1. Дать определение умножения матриц. Коммутативна ли эта операция? Ответ пояснить.

Произведением матриц $A_{n\times p}$ и $B_{p\times k}$ называется матрица C типа $n \times k$, где $c_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{p} a_{il} \cdot b_{lj}$. Умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно, то есть $A \cdot B$, вообще говоря, $\neq B \cdot A$.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Дать определения ступенчатого вида матрицы и канонического (улучшенного ступенчатого) вида матрицы.

Матрица M имеет *ступенчатый вид*, если номера первых ненулевых элементов всех строк (такие элементы называют ведущими) возрастают, а нулевые строки стоят внизу матрицы.

Матрица M имеет *канонический* вид, если M уже имеет ступенчатый вид, причем все ведущие элементы равны 1 и в любом столбце, содержащем ведущий элемент, выше и ниже него стоят 0.

3. Перечислить элементарные преобразования строк матрицы.

Пусть (i) – i-тая строка матрицы A.

Тогда элементарные преобразования:

1) $(i) \to \lambda \cdot (i)$, $\lambda \neq 0$ – умножили i-тую строку на число λ

2) $(i) \leftrightarrow (j)$ – поменяли местами i-тую и j-тую строки

3) $(i) \to (i) + \lambda \cdot (k)$ – i-тая строка заменяется на сумму i-той строки и k-той строки $\cdot$ число λ

4. Сформулировать теорему о методе Гаусса (алгоритм приводить не нужно).

Любую конечную матрицу А можно привести элементарными преобразованиями к ступенчатому (каноническому) виду.

5. Дать определения перестановки и подстановки.

Всякое расположение чисел от 1 до n в определенном порядке называют *перестановкой*.

Подстановка σ $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ – отображение множества $1, \dots, n$ в себя. Это отображение должно быть биективным.

6. Дать определения знака и чётности подстановки.

Знак подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ равен $(-1)^a$, где a – число инверсий в строке $(\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n)$. Если знак равен 1, то подстановка четна, если -1 – нечетна.

7. Выписать общую формулу для вычисления определителя произвольного порядка.

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \text{ (сумма по всем подстановкам).}$$

8. Что такое алгебраическое дополнение?

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} — дополнительный минор, определитель матрицы, получающейся из исходной матрицы A путём вычёркивания *i*-й строки и *j*-го столбца.

9. Выписать формулы для разложения определителя по строке и по столбцу.

Определитель матрицы А равен сумме произведений элементов i-той строки (j-того столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

10. Что такое фальшивое разложение?

Элементы строки при умножении на алгебраические дополнения к элементу другой строки дают после суммирования 0.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = 0, \text{ если } k \neq i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ik} = 0, \text{ если } k \neq j$$

11. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Когда с их помощью можно найти решение СЛАУ?

Пусть $A \cdot x = b$ – совместная СЛАУ. Тогда $\triangle_j = x_j \cdot \det(A_1, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \ldots, A_n)$
Если $\triangle \equiv \det A \neq 0$, то $x_j = \frac{\triangle_j}{\triangle}$, $j = \overline{1,n}$

Когда определитель A $\neq$ 0

12. Дать определение союзной матрицы.

Союзная матрица – транспонированная матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы A.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

13. Дать определение обратной матрицы. Сформулировать критерий её существования.

Матрица $B \in M_n(\mathbb{R})$ называется *обратной* к матрице A, если $B \cdot A = E = A \cdot B$.

Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ имеет обратную (обратима) $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (она невырождена).

14. Выписать формулу для нахождения обратной матрицы.

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ – союзная матрица.

15. Дать определение минора.

Минором k-го порядка матрицы A называют определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечениях произвольных k строк и k столбцов.

16. Дать определение базисного минора. Какие строки называются базисными?

Любой отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу, называется *базисным минором* матрицы.

Строки, попавшие в фиксированный базисный минор, называются *базисными*.

17. Дать определение ранга матрицы.

Рангом матрицы называют наибольший порядок отличного от 0 минора.

18. Дать определение линейной комбинации строк. Что такое нетривиальная линейная комбинация?

Линейной комбинацией строк (столбцов) $a_1, \ldots, a_s$ одинаковой длины (высоты) называют выражение вида $\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_s \cdot a_s$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – некоторые числа.

Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если $\exists \lambda_i \neq 0$.

19. Дать определение линейной зависимости строк матрицы.

Строки $a_1, \ldots, a_s$ называют *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_s \cdot a_s = 0$.

20. Дать определение линейно независимых столбцов матрицы.

Если равенство $\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k = 0$ возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то говорят, что столбцы $a_1, \ldots, a_k$ *линейно независимы* (л.н.з.).

21. Сформулировать критерий линейной зависимости.

Строки $a_1,\ldots,a_k$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных.

22. Сформулировать теорему о базисном миноре.

1) Базисные строки (столбцы), соответсвующие любому базисному минору M матрицы A л.н.з.
2) Строки (столбцы) матрицы A, не входящие в M, являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

23. Сформулировать теорему о ранге матрицы.

Ранг матрицы равен максимальному числу ее л.н.з. строк (столбцов).

24. Сформулировать критерий невырожденности квадратной матрицы.

Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$. Следующие условия эквивалентны:
1) $\det A \neq 0$
2) $RgA = n$
3) все строки A л.н.з.