Algoritmi e Strutture Dati

Alex Narder

October 3, 2022

Contents

1 Contenuti del corso **2**

2 Introduzione **3**

3 Numeri di Fibonacci **3**

4 Versioni Algoritmo di Fibonacci **3**

4.1 Versione 1 Algoritmo di Fibonacci 3

4.2 Versione 2 Algoritmo di Fibonacci 5

4.2.1 Proposizione 1 7

4.2.2 Proposizione 2 7

4.2.3 Proposizione 3 7

4.3 Versione 3 Algoritmo di Fibonacci 8

4.4 Versione 4 Algoritmo di Fibonacci 8

4.5 In sostanza 8

5 La Forma delle mie palle **9**

6 **9**

1 Contenuti del corso

In questo corso si parlerà di:

- Algoritmi e le loro complessità; capire il comportamento asintotico
- Ricorrenze
- Grafi
- Alberi di copertura minimi
- Problema dei cammini minimi
- Algoritmi greedy

2 Introduzione

Un **algoritmo** per essere utile deve essere funzionale e veloce. Quindi deve essere **ottimizzato**, nel momento in cui il tempo di esecuzione è esponenziale allora l'algoritmo non è ottimizzato.

Ci sono alcuni problemi per cui non c'è la speranza di trovare algoritmi efficenti. L'obiettivo di questo corso è studiare algoritmi non troppo complicati, che quindi non saranno esponenziali. Quando vado a misurare la complessità di un algoritmo la misuro rispetto alla dimensione dell'input dato.
In alcune situazioni è molto utile capire di che tipo di input si parla, per analizzare il problema e trarre delle conclusioni.

Parlando di complessità si usa sempre il **worst case**, ovvero il caso peggiore, mentre tutti gli altri casi saranno **best case** e **avarage case**.

3 Numeri di Fibonacci

Problema:
Scrivere un algoritmo che restituisca in uscita i numeri di Fibonacci.

La sequenza di Fibonacci è un insieme di numeri, la sequenza è definita ricorsivamente;

$$F_n = \begin{cases} 1, \; se \; n = 1, 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} \; se \; n >= 3 \end{cases}$$

F_n rappresenta l'iesimo numero di Fibonacci.

4 Versioni Algoritmo di Fibonacci

4.1 Versione 1 Algoritmo di Fibonacci

La sequenza di Fibonacci è direttamente collegata alla sezione aurea.
Formula di **Binet**;

$x^2 = x + 1$

$x^2 - x - 1 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ ci sono 2 soluzioni $x_{1,2}$:
x1 = 1,618... che chiamiamo ϕ
x2 = 0,618... che chiamiamo $\hat{\phi}$

La formula di Binet dice che per ogni n maggiore o uguale a 1 risulta

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi^n - \hat{\phi}^{\,n})$

Dimostrare la formula di Binet: (induzione su n)

Base $\rightarrow$ n = 1,2

n = 1 $\rightarrow F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi - \hat{\phi}\,)$

$\frac{1}{\sqrt{5}} * (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2)} = \mathbf{1}$

n = 2 $\rightarrow F_2 = 1/\sqrt{5} * (\phi^2 - \hat{\phi}^2)$

$\frac{1}{\sqrt{5}} * (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = \mathbf{1}$

Ipotesi induttiva:

def. $\rightarrow F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi^{n-1} - \hat{\phi}^{\,n-1}) \quad +$

$F_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\phi^{n-2} - \hat{\phi}^{\,n-2}) \quad =$

$\frac{1}{\sqrt{5}} * [(\phi^{n-1} + \phi^{n-2}) - (\hat{\phi}^{\,n-1} + \hat{\phi}^{\,n-2})]$

$$\begin{cases} \phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2} \\ \hat{\phi}^{\,n} = \hat{\phi}^{\,n-1} + \hat{\phi}^{\,n-2} \end{cases}$$

è vera per la definizione di ϕ e $\hat{\phi}$

```
int Fib1(int n){
   return 1/sqrt(5) * (phi^n - phi^^n);
}
```

facendo i calcoli l'argoritmo sembra corretto, ma al numero n = 18 il risultato è errato.

4.2 Versione 2 Algoritmo di Fibonacci

```
int Fib2(int n){
   if (n<=2) {
      return 1;
   } else return Fib2(n-1) + Fib2(n-2);
}
```

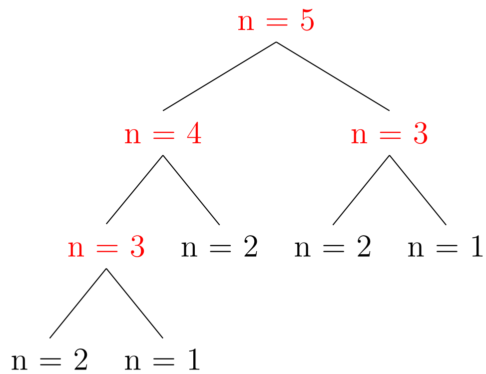
n	T(n)
1	1
2	1
3	2+1+1 = 4
4	2+4+1 = 7

n è il numero, T(n) invece è il numero della istruzioni necessarie prima di ricevere un output.

$$\mathrm{T(n)} = \begin{cases} 1 \ se \ n = 1, 2 \\ 2 + T(n-1) + T(n-2) \ se \ n >= 3 \end{cases}$$

$T(n) = 2 + T(n-1) + T(n-2) \rightarrow$ quando $n >= 3$

Albero delle ricorsioni di n = 5:



La complessità dei pallini in **rosso** è 2 mentre quella degli altri è 1.
Sommando tutte le complessità otteniamo il numero di istruzioni necessarie per eseguire, in questo caso 13.

In **rosso** ci sono i **nodi interni**
Mentre in **nero** ci sono i **nodi foglia**

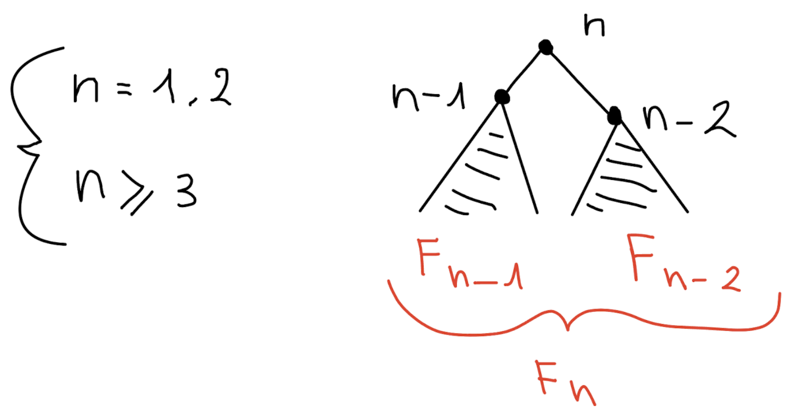
$T(5) = 4*2+5*1 \rightarrow$ è dato da un numero di nodi interi (i) moltiplicati per 2 + il numero di foglie (f)

$\rightarrow T(n) = 2 * i(Tn) + 1 * f(Tn)$

4.2.1 Proposizione 1

Dato un generico albero di ricorsione, siamo in grado di arrivare a una formula che ci dica esattamente quanti nodi interni e foglia ci sono?

→ Sia T(n) l'albero di ricorsione relativo alla chiamata di Fib2(n),
allora: f(Tn) = F(n) → infatti il numero delle foglie è l'esimo numero di Fibonacci.



4.2.2 Proposizione 2

Sia T un albero dove i nodi interni hanno esattamente 2 figli, allora:
Il numero di nodi interni è sempre uguale a f(T) - 1:

$$i(T) = f(t) - 1$$

Da dimostrare.
Quindi con la proposizione uno e la proposizione 2 otteniamo:
T(n) = 2(F(n) - 1) + F(n) = 3F(n) - 2

4.2.3 Proposizione 3

Per ogni $n >= 6$ abbiamo che $F(n) >= 2^{n/2}$

Da dimostrare

Base: n = 6,7

I.P.: n ¿= 8

$$
\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \\
&>= 2^{(n-1)/2} + 2^{(n-2)/2} \\
&\vdots \\
&>= 2^{n/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) >= 2^{n/2}
\end{aligned}
$$

4.3 Versione 3 Algoritmo di Fibonacci

```
int Fib3(int n){

}
```

Complessità? T(n) è più o meno uguale a n

4.4 Versione 4 Algoritmo di Fibonacci

```
int Fib4(int n){
   int a = 1, b = 2;
   for (int i = 3 ; i <= n ; i++){
      c = a+b;
      a = b;
      b = c;
   }
   return b;
}
```

4.5 In sostanza

tabella:

	corretto?	**complessità temporale**	**complessità spaziale**
Fib1	no	costante	costante
Fib2	si	esponenziale	lineare
Fib3	si	lineare	lineare
Fib4	si	lineare	lneare

L'algoritmo Fib4 è il più efficente.

5 La Forma delle mie palle

Rotonda.

6