Test – 50pt – 1h – CN AER 23/06/20

1 — 2 pt

Si determini la distanza assoluta minima tra un numero positivo $x \in \mathbb{F}(2, 4, -3, 4)$ e quello immediatamente successivo.

$2^{-7} = 0.0078125$

2 — 3 pt

Sia dato un sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1\ 2\ 8)^T$. Si risolva il sistema tramite il metodo della fattorizzazione LU con pivoting per righe. Si riportino gli elementi $l_{21} = (L)_{21}$ e $u_{33} = (U)_{33}$ dei fattori L ed U della matrice *permutata* e la seconda componente y_2 del vettore ausiliario $\mathbf{y}$ associato alla soluzione del sistema triangolare inferiore che compare durante l'applicazione del metodo.

$l_{21} = \dfrac{1}{2} \qquad u_{33} = 12 \qquad y_2 = \dfrac{15}{2}$

3 — 3 pt

Si consideri il metodo di Richardson stazionario precondizionato per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1\ 1\ 1)^T$. Posto il precondizionatore $P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, si calcoli il valore ottimale del parametro $\alpha_{opt} \in \mathbb{R}$ e lo si utilizzi per determinare l'iterata $\mathbf{x}^{(4)} \in \mathbb{R}^3$ del metodo usando opportunamente la funzione Matlab® `richardson.m` e avendo scelto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. Si riporti $\mathbf{x}^{(4)}$.

$(0.161628\ \ 0.349156\ \ 0.615368)^T$

4 — 3 pt

Sia data una matrice $A = \begin{bmatrix} 8 & -5 & \gamma \\ -5 & 12 & 3 \\ \gamma & 3 & 8 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di tale parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ tali per cui la matrice A ammette un'unica fattorizzazione di Cholesky.

$-7.7995 < \gamma < 5.2995$

5 — 2 pt

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$, sia $\mathbf{x} = (-1\ \ 1)^T$ un'approssimazione di uno dei suoi autovettori. Si riporti l'approssimazione dell'autovalore corrispondente λ.

11

6 — 2 pt

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2.05 & 1 & -1.05 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1.05 & -1 & 2.05 \end{bmatrix}$ si consideri il metodo delle iterazioni QR per l'approssimazione dei suoi autovalori. Si utilizzi la funzione Matlab® `qrbasic.m` con `tol`$= 10^{-2}$ e `nmax`$= 100$ e si riporti l'approssimazione dell'autovalore di modulo minimo di A.

1.00334122

7 — 2 pt

Si consideri una funzione $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ dotata dello zero α. Sapendo che, per l'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, il metodo di Newton converge ad α e che $f'(\alpha) = 0$ e $f''(\alpha) = 0.3$, si determini l'ordine di convergenza p atteso dal metodo.

1

8 — 3 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x - \frac{1}{2}\left(e^{2(x-1)} - 1\right)$ dotata del punto fisso $\alpha = 1$. Dato l'intervallo $[-1, b]$ si determini il valore massimo di $b > 1$ tale per cui la convergenza del metodo delle iterazioni di punto fisso ad α è garantita per ogni iterata iniziale $x^{(0)} \in [-1, b]$.

$\log(2)/2 + 1 = 1.34657359$

9 — 3 pt

Il metodo delle secanti approssima lo zero α di una funzione $f(x)$ applicando la seguente iterata:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{q_k} \qquad \text{per } k \geq 0,$$

dati $x^{(0)}$, q_0 e $q_k = \dfrac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$ per $k \geq 1$. Posti $f(x) = \log\left(\dfrac{x-3}{4}\right)$, $x^{(0)} = 6$ e $q_0 = 4$, si riporti il valore dell'iterata $x^{(3)}$ ottenuta applicando il metodo.

6.98458301

10 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = (x-4)^2$ dotata dello zero $\alpha = 4$ e il metodo di bisezione per la sua approssimazione. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A) Il metodo non può essere applicato perché la funzione è continua ma non cambia segno in ogni intervallo contenente lo zero.

B) Il metodo converge in un'iterazione qualsiasi sia la scelta dell'intervallo iniziale che contiene lo zero.

C) Il metodo converge scegliendo l'iterata iniziale "sufficientemente" vicina allo zero.

D) L'ordine di convergenza atteso per il metodo è pari ad uno.

A

11 — 2 pt

Si considerino le coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ con $n = 49$ generate dai seguenti comandi Matlab® :

```
x = linspace( 0, 1, 50 );
rng( 1 );
y = 2 * x.^2 + 0.2 * sin( 100 * pi * x ) + 0.2 * randn( 1, 50 );
```

Si determini l'espressione del polinomio $\widetilde{f}_2(x)$ di grado 2 approssimante nel senso dei minimi quadrati le coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$. Si valuti e si riporti $\widetilde{f}_2(0.5)$.

0.54770956

12 — 2 pt

Assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots x_5$ nell'intervallo $[0, 10]$ e la funzione $f(x) = (x+2)^2$, si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H(x)$ della funzione $f(x)$ nei precedenti nodi. Si valuti e si riporti il valore di $\Pi_1^H(1)$.

10

13 — 3 pt

Si consideri l'interpolante polinomiale lineare a tratti $\Pi_1^H f(x)$ della funzione $f(x) = \sin(10\,x) - 7\,x$ nell'intervallo $I = [0, 3]$. Senza costruire esplicitamente $\Pi_1^H f(x)$, si stimi il numero n di sottointervalli equispaziati di $[0, 3]$ tali per cui l'errore di interpolazione è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-4}$.

1061

14 — 3 pt

Si consideri il polinomio nodale $\omega_n(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$ costruito a partire da $n+1$ nodi di Chebyshev–Gauss–Lobatto $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ definiti sull'intervallo $[-1, 1]$, essendo $n = 6$. Si approssimi l'integrale $I(\omega_n) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \omega_n(x)dx$ tramite la la formula del punto medio (semplice) e se riporti il valore.

0

15 — 2 pt

Si consideri la formula dei trapezi composita per l'approssimazione dell'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^x\, dx$. Senza applicare esplicitamente la formula, si stimi il numero M di sottointervalli equispaziati di $[-2, 2]$ tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-1}$.

20

16 — 2 pt

Si consideri il generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in (t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni inerenti la sua approssimazione numerica è <u>falsa</u>?

A) È possibile garantire l'assoluta stabilità di un metodo numerico condizionatamente assolutamente stabile scegliendo un passo di discretizzazione h "sufficientemente" piccolo.

B) Il metodo di Eulero all'indietro è implicito e accurato di ordine 1 se la soluzione del problema di Cauchy è "sufficientemente" regolare.

C) Se un metodo numerico è consistente e convergente, allora è anche zero–stabile.

D) Tutti i metodi di Runge–Kutta applicati al problema modello sono incondizionatamente assolutamente stabili.

D

17 — 3 pt

Per l'approssimazione numerica del generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, t_f], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

si consideri il metodo di Runge–Kutta corrispondente alla seguente tabella di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & 0 \\ \hline & 1/3 & 2/3 \end{array}$$

Posti $f(t, y) = -2\,(t+1)\,y^2$, $t_0 = 0$, $t_f = +\infty$ e $y_0 = 3$, si approssimi il problema con il metodo precedentemente descritto e si riporti il valore dell'approssimazione u_1 di $y(t_1)$, dove $t_i = t_0 + i\,h$ per $i = 0, 1, \ldots$, essendo il passo $h = 0.1$.

2.009775

18 — 3 pt

Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -5\,(t+1)\,y(t) & t \in (0, 100), \\ y(t_0) = 8, \end{cases}$$

si consideri la sua approssimazione tramite il metodo di Crank–Nicolson con passo $h = 0.2$. Si riporti il valore u_1 dell'approssimazione di $y(t_1)$, essendo $t_1 = h$.

2.5

19 — 3 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) & t \in (0, +\infty), \\ \mathbf{y}(0) = (7 \;\; 1)^T. \end{cases}$$

Si riporti la condizione sul passo di discretizzazione h per l'assoluta stabilità del metodo di Eulero in avanti per il precedente problema.

$0 < h < \dfrac{3}{4} = 0.75$

20 — 2 pt

Dato il seguente problema differenziale di diffusione–trasporto:

$$\begin{cases} -3\,u''(x) - 50\,u'(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \qquad u(1) = 0, \end{cases}$$

si consideri (senza applicarla) la sua approssimazione numerica mediante il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h > 0$. Qual è la condizione sul passo di discretizzazione h che garantisce l'assenza di oscillazioni (instabilità) numeriche per la soluzione approssimata del problema?

$0 < h < \dfrac{3}{25} = 0.12$