Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Вычислительная математика

Лабораторная работа №3

Автор:
Овсянников Михаил Б01-008

ФРТК

Долгопрудный, 2022

Содержание

Цель

Реализовать методы решения нелинейных уравнений и систем уравнений. В частности, методы простой итерации и Ньютона. Оценить их ошибки.

Теоретические сведения

Нелинейные уравнения

Начнем с достаточно простого — нелинейные уравнения.

Пускай у нас есть нелинейное уравнение, записанное в виде $f(x) = 0$. Для начала нужно определить область локализации, то есть промежуток, в котором находятся корни.

Далее, мы можем записать итерационную формулу. Из изначального уравнения мы можем выразить $x = \varphi(x)$. И остается только навесить индексы итераций: $x^{n+1} = \varphi(x^n)$.

Теперь необходимо определить, сходится ли построенный метод. Для этого есть достаточный признак сходимости:

Если на области локализации $|\varphi'(x)| < 1$, то при любом начальном приближении из нее, метод сходится.

Когда мы построим метод, проверим как раз по этому признаку, сходится ли он.

Нелинейные системы

Для решения нелинейных систем мы будем применять итерационный метод Ньютона.

Пусть у нас есть система уравнений:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Построим матрицу Якоби системы:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Тогда метод Ньютона строится следующим образом:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J^{-1}(\vec{x}_n) \cdot \vec{F}(\vec{x}_n).$$

Теперь перейдем непосредственно к самим уравнениям и системам.

Нелинейное уравнение

Постановка задачи

В качестве нелинейного уравнения был выбран пункт **IV.12.4 и)**:

$$x^2 - e^x/5 = 0.$$

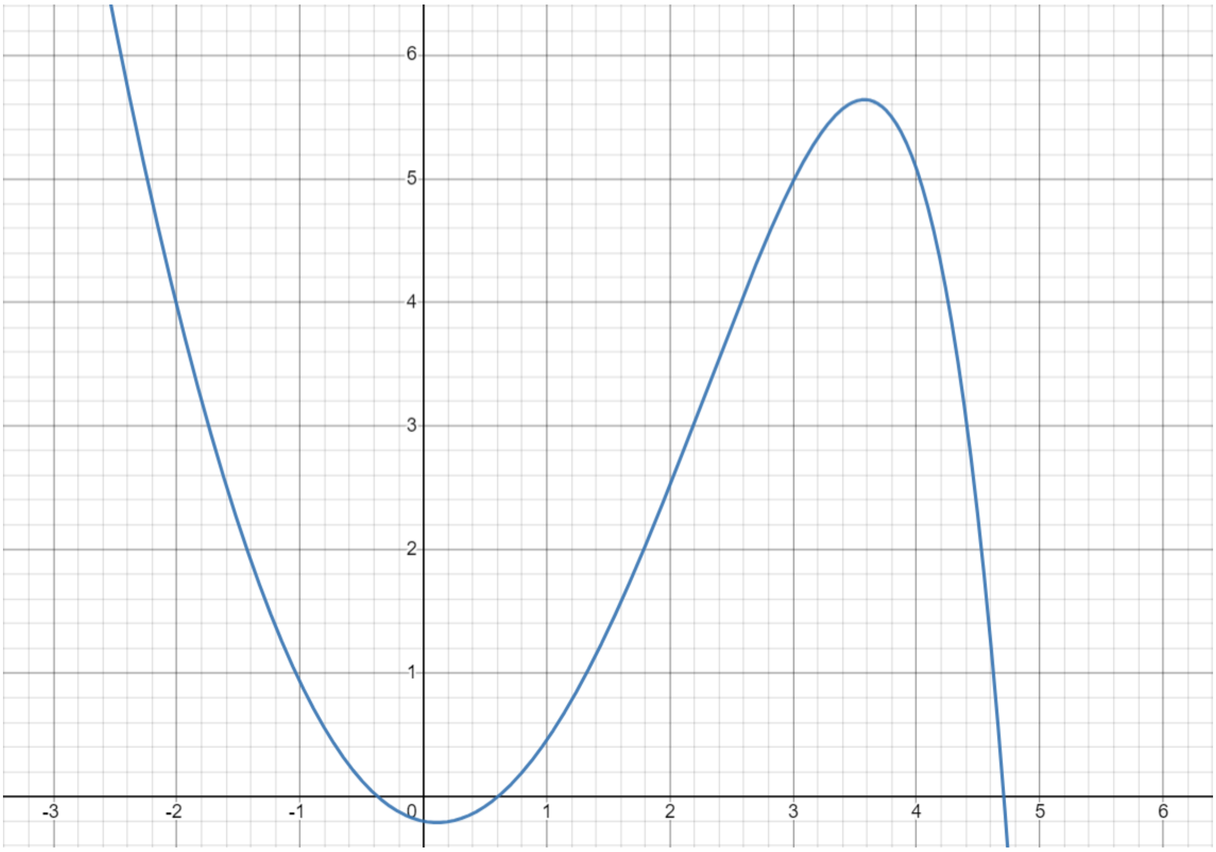

Рис. 1. График функции $f(x) = x^2 - e^x/5$

У этого уравнения 3 корня. Оценим области их локализации:

- $x_1 \in [-1, 0]$
- $x_2 \in [0, 1]$
- $x_3 \in [4, 5]$

Данной локализации достаточно для нахождения корней численным способом.

Теперь построим методы для отыскания корней. Для каждого участка будет свой метод.

- $x_1 \in [-1, 0]$. Для этого построим $x^{n+1} = -\sqrt{\dfrac{e^{x^n}}{5}}$.

  Здесь $\varphi(x) = -\sqrt{\dfrac{e^x}{5}}$.

  Производная: $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{5}}e^{x/2}$.

  $|\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(0)| = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} < 1$. Поэтому данный метод сходится при любом начальном приближении на $[-1, 0]$. Возьмем $x^0 = -1$.

- $x_2 \in [0, 1]$. Тут построим почти аналогичный метод: $x^{n+1} = \sqrt{\dfrac{e^{x^n}}{5}}$.

  Здесь $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{e^x}{5}}$.

  Производная: $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}e^{x/2}$.

  $|\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(1)| = \dfrac{\sqrt{e}}{2\sqrt{5}} < 1$. Поэтому данный метод сходится при любом начальном приближении на $[0, 1]$. Возьмем $x^0 = 0$.

- $x_3 \in [4, 5]$. Здесь уже чуть-чуть посложнее, но тоже ничего особенного: $x^{n+1} = \ln(5(x^n)^2)$.

  Здесь $\varphi(x) = \ln(5x^2)$.

  Производная: $\varphi'(x) = \dfrac{2}{x}$.

  $|\varphi'(x)| \leqslant \varphi'(4) = 0.5 < 1$. Поэтому данный метод сходится при любом начальном приближении на $[4, 5]$. Возьмем $x^0 = 4$.

В качестве невязки берем $r = |f(x_{\text{sol}})| = |x_{\text{sol}}^2 - e^{x_{\text{sol}}}/5|$.

Результаты

При заданном количестве итераций $N = 200$ получаем такие результаты:

- $x_1 = -0.3714177524591739$ с невязкой $r = 0.0$. Очевидно, что она не является нулем. Просто компьютерной точности недостаточно, чтобы посчитать столь малое число. Поэтому считаем $r < \varepsilon^f$ – точность чисел с плавающей точкой на конкретной машине.
- $x_2 = 0.6052671213146185$ с невязкой $r = 5.551115123125783 \cdot 10^{-17}$
- $x_3 = 4.7079379181288585$ с невязкой $r = 7.105427357601002 \cdot 10^{-15}$

При заданной точности $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}$ имеем следующее:

- $x_1 = -0.3714177524911431$ с невязкой $r = 2.815803146205553 \cdot 10^{-11}$ и 14 итерациями
- $x_2 = \quad 0.6052671212468322$ с невязкой $r = 5.722416984710321 \cdot 10^{-11}$ и 19 итерациями
- $x_3 = \quad 4.7079379181231298$ с невязкой $r = 7.304024052245950 \cdot 10^{-11}$ и 30 итерациями

Как видим, оба способа сходятся к одному и тому же. Найденные корни также соответствуют графику.

Нелинейные системы

Постановка задачи

В качестве нелинейных систем были выбраны два пункта: **IV.12.5 а)** и **IV.12.7 а)** соответственно:

$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2, \\ 2x + \cos y = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0, \\ x + 3\lg x - y^2 = 0. \end{cases}$$

Первая система

По порядку разберемся с этими системами. Сначала первая.

$$\begin{cases} \sin(x+1) - y - 1.2 = 0, \\ 2x + \cos y - 2 = 0. \end{cases}$$

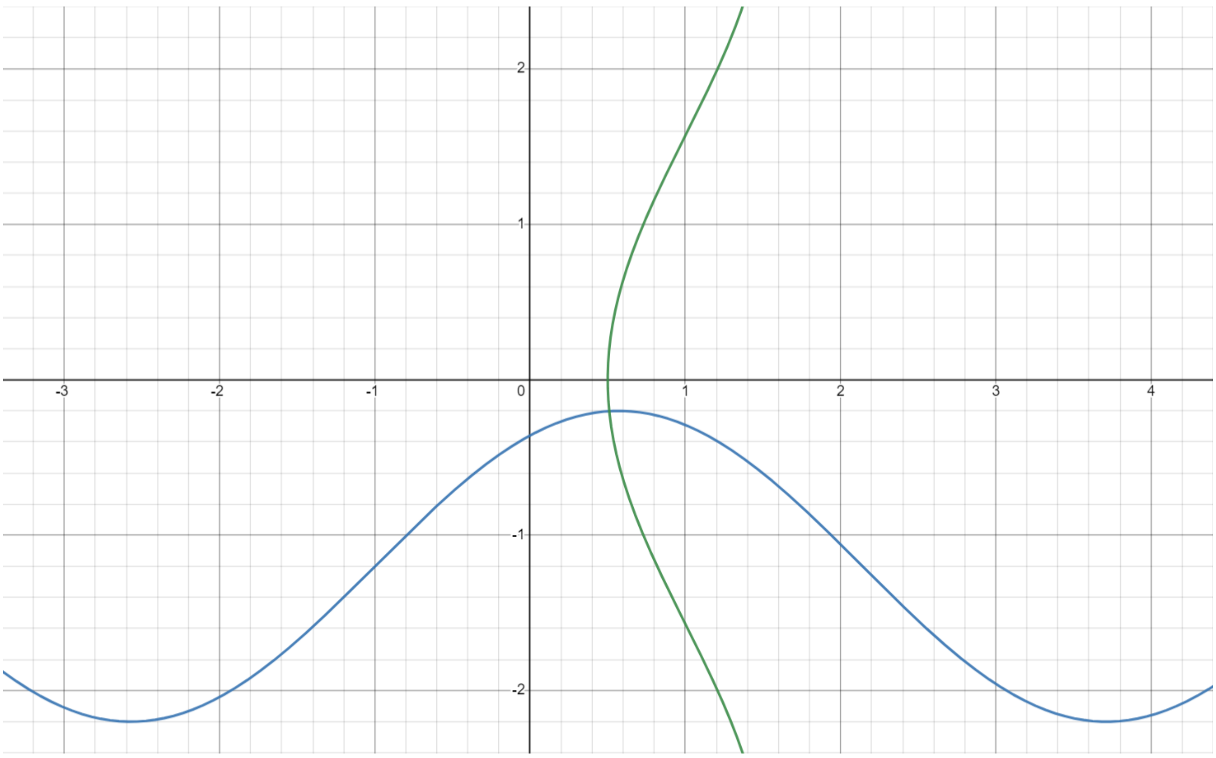

Рис. 2. Графики уравнений системы: синим – ее первое уравнение, зеленым – второе

У нее всего 1 решение, локализованное на $[0.4, 0.6] \times [-0.3, -0.1]$.

Используем метод Ньютона. Для начала посчитаем матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+1) & -1 \\ 2 & -\sin y \end{pmatrix}$$

Непосредственно сам метод Ньютона:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_n - J^{-1}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_n\right] \cdot \vec{F}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_n\right].$$

Начальным приближением берем $(x, y) = (0.4, -0.3)$. В качестве невязки берем $r = \|\vec{F}(\vec{x}_{\text{sol}})\|_{1,2,3}$.

Результаты по первой системе

При заданном количестве итераций $N = 20$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5101501574507401 \\ -0.2018384153565740 \end{pmatrix}$$

Невязки в разных нормах:

- $r = \|\vec{F}(\vec{x}_{\text{sol}})\|_1 < \varepsilon^f$
- $r = \|\vec{F}(\vec{x}_{\text{sol}})\|_2 < \varepsilon^f$
- $r = \|\vec{F}(\vec{x}_{\text{sol}})\|_3 < \varepsilon^f$

Как видим, невязки невероятно малы, даже при 20 итерациях метода! График подтверждает правильность нахождения решения.

Если же мы попробуем применить метода Ньютона с заданной начальной точностью $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}$, то получим следующее:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5101501574430156 \\ -0.2018384153268059 \end{pmatrix},$$

с невязкой $r = 3.97175625721502 \cdot 10^{-11}$ в соответствующей норме. И это всего за $N = 3$ итерации! Сногсшибательная скорость.

Вторая система

Теперь обсчитаем вторую систему.

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0, \\ x + 3\lg x - y^2 = 0. \end{cases}$$

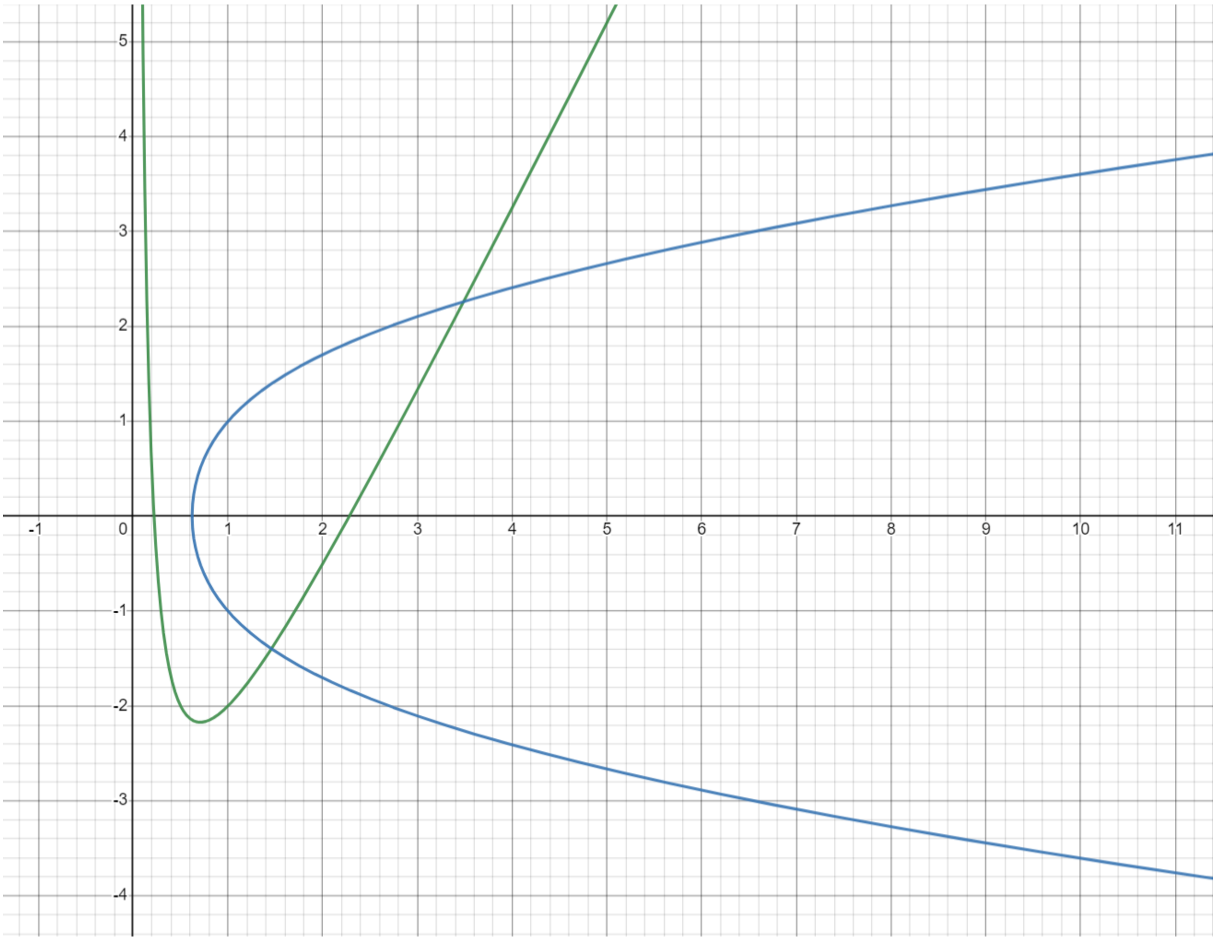

Рис. 3. Графики уравнений системы: зеленым – ее первое уравнение, синим – второе

У данной системы две точки-решения. Локализуем их:

- $(x_1, y_1) \in [1.4, 1.5] \times [-1.5, -1.3]$
- $(x_2, y_2) \in [3.4, 3.5] \times [2.2, 2.3]$

Посчитаем матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - y - 5 & -x \\ 1 + \dfrac{3}{x \ln 10} & -2y \end{pmatrix}.$$

Для нахождения первой точки-решения возьмем начальное приближение $(x, y) = (1.4, -1.5)$, а для второй — $(x, y) = (3.5, 2.3)$.

Результаты по второй системе

Для первой точки получаем следующее. При заданном количестве $N = 20$ итераций:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4588902301521778 \\ -1.3967670091816180 \end{pmatrix}$$

Невязки в разных нормах:

- $r = \|\vec{F}(\vec{x}_{\text{sol}})\|_1 < \varepsilon^f$
- $r = \|\vec{F}(\vec{x}_{\text{sol}})\|_2 < \varepsilon^f$
- $r = \|\vec{F}(\vec{x}_{\text{sol}})\|_3 < \varepsilon^f$

При заданной начальной точности $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4588902301513955 \\ -1.3967670091833093 \end{pmatrix}$$

с невязкой $r = 6.926903495241277 \cdot 10^{-12}$ за $N = 3$ итерации.

Для второй точки при заданном количестве $N = 20$ итераций:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4874427876429537 \\ 2.2616286305535938 \end{pmatrix}$$

Невязки в разных нормах:

- $r = \|\vec{F}(\vec{x}_{\text{sol}})\|_1 = 8.881784197001252 \cdot 10^{-16}$
- $r = \|\vec{F}(\vec{x}_{\text{sol}})\|_2 = 8.881784197001252 \cdot 10^{-16}$
- $r = \|\vec{F}(\vec{x}_{\text{sol}})\|_3 = 8.881784197001252 \cdot 10^{-16}$

При заданной начальной точности $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4874427876429537 \\ 2.2616286305535942 \end{pmatrix}$$

с невязкой $r = 8.881784197001252 \cdot 10^{-16}$ за $N = 3$ итерации.

По графику видно, что решения верны.

Вывод

В данной работе мы реализовали методы решения нелинейных уравнений и нелинейных систем. Пронаблюдали их достоинства и недостатки. Метод простой итерации требует конкретики задачи и области локализации, поскольку он может медленно сходиться или вовсе не сходиться. Метод Ньютона в этом смысле более универсальный, при этом имеет существенно большую скорость сходимости. Однако он требует бóльших вычислительных затрат. В общем и целом, решения данных нам уравнений и систем были найдены быстро и безболезненно, причем с достаточной точностью.