

אלגוריתמים כלכליים תרגיל 10

שאלה 1: תכונות של אלגוריתם עזיז-לי-טלמון

שאלה זו מתייחסת לאלגוריתם לתקצוב פרופורציונלי שלמדנו בשיעור.

א. האם האלגוריתם יעיל פארטו? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

ב. האם האלגוריתם מגלה-אמת? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

ג. נניח שכל אזרח צריך לשלם L/n תמורת הזכות להשתתף באלגוריתם. האם האלגוריתם מעודד השתתפות? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

א. האלגוריתם לא יעיל פארטו. לדוגמה:

יש לנו תקציב של $100\$$

5 אנשים $\{א, ב, ג, ד, ה\}$

3 פרויקטים:

A - $25\$$

B - $75\$$

C - $90\$$

לכל אדם יש $20\$ = \frac{100}{5} = \frac{L}{n}$ לבזבז

כל הקבוצות ומחירן לפי סדר יורד הן:

$(C,B,A)=190$

$(C,B)=165$

$(C,A)=115$

$(A,B)=100$

$C=90$

$B=75$

$A=25$

הבחירות של האנשים הם כדלהלן:

A	B	C
א, ב	ג, ב, ד	ה, ב

הסכום שיש לאיגוד פרויקטים לפי מספר האנשים התומכים בו:

$(C,B,A)=100$

$(C,B)=80$

$(C,A)=60$

$(A,B)=80$

$C=40$

$B=60$

$A=40$

איגוד הפרוייקטים שיכול לממן את עצמו הוא A, כל השאר לא מגובים מספיק. מה שמשאיר $75\$$ בקופה, ולכן ניתן לבחור גם את B בלי שלאף אחד הורע מצבו. ולכן האלגוריתם הוא לא יעיל פארטו. מ.ש.ל.

ב. לא, האלגוריתם לא מגלה אמת.

ניקח את הדוגמה הבאה:

5 אנשים ו-31 פרויקטים:

20\$ - A

25\$ - B

75\$ - C

כל הקבוצות ומחירן לפי סדר יורד הן:

$(C,B,A)=125$

$(C,B)=100$

$(C,A)=90$

$(A,B)=25$

$C=75$

$B=25$

$A=25$

C	B	A
א, ב, ג, ד, ה	ב	א

א' רוצה את A ו-C, הדרך היחידה שזה יתאפשר זה בצמד A,C. אך הצמד הנל שווה 90, בעוד הצמד CB שווה 100 ולכן יופיע קודם באפשרויות בחירה, וכיון שיש לו מספיק תומכים לממן יבחר. אז על מנת ש-CB לא ייבחר, א' לא יתמוך ב-C וכך לא יהיה מספיק כסף לתמוך ב-CB אבל כן יהיה מספיק כסף לתמוך ב-CA. ולכן האלגוריתם לא מגלה אמת. מ.ש.ל.

ג. נניח שעל מנת להשתתף באלגוריתם כל אזרח צריך לשלם $\frac{L}{n}$ אחרת הוא לא יכול להשתתף. אחרי הוספת התנאי לעיל, זה מעודד השתתפות רק בהנחה שהפרויקט שאותו אדם רוצה לתמוך בו שווה יותר מ- $\frac{L}{n}$ והוא יודע שיש מספיק אנשים שיתמכו בו אחרת התועלת שלו תהיה $\frac{L}{n}$. ז"א זה יגרום לכך שאנשים יתאגדו "מחוץ לאלגוריתם" ע"מ להבטיח את הזכייה שלהם, כולל "ריגול" על קבוצות אחרות כך שהכספים שלהם לא יהיו לשווא. הדבר יגרום לכך שאנשים ישתתפו רק אם הם מעוניינים בפרוייקטים גדולים ופופולריים. **גדולים**, כדי שהתוחלת של התועלת תשתלם, הרי האדם שם כסף ויש סיכוי שהוא לא יקבל כלום, אז הוא יכנס רק עם התוחלת של התועלת תהיה חיובית. **ופופולריים**, כי רק ככה הוא מבטיח שהסיכוי שהפרוייקט שלו ייבחר, ולכן התוחלת של התועלת תעלה.