Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **<u>Prima Prova in Itinere</u>** **04 maggio 2017**	**Prof. P.F. Antonietti** **Prof. L. Dedè** **Prof. M. Verani**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 1h 30m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il più grande numero x_{max} rappresentabile nell'insieme $\mathbb{F}(2, 4, -2, 5)$; riportare il risultato in base decimale.

2. *(2 punti)* Sia $A_\alpha = \begin{bmatrix} 2\alpha & \frac{\sqrt{3}\alpha}{2} \\ \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} & \alpha \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro $\alpha > 0$. Si riporti il valore del numero di condizionamento spettrale di A_α in termini di α, ovvero $K(A_\alpha)$.

3. *(2 punti)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = (1 \;\; 1)^T$ e $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Assegnato $\mathbf{x}^{(0)} = (1 \;\; 1)^T$ si riporti la prima iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ del metodo di Gauss-Seidel.

4. *(1 punto)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, da risolvere con un generico metodo iterativo a cui è associata la matrice di iterazione $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & 0 \\ -1 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$. Il metodo iterativo converge a $\mathbf{x}$ per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$? Si motivi il risultato sulla base del valore assunto dal raggio spettrale di B, ovvero $\rho(B)$.

5. *(2 punti)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = (1 \;\; 1)^T$ e $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Assegnato $\mathbf{x}^{(0)} = (1 \;\; 1)^T$ si riporti la prima iterata dell'autovettore (di modulo unitario) $\mathbf{y}^{(1)}$ del metodo delle potenze inverse.

6. *(1 punto)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$. Quale dei suoi autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^{3}$ può essere approssimato mediante il metodo delle potenze dirette?

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 4^{x-1} - 1$ con un unico zero α. Applicando il metodo di bisezione per l'approssimazione di α nell'intervallo $[-1{,}3]$, si stimi il numero di iterazioni k_{min} richieste dal metodo per garantire un'errore inferiore a $tol = 10^{-9}$.

Esercizio 1.

11 punti

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice non singolare (invertibile), $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$.

(a) *(1 punto)* Si riporti la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e unicità della fattorizzazione LU senza pivoting di tale matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (si definisca la notazione utilizzata).

(b) *(3 punti)* Si enunci il teorema di stabilità per la stima dell'errore associato alla soluzione di un sistema lineare generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in presenza della sola perturbazione sul dato $\mathbf{b}$ (si definisca la notazione utilizzata). Inoltre, si commenti brevemente l'applicazione di tale teorema alla valutazione dell'accuratezza dei metodi diretti.

(c) *(2 punti)* Per $n = 30$, si assegni in Matlab® la matrice $A \in \mathbb{R}^{30\times 30}$ definita come $A = A_1 + A_2$, dove le matrici A_1 e $A_2 \in \mathbb{R}^{30\times 30}$ hanno componenti:

$$(A_1)_{i,j} = \begin{cases} 9 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (A_2)_{i,j} = \begin{cases} 3 & \text{se } i + j \text{ è pari,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcolino e si riportino gli autovalori di modulo minimo e massimo di A, ovvero $\lambda_{min}(A)$ e $\lambda_{max}(A)$. (*Suggerimento*: in Matlab® un numero `s` è pari se `mod(s,2)==0`).

$\lambda_{min}(A) =$ __________ $\qquad \lambda_{max}(A) =$ __________

(d) *(3 punti)* Si illustri schematicamente il metodo della fattorizzazione LU senza pivoting per la soluzione del sistema lineare generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Inoltre, assumendo $\mathbf{b} = (3, 3, \ldots, 3)^T \in \mathbb{R}^{30}$ si applichi tale metodo per risolvere il sistema lineare con la matrice A assegnata al punto (c) utilizzando opportunamente il comando \ di Matlab® . Si riportino la seconda componente y_2 (ovvero `y(2)` in Matlab®) del vettore ausiliario $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{30}$ associato al sistema triangolare $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e la norma euclidea del residuo $\mathbf{r}$ associato alla soluzione numerica del sistema lineare iniziale.

$\mathrm{y}_2 =$ __________ $\|\mathbf{r}\| =$ __________

(e) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo del metodo del gradiente precondizionato per risolvere il sistema lineare generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Inoltre, assumendo la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ assegnati rispettivamente ai punti (c) e (d), la matrice di precondizionamento $P = A_1$ e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,\ldots,0)^T \in \mathbb{R}^{30}$, si calcoli il valore del parametro dinamico ottimale α_0 associato a $\mathbf{x}^{(0)}$ per il calcolo di $\mathbf{x}^{(1)}$.

$\alpha_0 =$ __________

Esercizio 2.

11 punti

Si consideri una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dotata dello zero $\alpha \in [a,b]$.

(a) *(1 punto)* Si riporti l'algoritmo del metodo di Newton per la ricerca dello zero α di $f(x)$.

(b) *(3 punti)* Si enuncino le proprietà di convergenza del metodo di Newton sia per il caso di uno zero α semplice di $f(x)$ sia per il caso di α multiplo (ovvero di molteplicità $m > 1$).

(c) *(5 punti)* Si implementi il metodo di Newton nella funzione Matlab® `newton.m` utilizzando il criterio d'arresto basato sulla differenza tra due iterate successive. La struttura della funzione è:

```
function [xvect,Nit] = newton(x0,nmax,tol,fun,dfun)
```

Si considerino come *inputs*: il valore dell'iterata iniziale `x0`; il numero massimo di iterazioni consentite `nmax`; la tolleranza sul criterio d'arresto `tol`; la funzione di cui si vuole calcolare lo zero `fun`; la sua funzione derivata `dfun`. Si considerino come *outputs*: un vettore `xvect` contenente tutte le iterate del metodo; il numero di iterazioni effettuate `Nit`.

Si utilizzi la funzione Matlab® `newton.m` implementata precedentemente per approssimare lo zero $\alpha \in [0.5, 10]$ della funzione

$$f(x) = -\text{atan}(4x)\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)^3.$$

Si considerino l'iterata iniziale $x^{(0)} = 1$, la tolleranza `tol`$= 10^{-4}$ e il numero massimo di iterazioni `nmax`$= 1000$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, il valore approssimato $x^{(N)}$ dello zero, il residuo corrispondente $r^{(N)} = |f(x^{(N)})|$ e i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$.

$N =$ ____________ $x^{(N)} =$ ____________ $r^{(N)} =$ ____________

$x^{(1)} =$ ____________ $x^{(2)} =$ ____________

(d) *(1 punto)* Dopo aver risolto il punto (c) e sapendo che $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, si calcolino e si riportino i valori dei rapporti:

$$\frac{x^{(N)} - \alpha}{x^{(N-1)} - \alpha} = \_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \frac{x^{(N-1)} - \alpha}{x^{(N-2)} - \alpha} = \_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Si utilizzino tali rapporti per determinare l'ordine di convergenza p del metodo di Newton applicato al punto (c) per la ricerca di α motivando brevemente la risposta data.

$p =$ ____________

(e) *(1 punto)* Si giustifichi sinteticamente l'ordine di convergenza p determinato al punto (d) per la funzione $f(x)$ e lo zero α sulla base delle proprietà di convergenza del metodo di Newton enunciate al punto (b).