Prima Prova in Itinere

21/04/2021 — versione 1 — ◇♣♡♠♣◇♠♣♡♠

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 1 pt

Sia dato l'insieme dei numeri floating point $\mathbb{F}(2, 3, -2, U)$ dipendente dal parametro $U \in \mathbb{N}$. Sapendo che il numero massimo rappresentabile (in base 10) con tale insieme è $x_{max} = 14$, si determini il valore assunto da U.

4

2 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente algoritmo: dati $a_0 \in \mathbb{R}$, positivo, e $b_0 = 1$, si pongano $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ e $b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Il valore $S_n = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{a_0}{b_n}$ fornisce un'approssimazione di $\log(4\, a_0)$ per n "grande". Posto $a_0 = 2500$, si riporti il valore approssimato S_4 ottenuto applicando l'algoritmo precedente.

9.2173

3 — 2 pt

Il metodo della fattorizzazione QR può essere utilizzato per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A matrice quadrata non singolare. Esso consiste dei seguenti passaggi: i) determinazione della fattorizzazione QR di A, ovvero $A = Q\, R$, con R triangolare superiore; ii) determinazione del vettore ausiliario $\mathbf{y} = Q^T\, \mathbf{b}$; iii) soluzione di $R\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tramite l'algoritmo delle sostituzioni all'indietro. Posti $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = (1\ 4\ 5)^T$ e sapendo che $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, si determinino e si riportino: $(R)_{33}$, $(\mathbf{y})_1 = y_1$ e $(\mathbf{x})_1 = x_1$.

2, 5, 2/7

4 — 2 pt (***) No Multichance

Sia data una matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & \gamma & 3 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ con $\gamma \neq -6$. Si determinino i valori di tale parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ tali per cui il metodo di Gauss–Seidel applicato alla soluzione di un sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge per ogni scelta dell'iterata iniziale.

$-6 < \gamma < 6$

5 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$. Per quali valori di γ è possibile applicare il metodo delle iterazioni QR per il calcolo degli autovalori di A?

$-1 < \gamma < 1$

6 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = \left(\dfrac{8}{1+x^2} - x\right)$ e l'uso sequenziale dei metodi di bisezione e Newton per l'approssimazione del suo zero α, come implementato nella funzione Matlab® `biseznewton.m`. Si riporti il valore approssimato dello zero di $f(x)$ ottenuto applicando prima 2 iterazioni del metodo di bisezione a partire dall'intervallo $[-10, 10]$ e poi 2 iterazioni del metodo di Newton.

1.8281

7 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = e^x \log\left(\dfrac{x-5}{2}\right)(7-x)$ e il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 7$. Scelto $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, qual è l'ordine di convergenza p atteso per il metodo?

1

8 — 1 pt

Si consideri il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 0$ della funzione $f(x) = e^{x/8} - 1$. Sapendo che all'iterata $x^{(k)}$ del metodo, comunque già "sufficientemente" vicina ad α, l'algoritmo si arresta con il residuo $|f(x^{(k)})| = 10^{-4}$, si riporti il valore stimato dell'errore corrispondente $e^{(k)} = \left|x^{(k)} - \alpha\right|$.

$8 \cdot 10^{-4}$

9 — 1 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x\,(x^2 - 3x + 3)$. Si applichi il metodo delle iterazioni di punto fisso partendo dall'iterata iniziale $x^{(0)} = 1.90$. Si riporti il valore dell'iterata $x^{(3)}$ così ottenuta.

1.0581

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = \dfrac{1}{2}\,(x-\gamma)^2$ dipendente dal parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che $\gamma > -\dfrac{1}{2}$ e dotata di due punti fissi, tra cui $\alpha_1 = \left(\gamma + 1 - \sqrt{1+2\gamma}\right)$. Per quali valori di γ il metodo delle iterazioni di punto fisso converge ad α_1, scegliendo l'iterata iniziale "sufficientemente" vicina a α_1?

$-\dfrac{1}{2} < \gamma < \dfrac{3}{2}$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica e definita positiva, e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$.

Punto 1) — 3 pt

- Si scriva il problema di minimo associato alla funzione $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ equivalente alla soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di cui sopra.
- Si riporti l'espressione di Φ nel punto di minimo in termini di A e $\mathbf{b}$.
- Si riporti l'espressione della direzione di discesa della funzione Φ in un generico punto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- Posto $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, si riporti l'espressione della direzione di discesa della funzione $\Phi(\mathbf{0})$ corrispondente.

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 2 pt

Posto $n = 100$, la matrice A è la matrice pentadiagonale seguente:

$$A = \text{pentadiag}\,(\,1,\ -8,\ 14,\ -8,\ 1\,) \in \mathbb{R}^{100\times 100}.$$

Si assegni la matrice A in Matlab® e si verifichi che A è simmetrica e definita positiva; si giustifichi la risposta data riportando valori numerici laddove necessario.

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il metodo del gradiente per la soluzione del sistema lineare, con la matrice A indicata al Punto 2). Senza applicare esplicitamente l'algoritmo, si stimi il numero di iterazioni k_{min} necessarie tale metodo iterativo affinché l'errore in norma A si riduca di un fattore inferiore a $tol = 10^{-3}$, ovvero tale che $\dfrac{\|\mathbf{x}^{(k_{min})} - \mathbf{x}\|_A}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A} < tol$. Si giustifichi la risposta data definendo tutta la notazione utilizzata.

Spazio per risposta lunga ($k_{min} = 28311$)

Punto 4) — 2 pt

Per la matrice A di cui al Punto 2) e il vettore $\mathbf{b} = (1,\, 1,\, \ldots,\, 1)^T \in \mathbb{R}^{100}$ si applichi il metodo del gradiente implementato nella funzione Matlab® `richardson.m` usando la tolleranza sul criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato $tol = 10^{-3}$, il numero massimo di iterazioni pari a 10^5 e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la prima componente della soluzione approssimata $x_1 = \left(\mathbf{x}^{(N)}\right)_1$ e il valore del residuo normalizzato $r_{norm}^{(N)} = \dfrac{\|\mathbf{r}^{(N)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$.

Spazio per risposta breve
($N = 28200$, $x_1 = 10.3053$, $r_{norm}^{(N)} = 9.9952 \cdot 10^{-4}$)

Punto 5) — 2 pt

Si consideri ora il metodo del gradiente precondizionato per risolvere un sistema lineare associato alla matrice A di cui al Punto 2). In particolare si considerino le seguenti matrici di precondizionamento simmetriche e definite positive:

$$P_1 = \text{tridiag}\,(\,-1,\, 2,\, -1\,) \in \mathbb{R}^{100\times 100}, \qquad P_2 = \text{tridiag}\,(\,-2,\, 5,\, -2\,) \in \mathbb{R}^{100\times 100}.$$

Per quale delle due matrici di precondizionamento precedenti il metodo del gradiente precondizionato converge più rapidamente alla soluzione per ogni scelta dell'iterata iniziale? Si motivi dettagliatamente la risposta data.

Spazio per risposta lunga (P_1, $K(P_1^{-1}A) = 1.9979$, $K(P_2^{-1}A) = 912.7022$)

Punto 6) — 3 pt (***) No Multichance

Si consideri il metodo del gradiente precondizionato per generiche matrici A e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetriche e definite positive, con P in aggiunta *tridiagonale*.

- Quale metodo è computazionalmente conveniente usare per risolvere il sistema lineare associato al residuo precondizionato ad ogni iterazione?
- Si fornisca una stima del numero di operazioni richiesto dall'algoritmo del gradiente precondizionato impiegando il metodo precedente e sapendo che le iterazioni effettuate sono pari a k.
- Quando tale algoritmo diventa computazionalmente conveniente rispetto al metodo della fattorizzazione di Cholesky per risolvere il sistema lineare?

Spazio per risposta lunga (Thomas, $O(2(k+1)n^2)$, $k < n/6$)

Punto 7) — 3 pt

Date due generiche matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare, gli autovalori della matrice $P^{-1}A$ risultano equivalenti al problema agli autovalori generalizzato $A\,\mathbf{v} = \lambda\,P\,\mathbf{v}$. Sotto opportune ipotesi, $\lambda_{max}(P^{-1}A)$ può essere approssimato con il seguente algoritmo:

Algorithm 1: Metodo delle potenze per problema agli autovalori generalizzato

Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, con $\|\mathbf{x}^{(0)}\| \neq 0$;

$\mathbf{y}^{(0)} = \dfrac{\mathbf{x}^{(0)}}{\|\mathbf{x}^{(0)}\|}$;

$\lambda^{(0)} = \dfrac{(\mathbf{y}^{(0)})^H\,A\,\mathbf{y}^{(0)}}{(\mathbf{y}^{(0)})^H\,P\,\mathbf{y}^{(0)}}$;

for $k = 1, 2, \ldots,$ *fino a che un criterio d'arresto è soddisfatto* **do**

- risolvere $P\,\mathbf{x}^{(k)} = A\,\mathbf{y}^{(k-1)}$;
- $\mathbf{y}^{(k)} = \dfrac{\mathbf{x}^{(k)}}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|}$;
- $\lambda^{(k)} = \dfrac{(\mathbf{y}^{(k)})^H\,A\,\mathbf{y}^{(k)}}{(\mathbf{y}^{(k)})^H\,P\,\mathbf{y}^{(k)}}$;

end

Si implementi il precedente algoritmo modificando opportunamente la funzione Matlab® `eigpower.m`. Lo si applichi poi alle matrici A del Punto 2) e $P = P_2$ del Punto 5) partendo dal vettore iniziale $x^{(0)} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{100}$. Si riportino le approssimazioni $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(100)}$ di $\lambda_{max}(P_2^{-1}A)$. Infine, si usi opportunamente $\lambda^{(100)}$ per determinare i valori del parametro α del metodo di Richardson stazionario precondizionato che garantiscono la convergenza del metodo per ogni scelta del dato iniziale.

Spazio per risposta breve

($\lambda^{(0)} = 0.1154$, $\lambda^{(1)} = 2.4046$, $\lambda^{(100)} = 3.5293$, $0 < \alpha < 0.5667$)