Thème : Distributions usuelles Solution de la Série 6

Exercice 1

Donnée: *Supposons que le temps d'attente d'un bus à un arrêt donné entre 8h00 et 8h30 peut être modélisé par une variable aléatoire issue d'une distribution uniforme. Gaston est arrivé à cet arrêt à 8h00.*

a) *Calculer la probabilité que Gaston doive attendre plus de 10 minutes*

Nous avons ici une distribution uniforme $\sim \mathcal{U}(0, 30)$ attention à ne pas la confondre avec une lois normal ($\sim \mathcal{N}$). Les paramètres de $\mathcal{U}$ sont le début et la fin de l'interval dans lequel X prend ses valeurs càd $X = x, x \in [a, b]$.

1. $a = 0$
2. $b = 30$
3. $x \in [0, 30]$ et $x = 10$ selon la donnée

$$P(X > 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \frac{10 - 0}{30 - 0} = \frac{2}{3}$$

Puisque pour les variable aléatoire ***continue***, $P(X = x_i) = 0$, nous n'avons pas besoins de prendre en compte $P(X = 10)$ donc il n'est pas nécesaire de changer l'inégalité

b) *En sachant que le bus n'est pas encore arrivé à 8h15, déterminer la probabilité que Gaston doive encore attendre au moins 10 minutes supplémentaires.*

Il y a "en sachant", donc posons comme d'habitude nos règles :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{1}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2}$$

Mathématiquement la donnée s'écrit de la manière suivante et en utilisant (1) peut se ré-écrire :

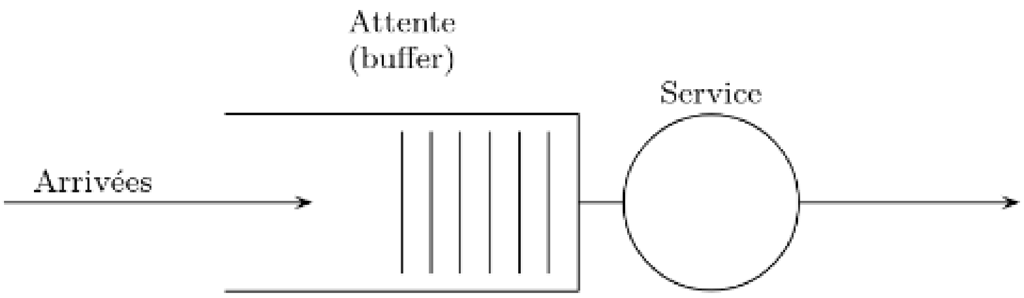
$$P(X > 25|X > 15) = \frac{P\big(X > 15 \mid X > 25\big) \cdot P(X > 25)}{P(X > 15)}$$

Cependant, nous savons que $P(X > 15|X > 25) = 1$ donc :

$$P(X > 25|X > 15) = \frac{P(X > 25)}{P(X > 15)} = \frac{1 - P(X < 25)}{1 - P(X < 15)} = \frac{1 - \frac{25-0}{30-0}}{1 - \frac{15-0}{30-0}} = \frac{1}{3}$$

Exercice 2

Donnée: *Un serveur de calcul reçoit des requêtes à fréquence régulière. Elles sont traitées indépendamment les unes après les autres dans leur ordre d'arrivée. On suppose que le nombre de requêtes qui arrivent au serveur peut être modélisé par un processus de Poisson. Les requêtes sont envoyées vers le serveur à un*



a)

Exercice 3

Donnée: *Le système informatique d'une petite PME est formé de deux serveurs indépendants. On suppose que la durée de vie (temps écoulé avant un crash) de chacun d'eux peut être modélisée par une variable aléatoire issue d'une distribution exponentielle. La durée de vie espérée de chacun des deux serveurs est de 150 jours.*

a) *Calculer la probabilité que l'un des deux serveurs indépendamment de l'autre fonctionne pendant au moins 100 jours.*

Formule de répartition d'une distribution exponentielle (formulaire) :

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La durée de vie espérée est de 150 jours (donnée), donc :

$$\mathbb{E} = 150$$

et pour une distribution exponentielle, l'espérance vaut

$\mathbb{E} = \frac{1}{\lambda}$ donc $\lambda = \frac{1}{150}$ donc,

$$\begin{aligned} P(x > 100) &= 1 - P(x \leq 100) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{\lambda}x}) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{150}100}) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{100}{150}}) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{10}{15}}) \\ &= e^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

b) *Déterminer la probabilité que les deux serveurs fonctionnent ensemble et simultanément pendant au moins 100 jours.*

On cherche P($x_1 \geq 100$ et $x_2 \geq 100$)

Comme les deux serveurs sont indépendants, $f_{x_1,x_2} = f_{x_1}(u) \cdot f_{x_2}(u)$ et donc :

$$e^{-2/3} \cdot e^{-2/3} = e^{4/3}$$

Exercice 4

Donnée: *Considérons une variable aléatoire X issue d'une distribution normale de paramètres $\mu = 3$ et $\sigma^2 = 9$. Calculez les probabilités suivantes*

a) $P(2 < X \leq 5)$

b) $P(X > 0)$

c) $P(0 < X \leq 6)$

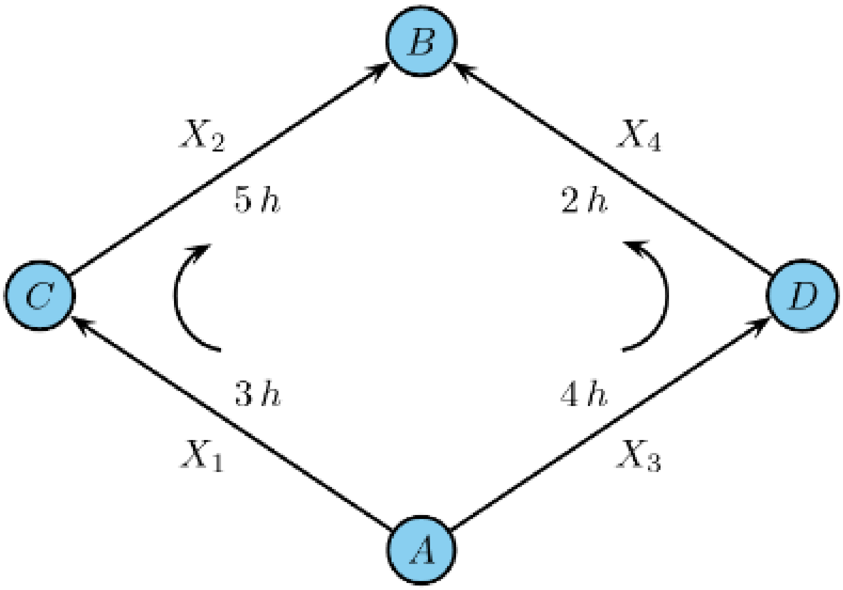
d) $P(2 \leq X \leq 3)$

Exercice 5

Donnée: *Dans sa tournée, un voyageur de commerce doit se rendre de la ville A à la ville B. Il dispose de deux itinéraires : le premier en passant par la ville C et le second par la ville D. Aucune liaison directe entre A et B existe. Les temps en heures (h) que passe sur la route le voyageur de commerce pour se déplacer de A à B via les villes C et D peuvent être représentés par des variables aléatoires indépendantes* X_1, X_2, X_3, X_4 *définies par*

1. X_1 : *"Durée du trajet entre les villes A et C";*
2. X_2 : *"Durée du trajet entre les villes C et B";*
3. X_3 : *"Durée du trajet entre les villes A et D";*
4. X_4 : *"Durée du trajet entre les villes D et B";*

On suppose que ces variables aléatoires sont toutes issues d'une distribution normale. Les temps espérés pour se déplacer d'une ville à l'autre se trouvent dans la figure ci-dessous et le coefficient de variation de chacune de ces variables aléatoires vaut 0.2.



a) *Le coefficient de variation δ_X d'une variable aléatoire X est donné par $\frac{\sigma_X}{\mu_X}$. Calculer les écarts-type des variables X_1, X_2, X_3, X_4.*

Premièrement, $\delta = \frac{\sigma}{\mu} \iff \sigma = \mu \cdot \delta$. Comme, $\delta = 0.2$, nous déduisons pour chaque distribution :

1. $\sigma_1 : \mu_1 \cdot 0.2 = 0.6$
2. $\sigma_2 : \mu_2 \cdot 0.2 = 0.1$
3. $\sigma_3 : \mu_3 \cdot 0.2 = 0.8$
4. $\sigma_4 : \mu_4 \cdot 0.2 = 0.4$

Dès lors, nous pouvons décrire chaque distribution comme :

1. $X_1 \sim \mathcal{N}\left(3, (0.6)^2\right)$
2. $X_2 \sim \mathcal{N}\left(5, (1)^2\right)$
3. $X_3 \sim \mathcal{N}\left(4, (0.8)^2\right)$
4. $X_4 \sim \mathcal{N}\left(2, (0.4)^2\right)$

b) *Calculer la probabilité que le trajet entre la ville A et B via C dure moins de 9 heures.*

$$\text{Définissons : } T_1 = X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \mathcal{N}(8, 1.36)$$

$$\begin{aligned} P(A \to B \to C \leq 9) &= P(X_1 + X_2 \leq 9) \\ &= P(T_1 \leq 9) \\ &= P\left(\frac{T_1 - 8}{\sqrt{1.36}} \leq \frac{9-8}{\sqrt{1.36}}\right) \\ &= \phi(0.86) \approx 0.9 \end{aligned}$$

c) *Déterminer la probabilité que la durée du trajet entre A et B via C soit plus courte que celle via D en considérant la varible aléatoire $T = T_1 - T_2$ ou T_1 représente la durée du trajet via C et T_2 celle du trajet via D.*

Commençons par calculer T_2 de la même manière que T_1,

$$T_1 \sim \mathcal{N}\left(8, 0.6^2 + 1^2\right) = \mathcal{N}(8, 1.36)$$
$$T_2 \sim \mathcal{N}\left(6, 0.4^2 + 0.8^2\right) = \mathcal{N}(6, 0.8)$$

Alors, (attention pas évident)

$$T = T_1 - T_2 \sim \mathcal{N}\left(8 - 6, 1.36 + 0.8\right) = \mathcal{N}(2, 2.16)$$

Ensuite, centrons et réduisons la probabilité cherchée $P(T < 0)$ sans oublier de centrer réduire.

$$\begin{aligned} P(T < 0) &= P\left(\frac{T-2}{\sqrt{2.16}} \leq \frac{-2}{\sqrt{2.16}}\right) \\ &\approx \phi(-1.36) \\ &= 1 - \phi(1.36) \\ &\approx 0.087 \end{aligned}$$

Exercice 6

Donnée: *Le temps en secondes que passe un internaute sur une page d'un site WEB peut être décrit par une variable aléatoire X telle que $Y = \ln(X)$ est une variable aléatoire issue d'une distribution normale d'espérance 0.5 et de variance 1. On dit que X est une variable aléatoire issue d'une distribution log-normale.*

a) *Exprimer la fonction de répartition* F_x *de la variable aléatoire* X *en utilisant la fonction de répartition* ϕ.

X : "Temps en secondes que passe un internaute sur une page WEB"
Comme $Y = \ln(X)$, on a $Y \sim \mathcal{N}(0.5, 1)$

$$\begin{aligned} F_x(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(\ln(X) \leq \ln(x)) \\ &= P(Y \leq \ln(x)) \end{aligned}$$

Après centrage et réduction,

$$\begin{aligned} F_x(x) &= P(Y \leq \ln(x)) \\ &= P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

b) *Calculer la probabilité qu'une page soit regardée pendant plus de 10 secondes.*

Avec $\mu = 0.5$ et $\sigma = 1$,

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= 1 - P(X \leq 10) \\ &= 1 - F_x(x) \\ &= 1 - \phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right) \\ &\approx 1 - \phi(1.8) \\ &\approx 0.036 \end{aligned}$$