

## פרויקט מחשב בקורס "שדות אלקטרומגנטיים"

### סמסטר ב' – תשפ"א

ד"ר ירדן מזור, פרופ' פבל גינצבורג, דניאל מרימה, אוהד זילביגר

הנתונים בתרגיל המחשב מבוססים על מספר הזהות של הסטודנט. נסמן את ספרותיו של המספר ע"י הנתונים בתרגיל המחשב מבוססים על מספר הזהות של הסטודנט. נסמן את ספרותיו של המספר ע"י  $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9$  כאשר  $z_1$  היא הספרה הראשונה ו- $z_9$  היא ספרת הביקורת.

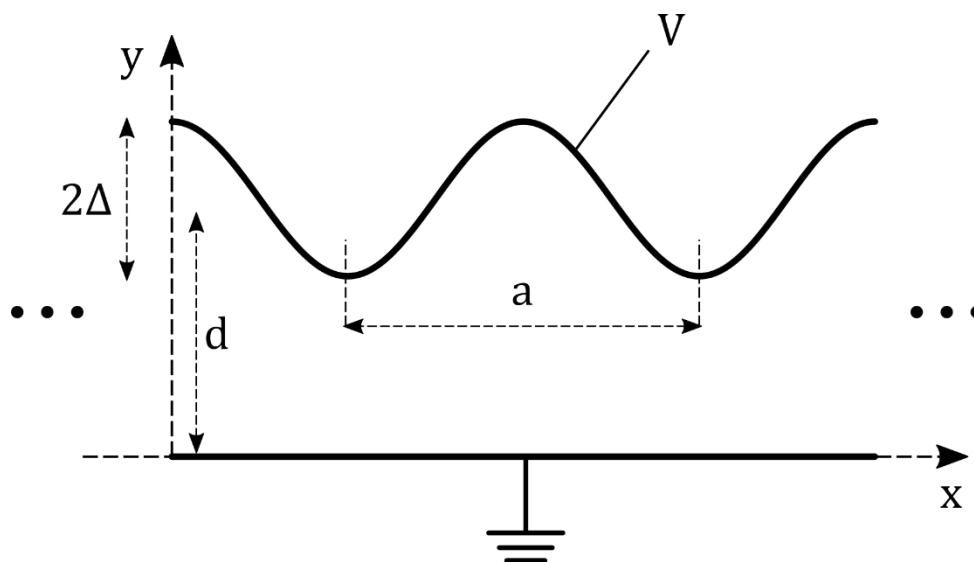
### רקע

בתרגיל זה ברצוננו לפתור את הבעיה הבאה:

נתון לוח דק עשוי מוליך חשמלי מושלם ומוארק המונח על מישור  $xz$ . בנוסף נתון לוח גלי דק אינסופי בציר  $x$ , ובציר  $z$ , שהפונקציה המתארת את הנקודות של הלוח בציר  $y$  היא:

$$y = d + \Delta \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$

גם לוח זה עשוי מוליך מושלם, והוא מחובר למתח קבוע בזמן  $V$ . חתך של המערכת במישור  $xy$  מתואר באיור הבא:



בתרגיל זה נפתור את הבעיה בצורה אנליטית ובצורה נומרית, ונדון בהבדלים.

הפרמטרים המתארים את הבעיה נתונים על ידי:

$$V = 1V, \quad d = 1 + 0.1 * z_3[m], \quad \Delta = 0.01 * (1 + z_1)[m], \quad a = 5 + 0.5 * z_5[m]$$

# שאלה 1

(40 נקודות)

בחלק זה נפתור את הבעיה באופן מקורב בצורה אנליטית. תנאי השפה על הלוח העליון הינו :

$$\phi\left(y = d + \Delta \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right) = V$$

במקום תנאי שפה זה נשתמש בפיתוח טיילור, ונקרב את תנאי השפה באמצעות התנאי הבא :

$$\phi(y = d) + \frac{\partial \phi}{\partial y}\bigg|_{y=d} * \Delta \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) = V$$

א. הסבירו בקצרה מתי הקירוב לתנאי השפה תקף.

ב. מצאו את הפוטנציאל בין הלוחות באופן הבא : הניחו כי הפתרון הינו מהצורה

$$\phi = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right) \sinh\left(\frac{2\pi n}{a}y\right)$$

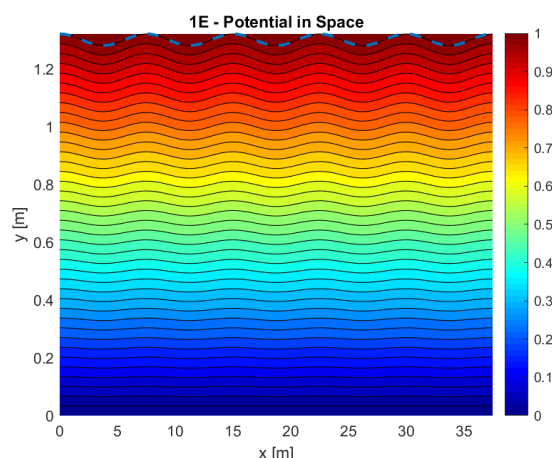
הציבו פתרון זה בתנאי השפה המקורב, וקבלו מערכת משוואות רקורסיבית עבור המקדמים .

ג. בעזרת מערכת המשוואות שקיבלתם, הוכיחו אנליטית כי מקדמי הטור דועכים אקספוננציאלית בקצב של  $e^{-\frac{2\pi d}{a}}$ . הניחו כי  $d \gg a$ . (אין צורך לפתור ממש את המקדמים לצורך כך).

ד1. ניתן לקבל קירוב לפתרון על ידי ההנחה שבטור המתאר את הפוטנציאל יש מספר סופי של מקדמים, נסמנו ב- $N$ , וכל המקדמים החל מהמקום ה- $N + 1$  מתאפסים. בחרו  $N$  מתאים (נמקו את הבחירה), וציירו את הפוטנציאל על הלוח העליון כפונקציה של  $x$  בתחום  $0 < x < 5a$ . כתבו מהי השגיאה המקסימלית בפוטנציאל על הלוח.

ד2. הניחו כעת כי  $N = 10$  (אנליטית או נומרית). האם המקדמים שקיבלתם דועכים באותו יחס מסעיף ג? הסבירו.

ה. השתמשו במקדמים שקיבלתם בסעיף ד1 וציירו את מפת הפוטנציאל בתחום:  $0 < x < 5a$ ,  $0 < y < d + \Delta$  (השתמשו בפקודה `contourf`) והוסיפו לציור גם קו המתאר את צורתו של הלוח (באמצעות פקודת `plot`). ראו דוגמה בגרף מטה. הסבירו את התוצאה המתקבלת.



ו. רשמו ביטוי לצפיפות המטען המתקבלת על הלוח התחתון וחשבו אנליטית את הקיבול המקורב ליחידת אורך (בציר  $z$ ) של מקטע של המערכת באורך חמישה מחזורים (בציר  $x$ ) בהנחה ש  $N = 1$  (כלומר שיש רק

שני מקדמים:  $(A_0, A_1)$ . האם הקיבול גדל או קטן ביחס לקבל לוחות מישוריים? פרטו את הגורמים להבדל. אם מניתם יותר מגורם אחד – נסו להסביר מי לדעתכם דומיננטי יותר בשינוי שחל.

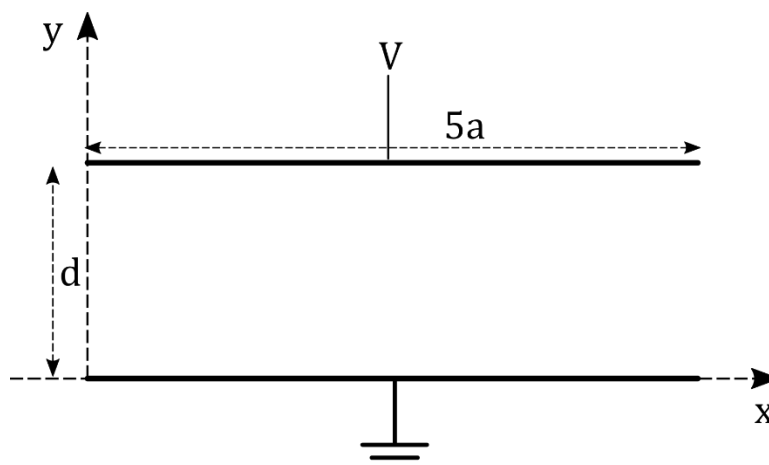
ז. בונוס: הגדילו את  $\Delta$  כך ש  $\Delta = d/10$ , שאר הגדלים בשאלה ללא שינוי. בעזרת הקוד מסעיף ב' חשבו את הפוטנציאל בתחום:  $0 < y < d + \Delta$ ,  $0 < x < 5a$ , עבור מספר גדול מאוד של איברים (כמה מאות). האם קיבלתם תוצאה דומה לזו שקיבלתם בסעיף ה'? דונו בתוצאות: אם קיבלתם תוצאה דומה, הסבירו מדוע היא לא השתנתה. אם קיבלתם תוצאה שונה, הסבירו מה גרם להבדל.

## שאלה 2

(60 נקודות)

בחלק זה נפתור את הבעיה בצורה נומרית באמצעות שיטת מומנטים. על מנת לפשט את החישוב, נניח כי אם נקודת היחוס לפוטנציאל מספיק רחוקה, אז ניתן להשתמש באותו מרחק יחוס עבור כל האלמנטים. כלומר,  $a_m = \text{const}$ . בחרו את הקבוע להיות  $\text{const} = 1 \cdot 10^6$ .  $a_m$  הוא הסימון בו השתמשנו עבור מרחק היחוס לכל אלמנט במצגת ההדרכה, אין קשר לפרמטר  $a$  שהוגדר כאן בפרויקט).

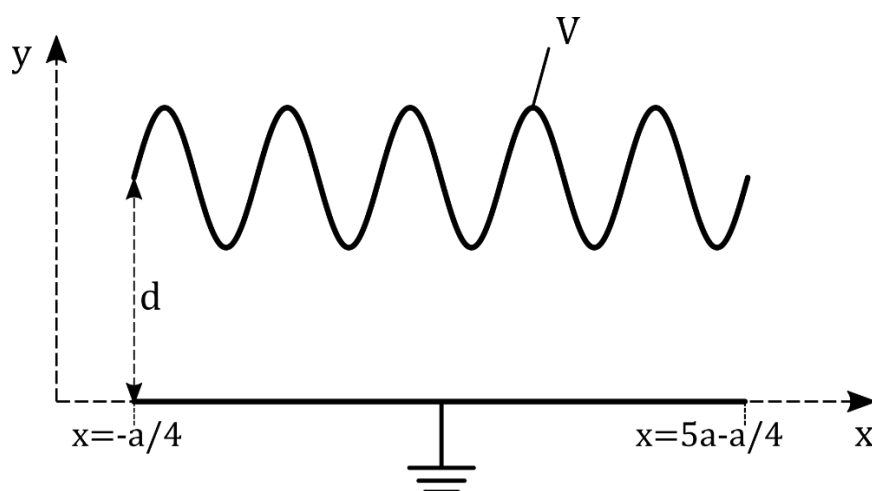
א. על מנת לוודא שהפתרון שלכם בשיטת מומנטים נכון, נפתור תחילה בעיה פשוטה יותר. בסעיף זה עליכם לפתור קבל לוחות פשוט, המוצג באיור הבא:



1. חשבו את צפיפויות המטען המשטחי על הלוח העליון והתחתון, וציירו אותן כפונקציה של  $x$ . רשמו את אורך האלמנטים שבחרתם להשתמש בהם, ונמקו את הבחירה. **הדרכה:** כתבו את הפתרון עבור גודל אלמנט כלשהו וחשבו את פילוגי המטען. לאחר מכן הקטינו את גודל החלוקה עד למציאת גודל חלוקה מספק.

2. חשבו את סך המטען ליחידת אורך (בכיוון  $z$ ) על הלוח העליון, ואת קיבול הקבל.

ב. כעת נחזור לבעיה המקורית שלנו. לצורך הפתרון הנומרי אין באפשרותנו לפתור את הבעיה כאשר היא אינסופית בציר  $x$ . לכן נקח מהלוח העליון והתחתון קטע שאורכו  $5a$  (5 מחזורים) בציר  $x$ , אשר מתחיל בנקודה בה הלוח העליון בגובה  $d$  מעל הלוח התחתון. כלומר, נסתכל על מערכת בה המוליכים מוגבלים (למשל) לתחום  $-\frac{a}{4} < x < 5a - \frac{a}{4}$  (ובשאר התחום יש ואקום). כמוראה באיור הבא:



ב. מצאו באמצעות שיטת מומנטים:

ב1. את צפיפויות המטען המשטחי על הלוחות, וציירו אותן כפונקציה של  $x$ . רשמו את אורך האלמנטים שבחרתם עבור כל אחד מהלוחות, ונמקו את הבחירה.

ב2. מצאו את סך המטען המשטחי על כל אחד מהלוחות. האם סך המטען על הלוח העליון שווה בגודלו והפוך בסימנו ביחס לזה שעל הלוח התחתון? הסבירו.

ב3. חשבו את קיבול ההתקן.

ג. כעת חשבו את קיבול ההתקן עבור 30 ערכי  $d$  בתחום  $2\Delta < d < 10\Delta$ , את שאר הפרמטרים השאירו ללא שינוי. השוו לקיבול האנליטי המתקבל בשאלה 1 סעיף ו. הציגו על אותו הגרף את הקיבול המחושב והקיבול האנליטי כפונקציה של  $d$ . האם הקיבול המחושב באופן נומרי מתקרב לזה המחושב אנליטית גם כש- $d$  קטן? הסבירו.

ד. כעת חשבו את קיבול ההתקן כתלות בתחילת המחזור, כלומר, קטעו את המוליכים בתחום  $b \frac{a}{2} < x < 5a + b \frac{a}{2}$ , וציירו את הקיבול כתלות ב  $b$  עבור 30 ערכי  $b$  בתחום  $0 < b < 1$ . גם כאן – השוו לקיבול האנליטי כפונקציה של  $b$  וציירו את שתי הפונקציות על אותו הגרף. הסבירו את התוצאות.

ה. לכל אחד מהסעיפים ג' וד', חשבו את השגיאה היחסית:

$$Err = \frac{|C_{numerical} - C_{analytic}|}{C_{numerical}}$$

וציירו את השגיאה כפונקציה של  $d$  (עבור סעיף ג') או  $b$  (עבור סעיף ד'). לאיזה מהפרמטרים השפעה גדולה יותר על הסטיה מהערך האנליטי? הסבירו.

## הנחיות להגשה

1. ההגשה היא בזוגות או ביחידים בלבד (מומלץ בזוגות). תאריך ההגשה: 17/6/2021
2. לצורך קביעת הפרמטרים בתרגיל יש להשתמש בתעודת הזהות של אחד הסטודנטים, ויש לציין במפורש בראש העבודה את תעודת הזהות של הסטודנט בה השתמשתם.
3. את כל סעיפי התרגיל, כולל גרפים ותרשימים, יש לשמור כקובץ pdf אלקטרוני אחד בודד. לכל סעיף וגרף יש לצרף הסבר של התוצאות, גם אם אין הדבר רשום במפורש בעבודה. יש להקפיד על כללי הצגה ברורים: לציין יחידות על צירי הגרפים, באיורים של פילוג פוטנציאלים יש להציג לצד האיור גם את ה color-bar עם סולם הערכים המתאים, וכו... על החומר להיות מוקלד במלואו. אין לכלול בו טקסט או נוסחאות בכתב יד! קובץ זה יוגש באופן אלקטרוני על פי ההנחיות בהמשך.
4. את הקוד לפתרון כל שאלה יש לשמור כקובץ Matlab נפרד, תחת השמות Q1.m, Q2.m, לכל אחת מהשאלות. על הקוד להיות מתועד בצורה מפורטת. בשורות הראשונות של הקוד יש להגדיר את כל המשתנים של הקלט הנוגעים לבעיה הספציפית כגון פרמטרים המגדירים את הגיאומטריה, תנאי שפה במידה ויש וכו... יש להשתמש בשמות משתנים דומים לאלו שהוגדרו בשאלות, וכן לתת תיעוד באותן שורות לגבי זהותם של המשתנים.
5. את הקבצים Q1,2.m יש לאחד לקובץ ZIP בודד ששמו יהיה XXXXXXXXXX.zip עם מספר הזהות של אחד המגישים.
6. יש להגיש את שני הקבצים שהכנתם – קובץ ה pdf המתואר בסעיף 1 לעיל, וקובץ התוכנות zip. המתואר בסעיף 4 לעיל- דרך אתר הקורס ב moodle. שימו לב: שם קובץ ה pdf יהיה זהה לשם קובץ ה zip
7. ניתן לבצע את הפרויקט גם בשפת Python תוך שמירה על כל הכללים הנ"ל, אך אין לבצע חלק מהפרויקט בשפה אחת וחלק בשפה אחרת. יש לבחור שפה אחת ולבצע את כל הפרויקט באותה שפה.
8. עבודות מועתקות שיתפסו יגררו ציון אפס לכל המעורבים בהעתקה והליכים משמעותיים נוספים ישקלו.
9. ציון העבודה יהווה ציון מגן של 15% או ציון תוקף של 6% לציון הסופי.

## בהצלחה!