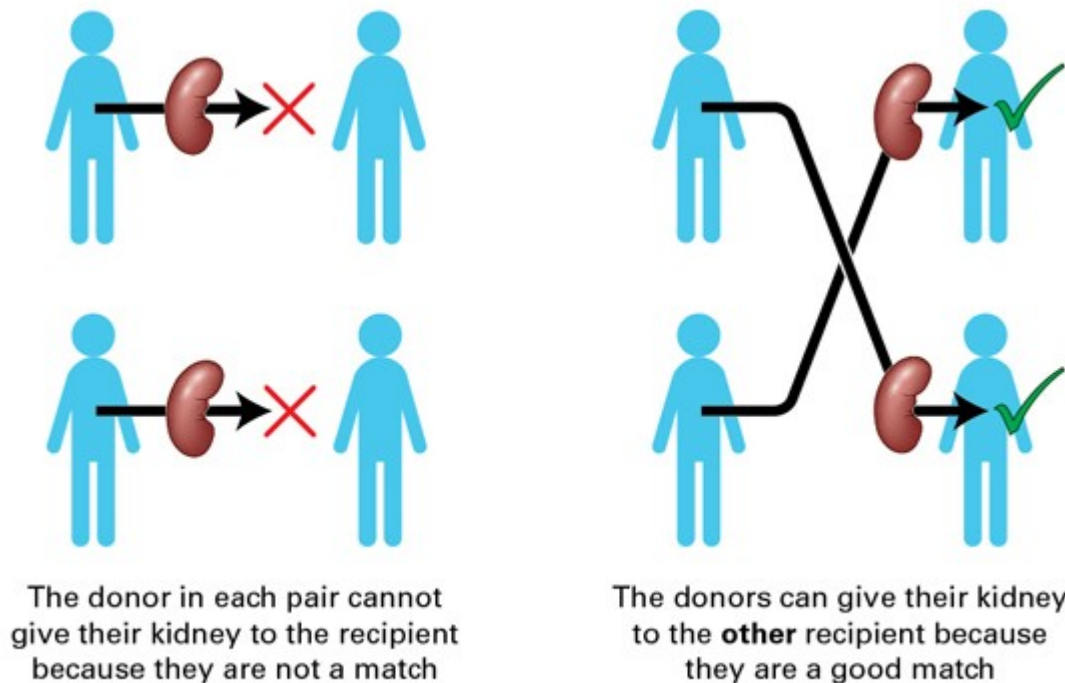


החלפת כליות - גילוי אמת

אראל סגל-הלוי



© UHN Patient Education

אלגוריתם מגלה-אמת לשידוך כליות?

מי הם השחקנים בבעיית שידוך הכליות?

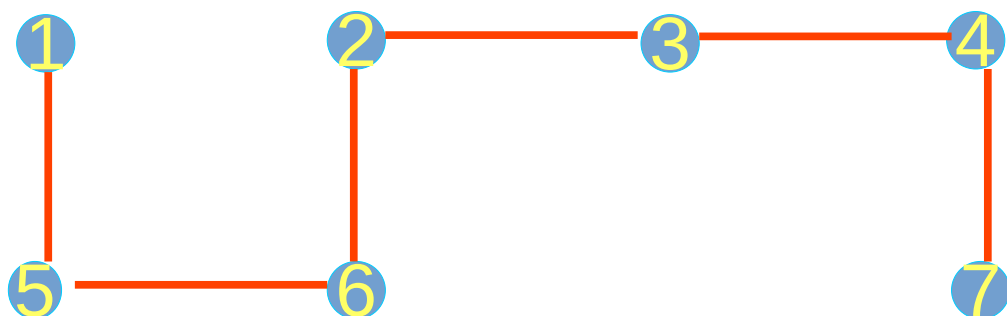
- **הזוגות** – יכולים לכל היותר להסתיר קשתות, אבל זה לא יעזור להם.
- **המרכזים הרפואיים** – יכולים להסתיר זוגות - לשדך אותם באופן פנימי.
- **האינטרס של המרכזים הרפואיים הוא לדאוג לחולים "שלהם" - שכמה שיותר חולים שלהם יקבלו כליה.**

תמריצים של מרכזים רפואיים

משפט: אין אלגוריתם שהוא גם יעיל פארטו וגם מגלה-אמת עבור המרכזים הרפואיים.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים אלגוריתם כזה. נראה מצב שבו, לכל שידוך שהאלגוריתם בוחר, קיים מרכז שיכול להסתיר זוגות, וכך להגדיל את מספר החולים "שלו" שמקבלים כליה. <--

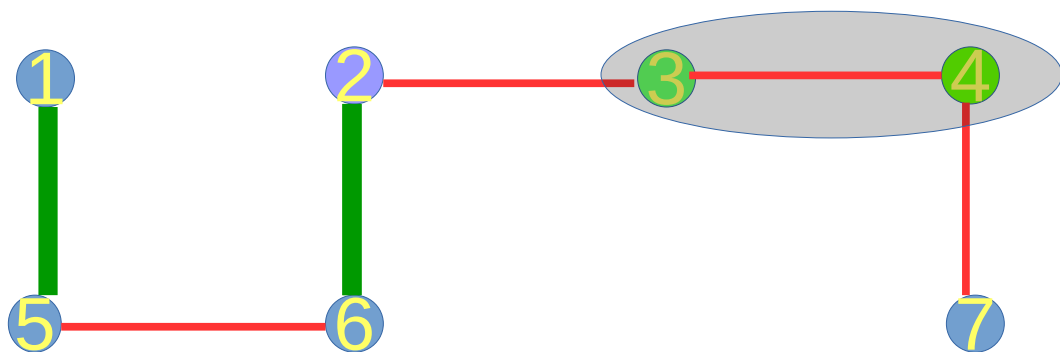
תמריצים של מרכזים רפואיים – הוכחה



רמב"ם

הדסה

נניח שהמצב
האמיתי הוא כזה,
שכל שידוך משאיר
לפחות חולה אחד
בלי כליה:

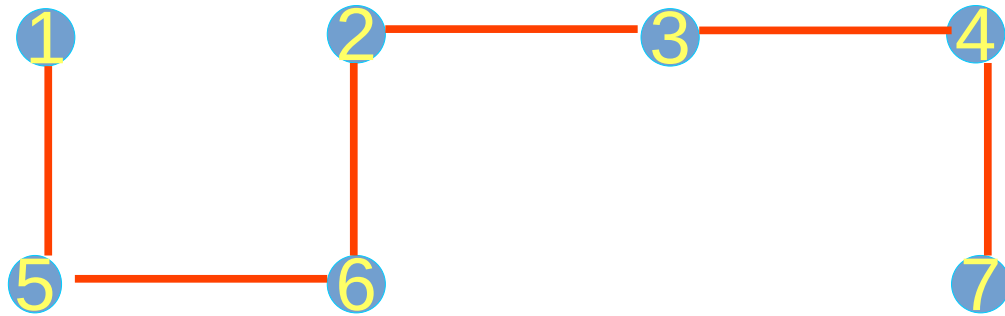


רמב"ם

הדסה

אם רמב"ם מסתיר
שני זוגות ומשדך
אותם אצלו, אז יש
רק שידוך
יעיל-פארטו אחד,
ובו כל 4 החולים של
רמב"ם מקבלים
כליה:

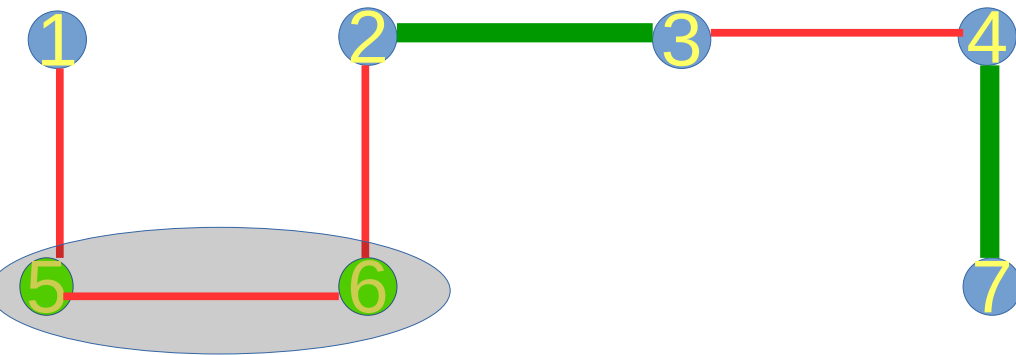
תמריצים של מרכזים רפואיים – הוכחה



רמב"ם

הדסה

נניח שהמצב
האמיתי הוא כזה,
שכל שידוך משאיר
לפחות חולה אחד
בלי כליה:

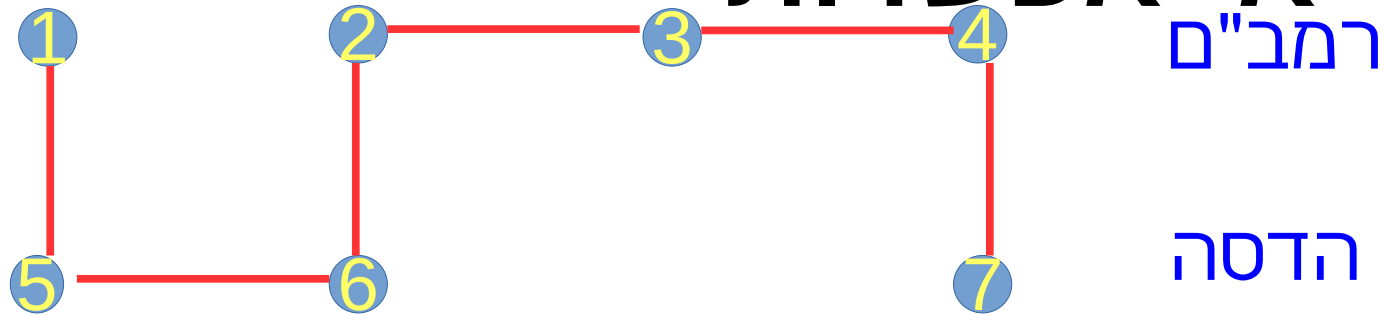


רמב"ם

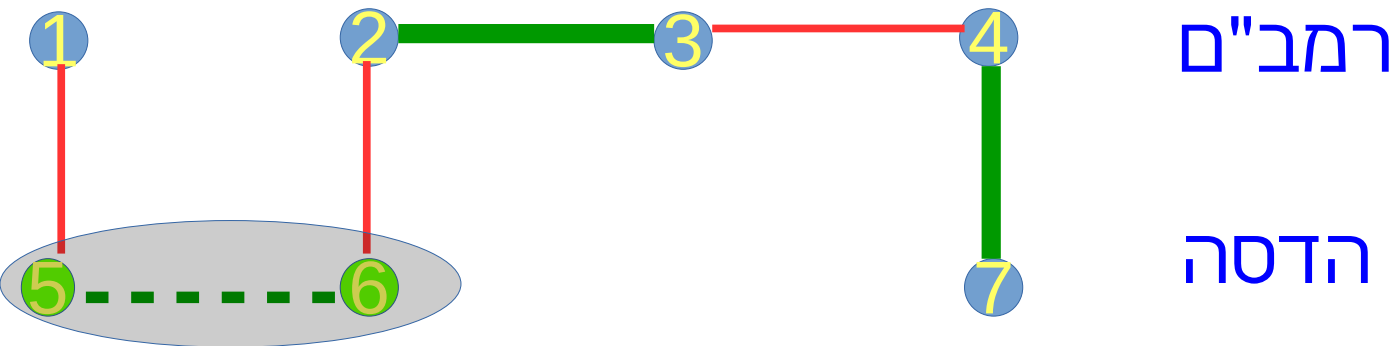
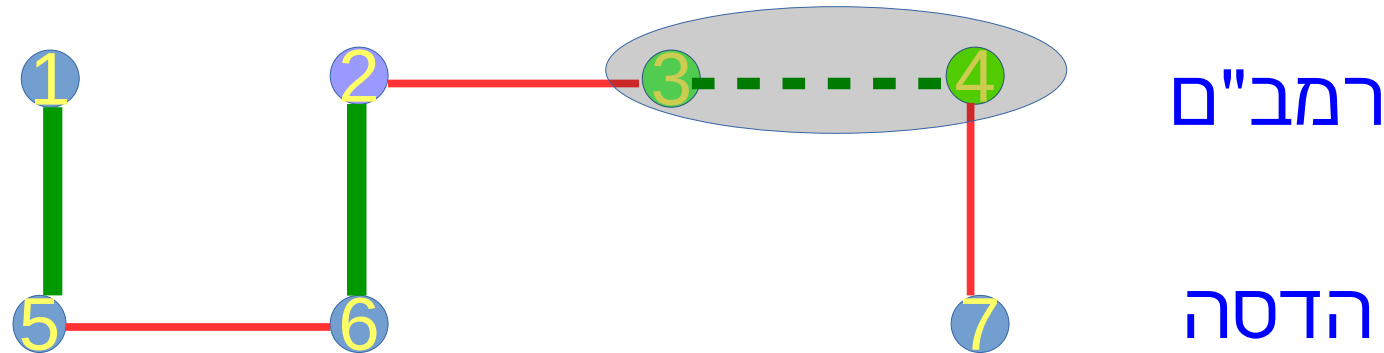
הדסה

אם הדסה
מסתירה שני זוגות
ומשדכת אותם
אצלה, אז יש רק
שידוך יעיל-פארטו
אחד, ובו כל 3
החולים של הדסה
מקבלים כליה:

תמריצים של מרכזים רפואיים – אי-אפשרות



לכן, לכל שידוך
שהאלגוריתם
בוחר, אחד
המרכזים יכול
להסתיר זוגות וכך
להכריח את
האלגוריתם לבחור
שידוך עדיף עבורו.



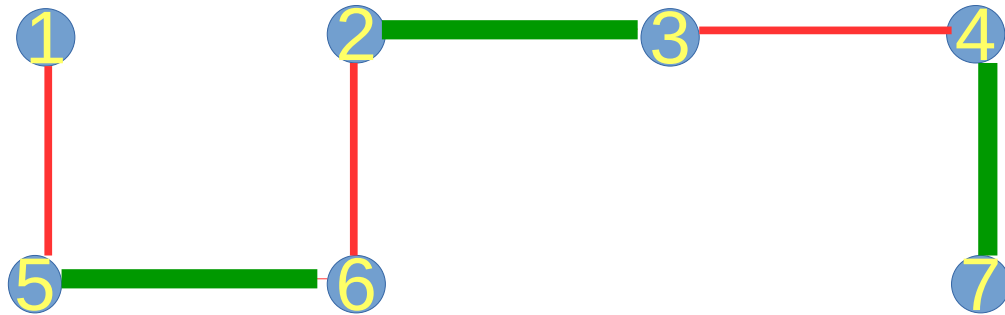
תמריצים של מרכזים רפואיים – קירוב 1/2

כיוון שאין אלגוריתם מגלה-אמת המשיג את השידוך הגדול ביותר, חיפשו אלגוריתם אמיתי המשיג שידוך שהוא גדול-ביותר-בקירוב.

האלגוריתם (אשלגי, פישר, קאש, פרקצ'יה, 2013):

- מחשבים את השידוך הגדול ביותר מבין כל השידוכים שבהם מספר הקשתות הפנימיות בכל מרכז רפואי הוא מקסימלי.
- דוגמאות <--

קירוב 1/2 - דוגמאות

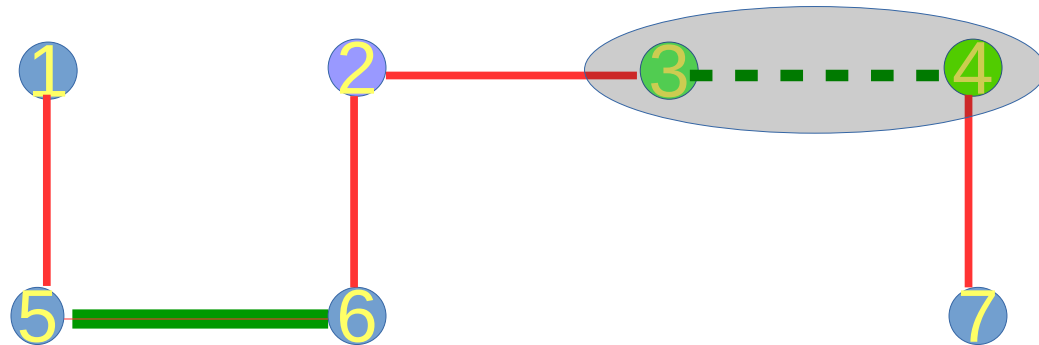


רמב"ם

מצב אמיתי:

האלגוריתם בוחר
שידוך מקסימלי.

הדסה

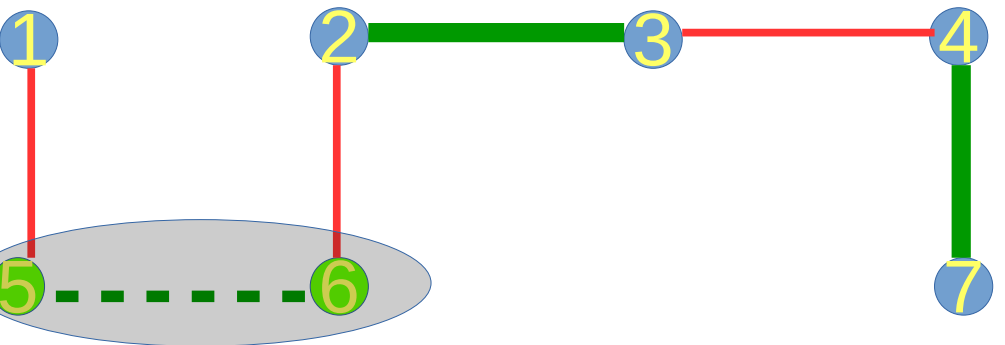


רמב"ם

הסתרה ברמב"ם.

האלגוריתם בוחר
שידוך קטן פי 2
מהמקסימלי;
רמב"ם לא מרויח.

הדסה



רמב"ם

הסתרה בהדסה:

הדסה לא
מרויחה.

הדסה

קירוב $1/2$ - מימוש

איך מחשבים?

- נותנים משקל לכל קשת:
- קשת פנימית – משקל $|E|$
- קשת בין מרכזים – משקל 1
- מחשבים את השידוך הכבד ביותר (אלגוריתם אדמונדס עם משקלים).
- השידוך ממקסם את מס' הקשתות הפנימיות,
- ובכפוף לזה – את מס' הקשתות הכולל.

קירוב $1/2$ - הוכחה

משפט: אלגוריתם אשלגי-פישר-קאש-פרוקצ'יה מחזיר תמיד שידוך שגודלו לפחות $1/2$ מהשידוך הגדול ביותר האפשרי.

הוכחה: נניח שהשידוך הגדול ביותר כולל n קשתות ($2n$ צמתים). **מכל קשת, לפחות צומת אחד נמצא בשידוך של האלגוריתם – אחרת האלגוריתם היה יכול להוסיף את הקשת ולהשיג שידוך גדול יותר.** לכן השידוך של האלגוריתם כולל לפחות n צמתים. ***

קירוב $1/2$ אמיתי – "הוכחה"

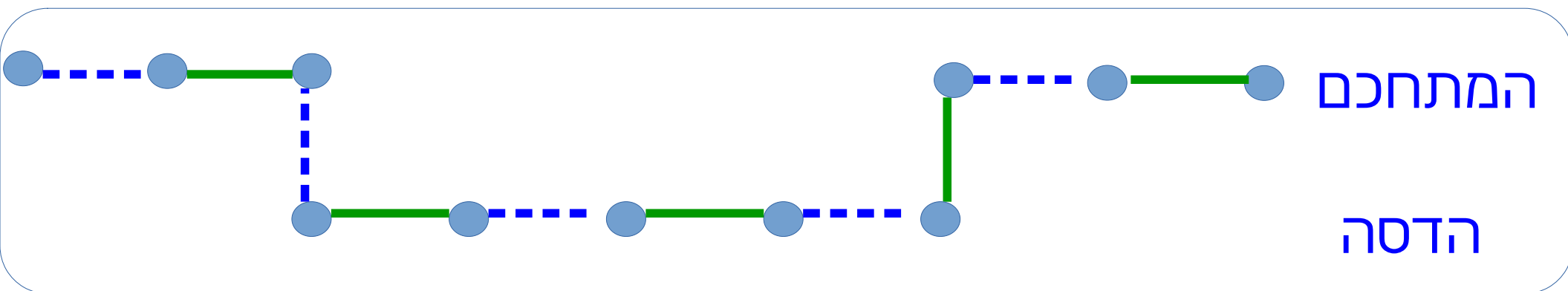
משפט: אלגוריתם אשלגי-פישר-קאש-פרוקצ'יה הוא מגלה-אמת כשיש שני מרכזים רפואיים.
ניש הכללה למספר כלשהו של מרכזים רפואיים, אבל האלגוריתם מסובך יותר – ראו במאמר].

"הוכחה" (מקוצרת מאד): יהי M השידוך כש אחד המרכזים אמיתי, ו- K השידוך כשהוא מתחכם.

- נסתכל על ההפרש הסימטרי בין M ל- K .
- כמו שראינו בלמה של ברג', רכיבי הקשירות הם צמתים מבודדים או מעגלים או מסלולים.
- מבודדים או מעגלים - לא יעזרו למתחכם.

קירוב $1/2$ אמיתי – "הוכחה"

המסלולים בהפרש הסימטרי חייבים להיראות כך:



כלומר:

- (1) כל קטע פנימי חייב להיות באורך זוגי – כי כל אחד מהשידוכים ממקסם את מספר הקשתות הפנימיות.
- (2) מס' הקשתות החיצוניות חייב להיות זוגי – כי כל שידוך ממקסם את מספר הקשתות בכפוף ל-1).
- (3) לכן המסלול מתחיל בקשת של K ומסתיים בקשת של M באותו צד; ולכן המתחכם לא מרויח. ***