

"וְנָחֲלֵתֶם אוֹתָהּ אִישׁ כְּאָחִיו" (יחזקאל מז 14)

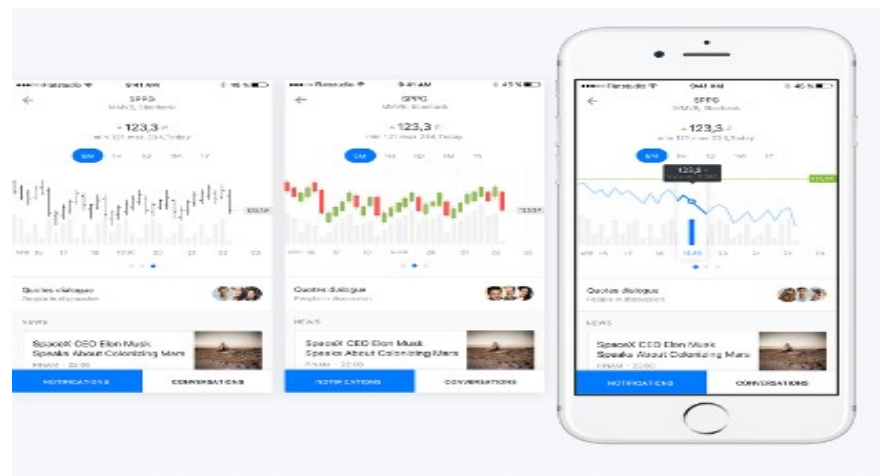
חלוקה יעילה של

משאבים

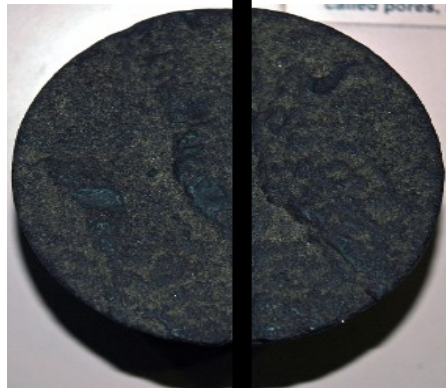
**Efficient Resource
Division**

אראל סגל-הלוי

חלוקת משאבים הומוגניים



חלוקה הוגנת - קל



...אבל לא יעיל

מהי יעילות כלכלית?

נסביר ע"י דוגמה. שלושה אחים רוצים ללכת יחד למסעדה ומתלבטים באיזו מסעדה לבחור. כל אח מדרג את המסעדות מהכי גרועה בעיניו (1) להכי טובה בעיניו (5):

מסעדה:	א	ב	ג	ד	ה
עמי:	1	2	3	4	5
תמי:	3	1	2	5	4
רמי:	3	5	5	1	1

איזו בחירה – מבין החמש – היא לא יעילה?
--- ב! כי בעיני כולם, היא פחות טובה מ-ג.

יעילות כלכלית

הגדרות:

- מצב א נקרא **שיפור פארטו** (Pareto improvement) של מצב ב, אם הוא טוב יותר לחלק מהמשתתפים, וטוב לפחות באותה מידה לכולם.
- בעברית: "זה נהנה וזה לא חסר".
- מצב נקרא **יעיל פארטו** (Pareto efficient) אם לא קיים מצב אחר שהוא שיפור-פארטו שלו.
- **יעילות פארטו – תנאי הכרחי לבחירה שהיא "נכונה" מנקודת-מבט כלכלית.**

חלוקה יעילה פארטו - קל

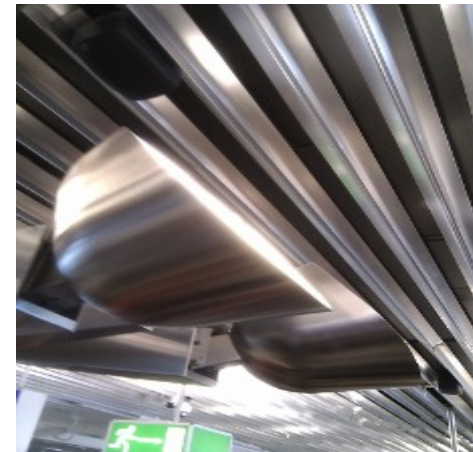


...אבל לא הוגן



האתגר

האם תמיד קיימת חלוקה
שהיא גם הוגנת וגם יעילה?



האם "חתוך ובחרי" יעיל פארטו?

הנחות:

- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור (אבל שונה לכל שחקן).
- לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבים:

עצים	נפט	פלדה	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

האם "חתוך ובחרי" יעיל פארטו?

הנחות:

- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור (אבל שונה לכל שחקן).
- לדוגמה: ה"איזורים" מייצגים משאבים:

תמי		עמי	
פלדה	נפט	עצים	
עמי:	0	19	50, 31
תמי:	20	0	49.5, 30.5

התוצאה לא יעילה: התועלות הן (50, 50.5)
אבל אפשר לשפר ל(60, 59.5).

מיקסום סכום הערכים

הגדרה: חלוקה ממקסמת סכום ערכים:

$$\max_X \sum_{j=1}^n V_j(X_j)$$

אלגוריתם: תן כל אזור לשחקן עם הערך הכי גבוה:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

רואים שהאלגוריתם לא הוגן. האם הוא יעיל?

מיקסום סכום הערכים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום הערכים היא יעילה פארטו.

- הוכחה:** נתונה חלוקה א הממקסמת סכום ערכים.
- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.
 - אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה.
 - בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.
 - לכן בחלוקה ב סכום הערכים גבוה יותר – בסתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את סכום הערכים.

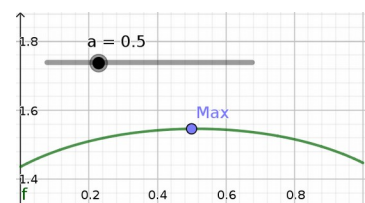
מיקסום סכום השורשים

ניסיון שני: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של שורשי הערכים (אפשר לבצע בקלות בפייתון):

$$\max \sum_{j=1}^n \sqrt{V_j(X_j)}$$

דוגמה: שחקן א מקבל x אחוזים מהאזור השמאלי:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:



המקסימום ב: $x \sim 0.5$
במקרה הזה הוגן!

$$\max \quad \sqrt{81x + 19} + \sqrt{80(1 - x) + 20}$$

s.t. $0 \leq x \leq 1$

מיקסום סכום פונקציה עולה

משפט: כל חלוקה הממקסמת סכום של פונקציה עולה כלשהי של הערכים, היא יעילה פארטו.

הוכחה: נתונה חלוקה א הממקסמת סכום זה.

- נניח בשלילה שהחלוקה לא יעילה פארטו.

- אז קיימת חלוקה ב שהיא שיפור-פארטו שלה.

- בחלוקה ב, לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו

- בחלוקה א, ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר.

- כיוון שהפונקציה עולה, בחלוקה ב הסכום גבוה יותר

– סתירה לכך שחלוקה א ממקסמת את הסכום.

מיקסום סכום פונקציה עולה

הכללה: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של פונקציה עולה של הערכים:

$$\max \sum_{j=1}^n f(V_j(X_j))$$

נסמן: x = האחוז שעמי מקבל מהאזור השמאלי:

מעבד	זיכרון	דיסק	
81	19	0	עמי:
80	0	20	תמי:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(81x + 19) + f(80(1-x) + 20) \\ \text{subject to} & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

איזו פונקציה לבחור?

מתברר שאם הפונקציה f היא לוגריתמית:

$$f(V) = \log(V)$$

אז החלוקה לא רק יעילה אלא גם ללא קנאה!

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: נסתכל בפרוסת עוגה אינפניטיסימלית, Z , התרומה שלה ל- $f(V_j(X_j))$ היא: (חשבון אינפי 1)

$$f(V_j(X_j) + V_j(Z)) - f(V_j(X_j)) \sim f'(V_j(X_j)) * V_j(Z)$$

לכן, אלגוריתם האופטימיזציה ייתן כל פרוסה Z לשחקן j שהמכפלה הזאת עבירו גדולה ביותר:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(Z)$$

נסכם את המשוואה על כל הפרוסות שניתנו ל- j :

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה [המשך]:

לכל חלוקה הממקסמת את הסכום של $f(V)$:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

כאשר f היא פונקציה לוגריתמית, מקבלים:

$$(1 / V_j(X_j)) * V_j(X_j) \geq (1 / V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

מעבירים אגף ומקבלים, לכל שני שחקנים j, i :

$$V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$$

*** וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה ללא קנאה!

יעילות – מיקסום סכום קמור

משפט: לכל פונקציה קעורה יש נקודת מקסימום אחת ויחידה בכל תחום קמור.

מסקנה: מקסימום מקומי של הפונקציה הוא גם מקסימום גלובלי.

מסקנה מעשית: קיימים אלגוריתמים מהירים למציאת נקודת מקסימום (דוגמה: טיפוס על גבעה).
ראו בקורס חקר ביצועים.

קיימים גם מימושים מהירים ונוחים, למשל `python cvxpy`.
ראו בתיקיית `code`.

יעילות, הגינות וקשירות

ראינו שתמיד אפשר למצוא חלוקה שהיא:

- יעילה וללא-קנאה
- קשירה וללא-קנאה,
- יעילה וקשירה.

האם תמיד קיימת חלוקה ללא-קנאה, יעילה וקשירה?

-- לא! הנה דוגמה:

עמי	2	0	3	0	2	0	0
תמי	0	0	0	0	0	7	0
צומי	0	2	0	2	0	0	3

חלוקה ללא קנאה - טרילמה

פרוסות קשירות	ללא קנאה	יעיל פארטו	
כן	כן	לא	אלגוריתם סוֹ והמשולשים
לא	כן	כן	מיקסום סכום לוגים
כן	לא	כן	דיקטטורה

הגינות לעומת יעילות במבחנים

נתונים:

- בתקופת המבחנים, בכל יום ובכל כיתה יש שלושה מבחנים. המבחנים מתחילים בשעות 9, 13, 17. לכן הזמן המירבי האפשרי לכל מבחן הוא 4 שעות.
- סטודנטים הזכאים להארכת-זמן מקבלים 25% יותר זמן מכל שאר הסטודנטים.

שאלה: כמה זמן צריך לתת למבחן?

- 4 שעות לכולם – יעיל פארטו אבל לא הוגן.
- 3 שעות לכולם, 3.75 לזכאים – הוגן אבל לא יעיל.

האם יש פתרון שהוא הוגן וגם יעיל פארטו?