Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **Appello** **13 febbraio 2020**	**Prof. L. Dedè** **Prof. A. Manzoni** **Prof. S. Micheletti**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il più piccolo numero (positivo) x_{min} rappresentabile nell'insieme $\mathbb{F}(2, 4, -5, 3)$; riportare il risultato in base decimale.

$$\boxed{x_{min} = 2^{-6} = 0{,}015\,625}$$

2. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare i valori degli elementi $l_{32} = (L)_{32}$ e $u_{33} = (U)_{33}$ rispettivamente delle matrici triangolari *inferiore* L e *superiore* U.

$$\boxed{l_{32} = \frac{13}{5} \qquad u_{33} = -3}$$

3. *(2 punti)* Sia $A_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\,\alpha & -\frac{\sqrt{5}}{4}\,\alpha \\ -\frac{\sqrt{5}}{4}\,\alpha & \frac{1}{2}\,\alpha \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro $\alpha > 0$. Si riporti il valore del numero di condizionamento spettrale di A_α in termini di α, ovvero $K(A_\alpha)$.

$$\boxed{K(A_\alpha) = 7 \qquad \forall \alpha > 0}$$

4. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. Assegnato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 1)^T$ si riportino i valori approssimati $\lambda^{(0)}$ e $\lambda^{(1)}$ dell'autovalore ottenuti rispettivamente all'iterata iniziale e dopo l'applicazione di un'iterazione del metodo delle potenze (dirette).

$$\boxed{\lambda^{(0)} = -1 = -1 \qquad \lambda^{(1)} = \frac{27}{5} = 5{,}4}$$

5. *(1 punto)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$. Quale o quali dei suoi autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^3$ possono essere approssimati mediante il metodo delle iterazioni QR?

$$\boxed{\textbf{tutti, } \lambda_1(A) = -9,\ \lambda_2(A) = 3,\ \lambda_3(A) = 2}$$

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 1 - e^{(x-8/7)}$ con un unico zero α e il metodo di bisezione per la sua approssimazione. Senza applicare esplicitamente il metodo, si *stimi* l'errore commesso dopo $k = 6$ iterazioni partendo dall'intervallo iniziale $[-5{,}3]$.

$$\boxed{|x^{(k)} - \alpha| \leq 0{,}0625}$$

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{x} - 2$ e il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 4$. Qual è l'ordine convergenza p atteso dal metodo per lo zero α assumendo l'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α?

$$\boxed{p = 2}$$

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, per $n \geq 1$. Inoltre, si consideri la soluzione di tale sistema lineare mediante un metodo iterativo.

11 punti

(a) *(1 punto)* Si riporti la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un metodo iterativo con matrice di iterazione $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (si definisca in modo preciso tutta la notazione usata).

(b) *(2 punti)* Si consideri il metodo di *Gauss-Seidel* per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si presenti l'algoritmo in forma matriciale.

(c) *(5 punti)* Si implementi il metodo di *Gauss-Seidel* in forma matriciale in Matlab® nella funzione `GaussSeidel.m` (si usi il comando "back-slash" di Matlab® \ laddove necessario). Si utilizzi un criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato (detto anche residuo relativo). La struttura della funzione è:

`function [x,Nit] = GaussSeidel(A,b,x0,nmax,tol).`

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `b`, il termine noto assegnato; `x0`, l'iterata iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `x`, la soluzione approssimata; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi la funzione `GaussSeidel.m` per approssimare la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (2, 2, \ldots, 2)^T \in \mathbb{R}^{100}$ e $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ definita come

$$A = \operatorname{tridiag}(-5, 11, -5)\,;$$

si consideri l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 1000$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la seconda componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_2^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo normalizzato $r_{rel}^{(N)}$.

$N =$ 20 $\qquad x_2^{(N)} =$ 1,177 252 $\qquad r_{rel}^{(N)} =$ $8{,}389\,888 \cdot 10^{-4}$

Infine, utilizzando opportunamente la funzione `GaussSeidel.m`, si riportino i valori della seconda componente delle iterate $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, ossia $x_2^{(1)}$ e $x_2^{(2)}$.

$x_2^{(1)} =$ 1,586 777 $\qquad x_2^{(2)} =$ 1,416 023

(d) *(3 punti)* Si riporti l'*algoritmo* del metodo del *gradiente* per risolvere un sistema lineare generico $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A non singolare.

Assumendo ora la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ assegnati al punto (c) e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$, si calcoli il valore del parametro α_0 associato a $\mathbf{x}^{(0)}$ da utilizzarsi per determinare $\mathbf{x}^{(1)}$. Infine, si riportino anche la prima e seconda componente dell'iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ corrispondente, ovvero $x_1^{(1)}$ e $x_2^{(1)}$.

$\alpha_0 =$ 0,090 909 $\qquad x_1^{(1)} =$ 1,090 909 $\qquad x_2^{(1)} =$ 2

Esercizio 2. Si consideri una funzione di iterazione $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, definita nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, dotata del punto fisso $\alpha \in [a,b]$.

11 punti

(a) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo del metodo di punto fisso per la ricerca del punto fisso α di $\phi(x)$ utilizzando il citerio d'arresto basato sulla differenza tra iterate successive.

(b) *(2 punti)* Sia $\phi(x) = x - \frac{1}{3}\log(x-1)$. Assumendo il valore dell'iterata iniziale $x^{(0)} = 4$, si applichino $N = 10$ iterazioni di punto fisso. Si riportino i valori delle iterate $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(N)}$ (utilizzando almeno 4 cifre decimali per indicare il risultato).

$x^{(1)} =$ 3,633 796 $\quad x^{(2)} =$ 3,310 987 $\quad x^{(N)} =$ 2,110 397

(c) *(4 punti)* Dopo aver risolto il punto (b) e sapendo che $\alpha = 2$, si calcolino e si riportino i valori dei rapporti:

$$\frac{x^{(N)} - \alpha}{x^{(N-1)} - \alpha} = 0{,}690\,727 \qquad \frac{x^{(N-1)} - \alpha}{x^{(N-2)} - \alpha} = 0.69977$$

Si utilizzino tali rapporti per determinare l'ordine di convergenza p del metodo delle iterazioni di punto fisso applicato al punto (b) per la ricerca di α. Infine, si giustifichi il valore di p determinato sulla base delle proprietà teoriche di convergenza *locale* del metodo delle iterazioni di punto fisso.

$p =$ 1

(d) *(2 punti)* Si consideri ora la funzione di iterazione $\phi(x) = x - \theta \log(x-1)$ dipendente dal parametro $\theta \in \mathbb{R}$. Per quale valore di θ il metodo delle iterazioni di punto fisso converge per ogni iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino al punto fisso $\alpha = 2$ con ordine $p = 2$? Si motivi la risposta data.

$\theta =$ 1

(e) *(1 punto)* Si consideri ora una generica funzione $f(x)$ dotata di uno zero $\alpha \in \mathbb{R}$ e il metodo di Newton per la sua approssimazione. È possibile interpretare tale metodo come un metodo di punto fisso? Come?

Parte II - Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Siano assegnati i nodi equispaziati x_0, $x_1, \ldots, x_6$ nell'intervallo [0,6] e i corrispondenti valori $y_i = 2\left[\sqrt{x_i} + \sin(\pi\, x_i)\right]$ per $i = 0,1,\ldots,6$. Si consideri il polinomio di Lagrange $\Pi_6(x)$ interpolante tali dati ai precedenti nodi e si riporti il valore di $\Pi_6(2.5)$.

$$\boxed{\Pi_6(2.5) = 3{,}157\,354}$$

2. *(2 punti)* Assegnati i nodi equispaziati x_0, $x_1, \ldots x_5$ nell'intervallo [0,10] e la funzione $f(x) = (x-1)^3$, si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H f(x)$ della funzione $f(x)$ nei precedenti nodi. Si riporti il valore di $\Pi_1^H f(3)$.

$$\boxed{\Pi_1^H f(3) = 14}$$

3. *(1 punto)* Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$ e i dati corrispondenti valori $y_0 = 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 3$ e $y_4 = 9$, si determini l'espressione della retta di regressione $r(x)$ approssimante tali dati nel senso dei minimi quadrati.

$$\boxed{r(x) = 1{,}5\,x + 0{,}6}$$

4. *(1 punto)* Sia $f(x) = x^3$; si approssimi $f'(1)$ mediante la formula delle differenze finite all'indietro utilizzando il passo $h = 0.1$; si riporti il valore $\delta_- f(1)$ di tale approssimazione.

$$\boxed{\delta_- f(1) = 2{,}71}$$

5. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -3\,y(t) + 9\,[1 + \sin(t)]\,\sqrt{t} & t \in (0,9), \\ y(0) = 8. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero in avanti (Eulero esplicito) con passo $h = 1/4$ e $u_0 = y_0 = 8$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = 2 = 2}$$

6. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema differenziale di diffusione–reazione:

$$\begin{cases} -u''(x) + 3\,u(x) = \sin(\pi\, x) & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 6. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/2$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $N = 1$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_1, ovvero l'approssimazione di $u(x_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{25}{11} = 2{,}272\,727}$$

7. *(1 punto)* Dato il seguente problema differenziale di diffusione–trasporto:

$$\begin{cases} -u''(x) + 60\,u'(x) = 0 & x \in (0{,}1), \\ u(0) = 0, \qquad u(1) = 5, \end{cases}$$

si consideri (senza applicarla) la sua approssimazione numerica mediante il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h > 0$. Qual è la condizione sul passo di discretizzazione h che garantisce l'assenza di oscillazioni (instabilità) numeriche per la soluzione approssimata del problema?

$$\boxed{0 < h < \tfrac{1}{30} = 0{,}033\,333}$$

Parte II - Esercizi

Esercizio 1. | *12 punti*

(a) *(2 punti)* Si descriva la formula di quadratura del *punto medio composita* per l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$; si definisca tutta la notazione utilizzata e si fornisca l'interpretazione grafica della formula.

(b) *(3 punti)* Si definiscano l'ordine di accuratezza p e il grado di esattezza r di una *generica formula* di quadratura (composita).

Inoltre, per la formula di quadratura del *punto medio composita*, si riportino i valori di p e r; si giustifichino con precisione le risposte date.

(c) *(2 punti)* Si ricavi l'espressione dell'errore della formula di quadratura del *punto medio semplice*.

(d) *(3 punti)* Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^1 5\,(1 - x^4 + 3x^2)\,dx$$

mediante la formula di quadratura del punto medio composita con $M \geq 1$ sottointervalli equispaziati di [0,1]. Si calcolino e si riportino i valori approssimati $I_M(f)$ dell'integrale utilizzando i valori $M = 1$ (formula semplice) e $M = 10$ (formula composita).

$I_1(f) =$ 8,4375 $\qquad$ $I_{10}(f) =$ 8,995 819

Per il caso $M = 10$ si riporti il valore dell'errore *stimato*, ovvero $\widetilde{E}_{10}(f)$.

$$\widetilde{E}_{10}(f) \leq \frac{1}{80} = 0{,}0125$$

(e) *(2 punti)* Si consideri ora la formula di quadratura di *Gauss–Legendre* (semplice) con $n+1$ nodi per approssimare l'integrale $I(f)$ di cui al punto (d); si indichi con $I_n^G(f)$ il valore approssimato dell'integrale corrispondente. Si usi tale formula nel caso $n = 1$ sapendo che nell'intervallo di *riferimento* $\widehat{I} = [-1,1]$ i nodi di quadratura sono $\widehat{y}_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\widehat{y}_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$, mentre i pesi di quadratura sono $\widehat{\alpha}_0 = \widehat{\alpha}_1 = 1$. Si riporti il valore dell'integrale così approssimato, ovvero $I_1^G(f)$.

$$I_1^G(f) = \underline{\quad 9{,}027\,778 \quad}$$

Qual è il grado di esattezza r di tale formula?

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy: 10 punti

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & t \in (0,t_f], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

con $t_f > 0$ e il dato iniziale y_0 assegnati.

(a) *(2 punti)* Si considerino il problema di Cauchy (1) e la sua approssimazione mediante il metodo di *Crank-Nicolson.* Si riporti l'algoritmo del metodo (non in stretto linguaggio Matlab®) definendo con precisione tutta la notazione utilizzata.

(b) *(2 punti)* Posti per il problema di Cauchy (1) $f(t,y) = \lambda\, y$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda < 0$, e $t_f = +\infty$, si definisca l'*assoluta stabilità* per il metodo di *Crank-Nicolson.* Se ne discutano inoltre, motivandole, le proprietà di assoluta stabilità.

(c) *(3 punti)* Si consideri il problema di Cauchy (1) con $f(t,y) = [8 - y - 4\cos(t)]/(t+1)$, $t_f = 10$ e $y_0 = 8$. Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare tale problema mediante il metodo di *Crank-Nicolson* con diversi passi temporali $h_1 = 1$, $h_2 = 0.5$, $h_3 = 0.25$ e $h_4 = 0.125$. Si riportino i valori della soluzione approssimata $u_{N_{h,i}}$ corrispondente all'istante finale t_f per ciascuno dei precedenti valori di h_i (si riportino almeno 4 cifre decimali).

$u_{N_{h,1}} =$ 8,083 388 $\qquad u_{N_{h,2}} =$ 8,169 314

$u_{N_{h,3}} =$ 8,190 704 $\qquad u_{N_{h,4}} =$ 8,196 046

(d) *(3 punti)* Sapendo che la soluzione esatta del problema è $y(t) = 4\,[2 - \sin(t)/(t+1)]$, si calcolino e si riportino gli errori $E_{h_i} = \left|y(t_f) - u_{N_{h,i}}\right|$ associati alle soluzioni $u_{N_{h,i}}$ al tempo t_f ottenuti per ciascun valore di h_i specificato al punto (c) (si riportino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

$E_{h_1} = 11{,}4438 \cdot 10^{-2} \qquad E_{h_2} = 2{,}8512 \cdot 10^{-2}$

$E_{h_3} = 7{,}122 \cdot 10^{-3} \qquad E_{h_4} = 1{,}7801 \cdot 10^{-3}$

Si utilizzino tali risultati per stimare *graficamente* l'ordine di convergenza del metodo di *Crank-Nicolson*. Si motivi la risposta riportando con completezza la procedura seguita e il grafico ottenuto.

Il risultato è in accordo con la teoria? Perché?