

Algoritmi e Strutture Dati

Alex Narder

October 3, 2022

Contents

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Contenuti del corso | 2 |
| 2 | Introduzione | 3 |
| 3 | Numeri di Fibonacci | 3 |
| 4 | Versioni Algoritmo di Fibonacci | 3 |
| 4.1 | Versione 1 Algoritmo di Fibonacci | 3 |
| 4.2 | Versione 2 Algoritmo di Fibonacci | 5 |
| 4.2.1 | Proposizione 1 | 7 |
| 4.2.2 | Proposizione 2 | 7 |
| 4.2.3 | Proposizione 3 | 7 |
| 4.3 | Versione 3 Algoritmo di Fibonacci | 8 |
| 4.4 | Versione 4 Algoritmo di Fibonacci | 8 |
| 4.5 | In sostanza | 8 |
| 5 | La Forma delle mie palle | 9 |
| 6 | | 9 |

1 Contenuti del corso

In questo corso si parlerà di:

- Algoritmi e le loro complessità; capire il comportamento asintotico
- Ricorrenze
- Grafi
- Alberi di copertura minimi
- Problema dei cammini minimi
- Algoritmi greedy

2 Introduzione

Un **algoritmo** per essere utile deve essere funzionale e veloce. Quindi deve essere **ottimizzato**, nel momento in cui il tempo di esecuzione è esponenziale allora l'algoritmo non è ottimizzato.

Ci sono alcuni problemi per cui non c'è la speranza di trovare algoritmi efficienti. L'obiettivo di questo corso è studiare algoritmi non troppo complicati, che quindi non saranno esponenziali. Quando vado a misurare la complessità di un algoritmo la misuro rispetto alla dimensione dell'input dato.

In alcune situazioni è molto utile capire di che tipo di input si parla, per analizzare il problema e trarre delle conclusioni.

Parlando di complessità si usa sempre il **worst case**, ovvero il caso peggiore, mentre tutti gli altri casi saranno **best case** e **average case**.

3 Numeri di Fibonacci

Problema:

Scrivere un algoritmo che restituisca in uscita i numeri di Fibonacci.

La sequenza di Fibonacci è un insieme di numeri, la sequenza è definita ricorsivamente;

$$F_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

F_n rappresenta l'iesimo numero di Fibonacci.

4 Versioni Algoritmo di Fibonacci

4.1 Versione 1 Algoritmo di Fibonacci

La sequenza di Fibonacci è direttamente collegata alla sezione aurea. Formula di **Binet**;

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ ci sono 2 soluzioni $x_{1,2}$:

$x_1 = 1,618...$ che chiamiamo ϕ

$x_2 = 0,618...$ che chiamiamo $\hat{\phi}$

La formula di Binet dice che per ogni n maggiore o uguale a 1 risulta

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi^n - \hat{\phi}^n)$$

Dimostrare la formula di Binet: (induzione su n)

Base $\rightarrow n = 1, 2$

$$n = 1 \rightarrow F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi - \hat{\phi})$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$n = 2 \rightarrow F_2 = 1/\sqrt{5} * (\phi^2 - \hat{\phi}^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

Ipotesi induttiva:

$$\text{def.} \rightarrow F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi^{n-1} - \hat{\phi}^{n-1}) \quad +$$

$$F_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi^{n-2} - \hat{\phi}^{n-2}) \quad =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} * [(\phi^{n-1} + \phi^{n-2}) - (\hat{\phi}^{n-1} + \hat{\phi}^{n-2})]$$

$$\begin{cases} \phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2} \\ \hat{\phi}^n = \hat{\phi}^{n-1} + \hat{\phi}^{n-2} \end{cases}$$

è vera per la definizione di ϕ e $\hat{\phi}$

```
int Fib1(int n){
    return 1/sqrt(5) * (phi^n - phi^-n);
}
```

facendo i calcoli l'argoritmo sembra corretto, ma al numero $n = 18$ il risultato è errato.

4.2 Versione 2 Algoritmo di Fibonacci

```
int Fib2(int n){
    if (n<=2) {
        return 1;
    } else return Fib2(n-1) + Fib2(n-2);
}
```

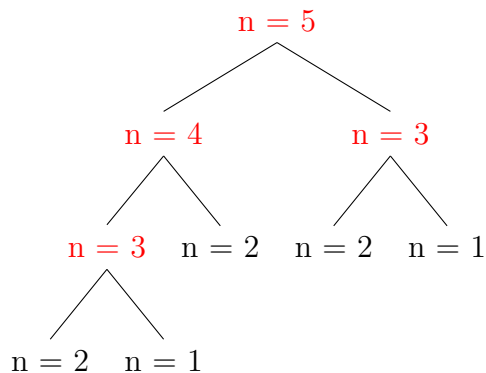
| n | T(n) |
|---|-------------|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | $2+1+1 = 4$ |
| 4 | $2+4+1 = 7$ |

n è il numero, $T(n)$ invece è il numero della istruzioni necessarie prima di ricevere un output.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, 2 \\ 2 + T(n-1) + T(n-2) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

$$T(n) = 2 + T(n-1) + T(n-2) \rightarrow \text{quando } n \geq 3$$

Albero delle ricorsioni di $n = 5$:



La complessità dei pallini in **rosso** è 2 mentre quella degli altri è 1.
 Sommando tutte le complessità otteniamo il numero di istruzioni necessarie per eseguire, in questo caso 13.

In **rosso** ci sono i **nodi interni**
 Mentre in **nero** ci sono i **nodi foglia**

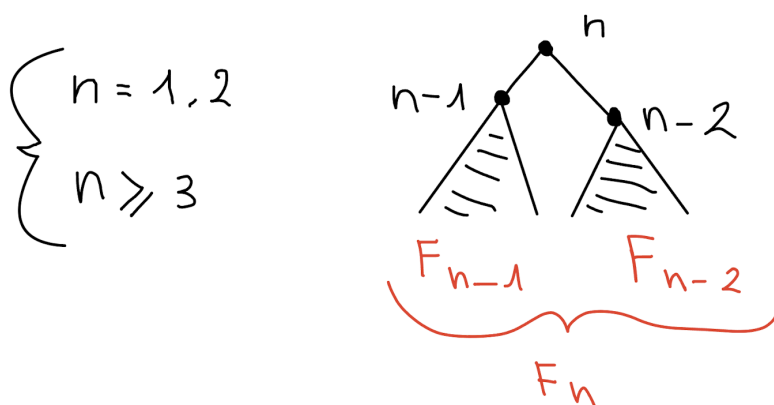
$T(5) = 4 * 2 + 5 * 1 \rightarrow$ è dato da un numero di nodi interi (i) moltiplicati per 2 + il numero di foglie (f)

$$\rightarrow T(n) = 2 * i(Tn) + 1 * f(Tn)$$

4.2.1 Proposizione 1

Dato un generico albero di ricorsione, siamo in grado di arrivare a una formula che ci dica esattamente quanti nodi interni e foglia ci sono?

→ Sia $T(n)$ l'albero di ricorsione relativo alla chiamata di $\text{Fib2}(n)$, allora: $f(Tn) = F(n) \rightarrow$ infatti il numero delle foglie è l'esimo numero di Fibonacci.



4.2.2 Proposizione 2

Sia T un albero dove i nodi interni hanno esattamente 2 figli, allora:
Il numero di nodi interni è sempre uguale a $f(T) - 1$:

$$i(T) = f(t) - 1$$

Da dimostrare.

Quindi con la proposizione uno e la proposizione 2 otteniamo:

$$T(n) = 2(F(n) - 1) + F(n) = 3F(n) - 2$$

4.2.3 Proposizione 3

Per ogni $n \geq 6$ abbiamo che $F(n) \geq 2^{n/2}$

Da dimostrare

Base: $n = 6, 7$

I.P.: $n \leq 8$

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\ &\geq 2^{(n-1)/2} + 2^{(n-2)/2} \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\geq 2^{n/2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) \geq 2^{n/2} \end{aligned}$$

4.3 Versione 3 Algoritmo di Fibonacci

```
int Fib3(int n){  
  
}
```

Complessità? $T(n)$ è più o meno uguale a n

4.4 Versione 4 Algoritmo di Fibonacci

```
int Fib4(int n){  
    int a = 1, b = 2;  
    for (int i = 3 ; i <= n ; i++){  
        c = a+b;  
        a = b;  
        b = c;  
    }  
    return b;  
}
```

4.5 In sostanza

tabella:

| | corretto? | complessità temporale | complessità spaziale |
|------|------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| Fib1 | no | costante | costante |
| Fib2 | si | esponenziale | lineare |
| Fib3 | si | lineare | lineare |
| Fib4 | si | lineare | lneare |

L'algoritmo Fib4 è il più efficiente.

5 La Forma delle mie palle

Rotonda.

6