Presentación - Trabajo final - Algoritmo QD

Grupo 8

Iavicoli Dulcet, Listorti, Loscalzo Bianchi

Introducción:

Algoritmo QD:

- Algoritmo para aproximar las raíces de un polinomio.

- Puede obtener todas las raíces en un mismo procedimiento.

- Requiere: Polinomio completo con coeficientes reales y no nulos.

Método de Bairstow:

- Para un polinomio con raíces co-modulares.

Preprocesamiento:

- En caso de no estar completo el polinomio.

Algoritmo Quotient-Difference (QD)

Sea un P(x) un polinomio completo, de raíces reales:

Cálculo de los valores de q_i y e_i para la iteración 0.

$$q_1^{(0)} = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \quad ; \quad q_i^{(0)} = 0 \quad \forall i = 2,3,\cdots,n$$

$$e_i^{(0)} = \frac{a_{n-i-1}}{a_{n-i}} \quad \forall i = 1,2,\cdots,n-2,n-1 \quad ; \quad e_0^{(0)} = e_n^{(0)} = 0$$

Cálculo de los valores de q_i y e_i para el resto de las iteraciones.

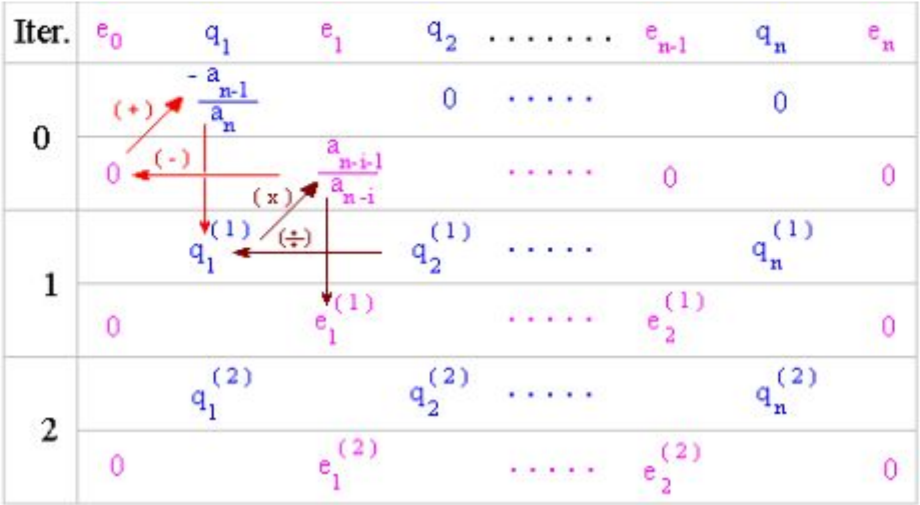
$$q_i^{(m+1)} = e_i^{(m)} - e_{i-1}^{(m)} + q_i^{(m)} \qquad \forall i = 1,2,\cdots,n$$

$$e_i^{(m+1)} = \frac{q_{i-1}^{(m+1)}}{q_i^{(m+1)}} \cdot e_i^{(m)} \qquad \forall i = 1,2,\cdots,n-1$$

$$e_0^{(m+1)} = e_n^{(m+1)} = 0$$

Tabla de valores del método:

Con las sucesivas iteraciones, las columnas qi los valores convergen en valores reales. En las columnas ei, los valores en primer caso convergen a cero u oscilarán entre distintos valores, en cuyo debemos recurrir al método de Bairstow.



Iter.	e_0	q_1	e_1	q_2	....	e_{n-1}	q_n	e_n
0		$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$		0	.....		0	
	0		$\frac{a_{n-i-1}}{a_{n-i}}$		.....	0		0
1		$q_1^{(1)}$		$q_2^{(1)}$	.....		$q_n^{(1)}$	
	0		$e_1^{(1)}$		.....	$e_2^{(1)}$		0
2		$q_1^{(2)}$		$q_2^{(2)}$	.....		$q_n^{(2)}$	
	0		$e_1^{(2)}$		.....	$e_2^{(2)}$		0

Método QD con raíces complejas: Algoritmo de Bairstow

¿Qué pasa frente a polinomios con raíces complejas?...¿Y con raíces de igual módulo?

En estos casos las columnas del error no tienden a anularse...

Iteración	e0	q1	e1	q2	e2	q3	e3	q4	e4	q5	e5
0		3.50000		0.00000		0.00000		0.00000		0.00000	
	0.00000		-0.78571		0.77273		-1.82353		-0.32258		0.00000
1		2.71429		1.55844		-2.59626		1.50095		0.32258	
	0.00000		-0.45113		-1.28731		1.05422		-0.06933		0.00000
2		2.26316		0.72226		-0.25473		0.37740		0.39191	
	0.00000		-0.14397		0.45401		-1.56192		-0.07199		0.00000
3		2.11919		1.32024		-2.27066		1.86733		0.46390	
	0.00000		-0.08969		-0.78084		1.28448		-0.01789		0.00000
4		2.02949		0.62909		-0.20533		0.56496		0.48179	
	0.00000		-0.02780		0.25486		-3.53421		-0.01525		0.00000
5		2.00169		0.91176		-3.99440		4.08392		0.49704	
	0.00000		-0.01266		-1.11655		3.61341		-0.00186		0.00000
6		1.98903		-0.19213		0.73556		0.46865		0.49890	
	0.00000		0.00122		4.27459		2.30222		-0.00198		0.00000
7		1.99025		4.08123		-1.23680		-1.83555		0.50087	
	0.00000		0.00251		-1.29540		3.41674		0.00054		0.00000
8		1.99276		2.78332		3.47534		-5.25175		0.50033	
	0.00000		0.00350		-1.61748		-5.16321		-0.00005		0.00000
9		1.99626		1.16234		-0.07039		-0.08860		0.50038	
	0.00000		0.00204		0.09795		-6.49890		0.00029		0.00000
10		1.99830		1.25825		-6.66724		6.41059		0.50009	
	0.00000		0.00128		-0.51903		6.24873		0.00002		0.00000
11		1.99959		0.73794		0.10052		0.16188		0.50007	
	0.00000		0.00047		-0.07070		10.06383		0.00007		0.00000
12		2.00006		0.66677		10.23504		-9.90187		0.50000	
	0.00000		0.00016		-1.08520		-9.73623		-0.00000		0.00000
13		2.00022		-0.41859		1.58401		-0.16564		0.50001	
	0.00000		-0.00003		4.10658		1.01813		0.00001		0.00000
14		2.00018		3.68803		-1.50444		-1.18377		0.49999	
	0.00000		-0.00006		-1.67518		0.80112		-0.00000		0.00000
15		2.00012		2.01291		0.97186		[illegible]		[illegible]	
	[illegible]		-0.00006		-0.80880		-1.63617		[illegible]		0.00000
16		[illegible]		1.20417		0.14448		[illegible]		[illegible]	
	[illegible]		-0.00004		-0.09704		3.94900		-0.00000		0.00000
17		2.00003		1.10717		4.19053		-4.29772		0.50000	
	0.00000		-0.00002		-0.36730		-4.05002		0.00000		0.00000
18		2.00001		0.73989		0.50780		-0.24770		0.50000	
	0.00000		-0.00001		-0.25208		1.97554		-0.00000		0.00000
19		2.00000		0.48781		2.73543		-2.22324		0.50000	
	0.00000		-0.00000		-1.41357		-1.60564		0.00000		0.00000
20		2.00000		-0.92575		2.54336		-0.61761		0.50000	
	0.00000		0.00000		3.88356		0.38990		-0.00000		0.00000
21		2.00000		2.95780		-0.95030		-1.00750		0.50000	
	0.00000		0.00000		-1.24773		0.41337		0.00000		0.00000
22		2.00000		1.71007		0.71080		-1.42087		0.50000	
	0.00000		0.00000		-0.51862		-0.82631		-0.00000		0.00000

Tiende a cero

No tiende a cero

teración	e0	q1	e1	q2	e2	q3	e3	q4	e4
0		-0.50000		0.00000		0.00000		0.00000	
	0.00000		-8.00000		0.12500		-6.00000		0.00000
1		-8.50000		8.12500		-6.12500		6.00000	
	0.00000		7.64706		-0.09423		5.87755		0.00000
2		-0.85294		0.38371		-0.15322		0.12245	
	0.00000		-3.44016		0.03763		-4.69722		0.00000
3		-4.29310		3.86150		-4.88807		4.81967	
	0.00000		3.09431		-0.04763		4.63150		0.00000
4		-1.19880		0.71956		-0.20894		0.18817	
	0.00000		-1.85732		0.01383		-4.17118		0.00000
5		-3.05611		2.59071		-4.39395		4.35936	
	0.00000		1.57448		-0.02346		4.13834		0.00000
6		-1.48164		0.99278		-0.23216		0.22102	
	0.00000		-1.05498		0.00549		-3.93977		0.00000
7		-2.53662		2.05325		-4.17741		4.16079	
	0.00000		0.85395		-0.01116		3.92409		0.00000
8		-1.68267		1.18814		-0.24216		0.23670	
	0.00000		-0.60297		0.00227		-3.83554		0.00000
9		-2.28565		1.79339		-4.07997		4.07223	
	0.00000		0.47311		-0.00517		3.82826		0.00000
10		-1.81254		1.31510		-0.24654		0.24397	
	0.00000		-0.34327		0.00097		-3.78844		0.00000
11		-2.15581		1.65934		[illegible]		4.03241	
	0.00000		0.26422		[illegible]		3.78512		0.00000
12		-1.89159		1.39277		[illegible]		0.24729	
	0.00000		-0.19454		[illegible]		-3.76721		0.00000
13		-2.08613		1.58773		-4.01610		4.01450	
	0.00000		0.14806		-0.00106		3.76572		0.00000
14		-1.93807		1.43860		-0.24932		0.24879	
	0.00000		-0.10991		0.00018		-3.75769		0.00000
15		-2.04797		1.54869		-4.00719		4.00648	
	0.00000		0.08311		-0.00048		3.75702		0.00000
16		-1.96486		1.46510		-0.24970		0.24946	
	0.00000		-0.06197		0.00008		-3.75343		0.00000
17		-2.02683		1.52715		-4.00321		4.00289	
	0.00000		0.04669		-0.00021		3.75313		0.00000
18		-1.98014		1.48025		-0.24987		0.24976	
	0.00000		-0.03491		0.00004		-3.75153		0.00000
19		-2.01505		1.51519		-4.00143		4.00129	
	0.00000		0.02625		-0.00010		3.75139		0.00000
20		-1.98880		1.48885		-0.24994		0.24989	
	0.00000		-0.01965		0.00002		-3.75068		0.00000
21		-2.00845		1.50851		-4.00064		4.00057	
	0.00000		0.01476		-0.00004		3.75062		0.00000
22		-1.99369		1.49371		-0.24997		0.24995	
	0.00000		-0.01106		0.00001		-3.75030		0.00000
23		-2.00475		1.50478		-4.00028		4.00025	
	0.00000		0.00830		-0.00002		3.75028		0.00000

Co-modular

Método QD con raíces complejas: Algoritmo de Bairstow

Este problema de la diferencia de cocientes lo solucionamos combinando el algoritmo QD con el método de Bairstow. ¿De qué manera ?

Hallando un factor cuadrático del tipo $x^2 - u * x - v$

cuyas raíces sean las complejas conjugadas que estamos buscando.

Para obtener este factor cuadrático es que recurrimos a un método iterativo.

Método QD con raíces complejas: Algoritmo de Bairstow

Para calcular el factor cuadrático inicial calculamos sus coeficientes como: ,

$$u_0 = q_i^m + q_{i+1}^m \text{ y } v_0 = q_i^{m-1} \cdot q_{i+1}^m$$

Con esto obtenemos un factor aproximado que contiene a ambas raíces complejas pero que es necesario refinar, para que, al realizar la división sintética, el residuo de la división resultante entre el polinomio y el factor sea lo más cercano a cero posible, para ello iteramos de la siguiente forma:

Método QD: Algoritmo de Bairstow

$$u_{m+1} = u_m + h_m$$

$$v_{m+1} = v_m + k_m$$

Llamando h y k a los incrementos parciales de los coeficientes.

$$h_m = \frac{q_m \cdot p_{m-3} - q_{m-1} \cdot p_{m-2}}{(p_{m-2})^2 - p_{m-1} \cdot p_{m-3}}$$

$$k_m = \frac{q_{m-1} \cdot p_{m-1} - q_m \cdot p_{m-2}}{(p_{m-2})^2 - p_{m-1} \cdot p_{m-3}}$$

Donde los q y p que se ven en las ecuaciones de los incrementos provienen de la doble división sintética que se aplica sobre el polinomio P(X)

Criterio de convergencia:

- Cuando el método converge hacia los valores del factor el residuo tiende a cero.
- Este método tiene la ventaja de que tiene convergencia cuadrática al igual que el método de Newton-Raphson

Preprocesamiento de un polinomio

- Traslación efectuada sobre la indeterminada

$$P(x) \qquad P(x+c)$$

$$Q(x) = P\ (x + c) = \sum b_k\ (x - c)^k$$

Siendo $b_k=(P_k{*}c)/k!$

Preprocesamiento de un polinomio

- Transformación recíproca

$P(x) \longrightarrow x^n\, P(1/x)$ donde n es el grado de $P(x)$

Se genera un polinomio de la forma:

$$Q(x)= x^n\, P(1/x)$$

Raíces de $Q(x)$ = Raíces de $P(x)^{-1}$

Casos Analizados

1. Polinomio completo con todas sus raíces reales
2. Polinomio completo con raíces reales y complejas.
3. Polinomio completo con raíces cercanas.
4. Polinomio incompleto con raíces reales y co-modulares.
5. Polinomio completo con raíces co-modulares.

Todos los casos y sus comparaciones se realizaron con una tolerancia de 0.0001

1. Polinomio completo con todas sus raíces reales

$$f(x)=x^3-4x^2+x+6$$

Iteración	e0	q1	e1	q2	e2	q3	e3
	0.00000		-0.00102		-0.00110		0.00000
14		3.00203		1.99760		-0.99963	
	0.00000		-0.00068		0.00055		0.00000
15		3.00136		1.99883		-1.00018	
	0.00000		-0.00045		-0.00027		0.00000
16		3.00090		1.99901		-0.99991	
	0.00000		-0.00030		0.00014		0.00000
17		3.00060		1.99944		-1.00005	
	0.00000		-0.00020		-0.00007		0.00000
18		3.00040		1.99958		-0.99998	
	0.00000		-0.00013		0.00003		0.00000

$x_1=3.000401$ $x_2=1.999576$ $x_3=-0.999977$

1. Polinomio completo con todas sus raíces reales

$$f(x)=x^3-4x^2+x+6$$

Comparación con otros métodos			
Raíces Exactas	Q-D En 19 iteraciones	Punto Fijo Sistemático	Newton-Raphson
$x_1=3$	$x_1=3.000401$	$x_1=3.00000$ En 20 iteraciones, $x_0=2.7$, Intervalo [2.7:3.5]	$x_1=3.00000$ En 7 iteraciones, $x_0=2.6$
$x_2=2$	$x_2=1.999576$	$x_2=2.0000$ En 5 iteraciones, $x_0=1.9$, Intervalo [1.9:2.1]	$x_2=2.0000$ En 4 iteraciones, $x_0=1.5$
$x_3=-1$	$x_3=-0.999977$	$x_3=-1.0000$ En 21 iteraciones, $x_0=-2$ Intervalo [-2:0]	$x_3=-1.0000$ En 7 iteraciones,$x_0=-5.0$

2. Polinomio completo con raíces reales y complejas

$$f(x)= x^5 - 3.5x^4 + 2.75x^3 + 2.125x^2 - 3.875x + 1.25$$

Iteración	e0	q1	e1	q2	e2	q3	e3	q4	e4	q5	e5
	0.00000		0.00000		-11.95024		-0.00021		-0.00000		0.00000
95		2.00000		-11.86005		13.86000		-0.99995		0.50000	
	0.00000		-0.00000		13.96540		0.00002		0.00000		0.00000
96		2.00000		2.10535		-0.10538		-0.99996		0.50000	
	0.00000		-0.00000		-0.69905		0.00015		-0.00000		0.00000
97		2.00000		1.40630		0.59381		-1.00011		0.50000	
	0.00000		-0.00000		-0.29517		-0.00025		0.00000		0.00000
98		2.00000		1.11112		0.88874		-0.99986		0.50000	
	0.00000		-0.00000		-0.23610		0.00028		-0.00000		0.00000
99		2.00000		0.87503		1.12511		-1.00014		0.50000	
	0.00000		-0.00000		-0.30357		-0.00025		0.00000		0.00000
100		2.00000		0.57146		1.42843		-0.99989		0.50000	

x_1=2.00000 | x_2= Bairstow | x_3= Bairstow | x_4=-0.99989 | x_5=0.50000

2. Polinomio completo con raíces reales y complejas.

$$f(x)= x^5 - 3.5x^4 + 2.75x^3 + 2.125x^2 - 3.875x + 1.25$$

Comparación con otros métodos			
Raíces Exactas	Q-D 100 iteraciones	Punto Fijo Sistemático	Newton-Raphson
$x_1= 2$	$x_1= 2.00000$	(no se pudo aplicar método correctamente)	$x_1= 2.0000$ En 12 iteraciones, $x_0=1.7$
$x_2= 1+0.5i$	$x_2= 1.00000+0.50000i$		$x_2= 1.00000 + 0.50000\ i$ En 6 iteraciones, $x_0= 0.8 + 0.4i$
$x_3= 1 - 0.5i$	$x_3= 1.00000-0.500000i$		$x_3= 1.00000 - 0.50000i$ En 6 iteraciones, $x_0= 0.8 - 0.4i$
$x_4 = -1$	$x_4 = -1.00006$		$x_4 = -1.00000$ En 5 iteraciones, $x_0= -1.5$
$x_5 = 0.5$	$x_5 = 0.50000$		$x_3= 0.5000$ En 5 iteraciones, $x_0= 1.0$

3. Polinomio completo con raíces cercanas.

$$f(x)= x^3 - 21.009x^2 + 147.126026x - 343.441182$$

Iteración	e0	q1	e1	q2	e2	q3	e3
	0.00000		-0.00010		-0.00010		0.00000
367		7.04107		7.00290		6.96503	
	0.00000		-0.00010		-0.00010		0.00000
368		7.04096		7.00290		6.96513	
	0.00000		-0.00010		-0.00010		0.00000
369		7.04086		7.00290		6.96524	
	0.00000		-0.00010		-0.00010		0.00000
370		7.04076		7.00291		6.96534	
	0.00000		-0.00010		-0.00010		0.00000
371		7.04066		7.00291		6.96544	
	0.00000		-0.00010		-0.00010		0.00000
372		7.04056		7.00291		6.96554	
	0.00000		-0.00010		-0.00010		0.00000

$\boxed{x_1 = 7.04045}$ $\boxed{x_2 = 7.00291}$ $\boxed{x_3 = 6.96564}$

3. Polinomio completo con raíces cercanas.

$$f(x)= x^3 - 21.009x^2 + 147.126026x - 343.441182$$

Comparación con otros métodos			
Raíces Exactas	Q-D En 373 iteraciones	Punto Fijo Sistemático	Bisección
$x_1 = 7.002$	$x_1 = 7.04045$	Las raíces se encuentran demasiado cerca	$x_1 = 7.002$ En 4 iteraciones Intervalo [7.001:7.0023]
$x_2 = 7.003$	$x_2 = 7.00291$	Convergen a un valor pero habrá divergencia para	$x_2 = 7.002$ En 4 iteraciones Intervalo [7.002:7.0035]
$x_3 = 7.004$	$x_3 = 6.96564$	Ajustar a un valor siguiente.	$x_3 = 7.004$ En 4 iteraciones Intervalo [7.003:7.0045]

4. Polinomio incompleto con raíces reales y co-modulares

$$f(x)= x^4-10x^2+9$$

Como este es un polinomio incompleto se tuvo que realizar una transformación sobre la indeterminada. En este caso con un c=0.5:

Iteración	e0	q1	e1	q2	e2	q3	e3	q4	e4
	0.00000		-0.00059		0.00000		-0.00000		0.00000
27		-3.50025		2.50025		-1.50000		0.50000	
	0.00000		0.00043		-0.00000		0.00000		0.00000
28		-3.49982		2.49982		-1.50000		0.50000	
	0.00000		-0.00030		0.00000		-0.00000		0.00000
29		-3.50013		2.50013		-1.50000		0.50000	
	0.00000		0.00022		-0.00000		0.00000		0.00000
30		-3.49991		2.49991		-1.50000		0.50000	
	0.00000		-0.00015		0.00000		-0.00000		0.00000
31		-3.50006		2.50006		-1.50000		0.50000	
	0.00000		0.00011		-0.00000		0.00000		0.00000

$\boxed{x_1=-3.49995}$ $\boxed{x_2=2.49995}$ $\boxed{x_3=-1.50000}$ $\boxed{x_4=0.50000}$

4. Polinomio incompleto con raíces reales y co-modulares

$$f(x)= x^4-10x^2+9$$

Para mejorar el análisis se volvió a calcular las raíces pero con un factor de traslación de c=0.01:

Iteración	e0	q1	e1	q2	e2	q3	e3	q4	e4
	0.00000		-0.00010		0.00000		-0.00000		0.00000
1745		-3.01005		2.99005		-1.01000		0.99000	
	0.00000		0.00010		-0.00000		0.00000		0.00000
1746		-3.00995		2.98995		-1.01000		0.99000	
	0.00000		-0.00010		0.00000		-0.00000		0.00000
1747		-3.01005		2.99005		-1.01000		0.99000	
	0.00000		0.00010		-0.00000		0.00000		0.00000
1748		-3.00995		2.98995		-1.01000		0.99000	
	0.00000		-0.00010		0.00000		-0.00000		0.00000
1749		-3.01005		2.99005		-1.01000		0.99000	
	0.00000		0.00010		-0.00000		0.00000		0.00000
1750		-3.00995		2.98995		-1.01000		0.99000	
	0.00000		-0.00010		0.00000		-0.00000		0.00000

x_1=-3.01005

x_2=2.99005

x_3=-1.01000

x_4=0.99000

4. Polinomio incompleto con raíces reales y co-modulares

$$f(x)= x^4-10x^2+9$$

Comparación con otro método			
Raíces exactas	Q-D con c=0.5 En 32 iteraciones	Q-D con c=0.01 En 1751 iteraciones	Punto Fijo Sistemático
x_1=-3	x_1=-3.49995	x_1=-3.01005	x_1=-3.000002 En 18 iteraciones, x_0=-3.5, Intervalo [-3.5:-2.7]
x_2= 3	x_2=2.49995	x_2=2.99005	x_2=2.999999 En 20 iteraciones, x_0=2.7, Intervalo [2.7:3.5]
x_3= -1	x_3=-1.50000	x_3=-1.01000	x_3=-1.000003 En 4 iteraciones, x_0=-1.5, Intervalo [-1.5:-0.7]
x_4= 1	x_4=0.50000	x_4=0.99000	x_4=0.999996 En 8 iteraciones, x_0=0.7, Intervalo [0.7:1.5]

5. Polinomio completo con raíces co-modulares

$$f(x)= x^4+2x^3-3x^2-8x-4$$

Iteración	e0	q1	e1	q2	e2	q3	e3	q4	e4
	0.00000		-0.90000		0.00000		0.00011		0.00000
95		-2.50000		2.50000		-1.01049		-0.98951	
	0.00000		0.90000		-0.00000		0.00011		0.00000
96		-1.60000		1.60000		-1.01038		-0.98962	
	0.00000		-0.90000		0.00000		0.00011		0.00000
97		-2.50000		2.50000		-1.01027		-0.98973	
	0.00000		0.90000		-0.00000		0.00010		0.00000
98		-1.60000		1.60000		-1.01017		-0.98983	
	0.00000		-0.90000		0.00000		0.00010		0.00000
99		-2.50000		2.50000		-1.01007		-0.98993	
	0.00000		0.90000		-0.00000		0.00010		0.00000
100		-1.60000		1.60000		-1.00997		-0.99003	
	0.00000		-0.90000		0.00000		0.00010		0.00000

x_1=Bairstow

x_2= Bairstow

$x_3=-1.00998$

$x_4=-0.990032$

5. Polinomio completo con raíces co-modulares

$$f(x)= x^4+2x^3-3x^2-8x-4$$

Comparación con otro método			
Raíces exactas	Q-D En 100 iteraciones	Punto Fijo Sistemático	Punto Fijo Sistemático
$x_1=2$	$x_1=2.00000$	$x_1=1.999998$ En 48 iteraciones, $x_0=1.0$, Intervalo [1.0:3.0]	$x_1=1.999998$ En 21 iteraciones, $x_0=1.5$, Intervalo [1.5:2.5]
$x_2=-2$	$x_2=-2.00000$	$x_2=-1.999976$ En 22 iteraciones, $x_0=-2.2$, Intervalo [-2.2:-1.9]	$x_2=-2.00000$ En 10 iteraciones, $x_0=-2.0$, Intervalo [-2.2:-1.9]
$x_3= -1$	$x_3=-1.009868$	$x_3=-1.005746$ En 65 iteraciones, $x_0=-1.5$, Intervalo [-1.5:-0.5]	$x_3=-1.005746$ En 49 iteraciones, $x_0=-1.2$, Intervalo [-1.2:-0.8]
$x_4= -1$	$x_4=-0.990132$	$x_4=-1.005746$ En 65 iteraciones, $x_0=-1.5$, Intervalo [-1.5:-0.5]	$x_4=-1.005746$ En 49 iteraciones, $x_0=-1.2$, Intervalo [-1.2:-0.8]

Conclusiones:

Desventajas:
- Gran cantidad de iteraciones, con respecto a otros métodos.
- Necesidad de preprocesamiento si el polinomio no está completo.
- Las raíces deben estar lo suficientemente separadas entre sí.
- Las raíces deben ser reales.

Ventajas:
- Obtención de todas las raíces en un solo proceso.
- Obtención de raíces complejas con el método de Bairstow.
- No tiene necesidad de ingresar valores cercanos a alguna posible raíz.