Chapter Four

投资组合优化：在量子计算中的应用

Michael Marzec

Stevens理工学院，霍博肯，新泽西州，美国

4.1 简介

传统的Markowitz均值-方差模型下的投资组合选择提供了一个框架，在此框架下可以找到可以持续几十年 的投资组合（Markowitz, 1952, Fabozzi et al., 2013）。凭借这一框架，投资者或投资经理希望用一种特别的投资组合把所谓的风险最小化。对于这个模型而言，在一个投资组合中的风险的度量，，是植根于关联风险的方差的度量，它将变化或变异的数据与其预期值的均值相比。多重资产下，投资组合的方差的表述包含着描述多资产共同变动的协方差的概念。数学表达式为二次的，资产的最优选择也成为二次函数下的最优化问题。它被转化为一个非线性规划问题，并可以使用各种合适的操作技术来解决（Hillier and Lieberman，2010）。

有效边界是一个曲线、一个区域或者一个表面，它指出了不同投资组合下的风险与收益的相互作用。

(Elton et al.， 2007)。 随着资产组合资产数量增加——在数量和权重两个方面的投资——选择最优投资组合很快变得更加困难。传统上来解决这个问题的优化技术是所谓的依靠数学上被良好定义和约束的可微分的函数或者梯度下降/有向标志（Gilli and Schumann， 2012）。

更多的现代探索性（启发式的）优化技术，如随机局部搜索（stochastic local search），模拟退火（ simulated annealing），阈值接收算法（threshold accepting），禁忌搜索算法（tabu search）、遗传算法（genetic algorithms）、粒子群算法（particle swarm）、蚁群优化（ant colony optimization）提供了一种快速替代这些经典的优化技术（Gilli et al.，2011）。这些新技术解决了以往难以解决的经典复杂问题。许多经典和启发式技术通常会产生这样的解决方案，它包含着将所有的资产考虑在内的不同投资组合。我们如何找到一个适合投资组合？换句话说，我们怎样来从n种投资组合中找出一个合适的？

辅以合适的方法，这可以逼近为二次无约束的二进制优化（quadratic uncon strained binary optimization (QUBO)）问题。这在本章中是核心并且将会被深入讨论。问题是二次的因为签名方程（signature equation）的混合条件：V = XT QX。最后的模型是不受约束的，因为它的建立没有额外的限制方程。它二进制的性质是因为它被写作为一个二进制的决策问题（是/不）（0/1）（包括/排除）某一特定股票在最终投资组合中的。问题是一个优化，因为目标是寻找最佳的股票投资组合。

具体而言，这是一个组合优化问题，因为制定的目标将用图表形式演示搜寻到的一组离散的资产投资分配集：这个问题可以用图论的方法解决（Boros et al.， 2008；Jallo and Budai, 2010, Papadimitriou and Steiglitz, 1998).

遍历所有资产、权重组合可以说是计算密集型的。探索性的新方法对传统的古典方法有所改善，但是也不能运行太长的未达最佳标准的结果或是根本不可能得到一个解决方案。解决这类问题的一个范例是量子计算（Choi, 2010; D-Wave, 2013b, 2013c)。 这一范式使人们看到应对许多具有挑战性的计算性问题或目前的技术不可能解决问题的希望。

做一个二进制（包括/排除）资产组合选择的问题可以以一种基本的方式，使用最大独立集（maximum independent set (MIS)）图论的方法来解决量子计算模式下二次无约束的二进制优化（QUBO)问题（D-Wave, 2013b）。那么，这一技术是否能应用或扩展到解决Markowitz的均值-方差框架下的加权资产选择问题？

总体而言，本研究报告将有助于克服伴随金融工程研究课题的量子计算模式所遇到的障碍。并且，它将提供与金融工程概念相联系的量子计算问题领域的深入见解。本章的基本目标是演示这个框架如何在解决金融问题中应用。并将讨论有关金融建模考虑的社会环境限制。这将通过提出硬件范式情况下的金融投资组合优化来完成。本章提出并讨论了现有的样本工作（D-Wave，2013B）。

研究的问题包括三个方面，反映在以下相关文献资料中：经典均值-方差组合理论；给以特定考虑的组合优化问题下的一般操作研究理论绝热（等焓adiabatic ）量子计算的硬件实现。

本章的其余部分将深入探讨的背景文献、模型、实验方法、结果、相关讨论以及结论。背景文献部分，介绍了众多相关研究和应用论文的基本主题。模型部分，把涉及的投资组合优化模型表示与图论领域问题相联系，并且深入到目标硬件的基础伊辛（Ising）模型。方法部分，介绍了有关这项研究的具体实现的相关信息。结果部分，阐述了从研究调查中得到的内容。讨论部分，涉及基本结果，以及对调查的局限性和未来发展趋势等的思辨。结论部分，总结整个第四章节。

4.2 背景

考虑到本章主题的性质比较杂糅，牵扯的知识覆盖面广，涵盖多个学科。以下是一些相关材料，给出了一个学习路径，从经典的均值-方差投资组合理论，到一般操作的研究

理论，组合优化问题，再到绝热量子计算的硬件实现。

4.2.1 投资组合优化

有关“介绍部分”开始的相关问题部分，均值方差投资组合理论历史性地为几十年来的方差-协方差投资组合模型奠定了基础（Markowitz, 1952, Fabozzi et al., 2013）。同时，投资组合优化理论已经从有着不同的目标或约束的工作中发展演进到现在。例如，近年来更多的模型考虑条件性风险价值（value- at-risk，VaR）以及带约束的目标优化（Krokhmal et al., 2001）。

在投资组合理论、投资组合优化理论和最优化理论与技术的广泛领域，有大量的文献资料。特别是，在投资组合优化领域，最近的一项调查说明了从1998到2008年间有很多的相关研究（Floudas and Gournaris, 2009）。同样，以财务（金融）为主导(finance-oriented)的讨论被Gilli等人于2011提出，其中特别考虑启发探索式模型在金融中的运用。

其他（非均值-方差non－mean-variance）的方法包括风险偏好和厌恶损失（risk preferences and loss aversion）考虑下利用（Differential Evolution）差分进化算法得到的探索性I启发式）优化（Maringer，2006）。风险平价（Risk parity)，相等的权重（equal weighting），和最小方差（minimum variance）在查韦斯等人2010年的研究中被讨论。

一些非常特别的均值-方差规划问题被使用现代的经典的最优化方法解决。使用拉格朗日松弛法（Lagrangian relaxation）（Shaw et al., 2008）；一种混合的灰色关联分析方法研究（Huang et al.，2011）；与遗传算法的制定（“et al.，2009），这些仅仅作为几个例子。

所有这些方法都是为了找到更好的方法来解决优化问题。许多的问题是难以解决的问题，因为他们的模型具有多个局部最优或函数表达式中存在间断点（Gilli and Schumann, 2012）。回顾基于的投资组合优化的基础上的均值方差模型是一个问题，它本质上是二次性质的方差和能表达一些这类性质的混合协方差。

从这些局部最优解中找到最佳的整体解决方案是全局优化的目标。对最近针对二次函数规划的论文进行抽取，包括：

平衡的搜索技术（equilibrium search techniques ）（Pardalos et al.，2008），屏障性功能规划（barrier function formulations）（Dang and Xu, 2000），内点算法（an interior-point algorithm approach)（Akrotirianakis and Rustem, 2005），和一个无约束的最大流方法(an unconstrained max-flow approach）(Boros et al., 2008）。

一些研究在有约束的条件下考虑规划问题而另外一些把问题用无约束的方式表示约束问题有时会被使用不同的方法改写为无约束的规划问题（eberman, 2010; Gilli et al., 2011). 在这个研究中许多无约束的表达被使用。

管理信息系统，派系以及股票市场数据之间的联系在Boginski等人的研究（2005）中被讨论，同时在这一方面，股票之间的交叉相关性研究随着时间的推移广泛深入。Jallo和Budai (2010)的论文进一步阐述了市场分析图（market graphs），关于纯股票收益（pure stock returns)，流动性加权回报率(liquidity-weighted returns)以及物量计算(volume measures)相关问题。

本文由Charpin和Lacaze （2007）提出了一种将投资组合限制到一个特别的范围的方式，即提供一种基数（cardinality：Cardinality defines the numeric relationships between occurrences of the entities on either end of the relationship line），同时也确定满足最小权重（minimum weight）条件的最优投资组合。他们在LINGO或商业应用环境（CPLEX：commercial application environments）使用分支定界方法解决了这个问题。问题的二元性在本章中被广泛考虑，但模型有一个不同的形式，本章的模型公式很快就会被转化为图论的表示。利用Bertsimas等人（1999）的论文使用混合整数规划，使用具有二进制选择特性的经典模型进行约束优化。

~~4.2.2 算法的复杂性~~

~~算法复杂度是一个重要的动机，和标记的，新的技术解决这些问题的调查。从本章的核心是解决困难问题的新方法的具体实现，算法复杂度至少应有一个粗略的概述。算法，或在一个定义良好的计算程序的步骤的序列，被用来指定解决各种问题的方法。在本章中引用的所有方法的描述，实施，或分析中使用的算法。要挑选一个算法比另一个，一个衡量的效率是用来比较它们的性能。这通常是一个特定的算法如何快速地找到一个给定的输入大小的答案的测量~~。