

שידוכים

[80 דקות]

"מטרוניא שאלה את ר' יוסי בר חלפתא, אמרה לו: בכמה ימים ברא הקב"ה את עולמו? אמר לה: לששת ימים... אמרה לו: ומאותה שעה עד עכשיו מהו יושב ועושה? אמר לה: **מזוג זיווגים**... ואם קלה היא בעינייך, קשה היא לפני הקדוש ברוך הוא כקריעת ים סוף" (ויקרא רבה ח א).

היום נדבר על בעיה מסוג חדש: שיבוץ סטודנטים למחלקות באוניברסיטאות. יש מחלקות שמאד קשה להתקבל אליהן, למשל, מחלקות שנותנות תואר שני בפסיכולוגיה. יש הרבה סטודנטים שרוצים להתקבל ומעט מקומות, והתחרות קשה.

במחשבה ראשונה הבעיה דומה לבעיית חלוקה הוגנת של חדרים בדירה שכורה, או של חפצים בדידים. החפצים הם המקומות באוניברסיטה, וצריך לחלק אותם בהגינות בין הסטודנטים. אבל במחשבה שנייה מתברר שיש הבדל גדול בין הבעיות: בעיית הדירה השכורה היא חד-צדדית, ובעיית השיבוץ למחלקות הוא **דו-צדדית**. בדירה שכורה, רק לדיירים יש העדפות; לחדר לא אכפת מי יגור בו... אבל בשיבוץ למחלקות, גם למחלקות יש העדפות שונות! בדרך-כלל מחלקות מועמדים לפי הציונים שלהם, אבל כל מחלקה נותנת משקל שונה לציונים שונים. יש גם שיקולים נוספים כמו ליצור איזון בין אוכלוסיות שונות, הפליה מתקנת, וכד'.

שיבוץ דו-צדדי נקרא גם **שידוך** (matching). אפשר להבין למה - הבעיה הקלאסית שתמיד מביאים כדוגמה היא שידוך בין נשים לגברים. יש n נשים ו- n גברים. לכל אישה יש סדר העדפות לגבי הגברים ולכל גבר יש סדר העדפות לגבי הנשים, וצריך למצוא שידוך "טוב" ביניהם (בהמשך נגדיר מהו שידוך "טוב"). במציאות, עד כמה שידוע לי, שידוכים בין נשים לגברים לא נעשים בעזרת האלגוריתמים שנלמד בהמשך, אבל האלגוריתמים הללו נפוצים ומקובלים בתחומים רבים אחרים.

שוק דו-צדדי מבוזר

כדי להבין מדוע שוק דו-צדדי מורכב יותר משוק חד-צדדי (ומדוע קשה יותר למצוא שידוך טוב מלמצוא שיבוץ טוב), נתאר קודם את המצב המתקיים בשווקים דו-צדדיים כאשר הם **מבוזרים** (decentralized) - ללא תכנון מרכזי. תיאור יפה של שוק דו-צדדי מבוזר נמצא בספרו של אלוין רות' (Alvin Roth) שזכה בפרס נובל בכלכלה על תרומתו לאלגוריתמי שידוך. הוא מתאר שוק דו-צדדי של שידוך בין רופאים-מתמחים לבין בתי-חולים.

מושג ההתמחות נכנס לחוק האמריקאי בשנת 1900, ומאותה שנה בתי-חולים התחילו להתחרות ביניהם על המתמחים הטובים ביותר. במשך הזמן, בתי"ח הבינו שיש חשיבות לגורם הזמן: אם הם מציעים הצעה לסטודנט מוכשר בשנה האחרונה ומגבילים אותה בזמן, יש סיכוי שהוא יקבל את ההצעה שלהם למרות שיש ב"ח שהוא רוצה יותר, כיוון שהוא לא יודע אם ביה"ח הזה יציע לו הצעה. ההצעות הלכו ונעשו מוקדמות יותר ויותר, עד שבשנת 1945 הגיעו למצב שבת"ח כבר הציעו הצעות לסטודנטים בסוף שנה ראשונה. המצב הזה כמובן בעייתי מאד: הוא בעייתי לסטודנטים כי הם צריכים להתחייב על המקום שבו יתמחו בעוד שנתיים. הוא בעייתי גם לבתי"ח כי הם צריכים לבחור סטודנטים כשהנתון היחיד שיש

להם הוא הציונים שלהם בשנה ראשונה. המצב הזה, שבו שוק דו-צדדי "מתדרדר" להצעות מוקדמות לא הגיוניות, נקרא **פרימה** (unraveling).

בשנת 1945 החליטו האוניברסיטאות שהמצב לא יכול להימשך כך, וסיכמו ביניהן שלא יאפשרו לאף גורם לקבל מידע על ציוני הסטודנטים עד לתאריך קבוע מסוים בשנה האחרונה. כך הם אכן עצרו את תהליך הפרימה, אבל יצר בעיה אחרת: בתאריך הקריטי שבו השתחרר המידע, היתה "התנפלות" של בתי"ח על הסטודנטים הטובים. כל הסגל של בתי"ח, החל מהרכזות ועד המנהלים, בילו ימים ולילות ליד הטלפון בניסיונות להתקשר לסטודנטים הטובים ולהציע להם לבוא אליהם. יותר מזה, כדי למנוע מצב שבו בתי"ח נשאר בלי מתמחים, בתי"ח הציבו לסטודנטים הצעות מוגבלות בזמן, כגון: "אם לא תקבל את ההצעה תוך 10 דקות, המקום יועבר למועמד הבא בתור". אתם יכולים לתאר לעצמכם לאיזה לחץ זה הכניס את הסטודנטים, ואיך הרגיש סטודנט שאמר "כן" ואחרי 11 דקות קיבל הצעה טובה יותר... השוק המבוזר נכשל.

בשנת 1952 בתי החולים החליטו לבנות מערכת חדשה שתקבע שידוך בניהול **מרכזי** (centralized). זה שינוי די מהפכני, במיוחד עבור ארצות-הברית הידועה באידיאולוגיה הליברטריאנית-אנטי-צנטרליסטית שלה. בתי-החולים החליטו לוותר על החופש שלהם לבחור בעצמם את המתמחים שלהם, וליצור מערכת שתקבע את השידוך לכל בתי החולים יחד.

שוק דו-צדדי בניהול מרכזי

ברגע שהחלטנו לעבור למערכת מרכזית, אפשר להתחיל לדבר על **אלגוריתם למציאת שידוך**. הקלט לאלגוריתם כזה הוא סדר העדיפויות של כל אחד מהמשתתפים **בכל אחד מהצדדים** של השוק. למשל, בדוגמה של שידוך סטודנטים למחלקות:

- כל סטודנט צריך לדווח את רשימת המחלקות שהוא רוצה להתקבל אליהן, לפי סדר העדיפויות שלו.
 - כל מחלקה צריכה לדווח את רשימת הסטודנטים שהיא רוצה לקבל, לפי סדר העדיפויות שלה.
- האלגוריתם צריך למצוא שידוך, כלומר - להתאים כל סטודנט למחלקה, כך שמספר הסטודנטים בכל מחלקה יהיה שווה לקיבולת שלה.
- בשלב ראשון, לצורך הפשטות, נניח שבכל מחלקה יש מקום אחד (בהמשך נראה איך להכליל למחלקות שיש בהן הרבה מקומות).
- איך אנחנו מגדירים שידוך "טוב"? קודם-כל, שידוך טוב כמובן חייב להיות יעיל פארטו. אבל זה לא מספיק.

דוגמה. לשם פשטות נניח שיש שני סטודנטים (א,ב), ושתי מחלקות (1,2) עם מקום אחד בכל מחלקה. העדיפויות של הסטודנטים זהות: כולם מעדיפים את 1 על 2. גם העדיפויות של המחלקות זהות: כולן מעדיפות את א על ב. נניח שהשידוך שנבחר הוא: א-2, ב-1.

האם השידוך יעיל פארטו? כן! אי אפשר לבצע שיפורי פארטו. כל שינוי יפגע בסטודנט ב ו/או במחלקה 2.

אבל יש כאן בעיה אחרת. סטודנט א מעדיף את מחלקה 1, ומחלקה 1 מעדיפה את סטודנט א. אז הם יכולים לסכם ביניהם על "קומבינה" שבה א יודיע למחלקה 2 שהוא לא מעוניין, ומחלקה 1 תודיע לסטודנט ב שהמקום תפוס. הם יפרקו את השידוך שהאלגוריתם מצא, וייצרו שידוך אחר שמתאים להם

יותר. אם ננסה למנוע קומבינות כאלה ע"י חקיקה, המחלקות והסטודנטים ימצאו דרכים לעקוף את החוק, והשוק יחזור למצב של פרימה!

הבעיה הזאת אכן קרתה במקומות רבים בעולם. לדוגמה, מערכת הבריאות של אנגליה בשנות ה-1960 החליטה לעבור לשיטה מרכזית להשמת מתמחים לבתי-חולים, אולם נתנה לכל איזור חופש לקבוע את האלגוריתם. מבין 5 איזורים שבחרו באלגוריתם שאינו מבטיח יציבות, 3 איזורים נאלצו לזנוח את המערכת שלהם תוך שנים ספורות. המתמחים ובתי-החולים פשוט לא השתמשו במערכת - הם העדיפו לעקוף אותה ולנהל משא-ומתן בלעדיה.

כדי למנוע את פרימת השוק, אנחנו צריכים אלגוריתם שיוצר שידוך שבו לא יהיו זוגות **שירצו** לבצע קומבינה כזאת.

הגדרות [כל ההגדרות מניחות שיש מקום אחד בכל מחלקה. ההרחבה למצב של כמה מקומות בכל מחלקה - בשיעורי הבית].

- בהינתן שידוך כלשהו, נגדיר **זוג מערער** (blocking pair) כזוג של סטודנט+מחלקה עם המאפיינים הבאים: (א) הסטודנט לא משודך למחלקה. (ב) הסטודנט מעדיף את המחלקה על-פני זו שמשודכת לו. (ג) המחלקה מעדיפה את הסטודנט על-פני זה שמשודך אליה.
- שידוך נקרא **יציב** (stable) אם אין בו זוגות מערערים.

כל שידוך יציב הוא יעיל פארטו (שיעורי בית) אבל ההיפך לא נכון (ראינו למעלה).

האם תמיד קיים שידוך יציב? זה בכלל לא מובן מאליו. העובדה שהגדרנו משהו, לא אומרת שהוא תמיד קיים...

אבל במקרה שלנו, מתברר שהתשובה היא כן! תמיד קיים שידוך יציב. יותר מזה, קיים אלגוריתם יעיל שמוצא אותו. הנה הוא.

אלגוריתם "קבלה על-תנאי" (deferred acceptance).

האלגוריתם הוצע לראשונה בשנת 1952 ע"י סטודנטים לרפואה שרצו לתקן את האלגוריתם הקיים להשמת מתמחים לבתי-חולים בארה"ב. הוא הוצג לראשונה באופן פורמלי ע"י דוד גייל (David Gale) ולויד שאפלי (Lloyd Shapley) בשנת 1962. בזכות השימושים הרבים שלו במקומות רבים בעולם, זכה שאפלי בפרס נובל ב-2012 (גייל נפטר מספר שנים קודם).

לצורך הפשטות אנחנו מניחים שיש מקום אחד בכל מחלקה.

א. כל סטודנט הולך למחלקה שהוא הכי רוצה, מבין המחלקות שעדיין לא דחו אותו, ונותן לה הצעה.

ב. כל מחלקה משאירה אצלה את הסטודנט שהיא הכי רוצה, מבין הסטודנטים שנמצאים בה, ודוחה את כל השאר.

(הסטודנט שנשאר במחלקה התקבל על-תנאי שלא יבוא סטודנט טוב יותר. מכאן שם האלגוריתם).

ג. חוזרים על שלבים א ו-ב עד שכולם משודכים.

משפט. אלגוריתם "קבלה על-תנאי" מסתיים בשידוך יציב.

הוכחה. צריך להוכיח שלושה דברים: מסתיים, בשידוך, יציב.

- מסתיים: כי כל סטודנט מציע לכל מחלקה פעם אחת לכל היותר. מספר המחלקות והסטודנטים סופי ולכן הכל מסתיים.

- כשידוך: נניח שיש מחלקה לא-משודכת. אז אף סטודנט לא הגיע אליה. כיוון שמספר הסטודנטים והמחלקות שווה, יש גם סטודנט לא משודך. הוא עובר על כל הרשימה שלו מלמעלה למטה, לכן בהכרח הוא יגיע מתישהו למחלקה הלא-משודכת וישתדך איתה. כלומר האלגוריתם עוד לא הסתיים.
- יציג: מצבה של כל מחלקה הולך ומשתפר - היא מחליפה שידוך רק אם מגיע סטודנט טוב יותר עבורה. לעומת זאת, מצבו של כל סטודנט הולך ומתדרדר - כשהוא נדחה, הוא תמיד עובר למחלקה גרועה יותר עבורו.
- מכאן, אם זוג מסויים (ס,מ) לא נוצר אז יש שתי אפשרויות:
 - אפשרות א: ס עוד לא היה ב-מ: מכאן ש-ס נמצא במחלקה טובה יותר.
 - אפשרות ב: ס כבר היה ב-מ: מכאן של-מ יש סטודנט טוב יותר. ***

מחלקות גדולות

עד עכשיו הנחנו שבכל מחלקה יש מקום לסטודנט אחד. במציאות זה כמובן לא נכון, בכל מחלקה יש מקום להרבה סטודנטים.

קל להרחיב את אלגוריתם "קבלה על תנאי" למצב זה:

א. כל סטודנט הולך למחלקה שהוא הכי רוצה, מבין המחלקות שעדיין לא דחו אותו, ונותן לה הצעה.
ב. כל מחלקה שיש לה יותר סטודנטים מהכמות שהיא יכולה לקבל - משאירה את הטובים ביותר, ודוחה את כל השאר.

האלגוריתם עובד בדיוק כמו קודם, כל עוד אין קשר בין הסטודנטים מבחינת ההעדפות שלהם ומבחינת ההעדפות של המחלקות. הנה שני מקרים שבהם האלגוריתם עלול לא לעבוד:

- זוגות נשואים של סטודנטים רוצים להתקבל לאותה מחלקה. הבעיה מעשית ביותר בשיבוץ רופאים-מתמחים לבתי-חולים: מתברר שיש הרבה זוגות נשואים המסיימים לימודי רפואה ביחד, וחשוב להם להתמחות באותו מקום. במצב זה לא תמיד קיים שיבוץ יציב, וישנו מחקר רב על אלגוריתמים המוצאים שיבוץ יציב בהסתברות גבוהה.
- למחלקות יש אילוצים של גיוון, למשל מחלקות רוצות לקבל מספר מסויים של סטודנטים מקבוצות-מיעוט מסויימות וכד'. חלק מהאילוצים עדיין מאפשרים מציאת שיבוץ יציב, אבל יש אילוצים הגורמים לכך שלא קיים שיבוץ יציב - גם כאן יש מחקר ענף ומגוון.

הרחבות

ניתן להרחיב את האלגוריתם בדרכים רבות. לדוגמה, סטודנט יכול להחליט שיש מחלקות מסויימות שהוא לא רוצה בכלל - הוא מעדיף להישאר בלי מחלקה, מאשר להיות משודך אליהן. במקרה זה אומרים שהסטודנט "מקצץ" (truncate) את רשימת העדיפויות שלו. למשל, אם יש 10 מחלקות אבל הוא מוכן להירשם רק ל-3 מתוכן, אז הוא מגיש סדר עדיפויות רק עבור 3 המחלקות הללו ומקצץ את הרשימה אחרי המחלקה השלישית. אם כל שלושת המחלקות הללו דוחות אותו, הוא יישאר בלי מחלקה (או משודך ל"קבוצה ריקה"). באותו אופן מחלקות יכולות "לקצץ" את הרשימה שלהן כדי לקבוע שהן לא מוכנות בשום אופן לקבל סטודנטים מסויימים. אם הסטודנטים הללו יפנו אליהן, הם יידחו מייד.

איזה שידוך יציב מתקבל?

באלגוריתם שהצגנו למעלה, הסטודנטים מציעים למחלקות, והמחלקות מחליטות את מי לקבל.

יכולנו גם לנהל את האלגוריתם בסדר הפוך: המחלקות מציעות לסטודנטים, והסטודנטים מחליטים את מי לקבל.

האם לדעתכם יש הבדל בין שתי הגישות? כסטודנטים, איזה אלגוריתם תעדיפו? כמנהלי מחלקות, איזה אלגוריתם תעדיפו?

משפט: כשהסטודנטים הם המציעים – השידוך המתקבל הוא הטוב ביותר לכל הסטודנטים מכל השידוכים היציבים.

משפט שקול: יהי שידוך-א (שא) שידוך יציב כלשהו. יהי שידוך-ב (שב) שידוך המתקבל ע"י אלגוריתם קבלה-על-תנאי שבו הסטודנטים מציעים.

אז כל סטודנט ס רוצה את המחלקה שב(ס) לפחות כמו את המחלקה שא(ס).

הוכחה גרפית: ראו במצגת.

הוכחה חלופית: נניח בשלילה שיש סטודנט ס כלשהו הרוצה את שא(ס) יותר מאת שב(ס). במצב ב, כל סטודנט יורד ברשימת המחלקות שלו מהטובה לגרועה; לכן, במצב ב הסטודנט ס נדחה ע"י שא(ס). נניח בה"כ ש-ס הוא הסטודנט הראשון שנדחה ע"י שא(ס). זה אומר שהמחלקה שא(ס) קיבלה הצעה מסטודנט אחר כלשהו ע, והיא רוצה אותו יותר מאת ס. כיוון ששידוך א יציב, הסטודנט ע רוצה את שא(ע) יותר מאת שא(ס). כיוון שהסטודנטים יורדים מהטובה לגרועה, ע נדחה מ-שא(ע) לפני שהוא הגיע ל-שא(ס). אבל זו סתירה להנחתנו ש-ס היה הראשון שנדחה. ***

המשפט הזה מאד מעניין כי הוא מנוגד לאינטואיציה, ולא רק לאינטואיציה שלי: הסטודנטים לרפואה שפיתחו את האלגוריתם בשנת 1952, קבעו שבתי-החולים יהיו המציעים! אילו הם היו יודעים את המשפט שהוכחנו הרגע, הם היו מעדיפים שהסטודנטים יציעו.

האם אלגוריתם "קבלה על-תנאי" מגלה-אמת?

אלגוריתם "קבלה על-תנאי" הוא מגלה-אמת למחצה. למה הכוונה? אם הסטודנטים מציעים, אז אפשר להוכיח שהאלגוריתם מגלה-אמת **עבור הסטודנטים**. כלומר, הכי משתלם לכל סטודנט לגשת למחלקות בסדר העדיפויות האמיתי שלו.

משפט: כשהסטודנטים הם המציעים – אלגוריתם קבלה-על-תנאי מגלה-אמת עבור הסטודנטים. הוכחה גרפית: ראו במצגת.

הרבה פעמים אומרים לרווקים ורווקות "אתם צריכים להתפשר, אחרת תפסידו את הזיווג שלכם". גם סטודנט עלולים לחשוב שהוא צריך להתפשר כדי שלא יפסיד שידוך עם מחלקה. למשל, נניח שאתה פונה למחלקות לפי הסדר האמיתי שלך: פונה למחלקה 1 ונדחה, למחלקה 2 ונדחה וכו', עד שבסוף אתה מתקבל למחלקה 5 (החמישית בדירוג שלך). אתה יכול לחשוב לעצמך "חבל שבזבזתי זמן על מחלקות 1 ו-2, ממילא לא היה לי סיכוי, בזמן שחיכיתי שם מישוהו תפס לי את המקום במחלקה 3. אילו הייתי מלכתחילה מתפשר והולך למחלקה 3, הייתי מתקבל". אבל השיקול הזה לא נכון. בגלל שהקבלה היא על-תנאי, אף אחד לא יכול לתפוס לך את המקום. נניח שבזמן שחיכית במחלקות 1 ו-2, הגיע סטודנט אחר למחלקה 3. אם מחלקה 3 מעדיפה אותך עליו, אז כשתגיע אליה, היא תסלק אותו ותיקח אותך. אם מחלקה 3 מעדיפה אותו עליך, אז גם אם תגיע אליה ראשון, כשהוא יגיע אליה היא תסלק אותך ותיקח אותו.

מצד שני, האלגוריתם לא מגלה-אמת **עבור המחלקות**. מחלקות יכולות להשיג "שידוך" טוב יותר על-ידי דיווח העדפות שונות מהאמיתיות; ראו דוגמה במצגת.

אם המחלקות מציעות אז המצב הפוך: האלגוריתם מגלה-אמת עבור המחלקות ולא עבור הסטודנטים. האם קיים אלגוריתם אחר למציאת שידוך יציב, שהוא מגלה-אמת עבור שני הצדדים? התשובה היא לא! **משפט**. לא קיים אלגוריתם המוצא שידוך יציב, שהוא מגלה-אמת עבור שני הצדדים.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים אלגוריתם כזה. נתבונן במצב מסויים (ראו במצגת) שבו ישנם בדיוק שני שידוכים יציבים. האלגוריתם שלנו חייב להחזיר אחד מהם. נוכיח (במצגת) שאם הוא בוחר בשידוך א, אז אחת המחלקות יכולה להתחכם ולשפר את מצבה; ואם הוא בוחר בשידוך ב, אז אחד הסטודנטים יכול להתחכם ולשפר את מצבו. מכאן שהאלגוריתם לא יכול להיות מגלה-אמת - סתירה להנחה.

אז מה עושים? -- במציאות בדרך-כלל מממשים את האלגוריתם שבו הסטודנטים מציעים, כדי להקל על הסטודנטים ולחסוך להם את הצורך לבצע שיקולים אסטרטגיים.

שידוכים יציבים בישראל

מאז כניסתו לשימוש בשנת 1952 בארה"ב, אלגוריתם הקבלה על-תנאי יושם בעוד מקומות רבים בעולם. האלגוריתם נכנס גם לישראל, לשידוך בין מועמדים לתואר שני בפסיכולוגיה לבין מחלקות. המערכת פועלת כבר מספר שנים כאן: <http://www.psychologymatch.org>. תהליך הכנסת המערכת לשימוש בישראל היה מעניין מאד והעלה אתגרים מחקרניים חדשים.

מקורות

- הקורס של טים: <http://theory.stanford.edu/~tim/f16/f16.html> הרצאות 1, 2
- Alvin Roth, "Who gets what and why", 2015
- <http://www.cs.columbia.edu/~evs/intro/stable/writeup.html>