

## מטלה - חלוקת שכר-דירה – שאלות נוספות

### שאלה 1: בעיית מכפלת הצריחים

נתון לוח שחמט (8 על 8) שבו בכל משבצת כתוב מספר חיובי כלשהו. עליכם להציב שמונה צריחים על הלוח, כך שאף צריח לא מאיים על אף צריח אחר, ומכפלת המספרים הרשומים תחת הצריחים היא הגדולה ביותר.

א. כיתבו את בעיית האופטימיזציה.

ב. הדגימו את פתרון הבעיה על לוח קטן (3 על 3).

### כיסוי מינימלי

כיסוי (*covering*) של גרף הוא תת-קבוצה של הצמתים בגרף, כך שכל קשת בגרף סמוכה לפחות לצומת אחד מתוך הקבוצה.

כיתבו בעיית אופטימיזציה למציאת כיסוי מינימלי - כיסוי עם מספר קטן ביותר של צמתים. הגדירו במדויק מה הם המשתנים, מה הם האילוצים, ומה פונקציית המטרה.

### וקטור אגליטרי

האם בחלוקה עם וקטור-מחירים אגליטרי יכולה להיות קנאה, כשיש שני שותפים ושני חדרים?

### בעיית תחנת המוניות

בתחנת מוניות עובדים שלושה נהגים. כל נהג נמצא עכשיו במקום אחר. התחנה מקבלת בו-זמנית שלוש פניות מנוסעים הנמצאים במקומות שונים. התחנה צריכה להחליט איזה נהג לשלוח לאיזה נוסע. הנתונים:

- המרחק בין נהג  $i$  לבין נוסע  $j$  הוא:  $d[i, j]$  (ק"מ).
- המרחק בין נוסע  $j$  לבין היעד שלו הוא  $x[j]$  (ק"מ).
- מחיר של דלק לקילומטר הוא  $p$  (ש"ח).

כיתבו פקודה בשפת פייתון שתעזור לתחנה למצוא את ההשמה הזולה ביותר של נהגים לנוסעים.

### סכום מחירים מקסימלי

נניח שמצאנו השמה המקסימת את סכום הערכים, ואנחנו רוצים למצוא מחיר לכל חדר. במקום למצוא וקטור-מחירים עם סכום מינימלי, אפשר לנסות למצוא וקטור-מחירים עם סכום מקסימלי:

Maximize  $\sum_i p[i]$

Such that For all  $i, j$ :  $w[d[i], i] - p[i] \geq w[d[i], j] - p[j]$

- א. מה הבעיה בתוכנית זו? (אפשר לפתור סעיף זה בשתי דרכים: להריץ בפייתון ולראות איזו הודעת שגיאה-מתקבלת, או לנסות לפתור את הבעיה ידנית במקרים פרטיים וליזהות את הבעיה).
- ב. איזה אילוץ אפשר להוסיף לתוכנית, כך שיתקבל פתרון הגיוני?

## שאלה: חלוקת שכר-דירה לדיירים עניים

רוצים לחלק  $n$  חדרים ל- $n$  דיירים עם העדפות אורדינליות, המקיימים את "הנחת הדיירים העניים" (כל דייר מעדיף כל חדר בחינם על כל חדר בתשלום). כל דייר מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
def OrdinalAgent:
```

```
def bestRoom(prices:List[int])->int:
```

```
    // INPUT:    the prices of the n rooms, in shekels.
```

```
    // OUTPUT:   the index of a room that the agent most
```

```
    //           prefers in these prices. Index is between 0 and n-1.
```

כיתבו אלגוריתם המקבל כקלט  $n$  דיירים ואת מחיר הדירה הכולל בשקלים, ומוצא השמת-חדרים ללא קנאה עד כדי שקל אחד. אם זה מקל עליכם - אפשר להניח ש  $n=3$ .

כותרת הפונקציה:

```
def findAlmostEnvyFree(agents:List[OrdinalAgent], totalRent:int):
```

פלט לדוגמה:

*Agent 0 receives room 2 for 163 shekels.*

*Agent 1 receives room 1 for 274 shekels.*

*Agent 2 receives room 0 for 343 shekels.*

## חלוקה הוגנת של ירושה עם בתים

איל הנדל"ן הנודע דונאלד דאק נפטר בשיבה טובה והוריש לארבעת ילדיו ארבעה בתים וכן סכום-כסף נכבד.

עליכם לעזור להם לחלק ביניהם את הירושה בהתאם לדרישות הבאות:

- כל אחד מהיורשים מקבל בית אחד בדיוק (וסכום-כסף כלשהו).
- אף יורש לא מקנא ביורשים האחרים.
- כל העיזבון מחולק בין היורשים.

א. כיתבו אלגוריתם, בעברית או בפסאודו-קוד, הפותר את הבעיה. מותר להשתמש באלגוריתמים שנלמדו בכיתה, אולם יש להוכיח שהם אכן פותרים את הבעיה.

ב. הדגימו את האלגוריתם שכתבתם בסעיף א על מצב שבו ערכי הבתים בעיני היורשים הם (לפי הסדר):

- בית: א ב ג ד
- מיקי: 80, 60, 40, 20
- דייזי: 90, 70, 50, 30
- גופי: 60, 80, 20, 40
- פלוטו: 70, 90, 30, 50

וסכום הירושה הוא 1000. תארו בפירוט את פעולת האלגוריתם. הסבירו מי מקבל כל בית ואיך מתחלק הכסף.

### אלגוריתם חלופי לחלוקת שכר-דירה

הציעו אלגוריתם חלופי לחלוקת חדרים ושכר-דירה בין שלושה שותפים, המסתמך על אלגוריתם Selfridge-Conway לחלוקת-עוגה ללא קנאה. הוכיחו שהאלגוריתם שלכם אכן מחזיר חלוקה ללא קנאה.