Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi CdL Ingegneria Aerospaziale Appello 14 luglio 2017	Prof. P.F. Antonietti Prof. L. Dedè Prof. M. Verani	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il più grande numero x_{max} rappresentabile nell'insieme $\mathbb{F}(3,2,-5,3)$; riportare il risultato in base decimale.

2. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare il valore dell'elemento $u_{33} = (U)_{33}$ della matrice triangolare *superiore* U.

3. *(1 punto)* Sia $A_\alpha = \begin{bmatrix} (8+\alpha) & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro $\alpha \geq 0$. Si riporti il valore massimo del numero di condizionamento spettrale di A_α rispetto al parametro $\alpha \in [0{,}4]$, ovvero $K_{max} = \max_{\alpha \in [0,4]} K(A_\alpha)$.

4. *(1 punto)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. Quale dei suoi autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^{3}$ può essere approssimato mediante il metodo delle potenze *inverse*? (se ne riporti il valore)

5. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Assegnato $\mathbf{x}^{(0)} = (3 \;\; 1)^T$, si riporti la prima iterata dell'autovettore (di modulo unitario) $\mathbf{y}^{(1)}$ del metodo delle potenze *dirette*.

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = \frac{1}{x} - x$. Si riporti il valore della prima iterata del metodo di Newton $x^{(1)}$ ottenuta per il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = \frac{1}{2}$.

7. *(2 punti)* Si consideri la funzione $f(x) = 1 - e^{(4/3-x)}$ con un unico zero α e il metodo di bisezione per la sua approssimazione. Senza applicare esplicitamente il metodo, si *stimi* l'errore commesso dopo $k = 5$ iterazioni partendo dall'intervallo iniziale [0,2].

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, essendo $n \geq 1$. *12 punti*

(a) *(2 punti)* Assumendo che la matrice A sia simmetrica e definita positiva, si descriva sinteticamente (ma con completezza) il metodo della fattorizzazione di Cholesky per la *soluzione* del *sistema lineare* $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (si definisca la notazione utilizzata).

(b) *(2 punti)* Si consideri il metodo iterativo di Jacobi per la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si presenti l'algoritmo in forma matriciale (*non* in stretto linguaggio Matlab®).

(c) *(3 punti)* Sia ora $n = 100$ la dimensione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1 \cdots 1)^T$ e la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 & & & & 0 \\ 5 & 8 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \\ & & & 5 & 8 & 2 & -1 \\ & & & & 5 & 8 & 2 \\ 0 & & & & & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Il metodo di Jacobi risulta convergente alla soluzione $\mathbf{x}$ per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{100}$? Si motivi dettagliatamente e con completezza la risposta data. Si commenti infine la velocità di convergenza a $\mathbf{x}$ attesa per il metodo.

(d) *(5 punti)* Si implementi il metodo di Jacobi in forma matriciale in Matlab® nella funzione `Jacobi.m` (si usi il comando "back-slash" di Matlab® \ laddove necessario). Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo relativo (detto anche residuo normalizzato). La struttura della funzione è:

```
function [x,Nit] = Jacobi(A,b,x0,nmax,tol).
```

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione **`Jacobi.m`** per approssimare la soluzione del sistema lineare di cui al punto (b); si consideri l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, la tolleranza **`tol`**$= 10^{-3}$ e **`nmax`**$= 1000$.

Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo relativo $r_{rel}^{(N)}$.

$N =$ __________ $x_3^{(N)} =$ ____________________ $r_{rel}^{(N)} =$ ____________________

Infine, utilizzando opportunamente la funzione **`Jacobi.m`**, si riportino i valori della terza componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_3^{(1)}$ e $x_3^{(2)}$.

$x_3^{(1)} =$ ____________________ $x_3^{(2)} =$ ____________________

Esercizio 2. Si consideri una funzione di iterazione $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dotata del punto fisso $\alpha \in [a,b]$.

10 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti l'algoritmo del metodo di punto fisso per la ricerca del punto fisso α di $\phi(x)$.

(b) *(2 punti)* Si enunci un risultato di convergenza del metodo di punto fisso ad α (si riportino tutte le ipotesi necessarie e la tesi).

(c) *(2 punti)* Sia $\phi(x) = x^7\,(1 - 7\log x)$. Assumendo il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = \frac{48}{49}$, si applichino $N = 5$ iterazioni di punto fisso. Si riportino i valori delle iterate $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(N)}$ (utilizzando il formato esponenziale per indicare il risultato).

$x^{(1)} =$ __________________ $x^{(2)} =$ __________________ $x^{(N)} =$ __________________

(d) *(3 punti)* Dopo aver risolto il punto (c) e sapendo che $\alpha = 1$, si calcolino e si riportino i valori dei rapporti:

$$\frac{x^{(N)} - \alpha}{(x^{(N-1)} - \alpha)^2} = \underline{\qquad\qquad\qquad} \qquad\qquad \frac{x^{(N-1)} - \alpha}{(x^{(N-2)} - \alpha)^2} = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

Si utilizzino tali rapporti per determinare l'ordine di convergenza p del metodo delle iterazioni di punto fisso applicato al punto (c) per la ricerca di α. Infine, si giustifichi il valore di p determinato sulla base delle proprietà teoriche di convergenza *locale* del metodo delle iterazioni di punto fisso.

$$p = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

(e) *(2 punti)* Si consideri il metodo delle corde per l'approssimazione di uno zero $\alpha \in [a,b]$ di una funzione $f \in C^1([a,b])$ e tale che $f'(\alpha) > 0$. Quale condizione deve essere soddisfatta affinchè il metodo converga per $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α? (si motivi il risultato reinterpretando il metodo delle corde come metodo delle iterazioni di punto fisso).

Parte II - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Assegnati i nodi distinti $x_0,\ x_1,\ldots,x_3$ e i dati corrispondenti $y_0,\ y_1,\ldots,y_3$, si riporti il grado n del polinomio $\Pi_n(x)$ interpolante tali dati.

2. *(2 punti)* Assegnati i nodi equispaziati $x_0,\ x_1,\ldots x_5$ nell'intervallo [0,10] e la funzione $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x+4}$, si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H(x)$ interpolante $f(x)$ ai precedenti nodi. Si riporti il valore di $\Pi_1^H(5)$.

3. *(1 punto)* Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$ e i dati corrispondenti $y_0 = -1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$ e $y_3 = 1$, si riporti l'espressione della retta di regressione $p_1(x)$ che approssima tali dati nel senso dei minimi quadrati.

4. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 6\,(1 - 2^{3x})$. Si riporti il valore approssimato di $f''(\overline{x})$ in $\overline{x} = 0$ mediate le differenze finite centrate, ovvero $\delta_c^2 f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{3}$.

5. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = -6x + 4$. Si riporti l'errore associato all'approssimazione di $f'(\overline{x})$ in un generico valore $\overline{x} \in \mathbb{R}$ mediate le differenze finite all'indietro, ovvero $E_- f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_- f(\overline{x})$, usando il passo $h = \frac{1}{4}$.

6. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = 20\sqrt{t} + 2\,y(t) & t \in (0{,}5], \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 0.1$ e $u_0 = y_0 = 2$ si calcoli u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

7. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Poisson:

$$\begin{cases} -u''(x) = 3 & x \in (0{,}1), \\ u(0) = 3, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N = 1$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

Parte II - Esercizi

Esercizio 1.

(a) *(2 punti)* Si descriva la formula di quadratura di Simpson composita per l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ (si definisca con completezza la notazione utilizzata).

11 punti

(b) *(3 punti)* Per la formula di quadratura di Simpson composita, si specifichino inoltre la formula dell'errore, l'ordine di accuratezza e il grado di esattezza (si definisca la notazione utilizzata)

(c) *(3 punti)* Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^1 300\,(1 - 3\,x)\,e^{-3\,x}\,dx$$

mediante la formula di quadratura di Simpson composita con n sottointervalli equispaziati di [0,1]. Si calcolino e si riportino i valori approssimati dell'integrale $I_n(f)$ utilizzando i valori $n = 5$, 10, 20 e 40.

$I_5(f) =$ ____________________ $I_{10}(f) =$ ____________________

$I_{20}(f) =$ ____________________ $I_{40}(f) =$ ____________________

(d) *(1 punto)* Sapendo che $I(f) = 300\,e^{-3}$, si calcolino e si riportino gli errori $E_n(f) = |I(f) - I_n(f)|$ associati ai valori di $I_n(f)$ calcolati al punto c) (si riportino i valori degli errori in formato esponenziale).

$E_5(f) =$ ____________________ $E_{10}(f) =$ ____________________

$E_{20}(f) =$ ____________________ $E_{40}(f) =$ ____________________

(e) *(2 punti)* Si utilizzi il risultato ottenuto al punto d) per stimare l'ordine di accuratezza della formula. Si motivi la risposta alla luce dei risultati teorici riportati al punto b).

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t,y) \qquad t \in (0,t_f), \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{1}$$

11 punti

con $t_f > 0$ e il dato iniziale y_0 assegnato.

(a) *(3 punti)* Si consideri il problema modello, ovvero $f(t,y) = \lambda\, y$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. In riferimento al metodo di Eulero Implicito (all'indietro), si forniscano le definizioni di assoluta stabilità e di regione di assoluta stabilità; infine, si ricavi e si disegni la regione di assoluta stabilità per il metodo.

(b) *(4 punti)* Si consideri il problema di Cauchy (1) con $f(t,y) = y\,(\cos t - 1)$, $t_f = 6$ e $y_0 = 6$. Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare tale problema mediante il metodo di Eulero Implicito con diversi passi temporali $h_1 = 0.1$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.025$ e $h_4 = 0.0125$. Si riportino i valori della soluzione approssimata $u_{N_{h,i}}$ corrispondente all'istante finale t_f per ciascuno dei precedenti valori di h_i (si riportino almeno 5 cifre decimali in formato esponenziale).

$u_{N_{h,1}} =$ ______________________ $u_{N_{h,2}} =$ ______________________

$u_{N_{h,3}} =$ ______________________ $u_{N_{h,4}} =$ ______________________

(c) *(1 punto)* Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = 6\,e^{(\sin t - t)}$, si calcolino e si riportino gli errori E_{h_i} associati alle soluzioni $u_{N_{h,i}}$ al tempo t_f ottenuti per ciascun valore di h_i specificato al punto (b) (si riportino almeno 5 cifre decimali in formato esponenziale).

$E_{h_1} =$ ______________________ $E_{h_2} =$ ______________________

$E_{h_3} =$ ______________________ $E_{h_4} =$ ______________________

(d) *(1 punto)* Si utilizzino i risultati ottenuti al punto (c) per stimare l'ordine di convergenza del metodo di Eulero Implicito. Infine, si giustifichi la risposta data alla luce dei risultati teorici.

(e) *(2 punti)* Si consideri ora un metodo di Runge–Kutta per approssimare il generico problema di Cauchy (1). Se ne riporti l'approssimazione associata alla seguente tabella di Butcher:

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1/3 & 1/3 & 0 \\
\hline
 & 5/6 & 1/6
\end{array}
$$

Infine, si indichi, motivandolo, se tale metodo di Runge–Kutta è esplicito o implicito.