Appello – Parte 2

16/02/2023 — versione 1 — ♣♢♡♣♠♢♠♣♡♠

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 2 pt (***) No Multichance

Data la funzione $f(x) = \cos(x)$, si costruisca il suo polinomio interpolante $\Pi_3 f(x)$ su nodi equispaziati nell'intervallo $[0, \pi]$ e si riportino i valori di $\dfrac{d\Pi_3 f}{dx}(\pi)$ e $\dfrac{d^2\Pi_3 f}{dx^2}(\pi)$.

0.0796, 1.3678

2 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = \cos(\pi\, x)$ e il suo interpolante polinomiale $\Pi_4 f(x)$ su nodi equispaziati in $[-1, 1]$. Senza costruire esplicitamente $\Pi_4 f(x)$, si fornisca la *stima* dell'errore di interpolazione $\widetilde{e}_4(f)$.

0.4782

3 — 1 pt

Si consideri la funzione di Runge $f(x) = \dfrac{7}{1+x^2}$ e il suo interpolante polinomiale $\Pi_n f(x)$ di grado n su $n+1$ nodi equispaziati in $[-5, 5]$. Dopo aver definito l'errore di interpolazione come $E_n f(x) = \max_{x\in[-5,5]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$, si riporti il valore atteso di $\lim_{n\to+\infty} E_n f(x)$.

$+\infty$

4 — 1 pt

Si considerino $n+1 = 5$ coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n = \{(0, 5), (1, 5), (2, 0), (3, 0), (4, 0)\}$. Per quali valori $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, lo scarto quadratico $\Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} (a_1\, x_i + a_0 - y_i)^2$ assume valore minimo?

5, -1.5

5 — 1 pt

Quanto vale l'approssimazione di $\displaystyle\int_0^{100} |\sin(\pi\,x)|\;dx$ tramite la formula di Simpson composita con passo $H = 1$?

$\dfrac{200}{3} = 66.6667$

6 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, dove $f \in C^\infty([a,b])$, tramite la formula del punto medio composita. Sapendo che per $M_1 = 10$ sottointervalli equispaziati di $[a,b]$ si ha un errore pari a $e_1(f) = 0.01$, si stimi l'errore $e_2(f)$ commesso con $M_2 = 20$ sottointervalli equispaziati.

0.0025

7 — 1 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -2\,y(t) + t & t \in (0,+\infty), \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

Utilizzando il θ-metodo con parametro $\theta = 1$ e passo $h = 0.1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots$.

4.1750

8 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -2\,u''(x) + u'(x) + u(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = e. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e, sapendo che la soluzione esatta è $u(x) = e^x$, si riporti il valore dell'errore corrispondente $E_h = \max\limits_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j|$.

$2.7641 \cdot 10^{-8}$

9 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) - 40\,u'(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 5. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con tecnica *Upwind* e passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

4

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema di diffusione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 20\,\sin(\pi\,x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Si consideri l'approssimazione di tale problema tramite il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione spaziale $h = 0.5$ e il metodo di Eulero in avanti con passo di discretizzazione temporale $\Delta t = 0.1$. Si calcoli u_1^3, ovvero l'approssimazione di $u(0.5, 0.3)$.

-4.32

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il seguente problema con soluzione $x(t) : [0, 100] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3\,\ddot{x}(t) + \dfrac{1}{4}\,\dot{x}(t) + 12\,x(t) = z(t) & t \in (0, 100], \\ \dot{x}(0) = -\dfrac{5}{12}, \\ x(0) = 10, \end{cases} \tag{1}$$

dove $z(t) : (0, 100] \to \mathbb{R}$ è una funzione assegnata.

Punto 1) — 2 pt

Si riscriva il problema (1) come un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (EDO) del primo ordine nella seguente forma non omogenea a coefficienti costanti

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t) & t \in (0, t_f], \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{2}$$

con $\mathbf{y}(t) = (w(t),\ x(t))^T$, dove $w(t) = \dot{x}(t)$ per $t \in (0, t_f]$. Si riportino le espressioni di $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{g}(t) : (0, t_f] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^2$ e t_f.

$A = [-1/12,\ -4; 1,\ 0]$, $\quad \mathbf{g}(t) = (z(t)/3,\ 0)^T$, $\quad \mathbf{y}_0 = (-\dfrac{5}{12},\ 10)^T$, $\quad t_f = 100$

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 3 pt

Si approssimi il problema (2) del Punto 1) con $z(t) = 0$ tramite il metodo di Eulero in avanti con passo $h = 10^{-2}$. Si riportino, oltre ai comandi Matlab® :

- i valori delle approssimazioni u_1, u_2 e u_{N_h} rispettivamente di $x(t_1)$, $x(t_2)$ e $x(t_f)$, dove $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$, $h = \dfrac{t_f}{N_h}$;
- il tempo discreto $t_m \geq 0$ tale per cui $|u_n| < 2$ per ogni $n \geq m$.

$u_1 = 9.9958,\ u_2 = 9.9877, \quad u_{N_h} = 0.5711, \quad t_m = 73.89$

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 2 pt

Dopo aver risposto al Punto 2) e sapendo che la soluzione esatta del problema (1) è $x(t) = 10\,e^{-t/24}\cos\left(\sqrt{\dfrac{2303}{576}}\,t\right)$, si calcolino gli errori $E_h = \max\limits_{n=0,\ldots,N_h} |u_n - x(t_n)|$ ottenuti con il metodo di Eulero in avanti e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-3}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-4}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-4}$, essendo u_n l'approssimazione di $x(t_n)$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \ldots, 4$.

0.1809, 0.0893, 0.0444, 0.0221

Spazio per risposta lunga

Punto 4) — 2 pt

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al Punto 3) per stimare algebricamente l'ordine di convergenza p del metodo di Eulero in avanti. Si riportino i comandi Matlab® , si giustifichi la risposta data e la si motivi dettagliatamente alla luce della *teoria*.

$p = 1.0043$

Spazio per risposta lunga

Punto 5) — 3 pt

Con riferimento al sistema di EDO (2) del Punto 1) con $z(t) = 0$, per quali valori di $h > 0$ il metodo di *Heun* risulta assolutamente stabile? Si riportino: la definzione di assoluta stabilità, il procedimento seguito, la giustificazione teorica del risultato e i comandi Matlab® usati.

$0 < h < 0.2887$

Spazio per risposta lunga

Punto 6) — 3 pt (***) No Multichance

Si vuole ora applicare a un sistema di EDO nella forma (2) il seguente metodo *multipasso*:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \dfrac{4}{3}\,\mathbf{u}_n - \dfrac{1}{3}\,\mathbf{u}_{n-1} + \dfrac{2}{3}\,h\,\left[A\,\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{g}\left(t_{n+1}\right)\right] \qquad \text{per } n = 1, 2, \dots, N_h - 1, \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + h\,\left[A\,\mathbf{u}_1 + \mathbf{g}(t_1)\right], \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

dove $\mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^2$ approssima $\mathbf{y}(t_n)$. Si scriva un'opportuna funzione Matlab® che implementi il metodo precedente per un sistema di EDO (2).

Si utilizzi la funzione precedentemente implementata per risolvere il sistema di EDO (2) di cui al Punto 1) usando il passo $h = 10^{-1}$. Si riportino i valori delle approssimazioni u_1, u_2 e u_{N_h} rispettivamente di $x(t_1)$, $x(t_2)$ e $x(t_f)$, oltre ai comandi e alla funzione Matlab® implementata.

$9.5787,\ 8.9174,\ -0.10612$

Spazio per risposta lunga

Punto 7) — 2 pt (***) No Multichance

Dopo aver risposto al Punto 6), si ripetano i Punti 3) e 4) per stimare l'ordine di convergenza p atteso dal metodo. Si riportino, oltre ai comandi Matlab® usati, gli errori E_{h_i} e l'ordine p stimato.

$0.2355 \cdot 10^{-3},\ 0.0589 \cdot 10^{-3},\ 0.0147 \cdot 10^{-3},\ 0.0037 \cdot 10^{-3}, \quad p = 2.0000$

Spazio per risposta lunga