Esercizi – 50pt – 75'

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

Esercizio 1 – 27pt

Si considerino il parametro $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, e le due funzioni di iterazione seguenti

$$\phi_1(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \qquad \phi_2(x) = \frac{x}{2}\left(3 - \frac{x^2}{a}\right).$$

Punto 1.1) – 3 pt

Si determinino i punti fissi delle due funzioni di iterazione $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ in funzione del parametro a.

$\pm\sqrt{a}$ per ϕ_1; $\{0,\ \pm\sqrt{a}\}$ per ϕ_2

Spazio per risposta breve

Punto 1.2) – 5 pt

Dopo aver risposto al Punto 1.1) e aver indicato con α il punto fisso positivo *in comune* a ϕ_1 e ϕ_2, si consideri il metodo delle iterazioni di punto fisso per la sua approssimazione. Si determini l'ordine di convergenza attesa dal metodo ad $\alpha > 0$ per entrambe le funzioni di iterazione ϕ_1 e ϕ_2, assumendo che l'iterata iniziale $x^{(0)}$ sia "sufficientemente" vicina ad $\alpha > 0$. Si motivi la risposta data.

$p = 2$ per entrambi i metodi.

Spazio per risposta lunga

Punto 1.3) – 3 pt – (***)

Con riferimento al punto fisso $\alpha > 0$ di cui al Punto 1.2) e per la sola funzione di iterazione $\phi_2(x)$, si determinino i valori dell'iterata iniziale $x^{(0)} > 0$ tale per cui la convergenza ad α del metodo delle iterazioni di punto fisso è monotona, ovvero tale che $\left(x^{(k+2)} - x^{(k+1)}\right)$ ha lo stesso segno di $\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right)$ per ogni $k = 0, 1, \ldots$.

$x^{(0)} \in (0, \sqrt{a})$.

Spazio per risposta lunga

Punto 1.4) – 3 pt – (***)

Sempre in riferimento al punto fisso $\alpha > 0$ di cui al Punto 1.2) e per la sola funzione di iterazione $\phi_2(x)$, si discuta l'affidabilità del criterio d'arresto basato sulla differenza tra iterate successive.

Spazio per risposta lunga

Punto 1.5) – 5 pt

Si consideri ora la funzione di iterazione seguente

$$\phi(x) = \mu_1\, \phi_1(x) + \mu_2\, \phi_2(x)$$

dipendente da due parametri μ_1 e $\mu_2 \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di μ_1 e μ_2 tali per cui la funzione di iterazione ϕ converga al punto fisso $\alpha > 0$ di cui al Punto 1.2) con ordine almeno pari a $p = 3$, per un'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicina ad α. Si motivi la risposta data.

$\mu_1 = 3/4$, $\mu_2 = 1/4$.

Spazio per risposta lunga

Punto 1.6) – 3 pt

Posto $a = 3$, si utilizzi la funzione Matlab® `ptofis.m` per applicare il metodo delle iterazioni di punto fisso a entrambe le funzioni $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$; si consideri l'iterata inziale $x^{(0)} = 1$ e tolleranza sul criterio d'arresto $toll = 10^{-9}$. Si riportino il numero di iterazioni effettuate.

6 per ϕ_1; 7 per ϕ_2

Spazio per risposta breve

Punto 1.7) – 5 pt – (***)

Si ripeta il Punto 1.6) con la funzione di iterazione $\phi(x)$ determinata al Punto 1.5); si riporti il numero di iterazioni effettuate. Si utilizzi inoltre la funzione Matlab® `stimap.m` per stimare l'ordine di convergenza p atteso e il corrispondente fattore di abbattimento dell'errore c; se ne riportino i valori. A quale valore tende il fattore di abbattimento c? Si motivi la risposta data.

4 iterazioni; $p = 3$; $c = 0.1563$ (tende a $\left|\phi^{(3)}(\alpha)/6\right| = 1/6$)

Spazio per risposta lunga

Esercizio 2 – 23 pt

Si consideri il seguente sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}(t) = a\, y_1(t) + b\, y_1(t)\, y_2(t) + g_1(t) & t \in (0, t_f), \\ \dfrac{dy_2}{dt}(t) = c\, y_1(t)\, y_2(t) + d\, y_2(t) + g_2(t) & t \in (0, t_f), \\ y_1(0) = y_{1,0} \\ y_2(0) = y_{2,0}, \end{cases} \tag{1}$$

dove a, b, c, d, $y_{1,0}$, $y_{2,0} \in \mathbb{R}$ e $g_1(t), g_2(t) \ : \ (0, t_f) \to \mathbb{R}$.

Punto 2.1) – 3 pt

Si riscriva il sistema (1) nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A(\mathbf{y}(t))\, \mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t) & t \in (0, t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{2}$$

con $\mathbf{y}(t) = (y_1(t),\ y_2(t))^T$. Si riportino le espressioni di $A(\mathbf{y}(t)) \ : \ (0, t_f) \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{g}(t) \ : \ (0, t_f) \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{y}_0$.

$A(y_1, y_2) = [a,\ (b\, y_1);\ (c\, y_2),\ d]$, $\mathbf{g} = (g_1,\ g_2)^T$, $\mathbf{y}_0 = (y_{0,1},\ y_{0,2})^T$

Spazio per risposta breve

Punto 2.2) – 5 pt

Si pongano ora: $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = -\dfrac{1}{5}$, $c = -\dfrac{1}{8}$, $d = 0$, $y_{1,0} = 8$, $y_{2,0} = 5$, $t_f = 10$, $g_1(t) = 8\, e^{-t/4}\ \left[(\cos(\pi\, t))^2 - \pi\ \sin(\pi\, t)\right]$, $g_2(t) = 5\ \left[e^{-t/4}\ (\cos(\pi\, t))^2 - \pi\ \sin(\pi\, t)\right]$. Si approssimi il problema (2) tramite il metodo di Eulero in avanti usando opportunamente la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m` con passo $h = 0.05$. Si riportino i valori dell'approssimazione u_{N_h} di $\mathbf{y}(t_f)$, essendo $t_n = n\, h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$ e $h = \dfrac{t_f}{N_h}$.

$u_{N_h} = (0.5956,\ 4.7767)^T$

Spazio per risposta breve

Punto 2.3) – 6 pt

Si consideri ora il seguente metodo numerico per l'approssimazione del sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (2)

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\,A(\mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_{n+1} + h\,\mathbf{g}(t_{n+1}) & n = 0, \ldots, N_h - 1, \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}_0. \end{cases} \tag{3}$$

Si implementi tale metodo modificando opportunamente, per esempio, la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m`. Posto $h = 0.05$, si riportino i valori dell'approssimazione u_{N_h} di $\mathbf{y}(t_f)$ così ottenuta.

$u_{N_h} = (0.6750,\ 5.2228)^T$

Spazio per risposta breve

Punto 2.4) – 5 pt

Dopo aver risposto al Punto 2.3) e sapendo che la soluzione esatta del problema è

$$\mathbf{y}(t) = \Big(8\,e^{-t/4}\,\cos(\pi\,t),\ 5\,\cos(\pi\,t)\Big)^T,$$

si calcolino gli errori $E_h = \|\mathbf{u}_{N_h} - \mathbf{y}(t_f)\|_2$ ottenuti con il metodo (3) e corrispondenti ai passi $h_1 = 10^{-3}$, $h_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, $h_3 = 2.5 \cdot 10^{-4}$ e $h_4 = 1.25 \cdot 10^{-4}$, essendo $\mathbf{u}_n = (u_{1,n},\ u_{2,n}, u_{3,n})^T$ l'approssimazione di $\mathbf{y}(t_n)$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \ldots, 4$.

$2.4395 \cdot 10^{-3}$, $1.2088 \cdot 10^{-3}$, $6.0164 \cdot 10^{-4}$, $3.0014 \cdot 10^{-4}$

Spazio per risposta breve

Punto 2.5) – 4 pt – (***)

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al Punto 2.4) per stimare algebricamente l'ordine di convergenza p del metodo (3). Si giustifichi la risposta data anche riportando i valori numerici.

$p = 1$

Spazio per risposta lunga