

מטלה - חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות - תוספת

שאלה. חלוקה הוגנת של חשמל

בכפר קטן באפריקה יש n תושבים. צריכת החשמל של כל תושב בכל רגע היא 1 קילוואט. תחנת הכוח של הכפר מספקת רק $n-1$ קילוואט. לתושבי הכפר יש צרכים שונים והעדפות שונות לגבי החשמל, למשל: לחלק מהתושבים חשוב מאוד שיהיה חשמל בלילה כי זה בדיוק הזמן שהם יושבים וכותבים שירים לאור המנורה; לתושבים אחרים חשוב חשמל דווקא בצהריים כי אז הם עושים כביסה; וכו'. עיזרו לחברת החשמל המקומית להחליט איך לחלק את החשמל בצורה הוגנת בין התושבים!

ההעדפות של כל תושב מיוצגות ע"י המחלקה הבאה:

```
class Person:
def importance(self, fromTime:float, toTime:float) → float:
    // INPUT: a time-interval, given in hours since midnight. fromTime and
    // toTime are floats between 0 and 24. E.g, (fromTime=11,toTime=14) represents the
    // time-interval between 11:00 AM and 14:00 PM.
    // OUTPUT: a positive number that says how important it is for the
    // person to receive electricity in this time-interval.
def cut(self, fromTime:float, toTime:float, fraction:float) → float:
    // INPUT: a time-interval, as above, and a fraction in [0,1].
    // OUTPUT: a number between fromTime and toTime, that cuts the interval
    // according to the given fraction, i.e, importance(fromTime,half)=fraction *
    // importance(fromTime,toTime).
```

תוכנית לחלוקת חשמל בין אנשים מיוצגת ע"י אוסף של עצמים מהמחלקה הבאה - המייצגת אינטרוול זמן ואת האינדקסים של האנשים המחוברים לחשמל באותו זמן:

```
class TimeInterval:
    fromTime:float
    toTime:float
    peopleWithElectricity:Set[int]
```

א. כיתבו הגדרה לחלוקה פרופורציונלית של חשמל בין התושבים. הסבירו מדוע ההגדרה שלכם הגיונית. כיתבו פונקציה בפיתון המקבלת חלוקה (וקטור של אינטרוולים) ומחזירה "אמת" אם החלוקה היא פרופורציונלית.

```
def isProportional(village:List[Person], division:List[TimeInterval]) → bool:...
```

ניתן להניח שיש לכם ב"חנים" פונקציות בסיסיות על מערכים, כגון: חיפוש.

ב. כיתבו פונקציה בפיתון המקבלת אוסף של אנשים ומחזירה חלוקה פרופורציונלית:

```
def getProportionalDivision(List[Person] village) → List[TimeInterval]:...
```

ג. הדגימו את פעולת הפונקציה מהסעיף הקודם על כפר ובו 5 תושבים.

שאלה: חלוקת תורנויות ללא קנאה

אמא ואבא נסעו לנופש וכו', כמו בשאלה 2.

א. תארו אלגוריתם שבו כל אחד מהילדים מקבל תורנות רצופה, והחלוקה היא ללא-קנאה-בקירוב (עד כדי שניה אחת).

ב. תנו דוגמה הממחישה את פעולת האלגוריתם של סעיף א.

שאלה: חלוקה פרופורציונלית בשני מימדים

א. נתונה חלקת-אדמה בצורת מלבן. תארו אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין n אנשים, כך שכל אחד מקבל מלבן.

ב. נתונה חלקת-אדמה בצורת ריבוע. הוכיחו שלא קיים אלגוריתם הנותן חלוקה פרופורציונלית של העוגה בין n אנשים כך שכל אחד מקבל ריבוע.

שאלה: תיכנות - סימפלקס החלוקות

ניתן לייצג פונקציית-הערך של שחקן ע"י רשימה של מספרים, המייצגים את הערך של השחקן לכל חלק מהעוגה. למשל, אם העוגה היא הקטע $[0,1]$, אז הרשימה 5,2,9,4 משמעה שהשחקן מעריך את הרבע השמאלי של העוגה $[0,0.25]$ כ-5, הרבע הבא $[0.25,0.5]$ כ-2, וכו'.

א. נתונה המחלקה הבאה, המאותחלת ע"י רשימה של מספרים כנ"ל. השלימו את הפונקציה `eval`.

```
class Agent:
```

```
def __init__(self, values:list):
    """
    Initialize an agent with piecewise-constant valuations
    over a 1-dimensional cake.
    :param values: The values of the agent to the regions of the cake.
    """
    self.values = values

def eval(self, x:float, y:float)->float:
    """
    :param x,y: positive numbers representing locations on the cake.
    :return: v: the value of the piece [x,y] for the agent.
    """
```

ב. כיתבו פונקציה המקבלת כקלט משתנה מסוג Agent כנ"ל, ומציירת את סימפלקס החלוקות הדו-ממדי בצבעים, כאשר:

- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 1 מסומנת באדום;
- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 2 מסומנת בירוק;
- כל נקודה שבה השחקן רוצה את פרוסה מס' 3 מסומנת בכחול.

שאלה: שינוי חלוקה קיימת

עמי רמי ותמי חילקו ביניהם עוגה בצורה פרופורציונלית (כל אחד קיבל לפחות $1/3$). הם התיישבו לאכול, אבל לפני שהספיקו - נכנסה צומי וטענה שגם לה מגיע חלק. פתחו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית (כל אחד מקבל לפחות $1/4$), ובנוסף, נותן לכל אחד משלושת הילדים הראשונים (עמי רמי ותמי) לפחות $3/4$ מהערך שהיה לו בחלוקה הראשונה.

פתרון: אנה אהרנוב.

פתרון כללי: גל פוליצר וטל נקר.

להרחבה ראו: https://en.wikipedia.org/wiki/Fink_protocol

שאלה 2: חלוקת תורנויות פרופורציונלית

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את n ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקות ה- $n+1$. הם מעוניינים לחלק ביניהם את זמן השמירה בצורה הוגנת. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי זמן השמירה - יש כאלה שהכי קשה להם לשמור בלילה, יש כאלה שהכי קשה להם לשמור דווקא בצהריים, וכו'.

א. בסעיף זה הניחו שהילדים **אוהבים** לשמור על התינוקות - כל אחד רוצה לשמור כמה שיותר. באיזה אלגוריתם תשתמשו כדי למצוא חלוקה פרופורציונלית?

ב. בסעיף זה הניחו שהילדים **לא אוהבים** לשמור - כל אחד רוצה לשמור כמה שפחות. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.