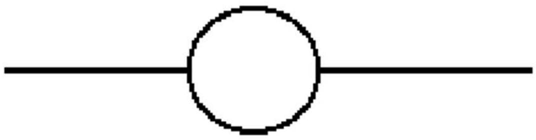
Zadanie 12

Dany jest układ:



Kula w wodzie. Należy tak dobrać gęstość, aby stan równowagi odpowiadał zanurzeniu do $\frac{1}{2}$ wysokości. W celu uproszczenia problemu należy wziąć pod uwage jedyni siły hydrostatyczne.

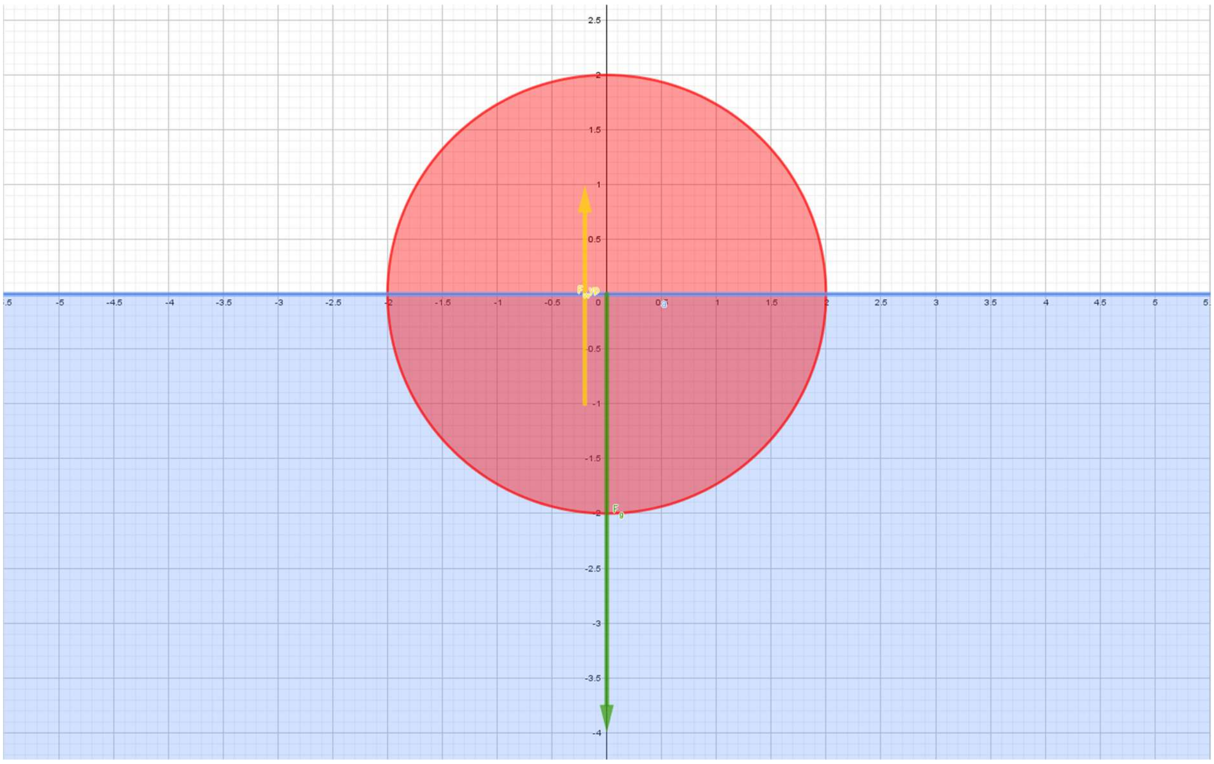
W ramach zadania należy:

1. Wykonać rysunek (**porządny!**), rysunek powinien zawierać: wprowadzony układ współrzędnych (początek w położeniu równowagi), siły działające na masę, inne wielkości mające wpływ na rozwiązanie zadania (wymiary, współczynniki, itp.).
2. Wyprowadzić różniczkowe równania ruchu.
3. Sprowadzić ww. równania do układu równań I rzędu.
4. Układ równań rozwiązać numerycznie za pomocą procedury `vrk4`.
5. Sporządzić wykresy: $z(t), v_z(t)$.
6. Sporządzić wykres energii mechanicznej w czasie $E_{MECH}(t)$.

Uwagi

- Wszystkie stałe wymagane do rozwiązania zadania (warunki początkowe, wymiary, itp.) proszę zadawać z klawiatury
- Warunki początkowe: $z_0 \neq 0, v_0 \neq 0$
- Wykresy sporządzić dla przykładowego zestawu danych (**dane te należy zapisać razem z wykresem**)
- Wyprowadzenia, rysunki i wykresy należy oddawać w formie pisemnej

Dla podanego układu w dowolnej chwili na kulę mogą działać: siła grawitacji, siła wyporu, siła oporu płynu. Z uwagi na zadanie pomija się tę ostatnią.



Do wyznaczenia równań ruchu potrzeba więc: gęstości wody, gęstości kuli (1/2 gęstości wody), promienia kuli i wynikającej z niego masy kuli. W trakcie obliczeń potrzebne będzie również obliczanie na bieżąco objętości zanurzonej części kuli.

Wynika z tego równanie: $a = \frac{1}{m}(F_g + F_{wyp})$, więc można zapisać:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{m}(F_g + F_{wyp}) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{m}(m * g - \rho * V_{sub} * g) \\ \frac{dz}{dt} = v \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - \frac{g}{m} * \rho * V_{sub} \\ \frac{dz}{dt} = v \end{cases}$$

, gdzie V_{sub} to objętość zanurzenia, a ρ oznacza gęstość wody.

Mamy więc układ równań różniczkowych i warunki początkowe. Można zapisać, że:

$$Y = \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} \quad RHS = \begin{bmatrix} v \\ g - \frac{g}{m} * \rho * V_{sub} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} Y = RHS$$

Otrzymany układ da się rozwiązać metodą vrk4.

Wykresy, zestaw danych oraz wszystkie warunki początkowe zawarte są w pliku:
wyniki + wykresy.xlsx