Laufzeitanalyse

Definitionen

- B: Anzahl der Banken
- N_j: Anzahl der Münzen in Bank j
- $C_{\text{total}} = \sum_j N_j$: Gesamtzahl aller Münzen über alle Banken
- *runs*: Anzahl der Greedy-Starts (z. B. 10)
- K: Schranke für die Gesamtzahl der eingesammelten Münzen

Laufzeitkomplexität

Für konstante Anzahl an Starts ($\textit{runs} = \text{const} = 10$) ergibt sich die Gesamtlaufzeit in O-Notation zu:

$$T = O\Big(\sum_{j=1}^{B} N_j \log N_j \; + \; B \log B \; + \; C_{\text{total}}\Big). \tag{1}$$

Durch Ausnutzen des Durchschnittswerts $\overline{N} = C_{\text{total}}/B$ kann man weiter vereinfachen:

$$T = O\Big(C_{\text{total}} \log \overline{N} \; + \; B \log B \; + \; C_{\text{total}}\Big). \tag{2}$$

Praktische Abschätzung

Für typische Parameter:

- $B \approx 10^5$,
- $C_{\text{total}} \leq 10^6$,
- $\overline{N} \approx 10$,

ergibt sich eine Gesamtlaufzeit im Bereich von etwa 10^7 bis 10^8 Operationen, was auf modernen CPUs in wenigen Sekunden realisierbar ist.

NP-Komplexität

Entscheidungsproblem

Wir definieren das zu betrachtende Entscheidungsproblem wie folgt:

- GREEDY-START-ENTSCHEIDUNG: Gegeben eine Familie von B Banken mit je N_j Münzen und eine Schranke K, gibt es eine Auswahl von Greedy-Starts (jeweils Startbank), sodass die Gesamtanzahl der eingesammelten Münzen mindestens K beträgt?

Mitgliedschaft in NP

Ein Zertifikat besteht aus einer Auswahl der Startbanken für jeden der *runs* Greedy-Starts. Die Verifikation kann in polynomieller Zeit erfolgen, indem man für jeden Start den Greedy-Ablauf simuliert (Laufzeit $O(C_{\text{total}})$) und die Gesamtzahl summiert. Somit ist GREEDY-START-ENTSCHEIDUNG in NP.

NP-Härte (NP-Schwer)

Wir zeigen NP-Härte durch eine polynomzeitliche Reduktion von PARTITION, das bekannt NP-vollständig ist.

- PARTITION: Gegeben eine multiset $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $\sum_i a_i = 2T$, gibt es eine Teilmenge $S' \subseteq S$ mit $\sum_{a \in S'} a = T$?
- Reduktionskonstruktion: Wir setzen $B = n + 1$ Banken. Für $j = 1, \dots, n$ befüllen wir Bank j mit $N_j = a_j$ Münzen. Die Bank $n + 1$ erhält $N_{n+1} = T$ Münzen. Wähle $runs = 1$ und setze $K = 2T$.
- Korrektheit: Ein Greedy-Start auf Bank $n + 1$ sammelt zunächst T Münzen und wechselt dann zu einer der restlichen Banken. Um insgesamt $\geq 2T$ Münzen zu sammeln, muss die folgende Bank genau T Münzen enthalten, d. h. eine Teilmenge der ersten n Banken mit Summe T existiert. Somit gibt es eine Lösung für PARTITION genau dann, wenn die Greedy-Start-Entscheidung mit diesen Parametern lösbar ist.

Da PARTITION NP-vollständig ist, ist auch GREEDY-START-ENTSCHEIDUNG NP-hart. Zusammen mit Zugehörigkeit zu NP erhält man NP-Vollständigkeit.