חלוקה הוגנת של קרקע
Fair Division of Land

אראל סגל-הלוי

http://www.fourpoints.net.au/services/land-division/

הגינות בחלוקת קרקע בכותרות

סגנית השר חוטובלי: ברוואבי אין עלויות קרקע אז המחירים זולים

בתגובה לדברי ראש הממשלה בישיבת הסיעה על הבנייה בנגב, אמרה סגנית שר התחבורה, ציפי חוטובלי, "ברוואבי אפשר לקנות דירת חמישה חדרים ב-140,000 דולר, בגלל שאין עלויות קרקע. הבשורה צריכה להיות לחלק קרקעות חינם ליוצאי צבא בנגב ובגליל כדי להוזיל משמעותית את מחירי הדיור".

מדוע צה"ל הוא שיחליט מה יעשו בקרקע המתפנה במרכז הארץ

רכשתם קרקע להשקעה? כך תאבדו את כל ה

ערעור שהוגש לביהמ"ש המחוזי ביום חמישי צריך להדליק נורת אזהרה לרוכשי קרקע חקלאית: במקרה של הפקעה או שינוי ייעוד לפארק או לגן לאומי - ולא למגורים או לתעסוקה כמו שחלמו - הם לא יקבלו פיצוי אפילו לפי שווי השוק של הקרקע

היישובים מטופחים על חשבון עיירות הפיתוח: "חלוקה עושקת"

בארץ | עודכן 21:42 17/12/2013
ישראל רוזנר

בפתח של קרית מלאכי קיים אזור תעשייה שמניב כ-37 מיליון שקלים, אבל את הכסף מקבלות דווקא המועצות שמסביב. מסביב לירוחם קיים מחנה צבאי, אבל היא לא זוכה להנות מהארנונה. האם המדינה מעדיפה לטפח יישובים חזקים על חשבון עיירות הפיתוח? "החלוקות האלה אינן טבעיות"

מעוז: "צעירים יהודים צריכים לתפוס קרקעות בכוח"

צפו בכלכלן שלמה מעוז בראיון לגלובס TV בוועידת ישראל לעסקים: "אם לא נראה פתרון תוך 3-4 חודשים, הצעירים יצטרכו לצאת ולכבוש שטחים. החלופה היא לעזוב את הארץ, והמפעל הציוני יתמוטט. צאו ותתפסו קרקע בכוח"

היעד:
פיתוח תהליכים מעשיים לחלוקה הוגנת של קרקע

בג"ץ: לפנות מיד מבנים שהוקמו על קרקע פרטית

בג"ץ הורה למדינה לפנות את כל המבנים שהוקמו על קרקע פלסטינית פרטית במאחזים בבנימין ובשומרון. "ההסדרה מתנהלים בעצלתיים".

סגנית השר חוטובלי: ברוואבי אין עלויות קרקע אז המחירים זולים

בתגובה לדברי ראש הממשלה בישיבת הסיעה על הבנייה בנגב, אמרה סגנית שר התחבורה, ציפי חוטובלי, "ברוואבי אפשר לקנות דירת חמישה חדרים ב-140,000 דולר, בגלל שאין עלויות קרקע. הבשורה צריכה להיות לחלק קרקעות חינם ליוצאי צבא בנגב ובגליל כדי להוזיל משמעותית את מחירי הדיור".

נדל"ן צבאי

מדוע צה"ל הוא שיחליט מה יעשו בקרקע המתפנה במרכז הארץ

אביב לביא

רכשתם קרקע להשקעה? כך תאבדו את כל הכסף ברגע

ערעור שהוגש לביהמ"ש המחוזי ביום חמישי צריך להדליק נורת אזהרה לרוכשי קרקע חקלאית: במקרה של הפקעה או שינוי ייעוד לפארק או לגן לאומי - ולא למגורים או לתעסוקה כמו שחלמו - הם לא יקבלו פיצוי אפילו לפי שווי השוק של הקרקע

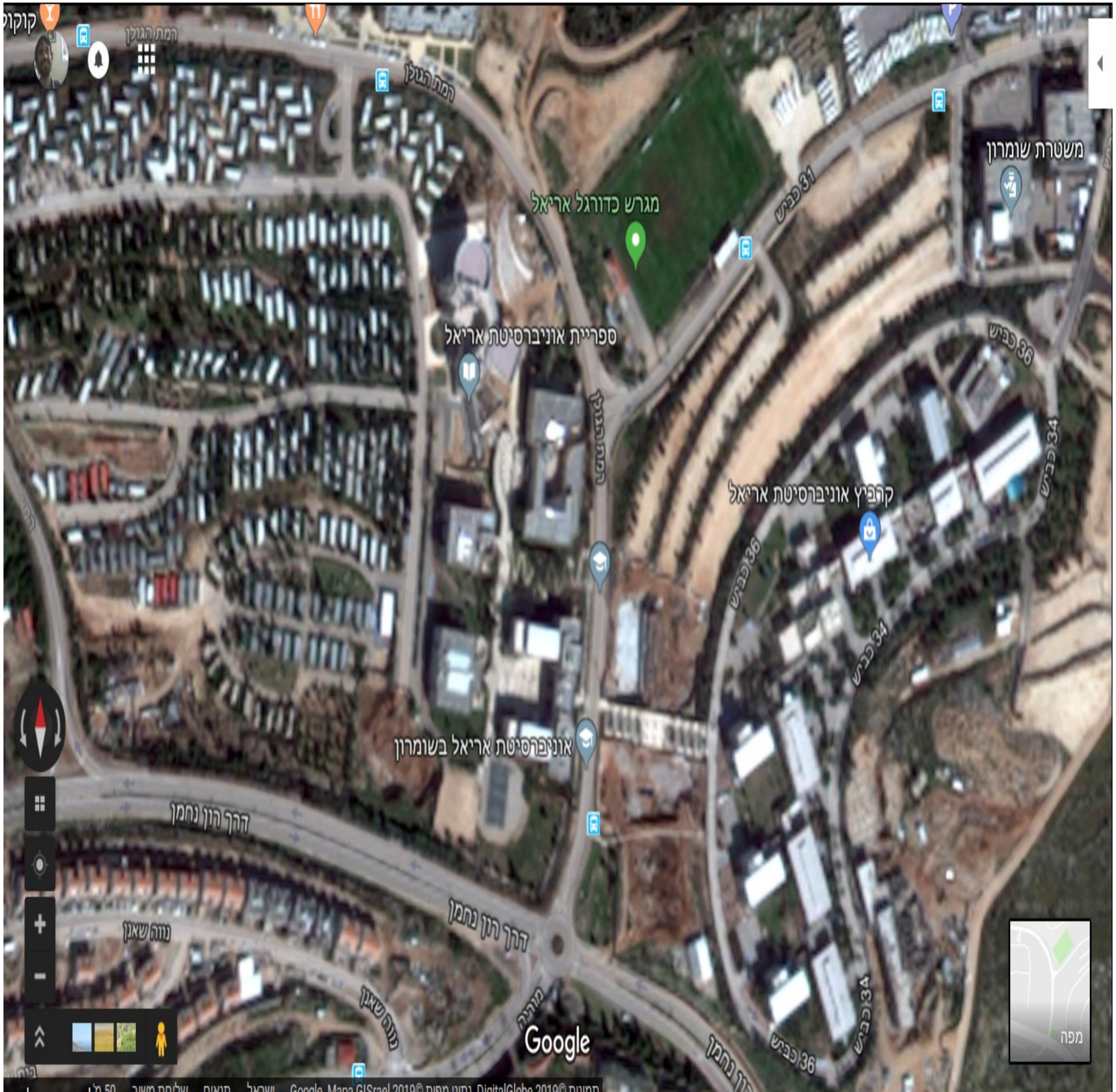
מעוז: "צעירים יהודים צריכים לתפוס קרקעות בכוח"

צפו בכלכלן שלמה מעוז בראיון לגלובס TV בוועידת ישראל לעסקים: "אם לא נראה פתרון תוך 3-4 חודשים, הצעירים יצטרכו לצאת ולכבוש שטחים. החלופה היא לעזוב את הארץ, והמפעל הציוני יתמוטט. צאו ותתפסו קרקע בכוח"

הכלכלן שלמה מעוז קורא היום (א') לצעירים יהודים הסובלים ממצוקת הדיור "לכבוש" קרקעות בסגנון "חומה ומגדל".

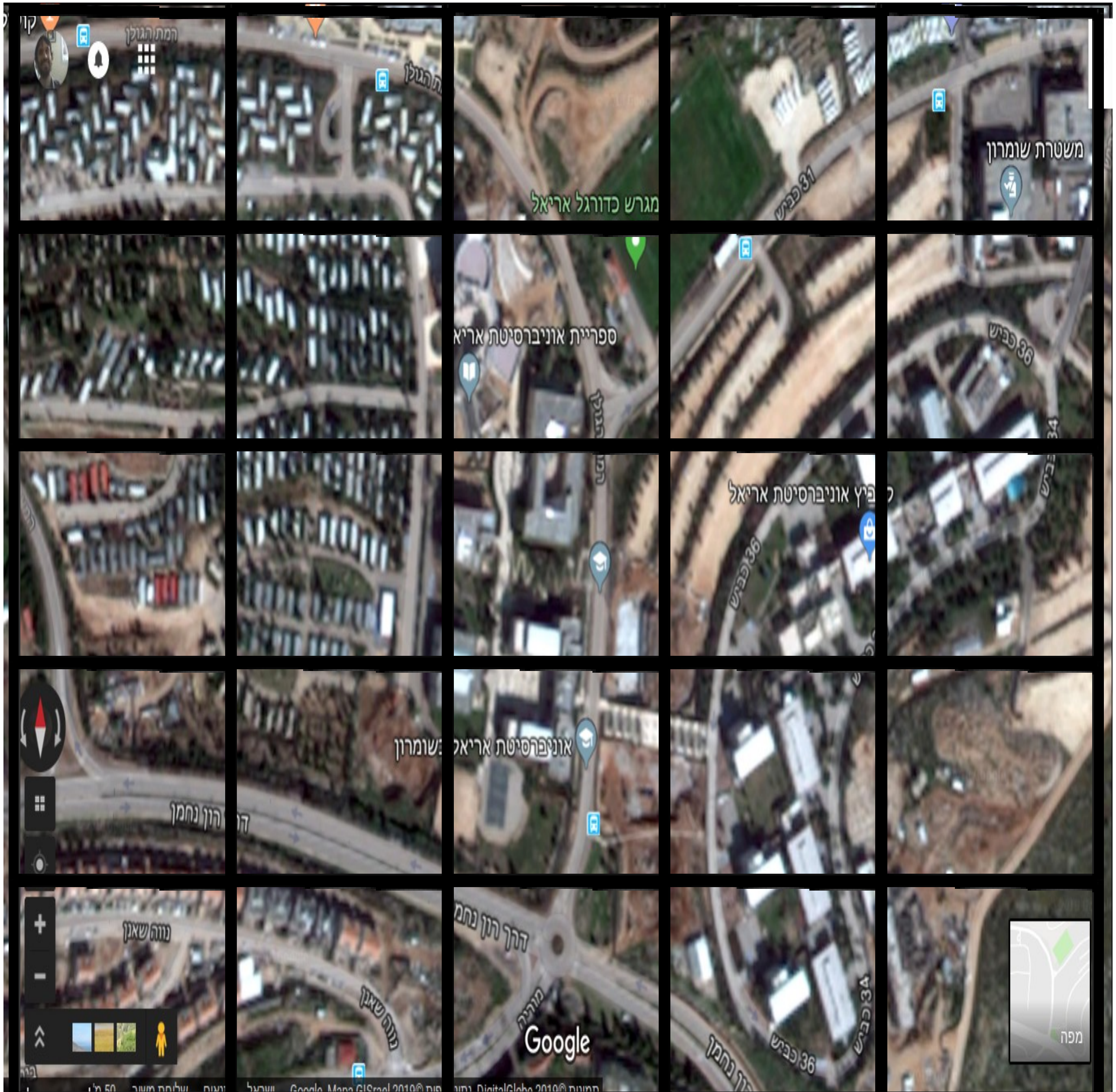
"אם לא נראה פתרון תוך 3-4 חודשים, הצעירים יצטרכו לצאת ולכבוש שטחים כמו בברזיל", אמר מעוז. "כמו שהבדואים עושים את זה בדרום, כמו שהחרדים עושים בבני-ברק - לתפוס שטחים ולקבוע עובדות. יצטרכו לעשות 'חומה ומגדל' - עוד פעם להקים ולהקים. ממשלת ישראל מספסרת בקרקע וגובה עשרות מיליארדי שקלים על הקרקע. החלופה היא לעזוב את הארץ, והמפעל הציוני יתמוטט. צאו ותתפסו קרקע בכוח".

מחלקים את אריאל לסטודנטים!



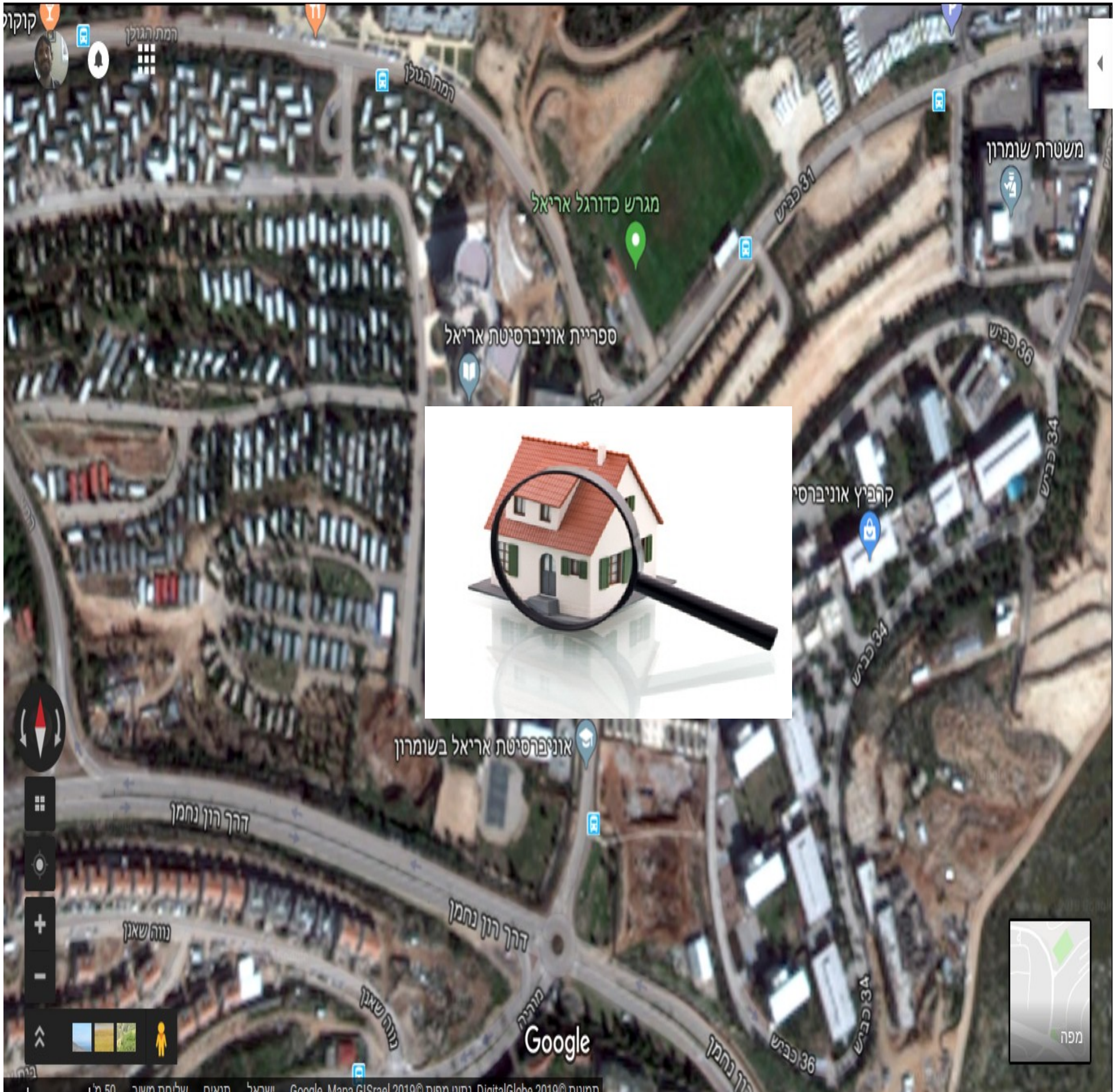
איך נוודא שכל סטודנט יקבל חלק הוגן?

א. חלוקה שווה-שטח



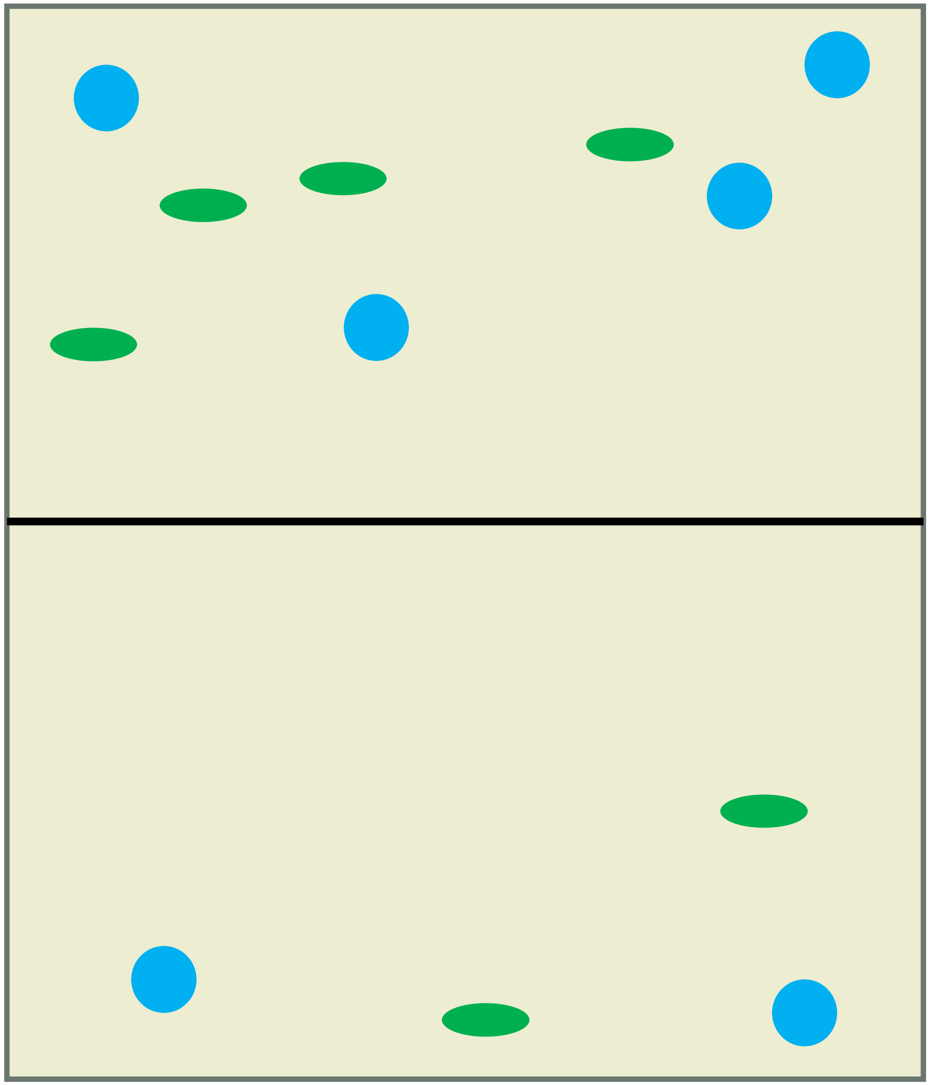
בעיה: הקרקע **לא הומוגנית** – לחלקים שונים יש ערך שונה.

ב. חלוקה שוות-ערך



בעיה:
ההערכות
סוביקטיביות
-
לכל אחד יש
העדפות
שונות.

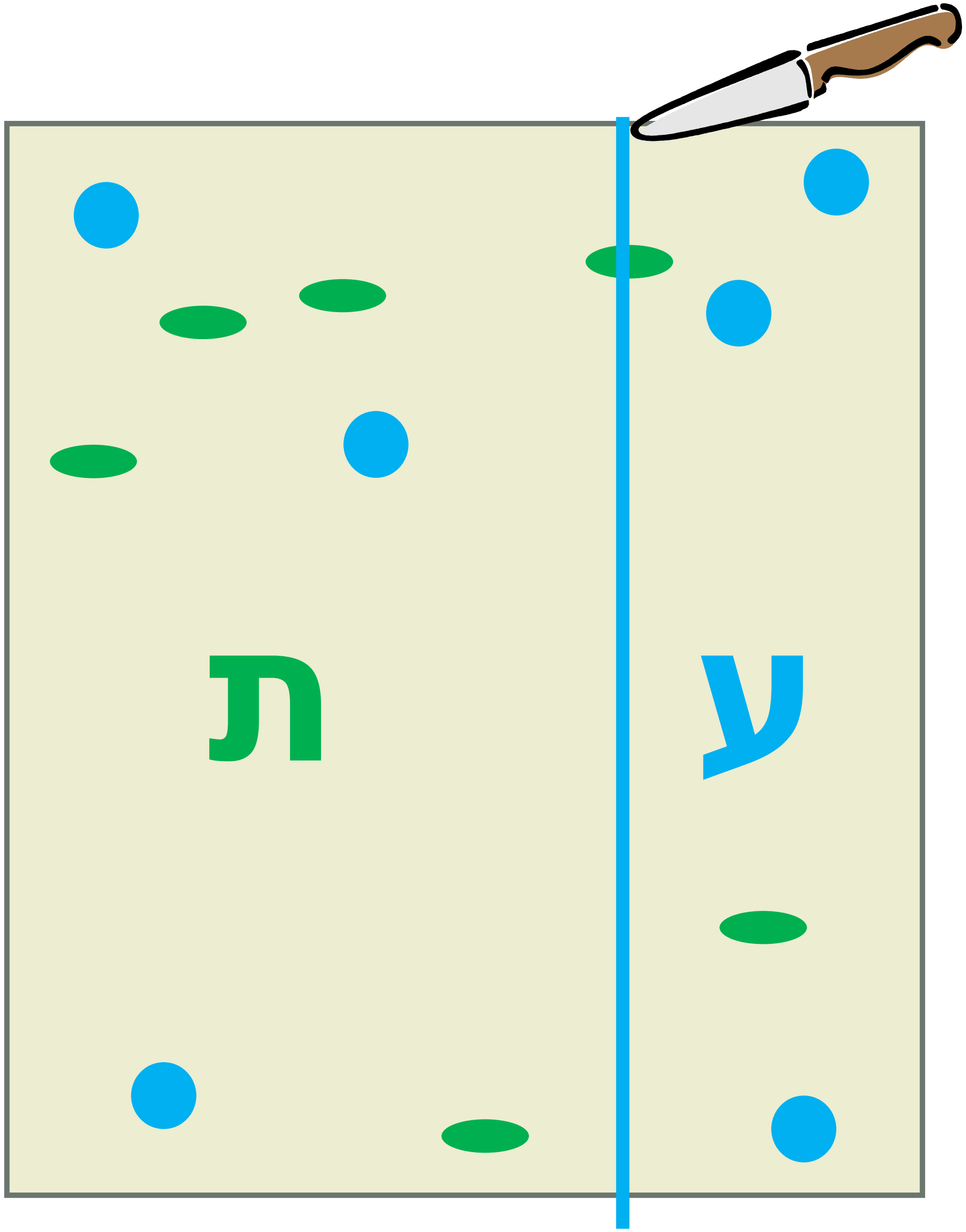
חלוקת עוגה בין שני ילדים



צריך לחלק עוגת
יום-הולדת בין שני
ילדים: עמי ותמי.
כל ילד מעדיף סוכריות
בצבע אחר.

אם **אנחנו** נחלק את
העוגה בצורה שנראית
לנו הוגנת – לא בטוח
שזה יהיה הוגן בעיניהם!

חלוקת עוגה בין שני ילדים



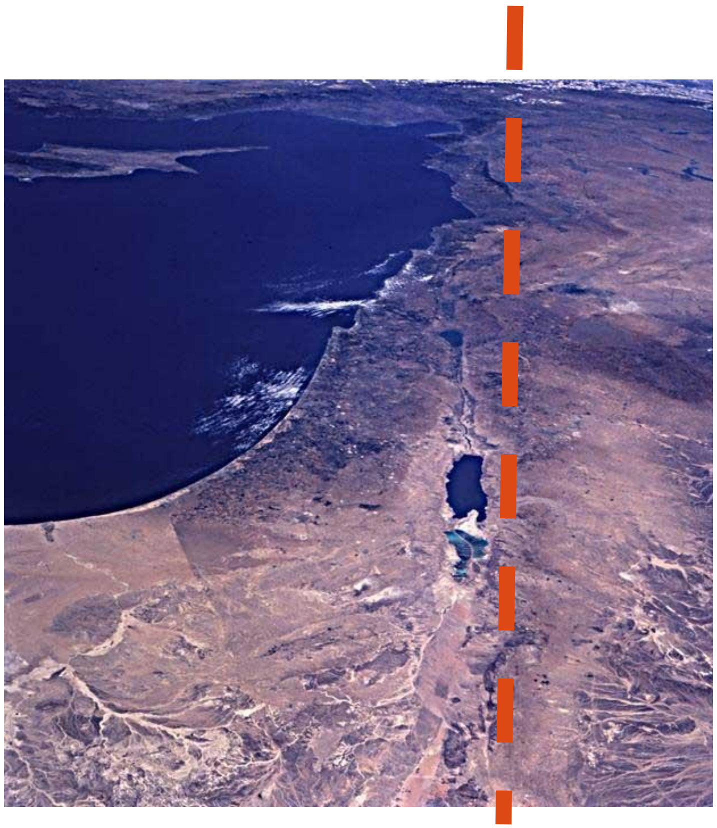
הפתרון: לתת להם לחלק בעצמם!

- עמי מחלק את העוגה לשני חלקים שוים בעיניו (בשווי 1/2).
- תמי בוחרת את החלק הטוב בעיניה.
- עמי מקבל את השאר.

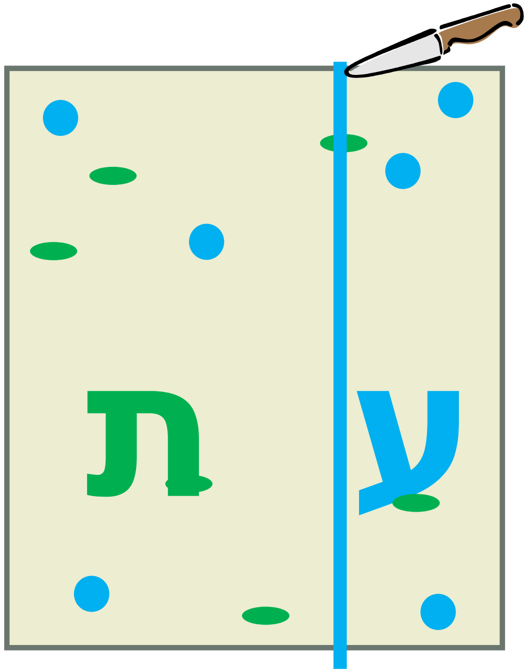
חלוקת קרקע בין שני אנשים

בראשית יג8-9: וַיֹּאמֶר אַבְרָם אֶל לוֹט: אַל נָא תְהִי מְרִיבָה בֵּינִי וּבֵינֶיךָ וּבֵין רֹעַי וּבֵין רֹעֶיךָ כִּי אֲנָשִׁים אַחִים אֲנָחְנוּ. הֲלֹא כָל הָאָרֶץ לְפָנֶיךָ, הִפָּרֶד נָא מֵעָלָי! **אִם הַשְּׂמֹאל וְאֵימִנָה, וְאִם הַיָּמִין וְאַשְׂמְאִילָה.**

אברם



לוט



אלגוריתם "חתוך ובחר"

תכונות:

1) כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות 1/2 – חלוקה **פרופורציונלית** (proportional).

2) כל משתתף חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו כל האחרים – חלוקה **ללא קנאה** (envy-free).

שאלה: האם אפשר להשיג את אותן תכונות כשיש יותר משני אנשים?

חלוקת עוגה – מודל כללי

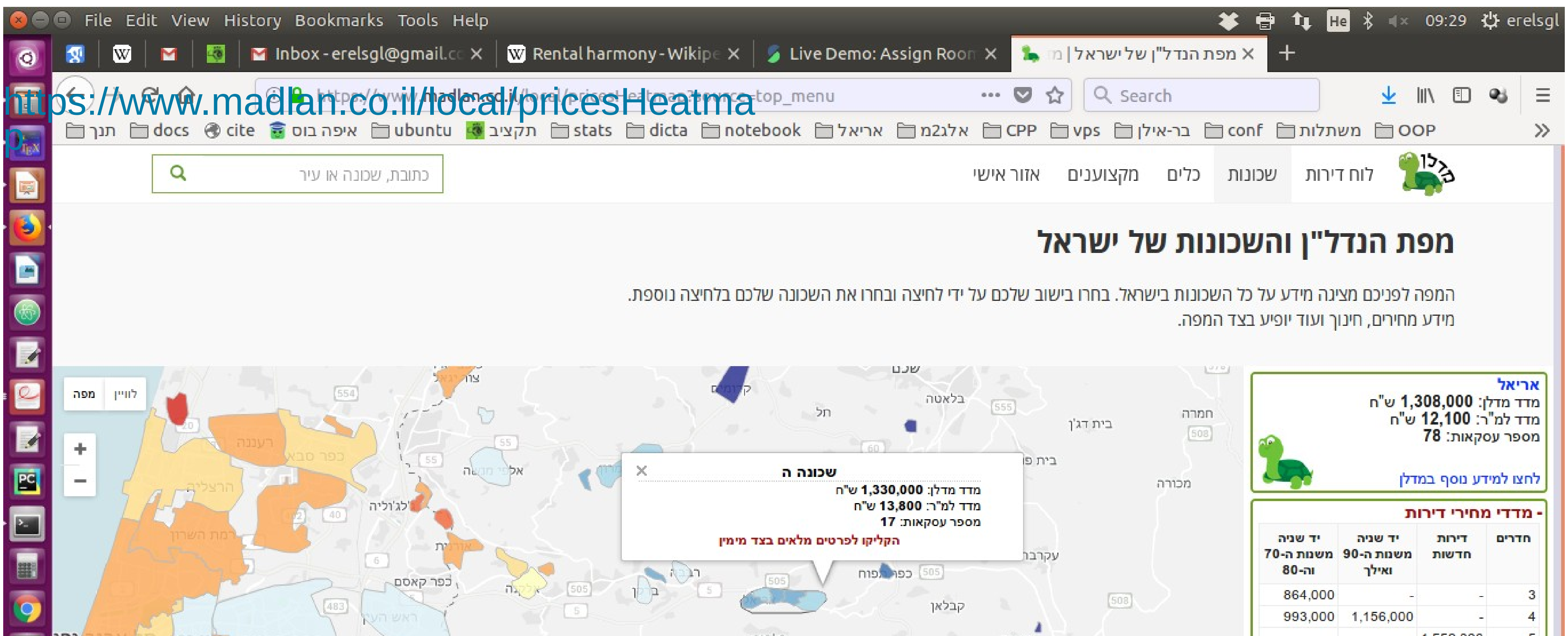
העוגה C היא **קטע** (חד ממדי) או **מצולע** (רב ממדי).

לכל משתתף i יש פונקצית **צפיפות ערך** על העוגה:

$$v_i: C \rightarrow R$$

ערך של חתיכת עוגה הוא אינטגרל על צפיפות הערך:

$$V_i(X) = \int_X v_i(x)\, dx$$



https://www.madlan.co.il/local/pricesHeatmap

חלוקת עוגה ל-n אנשים

סימונים:

C – העוגה כולה.

X_i – הפרוסה שקיבל משתתף i.

V_i – פונקציית הערך של משתתף i.

תכונות:

1. חלוקה **פרופורציונלית** (proportional):

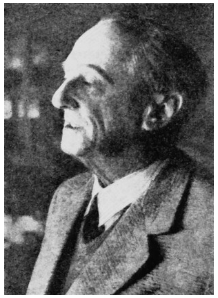
$$\text{For all } i: \quad V_i(X_i) \geq V_i(C) / n$$

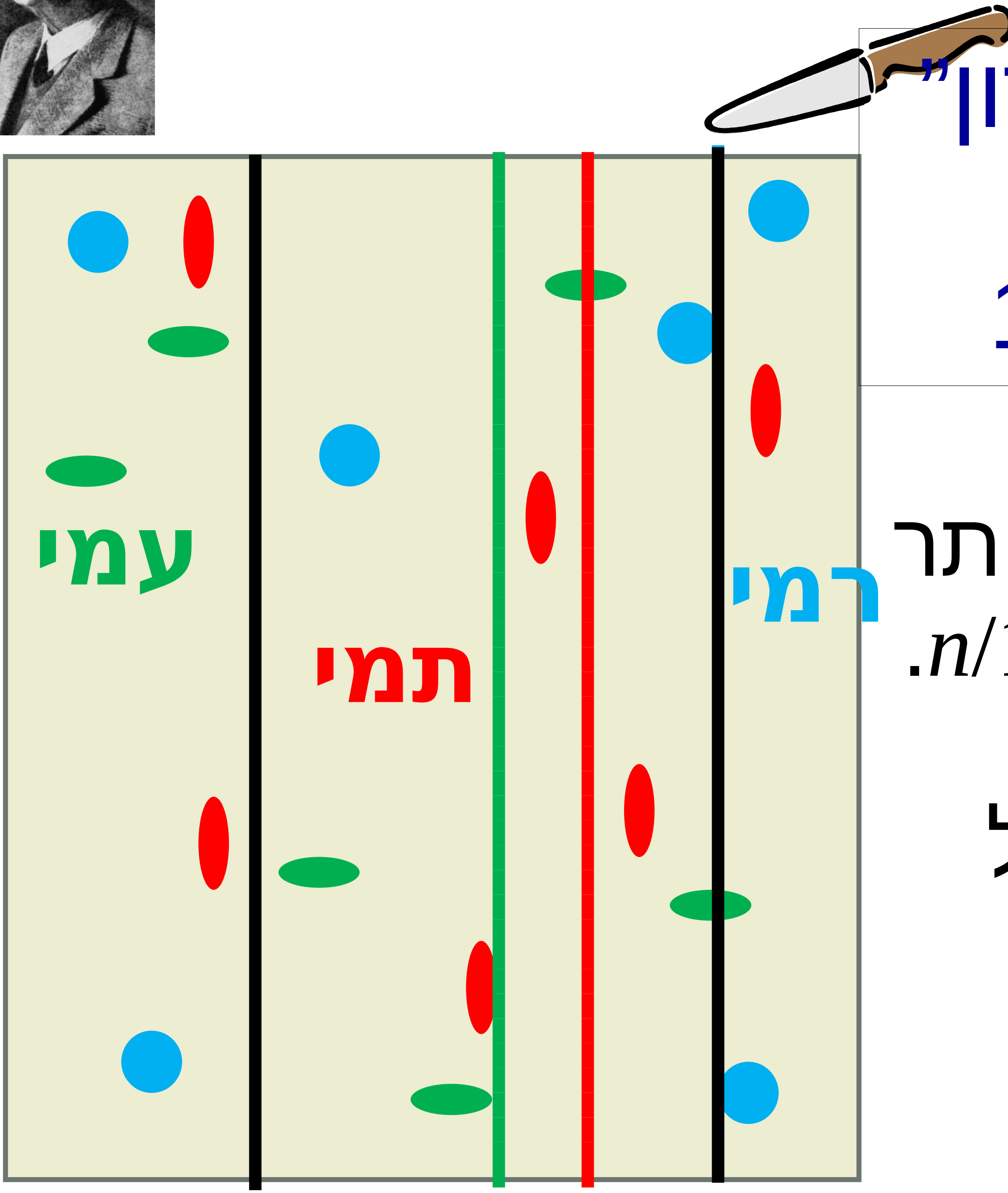
2. חלוקה **ללא קנאה** (envy-free):

$$\text{For all } i, j: \quad V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$$

חידה: מה יותר קשה?

חלוקה פרופורציונלית





אלג. "המפחית האחרון"
– Last Diminisher –
הוגו שטיינהאוס 1948

- עמי מסמן $1/n$ בעיניו.
- אם תמי חושבת שזה יותר מדי - היא מפחיתה ל-$1/n$. וכן רמי וכו'.
- האחרון שהפחית מקבל את החלק שסימן.
- ממשיכים ברקורסיה.

אלגוריתם המפחית האחרון

משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות $1/n$ מערך העוגה בעיניו.

הוכחה: נניח שערך העוגה כולה הוא n. נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס: שחקן אחד מקבל הכל.

צעד: נניח ל-n-1 שחקנים. עכשיו יש n. אחד מקבל חלק ששווה בעיניו 1. נשארים n-1 שחקנים. עבורם, החלק שנמסר שווה לכל היותר 1. לכן, החלק שנשאר שווה בעיניהם לפחות n-1. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. ***

אלגוריתם המפחית האחרון

משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" משתמש ב- $O(n^2)$ שאילתות.

הוכחה: בכל סיבוב שחקן אחד יוצא – n סיבובים.

בכל סיבוב צריך לשאול כל שחקן שאילתה אחת.

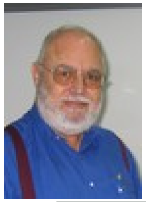
סה"כ $O(n^2)$ שאילתות. ***

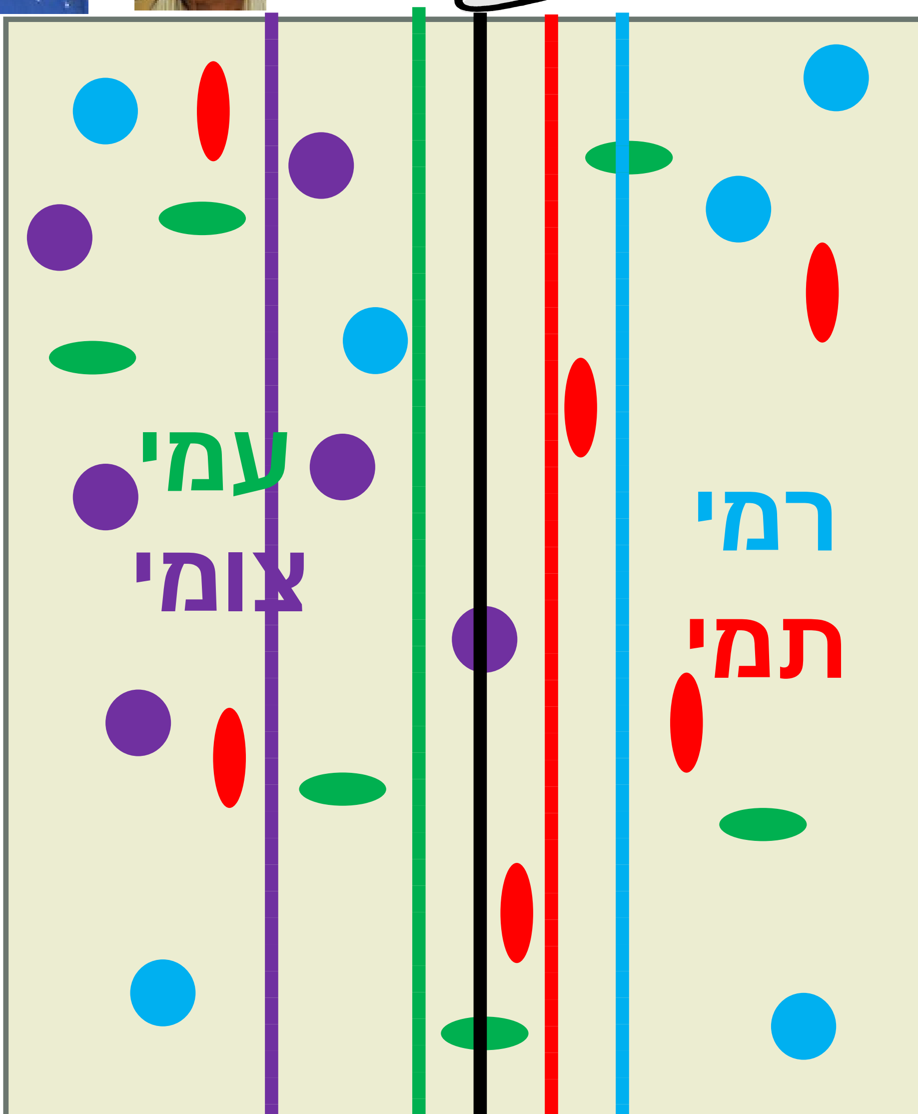
עבור כלכלנים – זה מספיק.

אבל מדעני-מחשב שואלים:

האם יש אלגוריתם מהיר יותר?

חלוקה פרופורציונלית מהירה





אלגוריתם אבן-פז –
- Even-Paz
שמעון אבן ועזריה פז, 84’

- כל שחקן מחלק לשני חלקים בשווי 1/2 בעיניו.
- חותכים את העוגה בחציון של הקוים.
- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.
- מחלקים כל חצי ברקורסיה.

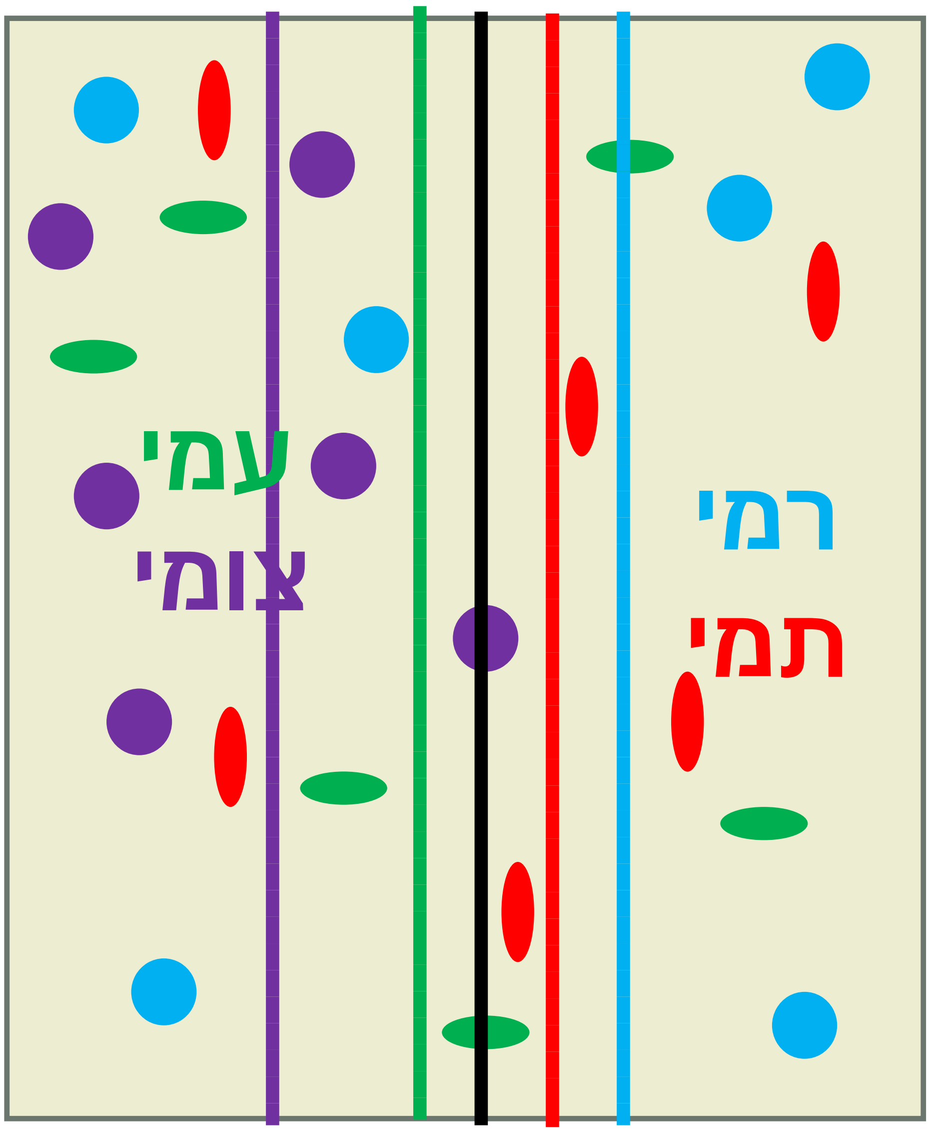
אלגוריתם אבן-פז

מה עושים כש-n איזוגי?

- כל שחקן מחלק לשני חלקים ביחס של:

(n-1)/2 : (n+1)/2

- חותכים את העוגה כך שבצד אחד יהיו (n-1)/2 קוים ובצד שני (n+1)/2 קוים.
- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.



אלגוריתם אבן-פז

משפט: אלגוריתם אבן-פז נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות 1 חלקי n מערך העוגה בעיניו.

הוכחה: נניח שערך העוגה כולה הוא n. נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1.

נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס: שחקן אחד מקבל הכל.

צעד: נניח שנכון לכל מספר שחקנים עד n-1. עכשיו יש n. כל מי שמשחק לפי הכללים, מגיע לחלק ששווה בעיניו לפחות k, ויש בו k שחקנים, כאשר k הוא $n/2$ או $(n+1)/2$ או $(n-1)/2$. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1.   ***

אלגוריתם אבן-פז

משפט: אלגוריתם אבן-פז משתמש ב- $O(n \log n)$ שאילתות.

הוכחה: נעגל את n למעלה לחזקה הקרובה של 2. הגדלנו אותו בפחות מ-2. עכשיו, בכל סיבוב, גודל הקבוצות קטֵן פי 2. לכן מספר הסיבובים הוא לכל היותר $\log_2(2\,n)$.

בכל סיבוב, שואלים כל שחקן שאילתה אחת.

לכן הסיבוכיות $O(n \log n)$.

חלוקה פרופורציונלית מהירה

נניח שמותר לשאול את השחקנים שאילתות משני סוגים:

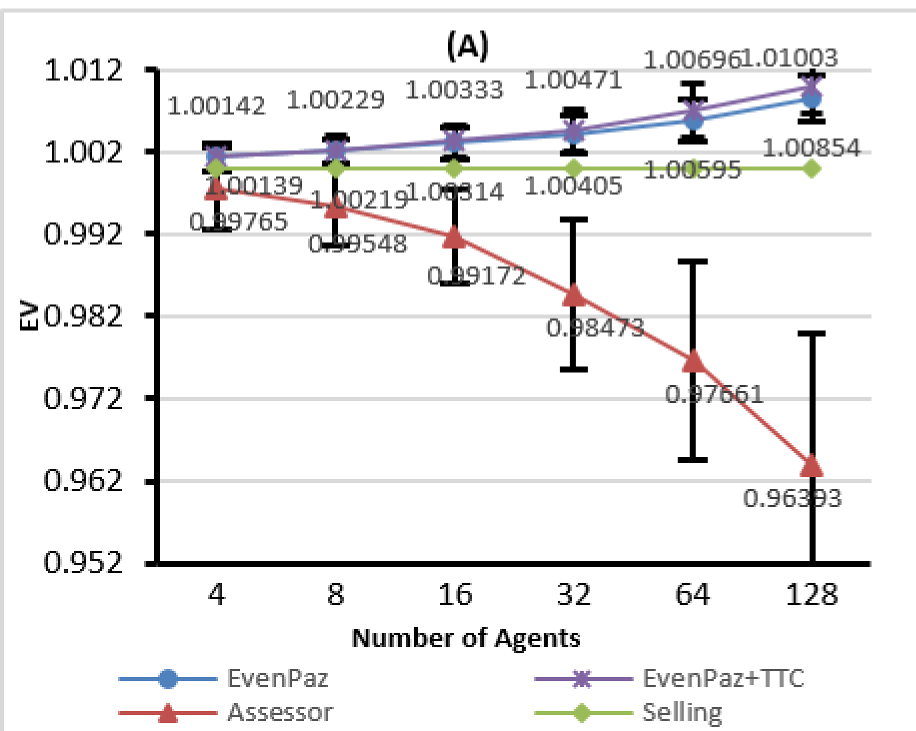
- **הערכה (Eval)** – חישוב ערך של פרוסה נתונה;
- **סימון (Mark)** – סימון פרוסה עם ערך נתון.

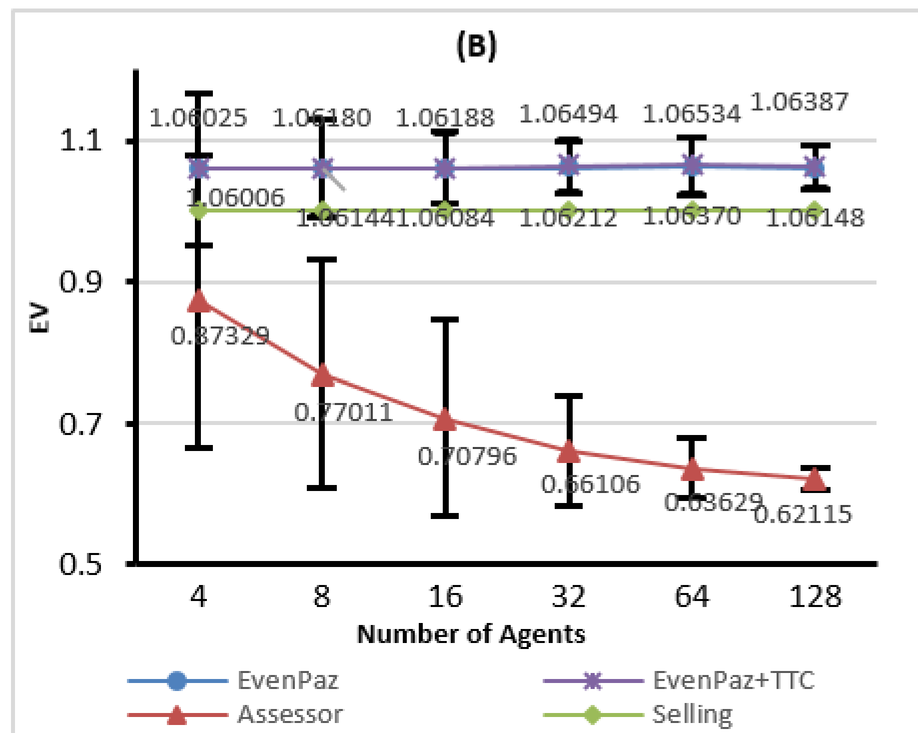
משפט: כל אלגוריתם לחלוקה פרופורציונלית צריך לפחות $n \log n$ שאילתות מסוג זה (Edmonds 2006, Woeginger 2007).

מסקנה: אלגוריתם אבן-פז – הכי מהיר שאפשר.

אלגוריתם אבן-פז על נתוני אמת

מחקר של איתי שטכמן (סטודנט לתואר שני) וד"ר ריקה גונן השווה את הביצועים של אלגוריתם אבן-פז לשיטות החלוקה המקובלות, שהן מכירה והערכת שמאי, על ערכי קרקע בישראל (מאתר מדל"ן) ובניו זילנד. נבדקו מדדים רבים, למשל, הערך הנמוך ביותר של משתתף. אבן-פז ניצח:

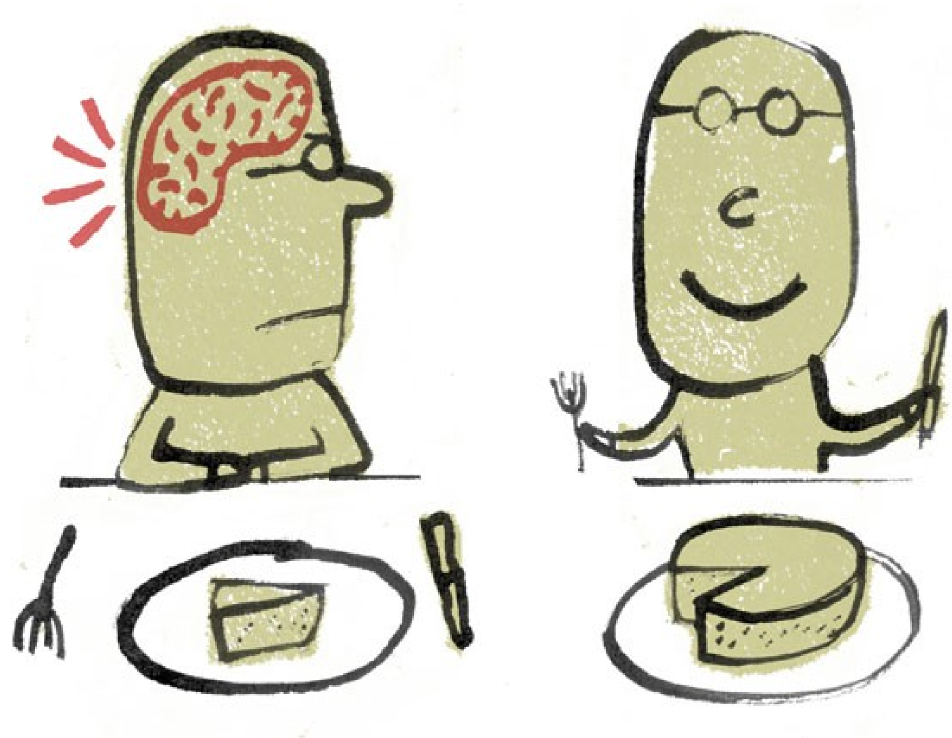




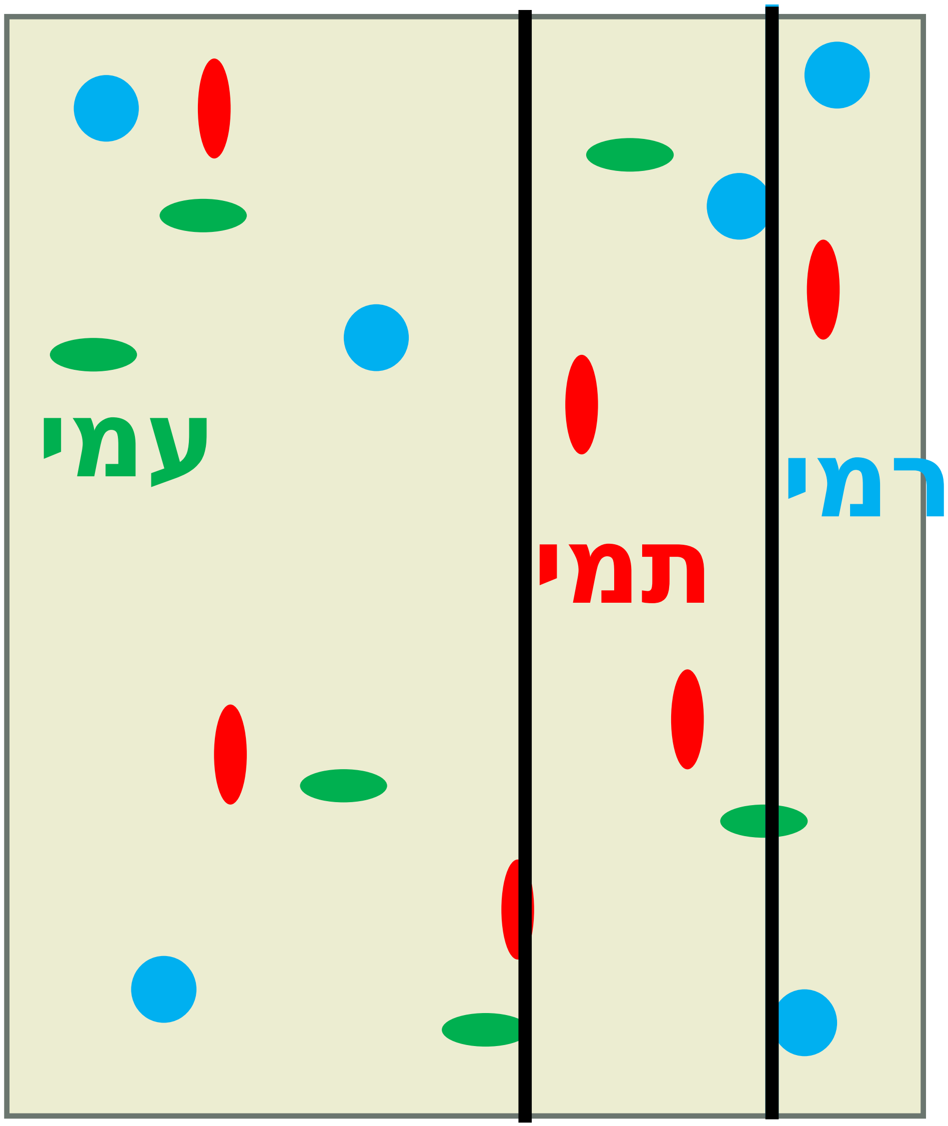
"ונחלתם אותה איש כאחיו" (יחזקאל מז 14)

חלוקה ללא קנאה
Envy-Free Division

אראל סגל-הלוי



קנאה



האלגוריתמים שראינו לא מבטיחים שהחלוקה תהיה ללא קנאה.

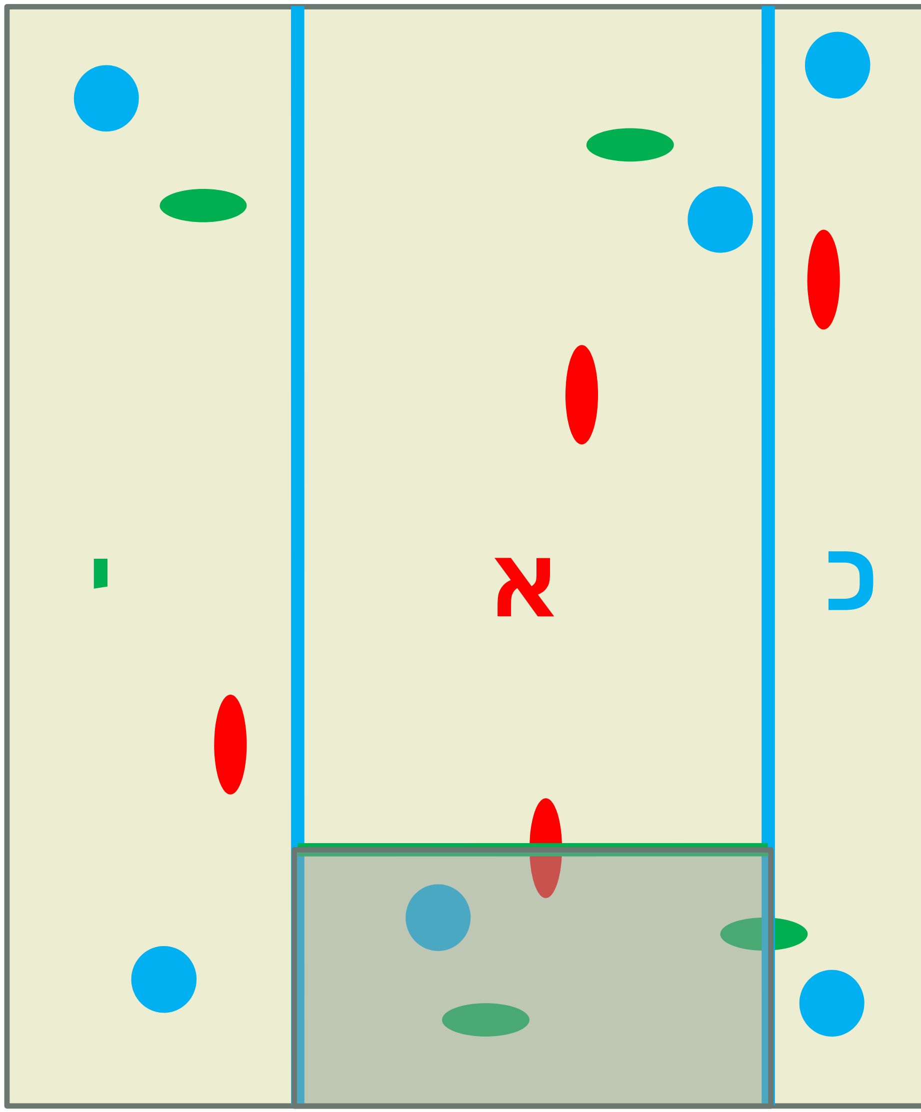
קנאה זה דבר מעצבן – ולא רק בני אדם -

https://www.youtube.com/results?search_query=monkey+envy+experiment

אז איך מוצאים חלוקה ללא קנאה?

חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים

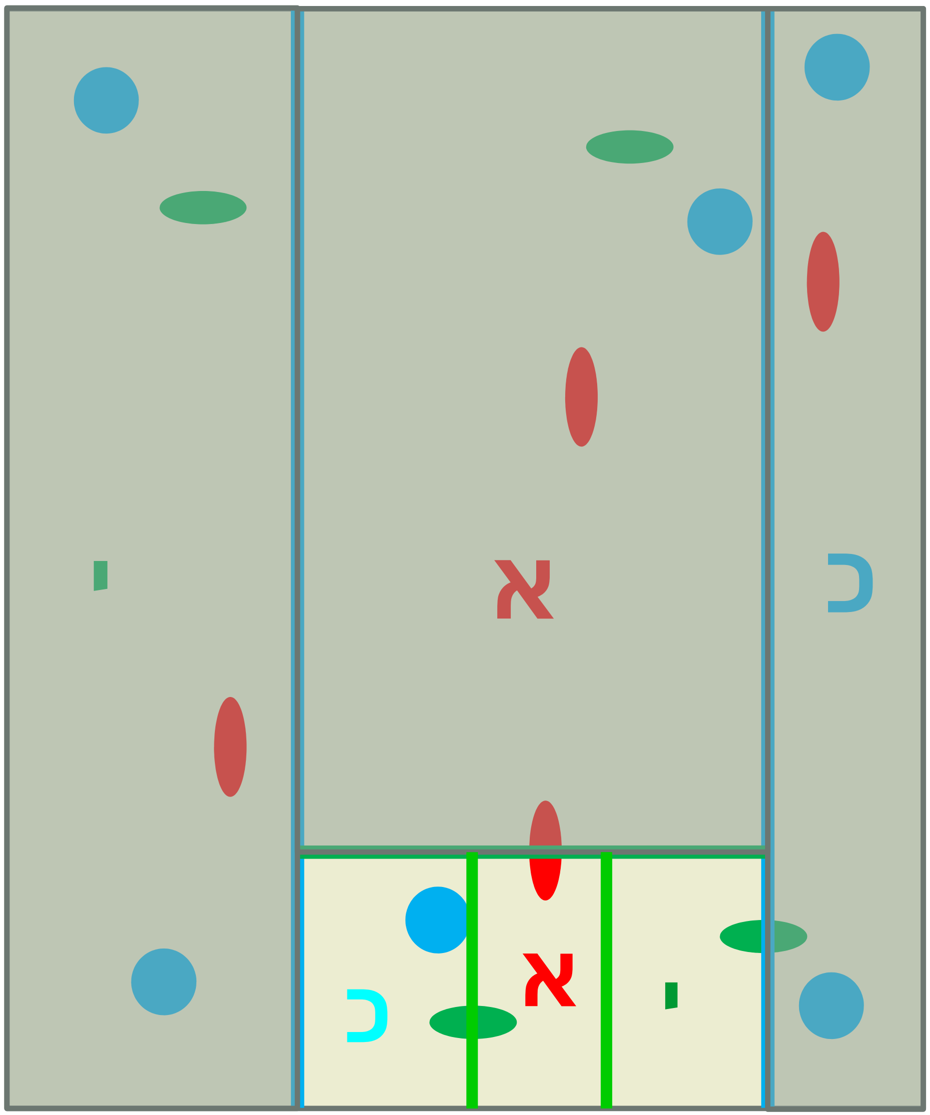
אלגוריתם Selfridge – Conway, 1963



- כ חותך 3 חתיכות שוות בעיניו.
- אם א, י מעדיפים חתיכות שונות – סיימנו. אחרת -
- י מקצץ את החתיכה הטובה ביותר ו**משווה** לשניה בעיניו.
- א, י, כ בוחרים חתיכה. י חייב לבחור את זו שקיצץ, אם לא נבחרה קודם.
- קיבלנו חלוקה ללא קנאה, אבל עם שארית.

חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים

אלגוריתם – Selfridge
חלק ב – Conway, 1963



- [א או י בחרו את החתיכה המקוצצת; במקרה זה א].
- י (שלא בחר את החתיכה המקוצצת) מחלק את השארית לשלוש חתיכות שוות בעיניו.
- א, כ, י בוחרים חתיכה.

סלפרידג'-קונוויי

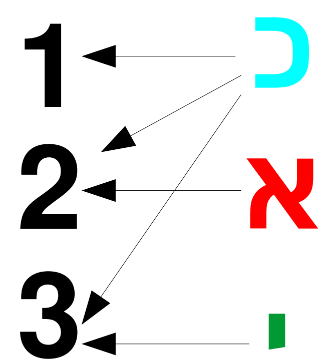
משפט: אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי נותן חלוקה ללא קנאה - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל חתיכה טובה לפחות כמו שתי האחרות.

הוכחה: נבנה גרף דו"צ שבו:

- הצמתים - שחקנים מצד אחד וחתיכות מצד שני.
- הקשתות - מכל שחקן לחתיכות הטובות בעיניו.

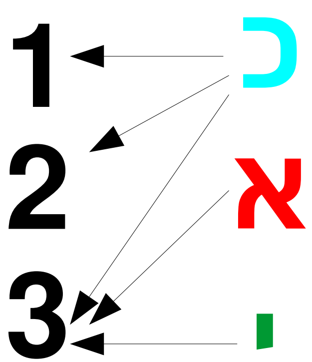
שידוך מושלם בגרף זה = חלוקה ללא קנאה!

אחרי החלוקה הראשונה של כ יש שני מקרים:



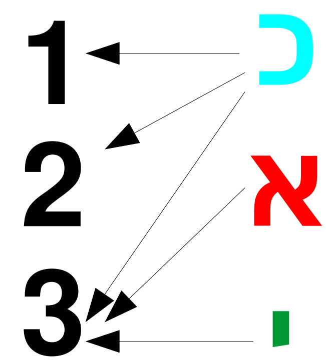
(המקרה הקל)

או

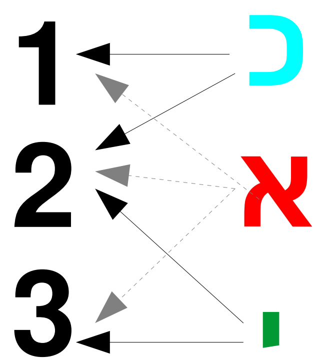


(המקרה הקשה)

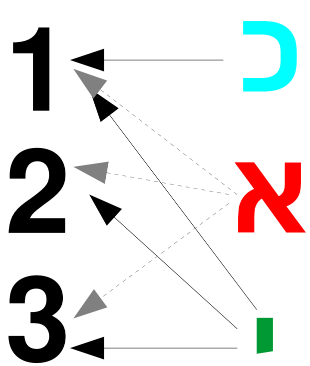
סלפרידג'-קונוויי – המשך הוכחה



אחרי הקיצוץ
של י הופך ל:



בוחרים לפי הסדר א, י, כ. לא משנה מה א בוחר - ל-י נשאר מה לבחור. הוא חייב לבחור את 3 אם היא קיימת, לכן גם ל-כ נשאר מה לבחור.



חלק ב: נניח ש-א לקח את החתיכה המקוצצת. אז י חותך; א, כ, י בוחרים. א בוחר ראשון; ל-י יש שלוש חתיכות לבחור; *ו-כ לא יקנא ב-א אפילו אם א ייקח את כל השארית!* ***

חלוקה ללא קנאה ל-n שותפים

1963: אלג' סלפרידג'-קונוויי ל-3 עם 5 שאילתות

1996: אלג' בראמס-טיילור. #שאילתות לא חסום.

1998: אלג' רוברטסון-ווֶב. #שאילתות לא חסום.

2000: אלג' פיקהורקו. #שאילתות לא חסום.

2009: משפט פרוקצ'יה: #שאילתות לפחות n^2.

2015: אלג' עזיז-מקנזי ל-4. #שאילתות חסום (200).

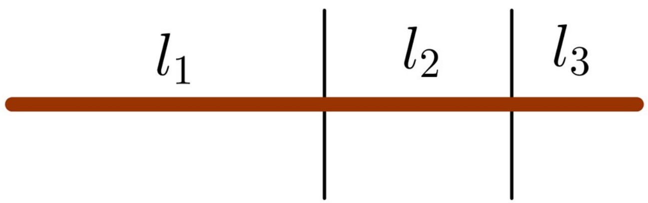
2016: אלג' עזיז-מקנזי ל-n. #שאילתות חסום:

$$O(n^{n^{n^{n^{n^{n}}}}})$$

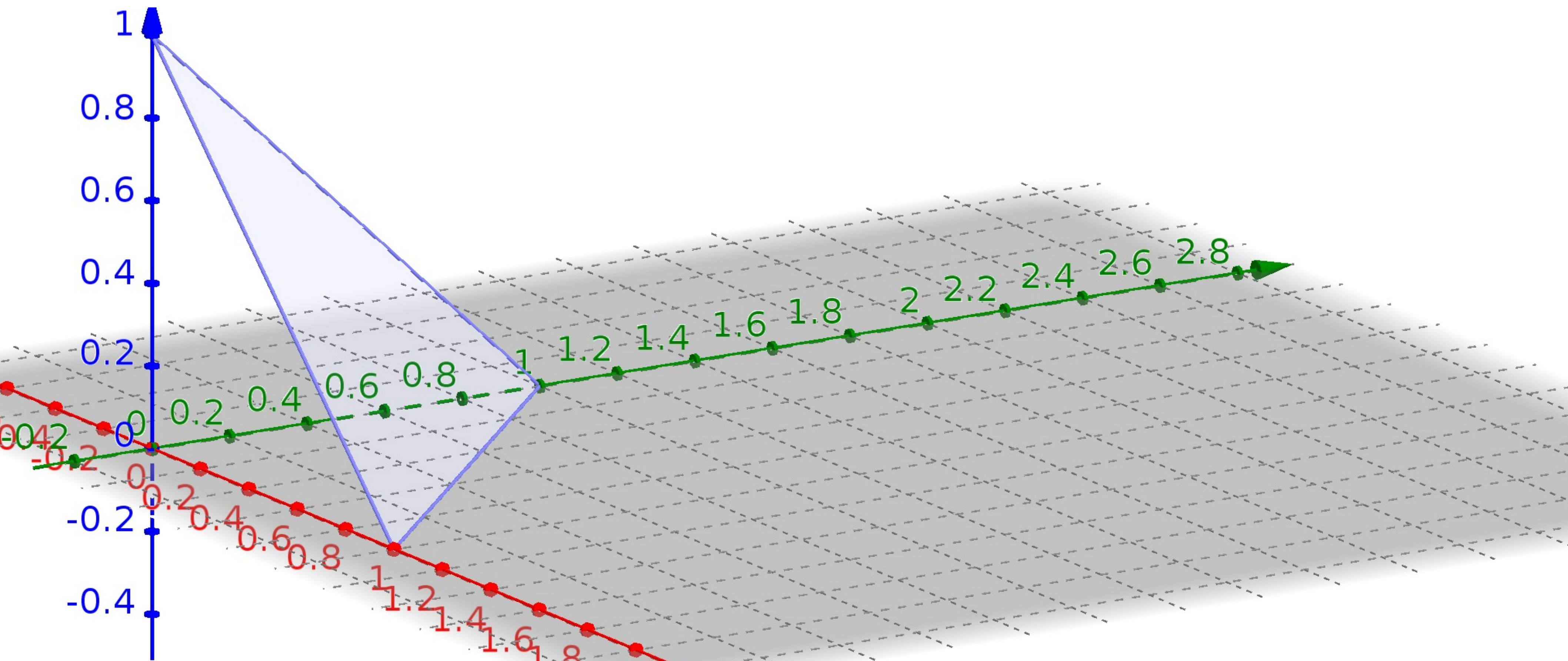
עדיין לא ידוע כמה שאילתות באמת צריך – האם אפשר למצוא אלגוריתם הדורש n^2 שאילתות?

חלוקה קשירה ללא קנאה ל-n

- נסתכל על כל החלוקות הקשירות ל-n חתיכות.
- כל חלוקה מוגדרת ע"י n מספרים חיוביים שסכומם 1

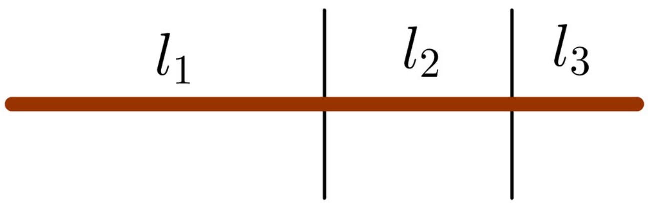


$$l_1 + l_2 + l_3 = 1$$



חלוקה קשירה ללא קנאה ל-n

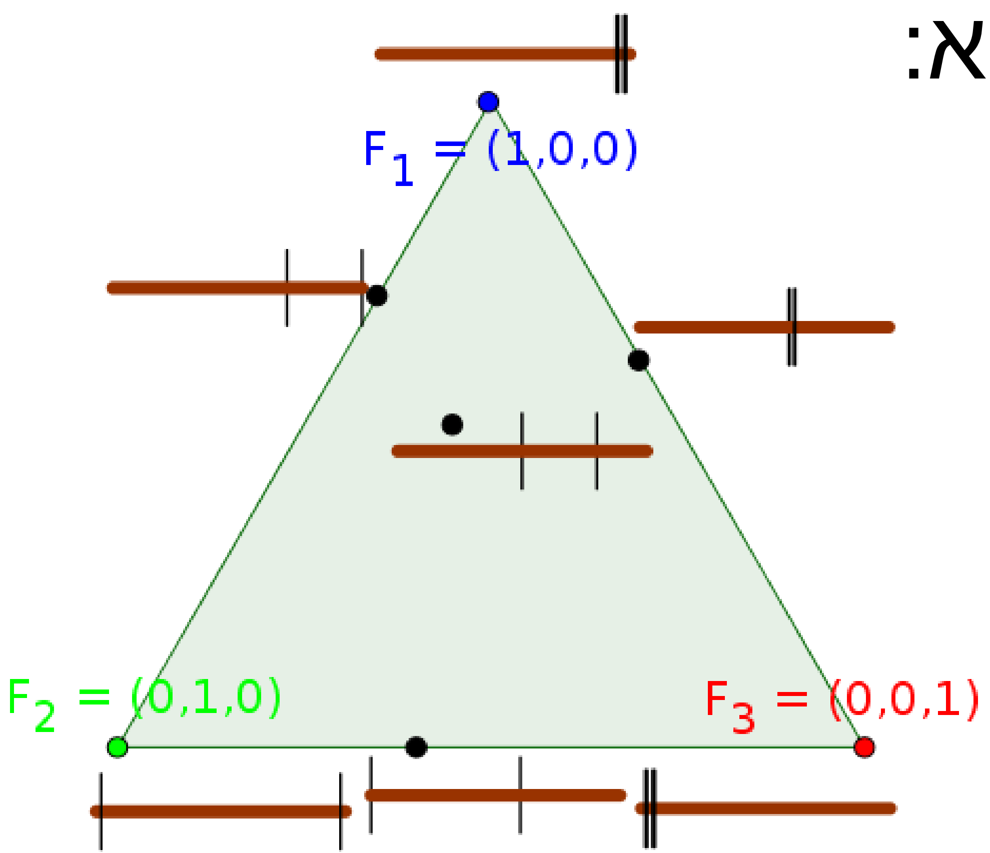
- נסתכל על כל החלוקות הקשירות ל-n חתיכות.
- כל חלוקה מוגדרת ע"י n מספרים חיוביים שסכומם 1



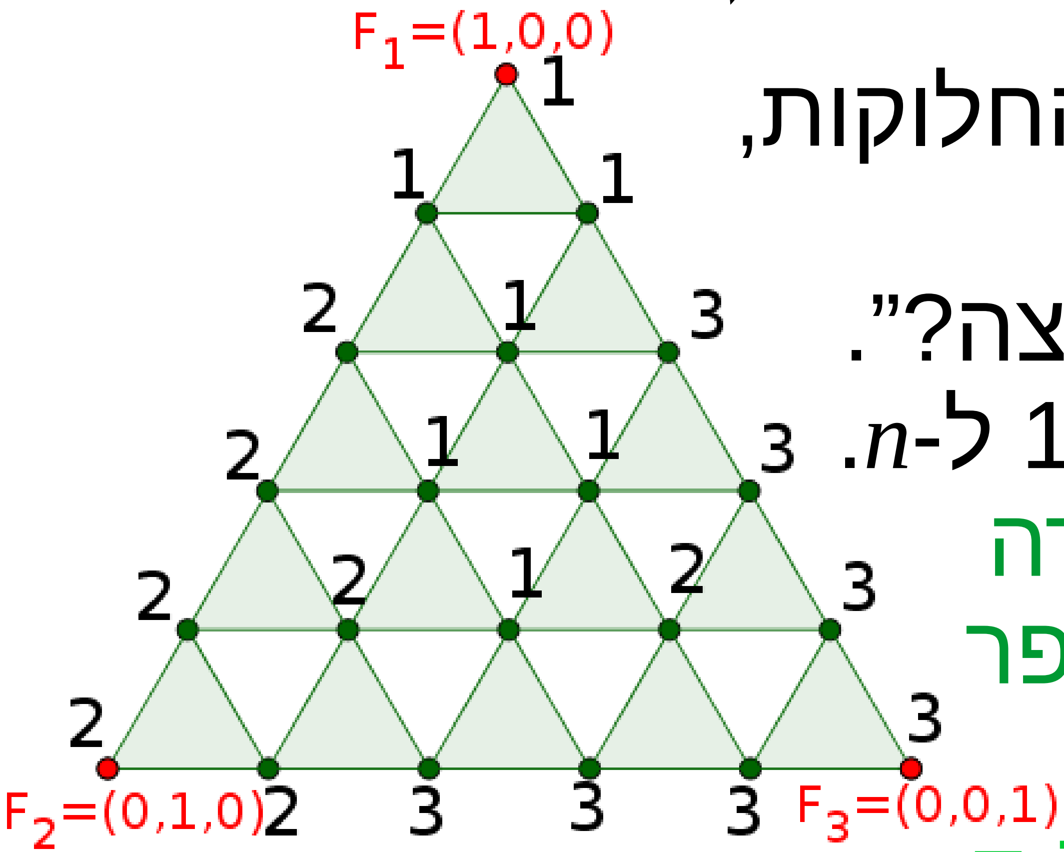
$$l_1 + l_2 + l_3 = 1$$

מרחב החלוקות הקשירות הוא:

- עבור n=2 – **קטע**.
- עבור n=3 – **משולש**.
- עבור n=4 – **טטראדר**.
- באופן כללי – **סימפלקס**.

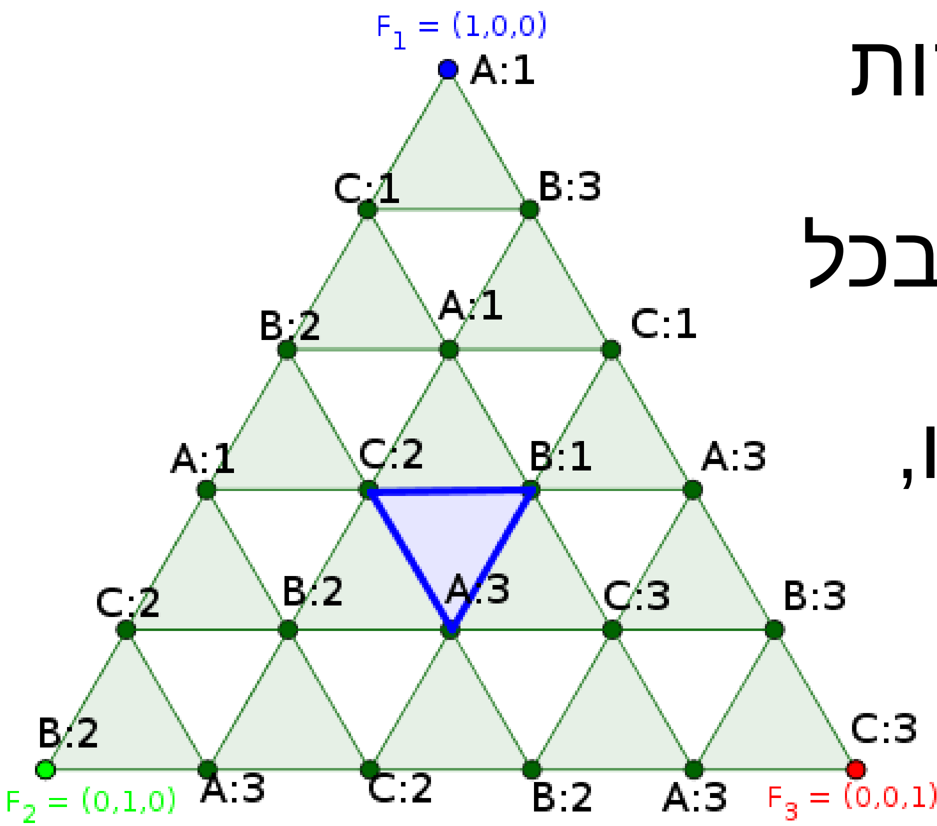


חלוקה קשירה ללא קנאה ל-n



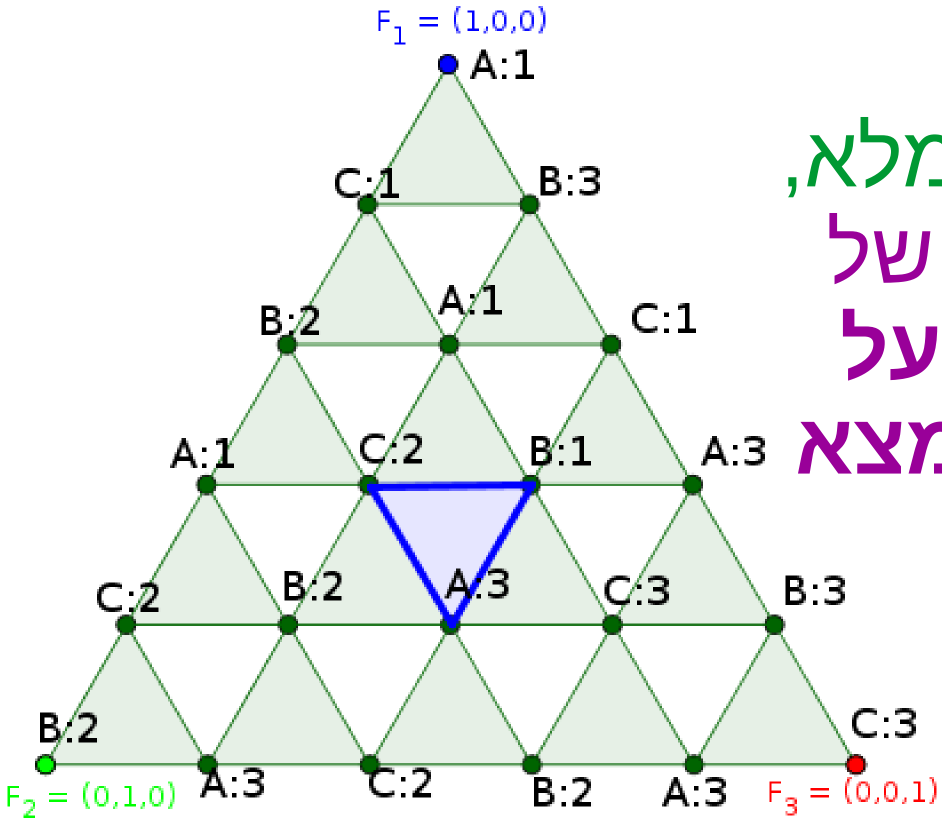
- בכל נקודה בסימפלקס החלוקות, אפשר לשאול כל שחקן "איזו חתיכה אתה הכי רוצה?". התשובה היא מספר בין 1 ל-n.
- חלוקה ללא קנאה = נקודה שבה כל שחקן כותב מספר אחר.
- חלוקה כמעט-ללא-קנאה = סימפלקסון שבו אפשר לחלק קודקוד לכל שחקן, כך שכל שחקן כתב על הקודקוד שלו מספר אחר.

אלגוריתם סימונס-סו (Su 1999)



- מחלקים את סימפלקס-החלוקות לסימפלקסונים.
- נותנים כל צומת לשחקן, כך שבכל סימפלקסון, כולם מיוצגים.
- כל שחקן כותב, בכל צומת שלו, את מספר החתיכה הכי טובה בעיניו.
- מחפשים **סימפלקס-n מלא** = עם n מספרים שונים = חלוקה כמעט-ללא-קנאה.
- נוכיח באינדוקציה על n שקיים מספר איזוגי של סימפלקס-n-מלא.

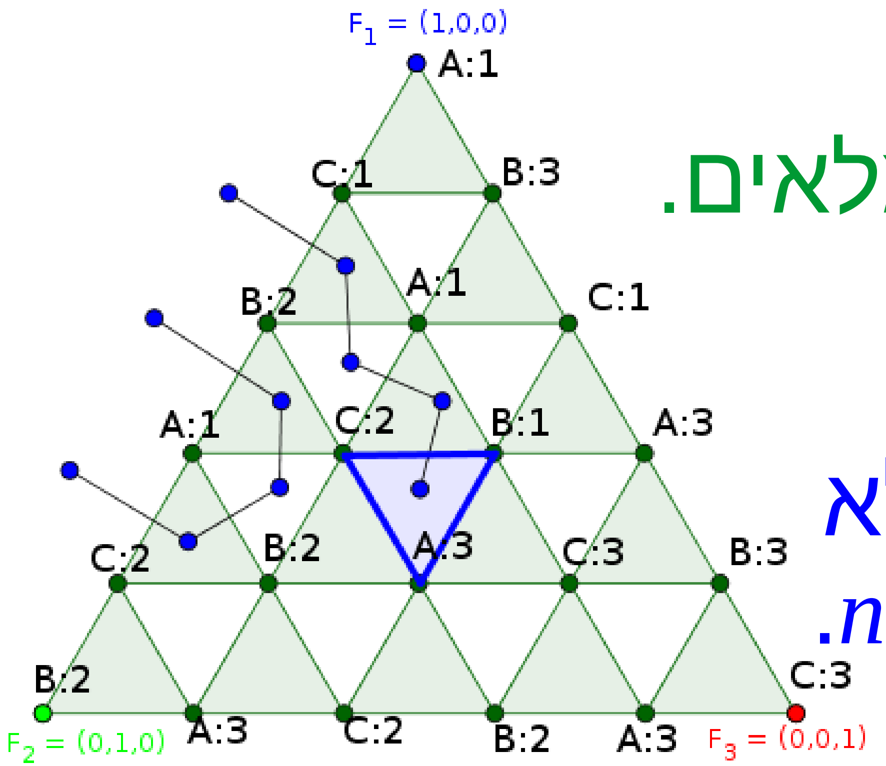
הלמה של ספרנר (Sperner's Lemma)



- נוכיח באינדוקציה על n שקיים מספר איזוגי של סימפלקס-n-מלא, בכל מצב שבו מתקיים התנאי של ספרנר (Sperner): **כל מספר על צומת בשפה הוא מספר שנמצא על קצות השפה**.
- התנאי הזה תמיד מתקיים אצלנו, כי כל שחקן מעדיף פרוסה לא ריקה!

בסיס: $n=2$. נסתכל על הצלע בין F_1 ל-F_2. המספרים מתחילים ב-1 ומסתיימים ב-2, ולכן מספר המעברים הוא איזוגי.

הלמה של ספרנר (Sperner's Lemma)



נוכיח באינדוקציה על n שקיים
מספר איזוגי של סימפלקס-n-מלאים.

בסיס: $n=2$. מספר המעברים
בין 1 ל-2 הוא איזוגי.

צעד: נבחר סימפלקס-$(n-1)$-מלא
וניכנס דרכו. הגענו לסימפלקס-n.
יש רק שתי אפשרויות:

- הגענו לסימפלקס-n-מלא.
- יש עוד סימפלקס-$(n-1)$-מלא. נצא דרכו ונמשיך לטייל.

בסוף, או שנגיע לסימפלקס-n-מלא, או שנצא החוצה
דרך סימפלקס-$(n-1)$-מלא אחר.

לכן, יש גם מספר איזוגי של סימפלקס-n-מלאים. ***

חלוקה קשירה ללא קנאה

1980: משפט סטרומקוויסט: תמיד קיימת חלוקה.

1980-1998: אלגוריתמי סכינים, לשלושה אנשים.

1999: אלגוריתם סימונס, #שאילתות אינסופי.

2008: משפט סטרומקוויסט: #שאילתות תמיד אינסופי!

“קָשָׁה כִּשְׁאוֹל קִנְאָה”

שחקנים	חלוקה פרופורציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה ללא קנאה
2	2 שאילתות		
3	$\Theta(n \log n)$	5	אינסוף!
4		200	
n		$\Omega(n^2)$ $O(n^{nnnnn})$	