1. Sucesiones

1.1 Sucesiones

Una sucesión es una secuencia de términos (a_n), donde cada uno de ellos está asociado a un valor n, un número natural que nos indica qué lugar ocupa el término.

$$(a_n) = (a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots)$$

donde a_n representa el término en el lugar n de la sucesión, con $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$

Como n puede ser cualquier número natural, eso quiere decir que una sucesión tiene infinitos términos.

Nombre de la sucesión $\longrightarrow (b_k) \longleftarrow$ Subíndice

El nombre de la sucesión es una letra que usamos para identificarla, mientras que el subíndice es una variable que etiqueta los elementos de una sucesión, indicando el lugar que ocupan.

Desfase de índices

Desde el punto de vista matemático, por definición, las sucesiones se indexan desde 1 en adelante. No obstante, en Python y en muchos lenguajes de programación las listas y los arreglos se indexan desde 0. Por el momento usaremos *listas*.
El primer término, b_1, en código Python al usar listas se escribe `b[0]`. El segundo término b_2 en Python se escribe `b[1]`, el tercero b_3 se escribe como `b[2]`, y así sucesivamente.

¿Arreglos o listas?

Los arreglos son estructuras de datos estáticas, ya que hay que declarar su tamaño antes de utilizarlos. A diferencia de los arreglos, las listas son estructuras de datos dinámicas que pueden ir creciendo conforme se vaya requiriendo.

Ejemplo 0

En este código, podemos ver cómo declarar una lista acotada y luego ir recorriendo sus elementos uno a uno

```
b=[6,9,12,15,18]
for i in range (len(b)):
  n=i+1
  print(f'b({n})={b[i]}')
```

Ejemplo 1

Expandamos la sucesión $(a_n) = (3n)$.

$$\begin{array}{ccc} n=1 & \longrightarrow & a_1 = 3\cdot 1 = 3 \\ n=2 & \longrightarrow & a_2 = 3\cdot 2 = 6 \\ n=3 & \longrightarrow & a_3 = 3\cdot 3 = 9 \\ n=4 & \longrightarrow & a_4 = 3\cdot 4 = 12 \\ \vdots & \vdots & \end{array}$$

Entonces podemos escribir la sucesión $(3n)$ como $(3,\ 6,\ 9,\ 12,\ldots)$.

Podemos generar los cuatro primeros términos de esta sucesión usando el siguiente código Python

Ejemplo 1 en Google Colab

Código ejemplo 1

```
a=[]
for i in range(4):
  n=i+1
  a.append(3*n)
  print (f'a({n})={a[i]}')
```

Ejemplo 2

A continuación, se define la sucesión (b_n) como

$$b_n = 5 \cdot 0{,}92n.$$

donde queremos calcular y mostrar en pantalla desde b_{10} hasta b_{15}. El problema es que si bien es cierto se pueden agregar elementos, pero necesariamente deben existir los 9 elementos anteriores a b_{10}, de lo contrario Python arrojará error.

Entonces para no calcular elementos innecesarios usaremos la expresión

$$n = i + 10$$

con la que haremos que la lista asociada a esta sucesión inicie con `b[0]` y al mismo tiempo comenzamos calculando b_{10}, como muestra la tabla

i	0	1	2	3	4	5
n	10	11	12	13	14	15

El código que genera los elementos buscados de la sucesión es el siguiente

Código ejemplo 2

```
b=[]
# al usar range(6) la variable "i" asume valores
# enteros desde 0 hasta 5
for i in range (6):
  n=i+10
  b.append(5*0.92**n)
  print (f'b({n})={b[i]}')
```

Ejemplo 2 en Google Colab

Guía 1.1

Potencias en Python
Las potencias se representan en Python mediante el operador **

P1. Considere la sucesión $(3n^2+7)$. Por medio de un código Python con ciclos `for` despliegue en pantalla

a) Los primeros 5 términos.
b) Los 5 términos que vienen inmediatamente después del décimoquinto término.

P2. Considere la sucesión (g_n) cuyo término general es $5n^3$. Implemente un código Python que muestre en pantalla

Para obtener la raíz n-ésima en Python, eleva a $1/n$.

a) Los primeros 4 términos.
b) Los 4 términos que vienen inmediatamente después del octavo término.
c) ¿El término 40.000 pertenece a la sucesión? Verificarlo resolviendo una ecuación en Python y usando bucles. ¿Cuál es más rápido?

P3. Sea la sucesión (k_n) definida por su término general $(-1)^n$.

a) Determine los primeros 20 términos.
b) ¿Qué se puede afirmar acerca de los términos de esta sucesión?
c) ¿Cuál es el término que ocupa la posición 2.020?

P4. Sea la sucesión (h_n) definida por su término general $6n(-1)^n$.

a) Determine los 100 primeros términos.
b) Basándose en la experiencia con la sucesión de la pregunta anterior, ¿qué características observas en los términos de esta sucesión?

En el siguiente link, podemos ver el código Python del ejemplo 3, donde estos bucles `while` se le agrega un temporizador con la función `time()`, que usamos como una medida aproximada de la eficiencia de este código al comparar con otro alternativo.

Ejemplo 3: ¿Cómo saber si un número pertenece a una sucesión?

Utilizaremos como ejemplo la sucesión del problema 1, y como no conocemos el lugar que supuestamente ocupa el número a alcanzar entonces optamos por bucles tipo `while` que se ejecutan mientras se siga cumpliendo una condición.

Ejemplo: ¿El número 10.807 pertenece a la sucesión $s_n = 3n^2+7$?

```
n = 0
termino = 0
vfinal = 10807 #valor del término al cual hay que llegar
dif=vfinal-termino
while dif > 0:
  n=n+1
  termino = 3*n**2+7
  dif=vfinal-termino
anterior =3*(n-1)**2+7
print (f'El término de lugar {n} es {termino}')
print (f'El término de lugar {n-1} es {anterior}')
```

Al ejecutar en Python, podemos comprobar empíricamente que el valor 10.807 ocupa el lugar 60, por lo tanto, pertenece a esta sucesión.

Si al terminar de iterar, vemos que el valor a alcanzar no está presente ni en el último ni el penúltimo lugar entonces simplemente ese valor no pertenece a la sucesión analizada.

1.2 Sucesiones monótonas

Una sucesión *monótona creciente* es una sucesión donde cada término es mayor o igual al anterior, es decir

$$a_n \leq a_{n+1}$$

Una sucesión *monótona decreciente* es una sucesión donde cada término es menor o igual al anterior, es decir

$$a_n \geq a_{n+1}$$

Guía 1.2

P5. Considere la sucesión (a_n) cuyo término general es $\frac{1}{n}$.

a) Determine los términos a_{10}, a_{100}, $a_{1.000}$, $a_{10.000}$, $a_{100.000}$.

b) Sin programar ni usar la calculadora, entre a_9 y a_{99}, ¿cuál es mayor?

P6. Considere la sucesión (b_n) de término general $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

a) Usando todos los decimales que entrega Python, determine los términos b_{10}, b_{100}, $b_{1.000}$, $b_{10.000}$, $b_{100.000}$.

b) Después de calcular los términos anteriores, ¿qué tipo de sucesión es (b_n)?

c) ¿Algún término es mayor que el número de Euler e?

Código para el ejercicio *a)*

```
b=[]
for i in range (5):
  n=10**(i+1)
  b.append((1+1/n)**n)
  print (f'b({n})=',b[i])
```

e

El número e es una constante que apareció en problemas relativos a interés compuesto, pero que resulta tener conexiones con una amplia gama de fenómenos matemáticos. Aproximadamente, su valor es 2,71828

Constantes matemáticas

Si se necesita ocupar valores de constantes matemáticas como π o e, usando una cantidad suficiente de decimales para propósitos prácticos, usaremos la biblioteca `math`

```
import math
from math import pi
from math import e
```

¿Por qué hay diferencias en los decimales?

Si miramos el código anterior, en la salida podemos notar algo curioso

```
b(10)= 2.5937424601000023
```

¿Por qué aparece ese 23 después de varios ceros? Si calculamos a mano, el resultado es

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}5937424601$$

y todos los decimales siguientes son 0. ¿Se echó a perder Python? La respuesta en realidad tiene que ver con representaciones numéricas: por extraño que parezca, no todos los números son "escribibles", es decir, representables. Por ejemplo, en nuestra base 10, la fracción $\frac{1}{3}$ no puede representarse como decimal: lo mejor que podemos hacer es obtener aproximaciones como 0,3, 0,33, 0,333, etc. Lo importante es que son siempre aproximaciones; al operar con ellas estaremos cometiendo cierto error, una diferencia entre la aproximación y el valor real.

En los computadores, que operan en base 2, pasa lo mismo. Por ejemplo, el número 0,1 en base 10 se representa como

$$0{,}0001100110011001100110011001100110011001100110011\ldots$$

en base 2. Python ocupa normalmente una fracción binaria para representar decimales, cuyo numerador usa 53 bits. Eso quiere decir que Python también realiza una aproximación y, como tal, también va incurriendo en un pequeño error. Este error es, de todas formas pequeño, pero se puede acrecentar al iterar o realizar muchos cálculos. Sin embargo, existen librerías como `decimal` o `fraction` que permiten cálculos de alta precisión.

P7. Considera la sucesión $(5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ldots)$.

a) Comparando con el ejemplo 1 de esta guía, ¿qué caracteriza a estos números?
b) Determine la expresión algebraica del término genérico de lugar n.
c) Compruebe si su expresión es correcta usando código Python.

P8. Considera la sucesión $(7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ldots)$.

a) Al mirar los términos de esta sucesión, ¿qué puede decir de ellos?
b) Determine la expresión algebraica del término genérico de lugar n.
c) Compruebe si su expresión es correcta usando código Python.

Ejemplo 4

Observemos cada término de la sucesión $(f_n) = (1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ldots)$

n	1	2	3	4	5	6
f_n	1	4	9	16	25	36

Fijándonos bien, esta sucesión es la de los cuadrados de los números naturales. Por lo tanto, el término genérico de lugar n está dado por

$$f_n = n^2.$$

P9. Considere las sucesiones $(t_n) = (2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ldots)$, $(u_n) = (0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ldots)$ y $(v_n) = (10,\ 40,\ 90,\ 160,\ 250,\ 360,\ldots)$.

a) Para cada sucesión, determine la expresión algebraica del término de lugar n.

b) Compruebe las tres expresiones en un mismo código Python.

Sucesión de Fibonacci

Dar el término genérico no es la única manera de definir una sucesión. Por ejemplo, podemos definir una sucesión *recursivamente*. Un ejemplo famoso de esto es la sucesión de Fibonacci. Para esto, definimos los dos primeros términos,

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1$$

y los siguientes términos los definimos mediante la relación de recurrencia

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

cuando $n > 2$.

Una de las varias propiedades de esta sucesión es que, al ir avanzando por los índices progresivamente, encontramos que

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \text{ se aproxima a } \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Este número es conocido como la razón áurea y se simboliza por la letra griega φ (fi).

P10. Idear un código en Python que calcule un gran número de términos de la sucesión de Fibonacci, de manera que se detenga sólo cuando la diferencia entre $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ y φ sea menor a 0,000001.

Lamentablemente, la biblioteca `math` no tiene definida la constante φ. Por lo tanto, se aconseja utilizar la expresión con radicales.

1.3 Sucesiones aritméticas

Una sucesión aritmética es una sucesión tal que entre un término y el anterior existe una diferencia constante. Dicho de otro modo, entre dos términos consecutivos cualquiera hay una distancia d fija.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, bend left, "+d"] & a_2 \arrow[r, bend left, "+d"] & a_3 \arrow[r, bend left, "+d"] & a_4 \arrow[r, bend left, "+d"] & a_5 \arrow[r, bend left, "+d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 1

Si consideramos la sucesión

$$4,\ 16,\ 28,\ 40,\ 52, \ldots$$

podemos darnos cuenta que es aritmética pues

$$16-4=28-16=40-28=52-400=\cdots=12$$

por lo que la diferencia siempre es 12

Ejemplo 2

La sucesión

$$500,\ 480,\ 460,\ 440,\ 420, \ldots$$

también es aritmética porque

$$500-480=480-460=460-440=440-420=\cdots=-20.$$

En este caso, la diferencia es negativa pero sigue siendo constante.

La regularidad de las sucesiones aritméticas permite encontrar una fórmula para el término general. Sabemos que el primer término es a_1. El segundo término, entonces, tiene que ser

$$a_2 = a_1 + d$$

el tercer término es el segundo más la distancia, pero podemos escribirlo en términos del primer término

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

y podemos hacer algo similar con el cuarto término

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

podemos notar la recurrencia entre los subíndices y el coeficiente de d y escribir el término genérico como

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Actividad 1.1 ¿Qué condición debe cumplir una sucesión aritmética para que sea monótona creciente? ¿Cuál para que sea monótona decreciente? ¿Puede haber sucesiones aritméticas que no sean monótonas estrictamente crecientes ni decrecientes?

Calculando términos de una sucesión aritmética

Podemos calcular los términos de una sucesión aritmética de dos maneras

1. Directamente, usando la fórmula para el término de lugar n

$$a_n = a_1 + (n+1)d$$

2. Usando ciclos `for` desde $i = 2$ hasta $i = n$ teniendo en cuenta que

$$a_i = a_{i-1} + d.$$

   Debemos recordar que hay un desfase entre los índices matemáticos y los de las listas en Python, por lo que

$$a_1 \to \texttt{a[0]}$$
$$a_2 \to \texttt{a[1]}$$
$$\vdots$$

Guía 1.3

P11. Considere la sucesión aritmética 25,72; 26,93; 28,14,.... Determine

a) La diferencia aritmética

b) La expresión algebraica del término de lugar n.

c) Calcule el término del lugar 50 con dos códigos de Python diferentes. El primero de ellos con la expresión algebraica del término de lugar n y el segundo de manera recursiva y compare los tiempos de ejecución.

d) ¿Qué lugar ocupa en esta sucesión el término 411,71?

P12. En una sucesión aritmética, la diferencia entre un término y el anterior es 4 y el décimo término es -20. Determine

a) El primer término.

b) La expresión del término de lugar n.

c) El término que ocupa el lugar 100. Utilice un código de forma recursiva y otro con el término de lugar n.

d) ¿Qué lugar ocupa en esta sucesión el término 1.680?

1.4 Sucesiones geométricas

Una sucesión geométrica es una sucesión tal que entre un término y el anterior existe una razón constante. Dicho de otro modo, si dividimos dos términos consecutivos cualquiera el resultado es una razón r constante.

$$a_1 \xrightarrow{\cdot r} a_2 \xrightarrow{\cdot r} a_3 \xrightarrow{\cdot r} a_4 \xrightarrow{\cdot r} a_5 \xrightarrow{\cdot r} \ldots$$

Ejemplo 1

La sucesión

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ldots$$

es geométrica porque

$$\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=\frac{24}{12}=\cdots=2$$

por lo que la razón siempre es 2.

Ejemplo 2

La sucesión

$$4,\ 6,\ 9,\ 13{,}5,\ 20{,}25,\ldots$$

es geométrica porque

$$\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{13{,}5}{9}=\frac{20{,}25}{13{,}5}=\cdots=1{,}5$$

Ejemplo 3

Otra sucesión geométrica es

$$500,\ 400,\ 320,\ 256,\ 204{,}8,\ldots$$

pues la razón es

$$\frac{400}{500}=\frac{320}{400}=\frac{256}{320}=\frac{204{,}8}{256}=\cdots=0{,}8$$

Al igual que en las sucesiones aritméticas, la regularidad de las sucesiones geométricas nos permite encontrar una fórmula para el término general. Partiendo del primer término, a_1, sabemos que el segundo se obtiene multiplicando el anterior por r

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

y el tercero multiplicando el segundo por r

$$a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r)r = a_1 \cdot r^2$$

mientras que el cuarto es el anterior por r

$$a_4 = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$

si continuamos, podemos notar la recurrencia entre el subíndice, que marca la posición del término, con el exponente de la potencia. Finalmente, si tenemos el término de posición n, podemos obtenerlo como

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Actividad 1.2 ¿Qué condición debe cumplir una sucesión geométrica para que sea monótona creciente? ¿Cuál para que sea monótona decreciente? ¿Puede haber sucesiones geométricas que no sean monótonas estrictamente crecientes ni decrecientes?

Calculando términos de una sucesión geométrica

Podemos calcular los términos de una sucesión geométrica de dos maneras

1. Directamente con la fórmula del término de lugar n

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

2. Recursivamente, usando ciclos `for` desde $i = 2$ hasta $i = n$ teniendo en cuenta que

$$a_i = a_{i-1} r$$

Debemos recordar que hay un desfase entre los índices matemáticos y los de las listas en Python, por lo que

$$a_1 \to \texttt{a[0]}$$
$$a_2 \to \texttt{a[1]}$$
$$\vdots$$

Determinando el lugar de un término en una sucesión geométrica

Tenemos dos maneras de obtener el lugar que ocupa un término a_n cualquiera en este tipo de sucesión

1. Iterando con bucles `while` y en cada ciclo ir evaluando con la fórmula del término de lugar n.
2. Directamente usando logaritmos con la fórmula

$$n = \log_r\left(\frac{a_n}{a_1}\right) + 1$$

Logaritmos en Python
Para calcular logaritmos en Python importamos la biblioteca `math` y en el código usamos la función `math.log(x, base)`. En este caso, `x`$= \frac{a_n}{a_1}$ y `base`$= r$.

Guía 1.4

P13. Considere la sucesión geométrica: $4, 6, 9, \ldots$ Determine

a) La razón geométrica.

b) La expresión del término de lugar n.

c) El término de lugar 60. Calcule con la forma directa y con la forma recursiva, compare los tiempos de ejecución.

d) ¿Qué lugar ocupa en esta sucesión el término 68,34375? Use logaritmo.

P14. El tercer término de una sucesión geométrica es 5 y el sexto término es 40. Determine

a) La razón geométrica. Analice cuántos pasos hay entre ambos términos que se indican.

b) El primer término.

c) La expresión del término de lugar n.

d) El octavo término. Calcule con la forma que estime conveniente.

e) ¿Qué lugar ocupa en esta sucesión el término 20.480? Use logaritmo.

P15. En una colonia de abejas, en el primer día de investigación, alumnos de Ingeniería Agrícola contabilizaron 3 abejas, el segundo día contabilizaron 9 y el tercero 15. Si la cantidad de abejas se fue incrementando de manera constante, se pide

a) Indicar qué tipo de sucesión modela la cantidad de abejas. Justifique su respuesta.

b) Escribir la expresión del término de lugar n.

c) Determinar cuántas abejas había el vigésimo día.

d) Determinar cuántas abejas había a los 30 días.

e) ¿Cuántos días deben transcurrir para que se puedan contabilizar 333 abejas?

P16. La tasa de crecimiento de la población de una ciudad es del 2% anual. Si la población actual es de 600.000 habitantes, se pide

a) Si a_n representa la población al cabo de n años, determine los tres primeros términos de esta sucesión.

b) Indicar qué tipo de sucesión modela la población de dicha ciudad. Justifique su respuesta.

c) Escribir la expresión algebraica del término de lugar a_n.

d) Determinar cuántos habitantes aproximadamente tendrá dentro de quince años.

e) ¿Cuántos años aproximadamente deben transcurrir para que la población alcance los 1.351.320 habitantes?

Problemas de la sección

P1. Observe los términos de las dos siguientes sucesiones

$$(x_n) = (8,\ 16,\ 24,\ 32,\ 40,\ldots)$$
$$(y_n) = (9,\ 17,\ 25,\ 33,\ 41,\ldots)$$

a) Escriba la expresión algebraica del término genérico para la sucesión (x_n).
b) Escriba la expresión algebraica del término genérico para la sucesión (y_n).

P2. Escriba la expresión algebraica del término genérico para

a) La sucesión de los múltiplos de 4.
b) La sucesión $(6,\ 10,\ 14, 18,\ 22,\ldots)$.
c) La sucesión de los números pares.
d) La sucesión de los números impares.

P3. Una casa se arrienda por 2 años, considerando que durante este periodo el arriendo se incrementará todos los meses en una cantidad constante. Si el quinto mes de arriendo se pagará \$204.000 y el décimo tercer mes \$252.000, ¿cuál será el valor del arriendo del primer y último mes?

P4. La altura de un árbol de rápido crecimiento aumenta cada año a una razón constante. Si en el segundo año tiene una altura de 1,125 metros y el quinto año mide exactamente 3,796875 metros. ¿Cuántos metros de altura aproximadamente, tendrá el árbol al noveno año? (aproxime el resultado a la centésima).

P5. Según las estadísticas de un hospital, en promedio los recién nacidos miden 48 cm y por cada mes, hasta que cumplen 1 año, su altura se incrementa uniformemente en 0,7 cm. Considere que a_n representa la altura promedio de los bebés al cabo de n meses.

a) Indicar qué tipo de sucesión modela la altura promedio de los bebés. Justifique su respuesta.
b) Escribir la expresión del término a_n.
c) ¿Cuánto miden en promedio los bebes al cabo de 7 meses de haber nacido?
d) ¿Cuántos meses de vida deben tener un bebé para medir, en promedio 54,3 cm?

P6. Un depósito inicial en una cuenta de ahorro, al cabo de 7 meses otorga un monto disponible en la cuenta de \$8.404.090. Y al cabo de 10 meses, en la misma cuenta se contabilizará debido al mismo depósito inicial un monto de \$10.295.372. Considere que a_n representa el monto disponible en la cuenta de ahorro al cabo de n meses y que, además, esta cuenta bancaria mensualmente reajusta el monto en una razón constante.

a) Indique qué tipo de sucesión modela el monto de la cuenta de ahorro. Justifique su respuesta.
b) Determine la tasa de interés mensual.
c) ¿De cuánto es el monto de la cuenta al cabo del primer mes? ¿Y cuánto fue el valor del depósito inicial?
d) Escriba la expresión del término a_n.
e) Si el dueño de la cuenta aún no retira el dinero, ¿cuál es el monto al cabo de 1 año?

P7. En una sucesión aritmética, el cuarto término es 64 y el término de lugar 54 es -61. Determine el vigésimo tercer término.

P8. En una sucesión geométrica, el cuarto término es 116,64 y el sexto término es 377,9136. Determine el noveno término, aproximando al entero este resultado.

P9. Un nuevo consultorio de salud comenzó a atender el primero de septiembre del año pasado. El 3 de septiembre fueron atendidos 175 pacientes y el 11 de septiembre 535 pacientes. Los encargados del consultorio notaron que la cantidad de pacientes atendidos aumentaba día a día en forma constante. ¿Cuántos pacientes fueron atendidos el 26 de septiembre?

P10. Héctor, padre de Matías, decidió ahorrar dinero por cada cumpleaños de su hijo. Si el primer año ahorró \$100, el segundo año \$210, el tercer año \$441 y así durante los demás cumpleaños. ¿Cuánto dinero deberá ahorrar Héctor por el cumpleaños número 18 de Matías? (Aproxime su resultado a un número entero).

P11. Diego, decide ahorrar dinero durante un año y medio. Si el primer mes ahorra \$1.000, el segundo mes \$2.000, el tercer mes \$4.000, determine

a) ¿Cuánto dinero ahorra el décimo mes?

b) ¿Cuánto dinero ahorra el último mes?