

גילוי-אמת בבעיית החלפת הכליות

האם אלגוריתם השידוך הגדול ביותר הוא מגלה-אמת?

ראשית עלינו להגדיר מהי המשמעות של גילוי-אמת בהקשר של החלפת כליות. הרי התאמה בין תורם לנתרם אינה קשורה להעדפות של המשתתפים - היא אובייקטיבית וניתנת לבדיקה רפואית. עדיין יש שני דברים שזוגות יכולים לעשות:

- חולים שיש להם כמה תורמים תואמים במאגר, יכולים להסתיר תוצאות של בדיקות המראות על התאמה (או לא לבצע את הבדיקות), וכך להסתיר קשתות עם תורמים תואמים.
- חולים שיש להם כמה חברים לא-תואמים שמוכנים לתרום לזכותם, יכולים להסתיר אותם (או להגיד להם לא לבוא), וכך להסתיר קשתות עם חולים תואמים.

בשני המקרים המניפולציה מתבטאת בהסתרה של קשת בגרף ההתאמות. נגדיר שאלגוריתם להחלפת כליות הוא **מגלה-אמת** אם אף זוג לא יכול להרוויח ע"י הסתרת קשת. "להרוויח" הכוונה, שבמצב הרגיל הוא לא ישתתף בהחלפה, וע"י ההסתרה הוא כן ישתתף בהחלפה.

האם אלגוריתם "שידוך גדול ביותר" מגלה-אמת לפי הגדרה זו? זה תלוי בפרט טכני-לכאורה באלגוריתם למציאת שידוך גדול ביותר -- באופן שבירת השוויון שלו (tie-breaking) -- מה האלגוריתם עושה כשיש **כמה** שידוכים גדולים ביותר? איך הוא מחליט איזה מהם להחזיר?

בדרך-כלל, כשמפתחים אלגוריתם אופטימיזציה, הדבר היחיד שחשוב לנו הוא שהאלגוריתם יחזיר תוצאה אופטימלית כלשהי. אם יש שתיים - שיחזיר אחת מהן, מה אכפת לנו איזה? אבל אנחנו רוצים שהאלגוריתם גם יהיה מגלה-אמת. תארו לכם שמישהו ייכנס לקוד של האלגוריתם ויבין איך הוא עובד, ויגיע למסקנה שאם הוא יסתיר אחת מהקשתות שלו - הוא יגדיל את הסיכויים שלו להיכנס לשידוך (עם קשת אחרת). זה יגרום לאנשים להסתיר קשתות ועלול לפגוע ביעילות של האלגוריתם!

כדי לפתור את הבעיה צריך להגדיר את האלגוריתם בצורה מדויקת יותר. הנה דרך אפשרית לעשות זאת.

אלגוריתם שידוך-גדול-ביותר-עם-עדיפויות:

- קבע סדר-עדיפות כלשהו על הצמתים (למשל לפי זמן המתנה בתור להשתלה, דחיפות רפואית, גיל, וכד').
- מצא שידוך גדול ביותר תוך התחשבות בסדר העדיפות (ישנם אלגוריתמים יעילים לכך - ראו בויקיפדיה בדף Priority Matching).

משפט: אלגוריתם שידוך-גדול-ביותר-עם-עדיפויות הוא מגלה-אמת.

הוכחה: נניח בשלילה שצומת צ מסתיר קשת ומרויח. כלומר:

- בלי הסתרה (מצב א) - נבחר שידוך א בלי צ.
 - עם הסתרה (מצב ב) - נבחר שידוך ב עם צ.
- אבל, שידוך א זמין במצב ב (כי צ יכול להסתיר רק קשתות סמוכות לו), ושידוך ב זמין במצב א (כי יש יותר קשתות). כיוון שהבחירה בין שידוכים היא לפי סדר מילוני קבוע על וקטורי העדיפויות שלהם, בשני המצבים ייבחר אותו שידוך - וזו סתירה. מש"ל.

מה המסר? שכשאלגוריתם עובד עם בני-אדם, גם פרטים טכניים-לכאורה כמו אופן שבירת השוויון עלולים להשפיע באופן מפתיע.

תמריצים של מרכזים רפואיים

ראינו שהאלגוריתם למציאת שידוך גדול ביותר מגלה-אמת ביחס לזוגות - זוגות לא מרוויחים מכך שהם מסתירים קשתות.

אבל בעולם ההשתלות יש עוד שחקן עם אינטרסים משלו - המרכז הרפואי. האינטרס של מרכז רפואי הוא להשיג כמה שיותר השתלות לחולים שלו. נניח שבמרכז רפואי מסויים יש מאגר פרטי של זוגות, והוא יכול לעשות ביניהם התאמות ולבצע השתלות. האם כדאי לו לשתף את המאגר שלו עם המאגר הכללי? לא תמיד. לפעמים הוא "להרויח" (כלומר להשיג יותר השתלות עבור חולים שלו) ע"י הסתרת זוגות!

ראינו קודם אלגוריתם יעיל פארטו שהוא מגלה-אמת עבור הזוגות.

משפט: לא קיים אלגוריתם יעיל פארטו שהוא מגלה-אמת עבור מרכזים רפואיים. הוכחה: נניח בשלילה שקיים אלגוריתם כזה. נראה מצב שבו, לכל שידוך-גדול-ביותר שהאלגוריתם בוחר, קיים מרכז רפואי שיכול להסתיר זוגות ולהרויח (ראו דוגמה למצב כזה במצגת). ***

מה עושים כשאי-אפשר למצוא אלגוריתם המקיים את כל התכונות הרצויות? - מתפשרים. דרך אחת להתפשר היא לחפש אלגוריתם מגלה-אמת שהוא לא לגמרי יעיל פארטו - הוא לא מוצא את השידוך הגדול ביותר אלא שידוך שהוא "כמעט" גדול ביותר.

משפט: כשיש שני מרכזים רפואיים, קיים אלגוריתם מגלה-אמת עבור המרכזים, המחזיר שידוך בגודל לפחות $1/2$ מהאופטימלי.

רעיון ההוכחה: מחשבים, עבור כל מרכז רפואי, את מספר הקשתות הפנימי הגדול ביותר. מחשבים את השידוך הגדול ביותר מבין כל השידוכים המבטיחים לכל מרכז רפואי את אותו מספר של קשתות פנימיות.

אשלגי ושותפיו (2013) הראו, שאלגוריתם מעין זה (קצת יותר מורכב) הוא מגלה-אמת, ומשיג שידוך גלובלי שגודלו לפחות $1/2$ מהשידוך הגדול ביותר. הם גם הראו איך להרחיב את הרעיון לשלושה מרכזים רפואיים או יותר.

מקורות

- Parkes and Seuken, "Economics and Computation" (2018), chapter 12
- https://en.wikipedia.org/wiki/Berge%27s_lemma
- https://en.wikipedia.org/wiki/Blossom_algorithm
- <https://www.themarker.com/misc/1.587742>: האלגוריתם של איתי אשלגי ושותפיו

סיכום: אראל סגל-הלוי.