<u>פתרון מטלה 1 | אלגוריתמים כלכליים | נתנאל אלברט</u>

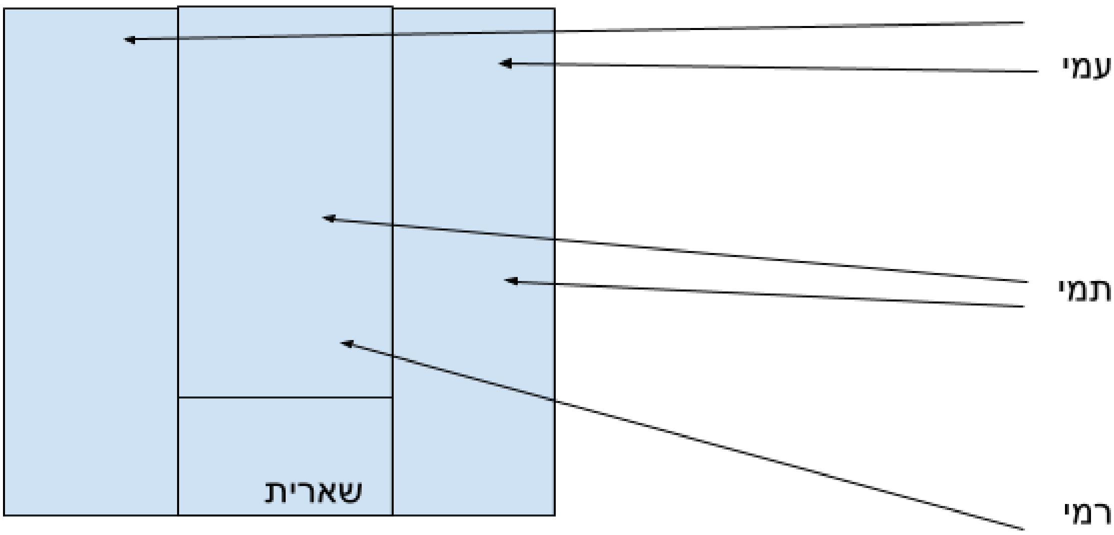
.6
א.

לעמי יש 2 חלקים ששווים עבורו לפחות שליש ולכן לפחות רבע.
לתמי יש 2 חלקים הכי טובים - כלומר כל אחד לפחות רבע (אחרת הסכום של כולם לא מגיע לאחד)
לרמי יש לפחות חלק אחד ששווה לפחות רבע (כנ"ל)

לכן אם נסתכל על כל תתי הקבוצות של השמות נראה שמספר השכנים שלהם (חלקים הכי שווים) הוא לפחות כגודל הקבוצה, ולכן תנאי הול מתקיים עבור השמות.

עמי ותמי - 3 שכנים
עמי ורמי - לפחות 2 שכנים
תמי ורמי - לפחות 2 שכנים
עמי תמי ורמי - לפחות 3 שכנים

אילוסטרציה:



נסתכל על שידוך אפשרי:
נבחר עבור רמי את החלק עם הערך הגבוה ביותר בעיניו.
עבור תמי נבחר את אחד משני החלקים הכי טובים עבורה. אם רמי לא קיבל את המקוצץ היא תיקח אותו.
עבור עמי נבחר את אחד החלקים הלא מקוצצים שנשארו.

בשידוך זה כל אחד קיבל את החלק המקסימלי בעיניו (מבין ה4) ולכן כל שידוך מקסימלי הוא כזה, כלומר אין שידוך מקסימלי שבו אחד המשתתפים קיבל חלק שאינו מקסימלי בעיניו.

לכן, השידוך המקסימלי שיבחר בסעיף 3 של האלגוריתם הוא חסר קינאה, וכל משתתף מקבל לפחות ¼ בעיניו כמו שהסברנו בהתחלה.

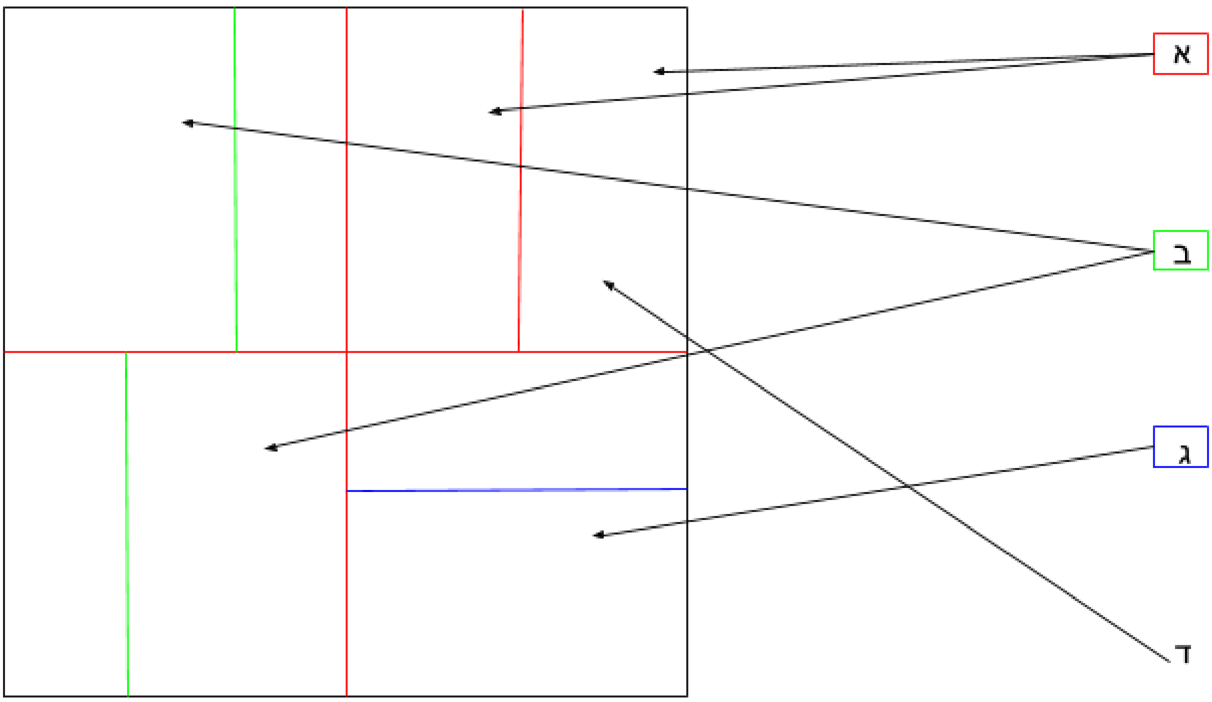
ב.

אלגוריתם לחלוקת עוגה בין 4 אנשים:

1. א מחלק ל-5 חלקים שווים בעיניו
2. ב מקצץ 2 חלקים כך ש בעיניו יש 3 חלקים הכי טובים
3. ג מקצץ חלק אחד כך שבעיניו יש 2 חלקים הכי טובים
4. מוצאים שידוך מקסימלי בין המשתתפים לבין 8 הפרוסות
5. מחלקים לכל משתתף את הפרוסה שאליה הוא משודך

(שידוך אפשרי כדי להוכיח נכונות:
ד בוחר את החלק הטוב ביותר בעיניו
ג בוחר את אחד הטובים ביותר בעיניו (אם זה שהוא קיצץ לא נבחר הוא לוקח אותו)
ב בוחר כנ"ל
א בוחר את אחד החלקים המקוריים (בטוח נשאר כזה, כי היו 5, ב+ג חילקו לכל היותר 3 מהם, ורק ד יכול לבחור מה-2 הנותרים))

אילוסטרציה:



שאלה 5 בשביל הספורט (לא לבדיקה אבל אשמח לפידבק אם מתאפשר):

א.

יהיה X חלון הזמן שבין פתיחת השמורה לסגירתה, ויהי X_i חלון הזמן שמוקצה למשתתף i.

נגיד שחלוקה היא פרופורציונאלית, אם:

$$\forall i : V_i(X_i) \geq V_i(X) \cdot \frac{k}{n}$$

ב.

אלגוריתם חלוקה (Last diminsher):

אחד המשתתפים בוחר חלון זמן.

אם קיים משתתף שחושב שחלון זה אינו פרופורציונאלי (גדול מדי), הוא מקטין אותו, וכך ממשיכים עד שכולם מסכימים שזה פרופורציונאלי.

המשתתף האחרון שהקטין מקבל את החלק שבחר.

נמשיך ככה באופן רקורסיבי, כאשר משתתף לא יכול לבחור חלון זמן אם בחלק ממנו כבר יש k משתתפים.

הוכחת נכונות עבור k כלשהו, באינדוקציה על n:

בסיס: אם $n \leq k$ אז כולם מקבלים את כל היום.

צעד: על פי האלגוריתם, האחרון שיפחית (נניח i) יקבל את חלקו, כך ש $V_i(X_i) \geq V_i(X) \cdot \frac{k}{n}$

ולכל משתתף אחר, j, מתקיים $V_j(X_i) \leq V_j(X) \cdot \frac{k}{n}$

(מכאן אמור להסתדר על פי הנחת האינדוקציה אבל לא הצלחתי)