СЛАУ.

1. Сформулируйте теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР однородной СЛАУ $A \cdot x = 0$. Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде $x = c_1 \cdot \Phi_1 + \ldots + c_k \cdot \Phi_k$, где $c_1, \ldots, c_k$ - некоторые постоянные.

2. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть известно частное решение $\tilde{x}$ СЛАУ $A \cdot x = b$. Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде $x = \tilde{x} + c_1 \cdot \Phi_1 + \ldots + c_k \cdot \Phi_k$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР соответствующей однородной СЛАУ, а $c_1, \ldots, c_k$ – некоторые постоянные.

Ангем.

3. Дайте определение векторного произведения векторов в трехмерном пространстве.

Вектор $\overrightarrow{c}$ называют *векторным произведением* векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, если:
1) $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ - угол между $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$
2) $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$
3) тройка $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ – правая

4. Сформулируйте три алгебраических свойства векторного произведения.

1) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ (*антикоммутативность*)
2) $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$
3) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ (*дистрибутивность*)

5. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.

Пусть $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ – правый ортонормированный базис, $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}$. Тогда:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(a_y b_z - b_y a_z) + \overrightarrow{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \overrightarrow{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

6. Дайте определение смешанного произведения векторов. Как вычислить объем тетраэдра с помощью смешанного произведения?

Смешанным произведением векторов $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ называют число $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Объем тетраэдра, построенного на векторах $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ равен $V_T = \frac{1}{6}|\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle|$.

7. Выпишите формулу для вычисления смешанного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.

Пусть $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ – правый ортонормированный базис, $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = c_x \overrightarrow{i} + c_y \overrightarrow{j} + c_z \overrightarrow{k}$. Тогда:

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

8. Сформулируйте критерий компланарности трех векторов с помощью смешанного произведения.

Векторы $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = 0$.

9. Дайте определение прямоугольной декартовой системы координат.

Прямоугольной декартовой системой координат называют пару, состоящую из точки O и ортонормированного базиса.

10. Что такое уравнение поверхности и его геометрический образ?

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называют *уравнением поверхности* S, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на поверхности.

При этом поверхность S называют *геометрическим образом* уравнения $F(x, y, z) = 0$.

11. Сформулируйте теорему о том, что задает любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве.

Любое уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, определяет в пространстве плоскость.

12. Что такое нормаль плоскости?

Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ – уравнение плоскости. Тогда вектор $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен плоскости и называется нормалью к этой плоскости.

13. Выпишите формулу для расстояния от точки до плоскости.

Рассмотрим плоскость $L : Ax + By + Cz + D = 0$ и точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Тогда:

$$\rho(M, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

14. Общие уравнения прямой. Векторное уравнение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой.

- $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – общее уравнение прямой
- Векторное уравнение прямой: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{s}$, где $\overrightarrow{r_0}$ – радиус-вектор некоторой точки прямой, $\overrightarrow{s}$ – направляющий вектор прямой
- Параметрическое уравнение: $\begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases}$, где $\overrightarrow{p}(l, m, n)$ – направляющий вектор прямой,

  $M(x_0, y_0, z_0)$ – точка прямой
- Каноническое уравнение прямой: $t = \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$

15. Сформулируйте критерий принадлежности двух прямых одной плоскости.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1,\ M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$. Тогда L_1 и L_2 в одной плоскости $\Leftrightarrow \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны, где $\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}$ – направляющие вектора прямых L_1 и L_2 соответственно.

16. Выпишите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой.

Рассмотрим точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и прямую $L : \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$. Пусть $\overrightarrow{s} = (l, m, n),\ M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда:

$$\rho(M_1, L) = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{s}|}{|\overrightarrow{s}|}$$

17. Выпишите формулу для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

Рассмотрим скрещивающиеся прямые L_1 и L_2, s_1 и s_2 – их направляющие векторы и точки $M_1 \in L_1,\ M_2 \in L_2$. Тогда:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{M_1M_2} \rangle|}{|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}|}$$

Комплексные Числа.

18. Что такое алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа?

Алгебраическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа z в виде $z = a + bi$, где a и b - действительные числа, называется **алгебраической формой** комплексного числа.

Например. $z = 1 - i$

Подробнее о данной форме записи комплексных чисел по ссылке →

Тригонометрическая форма комплексного числа

Если $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - модуль комплексного числа $z = a + bi$, а ϕ - его аргумент, то **тригонометрической формой** комплексного числа z называется выражение

$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$

19. Дайте определения модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента комплексного числа?

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

r - называется модулем комплексного числа (это расстояние от z до 0)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$
$$z = x + iy = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$x + i \cdot y$ - алгебраическая форма записи комплексного числа

$r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

φ - это аргумент комплексного числа (это угол между радиус-вектором z и полярном направляющим вещественной оси)

$$\varphi = Arg\ z = \{arg\ z + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$$

$arg\ z$ - главное значение аргумента

$arg\ z \in [0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi)$

20. Сложение, умножение комплексных чисел. Что происходит с аргументами и модулями комплексных чисел при умножении и при делении?

Сложение: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Умножение: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

При умножении модули комплексных чисел перемножаются, а аргументы складываются. Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей, а аргумент – разности аргументов делимого и делителя.

21. Что такое комплексное сопряжение? Как можно делить комплексные числа в алгебраической форме?

Комплексное сопряжение: $\overline{z} = \overline{a + b \cdot i} = a - b \cdot i$

Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и $z_2 \neq 0$. Тогда:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

22. Выпишите формулу Муавра.

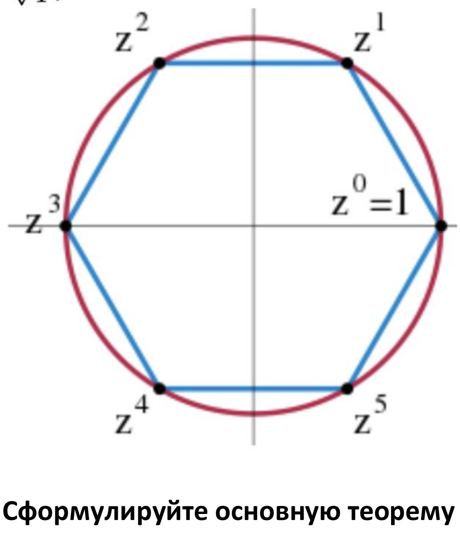
$z^n = r^n \cdot (\cos n\phi + i \cdot \sin n\phi), n \in \mathbb{N}$

23. Как найти комплексные корни n-ой степени из комплексного числа? Сделайте эскиз, на котором отметьте исходное число и все корни из него.

Дано число $w = \rho \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$ и число $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{w} = \left\{ z = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos\frac{\psi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{\psi + 2\pi k}{n} \right),\ k = \overline{0, n-1} \right\}$$

$\sqrt[6]{1}$:



24. Сформулируйте основную теорему алгебры. Сформулируйте теорему Безу.

Основная теорема алгебры: $\forall$ многочлена $f(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot z^0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ $\exists$ корень $z_0 \in \mathbb{C}$.

Теорема Безу: Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - c$ равен $f(c)$.

25. Выпишите формулу Эйлера. Выпишите выражения для синуса и косинуса через экспоненту.

Формула Эйлера: $\cos\phi + i\cdot\sin\phi = e^{i\phi},\ \phi\in\mathbb{R}$

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2},\ \sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$$

26. Выпишите формулы Виета для многочлена третьей степени.

При $n = 3$ уравнение (7) имеет вид

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \qquad a_0 \neq 0,$$

а ***формулы Виета*** записываются так:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -\dfrac{a_1}{a_0}, \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \dfrac{a_2}{a_0}, \\ z_1z_2z_3 = -\dfrac{a_3}{a_0}. \end{cases}$$

27. Какие многочлены называются неприводимыми?

Многочлен называется *приводимым*, если $\exists$ нетривиальное разложение $f = g\cdot h$ и *неприводимым* в противном случае.

28. Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над полем комплексных чисел.

$\forall$ многочлен степени $n>0$ разлагается в произведение неприводимых многочленов.
Комплексный многочлен степени n разлагается в произведение:
$P_n(z) = a_n\cdot(z-z_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(z-z_k)^{\alpha_k}$, где сумма кратностей $\alpha_1+\ldots+\alpha_k = n, z_i\in\mathbb{C}$

Группы.

29. Какие бинарные операции называются ассоциативными, а какие коммутативными?

Бинарная операция $\times$ называется *ассоциативной*, если $\forall a, b, c \in X : a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

Бинарная операция $*$ называется *коммутативной*, если $\forall a, b \in X \ a * b = b * a$.

30. Дайте определения полугруппы и моноида. Приведите примеры.

Множество с заданной на нем ассоциативной бинарной операцией называется *полугруппой.* **Пример:** $(\mathbb{N}, +)$.

Полугруппа, в которой есть нейтральный элемент, называется *моноидом.* **Пример:** $(\mathbb{N}, \cdot)$ – моноид, $e = 1$.

31. Сформулируйте определение группы. Приведите пример.

Моноид G, все элементы которого обратимы, называется *группой.* **Пример:** множество всех невырожденных ($\det A \neq 0$) матриц $A_{n\times n}$ с операцией матричного умножения.

32. Что такое симметрическая группа? Укажите число элементов в ней.

Симметрическая группа S_n – множество всех подстановок длины n $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix}$ с операцией композиции. В ней $n!$ элементов.

33. Что такое общая линейная и специальная линейная группы?

Множество всех невырожденных ($\det A \neq 0$) матриц $A_{n\times n}$ с операцией матричного умножения – $GL_n(\mathbb{R})$ – *общая линейная группа.*

$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$ – *специальная линейная группа.*

34. Сформулируйте определение абелевой группы. Приведите пример.

Группа с коммутативной операцией называется *абелевой.* **Пример:** $(\mathbb{Z}, +)$ – абелева группа.

35. Дайте определение подгруппы. Приведите пример группы и её подгруппы.

Определение Подмножество $H \subseteq G$ называется подгруппой в G, если:

1. $e \in H$
2. Если $h_1, h_2, \in H \implies h_1 \cdot h_2 \in H$, т. е. множество H замкнуто относительно умножения
3. Если $h \in H \implies h^{-1} \in H$, т. е. H замкнуто относительно взятия обратного

36. Дайте определение гомоморфизма групп. Приведите пример.

Отображение $f : G \to G'$ группы $(G, *)$ в группу $(G', \circ)$ называется *гомоморфизмом*, если $\forall a, b \in G \ f(a * b) = f(a) \circ f(b)$.

Пример: $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^*$ – это $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ с операцией умножения). Это гомоморфизм, так как $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

37. Дайте определение изоморфизма групп. Приведите пример.

Изоморфизм – это биективный гомоморфизм.

Пример: $(\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}^+, \cdot)$ посредством изоморфизма $f(x) = e^x$.

38. Сформулируйте определение циклической группы. Приведите пример.

Определение Пусть g - элемент группы G. Если любой элемент $g \in G$ имеет вид $g = a^n$, где $a \in G$, то G называют циклической группой. Обозначение $G = < a >$

Пример

1. $(\mathbb{Z}, +)$ - циклическая группа $a = 1$ ("порождена единицей")
2. $(\{1, -1\}, \cdot)$

39. Дайте определение порядка элемента.

Порядок элемента $a \in G$ – наименьшее натуральное число p такое, что $a^p = e$.

40. Сколько существует, с точностью до изоморфизма, циклических групп данного порядка?

- блять.