

## מטלה - חלוקת עלויות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית \* מזכות בניקוד כפול.

### שאלה 1: חלוקת עלות-נסיעה מהאוניברסיטה

שאלה זו יש להגיש בצוותים של שלושה סטודנטים ומעלה.

נניח שאתם רוצים להשתתף בנסיעה במונית מהאוניברסיטה לבתים שלכם, לפי סדר קבוע מראש.

א. חשבו את עלויות-הנסיעה של כל אחד מכם ושל כל תת-קבוצה. לצורך החישוב אפשר להשתמש באתר [https://www.taxifarefinder.com/?country\\_code=il](https://www.taxifarefinder.com/?country_code=il).

ב. חשבו את ערך שאפלי בעזרת האלגוריתם הכללי (ממוצע עלויות שוליות בכל הסדרים).

ג. חשבו את ערך שאפלי בעזרת אלגוריתם לוינגר-חזון-עזריה.

### שאלה 2: אי-תלות בין שלושת העקרונות של שאפלי

הראו שלושה כללי-תשלום המקיימים את העקרונות הבאים:

- א. סימטריה ושחקן-אפס, אבל לא ליניאריות.
- ב. שחקן-אפס וליניאריות, אבל לא סימטריה.
- ג. ליניאריות וסימטריה, אבל לא שחקן-אפס.

### שאלה 3: אלגוריתמים מגלי-אמת לבחירת הנוסעים

עד עכשיו הנחנו שכל השחקנים משתתפים בנסיעה. עכשיו, נניח שכל שחקן  $i$  מפיק מהנסיעה תועלת של  $v_i$ , ואם הנסיעה יקרה יותר – הוא לא רוצה בכלל לנסוע. אנחנו רוצים לבחור תת-קבוצה של שחקנים, כך שסכום הערכים הכולל (= סכום הערכים של הנוסעים פחות עלות הנסיעה) הוא הגדול ביותר.

א. בחרים את הנוסעים בעזרת אלגוריתם וק"ג. הראו דוגמה שבה האלגוריתם לא מאזן תקציבית (סכום התשלומים לא מכסה את עלות הנסיעה).

ב. מחליטים מראש, שעלות הנסיעה תתחלק בין הנוסעים לפי ערך שאפלי, ואז בחרים את הנוסעים בעזרת אלגוריתם וק"ג. הראו דוגמה שבה האלגוריתם לא מעודד-השתתפות (יש נוסע שהתועלת שלו שלילית).

ג. בוחרים את הנוסעים בעזרת אלגוריתם וק"ג, ואם צריך עוד כסף כדי לכסות את עלות הנסיעה – גובים אותו מהנוסעים באופן שיויוני. הראו דוגמה שבה האלגוריתם לא מגלה-אמת.

## \* שאלה 4: סדר הורדה לא קבוע

א. כיתבו קוד בפייתון, המקבל כקלט גרף של מקומות (DiGraph) ורשימת נוסעים, ומחשב את סדר הורדת הנוסעים שבו העלות הכוללת היא הנמוכה ביותר. כותרת הפונקציה:

```
def optimal_order(road_graph:DiGraph, source:str, targets:Set[str]):
```

העזרו בקוד מההרצאה כדי ללמוד על פונקציות שימושיות של המחלקה DiGraph.

הניחו שהנהג צריך לצאת מהנקודה source, לעבור בכל הנקודות שברשימה targets, ולחזור בסוף ל source. הפונקציה צריכה לכתוב את המסלול האופטימלי, למשל:

The optimal order is 0 -> a -> d -> c -> b -> 0

ב. הרחיבו את הפונקציה של סעיף א כך שתחליט גם האם עדיף לשלוח מונית אחת או שתי מוניות (מאותו מקום). פלטים לדוגמה:

Get one taxi. The optimal order is 0 -> a -> d -> c -> b -> 0

או:

Get two taxis.

The optimal order for taxi 1 is 0 -> a -> d -> 0.

The optimal order for taxi 2 is 0 -> c -> b -> 0.

נסו לכתוב אלגוריתם יעיל ככל האפשר. מותר לכתוב אלגוריתם עם סיבוכיות זמן ריצה מעריכית.

## שאלה 5: חלוקת רווחי עסק

כדי להקים עסק, צריך מנהל אחד ו-n עובדים.

הרווח של העסק הוא 1000 כפול מספר העובדים (אם יש מנהל) ו-0 (אם אין מנהל).

לפי כלל שאפלי, איך יתחלקו רווחי העסק בין המנהל לבין העובדים?

הזרקה: חשבו קודם את הערך עבור מנהל אחד ועובד אחד, ועבור מנהל אחד ושני עובדים, ואז הכלילו את הפתרון ל-n עובדים.