Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **<u>Prima Prova in Itinere</u>** **15 aprile 2019**	**Prof. L. Dedè** **Prof. A. Manzoni** **Prof. S. Micheletti**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 1h 30m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare i valori degli elementi $l_{32} = (L)_{32}$ e $u_{33} = (U)_{33}$ rispettivamente delle matrici triangolari *inferiore* L e *superiore* U.

$l_{32} = \frac{24}{7} \qquad u_{33} = -\frac{41}{7}$

2. *(1 punto)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Assumendo che A sia una matrice non singolare triangolare superiore, quante operazioni vengono eseguite dall'algoritmo delle sostituzioni all'indietro per la risoluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se $n = 10$?

100

3. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $\alpha > 0$ è soddisfatta la condizione *necessaria e sufficiente* per la convergenza del metodo di Gauss–Seidel applicato alla soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$?

$\alpha > \frac{1}{2} = 0{,}5$

4. *(1 punto)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$. Sia $\widetilde{\mathbf{x}} = (7,\ 10)^T$ un'*approssimazione* di un autovettore di A; si riporti il valore $\widetilde{\lambda}$ dell'*approssimazione* dell'autovalore corrispondente a $\widetilde{\mathbf{x}}$.

$\widetilde{\lambda} = \frac{1418}{149} = 9{,}516\,779$

5. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ e il metodo delle potenze *inverse*. Posta l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 1)^T$, si riporti l'approssimazione dell'autovettore normalizzato $\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}/\|\mathbf{x}^{(1)}\|$.

$\mathbf{y}^{(1)} = (3,\ 2)^T / \sqrt{13}$

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = (x-2)^3$ e il metodo di bisezione per l'approssimazione dell'unico zero α di $f(x)$. Si riporti il valore dell'iterata $x^{(1)}$ ottenuto partendo dall'intervallo iniziale $[0{,}5]$.

$x^{(1)} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = e^{3x} - 3$. Si riporti il valore della prima iterata del metodo di Newton $x^{(1)}$ ottenuta per il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = 0$.

$x^{(1)} = \frac{2}{3} = 0{,}666\,667$

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, essendo $n \geq 1$.

12 punti

(a) *(4 punti)* Assumendo che la matrice A sia simmetrica e definita positiva, si riporti l'algoritmo (*non* in stretto linguaggio Matlab®) del metodo del *gradiente* per la soluzione del *sistema lineare* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si definisca tutta la notazione utilizzata.

Quale funzione Φ ha minimo nella soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare? Si riporti l'espressione di Φ.

Qual è la direzione di discesa del metodo del gradiente in corrispondenza dell'iterata $\mathbf{x}^{(k)}$? Si riporti inoltre la sua espressione in termini della funzione Φ di cui sopra.

(b) *(2 punti)* Si riporti con completezza il risultato (teorema) di convergenza del metodo del *gradiente* (si definisca tutta la notazione utilizzata), discutendo in particolare quali caratteristiche della matrice A influenzano la velocità di convergenza del metodo a $\mathbf{x}$.

(c) *(2 punti)* Sia ora $n = 100$ la dimensione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (7,7,\ldots,7)^T$ e la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 & & & & 0 \\ -2 & 6 & -2 & -1 & & & \\ -1 & -2 & 6 & -2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & -2 & 6 & -2 & -1 \\ & & & -1 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & & & & -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Il metodo del *gradiente coniugato* risulta convergente alla soluzione $\mathbf{x}$ per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{100}$? Si motivi dettagliatamente e con completezza la risposta data.

(d) *(2 punti)* Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `pcg` per approssimare la soluzione del sistema lineare di cui al punto (c) mediante il metodo del *gradiente coniugato*; si considerino la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 100$ (`pcg` considera di default l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,\ldots,0)^T$). Si riportino: il numero di iterazioni N effettuato, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo normalizzato $r_{rel}^{(N)}$ in formato esponenziale.

$N =$ 33 $\qquad x_3^{(N)} =$ 184,315 714 $\qquad r_{rel}^{(N)} =$ $8.1012 \cdot 10^{-5}$

(e) *(2 punti)* Si commenti la velocità di convergenza a $\mathbf{x}$ attesa per il metodo del *gradiente coniugato* applicato al sistema lineare di cui al punto (c). Tale metodo risulta più vantaggioso del metodo del gradiente? Si motivi dettagliatamente la risposta data.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = \dfrac{7x+2}{2x+7}$, dotata del punto fisso $\alpha = 1$.

10 punti

(a) *(1 punto)* Si tracci e si riporti qualitativamente il grafico della funzione di iterazione $\phi(x)$ per $x \in I = [0.5,1.5]$ e si evidenzi il punto fisso α.

(b) *(3 punti)* Si determini se il metodo delle iterazioni di punto fisso applicato alla funzione $\phi(x)$ converge ad $\alpha = 1$ per ogni scelta dell'iterata iniziale $x^{(0)} \in I = [0.5,1.5]$. Si giustifichi dettagliatamente la risposta riportando e commentando il risultato teorico di convergenza globale.

(c) *(1 punto)* Si riporti l'algoritmo del metodo delle iterazioni di punto fisso.

(d) *(3 punti)* Si implementi il metodo delle iterazioni di punto fisso nella funzione Matlab® `puntofisso.m` utilizzando il criterio d'arresto basato sulla differenza tra due iterate successive. La struttura della funzione è:

```
function [xvect,N] = puntofisso(x0,nmax,tol,phi)
```

Si considerino come *input*: il valore dell'iterata iniziale `x0`; il numero massimo di iterazioni consentite `nmax`; la tolleranza sul criterio d'arresto `tol`; la funzione di cui si vuole calcolare il punto fisso `phi`. Si considerino come *output*: un vettore `xvect` contenente tutte le iterate del metodo; il numero di iterazioni effettuate `N`.

Si utilizzi la funzione Matlab® `puntofisso.m` implementata precedentemente per approssimare il punto fisso $\alpha = 1$ di $\phi(x)$. Si considerino l'iterata iniziale $x^{(0)} = 0.5$, la tolleranza `tol`$= 10^{-4}$ e il numero massimo di iterazioni `nmax`$= 100$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, il valore approssimato $x^{(N)}$ del punto fisso, la differenza tra le due ultime iterate $\delta^{(N)} = |x^{(N)} - x^{(N-1)}|$ e i valori delle iterate $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ (si utilizzino almeno 4 cifre decimali e il formato esponenziale per riportare i risultati).

$N =$ 15 $\quad x^{(N)} =$ 0,999 901 $\quad \delta^{(N)} =$ $7{,}904\,075 \cdot 10^{-5}$

$x^{(1)} =$ 0,6875 $\quad x^{(2)} =$ 0,813 433

(e) *(2 punti)* Dopo aver risposto al punto (d), si stimi l'ordine di convergenza p del metodo al punto fisso $\alpha = 1$ della funzione $\phi(x)$. Si riporti il valore di p illustrando nel dettaglio la procedura seguita per la sua stima; si giustifichi la risposta alla luce dei risultati teorici.