Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi CdL Ingegneria Aerospaziale Prima Prova in Itinere 02 maggio 2018	Prof. L. Dedè Prof. A. Manzoni Prof. S. Micheletti	Firma leggibile dello studente
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 1h 30m.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il più piccolo numero (positivo) x_{min} rappresentabile nell'insieme $\mathbb{F}(2, 4, -3, 7)$; riportare il risultato in base decimale.

2. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare il valore dell'elemento $u_{33} = (U)_{33}$ della matrice triangolare *superiore* U.

3. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $\alpha > 0$ è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo di Jacobi applicato alla soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ per $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$?

4. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$. Assegnato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 1)^T$ si riporti il valore approssimato $\lambda^{(1)}$ dell'autovalore ottenuto applicando un'iterazione del metodo delle potenze (dirette).

5. *(1 punto)* Quale tra gli autolavori della matrice $A = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ -11 & -20 & 0 \\ -3 & 7 & -9 \end{bmatrix}$ può essere determinato applicando il metodo delle potenze *inverse*? Se ne riporti il valore.

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = e^{(10/9-x)} - 1$ con un unico zero α e il metodo di bisezione per la sua approssimazione. Senza applicare esplicitamente il metodo, si *stimi* l'errore commesso dopo $k = 5$ iterazioni partendo dall'intervallo iniziale [0,4].

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}$. Si riporti il valore della prima iterata del metodo di Newton $x^{(1)}$ ottenuta per il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = \frac{4}{3}$.

12 punti

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice invertibile e i vettori $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$.

(a) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo (*non* in stretto linguaggio Matlab®) del metodo di *Richardson stazionario precondizionato* con parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per risolvere il sistema lineare generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con matrice di precondizionamento $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) *(2 punti)* Siano A e P matrici simmetriche e definite positive. Si enunci il corrispondente risultato di convergenza per il metodo di Richardson stazionario precondizionato. Inoltre, si riportino la condizione di ottimalità sul parametro α e la corrispondente stima dell'errore in norma $\|\cdot\|_A$. Si definisca *tutta* la notazione utilizzata.

(c) *(4 punti)* Si considerino ora la seguente matrice $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ e le due matrici di precondizionamento P_1 e $P_2 \in \mathbb{R}^{100\times 100}$:

$$A = \text{pentadiag}\,(-1,-4,10,-4,-1)\,, \quad P_1 = I \text{ (la matrice identità)} \quad \text{e} \quad P_2 = \text{tridiag}\,(-5,10,-5)\,.$$

Si calcolino i valori dei parametri ottimali $\alpha_{opt,1}$ e $\alpha_{opt,2}$ per il metodo di *Richardson stazionario precondizionato* rispettivamente con le matrici P_1 e P_2.

$\alpha_{opt,1} =$ ____________________ $\qquad$ $\alpha_{opt,2} =$ ____________________

Si supponga ora di applicare il metodo per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{100}$ e un vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{100}$ tale per cui $\|\mathbf{e}^{(0)}\|_A = 1$, essendo $\mathbf{e}^{(k)} := \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}$ per $k \geq 0$. Si riportino gli errori *stimati* $\|\mathbf{e}^{(k)}\|_A$ applicando $k = 10$ iterazioni del metodo con le matrici di precondizionamento P_1 e P_2 corrispondenti ai parametri ottimali $\alpha_{opt,1}$ e $\alpha_{opt,2}$.

per P_1 : $\|\mathbf{e}^{(10)}\|_A \leq$ ____________________ $\qquad$ per P_2 : $\|\mathbf{e}^{(10)}\|_A \leq$ ____________________

Quale delle due matrici di precondizionamento, P_1 o P_2, garantisce una convergenza più rapida del metodo? Si motivi la risposta data.

(d) *(4 punti)* Si implementi il metodo di Richardson stazionario precondizionato in Matlab® nella funzione `Richardson.m` (si usi il comando "back-slash" di Matlab® \ laddove necessario). Si utilizzi il criterio d'arresto basato sul residuo relativo (detto anche residuo normalizzato). La struttura della funzione è:

```
function [x,Nit] = Richardson(A,b,P,alpha,x0,nmax,tol).
```

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `P`, la matrice di precondizionamento; `alpha`, il parametro α; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `Richardson.m` per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A data al punto (c), $\mathbf{b} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{100}$, la matrice di precondizionamento P_2 data al punto (c), $\alpha = 0.25$, l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 1000$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo relativo $r_{rel}^{(N)}$.

$N =$ __________ $\qquad$ $x_3^{(N)} =$ ____________________ $\qquad$ $r_{rel}^{(N)} =$ ____________________

Infine, utilizzando opportunamente la funzione `Richardson.m`, si riportino i valori della terza componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_3^{(1)}$ e $x_3^{(2)}$.

$x_3^{(1)} =$ ____________________ $\qquad$ $x_3^{(2)} =$ ____________________

Esercizio 2. Si consideri la seguente funzione di iterazione

$$\phi(x) = 2 + \text{atan}\left(e^{(x-2)} - 1\right) \tag{1}$$

10 punti

dotata di due punti fissi $\alpha > 3$ e $\beta = 2$.

(a) *(1 punto)* Si tracci e si riporti qualitativamente il grafico della funzione di iterazione $\phi(x)$ data in Eq. (1) per $x \in [1,4]$ e si evidenzino i punti fissi α e β.

(b) *(1 punto)* Si riporti l'algoritmo del metodo delle iterazioni di punto fisso.

(c) *(2 punti)* Si enunci con precisione un risultato di convergenza *locale* per il metodo delle iterazioni di punto fisso con una funzione di iterazione generica $\phi(x)$.

(d) *(1 punto)* Si consideri ora la funzione di iterazione ϕ data in Eq. (1). Sulla base del risultato teorico dato al punto (c), il metodo delle iterazioni di punto fisso è adeguato per approssimare il punto fisso $\beta = 2$? Si motivi la risposta data.

(e) *(2 punti)* Posta l'iterata iniziale $x^{(0)} = 3$, si applichino $k = 4$ iterazioni del metodo delle iterazioni di punto fisso per $\phi(x)$ data in Eq. (1). Si calcolino i valori delle iterate $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ e $x^{(4)}$ (si riporti il risultato con almeno 4 cifre decimali).

$x^{(1)} =$ ____________________ $x^{(2)} =$ ____________________

$x^{(3)} =$ ____________________ $x^{(4)} =$ ____________________

(f) *(3 punti)* Si considerino la funzione di iterazione $\phi(x)$ di Eq. (1) e il suo punto fisso $\alpha > 3$. Si mostri che esiste una costante positiva $C < 1$ tale per cui, per ogni $x^{(0)} \geq 3$, vale

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq C^k \, |x^{(0)} - \alpha| \qquad \text{per } k = 0,1,\ldots.$$

Si riporti inoltre il valore di C. (Suggerimento: si studi graficamente la funzione $\phi'(x)$ per $x \geq 3$)

$C =$ ____________________

In tal caso, qual è l'ordine di convergenza atteso del metodo ad α? Perché?