Institut Galilée - Université Paris 13 Algorithmique de graphes : TP sur la représentation des graphes par liste de successeurs

Durée prévue : 2 séances d'1h30 pour les parties 1 à 3 +2 séances d'1h30 pour la partie 4.
Les objectifs de ce sujet de TP sont :

Révisions de C listes chaînées ;

Structures de données représentation des graphes par listes de successeurs ;

Algorithmique application des algorithmes de parcours.

IMPORTANT : Ce sujet est plus ou moins facile selon votre habitude des listes chaînées. Mais il est très important car il introduit la bibliothèque `graphe` dans sa version finale, celle que vous utiliserez jusqu'à la fin du module. Il est recommandé de LIRE ATTENTIVEMENT L'ÉNONCÉ et de prendre son temps pour bien comprendre la représentation par liste de successeurs. Certaines questions ne nécessitent pas que vous codiez, elles sont aussi importantes que les autres. Ne vous jetez pas sur vos claviers ! Sortez plutôt des feuilles de brouillon et de quoi noter !

1 Mise en place

Créer un répertoire dédié à ce sujet de TP, télécharger l'archive correspondante sur l'ENT (`tp3_fichiers.tar.gz`) et l'extraire dans ce répertoire. Vous devriez voir les fichiers suivants :

`graphe-4.h`	nouvelle version de l'interface de la bibliothèque graphe
`graphe-4.c`	fichier source correspondant
`test-1.c`	première fonction `main` de test
`test-2.c`	deuxième fonction `main` de test
`test-3.c`	troisième fonction `main` de test
`test-4.c`	quatrième fonction `main` de test
`Makefile`	pour compiler ce petit monde sans effort

Taper la commande `make`, pour vérifier qu'il n'y a pas d'erreur de compilation (bien que les programmes produits ne soient pas intéressants).

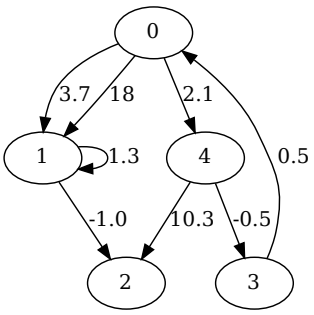
2 Listes de successeurs

2.1 Principe de la représentation

La plupart des algorithmes sur les graphes sont plus efficaces lorsque ceux-ci sont représentés avec des listes de successeurs plutôt qu'avec une matrice d'adjacence.

Pour chaque sommet, on dresse la liste de ses successeurs (éventuellement répétés en cas d'arcs/arêtes multiples), avec, dans le cas d'un graphe arc/arête-valué, la valeur de l'arête.

Prenons l'exemple du graphe orienté et arête-valué G suivant :



sommet v	successeurs, avec valeur de l'arc associée
0	$(1, 3.7)$; $(1, 18.)$; $(4, 2.1)$
1	$(2, -1)$; $(1, 1.3)$
2	
3	$(0, 0.5)$
4	$(3, -0.5)$; $(2, 10.3)$

Remarquer que, par rapport à la représentation par matrice d'adjacence :

1. l'occupation en mémoire est proportionnelle au nombre d'arêtes (et non au carré du nombre de sommets), ce qui peut être un réel avantage pour les graphes peu denses (c'est-à-dire qui ont beaucoup moins que n^2 arêtes) ;
2. on peut considérer des arcs ou arêtes multiples de valeurs différentes.

Autre remarque : nous n'avons mis aucune contrainte sur l'ordre de la liste des successeurs.

Dans le cas de graphes non orientés, un successeur du sommet v est simplement un *voisin* du sommet v.

Question 1:

1. Donner les listes de successeurs du graphe non orienté complet à 4 sommets K_4 (où les valeurs associées aux arêtes sont arbitrairement fixées à 1.0).
2. Dans un graphe non orienté, combien de fois chaque arête est-elle présente dans les listes de successeurs ? Que dire des boucles ?

--- * ---

Pour implémenter ces listes de successeurs en C, nous allons utiliser un tableau de listes chaînées.

Par soucis de généralité, la bibliothèque `graphe-4` considère que tous les graphes sont arc/arête-valués. Lorsqu'on traite des graphes qui ne le sont pas, il suffit d'ignorer les valeurs des arcs/arêtes et de les fixer toutes à une constante arbitraire (1.0 semble un bon choix).

2.2 Les maillons de successeurs

Un maillon de successeur contient trois données :

sommet de type `int`, le successeur du sommet courant ;

valeur de type `double`, la valeur (suivant le contexte, le coût, la capacité, ...) de l'arc/arête allant du sommet courant à son successeur ;

suivant un pointeur vers le prochain maillon de successeur du sommet courant ou bien le pointeur nul (`NULL`) si c'est le dernier successeur de la liste.

Ceci est mis en œuvre dans le type `msuc` (pour « maillon de successeur ») suivant :

```
typedef struct msuc {
    int sommet;
    double valeur;
    struct msuc *suivant;
} msuc;

msuc *msuc_suivant(msuc *m);
int msuc_sommet(msuc *m);
double msuc_valeur(msuc *m);
```

Les fonctions `msuc_suivant`, `msuc_sommet` et `msuc_valeur` sont simplement des accesseurs pour les différents champs de la structure.

La figure 1 donne une représentation schématique de la liste des successeurs du sommet 0 dans le graphe G ci-dessus (les adresses sont fantaisistes).

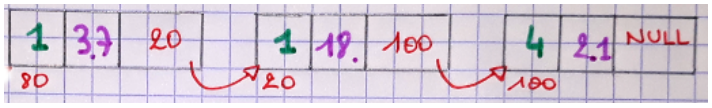


FIGURE 1 – Schéma d'une liste de successeurs en mémoire

Question 2: Donner, en fonction de la taille des `int`, des `double` et des pointeurs, la taille d'un maillon de successeur, puis de toute la liste des successeurs d'un sommet.

--- * ---

2.3 Le tableau de pointeurs vers des maillons de successeurs

On stocke dans un tableau `tab_sucs` à n éléments, pour chaque sommet i du graphe, l'adresse `tab_sucs[i]` de son premier maillon de successeur (ou le pointeur `NULL` si la liste de ses successeurs est vide).

La figure 2 représente ce tableau ainsi que les listes de tous les successeurs du graphe G considéré en début d'énoncé. Le type graphe est maintenant défini par la structure suivante :

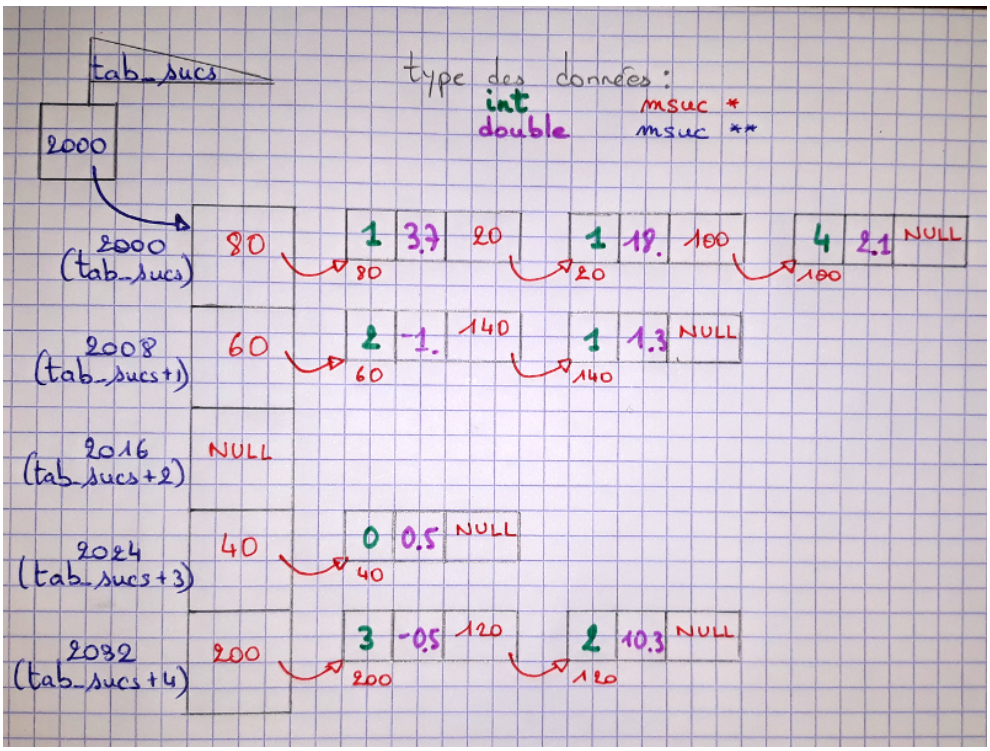


FIGURE 2 – Schéma d'une liste de successeurs en mémoire

```c
struct s_graphe {
    int n;/* nombre de sommets du graphe (doit être >=0) */
    int m;/* nombre d'arêtes du graphe */
    msuc **tab_sucs;/* tableau de pointeurs vers les listes de successeurs du ↩
   graphe */
    int est_or;/* 1 si le graphe est orienté, 0 sinon */
};
typedef struct s_graphe graphe;
```

Question 3:

1. Pour un graphe orienté, donner en fonction de n, de m et des tailles des `int`, des `double` et des pointeurs, l'occupation totale en mémoire d'un graphe avec cette représentation.
2. Modifier votre formule pour un graphe non orienté.

--- * ---

3 Enfin, on code !

3.1 Initialisation et ajout d'arc pour un graphe orienté

Question 4: Définir dans le fichier `graphe-4.c` la fonction

```
int graphe_stable(graphe* g, int n, int est_or);
```

qui initialise le graphe d'adresse `g` au graphe à `n` sommets, **sans arc/arête**, non orienté si `est_or` vaut 0 et orienté sinon.

--- * ---

Question 5: Définir la fonction

```
int graphe_ajouter_arc(graphe *g, int v, int w, double val);
```

qui prend comme arguments l'adresse `g` d'un graphe, qu'on suppose *sans le vérifier* orienté, deux sommets `v` et `w` ainsi qu'une valeur `val` et ajoute l'arc (v, w), de valeur `val` au graphe, c'est-à-dire ajoute un maillon successeur à la liste des successeurs du sommet v.

Ce nouveau maillon apparaîtra, pour un soucis d'efficacité, en début de liste.

La valeur de retour est -1 si l'allocation mémoire pour le nouveau maillon a échoué, 0 sinon. Penser à mettre à jour le nombre d'arcs du graphe.

--- * ---

Question 6: Définir la fonction

```
void graphe_detruire(graphe *g);
```

qui libère la mémoire allouée pour tous les maillons de successeurs ainsi que pour le tableau `tab_sucs`.

--- * ---

Question 7: Tester ces premières fonctions en compilant et en exécutant le programme `test-1`. Vous devriez voir apparaître à l'écran le graphe orienté donné en début de sujet (si tel n'est pas le cas, il s'agit de comprendre pourquoi et compléter le code en conséquence).

Vérifier la bonne gestion de la mémoire en lançant ce programme avec l'utilitaire `valgrind`.

--- * ---

3.2 Initialisation et ajout d'arête pour un graphe non orienté

Question 8: Écrire la définition de la fonction

```
int graphe_ajouter_arete(graphe *g, int v, int w, double val);
```

qui ajoute l'arête $\{v, w\}$ de valeur `val` au graphe, supposé non orienté, d'adresse `g` et retourne -1 en cas d'échec d'allocation mémoire pour le ou les nouveaux maillon(s) et 0 sinon.

--- * ---

Question 9: Tester, en compilant et en exécutant le programme `test-2` votre fonction d'ajout. Vous devriez voir apparaître à l'écran le graphe complet non orienté K_4.

--- * ---

3.3 Accesseurs en lecture

Les accesseurs en lecture de la bibliothèque `graphe-4` sont les suivants :

```
int graphe_est_or(graphe *g); /* déjà définie */
int graphe_get_n(graphe* g); /* déjà définie */
int graphe_get_m(graphe* g); /* défà définie */
msuc *graphe_get_prem_msuc(graphe *g, int v); /* à faire ! */
int graphe_get_multiplicite_arc(graphe* g, int v, int w); /* à faire ! */
int graphe_get_multiplicite_arete(graphe* g, int v, int w); /* à faire ! */
int graphe_get_degre_sortant(graphe* g, int v); /* à faire ! */
int graphe_get_degre_entrant(graphe* g, int v) /* à faire ! */
int graphe_get_degre(graphe* g, int v); /* à faire ! */
```

Comme indiqué ci-dessus, les trois premiers, évidents, sont déjà écrits. Vous avez en outre déjà dû écrire le quatrième afin de pouvoir dérouler correctement les premiers tests.

Question 10:

1. Définir la fonction

   ```
   int graphe_get_multiplicite_arc(graphe *g, int v, int w);
   ```

   qui retourne le nombre d'arcs d'extrémité initiale `v` et d'extrêmité terminale `w` dans le graphe d'adresse `g`, supposé orienté.

   Consigne : utiliser les fonctions `graphe_get_prem_msuc`, `msuc_sommet` et `msuc_suivant`.

2. En utilisant la fonction précédente, définir la fonction

   ```
   int graphe_get_multiplicite_arete(graphe *g, int v, int w);
   ```

3. Que dire de la complexité de votre algorithme ? Comparer avec celui utilisé lorsque le graphe est représenté par une matrice d'adjacence.

--- * ---

Question 11:

1. Définir la fonction

   ```
   int graphe_get_degre_sortant(graphe* g, int v);
   ```

   en utilisant la liste des successeurs de `v`. Pour un graphe non orienté, le résultat est simplement le degré du sommet `v`.

   Que dire de la complexité de cet algorithme ? Comparer avec le cas où le graphe est représenté par sa matrice d'adjacence.

2. Mêmes questions pour la fonction

   ```
   int graphe_get_degre_entrant(graphe* g, int v);
   ```

Que pourrions-nous faire pour en améliorer la complexité dans le cas orienté ?

3. Définir la fonction

```
int graphe_get_degre(graphe* g, int v);
```

Consigne : on pourra faire appel aux fonctions précédentes, en prenant garde toutefois dans le cas des graphes non orientés d'adopter un algorithme de complexité convenable.

--- * ---

Question 12: Tester ces accesseurs à l'aide des programmes `test-3` (cas orienté) et `test-4` (cas non orienté). Dans les deux cas, le graphe est celui représenté en début d'énoncé (en oubliant l'orientation des arcs pour le cas non orienté).

--- * ---

3.4 Parcours des arcs ou des arêtes

Question 13: On fait le bilan :

1. Comment parcourir les arcs ou arêtes issus du sommet `v` ?
2. Commet parcourir tous les arcs d'un graphe orienté ? Toutes les arêtes (une fois chaque arête) d'un graphe non orienté ?
3. Comparer avec le cas d'un graphe représenté par sa matrice d'adjacence.

--- * ---

3.5 Suppressions d'arcs ou d'arêtes

Question 14:

1. Définir la fonction

```
int graphe_supprimer_arc(graphe *g, int v, int w, double val);
```

qui supprime, s'il en existe, un arc d'extrémité initiale `v`, d'extrémité terminale `w` et de valeur `val` dans le graphe d'adresse `g`. En cas de succès (un tel arc existe), la fonction retourne `0`. Si un tel arc n'existe pas, la fonction ne modifie pas le graphe et retourne `-1`.

On veillera à libérer la mémoire désormais inutile.

2. Définir la fonction

```
int graphe_supprimer_arete(graphe *g, int v, int w, double val);
```

qui traite le cas d'un graphe non orienté, en utilisant la fonction précédente.

--- * ---

4 Parcours

Enfin, on exploite les fonctions de la bibliothèque pour faire tourner des algorithmes de graphe.

4.1 Mise en place

La bibliothèque a quelque peu évolué. Vous pouvez récupérer la nouvelle archive sur l'ent, avec :
— des fonctions de test pour les fonctions de suppression d'arc et d'arrête (fichiers `test-5.c` et `test-6.c`) ;
— une bibliothèque `graphe-4` (fichiers `graphe-4.h` et `graphe-4.c`) révisée puisqu'elle intègre de nouvelles fonctions à implémenter, mais aussi parce que la structure de maillon et ses fonctions de manipulation sont externalisées dans une bibliothèque dédiée ;
— deux bibliothèques `msuc` (maillon dans une liste de successeurs) et `vlist` (liste de sommets) ;
— des fonctions de test pour les deux premières applications des parcours qu'on vous demande de coder (fichiers `test-7.c` et `test-8.c`) ;
— un fichier `Makefile` pour le programme test `test-7` (dont vous pouvez vous inspirer pour les autres tests à réaliser).

À noter : la bibliothèque `vlist` est introduite pour gérer la liste d'exploration des algorithme de parcours. Tant qu'à faire, on s'appuie sur la structure de maillon déjà introduite pour représenter les listes de successeurs, même si ces maillons contiennent un champ `val` non exploité dans le cadre des parcours.

Consigne : pour les fonctions des exercice précédents de la bibliothèque `graphe-4`, vous pouvez indifféremment repartir du fichier fourni ou de vos propres fonctions.

4.2 C'est parti !

Question 15: Déclarer et définir une fonction `graphe_est_biparti` qui prend en entrée un graphe et en cas de succès, renvoie 1 si le graphe est biparti et 0 sinon (en cas d'échec la fonction renvoie -1).

Tester cette fonction à l'aide du programme `test-7`.

--- * ---

Question 16: Déclarer et définir une fonction `graphe_est_sanscircuit` qui prend en entrée un graphe orienté et en cas de succès, renvoie un tableau associant à chaque sommet son rang dans un certain ordre topologique si le graphe est sans circuit et NULL sinon. La fonction prend également en paramètre l'adresse d'un entier dont la valeur en sortie de fonction doit être 0 en cas de succès et -1 en cas d'échec.

Tester cette fonction à l'aide du programme `test-8`.

--- * ---

Question 17:

1. Déclarer et définir une fonction `graphe_cc` qui prend en entrée un graphe, et renvoie un tableau associant à chaque sommet du graphe un numéro de composante connexe (`NULL` en cas de problème d'allocation mémoire).
2. Déclarer et définir une fonction `graphe_cfc` qui prend en entrée un graphe orienté, et renvoie un tableau associant à chaque sommet du graphe un numéro de composante fortement connexe (`NULL` en cas de problème d'allocation mémoire).
3. Concevoir et écrire deux programmes (un premier pour `graphe_cc` et un autre pour `graphe_cfc`) permettant de tester ces fonctions.

--- * ---