

מטלה - חלוקת שכר-דירה

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1. חלוקת שכר-דירה בעזרת אתר ספלידיט

באתר ספלידיט ישנה אפשרות לחלק שכר-דירה במודל הקרדינלי: <http://www.spliddit.org/apps/rent>

בעזרת האתר, מיצאו בעיית חלוקת שכר דירה לשלושה דיירים, שבה:

- א. כל השותפים משלמים בדיוק שליש משכר-הדירה;
 - ב. שותף אחד משלם אפס, ושני השותפים האחרים משלמים בדיוק חצי משכר-הדירה;
 - ג. שני שותפים משלמים אפס, והשותף השלישי משלם את כל שכר-הדירה.
 - ד [רשות]. אחד השותפים משלם מחיר שלילי.
- בכל אחד מהמקרים, הסבירו מדוע החלוקה המתקבלת היא הוגנת בהתאם למודל הקוואזי-ליניארי.

שאלה 2: בעיית תחנת המוניות

בתחנת מוניות עובדים n נהגים הנמצאים במקומות שונים. התחנה מקבלת $4n$ קריאות מנוסעים שונים. מנהל התחנה רוצה להקצות בדיוק 4 נוסעים לכל נהג. בנוסף, הוא רוצה לחסוך בדלק. כל נהג נמצא במקום אחר, ולכן לכל נהג דרושה כמות דלק שונה כדי להגיע לכל נוסע.

א. תארו אלגוריתם יעיל המוצא חלוקת נוסעים לנהגים, שבה הכמות הכוללת של דלק שהתחנה כולה צריכה להשקיע היא הקטנה ביותר.

• הקלט לאלגוריתם הוא מטריצה עם n שורות (שורה לכל נהג) ו- $4n$ עמודות (עמודה לכל נוסע); כל תא מתאר את כמות הדלק הדרושה לנהג בשורה, כדי לשרת את הנוסע בעמודה.

• הפלט הוא: עבור כל נהג, איזה 4 נוסעים הוא צריך לקחת.

הוכיחו שהאלגוריתם שלכם אכן מוצא השמה עם כמות הדלק המינימלית.

* ב [רשות]. ממשו את האלגוריתם בפיתון בעזרת הספרייה `networkx`. הדגימו את האלגוריתם על מספר קלטים.

שאלה 3. חלוקה הוגנת של ירושה עם בתים

איל הנדל"ן הנודע דונאלד דאק נפטר בשיבה טובה והוריש לארבעת ילדיו ארבעה בתים וכן סכום-כסף נכבד.

עליכם לעזור להם לחלק ביניהם את הירושה בהתאם לדרישות הבאות:

- כל אחד מהיורשים מקבל בית אחד בדיוק (וסכום-כסף כלשהו).
- אף יורש לא מקנא ביורשים האחרים.
- כל העיזבון מחולק בין היורשים.

א. כיתבו אלגוריתם, בעברית או בפסאודו-קוד, הפותר את הבעיה.

ב. הדגימו את האלגוריתם שכתבתם בסעיף א על מצב שבו ערכי הבתים בעיני היורשים הם (לפי הסדר):

- בית: א ב ג ד
- מיקי: 20, 40, 60, 80
- דייזי: 30, 50, 70, 90
- גופי: 40, 20, 80, 60
- פלוטו: 50, 30, 90, 70

וסכום הירושה הוא 1000. תארו בפירוט את פעולת האלגוריתם. הסבירו מי מקבל כל בית ואיך מתחלק הכסף.

שאלה 4: השמה ממקסמת סכום ערכים - סיבוכיות זמן ריצה

א. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הטוב ביותר המוכר כיום למציאת השמת חדרים לדיירים הממקסמת את סכום הערכים? (לפי ויקיפדיה).

* ב [רשות]. בדקו ע"י ניסוי, מהי (בקירוב) סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם `max_weight_matching` הממומש בספריה `networkx` של פייתון? (דרך אפשרית לבדוק היא להריץ את האלגוריתם על גרפים בגדלים שונים, לשרטט גרף של לוגריתם זמן הריצה כפונקציה של לוגריתם גודל הגרף, ולנסות להתאים פונקציה לגרף).

שאלה 5: יעילות פארטו בחלוקת שכר דירה

כזכור, בבעיית חלוקת המשאבים הוכחנו, שכל השמה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו. הוכיחו, שבבעיית חלוקת חדרים ושכר-דירה, גם הכיוון ההפוך נכון: כל השמה יעילה פארטו ממקסמת את סכום הערכים.