חלוקה הוגנת בקירוב

בשיעור הזה נלמד על חלוקה הוגנת של חפצים בדידים - חפצים שאי-אפשר לחתוך, כמו בתים, תכשיטים וכו'. העובדה שאי אפשר לחתוך אותם אומרת שקשה יותר להשיג הגינות מאשר בבעיה הרציפה של חלוקת עוגה. בגדול, יש ארבע דרכים להתמודד עם בעיה זו:

(1) שימוש בכסף כדי למנוע קנאה - ראינו דוגמה לזה בבעיית חלוקת שכר-הדירה.

(2) חיתוך מספר קטן של חפצים - ראינו דוגמה לזה באלגוריתם "המנצח המתוקן", שחותך לכל היותר חפץ יחיד ומצליח למנוע קנאה.

(3) חלוקה בגורל - שיטה מעניינת ומעשית, החל מחלוקת ארץ ישראל בימי משה רבנו ויהושע בן-נון, ועד ל"מחיר למשתכן" בימי משה כחלון. דיון בשיטה זו דורש ידע רב בהסתברות, ולכן נשאירו לקורס אחר.

(4) הגינות מקורבת - על זה נדבר היום.

חלוקה ללא-קנאה-מלבד-1

יש הרבה הגדרות להגינות מקורבת בחלוקת חפצים בדידים. הנה אחת ההגדרות המקובלות:

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1" (Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני משתתפים א,ב, אם מורידים מהסל של שחקן ב חפץ אחד לכל היותר, אז שחקן א לא מקנא בו.

המשמעות היא, שרמת הקנאה היא הקטנה ביותר האפשרית, בהתחשב בעובדה שהחפצים בדידים.

כשה"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה ללא קנאה (**EF**).

האם כשהחפצים בדידים תמיד קיימת חלוקה **EF1**? התשובה היא כן. הנה אחד האלגוריתמים הפשוטים למציאת חלוקה כזאת - **אלגוריתם מעגלי הקנאה** (envy-cycles, או envy-graph).

עוברים על החפצים בסדר שרירותי. לכל חפץ:

1. נותנים את החפץ לשחקן שאף-אחד לא מקנא בו.
2. אם אין כזה – סימן שיש מעגל-קנאה. מחליפים סלים במעגל בניגוד לכיוון הקנאה.

מבצעים את 2 עד שאין מעגלים, ואז חוזרים ל-1.

ראו דוגמה במצגת.

משפט: אם יש m חפצים ו-n שחקנים, אז זמן-הריצה של אלגוריתם מעגלי הקנאה הוא $O(m\ n^3)$.

הוכחה: מציאת מעגל ניתן לבצע ע"י אלגוריתם DFS, בזמן $O(n^2)$.

הסרת מעגל לא מוסיפה קשתות (כי אוסף הסלים לא משתנה), ומסירה לפחות שתי קשתות.

כל חפץ מוסיף לכל היותר $n-1$ קשתות.

לכל היותר נוספות $m(n-1)$ קשתות, לכן לכל היותר יש להסיר $m(n-1)/2$ מעגלים.

משפט: בכל שלב באלגוריתם, החלוקה הנוכחית היא EF1 (בפרט, החלוקה הסופית היא EF1).

הוכחה: החלוקה ההתחלתית (הריקה) היא EF1. נוכיח שכל צעד משאיר את החלוקה EF1.

(א) מסירת חפץ לשחקן שלא מקנאים בו, אולי גורמת לשאר השחקנים לקנא בו, אבל רק עד כדי חפץ 1, כך שהחלוקה היא עדיין EF1.

(ב) הסרת מעגל משפרת את התועלת של כל השחקנים במעגל, ולא משנה את אוסף הסלים. לכן, אם החלוקה היתה EF1, היא תישאר EF1 גם אחרי הסרת המעגל. ***

חלוקה ללא-קנאה-מלבד-1 וגם יעילה

החיסרון של אלגוריתם מעגלי-הקנאה הוא, שהוא לא מבטיח שהחלוקה המתקבלת היא יעילה פארטו (קל למצוא דוגמה לכך).

כש"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה **EF** ויעילה. האם כשהחפצים בדידים - תמיד קיימת חלוקה **EF1** ויעילה?

כש"עוגה" רציפה – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא ללא-קנאה ויעילה. האם כשהחפצים בדידים – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא EF1 ויעילה פארטו?

התשובה היא כן! זה התגלה ב-2016.

משפט: נניח ש:

* ההעדפות אדיטיביות – ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל.

* קיימת לפחות חלוקה אחת שבה כל שחקן מקבל ערך גדול מאפס.

אז, כל חלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא גם יעילה-פארטו וגם EF1.

הוכחה: יעילות פארטו – כי כל שיפור פארטו מגדיל את המכפלה.

EF1 - נניח ש-i מקנא ב-j. נסתכל על כל החפצים בסל של j. לכל חפץ g, נבדוק את יחס הערכים:

$V_i(g) \ / \ V_j(g)$

נבחר את החפץ שיחס-הערכים שלו הכי גדול, ונעביר אותו מ-j ל-i. המכפלה בחלוקה החדשה שווה-או-קטנה מהמכפלה בחלוקה הקודמת, ולכן:

$$[V_i(X_i)+V_i(g)]*[V_j(X_j)-V_j(g)] \quad \leq \quad V_i(X_i)*V_j(X_j)$$

$$\rightarrow \quad V_j(X_j) \ * \ V_i(g) \ / \ V_j(g) \quad \leq \quad V_i(X_i) \ + \ V_i(g)$$

$$\rightarrow \quad V_j(X_j) \ * \ V_i(g) \ / \ V_j(g) \quad \leq \quad V_i(X_i) \ + \ V_i(g)$$

יחס הערכים של g הוא הכי גדול ב-X_j, ולכן:

$$V_i \ (X_j \ ) \ / \ V_j \ (X_j \ ) \quad \leq \quad V_i(g) \ / \ V_j(g)$$

מציבים למעלה ומקבלים:

$$V_i \ (X_j \ ) \quad \leq \quad V_i(X_i) \ + \ V_i(g) \ V_i \ (X_j \ ) \ - \ V_i(g) \quad \leq \quad V_i(X_i)$$

מכאן: אם מורידים את g מהסל של j, אז i כבר לא מקנא. ***

הבננו שהחלוקה ה"אידיאלית" של חפצים בדידים היא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים. אבל איך מוצאים חלוקה כזאת? נסמן:

$V_{i,g}$= Value of good g to player i.

$x_{i,g}$ = quantity of good g given to player i.

אנחנו רוצים לפתור בעיית אופטימיזציה:

Maximize $\quad sum_i \log (sum_g (x_{i,g} * V_{i,g}))$

such that for all g: $\quad sum_i x_{ig} = 1$

כאשר ה-$x_{i,g}$ רציפים, זה קל. כאשר ה-$x_{i,g}$ בדידים, זה קשה!

במאמר מ-2016 (ראו "מקורות", וראו גם במצגת) ישנו טריק המאפשר לפתור בעיה זו בזמן סביר, כאשר כל אחד מהערכים מוגבל למספר בין 1 ל-1000. כיוון שממשק-המשתמש באתר שלהם (http://www.spliddit.org/apps/goods) ממילא מאפשר להכניס רק ערכים בין 1 ל-1000, האלגוריתם עובד על כל קלט מציאותי.

יש כאן דרך חשיבה מעניינת: אם מסתכלים על הבעיה כבעיה תיאורטית בלבד, ומנסים לפתור אותה לכל הקלטים האפשריים - זה מאד קשה. אבל אם מסתכלים עליה כבעיה מעשית, ומנסים לפתור אותה רק עבור הקלטים שבני-אדם בפועל מזינים לאלגוריתם - הבעיה נעשית פתירה!

מקורות

- Lipton, R. J.; Markakis, E.; Mossel, E.; Saberi, A. (2004). "On approximately fair allocations of indivisible goods". Proceedings of the 5th ACM conference on Electronic commerce - EC '04. p. 125. *doi:10.1145/988772.988792*. - אלגוריתם מעגלי הקנאה
- Caragiannis, Ioannis; Kurokawa, David; Moulin, Hervé; Procaccia, Ariel D.; Shah, Nisarg; Wang, Junxing (2016). The Unreasonable Fairness of Maximum Nash Welfare. Proceedings of the 2016 ACM Conference on Economics and Computation - EC '16. p. 305. *doi:10.1145/2940716.2940726*. *ISBN 9781450339360*. - אלגוריתם מיקסום המכפלה

סיכם: אראל סגל-הלוי.