Appello – Parte 1

16/02/2023 — versione 1 — ♣◇♡♣♠◇♠♣♡♠

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 1 pt (***) No Multichance

Sia dato l'insieme dei numeri floating point $\mathbb{F}(2, t, L, U)$ dipendente dai parametri $t \in \mathbb{N}$, $L < 0$ ed $U > 0$. Qual è il valore di $L \in \mathbb{Z}$ tale per cui il più piccolo numero positivo rappresentabile (in base 10) nell'insieme $\mathbb{F}$ è $x_{min} = 0.03125$?

-4

2 — 1 pt

Dato $A \in \mathbb{R}$, con $A > 1$, il valore $\log(A)$ può essere ottenuto come

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(A) = \log(A), \qquad \text{dove } S_N(A) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{A}\right)^n,$$

per $N \in \mathbb{N}$. Posto $A = 10$, per quale valore minimo di N si ottiene un errore inferiore a 10^{-2}?

30

3 — 1 pt

Si considerino 10 sistemi lineari $A\,\mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j$ per $j = 1, \ldots, 10$, dove la matrice $A \in \mathbb{R}^{90 \times 90}$ è non singolare, mentre i vettori $\mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^{90}$ rappresentano diversi termini noti. Qual è il numero di operazioni stimato per la risoluzione di tali sistemi lineari per $j = 1, \ldots, 10$ attraverso un uso computazionalmente efficiente del metodo della fattorizzazione LU senza pivoting?

648000

4 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il metodo di Richardson stazionario precondizionato per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{1}$. Posto il precondizionatore $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, si calcoli il valore ottimale del parametro $\alpha_{opt} \in \mathbb{R}$ e lo si utilizzi per determinare l'iterata $\mathbf{x}^{(4)} \in \mathbb{R}^3$ del metodo usando opportunamente la funzione Matlab® `richardson.m` e avendo scelto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. Si riportino α_{opt} e $\mathbf{x}^{(4)}$.

$\alpha_{opt} = 1.0521,\ \mathbf{x}^{(4)} = (0.1472,\ 0.3543,\ 0.6513)^T$

5 — 2 pt

Si considerino la matrice $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e il metodo della fattorizzazione QR per l'approssimazione dei suoi autovalori λ_1 e λ_2. Si applichino 3 iterazioni del metodo e si riportino le approssimazioni $\lambda_1^{(3)}$ e $\lambda_2^{(3)}$ così ottenute.

$8.2251,\ 4.7749$

6 — 1 pt

La convergenza del metodo della fattorizzazione QR per l'approssimazione degli autovalori reali e distinti $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è tanto più rapida, tanto minore è il valore $\max\limits_{i=2,\dots,n} \left\{ \dfrac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}} \right\}$. Posto $n = 4$ e sapendo che A ha autovalori reali e distinti $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$, λ_3 e $\lambda_4 = 2$, si determini per quali valori di $\lambda_3 \in (\lambda_4, \lambda_2)$ la convergenza del metodo della fattorizzazione QR risulta essere la più rapida.

$\lambda_3 \in (8/3, 9/2)$

7 — 1 pt

Si consideri il metodo di Newton modificato per l'approssimazione dello zero $\alpha = 3$ della funzione $f(x) = (x-3)\log(x-2)\,e^x$. Qual è l'ordine di convergenza p atteso dal metodo ad $\alpha = 3$ partendo dall'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α?

2

8 — 2 pt (***) No Multichance

Si considerino la funzione $f(x) = (x-1)\,e^x$ dotata dello zero $\alpha = 1$ e la sua approssimazione tramite il metodo delle secanti. Scelte le iterate iniziali $x^{(0)} = 0.5$ e $x^{(1)} = 0.6$, si riportino le iterate $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ ottenute applicando il metodo.

$1.3631,\ 0.8589$

9 — 2 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x\,(\gamma\,\log(x-1)+1)$ dipendente dal parametro $\gamma \in \mathbb{R}$ e dotata del punto fisso $\alpha = 2$. Per quali valori di γ il metodo delle iterazioni di punto fisso converge per ogni scelta di $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α? Per quale valore di γ la convergenza del metodo risulta essere almeno pari all'ordine $p = 2$?

$\gamma \in (-1, 0)$, $\gamma = -1/2$

10 — 2 pt

Si considerino il sistema di funzioni non lineari $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dove $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left(x_1\,x_2 - 2,\; -x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 1\right)^T \in \mathbb{R}^2$, e l'approssimazione dello zero $\boldsymbol{\alpha} = (1,\, 2)^T \in \mathbb{R}^2$ di $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ tramite il metodo di Newton. Posta l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1.5,\, 2.5)^T$, si applichi un'iterazione del metodo e si riporti l'iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ così ottenuta.

$(1.0417,\, 2.0972)^T$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice pentadiagonale

$$A = \text{pentadiag}(1,\, -16,\, 30,\, -16,\, 1)$$

e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$. In particolare, consideriamo $n = 100$ e $\mathbf{b} = \mathbf{1}$.

Punto 1) — 2 pt

Si determini se i metodi di Jacobi e Gauss–Seidel applicati al sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ risultano convergenti per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$. Si motivi dettagliatamente la risposta data, definendo tutta la notazione e riportando i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga

($\rho_J = 1.1327 > 1$ (no Jacobi), $\rho_{GS} = 0.9992 < 1$ (si Gauss–Seidel))

Punto 2) — 2 pt

Si applichi il metodo di Gauss–Seidel implementato nella funzione Matlab® `gs.m` usando la tolleranza sul criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato $tol = 10^{-3}$, il numero massimo di iterazioni pari a 10^4 e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la prima componente della soluzione approssimata $x_1 = \left(\mathbf{x}^{(N)}\right)_1$, il valore del residuo normalizzato $r_{norm}^{(N)} = \dfrac{\|\mathbf{r}^{(N)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ e i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga

($N = 8752$, $\quad x_1 = 3.8580$, $\quad r_{norm}^{(N)} = 9.9978 \cdot 10^{-4}$)

Punto 3) — 2 pt

Sulla base del risultato ottenuto al Punto 2), si discuta l'affidabilità del criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato stimando l'errore relativo $e_{rel}^{(N)}$.

Spazio per risposta lunga $(K_2(A) = 5.4939 \cdot 10^3,\ e_{rel}^{(N)} = 5.4927)$

Punto 4) — 3 pt

Si consideri ora il metodo del *gradiente precondizionato* con matrici di precondizionamento

$$P_1 = \mathrm{tridiag}\,(\,-1,\ 4,\ -1\,) \in \mathbb{R}^{100\times 100} \quad \text{e} \quad P_2 = \mathrm{tridiag}\,(\,-2,\ 4,\ -2\,) \in \mathbb{R}^{100\times 100}.$$

Senza applicare esplicitamente il metodo, si determini per quale delle due matrici di precondizionamento il metodo del gradiente precondizionato converge più rapidamente a $\mathbf{x}$ per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$.

Per la matrice di precondizionamento per cui il metodo converge più rapidamente, si *stimi* il fattore di abbattimento dell'errore $\dfrac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A}$ dopo $k = 10$ iterazioni del metodo del gradiente precondizionato. Qual è invece il fattore di abbattimento dell'errore atteso per il metodo del *gradiente congiugato precondizionato*? Si motivino dettagliatamente le risposte, definendo la notazione e riportando i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga
$(K(P_1^{-1}A) = 1.8325 \cdot 10^3 > K(P_2^{-1}A) = 1.3328,$
fatt. abb. PG con $P_2 = 3.4948{\cdot}10^{-9}$, fatt. abb. PCG con $P_2 = 7.1850{\cdot}10^{-12})$

Punto 5) — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri ora il metodo del *gradiente coniugato* (non precondizionato) per risolvere il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, usando opportunamente la funzione Matlab® `pcg` con vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, tolleranza $tol = 10^{-3}$ e un opportuno numero massimo di iterazioni. Si risolva il problema e si riporti il numero di iterazioni effettuate N_{it}. Si riportino i principali comandi Matlab® utilizzati e si confronti il risultato con quello ottenuto al Punto 2) tramite il metodo di Gauss–Seidel.

Spazio per risposta lunga (50)

Punto 6) — 3 pt

Date due matrici A, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetriche e definite positive, il numero di condizionamento spettrale $K(P^{-1}A) = \dfrac{\lambda_{max}(P^{-1}A)}{\lambda_{min}(P^{-1}A)}$ si può approssimare con il seguente algoritmo.

Algorithm 1: Approssimazione di $K(P^{-1}A)$

Dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, con $\|\mathbf{x}^{(0)}\| \neq 0$;

$\mathbf{y}^{(0)}_{max} = \dfrac{\mathbf{x}^{(0)}}{\|\mathbf{x}^{(0)}\|}$;

$\mathbf{y}^{(0)}_{min} = \mathbf{y}^{(0)}_{max}$;

$K^{(0)} = 1$;

for $k = 1, 2, \ldots,$ *fino a che un criterio d'arresto è soddisfatto* **do**

- risolvere $P\,\mathbf{x}^{(k)}_{max} = A\,\mathbf{y}^{(k-1)}_{max}$ tramite metodo diretto;
- $\mathbf{y}^{(k)}_{max} = \dfrac{\mathbf{x}^{(k)}_{max}}{\|\mathbf{x}^{(k)}_{max}\|}$;
- risolvere $A\,\mathbf{x}^{(k)}_{min} = P\,\mathbf{y}^{(k-1)}_{min}$ tramite metodo diretto;
- $\mathbf{y}^{(k)}_{min} = \dfrac{\mathbf{x}^{(k)}_{min}}{\|\mathbf{x}^{(k)}_{min}\|}$;
- $K^{(k)} = \left(\dfrac{(\mathbf{y}^{(k)}_{max})^T\,A\,\mathbf{y}^{(k)}_{max}}{(\mathbf{y}^{(k)}_{max})^T\,P\,\mathbf{y}^{(k)}_{max}}\right)\left(\dfrac{(\mathbf{y}^{(k)}_{min})^T\,P\,\mathbf{y}^{(k)}_{min}}{(\mathbf{y}^{(k)}_{min})^T\,A\,\mathbf{y}^{(k)}_{min}}\right)$;

end

Si implementi l'algoritmo in Matlab® e lo si applichi alle matrici A e P_2 (Punto 4)) con il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{100}$. Si riportino: le approssimazioni $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ e $K^{(100)}$ di $K(P^{-1}A)$, la funzione Matlab® implementata e i comandi Matlab® .

Spazio per risposta lunga

($K^{(1)} = 1.0206$, $K^{(2)} = 1.0413$, $K^{(100)} = 1.3137$)

Punto 7) — 3 pt (***) No Multichance

Si commenti il costo computazionale dell'algoritmo riportato al Punto 6). Quale metodo diretto è conveniente utilizzare per risolvere i sistemi lineari nell'algoritmo? Come?

Infine, si riporti il numero di operazioni attese per ogni passo iterativo dell'algoritmo.

Spazio per risposta lunga