 e λ_2. Si applichino 2 iterazioni del metodo e si riportino le approssimazioni $\lambda_1^{(2)}$ e $\lambda_2^{(2)}$ così ottenute.

6.8336, 3.1664

7 — 1 pt

La convergenza del metodo della fattorizzazione QR per l'approssimazione degli autovalori reali e distinti $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è tanto più rapida, tanto minore è il valore $\max\limits_{i=2,\ldots,n} \left\{ \dfrac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} \right\}$. Posto $n = 3$ e sapendo che A ha autovalori reali e distinti $\lambda_1 = 8$, λ_2 e $\lambda_3 = 3$, si determini per quale valore di $\lambda_2 \in (3, 8)$ la convergenza del metodo della fattorizzazione QR è più rapida.

$\sqrt{24} = 4.8990$

8 — 1 pt

Si consideri il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 7$ della funzione $f(x) = (7 - x)\log(x - 6)$. Qual è l'ordine di convergenza p atteso dal metodo ad $\alpha = 7$ partendo dall'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α?

1

9 — 2 pt

Si considerino la funzione $f(x) = x\,(e^x - 1)$ dotata dello zero $\alpha = 0$ e la sua approssimazione tramite il metodo delle secanti. Scelte le iterate iniziali $x^{(0)} = 0.8$ e $x^{(1)} = 0.5$, si riportino le iterate $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ ottenute applicando il metodo.

0.3517, 0.2269

10 — 2 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x - \mu\, x \log(x-1)$ dipendente dal parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e dotata del punto fisso $\alpha = 2$. Per quali valori di μ il metodo delle iterazioni di punto fisso converge per ogni scelta di $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α? Per quale valore di μ la convergenza del metodo è di ordine $p = 2$?

$\mu \in (0, 1)$, $\mu = 1/2$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è

$$A = \text{tridiag}(-1,\, 2,\, -1)$$

e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$. In particolare, consideriamo $n = 100$ e $\mathbf{x} = \mathbf{1}$.

Punto 1) — 3 pt

Si intende risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tramite un metodo diretto. Supponiamo che, a causa degli errori di arrotondamento, il vettore $\mathbf{b}$ sia affetto da una perturbazione $\delta\mathbf{b} = 10^{-6}\mathbf{c}$, dove $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\|\mathbf{c}\|_2 = 1$, e che si risolva dunque il sistema lineare perturbato $A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$.

Si stimi l'errore relativo $\|\delta\mathbf{x}\|_2/\|\mathbf{x}\|_2$ e si verifichi con Matlab® la validità di tale stima commentando il risultato ottenuto. Per la verifica in Matlab® , si utilizzi il seguente vettore $\mathbf{c}$:

```
>> c = rand(size(b));
>> c = c./norm(c);
```

e si risolva il sistema lineare con il comando \ di Matlab® .

Spazio per risposta lunga $(err_{stim} = 0.0029,\ err_{vero} = 7.6094 \cdot 10^{-5})$

Punto 2) — 2 pt

Quale metodo *diretto* è computazionalmente conveniente utilizzare per risolvere il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ assegnato? Si motivi la risposta data riportando il numero di operazioni impiegate da tale metodo. Perché tale metodo è computazionalmente più conveniente rispetto al metodo della fattorizzazione LU?

Spazio per risposta lunga (metodo di Thomas, 793)

Punto 3) — 2 pt

Sempre per la matrice A tridiagonale assegnata, si illustri un possibile algoritmo computazionalmente conveniente per il calcolo del determinante di A. Si riporti il numero di operazioni impiegate dall'algoritmo proposto.

Spazio per risposta lunga ($4(n-1)$ operazioni $= 396$)

Punto 4) — 2 pt

I metodi di Jacobi e Gauss–Seidel, applicati alla soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, risultano convergenti per ogni scelta del dato iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$? Si motivi dettagliatamente la risposta data, definendo tutta la notazione usata e riportando i principali comandi Matlab® .

Spazio per risposta lunga (si $\rho_{BJ} = 0.9995$, $\rho_{BGS} = \rho_{BJ}^2 = 0.9990 < 1$)

Punto 5) — 3 pt

Si consideri ora il metodo del *gradiente* per la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Senza applicare esplicitamente l'algoritmo, si *stimi* l'errore in norma A, ovvero $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A$, dopo $k = 1000$ iterazioni del metodo, considerando $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. Si definisca tutta la notazione utilizzata e si riportino i principali comandi Matlab® utilizzati.

Si giustifichi il risultato ottenuto alla luce della teoria.

Spazio per risposta lunga ($\|\mathbf{x}^{(1000)} - \mathbf{x}\|_A = 0.8717$, $K(A) = 4.1336 \cdot 10^3$)

Punto 6) — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri ora il metodo del *gradiente coniugato* (non precondizionato) per risolvere il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, usando opportunamente la funzione Matlab® `pcg` con vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, tolleranza $tol = 10^{-6}$ e un opportuno numero massimo di iterazioni. Si risolva il problema e si riporti il numero di iterazioni effettuate N_{it}. Si riportino i principali comandi Matlab® utilizzati.

Spazio per risposta lunga (50)

Punto 7) — 4 pt (***) No Multichance

Si consideri ora il seguente sistema di equazioni non lineari

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{x}} + A\,\mathbf{x} - \mathbf{1} = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, A è la matrice definita precedentemente e $n = 100$.

Si approssimi lo zero $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{100}$ del precedente sistema di equazioni non lineari implementando opportunamente il metodo di Newton in Matlab® .

Si riportino:

- l'espressione della generica matrice Jacobiana $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$;
- i valori dell'ultima componente della prima e seconda iterata, ovvero $(\mathbf{x}^{(1)})_{100}$ e $(\mathbf{x}^{(2)})_{100}$, ottenute applicando il metodo di Newton a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \dfrac{1}{300}\,(1,\,2,\,\ldots,100)^T$;
- i principali comandi Matlab® utilizzati.

Spazio per risposta lunga
$(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = A + \mathrm{diag}\,(e^{\mathbf{x}}),\ (\mathbf{x}^{(1)})_{100} = 0.0333,\ (\mathbf{x}^{(2)})_{100} = 4.4324 \cdot 10^{-4})$