אלגוריתמים כלכליים / מטלה 12

שאלה 2: הסתברות להחלפה מוצלחת

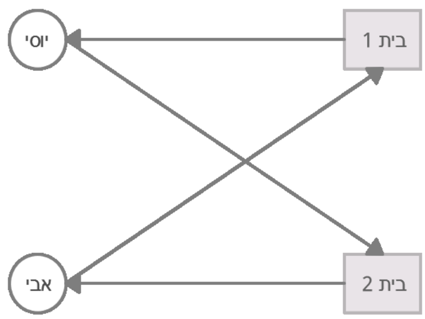
נניח שיש n אנשים עם n בתים, וההעדפות של כל אדם מתפלגות באופן אחיד (ההסתברות שאדם i הכי רוצה את בית j היא 1 חלקי n). מה ההסתברות שאדם מסויים יהיה חלק ממעגל-החלפה בסיבוב הראשון?

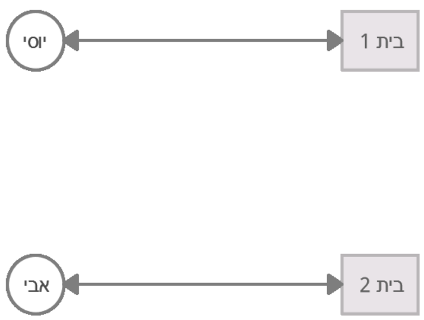
[אם אתם לא מצליחים לפתור לכל n, נסו לפתור לערכים קטנים, למשל 2, 3, וכו'..]

נתחיל עם דוגמאות עבור ערכים קטנים, ומשם ננסה למצוא את ההסתברות עבור N

<u>N = 2</u>

נעבור על האפשרויות של משתתף א' (בה"כ), ונראה מה ההסתברות שלו להיות חלק ממעגל ההחלפה בסיבוב הראשון.ישנן שתי אפשרויות כדי שזה יתממש: או שמשתתף א' בחר בעצמו (ולא משנה מה עושה משתתף ב') ואז נסגר מעגל בגודל 1, או שמשתתף א' בחר בבית של משתתף ב', וגם משתתף ב' בחר בבית של משתתף א', ואז נסגר מעגל בגודל 2.



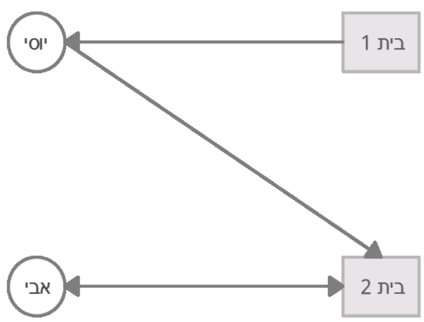


הסתברות למעגל בגודל 1, כלומר הסתברות של משתתף א' לבחור בעצמו היא $\frac{1}{2}$

הסתברות למעגל בגודל 2, כלומר הסתברות של משתתף א' לבחור בבית של משתתף ב', וגם שמשתתף ב' בחר בבית של משתתף א', היא $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

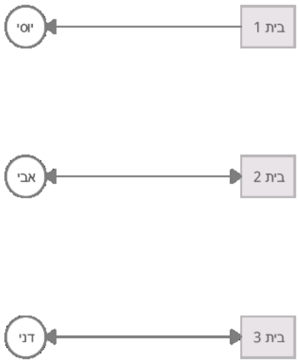
בשני המקרים, משתתף א' יהיה חלק ממעגל ההחלפה בסיבוב הראשון, ולכן ההסתברות שלו לכך היא סכום ההסתברויות, כלומר $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

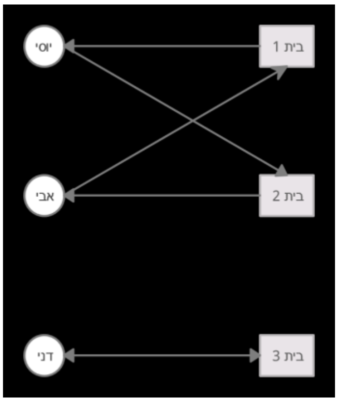
בעצם האפשרות היחידה שמשתתף א' לא יהיה חלק ממעגל ההחלפה בסיבוב הראשון, זה במקרה שהוא יבחר בבית של משתתף ב', אבל משתתף ב' יבחר בבית שלו עצמו

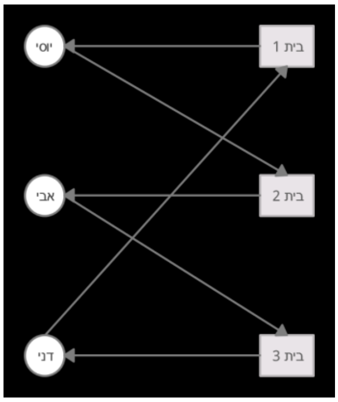


<u>N = 3</u>

עבור שלושה משתתפים, ע"מ שמשתתף א' יהיה חלק ממעגל ההחלפה בסיבוב הראשון, ייתכן שמשתתף א' בחר בעצמו, ואז נסגר מעגל בגודל 1, או שמשתתף א' בחר בבית של משתתף ב'/ג', וגם <u>בהתאמה</u> משתתף ב'/ג' בחר בבית של משתתף א', ואז נסגר מעגל בגודל 2, או שמשתתף א' בחר בבית של משתתף ב', שהוא בחר בבית של משתתף ג', שאחרון בחר בבית של משתתף א' ונסגר מעגל בגודל 3.







הסתברות למעגל בגודל 1, כלומר הסתברות של משתתף א' לבחור בעצמו היא $\frac{1}{3}$

הסתברות למעגל בגודל 2, כלומר הסתברות של משתתף א' בחר בבית של משתתף ב'/ג', וגם <u>בהתאמה</u> משתתף ב'/ג' בחר בבית של משתתף א' היא $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ (ההסתברות לבחירת המשתתף השלישי היא כל אופציה אפשרית, ולכן היא $\frac{3}{3}$ ואינה משפיעה בשלב זה)

הסתברות למעגל בגודל 3, היא $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

בשלושת המקרים, משתתף א' יהיה חלק ממעגל ההחלפה בסיבוב הראשון, ולכן ההסתברות שלו לכך היא סכום ההסתברויות, כלומר $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}=\frac{17}{27}$

אם נמשיך את התהליך עבור 4,5.. משתתפים וכו', נראה שההסתברות של משתתף א' להיות חלק ממעגל ההחלפה בסיבוב הראשון, היא סכום ההסתברויות של המשתתף להיות במעגל החלפה עבור מעגל בגודל 1 ועוד ההסתברות להיות במעגל החלפה מעגל בגודל 2 ועוד.. עד מעגל בגודל כמות המשתתפים (N)

באופן כללי, עבור N משתתפים, משתתף א' יכול להיות במעגל החלפה בגודל N עפ"י החישוב הבא:

$$\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N}\cdot\frac{N-3}{N}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{1}{N}=\frac{(N-1)!}{N^N}$$

נבדוק עבור מעגל בגודל N - n = a (כך ש $n \in N$. המספר n מבטא את מספר המשתתפים שאינם חלק ממעגל החלופה בסיבוב הראשון, ובהקבלה מס' הצלעות שאינן במעגל, ואנחנו רוצים למצוא את ההסתברות שמשתתף א' יהיה חלק ממעגל החלפה בסיבוב הראשון, בכל גודל) ונקבל:

$$\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{n+1}{N}\cdot\frac{1}{N}=\frac{(N-1)!}{n!\cdot N^{N-n}}$$

למשל, עבור N = 5 משתתפים, ומעגל בגודל 3 = 2 - 5 יתקיים:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4\cdot3\cdot1}{5^3}=\frac{(5-1)!}{2!\cdot5^{5-2}}$$

דוגמא נוספת, עבור N = 8 משתתפים, ומעגל בגודל 4 = 4 - 8 יתקיים:

$$\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 1}{8^4}=\frac{(8-1)!}{4!\cdot 8^{8-4}}$$

לכן, ההסתברות שמשתתף כלשהו יהיה חלק ממעגל החלפה בסיבוב הראשון, היא סכום כל גדלי מעגלי ההחלפה האפשריים (מעגל בגודל החלפה 1 + מעגל בגודל החלפה 2 + ..)

$$P_{\text{משתתף}}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(N-1)!}{n!\cdot N^{N-n}}$$

נבדוק את ההסתברות שמצאנו על הדוגמאות שהצגנו.

עבור <u>N=2</u>, ההסתברות של משתתף להיות חלק ממעגל ההחלפה בסיבוב הראשון $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(N-1)!}{n!\cdot N^{N-n}}=\frac{1}{0!\cdot 2^{2-0}}+\frac{1}{1!\cdot 2^{2-1}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

עבור <u>N=3</u>, ראינו שההסתברות היא $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}=\frac{17}{27}$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(N-1)!}{n!\cdot N^{N-n}}=\frac{2}{0!\cdot 3^{3-0}}+\frac{2}{1!\cdot 3^{3-1}}+\frac{2}{2!\cdot 3^{3-2}}=\frac{2}{27}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{17}{27}$$

מעגל בגודל 1 מעגל בגודל 2 מעגל בגודל 3

לצורך הפשטות, אפשר היה להוציא מהסכום את !(N-1) כי הוא לא משתנה בריצת n, וכן לכפול ב $\frac{N^n}{N^n}$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(N-1)!}{n!\cdot N^{N-n}}=\frac{(N-1)!}{N^N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{N^n}{n!}$$

מקורות

אלגוריתם היובל
Probability of cycle in random graph