

מטלה – תקציב השתתפותי

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית * מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: תכונות של אלגוריתם עזיז-לי-טלמון

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם לתקצוב פרופורציונלי שלמדנו בשיעור.

א. האם האלגוריתם יעיל פארטו? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

ב. האם האלגוריתם מגלה-אמת? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

ג. נניח שכל אזרח צריך לשלם L/n תמורת הזכות להשתתף באלגוריתם. האם האלגוריתם מעודד השתתפות? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

שאלה 2: אלגוריתם לחלוקת המושבים בכנסת

ניתן להשתמש באלגוריתם עזיז-לי-טלמון על-מנת להחליט על חלוקת המושבים בכנסת בין רשימות-המועמדים: לכל מושב יש עלות של 1, התקציב הכולל הוא 120, וכל אזרח המצביע לרשימה מסוימת – נחשב כאילו שהוא מצביע אוטומטית לכך שכל 120 המושבים יינתנו לרשימה שהצביע עבורה. לצורך פשטות, הניחו בשאלה זו שאין אחוז חסימה ואין הסכמי עודפים.

א. הדגימו את פעולת האלגוריתם על 3 מפלגות: תארו כמה קולות קיבלה כל מפלגה, וכמה מושבים תקבל.

ב. השוו בין התוצאה המתקבלת מהאלגוריתם לבין התוצאה המתקבלת משתי השיטות המקובלות לחלוקת מושבים: שיטת "השארית הגדולה ביותר" ושיטת בדר-עופר. לפרטים על שתי השיטות, ראו בוויקיפדיה בערך "חוק בדר-עופר".

שאלה 3: בחירות מקדימות למפלגה מאוחדת

[נכתב בכסלו ה'תש"פ]

מפלגה רוצה לקיים בחירות מקדימות, ולהבטיח ייצוג הוגן לכל תת-המגזרים של בוחרים המפלגה, בהתאם לגודלו היחסי של כל תת-מגזר.

הבחירות המקדימות במפלגה מתנהלות בשיטת "בחירת אישור" (approval voting): כל בוחר מקבל טופס עם רשימת כל המועמדים, ומסמן "וי" ליד המועמדים שהוא תומך בהם. אין הגבלה על מספר המועמדים שמותר לסמן.

א. סקרי דעת-קהל קובעים, שהמפלגה המאוחדת תקבל בדיוק L מנדטים. תארו אלגוריתם, המקבל כקלט את הצבעות הבוחרים בבחירות המקדימות, ומחזיר כפלט רשימה של L מועמדים שצריכים להיכנס ל- L המקומות הראשונים.

ב. הגדירו פורמלית את המושג "ייצוג הוגן", והוכיחו שהאלגוריתם מסעיף א אכן מבטיח ייצוג הוגן.

* ג. סקרי דעת-קהל קובעים, שהמפלגה המאוחדת תקבל מספר כלשהו של מנדטים בין 1 ל-L, בהסתברות 1 חלקי L לכל אפשרות (הניחו שאין אחוז-חסימה). תארו אלגוריתם, המקבל כקלט את הצבעות הבוחרים בבחירות המקדימות, ומחזיר כפלט רשימה של L מועמדים שצריכים להיכנס ל-L המקומות הראשונים, ובאיזה מקום כל אחד צריך להיכנס.

שאלה 4: מערכת לתיאום תרומות לעמותות

במדינה מסויימת יש 100 עמותות. כל אזרח במדינה תומך בחלק מהעמותות האלו אך לא בכולן. כל אזרח במדינה מעוניין לתרום סכום-כסף כלשהו לעמותות שהוא תומך בהן בלבד. סכום התרומה הרצוי משתנה מאזרח לאזרח. רמת השמחה של כל אזרח במדינה שווה לסכום הכולל של תרומות הניתנות לעמותות שהוא תומך בהן (מכל התורמים יחד).

עליכם לתכנן מערכת שתתאם את התרומות של האזרחים השונים, בהתאם לדרישות הבאות:

1. רמת השמחה של כל אזרח המשתתף במערכת היא גדולה לפחות כמו רמת השמחה שלו אילו לא היה משתתף.
 2. האלגוריתם מעודד כל אזרח לגלות את הרשימה המדויקת של העמותות שהוא תומך בהן.
 3. החלוקה היא יעילה-פארטו ביחס לקבוצת החלוקות שבהן כל אזרח תורם רק לעמותות שהוא תומך בהן.
- א. תארו בפירוט את הקלט והפלט של המערכת: איך נראה מסך-הקלט המוצג לכל אזרח, ומה בדיוק צריך להקליד שם? איך נראה הפלט המוצג לכל אזרח? צרפו ציורי מסכים לדוגמה.
- ב. תארו אלגוריתם המקיים את הדרישות. נמקו את בחירתכם. הדגימו את פעולת האלגוריתם על:
- אזרח א תומך בעמותות ע,פ ומוכן לתרום 100;
 - אזרח ב תומך בעמותות פ,צ ומוכן לתרום 200;
 - אזרח ג תומך בעמותות צ,ק ומוכן לתרום 300.

שאלה 5: תיאום תרומות עם פונקציית-תועלת מינימום

כשלמדנו על תיאום תרומות בהרצאה, הנחנו שהתועלת של כל תורם שווה לסכום התרומות לפריטים שהוא תומך בהם. לדוגמה, אם עמי תומך בפריטים א, ב, ההשקעה הכללית בפריט א היא 4000 ובפריט ב 2000, אז התועלת של עמי היא 6000.

בשאלה זו, נניח שהתועלת של כל תורם שווה לתרומה הקטנה ביותר לפריט שהוא תומך בו. בדוגמה למעלה, התועלת של עמי היא 2000.

א. הוכיחו שבמצב זה, האלגוריתם האוטיליטרי (המחלק את כל התרומות לפריט שיש לו הכי הרבה תומכים) אינו יעיל פארטו.

* ב. פתחו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה פארטו. הדגימו את פעולת האלגוריתם והוכיחו את נכונותו.