

## מטלה - חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית \* מזכות בניקוד כפול.

### שאלה 1: חלוקה פרופורציונלית בשני מימדים

נתונה חלקת-אדמה בצורת מלבן. השווי הכללי של החלקה הוא 4000. אנחנו רוצים לחלק אותה לארבעה אנשים בעזרת אלגוריתם אבן-פז. תארו דוגמה שבה:

א. אם נבצע את כל האלגוריתם בעזרת קוים אופקיים, אז כל משתתף יקבל ערך של 1000, אבל -

ב. אם נבצע את כל האלגוריתם בעזרת קוים אנכיים, אז כל אחד יקבל ערך של 4000.

תארו את ערכי המשתתפים בדוגמה שלכם (אפשר ע"י ציור), ותארו את הרצת האלגוריתם.

### שאלה 2: חלוקת תורנויות פרופורציונלית

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את  $n$  ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקות ה- $n+1$ . הם מעוניינים לחלק ביניהם את זמן השמירה בצורה הוגנת. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי זמן השמירה - יש כאלה שמעדיפים לשמור בלילה, יש כאלה שמעדיפים לשמור דווקא בצהריים, וכו'.

א. [חימום]. בסעיף זה הניחו שהילדים **אוהבים** לשמור על התינוקות - כל אחד רוצה לשמור כמה שיותר. באיזה אלגוריתם תשתמשו כדי למצוא חלוקה פרופורציונלית?

ב. בסעיף זה הניחו שהילדים **לא אוהבים** לשמור - כל אחד רוצה לשמור כמה שפחות. הסבירו למה האלגוריתם של סעיף א לא עובד, ותארו אלגוריתם חדש המוצא חלוקה פרופורציונלית. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

### שאלה 3: משולש החלוקות

כזכור, משולש החלוקות הוא משולש המתאר את כל החלוקות האפשריות של קטע ל-3 חלקים רציפים. כל נקודה במשולש מייצגת חלוקה. נניח שאנחנו צובעים את המשולש באופן הבא:

- לכל נקודה במשולש, שואלים מישור "איזו פרוסה אתה מעדיף בחלוקה הזאת?".
- אם הוא בוחר את הפרוסה השמאלית - צובעים את הנקודה באדום; אם הוא בוחר את האמצעית - צובעים את הנקודה בירוק; אם הוא בוחר את הימנית - צובעים את הנקודה בכחול.

לפניכם שש דוגמאות למשולשים צבועים באדום, ירוק וכחול:

<https://github.com/erelsql-at-ariel/algorithms-5781/tree/master/01-fair-cake-cutting/colored-triangles>. איזה מהם מייצגים תוצאה אפשרית של הצביעה הנ"ל? הסבירו את תשובתכם.

## שאלה 4: חלוקה עם זכויות לא-שוות

עמי ותמי עזרו לאמא להכין עוגה, אבל תמי עזרה יותר. עמי השקיע  $k$  שעות ותמי השקיעה  $n$  שעות, כאשר  $n > k$ . אמא רוצה לחלק את העוגה ביניהם בצורה הוגנת בהתאם לכמות ההשקעה.

א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה פרופורציונלית" במצב זה, בעזרת הפונקציה  $V_i$  (פונקציית הערך של שחקן  $i$ ), ובעזרת הפרמטרים  $n, k$ .

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית לפי ההגדרה של סעיף א. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

## \* שאלה 5: חלוקת זמן בעת מגפה

עקב מגפת הקורונה, הוחלט להגביל את מספר האנשים שמותר להם להיכנס בו-זמנית לכל אתר-תיירות. בשמורת-טבע מסויימת, הוחלט שמספר האנשים המקסימלי שמותר להם להיות בו-זמנית בשמורה יהיה  $k$ , אבל ישנם  $n$  אנשים שרוצים להיכנס ( $n$  גדול מ- $k$ ). לכל אחד מהאנשים ישנם העדפות שונות לגבי הזמן שבו הוא מעדיף להיכנס לשמורה (בוקר, צהריים, ערב וכו'). עליכם לייעץ להנהלת השמורה, איך לחלק את זמן השהיה בשמורה בין האנשים באופן הוגן.

א. תנו הגדרה הגיונית למושג "חלוקה פרופורציונלית" במצב זה, בעזרת הפונקציה  $V_i$  (פונקציית הערך של שחקן  $i$ ), ובעזרת הפרמטרים  $n, k$ .

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית לפי ההגדרה של סעיף א. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

**הדרכה:** פיתרו את השאלה קודם-כל עבור  $k=1$  ואז עבור  $k$  כללי.

## שאלה 6: חלוקה ללא קנאה עם שארית

נתון האלגוריתם הבא לחלוקה בין 3 אנשים (דומה לצעד הראשון של אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי):

- 1. עמי חותך את העוגה לשלושה חלקים שווים בעיניו.
- 2. תמי מקצצת את הפרוסה הטובה ביותר בעיניה, כך שיהיו לה שתי פרוסות טובות ביותר.
- 3. מוצאים שידוך גדול ביותר (בגודל 3) בין השחקנים לבין כל 4 הפרוסות שעל השולחן – כולל השארית.
- 4. מחלקים לכל שחקן פרוסה אחת בהתאם לשידוך.

שימו לב - באלגוריתם זה לא כל העוגה מחולקת - יש פרוסה אחת הנשארת על השולחן.

א. הוכיחו שאכן קיים שידוך בגודל 3, שהחלוקה המתקבלת היא ללא קנאה, ושכל שחקן מקבל פרוסה השווה בעיניו לפחות  $1/4$  מהשווי הכללי של העוגה.

\* ב. עכשיו נניח שצריך לחלק עוגה בין 4 שחקנים. תארו אלגוריתם לחלוקה עם שארית, הנותן חלוקה ללא קנאה, שבה כל שחקן מקבל פרוסה השווה בעיניו לפחות  $1/8$  מהשווי הכללי של העוגה.

## שאלה 7: תיכנות - חלוקת-עוגה פרופורציונלית

נניח שרוצים לחלק נהר חד-ממדי, המיוצג ע"י הקטע  $[0,1]$ . כל משתתף מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
class Agent:
    def eval(self, x:float)->float:
        """
        :param x: a positive number representing a location on the cake.
        :return: v: the value of the piece  $[0,x]$  for the agent.
        """

    def mark(self, v:float)->float:
        """
        :param v: a positive number representing a value of a piece.
        :return: x: a number such that the value of  $[0,x]$  equals v.
        """
```

א. כיתבו בשפה לבחירתכם (אפשר גם פסאודו-קוד) את אלגוריתם "חתוך ובחר":

```
def cutAndChoose(a:Agent, b:Agent):
```

הפונקציה מקבלת שני שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

*Agent a receives  $[0,0.3]$ . Agent b receives  $[0.3,1]$ .*

ב. כיתבו בשפה לבחירתכם את אלגוריתם אבן-פז:

```
def algEvenPaz(agents:List[Agent]):
```

הפונקציה מקבלת מערך של שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

*Agent 0 receives  $[0,0.3]$ . Agent 1 receives  $[0.3,0.6]$ . Agent 2..*