Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi CdL Ingegneria Aerospaziale Appello 10 settembre 2018	Prof. L. Dedè Prof. A. Manzoni Prof. S. Micheletti	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il più grande numero x_{max} rappresentabile nell'insieme $\mathbb{F}(2,3,-1,3)$; riportare il risultato in base decimale.

$$\boxed{x_{max} = 7}$$

2. *(2 punti)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = (1,\ 1)^T$ e $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$. Assegnato $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 1)^T$ si riporti la prima iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ del metodo di Gauss-Seidel.

$$\boxed{\mathbf{x}^{(1)} = (-1{,}25 \quad 9{,}75)^T}$$

3. *(1 punto)* Si consideri il metodo di Richardson stazionario, con parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ simmetrica e definita positiva. Si determini il valore del parametro $\alpha_{opt} \in \mathbb{R}$ che garantisce la più rapida convergenza del metodo.

$$\boxed{\alpha_{opt} = 0{,}1429}$$

4. *(2 punti)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (6{,}6{,}6)^T$, e il metodo del gradiente per l'approssimazione della soluzione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Si calcolino e si riportino: il valore del parametro dinamico ottimale α_0 associato all'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ usato per determinare l'iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ e l'iterata $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\alpha_0 = 0{,}126\,866 \qquad \mathbf{x}^{(1)} = (1{,}432\,836, 1{,}4328, -0{,}0896)^T}$$

5. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e il metodo delle potenze (dirette) per approssimare l'autovalore di modulo massimo. Assegnato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1\ 0)^T$, si riportino i valori approssimati $\lambda^{(0)}$ e $\lambda^{(1)}$ dell'autovalore ottenuti rispettivamente all'iterata iniziale e dopo l'applicazione di un'iterazione del metodo.

$$\boxed{\lambda^{(0)} = 8 \qquad \lambda^{(1)} = \tfrac{111}{17} = 6{,}529\,412}$$

6. *(1 punto)* Quale tra gli autolavori della matrice $A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -6 & -23 & 0 \\ -3 & 7 & -9 \end{bmatrix}$ può essere determinato applicando il metodo delle potenze *inverse*? Se ne riporti il valore.

$$\boxed{\lambda_3(A) = -9}$$

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 1 - e^{(5-x)}$ e il metodo di bisezione per l'approssimazione dello zero $\alpha = 5$ nell'intervallo [4,8]. Si riporti il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)}$ del metodo.

$$\boxed{x^{(0)} = 6}$$

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice non singolare (invertibile), $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$.

12 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti la *condizione necessaria e sufficiente* per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU senza pivoting della matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; si definisca con precisione tutta la notazione utilizzata.

(b) *(2 punti)* Si enunci il teorema di stabilità per la stima dell'errore associato alla soluzione del sistema lineare generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in presenza della sola perturbazione sul dato $\mathbf{b}$; si definisca tutta la notazione utilizzata.

(c) *(3 punti)* Si illustri schematicamente, ma con completezza, il *metodo* della *fattorizzazione LU* con *pivoting per righe* applicato alla *soluzione* del *sistema lineare* generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Si commenti dettagliatamente il costo computazionale atteso dall'applicazione del metodo.

(d) *(1 punto)* Si riporti la definizione di numero di condizionamento $K_2(A)$ della matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Posto ora $n = 12$, si assegni in Matlab® la matrice di Frank $A \in \mathbb{R}^{12\times 12}$, usando opportunamente il comando `full( gallery( 'frank', 12 ) )`. Si calcoli il numero di condizionamento $K_2(A)$ di tale matrice.

$$K_2(A) = \underline{\quad 4.2674 \cdot 10^9 \quad}$$

(e) *(3 punti)* Posto $\mathbf{b} = \sin\left((1, 2, 3, \ldots, 11, 12)^T\right) \in \mathbb{R}^{12}$ si applichi opportunamente il metodo della fattorizzazione LU con pivoting per righe per risolvere il sistema lineare con la matrice A assegnata al punto (d); laddove necessario si utilizzi opportunamente il comando \ di Matlab® . Si riportino: la seconda componente $\widehat{\mathrm{x}}_2$ della soluzione numerica $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{12}$ così ottenuta, la seconda componente y_2 del vettore ausiliario $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{12}$ associato al sistema *triangolare inferiore* e la norma euclidea del residuo $\mathbf{r}$ associato alla soluzione numerica $\widehat{\mathbf{x}}$.

$\widehat{\mathrm{x}}_2 = \underline{\quad 1.51427 \quad}$ $\qquad$ $\mathrm{y}_2 = \underline{\quad 0.141120 \quad}$ $\qquad$ $\|\mathbf{r}\| = \underline{\quad 1.69518 \cdot 10^{-9} \quad}$

Durante l'applicazione del metodo della fattorizzazione LU viene effettivamente utilizzato il pivoting per righe? Si motivi la risposta data.

(f) *(2 punti)* Si stimi l'errore relativo e_{rel} associato alla soluzione numerica $\widehat{\mathbf{x}}$ del sistema lineare ottenuta al punto (e) applicando il teorema di stabilità di cui al punto (b). Si commenti e si motivi il risultato ottenuto.

$$e_{rel} \leq \underline{\quad 2.88453 \quad}$$

ESERCIZIO 2. Si consideri una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dotata dello zero $\alpha \in [a,b]$.

10 punti

(a) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo del metodo di Newton per la ricerca dello zero α di $f(x)$.

(b) *(4 punti)* Si implementi il metodo di Newton nella funzione Matlab® `newton.m` utilizzando il criterio d'arresto basato sulla differenza tra due iterate successive. La struttura della funzione è:

```
function [xvect,N] = newton(x0,nmax,tol,fun,dfun)
```

Si considerino come *input*: il valore dell'iterata iniziale `x0`; il numero massimo di iterazioni consentite `nmax`; la tolleranza sul criterio d'arresto `tol`; la funzione di cui si vuole calcolare lo zero `fun`; la sua funzione derivata `dfun`. Si considerino come *output*: un vettore `xvect` contenente tutte le iterate del metodo; il numero di iterazioni effettuate `N`.

Si utilizzi la funzione Matlab® `newton.m` implementata precedentemente per approssimare lo zero $\alpha \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \left(x - \frac{\pi}{7}\right) \log\left(x - \pi/7 + 1\right).$$

Si considerino l'iterata iniziale $x^{(0)} = \left(\frac{\pi}{7} + \frac{2}{3}\right)$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e il numero massimo di iterazioni `nmax`$= 100$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, il valore approssimato

$x^{(N)}$ dello zero, il residuo corrispondente $r^{(N)} = |f(x^{(N)})|$ e i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ (si utilizzino almeno 4 cifre decimali e il formato esponenziale per riportare i risultati).

$N =$ 10 $\qquad x^{(N)} =$ 0,449 302 $\qquad r^{(N)} =$ $2{,}525\,323 \cdot 10^{-7}$

$x^{(1)} =$ 0,741 574 $\qquad x^{(2)} =$ 0,586 002

(c) *(2 punti)* Si consideri la funzione $f(x)$ di cui al punto (b) per cui lo zero è $\alpha = \pi/7$. Qual è l'ordine di convergenza p atteso dal metodo di Newton per la ricerca di α? Si giustifichi la risposta sulla base delle proprietà di convergenza del metodo; si enunci con precisione il risultato teorico corrispondente.

$p =$ 1

(d) *(2 punti)* Si consideri ora la seguente funzione di iterazione

$$\phi(x) = (1-\theta)\,x + \frac{\pi}{7}\,\left[\theta + \log\left(x - \pi/7 + 1\right)\right]$$

dipendente da un parametro $\theta \in \mathbb{R}$. Si verifichi che $\alpha = \pi/7$ è punto fisso di $\phi(x)$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

Si determinino i valori di $\theta \in \mathbb{R}$ per cui è garantita la convergenza del metodo delle iterazioni di punto fisso per ogni $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α; si motivi con precisione la risposta.

$\theta \in$ $\left(\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} + 2\right)$

Parte II - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 1 - 4^{2x}$. Si riporti il valore approssimato di $f'(\overline{x})$ in $\overline{x} = 0$ ottenuto mediate le differenze finite in avanti, ovvero $\delta_+ f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\delta_c f(\overline{x}) = -6}$$

2. *(1 punto)* Si consideri l'approssimazione dell'integrale $\int_0^8 x^{1/5}\,dx$ mediante il metodo di Simpson. Si riporti il valore dell'integrale approssimato I_s.

$$\boxed{I_s = 9{,}058\,331}$$

3. *(2 punti)* Data la funzione $f(x) = x + 3\,|\sin(x)|$ nell'intervallo $[a{,}b] = [0{,}5\,\pi]$, si applichi la formula dei trapezi composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ su $M = 10$ sottointervalli equispaziati di $[a{,}b]$. Si riporti il valore dell'integrale approssimato $I_t^H(f)$.

$$\boxed{I_t^H(f) = 146{,}932}$$

4. *(2 punti)* Si consideri la formula del punto medio composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_0^3 e^x\,dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero M di sottointervalli equispaziati di $[0{,}3]$ tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-5}$.

$$\boxed{M \geq 1504}$$

5. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 7\,\sin(t) - 3\,y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero in avanti (Eulero esplicito) con passo $h = 1/4$ e $u_0 = y_0 = 1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{4}}$$

6. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema differenziale di diffusione:

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 & x \in (0{,}1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ si calcoli u_1, ovvero l'approssimazione di $u(1/2)$.

$$\boxed{u_1 = 0{,}25}$$

7. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema differenziale di diffusione–reazione:

$$\begin{cases} -u''(x) + 2\,u(x) = x & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 8. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N = 1$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

$u_1 = 3{,}25$

Parte II - Esercizi

Esercizio 1.

(a) *(3 punti)* Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisca e si fornisca con precisione l'espressione del polinomio interpolante composito lineare $\Pi_H^1 f$ considerando $N+1$ nodi equispaziati nell'intervallo $[a,b]$, ovvero $x_0 = a, x_1, \ldots, x_N = b$, con passo $H = (b-a)/N$. Si interpreti graficamente $\Pi_H^1 f$.

12 punti

Si riporti il risultato (teorema) di convergenza dell'interpolazione composita lineare.

(b) *(2 punti)* In seguito al punto (a), si definisca ora il polinomio interpolante composito di grado 2, ovvero $\Pi_H^2 f$, e se ne fornisca un'interpretazione grafica.

(c) *(2 punti)* Utilizzando opportunamente la funzione `interp1` di Matlab® , si approssimi la funzione

$$f(x) = 5\,\log(x+1) + \frac{5}{4}\,\sin\left(2\pi\,x + \sqrt{3}\right) \quad \text{definita in } [a,b] = [0,10],$$

mediante il polinomio interpolante composito *lineare* $\Pi_H^1 f$ su nodi equispaziati con passi di ampiezza $H = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$. Si riportino, al variare di H, i valori delle approssimanti corrispondenti $\Pi_H^1 f$ valutate in $\overline{x} = 10/\pi$.

per $H = 0.1$ $\quad \Pi_H^1 f(\overline{x}) =$ 7,462 03

per $H = 0.05$ $\quad \Pi_H^1 f(\overline{x}) =$ 7,471 464

per $H = 0.025$ $\quad \Pi_H^1 f(\overline{x}) =$ 7,474 698

per $H = 0.0125$ $\quad \Pi_H^1 f(\overline{x}) =$ 7,475 285

(d) *(2 punti)* In seguito al punto (c), si calcolino e si riportino gli errori $E_H(f) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \Pi_H^1 f(x)|$ associati alle corrispondenti approssimanti $\Pi_H^1 f$ (al fine del calcolo dell'errore in Matlab® si valutino $f(x)$ e $\Pi_H^1 f(x)$ in 1000 punti con il comando `linspace(0, 10, 1000)`).

per $H = 0.1$ $\quad E_H(f) = 6{,}210\,519 \cdot 10^{-2}$

per $H = 0.05$ $\quad E_H(f) = 15{,}516\,793 \cdot 10^{-3}$

per $H = 0.025$ $\quad E_H(f) = 39{,}656\,099 \cdot 10^{-4}$

per $H = 0.0125$ $\quad E_H(f) = 9{,}858\,695 \cdot 10^{-4}$

Alla luce del teorema di convergenza di cui al punto (a), si stimi *algebricamente* l'ordine di convergenza del metodo e si commentino i risultati ottenuti.

(e) *(2 punti)* Si considerino ora le coppie di dati $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ con $\{x_i\}_{i=0}^n$ nodi distinti e $n \gg 1$. Si definisca il polinomio $p_m(x) \in \mathbb{P}_m$ approssimante tali dati nel senso dei minimi quadrati, dove $m \geq 0$.

Si riporti e si descriva dettagliatamente il problema di minimizzazione associato a $p_m(x)$.

(f) *(1 punto)* Si considerino le coppie di dati $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ generate da $n+1 = 21$ nodi equispaziati in [0,10] e dalle corrispondenti valutazioni della funzione $f(x)$ definita al punto (c). Si calcolino e si riportino le espressioni dei polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ che approssimano tali dati nel senso dei minimi quadrati.

$p_1(x) = $ $1{,}0375\,x + 2{,}9464$ $\qquad$ $p_2(x) = $ $-0{,}0954\,x^2 + 1{,}9918\,x + 1{,}4354$

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & t \in (0,t_f], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

10 punti

con $t_f > 0$ e il dato iniziale y_0 assegnati.

(a) *(2 punti)* Si considerino il problema di Cauchy (1) e la sua approssimazione mediante il metodo di *Crank–Nicolson*. Si riporti l'algoritmo del metodo (non in stretto linguaggio Matlab®) definendo con precisione tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Posti per il problema di Cauchy (1) $f(t,y) = \lambda\, y$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda < 0$, e $t_f = +\infty$, si discuta l'assoluta stabilità del metodo di Crank–Nicolson. Si motivi la risposta fornita.

(c) *(3 punti)* Si consideri il problema di Cauchy (1) con $f(t,y) = [6\,(\cos(t)\tanh(t) + \sin(t)\,) - \tanh(t)\,y]$, $t_f = 10$ e $y_0 = 0$. Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare tale problema mediante il metodo di Crank–Nicolson con diversi passi temporali $h_1 = 0.5$, $h_2 = 0.25$, $h_3 = 0.125$ e $h_4 = 0.0625$. Si riportino i valori della soluzione approssimata $u_{N_{h,i}}$ corrispondente all'istante finale t_f per ciascuno dei precedenti valori di h_i (si riportino almeno 4 cifre decimali).

$u_{N_{h,1}} = -3{,}176\,627$ $u_{N_{h,2}} = -3{,}242\,453$

$u_{N_{h,3}} = -3{,}258\,721$ $u_{N_{h,4}} = -3{,}262\,776$

(d) *(2 punti)* Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = 6\,\sin(t)\tanh(t)$, si calcolino e si riportino gli errori E_{h_i} associati alle soluzioni $u_{N_{h,i}}$ al tempo t_f ottenuti per ciascun valore di h_i specificato al punto (c) (si riportino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

$E_{h_1} = \underline{\;8{,}7499 \cdot 10^{-2}\;}$ $\quad E_{h_2} = \underline{\;21{,}6732 \cdot 10^{-3}\;}$

$E_{h_3} = \underline{\;54{,}0572 \cdot 10^{-4}\;}$ $\quad E_{h_4} = \underline{\;13{,}5065 \cdot 10^{-4}\;}$

Si utilizzino tali risultati per stimare *graficamente* l'ordine di convergenza del metodo di Crank–Nicolson. Si motivi la risposta riportando con completezza la procedura seguita e il corrispondente grafico ottenuto.

(e) *(2 punti)* Si consideri ora un metodo di Runge–Kutta per approssimare il generico problema di Cauchy (1). Se ne riporti l'approssimazione associata alla seguente tabella di Butcher:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

Si indichi, motivandolo, se tale metodo di Runge–Kutta è esplicito o implicito.