

מטלה 3

שאלה 3

• סעיף א:

מצב ב'	מצב א'	
4	1	אדם א'
5	5	אדם ב'
5	5	אדם ג'

בדוגמה הנ"ל, מצב א' הוא חלוקה יעילה-פארטו-חלש מכיוון שלא קיים מצב אחר שהוא שיפור פארטו חזק שלו (כלומר לא קיים מצב שטוב יותר **לכל** המשתתפים).

אבל מצב א' היא לא חלוקה יעילה-פארטו מכיוון שקיים מצב אחר שהוא שיפור פארטו שלו (מצב ב' הוא שיפור פארטו שלו כי הוא טוב יותר לאדם א' וטוב באותה מידה לשאר).

• סעיף ב:

צ"ל- אם פונקציית הערך של כל השחקנים הן חיוביות ממש בכל נקודה ונקודה בעוגה, אז כל חלוקה יעילה-פארטו-חלש היא גם חלוקה-פארטו.

הוכחה: נניח בשלילה שבמצב הנ"ל קיימת חלוקה יעילה-פארטו-חלש שהיא לא חלוקה-פארטו. נקרא לה מצב א'.

מאחר והחלוקה לא יעילה-פארטו קיים לה שיפור פארטו, נקרא לו מצב ב', שאומר שלפחות לאחד המשתתפים יש חלוקה טובה יותר ולשאר המשתתפים החלוקה טובה לפחות באותה מידה. ניקח מהחלק שנוסף למשתתף מסוים לאחר השיפור חתיכה קטנה מספיק כך שעדיין יש לו שיפור ממצב א' ונחלק את החתיכה בין שאר המשתתפים- וקיבלנו שיפור לכולם (כי לכולם פונקציית הערך חיובית בכל נקודה לפי הנתון). קיבלנו סתירה לכך שחלוקה א' היא חלוקה יעילה-פארטו-חלש כי קיבלנו מצב שיפור-פארטו-חזק שלו. **מש"ל.**

• סעיף ג':

צ"ל- אם לכל השחקנים ישנה אותה פונקציית-ערך, אז כל החלוקות הן יעילות-פארטו.

הוכחה: מאחר ופונקציית הערך שווה לכל המשתתפים, נקבל כי בכל חלוקה, סכום הערכים של כל המשתתפים הוא מקסימלי- כי הוא שווה לערך העוגה כולה.

נוכיח כי חלוקה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה-פארטו:

נתונה חלוקה א' הממקסמת סכום ערכים.

נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה-פארטו, אז קיימת חלוקה ב' שהיא שיפור-פארטו שלה.

בחלוקה ב', לכל המשתתפים יש ערך לפחות כמו בחלוקה א' ולחלק מהמשתתפים יש ערך גבוה יותר. קיבלנו שסכום הערכים בחלוקה ב' גבוה יותר- בסתירה לכך שחלוקה א' ממקסמת את סכום הערכים. **מש"ל**