力学の指南書

Nyanyan

2019 年 3 月 8 日

目 次

第1章　はじめに

これは私が趣味で力学を勉強するにあたって、理解するのに大事なところをまとめたものです。物理に興味がある高校生が読んで理解できる内容となるように書きました。また、必要な前提知識は十分丁寧に書いたつもりですので、意欲のある中学生にも理解していただける内容となっています。

力学に限らず物理はまず誰もが認めざるを得ない自然現象が存在します。そして、それをどうにかこうにか数式で (近似して) 表していくのが「物理」的な視点です。

力学において最初に認める自然現象は以下のものです。

- 慣性の法則
  物体は外部から力が加わらない限り、静止し続けるか等速直線運動をし続ける。
- 運動方程式
  物体に加速度が生じた時、その物体には加速度に比例し質量に反比例する力が加わった。
- 作用反作用
  2物体間で、一方が他方に力を加えると、力を加えた物体には他方の物体から同じだけの力が加わる。
- 万有引力
  質量のある2物体間には、各物体の質量にそれぞれ比例し、物体間の距離の2乗に反比例する引力が働く。

第2章　前提知識

物理は自然現象をどうにかこうにか数式で表そうとする学問ですから、相応の数学の知識が必要です。ここでは数学の知識を主軸に、本書を読む上で不可欠な前提知識を書いていきます。読者の方は知らないところだけを読むので問題ありません。なお、数学的知識の中でも最も大事な微分・積分については章を分けて解説します。

本章での説明はページ数の関係でかなり簡易的な説明です。読んでわからないところがありましたらご自身で調べてください。

2.1　数学記号

本書で頻出する数学記号とその意味、例を表2.1に示します。

表 2.1: 数学記号とその意味

記号	意味	例・備考
$\cap$	かつ	A∩B: A かつ B
$\in$	要素	a ∈B: a は B の要素である
$\mathbb{C}$	複素数	複素数は実数 $\cap$ 虚数
$\mathbb{R}$	実数	$\mathbb{C} \cap \overline{\mathbb{R}}$: 虚数
$[a, b]$	区間 $a \leq$ (変数) $\leq b$	関数の区間を表すのによく使う

2.2　ベクトルとスカラー

物理ではよくベクトル、スカラーという言葉が出てきます。スカラーはみなさんがよくご存知の、「ただの数」です。ではベクトルとは何なのでしょうか。簡単に説明すると、ベクトルは向きの情報を持ったスカラーです。

ベクトルとスカラーにはこのような違いがあるため、書き分けをする必要があります。本書では世間に一般に用いられている書き分け「ベクトルは太字」という方針で書きます。

なお、

$$r = |\boldsymbol{r}| \tag{2.1}$$

という書き方で、ベクトルの大きさ (スカラー) を表すことにします。

2.2.1　内積

ベクトルの演算で掛け算をしたいと思った時、掛け算の仕方には2通りあります。その一つが内積 (スカラー積) です。スカラー積という名前の通り、演算の結果はスカラー量になります。

演算方法を 2 つ、記します。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= ab\cos\theta && (2.2)\\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...+a_nb_n && (2.3)\end{aligned}$$

なお、θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角、$a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ...$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成分です。

内積は、一方のベクトル $\boldsymbol{b}$ をもう一方のベクトル $\boldsymbol{a}$ に射影したとき[1]の、影の長さ $b\cos\theta$ と $\boldsymbol{a}$ の長さ a の積です。

また、内積は演算方法からひと目で分かるように、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ です。

2.2.2 外積

外積はクロス積とも言われ、また、3 次元ベクトルでの外積は特にベクトル積と言います。物理では 3 次元ベクトルを主に使うので、3 次元ベクトルで話を進めましょう。なお、演算結果はベクトルになります。

まずは演算方法です。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

出力されるベクトルは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直で、掛けられた順番の右ねじの方向のベクトルとなります。このことからもわかるように、外積では $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ です。

なお、外積で求めるベクトルの大きさは、外積をとった 2 つのベクトルを 2 辺とした平行四辺形の大きさに等しくなります。

2.3 色々な関数

まず、関数とは「なにかを入力すると、なにかを返してくるもの」です。例えばお金を入れるとジュースが出てくる自動販売機は一種の関数です。また、関数は「函数」と書くこともあり、ちょうど自動販売機は箱の形をしているので、そのようなイメージを持っておくと良いでしょう。ですが、世間一般に関数という言葉は、「数値を入れると唯一つの数値を返してくるもの」としての使い方が多いと思います[2]。

物理現象を解明するために (かどうかの確証は持てませんが)、世の中には様々な関数があります。本書では、高校範囲で習わない関数についてはその都度説明を入れますが、高校範囲の関数については適宜説明はしません。わからない点がありましたら調べてみてください。

[1]射影とは、$\boldsymbol{a}$ と垂直な光線を $\boldsymbol{b}$ に当てて、$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ に影を作るようにすることです。

[2]余談ですが、プログラミング用語 (と言って良いのかはわかりませんが) の「関数」は前者の「なにかを入力するとなにかを返してくるもの」としての意味合いが強く、入力には数値だけではなく、文字列だったり、何かの関数であったりします。ちなみにある関数に関数を入力するような状態を数学では合成関数と言います。微分・積分の範囲で物理でもよく使います。

2.4　近似

物理ではよく「近似式」というものを使います。よく使う近似には微小二乗項無視の近似と一次近似があります。また、一次近似とつながりのあるテイラー展開もここで説明します。

2.4.1　微小二乗項無視

物理では、「とても小さいものを 2 乗したらとてもとても小さいので無視して良いだろう」という考えをよく使います。具体的な例としては、$|x| \ll 1$ のとき、

$$(a+x)^2 \approx a^2 + 2ax$$

等です。この式では x^2 が微小二乗項として無視されました。

2.4.2　一次近似

例えば $\theta \ll 1$ の時、$\sin\theta \approx \theta$ といったものです。これらは全て、一次近似という種類の近似です。

点 $x = a$ まわりでの一次近似の公式は以下です。$|x| \ll 1$ とします。

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x \tag{2.5}$$

ここで、$f'(a)$ はグラフ $y = f(x)$ の $x = a$ での傾き (微分係数) を表します。微分について詳しくは 3.1 節を参照してください。

この式は、よく見ると点 $(a, f(a))$ での、$y = f(x)$ の接線です。以下に代表的な近似を列挙しますが、これは一次近似でいつでも導けるものなので覚えなくて結構です。

表 2.2: 一次近似の例 ($|x| \ll 1$)

元の式	近似式
$\sin x$	x
$\cos x$	1
$\tan x$	x

2.4.3　テイラー展開

前節で一次近似を説明しました。では、この近似を永遠に続けていくとどうなるでしょうか。近似式であったはずの関数は限りなくもとの関数に近づきます。これをテイラー展開と言います。テイラー展開の公式を記しましょう。

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{f(a)}{0!}(x-a)^0 + \tfrac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \tfrac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \end{aligned} \tag{2.6}$$

また、特に $a=0$ 周りでのテイラー展開はマクローリン展開とも言い、以下の式で表せます。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ &+ \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \end{aligned} \tag{2.7}$$

第3章　物理のための微分・積分

力学に限らず物理では頻繁に微分方程式というものを解きます。ここではその中でも力学によく出てくるものの紹介と基本的な解き方を解説します。簡単に言ってしまえば、力学で解く微分方程式は (多分) 運動方程式だけです。運動方程式といえば、

$$ma = F$$

を思い浮かべるかもしれませんが、これからはこう書くことにしましょう。

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}$$

または、

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$$

ここで、演算子 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ と $\ddot{\boldsymbol{r}}$ は両者とも同じ意味で、位置 $\boldsymbol{r}$ を時間 t で 2 回微分した形です。物理では、何かの関数を時間 t で微分した際、その階数だけ関数の上にドットをつける習慣があります[1]。

力学的な現象は基本的にこのように、微分された関数が含まれた形で記述されます。私たちはこの方程式を「解く」ことで、自然現象を理解していきます。実際にこれを解くのは3.3節まで待って、ここでは微分、積分が一体何者なのかをお話しましょう。

3.1　微分

実は歴史的には積分の方が微分よりも圧倒的に早く発明されたのですが、通例では微分を先に学びます。本書でもその流れで説明していきます。

「A を B で微分する」は、簡単に言うと A を縦軸、B を横軸にとったグラフの傾きと B を対応させた関数を求めることに当たります。微分の視覚的なイメージを図3.1に示します。

なお、ある関数 A を微分をした関数 B を「関数 A の導関数」と言います。

ここで微分の定義を確認しましょう。

微分はグラフの傾きを表す関数だと先程書きました。$f(x) - x$ グラフの、ある区間 $[x, x+h]$ での (平均の) 傾き $s(x)$ は以下のように表せます。ここで、$h > 0$ です。

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

[1]微分を n 回行うことを n 階 と言います。しかし、決して n 回微分と言うことはありません。読みが同じで紛らわしいです。

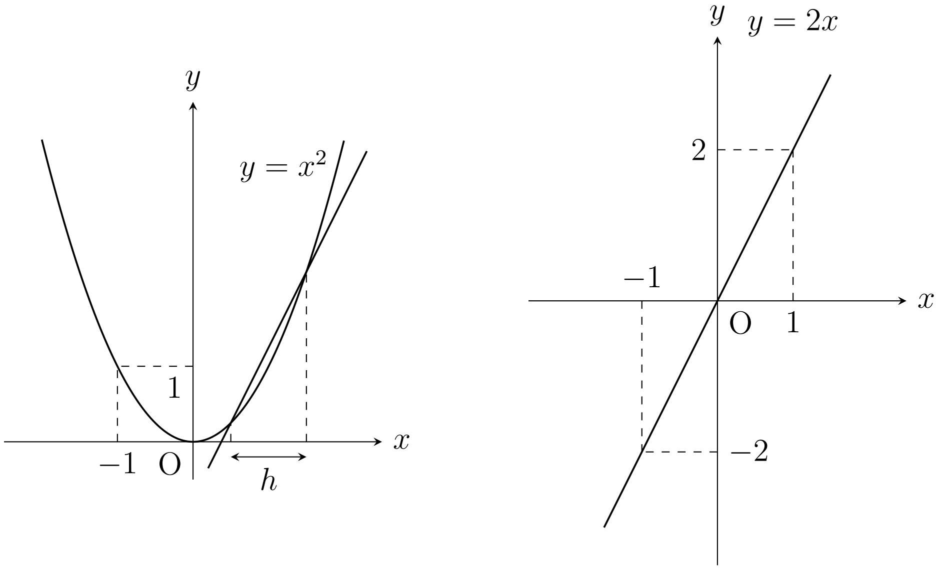

図 3.1: 左: 微分のイメージ、右: 導関数

これはあくまでも「平均の」傾きで、グラフの傾きを正確に表しているとは言えません。これを正確にしていくためには h を 0 に近づけていけば良さそうです。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3.1}$$

ここで記号 $\lim_{h\to 0}$ は、h を限りなく 0 に近づける[2]ことを示しています[3]。これが正確な微分の定義です。

表 3.1に一般的な関数の微分に関する公式を示します。なお、導関数は微分したあとの関数です。なぜこうなるか気になった方は各自調べるなり微分の定義式を使って計算してみるなりしてみてください。

表 3.1: 微分に関する公式 (それぞれ x で微分)

関数	導関数
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
a^x	$a^x \log a$
$\log_a x$	$1/(x\log a)$

微分した関数の表記について、一般的に以下のような記号が使われます。左は位置 x を時間 t で微分した関数で、右は左の関数を更に時間 t で微分した関数 (t での 2 階微分) を表します。

[2] 本来の定義では h は正の方向から 0 に近づけるべきですが、よく考えると負の方向から近づけた場合も同じ式の形で正確に定義できることがわかります。

[3] lim の記号には、変数をある数値、または $+\infty$、$-\infty$ に極限まで近づけるという意味があります。何を何に近づけるかは記号の下に表記します。なお、近づける数値に正の方向から近づけるのか、負の方向から近づけるのかを指定する際にはそれぞれ $+0$、-0 をつけて表現します。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

また、くどいようですが、いちいちこのような形で書くのは面倒なので、物理では特に何かの関数 (ここでは位置 x) の時間微分について、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \dot{x} \\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= \ddot{x}\end{aligned}$$

というように、ドットを上につけて表すことが多々あります[4]。

3.1.1　合成関数の微分

2.3節でも少しお話ししましたが、「合成関数」とは、関数の入力に関数が使われている状態 (全体の関数) のことです。仮に関数 $f(x)$ の入力に関数 $g(x)$ を使ったとしてみましょう。これを x で微分するとき、微分の記号 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ を分数のように考えて、以下のように考えられます。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}f(g(x)) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g(x)}f(g(x)) \times \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \qquad (3.2)\end{aligned}$$

この式は、$f(g(x))$ を x で微分したものは、$f(g(x))$ を $g(x)$ で微分したものに $g(x)$ を x で微分したものをかけ合わせることで計算できるということを表します。これは「合成関数の微分」と呼ばれます[5]。

3.1.2　積の微分

ここでは関数の積 $f(x)g(x)$ を x で微分してみましょう。今回は微分の定義式である式 (3.1) を用いて考えます。二行目で少しトリッキーな変形をしますが、こうすると扱いにくかった $f(x+h)g(x+h)$ が扱いやすくなります。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x+h)\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\times f(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\times g(x) \qquad (3.3)\end{aligned}$$

これは積の微分と呼ばれます。

[4] 本書では、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 等と書いたほうがわかりやすい場合はそう書くことにします。

[5] この証明は現段階ではかなり直感的なもので、まず微分の記号が分数のように扱えることを本来は証明すべきです。ですがこれに関しては $\epsilon-\delta$ 論法を学ばないとよく理解できないため、(この本は数学書ではないこともあり、) ここでは割愛します。

3.1.3　逆関数の微分

逆関数は例えば $y = f(x)$ という関数に対し、同値な関数を $x = g(y)$ と表記したもので、$g(x) = f^{-1}(y)$ と書きます。また、逆関数は $x - y$ 平面にグラフを描くと互いに $y = x$ に対称になっています。

逆関数は元の関数と $y = x$ に対称です。よって、ある点での逆関数の傾きは元の関数のその点に対応する傾きの逆数です。例として図 3.2を参照してください。

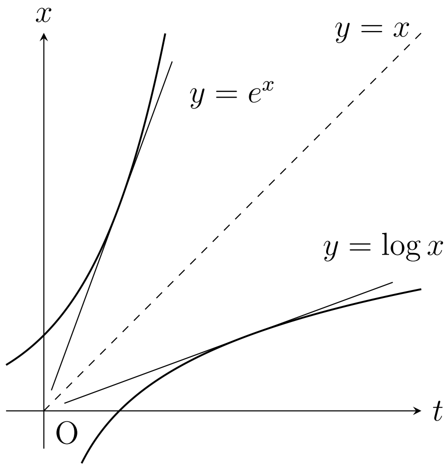

図 3.2: 逆関数とその接線の例

よって、直感的ではありますが、逆関数の微分公式として以下が言えます。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)} \tag{3.4}$$

3.2　積分

結論から言うと積分の演算は微分の逆操作です。歴史的には微分よりずっと前に積分が考案され、その後微分の考案、そのタイミングでこれらの演算の相互関係が発見されました。

積分はグラフの囲む面積を求めること、と定義することができます。その演算は図 3.3のように、グラフを細かく短冊状に区切っていき、1 つずつ足し合わせていくことで行います。

図 3.3を見ると、短冊と関数の間に隙間 (誤差) があることがわかると思います。この誤差を減らすために、昔の人は隙間を三角形で近似して、その三角形の面積を算出したりしました。現在では、図の $1/N$ を極限まで 0 に近づけることで誤差を 0 に極限まで近づけます。

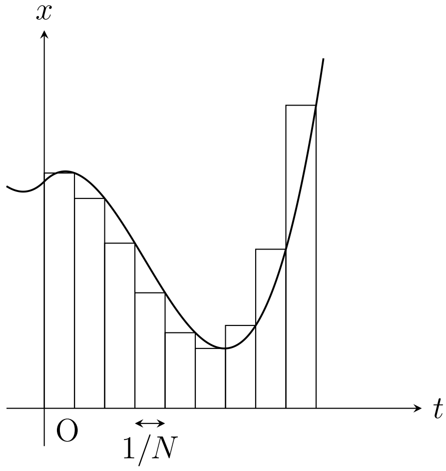

図 3.3: 積分 (定積分) のイメージ

積分の定義式 (厳密には区分求積法と呼びます) を書いておきます。なお、これは定積分 (ある区間の、グラフで囲まれた部分の面積を求めること) の公式です。$\sum$ 内が一つの短冊の面積で、$f(i/N)$ が高さ、$1/N$ が横幅です。

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left\{ f\left(\frac{i}{N}\right) \times \frac{1}{N} \right\} \tag{3.5}$$

積分にも公式はありますが、本書は数学書ではないのでわざわざ導出はしません。なお、一般に関数は n 回積分操作を行うと n 個の任意定数が現れます。これは単純に、次数が 0 の項は微分すると 0 となって消えてしまうためです。このような任意定数を積分定数と言います。表3.2ではその積分定数を C と書いています。

表 3.2: 積分に関する公式 (それぞれ x で微分)

関数	原始関数
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\log\lvert\cos x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
$\log_a x$	$x\left(\log_a x - \frac{1}{\log a}\right) + C$

3.2.1　置換積分

何か積分をしたいと思ったときに、そのままではどうも積分しにくいとします。そんなときには置換積分をします。置換積分では積分変数を別のものに置き換えて積分を実行することができます。

直感的には微分の記号を分数のようにして、以下の式で導けます。

$$\begin{aligned}\int f(x)\ \mathrm{d}x &= \int f(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}u}\ \mathrm{d}x \\ &= \int f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\ \mathrm{d}u \end{aligned} \tag{3.6}$$

上の式では、新たに x にまつわる変数 u(例えば a, b は定数として $u = ax + b$) を定義して置換積分したものです。

3.2.2 部分積分

部分積分は、関数の積を積分するのにとても有効です。また、これは積の微分の逆操作でもあります。ですので導出は積の微分公式を用いましょう。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \times f(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \times g(x)$$

両辺を x で積分して、

$$f(x)g(x) = \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \times f(x)\right)\ \mathrm{d}x + \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \times g(x)\right)\ \mathrm{d}x$$

移項して、

$$\int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \times g(x)\right)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int \left(f(x) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\ \right)\mathrm{d}x \tag{3.7}$$

3.3 微分方程式

微分方程式とは、その名の通り微分した関数が含まれる方程式です。微分方程式を解くとは、その方程式を満たす (一般的な) 関数を見つけることです。一つ解いてみましょう。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(= 一定)$$

両辺を t で積分して、

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t &= \int v\ \mathrm{d}t \\ x &= vt + C\ (C \text{ は任意定数})\end{aligned}$$

これは実用上、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ を分数のように捉えて以下のように考えてインテグラルをつけることで積分することもできます。

$$\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t$$

今解いた微分方程式は、等速直線運動をする物体の速度に関する方程式を解いて、その物体の位置を導いたことになります。

次にこちらを解いてみましょう。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x$$

これは変数分離型の微分方程式と言って、$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ を分数のように捉えて、左辺に x、右辺に t を残すように、変数を分離する式変形を行ったのち、積分します。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\
\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \int \mathrm{d}t \\
\log|x| &= t + C \ (C\text{ は任意定数}) \\
x &= Ae^t \ (A = e^C)
\end{aligned}$$

ではこちらはどう解いたら良いでしょうか。k, m, x_0 は定数です。

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}(x - x_0)$$

ご存知の方は、これが単振動の運動方程式であるとわかるでしょう。

この微分方程式 (運動方程式) を解く前に、私たちがよく解く運動方程式を分類しておきましょう。私たちがよく解く微分方程式の形には2種類あります。

- 線形の常微分方程式[6]
  $\ddot{x}, \dot{x}, x$ の次数が全て1である微分方程式。変形すると a, b を定数として以下のような形になります。

  $$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$$

  また、このとき、$f(t) = 0$ のものを線形斉次微分方程式、$f(t) \neq 0$ のものを線形非斉次微分方程式と言います。線形非斉次微分方程式では、方程式を満たす簡単な $x = g(t)$ を見つけ、$x = x' + g(t)$ と置換することで[7]、上の式は

  $$\ddot{x}' + \frac{\mathrm{d}^2g(t)}{\mathrm{d}t^2} + a\dot{x}' + a\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} + bx' + bg(t) = f(t)$$

  となり、

  $$\frac{\mathrm{d}^2g(t)}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} + bg(t) = f(t)$$

  という特殊解の前提条件から、結局、

  $$\ddot{x}' + a\dot{x}' + bx' = 0$$

  と変形できます。このように変形することで、線形非斉次微分方程式は線形斉次微分方程式を解くことに帰着できます。

- 非線形の常微分方程式
  $\ddot{x}, \dot{x}, x$ のうち1つ以上の項の次数が1でない微分方程式。

[6]偏微分という演算が含まれる偏微分方程式との混同を避けるため、上で見てきたような微分方程式を常微分方程式と言います。

[7]ここで x' は x を微分したという意味ではなく、x を置き換えたという意味です。

さて、では実際に様々なタイプの運動方程式を解いてみましょう。ラインナップは以下です。

- 単振動型
- 速度の 1 乗に比例する抗力が働く運動型
- 速度の 2 乗に比例する抗力が働く運動型
- 減衰振動型
- 減衰系の強制振動型

最初の 2 つは頻出なので、形を覚えてしまうと良いです。
では解いていきましょう。

3.3.1 単振動型

解く運動方程式はこちらです。

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

これは、常に物体の位置に比例し、物体を元の位置に戻す向きに力がかかっている (復元力が働いている) 状態を表しています。わかりやすくするために少し変形しましょう。

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{k}{m}x_0$$

これは線形非斉次微分方程式ですので、まずは特殊解を見つけましょう。特殊解は勘と経験で見つけていきますが、本書では私の思考回路を少し詳しく書くことにします。$x(t)$ が定数関数であると、$\ddot{x}$ は 0 になりますので考えやすいと思います。お分かりの通り、$x = x_0$ はこの微分方程式の特殊解です。では上に倣って $x = x' + x_0$ と置きましょう。すると、この微分方程式は

$$\ddot{x'} = -\frac{k}{m}x'$$

となります。

両辺をよく睨みましょう。x は 2 回 t で微分すると $-k/m$ が前に出てくる形をしています。この条件を満たす関数として思いつくのは三角関数でしょう。実際、以下はこの微分方程式を満たします。

$$\begin{aligned} x &= A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_0\right) \\ x &= A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_0\right) \end{aligned}$$

これは初期位相を変化させれば同値です。

また、ここで出てきた任意定数 A, θ_0 は初期条件[8]によって決まります。

[8]物体の運動について決まっている条件のことです。例えば $t = 0$ で $x = 0$ だとか、t と関数を結びつける条件です。また、この初期条件は「初期」とは言いますが別に $t = 0$ の時の条件しか使えないわけではありません。任意の $t = t_0$ における $x = x_0$、または $\dot{x} = v_0$ だったりすることも考えられます。

よって解は、

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_0'\right) + x_0 \tag{3.8}$$

となります。

別の解き方として、線形斉次微分方程式は両辺を一所懸命睨まなくても、$x' = Ae^{\gamma t}(\gamma \in \mathbb{C})$ と置いて、運動方程式は以下になります。

$$A\gamma^2 e^{\gamma t} = -A\frac{k}{m}e^{\gamma t}$$

そして両辺を $Ae^{\gamma t}$ で割れば γ の方程式に帰着して解くことができます。この γ の方程式を特性方程式と言うことがあります。

$$\gamma^2 = -\frac{k}{m}$$

この解は

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{i}$$

です。一般に、線形斉次微分方程式の解が複数ある場合は、それらを定数倍して足したものもその微分方程式の解となります (この操作を線形結合と言います)。そこで、x について 2 つの解を足し合わせれば、任意定数 c_1 と c_2 を使って、

$$x' = c_1 e^{\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{i}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{i}t}$$

ここで、オイラーの公式と呼ばれる公式を用いて式変形します。オイラーの公式は、

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

です[9]。これを使うと x' は、

$$\begin{aligned} x' &= c_1\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \mathrm{i}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right) + c_2\left(\cos\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right) \\ &= (c_1 + c_2)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + (c_1 - c_2)\mathrm{i}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{aligned}$$

ここで、$\cos(-\theta) = \cos\theta, \sin(-\theta) = -\sin\theta$ を使いました。

この解は運動方程式の一般解と言い、任意定数が含まれた形をしています。このまま答えとしても良いですが、初期条件を考慮してみると式 (3.8) の形の式になります。初期条件 $t = 0$ で $x = A + x_0$ かつ $\dot{x} = 0$ としましょう。これを代入するためにまずは $\dot{x}$ を求めます。

$$\dot{x} = -(c_1 + c_2)\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + (c_1 - c_2)\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{i}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

それぞれに初期条件 $t = 0$ を代入しましょう。

[9]オイラーの公式を導出するには、右辺と左辺をそれぞれ $\theta = 0$ 周りでテイラー展開 (マクローリン展開) します。

$$
\begin{aligned}
x(t=0) &= c_1 + c_2 + x_0 \ (= A + x_0) \\
\dot{x}(t=0) &= (c_1 - c_2)\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{i} \ (= 0)
\end{aligned}
$$

ここで、x は上で求めた x' の一般解に特殊解 x_0 と足していることに注意してください。

初期条件の式から、$c_1 + c_2 = A$ かつ $c_1 - c_2 = 0$ がわかります。よって、この運動方程式の答えは、

$$
x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + x_0
$$

となり、こちらの方法でも答えが出ました (初期条件 $t = 0$ で $\dot{x} = 0$ を考慮しているため、式 (3.8) 式と比べて初期位相 θ'_0 が消えています。)。

$\theta_0 = 0$ としたグラフの概形は以下です。グラフの詳細はここでは割愛します。

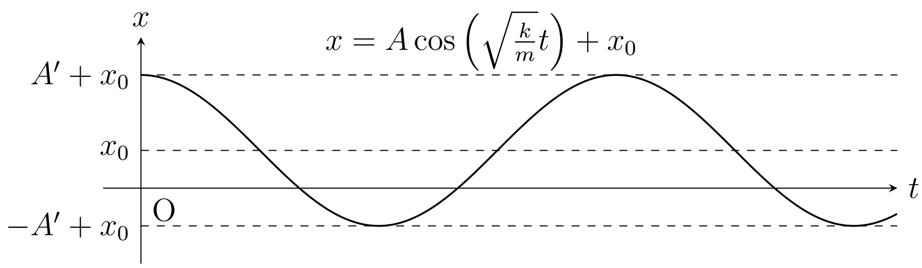

図 3.4: 単振動

3.3.2 速度の 1 乗に比例する抗力が働く運動型

次に解く運動方程式はこちらです。

$$
m\ddot{z} = -m'g - k\dot{z}
$$

これは流体中を自然に落下する物体に関する運動方程式です。z を使ったのは単にこの運動が鉛直方向に起こる運動だからです。詳細は省きますが、m' は浮力も考慮した物体の質量で、また、誘導質量[10]は無視します。

さて、これも解きやすいように変形しましょう。

$$
\ddot{z} = -\frac{m'}{m}g - \frac{k}{m}\dot{z}
$$

これも例によって特殊解を見つけましょう。$\dot{z}$ はなにかの定数で、$\ddot{z}$ は 0 であると考えやすいです。そうすると z は t の 1 次式となって、$z = -m'gt/k + C$(C は任意定数) はこの方程式を満たす特殊解です。そこで、$z = z' - m'gt/k + C$ と置くと、

$$
\ddot{z}' = -\frac{k}{m}\dot{z}'
$$

[10]流体の中を落下する物体は、一部の流体を加速させます。それによって本来は運動方程式が多少複雑になり、結局、見かけ上物体の慣性質量 m が多少増加したようになります。

　この方程式は睨んでも $Ae^{\gamma t}$ で置いても、結局 z' を指数関数で置換することになりそうです。仮に $z' = Ae^{\gamma t}$ と置くと、

$$\begin{aligned} A\gamma^2 e^{\gamma t} &= -A\gamma\frac{k}{m}e^{\gamma t} \\ \gamma &= -\frac{k}{m} \end{aligned}$$

　簡単に γ が求まります。よって、

$$z = Ae^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m'g}{k}t + C \tag{3.9}$$

　となります。

　$A < 0$ での $v-t$ グラフ、$z-t$ グラフの概形を掲載します。

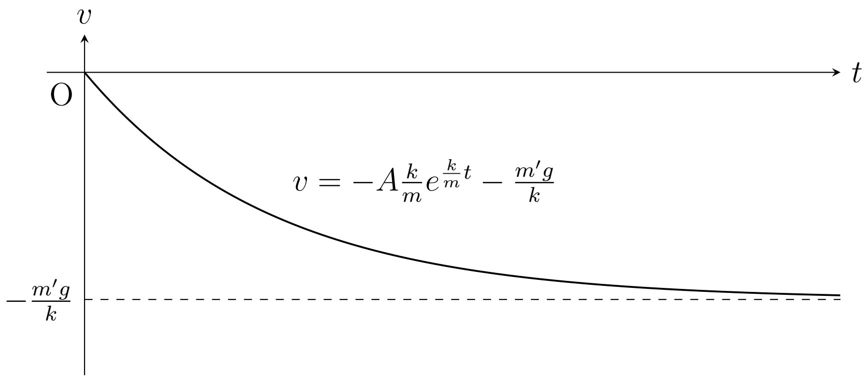

図 3.5: 速度 1 乗比例の抵抗が働く落下 $v-t$ 図

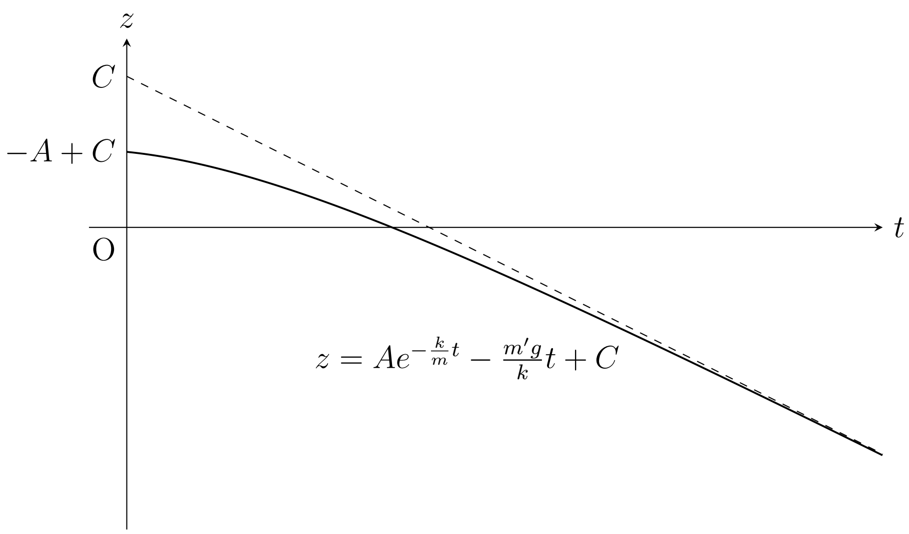

図 3.6: 速度 1 乗比例の抵抗が働く落下 $z-t$ 図

3.3.3　速度の 2 乗に比例する抗力が働く運動型

今回解く運動方程式はこちらです。

$$m\ddot{z} = -m'g + k\dot{z}^2$$

速度の 1 乗に比例する抗力が働く運動型と酷似していますが、よく見ると $\dot{z}$ の次数が 2 です。なんとこれは非線形の微分方程式です。しかし、これは解くことができます。

まずは $\dot{z} = v$ として式を書き直しましょう。こうすることで運動方程式は 1 階微分方程式となり、解く方針が見えやすく鳴ります。

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -m'g + kv^2$$

v を左辺に、t を右辺に残すように変数分離し、部分分数分解し、そして積分しましょう。

$$\begin{aligned}
-\frac{m\ \mathrm{d}v}{m'g - kv^2} &= \mathrm{d}t \\
-\left(\frac{1}{\sqrt{m'g} - \sqrt{k}v} + \frac{1}{\sqrt{m'g} + \sqrt{k}v}\right)\frac{m\ \mathrm{d}v}{2\sqrt{m'g}} &= \mathrm{d}t \\
-\frac{m}{2\sqrt{m'g}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{m'g} - \sqrt{k}v} + \frac{1}{\sqrt{m'g} + \sqrt{k}v}\right)\mathrm{d}v &= \int \mathrm{d}t \\
-\frac{m}{2\sqrt{m'g}}\log\frac{\sqrt{m'g} + \sqrt{k}v}{\sqrt{m'g} - \sqrt{k}v} &= t + C\ (C\text{ は任意定数}) \\
\frac{\sqrt{m'g} + \sqrt{k}v}{\sqrt{m'g} - \sqrt{k}v} &= e^{-\frac{2\sqrt{m'g}}{m}t + C'}\ \left(C' = -\frac{2\sqrt{m'g}}{m}C\right)
\end{aligned}$$

ここで、物体は常に自然に落下していることから $m\ddot{z} = -m'g + k\dot{z}^2 < 0$ です。これより、log 内は必ず正です。この式を v について整理すると、以下のようになります。

$$\begin{aligned}
v &= -\sqrt{\frac{m'g}{k}}\frac{e^{-2\frac{\sqrt{m'g}}{m}t + C'} - 1}{e^{-2\frac{\sqrt{m'g}}{m}t + C'} + 1} \\
&= -\sqrt{\frac{m'g}{k}}\frac{e^{-\frac{\sqrt{m'g}}{m}t + \frac{1}{2}C'} - e^{-\frac{\sqrt{m'g}}{m}t + \frac{1}{2}C'}}{e^{-\frac{\sqrt{m'g}}{m}t + \frac{1}{2}C'} + e^{-\frac{\sqrt{m'g}}{m}t + \frac{1}{2}C'}} \\
&= -\sqrt{\frac{m'g}{k}}\tanh\left(\frac{\sqrt{m'g}}{m}t + \theta_0\right)\ \left(\theta_0 = \frac{1}{2}C'\right) \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

ここで出てきた tanh は双曲線関数と呼ばれ、以下に定義されます。定義を見ればお分かりの通り、指数関数をまとめて表記できるようにしただけです。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

また、三角関数と似た名前というだけあって、$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ に酷似する関係 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ や、微分した際の相互関係

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x$$

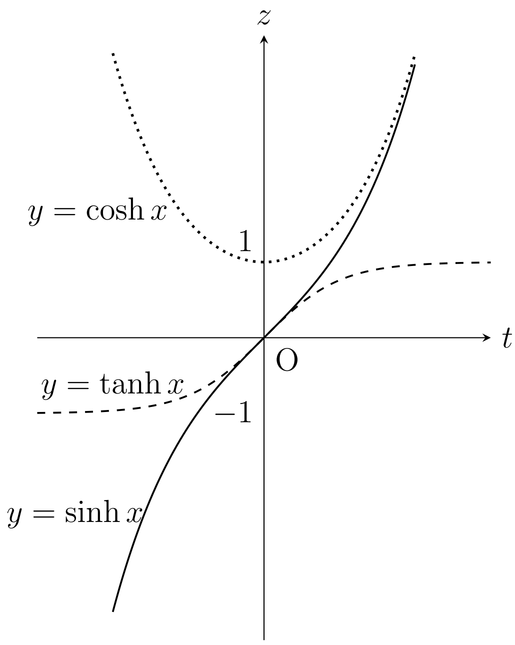

図 3.7: 双曲線関数のグラフ

があります。

それぞれの関数のグラフは以下の通りです。

さて、本題に戻りましょう。これで $v = \dot{z}$ が t の関数として表せました。あとはこれを t で積分すれば解が導けます。まずは積分の準備です。

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= -\sqrt{\frac{m'g}{k}}\tanh\left(\frac{\sqrt{m'g}}{m}t+\theta_0\right) \\
&= -\sqrt{\frac{m'g}{k}}\frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{m'g}}{m}t+\theta_0\right)}{\cosh\left(\frac{\sqrt{m'g}}{m}t+\theta_0\right)} \\
&= -\sqrt{\frac{m'g}{k}}\frac{\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{m'g}}{m}t+\theta_0\right)\right)'}{\cosh\left(\frac{\sqrt{m'g}}{m}t+\theta_0\right)}
\end{aligned}
$$

ここで最後の式で出てきた $'$ はカッコ内の関数を t で微分したことを示します。これで準備は整いました。t で積分しましょう。

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}z &= -\sqrt{\frac{m'g}{k}}\int\frac{\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{m'g}}{m}t+\theta_0\right)\right)'}{\cosh\left(\frac{\sqrt{m'g}}{m}t+\theta_0\right)}\,\mathrm{d}t \\
z &= -\sqrt{\frac{m'g}{k}}\log\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{m'g}}{m}t+\theta_0\right)\right)+C''\ (C''\text{は任意定数}) \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

これでこの運動方程式が解けました。$\theta_0 = 0$ とするときの $v-t$ グラフ、$x-t$ グラフは以下の通りです。

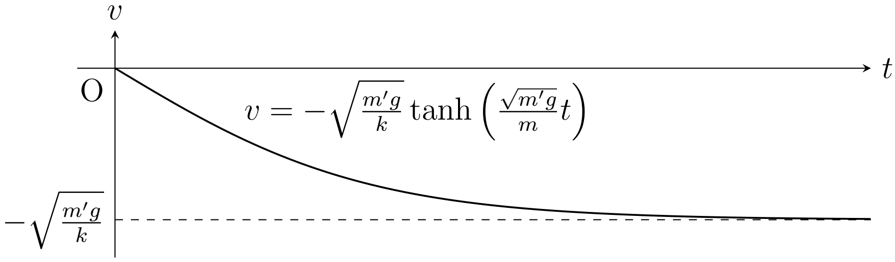

図 3.8: 速度 2 乗比例の抵抗が働く落下 $v-t$ 図

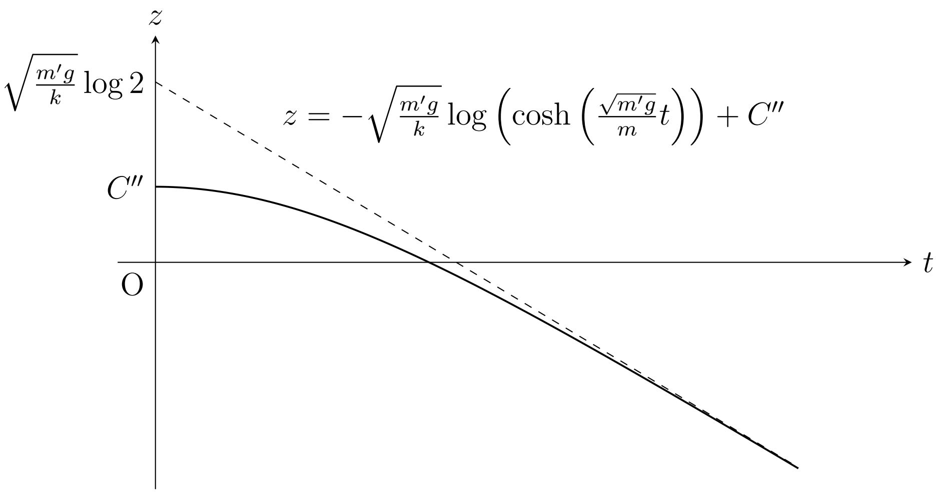

図 3.9: 速度 2 乗比例の抵抗が働く落下 $z-t$ 図

3.3.4 減衰振動型

さて、ここからは応用です。今度解く運動方程式は以下です。

$$m\ddot{x}=-k(x-x_0)-k'\dot{x}$$

これは速さの 1 乗に比例する抗力と復元力が働く場合の物体の運動方程式です。現実では粘性の高い流体の中でバネにおもりをつないで振動させると起こりますが、詳しくは後々お話します。ここではこの運動方程式を解くことを念頭にしましょう。$\ddot{x}$ の係数を 1 にするように両辺 m で割っておきましょう。

$$\ddot{x}=-\frac{k}{m}(x-x_0)-\frac{k'}{m}\dot{x}$$

まずは例によって特殊解を見つけます。x を定数関数とすると $\dot{x},\ddot{x}$ が 0 になるので都合が良いでしょう。この条件で考えると $x=x_0$ は特殊解です。定石通りに $x=x'+x_0$ として、

$$\ddot{x}'=-\frac{k}{m}x'-\frac{k'}{m}\dot{x}'$$

と変形でき、斉次微分方程式になりました。

ここで、$\gamma\in\mathbb{C}$ として $x'=Ae^{\gamma t}$ と置きます。そうすると、

$$\begin{aligned}A\gamma^2e^{\gamma t} &= -A\frac{k}{m}e^{\gamma t}-A\gamma\frac{k'}{m}e^{\gamma t}\\ \gamma^2 &= -\frac{k}{m}-\frac{k'}{m}\gamma\end{aligned}$$

これは γ についての2次方程式です。この解は以下です。

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2}\left(-\frac{k'}{m}\pm\sqrt{\frac{k'^2}{m^2}-4\frac{k}{m}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{k'}{m}\pm\sqrt{\mu-\kappa}\right)\end{aligned}$$

後の都合のため、判別式を簡単に置換しました。このまま解としても良いですが、これは判別式 D の0との比較によって場合分けをしてもう少し変形したほうがわかりやすそうです。

1. $D\geq 0 \Leftrightarrow \mu\geq\kappa$
   $\gamma\in\mathbb{R}$ で、$\frac{1}{2}\sqrt{D}$ を γ' として、2つの解 x' を定数倍して足し合わせると、

$$\begin{aligned}x' &= c_1e^{\left(-\frac{k'}{2m}+\gamma'\right)t}+c_2e^{\left(-\frac{k'}{2m}-\gamma'\right)t}\\ &= e^{-\frac{k'}{2m}t}\left(c_1e^{\gamma' t}+c_2e^{-\gamma' t}\right)\end{aligned}$$

よって、

$$x=e^{-\frac{k'}{2m}t}\left(c_1e^{\gamma' t}+c_2e^{-\gamma' t}\right)+x_0 \tag{3.12}$$

少し考察してみましょう。$D\geq 0\Leftrightarrow\mu\geq\kappa$ は簡単に考えると、速度の1乗に比例する抗力と物体にかかる復元力をある指標で比べた時に、抗力が特に大きいことを示しています。実際、直感の通り、$D\geq 0$ の条件の下では、詳細は省きますが、x は一定値 x_0 に収束します。また、$D>0$ の状態は過減衰、$D=0$ の状態は臨界減衰と言います。グラフを見ればお分かりの通り、臨界減衰が一番早く x が収束し、D が大きくなるにつれて収束までの時間が長くなっていきます。これは単に、減衰 (抵抗) が大きすぎると、物体が $x=x_0$ に戻るにも抵抗が邪魔をして戻りにくくなっている状態を表します。いくつか D の値を調整した $x-t$ グラフを載せましょう。グラフは上から $D=0.8,0.6,0$ です。

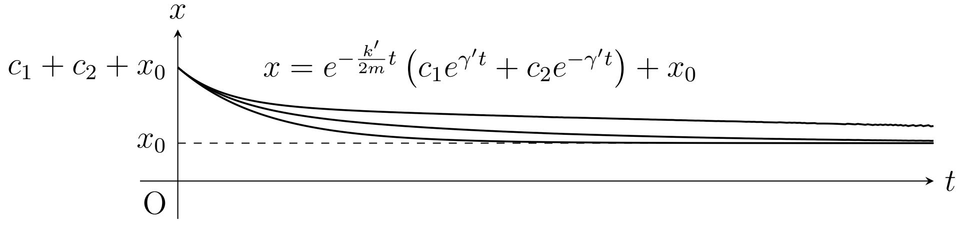

図 3.10: 減衰振動 (過減衰)

2. $D < 0 \Leftrightarrow \mu < \kappa$
   $\gamma \in \mathbb{C} \cap \overline{\mathbb{R}}$ ですから、オイラーの公式を使うことになりそうです。$\frac{1}{2}\sqrt{D}$ を $\gamma'\mathrm{i}$ として、2 つの解を定数倍して足すと、

$$\begin{aligned} x' &= c_1 e^{\left(-\frac{k'}{2m}+\gamma'\mathrm{i}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{k'}{2m}-\gamma'\mathrm{i}\right)t} \\ &= e^{-\frac{k'}{2m}t}\left(c_1 e^{\gamma'\mathrm{i}t} + c_2 e^{-\gamma'\mathrm{i}t}\right) \\ &= e^{-\frac{k'}{2m}t}\left((c_1+c_2)\cos(\gamma' t) + (c_1-c_2)\mathrm{i}\sin(\gamma' t)\right) \end{aligned}$$

初期条件 $t=0$ で $x = A + x_0$ かつ $\dot{x} = v(\in \mathbb{R})$ として、代入するために x を t で微分して、

$$\dot{x} = e^{-\frac{k'}{2m}t}\left(\left(\gamma'(c_1-c_2)\mathrm{i} - \frac{k'}{2m}(c_1+c_2)\right)\cos(\gamma' t) - \left(\frac{k'}{2m}(c_1-c_2)\mathrm{i} + \gamma'(c_1+c_2)\right)\sin(\gamma' t)\right)$$

ですから、

$$\begin{aligned} x(t=0) &= c_1 + c_2 + x_0 \ (= A + x_0) \\ \dot{x}(t=0) &= \gamma'(c_1-c_2)\mathrm{i} - \frac{k'}{2m}(c_1+c_2) \ (= v) \end{aligned}$$

よって、$c_1 + c_2 = A$ かつ $c_1 - c_2 = 0$ がわかります。なお、$k'A/(2m) = v$ という関係もわかりました。

これより、結局 x は、

$$x = Ae^{-\frac{k'}{2m}t}\cos(\gamma' t) + x_0 \tag{3.13}$$

と表せます。

また少し考察をしましょう。$D < 0 \Leftrightarrow \mu < \kappa$ は簡単に考えると、速度の 1 乗に比例する抗力と物体にかかる復元力をある指標で比べた時に復元力が特に大きいことを示しています。実際、グラフは振動しながら $x = x_0$ に収束していきます。

$x - t$ グラフを載せましょう。

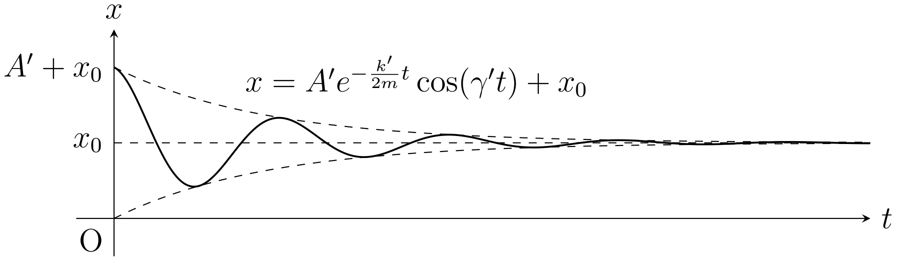

図 3.11: 減衰振動 (振動)

3.3.5 減衰系の強制振動型

最後に解く運動方程式は以下です。これは減衰振動する物体に外力を加えて強制振動させることを表す式です。

$$m\ddot{x} = -kx - k'\dot{x} + F$$

ここで、F は t の関数とします。
これを整理すると、

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{k'}{m}\dot{x} = \frac{1}{m}F$$

まずは F を具体的な何かの関数で置きましょう。物理でなにか関数で置くと言ったら指数関数か三角関数ですね[11]。今回は物体を強制的に振動させることを考えるので、$F = f\cos(\omega t)$ とします。
すると、運動方程式は

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{k'}{m}\dot{x} = \frac{1}{m}f\cos(\omega t)$$

となります。
次に定石通り特殊解を探しましょう。今回は右辺が t の関数となっているので、x を定数関数や1次関数としてもうまくいきそうにありません。そこで、$x = A\cos(\omega t + \theta_0)$ と置いてみましょう。加法定理で分解して、A について整理してみましょう。

$$\begin{aligned}
-A\omega^2\cos(\omega + \theta_0) + \frac{k}{m}A\cos(\omega t + \theta_0) - \frac{k'}{m}A\omega\sin(\omega t + \theta_0) &= \frac{f}{m}\cos(\omega t) \\
-A\omega^2(\cos(\omega t)\cos\theta_0 - \sin(\omega t)\sin\theta_0) & \\
+\frac{k}{m}A(\cos(\omega t)\cos\theta_0 - \sin(\omega t)\sin\theta_0) & \\
-\frac{k'}{m}A\omega(\sin(\omega t)\cos\theta_0 + \cos(\omega t)\sin\theta_0) &= \frac{f}{m}\cos(\omega t) \\
\cos(\omega t)\left(-A\omega^2\cos\theta_0 + \frac{k}{m}A\cos\theta_0 - \frac{k'}{m}A\omega\sin\theta_0\right) & \\
+\sin(\omega t)\left(A\omega^2\sin\theta_0 - \frac{k}{m}A\sin\theta_0 - \frac{k'}{m}A\omega\cos\theta_0\right) &= \frac{f}{m}\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

このとき、右辺と左辺が一致するには、左辺で ($\sin(\omega t)$ の係数) $=$ 0 かつ ($\cos(\omega t)$ の係数) $= f/m$ です (そうでないと両辺の位相が一致しません)。
前者の条件から、両辺を $A\cos\theta_0$ で割って $\tan\theta_0$ について整理して、

$$\begin{aligned}
A\omega^2\sin\theta_0 - \frac{k}{m}A\sin\theta_0 - \frac{k'}{m}A\omega\cos\theta_0 &= 0 \\
\omega^2\tan\theta_0 - \frac{k}{m}\tan\theta_0 - \frac{k'}{m}\omega &= 0 \\
\tan\theta_0 &= \frac{k'\omega}{m\omega^2 - k}
\end{aligned}$$

[11] そうでない場合はなかなか解けません

$1+\tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$ と $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を使って $\cos\theta, \sin\theta$ を求めると、

$$\begin{aligned}
\cos\theta_0 &= \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta_0}} \\
&= \sqrt{\frac{(m\omega^2-k)^2}{(m\omega^2-k)^2+(k'\omega)^2}} \\
&= \frac{m\omega^2-k}{\sqrt{(m\omega^2-k)^2+(k'\omega)^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\theta_0 &= \sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{\frac{(k'\omega)^2}{(m\omega^2-k)^2+(k'\omega)^2}} \\
&= \frac{k'\omega}{\sqrt{(m\omega^2-k)^2+(k'\omega)^2}}
\end{aligned}$$

また、後者の条件と $\sin\theta_0, \cos\theta_0$ から、

$$\begin{aligned}
-A\omega^2\cos\theta_0 + \frac{k}{m}A\cos\theta_0 - \frac{k'}{m}A\omega\sin\theta_0 &= \frac{f}{m} \\
A\left(\left(-\omega^2+\frac{k}{m}\right)\cos\theta_0 - \frac{k'}{m}\omega\sin\theta_0\right) &= \frac{f}{m} \\
A\left(\left(-\omega^2+\frac{k}{m}\right)\frac{m\omega^2-k}{\sqrt{(m\omega^2-k)^2+(k'\omega)^2}} - \frac{k'}{m}\omega\frac{k'\omega}{\sqrt{(m\omega^2-k)^2+(k'\omega)^2}}\right) &= \frac{f}{m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\left(\left(-\omega^2+\frac{k}{m}\right)(m\omega^2-k) - \frac{k'}{m}\omega k'\omega\right) &= \frac{f}{m}\sqrt{(m\omega^2-k)^2+(k'\omega)^2} \\
A\left(-(m\omega^2-k)^2-(k'\omega)^2\right) &= f\sqrt{(m\omega^2-k)^2+(k'\omega)^2} \\
A &= -\frac{f}{\sqrt{(m\omega^2-k)^2+(k'\omega)^2}}
\end{aligned}$$

さて、これで特殊解が求まりました。これと減衰振動の一般解 (式 (3.13)) から、この運動方程式の一般解は

$$x = A'e^{-\frac{k'}{2m}t}\cos(\gamma' t) - \frac{f}{\sqrt{(m\omega^2-k)^2+(k'\omega)^2}}\cos(\omega t+\theta_0) \tag{3.14}$$

と表せます。このグラフは以下の通りです。

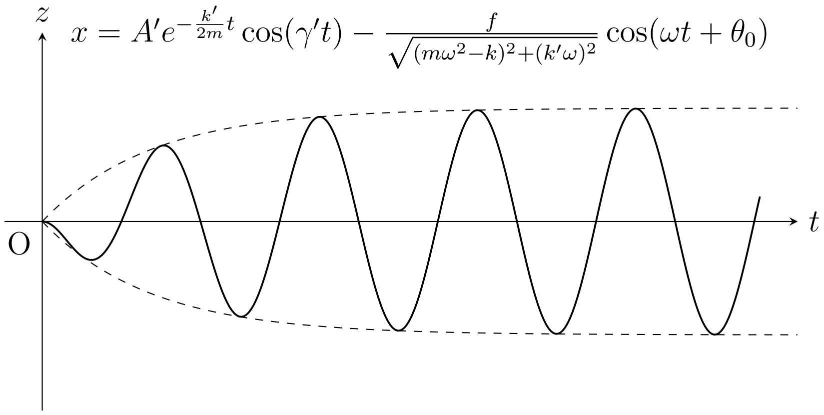

図 3.12: 減衰系の強制振動

さて、ここで少し考察してみましょう。$t \to \infty$ のとき、式 (3.14) での右辺第一項は 0 となります。よって、周期的な外力を加えて物体を振動させる場合、最終的に物体は右辺第二項 (つまり特殊解) の動きをします。このとき、ω を動かして $|A|$、つまり十分時間が経ったときの振幅を見てみましょう。

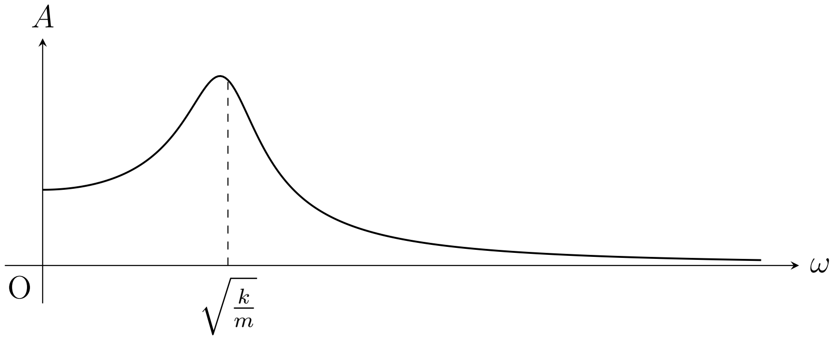

図 3.13: ω と A の関係

図を見ると、$\omega = \sqrt{k/m}$ 周辺で A が最大値を取っていることがわかります。この $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ を物体の固有振動数と言います。

余談ですが、固有振動数に関しては怖い事故も起きています。とある橋では風によってうまく固有振動数に近い力が与えられて大きく揺れ、最後には崩れてしまいました。またある橋では、通行人が橋を渡るときにかかる力の周期が固有振動数に近くて、大きく揺れてしまいました。またある建物では、ダンスをしていたらたまたま固有振動数に近い周期の力を与えてしまったがために床が落ちてしまいました。

第4章　剛体の力学

細い棒を立て、ちょんと上部を押すと倒れます。この現象を力学的に見てみましょう。どのようにして運動方程式を立てれば良いでしょうか。実はこれまで扱ってきた力学は全て「質点の力学」と呼ばれるもので、物体の回転運動を考慮していませんでした。そのため、これまでの知識ではこの運動を数式化することはできません。ここでは、物体の回転運動に関して学んでいきます。

物体は全て、微小な分子に分解できます。そして、分子間の結合によってその形をとどめています。そのため、実在の物体は力をかけると変形します (この性質を持つ物体を弾性体と言います)。しかし、このような弾性体の運動を考えるには、ごくごくミクロな視点で、全ての分子に気を配らなくてはなりません。これはあまりにも大変です。

そこで、力をかけても変形しない理想的な物体である剛体を念頭に考えます。剛体であれば、一つの分子に力を加えれば、分子間の極めて硬い結合を介して、結局、全ての分子に瞬時に力が伝わります。そのため、実用上はすべての分子にいちいち気を配らなくとも物体の運動を簡単に記述できます。実在の物体は全て弾性体ですが、十分硬い物体であれば剛体に近似しても実験的事実と数式は極めて一致します。

剛体を考えるには、その剛体を構成する微小な粒子 (質点) の運動方程式を考え、すべての粒子についてそれを足し合わせます。そうして「各運動量保存則」、さらにそれを用いて「回転運動方程式」を得ることができます。

4.1　角運動量と力のモーメントの関係式

力学は全て運動方程式から始まります。今回求める「角運動量と力のモーメントの関係」というのは、

$$(\text{角運動量の変化率}) = (\text{力のモーメント})$$

という式です。ここで、角運動量というのは物体の運動量ベクトルに左から物体の位置ベクトルを外積としてかけ合わせたものです。詳しくはこれからお話しましょう。

まずは位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ にある質量 m の物体に力がかかるときの運動方程式を見てみましょう。

$$\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{f} \\ m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{f} \end{aligned}$$

ここで、後々都合が良いように $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を物体の速度 $\boldsymbol{v}$ の時間微分として表しました。さて、両辺に左から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を外積として掛け合わせてみましょう。

$$\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$$

ここで、左辺を都合よく変形するために、以下の式を考えてみましょう。積の微分を使って展開すると、同一な2ベクトルの外積を取る項が現れ、それは$\mathbf{0}$です。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\\
&= \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\\
&= \boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

これで、先程の式は、以下のように変形できます。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{n} \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

これをが角運動量と力のモーメントの関係式であり、ここで置換した$\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}$はそれぞれ角運動量、モーメントと言います。

もう一度先程の式を出すと、この式は、

$$(角運動量の変化率) = (力のモーメント)$$

という意味を持ちます。

4.1.1　中心力と角運動量保存則

常にある一点を向いた力が物体にかかっているとしましょう。この時、この力を中心力と言います。また、力が向いている点をO(原点)とすると、物体の位置ベクトル$\boldsymbol{r}$と中心力$\boldsymbol{f}$は平行です。よって、物体に中心力のみが働くとき、

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$$

となり、$\boldsymbol{n}=\mathrm{d}\boldsymbol{l}/\mathrm{d}t$ですから、物体の角運動量は常に一定となります。つまり、中心力がはたらくときには角運動量保存則(角運動量の時間微分が$\mathbf{0}$になる)が成り立ちます。

4.1.2　面積速度一定

物体に中心力が働くとき、物体と力の向く先(点Oとする)を結んだ線が単位時間に掃く面積は一定になります。面積速度と角運動量の間には簡単な関係がありますので、少し確認してみましょう。

位置$\boldsymbol{r}$の点に速度$\boldsymbol{v}$で動く物体があるとき、点Oまわりの面積速度sは$\boldsymbol{r}$と$\boldsymbol{v}$のなす角をθとして、

$$s=\frac{1}{2}rv\sin\theta \qquad (4.2)$$

となりました。ここで、角運動量の大きさ l は、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{v}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積なので、

$$l = mvr\sin\theta$$

と表せます。これを式 (4.2) に代入すると、結局、

$$s = \frac{l}{2m}$$

となります。また、面積速度はベクトル量として定義されることも多く、その定義は簡単に、

$$s = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \tag{4.3}$$

です。

また、4.1.1節で述べたように、物体に中心力がはたらくとき、物体の角運動量 $\boldsymbol{l}$ は保存されます。このときに面積速度も保存されるのは式 (4.3) より明らかでしょう。

4.2 回転運動方程式

剛体の力学でよく使う、回転運動方程式を導出しましょう。これは角運動量保存則を起点として、左辺に現れる角運動量と右辺に現れるモーメントのそれぞれを剛体の場合について導出することで求められます。

4.2.1 質点の角運動量

剛体の回転運動方程式を考える前に、まずは質点の角運動量 $\boldsymbol{l}$ について考えます。

質点の角運動量は、

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

でした。ここで、v を $\boldsymbol{r}$ に垂直な v_θ と $\boldsymbol{r}$ に平行な v_r に分解しましょう。

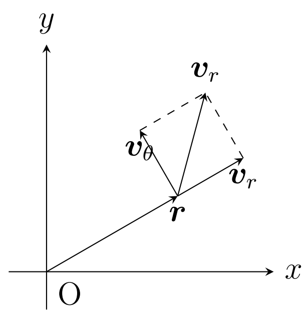

図 4.1: v_θ と v_r の図解

このとき、v_θ, v_r はそれぞれ、

$$v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega,\ v_r = \dot{r}$$

です。v_θ については、円運動の速度の式 $v = r\omega$ を思い出せばすぐに理解できるでしょう[1]。
そうすると、外積で算出されるベクトルの大きさは 2 ベクトルを 2 辺とする平行四辺形の面積だったので、

$$l = r \times mv_\theta = mr\omega^2$$

となります。

4.2.2　慣性モーメント

それでは各質点の角運動量を全部足し合わせることで、剛体の角運動量を求めましょう。剛体の角運動量の大きさ L は、

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I\omega$$

となります。ここで、剛体内の全ての質点で角速度 ω は等しいことに注意しましょう。上の式で新たに I を定義しましたが、

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{4.4}$$

を慣性モーメントと言い、その剛体の回転のしにくさを表す指標となります。
これで、角運動量保存則の左辺に現れる角運動量の、剛体の場合の式が導出できました。

4.2.3　モーメント

モーメントには質点間に働く内力によるモーメントと、外から加える外力のモーメントがあります。
結論から言うと内力のモーメントは $\mathbf{0}$ になるのですが、それを証明しましょう。簡単のため、2 質点間の内力について考えましょう。2 質点間で内力が $\mathbf{0}$ であれば、全ての質点間での内力の合計は $\mathbf{0}$ です。
2 質点 (質点 1、質点 2) 間には引力または斥力である力 $\boldsymbol{f}_{12}$ と $\boldsymbol{f}_{21}$ が働いています。ここで、この 2 つの力が同じ大きさで逆向きであることを考慮すると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_{12} &= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{f}_{21} \\ &= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{f}_{12} - \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{f}_{12} \\ &= (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{f}_{12}\end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ は $\boldsymbol{f}_{12}$ に平行ですから、$\boldsymbol{n}_{12} = \mathbf{0}$ となります。
これより、剛体を構成する各質点に働くモーメントの和は、剛体にかかる外力のモーメントに等しいことがわかります。

[1] これは、$x = r\cos(\omega t), y = r\sin(\omega t)$ をそれぞれ t で微分して、$\dot{x} = -r\omega\sin(\omega t), \dot{y} = r\omega\cos(\omega t)$ とし、速度ベクトルの大きさ $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r\omega$ と導出できます。

4.2.4 回転運動方程式

以上より、角運動量保存則の式として、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{N} \\ \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= N \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I\omega &= N\end{aligned}$$

慣性モーメント I は物体ごとに固有で運動しても変化しないので、

$$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = N \tag{4.5}$$

ここで、N は剛体にかかる力のモーメント $\boldsymbol{N}$ の、回転軸に平行な成分 (つまり、質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と、力ベクトル $\boldsymbol{f}$ の回転軸に垂直な成分 $\boldsymbol{f}_\theta$ の外積の大きさ) です。

式 (4.5) を回転運動方程式と言います。

4.3 回転による運動エネルギー

回転による運動エネルギーは、各質点の運動エネルギー $1/2m_iv_i^2 = 1/2m_i(r_i\omega)^2$ の総和ですから、

$$\begin{aligned}K &= \sum_i \left(\frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2\right) \\ &= \sum_i \left(\frac{1}{2}m_ir_i^2\right)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}I\omega^2 \end{aligned}\tag{4.6}$$

4.4 慣性モーメント

さて、回転運動方程式が導出できたところで、具体的に剛体の慣性モーメントを算出するのに便利な公式を 2 つご紹介しましょう。これらは平行軸の定理と直交軸の定理と言って、ある回転軸周りでの慣性モーメントがわかっているときに別の位置に回転軸をとってもその回転軸周りでの慣性モーメントがすぐに算出できるという優れものです。

4.4.1 平行軸の定理

まずは平行軸の定理をご紹介しましょう。

$$I_O = I_G + Md^2 \tag{4.7}$$

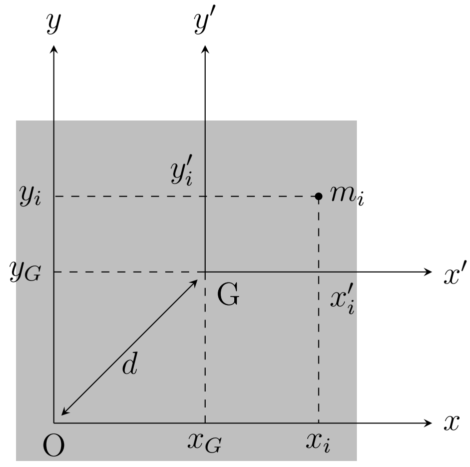

図 4.2: 平行軸の定理

これは、物体の重心を通る回転軸 G と平行な軸 O を別のところにとった場合、O 軸での慣性モーメント I_O は I_G と、OG 間の距離 d、物体の質量 M によって求まることを意味しています。図で軸は紙面から飛び出ていると考えてください。

証明しましょう。

$$\begin{aligned}
I_O &= \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \\
&= \sum_i m_i((x_G + x_i')^2 + (y_G + y_i')^2) \\
&= \sum_i m_i(x_G^2 + y_G^2) + \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2\sum_i m_i x_G x_i' + 2\sum_i m_i y_G y_i' \\
&= (x_G^2 + y_G^2)\sum_i m_i + \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_G\sum_i m_i x_i' + 2y_G\sum_i m_i y_i' \\
&= Md^2 + I_G
\end{aligned}$$

最後の式変形で、$(x_G^2 + y_G^2) = d^2$、$\sum_i m_i = M$ です。また、式変形前の右辺第二項は重心を通る軸周りの慣性モーメント I_G に等しくなります。問題は右辺第三項、第四項です。結論から言うと $\sum$ 内が 0 になるのですが、その証明を少ししましょう。

重心の定義から、

$$\boldsymbol{r_G} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r_i}}{\sum_i m_i}$$

でした。ここで、$\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G \Leftrightarrow \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_G$ としましょう。これを上の式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r_G} &= \frac{\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_G)}{\sum_i m_i} \\
&= \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i'}{\sum_i m_i} + \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_G}{\sum_i m_i} \\
&= \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i'}{\sum_i m_i} + \boldsymbol{r}_G
\end{aligned}$$

よって、

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{0} \tag{4.8}$$

です。これによって先程の式の右辺第三項、第四項が 0 になることが証明できました。

4.4.2 直交軸の定理

薄い板上のある点 O で互いに直行する 3 つの軸 x 軸、y 軸、z 軸 を考えます。なお、x 軸と y 軸は板と平行に、z 軸は板と垂直に立てるものとします。

このとき、それぞれの軸周りでの慣性モーメントには、

$$I_z = I_x + I_y \tag{4.9}$$

が成立します。これを直交軸の定理と言います。

証明しましょう。

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2,\ I_y = \sum_i m_i x_i^2,\ I_z = \sum_i m_i (x_i + y_i)$$

ですから、自明に直交軸の定理が成立します。

なお、I_x において r_i^2 であるべきところが y_i^2 になっているのは、r_i が軸と質点との距離だからです。これは I_y についても同様です。