

חלוקת עלויות

Cost-sharing

אראל סגל-הלוי

חלק מהשקפים באדיבות: נועם חזון



העומס בכבישים הולך וגדל



פתרון אפשרי: תחבורה ציבורית

אוטובוס:

- איטי
- לא גמיש
- הרבה נוסעים
- זול

נסיעה משותפת:

- מהירה
- גמישה
- כמה נוסעים
- חסכון בעלויות

מונית:

- מהירה
- גמישה
- נוסע אחד
- יקרה



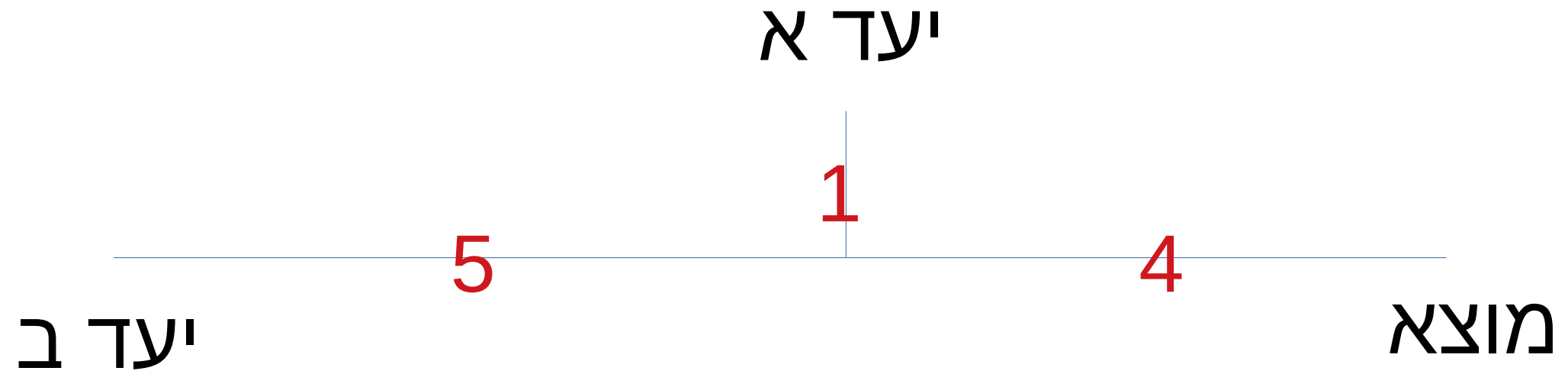
שיתוף נסיעה במונית

נסיעה משותפת במונית יכולה לחסוך עלויות.

- אם כל הנוסעים עושים את אותו מסלול –
הגיוני לחלק את דמי-הנסיעה שווה בשווה.
- אבל מה אם כל אחד נוסע במסלול אחר?

איך לחלק את דמי-הנסיעה בין הנוסעים?

דוגמה – חלוקה הוגנת של עלויות



עלות כוללת = $11 = 4 + 1 + 1 + 5$

עלות של א לבד = 5

עלות של ב לבד = 9

כמה ישלם כל אחד?

בעיה כללית: משחק שיתופי

נתונים:

- קבוצה של שחקנים - N ;
- לכל תת-קבוצה S – העלות של מתן שירות רק לתת-הקבוצה הזאת - $c(S)$.

המטרה: לגבות מכל שחקן j תשלום $p(j)$, כך שסכום התשלומים הכללי הוא $c(N)$ – התשלומים מכסים את העלות של כל הקבוצה.

מהו כלל תשלום הוגן?

עלות שולית

הגדרה: העלות השולית של שחקן j , ביחס לקבוצת שחקנים S , היא התוספת שהוא מוסיף לעלות כשהוא מצטרף לקבוצה:

$$c(S \cup \{j\}) - c(S)$$

עקרון ההגינות: כלל תשלום נקרא סימטרי אם הוא תלוי רק בעלויות השוליות: אם לשני שחקנים יש עלויות שוליות זהות ביחס לכל הקבוצות, אז הם צריכים לשלם אותו הדבר.

עקרון האפס (null player): שחקן שעבורו כל העלויות השוליות הן אפס ("עציץ"), משלם 0.

ליניאריות

עקרון הליניאריות:

- אם מכפילים את העלויות בקבוע – כל התשלומים נכפלים באותו קבוע.
- דוגמה: המרה משקלים לאגורות.
- אם מחברים שתי טבלאות-עלויות – כל התשלומים מתחברים.
- דוגמה: חישוב עלות דלק בנפרד ועלות אגרת-כביש בנפרד אמור לתת תוצאה זהה לחישוב העלויות יחד.

ליניאריות - דוגמה

יעד א

1+0

3+2

4+0

מוצא

יעד ב

התשלומים באדום – על הדלק
התשלומים בכחול – אגרת כביש

משפט שאפלי (Shapley)

משפט: ישנו כלל-תשלומים אחד ויחיד המקיים את כל שלושת העקרונות:

- א. עקרון הסימטריה,
- ב. עקרון האפס (null player),
- ג. עקרון הליניאריות.

כלל-התשלומים הזה נקרא ערך שאפלי.

ערך שאפלי (Shapley Value)

אלגוריתם לחישוב ערך שאפלי:

- לכל אחד מ- $n!$ הסדרים האפשריים:
- לכל שחקן:
- חשב את העלות השולית שלו בסידור זה.
- לכל שחקן:
- חשב את הממוצע של $n!$ העלויות השוליות.

משפט שאפלי – הוכחת נכונות

כיסוי מלא: נכון לכל סדר בנפרד \leftarrow נכון גם
לממוצע על כל הסדרים.

א. סימטריה: ערך שאפלי של כל שחקן נקבע
רק לפי העלויות השוליות שלו.

ב. אפס: העלויות השוליות 0 \leftarrow הממוצע 0.

ג. ליניאריות: ערך שאפלי הוא פונקציה
ליניארית של הערכים בטבלה.

משפט שאפלי – הוכחת יחידות (1)

נוכיח יחידות לשני שחקנים. ההוכחה לשלושה או יותר מסובכת יותר טכנית, אבל דומה.

פונקציית-עלות כללית לשני שחקנים נראית כך:
 $(0, c_a, c_b, c_{ab})$

ערכי שאפלי הם:

$$v_a = (c_a + (c_{ab} - c_b))/2 = c_a/2 + (c_{ab} - c_b)/2$$

$$v_b = (c_b + (c_{ab} - c_a))/2 = c_b/2 + (c_{ab} - c_a)/2$$

משפט שאפלי – הוכחת יחידות (2)

פונקציית העלות היא סכום של שלוש פונקציות:

$$(0, c_a, c_b, c_{ab}) = (0, c_a, 0, c_a) + (0, 0, c_b, c_b) + (0, 0, 0, c_{ab} - c_a - c_b)$$

בכחולה, ב הוא "אפס" ולכן א משלם הכל – c_a .

בירוקה, א הוא "אפס" ולכן ב משלם הכל – c_b .

באדומה, א, ב סימטריים ולכן כל אחד משלם

בדיוק חצי מהעלות הכוללת – $(c_{ab} - c_a - c_b)/2$.

לפי ליניאריות, התשלומים חייבים להיות:

$$p_a = c_a + 0 + (c_{ab} - c_a - c_b)/2 = c_a/2 + (c_{ab} - c_b)/2$$

$$p_b = 0 + c_b + (c_{ab} - c_a - c_b)/2 = c_b/2 + (c_{ab} - c_a)/2$$

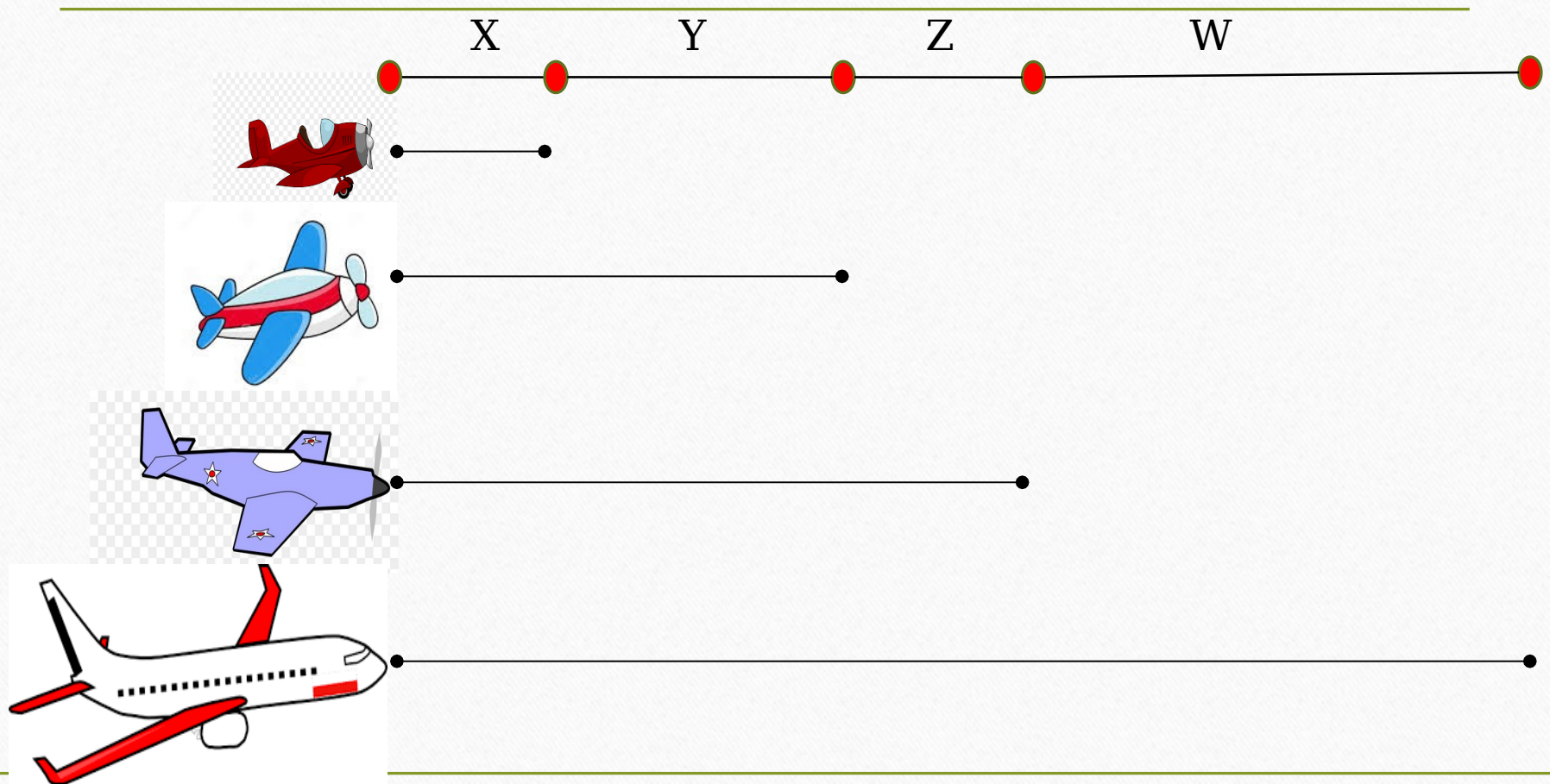
= בדיוק ערכי שאפלי.

חישוב ערך שאפלי

- במקרה הכללי, חישוב ערך שאפלי הוא בעיה NP-קשה – צריך לעבור על $n!$ סדרים.
- במקרים פרטיים, ניתן לנצל את מבנה הבעיה כדי לחשב את ערך שאפלי ביעילות.
- דוגמה: חלוקת עלויות של מסלול המראה.

Airport problem

חלוקת עלות של בניית מסלול-המראה
בין חברות-תעופה הצריכות אורכים שונים



ערכי שאפלי בבעיית מסלול ההמראה

העלות של כל תת-קבוצה =

העלות הגדולה ביותר בתת-הקבוצה.

ניתן לחשב ישירות – ראו `airport.py`

ניתן גם לחשב לפי 3 העקרונות של שאפלי:

- נפרק את הבעיה לסכום ליניארי של n בעיות:

בכל תת-בעיה i , יש עלות רק לקטע $[i-1, i]$.

- בכל תת-בעיה i :

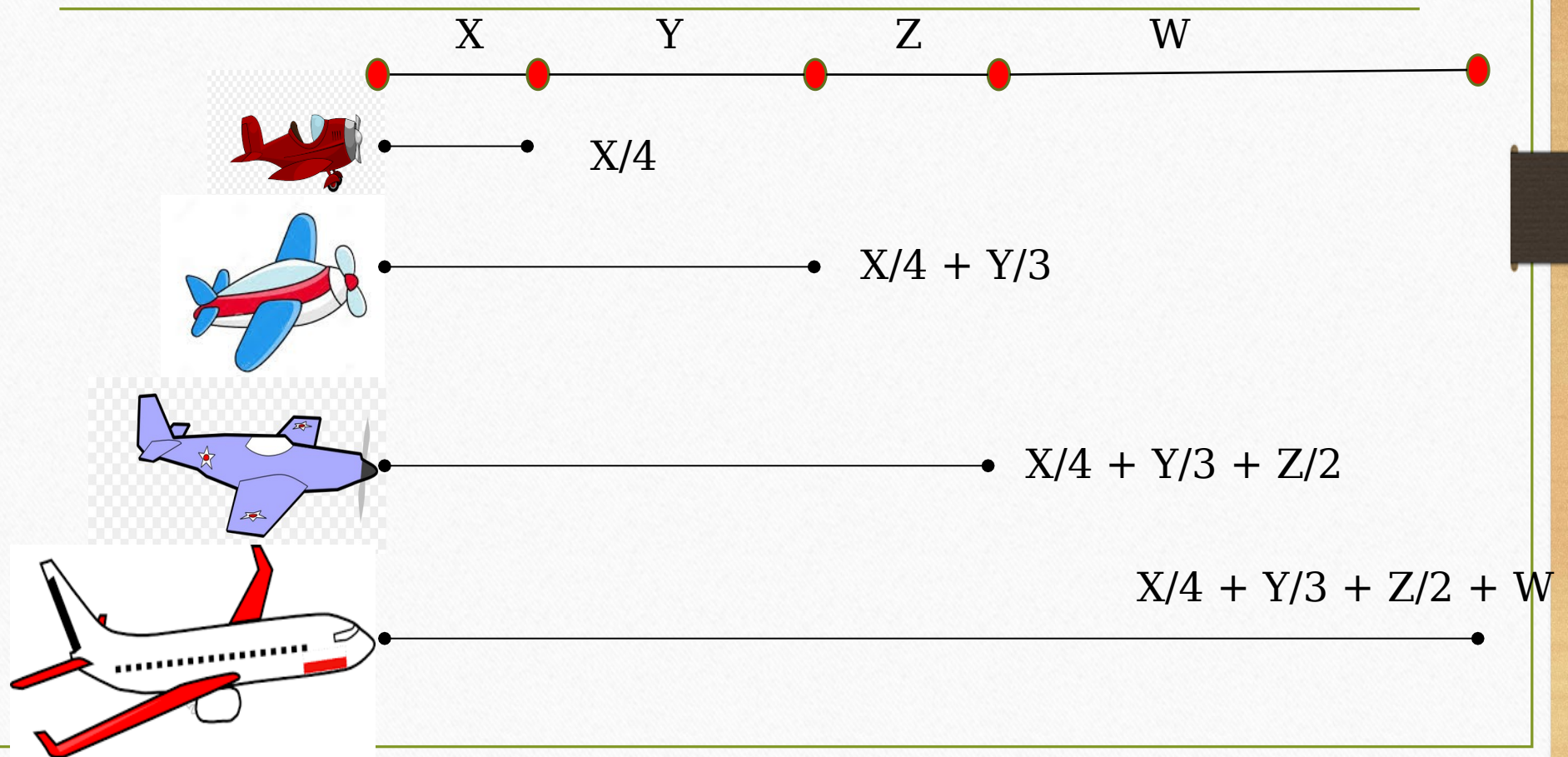
- שחקנים $1, \dots, i-1$ הם "שחקני אפס",

ולכן לא משלמים כלום.

- שחקנים i, \dots, n הם סימטריים,

ולכן עלות הקטע מתחלקת ביניהם בשווה.

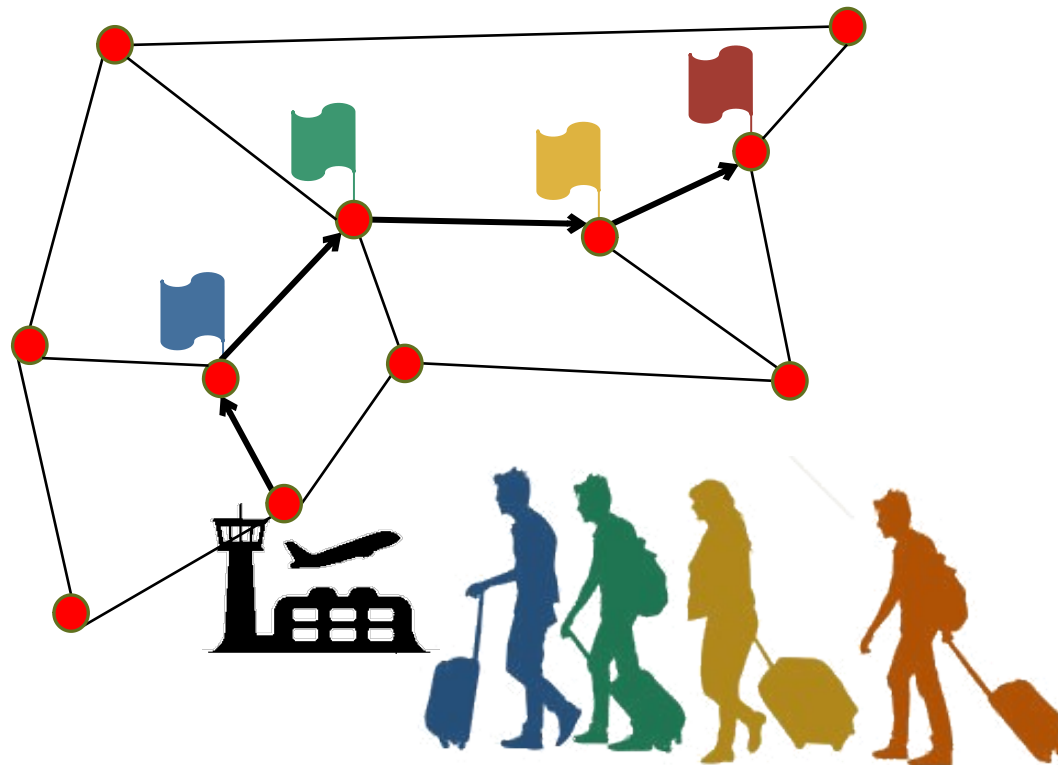
פתרון בעיית מסלול ההמראה



חישוב יעיל של ערך שאפלי

• דוגמה נוספת: חלוקת עלויות נסיעה כאשר סדר הורדת הנוסעים קבוע מראש.

- Levinger, Hazon, Azaria (2019)
- הכללה של בעיית מסלול ההמראה.



המבנה של בעיית שיתוף הנסיעות

- סדר הורדת הנוסעים: $a - b - i - c - d - e$.

- פרמוטציה נוכחית: b, d, c, a, i, e

- העלות בלי i : הנוסעים a, b, c, d

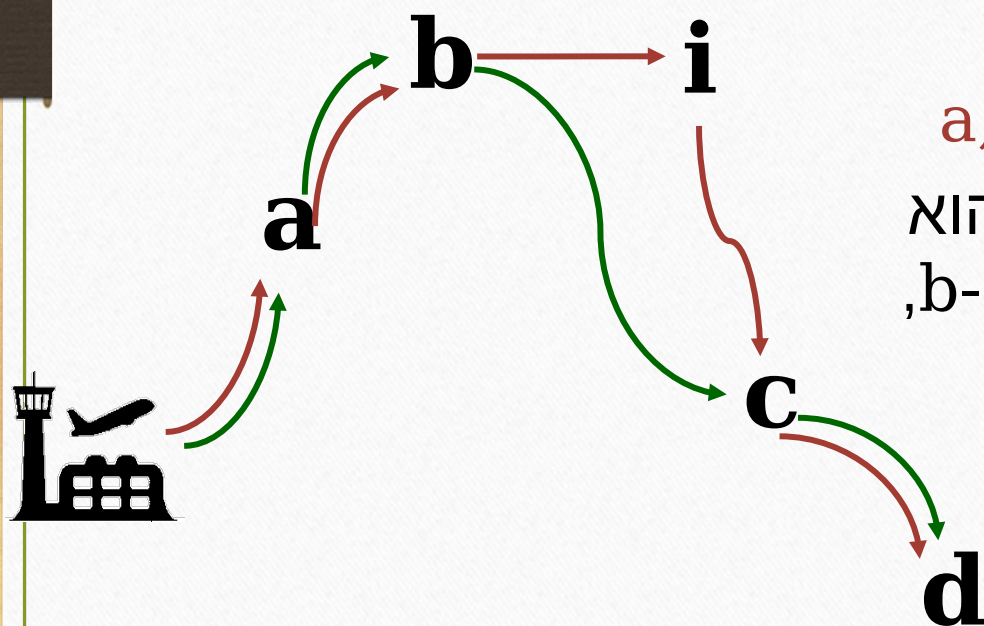
- העלות עם i : הנוסעים a, b, i, c, d

- מסקנה: כש- i מצטרף לסדרה, הוא

מפחית את העלות של הקטע $b-c$,

ומוסיף את העלות של הקטעים

$b-i, i-c$.



ערכי שאפלי בבעיית שיתוף הנסיעות

ניתן לחשב ישירות – ראו [ridesharing.py](#)
ניתן גם לחשב לפי 3 העקרונות של שאפלי:
• נפרק את הבעיה לסכום של $O(n^2)$ בעיות:

• לכל k – תת-בעיה שבה משלמים רק את $d[0,k]$:

• שחקן k מוסיף כשהוא הראשון מבין $1..k$ שמצטרף – זה קורה באחד מכל k סדרים.

• שחקן $j < k$ מפחית כשהוא הראשון מבין $1..k-1$ שמצטרף אחרי k – באחד מכל $k(k-1)$ סדרים.

• לכל i, k – תת-בעיה שבה משלמים רק את $d[i,k]$:

• שחקן i מוסיף כאשר k מצטרף ראשון ו- i מצטרף שני – באחד מכל $(k-i)(k-i+1)$ סדרים.

• שחקן $i < j < k$ מפחית כאשר i, k מצטרפים ראשונים והוא מצטרף שלישי – בשניים מכל $(k-i-1)(k-i)(k-i+1)$ סדרים.

שאלה פתוחה

איך לחשב את ערך שאפלי
כאשר סדר ההורדה
לא קבוע מראש?