Esercizi – 50pt – 75’

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

Esercizio 1 – 25pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dove: $n = 100$,

$$A = \mathrm{tridiag}\,(\,-2,\,5,\,3\,) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b} = (1,\,1,\,\ldots,\,1)^T\,. \tag{1}$$

Punto 1.1) – 4 pt

Si determini se il metodo di Jacobi applicato alla soluzione del sistema $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di Eq. (1) converge per ogni scelta del dato iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$. Se convergente, si discuta la velocità di convergenza attesa per il metodo. Si motivi dettagliatamente la risposta definendo tutta la notazione utilizzata.

$\rho_{BJ} = 0.9793 < 1$

Spazio per risposta lunga

Punto 1.2) – 4 pt

Si utilizzi la funzione Matlab® `jacobi.m` per risolvere il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di Eq. (1) tramite il metodo di Jacobi con criterio d’arresto basato sul residuo normalizzato. Si pongano: $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, `nmax`$=$ 1000 e la tolleranza sul criterio d’arresto `tol`$= 10^{-3}$. Si riportino: il numero di iterazioni N effettuate, le prime due componenti della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)} = \left(x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \ldots\right)^T$ e il residuo normalizzato $r_{norm}^{(N)}$ corrispondente. Si riportino i risultati con almeno 4 cifre decimali.

$N = 708, \quad x_1^{(N)} = 0.1109, \quad x_2^{(N)} = 0.1481, \quad r_{norm}^{(N)} = 9.9186 \cdot 10^{-4}.$

Spazio per risposta breve

Punto 1.3) – 4 pt

Si consideri lo splitting additivo di una generica matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ come $A = D - (D - A)$, dove $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è la matrice diagonale estratta da A. Si vuole risolvere un *generico* sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tramite il seguente metodo iterativo, dipendente dal parametro $\omega \in \mathbb{R}$ (tale che $\omega \neq 0$):

$$\begin{cases} \text{risolvere } D\,\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{b} - A\,\mathbf{x}^{(k)}, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \omega\,\mathbf{z}^{(k+1)} + \mathbf{x}^{(k)}, \end{cases} \qquad \text{per } k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Si riscriva il precedente metodo iterativo nella forma generale:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_\omega\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_\omega, \qquad \text{per } k = 0, 1, \ldots,$$

dato $\mathbf{x}^{(0)}$, fornendo le espressioni della matrice B_ω e del vettore $\mathbf{g}_\omega$ di iterazione in funzione di ω. Si fornisca inoltre l'espressione del precondizionatore corrispondente P_ω. Si motivi dettagliatamente la risposta fornita.

$B_\omega = \omega\,D^{-1}\,(D - A) + (1 - \omega)\,I, \quad \mathbf{g}_\omega = \omega\,D^{-1}\,\mathbf{b}, \quad P_\omega = \dfrac{1}{\omega}\,D$

Spazio per risposta lunga

Punto 1.4) – 4 pt

Con riferimento al metodo iterativo (2), si determini il *numero di operazioni* effettuate dal corrispondente algoritmo dopo l'applicazione di k iterate per la soluzione di un generico sistema lineare di dimensione n. Si motivi dettagliatamente la risposta data. Quando il metodo (2) risulta computazionalmente vantaggioso rispetto all'utilizzo del metodo della fattorizzazione LU con pivoting per righe? Perché?

$k\,(n(n + n - 1) + n + n + n + n) = k\,(2n^2 + 3n), \quad k < n/3$ (circa)

Spazio per risposta lunga

Punto 1.5) – 4 pt

Si implementi il metodo iterativo (2) in una funzione Matlab® `metodoiterativo.m` usando il criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato. Tale funzione avrà gli stessi inputs e outputs della funzione Matlab® `jacobi.m`, ricevendo in aggiunta in ingresso il parametro ω. Si suggerisce di modificare opportunamente la funzione `jacobi.m`.

Si utilizzi poi tale funzione `metodoiterativo.m` per risolvere il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di Eq. (1) con gli stessi dati di cui al Punto 1.2) e $\omega = 0.6$. Si riportino: il numero di iterazioni N effettuate, le prime due componenti della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)} = \left(x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \ldots\right)^T$ e il residuo normalizzato $r_{norm}^{(N)}$ corrispondente. Si riportino i risultati ottenuti.

$k = 15$, $\quad x_1^{(N)} = 0.1110$, $\quad x_2^{(N)} = 0.1482$ $\quad r_{norm}^{(N)} = 7.0709 \cdot 10^{-4}$

Spazio per risposta breve

Punto 1.6) – 5 pt

Senza applicare esplicitamente l'algoritmo, si determini per quali valori di $\omega > 0$ è garantita la convergenza del metodo iterativo (2) alla soluzione del sistema lineare di Eq. (1) per ogni $\mathbf{x}^{(0)}$. Per quale valore ω_{opt} la convergenza del metodo è ottimale? Si risponda motivando dettagliatamente la risposta data.

Convergenza: $0 < \omega < 1.0209$, $\quad \omega_{opt} = 0.5105$

Spazio per risposta lunga

Esercizio 2 – 25 pt

Si consideri la seguente Equazione Differenziale Ordinaria del secondo ordine nella forma

$$\begin{cases} m\,\dfrac{d^2x}{dt^2}(t) + c\,\dfrac{dx}{dt}(t) + k(t)\ (x(t))^2 = z(t) & t \in (0, t_f), \\ x(0) = x_0 \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = v_0, \end{cases} \tag{3}$$

dove m, c, x_0 e $v_0 \in \mathbb{R}$, mentre $k(t)$ e $z(t)$ sono funzioni assegnate del tempo t, ovvero $k(t)\ :\ (0, t_f) \to \mathbb{R}$ e $z(t)\ :\ (0, t_f) \to \mathbb{R}$.

Punto 2.1) – 4 pt

Si riscriva il sistema (3) nella forma di un sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine, ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) & t \in (0, t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{4}$$

assumendo $\mathbf{y}(t) = (y_1(t),\ y_2(t))^T = \left(\dfrac{dx}{dt}(t),\ x(t)\right)^T$. Si riportino le espressioni di $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\ :\ (0, t_f) \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{y}_0$.

$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \left(-c/m\, y_1 - k(t)/m\, y_2^2 + z(t)/m,\ y_1\right)^T$, $\mathbf{y}_0 = (v_0,\ x_0)^T$

Spazio per risposta breve

Punto 2.2) – 3 pt

Si considerino ora i seguenti dati:

$$m = 1, \quad c = 2, \quad k(t) = 3\left(2 - e^{-t}\right), \quad x_0 = 10, \quad v_0 = -10, \quad t_f = 2,$$

$$z(t) = 10\, e^{-t}\ \cos(t)\ \left(30\, e^{-t}\ \left(2 - e^{-t}\right)\ \cos(t) - 2\right).$$

Si approssimi il problema (4) tramite il metodo di Eulero in avanti usando opportunamente la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m` con passo $h = 0.05$. Si riportino i valori dell'approssimazione u_{N_h} di $\mathbf{y}(t_f)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$ e $h = \dfrac{t_f}{N_h}$.

$u_{N_h} = (-0.6471,\ -0.5992)^T$

Spazio per risposta breve

Punto 2.3) – 3 pt

Si riscriva il sistema (4) nella forma seguente

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A(t, \mathbf{y}(t))\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t) & t \in (0, t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{5}$$

dove $A(t, \mathbf{y})$ è tale che $A : (0, t_f) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\mathbf{g} : (0, t_f) \to \mathbb{R}^2$. Si riportino le espressioni di $A(t, \mathbf{y})$ e $\mathbf{g}(t)$.

$A(t, \mathbf{y}) = [-c/m,\ -k(t)/m\, y_2;\ 1,\ 0]$, $\mathbf{g}(t) = (z(t)/m,\ 0)^T$

Spazio per risposta breve

Punto 2.4) – 6 pt – (***)

Si consideri ora il seguente metodo numerico per l'approssimazione del sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (5)

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\,[\,A(t_{n+1}, \mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{g}(t_{n+1})\,] & n = 0, \ldots, N_h - 1, \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0. \end{cases} \tag{6}$$

Si implementi tale metodo modificando opportunamente, per esempio, la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m`. Con riferimento ai dati riportati al Punto 2.2), si risolva il problema con tale metodo assumendo $h = 0.05$; si riportino i valori dell'approssimazione $\mathbf{u}_{N_h}$ di $\mathbf{y}(t_f)$ così ottenuta.

$u_{N_h} = (-0.7695,\ -0.6121)^T$

Spazio per risposta breve

Punto 2.5) – 5 pt – (***)

Dopo aver risposto al Punto 2.4) e sapendo che la soluzione esatta del problema è

$$\mathbf{y}(t) = \left(-10\,e^{-t}\,(\cos(t) + \sin(t)),\ 10\,e^{-t}\,\cos(t)\right)^T,$$

si calcolino gli errori $E_h = \|\mathbf{u}_{N_h} - \mathbf{y}(t_f)\|_2$ ottenuti con il metodo (6) e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-3}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-4}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-4}$, essendo $\mathbf{u}_n = (u_{1,n}, u_{2,n})^T$ l'approssimazione di $\mathbf{y}(t_n)$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \ldots, 4$.

$4.9989 \cdot 10^{-3}$, $2.5152 \cdot 10^{-3}$, $1.2616 \cdot 10^{-3}$, $6.3178 \cdot 10^{-4}$

Spazio per risposta breve

Punto 2.6) – 4 pt – (***)

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al Punto 2.5) per stimare algebricamente l'ordine di convergenza p del metodo (6). Si giustifichi la risposta data anche riportando i valori numerici.

$p = 1$

Spazio per risposta lunga