

מטלה – מכרזי ויקרי-קלארק-גרובס ומאירסון

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. שאלות המסומנות בכוכבית (*) מזכות בניקוד כפול.

שאלה 1: שוק דו-צדדי

אחד השימושים של תורת המכרזים הוא ניהול אוטומטי של שוק דו-צדדי, שיש בו גם קונים וגם מוכרים, כמו למשל בבורסה לניירות ערך. לצורך השאלה נניח שכל מוכר מחזיק מניה אחת, כל קונה מעוניין במניה אחת, וכל המניות זהות (של אותה חברה).

א. נניח שבבורסה יש:

- חמישה מוכרים, המייחסים למניה שלהם את הערכים הבאים: 1, 3, 5, 7, 9.
- חמישה קונים, המייחסים לאותה מניה את הערכים: 2, 4, 6, 8, 10.

מהו המסחר הממקסם את סכום הערכים – כמה מניות נסחרות, מי מוכר ומי קונה?

* ב. מה הם תשלומי VCG בשוק של סעיף א? מה הבעיה בתשלומים אלה?

ג. נתון כלל-הבחירה "בחר את כל הקונים והמוכרים במסחר האופטימלי, פרט לקונה עם הערך הנמוך ביותר ולמוכר עם הערך הגבוה ביותר". מה הם תשלומי מאירסון עבור כלל זה? הדגימו על השוק של סעיף א.

שאלה 2: תיכנות – כלל-התשלום של מאירסון

נתונה פונקציה המייצגת כלל-בחירה. כותרת הפונקציה:

```
def choices (values: List[float]) → List[bool]: ...
```

הפונקציה מקבלת כקלט וקטור של מספרים המייצגים את הערכים של השחקנים (בשקלים). הפונקציה מחזירה כפלט וקטור בוליאני המחזיר, לגבי כל שחקן, האם הוא נבחר או לא.

כיתבו פונקציה המייצגת את כלל-התשלום המתאים, לפי משפט מאירסון. כותרת הפונקציה:

```
def payments (values: List[float]) → List[float]: ...
```

הפונקציה מקבלת כקלט את וקטור הערכים (כמו הפונקציה הקודמת), ומחזירה את וקטור התשלומים, בשקלים, ברמת-דיוק של אגורה אחת (0.01 ש"ח).

אם הפונקציה מגלה שכלל-הבחירה אינו מונוטוני – היא צריכה לזרוק חריגה מתאימה.

בדקו את הפונקציה שלכם על כמה פונקציות-בחירה שונות.

שאלה 3: בעיית התרמיל עם מספרים שלמים

המציאו קלט לבעיית התרמיל (ערכים ומשקלים) המקיים את התנאים הבאים:

- יש 4 חפצים שונים – לכל חפץ משקל אחר, ערך אחר, ויחס ערך/משקל אחר.
 - אלגוריתם חמדני א ואלגוריתם חמדני ב נותנים תוצאות שונות.
 - מכרז VCG ומכרז מאירסון עם אלגוריתם קירוב-חצי נותנים תוצאות שונות.
 - ניתן לחשב את כל התשלומים במכרזים הנ"ל בעזרת מספרים שלמים בלבד.
- [למה מספרים שלמים? כי כשנותנים שאלה בבחינה, ואסור להשתמש במחשבון, קל יותר לבצע חישובים עם מספרים שלמים..]

שאלה 4: מתי המכרזים זהים?

- א. אנחנו רוצים למכור שלושה חפצים זהים, כל חפץ לאדם אחר. המטרה שלנו היא למקסם את סכום הערכים. תארו את מכרז VCG המתאים למקרה זה: מי יהיו הזוכים ואיזה מחיר כל אחד ישלם? הדגימו על מכרז עם 10 אנשים שהערכים שלהם הם: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
- ב. תארו את מכרז מאירסון המתאים למקרה זה: מי יהיו הזוכים ואיזה מחיר כל אחד ישלם? הדגימו על מכרז עם 10 אנשים כנ"ל.
- * ג. הוכיחו את המשפט הבא: בכל מצב שבו כלל-הבחירה ממקסם את סכום הערכים, התשלומים במכרז מאירסון זהים לתשלומים במכרז VCG.
- שימו לב: סעיפים א, ב הם מקרה פרטי של משפט זה.

שאלה 5: מכרזים קומבינטוריים

- עמי ותמי משתתפים במכרז קומבינטורי על שלושה חפצים שונים. כזכור, מכרז קומבינטורי הוא מכרז שבו כל משתתף יכול להציע מחיר לכל תת-קבוצה של חפצים. ערכי המשתתפים נתונים בטבלה הבאה:

תמי	עמי	
0	0	קבוצה ריקה
31	10	א
21	20	ב
11	30	ג
43	21	א,ב
33	31	א,ג
23	41	ב,ג
53	52	א,ב,ג

- א. מה יעשה מכרז VCG במצב זה – מי יקבל כל חפץ, וכמה ישלם?
- ב. מה יעשה מכרז מאירסון במצב זה – מי יקבל כל חפץ, וכמה ישלם?