

常微分方程式総まとめ

にゃにゃん

2020年11月12日

目次

第1章	はじめに	1
第2章	解析的に常微分方程式を解く	3
2.1	微分の逆操作	3
2.2	変数分離形	4
2.3	同次形	5
2.3.1	発展版同次形	6
2.4	一階線形微分方程式	7
2.4.1	特殊解を見つける	8
2.4.2	定数変化法	9
2.4.3	積分因子	10
2.5	完全形	11
2.5.1	積分因子	12
2.6	ベルヌーイの微分方程式	13
2.7	リカッチの微分方程式	13
2.8	ダランベールの微分方程式	14
2.8.1	クレローの微分方程式	15
2.9	二階線形微分方程式	15
2.9.1	定数係数の二階斉次線形微分方程式	16
2.9.2	定数係数の二階非斉次線形微分方程式	19
2.9.3	標準形	21
2.10	オイラーの微分方程式	24
2.11	定数係数連立微分方程式	26
2.12	級数展開法	27
2.12.1	正則点と特異点・フロベニウスの方法	28
2.12.2	エルミートの微分方程式	29
2.12.3	ルジャンドルの微分方程式	30
2.12.4	ベッセルの微分方程式	31
第3章	数值的に常微分方程式を解く	32
3.1	オイラー法	32
3.2	改良オイラー法(中点法)	33
3.3	ルンゲ・クッタ法	35
3.3.1	一般的なルンゲ・クッタ法	38

第1章 はじめに

これは私が微分方程式の解き方を学んでいく中で「この知識を一度体系的にまとめたい」と思って書いたものです。私の持つ知識の範疇で微分方程式の解き方をできる限り体系的にまとめました。

微分方程式を「解く」作業には大きく分けて2つの種類があります。

- 解析的に解く
- 数值的に解く

「解析的に解く」とはつまり、図 1.1¹のように式変形を使用して解くことを言います。ですが世の中に存在する微分方程式のほとんどは今の人類には解析的に解くことができません。そんな中でも様々な工夫をすることで、「この形の微分方程式なら解ける」ということを増やすことができます。

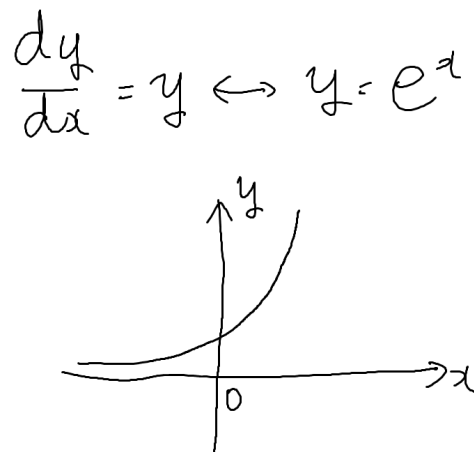


図 1.1: 解析的に解く

「数值的に解く」とは、計算機を用いて微分方程式を近似的に「解く」ことを言います。ここでの「解く」は、何も答えの式が出てくるわけではありません。例えばある x における何かの値 y の数値が、まさに数値として出てくるのです。また、数值的に微分方程式を解いた場合には、求められる解は図 1.2 のように離散的 (図 1.2 ならある決められた値 Δx ごとに y が求まります) です。この図についてはこのあと詳しく解説します。

本書では微分方程式の解き方についてこの2つの全く異なる方法を解説します。この2つの方法は全く異なるため、便宜上解析的に解く方を先に解説しますが、どちらを先に読んでいただいても構いません。

さて、ここでもう一度図 1.2 をご覧ください。これが微分方程式の真髄です。例として出した微分方程式

¹ここでは簡単のため任意定数は1として考えています。

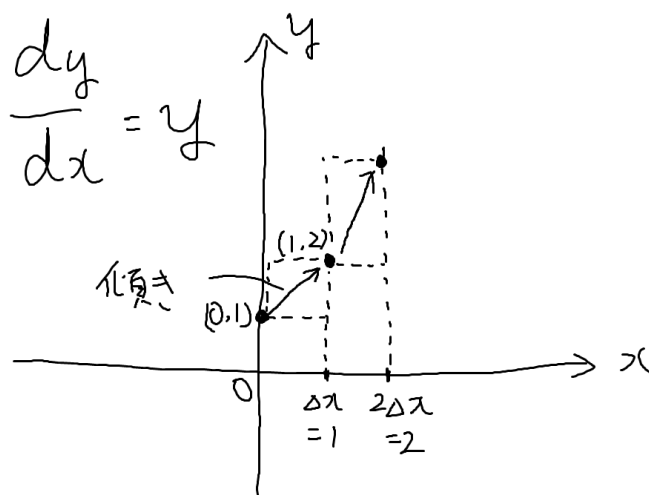


図 1.2: 数値的に解く

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (1.1)$$

をもう一度よく睨んでみると……そうです。これは、

$$(y \text{ の傾き}) = (y \text{ の関数}) \quad (1.2)$$

という形をしています。「そんなの当たり前じゃないか」と思われる方が大半でしょう。でもよく考えてみてください。ある時点 x における y とそのときの傾きがわかれば、嬉しいことがあります。

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x} \Delta x \quad (1.3)$$

右辺には既知の値 (y 、 dy/dx 、 Δx) しかありません。そして左辺を見ると、これまでわからなかった $y(x + \Delta x)$ が現れています。既知の値を使って未知の値 (しかもちょっとだけ x が進んだ値) を求める…漸化式みたいですね (実際漸化式的一种だと思います)。

ここで微分方程式の真髄 (だと私が思っていること) について一般的な言葉で解説しましょう。

「微分方程式はわかっている値を使って「ちょっと先の未来」を知るための方程式である。」

実は解析的に微分方程式を解く場合にはこの真髄が直接役立つことはほぼありません。ですが、「私は今何を解いているのだろう…」と思った時はぜひ思い出してください。「私は未来を知るために微分方程式を解いているのだ」と。

なお、数値的に微分方程式を解くやり方は根本的にこの真髄に従っています。ぜひ覚えておいてください。

第2章 解析的に常微分方程式を解く

第1章でも触れた通り、「解析的に微分方程式を解く」とは、式変形を利用して微分方程式を解くことを言います。ですが、世の中にあるほとんどの微分方程式は解析的に解くことができません。でもできれば解析的に微分方程式が解けたほうが様々な考察がしやすく便利ですね。ということで人類はできるだけ多くの微分方程式を解析的に解くために様々な技法を考えました。ここでは初歩から込み入った話まで、微分方程式を解析的に解く解き方についてお話しします。

2.1 微分の逆操作

まず一番単純な微分方程式を解いてみましょう。こちらの x を関数として求めたいとします。

$$\frac{dy}{dx} = ax + b \quad (2.1)$$

a と b は定数です。これをまず見つめてみましょう。何を意味するでしょうか。

- y の傾きは x に比例する
- y は微分すると x のみの関数になる

この2点に気づけましたでしょうか。「何を当たり前な」とおっしゃらず、まずは一度考えてみてください。結論から言ってしまうと、これは y を微分したものが x のみの関数になるので簡単に解くことができます。どうやって解いたら良いでしょうか。こう書いた方がわかりやすいかもしれません。

$$y' = ax + b \quad (2.2)$$

そうです。 y' から y を求めるのであれば単純に両辺積分すれば良いのです。

$$y = \int (ax + b) dx \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{2}ax^2 + bx + C \quad (2.4)$$

ここで、新たに出てきた C (言ってしまうとただの積分定数ですが) を「任意定数」と言います。今後は C や A を用いて任意定数を表すことにします。この任意定数の数はその微分方程式に出てくる微分項の階数の最大値と一致します。任意定数がこの数だけ入った形の解を「一般解」と言います。それに対して例えば今回であれば $y(0) = 1$ などとして $C = 1$ と決まったときの解を「特殊解」または「特解」と言います。特殊解を決めるときに使う条件を「初期条件」と言います。「初期」とは言っても必ずしも $x = 0$ の場合を考える必要はありません。

はい、これでこの微分方程式が解けてしまいました。微分方程式は基本的に積分操作を用いて解きます。そもそも微分の逆操作は積分でしたね。微分された形の方程式を解くのであればそれに積分を使うことはご納得いただけることでしょう。

両辺積分して解くことができる微分方程式の一般形は以下です。

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (2.5)$$

2.2 変数分離形

セクションの名前は置いておいて、第1章の例として出した微分方程式の少し一般化して定数 k をつけたもの

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad (2.6)$$

を考えてみましょう。これは式2.2と違って右辺に x がいるのが厄介そうです。

とりあえずこの式の意味するところを考えてみましょう。

- y の傾きは y に比例する
- y を微分しても元の x の定数倍である

この2点に気づけましたでしょうか。1つ目は第1章でお話しした「真髄」に関するものです。そして2つ目は式の形をよく睨んで考えついたものです。 y が増えれば増えるほど y の傾きが大きくなる。 y は微分しても (定数を除いて) 形が変わらない。この2点をよく考えると、 y は指数関数ではないか？という考えが浮かぶでしょう。

このように、まず微分方程式をよく見て求める関数のグラフや、関数の数式としての形を推測することが検算の役に立ちます。

では解いていきましょう。まずは ky を左辺に移動させます。

$$\frac{1}{ky} \frac{dy}{dx} = 1 \quad (2.7)$$

そして dx を右辺に移動させ¹

$$\frac{1}{ky} dy = dx \quad (2.8)$$

積分してみましょう。

¹ 「 dy/dx は分数ではないのにこんなに軽々しく移動させて良いのか」と疑問の方もいらっしゃるでしょう。実はこれは本来置換積分の式です。 dx を右辺に移動させずに両辺 x で積分してみましょう。

$\int \frac{1}{ky} \frac{dy}{dx} dx = \int dx$

左辺は見慣れた置換積分の式になりましたね。これを形式的に「 dx を右辺に移動させてインテグラルをつける」としています

$$\int \frac{1}{ky} dy = \int dx \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{k} \ln y = x + C \quad (2.10)$$

あれれ、 $y =$ の形では出てきませんでしたね。でもご心配なさらず。このように式変形しましょう。

$$\begin{aligned} \ln y &= kx + kC \\ y &= e^{kx+kC} \\ y &= Ae^{kx} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで、 $A = e^{kC}$ としました。 A と C は任意定数です。これで $y =$ の形で関数が求められましたね！確かに y は指数関数になりました。

さて、いきなりですがこのような方法を「変数分離」と言います。式 2.8 をご覧ください。左辺には y だけ、右辺には x だけが出てくるように「変数を分離」しています。このように、変数を分離できれば両辺をうまく積分することができるようになります。この方法を「変数分離」、変数分離できる形の微分方程式を「変数分離形」と言います。

変数分離形の一般的な形は以下の通りです。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (2.12)$$

これを、

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx \quad (2.13)$$

とすることで、この微分方程式を解くことができます。なお、 $g(y)$ が恒等的に 0 の場合は $g(y)$ で割ることができません²。というか、そもそも右辺自体が恒等的に 0 になってしまうので全く別の微分方程式になってしまいますね。

2.3 同次形

さて、ここからどんどん微分方程式を解いていきます。これからはまず微分方程式の一般的な形を示して、その後にその微分方程式を解いていきます。

² 「 $g(y)$ が一瞬でも 0 を通る場合はどうなんだ」という鋭いツッコミをされる方もいらっしゃるでしょう。結論から言えば大丈夫です。 $g(y_0) = 0$ となる y_0 が存在するとしましょう。

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot 0$$

となり、右辺が 0 なので定数関数 $y = y_0$ は明らかにこの微分方程式の解ですね。ではそれ以外の解を考えてみましょう。定数関数 $y = y_0$ 以外の解で、ある値 $y = y_0$ を通ることがあるとまずいです。一瞬 $g(y) = 0$ となる関数 $g(y)$ で除算していることになります。しかし、「解の一意性」を考えるとこのようなことはありません。定数関数 $y = y_0$ 以外の関数 y である値 $y = y_0$ を通るとすると、この 2 つの関数 y は xy 座標で描いた際に交差、または接していることになります。ここで初期条件 $x = x_0$ で $y = y_0$ を考えてみましょう。あれれ、どちらの関数を解として良いかわからなくなってしまいましたね。どちらの関数も (x_0, y_0) を通ります。このようなことがないことを保証するのが「解の一意性」です。微分方程式の解である関数 y は互いに交差や接触をしないのです。ですので、ある点 $y = y_0$ で $g(y_0) = 0$ となる $g(y)$ があっても、定数関数 $y = y_0$ だけ別に考えれば良いというわけです。しかも、この定数関数 $y = y_0$ は、導いた一般解の関数 y に含まれます。例えば $y = Ae^{kx}$ であれば $k = 0$ の場合ですね。ですので、結論としては恒等的に 0 となる関数 g 以外であれば何も考えずに割ってしまっても良いのです。

「同次形」という形の微分方程式の一般形は以下です。

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.14)$$

$u = y/x$ として du/dx を計算してみると、

$$\frac{du}{dx} = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} \quad (2.15)$$

となります。ここから後の式変形のために dy/dx を取り出すと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \quad (2.16)$$

となります。これを元の微分方程式の左辺に代入して少し変形してみましょう。右辺は y/x を u に置換します。

$$\frac{du}{dx}x + u = f(u) \quad (2.17)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(f(u) - u) \quad (2.18)$$

おっと、これは変数分離形ではないでしょうか。変数分離形の基本形は式 2.12 の通りでした。この y を u に置換して見ると、右辺は x の関数と u の関数の積で書いてあることがわかるでしょう。実際に変数分離で解いてみます。

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \quad (2.19)$$

このように積分を実行することで、 u が求められます。 $u = y/x$ でしたから、求まった u に x を掛けてやれば求めたい関数 y が無事求められます。

2.3.1 発展版同次形

次に以下の形を考えてみましょう。

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) \quad (2.20)$$

これも実は同次形に帰着して解くことができます。やってみましょう。

天下りのですが、

$$c = -a\alpha - b\beta \quad (2.21)$$

$$c' = -a'\alpha - b'\beta \quad (2.22)$$

を満たす α と β を見つけます。式変形すれば、

$$\alpha = \frac{b'c - bc'}{a'b + ab'} \quad (2.23)$$

$$\beta = \frac{-a'c - ac'}{a'b + ab'} \quad (2.24)$$

ということがわかると思います。

ここで、 $x = X + \alpha$ 、 $y = Y + \beta$ と置換します。関数 f の中の分子は、 c と α 、 β の変換式を使えば、

$$\begin{aligned} ax + by + c &= a(X + \alpha) + b(Y + \beta) + c \\ &= (aX + bY) + (a\alpha + b\beta) + (-a\alpha - b\beta) \\ &= aX + bY \end{aligned} \quad (2.25)$$

とすっきりした形になります。分母も同様に、

$$a'x + b'y + c' = a'X + b'Y \quad (2.26)$$

となります。

微分方程式の左辺については、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} \quad (2.27)$$

ですから、結局すべてをまとめると

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right) \quad (2.28)$$

となります。大分見通しが良くなりましたね。この分子分母をそれぞれ X で割ってみましょう。

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a + b\frac{Y}{X}}{a' + b'\frac{Y}{X}}\right) \quad (2.29)$$

出てきました、 Y/X 。これで同次形に帰着できました。あとは2.3節の同次形として解けます。

2.4 一階線形微分方程式

「一階線形微分方程式」とは、以下の形をした微分方程式のことです。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x) = 0 \quad (2.30)$$

「一階」とは、微分項の最大階数が1であるという意味、「線形」とは、 dy/dx と y の線形結合で書かれた方程式であるということを意味します。

このとき、 $Q(x)$ の状態によってさらに2通りに分けられます。

- $Q(x) = 0$: 一階斉次線形微分方程式
- $Q(x) \neq 0$: 一階非斉次線形微分方程式

斉次のときは

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \quad (2.31)$$

ですから、変数分離形 (2.2節) として解くことができます。解は、

$$\int \frac{dy}{y} = - \int P(x)dx \quad (2.32)$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (2.33)$$

と与えられます。

問題は非斉次のときです。非斉次の場合は2通りの解き方があります。

2.4.1 特殊解を見つける

この微分方程式を満たす特殊解を (エスパーで) 発見できれば、あっさりと解くことができます。 $y = y_1(x)$ はこの微分方程式を満たす特殊解であるとしましょう。

$$\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 + Q(x) = 0 \quad (2.34)$$

です。ここで、関数 $Y(x)$ を使って $y = Y + y_1$ と置換してみましょう。

$$\frac{d}{dx}(Y + y_1) + P(x)(Y + y_1) + Q(x) = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{dY}{dx} + P(x)Y + \left(\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 + Q(x) \right) = 0$$

$$\frac{dY}{dx} + P(x)Y = 0 \quad (2.36)$$

式 2.34 を使うことで、 $Q(x)$ の項を消すことができます。これで斉次に帰着できました。変数分離形 (2.2節) として解くことができます。解は、

$$y = y_1(x) + Ce^{-\int P(x)dx} \quad (2.37)$$

です。

2.4.2 定数変化法

微分方程式が簡単な形をしている場合には特殊解をすぐに見つけられることがありますが、そう簡単にはいかない場合もあります。そんなときには定数変化法を使って特殊解を求めましょう。定数変化法は、式 2.33 の任意定数 C を x の関数であると見て、

$$y_1 = C(x)e^{-\int P(x)dx} \quad (2.38)$$

と特殊解を置いて、元の微分方程式に代入して解を探します³。

$$\frac{d}{dx}\left(C(x)e^{-\int P(x)dx}\right) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + Q(x) = 0 \quad (2.39)$$

左辺第一項を実際に微分してみましょう。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}\right) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} + Q(x) &= 0 \\ \frac{d}{dx}C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + Q(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

鮮やかに $P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}$ が打ち消し合って消えてくれました。しかも $Q(x)$ は x のみの関数で、 $C(x)$ の関数ではありません。これで $C(x)$ を求められそうです。

$$\frac{d}{dx}C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = -Q(x) \quad (2.41)$$

$$C(x) = -\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \quad (2.42)$$

これで特殊解が求められました。特殊解 y_1 は、

$$y_1 = -e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \quad (2.43)$$

です。では 2.4.1 節の方法を使って一般解を求めてみましょう。一般解は式 2.37 を使って、

$$\begin{aligned} y &= -e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + Ce^{-\int P(x)dx} \\ &= \left(C - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)e^{-\int P(x)dx} \end{aligned} \quad (2.44)$$

です。なお、ここで出てきた C は、紛らわしいですが特殊解を探す上で使用した $C(x)$ とは別物で、任意定数です。

ここで、式 2.42 をもう一度見てみましょう。この積分定数 (これも一種の微分方程式 (2.1 節で紹介したもの) に当たります) なので任意定数と言えます) はどこへ行ったのでしょうか。「特殊解を

³ 「そんな身勝手なことをして良いのか」という話ですが、これは特殊解を探す一つの手段です。特殊解はどんな関数であれこの微分方程式を満たしてくれさえすれば良いのです。今回はこのような形で特殊解があることを仮定して探します。

探す」という目的なら積分定数は何でも良いのですが、仮にこれを明示的に C と置いてみましょう。ここでも積分定数 (任意定数) C と関数 $C(x)$ は別物です。

$$C(x) = - \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \quad (2.45)$$

これを式 2.38 に代入すると、

$$y = \left(C - \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx \right) e^{-\int P(x) dx}$$

あれ、式 2.44 (定数変化法を使って求めた一般解) と一致しましたね。実は左辺を特殊解を表す y_1 でなく一般解を表す y にさりげなく置き換えておきました。

一般解はその微分方程式の階数だけの任意定数を含んだものを言います。今回は $C(x)$ を求めたときに明示的に積分定数を C としたことで、これが任意定数となってしまったのです。

定数変化法は「特殊解を見つける」手段ではありますが、このように任意定数を途中で置ってしまうことで一般解の導出まで一気にできてしまいます。

2.4.3 積分因子

突然ですが問題の式 2.30 の両辺に $e^{\int P(x) dx}$ を掛けてみましょう。すると、

$$e^{\int P(x) dx} \frac{dy}{dx} + P(x) e^{\int P(x) dx} y + e^{\int P(x) dx} Q(x) = 0 \quad (2.46)$$

となります。左辺第一項、第二項をよく見ると、この2つはまとめて $y e^{\int P(x) dx}$ の微分の形になっていることに気づきます。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y e^{\int P(x) dx} \right) + Q(x) e^{\int P(x) dx} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(y e^{\int P(x) dx} \right) &= -Q(x) e^{\int P(x) dx} \end{aligned} \quad (2.47)$$

右辺は x だけの式です。2.1 節のように両辺を x で積分してみましょう。

$$\begin{aligned} y e^{\int P(x) dx} &= - \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \\ y &= \left(C - \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx \right) e^{-\int P(x) dx} \end{aligned} \quad (2.48)$$

狐につままれたような感覚ですが、なんと答えが求まってしまいました。

このように、微分方程式全体にある因子を掛けることで呆気なく微分方程式が解けてしまうことがあります。このような因子を「積分因子」と言います。

2.5 完全形

完全形とは、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad (2.49)$$

という形の微分方程式において、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (2.50)$$

を満たす微分方程式を言います。

これを少し変形してみましょう。2.49の分母を払って移項すると、

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0 \quad (2.51)$$

となります。ここで関数 $u(x, y)$ を

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y) \quad (2.52)$$

と定義して導入します。すると、式 2.51は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 = du \quad (2.53)$$

となります。関数 u の全微分の形ですね。これが完全形の正体です⁴。これを満たす関数 u を求めれば、それは x と y の関係が求められたことになるので、「微分方程式が解けた」と言えます⁵。

では具体的に関数 u を求めていきましょう。まずは式 2.52の関数 f に関する式を積分します。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f(x, y) \\ u &= \int f(x, y)dx + h(y) \end{aligned} \quad (2.54)$$

元々 x で偏微分した形で書かれた式を積分したので、関数 $h(y)$ が出てきます。 $\int f(x, y)dx$ は与えられた式を積分するだけなので良いとして、問題はこの関数 h です。とりあえず式 2.52の関数 g に関する式に代入して関数 h について整理してみましょう。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\int f(x, y)dx + h(y) \right) = g(x, y) \quad (2.55)$$

$$\frac{d}{dy} h(y) = g(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int f(x, y)dx \quad (2.56)$$

⁴この関数 u が存在する条件が式 2.50です

⁵微分方程式は必ずしも解が $y =$ の形にならないといけないわけではありません。 $y =$ の形になればすっきりしますが、とにかく x と y の関係が微分項を含まずに記述できれば OK なのです。

両辺を y で積分してみると、

$$h(y) = \int \left(g(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int f(x, y) dx \right) dy \quad (2.57)$$

となります。ここで両辺をよく睨むと、左辺の関数 h は y のみの関数なのに、右辺には x の関数が2つ出てくことに気づくでしょう。つまり、右辺の x を含む項は互いに打ち消し合っているのです。少し寄り道して、この $g(x, y) - \int f(x, y) dx$ を x で偏微分して値が本当に0になるか (x を含む項が打ち消し合っているか) を見てみましょう。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int f(x, y) dx \right) = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.58)$$

式2.50の条件を考えると、確かに右辺は0になります。

さて、では本筋に戻りましょう。 $\partial/\partial y \int f(x, y) dx$ についてよく考えてみましょう。式2.56で積分定数 (定数ではなく関数ですが) を $h(y)$ と置いたので、 $\int f(x, y) dx$ 単体には今積分定数 (関数) がありません。つまり、この全ての項には x が何らかの形でつきます。これを y で偏微分したところで、全ての項に x が関わることに変わりはありません。つまり上の議論の通り、 $\partial/\partial y \int f(x, y) dx$ に出てくる項は全て $g(x, y)$ と打ち消し合ってしまうのです。

ここから以下が言えます。

$$h(y) = \int g(x, y) dy \text{ に出てくる } x \text{ を含まない項} \quad (2.59)$$

さて、 $g(x, y)$ は与えられた式ですので、これを y で積分して適宜 y を含む項を抜き去れば $h(y)$ が求められるということになります。なんとこれを式2.54に代入すれば、目的の関数 u は求まってしまう。数式としてこれを記述し直すと、

$$u(x, y) = \int f(x, y) dx + \int \left(g(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int g(x, y) dx \right) \right) dy \quad (2.60)$$

となります。

2.5.1 積分因子

積分因子、再登場です。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

という形の微分方程式があっても

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

を満たさなければ完全形とは言えません。ですが、右辺の分子分母に $\lambda(x, y)$ を掛けることで微分方程式が完全形になる場合があります。この積分因子を見つける系統的な手法はありませんが、積分因子に $x^m y^n$ を仮定して

$$\frac{\partial \lambda f}{\partial y} = \frac{\partial \lambda g}{\partial x} \quad (2.61)$$

に代入して m と n を求められる場合があります。

2.6 ベルヌーイの微分方程式

ここから人名のついた微分方程式が連続します。まずはベルヌーイの微分方程式です。これは、

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n \quad (2.62)$$

という形をしたものです。 $n = 0, 1$ であれば一階線形微分方程式ですが、ここでは $n \geq 2$ の場合を考えてみましょう。 $z = y^{1-n}$ として、まず dz/dx を計算します。

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} \quad (2.63)$$

微分方程式全体に $(1-n)y^{-n}$ を掛けると、

$$\frac{dy}{dx}(1-n)y^{-n} + f(x)(1-n)y^{1-n} = (1-n)g(x) \quad (2.64)$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x) \quad (2.65)$$

となります。これは一階線形微分方程式ですね。2.4節の通りに解くことができます。 z について解を求めて、 $y = {}^{1-n}\sqrt{z}$ と置換すれば答えが求まります。

2.7 リカッチの微分方程式

リカッチの微分方程式は

$$\frac{dy}{dx} = f(x) + g(x)y + h(x)y^2 \quad (2.66)$$

の形をしたものです。 $f(x) = 0$ でベルヌーイの微分方程式 (2.6節) です。これは頑張って特殊解 $y = y_1(x)$ を見つけて、2.4.1節と同じように関数 $Y(x)$ を使って $y = Y + y_1$ と置きます。まず特殊解の条件を書いておきましょう。

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x) + g(x)y_1 + h(x)y_1^2 \quad (2.67)$$

それでは実際に置換してみましょう。

$$\frac{dY}{dx} + \frac{dy_1}{dx} = f(x) + g(x)(Y + y_1) + h(x)(Y + y_1)^2 \quad (2.68)$$

$$\frac{dY}{dx} + \frac{dy_1}{dx} = (f(x) + g(x)y_1 + h(x)y_1^2) + g(x)Y + h(x)Y^2 + 2h(x)Yy_1 \quad (2.69)$$

式2.67を使って左辺第二項と右辺のカッコの中を消しましょう。

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= g(x)Y + h(x)Y^2 + 2h(x)Yy_1 \\ &= (g(x) + 2h(x)y_1)Y + h(x)Y^2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

これはベルヌーイの微分方程式 ($n = 2$) です。 $z = Y^{-1}$ として式全体に $-Y^{-2}$ を掛けると、

$$\begin{aligned} -Y^{-2} \frac{dY}{dx} &= -(g(x) + 2h(x)y_1)Y^{-1} - h(x) \\ \frac{dz}{dx} &= -(g(x) + 2h(x)y_1)z - h(x) \end{aligned} \quad (2.71)$$

これで一階線形微分方程式に帰着できました。2.4節の方法を使って解くことができます。 z について解いて $y = y_1 + 1/z$ と置換すれば答えが求まります。

2.8 ダランベールの微分方程式

ダランベールの微分方程式はこんな形をしています。

$$y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + g\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (2.72)$$

dy/dx を p と置いて両辺を x で微分してみましょう。

$$y = xf(p) + g(p) \quad (2.73)$$

$$p = f(p) + x \frac{dp}{dx} \frac{d}{dp} f(p) + \frac{dp}{dx} \frac{d}{dp} g(p) \quad (2.74)$$

少しトリッキーですが、ここで dx/dp についてまとめてみましょう。つまり、 x を p の関数と見るということです。

$$\left(x \frac{d}{dp} f(p) + \frac{d}{dp} g(p) \right) \frac{dp}{dx} = p - f(p) \quad (2.75)$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\frac{d}{dp} f(p)}{p - f(p)} x + \frac{\frac{d}{dp} g(p)}{p - f(p)} \quad (2.76)$$

これは x と p の一階線形微分方程式です。 x を $p = dy/dx$ について解きます。すると、

$$x = h(p) \quad (2.77)$$

という関数 $h(p)$ を伴った式が現れます。これと式2.73を連立することで p を消去します。言わば p を媒介変数として y と x の関係を求めるわけですね。

2.8.1 クレローの微分方程式

クレローの微分方程式はダランベールの微分方程式の特殊な場合です。

$$y = x \frac{dy}{dx} + g\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (2.78)$$

ダランベールの微分方程式で $f(dy/dx) = dy/dx$ となったものですね。ダランベールの微分方程式と同じように $p = dy/dx$ を導入して両辺を x で微分してみましょう。

$$y = xp + g(p) \quad (2.79)$$

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx} \frac{d}{dp} g(p) \quad (2.80)$$

$$0 = \frac{dp}{dx} \left(x + \frac{d}{dp} g(p) \right) \quad (2.81)$$

かなりすっきりしましたね。左辺が0ですので、右辺の2項のどちらが0になるかで場合分けしましょう。

- $dp/dx = 0$ のとき、 $p = C$ より $y = Cx + g(C)$ です。この場合が特殊です。
- $x + dg(p)/dp = 0$ のとき、これと式 2.79 を連立して p を消去して解となります。この場合はただのダランベールの微分方程式ですね。

2.9 二階線形微分方程式

二階の微分項が入った形の微分方程式です。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y + R(x) = 0 \quad (2.82)$$

これについて、一階線形微分方程式と同様に斉次・非斉次の場合の大まかな解き方をご説明しましょう。

$R(x) = 0$ 、つまり斉次の場合は、階数である2つの線形独立な解 ($y = y_2, y = y_3$ ⁶とします。これらを基本解と言います。)⁷の重ね合わせ (線形結合)

$$y = c_2 y_2 + c_3 y_3 \quad (2.83)$$

が一般解です。なお、 c_2 と c_3 は任意定数です。

この重ね合わせの原理はなぜ成り立つのでしょうか。実際に $y = c_2 y_2 + c_3 y_3$ を微分方程式に代入してみましょう。

⁶本書では y_1 を特殊解の意味で使っているので y_2 から始まるようにしました。少し見にくいですが許してください。

⁷線形独立でない解とは、ここでは k を定数として、 $y_2 = k y_3$ のように片方がもう片方の定数倍で表すことができる解のことです。つまり、線形独立な解とは片方が片方の定数倍で表せない解のことを言います。

$$\begin{aligned}
& c_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + c_3 \frac{d^2 y_3}{dx^2} + c_2 P(x) \frac{dy_2}{dx} + c_3 P(x) \frac{dy_3}{dx} + c_2 Q(x) y_2 + c_3 Q(x) y_3 \\
&= c_2 \left(\frac{d^2 y_2}{dx^2} + P(x) \frac{dy_2}{dx} + Q(x) y_2 \right) + c_3 \left(\frac{d^2 y_3}{dx^2} + P(x) \frac{dy_3}{dx} + Q(x) y_3 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y_2 と y_3 がこの微分方程式を満たすことを利用すれば、確かに $y = c_2 y_2 + c_3 y_3$ も解でした。式をよく睨むと、この重ね合わせの原理は微分方程式の線形性⁸から来る性質だということがわかります。

ところが、 $R(x) \neq 0$ 、つまり非斉次の場合には重ね合わせの原理は成り立ちません。実際に微分方程式に代入して確かめてみてください。非斉次の場合は頑張って特殊解 $y = y_1$ を見つけ、 $y = Y + y_1$ と置換して Y についての線形独立な2つの基本解 $Y = Y_2, Y = Y_3$ を見つけます。これらの重ね合わせと y_1 との和

$$y = y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3 \quad (2.84)$$

が解となります。

もしかしたらお気づきかもしれませんが、一般の n 階線形微分方程式については n 個の線形独立な基本解を見つければ、その全ての解を重ね合わせたものが一般解になります。

2.9.1 定数係数の二階斉次線形微分方程式

定数係数なので、このような形をした微分方程式です。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (2.85)$$

右辺が0でないときは非斉次です。特殊解 $y = y_1$ を探して斉次に持ち込みましょう。このとき、定数変化法が使えます。2.9.2節でお話しします。

斉次式 (右辺 = 0) の場合は解に

$$y = e^{\lambda x} \quad (2.86)$$

の形を仮定して微分方程式に代入してみます⁹。すると、

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a \lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \quad (2.87)$$

$$\lambda^2 + a \lambda + b = 0 \quad (2.88)$$

という二次方程式になります。これを特性方程式と言います。なんだかとてもすっきりしましたね。この判別式の正負で場合分けをしましょう。

⁸ y^2 のように n 乗された項や $y dy/dx$ のように y にまつわる関数同士が掛けられた項がないということです。

⁹「解を仮定なんてして良いのか」と思われるかもしれませんが、私たちがやるべきことはどんな形の解であれ線形独立な基本解を2つ見つけることです。仮定した解がうまく本当の解になってくれたら嬉しくありませんか？

判別式が正の場合

判別式が正とは、

$$a^2 - 4b > 0 \quad (2.89)$$

のときのことを言います。この場合、 λ について、2つの実数解 λ_2, λ_3 ¹⁰ が求まります。この場合、それぞれの λ を式 2.86 に代入すると、線形独立な 2つの基本解が求まります。片方がもう片方の定数倍で表せることはありません。よって、一般解は

$$y = c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x} \quad (2.90)$$

です。

判別式が負の場合

判別式が負なので、

$$a^2 - 4b < 0 \quad (2.91)$$

の場合です。こちらも λ について 2つの複素数解 λ_2, λ_3 が求まります。このままこの λ を式 2.86 に代入すれば 2つの基本解が求まります。よって、一般解は判別式が正の場合と同じく

$$y = c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}$$

です。

判別式が 0 の場合

問題は判別式が 0 の場合です。

$$a^2 - 4b = 0 \quad (2.92)$$

二次方程式の解 λ_2 が重解となって 1つしか現れません。そこで、定数変化法を使ってみましょう。2つの基本解を以下のように置いてみます。 y_2 は出てきた λ_2 をそのまま式 2.86 に入れた形です。

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} \quad (2.93)$$

$$y_3 = C(x) e^{\lambda_2 x} \quad (2.94)$$

¹⁰ ここの特殊解との区別、およびインデックスを揃えるために 2 で始まるようにしています

これがもし解になれば、 $C(x)$ は x の関数なので、線形独立な基本解が求められることになります。これを元の微分方程式 2.85 に代入してみるのですが、その前に dy_3/dx と d^2y_3/dx^2 を求めておきましょう。

$$\frac{dy_3}{dx} = e^{\lambda_2 x} \left(\frac{d}{dx} C(x) + \lambda_2 C(x) \right) \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_3}{dx^2} &= \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \left(\frac{d}{dx} C(x) + \lambda_2 C(x) \right) + e^{\lambda_2 x} \left(\frac{d^2}{dx^2} C(x) + \lambda_2 \frac{d}{dx} C(x) \right) \\ &= e^{\lambda_2 x} \left(\frac{d^2}{dx^2} C(x) + 2\lambda_2 \frac{d}{dx} C(x) + \lambda_2^2 C(x) \right) \end{aligned} \quad (2.96)$$

では式 2.85 に代入しましょう。

$$e^{\lambda_2 x} \left(\frac{d^2}{dx^2} C(x) + 2\lambda_2 \frac{d}{dx} C(x) + \lambda_2^2 C(x) \right) + a e^{\lambda_2 x} \left(\frac{d}{dx} C(x) + \lambda_2 C(x) \right) + b C(x) e^{\lambda_2 x} = 0 \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} C(x) + 2\lambda_2 \frac{d}{dx} C(x) + \lambda_2^2 C(x) \right) + a \left(\frac{d}{dx} C(x) + \lambda_2 C(x) \right) + b C(x) &= 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} C(x) + (2\lambda_2 + a) \frac{d}{dx} C(x) + (\lambda_2^2 + a\lambda_2 + b) C(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.98)$$

左辺が恒等的に 0 でなくてははいけないのです。 $C(x)$ の項は、式 2.88 より、 $C(x)$ の係数が 0 になります。

次に $dC(x)/dx$ の項を考えますが、ここで重解 λ を a を使って表しましょう。判別式の条件式 2.92 と λ の特性方程式 2.88 より、

$$\lambda = -\frac{1}{2}a \quad (2.99)$$

です。よって、

$$(2\lambda + a) \frac{d}{dx} C(x) = 0 \quad (2.100)$$

です (左辺第一項が 0 になります)。

残ったのは $dC(x)/dx$ だけです。よって、

$$\frac{d^2}{dx^2} C(x) = 0 \quad (2.101)$$

が成り立ちます。

定数変化法の根本的な条件 $C(x) \neq 0$ を考えれば、

$$C(x) = kx \quad (2.102)$$

ということが導けます。ここでは定数 k は何でも良いので、1 として、

$$C(x) = x \quad (2.103)$$

としておきましょう。

元の話に戻ると、結局 2 つの線形独立な基本解は式 2.94 に $C(x) = x$ を代入すれば、

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{\lambda_2 x} \\ y_3 &= x e^{\lambda_2 x} \end{aligned} \quad (2.104)$$

となります。よって、一般解 y は、

$$y = (c_2 + c_3 x) e^{\lambda_2 x} \quad (2.105)$$

です。

2.9.2 定数係数の二階非斉次線形微分方程式

非斉次なので、式 2.85 の右辺を $f(x)$ とします。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x) \quad (2.106)$$

方針としては、特殊解 $y = y_1$ を見つけ、 $y = Y + y_1$ と置換して Y を求めるのですが、今回は先に斉次式を解きます。斉次式

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + a \frac{dY}{dx} + bY = 0 \quad (2.107)$$

の一般解 $Y = C_2 Y_2 + C_3 Y_3$ を求めたとします。ここで定数変化法です。特殊解 y_1 もこの一般解と似ているだろうと仮定して、

$$y_1 = c_2(x) Y_2 + c_3(x) Y_3 \quad (2.108)$$

と置いてみます。では実際に微分方程式に代入するために、 dy_1/dx と $d^2 y_1/dx^2$ を求めてみましょう。

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx} c_2(x) Y_2 + c_2(x) \frac{dY_2}{dx} + \frac{d}{dx} c_3(x) Y_3 + c_3(x) \frac{dY_3}{dx} \quad (2.109)$$

ちょっと待ってください。これをもう一度微分したい気持ちにはなれませんね。ということで都合よくこんな条件を付け加えてみましょう。

$$\frac{d}{dx} c_2(x) Y_2 + \frac{d}{dx} c_3(x) Y_3 = 0 \quad (2.110)$$

どんな都合の良い条件を加えようと、とにかく特殊解が見つければ良いのです。今回の微分方程式だとこのようにして特殊解を見つけられます。

この条件によって、

$$\frac{dy_1}{dx} = c_2(x)\frac{dY_2}{dx} + c_3(x)\frac{dY_3}{dx} \quad (2.111)$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}c_2(x)\right)\frac{dY_2}{dx} + c_2(x)\frac{d^2Y_2}{dx^2} + \left(\frac{d}{dx}c_3(x)\right)\frac{dY_3}{dx} + c_3(x)\frac{d^2Y_3}{dx^2} \quad (2.112)$$

となります。では元の微分方程式 2.106 に代入してみましょう。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dx}c_2(x)\right)\frac{dY_2}{dx} + c_2(x)\frac{d^2Y_2}{dx^2} + \left(\frac{d}{dx}c_3(x)\right)\frac{dY_3}{dx} + c_3(x)\frac{d^2Y_3}{dx^2} \\ &+ a\left(c_2(x)\frac{dY_2}{dx} + c_3(x)\frac{dY_3}{dx}\right) + b(c_2(x)Y_2 + c_3(x)Y_3) = f(x) \end{aligned} \quad (2.113)$$

2行に渡る式になってしまいましたが怯まずに整理しましょう。

$$\begin{aligned} &c_2(x)\left(\frac{d^2Y_2}{dx^2} + a\frac{dY_2}{dx} + bY_2\right) + c_3(x)\left(\frac{d^2Y_3}{dx^2} + a\frac{dY_3}{dx} + bY_3\right) \\ &+ \left(\frac{d}{dx}c_2(x)\right)\frac{dY_2}{dx} + \left(\frac{d}{dx}c_3(x)\right)\frac{dY_3}{dx} = f(x) \end{aligned} \quad (2.114)$$

Y_1, Y_2 はそれぞれ斉次方程式の解だったので、上段がぼっさり 0 になり、

$$\left(\frac{d}{dx}c_2(x)\right)\frac{dY_2}{dx} + \left(\frac{d}{dx}c_3(x)\right)\frac{dY_3}{dx} = f(x) \quad (2.115)$$

となります。これとさきほどの都合よくつけた成約条件式 2.110 をあわせて連立方程式を解きます。その際、行列を使うとこんな風書けます。

$$\begin{pmatrix} Y_2 & Y_3 \\ \frac{dY_2}{dx} & \frac{dY_3}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}c_2(x) \\ \frac{d}{dx}c_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \quad (2.116)$$

随分すっきりしましたね。この行列の両辺に左から左辺第一項の行列 (W とします) の逆行列を掛ければ答えが求まりそうです。逆行列の存在確認のために行列 W の行列式が 0 でないことを確認しなくてはならないのですが、実はこの行列 W には「ロンスキー行列」という名前がついていて、この場合だと Y_2 と Y_3 が線形独立であれば行列式は x の値によらず絶対に 0 にはなりません¹¹。では逆行列を両辺に左から掛けましょう。

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}c_2(x) \\ \frac{d}{dx}c_3(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{Y_2\frac{dY_3}{dx} - Y_3\frac{dY_2}{dx}} \begin{pmatrix} \frac{dY_3}{dx} & -Y_3 \\ -\frac{dY_2}{dx} & Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

¹¹ロンスキー行列は一般的に n 個の関数とその微分が入ったものでもそれぞれが全て線形独立であれば $\det(W) \neq 0$ です。

これを $dc_2(x)/dx$ と $dc_3(x)/dx$ のそれぞれについて整理すると、

$$\frac{d}{dx}c_2(x) = -\frac{Y_3f(x)}{Y_2\frac{dY_3}{dx} - Y_3\frac{dY_2}{dx}} \quad (2.118)$$

$$\frac{d}{dx}c_3(x) = \frac{Y_2f(x)}{Y_2\frac{dY_3}{dx} - Y_3\frac{dY_2}{dx}} \quad (2.119)$$

となります。これでやっと $c_2(x)$ と $c_3(x)$ がわかります。それらは、

$$c_2(x) = -\int \frac{Y_3f(x)}{Y_2\frac{dY_3}{dx} - Y_3\frac{dY_2}{dx}} dx \quad (2.120)$$

$$c_3(x) = \int \frac{Y_2f(x)}{Y_2\frac{dY_3}{dx} - Y_3\frac{dY_2}{dx}} dx \quad (2.121)$$

です。今は特殊解を求めているので積分定数は考えなくて大丈夫です。

これで特殊解が求まりました。よって全体の解は、

$$y = -Y_2 \int \frac{Y_3f(x)}{Y_2\frac{dY_3}{dx} - Y_3\frac{dY_2}{dx}} dx + Y_3 \int \frac{Y_2f(x)}{Y_2\frac{dY_3}{dx} - Y_3\frac{dY_2}{dx}} dx + C_2Y_2 + C_3Y_3 \quad (2.122)$$

です。

2.9.3 標準形

標準形の微分方程式とは、定数 k を使って

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0 \quad (2.123)$$

と書ける微分方程式のことです。これは比較的簡単に解くことができます。これを解くのは後に回して、実は一般的な二階斉次線形微分方程式を標準形に帰着することができます。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad (2.124)$$

について、

$$y = u(x)e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx} \quad (2.125)$$

と置いてみましょう。

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}u(x) - \frac{1}{2}P(x)u(x) \right) e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx} \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{d^2}{dx^2}u(x) - \frac{1}{2}u(x)\frac{d}{dx}P(x) - \frac{1}{2}P(x)\frac{d}{dx}u(x) \right) e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx} \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}u(x) - \frac{1}{2}P(x)u(x) \right) P(x)e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx} \\ &= \left(\frac{d^2}{dx^2}u(x) - P(x)\frac{d}{dx}u(x) + \left(\frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}P(x) \right)u(x) \right) e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx} \end{aligned} \quad (2.127)$$

これを元の微分方程式 2.124 に代入してみます。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dx^2} u(x) - P(x) \frac{d}{dx} u(x) + \left(\frac{1}{4} P^2(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} P(x) \right) u(x) \right) e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx} \\ & + P(x) \left(\frac{d}{dx} u(x) - \frac{1}{2} P(x) u(x) \right) e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx} + Q(x) u(x) e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx} = 0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

整理すると、

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + \left(Q(x) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} P(x) - \frac{1}{4} P^2(x) \right) u(x) = 0 \quad (2.129)$$

となります。これで一般的な二階斉次線形微分方程式が標準形になりました。

では実際に標準形の微分方程式 2.123 を解いていきましょう。 k の値によって場合分けができます。

$k = 0$ の場合

微分方程式 2.123 を書き直すと

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (2.130)$$

となるので、 y の最大の次数は 1 です。よって、2 つの線形独立な基本解を

$$y_2 = x \quad (2.131)$$

$$y_3 = 1 \quad (2.132)$$

と置くことができます。よって、これらの重ね合わせを一般解として、一般解は

$$y = c_2 x + c_3 \quad (2.133)$$

です。

$k < 0$ の場合

微分方程式 2.123 を書き直すと、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -ky \quad (2.134)$$

となりますが、 k が負なので右辺の係数は正になります。

これは定数係数の二階斉次線形微分方程式ですから、解に $y = e^{\lambda x}$ を仮定すると、

$$\lambda^2 e^{\lambda x} = -k e^{\lambda x} \quad (2.135)$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-k} \quad (2.136)$$

となり、2つの λ が現れます。これで基本解が2つ作れそうです。基本解 y_2, y_3 は、

$$y_2 = e^{\sqrt{-k}x} \quad (2.137)$$

$$y_3 = e^{-\sqrt{-k}x} \quad (2.138)$$

ですので、一般解 y は

$$y = c_2 e^{\sqrt{-k}x} + c_3 e^{-\sqrt{-k}x} \quad (2.139)$$

です。

$k > 0$ の場合

微分方程式 2.123 を書き直すと、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -ky \quad (2.140)$$

となります。今回は $k > 0$ なので右辺の係数は負です。これは見慣れた単振動型の微分方程式ですが一度真面目に解いてみましょう。

これは定数係数の二階斉次線形微分方程式ですから、先ほどと同じように解に $y = e^{\lambda x}$ を仮定すると、

$$\lambda^2 e^{\lambda x} = -k e^{\lambda x} \quad (2.141)$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{k} \quad (2.142)$$

となります。先ほどと同じく2つの λ が現れたので、線形独立な基本解が2つ作れます。基本解 y_2, y_3 は、

$$y_2 = e^{i\sqrt{k}x} \quad (2.143)$$

$$y_3 = e^{-i\sqrt{k}x} \quad (2.144)$$

ですので、一般解 y は

$$y = c_2 e^{i\sqrt{k}x} + c_3 e^{-i\sqrt{k}x} \quad (2.145)$$

です。オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2.146)$$

を使えば、

$$\begin{aligned} y &= c_2(\cos \sqrt{k}x + i \sin \sqrt{k}x) + c_3(\cos \sqrt{k}x - i \sin \sqrt{k}x) \\ &= (c_2 + c_3) \cos \sqrt{k}x + i(c_2 - c_3) \sin \sqrt{k}x \end{aligned} \quad (2.147)$$

となり、 y が物理量など、解が実数のみを取るという成約があれば、

$$c_1 = \frac{A_1 + iA_2}{2} \quad (2.148)$$

$$c_2 = \frac{A_1 - iA_2}{2} \quad (2.149)$$

として、

$$y = A_1 \cos \sqrt{k}x + A_2 \sin \sqrt{k}x \quad (2.150)$$

です。

2.10 オイラーの微分方程式

オイラーの微分方程式は、

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (2.151)$$

の形をしたものです。解に $y = x^\lambda$ を仮定すると、

$$x^2 \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} + ax \lambda x^{\lambda-1} + bx^\lambda = 0 \quad (2.152)$$

$$\lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0$$

$$\lambda^2 + (a - 1)\lambda + b = 0 \quad (2.153)$$

と、すっきりした形になります。二次方程式が出てきたのでまた決まって判別式で場合分けをします。

判別式が0でない場合

判別式に関する条件は

$$(a - 1)^2 - 4b \neq 0 \quad (2.154)$$

です。この場合は λ について2つの解 λ_2 と λ_3 が求まるため、これらを使った基本解を重ね合わせて

$$y = c_2 x^{\lambda_2} + c_3 x^{\lambda_3} \quad (2.155)$$

が解です。

判別式が0の場合

判別式に関する条件は

$$(a-1)^2 - 4b = 0 \quad (2.156)$$

です。この場合、 λ は1つの重解 λ_2 のみを持ちます。2つの基本解がなくてはならないのに困りましたね。こんなときには定数変化法です。2つの基本解を

$$y_2 = x^{\lambda_2} \quad (2.157)$$

$$y_3 = c(x)x^{\lambda_2} \quad (2.158)$$

と置きます。まず y_3 の微分したものを求めておきます。

$$\frac{dy_3}{dx} = x^{\lambda_2} \frac{d}{dx}c(x) + \lambda_2 x^{\lambda_2-1}c(x) \quad (2.159)$$

$$\frac{d^2 y_3}{dx^2} = x^{\lambda_2} \frac{d^2}{dx^2}c(x) + 2\lambda_2 x^{\lambda_2-1} \frac{d}{dx}c(x) + \lambda_2(\lambda_2-1)x^{\lambda_2-2}c(x) \quad (2.160)$$

では元の微分方程式 2.151 に代入してみましょう。

$$\begin{aligned} x^2 \left(x^{\lambda_2} \frac{d^2}{dx^2}c(x) + 2\lambda_2 x^{\lambda_2-1} \frac{d}{dx}c(x) + \lambda_2(\lambda_2-1)x^{\lambda_2-2}c(x) \right) \\ + ax \left(x^{\lambda_2} \frac{d}{dx}c(x) + \lambda_2 x^{\lambda_2-1}c(x) \right) + bc(x)x^{\lambda_2} = 0 \end{aligned} \quad (2.161)$$

また2行になってしまいましたが頑張って整理します。定数変化法は総じて計算が煩雑になるので、できればエスパーで求めたいものです…。

$$x^{\lambda_2+2} \frac{d^2}{dx^2}c(x) + (2\lambda_2 + a)x^{\lambda_2+1} \frac{d}{dx}c(x) + (\lambda_2^2 + (a-1)\lambda_2 + b)x^{\lambda_2}c(x) = 0 \quad (2.162)$$

なんだか 2.9.1 節で見た展開ですが、まず $c(x)$ の項の係数が式 2.153 より0になります。そして、実際に λ_2 を a を使った式で求めてみると、

$$\lambda_2 = \frac{1-a}{2} \quad (2.163)$$

となるので、式を整理すると、

$$x^{\lambda_2+2} \frac{d^2}{dx^2}c(x) + x^{\lambda_2+1} \frac{d}{dx}c(x) = 0 \quad (2.164)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}c(x) = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx}c(x) \quad (2.165)$$

となります。この微分方程式は比較的簡単に解けそうです。まず $dc(x)/dx = c'(x)$ を求めることを考えると、これは変数分離形です。

$$\frac{d}{dx}c'(x) = -\frac{1}{x}c'(x) \quad (2.166)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{c'(x)} dc'(x) &= -\int \frac{1}{x} dx \\ \ln |c'(x)| &= -\ln |x| \\ c'(x) &= \pm \frac{1}{x} \end{aligned} \quad (2.167)$$

これを x で積分すれば、

$$c(x) = \ln |x| \quad (2.168)$$

このように $c(x)$ が求まります。よって2つの線形独立な基本解は、

$$\begin{aligned} y_2 &= x^{\lambda_2} \\ y_3 &= x^{\lambda_2} \ln |x| \end{aligned} \quad (2.169)$$

一般解は、

$$y = x^{\lambda_2}(c_2 + c_3 \ln |x|) \quad (2.170)$$

です。

2.11 定数係数連立微分方程式

こんな微分方程式が与えられたとします。

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3 \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.171)$$

これを行列を使った式にしてみましょう。

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (2.172)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\ 1} & \cdots & a_{1\ n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\ 1} & \cdots & a_{n\ n} \end{pmatrix} \quad (2.173)$$

を導入して、行列 A の要素を適当に決めると微分方程式が

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y} \quad (2.174)$$

と表せます。この \mathbf{y} がベクトルではなかった場合は、解が何になったのでしょうか。 $y = e^{\lambda x}$ でしたね。今回は \mathbf{c} を任意定数で構成された定ベクトルとして、

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}e^{Ax} \quad (2.175)$$

と解を置いてみましょう。

行列 A の n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 、固有ベクトルを $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ とすると、解は

$$\mathbf{y} = c_1 e^{\lambda_1 x} \mathbf{p}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \mathbf{p}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \mathbf{p}_n \quad (2.176)$$

です。

2.12 級数展開法

微分方程式の解として級数解が求まる場合があります。与えられた微分方程式に

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad (2.177)$$

を仮定して代入します。テイラー展開の形ですね。例として一階の微分方程式 2.30

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x) = 0$$

を考えると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} + P \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right) + Q(x) = 0 \quad (2.178)$$

となり、 x の次数に注目して両辺の係数を比較することで i 番目の c_i が求まる場合があります。この方法を整級数展開法と言います。

「求まる場合がある」と書いたのは、例えば 0 でない定数 α を使って

$$c_i = c_i + \alpha \quad (2.179)$$

となるなど、 c_i が求まらない場合があります。この場合は求める関数 y が $x = a$ 周りでテイラー展開できません。

具体的な級数解の求め方は本節の小節で紹介します。

2.12.1 正則点と特異点・フロベニウスの方法

二階斉次線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad (2.180)$$

について、場合分けをします。

- $P(x), Q(x)$ が $x = a$ でなめらか: $x = a$ は正則点
- 上でなく、 $(x-a)P(x), (x-a)^2Q(x)$ が $x = a$ でなめらか: $x = a$ は確定特異点
- それ以外: $x = a$ は不確定特異点

正則点周りの展開は整級数展開で答えが得られます。

確定特異点周りは $c_0 \neq 0$ として、解を

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^{n+\lambda} \quad (2.181)$$

と置きます。微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda) (x-a)^{n+\lambda-1} \quad (2.182)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) (x-a)^{n+\lambda-2} \quad (2.183)$$

です。また、 $P(x)$ と $Q(x)$ について、

$$(x-a)P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-a)^n \quad (2.184)$$

$$(x-a)^2Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-a)^n \quad (2.185)$$

と展開することにします。すると、与えられた微分方程式は

$$(x-a)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x-a)P(x) \cdot (x-a) \frac{dy}{dx} + (x-a)^2Q(x)y = 0 \quad (2.186)$$

と書き直せます。

これらを書き直した微分方程式に代入して x^λ の項の係数に注目すると、

$$c_0\lambda(\lambda-1) + p_0\lambda c_0 + q_0c_0 = 0 \quad (2.187)$$

$$\lambda(\lambda-1) + p_0\lambda + q_0 = 0 \quad (2.188)$$

という式が出てきます。これを「決定方程式」と言います。なお、微分方程式の右辺が0より決定方程式の右辺は0になります。

決定方程式の解 λ_1, λ_2 について考えてみましょう。このとき、

- $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z}$: $\max(\lambda_1, \lambda_2)$ に対応する級数解が求まります。
- $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$: λ_1, λ_2 の両方に対応する級数解が求まります。

この方法をフロベニウスの方法と言います。

2.12.2 エルミートの微分方程式

エルミートの微分方程式は、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2\nu y = 0 \quad (2.189)$$

の形をしたものです。

正則点 $x = 0$ で級数展開してみます。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2.190)$$

微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} \quad (2.191)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} \quad (2.192)$$

となります。これらを代入してみましょう。

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} + 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad (2.193)$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(n-\nu) x^n = 0 \quad (2.194)$$

ここで式 2.194 の左辺第一項を見てみましょう。 n の回る範囲をずらして書いたのですが、なんと $n = -1, -2$ のときは $(n+2)(n+1)$ のどちらかが 0 になるので \sum の中も 0 になります。よって、この式は

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2}(n+2)(n+1) - 2c_n(n-\nu)) x^n = 0 \quad (2.195)$$

とすっきり書くことができます。右辺が 0 なので全ての n について \sum の中が 0 になります。よって、

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) - 2c_n(n-\nu) = 0 \quad (2.196)$$

$$c_{n+2} = \frac{2(n-\nu)}{(n+1)(n+2)} c_n \quad (2.197)$$

という漸化式が立ちます。 c_0 と c_1 を任意定数 (微分方程式の階数である2つあります) としてこの微分方程式が解けました。

ところで、漸化式 2.197 の分子を見ると、 $\nu \in \mathbb{N}(0 \text{ を含む})$ のとき、 $n - \nu$ がどこかで0になるので、そこで c_n が0になることがわかんと思います。漸化式は c_0 始まりのものと c_1 始まりのものの2つがあり、どちらか1つが途中で0になります。

具体的に書くと、 $c_{\nu+2}$ 以降の、 n と ν の偶奇の同じ c_n が0になります。よって、解の関数は $\nu+1$ の偶/奇によって偶関数/奇関数となります。

2.12.3 ルジャンドルの微分方程式

ルジャンドルの微分方程式は

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \nu(\nu+1)y = 0 \quad (2.198)$$

の形をした微分方程式です。

正則点 $x=0$ で 2.12.2 節と同じように展開すると、

$$(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} + \nu(\nu+1)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad (2.199)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n(n+1) - \nu(\nu+1))x^n = 0 \quad (2.200)$$

左辺第一項について、 n をずらしましょう。

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n \quad (2.201)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n \quad (2.202)$$

ではまとめてみます。

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n(n(n+1) - \nu(\nu+1)))x^n = 0 \quad (2.203)$$

右辺が0なので、

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \nu(\nu+1)}{(n+1)(n+2)} c_n \quad (2.204)$$

です。これもまた $\nu \in \mathbb{N}(0 \text{ を含む})$ の場合は $c_{\nu+2}$ から先の n と ν の偶奇の同じ c_n が0になります。よって、解の関数は $\nu+1$ の偶/奇によって偶関数/奇関数となります。

2.12.4 ベッセルの微分方程式

ベッセルの微分方程式は

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (2.205)$$

の形をしたものです。これは $x = 0$ が確定特異点ですので、 $c_0 \neq 0$ を条件に

$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2.206)$$

として級数解を探します。決定方程式

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \nu^2 = 0 \quad (2.207)$$

より、

$$\lambda = \pm \nu \quad (2.208)$$

とわかります。

では解の形を微分方程式 (全体に x^2 を掛けたもの) に代入してみましょう。

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n \pm \nu)(n \pm \nu - 1) x^{n \pm \nu} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n \pm \nu) x^{n \pm \nu} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n \pm \nu + 2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n \pm \nu} = 0 \quad (2.209)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n ((n \pm \nu)^2 - \nu^2) x^{n \pm \nu} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n \pm \nu} = 0$$

$$c_0 (\nu^2 - \nu^2) x^{\pm \nu} + c_1 (1 \pm 2\nu) x^{1 \pm \nu} + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n (n^2 \pm 2n\nu) + c_{n-2}) x^{n \pm \nu} = 0 \quad (2.210)$$

$n = 0, 1$ の場合のみ分けて、 \sum の始まりを 2 に揃えました。

このとき、

- $n = 1$ のとき $(\pm 2\nu + 1)c_1 = 0$ であるから、 $\nu = \pm 1/2$ であれば $c_1 = 0$
- $n \geq 2$ のとき $(n \pm \nu)^2 - \nu^2 \neq 0$ であれば

$$c_n = \frac{1}{\pm 2\nu n - n^2} c_{n-2} \quad (2.211)$$

として級数解が求まります。

第3章 数値的に常微分方程式を解く

第1章で触れたように、世の中にある大半の微分方程式は解析的に解くことができません。そこで登場するのが数値解析です。計算機の力で微分方程式を数値的に解きます。具体的に関数 $y(x)$ を求めるのであれば、離散的な (飛び飛びの) 値 x_i に対して、各 y_i を精度良く求めます。この y_i を精度良く求めるために、様々な手法が考案されました。それらを紹介します。

本書では数値解析の手法を紹介することに重点を置きます。よって、数値解析にまつわる丸め誤差や桁落ちなどについては触れません。なお、具体的なアルゴリズムの紹介には疑似コードを使います。

3.1 オイラー法

オイラー法は最も簡単な数値解析の手法です。問題とする微分方程式を

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.1)$$

とします。また、初期条件を

$$y(x_0) = Y_0 \quad (3.2)$$

とします。

h を十分小さい定数として、 $y(x+h)$ をテイラー展開します。

$$y(x+h) = y(x) + h \frac{d}{dx} y(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} y(x) + \dots \quad (3.3)$$

ここで、 h は十分小さいので h の次数が2以上の項を無視します。すると、式3.1より $dy(x)/dx$ を $f(x, y)$ に置換して、

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y(x)) + O(h^2) \quad (3.4)$$

となります¹。この式は何を意味するのでしょうか。右辺は $y(x)$ と x 、および与えられた関数 f で構成された式、左辺は $y(x+h)$ です。そうです。第1章で少しお話しした、「今 ($y(x)$) の状態から少し先の未来 ($y(x+h)$) を知る」方程式です。図3.1を参照してください。

¹ $O(h^2)$ の項は、 O 記法 (Order の O) と言い、カッコの中身程度の量を表します。今回は h^2 以降の項を無視したので h^2 程度の量がこれに追加されます、という意味です。なお、この $O(h^2)$ は微小量として無視する量ですので、後に誤差の話としてもう一度現れます。

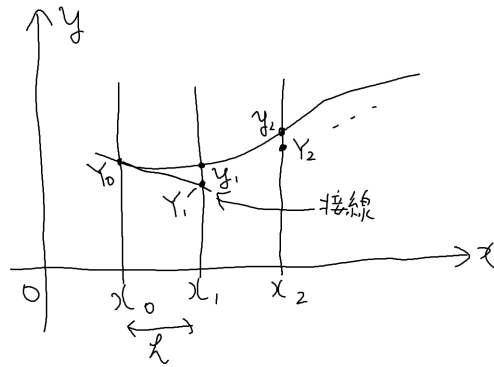


図 3.1: オイラー法のイメージ

図 3.1のように、 h ごとに取られた各点 x_i に対して、それぞれに対応する正しい y の値 y_i 、および計算機で計算した近似値 Y_i を考えます。このとき、 h を「刻み幅」と言います。刻み幅は一定である必要はありませんが、ここでは一定としておきます。

この考え方をを使うと、 Y_{i+1} は漸化式のように、

$$Y_{i+1} = Y_i + hf(x_i, Y_i) \quad (3.5)$$

と書けます。この式を使って初期条件 x_0 で Y_0 から順番に x を進めていくことで、関数 y の近似を求めることができます。

擬似コードを以下に示します。

アルゴリズム 1 オイラー法

Input: x_0, Y_0, h, N

Output: Y_N

```

for  $i = 0$  to  $N - 1$  do
   $x_i \leftarrow x_i + h$ 
   $Y_{i+1} \leftarrow Y_i + hf(x_i, Y_i)$ 
end for
return  $Y_N$ 

```

h の 2 乗以上の項を無視したので、局所誤差²は $O(h^2)$ です。

また、誤差の蓄積を考えれば、最終的に得られる計算結果に含まれる誤差³は

$$O(h^2) \times \frac{x_N - x_0}{h} = O(h) \quad (3.6)$$

となり、 $O(h)$ の誤差が含まれていると言えます。

3.2 改良オイラー法 (中点法)

オイラー法は計算が軽い反面、言ってしまうえば精度がいまいちでした。そこで、簡単に精度を上げる方法として図 3.2の方法を考えます。

²一回の計算につき生じうる誤差のことです

³計算を繰り返し、最終的に生じうる誤差のことです

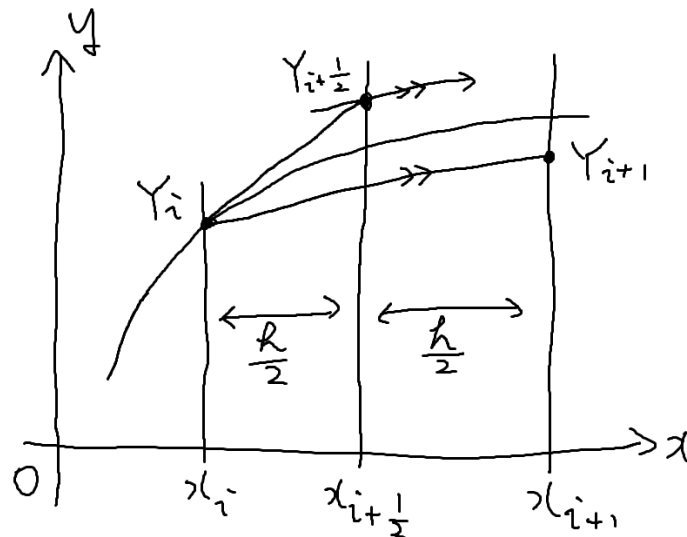


図 3.2: 改良オイラー法のイメージ

これは、

1. 通常のエイラー法を使って $Y_{i+1/2}$ を求める
2. 微分方程式から $Y_{i+1/2}$ での勾配 k を求める
3. $Y_{i+1} = Y_i + hk$ として Y_{i+1} を定める

という手順を踏んでいます。改良オイラー法は勾配として点 $Y_{i+1/2}$ での傾きを使うことに特徴があります。これを擬似コードにすると以下になります。解く微分方程式はオイラー法と同じ式 3.1 とします。

アルゴリズム 2 改良オイラー法

Input: x_0, Y_0, h, N

Output: Y_N

for $i = 0$ **to** $N - 1$ **do**

$$x_{i+1/2} \leftarrow x_i + \frac{h}{2}$$

$$Y_{i+1/2} \leftarrow Y_i + \frac{h}{2} f(x_i, Y_i)$$

$$Y_{i+1} \leftarrow Y_i + h f(x_{i+1/2}, Y_{i+1/2})$$

end for

return Y_N

計算はオイラー法よりも多少重くなってしまいました（とは言っても定数倍です）が、精度はかなり良くなりました。実際に誤差を見積もってみましょう。改良オイラー法は、擬似コードを1つの式にすれば、

$$Y_{i+1} = Y_i + h f\left(x_{i+1/2}, Y_i + \frac{h}{2} f(x_i, Y_i)\right) \quad (3.7)$$

です。 $f(x, y) = dy/dx$ とオイラー法で出てきたテイラー展開式 3.3 を使って展開してみましょう。

$$Y_{i+1} = Y_i + h \left(\frac{d}{dx} y \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \right) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &= Y_i + h \frac{d}{dx} \left(y(x_i) + \frac{h}{2} \frac{d}{dx} y(x_i) \right) \\ &= Y_i + h \frac{d}{dx} y(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} y(x_i) \end{aligned} \quad (3.9)$$

テイラー展開式 3.3 と比べると、3 次の項まで一致しています。よって局所誤差は $O(h^3)$ です。よって、最終的に生じうる誤差は

$$O(h^3) \times \frac{x_N - x_0}{h} = O(h^2) \quad (3.10)$$

です。オイラー法は $O(h)$ でしたので、ぐんと誤差が小さくなりましたね。

3.3 ルンゲ・クッタ法

ここではまず狭義のルンゲ・クッタ法を紹介し、その後一般化されたルンゲ・クッタ法を紹介します。

オイラー法や改良オイラー法は

$$Y_{i+1} = Y_i + h\Phi(x_i, Y_i) \quad (3.11)$$

という形の式をしていました。ルンゲ・クッタ法ではこの式について Φ を工夫することで精度を高める試みをしています。オイラー法や改良オイラー法では勾配を 1 つだけ求め、それを採用していましたが、ルンゲ・クッタ法では勾配を複数求め、その重みつき平均を勾配とします。

狭義のルンゲ・クッタ法は、「4 段 4 次のルンゲ・クッタ法」と呼ばれ、

$$k_1 = f(x_i, Y_i) \quad (3.12)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{k_1}{2}\right) \quad (3.13)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{k_2}{2}\right) \quad (3.14)$$

$$k_4 = f(x_i + h, Y_i + hk_3) \quad (3.15)$$

として勾配 k_1 から k_4 を定義して、

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.16)$$

として Y_{i+1} を求めます。たくさん k が出てきましたが、これらは、

- k_1 は x_i での勾配 (通常のエイラー法で使う勾配)
- k_2 は $x_{i+1/2}$ での勾配 (改良オイラー法で使う勾配)
- k_3 は k_2 の値から推測した $Y_{i+1/2}$ を使用した、 $x_{i+1/2}$ での勾配
- k_4 は k_3 の値から推測した Y_{i+1} を使用した、 x_{i+1} での勾配

という意味を持ちます。 k を図にすると図 3.3 となります。

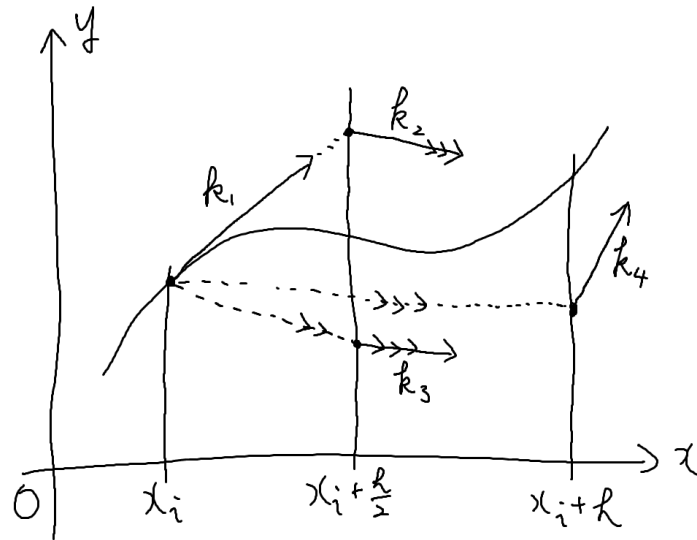


図 3.3: 4段4次ルンゲ・クッタ法のイメージ

これらの k を重みをつけて平均し、 Y_{i+1} を求めるときに使う勾配とします。
擬似コードにすると以下です。

アルゴリズム 3 4段4次ルンゲ・クッタ法

Input: x_0, Y_0, h, N

Output: Y_N

for $i = 0$ **to** $N - 1$ **do**

$k_1 \leftarrow f(x_i, Y_i)$

$k_2 \leftarrow f(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{k_1}{2})$

$k_3 \leftarrow f(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{k_2}{2})$

$k_4 \leftarrow f(x_i + h, Y_i + hk_3)$

$Y_{i+1} \leftarrow Y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

end for

return Y_N

4段4次のルンゲ・クッタ法の誤差を見積もってみましょう。各 k について dy/dx を使った形に書き換え、最後にルンゲ・クッタ法の式 3.16 に代入します。

まずは k_1 についてです。

$$k_1 = \frac{d}{dx}y(x_i) \quad (3.17)$$

k_2 については、

$$k_2 = \frac{d}{dx}y\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx}\left(y(x_i) + \frac{h}{2}\frac{d}{dx}y(x_i)\right) \\ &= \frac{d}{dx}y(x_i) + \frac{h}{2}\frac{d^2}{dx^2}y(x_i) \end{aligned} \quad (3.19)$$

k_3 は、

$$k_3 = \frac{d}{dx}y\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx}\left(y(x_i) + \frac{h}{2}\frac{d}{dx}y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right) \quad (k_2 \text{ の傾きを使う}) \\ &= \frac{d}{dx}\left(y(x_i) + \frac{h}{2}\left(\frac{d}{dx}y(x_i) + \frac{h}{2}\frac{d^2}{dx^2}y(x_i)\right)\right) \\ &= \frac{d}{dx}y(x_i) + \frac{h}{2}\frac{d^2}{dx^2}y(x_i) + \frac{h^2}{4}\frac{d^3}{dx^3}y(x_i) \end{aligned} \quad (3.21)$$

最後に k_4 です。

$$k_4 = \frac{d}{dx}y(x_i + h) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dx}\left(y(x_i) + h\frac{d}{dx}y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right) \quad (k_3 \text{ の傾きを使う}) \\ &= \frac{d}{dx}\left(y(x_i) + h\left(\frac{d}{dx}y(x_i) + \frac{h}{2}\frac{d^2}{dx^2}y(x_i) + \frac{h^2}{4}\frac{d^3}{dx^3}y(x_i)\right)\right) \\ &= \frac{d}{dx}y(x_i) + h\frac{d^2}{dx^2}y(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{d^3}{dx^3}y(x_i) + \frac{h^3}{4}\frac{d^4}{dx^4}y(x_i) \end{aligned} \quad (3.23)$$

さて、では4段4次のルンゲ・クッタ法の式3.16に代入しましょう。

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + \frac{h}{6}\frac{d}{dx}y(x_i) + \frac{h}{3}\left(\frac{d}{dx}y(x_i) + \frac{h}{2}\frac{d^2}{dx^2}y(x_i)\right) \\ &\quad + \frac{h}{3}\left(\frac{d}{dx}y(x_i) + \frac{h}{2}\frac{d^2}{dx^2}y(x_i) + \frac{h^2}{4}\frac{d^3}{dx^3}y(x_i)\right) \\ &\quad + \frac{h}{6}\left(\frac{d}{dx}y(x_i) + h\frac{d^2}{dx^2}y(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{d^3}{dx^3}y(x_i) + \frac{h^3}{4}\frac{d^4}{dx^4}y(x_i)\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$= Y_i + h\frac{d}{dx}y(x_i) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}y(x_i) + \frac{h^3}{6}\frac{d^3}{dx^3}y(x_i) + \frac{h^4}{24}\frac{d^4}{dx^4}y(x_i) \quad (3.25)$$

綺麗にテイラー展開の式3.3と4次の項まで一致しました。よって、4段4次ルンゲ・クッタ法の局所誤差は $O(h^5)$ 、最終的に生じる誤差は $O(h^4)$ です。実は「4段」は k の数である4つ、「4次」は最終的な誤差の次数 $O(h^4)$ の4です。

3.3.1 一般的なルンゲ・クッタ法

n 段のルンゲ・クッタ法は、

$$k_i = f\left(x_i + hc, Y_i + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right) \quad (3.26)$$

として、

$$Y_{i+1} = Y_i + \sum_{i=1}^n b_i k_i \quad (3.27)$$

と書けます。なお、 m 次の精度を出すために必要な最低段数は

表 3.1: m 次のルンゲ・クッタ法に必要な最低の次数 n

m 次	1	2	3	4	5	6	7	8
n 段	1	2	3	4	6	7	9	11

です。

ちなみにオイラー法は「1段1次ルンゲ・クッタ法」、改良オイラー法は「2段2次ルンゲ・クッタ法」です。