

מטלה - שידוכים יציבים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית * מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1. שידוכים עם כמה מקומות בכל מחלקה

נניח שבכל מחלקה יש מקום לשלושה סטודנטים.

א. הגדירו באופן פורמלי את המושג "שידוך יציב" במצב זה.

ב. הדגימו את פעולת אלגוריתם "קבלה על תנאי" על שתי מחלקות וחמישה סטודנטים.

ג. רפי ואביבה הם שניים מתוך חמשת הסטודנטים מהסעיף הקודם. הם זוג, יש להם סדר עדיפות זהה על המחלקות, והם חייבים להיות באותה מחלקה. האם אלגוריתם "קבלה על תנאי" עדיין מחזיר שידוך יציב?

שאלה 2: כמה שידוכים יציבים יש?

כשיש 3 סטודנטים ו-3 מחלקות, יש 6 שידוכים אפשריים (3 עצרת). כמה מהם יציבים?

א. הראו דוגמה שבה יש רק שידוך יציב אחד.

ב. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 2 שידוכים יציבים.

ג. הראו דוגמה שבה יש בדיוק 3 שידוכים יציבים.

ד. האם ייתכן שכל 6 השידוכים הם יציבים? אם כן - הראו דוגמה, אם לא - הוכיחו.

שאלה 3: שידוך יציב ויעילות

א. הוכיחו שכל שידוך יציב הוא יעיל-פארטו, אבל ההיפך לא נכון.

ב. נניח שכל סטודנט מייחס ערך מספרי לכל מחלקה, כאשר המחלקה הכי גרועה בעיניו מקבלת 1, המחלקה הבאה מקבלת 2, וכו' (אם יש m מחלקות אז המחלקה הכי טובה מקבלת m). גם כל מחלקה מייחסת ערך מספרי לכל סטודנט באותו אופן. האם כל שידוך יציב ממקסם את סכום הערכים? הוכיחו או הראו דוגמה נגדית.

* שאלה 4: שידוכים יציבים עם אדישות

בשיעור הנחנו, שלסטודנטים ולמחלקות יש סדרי עדיפות חזקים (ללא אדישות). במציאות ייתכן שסדרי העדיפות הם חלשים, כלומר ייתכן שסטודנט מסוים אדיש בין שתי מחלקות או יותר (מדרג אותן באותו מקום), ושמחלקה מסוימת אדישה בין שני סטודנטים או יותר.

בדף ויקיפדיה "Stable marriage with indifference" מתוארות שלוש הגדרות שונות למושג "שידוך יציב" במצב זה.

- א. תנו דוגמה לשידוך "סופר יציב".
- ב. הוכיחו שכל שידוך "סופר יציב" הוא גם "יציב חזק", אבל ההיפך לא תמיד נכון.
- ג. הוכיחו שכל שידוך "יציב חזק" הוא גם "יציב חלש", אבל ההיפך לא תמיד נכון.
- ד. מבין שלוש ההגדרות הללו, איזה הגדרה/הגדרות גוררת יעילות פארטו? הוכיחו.

שאלה 5: שידוך יציב בפייתון

ממשו בשפת פייתון את אלגוריתם "קבלה על תנאי". דגשים:

- הגדרה נכונה של הקלט והפלט;
- בדיקות-יחידה בעזרת `doctest`.