МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Лабораторна робота №9
з курсу «Чисельні методи»
Тема: Розв'язання рівнянь з частинними похідними.

Виконала:
студентка 3 курсу
групи КА-83
Нго Х.Х.
Прийняла: Хоменко О. В.

Київ – 2020

Варіант – 18

Мета роботи: набути вміння та досвід використання методів розв'язання рівнянь з частинними похідними.

Завдання на роботу:

1. Використовуючи метод сіток (скінченних різниць) розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в квадраті ABCB з вершинами A(0;0), B(0;1), C(1;1), D(1;0) при h=0,2. При розв'язуванні задачі використати ітераційний процес усереднення Лібмана, для чого скласти відповідну програму. Задачу розв'язати з точністю а)$\varepsilon = 0.01$, б) $\varepsilon = 0.001$ Нижче наведено формули, що задають шукану функцію на сторонах квадрату:

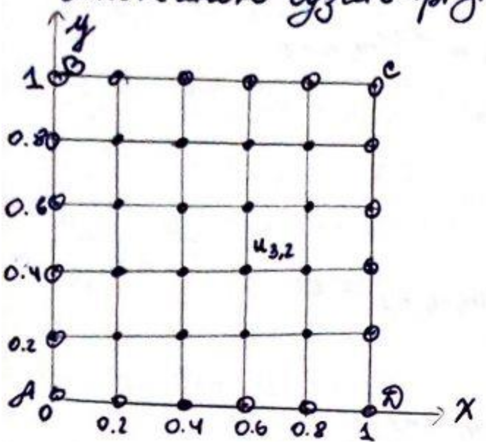
Варіант	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
18	0	$50\sin\pi x$	$50y(1-y^2)$	0

2. Використовуючи метод сіток (скінченних різниць) розв'язати мішану задачу параболічного типу $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (рівняння теплопровідності) при заданих початкових умовах $u(x,0) = f(x), u(0,t) = \varphi(t), u(0.6,t) = \psi(t)$, де $x \in [0, 0.6]$. $розв'язаннявиконати для\ h = 0.1,$ для $t \in [0, 0.01], \sigma = \frac{1}{6}$.

$$u(x,0) = \sin(x + 0.02), u(0,t) = 3t + 0.02, u(0.6,y) = 0.581$$

Завдання 1

1 Область неперервних аргументів змінюється дискретною множиною вузлів-різницевою сіткою



• – внутрішні вузли

○ – граничні вузли

вузли $u_{m,n}$

$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

2. Побудова різницевої схеми

2а. Граничні умови

В даному випадку всі граничні вузли належать границі Г

На стороні AB:

$u_{00} = u(0,0) = 0$

$u_{0,1} = u(0,0.2) = 0$

$u_{0,2} = u(0,0.4) = 0$

$u_{0,3} = u(0,0.6) = 0$

$u_{0,4} = u(0,0.8) = 0$

$u_{0,5} = u(0,1) = 0$

на стороні BC

$u_{1,5} = u(0.2,1) = 50\sin 0.2\pi = 29.389263$

$u_{2,5} = u(0.4,1) = 50\sin 0.4\pi = 47.552826$

$u_{3,5} = u(0.6,1) = 50\sin 0.6\pi = 47.552826$

$u_{4,5} = u(0.8,1) = 50\sin 0.8\pi = 29.389263$

$u_{5,5} = u(1,1) = 50\sin \pi\cdot 1 = 0$

На стороні CD

$u_{5,0} = u(1,0) = 50\cdot 0(1-0^2) = 0$

$u_{5,1} = u(1,0.2) = 50\cdot 0.2(1-0.2^2) = 9.6$

$u_{5,2} = u(1,0.4) = 50\cdot 0.4(1-0.4^2) = 16.8$

$u_{5,3} = u(1,0.6) = 50\cdot 0.6(1-0.6^2) = 19.2$

$u_{5,4} = u(1,0.8) = 50\cdot 0.8(1-0.8^2) = 14.4$

$u_{5,5} = u(1,1) = 50\cdot 1(1-1^2) = 0$

На стороні AD

$u_{1,0} = u(0.2,0) = 0$

$u_{2,0} = u(0.4,0) = 0$

$u_{3,0} = u(0.6,0) = 0$

$u_{4,0} = u(0.8,0) = 0$

2б. У внутрішніх вузлах

Рівняння Лапласа замінюємо скінченно-різницевим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u(x_m, y_n)}{\partial x^2} = \frac{u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_m, y_n)}{\partial y^2} = \frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{h^2}$$

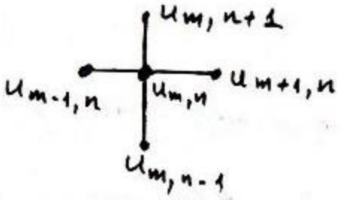
Різницеве рівняння, що відповідає рівнянню Лапласа

$$\frac{u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{h^2} = 0$$

або

$$u_{m-1,n} + u_{m,n-1} - 4u_{m,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n+1} = 0$$

$$u_{m,n} = \frac{1}{4}\left(u_{m-1,n} + u_{m,n-1} + u_{m+1,n} + u_{m,n+1}\right)$$



Використовуючи * для кожного ~~рівняння~~ внутрішнього вузла запишемо рівняння

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}\left(u_{0,1} + u_{1,0} + u_{2,1} + u_{1,2}\right) = \frac{1}{4}\left(0 + 0 + u_{2,1} + u_{1,2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(u_{2,1} + u_{1,2}\right)$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{4}\left(u_{1,1} + u_{2,0} + u_{3,1} + u_{2,2}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{1,1} + u_{3,1} + u_{2,2}\right)$$

$$u_{3,1} = \frac{1}{4}\left(u_{2,1} + u_{3,0} + u_{4,1} + u_{3,2}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{2,1} + u_{4,1} + u_{3,2}\right)$$

$$u_{4,1} = \frac{1}{4}\left(u_{3,1} + u_{4,0} + u_{5,1} + u_{4,2}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{3,1} + u_{5,1} + u_{4,2}\right)$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{4}\left(u_{0,2} + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{1,3}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{1,3}\right)$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{4}\left(u_{1,2} + u_{2,1} + u_{3,2} + u_{2,3}\right)$$

$$u_{3,2} = \frac{1}{4}\left(u_{2,2} + u_{3,1} + u_{4,2} + u_{3,3}\right)$$

$$u_{4,2} = \frac{1}{4}\left(u_{3,2} + u_{4,1} + u_{5,2} + u_{4,3}\right)$$

$$u_{1,3} = \frac{1}{4}\left(u_{0,3} + u_{1,2} + u_{2,3} + u_{1,4}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{1,2} + u_{2,3} + u_{1,4}\right)$$

$$u_{2,3} = \frac{1}{4}\left(u_{1,3} + u_{2,2} + u_{3,3} + u_{2,4}\right)$$

$$u_{3,3} = \frac{1}{4}\left(u_{2,3} + u_{3,2} + u_{4,3} + u_{3,4}\right)$$

$$u_{4,3} = \frac{1}{4}\left(u_{3,3} + u_{4,2} + u_{5,3} + u_{4,4}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{3,3} + u_{4,2} + 19.2 + u_{4,4}\right).$$

$$u_{1,4} = \frac{1}{4}\left(u_{0,4} + u_{1,3} + u_{2,4} + u_{1,5}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{1,3} + u_{2,4} + 29.389263\right)$$

$$u_{2,4} = \frac{1}{4}\left(u_{1,4} + u_{2,3} + u_{3,4} + u_{2,5}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{1,4} + u_{2,3} + u_{3,4} + 47.552826\right)$$

$$u_{3,4} = \frac{1}{4}\left(u_{2,4} + u_{3,3} + u_{4,4} + u_{3,5}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{2,4} + u_{3,3} + u_{4,4} + 47.552826\right)$$

$$u_{4,4} = \frac{1}{4}\left(u_{3,4} + u_{4,3} + u_{5,4} + u_{4,5}\right) = \frac{1}{4}\left(u_{3,4} + u_{4,3} + 14.4 + 29.389263\right)$$

Таким чином отримали 16 рівнянь які утв. систему

3. Розв'язання системи рівнянь.

Будемо розв'язувати методом Якобі.

Ітераційна ф-ла має вигляд

$$u_{m,n}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{m-1,n}^{(k)} + u_{m,n-1}^{(k)} + u_{m+1,n}^{(k)} + u_{m,n+1}^{(k)}\right)$$

Задамо початкове наближення таким чином. Будемо вважати, що ф-я $u(x,y)$ по горизонталях області розподілена рівномірно.

0 ——— 9.6

$u_{0,1}$ $u_{1,1}$ $u_{2,1}$ $u_{3,1}$ $u_{4,1}$ $u_{5,1}$

(0, 0.2) (1, 0.2)

за цього припущення крок зміни ф-ї $\frac{9.6-0}{5} = 1.92$, тоді

$u_{1,1}^{(0)} = 0 + 1.92 = 1.92$

$u_{2,1}^{(0)} = 1.92 + 1.92 = 3.84$

$u_{3,1}^{(0)} = 3.84 + 1.92 = 5.76$

$u_{4,1}^{(0)} = 5.76 + 1.92 = 7.68$

0 ——— 16.8

$u_{0,2}$ $0_{1,2}$ $u_{2,2}$ $u_{3,2}$ $u_{4,2}$ $u_{5,2}$

Крок зміни ф-ї $\frac{16.8-0}{5} = 3.36$

$u_{1,2}^{(0)} = 0 + 3.36 = 3.36$

$u_{2,2}^{(0)} = 3.36 + 3.36 = 6.72$

$u_{3,2}^{(0)} = 6.72 + 3.36 = 10.08$

$u_{4,2}^{(0)} = 10.08 + 3.36 = 13.44$

0 ——— 19.2

$u_{0,3}$ $u_{1,3}$ $u_{2,3}$ $u_{3,3}$ $u_{4,3}$ $u_{5,3}$

Крок зміни ф-ї $\frac{19.2-0}{5} = 3.84$

$u_{1,3}^{(0)} = 0 + 3.84 = 3.84$

$u_{2,3}^{(0)} = 3.84 + 3.84 = 7.68$

$u_{3,3}^{(0)} = 7.68 + 3.84 = 11.52$

$u_{4,3}^{(0)} = 11.52 + 3.84 = 15.36$

0 ——— 14.4

$u_{0,4}$ $u_{1,4}$ $u_{2,4}$ $u_{3,4}$ $u_{4,4}$ $u_{5,4}$

Крок зміни ф-ї $\frac{14.4-0}{5} = 2.88$

$u_{1,4}^{(0)} = 0 + 2.88 = 2.88$

$u_{2,4}^{(0)} = 2.88 + 2.88 = 5.76$

$u_{3,4}^{(0)} = 5.76 + 2.88 = 8.64$

$u_{4,4}^{(0)} = 8.64 + 2.88 = 11.52$

Нульовий шаблон

5	1	0.	29.389263	47.552826	47.552826	29.389263	0
4	0.8	0	2.88	5.76	8.64	11.52	14.4
3	0.6	0	3.84	7.68	11.52	15.36	19.2
2	0.4	0	3.36	6.72	10.08	13.44	16.8
1	0.2	0	1.92	3.84	5.76	7.68	9.6
0	0	0	0	0	0	0	0
n	$^{y}/_{x}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
	m	0	1	2	3	4	5

```
import numpy as np

def finite_difference_method(zero_template, eps):
    """
    Finite difference method to solve Dirichlet problem for the Laplace equation

    :param zero_tamplate: 2D array
    :param eps: int
    :return: u k
    """

    u, temp = np.copy(zero_template), np.copy(zero_template)
    k = 0

    while (abs(temp) >= eps).any():
        k += 1
        for m in range(1, 5):
            for n in range(4, 0, -1):
                u[n, m] = 0.25 * (zero_template[n, m-
1] + zero_template[n, m+1] + zero_template[n+1, m] + zero_template[n-1, m])


        temp = zero_template - u
        zero_template = np.copy(u)

    return u, k

if __name__ == "__main__":
    zero_template = np.array([[0, 29.389263, 47.552826, 47.552826, 29.389263, 0],
                              [0, 2.88, 5.76, 8.64, 11.52, 14.4],
                              [0, 3.84, 7.68, 11.52, 15.36, 19.2],
                              [0, 3.36, 6.72, 10.08, 13.44, 16.8],
                              [0, 1.92, 3.84, 5.76, 7.68, 9.6],
                              [0, 0, 0, 0, 0, 0]])
    eps = np.array([0.01, 0.001])
```

```python
for i in eps:
    u, k = finite_difference_method(zero_template, i)
    print(k, '\n', u)
```

```
1
 [[ 0.          29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.          9.74731575 16.6882065  19.0882065  16.94731575 14.4       ]
 [ 0.          3.48        6.96       10.44       13.92       19.2       ]
 [ 0.          3.12        6.24        9.36       12.48       16.8       ]
 [ 0.          1.8         3.6         5.4         7.2         9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
2
 [[ 0.          29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         12.38936737 20.83708706 22.90708706 19.19936738 14.4       ]
 [ 0.          4.95682894  9.21205162 12.33205162 14.76682894 19.2       ]
 [ 0.          2.88        5.76        8.64       11.82       16.8       ]
 [ 0.          1.68        3.36        5.04        6.87        9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
3
 [[ 0.          29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         13.79579475 23.01533302 24.98033302 20.36579475 14.4       ]
 [ 0.          6.12035475 10.97149191 13.88149191 15.63785475 19.2       ]
 [ 0.          3.09920723  6.02301291  8.73801291 11.76920723 16.8       ]
 [ 0.          1.56        3.12        4.7175      6.615       9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
4
 [[ 0.          29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         14.63123769 24.32511142 26.20386142 21.10186269 14.4       ]
 [ 0.          6.96662347 12.26004814 15.08192314 16.30412347 19.2       ]
 [ 0.          3.42584191  6.48217801  9.09780301 11.94771691 16.8       ]
 [ 0.          1.55480181  3.07512823  4.61825323  6.52167681  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
5
 [[ 0.          29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         15.17024947 25.16199331 27.01543081 21.57431197 14.4       ]
 [ 0.          7.57928194 13.21395901 15.96645901 16.83287569 19.2       ]
 [ 0.          3.75090082  6.96470532  9.53251782 12.18090082 16.8       ]
 [ 0.          1.62524254  3.16380826  4.67365201  6.54149254  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
6
 [[ 0.          29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         15.53263456 25.73811632 27.56389757 21.90939238 14.4       ]
 [ 0.          8.03377733 13.9181099  16.64869583 17.23041795 19.2       ]
 [ 0.          4.04230745  7.41529648  9.94642929 12.42672151 16.8       ]
 [ 0.          1.72867727  3.31589997  4.80945466  6.61363821  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
7
 [[ 0.          29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         15.79028916 26.14186701 27.96225763 22.14589463 14.4       ]
 [ 0.          8.37326298 14.45897149 17.16471368 17.54620243 19.2       ]
 [ 0.          4.29443777  7.80568665 10.32504212 12.64762136 16.8       ]
 [ 0.          1.83955185  3.4883571   4.96899187  6.70904404  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
8
 [[ 0.          29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         15.97609825 26.44108607 28.25132533 22.32443077 14.4       ]
 [ 0.          8.63592461 14.87138258 17.57311842 17.78955742 19.2       ]
 [ 0.          4.50462537  8.14170212 10.64675339 12.84507215 16.8       ]
 [ 0.          1.94569872  3.65355759  5.13061082  6.80415331  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
9
 [[ 0.          29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.11656842 26.66290804 28.47286531 22.45753644 14.4       ]
 [ 0.          8.83802655 15.1979578  17.88975468 17.98565533 19.2       ]
```

```
 [ 0.          4.68083136  8.41907973 10.92262588 13.01011603 16.8       ]
 [ 0.          2.03954574  3.80450291  5.27611607  6.89392074  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
10
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.2225494  26.83505438 28.64075629 22.56194591 14.4       ]
 [ 0.          8.9988394  15.45244225 18.14477608 18.13935179 19.2       ]
 [ 0.          4.82416301  8.65147949 11.14876663 13.15055049 16.8       ]
 [ 0.          2.12133357  3.93368539  5.40526238  6.97155803  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
11
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.3057892  26.96714348 28.77365059 22.64234277 14.4       ]
 [ 0.          9.12478866 15.65753734 18.34532924 18.26431812 19.2       ]
 [ 0.          4.94291311  8.83976432 11.33801711 13.26491911 16.8       ]
 [ 0.          2.1894621   4.04451886  5.51350251  7.03895322  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
12
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.37029879 27.07245078 28.87691037 22.70680793 14.4       ]
 [ 0.          9.22655991 15.81925643 18.50838079 18.36314778 19.2       ]
 [ 0.          5.03850377  8.99574661 11.49087879 13.36032211 16.8       ]
 [ 0.          2.24685799  4.13568223  5.6053723   7.09460541  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
13
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.42206842 27.1548229  28.96011638 22.75733029 14.4       ]
 [ 0.          9.30701475 15.95078452 18.63754834 18.44387771 19.2       ]
 [ 0.          5.11729113  9.12108031 11.61745545 13.43715799 16.8       ]
 [ 0.          2.2935465   4.21199422  5.68029161  7.1414236   9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
14
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.46277516 27.22144883 29.02563188 22.79831427 14.4       ]
 [ 0.          9.37253602 16.05511657 18.74305851 18.50800916 19.2       ]
 [ 0.          5.18041039  9.22438133 11.71901956 13.50068919 16.8       ]
 [ 0.          2.33232134  4.2737296   5.74271832  7.1793624   9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
15
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.49581196 27.2740874  29.0789119  22.83072601 14.4       ]
 [ 0.          9.42457553 16.14035617 18.82694429 18.56051549 19.2       ]
 [ 0.          5.23230967  9.30706903 11.80271184 13.55159778 16.8       ]
 [ 0.          2.363535    4.32485525  5.79302789  7.21085188  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
16
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.52198148 27.31697651 29.12114593 22.8571726  14.4       ]
 [ 0.          9.46711945 16.20816906 18.89562385 18.60231702 19.2       ]
 [ 0.          5.27379489  9.37505823 11.86965975 13.5935198  16.8       ]
 [ 0.          2.38929123  4.36590798  5.83460474  7.23615642  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
17
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.54333974 27.35103062 29.15564974 22.87818149 14.4       ]
 [ 0.          9.50098636 16.26369451 18.95032294 18.63657906 19.2       ]
 [ 0.          5.30786723  9.42938292 11.92470166 13.6270333  16.8       ]
 [ 0.          2.40992572  4.39973855  5.86793104  7.25703114  9.6       ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
18
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.56031999 27.3788775  29.18309026 22.89537295 14.4       ]
 [ 0.          9.52872537 16.30793071 18.99515624 18.66388443 19.2       ]
```

```
 [ 0.          5.33507375  9.47400049 11.96866755 13.65457796 16.8        ]
 [ 0.          2.42690144  4.42680992  5.89536784  7.27374108  9.6        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
19
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.57421647 27.40104174 29.20555817 22.90905942 14.4        ]
 [ 0.          9.55083111 16.3441899  19.03089324 18.68627679 19.2        ]
 [ 0.          5.35740683  9.50962048 12.00477563 13.67657327 16.8        ]
 [ 0.          2.44047092  4.44906744  5.91730464  7.28748645  9.6        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
20
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.58528396 27.41919763 29.2234551  22.92027449 14.4        ]
 [ 0.          9.5689533  16.37309664 19.06020012 18.70413148 19.2        ]
 [ 0.          5.37523063  9.53885995 12.03359791 13.69463472 16.8        ]
 [ 0.          2.45161857  4.46684901  5.93533238  7.29846948  9.6        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
21
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.59435348 27.43366543 29.23812456 22.9292124  14.4        ]
 [ 0.          9.58340281 16.39680275 19.08357028 18.71877733 19.2        ]
 [ 0.          5.38985795  9.56219355 12.05725679 13.70904972 16.8        ]
 [ 0.          2.46051991  4.48145272  5.9497291   7.30749177  9.6        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
22
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.60158281 27.4455267  29.24981853 22.93654122 14.4        ]
 [ 0.          9.59525355 16.41570802 19.10274036 18.7304581  19.2        ]
 [ 0.          5.40152907  9.58134256 12.07613566 13.72088148 16.8        ]
 [ 0.          2.46782767  4.49311064  5.96155032  7.3146947   9.6        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
23
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.60751081 27.45498384 29.25940857 22.94238491 14.4        ]
 [ 0.          9.60470497 16.43121579 19.11803008 18.74004076 19.2        ]
 [ 0.          5.41110594  9.59662085 12.09162868 13.73032212 16.8        ]
 [ 0.          2.47365993  4.50268014  5.97098525  7.32060795  9.6        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
24
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.61223795 27.46274029 29.2670562  22.94717808 14.4        ]
 [ 0.          9.61245814 16.44358493 19.13057345 18.74768427 19.2        ]
 [ 0.          5.41874644  9.60915764 12.10398957 13.73806935 16.8        ]
 [ 0.          2.47844652  4.51031651  5.97872919  7.32532684  9.6        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
25
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.61611536 27.46892627 29.27332946 22.95100087 14.4        ]
 [ 0.          9.61864233 16.45373238 19.14057875 18.75395522 19.2        ]
 [ 0.          5.42501557  9.61915936 12.11413241 13.74425017 16.8        ]
 [ 0.          2.48226574  4.51658334  5.98490823  7.32919963  9.6        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
26
 [[ 0.         29.389263   47.552826   47.552826   29.389263    0.        ]
 [ 0.         16.6192079  27.4740008  29.27833297 22.95413692 14.4        ]
 [ 0.          9.62371583 16.46182668 19.14878737 18.75895745 19.2        ]
 [ 0.          5.43001686  9.62736592 12.12222413 13.74932182 16.8        ]
 [ 0.          2.48539973  4.52158333  5.98997884  7.3322896   9.6        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.          0.        ]]
```

Відповідь

$k = 26, \varepsilon = 0.01$

0.	29.389263	47.552826	47.552826	29.389263	0
0	16.6192079	27.4740008	29.27833297	22.95413692	14.4
0	9.62371583	16.46182668	19.14878737	18.75895745	19.2
0	5.43001686	9.62736592	12.12222413	13.74932182	16.8
0	2.48539973	4.52158333	5.98997884	7.3322896	9.6
0	0	0	0	0	0

$k = 36, \varepsilon = 0.001$

0.	29.389263	47.552826	47.552826	29.389263	0
0	16.63082167	27.49276423	29.29712406	22.96573311	14.4
0	9.64247798	16.49222928	19.17914452	18.7777469	19.2
0	5.44880507	9.65772053	12.15262347	13.7680816	16.8
0	2.49699337	4.54036991	6.00873735	7.34390011	9.6
0	0	0	0	0	0

Завдання 2

Параболічне рівняння вирішується методом сіток поступовим переходом від значень ф-ї $u(x_i, t_j)$ до значень $u(x_i, t_{j+1})$, причому $t_{j+1} = t_j + k$, де $k = \frac{h^2}{6} = \frac{0.01}{6} = 0.0017$

		0	1	2	3	4	5	6
	$t_j \backslash x_i$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0	0.02	0.12	0.22	0.31	0.41	0.5	0.581
1	0.0017	0.025						0.581
2	0.0033	0.03						0.581
3	0.005	0.035						0.581
4	0.0067	0.04						0.581
5	0.0083	0.045						0.581
6	0.01	0.05						0.581

Рівняння теплопровідності замінюємо скінченно різницевим рівнянням

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2}$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2}$$

$$\left[\sigma = \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}\right]$$

Різницеве рівняння, що відповідає рівнянню теплопровідності

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}\left(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}\right)$$

$$i = \overline{1,5}$$

$$j = \overline{0,5}$$

```
import numpy as np

def parabola(u):
    """
    Finite difference method to solve mixed parabolic problem

    :param u: 2D array
```

```python
    :return u: 2D array - solution
    """

    for j in range(len(u)-1):
        for i in range(1, len(u)-1):
            u[j+1, i] = 1 / 6 * (u[j, i+1] + 4 * u[j, i] + u[j, i-1])

    return u

if __name__ == "__main__":
    n = 7
    u = np.zeros([n, n])
    X = np.array([0.1 * i for i in range(n)])
    T = np.array([0.01 * i / 6 for i in range(n)])
    u[0, :] = [np.sin(x + 0.02) for x in X]
    u[:, 0] = [3 * t + 0.02 for t in T]
    u[:, n-1] = 0.581

    print(parabola(u))
```

j	i	0	1	2	3	4	5	6
	t_j \ x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0	0.02	0.12	0.22	0.31	0.41	0.5	0.581
1	0.0017	0.025	0.119513	0.21786621	0.314043	0.40708142	0.49604683	0.581
2	0.0033	0.03	0.120153	0.21750344	0.313519	0.40640254	0.49537813	0.581
3	0.005	0.035	0.121353	0.2172811	0.312997	0.40575134	0.49481917	0.581
4	0.0067	0.04	0.122948	0.21724575	0.312504	0.405137	0.49433801	0.581
5	0.0083	0.045	0.124840	0.21740589	0.312066	0.40456496	0.49391484	0.581
6	0.01	0.05	0.126961	0.21775498	0.311706	0.40404016	0.49353738	0.581

Висновок

Під час виконання лабораторної роботи було реалізовано метод сіток розв'язку задач в часткових похідних для задачі Діріхле рівняння Лапласа та рівняння теплопровідності відповідно. Задача Діріхле була розв'язана з заданою точністю, використовуючи ітераційний процес усереднення Лібмана: для $\varepsilon = 0.01$ знадобилось 36 ітерацій, а для $\varepsilon = 0.001$ – 36 ітерацій. Однак, на більших проміжках, точність значно знизиться.