Appello – Parte 2

02/09/2022 — versione 1 — ◇♡♣♠◇♠♣♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 2 pt

Data la funzione $f(x) = \sin\left(x + \sqrt{5}\right)$, si costruisca il suo polinomio interpolante $\Pi_3 f(x)$ su nodi di Chebyshev–Gauss–Lobatto nell'intervallo $[0, \pi]$ e si riportino i valori di $\Pi_3 f(1)$ e $\dfrac{d\Pi_3 f}{dx}(1)$.

$-0.0822,\ -0.9372$

2 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri la funzione $f(x) = \sin(\pi\, x)$ e il suo interpolante polinomiale $\Pi_3 f(x)$ su nodi equispaziati in $[-1, 1]$. Senza costruire esplicitamente $\Pi_3 f(x)$, si fornisca la *stima* dell'errore di interpolazione $\widetilde{e}_3(f)$.

1.2026

3 — 1 pt

Si consideri la funzione di Runge $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ e il suo interpolante polinomiale $\Pi_n f(x)$ di grado n su $n+1$ nodi di Chebyshev–Gauss–Lobatto in $[-3, 3]$. Dopo aver definito l'errore di interpolazione come $E_n f(x) = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$, si riporti il valore atteso di $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n f(x)$.

0

4 — 1 pt

Si considerino $n+1 = 5$ coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} = \{(0,1),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,2),\ (4,3)\}$ e la retta di regressione $\widetilde{f}_1(x)$ costruita su tali dati. Si riporti il valore $\widetilde{f}_1(4)$.

2.8

5 — 1 pt

Quanto vale l'approssimazione di $\int_{-2}^{3} e^x \, dx$ tramite la formula del punto medio composita con passo $H = 1$?

19.1426

6 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$, dove $f \in C^\infty([a,b])$, tramite la formula dei trapezi composita. Sapendo che per $M_1 = 25$ sottointervalli equispaziati di $[a,b]$ si ha un errore pari a $e_1(f) = 0.08$, si stimi l'errore $e_2(f)$ commesso con $M_2 = 50$ sottointervalli equispaziati.

0.02

7 — 1 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -3\, y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

Utilizzando il θ-metodo con parametro $\theta = 1$ e passo $h = 0.1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$, essendo $t_n = n\, h$ per $n = 0, 1, \ldots$.

3.0769

8 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -2\, u''(x) + u(x) = 3\, \sin(x) & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = \sin(1). \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e, sapendo che la soluzione esatta è $u(x) = \sin(x)$, si riporti il valore dell'errore corrispondente $E_h = \max_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j|$.

$4.7461 \cdot 10^{-5}$

9 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 100\, u'(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 5, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con tecnica *Upwind* e passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_9, ovvero l'approssimazione di $u(x_9)$.

4.5455

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema ai limiti con condizione di Robin:

$$\begin{cases} -u''(x) = 4 & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u'(1) + 3\, u(1) = 2. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ e il metodo delle differenze finite all'indietro (di ordine 1) per l'approssimazione di $u'(1)$, ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_{10}, ovvero l'approssimazione di $u(1)$.

0.9500

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il seguente problema con soluzione $x(t) : [0, 50] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2\,\ddot{x}(t) + \dfrac{1}{3}\,\dot{x}(t) + 10\,x(t) = z(t) & t \in (0, 50), \\ \dot{x}(0) = -\dfrac{3}{4}, \\ x(0) = 9, \end{cases} \tag{1}$$

dove $z(t) : (0, 50) \to \mathbb{R}$ è una funzione assegnata.

Punto 1) — 2 pt

Si riscriva il problema (1) come un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine nella seguente forma non omogenea a coefficienti costanti

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t) & t \in (0, t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{2}$$

con $\mathbf{y}(t) = (w(t),\ x(t))^T$, dove $w(t) = \dot{x}(t)$ per $t \in (0, t_f)$. Si riportino le espressioni di $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{g}(t) : (0, t_f) \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y}_0$ e t_f.

$A = [-1/6,\ -5; 1,\ 0], \quad \mathbf{g}(t) = (z(t)/2,\ 0)^T, \quad \mathbf{y}_0 = (-\frac{3}{4},\ 9)^T, \quad t_f = 50$

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 3 pt

Si approssimi il problema (2) del Punto 1) con $z(t) = 0$ tramite il metodo di Heun. A tal fine, si *modifichi* opportunamente la funzione Matlab® `Heun.m` e la si utilizzi con il passo $h = 10^{-1}$. Si riportino, oltre ai comandi Matlab® usati:

- i valori delle approssimazioni u_1 e u_{N_h} rispettivamente di $x(t_1)$ e $x(t_f)$, dove $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$, $h = \dfrac{t_f}{N_h}$;
- il tempo discreto $t_m \geq 0$ tale per cui $|u_n| < 1$ per ogni $n \geq m$.

$u_1 = 8.7006, \quad u_{N_h} = 0.1334, \quad t_m = 26.6$

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 2 pt

Dopo aver risposto al Punto 2) e sapendo che la soluzione esatta del problema (1) è $x(t) = 9\,e^{-t/12}\cos\left(\dfrac{\sqrt{719}}{12}t\right)$, si calcolino gli errori $E_h = \max\limits_{n=0,\ldots,N_h} |u_n - x(t_n)|$ ottenuti con il metodo di Heun e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-1}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-2}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-2}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-2}$, essendo u_n l'approssimazione di $x(t_n)$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \ldots, 4$.

$0.7461,\ 0.1852,\ 0.0463,\ 0.0116$

Spazio per risposta lunga

Punto 4) — 2 pt

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al Punto 3) per stimare algebricamente l'ordine di convergenza p del metodo di Heun. Si riportino i comandi Matlab® , si giustifichi la risposta data e la si motivi dettagliatamente alla luce della *teoria*.

$p = 2.0003$

Spazio per risposta lunga

Punto 5) — 3 pt

Con riferimento al sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (2) del Punto 1) con $z(t) = 0$, per quali valori di $h > 0$ il metodo di Heun risulta assolutamente stabile? Si riportino: la definzione di assoluta stabilità, il procedimento seguito, la giustificazione teorica del risultato e i comandi Matlab® usati.

$0 < h < 0.3200$

Spazio per risposta lunga

Punto 6) — 3 pt (***) No Multichance

Si vuole ora applicare a un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (2) il seguente metodo *multipasso*, scritto di seguito per un problema di Cauchy scalare con $y'(t) = A\,y(t) + g(t)$, con $A \in \mathbb{R}$, per $t \in (t_0, t_f)$ e condizione iniziale $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{4}{3}\,u_n - \dfrac{1}{3}\,u_{n-1} + \dfrac{2}{3}\,h\,\left[A\,u_{n+1} + g\,(t_{n+1})\right] & \text{per } n = 1, 2, \ldots, N_h - 1, \\ u_1 = u_0 + h\,\left[A\,u_1 + g(t_1)\right], \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

Si scriva un'opportuna funzione Matlab® che implementi il metodo precedente per un sistema di EDO con il generico passo $h > 0$.

Si utilizzi la funzione precedentemente implementata per risolvere il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (2) di cui al Punto 1) usando il passo $h = 10^{-1}$. Si riportino i valori delle approssimazioni u_1, u_2 e u_{N_h} rispettivamente di $x(t_1)$, $x(t_2)$ e $x(t_f)$, oltre ai comandi e alla funzione Matlab® implementata.

$8.5078,\ 7.7571,\ -0.1235$

Spazio per risposta lunga

Punto 7) — 2 pt (***) No Multichance

Dopo aver risposto al Punto 6), si ripetano i Punti 3) e 4) per stimare l'ordine di convergenza p atteso dal metodo. Si riportino, oltre ai comandi Matlab® usati, gli errori E_{h_i} e l'ordine p stimato.

$1.3687,\ 0.3656,\ 0.0924,\ 0.0231, \quad p = 1.9969$

Spazio per risposta lunga