

מטלה - חלוקת חפצים בדידים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: חלוקה ללא קנאה מלבד החפץ הכי קטן

הגדרה: חלוקה של חפצים נקראת "ללא קנאה מלבד החפץ הכי קטן" (בקיצור EFX), אם לכל שני שחקנים א, ב, ולכל חפץ שנוריד מהסל של ב, שחקן א לא יקנא בשחקן ב.

- א. הראו שהתנאי EFX הוא ממש חזק יותר מהתנאי EF1 (ע"י דוגמה לחלוקה EF1 שהיא לא EFX).
- ב. יש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות (= לכל שחקן, ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל), וזהות (= לשני השחקנים יש אותם ערכים לכל החפצים). תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX.
- ג. יש שני שחקנים עם העדפות אדיטיביות, אבל לא בהכרח זהות. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה EFX.
- ד. יש שלושה שחקנים עם העדפות אדיטיביות לא זהות. הוכיחו או הפריכו: תמיד קיימת חלוקה EFX (היעזרו ב Google Scholar).

* שאלה 2: חלוקה כמעט-ללא-קנאה עם כמות זהה

נתונים n אנשים ו $m \cdot n$ חפצים. צריך לחלק את החפצים לאנשים כך ש:

- החלוקה היא ללא קנאה עד כדי חפץ אחד (EF1);
- כל אדם מקבל בדיוק m חפצים.

- א. הראו (בעזרת דוגמה פשוטה) שאלגוריתם גרף הקנאה לא מתאים למשימה זו.
- ב. הראו (בעזרת דוגמה פשוטה) שאלגוריתם מיקסום מכפלת הערכים לא מתאים למשימה זו.
- ג. תארו אלגוריתם אחר המבצע את המשימה. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שלכם.

שאלה 3: חלוקת תיקים בין מפלגות בקואליציה

לאחר הבחירות, שתי מפלגות החליטו להקים ממשלה ביחד, אבל הן בזבזו חודש שלם בויכוחים על איזה מפלגה תקבל איזה תיק. לאחר שהתייאשו מהויכוחים, הן פנו אליכם כדי שתעזרו להם להחליט.

א. הציעו אלגוריתם שיאפשר לשתי המפלגות להחליט על חלוקת-תיקים עם התכונות הבאות:

- יעילה פארטו.
 - מותר שתהיה רוטציה בין המפלגות בתיק אחד לכל היותר.
 - החלוקה תהיה הוגנת, בהתחשב בגדלים השונים של המפלגות.
- הגדירו במדויק את תכונת ההגינות, והוכיחו את נכונות האלגוריתם.

- ב. הדגימו את פעולת האלגוריתם שלכם על אוסף התיקים שהיו באחת מממשלות ישראל האחרונות (לבחירתכם), ועל שתי מפלגות לבחירתכם.

שאלה 4: חלוקה הוגנת ויעילה עם מספר שיתופים קטן ביותר

נתונים שני אנשים ו-m חפצים. יש למצוא חלוקה ללא-קנאה ויעילה-פארטו של החפצים, כך שמספר החפצים ה"נחתכים" (או נשארים בבעלות משותפת) הוא הקטן ביותר האפשרי.

א. הוכיחו שהבעיה היא NP-שלמה (כפונקציה של m). רמז:

https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_problem

ב. הוכיחו, שאם הערכים שהאנשים מייחסים לחפצים נבחרים באקראי (למשל כל ערך הוא מספר ממשי המתפלג אחיד בין 0 ל-1, כל ההגרלות בלתי-תלויות סטטיסטית), אז בהסתברות 1, הבעיה ניתנת לפתרון בזמן $O(m \log m)$.

* שאלה 5: תיכנות - יצירת גרף הקנאה

נתונה המחלקה הבאה:

```
class Agent:
    def item_value(item_index:int)→float: ...

    המחלקה מייצגת שחקן המשתתף במשחק חלוקה הוגנת. יש בה פונקציה אחת המתארת את הערך
    שהשחקן מייחס לחפץ שהאינדקס שלו הוא item_index.
    כיתבו פונקציה המייצרת את גרף הקנאה בחלוקה נתונה.

def envy_graph(agents:List[Agent], bundles:List[List[int]]): ...

    הפרמטר agents הוא מערך בגודל n המייצג את השחקנים.
    הפרמטר bundles הוא מערך באותו גודל - n - המייצג את החלוקה: bundle[i] הוא אוסף
    אינדקסי החפצים שמקבל שחקן i.
    הפונקציה מחזירה גרף של הספריה networkx של פייתון.
    הדגימו את הפונקציה שלכם על מספר קלטים מעניינים.
```