

Prima Prova in Itinere

12/04/2022 — versione 1 —



32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con (***)

TEST – 15 pt

1 — 1 pt (***) **No Multichance**

Per l'insieme dei numeri floating point $\mathbb{F}(2, 4, -5, 5)$, dati la mantissa $m = (1011)_2$, il segno $s = 0$ e l'esponente $e = 2$, si riporti il numero reale x così rappresentato in base 10.

2.75

2 — 1 pt

Si consideri la seguente successione $S_n = 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$, per $n = 0, 1, 2, \dots$, che fornisce un'approssimazione di π . Posto $n = 90$, si riporti il valore dell'approssimazione S_n così ottenuta, usando almeno quattro cifre decimali.

3.1526

3 — 2 pt (***) **No Multichance**

Si consideri il sistema lineare $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice triangolare inferiore nella forma seguente

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & & & \\ 0 & l_{42} & l_{43} & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & l_{53} & l_{54} & 1 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & l_{n,n-2} & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

mentre $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Quante operazioni effettua l'algoritmo delle sostituzioni in avanti applicato al sistema lineare $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di cui sopra se $n = 2000$?

7994

4 — 2 pt

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice di Hilbert di ordine n (comando Matlab[®] `>> A = hilb(n)`), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} = \mathbf{5} \in \mathbb{R}^n$. Dopo aver posto $n = 7$ e aver risolto al calcolatore tale sistema lineare tramite il metodo diretto implementato in Matlab[®] nel comando `\`, si stimi l'errore relativo in norma 2 così commesso.

$$1.1753 \cdot 10^{-4}$$

5 — 1 pt

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$ dipendente da un parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, dove $\gamma > 0$. Posto $x^{(0)} = (0, 1)^T$, qual è l'approssimazione $\lambda^{(1)}$ dell'autovalore di modulo massimo di A ottenuta applicando un passo del metodo delle potenze? Si riporti l'espressione di $\lambda^{(1)}$ in funzione di γ .

$$\frac{3\gamma + 37}{10}$$

6 — 2 pt

Si consideri la matrice $A = \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dotata degli autovalori $\lambda_j = 2 + 2 \cos\left(\pi \frac{j}{n+1}\right)$ per $j = 1, \dots, n$. Posto $n = 100$, si determinino i valori dello shift $s \in \mathbb{R}$ tale per cui è possibile applicare il metodo delle potenze inverse con shift all'approssimazione dell'autovalore λ_{47} di A .

$$2.1863 < s < 2.2482, \quad s \neq 2.2173$$

7 — 1 pt

Si consideri il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 0$ della funzione $f(x) = e^{3x} - 1$. Sapendo che all'iterata $x^{(k)}$ del metodo, comunque già "sufficientemente" vicina ad α , corrisponde l'errore $e^{(k)} = |x^{(k)} - \alpha| = 10^{-2}$, si stimi l'errore commesso al passo $x^{(k+1)}$, ovvero $e^{(k+1)} = |x^{(k+1)} - \alpha|$.

$$1.5 \cdot 10^{-4}$$

8 — 2 pt

Il metodo di Steffensen approssima lo zero α di una funzione $f(x)$ applicando la seguente iterata

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(f\left(x^{(k)}\right)\right)^2}{f\left(x^{(k)} + f\left(x^{(k)}\right)\right) - f\left(x^{(k)}\right)} \quad \text{per } k \geq 0,$$

dopo aver scelto $x^{(0)}$.

Si applichi il metodo allo zero α della funzione $f(x) = e^{-4x} - 2x$ scegliendo $x^{(0)} = 1$ e arrestando il metodo quando $|f(x^{(N)})| < 10^{-2}$. Si riportino il numero di iterazioni N effettuate e il valore dell'approssimazione $x^{(N)}$ così ottenuta.

$$9, \quad 0.2135$$

9 — 1 pt

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x - \frac{9}{2} \log\left(\frac{x}{3}\right)$. Si applichi il metodo delle iterazioni di punto fisso partendo dall'iterata iniziale $x^{(0)} = 2$. Si riporti il valore dell'iterata $x^{(4)}$ così ottenuta.

2.9291

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x - \frac{140}{11} \left(e^{(x/7-1)} - 1 \right)$ nell'intervallo $[a, b]$ contenente il punto fisso $\alpha = 7$. Senza applicare esplicitamente il metodo delle iterazioni di punto fisso, si determinino i valori di $a \geq 4$ e $b \leq 8$ tali per cui sono garantite l'unicità di $\alpha \in [a, b]$ e la convergenza delle iterazioni di punto fisso ad α per ogni scelta di $x^{(0)} \in [a, b]$.

$a \geq 5.4013, \quad b < 7.6672$

ESERCIZIO — 17 pt

Si consideri il sistema lineare $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice simmetrica e definita positiva, e $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ per $n \geq 1$. In particolare, si pongano $n = 100$ e

$$A = \text{pentadiag}(1, -11, 20, -11, 1) \in \mathbb{R}^{100 \times 100}.$$

Punto 1) — 3 pt

Si determini se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati al sistema lineare $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ risultano convergenti per ogni scelta dell'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$; si commenti inoltre la velocità di convergenza attesa da tali metodi. Si motivi dettagliatamente la risposta data, definendo tutta la notazione usata e riportando eventuali comandi Matlab[®].

Spazio per risposta lunga

$(\rho_J = 1.1993 > 1 \text{ (no Jacobi)}, \rho_{GS} = 0.9993 \text{ (si Gauss-Seidel)})$

Punto 2) — 2 pt

Dato il vettore $\mathbf{b} = (5, 5, \dots, 5)^T \in \mathbb{R}^{100}$, si applichi il metodo di Gauss-Seidel implementato nella funzione Matlab[®] `gs.m` usando la tolleranza sul criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato $tol = 10^{-2}$, il numero massimo di iterazioni pari a 10^4 e l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$. Si riportino: il numero N di iterazioni effettuate, la prima componente della soluzione approssimata $x_1 = \left(\mathbf{x}^{(N)} \right)_1$, il valore

del residuo normalizzato $r_{norm}^{(N)} = \frac{\|\mathbf{r}^{(N)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ e i comandi Matlab[®] usati.

Spazio per risposta lunga

$(N = 6607, \quad x_1 = 31.3231, \quad r_{norm}^{(N)} = 0.0100)$

Punto 3) — 2 pt (***) No Multichance

Sulla base del risultato ottenuto al Punto 2), si discuta l'affidabilità del criterio d'arresto basato sul residuo normalizzato stimando l'errore relativo $e_{rel}^{(N)}$.

Spazio per risposta lunga $(K_2(A) = 6.4617 \cdot 10^3, e_{rel}^{(N)} = 64.5901)$

Punto 4) — 3 pt (***) No Multichance

Si consideri un metodo iterativo lineare, dipendente dal parametro $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_\omega \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_\omega \quad \text{per } k \geq 0,$$

dato $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Data la matrice di preconditionamento $P_\omega = \frac{1}{\omega} T$, essendo $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice triangolare inferiore estratta da A , si riportino le espressioni di $B_\omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{g}_\omega \in \mathbb{R}^n$ affinché il metodo iterativo risulti fortemente consistente. Si motivi la risposta data.

Considerando ora la matrice A assegnata, per quale tra i seguenti valori di $\omega = 1.45, 1.55, 1.65, 1.75, 1.85$ è garantita la convergenza più rapida del metodo iterativo precedente? Si motivi la risposta data e si riportino i comandi Matlab[®] usati.

Spazio per risposta lunga $(B_\omega = I - \omega T^{-1}A, \mathbf{g}_\omega = \omega T^{-1}\mathbf{b}, \omega_{opt} = 1.65)$

Punto 5) — 3 pt

Si consideri ora il metodo del *gradiente preconditionato* con matrici di preconditionamento

$$P_1 = I \in \mathbb{R}^{100 \times 100} \quad \text{e} \quad P_2 = \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{100 \times 100}.$$

Senza applicare esplicitamente il metodo, si determini per quale delle due matrici di preconditionamento il metodo del gradiente preconditionato converge più rapidamente a \mathbf{x} per ogni scelta di $\mathbf{x}^{(0)}$.

Per la matrice di preconditionamento per cui il metodo converge più rapidamente, si *stim*i il fattore di abbattimento dell'errore $\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A}$ dopo $k = 10$ iterazioni del metodo. Si motivi dettagliatamente la risposta, definendo la notazione usata e riportando i comandi Matlab[®].

Spazio per risposta lunga

$(K(P_1^{-1}A) = K(A) > K(P_2^{-1}A) = 1.5704, \text{fatt. abb. con } P_2 = 2.8976 \cdot 10^{-7})$

Punto 6) — 1 pt

Dopo aver risposto al Punto 5) e per la matrice di preconditionamento selezionata, si *stim*i ora il fattore di abbattimento dell'errore $\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A}$ dopo $k = 10$ iterazioni del metodo del *gradiente coniugato preconditionato*. Si commenti la risposta data confrontando il risultato con quello ottenuto al Punto 5), definendo la notazione e riportando i comandi Matlab[®] usati.

Spazio per risposta lunga $(\text{fatt. abb. con } P_2 = 6.4159 \cdot 10^{-10})$

Punto 7) — 3 pt

Data una generica matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva, il suo numero di condizionamento spettrale $K(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$ si può approssimare applicando il seguente algoritmo.

Algorithm 1: Approssimazione di $K(A)$ tramite metodi delle potenze e potenze inverse

```
Dato  $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , con  $\|\mathbf{x}^{(0)}\| \neq 0$ ;  
 $\mathbf{y}_{max}^{(0)} = \frac{\mathbf{x}^{(0)}}{\|\mathbf{x}^{(0)}\|}$ ;  
 $\mathbf{y}_{min}^{(0)} = \mathbf{y}_{max}^{(0)}$ ;  
 $K^{(0)} = 1$ ;  
for  $k = 1, 2, \dots$ , fino a che un criterio d'arresto è soddisfatto do  
     $\mathbf{x}_{max}^{(k)} = A \mathbf{y}_{max}^{(k-1)}$ ;  
     $\mathbf{y}_{max}^{(k)} = \frac{\mathbf{x}_{max}^{(k)}}{\|\mathbf{x}_{max}^{(k)}\|}$ ;  
    risolvere  $A \mathbf{x}_{min}^{(k)} = \mathbf{y}_{min}^{(k-1)}$  tramite metodo diretto;  
     $\mathbf{y}_{min}^{(k)} = \frac{\mathbf{x}_{min}^{(k)}}{\|\mathbf{x}_{min}^{(k)}\|}$ ;  
     $K^{(k)} = \frac{(\mathbf{y}_{max}^{(k)})^T A \mathbf{y}_{max}^{(k)}}{(\mathbf{y}_{min}^{(k)})^T A \mathbf{y}_{min}^{(k)}}$ ;  
end
```

Si implementi il precedente algoritmo modificando per esempio la funzione Matlab[®] `eigpower.m`. Lo si applichi alla matrice A assegnata partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{100}$. Si riportino le approssimazioni $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ e $K^{(100)}$ di $K(A)$ così ottenute. Si riportino inoltre la funzione Matlab[®] implementata e i comandi Matlab[®] usati.

Spazio per risposta lunga
($K^{(1)} = 3.2157 \cdot 10^3$, $K^{(2)} = 4.5359 \cdot 10^3$, $K^{(100)} = 6.4156 \cdot 10^3$)