יום שבת י"ג חשון תשפ"א
איתי בן משה

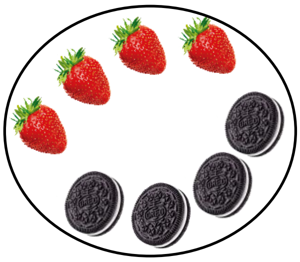
אלגוריתמים כלכליים / מטלה 2

שאלה 1: שיקולים אסטרטגיים באלגוריתם חלוקה

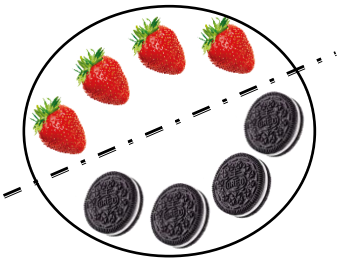
א. אתם חולקים עוגה עם עוד מישהו בשיטת "חתוך ובחר", כאשר אתם החותכים. הצלחתם להשיג מידע מדוייק על פונקציית הערך של השחקן השני. איך תחתכו את העוגה באופן שייתן לכם את הערך הגבוה ביותר האפשרי? הדגימו מצב שבו תוכלו להשיג 100% מהערך הכולל שלכם, ומצב אחר שבו תוכלו להשיג רק 50% מהערך הכולל שלכם.

נניח כי אבי ודני רוצים לחלק ביניהם עוגה, המכילה עוגיות אוראו ותותים. אבי מאוד אוהב עוגיות אוראו, ועבורו שוויה של פרוסת עוגה עם אוראו מוערכת ב3 פרוסות עוגה עם תות.
דני לעומתו מאוד אוהב תות, ועבורו שוויה של פרוסת עוגה עם תות מוערכת באופן דומה ב3 פרוסות עוגה עם אוראו - אבי יודע נתון זה

פיזור העוגיות והתותים בעוגה



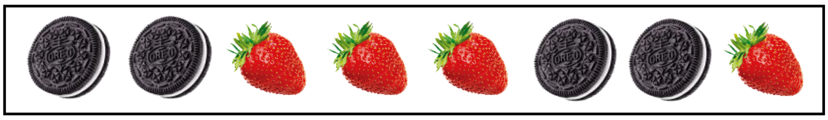
מאחר ואבי יודע מהי פונקציית הערך של דני, ובכך שמבחינת דני, השווי של עוגיות האוראו שולי בעיניו, אבי יעדיף לחלק את העוגה כך שבחלק אחד יהיו 4 פרוסות עם אוראו, ובחלק השני יהיו 4 עם תות.



דני מבחינתו יבחר את החלק המכיל את 4 התותים ויהיה מרוצה מחלקו, מאחר שמבחינתו, הוא מקבל את מלוא ערך העוגה בעיניו, וכן אבי יקבל את מלוא ערך העוגה בעיניו.

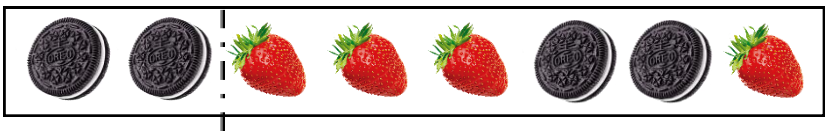
עם זאת, נראה שבפיזור ובמבנה אחר של העוגה, אבי לא היה מקבל את מלוא הערך בעיניו, למשל:

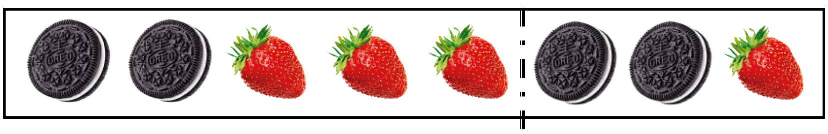
("עוגת פס")



בחלוקה זו, לא משנה באיזו דרך יבחר אבי לחתוך את העוגה (כל עוד מדובר בחיתוך רציף), הוא תמיד יוכל לקבל לכל היותר רק 50% מערך העוגה בעיניו, עקב פיזור התוספות בעוגה, וזאת למרות שהוא יודע מהי פונקציית הערך של דני, אך אין באפשרותו לנצל את המידע המוקדם שברשותו.

לכן בפיזור כזה של העוגה, אבי יעדיף לחלק את העוגה באחת משני הצורות הבאות:





אגב, נראה שבפיזור עוגה שכזה, דווקא דני ירוויח, ויוכל לבחור ערך עוגה גבוה יותר מ-50% בעיניו, ובכלל ערך גבוה משמעותית מסך העוגה כולה. (כלומר הוא יוכל לבחור 3 תותים, ובסך הכל 6/5 תוספות מכלל התוספות בעוגה)

ב. אתם חולקים עוגה עם עוד $n-1$ אנשים בעזרת אלגוריתם אבן-פז. לאחר שביצעתם תחקיר מקיף על האנשים האחרים בחלוקה, אתם יודעים במדוייק את פונקציות הערך שלהם. מה תעשו בכל צעד באלגוריתם, על-מנת להשיג את הערך הגבוה ביותר האפשרי? הדגימו מצב שבו תוכלו להשיג 100% מהערך הכולל שלכם, ומצב אחר שבו תוכלו להשיג רק 50% מהערך הכולל שלכם.

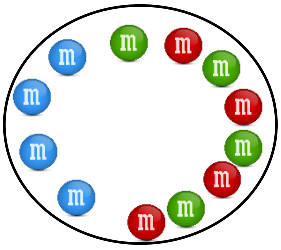
השלבים באלגוריתם אבן-פז, סיבוכיות $O(n \cdot \log n)$

- כל שחקן מחלק את השטח לשני חלקים בשווי 1/2 בעיניו (פרופורציונאלית).
- חותכים את השטח בחציון של הקווים.
- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.
- מחלקים כל חצי ברקורסיה וממשיכים בתהליך.

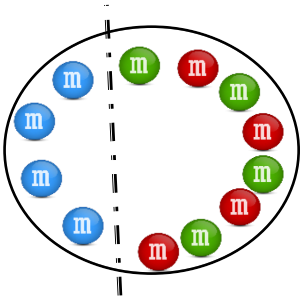
מאחר ואנחנו יודעים את פונקציות הערך של כל שאר המשתתפים, אזי שבכל צעד באלגוריתם נוכל לחלק את העוגה בצורה הרווחית ביותר עבורנו (ככל שפיזור ומבנה העוגה יאפשרו זאת, לעיתים נוכל באמצעות צעד אחד לקבל את מלוא הערך מבחינתנו), ועדיין שאר המשתתפים יהיו שמחים בחלקם מאחר והם יקבלו **חלק מהעוגה שבעיניהם שווה לפחות לחלק השני**

כדי להמחיש את ההסבר, נראה דוגמא עבור שלושה משתתפים: אבי, דני ויוסי

כל השלושה חובבי סוכריות M&M, לכל אחד העדפה לצבע השוקולד: אבי אוהב את השוקולדים הכחולים, דני את הירוקים ויוסי את הירוקים. נסתכל על העוגה הבאה

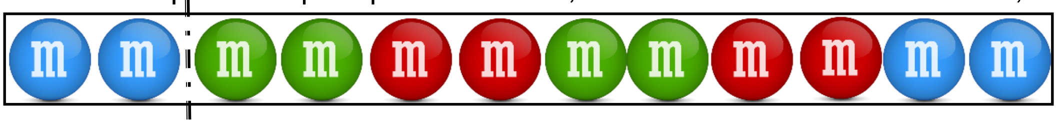


כאשר נגיע ראשונים לחתוך את העוגה, ובידינו המידע אודות פונקציות הערך עבור כל המשתתפים, קל לראות שנעדיף לחתוך את העוגה כך שבחלק אחד יהיו 4 הסוכריות הכחולות, ובחלק השני תהיה שאר העוגה, על כל הסוכריות שבה.



יתר המשתתפים ישמחו בחלוקה, מאחר ובחלק שלהם נמצא מלוא הערך בעיניהם, ולכן האלגוריתם ימשיך בין שאר המשתתפים, בעוד המשתמש הראשון מחזיק ב100% מערך העוגה בעיניו.

עם זאת, נראה שבפיזור ובמבנה אחר של העוגה, היינו מצליחים לקבל רק 50% מערך העוגה:



בחלוקה זו, לא משנה באיזו דרך נבחר לחתוך את העוגה (כל עוד מדובר בחיתוך רציף), תמיד נוכל לקבל לכל היותר 50% מערך העוגה, עקב פיזור התוספות בעוגה, וזאת למרות שאנחנו יודעים מהי פונקציית הערך של כל אחד מהמשתתפים.

כל ניסיון חלוקה אחר של העוגה יגרום לשאר השחקנים לחוש (ובצדק), שהחלק שלהם אינו לפחות $\frac{1}{n}$ ולכן במסגרת האלגוריתם, יתמודדו שחקנים נוספים עם המשתמש הראשון בחלקו בעוגה.