$$\varphi = \arcsin\frac{|\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

**Пример 4.** Можно ли в векторных пространствах $\mathbb{R}^2$ (столбцов из двух действительных чисел) и $P_2$ (многочленов степени не выше второй) задать скалярное произведение формулами **(1)** или **(2)**, приведенными в таблице?

| Пр-во | Формула (1) | Формула (2) |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ | $(x,y)=4x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+3x_2y_2$ | $(x,y)=2x_1y_1-4x_1y_2-4x_2y_1-3x_2y_2$ |
| $P_2$ | $(p,q)=p(1)q'(1)+p'(1)q(1)-2p'(0)q'(0)$ | $(p,q)=\int\limits_{-1}^{1}[p(x)q(x)+p'(x)q'(x)]dx+p(1)q(1)$ |

Если можно, то найти угол между первыми двумя элементами стандартного базиса.

*Решение*. Рассмотрим ф о р м у л у **(1)** для пространства $\mathbb{R}^2$. Эта формула ставит в соответствие элементам $x=(x_1 \quad x_2)^T$, $y=(y_1 \quad y_2)^T$ пространства $\mathbb{R}^2$ действительное число. Проверяем, удовлетворяет ли эта формула аксиомам 1–4 скалярного произведения. Сначала проверяем выполнение аксиомы 1. Поменяем местами множители $x$ и $y$:

$$(y,x)=4y_1x_1-2y_1x_2-2y_2x_1+3y_2x_2=4x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+3x_2y_2.$$

Получили выражение в правой части формулы **(1)**, т.е. $(y,x)=(x,y)$. Значит, аксиома 1 выполняется. Заметим, что выражение в правой части **(1)** симметрическое относительно $x$ и $y$. Оно не меняется при одновременной замене буквы $x$ на букву $y$, а буквы $y$ на букву $x$. Это и обеспечивает коммутативность.

Вместо аксиом 2 и 3 проверяем линейность по первому множителю. Для произвольных $x,y,z\in\mathbb{R}^2$ и любых чисел $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ получаем

$$(\alpha x+\beta y,z)=4(\alpha x_1+\beta y_1)z_1-2(\alpha x_1+\beta y_1)z_2-2(\alpha x_2+\beta y_2)z_1+3(\alpha x_2+\beta y_2)z_2=$$

$$=\alpha(4x_1z_1-2x_1z_2-2x_2z_1+3x_2z_2)+\beta(4y_1z_1-2y_1z_2-2y_2z_1+3y_2z_2)=\alpha(x,z)+\beta(y,z).$$

Линейность доказана, следовательно, аксиомы 2 и 3 выполняются. Вместо приведенного доказательства достаточно заметить, что выражение в правой части **(1)** линейно по переменным $x_1, x_2$:

$$4x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+3x_2y_2=x_1(4y_1-2y_2)+x_2(-2y_1+3y_2).$$

Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат и представляем полученную квадратичную форму в матричном виде (см. разд. 7 в [7])

$$(x,x)=4x_1^2-2x_1x_2-2x_2x_1+3x_2^2=4x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2=(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

Угловые миноры матрицы этой квадратичной формы положительные $\Delta_1=4>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=8>0$. По критерию Сильвестра, квадратичная форма положительно определена, т.е. $(x,x)>0$ для всех $x\ne o$. Значит, аксиома 4 для формулы **(1)** выполняется, поскольку $(x,x)\ge 0$ для всех $x\in\mathbb{R}^2$ и $(x,x)=0$ только при $x=o$. Таким образом, формула **(1)** задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Находим угол $\varphi$ между первыми двумя векторами стандартного базиса $\mathbb{R}^2$, т.е. между векторами $e_1=(1\quad 0)^T$ и $e_2=(0\quad 1)^T$. Вычисляем косинус угла по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(e_1,e_2)}{\sqrt{(e_1,e_1)}\sqrt{(e_2,e_2)}}=\frac{4\cdot1\cdot0-2\cdot1\cdot1-2\cdot0\cdot0+3\cdot0\cdot1}{\sqrt{4\cdot1^2-2\cdot1\cdot0+3\cdot0^2}\sqrt{4\cdot0^2-2\cdot0\cdot1+3\cdot1^2}}=\frac{-2}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}.$$

Значит, угол между векторами $\varphi=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Рассмотрим ф о р м у л у **(2)** для пространства $\mathbb{R}^2$. Выражение в правой части формулы **(2)** симметрическое относительно $x$ и $y$, а также линейно по переменным $x_1,x_2$. Значит, аксиомы 1–3 выполняются. Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат и представляем полученную квадратичную форму в матричном виде

$$(x,x)=2x_1^2-8x_1x_2-3x_2^2=(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}1 & -4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

Вычисляем угловые миноры матрицы квадратичной формы $\Delta_1=1>0$, $\Delta_2=-19<0$. По критерию Сильвестра, эта квадратичная форма не является положительно определенной. Значит, аксиома 4 не выполняется. Чтобы в этом убедиться, не обязательно использовать критерий Сильвестра. Достаточно привести пример ненулевого вектора $x$, для которого $(x,x)\le 0$. Например, для $x=(0\quad 1)^T$ имеем $(x,x)=-3$. Значит, аксиома 4 не выполняется. Поэтому формулой **(2)** нельзя задать скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим ф о р м у л у **(1)** для пространства $P_2$. Эта формула ставит в соответствие элементам $p(x)=ax^2+bx+c$, $q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ пространства $P_2$ действительное число. Проверяем, удовлетворяет ли эта формула аксиомам 1–4 скалярного произведения. Сначала проверяем выполнение аксиомы 1. Выражение в правой части **(1)** симметрическое относительно $p$ и $q$. Действительно, при одновременной замене буквы $p$ на букву $q$, а буквы $q$ – на букву $p$, выражение не меняется

$$q(1)p'(1)+q'(1)p(1)-2q'(0)p'(0)=p(1)q'(1)+p'(1)q(1)-2p'(0)q'(0).$$

Значит, формула **(1)** удовлетворяет аксиоме 1.

Выражение в правой части **(1)** линейно по многочлену $p$, т.е. формула **(1)** линейна по первому множителю (аксиомы 2–3 выполняются). Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат $(p,p)=2p(1)p'(1)-2[p'(0)]^2$. Это выражение может быть отрицательным. Например, для многочлена $p(x)=x-1$ имеем $(p,p)=-2$. Значит, аксиома 4 не выполняется. Поэтому формулой **(1)** нельзя задать скалярное произведение в $P_2$.

Рассмотрим формулу **(2)** для пространства $P_2$. Правая часть формулы симметрическая относительно $p$ и $q$, а также линейна по $p$ (из-за линейности интеграла). Поэтому аксиомы 1–3 выполняются. Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат

$$(p,p)=\int_{-1}^{1}\{[p(x)]^2+[p'(x)]^2\}\,dx+[p(1))]^2.$$

Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет неотрицательное значение. Поэтому $(p,p)\ge 0$. Предположим, что $(p,p)=0$, тогда

$$(p,p)=\int_{-1}^{1}[p(x)]^2\,dx+\int_{-1}^{1}[p'(x)]^2\,dx+[p(1))]^2=0.$$

Следовательно, каждое слагаемое равно нулю. Так как многочлен является непрерывной функцией, равенство $\int_{-1}^{1}[p(x)]^2\,dx=0$ возможно только для нулевого многочлена $p(x)\equiv 0$ (см. пример 3 евклидовых пространств). Следовательно, аксиома 4 выполняется. Таким образом, формула **(2)** задает скалярное произведение в $P_2$.

Находим угол $\varphi$ между первыми двумя элементами стандартного базиса $P_2$, т.е. между многочленами $p_1(x)\equiv 1$ и $p_2(x)=x$. Вычисляем скалярные произведения

$$(p_1,p_2)=\int_{-1}^{1}[1\cdot x+0\cdot 1]dx+1\cdot 1=\int_{-1}^{1}xdx+1=1;\quad (p_1,p_1)=\int_{-1}^{1}[1^2+0^2]dx+1^2=2+1=3;$$

$$(p_2,p_2)=\int_{-1}^{1}[x^2+1^2]dx+1^2=\frac{2}{3}+2+1=\frac{11}{3}.$$