

"ונחלתם אותה איש כאחיו" (יחזקאל מ"א 14)

חלוקה הוגנת עם שיתוף מינימלי Fair Division with Minimal Sharing

אראל סגל-הלוי



חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: בית).

פתרונות מקובלים:

(1) הוספת כסף למערכת.

דוגמה: אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה.

(2) חלוקה ללא-קנאה-בקירוב.

דוגמה: חלוקת תכשיטים ומקומות בקורסים.

(3) שיתוף מספר מינימלי של חפצים.

דוגמה: אלגוריתם "המנצח המתוקן".

איך "חותכים" חפץ בדיד?

החפץ שצריך "לחתוך" נשאר בבעלות משותפת.

לא קל, אבל בדרך-כלל אפשרי:

- ילדים - משמורת משותפת;
- דירת מגורים – השכרה וחלוקת הרווחים;
- דירת נופש, רכב – שימוש בזמנים שונים;
- חפצים לא יקרים - הגרלה;
- פשרה יצירתית כלשהי.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

נתונים:

- שני שותפים (למשל: דונאלד ואיוואנה).
- m חפצים או נושאים שיש עליהם מחלוקת.
- כל שותף מייחס ערך באחוזים לכל נושא.

האתגר – להחליט מי יקבל כל חפץ/נושא כך ש:

- לא תהיה קנאה.
- התוצאה תהיה יעילה פארטו.
- נצטרך לחתוך/לשתף חפץ אחד לכל היותר.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

ניסיון ראשון: אחד מחלק, השני בוחר.

- אין קנאה; חפץ אחד נחתך; אבל לא יעיל פארטו.

30	20	30	20	דונאלד:
20	40	10	30	איואנה:

ניסיון שני: כל חפץ נמסר למי שהכי רוצה אותו.

- יעיל פארטו, אף חפץ לא נחתך; אבל יש קנאה.

30	30	30	10	דונאלד:
16	18	20	40	איואנה:

חלוקת חפצים בין שני אנשים

ניסיון שלישי: מיקסום מכפלת הערכים.

• אין קנאה; יעיל פארטו;

אבל - לא ברור כמה חפצים נחתכים.

– עלול לגרום לכך שיהיה שיתוף במספר רב של חפצים – דונאלד ואיוואנה לא יוכלו להיפרד..

אלגוריתם "המנצח המתוקן" (Adjusted Winner) Brams and Taylor, 1996

- א. סדר חפצים בסדר עולה של היחס דונאלד/איואנה.
 - ב. אתחול: תן את כל החפצים לדונאלד.
 - ג. העבר חפצים לאיואנה לפי הסדר, עד ש:
 - (1) הסכום של דונאלד שווה לסכום של איואנה, או -
 - (2) יש חפץ אחד שאם "נחתוך" אותו הסכום ישתווה.
- ראו גליון אלקטרוני מצורף winner.ods.

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו.

הוכחה: יהי r יחס-הניקוד של החפץ האחרון שהועבר מדונאלד לאיואנה ($r > 1$). [היחס הגדול

ביותר]. נכפיל את הניקוד של איואנה ב- r .

עכשיו בחלוקה הסופית, כל חפץ נמסר למי

שנותן לו ניקוד מירבי. מכאן - החלוקה הסופית

ממקסמת את הסכום: $r \cdot v_i + v_d$.

כל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה של הערכים, היא יעילה פארטו. ***

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: לשני השותפים ניקוד שווה.

אילו הניקוד היה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלף וזה היה שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. ***

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

מקורות:

- Brams and Taylor: Fair Division (1996 book), The Win-Win Solution (1999 book).
- Brams, Steven J.; Togman, Jeffrey M. (1996).
"Camp David: Was The Agreement Fair?".
- הקורס של ויליאם גסרך – כולל מצגות סטודנטים על יישומים של האלגוריתם במקרים שונים.
- האתר של אוניברסיטת ניו-יורק – כולל הדגמה חיה ואפשרות לשלם כדי לקבל הסכם פורמלי.
- <http://fairoutcomes.com/fd.html>

שיתוף מספר מינימלי של חפצים

אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר חלוקה יעילה והוגנת עם שיתוף של חפץ אחד לכל היותר.

שיתוף זה לא נוח. לכן נעדיף חלוקה יעילה והוגנת בלי שיתוף בכלל, אם אפשר.

משפט: כל חלוקה יעילה פארטו בין שני אנשים, מתקבלת ע"י סידור החפצים בסדר עולה של יחס הערכים, ו"חיתוך" הסדרה בנקודה כלשהי.

(מסקנה: אם יחס-הערכים הוא שונה לכל חפץ, אז

אלגוריתם "המנצח המתוקן" ימצא חלוקה

יעילה-פארטו וללא-קנאה בלי שיתוף כלל, אם-ורק-אם קיימת חלוקה כזאת!).

שיתוף מספר מינימלי של חפצים

הוכחת המשפט: נניח שדונאלד קיבל את חפץ 1 או חלק ממנו, ואיוואנה קיבלה את חפץ 2 או חלק ממנו, ויחס הערכים הוא לא לפי הסדר הנכון:

$$r_1 = v_{d1} / v_{i1} < v_{d2} / v_{i2} = r_2$$

נעביר קצת (y) חפץ 1 מדונאלד לאיוואנה בתמורה לקצת (z) חפץ 2. התנאים לשיפור פארטו:

$$z v_{d2} > y v_{d1} \qquad y v_{i1} > z v_{i2}$$

התנאי לכך שיש פתרון לשני האי-שיויונים יחד הוא:

$$z > y(v_{d1}/v_{d2}) > z(v_{i2}/v_{i1})(v_{d1}/v_{d2}) = z r_1 / r_2$$

לדוגמה: $z = y * \text{sqrt} [(v_{d1} * v_{i1}) / (v_{d2} * v_{i2})]$.

חלוקת חפצים בדידים - טרילמה

יש קנאה	דרוש שיתוף של חפץ	דרוש כסף	
לא	לא	כן	אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה
כן	לא	לא	מיקסום מכפלת הערכים
לא	כן	לא	המנצח המתוקן

שאלה פתוחה

איך אפשר להכליל את
אלגוריתם המנצח המתוקן
לשלושה משתתפים או יותר?