Appello – Parte 2

25/01/2022 — versione 1 — ♢♡♣♠♢♠♣♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = e^x\,(1+\sin(\pi x))$ e il suo interpolante polinomiale $\Pi_5 f(x)$ su $n+1=6$ nodi equispaziati in $[-1,1]$. Dopo aver costruito l'interpolante $\Pi_5 f(x)$, si riporti il valore dell'errore di interpolazione $e_5(f) = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - \Pi_5 f(x)|$.

0.1024

2 — 1 pt (***) No Multichance

La temperatura minima giornaliera (in gradi centigradi) misurata in una stazione metereologica in nove giorni consecutivi è riportata nel vettore Matlab® seguente:
`>> temperatura = [6.0, 5.5, 6.0, 4.5, 4.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0 ];`
Si stimi la temperatura al giorno 10 utilizzando un polinomio di grado 2 che approssimi i dati nel senso dei minimi quadrati.

5.4048

3 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = x^\gamma$, dipendente dal parametro $\gamma \geq 1$, e il suo interpolante polinomiale lineare a tratti $\Pi_1^H f(x)$ su 10 sottointervalli equispaziati di $[0,1]$. Si riporti il valore stimato dell'errore di interpolazione, ovvero $e_1^H(f) = \max_{x\in[0,1]} \left|f(x) - \Pi_1^H f(x)\right|$, in termini del parametro γ.

$\gamma\,(\gamma-1)\,/800$

4 — 1 pt

Si approssimi l'integrale $I(f) = \int_{-1}^{3} \sqrt{1+x}\,dx$ tramite la formula dei trapezi composita considerando $M=4$ sottointervalli equispaziati di $[-1,3]$. Si riporti il valore di $I_t^c(f)$ così ottenuto.

5.1463

5 — 1 pt

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, dove $f \in C^\infty([a,b])$, tramite la formula di Simpson composita. Sapendo che per $M_1 = 10$ sottointervalli equispaziati di $[a,b]$ si ha un errore pari a $e_1(f) = 10^{-1}$, si stimi l'errore $e_2(f)$ commesso con $M_2 = 100$ sottointervalli.

10^{-5}

6 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri l'approssimazione dell'integrale doppio $I(f) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$ tramite la formula di quadratura Gauss–Legendre di ordine 1, ovvero

$$I_q(f) = \frac{(b-a)\,(d-c)}{4} \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j),$$

dove $\overline{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i$, $\overline{y}_i = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2}\xi_i$, per $i = 1,2$, $\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$. Posti $a = c = 0$, $b = d = 1$ e $f(x,y) = e^{(x+3y)}$, si riporti il valore di $I_q(f)$.

10.7713

7 — 1 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -\,(1+t)\;y(t) & t \in (0,10), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Heun con passo generico $h > 0$, si esprima u_1 in termini di h, dove u_1 è l'approssimazione di $y(t_1)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, \ldots, N_t$.

$2 - 2h + h^3$

8 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) = (2+x)^2 & x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate e passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_5, ovvero l'approssimazione di $u(x_5) = u(0.5)$.

1.2863

9 — 1 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti, dipendente dal parametro $\gamma > 10$:

$$\begin{cases} -u''(x) + \gamma\, u'(x) = 7 & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Si supponga di approssimare tale problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con tecnica *Upwind* e passo di discretizzazione $h > 0$, ottenendo così la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$. Assumendo che la soluzione esatta $u \in C^4([0,1])$ sia nota e che l'errore per $h = h_1 = 10^{-4}$ sia $E_{h_1} = \max\limits_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j| = 4 \cdot 10^{-3}$, si riporti il valore stimato dell'errore E_{h_2} corrispondente alla scelta $h = h_2 = 5 \cdot 10^{-3}$.

$2 \cdot 10^{-3}$

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 40\, u'(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 7, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con tecnica *Upwind* e passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_9, ovvero l'approssimazione di $u(x_9)$.

5.6

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il seguente sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t) & t \in (0, t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\mathbf{y}(t) = (y_1(t),\, y_2(t),\, \ldots, y_m(t))^T$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{g}(t) \,:\, (0, t_f) \to \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, per $m \geq 1$.

In particolare, consideriamo $m = 9$ e $A = \mathrm{tridiag}\,(3,\, -2,\, -1) \in \mathbb{R}^{9\times 9}$.

Punto 1) — 2 pt (***) No Multichance

Con riferimento al generico *sistema* di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (1), si riporti la definizione di *zero-stabilità* in relazione al metodo di *Eulero in avanti*. Si definisca tutta la notazione utilizzata.

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 3 pt

Per il problema (1) con $t_f = +\infty$ e $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ si ricavi la condizione di *assoluta stabilità* per il metodo di Eulero in avanti. Si illustri la procedura seguita.

$0 < h < 0.2693$

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 3 pt

Si pongano ora $t_f = 10$, $\mathbf{g}(t) = e^{\sin(\pi\, t)}\, \mathbf{1}$ e $\mathbf{y}_0 = \mathbf{4}$ per il problema (1).

Si approssimi tale problema tramite il metodo di Eulero in avanti con passo di discretizzazione $h = 0.1$ utilizzando la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m`. Dopo aver indicato i tempi discreti $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$ e $h = \dfrac{t_f}{N_h}$, si riportino:

- i valori delle approssimazioni $u_{5,1}$ e u_{5,N_h} rispettivamente di $(\mathbf{y}(t_1))_5$ e $(\mathbf{y}(t_f))_5$;
- il valore minimo $u_{5,min} = \min\limits_{n=0,\ldots,N_h} u_{5,n}$ e il tempo discreto $t_{5,min} = \mathrm{argmin}_{n=0,\ldots,N_h} u_{5,n}$ corrispondente a $u_{5,min}$.

Si riportino i principali comandi Matlab® usati.

$u_{5,1} = 4.1000, \quad u_{5,N_h} = 1.1675, \quad u_{5,min} = 0.7852, \quad t_{5,min} = 2.2$

Spazio per risposta lunga

Punto 4) — 2 pt

Con i dati di cui al Punto 3) e assumendo che la soluzione esatta al tempo $t_f = 10$ del problema (1) nella componente 5 sia

$$y_5(t_f) = (\mathbf{y}(10))_5 = 1.142174435142178,$$

si calcolino gli errori $E_h = |u_{5,N_h} - y_5(t_f)|$ ottenuti con il metodo di Eulero in avanti e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-2}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-3}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-3}$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \ldots, 4$ e i principali comandi Matlab® usati.

$0.5602 \cdot 10^{-3}$, $0.2417 \cdot 10^{-3}$, $0.1115 \cdot 10^{-3}$, $0.0534 \cdot 10^{-3}$

Spazio per risposta breve

Punto 5) — 2 pt

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al Punto 4) per stimare algebricamente l'ordine di convergenza p del metodo di Eulero in avanti. Si giustifichi la risposta data e la si motivi alla luce della teoria. Si riportino i principali comandi Matlab® usati.

$p = 1.0616$

Spazio per risposta lunga

Punto 6) — 2 pt

Si vuole ora approssimare il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (1) con i dati di cui al Punto 3) tramite il metodo di *Crank-Nicolson* con passo $h = 0.1$. Si riportino il valore dell'approssimazione $u_{5,1}$ di $(\mathbf{y}(t_1))_5$ così ottenuta e i principali comandi Matlab® usati.

$u_{5,1} = 4.1177$

Spazio per risposta lunga

Punto 7) — 3 pt (***) No Multichance

Si vuole ora applicare al sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (1) il metodo di Runge-Kutta associato alla seguente tabella di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Si implementi in Matlab® il metodo precedente e lo si utilizzi per risolvere il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (1) con i dati di cui al Punto 3) usando il passo $h = 0.1$. Si riportino i valori delle approssimazioni $u_{5,1}$ e u_{5,N_h} così ottenute e i principali comandi Matlab® usati.

$u_{5,1} = 4.1168$, $u_{5,N_h} = 1.1441$

Spazio per risposta lunga