Appello – Parte 2

23/01/2023 — versione 1 — ◇♡♣♠◇♠♣♡♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 2 pt

Data la funzione $f(x) = \sin\left(x + \sqrt{7}\right)$, si costruisca il suo polinomio interpolante $\Pi_3 f(x)$ su nodi equispaziati nell'intervallo $[0, \pi]$ e si riportino i valori di $\dfrac{d\Pi_3 f}{dx}(\pi)$ e $\dfrac{d^2\Pi_3 f}{dx^2}(\pi)$.

1.1290, 1.3454

2 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri la funzione $f(x) = e^{2(1-x)}$ e il suo interpolante polinomiale $\Pi_6 f(x)$ su $n + 1 = 7$ nodi equispaziati in $[0, 2]$. Senza costruire l'interpolante $\Pi_6 f(x)$, si fornisca una *stima* dell'errore di interpolazione $e_6(f) = \max\limits_{x\in[0,2]} |f(x) - \Pi_6 f(x)|$.

0.0154

3 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = x^3$ e il suo interpolante polinomiale a tratti di grado 2, ovvero $\Pi_2^H f(x)$ su 4 sottointervalli equispaziati di $[-1, 1]$ e con tutti i nodi equispaziati. Si riporti il valore $\Pi_2^H f(0.75)$.

0.421875

4 — 1 pt

Si considerino $n+1 = 6$ coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n = \{(0, 4), (1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 0), (5, 0)\}$. Per quali valori $a_2, a_1, a_1 \in \mathbb{R}$, lo scarto quadratico $\Phi(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_2\, x_i^2 + a_1\, x_i + a_0 - y_i\right)^2$ assume valore minimo?

0.1429, −1.6286, 4.4286

5 — 1 pt

Quanto vale l'approssimazione di $\int_{-3}^{1} e^x \, dx$ tramite la formula dei trapezi composita con passo $H = 1$?

2.8872

6 — 1 pt

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x) \, dx$, dove $f \in C^3([a,b])$, tramite la formula del punto medio composita. Sapendo che per $M_1 = 25$ sottointervalli equispaziati di $[a,b]$ si ha un errore pari a $e_1(f) = 0.08$, si stimi il numero di sottointervalli equispaziati M_2 tali per cui l'errore commesso risulta pari a $e_2(f) = 0.02$.

50

7 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -2\, y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 10. \end{cases}$$

Utilizzando il θ-metodo con parametro $\theta = 3/4$ e passo $h = 0.1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$, essendo $t_n = n\, h$ per $n = 0, 1, \ldots$.

8.2609

8 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 3u(x) = -3x^2 \left(4 - x^2\right) & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e, sapendo che la soluzione esatta è $u(x) = x^4$, si riporti il valore dell'errore corrispondente $E_h = \max_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j|$.

0.0019

9 — 2 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + 100\, u'(x) = 0 & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 5. \end{cases}$$

Si approssimi il problema utilizzando il metodo delle differenze finite centrate con tecnica *Upwind* e passo di discretizzazione $h = 1/10$ ottenendo la soluzione numerica $\{u_j\}_{j=0}^{N+1}$ nei corrispondenti nodi $\{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ per $(N+1) = 10$. Si risolva il problema e si riporti il valore della soluzione numerica u_9, ovvero l'approssimazione di $u(x_9)$.

0.4545

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema di diffusione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 10\, \sin(\pi\, x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Si consideri l'approssimazione di tale problema tramite il metodo delle differenze finite centrate con passo di discretizzazione spaziale $h = 0.5$ e il metodo di Eulero in avanti con passo di discretizzazione temporale $\Delta t = 0.1$. Si calcoli u_1^3, ovvero l'approssimazione di $u(0.5, 0.3)$.

0.0800

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il seguente sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie del primo ordine nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt}(t) = A\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t) & t \in (0, t_f), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\mathbf{y}(t) = (y_1(t),\, y_2(t),\, \ldots, y_m(t))^T$, $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{g}(t) \,:\, (0, t_f) \to \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, per $m \geq 1$.

In particolare, consideriamo $m = 10$ e $A = \text{tridiag}\,(4,\, -2,\, -2) \in \mathbb{R}^{10\times 10}$.

Punto 1) — 2 pt (***) No Multichance

Con riferimento al *sistema* di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (1), si riporti la definizione di *zero-stabilità* in relazione al metodo di *Eulero in avanti*. Si definisca tutta la notazione utilizzata.

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 3 pt

Si pongano ora $t_f = 10$, $\mathbf{g}(t) = \cos(\pi\, t)\,\mathbf{1}$ e $\mathbf{y}_0 = \mathbf{7}$ per il problema (1).

Si approssimi tale problema tramite il metodo di Eulero in avanti con passo di discretizzazione $h = 0.1$ utilizzando la funzione Matlab® `eulero_avanti_sistemi.m`. Dopo aver indicato i tempi discreti $t_n = n\,h$ per $n = 0, 1, \ldots, N_h$ e $h = \dfrac{t_f}{N_h}$, si riportino:

- i valori delle approssimazioni $u_{3,1}$ e u_{3,N_h} rispettivamente di $(\mathbf{y}(t_1))_3$ e $(\mathbf{y}(t_f))_3$;
- il valore minimo $u_{3,min} = \min\limits_{n=0,\ldots,N_h} u_{3,n}$ e il tempo discreto $t_{3,min} = \text{argmin}_{n=0,\ldots,N_h} u_{3,n}$ corrispondente a $u_{3,min}$.

Si riportino i principali comandi Matlab® usati.

$u_{3,1} = 7.1000, \quad u_{3,N_h} = 0.3117, \quad u_{3,min} = -1.9806, \quad t_{3,min} = 1.0$

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 2 pt

Con i dati di cui al Punto 2) e assumendo che la soluzione esatta al tempo $t_f = 10$ del problema (1) nella componente 3 sia

$$y_3(t_f) = (\mathbf{y}(10))_3 = 0.269540864495346,$$

si calcolino gli errori $E_h = |u_{3,N_h} - y_3(t_f)|$ ottenuti con il metodo di Eulero in avanti e corrispondenti ai passi $h_1 = 0.05$, $h_2 = 0.025$, $h_3 = 0.0125$ e $h_4 = 0.00625$. Si riportino i valori E_{h_i} per $i = 1, \ldots, 4$ e i principali comandi Matlab® usati.

0.0122, 0.0055, 0.0026, 0.0013

Spazio per risposta lunga

Punto 4) — 2 pt

Si utilizzino gli errori E_{h_i} ottenuti al Punto 3) per stimare *algebricamente* l'ordine di convergenza p del metodo di Eulero in avanti. Si giustifichi la risposta data e la si motivi alla luce della teoria. Si riportino i principali comandi Matlab® usati.

$p = 1.0385$

Spazio per risposta lunga

Punto 5) — 3 pt

Per il problema (1) con $t_f = +\infty$ e $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ si ricavi la condizione di *assoluta stabilità* per il metodo di Eulero in avanti. Si illustri la procedura seguita, anche riportando i comandi Matlab® usati.

$0 < h < 0.1195$

Spazio per risposta lunga

Punto 6) — 2 pt

Si vuole ora approssimare il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (1) con i dati di cui al Punto 2) tramite il metodo di *Eulero all'indietro* con passo $h = 0.1$. Si riportino i valori delle approssimazioni $u_{3,1}$ di $(\mathbf{y}(t_1))_3$ e $u_{3,2}$ di $(\mathbf{y}(t_2))_3$ così ottenute e i principali comandi Matlab® usati.

$u_{3,1} = 6.8699$, $u_{3,2} = 6.4389$

Spazio per risposta lunga

Punto 7) — 3 pt (***) No Multichance

Si vuole ora applicare al sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie nella forma (1) il metodo di Runge-Kutta associato alla seguente tabella di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Si implementi in Matlab® il metodo precedente e lo si utilizzi per risolvere il sistema di Equazioni Differenziali Ordinarie (1) con i dati di cui al Punto 2) usando il passo $h = 0.1$. Si riportino i valori delle approssimazioni $u_{3,1}$ e u_{3,N_h} così ottenute e i principali comandi Matlab® usati.

$u_{3,1} = 7.0306, \quad u_{3,N_h} = 0.2696$

Spazio per risposta lunga