

3. Matrices

En muchas ocasiones hemos visto tablas de doble entrada que resumen la información usando filas y columnas. Como vemos, estas tablas tienen datos numéricos con etiquetas tanto en su parte superior, como en el costado izquierdo que nos permiten asociar estos datos a determinadas categorías

A este formato de presentar datos numéricos organizados en filas y columnas se le conoce con el nombre de matriz.

3.1 Definición de matrices

Una matriz es un arreglo bidimensional ordenado por filas y columnas. Las matrices se designan por letras mayúsculas.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Col. 1} & \text{Col. 2} & \text{Col. 3} & \text{Col. 4} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{Fila 1} \\ \text{Fila 2} \\ \text{Fila 3} \end{matrix} \end{matrix}$$

Orden de una matriz

Para indicar el orden de una matriz se indica primero el número de filas y luego el número de columnas.

En el ejemplo, la matriz A es de orden 3×4 (filas \times columnas).

Matrices y dataframes

Al agrupar datos numéricos en dos dimensiones, tenemos una matriz. Si en este arreglo bidimensional almacenamos otro tipo de datos, tenemos un dataframe.

Librerías

En Python existen *librerías*, que nos permiten aumentar la funcionalidad básica. Ya hemos usado algunas, como `time`. Una librería muy útil para trabajar con matrices es `numpy`. Sin embargo, los cálculos que haremos se pueden hacer sin `numpy`.

¿Y si es una matriz muy grande?

Si una matriz tuviera más de 9 filas o columnas, separamos los subíndices con una coma. Por ejemplo, el elemento de la matriz M situado en la fila 12 y columna 5 se identifica como

$$m_{12,5}$$

Notación matricial

Cada uno de los elementos que componen una matriz se designan usando la misma letra de la matriz, pero en minúsculas. Además, se utilizan *dos* subíndices que nos indican la posición del elemento. De este modo, si queremos mencionar el elemento de la matriz A que se ubica en la fila i y en la columna j lo denotamos como

$$a_{ij}.$$

En la matriz del ejemplo, el elemento a_{23} es el elemento situado en la intersección de la fila 2 con la columna 3.

Actividad 3.1 Para cada matriz, indique el orden e identifique utilizando notación matricial el elemento destacado.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 3,1 & 5 \\ 4,2 & 7 & 10 \\ 6 & 9 & 14 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0,3 & 1,7 \\ 8,2 & 4,5 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ 50 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 16 \\ 8 & 10 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Actividad 3.2 Según las matrices de la actividad anterior, indique el valor de los siguientes elementos

- a) k_{13}
- b) t_{22}
- c) m_{23}
- d) l_{42}
- e) s_{21}
- f) n_{11}
- g) t_{23}
- h) s_{12}

Guía 3.1

P1. La matriz D nos indica la distancia en kilómetros desde la ciudad i a la ciudad j . Las ciudades consideradas son Arica (A), La Serena (L), Santiago (S) y Concepción (C).

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & L & S & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1.596 & 2.070 & 2.582 \\ 1.596 & 0 & 473 & 989 \\ 2.070 & 473 & 0 & 516 \\ 2.582 & 989 & 516 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A \\ L \\ S \\ C \end{matrix} \end{matrix}$$

- Indique el orden de la matrix D .
- Interprete el elemento d_{42} .
- Interprete el elemento d_{43} .
- Interprete el elemento d_{12} .
- ¿Por qué $d_{ij} = d_{ji}$?
- ¿Por qué $d_{ii} = 0$?

Igualdad de matrices

Dos matrices, A y B se dicen iguales si y sólo si

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para todo i, j . Notemos que la definición anterior implica que ambas matrices tienen el mismo orden.

Guía 3.2

P2. Analice las siguientes matrices e indique si existe igualdad entre los pares de matrices, justificando su respuesta

$$F = \begin{pmatrix} 5,6 & 2,1 & 0,3 \\ 4,8 & 1,9 & 3,7 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5,6 & 2,1 \\ 4,8 & 1,9 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 5,6 & 2,1 & 0,3 \\ 4,8 & 1,9 & 2,7 \end{pmatrix}$$

- ¿ $F = G$?
- ¿ $F = H$?

Matrices en python

Una opción para trabajar con matrices en python es usar listas de listas. Para esto, representamos cada fila de la matriz como una lista de números, que a su vez agrupamos dentro de una lista que las contiene. Por ejemplo, la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Se puede representar por

```
B = [[6,7], [1,8], [4,5]]
```

¿Cómo accedemos a los elementos? Usando dos índices, pero recordando que en python los índices comienzan en cero. Por ejemplo, el elemento

$$b_{32} = 5$$

de la matriz lo obtenemos como

```
B[2][1]
# Entrega 5
```

A su vez, la primera fila de la matriz podemos obtenerla por

```
B[0]
# Entrega [6, 7]
```

Calculando el orden de una matriz en Python

¿Cómo podemos calcular el orden de una matriz en Python? Como representamos una matriz como una lista de listas y cada una de las sublistas tiene el mismo tamaño, podemos multiplicar el largo de cada sublista por el número de ellas. Por ejemplo, usando la matriz del código anterior

```
B = [[6,7], [1,8], [4,5]]
```

podemos averiguar cuántas filas tiene

```
len(B)
# da como resultado 3
```

y cuántos elementos tiene cada fila

```
len(B[0])
# da como resultado 2
```

por lo que la matriz tiene orden 3×2 .

3.2 Operaciones matriciales

Suma de matrices

La suma de matrices se lleva a cabo término a término, es decir, si denotamos la suma de dos matrices A y B por $C = A + B$, entonces los elementos de C están definidos por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Notemos que para que esta suma se lleve a cabo las matrices A y B deben ser del mismo orden. Además, si A y B son de orden $m \times n$, la matriz $A + B$ también es de orden $m \times n$.

¿Y la resta?

Al igual que la suma, podemos definir la resta término a término, es decir, si denotamos la diferencia de A y B por $D = A - B$, entonces

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

¿Cómo podemos sumar en Python?

Supongamos que queremos sumar las matrices

$$E = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

y guardar el resultado en una matriz G .

Usando listas de listas, podemos hacerlo en Python término a término

```
E = [[8, 2, 1],
      [-5, 6, 7]]
```

```
F = [[3, 4, 0],
      [4, -3, 9]]
```

```
# definimos el resultado previamente
```

```
G = [[0, 0, 0],
      [0, 0, 0]]
```

```
# iteramos a través de las filas
```

```
for i in range(len(E)):
```

```
    # iteramos a través de las columnas
```

```
    for j in range(len(E[0])):
```

```
        G[i][j] = E[i][j] + F[i][j]
```

```
print(G)
```

```
# [[11, 6, 1], [-1, 3, 16]]
```

`range(len(E))` nos da un rango desde 0 hasta la última fila. Para obtener el rango de las columnas, pedimos el largo de la primera columna, `range(len(E[0]))`.

Suma de matrices en
Google Colab



Guía 3.3

- P3.** Las matrices A y B representan las ventas en dos años, en millones de dólares, de los tres productos de una empresa en las cuatro regiones en que está disponible. Es decir, a_{ij} y b_{ij} representan el monto de las ventas del producto i en la región j el primer y segundo año, respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 2,6 & 4,8 & 1,8 & 0,9 \\ 3,2 & 4,4 & 2,5 & 2,8 \\ 2,4 & 3,6 & 3,8 & 2,5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3,6 & 2,5 & 3,0 & 2,5 \\ 4,5 & 5,0 & 3,5 & 3,8 \\ 2,9 & 3,0 & 4,6 & 4,0 \end{pmatrix}$$

- Indique el orden de cada matriz.
 - Calcule la matriz $S = A + B$.
 - Calcule la matriz $D = B - A$.
 - Indique e interprete el valor de los elementos s_{24} y d_{24} .
 - Para el tercer año de funcionamiento, los tres productos ahora están disponibles en seis regiones. Durante este año, las ventas de esta empresa estarán registradas en una matriz E . ¿Es posible determinar la matriz $T = A + B + E$? Justifique su respuesta.
- P4.** La matriz A muestra los pesos, en kilogramos, de cuatro hombres y cuatro mujeres *antes* de fiestas patrias, mientras que la matriz D muestra sus pesos *después* de dichas festividades

$$A = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 71 & 80 & 75 & 90 \\ 65 & 58 & 74 & 82 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Hombres} \\ \text{Mujeres} \end{matrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 75 & 83 & 80 & 94 \\ 67 & 60 & 78 & 85 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Hombres} \\ \text{Mujeres} \end{matrix}$$

- La matriz V nos entrega las variaciones de pesos para estas ocho personas. ¿Qué operación entre las matrices A y D debemos realizar para obtener V ?
- Calcule la matriz V .
- ¿Cuánto fue el aumento de peso para la mujer 3 y el hombre 2? Responda usando notación matricial.
- Interprete los elementos a_{21} , d_{14} y v_{22} .

Ponderación por escalar

Esta operación suena ominosa, pero es sencilla. Un *escalar* no es más que un número y *ponderación* es otra manera, en este caso, de decir multiplicación. Entonces, la ponderación por escalar es la multiplicación de una matriz por un número.

Si tenemos una matriz A , los términos de $B = kA$, su ponderación por k , se definen como

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

es decir, al ponderar una matriz A por un escalar k , multiplicamos cada término de la matriz por el escalar.

¿Y en Python?

Supongamos que queremos multiplicar la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 20 & 16 & 18 \\ 12 & 34 & 32 \\ 56 & 22 & 6 \\ 24 & 14 & 28 \\ 18 & 8 & 30 \end{pmatrix}$$

por el escalar $k = 2.5$. ¿Cómo lo podemos hacer en Python? Usando listas de listas, lo haremos de una forma similar a la adición, yendo término a término.

```
M = [[20, 16, 18],
      [12, 34, 32],
      [56, 22, 6],
      [24, 14, 28],
      [18, 8, 30]]

k = 2.5

P = [[0, 0, 0],
      [0, 0, 0],
      [0, 0, 0],
      [0, 0, 0],
      [0, 0, 0]]

for i in range(len(M)):
    for j in range(len(M[0])):
        P[i][j] = k * M[i][j]

print(P)
# [[50.0, 40.0, 45.0], [30.0, 85.0, 80.0], [140.0, 55.0, 15.0],
#   [60.0, 35.0, 70.0], [45.0, 20.0, 75.0]]
```

Ponderación por escalar en
Google Colab



Guía 3.4

- P5.** La empresa Beta tiene dos plantas en Chile y en cada una de ellas fabrica tres productos. El número de unidades del producto i fabricadas en la planta j en una semana está representado en la matriz C en el elemento c_{ij} .

$$C = \begin{pmatrix} 120 & 70 \\ 150 & 110 \\ 80 & 160 \end{pmatrix}$$

La empresa se expande, creando dos plantas en Ecuador que producen los mismos tres productos. La producción semanal de esta filial estará representada por una matriz E .

- Si se sabe que los volúmenes de producción semanal de la filial en Ecuador son un 20 % menor que en Chile, entonces indique la operación necesaria para calcular cada elemento de la matriz E utilizando notación matricial.
 - Si representamos la producción semanal total de la empresa Beta, considerando ambas filiales, por la matriz T , escriba la expresión que calcula cada elemento de la matriz T usando notación matricial.
 - Calcule la matriz T .
- P6.** Una empresa que fabrica zapatos tiene dos plantas, una en Valparaíso y la otra en Temuco. Ésta produce zapatos de color negro, blanco y café, tanto para niños, damas como caballeros. La capacidad actual de producción mensual (en miles de pares) para las plantas de Valparaíso y Temuco, respectivamente, están dadas por las matrices V y T . Para ambas matrices, según el orden en que se mencionan, las filas corresponden al color del calzado y las columnas al tipo de persona que utilizará el calzado.

$$V = \begin{pmatrix} 30 & 34 & 20 \\ 45 & 20 & 16 \\ 14 & 26 & 25 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 35 & 30 & 26 \\ 52 & 25 & 18 \\ 23 & 24 & 32 \end{pmatrix}$$

- Determine la producción mensual total de ambas plantas, representándola en una matriz A .
- Interprete el elemento a_{21} .
- Si para el próximo año se estima que la producción en Valparaíso aumenta en un 30 %, mientras que la de Temuco se reduce en un 10 %, represente la nueva producción total en la matriz B .
- Interprete el elemento b_{13} .

Matriz transpuesta

Sea A una matriz de orden $m \times n$. Se dice que B es la matriz transpuesta de A cuando se cumple que

$$b_{ij} = a_{ji}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

Simbolizaremos esta matriz por A^T . La matriz A^T es de orden $n \times m$.

¿Cómo transponer una matriz en Python?

Supongamos que queremos transponer la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Si lo hacemos a mano, el resultado es $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

¿Pero en Python? Muy sencillo.

```
A = [[3, 8],
      [5, 1],
      [2, 6]]
```

```
At = [[0, 0, 0],
       [0, 0, 0]]
```

```
# iteramos por las filas de la transpuesta
for i in range(len(At)):
    # y ahora por las columnas de la transpuesta
    for j in range(len(At[0])):
        # escribimos los índices "al revés"
        At[i][j] = A[j][i]
```

```
print(At)
# entrega [[3, 5, 2], [8, 1, 6]]
```

Transposición de matrices
en Google Colab



Guía 3.5

P7. Genere una matriz M de orden 8×9 donde cada término esté definido por $m_{ij} = 8i + 12j$ y calcule su transpuesta.

P8. Genere dos matrices

- Una matriz A de orden 5×7 , con $a_{ij} = i \cdot j$.
- Una matriz B de orden 7×5 , con $b_{ij} = 15i - 2j$.

y calcule la matriz $C = A^T + \frac{1}{2}B$.

3.3 NumPy

En la sección anterior, realizamos todos los cálculos “a mano”, aunque los hiciéramos a través de Python, porque al representar matrices usando listas de listas, realmente no estamos haciendo que Python entienda que estamos trabajando con una matriz. De alguna manera, lo que estamos haciendo es simular una matriz.

Sin embargo, usando la librería NumPy, podemos trabajar con matrices de verdad, es decir, que saben comportarse como matrices, lo que simplifica nuestro trabajo.

Por ejemplo, podemos definir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

como

```
import numpy as np
```

```
A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6]])
```

Hasta aquí no es muy distinto, pero las operaciones se simplifican

Operaciones usando numpy

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6]])
B = np.array([[11, 12, 13],
              [14, 15, 16]])

# orden de una matriz
print(A.shape)
# (2, 3)
# dos filas, tres columnas

# suma
C = A + B
print(C)
# [[12 14 16]
#   [18 20 22]]
```

```
# resta
D = B - A
print(D)
# [[10 10 10]
#   [10 10 10]]

# ponderación por escalar
E = 2*A
print(E)
# [[ 2  4  6]
#   [ 8 10 12]]

# transposicion
F = A.T
# o también A.transpose()
print(F)
# [[1 4]
#   [2 5]
#   [3 6]]
```

Problemas de la sección

P1. Una empresa de motocicletas dispone de dos plantas de fabricación, una en China y la otra en Indonesia, en las que fabrica dos modelos de motos M_1 y M_2 en tres colores, rojo, verde y azul. Su capacidad de producción diaria, en cada planta, está representada por las matrices C (para China) e I (para Indonesia).

$$C = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 300 & 95 \\ 250 & 100 \\ 200 & 100 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{rojo} \\ \text{verde} \\ \text{azul} \end{matrix} \quad I = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 190 & 90 \\ 200 & 100 \\ 150 & 80 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{rojo} \\ \text{verde} \\ \text{azul} \end{matrix}$$

- Indique el orden de cada matriz.
- Interprete los elementos c_{21} e i_{32} .
- Determine la matriz $T = C + I$.
- Interprete los elementos t_{31} y t_{12} .
- Determine la matriz $D = C - I$.
- Interprete d_{22} y d_{11} .