# Esercizi 11 — 9 pt

### 1 — 1 pt

Si consideri il generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni inerenti la sua approssimazione numerica è <u>falsa</u>?

**A)** Il metodo di Crank–Nicolson all'indietro è implicito e accurato di ordine 2 se la soluzione del problema di Cauchy è "sufficientemente" regolare.

**B)** È possibile garantire l'assoluta stabilità di un metodo numerico condizionatamente assolutamente stabile scegliendo un passo di discretizzazione $h$ "sufficientemente" piccolo.

**C)** Tutti i metodi di Runge–Kutta con $s = 2$ stadi, se applicati al problema modello $f(t, y) = \lambda\, y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda < 0$, sono incondizionatamente assolutamente stabili.

**D)** Se un metodo numerico è consistente e convergente, allora è anche zero–stabile.

C

### 2 — 2 pt

Per l'approssimazione numerica del generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_f], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

si consideri il metodo di Runge–Kutta corrispondente alla seguente tabella di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 0 \\ \hline & 1/3 & 2/3 \end{array}$$

Posti $f(t, y) = -2\,(1 + \sin(\pi\, t))\,(2 - y)^2$, $t_0 = 0$, $t_f = 5$ e $y_0 = 3$, si approssimi il problema con il metodo precedentemente descritto e si riporti il valore dell'approssimazione $u_{N_h}$ di $y(t_f)$, dove $t_n = t_0 + n\, h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$, essendo il passo $h = 1/4$.

2.0846

**3 — 2 pt**

Per l'approssimazione numerica del problema modello

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda\, y(t) \quad t \in (t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda < 0$, si consideri il metodo di Runge–Kutta corrispondente alla seguente tabella di Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

Si ricavi la condizione di assoluta stabilità per tale metodo in termini di $\lambda$.

$$0 < h < \frac{2.7853}{|\lambda|}$$

**4 — 2 pt**

Per l'approssimazione numerica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, t_f], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

si consideri il metodo multistep di Adams–Bashforth a tre passi, che consiste nel trovare $\{u_n\}_{n=0}^{N_h}$ tale che

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\left[\dfrac{23}{12} f(t_n, u_n) - \dfrac{4}{3} f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \dfrac{5}{12} f(t_{n-2}, u_{n-2})\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{per } n = 2, \ldots, N_h - 1, \\ u_0 = y_0 \quad \text{e } u_1,\ u_2,\ \text{assegnati}, \end{cases}$$

essendo $N_h$ il numero di sottointervalli in cui è suddiviso $[t_0, t_f]$ e delimitati dai tempi discreti $t_n$ con $h = (t_f - t_0)/N_h$; $u_n$ rappresenta l'approssimazione di $y(t_n)$. Si considerino ora i seguenti dati: $f(t, y) = \sin(\pi t) - y^2$, $t_0 = 0$, $t_f = 3$, $y_0 = 2$. Si approssimi tale problema con il metodo multipasso precedente con $h = 0.2$ e si riporti il valori dell' approssimazione $u_{N_h}$ così ottenuta, assumendo che $u_1 = 1.2$ e $u_2 = 0.9120$.

0.4851

**5 — 2 pt**

Per l'approssimazione numerica del problema di Cauchy del secondo ordine

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \quad t \in (t_0, t_f], \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = w_0, \end{cases}$$

si consideri il metodo di Leap Frog, che consiste nel trovare $\{u_n\}_{n=0}^{N_h}$ e $\{v_n\}_{n=0}^{N_h}$ tali che

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, v_n + \dfrac{h^2}{2}\, f(t_n, u_n, v_n) \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{h}{2}\, [f(t_n, u_n, v_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})] \qquad \text{per } n = 1, \ldots, N_h - 1, \\ u_0 = y_0, \\ v_0 = w_0, \end{cases}$$

essendo $N_h$ il numero di sottointervalli in cui è suddiviso $[t_0, t_f]$ e delimitati dai tempi discreti $t_n$ con $h = (t_f - t_0)/N_h$; $u_n$ rappresenta l'approssimazione di $y(t_n)$, mentre $v_n$ di $y'(t_n)$. Si considerino ora i seguenti dati: $f(t, y, v) = \sin(\pi t) - y^2 - 3\, v$, $t_0 = 0$, $t_f = 10$, $y_0 = 1$, $w_0 = 0$. Si approssimi tale problema con il metodo di Leap Frog con passo $h = 0.2$ e i riportino i valori delle approssimazioni $u_{N_h}$ e $v_{N_h}$ così ottenute.

$u_{N_h} = 0.1626, \quad v_{N_h} = -0.1841$