

# אלגוריתמים כלכליים מטלה 11

## שאלה 1

### שידוכים עם כמה מקומות בכל מחלקה - 3 מקומות בכל מחלקה

- א.** אגדיר כאן את המצב בו קיים שידוך יציב בו כל מחלקה יכולה לקבל עד 3 סטודנטים.
- ❖ ראשית אגדיר מהו שידוך במצב זה: נתונות קבוצה של סטודנטים  $S$  וקבוצה של מחלקות  $D$ , אנו נוכל לשדך לכל  $d_i \in D$  ( $i$  הינה המחלקה ה- $i$  כך ש- $|D| \geq i > 0$ ) 3 סטודנטים לכל היותר מקבוצה  $S$  (בדומה ל- $D$ , נקרא לסטודנט ה- $k$   $s_k$ ).
  - ❖ שידוך יציב הינו שידוך בו אין שום זוג שמערער על השידוך הנ"ל.
  - ❖ זוג מערער - זוג מסוים של מחלקה וקבוצת סטודנטים  $(d_i, S' \subseteq S)$  ( $|D| \geq i > 0$  ו- $|S'| \geq 3$ ), כך שמתקיים לגביהם התנאים הבאים:
    - I. כל  $s \in S'$  מעדיף את מחלקה  $d_i$  על פני המחלקה בה הוא משובץ.
    - II. אותה מחלקה  $d_i$  מעדיפה את אותה קבוצה  $S'$  על פני תת בקבוצה בגודל  $|S'|$  שמשודכת אליה, או על פני תת קבוצה שגודלה קטן מ- $|S'|$  כך ש- $|S' \cup d_i| \leq 3$ .

- ב.** כעת אראה הרצה של האלגוריתם "קבלה על תנאי" במצב בו קיימים 5 סטודנטים:  $s_1 - s_5$  ו-2 מחלקות  $d_1, d_2$ .

טבלת העדפות עבור הסטודנטים		
סטודנט	עדיפות ראשונה	עדיפות שניה
$s_1$	$d_2$	$d_1$
$s_2$	$d_1$	$d_2$
$s_3$	$d_2$	$d_1$
$s_4$	$d_2$	$d_1$
$s_5$	$d_2$	$d_1$

טבלת העדפות עבור המחלקות		
סדר עדיפות	$d_1$	$d_2$
1	$s_1$	$s_1$
2	$s_2$	$s_4$
3	$s_3$	$s_2$
4	$s_4$	$s_3$
5	$s_5$	$s_5$

**האלגוריתם:**

(1) כל סטודנט ילך למחלקה שהוא מעדיף:

	$s_2$	$d_1$
$s_5$	$s_3$	$s_4$
$s_1$	$d_2$	

\*בטבלה ירוק = "התקבל על תנאי", אדום = נדחה

(2) כל מחלקה תקבל (על תנאי) את הסטודנטים שהיא רוצה בעדיפות עליונה ועל פי מס' המקומות במחלקה (מוגבל ב-3 מקומות):

א. ב- $d_1$  סטודנט  $s_2$  "התקבל על תנאי" (הערה: כל סטודנט "יתקבל על תנאי" כל עוד האלגוריתם לא יסתיים).

ב. ב- $d_2$  סטודנטים  $s_1, s_3, s_4$  התקבלו על תנאי ואילו סטודנט  $s_5$  נדחה מכיוון

שם המקומות במחלקה מוגבל לעד 3 בלבד, וסטודנט  $s_5$  היה בעדיפות

הנמוכה ביותר מבין שאר הסטודנטים שרצו את  $d_2$ .

(3) סטודנט  $s_5$  ילך למחלקה השנייה בסדר העדיפויות שלו -  $d_1$ , שם יש מקום פנוי ואין 3

סטודנטים שהם מעליו בסדר העדיפויות של  $d_1$ , ולכן "יתקבל על תנאי".

**התוצאה:**

	$s_5$	$s_2$	$d_1$
$s_3$	$s_4$	$s_1$	$d_2$

(4) אין יותר סטודנטים ללא שידוך - סוף האלגוריתם.

**ג.**

נניח כי רפי ואביבה הינם שני סטודנטים מתוך 5 הסטודנטים מהסעיף הקודם. אם רפי

ואביבה ירצו להיות באותה מחלקה, וגם אם סדר העדיפויות שלהם זהה, אראה כי יכולה

להיות סיטואציה בה יהיה זוג מערער ובכך לא יהיה שידוך יציב.

נקבע כי סטודנט  $s_1$  הינו **רפי** וסטודנטית  $s_5$  הינה **אביבה**, מצב זה יגרום לכך שבחלוקה

הראשונית כמו בחלוקה בסעיף ב' **רפי ואביבה** ילכו למחלקה  $d_2$ :

	$s_2$	$d_1$
<b>רפי</b>	$s_4$	$d_2$
<b>אביבה</b>	$s_3$	

בדומה לסעיף הקודם  $d_2$ , דירגה את **אביבה** ( $s_5$ ) במקום האחרון אזי **אביבה** נדחתה ועוברת ל-

$d_1$ , שמקבלת אותה.

בגלל הנתון שבו **אביבה** ו**רפי** חייבים להיות באותה מחלקה אזי המחלקה היחידה שמקבלת את שני הסטודנטים הנ"ל הינה  $d_1$ , לכן **רפי** חייב לעבור ל- $d_1$ , ולכן מצב השידוכים הסופי יראה כך:

<b>רפי</b>	<b>אביבה</b>	$s_2$	$d_1$
	$s_4$	$s_3$	$d_2$

מצב השידוכים הנ"ל אינו שידוך יציב, וזאת מכיוון שקיים זוג מערער: **רפי** ו- $d_2$ .

**רפי** מעדיף את  $d_1$ , ו- $d_2$  מעדיפה את **רפי** על שאר השידוכים שלה (מכיוון שדירגה את  $s_1 = \text{רפי}$  במקום הראשון בסדר העדיפויות שלה).