

В. А. Вишняков

Методы оптимизации

Пособие

Рыбинск 2021

УДК 519.8

Вишняков В. А. Методы оптимизации. Пособие. – Рыбинск: РГАТУ имени П. А. Соловьева, 2021. – 51 с.

В пособии приведены краткие сведения по математическим методам аналитической и численной оптимизации функций и варианты задач для решения.

Пособие предназначено для использования при подготовке магистрантов направлений 09.04.01 – Информатика и вычислительная техника, 09.04.03 – Прикладная информатика, 09.04.06 – Программная инженерия и может быть полезно студентам других направлений обучения.

Рецензент: кафедра вычислительных систем Рыбинского государственного авиационного технического университета имени П. А. Соловьева.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Задача оптимизации системы.....	4
2. Метод дифференциального исчисления, безусловный экстремум.	8
3. Условный экстремум, метод неопределенных множителей Лагранжа.....	11
4. Условный экстремум, метод динамического программирования Беллмана.....	16
5. Метод линейного программирования.....	18
6. Линейное программирование, симплекс-метод .....	20
7. Численные методы безусловной многомерной оптимизации.....	24
7.1. Методы покоординатного движения и Гаусса-Зейделя .....	24
7.2. Численный, градиентный метод оптимизации.....	26
7.3. Методы случайного поиска.....	27
8. Численные методы одномерной оптимизации .....	29
8.1. Метод равномерного поиска .....	29
8.2. Метод деления интервала пополам .....	29
8.3. Метод дихотомии .....	30
8.4. Метод золотого сечения.....	31
8.5. Метод Фибоначчи.....	32
9. Численные методы поиска условного экстремума .....	33
9.1. Принципы построения численных методов поиска условного экстремума.....	33
9.2. Последовательная безусловная минимизация, метод штрафов .....	34
10. Методы вариационного исчисления.....	36
10.1. Аналитический метод .....	36
10.2. Численный метод вариационного исчисления.....	38
10.3. Простейшая задача вариационного метода.....	39
10.4. Задача оптимизации периметра прямоугольника.....	40
10.5. Задача Дидоны.....	40
10.6. Определение экстремали, .....	42
Задача 1.....	42
10.7. Определение экстремали, .....	43
Задача 2.....	43
10.8. Метод вариаций в задачах с подвижными концами.....	44
11. Варианты задач для решения .....	47
Библиографический список .....	51

## ВВЕДЕНИЕ

В конструкторском проектировании наибольшее практическое применение получили методы оптимизации, использующие понятия экстремума целевой функции. Задача оптимизации сводится к нахождению из множества возможных значений вектора  $x$  оптимального вектора  $x_0$  (оптимального плана), который обеспечивает экстремум целевой функции  $U(x_0) = U_{extr}$ . Нахождение экстремума, т. е. максимума или минимума целевой функции не принципиально, поскольку максимизацию  $U(x)$  всегда можно заменить ее минимизацией, определив минимум функции  $(-U(x))$ .

Трудность решения подобных практических задач объясняется тем, что современные системы являются сложными в проектировании. Это связано:

- отсутствием, как правило, аналитического описания модели системы и трудностью в связи с этим достаточного представления ее целевой функции;
- требованиями, в соответствии с которыми необходимо обеспечить одновременно экстремум нескольких ее характеристик;
- неодинаковой степенью влияния первичных параметров на выходные характеристики системы и большим диапазоном их изменения.

Тем не менее, существуют достаточно общие подходы к решению таких задач. Среди них различают аналитические и численные (алгоритмические).

Первые позволяют установить явные формульные зависимости между влияющими параметрами и координатами экстремума целевой функции, что дает возможность наглядно проследить их связь и взаимное влияние. Практическое применение аналитических методов ограничено математической сложностью решения задач.

Вторые, указывая правило (алгоритм) решения, позволяют получить лишь конкретные числовые значения оптимальных параметров. Применение численных методов тем эффективнее, чем лучше они приспособлены для решения на компьютере.

### 1. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ

При проектировании вычислительной системы, существует проблема ее оптимизации, т. е. определения наилучшего (оптимального) варианта решения с точки зрения какого-либо критерия.

При решении этой задачи широко используются математические модели. Они включают различные методы расчетов, и позволяют, в том числе

оптимизировать модели систем. На основе таких оптимальных моделей, затем строится реальная система.

Абстрактную модель системы изображают следующим образом (рис. 1),



Рис. 1.

где  $x$  – входные параметры,  $y$  – выходные параметры системы.

Задачи математического исследования бывают трех основных типов.

### 1. Задача анализа.

Считается, что модель системы существует, и известна математическая связь между выходными  $y$  и входным параметрам  $x$ . Требуется по заданной величине значений  $x$  определить выходные значения  $y$ .

### 2. Задача оптимизации.

Предполагается, что связь между параметрами  $y$  и  $x$  известна. Необходимо найти такие значения входных параметров  $x$ , чтобы выходные  $y$  принимали экстремальные значения (минимальные, либо максимальные).

### 3. Задача синтеза.

В данном случае по заданному набору выходных параметров  $y$  требуется определить структуру модели системы, т. е. найти математическую связь между параметрами  $x$  и  $y$ .

Эти задачи часто сопутствуют друг другу.

Задача оптимизации в общем случае решается в 4 этапа:

- 1) определение математической модели системы;
- 2) выбор критерия оптимизации;
- 3) определение ограничений;
- 4) отыскание решения (программирование).

Рассмотрим более подробно каждый из этапов.

1 этап – определение математической модели.

Необходимо связать выходные параметры  $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$  с входными параметрами  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , т. е. найти математическую модель в

виде  $y = \Psi(x, t)$ , где  $\Psi$  – вектор-функция, определяющая операторы функционирования системы

$$\begin{aligned} y_1 &= \Psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ y_2 &= \Psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ &\vdots \\ y_k &= \Psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \end{aligned}$$

где  $t$  – текущее время.

2 этап – выбор критерия оптимизации.

Критерий оптимизации (показатель оптимизации, критерий качества или целевая функция) позволяет сравнивать одну модель системы с другой. Критерии бывают комплексными и частными.

Комплексный критерий характеризует систему интегрально в целом в виде скалярной функции

$$U = f(y).$$

Частные критерии  $U_i, i = 1, 2, 3, \dots, m$  характеризуют систему по различным частным показателям. К таким показателям относятся:

- технические характеристики (быстродействие, объем внешней памяти, разрядность);
- конструктивные характеристики (вес, габариты);
- показатели надежности (среднее время безотказной работы, интенсивность отказов);
- показатели стоимости (стоимость опытного образца, стоимость серийного образца).

Используются следующие способы введения комплексных критериев.

1. Комплексный показатель определяется через сумму частных показателей в виде

$$U = \sum_{i=1}^m b_i U_i,$$

где  $b_i$  – весовые коэффициенты частных показателей.

Так для вычислительной системы он может быть определен соотношением

$$U = b_1 t_0 + b_2 q + b_3 \lambda,$$

где  $t_0$  – среднее время выполнения элементарной операции,

$q$  – вес вычислительной системы,

$\lambda$  – интенсивность отказов.

Лучшей с точки зрения этого критерия является система, имеющая меньшую величину показателя  $U$ .

2. Комплексный показатель задается с помощью произведения

$$U = \prod_{i=1}^m (U_i)^{a_i},$$

где  $a_i$  – коэффициенты, определяющие вес частных показателей.

3. Из множества частных показателей выбирают один главный  $U_i$  и оптимизируют его, таким образом, чтобы прочие показатели  $U_j$  не выходили за пределы допустимых значений  $U_j \in U_{\text{доп}}$ .

3 этап – определение ограничений.

При оптимизации экстремум ищется в области  $x \in X_{\text{доп}}$ .  $X_{\text{доп}}$  задает ограничения, т.е. ограничивает область значений для входных параметров. Иногда ограничиваются и выходные параметры. Причинами существования ограничений являются: во первых – физическая реализуемость системы, во вторых – существующая преемственность развития системы.

4 этап – отыскание решения.

Необходимо найти оптимальное значение  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ , которое обеспечивает экстремум показателя качества

$$U_{\text{extr}} = f(\Psi(x_0, t))$$

при заданных ограничениях  $x \in X_{\text{доп}}$ .

При отыскании решения используют последовательность действий, которая называется математическим программированием.

На практике применяются следующие методы оптимизации:

- дифференциального исчисления;
- вариационного исчисления;
- неопределенных множителей Лагранжа;
- динамического программирования;
- нелинейного программирования;
- линейного программирования;
- прямые методы отыскания экстремумов;
- методы случайного поиска

и другие методы.

При программировании используются как аналитические способы, так и численные способы отыскания решений.

## 2. МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ, БЕЗУСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть целевая функция  $U = f(x)$  является функцией одной переменной  $x$ . Функция непрерывна вместе с первой и второй производными. Необходимо найти значение  $x_0$ , которое обеспечивает экстремум функции  $U$ . Предположим, что функция  $U$  имеет минимум (рис. 2).

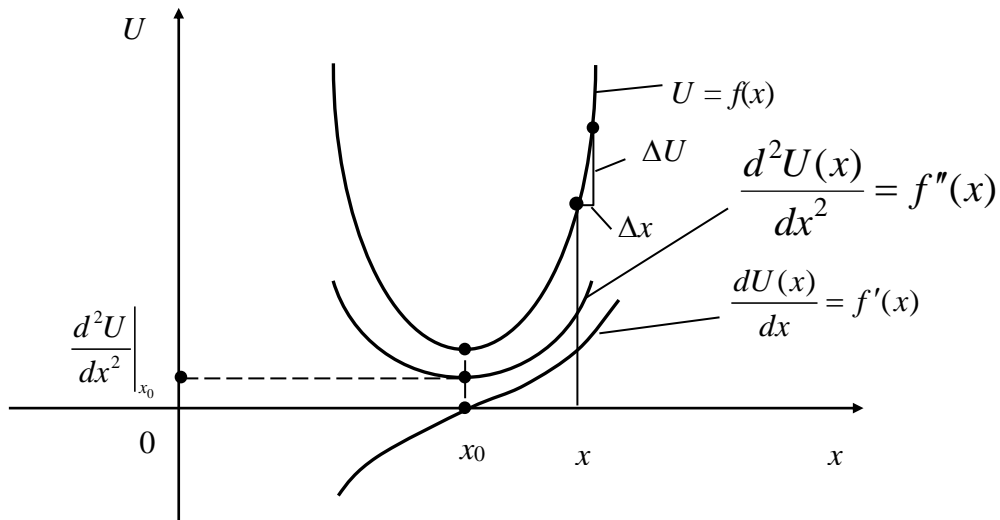


Рис. 2.

Нахождение минимума связано с исследованием первой производной целевой функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{dU}{dx} = f'(x).$$

Необходимое условие существования минимума (или максимума) находится из следующего уравнения:

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_0} = 0.$$

Достаточное условие существования экстремума связано с вычислением второй производной.



Если  $\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x_0} > 0$ , то в точке  $x_0$  находится минимум (рис. 2). Выполнение неравенства  $\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x_0} < 0$  означает, что в точке  $x_0$  расположен максимум.

Оптимальное значение функции  $U_0$  вычисляется как  $U_0 = f(x_0)$ .

На практике часто целевая функция является функцией нескольких переменных:

$$U = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Функция  $f$  непрерывна вместе со своими первыми и вторыми частными производными. Нужно найти значение вектора  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ , который обеспечивает экстремум функции  $f$ .

Необходимое условие экстремума определяется системой  $n$ -уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial U}{\partial x_1} \right|_{x_0} = 0, \\ \left. \frac{\partial U}{\partial x_2} \right|_{x_0} = 0, \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial U}{\partial x_n} \right|_{x_0} = 0. \end{cases}$$

Для проверки достаточного условия существования экстремума составляется матрица  $A$  размером  $n \times n$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\text{где } a_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_0}.$$

Вычисляются главные миноры матрицы, т. е. определители

$$A_1 = a_{11}, A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если  $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0$  (все главные миноры положительные), то в точке  $x_0$  находится минимум.

Если же  $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots$  (знаки главных миноров чередуются), то в точке  $x_0$  расположен максимум.

Оптимальное значение целевой функции равно

$$U_0 = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}).$$

Пример.

Найти экстремум функции  $f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 10(x_2 - x_1^2)^2$ .

Вычисляем первые частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(1 - x_1) \cdot (-1) + 10 \cdot 2(x_2 - x_1^2)(-2x_1) = -2(1 - x_1) - 40x_1(x_2 - x_1^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 10 \cdot 2(x_2 - x_1^2) = 20(x_2 - x_1^2).$$

Составляем систему уравнений, приравнивая производные к нулю:

$$\begin{cases} -2(1 - x_1) - 40x_1(x_2 - x_1^2) = 0, \\ 20(x_2 - x_1^2) = 0. \end{cases}.$$

Решаем систему уравнений. Из второго уравнения следует, что  $x_2 - x_1^2 = 0$ . Подставляя это значение в первое уравнение, получаем  $-2(1 - x_1) = 0$ . Отсюда находим  $x_{10} = 1$ . Используя второе уравнение системы с учетом найденного  $x_{10} = 1$ , получим  $x_{20} = 1$ . Таким образом, оптимальный вектор  $x_0$  равен  $x_0 = (1, 1)$ .

Далее проверяем условие достаточности, рассчитывая

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Находим вторую частную производную по переменной  $x_1$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 - 40((x_2 - x_1^2) + x_1(-2x_1)).$$

Подставляя в это выражение  $x_1 = 1, x_2 = 1$ , получим  $a_{11} = 82$ .

Находим вторые смешанные частные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -40x_1.$$

Отсюда при  $x_1 = x_2 = 1$ , получим  $a_{12} = a_{21} = -40$ .

Вычисляем вторую частную производную по переменной  $x_2$ , получаем  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 20$ , следовательно  $a_{22} = 20$ . Таким образом, матрица  $A$  приобретает следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем главные миноры матрицы

$$A_1 = 82, A_2 = \begin{vmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{vmatrix} = 1640 - (-40)(-40) = 40,$$

которые являются положительными.

Вывод: в точке  $x_0 = (1, 1)$  находится минимум. Минимальная величина целевой функции равна  $U_0 = f(x_{10}, x_{20}) = 0$ .

### 3. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ, МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Условный экстремум означает наличие ограничений при решении задачи оптимизации. Исходные данные следующие.

Известна целевая функция  $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Кроме того, заданы  $m < n$  ограничений вида

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, i = 1, 2, \dots, m,$$

где  $F_i$  – некоторая функция,  $b_i$  – число (константа). Функция  $f$ , а также функции  $F_i$  непрерывны и дважды дифференцируемы. Необходимо найти

значение  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ , которое обеспечивает экстремум целевой функции  $U$  при заданных ограничениях.

Данную задачу на условный экстремум можно свести на решение задачи с безусловным экстремумом с помощью метода Лагранжа. При этом составляется функция Лагранжа:

$$L = U + \sum_{i=1}^m \lambda_i (F_i - b_i),$$

где  $\lambda_i$  – неопределенные множители Лагранжа.

Функция Лагранжа зависит от переменных  $x$  и  $\lambda$ , т. е.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i).$$

Далее решается задача отыскания экстремума функции  $L$  методом дифференциального исчисления на безусловный экстремум (раздел 2). Для этого решают систему уравнений

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial L}{\partial x_k} \right|_{x_0, \lambda_0} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \right|_{x_0, \lambda_0} = 0, \quad i = \overline{1, m} \end{cases}.$$

и находят  $x_0$  и  $\lambda_0$ . Множители  $\lambda_i$  помогают лишь решать задачу и не относятся к выходному результату.

В частном случае для двух переменных целевая функция равна

$$U = f(x_1, x_2), \quad (1)$$

а ограничение имеет вид

$$F_1(x_1, x_2) = b_1. \quad (2)$$

Функция Лагранжа приобретает форму

$$L = f(x_1, x_2) + \lambda_1 (F_1(x_1, x_2) - b_1).$$

Находим частные производные и записываем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = F_1(x_1, x_2) - b_1 = 0, \end{array} \right. \quad (5)$$

решая которую, получаем  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $\lambda_{10}$ . Заметим, что уравнения (5) и (2) являются тождественными.

Докажем обоснованность метода Лагранжа для задачи с двумя переменными. Используя ограничение (2) выразим  $x_2$  через  $x_1$  в виде

$$x_2 = \varphi(x_1), \quad (6)$$

где  $\varphi$  – некоторая функция. Подставим (6) в (1) вместо  $x_2$ , получим

$$U = f(x_1, \varphi(x_1)). \quad (7)$$

В записанной таким образом целевой функции учтено ограничение (2). Функция оказывается зависимой только от одной переменной  $x_1$ . Находим безусловный экстремум функции  $U$ , используя полную первую производную  $\frac{dU}{dx_1}$ .

По правилам дифференцирования соотношение для полной производной функции (7) может быть записано следующим образом:

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} = 0, \quad (8)$$

где  $\varphi = x_2$ .

Вычислим полный дифференциал  $dF_1$ , используя выражение (2). Применяя правило дифференцирования, имеем

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdot dx_2 = 0.$$

Из последнего соотношения получаем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_2}}. \quad (9)$$

Подставим выражение (9) в соотношение (8), получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_2}} = 0. \quad (10)$$

Преобразуя отношение дифференциалов в выражении (10) введем коэффициент  $\lambda_1$  (неопределенный множитель Лагранжа) следующим образом:

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_2}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_2}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial F_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial F_1}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial F_1}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_2}} = \lambda_1.$$

Коэффициент  $\lambda_1$  является, по сути, весовым коэффициентом функции  $F_1$  в общей функции Лагранжа. С учетом введенного множителя  $\lambda_1$  уравнение (10) преобразуется в уравнение (3).

Уравнение (4) можно получить, выразив  $x_1$  через  $x_2$  из уравнения (2) и проделав операции отмеченные выше. Таким образом, подтверждается справедливость системы уравнений (3), (4), (5).

Пример.

Имеется вычислительная система, содержащая два блока 1 и 2 (рис. 3).

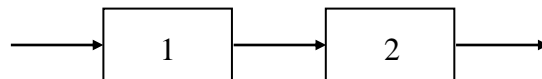


Рис. 3.

Параметрами блоков являются производительности, т. е. время выполнения операций  $x_1$  и  $x_2$  соответствующими блоками. Стоимость системы  $U$  связана с параметрами  $x_1$  и  $x_2$  зависимостью

$$U = \frac{\alpha}{x_1} + \frac{\beta}{x_2},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые постоянные коэффициенты. Необходимо выбрать блоки 1 и 2 с такими параметрами  $x_{10}$  и  $x_{20}$ , чтобы стоимость системы была минимальной при ограничении

$$x_1 + x_2 = b_1,$$

где  $b_1$  – заданная постоянная величина.

Решаем задачу, составляем функцию Лагранжа:

$$L = \frac{\alpha}{x_1} + \frac{\beta}{x_2} + \lambda(x_1 + x_2 - b_1).$$

Определяем систему уравнений, необходимую для отыскания оптимальных значений  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $\lambda_0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\alpha}{x_1^2} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\beta}{x_2^2} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = (x_1 + x_2 - b_1) = 0. \end{cases}$$

Из решения первого и второго квадратных уравнений этой системы, отбрасывая неудовлетворяющие корни, получаем

$$x_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{\beta}{\lambda}}.$$

Подставляя эти значения в третье уравнение системы имеем

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} + \sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} - b_1 = 0.$$

Отсюда получаем значение  $\sqrt{\lambda_0} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{b_1}$ .

Подставив  $\sqrt{\lambda_0}$  в выражение для  $x_1$  и  $x_2$ , находим оптимальные значения

$$x_{10} = \frac{\sqrt{\alpha} \cdot b_1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}, \quad x_{20} = \frac{\sqrt{\beta} \cdot b_1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}.$$

Минимальное значение целевой функции стоимости будет равно

$$U_{\min} = \frac{\alpha}{x_{10}} + \frac{\beta}{x_{20}} = \frac{\alpha \cdot (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{\sqrt{\alpha} b_1} + \frac{\beta \cdot (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta} b_1} = \frac{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2}{b_1}.$$

#### 4. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ, МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БЕЛЛМАНА.

Метод использует последовательную пошаговую оптимизацию целевой функции, причем на каждом шаге производится оптимизация функции по одной из переменных.

Для реализации метода надо чтобы функция была задана в некоторой определенной форме, например в виде суммы:

$$U = \sum_{i=1}^n f_i(x_i),$$

где  $x_i$  – входная переменная.

Ограничение задается в виде:  $\sum_{i=1}^n x_i \leq b, x_i > 0, i = \overline{1, n}$ . Необходимо найти вектор  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ , который обеспечивает минимум целевой функции  $U_{\min} = \sum_{i=1}^n f_i(x_{i0})$ .

Последовательность оптимизации следующая.

Шаг 1. Находится минимум целевой функции по переменной  $x_1$ , при условии  $x_1 \leq y_1$ , где  $y_1$  – некоторая пока неопределенная величина:

$$\min_{x_1} \{f_1(x_1)\} \Big|_{x_1 \leq y_1} = B_1(y_1), \text{ отсюда } x_{10}(y_1).$$

Шаг 2. Минимизируется выражение

$$\begin{aligned} \min_{x_2, x_1} \{f_2(x_2) + f_1(x_1)\} \Big|_{x_1 + x_2 \leq y_2} &= \min_{x_2} \{f_2(x_2) + \min_{x_1} f_1(x_1)\} \Big|_{\substack{x_1 + x_2 \leq y_2 \\ x_1 \leq y_2 - x_2}} = \\ &= \min_{x_2} \{f_2(x_2) + B_1(y_2 - x_2)\} \Big|_{x_1 + x_2 \leq y_2} = B_2(y_2) \end{aligned}$$

и определяется  $x_{20}(y_2)$ .

Шаг  $k$ . Находится

$$\begin{aligned} \min_{x_k, \dots, x_2, x_1} \{f_k(x_k) + \dots + f_1(x_1)\} \Big|_{x_1 + x_k \leq y_k} &= \\ \min_{x_k} \{f_k(x_k) + B_{k-1}(y_k - x_k)\} \Big|_{x_1 + \dots + x_k \leq y_k} &= B_k(y_k), \text{ отсюда } x_{k0}(y_k). \end{aligned}$$

Функция  $B_k(y_k)$  называется функцией Беллмана, а уравнение – уравнением Беллмана.

Шаг  $n$ . Это последний шаг. Уравнение Беллмана будет иметь вид:

$$\min_{x_n} \{f_n(x_n) + B_{n-1}(y_n - x_n)\} \Big|_{\sum_{i=1}^n x_i \leq y_n} = B_n(y_n), \text{ из него находится } x_{n0}(y_n).$$



Далее производится вычисление числовых оптимальных значений переменных  $x_{i0}^*$  в обратном порядке, учитывая, что по условию задачи  $y_n = b$ :

$$\begin{aligned}x_{n0}^* &= x_{n0}(y_n = b), \\x_{(n-1)0}^* &= x_{(n-1)0}(b - x_{n0}^*), \\&\vdots \\x_{10}^* &= x_{10}(b - \sum_{i=2}^n x_{i0}^*).\end{aligned}$$

Примечание.

Метод динамического программирования применяется для оптимизации проведения технологических процессов, оптимального управления различными объектами и в других случаях.

Пример.

Рассмотрим пример с постановкой задачи из раздела 3, решенный методом Лагранжа.

Найти  $x_{10}, x_{20}$ , определяющие положение минимума целевой функции

$$U = \frac{\alpha}{x_1} + \frac{\beta}{x_2}, \text{ при } x_1 + x_2 \leq b, x_1, x_2 > 0.$$

Решение задачи.

$$\text{Шаг 1. Определяем } \min_{x_1} \left\{ \frac{\alpha}{x_1} \right\} \Big|_{x_1 \leq y_1} = \frac{\alpha}{y_1}, x_{10} = y_1.$$

$$\text{Шаг 2. Находим } \min_{x_2} \left\{ \frac{\beta}{x_2} + \frac{\alpha}{y_2 - x_2} \right\} \Big|_{x_1 + x_2 \leq y_2}.$$

Для этого дифференцируем выражение записанное в фигурных скобках по  $x_2$  и приравниваем к нулю:

$$-\frac{\beta}{x_2^2} + \frac{\alpha}{(y_2 - x_2)^2} = 0.$$

Последовательно преобразуя уравнение получим:

$$x_2^2 + \frac{2\beta y_2}{\alpha - \beta} x_2 - \frac{\beta y_2^2}{\alpha - \beta} = 0.$$

Находим корни квадратного уравнения:

$$x_{20}^{1,2} = \frac{\sqrt{\beta} y_2 (-\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\alpha})}{\alpha - \beta}.$$

Поскольку  $x_2 > 0$ , то удовлетворяющим задаче является значение

$$x_{20} = \frac{\sqrt{\beta} y_2 (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{\alpha - \beta}.$$

Определяем числовые значения  $x_{20}^*$  и  $x_{10}^*$  :

$$y_2 = b, \quad x_{20}^* = \frac{\sqrt{\beta} b (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}{\alpha - \beta} = \frac{\sqrt{\beta} b}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}},$$

$$y_1 = b - x_{20}^* = \frac{\sqrt{\alpha} \beta}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}, \quad x_{10}^* = y_1 = \frac{\sqrt{\alpha} b}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}.$$

Естественно, что оптимизация по методу Беллмана дала результат совпадающий с методом Лагранжа.

## 5. МЕТОД ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейным метод называется так потому, что целевая функция и существующие ограничения на переменные являются линейными.

Целевая функция зависит от  $n$  переменных  $x_i$  следующим образом:

$$U = \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

где  $c_i$  – постоянные коэффициенты.

Ограничения имеют вид неравенств:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j,$$

где  $a_{ji}$  и  $b_j$  – постоянные коэффициенты,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Количество ограничений  $m$  больше чем число переменных  $n$  ( $m > n$ ).

Необходимо найти вектор  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  обеспечивающий экстремум целевой функции  $U$  из области значений, которая задается неравенствами.

Рассмотрим, что представляет собой область, в которой необходимо найти решение  $x_0$ . Уравнение  $\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = b_j$  задает гиперплоскость в  $n$ -мерном пространстве. Неравенство  $\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j$  определяет одну из двух частей гиперпространства, а  $m$  неравенств одновременно определяют замкнутое гиперпространство (область), в котором и необходимо искать решение.

Решение не существует когда пространство не замкнуто, или когда гиперплоскость, задаваемая целевой функцией, параллельна одной из гиперплоскостей замкнутого пространства.

Рассмотрим решение задачи линейного программирования для  $n = 2$ ,  $m = 4$ .

Целевая функция имеет вид:

$$U = x_1 + x_2.$$

Следует найти  $x_{10}$ ,  $x_{20}$  которые обеспечивают максимум целевой функции в области, определяемой системой четырех неравенств:

$$\begin{cases} x_2 \leq 2x_1 + 4, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \geq -2. \end{cases}.$$

Область отыскания решения в данном случае представляет собой четырехугольник  $ABCD$  (рис. 5).

Запишем целевую функцию в виде  $x_2 = -x_1 + U$ . При  $U = 0$  функция проходит через начало координат. С увеличением  $U$  прямая линия, определяемая функцией, будет перемещаться параллельно самой себе вверх. При  $U = U_{\max}$  прямая проходит через точку  $C$ , координаты которой и есть решение задачи. То есть  $x_{10} = 4$ ,  $x_{20} = 3$ ,  $U_{\max} = x_{10} + x_{20} = 7$ .

В общем случае (любое количество переменных  $n$ ) решение задач линейного программирования следующее.

1. Используя ограничения, находят крайние точки (для примера это точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ).
2. Вычисляют значение функции  $U$  в этих точках.
3. Сравнивают вычисленные значения между собой и находят точку, удовлетворяющую экстремуму (максимум, либо минимум).
4. Координаты этой точки являются искомым решением.

Наиболее широко для решения задачи используется симплекс-метод.

Задача не имеет решения в двух случаях:

- 1) когда область отыскания решения не замкнута,
- 2) когда целевая функция параллельна одной из ограничивающих плоскостей (линий).

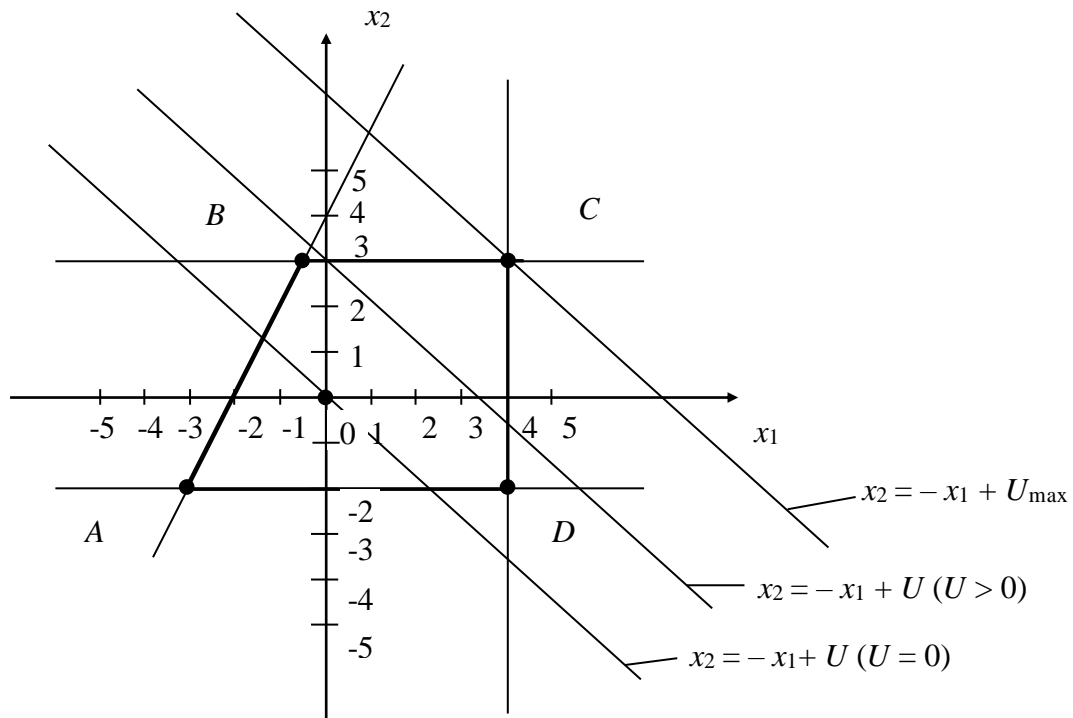


Рис. 5.

## 6. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, СИМПЛЕКС-МЕТОД

Симплекс метод включает в себя целую группу алгоритмов и способов решения задач линейного программирования. Один из таких способов, предусматривающий запись исходных данных и их пересчет в специальной таблице, носит наименование табличного симплекс-метода.

Он позволяет решить задачу за конечное число итераций. При этом находят крайнюю точку многогранника (симплекса) и определяют, является ли она оптимальной. Если это не так находят соседнюю крайнюю точку и т. д. Через конечное число шагов достигается решение. Если задача не имеет решения или линейная форма не ограничена, то метод устанавливает это за конечное число итераций.

Рассмотрим алгоритм симплекс-метода на примере решения производственной задачи, которая сводится к нахождению производственного плана обеспечивающего максимальную прибыль.

### Исходные данные.

Предприятие выпускает 4 вида изделий, обрабатывая их на трех станках. Нормы времени (мин/шт.) на обработку изделий на станках, заданы матрицей  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Фонд времени работы станков (мин.) задан в матрице  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} 25 & 2 \\ 14 & 4 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

Прибыль от продажи каждой единицы изделия (р./шт.) задан матрицей  $C$ :

$$C = [48 \ 33 \ 16 \ 22].$$

Цель производственной задачи.

Составить такой план производства, при котором прибыль предприятия будет максимальной.

Постановка задачи.

Обозначим  $x_1, x_2, x_3, x_4$  планируемое количество изделий каждого вида.

Запишем ограничения плана в виде системы неравенств

$$6x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 252,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 144,$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 80,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Отметим, что симплекс-метод требует, чтобы система ограничений имела неотрицательные правые части. Если они отрицательные, то следует левую и правую части неравенств умножить на  $-1$ .

Целевая прибыль равна

$$P(x) = 48x_1 + 33x_2 + 16x_3 + 22x_4 \rightarrow \max.$$

Оформление задачи для табличного решения.

Для решения получившейся задачи заменим систему неравенств системой линейных уравнений путем ввода в нее дополнительных неотрицательных переменных  $x_5, x_6, x_7$ , получим

$$6x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 252,$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + x_6 = 144,$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_7 = 80,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$$

Примем следующий опорный план:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 252, x_6 = 144, x_7 = 80.$$

Занесем данные в симплекс-таблицу 1.

Таблица 1

Базис	$h$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
$x_5$	252	6	3	1	4	1	0	0	42
$x_6$	144	2	4	5	1	0	1	0	72
$x_7$	80	1	2	4	3	0	0	1	80
$g$		-48	-33	-16	-22	0	0	0	

В последнюю строку  $g$  заносим коэффициенты из матрицы с обратным знаком. (Решение будет получено, когда все значения в строке  $g$  будут положительными).

Циклическая последовательность действий при отыскании решения.

Первая итерация.

1. Выбираем в последней строке  $g$  наибольшее по модулю отрицательное число (48). Вычисляем значения столбца  $b = h/x_1$  ( $x_1$  – элементы выбранного столбца с максимальным модулем) и записываем в вспомогательный столбец  $b$ .
2. Среди вычисленных значений  $b$  выбираем наименьшее (42). Пересечение выбранных столбца и строки дает разрешающий элемент  $r = 6$ .
3. Меняем базис на переменную, соответствующую разрешающему элементу ( $x_5$  на  $x_1$ ) и строим новую таблицу 2.

Таблица 2

Базис	$h$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
$x_5$	42	1	1/2	1/6	2/3	1/6	0	0	84
$x_6$	60	0	3	14/3	-1/3	-1/3	1	0	20
$x_7$	38	0	3/2	23/6	7/3	-1/6	0	1	76/3
$g$		0	9	-8	10	8	0	0	

4. Разрешающий элемент обращается в 1, а прочие элементы разрешающего столбца в 0.
5. Прочие элементы разрешающей строки пересчитываются как  $a_i^* = a_i / r$ , где  $a_i$  и  $r$  берутся из таблицы 1 и заносятся в таблицу 2.
6. Наименьшее значение столбца  $b$  (42) из выбранной строки переносится в столбец  $h$ .
7. Остальные элементы таблицы пересчитываются по правилу прямоугольника:  $a_{ij}^* = a_{ij} - ef / r$ , где значения  $a_{ij}$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $r$  располагаются в углах прямоугольника:

$r$	...	$f$
...	...	...
$e$	...	$a_{ij}$

и заносятся в таблицу 2. Так элемент на пересечении строки  $x_6$  и столбца  $h$  равен  $144 - 252x_2/6 = 60$ , а элемент на пересечении строки  $g$  и столбца  $x_2$  приобретает значение:  $-33 + 48x_3/6 = -9$ .

8. Проверяем последнюю строку  $g$  таблицы 2 на наличие отрицательных чисел. Если их нет – оптимальный план найден. А если есть, план не оптимален и симплекс-таблицу вновь нужно пересчитать.

Так как в последней строке имеются отрицательные числа, выполняем новую итерацию вычислений по пунктам 1-8.

### Вторая итерация.

1.1. Находим наибольшее по модулю значение в строке  $g$  (9). Вычисляем значения столбца  $b$  и заносим в таблицу 2.

2.1. Находим в столбце  $b$  наименьшее значение. Пересечение выбранных столбца и строки дает разрешающий элемент  $r = 3$ .

3.1. Меняем базис ( $x_6$  на  $x_2$ ). Строим новую таблицу 3.

Таблица 3

Базис	$h$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
$x_5$	32	1	0						
$x_6$	20	0	1						
$x_7$	8	0	0						
$g$		0	0	6	9	7	3	0	

4.1. Устанавливаем значение столбца  $x_2$ .

5.1. Вычисляем (при необходимости) элементы разрешающей строки.

6.1. Переносим минимальное значение 20 из столбца  $b$  в столбец  $h$ .

7.1. Рассчитываем прочие элементы матрицы, в данном случае прежде всего столбца  $h$  и строки  $g$  и заносим в таблицу 3.

8.1. Проверка строки  $g$  показывает, что в ней нет отрицательных элементов. Задача решена и найден оптимальный план производства. Выпускаться должны те изделия, которые перешли в столбец «Базис».

### Ответ.

Изделия для изготовления:  $x_1 = 32$  шт.,  $x_2 = 20$  шт.,  $x_3 = 0$  шт.,  $x_4 = 0$  шт.

Максимальная прибыль для предприятия:  
 $P = c_1x_1 + c_2x_2 = 48 \times 32 + 33 \times 20 = 2196(p)$ .

### Примечание.

Для решения задач симплекс-методом можно воспользоваться операторами и функциями программных сред Matematica, Mathcad, Matlab.

## 7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.

### 7.1. Методы покоординатного движения и ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ

При использовании численных методов реализуется пошаговый принцип нахождения координат экстремума. Он предполагает определение в каждой исходной точке выбор направления движения и шага движения к экстремуму.

Предположим, что целевая функция зависит от двух переменных:

$$U = f(x_1, x_2).$$

Функция имеет экстремум в виде максимума. Необходимо найти  $x_0 = (x_{10}, x_{20})$  такие, которые определяют максимум функции  $U_{\max} = f(x_{10}, x_{20})$ .

В трехмерном пространстве координат  $U, x_1, x_2$  функция  $U = f(x_1, x_2)$  описывает некоторую поверхность с экстремумом в виде вершины. Если рассеять эту поверхность плоскостью  $U = \text{const}$  на определенном уровне и спроецировать пересечение на плоскость  $x_1, x_2$  то на плоскости отобразится замкнутая линия (рис. 7.1). Меняя высоту сечения, получим семейство вложенных концентрических линий, в центре которых находится экстремум с координатами  $x_{10}, x_{20}$ .

Используются различные стратегии пошагового движения к экстремуму.

Метод покоординатного движения заключается в следующем. В исходной точке фиксируют все координаты  $x$ , кроме одной. Этой координате  $x_i$  задают приращение в сторону ее увеличения и в сторону уменьшения и получают две точки. Вычисляют значение целевой функции  $f$  в этих точках и сравнивают между собой. Следующей исходной точкой будет та, для которой функция  $f$  будет иметь наибольшее значение.

В случае двумерной целевой функции (рис. 7.1) происходят последовательные вычисления и движения смещение по координате  $x_1$ , затем по  $x_2$ .



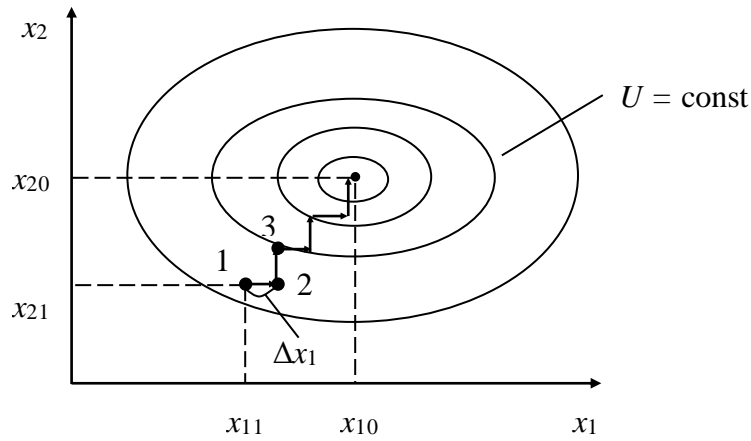


Рис. 7.1.

При этом выполняются следующие действия.

1. В точке 1 фиксируется значение второй переменной  $x_{21} = \text{const}$ . Задается приращение  $\Delta x_1 > 0$ . Определяют значения  $x_{12}^+$  и  $x_{12}^-$  первой переменной:

$$x_{12}^+ = x_{11} + \Delta x_1,$$

$$x_{12}^- = x_{11} - \Delta x_1.$$

Вычисляются значения целевой функции в точках  $(x_{12}^+, x_{21})$  и  $(x_{12}^-, x_{21})$ :

$$f(x_{12}^+, x_{21}) = f^+,$$

$$f(x_{12}^-, x_{21}) = f^-.$$

Значения  $f^+$  и  $f^-$  сравниваются между собой. Наибольшее из них определяет следующую искомую точку (точка 2 на рис. 7.1).

2. В точке 2 фиксируется значение первой переменной  $x_{12}^+ = \text{const}$ . Задается приращение  $\Delta x_2 > 0$ , и определяются значения  $x_{22}^+$  и  $x_{22}^-$  второй переменной:

$$x_{22}^+ = x_{21} + \Delta x_2,$$

$$x_{22}^- = x_{21} - \Delta x_2.$$

Производится вычисление целевой функции для этих точек:

$$f(x_{12}^+, x_{22}^+) = f^+,$$

$$f(x_{12}^+, x_{22}^-) = f^-.$$

Значения  $f^+$  и  $f^-$  сравниваются между собой, и по их соотношению определяется следующая исходная точка 3. Далее происходит переход к действию 1 и т. д.

Максимальная величина шага движения к экстремуму (величина приращений  $\Delta x$ ) ограничена областью допустимых значений переменных  $x$ , а минимальная – ошибкой определения оптимальных значений. Чем ближе к вершине, тем меньше должен становиться шаг  $\Delta x$ .

В методе Гаусса-Зейделя величина шага движения регулируется в зависимости от скорости изменения функции  $f$ . При этом используется соотношение  $\Delta x = t \frac{\partial f}{\partial x}$ , где  $t$  – параметр, определяющий величину шага. Знак производной  $\frac{\partial f}{\partial x}$  определяет направление движения.

Поиск экстремума заканчивается на шаге  $k$ , когда выполняется неравенство  $|f_k - f_{k-1}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная ошибка определения экстремума

Достоинством методов покоординатного движения и Гаусса-Зейделя является простота. Недостаток – медленное движение к экстремуму, особенно когда количество входных переменных велико.

## 7.2. ЧИСЛЕННЫЙ, ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ

Метод обеспечивает наискорейший подъем или спуск при движении соответственно к максимуму или минимуму.

Рассмотрим реализацию метода для целевой функции, зависящей от двух переменных:

$$U = f(x_1, x_2).$$

Наискорейшее движение к экстремуму обеспечивается, когда вектор движения перпендикулярен касательной к линии  $U = \text{const}$  в точке местонахождения (рис. 7.2).

Перпендикулярное движение касательным линиям  $U = \text{const}$  задает вектор  $\text{grad } U$  (градиент  $U$ ), который определяется следующим образом:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x_1} e_{x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} e_{x_2},$$

где  $e_{x_1}$  и  $e_{x_2}$  – единичные вектора по осям  $x_1$  и  $x_2$  (орты).

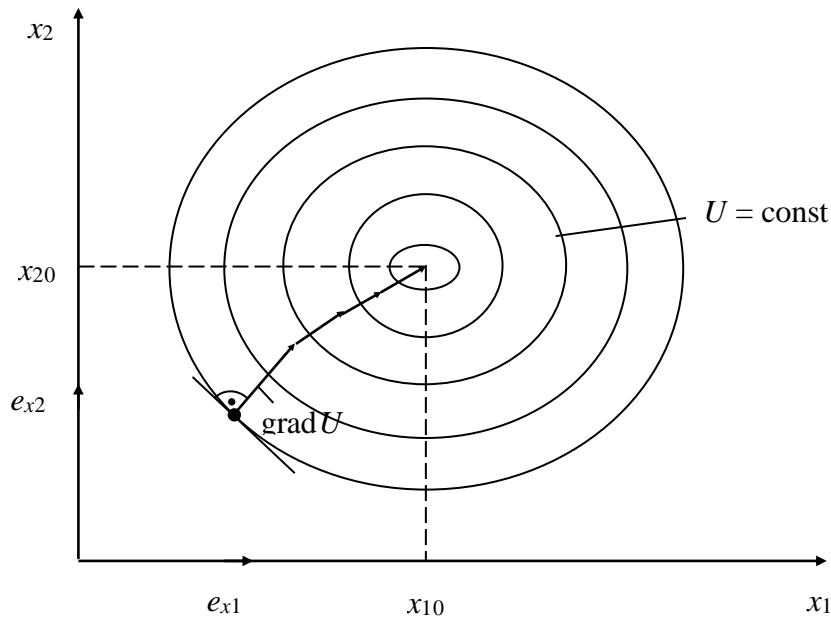


Рис. 7.2.

Частные производные определяют величины приращений по координатам  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\Delta x_1 = t \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \Delta x_2 = t \frac{\partial U}{\partial x_2},$$

где  $t$  — параметр, определяющий величину шага. В зависимости от того, как меняется величина  $t$  при движении к экстремуму, возможны различные стратегии движения.

Окончание движения производится также, как и в разделе 7.1.

### 7.3. МЕТОДЫ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

Требуется найти безусловный минимум функции  $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , т. е. точку  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ , для которой  $U(x_0) = f(x_0) = U_{\min}$ .

Поиск заключается в формировании на каждом шаге  $k$  случайного вектора

$$x^k = x^{k-1} + t_k \cdot e_k,$$

где  $e_k$  — случайный вектор единичной длины, задающий направление движения,  $t_k$  — величина шага движения (скалярная величина).

Сформированное значение  $x^k$  лежит на гиперсфере радиуса  $t_k$  с центром в точке  $x^{k-1}$  (точки  $x^{k1}, x^{k2}, x^{k3}$  (рис. 7.3)).

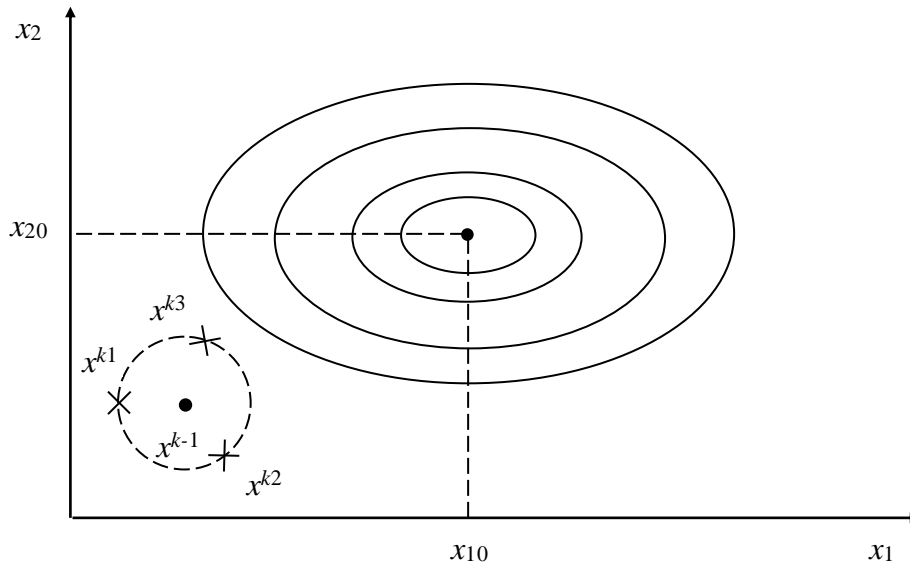


Рис. 7.3.

Если  $f(x^k) < f(x^{k-1})$ , то  $x^k$  следующая исходная точка (на рис. 7.3, точка  $x^{k3}$ ), иначе, когда  $f(x^k) \geq f(x^{k-1})$  (на рис. 7.3, точки  $x^{k1}$ ,  $x^{k2}$ ) направление движения оказалось неудачным и при фиксированном шаге  $k$  формируется новый случайный вектор  $x^k$ .

Если количество неудачных попыток  $N$ , то поиск продолжается из точки  $x^{k-1}$ , но с меньшим шагом  $t_k$ .

Возможны различные стратегии случайного поиска. При реализации первой стратегии величина шага постоянна  $t_k = t$ . При второй адаптивной стратегии величина шага  $t_k < t_{k-1}$ . Третья стратегия реализует наилучшую пробу. При этом в каждой исходной точке формируется  $N$  векторов  $x^k$ , в которых вычисляются значения функции. Находится вектор  $x^k$ , который обеспечивает наименьшее значение функции  $f$  и он устанавливается исходным для следующего шага.

Поиск заканчивается тогда, когда произойдет выполнение неравенства  $t_k < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – величина ошибки, определяемая положением экстремума.

Формирование случайного вектора  $e_k$  производится с использованием генератора случайных чисел  $\xi$ , в соответствии с выражением

$$e_k = \frac{\xi_k}{\|\xi_k\|},$$

где  $\xi_k = (\xi_{1k}, \xi_{2k}, \dots, \xi_{nk})$ ,  $\xi_{ik}$  – независимые случайные числа, равномерно распределенные в интервале  $(-1, 1)$ ,  $\|\xi_k\| = \sqrt{\xi_{1k}^2 + \xi_{2k}^2 + \dots + \xi_{nk}^2}$  – норма (длина) вектора  $\xi_k$ .

## 8. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим методы оптимизации, когда целевая функция  $U$  зависит от одной переменной

$$U = f(x).$$

Положим, что функция имеет минимум. Ошибка местоопределения минимума не должна превышать значения  $\varepsilon$ .

### 8.1. МЕТОД РАВНОМЕРНОГО ПОИСКА

Метод реализуется следующим образом. Интервал  $(a, b)$ , в котором находится минимум, делится на элементарные интервалы с шагом  $\Delta x = \varepsilon$  (рис. 8.1). Количество интервалов  $N$  равно

$$N = \frac{b - a}{\Delta x}.$$

Вычисляются значения функции  $f$  в точках  $x_i = a + i\Delta x$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Значения функции сравниваются между собой, и находится наименьшее. Аргумент этого значения функции и есть искомое оптимальное значение  $x_0 = x_i$ .

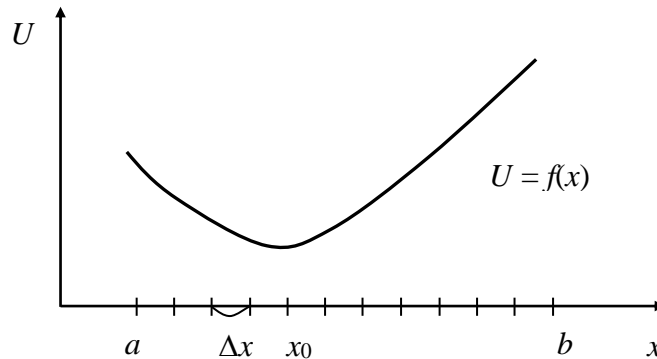


Рис. 8.1.

### 8.2. МЕТОД ДЕЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛА ПОПОЛАМ

На каждом шаге поиска минимума алгоритм действий следующий:

1. Устанавливается интервал неопределенности  $(a, b)$ . Вычисляются три значения:

$$x_{\text{ср}} = \frac{a + b}{2}, \quad x_{\text{л}} = \frac{a + x_{\text{ср}}}{2}, \quad x_{\text{п}} = \frac{x_{\text{ср}} + b}{2}.$$

2. Вычисляется величина функции в точках  $x_{\text{л}}, x_{\text{ср}}, x_{\text{п}}$ :  $f(x_{\text{л}}), f(x_{\text{ср}}), f(x_{\text{п}})$ .

3. Если окажется, что  $f(x_{\text{л}}) < f(x_{\text{ср}})$  (рис. 8.2 а), то необходимо отбросить интервал  $(x_{\text{ср}}, b)$ , параметру  $b$  присвоить значение  $x_{\text{ср}}$  и перейти к действию 1, в противном случае  $f(x_{\text{л}}) \geq f(x_{\text{ср}})$ , перейти к действию 4.

4. Вычисляется значение функции  $f(x_{\text{п}})$ .

5. Если  $f(x_{\text{п}}) < f(x_{\text{ср}})$  (рис. 8.2 б), то отбросить интервал  $(a, x_{\text{ср}})$ , параметру  $a$  присвоить значение  $x_{\text{ср}}$  и перейти к действию 1, иначе перейти к действию 6.

6. Параметру  $a$  присвоить значение  $x_{\text{л}}$ , параметру  $b$  присвоить  $x_{\text{п}}$  (рис. 8.2 в) и перейти к действию 1.

Процедура поиска заканчивается, когда  $b - a < \varepsilon$ .

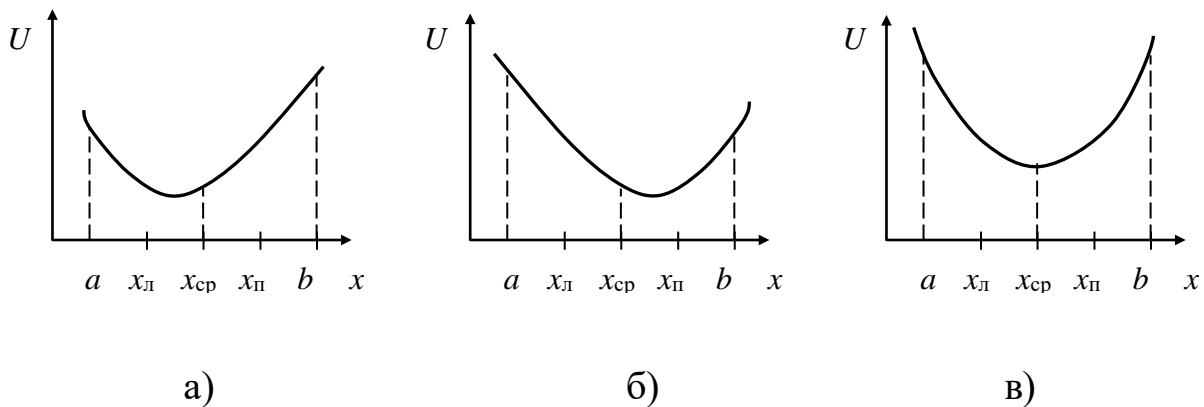


Рис. 8.2.

### 8.3. МЕТОД ДИХОТОМИИ

Дихотомия предполагает последовательное деление интервала неопределенности пополам. На каждом шаге поиска минимума вычисляется среднее значение  $x_{\text{ср}} = \frac{a+b}{2}$ , а затем  $x_{\text{л}} = x_{\text{ср}} - \varepsilon$  и  $x_{\text{п}} = x_{\text{ср}} + \varepsilon$  (рис. 8.3).

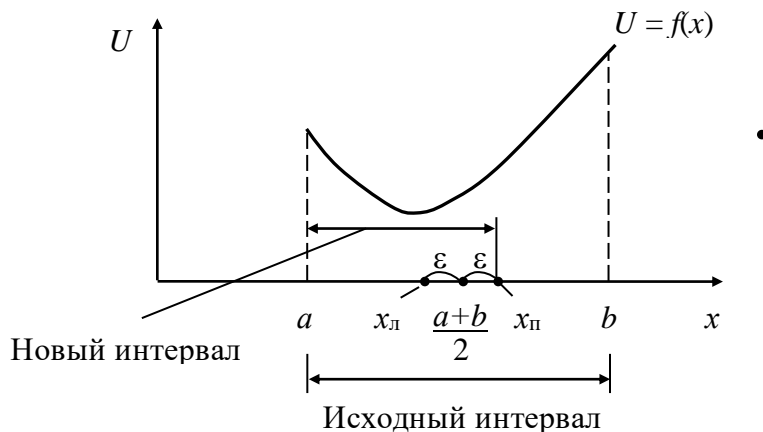


Рис. 8.3.

Вычисляются значения функции  $f(x_{\text{л}})$ ,  $f(x_{\text{п}})$ , которые сравниваются между собой.

Если  $f(x_{\text{л}}) < f(x_{\text{п}})$ , то  $a = a$ ,  $b = x_{\text{п}}$ , иначе  $a = x_{\text{л}}$ ,  $b = b$ .

Далее производится переход к следующему шагу.

Процедура заканчивается тогда, когда  $b - a < \varepsilon$ .

#### 8.4. МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Точка производит «золотое сечение» отрезка, если отношение длины всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей.

На рис. 8.4 точками золотого сечения являются точки левая  $c'$  и правая  $c$ . При этом выполняется равенство отношений

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{c-a}{b-c} = \frac{1}{z},$$

где  $z$  – некоторое число.

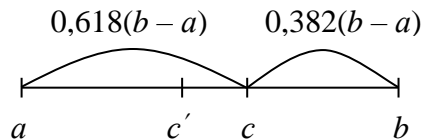


Рис. 8.4.

Найдем это число. Выразим длину отрезков  $(c, a)$  и  $(b, c)$  через длину отрезка  $(a, b)$ :

$$\begin{aligned} c - a &= z(b - a), \\ b - c &= (1 - z)(b - a). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в исходное отношение, получим

$$\frac{b-a}{z(b-a)} = \frac{z(b-a)}{(1-z)(b-a)},$$

откуда имеем:

$$\frac{1}{z} = \frac{z}{1-z}.$$

Из данного отношения вытекает квадратное уравнение

$$z^2 + z - 1 = 0,$$

решение которого имеет один положительный корень

$$z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618.$$

Рассмотрим теперь последовательность действий при реализации метода золотого сечения.

На каждом шаге поиска минимума производится вычисление точек золотого сечения (рис. 8.5)

$$x_{\text{л}} = a + 0,382(b - a),$$

$$x_{\text{п}} = a + 0,618(b - a).$$

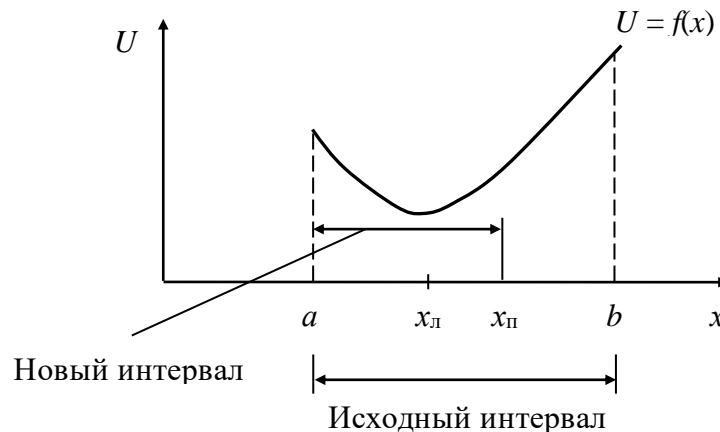


Рис. 8.5.

Вычисляются значения функции в этих точках  $f(x_{\text{л}})$ ,  $f(x_{\text{п}})$ , которые сравниваются между собой. Если  $f(x_{\text{л}}) \leq f(x_{\text{п}})$ , то  $a = a$ ,  $b = x_{\text{п}}$ , иначе  $a = x_{\text{л}}$ ,  $b = b$ .

Далее производится переход к следующему шагу.

Примечательно то, что одна точка в новом интервале остается старой и ее не надо вычислять.

Данная процедура поиска является более быстрой, чем рассмотренные ранее.

## 8.5. МЕТОД ФИБОНАЧЧИ

В методе Фибоначчи реализуется стратегия, обеспечивающая максимальное гарантированное сокращение интервала неопределенности при заданном количестве вычислений функции. Эта стратегия опирается на числа Фибоначчи. Числа Фибоначчи вычисляются по следующей формуле:

$$F_0 = F_1 = 1,$$

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, k \geq 2.$$



Последовательное использование этой рекуррентной формулы дает следующую последовательность чисел  $F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13, F_7 = 21, F_8 = 34, F_9 = 55, F_{10} = 89, \dots$

Интересно, что  $\frac{F_{k-1}}{F_k} \square z$  при  $k \geq 3$ , причем, чем больше  $k$ , тем ближе отношение  $\frac{F_{k-1}}{F_k}$  к числу  $z$ , определяемому золотым сечением.

Последовательность действий поиска минимума при реализации метода следующая. В начале выбирается минимальное из чисел Фибоначчи, удовлетворяющее условию

$$F_N \geq \frac{b-a}{\varepsilon},$$

где  $b-a$  – исходный интервал поиска,  $\varepsilon$  – ошибка определения экстремума, и числа  $F_0, F_1, \dots, F_N$ .

Дальше вычисляются значения  $x_{\text{л}}$  и  $x_{\text{п}}$ , равные

$$x_{\text{л}} = a + \frac{F_{N-2}}{F_N} (b-a),$$

$$x_{\text{п}} = a + \frac{F_{N-1}}{F_N} (b-a).$$

Затем вычисляются значения функции  $f(x_{\text{л}}), f(x_{\text{п}})$ , и они сравниваются между собой. Если  $f(x_{\text{л}}) \leq f(x_{\text{п}})$ , то  $a = a, b = x_{\text{п}}$ , присвоить новые значения:

$$x_{\text{п}} = x_{\text{л}}, x_{\text{л}} = a + \frac{F_{N-3}}{F_{N-1}} (b-a), \quad .$$

Если  $f(x_{\text{л}}) > f(x_{\text{п}})$ , то  $a = x_{\text{л}}, b = b$ , присвоить новые значения:

$$x_{\text{л}} = x_{\text{п}}, x_{\text{п}} = a + \frac{F_{N-2}}{F_{N-1}} (b-a) .$$

Далее производится переход к следующему шагу. Поиск заканчивается, когда начинает выполняться условие  $b-a < \varepsilon$ .

## 9. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

### 9.1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ПОИСКА УСЛОВНОГО ЭКСТРЕМУМА

Рассмотрим общую постановку задачи поиска условного экстремума со смешанными ограничениями.

Даны дважды непрерывно дифференцируемые целевая функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  и функции ограничений  $g_j(x) = 0, j = 1, \dots, m; g_j(x) \leq 0, j = m + 1, \dots, p$ , определяющие множество допустимых решений  $X$ .

Требуется найти минимум целевой функции на множестве  $X$ :

$$f(x_0) = \min_{x \in X} f(x).$$

Для ограниченного числа задач решение можно получить аналитически, например методом Лагранжа. Но для решения большинства практических задач используются численные методы, которые делятся на две группы.

1. Методы последовательной безусловной минимизации. Они используют преобразование задачи условной оптимизации в последовательность задач безусловной оптимизации путем введения вспомогательных функций.

2. Методы возможных направлений. Это методы непосредственного решения задачи условной оптимизации, основанные на движении из одной допустимой точки, где выполнены все ограничения, к другой допустимой точке с лучшим значением целевой функции.

Первая группа методов: штрафов, барьеров, множителей, точных штрафных функций использует штрафы за нарушение ограничений при поиске экстремума.

Методы возможных направлений, образующие вторую группу: проекции градиента и возможных направлений Зойтендейка. Они связаны с нахождением предела  $x_0$  последовательности  $x_k$  допустимых точек при  $k \rightarrow \infty$ , таких что  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$

Последовательность  $x_k$  строится по правилу  $x_{k+1} = x_k + \delta x_k$ , где вектор  $\delta x_k$  определяется в зависимости от применяемого метода.

## 9.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ БЕЗУСЛОВНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ, МЕТОД ШТРАФОВ

При использовании метода штрафов задача на условный экстремум сводится к последовательности задач безусловного минимума вспомогательной функции

$$F(x, r_k) = f(x) + P(x, r_k) \rightarrow \min,$$

где  $f(x)$  – целевая функция,  $P(x, r_k)$  – штрафная функция,  $r_k$  – параметр штрафа, задаваемый на каждой итерации  $k$ .

Штрафные функции конструируются, исходя из условий:

$$P(x, r_k) = \begin{cases} 0, & \text{при выполнении ограничений,} \\ > 0, & \text{при невыполнении ограничений.} \end{cases}$$

Причем при невыполнении ограничений и  $r_k \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$  справедливо условие  $P(x, r_k) \rightarrow \infty$ : чем больше  $r_k$ , тем выше штраф за невыполнение ограничений. Как правило, для ограничений типа равенств используется квадратичный штраф (рис. 9,а), а для ограничений типа неравенств – квадрат срезки (рис. 9,б):

$$P(x, r_k) = \frac{r_k}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m [g_j(x)]^2 + \sum_{j=m+1}^p [g_j^+(x)]^2 \right\},$$

где срезка функции  $g_j^+(x) = \begin{cases} g_j(x), & g_j(x) > 0, \\ 0, & g_j(x) \leq 0. \end{cases}$

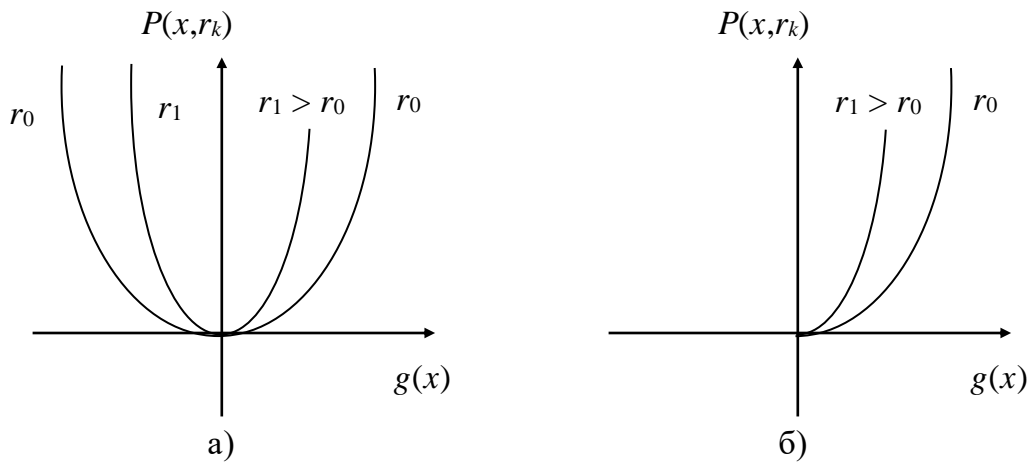


Рис. 9.

Начальная точка поиска задается обычно вне множества допустимых решений  $X$ . На каждой итерации  $k$  ищется точка  $x_0(r_k)$  минимума вспомогательной функции  $F(x, r_k)$  при заданном параметре  $r_k$  с помощью одного из методов безусловной минимизации. Полученная точка  $x_0(r_k)$  используется в качестве начальной на следующей итерации, выполняемой при возрастающем значении параметра штрафа. При неограниченном возрастании  $r_k$  последовательность точек  $x_0(r_k)$  стремится к точке условного минимума.

#### Пример.

Найти минимум в задаче

$$f(x) = x^2 - 4x \rightarrow \min,$$

$$g_1(x) = x - 1 \leq 0.$$

В поставленной задаче  $m = 0$  (ограничения равенства отсутствуют),  $p = 1$ .

Для произвольного параметра штрафа  $r_k$ , составим вспомогательную функцию

$$F(x, r_k) = x^2 - 4x + \frac{r_k}{2}(x-1)^2, \quad x-1 > 0.$$

Найдем безусловный минимум функции  $F(x, r_k)$  по  $x$  аналитически:

$$\frac{\partial F(x, r_k)}{\partial x} = 2x - 4 + r_k(x-1) = 0, \quad x-1 > 0.$$

Отсюда получим:

$$x_0(r_k) = \frac{4 + r_k}{2 + r_k}.$$

В таблице приведены результаты численных расчетов.

Таблица

$k$	0	1	2	3	4	5
$r_k$	1	2	10	100	1000	$\infty$
$x_0(r_k)$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{7}{6} = 1,17$	$\frac{52}{51} = 1,02$	$\frac{502}{501} = 1,002$	1

Так как  $\frac{\partial^2 F(x_0(r_k), r_k)}{\partial x^2} = 2 + r_k > 0$  при  $r_k \geq 0$ , то достаточные условия минимума  $F(x, r_k)$  удовлетворяются. При  $r_k \rightarrow \infty$  имеем

$$x_0 = \lim_{r_k \rightarrow \infty} \frac{4 + r_k}{2 + r_k} = 1, \quad f(x_0) = -3.$$

## 10. МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### 10.1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

В данном случае целевая функция не задана явно, а имеет вид:

$$U = \int_a^b F(x, y, \dot{y}) dx,$$

где  $F$  – функционал, т. е. функция, зависящая от функций,  $y = f(x)$  – функция (экстремаль), которую требуется найти,  $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ .

Найдем уравнение, с помощью которого можно найти решение. Зададим вариацию функции  $\delta y(x)$  (вариация – это приращение функции  $y$  не за счет изменения аргумента  $x$ , а собственное приращение):

$$y(x) + \delta y(x) = y(x) + \alpha \eta(x),$$

где  $\alpha$  – некоторый коэффициент, который может меняться,  $\eta(x)$  – функция от  $x$ , для которой  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  (рис. 10.1).

Целевая функция в этом случае будет равна

$$U = \int_a^b F(x, y + \alpha\eta, \dot{y} + \alpha\dot{\eta}) dx.$$

Изменяя коэффициент  $\alpha$ , можно менять величину вариации и исследовать, как влияет эта величина на значение целевой функции  $U = U(\alpha)$ . Очевидно, что в точке экстремума приращение  $\Delta U$  равно нулю при  $\alpha \rightarrow 0$ .

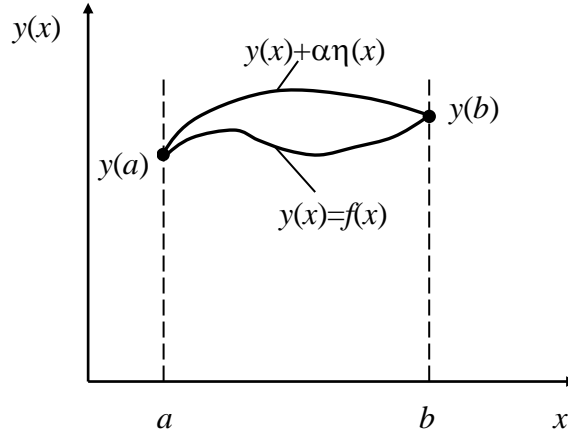


Рис. 10.1.

Разложим функцию  $U(\alpha)$  в ряд Маклорена в точке  $\alpha = 0$  и, ограничиваясь двумя членами ряда вследствие малости остальных, имеем:

$$U \approx U(0) + \alpha \frac{dU}{d\alpha}.$$

Отсюда находим приращение  $\Delta U = U - U(0)$ , равное

$$\Delta U = \alpha \frac{dU}{d\alpha}.$$

Используя данное соотношение и применяя правило дифференцирования, получим

$$\Delta U = \alpha \int_a^b \frac{d}{d\alpha} F(x, y + \alpha\eta, \dot{y} + \alpha\dot{\eta}) dx = \alpha \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\eta} \right) dx = \alpha \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\eta} dx.$$

Вычисляя второй интеграл по частям, с учетом того что  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , в итоге имеем:

$$\Delta U = \alpha \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \alpha \left. \frac{\partial F}{\partial y} \eta \right|_a^b - \alpha \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \alpha \int_a^b \eta \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) dx.$$

В точке экстремума  $\Delta U = 0$ . Это возможно только тогда, когда выражение, записанное в скобках равно нулю. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0,$$

которое называется уравнением Эйлера. Решая уравнение Эйлера, находим искомую функцию  $y(x)$ .

В общем случае это дифференцированное нелинейное уравнение второго порядка, которое можно решить аналитически лишь в частных случаях.

## 10.2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Рассмотрим численный метод решения вариационных задач. Разобьем диапазон  $(a, b)$  на элементарные интервалы с шагом  $\Delta x$ . Получаем точки  $x_i = a + i\Delta x$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , где  $n = \frac{b-a}{\Delta x}$ . Очевидно, что  $y(x_i) = y_i$ , а при

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \dot{y}(x_i) = \dot{y}_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}.$$

Заменяя в функции  $U$  интеграл суммой, что справедливо при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем

$$U = \int_a^b F(x, y, \dot{y}) dx \approx \Delta x \sum_{i=0}^n F\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right) = \Delta x \Phi(y_0, y_1, \dots, y_n).$$

Функция  $\Phi$  зависит от  $n + 1$  значения переменной  $y$  (искомая функция), которые необходимо найти. Имеем типовую задачу на безусловный экстремум. Поэтому числовые значения  $y_0, y_1, \dots, y_n$  можно найти аналитически из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = 0, \end{cases}$$

либо численно.

## 10.3. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА

Найдем уравнение экстремали  $y(x)$ , которая обеспечивает минимальную длину линии  $L$  соединяющей точки  $y(a)$  и  $y(b)$  (рис. 10.2).

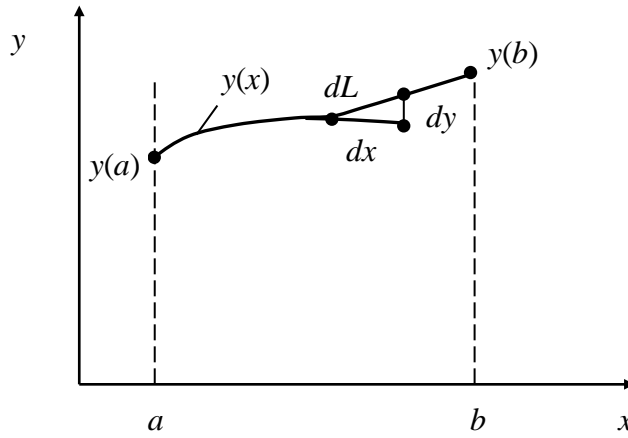


Рис. 10.2.

Дифференциал длины линии  $dL$  равен:  $dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Учитывая что  $dy = \dot{y}dx$ , получим  $dL = \sqrt{dx^2 + \dot{y}^2 dx^2} = \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$ . Отсюда длина линии связи будет  $L = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$ , где  $F = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$  – функционал.

При нахождении экстремали используем уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0.$$

Для введенного функционала  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2} \frac{2\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$ ,

$$\frac{d}{dx} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} - \frac{\dot{y}2\ddot{y}}{2\sqrt{(1 + \dot{y}^2)^3}} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{(1 + \dot{y}^2)^3}}.$$

Уравнение Эйлера преобразуется к виду

$$-\frac{\ddot{y}}{\sqrt{(1 + \dot{y}^2)^3}} = 0,$$

откуда следует, что  $\ddot{y} = 0$ .

Последовательно интегрируя, получим:  $\dot{y}(x) = c_1$ ,  $y(x) = c_1 x + c_2$ .

Константы  $c_1$  и  $c_2$  находим из граничных условий:

$$\begin{cases} y(a) = c_1 a + c_2, \\ y(b) = c_1 b + c_2. \end{cases}$$

Вычитая из второго равенства первое, получим:

$$y(b) - y(a) = c_1(b - a), \quad c_1 = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}. \quad \text{Из уравнения 1 находим}$$

$$c_2 = y(a) - c_1 a.$$

Таким образом, экстремалью является прямая линия  $y(x) = c_1 x + c_2$ , соединяющая точки с координатами  $(a, y(a))$  и  $(b, y(b))$ .

#### 10.4. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРИМЕТРА ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Рассмотрим простую задачу безусловной оптимизации периметра прямоугольника, которая будет использована в разделе 10.5 для сравнения с периметром полукруга.

Необходимо найти минимальный периметр  $L$  прямоугольника и его форму при фиксированной площади прямоугольника  $S = \text{const}$  (рис. 10.3).

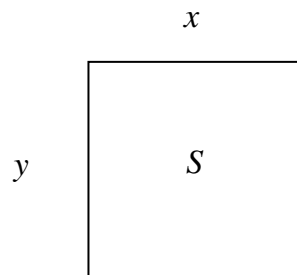


Рис. 10.3.

Поскольку площадь прямоугольника равна произведению его сторон  $S = ux$ , то его периметр равен  $L = 2(y + x) = 2\left(\frac{S}{x} + x\right)$ .

Находим минимальный периметр методом дифференциального исчисления (раздел 2), решая уравнение:  $\frac{dL}{dx} = 2\left(-\frac{S}{x^2} + 1\right) = 0$ .

Из него следует квадратное уравнение  $x^2 = S$ , которое имеет 2 корня  $x = \pm\sqrt{S}$ . Единственным неотрицательным решением является  $x = \sqrt{S}$ .

Следовательно, прямоугольником имеющим минимальный периметр является квадрат.

#### 10.5. ЗАДАЧА ДИДОНЫ

В 9 веке до н. э. финикийская царица Дидона и несколько ее спутников спасаясь от преследования тирской знати бежали из г. Тира и высадились на африканском берегу Средиземного моря. Решив поселиться здесь она упросила местного правителя отдать ей участок земли, который



по его разумению должен быть по площади равным расправленной шкуре быка. Дидона же после заключения соглашения разрежала шкуру на тонкую полосу и ограничила им довольно значительную часть на берегу. Так был заложен город Карфаген.

Задача: Найти уравнение экстремали  $y(x)$  которая при фиксированном периметре участка обеспечивала бы наибольшую его площадь  $S$  (рис. 10.4).

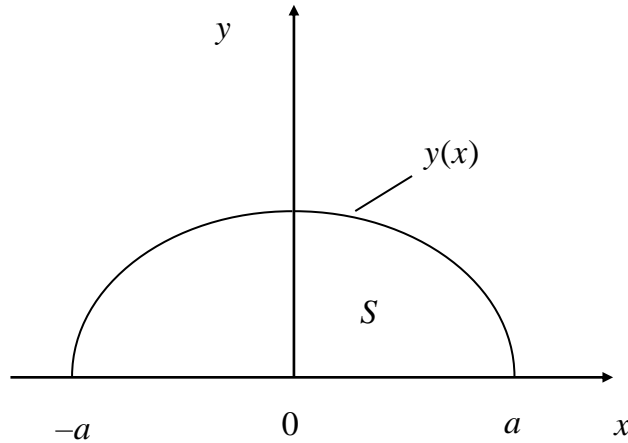


Рис. 10.4.

Рассмотрим последовательность решения задачи.

Выразим длину криволинейной границы  $L$  и площадь  $S$  через функцию  $y(x)$  имеем:  $L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \dot{y}^2(x)} dx = \text{const}$  (раздел 10.3),  $S = \int_{-a}^a y(x) dx$ .

Составим вспомогательный функционал

$$S(y) + \lambda L(y) = \int_{-a}^a (y + \lambda \sqrt{1 + \dot{y}^2}) dx.$$

Применим уравнение Эйлера для подинтегрального функционала, получим:

$$1 + \frac{d}{dx} \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = 0. \quad (1)$$

Интегрируя это уравнение по  $x$  приходим к выражению

$$x + \lambda \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c_1.$$

Повторное интегрирование приводит к решению

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2,$$

которое определяет семейство окружностей с центром в точке  $x = c_1$ ,  $y = c_2$  и радиусом  $\lambda = R = a$ .

Значения  $c_1, c_2$  определяются из условий  $y(-a) = y(a) = 0$  и они равны:  $c_1 = c_2 = 0$ .

Следовательно, уравнение экстремали является уравнением для полуокружности  $x^2 + y^2 = R^2, y > 0$ .

Проверим, что уравнение полуокружности и есть решение задачи, подставляя соответствующие выражения в уравнение (1). Действительно из соотношения  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  следует, что  $\dot{y} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ . Тогда множи-

тель  $\frac{R}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$  в уравнении (1) равен

$$R(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{R^2 - x^2} = y.$$

Подставляя  $\dot{y}$  в (1) получаем выполнение равенства:  $1 - \frac{d}{dx}(x) = 0$ .

Для рассмотренной задачи Дидоны – длина полуокружности равна  $L = \pi R = \text{const}$ , а площадь участка  $S = \frac{\pi}{2} R^2 = \text{max}$ .

Интересно посмотреть, какой выигрыш дает по площади полукруг по сравнению с прямоугольником при одинаковом периметре. Из прямоугольных фигур при фиксированном периметре наибольшей площадью обладает квадрат (раздел 10.4).

Для задачи Дидоны площадь квадрата отгороженного по берегу моря равна  $(\frac{\pi R}{3})^2 = \frac{\pi^2}{9} R^2$ . Следовательно, соотношение площади полукруга к площади квадрата составляет величину  $\frac{9}{2\pi} \simeq 1,43$ , что является неоспоримым преимуществом полукруглой площади.

## 10.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛИ,

### ЗАДАЧА 1.

Найти экстремаль  $y(x)$  при заданной целевой функции

$$U = \int_{-1}^0 [12xy(x) - \dot{y}(x)] dx,$$

которая удовлетворяет граничным условиям:  $y(-1) = 1, y(0) = 0$ .

Составим уравнение Эйлера, учитывая, что функционал  $F$  равен  $F = 12xy - \dot{y}^2$  и составляющие уравнения равны:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 12x, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = -2\dot{y}, \quad \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right\} = -2\ddot{y}.$$

В этом случае уравнение Эйлера будет иметь вид:  $12x - (-2\ddot{y}) = 0$ , отсюда следует что  $\ddot{y} = -6x$ .

Найдем общее решение уравнения Эйлера интегрируя дважды левую и правую части уравнения, получим

$$\dot{y} = -3x^2 + c_1, \quad y_0(x) = -x^3 + c_1x + c_2.$$

Определяем коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  из граничных условий:  $y(-1) = 1 - c_1 + c_2 = 1$ ,  $y(0) = c_2 = 0$ , отсюда получаем, что  $c_1 = c_2 = 0$ .

Уравнение экстремали приобретает вид  $y(x) = -x^3$ .

Зависимость  $y(x)$  показана на рис. 10.5.

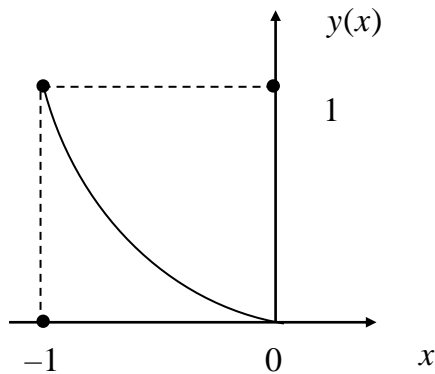


Рис. 10.5.

## 10.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛИ,

### ЗАДАЧА 2.

Найти экстремаль  $y(x)$  при заданной целевой функции

$$U(y(x)) = \int_0^{\pi/2} [\dot{y}^2(x) - y^2(x)] dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям  $y(0) = 1$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ .

Составим уравнение Эйлера. Так как функционал  $F$  равен:  $F = \dot{y}^2 - y^2$ , а также  $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 2\dot{y}$ ,  $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 2\ddot{y}$ , то получим

$$\ddot{y} + y = 0. \quad (1).$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения Эйлера. Оно является однородным с постоянными коэффициентами. В этом случае оно ищется согласно теории решений в виде  $y = e^{\lambda x}$ .

Составим характеристическое уравнение, получаем

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Его корни  $\lambda_{1,2} = \pm j$  – комплексные, имеем два решения:

$$y_1 = e^{jx}, \quad y_2 = e^{-jx}.$$

Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Определим коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  из граничных условий:

$y(0) = c_1 = 1$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = c_2 = 0$  и получаем экстремаль  $y(x) = \cos x$ , показанную на рис. 10.6.

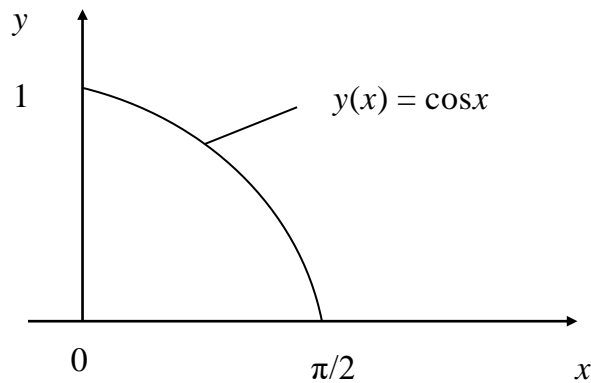


Рис. 10.6.

Проверим выполнение уравнения (1), имеем  $y(x) = \cos x$ ,  $\dot{y}(x) = -\sin x$ ,  $\ddot{y} = -\cos x$ .

Таким образом:  $\ddot{y} + y = 0$  и задача решена правильно.

## 10.8. МЕТОД ВАРИАЦИЙ В ЗАДАЧАХ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ

В общем случае концы допустимых экстремалей скользят по двум заданным граничным кривым (рис. 10.7), описываемыми уравнениями  $y = \psi(x)$ ,  $y = \phi(x)$ .

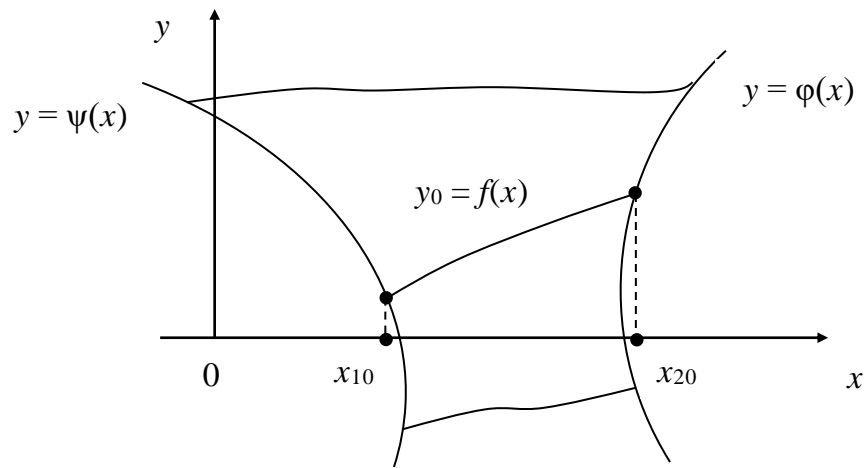


Рис. 10.7.

В частном случае концы кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 10.8).

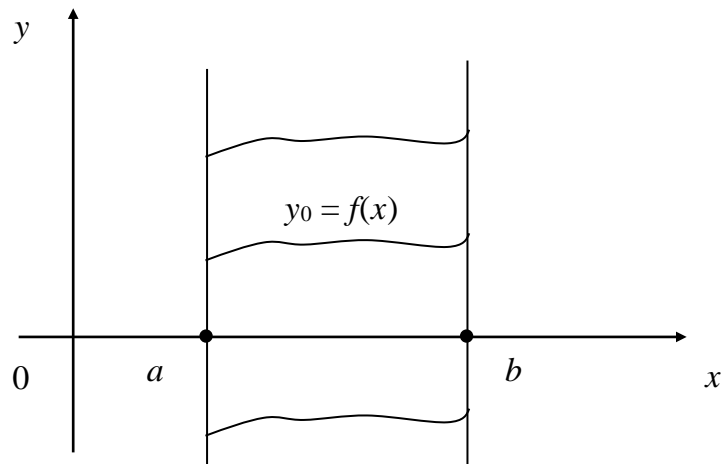


Рис. 10.8.

Рассмотрим последовательность задачи нахождения экстремали для второго случая.

Алгоритм решения подобной задачи следующий.

1. Записать уравнение Эйлера  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$ .
2. Найти общее решение уравнения:  $y(x, c_1, c_2)$ .
3. Записать условия трансверсальности и граничные условия.

Условия трансверсальности для кривых  $y$ , концы которых скользят по двум заданным вертикальным прямым следующие:  $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \Big|_a = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \Big|_b = 0$ .

4. Определить коэффициенты  $c_1, c_2$  и получить уравнение экстремали  $y_0(x)$ .

Пример.

Найти кривую, на которой целевая функция

$$U(y(x)) = \int_0^2 [2xy(x) + y(x)\dot{y}(x) + \dot{y}^2(x)] dx$$

может достигать экстремума, если левый конец ее фиксирован в точке  $a = 0$ ,  $y(0) = 0$ , а правый лежит на прямой  $b = 2$  (рис. 10.9).

Составим уравнение Эйлера, учитывая что:  $F = 2xy + y \cdot \dot{y} + \dot{y}^2$ ,  
 $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + \dot{y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = y + 2\dot{y}$ ,  $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + 2\ddot{y}$ . Следовательно, уравнение Эйлера имеет вид:

$$\ddot{y} = x.$$

Последовательно дважды интегрируя, найдем общее решение уравнения:

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2.$$

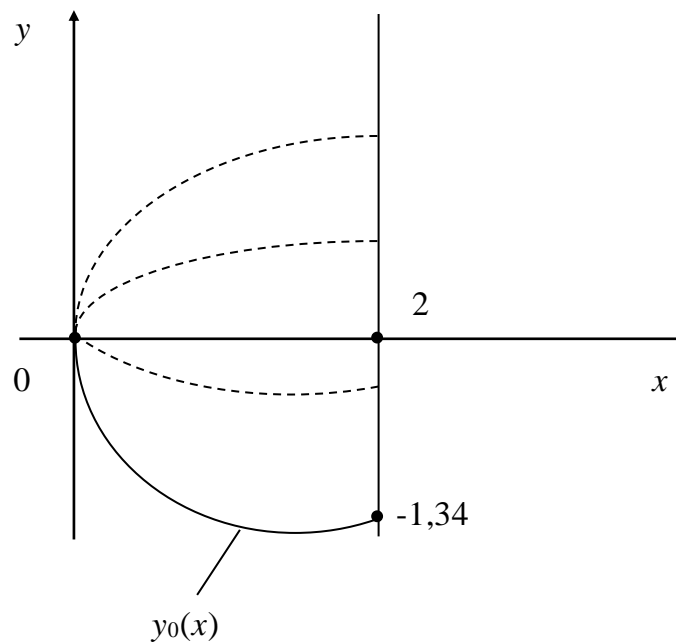


Рис. 10.9.

Запишем условия трансверсальности на левом и правом концах:

$$y(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right|_{x=2} = (y + 2\dot{y})|_{x=2} = y(2) + 2\dot{y}(2) = 0.$$

Найдем постоянные  $c_1$  и  $c_2$  из граничных условий:  $y(0) = c_2 = 0$ ,  
 $y(2) + 2\dot{y}(2) = \frac{8}{6} + 2c_1 + c_2 + 4 + 2c_1 = 0$ ,  $c_1 = -4/3$ .

Получаем уравнение экстремали  $y_0(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{4x}{3}$  (рис. 10.9).

## 11. ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

### Вариант 1

1. Найти экстремум функции

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_1 + x_1x_2 + 2x_3.$$

2. Найти максимум функции

$$f(x) = 3x_1 - 4x_2$$

при условиях:

$$6x_1 + 6x_2 \leq 36,$$

$$4x_1 + 8x_2 \leq 32,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Составить алгоритм определения минимума функции

$$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

методом Гаусса-Зейделя и найти решение при движении из точки с координатами  $x_1 = 0,5$ ;  $x_2 = 1$ .

### Вариант 2

1. Найти экстремум функции

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 - 3x_1 + 6x_2 + 2.$$

2. Найти максимум функции

$$f(x) = 150x_1 + 35x_2.$$

при условиях:

$$150x_1 + 200x_2 \leq 200,$$

$$14x_1 + 4x_2 \geq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Составить алгоритм определения минимума функции

$$f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

градиентным методом и найти решение при движении из точки с координатами  $x_1 = 0,5$ ;  $x_2 = 1$ .

### Вариант 3

1. Найти экстремум функции

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

при условии

$$x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

2. Найти максимум функции

48

$$f(x) = -3x_1 + 12x_2$$

при условиях:

$$x_1 + 4x_2 \leq 16,$$

$$x_1 - x_2 \geq 2,$$

$$3x_1 - 5x_2 \leq 8,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Составить алгоритм и найти минимум функции

$$f(x) = 2x^2 - 12x$$

методами деления отрезка пополам и золотого сечения.

#### Вариант 4

1. Найти экстремум функции

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

при условии

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 8 = 0.$$

2. Найти максимум функции

$$f(x) = -3x_1 + 2x_2$$

при условиях:

$$-2x_1 + 3x_2 \geq 6,$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Составить алгоритм и найти минимум функции

$$f(x) = 2x^2 - 12x$$

методами дихотомии и Фибоначчи.

#### Вариант 5

1. Найти экстремум функции

$$f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1.$$

2. Найти максимум функции

$$f(x) = x_1 - x_2$$

при условиях:

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 14,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Составить алгоритм определения и вычислить минимум функции

$$f(x) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$$

методом Гаусса-Зейделя при движении из точки с координатами  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ .



## Вариант 6

1. Найти экстремум функции

$$f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$$

2. Найти максимум функции

$$f(x) = 10x_1 + x_2$$

при условиях:

$$2x_1 + 11x_2 \leq 33,$$

$$x_1 + x_2 \leq 7,$$

$$4x_1 - 5x_2 \geq 5,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Составить алгоритм определения минимума функции

$$f(x) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$$

градиентным методом и найти решение при движении из точки с координатами  $x_1 = 0, x_2 = 0$ .

## Вариант 7

1. Найти экстремум функции

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

при условии

$$x_1 - x_2^2 - 2 = 0.$$

2. Найти максимум функции

$$f(x) = x_1 - x_2$$

при условиях:

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 16,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Составить алгоритм и найти минимум функции

$$f(x) = \frac{127}{4}x^2 - \frac{61}{4}x + 2$$

методами деления отрезка пополам и Фибоначчи.

## Вариант 8

1. Найти экстремум функции

$$f(x) = 2x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 3$$

при условии

$$x_1 + x_2 + 6 = 0.$$

2. Найти максимум функции

$$f(x) = 35x_1 + 50x_2$$

при условиях:

$$200x_1 + 150x_2 \geq 200,$$

$$14x_1 + 4x_2 \leq 14,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Составить алгоритм и найти минимум функции

$$f(x) = 2x^2 + \frac{16}{x}$$

методами дихотомии и золотого сечения.

### Вариант 9

1. Найти экстремум функции

$$f(x) = -4x_1^2 - 4x_1 - x_2^2 + 8x_2$$

при условии

$$2x_1 - x_2 - 6 = 0.$$

2. Найти максимум функции

$$f(x) = -2x_1 + 6x_2$$

при условиях:

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 14,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Составить алгоритм и найти минимум функции

$$f(x) = 2x^2 + \frac{16}{x}$$

методами деления отрезка пополам и Фибоначчи.

### Вариант 10

1. Найти экстремум функции

$$f(x) = 3x_1x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2.$$

2. Найти максимум функции

$$f(x) = -3x_1 + 12x_2$$

при условиях:

$$x_1 + 4x_2 \leq 16,$$

$$x_1 - x_2 \geq 2,$$

$$3x_1 - 5x_2 \leq 8,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. Составить алгоритм определения минимума функции

$$f(x) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4$$

методом покоординатного движения и найти решения при движении из точки с координатами  $x_1 = 0, x_2 = 0$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова – М: Высш. шк., 2005.
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988.
3. Аттеков А. В., Зарубин В. С., Канатиков А. Н. Введение в методы оптимизации: Учебное пособие. – М: Финансы и статистика, 2008.
4. Кремлев А. Г. Методы оптимизации: Учебное пособие. – Екатеринбург. Издательство Уральского университета, 2012.
5. Гладких Б. А. Методы оптимизации и исследование операций: Учебное пособие – Томск: Издательство «НТЛ», 2012.
6. Репин С. В., Ганелина Н. Д. Методы оптимизации. Сборник задач и упражнений. – Новосибирск, НГТУ, 2011.
7. Христова Н. П. Основная задача линейного программирования и методы ее решения. – Рыбинск: РГАТА, 2005.
8. Старинова О. Л. Классическое вариационное исчисление. Учебное пособие. Самарский государственный университет имени акад. С. П. Королева. – Самара, 2003.