Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi CdL Ingegneria Aerospaziale Appello 09 luglio 2018	Prof. L. Dedè Prof. A. Manzoni Prof. S. Micheletti	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare il valore dell'elemento $u_{33} = (U)_{33}$ della matrice triangolare *superiore* U.

$$\boxed{u_{33} = -\tfrac{13}{3}}$$

2. *(1 punto)* Si consideri un metodo diretto per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile e $n \geq 1$. Sapendo che il numero di condizionamento di A è $K_2(A) = 10^7$, $\|\mathbf{b}\| = 10^1$ e il residuo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ calcolato usando la soluzione approssimata $\widehat{\mathbf{x}}$ ha norma $\|\mathbf{r}\| = 10^{-8}$, si stimi l'errore relativo $e_{rel} = \dfrac{\|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

$$\boxed{e_{rel} \leq 10^{-2} = 0{,}01}$$

3. *(2 punti)* Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = (1 \;\; 1)^T$ e $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Assegnato $\mathbf{x}^{(0)} = (1 \;\; 1)^T$ si riporti la prima iterata $\mathbf{x}^{(1)}$ del metodo di Jacobi.

$$\boxed{\mathbf{x}^{(1)} = (-0{,}75 \quad -0{,}6)^T}$$

4. *(2 punti)* Si consideri la funzione $f(x) = e^{(8/7-x)} - 1$ con un unico zero α e il metodo di bisezione per la sua approssimazione. Senza applicare esplicitamente il metodo, si *stimi* l'errore commesso dopo $k = 6$ iterazioni partendo dall'intervallo iniziale $[0,4]$.

$$\boxed{|x^{(k)} - \alpha| \leq 0{,}031\,25}$$

5. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 5\tan(2\,x)$ e il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 0$. Si riporti il valore della prima iterata $x^{(1)}$ del metodo assumendo l'iterata iniziale $x^{(0)} = \pi/8$.

$$\boxed{x^{(1)} = \tfrac{\pi-2}{8} = 0{,}142\,699}$$

6. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 3\log(x)\sin(\pi\,x)$ e il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = 1$. Qual è l'ordine convergenza p atteso dal metodo per lo zero α assumendo l'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicino ad α?

$$\boxed{p = 1}$$

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione di iterazione $\phi(x) = x^2 \,/\, (2\,x - 5)$ e il metodo delle iterazioni di punto fisso per l'approssimazione del punto fisso $\alpha = 5$. Si riporti il valore della prima iterata $x^{(1)}$ del metodo assumendo l'iterata iniziale $x^{(0)} = 20/3$.

$$\boxed{x^{(1)} = \tfrac{16}{3} = 5{,}333\,333}$$

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *simmetrica e definita positiva* e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, essendo $n \geq 1$.

10 punti

(a) *(2 punti)* Si riporti il problema di minimo associato alla funzione (energia) $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ equivalente alla risoluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si dimostri che se $\mathbf{x}$ è soluzione del sistema lineare allora è anche punto di minimo di Φ.

(b) *(2 punti)* Si riporti l'algoritmo (*non* in stretto linguaggio Matlab®) del metodo del *gradiente* per la soluzione del *sistema lineare* $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si definisca tutta la notazione utilizzata.

(c) *(3 punti)* Per il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si considerino ora $n = 30$, $\mathbf{b} = (1,1,\ldots,1)^T$ e

$$
\mathrm{A} = \frac{3}{2}\, n\, I + C, \qquad \text{dove} \;\; C = \begin{bmatrix} n & -n & 5 & & & & \\ -n & (n-1) & -n & 5 & & & \\ 5 & -n & (n-2) & -n & 5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 5 & -n & 3 & -n & 5 \\ & & & 5 & -n & 2 & -n \\ & & & & 5 & -n & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}
$$

e $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è la matrice identità. Si discutano le proprietà di convergenza del metodo del *gradiente* con i dati precedenti motivando la risposta fornita; si definisca tutta la notazione utilizzata.

(d) *(3 punti)* Si consideri ora il metodo del *gradiente precondizionato* per la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di cui al punto (c) con la matrice di precondizionamento

$$
P = \mathrm{tridiag}\,(-1,\beta,-1) \in \mathbb{R}^{n\times n}
$$

dipendente da un parametro β tale per cui sia simmetrica e definita positiva. Si determini graficamente tramite Matlab® il valore di $\beta \in [2{,}4]$ che garantisce la convergenza più rapida del metodo a $\mathbf{x}$. Indicato con $\beta^\star$ tale valore, lo si riporti e si giustifichi il risultato ottenuto anche con l'ausilio di un opportuno grafico.

$\beta^\star =$ 2,592

Esercizio 2. Si consideri il metodo delle potenze inverse per l'approssimazione dell'autovalore $\lambda_n(A)$ di modulo minimo di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

12 punti

(a) *(3 punti)* Si riporti l'algoritmo delle potenze inverse definendo in modo preciso tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Quale strategia computazionalmente efficiente è conveniente adottare nell'implementazione dell'algoritmo delle potenze inverse? Perché?

(c) *(3 punti)* Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Si utilizzino opportunamente i criteri dei cerchi di Gershgorin per la localizzazione geometrica degli autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^3$ di A per stimarne la posizione nel piano complesso. Si motivi la risposta data con l'ausilio di opportuni grafici e risultati teorici.

(d) *(4 punti)* Si implementi in Matlab® la funzione `potenzeinverse.m` per l'approssimazione dell'autovalore $\lambda_n(A)$ di modulo minimo di un'assegnata matrice A mediante il metodo delle potenze inverse (si utilizzi il comando "back-slash" di Matlab® \ laddove necessario). Si utilizzi il criterio d'arresto basato sulla differenza relativa tra due approssimazioni successive dell'autovalore, ovvero $\dfrac{|\lambda_n^{(k)} - \lambda_n^{(k-1)}|}{|\lambda_n^{(k)}|} < tol$ per $k \geq 1$ e tol un'opportuna tolleranza. La struttura della funzione è la seguente.

```
function [lambda,y,Nit] = potenzeinverse(A,x0,nmax,tol).
```

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `x0`, il vettore iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `lambda`, l'autovalore approssimato; `y`, l'autovettore di modulo unitario approssimato; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi opportunamente la funzione `potenzeinverse.m` per approssimare l'autovalore $\lambda_n(A)$ di modulo minimo della matrice A di cui al punto (c). Si utilizzino $\mathbf{x}^{(0)} = (1\ 1\ 1)^T$ come vettore iniziale, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 100$.

Si riportino: il numero N_{it} di iterazioni effettuate, il valore approssimato $\lambda_n^{(N_{it})}$ dell'autovalore, l'autovettore di modulo unitario corrispondente $\mathbf{y}^{(N_{it})}$ e le iterate $\lambda_n^{(0)}$ e $\lambda_n^{(1)}$ (si usino almeno 4 cifre decimali).

$N_{it} = $ 7 $\lambda_n^{(N_{it})} = $ 1,9946 $\mathbf{y}^{(N_{it})} = (-0{,}0016,\ 0{,}7101,\ -0{,}7041)^T$

$\lambda_n^{(0)} = $ 2,6667 $\lambda_n^{(1)} = $ 2,2128

(e) *(1 punto)* È possibile, in linea di principio, applicare il metodo delle potenze (dirette) alla matrice A di cui al punto (c)? Si motivi la risposta data.

Parte II - Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Siano assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots, x_5$ nell'intervallo $[0,5]$ e i corrispondenti valori $y_0 = 1$, $y_1 = 3$, $y_2 = 3$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$ e $y_5 = 0$. Si consideri il polinomio di Lagrange $\Pi_5(x)$ interpolante tali dati ai precedenti nodi e si riporti il valore di $\Pi_5(2.5)$.

$$\boxed{\Pi_5(2.5) = 2{,}0625}$$

2. *(2 punti)* Si consideri l'interpolante polinomiale lineare a tratti $\Pi_1^H f(x)$ della funzione $f(x) = \cos(10\,x)$ nell'intervallo $I = [0,5]$. Senza costruire esplicitamente $\Pi_1^H f(x)$, si stimi il numero n di sottointervalli equispaziati di $[0,5]$ tali per cui l'errore di interpolazione è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-4}$.

$$\boxed{n \geq 1768}$$

3. *(1 punto)* Sia $f(x) = 1 + \sin(8\,x)$. Si approssimi $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ con la formula semplice del punto medio e si riporti l'approssimazione $I_{PM}(f)$ ottenuta.

$$\boxed{I_{PM}(f) = 4}$$

4. *(1 punto)* Si consideri la funzione $f(x) = 4\,x^2 - 1$. Si riporti l'errore associato all'approssimazione di $f'(\overline{x})$ in un generico punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ mediate le differenze finite in avanti, ovvero $E_+ f(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - \delta_+ f(\overline{x})$, usando il passo $h = 1/6$.

$$\boxed{E_+ f(\overline{x}) = -\frac{2}{3} = -0{,}666\,667}$$

5. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -\sqrt{y(t)} + 9\,\cos t & t \in (0,9], \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero in avanti (Eulero Esplicito) con passo $h = 1/5$ e $u_0 = 4$ si calcoli u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{27}{5} = 5{,}4}$$

6. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -2\,y(t) - 5\,\sqrt{t} & t \in (0,10], \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 1/4$ e $u_0 = 4$ si calcoli u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{43}{20} = 2{,}15}$$

7. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = A\,\mathbf{y}(t) & t \in (0, +\infty), \\ \mathbf{y}(0) = (3\ \ 1)^T. \end{cases}$$

dove $A = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 13 & -6 \end{bmatrix}$. Si riporti la condizione di assoluta stabilità del metodo di Heun per il precedente problema di Cauchy.

$$\boxed{0 < h < \frac{2}{9} = 0{,}222\,222}$$

Parte II - Esercizi

Esercizio 1.

10 punti

(a) *(2 punti)* Si descriva la formula di quadratura dei trapezi composita per l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$; si definisca tutta la notazione utilizzata e si fornisca l'interpretazione grafica della formula.

(b) *(3 punti)* Si definiscano l'ordine di accuratezza p e il grado di esattezza r di una generica formula di quadratura (composita).

Inoltre, per la formula di quadratura dei trapezi composita, si riportino i valori di p e r; si giustifichino con precisione le risposte date.

(c) *(3 punti)* Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^1 3\,x^2\,(1+x^2)\,dx$$

mediante la formula di quadratura dei trapezi composita con $M \geq 1$ sottointervalli equispaziati di [0,1]. Si calcolino e si riportino i valori approssimati $I_M(f)$ dell'integrale utilizzando i valori $M = 1$ (formula semplice) e $M = 10$ (formula composita).

$I_1(f) =$ 3 $\qquad$ $I_{10}(f) =$ $\frac{948}{587} = 1{,}614\,991$

Per il caso $M = 10$ si riporti il valore dell'errore *stimato*, ovvero $\widetilde{E}_{10}(f)$.

$$\widetilde{E}_{10}(f) \leq \frac{7}{200} = 0{,}035$$

(d) *(2 punti)* Si consideri ora la formula di quadratura di Gauss–Legendre (semplice) con $n+1$ nodi per approssimare l'integrale $I(f)$ di cui al punto (c); si indichi con $I_n^G(f)$ il valore approssimato dell'integrale corrispondente. Si usi tale formula nel caso $n = 1$ sapendo che nell'intervallo di riferimento $\widehat{I} = [-1{,}1]$ i nodi di quadratura sono $\widehat{y}_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\widehat{y}_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$, mentre i pesi di quadratura sono $\widehat{\alpha}_0 = \widehat{\alpha}_1 = 1$. Si riporti il valore dell'integrale così approssimato, ovvero $I_1^G(f)$.

$$I_1^G(f) = \frac{19}{12} = 1{,}583\,333$$

Qual è il grado di esattezza r di tale formula?

Esercizio 2.

Si consideri il seguente problema a valori ai limiti (di diffusione–reazione):

12 punti

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma\, u(x) = f(x) & \text{in } (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

dove a, b, α, β e $\sigma \in \mathbb{R}$, con $\sigma > 0$.

(a) *(3 punti)* Si approssimi il problema ai limiti (1) con uno schema alle differenze finite centrate (del second'ordine) su una griglia di $N+2$ nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, con $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\,h$ per $i = 0,\ldots,N+1$ e passo $h = (b-a)/(N+1)$. Si riportino le equazioni del sistema risultante in forma esplicita definendo tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Si riporti la controparte algebrica dell'approssimazione di cui al punto (a), ovvero il sistema lineare $A\,\mathbf{u} = \mathbf{b}$, fornendo l'espressione dei coefficienti della matrice A, del vettore del termine noto $\mathbf{b}$ e del vettore delle incognite $\mathbf{u}$.

(c) *(1 punto)* Si considerino ora i seguenti dati per il problema (1): $\sigma = 2$, $f(x) = 7\,(2+\pi^2)\,x\,\sin(\pi\,x)+14\,[x - \pi\,\cos(\pi\,x)]$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$ e $\beta = 7$. Si verifichi che la soluzione esatta del problema è data da $u(x) = 7\,x\,(1 + \sin(\pi\,x))$; si riporti la procedura seguita.

(d) *(4 punti)* Si risolva il problema ai limiti (1) con i dati di cui al punto (c) tramite il metodo descritto al punto (a), ovvero risolvendo il sistema lineare definito al punto (b), per il valore $N = 9$ (per risolvere il sistema lineare si utilizzi il comando "back-slash" di Matlab® \). Si riportino i valori della soluzione approssimata nei nodi x_1 e x_8, ovvero rispettivamente u_1 e u_8.

$u_1 =$ 0,911 551 2 $\qquad$ $u_8 =$ 8,922 780 64

Si risolva ora il problema per $N = 9$, 19, 39 e 79 e, usando la soluzione esatta $u(x)$ al punto (c), si calcolino e si riportino per ogni N gli errori corrispondenti $E_N = \max_{i=0,\ldots,N+1} |u_i - u(x_i)|$ (si usino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

per $N = 9$: $\quad E_N =$ 0,034 896 19 $\qquad$ per $N = 19$: $\quad E_N =$ 0,008 695 35

per $N = 39$: $\quad E_N =$ 0,002 172 05 $\qquad$ per $N = 79$ $\quad E_N =$ 0,000 542 9

(e) *(1 punto)* Dopo aver risposto al punto (d), si stimi *algebricamente* l'ordine di convergenza p del metodo rispetto ad h (ovvero $(b - a)/(N + 1)$) riportando sinteticamente la procedura seguita.

$p =$ 2,0003

(f) *(2 punti)* Come è possibile approssimare i valori di $u'(0)$ e $u'(1)$ utilizzando la soluzione approssimata $\{u_i\}_{i=0}^{N+1}$ del problema (1) di cui al punto (d) nel caso $N = 9$? Si illustri e si motivi la procedura seguita e si riportino i valori approssimati di $u'(0)$ e $u'(1)$, ovvero rispettivamente δu_{x_0} e $\delta u_{x_{10}}$.

$\delta u_{x_0} =$ 9,1155 $\qquad \delta u_{x_{10}} =$ $-12{,}6641$