

א. הצגת דוגמה לחלוקה המקיימת EF1 אך לא EFX, תראה כי EFX חזק יותר. בפרט מובן כי קיום EFX מקיים EF1, שהרי אם לכל חפץ שנסיר תבוטל הקנאה, גם לחפץ 1 בודד כלשהו (כלומר EF1) היא תבוטל.

דוגמה נגדית –

קיימים 3 חפצים ושני אנשים. שניהם נותנים את אותו הערך לחפצים. שווי החפצים הוא 100, 15, 15.

נשקול את החלוקה הבאה –
משתתף א' – 15
משתתף ב' – 115

א' מקנא ב-ב'. אם נסיר מ-ב' את החפץ ששווה 100, א' לא יקנא. לכן מתקיים EF1. לא מתקיים EFX כי אם נסיר את החפץ בשווי 15 מ-ב', א' עדיין יקנא בו. כלומר הדוגמה מציגה כי לא כל חלוקה EF1 היא EFX.

ב. שלבי האלגוריתם -

- סדר את החפצים בסדר עולה לפי השווי שלהם (השווי שווה לפי כל שחקן)
- בחלוקת החפצים, חלק אותם לפי השווי, מהגדול לקטן.
- תן את החפץ הנוכחי לשחקן שמקנא (אם אין כזה, תן לאחד מהם. אין אפשרות ששניהם יקנאו כי הערכתם לחפצים שווה).

קנאה נגרמת בשלב מסוים, ואחריה מחליפים למי נותנים חפצים. מאחר והחפץ האחרון שניתן לשני גרם לראשון לקנא בו, אם נסיר אותו כבר לא תהיה קנאה. כל שאר החפצים אצל השני שווים יותר מהחפץ האחרון שקיבל, לכן כל חפץ שנוריד ממנו יבטל את הקנאה.

בנוסף, הוספת חפצים למי שמקנא עלולה לגרום לאחד מהמצבים הבאים -

- מצב 1 – לא לבטל את הקנאה, כלומר הסכום של השני עדיין גדול יותר בעיניי, אך זה עדיין EFX.
- מצב 2 – שינוי כיוון הקנאה, ונחזור לכתוב למעלה (הסרת החפץ האחרון שקיבל, וגרם לקנאה, תבטל את הקנאה, והוספת חפצים למי שמקנא תהפוך את כיוון הקנאה, או לא תבטל EFX).
- מצב 3 – שיווין. אין קנאה כלל, בפרט EFX. נמשיך בחלוקת החפצים לפי הנ"ל.

למעשה האלגוריתם מבטיח EFX בכל שלב פעולתו.

ג.

יהיו שני משתתפים, א' ו-ב'.

בחר אחד מהמשתתפים, בה"כ משתתף א'.
חלק את החפצים כאילו הוא מופיע פעמיים, כלומר ישנם שני אנשים עם ערך שווה לכל חפץ.
נשתמש באלגוריתם שהצעתי בסעיף ב'.

בסוף החלוקה –

- אם ישנו משתתף א' אחד שמקנא בשני, עד כדי חפץ כלשהו (EFX) -

תן אותה ל-א' המקורי ואת השאר ל-ב'.
אם משתתף ב' לא מקנא ב-א' – סיימנו (א' מקנא ב-ב' עד כדי חפץ כלשהו, ב' לא מקנא, מתקיים EFX).
אם משתתף ב' מקנא ב-א', למעשה יש מעגל קנאה – החלף בין הסלים של א' ו-ב'. אין קנאה כלל, בפרט EFX.

- אם, לחלופין, שתי החלוקות שוות בעיני א' –

תן אחת מהן ל-א' המקורי ואת השנייה ל-ב'.

אם ב' לא מקנא ב-א', סיימנו (אין קנאה בכלל, בפרט EFX).

אם ב' מקנא ב-א', (אם זו קנאה EFX לא נעשה כלום, אחרת) נחליף בין הסלים. ב' מפסיק לקנא כי הוא קיבל סל שהוא מעדיף, ובעיני א' שני הסלים שווים ולכן הוא לא מקנא. כלומר אין קנאה כלל ובפרט EFX.

כיסיתי את כל המקרים ולכן האלגוריתם עובד לכל מקרה.

1.

לפי מאמר שפורסם לראשונה ב-12 לפברואר 2020, באתר Cornell University, קיימת חלוקה EFX לשלושה שחקנים עם העדפות אדיטיביות, לא בהכרח זהות.

לינק למאמר - <https://arxiv.org/abs/2002.05119>