

Algoritmi e Strutture Dati

Alex Narder

November 23, 2022

Contents

1	Contenuti del corso	2
2	Introduzione	3
3	Numeri di Fibonacci	3
4	Versioni Algoritmo di Fibonacci	3
4.1	Versione 1 Algoritmo di Fibonacci	3
4.2	Versione 2 Algoritmo di Fibonacci	5
4.2.1	Proposizione 1	7
4.2.2	Proposizione 2	7
4.2.3	Proposizione 3	7
4.3	Versione 3 Algoritmo di Fibonacci	8
4.4	Versione 4 Algoritmo di Fibonacci	8
4.5	In sostanza	8
5	Classi asintotiche	9
5.1	Prima classe	9
5.2	Seconda classe	10
5.3	Terza classe	11
5.3.1	esempi:	13
5.4	Quarta classe	13
5.5	Quinta classe	14

1 Contenuti del corso

In questo corso si parlerà di:

- Algoritmi e le loro complessità; capire il comportamento asintotico
- Ricorrenze
- Grafi
- Alberi di copertura minimi
- Problema dei cammini minimi
- Algoritmi greedy

2 Introduzione

Un **algoritmo** per essere utile deve essere funzionale e veloce. Quindi deve essere **ottimizzato**, nel momento in cui il tempo di esecuzione è esponenziale allora l'algoritmo non è ottimizzato.

Ci sono alcuni problemi per cui non c'è la speranza di trovare algoritmi efficienti. L'obiettivo di questo corso è studiare algoritmi non troppo complicati, che quindi non saranno esponenziali. Quando vado a misurare la complessità di un algoritmo la misuro rispetto alla dimensione dell'input dato.

In alcune situazioni è molto utile capire di che tipo di input si parla, per analizzare il problema e trarre delle conclusioni.

Parlando di complessità si usa sempre il **worst case**, ovvero il caso peggiore, mentre tutti gli altri casi saranno **best case** e **average case**.

3 Numeri di Fibonacci

Problema:

Scrivere un algoritmo che restituisca in uscita i numeri di Fibonacci.

La sequenza di Fibonacci è un insieme di numeri, la sequenza è definita ricorsivamente;

$$F_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

F_n rappresenta l'iesimo numero di Fibonacci.

4 Versioni Algoritmo di Fibonacci

4.1 Versione 1 Algoritmo di Fibonacci

La sequenza di Fibonacci è direttamente collegata alla sezione aurea. Formula di **Binet**;

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ ci sono 2 soluzioni $x_{1,2}$:

$x_1 = 1,618...$ che chiamiamo ϕ

$x_2 = 0,618...$ che chiamiamo $\hat{\phi}$

La formula di Binet dice che per ogni n maggiore o uguale a 1 risulta

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi^n - \hat{\phi}^n)$$

Dimostrare la formula di Binet: (induzione su n)

Base $\rightarrow n = 1, 2$

$$n = 1 \rightarrow F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi - \hat{\phi})$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$n = 2 \rightarrow F_2 = 1/\sqrt{5} * (\phi^2 - \hat{\phi}^2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

Ipotesi induttiva:

$$\text{def.} \rightarrow F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi^{n-1} - \hat{\phi}^{n-1}) \quad +$$

$$F_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi^{n-2} - \hat{\phi}^{n-2}) \quad =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} * [(\phi^{n-1} + \phi^{n-2}) - (\hat{\phi}^{n-1} + \hat{\phi}^{n-2})]$$

$$\begin{cases} \phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2} \\ \hat{\phi}^n = \hat{\phi}^{n-1} + \hat{\phi}^{n-2} \end{cases}$$

è vera per la definizione di ϕ e $\hat{\phi}$

```
int Fib1(int n){
    return 1/sqrt(5) * (phi^n - phi^-n);
}
```

facendo i calcoli l'argoritmo sembra corretto, ma al numero $n = 18$ il risultato è errato.

4.2 Versione 2 Algoritmo di Fibonacci

```
int Fib2(int n){
    if (n<=2) {
        return 1;
    } else return Fib2(n-1) + Fib2(n-2);
}
```

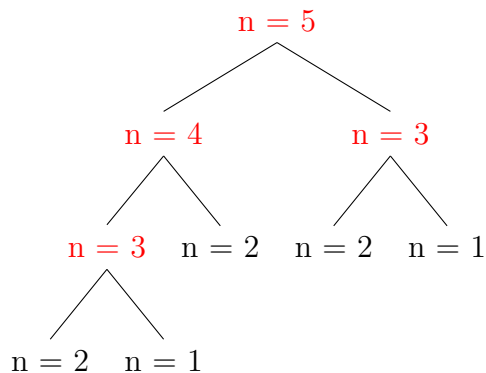
n	T(n)
1	1
2	1
3	$2+1+1 = 4$
4	$2+4+1 = 7$

n è il numero, $T(n)$ invece è il numero della istruzioni necessarie prima di ricevere un output.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, 2 \\ 2 + T(n-1) + T(n-2) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

$$T(n) = 2 + T(n-1) + T(n-2) \rightarrow \text{quando } n \geq 3$$

Albero delle ricorsioni di $n = 5$:



La complessità dei pallini in **rosso** è 2 mentre quella degli altri è 1.
Sommando tutte le complessità otteniamo il numero di istruzioni necessarie per eseguire, in questo caso 13.

In **rosso** ci sono i **nodi interni**
Mentre in **nero** ci sono i **nodi foglia**

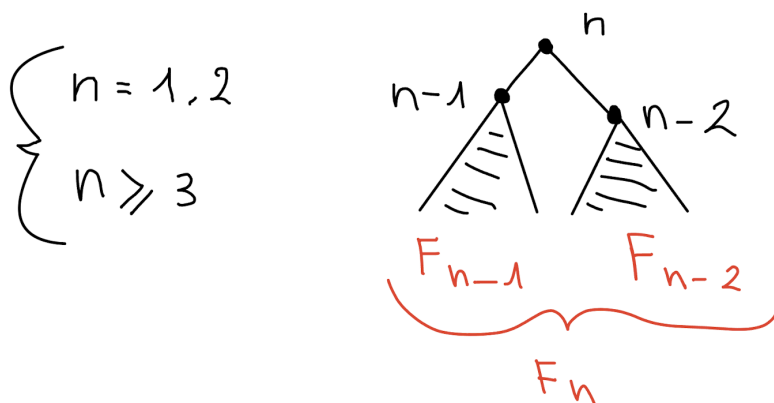
$T(5) = 4 * 2 + 5 * 1 \rightarrow$ è dato da un numero di nodi interi (i) moltiplicati per 2 + il numero di foglie (f)

$$\rightarrow T(n) = 2 * i(Tn) + 1 * f(Tn)$$

4.2.1 Proposizione 1

Dato un generico albero di ricorsione, siamo in grado di arrivare a una formula che ci dica esattamente quanti nodi interni e foglia ci sono?

→ Sia $T(n)$ l'albero di ricorsione relativo alla chiamata di $\text{Fib2}(n)$, allora: $f(Tn) = F(n) \rightarrow$ infatti il numero delle foglie è l'esimo numero di Fibonacci.



4.2.2 Proposizione 2

Sia T un albero dove i nodi interni hanno esattamente 2 figli, allora:
Il numero di nodi interni è sempre uguale a $f(T) - 1$:

$$i(T) = f(t) - 1$$

Da dimostrare.

Quindi con la proposizione uno e la proposizione 2 otteniamo:

$$T(n) = 2(F(n) - 1) + F(n) = 3F(n) - 2$$

4.2.3 Proposizione 3

Per ogni $n \geq 6$ abbiamo che $F(n) \geq 2^{n/2}$

Da dimostrare

Base: $n = 6, 7$

I.P.: $n \geq 8$

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\ &\geq 2^{(n-1)/2} + 2^{(n-2)/2} \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\geq 2^{n/2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) \geq 2^{n/2} \end{aligned}$$

4.3 Versione 3 Algoritmo di Fibonacci

```
int Fib3(int n){  
  
}
```

Complessità? $T(n)$ è più o meno uguale a n

4.4 Versione 4 Algoritmo di Fibonacci

```
int Fib4(int n){  
    int a = 1, b = 2;  
    for (int i = 3 ; i <= n ; i++){  
        c = a+b;  
        a = b;  
        b = c;  
    }  
    return b;  
}
```

4.5 In sostanza

tabella:

	corretto?	complessità temporale	complessità spaziale
Fib1	no	costante	costante
Fib2	si	esponenziale	lineare
Fib3	si	lineare	lineare
Fib4	si	lineare	lineare

L'algoritmo Fib4 è il più efficiente.

5 Classi asintotiche

5.1 Prima classe

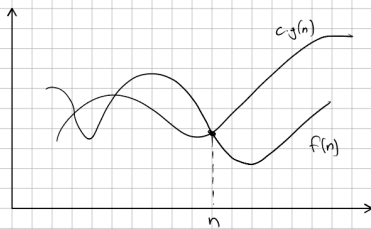
$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0$$

$$\exists \text{ un } n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 :$$

$$f(n) \leq c * g(n)\}$$

Data una funzione $g(n)$, la notazione $O(g(n))$ indica l'insieme di tutte le funzioni $f(n)$ che soddisfano la proprietà che, data una costante positiva e un n_0 appartenente all'insieme dei numeri naturali tale che $n \geq n_0$, $f(n) \leq c g(n)$.

Quando n diventa sufficientemente grande, $f(n)$ non diventerà mai più grande di $c g(n)$.



Esempio: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = O(n^2)$

$$\exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c \cdot n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}n - 3 \leq cn$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}n - cn \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - c\right)n \leq 3$$

$$\leq 0 \Rightarrow c \geq \frac{1}{2} > 0 \quad \forall n \geq 1$$

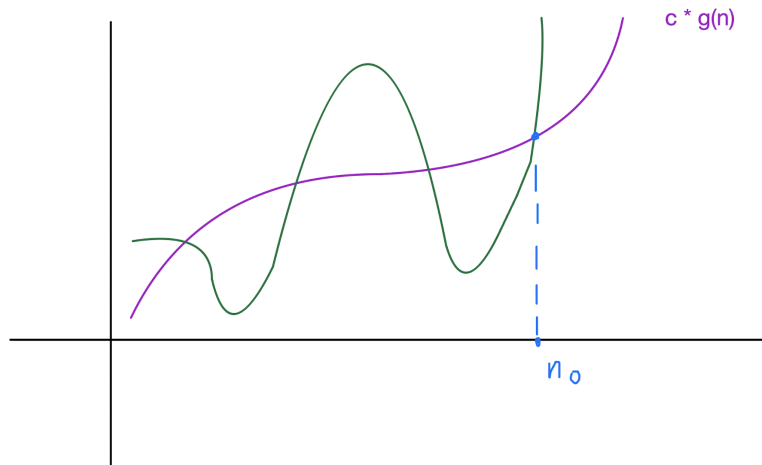
Quindi:

$$c = \frac{1}{2}$$

$$n_0 = 1$$

5.2 Seconda classe

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0 \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : \\ f(n) \leq c * g(n)\}$$



$$\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Omega(n^2)$$

$$\exists c > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 :$$

$$c * n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n$$

$$c * n \leq \frac{1}{2}n - 3$$

$$n\left(\frac{1}{2} - c\right) \geq 3$$

Supponendo che $\frac{1}{2} - c > 0$ [$c < \frac{1}{2}$]
si ha:

$$n \geq \frac{3}{\frac{1}{2} - c} = \frac{6}{1 - 2c}$$

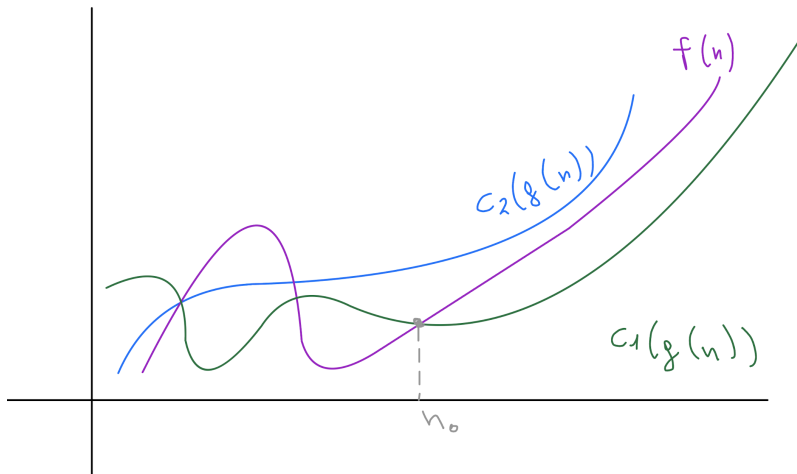
→ scegliamo $c = \frac{1}{14}$

si ottiene: $n \geq \frac{6}{1 - \frac{1}{7}} = 7$

5.3 Terza classe

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0 \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : \\ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

notazione: $f(n) = \Theta(g(n))$



proprietà:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n))$$

quindi: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \theta(n^2)$

$$\sqrt{n+10} = \theta(\sqrt{n})$$

$$\exists c_1, c_2 > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 : \\ c_1 \sqrt{n} \leq \sqrt{n+10} \leq c_2 \sqrt{n} \iff \\ c_1^2 n \leq n+10 \leq c_2^2 n$$

$$1) \quad c_1^2 n \leq n + 10 \iff$$

$$(c_1^2 - 1)n \leq 10$$

$$\text{se } c_1^2 - 1 \leq 0 \quad (c_1^2 \leq 1, c_1 \leq 1)$$

$$\text{diventa vera } \forall n \geq 1 \quad \rightarrow c_1 = 1$$

$$2) \quad n + 10 \leq c_2^2 n \iff$$

$$n(c_2^2 - 1) \geq 10$$

$$\text{se } c_2 > 1 :$$

$$n \geq \frac{10}{c_2^2 - 1}$$

$$\text{poniamo } c_2 = \sqrt{2} (> 1)$$

$$\text{si ha } n \geq 10$$

quindi:

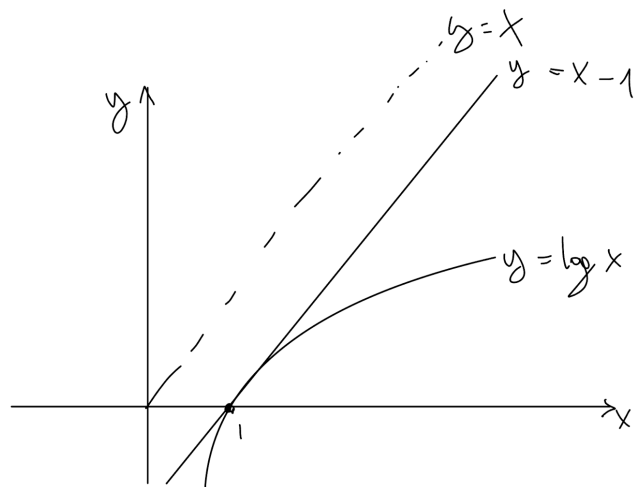
$$c_1 = 1$$

$$c_2 = \sqrt{2}$$

$$n_0 = 10$$

5.3.1 esempi:

1) $\log n = O(n)$



2) $n \log n = O(n^2)$

$$\forall n \geq 1 : \log n \leq n \iff n \log n \leq n^2$$

$c = 1, n_0 = 1$

3) $n! = O(n^n)$

infatti:

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

$$\leq n * n * n * \dots * n$$

$$= n^n$$

5.4 Quarta classe

$$o(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_0 : f(n) < c * g(n)\}$$

osservazione:

$$o(g(n)) \subset O(g(n))$$

quindi:

$$f(n) = o(g(n)) \rightarrow f(n) = O(g(n))$$

proprietà:

$$f(n) = o(g(n)) \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

esempio 1° mo:

$$\lg(n) = O(\sqrt{n})$$

qui per semplicità annuncio che la base
del \lg è e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(n)}{\sqrt{n}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2} n^{-1/2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty}$$

5.5 Quinta classe

$$w(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_0 : c * g(n) < f(n)\}$$

osservazione:

$$w(g(n)) \subset \Omega(g(n))$$

$$f(n) = w(g(n)) \rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$$

proprietà:

$$f(n) = w(g(n)) \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$$