Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Вычислительная математика

Лабораторная работа №8

Автор:
Овсянников Михаил Б01-008

Долгопрудный, 2023

Содержание

Цель

Реализовать метод стрельбы для решения краевых задач.

Теоретические сведения

Общая задача

У нас есть какое-то дифференциальное уравнение:

$$y'' = f(x, y, y')$$

И пускай вдобавок на решение наложено какое-то условие $F(y, y', y'') = 0$, которое может быть как алгебраическим уравнением, связывающим соответствующие переменные, так и полноценным функционалом над ними.

Требуется отыскать решение, удовлетворяющее самому уравнению и дополнительно поставленному условию.

На помощь приходит так называемый метод стрельбы, который и реализован в данной работе.

Описание метода стрельбы

Построение метода стрельбы начинается с введения в нашу задачу дополнительного параметра α. Допустим, если дополнительное условие F позволяет, следующим образом:

$$y'(a) = \alpha,$$

где a – левый конец отрезка интегрирования уравнения.

Если теперь мы решим поставленную задачу Коши при конкретном α, то мы получим какую-то функцию $y^0(x)$, которая скорее всего не будет удовлетворять условию $F(y, y', y'') = 0$. Однако мы можем проделать все то же самое и при других значениях α. Таким образом, мы получим зависимость $F(\alpha)$. И всё, что нам теперь нужно, – это решить уравнение $F(\alpha) = 0$. Это можно сделать методом Ньютона:

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n - \frac{F(\alpha^n)}{F'(\alpha^n)}.$$

Но что же такое $F(\alpha^n)$ в данном случае? И как его посчитать? С этими вопросами дело обстоит хуже – это специфично для задачи. Рассмотрим лишь подход, наводящий на мысли, как посчитать эту величину.

Мы имеем дело с системой:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = \alpha. \end{cases}$$

Сначала преобразуем уравнение 2-ой степени в систему из двух уравнений 1-ой степени заменой $y = y$, $y' = u$:

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' = f(x, y, u), \\ y(0) = y_0, \\ u(0) = \alpha. \end{cases} \tag{1}$$

В нашей задаче считаем y дважды непрерывно дифференцируемой, поэтому без зазрения совести продифференцируем последнюю систему по параметру α. Обозначим $A = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $B = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$. Тогда:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dx} = B, \\ \frac{dB}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}A + \frac{\partial f}{\partial u}B, \\ A(0) = 0, \\ B(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Тогда:

$$F'(\alpha) = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y''} \cdot \frac{\partial y''}{\partial \alpha}$$

Соответствующие производные найдем как:

- $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = A$
- $\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = B$
- $\frac{\partial y''}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = A\frac{\partial f}{\partial y} + B\frac{\partial f}{\partial y'}$.

Отсюда и начинаем итерировать, используя метод Ньютона. На каждом шаге мы получаем не просто значение, а целую функцию!

Перейдем непосредственно к поставленной задаче.

Данная задача

Постановка задачи

В качестве примера был выбран номер **XI.9.3** второй части сборника Аристовой и Лобанова:

$$\begin{cases} y'' - x\sqrt{y} = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ y(0) = 0, \\ \int\limits_0^1 y(x)dx = 1. \end{cases}$$

Введем в качестве параметра начальное условие на производную – $y'(0) = \alpha$. Тогда полученная задача отлично подходит под заготовленный выше шаблон.

Поскольку метод стрельбы заключает в себе некую специфичность в определении $F'(\alpha)$, найдем эту величину конкретно для этой задачи:

$$F(\alpha) = -1 + \int\limits_0^1 y(x)dx.$$

Тогда:

$$F'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^1 y(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{\partial y}{\partial \alpha}(x)dx = \int\limits_0^1 A(x)dx.$$

Сама же система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dx} = B, \\ \frac{dB}{dx} = \frac{x}{2\sqrt{y}}A, \\ A(0) = 0, \\ B(0) = 1. \end{cases}$$

В имеющейся реализации эти системы решаются одновременно и сразу же с этим всем считаются интегралы для $F(\alpha)$ и $F'(\alpha)$.

Результаты

Поскольку используется метод Ньютона, то решение находится быстро. Представим график решения:

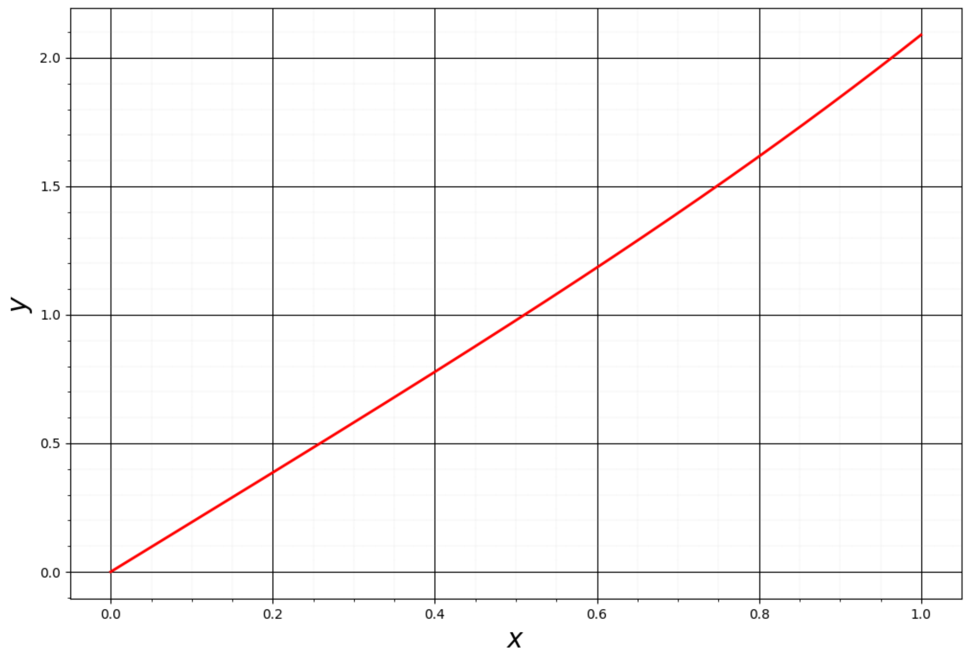

Рис. 1. Решение системы при условии $F(y, y', y'') = 0$

Оно чрезвычайно сильно похоже на прямую – но это не так.
Значение α, при котором нашлось решение: 1.9291176846202034.
Само же значение интеграла получилось $I = 0.9999999999919321$.

Вывод

В работе был изучен и реализован метод стрельбы для решения краевой задачи. Он сходится достаточно быстро, а решение получается приемлемо точным.