

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
BACHARELADO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL

**Estudo do custo esperado de neutralização  
de drones navais de superfície**

***Uma aplicação de simulação balística  
6-DOF à artilharia naval de 5"/38***

Luiz Guilherme de Padua Sanches

**MONOGRAFIA FINAL**

**MAP 2429 — TRABALHO DE  
FORMATURA SUPERVISIONADO**

Orientador: Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo

São Paulo  
2025

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0  
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

## Resumo

Luiz Guilherme de Padua Sanches. **Estudo do custo esperado de neutralização de drones navais de superfície: Uma aplicação de simulação balística 6-DOF à artilharia naval de 5"/38.** Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Nos últimos anos, embarcações não tripuladas de pequeno porte, carregadas com explosivos, passaram a ser empregadas como armas de baixo custo em ambientes litorâneos. Analisa-se, neste trabalho, o custo esperado de neutralização de um drone naval de superfície por meio de artilharia naval de 5"/38, considerando explicitamente a incerteza balística e o custo associado à eventual falha em deter o alvo. A trajetória do projétil é modelada por um sistema de equações diferenciais de seis graus de liberdade, baseado na teoria clássica de balística externa, com coeficientes aerodinâmicos obtidos de documentos do governo dos Estados Unidos para munição de 5"/38. A solução numérica fornece, para cada par de ângulos de azimute e elevação, a posição de impacto relativa ao alvo. A incerteza nos parâmetros de disparo é representada por perturbações gaussianas na elevação e no azimute, e as probabilidades de acerto são estimadas por simulações de Monte Carlo. Define-se, então, uma função de custo que combina o gasto com munição ao longo de uma sequência de disparos e o custo de perda da embarcação em caso de não neutralização, resultando no custo esperado de neutralização para cada estratégia de tiro. Para o cenário de referência estudado, em que a embarcação emprega apenas a bateria principal contra um único drone de superfície, obtém-se um custo esperado de neutralização da ordem de 77 milhões de dólares, dos quais cerca de 192,7 mil dólares correspondem ao custo médio de munição. O termo dominante do custo é, portanto, o risco de perda da plataforma naval, enquanto o gasto em munição permanece inferior ao valor estimado do próprio drone. Conclui-se que, sob as hipóteses adotadas, o emprego isolado de artilharia de 5"/38 não é suficiente para restaurar, do ponto de vista puramente balístico, a assimetria de custos favorável à embarcação defensora.

**Palavras-chave:** 6-DOF. drones navais. análise de custos. simulação Monte Carlo. canhão 5"/38.



# Abstract

Luiz Guilherme de Padua Sanches. **Study of the expected cost of neutralizing naval surface drones: A 6-DOF ballistic simulation applied to 5"/38 naval artillery.**

Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

In recent years, small unmanned vessels loaded with explosives have begun to be employed as low-cost weapons in littoral environments. This work analyses the expected cost of neutralizing a naval surface drone by means of 5"/38 naval artillery, explicitly taking into account ballistic uncertainty and the cost associated with a possible failure to stop the target. The projectile trajectory is modelled by a six-degrees-of-freedom system of differential equations, based on classical external ballistics theory, with aerodynamic coefficients obtained from United States government documents for 5"/38 ammunition. The numerical solution provides, for each pair of azimuth and elevation angles, the impact position relative to the target. Uncertainty in the firing parameters is represented by Gaussian perturbations in elevation and azimuth, and hit probabilities are estimated by Monte Carlo simulations. A cost function is then defined that combines ammunition expenditure over a sequence of shots and the cost of losing the ship in the event of non-neutralization, resulting in the expected neutralization cost for each firing strategy. For the reference scenario studied, in which the ship employs only the main battery against a single surface drone, the expected neutralization cost is on the order of 77 million dollars, of which about 192.7 thousand dollars correspond to the average ammunition cost. The dominant term in the cost is therefore the risk of losing the naval platform, whereas ammunition expenditure remains below the estimated value of the drone itself. It is concluded that, under the assumptions adopted, the isolated use of 5"/38 artillery is not sufficient, from a purely ballistic standpoint, to restore a cost asymmetry favorable to the defending ship.

**Keywords:** 6-DOF. naval drones. cost analysis. Monte Carlo simulation. 5"/38 naval gun.



# Sumário

<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentação teórica</b>	<b>5</b>
2.1 Fundamentos conceituais e escopo . . . . .	5
2.1.1 Momento angular . . . . .	6
2.1.2 Momento de inércia . . . . .	8
2.1.3 Equações de Euler . . . . .	10
2.1.4 Cossenos diretores . . . . .	11
2.2 Equação 6-DOF . . . . .	11
2.2.1 Desenvolvimento da equação . . . . .	12
2.2.2 Coeficientes de forças e momentos aerodinâmicos . . . . .	16
2.2.3 Identidades auxiliares . . . . .	18
2.2.4 As seis equações escalares . . . . .	19
2.2.5 Considerações gerais de modelagem . . . . .	20
2.2.6 Condições iniciais . . . . .	21
2.3 Modelo estatístico e estimativa via Monte Carlo . . . . .	23
<b>3 Metodologia</b>	<b>25</b>
3.1 Configuração física do problema . . . . .	25
3.1.1 Seleção do projétil e dos coeficientes aerodinâmicos . . . . .	25
3.1.2 Parâmetros inerciais, condições iniciais e custo da munição . . . . .	26
3.1.3 Plataforma de tiro e alvo . . . . .	28
3.2 Implementação computacional da simulação . . . . .	29
3.2.1 Preparação dos coeficientes e parâmetros físicos . . . . .	30
3.2.2 Núcleo de integração numérica . . . . .	31
3.2.3 Camada de experimentos numéricos . . . . .	31

<b>4 Resultados numéricos e discussão</b>	<b>33</b>
4.1 Disparo determinístico de referência . . . . .	33
4.1.1 Evolução temporal da altitude e do ângulo total de ataque . . . . .	34
4.1.2 Evolução temporal das velocidades e do eixo de simetria . . . . .	36
4.2 Seleção e espaçamento das configurações de engajamento . . . . .	38
4.3 Simulações de Monte Carlo para probabilidade de acerto . . . . .	39
4.3.1 Visualização geométrica da dispersão em uma configuração representativa . . . . .	39
4.3.2 Probabilidades estimadas ao longo da trajetória . . . . .	39
4.4 Análise do custo esperado de engajamento . . . . .	40
4.4.1 Custo esperado de munição . . . . .	41
4.4.2 Probabilidade de sucesso acumulada . . . . .	41
4.4.3 Custo total esperado e ponto de operação . . . . .	42
<b>5 Conclusão</b>	<b>45</b>
<b>Anexos</b>	
<b>A Código-fonte da simulação 6-DOF</b>	<b>49</b>
<b>B Resultados relevantes para os disparos contra o <i>Drone Sea Baby</i></b>	<b>57</b>
<b>Referências</b>	<b>61</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Como observa CROSBY (2024), os conflitos marítimos ao longo do século XX revelam um padrão recorrente de emprego de estratégias navais assimétricas por forças em desvantagem numérica ou tecnológica. Durante as duas Guerras Mundiais, por exemplo, a Alemanha enfrentou a supremacia da Marinha Real britânica, recorrendo intensamente à guerra submarina para interditar comboios aliados (BLAIR, 1996). Além disso, cruzadores pesados, como o *Admiral Graf Spee*, foram empregados prioritariamente contra alvos vulneráveis, evitando o confronto direto com forças superiores (BIDLINGMAIER, 1971). De forma complementar, couraçados rápidos como o *Scharnhorst* e o *Gneisenau* obrigaram os Aliados a dispersar escoltas e a manter grupos de caça permanentemente mobilizados, com impacto direto sobre custos logísticos e estratégicos (HANDEL-MAZZETTI, 1956). Esse conjunto de ações impôs às forças defensoras a necessidade de destacar ao menos um destróier, fragata ou corveta para escoltar comboios de navios mercantes, além de manter cobertura aérea constante em rotas críticas, o que elevou significativamente os custos operacionais e o esforço de escolta (MARDER, 1969; CONNORS, 2019).

Estratégias análogas ressurgiram no Oriente Médio na segunda metade do século XX. Durante a chamada Guerra dos Petroleiros e em incidentes posteriores no Golfo Pérsico, pequenas embarcações rápidas, armadas com mísseis ou torpedos, passaram a atacar petroleiros civis e navios militares, obrigando coalizões internacionais a organizar comboios protegidos por escoltas (NAVIAS e HOOTON, 1996). Nessas operações, plataformas ofensivas relativamente baratas impunham riscos relevantes a cargueiros e unidades de combate muito mais caras, deslocando o ônus financeiro para o lado que precisava garantir a segurança da navegação. Esse desequilíbrio entre o baixo custo das plataformas ofensivas e o elevado custo dos meios defensivos caracteriza a lógica econômico-estratégica típica da guerra assimétrica no mar, frequentemente citada em análises contemporâneas sobre segurança de rotas petrolíferas e ataques a navios mercantes (BBC NEWS, 2019; PHILLIPS, 2024; MERCOLIANO, 2019).

No início do século XXI, esse quadro agravou-se com a disseminação de veículos não tripulados em múltiplos ambientes operacionais. Em particular, a guerra na Ucrânia e os ataques recentes no Mar Negro evidenciaram o emprego intenso de veículos aéreos não tripulados e de veículos de superfície não tripulados como vetores de ataque relativamente

baratos e altamente letais, capazes de danificar ou afundar navios de patrulha, fragatas e navios de apoio muito mais caros (KIRICHENKO, 2025b; KIRICHENKO, 2025a). De forma semelhante, ataques no Mar Vermelho e em áreas adjacentes, conduzidos com drones e mísseis de curto alcance, expuseram navios mercantes e unidades navais ao risco de engajamentos recorrentes por ameaças de baixo custo (SELIGMAN e BERG, 2023). Em diversos episódios, navios mercantes ou militares foram ameaçados por enxames de drones de baixo custo, o que exigiu o emprego de munições guiadas, mísseis antiaéreos ou sistemas de armas complexos, cujo custo unitário é, em muitos casos, da mesma ordem de grandeza ou superior ao custo da própria ameaça neutralizada (SELIGMAN e BERG, 2023; TREVITHICK, 2024). Assim, reforça-se a assimetria entre o custo das plataformas ofensivas e o custo dos meios de defesa necessários para preservar a integridade das embarcações de alto valor.

**Observação.** Um exemplo recente de emprego ofensivo de drones navais contra a chamada *shadow fleet* russa, petroleiros usados para contornar sanções econômicas, foi relatado pelo portal *The Kyiv Independent* em 29 de novembro de 2025, descrevendo o ataque de drones navais ucranianos aos petroleiros *Kairos* e *Virat* no Mar Negro (THE KYIV INDEPENDENT, 2025). Trata-se de um episódio ocorrido já durante o período de revisão deste trabalho e incluído aqui com o objetivo de ilustrar a atualidade e a relevância do tema investigado.

Esse panorama histórico suscita uma questão central: qual é o custo esperado, em termos de munição balística, que um navio de escolta moderno deve despender para neutralizar um alvo naval de baixo custo, como um drone de superfície não tripulado? Esses drones tendem a possuir valor de aquisição muito inferior ao de fragatas, destróieres ou navios de apoio empregados em sua defesa, o que amplia a assimetria econômico-estratégica subjacente ao problema (SELIGMAN e BERG, 2023). Neste trabalho, o foco recai sobre as munições disparadas pelos canhões navais da bateria principal dessas escoltas, armamentos que combinam cadência de tiro elevada com preço unitário relativamente acessível quando comparados a mísseis guiados (LEONARDO DRS, 2020; TREVITHICK, 2024).

É precisamente essa assimetria de custos que motiva o presente Trabalho de Conclusão de Curso. Em termos gerais, busca-se fornecer uma do custo esperado associado à neutralização balística de um drone naval de superfície, entendido aqui como um veículo de pequeno porte, não tripulado e de baixo custo relativo, engajado por canhões navais da bateria principal.

Para a realização desse objetivo, adota-se um modelo balístico de seis graus de liberdade, ou modelo 6-DOF, amplamente utilizado na literatura para descrever o movimento de projéteis de artilharia que giram em torno de seu eixo longitudinal (McCoy, 2012; CARLUCCI e JACOBSON, 2014; GKRITZAPIS *et al.*, 2007). Nesse tipo de formulação, o projétil é tratado como um corpo rígido girante, e as equações de movimento acoplam a dinâmica translacional do centro de massa à dinâmica rotacional em torno de eixos principais de inércia, sob a ação de forças e momentos aerodinâmicos dependentes da velocidade, do ângulo total de ataque e da taxa de rotação. Quando alimentado com coeficientes aerodinâmicos obtidos experimentalmente ou por métodos numéricos, esse modelo é capaz de reproduzir, com boa fidelidade, trajetórias observadas em ensaios balísticos (McCoy, 2012).

Contudo, um modelo puramente determinístico não é suficiente para reproduzir a dispersão real observada em operações, pois grandezas como variações na carga propelente, ventos em múltiplas camadas atmosféricas e erros de apontamento introduzem incertezas

## INTRODUÇÃO

relevantes no problema (**KHALIL et al., 2009; LIU et al., 2011**). Para incorporá-las, este trabalho combina a modelagem 6-DOF com simulações de Monte Carlo. Parâmetros críticos das condições iniciais de disparo, como ângulo de elevação e direção de tiro, são tratados como variáveis aleatórias dentro de intervalos compatíveis com a operação do sistema de armas. Cada amostra do experimento de Monte Carlo corresponde a uma trajetória completa resolvida numericamente, e o conjunto dessas trajetórias gera uma nuvem de pontos de impacto em torno da solução determinística.

A partir dessas distribuições de impacto, é possível estimar probabilidades de acerto. Combinando essas probabilidades ao custo unitário das munições, define-se uma medida de custo médio de neutralização que expressa o número esperado de disparos (ou o custo monetário associado) necessário para neutralizar um único drone em determinados cenários de engajamento.

Espera-se que essa abordagem, ainda que baseada em hipóteses simplificadoras e em cenários representativos, seja capaz de refletir de forma adequada aspectos essenciais do problema físico e operacional, contribuindo para a compreensão quantitativa do impacto que drones navais de baixo custo podem ter sobre o planejamento e o emprego de canhões navais da bateria principal em contextos de guerra assimétrica.

## Objetivos

Para explicitar de forma clara as metas deste trabalho, distinguem-se a seguir o objetivo geral e um conjunto de objetivos específicos.

O objetivo geral deste Trabalho de Conclusão de Curso é *calcular o custo esperado de neutralização de um drone naval de superfície, considerando exclusivamente o custo da munição da bateria principal e o custo associado à falha na neutralização do alvo*. Assume-se, para isso, uma sequência de até  $n$  disparos, cada um com probabilidade  $p_i$  de neutralizar o alvo no  $i$ -ésimo tiro, custo unitário de munição igual a  $c$  e custo da embarcação  $E$  para o caso em que o alvo não é neutralizado após todos os disparos admissíveis. Nessas condições, o custo esperado é modelado pela expressão

$$\mathbb{E}[C] = c \left( 1 + (1-p_1) + (1-p_1)(1-p_2) + \dots + (1-p_1) \dots (1-p_{n-1}) \right) + E (1-p_1) \dots (1-p_n), \quad (1.1)$$

A estrutura de (1.1) decorre da regra operacional adotada: a sequência de disparos é interrompida assim que o alvo é neutralizado, de modo que o  $(i+1)$ -ésimo disparo só ocorre se os  $i$  primeiros não tiverem sido bem-sucedidos. Assim, o custo esperado de munição é igual ao custo unitário  $c$  multiplicado pelo *número esperado de disparos efetuados*.

Em particular, o primeiro disparo ocorre com probabilidade 1, o segundo ocorre apenas se o primeiro falhar, com probabilidade  $(1-p_1)$ , o terceiro ocorre apenas se os dois primeiros falharem, com probabilidade  $(1-p_1)(1-p_2)$  e assim por diante, até o  $n$ -ésimo disparo, que ocorre com probabilidade  $(1-p_1) \dots (1-p_{n-1})$ .

Somando essas probabilidades de ocorrência de cada disparo e multiplicando por  $c$ ,

obtém-se o primeiro termo de (1.1). Finalmente, o termo  $E(1 - p_1) \cdots (1 - p_n)$  representa o custo associado ao cenário em que nenhum dos  $n$  disparos admissíveis neutraliza o alvo, cuja probabilidade é precisamente o produto das probabilidades de falha em todos os disparos.

A partir desse objetivo geral, definem-se os seguintes objetivos específicos:

- formular e implementar, em linguagem Python, um modelo balístico de seis graus de liberdade (modelo 6-DOF) para projéteis, com base em referências consolidadas da literatura (McCoy, 2012; CARLUCCI e JACOBSON, 2014), de forma reproduzível.
- levantar e organizar os coeficientes aerodinâmicos, parâmetros geométricos e demais características relevantes das munições selecionadas e das plataformas navais associadas, a partir de relatórios técnicos, normas e material de referência disponível (WHYTE, 1973; HASELTINE, 1969; THOMAS e GOSWICK, 1967; GAO, 1990; SUPERVISOR OF SHIPBUILDING (SUPSHIP), SEATTLE, WASHINGTON, 1965; THE KYIV INDEPENDENT, 2024; SUTTON, 2024).
- definir um conjunto de posições e geometrias de engajamento, na forma de um *grid* de pontos-alvo representativos das possíveis posições ocupadas por drones navais em aproximação à embarcação de escolta, especificando faixas de distância e ângulos de aproximação de interesse operacional.
- aplicar simulações de Monte Carlo ao modelo 6-DOF, variando as condições iniciais de disparo dentro de intervalos plausíveis, de modo a estimar distribuições de impacto e probabilidades de acerto associadas a cada ponto do *grid* definido (CORRIVEAU, 2017; LIU *et al.*, 2011).
- calcular, para cada cenário de engajamento considerado, o custo esperado de neutralização do drone naval segundo a expressão (1.1) e discutir as implicações desses resultados para o emprego de canhões navais da bateria principal em contextos de guerra assimétrica.

# Capítulo 2

## Fundamentação teórica

Neste capítulo, dedicado à revisão de literatura e à fundamentação teórica, concentram-se os dois pilares principais do modelo proposto. O primeiro, tratado com maior detalhamento, é a modelagem da balística externa de projéteis de artilharia, que constitui o “motor” utilizado para simular as trajetórias em seis graus de liberdade e exige uma apresentação mais cuidadosa, por se tratar de um tema técnico relativamente especializado (CARLUCCI e JACOBSON, 2014; MCCOY, 2012). O segundo pilar é a estimativa da probabilidade de acerto por meio de simulações de Monte Carlo, formulada em termos de variáveis de Bernoulli e de um modelo simples de custo esperado, um arcabouço já bem estabelecido na literatura de probabilidade e estatística aplicada (ROSS, 2014; KROESE *et al.*, 2011).

### 2.1 Fundamentos conceituais e escopo

Por recomendação do orientador, apresenta-se, neste capítulo, uma revisão concisa de quatro conceitos físicos que sustentam a formulação balística em seis graus de liberdade utilizada neste trabalho: (i) *momento angular*; (ii) *momento de inércia*; (iii) *equações de Euler*; e (iv) *cossenos diretores*, todos considerados no contexto de corpos rígidos. A referência principal é GOLDSTEIN *et al.* (2002), complementada por LEVI (2014), de modo a manter a consistência notacional com a literatura clássica de dinâmica de corpos rígidos. Na seção seguinte, esses conceitos serão conectados diretamente à formulação 6-DOF para projéteis de artilharia, com base em MCCOY (2012) e CARLUCCI e JACOBSON (2014).

Adota-se a noção usual de corpo rígido como um sistema de pontos materiais que preservam, ao longo do movimento, as distâncias entre quaisquer pares de pontos. Em termos físicos, trata-se de um ente indeformável: sua evolução no espaço é completamente descrita por uma combinação de translação e rotação do conjunto como um todo (GOLDSTEIN *et al.*, 2002).

### 2.1.1 Momento angular

Como ponto de partida, considera-se a decomposição clássica da energia cinética total de um corpo rígido (na notação de [GOLDSTEIN et al. \(2002\)](#)):

$$T = \frac{1}{2} M \|\vec{v}\|^2 + T'(\phi, \theta, \psi), \quad (2.1)$$

em que o primeiro termo representa a energia cinética associada ao movimento do centro de massa (CM), e o segundo termo agrega a contribuição do movimento relativo ao CM. A notação  $T'(\phi, \theta, \psi)$  explicita a dependência na atitude do corpo por meio dos ângulos de Euler, operacionalmente, essa parcela envolve as taxas desses ângulos por meio da velocidade angular instantânea do corpo ([GOLDSTEIN et al., 2002](#)).

Para uma descrição mínima do movimento, adota-se o conjunto de coordenadas generalizadas formado pelas coordenadas cartesianas do CM ( $x, y, z$ ) e por três parâmetros de orientação, aqui escolhidos como os ângulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ , suficientes para caracterizar a evolução de um corpo indeformável ([GOLDSTEIN et al., 2002](#)). Nos capítulos posteriores, a atitude será descrita preferencialmente por uma matriz de cossenos diretores, mas a formulação de [GOLDSTEIN et al. \(2002\)](#) em termos de ângulos de Euler continua sendo a referência conceitual básica.

### Taxa de mudança de um vetor

Um resultado central para a dinâmica de corpos rígidos é a relação entre as derivadas temporais de um vetor em dois referenciais distintos. Seja  $\vec{G}$  um vetor genérico; [GOLDSTEIN et al. \(2002, §4.9\)](#) mostra que a sua variação infinitesimal, observada a partir de um sistema fixo no espaço (“space”) e de um sistema solidário ao corpo (“body”), satisfaz

$$(d\vec{G})_{\text{space}} = (d\vec{G})_{\text{body}} + d\vec{\Omega} \times \vec{G},$$

em que  $d\vec{\Omega}$  é a rotação infinitesimal do corpo. A demonstração de que  $(d\vec{G})_{\text{rot}} = d\vec{\Omega} \times \vec{G}$  é apresentada em [GOLDSTEIN et al. \(2002, §4.8\)](#) e não será repetida aqui. Dividindo a expressão por  $dt$ , obtém-se (cf. [GOLDSTEIN et al. \(2002, §4.9, eq. \(4.82\)\)](#))

$$\left( \frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{\text{space}} = \left( \frac{d\vec{G}}{dt} \right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \vec{G}, \quad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}, \quad (2.2)$$

Como  $\vec{G}$  é arbitrário, a relação (2.2) vale para a derivada temporal de quaisquer vetores observados em dois sistemas de coordenadas distintos.

### Velocidade angular única e definição de momento angular

Considere agora dois pontos quaisquer do corpo, com vetores de posição  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  no referencial inercial, e defina  $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Aplicando (2.2) a  $\vec{R}$ , obtém-se  $\dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R}$  ([GOLDSTEIN](#)

*et al.*, 2002, §4.9, eq. (4.82)). Assim,

$$\left( \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)_{\text{space}} = \left( \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)_{\text{space}} + \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{\text{space}} = \left( \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)_{\text{space}} + \vec{\omega}_1 \times \vec{R},$$

e, alternativamente,

$$\left( \frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)_{\text{space}} = \left( \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)_{\text{space}} - \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{\text{space}} = \left( \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)_{\text{space}} - \vec{\omega}_2 \times \vec{R}.$$

Comparando as duas expressões para a diferença de velocidades, chega-se a

$$(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times \vec{R} = \vec{0}.$$

Como  $\vec{R}$  pode ser escolhido como o vetor entre quaisquer dois pontos do corpo (havendo pelo menos duas direções não colineares), conclui-se que  $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$ . Em outras palavras, a *velocidade angular*  $\vec{\omega}$  é única para o corpo rígido e independe do par de pontos utilizado na definição (*GOLDSTEIN et al.*, 2002, §4.9).

Nessas condições, o *momento angular* da  $i$ -ésima partícula define-se por

$$\vec{L} = m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i), \quad (2.3)$$

em que  $\vec{r}_i$  e  $\vec{v}_i$  são, respectivamente, o vetor posição e a velocidade da partícula, e  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$  é o seu momento linear (*LEVI*, 2014, Def. 5.1).

Aplicando (2.2) ao vetor posição  $\vec{r}_i$ , obtém-se

$$\left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)_{\text{space}} = \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i.$$

Como  $\vec{r}_i$  é fixo no referencial do corpo, vale  $\left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)_{\text{body}} = \vec{0}$ ; portanto,

$$\vec{v}_i = \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)_{\text{space}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i. \quad (2.4)$$

Substituindo  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$  em (2.3), chega-se a

$$\vec{L} = m_i [\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)].$$

Para explicitar a estrutura desse termo, escrevem-se  $\vec{r} = (x, y, z)^\top$  e  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^\top$ . Então,

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Multiplicando por  $m$ , os elementos da diagonal (multiplicados por  $m$ ) definem os *momentos de inércia*  $I_{xx} = m(y^2 + z^2)$ ,  $I_{yy} = m(x^2 + z^2)$  e  $I_{zz} = m(x^2 + y^2)$ . Os elementos fora da

diagonal definem os *produtos de inércia*  $I_{xy} = -m xy$ ,  $I_{xz} = -m xz$  e  $I_{yz} = -m yz$ .

Organizando esses coeficientes na matriz de inércia  $\mathbf{I}$ , obtém-se a forma vetorial compacta

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega} \quad (2.5)$$

para o momento angular de um corpo rígido (GOLDSTEIN *et al.*, 2002).

Em um sistema discreto de partículas, o momento angular em relação a um polo  $O$  é dado por

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i,$$

enquanto, em um corpo contínuo, vale a forma integral

$$\vec{L}_O = \int_B \vec{r} \times \vec{v} dm, \quad (dm = \rho dV),$$

com todas as grandezas medidas a partir de  $O$  (LEVI, 2014, Def. 2.2). Em ambos os casos, a matriz de inércia  $\mathbf{I}$  é real simétrica  $3 \times 3$  e admite diagonalização por uma base ortonormal:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R} \mathbf{I} \mathbf{R}^T = \text{diag}(I_1, I_2, I_3),$$

em que  $\mathbf{R}$  é a matriz ortogonal formada pelos autovetores normalizados (colunas) e  $I_1, I_2, I_3$  são os *momentos principais de inércia* (GOLDSTEIN *et al.*, 2002; Levi, 2014).

### 2.1.2 Momento de inércia

Para a  $i$ -ésima partícula, a energia cinética em torno de um ponto é

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_i\|^2. \quad (2.6)$$

Usando a relação cinemática (2.4), substitui-se *apenas um* dos fatores velocidade por  $\vec{\omega} \times \vec{r}_i$ , obtendo-se

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i). \quad (2.7)$$

Escrevendo  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^\top$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^\top$  e  $\vec{v}_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})^\top$ , calcula-se

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ \omega_z x_i - \omega_x z_i \\ \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{bmatrix},$$

e, em seguida, o produto escalar

$$T_i = \frac{m_i}{2} [v_{ix} \ v_{iy} \ v_{iz}] \begin{bmatrix} \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ \omega_z x_i - \omega_x z_i \\ \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{bmatrix} = \frac{m_i}{2} (v_{ix}(\omega_y z_i - \omega_z y_i) + v_{iy}(\omega_z x_i - \omega_x z_i) + v_{iz}(\omega_x y_i - \omega_y x_i)). \quad (2.8)$$

Para obter uma forma alternativa equivalente, calcula-se separadamente o produto

vetorial  $\vec{r}_i \times \vec{v}_i$ :

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ v_{ix} & v_{iy} & v_{iz} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} y_i v_{iz} - z_i v_{iy} \\ z_i v_{ix} - x_i v_{iz} \\ x_i v_{iy} - y_i v_{ix} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Multiplicando por  $\vec{\omega}$ , obtém-se

$$\frac{m_i}{2} \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i v_{iz} - z_i v_{iy} \\ z_i v_{ix} - x_i v_{iz} \\ x_i v_{iy} - y_i v_{ix} \end{bmatrix} = \frac{m_i}{2} \left( \omega_x(y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) + \omega_y(z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) + \omega_z(x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) \right), \quad (2.10)$$

que coincide termo a termo com (2.8). Conclui-se, portanto, que

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \quad (2.11)$$

(GOLDSTEIN *et al.*, 2002).

A relação entre momento angular e velocidade angular pode ser escrita como  $\vec{L} = m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$  e  $\vec{L} = I \vec{\omega}$  (cf. (2.3) e (2.5)). Separando direção e módulo da velocidade angular, define-se

$$\vec{\omega} = \omega \hat{\vec{n}}, \quad \|\hat{\vec{n}}\| = 1, \quad (2.12)$$

em que  $\hat{\vec{n}}$  é um vetor unitário que define a direção do eixo de rotação e  $\omega$  é o módulo da velocidade angular.

Nessa linha, o *momento de inércia escalar* em torno do eixo  $\hat{\vec{n}}$  é definido por

$$I_{\hat{n}} \stackrel{\text{def}}{=} m_i \|\hat{\vec{n}} \times \vec{r}_i\|^2 = m_i (\vec{r}_i \times \hat{\vec{n}}) \cdot (\vec{r}_i \times \hat{\vec{n}}), \quad (2.13)$$

isto é, massa multiplicada pelo quadrado da distância perpendicular ao eixo ( $\rho = \|\hat{\vec{n}} \times \vec{r}_i\|$ ; cf. eq. (5.18) em GOLDSTEIN *et al.* (2002)).

Multiplicando e dividindo a expressão (2.13) por  $\omega^2$  e usando (2.4), obtém-se

$$I_{\hat{n}} = m_i \|\hat{\vec{n}} \times \vec{r}_i\|^2 = \frac{m_i}{\omega^2} \|\omega(\hat{\vec{n}} \times \vec{r}_i)\|^2 = \frac{m_i}{\omega^2} \|\vec{\omega} \times \vec{r}_i\|^2 = \frac{m_i}{\omega^2} \|\vec{v}_i\|^2. \quad (2.14)$$

Com (2.6) ( $T_i = \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_i\|^2$ ), obtém-se diretamente

$$\boxed{T_i = \frac{1}{2} I_{\hat{n}} \omega^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{I_{\hat{n}} = \frac{2 T_i}{\omega^2}}. \quad (2.15)$$

Essa expressão destaca a analogia entre massa e momento de inércia: enquanto  $m$  mede a resistência à aceleração linear (por meio de  $\vec{F} = m \vec{a}$ ), o escalar  $I_{\hat{n}}$  mede a resistência à aceleração angular em torno do eixo  $\hat{\vec{n}}$ . A analogia também aparece nas formas da energia cinética:  $T = \frac{1}{2} m v^2$  para o movimento translacional e  $T' = \frac{1}{2} I_{\hat{n}} \omega^2$  para o movimento rotacional (LEVI, 2014).

### 2.1.3 Equações de Euler

Para descrever a dinâmica rotacional em torno de um ponto fixo (ou do centro de massa), parte-se da segunda lei de Newton para rotações, que iguala a taxa de variação do momento angular  $\vec{L}$  a um torque externo total  $\vec{N}$  em um referencial inercial (“space”) (GOLDSTEIN *et al.*, 2002):

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{space}} = \vec{N}. \quad (2.16)$$

A fim de trabalhar no referencial solidário ao corpo, utiliza-se novamente a relação (2.2), agora aplicada a  $\vec{L}$ :

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{space}} = \left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \vec{L}.$$

Substituindo na expressão (2.16) e omitindo o subscrito “body” por simplicidade, obtém-se a equação de balanço do momento angular no referencial do corpo:

$$\dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N}. \quad (2.17)$$

Expandindo o produto vetorial  $\vec{\omega} \times \vec{L}$ , a equação vetorial (2.17) toma a forma

$$\begin{aligned} \dot{L}_x + \omega_y L_z - \omega_z L_y &= N_x, \\ \dot{L}_y + \omega_z L_x - \omega_x L_z &= N_y, \\ \dot{L}_z + \omega_x L_y - \omega_y L_x &= N_z, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde  $(L_x, L_y, L_z)$ ,  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  e  $(N_x, N_y, N_z)$  são as componentes de  $\vec{L}$ ,  $\vec{\omega}$  e  $\vec{N}$  nos eixos do corpo.

A simplificação fundamental ocorre ao se escolher um sistema de coordenadas alinhado com os *eixos principais de inércia* do corpo. Nesse sistema, o tensor de inércia é diagonal,  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ , e a relação  $\vec{L} = I \vec{\omega}$  decompõe-se em  $L_k = I_k \omega_k$  para  $k = 1, 2, 3$ . Substituindo essas relações em (2.18) e supondo que os eixos principais são fixos no corpo (de modo que  $\dot{I}_k = 0$ ), obtém-se as *equações de Euler* (GOLDSTEIN *et al.*, 2002):

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= N_3. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Essas equações serão o núcleo da parte rotacional da formulação 6-DOF empregada para descrever o projétil em voo.

### 2.1.4 Cossenos diretores

Para descrever a orientação de um corpo rígido, é conveniente introduzir uma matriz de rotação (matriz de atitude ou matriz de cossenos diretores) que relaciona dois sistemas de referência ortonormais: um sistema fixo no espaço e um sistema fixo no corpo (GOLDSTEIN *et al.*, 2002). Seja  $(x, y, z)$  o sistema externo, com base unitária  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , e  $(x', y', z')$  o sistema solidário ao corpo, com base  $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ . Os cossenos diretores são definidos por

$$\mathbf{e}'_p \cdot \mathbf{e}_q = \|\mathbf{e}'_p\| \|\mathbf{e}_q\| \cos \theta_{pq} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta_{pq} = \cos \theta_{pq}, \quad p, q \in \{1, 2, 3\},$$

onde  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$  e  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{k}'$ .

Com essa convenção, cada vetor unitário do sistema do corpo pode ser escrito em função dos unitários do sistema externo:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= (\cos \theta_{11}) \mathbf{i} + (\cos \theta_{12}) \mathbf{j} + (\cos \theta_{13}) \mathbf{k}, \\ \mathbf{j}' &= (\cos \theta_{21}) \mathbf{i} + (\cos \theta_{22}) \mathbf{j} + (\cos \theta_{23}) \mathbf{k}, \\ \mathbf{k}' &= (\cos \theta_{31}) \mathbf{i} + (\cos \theta_{32}) \mathbf{j} + (\cos \theta_{33}) \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

em que, por exemplo,  $\cos \theta_{12} = \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}$  é o cosseno do ângulo entre os eixos  $x'$  e  $y$ .

Reunindo os nove cossenos em uma matriz  $\mathbf{C} = (\cos \theta_{pq})$ , as linhas de  $\mathbf{C}$  são as componentes de  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  vistas no sistema externo. Como ambas as bases são ortonormais,  $\mathbf{C}$  é uma matriz ortogonal e satisfaz  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^\top$ .

Qualquer vetor  $\vec{r}$  pode ser escrito em ambos os sistemas de coordenadas:

$$\vec{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'.$$

Projetando  $\vec{r}$  nos eixos primados e usando (2.20), encontra-se

$$\begin{aligned} x' &= \vec{r} \cdot \mathbf{i}' = (\cos \theta_{11}) x + (\cos \theta_{12}) y + (\cos \theta_{13}) z, \\ y' &= \vec{r} \cdot \mathbf{j}' = (\cos \theta_{21}) x + (\cos \theta_{22}) y + (\cos \theta_{23}) z, \\ z' &= \vec{r} \cdot \mathbf{k}' = (\cos \theta_{31}) x + (\cos \theta_{32}) y + (\cos \theta_{33}) z, \end{aligned} \quad (2.21)$$

isto é, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{C}^\top \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Nesta notação,  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  são vetores unitários (eixos do corpo), enquanto  $x', y', z'$  são componentes de  $\vec{r}$  nesse sistema; não se deve confundi-los.

## 2.2 Equação 6-DOF

Esta seção apresenta a formulação em seis graus de liberdade (6-DOF) para a dinâmica translacional e rotacional de projéteis em balística externa. Esse tipo de modelagem é

amplamente reconhecido na literatura contemporânea como padrão de alta fidelidade, por integrar, em um sistema único, a trajetória do centro de massa, a atitude do corpo rígido e os momentos aerodinâmicos atuantes (McCoy, 2012, cap. 9). Versões reduzidas desse problema já eram consideradas na primeira metade do século XX, mas o uso rotineiro de integrações numéricas completas consolidou-se apenas com o avanço da computação digital no pós-guerra (McCoy, 2012).

As formulações clássicas 6-DOF são frequentemente escritas em termos de ângulos de Euler. Neste trabalho, adota-se, em contraste, a parametrização por *matrizes de cossenos diretores* (*direction cosine matrices*, DCM), conforme apresentado na Seção 2.1.4. Essa escolha evita singularidades cinemáticas e mantém validade uniforme para ângulos de ataque elevados, dispensando reparametrizações durante manobras com grandes deflexões. Do ponto de vista físico, ambas as descrições (Euler e DCM) são equivalentes: tratam-se apenas de diferentes maneiras de parametrizar a mesma atitude, desde que se mantenham os mesmos campos de forças e momentos (McCoy, 2012).

No contexto 6-DOF, é possível obter previsões de trajetória e de dinâmica de voo com alto grau de realismo, *desde que* os parâmetros de entrada sejam consistentes: coeficientes aerodinâmicos de força e de momento, propriedades iniciais I, condições de ambiente e de tiro e rotinas numéricas adequadas (McCoy, 2012; CARLUCCI e JACOBSON, 2014). A fidedignidade do modelo é limitada, em última instância, pela qualidade desses coeficientes e pelas hipóteses empregadas em sua determinação experimental.

## 2.2.1 Desenvolvimento da equação

A formulação 6-DOF adotada baseia-se na decomposição do movimento de um corpo rígido em *translação* do centro de massa e *rotação* em torno do centro de massa, conforme discutido nos fundamentos de corpo rígido (Seção 2.1.1) e em GOLDSTEIN *et al.* (2002) e LEVI (2014). A forma operacional específica segue o tratamento de balística externa apresentado em CARLUCCI e JACOBSON (2014).

**Translação do centro de massa.** Para a translação, utilizam-se as leis básicas de Newton. Uma revisão detalhada desses resultados é dispensada aqui, por se tratar de conteúdo mais elementar, detalhes podem ser encontrados nos capítulos iniciais de GOLDSTEIN *et al.* (2002) e LEVI (2014). No referencial inercial adotado, o balanço da quantidade de movimento linear do centro de massa é escrito, conforme CARLUCCI e JACOBSON (2014), na forma

$$m \dot{\vec{v}} = \vec{F}_{\text{aero}} + m \vec{g} + \vec{F}_{\text{Cor}} + \vec{F}_{\text{imp}}, \quad (2.22)$$

em que  $m$  é a massa total do projétil,  $\vec{v}$  é a velocidade do centro de massa,  $\vec{F}_{\text{aero}}$  é a soma das forças aerodinâmicas,  $m \vec{g}$  é o peso,  $\vec{F}_{\text{Cor}}$  agrupa os termos devidos à rotação da Terra, quando relevantes, e  $\vec{F}_{\text{imp}}$  representa possíveis impulsos externos (por exemplo, propulsão). Na balística clássica de projéteis não propulsados, adota-se  $\vec{F}_{\text{imp}} = \vec{0}$ .

**Rotação em torno do centro de massa.** Para o movimento rotacional, emprega-se a equação vetorial do momento angular do corpo em torno do centro de massa,

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{\text{aero}}, \quad (2.23)$$

na qual  $\vec{L}$  é o momento angular e  $\vec{M}_{\text{aero}}$  é a soma dos momentos aerodinâmicos atuantes (CARLUCCI e JACOBSON, 2014).

Como visto na Seção 2.1.1, o momento angular pode ser escrito, em um sistema de eixos principais solidário ao corpo, como  $\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}$ , com  $\mathbf{I}$  avaliado no centro de massa. Para um projétil com simetria de revolução em torno de  $\mathbf{i}'$ , eixos transversais degenerados e base do corpo  $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ , vale

$$\mathbf{I}_{\text{body}} = \text{diag}(I_p, I_T, I_T), \quad \vec{\omega} = \omega_1 \mathbf{i}' + \omega_2 \mathbf{j}' + \omega_3 \mathbf{k}',$$

de modo que

$$\vec{L} = I_p \omega_1 \mathbf{i}' + I_T \omega_2 \mathbf{j}' + I_T \omega_3 \mathbf{k}'. \quad (2.24)$$

A construção de eixos principais e a relação  $\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}$  são vistas em GOLDSTEIN *et al.* (2002, cap. 5).

Aqui,  $I_p$  denota o momento de inércia *polar* do projétil em torno do seu eixo longitudinal (de simetria), enquanto  $I_t$  denota o momento de inércia *transversal* em torno de qualquer eixo que passe pelo centro de massa e seja perpendicular a esse eixo.

Pela identidade cinemática (2.4), tem-se, para os vetores unitários da base do corpo,

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{i}', \quad \text{com} \quad \vec{\omega} = \omega_1 \mathbf{i}' + \omega_2 \mathbf{j}' + \omega_3 \mathbf{k}'.$$

Escrevendo  $\omega_1 \rightarrow p$ ,  $\omega_2 \rightarrow q$ ,  $\omega_3 \rightarrow r$  apenas para facilitar o cálculo matricial, obtém-se as duas expansões:

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = r \mathbf{j}' - q \mathbf{k}' \iff \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \omega_3 \mathbf{j}' - \omega_2 \mathbf{k}'.$$

$$\mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & -q \end{vmatrix} = \mathbf{i}'(0 \cdot (-q) - 0 \cdot r) - \mathbf{j}'(1 \cdot (-q) - 0 \cdot 0) + \mathbf{k}'(1 \cdot r - 0 \cdot 0) = q \mathbf{j}' + r \mathbf{k}' = \omega_2 \mathbf{j}' + \omega_3 \mathbf{k}'.$$

Com essas identidades, a expressão (2.24) pode ser reescrita de forma compacta como

$$\vec{L} = I_p \omega_1 \mathbf{i}' + I_T \left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) \quad (2.25)$$

**Normalização por  $I_T$ .** Seguindo CARLUCCI e JACOBSON (2014), introduz-se o vetor adimensionalizado

$$\vec{h} := \frac{\vec{L}}{I_T} = \frac{I_p}{I_T} \omega_1 \mathbf{i}' + \left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right). \quad (2.26)$$

Derivando (2.26) no tempo e aplicando a regra do produto no termo cruzado,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}}{dt} &= \frac{I_p}{I_T} \left( \frac{d\omega_1}{dt} \mathbf{i}' + \omega_1 \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) + \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \mathbf{i}' \times \frac{d^2\mathbf{i}'}{dt^2} \\ &= \frac{I_p}{I_T} \left( \frac{d\omega_1}{dt} \mathbf{i}' + \omega_1 \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) + \mathbf{i}' \times \frac{d^2\mathbf{i}'}{dt^2}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

pois  $\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \vec{0}$  (produto vetorial de um vetor consigo mesmo).

A expressão (2.25) é útil para análise conceitual, entretanto, para fins operacionais, retoma-se (2.23) e utiliza-se diretamente a definição (2.26), separando os momentos aerodinâmicos em parcelas específicas.

Escrevendo (2.23) em termos de  $\vec{h}$ ,

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{\vec{M}_S}{I_T} + \frac{\vec{M}_R}{I_T} + \frac{\vec{M}_a}{I_T} + \frac{\vec{M}_{pa}}{I_T} + \frac{\vec{M}_q}{I_T}, \quad (2.28)$$

obtém-se a forma operacional equivalente à equação (8:249) de CARLUCCI e JACOBSON (2014), em que cada termo corresponde a uma contribuição de momento distinta, discutida a seguir.

**Observação 1.** Partindo de (2.26),

$$\vec{h} = \frac{I_p}{I_T} \omega_1 \mathbf{i}' + \left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right).$$

Façamos,

$$\begin{aligned} \vec{h} \cdot \mathbf{i}' &= \left( \frac{I_p}{I_T} \omega_1 \mathbf{i}' + \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) \cdot \mathbf{i}' \\ &= \frac{I_p}{I_T} \omega_1 (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}') + \left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) \cdot \mathbf{i}' \\ &= \frac{I_p}{I_T} \omega_1 + 0. \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{i}'$  é versor,  $\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' = 1$ .

Cálculo por componentes de  $(\mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt}) \cdot \mathbf{i}' = 0$ . Escreva  $\mathbf{i}' = (i'_x, i'_y, i'_z)$  e  $\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = (\dot{i}'_x, \dot{i}'_y, \dot{i}'_z)$ .

Então,

$$\mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ i'_x & i'_y & i'_z \\ \dot{i}'_x & \dot{i}'_y & \dot{i}'_z \end{vmatrix} = (i'_y \dot{i}'_z - i'_z \dot{i}'_y, \quad i'_z \dot{i}'_x - i'_x \dot{i}'_z, \quad i'_x \dot{i}'_y - i'_y \dot{i}'_x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) \cdot \mathbf{i}' &= i'_x(i'_y i'_z - i'_z i'_y) + i'_y(i'_z i'_x - i'_x i'_z) + i'_z(i'_x i'_y - i'_y i'_x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

com cancelamento termo a termo. Portanto,

$$\boxed{\left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) \cdot \mathbf{i}' = 0}.$$

e dessa forma:

$$\boxed{\vec{h} \cdot \mathbf{i}' = \frac{I_p}{I_T} \omega_1} \quad (2.29)$$

**Observação 2.** Partindo novamente de (2.26),

$$\vec{h} = \frac{I_p}{I_T} \omega_1 \mathbf{i}' + \left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right).$$

Façamos

$$\begin{aligned} \vec{h} \times \mathbf{i}' &= \left( \frac{I_p}{I_T} \omega_1 \mathbf{i}' + \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) \times \mathbf{i}' \\ &= \underbrace{\left( \frac{I_p}{I_T} \omega_1 \mathbf{i}' \right) \times \mathbf{i}'}_{=0} + \left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) \times \mathbf{i}' \\ &= \left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) \times \mathbf{i}'. \end{aligned}$$

Escrevendo  $\mathbf{i}' = (i'_x, i'_y, i'_z)$  e  $\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = (u'_x, u'_y, u'_z)$ . Primeiro,

$$\mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ i'_x & i'_y & i'_z \\ u'_x & u'_y & u'_z \end{vmatrix} = (A'_x, A'_y, A'_z), \quad \begin{cases} A'_x = i'_y u'_z - i'_z u'_y, \\ A'_y = i'_z u'_x - i'_x u'_z, \\ A'_z = i'_x u'_y - i'_y u'_x. \end{cases}$$

Em seguida,

$$\left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) \times \mathbf{i}' = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_x & \mathbf{e}'_y & \mathbf{e}'_z \\ A'_x & A'_y & A'_z \\ i'_x & i'_y & i'_z \end{vmatrix} = (A'_y i'_z - A'_z i'_y, A'_z i'_x - A'_x i'_z, A'_x i'_y - A'_y i'_x) = (u'_x, u'_y, u'_z).$$

Logo,

$$\left( \mathbf{i}' \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \right) \times \mathbf{i}' = \frac{d\mathbf{i}'}{dt}.$$

Concluímos, portanto, que

$$\vec{h} \times \mathbf{i}' = \frac{d\mathbf{i}'}{dt} \quad (2.30)$$

### 2.2.2 Coeficientes de forças e momentos aerodinâmicos

Nesta subseção não se discute o processo experimental de determinação dos coeficientes aerodinâmicos, mas apenas se explicita *quais* coeficientes entram na formulação. Detalhes sobre ensaios em túnel de vento e calibração a partir de dados de tiro podem ser encontrados em [CARLUCCI e JACOBSON \(2014\)](#) e [McCoy \(2012\)](#).

O ponto central é tornar explícita a ligação entre os coeficientes de força e de momento e os termos rotacionais introduzidos pela variável  $\vec{h}$ . As expressões abaixo são apresentadas na forma já utilizada em [CARLUCCI e JACOBSON \(2014\)](#), omitindo o desenvolvimento intermediário, para preservar concisão.

#### Forças aerodinâmicas

Considera-se a velocidade do escoamento relativa ao projétil como  $\vec{V}$ , com  $V = \|\vec{V}\|$ , área de referência  $S$ , densidade  $\rho$  e comprimento de referência  $d$  (por exemplo, o diâmetro). Se  $\mathbf{i}'$  é o eixo polar do corpo (versor) e  $\vec{h}$  é definido por (2.26), utilizam-se as seguintes forças, na forma operacional:

**(i) Arrasto (Drag).**

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} \rho S C_D V \vec{V}$$

**(ii) Sustentação (Lift).**

$$\vec{F}_L = \frac{1}{2} \rho S C_{L\alpha} \left[ V^2 \mathbf{i}' - (\vec{V} \cdot \mathbf{i}') \vec{V} \right]$$

**(iii) Magnus.**

$$\vec{F}_M = -\frac{1}{2} \rho S d C_{Np\alpha} \frac{I_T}{I_P} (\vec{h} \cdot \mathbf{i}') (\mathbf{i}' \times \vec{V})$$

**(iv) Amortecimento de arfagem (Pitch damping).**

$$\vec{F}_q = \frac{1}{2} \rho V S d (C_{Nq} + C_{N\dot{\alpha}}) (\vec{h} \times \mathbf{i}')$$

Substituindo as forças acima em (2.22) e dividindo pela massa, obtém-se a forma

vetorial para a aceleração translacional:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} = & \frac{\rho V S C_D}{2m} \vec{V} + \frac{\rho S C_{L\alpha}}{2m} \left[ V^2 \mathbf{i}' - (\vec{V} \cdot \mathbf{i}') \vec{V} \right] - \frac{\rho S d C_{Np\alpha}}{2m} \frac{I_T}{I_P} (\vec{h} \cdot \mathbf{i}') (\mathbf{i}' \times \vec{V}) \\ & + \frac{\rho V S d}{2m} (C_{Nq} + C_{N\dot{\alpha}}) (\vec{h} \times \mathbf{i}') + \vec{g} + \frac{1}{m} \vec{F}_{\text{Cor.}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

### Momentos aerodinâmicos

De modo análogo, para os momentos aerodinâmicos, adotam-se  $S$ ,  $d$ , o eixo polar  $\mathbf{i}'$  e o vetor  $\vec{h}$  conforme (2.26).

**(i) Momento de amortecimento do giro (Spin damping moment).**

$$\vec{M}_S = \frac{1}{2} \rho V S d^2 C_{l\rho} \frac{I_T}{I_P} (\vec{h} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}'$$

**(ii) Momento de rolagem (Rolling moment).**

$$\vec{M}_R = \frac{1}{2} \rho V^2 S d \delta_F C_{l\delta} \mathbf{i}'$$

**(iii) Momento de tombamento (Overturning moment).**

$$\vec{M}_\alpha = \frac{1}{2} \rho S d V C_{M\alpha} (\vec{V} \times \mathbf{i}')$$

**(iv) Momento de Magnus (Magnus moment).**

$$\vec{M}_{p\alpha} = \frac{1}{2} \rho S d^2 C_{Mp\alpha} \frac{I_T}{I_P} (\vec{h} \cdot \mathbf{i}') \left[ \vec{V} - (\vec{V} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' \right]$$

**(v) Momento de amortecimento de arfagem (Pitch damping moment).**

$$\vec{M}_q = \frac{1}{2} \rho V S d^2 (C_{Mq} + C_{M\dot{\alpha}}) \left[ \vec{h} - (\vec{h} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' \right]$$

Substituindo essas contribuições em (2.28), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{h}}{dt} = & \frac{\rho V S d^2 C_{l\rho}}{2 I_P} (\vec{h} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' + \frac{\rho V^2 S d \delta_F C_{l\delta}}{2 I_T} \mathbf{i}' + \frac{\rho S d V C_{M\alpha}}{2 I_T} (\vec{V} \times \mathbf{i}') \\ & + \frac{\rho S d^2 C_{Mp\alpha}}{2 I_P} (\vec{h} \cdot \mathbf{i}') \left[ \vec{V} - (\vec{V} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' \right] + \frac{\rho V S d^2 (C_{Mq} + C_{M\dot{\alpha}})}{2 I_T} \left[ \vec{h} - (\vec{h} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

### 2.2.3 Identidades auxiliares

Com as expressões (2.31) e (2.32), convém explicitar algumas relações auxiliares em componentes, que serão utilizadas na dedução das seis EDOs escalares finais. A partir deste ponto, adota-se a base inercial  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  (para evitar conflitos de notação com a base do corpo  $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ ) e escreve-se:

$$\vec{h} = h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2 + h_3 \mathbf{e}_3, \quad (2.33)$$

$$\vec{i}' = i'_1 \mathbf{e}_1 + i'_2 \mathbf{e}_2 + i'_3 \mathbf{e}_3, \quad (2.34)$$

$$\vec{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3, \quad (\text{velocidade do corpo no referencial inercial}) \quad (2.35)$$

$$\vec{W} = W_1 \mathbf{e}_1 + W_2 \mathbf{e}_2 + W_3 \mathbf{e}_3, \quad (\text{velocidade do vento no referencial inercial}) \quad (2.36)$$

Define-se a *velocidade relativa ao corpo*

$$\vec{v} := \vec{V} - \vec{W} \Rightarrow \vec{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3, \quad v_k = V_k - W_k,$$

com módulo

$$v := \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

As identidades a seguir decorrem de álgebra vetorial elementar e/ou do uso de (2.29) e (2.30). Aqui são registradas apenas na forma final, de maneira semelhante à organização de CARLUCCI e JACOBSON (2014).

#### (i) Produto escalar $(\vec{v} \cdot \vec{i}')$ .

$$(\vec{v} \cdot \vec{i}') = v_1 i'_1 + v_2 i'_2 + v_3 i'_3.$$

#### (ii) Termo $(\vec{v} \cdot \vec{i}') \vec{v}$ .

$$(\vec{v} \cdot \vec{i}') \vec{v} = (v_1^2 i'_1 + v_1 v_2 i'_2 + v_1 v_3 i'_3) \mathbf{e}_1 + (v_2 v_1 i'_1 + v_2^2 i'_2 + v_2 v_3 i'_3) \mathbf{e}_2 + (v_3 v_1 i'_1 + v_3 v_2 i'_2 + v_3^2 i'_3) \mathbf{e}_3.$$

#### (iii) Produto escalar $(\vec{h} \cdot \vec{i}')$ .

$$(\vec{h} \cdot \vec{i}') = h_1 i'_1 + h_2 i'_2 + h_3 i'_3 = \frac{I_P}{I_T} \omega_1 \quad (\text{por (2.29)}).$$

#### (iv) Produto vetorial $\vec{i}' \times \vec{v}$ .

$$\vec{i}' \times \vec{v} = (i'_2 v_3 - i'_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (i'_3 v_1 - i'_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (i'_1 v_2 - i'_2 v_1) \mathbf{e}_3.$$

#### (v) Termo $(\vec{h} \cdot \vec{i}') (\vec{i}' \times \vec{v})$ .

$$(\vec{h} \cdot \vec{i}') (\vec{i}' \times \vec{v}) = \frac{I_P}{I_T} \omega_1 \left[ (i'_2 v_3 - i'_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (i'_3 v_1 - i'_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (i'_1 v_2 - i'_2 v_1) \mathbf{e}_3 \right].$$

**(vi) Termo  $(\vec{h} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}'$ .**

$$(\vec{h} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' = \frac{I_p}{I_T} \omega_1 (i'_1 \mathbf{e}_1 + i'_2 \mathbf{e}_2 + i'_3 \mathbf{e}_3).$$

**(vii) Cosseno do ângulo total de ataque  $\alpha_t$ .**

$$\cos \alpha_t = \frac{\vec{v} \cdot \mathbf{i}'}{v} = \frac{v_1 i'_1 + v_2 i'_2 + v_3 i'_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

*Observação.* Na terminologia da balística externa clássica, o “ângulo total de ataque”  $\alpha_t$  (também chamado de ângulo total de guinada) é a *magnitude* do vetor de desalinhamento entre o eixo de simetria do projétil e a sua velocidade relativa ao ar, combinando simultaneamente as componentes vertical ( $\alpha$ , vertical) e lateral ( $\beta$ , horizontal).

**(viii) Termo  $(\vec{v} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}'$ .**

$$(\vec{v} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' = (v_1 i'^2 + v_2 i'_1 i'_2 + v_3 i'_1 i'_3) \mathbf{e}_1 + (v_1 i'_1 i'_2 + v_2 i'^2 + v_3 i'_2 i'_3) \mathbf{e}_2 + (v_1 i'_1 i'_3 + v_2 i'_2 i'_3 + v_3 i'^2) \mathbf{e}_3.$$

## 2.2.4 As seis equações escalares

Munidos das relações auxiliares da Seção 2.2.3, efetuam-se as substituições adequadas em (2.31) e (2.32). A expansão algébrica completa pode ser consultada em CARLUCCI e JACOBSON (2014, cap. 8); aqui registram-se as expressões finais já organizadas nas direções da base inercial  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , com  $\vec{v} = \vec{V} - \vec{W}$  e  $v = \|\vec{v}\|$ . O resultado é um sistema de seis equações diferenciais ordinárias equivalentes às equações (8.275)–(8.280) do texto-base.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} = & -\frac{\rho v S C_D}{2m} v_1 + \frac{\rho S C_{L\alpha}}{2m} [v^2 i'_1 - v v_1 \cos \alpha_t] - \frac{\rho S d C_{Np\alpha} \omega_1}{2m} (v_3 i'_2 - v_2 i'_3) \\ & + \frac{\rho v S d (C_{Nq} + C_{N\dot{\alpha}})}{2m} (h_2 i'_3 - h_3 i'_2) + g_1 + \Lambda_1 \end{aligned}} \quad (2.37)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} = & -\frac{\rho v S C_D}{2m} v_2 + \frac{\rho S C_{L\alpha}}{2m} [v^2 i'_2 - v v_2 \cos \alpha_t] - \frac{\rho S d C_{Np\alpha} \omega_1}{2m} (v_1 i'_3 - v_3 i'_1) \\ & + \frac{\rho v S d (C_{Nq} + C_{N\dot{\alpha}})}{2m} (h_3 i'_1 - h_1 i'_3) + g_2 + \Lambda_2 \end{aligned}} \quad (2.38)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dV_3}{dt} = & -\frac{\rho v S C_D}{2m} v_3 + \frac{\rho S C_{L\alpha}}{2m} [v^2 i'_3 - v v_3 \cos \alpha_t] - \frac{\rho S d C_{Np\alpha} \omega_1}{2m} (v_2 i'_1 - v_1 i'_2) \\ & + \frac{\rho v S d (C_{Nq} + C_{N\dot{\alpha}})}{2m} (h_1 i'_2 - h_2 i'_1) + g_3 + \Lambda_3 \end{aligned}} \quad (2.39)$$

$$\boxed{\frac{dh_1}{dt} = \frac{\rho v S d^2 C_{lp}}{2I_T} \omega_1 i'_1 + \frac{\rho v^2 S d \delta_F C_{l\delta}}{2I_T} i'_1 + \frac{\rho v S d C_{M\alpha}}{2I_T} (v_2 i'_3 - v_3 i'_2) + \frac{\rho S d^2 C_{M_{pa}}}{2I_T} \omega_1 [v_1 - v i'_1 \cos \alpha_t] + \frac{\rho v S d^2 (C_{Mq} + C_{M\dot{\alpha}})}{2I_T} \left( h_1 - \left( \frac{I_p}{I_T} \omega_1 \right) i'_1 \right)} \quad (2.40)$$

$$\boxed{\frac{dh_2}{dt} = \frac{\rho v S d^2 C_{lp}}{2I_T} \omega_1 i'_2 + \frac{\rho v^2 S d \delta_F C_{l\delta}}{2I_T} i'_2 + \frac{\rho v S d C_{M\alpha}}{2I_T} (v_3 i'_1 - v_1 i'_3) + \frac{\rho S d^2 C_{M_{pa}}}{2I_T} \omega_1 [v_2 - v i'_2 \cos \alpha_t] + \frac{\rho v S d^2 (C_{Mq} + C_{M\dot{\alpha}})}{2I_T} \left( h_2 - \left( \frac{I_p}{I_T} \omega_1 \right) i'_2 \right)} \quad (2.41)$$

$$\boxed{\frac{dh_3}{dt} = \frac{\rho v S d^2 C_{lp}}{2I_T} \omega_1 i'_3 + \frac{\rho v^2 S d \delta_F C_{l\delta}}{2I_T} i'_3 + \frac{\rho v S d C_{M\alpha}}{2I_T} (v_1 i'_2 - v_2 i'_1) + \frac{\rho S d^2 C_{M_{pa}}}{2I_T} \omega_1 [v_3 - v i'_3 \cos \alpha_t] + \frac{\rho v S d^2 (C_{Mq} + C_{M\dot{\alpha}})}{2I_T} \left( h_3 - \left( \frac{I_p}{I_T} \omega_1 \right) i'_3 \right)} \quad (2.42)$$

## 2.2.5 Considerações gerais de modelagem

Para reconstruir a posição do centro de massa no espaço inercial, além das seis EDOs anteriores, integram-se as componentes da velocidade:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t V_1(\tau) d\tau, \quad (2.43)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t V_2(\tau) d\tau, \quad (2.44)$$

$$z(t) = z_0 + \int_0^t V_3(\tau) d\tau. \quad (2.45)$$

**Força de Coriolis.** A formulação 6-DOF admite a inclusão dos termos de Coriolis e de rotação terrestre (ver, por exemplo, CARLUCCI e JACOBSON (2014) e MCCOY (2012)). Neste trabalho, opta-se por  $\vec{F}_{\text{Cor}} = \vec{0}$ , o que equivale, em primeira aproximação, a operar em latitudes moderadas.

**Curvatura da Terra e variação da gravidade.** Efeitos de curvatura da Terra e variação de  $g$  com a altitude podem ser incorporados por correções geométricas e pela modelagem de  $g = g(y)$  (McCoy, 2012; CARLUCCI e JACOBSON, 2014). Em particular, reporta-se que, a partir de alcances da ordem de 1,8 km, a curvatura pode introduzir diferenças mensuráveis na trajetória. Para manter a complexidade compatível com o objetivo deste trabalho,

adotam-se as aproximações: (i) Terra plana no setor de interesse e (ii) gravidade constante  $\vec{g} = (0, -g, 0)^T$ . Essas hipóteses reduzem a acurácia em longos alcances e grandes altitudes, mas são adequadas para o nível deste trabalho.

## 2.2.6 Condições iniciais

Com as equações estabelecidas e as hipóteses gerais de modelagem definidas, especificam-se agora as condições iniciais necessárias à integração numérica do modelo. Reúnem-se apenas as quantidades que entram explicitamente no passo inicial do integrador.

### Notação vetorial.

$$\vec{r}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \vec{V}(0) = \begin{bmatrix} V_{1,0} \\ V_{2,0} \\ V_{3,0} \end{bmatrix}, \quad \vec{W}(0) = \begin{bmatrix} W_{1,0} \\ W_{2,0} \\ W_{3,0} \end{bmatrix}, \quad \vec{v}(0) = \vec{V}(0) - \vec{W}(0).$$

**Ângulos de pontaria** Seguindo o texto-base de balística externa (McCoy, 2012, cap. 9), denotamos por  $\phi_0$  e  $\theta_0$  os *ângulos de partida* da velocidade de boca no instante da saída de boca:  $\phi_0$  é o *ângulo vertical de partida* (*vertical angle of departure*), positivo para cima, e  $\theta_0$  é o *ângulo horizontal de partida* em relação ao plano 1–2 (*horizontal angle of departure relative to the 1–2 plane*), positivo para a direita quando se olha na direção do disparo. Esses dois ângulos determinam a direção da velocidade inicial do centro de massa por meio de (2.46).

Os parâmetros  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  são, por sua vez, os pequenos ângulos aerodinâmicos de arfagem (*pitch*) e guinada (*yaw*) iniciais do projétil em relação à direção de partida definida por  $(\phi_0, \theta_0)$ .

**Velocidade inicial.** A velocidade inicial  $\vec{V}(0)$  decorre diretamente da geometria de pontaria definida por  $(\theta_0, \phi_0)$ . Decompondo o versor de tiro em componentes cartesianas e multiplicando por  $V_0$ ,

$$\vec{V}(0) = V_0 \begin{bmatrix} \cos \phi_0 \cos \theta_0 \\ \sin \phi_0 \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

**Base do corpo na saída de boca.** Os desvios aerodinâmicos  $(\alpha_0, \beta_0)$  são somados aos ângulos de pontaria para definir a base solidária ao projétil no instante inicial. O eixo polar do corpo é dado por

$$\mathbf{i}'_0 = \begin{bmatrix} \cos(\phi_0 + \alpha_0) \cos(\theta_0 + \beta_0) \\ \sin(\phi_0 + \alpha_0) \cos(\theta_0 + \beta_0) \\ \sin(\theta_0 + \beta_0) \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Para completar a base ortonormal  $\{\mathbf{i}'_0, \mathbf{j}'_0, \mathbf{k}'_0\}$ , introduz-se um fator de normalização que garante  $\|\mathbf{j}'_0\| = \|\mathbf{k}'_0\| = 1$ . Define-se

$$Q := \sin^2(\theta_0 + \beta_0) + \cos^2(\theta_0 + \beta_0) \cos^2(\phi_0 + \alpha_0), \quad (2.48)$$

e obtém-se

$$\mathbf{j}'_0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \begin{bmatrix} -\sin(\phi_0 + \alpha_0) \cos(\phi_0 + \alpha_0) \cos^2(\theta_0 + \beta_0) \\ \left( \cos^2(\phi_0 + \alpha_0) \cos^2(\theta_0 + \beta_0) + \sin^2(\theta_0 + \beta_0) \right) \\ -\sin(\phi_0 + \alpha_0) \cos(\theta_0 + \beta_0) \sin(\theta_0 + \beta_0) \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

$$\mathbf{k}'_0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \begin{bmatrix} -\sin(\theta_0 + \beta_0) \\ 0 \\ \cos(\phi_0 + \alpha_0) \cos(\theta_0 + \beta_0) \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Seja

$$\vec{\omega}(0) = v_{i0} \mathbf{i}'_0 + v_{j0} \mathbf{j}'_0 + v_{k0} \mathbf{k}'_0$$

a velocidade angular inicial do projétil. Pela identidade cinemática (2.4),

$$\frac{d\mathbf{i}'_0}{dt} = \vec{\omega}(0) \times \mathbf{i}'_0 = v_{k0} \mathbf{j}'_0 - v_{j0} \mathbf{k}'_0. \quad (2.51)$$

Usando (2.49)–(2.50) com a normalização  $Q$  de (2.48) e projetando em  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , obtém-se:

$$\dot{i}'_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{Q}} \left[ v_{j0} \sin(\theta_0 + \beta_0) - v_{k0} \cos^2(\theta_0 + \beta_0) \sin(\phi_0 + \alpha_0) \cos(\phi_0 + \alpha_0) \right], \quad (2.52)$$

$$\dot{i}'_{2,0} = \frac{v_{k0}}{\sqrt{Q}} \left[ \cos^2(\phi_0 + \alpha_0) \cos^2(\theta_0 + \beta_0) + \sin^2(\theta_0 + \beta_0) \right], \quad (2.53)$$

$$\dot{i}'_{3,0} = \frac{1}{\sqrt{Q}} \left[ -v_{j0} \cos(\theta_0 + \beta_0) \cos(\phi_0 + \alpha_0) - v_{k0} \sin(\phi_0 + \alpha_0) \cos(\theta_0 + \beta_0) \sin(\theta_0 + \beta_0) \right]. \quad (2.54)$$

Por fim, seguindo o mesmo padrão de (2.25), escreve-se o vetor  $\vec{h}(0)$  em função dos componentes iniciais de  $\mathbf{i}'_0$  e de suas derivadas:

$$\vec{h}(0) = \begin{bmatrix} h_{1,0} \\ h_{2,0} \\ h_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_P}{I_T} \omega_{1,0} i'_{1,0} + i'_{2,0} \dot{i}'_{3,0} - i'_{3,0} \dot{i}'_{2,0} \\ \frac{I_P}{I_T} \omega_{1,0} i'_{2,0} + i'_{3,0} \dot{i}'_{1,0} - i'_{1,0} \dot{i}'_{3,0} \\ \frac{I_P}{I_T} \omega_{1,0} i'_{3,0} + i'_{1,0} \dot{i}'_{2,0} - i'_{2,0} \dot{i}'_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

**Observação (estimativa da rotação axial).** O valor inicial da rotação axial pode ser estimado por

$$\omega_{1,0} = \frac{2\pi V_0}{n d}, \quad (2.56)$$

em que  $V_0$  é a velocidade de saída,  $d$  é o diâmetro (calibre) do projétil e  $n$  é o número de calibres por volta.

## 2.3 Modelo estatístico e estimação via Monte Carlo

Para empregar a função de custo definida na introdução é necessário, em primeiro lugar, estimar as probabilidades de acerto associadas a cada configuração de tiro. A estratégia adotada é utilizar simulações de Monte Carlo para aproximar, numericamente, essas probabilidades (Ross, 2014; KROESE *et al.*, 2011).

Considere um conjunto de  $m$  configurações de disparo, indexadas por  $i = 1, \dots, m$  (por exemplo, combinações de elevação e distância ao alvo). Para cada configuração  $i$ , são realizadas  $K$  simulações independentes, nas quais os parâmetros iniciais de tiro (elevação e azimute) são perturbados aleatoriamente conforme o modelo de erro adotado. Em cada simulação registra-se uma variável indicadora

$$Y_{i,k} = \begin{cases} 1, & \text{se o disparo acerta o alvo na simulação } k, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.57)$$

Sob as hipóteses de que, para uma mesma configuração  $i$ , a probabilidade de acerto é constante e as simulações são independentes, tem-se

$$Y_{i,k} \sim \text{Bernoulli}(p_i), \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.58)$$

onde  $p_i$  denota a probabilidade *real* de acerto na configuração  $i$ . A soma de acertos nessa configuração é

$$S_i := \sum_{k=1}^K Y_{i,k}, \quad (2.59)$$

e, como a soma de Bernoulli pertence a família binomial, vale

$$S_i \sim \text{Binomial}(K, p_i). \quad (2.60)$$

O estimador natural para a probabilidade de acerto em  $i$  é a proporção amostral de acertos,

$$\hat{p}_i := \frac{S_i}{K} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K Y_{i,k}, \quad (2.61)$$

que é não enviesado e tem variância

$$\mathbb{E}[\hat{p}_i] = p_i, \quad \text{Var}(\hat{p}_i) = \frac{p_i(1-p_i)}{K} \quad (2.62)$$

(Ross, 2014). Para  $K$  suficientemente grande, a distribuição de  $\hat{p}_i$  pode ser aproximada por uma normal, em virtude do teorema central do limite e da aproximação normal da binomial. Assim,

$$\hat{p}_i \stackrel{\sim}{\sim} \mathcal{N}\left(p_i, \frac{p_i(1-p_i)}{K}\right). \quad (2.63)$$

Na prática, substitui-se  $p_i$  por  $\hat{p}_i$  na variância, o que leva ao intervalo de confiança aproximado de nível  $1 - \alpha$  para cada probabilidade de acerto individual:

$$\hat{p}_i \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{K}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.64)$$

em que  $z_{1-\alpha/2}$  é o quantil correspondente da distribuição normal padrão. Repetindo esse procedimento para todas as configurações  $i$ , obtém-se um conjunto de estimativas  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m$  com respectivos intervalos de confiança.

Em resumo, para cada configuração de disparo  $i$  obtém-se uma estimativa pontual  $\hat{p}_i$  da probabilidade de acerto, bem como um intervalo de confiança aproximado de nível  $1 - \alpha$  dado por (2.64). Essas quantidades são então utilizadas na função de custo definida na Introdução.

$$\hat{C} = C(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m),$$

no qual a probabilidade *real* de acerto em cada posição é substituída pela estimativa correspondente obtida via Monte Carlo.

# Capítulo 3

## Metodologia

### 3.1 Configuração física do problema

Nesta seção descreve-se a escolha do projétil naval, dos coeficientes aerodinâmicos e dos parâmetros iniciais utilizados no modelo 6-DOF apresentado no Capítulo 2, bem como a caracterização da plataforma de tiro e do alvo empregados nas simulações.

#### 3.1.1 Seleção do projétil e dos coeficientes aerodinâmicos

Para que a equação de movimento 6-DOF produza trajetórias fisicamente plausíveis, é necessário dispor de coeficientes aerodinâmicos e condições iniciais que sejam razoavelmente representativos de um projétil real. Com esse objetivo, foram realizadas buscas em relatórios técnicos de domínio público, priorizando munições navais para as quais estivessem disponíveis tabelas de coeficientes em função do número de Mach e do ângulo total de ataque.

Entre os documentos identificados, destaca-se o relatório técnico do Picatinny Arsenal que apresenta o programa de computador SPIN-73, desenvolvido para atualizar o código SPINNER para cálculo de coeficientes balísticos de projéteis estabilizados por rotação a partir da geometria do corpo (WHYTE, 1973). Esse relatório inclui tabelas de coeficientes aerodinâmicos para diversos projéteis, entre os quais dois projéteis navais de 5 polegadas (5"/38 e 5"/54). Devido à qualidade limitada da digitalização, apenas a tabela referente ao projétil 5"/38 apresentou-se suficientemente legível para digitalização numérica. Assim, adotou-se este projétil como base para o presente trabalho.

Os valores tabulados de coeficientes foram copiados manualmente para uma planilha, a partir das figuras do relatório, restringindo-se a duas casas decimais, conforme apresentado na Tabela 3.1.

O conjunto de dados obtido para o projétil 5"/38 inclui coeficientes de força e de momento no sistema de eixos solidário ao corpo, em função de Mach e do ângulo total de ataque. As tabelas do SPIN-73 para o projétil 5"/38 fornecem:

- coeficientes de força axial  $C_x$  e normal  $C_{N\alpha}$ , bem como os termos associados à força

de Magnus;

- coeficientes de momento de arfagem, de amortecimento em arfagem, de amortecimento de rotação e de Magnus.

Não há, por construção, coeficiente de momento devido às aletas, uma vez que o projétil considerado é um corpo de revolução sem aletas, neste caso, o momento de rolagem devido às aletas é nulo quando o ângulo é zero (McCoy, 2012). Além disso, os coeficientes de força associados ao amortecimento em arfagem (“pitch damping force”) não se encontram explicitados de forma isolada na tabela. Em diversos estudos de trajetória 6-DOF orientados à análise de dispersão global, o foco recai na modelagem dos momentos de arfagem e do amortecimento de rotação, sendo menos comum a inclusão explícita da componente de força de amortecimento em arfagem (McCoy, 2012). Seguindo essa prática simplificada, optou-se por desprezar essa contribuição de força, mantendo o momento de amortecimento em arfagem para garantir a estabilidade dinâmica.

Outro aspecto relevante é que os coeficientes tabulados em WHYTE (1973) são definidos no sistema de eixos do corpo, enquanto o modelo 6-DOF desenvolvido na Seção 2.2.4 é formulado em termos de coeficientes de arrasto  $C_D$  e de força *lift*  $C_{L\alpha}$  no sistema de eixos ligado à velocidade relativa do projétil. Para compatibilizar essas definições, utilizaram-se as transformações geométricas padrão entre eixos do corpo e eixos da trajetória, que, em termos do ângulo total de ataque  $\alpha_t$ , podem ser escritas como

$$C_D = C_{N\alpha} \sin^2 \alpha_t - C_X \cos \alpha_t, \quad C_{L\alpha} = C_{N\alpha} \cos \alpha_t + C_X. \quad (3.1)$$

Essas expressões são consistentes com as relações apresentadas em McCoy (2012), e foram implementadas diretamente no código de simulação.

Por fim, algumas colunas da tabela do SPIN-73 apresentam coeficientes de forma decomposta em componentes senoidais do ângulo total de ataque (por exemplo, termos proporcionais a  $\sin \alpha_t$ ,  $\sin^2 \alpha_t$  e  $\sin^3 \alpha_t$ ). No programa desenvolvido, o coeficiente efetivo utilizado em cada passo de tempo é reconstruído a partir da combinação linear adequada dessas componentes, conforme a parametrização indicada no próprio relatório (WHYTE, 1973) e em McCoy (2012).

### 3.1.2 Parâmetros iniciais, condições iniciais e custo da munição

No relatório que contém as tabelas de coeficientes aerodinâmicos do projétil 5”/38, não estão visíveis a massa nem os momentos de inércia do projétil. Para suprir essa lacuna, recorreu-se ao estudo de HASELTINE (1969), que analisa o movimento de guinada do projétil naval de 5 polegadas Mk 41 (5”/54) por meio de ondas de *yaw*. Entre os dados experimentais apresentados, encontram-se massa e momentos de inércia de projéteis de 5 polegadas, com valores de ordem de

$$69,10 \text{ lb}, \quad 240 \text{ lb} \cdot \text{in}^2 \quad (\text{eixo axial}), \quad 2619 \text{ lb} \cdot \text{in}^2 \quad (\text{eixos transversos}).$$

Esses valores foram convertidos para o Sistema Internacional durante a execução do código.

## 3.1 | CONFIGURAÇÃO FÍSICA DO PROBLEMA

Mach	CX0	CX2	CNA	CMA	CPN	CYP	CNPA	CNPA3	CNPA5	CPF1	CPF5	CNPA-5	CMQ	CLP
0.01	0.17	2.64	1.80	3.40	0.77	-0.77	-0.39	89.34	-855.95	2.21	3.23	0.42	-9.42	-0.03
0.60	0.17	2.64	1.80	3.51	0.76	-0.77	-0.39	89.34	-855.95	2.21	3.23	0.42	-9.42	-0.03
0.80	0.17	3.17	1.82	3.69	0.69	-0.77	-0.24	81.18	-774.34	2.40	3.35	0.49	-9.42	-0.03
0.90	0.19	3.70	1.87	3.86	0.63	-0.86	0.03	59.25	-555.01	2.75	3.37	0.56	-11.75	-0.02
0.95	0.24	4.10	2.04	4.14	0.68	-1.09	0.28	46.50	-427.51	2.97	3.36	0.71	-14.26	-0.02
1.00	0.37	4.63	2.14	3.93	0.85	-1.00	0.38	31.71	-279.63	3.09	3.38	0.67	-16.32	-0.02
1.05	0.45	5.15	2.22	3.74	1.03	-0.91	0.45	18.96	157.13	3.21	3.40	0.63	-17.98	-0.02
1.10	0.45	5.71	2.27	3.71	1.07	-0.86	0.48	13.35	-96.03	3.27	3.41	0.61	-19.36	-0.02
1.20	0.45	6.28	2.35	3.65	1.16	-0.77	0.48	9.38	-56.25	3.33	3.45	0.56	-20.60	-0.02
1.35	0.44	5.69	2.47	3.49	1.30	-0.77	0.49	7.74	-39.93	3.35	3.45	0.57	-20.12	-0.02
1.50	0.42	5.09	2.61	3.57	1.34	-0.77	0.50	6.93	-31.77	3.36	3.45	0.57	-18.99	-0.02
1.75	0.40	4.52	2.71	3.41	1.45	-0.77	0.51	6.11	-23.61	3.37	3.45	0.57	-18.99	-0.02
2.00	0.37	3.94	2.83	3.31	1.53	-0.77	0.52	5.30	-15.45	3.38	3.45	0.57	-18.99	-0.02
2.50	0.33	3.22	2.95	3.21	1.62	-0.77	0.52	4.48	-7.29	3.39	3.45	0.57	-18.99	-0.02
3.00	0.29	2.67	2.93	3.07	1.66	-0.77	0.53	3.66	0.87	3.40	3.45	0.57	-18.99	-0.02
4.00	0.25	2.19	2.83	3.06	1.63	-0.77	0.53	3.66	0.87	3.40	3.45	0.57	-18.99	-0.02
5.00	0.23	1.71	2.73	3.04	1.60	-0.77	0.53	3.66	0.87	3.40	3.45	0.57	-18.99	-0.02

**Tabela 3.1:** Coeficientes aerodinâmicos adimensionais do projétil naval 5"/38, extraídos de [WHYTE \(1973\)](#), em função do número de Mach.

Admitiu-se, como hipótese de trabalho, que essas grandezas são representativas da ordem de grandeza dos parâmetros iniciais de um projétil naval 5"/38.

Para a construção da função de custo apresentada na equação 1.1, é necessário especificar o custo por disparo. Uma estimativa para o custo unitário de munição 5"/38 foi obtida a partir do relatório do U.S. General Accounting Office sobre orçamentos de munição do Departamento de Defesa, que indica valores de ordem de 860 dólares por projétil (em dólares da época) ([GAO, 1990](#)). Esse valor foi atualizado para dólares atuais utilizando a calculadora de inflação baseada em dados do U.S. Bureau of Labor Statistics ([US INFLATION CALCULATOR, 2025](#)), e o resultado foi adotado como custo de referência  $c$  por disparo no modelo de custo, cerca de 2 mil dólares atuais.

No que se refere à velocidade de boca a literatura sobre o canhão 5"/38 indica velocidades iniciais típicas em torno de  $V_0 \approx 792$  m/s ([DiGiULIAN, 2012](#)), ao passo que para o canhão 5"/54 são citados valores próximos de  $V_0 \approx 807$  m/s ([WIKIPEDIA CONTRIBUTORS, 2025](#)). Neste trabalho, como a massa e os momentos de inércia adotados provêm de um projétil de 5"/54, enquanto os coeficientes aerodinâmicos foram extraídos de um projétil de 5"/38, optou-se por fixar a velocidade de boca em  $V_0 = 807$  m/s por uma escolha pessoal.

Além da componente axial de rotação, o modelo 6-DOF requer valores iniciais para as componentes transversais da velocidade angular, associadas à guinada e à arfagem iniciais. Conforme discutido por [McCoy \(2012\)](#), em aplicações voltadas à reprodução detalhada de dados experimentais esses valores são usualmente escolhidos de modo que os ângulos de guinada (*yaw*) e arfagem (*pitch*) assumam valores compatíveis com medições no primeiro ponto de máxima guinada ao longo da trajetória. Neste trabalho, adotou-se a escolha simplificada 5 rad/s para ambos, apenas para garantir uma excitação moderada dos modos de guinada e arfagem. Reconhece-se que essa escolha não foi calibrada de forma sistemática e constitui mais uma escolha pessoal do que um ajuste fino aos regimes reais de disparo.

O ambiente externo foi modelado de forma simplificada. Adota-se uma Terra plana local, sem efeitos de rotação do planeta (ausência de termos de Coriolis) e sem movimento

relativo do ar em relação à plataforma de tiro (vento nulo).

A densidade do ar é considerada constante e igual ao valor típico ao nível do mar em atmosfera padrão,

$$\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3,$$

e a aceleração da gravidade é tomada como

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

Esses valores são utilizados tanto na formulação das forças aerodinâmicas quanto no termo de peso nas equações de movimento.

Para o cálculo do número de Mach, assume-se ainda uma velocidade do som constante,

$$a = 340 \text{ m/s},$$

de modo que o número de Mach é dado simplesmente por  $M = \|\vec{v}_{\text{rel}}\|/a$ , em que  $\vec{v}_{\text{rel}}$  é a velocidade do projétil em relação ao ar. Não se considera, portanto, a variação da velocidade do som com a temperatura ou com a altitude. Essa hipótese reduz o custo computacional e é suficiente para o nível de detalhe requerido neste Trabalho de Formatura

### 3.1.3 Plataforma de tiro e alvo

Para contextualizar os resultados do modelo 6-DOF em um cenário operacional concreto, foi escolhida como plataforma de referência uma escolta oceânica equipada com canhão principal de 5 polegadas/38. Um exemplo representativo é a classe *Garcia*, construída para a U.S. Navy na década de 1960 e equipada com dois canhões Mk 30 de 5"/38 (**SUPERVISOR OF SHIPBUILDING (SUPSHIP), SEATTLE, WASHINGTON, 1965**). Quatro unidades dessa classe foram posteriormente transferidas à Marinha do Brasil, onde serviram como contratorpedeiros da classe *Pará* até a baixa do último navio em 2008 (**PODER NAVAL, 2023**).

Análises publicadas na revista *Naval History* indicam custos de construção da ordem de 28 milhões de dólares por navio para as classes *Garcia* e *Brooke* em meados da década de 1960 (**U.S. NAVAL INSTITUTE, 1989**). Atualizando esse valor para preços atuais por meio da mesma calculadora de inflação já citada (**US INFLATION CALCULATOR, 2025**), obtém-se um custo equivalente de aproximadamente 289 milhões de dólares. Esse valor é utilizado como aproximação do custo da plataforma de superfície no modelo de custo.

Como alvo, adotou-se o drone naval ucraniano *Sea Baby*, um veículo de superfície não tripulado (USV) empregado na Guerra Russo-Ucraniana. De acordo com compilações técnicas sobre drones marítimos (**SUTTON, 2024**), o *Sea Baby* apresenta comprimento da ordem de 6 m e boca próxima de 2 m, resultando em uma área projetada típica de aproximadamente 12 m<sup>2</sup>. O mesmo conjunto de fontes indica capacidade de carga explosiva de cerca de 900 kg e uso operacional em ataques de longo alcance contra alvos navais e de infraestrutura.

Quanto ao custo, reportagens sobre campanhas de financiamento coletivo para a produção de drones *Sea Baby* indicam custos unitários da ordem de 8,5 milhões de hryvnias

por unidade ([THE KYIV INDEPENDENT, 2024](#)), o que corresponde a aproximadamente 220 mil dólares na taxa de câmbio vigente à época. Esse valor foi adotado como estimativa do custo unitário do alvo no modelo de custo desenvolvido neste trabalho.

Esses parâmetros fornecem a base para a modelagem do problema de decisão de tiro. A arma representativa é um canhão 5"/38 instalado em uma escolta de custo comparável ao de uma fragata classe *Garcia*, enquanto o alvo é um USV explosivo do tipo *Sea Baby*.

## Posição inicial da arma na plataforma

No sistema de coordenadas inercial adotado neste trabalho, em que o eixo  $y$  é vertical (positivo para cima) e o plano  $x-z$  é horizontal, a posição do centro geométrico da boca do canhão no instante do disparo foi fixada em

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 10, 0) \text{ m.}$$

Esse valor de  $y_0 = 10$  m foi escolhido como uma aproximação razoável para a altura de instalação do canhão principal em uma escolta de porte semelhante à classe *Garcia*. Plantas gerais dessa classe indicam que o canhão da proa se encontra a uma altura da ordem de 7 m acima da linha d'água ([SUPERVISOR OF SHIPBUILDING \(SUPSHIP\), SEATTLE, WASHINGTON, 1965](#)). O valor de 10 m utilizado nas simulações representa, portanto, uma idealização ligeiramente mais elevada, compatível com variações de projeto entre diferentes navios e com a simplificação de considerar o casco rigidamente apoiado em mar calmo.

O alvo (*Sea Baby*) é modelado com centro geométrico situado na superfície do mar, isto é, com coordenada vertical inicial  $y = 0$ . Dessa forma, a condição inicial de posição do projétil no modelo 6-DOF corresponde a um disparo realizado a partir de uma plataforma fixa localizada 10 m acima da superfície livre.

Nas seções seguintes, descrevem-se em detalhe o esquema de simulação de Monte Carlo, a estimativa das probabilidades de acerto e a construção da função de custo associada às diferentes políticas de engajamento.

## 3.2 Implementação computacional da simulação

As simulações foram implementadas em Python 3, utilizando bibliotecas amplamente empregadas em computação científica, tais como `numpy` e `math` para operações numéricas de baixo nível, `scipy` para integração de equações diferenciais e interpolação, `pandas` para leitura e manipulação de dados tabulares, `matplotlib` para geração de figuras e `dataclasses` para a definição estruturada de classes de parâmetros.

O código-fonte foi desenvolvido com apoio de ferramentas de inteligência artificial generativa (em particular, assistentes de programação como ChatGPT e Claude), empregadas principalmente para refatorar o código em um estilo orientado a objetos, plotagem gráfica e para padronizar a organização dos módulos. A lógica física e matemática do modelo, bem como todas as escolhas de parâmetros, foram definidas pelo autor e conferidas manualmente.

De forma geral, a implementação pode ser decomposta em três componentes principais: (i) preparação dos coeficientes aerodinâmicos e dos parâmetros físicos, (ii) núcleo de integração numérica das equações de movimento e (iii) camada de experimentos numéricos responsável pelas simulações de Monte Carlo discutidas na Seção 2.3.

**Observação: Convenção de ângulos de tiro.** Na interface do código, os dados de entrada do disparo são especificados na forma usual da artilharia: *ângulo de elevação*  $E$  do cano em relação ao plano horizontal e *ângulo de azimute*  $A$  em relação ao plano de centro do navio. Já a formulação adotada no modelo 6-DOF segue a convenção de McCoy (2012), que utiliza um par de ângulos iniciais  $(\theta_0, \phi_0)$  associados ao sistema de eixos balístico. Para compatibilizar essas duas descrições, o código realiza uma transformação explícita de  $(E, A)$  para  $(\theta_0, \phi_0)$ , dada por

$$\theta_0 = \arcsin(\cos E \sin A), \quad \phi_0 = \arcsin\left(\frac{\sin E}{\cos \theta_0}\right),$$

com  $E$  e  $A$  expressos em radianos. Essas expressões são implementadas na rotina `calculate_firing_angles`, garantindo que o usuário possa trabalhar com os ângulos de elevação e azimute mais intuitivos, enquanto o integrador 6-DOF recebe os ângulos  $\theta_0$  e  $\phi_0$  na convenção de McCoy (2012).

### 3.2.1 Preparação dos coeficientes e parâmetros físicos

O código é estruturado em torno de classes que representam os principais elementos físicos do problema, como munição, arma e plataforma (navio), cujos atributos são inicializados a partir dos parâmetros discutidos na Seção 3.1. Os coeficientes aerodinâmicos tabulados do projétil 5"/38, descritos na Tabela 3.1, são lidos a partir de um arquivo no formato CSV e organizados em malhas bidimensionais em função do número de Mach e do ângulo total de ataque.

Para cada grandeza aerodinâmica relevante (arrasto, força normal e momentos), constrói-se um interpolador suave utilizando rotinas de spline cúbica da biblioteca `scipy`, de modo a permitir a avaliação eficiente dos coeficientes em valores intermediários de Mach e ângulo total de ataque. Quando a tabela original fornece coeficientes de força no sistema de eixos do corpo, estes são convertidos em coeficientes de arrasto  $C_D$  e de força normal  $C_{L\alpha}$  por meio das transformações geométricas apresentadas na equação (3.1) e discutidas em McCoy (2012).

Os parâmetros originalmente fornecidos em unidades do sistema imperial (massa, momentos de inércia, velocidade de boca, entre outros) são convertidos para o Sistema Internacional na etapa de inicialização dos objetos de munição e arma, garantindo consistência dimensional em todas as equações. Como o ângulo total de ataque relevante para os engajamentos simulados permanece pequeno, foram pré-tabelados os coeficientes aerodinâmicos em uma malha de ângulo total de ataque limitada a  $\alpha_t \leq 10^\circ$ . Esse pré-processamento reduz de maneira significativa o custo computacional da interpolação durante a integração, sem introduzir erro relevante para os cenários de tiro considerados.

### 3.2.2 Núcleo de integração numérica

A segunda parte do código corresponde ao núcleo de simulação 6-DOF. Dadas as condições iniciais de disparo, velocidade de boca, orientação inicial do cano (elevação e azimute), taxa inicial de rotação em torno do eixo de simetria e posição inicial em relação ao nível do mar, são construídas as variáveis de estado do modelo conforme a formulação apresentada por [McCoy \(2012\)](#).

Em cada passo de tempo, o código calcula o número de Mach e o ângulo total de ataque a partir da velocidade relativa do projétil em relação ao ar. Esses valores são utilizados para consultar os interpoladores construídos na etapa anterior, obtendo-se os coeficientes aerodinâmicos instantâneos. A seguir, são computadas as forças e momentos aerodinâmicos correspondentes, que entram no sistema de equações diferenciais ordinárias do movimento translacional e rotacional, além das equações da Seção 2.2.4, o sistema integrado pela rotina também possui as três equações cinemáticas para a posição do centro de massa, dadas por (2.43)–(2.45) e a equação vetorial para a evolução do versor  $\vec{i}$  do eixo do projétil, dada por (2.30).

O sistema é integrado por meio da rotina `solve_ivp` da `scipy`, utilizando o método DOP853, um esquema de Runge–Kutta explícito de oitava ordem com passo adaptativo. Foram especificadas tolerâncias relativa e absoluta de ordem  $10^{-7}$ , de modo a garantir a precisão das trajetórias sem tornar o tempo de simulação proibitivo. O integrador é executado até que o projétil atinja a superfície do mar (quando a coordenada vertical do centro de massa se anula) ou até que se atinja um tempo máximo de voo predefinido, o que impede integrações excessivamente longas em casos de trajetórias anômalas.

### 3.2.3 Camada de experimentos numéricos

Com o núcleo de simulação 6-DOF implementado, os experimentos numéricos consistem em rotinas adicionais que utilizam o resolvedor como uma *caixa-preta*, sem alterar sua estrutura interna. Essa camada de experimentos numéricos pode ser organizada em: (i) uma varredura determinística do espaço de disparo (elevação e azimute), (ii) a seleção de pontos de engajamento representativos em alcance e (iii) as simulações de Monte Carlo para estimação das probabilidades de acerto, análise estatística e custo.

O primeiro passo é uma varredura em grade regular do espaço de parâmetros de tiro. Foram considerados ângulos de elevação variando de  $45,0^\circ$  até  $-15,0^\circ$ , com passo de  $0,1^\circ$ , e ângulos de azimute variando de  $-1,65^\circ$  até  $0,0^\circ$ , com passo de  $0,05^\circ$ . Para cada par (elevação, azimute), o modelo 6-DOF é integrado uma vez, registrando-se o ponto de impacto em relação ao alvo. A partir desse conjunto de simulações, para cada elevação foram selecionados os valores de azimute que minimizam o desvio lateral do ponto de impacto em relação ao eixo de simetria do alvo, de forma análoga a uma busca de mínimos em grade. Os resultados dessa etapa foram armazenados em uma tabela para posterior filtragem.

No segundo passo, essa tabela é filtrada de modo a produzir um conjunto de pontos de engajamento distribuídos aproximadamente a cada 100 m em alcance, iniciando-se da maior distância de impacto e prosseguindo até distâncias menores. Adotou-se como limite prático uma elevação mínima de  $-1,5^\circ$ , a partir da qual a geometria do tiro deixa de ser representativa do cenário de interesse. Esse espaçamento em alcance está alinhado, em

ordem de grandeza, com a combinação entre a velocidade do alvo e a cadência de tiro da arma: o drone naval *Sea Baby* apresenta velocidade máxima próxima de 90 km/h, isto é, cerca de 1,5 km/min (SUTTON, 2024), enquanto o canhão 5"/38 possui cadência típica de 12–15 disparos por minuto (DIGIULIAN, 2012). Assim, intervalos de aproximadamente 100 m em alcance correspondem, de maneira grosseira, às distâncias percorridas pelo alvo entre disparos sucessivos em um cenário de engajamento contínuo.

Definido o conjunto de pares (distância, configuração de tiro) a serem analisados, procede-se à etapa de simulação estocástica. Para cada ponto selecionado, são realizadas  $K = 1000$  réplicas de Monte Carlo, nas quais se supõe que as únicas fontes de aleatoriedade são os erros de apontamento em elevação e em azimute. Em cada réplica, partindo dos ângulos nominais  $E_0$  (elevação) e  $A_0$  (azimute), são gerados ângulos efetivos segundo

$$E = E_0 + \varepsilon_\theta, \quad A = A_0 + \varepsilon_\phi,$$

em que  $\varepsilon_\theta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\theta^2)$  e  $\varepsilon_\phi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\phi^2)$  são variáveis aleatórias gaussianas independentes, com desvios-padrão  $\sigma_\theta = 0,1^\circ$  e  $\sigma_\phi = 0,05^\circ$ . Na ausência de dados específicos de dispersão angular para o canhão 5"/38 em condições equivalentes, esses valores foram adotados como aproximações de ordem de grandeza plausível, com o objetivo de representar uma variabilidade moderada no apontamento do sistema de tiro. Definido o conjunto de pares (distância, configuração de tiro) a serem analisados, procede-se à etapa de simulação estocástica.

O valor  $K = 1000$  foi escolhido de modo a controlar a incerteza amostral na estimação da probabilidade de acerto  $p_i$ . Para cada distância, o estimador  $\hat{p}_i$  é simplesmente a média de  $K$  variáveis de Bernoulli, de modo que

$$\text{Var}(\hat{p}_i) = \frac{p_i(1 - p_i)}{K} \leq \frac{0,25}{K},$$

uma vez que a variância de uma Bernoulli é maximizada em  $p_i = 0,5$ . Com  $K = 1000$ , obtém-se  $\text{Var}(\hat{p}_i) \leq 0,00025$  e, portanto, um desvio-padrão máximo de aproximadamente 0,016. Invocando a aproximação normal para proporções amostrais (teorema central do limite) (ROSS, 2014; KROESE *et al.*, 2011), um intervalo de confiança aproximado de 95 % para  $p_i$  tem largura da ordem de

$$\hat{p}_i \pm 1,96 \times 0,016 \approx \hat{p}_i \pm 0,03,$$

isto é, cerca de 3 pontos percentuais em pior caso. Assim,  $K = 1000$  representa um compromisso entre custo computacional e precisão estatística aceitável para as estimativas de probabilidade de acerto.

Para cada réplica, o núcleo 6-DOF é integrado até o impacto, e o resultado é classificado como acerto ou erro em função da posição relativa entre o ponto de impacto e a área efetiva do alvo. Para cada distância da grade obtém-se, assim, uma estimativa empírica da probabilidade de acerto  $\hat{p}_i$ , dada pela frequência relativa de acertos entre as  $K$  simulações correspondentes. Esses valores alimentam, nas seções seguintes, tanto a função de custo de neutralização quanto os procedimentos de inferência estatística do custo.

# Capítulo 4

## Resultados numéricos e discussão

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados numéricos obtidos com o simulador 6-DOF descrito no Capítulo 3. Variando-se apenas os ângulos efetivos de elevação e azimute ( $E, A$ ) do disparo.

A organização segue uma progressão do simples para o complexo. Inicialmente, na Seção 4.1, é analisado um disparo determinístico de referência, sem ruído nas condições iniciais, com o objetivo de verificar se o modelo implementado reproduz ordens de grandeza compatíveis com dados de referência da literatura.

### 4.1 Disparo determinístico de referência

Como primeira verificação de sanidade do simulador, considera-se um disparo de teste em que não são impostas perturbações estocásticas aos ângulos iniciais de tiro, isto é,  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = 0$ . Os valores nominais de elevação e azimute são tomados como

$$E_0 = 43,3^\circ, \quad A_0 = 0^\circ,$$

de modo que o projétil seja disparado em um plano vertical contendo a linha de visada.

Para esse ângulo de elevação, tabelas de tiro disponíveis para o canhão 5 in/38 indicam um alcance máximo da ordem de 16,6 km, com tempo de voo de aproximadamente 64,4 s e altitude máxima em torno de 5,4 km (DiGIULIAN, 2012). Vale ressaltar que as condições iniciais utilizadas nessas tabelas podem diferir moderadamente das adotadas neste trabalho (por exemplo, na velocidade de boca e em detalhes do modelo aerodinâmico). Ainda assim, tais valores servem como referência para uma comparação de ordem de grandeza.

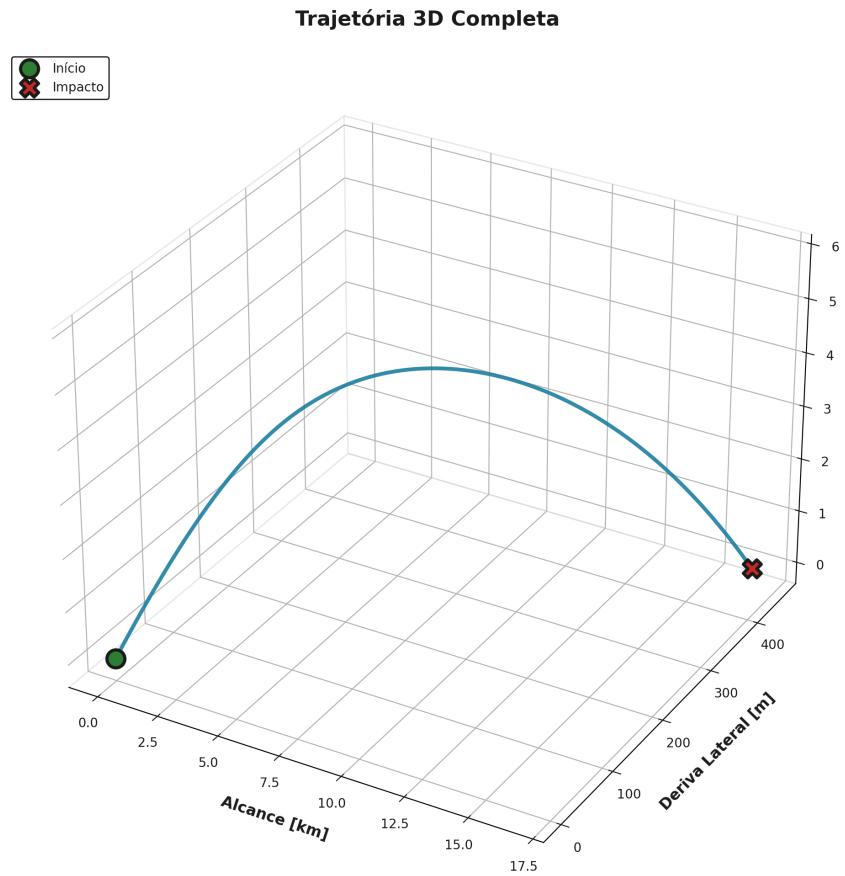
Na simulação numérica correspondente, o disparo com  $E_0 = 43,3^\circ$  e  $A_0 = 0^\circ$  produz os seguintes resultados:

$$R \approx 16,69 \text{ km}, \quad h_{\max} \approx 5,75 \text{ km}, \quad T \approx 66,05 \text{ s},$$

onde  $R$  denota o alcance horizontal até o impacto,  $h_{\max}$  a altitude máxima atingida pelo projétil e  $T$  o tempo total de voo. Em relação aos valores de referência, as diferenças

relativas são da ordem de 0,3% em alcance, 6,3% em altitude máxima e 2,6% em tempo de voo, o que é compatível com as incertezas esperadas decorrentes das diferenças de parametrização entre os modelos.

A Figura 4.1 mostra a trajetória tridimensional completa desse disparo determinístico, com destaque para a posição inicial na boca do canhão e para o ponto de impacto ao nível do mar. Observa-se o comportamento balístico esperado: o projétil é acelerado gravitacionalmente ao longo do voo, descrevendo um arco cuja altura máxima e alcance são compatíveis com as ordens de grandeza discutidas acima. Repare também na deriva lateral por conta da rotação do projétil.

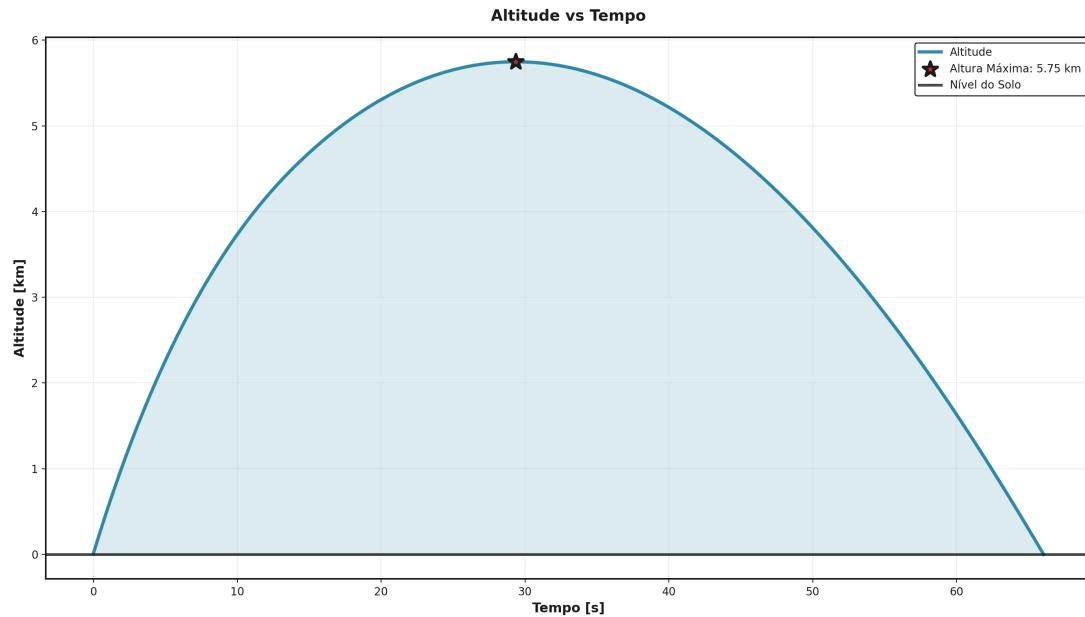


**Figura 4.1:** Trajetória tridimensional completa do disparo de referência, com elevação nominal  $E_0 = 43,3^\circ$  e azimute  $A_0 = 0^\circ$ , sem ruído nas condições iniciais. O marcador verde indica a posição de saída na boca do canhão e o marcador vermelho indica o ponto de impacto ao nível do mar.

#### 4.1.1 Evolução temporal da altitude e do ângulo total de ataque

Além dos valores agregados de alcance, altitude máxima e tempo de voo, é instrutivo analisar a evolução temporal de grandezas cinemáticas e aerodinâmicas ao longo do disparo de referência. A Figura 4.2 apresenta a altitude do projétil em função do tempo, enquanto a Figura 4.3 mostra a variação do ângulo total de ataque  $\alpha(t)$  ao longo da mesma trajetória.

Na Figura 4.2 observa-se que a altitude cresce monotonamente a partir da saída na boca



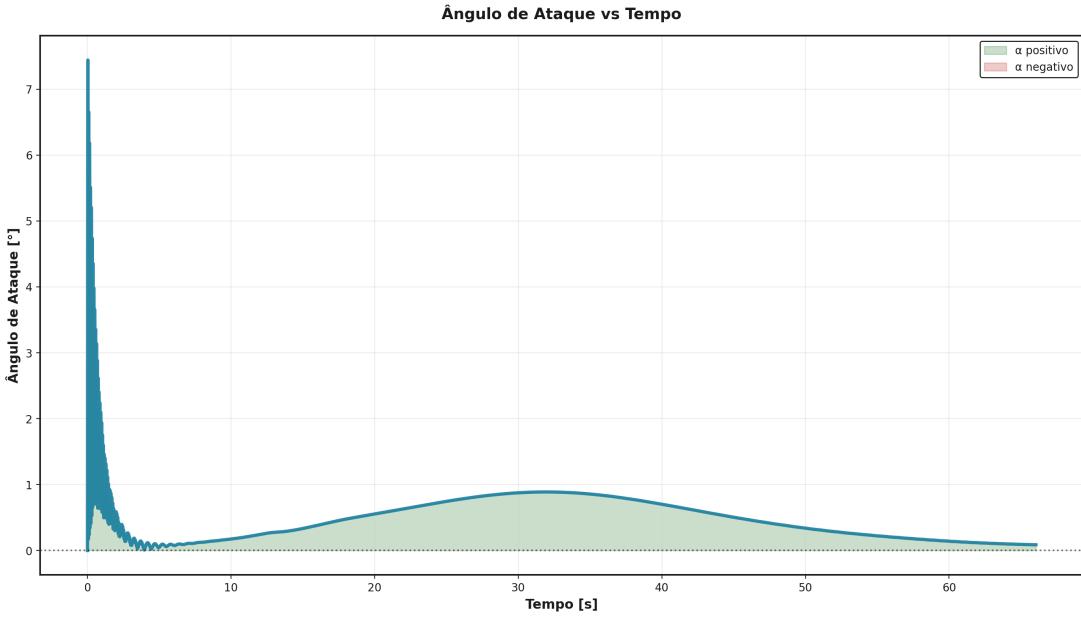
**Figura 4.2:** Altitude do projétil em função do tempo para o disparo de referência com  $E_0 = 43,3^\circ$  e  $A_0 = 0^\circ$ . O marcador destaca a altitude máxima alcançada,  $h_{\max} \approx 5,75$  km, atingida aproximadamente na metade do tempo de voo.

do canhão até atingir um máximo próximo da metade do tempo total de voo, decaindo em seguida até retornar ao nível do mar no instante de impacto. A forma da curva é compatível com o comportamento balístico esperado: pode-se notar que, a componente vertical do movimento é dominada pela aceleração gravitacional, com pequenas assimetrias introduzidas pelas forças aerodinâmicas de arrasto e sustentação.

O comportamento do ângulo total de ataque mostrado na Figura 4.3 apresenta algumas características relevantes. Imediatamente após o disparo, há um momento de curta duração, em que  $\alpha_t$  atinge valores de até cerca de  $7^\circ$ . Esse pico inicial está associado à acomodação entre a orientação inicial do projétil e a direção efetiva da velocidade logo após a saída do tubo. Em seguida, o ângulo total de ataque decai rapidamente para valores inferiores a  $0,5^\circ$ , refletindo a ação estabilizadora do spin e dos momentos aerodinâmicos de amortecimento.

Ao longo da maior parte do voo,  $\alpha_t(t)$  permanece pequeno, sempre da ordem de poucos graus. Observa-se um máximo suave aproximadamente na metade do tempo de voo, quando a trajetória passa gradualmente da fase ascendente para a fase descendente. Esse leve aumento está relacionado à curvatura da trajetória: enquanto o vetor velocidade sofre uma rotação para baixo sob a ação da gravidade, o eixo de simetria do projétil, não acompanha no mesmo ritmo, resultando em um pequeno descolamento entre orientação e velocidade. Na fase final do voo, os momentos aerodinâmicos tendem a alinhar novamente o projétil com a direção de avanço, fazendo com que o ângulo total de ataque retorne a valores próximos de zero.

Em conjunto, as Figuras 4.2 e 4.3 indicam que a solução numérica obtida para o disparo determinístico de referência apresenta evolução temporal coerente com o comportamento físico esperado, reforçando a confiança no modelo implementado para as análises estatísticas que serão discutidas nas seções seguintes.



**Figura 4.3:** Ângulo total de ataque  $\alpha_t(t)$  em função do tempo para o disparo de referência. Observa-se um regime transitório logo após a saída da boca, seguido por valores de pequeno módulo ao longo da maior parte da trajetória.

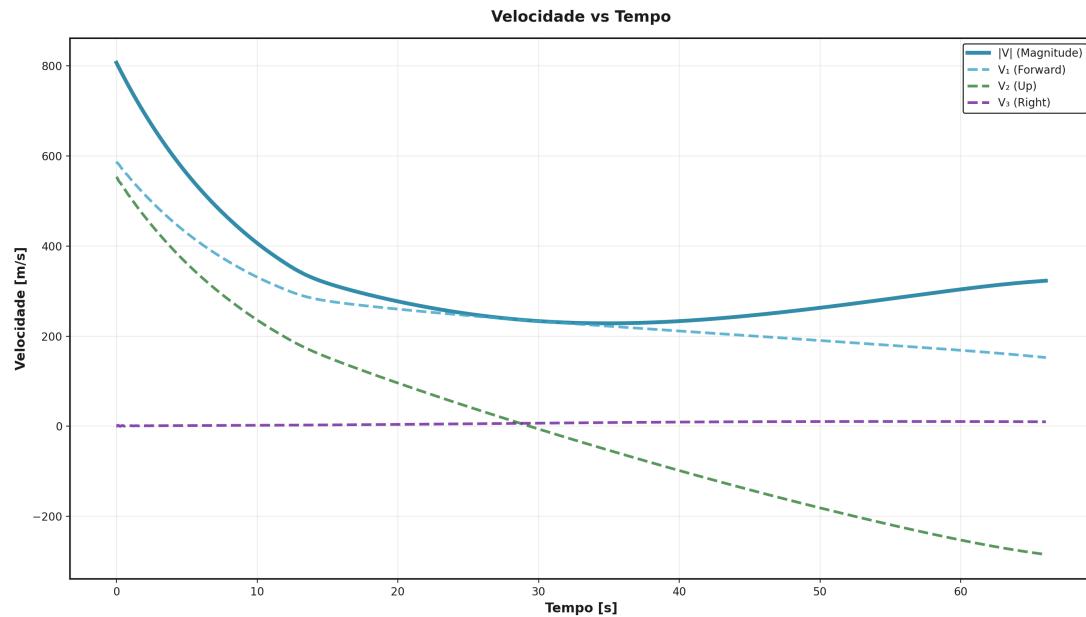
#### 4.1.2 Evolução temporal das velocidades e do eixo de simetria

Ainda no disparo determinístico de referência, é instrutivo analisar a evolução temporal das componentes de velocidade e da orientação do eixo de simetria do projétil. A Figura 4.4 apresenta o módulo da velocidade  $\|\vec{V}\|$  e suas componentes em uma base inercial ( $V_1, V_2, V_3$ ), enquanto a Figura 4.5 mostra as componentes do vetor do eixo polar  $\vec{i}' = (i'_1, i'_2, i'_3)$ .

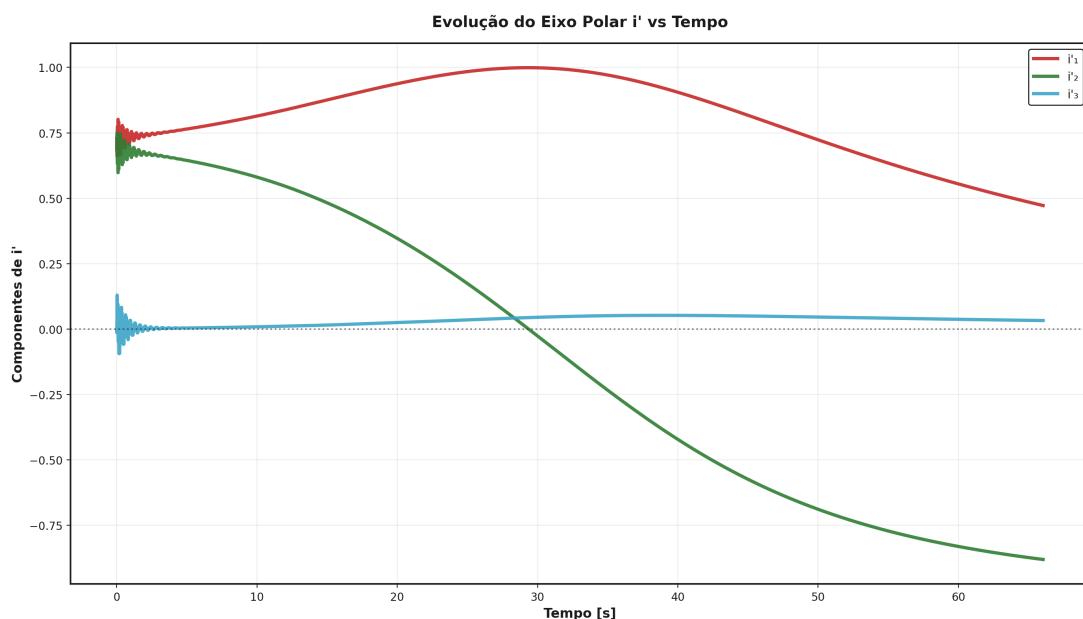
Na Figura 4.4 observa-se que o módulo da velocidade  $\|\vec{V}\|$  inicia em aproximadamente 800 m/s e decai rapidamente nos primeiros segundos, em razão da forte ação do arrasto aerodinâmico em regime supersônico. A componente  $V_1$ , associada à direção aproximada de tiro, apresenta queda monotônica ao longo de todo o voo, refletindo a perda gradual de velocidade na direção nominal de lançamento. A componente vertical  $V_2$  é inicialmente positiva e de grande magnitude, cruza zero em torno da metade do tempo de voo (coincidindo com o instante de altitude máxima na Figura 4.2) e torna-se negativa na fase descendente da trajetória, como esperado em um movimento balístico sujeito à gravidade. A componente lateral  $V_3$  permanece próxima de zero durante todo o voo, com pequenas oscilações, o que é consistente com a escolha de azimute  $A_0 = 0^\circ$  e com a ausência de vento lateral no modelo.

A Figura 4.5 ilustra a evolução das componentes do eixo polar  $\vec{i}'$  em coordenadas inerciais. Logo após a saída da boca, verifica-se um curto regime transitório com oscilações de pequena amplitude nas três componentes, caracterizando a nutação típica de projéteis estabilizados giroscópicamente. Em poucos instantes, contudo, as oscilações são fortemente amortecidas e as componentes passam a variar de forma suave ao longo do restante do voo. Em particular, a componente lateral  $i'_3$  tende rapidamente a valores próximos de zero, indicando que o eixo de simetria permanece essencialmente contido no plano vertical da trajetória, enquanto  $i'_1$  e  $i'_2$  evoluem de maneira coerente com a rotação gradual do

## 4.1 | DISPARO DETERMINÍSTICO DE REFERÊNCIA



**Figura 4.4:** Componentes da velocidade em função do tempo para o disparo de referência. A curva contínua representa o módulo  $\|\vec{V}\|$ , enquanto as curvas tracejadas indicam as componentes  $V_1$  (direção aproximadamente horizontal de tiro),  $V_2$  (vertical) e  $V_3$  (lateral).



**Figura 4.5:** Componentes do eixo de simetria  $\vec{i}'$  em função do tempo para o disparo de referência. Observa-se um transitório inicial de nutação, seguido por uma variação lenta associada à curvatura da trajetória.

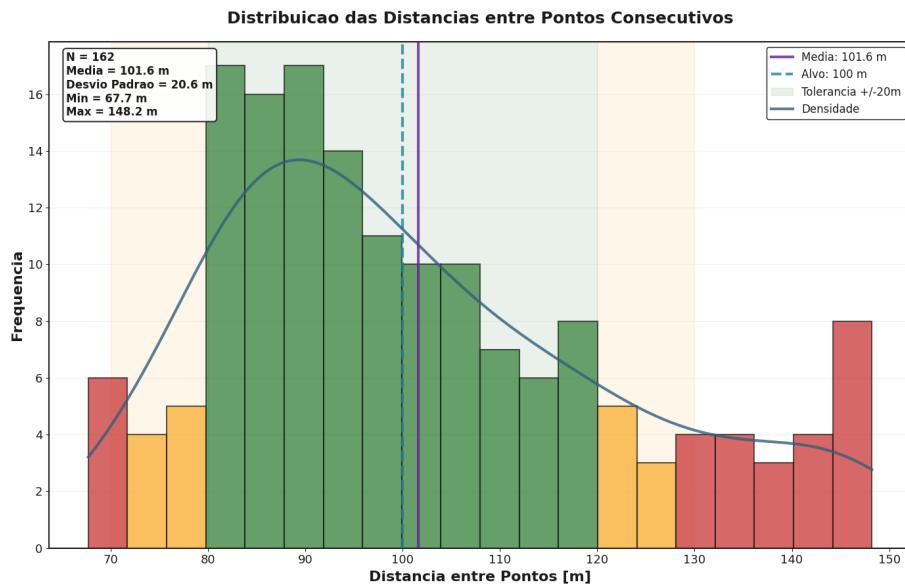
projétil de uma orientação inicial “apontando para cima” para uma orientação ligeiramente inclinada para baixo na fase final do voo.

A diferença entre a direção do eixo de simetria e a direção da velocidade instantânea é precisamente o ângulo total de ataque analisado na Figura 4.3. Como discutido anteriormente, essa diferença permanece sempre pequena (da ordem de poucos graus), o que indica que o projétil acompanha de perto a curvatura da trajetória ao longo de todo o disparo, sem apresentar desvios ou instabilidades aerodinâmicas significativas.

## 4.2 Seleção e espaçamento das configurações de engajamento

Como descrito na Seção 3.2, os pontos de engajamento ao longo da trajetória foram escolhidos de modo que a distância entre impactos consecutivos fosse aproximadamente constante, com alvo de 100 m. Adota-se como faixa de tolerância principal o intervalo de 80 a 120 m (isto é,  $\pm 20$  m em torno do alvo) e, de forma mais permissiva, uma faixa ampliada entre 70 e 130 m.

A Figura 4.6 apresenta a distribuição das distâncias entre pontos consecutivos obtida após a aplicação desse procedimento. No total, foram selecionadas  $N = 162$  distâncias (163 pontos ao todo), com distância média de  $\bar{d} \approx 101,6$  m e desvio padrão de aproximadamente 20,6 m. Os valores mínimo e máximo observados foram, respectivamente, 67,7 m e 148,2 m.



**Figura 4.6:** Distribuição das distâncias entre pontos consecutivos de engajamento ao longo da trajetória do disparo de referência. A linha tracejada indica o alvo de 100 m. A região sombreada em verde corresponde à faixa de tolerância principal, entre 80 e 120 m ( $\pm 20$  m em torno do alvo), enquanto as faixas em amarelo cobrem o intervalo ampliado de 70 a 130 m. As barras são coloridas de acordo com o centro do intervalo: verde dentro da faixa principal, amarelo na faixa ampliada e vermelho fora dela.

Observa-se que a maior parte das distâncias entre pontos consecutivos permanece dentro da faixa principal de tolerância [80, 120] m, concentrando-se em torno do valor

alvo de 100 m. Poucos intervalos caem apenas na faixa ampliada [70, 80] ou [120, 130] m, e apenas uma fração pequena dos pontos é classificada como fora da tolerância (vermelho). Assim, a malha de pontos construída é suficientemente uniforme para amostrar a trajetória com boa resolução, sem gerar um número excessivo de configurações de tiro para as simulações de Monte Carlo apresentadas nas seções seguintes.

## 4.3 Simulações de Monte Carlo para probabilidade de acerto

Conforme descrito na Seção 3.2, as incertezas nas condições iniciais de tiro são modeladas por perturbações gaussianas independentes nos ângulos de elevação e azimute. Para cada configuração de engajamento  $i = 1, \dots, m$ , são realizadas  $K$  simulações independentes, resultando em  $K$  pontos de impacto. A probabilidade de acerto é então estimada por  $\hat{p}_i = N_i^{(\text{hit})}/K$ , onde  $N_i^{(\text{hit})}$  é o número de impactos cujo ponto de queda se encontra dentro do contorno geométrico do drone Sea Baby ( $6 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ ). Nesta seção apresenta-se, inicialmente, uma visualização geométrica da dispersão em uma configuração representativa e, em seguida, os resultados globais para as probabilidades estimadas ao longo de toda a trajetória.

### 4.3.1 Visualização geométrica da dispersão em uma configuração representativa

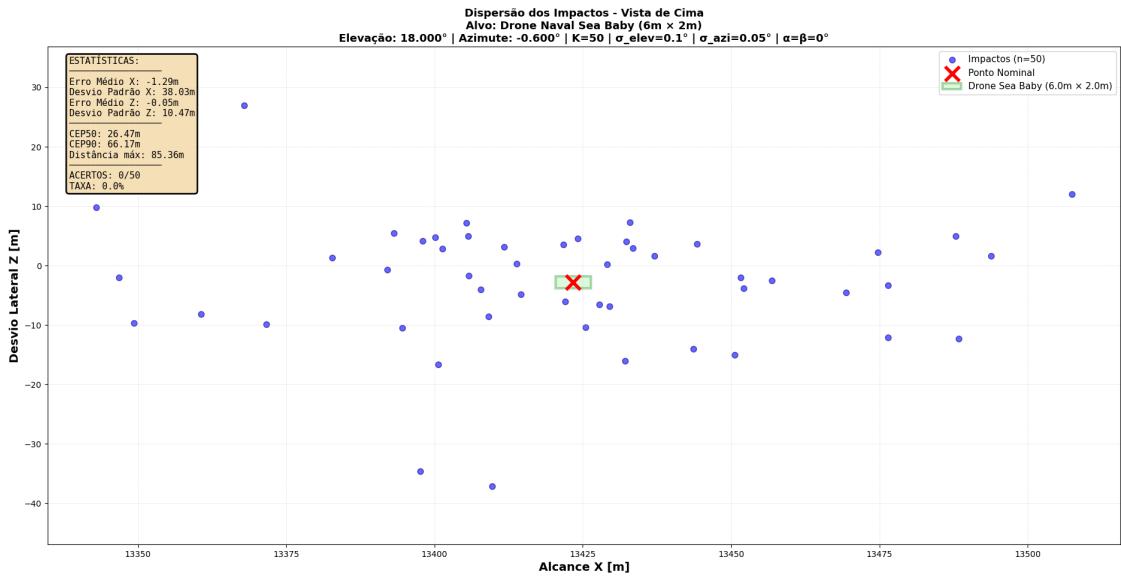
A Figura 4.7 ilustra, em vista de cima, a dispersão dos pontos de impacto para uma configuração de referência com elevação nominal  $E_0 = 18^\circ$  e azimute  $A_0 = -0,6^\circ$ . Nesse exemplo foram geradas apenas  $K = 50$  simulações, com o objetivo específico de fornecer uma ilustração geométrica do efeito do ruído angular sobre o padrão de impactos. O retângulo verde representa o contorno do drone Sea Baby ( $6 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ ), posicionado em torno do ponto de impacto nominal (marcado por uma cruz vermelha), enquanto os círculos azuis indicam os pontos de impacto das simulações.

Mesmo com desvios-padrão relativamente modestos nos ângulos de elevação e azimute ( $0,1^\circ$  e  $0,05^\circ$ ), observa-se na Figura 4.7 uma dispersão de dezenas de metros em torno do ponto nominal. O padrão de impactos apresenta forma aproximadamente elíptica, alongada na direção do alcance  $X$  e mais estreita na direção lateral  $Z$ .

### 4.3.2 Probabilidades estimadas ao longo da trajetória

Para a análise quantitativa da probabilidade de neutralização, utilizou- se  $K = 1000$  simulações em cada uma das  $m = 163$  configurações de engajamento descritas na Seção 4.2. A Figura 4.8 apresenta as probabilidades estimadas  $\hat{p}_i$  ao longo da trajetória do projétil, ordenadas por distância ao alvo, juntamente com intervalos de confiança aproximados de 95%. Esses intervalos foram construídos a partir da aproximação normal para a distribuição binomial, utilizando  $\hat{p}_i \pm z_{0,975} \sqrt{\hat{p}_i(1 - \hat{p}_i)/K}$ , com  $z_{0,975} \approx 1,96$ .

No total, obtém-se  $N = 163$  estimativas, com probabilidade média de acerto  $\bar{p} \approx 0,8\%$  e valor máximo em torno de 11,5%. Observa-se que, para a maior parte das configurações,



**Figura 4.7:** Dispersão dos impactos em vista de cima para a configuração com elevação nominal  $E_0 = 18^\circ$  e azimute  $A_0 = -0,6^\circ$ , considerando  $K = 50$  simulações com ruído angular. O retângulo verde representa o contorno do drone Sea Baby (6 m × 2 m), a cruz vermelha marca o ponto de impacto nominal e os círculos azuis indicam os pontos de impacto simulados.

em especial na região intermediária de distâncias, as estimativas  $\hat{p}_i$  permanecem bastante próximas de zero, e todos os intervalos de confiança ficam muito abaixo do patamar de 10% indicado na figura. Em termos práticos, isso significa que, com os níveis de erro angular considerados, um único disparo apresenta baixa probabilidade de neutralizar o drone em grande parte da trajetória possível de engajamento.

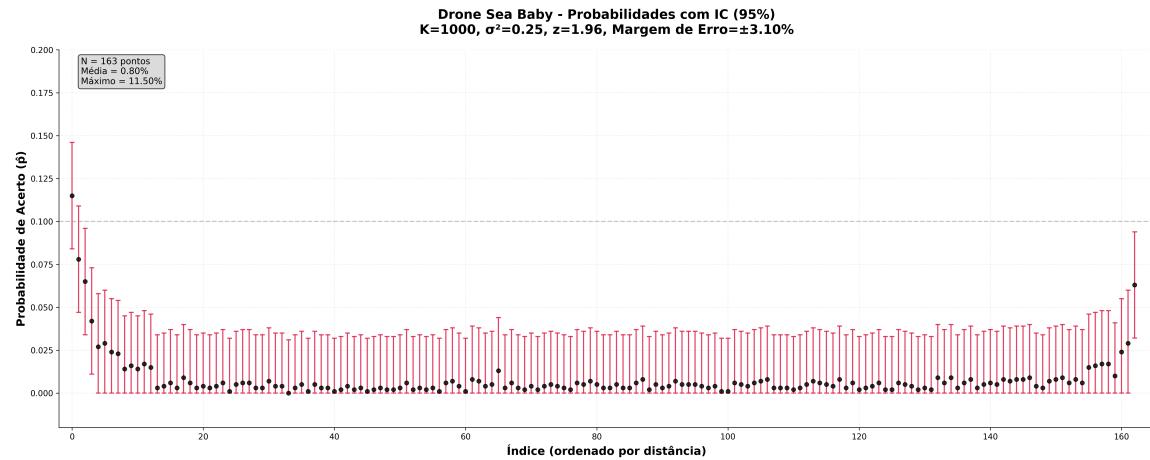
Um comportamento interessante ocorre nas vizinhanças das distâncias extremas consideradas. Nas configurações de alcance máximo, os valores de  $\hat{p}_i$  tendem a ser ligeiramente maiores que nas distâncias imediatamente anteriores, ainda que continuem modestos em termos absolutos. Uma explicação heurística para esse efeito está relacionada ao fato que, próximo ao ângulo que maximiza o alcance, qualquer erro de elevação, sempre diminuirá a distância. Em outras palavras, os disparos caem mais perto um do outro.

É importante frisar que esse cenário de alcance máximo é pouco verossímil do ponto de vista operacional. Dificilmente uma embarcação tentaria engajar um drone suicida exatamente na vizinhança do alcance balístico máximo do armamento principal.

## 4.4 Análise do custo esperado de engajamento

Nesta seção emprega-se a função de custo definida no Capítulo 1 para quantificar, de forma agregada, o custo esperado de um engajamento contra o drone Sea Baby ao longo de toda a trajetória simulada. Recorde-se que, para um prefixo com  $n$  oportunidades de disparo e probabilidades de acerto  $\{p_1, \dots, p_n\}$ , o modelo considera o custo esperado

$$\mathbb{E}[C] = c(1 + (1 - p_1) + (1 - p_1)(1 - p_2) + \dots + (1 - p_1) \dots (1 - p_{n-1})) + E \prod_{i=1}^n (1 - p_i),$$



**Figura 4.8:** Probabilidades estimadas de acerto  $\hat{p}_i$  para o drone Sea Baby em função do índice da configuração de engajamento (ordenado por distância ao alvo). Para cada ponto são mostrados intervalos de confiança aproximados de 95% com base na distribuição binomial com  $K = 1000$  simulações por configuração. A linha tracejada indica o nível de 10% de probabilidade de acerto.

onde  $c$  é o custo unitário de cada munição e  $E$  é o valor da embarcação defensora, interpretado como penalidade em caso de falha total (destruição do navio após todas as oportunidades de disparo serem esgotadas).

Nos cenários numéricos considerados, adotou-se  $c = \text{US\$ } 2.000$  por disparo e  $E = \text{US\$ } 289.000.000$ , o que implica uma razão  $E/c \approx 1,4 \times 10^5$ ; ou seja, a perda da embarcação equivale, em termos monetários, a cerca de cento e quarenta mil disparos de munição. As probabilidades  $\{p_i\}$  utilizadas em cada ponto correspondem às estimativas obtidas na Seção 4.3.2 para o drone Sea Baby.

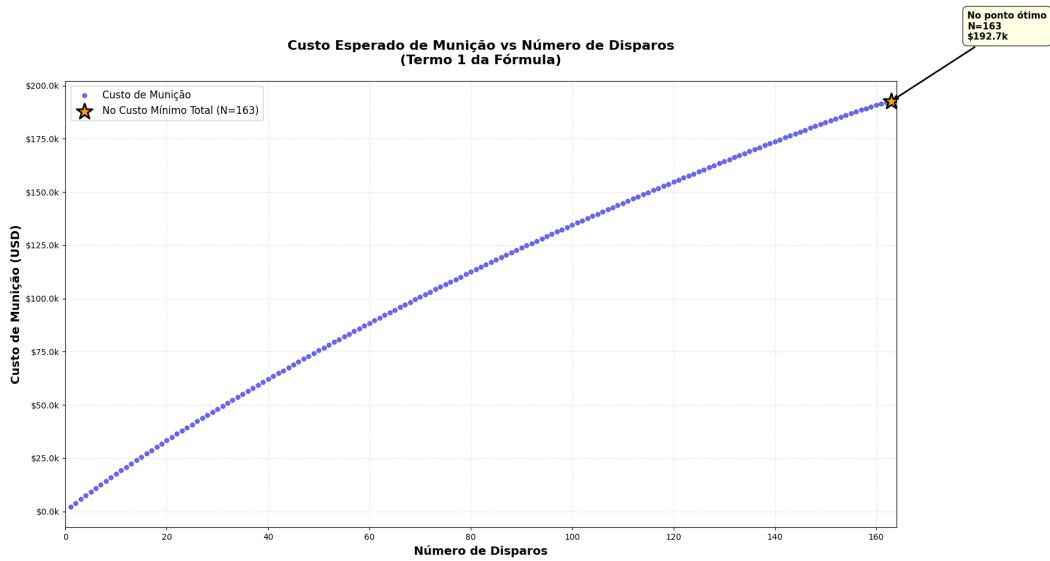
#### 4.4.1 Custo esperado de munição

A Figura 4.9 mostra o comportamento do termo associado exclusivamente ao consumo de munição,  $c \mathbb{E}[N]$ , em função do número máximo  $n$  de disparos permitidos. A curva representa o custo esperado de munição para prefixos de tamanho  $n = 1, 2, \dots, 163$ , onde 163 é o número total de configurações de tiro consideradas ao longo da trajetória.

Para o caso em que todas as  $n = 163$  oportunidades são utilizadas no modelo, obtém-se um número esperado de disparos  $\mathbb{E}[N] \approx 96,36$ , resultando em um custo esperado de munição da ordem de  $c \mathbb{E}[N] \approx \text{US\$ } 192.700$ . A curva da Figura 4.9 é crescente em  $n$ , como esperado: quanto mais oportunidades de disparo são disponibilizadas, maior é o número médio de projéteis efetivamente despendidos ao longo do engajamento. Observa-se, contudo, que esse custo permanece pequeno em relação à escala do problema quando comparado ao valor da embarcação.

#### 4.4.2 Probabilidade de sucesso acumulada

A Figura 4.10 apresenta a probabilidade acumulada de sucesso  $P(\text{sucesso}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$  em função do número máximo de disparos  $n$ . Cada ponto azul representa a



**Figura 4.9:** Custo esperado de munição  $c \mathbb{E}[N]$  em função do número máximo de disparos  $n$ . A estrela indica o ponto em que o custo total esperado (munição + penalidade pela perda da embarcação) atinge seu mínimo, que coincide com o uso de todas as  $n = 163$  oportunidades de disparo.

probabilidade de neutralizar o drone em até  $n$  disparos consecutivos, considerando que as probabilidades  $p_i$  são aquelas estimadas via simulação de Monte Carlo para o Sea Baby.

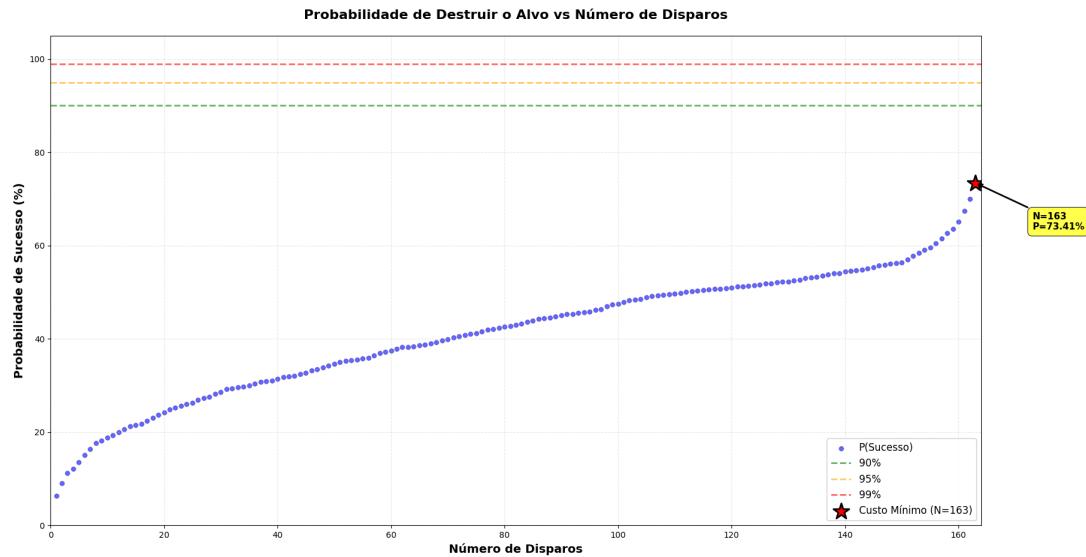
Com apenas um disparo ( $n = 1$ ), a probabilidade de sucesso é da ordem de 6,3%, refletindo a baixa probabilidade de acerto individual discutida anteriormente. À medida que  $n$  aumenta, a probabilidade acumulada de destruir o alvo cresce de forma monotônica, atingindo aproximadamente 18,8% em  $n = 10$ , 47,5% em  $n = 100$  e cerca de 73,4% quando todas as  $n = 163$  oportunidades são consideradas. Mesmo no limite do modelo (163 disparos possíveis ao longo da aproximação do drone), o nível de 90% de probabilidade de sucesso não é alcançado.

#### 4.4.3 Custo total esperado e ponto de operação

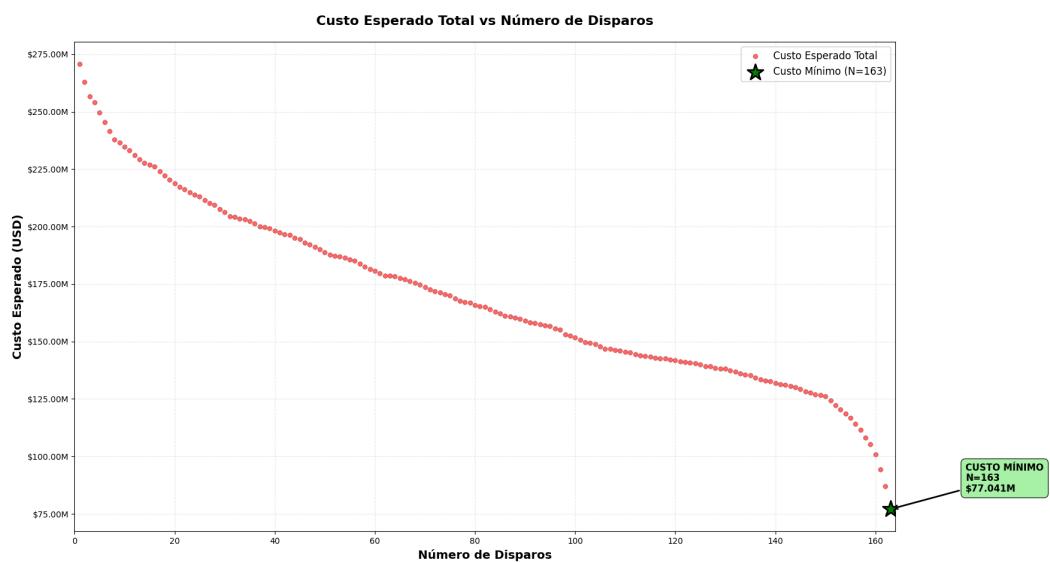
A Figura 4.11 sintetiza os dois efeitos concorrentes descritos acima, apresentando o custo total esperado  $\mathbb{E}[C]$  em função de  $n$ . Para cada prefixo de tamanho  $n$  são considerados simultaneamente o custo esperado de munição (termo 1) e o custo esperado associado à perda eventual da embarcação (termo 2), ponderado pela probabilidade de falha total.

Os resultados numéricos mostram que, para  $n = 1$ , o custo esperado é da ordem de US\$ 270,8 milhões, muito próximo do valor da embarcação  $E$ . Isso ocorre porque, com apenas um disparo, a probabilidade de falha total é elevada (cerca de 93,7%), de modo que a maior parte do custo esperado provém do termo associado à perda do navio. À medida que o número máximo de disparos aumenta, a probabilidade de falha total diminui de forma significativa, e o custo esperado  $\mathbb{E}[C]$  decresce monotonicamente: para  $n = 50$  obtém-se um custo esperado em torno de US\$ 188,8 milhões, para  $n = 100$  cerca de US\$ 151,8 milhões e, por fim, para  $n = 163$  o custo mínimo aproximado de US\$ 77,0 milhões, com probabilidade de sucesso de aproximadamente 73,4% e probabilidade residual de falha total de 26,6%.

## 4.4 | ANÁLISE DO CUSTO ESPERADO DE ENGAJAMENTO



**Figura 4.10:** Probabilidade acumulada de destruir o alvo em função do número máximo de disparos  $n$ . As linhas tracejadas indicam níveis de referência de 90%, 95% e 99%. A estrela marca o ponto  $n = 163$ , correspondente ao uso de todas as configurações disponíveis.



**Figura 4.11:** Custo total esperado  $E[C]$  em função do número máximo de disparos  $n$ . A estrela verde indica o ponto de custo mínimo, que ocorre em  $n = 163$ , com custo esperado de aproximadamente US\$77,0 milhões.

Esse resultado evidencia que, com a razão de custos considerada ( $E/c \approx 1,4 \times 10^5$ ), o termo dominante na função de custo é o valor esperado associado à perda da embarcação. O custo de munição no ponto ótimo, cerca de US\$ 192,7 mil, representa menos de 0,3% do custo total esperado de US\$ 77,0 milhões. Consequentemente, dentro das hipóteses do modelo (ausência de restrições adicionais de munição, aquecimento de canhão, risco colateral etc.), a política que minimiza o custo esperado corresponde simplesmente a utilizar todas as oportunidades de tiro disponíveis contra o alvo, isto é, a estratégia de engajamento mais agressiva possível ao longo da aproximação do drone.

# Capítulo 5

## Conclusão

A pergunta central deste trabalho foi estimar o *custo esperado de neutralização* de um drone naval de superfície utilizando apenas o armamento principal de um navio, levando em conta, de um lado, o custo da munição empregada e, de outro, o custo associado à eventual falha na neutralização do alvo. Para responder a essa questão, foi desenvolvido um modelo de trajetória seis-graus-de-liberdade para o projétil naval, acoplado a simulações de Monte Carlo que permitiram estimar probabilidades de acerto em função da distância de engajamento. Essas probabilidades foram então inseridas em uma função de custo que combina o gasto em munição com o risco econômico de perda da embarcação defensora.

No cenário de referência considerado, sob as hipóteses simplificadoras descritas na metodologia e restringindo-se exclusivamente ao emprego do canhão principal, obteve-se que, no caso em que toda a sequência de disparos prevista é efetivamente realizada, o custo total esperado de neutralização é da ordem de US\$ 77 milhões. Desse montante, a contribuição esperada do custo de munição é relativamente modesta, aproximadamente US\$ 192,7 mil, enquanto o termo dominante é o custo associado à possibilidade de o drone não ser neutralizado e, consequentemente, à perda do navio.

Se o foco for *apenas* o custo de munição, o resultado parece inicialmente favorável: o valor esperado gasto em projéteis (cerca de US\$ 192,7 mil) é inferior ao custo unitário típico atribuído ao drone, da ordem de US\$ 220 mil. Sob essa ótica puramente balística e de preço por disparo, o emprego da artilharia principal com munição relativamente barata pareceria compatível com a ideia de “neutralizar um alvo barato com munição ainda mais barata”. Contudo, essa leitura ignora o componente central do problema: o risco de fracasso da neutralização e o consequente custo de perder a embarcação defensora.

De fato, as simulações indicam que, mesmo após a aplicação de toda a sequência de disparos considerada, permanece uma probabilidade de falha de neutralização em torno de 26%. Em outras palavras, aproximadamente um quarto dos ataques simulados resultam em um drone que atravessa toda a sequência de fogo sem ser atingido, levando à destruição do navio. É precisamente esse risco que eleva o custo esperado total para a ordem de dezenas de milhões de dólares, dominado pelo valor da plataforma naval. Na prática, portanto, ainda que o custo de munição isoladamente seja menor que o custo do drone, o método de engajamento baseado *apenas* no canhão principal não se mostra eficaz do ponto de vista

econômico, dada a elevada probabilidade residual de perda catastrófica.

Uma forma de reforçar essa interpretação é considerar, por argumento ilustrativo, um sistema alternativo de armas: suponha, por exemplo, um sistema de mísseis cujo custo unitário seja da ordem de US\$ 10 milhões, mas com probabilidade de acerto de 99%. Admitindo um custo da embarcação defensora de aproximadamente US\$ 289 milhões, o custo esperado de neutralização nesse cenário hipotético seria da ordem de

$$C_{\text{missil}} \approx 0,01 \times 289 \text{ milhões} + 10 \text{ milhões} \approx 12,9 \text{ milhões de US$},$$

valor significativamente inferior aos cerca de US\$ 77 milhões associados ao emprego exclusivo da artilharia principal no cenário estudado. Ainda que esses números sejam apenas ilustrativos, eles evidenciam que um sistema mais caro por disparo pode ser, em termos de custo esperado, mais econômico quando reduz de forma drástica a probabilidade de perda do navio.

Nesse sentido, a principal mensagem do trabalho é que a assimetria de custos entre drones navais de baixo valor e plataformas navais de alto valor realmente se manifesta de forma contundente. Mesmo quando se recorre a munição relativamente barata, o risco de perda da embarcação faz com que o custo esperado de engajamento permaneça elevado. Assim, a aparente “economia” de utilizar apenas projéteis balísticos simples do armamento principal revela-se enganosa: embora o custo por tiro seja baixo, o custo esperado total, ponderado pelo risco de fracasso, não é competitivo.

Naturalmente, o estudo apresenta limitações importantes. A principal delas é a consideração exclusiva do canhão principal, imposta pela disponibilidade de dados balísticos e aerodinâmicos. Em muitos navios modernos, a neutralização de drones de superfície tenderia a envolver uma combinação de sistemas, como defesas de ponto de alta cadência (*Close-In Weapon Systems – CIWS*), metralhadoras estabilizadas e, eventualmente, mísseis de curto alcance. Esses sistemas podem operar com cadências de tiro muito maiores e, em alguns casos, com munição ainda relativamente barata, o que pode reduzir substancialmente o risco de não neutralização para um dado número de disparos. Contudo, na ausência de coeficientes aerodinâmicos, taxas de fogo e envelopes de engajamento confiáveis para esses sistemas, não foi possível incluí-los de forma quantitativa no presente modelo de custo.

Outra simplificação relevante é o emprego de projéteis puramente balísticos, sem guiação terminal, disparados por um único tipo de canhão. Existem, na prática, munições guiadas ou assistidas que podem apresentar custos unitários significativamente superiores, mas também maiores probabilidades de acerto, especialmente contra alvos pequenos e manobráveis. De forma semelhante, diferentes calibres e sistemas de armas, como o canhão OTO Melara de 76 mm, amplamente utilizado em marinhas ao redor do mundo, poderiam oferecer combinações distintas de alcance, cadência e precisão. A inexistência, em domínio público, de conjuntos completos de coeficientes aerodinâmicos e dados operacionais confiáveis para esses sistemas impediu sua inclusão no presente estudo.

À luz dessas limitações, os resultados obtidos devem ser interpretados como uma estimativa conservadora, referente a um cenário específico de engajamento com um único drone de superfície, em condições simplificadas e empregando apenas o canhão principal com projéteis não guiados. Dentro desse escopo, entretanto, a conclusão é robusta: a

estratégia de confiar exclusivamente na artilharia principal, mesmo com munição de baixo custo, não elimina a assimetria de custos em favor do atacante.

Os desdobramentos naturais deste trabalho apontam para diversas direções. Em primeiro lugar, a metodologia desenvolvida pode ser estendida para incluir modelos de outros sistemas de armas, como CIWS e mísseis de curto alcance, desde que dados balísticos e operacionais adequados estejam disponíveis. Isso permitiria comparar, em uma mesma estrutura de custo esperado, diferentes arquiteturas de defesa contra drones navais, explorando combinações de armamento principal, defesas de ponto e mísseis.

Em segundo lugar, seria de grande interesse incorporar munições guiadas e diferentes calibres no modelo, inclusive canhões de 76 mm e outros sistemas amplamente empregados em escoltas modernas. A obtenção ou construção de coeficientes aerodinâmicos para esses projéteis possibilitaria estimativas de probabilidade de acerto e custo esperado muito mais próximas da realidade operacional.

Em terceiro lugar, a abordagem aqui proposta pode ser adaptada para o estudo de ameaças aéreas, como drones aéreos armados, avaliando o custo esperado de neutralização com munição antiaérea e sistemas mistos de defesa. Dada a relevância dessa classe de ameaças na guerra moderna assimétrica, a extensão do modelo para alvos aéreos representa um campo promissor de pesquisa.

Por fim, considera-se que os objetivos definidos na introdução foram atingidos. O trabalho apresentou um modelo físico e estatístico capaz de estimar, ainda que sob hipóteses simplificadoras, o custo esperado de neutralização de um drone de superfície utilizando o canhão principal de um navio, e mostrou que, nas condições estudadas, essa estratégia não é economicamente eficiente quando se leva em conta o risco de perda da embarcação defensora. Os resultados reforçam a necessidade de arquiteturas de defesa em camadas e de sistemas com alta probabilidade de acerto, de modo a mitigar a assimetria de custos que caracteriza o emprego de drones navais em conflitos contemporâneos.



# Apêndice A

## Código-fonte da simulação 6-DOF

Neste apêndice apresenta-se a estrutura principal do código em Python utilizado para a simulação balística 6-DOF descrita neste . Não é o código completo por limitações de tamanho.

O código-fonte completo encontra-se disponível em:

<https://github.com/OAfundador/6-DOF-ballistic-model>

---

### Programa A.1 Estrutura principal do simulador balístico 6-DOF em Python.

---

```

1   #
=====
2   # SIMULADOR BALISTICO 6-DOF
3   #
=====

4
5   import numpy as np
6   from math import sqrt, pi, sin, cos, atan2, acos
7   from dataclasses import dataclass
8   import matplotlib.pyplot as plt
9   from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
10  from scipy.integrate import solve_ivp
11  import pandas as pd
12  from scipy.interpolate import interp1d, RectBivariateSpline
13  import warnings
14  warnings.filterwarnings('ignore')
15
16  #
=====

17  # CLASSE SIMULADOR BALISTICO
18  #
=====
```

*cont →*

→ *cont*

```

19
20     class BallisticSimulator:
21         """
22             Classe principal que gerencia a simulacao balistica 6-DOF.
23         """
24
25     def __init__(self, projectile, weapon, environment, aero_coeffs):
26         """
27             Inicializa o simulador.
28
29             Parametros:
30             -----
31                 projectile : Projectile
32                     Objeto projetil
33                 weapon : Weapon
34                     Objeto arma
35                 environment : Environment
36                     Condicoes ambientais
37                 aero_coeffs : RealAerodynamicCoefficients
38                     Coeficientes aerodinamicos
39         """
40
41         self.projectile = projectile
42         self.weapon = weapon
43         self.environment = environment
44         self.aero_coeffs = aero_coeffs
45
46         # Resultado da simulacao
47         self.result = None
48
49     def build_initial_conditions(self, alpha0_deg=0.0, beta0_deg=0.0,
50                                 w_j0=5.0, w_k0=5.0):
51         """
52             Constroi condicoes iniciais para a simulacao.
53             IMPORTANTE: Considera a velocidade da embarcacao se a arma estiver
54                 montada em uma.
55
56             Parametros:
57             -----
58                 alpha0_deg : float
59                     Angulo de arfagem inicial em graus
60                 beta0_deg : float
61                     Angulo de guinada inicial em graus
62                 w_j0 : float
63                     Velocidade angular em j' [rad/s]
64                 w_k0 : float
65                     Velocidade angular em k' [rad/s]
66
67             Retorna:
68             -----
69                 array : vetor de estado inicial [V1, V2, V3, h1, h2, h3, i1, i2, i3, x,
70                               y, z]
71         """

```

*cont* →

→ *cont*

```

69      # Angulos de tiro
70      theta0, phi0 = self.weapon.calculate_firing_angles()
71      alpha0 = np.radians(alpha0_deg)
72      beta0 = np.radians(beta0_deg)
73
74      # Velocidade inicial DO PROJETIL RELATIVA A ARMA (velocidade na boca)
75      V0 = self.weapon.muzzle_velocity
76      V1_rel = V0 * cos(theta0) * cos(phi0)
77      V2_rel = V0 * cos(theta0) * sin(phi0)
78      V3_rel = V0 * sin(theta0)
79
80      # Velocidade da plataforma (embarcacao)
81      platform_velocity = self.weapon.get_velocity()
82
83      # VELOCIDADE ABSOLUTA = Velocidade relativa + Velocidade da plataforma
84      V1_0 = V1_rel + platform_velocity[0]
85      V2_0 = V2_rel + platform_velocity[1]
86      V3_0 = V3_rel + platform_velocity[2]
87
88      # Spin inicial
89      w_i0 = self.projectile.calculate_initial_spin(V0)
90
91      # Eixo polar i'
92      phi_eff = phi0 + alpha0
93      theta_eff = theta0 + beta0
94
95      i1_0 = cos(phi_eff) * cos(theta_eff)
96      i2_0 = cos(theta_eff) * sin(phi_eff)
97      i3_0 = sin(theta_eff)
98
99      # Eixos j' e k'
100     Q = sin(theta_eff)**2 + cos(theta_eff)**2 * cos(phi_eff)**2
101     sqrt_Q = sqrt(Q)
102
103     j1_0 = -(sin(phi_eff) * cos(phi_eff) * cos(theta_eff)**2) / sqrt_Q
104     j2_0 = (cos(theta_eff)**2 * cos(phi_eff)**2 + sin(theta_eff)**2) /
105           sqrt_Q
106     j3_0 = -(sin(theta_eff) * cos(theta_eff) * sin(phi_eff)) / sqrt_Q
107
108     k1_0 = -sin(theta_eff) / sqrt_Q
109     k2_0 = 0.0
110     k3_0 = (cos(phi_eff) * cos(theta_eff)) / sqrt_Q
111
112     # di'/dt
113     di1_dt = (w_i0 * sin(theta_eff) -
114                w_k0 * cos(theta_eff)**2 * sin(phi_eff) * cos(phi_eff)) /
115                  sqrt_Q
116     di2_dt = (w_k0 / sqrt_Q) * (cos(theta_eff)**2 * cos(phi_eff)**2 +
117                               sin(theta_eff)**2)
118

```

*cont* →

→ *cont*

```

119      di3_dt = (-w_j0 * cos(theta_eff) * cos(phi_eff)
120          - w_k0 * sin(phi_eff) * cos(theta_eff) * sin(theta_eff)) /
121              sqrt_Q
122
123      # Momento angular h
124      omega1_inertial = w_i0
125
126      I_P = self.projectile.I_P
127      I_T = self.projectile.I_T
128
129      term1_h1 = (I_P / I_T) * omega1_inertial * i1_0
130      term1_h2 = (I_P / I_T) * omega1_inertial * i2_0
131      term1_h3 = (I_P / I_T) * omega1_inertial * i3_0
132
133      term2_h1 = i2_0 * di3_dt - i3_0 * di2_dt
134      term2_h2 = i3_0 * di1_dt - i1_0 * di3_dt
135      term2_h3 = i1_0 * di2_dt - i2_0 * di1_dt
136
137      h1_0 = term1_h1 + term2_h1
138      h2_0 = term1_h2 + term2_h2
139      h3_0 = term1_h3 + term2_h3
140
141      # Posicao inicial (posicao absoluta da arma)
142      abs_position = self.weapon.get_absolute_position()
143      x0, y0, z0 = abs_position
144
145      # Monta vetor de estado
146      y0_vec = np.array([V1_0, V2_0, V3_0,
147                         h1_0, h2_0, h3_0,
148                         i1_0, i2_0, i3_0,
149                         x0, y0, z0], dtype=float)
150
151      return y0_vec
152
153  def rhs(self, t, y):
154      """
155      Lado direito das equacoes diferenciais (RHS).
156
157      Parametros:
158      -----
159      t : float
160          Tempo
161      y : array
162          Vetor de estado [V1, V2, V3, h1, h2, h3, i1, i2, i3, x, y, z]
163
164      Retorna:
165      -----
166      array : derivadas do vetor de estado
167      """
168      V1, V2, V3, h1, h2, h3, i1, i2, i3, x, ypos, z = y
169

```

*cont* →

→ *cont*

```

170     # Velocidade relativa (com vento)
171     v1 = V1 - self.environment.W1
172     v2 = V2 - self.environment.W2
173     v3 = V3 - self.environment.W3
174     v = sqrt(v1*v1 + v2*v2 + v3*v3)
175
176     # Numero de Mach
177     mach = v / self.environment.sound_speed
178
179     # Angulo de ataque
180     cos_alpha_t = (v1*i1 + v2*i2 + v3*i3) / v
181     cos_alpha_t = np.clip(cos_alpha_t, -1.0, 1.0)
182     alpha_rad = acos(cos_alpha_t)
183
184     # Obter coeficientes aerodinamicos
185     coeffs = self.aero_coeffs.get_coefficients(mach, alpha_rad)
186
187     C_D = coeffs['CD_total'] # Drag Force Coefficient
188     C_Lalpha = coeffs['CLA_total'] # Lift Force Coefficient
189     C_Nalpha = coeffs['CYP'] #Magnus Force Coefficient
190     C_Nq = 0 # Pitching Dumping Force Coefficient
191     C_Nalpha_dot = 0 # Pitching Dumping Force Coefficient (segunda
                       componente)
192     C_lp = coeffs['CLP'] # Spin Dumping Moment Coefficient
193     C_Malpha = coeffs['CMA'] # Pitching Moment Coefficient
194     C_Malpha_dot = coeffs['CNP_total'] # Magnus Moment Coefficient
195     C_Mq = coeffs['CMQ'] #Pitching Dumping Moment Coefficient
196     C_Malpha_dot = 0
197
198     C_l_delta = 0.0
199     delta_F = 0.0
200
201     # Parametros do projetil e ambiente
202     m = self.projectile.mass
203     S = self.projectile.S
204     d = self.projectile.diameter
205     I_P = self.projectile.I_P
206     I_T = self.projectile.I_T
207     rho = self.environment.rho
208     g = self.environment.g
209
210     # = (I_T/I_P) (h i')
211     h_dot_i = (h1*i1 + h2*i2 + h3*i3)
212     omega1 = (I_T/I_P) * h_dot_i
213
214     # Equacoes de forca (dV/dt)
215     dV1 = (
216         - (rho*v*S*C_D)/(2*m) * v1
217         + (rho*S*C_Lalpha)/(2*m) * ( (v*v)*i1 - v*v1*cos_alpha_t )
218         - (rho*S*d*C_Nalpha*omega1)/(2*m) * ( v3*i2 - v2*i3 )
219         + (rho*v*S*d*(C_Nq + C_Nalpha_dot))/(2*m) * ( h2*i3 - h3*i2 )
220     )

```

*cont* →

→ cont

```

221     dV2 = (
222         - (rho*v*S*C_D)/(2*m) * v2
223         + (rho*S*C_Lalpha)/(2*m) * ( (v*v)*i2 - v*v2*cos_alpha_t )
224         - (rho*S*d*C_Nalpha*omega1)/(2*m) * ( v1*i3 - v3*i1 )
225         + (rho*v*S*d*(C_Nq + C_Nalpha_dot))/(2*m) * ( h3*i1 - h1*i3 )
226         - g
227     )
228     dV3 = (
229         - (rho*v*S*C_D)/(2*m) * v3
230         + (rho*S*C_Lalpha)/(2*m) * ( (v*v)*i3 - v*v3*cos_alpha_t )
231         - (rho*S*d*C_Nalpha*omega1)/(2*m) * ( v2*i1 - v1*i2 )
232         + (rho*v*S*d*(C_Nq + C_Nalpha_dot))/(2*m) * ( h1*i2 - h2*i1 )
233     )
234
235     # Equacoes de momento (dh/dt)
236     dh1 = (
237         (rho*v*S*d**2*C_lp*omega1)/(2*I_T) * i1
238         + (rho*v**2*S*d*delta_F*C_l_delta)/(2*I_T) * i1
239         + (rho*v*S*d*C_Malpha)/(2*I_T) * ( v2*i3 - v3*i2 )
240         + (rho*S*d**2*C_Malpha*omega1)/(2*I_T) * ( v1 - v*i1*cos_alpha_t )
241         + (rho*v*S*d**2*(C_Mq+C_Malpha_dot))/(2*I_T) * ( h1 - ((I_P/I_T)*
242             omega1)*i1 )
243     )
244     dh2 = (
245         (rho*v*S*d**2*C_lp*omega1)/(2*I_T) * i2
246         + (rho*v**2*S*d*delta_F*C_l_delta)/(2*I_T) * i2
247         + (rho*v*S*d*C_Malpha)/(2*I_T) * ( v3*i1 - v1*i3 )
248         + (rho*S*d**2*C_Malpha*omega1)/(2*I_T) * ( v2 - v*i2*cos_alpha_t )
249         + (rho*v*S*d**2*(C_Mq+C_Malpha_dot))/(2*I_T) * ( h2 - ((I_P/I_T)*
250             omega1)*i2 )
251     )
252     dh3 = (
253         (rho*v*S*d**2*C_lp*omega1)/(2*I_T) * i3
254         + (rho*v**2*S*d*delta_F*C_l_delta)/(2*I_T) * i3
255         + (rho*v*S*d*C_Malpha)/(2*I_T) * ( v1*i2 - v2*i1 )
256         + (rho*S*d**2*C_Malpha*omega1)/(2*I_T) * ( v3 - v*i3*cos_alpha_t )
257         + (rho*v*S*d**2*(C_Mq+C_Malpha_dot))/(2*I_T) * ( h3 - ((I_P/I_T)*
258             omega1)*i3 )
259     )
259
260     # Equacao de orientacao (di'/dt)
261     di1 = h2*i3 - h3*i2
262     di2 = h3*i1 - h1*i3
263     di3 = h1*i2 - h2*i1
264
265     # Equacao de posicao
266     dx, dy, dz = V1, V2, V3
267
268     return np.array([dV1, dV2, dV3, dh1, dh2, dh3, di1, di2, di3, dx, dy,
269                     dz], dtype=float)
270
271     def simulate(self, max_time=100.0, alpha0_deg=0.0, beta0_deg=0.0,
```

cont →

```

→ cont
269         w_j0=5.0, w_k0=5.0, rtol=1e-7, atol=1e-8):
270     """
271     Executa a simulacao balistica.
272
273     Parametros:
274     -----
275     max_time : float
276         Tempo maximo de simulacao [s]
277     alpha0_deg : float
278         Angulo de arfagem inicial [deg]
279     beta0_deg : float
280         Angulo de guinada inicial [deg]
281     w_j0 : float
282         Velocidade angular em j' [rad/s]
283     w_k0 : float
284         Velocidade angular em k' [rad/s]
285     rtol : float
286         Tolerancia relativa do integrador
287     atol : float
288         Tolerancia absoluta do integrador
289
290     Retorna:
291     -----
292     SimulationResult : objeto contendo os resultados
293     """
294     print("\n" + "="*80)
295     print("INICIANDO SIMULACAO")
296     print("="*80)
297
298     # Construir condicoesiciais
299     y0 = self.build_initial_conditions(alpha0_deg, beta0_deg, w_j0, w_k0)
300
301     # Evento de impacto no solo
302     def ground_event(t, y):
303         return y[10] # y position
304     ground_event.direction = -1
305     ground_event.terminal = True
306
307     print("\nIntegrando trajetoria...")
308
309     # Resolver EDO
310     sol = solve_ivp(self.rhs, (0.0, max_time), y0,
311                     method='DOP853',
312                     rtol=rtol, atol=atol,
313                     events=ground_event,
314                     max_step=0.1)
315
316     if sol.success:
317         print(f" Integracao bem-sucedida!")
318         print(f" Tempo de voo: {sol.t[-1]:.2f} s")
319     else:
320         print(f" Erro na integracao: {sol.message}")

```

cont →

→ *cont*

```
321
322      # Criar objeto de resultado
323      self.result = SimulationResult(sol, self)
324
325      return self.result
```

---

## Apêndice B

# Resultados relevantes para os disparos contra o *Drone Sea Baby*

Neste apêndice apresenta-se, para o alvo *Drone Sea Baby*, a lista dos pontos de tiro considerados na simulação de Monte Carlo, com a elevação, o azimute, o alcance, a taxa de acerto estimada e os limites inferior e superior do intervalo de confiança de 95%.

**Tabela B.1:** Resultados da simulação para o alvo Drone Sea Baby.

Ponto	Elevação (°)	Azimute (°)	Alcance (m)	Taxa de acerto (%)	$p_{inf}$ (%)	$p_{sup}$ (%)
1	39.6	-1.35	16797	6.3	3.2	9.4
2	36.2	-1.20	16716	2.9	0.0	6.0
3	34.8	-1.15	16635	2.4	0.0	5.5
4	33.7	-1.10	16551	1.0	0.0	4.1
5	32.8	-1.10	16469	1.7	0.0	4.8
6	32.0	-1.05	16387	1.7	0.0	4.8
7	31.2	-1.00	16295	1.6	0.0	4.7
8	30.5	-1.00	16207	1.5	0.0	4.6
9	29.9	-0.95	16126	0.6	0.0	3.7
10	29.3	-0.95	16039	0.8	0.0	3.9
11	28.7	-0.95	15947	0.6	0.0	3.7
12	28.2	-0.90	15866	0.9	0.0	4.0
13	27.7	-0.90	15782	0.8	0.0	3.9
14	27.2	-0.90	15694	0.7	0.0	3.8
15	26.7	-0.85	15602	0.3	0.0	3.4
16	26.2	-0.85	15507	0.4	0.0	3.5
17	25.7	-0.85	15408	0.9	0.0	4.0
18	25.3	-0.80	15326	0.8	0.0	3.9
19	24.9	-0.80	15242	0.8	0.0	3.9
20	24.5	-0.80	15156	0.7	0.0	3.8
21	24.1	-0.80	15067	0.8	0.0	3.9
22	23.7	-0.75	14976	0.5	0.0	3.6
23	23.3	-0.75	14882	0.6	0.0	3.7
24	22.9	-0.75	14787	0.5	0.0	3.6
25	22.5	-0.75	14689	0.3	0.0	3.4
26	22.1	-0.70	14588	0.8	0.0	3.9
27	21.7	-0.70	14486	0.6	0.0	3.7
28	21.3	-0.70	14381	0.3	0.0	3.4
29	21.0	-0.70	14300	0.9	0.0	4.0
30	20.7	-0.65	14219	0.6	0.0	3.7
31	20.4	-0.65	14136	0.9	0.0	4.0
32	20.1	-0.65	14051	0.2	0.0	3.3
33	19.8	-0.65	13966	0.3	0.0	3.4
34	19.5	-0.65	13879	0.2	0.0	3.3
35	19.2	-0.60	13791	0.4	0.0	3.5
36	18.9	-0.60	13701	0.5	0.0	3.6

**Tabela B.1:** Resultados da simulação para o alvo Drone Sea Baby (continuação).

Ponto	Elevação (°)	Azimute (°)	Alcance (m)	Taxa de acerto (%)	$p_{inf}$ (%)	$p_{sup}$ (%)
37	18.6	-0.60	13610	0.6	0.0	3.7
38	18.3	-0.60	13517	0.2	0.0	3.3
39	18.0	-0.60	13423	0.2	0.0	3.3
40	17.7	-0.60	13328	0.6	0.0	3.7
41	17.4	-0.55	13231	0.4	0.0	3.5
42	17.1	-0.55	13133	0.3	0.0	3.4
43	16.8	-0.55	13033	0.2	0.0	3.3
44	16.5	-0.55	12932	0.6	0.0	3.7
45	16.2	-0.55	12830	0.3	0.0	3.4
46	15.9	-0.55	12725	0.8	0.0	3.9
47	15.6	-0.50	12620	0.4	0.0	3.5
48	15.3	-0.50	12512	0.5	0.0	3.6
49	15.0	-0.50	12403	0.6	0.0	3.7
50	14.7	-0.50	12292	0.7	0.0	3.8
51	14.4	-0.50	12180	0.5	0.0	3.6
52	14.1	-0.45	12066	0.3	0.0	3.4
53	13.8	-0.45	11949	0.2	0.0	3.3
54	13.5	-0.45	11832	0.3	0.0	3.4
55	13.2	-0.45	11712	0.3	0.0	3.4
56	13.0	-0.45	11631	0.3	0.0	3.4
57	12.8	-0.45	11549	0.8	0.0	3.9
58	12.6	-0.45	11466	0.7	0.0	3.8
59	12.4	-0.40	11382	0.6	0.0	3.7
60	12.2	-0.40	11297	0.4	0.0	3.5
61	12.0	-0.40	11211	0.5	0.0	3.6
62	11.8	-0.40	11124	0.6	0.0	3.7
63	11.6	-0.40	11037	0.1	0.0	3.2
64	11.4	-0.40	10948	0.1	0.0	3.2
65	11.2	-0.40	10857	0.4	0.0	3.5
66	11.0	-0.40	10766	0.3	0.0	3.4
67	10.8	-0.40	10673	0.4	0.0	3.5
68	10.6	-0.35	10580	0.5	0.0	3.6
69	10.4	-0.35	10484	0.5	0.0	3.6
70	10.2	-0.35	10388	0.5	0.0	3.6
71	10.0	-0.35	10290	0.7	0.0	3.8
72	9.8	-0.35	10191	0.4	0.0	3.5
73	9.6	-0.35	10090	0.3	0.0	3.4
74	9.4	-0.35	9987	0.5	0.0	3.6
75	9.2	-0.35	9883	0.2	0.0	3.3
76	9.0	-0.30	9777	0.8	0.0	3.9
77	8.8	-0.30	9669	0.6	0.0	3.7
78	8.6	-0.30	9559	0.3	0.0	3.4
79	8.4	-0.30	9447	0.3	0.0	3.4
80	8.2	-0.30	9333	0.5	0.0	3.6
81	8.0	-0.30	9217	0.3	0.0	3.4
82	7.8	-0.30	9098	0.3	0.0	3.4
83	7.6	-0.30	8977	0.5	0.0	3.6
84	7.4	-0.30	8853	0.7	0.0	3.8
85	7.2	-0.25	8726	0.5	0.0	3.6
86	7.0	-0.25	8597	0.6	0.0	3.7
87	6.8	-0.25	8464	0.2	0.0	3.3
88	6.7	-0.25	8396	0.3	0.0	3.4
89	6.6	-0.25	8328	0.4	0.0	3.5
90	6.5	-0.25	8258	0.5	0.0	3.6
91	6.4	-0.25	8188	0.4	0.0	3.5
92	6.3	-0.25	8117	0.2	0.0	3.3
93	6.2	-0.25	8044	0.4	0.0	3.5
94	6.1	-0.25	7971	0.2	0.0	3.3
95	6.0	-0.25	7897	0.3	0.0	3.4
96	5.9	-0.25	7822	0.6	0.0	3.7
97	5.8	-0.25	7746	0.3	0.0	3.4
98	5.7	-0.25	7669	1.3	0.0	4.4
99	5.6	-0.25	7591	0.5	0.0	3.6
100	5.5	-0.20	7512	0.4	0.0	3.5
101	5.4	-0.20	7431	0.7	0.0	3.8
102	5.3	-0.20	7350	0.8	0.0	3.9
103	5.2	-0.20	7267	0.1	0.0	3.2
104	5.1	-0.20	7183	0.4	0.0	3.5

**Tabela B.1:** Resultados da simulação para o alvo Drone Sea Baby (continuação).

Ponto	Elevação (°)	Azimute (°)	Alcance (m)	Taxa de acerto (%)	$p_{inf}$ (%)	$p_{sup}$ (%)
105	5.0	-0.20	7098	0.7	0.0	3.8
106	4.9	-0.20	7012	0.6	0.0	3.7
107	4.8	-0.20	6924	0.1	0.0	3.2
108	4.7	-0.20	6836	0.3	0.0	3.4
109	4.6	-0.20	6745	0.2	0.0	3.3
110	4.5	-0.20	6654	0.3	0.0	3.4
111	4.4	-0.20	6561	0.2	0.0	3.3
112	4.3	-0.20	6467	0.6	0.0	3.7
113	4.2	-0.20	6371	0.3	0.0	3.4
114	4.1	-0.20	6274	0.2	0.0	3.3
115	4.0	-0.20	6175	0.2	0.0	3.3
116	3.9	-0.20	6075	0.3	0.0	3.4
117	3.8	-0.15	5973	0.2	0.0	3.3
118	3.7	-0.15	5870	0.1	0.0	3.2
119	3.6	-0.15	5765	0.3	0.0	3.4
120	3.5	-0.15	5659	0.2	0.0	3.3
121	3.4	-0.15	5550	0.4	0.0	3.5
122	3.3	-0.15	5440	0.2	0.0	3.3
123	3.2	-0.15	5328	0.1	0.0	3.2
124	3.1	-0.15	5215	0.3	0.0	3.4
125	3.0	-0.15	5100	0.3	0.0	3.4
126	2.9	-0.15	4982	0.5	0.0	3.6
127	2.8	-0.15	4863	0.1	0.0	3.2
128	2.7	-0.15	4742	0.5	0.0	3.6
129	2.6	-0.15	4619	0.3	0.0	3.4
130	2.5	-0.15	4494	0.0	0.0	3.1
131	2.4	-0.15	4367	0.4	0.0	3.5
132	2.3	-0.15	4238	0.4	0.0	3.5
133	2.2	-0.15	4108	0.7	0.0	3.8
134	2.1	-0.10	3975	0.3	0.0	3.4
135	2.0	-0.10	3840	0.3	0.0	3.4
136	1.9	-0.10	3703	0.6	0.0	3.7
137	1.8	-0.10	3564	0.6	0.0	3.7
138	1.7	-0.10	3424	0.5	0.0	3.6
139	1.6	-0.10	3282	0.1	0.0	3.2
140	1.5	-0.10	3138	0.6	0.0	3.7
141	1.4	-0.10	2993	0.4	0.0	3.5
142	1.3	-0.10	2846	0.3	0.0	3.4
143	1.2	-0.10	2699	0.4	0.0	3.5
144	1.1	-0.10	2550	0.3	0.0	3.4
145	1.0	-0.10	2402	0.6	0.0	3.7
146	0.9	-0.10	2254	0.9	0.0	4.0
147	0.8	-0.10	2107	0.3	0.0	3.4
148	0.7	-0.10	1961	0.6	0.0	3.7
149	0.6	-0.10	1819	0.4	0.0	3.5
150	0.5	-0.10	1679	0.3	0.0	3.4
151	0.4	-0.10	1545	1.5	0.0	4.6
152	0.3	-0.10	1415	1.7	0.0	4.8
153	0.2	-0.10	1294	1.4	0.0	4.5
154	0.1	-0.10	1179	1.6	0.0	4.7
155	0.0	-0.10	1074	1.4	0.0	4.5
156	-0.1	-0.05	976	2.3	0.0	5.4
157	-0.2	-0.10	889	2.4	0.0	5.5
158	-0.3	-0.05	812	2.9	0.0	6.0
159	-0.4	-0.05	740	2.7	0.0	5.8
160	-0.6	-0.05	624	4.2	1.1	7.3
161	-0.8	-0.05	533	6.5	3.4	9.6
162	-1.1	-0.05	430	7.8	4.7	10.9
163	-1.5	-0.05	341	11.5	8.4	14.6



# Referências

- [BBC News 2019] BBC News. *Gulf Crisis: Are We Heading for a New Tanker War?* Inglês. BBC News. 18 de jul. de 2019. URL: <https://www.bbc.com/news/world-middle-east-48709049> (acesso em 30/05/2025) (citado na pg. 1).
- [BIDLINGMAIER 1971] Gerhard BIDLINGMAIER. *KM Admiral Graf Spee. Warship Profile No. 4.* Inglês. Windsor: Profile Publications, 1971 (citado na pg. 1).
- [BLAIR 1996] Clay BLAIR. *Hitler's U-Boat War: The Hunters, 1939–1942.* Inglês. New York: Random House, 1996 (citado na pg. 1).
- [CARLUCCI e JACOBSON 2014] Donald E. CARLUCCI e Sidney S. JACOBSON. *Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition.* 2<sup>a</sup> ed. Boca Raton: CRC Press/Taylor & Francis, 2014 (citado nas pgs. 2, 4, 5, 12–14, 16, 18–20).
- [CONNORS 2019] Matthew CONNORS. *The Kriegsmarine and Compound War at Sea in WWII.* Acesso em: 30 mai. 2025. Center for International Maritime Security. Jan. de 2019. URL: <http://cimsec.org/the-kriegsmarine-and-compound-war-at-sea-in-wwii/> (citado na pg. 1).
- [CORRIVEAU 2017] Daniel CORRIVEAU. “Validation of the nato armaments ballistic kernel for use in small-arms fire control systems”. *Defence Technology* 13.3 (2017), pp. 188–199. DOI: [10.1016/j.dt.2017.04.006](https://doi.org/10.1016/j.dt.2017.04.006) (citado na pg. 4).
- [CROSBY 2024] Andrew CROSBY. *Asymmetric Naval Strategies: Overcoming Power Imbalances to Contest Sea Control.* Inglês. Center for International Maritime Security (CIMSEC). 24 de abr. de 2024. URL: <https://cimsec.org/overcoming-relative-naval-power-weakness-to-contest-command-of-the-sea/> (acesso em 30/05/2025) (citado na pg. 1).
- [DiGIULIAN 2012] Tony DiGIULIAN. *United States of America 5“/38 (12.7 cm) Mark 12.* Ficha técnica do canhão naval 5“/38, incluindo dados de cadência de tiro e elevação. NavWeaps.com. 2012. URL: [http://www.navweaps.com/Weapons/WNUS\\_5-38\\_mk12.php](http://www.navweaps.com/Weapons/WNUS_5-38_mk12.php) (acesso em 17/11/2025) (citado nas pgs. 27, 32, 33).

- [GKRITZAPIS *et al.* 2007] Dimitris GKRITZAPIS, Elias PANAGIOTOPoulos, Dionysios P. MARGARIS e Dimitris G. PAPANIKAS. “A six degree of freedom trajectory analysis of spin-stabilized projectiles”. In: *AIP Conference Proceedings*. Vol. 963. 1. AIP Publishing, 2007, pp. 1187–1194. doi: [10.1063/1.2835958](https://doi.org/10.1063/1.2835958) (citado na pg. 2).
- [GOLDSTEIN *et al.* 2002] Herbert GOLDSTEIN, Charles P. POOLE e John L. SAFKO. *Classical Mechanics*. 3<sup>a</sup> ed. Addison-Wesley (Pearson Education, Inc.), 2002. ISBN: 978-0201657029 (citado nas pgs. 5–13).
- [HANDEL-MAZZETTI 1956] Paul HANDEL-MAZZETTI. “The scharnhorst-gneisenau team at its peak”. Inglês. *U.S. Naval Institute Proceedings* 82.8 (1956), pp. 854–857 (citado na pg. 1).
- [HASELTINE 1969] W. R. HASELTINE. *Yawing Motion of 5.0 Mk 41 Projectile Studied by Means of Yaw Sondes*. Inglês. Technical Publication NWC TP 4779. AD0862065. China Lake, CA: Naval Weapons Center, ago. de 1969. URL: <https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/AD0862065.pdf> (acesso em 13/11/2025) (citado nas pgs. 4, 26).
- [KHALIL *et al.* 2009] M. KHALIL, H. ABDALLA e O. KAMAL. “Dispersion analysis for spinning artillery projectile”. In: *13th International Conference on Aerospace Sciences & Aviation Technology (ASAT-13)*. Cairo, Egypt: MTC, 2009, pp. 1–12 (citado na pg. 3).
- [KIRICHENKO 2025a] David KIRICHENKO. *Ukraine’s Innovative Defense Tech Sector Is the Country’s Trump Card*. Acesso em: 30 mai. 2025. Atlantic Council. Mar. de 2025. URL: <https://www.atlanticcouncil.org/blogs/ukrainealert/ukraines-innovative-defense-tech-sector-is-the-countrys-trump-card> (citado na pg. 2).
- [KIRICHENKO 2025b] David KIRICHENKO. *Ukraine’s Marauding Sea Drones Bewilder Russia*. Acesso em: 30 mai. 2025. Center for European Policy Analysis. Jan. de 2025. URL: <https://cepa.org/article/ukraines-marauding-sea-drones-bewilder-russia> (citado na pg. 2).
- [KROESE *et al.* 2011] Dirk P. KROESE, Thomas TAIMRE e Zdravko I. BOTEV. *Handbook of Monte Carlo Methods*. Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011. doi: [10.1002/9781118014967](https://doi.org/10.1002/9781118014967) (citado nas pgs. 5, 23, 32).
- [LEONARDO DRS 2020] LEONARDO DRS. *76 mm Shipboard Gun – 76/62 Super Rapide Brochure*. 2020. URL: [https://www.leonardodrs.com/wp-content/uploads/2023/08/76mm-shipboard\\_brochure.pdf](https://www.leonardodrs.com/wp-content/uploads/2023/08/76mm-shipboard_brochure.pdf) (acesso em 05/04/2025) (citado na pg. 2).
- [LEVI 2014] Mark LEVI. *Classical Mechanics with Calculus of Variations and Optimal Control: An Intuitive Introduction*. Vol. 69. Student Mathematical Library. Providence, RI: American Mathematical Society, 2014. ISBN: 978-0-8218-9138-4 (citado nas pgs. 5, 7–9, 12).

## REFERÊNCIAS

- [LIU *et al.* 2011] Yong LIU, Kai LI, Xiaolong SONG e Xuefeng YAO. “Monte carlo ballistic simulation applied to dispersion analysis of starting control points for antitank missile”. In: *2011 International Conference on Electronics, Communications and Control (EMEIT)*. IEEE. 2011, pp. 2929–2932. doi: [10.1109/EMEIT.2011.6023691](https://doi.org/10.1109/EMEIT.2011.6023691) (citado nas pgs. 3, 4).
- [MARDER 1969] Arthur J. MARDER. *From the Dreadnought to Scapa Flow: Volume IV, 1917 – Year of Crisis*. Inglês. London: Oxford University Press, 1969 (citado na pg. 1).
- [McCoy 2012] Robert L. McCoy. *Modern Exterior Ballistics: The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*. Atglen, PA: Schiffer Publishing, 2012 (citado nas pgs. 2, 4, 5, 12, 16, 20, 21, 26, 27, 30, 31).
- [MERCOLIANO 2019] Salvatore R. MERCOLIANO. *Escorting in the Persian Gulf: Firefighting, Policing, or Bodyguarding?* Acesso em: 30 mai. 2025. Center for International Maritime Security. Ago. de 2019. URL: <http://cimsec.org/escorting-in-the-persian-gulf-firefighting-policing-or-bodyguarding/> (citado na pg. 1).
- [NAVIAS e HOOTON 1996] Martin S. NAVIAS e E. R. HOOTON. *Tanker Wars: The Assault on Merchant Shipping during the Iran–Iraq Conflict, 1980–1988*. Inglês. London: I.B. Tauris, 1996 (citado na pg. 1).
- [PHILLIPS 2024] Stephen PHILLIPS. *Revisiting the Tanker War*. Acesso em: 30 mai. 2025. War on the Rocks. Mar. de 2024. URL: <https://warontherocks.com/2024/03/revisiting-the-tanker-war/> (citado na pg. 1).
- [PODER NAVAL 2023] PODER NAVAL. *Os navios da classe Garcia na Marinha do Brasil*. Português. Artigo com histórico e dados de serviço dos navios da classe *Garcia* na Marinha do Brasil. 29 de out. de 2023. URL: <https://www.naval.com.br/blog/2023/10/29/os-navios-classe-garcia-na-marinha-do-brasil/> (acesso em 13/11/2025) (citado na pg. 28).
- [Ross 2014] Sheldon M. Ross. *Introduction to Probability Models*. 11<sup>a</sup> ed. Oxford: Academic Press, 2014. ISBN: 9780124080809 (citado nas pgs. 5, 23, 24, 32).
- [SELIGMAN e BERG 2023] Lara SELIGMAN e Matt BERG. *A \$2M missile vs. a \$2,000 drone: Pentagon worried over cost of Houthi attacks*. 2023. URL: <https://www.politico.com/news/2023/12/19/missile-drone-pentagon-houthi-attacks-iran-00132480> (acesso em 04/04/2025) (citado na pg. 2).
- [SUPERVISOR OF SHIPBUILDING (SUPSHIP), SEATTLE, WASHINGTON 1965] SUPERVISOR OF SHIPBUILDING (SUPSHIP), SEATTLE, WASHINGTON. *USA – DEG-1 USS Brooke: Booklet of General Plans*. Inglês. Booklet of General Plans. Guided missile escort destroyer, Brooke-class. Seattle, WA: U.S. Navy, dez. de 1965. URL: <https://archive.org/details/deg1bogg1965> (acesso em 13/11/2025) (citado nas pgs. 4, 28, 29).

- [SUTTON 2024] H. I. SUTTON. *Overview of Maritime Drones (USVs) of the Russo-Ukraine War*. Inglês. Artigo em linha no *Covert Shores* com dimensões e descrições técnicas de diversos USVs, incluindo o *Sea Baby*. 2024. URL: <http://www.hisutton.com/Russia-Ukraine-USVs-2024.html> (acesso em 13/11/2025) (citado nas pgs. 4, 28, 32).
- [THE KYIV INDEPENDENT 2024] THE KYIV INDEPENDENT. *Crowdfunding campaign raises \$7.8 million for Ukrainian Sea Baby naval drones*. Inglês. Notícia que cita o custo unitário aproximado de um drone *Sea Baby* (8,5 milhões de hryvnias) e suas características básicas. 23 de fev. de 2024. URL: <https://kyivindependent.com/crowdfunding-campaign-raises-7-8/> (acesso em 13/11/2025) (citado nas pgs. 4, 29).
- [THE KYIV INDEPENDENT 2025] THE KYIV INDEPENDENT. *'Successful' Ukrainian naval drone strike disables 2 Russian shadow fleet tankers, source says*. 29 de nov. de 2025. URL: <https://kyivindependent.com/ukrainian-naval-drones-behind-successful-strike-on-2-russian-shadow-fleet-tankers/> (acesso em 29/11/2025) (citado na pg. 2).
- [THOMAS e GOSWICK 1967] M. A. THOMAS e T. E. GOSWICK. *Naval Gunfire Dispersion*. Inglês. Technical Memorandum K-26/67. AD0651998. Dahlgren, VA: U.S. Naval Weapons Laboratory, mai. de 1967. URL: <https://apps.dtic.mil/sti/trecms/pdf/AD0651998.pdf> (acesso em 13/11/2025) (citado na pg. 4).
- [TREVITHICK 2024] Joseph TREVITHICK. *Phalanx CIWS Costs \$3,500 Per Second in Ammo To Fire*. 2024 (citado na pg. 2).
- [U.S. NAVAL INSTITUTE 1989] U.S. NAVAL INSTITUTE. “Garcias and brookes: one last look”. Inglês. *Naval History Magazine* (abr. de 1989). Artigo com panorama histórico e estimativas de custo das classes *Garcia* e *Brooke*. URL: <https://www.usni.org/magazines/naval-history-magazine/1989/april/garcias-and-brookes-one-last-look> (acesso em 13/11/2025) (citado na pg. 28).
- [GAO 1990] UNITED STATES GENERAL ACCOUNTING OFFICE. *Defense Budget: Potential Reductions to DOD's Ammunition Budgets*. Inglês. Report GAO/NSIAD-90-256. Washington, DC: U.S. General Accounting Office, set. de 1990. URL: <https://www.gao.gov/assets/nsiad-90-256.pdf> (acesso em 13/11/2025) (citado nas pgs. 4, 27).
- [US INFLATION CALCULATOR 2025] US INFLATION CALCULATOR. *Inflation Calculator / Find US Dollar's Value From 1913–2025*. Inglês. Calculadora de inflação baseada em dados oficiais do U.S. Bureau of Labor Statistics. 2025. URL: <https://www.usinflationcalculator.com/> (acesso em 13/11/2025) (citado nas pgs. 27, 28).
- [WHYTE 1973] Robert H. WHYTE. *SPIN-73: An Updated Version of the SPINNER Computer Program*. Inglês. Technical Report TR-4588. AD0915628. Dover, NJ: Picatinny Arsenal, nov. de 1973. URL: <https://apps.dtic.mil/sti/citations/AD0915628> (acesso em 13/11/2025) (citado nas pgs. 4, 25–27).

## REFERÊNCIAS

[WIKIPEDIA CONTRIBUTORS 2025] WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. *5-inch/54 caliber Mark 42 gun*. Artigo com dados básicos de desempenho do canhão naval 5-inch/54 Mark 42. Wikipedia, The Free Encyclopedia. 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/5-inch/54-caliber\\_Mark\\_42\\_gun](https://en.wikipedia.org/wiki/5-inch/54-caliber_Mark_42_gun) (acesso em 20/11/2025) (citado na pg. 27).