Esercizi 08 — 10 pt

1 — 2 pt

Siano assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots, x_5$ nell'intervallo $[-2, 2]$ e la funzione $f(x) = 1 - e^{\sin x}$. Si consideri il polinomio di Lagrange $\Pi_5 f(x)$ interpolante tale funzione ai precedenti nodi. Si riportino il valore *massimo* della funzione *errore*, ovvero $e_5(f) = \max_{x \in [-2,2]} |f(x) - \Pi_5 f(x)|$ e il punto $x_{max}. \in [-2, 2]$ dove tale valore massimo viene determinato.

$e_5(f) = 0.0957, \quad x_{max} = 1.7320$

2 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = \cos(\pi\, x)$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e l'interpolazione polinomiale di Lagrange di f di grado $n \geq 1$ su $n + 1$ nodi equispaziati. Si riporti l'espressione della stima a priori dell'errore di interpolazione in termini di n.

$$\widetilde{e}_n(f) \leq \frac{2^{n-1}}{(n+1)} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{n+1}$$

3 — 2 pt

Si consideri la base di polinomi caratteristici di Lagrange di grado $n = 3$ sui nodi di Chebyshev–Gauss–Lobatto nell'intervallo $[0, 1]$. Si calcoli e si riporti il valore della costante di Lebesgue Λ_3 ottenuta applicando la definizione.

$$\Lambda_3 = \frac{5}{3}$$

4 — 1 pt

Data la serie storica $\{x_t\}_{t=0}^{T}$ di valori di una variabile X dal tempo discreto 0 fino a T, la media mobile semplice e centrata a un tempo $t \in [n, T - n]$ è definita come $\widetilde{x}_t = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{+n} x_{t+j}$, per $n \geq 0$ e intero; $2n + 1$ è detto periodo della media mobile.

In relazione all'epidemia Covid–19 sono stati comunicati dal Dipartimento della Protezione Civile i seguenti numeri di nuovi positivi per la regione Lombardia nell'anno 2021:

···	12/04	13/04	14/04	15/04	16/04	17/04	18/04	19/04	20/04	···
	997	1975	2153	2722	2431	2546	1782	1040	1670	

Si determini il valore della media mobile semplice e centrata con periodo di 7 giorni dei nuovi positivi della regione Lombardia al giorno 16/04/2021.

2092.71

5 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = e^x \ \sin(\pi\, x)$ e il suo interpolante polinomiale lineare a tratti $\Pi_1^H f(x)$ su 11 nodi equispaziati nell'intervallo $[-1, 1]$. Si riporti il valore $\Pi_1^H f(0.7)$.

$\Pi_1^H(0.7) = 1.5205$

6 — 2 pt

Si consideri la funzione $f \,:\, [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ periodica con $f(x) = \begin{cases} x/\pi & x \leq \pi \\ (2 - x/\pi)^2 & x > \pi \end{cases}$.

Si riporti l'espressione dell'intepolante trigonometrico $\widetilde{f}(x)$ per $n = 4$ (interpolazione su $n + 1 = 5$ nodi equispaziati).

$0.4 - 0.3968 \cos(x) + 0.1289 \sin(x) - 0.0032 \cos(2x) - 0.0044 \sin(2x)$

7 — 1 pt

Si consideri l'interpolazione tramite una spline cubica interpolatoria $s_3(x)$ di una funzione $f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$. Sapendo che $f \in C^\infty([a, b])$ e che con $M_1 = 10$ sottointervalli equispaziati di $[a, b]$, l'errore di inerpolazione $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - s_3(x)| \leq 10^{-2}$, si stimi il numero minimo di sottointervalli M_2 tale per cui il precedente errore risulti minore o uguale a 10^{-5}.

57