Appello – Parte 1

23/01/2023 — versione 1 — ◇♡♣♠◇♠♣♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 1 pt

Dati l'insieme dei numeri floating point $\mathbb{F}(2, 7, -10, 10)$, il numero reale $x = \pi$ e la sua rappresentazione in artimetica floating point $fl(x) \in \mathbb{F}$, si *stimi* l'errore relativo $\dfrac{|x - fl(x)|}{|x|}$.

$7.8125 \cdot 10^{-3} = 2^{-7}$

2 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente algoritmo: dati $A \in \mathbb{R}$, positivo, e $x_0 = A$, si ponga $x_{n+1} = \dfrac{A}{3\,(x_n)^2} + \dfrac{2}{3}\, x_n$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Il valore x_n fornisce un'approssimazione di $A^{1/3}$ per n "sufficientemente" grande. Posto $A = 216$, si riporti il valore x_{10} ottenuto applicando l'algoritmo.

6.1148

3 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il metodo di Richardson stazionario precondizionato per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{1}$. Posto il precondizionatore $P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, si calcoli il valore ottimale del parametro $\alpha_{opt} \in \mathbb{R}$ e lo si utilizzi per determinare l'iterata $\mathbf{x}^{(5)} \in \mathbb{R}^3$ del metodo usando opportunamente la funzione Matlab® `richardson.m` e avendo scelto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. Si riportino α_{opt} e $\mathbf{x}^{(5)}$.

$\alpha_{opt} = 1.0947$, $\mathbf{x}^{(5)} = (0.4926 \;\; 0.5770 \;\; 0.4309)^T$

4 — 2 pt

Sia data una matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & \theta & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\theta \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di tale parametro θ per cui il metodo di Jacobi applicato alla soluzione di un sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge per ogni scelta dell'iterata iniziale.

$|\theta| > \frac{1}{5}$

5 — 2 pt

Si consideri la matrice di Hilbert $A =$ `hilb(7)` $\in \mathbb{R}^{7\times 7}$. Si applichi il metodo delle potenze inverse con shift $s = 0.2$ per l'approssimazione di $\lambda_2(A)$ a partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^7$. Si riportino i valori delle approssimazioni $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$ di tale autovalore.

1.3174, 0.2794, 0.2713

6 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & \theta & 1 \\ -\theta & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\theta \in \mathbb{R}$. Per quali valori di θ è possibile applicare il metodo delle iterazioni QR per il calcolo degli autovalori di A?

$-1 < \theta < 1$

7 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = \cos^2(\pi\,x)$ e il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 0.5$. Scelto $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, qual è l'ordine di convergenza p atteso per il metodo?

1

8 — 1 pt

Si consideri il metodo di *Newton modificato* per l'approssimazione dello zero $\alpha = 1$ della funzione $f(x) = (x-1)\log(x)$. Si riporti il valore dell'iterata $x^{(1)}$ ottenuta applicando il metodo a partire da $x^{(0)} = 0.9$.

0.9973

9 — 1 pt

Si consideri una funzione $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, dotata del punto fisso α tale che $\phi'(\alpha) = 0$, ma $\phi''(\alpha) \neq 0$. Si supponga di approssimare α tramite il metodo delle iterazioni di punto fisso e che all'iterata k-esima sia associato l'errore $\left| x^{(k)} - \alpha \right| = 10^{-1}$. Assumendo che $\left| x^{(k+1)} - \alpha \right| = 10^{-2}$, si riporti il valore stimato dell'errore $\left| x^{(k+2)} - \alpha \right|$.

10^{-4}

10 — 2 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = \theta\, x\,(1-x)$ dipendente dal parametro $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $\theta > 1$ e dotata di due punti fissi $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1 - \dfrac{1}{\theta}$. Per quali valori di $\theta > 1$ il metodo delle iterazioni di punto fisso converge ad α_1 e α_2, scegliendo le iterate iniziali "sufficientemente" vicine rispettivamente ad α_1 e α_2?

nessuno, $1 < \theta < 3$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \mathrm{tridiag}\,(-1,\, 2,\, -1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$. A è matrice tridiagonale, simmetrica e definita positiva.

Punto 1) — 2 pt

Quale metodo *diretto* utilizzereste per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ indicato? Si motivi dettagliatamente la risposta data a confronto di altri metodi diretti in relazione al numero di operazioni e si *descriva* sinteticamente tale metodo.

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 3 pt (***) No Multichance

Si intende risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sapendo che $\mathbf{x} = \mathbf{1}$. Supponiamo che, a causa degli errori di arrotondamento, il vettore $\mathbf{b}$ sia affetto da una perturbazione $\delta\mathbf{b} = 10^{-6}\mathbf{c}$, dove $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\|\mathbf{c}\|_2 = 1$, e che si risolva dunque il sistema lineare perturbato $A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$.

Posto $n = 1000$, si *stimi* l'errore relativo $\|\delta\mathbf{x}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_2$ commesso, motivando il risultato alla luce della teoria. Inoltre, si verifichi con Matlab® la validità di tale stima *commentando* il risultato ottenuto. Per la verifica in Matlab® , si utilizzi il seguente vettore $\mathbf{c}$:

```
>> c = rand(size(b));
>> c = c./norm(c);
```

e si risolva il sistema lineare con il comando \ di Matlab® .

$err_{stim} = 0.2872$, $err_{vero} = 0.0025$

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 2 pt

Per la matrice A con $n = 1000$ e il vettore $\mathbf{b}$ assegnato con i dati del Punto 2), si applichi il metodo del *gradiente* implementato nella funzione Matlab® `richardson.m` usando la tolleranza sul criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato $tol = 10^{-2}$, il numero massimo di iterazioni pari a 10^3 e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$. Si riportino: i comandi Matlab® usati, il numero N di iterazioni effettuate, la prima componente della soluzione approssimata $x_1 = \left(\mathbf{x}^{(N)}\right)_1$, il valore del residuo normalizzato $r_{norm}^{(N)} = \dfrac{\|\mathbf{r}^{(N)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ e l'errore relativo $e_{rel}^{(N)} = \dfrac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(N)}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

$N = 315, \quad x_1 = 0.9552, \quad r_{norm}^{(N)} = 0.01, \quad e_{rel}^{(N)} = 0.9802$

Spazio per risposta lunga

Punto 4) — 3 pt

Si ripeta il Punto 3) considerando ora il metodo del *gradiente coniugato* usando opportunamente la funzione Matlab® `pcg`.

Inoltre, si confrontino e si discutano i risultati con quelli ottenuti al Punto 3), in particolare in termini delle stime dell'errore dei due metodi

$N = 98, \quad x_1 = 0.9898, \quad r_{norm}^{(N)} = 0.0099, \quad e_{rel}^{(N)} = 0.9315$

Spazio per risposta lunga

Punto 5) — 2 pt

Sempre considerando la matrice A con $n = 1000$, si approssimi l'autovalore $\lambda_{max}(A)$ tramite il metodo delle *potenze* dirette implementato nella funzione `eigpower.m`. Si consideri la tolleranza $tol = 10^{-6}$ sul criterio d'arresto, il numero massimo di iterazioni pari a 10^3 e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1}$. Si riportino: i comandi Matlab® usati, il numero N di iterazioni effettuate, e le approssimazioni dell'autovalore $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(N)}$ così ottenute.

$N = 867, \quad \lambda^{(0)} = 0.002, \quad \lambda^{(1)} = 2.0, \quad \lambda^{(N)} = 3.9965$

Spazio per risposta lunga

Punto 6) — 2 pt (***) No Multichance

Dopo aver svolto il Punto 5), sapendo che il valore esatto dell'autovalore massimo della matrice A è $\lambda_{max} = 2\left(1 + \cos\left(\dfrac{1}{1001}\pi\right)\right)$ e che l'errore al passo k è $e^{(k)} = \left|\lambda^{(k)} - \lambda_{max}\right|$, si *stimino* l'ordine e il fattore di convergenza ottenuti applicando il metodo delle potenze. Si modifichi opportunamente la funzione `eigpower.m`. Si riportino i comandi Matlab® usati e si giustifichi il risultato ottenuto.

$1, \ \lim_{k\to+\infty} \dfrac{e^{(k+1)}}{e^{(k)}} = 0.9988$

Spazio per risposta lunga

Punto 7) — 3 pt

Dato un generico sistema di equazioni non lineari $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$, si può approssimare lo zero $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ tramite il metodo di Gauss–Newton descritto nel seguente algoritmo utilizzando la matrice Jacobiana $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Algorithm 1: Metodo di Gauss–Newton

Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$;

for $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *fino a che un criterio d'arresto è soddisfatto* **do**

- porre $B_k = J_{\mathbf{F}}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$;
- risolvere il sistema lineare $\left(B_k^T B_k\right) \boldsymbol{\delta}^{(k)} = -B_k^T\, \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$;
- $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\delta}^{(k)}$;

end

Si implementi il precedente algoritmo in una funzione Matlab® `gaussnewton.m`, dove $\mathbf{x}^{(k)}$ fornisce un'approssimazione di $\boldsymbol{\alpha}$

Si consideri ora il seguente sistema di equazioni non lineari per $n = 1000$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}/10} + A\,\mathbf{x} - \mathbf{1} = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{1000} \to \mathbb{R}^{1000}$ e la matrice A è stata definita precedentemente. Si approssimi lo zero $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{1000}$ usando la funzione Matlab® `gaussnewton.m` implementata, scegliendo $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{1000}$.

Si riportino i valori della prima componente della prima, seconda e terza iterata, ovvero $(\mathbf{x}^{(1)})_1$, $(\mathbf{x}^{(2)})_1$ e $(\mathbf{x}^{(3)})_1$, ottenute applicando il metodo e i comandi Matlab® usati.

$0.0029,\ 0.0012,\ 6.5510 \cdot 10^{-6}$

Spazio per risposta lunga