

## פתרון מטלה - חלוקת שכר-דירה

### שאלה 1. חלוקת שכר-דירה בעזרת אתר ספלידיט

באתר ספלידיט ישנה אפשרות לחלק שכר-דירה במודל הקרדינלי:

<http://www.spliddit.org/apps/rent>

בעזרת האתר, מיצאו בעיית חלוקת שכר דירה לשלושה דיירים, שבה:

א. כל השותפים משלמים בדיוק שליש משכר-הדירה;

ב. שותף אחד משלם אפס, ושני השותפים האחרים משלמים בדיוק חצי משכר-הדירה;

ג. שני שותפים משלמים אפס, והשותף השלישי משלם את כל שכר-הדירה.

ד [רשות]. אחד השותפים משלם מחיר שלילי.

בכל אחד מהמקרים, הסבירו מדוע החלוקה המתקבלת היא הוגנת בהתאם למודל הקוואזי-ליניארי.

### שאלה 2: בעיית תחנת המוניות

**הערה:** השאלה במקור היתה על סטודנטים המחלקים ביניהם שאלות. כפי שהעיר לי אחר-כך איתי בן משה, הסיפור לא התאים לשאלה: כשסטודנטים מחלקים ביניהם שאלות, הם רוצים שהחלוקה תהיה מאוזנת, ולא דווקא שסכום רמות המאמץ יהיה מינימלי. לכן אני מביא כאן שאלה דומה אבל עם סיפור אחר.

---

בתחנת מוניות עובדים  $n$  נהגים הנמצאים במקומות שונים. התחנה מקבלת  $4n$  קריאות מנוסעים שונים. מנהל התחנה רוצה להקצות בדיוק 4 נוסעים לכל נהג. בנוסף, הוא רוצה לחסוך בדלק. כל נהג נמצא במקום אחר, ולכן לכל נהג דרושה כמות דלק שונה כדי להגיע לכל נוסע.

תארו אלגוריתם יעיל המוצא חלוקת נוסעים לנהגים, שבה הכמות הכוללת של דלק שהתחנה כולה צריכה להשקיע היא הקטנה ביותר.

- הקלט לאלגוריתם הוא מטריצה עם  $n$  שורות (שורה לכל נהג) ו- $4n$  עמודות (עמודה לכל נוסע); כל תא מתאר את כמות הדלק הדרושה לנהג בשורה, כדי לשרת את הנוסע בעמודה.

- הפלט הוא: עבור כל נהג, איזה 4 נוסעים הוא צריך לקחת.

**פתרון:** הרעיון הוא לבצע רדוקציה לאלגוריתם שידוך עם משקל מקסימום. אבל יש שני אתגרים:

א. בשידוך לכל נהג יש נוסע אחד, וכאן לכל נהג יש 4 נוסעים.

ב. למדנו למצוא שידוך עם משקל מקסימום, וכאן צריך שידוך עם משקל מינימום.

פתרון לאתגר א הוא "לשכפל" כל נהג 4 פעמים. מקבלים בעיה עם  $4n$  נהגים ו  $4n$  נוסעים. שידוך מקסימום / מינימום בבעיה זו מתאים לשידוך מקסימום / מינימום בבעיה המקורית, כאשר כל נהג מקבל את 4 הנוסעים של 4 ה"כפילים" שלו.

פתרון לאתגר ב הוא להפוך את המשקלים לשליליים. אבל אם ננסה את זה בפיתוח נגלה שהפונקציה מחזירה לנו שידוך שהוא קבוצה ריקה, כי לשידוך ריק יש משקל 0, ולכל שאר השידוכים בגרף יש משקל שלילי. ו-0 גדול יותר מכל מספר שלילי! הפתרון הוא למצוא חסם עליון כלשהו, נניח  $T$ , על המספרים במטריצה, ולהחליף כל מספר  $x$  בהפרש:  $T - x$ . עכשיו כל המשקלים הם עדיין חיוביים. סכום מקסימלי במטריצה זו מתאים למיקסום של הסכום:

$$(T - x_1) + (T - x_2) + \dots + (T - x_n)$$

$$= n * T - (x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

כיוון שהביטוי  $n * T$  היא ביטוי קבוע הנוסף באופן שווה לכל הסכומים של כל השידוכים, מציאת שידוך עם סכום מקסימלי שקולה לשידוך שעבורו הסכום  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$  מינימלי.

**פתרון שלא עובד:** פתרון שלא עובד הוא לבצע שידוכים באופן חמדני, כלומר: קודם למצוא שידוך מינימלי ל- $n$  נהגים ו  $n$  נוסעים, ואז להוריד את הנוסעים ששודכו ולמצוא שידוך נוסף, וכו'. הנה דוגמה למקרה שבו התוצאה היא לא שידוך עם סכום מינימלי:

**נהג א:** 2, 4, 20, 20

**נהג ב:** 12, 13, 20, 20

לפי האלגוריתם החמדני, בשלב הראשון נשדך את א ל-2 ואת ב ל-13 ונקבל סכום 15 (בדקו ותראו שזה המינימום). בשלב השני נשדך את א ואת ב ל-20, ונקבל סכום 40. סכום כולל 55. אבל יש השמה עם סכום קטן יותר: לשדך את א ל-2 ו-4 (סכום 6), ולשדך את ב ל-20 ו-20. סכום כולל 46

### שאלה 3. חלוקה הוגנת של ירושה עם בתים

איל הנדל"ן הנודע דונאלד דאק נפטר בשיבה טובה והוריש לארבעת ילדיו ארבעה בתים וכן סכום-כסף נכבד.

עליכם לעזור להם לחלק ביניהם את הירושה בהתאם לדרישות הבאות:

- כל אחד מהיורשים מקבל בית אחד בדיוק (וסכום-כסף כלשהו).
- אף יורש לא מקנא ביורשים האחרים.
- כל העיזבון מחולק בין היורשים.

כיתבו אלגוריתם, בעברית או בפסאודו-קוד, הפותר את הבעיה.

**פתרון:** שוב הכוונה היתה לבצע רדוקציה מהבעיה הנתונה לבעיה שלמדנו, במקרה זה: בעיית שכר-הדירה. במקום "בית" נכתוב "חדר", ושכר-הדירה יהיה שלילי - מינוס סכום-הכסף שנמצא בעיזבון. נשתמש באלגוריתם סונג-ולאך. התוצאה היא חלוקה ללא קנאה שבה כל יורש מקבל בית אחד.

**פתרון שלא עובד:** ניסיון לבצע שידוך באופן חמדני (לתת כל בית למי שהכי רוצה אותו מאלה שנשארו בלי בית) לא בהכרח ימצא את השידוך עם סכום-הערכים הגדול ביותר, ולכן גם לא בהכרח ימצא חלוקה

ללא קנאה (כיוון שהוכחנו בהרצאה, שבחלוקה ללא קנאה, ההשמה חייבת להיות כזאת הממקסמת את סכום הערכים).

#### שאלה 4: השמה ממקסמת סכום ערכים - סיבוכיות זמן ריצה

א. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הטוב ביותר המוכר כיום למציאת השמת חדרים לדיירים הממקסמת את סכום הערכים? (לפי ויקיפדיה).

\* ב [רשות]. בדקו ע"י ניסוי, מהי (בקירוב) סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם `max_weight_matching` הממומש בספריה `networkx` של פייתון? (דרך אפשרית לבדוק היא להריץ את האלגוריתם על גרפים בגדלים שונים, לשרטט גרף של לוגריתם זמן הריצה כפונקציה של לוגריתם גודל הגרף, ולנסות להתאים פונקציה לגרף).

**פתרון:** יוסי

#### שאלה 5: יעילות פארטו בחלוקת שכר דירה

כזכור, בבעיית חלוקת המשאבים הוכחנו, שכל השמה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו. הוכיחו, שבבעיית חלוקת חדרים ושכר-דירה, גם הכיוון ההפוך נכון: כל השמה יעילה פארטו ממקסמת את סכום הערכים.

**פתרון:** תם