חלוקה הוגנת בקירוב

בשיעור הזה נלמד על חלוקה הוגנת של חפצים בדידים - חפצים שאי-אפשר לחתוך, כמו בתים, תכשיטים וכו'.   העובדה שאי אפשר לחתוך אותם אומרת שקשה יותר להשיג הגינות מאשר בבעיה הרציפה של חלוקת עוגה.

ראינו כבר דרך אחת להתמודד עם בעיה זו, והיא שימוש בכסף - בבעיית חלוקת שכר-הדירה.

בשיעור זה נראה דרך אחרת, והיא **הגינות מקורבת**.

חלוקה ללא-קנאה-מלבד-1

יש הרבה הגדרות להגינות מקורבת בחלוקת חפצים בדידים. הנה אחת ההגדרות המקובלות:

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1" (Envy Free except 1, **EF1**) אם לכל שני משתתפים א,ב, אם מורידים מהסל של שחקן ב חפץ אחד לכל היותר, אז שחקן א לא מקנא בו.

המשמעות היא, שרמת הקנאה היא הקטנה ביותר האפשרית, בהתחשב בעובדה שהחפצים בדידים.

כשה"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה ללא קנאה (**EF**).

האם כשהחפצים בדידים תמיד קיימת חלוקה **EF1**? התשובה היא כן. הנה אחד האלגוריתמים הפשוטים למציאת חלוקה כזאת - **אלגוריתם גרף הקנאה** (envy-graph; נקרא גם אלגוריתם מעגלי-הקנאה - envy-cycles).

עוברים על החפצים בסדר שרירותי. לכל חפץ:

1. נותנים את החפץ לשחקן שאף-אחד לא מקנא בו.
2. אם אין כזה – סימן שיש מעגל-קנאה.   מחליפים סלים במעגל בניגוד לכיוון הקנאה.
   מבצעים את 2 עד שאין מעגלים, ואז חוזרים ל-1.

ראו דוגמה במצגת.

משפט: אם יש m חפצים ו-n שחקנים, אז זמן-הריצה של אלגוריתם מעגלי הקנאה הוא $O(m\ n^3)$.

הוכחה: מציאת מעגל ניתן לבצע ע"י אלגוריתם DFS, בזמן $O(n^2)$.

הסרת מעגל לא מוסיפה קשתות (כי אוסף הסלים לא משתנה), ומסירה לפחות שתי קשתות.

כל חפץ מוסיף לכל היותר n-1 קשתות.

לכל היותר נוספות m(n-1) קשתות, לכן לכל היותר יש להסיר m(n-1)/2 מעגלים.

משפט: בכל שלב באלגוריתם, החלוקה הנוכחית היא EF1 (בפרט, החלוקה הסופית היא EF1).

הוכחה: החלוקה ההתחלתית (הריקה) היא כמובן EF1. נוכיח שכל צעד משאיר את החלוקה EF1.

(א) מסירת חפץ לשחקן שלא מקנאים בו, אולי גורמת לשאר השחקנים לקנא בו, אבל רק עד כדי חפץ 1, כך שהחלוקה היא עדיין EF1.

(ב) הסרת מעגל משפרת את התועלת של כל השחקנים במעגל, ולא משנה את אוסף הסלים. לכן, אם החלוקה היתה EF1, היא תישאר EF1 גם אחרי הסרת המעגל. ***

חלוקה ללא-קנאה-מלבד-1 וגם יעילה

החיסרון של אלגוריתם מעגלי-הקנאה הוא, שהוא לא מבטיח שהחלוקה המתקבלת היא יעילה פארטו (קל למצוא דוגמה לכך).

כשה"עוגה" רציפה – תמיד קיימת חלוקה **EF** ויעילה. האם כשהחפצים בדידים - תמיד קיימת חלוקה **EF1** ויעילה?

כשה"עוגה" רציפה – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא ללא-קנאה ויעילה. האם כשהחפצים בדידים – החלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא EF1 ויעילה פארטו?

התשובה היא כן! זה התגלה ב-2016.

משפט: נניח ש:

* ההעדפות אדיטיביות – ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל.

* קיימת לפחות חלוקה אחת שבה כל שחקן מקבל ערך גדול מאפס.

אז, כל חלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא גם יעילה-פארטו וגם EF1.

הוכחה: יעילות פארטו – כי כל שיפור פארטו מגדיל את המכפלה.

EF1 - נניח ש-i מקנא ב-j. נסתכל על כל החפצים בסל של j. לכל חפץ g, נבדוק את יחס הערכים:

$V_i(g)\ /\ V_j(g)$

נבחר את החפץ שיחס-הערכים שלו הכי גדול, ונעביר אותו מ-j ל-i. המכפלה בחלוקה החדשה שווה-או-קטנה מהמכפלה בחלוקה הקודמת, ולכן:

$$[V_i(X_i)+V_i(g)]*[V_j(X_j)-V_j(g)] \leq V_i(X_i)*V_j(X_j)$$

$$\rightarrow\ V_j(X_j) * V_i(g)\ /\ V_j(g) \leq V_i(X_i) + V_i(g)$$

$$\rightarrow\ V_j(X_j) * V_i(g)\ /\ V_j(g) \leq V_i(X_i) + V_i(g)$$

יחס הערכים של g הוא הכי גדול ב-X_j, ולכן:

$$V_i\ (X_j\ )\ /\ V_j\ (X_j\ ) \leq V_i(g)\ /\ V_j(g)$$

[הסבר מפורט על שורה זו נמצא בנספח]

מציבים למעלה ומקבלים:

$$V_i\ (X_j\ ) \leq V_i(X_i) + V_i(g)\ V_i\ (X_j\ ) - V_i(g) \leq V_i(X_i)$$

מכאן: אם מורידים את g מהסל של j, אז i כבר לא מקנא. ***

הבננו שהחלוקה ה"אידיאלית" של חפצים בדידים היא חלוקה הממקסמת את מכפלת הערכים. אבל איך מוצאים חלוקה כזאת? נסמן:

$V_{i,g}$= Value of good g to player i.

$x_{i,g}$ = quantity of good g given to player i.

אנחנו רוצים לפתור בעיית אופטימיזציה:

Maximize $\text{sum}_i \log (\text{sum}_g (x_{i,g} * V_{i,g}))$

such that for all g: $\text{sum}_i x_{ig} = 1$

כאשר ה-$x_{i,g}$ רציפים, זה קל. כאשר ה-$x_{i,g}$ בדידים, זה קשה!

במאמר מ-2016 (ראו "מקורות") ישנו טריק המאפשר לפתור בעיה זו בזמן סביר, כאשר כל אחד מהערכים מוגבל למספר בין 1 ל-1000. כיוון שממשק-המשתמש באתר שלהם (http://www.spliddit.org/apps/goods) ממילא מאפשר להכניס רק ערכים בין 1 ל-1000, האלגוריתם עובד על כל קלט מציאותי.

יש כאן דרך חשיבה מעניינת: אם מסתכלים על הבעיה כבעיה תיאורטית בלבד, ומנסים לפתור אותה לכל הקלטים האפשריים - זה מאד קשה. אבל אם מסתכלים עליה כבעיה מעשית, ומנסים לפתור אותה רק עבור הקלטים שבני-אדם בפועל מזינים לאלגוריתם - הבעיה נעשית פתירה!

נספח

בהוכחה למעלה השתמשנו בטענה הבאה.

טענה. נתונה קבוצת חפצים X_j. יהי g חפץ כלשהו בסל, שעבורו היחס: $V_i(g)/V_j(g)$ גדול ביותר. אז:

$$V_i(X_j) \;/\; V_j(X_j) \quad \leq \quad V_i(g)/V_j(g)$$

הוכחת הטענה:

נסמן את יחס הערכים של כל חפץ g ב $r(g)$.

נכתוב את שני ערכי הסלים בצד שמאל כסכומים:

$$\boldsymbol{V_i(X_j)} = \text{sum}_{h \in X_j} V_i(h) = \textbf{sum}_{h \in X_j} \; \boldsymbol{r(h) * V_j(h)}$$

$$\boldsymbol{V_j(X_j)} = \textbf{sum}_{h \in X_j} \; \boldsymbol{V_j(h)}$$

מכאן נובע, שהמנה בצד שמאל: $V_i(X_j) \;/\; V_j(X_j)$, היא ממוצע משוקלל של הערכים $r(h)$, כאשר המשקל של כל ערך $r(h)$ הוא $V_j(h)$ (ממוצע משוקלל = סכום הערכים כפול המשקלים, מחולק בסכום המשקלים).

כל ממוצע משוקלל של ערכים, קטן או שווה מהערך המקסימלי. לכן:

$$V_i(X_j) \;/\; V_j(X_j) \quad \leq \quad \max_{h \in X_j} \; r(h) * V_j(h) \; = \; r(g)$$

כיוון ש-g הוגדר כחפץ שהיחס $r(g)$ עבורו הוא מקסימלי. ***

מקורות

- Lipton, R. J.; Markakis, E.; Mossel, E.; Saberi, A. (2004). "On approximately fair allocations of indivisible goods". Proceedings of the 5th ACM conference on Electronic commerce - EC '04. p. 125. doi:10.1145/988772.988792. - אלגוריתם מעגלי הקנאה
- Caragiannis, Ioannis; Kurokawa, David; Moulin, Hervé; Procaccia, Ariel D.; Shah, Nisarg; Wang, Junxing (2016). The Unreasonable Fairness of Maximum Nash Welfare. Proceedings of the 2016

ACM Conference on Economics and Computation - EC '16. p. 305. doi:10.1145/2940716.2940726. ISBN 9781450339360. - אלגוריתם מיקסוס המכפלה

סיכם: אראל סגל-הלוי.