第1章

等号と等式

記号 $=$ を**等号** (equality sign) という．等号は二つの項 τ, σ を取り，論理式 $\tau = \sigma$ をなす[*1]．この論理式は**等式** (equation) と呼ばれ，τ と σ が同一の対象を指すとき，そしてそのときのみ真となる．

等式は，数学の実践において，もっとも頻出する論理式のひとつである．しかしながら，『数理論理学』第 I 巻で紹介した一階述語論理の体系には，記号としての等号，論理式としての等式は明示的には用意されていなかった．

一方で，『数理論理学』第 I 巻の第一章「予備知識」においては，集合，集合の要素数，論理式の自由変項を計算する際にも等式を用いている．したがって，一階述語論理の**メタ論理** (meta-theory) を展開する上では，等号・等式の存在（とその運用）を暗黙に仮定していたといえる．したがって，一階述語論理の体系を等号・等式を扱えるように拡張することは，論理学が「証明の妥当性」に関する理論であるならば重要なステップである．

1.1　等式の統語論

まずは一階述語論理の記号[*2]に，等号を二項述語として追加する．等号の他は，一階述語論理と変わらない．

---

*1 英語では “τ is equal to σ” もしくは “τ equals to σ” と読む.

*2 一階述語論理の**記号** (alphabet) については『数理論理学』第 I 巻定義 5.1 (p.80) を参照.

定義 1.1 （等式付き一階述語論理の記号）

...

二項述語　:　$=, \ldots$

...

解説 1.2 等号 $=$ は二項述語であるから，等式 $\tau = \sigma$ は論理式であり，$\tau = \sigma$ における自由変項，代入の計算も定義より導かれる．

$$fv\,(\tau = \sigma) \stackrel{def}{\equiv} fv\,(\tau) \cup fv\,(\sigma)$$
$$(\tau = \sigma)[\upsilon/\xi] \stackrel{def}{\equiv} \tau[\upsilon/\xi] = \sigma[\upsilon/\xi]$$

解説 1.3 等式は論理式であるから，否定を取ることもできる．数学でよく使われる記号である $\neq$ は，等式の否定として定義される．

定義 1.4 （$\neq$）　$\tau \neq \sigma \stackrel{def}{\equiv} \neg(\tau = \sigma)$

1.2　等式の意味論

意味論的には，等式 $\tau = \sigma$ は項 τ, σ の指示対象の（解釈の領域における）**同一性** (identity) を表す，とするのが標準的である．二項述語 $=$ の指示対

象は，以下のような写像として与えられる．[*3]

$$[\![=]\!]_{M,g} \stackrel{def}{\equiv} \left[\ (a,b) \ \mapsto \ \begin{cases} 1 & \textit{if}\ a=b\ \textit{in}\ D_M \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}\ \right]$$

すなわち $[\![=]\!]_{M,g}$ は「組 (a,a)（ただし $a \in D_M$）の形をした二個組のみを 1 に送る」写像であり，したがって $\tau=\sigma$ は，$[\![\tau]\!]_{M,g}$ と $[\![\sigma]\!]_{M,g}$ が D_M において同じ要素であるとき，そしてそのときのみ，解釈 (M,g) のもとで真である．これは，以下のように述べるのと同値である．[*4]

定理 1.5 τ,σ を任意の項，(M,g) を任意の解釈とする．

$$[\![\tau=\sigma]\!]_{M,g}=1 \iff [\![\tau]\!]_{M,g}=[\![\sigma]\!]_{M,g}$$

証明．定義より明らか．□

定理 1.5 から，以下の二つの帰結がただちに導かれる．

定理 1.6 任意の項 τ について，以下が成立する．

$$\models \tau=\tau$$

証明．任意の項 τ，解釈 $\langle M,g\rangle$ について，$[\![\tau]\!]_{M,g}=[\![\tau]\!]_{M,g}$ であるから，定理 1.5 より $[\![\tau=\tau]\!]_{M,g}=1$ が成立する．□

[*3] この定義が *if* $x=y$ の箇所で領域 D_M 上の等号を参照していることに納得できない読者のためには，第 2 章の素朴集合論の記法を先取りして以下のように定義することも可能である．

$$[\![=]\!]_{M,g} \stackrel{def}{\equiv} \left[\ (a,b) \ \mapsto \ \begin{cases} 1 & \textit{if}\ (a,b) \in \{(x,x) \mid x \in D_M\} \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}\ \right]$$

また，そもそも写像の定義において，上のような「場合分け」を用いることに抵抗がある場合は，

$$[\![=]\!]_{M,g} \stackrel{def}{\equiv} \left(\left\{(p,0) \,\middle|\, p \in (D_M)^2\right\} - \{((x,x),0) \mid x \in D_M\}\right) \cup \{((x,x),1) \mid x \in D_M\}$$

と定義することも可能である．

[*4] 等号 $=$ を二項述語として定義する代わりに等式を独立した論理式として定義した場合には，定理 1.5 が等式の意味論の定義になる．

定理 1.7 任意の項 τ, σ，変項 ξ，論理式 φ について，以下が成立する．

$$\tau = \sigma,\ \varphi[\tau/\xi] \quad \vDash \quad \varphi[\sigma/\xi]$$

この規則は，**等式のもとでの代入** (substitution under equation) 規則，もしくは**ライプニッツ則** (Leibniz's Law) と呼ばれるものである．

証明. $\langle M, g\rangle$ を，$[\![\tau = \sigma]\!]_{M,g} = 1$ かつ $[\![\varphi[\tau/\xi]]\!]_{M,g} = 1$ を満たす任意の解釈とする．$[\![\tau = \sigma]\!]_{M,g} = 1$ と定理 1.5 により $[\![\tau]\!]_{M,g} = [\![\sigma]\!]_{M,g}$ が成り立つが，定理 5.64（第 I 巻 p.106）によって，$[\![\varphi[\tau/\xi]]\!]_{M,g} = [\![\varphi[\sigma/\xi]]\!]_{M,g}$ が導かれる．しかし仮定より $[\![\varphi[\tau/\xi]]\!]_{M,g} = 1$ であるから，$[\![\varphi[\sigma/\xi]]\!]_{M,g} = 1$ である． □

1.3　等式の推論規則

さて，等式を含む論理式の証明を進めるために，等号・等式のための推論規則を追加する．以下のような，等式の導入則と除去則を，自然演繹の体系に追加する．

定義 1.8 （自然演繹における等式の規則） τ, σ は項，φ は論理式とする．

$$\frac{}{\tau = \tau}\,(=I) \qquad \frac{\tau = \sigma \quad \varphi[\tau/\xi]}{\varphi[\sigma/\xi]}\,(=E)$$

NM にこれらの推論規則を追加した体系を **NM+EQ** と呼ぶ．**NM+EQ** は，第 1.2 節の意味論のもとで健全である．

定理 1.9 （健全性） $\Gamma \vdash_{\mathbf{NM+EQ}} \Delta \implies \Gamma \vDash \Delta$

証明. 定理 1.6 と定理 1.7 による． □

解説 1.10 **NM+EQ** が健全であるならば，**NJ+EQ**，**NK+EQ** も健全である．

定理 1.11 任意の項 τ, σ, υ，変項 ξ について，以下は **NM+EQ** の派生規則である．

$$\frac{\tau = \sigma}{\upsilon[\tau/\xi] = \upsilon[\sigma/\xi]}$$

練習問題 1.12 定理 1.11 を証明せよ．

1.4　同値関係

二項述語 ρ が以下の三つの性質を満たすとき，ρ は**同値関係** (equvalence relation) であるという[*5]．

1. 反射律 (reflexivity)：任意の項 τ について、$\vdash \tau\rho\tau$
2. 対称律 (symmetry) ：任意の項 τ, σ について、$\tau\rho\sigma \vdash \sigma\rho\tau$
3. 推移律 (transitivity)：任意の項 τ, σ, υ について、$\tau\rho\sigma,\ \sigma\rho\upsilon \vdash \tau\rho\upsilon$

定理 1.13 NM+EQ において $=$ は同値関係である．

等号の反射律は $(=I)$ そのものであるから，定理 1.13 を証明するには，等号の対称律，等号の推移律を示せば十分である．

定理 1.14 （等号の対称律） 任意の項 τ, σ について，以下が成立する．

$$\tau = \sigma \quad \vdash \quad \sigma = \tau$$

証明.

[*5] 第 I 巻定義 1.60「同値関係」(p.10) においても同値関係について述べたが，ρ は集合上の二項関係であり，二項述語とは区別されなければならない．ただし，二項述語 θ の解釈 $[\![\theta]\!]_{M,g}$ は集合 $D_t^{D_M^2}$ の要素であり，これは集合 D_M 上の二項関係であるから，二項述語の指示対象は二項関係である，とはいえる．第 I 巻定義 1.60「同値関係」(p.10) に対応する同値関係の定義は，定義 3.2 において改めて述べる．

$$
\cfrac{\tau = \sigma \qquad \cfrac{}{\begin{array}{l}\tau = \tau \\ \equiv (\xi = \tau)[\tau/\xi]\end{array}}\,(=I)}{\begin{array}{l}(\xi = \tau)[\sigma/\xi] \\ \equiv \sigma = \tau\end{array}}\,(=E)
$$

□

定理 1.15 （等号の推移律）　任意の項 τ, σ, υ について，以下が成立する．

$$
\tau = \sigma,\ \sigma = \upsilon \quad \vdash \quad \tau = \upsilon
$$

証明．

$$
\cfrac{\tau = \sigma \qquad \begin{array}{l}\sigma = \upsilon \\ \equiv (\xi = \upsilon)[\sigma/\xi]\end{array}}{\begin{array}{l}(\xi = \upsilon)[\tau/\xi] \\ \equiv \tau = \upsilon\end{array}}\,(=E)
$$

□

等式を用いた証明では，以下のような「等式の連鎖」とでも呼ぶべき形式が用いられる．以下は $fv\,(F(x,y) \wedge \forall x G(x,z))$ の計算の例である．

$$
\begin{array}{lll}
 & \{x,y\} \cup (\{x,z\} - \{x\}) & \\
= & \{x,y\} \cup \{z\} & (\{x,z\} - \{x\} = \{z\} \text{ より}) \\
= & \{x,y,z\} & (\{x,y\} \cup \{z\} = \{x,y,z\} \text{ より})
\end{array}
$$

上の「等式の連鎖」をもって $\{x,y\} \cup (\{x,z\} - \{x\}) = \{x,y,z\}$ が証明されたものとする．ただし，$\{x,y\} \cup (\{x,z\} - \{x\}) = \{x,y\} \cup \{z\} = \{x,y,z\}$ という形式は，一階述語論理の統語論を踏まえれば，論理式ではない．上のような「等式の連鎖」は，以下のような証明の略記である（ただし $(=S)(=T)$ はそれぞれ等号の対称律と推移律とする）．

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \{x,z\}-\{x\}=\{z\}\end{array}\quad \dfrac{}{\begin{array}{l}\{x,y\}\cup(\{x,z\}-\{x\})=\{x,y\}\cup(\{x,z\}-\{x\})\\ \equiv(\{x,y\}\cup(\{x,z\}-\{x\})=\{x,y\}\cup X)[\{x,z\}-\{x\}\,/X]\end{array}}{\scriptstyle(=I)}}{\begin{array}{l}(\{x,y\}\cup(\{x,z\}-\{x\})=\{x,y\}\cup X)[\{z\}\,/X]\\ \equiv\{x,y\}\cup(\{x,z\}-\{x\})=\{x,y\}\cup\{z\}\end{array}}{\scriptstyle(=E)}\quad \begin{array}{c}\vdots\\ \{x,y\}\cup\{z\}=\{x,y,z\}\end{array}}{\{x,y\}\cup(\{x,z\}-\{x\})=\{x,y,z\}}{\scriptstyle(=T)}
$$

この証明が示すことは,「等式の連鎖」は,等式の推移律を背景としたうえで許されており,推移律の適用過程を略記したものである,ということである.しかし,等式の連鎖から自然演繹の証明図への変換過程は直裁的である.

第 2 章

素朴集合論

数学において集合の概念を提唱したのはカントール[*1]が最初であると言われている．本章では，一階述語論理上で**集合** (set) を取り扱うための拡張として，まずカントールによる**素朴集合論** (Naïve Set Theory) を解説する．

2.1　外延的記法と内包的記法

集合を定義するためには，一般に二つの記法が知られている．一つは「その集合に属する要素をすべて列挙する」方法である[*2]．たとえば，

$$\{a, b, c\}$$

という記法は「a, b, c（のみ）を要素とする集合」を表す．これを集合の**外延的記法** (extensional notation) という．もう一つは「その集合の要素が満たす（必要十分）条件を論理式として書く」方法である．たとえば，

$$\left\{x \,\middle|\, x^2 = 2\right\}$$

という記法は「二乗したものが 2 と等しいような要素（のみ）からなる集合」を表す．$x^2 = 2$ の部分には，x に関する任意の論理式[*3]が現れうる．これを集合の**内包的記法** (intensional notation) という．

[*1] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918)

[*2] 第 I 巻 1.2 節を参照．

[*3] 「x に関する論理式」とは，x を自由変項として含む論理式ということであるが，x を含まなくても構わない．

2.2　素朴集合論の統語論

素朴集合論では，等式付き一階述語論理の記号に，二項述語として $\in$ を加える．その他は，等式付き一階述語論理と変わらない．

定義 2.1 （素朴集合論の記号）

. . .

二項述語　:　$=, \in, \ldots$

. . .

解説 2.2 定義 2.1 によって，$\tau \in \sigma$ という形式が論理式となる．自由変更と代入は，基本述語の自由変項と代入の定義に従い，以下のようになる．

$$fv\,(\tau \in \sigma) \overset{def}{\equiv} fv\,(\tau) \cup fv\,(\sigma)$$

$$(\tau \in \sigma)[\upsilon/\xi] \overset{def}{\equiv} \tau[\upsilon/\xi] \in \sigma[\upsilon/\xi]$$

解説 2.3 $\tau \in \sigma$ における τ, σ については「ともに項である」という制約しかない．つまり，$\in$ の左辺に現れうる（つまり集合の要素となりうる）形式と，右辺に現れうる（つまり集合となりうる）形式は，少なくとも統語論的には区別されていない．したがって，素朴集合論においては，項はすべて集合，ということになる．[*4]

その上で，以下の 3) のように，集合の内包的記法 $\{\xi \mid \varphi\}$ を項として追加する．[*5]

[*4] したがって『数理論理学』第 I 巻解説 1.19 (pp.5-6) で述べたような，「1 は集合ではないので $1 \subseteq \{1\}$ は未定義である」という議論は，素朴集合論では成立しない．このことは，1 のような自然数もまた集合として定義されることを意味するが，それについては第 **??**章で述べる．

[*5] 素朴集合論の定義では，項の定義が論理式の定義に依存しているため，厳密には，同時再帰的に定義しなければならない．つまり，深さ d の項の集まり，深さ d の論理式の集まりを定義し，それらを用いて深さ $d+1$ の項の集まり，深さ $d+1$ の論理式の集まりを定義する．

定義 2.4 （素朴集合論の統語論）

1) τ が等式付き一階述語論理の項ならば，τ は項である．
2) φ が等式付き一階述語論理の論理式ならば，φ は論理式である．
3) ξ が変項であり，φ が論理式ならば，$\{\xi \mid \varphi\}$ は項である．

解説 2.5 $\{\xi \mid \varphi\}$ のことを $\{\xi : \varphi\}$ と書くこともある．また，$\{\xi \mid (\xi \in \mathcal{X}) \wedge \varphi\}$ のことを $\{\xi \in \mathcal{X} \mid \varphi\}$ と書くことがある．

定義 2.6 （自由変項と代入）

1) $fv\,(\{\xi \mid \varphi\}) \overset{def}{\equiv} fv\,(\varphi) - \{\xi\}$
2) $\{\xi \mid \varphi\}\,[\tau/\xi] \overset{def}{\equiv} \{\xi \mid \varphi\}$
3) $\xi \notin fv\,(\varphi)$ または $\zeta \notin fv\,(\tau)$ のとき
$\{\zeta \mid \varphi\}\,[\tau/\xi] \overset{def}{\equiv} \{\zeta \mid \varphi[\tau/\xi]\}$

また，素朴集合論では，等式付き一階述語論理の公理に，以下の**包括原理** (the comprehension principle) と**外延性の公理** (the axiom of extension) を追加する．

包括原理とは，内包的記法の「意味」を明らかにする原理である．（変項を含む）任意の論理式から集合を構成できる，という非常に自然な[*6]原理である．

公理 2.7 （包括原理）　任意の項 τ，変項 ξ，論理式 φ について，以下は公理である．

$$\frac{\varphi[\tau/\xi]}{\tau \in \{\xi \mid \varphi\}}\ (CP)$$

また，外延性の公理とは，二つの集合の同値性を定義するものであり，「同じ要素からなる二つの集合は，区別できない」という公理である．

[*6] 第 2.6 節で述べるラッセルのパラドックスは，この包括原理の自然さゆえに引き起こされる．

公理 2.8 （外延性の公理）　任意の集合 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ について，以下は公理である．

$$\frac{\forall x(x \in \mathcal{X} \leftrightarrow x \in \mathcal{Y})}{\mathcal{X} = \mathcal{Y}}\ (EX)$$

外延的記法を構文として追加する必要はない．なぜなら，外延的記法によって記述された集合は，以下のように内包的記法によって書き直すことができるからである．

定義 2.9 （外延的記法）

$$\{a_1, \ldots, a_n\} \stackrel{def}{\equiv} \{x \mid (x = a_1) \vee \cdots \vee (x = a_n)\}$$

それ以外の構文も，素朴集合論の構文で表すことができる．たとえば，記号 $\notin$ については，以下のように定義すればよい．

定義 2.10 　$\mathcal{X} \notin \mathcal{Y} \stackrel{def}{\equiv} \neg(\mathcal{X} \in \mathcal{Y})$

2.3　集合の同等性と包含関係

部分集合，真部分集合という概念も，述語論理の記法を使って以下のように定義することによって，その意味するところがより明確になる．

定義 2.11 （部分集合・真部分集合）　$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ は集合とする．

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \stackrel{def}{\equiv} \forall x(x \in \mathcal{X} \rightarrow x \in \mathcal{Y})$$
$$\mathcal{X} \subset \mathcal{Y} \stackrel{def}{\equiv} (\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}) \wedge \neg(\mathcal{X} = \mathcal{Y})$$

練習問題 2.12 次の各関係が成り立つことを示せ．

$$\vdash \{a\} = \{a, a\}$$
$$\vdash \{a, b, a\} = \{b, b, a\}$$

定義 2.13 （空集合）　$\varnothing \stackrel{def}{\equiv} \{x \mid \bot\}$

練習問題 2.14 次の関係が成り立つことを示せ.

$$\vdash \forall X(\varnothing \subseteq X)$$

練習問題 2.15 次の各関係を示せ.

$$\begin{aligned}&\vdash \{1,2,3\} \neq \{\{1,2\},\{2,3\}\}\\ &\vdash \{1,2,3,4,5,6\} \neq \{\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\}\}\\ &\vdash \{\{1,2\}\} \neq \{1,2\}\end{aligned}$$

2.4　集合の演算

また，第 I 巻〜に登場した下記の集合も，内包的記法を用いて以下のように定義することができる.

定義 2.16 （共通集合・和集合・補集合・差集合）　$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ は集合とする.

$$\begin{aligned}\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} &\stackrel{def}{\equiv} \{x \mid (x \in \mathcal{X}) \wedge (x \in \mathcal{Y})\}\\ \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} &\stackrel{def}{\equiv} \{x \mid (x \in \mathcal{X}) \vee (x \in \mathcal{Y})\}\\ \overline{\mathcal{X}} &\stackrel{def}{\equiv} \{x \mid x \notin \mathcal{X}\}\\ \mathcal{X} - \mathcal{Y} &\stackrel{def}{\equiv} \{x \mid x \in \mathcal{X} \wedge x \notin \mathcal{Y}\}\end{aligned}$$

練習問題 2.17 任意の集合 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ について，以下が成り立つことを示せ.

$$\begin{array}{ll}\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} & \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Y}\\ \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} & \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}\\ \mathcal{X} \cap (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \mathcal{X} & \mathcal{X} \cup (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = \mathcal{X}\\ \mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}) = (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \cup (\mathcal{X} \cap \mathcal{Z}) & \mathcal{X} \cup (\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) = (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \cap (\mathcal{X} \cup \mathcal{Z})\\ \overline{\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}} = \overline{\mathcal{X}} \cup \overline{\mathcal{Y}} & \overline{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}} = \overline{\mathcal{X}} \cap \overline{\mathcal{Y}}\end{array}$$

練習問題 2.18 任意の集合 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ について，以下が成り立つことを示せ.

$$\overline{\overline{\mathcal{X}}} = \mathcal{X} \qquad ((\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) - \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y} \qquad \overline{\mathcal{X}} - \mathcal{Y} \subseteq \overline{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}}$$

練習問題 2.19 （対称差） 集合 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の**対称差** (symmetric difference) とは，$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ のいずれか一方にしか含まれない要素からなる集合であり，

$$\mathcal{X} \Delta \mathcal{Y} \overset{def}{\equiv} (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) - (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$$

と定義する．$\mathcal{X} \Delta \mathcal{Y} = (\mathcal{X} - \mathcal{Y}) \cup (\mathcal{Y} - \mathcal{X})$ であることを示せ.

2.5　集合系

定義 2.20 （部分集合系） $\mathcal{X}, \Lambda$ が集合であり，また各 $\lambda \in \Lambda$ について M_λ が $\mathcal{X}$ の部分集合であるとき，$(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{X}$ の**部分集合系** (series of subsets) という.

定義 2.21 （部分集合系の共通部分・和集合・補集合） $\mathcal{X}, \Lambda$ を集合，$(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{X}$ の部分集合系とする.

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \overset{def}{\equiv} \{x \in \mathcal{X} \mid \exists \lambda (\lambda \in \Lambda \wedge x \in M_\lambda)\}$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \overset{def}{\equiv} \{x \in \mathcal{X} \mid \forall \lambda (\lambda \in \Lambda \to x \in M_\lambda\}$$

$\mathcal{X}$ の部分集合系においては $\overline{M_\lambda} \overset{def}{\equiv} \mathcal{X} - M_\lambda$ と定義すると，以下が成り立つ.

定理 2.22 （部分集合系におけるドゥ・モルガンの法則） $\mathcal{X}, \Lambda$ を集合，$(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{X}$ の部分集合系とすると，以下が成り立つ.

$$\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{M_\lambda} \qquad \overline{\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{M_\lambda}$$

練習問題 2.23 定理 2.22 を証明せよ.

定理 2.24 $\mathcal{X}, \Lambda$ を集合，$(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{X}$ の部分集合系とすると，$\Lambda = \varnothing$ のとき，以下が成り立つ．

$$\bigcup_{\lambda\in\varnothing} M_\lambda = \varnothing \qquad\qquad \bigcap_{\lambda\in\varnothing} M_\lambda = \mathcal{X}$$

証明．左式は自明．右式は以下のように示される．

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\lambda\in\varnothing} M_\lambda &= \bigcap_{\lambda\in\varnothing} \overline{\overline{M_\lambda}} && \text{（練習問題 2.18 より）} \\
&= \overline{\bigcup_{\lambda\in\varnothing} \overline{M_\lambda}} && \text{（定理 2.22 より）} \\
&= \overline{\varnothing} && \text{（定理 2.24 左式より）} \\
&= \mathcal{X}
\end{aligned}$$

□

2.6　ラッセルのパラドックス

第 2.1 節で述べた内包的定義の問題は，条件を記述する論理式 φ に制限がないことである．ここには x に関する任意の式をおいて良いので，仮に $x \notin x$ という式をおき，

$$a \overset{def}{\equiv} \{x \mid x \notin x\}$$

という集合を定義してみよう．このとき，a は a 自身の要素だろうか？ すなわち，$a \in a$ であろうか，それとも $a \notin a$ であろうか？

a の定義と公理 2.7 より，$a \in a \dashv\vdash a \notin a$ が成り立つが，一般に，ある体系において，ある論理式 φ について $\varphi \dashv\vdash \neg\varphi$ が成立する（—(†) とする）とき，その体系からは矛盾が導かれる．以下に $\bot$ に至る証明図を示す．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\varphi}^{1}}{\neg\varphi}\,(\dagger)\qquad \overline{\varphi}^{1}}{\bot}\,(\to E)}{\neg\varphi}\,(\to I)\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\underline{ditto.}}{\neg\varphi}}{\varphi}\,(\dagger)}{\bot}\,(\to E)$$

これを**ラッセルのパラドックス** (Russell's paradox) という．つまり，素朴集合論からは，矛盾が導かれるのである．集合の内包的定義は，高校数

学から大学初等数学において用いられているが，メタ論理が爆発律を含むならば，この矛盾からあらゆる命題が証明可能となるため，数学において「妥当な推論」と「妥当でない推論」の区別も失われてしまうのである．

解説 2.25 ラッセルのパラドックスを回避する方法はいくつか存在するが，次章で述べる公理論的集合論が，そのうちもっとも標準的な方法である．

その他にも，**部分構造論理** (substructural logic) によるパラドックスの回避法がある．上記の矛盾の証明図においては φ を二つ同時に打ち消しており，これはシーケント計算では縮約を用いることに相当する．したがって，縮約規則を持たない証明体系のもとでは，ラッセルのパラドックスは，少なくともそのままの形では成立しない．[*7]

また，集合の内包的定義を採用しつつ，爆発律を含まない体系，たとえば最小論理をメタ論理として採用する，という方法もあり得る．これは，$\bot$ が導かれることが必ずしも破綻を意味しない体系を採用する方向性であり，そのような体系は**矛盾許容論理** (paraconsistent logic) と呼ばれる．[*8]

解説 2.26 コナン・ドイル著「シャーロック・ホームズの冒険」シリーズの『ギリシャ語通訳』[*9]では，ホームズの兄マイクロフトが所属する「ディオゲネス・クラブ」が「どのクラブにも入っていない人をメンバーとするクラブ」と説明される．

マイクロフトはディオゲネス・クラブに入っているのであるから，ただちに会員資格を問われることになるだろう．とはいえ，もしそのためにクラブを退会しなくてはならなくなったとすると，それと同時にディオゲネス・クラブへ入会しなくてはならないのである！

この状況は，ラッセルのパラドックスを思わせるが，パラドックスが生じるのは「マイクロフトはディオゲネス・クラブ以外のクラブには入らない」と仮定した場合に限られる．

[*7] 詳しくは■矢田部 (20XX) ■を参照されたい．

[*8] 詳しくは Priest (2008) 等を参照されたい．

[*9] “The Adventure of the Greek Interpreter”（1894 年）．初出は「ストランド・マガジン」1893 年 9 月号．

第 3 章

関係と写像

3.1 関係

定義 3.1（関係）集合 $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ の部分集合を, $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の**二項関係** (binary relation) という.

$\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}$ の二項関係を，$\mathcal{X}$ 上の二項関係という.

定義 3.2 （同値関係） $\mathcal{X}$ を集合とする．以下の三つを満たす $\mathcal{X}$ 上の二項関係 ρ $(\subseteq \mathcal{X}\times\mathcal{X})$ を，$\mathcal{X}$ 上の**同値関係** (equivalence relation) という. [*1]

反射律 $\forall x(x \in \mathcal{X} \to x\rho x)$
対称律 $\forall x\forall y(x, y \in \mathcal{X} \land x\rho y \to y\rho x)$
推移律 $\forall x\forall y\forall z(x, y, z \in \mathcal{X} \land x\rho y \land y\rho z \to x\rho z)$

*1 第 I 巻定義 1.60 (p.10) に対応.

3.2　写像

定義 3.3 （写像）　二項関係 f $(\subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ について以下の二つが成立するとき，f を $\mathcal{X}$ から値域 $\mathcal{Y}$ への**写像** (map) という．

一意性　$\forall x \forall y \forall z((x, y) \in f \land (x, z) \in f \to y = z)$
全域性　$\forall x(x \in \mathcal{X} \to \exists y((x, y) \in f))$

$\mathcal{X}$ を f の**定義域** (domain)，$\mathcal{Y}$ を f の**値域** (codomain) という．また，f が定義域 $\mathcal{X}$ から値域 $\mathcal{Y}$ への写像であるとき，$f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ と記す．

一意性と全域性により，任意の $x \in \mathcal{X}$ について，$(x, y) \in f$ を満たす y は一意に存在する．これにより，$f(x)$ という記法を，以下のように定義する．

$$f(x) \overset{def}{\equiv} \iota y((x, y) \in f)$$

練習問題 3.4 f を写像とすると，以下が成り立つことを示せ．

$$\vdash f(x) = y \leftrightarrow (x, y) \in f$$

解説 3.5 定義域の要素を，値域のどの要素に対応付けるか指定することで，写像を定義することができる．たとえば，$\mathcal{X}$ の要素 x を，x の単一集合に対応付ける写像 f $(\in \mathcal{X} \times \mathcal{P}ow(\mathcal{X}))$ を，

$$x \mapsto \{x\}$$

のように指定することができる．この指定は，実際には以下のような内包記法を介して写像 f に定義を与える．

$$f \overset{def}{\equiv} \{z \in \mathcal{P}ow(\mathcal{X} \times \mathcal{P}ow(\mathcal{X})) \mid \exists x(z = (x, \{x\}))\}$$

3.3　単射と全射

定義 3.6（単射）写像 $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ について，以下が成り立つとき，f は $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への**単射** (injection) であるという．

$$\forall x, x'(x, x' \in \mathcal{X} \to (f(x) = f(x') \to x = x'))$$

解説 3.7 単射のことを**一対一の写像** (one-to-one map) ともいう．

定義 3.8（全射）写像 $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ について，以下が成り立つとき，f は $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への**全射** (surjection) であるという．

$$\forall y(y \in \mathcal{Y} \to \exists x(x \in \mathcal{X} \land f(x) = y))$$

解説 3.9 全射のことを $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ の**上への写像** (onto map) ともいう．

定義 3.10（全単射）写像 $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ が単射であり，かつ全射であるとき，f は $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への**全単射** (bijection) という．

解説 3.11 集合 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の間に全単射が存在することは，$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ の要素数が等しいこととみなせる．このことから，全単射のことを**一対一の対応** (one-to-one correspondence) もいう[*2]．今後の議論のため，以下のような用語を用意しておく．

定義 3.12（同数）集合 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の間に全単射が存在するとき，集合 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ は**同数** (equinumerous) であるといい，$\mathcal{X} \approx \mathcal{Y}$ と記す．

この定義は，$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ が有限集合のときだけではなく，無限集合であるときにも適用できる点において優れている．

[*2] 解説 3.7 で述べた一対一の写像と混同しやすいので注意する．

練習問題 3.13 $\approx$ は同値関係であることを示せ．

同値関係 $\approx$ は「必ずしも $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ とは限らないが，全単射を用いて要素を相互に変換できるならば，その違いを無視してよいような二つの集合」を同一視する際に用いられる．

例として，三つの集合 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ からなる直積 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ を挙げる．これは $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \times \mathcal{Z}$ と定義することも，$\mathcal{X} \times (\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})$ と定義することも可能であるが，それらは同数，すなわち

$$(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \times \mathcal{Z} \approx \mathcal{X} \times (\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})$$

が成り立つため，いずれの定義を選んでも構わないとする．[*3]

練習問題 3.14 $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \times \mathcal{Z}$ と $\mathcal{X} \times (\mathcal{Y} \times \mathcal{Z})$ の間に全単射が存在することを示せ．

3.4　逆写像

定義 3.15 （逆写像）　全単射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に対して，

$$\iota g(\forall x, y(x \in \mathcal{X} \land y \in \mathcal{Y} \to (f(x) = y \leftrightarrow g(y) = x)))$$

を f の**逆写像** (inverse map) といい，f^{-1} と記す．

すなわち f^{-1} とは，$\mathcal{Y}$ の要素 y に，$f(x) = y$ となるような $\mathcal{X}$ の要素を対応させる写像である．

練習問題 3.16 任意の全単射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ について，$f^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ は $\mathcal{Y}$ から $\mathcal{X}$ への全単射であることを示せ．

[*3] 一般に，n 個 $(n \geq 2)$ の集合 $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ からなる直積を，以下のように再帰的に定義することもできる．

$$\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n \overset{def}{\equiv} (\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_{n-1}) \times \mathcal{X}_n$$

ただし，この方法では $n = 0$ の場合が定義できないことから，ここでは採用しない．n 個の集合からなる直積については第 **??**節において改めて定義する．

定義 3.17（恒等写像） 任意の集合 $\mathcal{X}$ について，$x \mapsto x$ と定義される $\mathcal{X}$ から $\mathcal{X}$ への写像 id を，$\mathcal{X}$ の**恒等写像** (identity map) という．

解説 3.18 恒等写像の定義域は空集合でも構わない．

定義 3.19（合成写像） 写像 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, g : \mathcal{Y} \to Z$ に対し，$x \longmapsto g(f(x))$ と定義される $\mathcal{X}$ から Z への写像を f と g の**合成写像** (composite map) といい，$g \circ f$ と記す．

練習問題 3.20

1. $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, g : \mathcal{Y} \to Z$ がともに単射ならば，$g \circ f : \mathcal{X} \to Z$ も単射であることを証明せよ．
2. $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, g : \mathcal{Y} \to Z$ がともに全射ならば，$g \circ f : \mathcal{X} \to Z$ も全射であることを証明せよ．

したがって，$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, g : \mathcal{Y} \to Z$ がともに全単射ならば，$g \circ f : \mathcal{X} \to Z$ も全単射である．

練習問題 3.21 写像 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ について，もし

$$g \circ f = id_{\mathcal{X}}$$
$$f \circ g = id_{\mathcal{Y}}$$

を満たす写像 $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ が存在するならば，1) f は全単射であること，2) g は f の逆写像であること，をそれぞれ証明せよ．

3.5　像と逆像

定義 3.22（像）写像 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，$\mathcal{X}$ の部分集合 U について，

$$f(U) \overset{def}{\equiv} \{y \in \mathcal{Y} \mid \exists x(x \in U \land y = f(x))\}$$

という $\mathcal{Y}$ の部分集合を **U の f による像** (image) という．

この記法は特殊な約束事であり，「f に引数として U を与えた」という意味ではないことに注意する．

また，$f(U)$ のことを $\mathrm{Im} f$ とも記す．

定理 3.23 写像 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，$\mathcal{X}$ の部分集合 U, V に対して，以下が成り立つ．

$$f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$$
$$f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$$

練習問題 3.24 定理 3.23 を証明せよ．

定理 3.23 の二番目の式において等号は成り立たない．$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}$ における反例を挙げておく．

例 3.25 $f(x) = x^2, U = [-1, 0], V = [0, 1]$ とする．このとき, $U \cap V = \{0\}$ であるから, $f(U \cap V) = \{0\}$ である．ところが $f(U) = [0, 1]$, $f(V) = [0, 1]$ であるから，$f(U) \cup f(V) = [0, 1]$ である．

定義 3.26（逆像）写像 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，$\mathcal{Y}$ の部分集合 V について，

$$f^{-1}(V) \overset{def}{\equiv} \{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \in V\}$$

という $\mathcal{X}$ の部分集合を **V の f についての逆像** (inverse image) という．

V に対して f^{-1} を適用して $f^{-1}(V)$ を得ることを「V を f^{-1} で引き戻す」という．

定理 3.27 写像 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，$\mathcal{Y}$ の部分集合 U, V に対して，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \cup V) &= f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \\ f^{-1}(U \cap V) &\subseteq f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \\ f^{-1}(\mathcal{Y} - U) &= \mathcal{X} - f^{-1}(U) \end{aligned}$$

定理 3.28 写像 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，$\mathcal{Y}$ の部分集合 U, V に対して，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} U &\subseteq f^{-1}(f(U)) \\ f(f^{-1}(U)) &\subseteq U \end{aligned}$$

練習問題 3.29 定理 3.27，定理 3.28 を証明せよ．

定理 3.30 写像 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，$\mathcal{X}$ の部分集合 U, V に対して，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} U \subseteq V &\Longrightarrow f(U) \subseteq f(V) \\ U \subseteq V &\Longrightarrow f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \end{aligned}$$

練習問題 3.31 定理 3.28 を証明せよ．