МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Лабораторна робота №7
з курсу «Чисельні методи»
Тема: методи Рунге-Кутта та Адамса четвертого порядку

Виконала:
студентка 3 курсу
групи КА-83
Нго Х.Х.
Прийняла: Хоменко О. В.

Київ – 2020

Варіант – 18

Мета роботи: набути вміння та досвід використання методів чисельного розв’язку задачі Коші.

Завдання на роботу:

Завдання1. Методами Рунге-Кутта четвертого порядку та Адамса четвертого порядку розв'язати задачу Коші з вашого варіанту

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y \ = \ 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

на відрізку $[1; 2]$ з кроком $h_1 = 0{,}1$.

Завдання 2. Знайти аналітичний розв’язок заданої задачі Коші та обчислити значення точного розв'язку y_i^* у вузлах.

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші на відрізку $[1; 2]$ на іншій сітці (з іншими кроками h_2 та h_3). Вказати максимальне за модулем значення помилки для кроків h_1, h_2 та h_3.

Математичне підґрунтя для виконання даної лабораторної роботи:

Методам Рунге-Кутта четвертого порядку та Адамса четвертого порядку використовуються для знаходження таблиці значень функції $y = f(x)$, заданої як $y' = f^*\ (x, y)$.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядку визначається системою формул:

$$\begin{cases} k_1 = f^*(x_n, y_n) \\ k_2 = f^*(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_1 h/2) \\ k_3 = f^*(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_2 h/2) \\ k_4 = f^*(x_n, y_n + k_3 h) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

За допомогою даної системи апроксимується значення $f(x_n + h) = y_{n+1}$.

В методі Адамса четвертого порядку для підрахунку значення в наступному кроці використовується наступна формула, в якій використовуються чотири попередні значення (перші чотири точки – y_1, y_2, y_3, y_4 – знаходяться за допомогою методу Рунге-Кутта також четвертого порядку):

$$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}(55 \cdot f^*\ (x_{n+3}, y_{n+3}) - 59 \cdot f^*(x_{n+2}, y_{n+2}) + 37 \cdot f^*(x_{n+1}, y_{n+1}) - 9 \cdot f^*(x_n, y_n))$$

Текст програми

main.py

```
from Adams_method import Adams
from Runge_Kutta_method import Runge_Kutta

def answer(x):
    """
    Solution of the Cauchy problem at point x

    :param x: float
    :return: y
    """
    return x ** 2


def func(x, y):
    """
    1st order differential equation
    :param x: float
    :param y: float
    :return: f'(x, y)
    """
    return 1 - (1 - 2 * x) * y / x ** 2


if __name__ == "__main__":
    H = [0.1, 0.05, 0.025]

    for h in H:
        RK = Runge_Kutta(answer, func, 1, 1, h)
        A = Adams(answer, func, 1, h)

        print('Max error for h =', h, ':\n\tRunge_Kutta: ', RK, '\n\tAdams: ', A)
```

csv_converter.py

```
from pandas import read_csv
import csv


def csv_s(data, path):
    """
    To save results into .cvs file

    :param data: list of the outputs
    :param path: str, path to save
    :return: None
    """
    with open(path, "w", newline='') as csv_file:
        writer = csv.writer(csv_file, delimiter=',')
        for line in data:
            writer.writerow(line)
```

```python
def csv_e(path):
    """
    To extract first 4 entrances of 'Runge-Kutta h [h] .csv

    :param path: str
    :return: y0, y1, y2, y3
    """
    file = read_csv(path)
    y_0, y_1, y_2, y_3 = file['y_i'][0:4]
    return y_0, y_1, y_2, y_3
```

Runge_Kutta_method.py

```python
from csv_converter import csv_s

def Runge_Kutta(answer, func, x0, y0, h):
    """
    Runge-Kutta method

    :param answer: analytical y
    :param func: f'(x,y)
    :param x0: float
    :param y0: float
    :param h: float
    :return: max_error = abs(y_ans - y_i)

    """
    outputs = [['i', 'x_i', 'y*_i', 'y_i', '|y*_i-y_i|']]
    steps = int(1 // h + 2)
    x_i, y_i = x0, y0
    y_ans = y0
    max_error = 0

    for i in range(steps):
        k1 = func(x_i, y_i)
        k2 = func(x_i + h * 0.5, y_i + h * k1 * 0.5)
        k3 = func(x_i + h * 0.5, y_i + h * k2 * 0.5)
        k4 = func(x_i + h, y_i + h * k3)
        y_next = y_i + h * (k1 + 2 * (k2 + k3) + k4) / 6

        outputs.append([i, x_i, y_ans, y_i, abs(y_ans-y_i)])

        if max_error <= abs(y_ans - y_i):
            max_error = abs(y_ans - y_i)

        y_i = y_next
        x_i += h
        x_i = float('{:.3f}'.format(x_i))
        y_ans = answer(x_i)

    csv_s(outputs, f'Runge_Kutta_method h={h}.csv')
    return max_error
```

Adams_method.py

```python
from csv_converter import csv_e, csv_s

def Adams(answer, func, x0, h):
    """
    Adams method

    :param answer: analytical y
    :param func: f'(x,y)
    :param x0: float
    :param h: float
    :return: max_error = abs(y_ans - y_i)
    """

    x_0, x_1, x_2, x_3 = x0, x0 + h, x0 + 2 * h, x0 + 3 * h
    x_1 = float('{:.3f}'.format(x_1))
    x_2 = float('{:.3f}'.format(x_2))
    x_3 = float('{:.3f}'.format(x_3))
    steps = int(1 // h + 2)

    y_0, y_1, y_2, y_3 = csv_e(f"Runge_Kutta_method h={h}.csv")
    y0, y1, y2, y3 = answer(x_0), answer(x_1), answer(x_2), answer(x_3)
    max_error = max(abs(y0 - y_0), abs(y1 - y_1), abs(y2 - y_2), abs(y3 - y_3))
    outputs = [['i', 'x_i', 'y*_i', 'y_i', '|y*_i-y_i|'],
               [0, x_0, y0, y_0, abs(y0-y_0)],
               [1, x_1, y1, y_1, abs(y1-y_1)],
               [2, x_2, y2, y_2, abs(y2-y_2)],
               [3, x_3, y3, y_3, abs(y3-y_3)]]

    for i in range(4, steps):
        y = y_3 + h * (55 * func(x_3, y_3) - 59 * func(x_2, y_2) + 37 * func(x_1, y
_1) - 9 * func(x_0, y_0)) / 24

        x_0, x_1, x_2 = x_1, x_2, x_3
        x_3 += h
        x_3 = float('{:.3f}'.format(x_3))
        y_ans = answer(x_3)

        y_0, y_1, y_2 = y_1, y_2, y_3
        y_3 = y

        outputs.append([i, x_3, y_ans, y, abs(y_ans - y)])
        if max_error <= abs(y_ans - y):
            max_error = abs(y_ans - y)

    csv_s(outputs, f'Adams_method h={h}.csv')
    return max_error
```

Аналітичний розв’язок задачі Коші:

$$\begin{cases} y' + \frac{1-2x}{x^2} y \; = \; 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Зробимо заміну: $y = uv$. Тоді маємо:

$$y' = u'v + uv'$$

Тоді

$$u'v + uv' + \frac{1-2x}{x^2} uv = 1$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1-2x}{x^2} v\right) = 1 \quad (*)$$

Нехай $v' + \frac{1-2x}{x^2} v = 0$. Тоді

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1-2x}{x^2} v$$

Знайдемо v:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1-2x}{x^2} dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{1-2x}{x^2} dx$$

$$\ln|v| = x^{-1} + 2\ln|x|$$

Таким чином, маємо: $v = x^2 e^{x^{-1}}$.

Підставимо в $(*)$, зважаючи, що $v' + \frac{1-2x}{x^2} v = 0$.

$$u' x^2 e^{x^{-1}} = 1$$

Знайдемо u:

$$\frac{du}{dx} x^2 e^{x^{-1}} = 1$$

$$du = x^{-2} e^{-x^{-1}} dx$$

$$\int du = \int x^{-2} e^{-x^{-1}} dx$$

$$u = \int e^{-x^{-1}} d(-x^{-1})$$

$$u = e^{-x^{-1}} + C$$

Таким чином $y = uv = \left(e^{-x^{-1}} + C\right) x^2 e^{x^{-1}} = x^2 + C x^2 e^{x^{-1}}$

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ 1^2 + C1^2e^{1^{-1}} = 1 \end{cases} \Rightarrow Ce = 0 \Rightarrow C = 0$$

Отже, розв’язок задачі Коші має вигляд:

$$y = x^2$$

Отримані результати

Крок h=0,1

		Точний розв'язок	Метод Рунге-Кутта четвертого порядку		Метод Адамса четвертого порядку	
i	x_i	y_i^*	y_i	$\|y^*{}_i - y_i\|$	y_i	$\|y^*{}_i - y_i\|$
0	1	1	1	0	1	0
1	1,1	1,21	1,21	2,30606E-07	1,21	2,30606E-07
2	1,2	1,44	1,44	4,94219E-07	1,44	4,94219E-07
3	1,3	1,69	1,689999	7,788E-07	1,689999	7,788E-07
4	1,4	1,96	1,959999	1,07744E-06	1,959999	8,64908E-07
5	1,5	2,25	2,249999	1,38629E-06	2,249999	9,31176E-07
6	1,6	2,56	2,559998	1,7033E-06	2,559999	1,02125E-06
7	1,7	2,89	2,889998	2,02749E-06	2,889999	1,1137E-06
8	1,8	3,24	3,239998	2,35849E-06	3,239999	1,20771E-06
9	1,9	3,61	3,609997	2,6963E-06	3,609999	1,30671E-06
10	2	4	3,999997	3,04109E-06	3,999999	1,4104E-06

Max error for h = 0.1 :

Runge_Kutta: 3.04109064774849e-06

Adams: 1.4103963330569513e-06

Крок h=0,05

		Точний розв'язок	Метод Рунге-Кутта четвертого порядку		Метод Адамса четвертого порядку	
i	x_i	y_i^*	y_i	$\|y^*{}_i - y_i\|$	y_i	$\|y^*{}_i - y_i\|$
0	1	1	1	0	1	0
1	1,05	1,1025	1,102499993	6,92327E-09	1,102499993	6,92326E-09
2	1,1	1,21	1,209999985	1,45506E-08	1,209999985	1,45506E-08
3	1,15	1,3225	1,322499977	2,27303E-08	1,322499977	2,27303E-08
4	1,2	1,44	1,439999969	3,13459E-08	1,439999976	2,40492E-08
5	1,25	1,5625	1,56249996	4,03091E-08	1,562499975	2,49647E-08
6	1,3	1,69	1,68999995	4,95528E-08	1,689999974	2,62886E-08
7	1,35	1,8225	1,822499941	5,90269E-08	1,822499972	2,7578E-08
8	1,4	1,96	1,959999931	6,86936E-08	1,959999971	2,88753E-08
9	1,45	2,1025	2,102499921	7,85254E-08	2,10249997	3,02211E-08
10	1,5	2,25	2,249999911	8,8502E-08	2,249999968	3,16071E-08
11	1,55	2,4025	2,402499901	9,86089E-08	2,402499967	3,30312E-08
12	1,6	2,56	2,559999891	1,08836E-07	2,559999966	3,44941E-08
13	1,65	2,7225	2,722499881	1,19177E-07	2,722499964	3,59954E-08
14	1,7	2,89	2,88999987	1,29628E-07	2,889999962	3,7535E-08
15	1,75	3,0625	3,06249986	1,40186E-07	3,062499961	3,91125E-08
16	1,8	3,24	3,239999849	1,50851E-07	3,239999959	4,07278E-08
17	1,85	3,4225	3,422499838	1,61623E-07	3,422499958	4,23807E-08

18	1,9	3,61	3,609999827	1,72504E-07	3,609999956	4,40711E-08
19	1,95	3,8025	3,802499817	1,83494E-07	3,802499954	4,57989E-08
20	2	4	3,999999805	1,94598E-07	3,999999952	4,7564E-08

Max error for h = 0.05 :

Runge_Kutta: 1.9459762068407827e-07

Adams: 4.7563976313114154e-08

Крок h=0,025

		Точний розв'язок	Метод Рунге-Кутта четвертого порядку		Метод Адамса четвертого порядку	
i	x_i	y_i^*	y_i	$\lvert y^*{}_i - y_i \rvert$	y_i	$\lvert y^*{}_i - y_i \rvert$
0	1	1	1	0	1	0
1	1,025	1,050625	1,050625	2,10468E-10	1,050625	2,10468E-10
2	1,05	1,1025	1,1025	4,33871E-10	1,1025	4,33871E-10
3	1,075	1,155625	1,155625	6,68703E-10	1,155625	6,68703E-10
4	1,1	1,21	1,21	9,13642E-10	1,21	6,88331E-10
5	1,125	1,265625	1,265625	1,16753E-09	1,265625	7,01255E-10
6	1,15	1,3225	1,3225	1,42935E-09	1,3225	7,2057E-10
7	1,175	1,380625	1,380625	1,69822E-09	1,380625	7,38656E-10
8	1,2	1,44	1,44	1,97337E-09	1,44	7,56799E-10
9	1,225	1,500625	1,500625	2,25412E-09	1,500625	7,7537E-10
10	1,25	1,5625	1,5625	2,53989E-09	1,5625	7,9427E-10
11	1,275	1,625625	1,625625	2,83018E-09	1,625625	8,13497E-10
12	1,3	1,69	1,69	3,12454E-09	1,69	8,33051E-10
13	1,325	1,755625	1,755625	3,42259E-09	1,755625	8,5293E-10
14	1,35	1,8225	1,8225	3,724E-09	1,8225	8,73131E-10
15	1,375	1,890625	1,890625	4,02849E-09	1,890625	8,93652E-10
16	1,4	1,96	1,96	4,33582E-09	1,96	9,14489E-10
17	1,425	2,030625	2,030625	4,64577E-09	2,030625	9,35643E-10
18	1,45	2,1025	2,1025	4,95818E-09	2,1025	9,5711E-10
19	1,475	2,175625	2,175625	5,27288E-09	2,175625	9,78889E-10
20	1,5	2,25	2,25	5,58975E-09	2,25	1,00098E-09
21	1,525	2,325625	2,325625	5,90869E-09	2,325625	1,02338E-09
22	1,55	2,4025	2,4025	6,22959E-09	2,4025	1,04608E-09
23	1,575	2,480625	2,480625	6,5524E-09	2,480625	1,06909E-09
24	1,6	2,56	2,56	6,87705E-09	2,56	1,09241E-09
25	1,625	2,640625	2,640625	7,20348E-09	2,640625	1,11603E-09
26	1,65	2,7225	2,7225	7,53167E-09	2,7225	1,13996E-09
27	1,675	2,805625	2,805625	7,86158E-09	2,805625	1,16419E-09
28	1,7	2,89	2,89	8,1932E-09	2,89	1,18871E-09
29	1,725	2,975625	2,975625	8,5265E-09	2,975625	1,21354E-09
30	1,75	3,0625	3,0625	8,86149E-09	3,0625	1,23867E-09
31	1,775	3,150625	3,150625	9,19815E-09	3,150625	1,2641E-09
32	1,8	3,24	3,24	9,53648E-09	3,24	1,28983E-09

33	1,825	3,330625	3,330625	9,87651E-09	3,330625	1,31585E-09
34	1,85	3,4225	3,4225	1,02182E-08	3,4225	1,34218E-09
35	1,875	3,515625	3,515625	1,05616E-08	3,515625	1,36879E-09
36	1,9	3,61	3,61	1,09068E-08	3,61	1,39571E-09
37	1,925	3,705625	3,705625	1,12536E-08	3,705625	1,42292E-09
38	1,95	3,8025	3,8025	1,16022E-08	3,8025	1,45043E-09
39	1,975	3,900625	3,900625	1,19526E-08	3,900625	1,47823E-09
40	2	4	4	1,23048E-08	4	1,50633E-09

Max error for h = 0.025 :

Runge_Kutta: 1.2304752772251959e-08

Adams: 1.5063270630832903e-09

Висновок

В ході лабораторної роботі було розглянуто та реалізовано два методи: метод Рунге-Кутти четвертого порядку та метод Адамса четвертого порядку.

Реалізовану програму було вирішено для трьох різних кроків: h=0,1, h=0,05, h=0,025. На основі отриманих даних було побудовано відповідні таблиці, в яких також були точні розв’язки, отримані за допомогою аналітичного розв’язку задачі, та наведені значення модулів помилок.

Проаналізувавши отримані дані, можна дійти висновку, що реалізована програма дає необхідну точність для чисельного розв’язку задачі Коші. Також можна стверджувати, що метод Адамса дає більшу точність, аніж метод Рунге-Кутти, хоча, загалом, обидва методи є досить точними.