

Московский Физико-Технический Институт  
(государственный университет)

Вычислительная математика

---

# Лабораторная работа №1

---

Автор:

Овсянников Михаил Б01-008



Долгопрудный, 2022

## Содержание

Цель	3
Рабочие функции	3
Графики и порядок точности	5
Выводы	8

## Цель

В работе предлагается вычислить производные некоторых функций численно и аналитически и сравнить результаты. Также, понять, какой метод имеет какой порядок точности, то есть  $o(h^n)$ , понять, какое  $n$ .

## Рабочие функции

Нам дан список функций, для которых нужно провести данное исследование. Помимо этого также дан целый список методов аппроксимации производной функции в точке.

Перечислим все данные нам функции:

- $\sin(x^2)$
- $\cos(\sin(x))$
- $e^{\sin(\cos(x))}$
- $\ln(x + 3)$
- $(x + 3)^{0.5}$

Для дальнейшей работы нам понадобятся аналитические представления их производных, чтобы считать погрешность численного метода:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x^2)$	$2x \cos(x^2)$
$\cos(\sin(x))$	$-\sin(\sin(x)) \cos(x)$
$e^{\sin(\cos(x))}$	$e^{\sin(\cos(x))} \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x))$
$\ln(x + 3)$	$\frac{1}{x + 3}$
$(x + 3)^{0.5}$	$\frac{1}{2(x + 3)^{0.5}}$

**Таблица 1.** Таблица функция-производная

Также нам даны различные методы численного определения производной. Перечислим и их тоже:

$$1. f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$2. f'(x) \simeq \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$3. f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$4. f'(x) \simeq \frac{4}{3} \cdot \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{1}{3} \cdot \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{4h}$$

$$5. f'(x) \simeq \frac{3}{2} \cdot \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{3}{5} \cdot \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{4h} + \frac{1}{10} \frac{f(x+3h)-f(x-3h)}{6h}$$

Будем вычислять производную в какой-нибудь точке  $x_0$  численно, затем аналитически и находить абсолютную погрешность численного метода  $\varepsilon$ .

Также, будем менять шаг  $h_n = \frac{2}{2^n}$ ,  $n = \overline{1, 21}$  и смотреть, какова ошибка аппроксимации. Построим графики  $\varepsilon(h_n)$  в логарифмическом масштабе по обеим осям - по наклону прямых поймем порядок точности метода.

## Графики и порядок точности

Будем строить графики зависимости  $\varepsilon(h_n)$  с помощью Python, а именно с помощью библиотеки Matplotlib. Весь код доступен в файле Lab1.py.

Начальную точку выберем  $x_0 = 10.0$ . С помощью слайдера в программе можно менять точку, в которой считаются производные. С помощью кнопок можно переключаться между функциями, или же менять масштаб осей.

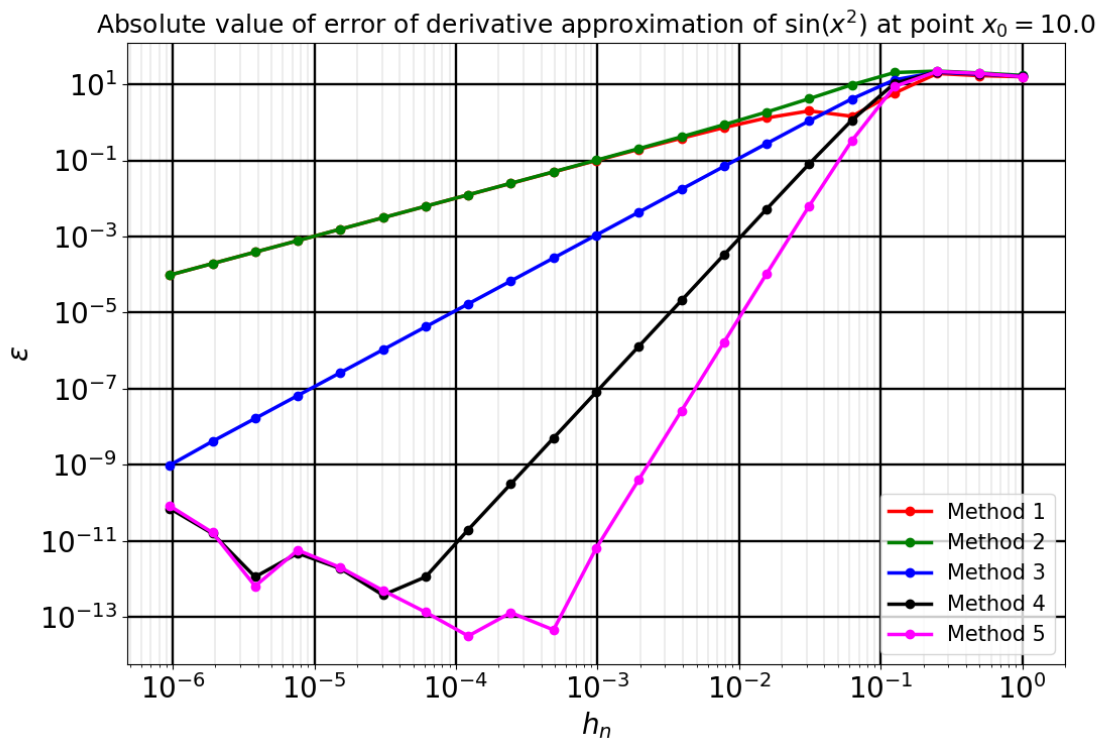


Рис. 1. Графики для функции  $\sin(x^2)$

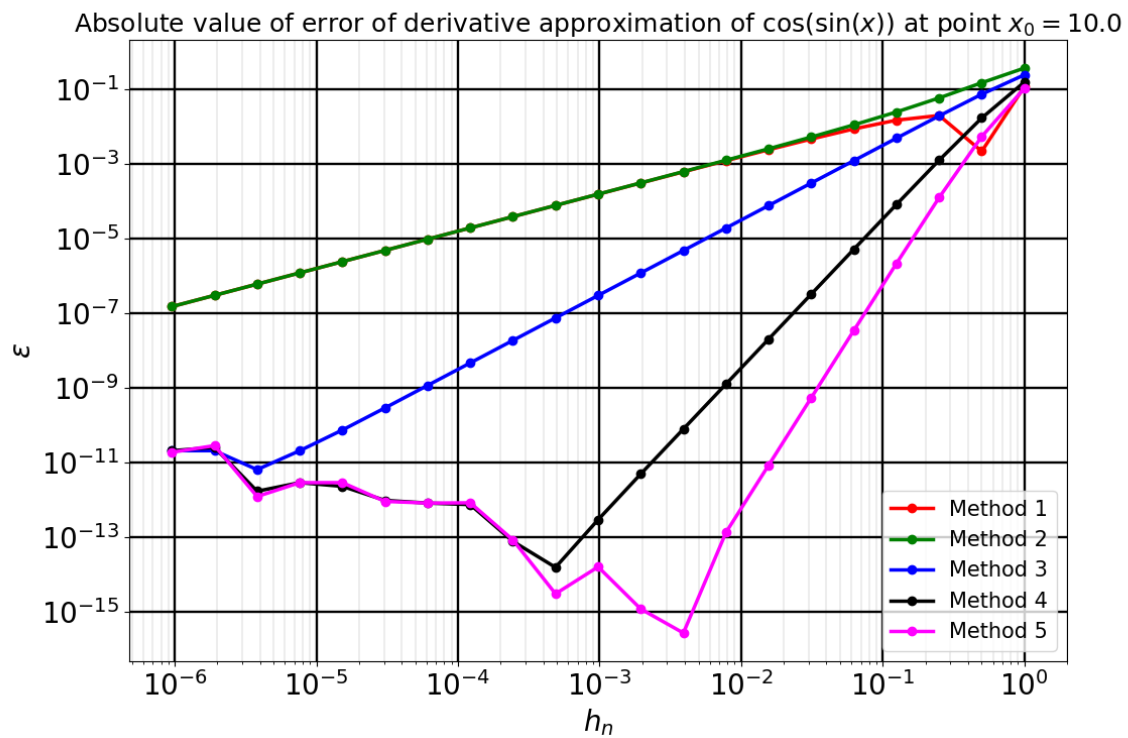


Рис. 2. Графики для функции  $\cos(\sin(x))$

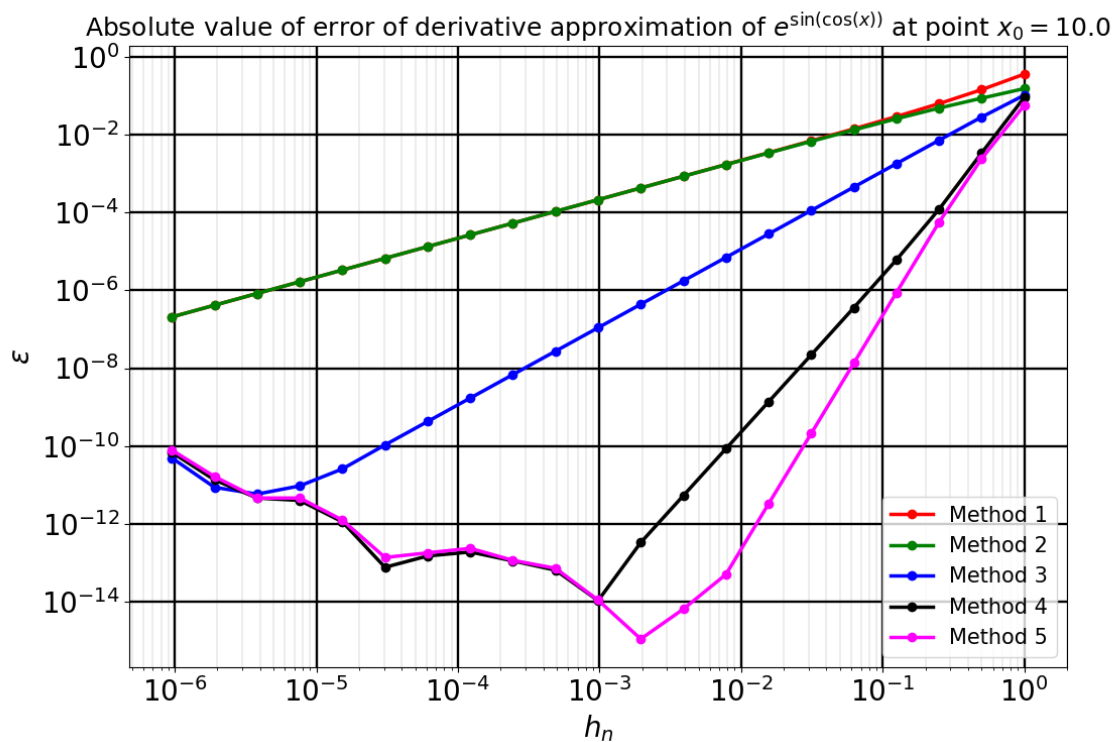


Рис. 3. Графики для функции  $e^{\sin(\cos(x))}$

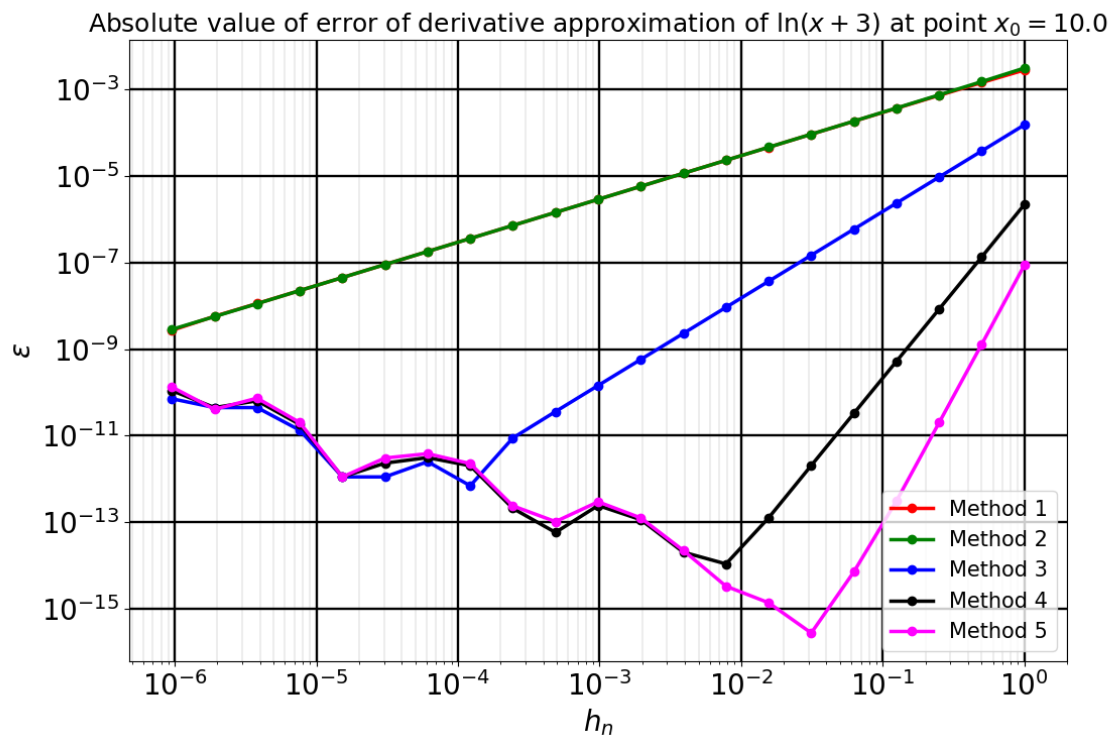


Рис. 4. Графики для функции  $\ln(x + 3)$

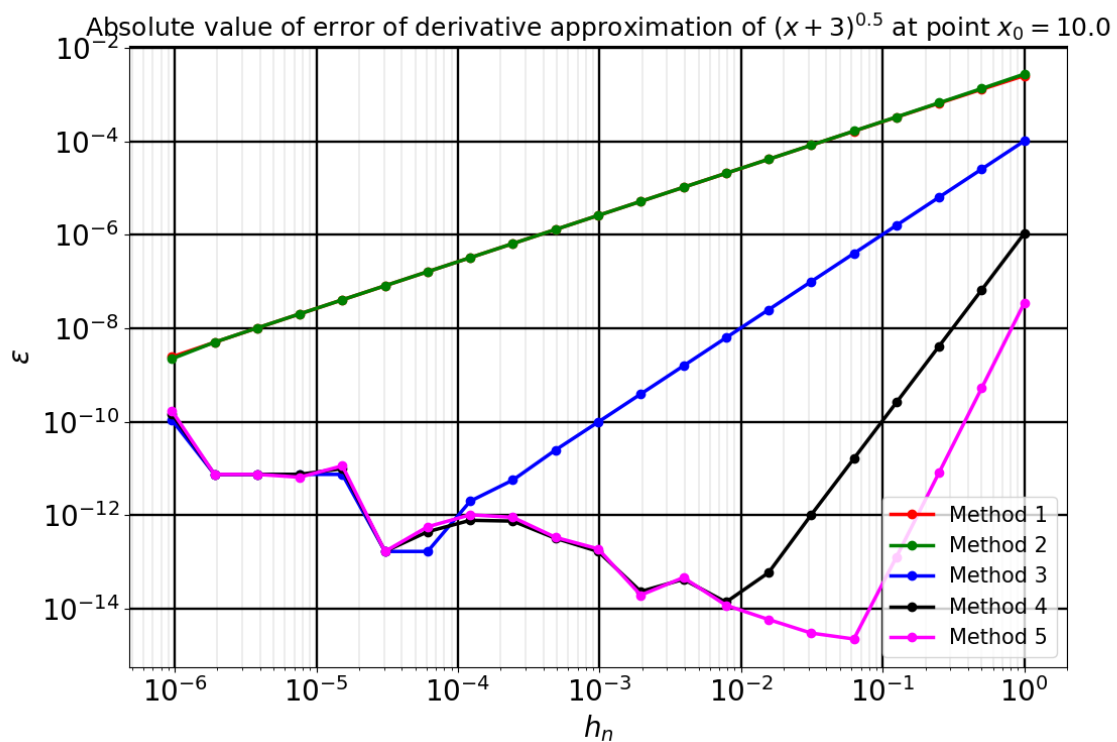


Рис. 5. Графики для функции  $(x + 3)^{0.5}$

## Выводы

По всем графикам видно, что общая точность растет с номером метода. По наклонам прямолинейных участков графиков можно заключить, что:

- Методы 1 и 2 имеют одинаковую точность  $o(h)$
- Метод 3 имеет точность  $o(h^2)$
- Метод 4 имеет точность  $o(h^3)$
- Метод 5 имеет точность  $o(h^4)$

Также на графиках отчетливо видно оптимальное значение шага  $h$ . Уменьшая шаг дальше, мы просто-напросто увеличиваем общую ошибку.