

מגיש: דניאל ספריגין.

שאלה 4:

(א)

הגדרה כללית:

לכל i :

$$V_i(X_i) \geq V_i(C)/n$$

כאשר:

C = העוגה כולה

X_i = החלק שהמשתמש i קיבל

V_i = פונקציית ערך החלק i

לפי הגדרה זו, הערך שכל אחד מהמשתתפים יקבל הוא בפרופורציה לעוגה, כלומר, העוגה לחלק לכמות המשתתפים, או במדויק יותר:

$$1/n$$

בשאלה זאת אנחנו נרצה לחלק את העוגה לא לפי כמות המשתתפים אלא לפי כמות ההשקעה של כל משתתף, כלומר אם לקח להכין את העוגה 3 שעות, ועמי השקיע שתיים, ותמי שעה אחת, אז עמי יקבל $\frac{2}{3}$ מהעוגה ותמי תקבל $\frac{1}{3}$ מהעוגה.

נגידר פונקציה H אשר תהיה פונקציית השעות שהשקיעו.

ונגדיר הגדרה חדשה:

לכל i :

$$V_i(X_i) \geq H(i)/H(C)$$

(ב)

האלגוריתם (כמו המחלק האחרון רק נחליף את $1/n$ ב $H(i)/H(C)$):

אם נשאר רק שחקן אחד - הוא מקבל את כל העוגה.

אם יש יותר משחקן אחד - אנחנו מסדרים את השחקנים בסדר **מהקטן לגדול** ואז:

• מבקשים מהקטן לסמן על העוגה פרוסה ששווה בעיניו בדיוק H_i/H_C .

• שואלים את הבא אחריו בסדר: "האם החלק המסומן שווה בעיניך לכל היותר H_i/H_C ?" אם הוא אמר "כן"

-ממשיכים הלאה. אם הוא אמר "לא" - החלק שווה יותר מ- H_i/H_C אז מבקשים ממנו "להפחית" את החלק

המסומן כך שיישאר חלק קטן יותר ששווה בעיניו בדיוק H_i/H_C . אחרת הוא מעביר לבא אחריו בלי לחלק.

• ממשיכים כך עד שעוברים על כל n השחקנים.

• השחקן האחרון שהפחית מקבל את החתיכה (בהכרח חתיכה יותר קטנה או שווה ממה שמגיע לו בסך הכל)

- אם השחקן שלקח קיבל את כל מה שמגיע לו הוא יוצא מהמשחק, אחרת הוא נשאר במשחק וממנים מחדש בסדר מהקטן לגדול ומפעילים את האלגוריתם על החלק שנשאר מהעוגה.

נכונות האלגוריתם:

הקטן ביותר מחלק את העוגה לפי מה שמגיע לו.
כל אחד אחריו שמסתכל על החתיכה בוחר אם להקטין ואז מעביר הלאה.
כולם מחלקים עד הגדול ביותר ואז מגיעים להסכמה שהחלק שווה לכל היותר Hi/HC (כל משתתף שיחלקו אחריו יחשוב שהחלק קטן יותר). האחרון שחתך את העוגה יקבל את החלק הזה ונפחית לו מסכום שהוא אמור לקבל.
לא יתכן שהוא קיבל יותר מהסכום שמגיע לו כי המשתתפים ממויינים לפי שעות השקעה, לכן בהכרח הוא יקבל כמות קטנה או שווה למה שמגיע לו. לאחר שיחושב הסכום החדש שמגיע לו (אם הוא סיים אז נוציא אותו) נמין מחדש את האנשים. כך נעשה עד שלא תשאר אף חתיכה.
בכל סיבוב משתתף יקבל חתיכה קטנה או שווה ממה שמגיע לו וגם זו תהיה חתיכה שכולם הסכימו על גודל החתיכה.

הוכחה:

נוכיח את נכונות האלגוריתם עבור n סיבובים.
בסיס: סיבוב ראשון: הקטן מחלק את העוגה, ומעביר. כל אחד יבחר אם להקטין את החתיכה או לא. בסוף הסיבוב המשתמש האחרון שיחתוך יקבל את החלק. כל המשתתפים לפניו מסכימים שהחתיכה הנוכחית שווה לכל היותר Hi/HC .

הנחה: האלגוריתם מתקיים עבור $n-1$ סיבובים.

צעד: נוכיח עבור הסיבוב n . לאחר $n-1$ סיבובים, נשאר לנו חתיכת עוגה. נעבור על הסיבוב כמו בסיבוב הראשון. הקטן מחלק את העוגה, ומעביר. כל אחד יבחר אם להקטין את החתיכה או לא. בסוף הסיבוב המשתמש האחרון שיחתוך יקבל את החלק. כל המשתתפים לפניו מסכימים שהחתיכה הנוכחית שווה לכל היותר Hi/HC .