新しい数の構成（差し替え本文 v1.0）

- 作成日：2025年8月22日
- 初回公開：2025年8月11日
- まとめ作業開始：2024年7月17日
- 著者：木村祐太（1968–）

まえがき

本稿は、研究中の未完成論文『数学の新しい基礎付け』第1章からの抜粋の**差し替え本文**である。第2章ではλ計算インタプリタを作成し、第3章ではそのインタプリタで実行可能な独自言語上で**正式な定義・公理・証明**を与える予定である。本章では、後章の厳密化に先立ち、**記号・型・同値関係**を明示しながら新しい数の構成を述べる。

> 方針： - 値そのものではなく、**生成手続き（方向付きの過程）**を一次対象として扱う。 - 極限値に到達しない“隣接”を、同値類として名前付けする（`qlim`）。 - 可算性を保ったまま、四則演算に自然に接続する層構造（連続順序数 M ）を介して、新実数 CR を与える。

書式と記法の規約

- **関数適用**：`f()` と書く（空白は入れない）。反復は `f^k()` を用いる。
- **乗法記号**：`·` を用いる（必要に応じて `×`）。
- **等式と式の区切り**：本文の整形のため、**式の途中で改行**してよい。式の終了には `;` を付す。
- **記号の読み**：`a##` は「a の**次**（右隣）への1段進み」、`a♭♭` は「a の**前**（左隣）への1段進み」を表す（下記で厳密化）。
- **「…」の使用**：人間可読の略記に限り用いる（数学的定義は繰返しや極限の明示に置き換える）。

---

1. 自然数の構成

定義 1.1（自然数）　自然数を**関数適用の回数**で表す：

- $0 := f()$
- $1 := f(f())$
- $2 := f(f(f()))$
- …（以下、n は f の反復回数）

> 備考　チャーチ数と同型である。以後、アラビア数字 n はこの表現をもつ自然数を指す。

---

2. 整数の構成

定義 2.1（整数）　整数を **(符号, 自然数)** の順序対で表す：

$$\mathbb{Z} \ni z := (\mathrm{sgn}, n), \quad \mathrm{sgn} \in \{0(\text{非負}), 1(\text{負})\},\ n \in \mathbb{N}.$$

- 例：
- $+2 := (0, 2) = (f(), f^3())$
- $+1 := (0, 1) = (f(), f^2())$
- $\quad 0 := (0, 0) = (f(), f())$
- $-1 := (1, 1) = (f^2(), f^2())$
- $-2 := (1, 2) = (f^2(), f^3())$

正規化　$(1, 0)$ は $(0, 0)$ に同一視する（$-0 = 0$）。

---

3. 有理数の構成

定義 3.1（有理数）　有理数を **(整数, 整数)** の順序対で表す。分母は 0 であってはならない：

$$\mathbb{Q} \ni q := (p, r),\ \ r\ /\ 0. \qquad =$$

正規形　既約分数・分母正を採用する（等価類を代表させる）。

- 例：
- $2/1 := (2, 1)$
- $1/1 := (1, 1)$
- $0/1 := (0, 1)$
- $-1/1 := (-1, 1)$ など。

---

4. 有理極限（隣の名前付け）

本節では、$a \in \mathbb{Q}$ の**"隣"**を、**極限値に到達しない**側からの**方向付き過程の同値類**として定義する。

定義 4.1（上側隣接の代表列）　$b \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し、

$$q_n^+(a; b) := \frac{n \cdot a + b}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

は a を**下限**として単調減少で a に近づく。下側も同様に $q_n^-(a; b) := \frac{n \cdot a - b}{n}$ を定める（$b > 0$）。

定義 4.2（`qlim` と隣の同値類）　$q_n^+(a; b)$（あるいは $q_n^-(a; b)$）の**尾同値類**を qlim で表し、

$$\mathrm{a}\text{ の次（右隣）} := \mathrm{qlim}_{\{}\ n \to \infty\} q_n^+(a; b), \quad \mathrm{a}\text{ の前（左隣）} := \mathrm{qlim}_{\{}\ n \to \infty\} q_n^-(a; b)$$

と定義する。$b > 0$ の選び方に依らず同じ同値類に属する。

記法 4.3（微小操作の記号）　上側隣接への1段進みを `##`、下側隣接への1段進みを `♭♭` と書き、

$$a\#\# \ := \ \mathrm{qlim}\, q_n^+(a; b), \quad a\flat\flat \ := \ \mathrm{qlim}\, q_n^-(a; b).$$

辞書式の大小関係は

$$\cdots < a^{(-2)} < a^{(-1)} < a^{(0)}{=}a < a^{(1)} < a^{(2)} < \cdots$$

で、$a^{(k)}$ は後述の 5 節の同型（$k \in \mathbb{Z}$）で表される。

> 注意 `qlim` は**値（従来実数）を返さない**。それは**方向付き生成過程（同値類）の名前**である。

4.4 補題（b によらない）

主張　固定した a∈Q に対し、b1,b2>0 ならば、q_n^+(a;b1) と q_n^+(a;b2) は尾同値であり、同じ qlim 同値類を与える。下側も同様。 **証明（形式）**　尾同値 ~ を次で定義する：列 (x_n),(y_n) について ∀ε>0 ∃N ∀n≥N で |x_n−y_n|<ε。ここで x_n=q_n^+(a;b1)=(n·a+b1)/n=a+b1/n, y_n=q_n^+(a;b2)=a+b2/n。従って |x_n−y_n|=|b1−b2|/n。任意の ε>0 に対し N>|b1−b2|/ε を取れば、n≥N で |x_n−y_n|<ε。よって x~y。さらに x_n,y_n はいずれも a を下限とする単調減少列（n↦a+b/n は b>0 で減少）であり、上側隣接の条件を満たす。以上より、同じ qlim 同値類を与える。下側の場合も同様。∎

4.5 補題（再索引の不変性）

主張　k∈N, c∈N に対し、r_n:=q_{kn+c}^+(a;b) は q_n^+(a;b) と尾同値。下側も同様。 **証明（形式）** s_n:=q_n^+(a;b)=a+b/n, r_n=a+b/(kn+c)。差 d_n:=r_n−s_n=b/(kn+c)−b/n = b(n−(kn+c))/(n(kn+c)) = −b((k−1)n + c)/(n(kn+c))。よって |d_n| = b((k−1) + c/n)/(k n + c/n) ≤ b((k−1) + c/n)/(k n) → 0（n→∞）。したがって r_n ~ s_n。さらに r_n も a を下限とする単調減少列である（分母が n に関して増加）。よって同じ上側隣接の qlim 同値類を与える。下側も同様に示せる。∎

4.6 定義（上側/下側隣接の同値類）

上側隣接 N⁺(a) を { q_n^+(a;b) | b>0 } を 4.4 の関係で割った同値類として定め、a## で表す。下側隣接 N⁻(a) も同様に定め、a♭♭ で表す。

> 註　この段階では代表列を（n·a±b)/n に限定している。より広い単調列を許す場合は同値関係の定義を別途強化する（本章の目的には不要）。

4.7 命題（尾同値は同値関係）

主張　尾同値（~）は、有理数列全体の集合上の同値関係である。 **定義の再掲**　列 (x_n),(y_n) について、∀ε>0 ∃N ∀n≥N で |x_n − y_n| < ε のとき x ~ y とする。 **証明（形式）** - 反射律：任意の列 x に対し |x_n − x_n| = 0 < ε が恒真なので x ~ x。 - 対称律：x ~ y なら |x_n − y_n| < ε（n≥N）。すると |y_n − x_n| = |x_n − y_n| < ε より y ~ x。 - 推移律：x ~ y, y ~ z とする。任意の ε>0 に対し ε/2 を用い、∃N1,∃N2 で n≥N1 なら |x_n − y_n| < ε/2、n≥N2 なら |y_n − z_n| < ε/2。N := max(N1,N2) とおけば n≥N で |x_n − z_n| ≤ |x_n − y_n| + |y_n − z_n| < ε。よって x ~ z。 以上により、記号 ~ は同値関係。∎

4.8 補題（N⁺(a), N⁻(a) の非空性と一意性）

主張　任意の a∈Q について、上側隣接 N⁺(a) と下側隣接 N⁻(a) は（定義域上で）非空であり、いずれも同値類として一意に定まる。 **証明（形式）** - 非空性：b=1 をとれば、q_n^+(a;1)=a+1/n は定義を満たす上側代表列であり、同様に q_n^−(a;1)=a−1/n は下側代表列である。よって N⁺(a),N⁻(a) はいずれも空でない。 - 一意性（良定義）：上側について、b1,b2>0 なら 4.4 より q_n^+(a;b1) ~ q_n^+(a;b2)。したがって同値類は b の選び方に依らず単一である。下側も同様。∎

4.9 命題（写像 a ↦ a##, a ↦ a♭♭ の良定義性）

主張　各 a∈Q に対し、a## と a♭♭ は、それぞれ $N^+(a)$, $N^-(a)$ の代表列の選択（b の値、再索引など）に依存せず、M の一意な元 a^{(+1)}, a^{(−1)} として定まる。したがって写像 S^+:Q→M, S^-:Q→M を $S^+(a)$=a^{(+1)}（=a##）, $S^-(a)$=a^{(−1)}（=a♭♭） と定めることができ、これは良定義である。 **証明（形式）** - 存在：4.8 により $N^+(a)$,$N^-(a)$ は非空。定義 5.1 の M において a^{(+1)}, a^{(−1)} が定まるので、対応 $S^+(a)$:=a^{(+1)}, $S^-(a)$:=a^{(−1)} を与える。 - 代表独立性：4.4（b によらない）と 4.5（再索引不変）により、$N^+(a)$（同様に $N^-(a)$）の任意の2つの代表列は尾同値である。定義 4.6 により $N^+(a)$,$N^-(a)$ は同値類として一意に確定しているため、S^+,S^- は代表の取り方に依存しない。 - 一意性：もし T^+:Q→M が「任意の b>0 で q_n^+(a;b) を表す上側隣接の像」を与える写像なら、4.8 より $N^+(a)$ は単一の同値類であり、その M における標準像は a^{(+1)} であるから $T^+(a)$=a^{(+1)}=$S^+(a)$。下側も同様。∎

4.10 命題（S^+, S^- の単調性・単射性）

主張 (i) 任意の a,b∈Q で a<b ならば $S^+(a)<S^+(b)$ かつ $S^-(a)<S^-(b)$。 (ii) S^+, S^- は単射（$S^+(a)=S^+(b)$ ⇒ a=b、S^- も同様）。 **証明（形式）**　$S^+(a)$=a^{(+1)}, $S^-(a)$=a^{(−1)}。M の辞書式順序では (a,k)<(b,ℓ) ⇔ [a<b] または [a=b かつ k<ℓ]。よって a<b ⇒ (a,1)<(b,1) および (a,−1)<(b,−1)。ゆえに (i) が成立。単射性は $S^+(a)=S^+(b)$ ⇒ (a,1)=(b,1) から a=b。S^- も同様。∎

4.11 命題（a^{(0)} を境にした片側有界性と境界）

定義　C^+_a := { a^{(+k)} | k≥1 }, C^-_a := { a^{(−k)} | k≥1 }。 **主張** (1) a^{(0)} は C^+_a の下界であり、かつ最大の下界（$\inf C_a^+$ ）。 (2) a^{(0)} は C^-_a の上界であり、かつ最小の上界（$\sup C_a^-$ ）。 (3) とくに、C^+_a は a^{(0)} により下に有界、C^-_a は a^{(0)} により上に有界である。 **証明（形式）**　(1) 任意の k≥1 で (a,0)<(a,k)（辞書式で第2成分 0<k）。したがって a^{(0)} は下界。さらに任意の下界 b∈M について b≤(a,k) が全ての k≥1 で成り立つと仮定する。場合分け： - b=(c,m) で c<a なら b<(a,0)。 - c=a のとき、b≤(a,1) を満たすには m≤1。さらに全ての k≥1 に対して b≤(a,k) を満たすための最大の m は 0。ゆえに b≤(a,0)。 - c>a のときは b は下界ではあり得ない（(a,1)<b）。 結局、任意の下界 b は b≤a^{(0)} を満たす。よって a^{(0)} は最大の下界。 (2) は (1) を符号反転（k→−k）により同様に示せる：任意の k≥1 で (a,−k)<(a,0)、上界 b は (a,0) 以上でなければならず、(a,0) が最小の上界である。 (3) は (1)(2) の直ちの帰結。∎

---

5. 連続順序数（M ）

定義 5.1（連続順序数）　連続順序数を

$$M := \{(\kappa, a) \mid a \in \mathbb{Q},\ \kappa \in \mathbb{Z}\}$$

とし、記号的には $a^{(\kappa)}$ と書く。直観的に、各有理点 a の周りに**整数刻みの隣接層**が付いていると思えばよい。

順序（辞書式）

$$(a^{(k)} < b^{(\ell)}) \iff (a < b) \text{ または } (a = b \text{ かつ } k < \ell).$$

加法と整数倍

$$a^{(k)} + b^{(\ell)} = (a+b)^{(k+\ell)}, \quad m \cdot a^{(k)} = (ma)^{(mk)}\ (m \in \mathbb{Z}).$$

直観モデル　$M \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z} \cdot \varepsilon$ （$\varepsilon > 0$ は形式的無限小、一次のみ）。$a^{(k)}$ を $a + k\varepsilon$ と同型視すると、4 節の `##/♭♭` は $\pm\varepsilon$ の加減に対応する。

例（“記号の追加・除去”ができる等式） - $1^{(-1)} + 1^{(+1)} = 2^{(0)}$ - $0^{(+2)} - 0^{(+3)} = 0^{(-1)}$ - $2^{(+2)} \times (1/2) = 1^{(+1)}$
（ただし乗除は一般には M で閉じない。上の式は有理数側のスカラー倍として解釈。）

簡約できない例（整数層の外に出る） - $1^{(+1)}/2$, $1^{(+1)}/3$, $1/1^{(+1)}$, $1^{(-1)}/1^{(+1)}$ など。

まとめ　M　は加法群であり、整数倍が定義できる一方、乗除に関しては閉じない。これを分数化して四則で閉じるのが次節の新実数である。

5.4 係数ルール（##/♭♭）と分割不可能性

演算子の定義　S^+(a):=a^{(+1)}（=a##），　S^-(a):=a^{(−1)}（=a♭♭）。繰り返しは　(S^+)^k(a)=a^{(+k)}, (S^-)^k(a)=a^{(−k)}（k∈N）。

法則（加法に対する線形性） 1. a^{(k)} + b^{(ℓ)} = (a+b)^{(k+ℓ)}。 2. m · a^{(k)} = (ma)^{(mk)}（m∈Z）。

分割不可能性（整数係数性）　命題 5.4.1　M には 1/2 段の「半ステップ」は存在しない。厳密には、任意の a∈Q に対し、x∈M で 2x = a^{(+1)} が成り立つものは存在しない。 **証明（ε モデル）**　M≅Q⊕Z·ε と同型視し、x=r+mε（r∈Q, m∈Z）とおく。2x=2r+2mε=ε を満たすには 2r=0→r=0 かつ 2m=1→m=1/2 が必要だがm は整数に限るため矛盾。∎

系 5.4.2（CR での「分数ステップ」）　CR では (a^{(+1)})/(2 · 1^{(0)}) のような元が存在し、形式的には「半ステップ」を表現できる。ただしこれは M の元ではない。

注意　係数（層の段数）は M では常に整数であり、非整数係数は CR の割り算を経て初めて現れる。

5.5 命題（加法との整合と Z 作用）

主張 (A) 任意の a,b∈Q, i,j∈Z について、a^{(i)} + b^{(j)} = (a+b)^{(i+j)}（M の定義に一致）。 (B) S^+,S^- は層指数に対する ±1 のシフトとして振る舞う：S^+(a^{(k)}) = a^{(k+1)}, S^-(a^{(k)}) = a^{(k−1)}（拡張定義）。 **証明（形式）**　M の加法は (a,i)+(b,j)=(a+b,i+j) と定義されている（5.1 の直後）。よって (A) は定義から直ちに従う。(B) は S^+,S^- の拡張を (a,k) ↦ (a,k±1) と置くことで、定義通りに得られる。∎

系 5.5.1（線形性） (i) S^+(x+y)=S^+(x)+y=x+S^+(y)。 (ii) S^-(x+y)=S^-(x)+y=x+S^-(y)。 **証明**　x=a^{(i)}, y=b^{(j)} とし、(A)(B) により S^+(x+y)=(a+b)^{(i+j+1)}=a^{(i+1)}+b^{(j)}=S^+(x)+y。同様に右辺交換および S^- も成立。∎

系 5.5.2（一様シフトの不変性） 任意の δ∈Z について、a^{(i+δ)}+b^{(j−δ)} = a^{(i)}+b^{(j)}。 **証明**　左辺=(a+b)^{(i+j)}（(A)）、右辺も同じ。∎

系 5.5.3（差の標準形） (a^{(i)} − a^{(j)}) = 0^{(i−j)}。 **証明**　(a^{(i)} − a^{(j)}) = (a, i) + (−a, −j) = (0, i−j) = 0^{(i−j)}。∎

5.6 命題（Z の M への群作用）

定義　作用 ϕ:Z×M→M を ϕ(n, a^{(k)}) := a^{(k+n)} で定義する。 **主張**　ϕ は群作用（0 が単位、加法が合成に対応）。S^+=ϕ(1, ·), S^-=ϕ(−1, ·)。 **証明**　(単位) ϕ(0, a^{(k)})=a^{(k)}。 (合成) ϕ(n+m, a^{(k)})=a^{(k+n+m)} =ϕ(n, ϕ(m, a^{(k)}))。よって群作用。S^+,S^- の一致は定義通り。∎

6. 新実数（CR）

定義 6.1（新実数）　新実数を、M の分数として定める：

$$\mathrm{CR} := \left\{ \frac{x}{y} \,\middle|\, x, y \in M,\ y \ / \qquad . \qquad = 0 \right\} / \sim$$

同値関係（正規化） 1. $\dfrac{x}{y} \sim \dfrac{mx}{my}$ （$m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ）、 2. 分母は正規形に整える（分母の有理成分は正、層係数は整数）、3. 既約化を施す。

演算（四則で閉じる）：

$$\frac{x}{y} \pm \frac{u}{v} = \frac{xv \pm yu}{yv}, \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{xu}{yv}, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}\ (x\ /\ 0). \quad =$$

順序　$M \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}\varepsilon$ の同型を通じ、$\varepsilon > 0$ を正とみなす辞書式順序を CR に拡張する。

埋め込みと可算性　$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathrm{CR}$　は自然に埋め込まれ、CR　は可算（例えば　$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$　からの符号化）。

- 例：$1 = \dfrac{1^{(0)}}{1^{(0)}}$、$2 = \dfrac{2^{(0)}}{1^{(0)}}$、$0 = \dfrac{0^{(0)}}{1^{(0)}}$ など。

  注意　「従来の無理数」との**値一致を主張するものではない**。ここでの“無理数相当”は「有理数でない元」という**分類**を指す。

6.2 補題（ε 正規形）

主張　正規形の分母 y が正（Q の有理成分が正）である CR の元 x/y に対し、一意な有理数対 (A,B)∈Q×Q が存在して x/y = A + B·ε と表せる。具体的に、x=a^{(k)}, y=c^{(n)}（c>0）とすると、 A = a/c, B = (k·c − a·n)/c^2。 **証明（形式）**　(a + kε)/(c + nε) に (c − nε)/c を右から掛け、ε^2=0 を用いる：(a + kε)/(c + nε) = (a + kε)·(c − nε)/c^2 = (ac + (kc − an)ε)/c^2 = (a/c) + ((kc − an)/c^2)ε。係数比較で一意。∎

6.3 定義（CR の順序の具体化と NF 写像）

NF:CR→Q×Q を NF(x/y)=(A,B) とする（6.2）。CR の順序 < を次で定義： (A,B) < (C,D) ⇔ [A<C] または [A=C かつ B<D]（辞書式）。 この定義は良定義であり、CR は全順序集合となる。

6.4 命題（埋め込みの順序保存）

主張 (i)　ι_M:M→CR,　ι_M(x)=x/1^{(0)}　は単射かつ順序埋め込み。NF(ι_M(a^{(k)}))=(a,k)。 (ii)　ι_Q:Q→CR, ι_Q(a)=a^{(0)}/1^{(0)} も単射かつ順序埋め込み。NF(ι_Q(a))=(a,0)。 **証明**　6.2 より直ちに従う。∎

6.5 命題（演算整合：NF での加法・積・逆元）

NF(x)=(A,B), NF(y)=(C,D) とする。 (i) NF(x±y)=(A±C, B±D)。 (ii) NF(x·y)=(AC, AD+BC)。 (iii) A≠0 のとき NF(x^{-1})=(1/A, −B/A^2)。 **証明**　ε^2=0 による逐次展開（(A+Bε)±(C+Dε)、(A+Bε)(C+Dε)、(A+Bε)^{-1} の公式）に一致。∎

6.6 命題（順序保存・単調性の CR への継承）

主張 (1) x<y ⇒ x+z < y+z（任意の z∈CR）。 (2) z の NF が (C,D) で C>0 なら、x<y ⇒ x·z < y·z。特に、y>0（NF で定数項>0）なら x/y < x'/y ⇔ x<x'。 (3) 0<x<y かつ NF(x)=(A,·), NF(y)=(C,·) で A>0,C>0 なら 1/y < 1/x（正の範囲での逆数の反転）。 **証明（形式）** NF に移して辞書式順序で比較する。 (1) (A,B)<(C,D) なら (A+E,B+F)<(C+E,D+F)。 (2) (A,B)<(C,D) と C_z:=Cz>0 のとき、(AC_z, A D_z + B C_z) と (CC_z, C D_z + D C_z) を比較し、定数項 AC_z < CC_z により結論。分母正の比較は x/y と x'/y を同様に展開して定数項の比較に帰着。 (3) x,y の定数項がともに正なら、(A,)<(C,) ⇒ 1/C < 1/A。NF の逆元公式 (iii) より結論。∎

注意 6.6.1 C<0 の元での乗法は順序を反転させる（符号規則）。

---

7. 新複素数（CC）

定義 7.1（新複素数） $a, b \in \mathrm{CR}$ に対し、

$$a + bi \;:=\; \big((a, -b), (b, a)\big) \in \mathrm{CC}.$$

演算（行列表現により従来の複素演算に一致） - 和：$((a,-b),(b,a)) + ((c,-d),(d,c)) = ((a+c,-(b+d)),(b+d,a+c))$ - 積：$((a,-b),(b,a)) \cdot ((c,-d),(d,c)) = ((ac-bd,-(ad+bc)),(ad+bc,ac-bd))$ - 単位元：$1 = ((1,0),(0,1))$、虚数単位：$i := ((0,-1),(1,0))$、$i^2 = -1$

---

8. 数の包含関係

$\mathbb{N}$ (関数適用の回数) $\subset$ $\mathbb{Z}$ (符号付き自然数) $\subset$ $\mathbb{Q}$ (整数の分数) $\subset$ M (有理極限 = 上・下の隣接層) $\subset$ CR

付記 $M,\ \mathrm{CR},\ \mathrm{CC}$ は本稿独自の構成。新四元数や八元数への拡張も可能。

コラム：小数の表現力について

有限小数はもちろん、循環小数（例：`0.333…`）は記号「…」を併用すれば**人間可読**としては表現できるが、**厳密な数値**としての同一視は、採用する体（ここでは CR）の規約に依存する。本稿では、従来の実数論で $0.999\ldots = 1$ とされる事実を**採用しない**（`1♭♭` という**左隣の同値類**として扱う）。

付録A：λ計算インタプリタ実装へのメモ

- 本章のデータ型：
- `Nat := repeat f`（`0=f()`, `succ(n)=f(n)`）
- `Int := (sgn∈{0,1}, Nat)`
- `Rat := (Int, Int≠0)` with normalization
- `Rel := Z`（`…♭♭, a, a##, …` の段数）
- `M := (Rel, Rat)` ただし `Rel` は整数層、順序は辞書式
- `CR := Frac(M)`（整数倍正規化＋既約化）
- 書式規範：式途中の改行可、式末に `;`、コメントは `;` 以降。
- 例（`a=5` の右隣の代表列）：

- `((1·5+1)/1) = 6/1; ((2·5+1)/2) = 11/2; …` は単調減少で 5 に近づく代表。

付録B：例示（抜粋）

右隣・左隣の不等式　$a^{(-2)} < a^{(-1)} < a < a^{(+1)} < a^{(+2)}$。

“追加・除去”ができる等式　$1^{(-1)} + 1^{(+1)} = 2\,,\, 0^{(+2)} - 0^{(+3)} = 0^{(-1)}$。

簡約不能の例　$1^{(+1)}/2\,,\, 1^{(+1)}/3$ ほか。

（以上）