Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi CdL Ingegneria Aerospaziale Seconda Prova in Itinere 26 giugno 2017	Prof. P.F. Antonietti Prof. L. Dedè Prof. M. Verani	Firma leggibile dello studente
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 1h 30m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$ si consideri il polinomio caratteristico di Lagrange $\varphi_0(x)$. Si riporti il valore di $\varphi_0(3)$.

2. *(2 punti)* Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $x_2 = 3$ e $x_3 = 7$ e i dati corrispondenti $y_0 = 6$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ e $y_3 = 1$, si consideri il polinomio $\Pi_3(x)$ interpolante tali dati ai nodi. Si riporti il valore di $\Pi_3(5)$.

3. *(1 punto)* Sia $f(x) = 3x^3$. Si approssimi $\int_1^6 f(x)dx$ con la formula semplice del punto medio. Si riporti l'approssimazione I_{PM} ottenuta.

4. *(2 punti)* Si consideri la formula dei trapezi composita per l'approssimazione di $\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero M di sottointervalli equispaziati di $[0,1]$ tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-7}$.

5. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 6x^2 - 4x + 5$. Si riporti l'errore associato all'approssimazione di $f'(\overline{x})$ in un generico valore $\overline{x} \in \mathbb{R}$ mediate le differenze finite in avanti, ovvero $E_+f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_+ f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{4}$.

6. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 2\,t^3 + 2\,y(t) & t \in (0,5], \\ y(0) = 6. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero Implicito con passo $h = 0.1$ e $u_0 = y_0 = 6$ si calcoli u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

7. *(2 punti)* Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) & t \in (t_0,t_f], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero Esplicito con passo $h > 0$ si ottiene l'approssimazione $u_1^{EE} = 7$ di $y(t_1)$, mentre con il metodo di Eulero Implicito si ottiene $u_1^{EI} = 8{,}5$. Si riporti il valore dell'approssimazione corrispondente u_1^{CN} ottenuta mediante il metodo di Crank-Nicolson.

Esercizio 1.

(a) *(3 punti)* Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisca e si fornisca l'espressione del polinomio interpolante composito lineare $\Pi_H^1 f$ considerando $N+1$ nodi equispaziati nell'intervallo $[a,b]$, ovvero $x_0 = a, x_1, \ldots, x_N = b$, con passo $H = (b-a)/N$. Si riporti inoltre il risultato (teorema) di convergenza dell'interpolazione composita lineare.

11 punti

(b) *(2 punti)* Utilizzando la funzione `interp1` di Matlab® , si approssimi la funzione

$$f(x) = e^{(1-3x)}\,(x+1)^2 \quad \text{definita in } [a,b] = [0,4],$$

mediante il polinomio interpolante composito lineare $\Pi_H^1 f$ su nodi equispaziati con passi di ampiezza $H = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$. Si riportino, al variare di H, i valori delle approssimanti corrispondenti $\Pi_H^1 f$ valutate in $\bar{x} = \pi/3$.

per $H = 0.1$ $\quad \Pi_H^1 f(\bar{x}) =$ ____________________

per $H = 0.05$ $\quad \Pi_H^1 f(\bar{x}) =$ ____________________

per $H = 0.025$ $\quad \Pi_H^1 f(\bar{x}) =$ ____________________

per $H = 0.0125$ $\quad \Pi_H^1 f(\bar{x}) =$ ____________________

(c) *(2 punti)* In seguito al punto (b), si calcolino e si riportino gli errori $E_H(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_H^1 f(x)|$ associati alle corrispondenti approssimanti $\Pi_H^1 f$ (al fine del calcolo dell'errore in Matlab® si valutino $f(x)$ e $\Pi_H^1 f(x)$ in 1000 punti con il comando `linspace(0, 4, 1000)`). Si interpretino e si commentino i risultati ottenuti alla luce della stima teorica dell'errore di cui al punto (a).

per $H = 0.1$ $\quad E_H(f) =$ ____________________

per $H = 0.05$ $\quad E_H(f) =$ ____________________

per $H = 0.025$ $\quad E_H(f) =$ ____________________

per $H = 0.0125$ $\quad E_H(f) =$ ____________________

(d) *(3 punti)* Si considerino le coppie di dati $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ con $\{x_i\}_{i=0}^n$ nodi distinti e $n \gg 1$. Si definisca la retta di regressione lineare $p_1(x)$ che approssima tali dati. Inoltre, si riporti (non è richiesta la dimostrazione) e si descriva dettagliatamente la struttura del sistema lineare associato (nella forma generale $A\,\mathbf{a} = \mathbf{q}$), la cui soluzione determina $p_1(x)$.

(e) *(1 punto)* Siano ora assegnate le coppie di dati $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,8)$, $(3,27)$ e $(4,64)$. Si calcoli e si riporti l'espressione della retta di regressione lineare $p_1(x)$ che approssima tali dati.

$$p_1(x) = \underline{\hspace{6cm}}$$

Esercizio 2. Si consideri il problema a valori ai limiti (di Poisson)

11 punti

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad \text{in } (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

(a) *(3 punti)* Si approssimi il problema di Poisson con uno schema alle differenze finite centrate (del second'ordine) su una griglia di $N+2$ nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, con $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\,h$ per $i = 0, \dots, N+1$ e passo $h = (b-a)/(N+1)$. Si riportino le equazioni del sistema risultante.

(b) *(1 punto)* Si riporti la controparte algebrica dell'approssimazione di cui al punto (a), ovvero il sistema lineare $A\,\mathbf{u} = \mathbf{b}$, fornendo l'espressione dei coefficienti della matrice di rigidezza A, del vettore del termine noto $\mathbf{b}$ e del vettore delle incognite $\mathbf{u}$.

(c) *(2 punti)* Si dimostri che la matrice di cui al punto (b) è simmetrica e definita positiva.

(d) *(4 punti)* Si considerino ora i seguenti dati per il problema di Poisson (4): $a = 0$, $b = \pi/2$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$ e $f(x) = -2\,e^{-2\,x}\,(3\,\cos(x) + 4\,\sin(x))$.
Si risolva tale problema tramite il metodo di cui al punto (a), ovvero risolvendo il sistema lineare definito al punto (b), per diversi valori di $N = 9$, 19, 39 e 79 (per risolvere il sistema lineare si consideri il comando "back-slash" di Matlab® \). Sapendo che la soluzione esatta del problema è data da $u(x) = 2\,e^{-2x}\,\cos(x)$, si calcolino e si riportino per ogni N gli errori $E_N = \max_{i=0,\ldots,N+1} |u_i - u(x_i)|$.

per $N = 9$ $\quad E_N =$ ____________________

per $N = 19$ $\quad E_N =$ ____________________

per $N = 39$ $\quad E_N =$ ____________________

per $N = 79$ $\quad E_N =$ ____________________

(e) *(1 punto)* Dopo aver risposto al punto (d), si stimi l'ordine di convergenza p del metodo rispetto ad h (ovvero $(b-a)/(N+1)$) riportando sinteticamente la procedura seguita.

$p =$ ____________________