

"ונחלתם אותה איש כאחיו" (יחזקאל מ"א 14)

# חלוקה הוגנת של קרקע

## Fair Division of Land

### אראל סגל-הלוי



# הגינות בחלוקת קרקע בכותרות

**סגנית השר חוטובלי: ברוואבי אין עלויות קרקע אז המחירים זולים**

בתגובה לדברי ראש הממשלה בשיבת הסיעה על הבנייה בנגב, אמרה סגנית שר התחבורה, ציפי חוטובלי, "ברוואבי אפשר לקנות דירת חמישה חדרים ב-140,000 דולר, בגלל שאין עלויות קרקע. הבשורה צריכה להיות לחלק קרקעות חנם ליוצאי צבא בנגב ובגליל כדי להזיל משמעותית את מחירי הדיור".

**רכשתם קרקע להשקעה? כך תאבדו את כל ה**

ערעור שהוגש לביהמ"ש המחוזי ביום חמישי צריך להדליק נורת אזהרה לרוכשי קרקע חקלאית: במקרה של הפקעה או שינוי ייעוד לפארק או לגן לאומי - ולא למגורים או לתעסוקה כמו שחלמו - הם לא יקבלו פיצוי אפילו לפי שווי השוק של הקרקע



מדוע צה"ל הוא שיחליט מה יעשו בקרקע המתפנה במרכז הארץ



**היישובים מטופחים על חשבון עיירות הפיתוח: "חלוקה עושקת"**

בארץ | עודכן 21:42 17/12/2013  
ישראל רוזנר

בפתח של קרית מלאכי קיים אזור תעשייה שמניב כ-37 מיליון שקלים, אבל את הכסף מקבלות דווקא המועצות שמסביב. מסביב לירוחם קיים מחנה צבאי, אבל היא לא זוכה להגות מהארנון. האם המדינה מעדיפה לטפח יישובים חזקים על חשבון עיירות הפיתוח? "החלוקה האלה אינן טבעיות"

**מעוז: "צעירים יהודים צריכים לתפוס קרקעות בכוח"**

צפו בכלכלן שלמה מעוז בראיון לגלובס TV בוועידת ישראל לעסקים: "אם לא נראה פתרון תוך 3-4 חודשים, הצעירים יצטרכו לצאת ולכבוש שטחים. החלופה היא לעזוב את הארץ, והמפעל הציוני יתמוטט. צאו ותתפסו קרקע בכוח"



# היעד:

# פיתוח תהליכים מעשיים

# לחלוקה הוגנת של קרקע

בג"ץ: לפנות מיד מבנים שהוקמו על קרקע פרטית

בג"ץ הורה למדינה לפנות את כל המבנים שהוקמו על קרקע פלסטינית פרטית במאחזים בבנימין ובשומרון. "ההסדרה מתנהלים בעצליים".

## סגנית השר חוטובלי: ברוואבי אין עלויות קרקע אז

## המחירים זולים

בתגובה לדברי ראש הממשלה בישיבת הסיעה על הבנייה בנגב, אמרה סגנית שר התחבורה, ציפי חוטובלי, "ברחובאי אפשר לקנות דירת חמישה חדרים ב-140,000 דולר, בגלל שאין עולזות קרקע. הבשורה הזו היא צריכה לחלק קרקעות חינוס ליוצאי צבא בנגב ובגליל כדי להעלות משמעותית את מחירי הדירה".

נדל"ן צבאי

מדוע צה"ל הוא שיחליט מה יעשו בקרקע המתפנה

במרכז הארץ

**רכשתם קרקע להשקעה? כך תאבדו את כל הכסף ברגע**

ערעור שהוגש לביהמ"ש המחוזי ביום חמישי צריך להדליק נורת אזהרה לרוכשי קרקע חקלאית: במקרה של הפקעה או שינוי ייעוד לפארק או לגן לאומי - ולא למגורים או לתעסוקה כמו שחלמו - הם לא יקבלו פיצוי אפילו

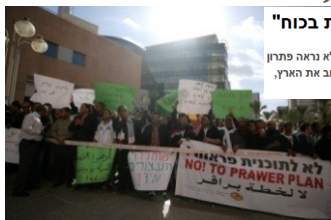
לפי שווי השוק של הקרקע

מעוז: "צעירים יהודים צריכים לתפוס קרקעות בכוח"

צפו בכלכלן שלמה מעוז בראיון לגלובס TV בוועידת ישראל לעסקים: "אם לא נראה פתרון תוך 3-4 חודשים, הצעירים יטלטלו לצאת ולכבוש שטחים. החלופה היא לעזוב את הארץ, והמפעל הציני יתמוטט. צאו ותתפסו קרקע בכוח"

הכלכלן שלמה מעוז קורא היום (א') לצעירים יהודים הסובלים ממצוקת הדיור "לכבוש" קרקעות בסגנון "חומה ומגדל".

אם לא נראה נתחן תוך 3-4 חודשים, הצערים יצטרפו לצאת ולכבוש שטחים כמו בברלין", אמר מעוז. "כמו שהבדאים עושים את זה בדרום, כמו שהחרדים עושים בבני ברק - לתפוס שטחים ולקבוע עובדות. יצטרפו לעשות 'חומה ומגדל' עוד פעם להקים ולהקים. ממשלת ישראל מפסידת בקרקע וגובה עשורת מיליארד שקלים על הקרקע, החלפלה היא לעזוב את הארץ, והמפעל הציוני יתמוסס. הציוד יתמוסס ויחנק בוכ"א."

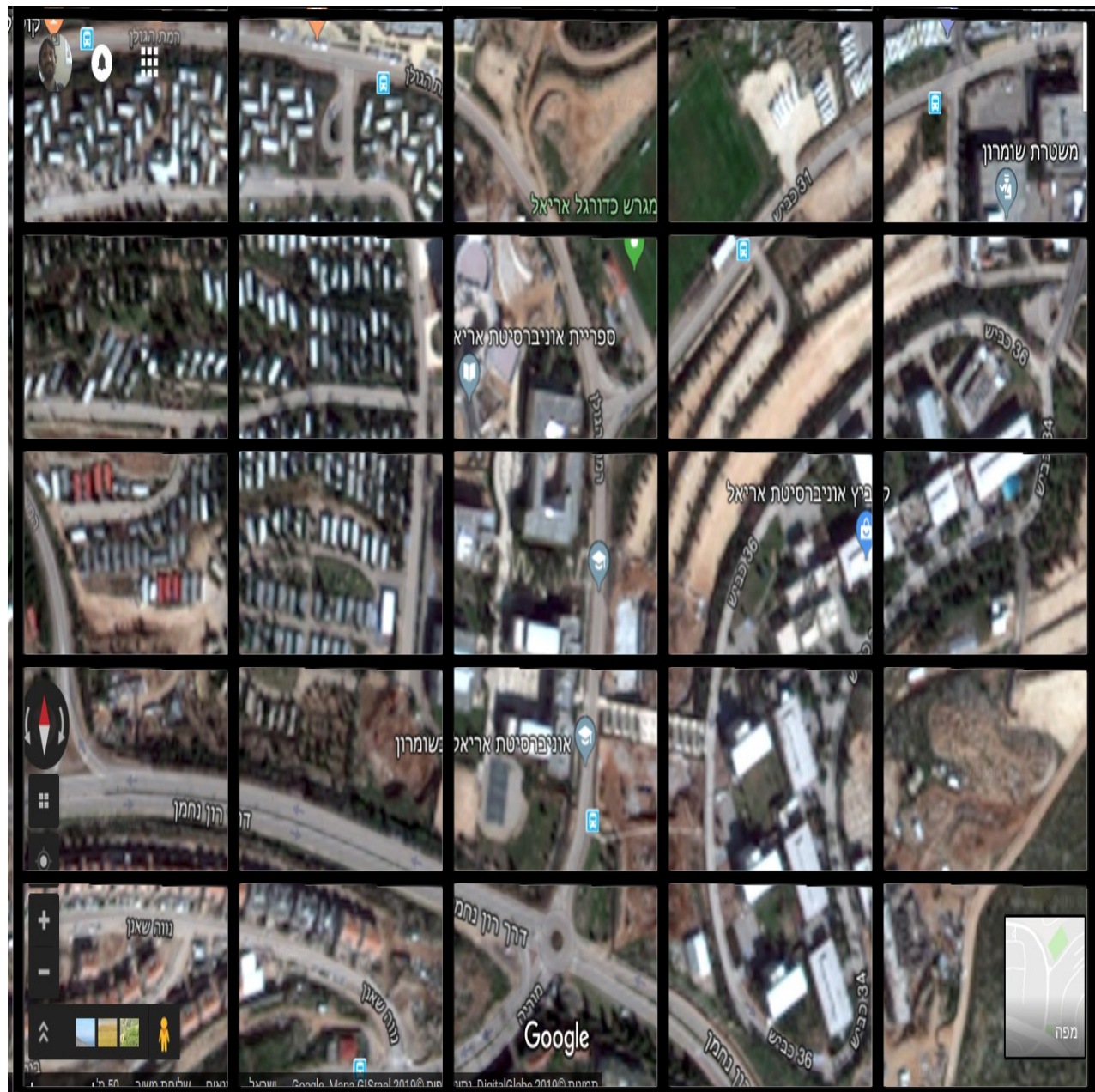




איך נוודא  
שכל  
סטודנט  
יקבל חלק  
הוגן?



# א. חלוקה שוות-שטח

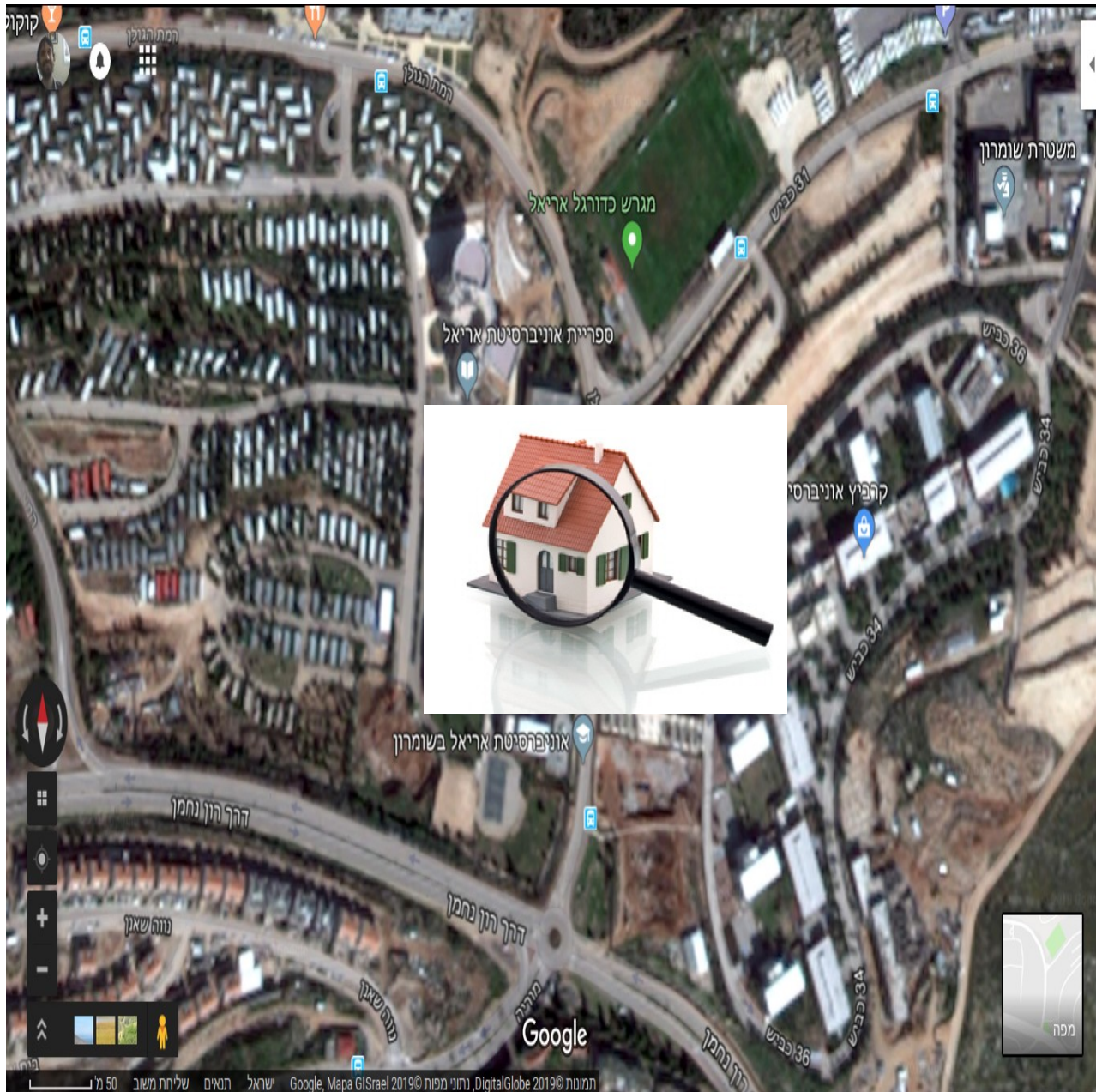


בעיה: הקרקע  
לא הומוגנית  
– לחלקים  
שונים יש ערך  
שונה.

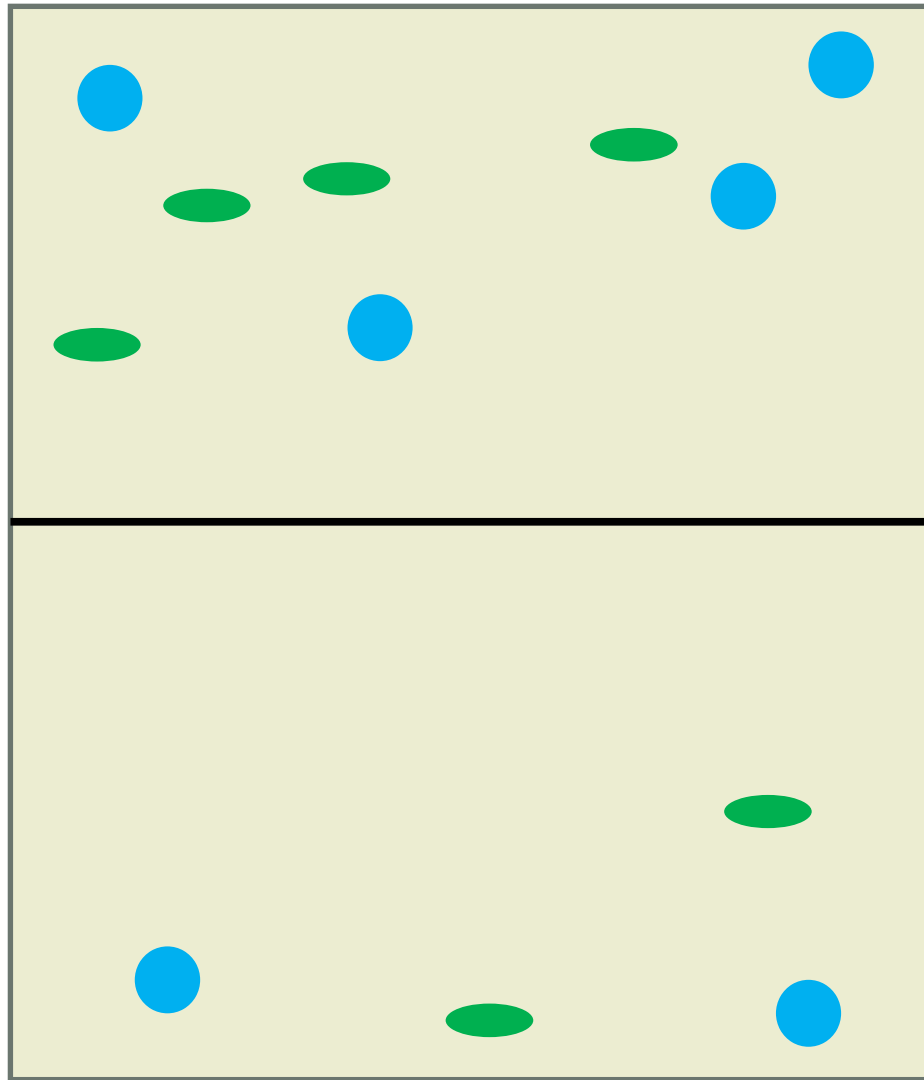


## ב. חלוקה שוות-ערך

בעיה:  
ההערכות  
סוביקטיביות  
-  
לכל אחד יש  
העדפות  
שונות.



# חלוקת עוגה בין שני ילדים

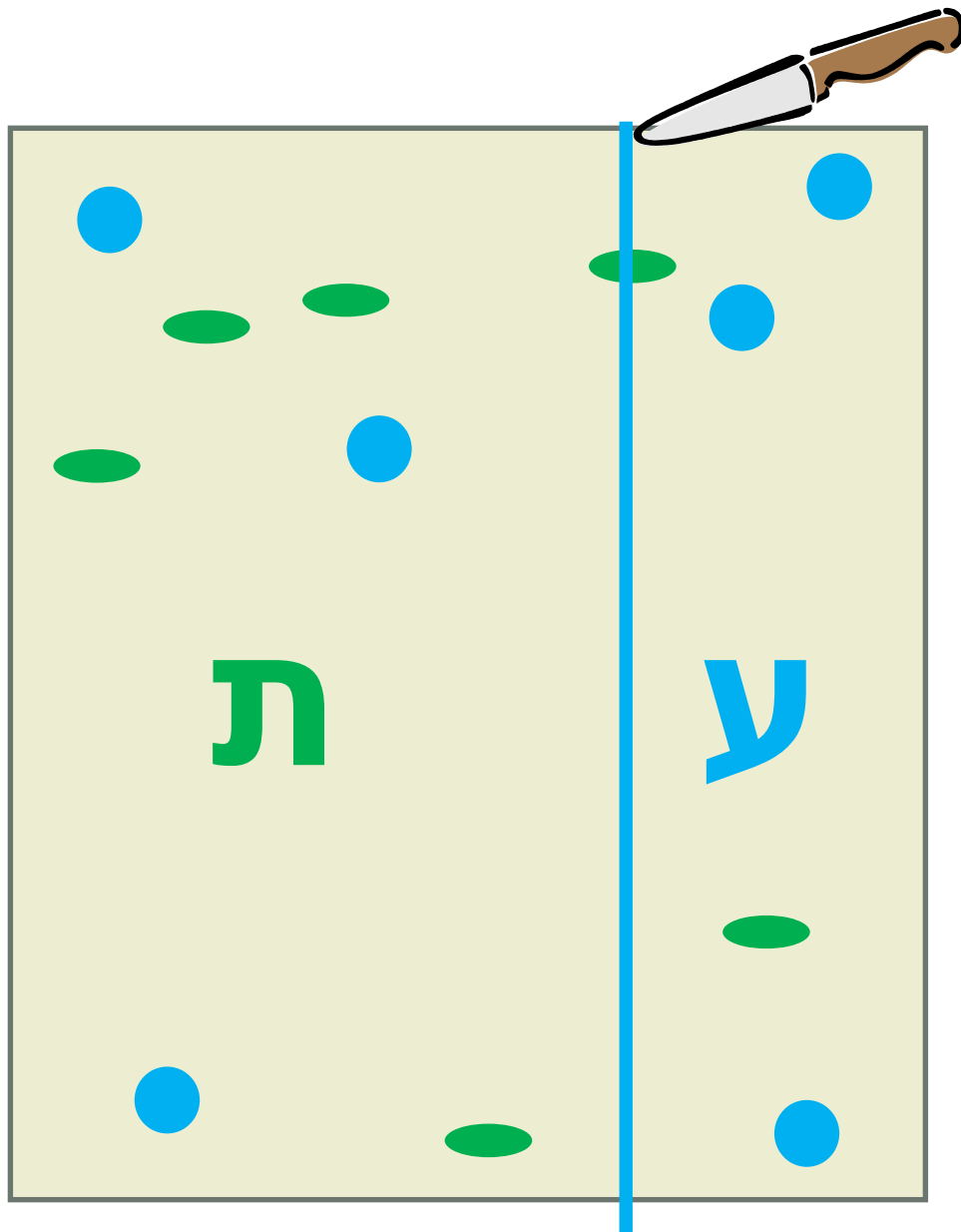


צריך לחלק עוגת  
יום-הולדת בין שני  
ילדים: עמי ותמי.

כל ילד מעדיף סוכריות  
בצבע אחר.

אם אנחנו נחלק את  
העוגה בצורה שנראית  
לנו הוגנת – לא בטוח  
שזה יהיה הוגן בעיניהם!

# חלוקת עוגה בין שני ילדים



הפתרון: לתת להם  
לחלק בעצמם!

- **עמי** מחלק את העוגה לשני חלקים שווים בעיניו (בשווי  $1/2$ ).
- **תמי** בוחרת את החלק הטוב בעיניה.
- **עמי** מקבל את השאר.



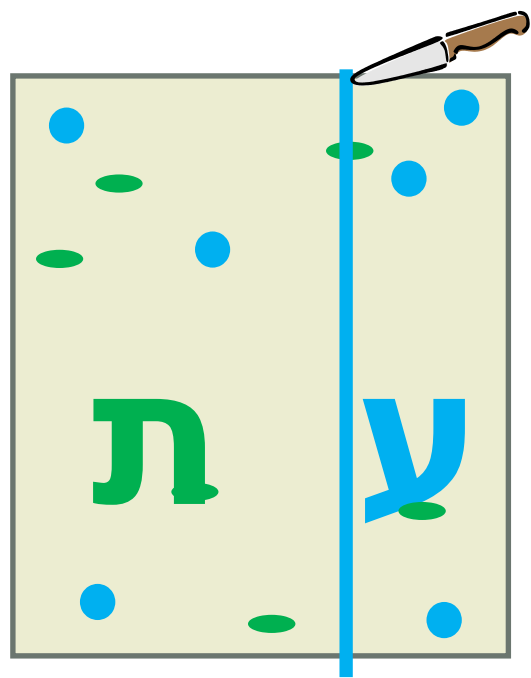
# חלוקת קרקע בין שני אנשים

בראשית יג-8: וַיֹּאמֶר אַבְרָם אֶל לוֹט: אֵל נָא תְהִי  
מְרִיבָה בֵּינִי וּבֵינֶיךָ וּבֵין רְעִי וּבֵין רְעִיךָ כִּי אֲנָשִׁים  
אֲחִים אֲנַחְנוּ. הֲלֹא כָל הָאָרֶץ לְפָנֶיךָ, הִפְרֵד נָא  
מֵעָלַי! אִם הַשְּׂמָאל וְאִימָנָה, וְאִם הַיָּמִין וְאֲשַׁמְאִילָה.

אברם



לוט



# אלגוריתם "חתוך ובחר"

**תכונות:**

(1) כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות  $1/2$  – חלוקה פרופורציונלית (proportional).

(2) כל משתתף חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו כל האחרים – חלוקה ללא קנאה (envy-free).

**שאלה: האם אפשר להשיג את אותן תכונות כשיש יותר משני אנשים?**

# חלוקת עוגה – מודל כללי

העוגה  $C$  היא קטע (חד ממדי) או מצולע (רב ממדי).  
לכל משתתף  $i$  יש פונקצית צפיפות ערך על העוגה:

$$v_i: C \rightarrow R$$

ערך של חתיכת עוגה הוא אינטגרל על צפיפות הערך:

$$V_i(X) = \int_X v_i(x) dx$$

The screenshot shows a web browser window with the URL [https://www.madlan.co.il/local/pricesHeatmap\\_top\\_menu](https://www.madlan.co.il/local/pricesHeatmap_top_menu). The page is titled "מפת הנדל"ן והשכונות של ישראל" (Map of Real Estate and Neighborhoods of Israel). It features a map of Israel with various neighborhoods highlighted in different colors. A popup window is open over a location in Ramat Hasharon, displaying the following information:

**שכונה ה**  
מדד מדלן: 1,330,000 ש"ח  
מדד למ"ר: 13,800 ש"ח  
מספר עסקאות: 17  
הקליקו לפרטים מלאים בצד מימין

On the right side of the page, there is a box titled "אריאל" (Ariel) with the following data:

מדד מדלן: 1,308,000 ש"ח  
מדד למ"ר: 12,100 ש"ח  
מספר עסקאות: 78  
לחצו למידע נוסף במדלן

Below this, there is a table titled "מדדי מחירי דירות" (Price Index of Apartments) with the following columns: חדרים (Rooms), דירות חדשות (New Apartments), יד שניה 90-ה (Second Hand 90s), יד שניה 70-ה (Second Hand 70s), and מספר עסקאות (Number of Transactions).

חדרים	דירות חדשות	יד שניה 90-ה	יד שניה 70-ה	מספר עסקאות
3	-	864,000	80-ה	-
4	-	993,000	1,156,000	-
5	-	-	-	-



# חלוקת עוגה ל- $n$ אנשים

סימונים:

$C$  – העוגה כולה.

$X_i$  – הפרוסה שקיבל משתתף  $i$ .

$V_i$  – פונקציית הערך של משתתף  $i$ .

תכונות:

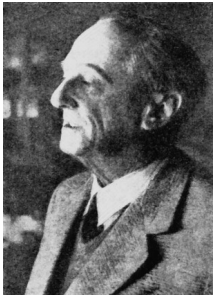
1. חלוקה פרופורציונלית (proportional):

$$\text{For all } i: \quad V_i(X_i) \geq V_i(C) / n$$

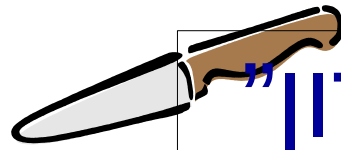
2. חלוקה ללא קנאה (envy-free):

$$\text{For all } i, j: \quad V_i(X_i) \geq V_i(X_j)$$

חידה: מה יותר קשה?

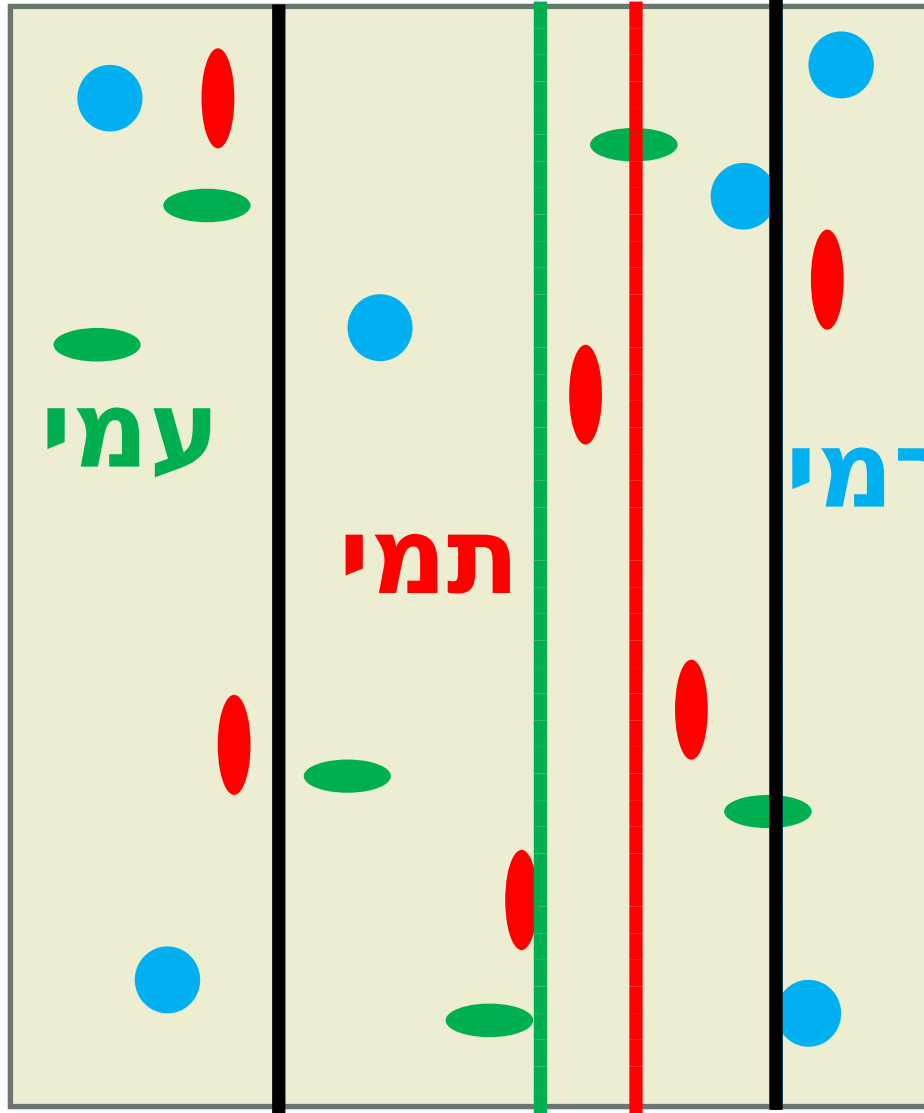


# חלוקה פרופורציונלית



אלג. "המפחית האחרון"

– Last Diminisher –  
הוגו שטיינהאוס 1948



- **עמי** מסמן  $n/1$  בעיניו.
- אם **תמי** חושבת שזה יותר מדי - היא מפחיתה ל- $n/1$ .
- וכן **רמי** וכו'.
- האחרון שהפחית מקבל את החלק שסימן.
- ממשיכים ברקורסיה.

# אלגוריתם המפחית האחרון

**משפט:** אלגוריתם "המפחית האחרון" נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות  $n/1$  מערך העוגה בעיניו. **הוכחה:** נניח שעריך העוגה כולה הוא  $n$ . נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על  $n$ .

**בסיס:** שחקן אחד מקבל הכל.

**צעד:** נניח ל- $n-1$  שחקנים. עכשיו יש  $n$ . אחד מקבל חלק ששווה בעיניו 1. נשארים  $n-1$  שחקנים. עבורם, החלק שנמסר שווה לכל היותר 1. לכן, החלק שנשאר שווה בעיניהם לפחות  $n-1$ . לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. \*\*\*



# אלגוריתם המפחית האחרון

**משפט:** אלגוריתם "המפחית האחרון" משתמש ב-  $O(n^2)$  שאילות.

**הוכחה:** בכל סיבוב שחקן אחד יוצא  $n$  סיבובים.

בכל סיבוב צריך לשאול כל שחקן שאילתה אחת.

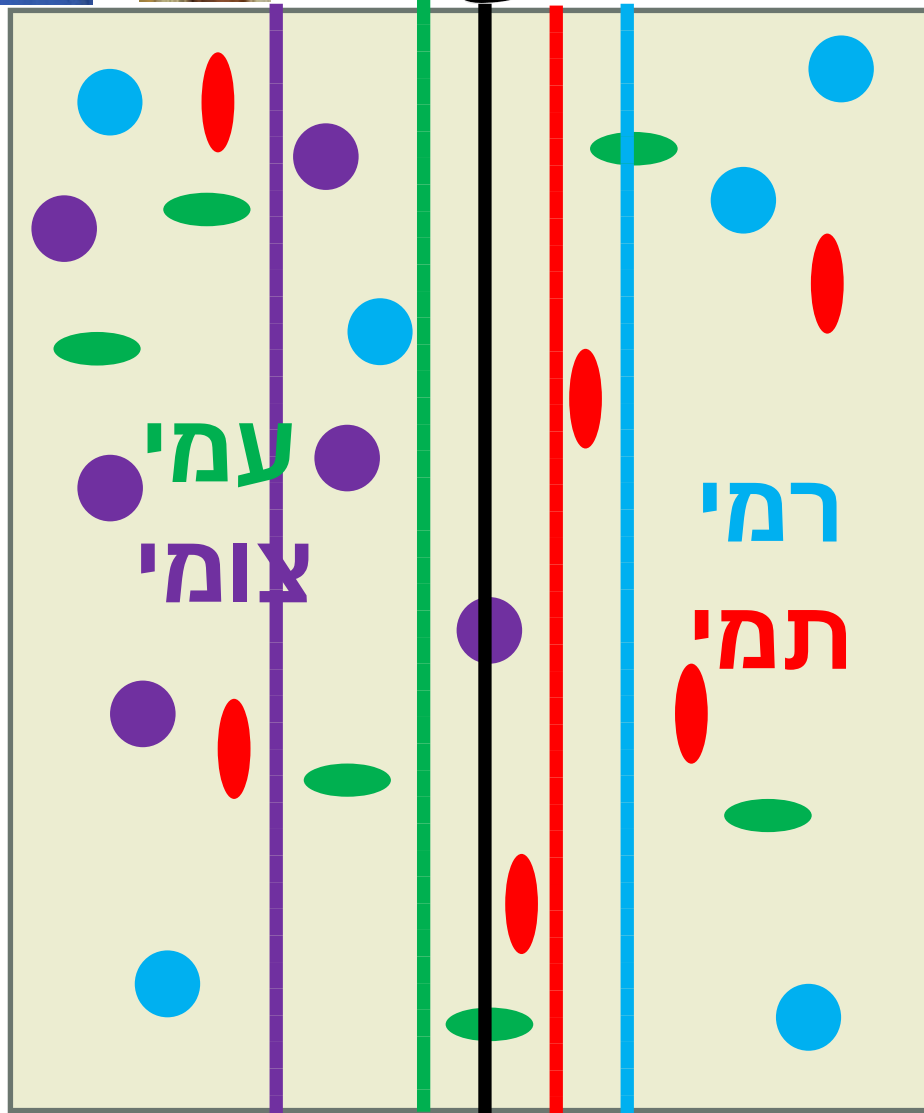
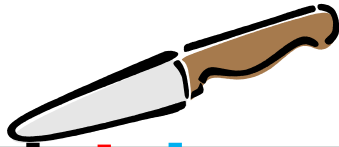
סה"כ  $O(n^2)$  שאילות. \*\*\*

עבור כלכלנים – זה מספיק.

אבל מדעני-מחשב שואלים:

האם יש אלגוריתם מהיר יותר?

# חלוקה פרופורציונלית מהירה



אלגוריתם אבן-פז –

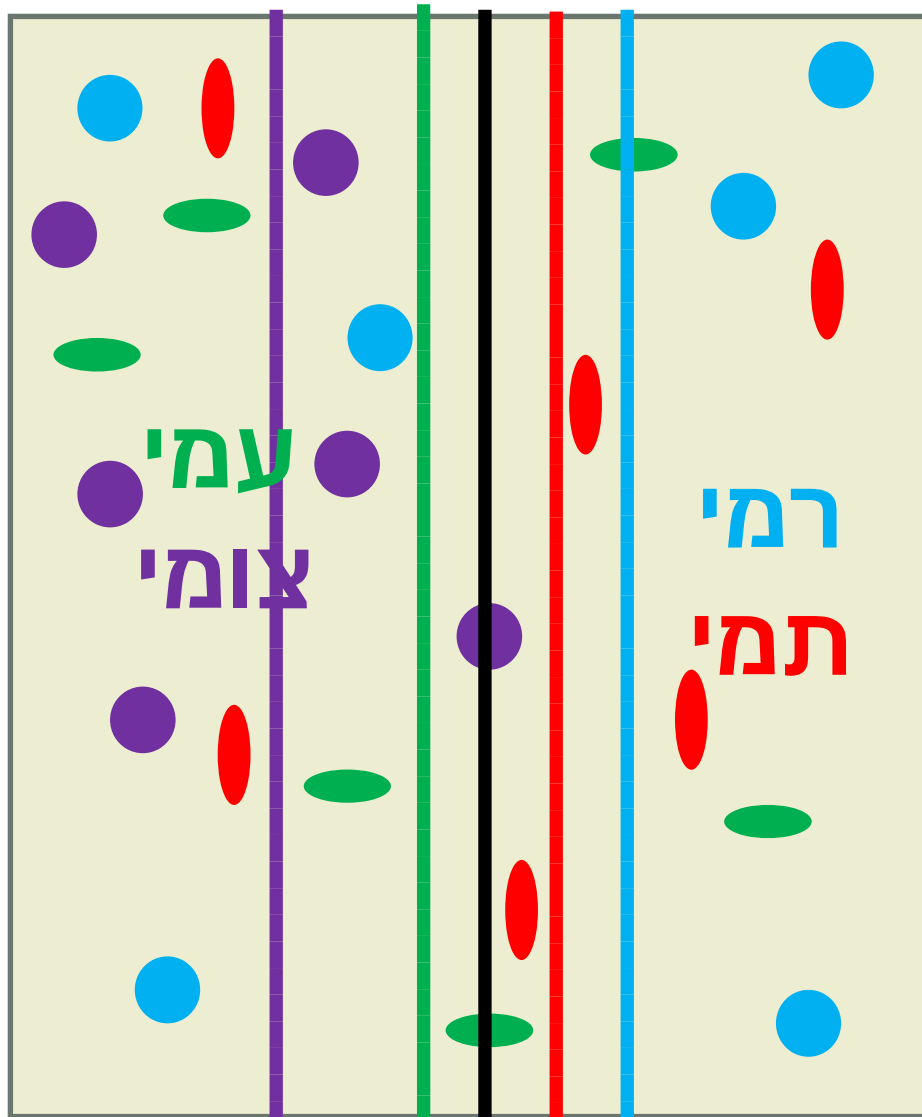
- Even-Paz

שמעון אבן ועזריה פז, '84

- כל שחקן מחלק לשני חלקים בשווי  $1/2$  בעיניו.
- חותכים את העוגה בחציון של הקווים.
- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.
- מחלקים כל חצי ברקורסיה.

# אלגוריתם אבן-פז

מה עושים כש-n איזוגי?



- כל שחקן מחלק לשני חלקים ביחס של:

$$(n-1)/2 : (n+1)/2$$

- חותכים את העוגה כך שבצד אחד יהיו  $(n-1)/2$  קוים ובצד שני  $(n+1)/2$  קוים.

- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.



# אלגוריתם אבן-פז

**משפט:** אלגוריתם אבן-פז נותן חלוקה פרפורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות 1 חלקי  $n$  מערך העוגה בעיניו.

**הוכחה:** נניח שערך העוגה כולה הוא  $n$ . נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על  $n$ .

**בסיס:** שחקן אחד מקבל הכל.

**צעד:** נניח שנכון לכל מספר שחקנים עד  $n-1$ . עכשיו יש  $n$ . כל מי שמשחק לפי הכללים, מגיע לחלק ששווה בעיניו לפחות  $k$ , ויש בו  $k$  שחקנים, כאשר  $k$  הוא  $n/2$  או  $(n+1)/2$  או  $(n-1)/2$ . לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. \*\*\*

# אלגוריתם אבן-פז

**משפט:** אלגוריתם אבן-פז משתמש

ב-  $O(n \log n)$  שאילתות.

**הוכחה:** נעגל את  $n$  למעלה לחזקה הקרובה של 2. הגדלנו אותו בפחות מ-2. עכשיו, בכל סיבוב, גודל הקבוצות קטן פי 2. לכן מספר הסיבובים הוא לכל היותר  $\log_2(2n)$ .  
בכל סיבוב, שואלים כל שחקן שאילתה אחת.  
לכן הסיבוכיות  $O(n \log n)$ .

# חלוקה פרופורציונלית מהירה

נניח שמותר לשאול את השחקנים שאילתות משני סוגים:

- הערכה (Eval) – חישוב ערך של פרוסה נתונה;
- סימון (Mark) – סימון פרוסה עם ערך נתון.

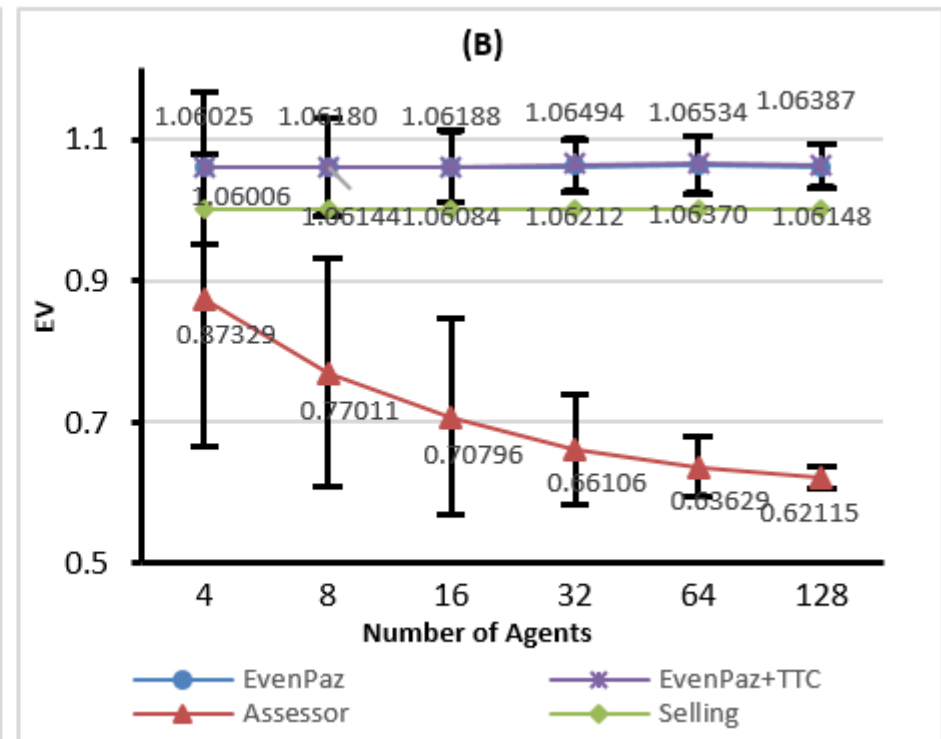
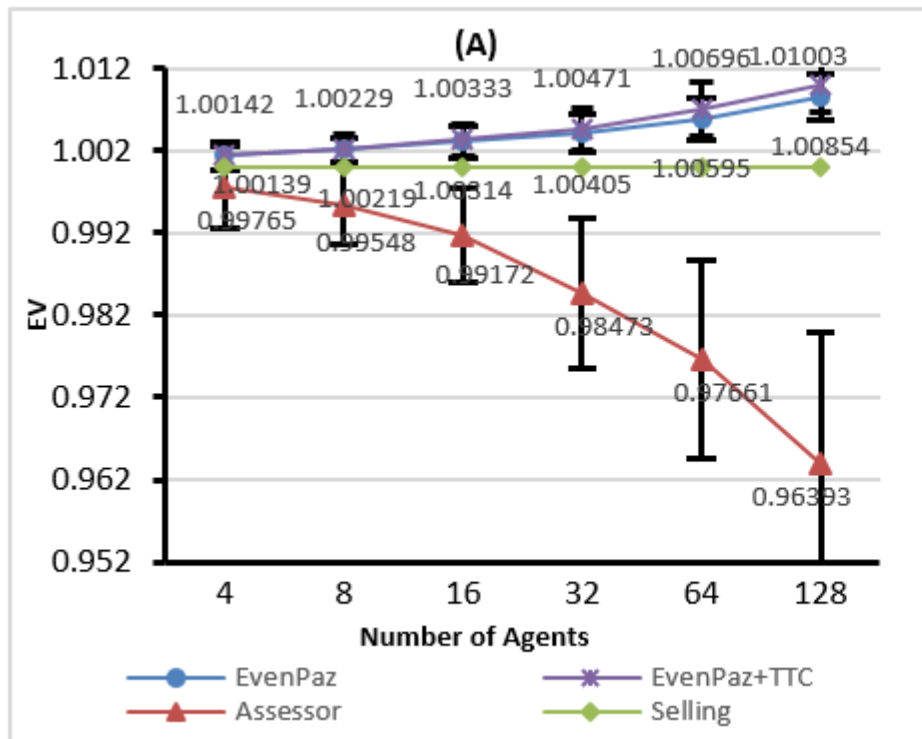
**משפט:** כל אלגוריתם לחלוקה פרופורציונלית צריך לפחות  $n \log n$  שאילתות מסוג זה (Edmonds 2006, Woeginger 2007).

**מסקנה:** אלגוריתם אבן-פז – הכי מהיר שאפשר.



# אלגוריתם אבן-פז על נתוני אמת

מחקר של איתי שטכמן (סטודנט לתואר שני) וד"ר ריקה גונן השווה את הביצועים של אלגוריתם אבן-פז לשיטות החלוקה המקובלות, שהן מכירה והערכת שמאי, על ערכי קרקע בישראל (מאתר מדל"ן) ובניו זילנד. נבדקו מדדים רבים, למשל, הערך הנמוך ביותר של משתתף. אבן-פז ניצח:

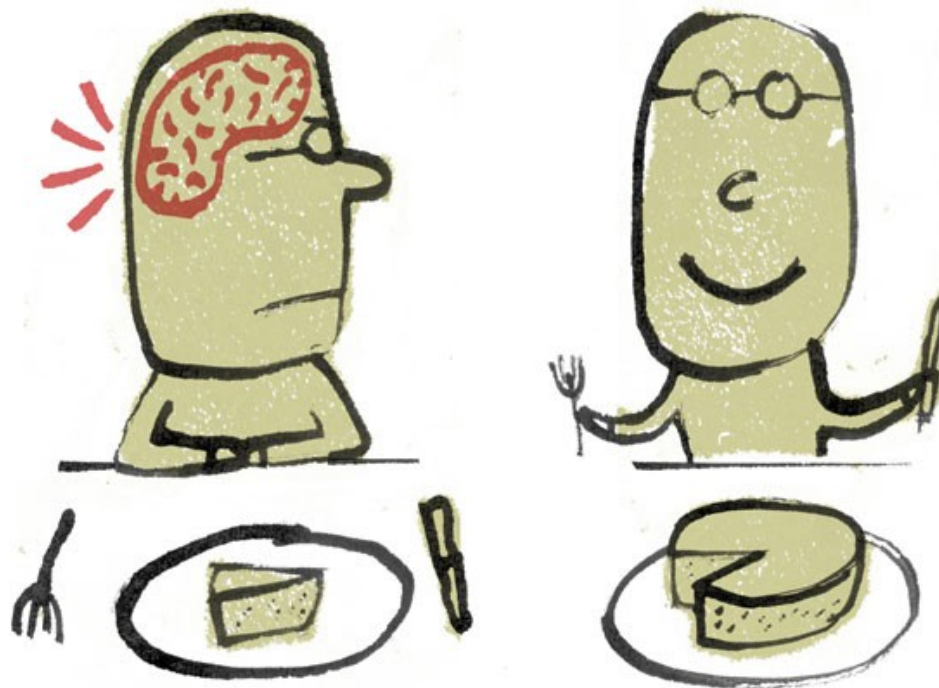


"ונחלתם אותה איש כאחיו" (יחזקאל מ"א 14)

# חלוקה ללא קנאה

# Envy-Free Division

אראל סגל-הלוי

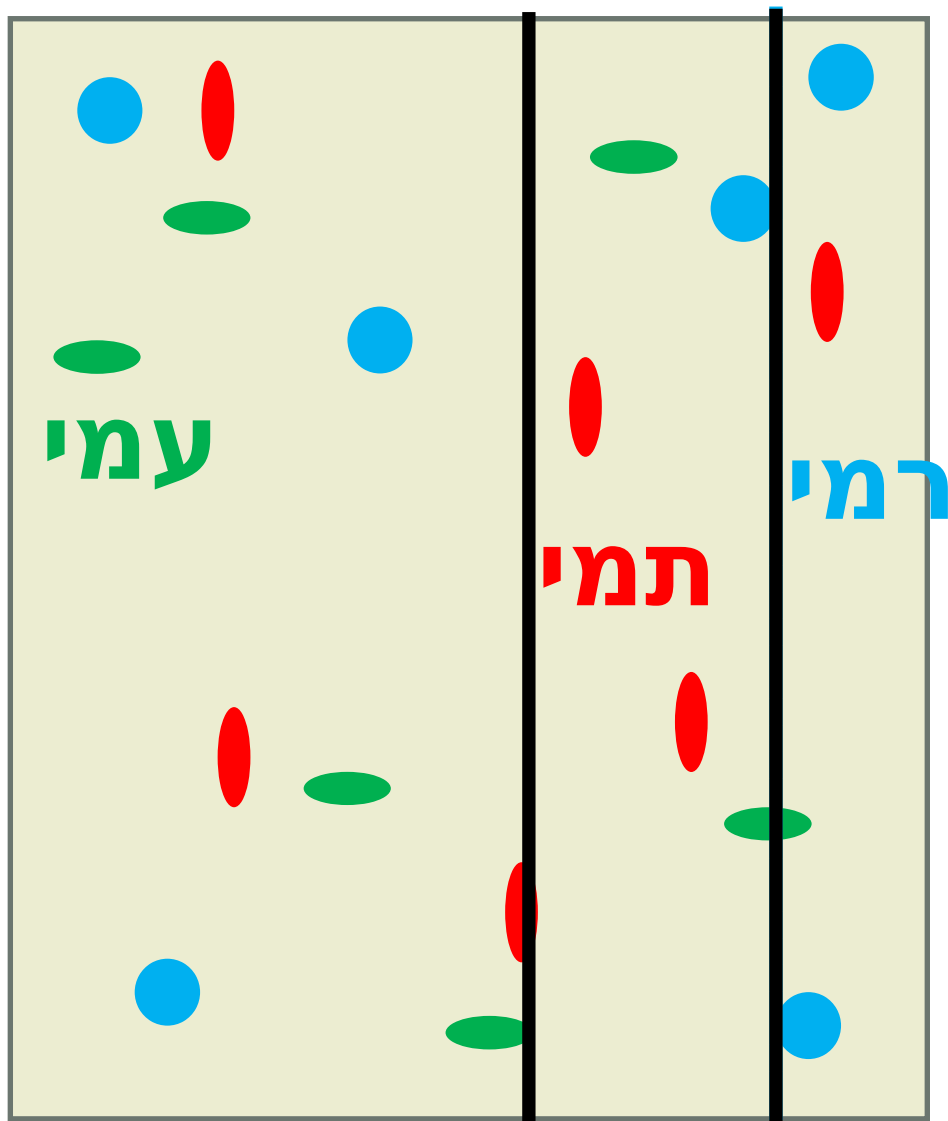


# קנאה

האלגוריתמים שראינו  
לא מבטיחים שהחלוקה  
תהיה ללא קנאה.

קנאה זה דבר מעצבן –  
ולא רק בני אדם -

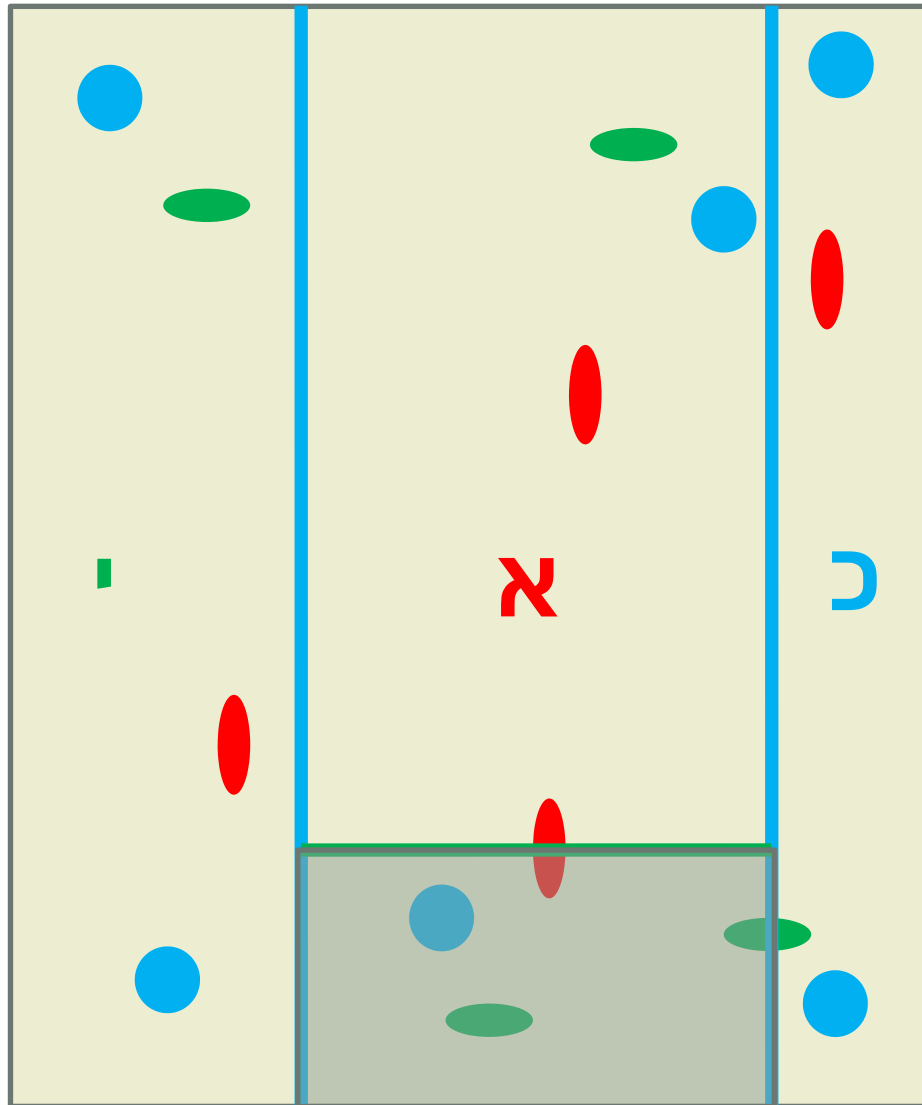
[https://www.youtube.com/results?search\\_query=monkey+envy+experiment](https://www.youtube.com/results?search_query=monkey+envy+experiment)



אז איך מוצאים חלוקה ללא קנאה?

# חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים

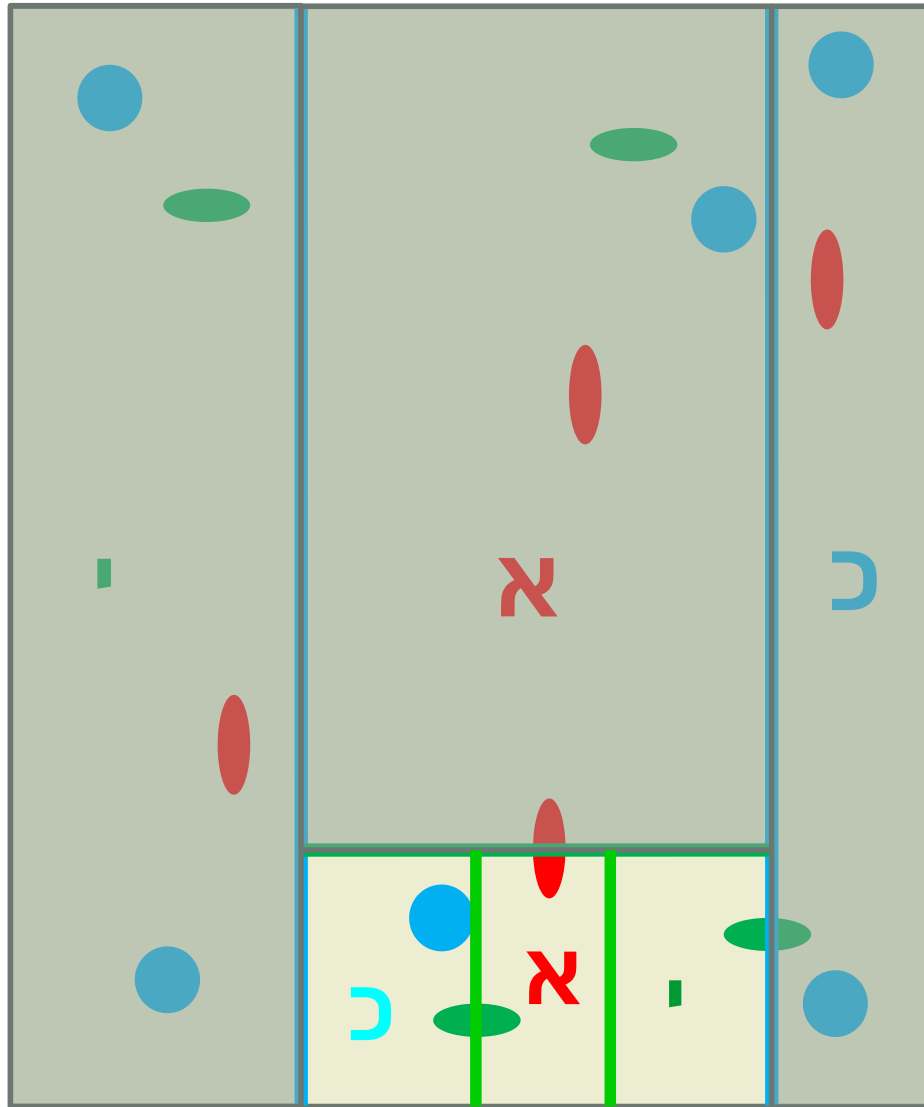
אלגוריתם – Selfridge  
Conway, 1963



- כ חותך 3 חתיכות שוות בעיניו.
- אם א, ג מעדיפים חתיכות שונות – סיימנו. אחרת -
- ג מקצץ את החתיכה הטובה ביותר ומשווה לשניה בעיניו.
- א, ג, כ בוחרים חתיכה. ג חייב לבחור את זו שקיצץ, אם לא נבחרה קודם.
- קיבלנו חלוקה ללא קנאה, אבל עם שארית.

# חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים

אלגוריתם – Selfridge  
Conway, 1963 – חלק ב



- [א או ' בחרו את החתיכה המקוצצת; במקרה זה א].
- ' (שלא בחר את החתיכה המקוצצת) מחלק את השארית לשלוש חתיכות שוות בעיניו.
- א, כ, ' בוחרים חתיכה.



# סלפרידג'-קונוויי

**משפט:** אלגוריתם סלפרידג'-קונוויי נותן חלוקה ללא קנאה - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל חתיכה טובה לפחות כמו שתי האחרות.

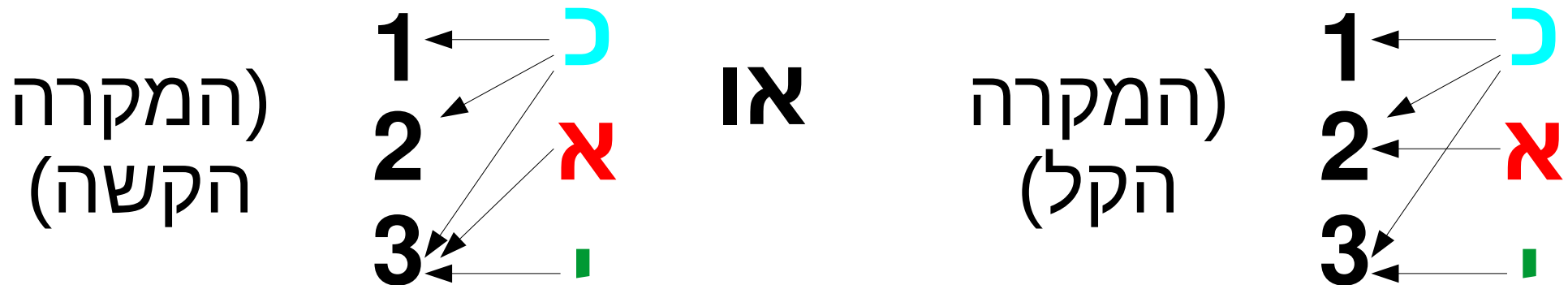
**הוכחה:** נבנה גרף דו"צ שבו:

• הצמתים - שחקנים מצד אחד וחתיכות מצד שני.

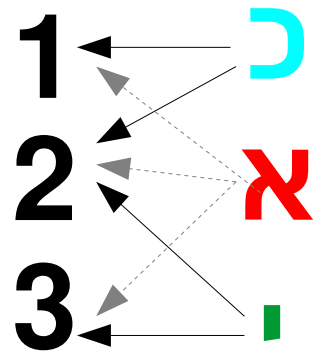
• הקשתות - מכל שחקן לחתיכות הטובות בעיניו.

**שידוך מושלם** בגרף זה = חלוקה ללא קנאה!

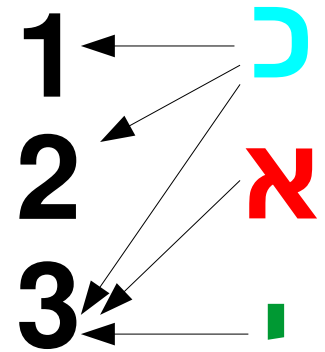
אחרי החלוקה הראשונה של **כ** יש שני מקרים:



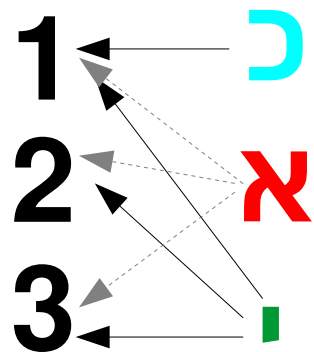
# סלפרידג'-קונוויי – המשך הוכחה



אחרי הקיצוץ  
של י הופך ל:



בוחרים לפי הסדר **א**, **י**, **כ**. לא משנה מה **א** בוחר -  
ל-**י** נשאר מה לבחור. הוא חייב לבחור את 3 אם  
היא קיימת, לכן גם ל-**כ** נשאר מה לבחור.



**חלק ב:** נניח ש-**א** לקח את החתיכה  
המקוצצת. אז **י** חותך; **א**, **כ**, **י** בוחרים.  
**א** בוחר ראשון; ל-**י** יש שלוש חתיכות  
לבחור; ו-**כ** לא יקנא ב-**א** אפילו אם **א**  
\*\*\*  
ייקח את כל השארית!

# חלוקה ללא קנאה ל- $n$ שותפים

- 1963: אלג' סלפרידג'-קונוויי ל-3 עם 5 שאילות  
1996: אלג' בראמס-טיילור. #שאילות לא חסום.  
1998: אלג' רוברטסון-וֹב. #שאילות לא חסום.  
2000: אלג' פיקהורקו. #שאילות לא חסום.  
2009: משפט פרוקצ'יה: #שאילות לפחות  $n^2$ .  
2015: אלג' עזיז-מקנזי ל-4. #שאילות חסום (200).  
2016: אלג' עזיז-מקנזי ל- $n$ . #שאילות חסום:

$$O(n^{n^{n^{n^n}}})$$

עדיין לא ידוע כמה שאילות באמת צריך – האם אפשר למצוא אלגוריתם הדורש  $n^2$  שאילות?

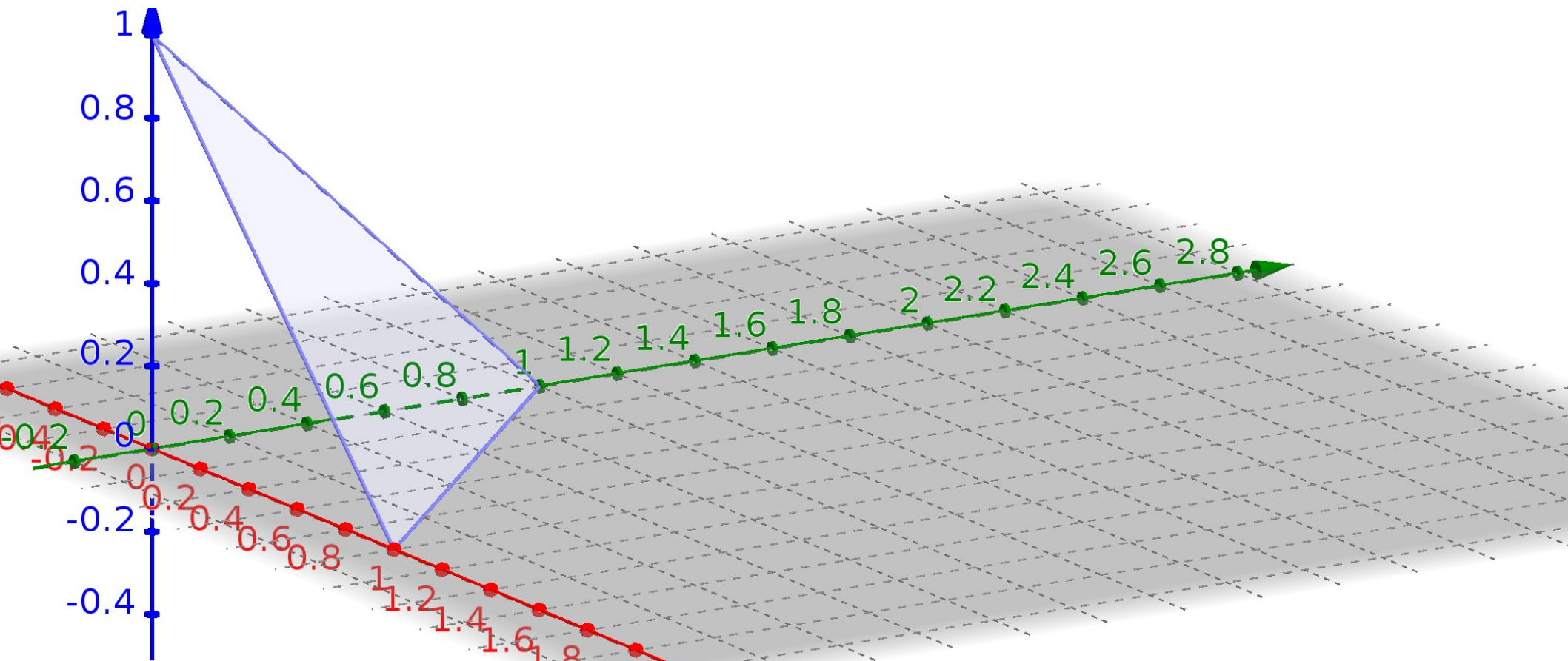
# חלוקה קשירה ללא קנאה ל- $n$

• נסתכל על כל החלוקות הקשירות ל- $n$  חתיכות.

• כל חלוקה מוגדרת ע"י  $n$  מספרים חיוביים שסכומם 1



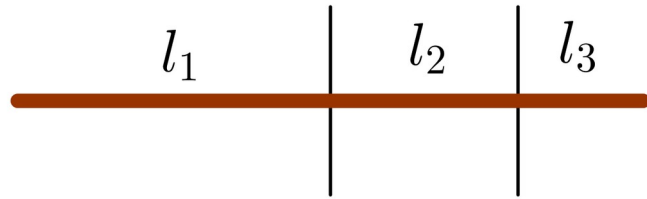
$$l_1 + l_2 + l_3 = 1$$



# חלוקה קשירה ללא קנאה ל- $n$

• נסתכל על כל החלוקות הקשירות ל- $n$  חתיכות.

• כל חלוקה מוגדרת ע"י  $n$  מספרים חיוביים שסכומם 1



$$l_1 + l_2 + l_3 = 1$$

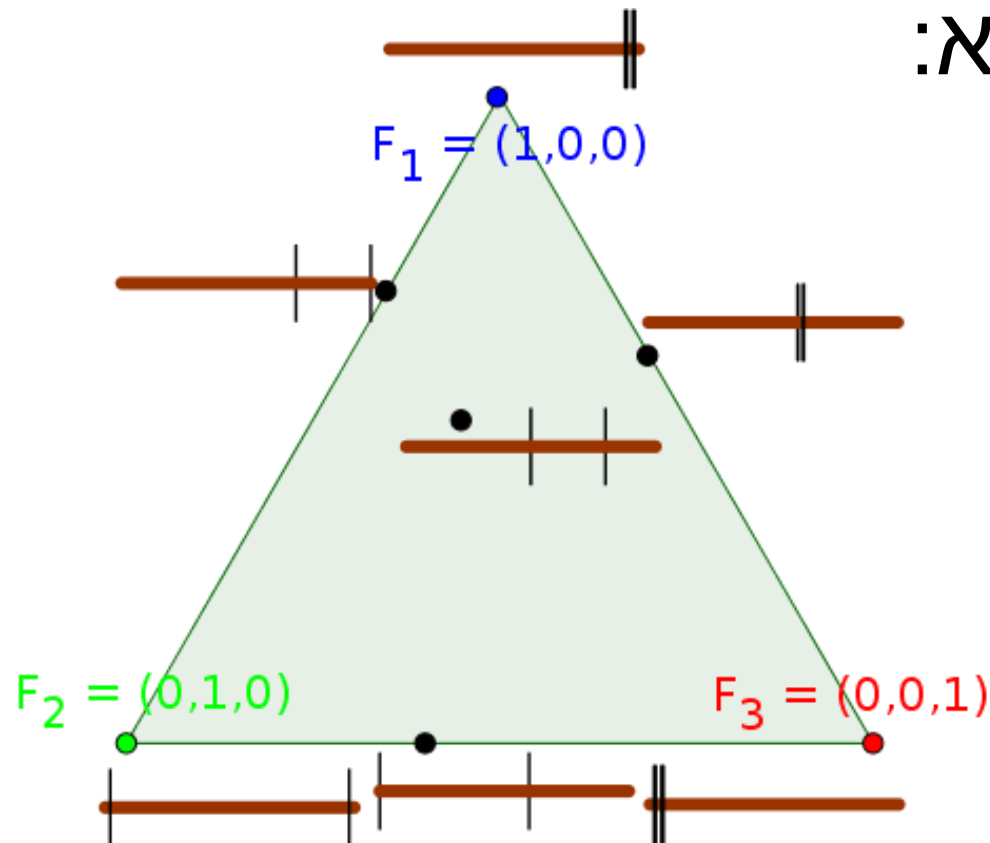
מרחב החלוקות הקשירות הוא:

• עבור  $n=2$  – קטע.

• עבור  $n=3$  – משולש.

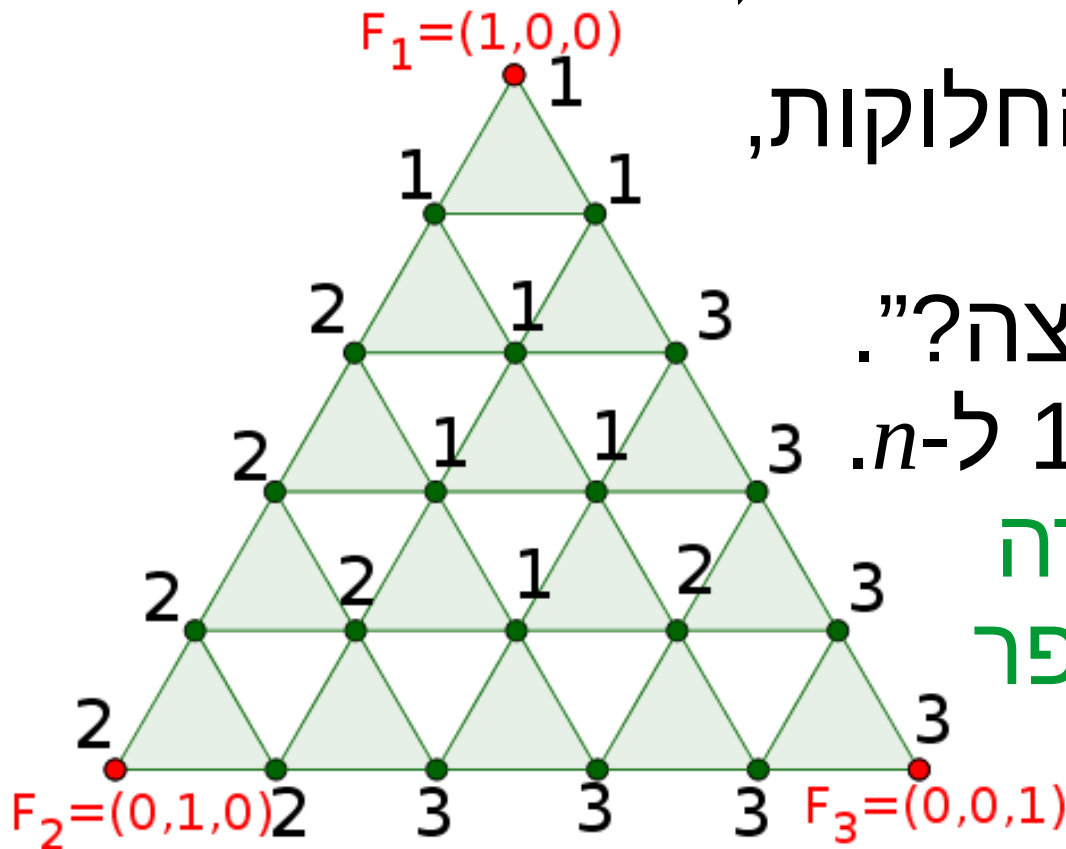
• עבור  $n=4$  – טטראדר.

• באופן כללי – סימפלקס.





# חלוקה קשירה ללא קנאה ל- $n$



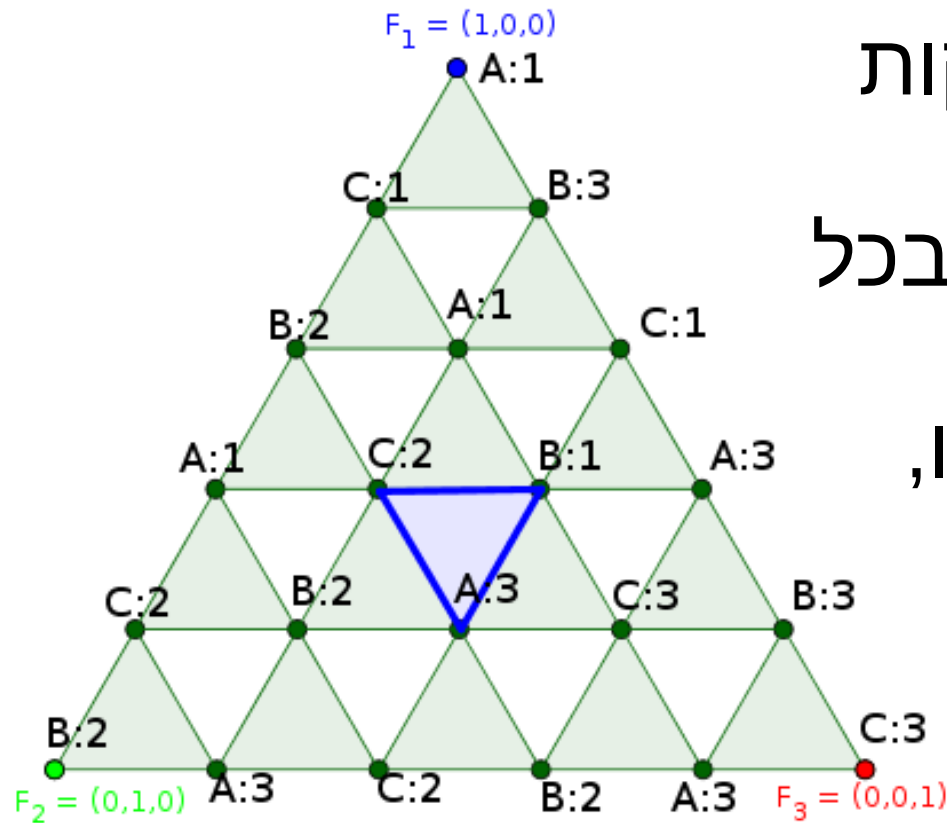
• בכל נקודה בסימפלקס החלוקות, אפשר לשאול כל שחקן "איזו חתיכה אתה הכי רוצה?".

התשובה היא מספר בין 1 ל- $n$ .

• חלוקה ללא קנאה = נקודה שבה כל שחקן כותב מספר אחר.

• חלוקה כמעט-ללא-קנאה = סימפלקסון שבו אפשר לחלק קודקוד לכל שחקן, כך שכל שחקן כתב על הקודקוד שלו מספר אחר.

# אלגוריתם סימונס-סו (Su 1999)



- מחלקים את סימפלקס-החלוקות לסימפלקסונים.

- נותנים כל צומת לשחקן, כך שבכל סימפלקסון, כולם מיוצגים.

- כל שחקן כותב, בכל צומת שלו, את מספר החתיכה הכי טובה בעיניו.

- מחפשים סימפלקס- $n$  מלא =

עם  $n$  מספרים שונים =

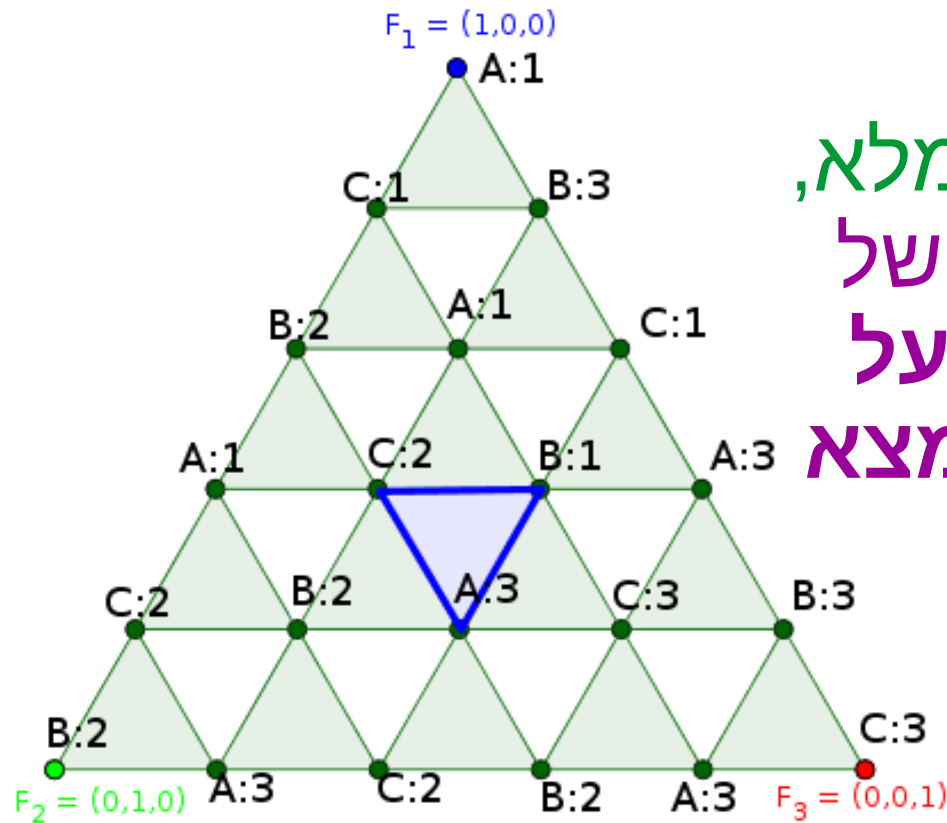
חלוקה כמעט-ללא-קנאה.

- נוכיח באינדוקציה על  $n$  שקיים

מספר איזוגי של סימפלקס- $n$ -

מלא.

# הלמה של ספרנר (Sperner's Lemma)



- נוכיח באינדוקציה על  $n$  שקיים מספר איזוגי של סימפלקס- $n$ -מלא, בכל מצב שבו מתקיים התנאי של ספרנר (Sperner): כל מספר על צומת בשפה הוא מספר שנמצא על קצות השפה.
- התנאי הזה תמיד מתקיים אצלנו, כי כל שחקן מעדיף פרוסה לא ריקה!

בסיס:  $n=2$ . נסתכל על הצלע בין  $F_1$  ל- $F_2$ . המספרים מתחילים ב-1 ומסתיימים ב-2, ולכן מספר המעברים הוא איזוגי.

# הלמה של ספרנר (Sperner's Lemma)

נוכיח באינדוקציה על  $n$  שקיים מספר איזוגי של סימפלקס- $n$ -מלאים.

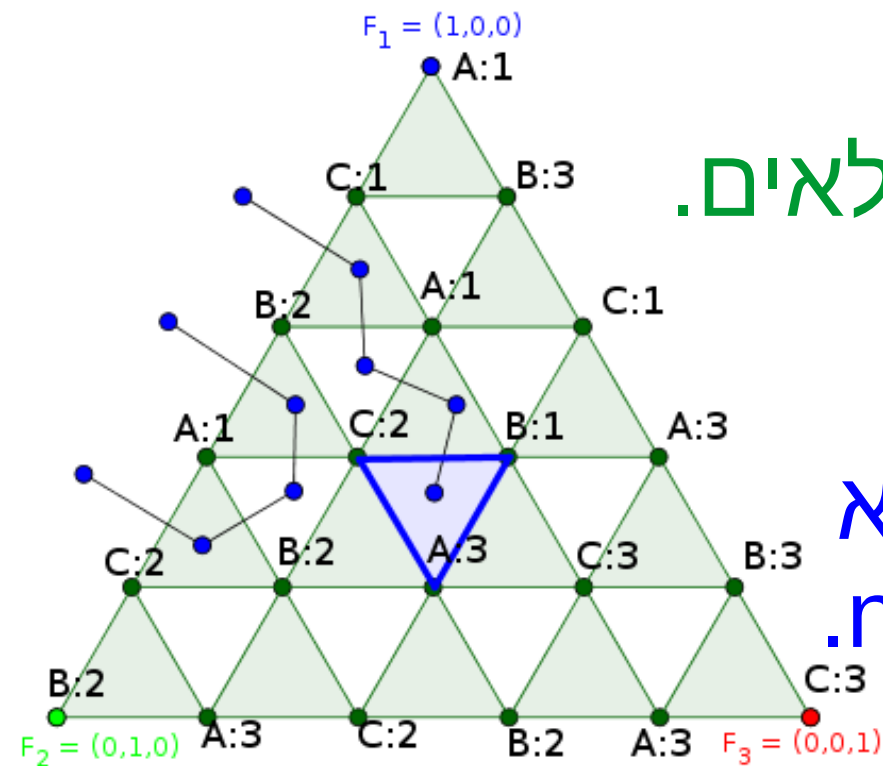
בסיס:  $n=2$ . מספר המעברים בין 1 ל-2 הוא איזוגי.

צעד: נבחר סימפלקס- $(n-1)$ -מלא וניכנס דרכו. הגענו לסימפלקס- $n$ . יש רק שתי אפשרויות:

- הגענו לסימפלקס- $n$ -מלא.

- יש עוד סימפלקס- $(n-1)$ -מלא. נצא דרכו ונמשיך לטייל בסוף, או שנגיע לסימפלקס- $n$ -מלא, או שנצא החוצה דרך סימפלקס- $(n-1)$ -מלא אחר.

לכן, יש גם מספר איזוגי של סימפלקס- $n$ -מלאים. \*\*\*



# חלוקה קשירה ללא קנאה

1980: משפט סטרומקוויסט: תמיד קיימת חלוקה.  
1980-1998: אלגוריתמי סכינים, לשלושה אנשים.  
1999: אלגוריתם סימונס, #שאלות אינסופי.  
2008: משפט סטרומקוויסט: #שאלות תמיד  
אינסופי!



# "קִשָּׁה בְּשָׂאוֹל קִנְיָה"

שחקנים	חלוקה פרופורציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה ללא קנאה
2	2 שאילתות		
3	$\Theta(n \log n)$	5	אינסופי!
4		200	
$n$		$\Omega(n^2)$ $O(n^{nnnnn})$	

# שאלה פתוחה

כמה שאילתות צריך כדי למצוא  
חלוקה ללא קנאה (בלי קשירות)?

$n^2$  ?

$n^{nnnnn}$  ?