אלגוריתמים לחלוקה הוגנת של עוגות וקרקעות

בשיעור הזה נתחיל ללמוד על אלגוריתמים לחלוקה. כפי שאמרנו במבוא, ישנם שיקולים רבים שלפיהם מחליטים איך לחלק דברים. בשיעורים הקרובים נתמקד בשיקול של **הגינות**. יש סוגים רבים של בעיות חלוקה הוגנת, וכיום חלק מהאלגוריתמים כבר מיושמים. אפשר לראות דוגמאות כאן: http://spliddit.org/ וכאן: http://www.fairoutcomes.com/.

בשיעור הזה אנחנו מניחים שלכל המשתתפים ישנן זכויות שוות, אבל יש להם העדפות שונות.

דוגמה מעשית היא **חלוקת קרקע בין יורשים**: לכל היורשים זכויות שוות, אבל חלקם מעדיפים נניח את האיזור שליד הים, אחרים את האיזור שליד הכביש, וכו'. אם שמאי "אובייקטיבי" כביכול יחלק את הקרקע בצורה שנראית לו הוגנת, לא בטוח שהחלוקה תיחשב להוגנת בעיני היורשים.

דוגמה נוספת היא **חלוקת עוגת יום-הולדת בין ילדים**. אנחנו מניחים שלכל ילד יש זכויות שוות, אבל יש להם טעמים שונים - אחד אוהב שוקולד, אחד אוהב קצפת וכו'. אם אנחנו - ההורים - נחלק את העוגה בצורה שנראית לנו שווה - לא בטוח שהילדים יסכימו שהחלוקה שווה. הם עלולים לקנא ולריב וזה לא יהיה נעים... מה עושים? האם אפשר לחלק את הקרקע/העוגה באופן שכל המשתתפים יסכימו שהחלוקה הוגנת?

רוב האנשים יאמרו שזה בלתי-אפשרי - אין סיכוי שכולם יסכימו שהחלוקה הוגנת. למרבה ההפתעה, ישנו אלגוריתם פשוט שפותר את הבעיה עבור שני ילדים (נניח, עמי ותמי):

- עמי חותך את העוגה לשניים;
- תמי בוחרת חלק אחד, ועמי מקבל את החלק שנשאר.

למה זה עובד? כי עמי יכול לחתוך את העוגה לשני חלקים שווים בעיניו, ואם תמי חושבת שהחלוקה לא שווה - היא יכולה פשוט לבחור את החלק הטוב יותר בעיניה!

החלוקה המתקבלת היא הוגנת בשני מובנים:

- כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות 1/2 מהשווי הכללי של העוגה/הקרקע. חלוקה כזאת נקראת **פרופורציונלית (proportional)**.
- כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות כמו החלק שהשני קיבל. חלוקה כזאת נקראת **ללא קנאה (envy-free)**.

זה די מפתיע שאלגוריתם כל-כך פשוט משיג תכונות כל-כך יפות. אבל עדיין מדובר רק בחלוקה לשניים. מה קורה אם רוצים לחלק עוגה/קרקע לשלושה אנשים או יותר - האם אפשר להשיג את שתי התכונות הללו?

שאלה: איזו משתי התכונות שלמעלה - חלוקה פרופורציונלית או חלוקה ללא-קנאה - נראית לכם קשה יותר להשגה?

תשובה: חלוקה ללא-קנאה היא קשה לפחות כמו חלוקה פרופורציונלית. הוכחה: אם חלוקה היא ללא קנאה, אז כל אחד חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו כל n החלקים. לפי כלל שובך היונים, כל אחד חושב שהחלק שלו שווה לפחות n/1 מהשווי הכללי. כלומר החלוקה היא גם פרופורציונלית.

אנחנו נראה שחלוקה ללא-קנאה קשה הרבה יותר מחלוקה פרופורציונלית. אבל נתחיל מהמשימה הקלה יותר - חלוקה פרופורציונלית.

חלוקת-עוגה פרופורציונלית

האלגוריתם הראשון לחלוקת עוגה פרופורציונלית פורסם ע"י המתמטיקאי היהודי-פולני הוגו שטיינהאוס ב-1948. הוא נקרא אלגוריתם "המפחית האחרון" (last diminisher) - עוד מעט נבין למה. האלגוריתם הוא רקורסיבי:

אם נשאר רק שחקן אחד - הוא מקבל את כל העוגה.

אם יש יותר משחקן אחד - אנחנו מסדרים את השחקנים בסדר שרירותי כלשהו, ואז:

- מבקשים מהראשון לסמן על העוגה פרוסה ששווה בעיניו בדיוק n/1.
- שואלים את השני: "האם החלק המסומן שווה בעיניך לכל היותר n/1?". אם הוא אמר "כן" - ממשיכים הלאה. אם הוא אמר "לא - החלק שווה יותר מ-n/1" אז מבקשים ממנו "להפחית" את החלק המסומן כך שיישאר חלק קטן יותר ששווה בעיניו בדיוק n/1.
- עוברים לשלישי ושואלים אותו הדבר: "האם החלק המסומן שווה בעיניך לכל היותר n/1?". אם כן - ממשיכים הלאה, אם לא - הוא מפחית.
- ממשיכים כך עד שעוברים על כל n השחקנים.

בסופו של דבר, השחקן האחרון שנגע בעוגה מקבל את הפרוסה המסומנת והולך הביתה. נשארו n-1 שחקנים, והם ממשיכים לחלק את העוגה ביניהם באופן רקורסיבי.

משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" תמיד נותן חלוקה פרופורציונלית.

הוכחה: לשם ההוכחה נניח ששווי העוגה עבור כל השחקנים הוא n. נוכיח שכל שחקן מקבל פרוסה בשווי 1. ההוכחה באינדוקציה על n.

הבסיס - n=1 - שחקן אחד מקבל את כל העוגה והשווי שלה עבורו הוא 1.

הצעד - נניח שזה נכון עבור n-1 שחקנים, ונניח שיש לנו n שחקנים. האלגוריתם נותן לשחקן אחד, פרוסה אחת שהוא סימן, ואם הוא סימן נכון - הפרוסה הזו שווה בעיניו בדיוק 1. עבור שאר השחקנים, הפרוסה הזו שווה לכל היותר 1. לכל, ערך העוגה הנשארת עבור שאר השחקנים הוא לפחות n-1. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מהם יקבל פרוסה ששויה בעיניו לפחות 1.

מבחינה כלכלית השגנו את מה שרצינו - חלוקה פרופורציונלית. אבל בקורס הזה אנחנו לא רק כלכלנים - אנחנו גם אנשי מדעי-המחשב. ובמדעי-המחשב מתעניינים גם בשאלת היעילות החישובית. בפרט, מהי סיבוכיות זמן-הריצה של האלגוריתם הזה?

משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" משתמש ב- $O(n^2)$ שאילתות.
הוכחה: בכל צעד שחקן אחד יוצא – n צעדים.
בכל צעד צריך לשאול כל שחקן שאילתה אחת. סה"כ $O(n^2)$ שאילתות.

זה יפה אבל לא מספיק - אנחנו מחפשים אלגוריתם מהיר יותר. ואכן יש אלגוריתם כזה! הוא פותח ע"י שני מדענים ישראליים (מהטכניון) - שמעון אבן ז"ל ועזריה פז יבדל"א. גם האלגוריתם הזה הוא רקורסיבי:

אם נשאר רק שחקן אחד - הוא מקבל את כל העוגה.

אם יש יותר משחקן אחד, ומספר השחקנים זוגי -

- מבקשים מכל שחקן לסמן קו המחלק את העוגה לשני חצאים שוים בעיניו.
- חותכים את העוגה בחציון של n הקוים (מי זוכר איך מחשבים חציון?).
- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו - n/2 שחקנים לצד ימין ו n/2 שחקנים לצד שמאל.
- מחלקים כל חצי באופן רקורסיבי בין ה n/2 שחקנים.

אם מספר השחקנים איזוגי - מריצים צעד אחד של אלגוריתם "המפחית האחרון".

משפט: אלגוריתם אבן-פז נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות n/1 מערך העוגה בעיניו.
הוכחה: נניח שערך העוגה כולה הוא n. נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על n. בסיס: שחקן אחד מקבל הכל.
צעד: נניח שהמשפט נכון לכל מספר שחקנים עד n-1. עכשיו יש n. כל מי שמשחק לפי הכללים, מגיע לחלק ששווה בעיניו לפחות k, ויש בו k שחקנים, כאשר k הוא n/2 או 1 או n-1. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. ***

עכשיו נוכיח שהאלגוריתם באמת יותר מהיר.

משפט: אלגוריתם אבן-פז משתמש ב- O(n log n) שאילתות.
הוכחה: נעגל את n למעלה לחזקה הקרובה של 2. הגדלנו אותו בפחות מ-2. עכשיו, בכל צעד, גודל הקבוצות קטֵן פי 2. לכן מספר הצעדים הוא לכל היותר $\log_2(2n)$. בכל צעד, שואלים כל שחקן שאילתה אחת. לכן הסיבוכיות O(n log n).

האם אפשר לשפר עוד יותר את זמן הריצה? התשובה היא לא! אבל זה בכלל לא פשוט להוכיח. זה הוכח רק בשנת 2007 - ראו במאמרים להרחבה, "On the complexity of cake cutting".

חלוקת-עוגה ללא קנאה

כפי שכבר רמזנו, חלוקה ללא קנאה היא קשה יותר מחלוקה פרופורציונלית. האלגוריתמים שראינו למעלה לא מבטיחים שלא תהיה קנאה - קל למצוא דוגמאות-הרצה שבהן מישהו מקנא באחרים. הבעיה של חלוקה ללא-קנאה היתה פתוחה במשך שנים רבות, ולמעשה עדיין אין לה פתרון מושלם. אנחנו נראה כמה פתרונות חלקיים, לכל אחד יש יתרונות וחסרונות.

מה עושים כשנתקלים בבעיה קשה? מנסים קודם-כל למצוא פתרונות במקרים פרטיים.

נתחיל מהמקרה הפרטי של **שלושה שחקנים**. נניח שאנחנו מתחילים כמו באלגוריתם "חתוך ובחר":
מבקשים משחקן אחד (נניח, עמי) לחלק את העוגה לשלושה חלקים שווים בעיניו, ומבקשים משני השחקנים האחרים (תמי ורמי) לבחור את הפרוסה הטובה ביותר בעיניהם. המקרה הקל הוא, שתמי ורמי בוחרים פרוסות שונות - אז כל אחד לוקח את הפרוסה שבחר, ועמי את הפרוסה השלישית, ואף אחד לא מקנא באחרים.

אבל מה אם רמי ותמי בוחרים את אותה פרוסה? - אז כנראה שהפרוסה הזאת היא גדולה מדי - צריך "לקצץ" אותה. נבקש מתמי (נניח) לקצץ את הפרוסה כך שתהיה בעיניה **שווה** לפרוסה השניה. עכשיו אנחנו בטוחים שקיימת חלוקה ללא קנאה.

מדוע? כדי להבין את זה נצייר **גרף דו-צדדי** שבו, בצד אחד יש שחקנים ובצד השני יש פרוסות. נצייר קשת משחקן לפרוסה, אם השחקן חושב שהפרוסה היא "טובה ביותר". חלוקה ללא-קנאה שקולה לשידוך מושלם בגרף זה.

אחרי החלוקה הראשונית, הגרף נראה בערך כך:

- עמי -> 1, 2, 3 (כי מבחינת עמי, כל הפרוסות הן "טובות ביותר").
- תמי -> 1, רמי -> 1 (כי מבחינת תמי ורמי, יש פרוסה אחת שהיא ה"טובה ביותר", נניח שזו פרוסה מספר 1).

אחרי הקיצוץ של תמי, הגרף נראה בערך כך:

- עמי -> 2, 3 (כי תמי קיצצה את פרוסה 1, אז עכשיו רק 2,3 הן טובות ביותר).
- תמי -> 1, 2 (כי תמי קיצצה את 1 כך שתהיה שווה לפרוסה השניה הטובה ביותר, נניח שזו היתה 2).
- רמי -> לא ידוע (ייתכן שהוא עדיין חושב ש-1 היא הטובה ביותר, וייתכן שלא).

בכל מקרה, לא משנה לאן רמי מצביע, קיים שידוך מושלם בגרף; אפשר למצוא אותו ע"י בחירה לאחר - רמי יבחר את הפרוסה הטובה ביותר בעיניו, תמי תבחר את פרוסה 1 אם היא נשארה ואחרת את פרוסה 2, ולעמי בטוח תישאר פרוסה אחת טובה-ביותר לבחור.

אז מצאנו חלוקה ללא קנאה, אבל נשארה שארית - שתמי קיצצה מפרוסה 1. מה נעשה איתה?

אפשר לנסות לחלק אותה שוב באותו אופן, אבל אז שוב עלולה להישאר שארית...

הפתרון נמצא ע"י המתמטיקאים סלפרידג' וקונוויי (Selfridge, Conway) בשנת 1960. הם שמו לב, שאחרי החלוקה הראשונה, לעמי יש יתרון על מי שבחר את פרוסה 1 (הפרוסה המקוצצת). נניח לצורך הדיון שתמי בחרה את פרוסה 1 המקוצצת. כיוון שהפרוסה של עמי שווה כמו פרוסה 1 לפני הקיצוץ, הרי שעכשיו עמי לא יקנא בתמי בשום מקרה, גם אם היא תקבל את **כל** השארית. לפי הרעיון הזה, אפשר לחלק את השארית באופן הבא:

- רמי מחלק את השארית לשלושה חלקים שווים בעיניו;
- השחקנים בוחרים פרוסות לפי הסדר: תמי - עמי - רמי.

תמי לא מקנאת כי היא בחרה ראשונה, עמי לא מקנא בתמי (כמו שהזכרנו) וגם ברמי (כי הוא בחר לפניו), ורמי לא מקנא כי כל הפרוסות שוות בעיניו.

מצאנו חלוקה ללא קנאה של כל העוגה!

זה מעורר כמה שאלות:

- מה קורה כשיש 4 שחקנים או יותר?
- ומה אם רוצים שהפרוסות יהיו קשירות - כמו באלגוריתמים "המפחית האחרון" ו"אבן פז"?

עבור 4 שחקנים או יותר, ישנם כמה אלגוריתמים לחלוקה ללא קנאה, אבל הם מאד מסובכים, וגם זמן-הריצה שלהם מאד גבוה (ראו במאמרים להרחבה).

עבור פרוסות קשירות, בכלל לא קיים אלגוריתם סופי המוצא חלוקה ללא קנאה, אפילו עבור 3 שחקנים!

בסעיף הבא נראה אלגוריתם המוצא חלוקה ללא-קנאה בקירוב.

חלוקת-עוגה כמעט-ללא-קנאה עם פרוסות קשירות

הרעיון באלגוריתם זה הוא להסתכל על **כל** החלוקות הקשירות של עוגה. שוב, נתחיל משלושה שחקנים. נניח שהעוגה היא הקטע [0,1].

כל חלוקה קשירה של העוגה לשלושה קטעים, ניתן לייצג ע"י שלושה מספרים המייצגים את אורכי הקטעים. סכום המספרים הוא 1.

שאלה: איך נראית קבוצת כל השלשות של מספרים החיוביים שסכומם הוא 1?

תשובה: משולש! תחשבו על המרחב התלת-מימדי, ותדמיינו משולש שהקודקודים שלו הם: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).

מה קורה כשמספר השחקנים שונה מ-3?

כשיש 2 שחקנים - מרחב החלוקות הוא קטע 1-ממדי במרחב 2-ממדי;

כשיש 3 שחקנים - מרחב החלוקות הוא משולש2-ממדי במרחב 3-ממדי;

כשיש 4 שחקנים - מרחב החלוקות הוא טטראזר 3-ממדי במרחב 4-ממדי;

באופן כללי, כשיש n שחקנים - מרחב החלוקות הוא סימפלקס n-1-ממדי במרחב n-ממדי.

אז אוסף כל החלוקות הוא סימפלקס. כל נקודה בסימפלקס מייצגת חלוקה. עבור כל נקודה בסימפלקס, אנחנו יכולים לשאול כל אחד מהשחקנים "איזה פרוסה אתה מעדיף - הימנית, האמצעית או השמאלית?". אם מצאנו נקודה שבה כל שחקן נתן תשובה אחרת - יש לנו חלוקה ללא קנאה!

למצוא נקודה כזאת זה מאד קשה, כי במשולש יש אינסוף נקודות. אבל אנחנו מחפשים חלוקה שהיא "כמעט" ללא קנאה. למשל, נניח שמדובר בחלוקת קרקע, ואנשים לא מתייחסים להבדלים של מילימטר אחד לכאן או לשם. אז מבחינתנו, חלוקה שהיא ללא קנאה "עד כדי מילימטר אחד", היא חלוקה מספיק טובה.

איך נמצא חלוקה כזאת? הנה אלגוריתם של סימונס וסו (משנת 1999):

- נחלק את סימפלקס-החלוקות לסימפלקסונים קטנים, שאורך הצלע של כל אחד מהם הוא מילימטר. התהליך הזה נקרא מישלוש (triangulation). עכשיו יש לנו מספר סופי של נקודות (-קודקודי הסימפלקסונים).
- נשייך כל קודקוד לאחד השחקנים, כך שבכל סימפלקסון, כל השחקנים מיוצגים.
- עבור כל קודקוד, נשאל את השחקן שהקודקוד שייך לו "איזו פרוסה אתה מעדיף - 1 2 או 3?" ונסמן את המספר על הקודקוד.

- קיבלנו תיווי (labeling) של המישלוש. נמצא סימפלקסון שבו כל התויות שונות; כל נקודה בסימפלקסון הזה מייצגת חלוקה ללא-קנאה עד-כדי-מילימטר, כמו שרצינו.

נשארה רק שאלה אחת - איך אנחנו יודעים שתמיד קיים סימפלקסון שבו כל התויות שונות?

לשם כך נלמד לֶמָה מפורסמת ושימושית מאד - הלמה של שפרנר (Sperner's Lemma). הלמה הזאת אומרת מתייחסת לסימפלקסים בכל מספר של ממדים. היא אומרת ש:

- אם בכל קודקוד ראשי ישנה תוית אחרת,
- וגם בכל פאה - התויות זהות לתויות שבקודקודי הפאה,
- אז קיים מספר איזוגי של סימפלקסונים שבהם כל התויות שונות. בפרט, קיים לפחות סימלפקסון אחד כזה.

אפשר להוכיח את הלמה הזאת באינדוקציה על מספר הממדים:

- עבור 2 ממדים, הסימפלקס הוא קטע, בקודקוד אחד כתוב "1" ובקודקוד השני כתוב "2", ולכן חייב להיות מספר איזוגי של צלעות המסומנות בשתי התויות 1,2 (כי יש מספר איזוגי של מעברים).
- עבור 3 ממדים, הסימפלקס הוא משולש. בשלושת הקודקודים כתובות שלוש תויות, 1 2 3. נסתכל על הקטע שבין קודקוד 1 לקודקוד 2. לפי הנחת האינדוקציה, יש בו מספר איזוגי של מעברים 1-2. כל מעבר כזה נקרא "דלת". ניכנס באחת הדלתות. הגענו ל"חדר" (=משולשון). יש רק שתי אפשרויות: או שה"חדר" הזה מסומן בכל 3 התויות, או שיש בו עוד דלת אחת - שונה מהדלת המקורית. במקרה הראשון - סיימנו. במקרה השני - נעבור ב"דלת" השניה ונגיע לחדר חדש. אם נמשיך כך "לטייל" בין החדרים, יקרה אחד מהשניים - או שנמצא משולשון עם 3 תויות שונות, או שנצא מ"דלת" אחרת בצלע 1-2. אבל, לפי הנחת האינדוקציה, יש מספר איזוגי של דלתות, כך שנוכל למצוא דלת נוספת ולהיכנס דרכה. בסופו של דבר בהכרח נמצא משולשון עם כל 3 התויות.
- באותו אופן אפשר להוכיח את הלמה עבור כל מספר n של ממדים.

איך זה עוזר לנו למצוא חלוקה ללא קנאה? - סימפלקסון החלוקות מקיים את התנאי של שפרנר:

- בכל קודקוד ישנה תוית אחרת: כל קודקוד מתאים לחלוקה שבה פרוסה אחת היא כל העוגה, ושאר הפרוסות ריקות. כיוון שכולם מעדיפים לקבל את כל העוגה על-פני קבוצה ריקה, כל שחקן שהקודקוד הזה ישוייך לו, בהכרח יסמן אותו בתוית המתאימה למספר הקודקוד. למשל הקודקוד (1,0,0) מתאים לחלוקה שבה פרוסה 1 היא כל העוגה, ולכן בהכרח התוית בקודקוד זה תהיה 1. באותו אופן התוית בקודקוד (0,1,0) תהיה 2 והתוית בקודקוד (0,0,1) תהיה 3.
- בכל פאה שבין קודקודים, רק הפרוסות המתאימות לקודקודים הן לא ריקות. לדוגמה, בין קודקוד 1 לקודקוד 2, יש נקודות כגון (0.7,0.3,0) שבה רק פרוסות 1,2 לא ריקות ופרוסה 3 ריקה. בהנחה שאף אחד לא רוצה פרוסה ריקה, התוית בכל הנקודות הללו חייבת להיות 1 או 2.

כיוון שהתנאי של שפרנר מתקיים, קיים סימפלקסון עם כל התויות, והוא מתאים לחלוקה ללא-קנאה-בקירוב כמו שרצינו!

האם אפשר למצוא חלוקה שהיא לגמרי ללא-קנאה?

אם נריץ את האלגוריתם הנ"ל שוב ושוב, ובכל פעם נחלק את סימפלקס-החלוקות לסימפלקסונים יותר ויותר קטנים, נקבל סדרה של חלוקות, שכל אחת מהן יותר ויותר קרובה לחלוקה-ללא-קנאה. התהליך הזה מתכנס לחלוקה שהיא ממש ללא קנאה.

אבל, כמו שאתם יודעים, התכנסות של תהליך אינסופי יכולה לקחת זמן אינסופי.

האם קיים אלגוריתם **סופי** המוצא חלוקה ללא קנאה?

התשובה היא לא! זה התגלה בשנת 2008. ניתן לקרוא על זה בויקיפדיה כאן:
https://en.wikipedia.org/wiki/Envy-free_cake-cutting

לסיכום

אם עובדים עם שחקנים שהם "שמחים בחלקם" ורק רוצים לקבל את החלק הפרופורציונלי שלהם - זה יחסית פשוט - אפשר להשיג את זה בזמן $O(n \log n)$ ועם פרוסות קשירות.

אבל, אם השחקנים קנאים וכל אחד מסתכל על "הדשא של השכן" - המצב הרבה יותר קשה - אין שום אלגוריתם סופי המבטיח לכולם פרוסות קשירות, וגם בלי דרישת הקשירות, האלגוריתמים מאד מסובכים ודורשים המון זמן. "קָשָׁה כִשְׁאוֹל קִנְאָה"...

סיכם: אראל סגל-הלוי.