Test – 50pt – 60'

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

1 — 0 pt

Inserire il numero di matricola.

2 — 0 pt

Selezionare l'*ultima* cifra X del numero di matricola.

3 — 2 pt

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ (\varepsilon - 2) & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, dove $\varepsilon > 0$ è un numero reale positivo, si calcoli la sua fattorizzazione LU senza pivoting. Indicato con $l_{32} = (L)_{32}$, si determini il seguente limite: $\lim_{\varepsilon \to 0} l_{32}$.

$+\infty$

4 — 3 pt (***)

Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} (2\gamma) & 2 & -8 \\ \gamma & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una matrice dipendente da un parametro $\gamma > 0$ e $\mathbf{b} = (1\ 2\ 8)^T$. Si risolva il sistema tramite il metodo della fattorizzazione LU con pivoting per righe. Si riportino, in funzione di γ, gli elementi $l_{21} = (L)_{21}$ e $u_{33} = (U)_{33}$ dei fattori L ed U della matrice *permutata* e la seconda componente y_2 del vettore ausiliario $\mathbf{y}$ associato alla soluzione del sistema triangolare inferiore che compare durante l'applicazione del metodo.

$l_{21} = \dfrac{1}{\gamma} \qquad u_{33} = 12 \qquad y_2 = 8 - \dfrac{1}{\gamma}$

5 — 3 pt

Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1)^T$, si consideri il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, per $k = 0, 1, \ldots,$ dato $\mathbf{x}^{(0)}$. Sapendo che il metodo è fortemente consistente e la matrice di precondizionamento è $P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}$, si calcoli e si riporti $\mathbf{x}^{(2)}$, avendo posto $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

$(0.6694,\ 0.6399,\ 0.5491)^T$

6 — 3 pt

Dati $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (5,\ 5,\ 8)^T$, si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A) Il metodo di Richardson stazionario non precondizionato converge, per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$, per ogni $\alpha \in (0, 1/2)$.

B) Il metodo di Richardson stazionario precondizionato con precondizionatore $P = \mathrm{diag}(A)$ converge, per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$, per ogni $\alpha \in (0, 1.2)$.

C) il metodo di Jacobi applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ non converge per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$.

D) $k = 10$ iterazioni del metodo di Richardson stazionario precondizionato con $P = \mathrm{diag}(A)$ e parametro α_{opt} ottimale permettono di ridurre l'errore $\|\mathbf{e}^{(k)}\|_A / \|\mathbf{e}^{(0)}\|_A$ di un fattore al più pari a 2.

B

7 — 3 pt (***)

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (2, 2, 2)^T$, e il metodo del gradiente per l'approssimazione della soluzione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Si calcolino e si riportino: il valore del parametro dinamico ottimale α_0 associato all'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ usato per determinare l'iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ e l'iterata $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^3$.

$0.1269, \quad \mathbf{x}^{(1)} = (0.4776,\ \ 0.4776,\ \ -0.0299)^T$

8 — 2 pt

Dato il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1)^T$, si consideri il metodo del gradiente coniugato per l'approssimazione di $\mathbf{x}$. Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `pcg` e si riporti il valore di $\mathbf{x}^{(2)}$ avendo posto l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

$(0.2097,\quad 0.3277,\quad 0.2047)^T$

9 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & \beta \end{bmatrix}$, dipendente dal parametro $\beta > 0$. Assumendo che $\mathbf{x} = (1\ \ 1)^T$ sia un'approssimazione di uno dei suoi autovettori, si riporti l'autovalore corrispondente λ in termini di β.

$3 + \beta/2$

10 — 3 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e il metodo delle potenze (dirette) per approssimare l'autovalore di modulo massimo. Assegnato il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 0)^T$, si riportino i valori approssimati $\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$ dell'autovalore ottenuti rispettivamente all'iterata iniziale e dopo l'applicazione di un'iterazione del metodo.

$4,\quad 4.5294,\quad 4.5587$

11 — 2 pt (***)

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$. Per quali valori dello shift $s \in \mathbb{R}$ è possibile approssimare l'autovalore $\lambda_2(A) = 4$ tramite il metodo delle potenze inverse con shift?

$2.5 < s < 6$

12 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = 1 - x\,e^x$ dotata di un unico zero α. Quale delle seguenti affermazioni inerenti la sua approssimazione numerica è vera?

A) Il metodo di bisezione converge in una sola iterazione a partire dall'intervallo $[-1, 1]$.

B) Il metodo di bisezione non può essere applicato a partire dall'intervallo $[-1, 1]$ dato che $f(x)$ non cambia segno su tale intervallo.

C) Il metodo di Newton converge con ordine $p = 1$, per $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, dato che lo zero è multiplo.

D) Il metodo di Newton converge con ordine $p = 2$, per $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α, dato che lo zero è semplice.

D

13 — 2 pt

Siano assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots, x_4$ nell'intervallo $[-2, 2]$ e la funzione $f(x) = \left|1 - e^{|\sin x|}\right|$. Si consideri il polinomio di Lagrange $\Pi_4 f(x)$ interpolante tali dati ai precedenti nodi e si riporti il valore *massimo* di $\Pi_4 f(x)$ nell'intervallo $[-2, 2]$.

2.1154

14 — 3 pt

Si consideri l'interpolante composito lineare $\Pi_1^H f(x)$ della funzione $f(x) = x\,e^{\sin x}$ sull'intervallo $[0, 10]$. Considerando $M = 10$ sottointervalli equispaziati in tale intervallo, si costruisca $\Pi_1^H f(x)$ e si riportino il valore dell'errore di interpolazione $e_1^H(f) = \max_{x \in [0,10]} |f(x) - \Pi_1^H f(x)|$ e il punto $\bar{x} \in [0, 10]$ dove tale errore massimo è realizzato.

$e_1^H(f) = 1.6997, \quad \bar{x} = 7.5800$

15 — 3 pt

Si consideri la formula del punto medio composita per l'approssimazione dell'integrale $\int_{-1}^{1} [e^x + \beta\,x]\,dx$, dove $\beta \in \mathbb{R}$ è un parametro. Senza applicare esplicitamente la formula di quadratura, si stimi il numero M di sottointervalli equispaziati di $[-1, 1]$ tali per cui l'errore di quadratura è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-2}$.

10

16 — 3 pt

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_0^3 \left[5 + x^7\right]\, dx$ attraverso la formula di quadratura *composita* di Gauss–Legendre con 2 nodi; tali nodi di quadratura riferiti all'intervallo $[-1, 1]$ sono $\hat{x}_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ e $\hat{x}_1 = +\sqrt{\frac{1}{3}}$, con corrispondenti pesi di quadratura dati da $\hat{\alpha}_0 = 1$ e $\hat{\alpha}_1 = 1$. Si riporti l'approssimazione $I^c_{GL}(f)$ di $I(f)$ ottenuta considerando $M = 3$ sottointervalli di ampiezza $H = 1$.

831.3542

17 — 2 pt (***)

Si consideri la funzione $f(x) = x^2\,(7\,x - 3)$ e l'approssimazione di $f'(\overline{x})$ tramite le differenze finite centrate $\delta_c f(\overline{x})$ in un generico punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ con passo $h > 0$. Si riporti l'espressione dell'errore $E_c f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_c f(\overline{x})$ in funzione di h.

$-7\,h^2$

18 — 2 pt

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -3\,y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 9. \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni inerenti la sua approssimazione numerica è <u>vera</u>?

A) Un metodo numerico incondizionatamente assolutamente stabile è tale che $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ per ogni passo $h > 0$, ma solo anche se $0 < u_{n+1} < u_n \leq 9$ per ogni $n = 0, 1, \ldots$, essendo u_n l'approssimazione di $y(t_n)$.

B) Il metodo di Eulero in avanti è assolutamente stabile per ogni $h < 1$.

C) I metodi di Runge–Kutta sono metodi a più stadi e quindi assolutamente stabili per ogni $h > 0$.

D) Il metodo di Heun risulta assolutamente stabile per $h = \frac{1}{3}$.

D

19 — 2 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -(1+t)\,y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 0.1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

2.7014

20 — 3 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 2\,u(x) = 10\,x & x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_5, ovvero l'approssimazione di $u(x_5)$.

0.9129

21 — 2 pt (***)

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Si supponga di approssimare tale problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h > 0$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$. Assumendo che la soluzione esatta $u \in C^4([a, b])$ sia nota e che l'errore per $h = h_1 = 0.1$ sia $E_{h_1} = \max\limits_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j| = 4 \cdot 10^{-2}$, si riporti il valore stimato dell'errore E_{h_2} corrispondente alla scelta $h = h_2 = 0.05$.

10^{-2}

22 — 3 pt (***)

Si consideri il seguente problema di diffusione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 7\,\sin(\pi\, x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Si consideri l'approssimazione di tale problema tramite il metodo delle differenze finite con passo di discretizzazione spaziale $h = 0.5$ e il metodo di Eulero all'indietro con passo di discretizzazione temporale $\Delta t = 0.2$. Si calcoli $u_1^{N_t}$, ovvero l'approssimazione di $u(0.5, 1)$, essendo $N_t = 1/\Delta t = 5$.

0.0589