Министерство науки и образования РФ
Новосибирский государственный технический университет

Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа №1 по численным методам

Прямые методы решения СЛАУ

Факультет: ПМИ
Группа: ПМ-86
Студент: Пустосмехов В.
Преподаватели:
Задорожный Александр Геннадьевич
Токарева Марина Георгиевна

Новосибирск 2010

1 Цель работы

Разработать программу решения СЛАУ методом LU(sq)-разложения с хранением матрицы в профильном формате. Исследовать накопление погрешности и её зависимость от числа обсусловленности. Сравнить реализованный метод по точности получаемого решения и количеству действий с методом Гаусса.

2 Теоретическая часть

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = B \tag{1.1}$$

Прямой метод LU(sq)-разложения основан на разложении матрицы A в произведение нижнетреугольной матрицы L и верхнетреугольной матрицы U, причём $l_{ii} = u_{ii} \forall i$, т.е. диагональные элементы матриц L и U равны.

Рассмотрим алгоритм решения системы (1.1) с помощью LU(sq)-разложения. Предположим, что нам удалось разложить матрицу $A = LU$ (1.2). Подставляя (1.2) в (1.1), получаем $LUx = B$ (1.3). Обозначим $Ux = y$ (1.4), тогда подставляя (1.4) в (1.3), получим $Ly = B$.

Таким образом, решение системы (1.1) сводится к трём основным этапам:

1. Из элементов матрицы A найти элементы матриц L и U
2. Решить систему (1.5) с нижнетреугольной матрицей L (прямой ход)
3. Решить систему (1.4) с верхнетреугольной матрицей U (обратный ход)

Рассмотрим алгоритм получения LU(sq)-разложения. Матрицы L и U будем искать в следующем виде:

$$L = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & q_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & q_n \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} q_1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & q_2 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & q_3 & \cdots & u_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix}$$

Учитывая равенство (1.2), умножаем последовательно строки матрицы L на столбцы матрицы U, получаем систему, состоящую из n^2 уравнений с n^2 неизвестными $l_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1, i-1}$; $u_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{i+1, n}$; $q_i, i = \overline{1,n}$ (n - размерность СЛАУ):

$a_{11} = q_1^2;$
$a_{12} = q_1 u_{12}$
$a_{13} = q_1 u_{13}$
...
$a_{21} = l_{21} q_1$
$a_{22} = l_{21} u_{12} + q_2^2$
$a_{23} = l_{21} u_{13} + q_2 u_{23}$
...

Решая эту систему, получим общие формулы для нахождения элементов матриц L и U:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{q_j}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,i-1};$$

$$q_i = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}}, i = \overline{1,n};$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{q_i}, i = \overline{1,n}, j = \overline{i+1,n}$$

Формулы для нахождения вектора y и, наконец, искомого вектора x:

$$y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i}^{n} y_j u_{ij}}{q_i}, i = \overline{1,n}$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{j=i}^{i} y_j l_{ij}}{q_i}, i = \overline{1,n}$$

Как видно, не всегда в результате LU(sq)-разложения действительной матрицы, получатся действительные матрицы. Мы ограничимся случаями, когда в результате разложения получаются всё-таки действительные матрицы.

Заметим, что ни одна LU(sq)-разложимая матрица не может быть основной матрицей несовместной СЛАУ или СЛАУ, имеющей бесконечное множество решений. Докажем это утверждение от противного: пусть существует LU(sq)-разложимая матрица A, являющаяся основной матрицей СЛАУ, не имеющей решений, или имеющей их бесконечное множество. Тогда, по теореме Кронекера-Капелли, её ранг меньше её размерности, а, значит, $det(A) = 0$. Поскольку $A = LU$, $det(A) = det(LU) = det(L) * det(U)$. Т.к. L и U - диагональные матрицы (причём, с одинаковыми элементами на диагоналях), $det(L) = det(U) = \prod\limits_{i=1}^{n} q_i$, а, значит, $det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} q_i^2 = 0$, что может выполняться только если хотя бы один из q_i равен нулю. Но такая ситуация невозможна, т.к. q_i является знаменателем выражения для $l_{ki}, k = \overline{1,n}$. Получили противоречие, следовательно, наше предположение ошибочно, и, если матрица LU(sq)-разложима, то она является основной матрицей совместной СЛАУ, имеющей единственное решение.

4 Тестирование программы

4.1 Простой тест

Исходная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 14 & 6 \\ 0 & 8 & 37 & 9 \\ 0 & 0 & 15 & 31 \end{pmatrix}$$

Её LU(sq)-разложение

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 0 & 4 & 3 & \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ & 2 & 7 & 0 \\ & & 3 & 3 \\ 0 & & & 4 \end{pmatrix}$$

Если вектор правой части равен $B = (25, 75, 163, 169)^T$, то вектор y, соответствующий решению уравнения $Ly = B$ равен $y = (25, 25, 21, 22.75)^T$, а вектор x, соответствующий решению уравнения $Ux = y$, а, значит, и $Ax = B$, равен $x = (1, 2, 3, 4)^T$

4.2 Матрица побольше

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 0 & 4 & 40 & 42 & 44 & 46 \\ 1 & 31 & 185 & 257 & 269 & 281 \\ 2 & 44 & 199 & 413 & 523 & 545 \\ 3 & 57 & 198 & 465 & 785 & 936 \\ 4 & 70 & 197 & 489 & 878 & 1283 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 12 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 11 & 13 & 14 & 6 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 0 & 2 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 0 & 0 & 3 & 24 & 25 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 27 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = (251, 440, 2491, 3858, 4996, 5668)^T$$

$$Y = (251, 220, 160, 94, 39, 6)^T$$

$$X = (6, 5, 4, 3, 2, 1)^T$$

4.3 Диагональная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$B = (100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000)^T$$

$$X = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)^T$$

4.4 Не LU(sq)-разложимая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вывод программы: Matrix is not LU(sq)-decomposeable

4.5 Вещественные числа

$$A = \begin{pmatrix} 0.01 & 1500 & 16 & 0.17 & 1.8 & 0.19 \\ 0.00 & 400 & 40 & 0.42 & 4.4 & 0.46 \\ 0.01 & 3100 & 185 & 2.57 & 26.9 & 0.281 \\ 0.02 & 4400 & 199 & 4.13 & 52.3 & 0.545 \\ 0.03 & 5700 & 198 & 4.65 & 78.5 & 0.936 \\ 0.04 & 7000 & 197 & 4.89 & 87.8 & 1.283 \end{pmatrix}$$

$$B = (2.51, 4.40, 24.91, 38.58, 49.96, 56.68)^T$$

$$X = (6, 0.0005, 0.04, 3, 0.2, 10)^T$$

5 Зависимость точности решения от изменения диагонального преобладания

$$A = \begin{pmatrix} 7+10^-k & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 16 & -3 & -4 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & -3 & 14 & -1 & -2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 7 & -1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 9 & 0 & 0 & -4 & -1 & -0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & -1 & 17 & -2 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -0 \\ -1 & -2 & -4 & -3 & -4 & -4 & -1 & 23 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & -3 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -2 & -1 & -2 & -3 & -4 & 19 \end{pmatrix}$$

Как видно из таблицы, с увеличением k мы всё менее и менне точно можем представить элемент $q_1 = \sqrt{a_{11}}$, а от точности его представления зависит точность представления остальных элементов матрицы. В результате, уже при $k = 5$ (для float) и $k = 14$ (для double) решение системы $A^k x^k = F^k$ всё больше напоминает решение системы $Ax = F$:
$x = (-8.375, -7.375, -6.375, -5.375, -4.375, -3.375, -2.375, -1.375, -0.375, 0.625)^T$

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
0	1.0000190	1.90e-05	0.99999999999995	5.38e-14	1.0000007	7.15e-07
	2.0000219	2.19e-05	1.99999999999994	6.13e-14	2.0000010	9.54e-07
	3.0000212	2.12e-05	2.99999999999994	6.04e-14	3.0000007	7.15e-07
	4.0000219	2.19e-05	3.99999999999994	6.13e-14	4.0000014	1.43e-06
	5.0000219	2.19e-05	4.99999999999994	6.13e-14	5.0000010	9.54e-07
	6.0000224	2.24e-05	5.99999999999994	6.04e-14	6.0000014	1.43e-06
	7.0000224	2.24e-05	6.99999999999994	6.31e-14	7.0000010	9.54e-07
	8.0000219	2.19e-05	7.99999999999994	6.13e-14	8.0000010	9.54e-07
	9.0000229	2.29e-05	8.99999999999994	6.22e-14	9.0000010	9.54e-07
	10.0000229	2.29e-05	9.99999999999994	6.39e-14	10.0000019	1.91e-06

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
1	1.0002050	2.05e-04	0.99999999999973	2.72e-13	1.0001210	1.21e-04
	2.0002077	2.08e-04	1.99999999999972	2.75e-13	2.0001228	1.23e-04
	3.0002077	2.08e-04	2.99999999999973	2.74e-13	3.0001225	1.23e-04
	4.0002074	2.07e-04	3.99999999999973	2.75e-13	4.0001230	1.23e-04
	5.0002079	2.08e-04	4.99999999999973	2.74e-13	5.0001235	1.24e-04
	6.0002084	2.08e-04	5.99999999999972	2.76e-13	6.0001230	1.23e-04
	7.0002079	2.08e-04	6.99999999999972	2.77e-13	7.0001230	1.23e-04
	8.0002079	2.08e-04	7.99999999999972	2.75e-13	8.0001230	1.23e-04
	9.0002079	2.08e-04	8.99999999999972	2.75e-13	9.0001230	1.23e-04
	10.0002079	2.08e-04	9.99999999999973	2.74e-13	10.0001230	1.23e-04

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
2	0.9995797	4.20e-04	1.00000000000052	5.20e-13	0.9997004	3.00e-04
	1.9995792	4.21e-04	2.00000000000052	5.21e-13	1.9996998	3.00e-04
	2.9995794	4.21e-04	3.00000000000052	5.21e-13	2.9997001	3.00e-04
	3.9995790	4.21e-04	4.00000000000052	5.20e-13	3.9996996	3.00e-04
	4.9995794	4.21e-04	5.00000000000052	5.21e-13	4.9996996	3.00e-04
	5.9995799	4.20e-04	6.00000000000052	5.20e-13	5.9997001	3.00e-04
	6.9995794	4.21e-04	7.00000000000052	5.20e-13	6.9996996	3.00e-04
	7.9995794	4.21e-04	8.00000000000052	5.20e-13	7.9996996	3.00e-04
	8.9995794	4.21e-04	9.00000000000052	5.22e-13	8.9996996	3.00e-04
	9.9995794	4.21e-04	10.00000000000052	5.22e-13	9.9996996	3.00e-04

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
3	0.9734167	2.66e-02	0.99999999993319	6.68e-11	0.9926518	7.35e-03
	1.9734129	2.66e-02	1.99999999993318	6.68e-11	1.9926507	7.35e-03
	2.9734137	2.66e-02	2.99999999993318	6.68e-11	2.9926510	7.35e-03
	3.9734142	2.66e-02	3.99999999993318	6.68e-11	3.9926507	7.35e-03
	4.9734130	2.66e-02	4.99999999993318	6.68e-11	4.9926510	7.35e-03
	5.9734130	2.66e-02	5.99999999993318	6.68e-11	5.9926515	7.35e-03
	6.9734125	2.66e-02	6.99999999993317	6.68e-11	6.9926510	7.35e-03
	7.9734135	2.66e-02	7.99999999993318	6.68e-11	7.9926510	7.35e-03
	8.9734125	2.66e-02	8.99999999993318	6.68e-11	8.9926510	7.35e-03
	9.9734135	2.66e-02	9.99999999993318	6.68e-11	9.9926519	7.35e-03

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
4	0.9220056	7.80e-02	0.99999999924949	7.51e-10	1.0127788	1.28e-02
	1.9220046	7.80e-02	1.99999999924948	7.51e-10	2.0127790	1.28e-02
	2.9220045	7.80e-02	2.99999999924948	7.51e-10	3.0127790	1.28e-02
	3.9220045	7.80e-02	3.99999999924948	7.51e-10	4.0127792	1.28e-02
	4.9220042	7.80e-02	4.99999999924948	7.51e-10	5.0127792	1.28e-02
	5.9220052	7.80e-02	5.99999999924948	7.51e-10	6.0127797	1.28e-02
	6.9220042	7.80e-02	6.99999999924948	7.51e-10	7.0127792	1.28e-02
	7.9220042	7.80e-02	7.99999999924948	7.51e-10	8.0127792	1.28e-02
	8.9220047	7.80e-02	8.99999999924948	7.51e-10	9.0127792	1.28e-02
	9.9220047	7.80e-02	9.99999999924948	7.51e-10	10.0127792	1.28e-02

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
5	-1.4044898	2.40e+00	0.99999999880961	1.19e-09	0.8902806	1.10e-01
	-0.4044932	2.40e+00	1.99999999880961	1.19e-09	1.8902806	1.10e-01
	0.5955071	2.40e+00	2.99999999880961	1.19e-09	2.8902805	1.10e-01
	1.5955070	2.40e+00	3.99999999880961	1.19e-09	3.8902807	1.10e-01
	2.5955057	2.40e+00	4.99999999880961	1.19e-09	4.8902807	1.10e-01
	3.5955062	2.40e+00	5.99999999880961	1.19e-09	5.8902807	1.10e-01
	4.5955062	2.40e+00	6.99999999880961	1.19e-09	6.8902807	1.10e-01
	5.5955062	2.40e+00	7.99999999880961	1.19e-09	7.8902807	1.10e-01
	6.5955062	2.40e+00	8.99999999880961	1.19e-09	8.8902807	1.10e-01
	7.5955057	2.40e+00	9.99999999880961	1.19e-09	9.8902798	1.10e-01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
6	-6.6923060	7.69e+00	0.99999997256948	2.74e-08	-2.3742352	3.37e+00
	-5.6923075	7.69e+00	1.99999997256948	2.74e-08	-1.3742356	3.37e+00
	-4.6923075	7.69e+00	2.99999997256948	2.74e-08	-0.3742357	3.37e+00
	-3.6923077	7.69e+00	3.99999997256948	2.74e-08	0.6257644	3.37e+00
	-2.6923072	7.69e+00	4.99999997256948	2.74e-08	1.6257645	3.37e+00
	-1.6923075	7.69e+00	5.99999997256948	2.74e-08	2.6257644	3.37e+00
	-0.6923076	7.69e+00	6.99999997256948	2.74e-08	3.6257644	3.37e+00
	0.3076923	7.69e+00	7.99999997256948	2.74e-08	4.6257644	3.37e+00
	1.3076924	7.69e+00	8.99999997256948	2.74e-08	5.6257644	3.37e+00
	2.3076925	7.69e+00	9.99999997256948	2.74e-08	6.6257644	3.37e+00

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
7	0.0000000	1.00e+00	0.99999979815290	2.02e-07	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	1.99999979815290	2.02e-07	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	2.99999979815290	2.02e-07	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	3.99999979815290	2.02e-07	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	4.99999979815290	2.02e-07	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	5.99999979815290	2.02e-07	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	6.99999979815290	2.02e-07	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	7.99999979815290	2.02e-07	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	8.99999979815290	2.02e-07	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	9.99999979815290	2.02e-07	0.0000000	1.00e+01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
8	0.0000000	1.00e+00	1.00000005175564	5.18e-08	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	2.00000005175564	5.18e-08	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	3.00000005175564	5.18e-08	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	4.00000005175563	5.18e-08	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	5.00000005175564	5.18e-08	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	6.00000005175564	5.18e-08	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	7.00000005175564	5.18e-08	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	8.00000005175564	5.18e-08	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	9.00000005175564	5.18e-08	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	10.00000005175563	5.18e-08	0.0000000	1.00e+01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
9	0.0000000	1.00e+00	0.99995807816869	4.19e-05	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	1.99995807816869	4.19e-05	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	2.99995807816869	4.19e-05	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	3.99995807816869	4.19e-05	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	4.99995807816869	4.19e-05	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	5.99995807816869	4.19e-05	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	6.99995807816869	4.19e-05	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	7.99995807816869	4.19e-05	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	8.99995807816869	4.19e-05	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	9.99995807816869	4.19e-05	0.0000000	1.00e+01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
10	0.0000000	1.00e+00	0.99969466675982	3.05e-04	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	1.99969466675982	3.05e-04	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	2.99969466675982	3.05e-04	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	3.99969466675982	3.05e-04	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	4.99969466675982	3.05e-04	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	5.99969466675982	3.05e-04	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	6.99969466675982	3.05e-04	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	7.99969466675982	3.05e-04	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	8.99969466675982	3.05e-04	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	9.99969466675982	3.05e-04	0.0000000	1.00e+01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
11	0.0000000	1.00e+00	0.99297121298259	7.03e-03	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	1.99297121298258	7.03e-03	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	2.99297121298258	7.03e-03	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	3.99297121298258	7.03e-03	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	4.99297121298258	7.03e-03	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	5.99297121298258	7.03e-03	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	6.99297121298258	7.03e-03	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	7.99297121298258	7.03e-03	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	8.99297121298258	7.03e-03	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	9.99297121298258	7.03e-03	0.0000000	1.00e+01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
12	0.0000000	1.00e+00	1.01351351351351	1.35e-02	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	2.01351351351351	1.35e-02	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	3.01351351351351	1.35e-02	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	4.01351351351351	1.35e-02	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	5.01351351351351	1.35e-02	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	6.01351351351351	1.35e-02	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	7.01351351351351	1.35e-02	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	8.01351351351352	1.35e-02	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	9.01351351351352	1.35e-02	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	10.01351351351351	1.35e-02	0.0000000	1.00e+01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
13	0.0000000	1.00e+00	0.95225464190981	4.77e-02	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	1.95225464190981	4.77e-02	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	2.95225464190981	4.77e-02	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	3.95225464190981	4.77e-02	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	4.95225464190981	4.77e-02	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	5.95225464190981	4.77e-02	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	6.95225464190981	4.77e-02	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	7.95225464190982	4.77e-02	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	8.95225464190981	4.77e-02	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	9.95225464190981	4.77e-02	0.0000000	1.00e+01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
14	0.0000000	1.00e+00	-0.77358490566038	1.77e+00	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	0.22641509433962	1.77e+00	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	1.22641509433962	1.77e+00	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	2.22641509433962	1.77e+00	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	3.22641509433962	1.77e+00	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	4.22641509433962	1.77e+00	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	5.22641509433962	1.77e+00	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	6.22641509433962	1.77e+00	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	7.22641509433962	1.77e+00	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	8.22641509433962	1.77e+00	0.0000000	1.00e+01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
15	0.0000000	1.00e+00	-8.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	-7.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	-6.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	-5.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	-4.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	-3.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	-2.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	-1.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	-0.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	0.62500000000000	9.38e+00	0.0000000	1.00e+01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
16	0.0000000	1.00e+00	-8.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	-7.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	-6.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	-5.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	-4.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	-3.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	-2.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	-1.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	-0.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	0.62500000000000	9.38e+00	0.0000000	1.00e+01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)	x^k (mixed)	$x^* - x^k$ (mixed)
17	0.0000000	1.00e+00	-8.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	1.00e+00
	0.0000000	2.00e+00	-7.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	2.00e+00
	0.0000000	3.00e+00	-6.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	3.00e+00
	0.0000000	4.00e+00	-5.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	4.00e+00
	0.0000000	5.00e+00	-4.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	5.00e+00
	0.0000000	6.00e+00	-3.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	6.00e+00
	0.0000000	7.00e+00	-2.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	7.00e+00
	0.0000000	8.00e+00	-1.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	8.00e+00
	0.0000000	9.00e+00	-0.37500000000000	9.38e+00	0.0000000	9.00e+00
	0.0000000	1.00e+01	0.62500000000000	9.38e+00	0.0000000	1.00e+01

6 Матрицы Гильберта

Матрицы Гильберта LU(sq)-разложимы лишь до размерности 7×7 включительно при выполнении операций с одинарной точностью и до размерности 13×13 включительно при выполнении операций с двойной точностью:

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
2	0.9999996	3.58e-07	1.00000000000000	8.88e-16
	2.0000007	7.15e-07	2.00000000000000	1.55e-15

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
3	1.0000013	1.31e-06	1.00000000000001	5.11e-15
	1.9999903	9.66e-06	1.99999999999997	2.69e-14
	3.0000105	1.05e-05	3.00000000000002	2.49e-14

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
4	1.0000286	2.86e-05	1.00000000000000	3.55e-15
	1.9996785	3.22e-04	2.00000000000002	1.69e-14
	3.0007720	7.72e-04	2.99999999999999	1.47e-14
	3.9994998	5.00e-04	4.00000000000000	-0.00e+00

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
5	1.0003469	3.47e-04	1.00000000000008	7.90e-14
	1.9937348	6.27e-03	1.99999999999894	1.06e-12
	3.0264177	2.64e-02	3.00000000000331	3.31e-12
	3.9607248	3.93e-02	3.99999999999642	3.58e-12
	5.0189919	1.90e-02	5.00000000000122	1.22e-12

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
6	0.9984632	1.54e-03	0.99999999999993	7.02e-14
	2.0473156	4.73e-02	1.99999999999842	1.58e-12
	2.6663623	3.34e-01	3.00000000002614	2.61e-11
	4.8909559	8.91e-01	3.99999999990377	9.62e-11
	3.9984283	1.00e+00	5.00000000012950	1.30e-10
	6.3999996	4.00e-01	5.99999999994183	5.82e-11

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
7	0.9992723	7.28e-04	0.99999999998803	1.20e-11
	2.0246377	2.46e-02	2.00000000049574	4.96e-10
	2.8071361	1.93e-01	2.99999999514031	4.86e-09
	4.5990376	5.99e-01	4.00000001906581	1.91e-08
	4.1347313	8.65e-01	4.99999996486987	3.51e-08
	6.5783944	5.78e-01	6.00000003044316	3.04e-08
	6.8571434	1.43e-01	6.99999998998800	1.00e-08

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
8	0.0000000	0.00e+00	0.99999999985916	1.41e-10
	0.0000000	0.00e+00	2.00000000749003	7.49e-09
	0.0000000	0.00e+00	2.99999990290675	9.71e-08
	0.0000000	0.00e+00	4.00000052211414	5.22e-07
	0.0000000	0.00e+00	4.99999860200145	1.40e-06
	0.0000000	0.00e+00	6.00000196882290	1.97e-06
	0.0000000	0.00e+00	6.99999860459131	1.40e-06
	0.0000000	0.00e+00	8.00000039230692	3.92e-07

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
9	0.0000000	0.00e+00	0.99999999892004	1.08e-09
	0.0000000	0.00e+00	2.00000007322233	7.32e-08
	0.0000000	0.00e+00	2.99999877635260	1.22e-06
	0.0000000	0.00e+00	4.00000865084073	8.65e-06
	0.0000000	0.00e+00	4.99996851247912	3.15e-05
	0.0000000	0.00e+00	6.00006389067009	6.39e-05
	0.0000000	0.00e+00	6.99992700555446	7.30e-05
	0.0000000	0.00e+00	8.00004389613926	4.39e-05
	0.0000000	0.00e+00	8.99998919514688	1.08e-05

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
10	0.0000000	0.00e+00	0.99999998609260	1.39e-08
	0.0000000	0.00e+00	2.00000119674563	1.20e-06
	0.0000000	0.00e+00	2.99997458502670	2.54e-05
	0.0000000	0.00e+00	4.00023053425483	2.31e-04
	0.0000000	0.00e+00	4.99890229763475	1.10e-03
	0.0000000	0.00e+00	6.00301340599289	3.01e-03
	0.0000000	0.00e+00	6.99506150482201	4.94e-03
	0.0000000	0.00e+00	8.00476800164093	4.77e-03
	0.0000000	0.00e+00	8.99749882314255	2.50e-03
	0.0000000	0.00e+00	10.00054967415291	5.50e-04

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
11	0.0000000	0.00e+00	1.00000005068484	5.07e-08
	0.0000000	0.00e+00	1.99999447710151	5.52e-06
	0.0000000	0.00e+00	3.00014770996645	1.48e-04
	0.0000000	0.00e+00	3.99830839167995	1.69e-03
	0.0000000	0.00e+00	5.01027549461812	1.03e-02
	0.0000000	0.00e+00	5.96328770296953	3.67e-02
	0.0000000	0.00e+00	7.08102145616306	8.10e-02
	0.0000000	0.00e+00	7.88826636310728	1.12e-01
	0.0000000	0.00e+00	9.09373717168260	9.37e-02
	0.0000000	0.00e+00	9.95625368503899	4.37e-02
	0.0000000	0.00e+00	11.00870753959999	8.71e-03

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
12	0.0000000	0.00e+00	1.00000026746263	2.67e-07
	0.0000000	0.00e+00	1.99996656535632	3.34e-05
	0.0000000	0.00e+00	3.00103845393522	1.04e-03
	0.0000000	0.00e+00	3.98600845942420	1.40e-02
	0.0000000	0.00e+00	5.10154734310068	1.02e-01
	0.0000000	0.00e+00	5.55781874634493	4.42e-01
	0.0000000	0.00e+00	8.22209147855427	1.22e+00
	0.0000000	0.00e+00	5.80399874340334	2.20e+00
	0.0000000	0.00e+00	11.55747529894862	2.56e+00
	0.0000000	0.00e+00	8.13826858204653	1.86e+00
	0.0000000	0.00e+00	11.76977705348522	7.70e-01
	0.0000000	0.00e+00	11.86200886048369	1.38e-01

k	x^k (float)	$x^* - x^k$ (float)	x^k (double)	$x^* - x^k$ (double)
13	0.0000000	0.00e+00	0.99999917751859	8.22e-07
	0.0000000	0.00e+00	2.00012800231446	1.28e-04
	0.0000000	0.00e+00	2.99508603017487	4.91e-03
	0.0000000	0.00e+00	4.08165318247801	8.17e-02
	0.0000000	0.00e+00	4.26730954728013	7.33e-01
	0.0000000	0.00e+00	9.97442081572100	3.97e+00
	0.0000000	0.00e+00	-6.87273932572089	1.39e+01
	0.0000000	0.00e+00	40.19311952297388	3.22e+01
	0.0000000	0.00e+00	-41.18190264730911	5.02e+01
	0.0000000	0.00e+00	61.92479242022549	5.19e+01
	0.0000000	0.00e+00	-23.19931599522701	3.42e+01
	0.0000000	0.00e+00	24.97625505286563	1.30e+01
	0.0000000	0.00e+00	10.84119345524543	2.16e+00

7 Расчёт количества действий

Если n - размерность плотной матрицы, то, в случае плотной матрицы, для решения СЛАУ методом LU(sq)-разложения, необходимо совершить следующие действия:

1. При получении разложения:

   (a) При расчёте q_i: $\sum\limits_{i=1}^{n}(2(i-1)+1)-1 = n^2-1$ операций

   (b) При расчёте l_{ij}: $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i-1}(2+2*(j-1)) = \frac{n^3}{3}-\frac{n}{3}$ операций

   (c) Аналогично, при расчёте u_{ij} выполняется $\frac{n^3}{3}-\frac{n}{3}$ операций

   Итого сложность LU(sq)-разложения $\frac{2n^3}{3}+n^2-\frac{2n}{3}-1$

2. На прямом ходу: $\sum\limits_{i=1}^{n}(2+2*i-1) = n^2+n$ операций

3. Аналогично, на обратном ходу n^2+n операций

Итого для алгоритма требуется $\frac{2n^3}{3}+3n^2+\frac{4n}{3}$ операций

8 Сравнение с методом Гаусса

Сложность метода Гаусса: $\sum\limits_{i=1}^{n}(1+\sum\limits_{j=i}^{n}(2j))+(n+1)^2-1 = \frac{2n^3}{3}+5n^2+6n+4$

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
0	0.99999999999995	5.38e-14	1.00000000000008	7.55e-14
	1.99999999999994	6.13e-14	2.00000000000009	8.62e-14
	2.99999999999994	6.04e-14	3.00000000000008	8.48e-14
	3.99999999999994	6.13e-14	4.00000000000008	8.44e-14
	4.99999999999994	6.13e-14	5.00000000000009	8.53e-14
	5.99999999999994	6.04e-14	6.00000000000009	8.53e-14
	6.99999999999994	6.31e-14	7.00000000000009	8.70e-14
	7.99999999999994	6.13e-14	8.00000000000009	8.53e-14
	8.99999999999994	6.22e-14	9.00000000000009	8.88e-14
	9.99999999999994	6.39e-14	10.00000000000009	8.53e-14

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
1	0.99999999999973	2.72e-13	1.00000000000060	6.00e-13
	1.99999999999972	2.75e-13	2.00000000000061	6.08e-13
	2.99999999999973	2.74e-13	3.00000000000061	6.06e-13
	3.99999999999973	2.75e-13	4.00000000000061	6.06e-13
	4.99999999999973	2.74e-13	5.00000000000061	6.08e-13
	5.99999999999972	2.76e-13	6.00000000000061	6.07e-13
	6.99999999999972	2.77e-13	7.00000000000061	6.13e-13
	7.99999999999972	2.75e-13	8.00000000000061	6.08e-13
	8.99999999999972	2.75e-13	9.00000000000061	6.08e-13
	9.99999999999973	2.74e-13	10.00000000000061	6.08e-13

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
2	1.00000000000052	5.20e-13	0.99999999999551	4.49e-12
	2.00000000000052	5.21e-13	1.99999999999550	4.50e-12
	3.00000000000052	5.21e-13	2.99999999999550	4.50e-12
	4.00000000000052	5.20e-13	3.99999999999550	4.50e-12
	5.00000000000052	5.21e-13	4.99999999999550	4.50e-12
	6.00000000000052	5.20e-13	5.99999999999550	4.50e-12
	7.00000000000052	5.20e-13	6.99999999999550	4.50e-12
	8.00000000000052	5.20e-13	7.99999999999550	4.50e-12
	9.00000000000052	5.22e-13	8.99999999999550	4.50e-12
	10.00000000000052	5.22e-13	9.99999999999550	4.50e-12

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
3	0.99999999993319	6.68e-11	1.00000000014227	1.42e-10
	1.99999999993318	6.68e-11	2.00000000014229	1.42e-10
	2.99999999993318	6.68e-11	3.00000000014229	1.42e-10
	3.99999999993318	6.68e-11	4.00000000014229	1.42e-10
	4.99999999993318	6.68e-11	5.00000000014229	1.42e-10
	5.99999999993318	6.68e-11	6.00000000014230	1.42e-10
	6.99999999993317	6.68e-11	7.00000000014230	1.42e-10
	7.99999999993318	6.68e-11	8.00000000014229	1.42e-10
	8.99999999993318	6.68e-11	9.00000000014230	1.42e-10
	9.99999999993318	6.68e-11	10.00000000014230	1.42e-10

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
4	0.99999999924949	7.51e-10	0.99999999933856	6.61e-10
	1.99999999924948	7.51e-10	1.99999999933855	6.61e-10
	2.99999999924948	7.51e-10	2.99999999933855	6.61e-10
	3.99999999924948	7.51e-10	3.99999999933855	6.61e-10
	4.99999999924948	7.51e-10	4.99999999933855	6.61e-10
	5.99999999924948	7.51e-10	5.99999999933855	6.61e-10
	6.99999999924948	7.51e-10	6.99999999933855	6.61e-10
	7.99999999924948	7.51e-10	7.99999999933855	6.61e-10
	8.99999999924948	7.51e-10	8.99999999933855	6.61e-10
	9.99999999924948	7.51e-10	9.99999999933855	6.61e-10

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
5	0.99999999880961	1.19e-09	0.99999999808904	1.91e-09
	1.99999999880961	1.19e-09	1.99999999808904	1.91e-09
	2.99999999880961	1.19e-09	2.99999999808904	1.91e-09
	3.99999999880961	1.19e-09	3.99999999808904	1.91e-09
	4.99999999880961	1.19e-09	4.99999999808904	1.91e-09
	5.99999999880961	1.19e-09	5.99999999808904	1.91e-09
	6.99999999880961	1.19e-09	6.99999999808903	1.91e-09
	7.99999999880961	1.19e-09	7.99999999808904	1.91e-09
	8.99999999880961	1.19e-09	8.99999999808904	1.91e-09
	9.99999999880961	1.19e-09	9.99999999808904	1.91e-09

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
6	0.99999997256948	2.74e-08	0.99999991648825	8.35e-08
	1.99999997256948	2.74e-08	1.99999991648824	8.35e-08
	2.99999997256948	2.74e-08	2.99999991648824	8.35e-08
	3.99999997256948	2.74e-08	3.99999991648824	8.35e-08
	4.99999997256948	2.74e-08	4.99999991648824	8.35e-08
	5.99999997256948	2.74e-08	5.99999991648824	8.35e-08
	6.99999997256948	2.74e-08	6.99999991648823	8.35e-08
	7.99999997256948	2.74e-08	7.99999991648824	8.35e-08
	8.99999997256948	2.74e-08	8.99999991648823	8.35e-08
	9.99999997256948	2.74e-08	9.99999991648824	8.35e-08

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
7	0.99999979815290	2.02e-07	1.00000017808371	1.78e-07
	1.99999979815290	2.02e-07	2.00000017808371	1.78e-07
	2.99999979815290	2.02e-07	3.00000017808371	1.78e-07
	3.99999979815290	2.02e-07	4.00000017808371	1.78e-07
	4.99999979815290	2.02e-07	5.00000017808371	1.78e-07
	5.99999979815290	2.02e-07	6.00000017808371	1.78e-07
	6.99999979815290	2.02e-07	7.00000017808372	1.78e-07
	7.99999979815290	2.02e-07	8.00000017808371	1.78e-07
	8.99999979815290	2.02e-07	9.00000017808371	1.78e-07
	9.99999979815290	2.02e-07	10.00000017808371	1.78e-07

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
8	1.00000005175564	5.18e-08	0.99999220220320	7.80e-06
	2.00000005175564	5.18e-08	1.99999220220319	7.80e-06
	3.00000005175564	5.18e-08	2.99999220220319	7.80e-06
	4.00000005175563	5.18e-08	3.99999220220319	7.80e-06
	5.00000005175564	5.18e-08	4.99999220220319	7.80e-06
	6.00000005175564	5.18e-08	5.99999220220319	7.80e-06
	7.00000005175564	5.18e-08	6.99999220220318	7.80e-06
	8.00000005175564	5.18e-08	7.99999220220319	7.80e-06
	9.00000005175564	5.18e-08	8.99999220220318	7.80e-06
	10.00000005175563	5.18e-08	9.99999220220318	7.80e-06

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
9	0.99995807816869	4.19e-05	0.99996012927167	3.99e-05
	1.99995807816869	4.19e-05	1.99996012927166	3.99e-05
	2.99995807816869	4.19e-05	2.99996012927166	3.99e-05
	3.99995807816869	4.19e-05	3.99996012927167	3.99e-05
	4.99995807816869	4.19e-05	4.99996012927166	3.99e-05
	5.99995807816869	4.19e-05	5.99996012927166	3.99e-05
	6.99995807816869	4.19e-05	6.99996012927166	3.99e-05
	7.99995807816869	4.19e-05	7.99996012927167	3.99e-05
	8.99995807816869	4.19e-05	8.99996012927167	3.99e-05
	9.99995807816869	4.19e-05	9.99996012927167	3.99e-05

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
10	0.99969466675982	3.05e-04	0.99900652854223	9.93e-04
	1.99969466675982	3.05e-04	1.99900652854221	9.93e-04
	2.99969466675982	3.05e-04	2.99900652854222	9.93e-04
	3.99969466675982	3.05e-04	3.99900652854222	9.93e-04
	4.99969466675982	3.05e-04	4.99900652854221	9.93e-04
	5.99969466675982	3.05e-04	5.99900652854221	9.93e-04
	6.99969466675982	3.05e-04	6.99900652854221	9.93e-04
	7.99969466675982	3.05e-04	7.99900652854221	9.93e-04
	8.99969466675982	3.05e-04	8.99900652854221	9.93e-04
	9.99969466675982	3.05e-04	9.99900652854221	9.93e-04

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
11	0.99297121298259	7.03e-03	0.99765621810360	2.34e-03
	1.99297121298258	7.03e-03	1.99765621810359	2.34e-03
	2.99297121298258	7.03e-03	2.99765621810359	2.34e-03
	3.99297121298258	7.03e-03	3.99765621810359	2.34e-03
	4.99297121298258	7.03e-03	4.99765621810359	2.34e-03
	5.99297121298258	7.03e-03	5.99765621810359	2.34e-03
	6.99297121298258	7.03e-03	6.99765621810359	2.34e-03
	7.99297121298258	7.03e-03	7.99765621810359	2.34e-03
	8.99297121298258	7.03e-03	8.99765621810359	2.34e-03
	9.99297121298258	7.03e-03	9.99765621810359	2.34e-03

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
12	1.01351351351351	1.35e-02	1.05516540885310	5.52e-02
	2.01351351351351	1.35e-02	2.05516540885311	5.52e-02
	3.01351351351351	1.35e-02	3.05516540885311	5.52e-02
	4.01351351351351	1.35e-02	4.05516540885311	5.52e-02
	5.01351351351351	1.35e-02	5.05516540885311	5.52e-02
	6.01351351351351	1.35e-02	6.05516540885311	5.52e-02
	7.01351351351351	1.35e-02	7.05516540885311	5.52e-02
	8.01351351351352	1.35e-02	8.05516540885311	5.52e-02
	9.01351351351352	1.35e-02	9.05516540885311	5.52e-02
	10.01351351351351	1.35e-02	10.05516540885311	5.52e-02

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
13	0.95225464190981	4.77e-02	1.36765722183828	3.68e-01
	1.95225464190981	4.77e-02	2.36765722183828	3.68e-01
	2.95225464190981	4.77e-02	3.36765722183828	3.68e-01
	3.95225464190981	4.77e-02	4.36765722183828	3.68e-01
	4.95225464190981	4.77e-02	5.36765722183828	3.68e-01
	5.95225464190981	4.77e-02	6.36765722183828	3.68e-01
	6.95225464190981	4.77e-02	7.36765722183829	3.68e-01
	7.95225464190982	4.77e-02	8.36765722183828	3.68e-01
	8.95225464190981	4.77e-02	9.36765722183829	3.68e-01
	9.95225464190981	4.77e-02	10.36765722183829	3.68e-01

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
14	-0.77358490566038	1.77e+00	-5.59994993115533	6.60e+00
	0.22641509433962	1.77e+00	-4.59994993115534	6.60e+00
	1.22641509433962	1.77e+00	-3.59994993115534	6.60e+00
	2.22641509433962	1.77e+00	-2.59994993115534	6.60e+00
	3.22641509433962	1.77e+00	-1.59994993115534	6.60e+00
	4.22641509433962	1.77e+00	-0.59994993115534	6.60e+00
	5.22641509433962	1.77e+00	0.40005006884466	6.60e+00
	6.22641509433962	1.77e+00	1.40005006884466	6.60e+00
	7.22641509433962	1.77e+00	2.40005006884466	6.60e+00
	8.22641509433962	1.77e+00	3.40005006884466	6.60e+00

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
15	-8.37500000000000	9.38e+00	-3.13876967095851	4.14e+00
	-7.37500000000000	9.38e+00	-2.13876967095851	4.14e+00
	-6.37500000000000	9.38e+00	-1.13876967095851	4.14e+00
	-5.37500000000000	9.38e+00	-0.13876967095851	4.14e+00
	-4.37500000000000	9.38e+00	0.86123032904149	4.14e+00
	-3.37500000000000	9.38e+00	1.86123032904149	4.14e+00
	-2.37500000000000	9.38e+00	2.86123032904149	4.14e+00
	-1.37500000000000	9.38e+00	3.86123032904149	4.14e+00
	-0.37500000000000	9.38e+00	4.86123032904149	4.14e+00
	0.62500000000000	9.38e+00	5.86123032904149	4.14e+00

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
16	-8.37500000000000	9.38e+00	-3.13876967095851	4.14e+00
	-7.37500000000000	9.38e+00	-2.13876967095851	4.14e+00
	-6.37500000000000	9.38e+00	-1.13876967095851	4.14e+00
	-5.37500000000000	9.38e+00	-0.13876967095851	4.14e+00
	-4.37500000000000	9.38e+00	0.86123032904149	4.14e+00
	-3.37500000000000	9.38e+00	1.86123032904149	4.14e+00
	-2.37500000000000	9.38e+00	2.86123032904149	4.14e+00
	-1.37500000000000	9.38e+00	3.86123032904149	4.14e+00
	-0.37500000000000	9.38e+00	4.86123032904149	4.14e+00
	0.62500000000000	9.38e+00	5.86123032904149	4.14e+00

k	x^k (LU(sq))	$x^* - x^k$ (LU(sq))	x^k (Gauss)	$x^* - x^k$ (Gauss)
17	-8.37500000000000	9.38e+00	-3.13876967095851	4.14e+00
	-7.37500000000000	9.38e+00	-2.13876967095851	4.14e+00
	-6.37500000000000	9.38e+00	-1.13876967095851	4.14e+00
	-5.37500000000000	9.38e+00	-0.13876967095851	4.14e+00
	-4.37500000000000	9.38e+00	0.86123032904149	4.14e+00
	-3.37500000000000	9.38e+00	1.86123032904149	4.14e+00
	-2.37500000000000	9.38e+00	2.86123032904149	4.14e+00
	-1.37500000000000	9.38e+00	3.86123032904149	4.14e+00
	-0.37500000000000	9.38e+00	4.86123032904149	4.14e+00
	0.62500000000000	9.38e+00	5.86123032904149	4.14e+00

Метод LU(sq)-разложения обладает точностью, сравнимой с точностью метода Гаусса (какой метод приведёт к более точному решению заранее неизвестно), при этом выигрывая по времени на $2n^2$ операций (без учёта времени расчёта n квадратных корней, время расчёта которых заранее неизвестно)