

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЫБИНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АВИАЦИОННАЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

В. А. ВИШНЯКОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ

(УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ)

Рекомендовано Методическим Советом
Рыбинской государственной авиационной
технологической академии в качестве
учебного пособия

РЫБИНСК
2002

УДК 681.32 : 521.391

Вишняков В.А. Моделирование: Учебное пособие. – Рыбинск: РГАТА, 2002. – 65с.

В учебном пособии рассматриваются методология моделирования информационных систем, формализация и алгоритмизация процессов их функционирования, планирование экспериментов с моделями, организация имитационного статистического моделирования.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра теоретической информатики Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова;
директор Рыбинского НПО «Криста» к.т.н. Ю.А.Черных.

Введение

Созданию информационной системы предшествует период ее проектирования. Он включает разработку концептуальной модели, которая структурируется в соответствии с предъявляемыми к системе требованиями. Эта модель описывается на языке математических отношений и подвергается всестороннему расчету, исследованию. Производится оптимизация структуры и параметров модели. На основе математической модели (абстрактной системы) разрабатывается физическая (материальная) модель, функционирующая по установленному для системы критерию. После экспериментального исследования физической модели, подтверждающих выполнение заданных требований и осуществляется реализация реальной системы.

1. Моделирование – этап образного проектирования электронной аппаратуры

1.1. Основные понятия теории моделирования

Моделирование – замещение объекта-оригинала другим (моделью), с целью получить информацию о важных свойствах объекта-оригинала. Модель – заместитель оригинала, позволяющая изучить или фиксировать его некоторые свойства.

Примеры моделей:

- модель самолета;
- модель электростанции;
- модель системы электронной аппаратуры (принципиальная схема, модель конструкции, расчет надежности и др.).

Процесс моделирования состоит из следующих этапов:

- 1) постановка задачи и определение свойств оригинала подлежащих исследованию;
- 2) констатация затруднительности и невозможности изучения оригинала в натуре;
- 3) выбор модели достаточно хорошо фиксирующей существенные свойства оригинала и легко поддающейся исследованию;
- 4) исследование модели в соответствии с поставленной задачей;
- 5) перенос результатов исследования модели на оригинал;
- 6) проверка полученных результатов.

Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то модель является адекватной объекту. Адекватность модели зависит от цели моделирования и принятых критериев. К модели предъявляют два противоречивых требования:

- 1) адекватность;
- 2) простота модели.

Чем проще модель, тем легче исследование и тем ниже его стоимость и время, затрачиваемое на его проведение.

Первой фазой абстрагирования объекта является качественное описание объекта (физическая модель). Например: механическая модель маятника, электрическая схема колебательного контура.

За качественным описанием модели следует вторая стадия абстрагирования – количественное описание модели (математическая модель). Математические модели могут быть представлены различными математическими средствами:

- действительными или комплексными величинами,
- векторами,
- матрицами,
- геометрическими образами,
- неравенствами,
- функциями и функционалами,
- множествами,
- алгебраическими, дифференциальными и интегральными уравнениями,
- функциями распределения вероятностей,
- статистиками и др.

Переход от первой ко второй фазе абстрагирования, то есть от физической модели к математической часто освобождает модель от специфических черт присущих объекту. Лишившись физической или технической оболочки, модель приобретает универсальность, то есть способность количественного описания различных по своей природе процессов или объектов.

Пример различных объектов с одинаковой математической моделью: электрический колебательный контур – рис.1.1, механический маятник – рис.1.2.

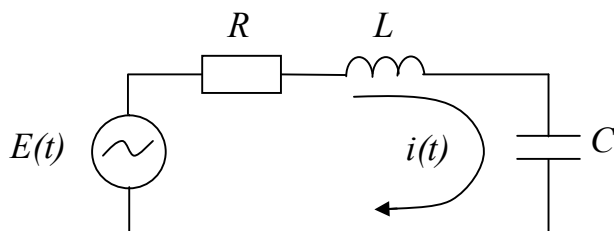


Рис.1.1

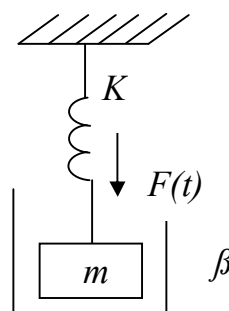


Рис.1.2

Эквивалентные элементы на схемах: индуктивность L и масса m , сопротивление R и затухание β , емкость C и упругость пружины K , сила F и ЭДС E .

Определим уравнение для колебательного контура. На основании закона Кирхгофа имеем:

$$E(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t).$$

Напряжения, действующие на элементах R , L и C по закону Ома равны:

$$\begin{aligned}U_R(t) &= Ri(t), \\U_L(t) &= Ldi(t)/dt, \\U_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt.\end{aligned}$$

Подставляя напряжения в уравнение Кирхгофа, получим интегрально-дифференциальное уравнение

$$E(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt.$$

Его можно преобразовать в дифференциальное, учитывая соотношение

$$i(t) = CdU_C(t)/dt,$$

имеем

$$LCd^2U_C(t)/dt^2 + RcdU_C(t)/dt + U_C(t) = E(t).$$

В силу эквивалентности элементов подобным же уравнением описывается механический маятник.

1.2. Обобщенное символическое представление систем

Для наглядной иллюстрации алгоритма функционирования объекта часто используют структурную схему, представляющую собой последовательное соединение блоков, каждый из которых предназначен для выполнения какой-либо операции. Например, структурная схема информационной системы управления объектом – рис.1.3.

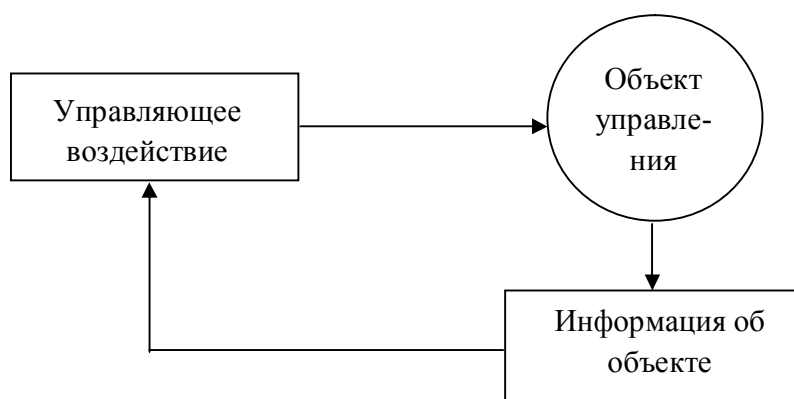


Рис.1.3

Обобщая структурную схему, можно прийти к следующему символическому обозначению системы – рис.1.4.

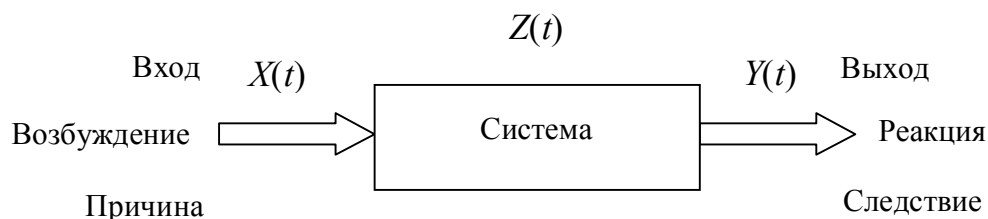


Рис.1.4

Математически описать систему – это значит связать описание выхода $Y(t)$ со входом $X(t)$ через параметры системы. Иногда при этом используется внутреннее состояние $Z(t)$.

Под системами можно понимать разнообразные системы, например: аналоговый фильтр, робот, алгоритм (рис.1.5).

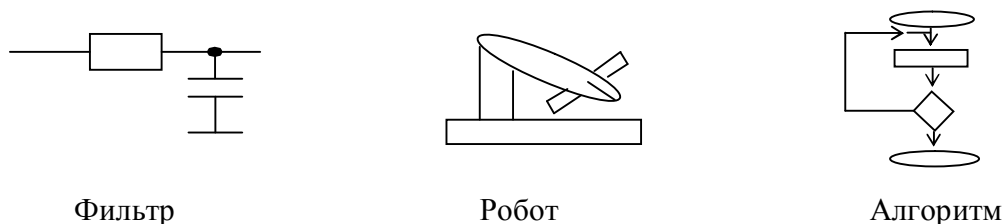


Рис.1.5

1.3. Классификация видов моделирования

В основе моделирования лежит теория подобия, которая утверждает, что абсолютное подобие (адекватность) может иметь место лишь при замене объекта точно таким же. Поэтому при моделировании стремятся лишь к тому, чтобы модель хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта.

Существует многообразие видов моделирования (рис.1.6).

Важное значение при моделировании уделяется математическим методам, среди которых аналитические и имитационные. Аналитические методы обладают универсальностью, однако, к сожалению, для сложных систем использовать их бывает трудно или невозможно. В этом случае широко используется имитационное моделирование, реализующее обычно на ЭВМ алгоритм функционирования системы. Подобными методами можно моделировать любые сложные системы, но их модели носят частный характер.

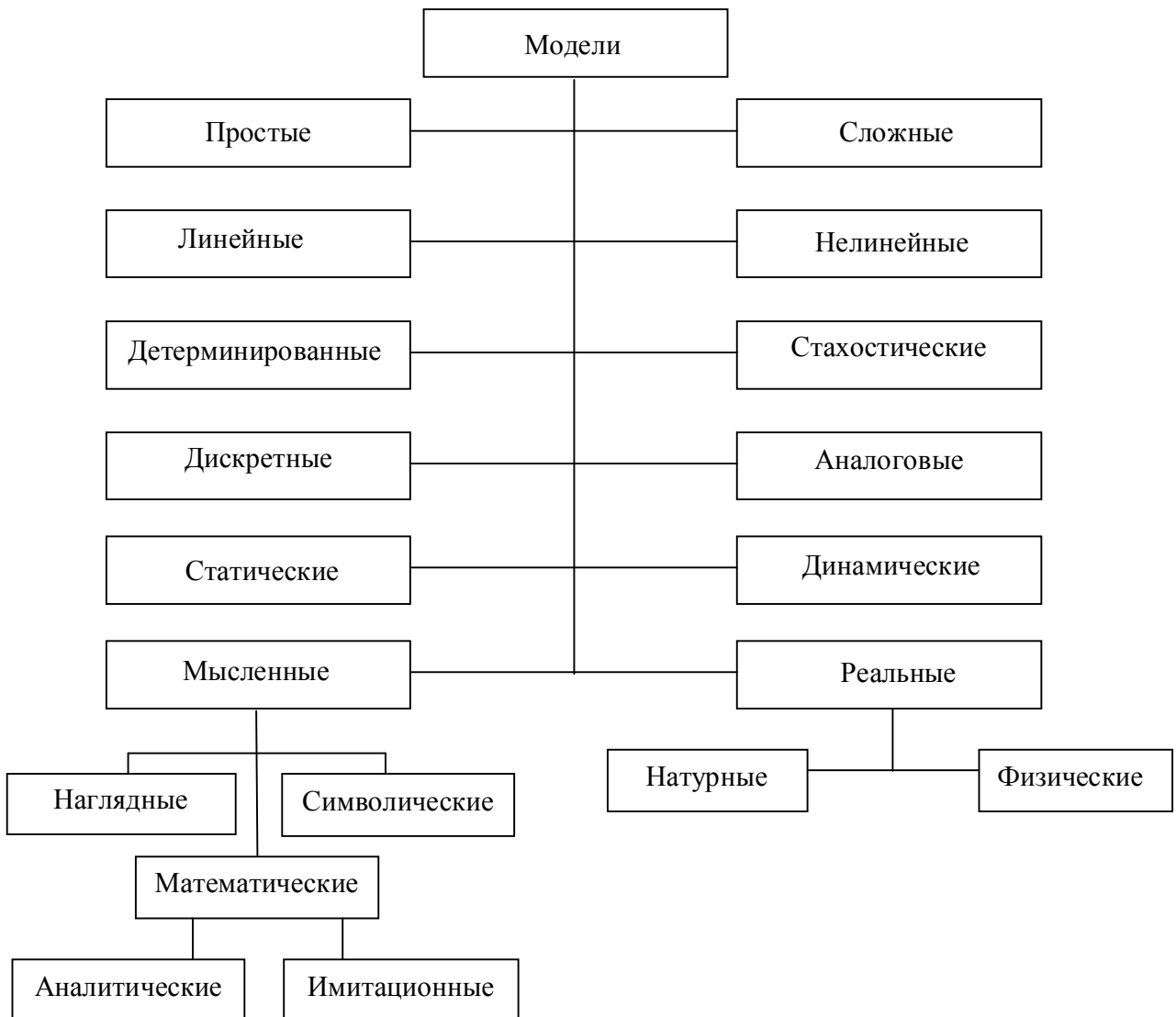


Рис.1.6

2. Моделирование статических безинерционных систем

Имеется система безинерционного типа, имеющая множество входов X и множество выходов Y – рис.2.1.

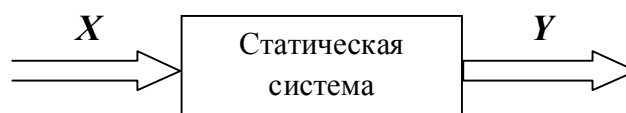


Рис.2.1

Возникает задача математического описания (создания математической модели), то есть нахождения функционального соотношения $Y = F(X)$. Задача может быть решена применением полиномиальных моделей.

2.1. Построение полиномиальных моделей с использованием регрессионного анализа

С помощью полинома можно аппроксимировать любую функцию. Это следует из того, что любую функцию можно разложить в ряд Тейлора.

Регрессией в статистических исследованиях называют усреднение по результатам этого исследования, то есть по множеству статистических данных. Модель, которая найдена обработкой статистических данных путем усреднения, называется регрессионной моделью и описывается уравнением регрессии.

Пусть имеется некоторая система, имеющая два входа и один выход (рис.2.2).

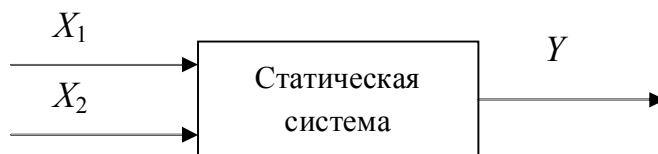


Рис.2.2

Модели этой системы могут быть описаны следующими уравнениями.

Простейшая математическая модель этой системы:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2,$$

где b_0, b_1, b_2 – весовые коэффициенты. При проверке может оказаться, что данная линейная модель неадекватна реальной системе. Тогда ее усложняют, дополнительно вводя взаимодействия входных переменных в виде произведения:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2.$$

Если и данная модель неадекватна, то вводят новые составляющие, например:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2.$$

Можно ещё более усложнить модель, увеличивая порядок полинома, и таким образом добиться адекватности модели.

Для нахождения коэффициентов b применяют экспериментальное исследование системы или её физической модели, и сводят экспериментальные данные в

таблицу, (таблица 2.1), в которой X_{1i} , X_{2i} , Y_i – величины входных воздействий и выходной реакции в опыте i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Таблица 2.1

X_1	X_2	Y
X_{11}	X_{21}	Y_1
X_{12}	X_{22}	Y_2
\vdots	\vdots	\vdots
X_{1N}	X_{2N}	Y_N

Входные величины X_{1i} , X_{2i} должны задаваться из той области значений, для которой строится модель. Обработав табличные данные, вычисляют коэффициенты b .

Найдем формулы для вычисления коэффициентов b для системы с одним входом и одним выходом (рис.2.3). Будем искать модель этой системы в виде линейного уравнения регрессии $Y_X = b_0 + b_1 X$.



Рис.2.3

Для наглядности смысла вычислений нанесем опытные величины X_i, Y_i ($i = 1, 2, \dots, N$) на плоскость X, Y (рис.2.4).

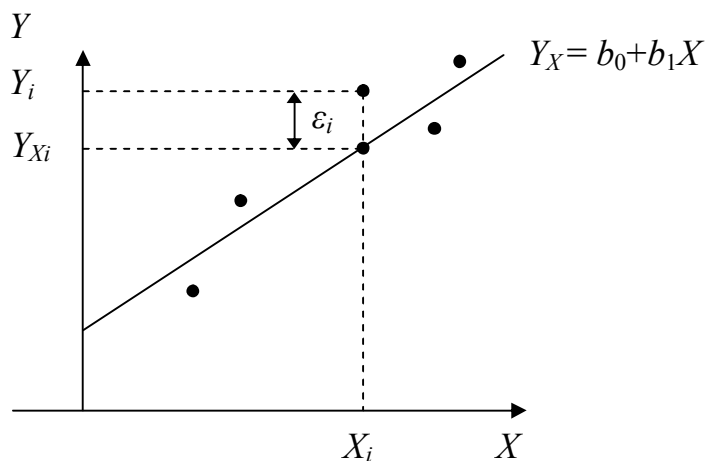


Рис.2.4

Для каждого значения X_i имеет место ошибка $\varepsilon_i = Y_i - Y_{Xi}$, где Y_i – опытное наблюдение, а $Y_{Xi} = b_0 + b_1 X_i$, таким образом $\varepsilon_i = Y_i - b_0 - b_1 X_i$. Ошибка зависит от коэффициентов b_0 и b_1 .

Наилучшим уравнением регрессии с точки зрения метода наименьших квадратов будет такое, которое обеспечивает минимум суммы

$$U = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2.$$

Значения b_0 и b_1 можно найти из условия минимума суммы U :

$$\left. \begin{aligned} dU / db_0 &= 0, \\ dU / db_1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Соответствующие производные равны

$$\begin{aligned} dU / db_0 &= -\sum_{i=1}^N 2(Y_i - b_0 - b_1 X_i), \\ dU / db_1 &= -\sum_{i=1}^N 2(Y_i - b_0 - b_1 X_i) X_i. \end{aligned}$$

Приравнявая производные к нулю, и, решая систему двух уравнений с двумя неизвестными, получим

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N Y_i \sum_{i=1}^N X_i^2 - \sum_{i=1}^N Y_i X_i \sum_{i=1}^N X_i}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - (\sum_{i=1}^N X_i)^2}, \\ b_1 &= \frac{N \sum_{i=1}^N Y_i X_i - \sum_{i=1}^N Y_i \sum_{i=1}^N X_i}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - (\sum_{i=1}^N X_i)^2}. \end{aligned}$$

Оказывается, что b_2 и b_1 являются функциями средних арифметических \bar{X} и \bar{Y} , средних квадратических отклонений σ_X и σ_Y и коэффициента корреляции r . Преобразуя выражение для b_0 , b_1 , получим

$$\begin{aligned} b_1 &= r \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \\ b_0 &= \bar{Y} - b_1 \bar{X}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение регрессии преобразуется к простому виду

$$Y_X - \bar{Y} = r \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \bar{X}),$$

где

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N}, \\ \sigma_X^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i^2}{N} - (\bar{X})^2, \\ \sigma_Y^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i^2}{N} - (\bar{Y})^2, \\ r &= K / \sigma_X \sigma_Y, \\ K &= \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i Y_i}{N} - \bar{X}\bar{Y}.\end{aligned}$$

2.2. Планирование эксперимента, полный эксперимент

Планирование эксперимента необходимо для того, чтобы за более короткое время, то есть с минимальными материальными ресурсами провести исследование. Предположим, имеем систему с n входами и одним выходом. Пусть по каждому входу будет задаваться m значений, тогда общее количество состояний (входных ситуаций) будет $N = m^n$. Таким образом, чтобы реализовать все значения надо провести N опытов. Полный эксперимент это такой эксперимент, который реализует все возможные сочетания переменных и их значений. Обычно стремятся к минимальному количеству опытов. Для этого производят планирование исследований. Оно предполагает определенную последовательность проведения эксперимента, а также формализованную обработку данных. В дальнейшем рассмотрим простейший полный эксперимент вида $N = 2^n$, при котором $m = 2$. Планируемый эксперимент проводится в три этапа.

1. Первый этап связан с выбором значений для каждой переменной.
2. На втором этапе составляется матрица планирования эксперимента. После того как она составлена, производится экспериментальное исследование.

3. Третий этап – это формализованная обработка данных, вычисление весовых коэффициентов b , проверка полученной модели на адекватность.

Рассмотрим более детально каждый из трёх этапов.

1. *Первый этап – задание значений по каждому входу j ($j = 1, 2, \dots, n$).*

Обозначим входную переменную как \tilde{X}_j . Поскольку реализуется эксперимент вида 2^n , то \tilde{X}_j может принимать только два значения из некоторого интервала значений. В середине интервала выбирается базовый уровень переменной \tilde{X}_{j0} . Далее влево и вправо от базового уровня откладывается половина интервала варьирования $\Delta\tilde{X}_j > 0$. Таким образом, получим \tilde{X}_{jH} и \tilde{X}_{jB} , которые и будут участвовать в эксперименте (рис.2.5).

Минимальная величина $\Delta\tilde{X}_j$ определяется ошибкой измерения при установке значений \tilde{X}_j . Максимальная величина $\Delta\tilde{X}_j$ ограничена областью допустимых значений. Может оказаться, что по каким-то причинам нижний и верхний уровни выбраны неверно, тогда указанную работу нужно повторить.

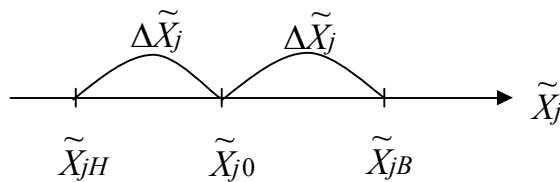


Рис.2.5

Для простоты рассмотрим далее систему с двумя входами (рис.2.6).

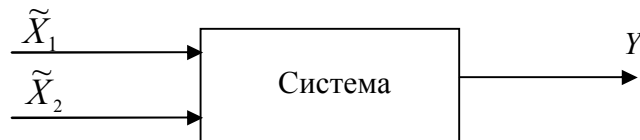


Рис.2.6

Полагаем, что $\tilde{X}_{1H}, \tilde{X}_{1B}; \tilde{X}_{2H}, \tilde{X}_{2B}$ выбраны. Область исследования при этом имеет вид, показанный на рис.2.7. Номера точек соответствуют номерам опытов. Найденная модель будет справедлива для исследуемой области.

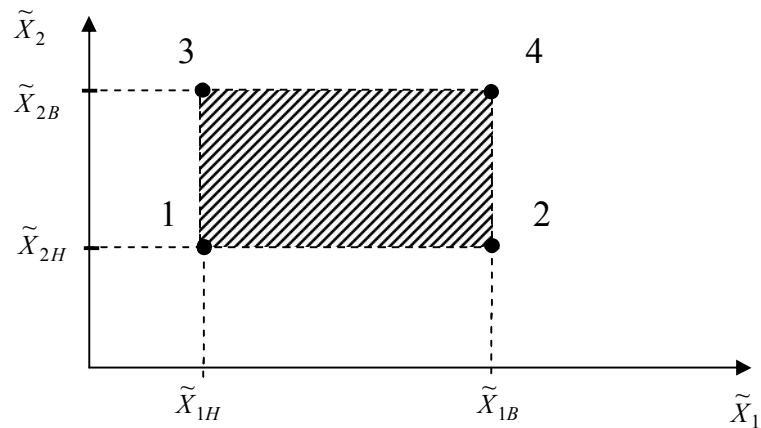


Рис.2.7

Удобно перейти от ненормированных переменных \tilde{X} к нормированным

$$X_j = (\tilde{X}_j - \tilde{X}_{j0}) / \Delta \tilde{X}_j.$$

Тогда, если $\tilde{X}_j = X_{jH}$, то $X_j = -1 = X_{jH}$, а, если $\tilde{X}_j = X_{jB}$, то $X_j = +1 = X_{jB}$. Таким образом, если ненормированная переменная лежит в пределах $\tilde{X}_{jH} \leq \tilde{X}_j \leq \tilde{X}_{jB}$, то нормированная – в пределах $-1 \leq X_j \leq 1$. Область исследований будет представлять собой квадрат (рис.2.8).

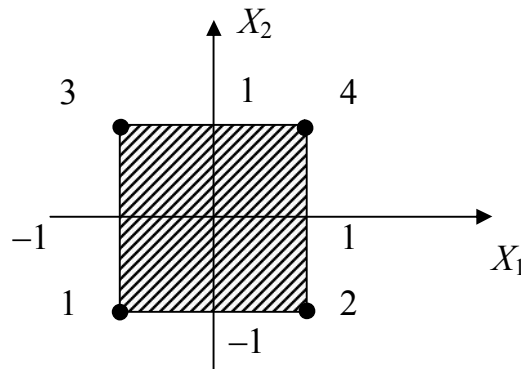


Рис.2.8

Введение нормировки переменных позволяет упростить обработку данных.

2. *Второй этап – составление матрицы планирования эксперимента и проведение эксперимента.*

Матрица планирования содержит столбцы X_j , значения X_{ji} которых соответствуют номерам опытов (таблица 2.2).

Таблица 2.2

i	X_1	X_2	X_0	X_1X_2	Y
1	-1	-1	+1	+1	Y_1
2	1	-1	+1	-1	Y_2
3	-1	1	+1	-1	Y_3
4	1	1	+1	+1	Y_4

Отметим основные свойства матрицы:

- 1) симметричность – $\sum_{i=1}^N X_{ji} = 0$;
- 2) нормировка – $\sum_{i=1}^N (X_{ji})^2 = N$;
- 3) ортогональность – $\sum_{i=1}^N X_{ji} X_{ki} = 0$.

Первые два свойства позволяют упростить выражение для коэффициентов b , а третье рассчитать коэффициенты b независимо друг от друга.

После заполнения столбцов X_j матрицы проводят экспериментальное исследование. При этом в опыте i устанавливают на входы системы значения \tilde{X}_j в соответствии с матрицей и измеряют выходное значение Y_i , которое заносится в таблицу.

3. Третий этап – формализованная обработка данных.

Будем искать модель системы в виде линейной

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2.$$

Найдём коэффициенты b методом наименьших квадратов. Как показано, в разделе 2.1 $b_1 = r \frac{\sigma_Y}{\sigma_{X_1}}$. Учитывая свойства 1) и 2) матрицы планирования, получа-

ем $b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N X_{1i}Y_i}{N}$. По аналогии имеем $b_2 = \frac{\sum_{i=1}^N X_{2i}Y_i}{N}$. Используя данные таблицы 2.2, получаем

$$b_1 = (-Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4)/4,$$

$$b_2 = (-Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4)/4.$$

Коэффициент b_0 , определенный в разделе 2.1 при использовании свойств матрицы планирования преобразуется к виду:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i}{N}.$$

Это выражение легко преобразовать к стандартному, используемому для вычисления коэффициентов b_1, b_2 , если ввести формальную переменную X_0 , все значения

которой равны +1 (таблица 2.2). Оно оказывается следующим $b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N X_{0i} Y_i}{N}$. Для системы с двумя входами имеем $b_0 = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)/4$.

При проверке на адекватность может оказаться, что модель неадекватна, тогда её усложняют вводя слагаемое $b_{12}X_1X_2$. В общем случае любой коэффициент b_{jk} может рассчитываться по формуле

$$b_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_{ji} X_{ki}) Y_i}{N},$$

где $X_{ji} X_{ki}$ – значения столбца, полученные перемножением значений столбцов X_j и X_k . Для системы, содержащей два входа, пользуясь таблицей 2.2, получим

$$b_{12} = (+Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4)/4.$$

Можно попытаться еще сильнее усложнить модель, введя слагаемое $b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2$. Однако столбцы X_1^2 и X_2^2 матрицы планирования сливаются со столбцом X_0 . Это отражает тот факт, что при подобной методике коэффициенты b_0 и b_{11} и b_{22} взаимосвязаны между собой, то есть их нельзя разделить. Физически это объясняется тем, что количество неизвестных коэффициентов больше, чем число опытов. Таким образом, эксперимент вида $N = 2^n$ не позволяет определять весовые коэффициенты при квадратичных слагаемых. Чтобы их определить, надо проверить эксперимент вида $N = 3^n$.

2.3. Дробный эксперимент

Дробный эксперимент имеет целью сокращение количества опытных исследований. При дробном эксперименте количество опытов N_d меньше, чем при полном. Дробный эксперимент обычно проводят тогда, когда есть основание предполагать что искомая модель – линейная или близка к линейной и описывается функциональной зависимостью

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n.$$

Очевидно, что минимальное количество опытов, которые необходимо провести, определяется количеством неизвестных значений b , равным $n + 1$. Если планировать эксперимент вида $N = 2^n$ и воспользоваться свойствами матрицы планирования, то, как было показано в разделе 2.2, коэффициенты рассчитываются по формуле

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N X_{ji} Y_i}{N},$$

где $X_{ji} = \pm 1$, а значения Y_i – получены в результате исследований. Сократить количество опытов необходимо таким образом, чтобы можно было пользоваться формулой для расчёта коэффициентов b . Для этого следует не нарушать свойства матрицы планирования: симметричность, нормировку и ортогональность. Количество опытов должно быть равно $N_0 = 2^l$, где l – некоторое целое число.

Рассмотрим планирование дробного эксперимента для системы с тремя входами (рис.2.9).

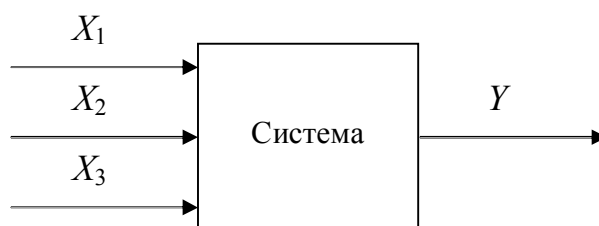


Рис.2.9

За основу планирования берётся матрица проведения полного эксперимента для двух переменных (таблица 2.2), в которой вводится столбец X_3 с помощью генерирующего соотношения $X_3 = X_1 X_2$ (таблица 2.3). Значения столбца X_3 можно получить также с помощью второго генерирующего соотношения $X_3 = -X_1 X_2$. При планировании используется любое из этих соотношений.

Таблица 2.3

i	X_0	X_1	X_2	X_3	Y
1	+1	-1	-1	+1	Y_1
2	+1	+1	-1	-1	Y_2
3	+1	-1	+1	-1	Y_3
4	+1	+1	+1	+1	Y_4

Если соединить две матрицы, определяемые первым и вторым соотношениями, то получается матрица из восьми строк, описывающая полный эксперимент вида $N = 2^3$.

Закончив планирование, проводят экспериментальное исследование и заполняют столбец Y (таблица 2.3). После этого рассчитывают коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3 .

Необходимо отметить, что если исследуемая система фактически нелинейная, то коэффициенты b будут определены не так точно, как если бы при полном эксперименте. В частности коэффициент b_3 будет содержать в себе сведения не только о своем истинном значении, но и о коэффициенте b_{12} , так как с помощью указанных генерирующих соотношений вводится столбец X_1X_2 (таблица 2.2).

На точность определения коэффициентов b при $n > 3$ влияет вид генерирующего соотношения. Так для $n = 4$, за основу берется матрица полного эксперимента вида $N = 2^3$. Для введения переменной X_4 существуют следующие восемь вариантов генерирующих соотношений: $X_4 = X_1X_2$, $X_4 = -X_1X_2$, $X_4 = X_1X_3$, $X_4 = -X_1X_3$, $X_4 = X_2X_3$, $X_4 = -X_2X_3$, $X_4 = X_1X_2X_3$, $X_4 = -X_1X_2X_3$. Из этих восьми соотношений лучше использовать соотношение 7 или 8, так как вероятность слияния коэффициента b_4 с коэффициентом b_{123} мала, то есть мала вероятность взаимодействия трех переменных, нежели двух.

Эффективность дробного эксперимента подтверждается таблицей 2.4, где показано сравнение количества опытов при дробном N_0 и полном N экспериментах.

Таблица 2.4

n	$N = 2^n$	$N_0 = 2^l$	l
2	4	4	2
3	8	4	2
4	16	8	3
5	32	8	3
6	64	8	3
7	128	8	3
8	256	16	4
9	512	16	4
10	1024	16	4

2.4. Точность исследований

Очевидно, что любая модель лишь с какой-то степенью адекватности соответствует действительным связям между выходными и входными переменными. Это связано с ошибками проведения экспериментальных исследований. Ошибки вызваны погрешностью приборов, методом измерения, влиянием окружающей среды, действующими помехами и возмущениями, ошибками экспериментатора и другими факторами. Фактически экспериментальные исследования и определение модели производится более сложно, чем рассмотрено выше. Для увеличения точности модели производят:

- 1) уменьшение влияния случайных ошибок,
- 2) отсеивание грубых измерений,
- 3) определение однородности экспериментальных исследований,
- 4) определение значимости коэффициентов b ,
- 5) проверку модели на адекватность.

2.4.1. Уменьшение влияния случайных ошибок

Эффективный метод уменьшения влияния случайных ошибок – использование повторных опытов. При этом каждый опыт, соответствующий строке i матрицы планирования повторяется m раз (таблица 2.5).

Таблица 2.5

	X_0	X_1	...	X_n	Y_i	\bar{Y}_i	S_i
i					$Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{im}$		

Для каждой строки рассчитывается среднее арифметическое

$$\bar{Y}_i = \frac{\sum_{k=1}^m Y_{ik}}{m}$$

и статистическая дисперсия

$$S_i = \frac{\sum_{k=1}^m (Y_{ik} - \bar{Y}_i)^2}{m} = \frac{\sum_{k=1}^m (Y_{ik})^2}{m} - (\bar{Y}_i)^2.$$

Коэффициенты b рассчитываются с использованием \bar{Y}_i по формуле

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N X_{ji} \bar{Y}_i}{N}.$$

Среднее \bar{Y}_i меньше подвержено влиянию случайных ошибок, чем одно значение Y_{ik} и коэффициент b_j определяется таким образом более точно. Действительно, найдем дисперсию величины \bar{Y}_i , полагая, что все измерения Y_{ik} – независимы

$$D\{\bar{Y}_i\} = \left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_{ik} \right\} = \frac{1}{m^2} D\left\{ \sum_{k=1}^m Y_{ik} \right\} = \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m D\{Y_{ik}\}.$$

Поскольку дисперсии любого наблюдения одинаковы и равны $D\{Y_{ik}\} = D \approx S_i$, где D – дисперсия одного измерения, то

$$D\{\bar{Y}_i\} = \frac{D}{m}.$$

Следовательно, дисперсия среднего меньше дисперсии одиночного наблюдения в m раз. Значит, чем больше число опытов, тем меньше разброс среднего и тем точнее вычисляются коэффициенты b .

2.4.2. Отсеивание грубых измерений

Грубые измерения могут быть при сборе данных. Такие измерения надо отбрасывать. Пусть анализируется i -я строка, в которой имеются значения $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{im}$. Рассматривается статистика

$$t = (Y_{ik} - \bar{Y}_i) / \sigma,$$

где Y_{ik} – подозреваемое наблюдение (обычно минимальные и (или) максимальные значения), \bar{Y}_i – среднее арифметическое, взятое из таблицы 2.3, $\sigma = \sqrt{\bar{S}}$ – среднее

квадратическое отклонение одного измерения, $\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^N S_i}{N}$ – среднее арифметическое выборочных дисперсий S_i , взятых из таблицы 2.3.

Если окажется что $|t| > t_\alpha$, где t_α – некоторое пороговое значение, то наблюдение Y_{ik} – грубое.

Показано, что если статистика t не содержит грубого наблюдения, то ее плотность вероятности распределяется по закону Стьюдента $w(t)$ (рис.2.10). Поро-

Пороговое значение t_α связано с вероятностью $\alpha = P(|t| \geq t_\alpha)$ – уровнем значимости соотношением

$$\alpha = 2 \cdot \int_{t_\alpha}^{\infty} w(t) dt.$$

Стандартными числами для α являются: 0,1; 0,05; 0,01. Задав α , по таблице связывающей α и t_α , для закона Стьюдента определяют уровень t_α и затем проводят проверку статистики.

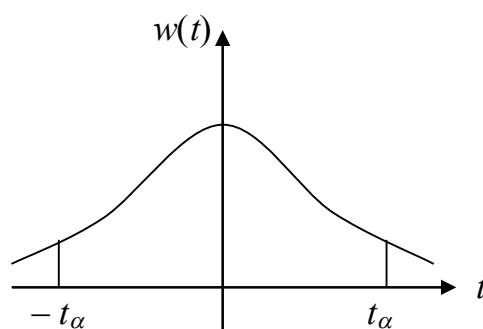


Рис.2.10

2.4.3. Проверка эксперимента на однородность

Так как эксперимент занимает определенное время, то могут измениться внешние условия его проведения, что в свою очередь может повлиять на достоверность полученных данных. Методика проверки эксперимента на однородность следующая.

По таблице 2.3 находят максимальную S_{max} и S_{min} минимальную дисперсии. Строят статистику $F = S_{max} / S_{min}$. Показано, что если эксперимент однороден, то отношение двух произвольных дисперсий распределяется по закону Фишера (рис.2.11).

Пороговое значение F_α связано с уровнем значимости α зависимостью

$$\alpha = \int_{F_\alpha}^{\infty} w(F) dF.$$

Задав α (обычно 0,1; 0,05 или 0,01) по таблице связи для закона Фишера находят F_α . После этого сравнивают статистику F с пороговым уровнем F_α . Если

$F > F_\alpha$, то эксперимент неоднороден и его следует повторить, следя за внешними условиями.

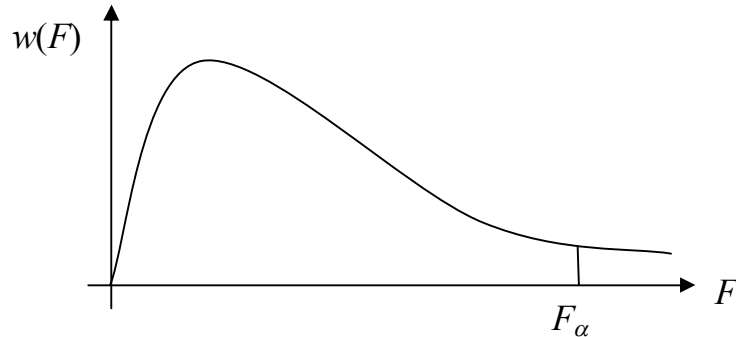


Рис.2.11

2.4.4. Проверка значимости коэффициентов модели

Подобная проверка производится с целью того, чтобы упростить модель, путем исключения незначимых слагаемых. Для этого значение b_j сравнивается с его средним квадратическим отклонением $\sigma_b = \sqrt{D_b}$ с использованием статистики

$$t = b_j / \sigma_b.$$

Величину дисперсии коэффициента D_b определим, последовательно выполняя преобразования

$$\begin{aligned} D_b = D\{b_j\} &= D\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ji} \cdot \bar{Y}_i\right\} = \frac{1}{N^2} D\left\{\sum_{i=1}^N X_{ji} \cdot \bar{Y}_i\right\} = \frac{1}{N^2} D\left\{\sum_{i=1}^N \pm \bar{Y}_i\right\} = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N D\{\bar{Y}_i\} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N D\left\{\sum_{k=1}^m Y_{ik}\right\} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \left\{\frac{1}{m^2} \cdot \sum_{k=1}^m D(Y_{ik})\right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $D(Y_{ik}) \cong \bar{S}$, то $D_b \cong \bar{S} / (Nm)$.

Статистика $|t|$ сравнивается с пороговым уровнем t_α , определенным по критерию Стьюдента. Если $|t| < t_\alpha$, то коэффициент b_j назначим, и из модели отбрасывается слагаемое с этим коэффициентом.

2.4.5. Проверка модели на адекватность

Проверку выполняют по критерию Фишера, образуя статистику $F = S_H / \bar{S}$, где

$$S_H = \sum_{i=1}^N (Y_{Xi} - \bar{Y}_i)^2 / (N - d)$$

– дисперсия неадекватности, Y_{Xi} – значения, полученные по уравнению модели (уравнению регрессии) при тех же значениях входных переменных X , что и для среднего арифметического \bar{Y}_i в строке i матрицы планирования, d – количество значимых коэффициентов в модели.

Если $F < F_\alpha$, то модель адекватна. В случае неадекватной модели необходимо увеличить степень полинома, описывающего модель, провести вычисления в рамках проведенного эксперимента. При необходимости перепланировать и провести эксперимент заново, вычислить коэффициенты b , учитывая действия, указанные в разделе 2.4.

3. Модели линейных динамических систем

Динамической системой называется инерционная система, у которой выходная реакция $Y(t)$ зависит не только от значения входного сигнала $X(t)$ в момент наблюдения t , но и от значений X в ранние моменты времени. Динамические системы бывают нелинейные и линейные, а также аналоговые и дискретные. В дискретных (цифровых) системах время дискретное $t = kT_0$, где T_0 – период дискретизации, $k = 0, 1, 2, \dots$. Дискретные сигналы обозначают X_k, Y_k .

В линейных системах выходная реакция на действие суммы входных сигналов равняется сумме выходных реакций на действие каждого входного сигнала в отдельности. Для того чтобы описать линейную динамическую систему (найти ее модель) надо связать выходной сигнал Y с входным сигналом X (рис.3.1), используя параметры системы.

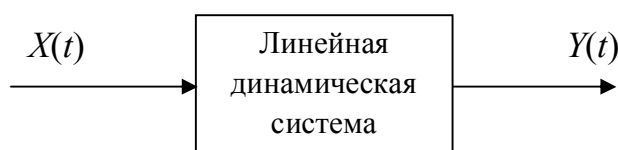


Рис.3.1

При исследовании дискретных систем широко используется нерекурсивный и рекурсивный методы описания.

3.1. Нерекурсивные модели

Нерекурсивное описание системы заключается в определении по известному входному сигналу X_k на любом шаге k выходного сигнала Y_k . Очевидно, что любой сигнал X_k можно представить как сумму импульсов одинаковой длительности T_0 и разной величины (рис.3.2). На основании принципа линейности выходной сигнал системы образуется из суммы реакций на действие этих входных импульсов.

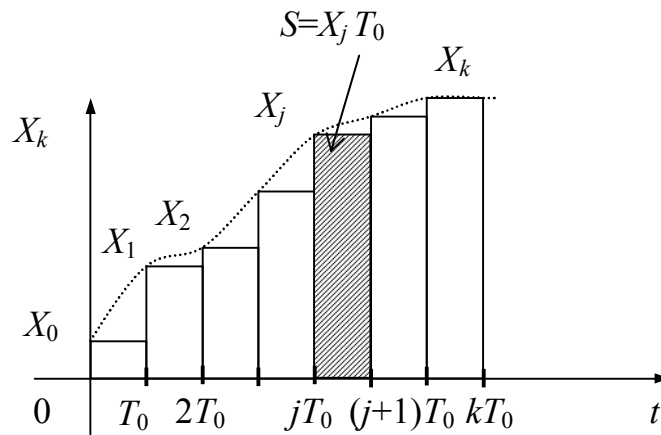


Рис.3.2

В качестве элементарного входного сигнала используют нормированный импульс $X(t) = \delta(t)$ с единичной площадью (рис.3.3), который называется дельта-импульсом.

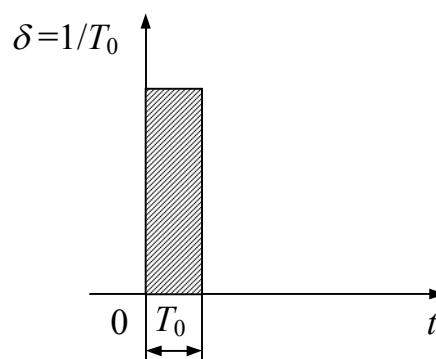


Рис.3.3

Если на вход системы в момент времени $t = 0$ действует дельта импульс δ , то выходная импульсная реакция будет $Y_k = g_k$. Каждая частная система имеет

единственный специфичный для нее отклик g_k (рис.3.4). Таким образом, системы можно идентифицировать и можно сравнивать. В пределе при $T_0 \rightarrow 0$ получим импульсную реакцию $g(t)$ для аналоговой системы.

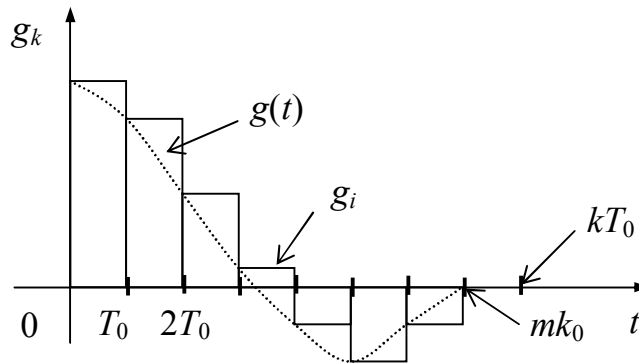


Рис.3.4

Импульсы, составляющие входной сигнал (рис.3.2), являются ненормированными с разной величиной, действующими в разное время. Поэтому для j -го импульса реакция системы в момент времени kT_0 будет $X_j T_0 g_{k-j}$. Вычислим суммарную реакцию $Y(t)$ в момент времени kT_0 . Для этого нужно учитывать действия импульсов амплитуды X_0, X_1, \dots, X_k следовавших до времени $t = kT_0$. Пусть при $k < 0, Y = 0$, тогда

$$Y_k = X_0 T_0 g_k + X_1 T_0 g_{k-1} + X_2 T_0 g_{k-2} + \dots + X_k T_0 g_0 \text{ или } Y_k = \sum_{j=0}^k X_j T_0 g_{k-j}.$$

Обозначим $T_0 g_i = c_i$ (c_i – реакция цифровой системы), получим

$$Y_k = \sum_{j=0}^k X_j c_{k-j}.$$

Этой формулой (называется “свертка”) описывается нерекурсивная система. Здесь входной сигнал свертывается с импульсной реакцией.

От цифровой свертки можно перейти к аналоговой при следующих преобразованиях: $T_0 \approx d\Theta$, $jT_0 = \Theta$, $kT_0 = t$, $T_0 \rightarrow 0$, получим $Y(t) = \int_0^t X(\Theta)g(t-\Theta)d\Theta$ –

интеграл Дюамеля.

Отметим, что c_j – постоянные коэффициенты, свойственные определенной системе. По виду коэффициентов можно различать системы. Возможно второе

представление для формулы “свертки”, которое получается путем замены переменной $k-j=n$, имеем

$$Y_k = \sum_{j=0}^k X_{k-j} c_j.$$

С ростом k увеличивается количество слагаемых в “свертке” и требуется на каждом шаге k производить большое количество операций умножения и сложения. Практически импульсную реакцию можно считать равной нулю с требуемой точностью, начиная с некоторого шага m (рис.3.4), тогда

$$Y_k = \sum_{j=k-m}^k X_j c_{k-j} = \sum_{j=0}^m X_{k-j} c_j.$$

Структурная схема, реализующая цифровую систему с нерекурсивным описанием, показана на рис.3.5.

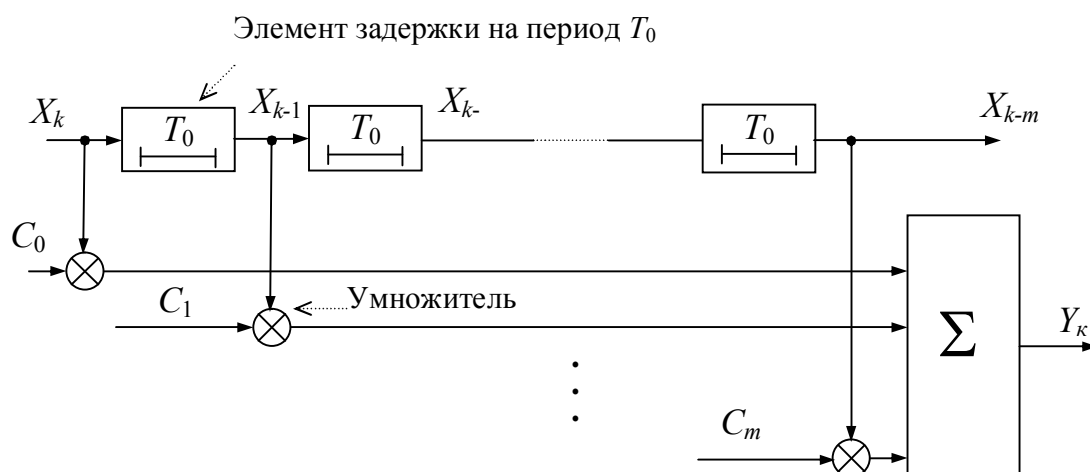


Рис.3.5

Пример.

Рассмотрим простейшую динамическую систему – аналоговый фильтр низких частот Баттерворта первого порядка (рис.3.6).

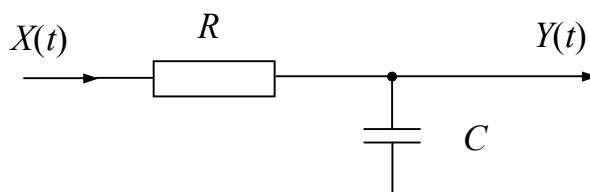


Рис.3.6

Если на вход фильтра подать единичный ступенчатый сигнал $X(t) = 1(t)$, то на его выходе появится реакция $Y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$ (рис.3.7).

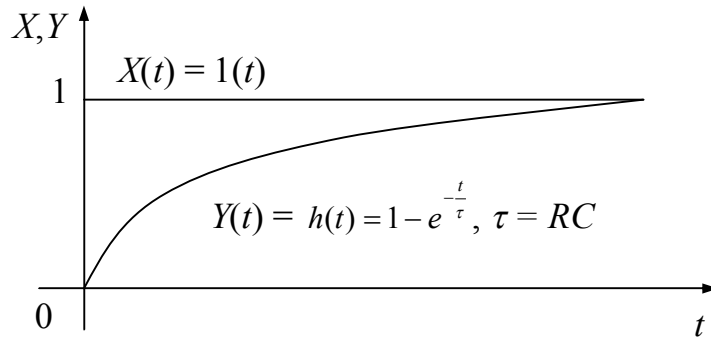


Рис.3.7

Так как фильтр линейный и справедливы соотношения $\delta(t) = \frac{d1(t)}{d\tau}$, $g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$, то отсюда следует $g(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ и модель аналогового фильтра будет

$$Y(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t X(\Theta) e^{-\frac{(t-\Theta)}{\tau}} d\Theta.$$

Найдем теперь цифровой эквивалент фильтра. Для этого перейдем к дискретному времени $t = kT_0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, получим

$$g_k = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{kT_0}{\tau}}, \quad c_k = T_0 g_k.$$

Следовательно, выражение, определяющее работу цифрового фильтра, имеет вид

$$Y_k = \frac{T_0}{\tau} \sum_{j=k-m}^k X_j e^{-\frac{(k-j)T_0}{\tau}}.$$

Недостатком нерекурсивных систем является значительное количество операций сложения и умножения, если реакция системы на действие дельта-импульса затухает медленно.

3.2. Рекурсивные модели

Аналоговые системы описываются дифференциальными уравнениями. Дискретные системы такими уравнениями описать нельзя, потому что сигналы в них скачкообразные и производных от них не существует. Поэтому дискретные системы описывают разностными уравнениями, являющимися аналогами дифференциальных.

Пусть имеется некоторая произвольная функция $f(t)$, $t \geq 0$. Перейдем к дискретному времени: $t = kT_0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, имеем $f(kT_0) = f_k$.

Аналогом первой производной является первая разность:

$$\Delta f_k = f_k - f_{k-1}.$$

Аналогично определяется вторая разность:

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_k - \Delta f_{k-1} = f_k - f_{k-1} - f_{k-1} + f_{k-2} = f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}.$$

Также можно найти разность i -го порядка $\Delta^i f_k$:

$$\Delta^i f_k = \Delta^{i-1} f_k - \Delta^{i-1} f_{k-1}.$$

Таким образом вводятся разности и составляются разностные уравнения для дискретной системы. В этом разностном уравнении связь входных и выходных разностей устанавливается через некоторые коэффициенты (параметры системы). Каждую из разностей можно раскрыть, выражая через значение функции в соответствующие моменты времени. Получается рекуррентное уравнение, которое связывает значение сигнала Y на k -том шаге и в более ранние моменты времени в зависимости от входного сигнала X в текущий и ранние моменты времени. Общий вид подобного уравнения:

$$a_n Y_{k-n} + \dots + a_1 Y_{k-1} + a_0 Y_k = b_m X_{k-m} + \dots + b_1 X_{k-1} + b_0 X_k,$$

где a и b – коэффициенты, определяемые параметрами системы. Поделив все составляющие уравнения на a_0 , либо полагая $a_0 = 1$, после преобразования получим:

$$Y_k = -\sum_{i=1}^n a_i Y_{k-i} + \sum_{i=0}^m b_i X_{k-i}.$$

Входной сигнал X_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ должен быть известен. Тогда можно определить Y на шаге k , если заданы начальные значения $Y_{-1}, Y_{-2}, \dots, Y_{-n}$.

Рекуррентному соотношению соответствует структурная схема линейной динамической системы, изображенная на рис.3.8.

Замечательным свойством разностных уравнений является то, что их можно решить последовательно используя рекурсию. Но необходимо иметь в виду, что при рекуррентных вычислениях накапливается ошибка.

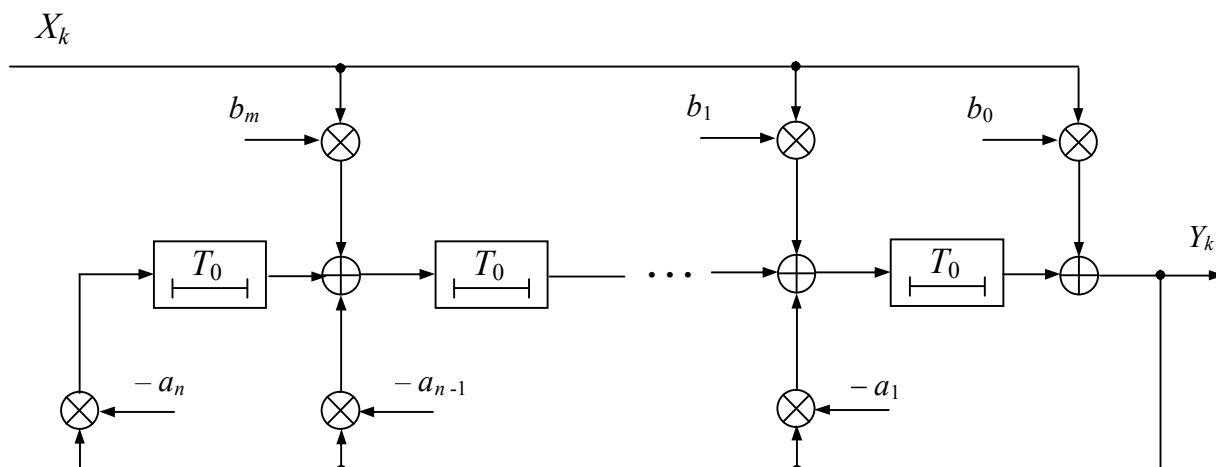


Рис.3.8

Пример 1.

Рассмотрим аналоговый фильтр первого порядка (рис.3.6), описываемый дифференциальным уравнением

$$\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = X(t), \tau = RC.$$

Введем дискретное время $t = kT_0$, $dt \approx T_0$. Имеем $X(kT_0) = X_k$, $Y(kT_0) = Y_k$, $dY(t) \approx \Delta Y(t) = \Delta Y(kT_0) = \Delta Y_k = Y_k - Y_{k-1}$. Переходя от дифференциального уравнения к рекуррентному, получим

$$Y_k = (1 - T_0/\tau) \cdot Y_{k-1} + X_k T_0/\tau.$$

Структура цифрового фильтра, описываемая этим уравнением, приведена на рис.3.9.

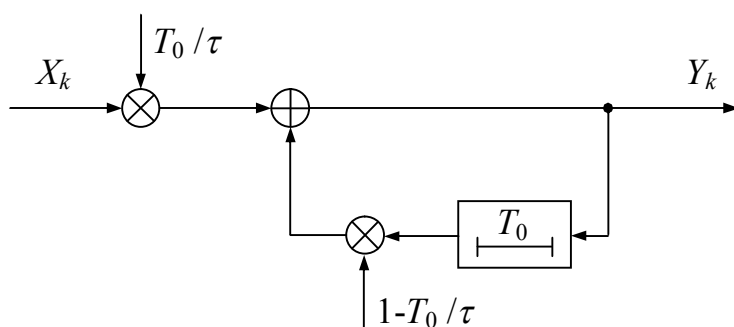


Рис.3.9

Пример 2.

Дискретная динамическая система задана структурной схемой (рис.3.10).

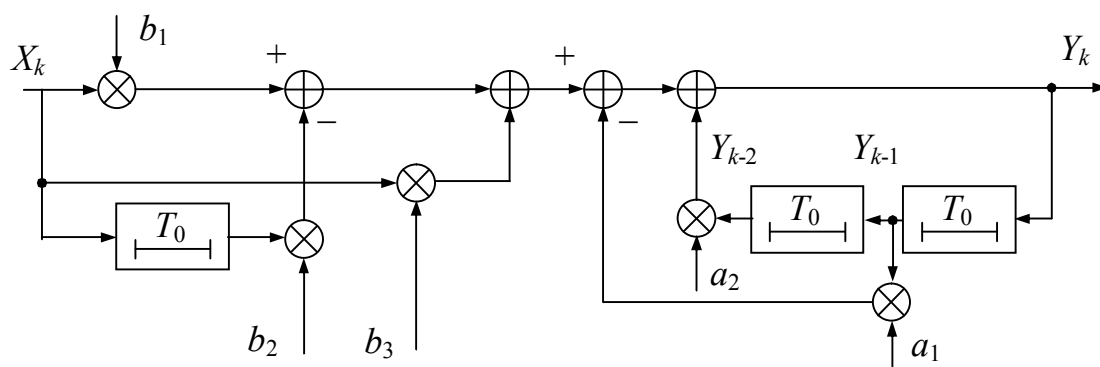


Рис.3.10

Найти для него рекуррентное уравнение.

Непосредственно из анализа схемы следует

$$Y_k = -a_1 Y_{k-1} + a_2 Y_{k-2} + (b_1 + b_3) X_k - b_2 X_{k-1}.$$

3.3. Моделирование дискретных динамических систем в пространстве состояний

Множество Y значений системы называют пространством состояний. Описание системы в пространстве состояний обычно производится с помощью матричного уравнения первого порядка в так называемой канонической форме. Для этого рекуррентное уравнение порядка n преобразуют в одномерную систему n уравнений первого порядка.

Покажем, например, возможность перехода от рекуррентного порядка 2 к рекуррентному порядку 1. Исходное уравнение

$$a_0 Y_{k-2} + a_1 Y_{k-1} + a_2 Y_k = b_0 X_k.$$

Обозначим

$$Y_{1k} = Y_k,$$

$$Y_{2k} = Y_{1k} - Y_{1k-1}.$$

Тогда

$$Y_{1k-1} = Y_{k-1} = Y_{1k} - Y_{2k},$$

$$Y_{1k-2} = Y_{k-2} = Y_{1k-1} - Y_{2k-1}.$$

Используя эти соотношения и исходное уравнение, получим

$$\left. \begin{aligned} Y_{1k} &= -\frac{a_0 + a_1}{a_2} Y_{1k-1} + \frac{a_0}{a_2} Y_{2k-1} + \frac{b_0}{a_2} X_k, \\ Y_{2k} &= -\frac{a_0 + a_1 + a_2}{a_2} Y_{1k-1} + \frac{a_0}{a_2} Y_{2k-1} + \frac{b_0}{a_2} X_k. \end{aligned} \right\}$$

Эту систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_{1k} \\ Y_{2k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{a_0 + a_1}{a_2} & \frac{a_0}{a_2} \\ -\frac{a_0 + a_1 + a_2}{a_2} & \frac{a_0}{a_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{1k-1} \\ Y_{2k-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_0}{a_2} & 0 \\ \frac{b_0}{a_2} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} X_k \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_k},$$

то есть $\mathbf{Y}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{X}_k$.

Подобным уравнением можно описывать динамическую систему, имеющую несколько входов и выходов (рис.3.11).



Рис.3.11

Общим решением матричного рекуррентного уравнения является

$$\mathbf{Y}_k = \Phi_k \mathbf{Y}_0 + \sum_{i=0}^k \Phi_{k-i} \mathbf{B} \mathbf{X}_i,$$

где $\Phi_k = \mathbf{A}^k$, $\Phi_1 = \mathbf{A}$ – матрица переходов. Это решение есть по сути дела выражение “свертка” в матричной форме для ненулевых начальных условий.

Действительно, если возьмем простейшую систему, описываемую уравнением первого порядка (пример 1, раздел 3.2), то для нее

$$\Phi = A = 1 - \frac{T_0}{\tau} \cong e^{-\frac{T_0}{\tau}}, \quad B = \frac{T_0}{\tau},$$

$$\Phi_k = \left(1 - \frac{T_0}{\tau}\right)^k \cong e^{-\frac{kT_0}{\tau}}.$$

Причем $\Phi_k B = C_k = \frac{T_0}{\tau} e^{-\frac{kT_0}{\tau}}$, где C_k – импульсная реакция системы (пример, раздел 3.1). Следовательно, выражение для \mathbf{Y}_k является “сверткой” и соответствует выражению, полученному в примере раздела 3.1.

4. Модели сложных вычислительных систем

4.1. Модели вычислительных процессов

Рассмотрим одну из моделей вычислительного процесса, который применяется для расчета трудоёмкости алгоритма. Подобная модель использует теорию цепей Маркова. Алгоритм представляется графом, в котором операторы являются вершинами, а дуги представляют связи между операторами.

Пример вычислительного процесса показан на рис.4.1.

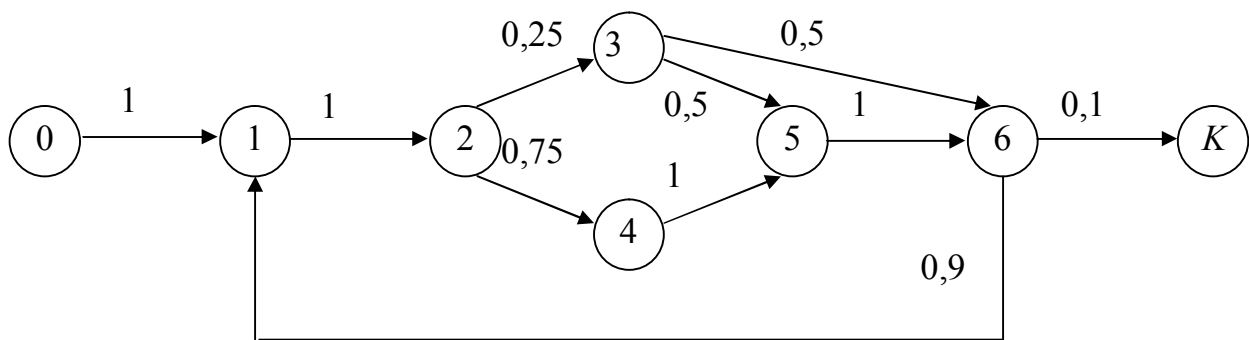


Рис.4.1

Вершины пронумерованы как 0, 1,..., 6, K. Различают вершины начальные, конечные и операторные. На рисунке вершины 0 – начальная, K – конечная, 1,..., 6 – операторные. Операторные вершины делятся на основные и ввода-вывода. Основные вершины бывают функциональные и вершины переходов. Вершины ввода/вывода обращаются с файлом для ввода/вывода. Разные операторы ввода/вывода могут обращаться к одному и тому же файлу. Конечные имеют только один вход и не одного выхода. Функциональные операторы могут иметь произвольное количество входов и только один выход. Оператор переходов имеет любое количество входов и не менее двух выходов. Граф, который задаёт модель процесса, должен быть корректным. Чтобы рассчитать трудоёмкость алгоритма, надо определить для каждого основного оператора i среднее количество операций q_i , а для каждого оператора ввода/вывода среднее количество передаваемой информации l_i . Переходы между операторами i и j рассматриваются как случайные события и описываются с помощью вероятностей p_{ij} . Все вероятности должны быть заданы для $i = 0, 1, \dots, k, j = 0, 1, \dots, k$. Если связи между i -ой и j -ой вершинами нет, то $p_{ij} = 0$. Для любых вероятностей должно выполняться соотношение

$$\sum_{i=0}^k p_{ij} = 1.$$

Расчет трудоёмкости производится следующим образом.

- Определяется среднее количество обращений к i -му оператору (или обращений оператора i ввода/вывода к файлу) m_i .
- Вычисляется трудоёмкость выполнения основных операторов $\Theta_0 = \sum_i m_i q_i$ и

среднее время выполнения основных операторов $t_0 = \Theta_0 t_{01}$, где t_{01} – среднее время выполнения одного оператора.

- Рассчитывается трудоёмкость обращений к каждому файлу j ввода/вывода $\Theta_j = \sum_i m_i l_i$, а затем ко всем файлам ввода/вывода $\Theta_B = \sum_j \Theta_j$, а также время ввода/вывода $t_B = \Theta_B \cdot t_{B1}$, где t_{B1} – время пересылки одного файла.

- Далее определяется общая трудоёмкость Θ и общее время t выполнения алгоритма

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_B, \quad t = t_0 + t_B.$$

Для расчета m_i используются две методики.

Первая носит общий характер и не накладывает ограничений на последовательность нумераций вершин. В этом случае m_i определяется путём решения системы алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \sum_{i=1}^k p_{i1} m_i, \\ m_2 &= \sum_{i=1}^k p_{i2} m_i, \\ &\vdots \\ m_k &= \sum_{i=1}^k p_{ik} m_i, \end{aligned} \right\}$$

где $p_{ij} m_i$ – означает среднее количество переходов от i -го оператора к j -му. Такое решение может оказаться сложным.

При второй методике накладывается ограничение на последовательность нумераций вершин. Вершины должны быть пронумерованы слева направо по ходу процесса, при этом расчет упрощается, но имеются трудности, когда есть циклы.

В начале предположим, что циклов нет, тогда расчет будет производиться последовательно с использованием соотношения:

$$m_j = \sum_i p_{ij} m_i, \quad (i < j),$$

причем $m_1 = 1$, так как циклов нет, $m_2 = p_{12} m_1 = p_{12}$, и так далее. Для расчета текущего m_j надо рассчитать все предыдущие.

При наличии цикла сначала рассчитывается его трудоёмкость и цикл заменяется оператором с трудоёмкостью, эквивалентной трудоёмкости цикла.

Пусть имеется цикл (рис.4.2).

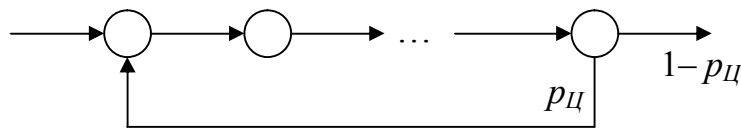


Рис.4.2

При расчете в начале условно разрывается обратная связь, и расчет m_j ведётся для последовательно-соединённых операторов по указанной выше методике. Так как для каждого оператора известны значения q_j , то трудоёмкость тела цикла будет

$$\Theta_T = \sum_j m_j q_j.$$

Замкнув обратную связь, определим среднее количество циклов, которое будет выполнено

$$n_{\text{ц}} = 1 / (1 - p_{\text{ц}})$$

и трудоёмкость цикла

$$\Theta_{\text{ц}} = n_{\text{ц}} \cdot \Theta_T = n_{\text{ц}} \sum_j m_j q_j.$$

Пример.

Определим трудоёмкость алгоритма заданного графом (рис.4.3).

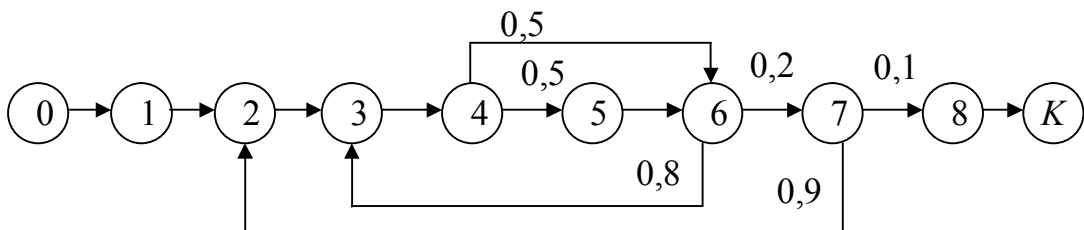


Рис.4.3

Расчёт начинаем с внутреннего цикла, для этого разрываем обратную связь между операторами 6 и 3, получаем граф (рис.4.4).

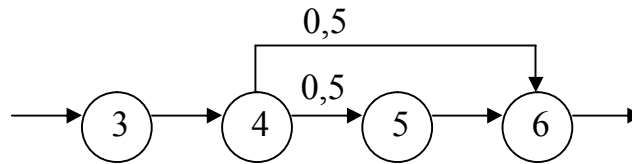


Рис.4.4

Вычислим m_i , для $i = 3, 4, 5, 6$ имеем:

$$m_3 = 1; m_4 = p_{34} m_3 = 1; m_5 = p_{45} m_4 = 0,5; m_6 = p_{45} m_4 + p_{56} m_5 = 1.$$

Зададим трудоёмкости всех операторов одинаковыми $q_i = 1$, тогда трудоёмкость тела цикла Θ_T будет

$$\Theta_{T1} = \sum_{i=3}^6 m_i q_i = 3,5.$$

Количество проходов по циклу составляет

$$n_{Ц1} = \frac{1}{1 - p_{Ц1}} = \frac{1}{1 - 0,8} = 5.$$

Эквивалентная трудоёмкость цикла равна

$$\Theta_{Ц1} = n_{Ц1} \Theta_{T1} = 17,5.$$

Граф по рис.4.3 преобразуется к виду (рис.4.5), где вершина Ц образована оператором цикла с трудоёмкостью $q_{Ц1} = \Theta_{Ц1} = 17,5$.

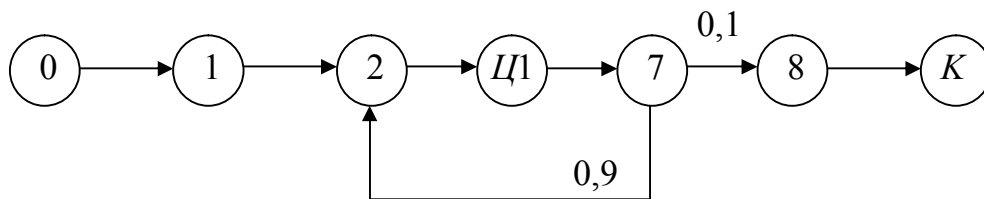


Рис.4.5

Далее выделяем тело внешнего цикла (рис.4.6) и рассчитываем для него значения: $m_2 = 1$; $m_{Ц1} = p_{2 Ц1} m_2 = 1$; $m_7 = p_{Ц1 7} m_{Ц1} = 1$ и трудоёмкость тела цикла $\Theta_{T1} = m_2 q_2 + m_{Ц1} q_{Ц1} + m_7 q_7 = 1 + 17,5 + 1 = 19,5$. Вычисляем количество проходов по циклу $n_{Ц2} = 1/(1 - p_{Ц2}) = 1/(1 - 0,9) = 10$. Находим эквивалентную трудоёмкость внешнего

цикла $\Theta_{Ц2} = q_{Ц2} = n_{Ц2} \Theta_{T2} = 195$. Наконец, вычисляем общую трудоёмкость алгоритма содержащего последовательно соединенные операторы 0, 1, Ц2, 8 К, получаем $\Theta = 1 + 1 + 195 + 1 + 1 = 199$.

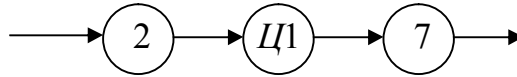


Рис.4.6

4.2 Физические модели вычислительных систем

Существует несколько моделей вычислительных систем, рассмотрим одну из них, которая функционирует на использовании теории массового обслуживания.

Модели устройств вычислительной системы бывают одноканальные и многоканальные. Физическая модель одноканального устройства представляется следующим образом (рис.4.7).

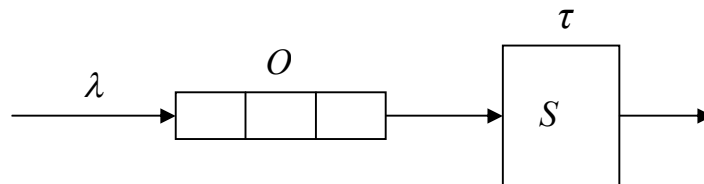


Рис.4.7

В одноканальном устройстве обработка информации производится блоком S . При этом в системе могут обрабатываться несколько программ. Некоторая программа может сделать заявку на обработку в блоке S . Если же программа одна, то блок S немедленно приступает к обработке этой программы, выполняя ее в среднем за время τ . В том случае, когда программ несколько и устройство выполняет какую-либо программу, на входе блока S образуется очередь O . Количество заявок в единицу времени определяется параметром λ . Примером одноканальной модели является устройство, которое содержит процессор и ОЗУ.

Кроме одноканальных имеются и многоканальные модели (рис.4.8).

В таком устройстве образуется очередь, если все k устройств заняты.

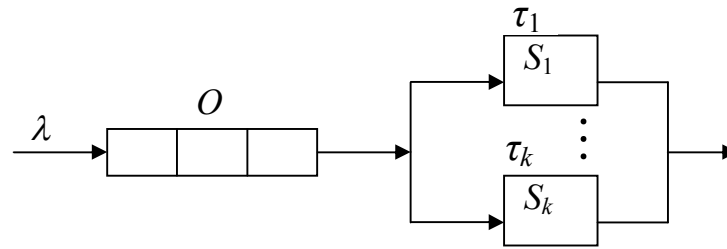


Рис.4.8

Пример.

Рассмотрим модель системы, содержащую процессор S_1 , внешнюю память S_2 и многоканальное устройство ввода/вывода S_3 (рис.4.9).

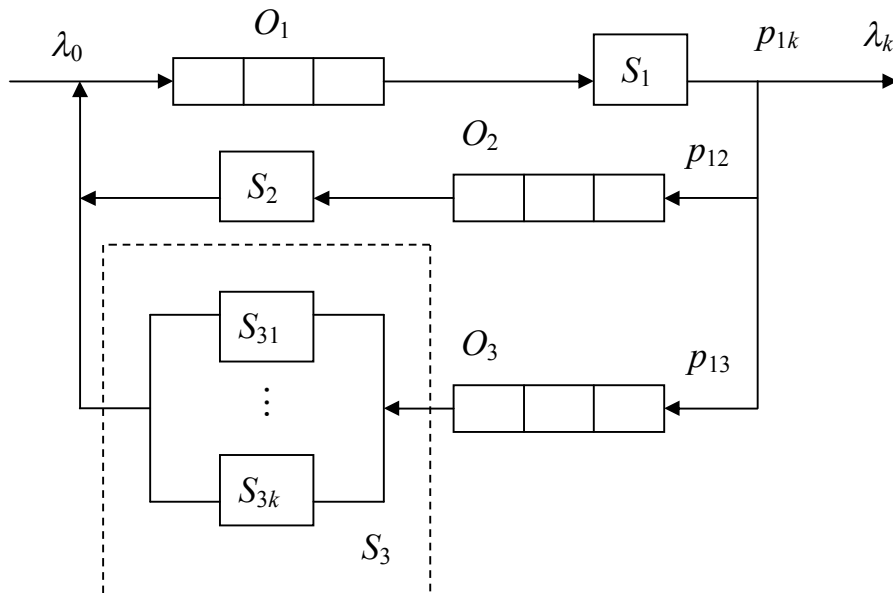


Рис.4.9

В текущий момент времени заявка может обрабатываться процессором S_1 , после этого она может попасть в память S_2 или многоканальное устройство ввода/вывода S_3 . Причём циркуляция заявки (программы) от S_1 к S_2 , S_1 к S_3 может происходить несколько раз. После того как заявка выполнена, она передаётся на выход. Так как вычислительный процесс нигде не теряется, интенсивность выходного потока заявок равна интенсивности входного потока ($\lambda_0 = \lambda_k$). Имея такую физическую модель, легко перейти к графу (рис.4.10), в котором вершина S_0 – на-

чальная, то есть она является источником входного потока заявок. Через вершину S_0 происходит и выход из системы.

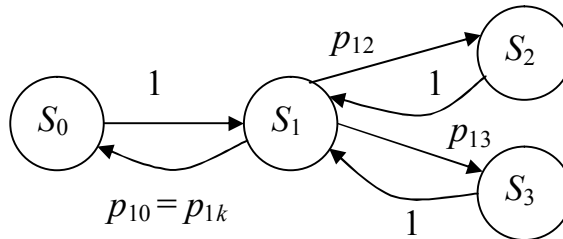


Рис.4.10

Недостатком графовых моделей вычислительных систем являются:

- 1) трудность учёта ситуации, когда каждая из программ может выработать несколько запросов к различным устройствам;
- 2) трудность учётов приоритетов;
- 3) трудность учёта различия во времени обслуживания разных заявок.

4.3. Расчет моделей вычислительных систем

Исходными данными для расчёта являются интенсивность входного потока заявок λ_0 и вероятности переходов от вершины к вершине p_{ij} . Поток входных заявок распространяется по устройствам обработки S_i . На входе устройства S_i плотность потока заявок равна λ (количество заявок в единицу времени). При этом оказывается, что рассчитываемую систему для стационарного случая работы можно представить из набора n независимых устройств (рис.4.11). Расчёт упрощается и можно рассмотреть эти устройства как работающие независимо друг от друга.

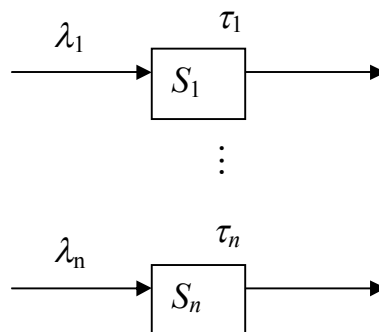


Рис.4.11

Рассмотрим установившийся режим, когда интенсивности входного и выходного потоков для устройства S_j равны между собой, имеют величину λ_j , которая образуется за счет прихода заявок из других устройств и равна

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^n p_{ij} \lambda_i.$$

Решая систему из $n + 1$ алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \sum_{i=0}^n p_{i0} \lambda_i, \\ \lambda_1 &= \sum_{i=0}^n p_{i1} \lambda_i, \\ &\vdots \\ \lambda_n &= \sum_{i=0}^n p_{in} \lambda_i, \end{aligned} \right\}$$

получим все значения λ_j .

Для примера (рис.4.10) зададим конкретные значения: $\lambda_0 = 5\text{с}^{-1}$; $p_{10} = 0,1$; $p_{12} = 0,4$; $p_{13} = 0,5$. Получаем систему из четырех уравнений

$$\left. \begin{aligned} 5 &= p_{10} \lambda_1 = 0,1 \lambda_1, \\ \lambda_1 &= p_{01} \lambda_0 + p_{21} \lambda_2 + p_{31} \lambda_3 = 5 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \lambda_2 &= p_{12} \lambda_1 = 0,4 \lambda_1, \\ \lambda_3 &= p_{13} \lambda_1 = 0,5 \lambda_1. \end{aligned} \right\}$$

Вычисляя, находим $\lambda_1 = 50\text{с}^{-1}$, $\lambda_2 = 20\text{с}^{-1}$, $\lambda_3 = 25\text{с}^{-1}$.

Введем в рассмотрение параметр

$$a_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_0},$$

который называется коэффициентом передачи, который показывает сколько раз в среднем заявка попадает в устройство j .

Для расчета характеристик системы требуется знать также время обслуживания одной заявки каждым устройством

$$\tau_j = \Theta_j \cdot t_j,$$

где Θ_j – среднее количество операций, выполняемых одним устройством при обработке одной заявки, t_j – среднее время выполнения одной операции.

В устройстве j стационарный режим существует, если его загрузка определяется выражением

$$\rho_j = \lambda_j \tau_j$$

меньше единицы. В целом для системы стационарный режим существует при $\rho_{j\max} < 1$.

Определим вероятность $P_j(N_j)$ пребывания в j -ом устройстве N_j заявок. Дальнейший расчет сначала выполним для системы, у которой все устройства одноканальные. Задавая последовательно $N_j = 0, 1, \dots$, имеем

$$P_j(0) = 1 - \rho_j, P_j(1) = \rho_j(1 - \rho_j), \dots, P_j(N_j) = \rho_j^{N_j} \cdot (1 - \rho_j).$$

Это распределение вероятностей $P_j(N_j)$ называется геометрическим законом распределения.

Для любого j -го устройства вычислим следующие параметры.

Среднее количество заявок, находящихся в устройстве (на обработке и в очереди)

$$\bar{N}_j = \sum_{N_j=0}^{\infty} N_j P_j(N_j) = \sum_{N_j=0}^{\infty} N_j \rho_j^{N_j} (1 - \rho_j) = \frac{\rho_j}{1 - \rho_j}.$$

Среднее количество заявок в очереди

$$\bar{N}_{0j} = \bar{N}_j - \rho_j = \frac{\rho_j^2}{1 - \rho_j}.$$

Среднее время пребывания заявки в устройстве

$$\bar{U}_j = \frac{\bar{N}_j}{\lambda_j} = \frac{\tau_j}{1 - \rho_j}.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{W}_j = \frac{\bar{N}_{0j}}{\lambda_j} = \bar{U}_j - \tau_j = \frac{\rho_j \tau_j}{1 - \rho_j}.$$

После этого для системы в целом вычисляем следующие показатели.

Среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{U} = \sum_{j=1}^n a_j \bar{U}_j.$$

Среднее время ожидания заявки в системе

$$\bar{W} = \sum_{j=1}^n a_j \bar{W}_j.$$

4.4. Расчет модели при наличии в вычислительной системе многоканальных устройств

Конечные формулы для расчета многоканального устройства, содержащего K_j каналов, следующие.

Среднее число заявок в устройстве

$$\bar{N}_j = \frac{K_j^{K_j} \cdot \rho_j^{K_j+1}}{K_j! (1 - \rho_j)^2} \cdot P_{0j} + K_j \cdot \rho_j,$$

где $\rho_j = \frac{\lambda_j \cdot \tau_j}{K_j}$ – загрузка канала, $P_{0j} = \left[\sum_{n=0}^{K_j-1} \frac{K_j^n \cdot \rho_j^n}{n!} + \frac{K_j^{K_j} \cdot \rho_j^{K_j}}{K_j! (1 - \rho_j)} \right]^{-1}$ – вероят-

ность того, что в j -ом устройстве нет ни одной заявки. При $K_j=1$, $\bar{N}_j = \rho_j / (1 - \rho_j)$.

Количество заявок, стоящих в очереди $\bar{N}_{0j} = \bar{N}_j - K_j \rho_j$.

Время обслуживания заявки

$$\bar{U}_j = \frac{\tau_j \cdot K_j^{K_j-1} \cdot \rho_j^{K_j}}{K_j! (1 - \rho_j)^2} \cdot P_{0j} + \tau_j.$$

Среднее время простаивания заявки в очереди

$$\bar{W}_j = \bar{U}_j - \tau_j.$$

Пример.

Вычислительная система описывается графом (рис.4.12), где S_1 – одноканальное устройство со средним временем обслуживания одной заявки $\tau_1 = 0,5$ с, S_2 – двухканальное устройство со средним временем обслуживания заявки в канале $\tau_2 = 1$ с. Интенсивность входного потока $\lambda_0 = 0,1$ с⁻¹.

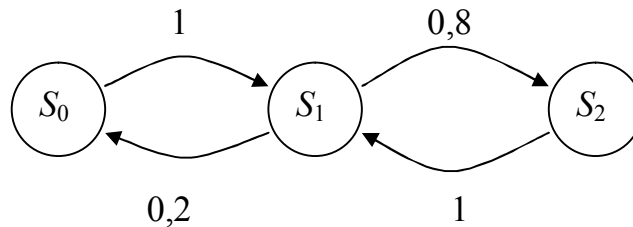


Рис.4.12

Последовательность расчета следующая.

Находим интенсивности входных потоков для устройств 1 и 2. Для этого решаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 0,1 &= 0,2\lambda_1, \\ \lambda_1 &= 0,1 + \lambda_2, \\ \lambda_2 &= 0,8\lambda_1. \end{aligned} \right\}$$

Получаем $\lambda_1 = 0,5\text{с}^{-1}$, $\lambda_2 = 0,4\text{с}^{-1}$.

Определяем коэффициенты передачи:

$$a_1 = \lambda_1/\lambda_0 = 0,5/0,1 = 5, \quad a_2 = \lambda_2/\lambda_0 = 0,4/0,1 = 4.$$

Проверяем условие стационарности работы системы. Для этого вычисляем загрузки устройств $\rho_1 = \lambda_1 \tau_1 = 0,25$ и $\rho_2 = \lambda_2 \tau_2 / 2 = 0,2$. Так как $\rho_1 < 1$, $\rho_2 < 1$, то условие стационарности выполняется.

Вычисляем вероятности P_{01} , P_{02} :

$$P_{01} = 1 - \rho_1 = 0,75; \quad P_{02} = \left[1 + 2\rho_2 + \frac{2\rho_2^2}{1 - \rho_2} \right]^{-1} = 0,67.$$

Находим среднее время пребывания одной заявки в устройствах 1 и 2

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \frac{\tau_1}{1 - \rho_1} = 0,67\text{с}, \\ \bar{U}_2 &= \frac{\tau_2 \cdot \rho_2^2}{(1 - \rho_2)^2} \cdot P_{02} + \tau_2 = 1,04\text{с}. \end{aligned}$$

Определяем среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{U} = a_1 \cdot \bar{U}_1 + a_2 \cdot \bar{U}_2 = 7,51\text{с}.$$

4.5. Модели мультипроцессорных систем

Мультипроцессорные системы применяют для увеличения производительности. Используют две основные разновидности таких систем:

- с индивидуальным ОЗУ для каждого процессора,
- с общим ОЗУ.

В системах первого типа каналы обработки информации работают относительно независимо. При необходимости обмена информацией между каналами производится передача информации через общую память. Физическая модель системы обработки содержит k независимых каналов (рис.4.13).

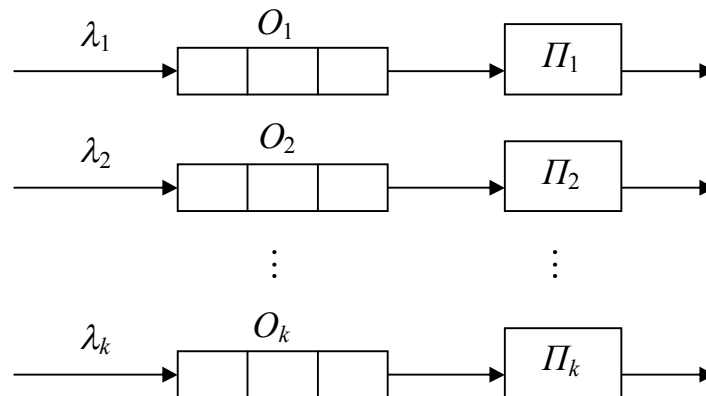


Рис.4.13

Каждый из однотипных процессоров Π настроен на работу с определенной программой. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda$ суммарная интенсивность входного потока равна $k\lambda$, а загрузка одного канала – $\rho = \lambda\tau = \Lambda\tau/k$.

На основании результатов, приведенных в разделе 4.3, для системы первого типа среднее время обработки одной заявки $\bar{U}_1 = \tau/(1 - \rho)$, а среднее время простаивания в очереди $\bar{W}_1 = \rho\tau/(1 - \rho)$.

Рассмотрим систему второго типа. В этой системе k однотипных процессоров работают с одним ОЗУ. Память строиться по модульному принципу. В текущий момент времени произвольный процессор взаимодействует с одним модулем памяти. Это взаимодействие обеспечивает коммутатор. Достоинством подобной системы является то, что процессоры могут выполнять одинаковые функции, то есть производить обработку одинаковых программ. Заявка, попавшая на вход такой системы, направляется на тот процессор, который не занят. Недостаток – наличие коммутатора. Модель системы показана на рис.4.14.

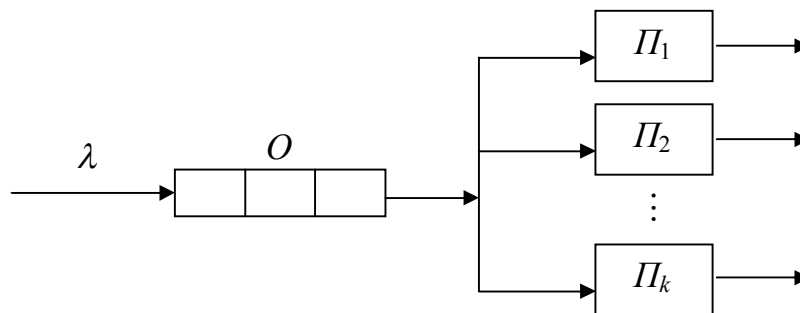


Рис.4.14

Время обработки заявки каждым процессором равно τ . Загрузка одного процессора

$$\rho = \frac{\Lambda \tau}{k}.$$

Характеристики второй системы рассмотрены в разделе 4.4.

Среднее время обработки заявки одним процессором

$$\bar{U}_2 = \frac{\tau k^{k-1} \rho^k}{k!(1-\rho)^2} P_0 + \tau,$$

где $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{k^n \rho^n}{n!} + \frac{k^k \rho^k}{k!(1-\rho)} \right]^{-1}$, а среднее время стояния в очереди $\bar{W}_2 = \bar{U}_2 - \tau$.

Для обеих систем при фиксированной производительности процессора ($\tau = \text{const}$) характеристики систем улучшаются, так как параметры \bar{U} и \bar{W} с увеличением числа каналов уменьшаются.

Иное дело, если зафиксировать суммарную производительность системы $V_\Sigma = kV$, где $V = \frac{1}{t}$ – производительность одного процессора, t – время выполнения

одной операции. Тогда время обслуживания одной заявки $\tau = \Theta t = \frac{\Theta k}{V_\Sigma}$ (Θ – количество операций) будет увеличиваться с ростом k . В этом случае выгоднее использовать один процессор с высокой производительностью.

Сравним характеристики обеих систем при одинаковом количестве процессоров и времени обслуживания заявки. Введём отношения

$$\gamma_U = \frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = f(k, \rho),$$

$$\gamma_W = \frac{\bar{W}_1}{\bar{W}_2} = \varphi(k, \rho).$$

Зависимость γ_U от количества процессоров k показана на рис.4.15. Из анализа кривых следует, что при любых значениях загрузки ρ величина γ_U лежит в пределах $1 < \gamma_U < k$. Следовательно, вторая система имеет преимущество перед первой.

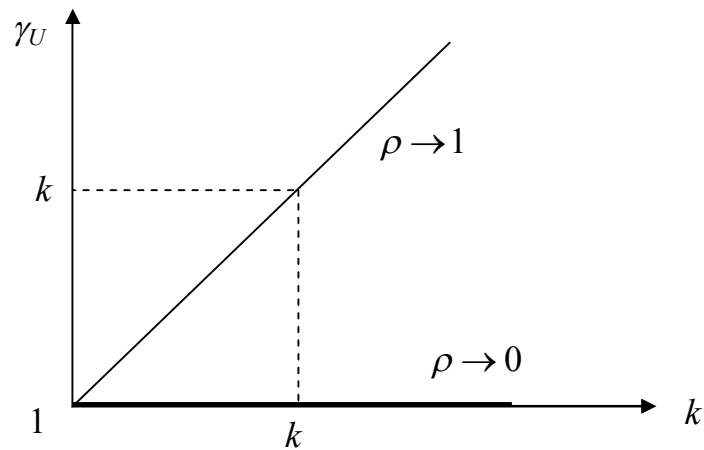


Рис.4.15

На рис.4.16 показана зависимость γ_w от k . Из анализа рисунка следует, что при любых значениях ρ и $k > 1$, $\gamma_w > k$.

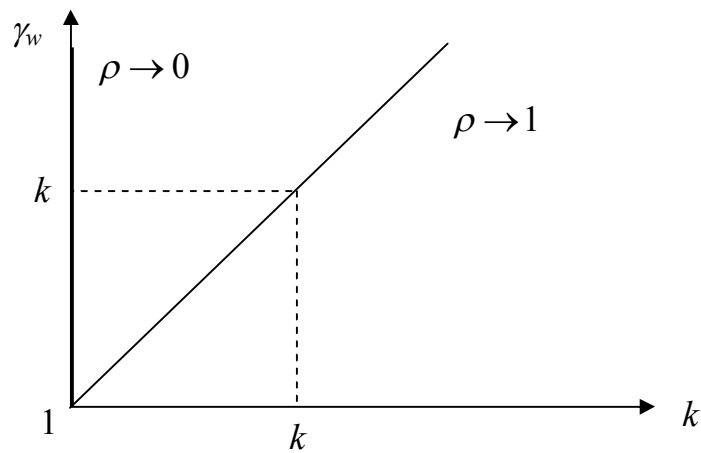


Рис.4.16

Таким образом, по характеристикам преимущество имеет система с общей памятью. Это объясняется тем, что в первой системе каждый процессор настроен на свою программу, и заявка может стоять в очереди в канале, несмотря на то, что прочие каналы свободны. Во второй же системе все каналы одинаковы и заявка направляется в свободный процессор.

5. Моделирование сигналов

Сигналы используются для передачи информации. Они действуют на входе, внутри и выходе информационной системы. Сигналы делятся на детерминированные и случайные. Функциональное описание детерминированных сигналов известно на любой момент времени. Описание случайных сигналов имеет вероятностный характер. Модели случайных сигналов оказываются более сложными, чем детерминированные.

5.1. Цифровое моделирование детерминированных сигналов

Для моделирования и формирования сигнала должна быть задана функция времени $S = S(t)$, описывающая этот сигнал, где $t = kT_0$, $k = 0, 1, 2, \dots$; T_0 – период дискретизации.

Если временное описание сигнала известно, то его моделирование (формирование) сводится к вычислению этой функции. При сложных функциональных зависимостях время, необходимое для вычисления одного отсчёта сигнала, оказывается значительным, поэтому, если требуется сформировать сигнал в реальном времени, пользуются методами, которые позволяют ускорить процесс формирования.

Среди них табличный метод формирования. Значения сигнала рассчитываются в относительном времени и заносятся в таблицу. Затем в реальном времени выводятся из таблицы с периодом дискретизации T_0 . Это наиболее быстродействующий способ формирования, но требует большого объёма памяти под таблицу.

Эффективным является способ формирования сигналов, основанный на рекуррентном описании сигналов. Он позволяет получить высокое быстродействие и сэкономить объём памяти. Рассмотрим несколько примеров моделирования на основе рекуррентных соотношений.

Пример 1.

Модель сигнала задана линейной функцией $S = at + b$. Введём дискретное время $t = kT_0$, тогда

$$S_k = akT_0 + b = a(k - 1 + 1)T_0 + b = a(k - 1)T_0 + b + aT_0 = S_{k-1} + aT_0 = S_{k-1} + C,$$

$$S_0 = b, C = aT_0.$$

Схема формирования линейно изменяющегося сигнала показана на рис.5.1.

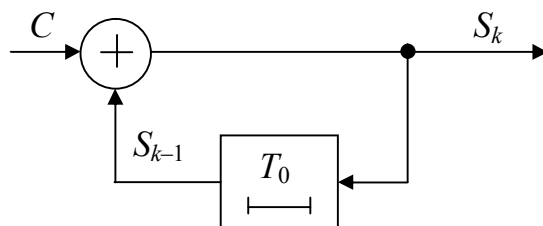


Рис.5.1

Пример 2.

Сигнал описывается экспоненциальной функцией $S = e^{-at}$. Вводим дискретное время $t = kT_0$, тогда

$$S_k = e^{-akT_0} = \exp(-a(k+1-1)T_0) = \exp(-a(k-1)T_0)\exp(-aT_0) = S_{k-1}e^{-aT_0} = S_{k-1}C,$$

$$S_0 = 1, C = e^{-aT_0}.$$

Схема моделирования экспоненциального сигнала приведена на рис.5.2.

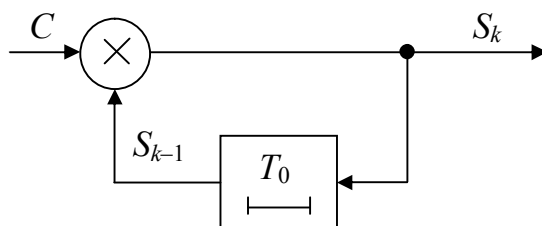


Рис.5.2

Пример 3.

Требуется сформировать синусоидальный сигнал $S = \sin(\omega t)$. Введём дискретное время $t = kT_0$. Используя тригонометрические преобразования, получаем

$$\begin{aligned} S_k &= \sin(\omega kT_0) = \sin(\omega(k-1+1)T_0) = \sin(\omega(k-1)T_0 + \omega T_0) = \\ &= \sin(\omega(k-1)T_0)\cos(\omega T_0) + \cos(\omega(k-1)T_0)\sin(\omega T_0), \end{aligned}$$

$$S_{k-2} = \sin(\omega(k-1)T_0 - \omega T_0) = \sin[\omega(k-1)T_0]\cos(\omega T_0) - \cos[\omega(k-1)T_0]\sin(\omega T_0).$$

Суммируя эти два выражения, определяем

$$S_k + S_{k-2} = 2S_{k-1}\cos(\omega T_0).$$

Следовательно, рекуррентное соотношение для вычисления сигнала имеет вид

$$S_k = C S_{k-1} - S_{k-2},$$

$$S_0 = 0, S_1 = \sin(\omega T_0), C = 2\cos(\omega T_0).$$

Схема генератора синусоидального сигнала показана на рис.5.3.

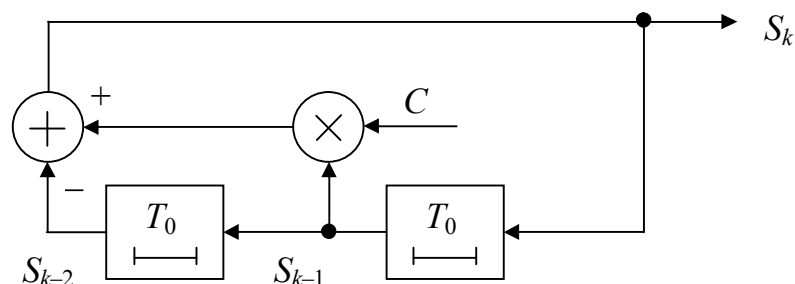


Рис.5.3

5.2. Моделирование случайных сигналов

Алгоритм моделирования случайного сигнала зависит от метода его описания. Наиболее широко используется следующая схема формирования случайных сигналов (рис.5.4).

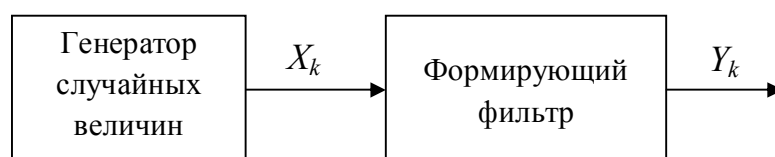


Рис.5.4

Генератор случайных величин формирует значения X_k , распределённые по определённому закону. Формирующий фильтр связывает эти отсчёты X_k во времени между собой, образуя сигнал Y_k .

Задача формирования случайного сигнала распадается на две:

1 – генерирование случайных величин X_k ;

2 – формирование на их основе случайного сигнала Y_k по его описанию.

Задача генерирования случайных величин решается использованием либо генератора стандартных равномерно распределённых величин X_k , либо генератора стандартных нормальных (гауссовских) распределённых величин X_k . Обычно генератор второго типа строится с использованием генератора первого типа.

Стандартный равномерный закон распределения величин X_k (функция плотности распределения вероятностей) описывается соотношением

$$w(X) = \begin{cases} 1, & 0 \leq X \leq 1, \\ 0, & X < 0, X > 1. \end{cases}$$

Это распределение показано на рис.5.5.

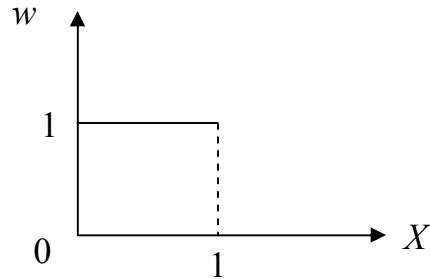


Рис.5.5

Для данного распределения математическое ожидание чисел X равно $m(X) = 0,5$, а дисперсия – $D(X) = 1/12$.

Стандартный нормальный закон распределения плотности вероятности определяется выражением

$$w(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}}, \quad -\infty < X < +\infty,$$

причем для него математическое ожидание чисел X равно $m(X) = 0$, а дисперсия – $D(X) = 1$.

Форма нормального распределения показана на рис.5.6.

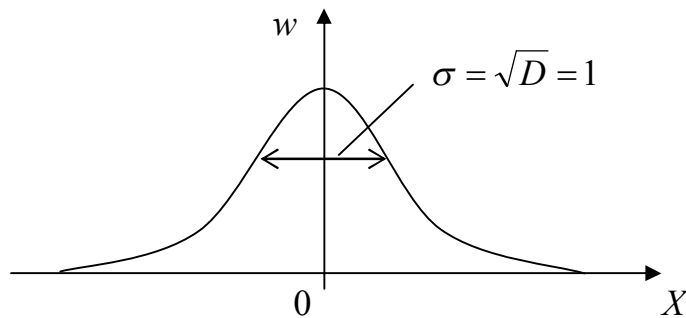


Рис.5.6

При моделировании случайных сигналов в качестве формирующих фильтров (рис.5.4) могут быть использованы цифровые фильтры (системы), рассмотренные в разделе 3.

5.2.1. Формирование равномерно распределённых случайных величин

Для формирования стандартных равномерно распределённых случайных величин широко используется алгоритм, основанный на рекуррентном описании вида

$$X_k = X_{k-1} \lambda \pmod{d},$$

где $\lambda - \text{const}$, \pmod{d} – операция взятия произведения по модулю числа d .

Сам алгоритм не случаен, однако позволяет вырабатывать случайные числа распределённые в интервале $(0,1)$.

Пусть $d = 2^n$, где n – разрядность чисел. Если перемножаются два числа разрядности n , то разрядность результата получается величиной $2n$. Операция \pmod{d} означает выделение младшей части результата, то есть младшей части слова длины n разрядов.

От величины λ зависят период повторения получаемой последовательности, случайность и равномерность формирования чисел. При работе с десятичными числами рекомендуется брать $\lambda = 7^3, 7^{13}, 7^{17}$, а при работе с двоичными – $\lambda = 5^{2m+1}$, где m – любое число, либо $\lambda = 2^{18} + 3$.

Пример.

Заданы: $X_0 = 0.9$, $\lambda = 8$, $d = 10$. Тогда алгоритм формирования определяется соотношением

$$X_k = X_{k-1} 8 \pmod{10}.$$

Последовательно задавая значения k , получаем

$$k = 1: X_1 = 7.2 \pmod{10} = 0.2,$$

$$k = 2: X_2 = 1.6 \pmod{10} = 0.6,$$

$$k = 3: X_3 = 4.8 \pmod{10} = 0.8,$$

$$k = 4: X_4 = 6.4 \pmod{10} = 0.4,$$

$$k = 5: X_5 = 3.2 \pmod{10} = 0.2.$$

Период формируемой псевдослучайной последовательности оказался равным четырем. Это говорит о неправильно выбранном коэффициенте λ .

Генератор равномерно распределённых случайных чисел обычно имеется в стандартном программном обеспечении ЭВМ. Если разрабатывается новый генератор, то его необходимо аттестовать. При аттестации выполняются следующие проверки.

Равномерность формирования чисел на интервале $(0, 1)$. Для этого строится гистограмма.

Случайность чисел. При этом анализируют частоту появления количества нулей либо единиц в формируемых значениях.

Независимость чисел. Для этого вычисляется коэффициент корреляции формируемой последовательности, для независимых чисел он должен стремиться к нулю.

5.2.2. Формирование случайных величин с нормальным законом распределения

Предполагается, что имеется генератор, формирующий случайные величины, распределенные по равномерному (прямоугольному) закону (рис.5.5). Если просуммировать два случайных числа с выхода этого генератора, то закон распределения их будет иметь треугольную форму. При суммировании большего количества чисел закон распределения суммы все больше нормализуется. Обычно складывают 12 чисел в соответствии с алгоритмом

$$Y_k = \sum_{i=1}^{12} (X_{ki} - 0,5).$$

Числовая величина Y оказывается распределенной стандартному по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием $m(Y) = 0$ и единичной дисперсией $D(Y) = 1$.

5.2.3. Формирование случайных величин с произвольным законом распределения методом функционального преобразования

Метод позволяет получить из случайных величин, распределённых по равномерному закону величины, распределенные по любому заданному закону, в том числе и нормальному. Для этого к выходу генератора равномерных чисел X подключают безинерционный преобразователь, выполняющий трансформацию чисел в соответствии с функциональной зависимостью $Y = f(X)$.

Обозначим закон распределения чисел, снимаемых с входа генератора, $w_X(X)$. На выходе преобразователя необходимо получить закон $w_Y(Y)$. Полагаем, что $Y = f(X)$ монотонная функция (рис.5.7).

Так как соответствие чисел Y и X однозначно, то вероятность того, что некоторое число Y' лежит в интервале $-\infty < Y' < Y$, равна вероятности того, что число X' находится в интервале $-\infty < X' < X$, то есть

$$P\{-\infty < X' < X\} = P\{-\infty < Y' < Y\}.$$

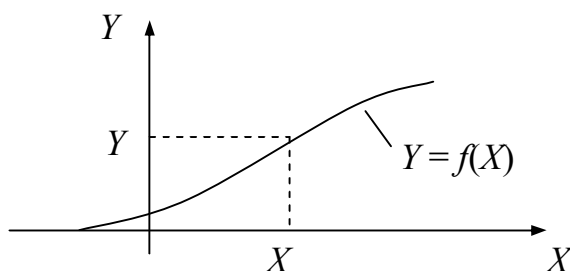


Рис.5.7

Записывая вероятности через плотности вероятности, имеем

$$\int_{-\infty}^X w_X(X) dX = \int_{-\infty}^Y w_Y(Y) dY.$$

Для стандартного равномерного закона плотность вероятности описывается выражением

$$w_X(X) = \begin{cases} 1, & 0 \leq X \leq 1, \\ 0, & X < 0, X > 1. \end{cases}$$

Тогда $\int_{-\infty}^X w_X(X) dX = \int_0^X 1 \cdot dX = X$. И функциональная зависимость $Y = f(X)$ находится из решения уравнения

$$\int_{-\infty}^Y w_Y(Y) dY = X.$$

Пусть требуется сформировать числа, распределенные по стандартному нормальному закону. Имеем

$$\int_{-\infty}^Y w_Y(Y) dY = \int_{-\infty}^Y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY = F(Y).$$

Функциональное преобразование будет вида $Y = F^{-1}(X)$, где F^{-1} — функция, обратная функции F . Алгоритм формирования чисел Y , распределенных по нормальному закону, заключается в формировании на шаге k числа X_k , распределенного по равномерному закону, и преобразовании его в число Y_k по правилу $Y_k = F^{-1}(X_k)$. Для ускорения преобразования функция F может быть определена в виде таблицы.

5.2.4. Формирование случайных величин с произвольным законом распределения методом Неймана

Имеем генератор, формирующий равномерно распределённые числа X_k . Требуется сформировать числа Y_k , распределённые по закону $w_Y(Y)$ (рис.5.8). Алгоритм формирования чисел Y_k следующий. На шаге k из генератора выводится пара чисел X_{1k}, X_{2k} . Число X_{1k} , которое находится в интервале $(0,1)$, преобразуем в число Y_k , лежащее в интервале (a, b) линейным преобразованием $Y_k = X_{1k}(b-a) + a$.

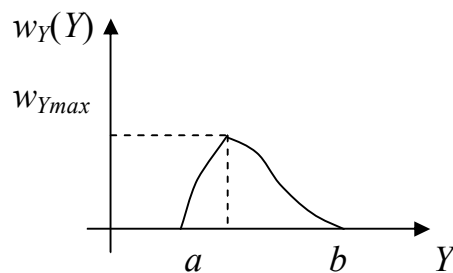


Рис.5.8

Проверяется выполнение неравенства $X_{2k} \cdot w_{Ymax} < w_Y(Y_k)$. Очевидно, что оно будет чаще выполняться для значений Y_k , которые задают большее значение функции w_Y (что и требуется выполнить). Если неравенство выполняется, то число Y_k принадлежит закону распределения w_Y , и оно сохраняется. В противном случае числа X_{1k} и X_{2k} отбрасываются и генерируется новая пара чисел.

5.2.5. Формирование случайных сигналов

Рассмотрим задачу формирования случайного, стационарного, нормального сигнала (рис.5.9). У стационарного сигнала, параметры (прежде всего математическое ожидание и дисперсия) не зависят от времени. Нормальный сигнал – это сигнал, значения которого распределены по нормальному (гауссовскому) закону. Не снижая общности результатов задачи, положим, что математическое значение сигнала $m\{Y(t)\}$ равно нулю.

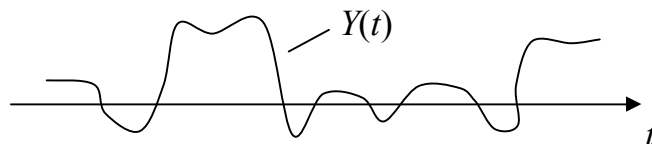


Рис.5.9

Чаще всего описание случайного сигнала производится по мощности (энергии). Энергетическими характеристиками являются корреляционная функция $R_Y(\tau)$ либо энергетический спектр $S_Y(\omega)$.

Корреляционная функция стационарного сигнала определяется соотношением

$$R_Y(\tau) = m\{Y(t)Y(t + \tau)\},$$

при вычислении которого находится среднее значение произведения сигнала и его копии, сдвинутой на время τ .

Свойства корреляционной функции стационарного сигнала.

1. При $\tau = 0$ величина корреляционной функции равна дисперсии сигнала:

$$R_Y(0) = D(Y).$$

2. Она является четной функцией:

$$R_Y(-\tau) = R_Y(\tau).$$

3. Предельное значение функции при $\tau \rightarrow \pm\infty$ равно

$$R_Y(\pm\infty) = 0.$$

4. Для любого временного значения τ выполняется неравенство

$$R(0) < \sigma_Y^2.$$

Качественный вид корреляционных функций двух разных сигналов 1 и 2 показан на рис.5.10.

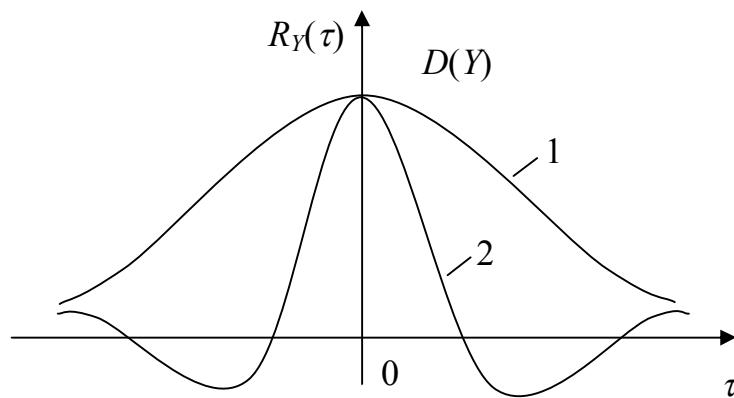


Рис.5.10

Энергетический спектр сигнала характеризует распределение его энергии по частоте ω . Он связан с корреляционной функцией двухсторонним преобразованием Фурье

$$S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau.$$

Обратное преобразование имеет следующий вид

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega.$$

Качественный вид энергетического спектра сигнала $S_Y(\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$ который является математическим (нереальным) спектром, показан на рис.5.11. Здесь же показан реальный физический спектр, у которого составляющие $2S_Y(\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$ расположены в правой полуплоскости.

Метод формирования сигнала с заданным энергетическим спектром основан на реализации структуры по рис.5.1. В качестве генератора используется генератор стандартных нормальных случайных величин X_k с параметрами $m(X) = 0$, $D(X) = 1$.

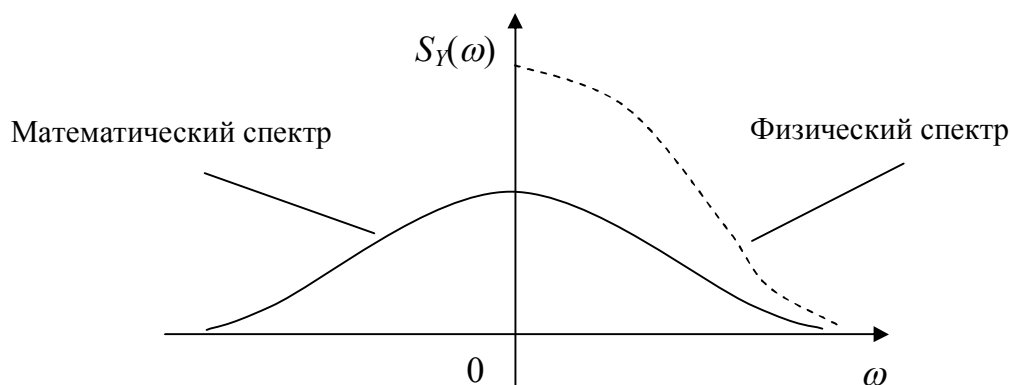


Рис.5.11

Случайные величины X_k подаются на линейный формирующий фильтр, с выхода которого снимается случайный сигнал $Y(t)$ с энергетическим спектром $S_Y(\omega)$. Известно, что любое линейное преобразование случайных величин, распределённых по нормальному закону, не приводит к изменению закона их распределения, поэтому сигнал $Y(t)$ оказывается гауссовским.

Обозначим $k_{\Pi}(j\omega)$ – функция передачи формирующего фильтра. Тогда энергетический спектр на выходе фильтра будет следующим

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega) |k_{\Pi}(j\omega)|^2 = S_X(\omega) k_{\Pi}(j\omega) k_{\Pi}^*(j\omega),$$

где $S_X(\omega)$ – энергетический спектр входной последовательности случайных величин X , $k_{\Pi}^*(j\omega)$ – комплексно сопряжённая к $k_{\Pi}(j\omega)$ функция передачи фильтра, причем

$$\begin{aligned} k_{\Pi}(j\omega) &= |k_{\Pi}(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, \\ k_{\Pi}^*(j\omega) &= |k_{\Pi}(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}. \end{aligned}$$

Входной сигнал фильтра X – это последовательность коротких импульсов, длительность которых равна периоду дискретизации T_0 , поэтому спектр такого сигнала является равномерным в области нулевых частот ω (рис.5.12) со значением $S_X(\omega) = S_X$. Следовательно, форма спектра выходного сигнала $S_Y(\omega)$ (рис.5.12) полностью определяется квадратом модуля функции передачи формирующего фильтра, то есть он “вырезает” из спектра входного сигнала требуемый спектр $S_Y(\omega)$ с частотой среза ω_c .

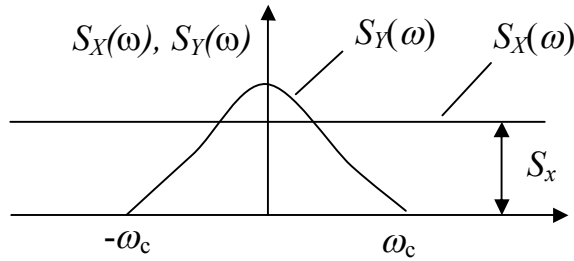


Рис.5.12

Так как дисперсия входного сигнала X равна $D(X) = 1$, и справедливо соотношение

$$D(X) = R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S_X d\omega = \frac{S_X \omega_c}{\pi} = 1,$$

то отсюда $S_X = \frac{\pi}{\omega_c}$. Тогда выходной энергетический спектр фильтра будет определяться уравнением

$$S_Y(\omega) = \frac{\pi}{\omega_c} |k_{\Pi}(j\omega)|^2.$$

Из этого уравнения можно найти $k_{\Pi}(j\omega)$ и тем самым определить описание фильтра. Уравнению удовлетворяют множества передаточных функций с одина-

ковыми амплитудно-частотными характеристиками $|k_{\Pi}(j\omega)|$ и разными фазо-частотными характеристиками $\varphi(\omega)$, так как

$$|k_{\Pi}(j\omega)|^2 = k_{\Pi}(j\omega)k_{\Pi}^*(j\omega) = |k_{\Pi}(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}|k_{\Pi}(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}.$$

Выберем фильтр с нулевой фазо-частотной характеристикой, для которой $\varphi(\omega) = 0$. У такого фильтра амплитудный спектр действителен, то есть

$$k_{\Pi}(j\omega) = k_{\Pi}(\omega).$$

На выходе фильтра формируется спектр

$$S_Y(\omega) = \frac{\pi}{\omega_c} k_{\Pi}^2(\omega).$$

Отсюда следует, что передаточная функция фильтра равна

$$k_{\Pi}(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_c S_Y(\omega)}{\pi}}.$$

По передаточной функции фильтра можно найти его реакцию на импульсное воздействие единичной площади

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_{\Pi}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega_c S_Y(\omega)}{\pi}} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\omega_c S_Y(\omega)}{\pi}} \cos(\omega t) d\omega.$$

При вычислении интеграла можно использовать таблицы обратного преобразования Фурье.

Введя дискретное время $t = kT_0$, находим реакцию цифрового фильтра $c_k = T_0 g_k$ (раздел 3.1). Алгоритм формирования выходного сигнала Y_k описывается сверткой вида

$$Y_k = \sum_{i=-m}^m c_i X_{k-i}.$$

В отличие от результатов раздела 3.1 здесь суммирование производится не только для положительных значений i , но и отрицательных. Это связано с тем, что импульсная реакция $g(t)$ фильтра определяет корреляционную функцию $R_Y(\tau)$ сигнала $Y(t)$, а она является симметричной относительно $\tau = 0$ (рис.5.10). Последнее выражение можно записать и в виде, соответствующем рассмотренному в разделе 3.1:

$$Y_k = \sum_{i=0}^{2m} c'_i X_{k-i}, \text{ где } c'_i = c_{i-m}.$$

Пример.

Определим алгоритм моделирования случайного процесса Y , имеющего энергетический спектр вида

$$S_Y(\omega) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\omega_c} \sigma_Y^2 e^{-\frac{4\omega^2}{\omega_c^2}}.$$

Производя последовательные вычисления, находим функцию передачи фильтра

$$k_{\Pi}(\omega) = \frac{2}{\sqrt[4]{\pi}} \sigma_Y e^{-\frac{2\omega^2}{\omega_c^2}},$$

а на ее основе – импульсную реакцию фильтра

$$g(t) = \frac{\sigma_Y}{\sqrt[4]{4\pi^3}} \omega_c e^{-\frac{\omega_c^2 t^2}{8}}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Выберем T_0 в соответствии с неравенством Котельникова-Шеннона равным

$$T_0 = \frac{\pi}{\omega_c}.$$

Выражение для реакции цифрового фильтра будет

$$c_k = T_0 g_k = \sqrt[4]{\pi/4} \sigma_Y e^{-\frac{\pi^2 k^2}{8}}.$$

Зададим $m = 2$, тогда алгоритм формирования случайного сигнала оказывается следующим

$$Y_k = \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}} \sigma_Y \left[X_{k-2} + e^{-\frac{\pi^2}{8}} (X_{k-1} + X_{k-3}) + e^{-\frac{\pi^2}{2}} (X_k + X_{k-4}) \right].$$

6. Имитационное моделирование систем

6.1. Характеристика имитационного моделирования

Аналитические модели – универсальны, но имеют ограниченное использование. Сложные системы очень трудно описать. Аналитические модели для сложных систем оказываются неадекватными, поэтому используются имитационные модели.

Имитационная модель – это описание объекта на некотором языке. Составными частями имитационной модели являются описания: элементов системы, структуры системы, свойств среды, в которой работает система. Указанная информация имеет логико-математический характер и представляется в форме совокупности алгоритмов. На основе алгоритмов строится программа.

Имитационные модели вычислительных систем часто имеют вероятностную природу, по этой причине имитационное моделирование называют статистическим моделированием.

При проведении имитационного моделирования можно выделить 3 этапа.

1. Создание концептуальной модели. Цель этого этапа – определение общего замысла модели на основе поставленной задачи. На этом этапе намечается основная структура модели, определяется общая методика проведения исследования модели и производится выбор программных и технических средств.

2. Разработка имитационной модели. Цель этапа – создание программы для ЭВМ путём составления алгоритмического описания концептуальной модели. Алгоритмическое описание заключается в детальном определении параметров, характеристик, критериев эффективности, логико-математическом представлении концептуальной модели. Определяются алгоритмы, и выполняется полное описание модели, полностью разрабатывается программа функционирования. На завершающей стадии этого этапа производится анализ адекватности модели.

3. Исследование модели на ЭВМ. Цель – сбор с помощью модели статистических данных о поведении исследуемой системы. В результате статистических испытаний получают необходимую информацию для вычисления параметров и характеристик системы.

Важным свойством имитационной модели является её пригодность для любых систем. Имитационные модели при увеличении сложности не обнаруживают резкого роста в реализации, однако, эти модели не являются универсальными.

Исследования с помощью методов имитационного моделирования достаточно сложный процесс, он зависит от сложности исследуемой системы, а также от совокупности программных и технических средств, от опыта исследователя. Выделяют три основных направления имитационного моделирования вычислительных систем.

1. Имитационные модели на основе процедурно ориентированных алгоритмических языков. При этом модели разрабатываются как обычные прикладные программы для ЭВМ. Основной недостаток первого направления моделирования – трудность программирования, так как каждая новая система моделируется новой программой. Между различными моделями преемственность является незначительной.

2. Сетевое имитационное моделирование. Модель вычислительной системы представляется как совокупность взаимодействия устройств массового обслуживания, которые имитируют функционирование аппаратных и программных

средств. Имитационная модель строится из типовых элементарных моделей массового обслуживания. В этом направлении удаётся исключить этап программирования, так как элементарные модели уже описаны. Стадия программирования заменяется стадией формального кодирования систем. Достоинство данного направления в том, что модель легко описывается, но недостаток в том, что данным методом может быть описан лишь частный класс вычислительных систем.

3. Имитационное моделирование на основе алгоритмических языков системного моделирования. В этом случае используются специализированные языки (SIMULA, GPSS, VHDL), которые используют унифицированный набор понятий в терминах, в которых описывается структура и порядок функционирования системы. Специализированный язык может использоваться для описания систем широкого класса. Эффективность использования данного направления возрастает с увеличением сложности проектируемых систем.

6.2. Структура имитационного моделирования

Имитационное моделирование позволяет смоделировать любую систему. Современное моделирование базируется на цифровых ЭВМ. Структура моделирования имеет следующий вид, рис.6.1.

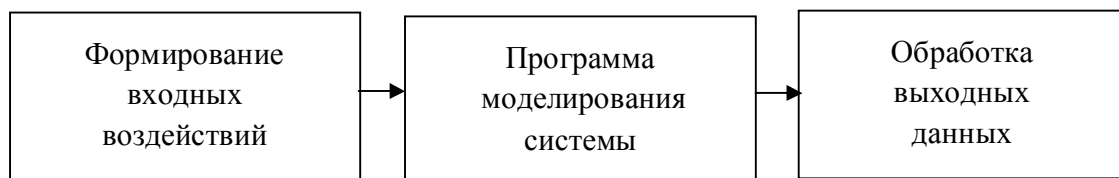


Рис.6.1

Первый блок моделирует воздействия (сигналы) в виде временных функций, которые имитируют окружающую среду. Второй блок имитирует работу системы. Если система имеет сложный вид, то для её математического описания применяется способ разбиения системы на подсистемы. При этом в начале независимо описывается каждая из подсистем, а затем производится описание системы в целом. Конкретное описание зависит от типа вычислительной системы. Третий блок производит вычисления характеристик системы. Так как часто входные воздействия случайны, то производят статическое моделирование, при котором выполняют многократное повторение экспериментальных исследований. В выходном блоке набирают статистику, вычисляют оценки математических ожиданий определённых параметров системы.

После обработки данных получают результаты моделирования, используемые при проектировании реальной системы.

Рассмотрим пример моделирования системы, которая является системой массового обслуживания. Эта система включает основные устройства (рис.6.2): процессор и ОЗУ, НМД (накопитель на магнитных дисках), принтер.

Система функционирует следующим образом. На вход системы поступает заявка, она обрабатывается процессором, затем данные поступают в НМД или в принтер. Данные могут выводиться из НМД и поступать в виде заявки на обработку в процессор. После вывода информации в принтер последний может инициировать поступление новой заявки.

Задача моделирования заключается в определении временных характеристик системы: времени пребывания заявки в системе, времени ожидания обслуживания и других.

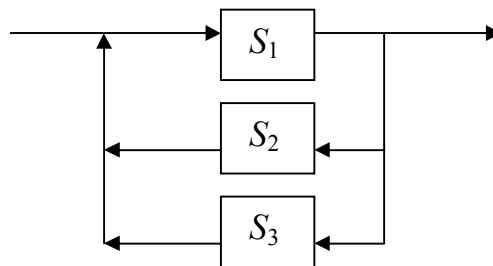


Рис.6.2

Большое число ограничений при имитационном моделировании в отличие от аналитического может быть снято (приоритеты обслуживания, закон распределения времени обслуживания и др.). Но при моделировании на ЭВМ трудно реализовать параллельно протекающие процессы без ущерба адекватности. Они должны быть последовательно описаны во времени.

Вариант алгоритма моделирования системы показан на рис.6.3.

Параметры состояния устройств S_1 , S_2 , S_3 в процессе моделирования меняются, то есть между блоками параметров состояния и блоками моделирования S имеются функциональные связи.

После многократного повторения цикла работы системы производится обработка статистических данных и вычисление характеристик всей системы.

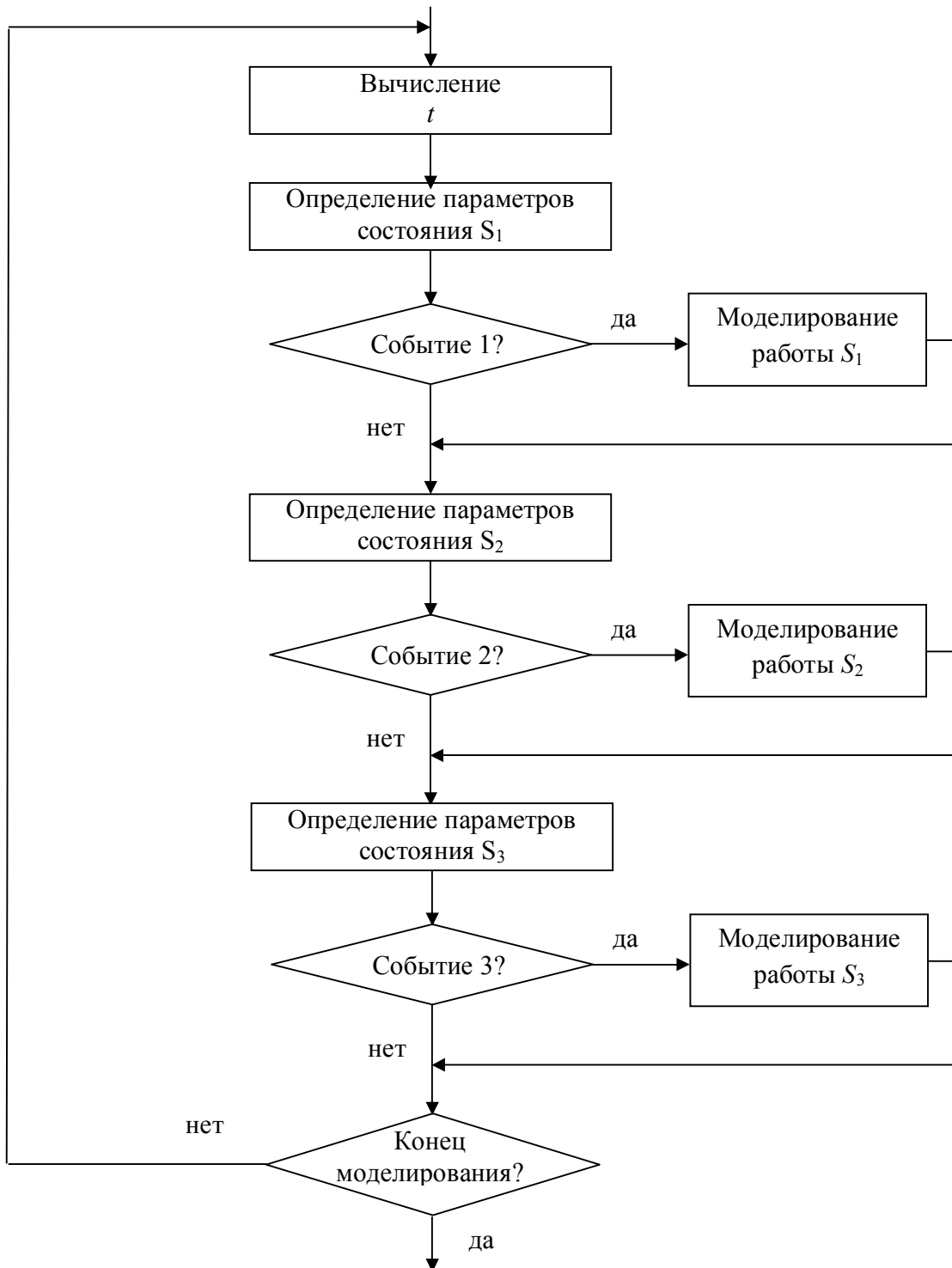


Рис.6.3

Заключение

Моделирование может применяться на различных этапах – исследования, проектирования, разработки, внедрения, эксплуатации систем, а также на различных уровнях – от анализа работы элементов до исследования систем в целом с учетом взаимодействия с внешней средой. Эффективность моделирования определяется разработанной научной основой моделирования и развитием средств вычислительной техники.

Литература

1. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа, 1999.
2. Яншин А.А. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности ЭВА. – М.: Радио и связь, 1983.
3. Альмах И.Н. Моделирование вычислительных систем. – Л.: Машиностроение, 1988.
4. Основы теории вычислительных систем. Под ред. С.А. Майорова. – Высшая школа, 1978.
5. Вероятностные методы в вычислительной технике. Под ред. А.Н. Лебедева, Е.А. Чернявского. – М.: Высшая школа, 1986.
6. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1978.
7. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управлении. – М.: Радио и связь, 1985.
8. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем // Лабораторный практикум. – М.: Высшая школа, 1990.
9. Армстронг Дж.Р. Моделирование цифровых систем на языке VHDL. – М.: Мир, 1992.
10. Шрайбер Т.Дж. Моделирование на GPSS. – М.: Мир, 1980.
11. Вишняков В.А. Цифровое моделирование сигналов: Учебное пособие /РАТИ. – Рыбинск, 1993.
12. Вишняков В.А. Системы цифровой обработки сигналов: Учебное пособие. – РГАТА. – Рыбинск, 2000.

Содержание

Введение.....	3
1. Моделирование – этап образного проектирования электронной аппаратуры	4
1.1. Основные понятия теории моделирования	4
1.2. Обобщенное символическое представление систем.....	6
1.3. Классификация видов моделирования	7
2. Моделирование статических безинерционных систем	8
2.1. Построение полиномиальных моделей с использованием регрессионного анализа	9
2.2. Планирование эксперимента, полный эксперимент	12
2.3. Дробный эксперимент.....	16
2.4. Точность исследований	19
2.4.1. Уменьшение влияния случайных ошибок.....	19
2.4.2. Отсеивание грубых измерений.....	20
2.4.3. Проверка эксперимента на однородность	21
2.4.4. Проверка значимости коэффициентов модели.....	22
2.4.5. Проверка модели на адекватность	22
3. Модели линейных динамических систем.....	23
3.1. Нерекурсивные модели.....	24
3.2. Рекурсивные модели	28
3.3. Моделирование дискретных динамических систем в пространстве состояний	30
4. Модели сложных вычислительных систем	32
4.1. Модели вычислительных процессов	32
4.2. Физические модели вычислительных систем	36
4.3. Расчет моделей вычислительных систем.....	38
4.4. Расчет модели при наличии в вычислительной системе многоканальных устройств.....	41
4.5. Модели мультипроцессорных систем	42
5. Моделирование сигналов	46
5.1. Цифровое моделирование детерминированных сигналов.....	46
5.2. Моделирование случайных сигналов	48
5.2.1. Формирование равномерно распределённых случайных величин ..	50
5.2.2. Формирование случайных величин с нормальным законом распределения	51

5.2.3. Формирование случайных величин с произвольным законом распределения методом функционального преобразования	51
5.2.4. Формирование случайных величин с произвольным законом распределения методом Неймана	53
5.2.5. Формирование случайных сигналов	53
6. Имитационное моделирование систем	58
6.1. Характеристика имитационного моделирования	58
6.2. Структура имитационного моделирования	60
Заключение	63
Литература	63