# GIÁ TRỊ RIÊNG, VÉC-TƠ RIÊNG

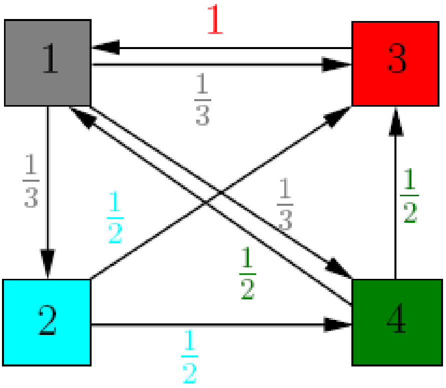
Tran Van Long

AI Academy Vietnam

12/10/2020

# Nội dung

# Thuật toán xếp hạng trang web - PageRank [1]




Gọi $x_1, x_2, x_3, x_4$ là trọng số của các trang web.

$$\begin{cases} x_1 &= x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= \frac{1}{3}x_1 \\ x_3 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

[1] (Tài liệu 1)

# Thuật toán xếp hạng trang web - PageRank

Đặt ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Giả sử trọng số ban đầu như nhau
$v_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^T$
Sau bước 1 trọng số là

$v_1 = Av_0 = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.083 \\ 0.333 \\ 0.208 \end{pmatrix}$

Sau bước thứ $k$ trọng số là
$v_k = Av_{k-1} = A^k v_0$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0.437 \\ 0.125 \\ 0.271 \\ 0.167 \end{pmatrix}; v_4 = \begin{pmatrix} 0.396 \\ 0.118 \\ 0.295 \\ 0.191 \end{pmatrix}; v_8 = \begin{pmatrix} 0.386 \\ 0.130 \\ 0.290 \\ 0.194 \end{pmatrix}; v_{100} = \begin{pmatrix} 0.387 \\ 0.129 \\ 0.290 \\ 0.194 \end{pmatrix}$

Dãy véc-tơ trọng số $\{v_k\}$ hội tụ đến véc-tơ "cân bằng" $v^*$ thỏa mãn

$$Av^* = v^*.$$

# Giá trị riêng, véc-tơ riêng [2]

## Định nghĩa

Véc-tơ riêng của ma trận $A$ vuông cấp $n$ là một véc-tơ $x \neq 0$ sao cho

$$Ax = \lambda x$$

với $\lambda$ là một số.
Số $\lambda$ gọi là một giá trị riêng nếu tồn tại véc-tơ $x \neq 0$ sao cho $Ax = \lambda x$, và $x$ gọi là véc-tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$.

**Chú ý:** Véc-tơ riêng là véc-tơ khác 0, giá trị riêng có thể bằng 0.

[2] (Tài liệu 2)

# Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Kiểm tra các véc-tơ $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ và $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ có là các véc-tơ riêng không?

Ta có $u \neq 0$ và

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5u$$

Vậy $u$ là véc-tơ riêng của $A$ ứng với giá trị riêng $\lambda = 5$.

Ta có $v \neq 0$ và

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda v, \quad \forall \lambda$$

Vậy $v$ không là véc-tơ riêng của $A$.

# Không gian riêng

Giả sử $\lambda$ là một giá trị riêng của ma trận $A$ vuông cấp $n$,

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

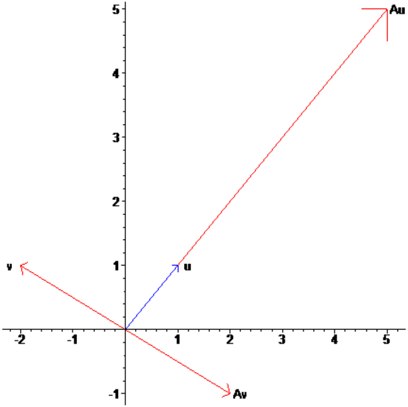
## Định nghĩa

Tập tất cả các nghiệm của hệ thuần nhất $(A - \lambda I)x = 0$ gọi là **không gian riêng** ứng với giá trị riêng $\lambda$, ký hiệu $E_\lambda$ (bao gồm véc-tơ 0 và các véc-tơ riêng ứng với $\lambda$).

# Ví dụ

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. $Au = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5u$

$Av = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -v$



# Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ có giá trị riêng $\lambda = 2$. Tìm không gian riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 2$.

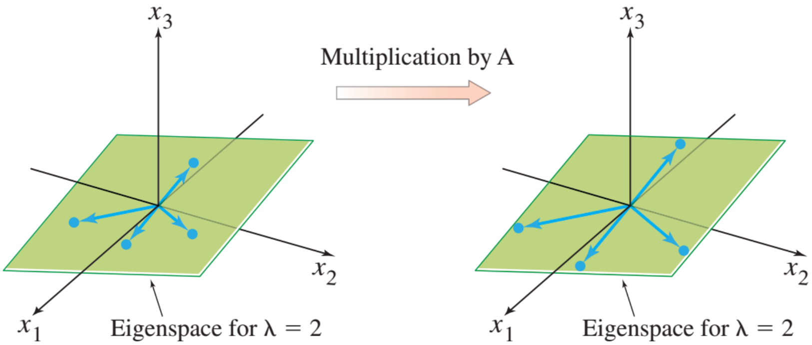
$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

$(A - 2I)x = 0 \Rightarrow 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 + 6x_3$

Nghiệm tổng quát là $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cơ sở của không gian riêng có cơ sở là $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

# Không gian riêng



# Đa thức đặc trưng [3]

**Tìm các giá trị riêng** của ma trận $A$ vuông cấp $n$.
$\lambda$ là giá trị riêng thì có $x \neq 0$ để $(A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)$ không khả nghịch nên

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ là các giá trị riêng.
Véc-tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_k$, ta giải hệ $(A - \lambda_k I)x = 0$ tìm nghiệm khác 0.

[3] (Tài liệu 2)

# Ví dụ

$\sum \lambda = \text{trace}(A)$

Tìm các giá trị riêng, véc-tơ riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Đa thức đặc trưng

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 40\lambda + 36$$

Giá trị riêng $-\lambda^3 + 13\lambda^2 - 40\lambda + 36 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 2.$

# Ví dụ

Với $\lambda_1 = 9$,

$$A - 9I = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, (A-9I)x = 0 \Rightarrow x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_1 \neq 0$$

Với $\lambda_2 = 2$, $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

$$(A-2I)x = 0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, x_1^2 + x_3^2 \neq 0.$$

# Tính chất

**Định lý**

Nếu các véc-tơ riêng $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ứng với các giá trị riêng **phân biệt** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ của ma trận $A$ vuông cấp n thì tập các véc-tơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ độc lập tuyến tính.

**Hệ quả**

Nếu các véc-tơ riêng $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ứng với các giá trị riêng **phân biệt** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ của ma trận $A$ vuông cấp n thì tập các véc-tơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ là một cơ sở gồm các véc-tơ riêng.

# Tính chất

## Định lý

Ma trận $A$ vuông cấp $n$ có các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ thì

$$\det(A) = \lambda_1.\lambda_2.\ldots.\lambda_n,$$

$$Trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

## Tính chất

Ma trận $A$ vuông cấp $n$ có giá trị riêng $\lambda$ thì $A^k$ có giá trị riêng $\lambda^k$. Hơn nữa, ma trận $p(A)$ có giá trị riêng $p(\lambda)$ với mọi đa thức $p(x)$.

# Tính chất

### Đa thức đặc trưng

Hai ma trận $A$ và $B$ tương tự nhau (tồn tại $T$ không suy biến để $B = T^{-1}AT$) thì $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I) = P_B(\lambda)$.

### Định lý Caley-Hamilton

Ma trận $A$ vuông cấp $n$ có đa thức đặc trưng $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Khi đó $P(A) = 0$.

# Chéo hóa ma trận [4]

Ma trận $A$ chéo hóa được nếu có một cơ sở gồm các véc-tơ riêng.
$A$ chéo hóa được thì $A = PDP^{-1}$ với ma trận $P$ có các cột là các véc-tơ riêng và $D$ là ma trận **đường chéo** gồm các giá trị riêng.
$P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ là các véc-tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$
\begin{aligned}
AP &= [Av_1, Av_2, \dots, Av_n] = [\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n] \\
&= [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD
\end{aligned}
$$

Lũy thừa ma trận

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

[4] (Tài liệu 2)

# Ví dụ

Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

Với $\lambda_1 = 9$, $x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 v_1$

Với $\lambda_2 = 2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 v_2 + x_3 v_3.$

$P = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

# Phương pháp Power (lũy thừa) [5]

Giả sử ma trận $A$ vuông cấp $n$ có giá trị riêng $\lambda_k$ thỏa mãn

$$|\lambda_1| > |\lambda_k|, \ \forall k \geq 2.$$

Gọi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là cơ sở gồm các véc-tơ riêng,

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

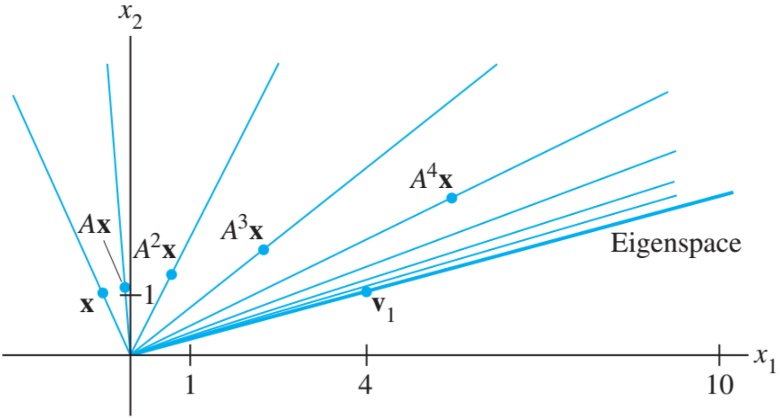
$$A^k x = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n$$

$$\frac{A^k x}{\lambda_1^k} = c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k v_n \approx c_1 v_1$$

Véc-tơ $A^k x$ gần với hướng véc-tơ riêng $v_1$.

[5] (Tài liệu 5)

# Phương pháp Power (lũy thừa)



# Phương pháp Power (lũy thừa)

**Thuật toán**

- Chọn véc-tơ ban đầu $x_0$ có trị tuyệt đối lớn nhất ở thành phần bằng 1.
- Với mỗi bước lặp $k = 1, 2, \ldots$
  - Tính véc-tơ $Ax_k$,
  - Tìm $\mu_k$ là thành phần của véc-tơ $Ax_k$ có trị tuyệt đối lớn nhất,
  - Tính véc-tơ $x_{k+1} = \dfrac{Ax_k}{\mu_k}$
- Dãy $\mu_k \approx \lambda_1$, $x_k \approx v_1$

# Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ và véc-tơ $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. $Ax_0 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu_1 = 5, x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4 \end{pmatrix}$
2. $Ax_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1.8 \end{pmatrix}, \mu_2 = 8, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.225 \end{pmatrix}$
3. $Ax_2 = \begin{pmatrix} 7.125 \\ 1.45 \end{pmatrix}, \mu_3 = 7.125, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2035 \end{pmatrix}$
4. $Ax_7 = \begin{pmatrix} 7.0 \\ 1.4 \end{pmatrix}, \mu_8 = 7.0, x_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

# Phương pháp Power nghịch đảo

Phương pháp Power nghịch đảo cho phép tính tất cả các giá trị riêng, véc-tơ riêng.
Chọn số $\alpha$ gần giá trị riêng $\lambda$ cần tính. Ma trận $B = (A - \alpha I)^{-1}$ có các giá trị riêng $\dfrac{1}{\lambda - \alpha}$.
Chọn giá trị ban đầu $x_0$
Tính $y_k = Bx_k$ tương đương với $(A - \alpha I)y_k = x_k$ ta giải hệ để tính $y_k$
Tính $\mu_k$ là thành phần có trị tuyệt đối lớn nhất của $y_k$ và tính $x_{k+1} = \dfrac{1}{\mu_k} y_k$
Dãy $\nu_k = \alpha + \dfrac{1}{\mu_k} \approx \lambda$ và $x_k \approx v$

# Tỉ số Rayleigh cho ma trận đối xứng

Cho ma trận $A$ đối xứng, vuông cấp $n$ có các giá trị riêng $\lambda_{\min} = \lambda_n < \lambda_{n-1} < \cdots < \lambda_1 = \lambda_{\max}$. Ta cần tìm Min, Max của tỉ số

$$r(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Ta có Min $r(x) = \lambda_{\min}$ tại $x = v_1$ và Max $r(x) = \lambda_{\max}$ tại $x = v_n$.
Tổng quát, $\max\{r(x) :\ x^T v_1 = 0, \ldots, x^T v_{k-1} = 0, x^T x = 1\} = \lambda_k$ tại $x = v_k$.

# Thư viện numpy.linalg

**Matrix eigenvalues**

- linalg.eig(a): Compute the eigenvalues and right eigenvectors of a square array.
- linalg.eigh(a[, UPLO]): Return the eigenvalues and eigenvectors of a complex Hermitian (conjugate symmetric) or a real symmetric matrix.

# Thực hành

Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Sử dụng hàm *eig* tìm các giá trị riêng và véc-tơ riêng của ma trận $A$.
b) Xây dựng ma trận đường chéo $D$ từ các giá trị riêng.
c) Tìm ma trận $P$ gồm các véc-tơ riêng tương ứng.
d) Thực hiện phép nhân $PDP^{-1}$ và so sánh với $A$.

# Thực hành

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 62 & -38 & -4 & -100 \\ -38 & 36 & -2 & 64 \\ -4 & -2 & 2 & 6 \\ -100 & 64 & 6 & 166 \end{bmatrix}$$

a) Sử dụng hàm *eigh* tìm các giá trị riêng và véc-tơ riêng của ma trận $A$.
b) Xây dựng ma trận đường chéo $D$ từ các giá trị riêng.
c) Tìm ma trận $V$ gồm các véc-tơ riêng tương ứng.
d) Thực hiện phép nhân $VDV^T$ và so sánh với $A$.

# Thực hành phương pháp Power

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 62 & -38 & -4 & -100 \\ -38 & 36 & -2 & 64 \\ -4 & -2 & 2 & 6 \\ -100 & 64 & 6 & 166 \end{bmatrix}$$

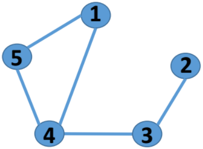
Sử dụng thuật toán Power tìm giá trị riêng có trị tuyệt đối lớn nhất và véc-tơ riêng tương ứng.

# Phân vùng phổ - Spectral Clustering [6]

Sử dụng các giá trị riêng và véc-tơ riêng cho ma trận Laplace của đồ thị để phân nhóm (cụm) của đồ thị.

Cho đồ thị $G = (V, W)$ vô hướng với $|V| = n$ và ma trận trọng số đối xứng $w_{ij} = w_{ji} \geq 0$ đo độ "tương tự" giữa đỉnh $v_i$ và đỉnh $v_j$.

Gọi $D$ là ma trận đường chéo với $d_{ii} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$




$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

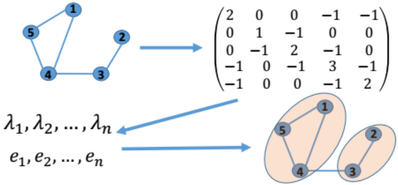
[6](Tài liệu 1)

# Ma trận Laplace

Ma trận Laplace $L = D - W$

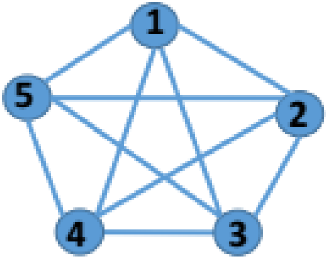
$$L = D - W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính các $\lambda_i, e_i$ rồi tìm các nhóm.



# Ví dụ

Xây dựng ma trận Laplace của đồ thị sau




$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

# Tính chất 1

## Tính chất

Cho $L$ là ma trận Laplace của đồ thị $G = (V, W)$ có các tính chất sau:

a) Với mọi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ thì

$$f^T L f = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} w_{ij}(f_i - f_j)^2$$

b) Ma trận $L$ đối xứng, xác định không âm.

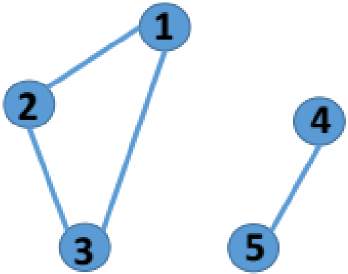
c) $L$ có giá trị riêng 0 với véc-tơ riêng là 1 (các thành phần bằng 1).

d) $L$ có các giá trị riêng thỏa mãn $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

# Tính chất 2

## Thành phần liên thông

Số nghiệm bội của giá trị riêng $\lambda_1 = 0$ là số thành phần liên thông $A_1, \ldots, A_k$ của đồ thị $G$. Không gian riêng tương ứng có cơ sở là các véc-tơ $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_k}$.




$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận Laplace có giá trị riêng $\lambda_1 = 0$ (bội 2) với các véc-tơ riêng $(1, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1)$.

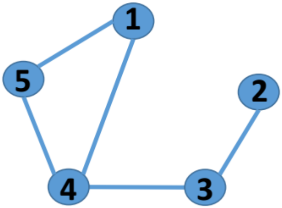
# Thuật toán phân nhóm

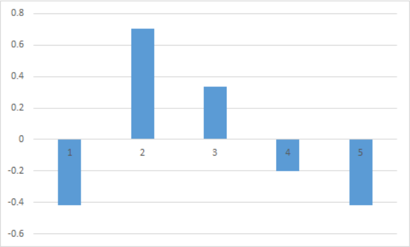
**Input:** Đồ thị vô hướng với $n$ đỉnh, trọng số $w_{ij}$, số nhóm $k$.
**Output:** $k$ nhóm $C_1, C_2, \ldots, C_k$

- Xây dựng ma trận Laplace $L = D - W$
- Tìm $k$ véc-tơ riêng $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ứng với $k$ giá trị riêng nhỏ nhất của $L$
- Gọi $V = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ gồm các véc-tơ riêng.
- Sử dụng thuật toán phân cụm $k - means$ tìm các nhóm $C_1, C_2, \ldots, C_k$
- Gán đỉnh thứ $i$ tương ứng với các nhóm.

# Ví dụ

Phân nhóm của đồ thị




$$v_1 = (-0.4472, -0.4472, -0.4472, -0.4472, -0.4472)$$

$$v_2 = (-0.4193, 0.7024, 0.3379, -0.2017, -0.4193)$$

# Chuẩn hóa ma trận Laplace

Chuẩn hóa ma trận Laplace bởi phép biến đổi đối xứng và ransom walk (di động ngẫu nhiên)

$$\begin{aligned} L_{sym} &= D^{-1/2} L D^{-1/2} = I - D^{-1/2} W D^{-1/2} \\ L_{rw} &= D^{-1} L = I - D^{-1} W \end{aligned}$$

Các tính chất của ma trận $L_{sym}, L_{rw}$ tương tự với ma trận $L$.

# Thuật toán phân nhóm với ma trận chuẩn hóa

**Input:** Đồ thị vô hướng với $n$ đỉnh, trọng số $w_{ij}$, số nhóm $k$.
**Output:** $k$ nhóm $C_1, C_2, \ldots, C_k$

- Xây dựng ma trận Laplace $L = D - W$
- Tìm $k$ véc-tơ riêng $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ứng với $k$ giá trị riêng nhỏ nhất của $Lv = \lambda Dv$
- Gọi $V = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ gồm các véc-tơ riêng.
- Sử dụng thuật toán phân cụm $k - means$ tìm các nhóm $C_1, C_2, \ldots, C_k$
- Gán đỉnh thứ $i$ tương ứng với các nhóm.

# Ứng dụng phân nhóm

**Input:** Dữ liệu $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, số nhóm $k$
**Output:** Các nhóm $C_1, C_2, \ldots, C_k$.
Xây dựng ma trận trọng số $W$

- Tính độ đo tương tự $w_{ij} = \exp(-||x_i - x_j||^2/\sigma^2)$
- $\varepsilon-$ lân cận
- $k-$ láng giềng gần nhất

# Bài tập 1

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

a) Tìm các giá trị riêng, véc-tơ riêng của $A$.

b) Tìm ma trận $P$ và ma trận đường chéo $D$ sao cho $A = PDP^{-1}$.

c) Tính lũy thừa ma trận $A^n$.

# Bài tập 2

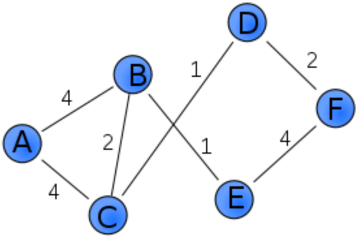
Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Tìm các giá trị riêng, véc-tơ riêng của $A$.

b) Tìm ma trận $P$ và ma trận đường chéo $D$ sao cho $A = PDP^{-1}$.

# Bài tập 3

Cho đồ thị có trọng số như hình vẽ




a) Viết ma trận có trọng số $W$ của đồ thị trên.
b) Viết ma trận Laplace $L$ của đồ thị trên.
c) Tìm các giá trị riêng và véc-tơ riêng của ma trận $L$.
d) Sử dụng véc-tơ riêng thứ hai nhỏ nhất $v_2$ để phân hai nhóm. Tìm các nhóm của đồ thị.

# Bài tập 4

Sử dụng hàm make-circles trong sklearn (sklearn.datasets.make-circles) tạo một tập dữ liệu với $n = 100$ quan sát.
Sử dụng dữ liệu trên xây dựng ma trận trọng số $W$ với

$$W_{i,j} = \exp\left( -\, ||x_i - x_j||^2 / \sigma^2 \right)$$

a) Tìm ma trận Laplace $L$ từ ma trận trọng số $W$.
b) Thực hiện thuật toán phân tích nhóm với $k = 2$.
c) Biểu diễn các nhóm đã nhận được từ dữ liệu ban đầu.

# Bài tập 5

Phân tích nhóm đối với dữ liệu Iris với số nhóm $k = 3$.
Sử dụng thuật toán phân tích nhóm bằng phương pháp phân tích phổ với $k = 3$ nhóm.

# Tài liệu tham khảo

1. Charu C. Aggarwal; Linear Algebra and Optimization for Machine Learning, Springer, 2020.
2. David C. Lay, Steven R. Lay, Judi J. McDonald; Linear Algebra and Its Applications, Fifth edition, Pearson, 2016
3. Gilbert Strang; Linear Algebra and Learning from Data, Wellesley- Cambridge Press, 2019.
4. Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe; Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares, Cambridge University Press, 2018.
5. Tom Lyche; Numerical Linear Algebra and Matrix Factorizations, Springer, 2020.
6. Hyun-Seok Son; Linear Algebra Coding with Python, 2020.