Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Вычислительная математика

Лабораторная работа №6

Автор:
Овсянников Михаил Б01-008

ФРТК

Долгопрудный, 2023

Содержание

Цель **3**

Теоретические сведения **3**
Общая задача 3
Описание классического метода Рунге-Кутты 4 порядка 3
Описание многошагового метода Адамса 4 порядка 4

Непосредственно задание **4**
Постановка задачи 4
Результаты 4

Вывод **15**

Цель

Реализовать явные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Использовать методы Рунге-Кутты и многошаговые методы.

Теоретические сведения

Общая задача

Пусть нам дана система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с начальным условием:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Здесь x предполагается одномерной независимой переменной, а y – многомерный вектор-решение.

Требуется численно решить данную систему явными методами. В данной работе будут использоваться классический метод Рунге-Кутты 4 порядка и многошаговый метод Адамса 4 порядка.

Описание классического метода Рунге-Кутты 4 порядка

Данный метод является многостадийным, следующее значение y_{n+1} получается из предыдущего следующим образом:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4),$$

где h – шаг сетки и

$$\begin{aligned} f_1 &= f(x_n, y_n), \\ f_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f_1), \\ f_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f_2), \\ f_4 &= f(x_n + h, y_n + h f_3). \end{aligned}$$

Данный метод имеет 4 порядок точности, однако он является явным, поэтому могут возникнуть проблемы с его устойчивостью.

Описание многошагового метода Адамса 4 порядка

Другим классом методов решения ОДУ и систем ОДУ являются многошаговые методы. Конкретно в этой работе рассматривается метод Адамса четвертого порядка. Выглядит он следующим образом:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{55}{24}f(x_n, y_n) - \frac{59}{24}f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{37}{24}f(x_{n-2}, y_{n-2}) - \frac{3}{8}f(x_{n-3}, y_{n-3})\right).$$

То есть для подсчета новой точки мы используем не только последнюю, но и несколько других до нее. Конкретно здесь для подсчета новой точки мы используем информацию о четырех предыдущих.

Возникает проблема при подсчете второй, третьей и четвертой точки – мы не можем их посчитать данным методом. Выходом является подсчет этих точек другими методами, например, методами Рунге-Кутты, а дальше уже считаем методом Адамса.

Непосредственно задание

Постановка задачи

В качестве упражнения была взята система **VIII.11.1** первой части сборника Аристовой, Лобанова и Завьяловой:

$$\begin{cases} x' = A + x^2y - (B+1)x, \\ y' = Bx - x^2y, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

Здесь $A = 1$, $B \in [1, 5]$ – параметры.
Система является моделью Лефевра-Пригожина «брюсселятор».
Будем решать эту систему следующими методами:

- Классический метод Рунге-Кутты 4 порядка точности
- Многошаговый метод Адамса 4 порядка точности

В последнем методе: нулевая точка задана, первую, вторую и третью посчитаем первым методом, а дальше считаем методом Адамса.

Результаты

В качестве результатов покажем графики зависимостей $x(t)$ и $y(t)$, а также фазовые портреты.

1) $A = 1,\ B = 1.5$

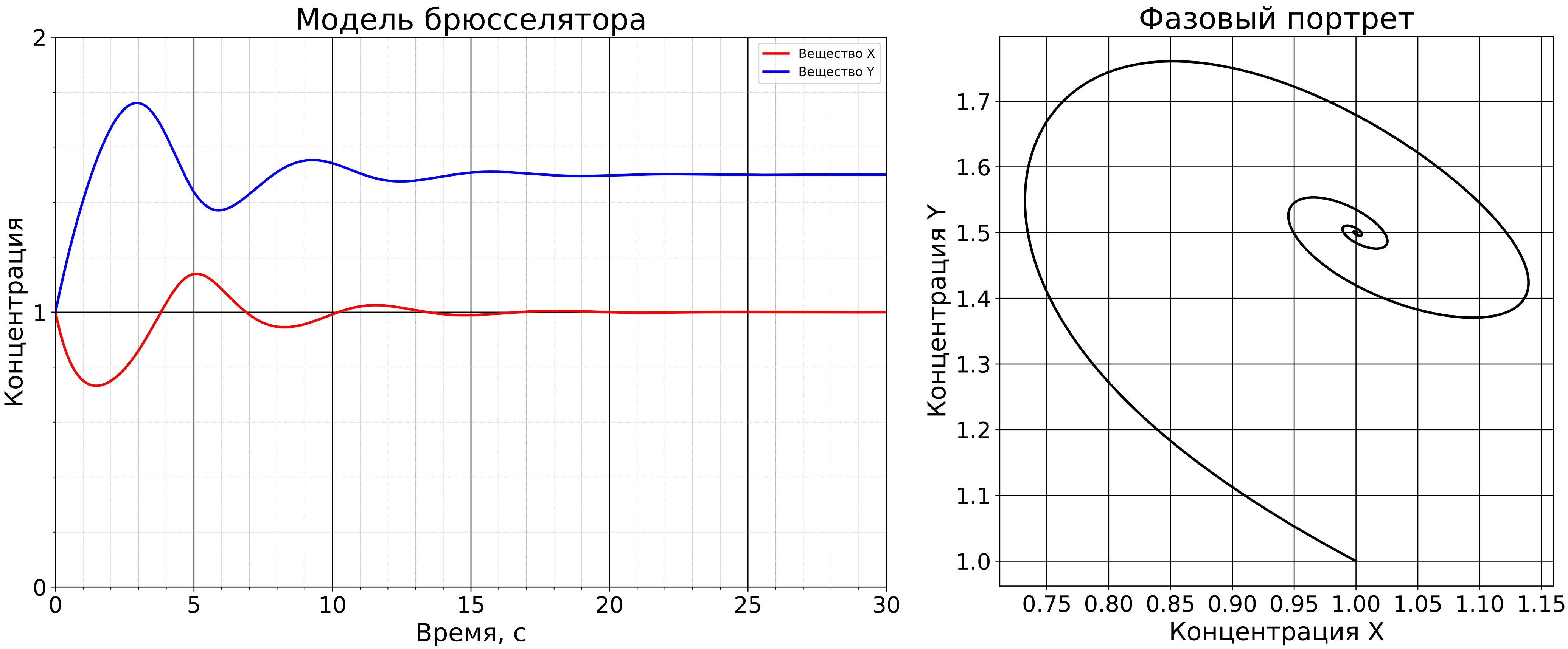

Рис. 1. Решение методом Рунге-Кутты 4 порядка

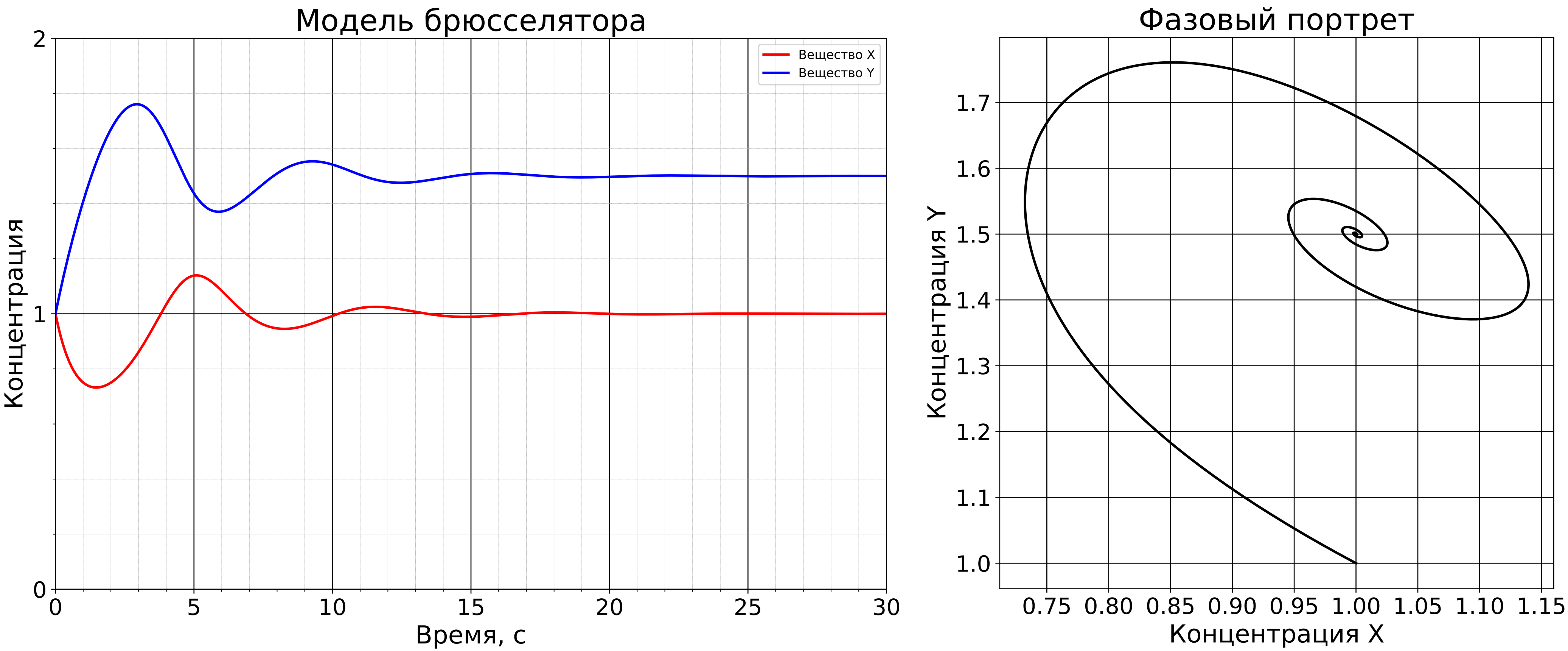

Рис. 2. Решение методом Адамса 4 порядка

2) $A = 1$, $B = 2$

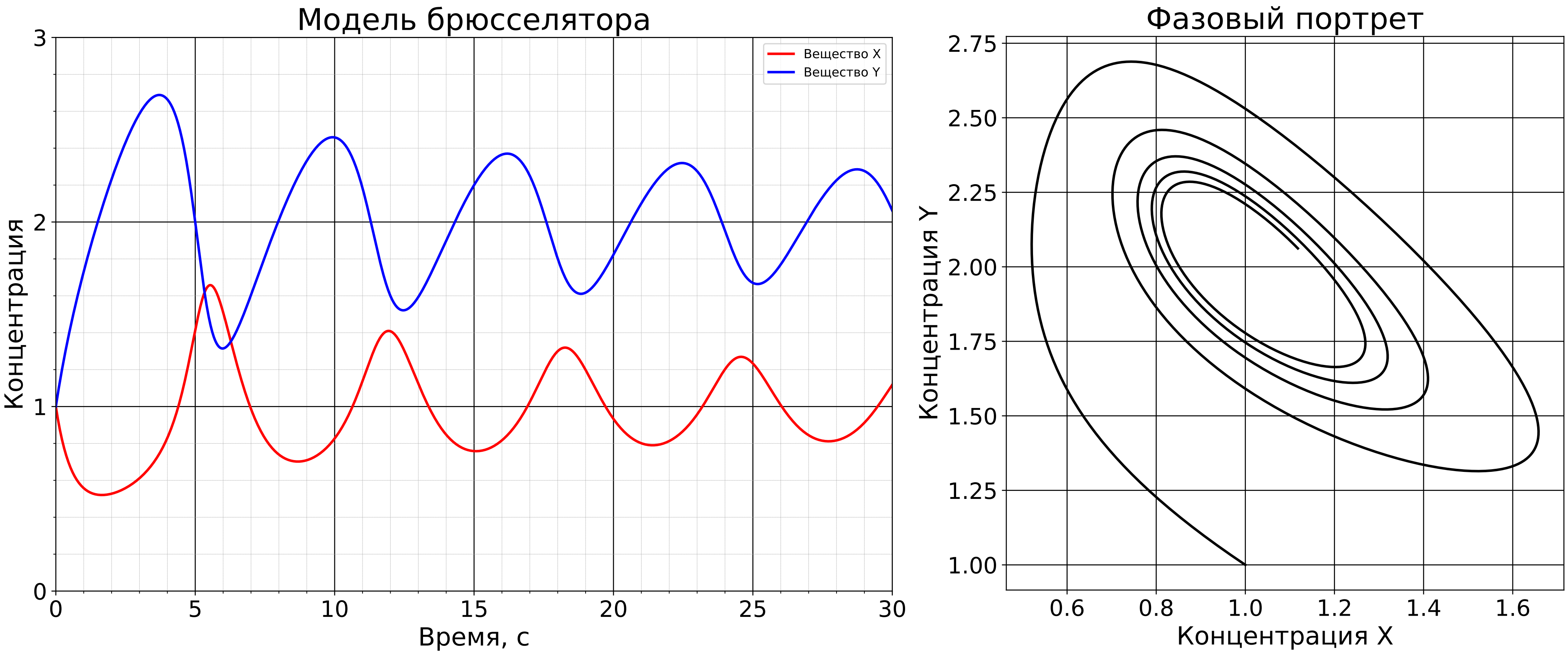

Рис. 3. Решение методом Рунге-Кутты 4 порядка

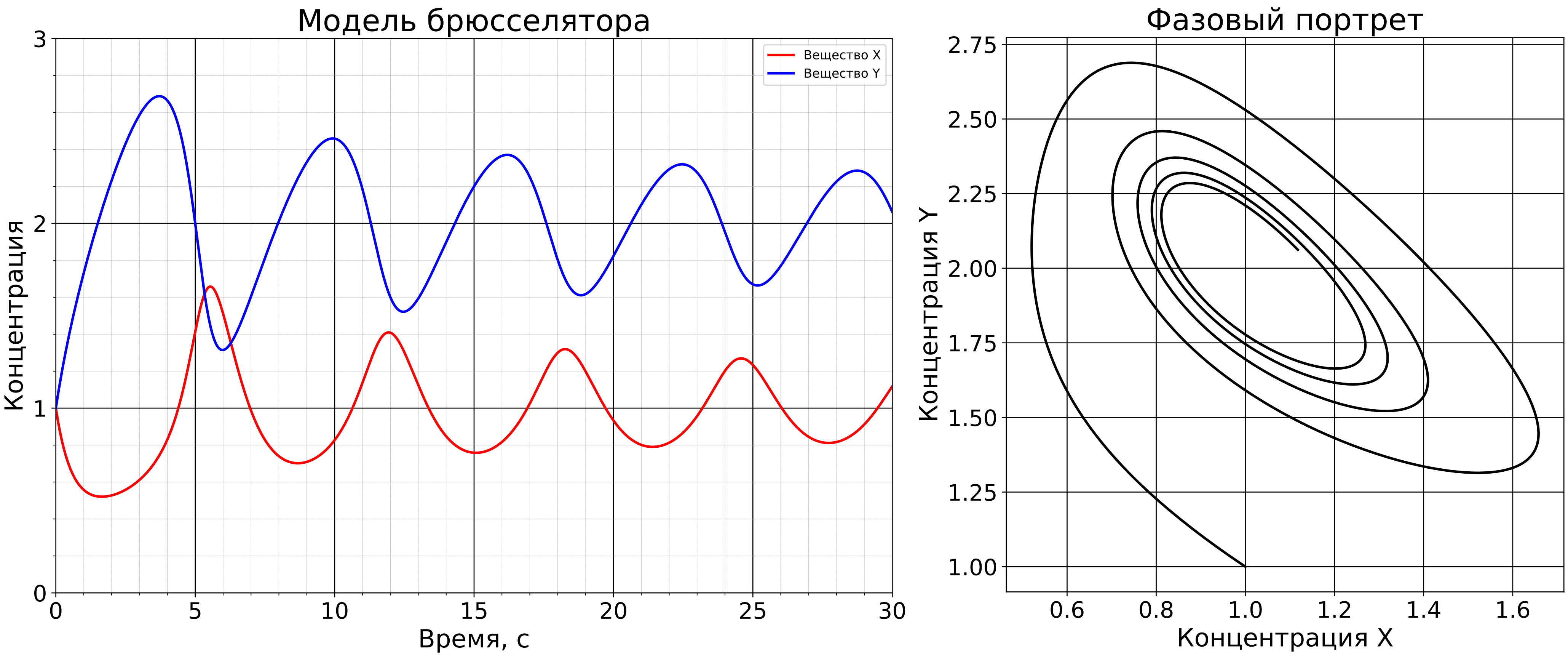

Рис. 4. Решение методом Адамса 4 порядка

3) $A = 1,\ B = 3$

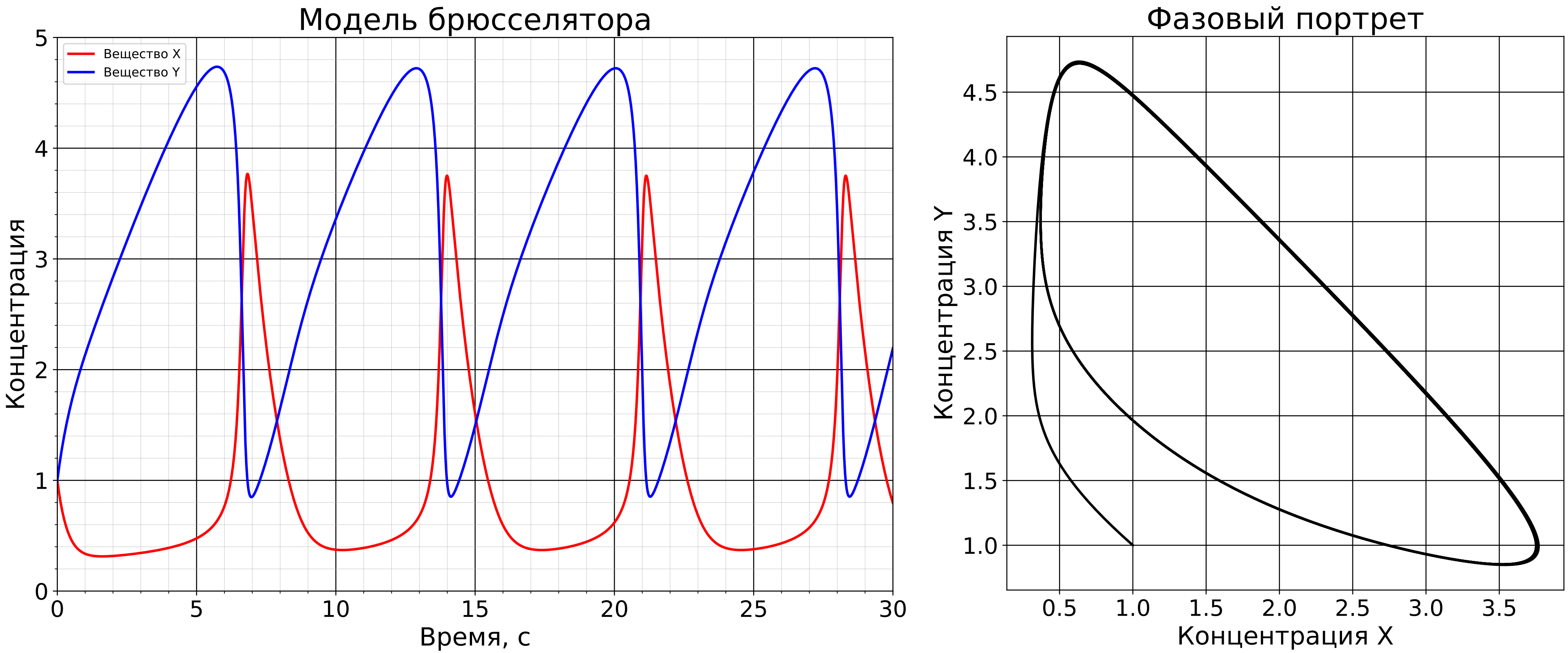

Рис. 5. Решение методом Рунге-Кутты 4 порядка

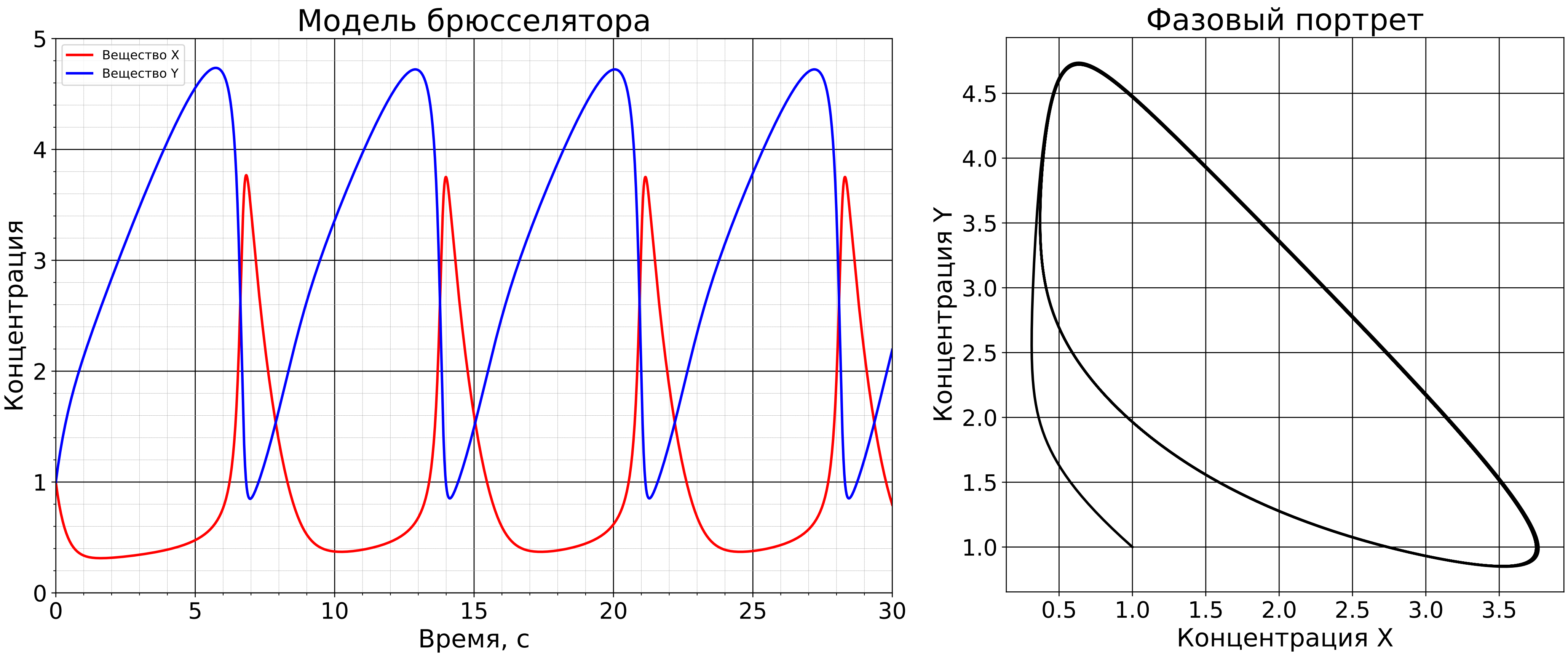

Рис. 6. Решение методом Адамса 4 порядка

4) $A = 1$, $B = 4$

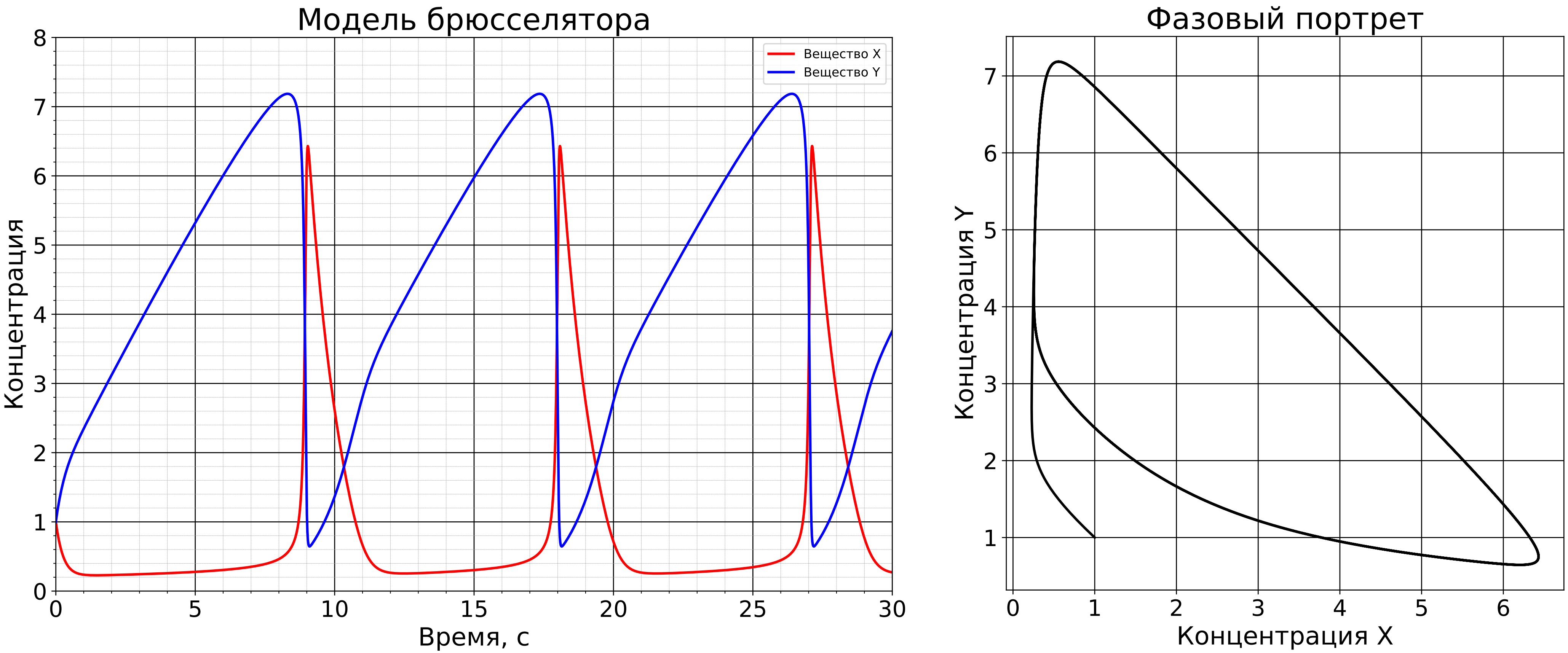

Рис. 7. Решение методом Рунге-Кутты 4 порядка

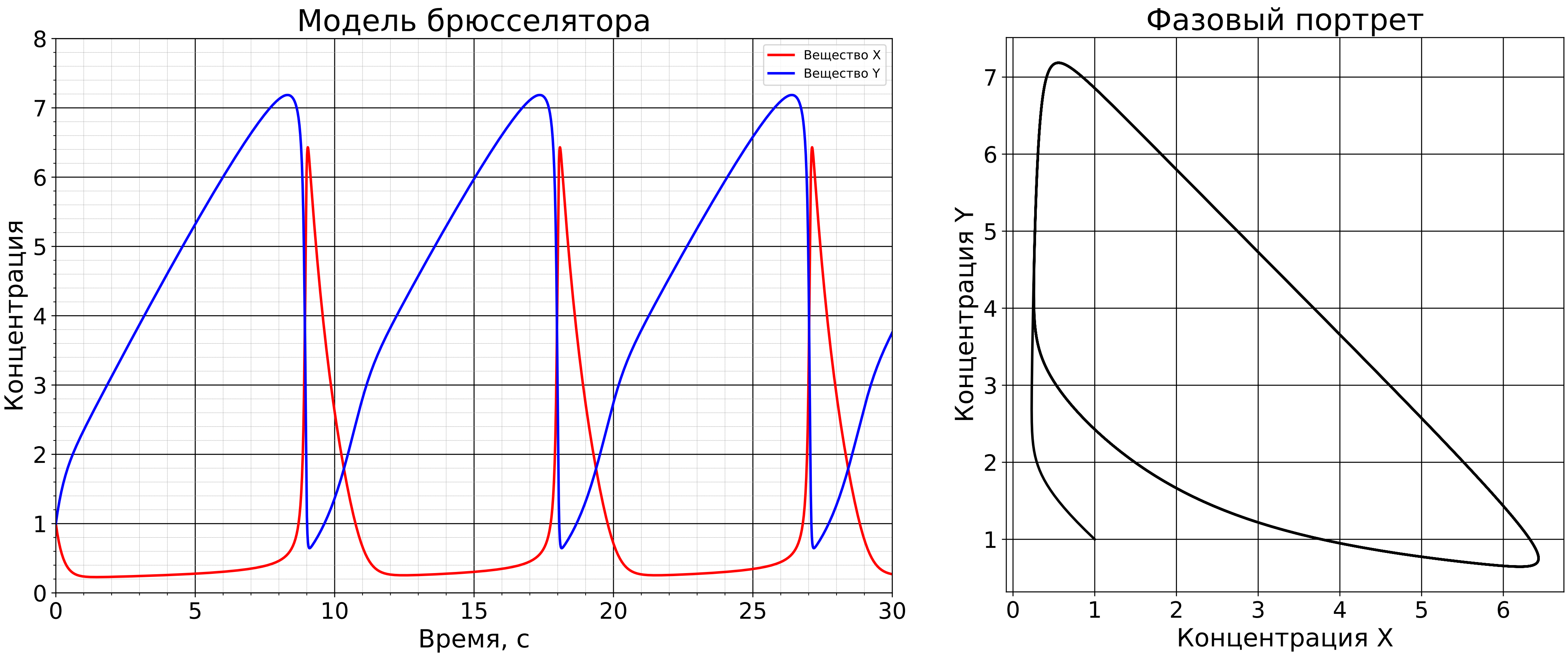

Рис. 8. Решение методом Адамса 4 порядка

5) $A = 1,\ B = 5$

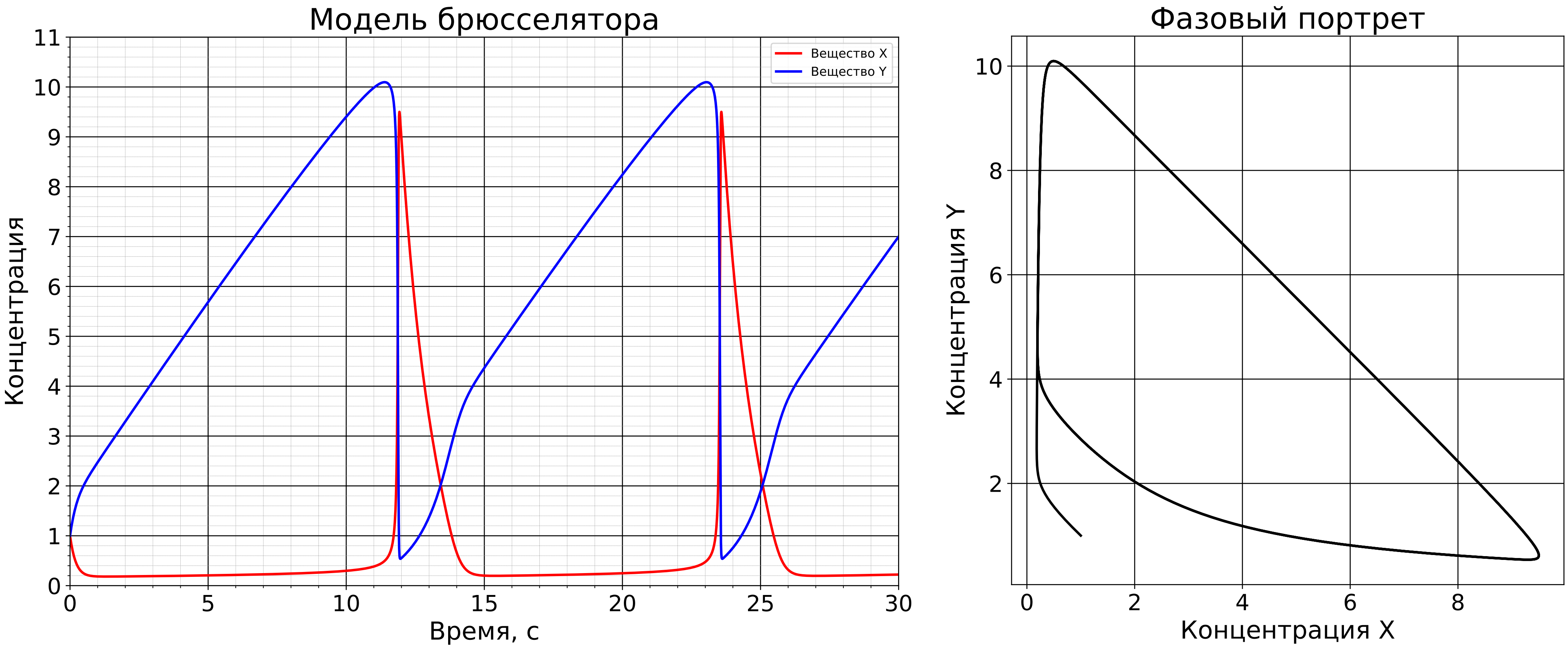

Рис. 9. Решение методом Рунге-Кутты 4 порядка

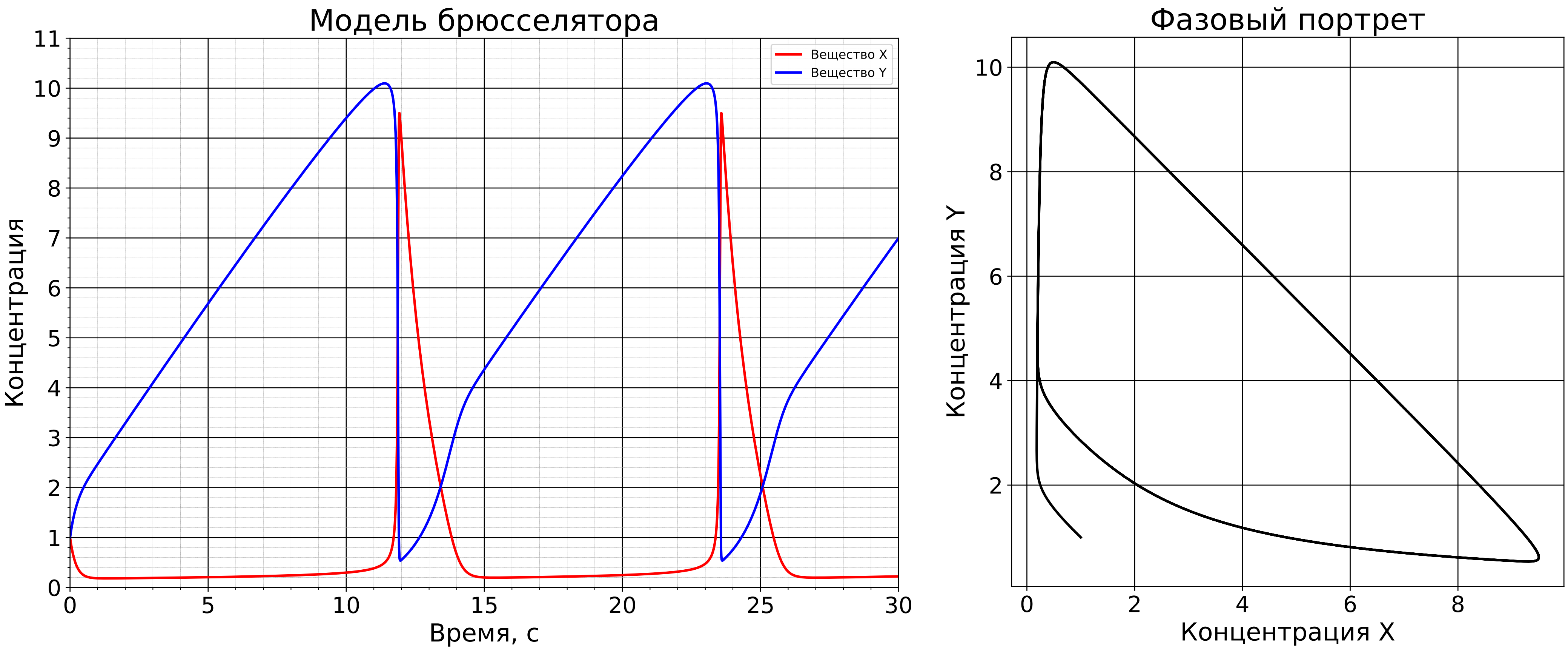

Рис. 10. Решение методом Адамса 4 порядка

Как видим, результаты, даваемые обоими методами, совпадают. Также мы можем отчетливо увидеть предельный цикл на фазовом портрете.

Вывод

В данной работе мы рассмотрели и реализовали методы численного решения систем ОДУ. А именного классический метод Рунге-Кутты 4 порядка и многошаговый метод Адамса 4 порядка. Решения, полученные этими способами, совпадают.