# 新しい数の構成（ver.1）

* 作成日：2025年8月22日
* 初回公開：2025年8月11日
* まとめ作業開始：2024年7月17日
* 著者：木村祐太（1968–）

## まえがき

本稿は、研究中の未完成論文『数学の新しい基礎付け』第1章からの抜粋の**差し替え本文**である。第2章ではλ計算インタプリタを作成し、第3章ではそのインタプリタで実行可能な独自言語上で**正式な定義・公理・証明**を与える予定である。本章では、後章の厳密化に先立ち、**記号・型・同値関係**を明示しながら新しい数の構成を述べる。

方針：

* 値そのものではなく、\*\*生成手続き（方向付きの過程）\*\*を一次対象として扱う。
* 極限値に到達しない“隣接”を、同値類として名前付けする（qlim）。
* 可算性を保ったまま、四則演算に自然に接続する層構造（連続順序数 (M)）を介して、新実数 () を与える。

## 書式と記法の規約

* **関数適用**：f() と書く（空白は入れない）。反復は f^k() を用いる。
* **乗法記号**：· を用いる（必要に応じて ×）。
* **等式と式の区切り**：本文の整形のため、**式の途中で改行**してよい。式の終了には ; を付す。
* **記号の読み**：a## は「a の**次**（右隣）への1段進み」、a♭♭ は「a の**前**（左隣）への1段進み」を表す（下記で厳密化）。
* **「…」の使用**：人間可読の略記に限り用いる（数学的定義は繰返しや極限の明示に置き換える）。

## 1. 自然数の構成

**定義 1.1（自然数）**　自然数を**関数適用の回数**で表す：

* (0 := f())
* (1 := f(f()))
* (2 := f(f(f())))
* …（以下、(n) は (f) の反復回数）

備考　チャーチ数と同型である。以後、アラビア数字 (n) はこの表現をもつ自然数を指す。

## 2. 整数の構成

**定義 2.1（整数）**　整数を **(符号, 自然数)** の順序対で表す：

* 例：
  + (+2 := (0,2) = (f(), f^3()))
  + (+1 := (0,1) = (f(), f^2()))
  + (0 := (0,0) = (f(), f()))
  + (-1 := (1,1) = (f^2(), f^2()))
  + (-2 := (1,2) = (f^2(), f^3()))

**正規化**　((1,0)) は ((0,0)) に同一視する（(-0=0)）。

## 3. 有理数の構成

**定義 3.1（有理数）**　有理数を **(整数, 整数)** の順序対で表す。分母は 0 であってはならない：

**正規形**　既約分数・分母正を採用する（等価類を代表させる）。

* 例：
  + (2/1 := (2,1))
  + (1/1 := (1,1))
  + (0/1 := (0,1))
  + (-1/1 := (-1,1)) など。

## 4. 有理極限（隣の名前付け）

本節では、(a) の\*\*“隣”**を、**\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*極限値に到達しない\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*側からの\*\*方向付き過程の同値類\*\*として定義する。

**定義 4.1（上側隣接の代表列）**　(b\_{>0}) に対し、

は (a) を**下限**として単調減少で (a) に近づく。下側も同様に (q\_n^{-}(a;b):=) を定める（(b>0)）。

**定義 4.2（**\*\*\*\*\*\*qlim\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\*\* と隣の同値類）**(q\_n^{+}(a;b))（あるいは (q\_n^{-}(a;b))）の**尾同値類\*\*を () で表し、

と定義する。(b>0) の選び方に依らず同じ同値類に属する。

**記法 4.3（微小操作の記号）**　上側隣接への1段進みを ##、下側隣接への1段進みを ♭♭ と書き、

辞書式の大小関係は

で、(a^{(k)}) は後述の 5 節の同型（(k)）で表される。

注意　qlim は**値（従来実数）を返さない**。それは**方向付き生成過程（同値類）の名前**である。

### 4.4 補題（b によらない）

**主張**　固定した a∈Q に対し、b1,b2>0 ならば、q\_n^+(a;b1) と q\_n^+(a;b2) は尾同値であり、同じ qlim 同値類を与える。下側も同様。 **証明（形式）**　尾同値 ∼ を次で定義する：列 (x\_n),(y\_n) について ∀ε>0 ∃N ∀n≥N で |x\_n−y\_n|<ε。ここで x\_n=q\_n^+(a;b1)=(n·a+b1)/n=a+b1/n, y\_n=q\_n^+(a;b2)=a+b2/n。従って |x\_n−y\_n|=|b1−b2|/n。任意の ε>0 に対し N>|b1−b2|/ε を取れば、n≥N で |x\_n−y\_n|<ε。よって x~y。さらに x\_n,y\_n はいずれも a を下限とする単調減少列（n↦a+b/n は b>0 で減少）であり、上側隣接の条件を満たす。以上より、同じ qlim 同値類を与える。下側の場合も同様。∎

### 4.5 補題（再索引の不変性）

**主張**　k∈N, c∈N に対し、r\_n:=q\_{kn+c}^+(a;b) は q\_n^+(a;b) と尾同値。下側も同様。 **証明（形式）**　s\_n:=q\_n^+(a;b)=a+b/n, r\_n=a+b/(kn+c)。差 d\_n:=r\_n−s\_n=b/(kn+c)−b/n = b( n−(kn+c) )/( n(kn+c) ) = −b( (k−1)n + c )/( n(kn+c) )。よって |d\_n| = b( (k−1) + c/n )/( k n + c/n ) ≤ b( (k−1) + c/n )/( k n ) → 0（n→∞）。したがって r\_n ∼ s\_n。さらに r\_n も a を下限とする単調減少列である（分母が n に関して増加）。よって同じ上側隣接の qlim 同値類を与える。下側も同様に示せる。∎

### 4.6 定義（上側/下側隣接の同値類）

上側隣接 N⁺(a) を { q\_n^+(a;b) | b>0 } を 4.4 の関係で割った同値類として定め、a## で表す。下側隣接 N⁻(a) も同様に定め、a♭♭ で表す。

註　この段階では代表列を (n·a±b)/n に限定している。より広い単調列を許す場合は同値関係の定義を別途強化する（本章の目的には不要）。

### 4.7 命題（尾同値は同値関係）

**主張**　尾同値（∼）は、有理数列全体の集合上の同値関係である。 **定義の再掲**　列 (x\_n),(y\_n) について、∀ε>0 ∃N ∀n≥N で |x\_n − y\_n| < ε のとき x ∼ y とする。 **証明（形式）**

* 反射律：任意の列 x に対し |x\_n − x\_n| = 0 < ε が恒真なので x ∼ x。
* 対称律：x ∼ y なら |x\_n − y\_n| < ε（n≥N）。すると |y\_n − x\_n| = |x\_n − y\_n| < ε より y ∼ x。
* 推移律：x ∼ y, y ∼ z とする。任意の ε>0 に対し ε/2 を用い、∃N1,∃N2 で n≥N1 なら |x\_n − y\_n| < ε/2、n≥N2 なら |y\_n − z\_n| < ε/2。N := max(N1,N2) とおけば n≥N で |x\_n − z\_n| ≤ |x\_n − y\_n| + |y\_n − z\_n| < ε。よって x ∼ z。 以上により、記号 ∼ は同値関係。∎

### 4.8 補題（N⁺(a), N⁻(a) の非空性と一意性）

**主張**　任意の a∈Q について、上側隣接 N⁺(a) と下側隣接 N⁻(a) は（定義域上で）非空であり、いずれも同値類として一意に定まる。 **証明（形式）**

* 非空性：b=1 をとれば、q\_n^+(a;1)=a+1/n は定義を満たす上側代表列であり、同様に q\_n^−(a;1)=a−1/n は下側代表列である。よって N⁺(a),N⁻(a) はいずれも空でない。
* 一意性（良定義）：上側について、b1,b2>0 なら 4.4 より q\_n^+(a;b1) ∼ q\_n^+(a;b2)。したがって同値類は b の選び方に依らず単一である。下側も同様。∎

### 4.9 命題（写像 a↦a##, a↦a♭♭ の良定義性）

**主張**　各 a∈Q に対し、a## と a♭♭ は、それぞれ N⁺(a), N⁻(a) の代表列の選択（b の値、再索引など）に依存せず、M の一意な元 a^{(+1)}, a^{(−1)} として定まる。したがって写像 S⁺:Q→M, S⁻:Q→M を S⁺(a)=a^{(+1)}（=a##）, S⁻(a)=a^{(−1)}（=a♭♭） と定めることができ、これは良定義である。 **証明（形式）**

* 存在：4.8 により N⁺(a),N⁻(a) は非空。定義 5.1 の M において a^{(+1)}, a^{(−1)} が定まるので、対応 S⁺(a):=a^{(+1)}, S⁻(a):=a^{(−1)} を与える。
* 代表独立性：4.4（b によらない）と 4.5（再索引不変）により、N⁺(a)（同様に N⁻(a)）の任意の2つの代表列は尾同値である。定義 4.6 により N⁺(a),N⁻(a) は同値類として一意に確定しているため、S⁺,S⁻ は代表の取り方に依存しない。
* 一意性：もし T⁺:Q→M が「任意の b>0 で q\_n^+(a;b) を表す上側隣接の像」を与える写像なら、4.8 より N⁺(a) は単一の同値類であり、その M における標準像は a^{(+1)} であるから T⁺(a)=a^{(+1)}=S⁺(a)。下側も同様。∎

### 4.10 命題（S⁺, S⁻ の単調性・単射性）

**主張** (i) 任意の a,b∈Q で a<b ならば S⁺(a)<S⁺(b) かつ S⁻(a)<S⁻(b)。 (ii) S⁺, S⁻ は単射（S⁺(a)=S⁺(b) ⇒ a=b、S⁻ も同様）。 **証明（形式）**　S⁺(a)=a^{(+1)}, S⁻(a)=a^{(−1)}。M の辞書式順序では (a,k)<(b,ℓ) ⇔ [a<b] または [a=b かつ k<ℓ]。よって a<b ⇒ (a,1)<(b,1) および (a,−1)<(b,−1)。ゆえに (i) が成立。単射性は S⁺(a)=S⁺(b) ⇒ (a,1)=(b,1) から a=b。S⁻ も同様。∎

### 4.11 命題（a^{(0)} を境にした片側有界性と境界）

**定義**　C^+\_a := { a^{(+k)} | k≥1 }, C^-\_a := { a^{(−k)} | k≥1 }。 **主張** (1) a^{(0)} は C^+\_a の下界であり、かつ最大の下界（(C^+\_a)）。 (2) a^{(0)} は C^-\_a の上界であり、かつ最小の上界（(C^-\_a)）。 (3) とくに、C^+\_a は a^{(0)} により下に有界、C^-\_a は a^{(0)} により上に有界である。 **証明（形式）**　(1) 任意の k≥1 で (a,0)<(a,k)（辞書式で第2成分 0<k）。したがって a^{(0)} は下界。さらに任意の下界 b∈M について b≤(a,k) が全ての k≥1 で成り立つと仮定する。場合分け：

* b=(c,m) で c<a なら b<(a,0)。
* c=a のとき、b≤(a,1) を満たすには m≤1。さらに全ての k≥1 に対して b≤(a,k) を満たすための最大の m は 0。ゆえに b≤(a,0)。
* c>a のときは b は下界ではあり得ない（(a,1)<b）。 結局、任意の下界 b は b≤a^{(0)} を満たす。よって a^{(0)} は最大の下界。 (2) は (1) を符号反転（k→−k）により同様に示せる：任意の k≥1 で (a,−k)<(a,0)、上界 b は (a,0) 以上でなければならず、(a,0) が最小の上界である。 (3) は (1)(2) の直ちの帰結。∎

**定義 5.1（連続順序数）**　連続順序数を

とし、記号的には (a^{()}) と書く。直観的に、各有理点 (a) の周りに**整数刻みの隣接層**が付いていると思えばよい。

**順序（辞書式）**

**加法と整数倍**

直観モデル　(M )（(>0) は形式的無限小、一次のみ）。(a^{(k)}) を (a+k) と同型視すると、4 節の ##/♭♭ は () の加減に対応する。

**例（“記号の追加・除去”ができる等式）**

* (1^{(-1)} + 1^{(+1)} = 2^{(0)})
* (0^{(+2)} - 0^{(+3)} = 0^{(-1)})
* (2^{(+2)} (1/2) = 1^{(+1)})  
  （ただし乗除は一般には (M) で閉じない。上の式は有理数側のスカラー倍として解釈。）

**簡約できない例（整数層の外に出る）**

* (1^{(+1)}/2), (1^{(+1)}/3), (1/1^{(+1)}), (1{(-1)}/1{(+1)}) など。

まとめ　(M) は加法群であり、整数倍が定義できる一方、乗除に関しては閉じない。これを分数化して四則で閉じるのが次節の新実数である。

### 5.4 係数ルール（##/♭♭）と分割不可能性

**演算子の定義**　S⁺(a):=a^{(+1)}（=a##）, S⁻(a):=a^{(−1)}（=a♭♭）。繰り返しは (S⁺)k(a)=a{(+k)}, (S⁻)k(a)=a{(−k)}（k∈N）。

**法則（加法に対する線形性）**

1. a^{(k)} + b^{(ℓ)} = (a+b)^{(k+ℓ)}。
2. m·a^{(k)} = (ma)^{(mk)}（m∈Z）。

**分割不可能性（整数係数性）** **命題 5.4.1**　M には 1/2 段の「半ステップ」は存在しない。厳密には、任意の a∈Q に対し、x∈M で 2x = a^{(+1)} が成り立つものは存在しない。 **証明（ε モデル）**　M≅Q⊕Z·ε と同型視し、x=r+mε（r∈Q, m∈Z）とおく。2x=2r+2mε=ε を満たすには 2r=0→r=0 かつ 2m=1→m=1/2 が必要だが m は整数に限るため矛盾。∎

**系 5.4.2（CR での「分数ステップ」）**　CR では (a{(+1)})/(2·1{(0)}) のような元が存在し、形式的には「半ステップ」を表現できる。ただしこれは M の元ではない。

**注意**　係数（層の段数）は M では常に整数であり、非整数係数は CR の割り算を経て初めて現れる。

### 5.5 命題（加法との整合と Z 作用）

**主張** (A) 任意の a,b∈Q, i,j∈Z について、a^{(i)} + b^{(j)} = (a+b)^{(i+j)}（M の定義に一致）。 (B) S⁺,S⁻ は層指数に対する ±1 のシフトとして振る舞う：S⁺(a^{(k)}) = a^{(k+1)}, S⁻(a^{(k)}) = a^{(k−1)}（拡張定義）。 **証明（形式）**　M の加法は (a,i)+(b,j)=(a+b,i+j) と定義されている（5.1 の直後）。よって (A) は定義から直ちに従う。(B) は S⁺,S⁻ の拡張を (a,k)↦(a,k±1) と置くことで、定義通りに得られる。∎

**系 5.5.1（線形性）** (i) S⁺(x+y)=S⁺(x)+y=x+S⁺(y)。 (ii) S⁻(x+y)=S⁻(x)+y=x+S⁻(y)。 **証明**　x=a^{(i)}, y=b^{(j)} とし、(A)(B) により S⁺(x+y)=(a+b){(i+j+1)}=a{(i+1)}+b^{(j)}=S⁺(x)+y。同様に右辺交換および S⁻ も成立。∎

**系 5.5.2（一様シフトの不変性）** 任意の δ∈Z について、a{(i+δ)}+b{(j−δ)} = a{(i)}+b{(j)}。 **証明**　左辺=(a+b)^{(i+j)}（(A)）、右辺も同じ。∎

**系 5.5.3（差の標準形）** (a^{(i)} − a^{(j)}) = 0^{(i−j)}。 **証明**　(a^{(i)} − a^{(j)}) = (a, i) + (−a, −j) = (0, i−j) = 0^{(i−j)}。∎

### 5.6 命題（Z の M への群作用）

**定義**　作用 φ:Z×M→M を φ(n, a^{(k)}) := a^{(k+n)} で定義する。 **主張**　φ は群作用（0 が単位、加法が合成に対応）。S⁺=φ(1,·), S⁻=φ(−1,·)。 **証明**　(単位) φ(0, a{(k)})=a{(k)}。 (合成) φ(n+m, a{(k)})=a{(k+n+m)}=φ(n, φ(m, a^{(k)}))。よって群作用。S⁺,S⁻ の一致は定義通り。∎

**定義 6.1（新実数）**　新実数を、(M) の分数として定める：

**同値関係（正規化）**

1. ( )（(m{0})）、
2. 分母は正規形に整える（分母の有理成分は正、層係数は整数）、
3. 既約化を施す。

**演算**（四則で閉じる）：

**順序**　(M) の同型を通じ、(>0) を正とみなす辞書式順序を () に拡張する。

**埋め込みと可算性**　() は自然に埋め込まれ、() は可算（例えば () からの符号化）。

* 例：(1=)、(2=)、(0=) など。

注意　「従来の無理数」との**値一致を主張するものではない**。ここでの “無理数相当” は「有理数でない元」という**分類**を指す。

### 6.2 補題（ε 正規形）

**主張**　正規形の分母 y が正（Q の有理成分が正）である CR の元 x/y に対し、一意な有理数対 (A,B)∈Q×Q が存在して x/y = A + B·ε と表せる。具体的に、x=a^{(k)}, y=c^{(n)}（c>0）とすると、 A = a/c, B = (k·c − a·n)/c^2。 **証明（形式）**　( a + kε )/( c + nε ) に ( c − nε )/c を右から掛け、ε^2=0 を用いる： ( a + kε )/( c + nε ) = ( a + kε )·( c − nε )/c^2 = ( ac + ( kc − an )ε )/c^2 = (a/c) + ((kc − an)/c^2)ε。係数比較で一意。∎

### 6.3 定義（CR の順序の具体化と NF 写像）

NF:CR→Q×Q を NF(x/y)=(A,B) とする（6.2）。CR の順序 < を次で定義： (A,B) < (C,D) ⇔ [A<C] または [A=C かつ B<D]（辞書式）。 この定義は良定義であり、CR は全順序集合となる。

### 6.4 命題（埋め込みの順序保存）

**主張** (i) ι\_M:M→CR, ι\_M(x)=x/1^{(0)} は単射かつ順序埋め込み。NF(ι\_M(a^{(k)}))=(a,k)。 (ii) ι\_Q:Q→CR, ι\_Q(a)=a{(0)}/1{(0)} も単射かつ順序埋め込み。NF(ι\_Q(a))=(a,0)。 **証明**　6.2 より直ちに従う。∎

### 6.5 命題（演算整合：NF での加法・積・逆元）

NF(x)=(A,B), NF(y)=(C,D) とする。 (i) NF(x±y)=(A±C, B±D)。 (ii) NF(x·y)=(AC, AD+BC)。 (iii) A≠0 のとき NF(x^{-1})=(1/A, −B/A^2)。 **証明**　ε^2=0 による逐次展開（(A+Bε)±(C+Dε)、(A+Bε)(C+Dε)、(A+Bε)^{-1} の公式）に一致。∎

### 6.6 命題（順序保存・単調性の CR への継承）

**主張** (1) x<y ⇒ x+z < y+z（任意の z∈CR）。 (2) z の NF が (C,D) で C>0 なら、x<y ⇒ x·z < y·z。特に、y>0（NF で定数項>0）なら x/y < x’/y ⇔ x<x’。 (3) 0<x<y かつ NF(x)=(A,·), NF(y)=(C,·) で A>0,C>0 なら 1/y < 1/x（正の範囲での逆数の反転）。 **証明（形式）**　NF に移して辞書式順序で比較する。 (1) (A,B)<(C,D) なら (A+E,B+F)<(C+E,D+F)。 (2) (A,B)<(C,D) と C\_z:=Cz>0 のとき、(AC\_z, A D\_z + B C\_z) と (CC\_z, C D\_z + D C\_z) を比較し、定数項 AC\_z < CC\_z により結論。分母正の比較は x/y と x’/y を同様に展開して定数項の比較に帰着。 (3) x,y の定数項がともに正なら、(A,*)<(C,*) ⇒ 1/C < 1/A。NF の逆元公式 (iii) より結論。∎

**注意 6.6.1**　C<0 の元での乗法は順序を反転させる（符号規則）。

**定義 7.1（新複素数）**　(a,b) に対し、

**演算**（行列表現により従来の複素演算に一致）

* 和：(((a,-b),(b,a))+((c,-d),(d,c))=((a+c,-(b+d)),(b+d,a+c)))
* 積：(((a,-b),(b,a))((c,-d),(d,c))=((ac-bd, -(ad+bc)),(ad+bc, ac-bd)))
* 単位元：(1=((1,0),(0,1)))、虚数単位：(i:=((0,-1),(1,0)))、(i^2=-1)

## 8. 数の包含関係

付記　(M, , ) は本稿独自の構成。新四元数や八元数への拡張も可能。

## コラム：小数の表現力について

有限小数はもちろん、循環小数（例：0.333…）は記号「…」を併用すれば**人間可読**としては表現できるが、**厳密な数値**としての同一視は、採用する体（ここでは ()）の規約に依存する。本稿では、従来の実数論で (0.999=1) とされる事実を**採用しない**（1♭♭ という**左隣の同値類**として扱う）。

## 付録A：λ計算インタプリタ実装へのメモ

* 本章のデータ型：
  + Nat := repeat f（0=f(), succ(n)=f(n)）
  + Int := (sgn∈{0,1}, Nat)
  + Rat := (Int, Int≠0) with normalization
  + Rel := Z（…♭♭, a, a##, … の段数）
  + M := (Rel, Rat) ただし Rel は整数層、順序は辞書式
  + CR := Frac(M)（整数倍正規化＋既約化）
* 書式規範：式途中の改行可、式末に ;、コメントは ; 以降。
* 例（a=5 の右隣の代表列）：
  + ((1·5+1)/1) = 6/1; ((2·5+1)/2) = 11/2; … は単調減少で (5) に近づく代表。

## 付録B：例示（抜粋）

**右隣・左隣の不等式**　(a^{(-2)} < a^{(-1)} < a < a^{(+1)} < a^{(+2)})。

**“追加・除去”ができる等式**　(1^{(-1)} + 1^{(+1)} = 2), (0{(+2)}-0{(+3)}=0^{(-1)})。

**簡約不能の例**　(1^{(+1)}/2), (1^{(+1)}/3) ほか。

（以上）