Aplicação dos 4 métodos de Monte Carlo para resolução de integral
MAP 2212 EP2

Luiz Guilherme De Padua Sanches

Abril 2023, NUSP = 13686431

1 Requisitos e considerações

Foi solicitado pelo professor a resolução da seguinte equação:

$$\int_0^1 e^{-0.557072566x} \cos 0.46553151806x \, dx$$

Para a resolução, foi solicitado a utilização dos Métodos de Monte Carlo vistos em sala de aula. Querendo também um erro relativo de 0.0005 sem saber o valor da integral.

O professor informou, em sala de aula, que esperava que o valor N fosse encontrado dentro do programa, não precisando de um cálculo externo.

Para a mostração dos cálculos será utilizada a SEED = 13686431.

As imagens de gráficos foram geradas no Geogebra.

O cálculo da integral e do polinômio aproximador foi feito no Symbolab.

A geração dos números foi utilizando a biblioteca Random e os cálculos estatísticos (menos do Método de Control Variables) foram calculados pela biblioteca Numpy. O Método de Control Variables tem a parte de estatística calculada com outra biblioteca, a biblioteca Statistics, por ser mais pratico no cálculo da covariância.

2 Métodos de Monte Carlo

2.1 Método de Monte Carlo Hit or Miss

O Método Hit or Miss se consiste em gerar números aleatórios (0 a 1, no caso desse exercício), uniformes, para a coordenada X e Y. Após ser gerado, verifica se as coordenas geradas estão dentro da área de integração. Assim, aproximamos a área da seguinte forma:

$$A(x) = \frac{I}{T}$$

I = Número de elementos dentro da área.
T = Número total de elementos.

O desvio padrão é dado por:

$$Dp = \sqrt{A(1-A)}$$

Aplicando o método até que 2 desvios padrões divididos pela raiz de T sejam menor que o requisitado chegamos ao seguinte resultado para a integral:

O valor estimado é: 0.7431893440138213
N = 5528836
O valor em relação a integral calculada via Symbolab é: 1.0002144516558165

2.2 Método de Monte Carlo Cru

O Método de Monte Carlo Cru consiste em gerar um valor de X aleatório (uniforme), calcular a função nesse ponto e multiplicar pelo intervalo (0 a 1 nesse caso). Assim encontramos a área da seguinte forma:

$$A = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} f(Xi)$$

f(Xi) = valor da função no ponto Xi.
T = número total de elementos.

O desvio padrão é dado por:

$$Dp = \sqrt{E((f(Xi))^2) - E(f(Xi))^2}$$

E = esperança.

Aplicando o método até que 2 desvios padrões divididos pela raiz de T sejam menor que o requisitado chegamos ao seguinte resultado para a integral:

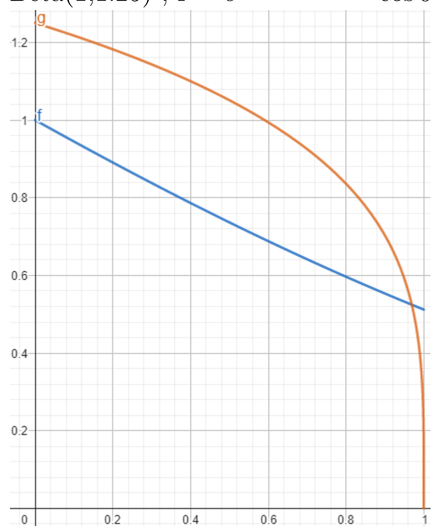
O valor estimado é: 0.7430329433059115
N = 581078
O valor em relação a integral calculada via Symbolab é: 1.0000039612208276

2.3 Método de Monte Carlo Importance Sampling

O Método de Monte Carlo Importance Sampling consiste em gerarmos um valor de X aleatório com uma distribuição semelhante a nossa área de integração, calcular a função nesse ponto e multiplicar pelo intervalo (0 a 1 nesse caso).

A distribuição escolhida foi a distribuição Beta com parâmetros de (1, 1.25). Ela foi escolhida pois a aproximação tem uma diferença (visualmente) quase constante e que nessa configuração gera números de 0 a 1.

Figura 1: g = Beta(1,1.25) ; f = $e^{-0.557072566x} \cos 0.46553151806x$



A área estimada é dada pela seguinte fórmula:

$$A = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} \frac{f(Xi)}{g(Xi)}$$

f(Xi) = valor da função no ponto Xi.
T = número total de elementos.
g(Xi) = valor da distribuição escolhida no ponto Xi.

O desvio padrão é dado por:

$$Dp = \sqrt{E((\frac{f(Xi)}{g(Xi)})^2) - E(\frac{f(Xi)}{g(Xi)})^2}$$

E = esperança.

Aplicando o método até que 2 desvios padrões divididos pela raiz de T sejam menor que o requisitado chegamos ao seguinte resultado para a integral:

O valor estimado é: 0.7430714587706145
N = 189623
O valor em relação a integral calculada via Symbolab é: 1.0000557969000101

2.4 Método de Monte Carlo Control Variables

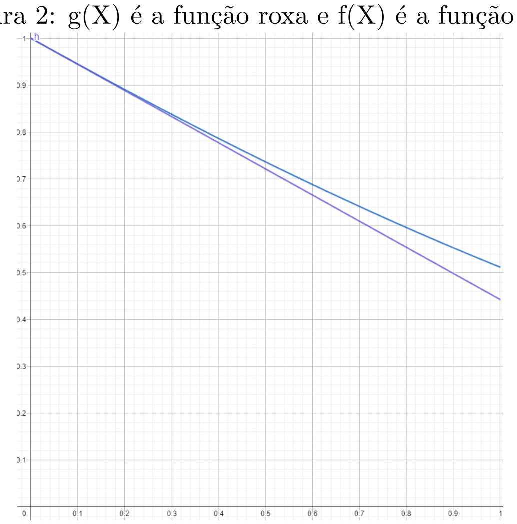
O Método de Monte Carlo Control Variables consiste em aproximar a função que queremos integrar por um polinômio, gerar um valor de X aleatório (uniforme), calcular a função nesse ponto, subtrair o valor do polinômio nesse ponto e somar o valor da integral desse polinômio. Assim a área estimada é dada pela seguinte fórmula:

$$A = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(f(Xi) - g(Xi) + \int_0^1 g(X)\,dx\ \right)$$

f(Xi) = valor da função no ponto Xi.
T = número total de elementos.
g(Xi) = valor do polinômio aproximador no ponto Xi.
g(X) = polinômio aproximador.

Utilizando a fórmula de Taylor e aproximando com uma função de primeiro grau (há aproximações melhores, mas para mostrarmos o funcionamento do programa considerei adequada essa) chegamos ao seguinte polinômio:

Figura 2: g(X) é a função roxa e f(X) é a função azul



$$g(X) = 1 - 0.557072566X$$

O polinômio possui uma integral com o seguinte valor:

$$0.721463717 = \int_0^1 g(X)\, dx$$

Como nesse caso, o cálculo do desvio padrão é custoso, mas são poucas repetições, ele é realizado apenas a cada 10 eventos.

O desvio padrão é dado por:

$$Dp = \sqrt{(VAR(f(Xi)) + VAR(g(Xi)) - 2COV(f(Xi), g(Xi)))}$$

Aplicando o método até que 2 desvios padrões divididos pela raiz de T sejam menor que o requisitado chegamos ao seguinte resultado para a integral:

O valor estimado é: 0.742928672117127
N = 12232
O valor em relação a integral calculada via Symbolab é: 0.9998636288132741

3 Testes e conclusão

Rodando o programa com uma SEED(k), com k variando de 0 a 199 chegamos ao número N de eventos médios de cada item:

Para o método Hit or Miss: N = 5533445.49
Para o método Crude: N = 579645.135
Para o método Important Sampling: N = 182344.75
Para o método Control Variable: N = 12034.07

Chegamos a conclusão que o Método de Monte Carlo Control Variables é o mais eficiente. A informação inicial, antes da aplicação do método, é de grande valor para as poucas interações. O maior problema é o cálculo de variância, que da forma que foi implementada no programa, é custosa, demorando mais do que o Important Sampling, mesmo que rode menos vezes. Outra implementação mais eficiente provavelmente mostraria que esse é o método mais rápido.

O Método de Monte Carlo Importance Sampling se revela uma boa opção, rodando rapidamente e menos vezes do que os métodos Hit or Miss e Crude, mas houve problemas na minha parte de conseguir utilizar outras distribuições para a aproximação. Creio que causado pelas outras distribuições gerarem valores até o infinito.

Os outros métodos se mostram mais rudimentares, sendo mais fáceis de aplicar, ainda que menos eficientes. O método Cru demanda menos repetições para atingir a precisão desejada que o método Hit or Miss, mas esse segundo possui uma variância mais fácil de ser calculada (Bernoulli).

Assim, cada método possui suas diferenças em implementação e complexidade de ser executado. Devendo escolher, dependendo das informações previas, necessidades e habilidades que possuímos, o método que no momento julgamos ser o mais adequado.