

מטלה - חלוקת עלויות ומכרזי שירות

[שאלות שנחתכו בעריכה - לא להגשה].

שאלה 2: חלוקת רווחי עסק

כדי להקים עסק, צריך משקיע ועובדים.

הרווח של העסק הוא 1000 כפול מספר העובדים.

לפי ערך שאפלי, איך יתחלקו רווחי העסק בין המשקיע לבין העובדים?

הזרקה: חשבו קודם את הערך עבור משקיע ועובד אחד, ועבור משקיע ושני עובדים, ואז הכלילו למספר כלשהו של עובדים.

שאלה 4: פונקציה תת-מודולרית

תזכורת: פונקציה v על קבוצות נקראת תת-מודולרית (submodular) אם, לכל שתי קבוצות S, T ולכל איבר i , יש עלות שולית פוחתת:

$$\text{If } S \leq T, \text{ then } v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

הגדרה: פונקציה v על קבוצות נקראת תת-חיבורית (subadditive) אם, לכל שתי קבוצות S, T :

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$$

א. תנו דוגמה לפונקציה שהיא גם תת-אדיטיבית וגם תת-מודולרית.

ב. תנו דוגמה לפונקציה שהיא תת-אדיטיבית אבל לא תת-מודולרית.

ג. תנו דוגמה לפונקציה שהיא לא תת-אדיטיבית ולא תת-מודולרית.

ד. הוכיחו שכל פונקציה תת-מודולרית היא תת-אדיטיבית.

אם אתם מסתבכים תסתכלו כאן:

https://en.wikipedia.org/wiki/Utility_functions_on_indivisible_goods

שאלה 6: מכרז VCG - איזון תקציבי

לפניכם גירסה משופרת של מכרז וק"ג, שאמורה להשיג איזון תקציבי.

המכרז מקבל כקלט כלל-תשלום $p(S, i)$, הקובע, עבור כל תת-קבוצה של נוסעים S , כמה ישלם כל נוסע i אם הקבוצה הזאת היא הקבוצה הנבחרת. הכלל צריך להיות מאוזן-תקציבית - לכל תת-קבוצה, סכום התשלומים של חברי הקבוצה שווה לעלות הנסיעה של תת-הקבוצה.

עבור כל נוסע i וכל תת-קבוצה S , הערך של i לבחירת הקבוצה S הוא:

• $v[i] - p(S, i)$ אם i נמצא בקבוצה (נסמן ערך זה ב $u(i, S)$).

• אפס - אם i לא נמצא בקבוצה.

(שימו לב - בגירסה שלמדנו בכיתה, הערך של i לבחירת S היה $v[i]$ אם i נמצא בקבוצה).

בגירסה הזאת אין שחקן המייצג את ה"נהג".

המכרז בוחר את האפשרות S שבה סכום התועלות - $u(i, S)$ - הוא הגבוה ביותר, ומחשב את התשלום של כל נוסע לפי כלל VCG.

- א. תנו דוגמה עם 2 נוסעים לפעולת המכרז, כאשר כלל-התשלום גובה סכום זהה מכל נוסע.
ב. תנו דוגמה עם 2 נוסעים לפעולת המכרז, כאשר כלל-התשלום גובה מכל נוסע את ערך שאפלי.
ג. תנו דוגמה שבה, לכל כלל-תשלום שנבחר, עלול להיות מצב שבו לאחד הנוסעים יש תועלת שלילית (הוא משלם יותר מהערך שלו).

שאלה 5: מכרז מולין-שנקר - דוגמאות

- א. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה כלל-התשלום של שאפלי אינו מונוטוני. הראו את טבלת העלויות, חשבו את ערכי שאפלי לכל תת-קבוצה, והסבירו מדוע זה לא מונוטוני.
ב. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה מכרז מולין-שנקר עם כלל-התשלום של שאפלי אינו אמיתי (אפשר להיעזר בסעיף א). הסבירו בפירוט מה יעשה המכרז בדוגמה זו, ומדוע זה לא אמיתי.
ג. הראו דוגמה עם 2 או 3 שחקנים, שבה מכרז מולין-שנקר עם כלל-התשלום של שאפלי אינו יעיל-פארטו. הסבירו בפירוט מה יעשה המכרז בדוגמה זו, ומדוע זה לא יעיל-פארטו.

שאלה 6: מכרז SN

מכרז SN בוחר תת-קבוצה של נוסעים באופן הבא:

- הרץ VCG: בחר את תת-הקבוצה הממקסמת את סכום ערכי-הנוסעים פחות עלות הנהג, וחשב את התשלום p_i שכל שחקן i צריך לשלם לפי נוסחת VCG.
- חשב את סכום התשלומים של כל השחקנים; נסמן סכום זה ב S .
- חשב את העלות של תת-הקבוצה הנבחרת; נסמן עלות זו ב C .
- גבה מכל שחקן i תשלום $p_i * C / S$.

מטרת ההכפלה בשלב האחרון היא לוודא שהמכרז הוא מאוזן תקציבית - סכום התשלומים של כל השחקנים אחרי ההכפלה שווה לעלות.

- א. האם מכרז SN אמיתי? הוכיחו או הפריכו.
ב. האם מכרז SN יעיל פארטו (בהנחה שכל השחקנים אומרים אמת)? הוכיחו או הפריכו.

שאלה 4: ערך שאפלי-שיויוני

בסקרי דעת-קהל שנעשו לאחרונה, התברר שאנשים רבים נוטים לתמוך בכלל-התשלום הבא, שנקרא "שאפלי-שיויוני" (egalitarian-Shapley):

- חשב את ערך שאפלי של כל שחקן;
 - חשב את העלות הממוצעת לכל שחקן (העלות הכוללת / מספר השחקנים);
 - גבה מכל שחקן את הממוצע בין א לבין ב (לדוגמה, אם העלות הכוללת 66, יש שלושה שחקנים, וערך שאפלי שלך הוא 32, אז התשלום שלך יהיה הממוצע בין 66/3 לבין 32, כלומר 27).
- הוכיחו שכלל-התשלום הזה מקיים בדיוק שני עקרונות מתוך שלושת העקרונות של שאפלי.
- מדוע לדעתכם לא מתקיים העקרון השלישי?

שאלה 5: בעיית מסלול-ההמראה ובעיית שיתוף-הנסיעות

הראו שאפשר להגיע לנוסחה של התשלומים בבעיית מסלול-ההמראה, מתוך הנוסחה של התשלומים בבעיית שיתוף-הנסיעות עם סדר הורדה קבוע (כלומר בעיית מסלול-ההמראה היא מקרה פרטי של בעיית שיתוף-הנסיעות).

שאלה 2: אלגוריתם אקראי לחישוב ערך שאפלי

כזכור, כשמספר השחקנים גדול, חישוב ישיר של ערך שאפלי עלול לקחת הרבה זמן. אחד הפתרונות הוא לחשב את ערך שאפלי בקירוב, ע"י האלגוריתם האקראי הבא:

- חזור הרבה פעמים:

- בחר פרמוטציה אקראית P
- חשב את העלויות השוליות של כל השחקנים בפרמוטציה P
- חשב את הממוצע של כל העלויות השוליות בחישובים הקודמים.

א. כיתבו תוכנית בפייתון המבצעת את האלגוריתם האקראי הנ"ל.

ב. בידקו את התוכנית שלכם על בעיה כלשהי עם 3 שחקנים (למשל אחת הבעיות שפתרנו בשיעור). עד כמה התוצאות קרובות לתוצאות המדויקות?

ג. בידקו את התוכנית שלכם על בעיה כלשהי של עלות מסלול-המראה, עם 30 שחקנים. עד כמה התוצאות קרובות לתוצאות המדויקות?

שאלה 5: איחוד מפלגות

[נכתב לקראת הבחירות לכנסת, אדר א ה'תשע"ט]

שלוש מפלגות קטנות שוקלות להתאחד למפלגה אחת לקראת הבחירות, אבל הן לא מצליחות להסכים על קביעת המקומות ברשימה המשותפת. סקרי דעת-קהל אמינים מראים ש:

- כל אחת מהמפלגות לא עוברת את אחוז החסימה כשהיא רצה לבד.

ברוך ה' חונן הדעת

- המפלגה המאוחדת מקבלת 10 מנדטים.
- אם רק מפלגות א+ב מתאחדות, הן מקבלות 4 מנדטים; ב+ג - 5 מנדטים, ג+א - 6 מנדטים. עיזרו למפלגות למצוא פתרון הוגן לחלוקת המקומות בעשירה הראשונה.