Calcolo Numerico ed Elementi di Analisi **CdL Ingegneria Aerospaziale** **Appello** **03 settembre 2019**	**Prof. L. Dedè** **Prof. A. Manzoni** **Prof. S. Micheletti**	**Firma leggibile dello studente**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

ISTRUZIONI

- Riportare le risposte nello spazio indicato.
- Alcuni esercizi richiedono di utilizzare MATLAB; per tali esercizi riportare sul foglio esclusivamente gli output richiesti.
- Utilizzare esclusivamente una penna nera o blu.
- Tempo a disposizione: 3h.

SPAZIO RISERVATO AL DOCENTE

PARTE I

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

PARTE II

Pre Test	
Esercizio 1	
Esercizio 2	
Totale	

FINALE

Parte I - Pre Test

10 punti

1. *(1 punto)* Determinare il valore dell'epsilon macchina ε_M (riferito al numero reale 1) associato all'insieme di numeri floating–point $\mathbb{F}(2, 7, -4, 3)$.

$$\boxed{\varepsilon_M = 2^{-6}}$$

2. *(1 punto)* Sia $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ \beta & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ una matrice dipendente da un parametro $\beta \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice A ammette un'unica fattorizzazione LU (senza pivoting)?

$$\boxed{\beta \neq 6}$$

3. *(2 punti)* Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \end{bmatrix}$ e si determini la sua fattorizzazione LU *senza pivoting*. Riportare i valori dell'elemento $l_{32} = (L)_{32}$ della matrice triangolare *inferiore* L e dell'elemento $u_{33} = (U)_{33}$ della matrice triangolare *superiore* U.

$$\boxed{l_{32} = 2 \qquad u_{33} = -5}$$

4. *(1 punto)* Quale tra gli autolavori della matrice $A = \begin{bmatrix} -3 & 11 & -3 \\ 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$ può essere determinato applicando il metodo delle *potenze dirette*? Se ne riporti il valore.

$$\boxed{\lambda_1(A) = -10}$$

5. *(2 punti)* Si consideri la funzione $f(x) = e^{(x-10/9)} - 1$ con un unico zero α e il metodo di bisezione per la sua approssimazione. Senza applicare esplicitamente il metodo, si *stimi* l'errore commesso dopo $k = 6$ iterazioni partendo dall'intervallo iniziale $[-2{,}6]$.

$$\boxed{|x^{(k)} - \alpha| \leq 0{,}0625}$$

6. *(2 punti)* Si consideri la funzione $f(x) = x^2 - \frac{5}{2}x + 1$ e il metodo di Newton per l'approssimazione dello zero $\alpha = \frac{1}{2}$. Si riportino i valori della prima e della seconda iterata $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ del metodo assumendo l'iterata iniziale $x^{(0)} = 0$.

$$\boxed{x^{(1)} = 0{,}4 \qquad x^{(2)} = 0{,}494\,118}$$

7. *(1 punto)* Si consideri la funzione $\phi(x) = \left(e^{-9x} - 1\right)/9 + x$. Qual è l'ordine di convergenza p atteso applicando il metodo delle iterazioni di punto fisso per l'approssimazione del punto fisso $\alpha = 0$ di $\phi(x)$ per un'iterata iniziale $x^{(0)}$ "sufficientemente" vicina ad α?

$$\boxed{p = 2}$$

Parte I - Esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *simmetrica e definita positiva* e $\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, essendo $n \geq 1$.

11 punti

(a) *(2 punti)* Si riporti il problema di minimo associato alla funzione (energia) $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ equivalente alla risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si dimostri che se $\mathbf{x}$ è punto di minimo di Φ allora è anche soluzione del sistema lineare.

(b) *(3 punti)* Si riporti l'algoritmo (*non* in stretto linguaggio Matlab®) del metodo del *gradiente* per la soluzione del *sistema lineare* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; si definisca tutta la notazione utilizzata.

Qual è la direzione di discesa del metodo del gradiente in corrispondenza dell'iterata $\mathbf{x}^{(k)}$? Si riporti inoltre la sua espressione in termini della funzione Φ di cui al punto (a).

(c) *(1 punto)* Sia ora $n = 100$ la dimensione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (7{,}7, \ldots, 7)^T$ e la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 8.1 & -3 & -1 & & & & 0 \\ -3 & 8.1 & -3 & -1 & & & \\ -1 & -3 & 8.1 & -3 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & -3 & 8.1 & -3 & -1 \\ & & & -1 & -3 & 8.1 & -3 \\ 0 & & & & -1 & -3 & 8.1 \end{bmatrix}.$$

Si definisca e si riporti il valore del numero di condizionamento spettrale $K(A)$ di A.

$K(A) =$ 115,702 826

(d) *(2 punti)* Si utilizzi opportunamente la funzione Matlab® `pcg` per approssimare la soluzione del sistema lineare di cui al punto (c) mediante il metodo del *gradiente coniugato*; si considerino la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 100$ (`pcg` considera di default l'iterata iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0{,}0, \ldots, 0)^T$). Si riportino: il numero di iterazioni N effettuato, la terza componente della soluzione approssimata $\mathbf{x}^{(N)}$, ossia $x_3^{(N)}$, e il valore del corrispondente residuo normalizzato $r_{rel}^{(N)}$ in formato esponenziale.

$N =$ 33 $\qquad x_3^{(N)} =$ 22,123 035 $\qquad r_{rel}^{(N)} =$ $5.272134 \cdot 10^{-4}$

(e) *(3 punti)* Si consideri ora il metodo del *gradiente precondizionato* per la soluzione del sistema lineare $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di cui al punto (c) con la matrice di precondizionamento

$$P = \mathrm{tridiag}\,(-1, \beta, -1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

dipendente da un parametro β tale per cui sia simmetrica e definita positiva. Si determini graficamente tramite Matlab® il valore di $\beta \in [2{,}2.5]$ che garantisce la convergenza più rapida del metodo a $\mathbf{x}$. Indicato con $\beta^\star$ tale valore, lo si riporti e si giustifichi il risultato ottenuto anche con l'ausilio di un opportuno grafico.

$\beta^\star =$ 2,0345

ESERCIZIO 2. Si consideri il metodo delle *potenze inverse* per l'approssimazione dell'autovalore $\lambda_n(A)$ di modulo minimo di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

11 punti

(a) *(3 punti)* Si riporti l'algoritmo delle potenze inverse definendo in modo preciso tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Quale strategia computazionalmente efficiente è conveniente adottare nell'implementazione dell'algoritmo delle potenze inverse? Perché?

(c) *(3 punti)* Data la matrice $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, si utilizzino opportunamente i criteri dei cerchi di Gershgorin per la localizzazione geometrica dei suoi autovalori $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^3$ per stimarne la posizione nel piano complesso. Si motivi la risposta data tramite opportuni grafici e risultati teorici.

(d) *(4 punti)* Si implementi in Matlab® la funzione `potenzeinverse.m` per l'approssimazione dell'autovalore $\lambda_n(A)$ di modulo minimo di un'assegnata matrice A mediante il metodo delle potenze inverse (si utilizzi il comando "back-slash" di Matlab® $\backslash$ laddove necessario). Si utilizzi il criterio d'arresto basato sulla differenza relativa tra due approssimazioni successive dell'autovalore, ovvero $\dfrac{|\lambda_n^{(k)} - \lambda_n^{(k-1)}|}{|\lambda_n^{(k)}|} < tol$ per $k \geq 1$ e tol un'opportuna tolleranza. La struttura della funzione è la seguente.

`function [lambda,y,Nit] = potenzeinverse(A,x0,nmax,tol).`

Si considerino come *input*: `A`, la matrice assegnata; `x0`, il vettore iniziale; `nmax`, il numero massimo di iterazioni consentite; `tol`, la tolleranza sul criterio d'arresto. Si considerino come *output*: `lambda`, l'autovalore approssimato; `y`, l'autovettore di modulo unitario approssimato; `Nit`, il numero di iterazioni effettuate.

Si utilizzi opportunamente la funzione `potenzeinverse.m` per approssimare l'autovalore $\lambda_n(A)$ di modulo minimo della matrice A di cui al punto (c). Si utilizzino $\mathbf{x}^{(0)} = (1\ 1\ 1)^T$ come vettore iniziale, la tolleranza `tol`$= 10^{-3}$ e `nmax`$= 100$.

Si riportino: il numero N_{it} di iterazioni effettuate, il valore approssimato $\lambda_n^{(N_{it})}$ dell'autovalore, l'autovettore di modulo unitario corrispondente $\mathbf{y}^{(N_{it})}$ e le iterate $\lambda_n^{(0)}$ e $\lambda_n^{(1)}$ (si usino almeno 4 cifre decimali).

$N_{it} =$ 9 $\qquad \lambda_n^{(N_{it})} =$ 1,3637 $\qquad \mathbf{y}^{(N_{it})} = (0{,}1207,\ 0{,}7683,\ -0{,}6286)^T$

$\lambda_n^{(0)} =$ 2,6667 $\qquad \lambda_n^{(1)} =$ 2,2953

Parte II - Pre Test

10 punti

1. *(2 punti)* Siano assegnati i nodi equispaziati $x_0, x_1, \ldots, x_4$ nell'intervallo [0,4] e i corrispondenti valori $y_0 = -1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ e $y_4 = 1$. Si consideri il polinomio di Lagrange $\Pi_4(x)$ interpolante tali dati ai precedenti nodi e si riporti il valore di $\Pi_4(-0.1)$.

$$\boxed{\Pi_4(-0.1) = -0{,}748\,65}$$

2. *(2 punti)* Si consideri l'interpolante polinomiale lineare a tratti $\Pi_1^H f(x)$ della funzione $f(x) = 4\,x + \sin(10\,x)$ nell'intervallo $I = [0{,}3]$. Senza costruire esplicitamente $\Pi_1^H f(x)$, si stimi il numero n di sottointervalli equispaziati di [0,3] tali per cui l'errore di interpolazione è inferiore alla tolleranza $tol = 10^{-6}$.

$$\boxed{n \geq 10\,607}$$

3. *(1 punto)* Assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$ e i dati corrispondenti $y_0 = 9$, $y_1 = 0$, $y_2 = 9$, $y_3 = 9$ e $y_4 = 27$, si determini l'espressione della retta di regressione $r(x)$ approssimante tali dati nel senso dei minimi quadrati.

$$\boxed{r(x) = 1{,}8 + 4{,}5\,x}$$

4. *(1 punto)* Sia $f(x) = 4\,x^4$; si approssimi $f'(0)$ mediante la formula delle differenze finite in avanti utilizzando il passo $h = 0.2$; si riporti il valore $\delta_+ f(0)$ di tale approssimazione.

$$\boxed{\delta_+ f(0) = 0{,}032}$$

5. *(1 punto)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = t\,[30\,t + 3\,y(t)] & t \in (0{,}10), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero all'indietro (Eulero Implicito) con passo $h = 1/5$ e $u_0 = y_0 = 1$, si riporti il valore calcolato di u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{31}{22} = 1{,}409\,091}$$

6. *(2 punti)* Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -5\,\sqrt{t} - 2\,y(t) & t \in (0{,}100), \\ y(0) = 7. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Crank-Nicolson con passo $h = 1/4$ e $u_0 = 7$ si calcoli u_1, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$.

$$\boxed{u_1 = \frac{79}{20} = 3{,}95}$$

7. *(1 punto)* Si consideri l'approssimazione mediante il metodo di Eulero all'indietro (Eulero implicito) del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -9\,y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Qual è la condizione sul passo di discretizzazione $h > 0$ che garantisce assoluta stabilità?

$\forall h > 0$

Parte II - Esercizi

Esercizio 1.

10 punti

(a) *(2 punti)* Si descriva la formula di quadratura del *punto medio composita* per l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$; si definisca tutta la notazione utilizzata e si fornisca l'interpretazione grafica della formula.

(b) *(3 punti)* Si definiscano l'ordine di accuratezza p e il grado di esattezza r di una generica formula di quadratura (composita).

Inoltre, per la formula di quadratura del *punto medio composita*, si riportino i valori di p e r; si giustifichino con precisione le risposte date.

(c) *(3 punti)* Si utilizzino opportuni comandi Matlab® per approssimare il seguente integrale:

$$I(f) = \int_0^{\pi} 5 \left[x^3 + \sin\left(4\,x + \sqrt{2}\right)\right]\,dx$$

mediante la formula di quadratura del *punto medio composita* con $M \geq 1$ sottointervalli equispaziati di $[0,\pi]$. Si calcolino e si riportino i valori approssimati $I_M^{PM}(f)$ dell'integrale utilizzando i valori $M = 1$ (formula semplice) e $M = 10$ (formula composita).

$I_1^{PM}(f) =$ 76,396 473 $\qquad\qquad$ $I_{10}^{PM}(f) =$ 121,152 557

Per il caso $M = 10$ si riporti il valore dell'errore *stimato*, ovvero $\widetilde{E}_{10}^{PM}(f)$.

$\widetilde{E}_{10}^{PM}(f) \leq$ 1,966 47

(d) *(2 punti)* Si consideri ora la formula di quadratura di *Gauss–Legendre* (semplice) con $n+1$ nodi per approssimare l'integrale $I(f)$ di cui al punto (c); si indichi con $I_n^G(f)$ il valore approssimato dell'integrale corrispondente. Si usi tale formula nel caso $n = 2$ sapendo che nell'intervallo di riferimento $\widehat{I} = [-1,1]$ i nodi di quadratura sono $\widehat{y}_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\widehat{y}_1 = 0$ e $\widehat{y}_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$, mentre i corrispondenti pesi di quadratura sono $\widehat{\alpha}_0 = \frac{5}{9}$, $\widehat{\alpha}_1 = \frac{8}{9}$ e $\widehat{\alpha}_2 = \frac{5}{9}$. Si riporti il valore dell'integrale cosi approssimato, ovvero $I_2^G(f)$.

$I_2^G(f) =$ 129,984 138

Qual è il grado di esattezza r di tale formula?

Esercizio 2.

12 punti

Si consideri il seguente problema a valori ai limiti (di diffusione–trasporto):

$$\begin{cases} -u''(x) + V\,u'(x) = f(x) & \text{in } (a,b), \\ u(a) = \alpha, \\ u(b) = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

dove a, b, α, β e $V \in \mathbb{R}$, con $V > 0$.

(a) *(3 punti)* Si approssimi il problema ai limiti (1) con uno schema alle differenze finite centrate (del second'ordine) su una griglia di $N+2$ nodi equispaziati $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, con $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i\,h$ per $i = 0,\ldots,N+1$ e passo $h = (b-a)/(N+1)$. Si riportino le equazioni del sistema risultante in forma esplicita definendo tutta la notazione utilizzata.

(b) *(1 punto)* Si riporti la controparte algebrica dell'approssimazione di cui al punto (a), ovvero il sistema lineare $A\,\mathbf{u} = \mathbf{b}$, fornendo l'espressione dei coefficienti della matrice A, del vettore del termine noto $\mathbf{b}$ e del vettore delle incognite $\mathbf{u}$.

(c) *(1 punto)* Si considerino ora i seguenti dati per il problema (1): $V = 10$, $f = 40$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 0$ e $\beta = 8$. Si verifichi che la soluzione esatta del problema assume l'espressione seguente:

$$u(x) = 4\left[\frac{e^{10\,x} - 1}{e^{10} - 1} + x\right];$$

si riporti la procedura seguita.

(d) *(4 punti)* Si risolva il problema ai limiti (1) con i dati di cui al punto (c) tramite il metodo descritto al punto (a), ovvero risolvendo il sistema lineare definito al punto (b), per il valore $N = 9$ (per risolvere il sistema lineare si utilizzi il comando "back-slash" di Matlab® \). Si riporti il valore della soluzione approssimata nel nodo x_8, ovvero u_8.

$u_8 =$ 3,644 384

Si risolva ora il problema per $N = 9$, 19, 39 e 79 e, usando la soluzione esatta $u(x)$ al punto (c), si calcolino e si riportino per ogni N gli errori corrispondenti $E_N = \max_{i=0,\ldots,N+1} |u_i - u(x_i)|$ (si usino almeno 4 cifre decimali in formato esponenziale).

per $N = 9$: $E_N =$ 0,138 114 79 per $N = 19$: $E_N =$ 0,031 496 57

per $N = 39$: $E_N =$ 0,007 710 97 per $N = 79$ $E_N =$ 0,001 917 89

(e) *(1 punto)* Dopo aver risposto al punto (d), si stimi *algebricamente* l'ordine di convergenza p del metodo rispetto ad h (ovvero $(b - a)/(N + 1)$) riportando sinteticamente la procedura seguita.

$p =$ 2,0074

(f) *(2 punti)* Si pongano ora il dato $V = 1000$ e $N = 9$. Senza risolvere il problema, quale incoveniente può presentare la soluzione numerica ottenuta con il metodo di cui al punto (a)? Si motivi la risposta data e si proponga almeno un rimedio a tale inconveniente.