Appello – Parte 2

03/09/2021 — versione 1 — ◇♣♡♠◇♡♣♠♣

32 pt – durata 1h 30' – MS Forms

Gli studenti aventi diritto a svolgere la **prova ridotta** del 30% secondo la L.170/2010 (indicazioni **Multichance** team) **NON** svolgono i quesiti contrassegnati con **(***)**

TEST – 15 pt

1 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{x + \sin(2\pi x) + 3}$ e il suo interpolante polinomiale $\Pi_5 f(x)$ su $n + 1 = 6$ nodi equispaziati in $[-1, 1]$. Si riporti il valore di $\Pi_5 f(0.4)$.

2.0819

2 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri una funzione $f(x) \in C^\infty([-1, 1])$ tale che $\max_{x\in[-1,1]} \left|f^{(k)}(x)\right| \leq 10^3$ per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots$. Si stimi l'errore commesso dall'interpolante polinomiale di $f(x)$ avente grado $n = 5$ e costruito sui nodi di Chebyshev-Gauss-Lobatto nell'intervallo $[-1, 1]$.

0.0868

3 — 1 pt

Si consideri la funzione $f(x) = e^{x/6}$ e il suo interpolante polinomiale a tratti di grado 4, ovvero $\Pi_4^H f(x)$ su 3 sottointervalli equispaziati di $[0, 3]$ e con tutti i nodi equispaziati. Si riporti il valore $\Pi_4^H f(1.5)$.

1.2840

4 — 2 pt

Si consideri la funzione $f(x) = 1 + x^5 + |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e la sua spline interpolante cubica $s_3(x)$ su 7 nodi equispaziati. Quanto vale l'approssimazione di $\int_{-1}^{1} s_3(x)\, dx$ tramite la formula dei trapezi (semplice)?

4

5 — 1 pt (***) No Multichance

Si consideri l'approssimazione dell'integrale $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, dove $f \in C^\infty([a,b])$, tramite la formula del punto medio composita. Sapendo che per $M_1 = 20$ sottointervalli equispaziati di $[a,b]$ si ha un errore pari a $e_1(f) = 0.1$, si stimi l'errore $e_2(f)$ commesso con $M_2 = 40$ sottointervalli equispaziati.

0.025

6 — 1 pt

Si consideri l'approssimazione dell'integrale (doppio) $I(f) = \displaystyle\int_T f(x,y)\,dxdy$ sul triangolo T avente vertici nei punti $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^2$ tramite la formula del punto medio, ovvero

$$I_{pm}(f) = |T|\, f\left(\overline{\mathbf{P}}\right),$$

dove $|T|$ è l'area del triangolo T, mentre $\overline{\mathbf{P}} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}_i$ è il baricentro di T.

Posti $\mathbf{P}_1 = (0,\,0)^T$, $\mathbf{P}_2 = (1,\,0)^T$, $\mathbf{P}_3 = (0,\,1)^T$ e $f(x,y) = e^{(2x+y)}$, si riporti il valore di $I_{pm}(f)$.

$\dfrac{e}{2} = 1.3591$

7 — 1 pt

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -t\,y(t) & t \in (0,10), \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di Eulero all'indietro con passo $h > 0$, si riporti il valore calcolato di u_1 in termini di h, ovvero l'approssimazione di $y(t_1)$, essendo $t_n = n\,h$ per $n = 0, \ldots, N_h$.

$\dfrac{5}{1+h^2}$

8 — 2 pt

Per l'approssimazione numerica del generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in (t_0, +\infty), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

si consideri il metodo di Runge–Kutta corrispondente alla seguente tabella di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Posti $f(t, y) = -(t+1)\, y^2$, $t_0 = 0$ e $y_0 = 9$, si approssimi il problema con il metodo precedentemente descritto e si riporti il valore dell'approssimazione u_1 di $y(t_1)$, dove $t_i = t_0 + i\, h$ per $i = 0, 1, \ldots$, essendo il passo $h = 0.1$.

4.9055

9 — 2 pt

Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = A\, \mathbf{y} & t \in (0, 1), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

dove $\mathbf{y}(t) = (y_1(t),\, y_2(t))^T$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y}_0 = (9,\, 3)^T$ Si approssimi il problema utilizzando il metodo di Eulero all'indietro con passo $h = 0.1$. Si riporti l'approssimazione $\mathbf{u}_{N_h}$ così ottenuta, ovvero l'approssimazione di $\mathbf{y}(t_{N_h})$, essendo $t_n = n\, h$ per $n = 0, \ldots, N_h$.

$(2.7679,\, 2.5605)^T$

10 — 2 pt (***) No Multichance

Si consideri il seguente problema di Cauchy del secondo ordine:

$$\begin{cases} y''(t) = -\mu\, y(t) & t \in (0, +\infty), \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = w_0. \end{cases}$$

dove μ, y_0 e $w_0 \in \mathbb{R}$. La sua approssimazione tramite il metodo di Leap-Frog si scrive come

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h\, v_n - \mu\, \dfrac{h^2}{2}\, u_n \\ v_{n+1} = v_n - \mu\, \dfrac{h}{2}\, (u_n + u_{n+1}) \end{cases} \qquad \text{per } n = 0, 1, \ldots,$$

con $u_0 = y_0$ e $v_0 = w_0$, dove $h > 0$ è il passo, u_n è l'approssimazione di $y(t_n)$ e v_n l'approssimazione di $y'(t_n)$, essendo $t_n = n\, h$ per $n = 0, 1, \ldots$.

Dopo aver posto $\mu = 2$, $y_0 = 10$, $w_0 = 0$ e $h = 0.1$, si riportino i valori delle approssimazioni u_1 e u_2 così ottenute.

$u_1 = 9.9,\;\; u_2 = 9.6020$

ESERCIZIO – 17 pt

Si consideri il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u''(x) + V\,u'(x) = f(x) & x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = \cos(1), \end{cases} \tag{1}$$

dove $V > 0$ è un parametro.

Punto 1) — 3 pt

Si approssimi il problema (1) usando il metodo delle differenze finite centrate, partizionando l'intervallo $[a,b]$ in $N+1$ sottointervalli di uguale ampiezza $h = \dfrac{b-a}{N+1}$ delimitati da $N+2$ nodi $x_j = a + j\,h$ per $j = 0, 1, \ldots, N, N+1$. Per l'approssimazione di $u'(1)$ si utilizzi lo schema delle differenze finite all'indietro.

Si riportino le equazioni del sistema risultante in forma esplicita definendo la notazione utilizzata e illustrando la procedura seguita.

Spazio per risposta lunga

Punto 2) — 2 pt

Dopo aver risposto al Punto 1), si riportino le espressioni della controparte algebrica del sistema di equazioni, ovvero del sistema lineare $A\,\mathbf{u}_h = \mathbf{b}$, in forma condensata, dove $A \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, $\mathbf{u}_h, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N+1}$, essendo $\mathbf{u}_h = (u_1, u_2, \ldots, u_{N+1})^T$.

Spazio per risposta lunga

Punto 3) — 3 pt

Si pongano per il problema (1) i seguenti dati: $V = 1$ e $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Si approssimi tale problema con il metodo di cui al Punto 1) per $h = 0.1$. Si riportino il valore di u_{N+1} con almeno 4 cifre decimali e i principali comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga ($u_{N+1} = 0.8148$)

Punto 4) — 2 pt (***) No Multichance

Dopo aver risposto al Punto 3), si utilizzi opportunamente il vettore $\mathbf{u}_h$ ottenuto per approssimare $I(u) = \displaystyle\int_0^1 u(x)\,dx$ attraverso la formula dei trapezi composita. Si riportino il valore ottenuto con almeno 4 cifre decimali e i comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga (0.4483)

Punto 5) — 2 pt

Con i dati di cui al Punto 3), si risolva il problema per $h = 0.1,\ 0.05,\ 0.025,\ 0.00125$ e, sapendo che la soluzione esatta è $u(x) = \sin(x)$, si calcolino gli errori corrispondenti $e_h = \max_{j=0,\ldots,N+1} |u(x_j) - u_j|$; si riportino i risultati con almeno 4 cifre decimali e i principali comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga $\quad$ ($e_h = 0.0267,\ 0.0133,\ 0.0067,\ 0.0033$)

Punto 6) — 2 pt

Si usino gli errori e_h calcolati al Punto 5) per stimare *algebricamente* l'ordine di convergenza p del metodo di cui al punto 1 applicato al problema (1). Si illustri schematicamente la procedura seguita per la stima e si commenti il risultato ottenuto alla luce della teoria.

Spazio per risposta lunga $\quad$ ($p = 1.0007$)

Punto 7) — 3 pt $\quad$ (***) No Multichance

Si consideri nuovamente il problema (1), ma questa volta con $V = 100$ e $f(x) = 0$.

- Quale fenomeno numerico si può verificare approssimando tale problema tramite le differenze finite centrate di cui al Punto 1) con $h = 0.1$? Perchè?
- Come è possibile eliminare tale fenomeno numerico sempre usando $h = 0.1$?
- Si implementi in Matlab® il rimedio proposto. Si riportino il valore u_{N+1} dell'approssimazione così ottenuta con almeno 4 cifre decimali e i principali comandi Matlab® usati.

Spazio per risposta lunga $\quad$ (0.0594)