1) Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и докажите ее (теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений предполагается известной).

Пусть известно частное решение $\tilde{x}$ СЛАУ $A \cdot x = b$. Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде $x = \tilde{x} + c_1 \cdot \Phi_1 + \ldots + c_k \cdot \Phi_k$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР соответствующей однородной СЛАУ, а $c_1, \ldots, c_k$ – некоторые постоянные

$\square$

Пусть x^0 – произвольное решение СЛАУ $A \cdot x = b \Rightarrow (x^0 - \tilde{x})$ – по свойствам решений решение однородной СЛАУ $A \cdot x = 0 \Rightarrow$ по теореме о структуре общего решения однородной СЛАУ $\exists$ постоянные $c_1, \ldots, c_n$,

$x^0 - \tilde{x} = c_1 \cdot \Phi_1 + \ldots + c_k \cdot \Phi_k \Rightarrow x^0 = \tilde{x} + c_1 \cdot \Phi_1 + c_k \cdot \Phi_k$

$\blacksquare$

2) Выпишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в произвольном базисе трехмерного пространства, и приведите ее вывод.

Пусть $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ – разложение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ по базису. Тогда их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\square$

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}, b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) =$$
$$= (a_1\overrightarrow{e_1}, b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) + (a_2\overrightarrow{e_2}, b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) + (a_3\overrightarrow{e_3}, b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}) =$$
$$= (a_1\overrightarrow{e_1}, b_1\overrightarrow{e_1}) + (a_1\overrightarrow{e_1}, b_2\overrightarrow{e_2}) + (a_1\overrightarrow{e_1}, b_3\overrightarrow{e_3}) + (a_2\overrightarrow{e_2}, b_1\overrightarrow{e_1}) + (a_2\overrightarrow{e_2}, b_2\overrightarrow{e_2}) + (a_2\overrightarrow{e_2}, b_3\overrightarrow{e_3}) + (a_3\overrightarrow{e_3}, b_1\overrightarrow{e_1}) +$$
$$+ (a_3\overrightarrow{e_3}, b_2\overrightarrow{e_2}) + (a_3\overrightarrow{e_3}, b_3\overrightarrow{e_3}) =$$
$$= a_1 \cdot b_1(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) + a_1 \cdot b_2(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) + a_1 \cdot b_3(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) + a_2 \cdot b_1(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) + a_2 \cdot b_2(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) + a_2 \cdot b_3(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) +$$
$$+ a_3 \cdot b_1(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) + a_3 \cdot b_2(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) + a_3 \cdot b_3(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

3) Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе трехмерного пространства и приведите ее вывод.

Пусть $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ – правый ортонормированный базис, $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$,
$\overrightarrow{b} = b_x\overrightarrow{i} + b_y\overrightarrow{j} + b_z\overrightarrow{k}$.

Тогда $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(a_y b_z - b_y a_z) + \overrightarrow{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \overrightarrow{k}(a_x b_y - a_y b_x)$

$\square$

Так как $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ – правый ортонормированный базис, то

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$,
$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$
$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$
$= a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \times \vec{k} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} =$
$= \vec{i}(a_y b_z - b_y a_z) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

■

4) Докажите теорему о том, что любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве задает плоскость и что любая плоскость определяется линейным уравнением.

1. Любая плоскость в пространстве определяется уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C, D – некоторые числа
2. Любое уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, определяет в пространстве плоскость

□

1. Рассмотрим плоскость π. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ей принадлежит. Рассмотрим вектор $\vec{n} \perp \pi$. Пусть $\vec{n} = (A, B, C)$.
$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$, то есть $Ax+By+Cz+D=0$, где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Таким образом, координаты точки M удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$
2.Рассмотрим уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Оно имеет хотя бы одно решение (например, если $A \neq 0$, то $x_0 = -\dfrac{D}{A}, y_0 = z_0 = 0$). Обозначим за M_0 точку (x_0, y_0, z_0). Пусть точка $M(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$. Вычтем из него равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$, где $\vec{n} = (A, B, C) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$ точка M лежит в плоскости, проходящей через M_0 и перпендикулярной вектору $\vec{n} \Rightarrow$ уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет плоскость

■

5) Выпишите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости и приведите ее вывод.

Рассмотрим плоскость $P : Ax + By + Cz + D = 0$ и точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Найдем $\rho(M, L)$ – расстояние от точки M до плоскости P. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка плоскости.
Тогда $\rho(M, P) = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M}| = \dfrac{|(\overrightarrow{M_1M}, \vec{n})|}{|\vec{n}|} =$ (в ОНБ) $= \dfrac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$
$= \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, так как $M_1 \in P \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$

■

6) **Выпишите формулу Муавра и докажите ее.**

$z^n = r^n \cdot (\cos n\phi + i \cdot \sin n\phi), n \in \mathbb{N}$

$\square$

$n = 2$ – база индукции

$z^2 = z \cdot z = r \cdot r \cdot (\cos(\phi + \phi) + i \cdot \sin(\phi + \phi)) = r^2 \cdot (\cos 2\phi + i \cdot \sin 2\phi)$

Пусть для $n = k$ это верно, тогда:

$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k \cdot r \cdot (\cos k\phi + i \cdot \sin k\phi) \cdot (\cos \phi + i \cdot \sin \phi) = r^{k+1} \cdot (\cos k\phi \cdot \cos \phi - \sin k\phi \cdot \sin \phi +$
$+ i \cdot \cos k\phi \cdot \sin \phi + i \cdot \sin k\phi \cdot \cos \phi) = r^{k+1} \cdot (\cos(k+1)\phi + i \cdot \sin(k+1)\phi)$

$\Rightarrow$ по принципу математической индукции формуала Муавра верна $\forall n \in \mathbb{N}$

$\blacksquare$