Thème : distributions usuelles Solution de la Série 4

Exercice 1

Donnée: *Une petite chenille descend doucement, lentement le long du grillage représenté dans la Figure 1. À chaque point gras de la figure appelé épissure, elle choisit la maille à votre gauche une fois sur trois, la maille à votre droite deux fois sur trois. La chenille descend quatre niveaux.*

a) *Déterminer la loi de probabilité de X i.e. les probabilités $P(X = x)$ avec $x = 0, 1, 2, 3, 4$.*

Nous voyons qu'à chaque épissure nous avons deux possibilités. L'une avec $\frac{2}{3}$ de chance d'être pris et l'autre avec 1 tier. Ainsi pour partir du départ et arriver à 0, nous devons toujours prendre le chemin de droite donc la réalisation 0 arrive avec une probabilité $(\frac{2}{3})^3$ nous voyons la même chose avec la réalisation 4 où il faut prendre à chaque fois choisir le chemin de gauche qui arrive avec une proba de $\frac{1}{3}$ indépendamment des choix précédents. Nous pouvons faire la même chose pour la $X = 1$. En effet il pour avoir cette réalisation de X, il nous faut prendre 3 fois à droite et 1 fois à gauche. Cependant il faut noter que la position de notre gauche peut être n'importe où dans le chemin. Nous pouvons faire dddg ou ddgd ou dgdd ou gddd (d = droite et g = gauche) et nous arrivons avec chaque chemin à la réalisation 1. Nous avons donc 4 possibilités. Pour $x = 2$ nous avons 2 gauches et 2 droites, nous devons donc dans notre chemin De 4 étapes placé nos deux gauches. il existe 6 possibilités de placer 2 objets parmis 4. Nous comprenons maintenant qu'il s'agit d'une variable aléatoire discrète provenant d'une **distribution binomiale**. Nous avons donc la lois de probabilité suivante :

X = x	0	1	2	3	4
P(X=x)	$(\frac{2}{3})^4$	$4(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})$	$6(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2$	$4(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^3$	$(\frac{1}{3})^4$

b) *De quelle distribution est issue la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.*

Comme dit précédement il s'agit d'une lois d'une **distribution binomiale** pour le voir il faut noter :

1. le fait d'avoir uniquement deux possibilités à chaque moment de *"choix"*
2. la symétrie dans les probabilités

Exercice 2

Donnée: *Un signal transmis par un canal est reçu sans erreur avec une probabilité de 0.9. On suppose que les transmissions sont indépendantes les une des autres*

a) *Calculer la probabilité que parmi les 20 signaux transmis, plus de deux signaux soient reçus avec erreur*

En se rappelant la théorie, on sait que la loi binomiale compte le nombre de succès parmis n épreuves indépendantes. Comme dans les séries précédentes, on voit "plus de/que" il faut donc faire 1 - le complémentaire de nos évènements puisque toutes nos lois permettent de calculer $P(X < x_i)$ Appelons A l'évenement "avoir plus de deux erreurs". Plus explicitement nous devons calculer :

$$\begin{aligned} 1 &- P(\text{"avoir exactement 0 erreur"}) \\ &- P(\text{"avoir exactement 1 erreur"}) \\ &- P(\text{"avoir exactement 2 erreurs"}) \\ \\ &= P(A) \end{aligned}$$

$$P(A) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0.9^{20}(0.1)^0 - \binom{20}{1}(0.9)^{19}(0.1)^1 - \binom{20}{2}(0.9)^{18}(0.1)^2 = 0.32$$

b) *Déterminer la probabilité que le cinquième signal transmis soit le premier signal reçu avec une erreur*

Il s'agit de la probabilité que le premier soit reçu sans erreur ET que le second le soit aussi $\cdots$ ET que le 5iem soit recu AVEC erreur Donc, comme les événements sont indépendants nous pouvons multiplier les probabilités. Nous n'avons pas de coefficient devant puisque nous avons un seul arrangement possible pour avoir 4 justes suivit d'un faux

$$\underbrace{0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot}_{\text{proba que les 4 premiers soit justes}} \quad 0.1 = 0.06561$$

c) *Calculer la probabilité que le dixième signal transmis soit le quatrième signal re4u avec erreur.*

Nous avons donc 9 signaux transmis dont 3 avec erreurs suivit d'un signal avec une erreur

$$\underbrace{\binom{9}{3}(0.9)^6 \cdot (0.1)^3}_{\text{9 signaux dont 3 avec erreurs}} \quad \cdot \quad \overbrace{0.1}^{\text{une erreur}}$$

la proba vaut donc 0.004464

Exercice 3

Donnée: *Une platforme petrolière a été construite à une hauteur de 8 mètres au dessus du niveau de la mer. Selon les statistiques, les vagues atteignent le plateau de la plate-forme une année donnée avec probabilité 0.05. On admet que les vagues parviennent au plateau indépendamment des années*

a) *Déterminer la probabilité qu'a partir de cette année les vagues déferleront sur la plate-forme pour la première fois dans l'une des cinq prochaines années*

On se rappelle la théorie sur la loie géométrique et on se rappelle qu'elle compte le nombre d'essaie necessaire avant d'avoir la première épreuve réussite. Nous avons comme dans l'exercice précédent une suite d'épreuve indépendante avec une probabilité 1-p d'échouée. Définission p la probabilité que les vagues atteignent la platforme. nous avons la probabilité que "les vagues atteignent la platforme dans les 5 prochaines années" qui est égale à la proba qu'elle les atteignent l'année prochaine, ou qu'elle ne réussissent pas la première année, mais y arrivent l'année suivante, ou durant la troisième année(mais pas durant les deux premières) etc. Donc la proba vaut

$$0.05^1 + 0.95 \cdot 0.05 + 0.95^2 \cdot 0.05 + 0.95^3 \cdot 0.05 + 0.95^4 \cdot 0.05$$

Donc la proba $= 0.226219$

b) *En sachant que les vavues ne parviendront pas au plateau au minimum pendant les cinq prochaines années, cacluler la probabilité qu'elles déferleront sur la platforme pour la première fois exactement dans huit ans*

Les vagues n'ont pas de mémoire, donc la proba ne change pas en sachant que les 5 prochaines années les vagues ne dépasseront pas le niveau. Ca revient à calculer la proba que durant les 3 prochaines années les vagues ne dépasseront pas le niveau

$$0.95^2 \cdot 0.05 = 0.045125$$

Exercice 4

Donnée: *Un serveur de calcul reçoit des requêtes à fréquence régulière. Elles sont traitées indépendamment les unes après les autres dans leur ordre d'arrivée. On suppose que le nombre de requêtes par minute qui arrivent au serveur peut être modélisé par un processus de Poisson. Les requêtes sont envoyées vers le serveur à un rythme moyen de 6 requêtes par minute.*

a) *Déterminer la probabilité qu'en l'espace d'une minute et demi, au moins deux reqêtes arrivent au server.*

Nous sommes dans le cas d'un processus de poisson. Donc

$$P(N(t) = x) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^x}{x!}$$

Où

1. $N(t)$ compte le nombre d'occurence $= 2$
2. λ est la fréquence d'occurence de l'événement observé $= 6$ par minutes
3. t est le temps durant lequel on compte le nombre d'occurence $= 1.5$ minutes

Au vu de l'énoncé "au moins" nous savons que nous devons faire le complémentaire puisque nos lois de probabilité nous informent toujours sur $P(X < x)$.

$$\begin{aligned} P(N(1.5) \geq 2) =& 1 - \overline{P(N(1.5) \geq 2)} \\ =& 1 - P(N(1.5) < 2) \end{aligned}$$

Comme nous sommes dans un cas discret, nous avons :

$$P(N(1.5) < 2) = P(N(1.5) = 0) + P(N(1.5) = 1)$$

et donc

$$\begin{aligned} P(N(1.5) \geq 2) =& 1 - P(N(1.5) = 0) - P(N(1.5) = 1) \\ =& 1 - e^{-6 \cdot 1.5} \cdot \frac{(6 \cdot 1.5)^0}{0!} - e^{-6 \cdot 1.5} \cdot \frac{(6 \cdot 1.5)^1}{1!} \\ =& 1 - e^{-6 \cdot 1.5} - 9 \cdot e^{-6 \cdot 1.5} \\ =& 1 - 10e^{-9} \end{aligned}$$

b) *En sachant que les deux requêtes sont arrivées en l'espace d'une minute, calculer la probabilité qu'elles soient toutes les deux arrivées dans les 20 premières secondes*

Nous voyons ici le fameux "en sachant" qui nous dit d'utiliser bayes.

$$P\Big(N(t_1) = 2 \mid N(t_2) = 2\Big)$$

1. $t_1 = 20$ secondes $= \frac{1}{3}$ minutes
2. $t_2 = 1$ minute

Nous mettons tout en minutes pour avoir des unités cohérente par rapport à notre λ qui est en minute

$$P\Big(N(1/3) = 2 \mid N(1) = 2\Big)$$

Avec

$$P(N(1/3) = 2) = e^{-6 \cdot 1/3} \cdot \frac{(6 \cdot 1/3)^2}{2!}$$
$$P(N(1) = 2) = e^{-6 \cdot 1} \cdot \frac{(6 \cdot 1)^2}{2!}$$

$N(t_1) = 2$ n'est pas compris dans $N(t_2) = 2$ puisque si les requêtes arrivent dans les 20 premières secondes, elles sont forcément dans la première minute mais la minute n'a pas reçu uniquement 2 requêtes. En effet, il peut encore survenir des requêtes durant les 40 secondes suivantes faisant que l'évènement $N(t_1) = 2$ s'est réalisé sans que $N(t_2) = 2$ se soit réalisé puisque il y aurait eu 3 requêtes ou plus durant la minute avec deux durant les 20 premières secondes. Posons A $= (N(1/3) = 2)$ et B $= (N(1) = 2)$. Nous avons $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et

$$P(A \cap B) = P(N(1/3) = 2) \cdot \underbrace{P(N(2/3) = 0)}_{\textbf{0 requêtes en 40 [s]}}$$

$$P\Big(N(1/3) = 2 \mid N(1) = 2\Big) = \frac{P(N(1/3) = 2) \cdot P(N(2/3) = 0)}{P(N(1) = 2)} = \frac{e^{-6 \cdot 1/3} \cdot \frac{(6 \cdot 1/3)^2}{2!} \cdot e^{-6 \cdot 2/3} \cdot \frac{(6 * 2/3)^0}{0!}}{e^{-6 \cdot 1} \cdot \frac{(6 \cdot 1)^2}{2!}}$$

Et ainsi

$$P\Big(N(t_1) = 2 \mid N(t_2) = 2\Big) = \frac{e^{-2} \cdot 2 \cdot e^{-4}}{e^{-6} \cdot 18} = \frac{e^{-4} \cdot 1}{e^{-4} \cdot 9} = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

Une autre manière de faire est la suivante :

$$P\Big(N(1/3) = 2 \mid N(1) = 2\Big) = \frac{\mathbf{P\big(N(1) = 2 | N(1/3) = 2\big)} \cdot P(N(1/3) = 2)}{P(N(1) = 2)}$$

et la probabilité qu'il y aille deux requêtes en 1 minutes sachant qu'il y en a déjà eu deux en 20 secondes c'est egal à la probabilité qu'il n'y en aille 0 en 40 secondes. Donc

$$\frac{\mathbf{P(N(2/3) = 0)} \cdot P(N(1/3) = 2)}{P(N(1) = 2)} = \frac{1}{9}$$

Exercice 5

Donnée: *Un réseau de neurones, outil statistique, est utilisé pour reconnaitre les caractères, par exemple les lettres de l'alphabet ou les chiffres arabes, dans un très long texte manuscrit. On approche le nombre de caractères interprétés incorrectement par le réseau de neurones par une variables aléatoire issue d'une distribution de Poisson d'espérance 5*

a) *Calculer la probabilité qu'au plus 2 caractères d'un très long texte donné soient transcrit incorrectement par le réseau de neurones.*

Avant de commencer la résolution, nous devons noter que **l'espérance** vaut 5. Nous savons que dans ce cas (**variable de Poisson**)

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \iff \lambda = 5$$

Nous avons dans le cas d'une variable de Poisson

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

Et nous voulons calculer $P(X \leq 2)$ Nous sommes dans un cas *discret* donc nous pouvons énumerer les possibilités ≤ 2.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) =& P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
=& e^{-5} \cdot \frac{5^0}{0!} + e^{-5} \cdot \frac{5^1}{1!} + e^{-5} \cdot \frac{5^0}{0!} + e^{5} \cdot \frac{5^2}{2!} \\
=& \frac{2}{2} \cdot e^{-5} + \frac{10}{2} \cdot e^{-5} + \frac{25}{2} \cdot e^{-5} \\
=& \frac{37}{2} e^{-5}
\end{aligned}$$

b) *En sachant que le réseau de neurones a déjà interprété incorrectement au moins un caractère d'un très long texte donné, déterminer la probabilité qu'exactement 2 caractères soient transcrits incorrectement*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \tag{1}$$

Et

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2}$$

Nous avons des probabilité conditionelles puisqu'il y a le fameux "en sachant". Sous forme mathématique, nous avons :

$$P(X = 2|X \geq 1) = \frac{P(X \geq 1|X = 2) \cdot P(X = 2)}{P(X \geq 1)}$$

Cependant, $P(X \geq 1|X = 2)$ vaut 1 et $P(X \geq 1)$ au dénominateur vaut $1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$ Donc nous avons

$$\begin{aligned}
P(X = 2|X \geq 1) &= \frac{P(X \geq 1|X = 2) \cdot P(X = 2)}{P(X \geq 1)} && (3) \\
&= \frac{P(X = 2)}{1 - P(X = 0)} && (4) \\
&= \frac{e^{-5} \cdot \frac{25}{2}}{1 - e^{-5}} = \frac{25 \cdot e^{-5}}{2(1 - e^{-5})} = \frac{25 \cdot e^{-5}}{2e^{-5}(\frac{1}{e^{-5}} - 1)} && (5) \\
&= \frac{25}{2(e^5 - 1)} && (6)
\end{aligned}$$