

## 2. חלוקת עלויות - איך מחליטים מי יקבל שירות?

עד עכשיו הנחנו שכולם נוסעים, וכל השאלה היתה איך לחלק ביניהם את העלות.

אבל, מה אם העלות היא כל-כך גבוהה עד שחלק מהאנשים בכלל לא ירצו לנסוע?

איך מחליטים כמה ואיזה נוסעים בדיוק ישתתפו בנסיעה?

כדי לענות לשאלה זו, צריך להוסיף נתון לבעיה: לא מספיק לדעת מהי העלות של כל קבוצת-נוסעים - צריך גם לדעת מהו הערך שכל נוסע מפיך מהשתתפות בנסיעה. אנחנו מניחים שההשתתפות היא בינארית - נוסע  $j$  שמתפתח בנסיעה, הערך שלו הוא  $v_j$ , וזה מידע פרטי שלו - רק הנוסע עצמו יודע מהי התועלת שלו. אנחנו צריכים לפתח אלגוריתם אמיתי - שישכנע את הנוסעים לחשוף את הערך האמיתי שלהם.

פתרון אחד, שכבר למדנו, הוא **מכרז VCG**:

- יש  $2^n$  אפשרויות - כל תת-קבוצה של  $N$  היא אפשרות.
- הערך של כל שחקן  $j$  הוא  $v[j]$  אם הוא בקבוצה, ו-0 אם הוא לא בקבוצה.
- יש שחקן נוסף (נקרא לו "הנהג"), שהערך שלו לכל אפשרות הוא שלילי - מינוס עלות הנסיעה.
- עבור כל תת-קבוצה, חשב את סכום הערכים (כולל הערך השלילי של הנהג).
- בחר את תת-הקבוצה עם הסכום הגדול ביותר.
- עבור כל נוסע, התשלום הוא הסכום של הנוסעים האחרים (כולל הנהג) אילו הוא לא היה משתתף, פחות הסכום של הנוסעים האחרים (כולל הנהג) כשהוא משתתף.

ראו דוגמה בגליון המצורף.

כפי שלמדנו בעבר, מכרז וק"ג הוא אמיתי ויעיל פארטו, אבל יש בו בעיה רצינית - סכום התשלומים של כל השחקנים לא בהכרח מכסה את עלות הנסיעה. במילים אחרות: יש **גירעון**! אם נרצה להשתמש במכרז כזה באופן קבוע, הממשלה תצטרך לסבסד אותו.

פתרון אפשרי הוא לגבות מכל נוסע תשלום מסוים, כך שסכום התשלומים יכסה את עלות הנסיעה (למשל: ערך שאפלי), ואז לחסר את התשלום הזה מהערך של הנוסע.

הבעיה היא, שהעלות של חלק מהנוסעים עלולה להיות שלילית - הם ישלמו יותר מהערך שלהם. כלומר: המכרז אינו מעודד השתתפות.

### מכרז מולין-שנקר

במקום וק"ג אפשר להשתמש במכרז אחר, שהוא גם מעודד-השתתפות וגם מאוזן תקציבית. המכרז נקרא על-שם ממציאיו - Moulin, Shenker. במכרז זה, אנחנו קובעים מראש את כלל-התשלום. כלל-התשלום הוא פונקציה  $p(S, i)$ . הוא קובע, עבור כל תת-קבוצה של נוסעים  $S$ , כמה ישלם כל נוסע  $i$  אם הקבוצה הזאת היא הקבוצה הנבחרת. הכלל צריך לקיים איזון תקציבי (*budget balance*) - לכל תת-קבוצה, סכום התשלומים של חברי הקבוצה שווה לעלות הנסיעה של תת-הקבוצה.

בתחילת השיעור ראינו דוגמה לכלל-תשלום: ערך שאפלי. ראינו שהוא מאוזן תקציבית. ישנם כללים נוספים עם איזון תקציבי. למשל, אפשר לסדר את הנוסעים בסדר קבוע כלשהו (מהזוטר לבכיר), ולגבות

מכל אחד את העלות השולית שלו בסדרה זו. ערך שאפלי עושה ממוצע על כל הסדרים, אבל אפשר לבחור סדר אחד כלשהו, והכלל עדיין יהיה מאוזן-תקציבית.

בהינתן כלל-התשלום, המכרז מתנהל באופן הבא (בדומה ל"מכרז יפני"):

1. **איתחול:** מכניסים את כל הנוסעים הפוטנציאליים לחדר.
2. אומרים לכל משתתף כמה הוא צריך לשלם (לפי כלל-התשלום  $p$ ), בהנחה שכל הנוסעים הנמצאים עכשיו בחדר משתתפים בנסיעה.
3. כל משתתף שאינו רוצה לשלם - יוצא מהחדר.
4. אם מישהו יצא מהחדר - חוזר לצעד 2.
5. אחרת - סיים ושלח את הנוסעים שנשארו בחדר למונית.

במקום להכניס נוסעים לחדר, אפשר לבצע הדמיה של התהליך - מבקשים מכל נוסע לדווח את הערך שלו, ומריצים את התהליך במחשב, כאשר בשלב 3, מוציאים מה"חדר" את כל המשתתפים שהערך שלהם קטן מהמחיר שהם אמורים לשלם.

כדי שהמכרז הזה יהיה אמיתי, כלל-התשלום צריך להיות מונוטוני במובן הבא: אם נוסע עוזב את הקבוצה, אז התשלומים של כל הנוסעים הנשארים גדלים (או שווים). כלומר לכל שתי קבוצות  $S, T$  ולכל  $i$  שחקן  $i$  בקבוצה  $S$ , מתקיים:

$$\text{If } S \leq T \text{ then } p(S, i) \geq p(T, i)$$

**משפט:** אם כלל-התשלום הוא מונוטוני, אז מכרז מוליך-שנקר הוא אמיתי.

**הוכחה:** בכל פעם שנוסעים יוצאים מהחדר, התשלום של כל הנוסעים הנשארים נשאר קבוע או גדל. לכן, לנוסע שיצא, אף פעם לא כדאי לחזור. לכן ההתנהגות האופטימלית של נוסע היא לצאת מהחדר אם-ורק-אם התשלום הנוכחי גדול מהערך שלו. זה בדיוק מה שההדמיה של מכרז מוליך-שנקר עושה עבורו כשהוא אומר את ערכו האמיתי. \*\*\*

האם אפשר להשתמש במכרז מוליך-שנקר עם כלל-התשלום של שאפלי? לשם כך צריך לוודא שהכלל הזה מונוטוני. והוא אכן מונוטוני כאשר יש עלות שולית פוחתת.

**הגדרה:** פונקציית-עלות נקראת תת-מודולרית (submodular) אם יש לה עלות שולית פוחתת (decreasing marginal cost), כלומר, העלות השולית של כל שחקן ביחס לקבוצה מסויימת, קטנה (או שווה) כאשר הקבוצה גדלה. פורמלית, לכל שתי קבוצות  $S, T$  ולכל שחקן  $i$ :

$$\text{If } S \leq T, \text{ then } c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(T \cup \{i\}) - c(T)$$

טבלת העלויות שהוצגה למעלה מקיימת תכונה זו.

**משפט:** במשחק עם עלות שולית פוחתת, כלל-התשלום של שאפלי הוא מונוטוני.

**הוכחה:** נניח שחישבנו את ערך שאפלי של שחקן  $A$  בקבוצה מסויימת בגודל  $n$ . שחקן חדש,  $B$ , הצטרף לקבוצה, ואנחנו מחשבים שוב את ערך שאפלי של שחקן  $A$ . צריך להוכיח שהערך החדש שווה או קטן מהערך הישן.

הערך הישן הוא ממוצע של  $n$ -עצרת מספרים - אחד עבור כל סדר של השחקנים הישנים. הערך החדש הוא ממוצע של  $(n+1)$ -עצרת מספרים - אחד עבור כל סדר של השחקנים עם שחקן  $B$ . עבור כל סדר ישן, יש  $n+1$  סדרים חדשים, כי יש  $n+1$  אפשרויות להכניס את שחקן  $B$  לתוך הסדר (לפני הראשון, לפני השני, ..., לפני האחרון, אחרי האחרון). אם מכניסים את שחקן  $B$  אחרי שחקן  $A$  - אז העלות השולית של שחקן  $A$  בסדר זה לא משתנה.

אם מכניסים את שחקן ב לפני שחקן א - אז העלות השולית של שחקן א בסדר זה קטנה - כי יש עלות שולית פוחתת.

לכן, הממוצע על כל הסדרים קטן או שווה לממוצע הישן. \*\*\*

לסיכום, מכרז מולין-שנקר הוא מאוזן תקציבית ואמיתי (כשכלל-התשלום מונוטוני), אבל הוא לא מושלם:

**משפט:** מכרז מולין-שנקר אינו בהכרח יעיל-פארטו.

**הוכחה:** שיעורי בית.

## סיכום

לסיכום, ראינו שלוש תכונות - יעילות, אמיתיות ואיזון תקציבי:

- מכרז וק"ג הוא יעיל ואמיתי אבל לא מאוזן;
  - מכרז מולין-שנקר הוא אמיתי ומאוזן אבל לא יעיל;
  - קל לחשוב על מכרז יעיל ומאוזן אבל לא אמיתי, למשל - כל אחד משלם את הערך שלו.
- האם קיים מכרז המקיים את כל התכונות? התשובה היא לא! כמו בשיעורים קודמים, יש "טרילמה" - צריך לבחור שתיים מתוך שלוש תכונות, אי אפשר לקבל את כל מה שרוצים...

## מקורות

- מנגנון מולין-שנקר: Moulin, Hervé; Shenker, Scott (2001). "Strategyproof sharing of submodular costs: budget balance versus efficiency". *Economic Theory*. **18** (3): 511. [doi:10.1007/PL00004200](https://doi.org/10.1007/PL00004200)
- ויקיפדיה, Cost-sharing\_mechanism

סיכום: אראל סגל-הלוי.