

Formulation du problème du plus court chemin comme programme linéaire.

I.Explications.

Lorsque l'on arrive à un sommet qui n'est pas l'arrivé, on doit en repartir obligatoirement, sinon cela implique que l'on est bloqué et que l'objectif (l'arrivée), n'est pas atteint (contrainte 1).
On doit obligatoirement partir du départ, et on ne part qu'une fois du départ (contrainte 2).
On doit obligatoirement arriver à l'arrivée, et on n'y arrive que par un chemin (contrainte 3).

II.Modélisation.

A.Définition des variables.

Soit $G = (S,A)$.

On considère que les sommets sont numérotés de gauche à droite et de bas en haut comme l'exemple ci dessous.

[08, 09, 10, 11]

[04, 05, 06, 07]

[00, 01, 02, 03]

Soit $a_{i,j}$ le poids de l'arc reliant le sommet i au sommet j

Soit $x_{i,j}$ la variable qui vaut 1 si on va du sommet i au sommet j , 0 sinon.

Soit s le sommet de départ et f le sommet d'arrivée.

B.Modélisation.

$$\min\left(\sum_{ij \in S} a_{ij} * x_{ij}\right)$$

Sous contraintes

$$(1) \forall i \in S, i \neq s, f: \sum_{j \in S} x_{ij} - \sum_{k \in S} x_{ji} = 0$$

$$(2) \text{Pour } i = s: \sum_{j \in S} x_{ij} = 1$$

$$(3) \text{Pour } j = f: \sum_{i \in S} x_{ij} = 1$$

$$(4) \forall i, j \in S, x_{ij} > 0$$