

第十三章 三维场景表示

三维场景表示是机器视觉的又一个关键技术。为了理解场景并与场景中的物体交互作用，必须将场景的三维数据进行有效的表示。三维场景表示包含有两个基本问题：场景重建和场景分割。场景重建(reconstruction)是指使用插值或拟合方法从采样点(稠密深度测量值或稀疏深度测量值)计算曲面的连续函数，实际中通常使用许多三角片或小平面片构成的网面来近似表示场景深度测量值；场景分割是将表示场景的网面分割成若干部分，每一部分表示一个物体或一个特定的区域，这样有利于物体识别、曲面精确估计等后处理算法的实现。

本章从曲面的几何特征开始，讨论场景曲面重建和分割的一些基本方法。这些方法可以将双目立体测距、主动三角测距、激光雷达测距等成像系统的输出值转换成简单的曲面表示。这些基本方法包括把测量点转变成三角片网面、把距离测量值分割成简单的曲面片、把测量点拟合成一个光滑曲面以及用测量点匹配一个曲面模型等。

13.1 三维空间曲线

讨论三维空间曲线的原因主要有两个，一是一些物体或物体特征可以直接用三维空间曲线表示，二是三维空间曲线表示可以推广到三维空间曲面表示。曲线表示有三种形式：隐式、显式和参数式。在机器视觉领域中，曲线的参数表示比隐式和显式表示更为常用。三维曲线的参数形式为：

$$\mathbf{p} = (x, y, z) = (x(t), y(t), z(t)) \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (13.1)$$

上式说明曲线上的一点可由参数 t 表示的三个函数来定义，曲线的起点为 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ ，终点为 $(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ 。比如，从 $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 到 $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 的直线段的参数方程为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

空间曲线的最通常的表示形式是三次多项式，下面我们将详细讨论。

13.1.1 三次样条曲线

物体表面上的线条可以是直线、弧线或是任意的曲线。曲线上的每一点位置可以表示成参数形式 $(x(t), y(t), z(t))$ 。一般的三维曲线都可以方便地用样条函数来表示，这和前面讨论的平面曲线表示类似。三次样条函数是一系列首尾相连的表示复杂曲线的三次多项式曲线，每一段三次样条函数的参数表示形式为：

$$\begin{aligned} x(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) &= a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{aligned} \quad (13.3)$$

其中 $0 \leq t \leq 1$ 。三次多项式允许曲线通过确定的相切点，三次多项式是对于非平面曲线的最低阶的多项式。将上式的系数表示成如下系数矢量：

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_x, a_y, a_z) \\ \mathbf{b} &= (b_x, b_y, b_z) \\ \mathbf{c} &= (c_x, c_y, c_z) \\ \mathbf{d} &= (d_x, d_y, d_z) \end{aligned} \quad (13.4)$$

而且 $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ，则三次多项式曲线可以重写为如下形式：

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d} \quad (13.5)$$

更复杂的曲线可以表示为一系列首尾相连的三次多项式：

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(t) &= \mathbf{a}_1t^3 + \mathbf{b}_1t^2 + \mathbf{c}_1t + \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{p}_2(t) &= \mathbf{a}_2t^3 + \mathbf{b}_2t^2 + \mathbf{c}_2t + \mathbf{d}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{p}_n(t) &= \mathbf{a}_nt^3 + \mathbf{b}_nt^2 + \mathbf{c}_nt + \mathbf{d}_n \end{aligned} \quad (13.6)$$

其中 $0 \leq t \leq 1$ 。如果定义第 i 个三次多项式段在单位区间 $i-1 \leq t \leq i$ 上，那么整个区间则为 $0 \leq t \leq n$ 。可以认为，这个三次多项式序列是起点为 $\mathbf{p}_0(0)$ ，终点为 $\mathbf{p}_n(n)$ 的单一参数曲线。这个三次多项式序列叫做一个三次样条函数，它是机器视觉和计算机图形学中表示任意曲线的常用方式。

13.1.2 三维 B 样条曲线

三维 B 样条曲线很适合表示由点序列构成的曲线，因此可以将二维 B 样条的定义扩展到控制点位于三维空间的三维 B 样条。例如对已知三维点序列 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ ，由等式 (7.28) 给出第 i 阶三次多项式，而 $B_i(t)$ 由等式 (7.31) 给出。三维 B 样条曲线也不通过控制点。

13.2 三维空间曲面的表示

本节将讨论机器视觉中常用的几种曲面表示。

13.2.1 多边形网面

平面多边形，也叫平面片(planar patch)，可以组成复杂的网面 (polygon mesh)，以表示各种物体的形状。图 13.1 三角形网面和四边形网面示意图。本节将介绍如何用平面片进行物体多边形网面表示。

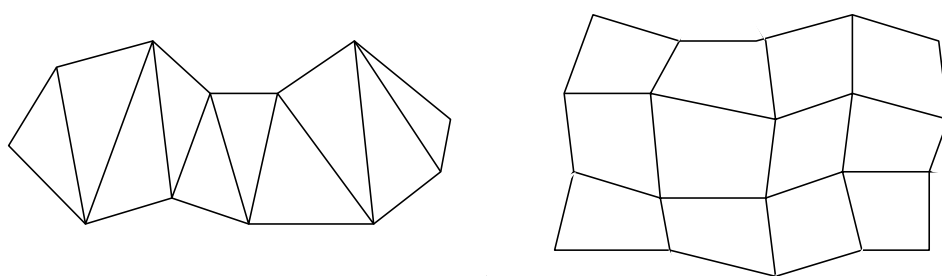


图 13.1 物体表面的网面表示，(a) 三角形网面表示，(b) 四边形网面表示

第七章讨论了如何用若干个直线段端点（顶点）坐标表来表示一个多直线段，这一方法也可推广到平面多边形，即平面多边形网面也可以用一系列平面多边形顶点坐标表来表示。一个顶点常常是三个或三个以上多边形的公共顶点，因此，一个顶点在表中重复出现多次。为了使多边形网面的每一个顶点在表中仅出现一次，可以使用一种间接的顶点坐标表示方法，即对这些顶点从 1 到 n 进行编号，并按这一顺序将每一个顶点的坐标存入表中。每一个多边形可用其顶点编号表表示。不过这种顶点表不能明显地表示相邻表面的边界，对于一

给定顶点，也不能有效地发现所有包含此顶点的表面。这些问题可以用翼边缘数据结构(Winged Edge Data Structure)来解决。

翼边缘数据结构是一种网络数据结构，它具有三种类型数据记录：顶点、边和面。沿着数据结构包含的数据指针可以找到所有元素的邻接关系，而无须搜索整个网面，也无须将每一元素的所有邻接元素都存储起来。在边形网面中，每一个顶点对应数据结构中的一个顶点记录，每一个面对应一个面记录、每一条边对应一个边记录。这样，可以直接查询一条边对应的两个顶点和两个多边形面，也可以直接查询一个顶点对应的所有多边形面（或边），查询时间正比于该顶点对应的多边形面（或边）的数量。

翼边缘数据结构可以有效地表示三角面网面及其它具有多条边的多边形网面，并且不要各个多边形面的边数相等。由于各顶点坐标包含在顶点记录中，因此，多边形面（或边）的位置可以由顶点的坐标计算出来。

每一个面记录指向该面的某一个边记录，每一个顶点记录指向该顶点对应的边记录。因此，边记录包含将多边形面及其顶点连结成多边形网面的指针，并且允许对多边形网面顶点进行快速的扫描。具体地说，每一个边记录包含有两个端点指针，其两侧的两个多边形面指针和4个邻接翼指针，如图13.2所示。其中的面、顶点和边是用指南针的方向表示的，这样做只是为了方便，实际上，多边形网面上的方向与地球方位没有任何关系。每一条翼边允许对其对应的多边形顶点进行扫描，例如，可沿着东北翼边按顺时针方向扫描东多边形面各顶点。

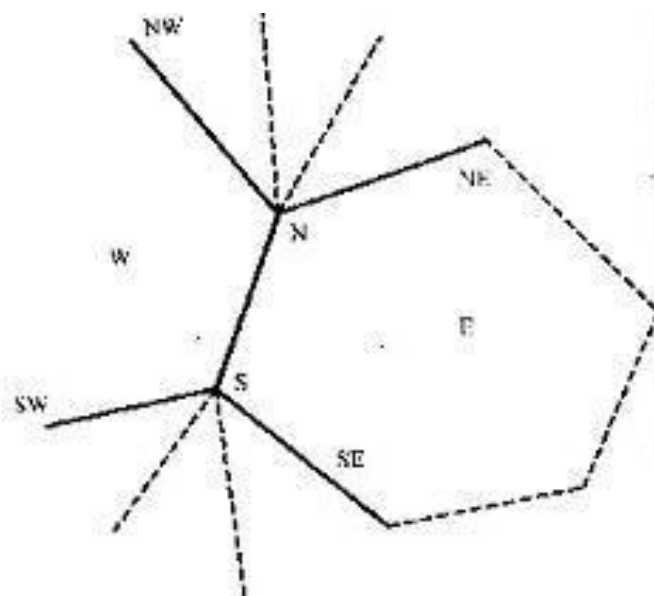


图 13. 2 多边形网面翼边示意图

确定多边形面是在东面还是西面取决于进入翼边缘数据结构中多边形面的顺序。当扫描一个多边形面时，必须首先检查此面是在边缘的东面还是西面。如果此面在这条边的东面，则沿着东北翼顺时针扫描或沿着东南翼逆时针扫描；如果此面在此边的西面，则沿着西南翼顺时针扫描或沿着西北翼逆时针扫描。顺时针、逆时针方向是以观察者为中心的。顺时针方向是这样确定的：左手大拇指指向此平面的法线方向，左手的其它手指方向就是沿此面的顺时针方向；右手大拇指指向此面的法线方向，右手的其它手指方向就是沿此面的逆时针方向。如果多边形网面表示一个物体完整表面，则所有面的法线都向外。如果此多边形网面表示一个曲面，则所有法线都指向此曲面的同一边。如果此曲面是图形曲面，则法线指向图形空间坐标的正坐标轴方向，例如，如果多边形网面为图形表面 $z = f(x, y)$ ，则此表面法线指向正 z 轴。

在边形网面上增加一个多边形面的方法见算法 13. 1，沿某一方向扫描多边形面各顶点（或边）的方法见算法 13. 2。在算法 13. 1 中，假定顶点是沿着平面顺时针方向排列的。适当改进算法 13. 2，可用于搜索一个给定顶点对应的所有边(或面)。

算法 13. 1 翼边缘数据结构上增加一个多边形面的算法

输入是一个按顺时针方向排列的多边形面的顶点表, 包括顶点个数和顶点坐标.

1. 对于顶点表中的每一个顶点, 如果没有出现在数据结构中, 则可增加该顶点记录.
2. 对于每一对相邻的顶点(包括起点和终点), 如果其对应的边没有出现在此数据结构中, 则可增加该边记录.
3. 对于多边形的每一个边记录, 增加翼边, 以便顺时针或逆时针扫描该多边形面.
4. 产生一个多边形面记录, 并增加指针指向其中一个边缘.

算法 13. 2 沿着多边形面顺时针跟踪边缘

输入是一个指向面记录的指针和一个调用待访问边的进程.

1. 从面记录中取出第一条边, 使之成为当前边.
2. 处理当前边, 即对被访问的每一条边完成所有的操作, 如, 沿着多边形面顺时针方向编辑顶点表, 沿扫描方向记录边缘端点(顶点).
3. 如果正在扫描当前边的西侧面, 则下一条边将是西南翼.
4. 如果正在扫描当前边的东侧面, 则下一条边将是东南翼.
5. 如果当前边是第一条边, 则扫描结束.
6. 否则, 回到第 2 步.

13. 2. 2 曲面片

曲面上的各部分可以用一个双多项式表示. 例如, 平面可以表示为:

$$z = a_0 + a_1x + a_2y \quad (13. 7)$$

曲面片可以用更高阶的多项式来表示.

双线性曲面片(线性是指任何平行于坐标轴的截面的截线是一直线):

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \quad (13. 8)$$

双二次曲面片:

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \quad (13. 9)$$

双三次曲面片:

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 \quad (13. 10)$$

双四次曲面片

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 + a_{10}x^4 + a_{11}x^3y + a_{12}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}y^4 \quad (13. 11)$$

在机器视觉中, 上述双多项式经常被用来表示曲面片.

多项式曲面片非常适合于局部表面的表示, 例如一个点的邻域, 但整个表面的表示不是很方便, 而且不能表示非图形曲面. 更复杂的曲面可以用三次样条函数来表示, 这将在下一节讨论.

13. 2. 3 张量积曲面

13. 1. 1 节介绍了如何用参数形式将一个复杂曲线表示成一个三次多项式, 此方法可以推广到复杂曲面的参数表示.

一个三次多项式参数方程的矩阵形式为:

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13.12)$$

其中，每一个系数都是一个三元矢量。

张量积曲面是由两条曲线合成的，其参数形式如下：

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13.13)$$

其中， \mathbf{a}_i 是三元行矢量， \mathbf{b}_j 是三元列矢量， \mathbf{a}_i ， \mathbf{b}_j 的积是每一个坐标系数的双积。此系数曲面可以写为：

$$\mathbf{p}(u, v) = U^T M V \quad (13.14)$$

其中，

$$U = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

M 是 4×4 矩阵，其元素是参数曲面的每一个坐标系数的矢量。在这种表示中，我们可以看到张量积曲面确实是两曲线的积：一条曲线以 u 为坐标，另一条以 v 为坐标。任何平行于坐标轴的平面和张量积三次多项式曲面的交线都是三次多项式曲线。换句话说，如果其中一坐标是常数，那么结果就是一条以其它两个坐标为参数的三次多项式曲线。

13.2.4 超二次曲面

超二次曲面（superquadrics）由二次方程添加参数生成，这样可以通过调整参数很方便地改变物体的形状。增加的参数数目等同于物体的维数，比如，曲线是一个参数，曲面是两个参数。

（1）超椭圆

在超椭圆相应的方程中，允许 x 和 y 项的指数是变量，这样可以得到椭圆的笛卡儿表示式。笛卡儿超椭圆方程的表示形式之一是：

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^{\frac{2}{s}} + \left(\frac{y}{r_y}\right)^{\frac{2}{s}} = 1 \quad (12.15)$$

其中 s 参数是任何实数。当 $s = 1$ 时，可以得到一般椭圆表示式。

相对于方程(12.15)，超椭圆参数方程可以表示成：

$$\begin{aligned} x &= r_x \cos^s \theta \\ y &= r_y \sin^s \theta \end{aligned} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (12.16)$$

图 13.3 表示了运用不同的参数 s 值产生的超椭圆面形状。

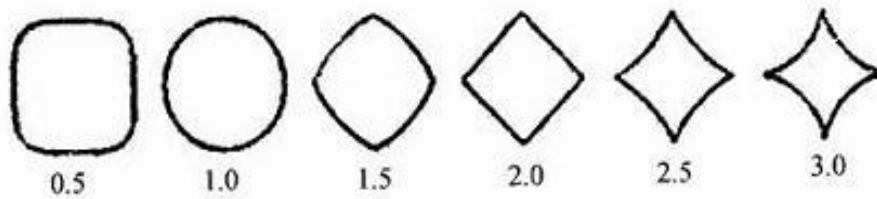


图 13.3 不同参数值 s 对应的超椭圆图形 ($r_x = r_y$)

(2) 超椭圆球

超椭圆球面的笛卡儿表达式是由椭圆球面方程增加二个指数参数而得:

$$\left[\left(\frac{x}{r_x} \right)^{\frac{2}{s_2}} + \left(\frac{y}{r_y} \right)^{\frac{2}{s_2}} \right]^{\frac{s_2}{s_1}} + \left(\frac{z}{r_z} \right)^{\frac{2}{s_1}} = 1 \quad (12.17)$$

当 $s_1 = s_2 = 1$ 时, 得到一般的椭球面。

对超椭圆球面的方程 (12.17), 我们可以得到相应的参数表示式:

$$\begin{aligned} x &= r_x \cos^{s_1} \varphi \cos^{s_2} \theta \\ y &= r_y \cos^{s_1} \varphi \sin^{s_2} \theta \\ z &= r_z \sin^{s_1} \varphi \end{aligned} \quad \begin{aligned} -\pi/2 &\leq \varphi \leq \pi/2 \\ -\pi &\leq \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (12.18)$$

图 13.4 表示了由不同参数 s_1 和 s_2 值生成的超圆球形状。这些及其它超二次曲面形状的可以生成很复杂的形状, 如家具、闪电和其它金属构成。

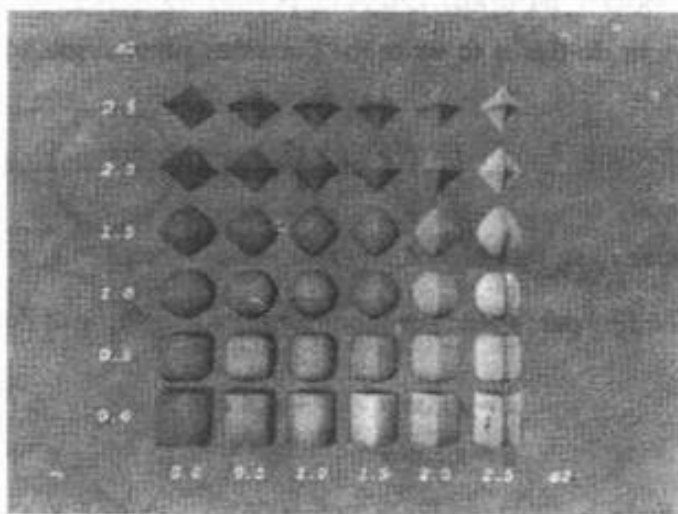


图 13.4 不同参数 s_1 和 s_2 值生成的超圆球形状 ($s_1 = s_2$)

13.3 曲面插值

本节将讨论如何将上述曲面表示用于实际采样值的曲面插值计算, 比如, 用均匀分布网面表示双目立体测距或主动三角测距系统获得的深度图。但是, 如果原始深度图不是均匀分布的, 则无法用均匀分布的网面表示, 此时就需要曲面插值。一般来说, 在对原始图像进行处理 (如边界检测和分割) 之前, 首先需要将深度图通过插值运算将其表示成一个均匀变化的网面模式。

13. 3. 1 三角形面插值

假定通过双目立体视觉系统或主动三角测量系统得到一个曲面 $z = f(x, y)$ 在离散点 (x_k, y_k) 处的采样值 z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, 下面讨论如何在图像阵列点 $[i, j]$ 上通过三角面进行深度值插值计算. 我们知道, 不共线的空间三点可以构成一个平面, 平面方程为:

$$z = a_0 + a_1x + a_2y \quad (13. 19)$$

所以, 已知非共线的空间三点, 则可以确定上述方程的三个系数.

我们知道, 在 $n \times m$ 的图像阵列上, 每一点的坐标 (x_j, y_i) 由下式计算:

$$x_j = j - \frac{m-1}{2} \quad y_i = -i + \frac{n-1}{2}$$

对于图像阵列的每一点 (x_j, y_i) , 在深度图中找出在 $x-y$ 平面上包含该点的三个非共面的点, 根据(13.19) 求出三角面方程, 然后计算该点的深度值:

$$z_{ij} = a_0 + a_1x_j + a_2y_i \quad (13. 20)$$

13. 3. 2 二元线性插值

二元线性函数可以表示为:

$$f(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \quad (13. 21)$$

如果把上式的一个变量设定为常数, 则函数对于另一个变量就是线性变化的. 换句话说, 任何一个平行于坐标轴的平面和此二元线性表面片的交线都是一个直线段. 对于四条边皆平行于坐标轴的任何矩形平面, 有唯一的用于矩形顶点插值的二元线性多项式.

假定我们要在一个矩形网格的四个顶点中间的一点 (x, y) 进行插值, 并设点 (x, y) 由四条边都平行于坐标轴的矩形包围. 此矩形的顶点坐标是 (x_0, y_0) , (x_0, y_1) , (x_1, y_0) , (x_1, y_1) , 其函数值为 $z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}$, 见图 13. 5.

二元线性插值的系数是由矩形的 4 个顶点确定的, 把每一个顶点的坐标代入方程 13. 20, 则系数满足如下方程:

$$\begin{aligned} z_{00} &= a_0 + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3x_0y_0 \\ z_{01} &= a_0 + a_1x_0 + a_2y_1 + a_3x_0y_1 \\ z_{10} &= a_0 + a_1x_1 + a_2y_0 + a_3x_1y_0 \\ z_{11} &= a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 + a_3x_1y_1 \end{aligned} \quad (13. 22)$$

联立上述四个方程, 得到系数求解出:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{x_1y_1z_{00} - x_1y_0z_{01} - x_0y_1z_{10} + x_0y_0z_{11}}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \\ a_1 &= \frac{-y_1z_{00} + y_0z_{01} + y_1z_{10} - y_0z_{11}}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \\ a_2 &= \frac{-x_1z_{00} + x_1z_{01} + x_0z_{10} - x_0z_{11}}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \\ a_3 &= \frac{z_{00} - z_{01} - z_{10} + z_{11}}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \end{aligned} \quad (13. 23)$$

当矩形网格是一个行距和列距都是单位值的方格时, 二元线性插值有一个非常简单的表示. 设要插值的点 (x, y) 离方格的左上顶点的偏移量为 $(\delta x, \delta y)$, 则双线性插值公式为:

$$f(\delta x, \delta y) = z_{00} + \delta x(z_{10} - z_{00}) + \delta y(z_{01} - z_{00}) + \delta x\delta y(z_{00} - z_{01} - z_{10} + z_{11}) \quad (13. 24)$$

此公式可用于插入像元之间的图像点的像素值.

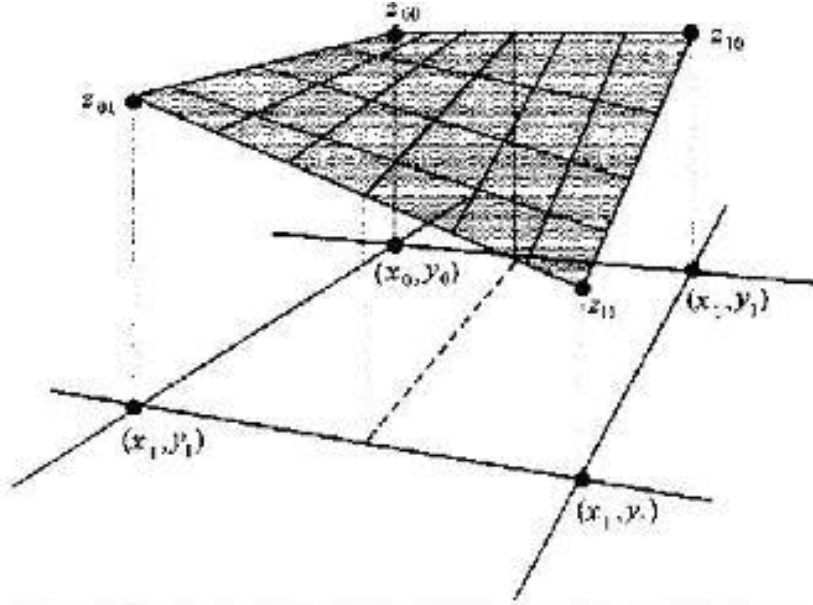


图 13.5 二元线性插值示意图

13.3.3 鲁棒插值

在 7.4.3 节中, 我们介绍了用直线拟合含有局外点的边缘集的最小中值二乘法 (least-median-squares, LMS). 最小中值二乘法也可用于曲面片拟合具有局外点的深度测量值集合.

最小中值二乘法是一种鲁棒回归算法, 其溃点值为 50%, 正好对应于待拟合点集的中值的地方. 局部最小中值二乘估计器使用最小中值二乘法求出拟合一个局部区域来的模型参数, 即通过极小化残差平方求解模型参数:

$$\min_a \{ \text{med}_{(x_i, y_i) \in N} [(z_i - f(x_i, y_i; \mathbf{a}))^2] \} \quad (13.25)$$

\mathbf{a} 是估计的参数矢量, $f(x_i, y_i; \mathbf{a})$ 是在测量点 (x_i, y_i, z_i) 处图形曲面实际值的估计.

最小中值二乘法可以用于含有局外点的曲面采样拟合模型的参数求解. 例如, 双目立体视觉的错误匹配, 会造成错误的深度测量值, 即局外点, 测距雷达也可能在曲面不连续点处产生局外点. 如果在用曲面片拟合深度测量值时使用最小中值二乘法, 则这种曲面拟合对局外点不是十分敏感. 特别需要指出, 最小中值二乘法对曲面片拟合含有局外点的稀疏深度测量值是非常有用的.

将最小中值二乘法简明地表示出来不是一件易事, 但对此算法的实现却很容易解释. 假设在每一个网格点附近的局部区域使用曲面片来拟合深度测量值. 本算法可以很容易地推广到使用更高阶的曲片块拟合. 对于每一个网格点, 选择离此点最近的 n 个深度测量值, 从 n 个测量值中任取 m 数据作为一个待拟合子集, 则所有可能的数据子集为 $\binom{n}{m}$ 个. 用曲面片拟合第 k 个数据点子集, \mathbf{a}_k 表示相关参数矢量, 计算残差平方中值:

$$\chi_k^2 = \text{med}_i [(z_i - f(x_i, y_i; \mathbf{a}_k))^2] \quad (13.26)$$

用曲面片拟合所有的子集后, 取最小的残差平方中值对应的参数矢量 \mathbf{a}_k .

本方法计算成本较高, 因为对每一局部区域拟合都要进行 $\binom{n}{m}$ 次. 然而每一个曲面拟合是独立的, 程序可以实现高度并行计算. 在实际中, 可以尝试几种可能的组合, 使得无局外点子集的概率接近于 1, 这样可以大大地减少许多不必要的拟合.

13. 4 曲面逼近

由于深度测量值存在误差, 因此找一个曲面来逼近深度数据比曲面插值更重要. 如果深度测量值是一个连续曲面 $z = f(x, y)$ 上的采样点, 那么完全可以由这些采样点重建这个曲面. 设重建曲面的模型为:

$$z = f(x, y; a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \quad (13. 27)$$

该模型共包含 m 个参数. 该曲面重建问题实际上成为确定最适合数据的曲面模型参数的回归问题, 回归函数为:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (z_i - f(x_i, y_i; a_0, a_1, \dots, a_{m-1}))^2 \quad (13. 28)$$

如果我们没有曲面的参数模型, 则只能使用一个普通(或非参数化) 曲面模型来拟合此数据, 即求解这些数据的一个最佳拟合曲面 $z = f(x, y)$:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (z_i - f(x_i, y_i))^2 \quad (13. 29)$$

这是一个不适定(ill-posed)问题, 因为许多函数多可以对该数据集实现最佳拟合(实际上, 这样的函数有无穷多个). 不适定这一术语的意思是问题的求解不唯一, 反过来, 适定问题(well-posed)会有唯一的最优解. 为了能使方程 13. 29 变为适定, 可以增加一个逼近约束函数, 使得所选择的曲面拟合函数有唯一解. 选择约束函数的标准有许多, 一种比较常用的标准是选择既能拟合数据又是光滑表面的函数.

已知数据集 $\{(x_i, y_i, z_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则使下式达到极小化的 $z = f(x, y)$ 是该数据集的最佳拟合,

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (z_i - f(x_i, y_i))^2 + \alpha^2 \iint \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (13. 30)$$

其中 $\alpha > 0$. 该方程与 13. 29 式不同之处是增加了一项加权光滑约束项. 光滑约束项叫做正则项或稳定函数. 权重系数 α 称为正则化参数, α 较小时, 可以使得逼近函数十分靠近数据集, 而 α 较大时, 则强迫逼近函数更平滑. 上面方程的第一个项称为问题约束, 在该约束上通过增加稳定函数将不适定问题变为适定问题的过程叫正则化(regularization).

适定这一的概念远比求唯一解严格的多, 比如, 方程 13. 29 的拟合问题可能有唯一解, 但是解空间中还有其它许多完全不同的解可能也是好的解, 而一个适定问题只有一个解空间, 该解对应的范数的最小值不仅是唯一的, 而且肯定比其它解更好.

13. 4. 1 回归样条

回归样条法是另一种曲面拟合方法. 用曲面模型(如张量积样条函数)代替方程 13. 29 的拟合函数, 该方程就变为一个回归问题, 求解这一问题, 就得到了该曲面模型的参数. 当然, 如果知道曲面模型, 那么就可以直接列出回归问题的方程, 而不必经过方程 13. 29.

许多曲面函数, 包括张量积样条函数, 可以表示为基本函数的线性组合:

$$f(x, y; a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i B_i(x, y) \quad (13. 31)$$

a_i 为函数系数, B_i 为基本函数. 使用张量积样条可以将基本函数组合成为一个网格:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} B_{ij}(x, y) \quad (13. 32)$$

将方程 13.31 或 13.32 的曲面模型代入方程 13. 28, 得到一组求解回归参数的线性方程组. 因为方程组是稀疏的, 因此, 用稀疏矩阵方法求解比用奇异值求解要好.

下面将从一维情况开始, 详细介绍回归样条计算方法. 一维 B 样条函数是基本函数的线性组合:

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_i B_i(x) \quad (13.33)$$

假设 B 样条基本函数均匀分布整数位置， B 样条基本函数在区间 $[i, i+4)$ 是非零的，基本函数位于从 0 到 m ，所以决定 B 样条基本曲线的形状的有 m 个系数(见图 13.6)。

有一个 B 样条曲线是定义在区间从 $x=3$ 到 $x=m+1$ ，在 $x=0$ 点的基本函数跨越 3 个区间到此曲线的左端，在 $x=m+1$ 点的基本函数跨越 3 个区间到达此曲线的右端。曲线端点以外的额外区间建立了曲线端点的边界条件，而且必须要包括进来，那样才能正确地定义第一个曲线段 $[0, 1)$ 和最后一个曲线段 $[m, m+1)$ 。

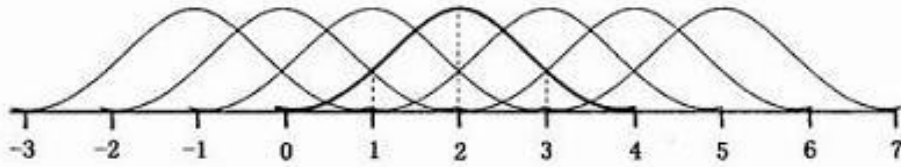


图 13.6 位于整数位置的基函数线性组合构成一维 B 样条曲线示意图

每一个 B 样条函数在 4 个整数区间上都是非零的，因为基本函数重叠，每一区间都被 4 个基本函数覆盖。基本函数 $B_i(x)$ 的每一段 $b_i(x)$ 是仅定义它的单位区间上的三次多项式，如图 13.7 所示， B 样条函数的每一段的三次多项式如下：

$$\begin{aligned} b_0(x) &= \frac{x^3}{6} \\ b_1(x) &= \frac{1+3x+3x^2-3x^3}{6} \\ b_2(x) &= \frac{4-6x^2+3x^3}{6} \\ b_3(x) &= \frac{1-3x+3x^2-x^3}{6} \end{aligned} \quad (13.34)$$

如果简单地把这些三次多项式相加以得到 B 样条基本函数是不正确的，因为每一段都限制于它的区间，这就是，每一段在它适用的区间之外必须被视为非零的。为了在特殊点 x 估计特殊 B 样条基本函数，有必要确定 x 位于哪一段和估计相对应的三次多项式。

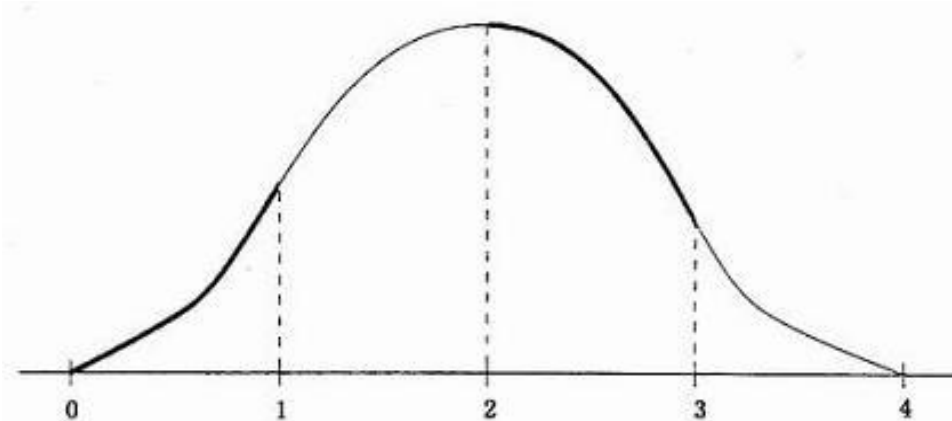


图 13.7 四个三次多项式构成的 B 样条基函数

假设 x 位于区间 $[i, i+1)$ ， B 样条曲线是每 $m+1$ 个 B 样条基本函数的线性组合如式 13.33。因为每一个 B 样条基本函数占四个区间(单位)， $[i, i+1)$ 上是 $B_i(x)$ ，左边顺次是

$B_{i-1}(x)$, $B_{i-2}(x)$, $B_{i-3}(x)$, 所以为了估计当 x 在区间 $[i, i+1)$ 上的 B 样条曲线, 只需估计此区间上的四个 B 样条基本函数的线性组合:

$$a_{i-3}B_{i-3}(x) + a_{i-2}B_{i-2}(x) + a_{i-1}B_{i-1}(x) + a_iB_i(x) \quad (13.35)$$

因为每一个 B 样条基本函数包含 4 个三次多项式, 其中每一段都定义在其各自的区间上, 只需估计在三次样条曲线被估计的区间上的三次多项式段即可. 在区间 $[i, i+1)$ 上的 x 点 B 样条曲线的值为:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-3x+3x^2-x^3)a_{i-3}}{6} + \frac{(4-6x^2+3x^3)a_{i-2}}{6} \\ & + \frac{(1+3x+3x^2-3x^3)a_{i-1}}{6} + \frac{x^3a_i}{6} \end{aligned} \quad (13.36)$$

为了在任何位置估计 B 样条曲线, 有必要确定 x 所在的区间, 并代入方程 13.36, 下标 i 表示区间的起点, 那么 4 个 B 样条基本函数的系数才是正确的.

方程 13.36 中的估计 B 样条曲线的公式可以用于线性回归, 因为模型在系数上是线性的. 方程包含术语 x 的幂, 这并没有什么影响. 此模型可以用于下面的回归算法, 此算法用于从一系列数据点 (x_i, z_i) 中确定 B 样条的系数. 每一数据点可得到一个约束 4 个 B 样条系数的方程:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-3x_i+3x_i^2-x_i^3)a_{i-3}}{6} + \frac{(4-6x_i^2+3x_i^3)a_{i-2}}{6} \\ & + \frac{(1+3x_i+3x_i^2-3x_i^3)a_{i-1}}{6} + \frac{x_i^3a_i}{6} = z_i \end{aligned} \quad (13.37)$$

这些方程组成一个线性方程组:

$$Ma = b \quad (13.38)$$

其中, a 是 B 样条系数 a_i 的列矢量, 方程右侧的列矢量 b 是 z_i 的矢量, 除了在相对应在包含 x 的区间上的 B 样条基本函数的系数的 4 个元素外, 矩阵 M 的其它元素都为 0. 此线性方程组可用单值求解法来求. 但因为此方程组是稀疏的, 最好用稀疏矩阵方法.

对于三维曲面拟合, 模型是一张量积 B 样条曲面:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} B_{ij}(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} B_j(x) B_i(y) \quad (13.39)$$

曲面拟合问题可以通过使下式最小化来求解.

$$\chi^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (z(k) - f(x, y))^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [z(k) - (\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} B_{ij}(x, y))]^2 \quad (13.40)$$

数据值之涉及一个下标, 因为此数据只在此平面的离散点上, 每一个数据值 z_k 位于 x - y 平面的点 (x_k, y_k) .

确定张量积 B 样条曲面系数的回归问题的公式化是和以前介绍的一维情况有点相似. 每一个基本函数 $B_{ij}(x, y)$ 占 16 个网面矩形 $[i, i+4] \times [j, j+4]$. 因为基本函数重叠, 所以每一个网面矩形上有 16 个基本函数. 每一个基本函数包括 16 个二元三次多项式块. 每一块定义在一个网面矩形上, 在此网面矩形外是非零的.

假设此网面是均匀的, 所以所有网面矩形都是大小相同的方格. 此 B 样条基本函数中的二元三次多项式块的公式对每一方格都是相同的. 每一张量积基本函数可分写成一维基本函数的积:

$$B_{ij}(x, y) = B_j(x) B_i(y) \quad (13.41)$$

每一个一维基本函数包括 4 个三次多项式, 定义在小网面矩形上的 16 个多项式块中的每一个都是两个三次多项式的积, 其中一个以 x 为变量, 另一个以 y 为变量, 以 x 为变量的 4 个三次多项式见式 13.34, 同样有以 y 为变量的 4 个三次多项式为:

$$\begin{aligned}
b_0(y) &= \frac{y^3}{6} \\
b_1(y) &= \frac{1+3y+3y^2-3y^3}{6} \\
b_2(y) &= \frac{4-6y^2+3y^3}{6} \\
b_3(y) &= \frac{1-3y+3y^2-y^3}{6}
\end{aligned} \tag{13. 42}$$

B 样条基本函数的 16 个多项式块是由前面给的多项式两两相乘得到的，在网面的点 (x, y) ，估计 B 样条前面的公式如下：

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} b_j(x) b_i(y) \tag{13. 43}$$

用此公式代替一维三次多项式就得到估计 B 样条曲面的公式，16 个系数的每一项为：

$$\begin{aligned}
a_{i,j} & x^3 y^3 / 18 \\
a_{i,j-1} & x^3 / 18 + (x^3 y + x^3 y^2 - x^3 y^3) / 6 \\
a_{i,j-2} & 2x^3 / 9 - x^3 y^2 / 3 - x^3 y^3 / 6 \\
a_{i,j-3} & x^3 - 3x^3 y + 3x^3 y^2 - x^3 y^3 / 18 \\
a_{i-1,j} & (1+3x+3x^2-3x^3) y^3 / 18 \\
a_{i-1,j-1} & (1+3x+3x^2-3x^3) / 18 + (1+3x+3x^2-3x^3) y / 6 \\
& + (1+3x+3x^2-3x^3) y^2 / 6 - (1+3x+3x^2-3x^3) y^3 / 6 \\
a_{i-1,j-2} & 2(1+3x+3x^2-3x^3) / 9 - (1+3x+3x^2-3x^3) y^2 / 3 \\
& + (1+3x+3x^2-3x^3) y^3 / 6 \\
a_{i-1,j-3} & (1+3x+3x^2-3x^3) / 18 - (1+3x+3x^2-3x^3) y / 6 \\
& + (1+3x+3x^2-3x^3) y^2 / 6 - (1+3x+3x^2-3x^3) y^3 / 18 \\
a_{i-2,j} & (4-6x^2+3x^3) y^3 / 18 \\
a_{i-2,j-1} & (4-6x^2+3x^3) / 18 + (4-6x^2+3x^3) y / 6 \\
& + (4-6x^2+3x^3) y^2 / 6 - (4-6x^2+3x^3) y^3 / 6 \\
a_{i-2,j-2} & 2(4-6x^2+3x^3) / 9 - (4-6x^2+3x^3) y^2 / 3 \\
& + (4-6x^2+3x^3) y^3 / 6 \\
a_{i-2,j-3} & (4-6x^2+3x^3) / 18 - (4-6x^2+3x^3) y / 6 \\
& + (4-6x^2+3x^3) y^2 / 6 - (4-6x^2+3x^3) y^3 / 18 \\
a_{i-3,j} & (1-3x+3x^2-x^3) y^3 / 18 \\
a_{i-3,j-1} & (1-3x+3x^2-x^3) / 18 + (1-3x+3x^2-x^3) y / 6 \\
& + (1-3x+3x^2-x^3) y^2 / 6 - (1-3x+3x^2-x^3) y^3 / 6 \\
a_{i-3,j-2} & 2(1-3x+3x^2-x^3) / 9 - (1-3x+3x^2-x^3) y^2 / 6 \\
& + (1-3x+3x^2-x^3) y^3 / 6 \\
a_{i-3,j-3} & (1-3x+3x^2-x^3) / 18 - (1-3x+3x^2-x^3) y / 6 \\
& + (1-3x+3x^2-x^3) y^2 / 6 - (1-3x+3x^2-x^3) y^3 / 18
\end{aligned}$$

这些表示是在点 (x, y) 处估计的, 乘以对应的系数 $a_{i,j}$, 求和得到在 (x, y) 处的 B 样条曲面.

估计 B 样条曲面的公式也就是用于确定 B 样条曲面的回归问题的模型. 在 B 样条曲面中有 $(n+1)(m+1)$ 个系数. 每一数据点 (x_k, y_k, z_k) 得到一个包括 16 个系数的方程. 如同在一维情况下, 回归问题可得到一个线性方程组:

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (13.44)$$

其中 \mathbf{a} 是 B 样条系数的矢量, 右侧的列矢量 \mathbf{b} 是数据值 x_k , $k=1, 2, \dots, N$, N 的矢量. 除了对应在包含 (x_k, y_k) 的方格上的基本函数的 16 个元素矩阵 \mathbf{M} 的每一行为 0.

此方法可通过拟合 B 样条曲面到均匀像元和采样样条曲面来使图像平滑. 对 B 样条网面来说没有必要和图像网面对应; 实际上, 如果 B 样条网面有更大的空间, 也就更光滑. B 样条基本函数象高斯光滑滤波器(第四章介绍过), 而且, B 样条基本函数的宽度是由 B 样条网面的空间决定的. 当使用以前介绍的用于 B 样条网面回归问题的公式时, 在图像上像元值为 z_{ij} 的位置 (x_j, y_i) 被映射到 B 样条曲面的网面坐标系中. B 样条曲面可按需采样, 在原始图像的网面点坐标处, 为了计算光滑图像的像元.

B 样条曲面方程的优化表明 B 样条只是一系列 13.5.2 节中介绍的二元三次曲面块. 二元三次曲面块和 B 样条曲面之间的区别只是 B 样条曲面的二元三次块在块所在区域是二阶连续的, 而任意二元三次块根本不需要连续. 张量积 B 样条曲面是光滑的, 而且还是二阶连续的, 可以用于如身体器官、车体、飞机机身的建模.

在许多实际应用中, 张量积 B 样条曲面必须是参数形式 $(x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, 如 13.4.3 节介绍过的一样, 在回归问题中反应曲面的系数是三元矢量, 每一个元素对应 x, y, z 中的一个坐标. u, v 空间是平面直角坐标系, 被分为均匀的网面. 最困难的是构造把点 (x, y, z) 映射到 u, v 空间的公式, 那样此测量点就能正确地组成 B 样条曲面的二元三次曲面块联系起来.

13.4.2 加权样条逼近

目前介绍的曲面逼近方法的问题是: 甚至在曲面边界的数据不连续, 解还是光滑曲面. 在 13.6.1 节介绍的回归样条的光滑的无参数函数是隐含的. 如果拟合曲面可以公式化为一系列分段光滑函数, 深度测量值为:

$$f(x, y) = \bigcup_{l=0}^{M-1} f_l(x, y) \quad (13.45)$$

以分成数个区域, 每个区域对应一个分段光滑函数, 那样解能更准确地反应此处曲面的形状. 然而这会得到一些用于计算某些曲面的算法, 这些超出了本书的范围. 13.7 节中将讨论曲面分割的问题. 我们可以避开曲面表示中的一些比较难的课题, 而且通过改变方程 13.5.2 的光滑性函数以降低深度数据不连续处的光滑性, 仍然获得了符合不连续性的非常好的曲面拟合. 此方法就是加权正则化方法.

一维的加权正则化式子为:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 + \int w(x, y) [f_{xx}(x)]^2 dx \quad (13.46)$$

如果权函数 $w(x)$ 在数据不连续点取值非常小, 在其它地方大, 那么权函数就消去了不连续点的连续标准.

在二维情况下, 加权样条曲面拟合的公式如下:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (z_i - f(x_i, y_i))^2 + \iint w(x, y) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (13.47)$$

权函数为:

$$w(x, y) = \frac{\alpha^2}{1 + \|\rho(x, y)\|^2} \quad (13.48)$$

其中 $\rho(x, y)$ 是采样曲面的梯度。应指出的是来自方程 13.29 的正则化参数 α 已溶入权函数。

可以用变分法把方程 13.47 变为偏微分方程，或者用回归样条方法取代具有线性回归问题的方程 13.47。假定在张量积基本函数定义的网面的区域上的权是常数，就可以从梯度拟合中计算出方程 13.47 中的权函数。

13.5 曲面分割

一幅距离图像可以看作是如下分段光滑曲面均匀采样的网格：

$$z = f(x, y) \quad (13.49)$$

本节将讨论如何将定义在均匀网格上的一组距离采样值分割成具有相似曲率的区域，并用低阶的双变量多项式来逼近每一个区域。表面曲率特性可用来选取核区域，然后增长核区域以覆盖邻近距离采样值，核区域的增长准则是邻近距离采样值与逼近核区域的双变量多项式之间的偏差小于某一预先给定的阈值。

曲面分割问题通常表述如下，将分段光滑的曲面 $z = f(x, y)$ 分割成光滑曲面基元

$$z = f(x, y) = \sum_{l=0}^{n-1} f_l(x, y) \xi(x, y, l) \quad (13.50)$$

其中 $\xi(x, y, l)$ 为特征函数，表示将曲面划分成表面片的一种分割，

$$\xi(x, y, l) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } (x, y) \in R_l \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

R_l 表示第 l 个区域，它对应一个曲面基元，每一个区域可以用如下多项式逼近：

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq m} a_{ij} x^i y^j \quad (x, y) \in R_l \quad (12.51)$$

此模型包括平面、双线性、双三次、双四次多项式曲面片。

特征函数 $\xi(x, y, l)$ 可以通过每一区域像素位置 $[i, j]$ 的列表来实现，也可以使用其它表示如模板、四叉树等来实现。

13.5.1 初始分割

通过计算曲面的平均曲率 H 和高斯曲率 K ，并使用 H 和 K 的正负号，可以估计用于分割的初始核区域，以形成初始区域分割。对应于平均曲率和高斯曲率正负号的曲面有 8 种类型，表 13.1 所示，这些曲面类型可以用于构造核区域。

$K[i, j]$			
	+	0	-
-	峰	脊	鞍脊
0		平面	最小曲面
+	谷	谷	鞍谷

假设距离函数分布在均匀网格上，因此可以按照一般图象进行处理。用可分离滤波器与距离图象进行卷积来估计距离图象的一阶和二阶导数 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ 。使用距离图象的一阶和二阶导数计算平均曲率和高斯曲率

$$H[i, j] = \frac{(1 + f_y^2[i, j])f_{xx}[i, j] + (1 + f_x^2[i, j])f_{yy}[i, j] - 2f_x[i, j]f_y[i, j]f_{xy}[i, j]}{2\left(\sqrt{1 + f_x^2[i, j] + f_y^2[i, j]}\right)^3} \quad (13.52)$$

$$K[i, j] = \frac{f_{xx}[i, j]f_{yy}[i, j] - f_{xy}^2[i, j]}{(1 + f_x^2[i, j] + f_y^2[i, j])^2} \quad (13.53)$$

使用下面公式计算整数标记以实现平均曲率和高斯曲率正负号编码。

$$T[i, j] = 1 + 3(1 + \text{sgn}(H[i, j])) + (1 + \text{sgn}(K[i, j])) \quad (13.54)$$

然后使用序贯连通成份算法（见第三章），将具有相同符号标记组成一个连通区域，并使用收缩或腐蚀算法把每一个连通区域减少到可作为核区域的最大尺寸区域，使用滤波器将那些无法对应场景曲面片的太小的区域滤掉。最后剩下的区域构成区域增长的种子。

13.5.2 曲面片增长

距离图象中的每一个核区域可以用双变量多项式有效地拟合。拟合多项式一般从一阶（平面）开始，然后逐渐增加多项式（曲面）的阶数，直到曲面能够很好地拟合核区域为止。如果多项式阶数已经很高，但仍然无法得到满意的拟合结果，则该区域不能作为核区域。接下来的工作是核区域扩展，以便覆盖核区域更多相似的邻近点，即把那些没有标记的距离像素通过增长过程添加到相应的核区域中去。决定邻近点是否添加到核区域中的相似性准则是邻近点与双变量多项式之间的偏差均方根，也称为拟合残差。如果该残差小于预定的阈值，则该邻近点为区域候选点。在找到所有的候选点以后，再使用双变量多项式对核区域和候选点一起重新进行拟合，如果需要的话，可以考虑增加双变量多项式的阶数，使得所有点都满足相似性准则。如果拟合残差小于预定的阈值，则所有候选点与核区域共同组成一个大区域；否则，放弃所有的候选点。当没有区域能够再扩大时，区域增长过程终止。用于曲面分割的区域增长算法见算法 13.3。

算法 13.3 曲面分割算法

1. 使用可分离滤波器，计算距离图象的一阶和二阶偏导数，
2. 计算图象每一个像素位置的平均曲率和高斯曲率，
3. 对每一像素标记曲面类型，
4. 收缩区域以消除靠近区域边界的错误标记，
5. 使用序贯连通成份算法识别核区域，
6. 去掉太小的核区域，
7. 用双变量多项式拟合每一个核区域，
8. 从某一核区域开始，将满足相似性准则的核区域邻近点标记为该区域候选点，
9. 重新用双变量多项式同时拟合核区域和区域候选点，如果拟合结果满足相似性准则，则核区域和候选点共同构成新区域，否则，放弃区域候选点，
10. 选择未进行过增长的核区域，重复步骤 8 和 9，直到没有核区域能够再增长。

13.6 曲面配准

通过解绝对方位问题(12.2 节)，可以确定共轭对集合中的对应点之间的变换，也有不需要对应点就能实现两个表面对准，例如，无需事先知道采样点与物体表面点对应关系，就能将一组距离采样值与物体模型对准。本节将介绍迭代最近点算法（iterative closest point, ICP），此算法不用点对应关系，却可以确定一个物体的两种视图之间的刚体转换。

迭代最近点算法可以应用在许多物体模型上，包括：点集，二维或三维的以及各种不同的曲面表示。曲线可以表示为：多直线段线、隐式曲线或参数曲线。曲面可以表示为：多边形曲面片、隐式或参数曲面、或张量积 B 样条。一个物体的两个视图没有必要具有同样的表示。例如，一个视图可以是由主动三角测距获取的一系列空间曲线，而另一个视图可能是张量积三次样条曲面。关键的问题是视图的采样点可以映射到另一个视图上最近的点，以逼近

共轭对点集. 通过对应关系求解绝对方位问题将会改善视图之间的对准性. 找到最近点的对应, 并用这些近似的共轭对集求解绝对方位问题的过程可以一直重复进行, 直到两个视图完全对准.

下面讨论迭代最近点算法用于点集与曲面模型配准的方法. 给定一个物体曲面的点集 \mathbf{P} 和此物体的一个模型 \mathbf{M} , 确定模型上的点集, 使其与采样点集是最近的. 采样点 \mathbf{p} 和模型 \mathbf{M} 的距离是:

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{M}) = \min_{\mathbf{q} \in \mathbf{M}} \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| \quad (13.56)$$

计算离采样点集 $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}\}$ 中的每一点最近的点集 $\mathbf{Q} \in \mathbf{M}$, $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}\}$. 把每一采样点 \mathbf{p} 和模型中最近的点 \mathbf{q} 配对以组成一共轭对集 $\{(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_n, q_n)\}$. 用这一系列共轭对求解绝对方位问题. 即使这些点列不是真正的共轭对, 也可以获得视图之间转换的逼近解法. 把这种转换用于点列 \mathbf{p} , 而且重新计算一系列最近点 \mathbf{q} . 目前, 点列离模型比较近, \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 的点更对更接近真正的共轭对, 可以再解一次绝对方位问题, 再转换一次点列 \mathbf{p} . 本程序可以重复直到最近点之间平方距离的数目低于某一个阈值.

在早期的迭代中, 最近的点对可能和真正的共轭对相去甚远, 但是通过应用这些相似共轭对来解绝对方位问题, 实现刚体转换, 使此点列更接近模型. 随着迭代的继续, 最近点对变得越来越象有效共轭对了. 例如, 如果点对起初离模型较远, 那么所有点可以映射到模型的同一点. 很显然, 这样多对一的映射不可能是有效的一系列共轭对, 但是第一次迭代使此点列置于此模型上, 那样这些点就位于匹配模型点的中心, 而且接下来的迭代把点列的中心和模型的中心对准. 最终的迭代使点列旋转, 调整位置以对准点列和模型. 迭代最近点重合的过程见算法 13.4.

算法 13.4 迭代最近点重合

把一系列点和以多项式块为模型的曲面重合起来.

1. 计算最近点列,
2. 计算点列之间的重合,
3. 应用转换来重合点列,
4. 返回第一步直到重合误差低于某一阈值.

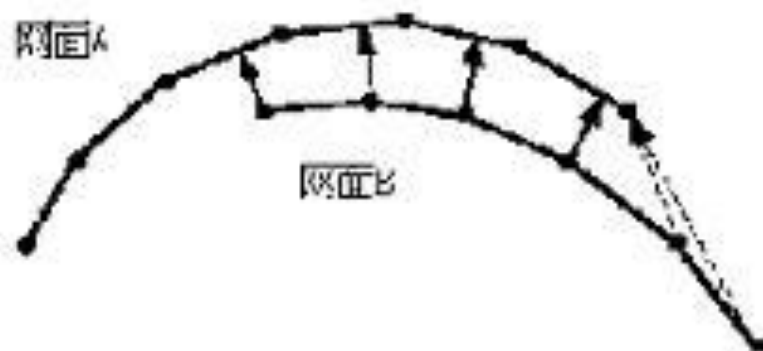


图 13.8 求网面套准寻找对应点

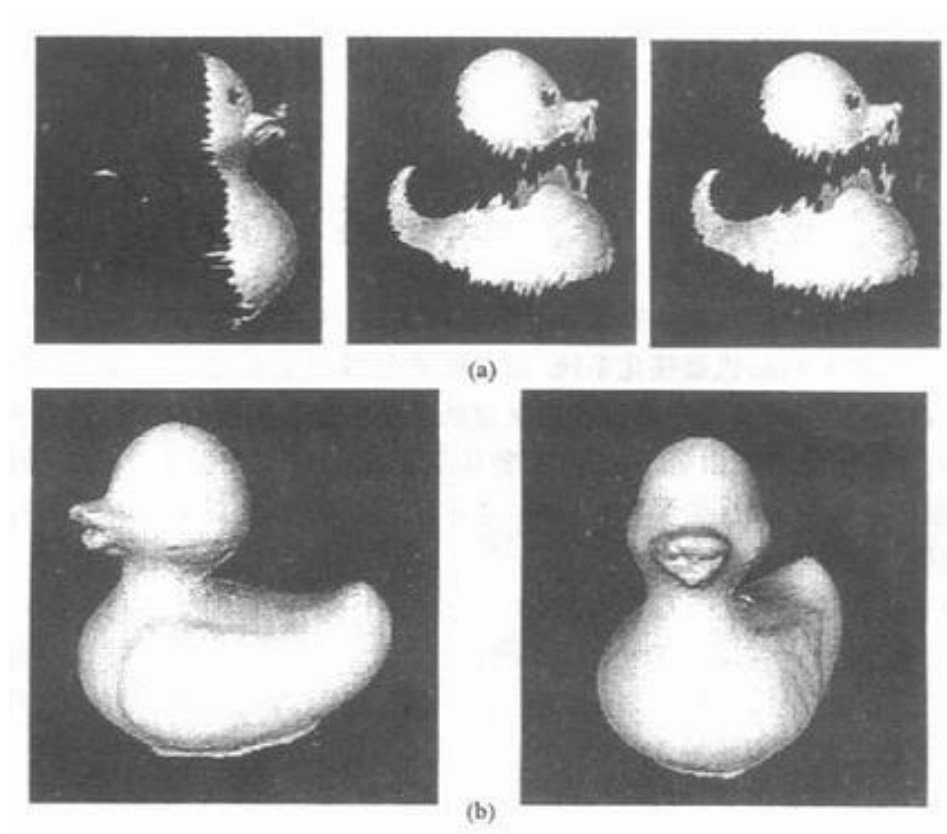


图 13.9 使用最近迭代算法进行深度图像序列配准示意图

思考题

13. 1 怎样确定空间 4 个点是否共面？
13. 2 给出曲面基本曲率、高斯曲率和平均曲率的定义。已知曲面上一点的这些曲率，你能得到此曲面的什么信息？从这些曲率中你能得到曲面的什么局部信息和全局信息？
13. 3 什么是样条曲线？为什么三次样条经常用于表示曲线？
13. 4 为什么用多边形片表示任意曲面？用多边形片能够多大程度地接近任意曲面？
13. 5 什么是翼边缘数据结构？使用翼边缘数据结构的最大特点是什么？
13. 6 曲面拟合和曲面插值有何区别？
13. 7 什么是正则化？试举例说明使用正则化能有效地解决问题。
13. 8 如何用 B 样条函数平滑图像？试举例说明？
13. 9 使用微分几何特性将曲面的局部形状分为 8 种曲面类型之一。请解释这些微分几何特性，并说明划分曲面的标准是什么？

计算机练习题

13. 1 写一个程序用于分割图像（包括举例图像），分割可以从基于微分几何学特征的局部核区域开始。用区域生长方法拟合一个图像中的双二次和双三次曲面。选择合适的区域增长和区域增长终止准则。将你的程序用于几幅测试图像，研究拟合曲面的误差。
13. 2 编制一个程序，可以生成超椭圆和超椭圆球（如图 13.2 和 13.3 所示）。

