אותות ומערכות

תרגיל מסכם

מרצה: ד״ר וסים חליחל

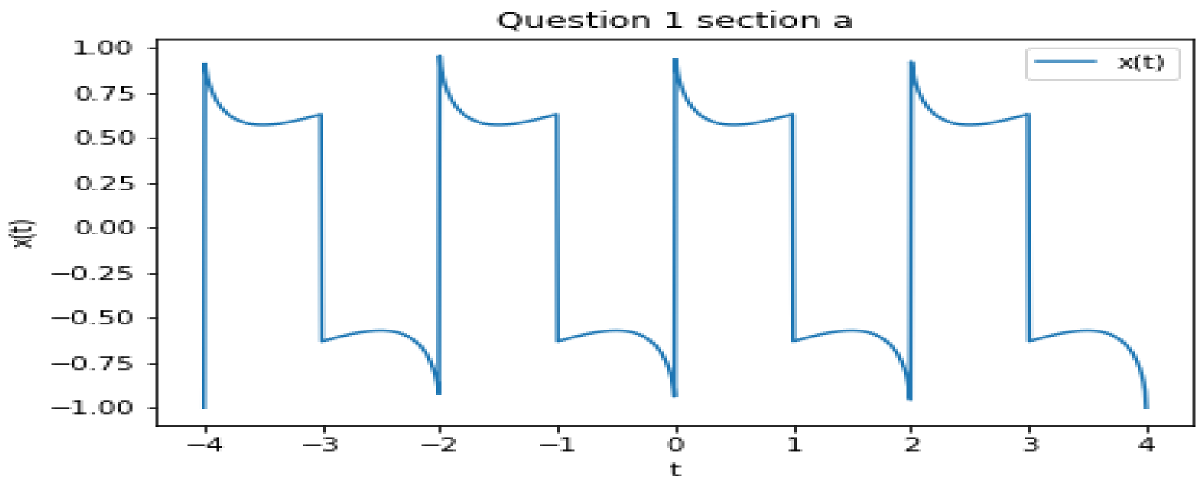
רונן דבורקין-315203539

אלכס חן-318912961

שאלה 1-

סעיף a:

בסעיף זה קיבלנו את הפונקציה $s(t)$ מהצורה: $s(t) = \begin{cases} -1+\sqrt{-t}e^{t} & -1 \le t \le 0 \\ 1-\sqrt{t}e^{-t} & 0 < t \le 1 \end{cases}$,
הכנסנו אותה למאטלב וביצענו לה המשכה מחזורית(בעזרת השהייה של נקודת המינימום והמקסימום ימינה ושמאלה) כדי לקבל את $x(t)$ שמשתרך על פני: $-4 \le t \le 4$ שניות. הגרף שהתקבל במאטלב הוא האות $x(t)$ שיצרנו מההמשכה:



סעיף b:

בחלק זה ביצענו את שיטת מונטה קרלו כדי לקבל קירוב לאות $x(t)$, עבור Mים שונים. האות המקורב שלנו תלוי ב-M בסכימה. הנוסחה הנתונה לנו עבורו היא:

$$x_M(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{M} a_k \cos(w_0 kt) + \sum_{k=1}^{M} b_k \sin(w_0 kt)$$

לכן, לקחנו 3 ערכי M שונים: $M = 5,15,30$ והצגנו את האות המקורב עבור שלושת ערכים אלו על אותו ה-$plot$. את המקדמים a_0, a_k, b_k מחושבים באופן תיאורטי על פי סט הנוסחאות:

$$\mathrm{a}_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt$$

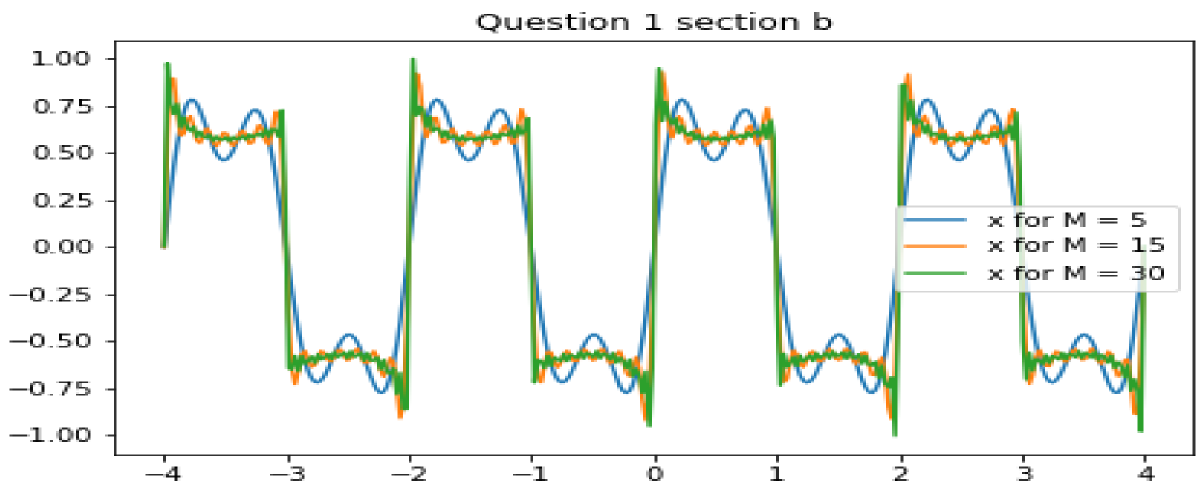
$$\mathrm{a}_\mathrm{k} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot\cos(\omega_0 kt)\, dt$$

$$\mathrm{b_k} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cdot \sin(\omega_0 kt)\, dt$$

על מנת לחשב את האינטגרל הנתון, נעזרנו בשיטת קירוב נומרית הנתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$$\frac{T}{N}\sum_{n=1}^{N} f(-\frac{T}{2}+\frac{2n-1}{2N}T)$$

כאשר הפונקציה f היא $x(t)$ עבור a_0, $x(t) * \cos{(w_0kt)}$ עבור a_k, ו- $x(t) * \sin{(w_0kt)}$ עבור b_k. לאחר מכן בעזרת לולאת for ותכנות פונקציונלי (פונקציה עבור כל חישוב בנפרד) ביצענו את הסכומים והחישובים ואיחדנו הכל. הגרף שהתקבל הוא:



מהגרף ניתן לראות כי ככל שמגדילים את M כך האמפליטודה של הריפלים (חריגות, רעשים) נמוכה יותר. כלומר, ניתן לראות כי ככל שהסכום רץ עד ערך גבוה יותר(יותר דגימות) כך הקירוב שאנו מבצעים לאות המקורי הוא טוב יותר. לכן, עבור $M = 5$(כחול) ניתן לראות כי האמפליטודה של הריפלים היא גדולה ולכן הקירוב רחוק יותר מהאות המקורי, ואילו עבור $M = 30$(ירוק) ניתן לראות כי האמפליטודה של הריפלים מאוד קטנה כך שהאות המקורב ממש כמעט מתמזג עם האות המקורי. בנוסף לכך, ניתן לראות כי בנקודות אי הרציפות של האות הריפלים הם עם אמפליטודה גבוה יותר מאשר שאר הריפלים עבור כל ערכי ה-M, מכיוון שבנקודות אלו יש את הבעייתיות הגבוה ביותר מבחינת התאמה וחוסר הגדרה. כמו כן, שלושת צורות האות המתקבלים מזכירים בצורתם את תופעת גיבס שעלייה דיברנו בהרצאה, שם אכן ראינו כי בנקודות אי הרציפות אמפליטודת הריפלים גבוהה, ומחוץ לנקודות אי הרציפות ישנם ריפלים שמסמלים את השגיאה בין האות המקורב למקורי. לסיכום, מהגרפים ניתן לראות כי ככל שלוקחים סכום גבוה יותר כך הקירוב יהיה טוב יותר.

<u>סעיף c:</u>

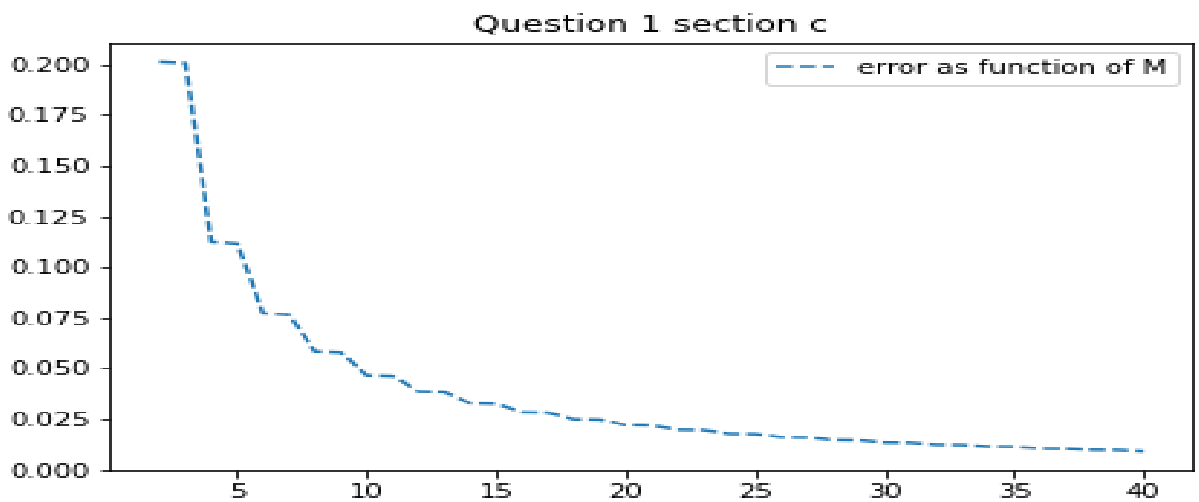
בחלק זה היינו צריכים להעריך את השגיאה בין האות המקורב למקורי עבור $1 \leq M \leq 40$ בעזרת שיטת מונטה קרלו, כאשר אינטגרל השגיאה הינו :

$$e_M = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\big(x(t) - x_M(t)\big)^2 dt$$

כפי שביצענו בסעיף הקודם, אנו הערכנו את השגיאה לא בעזרת אינטגרל, אלא בעזרת הנוסחה הבאה(בהתבסס על שיטת מונטה קרלו) :

$$\frac{T}{N}\sum_{n=1}^{N} f(-\frac{T}{2} + \frac{2n-1}{2N}T)$$

כך שהפונקציה f במקרה זה היא הפונקציה שבאינטגרנד : $\big(x(t) - x_M(t)\big)^2$. את ההצגה והחישובים נבצע פעם נוספת בעזרת לולאת for ובעזרת תכנות פונקציונלי בהיעזר פונקציות שבהן השתמשנו כבר בסעיפים הקודמים. גרף השגיאה שהתקבל כתוצאה מביצוע לולאת for עד $M = 40$, כלומר, $e_1, e_2, \ldots . e_{40}$ הוא (גרף שגיאה כפונקציה של M) :



מהגרף המתקבל ניתן לראות בצורה טובה חיזוק למסקנה שהתקבלה בסעיף הקודם. ככל שלוקחים סכימה גבוהה יותר(יותר דגימות), כך השגיאה בין האות המקורב לאות המקורי הולכת וקטנה, כלומר, שיפור בקירוב. בגרף הנ״ל ניתן לראות כי עבור e_1 קיימת שגיאה של בערך 0.2 בין המקורב למקורי, וככל שמגדילים את ה-M כך השגיאה הולכת וקטנה, עד שבשלב מסוים (לפי הגרף, בערך מ-e_{20}) ניתן לראות כי השגיאה שואפת ומתקרבת ל-0, ואם נוסיף דגימות נוספות לא יהיה הבדל משמעותי בשגיאה, דבר המחזק את הציפייה כי ככל שלוקחים יותר מקדמים ודגימות כך הקירוב שלנו יהיה יותר קרוב לאות המקורי. כמו כן, ניתן גם לראות כי השגיאות המתקבלות הן קבועות למקטעים, דבר זה נובע מהעובדה שדוגמים במרווחים קבועים ולכן מקבלים קווים ישרים עבור כל שתי נקודות סמוכות.

שאלה 2-

סעיף a:

בחלק זה נמצא בצורה אנליטית את התמרת פורייה של 3 האותות הנתונים.

עבור $x_{1c}(t) = sinc(\frac{t}{6})$ נקבל:

אנחנו יודעים מההתמרות הידועות כי התמרת פורייה של $sinc$ היא מהצורה(מלבן בתדר):

$$\frac{B}{\pi} sinc\left(\frac{B}{\pi} * t\right) \underset{FT}{\Rightarrow} \begin{cases} 1 & |\Omega| < B \\ 0 & |\Omega| \geq B \end{cases}$$

ולכן במקרה שלנו, אם ניקח $B = \frac{\pi}{6}$ ונכתוב את ה-$sinc$ בצורה הבאה:

$$\frac{\pi}{6} * \frac{6}{\pi} * sinc(\frac{t}{\pi} * \frac{\pi}{6})$$

לכן מההתמרה הידועה נקבל כי התמרת פורייה של האות הראשון הינה:

$$X_{1c}(j\Omega) = 6 * \begin{cases} 1 & |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{\pi}{6} \end{cases} = \begin{cases} 6 & |\Omega| < \frac{\pi}{6} \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

עבור $x_{2c}(t) = sinc^2(\frac{t}{12})$ נקבל:

ניתן בעצם לראות כי האות הזה מורכב משני סינקים זהים שמוכפלים ביניהם בזמן:

$$x_{2c}(t) = sinc\left(\frac{t}{12}\right) sinc(\frac{t}{12})$$

אנחנו יודעים כבר מהחישוב של האות הקודם שהתמרת פורייה של כל אחד מהסינקים היא:

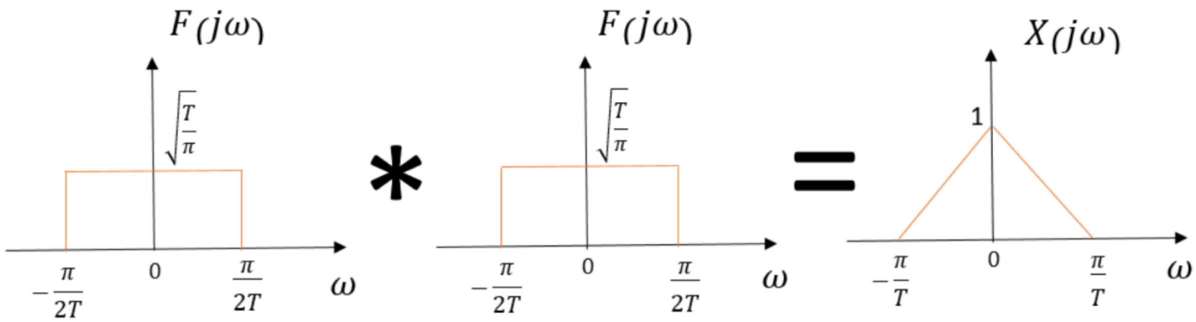
$$X(j\Omega) = \begin{cases} 12 & |\Omega| < \frac{\pi}{12} \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

כעת נשתמש בתכונה שאומרת שמכפלה בזמן שקולה לקונבולוציה בתדר כך ש:

$$X(jw) = X_1(jw) * X_2(jw)$$

ומכיוון שכל אחד מהם הוא מלבן בתדר, מהידוע לנו קונבולוציה של שני מלבנים תיצור משולש בתדר(במקרה שלנו זה אפשרי מכיוון ששני האותות הם בעלי מחזור משותף). סכום הבסיסים של המלבנים (כלומר, התמך עבור כל אות במרחב התדר) יהיה שווה לבסיס המשולש והגובה של המשולש יהיה לפי נוסחא שראינו בתרגול: $H = 2ab^2 = 2 * \frac{\pi}{12} *$ $.12^2 = 24\pi$

נחלק ב-2π כתוצאה מהמעבר ממישור הזמן למישור התדר כדי לקבל גובה של 12 עבור המשולש. סה"כ(לפי התרגול) נקבל את המערכת הגרפית הבאה:



הגובה של המלבנים והמשולש הוא 12(מהנאמר לעיל) וקודקודי המלבנים הם בנקודה: $\frac{\pi}{12}$, כך שקודקודי המשולש הם ב- $\frac{\pi}{6}$.

לפיכך, נקבל משולש שווה שוקיים שההתמרה שלו היא לפי 2 משוואת ישר, כך ש:

$$X_{2c}(j\Omega) = \begin{cases} \frac{72\Omega}{\pi} + 12 & -\frac{\pi}{6} \le \Omega < 0 \\ -\frac{72\Omega}{\pi} + 12 & 0 \le \Omega \le \frac{\pi}{6} \\ 0 & else \end{cases}$$

<u>עבור $x_{3c}(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ נקבל:</u>

האות הנ"ל הוא אות מחזורי ולכן ממה שראינו בהרצאה ובתרגול ההתמרה שלו תהיה בעזרת הנוסחא הבאה:

$$X(jw) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(w - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

ולכן התמרת פורייה שלו תהיה מורכבת רק מדלתאות כך שנקבל:

$$X_{3c}(j\Omega) = \pi(\delta\left(w - \frac{\pi}{12}\right) + \delta\left(w + \frac{\pi}{12}\right))$$

<u>סעיף b:</u>

ניתן לראות כי כל האותות שלנו עונים להגדרה שהוצגה עבור $band\ limited\ signal$ ולכן כל האותות חסומי פס. נמצא עבור כל אחד מהם את תדר הדגימה המקסימלי ואת זמן הדגימה המקסימלי בעזרתו ניתן לשחזר את האות מהאות הדגום $x[n]$. את זמן הדגימה המקסימלי נמצא לפי תנאי נייקוויסט כך ש:

$$T_s = \frac{\pi}{\Omega_M}$$

<u>עבור x_{1c}</u> אנו יכולים לראות כי כאשר $|\Omega| > \frac{\pi}{6}$ אז $X(\Omega) = 0$ בהתאם להגדרה.

ולכן עבור אות זה נגיד כי התדר המקסימלי הוא: $\Omega_M = \frac{\pi}{6}$

וזמן הדגימה המקסימלי מתנאי נייקוויסט יהיה:

$$T_s = \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = 6\ sec$$

<u>עבור x_{2c}</u> אנו יכולים לראות שוב כי כאשר $|\Omega| > \frac{\pi}{6}$ אז $X(\Omega) = 0$ בהתאם להגדרה.

ולכן עבור אות זה נגיד כי התדר המקסימלי הוא: $\Omega_M = \frac{\pi}{6}$

וזמן הדגימה המקסימלי מתנאי נייקוויסט יהיה:

$$T_s = \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = 6\ sec$$

<u>עבור x_{3c}</u> אנו יכולים לראות הפעם כי הדלתאות מוגדרות רק עבור $w = \pm\frac{\pi}{12}$ ולכן עבור $X(\Omega) \neq \pm\frac{\pi}{12}$ האות יהיה 0 בהתאם להגדרה.

ולכן עבור אות זה נגיד כי התדר המקסימלי הוא: $\Omega_M = \frac{\pi}{12}$

וזמן הדגימה המקסימלי מתנאי נייקוויסט יהיה:

$$T_s = \frac{\pi}{\frac{\pi}{12}} = 12\ sec$$

<u>סעיף c:</u>

האות הדגום $x[n]$ מתקבל כאשר נציב $t = nT_s$ ולכן:

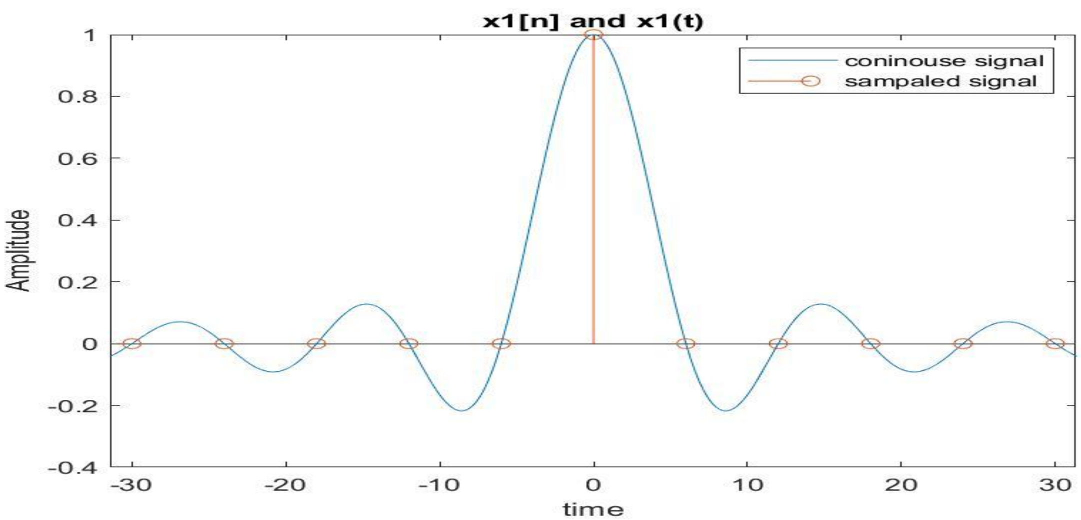
$$x_{1c}[n] = sinc(\frac{nT_s}{6})$$

$$x_{2c}[n] = sinc^2(\frac{nT_s}{12})$$

$$x_{3c}[n] = \cos(\frac{\pi nT_s}{12})$$

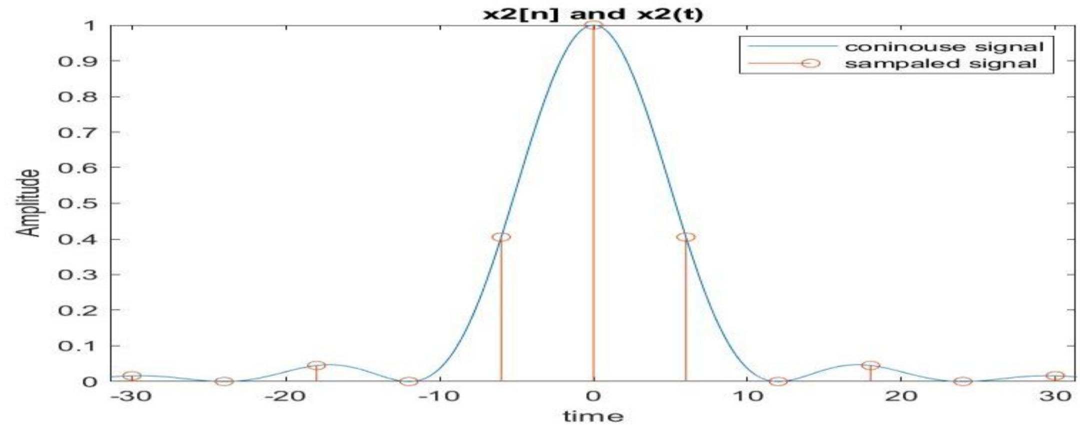
כעת נציג על גבי גרפים הצגה של האות הרציף והבדיד עבור כל אחד מה-xים. עבור האות הבדיד ניקח תדר דגימה ששווה בדיוק לתדר שמצאנו בסעיף ב' עבור כל אחד מה-xים, ועבור האות הרציף ניקח תדר דגימה גדול בשתי סדרי גודל, במקרה שלנו בחרנו תדר דגימה של $f_{sim} = 10^2 \cdot f_s$. להלן הגרפים המתקבלים:

<u>עבור x_{1c}:</u>



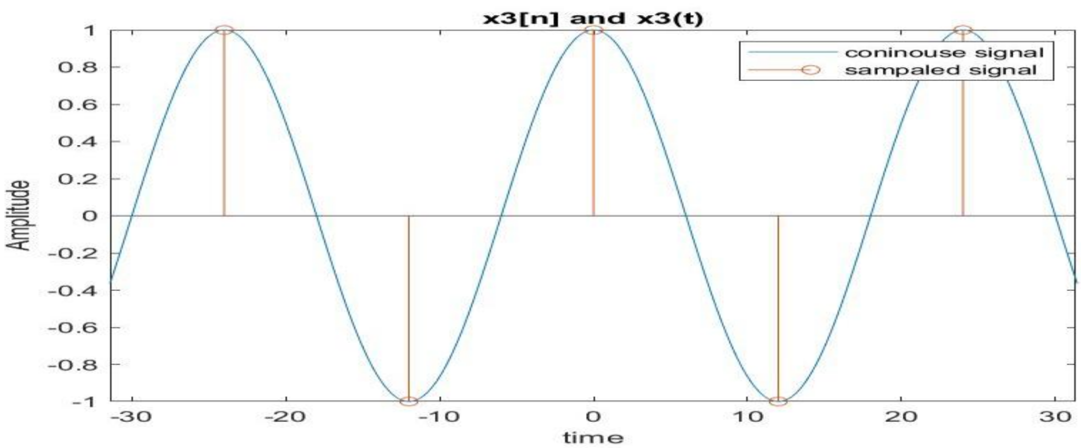
איור 1

עבור x_{2c}:



איור 2

עבור x_{3c}:



איור 3

כעת נפרט קצת על אופן בניית הגרפים הנתונים במאטלב:

על מנת לחסוך שכפול קוד מיותר, יצרנו לולאת for אשר רצה עבור i בין 1 ל-3 ומחשבת בעזרת אותו הקוד את הגרפים השונים עבור שלושת האותות, כאשר הפרמטרים המשתנים בין האינטרציות הינם ההגדרה של $x_i(t)$ ו $t_{s,i}$. שאר הנתונים מחושבים באופן יחסי לשני הפרמטרים הללו. הגדרנו את הסיגנלים, הגדרנו את זמני הדגימה ואת הגדלים הדרושים, והגדרנו גודל חשוב: $t_c = \frac{T_s}{relative\_samp}$, שזה בעצם היחס בין הדגימה שלנו לבין הדגימה של האות הרציף(אותה לקחנו להיות $\mathrm{relative}_{\mathrm{samp}} = 100$, כלומר, שתי סדרי גודל, בהתאם לדרישות אשר הוצגו בפורום בקורס ב$moodle$). מאחר ותכנות ומחשבים בפרט משתמשים בייצוג דיגיטלי (משמע בדיד), לא קיימת עבורנו דרך לייצג ב$matlab$ אות רציף (אנלוגי). לכן, השתמשנו בדגימה בעלת תדירות הגדולה בשני סדרי גודל מהאות הדגום, על מנת ליצר אות בדיד נוסף, אשר נוכל להתיחס אליו כרציף ביחס לאות הדגום x_s.

מהגרפים המתקבלים ניתן לראות כי אכן עבור שני האותות הראשונים קיבלנו צורה של סינק בזמן הרציף, ודלתאות דוגמות בזמן הבדיד. ועבור האות השלישי קיבלנו צורה של קוסינוס בזמן הרציף ודלתאות דוגמות בזמן הבדיד. כל זה לפי הציפייה שלנו.

<u>הסבר על הגרפים המתקבלים:</u>

מאיור 1 ניתן לראות כי כאשר עושים קפיצות בזמן דגימה של 6 שניות אז נופלים בדיוק באפסים של פונקציית הסינק בזמן, חוץ מנקודת המקסימום שבה לא נופלים ב-0 ולכן בה יש לנו דלתא דוגמת. תוצאה זו באה לידי ביטוי בכך שחוץ מנקודת המקסימום, בכל שאר הנקודות אין לנו דלתאות מכיוון שהן בעצם מוכפלות ב-0.

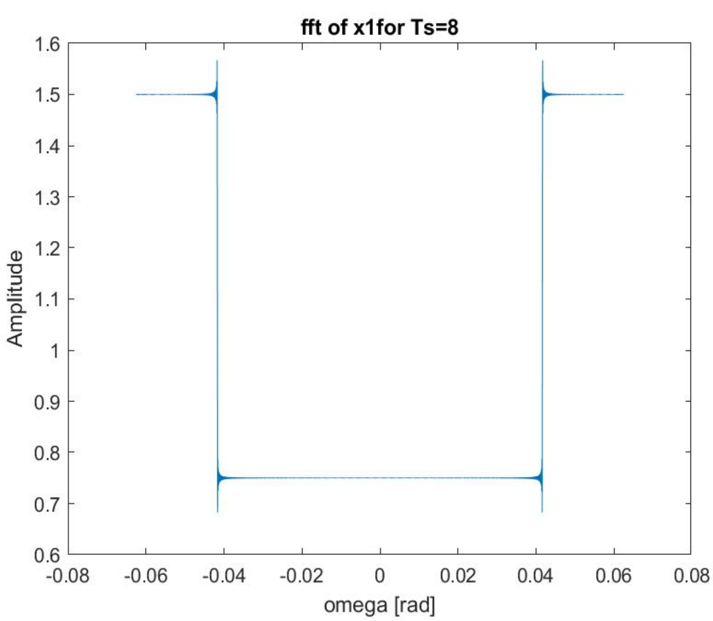
מאיור 2 ניתן לראות כי עבור הסינק בריבוע חלק מהדגימות נופלות על האפסים של הפונקציה וחלק לא, כך שאיפה שאין נפילה על אפס תהיה פונקציית דלתא דוגמת ב- $x_{2c}[n]$.

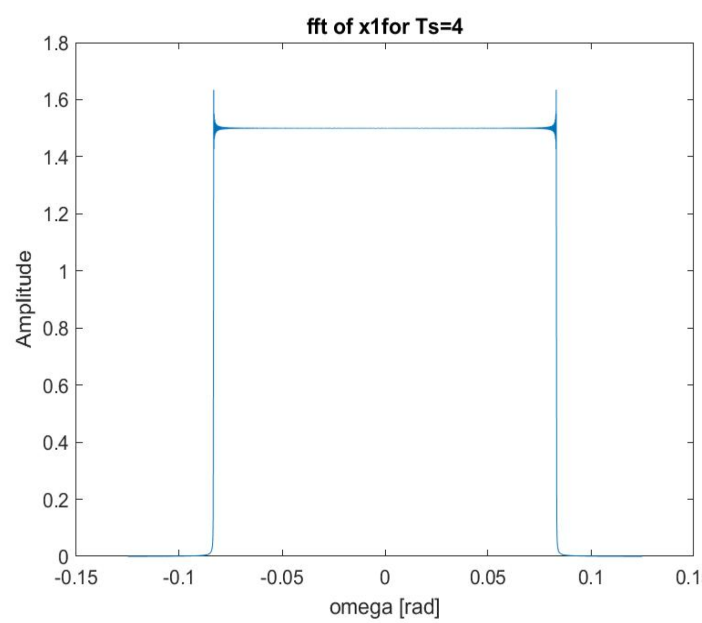
מאיור 3 ניתן לראות כי הדגימות בזמן של 12 שניות נופלות בדיוק בנקודות הקיצון של פונקציית הקוסינוס הנתונה (בזמן) ולכן מתקבלות דלתאות בזמן הבדיד בדיוק בנקודות הקיצון של הפונקציה בזמן הרציף.

<u>סעיף d:</u>

בחלק זה ייצרנו גרפים אשר מציגים את התמרת פורייה של כל אחד מהאותות. עבור כל אות יצרנו שני גרפים, פעם אחת עבור התמרת פורייה עם זמן דגימה של $T_S = 4\ sec$ ופעם שנייה עבור התמרת פורייה עם זמן דגימה של $T_s = 8\ sec$. להלן הגרפים שהתקבלו:

<u>עבור x_{1c}:</u>

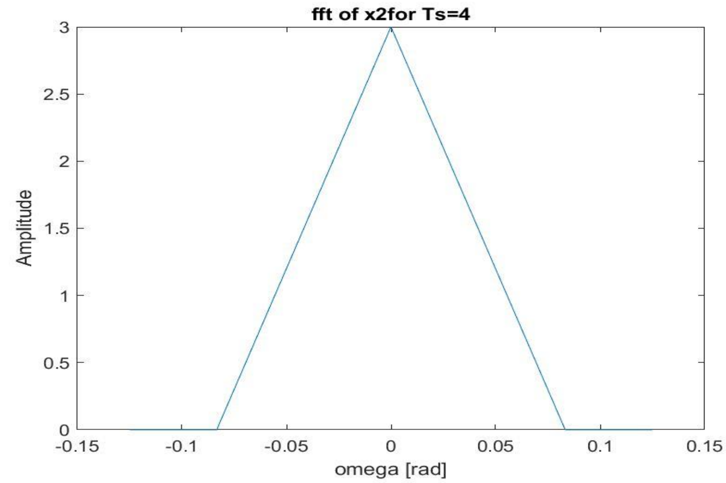




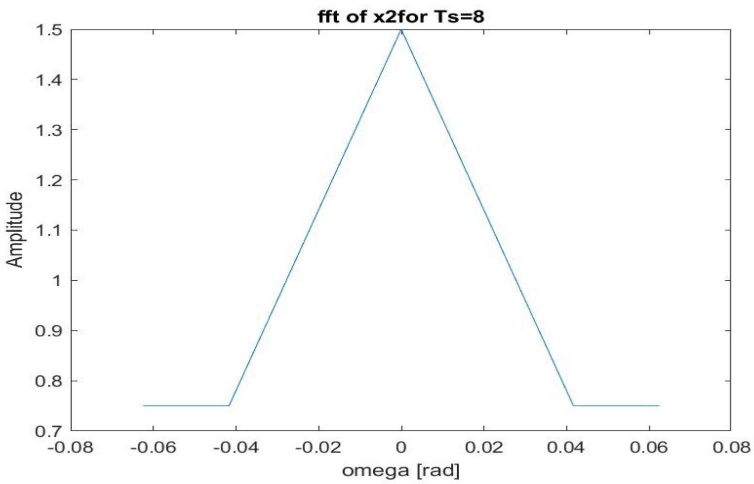
איור 4

איור 5

<u>עבור x_{2c}:</u>

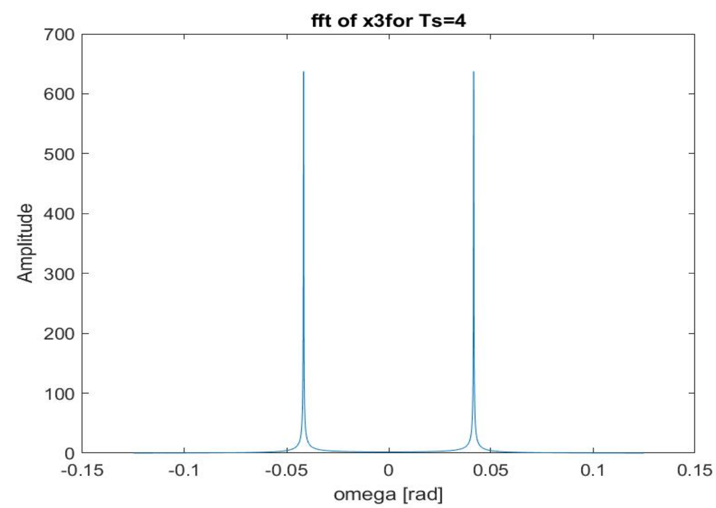


איור 6

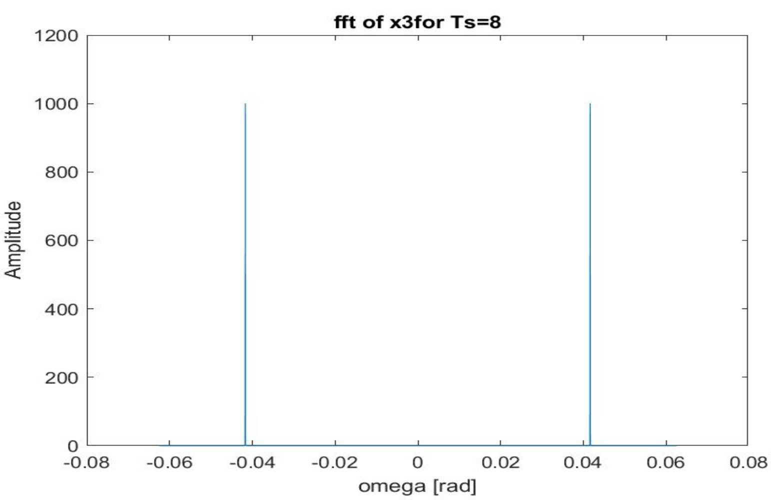


איור 7

<u>עבור x_{3c}:</u>



איור 8



איור 9

<u>כעת נפרט קצת על אופן בניית הגרפים הנתונים :</u>

בחלק זה אנחנו בעצם דוגמים את הפונקציות שלנו בזמן של 4 שניות ו-8 שניות, כאשר השורה המרכזית בקוד היא הבאה : $fftshift(abs(fft(x_i)))$. כאשר ה-fft מבצע את התמרת פורייה והוא פונקציה מובנת של המאטלב, ה- abs מבצע ערך מוחלט כפי שהתבקש(ביקשו $|X(e^{jw})|$), ו- $fftshift$ ממרכז את הגרף סביב נקודת האפס. כמו כן, לקחנו את הפונקציות

שלנו להיות על פני מחזור אחד ממינוס פאי עד פאי(שכפול אחד של האות). בנוסף לכך, נרמלנו את ציר ה-x לפי הנרמול שנלמד בכיתה.

הסבר על הגרפים המתקבלים :

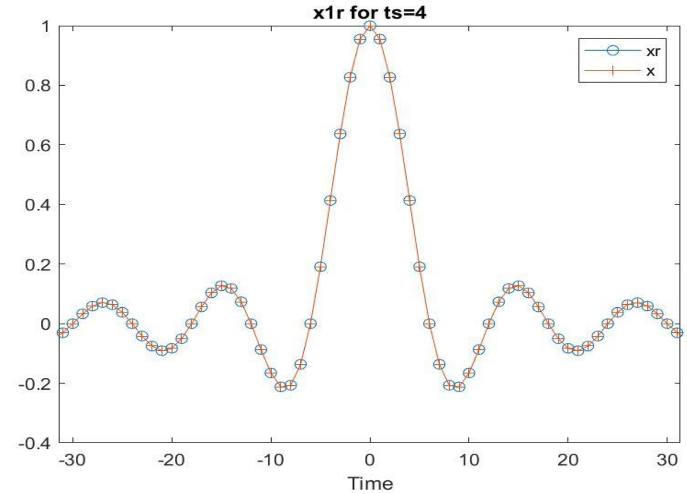
ראשית, כאשר דוגמים בזמן של $T_S = 4\ sec$ את האותות שלנו ניתן לראות כי עבור כל שלושת האותות התמרות הפורייה שהתקבלו הן לפי המצופה, כלומר, קיבלנו מלבן עבור פונקציית הסינק, קיבלנו משולש עבור פונקציית הסינק בריבוע וקיבלנו רכבת של שני הלמים עבור פונקציית הקוסינוס(איורים 4,6,8), בדיוק כמו בחישובים האנליטיים בסעיף ב'. הסיבה לכך היא שזמן הדגימה(4 שניות) הוא מתחת לזמני הדגימה של כל שלושת האותות(6 שניות, 6 שניות ו12 שניות) ולכן זה עונה על תנאי נייקוויסט וההתמרות שמרו על צורתן ללא קיפול וללא $aliasing$.

בניגוד לכך, כאשר דגמנו ב-8 שניות קיבלנו כי עבור האות x_{1c} ו- x_{2c} זמן הדגימה הזה גבוה יותר מזמן הדגימה שלהם(6 שניות) ולכן אין עמידה בתנאי נייקוויסט, כתוצאה מכך קרתה תופעה של קיפול בגרפי ההתמרה שלהם(איור 5,7), כמו גם ירידה בגובה הגרפים כתוצאה מ-$aliasing$. לעומת זאת, האות x_{3c} שזמן הדגימה שלו הוא 12 שניות עדיין יותר גבוה מ-8 שניות ולכן הוא עומד בתנאי נייקוויסט ולכן קיבלנו שוב פעם 2 הלמים ללא קיפולים וללא מריחות(איור 9), כלומר ההתמרה שמרה על צורתה.

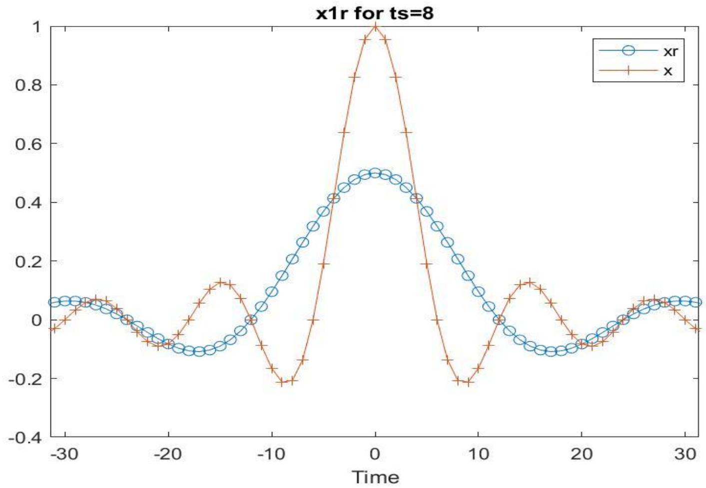
סעיף e :

אנחנו ראינו בהרצאה כי הנוסחא : $\sum_n x[nT_s]sinc(\frac{t-nT_s}{T_s})$ נקראת נוסחת השחזור/ האינטרפולציה. כלומר, דרך לשחזר את האות היא לקחת את הדגימות ולייצג אותם על ידי סינקים מוזזים בזמן ומוכפלים בערך של האות. כתוצאה מכך, הסינקים נסכמים לכדי פונקציה רציפה משוחזרת של האות הרציף המקורי. (בעצם הסינקים מתארים את פונקציית ההלם של המסנן מעביר נמוכים אשר איתו אנו מבצעים את השחזור).
בסעיף זה אנחנו משתמשים בדרך שחזור זו על מנת לשחזר את האותות הדגומים בחזרה לאותות רציפים. נבצע את השחזור עבור כל אחד משלושת האותות פעמיים, פעם אחת עבור $T_s = 4\ sec$ ופעם שנייה עבור $T_s = 8\ sec$. להלן הגרפים המתקבלים מהשחזור :

עבור x_{1c}:

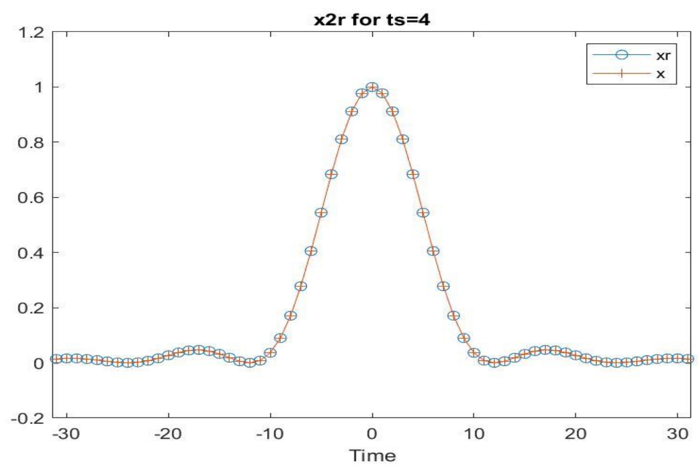


איור 10

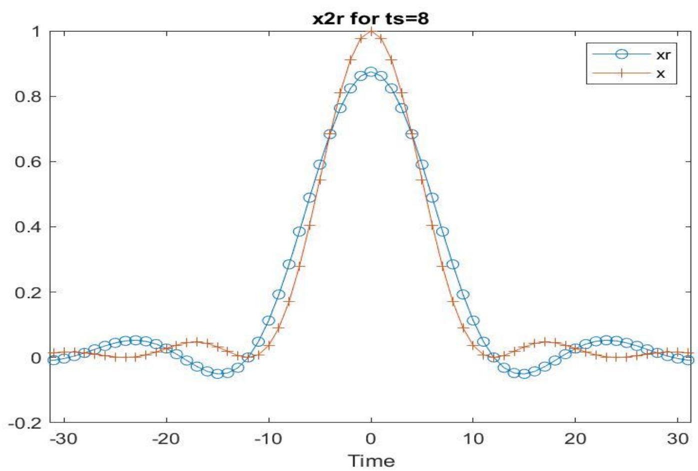


איור 11

עבור x_{2c}:

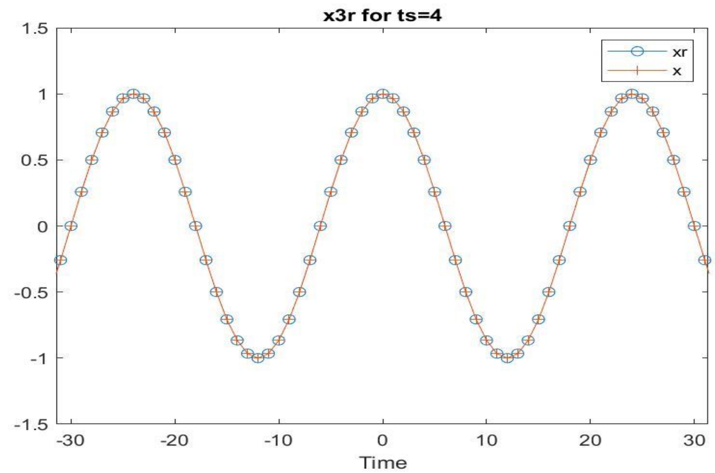


איור 12

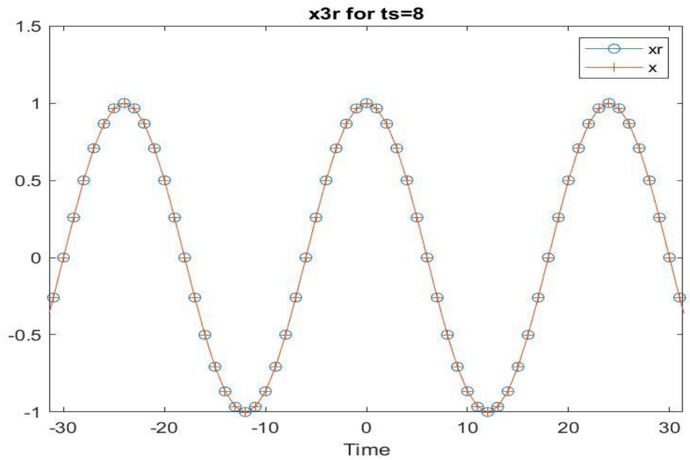


איור 13

עבור x_{3c}:



איור 14



איור 15

הבנייה של הגרפים במאטלב כללה הכנסה של האותות הדגומים מהסעיף הקודם לתוך נוסחת הסכום הנתונה בסעיף הזה ובעצם ביצוע של $plot$.

<u>הסבר על הגרפים המתקבלים :</u>

הגרפים שהתקבלו מתבססים על אותם הסברים שהסברתי בסעיף הקודם(d). ראשית, כאשר משחזרים את האותות הדגומים שלנו עם זמן דגימה של $T_s = 4\ sec$, זמן זה עומד בתנאי נייקוויסט עבור שלושת האותות מכיוון שהוא נמוך מזמני הדגימה של כולם (6 שניות, 6 שניות ו-12 שניות), ולכן עבור $T_s = 4\ sec$ אנחנו נקבל שחזור מושלם של האותות שלנו. מאיורים 10,12,14 ניתן לראות כי האות המשוחזר(x_r, נקודות כחולות) מתלכד באופן מושלם עם האות המקורי (x, כתום). שחזור מושלם זה מתקבל כתוצאה מעמידה בתנאי נייקוויסט.

בניגוד לכך, כאשר דגמנו בזמן דגימה של $T_s = 8\ sec$ קיבלנו כי עבור האות x_{1c} ו- x_{2c} זמן הדגימה הזה גבוה יותר מזמן הדגימה שלהם(6 שניות) ולכן אין עמידה בתנאי נייקוויסט, כתוצאה מכך אנחנו יכולים לראות כי אין שחזור מושלם של האות המקורי. כלומר, מאיורים 11,13 ניתן לראות כי האות המשוחזר(x_r, נקודות כחולות) לא מתלכד באופן מושלם עם האות המקורי(x, כתום). שחזור לא מושלם זה מתקבל כתוצאה מאי-עמידה בתנאי נייקוויסט.
לעומת זאת, האות x_{3c} שזמן הדגימה שלו הוא 12 שניות עדיין יותר גבוה מ- $T_s = 8\ sec$ ולכן הוא עומד בתנאי נייקוויסט. כתוצאה מכך קיבלנו כי האות המשוחזר מתלכד באופן מושלם עם האות המקורי(איור 15). שחזור מושלם זה מתקבל כתוצאה מעמידה בתנאי נייקוויסט.

שאלה 3-

סעיף a:

בסעיף זה אנחנו רוצים לחשב בצורה אנליטית את ה- $DTFT$ של האות הנתון הבא:

$$\begin{cases} x[n] = 1 \ \ for\ 0 \le n \le N-1 \\ \quad\quad\quad\quad 0 \ \ else \end{cases}$$

לצורך החישוב האנליטי אנחנו נשתמש בהגדרה כפי שנלמד בכיתה:

$$X\left(e^{jw}\right) = \sum_{n} x[n]e^{-jwn}$$

ולכן עבור האות הנתון לנו נקבל:

$$X\left(e^{jw}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} 1e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-jw}\right)^{n}$$

כעת בעצם קיבלנו כי $e^{-jw} < 1$ ולכן נוכל להשתמש בנוסחא לחישוב טור הנדסי, כך שנקבל:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

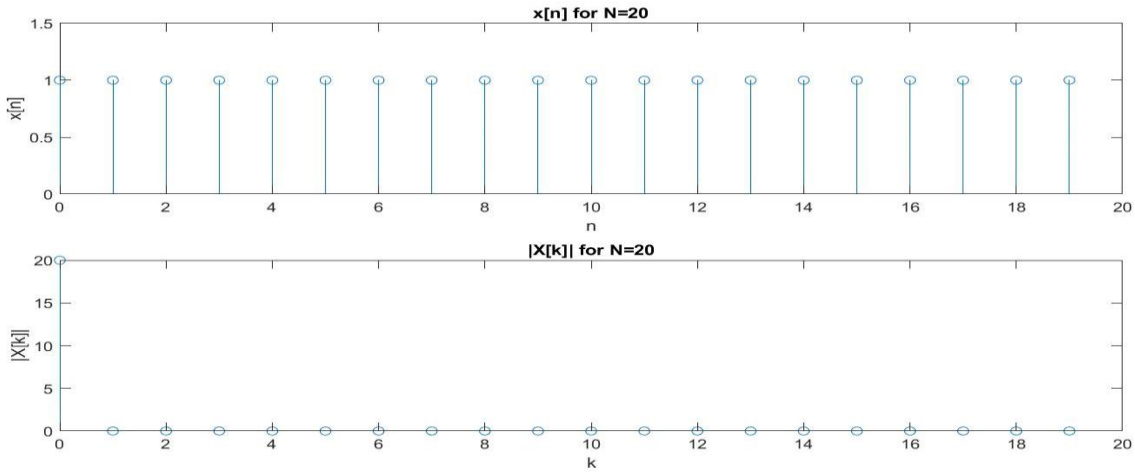
ולכן במקרה שלנו נקבל:

$$X\left(e^{jw}\right) = \frac{1 - \left(e^{-jw}\right)^{N}}{1 - \left(e^{-jw}\right)} = \frac{\frac{1 - e^{-jwN}}{1}}{\frac{e^{jw} - 1}{e^{jw}}} = \frac{e^{jw}\left(1 - e^{-jwN}\right)}{e^{jw} - 1}$$

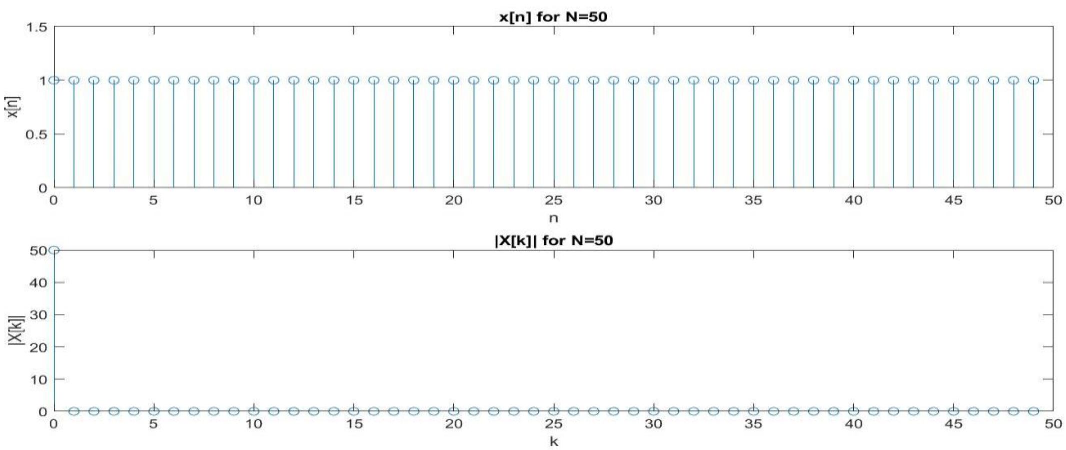
סעיף B

סעיף c:

בסעיף זה נדרשנו להציג את האות הנתון ואת הDFT שלו עבור N=20 ועבור N=50. להלן התוצאות:



איור 16



איור 17

מהנלמד בכיתה נצפה כי הDFT יניב לנו אות מהצורה הבאה:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N}e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N}kn}=\begin{cases}N, k=0,\pm ZN \ for \ Z\in\mathbb{Z}\\ 0, else\end{cases}$$

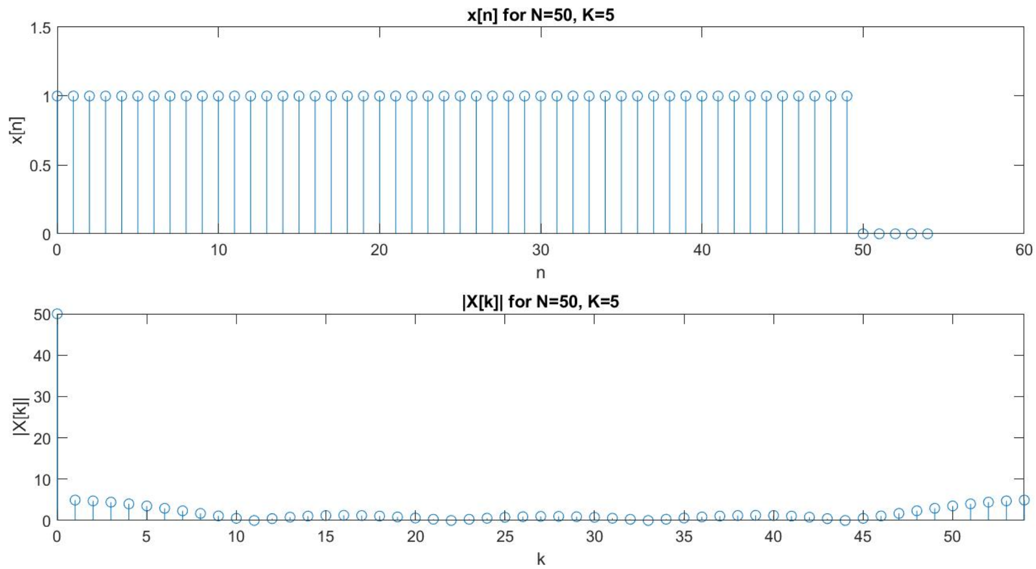
נשים לב כי בשתי האיורים קיבלנו כי האות אפס למעט נקודה אחת בדידה הממורכזת ב-0. כמו כן האפליטודה של נקודה זו באיור 16 הינה 20 ובאיור 17 הינה 50. כלומר, קיבלנו כי האפליטודה שווה ל-N בדיוק כמו בתיאוריה.

סעיף d

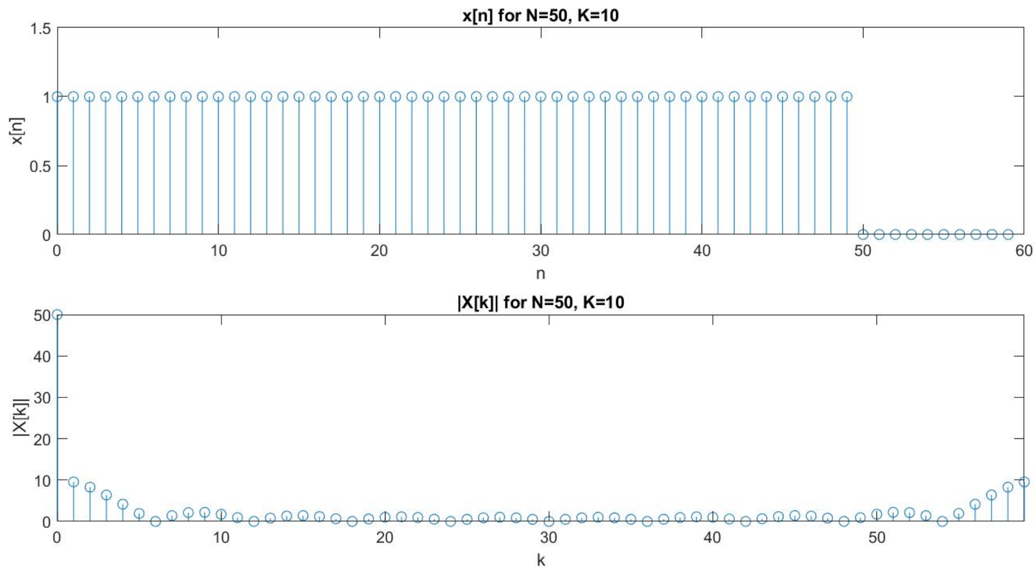
כעט, נגדיר את האות הבא:

$$x_{pad}[n]=\begin{cases}1 \ for \ x\le n\le N-1\\ 0 \ for N\le n\le N+K-1\end{cases}$$

נדרשנו להציג את האות הנתון ואת הDFT שלו עבור N=50 ועבור K={5, 10}. להלן התוצאות:



איור 18



איור 19

האות שיצרנו הוא למעשה ריפוד באפסים של האות הנתון מסעיף a, ולכן על פי הנלמד בכיתה נצפה לDFT מהצורה הבאה:

$$X_{N,K}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N}k}\right)^{n}\overset{k\neq 0}{=}\frac{1-\left(e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N}k}\right)^{N}}{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N}k}}=\frac{1-e^{-j\cdot 2\pi k}}{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$X_{N,K}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N+K}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N+K}k}\right)^{n}\overset{k\neq 0}{=}\frac{1-\left(e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N+K}k}\right)^{N}}{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N+K}k}}$$

נתחיל בניתוח האות הראשון כאשר N=50 וכאשר K=5 ונשים לב כי מתקבלת ההתמרה הבאה :

$$X_{N=50,K=5}[k]\overset{k\neq 0}{=}\frac{1-\left(e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N+K}k}\right)^{N}}{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N+K}k}}=\frac{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{55}\cdot 50k}}{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{55}\cdot k}}=\frac{1-e^{-j\cdot\frac{20\pi}{11}\cdot k}}{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{55}\cdot k}}$$

$$X_{N=50,K=5}[k]=\begin{cases}N, k=0\\ \dfrac{1-e^{-j\cdot\frac{20\pi}{11}\cdot k}}{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{55}\cdot k}}, else\end{cases}$$

נשים לב כי כאשר K=0 נקבל כי גודל ההתמרה בערך מוחלט הינו 50, בדיוק כפי שמוצג בגרף. וכמו כן, עבור $k=11z\ for\ z\in\mathbb{Z}$ נקבל כי ההתמרה מתאפסת. לפי הטבלה בנספח, נשים לב כי אילו בדיוק התוצאות אשר התקבלו ממטלאב.

נמשיך בניתוח האות הראשון כאשר N=50 וכאשר K=10 ונשים לב כי מתקבלת ההתמרה הבאה :

$$X_{N=50,K=10}[k]\overset{k\neq 0}{=}\frac{1-\left(e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N+K}k}\right)^{N}}{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N+K}k}}=\frac{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{60}\cdot 50k}}{1-e^{-j\cdot\frac{2\pi}{60}\cdot k}}=\frac{1-e^{-j\cdot\frac{5\pi}{3}\cdot k}}{1-e^{-j\cdot\frac{\pi}{30}\cdot k}}$$

$$X_{N=50,K=5}[k]=\begin{cases}N, k=0\\ \dfrac{1-e^{-j\cdot\frac{5\pi}{3}\cdot k}}{1-e^{-j\cdot\frac{\pi}{30}\cdot k}}, else\end{cases}$$

בדומה לניתוח הקודם, נשים לב כי כאשר K=0 נקבל כי גודל ההתמרה בערך מוחלט הינו 50, בדיוק כפי שמוצג בגרף. וכמו כן, עבור $k=6z\ for\ z\in\mathbb{Z}$ נקבל כי ההתמרה מתאפסת. לפי הטבלה בנספח, נשים לב כי אילו בדיוק התוצאות אשר התקבלו ממטלאב.

נספחים :

k	K=5	K=10
0	50	50
1	4.935	9.5537
2	4.7428	8.2851
3	4.432	6.3925
4	4.0161	4.1654
5	3.5133	1.9319
6	2.9455	0
7	2.3368	1.3952
8	1.7129	2.1292
9	1.0995	2.2027
10	0.52111	1.7321
11	0	0.91804
12	0.44507	0
13	0.79956	0.79451
14	1.0539	1.2943
15	1.2036	1.4142
16	1.2499	1.1654
17	1.1991	0.64338
18	1.0622	0
19	0.8545	0.59618
20	0.59435	1
21	0.30233	1.1223
22	0	0.94798
23	0.2913	0.53557
24	0.55163	0
25	0.76352	0.51764
26	0.91298	0.88537
27	0.99023	1.0125
28	0.99023	0.8708
29	0.91298	0.50069

k	K=5	K=10
30	0.76352	0
31	0.55163	0.50069
32	0.2913	0.8708
33	0	1.0125
34	0.30233	0.88537
35	0.59435	0.51764
36	0.8545	0
37	1.0622	0.53557
38	1.1991	0.94798
39	1.2499	1.1223
40	1.2036	1
41	1.0539	0.59618
42	0.79956	0
43	0.44507	0.64338
44	0	1.1654
45	0.52111	1.4142
46	1.0995	1.2943
47	1.7129	0.79451
48	2.3368	0
49	2.9455	0.91804
50	3.5133	1.7321
51	4.0161	2.2027
52	4.432	2.1292
53	4.7428	1.3952
54	4.935	0
55		1.9319
56		4.1654
57		6.3925
58		8.2851
59		9.5537