Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Вычислительная математика

Лабораторная работа №9

Автор:
Овсянников Михаил Б01-008

Долгопрудный, 2023

Содержание

Цель

Решить краевую задачу для одномерного стационарного уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами.

Теоретические сведения

Общая задача

Наша задача – решить одномерное стационарное уравнение теплопроводности на отрезке $[0, 1]$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[k(x)\frac{du}{dx}] - q(x)u = -f(x), \\ u(0) = u^0, \\ u(1) = u^1, \end{cases}$$

где $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ – кусочно-непрерывные коэффициенты, имеющие разрыв 1-го рода в точке x_0. В данной точке ставятся так называемые условия сопряжения, обеспечивающие непрерывность температуры u и потока тепла ku_x:

$$\begin{cases} u|_{x=x_0-0} = u|_{x=x_0+0}, \\ ku_x|_{x=x_0-0} = ku_x|_{x=x_0+0}. \end{cases}$$

Для решения данной задачи будем использовать метод встречных прогонок. Опишем его.

Описание метода встречных прогонок

На области интегрирования введем сетку $x_l = lh$, $l = \overline{0 \div L}$, $Lh = 1$. Пусть точка разрыва расположена между узлами l_α и l_β. И пусть индекс α у чего-либо означает это «что-то» до точки разрыва, а β – после. Введем обозначения:

- $(k_\alpha)_{l\pm1/2} = k_\alpha(x_l \pm h/2)$,
- $(k_\beta)_{l\pm1/2} = k_\beta(x_l \pm h/2)$,
- $(q_\alpha)_l = q_\alpha(x_l)$,
- $(q_\beta)_l = q_\beta(x_l)$,
- $(f_\alpha)_l = f_\alpha(x_l)$,

- $(f_\beta)_l = f_\beta(x_l)$.

Теперь:

$$\left(\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right]\right)_{x=x_l} \approx \frac{(k_\alpha)_{l+1/2}\dfrac{u_{l+1}-u_l}{h} - (k_\alpha)_{l-1/2}\dfrac{u_l-u_{l-1}}{h}}{h}, \quad l = \overline{1 \div l_\alpha - 1}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right]\right)_{x=x_l} \approx \frac{(k_\beta)_{l+1/2}\dfrac{u_{l+1}-u_l}{h} - (k_\beta)_{l-1/2}\dfrac{u_l-u_{l-1}}{h}}{h}, \quad l = \overline{l_\beta + 1 \div L - 1}$$

Подставим это всё дело в дифференциальное уравнение и получим систему из $L-3$ уравнений на $L+1$ неизвестных:

$$\begin{cases} \dfrac{(k_\alpha)_{l+1/2}(u_{l+1}-u_l) - (k_\alpha)_{l-1/2}(u_l-u_{l-1})}{h^2} - (q_\alpha)_l u_l = -(f_\alpha)_l, \quad l = \overline{1 \div l_\alpha - 1}, \\ \dfrac{(k_\beta)_{l+1/2}(u_{l+1}-u_l) - (k_\beta)_{l-1/2}(u_l-u_{l-1})}{h^2} - (q_\beta)_l u_l = -(f_\beta)_l, \quad l = \overline{l_\beta + 1 \div L - 1}. \end{cases}$$

К этой системе добавим краевые условия и условия сопряжения в точке разрыва и получим систему из $L+1$ уравнений на $L+1$ неизвестных.

Для упрощения записи введем еще одну группу обозначений:

- $a_l = (k_\alpha)_{l+1/2}$,
- $b_l = -\left[(k_\alpha)_{l+1/2} + (k_\alpha)_{l-1/2} + (q_\alpha)_l h^2\right]$,
- $c_l = (k_\alpha)_{l-1/2}$, $\qquad l = \overline{1 \div l_\alpha - 1}$
- $d_l = -(f_\alpha)_l h^2$.

- $a_l = (k_\beta)_{l+1/2}$,
- $b_l = -\left[(k_\beta)_{l+1/2} + (k_\beta)_{l-1/2} + (q_\beta)_l h^2\right]$,
- $c_l = (k_\beta)_{l-1/2}$, $\qquad l = \overline{l_\beta + 1 \div L - 1}$
- $d_l = -(f_\beta)_l h^2$.

Тогда общая система уравнений выглядит очень лаконично:

$$\begin{cases} u_0 = u^0, \\ a_l u_{l+1} + b_l u_l + c_l u_{l-1} = d_l, & \overline{1 \div l_\alpha - 1}, \\ u_{l_\alpha} = u_{l_\beta}, \\ (k_\alpha)_{l_\alpha}(u_{l_\alpha} - u_{l_\alpha - 1}) = (k_\beta)_{l_\beta}(u_{l_\beta + 1} - u_{l_\beta}), \\ a_l u_{l+1} + b_l u_l + c_l u_{l-1} = d_l, & \overline{l_\beta + 1 \div L - 1}, \\ u_L = u^1. \end{cases} \tag{1}$$

Теперь приступаем к решению. Сначала делаем прямую прогонку. Из первого уравнения подставим u_0 во второе и из последнего u_L в предпоследнее:

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{a_1}{b_1} u_2 + \frac{d_1 - c_1 u_0}{b_1} = \alpha_1 u_2 + \beta_1, \\ u_{L-1} = -\frac{c_{L-1}}{b_{L-1}} u_{L-2} + \frac{d_{L-1} - c_{L-1} u_L}{b_{L-1}} = \alpha_{L-1} u_{L-2} + \beta_{L-1} \end{cases}$$

По индукции доказываем, что подсистемы самой системы (1) сводятся к системам с двухдиагональной матрицей. Уравнения выглядят так:

$$\begin{cases} u_{l-1} = \alpha_{l-1} u_l + \beta_{l-1}, & l = \overline{1 \div l_\alpha - 1} \\ u_{l+1} = \alpha_{l+1} u_l + \beta_{l+1}, & l = \overline{L - 1 \div l_\beta + 1} \end{cases} \tag{2}$$

Прогоночные коэффициенты определяются следующим образом:

- $\alpha_l = -\dfrac{a_l}{b_l + c_l \alpha_{l-1}}$,
- $\beta_l = \dfrac{d_l - c_l \beta_{l-1}}{b_l + c_l \alpha_{l-1}}, \qquad l = \overline{2 \div l_\alpha - 1}$

- $\alpha_l = -\dfrac{c_l}{b_l + a_l \alpha_{l+1}}$,
- $\beta_l = \dfrac{d_l - a_l \beta_{l+1}}{b_l + a_l \alpha_{l+1}}, \qquad l = \overline{L - 2 \div l_\beta + 1}$

Теперь разберемся с $l_\alpha - 1$, l_α, l_β и $l_\beta + 1$ уравнениями системы.

$$\begin{cases} u_{l_\alpha - 1} = \alpha_{l_\alpha - 1} u_{l_\alpha} + \beta_{l_\alpha - 1}, \\ u_{l_\alpha} = u_{l_\beta}, \\ (k_\alpha)_{l_\alpha}(u_{l_\alpha} - u_{l_\alpha - 1}) = (k_\beta)_{l_\beta}(u_{l_\beta + 1} - u_{l_\beta}), \\ u_{l_\beta + 1} = \alpha_{l_\beta + 1} u_{l_\beta} + \beta_{l_\beta + 1}. \end{cases}$$

По сути, последнее – система из 4-х уравнений на 4 неизвестные. Решаем ее и получаем следующее:

$$\begin{cases} u_{l_\alpha} = u_{l_\beta} = \dfrac{(k_\alpha)_{l_\alpha}\beta_{l_\alpha - 1} + (k_\beta)_{l_\beta}\beta_{l_\beta + 1}}{(k_\alpha)_{l_\alpha}(1 - \alpha_{l_\alpha - 1}) + (k_\beta)_{l_\beta}(1 - \alpha_{l_\beta + 1})}, \\ u_{l_\alpha - 1} = \alpha_{l_\alpha - 1} u_{l_\alpha} + \beta_{l_\alpha - 1}, \\ u_{l_\beta + 1} = \alpha_{l_\beta + 1} u_{l_\beta} + \beta_{l_\beta + 1}. \end{cases}$$

Этим заканчивается прямая прогонка. По уравнениям (2) производим обратную прогонку, и таким образом решаем поставленную задачу.

Всё это выглядит очень перегружено и может быть сразу непонятно, но в коде это выглядит более менее понятно.

Непосредственно задача

Постановка задачи

В качестве краевой задачи был выбран номер **Вариант 3 №16** лабораторной работы №4 книги В.В.Демченко «Вычислительный практикум по прикладной математики»:

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u = -f(x),$$

где:

- $u(0) = 2; \quad u(1) = 1$
- $x_0 = 1/\sqrt{3}$

$$\begin{cases} k(x) = e^{-x}, & \\ q(x) = x^3, & x < x_0 \\ f(x) = x^2 - 1, & \end{cases}$$

$$\begin{cases} k(x) = e^{-x}, & \\ q(x) = x, & x > x_0 \\ f(x) = 1, & \end{cases}$$

Что-то придумывать не будем и просто реализуем всё это в программном виде.

Результаты

Само решение выглядит довольно гладким, и кажется, что условия сопряжения на разрыве соблюдены.

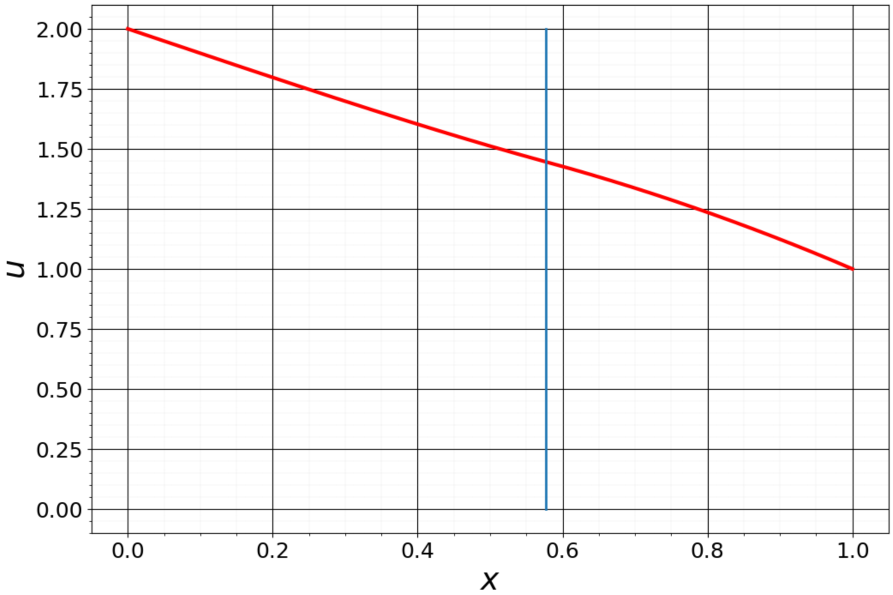

Рис. 1. График решения. Красным – само решение; синим – точка разрыва

Если посмотреть ближе, то, очевидно, увидим последствия разрыва:

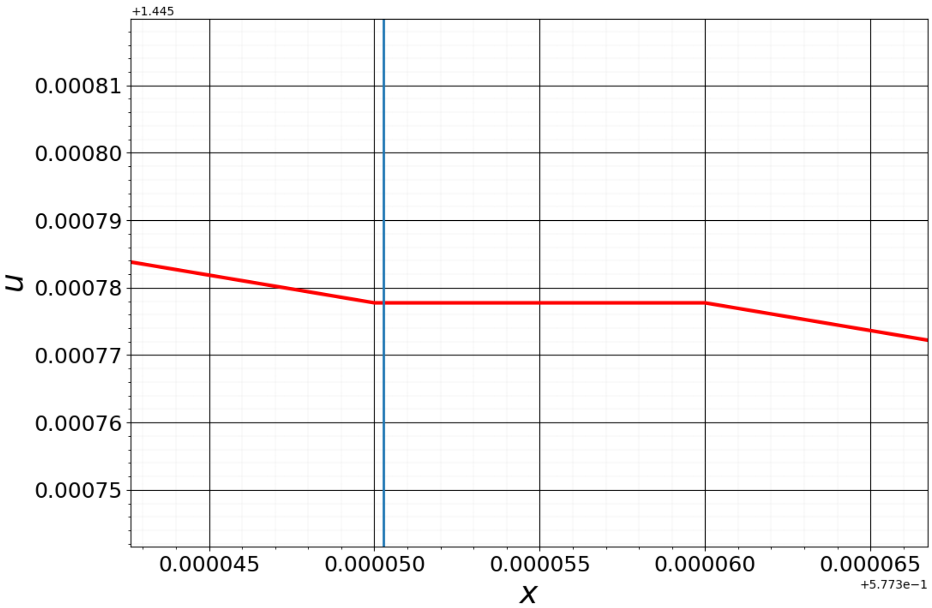

Рис. 2. Увеличенный график

Вывод

В работе был реализован метод встречных прогонок для решения краевой задачи для одномерного стационарного уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами.