

## אלגוריתמים מגלי-אמת (truthful algorithms)

באלגוריתמים שלמדתם עד עכשיו, הקלט תמיד היה ידוע. אבל במציאות זה לא תמיד כך. כמה דוגמאות:

1. נתונה רשת-תקשורת. צריך להעביר שדר כלשהו מנקודה א לנקודה ב. לכל קשת ישנה עלות-תעבורה שונה. צריך למצוא את המסלול הזול ביותר. אם העלויות ידועות (מידע משותף – common knowledge), אז אפשר להשתמש באלגוריתם דייקסטרה. אבל לפעמים כל קשת שייכת למישהו (נניח, כל קשת היא נתב השייך לחברת-תקשורת כלשהי), והעלות של כל קשת היא מידע פרטי (private information) של בעל הקשת. במקרה זה, לבעל-הקשת עלול להיות אינטרס להגיד עלות גבוהה או נמוכה יותר מהעלות המגלה-אמתת, כדי לגרום לכך שהמסלול הזול ביותר יעבור/לא יעבור דרכו.

2. נתון דף רשת של תוצאות חיפוש (נניח בגוגל), או דף פייסבוק. צריך להחליט איזה פרסומות לשים בדף. לכל מפרסם יש ערך אחר "קליק" על הפרסומת שלו. אנחנו רוצים לשים בדף פרסומות ששיגו סכום ערכים גדול ביותר (כדי שהלקוחות יהיו מרוצים). אם הערכים ידועים לכולם – אפשר להשתמש באלגוריתם חמדני: מסדרים את המפרסמים לפי סדר יורד של ערך, שמים את הערך הגבוה ביותר במיקום הגבוה ביותר, וכו'. אבל אם הערכים הם מידע פרטי – יהיה אינטרס לכל מפרסם להגיד שהערך שלו הוא הגדול ביותר.

3. נתון זמן מסויים המוקצב לשידורי פרסומות, נניח ברדיו או בטלביזיה. יש כמה מפרסמים, ולכל מפרסם יש מודעה באורך שונה (בשניות), וגם ערך שונה להשמעת המודעה שלו. האורכים ידועים לכולם. אם גם הערכים ידועים לכולם, זו פשוט בעיית התרמיל (knapsack). אבל מה אם הערכים לא ידועים?

בשיעורים הקרובים נלמד על אלגוריתמים, שלא רק פותרים בעיה נתונה, אלא גם מעודדים את המשתתפים להגיד את הערך האמיתי שלהם.

**הגדרה:** אלגוריתם נקרא **מגלה-אמת** (truth-revealing) או **אמיתי** (truthful) אם לכל משתתף באלגוריתם כדאי תמיד להגיד את הערכים המגלה-אמתים שלו, בלי קשר לשאלה מה עושים האחרים.

- הערה: בספרות הכלכלית, אלגוריתם מגלה-אמת נקרא גם מנגנון מגלה-אמת (truthful mechanism), חסין אסטרטגיה (strategyproof), תואס-תמריצים (incentive-compatible), לא-ניתן-למניפולציה (non-manipulable), ועוד.

האם, לכל הבעיות האלגוריתמיות שתיארנו למעלה, קיים אלגוריתם מגלה-אמת?

לפני שנתייחס לבעיות הללו, נחזור לבעיה הרבה יותר פשוטה – בעיית מציאת מקסימום. נתון חפץ, ואני רוצה לתת אותו לאדם שהערך שלו עבורו הוא הגבוה ביותר. אם הערכים הם מידע ציבורי – מריצים אלגוריתם לחישוב מקסימום שלמדתם בקורס מבוא לחישוב. מה עושים אם הערכים הם מידע פרטי?

- מתברר שזו בעיה שחשבו עליה כבר לפני שנים רבות, וכדי לפתור אותה, המציאו את המכרזים.

## מכרזים

מכרזים היו קיימים עוד מימי האימפריה הבבלית. המכרזים המתועדים הראשונים היו מכרזים שבהם בבלים נהגו למכור את בנותיהם במכרז לחתן המרבה במחיר. בתקופת האימפריה הרומית נהגו למכור שלל-מלחמה במכירה פומבית. פעם אחת, האימפריה הרומית כולה הועמדה למכירה פומבית. זה קרה

בשנת 193 לספה"נ, אחרי שהקיסר נרצח. המשמר הפריטוריאני (שומרי הראש של הקיסר) הכריזו שהם יתנו את הכתר למרבה במחיר. הזוכה החזיק בכתר כ-9 שבועות עד שנרצח גם הוא...

בימי הביניים מכרזים היו קצת פחות נפוצים. הם חזרו לאופנה בסביבות המאה ה-17, אז התחילו באנגליה למכור יצירות-אומנות במכרזים פומביים.

היום, החשיבות של מכרזים עולה במהירות. ממשלות משתמשות במכרזים כדי למכור משאבים ציבוריים, כגון קרקעות או תדרי-שידור או זכויות קידוח במים הכלכליים. חברת אי-ביי, שהוקמה בשנת 1995, איפשרה לכל אחד לבצע מכרז על חפצים שיש לו בבית. חברות המפעילות מנועי-חיפוש מוכרות מקומות על הדף למפרסמים. בכל רגע מתבצעים מיליוני מכרזים כאלו בו-זמנית באופן אוטומטי בכל רחבי העולם.

## סוגי מכרזים

ישנם כמה סוגים נפוצים של מכרזים:

- מכרז אנגלי - מתחילים במחיר נמוך. כל אחד מהמשתתפים יכול להעלות את המחיר. מי שהמחיר שלו נשאר אחרון - זוכה.
- מכרז יפני - מתחילים במחיר נמוך. הכרוז מעלה את המחיר בצעדים קבועים (נניח, בצעדים של 10 ין). כל אחד יכול לפרוש בכל עת. האחרון שנשאר אחרי שכולם פרשו - זוכה.
- מכרז הולנדי - מתחילים במחיר גבוה. הכרוז מוריד את המחיר בצעדים קבועים. הראשון שמרים את היד - זוכה.
- מכרז מחיר ראשון - כל משתתף כותב מספר במעטפה ומגיש לכרוז. הכרוז פותח את כל המעטפות. מי שכתב את המחיר הגבוה ביותר זוכה, ומשלם את המחיר שהכריז.

מה ההבדלים בין כל סוגי המכרזים האלה? באיזה מכרז עדיף להשתמש ומדוע?

כדי לענות לשאלה אנחנו צריכים עוזל המתאר את פעולות השחקנים.

אנחנו מניחים שיש חפץ אחד, וכל שחקן  $j$  מייחס לו ערך אחר  $v[j]$ . מדוע הערכים שונים? כמה סיבות:

- טעם אישי (למשל באומנות)
  - כישרון בניה (למשל בקרקעות)
  - יכולת הפקת רווח (למשל בתדירים)
  - הערכת סיכויי רווח (למשל בשדה גז או נפט)
  - תרומה למכירות (למשל במכרז פרסום).
- אם שחקן זוכה בחפץ ומשלם מחיר  $p$ , אז התועלת שלו היא ההפרש  $v[j]-p$  (כלומר: השחקנים הם קוואזי-ליניאריים).

שימו לב - אנחנו מבחינים בין ערך לבין תועלת:

- ערך = ברוטו = כמה החפץ שווה עבורי.
- תועלת = נטו = כמה ערך נשאר לי אם קיבלתי את החפץ ושילמתי את המחיר.

## מכרז מגלה-אמת

נתמקד במכרז מעטפות חתומות - מכרז שבו כל שחקן עושה רק פעולה אחת והיא לרשום מספר במעטפה. לכל שחקן  $j$  יש ערך  $v[j]$ ; מכרז הוא **מגלה-אמת** אם כל שחקן  $j$  משיג תועלת גדולה ביותר כאשר הוא רושם  $v[j]$ , לכל צירוף פעולות של השחקנים האחרים.

למה זה טוב? - כי זה חוסך לשחקנים את הצורך "לרגל" אחרי שחקנים אחרים. כל שחקן צריך רק לדעת מה הערך שלו - הוא לא צריך לנסות לברר מה חושבים האחרים.

**משפט:** מכרז מחיר ראשון אינו מגלה-אמת.

**הוכחה:** במכרז מחיר ראשון, שחקן הרושם את הערך האמיתי שלו מקבל תועלת 0 - או שהוא לא זוכה בכלל, או שהוא זוכה אבל המחיר שווה לערך ולכן ההפרש הוא 0. לעומת זאת, שחקן הרושם ערך נמוך יותר, עשוי לקבל 0 (אם הוא לא זוכה), אבל עשוי גם לקבל ערך גבוה יותר (אם הוא זוכה). \*\*\*

כיוון שמכרז מחיר ראשון אינו מגלה-אמת, לשחקנים יש אינטרס לרגל אחרי שחקנים אחרים ולשנות את ההכרזות שלהם בהתאם. זה יצר בעיה רצינית במכרזי הפירסום הראשונים. החברה הראשונה שהתפרנסה ממכרזי פירסום על תוצאות חיפוש היתה Overture (עוד לפני גוגל). הם השתמשו במכרז מחיר ראשון. הם שמו לב שיש עומס כבד על השרתים, וכשבדקו מדוע, ראו שהרבה מפרסמים נכנסים שוב ושוב לחשבון שלהם, מסתכלים על הכרזות של מפרסמים אחרים, ומעדכנים את ההכרזה בהתאם! האם קיים מכרז מגלה-אמת? - כן, ברור: מכרז שבו אף אחד לא זוכה אף פעם הוא מגלה-אמת...

אבל, האם קיים מכרז מגלה-אמת שהוא גם יעיל-פארטו?

התשובה היא כן! הוא נקרא מכרז ויקרי - על-שם הממציא (Vickrey), חתן פרס נובל בכלכלה. הוא נקרא גם "מכרז מחיר שני": השחקן שהכריז את הערך הגבוה ביותר זוכה, והוא משלם את המחיר השני בגובהו.

**משפט:** מכרז מחיר שני הוא מגלה-אמת.

**הוכחה:** נניח שהערך שלי הוא  $v$  והערך המקסימלי של האחרים הוא  $x$ . התועלת הגבוהה ביותר שאני יכול לקוות להשיג במכרז ויקרי היא  $v-x$  (אם  $v > x$ ) או 0 (אם  $v < x$ ). או בקיצור:  $\max(0, v-x)$ .

כשאני מכריז  $v$ , התועלת שלי היא בדיוק  $\max(0, v-x)$ . התועלת שלי גדולה ביותר כשאני מכריז את הערך האמיתי - ולכן המכרז מגלה-אמת. \*\*\*

עכשיו נוכיח שמכרז מחיר שני הוא יעיל-פארטו. שימו לב - יעילות פארטו כאן היא ביחס לקבוצת כל המשתתפים - גם הקונים וגם מנהל-המכרז (אילו הקבוצה לא היתה כוללת את מנהל המכרז, היה שיפור-פארטו מאד פשוט - לא לגבות כסף מהזוכה).

**משפט:** תוצאה של מכרז היא יעילה-פארטו אם-ורק-אם החפץ נמסר לקונה בעל הערך הגבוה ביותר.

**הוכחה:** נוכיח על-דרך השלילה.

כיוון אחד: נניח שתוצאה  $a$  אינה יעילה-פארטו. אז קיימת תוצאה  $b$  שהיא שיפור-פארטו שלה. התשלום שמקבל מנהל המכרז בתוצאה  $b$  חייב להיות לפחות כמו בתוצאה  $a$  (אחרת מנהל המכרז מפסיד). לכן סכום התשלומים שמשלמים הקונים בתוצאה  $b$  הוא לפחות כמו בתוצאה  $a$ . כיוון שזה שיפור פארטו - סכום הערכים של הקונים בתוצאה  $b$  חייב להיות גדול יותר מבתוצאה  $a$ . לכן, בתוצאה  $a$  סכום הערכים של הקונים אינו מקסימלי. לכן, בתוצאה  $a$  החפץ אינו נמסר לקונה עם הערך הגבוה ביותר.

כיוון שני: נניח שבתוצאה  $a$ , החפץ נמסר לקונה  $x$ , שהערך שלו  $x$  אינו הגבוה ביותר. נוכיח שקיים שיפור-פארטו. נניח שהקונה עם הערך הגבוה ביותר הוא קונה  $y$ , והערך שלו הוא  $y$ . נניח שבתוצאה  $a$ , קונה  $a$  משלם  $p$  וקונה  $b$  משלם  $q$ . נבנה את תוצאה  $b$  באופן הבא:

- החפץ נמסר לקונה  $b$ ;
- קונה  $a$  משלם  $p-x$ ;

• קונה ב משלם  $q+x$ ;

• כל שאר הקונים משלמים כמו בתוצאה א.

תוצאה ב היא שיפור פארטו של תוצאה א: התועלת של קונה ב גדלה (הוא הרויח חפץ ששווה עבורו  $y$ , והתשלום שלו גדל רק ב- $x$  שהוא קטן יותר מ- $y$ ). התועלת של קונה א לא השתנתה (הוא הפסיד חפץ ששווה עבורו  $x$ , אבל גם התשלום שלו קטן יותר ב- $x$ ); התועלת של כל שאר הקונים לא השתנתה; וגם התועלת של מנהל המכרז לא השתנתה (סכום התשלומים נשאר זהה).

**הערה:** אפשר באותו אופן להוכיח משפט כללי יותר: בכלכלה עם כסף, כשלכל השחקנים יש תועלות קוואזי-ליניאריות, תוצאה היא יעילה-פארטו אם-ורק-אם היא ממקסמת את סכום הערכים של הקונים.

## מכרז פירסום

בעקבות הניסיון הכושל של חברת Overture, החליטו המהנדסים של גוגל, שמכרז-הפירסום בתוצאות החיפוש שלהם יסתמך על מכרז מחיר שני. זה עבד טוב מאד כל עוד היתה פרסומת אחת בכל דף. אבל אז החליטו להרחיב את המכרזים ולמכור כמה פרסומות בכל דף. זה דומה למכרז שבו כמה חפצים נמכרים. יותר מזה, החפצים אינם זהים: פרסומת בראש הדף שווה יותר מפרסומת בתחתית הדף. לכל פרסומת ישנו שיעור הקלקה (click-through rate, CTR), המתאר כמה אחוזים מבין האנשים הצופים בדף מקליקים על הפרסומת; ככל שהפרסומת גבוהה יותר, שיעור ההקלקה עליה גבוה יותר. איך אפשר להכליל את מכרז-מחיר-שני למצב זה?

קודם-כל נגדיר במדויק את ההנחות.

יש כמה משבצות-פירסום. לכל משבצת  $k$  יש שיעור-הקלקה  $r_k$ . נניח בה"כ שהמשבצות מסודרות כך ש:

$$r_1 > r_2 > \dots$$

לכל מפרסם  $j$  יש ערך-הקלקה  $v_j$ , המציין כמה המפרסם חושב שהוא ירויח, במוצק, מהקלקה על המודעה שלו. איך מחשבים את ה- $v_j$  הזה? זה אחד התפקידים החשובים של מחלקת-השיווק בחברה. יש להם סטטיסטיקות מפורטות, כמה אנשים במוצק נכנסים לכל מודעה, כמה מתוכם קונים מוצר, וכמה רווח יש לחברה מקניית המוצר, ולפי זה הם יכולים לחשב את תוחלת הערך של הקלקה על המודעה. מכאן: כל מפרסם  $j$  מעריך את משבצת  $k$  כ:

$$v_j * r_k$$

המטרה שלנו היא למצוא מכרז שהוא גם **יעיל פארטו** וגם **מגלה-אמת** (- מעודד כל מפרסם לגלות את ה- $v_j$  האמיתי שלו).

נתחיל מהתכונה הראשונה. עבור כל מפרסם  $j$ , נסמן ב  $k(j)$  את המודעה שהוא מקבל.

**משפט:** הקצאת מקומות למפרסמים היא יעילה-פארטו, אם-ורק-אם היא ממקסמת את סכום הערכים:

$$v_1 * r_{k(1)} + v_2 * r_{k(2)} + v_3 * r_{k(3)} + \dots$$

**הוכחה:** אם ההקצאה אינה יעילה פארטו, אז קיים לה שיפור פארטו, ובו סכום הערכים גבוה יותר. אם ההקצאה לא ממקסמת את סכום הערכים, אז ניתן לעבור להקצאה שבה סכום הערכים גבוה יותר ולהעביר כספים בין המשתתפים, ומתקבל שיפור פארטו (כמו בהוכחת יעילות פארטו לגבי מכרז חפץ יחיד). \*\*\*

איך מוצאים הקצאה הממקסמת את סכום הערכים? אפשר להשתמש באלגוריתם חמדני:

- סדר את המפרסמים בסדר יורד של  $v_j$ :
- $v_1 > v_2 > \dots$
- תן למפרסם  $j$  את המקום  $j$ .

**משפט:** האלגוריתם החמדני ממקסם סכום ערכים.

**הוכחה:** נניח בשלילה שיש סדר שונה,  $k$ , הממקסם את סכום הערכים. בסדר זה יש מפרסמים  $j, i$  שעבורם:

$$v_j < v_i \quad r_{k(j)} > r_{k(i)}$$

נחליף את מפרסמים  $j$  ו- $i$ . אחרי ההחלפה,  $i$  נמצא במקום  $k(j)$  ו- $j$  נמצא במקום  $k(i)$ . השינוי בסכום הוא:

$$v_i * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) - v_j * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) = (v_i - v_j) * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) > 0$$

מכאן שהסדר האחר אינו ממקסם את סכום הערכים – סתירה להנחה. \*\*\*

עכשיו אנחנו יודעים איך לחלק את שטחי-הפירסום בין המפרסמים. נשאר לנו רק לקבוע את התשלומים – כמה ישלם כל מפרסם על כל הקלקה. כמו במכרז על חפץ יחיד, גם כאן התשלומים הם שיקבעו אם המכרז יהיה מגלה-אמת או לא. איך נכליל את כלל-התשלומים של ויקרי, מחפץ אחד לכמה חפצים שונים?

הפתרון הראשון שהשתמשו בו מהנדסי גוגל נקרא מכרז מחיר שני מוכלל – Generalized Second Price – Auction – GSP. המפרסם שההכרזה שלו היא ה- $j$  בגובהה, זוכה במקום  $j$ , ומשלם את ההכרזה של המפרסם ה- $j+1$  (ועוד סנט אחד). כשיש רק משבצת פירסום אחת, זה בדיוק כמו מכרז ויקרי, ולכן השם "מכרז מחיר שני מוכלל". אבל האם המכרז אכן מגלה-אמת כשיש שני מקומות או יותר?

**משפט:** כשיש שני מקומות או יותר, מכרז מחיר שני מוכלל אינו מגלה-אמת.

**הוכחה:** מספיק להביא דוגמה נגדית אחת. נניח שיש שני מקומות ושלושה מפרסמים:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05,$$

$$v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 6.$$

אם מפרסם 1 דובר אמת ומכריז 10, הוא זוכה במקום ראשון, מרויח 10 לקליק ומשלם 9 לקליק, והתועלת שלו היא:

$$0.1 * (10 - 9) = 0.1$$

אם מפרסם 1 מתחכם ומכריז 8, הוא זוכה במקום שני, מרויח 10 לקליק ומשלם 6 לקליק, והתועלת שלו:

$$0.05 * (10 - 6) = 0.2$$

באופן כללי, במכרז GSP עדיף למפרסמים (לפעמים) להוריד את המחיר ולזכות במקום פחות טוב ויותר זול! מה אפשר לעשות? מה היא ההכללה האמיתית של מכרז ויקרי למצב של יותר מחפץ אחד?

## מכרז ויקרי-קלארק-גרובס (VCG)

המכרז שנתאר עכשיו הוא מכרז מגלה-אמת כללי ביותר. הוא מתאים לא רק לפרסומות, אלא לכל בעיה של בחירה בין כמה תוצאות אפשריות, כאשר לכל משתתף ישנן העדפות "כספיות" על התוצאות האפשריות, וההעדפות הן קוואזי-ליניאריות בכסף -- התועלת של שחקן היא ערך התוצאה פחות התשלום. המכרז נקרא ויקרי-קלארק-גרובס, על-שם ממציאיו (Vickrey, Clarke, Groves). המכרז עובד באופן הבא.

- בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר.

- עבור כל שחקן:
  - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים.
  - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.
- גבה מהשחקן את ההפרש בין שני הסכומים.

להדגמה ראו בגליון האלקטרוני המצורף, **vcg.ods**.

כשיש חפץ אחד, מכרז VCG זהה למכרז ויקרי:

- "בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר" - במכרז עם חפץ אחד, המשמעות היא פשוט לתת את החפץ לשחקן עם הערך הגבוה ביותר (נסמן ערך זה ב  $v_1$ ).
- עבור כל שחקן:
  - "חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים כשהשחקן הנוכחי משתתף" - לזוכה, הסכום של האחרים הוא 0; לכל השאר, הסכום של האחרים הוא  $v_1$ .
  - "חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף" - לזוכה, הסכום של האחרים היה  $v_2$  (המחיר השני); לכל השאר, הסכום של האחרים היה עדיין  $v_1$ .
- "גבה מהשחקן את ההפרש בין הסכומים" - לזוכה, ההפרש הזה הוא  $v_2$ ; לכל השאר, ההפרש הוא 0.

**משפט:** מנגנון ויקרי-קלארק-גרוברס הוא מגלה-אמת.

**הוכחה:** נזכיר את המושגים שנשתמש בהם בהוכחה: ערך = ברוטו (לא כולל המחיר); תועלת = נטו (ערך פחות מחיר). התועלת של כל שחקן היא:

1. הערך של השחקן עצמו;
  2. פחות הסכום של שאר השחקנים בלעדיו;
  3. ועוד הסכום של שאר השחקנים כשהוא פה.
- נסכם את שורות 1 ו-3, ונקבל שהתועלת של כל שחקן היא:
- סכום הערכים של כל השחקנים (שורה 1,3);
  - פחות מספר שאינו תלוי כלל בהצהרה של השחקן (שורה 2).

השחקן שואף להשיג תועלת גדולה ביותר. על שורה 2 הוא לא יכול להשפיע, לכן יש לו אינטרס למקסם את הסכום של שורות 1+3. אבל, זה בדיוק מה שעושה אלגוריתם VCG כשהשחקן דובר אמת - ממקסם את סכום הערכים של כולם! לכן, אם השחקן דובר אמת, האלגוריתם בוחר את האפשרות הטובה ביותר עבורו. \*\*\*

## אלגוריתם VCG בפירסום

נדגים את פעולת אלגוריתם VCG במכרזי פירסום. נחזור לדוגמה הקודמת שבה יש שני מקומות ושלושה מפרסמים, עם הנתונים הבאים:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05, \\ v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 6.$$

המחיר למפרסם 1:

$$\begin{aligned} & \text{סכום האחרים בלעדיו} - 9 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.05 \\ & \text{סכום האחרים כשהוא נמצא} - 9 \cdot 0.05 \\ & = 7.5 \cdot 0.1 \end{aligned}$$

עכשיו הוא משלם 7.5  
המחיר למפרסם 2:

$$\begin{aligned} & \text{סכום האחרים בלעדיו} - 10 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.05 \\ & \text{סכום האחרים כשהוא נמצא} - 10 \cdot 0.1 \\ & = 6 \cdot 0.05 \quad (\text{כמו קודם}) \end{aligned}$$

## VCG לעומת GSP

VCG הוא מגלה-אמת, אבל התשלומים בו נמוכים יותר מב-GSP.

התשלום כולל של מפרסם  $i$  במכרז VCG הוא:

$$v_{i+1} \cdot (r_i - r_{i+1}) + v_{i+2} \cdot (r_{i+1} - r_{i+2}) + \dots$$

התשלום עבור קליק של מפרסם  $i$  במכרז VCG הוא:

$$[v_{i+1} \cdot (r_i - r_{i+1}) + v_{i+2} \cdot (r_{i+1} - r_{i+2}) + \dots] / r_i$$

לעומת זאת, התשלום עבור קליק של מפרסם  $i$  במכרז GSP הוא:

$$v_{i+1}$$

אפשר לראות שזה גדול יותר.

לכן, מעבר ממכרז GSP למכרז VCG עלול לגרום לירידה זמנית ברווחים.

למה ירידה זמנית? - כי במשך הזמן, צפוי שהמפרסמים יתרגלו לכך שהמכרז מגלה-אמת ולכן הם לא צריכים להוריד את ההכרזות שלהם, ואז הרווחים יעלו בחזרה.

סיבה נוספת שבהתחלה לא רצו לעבור ל-VCG היתה שהוא מסובך למימוש, ופחות ברור למפרסמים. אבל, בשנים האחרונות חזרו להשתמש בו. הסיבה היא, שמכרזי-פירסום בימינו ממילא מאד מסובכים. למשל בפייסבוק, לא רק המיקום משתנה אלא גם הגודל והצורה. משלמים לא רק על קליק אלא גם על לייק וכד'. לכן הכלל הפשוט של GSP לא עובד. לעומת זאת, מכרז VCG הוא כללי ויכול להתמודד גם עם מצבים מורכבים.

## אלגוריתם VCG למציאת מסלול זול ביותר

עכשיו נחזור לבעיה שהתחלנו ממנה: נתונה רשת-תקשורת. כל קשת מייצגת חיבור ברשת. אנחנו רוצים להעביר חבילת-תקשורת מסויימת מנקודה מסויימת ("מקור") לנקודה אחרת ("יעד"). לכל קשת ישנה עלות מסויימת להעברת חבילה דרכה (למשל, לפי הזמן שלוקח לחבילה לעבור בקשת, העומס על הקשת וכו'). אנחנו רוצים להעביר את החבילה במסלול **הזול ביותר**. אם עלות כל קשת ידועה לכולם - אפשר לפתור את הבעיה ע"י אלגוריתם דייקסטרה.

אבל מה אם כל קשת היא מחשב ששייך לאדם מסויים, ורק הבעלים יודע מה העלות שלה? אנחנו יכולים לשאול כל אחד מה העלות של העברת חבילה דרכו, אבל למה שייגיד את האמת? אולי כדאי לו להגיד שהעלות הרבה יותר גבוהה, כדי שנחליט לשלוח את החבילה דרך מקום אחר? הדבר רלבנטי במיוחד

בימינו, ברשתות כגון ביטקוין-לייטנינג (bitcoin-lightning), שבהם צריך להחליט מה המסלול הזול ביותר להעברת תשלום בין שני צרכנים.

- אפשר להשתמש באלגוריתם VCG באופן הבא.

- אוסף התוצאות האפשריות הוא אוסף כל המסלולים מהעקור ליעד.
- השלב הראשון במכרז וק"ג הוא חישוב התוצאה עם סכום-הערכים הגדול ביותר. במקרה זה אנחנו מחפשים את סכום העלויות הקטן ביותר, אבל ההבדל הוא טכני בלבד - אפשר להציג כל עלות כערך עם סימן מינוס. לכן, אנחנו יכולים לבצע את השלב הראשון במכרז בעזרת אלגוריתם דייקסטרה.
- השלב השני הוא חישוב התשלומים. כדי לחשב את התשלום של שחקן מסויים (במקרה זה, של קשת מסויימת), אנחנו צריכים לחשב מה היתה התוצאה אילו השחקן הזה לא היה משתתף. אנחנו צריכים למחוק (באופן זמני) את הקשת מהגרף, ולמצוא את המסלול הזול ביותר בגרף שהתקבל, כלומר להריץ שוב את אלגוריתם דייקסטרה. אחרי שמצאנו את המסלול הזה, אנחנו צריכים לחשב את סכום הערכים של כל שאר הקשתות, לחסר את סכום הערכים של כל שאר הקשתות בלי המחיקה, וההפרש הוא התשלום שתצטרך הקשת לשלם (ראו דוגמה במצגת).
- שימו לב - כדי להריץ את מנגנון וק"ג צריך להריץ את אלגוריתם דייקסטרה E+1 פעמים, כאשר E הוא מספר הקשתות בגרף: פעם אחת כדי לחשב את התוצאה הסופית, ועוד E פעמים כדי לחשב את התשלום של כל קשת וקשת.

## אלגוריתם VCG למילוי תרמיל

את בעיית התרמיל (השקולה לבעיית בחירת פרסומות לשידור בזמן קצוב) אפשר לפתור בעזרת אלגוריתם VCG באופן דומה לבעיית המסלול: קודם-כל מחשבים את ההשמה הממקסמת את סכום הערכים, ואז מחשבים - עבור כל חפץ/מפרסם - את ההשמה הממקסמת את סכום הערכים בלעדיו.

אם מספר החפצים (= המפרסמים) הוא קטן, זה עובד מצויין. אבל מה אם מספר החפצים הוא גדול? בעיית התרמיל ידועה כבעיה NP-שלמה - וזה אומר שכנראה לא קיים אלגוריתם הפותר בעיות גדולות בזמן סביר. איך נוכל להריץ את מכרז וק"ג, אם אנחנו לא יכולים לחשב את הצעד הראשון שלו?

תשובה אפשרית לשאלה זו נלמד בשיעור הבא.

## מקורות

- ויקיפדיה האנגלית, ערך Auction
- הקורס של טים, שיעורים 13-16

## סרטונים

- מכרז אנגלי על כד מתקופת שושלת מינג: <https://youtu.be/ZyATAodMDrQ>
- מכרז אנגלי על אוסף המכוניות של סיינפלד: <https://youtu.be/nG1mkKgduiM>
- מכרז מוטות-הגולף של איליין ("קדחת מכרזים"): <https://youtu.be/akwSGr-9Ldc>
- מכרז על צאן ובקר בסגנון ראפ: <https://youtu.be/FsYFwvV-ReQ>
- הסרט הבא מראה כמה זה חשוב לשים לב לתמריצים - גם כשמתכננים תחרויות ספורט. באלפיות העולם בבדמינטון לנשים, היה משחק בין דרום-קוריאא לסין, ונוצר מצב שבו לשתי



ברוך ה' חונן הדעת

הקבוצות היה תמריץ להפסיד - כדי לקבל מתחרה קלה יותר בסיבוב הבא. הן אכן השתדלו להפסיד - וזה מאד עיצבן את הצופים ומארגני התחרות!  
<https://youtu.be/7mq1ioqiWEo>

סיכום: אראל סגל-הלוי.