МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Лабораторна робота №8
з курсу «Чисельні методи»
Тема: крайова задача

Виконала:
студентка 3 курсу
групи КА-83
Нго Х.Х.
Прийняла: Хоменко О. В.

Київ – 2020

Варіант – 18

Мета роботи: набути вміння та досвід використання методів розв’язання лінійних крайових задач.

Завдання на роботу:

1. Написати номер варіанту
2. Розв’язати крайову задачу методом скінченних різниць з кроком $h = \frac{b-a}{n}$, де $n \geq 3$. Для цього виконати наступні дії.
   a. Дискретизація області зміни аргументу x;
   b. Перехід від неперервної диференціальної математичної моделі до скінченно-різницевої моделі;
   c. Розв’язати утворену систему рівнянь методом прогонки. Для цього скласти відповідну програму, яку включити до звіту.
   d. Записати результат у вигляді таблиці.
3. Розв'язати ту саму крайову задачу методом колокацій або методом Гальоркіна на вибір (можна додавати фото розв’язання, складати програму не потрібно). За необхідності для розв’язання систем рівнянь, які утворюються в ході розв’язування задачі, використовувати програми, складені при вивченні методів розв’язання систем рівнянь або використати будь-який онлайн калькулятор. Записати отриманий наближений розв'язок. Побудувати графік отриманого наближеного розв'язку.
4. Зробити висновок.

18	$y'' - \dfrac{y'}{2x} + 0.8y = x$	$\begin{cases} y(1.7) + 1.2y'(1.7) = 2, \\ y'(2) = 1; \end{cases}$	[1.7, 2]

Для $n = 5$ маємо крок $h = \dfrac{2-1.7}{5} = 0.06$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

1.7	1.76	1.82	1.88	1.94	2
x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

Підставимо у (*)

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{1}{2x_i}\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 0.8y_i = x_i \quad, i = 1, 2, 3, 4$$

З врахуванням обраного кроку $h = 0.06$, маємо

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0.06^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{0.24x_i} + 0.8y_i = x_i$$

$i = 1$

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0.06^2} - \frac{y_2 - y_0}{0.24 \cdot 1.76} + 0.8y_1 = 1.76 \qquad (2)$$

$i = 2$

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0.06^2} - \frac{y_3 - y_1}{0.24 \cdot 1.82} + 0.8y_2 = 1.82 \qquad (3)$$

$i = 3$

$$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{0.06^2} - \frac{y_4 - y_2}{0.24 \cdot 1.88} + 0.8y_3 = 1.88 \qquad (4)$$

$i = 4$

$$\frac{y_5 - 2y_4 + y_3}{0.06^2} - \frac{y_5 - y_3}{0.24 \cdot 1.94} + 0.8y_4 = 1.94 \qquad (5)$$

$y_i' = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h)$ - для лівої границі, тобто $i = 0$

$y_i' = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h)$ - для правої границі, тобто $i = 5$

Підставимо в крайові умови

$$y_0 + 1.2\frac{y_1 - y_0}{0.06} = 2 \qquad (1)$$

$$\frac{y_5 - y_4}{0.06} = 1 \qquad (6)$$

Отримаємо систему з рівнянь (1), (2), (3), (4), (5), (6)
невідомі $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$

$$\begin{cases} y_0 + 20(y_1 - y_0) = 2 \\ y_0\left(\frac{1}{0.06^2} + \frac{1}{0.4224}\right) + y_1\left(0.8 - \frac{2}{0.06^2}\right) + y_2\left(\frac{1}{0.06^2} - \frac{1}{0.4224}\right) = 1.76 \\ y_1\left(\frac{1}{0.06^2} + \frac{1}{0.4368}\right) + y_2\left(0.8 - \frac{2}{0.06^2}\right) + y_3\left(\frac{1}{0.06^2} - \frac{1}{0.4368}\right) = 1.82 \\ y_2\left(\frac{1}{0.06^2} + \frac{1}{0.4512}\right) + y_3\left(0.8 - \frac{2}{0.06^2}\right) + y_4\left(\frac{1}{0.06^2} - \frac{1}{0.4512}\right) = 1.88 \\ y_3\left(\frac{1}{0.06^2} + \frac{1}{0.4656}\right) + y_4\left(0.8 - \frac{2}{0.06^2}\right) + y_5\left(\frac{1}{0.06^2} - \frac{1}{0.4656}\right) = 1.94 \\ -y_4 + y_5 = 0.06 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 19y_0 - 20y_1 = -2 \\ 280.145202\,y_0 - 554.756\,y_1 + 275.4103\,y_2 = 1.76 \\ 280.067\,y_1 - 554.756\,y_2 + 275.4884\,y_3 = 1.82 \\ 279.994\,y_2 - 554.756\,y_3 + 275.5615\,y_4 = 1.88 \\ 279.925\,y_3 - 554.756\,y_4 + 275.63001\,y_5 = 1.94 \\ y_4 - y_5 = -0.06 \end{cases}$$

Розв’язуємо утворену систему рівнянь методом прогонки.

```python
import numpy as np

def sweep_method(arr, r):
    """
    Sweep method for solving boundary value problem

    :param arr: 2D array of linear system
    :param r: right part of linear system
    :return: y0, ..., y[n-1]
    """
    n = len(r)
    b, c, d = np.zeros(n), np.diag(arr), np.zeros(n)
    for i in range(n-1):
        b[i+1] = arr[i+1, i]
        d[i] = arr[i, i+1]

    delta, lmbd = np.zeros(n), np.zeros(n)
    for j in range(n):
        delta[j] = -d[j]/(c[j]+b[j] * delta[j-1])
        lmbd[j] = (r[j]-b[j] * lmbd[j-1]) / (c[j] + b[j] * delta[j-1])

    y = np.zeros(n)
    for k in range(n-1, -1, -1):
        y[k] = lmbd[k] + delta[k] * y[k-n+1]
    return y

if __name__ == "__main__":
```

```
    arr = np.array([[19, -20, 0, 0, 0, 0], [280.145202, -
554.756, 275.4103, 0, 0, 0], [0, 280.067, -
554.756, 275.4884, 0, 0], [0, 0, 279.994, -
554.756, 275.5615, 0], [0, 0, 0, 279.925, -554.756, 275.63001], [0, 0, 0, 0, 1, -
1]])
    r = np.array([-2, 1.76, 1.82, 1.88, 1.94, -0.06])
    y = sweep_method(arr, r)
    print(y)
```

Результат:

x_i	1.7	1.76	1.82	1.88	1.94	2
y_i	1.11562228	1.15984117	1.20784378	1.25974577	1.3156501	1.3756501

Розв'язання методом Гальоркіна для $n = 2$

$$y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{2} c_i \varphi_i(x)$$

$\varphi_i(x)$ $i = 1, 2$ – лнз 2-диф. ф-ї на $[1.7, 2]$

c_i – шукані коефіцієнти

$\varphi_0(x) = cx + d$ задовольняє умови

$$\begin{cases} \varphi_0(1.7) + 1.2\varphi_0'(1.7) = 2 \\ \varphi_0'(2) = 1 \end{cases}$$

$\varphi_0'(x) = c$

$$\begin{cases} 1.7c + d + 1.2c = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = -0.9 \end{cases} \Rightarrow \varphi_0(x) = x - 0.9$$

$\varphi_i(x) = s_i (x - 1.7)^{i+1} + (x - 1.7)^{i+2}$ $\quad i = 1, 2$

Повинні виконувати умови

$$\begin{cases} \varphi_i(1.7) + 1.2\varphi_i'(1.7) = 0 & (1) \\ \varphi_i'(2) = 0 & (2) \end{cases}$$

$i = 1.$

Умова (1) виконується. s_1 виберемо так, щоб задовольнялася $2^{га}$ з умов

$\varphi_1 = s_1 (x-1.7)^2 + (x-1.7)^3$

$\varphi_1'(x) = 2s_1(x-1.7) + 3(x-1.7)^2$; $\varphi_1'' = 2s_1 + 6(x-1.7)$

$\varphi_1'(2) = 2s_1 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3^2 = 0$

$s_1 = -0.45.$

$i = 2$

$\varphi_2(x) = s_2(x-1.7)^3 + (x-1.7)^4$ $\quad \varphi_2'' = 6s_2(x-1.7) + 12(x-1.7)^2$

$\varphi_2'(x) = 3s_2(x-1.7)^2 + 4(x-1.7)^3$

$\varphi_2'(2) = 3s_2 \cdot 0.3^2 + 4 \cdot 0.3^3 = 0$

$s_2 = -0.4$

Отже

$\varphi_0(x) = x - 0.9$

$\varphi_1(x) = -0.45(x-1.7)^2 + (x-1.7)^3$

$\varphi_2(x) = -0.4(x-1.7)^3 + (x-1.7)^4$

Далі знаходимо c_i за допомогою

$$\sum_{i=1}^{2} c_i \int_{1.7}^{2} \varphi_k(x)\, L[\varphi_i(x)]\, dx = \int_{1.7}^{2} \varphi_k(x) \left(f(x) - L[\varphi_0(x)] \right) dx$$

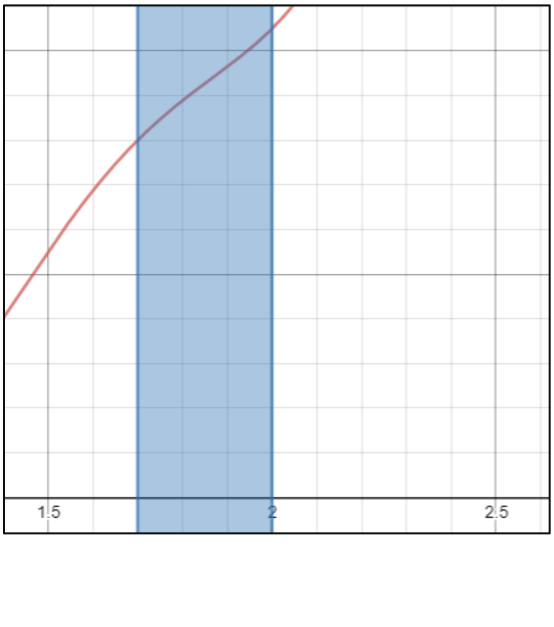
$$L[y] = y'' - \frac{y'}{2x} + 0.8y = x = f(x)$$

$$\begin{cases} c_1 \int_{1.7}^{2} \left(-0.45(x-1.7)^2 + (x-1.7)^3\right)\left(-0.9 + 6(x-1.7) - \frac{1}{2x}\left(-0.9(x-1.7) + 3(x-1.7)^2\right) + \right. \\ \left. + \left(-0.36(x-1.7)^2 + 0.8(x-1.7)^3\right)\right) dx + c_2 \int_{1.7}^{2} \left(-0.45(x-1.7)^2 + (x-1.7)^3\right) \cdot \\ \cdot \left(-2.4(x-1.7) + 12(x-1.7)^2 - \frac{1}{2x}\left(-1.2(x-1.7)^2 + 4(x-1.7)^3\right) + \left(-0.32(x-1.7)^3 + \right.\right. \\ \left.\left. + 0.8(x-1.7)^4\right)\right) dx = \int_{1.7}^{2} \left(-0.45(x-1.7)^2 + (x-1.7)^3\right)\left(x + \frac{1}{2x} + 0.8x + 0.72\right) dx \\ c_1 \int_{1.7}^{2} \left(-0.4(x-1.7)^3 + (x-1.7)^4\right)\left(-0.9 + 6(x-1.7) - \frac{1}{2x}\left(-0.9(x-1.7) + 3(x-1.7)^2\right) + \right. \\ \left. + \left(-0.36(x-1.7)^2 + 0.8(x-1.7)^3\right)\right) dx + c_2 \int_{1.7}^{2} \left(-0.4(x-1.7)^3 + (x-1.7)^4\right) \cdot \\ \cdot \left(-2.4(x-1.7) + 12(x-1.7)^2 - \frac{1}{2x}\left(-1.2(x-1.7)^2 + 4(x-1.7)^3\right) + \left(-0.32(x-1.7)^3 + \right.\right. \\ \left.\left. + 0.8(x-1.7)^4\right)\right) dx = \int_{1.7}^{2} \left(-0.4(x-1.7)^3 + (x-1.7)^4\right)\left(x + \frac{1}{2x} - 0.8x + 0.72\right) dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0.0007369 c_1 - 0.000149007 c_2 = -0.00276223 \\ -0.00014055 c_1 - 0.0000337784 c_2 = -0.00044224 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 2.78718 \\ c_2 = 4.75384 \end{cases}$$

$y(x) = x - 0.9 + 2.78718\left(-0.45(x-1.7)^2 + (x-1.7)^3\right) +$
$\quad + 4.75384\left(-0.4(x-1.7)^3 + (x-1.7)^4\right)$



Висновок:

В ході лабораторної роботи було розглянуто та реалізовано два методі: метод скінченних різниць там метод Гальоркіна.

Реалізовано програму метода прогонки для розв’язку системи рівнянь, утвореної під час розв’язання крайової задачі МСР. Було розв’язано крайову задачу МСР з кроком $h = 0.06$. В результаті отримали значення розв’язку крайової задачі в відповідних точках.

Метод Гальоркіна дав наближений розв’язок крайової задачі. Цей розв'язок задовольняє крайові умови даної задачі