Multiplicación de dos matrices

Nuestro amigo de la comida rápida nos pide otro favor. Esta vez, necesita ver cuánto dinero ocupa en algunos ingredientes para su cocina, como palta, tomate y pan. Él tiene una estimación de cuántos kilos de cada ingrediente ocupará el próximo mes en Santiago y Viña, y tiene tres proveedores, que le dan los precios para cada ingrediente.

La siguiente matriz nos muestra las estimaciones en kilos para el próximo mes

$$E = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Palta} & \text{Tomate} & \text{Pan} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Santiago} \\ \text{Viña del Mar} \end{array}$$

mientras que la siguiente matriz nos muestra los precios por kilo de los proveedores

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Prov. 1} & \text{Prov. 2} & \text{Prov. 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1.100 & 900 & 1.050 \\ 800 & 830 & 870 \\ 750 & 735 & 650 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Palta} \\ \text{Tomate} \\ \text{Pan} \end{array}$$

¿Qué proveedor es más conveniente? ¿Qué podemos hacer para saber? Al igual que en nuestro caso anterior, podemos calcular el total del precio de cada producto multiplicado por la cantidad de producto, pero esta vez para cada proveedor y para cada ciudad. Por ejemplo, el proveedor 1 nos cobrará

$$\begin{aligned} \text{en Santiago } 650 \cdot 1.100 + 600 \cdot 800 + 980 \cdot 750 &= 1.930.000 \\ \text{en Viña } 480 \cdot 1.100 + 450 \cdot 800 + 840 \cdot 750 &= 1.518.000 \end{aligned}$$

El proveedor 2 nos cobrará

$$\begin{aligned} \text{en Santiago } 650 \cdot 900 + 600 \cdot 830 + 980 \cdot 735 &= 1.803.300 \\ \text{en Viña } 480 \cdot 900 + 450 \cdot 830 + 840 \cdot 735 &= 1.422.900 \end{aligned}$$

Por último, el proveedor 3 nos cobrará

$$\begin{aligned} \text{en Santiago } 650 \cdot 1.050 + 600 \cdot 870 + 980 \cdot 650 &= 1.841.500 \\ \text{en Viña } 480 \cdot 1.050 + 450 \cdot 870 + 840 \cdot 650 &= 1.441.500 \end{aligned}$$

Ahora bien, esto es muy parecido a lo que hicimos antes, sólo que una vez para cada columna de la matriz de precios. En el fondo, es como si hubiéramos realizado tres multiplicaciones de matriz por vectores columna, algo como

$$\begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.100 \\ 800 \\ 750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.930.000 \\ 1.518.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 900 \\ 830 \\ 735 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.803.300 \\ 1.422.900 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.050 \\ 870 \\ 650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.841.500 \\ 1.441.500 \end{pmatrix}$$

Cada uno de los resultados anteriores no se originó en realidad de tres vectores columna distintos, si no que de *una matriz que tenía tres columnas.* Esto implica que, en realidad, sería más lógico expresar el resultado como una sola matriz

$$\begin{pmatrix} 1.930.000 & 1.803.300 & 1.841.500 \\ 1.518.000 & 1.422.900 & 1.441.500 \end{pmatrix}$$

Recordemos que esta matriz surgió de la multiplicación de cada fila de la matriz de estimaciones, E, por cada columna de la matriz de precios, P, por lo que podemos escribir la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.100 & 900 & 1.050 \\ 800 & 830 & 870 \\ 750 & 735 & 650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.930.000 & 1.803.300 & 1.841.500 \\ 1.518.000 & 1.422.900 & 1.441.500 \end{pmatrix}$$

¿Es difícil de ver? Quizás, pero hay una visualización que puede ayudar a comprender el proceso: escribir la segunda matriz *más arriba* y el resultado entre las dos, como en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1.100 & 900 & 1.050 \\ 800 & 830 & 870 \\ 750 & 735 & 650 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.930.000 & 1.803.300 & 1.841.500 \\ 1.518.000 & 1.422.900 & 1.441.500 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Por qué motivo puede ser mejor ponerlo de esa forma? Porque cada elemento de la matriz resultante queda en el cruce de la fila y columna que le dieron origen. Por ejemplo

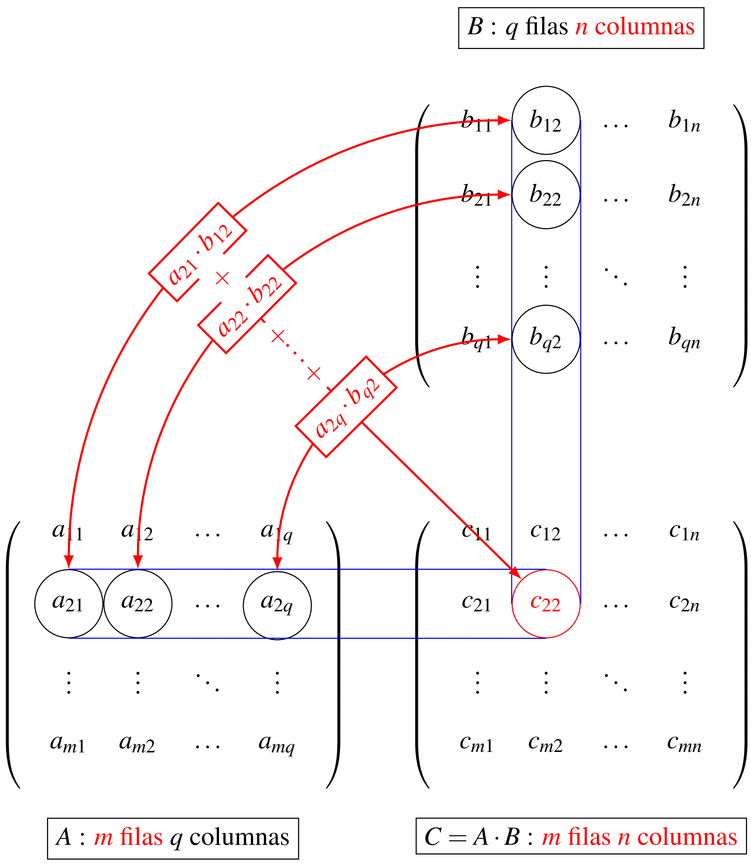
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1.100 & 900 & 1.050 \\ 800 & 830 & 870 \\ 750 & 735 & 650 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.930.000 & 1.803.300 & 1.841.500 \\ 1.518.000 & 1.422.900 & 1.441.500 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

¿Cómo llevaremos a cabo la multiplicación de dos matrices en general? Supongamos que tenemos dos matrices, A y B. La matriz A es de orden $m \times q$ y la matriz B es de orden $q \times n$.

La matriz $C = A \cdot B$ viene definida de modo que cada elemento surge de la combinación de una fila de la matriz A con una columna de la matriz B, es decir

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$$

En otras palabras, la multiplicación de matrices es *fila por columna*. Podemos visualizar ese proceso en el siguiente diagrama.



Es necesario que la cantidad de columnas de la primera matriz coincida con la cantidad de filas de la segunda matriz. De no ocurrir, la multiplicación no es posible.

Actividad 3.4 Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 21 & 32 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcula manualmente la matriz $D = A \cdot B$.
2. Calcula manualmente la matriz $E = B \cdot A$.
3. Compara las matrices D y E. ¿A qué conclusión llegas?

Guía 4.1

P1. La fábrica de bicicletas Expend produce dos modelos de bicicletas, M y N. La matriz A nos indica las cantidades de acero y aluminio que requiere cada bicicleta, expresadas en kg según el modelo a producir, mientras que la matriz B nos entrega un reporte de la cantidad de bicicletas producidas de ambos modelos para los dos primeros meses del año pasado.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{M} & \text{N} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Acero} \\ \text{Aluminio} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ene} & \text{feb} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 290 & 312 \\ 345 & 413 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{M} \\ \text{N} \end{array}$$

a) Indique el orden de cada matriz.

b) Determine manualmente la matriz $C = A \cdot B$.

c) Interprete los elementos c_{21} y c_{11}.

P2. Una pequeña cadena tiene restaurantes de comida rápida en Santiago, Concepción y Antofagasta, en los que vende hamburguesa, completos y malteada. En un fin de semana, las cantidades de cada comida según cada sucursal se distribuyeron de acuerdo con la matriz V, donde las filas corresponden a los productos y las columnas a las sucursales, mientras que los precios, en pesos, de cada producto están expresados en la matriz P.

$$V = \begin{pmatrix} 1.300 & 900 & 800 \\ 2.100 & 1.700 & 1.500 \\ 1.500 & 1.200 & 900 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3.600 & 900 & 1.500 \end{pmatrix}$$

Si $I = P \cdot V$

a) Indique el orden de las matrices P, V e I.

b) Determine manualmente la matriz I.

c) Interprete los elementos v_{32}, p_{12} e i_{13}.

Multiplicando matrices en Python

Tenemos dos maneras de multiplicar matrices usando Python. La más sencilla es usando la librería NumPy, que vimos al final de la guía anterior.

Ejemplo 1 en Google Colab

Ejemplo 1

Multipliquemos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Notemos que A tiene orden 3×2 y B tiene orden 2×4, por lo que la multiplicación $A \cdot B$ puede realizarse. La matriz resultante será de orden 3×4.

Usando NumPy, la multiplicación es muy sencilla

```
import numpy as np

# definimos ambas matrices como arrays de numpy
A = np.array([[4, 0],
              [1, 2],
              [7, 8]])

B = np.array([[6, 3, 2, 9], [1, 5, 4, 8]])

#listo!
C = A.dot(B)

print(C)
# el resultado es
# [[ 24  12   8  36]
#  [  8  13  10  25]
#  [ 50  61  46 127]]
```

Otra manera es hacerlo con listas de listas

Ejemplo 1 bis

```
# declaramos las matrices A y B
A=[[4,0],
   [1,2],
   [7,8]]
B=[[6,3,2,9],
   [1,5,4,8]]
# declaramos la matriz C, que contendrá el resultado
C=[[0,0,0,0],
   [0,0,0,0],
   [0,0,0,0]]

# hacemos dos ciclos for, el primero por las filas de C
# el segundo por las columnas de C
for i in range(3):
  for j in range(4):
    suma=0
    for k in range(2): # otro ciclo for, por las columnas de A
        # o filas de B
        # en el que combinamos los elementos correspondientes
      suma=suma + A[i][k]*B[k][j]
    C[i][j]=suma # asignamos la suma al elemento
  print(C[i])
```

Ejemplo 1 bis en Google Colab

Podríamos haber definido la matriz C como

```
for i in range(3):
 C.append([0]*4)
```

¿Cómo definir matrices mediante funciones de los índices en Python

A veces necesitamos definir los elementos de una matriz como una función de los índices. Por ejemplo, si la matriz M es de 2×2 y $m_{ij} = i + j$, entonces

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Podemos hacer esto usando NumPy con la función `fromfunction`

Ejemplo 2 en Google Colab

Ejemplo 2

Para definir la matriz anterior usando la función `fromfunction` debemos tener en cuenta que pide

- una función que defina los elementos de la matriz
- el tamaño de la matriz resultante

```
import numpy as np

M = np.fromfunction(lambda i, j: (i+1) + (j+1), (2,2))

print(M)
# el resultado es
# [[2. 3.]
#  [3. 4.]]
```

¿Qué es `lambda i, j: (i+1) + (j+1)`? Todo eso es el primer argumento, la función que define a los elementos de la matriz. `lambda i, j:` significa que definiremos una función, que por simplificar diremos que es local. `(i+1) + (j+1)` es nuestra función, la suma de los subíndices. ¿Por qué `i+1` y `j+1`? Porque Python comienza contando los índices en 0, mientras que en matemática partimos de 1. Finalmente, el segundo argumento de la función, `(2,2)`, significa que pedimos una matriz de 2 filas y 2 columnas.

Ejemplo 2 bis

El mismo ejemplo, esta vez usando listas de listas.

```
M=[] # declaramos la matriz M como una lista vacía

# a continuación agregaremos los elementos "0"
# para dimensionar la matriz M
for i in range(2):
  # por cada fila dejaremos una lista de 2 ceros
  # (1 cero por cada columna)
  M.append([0]*2)

for i in range(2):
  for j in range(2):
    fila=i+1 #corrigiendo el desfase del subíndice "i"
    columna=j+1 #corrigiendo el desfase del subíndice "j"
    M[i][j]=fila + columna
  print(M[i]) #se imprime en pantalla cada columna
```

Actividad 3.5 ¿Podrías hacer los ejercicios 1 y 2 pero esta vez en Python?

Guía 4.2

P3. Una fábrica para un mismo tipo de artículo eléctrico produce 2 modelos, A y B. Las filas de la matriz M, en orden, nos muestran la cantidad de transistores y resistores que se requieren por cada artículo, según cada modelo. Por otra parte, las filas de la matriz Q nos reportan las cantidades producidas de cada modelo para las 3 primeras semanas del mes pasado.

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 200 & 240 & 220 \\ 175 & 210 & 215 \end{pmatrix}$$

Además, considere las matrices $G = M \cdot Q$ y $H = Q \cdot M$.

a) Indique el orden de M y Q.

b) ¿Es posible calcular las matrices G y H? Justifique.

c) Determine e interprete g_{23} y g_{12}. Si decide calcular manualmente, no es necesario calcular toda la matriz G para obtener los elementos que se indican.

P4. Una compañía, que fabrica un determinado producto, tiene 4 plantas de producción y 5 bodegas de almacenamiento. La matriz $T = (t_{ij})$ nos indica las unidades de este producto que se generan mensualmente en la planta i, y que son transportadas a la bodega j para quedar almacenadas ahí durante ese mes que fueron producidas.

Además, tenemos la matriz $C = (c_{ij})$ que nos detalla para el primer semestre del presente año el costo en dólares de almacenar una unidad del producto durante el mes j en la bodega i.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{bodega 1} & \text{bodega 2} & \text{bodega 3} & \text{bodega 4} & \text{bodega 5} \end{array} \\ T = & \left(\begin{array}{ccccc} - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{planta 1} \\ \text{planta 2} \\ \text{planta 3} \\ \text{planta 4} \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \text{mes 1} & \text{mes 2} & \text{mes 3} & \text{mes 4} & \text{mes 5} & \text{mes 6} \end{array} \\ C = & \left(\begin{array}{cccccc} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{bodega 1} \\ \text{bodega 2} \\ \text{bodega 3} \\ \text{bodega 4} \\ \text{bodega 5} \end{array} \end{array}$$

Si estas matrices T y C están definidas respectivamente por las expresiones

$$t_{ij} = 100ij \;\; 1 \leq i \leq 4 \text{ y } 1 \leq j \leq 5$$
$$c_{ij} = 3i + 5j \;\; 1 \leq i \leq 5 \text{ y } 1 \leq j \leq 6$$

entonces

a) Indique el orden de cada matriz y analice si es posible realizar $C \cdot T$. Justifique su respuesta.

b) Determine todos los elementos que componen cada matriz.

c) Determine la matriz $G = T \cdot C$.

d) Interprete los elementos t_{14}, c_{52} y g_{35}.

e) ¿Cuánto cuesta almacenar una unidad en la bodega 4 durante marzo de este año?

f) ¿A cuánto asciende el total de dinero que gasta esta empresa por almacenar la producción mensual de la planta 2 durante el mes de abril?

P5. La matriz $A = (a_{ij})$ nos indica la cantidad de acciones tipo j, pertenecientes a un holding, que posee el inversionista i.

Por otra parte, la matriz $E = (e_{ij})$ nos detalla el valor unitario de la acción tipo i de este holding cotizado en euros durante el día hábil j de la semana pasada.

Las matrices A y E están definidas respectivamente por las expresiones

$$a_{ij} = 20ij, \;\; 1 \leq i \leq 15 \text{ y } 1 \leq j \leq 10$$
$$e_{ij} = 4i + j, 1 \leq i \leq 10 \text{ y } 1 \leq j \leq 5.$$

Además, se define la matriz $M = A \cdot E$.

a) Indique el orden de cada una de las tres matrices.
b) Determine *completamente* las matrices A, E y M.
c) Interprete los elementos $a_{14,10}$, e_{94} y m_{42}.
d) ¿Cuántas acciones tipo 9 tiene en su poder el accionista número 12?
e) ¿En cuánto está evaluado, para el miércoles de la semana pasada, el total de acciones que posee en este holding el inversionista 8?

Problemas de la sección

P1. Marcela, por instrucción de su nutricionista, debe seguir un régimen de 3 días. En los cuales, al desayunar sólo debe consumir galletas de agua y mermelada sin azúcar. En la matriz M se presenta un informe nutricional por 1 gramo de galleta de agua y 1 gramo de mermelada sin azúcar. Por otro lado, en la matriz G se indican las cantidades de gramos de ambos alimentos que debe consumir Marcela en el desayuno para los 3 días que dura este régimen.

$$M = \begin{array}{cc} \text{Galletas de agua (1 g)} & \text{Mermelada sin azúcar (1 g)} \\ \left(\begin{array}{cc} 4{,}04 & 0{,}39 \\ 69 & 4 \\ 61 & 2 \\ 804 & 66 \\ 73 & 11 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \text{Energía (kcal)} \\ \text{Proteínas (mg)} \\ \text{Grasa total (mg)} \\ \text{Carbohidratos (mg)} \\ \text{Sodio (mg)} \end{array} \end{array} \qquad G = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{día 1} & \text{día 2} & \text{día 3} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc} 30 & 45 & 50 \\ 45 & 60 & 75 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \text{Galletas de agua (1 g)} \\ \text{Mermelada sin azúcar (1 g)} \end{array} \end{array}$$

Si $R = M \cdot G$, entonces

a) Indique el orden de M, G y R.

b) Interprete los elementos m_{32} y g_{11}.

c) Determine e interprete los elementos r_{21} y r_{23}.

d) ¿Cuántos miligramos (mg) de sodio ingiere Marcela en el desayuno del tercer día?

P2. Este año la fábrica de bicicletas Expend (ver el problema 1 de esta guía) produce 10 modelos de bicicletas, y en el diseño de estos modelos se estan utilizando en distintas proporciones 6 materiales. De este modo, la matriz $M = (m_{ij})$ nos indica las cantidades, medidas en kilogramos, de material i que requiere cada bicicleta de modelo j, mientras que la matriz $P = (p_{ij})$ nos entrega un reporte de la cantidad de bicicletas producidas del modelo i durante el mes j del presente año. Considere que esta segunda matriz tiene información sólo de los 8 primeros meses.

Las matrices M y P vienen definidas por

$$m_{ij} = 1 + \frac{ij}{60}, \ 1 \leq i \leq 6 \text{ y } 1 \leq j \leq 10$$
$$p_{ij} = 300 + 15i + 21j, \ 1 \leq i \leq 10 \text{ y } 1 \leq j \leq 8$$

Si $F = M \cdot P$, entonces se pide que

a) Indique el orden de las matrices M, P y F.

b) Calcule totalmente la matriz F.

c) Interprete los elementos m_{59}, p_{46} y f_{24}.

d) ¿Cuántos kilogramos de material 3 fueron utilizados en total por esta empresa durante el mes de julio?

P3. Considere las matrices X, de orden 8×25, y Z, de orden 6×25. Los elementos de cada matriz están definidos por $x_{ij} = 5i + 2j$ y $z_{ij} = 26i - j$. Calcule la matriz $W = X \cdot Z^T$.