

## אלגוריתמים כלכליים- מטלה 2: חלוקה הוגנת של קרקעות ועוגות

מגיש: עומרי יונתני 206265233

### שאלה 2: חלוקת תורנות קשירה וללא קנאה:

ניתן להכליל את אלגוריתם הסימפלקסונים של סימונס-10 למצב זה (ולמצוא חלוקה כמעט ללא קנאה, עד כדי שניה אחת) בכך שנתייחס לאלגוריתם כאלגוריתם לחלוקת זמן (ולא לחלוקת עוגה כמו בדוגמה שניתנה בשיעור). במצב זה הסימפלקס המלא שלנו הוא לא עוגה שלמה, אלא כמות הזמן הכולל אשר נדרש לשמור על התינוקת.

בשל ההנחה שהילדים **לא אוהבים** לשמור על התינוקת – כל ילד ינסה לבחור את פרק הזמן המינימלי בעיניו לשמירה על התינוקת. (זה בשונה מאלגוריתם החלוקה שהוצג בשיעור, שם סביר להניח שכל אדם יבחר את החלק הגדול ביותר בחלוקה- בקרקע, בעוגה או בכל מיצג רווחי אחר.)

- באלגוריתם זה, כמו באלגוריתם המקורי של סימונס-10 לחלוקה קשירה ללא קנאה- כל ילד יקבל **משמרת רציפה בזמן**, כפי שבעוגה היינו מקבלים חתיכת עוגה רציפה ולא פירורים וחלקי עוגה שונים.
- בנוסף, ניתן להבטיח את החלוקה ללא קנאה **עד כדי שניה אחת**, כיוון שניתן להקביל את מה שראינו בשיעור, שבאלגוריתם חלוקת העוגה- העוגה חולקה לחלקים שווים עד כדי מילימטר אחד. הרי כל סימפלקסון מסמל נקודה בעוגה- מה שכאן יסמן לנו יחידת זמן מזערית- שניה.

### הוכחת נכונות עבור $n=3$ :

נניח סימפלקס חלוקה שמייצג את כל הזמן הנדרש לשמירה על התינוקת.

נחלק את סימפלקס החלוקה לסימפלקסונים, וניתן כל צומת לילד- כך שבכל סימפלקסון כל הילדים מיוצגים. (ניתן לסמן ב A,B,C).

נבקש מ-  $n$  הילדים השומרים על התינוקת, שכל אחד יבחר את הזמן הכי קצר בעיניו בכל חלוקה. ז"א- בכל צומת של אותו ילד- שיבחר את המספר שמסמל את פרק הזמן הטוב ביותר בעיניו. (כאשר הזמן מחולק ל-3 פרקי זמן שונים בכל צומת).

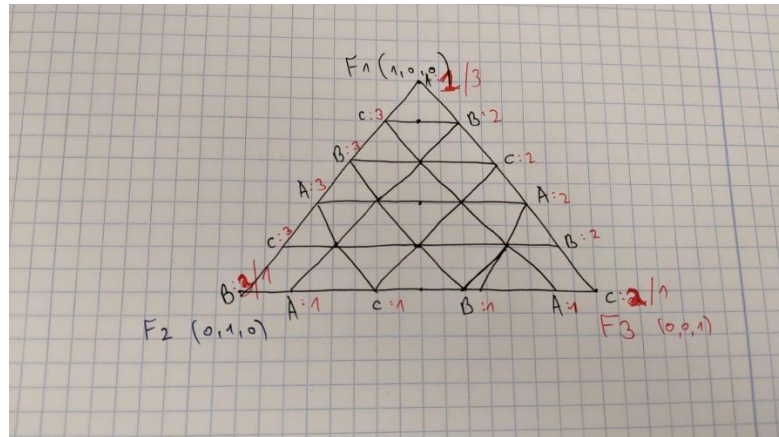
ברגע שנמצא סימפלקסון אשר שלושת צלעותיו שונות זו מזו, מצאנו **סימפלקס- $n$  מלא**, שבו  $n$  מספרים שונים זה מזה (במקרה שלנו- 1,2,3)- מצאנו חלוקה כמעט-ללא-קנאה.

הרי כל אחד משלושת הילדים- A,B,C בחר חלק אחר שמסמל פרק זמן אחר 1,2,3. ובכך אף ילד לא מקנא עד כדי הבדלים של שניה אחת.

כעת, ארצה להראות שקיים סימפלקסון כזה- שבו כל ילד בחר פרק זמן אחר.

אוכיח באינדוקציה על  $n$  שקיים מספר אי-זוגי של סימפלקס- $n$  מלא:

איעזר בלמה של ספרנר- שאומרת כי כל מספר על צומת בשפה הוא מספר שנמצא על קצות השפה. וזה מתקיים כאשר כל אדם רוצה חתיכת עוגה/קרקע לא ריקה. אך במקרה שלנו ההפך הוא הנכון- וכל ילד מעדיף פרק זמן "ריק". מה שיוצר במשולש שלנו- שכל צלע מלאה באות שמסמלת את הילד עם הקודקוד הנגדי לה. ובקודקודים אף ילד לא ירצה לבחור את החלק "השלם". (זה יתן מצב שבו אם אציג משולש-צביעה כפי שראינו בשיעור, כל הפינות יהיו מחולקות).



כעת, בסיס האינדוקציה:  $n=2$  נסתכל על הצלע שבין  $f_1$ - $f_2$  - כל המספרים הם 3. ז"א שמספר המעברים הינו 1, 2 או 3. (ובהכרח אחת הפינות תכיל 3 מעברים. כיוון שזה משולש ולא תישאר ברירה כי אף אחד לא רוצה לקחת את החלק השלם).

ולכן מספר המעברים הוא אי-זוגי.

צעד: נבחר סימפלקס( $n-1$ ) מלא וניכנס דרכו. הגענו לסימפלקס- $n$ , וישנם 2 אפשרויות:

1. הגענו לסימפלקס- $n$  מלא
2. יש עוד סימפלקס( $n-1$ ) מלא, נצא ממנו ונמשיך לטייל. לבסוף- או שנגיע לסימפלקס- $n$  מלא, או שנצא החוצה דרך סימפלקס( $n-1$ ) מלא אחר. לכן, יש גם מספר אי-זוגי של סימפלקס- $n$  מלאים.