

# СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Учебное пособие

Рыбинск  
2007

Павлов Р. В. Системы управления техническими объектами. Учебное пособие/РГАТА. – Рыбинск, 2007. – 83 с.).

Пособие подготовлено на кафедре вычислительных систем Рыбинской государственной авиационной технологической академии имени П. А. Соловьева и рекомендовано УМО РГАТА в качестве учебного пособия для студентов специальности 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» и 230105 «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», в том числе для студентов заочной формы обучения.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

директор НПО «Криста», к. т. н. Черных Ю. А.;

кафедра теоретической информатики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ .....	5
2. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ САУ .....	7
3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ .....	7
4. ХАРАКТЕРИСТИКИ САУ .....	9
5. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ САУ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ .....	13
6. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ САУ .....	20
7. СОСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ САУ .....	22
8. ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ .....	24
9. ПРОЦЕСС УПРАВЛЕНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К НЕМУ .....	27
9.1. Оценка устойчивости линейной САУ .....	27
9.2. Критерии устойчивости.....	30
9.2.1. Алгебраические критерии устойчивости.....	30
9.2.2. Частотные критерии устойчивости .....	32
9.3. Качество переходного процесса.....	37
9.3.1. Показатели качества .....	37
9.3.2. Получение графика переходного процесса.....	38
9.3.3. Метод Солодовникова .....	39
9.3.4. Показатель колебательности.....	41
9.3.5. Интегральные оценки качества .....	43
10. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ .....	44
10.1. Способы синтеза САУ .....	44
10.2. Типы корректирующих устройств .....	44
10.2.1. Последовательные корректирующие устройства .....	44
10.2.2. Параллельные корректирующие устройства. ....	46
10.2.3. Коррекция по внешнему воздействию .....	49
10.2.4. Неединичная главная обратная связь .....	51
10.3. Пример синтеза последовательного корректирующего устройства .....	52
10.4. Пример синтеза параллельного корректирующего устройства .....	53
11. ПРИМЕР РАЗРАБОТКИ САУ.....	54
11.1. Задание .....	54
11.2. Описание работы системы .....	56
11.3. Определение передаточных функций элементов системы.....	57
11.4. Построение структурной схемы системы.....	59
11.5. Построение логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы .....	59
11.6. Определение устойчивости и запаса устойчивости по амплитуде и фазе.....	62

11.7. Определение критического значения добротности с помощью критерия Гурвица .....	63
11.8. Введение скоростной обратной связи.....	64
11.9. Нахождение минимального коэффициента скоростной обратной связи .....	65
11.10 Определение оптимального коэффициента скоростной обратной связи .....	67
12. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В САУ .....	68
12.1. Основные понятия .....	68
12.2. Характеристики случайных величин и процессов.....	69
12.3. Прохождение случайного сигнала через линейную непрерывную систему .....	71
12.4. Расчет установившейся ошибки САУ.....	74
12.5. Расчеты по минимуму ошибки .....	75
13. НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ .....	76
13.1. Общий метод составления уравнений нелинейных САУ .....	77
13.2. Фазовое пространство .....	78
13.3. Устойчивость по Ляпунову.....	80
13.4. Гармоническая линеаризация .....	81
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	83
ЛИТЕРАТУРА.....	83

# ВВЕДЕНИЕ

Теория автоматического управления является технической наукой общего применения. Она дает теоретическую базу для исследования, разработки и проектирования автоматических и автоматизированных систем.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Существует чрезвычайно большое разнообразие систем, автоматически выполняющих те или иные функции по управлению различными физическими процессами во всех областях техники.

Автоматическая система способна в течение длительного времени нужным образом изменять какие-либо физические величины в том или ином управляемом процессе.

Автоматизированная система – система, в качестве одного из узлов которой используется человек-оператор.

Операция управления – действия, направленные на правильное и высококачественное функционирование объекта управления. Они обеспечивают в нужный момент времени начало, порядок следования и прекращение отдельных действий; предусматривают выделение необходимых ресурсов и задают нужные параметры самому процессу.

Объект управления – это совокупность технических средств, выполняющих определенный процесс и подлежащих управлению.

Все системы автоматического управления (САУ) можно классифицировать следующим образом.

1. По виду структурной схемы:

- разомкнутые (автоматы, работающие по некоторым программам);
- замкнутые (с обратной связью).

2. По виду уравнений динамики процессов управления:

- линейные;
- нелинейные.

Наиболее полно изучены линейные системы.

3. По характеру передачи сигнала:

- непрерывные;
- дискретные:
  - импульсные (дискретные по времени);
  - цифровые (дискретные по времени и по уровню);
  - релейные (сигнал изменяется скачком).

4. По характеру функционирования:

- обычные;

– адаптивные (самонастраивающиеся).

5. В зависимости от характера изменения управляющего воздействия:

- системы автоматической стабилизации;
- системы программного управления;
- системы слежения.

Типовая схема САУ выглядит следующим образом (рис. 1).

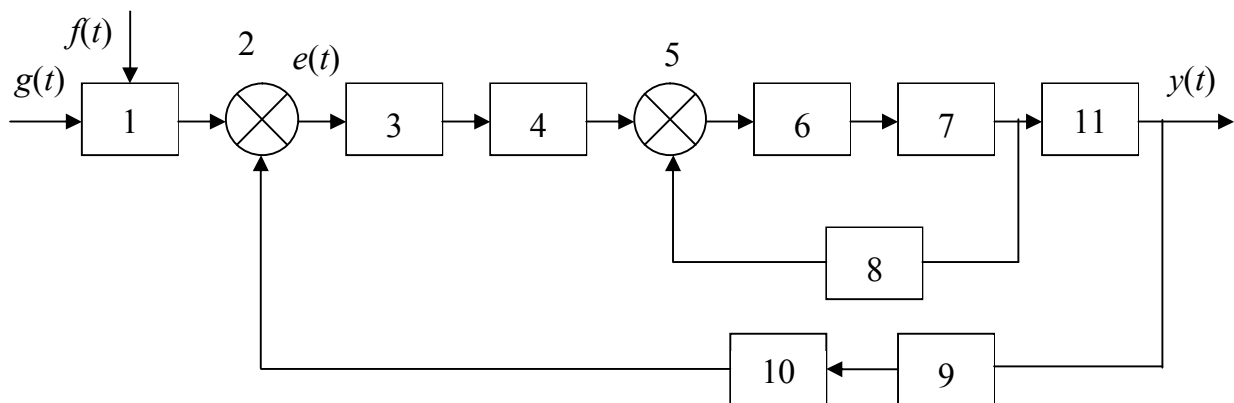


Рис. 1. Типовая схема САУ

$g(t)$  – задающее воздействие;

$f(t)$  – возмущающее воздействие (может действовать на любой блок системы);

$y(t)$  – выходной сигнал;

1 – задающее устройство. Устройство преобразует входное воздействие  $g(t)$  в сигнал, пропорциональный заданному значению выходной величины  $y(t)$ ;

2, 5 – устройства сравнения. Вырабатывают сигнал рассогласования (ошибки)  $e(t)$  между входным сигналом и сигналом главной обратной связи;

3 – преобразующее устройство;

4, 8 – корректирующие устройства. Повышают качество управления;

6 – усилительное устройство;

7 – исполнительное устройство;

9 – измерительное устройство;

10 – согласующее устройство. Вырабатывает сигнал, находящийся в определенной функциональной зависимости от регулируемой переменной;

11 – объект управления.

Таким образом, упрощенно любую САУ можно представить следующим образом (рис. 2).

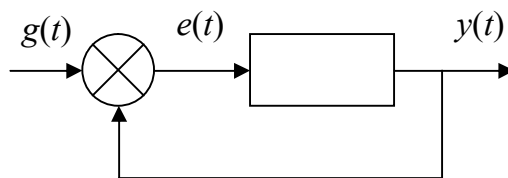


Рис. 2. Упрощенная схема САУ

## 2. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ САУ

Теория автоматического управления изучает общие принципы построения САУ и методы их исследования независимо от физической природы процессов.

Можно выделить две задачи.

1. Задача анализа: исследование статических и динамических свойств системы.
2. Задача синтеза: разработка новых систем, удовлетворяющих заданным техническим требованиям.

При решении этих задач исследуются следующие вопросы.

1. Формирование функциональной и структурной схем САУ.
2. Построение статических и динамических характеристик отдельных звеньев и системы в целом.
3. Определение ошибок управления и показателей точности замкнутой системы.
4. Исследование устойчивости системы.
5. Оценка качественных показателей процесса управления.
6. Синтез корректирующих устройств и оптимизация параметров системы.

## 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Для анализа систем необходимо иметь их математическое описание. Обычно это дифференциальные уравнения (ДУ). Если в этом уравнении используются производные входных и выходных величин, то это уравнение динамики. Если положить нулю производные входных сигналов, – это уравнение статики (описание системы в установившемся режиме). Эти уравнения составляются на основе физических законов.

В общем случае полученные уравнения являются нелинейными. Для упрощения анализа применяют те или иные методы линеаризации, например, разложение в ряд Тейлора.

В общем виде линейное дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m y}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 y(t).$$

В теории автоматического управления принята стандартная форма записи дифференциальных уравнений:  $\frac{d}{dt} = p$  – производная заменяется на оператор  $p$ , коэффициент при выходной величине должен быть равен 1.

Например, для уравнения второго порядка:

$$K(T_1 p^2 + T_2 p + 1)x(t) = (T_3 p + 1)y(t).$$

Параметр  $K$  называется коэффициентом передачи (коэффициент усиления). Это отношение выходной величины к входной в установившемся режиме.

Параметр  $T$  – постоянная времени.

Такой вид представляет первую форму описания САУ.

Кроме описания во временной области, системы описываются *передаточными функциями*. Чтобы получить передаточную функцию нужно использовать разложение Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = L(f(t)),$$

где  $p = c + jd$  – комплексное число;

$f(t)$  – оригинал;

$F(p)$  – изображение по Лапласу.

Соответственно и дифференциальное уравнение можно преобразовать и записать относительно изображений (см. пример выше):

$$K(T_1 p^2 + T_2 p + 1)X(p) = (T_3 p + 1)Y(p).$$

Это вторая форма описания САУ.

*Передаточная функция* – это отношение изображений выходной и входной величины, найденное из вышерассмотренного уравнения:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

Для исследования частотных свойств САУ используется частотная передаточная функция. Для ее получения используется преобразование Фурье. При этом оператор  $p = j\omega$ , а частотная передаточная функция запи-



сывается в виде  $W(j\omega)$ . Такое представление является третьей формой описания систем.

#### 4. ХАРАКТЕРИСТИКИ САУ

Существуют различные методы исследования САУ или отдельных ее звеньев. Один из них заключается в анализе реакции системы или звена на внешнее воздействие.

В качестве внешних воздействий используют стандартные сигналы. В теории САУ используют три вида сигнала.

1. Единичное входное воздействие  $1(t)$  (рис. 3).

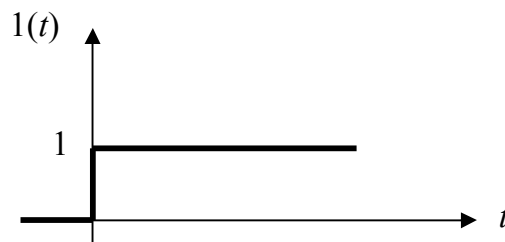


Рис. 3. Единичное входное воздействие

2.  $\delta$ -импульс – сигнал нулевой ширины и бесконечной амплитуды –  $\delta(t)$ , причем его площадь равна 1 (рис. 4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

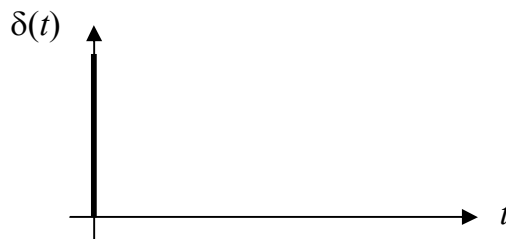


Рис. 4. Дельта-импульс

Такая функция является математической абстракцией. Практически таким сигналом считается короткий импульс большой мощности.

$\delta$ -импульс математически связан с сигналом  $1(t)$ :

$$\frac{d}{dt}(1(t)) = \delta(t).$$

3.  $A \sin \omega t$ , причем для простоты  $A = 1$ .

Соответственно, на каждый из этих стандартных сигналов существует определенная реакция САУ.

1. Реакцией САУ или звена на единичное входное воздействие называется *переходная характеристика* или *переходная функция*  $h(t)$  (рис. 5).

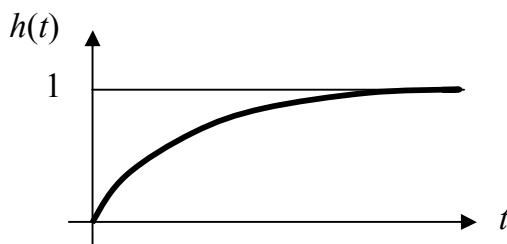


Рис. 5. Пример переходной характеристики

При использовании преобразования Лапласа получим

$$L(1(t)) = \frac{1}{p},$$

тогда изображение переходной характеристики

$$L(h(t)) = W(p) \cdot \frac{1}{p}.$$

2. Реакцией системы на сигнал вида  $\delta(t)$  является *весовая функция*  $\omega(t)$  (рис. 6).

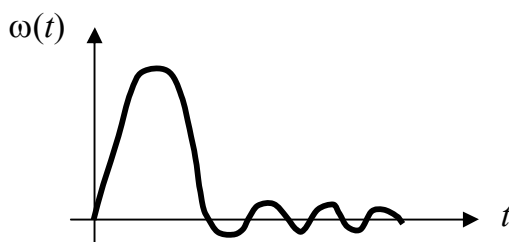


Рис. 6. Пример весовой функции САУ

При использовании преобразования Лапласа получим следующие соотношения:

$$L(\delta(t)) = 1;$$

$$L(\omega(t)) = W(p).$$

Преобразованием Лапласа от весовой функции является передаточная функция.

Весовая функция и переходная характеристика связаны простым соотношением

$$\frac{d}{dt}(h(t)) = \omega(t).$$

Описание САУ во временной области через весовую функцию эквивалентно описанию передаточной функцией в области изображений.

Можно найти реакцию системы на произвольный входной сигнал. Для этого можно воспользоваться интегралом Дюамеля или интегралом свертки

$$x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) \omega(t - \tau) d\tau.$$

3. Если используется входной сигнал вида  $A \sin \omega t$ , то говорят о частотных характеристиках системы.

*Частотные характеристики* – это выражения и графические зависимости, выражающие реакцию исследуемой САУ на сигнал вида  $A \sin \omega t$  при различных значениях частоты  $\omega$ .

На выходе САУ сигнал будет иметь вид

$$x_2(t) = A(t) \sin(\omega t + \varphi(t)),$$

где  $A(t)$  – амплитуда сигнала,  $\varphi(t)$  – сдвиг фазы.

Частотную передаточную функцию для получения частотных характеристик можно представить в следующем виде:

$$W(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega) = A(\omega) e^{-j\varphi(\omega)};$$

$$A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{v(\omega)}{u(\omega)}, \quad (1)$$

где  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  – действительная и мнимая части комплексного выражения.

Вещественная часть состоит из четных степеней частоты  $\omega$ , а мнимая – из нечетных.

Эту функцию можно представить графически на комплексной плоскости. Такое изображение называется *годографом* (рис. 7) или амплитудно-фазовой характеристикой. Кривая строится путем получения точек на плоскости при задании определенных значений частоты  $\omega$  и расчете  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$ .

Для получения графика в случае отрицательных частот необходимо сделать зеркальное отображение имеющейся характеристики относительно действительной оси.

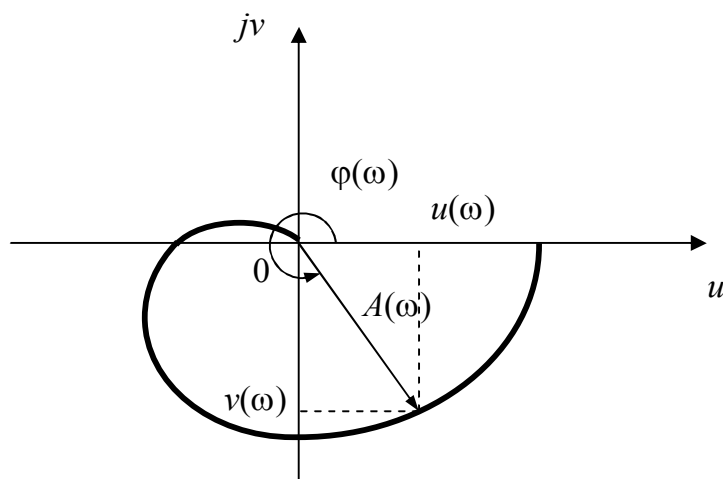


Рис. 7. Годограф или амплитудно-фазовая характеристика системы

Аналогичным образом можно построить отдельно графики длины вектора  $A(\omega)$  и угла поворота  $\varphi(\omega)$ . Тогда получим амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики.

На практике часто используют логарифмические характеристики. Логично использовать натуральный логарифм

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) - j\varphi(\omega).$$

Однако на практике используют десятичные логарифмы и получают *логарифмическую амплитудно-частотную (ЛАЧХ)* (рис. 8) и *логарифмическую фазо-частотную (ЛФЧХ)* характеристики (рис. 9).

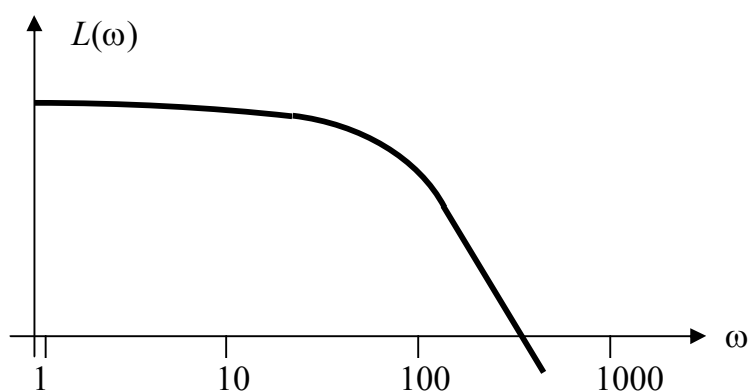


Рис. 8. Пример ЛАЧХ системы

ЛАЧХ определяется по формуле

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|,$$

где  $|W(j\omega)|$  – модуль частотной передаточной функции.

Единицей измерения является децибел.

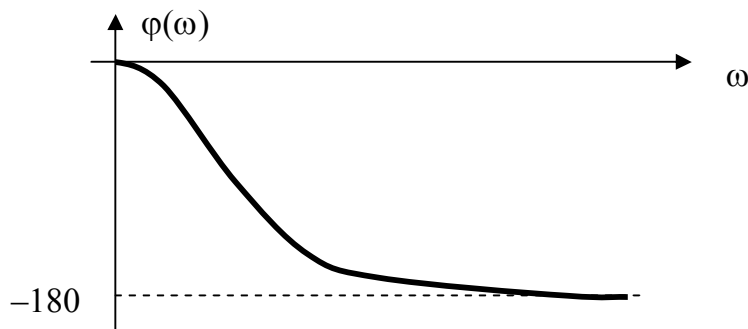


Рис. 9. Пример ЛФЧХ системы

При вычислении логарифмической фазочастотной характеристики используется (1).

При построении графиков по оси абсцисс откладывают частоту в логарифмическом масштабе. Так как при вычислении значений ЛАЧХ в выражениях используются зависимости от степени  $\omega$ , то график имеет стандартный наклон, кратный 20 дБ/дек. Дек – декада, т. е. изменение частоты на порядок.

Теоретически точка  $\omega = 0$  на оси частот должна быть слева в бесконечности, но для практических расчетов ось ординат сдвигают вправо.

Логарифмические характеристики имеют следующие достоинства:

- простота построения;
- легкость получения ЛАЧХ системы из ЛАЧХ звеньев путем геометрического сложения;
- простота анализа САУ.

## 5. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ САУ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Усилительное (пропорциональное, безынерционное) звено (рис. 10).

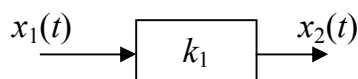


Рис. 10. Схема САУ с усилительным звеном

Дифференциальное уравнение звена имеет вид  $x_2(t) = k_1 x_1(t)$ , передаточная функция  $W(p) = k_1$ , весовая функция  $\omega(t) = k_1 \delta(t)$ , переходная характеристика  $h(t) = k_1$ , ЛАЧХ звена  $L(\omega) = 20 \lg k_1$ , ЛФЧХ  $\varphi(\omega) = 0$ .

Годограф звена, ЛАЧХ и ЛФЧХ представлен на рис. 11.

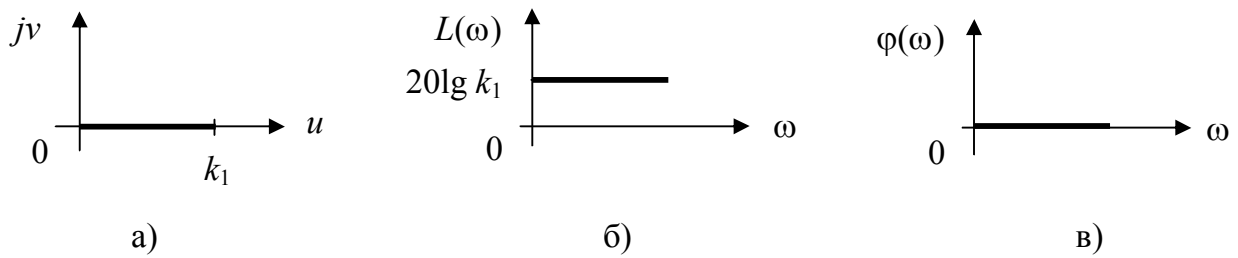


Рис. 11. Частотные характеристики усилительного звена  
 а) годограф; б) ЛАЧХ; в) ЛФЧХ

2. Инерционное или апериодическое звено I порядка.  
 Общий вид схемы САУ представлен на рис 12.

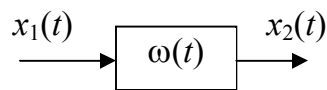


Рис. 12. Структурная схема звена

Дифференциальное уравнение  $T \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = k_1 \cdot x_1(t)$ .

Передаточная функция получается следующим образом:

$$Tpx_2(t) + x_2(t) = k_1 \cdot x_1(t);$$

$$X_2(p)(Tp + 1) = k_1 \cdot X_1(p);$$

$$W(p) = \frac{k_1}{Tp + 1}.$$

Весовая функция и переходная характеристика выражаются соотношениями  $h(t) = k_1(1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t)$  и  $\omega(t) = \frac{k_1}{T} \cdot e^{-t/T} \cdot 1(t)$ .

Графики переходных процессов представлены на рис. 13.

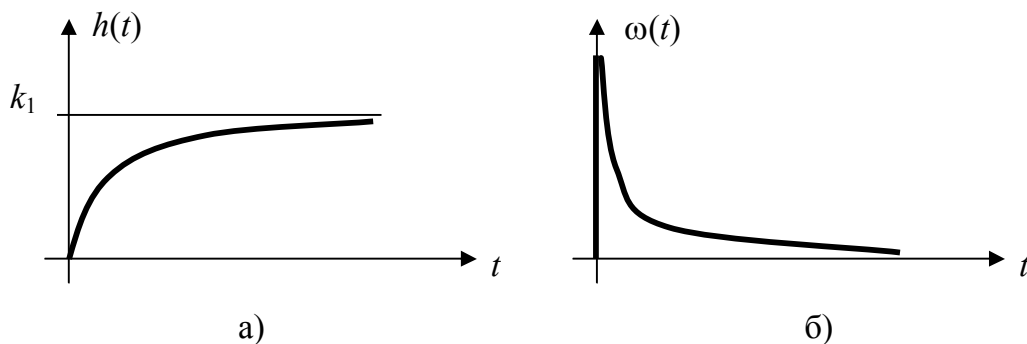


Рис. 13. Переходные процессы инерционного звена 1-го порядка  
 а) переходная характеристика; б) весовая функция

Частотные характеристики получены из соотношений:

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{Tj\omega + 1} = u(\omega) + jv(\omega);$$

$$u(\omega) = \frac{k_1}{T^2\omega^2 + 1};$$

$$v(\omega) = -\frac{k_1T\omega}{T^2\omega^2 + 1};$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg\omega T_1;$$

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k_1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} = 20 \lg k_1 - 20 \lg(\sqrt{1 + T^2\omega^2}).$$

Их графики имеют вид (рис. 14).

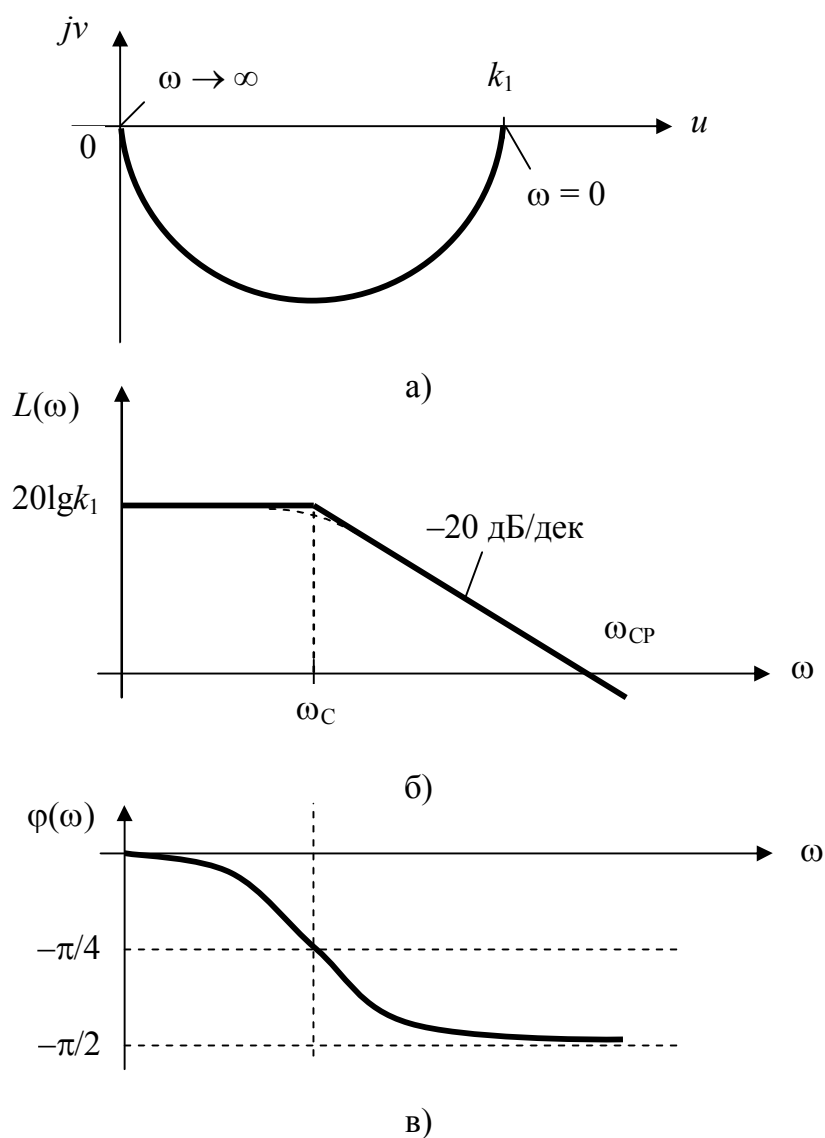


Рис. 14. Частотные характеристики инерционного звена 1-го порядка  
а) годограф; б) ЛАЧХ; в) ЛФЧХ

$\omega_c$  – сопрягающая частота;

$\omega_{cp}$  – частота среза.

ЛАЧХ строится приближенно. Вся ось частот разбивается на 2 интервала  $\omega \ll \frac{1}{T}$  и  $\omega \gg \frac{1}{T}$ . В первом интервале  $L(\omega) \approx 20 \lg k_1$ , во втором  $L(\omega) \approx 20 \lg \frac{k_1}{\omega T}$ . Наибольшая погрешность имеет место в области сопрягающей частоты и составляет 3 дБ, что для инженерных расчетов несущественно.

### 3. Аперидическое звено II порядка.

На основе ДУ можно получить выражение для передаточной функции

$$W(p) = \frac{k_1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} = \frac{k_1}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)},$$

причем  $T_1 \geq 2T_2$ .

Имеет место последовательное соединение двух аперидических звеньев первого порядка.

Логарифмические характеристики равны

$$A(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}};$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg T_3 \omega - \arctg T_4 \omega;$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)} = \\ &= 20 \lg k_1 - 20 \lg \sqrt{T_3^2 \omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{T_4^2 \omega^2 + 1}, \end{aligned}$$

их графики представлены на рис. 15.

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_3}; \quad \omega_{c2} = \frac{1}{T_4}.$$

### 4. Колебательное и консервативное звенья.

Дифференциальное уравнение звеньев имеет вид звена 3, однако  $T_1 < 2T_2$ .

Распространена следующая форма записи передаточной функции:

$$W(p) = \frac{k_1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} = \frac{k_1}{Tp^2 + 2\xi Tp + 1},$$



где  $\xi = 0 \dots 1$  – коэффициент затухания.  $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$ .

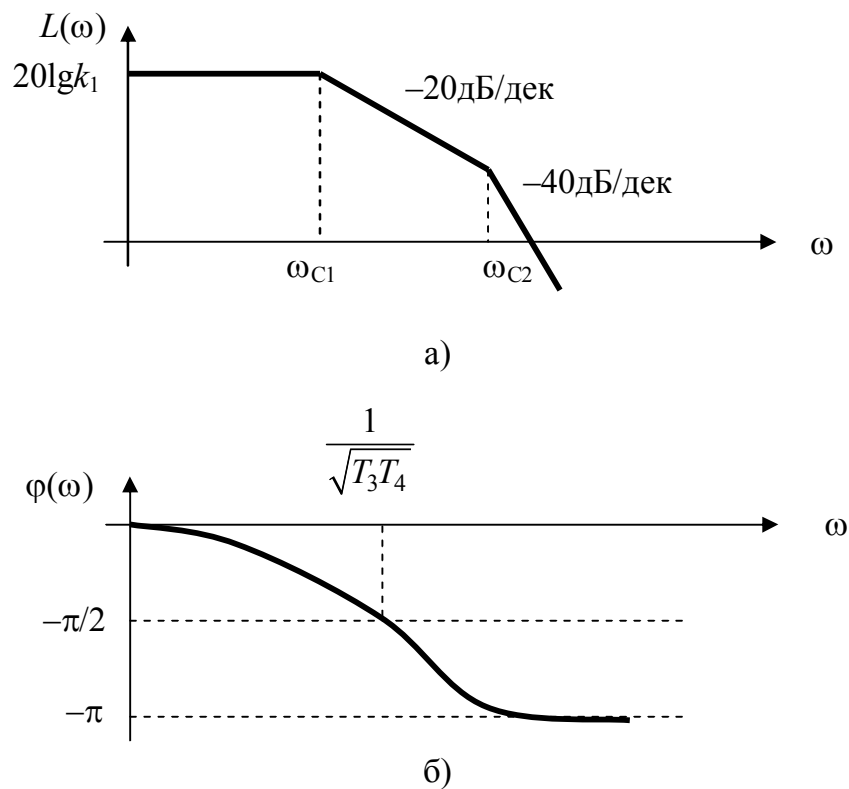


Рис. 15. Частотные характеристики апериодического звена II порядка  
а) ЛАЧХ; б) ЛФЧХ

Переходная характеристика звена имеет вид (рис. 16).

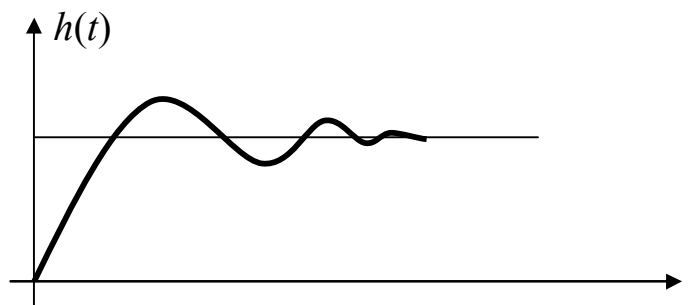


Рис. 16. Переходная характеристика колебательного звена

Если  $\xi \neq 0$ , то получаем колебательное звено.

ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена представляют собой семейство кривых (рис. 17), где  $\xi$  выступает как параметр.

Увеличение логарифмической характеристики в области сопрягающей частоты имеет место, если  $\xi < 0,707$ .

Предельный случай – это консервативное звено  $\xi = 0$ . При этом передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{k_1}{T^2 p^2 + 1}.$$

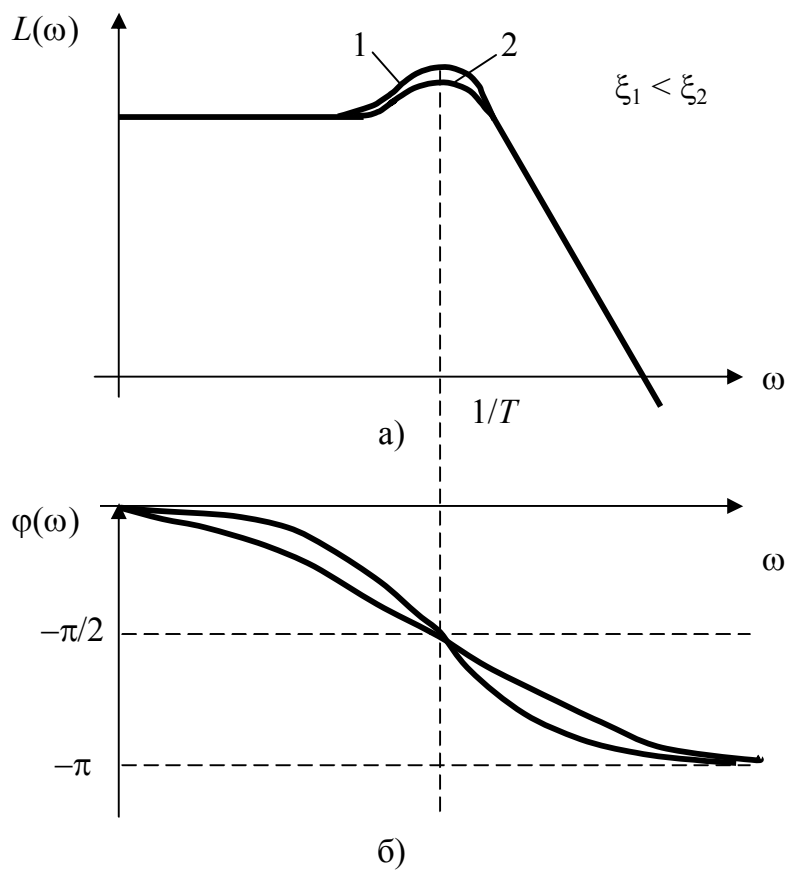


Рис. 17. Частотные характеристики колебательного звена  
а) ЛАЧХ; б) ЛФЧХ

Логарифмические характеристики представлены на рис. 18.

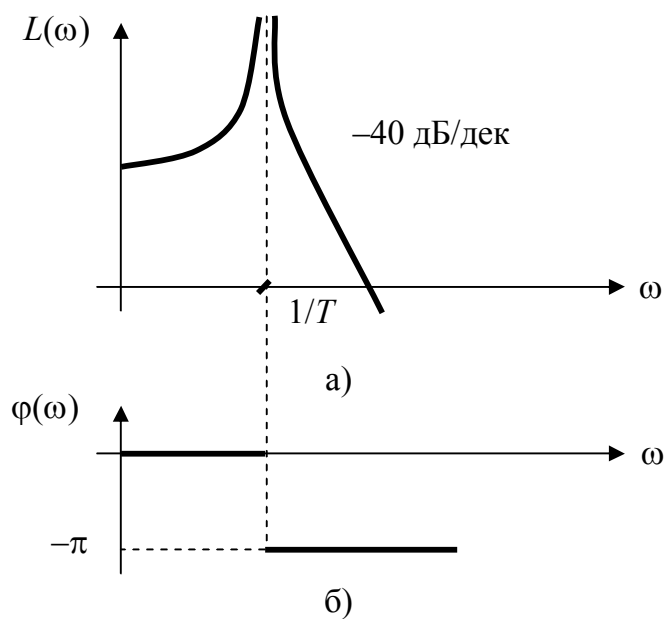


Рис. 18. Частотные характеристики консервативного звена  
а) ЛАЧХ; б) ЛФЧХ

### 5. Интегрирующее звено.

ДУ звена имеет вид  $x_2(t) = k_1 \int x_1(t) dt$ .

Передаточная функция равна  $W(p) = \frac{k_1}{p}$ .

Графики весовой функции  $\omega(t) = k_1$  и переходной характеристики  $h(t) = k_1 t$  представлены на рис. 19.

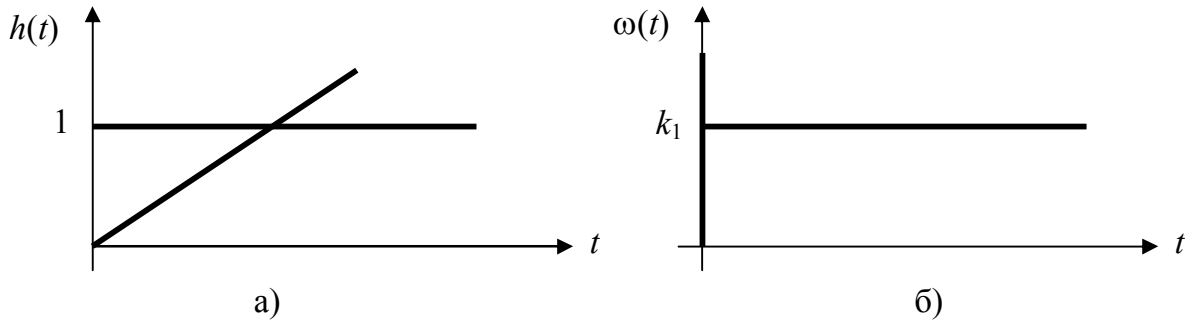


Рис. 19. Интегрирующее звено  
а) переходная характеристика; б) весовая функция

Анализ графиков показывает, что звено является неустойчивым, т. к. при ограниченном входном воздействии  $1(t)$  выходной сигнал неограниченно нарастает.

Частотные характеристики представлены на рис.20.

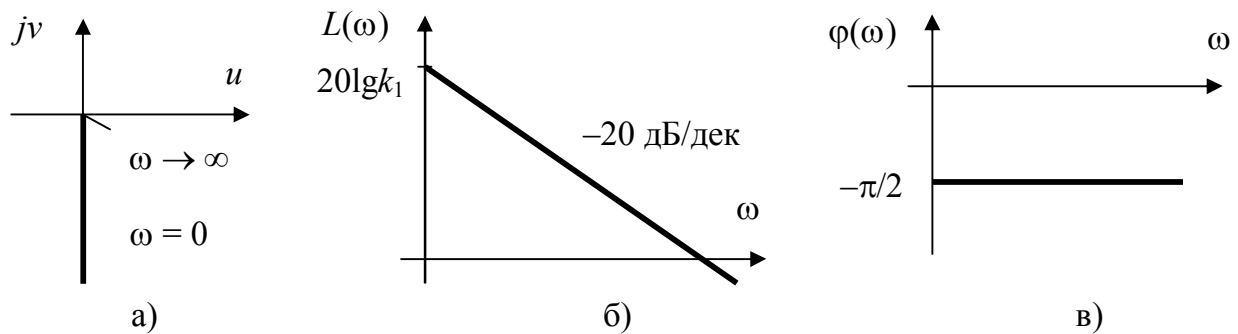


Рис. 20. Частотные характеристики интегрирующего звена  
а) годограф; б) ЛАЧХ; в) ЛФЧХ

$$L(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega;$$

$$\varphi(\omega) = -\pi / 2.$$

### 6. Дифференцирующее звено.

Звено описывается следующими соотношениями

$$x_2(t) = k_1 \frac{dx_1(t)}{dt};$$

$$W(p) = k_1 p;$$

$$L(\omega) = 20 \lg k_1 + 20 \lg \omega;$$

$$\varphi(\omega) = \pi / 2$$

Логарифмические характеристики представлены на рис. 21.

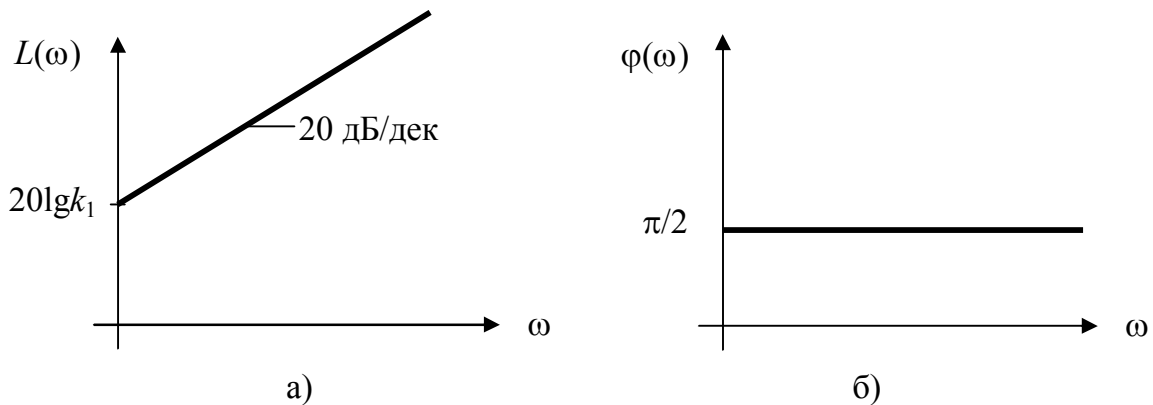


Рис. 21. Частотные характеристики дифференцирующего звена  
а) ЛАЧХ; б) ЛФЧХ

## 6. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ САУ

Анализ САУ с помощью передаточных функций начинается с построения структурной схемы.

*Структурная схема* – это изображение звеньев со связями между ними. Для звеньев указываются их передаточные функции. В теории САУ существует три вида соединения звеньев.

### 1. Последовательное.

Структурная схема такого соединения представлена на рис. 22.

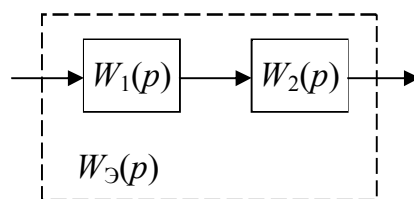


Рис. 22. Последовательное соединение звеньев САУ

Если при соединении звеньев не изменяется ДУ каждого звена, то эквивалентная передаточная функция равна

$$W_3(p) = W_1(p) \cdot W_2(p).$$

### 2. Параллельное.

Структурная схема такого соединения имеет вид (рис. 23).

$$W_3(p) = W_1(p) + W_2(p).$$

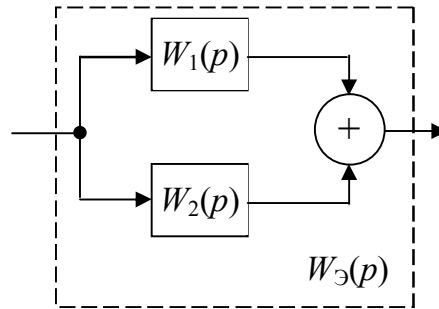


Рис 23. Параллельное соединение звеньев САУ

### 3. Обратная связь.

Такое соединение имеет следующую структурную схему (рис. 24).

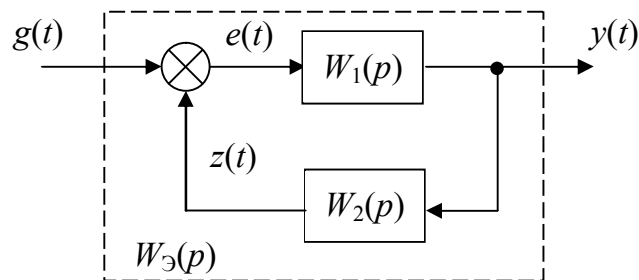


Рис. 24. Соединение в виде обратной связи

Получить выражение для  $W_3(p)$  можно из следующих соотношений:

$$e(t) = g(t) \pm z(t);$$

$$z(t) = y(t) \cdot W_2(p);$$

$$y(t) = e(t) \cdot W_1(p);$$

$$W_3(p) = \frac{Y(p)}{G(p)}.$$

Получим 
$$W_3(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) \cdot W_2(p)}.$$

Существуют определенные правила преобразования структурных схем. Основное условие заключается в том, чтобы обеспечить неизменность действия сигналов в эквивалентных точках структурной схемы.

1. Перенос сумматора (рис. 25).
2. Перенос узла (рис. 26).

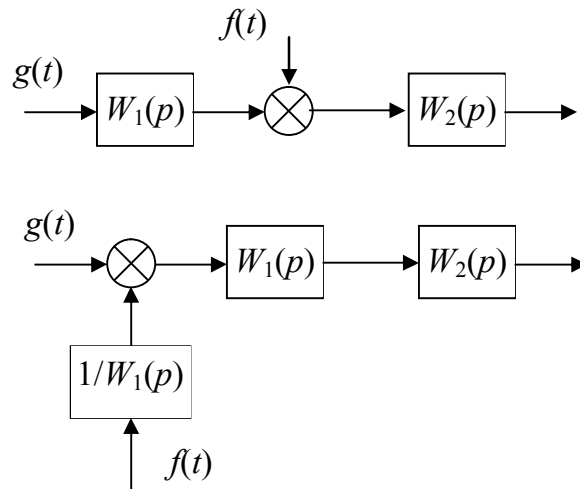


Рис. 25. Перенос сумматора в структурной схеме САУ

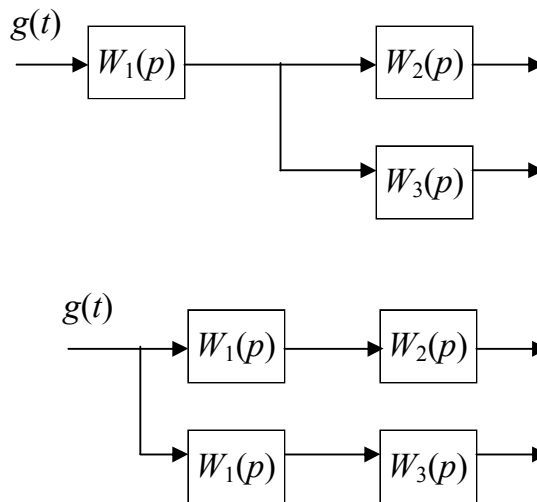


Рис. 26. Перенос узла в структурной схеме САУ

## 7. СОСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ САУ

Как уже отмечалось выше, ДУ получаются на основании физической природы объекта. Затем при необходимости производится их линеаризация.

При этом к системе могут быть приложены некоторые воздействия:

1) задающее воздействие  $g(t)$ , которое определяет требуемый закон изменения выходной величины;

2) возмущающее воздействие  $f(t)$ .

Если действуют несколько входных сигналов, то используется принцип суперпозиции.

ДУ можно составить как относительно выходной регулируемой величины, так и относительно сигнала ошибки  $x(t)$ .

Дифференциальное уравнение относительно ошибки в общем виде имеет следующий вид.

$$D(p)x(t) = Q(p)g(t) + N(p)f(t),$$

где  $D(p)$ ,  $Q(p)$ ,  $P(p)$  – полиномы, причем  $D$  называется *характеристическим полиномом*.

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n;$$

$$x(t) = g(t) - y(t). \quad (2)$$

Структурная схема САУ при этом имеет следующий вид (рис. 27), сопоставимый с видом САУ, описанным в разделе Основные понятия и определения (см. рис. 1).

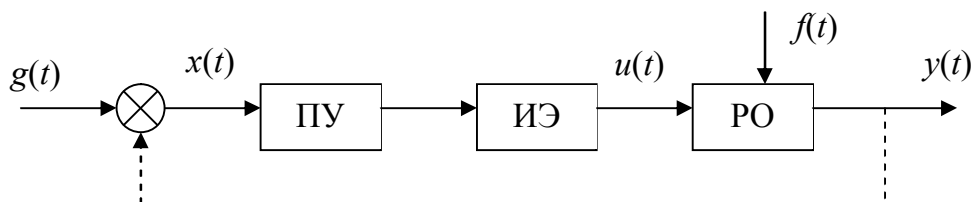


Рис. 27. Структура САУ

ПУ – преобразующее устройство;

ИЭ – исполнительный элемент;

РО – регулируемый объект;

$u(t)$  – регулирующее (управляющее) воздействие.

Рассмотрим первоначально разомкнутую (без обратной связи) САУ. Математические соотношения при этом имеют вид:

$$u(t) = W_{\text{РЕГ}}(p)x(t);$$

$$y(t) = W_0(p) \cdot u(t) + W_f(p) \cdot f(t),$$

где  $W_0(p)$  – передаточная функция по регулирующему воздействию  $u(t)$ ;

$W_f(p)$  – передаточная функция по возмущающему воздействию.

В теории САУ широко используется понятие *передаточной функции разомкнутой системы*:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)};$$

$$W(p) = W_{\text{РЕГ}}(p) \cdot W_0(p).$$

Рассмотрим замкнутую систему. Для этого нужно использовать уравнение замыкания (2). Выражение для выходного сигнала в этом случае будет иметь вид:

$$y(t) = \frac{W(p)}{1+W(p)}g(t) + \frac{W_f(p)}{1+W(p)}f(t),$$

а для ошибки САУ:

$$x(t) = \frac{g(t)}{1+W(p)} - \frac{W_f(p)}{1+W(p)}f(t), \quad (3)$$

Анализ двух последних выражений позволяет определить следующие виды передаточных функций замкнутой САУ:

$$1) \Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} - \text{передаточная функция замкнутой системы};$$

$$2) \Phi_x(p) = \frac{1}{1+W(p)} = 1 - \Phi(p) - \text{передаточная функция замкнутой}$$

системы по ошибке.

Эти функции можно представить и через изображения сигналов, поступающих и проходящих через САУ  $\Phi(p) = \frac{Y(p)}{G(p)}$ ,  $\Phi_x(p) = \frac{X(p)}{G(p)}$ .

Передаточную функцию разомкнутой системы можно представить в виде дробно-рациональной функции.

Характеристический полином  $D(p)$  может быть найден как знаменатель передаточной функции замкнутой системы  $1 + W(p)$ .

Важное значение в теории САУ имеет *характеристическое уравнение*

$$D(p) = 0; 1 + W(p) = 0.$$

## 8. ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ

Это алгоритмы или функциональные зависимости, в соответствии с которыми формируется управляющее (регулирующее) воздействие.

$$u(t) = F(x(t), g(t), f(t)),$$

где  $x(t)$  – ошибка;

$g(t)$  – задающее воздействие;

$f(t)$  – возмущающее воздействие.

Обычно:

$$u(t) = F_1(x) + F_2(g) + F_3(f),$$



где  $F_1(x)$  – управление по отклонению или ошибке;

$F_2(g)$  и  $F_3(f)$  – управление по соответствующему воздействию.

Обычно рассматриваются линейные законы относительно  $p = \frac{d}{dt}$  в

ДУ.

Различают несколько типовых законов управления.

1. Пропорциональное управление.

$$u(t) = W_{\text{РЕГ}}(p) \cdot x(t) = k_1 \cdot x(t);$$

$$W(p) = W_{\text{РЕГ}}(p) \cdot W_0(p) = k_1 \cdot W_0(p).$$

В цепи управления находится пропорциональное (статическое) звено.

В установившемся режиме:

$$\lim_{p \rightarrow 0} W(p) = k_1 \cdot k_0 = K = \frac{y_{\text{УСТ}}}{x_0},$$

где  $K$  – общий коэффициент усиления системы;

$y_{\text{УСТ}}$  – установившееся значение выходной величины;

$x_0$  – постоянное значение ошибки.

Для замкнутой САУ найдем установившееся значение ошибки по формуле (3):

$$x_{\text{УСТ}} = \frac{g_0}{1 + W(p)} - \frac{x_{f \text{ УСТ}}}{1 + W(p)} = \frac{g_0}{1 + K} - \frac{x_{f \text{ УСТ}}}{1 + K},$$

где  $g_0$  – постоянное входное воздействие;

$x_{f \text{ УСТ}}$  – установившаяся ошибка от возмущающего воздействия.

Анализ выражения показывает, что установившаяся ошибка уменьшилась в  $(1 + K)$  раз, но в принципе не равна 0.

2. Интегральное управление.

В этом случае имеет место зависимость между ошибкой и скоростью изменения регулирующего (управляющего) воздействия

$$\frac{dU}{dt} = k_2 \cdot x(t);$$

$$W_{\text{РЕГ}} = \frac{k_2}{p}.$$

В составе САУ обязательно имеются интегрирующие звенья.

Установившееся значение ошибки находим по формуле (3).

Первое слагаемое равно 0, второе зависит от значения числителя, поэтому для него применим выражение

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{W_f(p) \cdot f_0}{1 + W(p)}.$$

При отсутствии возмущающего воздействия общее значение установившейся ошибки равно нулю.

Система является астатической по задающему воздействию или обладает астатизмом первого порядка. Однако, если задающее воздействие переменное (скорость его изменения не равна 0), то установившаяся ошибка будет иметь ненулевое значение.

Для устранения ошибки по скорости в САУ необходимо добавить еще один интегратор.

Такой подход имеет недостаток: при наличии большого количества интеграторов процесс управления замедляется и изменяется устойчивость системы.

### 3. Управление по производной (дифференциальное).

Процесс управления описывается соотношениями:

$$U(t) = k_3 \frac{dx}{dt};$$

$$W_{рег}(p) = p \cdot k_3.$$

Процесс управления начинает действовать, когда ошибка еще равна 0, а ее производная отлична от 0. В установившемся режиме  $\frac{dx}{dt} = 0$  и цепь управления разрывается, следовательно, данный закон не имеет самостоятельного значения. Используется как дополнение к другим. Он обеспечивает быструю реакцию САУ в переходном режиме.

### 4. Изодромное управление.

Возможно использование всех вышеперечисленных законов одновременно. Закон управления в этом случае имеет вид:

$$U(t) = (k_1 + \frac{k_2}{p} + k_3 p)x(t).$$

Такое управление сочетает достоинства всех рассмотренных законов. Например, при линейно изменяющемся входном воздействии (рис. 28) в начальный момент (участок I) действует управление по производной, затем больший вклад вносит пропорциональное управление, после момента времени  $t_0$  (участок II) существенно интегральное управление.

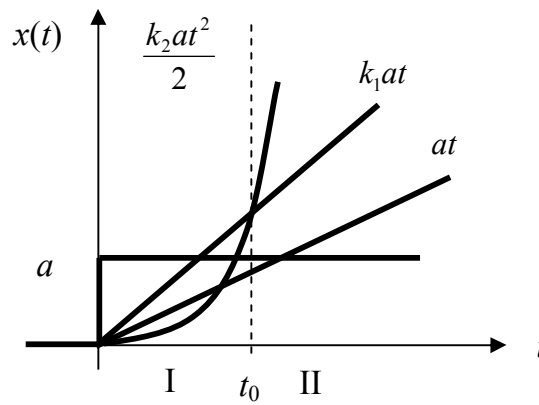


Рис. 28. Законы управления в САУ

## 9. ПРОЦЕСС УПРАВЛЕНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К НЕМУ

Процесс управления во времени определяется решением дифференциального уравнения динамики замкнутой системы. При этом можно определить требования к системе по трем основным направлениям.

1. Принципиальная оценка возможности перехода системы в некоторое установившееся состояние при любом внешнем воздействии. Это оценка устойчивости системы.

2. Оценка качества переходного процесса.

3. Оценка точности системы в установившемся состоянии.

Рассмотрим каждый из этих пунктов.

### 9.1. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ САУ

Устойчивость системы – это способность системы возвращаться в состояние равновесия после окончания влияния внешнего воздействия. САУ при этом может возвращаться в исходное состояние или принимать новое состояние.

Одним из способов оценки устойчивости является анализ выходного сигнала САУ. Выходной сигнал с течением времени должен стремиться к нулю (затухать).

Для того, чтобы оценить устойчивость таким образом, необходимо решить дифференциальное уравнение системы без правой части (правая часть должна быть равна нулю). Как известно, в правой части находятся производные различного порядка от задающего воздействия

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = 0.$$

Решение ищется в виде

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + \dots + C_n e^{p_n t},$$

где  $p_i$  – корни характеристического уравнения. В общем случае корни являются комплексными.

Рассмотрим все варианты (частные случаи).

### 1. Вещественный корень

$$p = +\alpha; \quad p = -\alpha,$$

где  $\alpha$  – положительное число.

График выходного сигнала САУ при входном воздействии вида  $\delta(t)$  имеет вид (рис. 29).

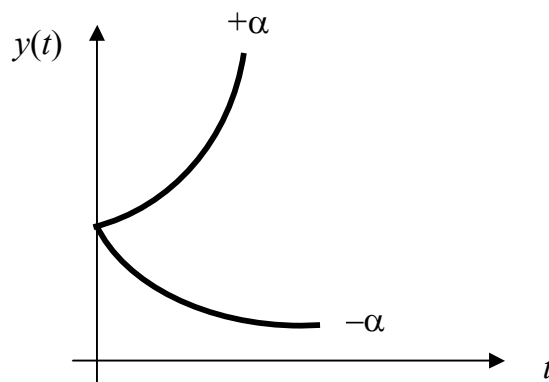


Рис. 29. Переходный процесс в случае действительных корней

Система устойчива в случае  $-\alpha$ .

### 2. Комплексные корни.

$$p = +\alpha \pm j\beta; \quad p = -\alpha \pm j\beta$$

В этом случае выходной сигнал можно представить  $y(t) = Ae^{\pm\alpha t} \cdot \sin(\beta t + \psi)$  (рис. 30).

Система устойчива в случае  $-\alpha$ .

### 3. Чисто мнимые корни.

$$p = \pm j\beta.$$

График выходного сигнала представлен на рис. 31.

Имеют место незатухающие колебания. Система находится на границе устойчивости.

Таким образом, САУ устойчива тогда, когда в корнях характеристического уравнения присутствует отрицательная вещественная часть

$$p = -\alpha \pm j\beta.$$

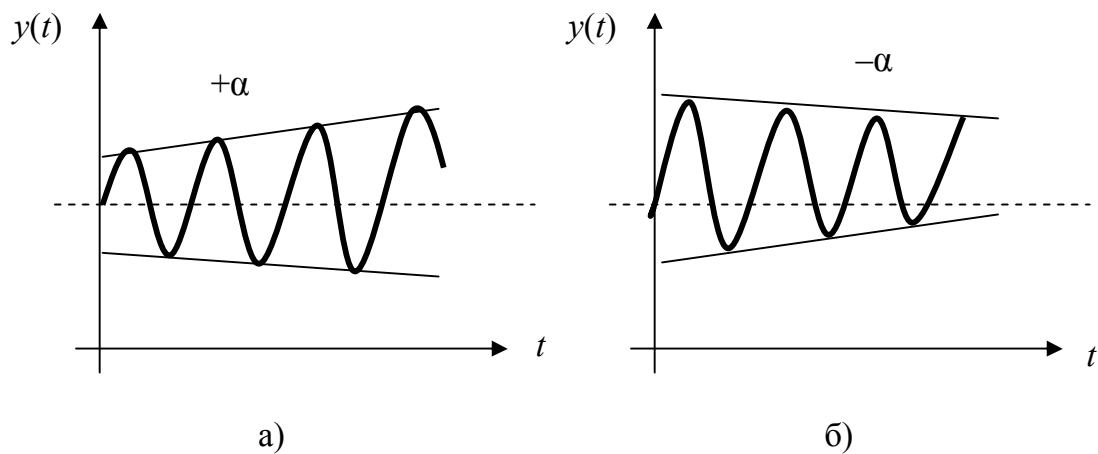


Рис. 30. Переходный процесс в случае комплексных корней  
 а) корень с положительной вещественной частью;  
 б) корень с отрицательной вещественной частью

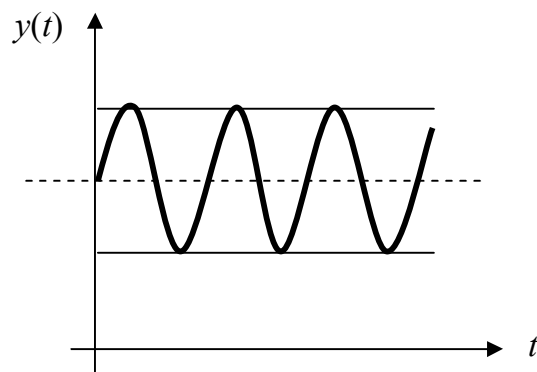


Рис. 31. Переходный процесс в случае чисто мнимых корней

Корни можно изобразить на комплексной плоскости. При этом для устойчивой САУ они должны быть в левой полуплоскости (рис. 32).

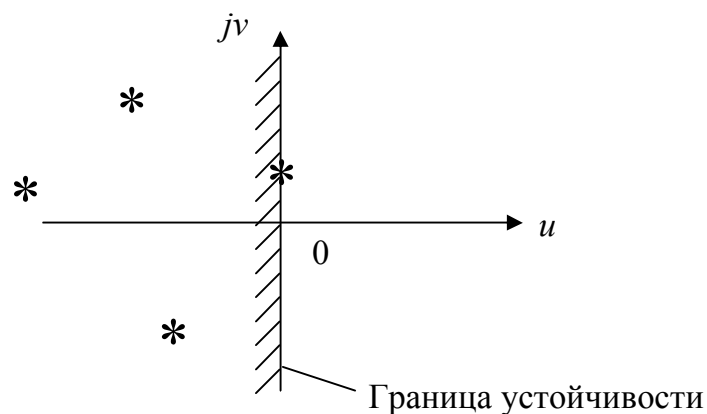


Рис. 32. Корни характеристического уравнения на комплексной плоскости

Анализ корней показывает, что САУ будет на границе устойчивости, в следующих случаях:

- 1) имеется нулевой корень;
- 2) имеются чисто мнимые корни;
- 3) имеются бесконечные корни.

Определять устойчивость системы путем решения дифференциальных уравнений достаточно сложно. Поэтому существуют другие (косвенные) методы. Они называются критериями устойчивости.

## 9.2. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Критерии устойчивости можно разбить на две большие группы.

1. Алгебраические.
2. Частотные.

Рассмотрим их подробнее.

### 9.2.1. Алгебраические критерии устойчивости

Они позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Как известно, уравнение порядка  $n$  можно заменить произведением полиномов первого порядка. Например, для случая вещественных корней:

$$a_0 \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n) = 0, \quad p_i = \pm \alpha_i.$$

Будем считать, что  $a_0$  всегда больше нуля (что легко обеспечить умножением обеих частей уравнения на  $-1$ ).  $p_i$  для устойчивой системы должны быть меньше нуля. Коэффициенты характеристического уравнения связаны с корнями уравнения соотношениями  $a_k = \alpha_i \alpha_j$ . При  $\alpha_i < 0$  они будут положительны  $a_i > 0$ .

Аналогичным образом можно рассмотреть случай комплексных корней. Все утверждения справедливы и в этом случае.

Таким образом, неравенство  $a_i > 0$  является необходимым условием устойчивости системы.

Кроме этого, на значения этих коэффициентов накладываются дополнительные ограничения, что является достаточными условиями устойчивости. Определение этих ограничений варьируется и зависит от используемого метода их расчета. Рассмотрим два метода.

#### 1. Критерий Рауса.

Составляется таблица (табл. 1) из коэффициентов уравнения следующим образом: в первой строке записываются четные коэффициенты,

во второй – нечетные. Каждый следующий элемент таблицы рассчитывается по формуле

$$C_{k,i} = C_{k+1,i-2} - Z_i \cdot C_{k+1,i-1};$$

$$Z_i = \frac{C_{1,i-2}}{C_{1,i-1}}.$$

где  $i$  – номер строки таблицы,  $k$  – номер столбца.

Таблица 1

Таблица расчета коэффициентов по критерию Рауса

$Z_i$	Строка ( $i$ )	Столбец ( $k$ )		
		1	2	3
–	1	$a_0$	$a_2$	$a_4$
–	2	$a_1$	$a_3$	$a_5$
$z_3$	3	$C_{1,3}$	$C_{2,3}$	$C_{3,3}$

$$Z_3 = \frac{a_0}{a_1};$$

$$C_{1,3} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} \cdot a_3.$$

Необходимое и достаточное условие устойчивости по данному критерию формулируется так: коэффициенты первого столбца таблицы должны быть положительны.

## 2. Критерий Гурвица.

Составляется матрица из коэффициентов характеристического уравнения следующим образом: по главной диагонали записываются коэффициенты от  $a_1$  до  $a_n$ . Столбцы вверх от главной диагонали заполняются коэффициентами с большими индексами, а вниз – с меньшими. Там, где коэффициентов нет, ставится 0:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Затем определяются определители данной матрицы.

Критерий формулируется следующим образом: для того, чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все определители были больше нуля при  $a_0 > 0$ .

Определители вычисляются по формулам:

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0, \text{ и т. д.}$$

### 9.2.2. Частотные критерии устойчивости

#### 1. Критерий устойчивости Михайлова.

Этот критерий основан на анализе годографа характеристического уравнения замкнутой системы.

Линейная система  $n$ -го порядка устойчива, если при изменении частоты от 0 до  $\infty$  годограф последовательно обходит  $n$  квадрантов комплексной плоскости против часовой стрелки, начинаясь на положительной части вещественной оси, не проходя через начало координат (рис. 33).

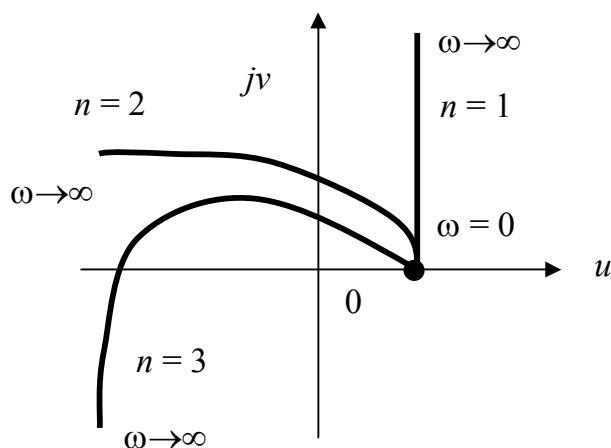


Рис. 33. Годограф Михайлова

Как известно, характеристическое уравнение  $D(p)$  САУ равно

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Его можно представить как произведение полиномов первого порядка, где  $p_i$  – корни уравнения

$$D(p) = a_0 (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots$$

Как известно, для устойчивой системы корень имеет отрицательную вещественную часть.

Рассмотрим устойчивую САУ первого порядка. Для нее характеристическое уравнение имеет вид:

$$D(p) = a_0(j\omega - p_1).$$



Годограф такой САУ обязательно начнется на положительной части вещественной оси. При изменении частоты от 0 до  $\infty$  фаза будет изменяться от 0 до  $\pi/2$ . (рис. 34).

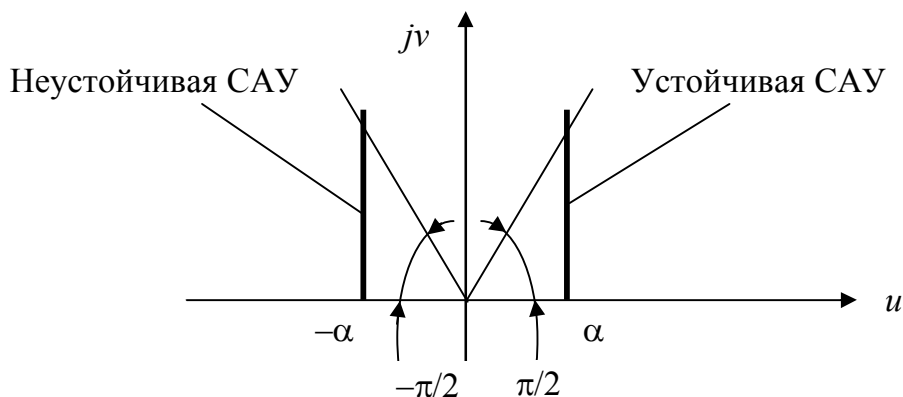


Рис. 34. Вид годографа Михайлова для устойчивой и неустойчивой САУ первого порядка

Таким образом, годограф будет полностью находиться в первом квадранте комплексной плоскости.

Для устойчивой САУ второго порядка имеет место следующее уравнение (два сомножителя).

$$D(p) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2).$$

Как известно, при построении годографа фазы для каждого сомножителя складываются. Поэтому, для корней с отрицательными вещественными частями результирующий угол поворота годографа при изменении частоты от 0 до  $\infty$  будет равен  $\pi$  и годограф будет находиться в квадрантах 1 и 2.

Аналогично можно рассмотреть САУ любого порядка.

Для неустойчивой системы фаза, определяемая корнем с положительной вещественной частью, изменяется от 0 до  $-\pi/2$  и результирующий угол поворота годографа будет меньше.

## 2. Критерий устойчивости Найквиста.

Он позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду годографа передаточной функции разомкнутой системы

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}.$$

Обычно передаточная функция представляется в виде отношения полиномов, причем степень числителя меньше степени знаменателя.

$$W(p) = \frac{R(\omega)}{Q(\omega)}.$$

Из последнего замечания следует, что при частоте, стремящейся к бесконечности, годограф всегда стремится к началу координат.

Для определения критерия нужно знать, что полюса передаточной функции – это корни ее знаменателя, а нули – это корни числителя.

Критерий формулируется следующим образом.

Если разомкнутая система устойчива или нейтральна, то для устойчивости в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы годограф не охватывал точку с координатами  $(-1, j0)$ .

Если разомкнутая система неустойчива, то для того, чтобы она была устойчивой в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов годографом отрезка вещественной оси  $]-\infty, -1[$  была равна  $l/2$ , где  $l$  – число полюсов с положительной вещественной частью передаточной функции разомкнутой системы.

Годограф передаточной функции разомкнутой системы имеет несколько типовых конфигураций в зависимости от параметров системы. Рассмотрим их для случая статической и астатической САУ.

*Статическая система.*

Для этой системы в знаменателе передаточной функции разомкнутой системы нет множителя  $p$ .

Так как множитель  $p$  отсутствует, то значению частоты  $\omega = 0$  (начало годографа) соответствует точка на положительной части вещественной оси.

Введем вспомогательную передаточную функцию  $W_1(p)$ :

$$W_1(p) = W(p) + 1 = \frac{D(p)}{Q(p)},$$

где  $D(p)$  – характеристический полином (используется в критерии устойчивости Михайлова).

Для этой вспомогательной функции в случае устойчивой системы при изменении частоты от 0 до  $\infty$  фаза числителя изменяется на угол  $(n\pi/2)$ , а фаза знаменателя – на  $(-n\pi/2)$ , где  $n$  – порядок полинома.

Результирующий сдвиг фаз равен нулю, следовательно, годограф передаточной функции  $W_1(p)$  не должен охватывать начало координат. Годограф же основной функции  $W(p)$  не должен охватывать точку с координатами

тами  $(-1, j0)$ . Таким образом, качественный вид годографа САУ, устойчивой в разомкнутом состоянии, следующий (рис. 35).

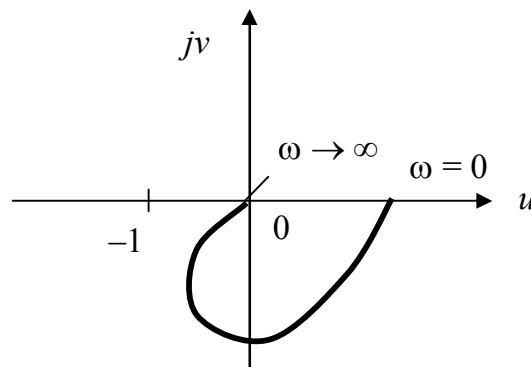


Рис. 35. Годограф передаточной функции устойчивой статической САУ

Для системы, неустойчивой в разомкнутом состоянии, годограф имеет вид (рис. 36):

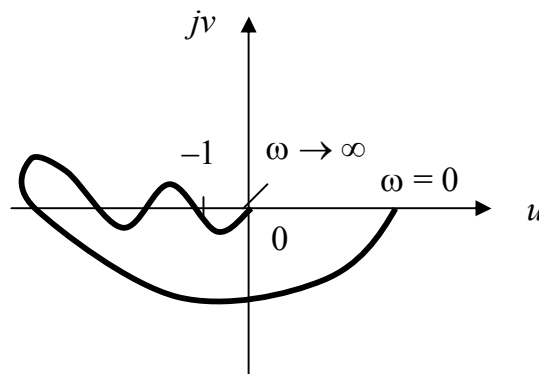


Рис. 36. Годограф статической САУ, неустойчивой в разомкнутом состоянии

*Астатическая система.*

В знаменателе передаточной функции разомкнутой системы есть сомножители  $p$  в разной степени. Например,

$$W(p) = \frac{T_1 p + 1}{p(T_2 p + 1)}.$$

Поэтому, значению частоты  $\omega = 0$  соответствует точка на комплексной плоскости  $(0, -j\infty)$

В этом случае, чтобы оценить устойчивость, нужно дополнить годограф окружностью бесконечного радиуса, двигаясь по часовой стрелке, начиная от положительной части вещественной оси (рис. 37).

Критерий устойчивости Найквиста позволяет определить запас устойчивости по амплитуде и фазе (рис.38).

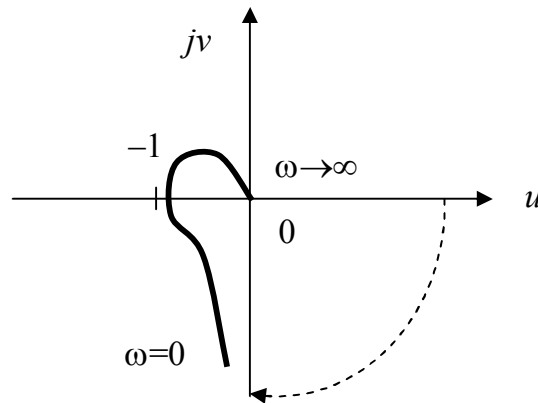


Рис. 37. Годограф передаточной функции устойчивой астатической САУ

Запас по амплитуде позволяет определить, насколько можно изменять общий коэффициент усиления САУ (обычно, увеличить), не нарушая устойчивость.

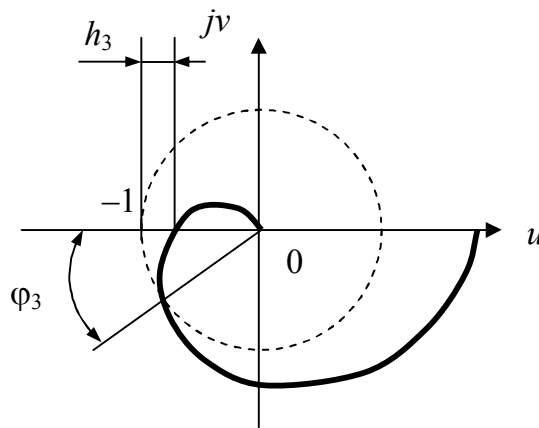


Рис. 38. Определение запаса устойчивости по амплитуде и фазе

Запас устойчивости по фазе позволяет задать допустимый дополнительный сдвиг фазы сигнала при прохождении его через САУ без нарушения условия устойчивости.

### 3. Логарифмический критерий устойчивости.

Для этого критерия необходимо иметь логарифмические характеристики разомкнутой САУ.

Критерий формулируется следующим образом.

Для того чтобы САУ была устойчива в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы ЛФЧХ передаточной функции разомкнутой системы не пересекала уровень  $-\pi$  или пересекала его четное число раз в пределах положительной части ЛАЧХ (рис. 39).

Данный критерий является развитием критерия устойчивости Найквиста. С его помощью также можно получить значения запаса устойчивости по амплитуде и фазе.

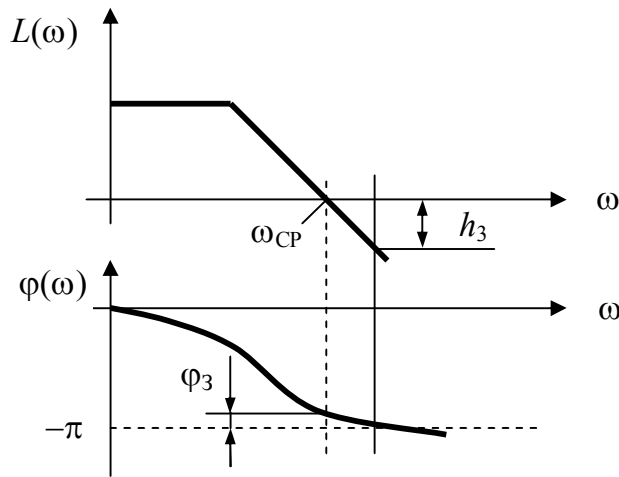


Рис. 39 . Логарифмический критерий устойчивости

### 9.3. КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

#### 9.3.1. Показатели качества

Требования к качеству процесса управления в каждом конкретном случае могут быть различными, но как правило, оценивается характер переходного процесса при единичном ступенчатом воздействии (рис. 40).

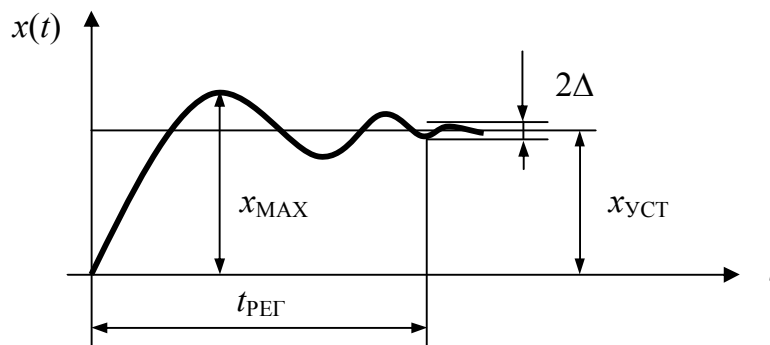


Рис. 40. Показатели качества переходного процесса

Используются следующие показатели качества переходного процесса.

1.  $t_{\text{РЕГ}}$  – время регулирования (длительность переходного процесса), время, в течение которого, начиная с момента приложения входного воздействия, отклонение выходной величины от ее установившегося значения, становится меньше наперед заданного значения  $\Delta$ . Обычно выбирается  $\Delta = 5\%$  от  $x_{\text{уст}}$ .

2. Перерегулирование:

$$\sigma = \frac{x_{\text{MAX}} - x_{\text{уст}}}{x_{\text{уст}}} \cdot 100\%.$$

3. Колебательность – число полных колебаний выходной величины за время регулирования.

4. Установившаяся ошибка – это разность между задающим воздействием и установившимся значением выходной величины.

### 9.3.2. Получение графика переходного процесса

Переходный процесс можно получить несколькими способами:

- 1) решение дифференциального уравнения;
- 2) использование передаточных функций и прямого и обратного преобразования Лапласа или Фурье;
- 3) использование вещественной части частотной характеристики замкнутой системы.

Первые два способа были представлены выше. Рассмотрим подробнее третий способ.

Как известно, обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Изображение по Фурье выходной величины:

$$X(j\omega) = G(j\omega) \cdot \Phi(j\omega);$$

где  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$  – изображение входного сигнала  $1(t)$ ;

$\Phi(j\omega)$  – частотная передаточная функция замкнутой системы. Ее можно представить в виде

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где  $P(\omega)$  – действительная часть (вещественная); это полином, содержащий слагаемые с четными степенями частоты  $\omega$ ;

$Q(\omega)$  – мнимая часть выражения, содержит слагаемые с нечетными степенями частоты  $\omega$ .

Заменив пределы интегрирования, применив формулу Эйлера и оставив только  $P(\omega)$ , получим

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{P(\omega) \sin(\omega t)}{\omega} d\omega.$$

Аналитическое решение данного уравнения представляет собой достаточно сложную задачу. Поэтому существуют приближенные методы решения. Один из них называется методом Солодовникова.

### 9.3.3. Метод Солодовникова

Здесь вводится понятие типовой единичной трапецеидальной вещественной характеристики. Ее высота равна 1, частота среза (частота положительности)  $\omega_{\Pi}=1$  (рис. 41).

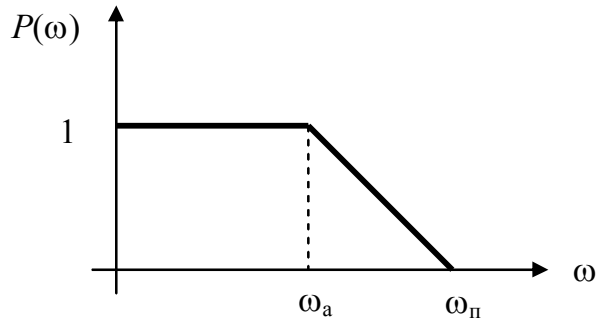


Рис. 41. Типовая единичная трапецеидальная вещественная характеристика

Для данной трапеции существуют таблицы связи выходной величины  $x(t)$  от коэффициента наклона  $\chi = \omega_a / \omega_{\Pi}$ .

Метод заключается в выполнении следующей последовательности действий.

1. Строится график вещественной части частотной передаточной функции замкнутой системы.
2. График разбивается на трапеции. Эта процедура представлена на рис. 42. В данном примере получилось три типовые трапеции.

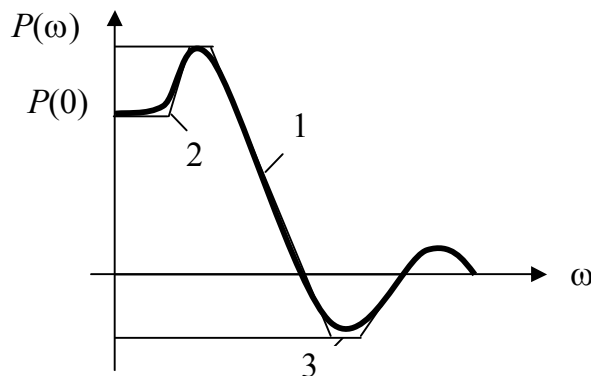


Рис. 42. Разбиение графика вещественной характеристики на трапеции

3. Для каждой трапеции по таблицам находятся значения выходного процесса  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ .

4. Находится результирующий график выходного сигнала путем сложения графиков  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ .

Так как таблицы разработаны для единичной трапеции, то при построении переходного процесса для каждой трапеции, необходимо исполь-

зовать правила (формулы) перехода к реальному значению отсчетов выходного сигнала.

1. Получение установившегося значения  $P(0) = x(\infty) = x_{уст.}$
2. Получение действительной амплитуды сигнала

$$x_i(t) = p_i(0) \cdot x_{табл}(t).$$

3. Изменение масштаба времени  $t_{действ} = \frac{t_{табл}}{\omega_{п}}$ .

Показатели качества переходного процесса можно приближенно оценить по вещественной частотной характеристике замкнутой системы, не выполняя вышерассмотренных вычислений. Все разновидности графика этой характеристики представлены на рис. 43.

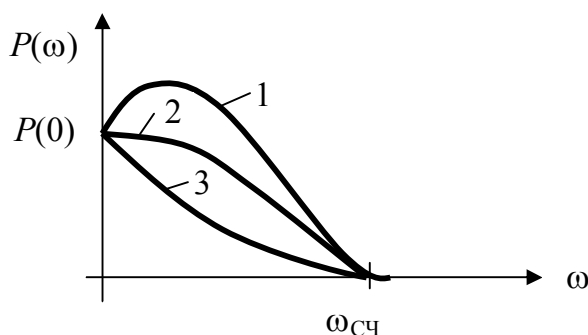


Рис. 43. Типовой вид графиков вещественной характеристики

1 — график характеристики имеет «горб»;

2 — «горба» нет, производная  $\frac{dp}{d\omega} < 0$  и принимает различные значения;

3 — «горба» нет,  $\frac{dp}{d\omega} < 0$  и монотонно убывает.

В случае 1 переходный процесс  $x(t)$  имеет перерегулирование, причем его величина более 18%.

В случае 2 переходный процесс  $x(t)$  имеет перерегулирование, причем его величина менее 18%.

В случае 3 процесс управления монотонный.

По графику можно приближенно определить и время переходного процесса

$$\frac{\pi}{\omega_{сч}} < t_{рег} < \frac{4\pi}{\omega_{сч}},$$

где  $\omega_{сч}$  — диапазон существенных частот. Характеристика  $P(\omega)$  в этом диапазоне превышает некоторый уровень  $\varepsilon$ . Обычно  $\varepsilon = 5\%$ .



### 9.3.4. Показатель колебательности

Этот параметр используется для определения запаса устойчивости. Его можно вычислить по значению модуля частотной передаточной функции замкнутой системы

$$|\Phi(j\omega)| = M.$$

Показатель колебательности равен отношению  $M_K = \frac{M_{\text{MAX}}}{M(0)}$  и представлен на рис. 44.

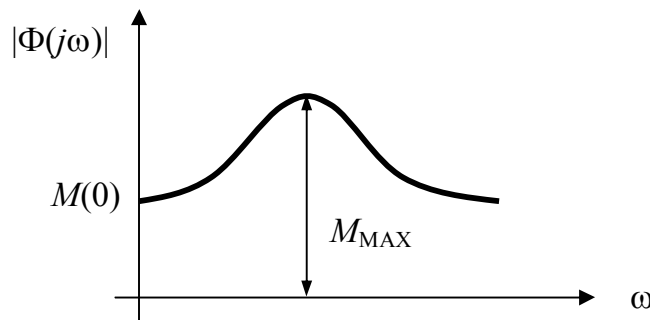


Рис. 44. Модуль частотной передаточной функции замкнутой системы

Это относительная высота резонансного пика. Для упрощения расчетов считается, что  $M(0) = 1$ . При этом  $M_K = M_{\text{MAX}}$ .

Физически показатель колебательности – это отношение максимальных значений выходного и входного сигналов САУ.

Чем меньше запас устойчивости САУ, тем больше склонность системы к колебаниям, тем выше резонансный пик. Обычно показатель колебательности лежит в диапазоне 1,1 ... 1,5.

$M_k$  можно определить по виду частотной характеристики разомкнутой системы, пользуясь передаточной функцией разомкнутой системы

$$M = |\Phi(j\omega)| = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right|.$$

Представив  $W(j\omega)$  через действительную  $U$  и мнимую  $V$  части, получим:

$$(U + C)^2 + V^2 = R^2;$$

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1};$$

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}.$$

Данные соотношения описывают окружность, причем  $C$  – вещественная координата ее центра;  $R$  – радиус.

На комплексной плоскости можно построить семейство окружностей с этими параметрами, зависящими от  $M$ . На этот график наносится годограф разомкнутой системы (рис. 45).

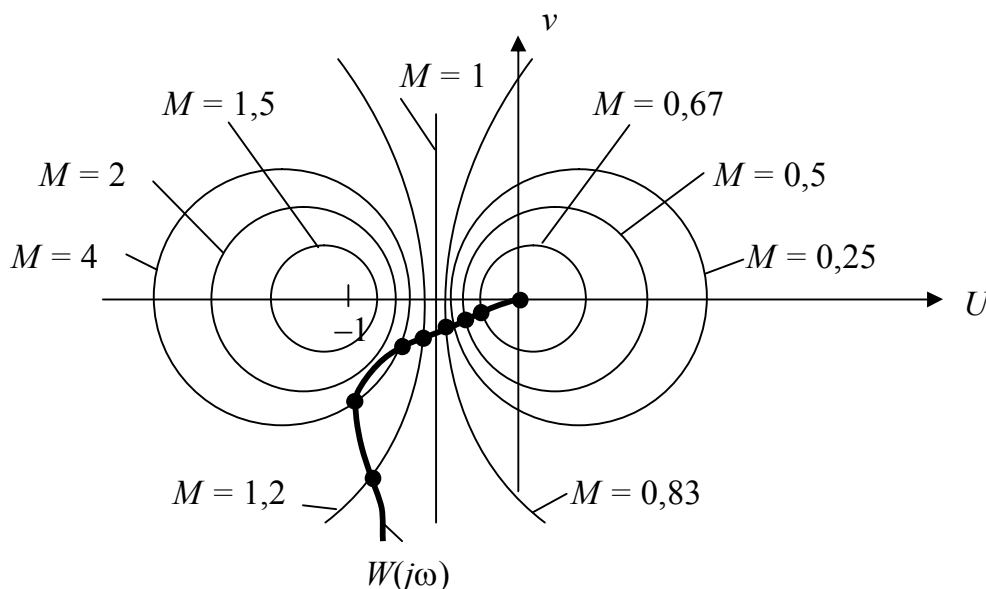


Рис. 45. Семейство окружностей для различных показателей колебательности

На основе этого графика строится график модуля частотной характеристики. Находятся точки пересечения окружностей и годографа. Каждой такой точке соответствует значение модуля  $M$  (по окружностям) и значение частоты  $\omega$  (по годографу). Пара этих величин представляет координаты точки искомой характеристики (рис. 46).

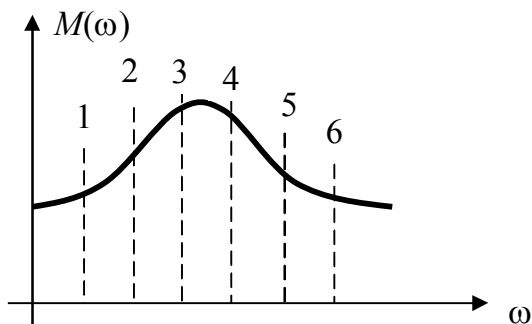


Рис. 46 Построение графика модуля частотной передаточной функции замкнутой системы

Иногда достаточно определить максимальное значение  $M_{\text{MAX}}$  (по касанию АФХ соответствующей окружности).

Возможно решение обратной задачи: задается допустимое значение показателя  $M_{\text{доп}}$ . Необходимо соответствующим образом спроектировать систему.

Для выполнения этого условия нужно обеспечить, чтобы годограф САУ не заходил в область, ограниченную окружностью с заданным значением  $M$  (рис. 47).

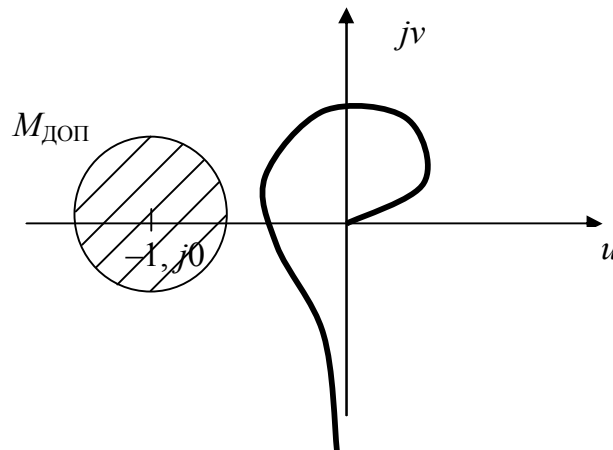


Рис. 47. Допустимая зона параметров САУ по показателю колебательности

### 9.3.5. Интегральные оценки качества

Это такие оценки, которые одним числом (величиной, параметром) позволяют оценить несколько показателей качества (см. рис. 40).

Например, при помощи соответствующей интегральной оценки можно оценить время переходного процесса и перерегулирование. Эта величина позволяет узнать динамическую ошибку САУ.

В простейшем случае оценку можно получить по формуле:

$$I_0 = \int_0^{+\infty} x(t) dt .$$

Известна формула преобразования Лапласа:

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt .$$

В результате сравнения этих двух уравнений можно получить удобную формулу, позволяющую не вычислять выходной сигнал:

$$I_0 = \lim_{p \rightarrow 0} X(p) .$$

Однако данное соотношение имеет ограниченное применение: оно подходит только для монотонных процессов. Для колебательных процессов используется квадратичная оценка:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x^2(t) dt.$$

Применяют и другие виды оценок качества, учитывающие изменение скорости, ускорения выходного сигнала. При этом в соответствующих выражениях используются зависимости от производных сигнала.

## 10. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ

### 10.1. СПОСОБЫ СИНТЕЗА САУ

Главные цели проектирования САУ – обеспечение устойчивости системы и обеспечение требуемого качества переходного процесса.

Достичь этих целей можно двумя способами.

1. Изменение параметров системы, т. е. изменение параметров звеньев (коэффициент усиления, постоянная времени). В ряде случаев такой подход не приводит к желаемому результату.

2. Изменение структуры системы. Обычно это введение дополнительных устройств или блоков (корректирующих устройств).

Рассмотрим подробнее второй подход.

В теории САУ различают 4 вида корректирующих устройств.

1. Последовательные корректирующие устройства (корректирующие фильтры).

2. Параллельные корректирующие устройства, обычно в виде местной обратной связи.

3. Корректирующие устройства по внешнему воздействию.

4. Неединичная главная обратная связь.

### 10.2. ТИПЫ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

#### 10.2.1. Последовательные корректирующие устройства

Способ их включения в структуру САУ представлен на рис. 48.

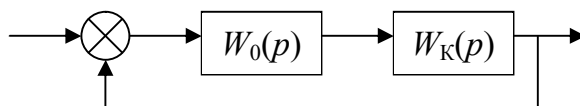


Рис. 48. Последовательное корректирующее устройство

$W_0(p)$  – передаточная функция разомкнутой САУ в исходном состоянии;

$W_K(p)$  – передаточная функция корректирующего звена.

Рассмотрим несколько частных случаев.

#### 1. Пропорциональное звено.

Использование такого звена является простейшим случаем коррекции.

Как было рассмотрено выше, звено описывается соотношениями:

$$W_K(p) = k_1;$$

$$A(\omega) = A_0(\omega) \cdot k_1;$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega).$$

При этом повышается статическая точность системы, но снижается устойчивость и качество переходного процесса. Такое звено используется редко.

#### 2. Интегрирующее корректирующее звено.

Его характеристики имеют вид:

$$W_K(p) = \frac{k_1}{p};$$

$$L(\omega) = 20 \lg k_1 - 20 \lg \omega;$$

$$\varphi(\omega) = -\pi / 2.$$

Повышается порядок астатизма системы. Однако переходный процесс затягивается и ухудшается устойчивость САУ. Вносятся отрицательный сдвиг фаз и происходит подавление высоких частот.

#### 3. Дифференцирующее корректирующее звено.

Звено описывается соотношениями:

$$W_K(p) = k_1 p;$$

$$L(\omega) = 20 \lg k_1 + 20 \lg \omega;$$

$$\varphi(\omega) = \pi / 2.$$

Звено подавляет низкие частоты и вносит положительный сдвиг фаз. Однако подавление низких частот обычно недопустимо, т. к. снижает общий результирующий коэффициент усиления САУ.

#### 4. Интегро-дифференцирующее звено.

Один из вариантов имеет характеристику

$$W_K(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)};$$

$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} + 20 \lg \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2} - \\ - 20 \lg \sqrt{1 + T_3^2 \omega^2} - 20 \lg \sqrt{1 + T_4^2 \omega^2};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T_1 + \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3 - \arctg \omega T_4.$$

Такое звено представляет собой полосовой фильтр: происходит подавление частот в некотором диапазоне. Вносимый фазовый сдвиг меняет значение от отрицательного до положительного.

### 10.2.2. Параллельные корректирующие устройства.

Их удобно применять при использовании сложных законов управления, когда наряду с основным сигналом вводятся его производные или интегралы.

#### 1. Введение производной от ошибки (рис. 49).

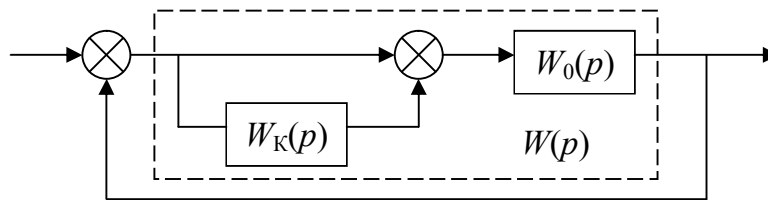


Рис. 49. Параллельное корректирующее устройство

Применяется дифференцирующее звено с характеристикой

$$W_K(p) = p \cdot T.$$

Получаем результирующие характеристики разомкнутой САУ:

$$W(p) = W_0(p)(1 + W_K(p));$$

$$A(\omega) = A_0(\omega) \sqrt{1 + T^2 \omega^2};$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \arctg T \omega.$$

Происходит поднятие верхних частот, улучшается скорость реакции САУ, вносится положительный сдвиг фаз.

#### 2. Местная обратная связь

Как известно, обратная связь бывает отрицательной и положительной, а также жесткой и гибкой.

Жесткая – это постоянно действующая; гибкая – действует только во время переходного процесса.

Рассмотрим варианты использования такого способа коррекции.

### 2.1. Положительная жесткая обратная связь.

В качестве исходного звена рассмотрим инерционное звено первого порядка, в качестве корректирующего – пропорциональное (рис. 50).

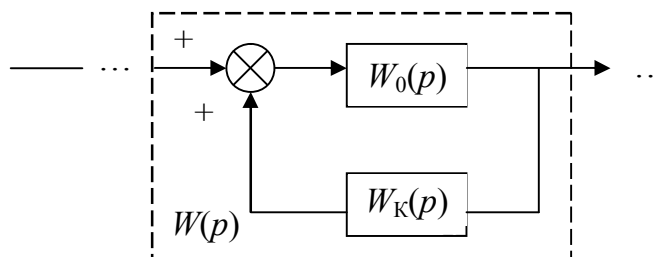


Рис. 50. Положительная жесткая обратная связь

Параметры звеньев следующие:

$$W_0(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1};$$

$$W_K(p) = K_K.$$

Передаточная функция результирующего звена

$$W(p) = \frac{K_1}{T_1 \cdot p + 1};$$

$$K_1 = \frac{K}{1 - KK_K};$$

$$T_1 = \frac{T}{1 - KK_K}.$$

Тип звена не изменился. Коэффициент усиления увеличился, но возросла и постоянная времени звена, т. е. переходный процесс стал медленней, что является недостатком.

### 2.2. Отрицательная жесткая обратная связь.

а. Рассмотрим звенья с теми же параметрами (рис. 51).

Передаточная функция результирующего звена

$$W(p) = \frac{K_1}{T_1 \cdot p + 1};$$

$$K_1 = \frac{K}{1 + KK_K};$$

$$T_1 = \frac{T}{1 + KK_K}.$$

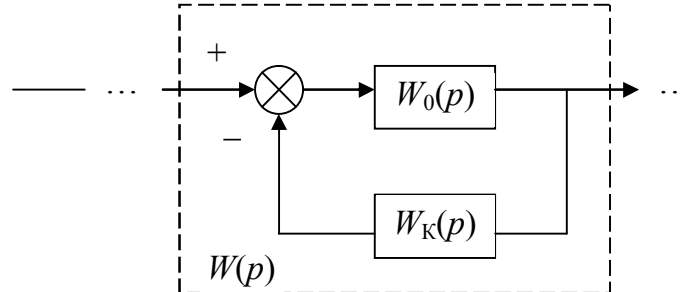


Рис. 51 . Отрицательная жесткая обратная связь

Параметры звена улучшились за счет уменьшения его инерционности (уменьшение постоянной времени). Некоторое снижение общего коэффициента усиления ( $K_1$ ) можно компенсировать другими звеньями.

б. Исходное звено – интегрирующее, корректирующее – пропорциональное.

Как известно, интегрирующее звено является неустойчивым.

Его передаточная функция  $W_0(p) = \frac{K}{p}$ .

Передаточная функция результирующего звена

$$W(p) = \frac{K_1}{T_1 \cdot p + 1};$$

$$K_1 = \frac{1}{K_K};$$

$$T_1 = \frac{1}{KK_K}.$$

Результирующее звено стало апериодическим и приобрело устойчивость.

3. Гибкая отрицательная обратная связь.

Рассмотрим колебательное звено с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}.$$



Корректирующим звеном является дифференцирующее звено с передаточной функцией  $W_K(p) = K_K \cdot p$ .

Результирующая передаточная функция имеет вид:

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi_1 T p + 1};$$

$$\xi_1 = \xi + \frac{K K_K}{2T}.$$

Характер звена не изменился, однако коэффициент затухания увеличился, а коэффициент передачи остался прежним. Переходный процесс стал менее колебательным (увеличились демпфирующие свойства системы). Более того, можно таким образом подобрать параметры корректирующего звена, что результирующее звено станет апериодическим звеном второго порядка (если коэффициент затухания станет больше единицы).

### 10.2.3. Коррекция по внешнему воздействию

Как известно, основной принцип автоматического управления – это формирование управляющего сигнала по величине ошибки.

Если вводится корректирующее устройство по внешнему воздействию, то имеет место комбинированное управление: по ошибке и по внешнему воздействию. Управление по ошибке представляет собой замкнутый контур управления, а коррекция по внешнему воздействию – разомкнутый контур.

В этом случае, при определенных условиях, установившуюся ошибку САУ можно свести к нулю при любой форме внешнего воздействия. Это свойство называется инвариантностью (независимость, нечувствительность) системы к внешнему воздействию.

Как известно, входными воздействиями являются задающее и возмущающее. Рассмотрим оба варианта коррекции.

#### 1. Коррекция по задающему воздействию.

Структурная схема САУ имеет вид (рис. 52).

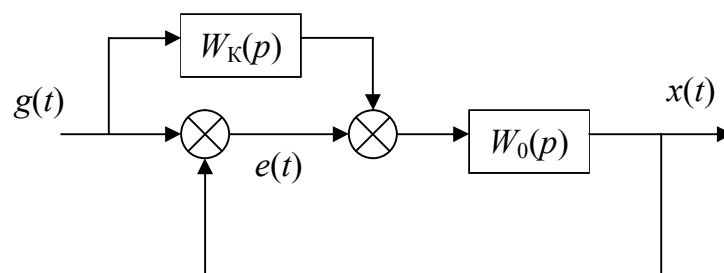


Рис. 52. Коррекция по задающему воздействию

Найдем эквивалентную передаточную функцию замкнутой системы по задающему воздействию

$$\Phi_{\text{ЭКВ}}(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)} (1 + W_K(p)) = \frac{X(p)}{G(p)}.$$

Аналогично, можно найти передаточную функцию замкнутой системы по ошибке

$$\Phi_e(p) = 1 - \Phi_{\text{ЭКВ}}(p) = \frac{1 - W_K(p)W_0(p)}{1 + W_0(p)} = \frac{E(p)}{G(p)},$$

где  $\frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)}$  – это передаточная функция исходной замкнутой системы.

Можно заметить, что знаменатели функций после введения корректирующего звена не изменились.

Так как  $1 + W_0(p)$  – это характеристический полином системы, определяющий вид переходного процесса САУ, то можно сделать вывод, что вид переходного процесса после введения корректирующего звена не меняется, следовательно, не меняется устойчивость системы.

Найдем условие равенства нулю установившейся ошибки.

Это условие обеспечивается, если передаточная функция замкнутой системы по ошибке будет равна 0. Отсюда следует, что

$$W_K(p) = \frac{1}{W_0(p)}.$$

Это выражение можно представить в виде ряда

$$W_K(p) = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots$$

Ряд бесконечный, следовательно, полной инвариантности САУ достичь невозможно (нужно брать бесконечное число производных от входного сигнала). Поэтому ограничиваются частичной инвариантностью, т. е. в передаточной функции корректирующего звена оставляют несколько первых членов ряда.

## 2. Коррекция по возмущению.

Структурная схема САУ без коррекции имеет вид (рис. 53).

Введем корректирующее звено (рис. 54).

Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию будет иметь вид:

$$\Phi_f(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{(W_f(p) - W_K(p)W_1(p))W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}.$$

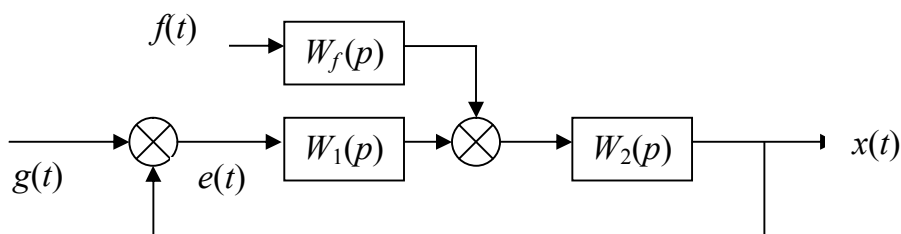


Рис. 53. Структура САУ с возмущающим воздействием

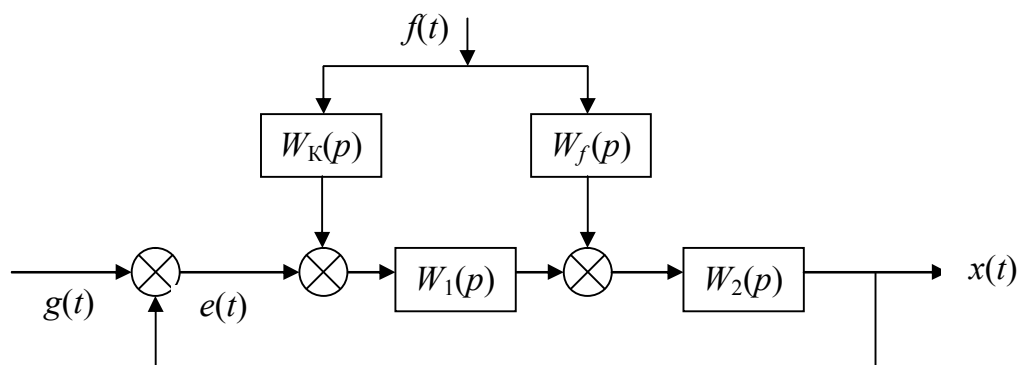


Рис. 54. Коррекция по возмущению

Чтобы устранить влияние на выходной сигнал возмущающего воздействия, нужно обеспечить  $\Phi_f(p) = 0$ . При этом получим

$$W_K(p) = \frac{W_f(p)}{W_1(p)}.$$

Это выражение можно представить в виде ряда

$$W_K(p) = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots$$

Ряд бесконечный, следовательно, полной инвариантности САУ достичь невозможно (нужно брать бесконечное число производных от сигнала). Поэтому ограничиваются частичной инвариантностью, т. е. в передаточной функции корректирующего звена оставляют несколько первых членов ряда.

#### 10.2.4. Неединичная главная обратная связь

Структурная схема САУ имеет вид (рис. 55).

Входной сигнал  $g(t)$  сравнивается не с выходным  $x(t)$ , а с промежуточным  $z(t)$ .

Передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{W_0(p)}{1 + W_K(p)W_0(p)}.$$

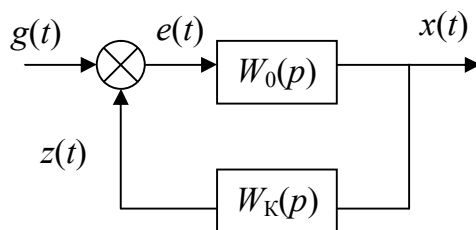


Рис. 55. Неединичная главная обратная связь

Полная инвариантность достигается, когда входной и выходной сигналы совпадают, т. е. числитель и знаменатель этого выражения равны. Отсюда следует:

$$W_K(p) = 1 - \frac{1}{W_0(p)} = \tau_0 - (\tau_1 p + \tau_2 p^2 + \dots).$$

Имеет место положительная обратная связь по производной.

Недостаток данного подхода состоит в том, что в этом случае меняется характеристическое уравнение системы, следовательно, ухудшается устойчивость САУ и меняется вид переходного процесса.

### 10.3. ПРИМЕР СИНТЕЗА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КОРРЕКТИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

Его удобно выполнять по логарифмическим характеристикам.

Последовательность действий следующая.

1. Строятся логарифмические характеристики исходной системы  $L_0(\omega)$  и  $\varphi_0(\omega)$ .
2. На основе анализа ЛАЧХ и ЛФЧХ (например, анализируется устойчивость САУ) строится желаемая ЛАЧХ  $L_{\text{ж}}(\omega)$ .
3. Находится геометрическая разность имеющихся графиков и получается характеристика корректирующего звена  $L_K(\omega)$ .
4. ЛАЧХ корректирующего звена аппроксимируется.
5. Выводится формула передаточной функции корректирующего устройства.

Данный алгоритм поясняется на рис. 56.

Желательно, чтобы ЛАЧХ на частоте среза имела наклон  $-20$  дБ/дек или  $-40$  дБ/дек для обеспечения качества переходного процесса и устойчивости.

Аппроксимацию в данном примере делать не надо, т. к. наклоны характеристики стандартные.

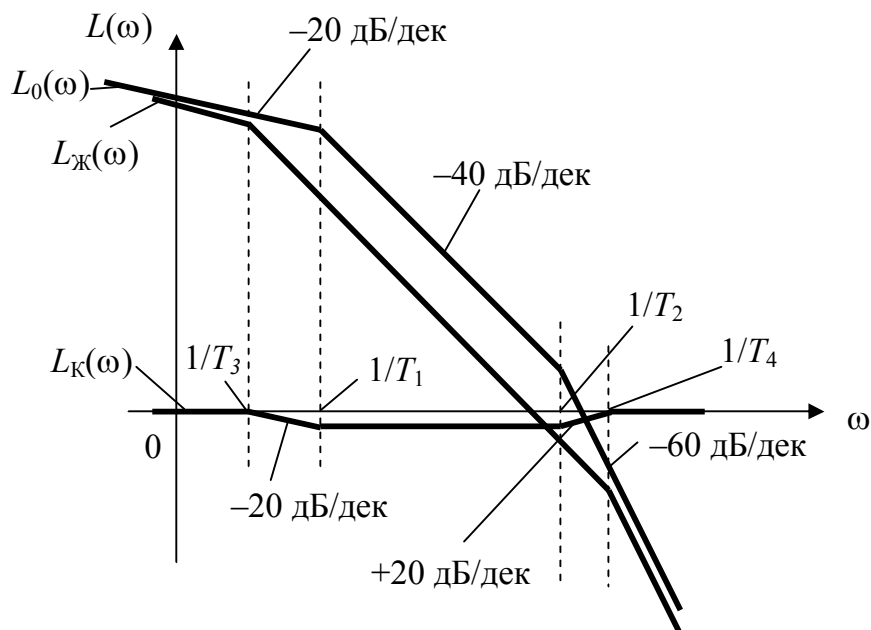


Рис. 56. Пример синтеза последовательного корректирующего устройства

Передаточная функция имеет вид:

$$W_K(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}.$$

#### 10.4. ПРИМЕР СИНТЕЗА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОРРЕКТИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

Структурная схема САУ имеет вид (рис. 57).

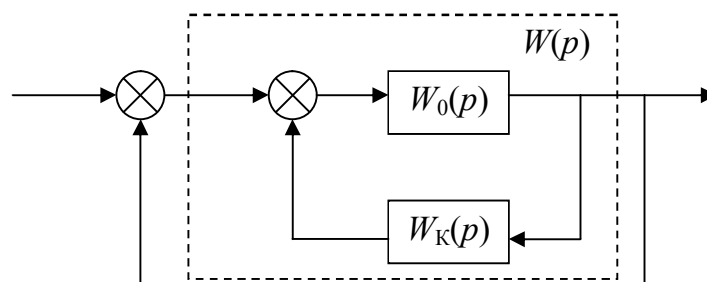


Рис. 57. Коррекция в виде местной обратной связи

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)W_K(p)}.$$

Если считать, что  $W_0(p)W_K(p) \gg 1$  или  $L_0(\omega) + L_K(\omega) \gg 0$ , то получится приближенное выражение

$$W(p) \approx \frac{1}{W_K(p)},$$

или для ЛАЧХ  $L_0(\omega) \approx -L_K(\omega)$ .

В результате получается следующая последовательность действий.

1. Строятся логарифмические характеристики исходной системы,  $L_0(\omega)$  и  $\varphi_0(\omega)$ .

2. Из заданных критериев качества строится желаемая характеристика  $L_{\text{ж}}(\omega)$ .

3. Определяется интервал частот, в котором выполняется условие  $W_0(p)W_K(p) \gg 1$ .

4. Находится логарифмическая характеристика корректирующего устройства  $L_K(\omega)$ .

5. ЛАЧХ корректирующего звена аппроксимируется.

6. Определяется передаточная функция  $W_K(p)$ .

Графические зависимости представлены на рис. 58.

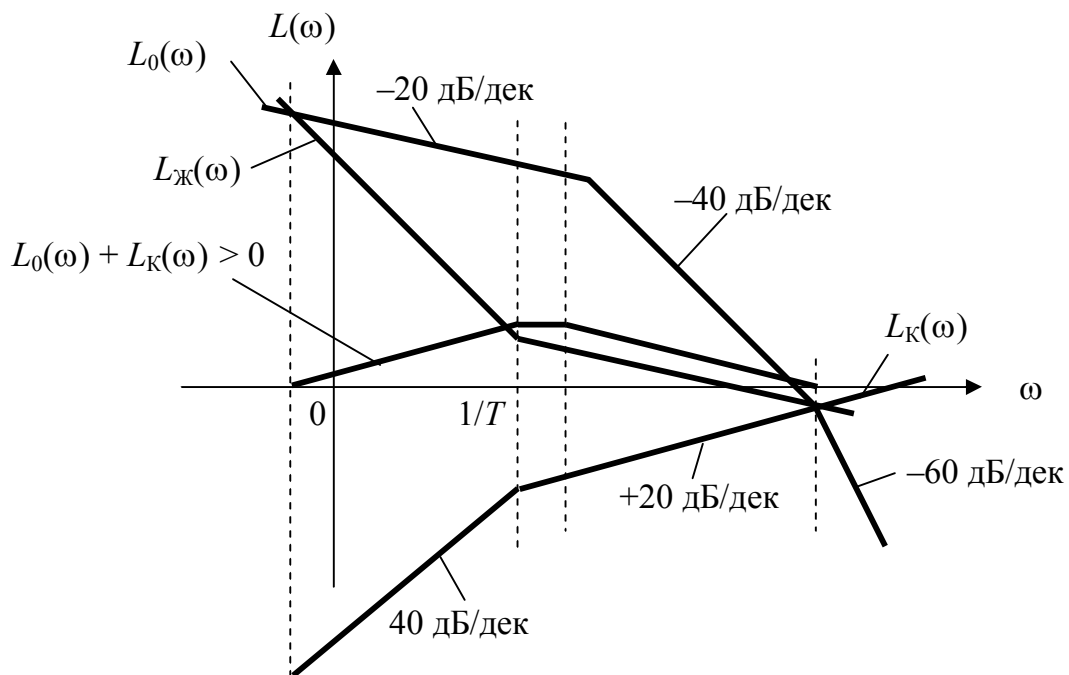


Рис. 58. Пример синтеза параллельного корректирующего устройства

Передаточная функция корректирующего устройства следующая

$$W_K(p) = \frac{p^2}{T \cdot p + 1}.$$

## 11. ПРИМЕР РАЗРАБОТКИ САУ

### 11.1. ЗАДАНИЕ

Необходимо выполнить следующие действия.

1. Описать работу системы.

2. Определить передаточные функции элементов системы.
3. Составить структурную схему системы.
4. Построить логарифмические характеристики разомкнутой системы.
5. Определить устойчивость и запас устойчивости по амплитуде и фазе.
6. С помощью критерия Гурвица определить критическое значение добротности системы без обратной связи.
7. Ввести скоростную обратную связь.
8. Найти минимальное значение коэффициента скоростной обратной связи, необходимого для устойчивости системы.
9. Найти оптимальное значение коэффициента скоростной обратной связи, необходимого для обеспечения показателей качества переходного процесса системы.

Исходная схема САУ (рис. 59):

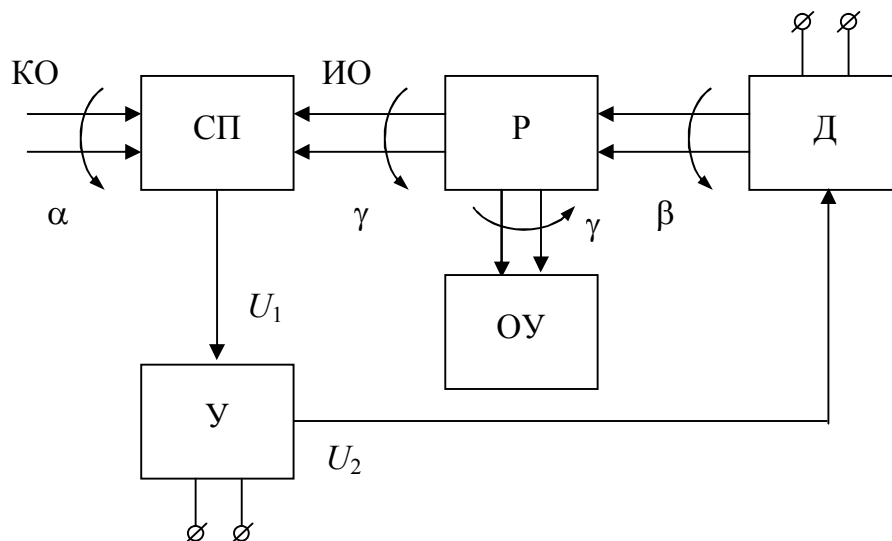


Рис. 59. Исходная схема системы

где СП – сельсинная пара;  
 Р – редуктор;  
 Д – двигатель;  
 ОУ – объект управления;  
 У – усилитель;  
 КО – командная ось;  
 ИО – исполнительная ось;  
 $\alpha$  – угол поворота сельсин-датчика – это командное воздействие;  
 $\beta$  – угол поворота двигателя;  
 $\gamma$  – угол поворота редуктора – это исполнительное воздействие;  
 $U_1$  – выходной сигнал СП;

$U_2$  – выходной сигнал У;

Параметры САУ:

$U_{\text{MAX}}$  – максимальное напряжение на выходе сельсин-трансформатора;

$k_y$  – коэффициент усиления У;

$T_y$  – постоянная времени У;

$U_y$  – номинальное напряжение на обмотке управления двигателя;

$N_{\text{XX}}$  – число оборотов в минуту при холостом ходе двигателя и при номинальном напряжении двигателя;

$T_d$  – постоянная времени Д;

$i$  – передаточное число редуктора;

$S_{\text{ТГ}}$  – крутизна выходной характеристики тахогенератора;

$t_{\text{РЕГ}}$  – время регулирования;

$\sigma$  – величина перерегулирования;

$n$  – число полных колебаний выходного сигнала.

Исходные данные:

$k_y = 900$ ;

$T_y = 0.01$  с;

$T_d = 0.052$  с;

$i = 1.2 \cdot 10^3$ ;

$U_{\text{MAX}} = 5$  В;

$U_y = 30$  В;

$N_{\text{XX}} = 10000$  об/мин;

$S_{\text{ТГ}} = 0.001$  В · с/рад;

$t_{\text{РЕГ}} \leq 1$  с;

$\sigma \leq 30\%$ ;

$n = 1,5$ .

## 11.2. ОПИСАНИЕ РАБОТЫ СИСТЕМЫ

Из схемы системы, приведённой в задании видно (см. рис. 59), что задающим устройством является командная ось, вращаемая сельсин-датчиком по произвольному закону  $\alpha = \alpha(t)$ . Тот же самый закон угла поворота во времени  $\alpha(t) = \gamma(t)$  должен быть автоматически воспроизведён на выходе системы, т. е. на объект управления и на исполнительную ось. Если углы поворота командной и исполнительной оси не равны, ( $\alpha(t) \neq \gamma(t)$ ), то на выходе сельсинной пары возникает напряжение рассогласования  $U_1$ . Величина  $U_1$  зависит от величины углов поворота командной и исполнительной осей. Напряжение  $U_1$  поступает на вход усилителя, на выходе ко-



торого возникает напряжение  $U_2$ , поступающее на обмотку управления двигателя. В результате этого начинает вращаться ротор двигателя в сторону уменьшения ошибки рассогласования ( $\theta = \alpha - \gamma$ ) до согласования двух осей. То есть поворот ротора двигателя через редуктор задаёт новый закон угла поворота исполнительной оси. Ротор двигателя будет вращаться до тех пор, пока ошибка рассогласования не будет сведена к нулю, после чего он остановится. Таким образом, система охвачена отрицательной обратной связью.

### 11.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ

Для нахождения передаточных функций элементов системы, приведенной в задании, определим сначала их дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения составляем на основе принципа действия.

#### 1. Сельсинная пара

Сельсинную пару можно с достаточной для практики точностью считать безынерционной. Поэтому её дифференциальное уравнение имеет вид:

$$U_1 = k_{СП} \cdot \theta,$$

где  $\theta = \alpha - \gamma$  – ошибка рассогласования, равная разности углов поворота КО и ИО;

$k_{СП}$  – коэффициент передачи СП.

Передаточная функция СП имеет вид:

$$W_{СП}(p) = \frac{U_1(p)}{\theta(p)} = k_{СП};$$

$$k_{СП} = U_{МАХ}, \quad k_{СП} = 5 \text{ В/рад.}$$

#### 2. Усилитель

Усилитель – апериодическое звено первого порядка, поэтому его дифференциальное уравнение имеет вид:

$$T \frac{dU_2}{dt} + U_2 = U_1 \cdot k_Y;$$

$$T_Y \cdot U_2 \cdot p + U_2 = U_1 \cdot k_Y,$$

где  $p = \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования.

$$(T_Y \cdot p + 1)U_2 = U_1 \cdot k_Y.$$

Передаточная функция усилителя имеет вид:

$$W_y(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{k_y}{1 + T_y \cdot p};$$

$$T_y = 0,01 \text{ с}; k_y = 900.$$

### 3. Двигатель.

Двигатель – интегрирующее звено с замедлением, т. к. в качестве выходной величины двигателя рассматривается угол поворота, а не угловая скорость. Угол поворота является интегралом от угловой скорости.

Данное звено описывается следующим дифференциальным уравнением

$$T_D \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{d\beta}{dt} = k_D \cdot U_2;$$

$$p \cdot \beta \cdot (1 + T_D \cdot p) = k_D \cdot U_2.$$

Передаточная функция звена имеет вид:

$$W_D(p) = \frac{\beta(p)}{U_2(p)} = \frac{k_D}{p(1 + T_D p)},$$

где  $k_D$  – коэффициент передачи двигателя по скорости.

Определим  $k_D$  по формуле

$$k_D = \frac{\Omega_{XX}}{U_y},$$

где  $\Omega_{XX}$  – угловая скорость двигателя, определяемая по формуле

$$\Omega_{XX} = \frac{\pi \cdot N_{XX}}{30}.$$

Тогда имеем

$$k_D = \frac{\pi \cdot N_{XX}}{30 \cdot U_y}; \quad k_D = 34,9 \text{ рад/В} \cdot \text{с}.$$

### 4. Редуктор

Редуктор – безынерционное звено, поэтому оно описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\gamma = k_p \cdot \beta,$$

где  $k_p$  – коэффициент передачи редуктора.

Передаточная функция редуктора

$$W_p(p) = \frac{\gamma(p)}{\beta(p)} = k_p.$$

$k_p$  определим по следующей формуле:

$$k_p = \frac{1}{i}, \quad k_p = 8,3 \cdot 10^{-4}.$$

#### 11.4. ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ СХЕМЫ СИСТЕМЫ

При построении структурной схемы системы, приведенной в задании, воспользуемся передаточными функциями элементов, которые были получены выше. Полученная структурная схема системы изображена на рис. 60.

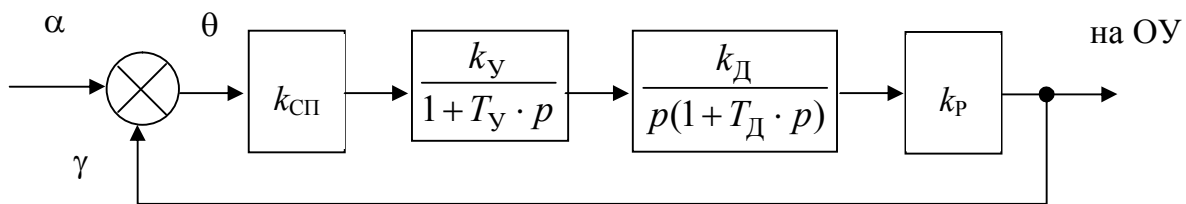


Рис.60. Структурная схема системы

#### 11.5. ПОСТРОЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Для построения логарифмических частотных характеристик необходимо найти передаточную функцию всей системы. Так как данная система состоит из включенных последовательно звеньев, то передаточная функция разомкнутой системы будет равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = \prod_{i=1}^4 W_i(p) = W_{СП}(p) \cdot W_y(p) \cdot W_Д(p) \cdot W_p(p);$$

$$W(p) = \frac{k}{p \cdot (1 + T_y p) \cdot (1 + T_Д p)}, \quad (4)$$

где  $k$  – общий коэффициент усиления разомкнутой цепи.

В выражении (4) параметры  $k$ ,  $T_Y$ ,  $T_D$  имеют следующие числовые значения:

$$k = 130,35 \text{ (1/с)};$$

$$T_Y = 0,01 \text{ с};$$

$$T_D = 0,052 \text{ с}.$$

1. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

ЛАЧХ следящей системы с передаточной функцией (4) имеет следующий вид:

$$L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{k}{j\omega(1 + j\omega T_Y)(1 + j\omega T_D)} \right|;$$

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{\omega^2 [1 + (\omega T_Y)^2]} [1 + (\omega T_D)^2]};$$

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T_Y)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T_D)^2}.$$

Учитывая, что наибольшей постоянной времени соответствует наименьшее значение частоты, определяем сопрягающие частоты, начиная с меньшей:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_D}, \quad \omega_1 = \frac{1}{0,052} = 19,2 \text{ (1/с)};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_Y}, \quad \omega_2 = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ (1/с)}.$$

Переходя к декадам, получаем:

$$\omega_1 = \lg 19,2 = 1,28 \text{ декады};$$

$$\omega_2 = \lg 100 = 2 \text{ декады}.$$

Наносим сопрягающие частоты на график (рис. 61).

Находим точку  $20 \lg k = 42,3$  дБ и наносим её на верхний график.

Учитывая, что  $\nu = 1$  (где  $\nu$  – число, указывающее на порядок астатизма системы), т. к. в знаменателе равенства (4) стоит  $p$ , проводим низкочастотную асимптоту с наклоном  $1 \cdot (-20) = -20$  дБ/дек до точки, соответствующей  $\omega_1 = 1,28$  декады, с таким расчётом, чтобы эта асимптота пересекала ось ординат в точке 42,3 дБ.

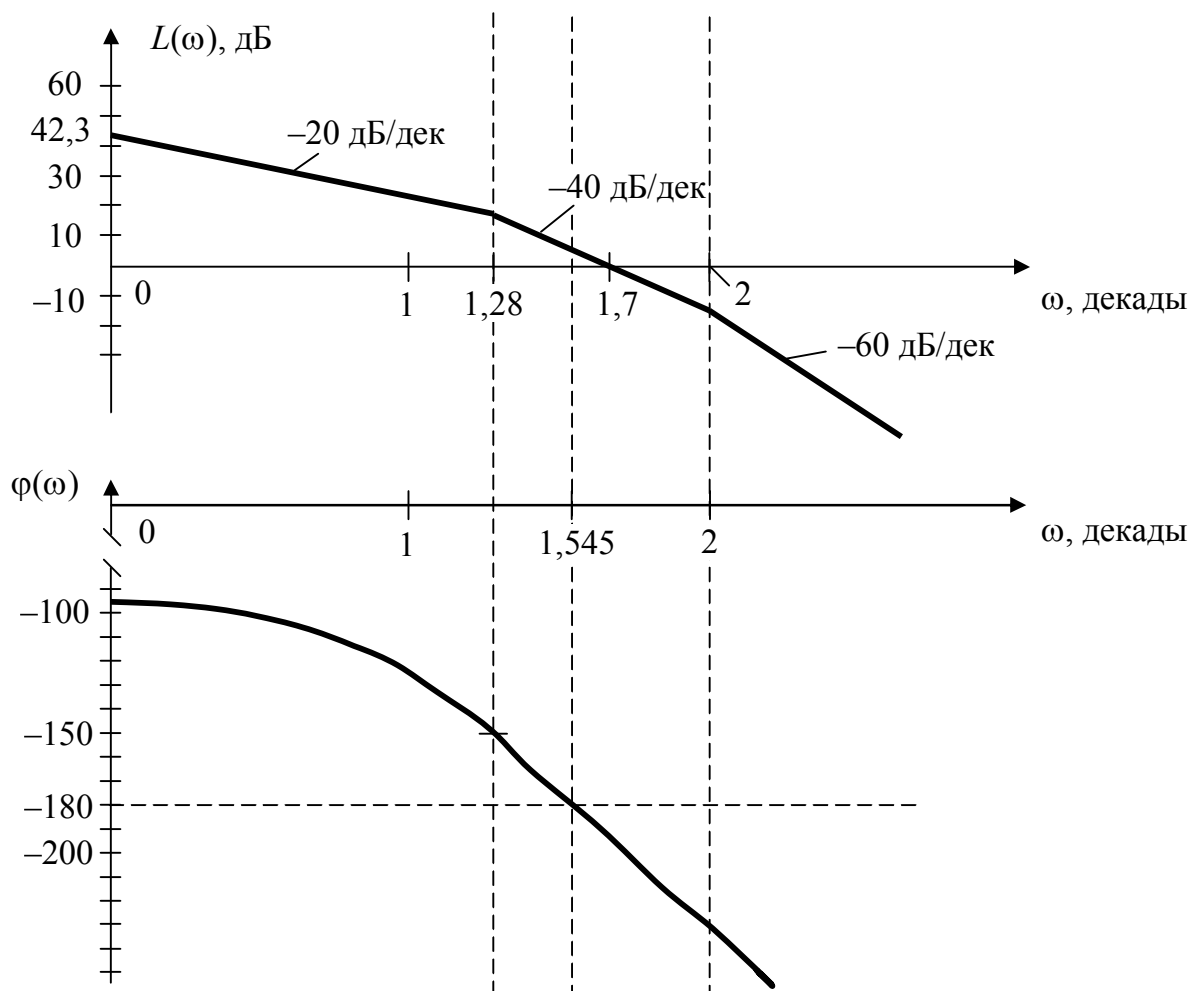


Рис. 61. ЛАЧХ и ЛФЧХ системы без обратной связи

Так как постоянная  $T_D$ , определяющая частоту  $\omega_1$ , стоит в знаменателе передаточной функции (4), то увеличиваем наклон следующего участка характеристики на 20 дБ/дек (отклоняем характеристику вниз) и проводим его с наклоном  $-40$  дБ/дек до точки, соответствующей  $\omega_1 = 2$  декадам.

Постоянная времени  $T_y$ , определяющая частоту  $\omega_2$ , стоит в знаменателе выражения (4), поэтому наклон следующего участка увеличиваем на 20 дБ/дек и проводим её последний участок с наклоном  $-60$  дБ/дек

Полученная ЛАЧХ изображена на рис. 61 (верхний график).

## 2. Логарифмическая фазочастотная характеристика.

Формула ЛФЧХ следящей системы с передаточной функцией (4) имеет следующий вид:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} T_D \omega - \operatorname{arctg} T_y \omega.$$

Это выражение позволяет построить  $\varphi(\omega)$  двумя способами:

- по точкам;
- как сумму ординат ЛФЧХ двух апериодических звеньев с постоянными времени  $T_D$ ,  $T_y$  и интегрирующего звена.

Построим ЛФЧХ по точкам.

Наносим сопрягающие частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , рассчитанные для ЛАЧХ, на график (см. рис. 61). Далее строим ЛФЧХ по значениям, приведенным в табл. 2.

Таблица 2

Значения ЛФЧХ

$\omega$		$\varphi(\omega)$	
$c^{-1}$	дек	град	рад
1	0	-93,9	-1,48
2	0,3	-97,9	-1,54
3	0,48	-101,8	-1,6
4	0,6	-105,6	-1,66
5	0,7	-109,4	-1,72
6	0,78	-113,1	-1,78
7	0,85	-116,8	-1,83
8	0,9	-120,2	-1,89
9	0,95	-123,6	-1,94
10	1	-126,9	-1,99
20	1,3	-153,8	-2,42
30	1,48	-172,3	-2,71
40	1,6	-185,7	-2,92
50	1,7	-196,14	-3,08

$\omega$		$\varphi(\omega)$	
$c^{-1}$	дек	град	рад
60	1,78	-204,7	-3,21
70	1,85	-211,2	-3,33
80	1,9	-217,2	-3,42
90	1,95	-223,2	-3,51
100	2	-227,9	-3,58
110	2,04	-232	-3,64
120	2,08	-235,7	-3,7
130	2,11	-238,9	-3,75
140	2,15	-241,8	-3,79
150	2,18	-244,4	-3,84
160	2,2	-246,8	-3,88
170	2,23	-248,9	-3,91
180	2,26	-250,9	-3,94
190	2,28	-252,7	-3,96
200	2,3	-254,3	-3,99

Полученная ЛФЧХ изображена на рис. 61 (нижний график).

## 11.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ ПО АМПЛИТУДЕ И ФАЗЕ

По графикам, приведенным на рис. 61, видно, что данная следящая система неустойчивая, т. к. ЛФЧХ пересекает прямую  $\varphi = -180^\circ$  в пределах положительной ЛАЧХ.

Следовательно, для данной системы запаса устойчивости по амплитуде и фазе нет.

## 11.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ ДОБРОТНОСТИ С ПОМОЩЬЮ КРИТЕРИЯ ГУРВИЦА

Для определения критического значения добротности с помощью критерия Гурвица необходимо составить характеристическое уравнение системы. Для этого представим передаточную функцию (4) в виде отношения двух полиномов:

$$W(p) = \frac{kN(p)}{M(p)}, \quad (5)$$

где  $k$  – общий коэффициент усиления разомкнутой системы, который часто называют добротностью системы;

$N(p)$  – полином числителя;

$M(p)$  – полином знаменателя.

При этом степень полинома в знаменателе больше, чем степень полинома в числителе.

Полиномы в выражении (5) имеют вид:

$$N(p) = 1;$$

$$M(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p,$$

где коэффициенты  $a_i$  имеют следующие выражения:

$$a_0 = T_Y \cdot T_D;$$

$$a_1 = T_D + T_Y;$$

$$a_2 = 1.$$

Далее запишем характеристический полином для выражения (5):

$$D(p) = kN(p) + M(p).$$

Приравняв его к нулю, получим характеристическое уравнение системы с передаточной функцией (4):

$$D(p) = kN(p) + M(p) = 0 \quad (6)$$

Это выражение можно записать и в более удобной форме:

$$D(p) = 1 + W(p) = 0 \quad (7)$$

Подставив значения полиномов в выражение (6), получим следующее характеристическое уравнение вида:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + k = 0.$$

Критическое значение добротности  $Q_{\text{кр}} = k_{\text{кр}}$  определим из критерия устойчивости Гурвица. Для уравнения 3-го порядка критерий устойчивости имеет следующие условия:  $a_i > 0$ ;  $k > 0$ ;  $a_1 a_2 - a_0 k > 0$ .

Из последнего условия и определим  $Q_{\text{кр}}$ :

$$Q_{\text{кр}} = k_{\text{кр}} = \frac{a_1 a_2}{a_0}.$$

Подставив выражения коэффициентов  $a_i$ , получим, что

$$Q_{\text{кр}} = \frac{T_{\text{д}} + T_{\text{у}}}{T_{\text{д}} \cdot T_{\text{у}}} = \frac{1}{T_{\text{у}}} + \frac{1}{T_{\text{д}}};$$

$$Q_{\text{кр}} = 119,23 \text{ (1/с)}.$$

Определив  $Q_{\text{кр}}$ , подтвердили, что наша система неустойчива, т. к.  $Q_{\text{кр}} < k$ . Для того, чтобы система была устойчива, необходимо выполнение условия:

$$k < \frac{1}{T_{\text{у}}} + \frac{1}{T_{\text{д}}}.$$

## 11.8. ВВЕДЕНИЕ СКОРОСТНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Для того чтобы исходную систему (см. задание) сделать устойчивой, необходимо дополнительно ввести местную отрицательную обратную связь. Воспользуемся скоростной обратной связью. Для введения скоростной обратной связи в систему включается дифференцирующее звено – тахогенератор (ТГ) согласно рис. 62.

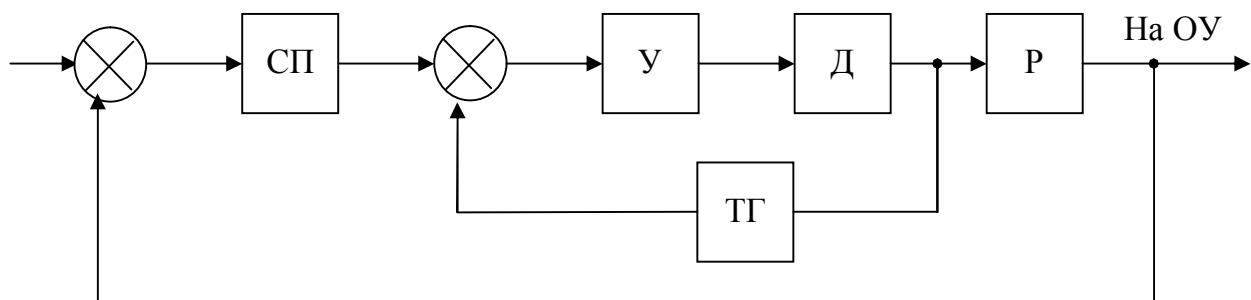


Рис. 62. Схема системы со скоростной обратной связью

Важным свойством скоростной обратной связи является способность уменьшать постоянные времени тех звеньев, которые она охватывает. Данная скоростная ОС охватывает 2 звена: усилитель и двигатель.



Перейдем к структурной схеме. Для этого найдем сначала передаточную функцию цепи скоростной обратной связи, т. е. передаточную функцию тахогенератора.

Так как тахогенератор – это дифференцирующее звено, то передаточная функция имеет вид:

$$W_{\text{ТГ}}(p) = k_{\text{ТГ}} \cdot p,$$

где  $k_{\text{ТГ}}$  – коэффициент передачи тахогенератора.

$$k_{\text{ТГ}} = S_{\text{ТГ}} \frac{30}{\pi};$$

$$k_{\text{ТГ}} = 9,55 \cdot 10^{-3} \left( \frac{\text{В}}{\text{рад} \cdot \text{с}} \right).$$

Структурная схема системы с отрицательной обратной связью будет иметь вид, приведенный на рис. 63.

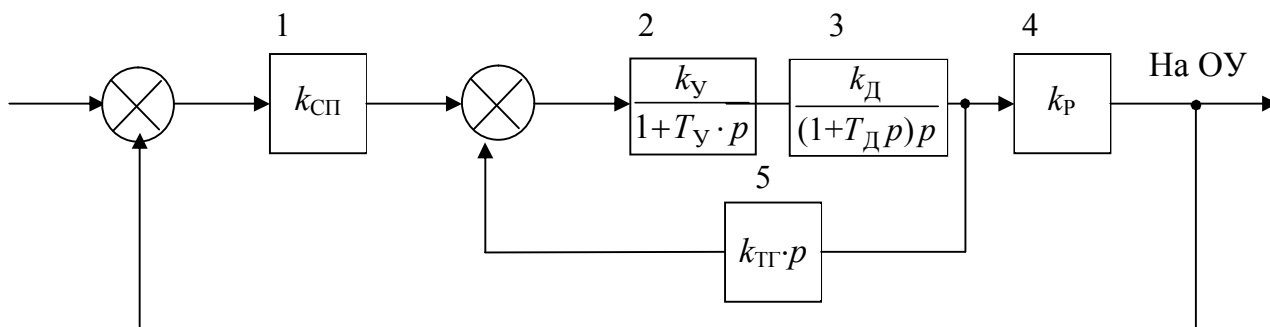


Рис. 63. Структурная схема системы с ОС

### 11.9. НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА СКОРОСТНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Для определения минимального коэффициента воспользуемся критерием устойчивости Гурвица. Но для этого сначала найдем результирующую передаточную функцию системы, представленной на рис. 63, и ее характеристическое уравнение. Эту передаточную функцию будем находить путем замены нескольких звеньев одним звеном с результирующей передаточной функцией для этих звеньев.

Заменяем блоки 2 и 3 на блок 2-3 с передаточной функцией:  $W_{2-3}(p) = W_{\text{У}}(p) \cdot W_{\text{Д}}(p)$ , т. к. блоки 2 и 3 соединены последовательно.

В результате замены получится следующая структурная схема (рис. 64).

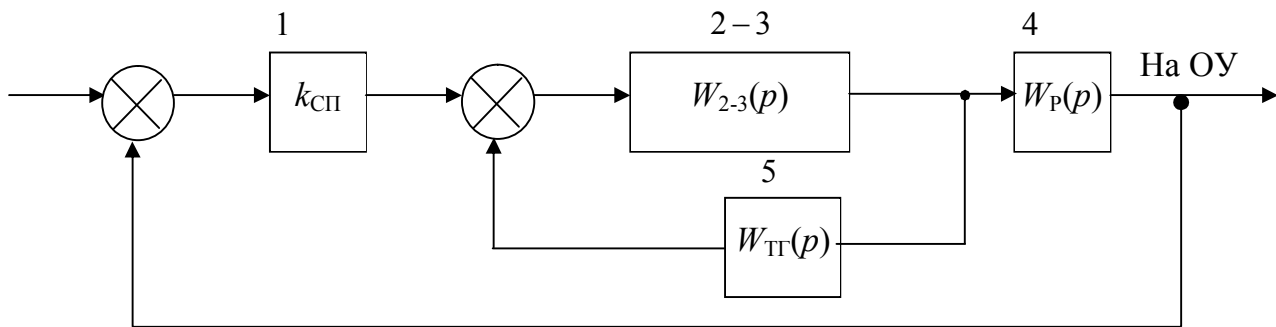


Рис. 64. Структурная схема системы с ОС после 1-го преобразования

Далее заменим блоки 2 – 3 и 5 одним блоком 2 – 3 – 5 с передаточной функцией:

$$W_{2-3-5}(p) = \frac{W_{2-3}(p)}{1 + W_{2-3}(p) \cdot W_{ТГ}(p)},$$

т. к. блок 5 выполнен в виде обратной связи. В результате этой замены получим схему (рис. 65):

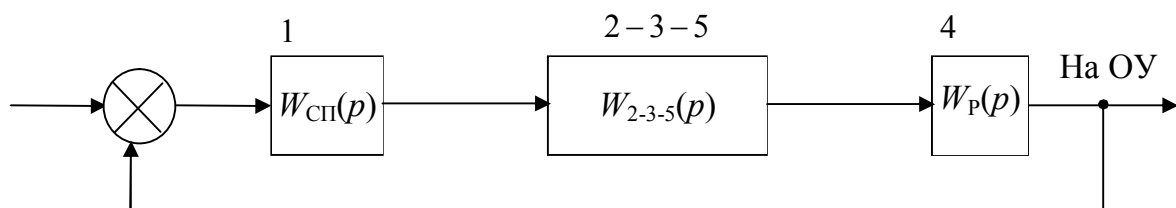


Рис. 65. Структурная схема системы с ОС после 2-го преобразования

Из этой схемы видно, что система состоит из трех последовательно соединенных звеньев, следовательно,  $W_{РЕЗ}$  будет определяться следующим образом:

$$W_{РЕЗ}(p) = W_{СП}(p) \cdot W_{2-3-5}(p) \cdot W_{Р}(p)$$

Подставив выражения передаточных функций в эту формулу, получим:

$$W_{РЕЗ}(p) = \frac{k_{СП} \cdot k_{У} \cdot k_{Д} \cdot k_{Р}}{T_{У} \cdot T_{Д} \cdot p^3 + (T_{У} + T_{Д})p^2 + [1 + k_{У}k_{Д}k_{ТГ}]p}. \quad (8)$$

Далее находим характеристическое уравнение системы с передаточной функцией (8) по формуле (7). Полученное уравнение будет иметь вид:

$$T_{У}T_{Д}p^2 + (T_{У} + T_{Д})p^2 + (1 + k_{У}k_{Д}k_{ТГ})p + k_{СП}k_{У}k_{Д}k_{Р} = 0.$$

Заменим коэффициенты в этом уравнении

$$a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0.$$

Исходя из этого уравнения третьего порядка, определяем критерий устойчивости Гурвица. По критерию Гурвица система будет устойчива, если будут выполняться следующие условия:

$$a_i > 0, \quad a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Из последнего условия и определяем минимальный коэффициент скоростной обратной связи  $k_{\text{ТГ}}$ . Подставив в это условие выражения  $a_i$  и выделив  $k_{\text{ТГ}}$ , получим:

$$k_{\text{ТГ}} > \frac{T_y T_d k_y k_{\text{СП}} k_d k_p - T_y - T_d}{k_y k_d (T_y + T_d)}.$$

Подставив значения переменных, получим:  $k_{\text{ТГ}} > 2,97 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В}}{\text{с} \cdot \text{рад}},$

следовательно  $k_{\text{ТГMIN}} = 2,97 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В}}{\text{с} \cdot \text{рад}}.$

#### 11.10 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА СКОРОСТНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Это коэффициент, обеспечивающий требуемые показатели качества переходного процесса.

Воспользуемся корневым методом. Он позволяет учесть эти показатели качества, не исследуя сам переходный процесс, а накладывая ограничения на корни характеристического уравнения.

В примере уравнение третьего порядка. Его можно представить в виде

$$(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) = 0,$$

где  $p_1, p_2, p_3$  – корни характеристического уравнения.

Согласно методу, система склонна к колебаниям, если корни комплексные, т. е.  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ . Корень  $p_3$  найдем через  $p_1$  и  $p_2$ .

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  через показатели качества высчитываются следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{T_0} \ln \frac{1}{\Delta};$$

$$\beta = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{1}{1-\xi}} = \varepsilon\mu,$$

где  $\varepsilon$  – степень устойчивости;

$$\Delta = 0,05;$$

$\xi$  – затухание за один период. Обычно лежит в диапазоне  $0,90 \dots 0,98$ ;

$\mu = 1,5$  – колебательность;

$T_0 = T_{\text{РЕГ}} = 1$  с – длительность переходного процесса.

В результате получим

$$p_{1,2} = -3 \pm j \cdot 4,5.$$

Корень  $p_3$  найдем из следующих соображений: берем исходное уравнение и приравняем все коэффициенты при переменных одной степени.

$$\frac{K_{\text{СП}} \cdot K_{\text{У}} \cdot K_{\text{Д}} \cdot K_{\text{Р}}}{T_{\text{У}} \cdot T_{\text{Д}}} = -p_1 p_2 p_3, \text{ следовательно, } p_3 = -8570.$$

Оптимальный коэффициент усиления тахогенератора находится из следующего соотношения:

$$\frac{1 + K_{\text{У}} \cdot K_{\text{Д}} \cdot K_{\text{ТГопт}}}{T_{\text{У}} \cdot T_{\text{Д}}} = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3.$$

Получаем:

$$K_{\text{ТГопт}} = 8,2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{В}}{\text{рад} \cdot \text{с}}.$$

Этот коэффициент больше минимального, рассчитанного выше, поэтому требования устойчивости соблюдаются.

## 12. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В САУ

### 12.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Выше были изучены процессы работы САУ при поступлении на ее вход детерминированных сигналов.

Во многих случаях входной сигнал может принимать случайные значения. При этом можно оценивать только вероятностные характеристики.

Пример случайного воздействия: следящая система доплеровского измерителя скорости. Спектральные характеристики процессов САУ в этом случае представлены на рис. 66.

Доплеровская частота  $\Omega$  зависит не только от скорости движения объекта, но и от угла падения луча и вида подстилающей поверхности, поэтому носит случайный характер. При этом спектральная характеристика принимаемого сигнала имеет амплитуду  $S_{\Omega}$  и ширину  $\Delta\omega$ , изменяющуюся случайным образом.

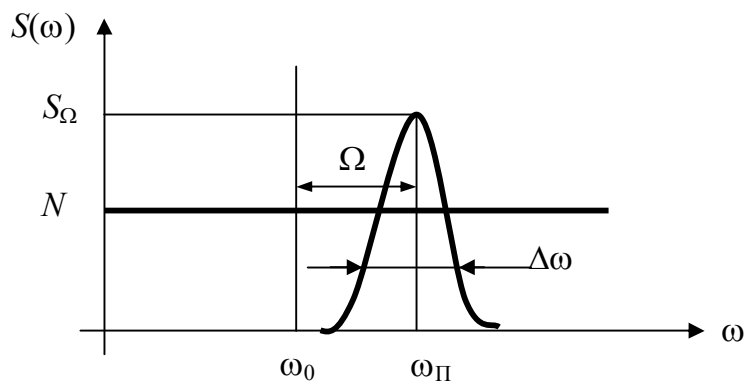


Рис. 66. Спектральные характеристики случайных процессов САУ

$\omega_0$  – излучаемая частота;

$\omega_{\Pi}$  – принимаемая частота;

$\Delta\omega$  – ширина спектра.

В этой следящей системе имеют место паразитные сигналы (шумы). В простейшем случае шум равномерно распространен по всем частотам. Его спектральная плотность  $N$ .

## 12.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОЦЕССОВ

Кратко остановимся на основных характеристиках случайных величин и процессов.

Случайная величина может быть непрерывной и дискретной.

Случайным процессом называется изменение случайной величины во времени.

Важное значение при описании случайных величин и процессов имеет понятие вероятности. Вероятность – это предельное значение частоты появления события

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N},$$

где  $n$  – число появлений события в испытаниях;

$N$  – общее число испытаний.

Полное описание случайной величины дает закон распределения вероятности  $P(x)$  для дискретной величины и закон распределения плотности вероятности  $W(x)$  для непрерывной величины. Соотношение между этими параметрами представлено на рис. 67.

Часто при анализе случайных величин и процессов ограничиваются частными характеристиками. Как правило, это математическое ожидание  $\bar{x}$  и дисперсия  $D$ .

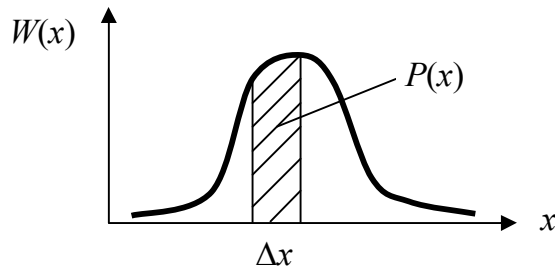


Рис. 67. Плотность вероятности и вероятность для непрерывной величины

Математическое ожидание можно определить как среднее значение, а дисперсию – как средний разброс значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Для непрерывной величины справедливы выражения

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx - \text{математическое ожидание};$$

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot W(x)dx - \text{дисперсия}.$$

Важное значение в теории случайных процессов имеет понятие *корреляционной функции*  $R$ . Она показывает степень влияния друг на друга или двух случайных процессов, или различных значений одного случайного процесса. В последнем случае для моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  имеем

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_{t_1} - \bar{x}_{t_1})(x_{t_2} - \bar{x}_{t_2})W_2(x_1, x_2)dx_1dx_2,$$

где  $W_2$  – это двумерная плотность распределения вероятности для процессов  $x_1$  и  $x_2$ .

Существует широкий класс стационарных случайных процессов. У этих процессов постоянные вероятностные параметры.

Поэтому корреляционная функция в данном случае будет зависеть только от расстояния между отсчетами  $\tau = t_1 - t_2$ . Она обычно обозначается как  $R(\tau)$ .

Свойства корреляционной функции (рис. 68):

- 1) четная  $R(-\tau) = R(\tau)$ ;
- 2) убывающая;
- 3) если  $\tau = 0$ , то  $R(\tau) = D$  (дисперсия).

В теории случайных процессов широко используется понятие *спектральной плотности*. Существует простая связь между спектральной плотностью и корреляционной функцией через преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau;$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

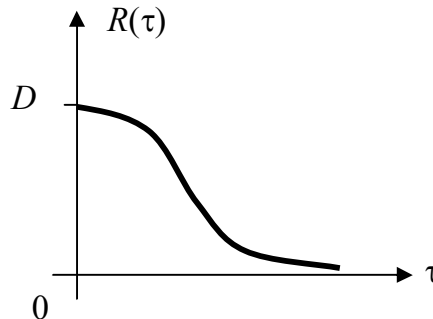


Рис. 68. Корреляционная функция

Если корреляционная функция и спектральная плотность – вещественные четные функции, то

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau;$$

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega.$$

Чем шире спектр случайного сигнала (сигнал быстрее изменяется), тем уже корреляционная функция (слабее влияние соседних значений сигнала друг на друга) и наоборот. Предельное соотношение для сигнала типа шум – соседние значения сигнала не зависят друг от друга.

### 12.3. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ НЕПРЕРЫВНУЮ СИСТЕМУ

Структурная схема САУ имеет вид (рис. 69).

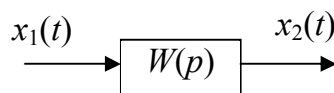


Рис. 69. Структура САУ

Задачу можно сформулировать следующим образом: зная вероятностные характеристики входного сигнала  $x_1(t)$  (матожидание  $\bar{x}_1$  и диспер-

сию  $D_1$ ), надо определить вероятностные характеристики выходного сигнала  $x_2(t)$  (матожидание  $\bar{x}_2$  и дисперсию  $D_2$ ).

Существует два метода решения этой задачи:

- 1) расчеты во временной области;
- 2) расчеты в частотной области.

1. Расчеты во временной области.

Рассмотрим математические соотношения для каждого метода.

Для определения математического ожидания используется формула свертки, в которую вместо значений сигналов нужно подставить значения их математических ожиданий.

$$\bar{x}_2 = \int_0^t \omega(\tau) \bar{x}_1(t - \tau) d\tau = \int_0^t \omega(t - \tau) \bar{x}_1(\tau) d\tau,$$

где  $\omega(t)$  – весовая функция.

Для нахождения дисперсии на выходе предварительно необходимо найти корреляционную функцию. Корреляционная функция на выходе:

$$R_2(t, t_1) = \int_0^t \omega(\eta) d\eta \int_0^t \omega(\lambda) R_1(t - \eta, t_1 - \lambda) d\lambda,$$

где  $\eta$  и  $\lambda$  – переменные интегрирования

При подстановке  $t = t_1$  получим выражение для дисперсии.

Если САУ устойчива, то корреляционная функция и дисперсия стремятся к некоторым пределам, определяющим стационарный процесс на выходе.

Рассмотрим пример.

Имеется интегрирующее звено с передаточной функцией  $W(p) = \frac{k}{p}$

и весовой функцией  $\omega(t) = k$ ;

На вход подается белый гауссовский шум (БГШ) с характеристиками (рис. 70).

«Белый» шум означает равномерное распределение спектральной плотности  $N_{\text{ш}}$  во всем диапазоне частот. «Гауссовский» – плотность распределения вероятности имеет нормальный закон. Корреляционная функция шума  $R_1(\tau) = N \cdot \delta(\tau)$ , матожидание шума  $\bar{x}_1 = 0$ .

В результате матожидание на выходе  $\bar{x}_2 = 0$ , а дисперсия

$$D_2(t) = \int_0^t k d\eta \int_0^t k \cdot N \cdot \delta(\lambda - \eta) d\eta = k^2 N t.$$



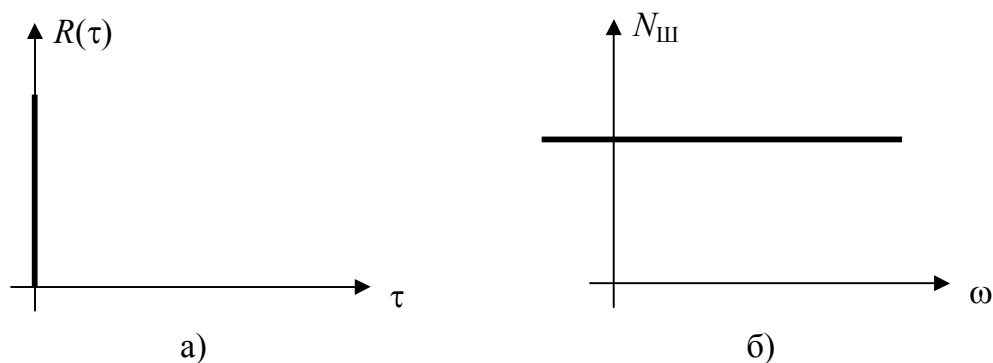


Рис. 70. Характеристики БГШ  
а) корреляционная функция; б) спектральная плотность

Анализ последнего выражения показывает, что дисперсия на выходе растет пропорционально времени и стремится к бесконечности. Это легко объяснить, если вспомнить, что данное звено является неустойчивым.

## 2. Расчеты в частотной области.

Более удобно для расчета параметров случайного сигнала на выходе пользоваться спектральными характеристиками.

Спектральную плотность на входе и выходе САУ можно определить через изображение Фурье входного  $S_1(\omega)$  и выходного  $S_2(\omega)$  сигналов

$$S_1(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_1(j\omega)|^2;$$

$$S_2(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X_2(j\omega)|^2.$$

С другой стороны, для линейной САУ известно соотношение через частотную передаточную функцию:

$$X_2(j\omega) = W(j\omega) \cdot X_1(j\omega).$$

Отсюда:

$$S_2(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega);$$

$$\bar{x}_2^2 = D_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega) d\omega.$$

Строго говоря, такой подход справедлив, если закон распределения случайной величины при прохождении через систему не меняется. Это выполняется в случае нормального закона распределения случайной величины. Плотность распределения вероятности этого закона

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right],$$

где  $\sigma$  – среднееквадратичное отклонение, а график представлен на рис. 71.

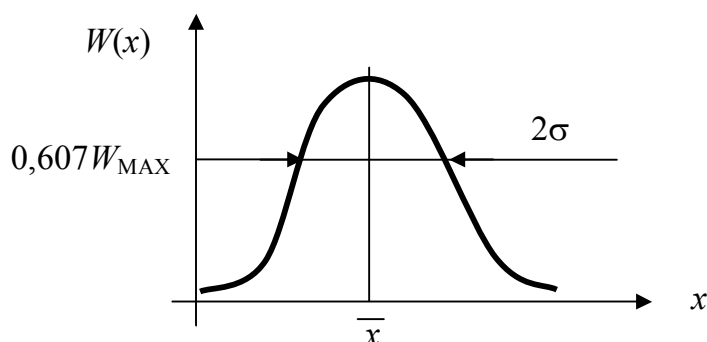


Рис. 71. Нормальный закон распределения случайной величины

## 12.4. РАСЧЕТ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ОШИБКИ САУ

Замкнутая система может находиться под воздействием случайного задающего сигнала  $g(t)$ , и случайной помехи  $f(t)$ , приложенной в произвольной точке системы (рис. 72).

Корреляционные функции и спектральные плотности и полезного сигнала и помехи известны. Конечная цель – нахождение корреляционной функции и спектральной плотности ошибки  $x(t)$  и выходного сигнала  $y(t)$ .

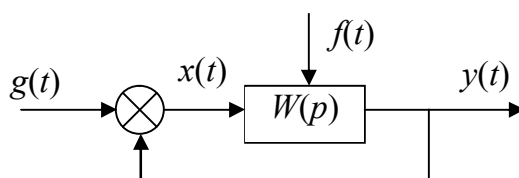


Рис. 72. Случайный задающий сигнал и случайная помеха в САУ

Обычно ограничиваются более узкой задачей: нахождением среднееквадратичной ошибки (СКО) системы управления.

Возможны следующие случаи.

1. Имеется входной сигнал  $g(t)$  – случайный стационарный процесс. Помеха  $f(t) = 0$ .

Тогда спектральная плотность ошибки

$$S_x(\omega) = |\Phi_x(j\omega)|^2 S_g(\omega),$$

где  $\Phi_x(j\omega) = \frac{1}{1 + W(j\omega)}$  – передаточная функция замкнутой системы по ошибке.

СКО будет равно

$$x_{\text{СК}} = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega}.$$

2. Имеется помеха  $f(t)$ , задающее воздействие  $g(t) = 0$ . Справедливы соотношения

$$S_x(\omega) = |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega);$$

$$\Phi_f(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)}.$$

Если же помеха действует на входе системы, то расчет СКО аналогичен первому случаю.

3. Имеется и сигнал и помеха.

Общее выражение для спектральной плотности ошибки

$$S_x(\omega) = |\Phi_x(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega) + \Phi_x(j\omega) S_{fg}(\omega) \Phi_f^*(j\omega) + \\ + \Phi_x^*(j\omega) S_{gf}(\omega) \Phi_f(j\omega),$$

где  $S_{fg}(\omega)$  и  $S_{gf}(\omega)$  – взаимные спектральные плотности сигнала и помехи; знак «\*» показывает сопряженную комплексную величину.

Если корреляции между сигналом и помехой нет, третье и четвертое слагаемые в выражении равны нулю.

Аналогичным образом можно найти и параметры для выходного сигнала  $y(t)$ . При этом необходимо использовать частотную передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(j\omega) = 1 - \Phi_x(j\omega).$$

## 12.5. РАСЧЕТЫ ПО МИНИМУМУ ОШИБКИ

Если на систему одновременно действует полезный сигнал и помеха, то может быть решена задача оптимального расчета системы с тем, чтобы обеспечить наименьшую результирующую ошибку системы.

Критерием является минимальное значение результирующей ошибки системы, определяемой сигналом и помехой. Для случайных процессов обычно ограничиваются оценкой среднеквадратической ошибки. Необходимо обеспечить минимум среднеквадратической ошибки при одновременном действии сигнала и помехи.

Критерий выглядит следующим образом:

$$\bar{x}_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt.$$

Нежелательность ошибки пропорциональна квадрату ее величины.

Возможны две формулировки данной задачи.

1. Имеется САУ заданной структуры. Необходимо так выбрать ее параметры, чтобы обеспечить минимум СКО при заданных статистических параметрах сигнала и ошибки.

Решение ищется следующим образом: зная спектральную плотность ошибки, теоретически находится выражение для расчета дисперсии и СКО. Это выражение зависит от параметров системы, полезного сигнала и помехи. Ищутся условия на параметры системы для обеспечения минимума дисперсии. В простых случаях можно применить известные методы нахождения экстремума функции путем дифференцирования и приравнивания к нулю частных производных.

2. Ставится вопрос о нахождении оптимальной структуры системы и параметров звеньев для получения теоретически минимальной средне-квадратической ошибки при заданных вероятностных характеристиках полезного сигнала и помехи.

Решение следующее: находится теоретическая передаточная функция замкнутой системы, и к ней стремятся при проектировании. Возможна ситуация, что реализация САУ с такой оптимальной передаточной функцией будет сопряжена со значительными трудностями.

### 13. НЕЛИНЕЙНЫЕ САУ

Анализ нелинейных САУ (НСАУ) представляет собой достаточно трудную задачу. При ее решении стремятся свести такую САУ к линейной с определенными допущениями и ограничениями.

К таким системам относятся те, в которых имеется хотя бы одно звено, описываемое нелинейными дифференциальными уравнениями.

Нелинейные звенья могут быть следующих видов:

- релейного типа;
- с кусочно-линейной характеристикой;
- с криволинейной характеристикой любого очертания;
- имеется произведение и другие комбинации переменных;
- нелинейное звено с запаздыванием;
- импульсное звено;
- логическое;
- описываемое кусочно-линейным дифференциальным уравнением.

Нелинейности могут быть статические и динамические. Статические описываются нелинейными статическими характеристиками, а динамические – нелинейными дифференциальными уравнениями.

### 13.1. ОБЩИЙ МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ САУ

Сначала выполняется, где возможно, линеаризация звеньев. При этом используются различные методы, например, разложение нелинейной функции в ряд Тейлора в окрестностях некоторой точки. В результате остаются неописанными так называемые существенно нелинейные звенья. Обычно их не более одного-двух. Затем составляют уравнения для этих звеньев со всеми возможными упрощениями их характеристик. Получается система обыкновенных линейных уравнений, к которым добавляется одно-два нелинейных уравнения.

В соответствии с этим, обобщенную структурную схему любой НСАУ при наличии одного нелинейного звена можно представить в виде (рис. 73).

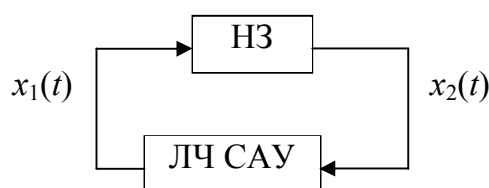


Рис. 73. Обобщенная схема НСАУ с одним нелинейным звеном

Имеется одно нелинейное звено (НЗ) и линейная часть САУ (ЛЧ САУ).

Все НСАУ делятся на два больших класса.

1. Уравнение нелинейного звена имеет любой вид, но под знаком нелинейной функции либо только входная (или ее производные) величина, либо только выходная (или ее производные) величина. Такую систему можно свести к нарисованной выше схеме.

2. Любое число нелинейных звеньев. Под знак нелинейной функции входят обычные переменные, но связанные друг с другом линейной передаточной функцией.

Процессы в НСАУ имеют существенные особенности, поэтому их анализ является сложным. Это касается и устойчивости.

С точки зрения устойчивости система имеет несколько состояний.

1. Устойчивое равновесное состояние с постоянным значением регулируемой величины.

2. Устойчивые автоколебания (собственные колебания с постоянной амплитудой) при отсутствии внешнего воздействия.

3. Область неустойчивости.

4. Области, соответствующие другим, более сложным случаям.

В таких системах можно говорить об устойчивости в «малом» и в «большом».

Система устойчива в «малом», если существуют начальные условия, которые не выводят выходные отклонения за определенную величину. Если же существуют начальные условия, которые выводят выходные отклонения за определенную величину, то система неустойчива в «большом» (рис. 74).

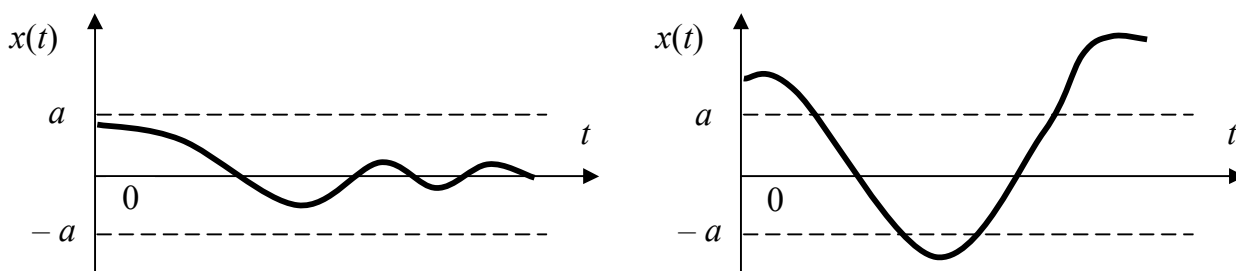


Рис. 74. Устойчивость НСАУ

а) НСАУ устойчива в «малом»; б) НСАУ неустойчива в «большом»

## 13.2. Фазовое пространство

Для наглядного представления процессов нелинейных САУ вводится понятие «фазовое пространство», которое заключается в следующем.

Дифференциальное уравнение замкнутой системы  $n$ -го порядка заменяется системой дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, f, g) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, \dots, f, g) \end{cases},$$

где  $x_1$  – выходная величина;

$x_2 - x_n$  – вспомогательные переменные;

$f, g$  – входные воздействия (возмущающее и задающее);

$x_{10} = x_1(t=0), x_{20} = x_2(t=0) \dots$  – начальные условия.

Эти дифференциальные уравнения можно представить геометрически в  $n$ -мерном пространстве. Например, при  $n = 3$  (рис. 75).

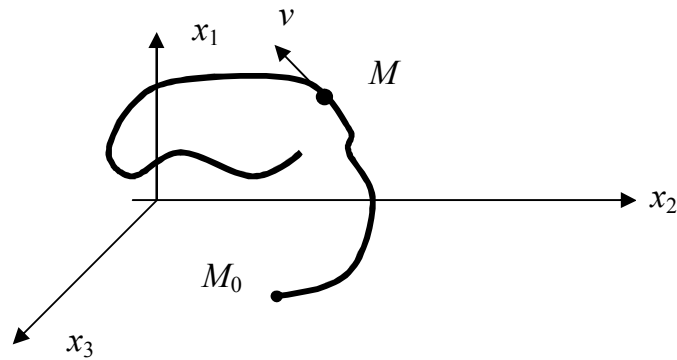


Рис. 75. Трехмерное фазовое пространство

В реальном процессе управления в каждый момент времени величины  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  имеют вполне определенные значения. Это соответствует вполне определенному положению точки  $M$  в пространстве. Точка  $M$  называется изображающей. С течением времени величины  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  изменяются, точка  $M$  перемещается по определенной траектории, показывая так называемую фазовую траекторию. Следовательно, траектория движения точки  $M$  может служить наглядной геометрической иллюстрацией динамического поведения САУ в процессе управления.

Рассмотрим пример фазовых траекторий некоторых линейных САУ.

Пусть они описываются уравнением  $\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + ax = 0$ . В зависимости от параметров ДУ возможно несколько случаев. Некоторые из них представлены на рис. 76.

Рис. 76,а соответствует комплексным корням с отрицательной вещественной частью (наличие затухающего переходного процесса), случай рис. 76,б показывает фазовую траекторию апериодического затухающего процесса при отрицательных вещественных корнях характеристического уравнения.

ДУ представляют собой выражения для проекций скорости изображающей точки  $M$  на оси координат. Поэтому по значениям правых частей уравнений в каждый момент времени можно судить о движении точки  $M$ , и, следовательно, о поведении реальной НСАУ в процессе управления.

Фазовая траектория – это качественная характеристика НСАУ. Для определения количественных значений выходных сигналов необходимо решать дифференциальные уравнения в каждой точке.

Если дифференциальные уравнения составлены для отклонений выходного сигнала от установившихся значений, то для устойчивой системы фазовая кривая будет стремиться в начало координат.

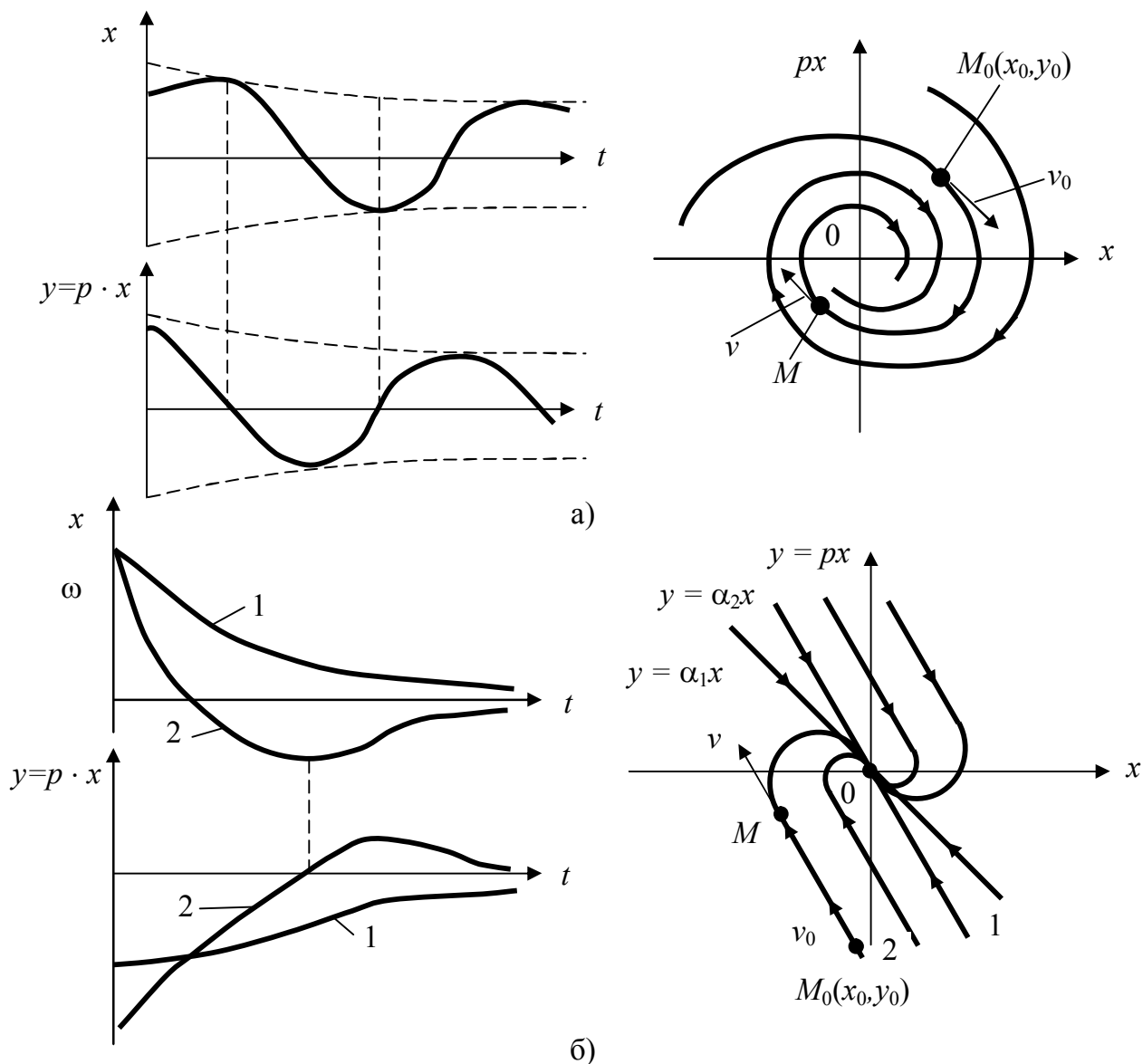


Рис. 76. Примеры фазовых траекторий

### 13.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Для нелинейных систем существует понятие устойчивости по Ляпунову. Невозмущенное движение (установившийся процесс) называется устойчивым, если при заданной сколь угодно малой области  $\varepsilon$  можно найти такую область  $\eta$ , что при начальных условиях, расположенных внутри этой области, переходный процесс будет таким, что изображающая точка не выйдет из области  $\varepsilon$  при любом сколь угодно большом значении времени  $t$  (рис. 77).

Аналитически условие можно представить в следующем виде.

При начальных условиях  $|x_{i0}| < \eta_i (i=1, \dots, n)$  решение ДУ переходного процесса удовлетворяет неравенствам  $|x_i(t)| < \varepsilon_i (i=1, \dots, n)$  при любом сколь угодно большом  $t$ , начиная с некоторого  $t = T > 0$ .



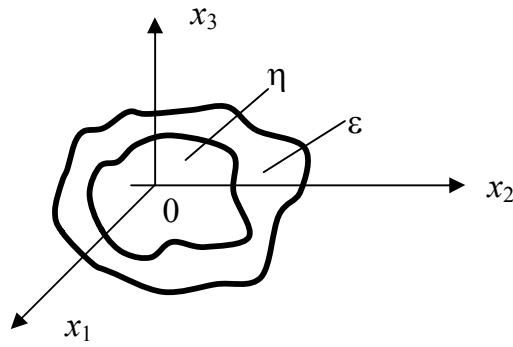


Рис. 77. Устойчивость по Ляпунову

### 13.4. ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Данный метод используется для приближенного определения наличия автоколебаний и устойчивости нелинейных систем любого порядка.

Пусть дано некоторое нелинейное выражение вида  $y = F(x, px)$  и задано  $x = a \sin \psi$ ;  $\psi = \omega t$ . Тогда  $px = a\omega \cos \psi$ .

Разложим функцию  $F$  в ряд Фурье:

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) d\psi + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\dots) \sin \psi d\psi \right] \sin \psi + \\ + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\dots) \cos \psi d\psi \right] \cos \psi + \text{высшие гармоники}.$$

Предположим, что первое слагаемое равно нулю, т. е. в разложении нет постоянной составляющей.

Если принять во внимание, что из исходных выражений следует  $\sin \psi = \frac{x}{a}$  и  $\cos \psi = \frac{px}{a\omega}$ , то можно получить

$$y = q(a, \omega)x + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} px + \text{высшие гармоники},$$

где  $q$  и  $q'$  – коэффициенты гармонической линеаризации.

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \sin \psi d\psi ;$$

$$q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi) \cos \psi d\psi .$$

Таким образом, исходное уравнение при  $x = a \sin \omega t$  с точностью до высших гармоник аналогично линейному. В этом и заключается метод гармонической линеаризации.

Если значения амплитуды  $a$  и частоты  $\omega$  постоянны (периодический процесс), то и коэффициенты  $q$  и  $q'$  постоянны. В переходном процессе амплитуда и частота непостоянны. В этом и заключается отличие данного метода от обычных методов линеаризации. Это отличие позволяет при анализе систем обнаружить особенности работы НСАУ.

Рассмотрим простой частный случай  $y = F(x)$ .

Если эта кривая не имеет гистерезисной петли, то  $q' = 0$ . Тогда  $y = q(a)x +$  высшие гармоники;

Таким образом, криволинейная характеристика заменяется прямой линией, тангенс угла которой зависит от амплитуды входного сигнала.

Найдем гармонически линеаризованное уравнение для замкнутой нелинейной системы в целом. Линейная часть описывается ДУ следующего вида любой сложности:

$$Q(p)x_1 = -R(p)x_2.$$

Нелинейная часть описана простым соотношением:

$$x_2 = F(x_1, px_1).$$

После линеаризации уравнение нелинейного звена будет иметь вид:

$$x_2 = \left[ q(a, \omega) + \frac{q'(a, \omega)}{\omega} p \right] x_1.$$

Уравнение не имеет высших гармоник. Объясняется это следующим. Как правило, в замкнутой САУ линейная часть обладает свойствами низкочастотного фильтра. Это легко обнаружить при рассмотрении ЛАЧХ линейной замкнутой САУ.

Общее характеристическое уравнение замкнутой НСАУ имеет вид:

$$Q(p) + R(p) \left( q + \frac{q'}{\omega} p \right) = 0.$$

Если в системе имеют место автоколебания, т. е. имеются незатухающие колебания с амплитудой  $a_{\Pi}$  и частотой  $\omega_{\Pi}$ , то коэффициенты этого уравнения становятся постоянными. С другой стороны, из теории линейных САУ следует, что имеет место пара чисто мнимых корней характеристического уравнения. Поэтому, чтобы определить автоколебания нелинейных САУ, можно найти границу устойчивости соответствующей ли-

нейной САУ, т. е. можно воспользоваться критериями устойчивости линейной САУ (алгебраическими и частотными).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии были рассмотрены вопросы проектирования систем автоматического управления.

Особое внимание было уделено вопросам анализа и синтеза непрерывных линейных САУ. Кратко представлен раздел нелинейных систем. Представленный материал дает теоретическую базу для исследования дискретных и цифровых систем управления, изучение которых выходит за рамки данного курса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: изд. Наука, гл. ред. физ-мат. лит. – 1975, 768 с.
2. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления, под ред. В. А. Бесекерского. – М.: гл. ред. физ-мат. лит. – 1972, 588 с.
3. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. Учебное пособие – М.: Наука, 1989.
4. Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. Учебное пособие. – М.: Машиностроение, 1985.
5. Теория автоматического управления /Под ред. А. А.Воронова – М.: Высшая школа, 1987.