Álgebra de Tablas

Versión simplificada de apunte del 2020 creado por Francisco Ziliani con aportes de Matías Bordone.

Introducción

La forma clásica de enseñar fundamentos teóricos de consultas de bases de datos es el Algebra Relacional (AR). En esencia, el AR es un conjunto de operaciones que describen el resultado de realizar una consulta en una base de datos relacional. Usualmente se la denomina de tipo operacional o procedimental, a diferencia del Cálculo Relacional (CR) que es de tipo declarativo. Sin embargo, a la hora de modelar fehacientemente el tipo de consultas que se realizan en una base de datos, tanto AR como CR tienen limitaciones.

Por ejemplo, el AR tiene como base la teoría de conjuntos, lo que no permite distinguir múltiples ocurrencias de un registro en una tabla, ni sobre el orden que tienen los registros, elementos que están muy presentes en las bases de datos reales. Respecto de la imposibilidad de tener registros duplicados, por ejemplo, los operadores de agrupamiento que permiten calcular valores en una tabla (sumatorias, promedios, etc.) son incorporados en el AR "por la ventana", puesto que necesariamente necesitan operar sobre conjuntos con duplicados.
Por este motivo, aunque menos difundido en la literatura, existe también la versión de AR con multiconjuntos, es decir, conjuntos con duplicados. Pero esta definición también tiene una limitante: al no mantener el ordenamiento de los datos, no es posible aplicar optimizaciones que se beneficien de este conocimiento. Por ello, desde la cátedra de Bases de Datos nos proponemos redefinir los operadores del AR a través de operaciones sobre listas de tuplas en vez de conjuntos de tuplas, en una versión levemente inspirada por el trabajo [1].

Para esto vamos a hacer uso de los conocimientos de programación funcional sobre listas que se han utilizado en otras materias. Utilizaremos a lo largo de este documento la notación de Haskell. Aquí un breve repaso.

Listas y sus operaciones

Las listas se escriben como `[a, b, c]` o `(a : b : c : [])` para una lista con elementos `a`, `b`, y `c` (usamos la notación `x: []` para indicar "`x` seguido de `[]`"). En nuestro caso, los elementos serán tuplas o valores (`Int`, `String`, `Float`, etc.).

Funciones sobre listas pueden ser definidas por recursión.

Ejemplo 1: (suma de enteros de una lista)

```
1  suma :: [Int] -> Int
2  suma [] = 0
3  suma x : xs = x + suma xs
```

Generalizando esta recursión, podemos pensar en las siguientes ecuaciones para definir una función única f para cada constante c :: A y función h :: A -> A:

```
f [] = c
f (x : xs) = h x (f xs)
```

El esquema anterior se llama *definición por recursión estructural* sobre listas.
Las dos ecuaciones definidas anteriormente pueden ser capturadas por una función simple llamada *foldr* que toma la constante *c* y la función *h* como argumentos; o sea: f = foldr(h, c). La

operación foldr se dice de alto orden porque el primer argumento es una función. La idea de foldr(h, c) es que reemplaza [] por *c*, y : por *h* y luego evalúa el resultado:

Definición 1 (foldr):

```
1  foldr :: (a ->b ->b) -> b -> [a] -> b
2  foldr h, c [] = c
3  foldr h c (x : xs) = h x  (foldr h c xs))
```

En la primera línea de la definición ponemos el tipo de la función. foldr toma tres argumentos. El primero es una función cuyo tipo es a -> b -> b, es decir, toma algo de un tipo polimórfico (que se puede instanciar con cualquier tipo) a. Este tipo corresponde al tipo de los elementos de la lista. Luego, toma algo de otro tipo polimórfico b, y retorna un elemento de este último tipo. Como segundo argumento, foldr toma un elemento de tipo b, que será la constante, y como tercer argumento toma la lista.

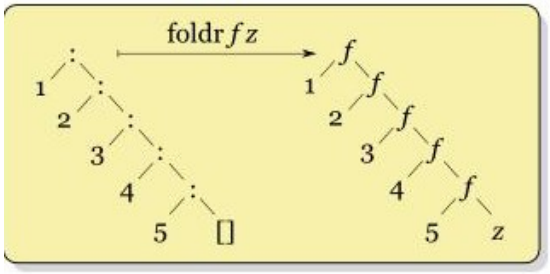


Figure 1: Despliegue de la función foldr

Podemos ver un ejemplo general de foldr f z [1, 2, 3, 4, 5] en la figura 1.
La función foldr es interesante porque permite definir de forma compacta muchas operaciones sobre listas. Como ejemplo, la suma de enteros de una lista anterior se puede definir en una sola línea (se desprende trivialmente de la recursión estructural anterior que *c* = 0 y *h* = +):

```
suma xs = foldr (+) 0 xs
```

Al ejecutar paso a paso con la lista [1,2,3], obtenemos la siguiente sucesión de pasos. Cada paso tiene antepuesto la ecuación utilizada:

```
1 suma [1,2,3]
2 {def. suma}= foldr (+) 0 [1,2,3]
3   {foldr 2}= 1 + (foldr (+) 0 [2,3])
4   {foldr 2}= 1 + (2 + (foldr (+) 0 [3]))
5   {foldr 2}= 1 + (2 + (3 + (foldr (+) 0 [])))
6   {foldr 1}= 1 + (2 + (3 + 0))
7          {+}= 1 + (2 + 3)
8          {+}= 1 + 5
9          {+}= 6
```

Una función útil sobre listas es aquella que aplica una función *f* sobre todos los elementos de la lista. Tradicionalmente esta operación se llama map *f*.

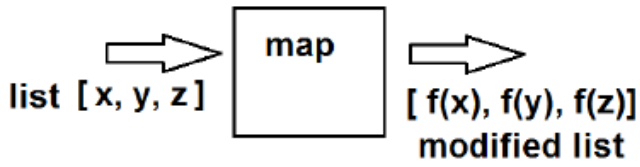


Figure 2: Despliegue de la función **map**.

Definición 2 (ecuaciones de map):
map :: (a -> b) -> list a -> list b
map f [] = []
map f (x : xs) = f x : (map f xs)

Mirando estas ecuaciones como recursión estructural queda claro que:
c = []
h = (\x xs -> fx : xs)

Luego tenemos los elementos para definir map de manera compacta como foldr.
Definición 3 (map):
map :: (a -> b) -> list a -> list b
map f = foldr (\x xs -> fx : xs) []

Definimos el operador de pertenencia, notándolo - ϵ- para indicar que lo utilizaremos Infijo. Tenemos las ecuaciones:

1 -ϵ- :: a -> [a] -> Bool
2 x ϵ[] = False
3 x ϵ y : xs = x == y || x ϵ xs

Mirando estas ecuaciones como recursión estructural queda claro que:
c = False
h = (\a b -> a == x || b)

Luego tenemos los elementos para definir - ϵ- de manera compacta como foldr.
Definición 4 (Pertenece):

1 -ϵ- :: a -> [a] -> Bool
2 *x* ϵ *l* = foldr (\a b -> a == *x* || b) False *l*

Definimos la operación concatenación de listas:

1 ++ : [a] -> [a] -> [a]
2 [] ++ *l*‘ = *l*’
3 (y : *l*’) ++ *l* = y : (*l*’ ++ *l*)

Mirando estas ecuaciones como recursión estructural queda claro que:
c = *l*’
h = :

Usando foldr:
l ++ *l*’ = foldr (:) *l*’ *l*

Una forma de testearla es evaluar esta definición para un caso particular.
[1,2] ++ [3,4]
= {def ++} foldr : [3,4] 1:2:[]
= {def foldr 2} 1: foldr [3,4] 2:[]
= {def foldr 2} 1: (2: foldr [3,4] [])

= {def foldr 1} 1:(2: [3,4])
[1,2,3,4]

Para comprobar propiedades más interesantes vamos a necesitar el principio de inducción sobre listas.

Definición 5 (Principio de inducción sobre listas). Sea *P* una propiedad sobre listas (notaremos P(l) para indicar que *P* se cumple para la lista l). El principio de inducción sobre listas se define como:

$$\forall l :: [a], P(l) \triangleq P([]) \wedge (\forall x :: a, \forall l' :: [a], P(l') \Longrightarrow P(x : l')$$

Dicho en castellano, esta definición nos dice que para probar que toda lista l cumple la propiedad *P*, se debe probar que vale para la lista vacía (caso base), y también que asumiendo que vale para una lista l' (hipótesis inductiva) - vale también para la lista con un elemento *x* extra.

Ejemplo 2: Demostración que la concatenación de listas es asociativa.
Prueba:
Caso base: l = []: ([] ++ l) ++ l' = (por ++ 2) l ++ l' = (por ++ 2) [] ++ (l ++ l').
La hipótesis inductiva es:
HI: (xs ++ l) ++ l' = xs ++ (l ++ l')
El paso inductivo es:
((x:xs) ++ l)++ l' = (por ++ 3) (x : (xs ++ l)) ++ l'
= (por ++ 3) x : ((xs ++ l) ++ l')
= (por HI) x: (xs ++ (l ++ l'))
= (por ++ 3 hacia atrás) (x: xs) ++ (l ++ l')

Con este breve repaso de listas concluido, procedemos ya a hablar de cómo modelar las tablas de una base de datos.

Tablas y sus esquemas:

Nos interesa modelar el concepto de tabla, es decir, un elemento con la siguiente información:

$nombre$			
$campo_1 :: \tau_1$	$campo_2 :: \tau_2$	...	$campo_N :: \tau_N$
v_{11}	v_{12}	...	v_{1N}
v_{21}	v_{22}	...	v_{2N}
⋮	⋮	⋱	⋮
v_{M1}	v_{M2}	...	v_{MN}

Donde los campos son nombres, y tienen un tipo τ que puede ser Int, String, DateTime, etc.

Para cada columna j, los valores v_{ij} (con i ∈ {0, …, M}) deben tener el tipo τ_j . Cuando no sea importante, o se entiendan por contexto, omitiremos los tipos.

El encabezado de la tabla (exceptuando el nombre) es lo que llamaremos *esquema* y usualmente lo notaremos como:

Definición 6 (Esquema de tabla):

$$\mathcal{R} \quad ::= \quad nombre(campo_1 :: \tau_1, campo_2 :: \tau_2, \ldots, campo_N :: \tau_N)$$

Una tabla es, entonces, un esquema y una lista de tuplas que respetan ese esquema. Es decir, cada tupla de la tabla tiene tipo dom(R) = (τ_1 x … x τ_N). Cuando el nombre de un campo no importe o sea anónimo, utilizaremos la notación _:: τ. Cuando una tabla no tenga nombre (por

ser producto de una operación, como veremos más adelante) vamos a omitir el nombre en el esquema. Otra forma que utilizaremos para notar que una tabla nombre tiene un esquema R es nombre :: R.

Luego, indicaremos como t ∈ *nombre* a una tupla de la tabla nombre. La tupla t en este caso representa un registro en la tabla. Vamos a notar las tuplas de la forma tradicional: $(v_1, v_2, \ldots, v_N)$ es la tupla con N valores. Para obtener el valor de una tupla correspondiente a un campo en particular $campo_i$ utilizaremos la notación $t.campo_i$.

Ejemplo 3 (Tablas y tuplas): Las siguientes tablas determinan una base de datos de clientes, donde cada cliente puede tener múltiples teléfonos.

$$\text{cliente}(\text{dni} :: \textbf{Int}, \text{nombre} :: \textbf{String})$$
$$\text{cliente\_telefono}(\text{dni} :: \textbf{Int}, \text{tipo} :: \textbf{String}, \text{teléfono} :: \textbf{String})$$

$$(200200, \text{“Ada Lovelace”}) \in \text{cliente}$$
$$(200200, \text{“Mobile”}, \text{“001-123-32131234”}) \in \text{cliente\_telefono}$$

Definición 7 (Concatenación de tuplas). Sea $t = (a_1, \ldots, a_N)$ y $t' = (b_1, \ldots, b_M)$ dos tuplas de tablas con esquemas R y S respectivamente. Definimos la concatenación de las tuplas t y t' como:

$$(t; t') = (a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_M)$$

El esquema de la concatenación de dos tuplas es la concatenación de los esquemas de las tuplas (R y S).

Operadores

En esta sección brindaremos los operadores del álgebra de tablas, que nos permitirán hacer consultas a una base de datos. Como ejemplo, vamos a estar utilizando las siguientes tablas, donde para facilitar a lectura le vamos a prefijar la primera letra del nombre de la tabla a los números que identifican registros:

profe			
legajo	nombres	apellidos	sueldo
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000
p2	“Patricia”	“Selinger”	6000
p3	“Edgar F”	“Codd”	5500
p4	“Barbara”	“Liskov”	5600

curso		
id	legajo	nombre
c1	p2	“Optimización de Consultas”
c2	p3	“Fundamentos de BD”
c3	p2	“Análisis de Datos”
c4	p1	“Fundamentos del Software”
c5	p4	“Programación OO”

Proyección generalizada

La *proyección* nos permite obtener determinadas columnas de una tabla, opcionalmente realizando algún cálculo sencillo.

Ejemplo 4 (Proyección). Supongamos que queremos obtener los legajos y el sueldo anual (incluyendo aguinaldo) del plantel docente:

$$\text{sueldos\_anuales} = \Pi_{\text{legajo},\ \text{sueldo}*13}(\text{profe})$$

sueldos_anuales	
legajo	_
p1	39000
p2	78000
p3	71500
p4	72800

Como veremos, cuando se realiza un cálculo el nombre de la columna se “pierde”.

La proyección generalizada se puede definir usando ecuaciones.

1 $\Pi_{f_1,\ldots,f_N}([]) = []$
2 $\Pi_{f_1,\ldots,f_N}(x : xs) = (f_1\ x,\ \ldots,\ f_N\ x) : \Pi_{f_1,\ldots,f_N}(xs)$

Pero vemos que estas ecuaciones se corresponden con aquellas de map, luego usamos la siguiente definición:

Definición 8 (Proyección generalizada). Sean $r(R)$ y $f_i :: \text{dom}(R) \to \tau_i$ con $i \in [1, N]$, se define la *proyección generalizada* como:

$$\Pi_{f_1,\ldots,f_N}(r) :: (c_1 :: \tau_1, \ldots, c_N :: \tau_N)$$
$$\Pi_{f_1,\ldots,f_N}(r) = \textbf{map}\ (\backslash t \to (f_1 t,\ \ldots,\ f_N t))\ r$$

Es habitual que queramos extraer una cierta columna de una tabla, con lo que daremos un nombre especial a estas funciones:

Definición 9 (proyector): Diremos que una función *f* :: dom(*R*) -> τ_i es un *proyector* si es de la forma (\t -> t.columna), donde columna :: τ_i es una de las columnas de R. Diremos en este caso que f *proyecta* a columna.

A partir de esta última definición establecemos que los nombres de los campos de la proyección serán:

$$c_i = \begin{cases} \text{columna} & \text{si } f_i \text{ proyecta a columna} \\ \_ & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Vamos a utilizar la notación habitual en la cual las funciones son escritas sobre una tupla implícita. Por ejemplo, diremos $\Pi_{\text{legajo}}(r)$ en vez de $\Pi_{(\backslash t \to t.\text{legajo})}(r)$ o $\Pi_{1.25*\text{sueldo}}(r)$ en vez de $\Pi_{(\backslash t \to 1.25*t.\text{sueldo})}(r)$.

Selección

La selección permite filtrar las tuplas de acuerdo a un criterio dado.

Ejemplo 5 (Selección). De la siguiente forma obtenemos los cursos que enseña Patricia Selinger (por su número de legajo):

$$\text{cursos\_patricia} = \sigma_{\text{legajo}=\text{p2}}(\text{curso})$$

cursos_patricia		
id	legajo	nombre
c1	p2	"Optimización de Consultas"
c3	p2	"Análisis de Datos"

Las ecuaciones de la selección se pueden definir del siguiente modo:
Definición 10 (ecuaciones de selección.)

1 $\sigma_p([]) = []$
2 $\sigma_p(t : r) = \textbf{if}\ p\ t\ \textbf{then}\ t : \sigma_p(r)\ \textbf{else}\ \sigma_p(r)$

Mirando estas ecuaciones como recursión estructural queda claro que:
c = []
h = (\t r' -> if p t then x : r' else r')

Esto nos permite definir en forma compacta selección usando foldr:

Definición 11 (Selección). Sean $r(R)$ y $p :: dom(R) \rightarrow Bool$, se define la *selección* como:

$$\sigma_p(r) :: R$$
$$\sigma_p(r) = foldr\ (\backslash t\ r' \rightarrow if\ p\ t\ then\ x : r'\ else\ r')\ []\ r$$

Notar que podemos utilizar en p cualquier operador booleano (comparación, and/or, etc.).

Producto cartesiano

El producto cartesiano funciona como su homónimo en matemática: dadas dos tablas, junta cada registro de la primera con todos los registros de la segunda. Esto permite hacer consultas interesantes que involucren más de una tabla.

Ejemplo 6 (Producto cartesiano). Si queremos obtener los nombres de les profes que dictan “Análisis de Datos", podemos hacer lo siguiente:

$$\Pi_{nombres}(\sigma_{profe.legajo=curso.legajo \wedge curso.nombre=\text{“Análisis de Datos”}}(profe \times curso))$$

Desmenucemos la consulta, de adentro para afuera. Primero tenemos profe x curso. Como dijimos, esto asocia cada tupla de profe con todas las tuplas de curso, obteniendo el siguiente resultado:

_						
p.legajo	nombres	apellidos	sueldo	id	c.legajo	nombre
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	c1	p2	“Optimización de Consultas”
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	c2	p3	“Fundamentos de BD”
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	c3	p2	“Análisis de Datos”
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	c4	p1	“Fundamentos del Software”
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	c5	p4	“Programación OO”
p2	“Patricia”	“Selinger”	6000	c1	p2	“Optimización de Consultas”
p2	“Patricia”	“Selinger”	6000	c2	p3	“Fundamentos de BD”
...	...	...	...	...	...	...

Para desambiguar la columna legajo agregamos al comienzo el nombre de la tabla (acortado por la primera letra en la figura). Como podemos notar, esta tabla temporal no tiene nombre. Luego el filtro de selección en σ nos pide dos cosas: igualar los legajos, y quedarnos con el curso específico. Aunque el filtro se aplica en simultáneo, vamos a hacerlo por partes para que se entienda mejor. Primero, igualamos los números de legajo, obteniendo:

_						
legajo	nombres	apellidos	sueldo	id	legajo	nombre
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	c4	p1	“Fundamentos del Software”
p2	“Patricia”	“Selinger”	6000	c1	p2	“Optimización de Consultas”
p2	“Patricia”	“Selinger”	6000	c3	p2	“Análisis de Datos”
p3	“Edgar F”	“Codd”	5500	c2	p3	“Fundamentos de BD”
p4	“Barbara”	“Liskov”	5600	c5	p4	“Programación OO”

Luego nos quedamos sólo con el curso “Análisis de datos”:

_						
legajo	nombres	apellidos	sueldo	id	legajo	nombre
p2	“Patricia”	“Selinger”	6000	c3	p2	“Análisis de Datos”

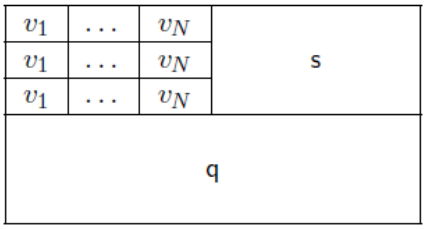
Finalmente, obtenemos el nombre de la profesora:

_
nombres
“Patricia”

Primero definimos el producto cartesiano por medio de ecuaciones:

Definición 11 (ecuaciones de producto cartesiano)
[] × s = []
(t : r) × s = anexar s t (r × s)

Gráficamente, si t = $(v_1, \ldots, v_N)$ y s tiene el tipo indicado arriba, anexar s t q queda como:



Donde anexar es una función que “pega" una tupla dada t a todas las tuplas de la tabla s, concatenando el resultado a la tabla q:

Claramente, la función anexar que sigue esta idea se puede expresar usando map y concatenación de listas:
anexar s x q = map (\t -> (x ; t)) s ++ q

Analizando la recursión estructural del producto cartesiano:
c = []
h = anexar s

Luego, Podemos expresarlo con foldr:

Definición 12 (Producto cartesiano). Sean $r :: (n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$ y $s :: (n'_1 :: \tau'_1, \ldots, n'_M :: \tau'_z M)$. El *producto cartesiano* se define como:

$$r \times s = \text{foldr (anexar } s) \text{ [] } r$$

El tipo queda como $r \times s :: (n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N, n'_1 :: \tau'_1, \ldots, n'_M :: \tau'_M)$. Donde haya conflicto de nombres, se utilizará el nombre de la tabla para desambiguar. Como ejemplo, si hacemos cliente × cliente_telefono con las tablas del ejemplo 3, entonces obtenemos el siguiente esquema:

(cliente.dni :: **Int**, nombre :: **String**, cliente_telefono.dni :: **Int**, tipo :: **String**, teléfono :: **String**)

Si no se pudiera desambiguar (por ejemplo, se utiliza la misma tabla o un resultado parcial sin nombre), entonces se anonimizan los campos en conflicto. Por ejemplo, si hacemos cliente × cliente nos queda el esquema (_ :: **Int**, _ :: **String**, _ :: **Int**, _ :: **String**)

Reunión selectiva

Cuando mostramos el operador × hicimos algo que es muy común: unir tablas que se referencian mediante el o los campos en común. En el ejemplo 6, unimos las tablas mediante el campo legajo. La *reunión selectiva* nos permite fácilmente hacer este tipo de operaciones:
Ejemplo 7 (Reunión selectiva). Podemos escribir la consulta del ejemplo 6 del siguiente modo:

$$\Pi_{\text{nombres}}(\sigma_{\text{curso.nombre}=\text{“Análisis de Datos”}}(\text{profe} \bowtie_{\text{legajo}=\text{legajo}} \text{curso}))$$

La reunión selectiva se describe por medio de los otros operadores. Es importante mencionar que de los campos que se igualan sólo quedan los de la tabla de la izquierda, evitando así tener redundancia.

Definición 13. Sean $r(n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$ y $s(m_1 :: \tau'_1, \ldots, m_M :: \tau'_M)$, definimos la *reunión selectiva* de r y s como:

$$r \ {}_{a_1,\ldots,a_i}\bowtie_{b_1,\ldots,b_i} s :: (n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N, c_1, \ldots, c_{M-i})$$
$$r \ {}_{a_1,\ldots,a_i}\bowtie_{b_1,\ldots,b_i} s = \Pi_{n_1,\ldots,n_N,c_1,\ldots,c_{M-i}}(\sigma_{a_1=b_1 \wedge \ldots \wedge a_i=b_i}(r \times s))$$

donde para $j \in [1, M-i]$, $c_j \in \{m_i, \ldots, m_M\} \setminus \{b_1, \ldots, b_i\}$.

Reunión Natural

La reunión natural nos permite hacer una reunión selectiva con todas las columnas que tengan igual nombre en ambas tablas, algo que es muy utilizado en la práctica. Por ejemplo, podemos simplificar aún más la consulta del ejemplo 6 haciendo:

$$\Pi_{\text{nombres}}(\sigma_{\text{curso.nombre}=\text{“Análisis de Datos”}}(\text{profe} \bowtie \text{curso}))$$

Definición 14 (reunión natural). Sean $r(n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$ y $s(m_1 :: \tau'_1, \ldots, m_M :: \tau'_M)$, definimos la reunión natural de *r* y *s* como:

$$r \bowtie s = r \ {}_{a_1,\ldots,a_i}\bowtie_{a_1,\ldots,a_i} s$$

donde $\{a_1, \ldots, a_i\} = \{n_1, \ldots, n_N\} \cap \{m_1, \ldots, m_M\}$.

Definiciones locales

Cuando se hacen consultas complejas, vamos a utilizar el operador let, que funciona de forma similar a como funciona en Haskell.

Ejemplo 8 (let). El ejemplo 7 puede escribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}&\textbf{let} \ \ \text{profe\_curso} \ = \text{profe} \ {}_{\text{legajo}}\bowtie_{\text{legajo}} \text{curso}\\ &\textbf{let} \ \ \text{pc\_analisis} \ = \sigma_{\text{curso.nombre}=\text{“Análisis de Datos”}}(\text{profe\_curso})\\ &\Pi_{\text{nombres}}(\text{pc\_analisis})\end{aligned}$$

Definición 15 (let). Para facilitarnos un poco las cosas, definiremos el let utilizando la función anónima, y para distinguir fácilmente dónde termina la definición utilizaremos la terminación de línea (aunque en realidad no sea necesaria).

$$\begin{aligned}&\textbf{let} \ \ x = r\\ &s\end{aligned} \quad = (\backslash x \ \rightarrow s) \ r$$

Concatenación

La concatenación de tablas se define como la concatenación de listas vista anteriormente. La única particularidad es que las tablas tienen que cumplir el siguiente requisito:

Definición 17. Se dice que dos esquemas son compatibles si tienen la misma cantidad de campos, con los mismos dominios. Vamos a decir que dos tablas son compatibles si sus esquemas lo son.

Definición 18. Sean $r(n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$ y $s(m_1 :: \tau_1, \ldots, m_M :: \tau_N)$ (notar que son compatibles). Definimos la *concatenación* de r y s como:

$$r{+}{+}s :: (n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$$
$$r{+}{+}s = \textbf{foldr}\ (:)\, s\ r$$

Notar que el resultado queda con el esquema de la tabla izquierda.

Resta

Ya en el ejercicio 9 mencionamos a la resta: _esta permite quitar a una tabla las tuplas que existen en otra tabla. Las condiciones son iguales a las de la concatenación: los esquemas deben ser compatibles, y queda el esquema de la tabla izquierda. Su definición formal es la siguiente:

Definición 19. Sean $r(n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$ y $s(m_1 :: \tau_1, \ldots, m_M :: \tau_N)$, definimos la *resta* de r y s como:

$$r \setminus s :: (n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$$
$$r \setminus s = \sigma_{(\backslash \mathsf{t} \to \mathsf{t} \notin \mathsf{s})}(r)$$

Es decir, seleccionamos de r todas aquellas tuplas que no estén en s.

Intersección

La intersección permite dejar sólo las tuplas coincidentes entre las tablas.

Definición 20. Sean $r(n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$ y $s(m_1 :: \tau_1, \ldots, m_M :: \tau_N)$, definimos la *intersección* de r y s como:

$$r \cap s :: (n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$$
$$r \cap s = \sigma_{(\mathsf{t} \to \mathsf{t} \in \mathsf{s})}(r)$$

Renombramiento

Como hemos visto, hay veces en que aplicar una operación nos hace perder los nombres de las columnas o las tablas. Por ello existe el operador de renombre, que sólo modifica el esquema de una tabla para darle un nuevo nombre, tanto a la tabla en sí como a los campos.

Ejemplo 9 (Ejemplo de renombre). La siguiente consulta nos permite obtener los legajos de los profesores con mayor sueldo. Como es una consulta algo compleja, vamos a utilizar let:

$$\textbf{let}\ \ \mathsf{clixcli} = \rho_{\mathsf{p1}}(\mathsf{cliente}) \times \rho_{\mathsf{p2}}(\mathsf{cliente})$$
$$\textbf{let}\ \ \mathsf{sueldo\_menor} = \sigma_{\mathsf{p1.sueldo} < \mathsf{p2.sueldo}}(\mathsf{clixcli})$$
$$\Pi_{\mathsf{legajo}}(\mathsf{profe}) \setminus \Pi_{\mathsf{p1.legajo}}(\mathsf{sueldo\_menor})$$

Para entender lo que hace esta consulta, primero hacemos los renombres con el operador ρ, que en este caso cambia solo el nombre de la tabla por p1 y p2 (notar que en realidad con un solo renombre basta, pero para ayudar la lectura decidimos cambiar en ambos lados del ×). Luego de hacer el producto nos queda:

clixcli							
p1.legajo	p1.nombres	p1.apellidos	p1.sueldo	p2.legajo	p2.nombres	p2.apellidos	p2.sueldo
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	p2	“Patricia”	“Selinger”	6000
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	p3	“Edgar F”	“Codd”	5500
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	p4	“Barbara”	“Liskov”	5600
p2	“Patricia”	“Selinger”	6000	p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000
p2	“Patricia”	“Selinger”	6000	p2	“Patricia”	“Selinger”	6000
p2	“Patricia”	“Selinger”	6000	p3	“Edgar F”	“Codd”	5500
p2	“Patricia”	“Selinger”	6000	p4	“Barbara”	“Liskov”	5600
...	...	...	...	...	...	...	...

Luego de seleccionar aquellos registros en donde p1.sueldo < p2.sueldo, nos queda:

sueldo_menor							
p1.legajo	p1.nombres	p1.apellidos	p1.sueldo	p2.legajo	p2.nombres	p2.apellidos	p2.sueldo
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	p2	“Patricia”	“Selinger”	6000
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	p3	“Edgar F”	“Codd”	5500
p1	“Benjamin”	“Pierce”	3000	p4	“Barbara”	“Liskov”	5600
p3	“Edgar F”	“Codd”	5500	p2	“Patricia”	“Selinger”	6000
p3	“Edgar F”	“Codd”	5500	p4	“Barbara”	“Liskov”	5600
...	...	...	...	...	...	...	...

Es decir, queda Pierce tres veces por tener el menor sueldo, queda dos veces Codd por tener sueldo menor a Liskov y Selinger, y, lo más importante, no queda ningún registro con Selinger, puesto que es quien cobra más. Luego, al proyectar el legajo, nos quedarán solamente ocurrencias de p1, p3, y p4. Al quitar estas ocurrencias la primera columna de cliente (con el operador \), finalmente obtenemos el resultado:

–
p1.legajo
p2

La definición de renombre es simple: sólo afecta el esquema de la tabla:
Definición 16 (Renombre). Sea r tabla con N columnas de tipos $\tau_1, \ldots, \tau_N$; además, en el esquema de r una columna puede tener o no nombre. Se define el renombre de r así:

$$\rho_{s(n'_1,\ldots,n'_N)}(r) :: s(n'_1 :: \tau_1, \ldots, n'_N :: \tau_N)$$
$$\rho_{s(n'_1,\ldots,n'_N)}(r) = r$$

El nombre de la tabla puede omitirse cuando sólo se quiera renombrar los campos, y utilizaremos la notación $n_i \leftarrow n'_i$ para renombrar sólo el campo n_i dejando el resto de los campos con el mismo nombre.

Remover duplicados

La remoción de duplicados nos permite sacar aquellas tuplas que estén duplicadas en la tabla. Por ejemplo, si queremos obtener los legajos, sin duplicados, de les profes de los cursos, podemos hacer lo siguiente:

$$\upsilon(\Pi_{\text{legajo}}(\text{curso}))$$

Las ecuaciones para remover duplicados son:

1. $\upsilon[\,]=[\,]$
2. $\upsilon(t:r)=\text{if } t \in r \text{ then } \upsilon r \text{ else } t:(\upsilon r)$

Luego tenemos que:

c = []
h = (\t s -> if t ∈ s then s else t : s)
Ahora estamos en condiciones de escribir la remoción de duplicados como foldr.

Definición 21. Sea $r(n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$, definimos la *remoción de duplicados* de r como:

$$v(r) :: (n_1 :: \tau_1, \ldots, n_N :: \tau_N)$$
$$v(r) = \textbf{foldr}\ (\backslash t\ s \rightarrow \textbf{if}\ t \in s\ \textbf{then}\ s\ \textbf{else}\ (t:s))\ []\ r$$

Demostrar para toda a y toda r: $a \in r \iff a \in v(r)$

Agregación

En el ejemplo 9 calculamos el máximo de forma bastante engorrosa. En este apartado vamos a mostrar el operador de agregación, que permite calcular máximos, mínimos, etc. de las columnas de una tabla. Por ejemplo, una forma alternativa de escribir el ejemplo 6 usando agregación es del siguiente modo:

Ejemplo 10 (Ejemplo de agregación).

$$\textbf{let}\ \text{maximo\_salario} = \gamma_{\text{max(salario)}}(\text{profe})$$
$$\textbf{let}\ \text{profe\_max} = \text{profe} \bowtie \rho_{\text{(salario)}}(\text{maximo\_salario})$$
$$\Pi_{\text{legajo}}(\text{profe\_max})$$

Es decir, primero calculamos el salario máximo de la tabla de profes, almacenando el resultado en la tabla *máximo_salario*, para luego unirla con la tabla profe. Esto tiene el efecto de filtrar los profes que no ganen el máximo (puede desenrollar las definiciones para convencerse). Para poder unir la tabla, necesitamos primero hacer el renombre de la columna que contiene el máximo, así tiene el nombre salario.

Definición 22 (funciones de agregación). Funciones de agregación son las siguientes funciones sobre listas:
count:: [a] -> integer, para contar la cantidad de elementos en la lista.
sum: para sumar los valores que deben ser numéricos.
avg: para promediar los valores que deben ser numéricos
min: para obtener el mínimo valor en la lista.
max: para obtener el máximo valor en la lista.

Ejercicio: definir las funciones de agregación sobre listas primero recursivamente y luego con foldr.

Definición 23 (Agregación). Vamos a aplicar las funciones de agregación a columnas de tablas. Dada una tabla *r*, con columna *n*, para decir que se debe aplicar la funcion de agregación *f* a la columna *n* usamos la notación: *f*(*n*). Más precisamente, sea $r(n_1:: \tau_1, \ldots, n_N::\tau_N)$, definimos la agregación como:
$\Upsilon_{f1(a1), \ldots, fm(am)}$ (r) :: (_:: τ'_1 ,…, _::τ'_m)
$\Upsilon_{f1(a1), \ldots, fm(am)}$ (r) = [(f_1 (map (\t-> t.a_1) r), …, f_m (map (\t-> t.a_m) r)]
Donde f_i es función de agregación, o f_i es de la forma: $f \circ v$, para *f* función de agregación (o sea, removemos duplicados y luego aplicamos la función de agregación).

Agrupación

Vimos que con la agregación podemos calcular valores sobre una columna. Aunque esto tiene su utilidad, en general vamos a querer algo más preciso: conocer el valor para un determinado grupo de valores.

Ejemplo 11 (Agrupación). Supongamos que queremos obtener la mayor cantidad de cursos que dictan los docentes. Para esto, necesitaremos calcular la cantidad de cursos dictados por docente, y luego aplicar el máximo:

$$\text{let por\_legajo} = {}_{\text{legajo}}\gamma_{\text{count id}}(\text{curso})$$
$$\text{max\_dictados} = \gamma_{\text{max cant}}(\rho_{(\text{legajo,cant})}(\text{por\_legajo}))$$

Luego de la primera consulta, obtenemos la siguiente tabla:

por_legajo	
legajo	_
p1	1
p2	2
p3	1
p4	1
p5	1

Al tomar el máximo de la segunda columna (renombrada como *cant*), obtenemos el valor final: 2.

Definición 25 (Agrupación). Definimos la agrupación utilizando la misma letra griega Υ), pero precediendo la lista de columnas para agrupar:

$$g_1,\ldots,g_N\gamma_{f_1(n_1),\ldots,f_M(n_M)}(r) = \begin{array}{l}\textbf{let } \mathsf{p} = v(\Pi_{g_1,\ldots,g_N}(r)) \\ \textbf{map } (\backslash \mathsf{t} \to (\mathsf{t};\ \gamma_{f_1(n_1),\ldots,f_M(n_M)}(\sigma_{g_1=t.g_1\wedge\ldots\wedge g_N=t.g_N}(r))[0]))\ \mathsf{p}\end{array}$$

Parece bastante complejo, pero en realidad es bastante simple: primero proyectamos las columnas de agrupación de *r* y le sacamos los duplicados. De este modo, tenemos identificados los grupos sobre los cuales hacer los cálculos f_i. Luego, a cada tupla de la agrupación le anexamos el (único) resultado de la agregación sobre los registros de *r* filtrados para ese grupo en particular.

Ordenamiento

El ordenamiento nos permite ordenar la información de acuerdo a una lista de columnas.

Definición 26 (Ordenamiento). Vamos a especificar el ordenamiento como un simple insertion sort. La función *insert* inserta la tupla *t* en la tabla *r* en la posición que le corresponde: a izquierda las tuplas menores y a derecha las mayores. Luego la ordenación O se define como la inserción ordenada de cada elemento.

$$\textbf{insert}_{a_1,\ldots,a_N}\ \mathsf{t}\ \mathsf{r} = \sigma_{(a_1,\ldots,a_N)<\mathsf{t}[a_1,\ldots,a_N]}(\mathsf{r}) \mathbin{++} [\mathsf{t}] \mathbin{++} \sigma_{(a_1,\ldots,a_N)\geq\mathsf{t}[a_1,\ldots,a_N]}(\mathsf{r})$$

$$\mathrm{O}_{a_1,\ldots,a_N}(\mathsf{r}) = \textbf{foldr}\ (\textbf{insert}_{a_1,\ldots,a_N})\ []\ \mathsf{r}$$

El ordenamiento descendente se define como la reversa del ordenamiento.

Definición 27 (Ordenamiento descendiente).

$$\text{reversa}\ \ \mathsf{r} = \textbf{foldr}\ (\backslash \mathsf{t}\ \mathsf{s} \to \mathsf{s} \mathbin{++} [\mathsf{t}])\ []\ \mathsf{r}$$

$$\mathrm{O}^{>}_{a_1,\ldots,a_N}(\mathsf{r}) = \text{reversa}\ (\mathrm{O}_{a_1,\ldots,a_N}(\mathsf{r}))$$

Cuando queramos ordenar toda la tabla omitiremos la lista de columnas.

Bibliografía

1. P. Buneman, L. Libkin, D. Suciu, V. Tannen, and L. Wong. Comprehension syntax. SIGMOD Rec., 23(1):87-96, Mar. 1994.