

מטלה 10

שאלה 5: חלוקת רווחי עסק

כשלמדנו על תיאום תרומות בהרצאה, הנחנו שהתועלת של כל תורם שווה לסכום התרומות לפריטים שהוא תומך בהם.
לדוגמה, אם עמי תומך בפריטים א, ב, ההשקעה הכללית בפריט א היא 4000 ובפריט ב 2000, אז התועלת של עמי היא 6000.
בשאלה זו, נניח שהתועלת של כל תורם שווה לתרומה הקטנה ביותר לפריט שהוא תומך בו.
בדוגמה למעלה, התועלת של עמי היא 2000.
בדקו את התכונות של כל אחד מהאלגוריתמים שלמדנו בשיעור (אוטיליטרי, אוטיליטרי-על-תנאי, ומיקסום המכפלה) במצב זה.
לגבי כל אחד מהם, בדקו האם הוא יעיל פארטו, מעודד השתתפות, ומגלה אמת. הוכיחו את תשובתכם.

פתרון:

א. אוטיליטרי:

1. פארטו- במקרה זה האלגוריתם **אינו יעיל פארטו**, נראה באמצעות דוגמא נגדית:
נדגים על ישוב עם 3 נושאים (א, ב, ג) ו-2 אזרחים לכל אחד 100 שקל.
אזרח ראשון- תומך ב- א+ב
אזרח שני- תומך ב- ב+ג
באלגוריתם זה מעבירים את כל הכסף לנושאים עם הכי הרבה תומכים, לכן החלוקה הינה: (0,200,0).
מכיוון שהתועלת של כל תורם שווה לתרומה הקטנה ביותר לפריט שהוא תומך בו, התועלת של כל אחד מהם היא 0.
שיפור של מצב זה הינו (50,100,50), במצב זה התועלת של כל אחד מהם היא 50.
2. מעודד השתתפות- במקרה זה האלגוריתם **אינו מעודד השתתפות**,
כמו שראינו בדוגמא בסעיף הקודם התועלת של כל אחד מהמשתתפים היא 0.
3. מגלה אמת- במקרה זה האלגוריתם **מגלה אמת**,
הוכחה: נניח בשלילה שהוא אינו מגלה אמת, כלומר קיים אזרח כלשהו שאם היה משקר אז התועלת שלו הייתה גדלה.
נחלק ל-3 מקרים:
מקרה 1: לאזרח יש העדפה אחת והיא נבחרה: אם ההעדפה הזו נבחרה כאשר דיווח את העדפותיו האמיתיות
אז אם ישקר ההעדפה הזו עלולה לא להיבחר ולכן הוא יפסיד.
מקרה 2: לאזרח יש העדפה אחת והיא לא נבחרה: אם ההעדפה הזו לא נבחרה כאשר דיווח את העדפותיו האמיתיות
אז אם ישקר היא עדיין לא תיבחר, כי סך התומכים בה קטן.
מקרה 3: לאזרח יש יותר מהעדפה אחת: מכיוון שכל הכסף עובר להצעה עם הכי הרבה תומכים, תמיד התועלת שלו תהיה 0.
לכן אם ישקר זה לא יגדיל את התועלת שלו.
קיבלנו סתירה לכלל המקרים, לכן היא מגלה אמת.

אוטיליטרי-על-תנאי:

1. פארטו- במקרה זה האלגוריתם **אינו יעיל פארטו**, אשתמש באותה דוגמא נגדית מסעיף א:
באלגוריתם זה כל אזרח תורם לנושאים, מאלה שהוא תומך בהם, עם הכי הרבה תומכים אחרים.
לכן החלוקה הינה: (0,200,0) כי גם האזרח הראשון וגם האזרח השני יתרמו לנושא ב' כי יש בו הכי הרבה תומכים.
מכיוון שהתועלת של כל תורם שווה לתרומה הקטנה ביותר לפריט שהוא תומך בו, התועלת של כל אחד מהם היא 0.
שיפור של מצב זה הינו (50,100,50), במצב זה התועלת של כל אחד מהם היא 50.
2. מעודד השתתפות- במקרה זה האלגוריתם **אינו מעודד השתתפות**,
כמו שראינו בדוגמא בסעיף הקודם התועלת של כל אחד מהמשתתפים היא 0.
3. מגלה אמת- במקרה זה האלגוריתם **אינו מגלה אמת**, אשתמש באותה דוגמא נגדית:
נדגים על ישוב עם 3 נושאים (א, ב, ג) ו-2 אזרחים לכל אחד 100 שקל.
אזרח ראשון- תומך ב- ב
אזרח שני- תומך ב- ב+ג
החלוקה תהיה (0,200,0), התועלת של האזרח השני הינה-0.

אם האזרח השני היה משקר ואומר שהוא תומך רק ב-ג' החלוקה הייתה $(100,100,0)$ וכעת התועלת של שחקן ב' הינה 100, כלומר כדאי לו דווח רק ג'.

מיקסום המכפלה:

1. פארטו- במקרה זה האלגוריתם **יעיל פארטו**, הוא ימקסם את התועלת של כל תורם, ע"י מקסום התרומה הקטנה ביותר לפריט שהוא תומך בו. הוכחנו כי כל חלוקה הממקסמת פונקציה עולה כלשהי של סכום הערכים היא יעילת פארטו, לכן האלגוריתם יעיל פארטו.
2. מעודד השתתפות- לא הצלחתי להוכיחו או להפריח.
3. מגלה אמת- האלגוריתם **מגלה אמת**, הוכחה: נניח בשלילה שהוא אינו מגלה אמת, כלומר קיים אזרח שאם הוא ישקר אז התועלת שלו תעלה, נחלק למקרים:
מקרה 1: ההעדפות שהאזרח משקר לגביהן כוללת את הנושא שקיבל את התרומה הכי קטנה, במקרה זה נושא זה יקבל את אותו תרומה או עלול לאבד חלק מהתרומות שלו כי ההעדפות של האחרים לא השתנו. ולכן התועלת של אזרח זה עלולה רק לרדת.
מקרה 2: ההעדפה שהאזרח משקר לגביהן לא כוללת את הנושא שקיבל את התרומה הכי קטנה, במקרה זה עדין הנושא שקיבל את התרומה הכי קטנה לא יקבל עוד תרומות כי הבחירות של שאר האזרחים נשארו זהות. ולכן התועלת של האזרח לא תעלה, סתירה.