新しい数の構成（ver.1）

- 作成日：2025年8月22日
- 初回公開：2025年8月11日
- まとめ作業開始：2024年7月17日
- 著者：木村祐太（1968–）

まえがき

本稿は、研究中の未完成論文『数学の新しい基礎付け』第1章からの抜粋である。第2章ではλ計算インタプリタを作成し、第3章ではそのインタプリタで実行可能な独自言語上で**正式な定義・公理・証明**を与える予定である。本章では、後章の厳密化に先立ち、**記号・型・同値関係**を明示しながら新しい数の構成を述べる。

> 方針：
>
> - 値そのものではなく、**生成手続き（方向付きの過程）**を一次対象として扱う。
> - 極限値に到達しない“隣接”を、同値類として名前付けする（`qlim`）。
> - 可算性を保ったまま、四則演算に自然に接続する層構造（連続順序数 M ）を介して、新実数 CR を与える。

書式と記法の規約

- **関数適用**：`f()` と書く（空白は入れない）。反復は `f^k()` を用いる。
- **乗法記号**：`·` を用いる（必要に応じて `×`）。
- **等式と式の区切り**：本文の整形のため、**式の途中で改行**してよい。式の終了には `;` を付す。
- **記号の読み**：`a##` は「a の**次**（右隣）への1段進み」、`a♭♭` は「a の**前**（左隣）への1段進み」を表す（下記で厳密化）。
- **「…」の使用**：人間可読の略記に限り用いる（数学的定義は繰返しや極限の明示に置き換える）。

---

1. 自然数の構成

定義 1.1（自然数）　自然数を**関数適用の回数**で表す：

- $0 := f()$
- $1 := f(f())$
- $2 := f(f(f()))$
- …（以下、n は f の反復回数）

> 備考　チャーチ数と同型である。以後、アラビア数字 n はこの表現をもつ自然数を指す。

---

2. 整数の構成

定義 2.1（整数）　整数を **(符号, 自然数)** の順序対で表す：

$$ \mathbb{Z}\ni z := (\mathrm{sgn}, n),\quad \mathrm{sgn}\in{0(非負), 1(負)},\ n\in\mathbb{N}. $$

- 例：
- $+2 := (0,2) = (f(), f^3())$
- $+1 := (0,1) = (f(), f^2())$
- $\quad 0 := (0,0) = (f(), f())$
- $-1 := (1,1) = (f^2(), f^2())$
- $-2 := (1,2) = (f^2(), f^3())$

正規化　$(1,0)$ は $(0,0)$ に同一視する（$-0=0$）。

---

3. 有理数の構成

定義 3.1（有理数）　有理数を **(整数, 整数)** の順序対で表す。分母は 0 であってはならない：

$$ \mathbb{Q}\ni q := (p, r),\ \ r\ne 0. $$

正規形　既約分数・分母正を採用する（等価類を代表させる）。

- 例：
- $2/1 := (2,1)$
- $1/1 := (1,1)$
- $0/1 := (0,1)$
- $-1/1 := (-1,1)$ など。

---

4. 有理極限（隣の名前付け）

本節では、$a\in\mathbb{Q}$ の**“隣”**を、******極限値に到達しない******側からの**方向付き過程の同値類**として定義する。

定義 4.1（上側隣接の代表列）　$b\in\mathbb{Q}_{>0}$ に対し、

$$ q_n^{+}(a;b):=\frac{n\cdot a + b}{n}\quad (n=1,2,3,\dots) $$

は a を**下限**として単調減少で a に近づく。下側も同様に $q_n^{-}(a;b) := \frac{n\cdot a-b}{n}$ を定める（$b>0$）。

定義 4.2（ `qlim` ********************************** と隣の同値類）**　$q_n^{+}(a;b)$（あるいは $q_n^{-}(a;b)$）の**尾同値類**を qlim で表し、

$$ \text{a の次（右隣）} := \operatorname{qlim}{n\to\infty} q_n^{+}(a;b),\quad \text{a の前（左隣）} := \operatorname{qlim}{n\to\infty} q_n^{-}(a;b) $$

と定義する。$b>0$ の選び方に依らず同じ同値類に属する。

記法 4.3（微小操作の記号）　上側隣接への1段進みを `##`、下側隣接への1段進みを `♭♭` と書き、

$$ a\,\mathbin{##}\;:=\;\operatorname{qlim} q_n^{+}(a;b),\quad a\,\mathbin{\flat\flat}\;:=\; \operatorname{qlim} q_n^{-}(a;b). $$

辞書式の大小関係は

$$ \cdots < a^{(-2)} < a^{(-1)} < a^{(0)}{=}a < a^{(1)} < a^{(2)} < \cdots $$

で、$a^{(k)}$ は後述の 5 節の同型（$k \in \mathbb{Z}$）で表される。

> 注意 `qlim` は**値（従来実数）を返さない**。それは**方向付き生成過程（同値類）の名前**である。

4.4 補題（b によらない）

主張 固定した $a \in \mathbb{Q}$ に対し、$b1,b2>0$ ならば、$q_n^+(a;b1)$ と $q_n^+(a;b2)$ は尾同値であり、同じ qlim 同値類を与える。下側も同様。 **証明（形式）** 尾同値 ~ を次で定義する：列 $(x_n),(y_n)$ について $\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N$ で $|x_n-y_n|<\varepsilon$。ここで $x_n=q_n^+(a;b1)=(n\cdot a+b1)/n=a+b1/n$, $y_n=q_n^+(a;b2)=a+b2/n$。従って $|x_n-y_n|=|b1-b2|/n$。任意の $\varepsilon>0$ に対し $N>|b1-b2|/\varepsilon$ を取れば、$n\geq N$ で $|x_n-y_n|<\varepsilon$。よって $x\sim y$。さらに x_n,y_n はいずれも a を下限とする単調減少列（$n \mapsto a+b/n$ は $b>0$ で減少）であり、上側隣接の条件を満たす。以上より、同じ qlim 同値類を与える。下側の場合も同様。∎

4.5 補題（再索引の不変性）

主張 $k\in\mathbb{N}$, $c\in\mathbb{N}$ に対し、$r_n:=q_{kn+c}^+(a;b)$ は $q_n^+(a;b)$ と尾同値。下側も同様。 **証明（形式）** $s_n:=q_n^+(a;b)=a+b/n$, $r_n=a+b/(kn+c)$。差 $d_n:=r_n-s_n=b/(kn+c)-b/n = b(n-(kn+c))/(n(kn+c)) = -b((k-1)n + c)/(n(kn+c))$。よって $|d_n| = b((k-1) + c/n)/(kn + c/n) \leq b((k-1) + c/n)/(kn) \to 0$（$n\to\infty$）。したがって $r_n \sim s_n$。さらに r_n も a を下限とする単調減少列である（分母が n に関して増加）。よって同じ上側隣接の qlim 同値類を与える。下側も同様に示せる。∎

4.6 定義（上側/下側隣接の同値類）

上側隣接 $N^+(a)$ を $\{ q_n^+(a;b) \mid b>0 \}$ を 4.4 の関係で割った同値類として定め、a## で表す。下側隣接 $N^-(a)$ も同様に定め、a♭♭ で表す。

> 註 この段階では代表列を $(n\cdot a\pm b)/n$ に限定している。より広い単調列を許す場合は同値関係の定義を別途強化する（本章の目的には不要）。

4.7 命題（尾同値は同値関係）

主張 尾同値（~）は、有理数列全体の集合上の同値関係である。 **定義の再掲** 列 $(x_n),(y_n)$ について、$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\geq N$ で $|x_n - y_n| < \varepsilon$ のとき $x \sim y$ とする。 **証明（形式）**

- 反射律：任意の列 x に対し $|x_n - x_n| = 0 < \varepsilon$ が恒真なので $x \sim x$。
- 対称律：$x \sim y$ なら $|x_n - y_n| < \varepsilon$（$n\geq N$）。すると $|y_n - x_n| = |x_n - y_n| < \varepsilon$ より $y \sim x$。
- 推移律：$x \sim y, y \sim z$ とする。任意の $\varepsilon>0$ に対し $\varepsilon/2$ を用い、$\exists N1,\exists N2$ で $n\geq N1$ なら $|x_n - y_n| < \varepsilon/2$、$n\geq N2$ なら $|y_n - z_n| < \varepsilon/2$。$N := \max(N1,N2)$ とおけば $n\geq N$ で $|x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| < \varepsilon$。よって $x \sim z$。 以上により、記号 ~ は同値関係。∎

4.8 補題（$N^+(a)$, $N^-(a)$ の非空性と一意性）

主張　任意の $a \in Q$ について、上側隣接 $N^+(a)$ と下側隣接 $N^-(a)$ は（定義域上で）非空であり、いずれも同値類として一意に定まる。 **証明（形式）**

- 非空性：$b=1$ をとれば、$q_n^+(a;1)=a+1/n$ は定義を満たす上側代表列であり、同様に $q_n^-(a;1)=a-1/n$ は下側代表列である。よって $N^+(a),N^-(a)$ はいずれも空でない。
- 一意性（良定義）：上側について、$b1,b2>0$ なら 4.4 より $q_n^+(a;b1) \sim q_n^+(a;b2)$。したがって同値類は b の選び方に依らず単一である。下側も同様。∎

4.9 命題（写像 $a \mapsto a\#\#$, $a \mapsto a\flat\flat$ の良定義性）

主張　各 $a \in Q$ に対し、$a\#\#$ と $a\flat\flat$ は、それぞれ $N^+(a)$, $N^-(a)$ の代表列の選択（b の値、再索引など）に依存せず、M の一意な元 $a^{(+1)}$, $a^{(-1)}$ として定まる。したがって写像 $S^+:Q \to M$, $S^-:Q \to M$ を $S^+(a)=a^{(+1)}$（$=a\#\#$）, $S^-(a)=a^{(-1)}$（$=a\flat\flat$） と定めることができ、これは良定義である。 **証明（形式）**

- 存在：4.8 により $N^+(a),N^-(a)$ は非空。定義 5.1 の M において $a^{(+1)}$, $a^{(-1)}$ が定まるので、対応 $S^+(a):=a^{(+1)}$, $S^-(a):=a^{(-1)}$ を与える。
- 代表独立性：4.4（b によらない）と 4.5（再索引不変）により、$N^+(a)$（同様に $N^-(a)$）の任意の2つの代表列は尾同値である。定義 4.6 により $N^+(a),N^-(a)$ は同値類として一意に確定しているため、S^+,S^- は代表の取り方に依存しない。
- 一意性：もし $T^+:Q \to M$ が「任意の $b>0$ で $q_n^+(a;b)$ を表す上側隣接の像」を与える写像なら、4.8 より $N^+(a)$ は単一の同値類であり、その M における標準像は $a^{(+1)}$ であるから $T^+(a)=a^{(+1)}=S^+(a)$。下側も同様。∎

4.10 命題（S^+, S^- の単調性・単射性）

主張 (i) 任意の $a,b \in Q$ で $a<b$ ならば $S^+(a)<S^+(b)$ かつ $S^-(a)<S^-(b)$。 (ii) S^+, S^- は単射（$S^+(a)=S^+(b) \Rightarrow a=b$、$S^-$ も同様）。 **証明（形式）**　$S^+(a)=a^{(+1)}$, $S^-(a)=a^{(-1)}$。M の辞書式順序では $(a,k)<(b,\ell) \Leftrightarrow [a<b]$ または $[a=b$ かつ $k<\ell]$。よって $a<b \Rightarrow (a,1)<(b,1)$ および $(a,-1)<(b,-1)$。ゆえに (i) が成立。単射性は $S^+(a)=S^+(b) \Rightarrow (a,1)=(b,1)$ から $a=b$。S^- も同様。∎

4.11 命題（$a^{(0)}$ を境にした片側有界性と境界）

定義　$C^+_a := \{ a^{(+k)} \mid k \geq 1 \}$, $C^-_a := \{ a^{(-k)} \mid k \geq 1 \}$。 **主張** (1) $a^{(0)}$ は C^+_a の下界であり、かつ最大の下界（$\inf C_a^+$ ）。 (2) $a^{(0)}$ は C^-_a の上界であり、かつ最小の上界（$\sup C_a^-$ ）。 (3) とくに、C^+_a は $a^{(0)}$ により下に有界、C^-_a は $a^{(0)}$ により上に有界である。 **証明（形式）**　(1) 任意の $k \geq 1$ で $(a,0)<(a,k)$（辞書式で第2成分 $0<k$）。したがって $a^{(0)}$ は下界。さらに任意の下界 $b \in M$ について $b \leq (a,k)$ が全ての $k \geq 1$ で成り立つと仮定する。場合分け：

- $b=(c,m)$ で $c<a$ なら $b<(a,0)$。
- $c=a$ のとき、$b \leq (a,1)$ を満たすには $m \leq 1$。さらに全ての $k \geq 1$ に対して $b \leq (a,k)$ を満たすための最大の m は 0。ゆえに $b \leq (a,0)$。
- $c>a$ のときは b は下界ではあり得ない（$(a,1)<b$）。 結局、任意の下界 b は $b \leq a^{(0)}$ を満たす。 よって $a^{(0)}$ は最大の下界。 (2) は (1) を符号反転（$k \to -k$）により同様に示せる：任意の $k \geq 1$ で $(a,-k)<(a,0)$、上界 b は $(a,0)$ 以上でなければならず、$(a,0)$ が最小の上界である。 (3) は (1)(2) の直ちの帰結。∎

定義 5.1（連続順序数）　連続順序数を

$$ M := {(\kappa,a)\mid a\in\mathbb{Q},\ \kappa\in\mathbb{Z}} $$

とし、記号的には $a^{(\kappa)}$ と書く。直観的に、各有理点 a の周りに**整数刻みの隣接層**が付いていると思えばよい。

順序（辞書式）

$$ (a^{(k)} < b^{(\ell)})\iff (a<b)\ \text{または}\ (a=b\ \text{かつ}\ k<\ell). $$

加法と整数倍

$$ a^{(k)} + b^{(\ell)} = (a+b)^{(k+\ell)},\quad m\cdot a^{(k)}=(ma)^{(mk)}\ (m\in\mathbb{Z}). $$

> 直観モデル　$M\cong\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}\cdot\varepsilon$ （$\varepsilon>0$ は形式的無限小、一次のみ）。$a^{(k)}$ を $a+k\varepsilon$ と同型視すると、4 節の $\boxed{\text{##/♭♭}}$ は $\pm\varepsilon$ の加減に対応する。

例（“記号の追加・除去”ができる等式）

- $1^{(-1)}+1^{(+1)}=2^{(0)}$
- $0^{(+2)}-0^{(+3)}=0^{(-1)}$
- $2^{(+2)}\times(1/2)=1^{(+1)}$ \（ただし乗除は一般には M で閉じない。上の式は有理数側のスカラー倍として解釈。）

簡約できない例（整数層の外に出る）

- $1^{(+1)}/2$, $1^{(+1)}/3$, $1/1^{(+1)}$, $1^{(-1)}/1^{(+1)}$ など。

> まとめ　M は加法群であり、整数倍が定義できる一方、乗除に関しては閉じない。これを分数化して四則で閉じるのが次節の新実数である。

5.4 係数ルール（##/♭♭）と分割不可能性

演算子の定義　S^{+}(a):=a^{(+1)}（=a##）,　S^{-}(a):=a^{(−1)}（=a♭♭）。繰り返しは　(S^{+})^k(a)=a^{(+k)}, (S^{-})^k(a)=a^{(−k)}（k∈N）。

法則（加法に対する線形性）

1. a^{(k)} + b^{(ℓ)} = (a+b)^{(k+ℓ)}。
2. m · a^{(k)} = (ma)^{(mk)}（m∈Z）。

分割不可能性（整数係数性）　命題 5.4.1　M には 1/2 段の「半ステップ」は存在しない。厳密には、任意の a∈Q に対し、x∈M で 2x = a^{(+1)} が成り立つものは存在しない。 **証明（ε モデル）**　M≅Q⊕Z·ε と同型視し、x=r+mε（r∈Q, m∈Z）とおく。2x=2r+2mε=ε を満たすには 2r=0→r=0 かつ 2m=1→m=1/2 が必要だが m は整数に限るため矛盾。∎

系 5.4.2（CR での「分数ステップ」）　CR では (a^{(+1)})/(2·1^{(0)}) のような元が存在し、形式的には「半ステップ」を表現できる。ただしこれは M の元ではない。

注意　係数（層の段数）は M では常に整数であり、非整数係数は CR の割り算を経て初めて現れる。

5.5 命題（加法との整合と Z 作用）

主張 (A) 任意の $a,b\in Q,\ i,j\in Z$ について、$a^{(i)} + b^{(j)} = (a+b)^{(i+j)}$（M の定義に一致）。 (B) S^+,S^- は層指数に対する ±1 のシフトとして振る舞う：$S^+(a^{(k)}) = a^{(k+1)},\ S^-(a^{(k)}) = a^{(k-1)}$（拡張定義）。 **証明（形式）**　M の加法は $(a,i)+(b,j)=(a+b,i+j)$ と定義されている（5.1 の直後）。よって (A) は定義から直ちに従う。(B) は S^+,S^- の拡張を $(a,k)\mapsto(a,k\pm1)$ と置くことで、定義通りに得られる。∎

系 5.5.1（線形性） (i) $S^+(x+y)=S^+(x)+y=x+S^+(y)$。 (ii) $S^-(x+y)=S^-(x)+y=x+S^-(y)$。 **証明**　$x=a^{(i)},\ y=b^{(j)}$ とし、(A)(B) により $S^+(x+y)=(a+b)^{(i+j+1)}=a^{(i+1)}+b^{(j)}=S^+(x)+y$。同様に右辺交換および S^- も成立。∎

系 5.5.2（一様シフトの不変性） 任意の $\delta\in Z$ について、$a^{(i+\delta)}+b^{(j-\delta)} = a^{(i)}+b^{(j)}$。 **証明**　左辺 $=(a+b)^{(i+j)}$（(A)）、右辺も同じ。∎

系 5.5.3（差の標準形） $(a^{(i)} - a^{(j)}) = 0^{(i-j)}$。 **証明**　$(a^{(i)} - a^{(j)}) = (a,\ i) + (-a,\ -j) = (0,\ i-j) = 0^{(i-j)}$。∎

5.6 命題（Z の M への群作用）

定義　作用 $\phi\colon Z\times M\to M$ を $\phi(n,\ a^{(k)}) := a^{(k+n)}$ で定義する。 **主張**　ϕ は群作用（0 が単位、加法が合成に対応）。$S^+=\phi(1,\cdot),\ S^-=\phi(-1,\cdot)$。 **証明**　(単位) $\phi(0,\ a^{(k)})=a^{(k)}$。 (合成) $\phi(n+m,\ a^{(k)})=a^{(k+n+m)}=\phi(n,\ \phi(m,\ a^{(k)}))$。よって群作用。$S^+,S^-$ の一致は定義通り。∎

定義 6.1（新実数）　新実数を、M の分数として定める：

$$ \mathrm{CR} := \left\{\frac{x}{y}\ \middle|\ x,y\in M,\ y\neq 0\right\}/\sim. $$

同値関係（正規化）

1. $\dfrac{x}{y} \sim \dfrac{mx}{my}$ （$m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$）、
2. 分母は正規形に整える（分母の有理成分は正、層係数は整数）、
3. 既約化を施す。

演算（四則で閉じる）：

$$ \frac{x}{y}\pm\frac{u}{v}=\frac{xv\pm yu}{yv},\quad \frac{x}{y}\cdot\frac{u}{v}=\frac{xu}{yv},\quad \left(\frac{x}{y}\right)^{-1}=\frac{y}{x}\ (x\neq 0). $$

順序　$M\cong\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}\varepsilon$ の同型を通じ、$\varepsilon>0$ を正とみなす辞書式順序を CR に拡張する。

埋め込みと可算性　$\mathbb{Q}\hookrightarrow\mathrm{CR}$ は自然に埋め込まれ、CR は可算（例えば $\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$ からの符号化）。

- 例：$1=\dfrac{1^{(0)}}{1^{(0)}}$、$2=\dfrac{2^{(0)}}{1^{(0)}}$、$0=\dfrac{0^{(0)}}{1^{(0)}}$ など。

  注意　「従来の無理数」との**値一致を主張するものではない**。ここでの“無理数相当”は「有理数でない元」という**分類**を指す。

6.2 補題（ε 正規形）

主張　正規形の分母 y が正（Q の有理成分が正）である CR の元 x/y に対し、一意な有理数対 (A,B)∈Q×Q が存在して x/y = A + B·ε と表せる。具体的に、x=a^{(k)}, y=c^{(n)}（c>0）とすると、 A = a/c, B = (k·c − a·n)/c^2。 **証明（形式）**　(a + kε)/(c + nε) に (c − nε)/c を右から掛け、ε^2=0 を用いる： (a + kε)/(c + nε) = (a + kε)·(c − nε)/c^2 = (ac + (kc − an)ε)/c^2 = (a/c) + ((kc − an)/c^2)ε。係数比較で一意。∎

6.3 定義（CR の順序の具体化と NF 写像）

NF\:CR→Q×Q を NF(x/y)=(A,B) とする（6.2）。CR の順序 < を次で定義： (A,B) < (C,D) ⇔ [A\<C] または [A=C かつ B\<D]（辞書式）。 この定義は良定義であり、CR は全順序集合となる。

6.4 命題（埋め込みの順序保存）

主張 (i) ι_M\:M→CR, ι_M(x)=x/1^{(0)} は単射かつ順序埋め込み。NF(ι_M(a^{(k)}))=(a,k)。 (ii) ι_Q\:Q→CR, ι_Q(a)=a^{(0)}/1^{(0)} も単射かつ順序埋め込み。NF(ι_Q(a))=(a,0)。 **証明**　6.2 より直ちに従う。∎

6.5 命題（演算整合：NF での加法・積・逆元）

NF(x)=(A,B), NF(y)=(C,D) とする。 (i) NF(x±y)=(A±C, B±D)。 (ii) NF(x·y)=(AC, AD+BC)。 (iii) A≠0 のとき NF(x^{-1})=(1/A, −B/A^2)。 **証明**　ε^2=0 による逐次展開（(A+Bε)±(C+Dε)、(A+Bε)(C+Dε)、(A+Bε)^{-1} の公式）に一致。∎

6.6 命題（順序保存・単調性の CR への継承）

主張 (1) x\<y ⇒ x+z < y+z（任意の z∈CR）。 (2) z の NF が (C,D) で C>0 なら、x\<y ⇒ x·z < y·z。特に、y>0（NF で定数項>0）なら x/y < x'/y ⇔ x\<x'。 (3) 0\<x\<y かつ NF(x)=(A,·), NF(y)=(C,·) で A>0,C>0 なら 1/y < 1/x（正の範囲での逆数の反転）。 **証明（形式）**　NF に移して辞書式順序で比較する。 (1) (A,B)<(C,D) なら (A+E,B+F)<(C+E,D+F)。 (2) (A,B)<(C,D) と C_z:=Cz>0 のとき、(AC_z, A D_z + B C_z) と (CC_z, C D_z + D C_z) を比較し、定数項 AC_z < CC_z により結論。分母正の比較は x/y と x'/y を同様に展開して定数項の比較に帰着。 (3) x,y の定数項がともに正なら、(A,)<(C,) ⇒ 1/C < 1/A。NF の逆元公式 (iii) より結論。∎

注意 6.6.1　C<0 の元での乗法は順序を反転させる（符号規則）。

定義 7.1（新複素数）　$a, b \in \mathrm{CR}$ に対し、

$$ a+bi \;:=\; \big((a,-b),(b,a)\big) \in \mathrm{CC}. $$

演算（行列表現により従来の複素演算に一致）

- 和：$((a,-b),(b,a)) + ((c,-d),(d,c)) = ((a+c,-(b+d)),(b+d,a+c))$
- 積：$((a,-b),(b,a)) \cdot ((c,-d),(d,c)) = ((ac-bd,-(ad+bc)),(ad+bc,ac-bd))$
- 単位元：$1 = ((1,0),(0,1))$ 、虚数単位：$i := ((0,-1),(1,0))$ 、$i^2 = -1$

---

8. 数の包含関係

$$ \mathbb{N}\ (関数適用の回数) \;\subset\; \mathbb{Z}\ (符号付き自然数) \;\subset\; \mathbb{Q}\ (整数の分数) \;\subset\; M\ (有理極限=上・下の隣接層) \;\subset\; \mathrm{CR}\ (M の分数) \;\subset\; \mathrm{CC}\ (\mathrm{CR} の行列表現) $$

> 付記　$M,\ \mathrm{CR},\ \mathrm{CC}$ は本稿独自の構成。新四元数や八元数への拡張も可能。

コラム：小数の表現力について

有限小数はもちろん、循環小数（例：`0.333…`）は記号「…」を併用すれば**人間可読**としては表現できるが、**厳密な数値**としての同一視は、採用する体（ここでは CR ）の規約に依存する。本稿では、従来の実数論で $0.999\ldots = 1$ とされる事実を**採用しない**（`1♭♭`という**左隣の同値類**として扱う）。

付録A：λ計算インタプリタ実装へのメモ

- 本章のデータ型：
- `Nat := repeat f`（`0=f()`, `succ(n)=f(n)`）
- `Int := (sgn∈{0,1}, Nat)`
- `Rat := (Int, Int≠0)` with normalization
- `Rel := Z`（`...♭♭, a, a##, ...` の段数）
- `M := (Rel, Rat)` ただし `Rel` は整数層、順序は辞書式
- `CR := Frac(M)`（整数倍正規化＋既約化）
- 書式規範：式途中の改行可、式末に `;`、コメントは `;` 以降。
- 例（`a=5` の右隣の代表列）：
- `((1·5+1)/1) = 6/1; ((2·5+1)/2) = 11/2; …` は単調減少で 5 に近づく代表。

付録B：例示（抜粋）

右隣・左隣の不等式　$a^{(-2)} < a^{(-1)} < a < a^{(+1)} < a^{(+2)}$ 。

“追加・除去”ができる等式　$1^{(-1)} + 1^{(+1)} = 2\,,\,0^{(+2)} - 0^{(+3)} = 0^{(-1)}$ 。

簡約不能の例　$1^{(+1)}/2\,,\,1^{(+1)}/3$ ほか。

（以上）