

## חלוקה הוגנת עם שיתוף מינימלי

עד עכשיו ראינו כמה דרכים להתמודד עם חלוקה הוגנת של חפצים בדידים:

(1) שימוש בכסף כדי למנוע קנאה - ראינו דוגמה לזה בבעיית חלוקת שטר-הדירה.

(2) חלוקה הוגנת-בקירוב - אלגוריתם גרף-הקנאה.

(3) פתרון נוסף הוא חלוקה בגורל - שיטה מעניינת ומעשית, החל מחלוקת ארץ ישראל בימי משה רבנו ויהושע בן-נון, ועד ל"מחיר למשתכן" בימי משה כחלון. דיון בשיטה זו דורש ידע רב בהסתברות, ולכן נשאירו לקורס אחר.

אבל מה אם אנחנו לא רוצים להשתמש בכסף (למשל משיקולי מס), והחפצים יקרים מכדי שיהיה אפשר להסתפק בהגינות "בערך" או בהגרלה?

במצב זה, הפתרון המקובל הוא להשאיר חלק מהחפצים בבעלות משותפת. למשל בחלוקת ירושות, אם יש שני יורשים ושלוש דירות, אז כל אחד יקבל דירה, והדירה השלישית תהיה משותפת, כשאחוזי-הבעלות ייקבעו לפי השווי של הדירות האחרות.

כיוון ששיתוף הוא דבר יקר ולא נוח, אנחנו רוצים לשתף כמה שפחות, והשאלה היא - **מהו המספר הקטן ביותר של חפצים שצריך לשתף, על-מנת להשיג חלוקה הוגנת ויעילה?**

בשלב ראשון נניח שיש לנו רק שני אנשים. קל לראות, שבמקרים מסויימים חייבים לשתף חפץ אחד (למשל, אם יש רק חפץ אחד עם ערך גדול מאד, ולכל שאר החפצים ערך קטן משמעותית). האם תמיד אפשר להשיג חלוקה הוגנת ויעילה עם שיתוף חפץ אחד בלבד?

ניסיון ראשון: נסדר את כל החפצים בשורה ונתייחס אליהם כמו עוגה. נבקש מאדם אחד לחתוך ומהשני לבחור (או להיפך). בשיטה זו אין קנאה, ולכל היותר חפץ אחד נחתך. אבל החלוקה לא בהכרח יעילה פארטו (קל למצוא דוגמאות לכך).

ניסיון שני: כל חפץ נמסר למי שמייחס לו את הניקוד הגבוה ביותר. החלוקה ממקסמת את סכום הערכים, ולכן היא יעילה פארטו (כמו שהוכחנו בעבר), אבל יש קנאה (קל למצוא דוגמאות לכך).

ניסיון שלישי: נתייחס לחפצים כמו לסחורות, ונמצא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים. כפי שהוכחנו, החלוקה תהיה ללא קנאה וגם יעילה פארטו; אבל, לא בטוח שייחתך רק חפץ אחד.

## אלגוריתם המנצח המתקן

למרבה השמחה, קיים אלגוריתם לשני אנשים, המוצא חלוקה הוגנת ויעילה פארטו עם שיתוף חפץ אחד לכל היותר - המינימום האפשרי.

האלגוריתם משמש לא רק לחלוקה של חפצים אלא גם לחלוקה של נושאים שיש עליהם מחלוקת, כמו למשל במשפטי גירושין או פירוק שותפויות. האלגוריתם יכול לשמש לגישור ולמציאת פתרון שיהיה טוב לשני הצדדים, ולכן הוא נקרא "the win-win solution" או "adjusted winner" (המנצח המתקן).

האלגוריתם מתייחס לשני שותפים/בני זוג הרוצים להיפרד (לצורך הדיון נקרא להם "דונאלד" ו"איואנה"). יש  $m$  חפצים או נושאים שיש עליהם מחלוקת. כל שותף מייחס ערך שונה לכל נושא; הערכים נמדדים באחוזים (כך שעבור כל שותף, סכום הערכים של כל החפצים הוא 100). האתגר הוא להחליט מי יקבל כל חפץ/נושא כך שיתקיימו התכונות הבאות:

1. אין קנאה;
2. התוצאה היא יעילה-פארטו;
3. צריך לחתוך חפץ אחד לכל היותר.

האלגוריתם פותח ע"י אלן טיילור (מתמטיקאי) וסטיבן בראמס (פרופסור למדעי המדינה). בנוסף ל-3 התכונות שלמעלה, הוא מקיים תכונה נוספת - שיוויוניות (equitability) - סכום הנקודות של כל שחקן יהיה שווה. התיאור כאן שונה ופשוט יותר מהתיאור המקורי.

צעד א. עבור כל חפץ, חשב את יחס הניקוד בין דונאלד לאיואנה. סדר את החפצים מימין לשמאל בסדר עולה של יחס זה - כך שבצד ימין נמצאים החפצים שאיואנה מייחסת להם ניקוד גבוה יותר, ובצד שמאל - החפצים שדונאלד מייחס להם ערך גבוה יותר.

צעד ב. איתחול: תן את כל החפצים לדונאלד.

צעד ג. עבור על החפצים מימין לשמאל. העבר חפץ אחר חפץ לאיואנה. חשב את סכום הנקודות שאיואנה מייחסת לחפצים שברשותה, ואת סכום הנקודות שדונאלד מייחס לחפצים שברשותו. אם הסכומים של שני השחקנים שווים - סיים.

צעד ד. אם הגעת לחפץ, שאם יתנו אותו לאיואנה - סכום הנקודות שלה יהיה גדול יותר, ואם יתנו אותו לדונאלד - סכום הנקודות שלו יהיה גדול יותר, חלק אותו ביחס שיגרום לסכום הנקודות להיות שווה (פתרון משוואה בנעלם אחד).

להדגמה, ראו בגליון האלקטרוני winner.ods.

**משפט:** אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו.

**הוכחה:** יהי  $r$  יחס-הניקוד של החפץ שנחתך (או, אם אף חפץ לא נחתך - החפץ האחרון שהועבר מדונאלד לאיואנה). נכפיל את הניקוד של איואנה ב- $r$ . כיוון שהחפצים סודרו בסדר עולה של יחס הערכים, בחלוקה הסופית, כל חפץ נמסר למי שנותן לו ניקוד מירבי (עבור החפצים שכבר הועברו לאיואנה, הניקוד של איואנה גדול יותר; עבור החפץ שנחתך, הניקוד של שניהם שווה; עבור החפצים שנשארו אצל דונאלד, הניקוד של דונאלד גדול יותר). מכאן, שהחלוקה הסופית ממקסמת את הסכום:  $r \cdot v[\text{ivana}] + v[\text{donald}]$ . כפי שהוכחנו בהרצאה קודמת, חלוקה הממקסמת את סכום הערכים, או סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה פארטו. \*\*\*

**משפט:** אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה ללא קנאה.

**הוכחה:** לשני השותפים ניקוד שווה. אילו הניקוד היה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלף וזה היה שיפור פארטו - סתירה למשפט הקודם. מכאן שהניקוד של שניהם הוא לפחות 50. כיוון שהסכום של כל אחד הוא 100, הערך שכל אחד מהם מייחס לסל של השחקן השני הוא לכל היותר 50, ולכן אין קנאה. \*\*\*

## שיתוף מינימלי

אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר חלוקה יעילה והוגנת עם שיתוף של חפץ אחד לכל היותר. שיתוף זה לא נוח. לכן נעדיף חלוקה יעילה והוגנת בלי שיתוף בכלל, אם אפשר.

**משפט:** כל חלוקה יעילה פארטו בין שני אנשים, מתקבלת ע"י סידור החפצים בסדר עולה של יחס הערכים, ו"חיתוך" הסדרה בנקודה כלשהי.

(**מסקנה:** אם יחס-הערכים הוא שונה לכל חפץ, אז אלגוריתם "המנצח המתוקן" ימצא חלוקה יעילה-פארטו וללא-קנאה בלי שיתוף כלל, אם-ורק-אם קיימת חלוקה כזאת!).

### הוכחת המשפט:

נניח שדונאלד קיבל את חפץ 1 או חלק ממנו, ואיוואנה קיבלה את חפץ 2 או חלק ממנו, ויחס הערכים הוא לא לפי הסדר הנכון:

$$r_1 = v_{d1} / v_{i1} < v_{d2} / v_{i2} = r_2$$

$$v_{d1} / v_{d2} < v_{i1} / v_{i2}$$

נעביר קצת (y) חפץ 1 מדונאלד לאיוואנה, בתמורה לקצת (z) חפץ 2, כאשר:

$$v_{d1} / v_{d2} < z / y < v_{i1} / v_{i2}$$

זה שיפור פארטו (חזק), כי:

$$z v_{d2} > y v_{d1}$$

$$y v_{i1} > z v_{i2}$$

\*\*\*

כעת יש בידנו אלגוריתם למציאת חלוקה עם שיתוף מינימלי בין שני אנשים, במקרה הפרטו שבו יחס הערכים הוא שונה לכל חפץ:

- סדר את החפצים לפי סדר עולה של יחס הערכים;
- העבר חפצים בהתאם לאלגוריתם "המנצח המתוקן";
- אם תוך-כדי ההעברה התגלתה חלוקה ללא-קנאה בלי שיתוף כלל – החזר אותה; אחרת, החזר חלוקה ללא-קנאה עם שיתוף אחד (תמיד קיימת חלוקה כזאת).

אלגוריתם זה הוכלל לאחרונה לשלושה אנשים או יותר. ראו: <https://arxiv.org/abs/1908.01669>

אם יש חפצים עם יחס-ערכים זהה, אז צריך לבדוק את כל הסדרים האפשריים ביניהם. במקרה זה, האלגוריתם עלול להיות לא פולינומיאלי.

במקרה הגרוע ביותר, כאשר כל יחס-הערכים זהה, הבעיה הופכת להיות שקולה לבעיה הנקראת Partition, הידועה כבעיה NP-קשה.

## מקורות

- Brams and Taylor: "Fair Division" (1996 book), "The Win-Win Solution" (1999 book).

- הקורס של ויליאם גסרד - כולל מצגות סטודנטים על יישומים של האלגוריתם במקרים שונים:  
<http://www.cs.umd.edu/~gasarch/COURSES/209/S15>
  - מצגת על דונאלד ואיואנה:  
<http://www.cs.umd.edu/~gasarch/COURSES/209/S15/trump.pptx>
- האתר של אוניברסיטת ניו-יורק - כולל הדגמה חיה ואפשרות לשלם כדי לקבל הסכם פורמלי:  
<http://www.nyu.edu/projects/adjustedwinner/>
- <http://fairoutcomes.com/fd.html>

סיכום: אראל סגל-הלוי.