Esercizi 02 — 8 pt

1 — 1 pt

L'esponenziale di un numero reale $x \geq 1$, ovvero e^x, può essere approssimato come $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$, per $n \geq 1$. Posto $x = 2$, qual è il minimo valore di n, ovvero n_{min}, tale per cui l'errore corrispondente a $S_{n_{min}}$ risulta inferiore a 10^{-1}?

6

2 — 2 pt

Si considerino N coppie $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ di numeri casuali compresi tra 0 e 1, che corrispondono a N punti nel piano $\mathbb{R}^2$. Indicato con M il numero dei precedenti punti che cadono nel quarto di cerchio di raggio unitario centrato nell'origine, si può calcolare il valore $S_N = 4\frac{M}{N}$. Si scriva una funzione Matlab® che implementa il precedente calcolo di S_N. Che valore di S_N si ottiene per $N = 10^6$?

π (si tratta del metodo di Monte Carlo)

3 — 1 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{x}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{100}$ e $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ è una matrice non singolare tale che $(A)_{i,j} = 0$ per $j > i$ oppure $j < (i-1)$, ovvero A è *bidiagonale* inferiore. Si determini il costo computazionale corrispondente all'applicazione dell'algoritmo delle sostituzioni in avanti adattato a questo tipo di sistema lineare.

298

4 — 1 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\beta \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice A ammette un'unica fattorizzazione LU ottenibile senza applicare la tecnica del pivoting?

$\beta \neq 5$

5 — 2 pt

Sia dato un sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} (2\gamma) & 2 & -8 \\ \gamma & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una matrice dipendente da un parametro $\gamma > 0$ e $\mathbf{b} = (1\ 2\ 8)^T$. Si risolva il sistema tramite il metodo della fattorizzazione LU con pivoting per righe, con seconda e terza riga permutate. Si riportino, in funzione di γ, gli elementi $l_{21} = (L)_{21}$ e $u_{33} = (U)_{33}$ dei fattori L ed U della matrice *permutata* e la seconda componente y_2 del vettore ausiliario $\mathbf{y}$ associato alla soluzione del sistema triangolare inferiore che compare durante l'applicazione del metodo.

$l_{21} = \dfrac{1}{\gamma} \qquad u_{33} = 12 \qquad y_2 = 8 - \dfrac{1}{\gamma}$

6 — 1 pt

Si consideri una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, non singolare. Applicando il metodo della fattorizzazione LU di A tramite il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting per righe, si ottiene una matrice $U = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sapendo che durante l'applicazione di tale metodo è avvenuta una sola permutazione di due righe di A, si riporti il valore del determinante di A.

6