

第 12 章 标定

本章将讨论各种摄像机系统及深度成像系统的标定方法. 在摄影测量学领域中, 已经建立了大量的摄像机和测距传感器标定方法. 这些方法可以用来确定摄像机或测距传感器在场景中的位置和方向以及与场景坐标之间的关系.

在摄影测量学中有以下四个标定问题:

- (1) 绝对定位: 通过标定点确定两个坐标系在绝对坐标系中的变换关系, 或确定测距传感器在绝对坐标系中的位置和方向.
- (2) 相对定位: 通过场景中的标定点投影确定两个摄像机之间的相对位置和方向.
- (3) 外部定位: 通过场景中的标定点投影确定摄像机在绝对坐标系中的位置和方向.
- (4) 内部定位: 确定摄像机内部几何参数, 包括摄像机常数, 主点的位置以及透镜变形的修正量.

这些标定问题主要起源于高空摄影技术, 是摄影测量中的经典问题. 除了以上四个标定问题外, 摄影测量学还解决以下两个问题: 一是通过双目立体视差确定点在场景中的实际位置, 二是对立体图像对进行校正变换, 使得立体图像对的外极线与图像的行平行以便简化后续处理(见第十一章).

摄像机标定过程中涉及到以下几种坐标, 场景坐标、摄像机坐标、图像坐标和像素坐标等, 这些坐标已经在 1. 7 中介绍成像基础知识时引入. 确定这些坐标之间的关系就是本章所要讨论的各种标定问题的目的.

12. 1 刚体变换

物体位置和方向的任意变化都可以认为是刚体变换, 因为物体的移动只改变其位置和方向, 并不改变其形状和大小. 假定通过两个处于不同位置的摄像机均可看到 θ 点, \mathbf{p} 点在两个摄像机坐标系中的坐标分别是和 $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. 显然两个摄像机位置之间的变换是刚体运动, 因此, \mathbf{p} 点在第一个视场中的坐标 \mathbf{p}_1 可以通过旋转和平移变换到第二个视场中的坐标 \mathbf{p}_2 ,

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{R}\mathbf{p}_1 + \mathbf{t} \quad (12. 1)$$

其中矩阵 \mathbf{R} 是一个 3×3 的正交方阵, 用于旋转变换:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix} \quad (12. 2)$$

矢量 $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)^T$ 表示平移, 或者说点 \mathbf{t} 是第一个坐标系原点在第二个坐标系上的坐标, 如图 12. 1 所示.

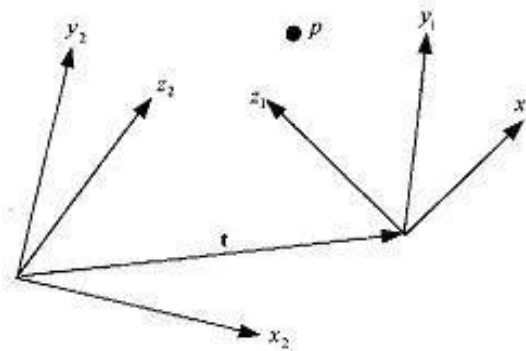


图 12. 1 两个摄像机坐标系

方程 12. 1 可以认为是计算一个点经过旋转和平移以后的新坐标，或是计算空间中同一个点在不同坐标系中的坐标。前者用于刚体力学：在物体移动到一个新的位置以后，计算物体上一点的新坐标；后者用于标定问题：同一点在不同观察位置上观察将会得到不同的坐标，这种不同可以由刚体变换确定，而标定问题就是来确定这种刚体变换。例如，考虑两个具有不同位置和姿态的摄像机观察场景中同一点，由于观察角度不同，这一点在两个摄像机坐标系中的坐标是不同的。设想旋转第一个摄像机，使其方向与第二个摄像机的方向相同；再设想将第一摄像机平移到第二摄像机的位置上，则两个摄像机坐标系完全重合。

12. 1. 1 旋转矩阵

空间角可用直角坐标系中的欧拉角描述：绕 x 轴旋转角 θ ，绕新的 y 轴旋转角 ψ ，绕新的 z 轴旋转角 ϕ ，角 θ 是光轴的俯仰角(pitch)，也叫垂直角，角 ψ 是光轴的偏航角(yaw)(水平角)，角 ϕ 表示光轴滚动角(roll)或扭转角(twist)。无转动(三个角都等于零)指的是两个坐标系系统完全对正。各角度旋转正方向为从坐标系原点沿各轴正方向观察时的逆时针旋转方向。用这些角表示方程 12. 2 定义的旋转矩阵各元素如下：

$$\begin{aligned} r_{xx} &= \cos \psi \cos \phi \\ r_{xy} &= \sin \theta \sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \\ r_{xz} &= \cos \theta \sin \psi \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \\ r_{yx} &= \cos \psi \sin \phi \\ r_{yy} &= \sin \theta \sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \\ r_{yz} &= \cos \theta \sin \psi \sin \phi - \sin \theta \cos \phi \\ r_{zx} &= -\sin \psi \\ r_{zy} &= \sin \theta \cos \psi \\ r_{zz} &= \cos \theta \cos \psi \end{aligned} \quad (12. 3)$$

用欧拉角的形式来确定坐标系的旋转会引起数值解不稳定，因为欧拉角很小的变化可能对应很大的旋转变换。因此，标定算法或者求解旋转矩阵的各元素常使用其它形式的旋转角表达式，如，四元数等。

旋转矩阵是一个正交矩阵：

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (12. 4)$$

其中 \mathbf{I} 表示单位矩阵。由上述公式不难得到旋转矩阵的逆就是该矩阵的转置。标定算法会在坐标系之间产生刚体变换；例如，从坐标系 1 到坐标系 2，我们有

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{R} \mathbf{p}_1 + \mathbf{t}_2 \quad (12. 5)$$

刚体变换的逆变换就是将坐标系 2 的坐标变为坐标系 1 的坐标：

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}^T (\mathbf{p}_2 - \mathbf{t}_2) = \mathbf{R}^T \mathbf{p}_2 + \mathbf{t}_1 \quad (12. 6)$$

这里的 \mathbf{t}_i 表示坐标系上的 i 点是另一个坐标系的原点。注意平移变换的逆变换并不是简单的等于 \mathbf{t}_2 必须乘以旋转变换的逆变换，因为 \mathbf{t}_2 表示在坐标系 2 上的平移，其逆变换一定要表示到与坐标系 1 同一个方位的坐标系中。

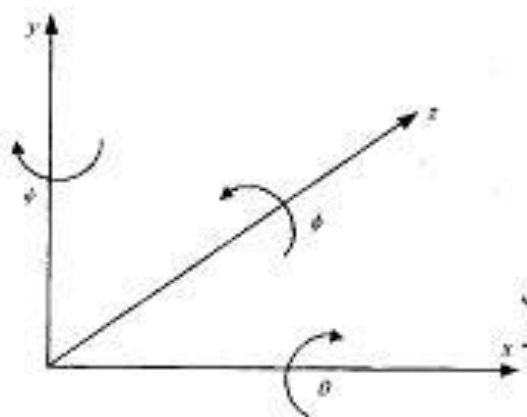


图 12. 2 欧拉角或俯仰角、偏航角和滚动角示意图

12. 1. 2 旋转轴

旋转也可以规定为逆时针(右手坐标系)绕由单位矢量 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 表示的轴的旋转. 这是一种观察旋转的非常直观方法, 但是它在数值计算上也有和欧拉角一样的问题. 旋转轴和旋转角度表达式可以转换成矩阵表达式(方程 12. 1), 以作为刚体变换的公式. 当然, 如果能直接使用旋转轴和旋转角表达式来产生满意的数值解, 将是最好不过的了. 在这种思路的基础上产生了旋转四元数, 这也是将四元数用于旋转表示的原因之一.

12. 1. 3 四元数

四元数是一个四元矢量 $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, 可用来表示坐标旋转. 实践证明, 对于定位求解问题, 四元数表示可以给出很好的数值解. 为了解四元数是如何对旋转进行表示的, 我们首先想象在二维平面 $x-y$ 上的一个单位圆, 单位圆上的任何一个位置都只对应于一个旋转角. 如图 12.3 所示.

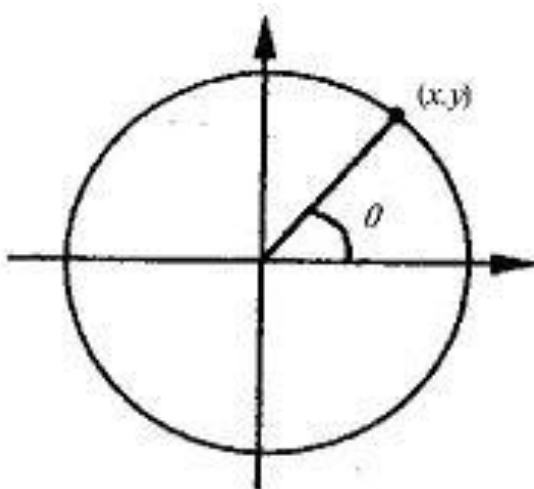


图 12. 3 单位圆上一点 (x, y) 只能对应一个旋转角 θ

再考虑三维空间中的单位球:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (12. 7)$$

在单位球上的任意一点只对应绕 x 轴和 y 轴旋转的两个角 θ 和 ψ ，无法表示绕 z 轴旋转的第三个角 ϕ 。显然，再增加一个自由度就可以表示所有三个旋转角。四维空间单位球定义如下：

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \quad (12. 8)$$

三维空间中所有三个旋转角可以通过四维单位球上的点来表示。由单位四元数表示的旋转公式如下：

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (12. 9)$$

每一个单位四元数和其反极点(antipole) $-\mathbf{q} = (-q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$ 都表示三维空间中的旋转。

用单位四元数表示刚体变换的旋转矩阵：

$$R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix} \quad (12. 10)$$

在计算出单位四元数之后，就可利用上式计算旋转矩阵。

单位四元数与上节描述的旋转角和旋转轴有密切关系。旋转可以用旋转量 θ 和旋转轴方向 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 的组合来表示，即四元数由一个与旋转量有关的标量和一个旋转轴矢量组成。

设旋转轴的单位矢量为 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ，使用 \mathbf{i}, \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 表示坐标轴，则旋转轴单位矢可以表示为：

$$\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad (12. 11)$$

绕该轴逆时针旋转 θ 角的单位四元数为：

$$\begin{aligned} q &= \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) \\ &= q_0 + q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (12. 12)$$

上式的第一项为四元数的标量(实)部分，其余项为矢量(虚)部分。空间点 $\mathbf{p} = (x, y, z)$ 的四元数 \mathbf{r} 实际上只有矢量部分(虚部)，该矢量就是空间点 \mathbf{p} 的矢量表示。

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (12. 13)$$

设 \mathbf{p}' 是点 \mathbf{p} 通过矩阵 $R(\mathbf{q})$ 旋转得到，

$$\mathbf{p}' = R(\mathbf{q})\mathbf{p} \quad (12. 14)$$

若 \mathbf{r} 是点 \mathbf{p} 的四元数表示，那么对旋转后点的四元数表示 \mathbf{r}' 可以由四元数 \mathbf{q} 直接计算：

$$\mathbf{r}' = \mathbf{q}\mathbf{r}\mathbf{q}^* \quad (12. 15)$$

这里的 $\mathbf{q}^* = (q_0, -q_x, -q_y, -q_z)$ ，是 \mathbf{q} 的共轭四元数：

四元数乘法定义如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\mathbf{q} &= (r_0q_0 - r_xq_x - r_yq_y - r_zq_z, \\ &\quad r_0q_x + r_xq_0 + r_yq_z - r_zq_y, \\ &\quad r_0q_y - r_xq_z + r_yq_0 + r_zq_x, \\ &\quad r_0q_z + r_xq_y - r_yq_x + r_zq_0) \end{aligned} \quad (12. 16)$$

刚体变换可以很方便地用七个元素 $(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$ 表示，前四个量是单位四元数，后三个量是平移量。在这一表达式中，若用 $R(\mathbf{q})$ 表示对应于单位四元数的旋转矩阵，则刚体变换式为：

$$\mathbf{p}_2 = R(\mathbf{q})\mathbf{p}_1 + (q_4, q_5, q_6)^T \quad (12. 17)$$

12. 2 绝对定位

绝对定位问题是确定两个坐标系之间的刚体变换问题。求解绝对定位问题在机器视觉中有着许多应用,其中的一个应用是确定测距成像系统或双目立体视觉系统与定义在场景中的绝对坐标系之间的关系,这样可以将所有的测量值均表示在一个公共的坐标系里。若 $\mathbf{p}_c = (x_c, y_c, z_c)$ 表示点在摄像机坐标系中的坐标, $\mathbf{p}_a = (x_a, y_a, z_a)$ 表示点在绝对坐标系中的坐标,则绝对坐标定位问题的输入就是一个共轭对组: $\{(\mathbf{p}_{c,1}, \mathbf{p}_{a,1}), (\mathbf{p}_{c,2}, \mathbf{p}_{a,2}), \dots, (\mathbf{p}_{c,n}, \mathbf{p}_{a,n})\}$ 。

为了求解绝对定位问题,我们把刚体变换方程展开,以便说明旋转矩阵中各项的作用。设 \mathbf{p}_c 是摄像机坐标系内的点, \mathbf{p}_a 是绝对坐标系内的点,从 \mathbf{p}_c 到 \mathbf{p}_a 的刚体变换公式为:

$$\begin{aligned} x_a &= r_{xx}x_c + r_{xy}y_c + r_{xz}z_c + t_x \\ y_a &= r_{yx}x_c + r_{yy}y_c + r_{yz}z_c + t_y \\ z_a &= r_{zx}x_c + r_{zy}y_c + r_{zz}z_c + t_z \end{aligned} \quad (12. 18)$$

其中 12 个未知参数中有 9 个是旋转矩阵参数 \mathbf{r} , 3 个是平移参数 \mathbf{t} 。每个共轭对 $(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_a)$ 对应三个等式,则至少需要四个共轭对产生 12 个方程才能解出 12 个未知数。在实际应用过程中,常常使用大量的共轭对(这些共轭对通常是空间标定点在不同坐标系中的表示)来提高计算精度。

在解线性系统方程时,如果旋转矩阵 \mathbf{R} 没有正交标准化,则可能得不到有效的旋转矩阵。使用非标准正交矩阵作为旋转矩阵可能会产生意想不到的结果,如不能保证矩阵转置一定等于矩阵逆,并且共轭对的测量误差会严重地影响计算结果,从而不能产生刚体变换的最佳逼近。有些方法是在每一步迭代过程之后对矩阵进行正交化,但仍不能保证正交化的矩阵是旋转矩阵的最佳逼近。一种替代的方法是求解旋转角而不是矩阵的各项元素。旋转角最一般的表示方法是欧拉角,不过使用欧拉角会导致非线性方程,从而产生数值计算上的困难。在摄影测量中,通常的做法是对非线性方程线性化并求解,以便得到名义值的修正值。这种线性化算法的成功与否很大程度上取决于初始预估值好坏。

下面讨论用单位四元数表示方法求刚体变换。设 $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ 是对应于单位四元数 \mathbf{q} 的旋转矩阵,则摄像机坐标系上的每一点坐标转换成绝对坐标的刚体变换公式如下:

$$\mathbf{p}_{a,i} = \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{p}_{c,i} + \mathbf{t}_c \quad (12. 19)$$

其中 \mathbf{t}_c 是摄像机原点在绝对坐标系中的位置。现在的回归问题有七个参数:表示旋转的单位四元数的四个参数加上平移矢量的三个参数。

正如前面所指出的,绝对定位问题的输入是共轭对集合: $\{(\mathbf{p}_{c,1}, \mathbf{p}_{a,1}), (\mathbf{p}_{c,2}, \mathbf{p}_{a,2}), \dots, (\mathbf{p}_{c,n}, \mathbf{p}_{a,n})\}$ 。

考虑一组点的两种集合表示,在摄像机坐标系中的点集 $\mathbf{p}_a = \{\mathbf{p}_{a,1}, \mathbf{p}_{a,2}, \dots, \mathbf{p}_{a,n}\}$ 和绝对坐标系中的点集 $\mathbf{p}_c = \{\mathbf{p}_{c,1}, \mathbf{p}_{c,2}, \dots, \mathbf{p}_{c,n}\}$ 。绝对定位问题就是在空间中将这两个点群对正。下面计算每个点集的矩中心:

$$\bar{\mathbf{p}}_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{a,i} \quad (12. 20)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{c,i} \quad (12. 21)$$

用矩中心与每一个点相减得:

$$\mathbf{r}_{a,i} = \mathbf{p}_{a,i} - \bar{\mathbf{p}}_a \quad (12. 22)$$

$$\mathbf{r}_{c,i} = \mathbf{p}_{c,i} - \bar{\mathbf{p}}_c \quad (12. 23)$$

若已知旋转矩阵 $\mathbf{R}(\mathbf{q})$, 则平移表达式可表示为:

$$\mathbf{t}_c = \bar{\mathbf{p}}_a - \mathbf{R}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{p}}_c \quad (12. 24)$$

下面将讨论求解旋转矩阵, 使得这两簇射线对正. 在推导旋转矩阵时, 将点表示为从矩中心出发的射线, 这样所有坐标都将是射线坐标. 由于射线束是由共轭对集合推导的, 因此, 我们可以知道在摄像机射线束中的某一条射线对应于绝对坐标射线的那一条射线. 当两组射线对正后, 每一对对应射线将会重合. 换句话说, 每一对射线位于同一条直线上, 并指向同一方向. 若不考虑测量误差的影响, 则每对射线之间的夹角应为 0, 夹角的余弦为 1. 测量误差导致射线束不能完全对正. 但可以在最小方差的意义上, 通过求解旋转矩阵 $\mathbf{R}(\mathbf{q})$ 束得到最佳对正结果, 其中旋转矩阵的求解是求每对射线标量积的极大值:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{a,i} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{r}_{c,i} \quad (12. 25)$$

在四元数中, 上面的和式可以表示为:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{a,i} \cdot \mathbf{q}\mathbf{r}_{c,i}\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{q}\mathbf{r}_{c,i}) \cdot (\mathbf{q}\mathbf{r}_{a,i}) \quad (12. 26)$$

上式可以变成二次表达式:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\mathbf{q}\mathbf{r}_{c,i}) \cdot (\mathbf{r}_{a,i}\mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^n (N_{c,i}\mathbf{q})^T (N_{a,i}\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}^T N_{c,i}^T N_{a,i} \mathbf{q} \\ &= \mathbf{q}^T \left(\sum_{i=1}^n N_{c,i}^T N_{a,i} \right) \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \left(\sum_{i=1}^n N_i \right) \mathbf{q} = \mathbf{q}^T N \mathbf{q} \end{aligned} \quad (12. 27)$$

假设 \mathbf{q} 对应一个列向量. 则使二次式取极大值的单位四元数是对应于最大正特征值的特征向量. 特征根可以利用[Horn 1987]给出的公式求解四阶多项式来确定, 也可以利用标准数值方法[Press 1988]计算特征向量和特征值.

矩阵 $N_{c,i}$ 和 $N_{a,i}$ 是由每个射线元素构成. 设 $\mathbf{r}_{c,i} = (x_{c,i}, y_{c,i}, z_{c,i})$, $\mathbf{r}_{a,i} = (x_{a,i}, y_{a,i}, z_{a,i})$, 那么:

$$N_{c,i} = \begin{bmatrix} 0 & -x_{c,i} & -y_{c,i} & -z_{c,i} \\ x_{c,i} & 0 & z_{c,i} & -y_{c,i} \\ y_{c,i} & -z_{c,i} & 0 & x_{c,i} \\ z_{c,i} & y_{c,i} & -x_{c,i} & 0 \end{bmatrix} \quad (12. 28)$$

$$N_{a,i} = \begin{bmatrix} 0 & -x_{a,i} & -y_{a,i} & -z_{a,i} \\ x_{a,i} & 0 & z_{a,i} & -y_{a,i} \\ y_{a,i} & -z_{a,i} & 0 & x_{a,i} \\ z_{a,i} & y_{a,i} & -x_{a,i} & 0 \end{bmatrix} \quad (12. 29)$$

矩阵 N 为:

$$N = \begin{bmatrix} S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} & S_{yz} - S_{zy} & S_{zx} - S_{zy} & S_{xy} - S_{yx} \\ S_{yz} - S_{zy} & S_{xx} - S_{yy} - S_{zz} & S_{xy} + S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} \\ S_{zx} - S_{zy} & S_{xy} + S_{yx} & -S_{xx} + S_{yy} - S_{zz} & S_{yz} + S_{zy} \\ S_{xy} - S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} & S_{yz} + S_{zy} & -S_{xx} - S_{yy} + S_{zz} \end{bmatrix} \quad (12. 30)$$

式中的和式 S 是由摄像机坐标系和绝对坐标系的射线坐标元构成. 其中, S_{kl} 是求所有共轭对的摄像机坐标点的坐标 k 坐标和在绝对坐标点的坐标 l 坐标的乘积和:

$$S_{kl} = \sum_{i=1}^n k_{c,i} l_{a,i} \quad (12. 31)$$

上述计算的结果是一个单位四元法, 表示校准射线束的旋转变换. 刚体变换可以作用于测距摄像机, 双目立体视觉系统或任何其它深度测量系统产生的测量坐标值, 以便把这是测量值变换到绝对坐标系统的测量坐标值.

12.3 相对定位

相对定位问题是指用场景点在两个图像平面上的投影来确定两个摄像机坐标系之间的关系。相对定位问题是双目立体视觉系统标定的第一步。我们曾在第十一章讨论了沿极线匹配特征的双目立体视觉算法。为了简化表示，假定左、右图像平面上的外极线皆与图像阵列的行线重合，且对应的左、右图像阵列的行标号也相同。

设场景点 \mathbf{p} 在左、右两个摄像机的视场范围内(见图 11.1)。点 \mathbf{p} 在左摄像机坐标系用 $\mathbf{p}_l = (x_l, y_l, z_l)$ 表示，在右摄像机坐标系内用 $\mathbf{p}_r = (x_r, y_r, z_r)$ 表示。点 \mathbf{p} 在左摄像机图像平面上的投影为 $\mathbf{p}'_l = (x'_l, y'_l)$ ，在右摄像机图像平面上的投影为 $\mathbf{p}'_r = (x'_r, y'_r)$ 。设左右摄像机轴的焦距分别为 F_l, F_r 。由透视投影得到公式：

$$\frac{x'_l}{F_l} = \frac{x_l}{z_l} \quad \frac{y'_l}{F_l} = \frac{y_l}{z_l} \quad (12.32)$$

$$\frac{x'_r}{F_r} = \frac{x_r}{z_r} \quad \frac{y'_r}{F_r} = \frac{y_r}{z_r} \quad (12.33)$$

将左摄像机坐标系转换为右摄像机坐标系的刚体变换方程如下：

$$\begin{aligned} x_r &= r_{xx}x_l + r_{xy}y_l + r_{xz}z_l + t_x \\ y_r &= r_{yx}x_l + r_{yy}y_l + r_{yz}z_l + t_y \\ z_r &= r_{zx}x_l + r_{zy}y_l + r_{zz}z_l + t_z \end{aligned} \quad (12.34)$$

从透视投影方程 (12.32) 和 (12.33) 求出 x_l, y_l, x_r 和 y_r ，并将它们代入上面的刚体变换方程，得到一组共轭对投影之间的关系方程：

$$\begin{aligned} r_{xx}x'_l + r_{xy}y'_l + r_{xz}z'_l + t_x \frac{F_l}{z_l} &= x'_r \frac{z_r}{z_l} \frac{F_l}{F_r} \\ r_{yx}x'_l + r_{yy}y'_l + r_{yz}z'_l + t_y \frac{F_l}{z_l} &= y'_r \frac{z_r}{z_l} \frac{F_l}{F_r} \\ r_{zx}x'_l + r_{zy}y'_l + r_{zz}z'_l + t_z \frac{F_l}{z_l} &= z'_r \frac{z_r}{z_l} \frac{F_l}{F_r} \end{aligned} \quad (12.35)$$

变换方程的旋转部分改变左摄像机的方位使之与右摄像机方位相同。而平移部分就是两个摄像机之间的基线。平移变量和深度变量在等式中以比值的形式出现，分别表示基线的长度和深度可任意缩放。例如，可以将摄像机分离两倍的距离，并将场景中的点移远两倍的距离而不改变透视几何关系。

仅通过标定点的投影是不可能确定基线长度，但这并不是一个严重的问题，和确定比例系数一样，基线长度可以通过其它的方法确定。现在，假定摄像机之间的平移量是单位矢量。求解相对定位问题可以得到旋转的三个参数和表示基线方向的单位矢量的两个参数。双目立体深度测量值是以基线长度为计量单位的。假定单位基线长度，意味着双目立体测量值可以用任意计量单位表示。在这个单位基线长度假设下得到的测量值是正确的，但仍未确定比例系数。点之间的相对距离是正确的。这些任意设置的计量单位值乘以基线长度可以得到真实计量单位值。12.7 节将介绍如何确定基线距离，这也是求解绝对定位问题的一个部分。求解绝对定位问题得到绝对坐标变换。使用绝对坐标变换，任意计量单位立体测量值到真实计量单位的转换和点在观察者坐标系到绝对坐标系的变换可以同步进行。

方程组 (12.35) 含有 12 个相对位置参数和 2 个与场景点有关的未知数，因此若有 n 个标定点点，则有 $12 + 2n$ 个未知量，旋转矩阵是正交矩阵，由此可以产生 6 个约束，另一个约束是基线距离取单位值的约束。根据方程 (12.34)，若有 n 个标定点点，则可产生 $3n$ 个约束方程，这样会有 $7 + 3n$ 个约束。当 $n=5$ 时，约束数等于未知量数。所以求解这一问题至少需要五个共轭对，在实际中，使用更多的共轭对可以得到更高的求解精度。

求解相对定位问题首先从一组标定点点开始，使用这些标定点点在左、右图像平面上的投影

来确定这两个摄像机之间的刚体变换。每个投影点对应于一条从摄像机投影中心出发的射线，这条射线穿过投影点进入场景。对于场景中的标定点 \mathbf{p} ，其在两个图像平面的两个投影点 \mathbf{p}'_l 和 \mathbf{p}'_r 对应的两条射线应相交于 \mathbf{p} 点。但实际上，由于在图像平面上投影点位置的测量误差，相交点位置可能不在 \mathbf{p} 点。我们希望求出满足单位基线长度约束的两个摄像机在空间的相对位置和方向，以便使图像平面中的射线位置测量误差达到最小。

设 \mathbf{r}_l 是从左摄像机投影中心点出发，穿过左图像平面上的 \mathbf{p}'_l 点的射线(矢量)； \mathbf{r}_r 是从右摄像机投影中心点出发，穿过右图像平面上的 \mathbf{p}'_r 点射线(矢量)； \mathbf{b} 是从左摄像机投影中心点到右摄像机投影中心点的矢量。我们需要在同一个坐标系中处理每一条射线，所以旋转 \mathbf{r}_l 以使它和 \mathbf{r}_r 在同一个坐标系中，用 \mathbf{r}'_l 表示这个旋转后得到的射线。如果两条射线相交，则说明它们位于垂直于 $\mathbf{r}'_l \times \mathbf{r}_r$ 的平面中。基线也位于同一平面中。因此，基线也垂直于 $\mathbf{r}'_l \times \mathbf{r}_r$ ，这一关系在数学上可描述为基线矢量与 $\mathbf{r}'_l \times \mathbf{r}_r$ 的点积为 0：

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{r}'_l \times \mathbf{r}_r) = 0 \quad (12.36)$$

这个关系式称为共面条件。

由于测量误差，射线将不会交于 \mathbf{p} 点，也不满足共面条件。解决这一问题的有效方法是使用使用最小二乘法。

12.4 校正

校正(rectification)是立体图像对重新取样的过程，以使得外极线对应于图像阵列的行。其基本思想：校正左、右图像平面位置，使这两个平面与两摄像机光学中心连线平行，此时，由于极点在无穷远处，图像阵列的行就是极线，如图 12.4 所示。立体对应点可以沿对应图像搜索匹配点得到。如图 12.5 所示。

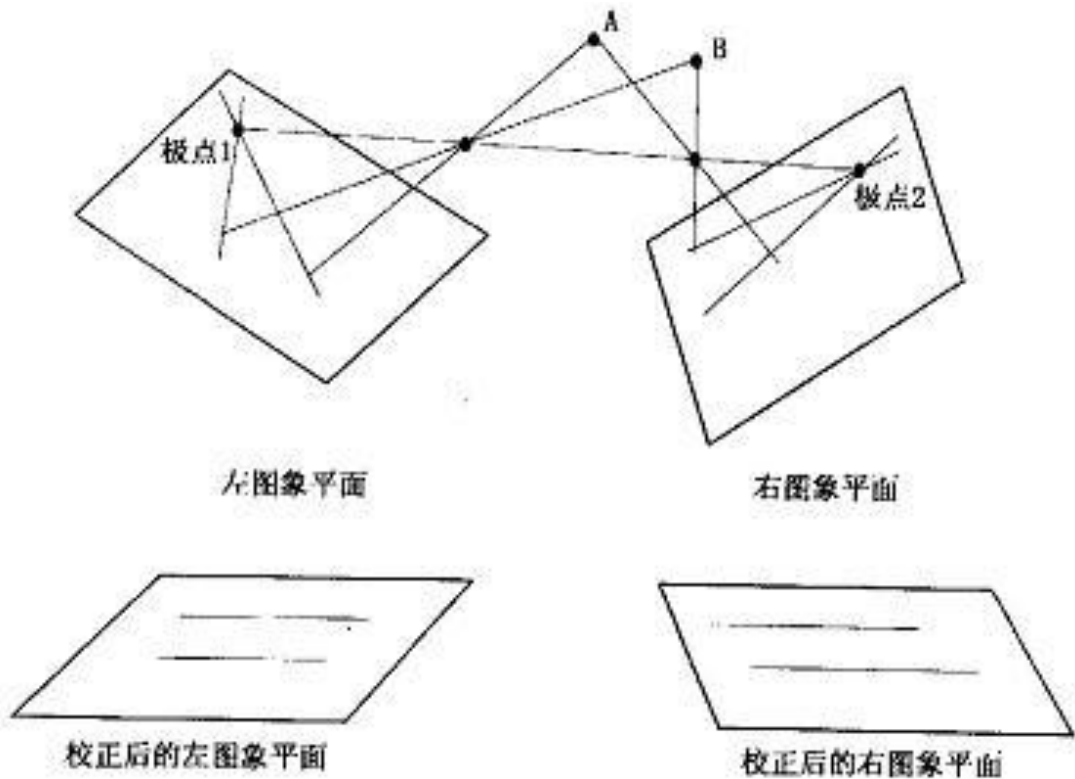


图 12.4 校正处理示意图

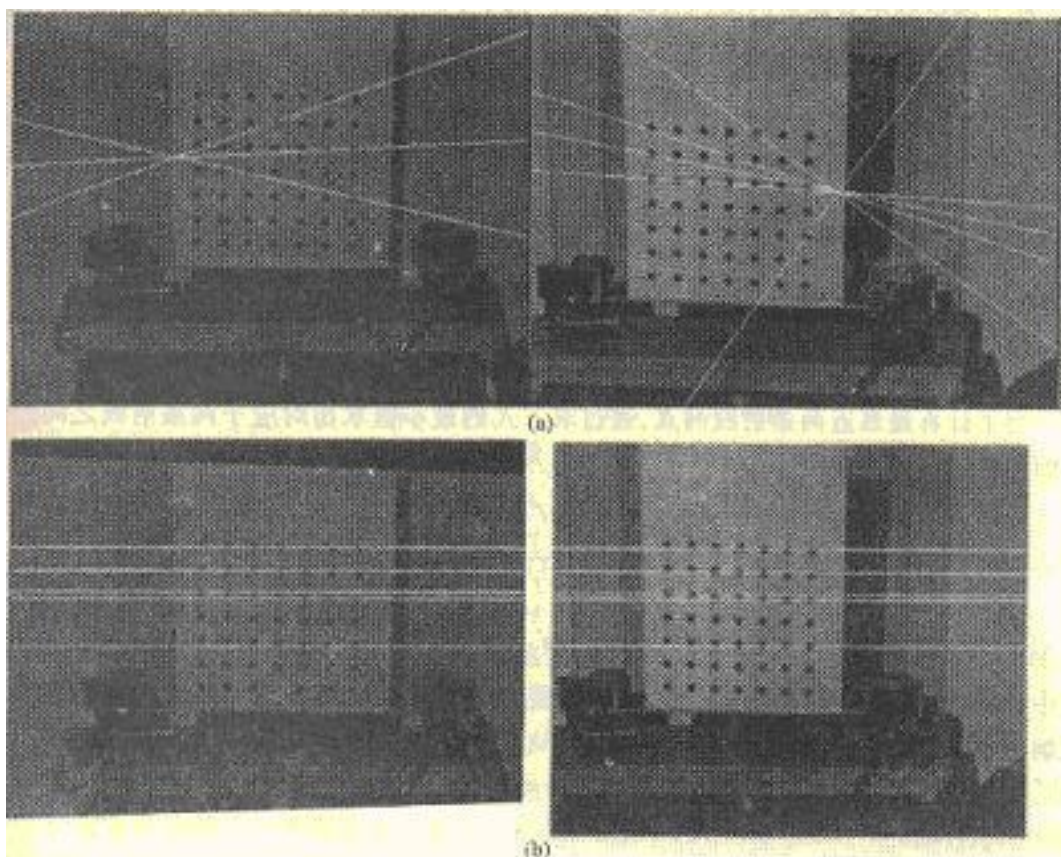


图 12.5 校正处理实验结果
(a) 原始图像 (b) 校正处理后的图像

实际上, 上述条件很难达到, 可能会出现一些偏差(绕摄像机垂直轴向内旋转), 但如果将左、右图像投影到一个平面上, 就能得到理想的极线几何. 左(右)摄像机中的每一个像素点分别对应于左(右)摄像机坐标系中的一条射线. 设 T_l 和 T_r 分别表示将左、右摄像机的射线变换到公共平面坐标系的刚体变换. 确定每个图像的顶点在公共平面上的位置, 创建新的左、右图像网格, 将每一个网格点变换回原来的图像上. 使用 12.6.2 节所讨论的双变量线性内插方法内插像素值以确定公共平面上新的左、右图像中的像素值.

12.5 双目立体深度测量

双目立体视觉是匹配左、右图像平面上的特征点并生成共轭对集合 $\{(\mathbf{p}_{l,i}, \mathbf{p}_{r,i})\}$, $i=1,2,\dots,n$. 在理想状态下, 每一个共轭对定义的两条射线, 相交于空间中某一场景点. 空间相交的问题就是找到相交点的三维空间坐标. 由于图像平面坐标的测量误差以及摄像机的误差, 两条射线不会相交, 所以通过立体对计算深度问题就是求最接近射线的场景点的坐标.

我们将假设立体测量所有的坐标系不同于任一摄像机坐标系. 例如, 立体坐标系可以建立在支撑两个摄像机的框架上. 这里出现了两个刚体变换: 一个是左摄像机相对于立体坐标系的校准变换, 另一个是右摄像机相对于立体坐标系的校准变换. 左变换包括有旋转矩阵 R_l 和平移量 $\mathbf{p}_l = (x_l, y_l, z_l)$, 右变换包括旋转矩阵 R_r 和平移量 $\mathbf{p}_r = (x_r, y_r, z_r)$. 为了在右(左)摄像机坐标系中表示测量点, 则需要使用相对定位问题中的刚体变换公式和平移公式.

在三维空间中共轭对的坐标分别为 $(x'_{l,i}, y'_{l,i}, F_l)$ 和 $(x'_{r,i}, y'_{r,i}, F_r)$. 将左摄像机坐标系旋转和平移到立体坐标系中:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix} + t_l R_l \begin{pmatrix} x'_{l,i} \\ y'_{l,i} \\ F_l \end{pmatrix} \quad (12. 37)$$

同样，对于右摄像机有：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} + t_r R_r \begin{pmatrix} x'_{r,i} \\ y'_{r,i} \\ F_r \end{pmatrix} \quad (12. 38)$$

为了计算最靠近两条射线的点，通过求下式的最小值求出对应于两条射线之间的最小的距离时， t_l 和 t_r 值。

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \left[\begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix} + t_l R_l \begin{pmatrix} x'_{l,i} \\ y'_{l,i} \\ F_l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} - t_r R_r \begin{pmatrix} x'_{r,i} \\ y'_{r,i} \\ F_r \end{pmatrix} \right]^2 \\ &= [\mathbf{b} + t_l \mathbf{r}_l - t_r \mathbf{r}_r]^2 \end{aligned} \quad (12. 39)$$

其中， \mathbf{b} 是立体坐标系中的基， \mathbf{r}_l 和 \mathbf{r}_r 分别是旋转后进入立体坐标系的左，右射线。为了解射线相交问题，对 t_l 和 t_r 求导并等于 0。解方程求出 t_l 和 t_r 并代入射线方程(方程 12. 42 和 12. 43)，以便求取位于每一条射线上的点。求出这两点的位置平均值，就得到深度的估计值。

立体点测量值是在立体坐标系统中进行的，立体坐标系可以是左或右摄像机坐标系，或是一个中性坐标系。如果通过求解外部定位问题(12. 8 节)或通过其它方法来求解左、右摄像机与立体坐标系之间的刚体变换，那么，立体点测量值单位与标定点单位一样。不考虑如何标定立体坐标系，我们必须将点测量值变换到场景绝对坐标系中。同时通过求解具有比例因子的绝对定位问题将测量值转换到与场景相适应的某一计量单位系统中。

12. 6 含有比例因子的绝对定位

在 12. 2 节中，绝对定位变换公式不允许包含比例因子；坐标系之间的变换仅包括旋转和平移的刚体变换。在双目立体系统中，若两个摄像机之间的基线未知或不正确时，或在测距摄像机之间具有不同测量单位时，比例因子会发生改变。

12. 2 节所讨论的绝对定位问题可以推广到包含比例因子变化的情况。推广后的坐标变换将包含用于视点与绝对坐标对正(alignment)的旋转和平移变换，也包含摄像机专用的测量单位到公用计量单位转换的比例因子。设点 \mathbf{p} 在一个坐标系中的坐标为 $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ，在另一个坐标系中的坐标为 $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ，则坐标系变换公式为：

$$\mathbf{p}_2 = sR\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_0 \quad (12. 40)$$

其中， s 是比例因子。这一参数使绝对定位问题参数数量增加到七个：三个旋转参数，三个平移参数，一个比例因子。比例变换是一种均匀比例缩放：即每个轴缩放比例量相同。

绝对定位问题的输入是来自第一和第二个视场的几个共轭对集合 $\{(\mathbf{p}_{1,i}, \mathbf{p}_{2,i})\}$ 。回归问题是求出旋转阵 R ，平移量 \mathbf{p}_0 ，和比例因子 s ：

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_{2,i} - sR\mathbf{p}_{1,i} - \mathbf{p}_0)^2 \quad (12. 41)$$

达到极小值。求解上述问题至少需要三个点，以得到九个方程来解七个未知量。实际中，使用更多的点可以得到更高的精度。

暂时忽略一下共轭对的对应关系是已知的，设想一下两个点集(在第一个坐标系中的点集和在第二个坐标系中的点集)是在绝对坐标系中的两个点群。计算每个点群矩中心如下：

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{1,i} \quad \bar{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{2,i} \quad (12.42)$$

$$\mathbf{r}_{1,i} = \mathbf{p}_{1,i} - \bar{\mathbf{p}}_1 \quad \mathbf{r}_{2,i} = \mathbf{p}_{2,i} - \bar{\mathbf{p}}_1 \quad (12.43)$$

将每个点群变换为有关矩中心的一个矢量簇：

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}_{2,i}\|^2}{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{r}_{1,i}\|^2} \quad (12.44)$$

计算矢量簇平均长度，即可确定比例因子。

这说计算比例因子列需知道旋转和平移，这在标定双目立体基线距离中十分有用，并且使用点越多计算结果越精确。

在确定旋转和比例因子之后，平移可以从矩中心很容易地计算出来：

$$\mathbf{p}_0 = \bar{\mathbf{p}}_2 - sR\bar{\mathbf{p}}_1 \quad (12.45)$$

计算旋转是确定如何校准关于矩中心的射线束的基本问题，计算第一和第二视场中的射线坐标标量积之和，得到的矩阵 \mathbf{M} ：

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{2,i} (\mathbf{r}_{1,i})^T \quad (12.46)$$

设矩阵 $\mathbf{Q} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$ 。则旋转矩阵为：

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\mathbf{S}^{-1} \quad (12.47)$$

其中矩阵 \mathbf{S} 为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{1/2} \quad (12.48)$$

矩阵 \mathbf{Q} 的特征值和特征向量的分解表示为：

$$\mathbf{Q} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \lambda_3 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T \quad (12.49)$$

$\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ 的特征值是通过解一个三次方程得到的。这个三次方程的根可以直接利用[197]公式求出。用特征值解线性方程：

$$(\mathbf{M}^T \mathbf{M} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = 0 \quad (12.50)$$

得到正交特征向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 和 \mathbf{v}_3 。矩阵 \mathbf{S} 是矩阵 \mathbf{Q} 的平方根。在特征系统表示中(方程 12.47)，矩阵的平方根和其逆矩阵是很容易计算的。矩阵 \mathbf{S} 的逆矩阵为：

$$\mathbf{S}^{-1} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T \quad (12.51)$$

计算特征向量的叉积，除以特征向量的平方根，再乘以矩阵 \mathbf{M} 就可得到旋转矩阵 \mathbf{R} 。这种计算方法保证了矩阵 \mathbf{R} 是归一化正交矩阵。

这个算法提供了一种旋转矩阵的解析解(非迭解)。比例尺度可以通过方程 12.44 得到。无需确定平移或旋转参数，而平移量可以通过方程 12.45 来确定。变换公式 12.40 可以作用于任何深度测量系统的点测量值，包括双目立体系统或测距摄象机，以便将测量点变换到绝对坐标系中，并将测量值转换成绝对坐标计量单位。测量值计量单位是任何一种可用于绝对定位问题中标定点计量单位。例如，在绝对坐标系统中标定点的单位是毫米，而双目立体深度测量值是以基线为一个单位，则由这些标定点求解绝对定位问题的刚体变换将深度测量值的单位转换成毫米单位。测量系统中每个坐标轴上的单位应是相同的，因为作用于每一个坐标轴上的比例因子是相同的。

12.7 外部定位

外部定位问题就是在绝对坐标系中，确定图像平面坐标 (x', y') 和场景点坐标 (x, y, z) 之间的关系。在机器人学和机器视觉中，外部定位问题被称之为手—眼问题。直到本节，我们一直在摄象机坐标系中表示场景点的坐标；但在许多应用中，都需要建立图像平面坐标系与

定义在场景中的绝对坐标系之间的关系. 在图像平面中, 每个点 (x', y') 都定义一条从投影中心出发, 经过图像平面中的点 (x', y') , 指向场景的射线. 在场景中, 摄像机的位置就是投影中心的位置, 摄像机的定位决定了从投影中心出发穿过图像平面点的射线簇的定位. 一个图像平面点并不对应场景中唯一的一个点, 但我们可以利用穿过此点的射线方程, 连同其它有关场景的几何信息, 在场景绝对坐标系中确定唯一的对应点. 例如, 如果我们知道一个图像点对应于墙上的一个点, 并且也知道墙模型平面方程, 则只要求出射线方程与平面方程的交点就可以得到墙上对应点的准确位置.

外部定位问题就是确定对应图像平面点的射线簇的位置和方向, 使得每一个图像平面点可以被变换为场景绝对坐标系中的对应射线, 如图 12.6 所示. 射线束的位置和方向可以表示成摄像机坐标与绝对坐标之间的刚体变换. 一个图像平面点 (x', y') 在摄像机三维坐标系中的坐标为 (x', y', F) , 其中 F 表示图像平面位于投影中心前面距离为 F 的位置. 投影中心对应摄像机坐标系的原点, 摄像机在场景中的位置就是投影中心在绝对坐标系中的位置. 在摄像机坐标系中, 经过图像平面中点 (x', y') 的射线参数方程为

$$(x, y, z) = t(x', y', F) \quad (12.52)$$

其中 t 的取值可以从 0 (在投影的中心) 到无穷大. 当 $t=1$ 时, 摄像机坐标系中的点 (x, y, z) 是图像平面点 (x', y', F) . 已知图像上一个测量点位置 (x', y') 和摄像机常数 F 的估计值, 则可以从摄像机坐标系中得到对应的射线方程.

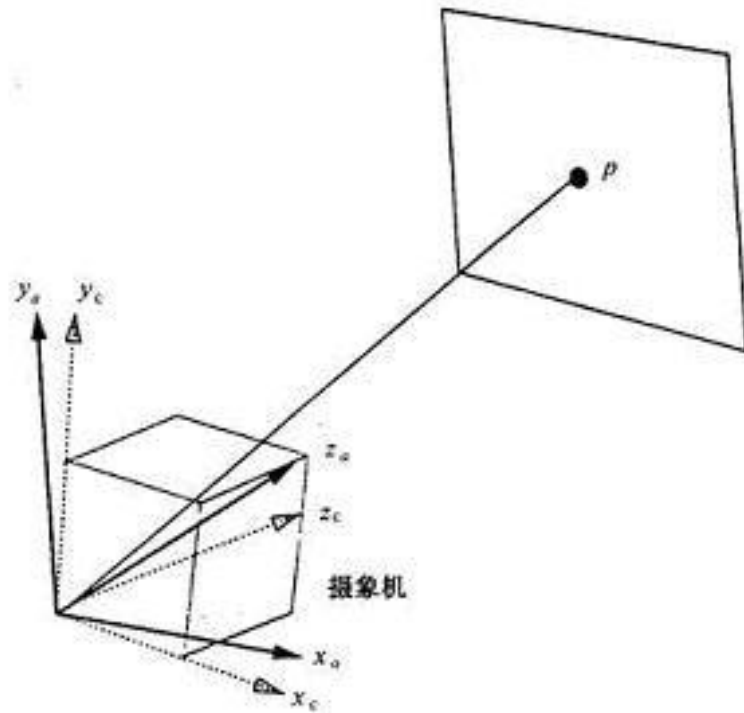


图 12.6 外部定位问题示意图

设 $P = (x, y, z)^T$, $P' = (x', y', F)^T$, 则可以将摄像机坐标系与绝对坐标系之间的刚体变换作用于射线的参数方程(方程 12.52)中, 得到场景绝对坐标系中的射线方程:

$$P = tR P' + P_0 \quad (12.53)$$

确定刚体变换的基本步骤是: 已知标定点在场景中的坐标为 (x_i, y_i, z_i) , 测定标定点的投影坐标 (x'_i, y'_i) , 利用透视投影方程建立图像平面点与场景点的联系, 最后求解刚体变换. 摄像机外部定位参数(旋转角和到摄像机原点的平移)称为非固有参数, 与摄像机内部几何的固有参数(例如摄像机焦距)相对.

外部定位问题可以简单地陈述为: 什么是绝对坐标与相对坐标之间的刚体变换, 该变换可以确定空间射线簇位置和方向使得每一条射线都通过其对应的标定点点? 为了明确一下坐

标系，我们将使用下标来区分绝对坐标和摄像机坐标。在绝对坐标系中，点的位置是 $\mathbf{p}_a = (x_a, y_a, z_a)$ ，在摄像机坐标系中，点的位置是 $\mathbf{p}_c = (x_c, y_c, z_c)$ 。我们将外部定位问题确定为从绝对(场景)坐标到摄像机坐标的变换。实际应用中的逆变换由式 12.12 给出。从绝对坐标到摄像机坐标的刚体变换如下：

$$\begin{aligned} x_c &= r_{xx}x_a + r_{xy}y_a + r_{xz}z_a + t_x \\ y_c &= r_{yx}x_a + r_{yy}y_a + r_{yz}z_a + t_y \\ z_c &= r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + t_z \end{aligned} \quad (12.54)$$

在摄像机坐标系中，场景点的位置是未知的，但是点在图像平面上的投影可以由透视投影方程来确定：

$$\begin{aligned} \frac{x'}{F} &= \frac{x_c}{z_c} = \frac{r_{xx}x_a + r_{xy}y_a + r_{xz}z_a + t_x}{r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + t_z} \\ \frac{y'}{F} &= \frac{y_c}{z_c} = \frac{r_{yx}x_a + r_{yy}y_a + r_{yz}z_a + t_y}{r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + t_z} \end{aligned} \quad (12.55)$$

因此，联立(12.54)和(12.55)可知每一个标定确定两个独立的约束方程：

$$\begin{aligned} x'(r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + t_z) - F(r_{xx}x_a + r_{xy}y_a + r_{xz}z_a + t_x) &= 0 \\ y'(r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + t_z) - F(r_{yx}x_a + r_{yy}y_a + r_{yz}z_a + t_y) &= 0 \end{aligned} \quad (12.56)$$

6个标定产生12个等式可以用于求解变换矩阵中12个参数，但是使用旋转矩阵的归一化正交约束可以将标定减少为4个。在实际应用中，常常使用更多的点以便得到精确的结果。使用欧拉角公式替换旋转矩阵的元素，然后求解非线性回归问题

下面是一个求取外部定位的例子。机器人在手臂的底部安装了一个吸力抓取机构。抓取机构非常适合于抓取那些小而平的物体，但前提是抓取机构必须定位在这些物体的中心附近。已知一个扁平物体放在手臂可以到达的一个桌子上，绝对坐标系定义在桌子的一个角点。一部摄像机位于桌子的上方，整个桌子在视场范围内。图像平面中的点的位置坐标是 (x', y') 。如果物体相对于桌面背景具有很好的反差，则可以使用一阶矩就可估算图像平面位置。在桌子的绝对坐标系中的点的位置坐标是 (x, y, z) 。通过求解外部定位问题可以确定相对于绝对坐标系的摄像机的位置 and 方向。

给定一个图像平面中物体中心的位置 (x', y') ，通过求出由摄像机原点出发，穿过点 (x', y') 的射线与桌面的交点，可以确定桌面上的物体中心在绝对坐标系中的位置 (x, y, z) 。桌面的方程：

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (12.57)$$

和从摄像机中心出发的射线方程：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ F \end{pmatrix} \quad (12.58)$$

必须在绝对坐标系中。通过求解外部定位问题得到变换公式可以把从摄像机出发的射线转换到绝对坐标系中。如果绝对坐标系的原点是在桌面上，其 z 轴垂直于桌面，则方程 12.57 变为 $z = 0$ ，计算射线与桌面的交点变得十分容易。

12.8 内部定位

内部定位问题就是确定摄像机内部几何参数，这些几何参数包括：

- (1) 摄像机常数：投影中心到摄像机平面的距离；
- (2) 主点：图像平面坐标系原点的位置；
- (3) 透镜变形系数：由于摄像机的光学缺陷引起的图像平面坐标的改变；
- (4) 比例因子：表示行和列之间的距离。

摄像机内部几何参数也称为固有参数(intrinsic parameters), 是与摄像机外部定位问题中的非固有参数相对应. 内部定位问题是用于确定摄像机固有参数的一个回归问题.

摄像机常数与透镜焦距长度不完全一样. 当透镜聚焦于无穷远时, 摄像机常数等于焦距, 否则, 摄像机常数小于焦距长度. 主点是光轴与图像平面的交点, 是图像平面坐标系的原点, 也可以认为是图像阵列的中心. 尽管摄像机常数接近于焦距, 主点很靠近图像中心点, 但在许多应用中, 这种近似可能并不是很好. 在图像传感器中, 像素行和列之间的间距可以从摄像机技术说明书得到, 但是图像帧获取装置可能会引入误差, 因此, 必须标定像素间距.

一些标定算法可以同时求解内部定位问题和外部定位问题. 其出发点是在摄像机外部定位确定之前, 图像平面上标定点的真正位置是未知的. 然而, 内部定位问题可以由其自身来解决. 现在已经有几种确定摄像机常数, 主点位置和透镜变形量的方法, 无需知道摄像机在绝对坐标系中的外部定位. 12. 10 节将讨论确定固有参数和非固有参数的方法.

确定摄像机的独立于非固有参数的固有参数的基本思想是使用一个具有规则图形的标定图像, 如网格线. 图形变形可被用来估算透镜变形量, 并计算对其它非固有参数名义值的修正量.

透镜变形包括两个部分: 径向变形, 它会或多或少地使光线弯曲; 偏心, 由于透镜中心偏离光轴引起的. 径向变形和偏心可以用多项式模型来表示; 内部定位算法就是估算这些多项式的系数. 图 12. 7 示意的是在不考虑偏心的情况下, 大多数透镜变形呈现的径向对称性. 光线或多或少地弯曲指向光轴, 但这一误差在透镜上(或在图像平面上)与主点距离相同的所有点处都是相同的.

因为由光线弯曲量引起的误差是旋转对称的, 故径向变形可以用一个含有半径偶次幂的多项式模型来表示, 用 (x', y') 表示真实的图像坐标, (\tilde{x}, \tilde{y}) 表示未修正的图像坐标, 这个坐标是通过使用主点位置的估计由像素坐标为 i 和 j 得到的:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= j - \hat{c}_x \\ \tilde{y} &= -(i - \hat{c}_y)\end{aligned}\tag{12. 59}$$

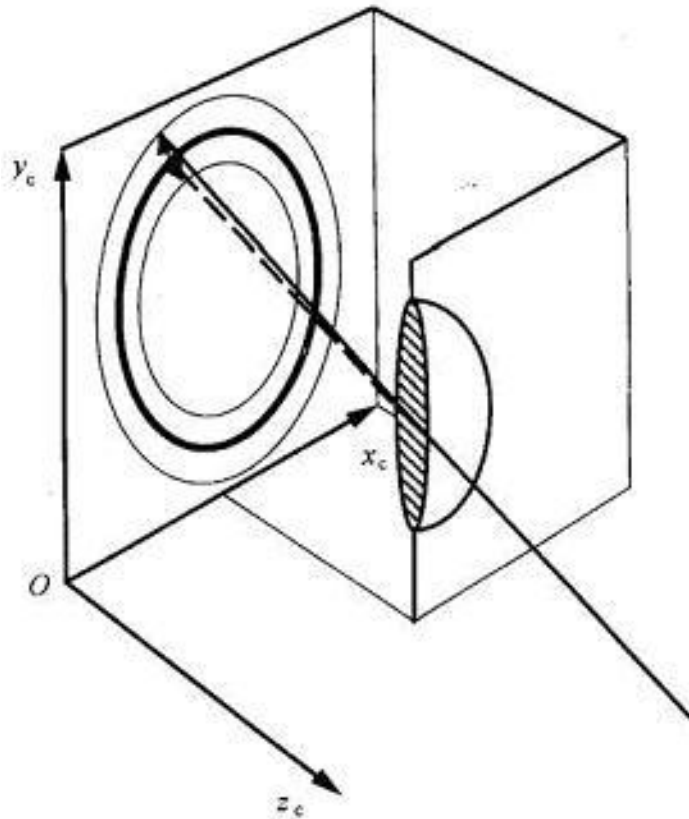


图 12. 7 大多数透镜变形是径向对称. 射线将或多或少地弯曲并指向图像中心. 在图像平面中, 与主点真实位置距离相等的所有点的径向变形量是相同的.

将修正量 $(\delta x, \delta y)$ 加到未修正坐标以便得到真实图像平面坐标:

$$\begin{aligned} x' &= \tilde{x} + \delta x \\ y' &= \tilde{y} + \delta y \end{aligned} \quad (12.60)$$

径向透镜变形的修正量由距图像中心距离的偶次幂多项式模型来表示:

$$\begin{aligned} \delta x &= (\tilde{x} - x_p)(\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \kappa_3 r^6) \\ \delta y &= (\tilde{y} - y_p)(\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \kappa_3 r^6) \end{aligned} \quad (12.61)$$

其中 (x_p, y_p) 是主点位置坐标的精确值, 而

$$r = (\tilde{x} - x_p)^2 + (\tilde{y} - y_p)^2 \quad (12.62)$$

是到图像中心的径向距离的平方. 注意, x_p 和 y_p 与方程 12.114 和 12.115 中的 \hat{c}_x 和 \hat{c}_y 不一样, 后者是用来计算未修正的图像坐标; x_p 和 y_p 是对 \hat{c}_x 和 \hat{c}_y 的修正. 在标定结束之后, 修正量可用于初始估算:

$$\begin{aligned} \hat{c}_x &= c_x + x_p \\ \hat{c}_y &= c_y - y_p \end{aligned} \quad (12.63)$$

修正径向变形的标定问题就是找出多项式的系数 κ_1 、 κ_2 和 κ_3 . 六阶以上的透镜变形多项式模型很少用到, 事实上, 也没有必要用二阶多项式. 由于需要精确的主点位置估计以便建立透镜变形的模型, 因此, 主点的位置包含在标定问题之中. 透镜变形更有力的模型可以包含由于透镜偏心而引起的切向变形的影响:

$$\begin{aligned} \delta x &= (\tilde{x} - x_p)(\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \kappa_3 r^6) \\ &\quad + [p_1(r^2 + 2(\tilde{x} - x_p)^2 + 2p_2(\tilde{x} - x_p)(\tilde{y} - y_p))(1 + p_3 r^2) \\ \delta y &= (\tilde{y} - y_p)(\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \kappa_3 r^6) \\ &\quad + [2p_1(\tilde{x} - x_p)(\tilde{y} - y_p) + 2p_2(r^2 + 2(\tilde{x} - x_p)^2)](1 + p_3 r^2) \end{aligned} \quad (12.64)$$

使用一个具有几条不同定位和位置的标定目标. 唯一的要求就是线必须是直的, 并不要求一定是绝对的水平或垂直. 这个方法没有涉及到同时求外部定位问题. 用激光机很容易制成一个由水平线和垂直线构成的网格. 斜线的渲染图像不是很精确, 但由于外部定位对问题求解无关紧要, 因此可以平移和旋转网格到不同位置, 获取几幅图像, 收集大量数字化直线用于标定集合. 将这个网格安放在一个垂直于光轴的扁平刚体平面上. 由于并不要求直线一定是平行的, 所以任意倾斜目标上的直线并不影响标定结果. 在整幅图像上, 通过计算所有小窗函数上的一阶矩, 可以确定图像边缘点的位置到子像素分辨率级水平. 窗口的尺寸应该略大于直线宽度, 但应小于网格直线的间距. Hough 变换可以用来把边缘组合成直线, 并确定直线参数的初始估计值.

在真实(未修正)图像坐标系中, 每一条直线 l 的方程为:

$$x' \cos \theta_l + y' \sin \theta_l - \rho_l = 0 \quad (12.65)$$

因为每条直线的确切位置和方向未知, 因此, 直线参数的估计必须作为内部定位问题的一部分来精确求解. 若 $(\tilde{x}_{kl}, \tilde{y}_{kl})$ 表示直线 l 上边缘点 k 的坐标, 则使用上述修正模型得到未修正坐标 $(\tilde{x}_{kl} + \delta x, \tilde{y}_{kl} + \delta y)$, 用这一坐标去替换方程 12.65 中的真实图像坐标 (x', y') . 对于每一个观测值(边缘点)和所有固 s 有参数值, 将产生如下形式的方程:

$$f(\tilde{x}_{kl}, \tilde{y}_{kl}; x_p, y_p, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, p_1, p_2, p_3, \rho_l, \theta_l) = 0 \quad (12.66)$$

n 个边缘点的方程组是 n 维非线性系统, 必须使用非线性回归方法求解. 主点位置的修正量初始值为 0, 径向透镜变形和偏心系数也被初始化为 0. 全部最小化判据是:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n (f(\tilde{x}_{kl}, \tilde{y}_{kl}; x_p, y_p, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, p_1, p_2, p_3, \rho_l, \theta_l))^2 \quad (12.67)$$

求解这个非线性回归问题可以得到主点的位置 (x_p, y_p) 、径向透镜变型参数 κ_1 、 κ_2 和 κ_3 , 以及透镜偏心参数 p_1 、 p_2 和 p_3 . 每条直线的参数估算是确定固有参数时的副产品,

可以舍弃。

12. 9 摄像机标定

摄像机标定问题就是建立图像阵列中的像素位置和场景点位置之间的关系。因为每个像素都是通过透射投影得到的，它对应于与场景点的一条射线。摄像机标定问题就是确定这条射线在场景绝对坐标系中的方程。摄像机标定问题即包括外部定位问题又包括内部定位问题。这是因为，建立图像平面坐标和绝对坐标之间的关系，必须首先确定摄像机的位置和方向以及摄像机常数，建立图像阵列位置(像素坐标)和图像平面位置之间的关系，必须确定主点的位置、纵横比和透镜变形。摄像机标定问题涉及到确定两组参数：用于刚体变换(外部定位)的非固有参数和摄像机自身(内部定位)所拥有的固有参数。

12. 9. 1 摄像机标定基本方法

下面将介绍由[Tsai 1987]总结的一种摄像机标定基本方法，该方法在计算机视觉中得到广泛的应用。

设 \mathbf{p}'_0 表示图像平面的原点位置， \mathbf{r}'_i 表示从点 \mathbf{p}'_0 出发到图像点 $\mathbf{p}'_i = (x'_i, y'_i)$ 的矢量， $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$ 是一个标定点， \mathbf{r}_i 表示从光轴上的点 $(0, 0, z_i)$ 出发到 \mathbf{p}_i 的矢量。如图 12.8 所示，如果仅是由于径向透镜变形而造成实际图像坐标 $(\tilde{x}'_i, \tilde{y}'_i)$ 不同于理想图像坐标 (x'_i, y'_i) ，那么 \mathbf{r}'_i 平行于 \mathbf{r}_i 。摄像机常数和在 z 方向上的平移并不影响 \mathbf{r}'_i 的方向，因为两个图像坐标分量是以同样的比例缩放的。这些约束对于求解外部定位问题是足够了。

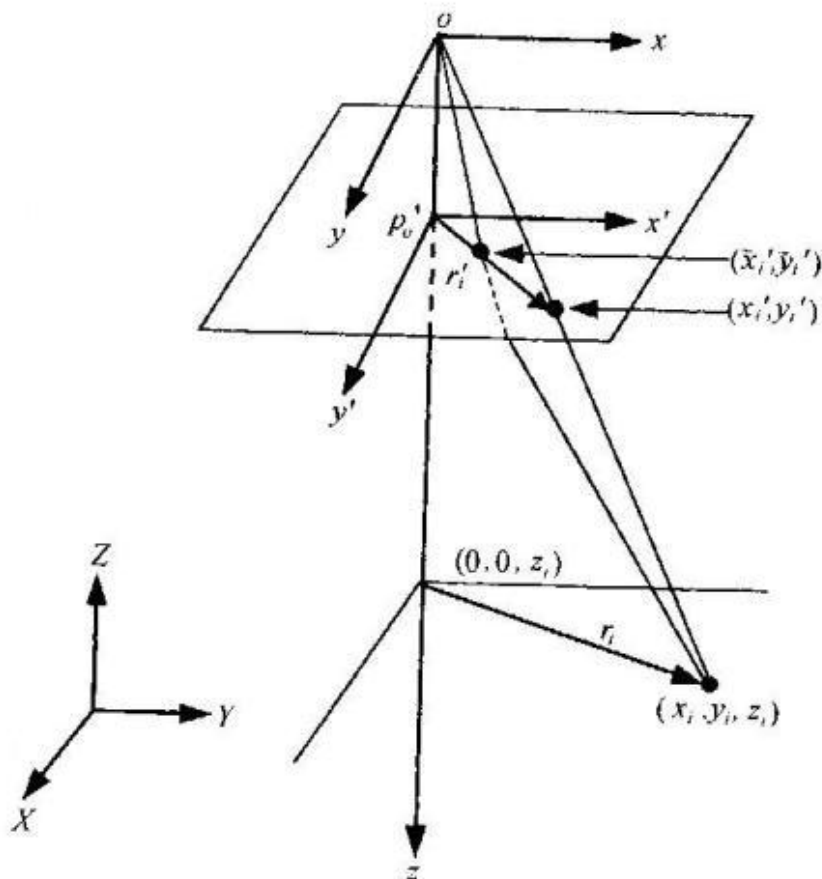


图 12.8 摄像机透视投影与透镜径向变形几何示意图

假设标定点位于 $z=0$ 的平面中，并假设摄像机相对于这个平面放置的，以满足下面两条重要条件：

1. 绝对坐标系中的原点不在视场范围内。
2. 绝对坐标系中的原点不会投影到图像上接近于图像平面坐标系统的 y 轴。

条件 1 消除了透镜变形对摄像机常数和到标定平面距离的影响；条件 2 保证了刚体平移的 y 分量不会接近于 0，因为 y 分量常常出现在下面引入的许多方程的分母中。这两个条件在许多成像场合下是很容易满足的。例如，假定摄像机放在桌子的正上方，镜头朝下正好看到桌子的中间位置。绝对坐标系可以定义在桌子上，其中 $z=0$ ，对应于桌子平面， x 和 y 轴分别对应于桌子的边缘，桌子的顶角是绝对坐标系的原点，位于视场之外。

假定有 n 个标定点，每个标定点的绝对坐标为 (x_i, y_i, z_i) ，未修正图像坐标 $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ 。根据这些观测值形成一个矩阵 A ，其中的 a_i 行为：

$$a_i = (\tilde{y}_i x_i, \tilde{y}_i y_i, -\tilde{x}_i x_i, -\tilde{x}_i y_i, \tilde{y}_i) \quad (12. 68)$$

设 $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ 是含有与刚体变换参数有关的未知参数的矢量：

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \\ = \left(\frac{r_{xx}}{t_y}, \frac{r_{xy}}{t_y}, \frac{r_{yx}}{t_y}, \frac{r_{yy}}{t_y}, \frac{t_x}{t_y} \right) \quad (12. 69)$$

从标定点的 n 次观察来形成一个矢量 $\mathbf{b} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ 。使用五个以上标定点，我们就可以得到关于参数矢量 u 的过量线性方程组。使用奇异值分解来求解这个线性系统，并使用方程解 $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ 来计算除了 t_z 的所有刚体变换参数， t_z 是摄像机常数的比例函数，将在后面确定。

首先，计算出平移的 y 分量的大小。如果 u_1 和 u_2 不同时为 0， u_3 和 u_4 不同时为 0，则：

$$p_y^2 = \frac{U - [U^2 - 4(u_1 u_4 - u_2 u_3)^2]^{1/2}}{2(u_1 u_4 - u_2 u_3)^2} \quad (12. 70)$$

其中 $U = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ 。如果 u_1 和 u_2 同时都为 0，则：

$$t_y^2 = \frac{1}{u_3^2 + u_4^2} \quad (12. 71)$$

如果 u_3 和 u_4 同时为 0，则：

$$t_y^2 = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \quad (12. 72)$$

其次，确定 t_y 的符号。选取标定点 $\mathbf{p} = (x, y, z)$ ，这个点在图像平面上的投影点是离图像中心最远的图像点(位于视场边界的场景点及其对应的图像点)。利用上面得到的结果矢量，可根据 12. 69，计算 r_{xx} ， r_{xy} ， r_{yx} ， r_{yy} 和 t_x 。

设 $\xi_x = r_{xx}x + r_{xy}y + t_x$ 和 $\xi_y = r_{yx}x + r_{yy}y + t_y$ 。如果 ξ_x 和 \tilde{x} 同号， ξ_y 和 \tilde{y} 也同号，那么 t_y 具有正确的符号(正号)，否则在 t_y 前加一个负号。注意，在不考虑 t_y 的符号时，上述刚体变换计算参数都是正确的，不需要改变。

第三，计算余下的刚体变换参数：

$$r_{xz} = \sqrt{1 - r_{xx}^2 - r_{xy}^2} \\ r_{yz} = \sqrt{1 - r_{yx}^2 - r_{yy}^2} \quad (12. 73)$$

因为旋转矩阵是正交归一化矩阵，则 $R^T R = I$ 一定成立。使用这一性质来计算旋转矩阵的最后一行中的各个元素：

$$\begin{aligned}
r_{zx} &= \frac{1 - r_{xx}^2 - r_{xy}r_{yx}}{r_{xz}} \\
r_{zy} &= \frac{1 - r_{yy}^2 - r_{xy}r_{yx}}{r_{yz}} \\
r_{zz} &= \sqrt{1 - r_{zx}r_{xz} - r_{zy}r_{yz}}
\end{aligned} \tag{12. 74}$$

如果 $r_{xx}r_{yx} + r_{xy}r_{yy}$ 的符号是正的, 则在 r_{yz} 前加负号. 在下面的计算摄象机常数步骤之后, r_{zx} 和 r_{zy} 的符号可能会有所变动.

第四, 计算摄象机常数 F 和平移的 z 分量 p_z . 为了估计 F 和 t_z , 可使用所有的标定点的来构成线性方程组,

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b} \tag{12. 75}$$

使用每一个标定点的来计算对应的矩阵行,

$$a_i = (r_{yx}x_i + r_{yy}y_i + t_y, -d_y\tilde{y}_i) \tag{12. 76}$$

并计算出方程 12. 75 右边所对应的矢量元素,

$$b_i = (r_{zx}x_i + r_{zy}y_i)d_y\tilde{y}_i \tag{12. 77}$$

矢量 \mathbf{v} 包括所要估计的参数:

$$\mathbf{v} = (F, p_z)^T \tag{12. 78}$$

使用奇异值分解求解这个方程组. 如果摄象机常数 $F < 0$, 则在刚体变换的旋转矩阵元素 r_{zx} 和 r_{zy} 前加负号.

第五, 使用前面各步骤得到的 F 和 p_z 的估算值作为非线性回归的初始条件, 计算一阶透镜变形系数 κ_1 , 并进一步得到 F 和 p_z 的更精确的估计值. 通过透视投影来建立真实(修正)图像平面坐标 (x', y') 与摄象机坐标系中的标定点 (x_c, y_c, z_c) 之间的关系式:

$$x' = F \frac{x_c}{z_c} \quad y' = F \frac{y_c}{z_c} \tag{12. 79}$$

假设通过使用径向透镜变形模型第一项建立的真实(修正)图像平面坐标与测量图像平面坐标之间关系为:

$$\begin{aligned}
x' &= \tilde{x}(1 + \kappa_1 r^2) \\
y' &= \tilde{y}(1 + \kappa_1 r^2)
\end{aligned} \tag{12. 80}$$

其中半径 r 的计算公式如下:

$$r = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \tag{12. 81}$$

注意, 未修正(测量)图像平面坐标 (\tilde{x}, \tilde{y}) 不同于像素坐标 $[i, j]$, 因为前者的计算过程中已经用到了图像中心位置坐标 (c_x, c_y) , 行间距 d_x 和列间距 d_y , 以及比例系数估计值 τ_x .

使用透射投影和透镜变形方程中的 y 分量以及绝对坐标与摄象机坐标之间的刚体变换公式, 可以得到有关摄象机常数 F , z 平移和透镜变形的一个约束条件:

$$\tilde{y}_i(1 + \kappa_1 r^2) = F \frac{r_{yx}x_{a,i} + r_{yy}y_{a,i} + r_{yz}z_{a,i} + t_y}{r_{zx}x_{a,i} + r_{zy}y_{a,i} + r_{zz}z_{a,i} + t_z} \tag{12. 82}$$

这将形成求解参数 F 、 p_z 和 κ_1 的一个非线性因归问题. 我们使用 y 轴测量值, 而不使用 x 轴测量值, 是因为 x 测量值会受到比例系数 τ_x 的影响. 图像的行间距 d_y 是非常精确的, 可以通过摄象机的说明书得到, 而不受数字电路的影响.

因为标定点是 在一个平面上, 所以不能确定比例系数 τ_x . 而且, 图像中心位置 (c_x, c_y) 没有被标定. 在本章末进一步阅读一节中提供了有关此类标定问题的参考文献.

12. 9. 2 仿射变换法

内部定位问题同外部定位问题组合起来可以得到未修正图像坐标与绝对坐标系中射线位置和方向之间关系的整体转换。假设(未修正)图像与真实图像坐标之间的变换模型是图像平面内的一个仿射模型。这个变换考虑了引起摄象机误差的几种来源。

比例误差：由摄象机常数的不精确值造成。

平移误差：由图像原点(主点)的不精确估计值造成。

旋转：图像传感器绕光轴的旋转。

弯曲误差：由摄象机轴的不垂直造成。

差速比例缩放：由图像传感器行列间距不等(非正方形像素)造成。

然而，由于透镜变形，仿射变换无法来模型化误差。

在 12. 8 节求解外部定位问题的过程中，我们建立了从绝对坐标系到图像坐标系的变换公式。现在我们将增加真实图像坐标到测量(未修正)图像坐标的仿射变换，从而得到绝对坐标到测量图像坐标的整体变换公式。

在图像平面中，由于误差和其它未知的内部参数造成的变形的模型是一个仿射变换：

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= a_{xx}x' + a_{xy}y' + b_x \\ \tilde{y} &= a_{yx}x' + a_{yy}y' + b_y\end{aligned}\quad (12. 83)$$

这里我们将真实图像平面坐标 (x', y') 映射为未修正(测量)图像坐标 (\tilde{x}, \tilde{y}) 。根据透视投影的公式 12. 79 有：

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{x}}{F} &= a_{xx}\left(\frac{x_c}{z_c}\right) + a_{xy}\left(\frac{y_c}{z_c}\right) + \frac{b_x}{F} \\ \frac{\tilde{y}}{F} &= a_{yx}\left(\frac{x_c}{z_c}\right) + a_{yy}\left(\frac{y_c}{z_c}\right) + \frac{b_y}{F}\end{aligned}\quad (12. 84)$$

使用 12. 54 式替换具有绝对坐标表达式的仿射变换中的摄象机坐标比值，

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{x} - b_x}{F} &= \frac{\tilde{x}_c}{\tilde{z}_c} = \frac{s_{xx}x_a + s_{xy}y_a + s_{xz}z_a + t_x}{s_{zx}x_a + s_{zy}y_a + s_{zz}z_a + t_z} \\ \frac{\tilde{y} - b_y}{F} &= \frac{\tilde{y}_c}{\tilde{z}_c} = \frac{s_{yx}x_a + s_{yy}y_a + s_{yz}z_a + t_y}{s_{zx}x_a + s_{zy}y_a + s_{zz}z_a + t_z}\end{aligned}\quad (12. 85)$$

这些系数是仿射变换和刚体变换中的系数乘积和。我们所得到的是一对方程，类似于建立绝对坐标和实际图像坐标之间关系外部定位问题中的方程(方程 12. 55)。摄象机误差的仿射模型已经在绝对坐标到摄象机坐标的变换中。上述公式说明(未修正)图像坐标和摄象机坐标之间是透视投影关系，但是摄象机坐标空间已经发生扭曲，以便考虑摄象机误差。

回到 12. 85 式中，我们可以将主点位置的修正量 b_x 和 b_y 加到仿射变换中，得到下式：

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i(s_{zx}x_{a,i} + s_{zy}y_{a,i} + s_{zz}z_{a,i} + t_z) - F(s_{xx}x_{a,i} + s_{xy}y_{a,i} + s_{xz}z_{a,i} + t_x) &= 0 \\ \tilde{y}_i(s_{zx}x_{a,i} + s_{zy}y_{a,i} + s_{zz}z_{a,i} + t_z) - F(s_{yx}x_{a,i} + s_{yy}y_{a,i} + s_{yz}z_{a,i} + t_y) &= 0\end{aligned}\quad (12. 86)$$

上式表明通过每个标定点和在图像平面中的对应测量位置产生关于变换参数的两个线性方程。摄象机常数的名义值 F 并未纳入到仿射变换中，因为它被用来构造摄象机坐标系中的射线。

标定点集产生一组齐次线性方程，从而求出变换的系数。至少需要 6 个标定点产生 12 个方程来求解 12 个未知数，但应该使用更多的标定点以提高求解的参数精度。为了避免所有系数等于 0 这一不必要的结果，应将其中一个参数固定，如 t_x 或 t_y ，并将其移至方程的右边。由此形成的线性方程组为，

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (12. 87)$$

其中 \mathbf{u} 是变换系数矢量；矩阵 A 的 i 行元素用标定点 i 的绝对坐标及其绝对坐标的乘积和

\tilde{x}_i 、 \tilde{y}_i 或 F 来填充；矢量 \mathbf{b} 的元素 i 一个常数，从 t_x 或 t_y 中选出。由于图像平面中的仿射变换与求解外部定位问题的旋转矩阵合并在一起，所以形成的变换矩阵不再是正交归一化矩阵。在没有正交归一化约束下，也可以使用通常的数值方法，如奇异值分解法(SVD)，来解线性方程组。该变换将绝对坐标映射为测量图像坐标。实际应用中还需要逆转换，其公式如下：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S^{-1} \left[\begin{pmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \\ F \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \right] \quad (12. 88)$$

上式可用于确定在绝对坐标系中，从图像测量坐标点出发的射线方程。注意，摄象机常数 f 在整个标定算法过程中是不变的。因为对摄象机常数的修正量包含在仿射变换中(方程 12. 162 和 12. 163)，透镜的焦距长度可以用 F 来替代。最后，从像素坐标 $[i, j]$ 到图像坐标的变换公式为，

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= s_x(j - c_x) \\ \tilde{y} &= -s_y(i - c_y) \end{aligned} \quad (12. 89)$$

这个变换可以同摄象机误差模型(12. 83)组合起来，从而产生绝对坐标到像素坐标的变换。

12. 9. 3 非线性方法

给定一组标定点，确定标定点在图像平面上的投影，计算投影位置的误差，使用这些误差来求解摄象机标定参数。因为知道标定点在图像上的投影位置十分必要，所以需要同时求解外部定位问题。本节介绍的方法不同于 12. 9. 2 节中介绍的将内部定位问题和外部定位问题合并成单一的仿射变换的方法，用本节的方法可以得到摄象机实际的标定参数，并且摄象机在标定后，无论放在场景中什么位置，这些参数都是正确的。

摄象机标定问题求解的基本思想是测量标定点在图像平面上的投影位置 (x'_i, y'_i) ，计算出其与正确位置之间的偏移量 $(\delta x_i, \delta y_i)$ ，再将这些测量值加到摄象机参数模型的方程中。每个标定点产生两个方程。通常需要足够数量的方程才能解出所有未知参数，但为了提高求解精度，可以使用比未知参数数量多的多的方程，并且使用非线性回归方法求解过度确定的方程组。

假设在绝对坐标系中摄象机的近似位置和方向都是已知的。因为我们有旋转角的初始估计值，我们可以按照旋转矩阵中的欧拉角来列出外部定位问题的公式。回归问题的参数有：旋转角 ω 、 ϕ 和 κ ；在绝对坐标系中摄象机的位置 t_x 、 t_y 和 t_z ；摄象机常数 F ；主点位置的修正量 (x_p, y_p) ；径向透镜变形的多项式系数 κ_1 、 κ_2 和 κ_3 。外部定位问题的方程见 12. 62。由摄象机模型的修正位置(见式 12. 68 和 12. 69)替换 12. 62 式的 x' 和 y' ，得到摄像机的模型为：

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{x} - x_p)(\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \kappa_3 r^6)}{F} &= \frac{r_{xx}x_a + r_{xy}y_a + r_{xz}z_a + t_x}{r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + t_z} \\ \frac{(\tilde{y} - y_p)(\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \kappa_3 r^6)}{F} &= \frac{r_{yx}x_a + r_{yy}y_a + r_{yz}z_a + t_y}{r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + t_z} \end{aligned} \quad (12. 90)$$

按照方程 12. 13 提供的有关欧拉角的旋转矩阵各项的公式替换旋转矩阵的所有元素。利用非线性回归的方法来求解摄象机参数和外部定位。回归算法要求很好的初始条件。如果目标是一个平面，摄象机的轴垂直于平面，并且图像的中心大致位于目标上，那么很容易得到要求的初始条件。假设建立的绝对坐标系的 x 轴和 y 轴均平行于摄象机的轴，则初始条件为：

$$\omega = \phi = \kappa = 0$$

x = 从原点出发沿 x 方向的位移

y = 从原点出发沿 y 方向的位移

z = 摄像机到标定平面的距离

f = 透镜的焦距长度

$$x_p = y_p = 0$$

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$$

使用激光打印机可以很容易地创建一个包含若干个点的目标. 在图像中点的未修正位置可以通过计算连同分量的一阶矩得到.

非线性回归的不足之处是需要很好的参数初始值, 但其优势是有大量的关于非线性回归的文献, 这些文献给出了求解非线性问题的忠告和参数估计中的误差估计方法.

12. 10 双目立体标定

这一节主要讨论如何将本章介绍的方法和技术运用到标定立体摄像机并进行立体测量的实际系统中去, 这业提高了一个考察不同摄像机标定之间关系的机会.

在开发用于双目立体的实际系统过程中要完成的几个任务如下:

1. 标定每一个摄像机的固有参数;
2. 求解相对定位问题;
3. 对图像重新取样使极线对应于图像阵列的行;
4. 通过特征点的匹配和相关方法计算配对点;
5. 求解每个配对点的立体相交问题;
6. 确定基线距离;
7. 求解绝对定位问题, 以便将测量点坐标从立体摄像机坐标系变换到场景中的绝对坐标系.

标定一个双目立体系统有好几种方法, 对应于图 12. 8 中的不同路径. 首先, 标定每个摄像机, 以确定摄像机常数、主点位置、透镜变形的修正表以及其它固有参数. 完成左、右摄像机标定后, 基本上有三种方法去使用立体系统中摄像机.

第一种方法是求解相对定位问题, 并通过其它的方法确定基线, 比如, 使用立体摄像机测定已知距离的一个点. 这也就完全实现了两个摄像机之间刚体变换的标定. 点测量值可以在立体摄像机的局部坐标系中表示. 由于基线已经被标定, 点的测量值可以用实数单位表示, 并且立体系统可以测量场景中物体上各点之间的关系. 在此期间没有要求解绝对定位问题, 除非要求点测量值必须变换到另一个坐标系中.

第二种方法是求解相对定位问题, 并得到在任意测量系统中的点在单位基线距离意义的测量值. 除了比例系数是未知数外, 所有点测量值都可以得到修正. 甚至在距离单位未知的情况下, 距离比值和角度也可以得到修正. 如果其后得到基线距离, 则用点的坐标乘以基线距离就可以得到相应的有单位测量值. 如果必须要将点的测量值变换到另一个坐标系中, 则求解比例绝对定位问题(12. 7 节), 因为这将完成基线距离的标定, 以及点坐标单位的变换, 无需额外的计算.

第三种方法是求解每个立体摄像机的外部定位问题. 这实现了从左右摄像机坐标系到绝对坐标系之间的变换. 使用 12. 6 节介绍的相交射线方法得到点的测量值将自动以已知的单位表示在绝对坐标系中, 无需进一步的变换.

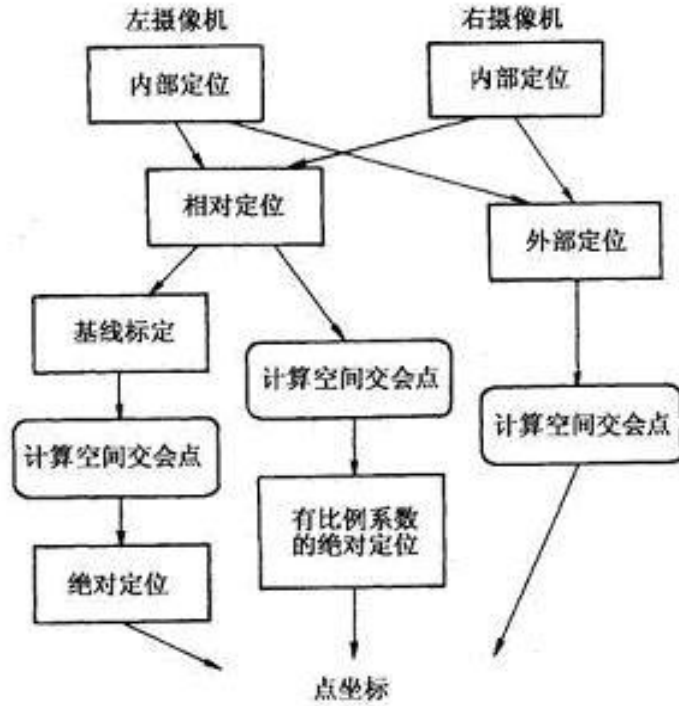


图 12.9 标定双目立体视觉系统算法框图

12. 11 主动三角测距标定

本节将覆盖了使用主动传感器投射一束平面光到场景中不透明表面上来确定点的坐标方法。下面将讨论主动三角系统标定方法。

我们将从摄像机坐标中的一个简单几何开始，进而再到绝对坐标中的一般情况。假定光平面可绕一个轴旋转，该轴平行于 y 轴并位于 x 轴的 b_x 处。若 θ 表示平面相对于 z 轴的定位。当 $\theta=0$ 时，光平面平行于 y - z 平面， θ 为正对应于绕 y 轴逆时针旋转。按照矢量几何，平面的法线为：

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\cos \theta, 0, \sin \theta) \quad (12. 91)$$

基线为：

$$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_x, 0, 0) \quad (12. 92)$$

如果点 $\mathbf{p} = (x, y, z)$ 位于平面上，则满足：

$$(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (12. 93)$$

这个光平面照亮了场景，并与不透明平面相交生成一条空间曲线，然后，摄像机摄下这条曲线。使用一个直线检测算子沿图像平面的投影曲线估计点的位置坐标。假定一个估计直线点的坐标估计为 (x', y') ，对应于空间中的一条射线，其表达式见式(12. 58)。联立方程(12.58)和(12. 93)，解 t 得到

$$t = \frac{b_x \cos \theta}{x' \cos \theta - F \sin \theta} \quad (12. 95)$$

再将上式代入射线方程(12. 65)，就可以得到在摄像机坐标系中的点坐标：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'b_x \cos \theta}{x' \cos \theta - F \sin \theta} \\ \frac{y'b_x \cos \theta}{x' \cos \theta - F \sin \theta} \\ \frac{Fb_x \cos \theta}{x' \cos \theta - F \sin \theta} \end{pmatrix} \quad (12.96)$$

如果摄像机外部定位已经得到标定,那么可以在绝对坐标系中表示射线.如果平面的位置和方向表示在绝对坐标系中,那么测量点也将在绝对坐标系中.

很容易将这些方程推广到具有任意位置和方向的空间平面.假定平面绕轴 ω 逆时针旋转 θ 角度,法线 \mathbf{n} 对应于 $\theta=0$ 时的定位.若 $R(\theta)$ 是一个旋转矩阵,则点位于平面上,如果:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \cdot R(\theta)\mathbf{n} = 0 \quad (12.97)$$

我们可以通过改变 \mathbf{b} 来改变空间中平面的位置:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{b}(d)) \cdot R(\theta)\mathbf{n} = 0 \quad (12.98)$$

其中 d 是线性执行机构的控制参数.

12.12 鲁棒方法

本章所介绍的所有标定方法均采用了最小二乘回归法.这种方法对形成配对点过程中的错误匹配产生的野值及其敏感.这里有两种方法可以使标定更鲁棒:进行二次采样,或者改变回归程序去使用鲁棒准则.

为了实现二次采样方法,必须考虑从标定数据中 n 个匹配点对中的 m 个匹配点对的所有组合.子集 m 值的大小必须足够的大,以便得到较好的标定结果.根据最小中值二乘方准则[207],通过变换的拟合式与所有配对点进行比较来选择最优参数集.利用最优参数估计值从配对点集中剔除野值.再使用所有剩余的配对点来重复上述标定过程.

另一种方法涉及到用一个鲁棒准则替换平方准则[197, pp558-565].如果标定过程使用线性回归法,则就要使用加权最小二乘求解方法.计算权重使得加权最小二乘回归问题与未加权鲁棒回归问题等价.如果残差 r_i 鲁棒准则是 $\rho(r_i)$,则对于权重 ω_i ,求解:

$$\omega_i r_i^2 = \rho(r_i) \quad (12.99)$$

并将这一权重用于配对点.这也导致了迭代重复加权最小二乘法:在迭代过程期间,通过调节权值来求解一系列回归问题.对于非线性回归,求解方法允许直接使用鲁棒准则.

13 讨论

本章中讨论了几种标定方法,包括摄影测量中的基本问题:绝对、相对、外部和内部定位.任何摄像机的内部定位问题可以得到求解,以保证摄像机服从大多数机器视觉算法关于成像的假设.余下的标定问题分为两部分:用于图像分析的方法和用于深度测量的方法.当某一图像分析应用中需要建立图像测量值和场景几何关系时,外部定位问题必须得到求解,相对定位问题用于标定一对摄像机,以便得到双目立体系统的深度测量值.绝对定位问题用于标定任何深度测量系统的位置和方向,包括双目立体系统或主动感知系统,以便将摄像机坐标中的深度测量值变换到应用中的坐标系中.摄像机标定中广泛使用的方法是[Tsai 1987],其改进方法见[Lenz 1988].

思考题

- 12.1 在标定中有多少种坐标系?试阐述它们之间的不同.
- 12.2 为什么说摄影测量学涉及到摄像机的标定问题?举例说明.
- 12.3 矩形像素对图像测量有什么影响?如何在测量区域和矩中心位置进行补偿?矩形像素是如何影响区域的相对位置和方向的测量?应采取什么措施去得到真实世界中的

正确测量值？

- 12.4 试定义仿射变换。举出三个在不同时间段上进行图像仿射变换的物体例子，以及三个不进行仿射变换的物体例子。
- 12.5 试定义欧拉角。欧拉角用在何处？它的优点和缺陷是什么？
- 12.6 什么是四元数？在标定中为什么认为四元数是旋转的最好表示？示意四元数表示用于绝对定位标定过程？
- 12.7 试定义共面约束。在摄像机标定过程中那里使用及如何使用这个约束条件？
- 12.8 假定要设计一个手—眼系统。在系统中，摄像机安放在工作空间的一个固定位置，手或机器人手臂用于拾取和放置工作空间中的物体。请问需要哪一种标定方案？
- 12.9 在上述问题中，如果摄像机被固定在机器人的手臂上，则需要哪一种标定方案来确定目标的位置？为了求解此问题，需要几个已知坐标的点？
- 12.10 假定机器人手臂上装有一个立体系统使得我们很容易计算出点的深度并可以进行更复杂的操作。在这种情况下需要哪种标定方案？选择用于标定的场景点的标准是什么？点怎样排列不利于标定？

计算机练习题

- 12.1 已知标定立方体各标定点的三维坐标，给定一幅标定立方体的图像，用鼠标在图像上读取 8 个预定标定点的图像坐标，请编制一个程序来标定这个摄像机的内部参数，并编制一个验算程序将所有标定点投影到图像平面，检查各标定点的投影点是否与对应的图像点相重合。
- 12.2 编制一个程序求解一个立体图像对的外极点和外极线方程，并对图像进行校正，要求在图像上标出外极线。