

Определения к кр по линалу 3 модуля.

1. Что такое ядро гомоморфизма групп? Приведите пример.

Ядро гомоморфизма $f : G \rightarrow F$ $\text{Ker } f = \{g \in G | f(g) = e_F\}$ (e_F – нейтральный элемент в F).

Пример: В гомоморфизме $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ с $h(u) = u \bmod 3$ ядро состоит из целых чисел, делящихся на 3.

2. Сформулируйте утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.

\forall подгруппа в $(\mathbb{Z}, +)$ имеет вид $k\mathbb{Z}$ для некоторых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Дайте определение левого смежного класса по некоторой подгруппе.

Пусть G – группа, $H \subseteq G$ – подгруппа и $g \in G$. Тогда *левым смежным классом* элемента g по подгруппе H называется множество $gH = \{gh | h \in H\}$.

4. Дайте определение нормальной подгруппы.

Подгруппа H называется *нормальной*, если $gH = Hg$, $\forall g \in G$ (равенство правых и левых смежных классов).

5. Что такое индекс подгруппы?

Индексом подгруппы H в группе G называется число левых смежных классов G по H .

6. Сформулируйте теорему Лагранжа.

Пусть G – конечная группа и $H \subseteq G$ – подгруппа. Тогда $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

7. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.

Пусть $H \subseteq G$ – подгруппа в группе G . Тогда 3 условия эквивалентны:

- 1) H нормальна
- 2) $\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$ ($gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$)
- 3) $\forall g \in G \quad gHg^{-1} = H$

8. Дайте определение факторгруппы.

Пусть H – нормальная подгруппа. Тогда G/H – множество левых смежных классов по H с операцией умножения: $(g_1H) \cdot (g_2H) = g_1 \cdot g_2H$ называется *факторгруппой* G по H .

9. Что такое естественный гомоморфизм?

Отображение $\varepsilon : G \rightarrow G/H$, сопоставляющее каждому элементу $a \in G$ его класс смежности aH , называется *естественным гомоморфизмом*.

10. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.

H – нормальная подгруппа $\Leftrightarrow H = \text{Ker } f$, где f – некоторый гомоморфизм.

11. Сформулируйте теорему о гомоморфизме групп. Приведите пример.

Пусть $f : G \rightarrow F$ – гомоморфизм групп. Тогда группа $\text{Im } f = \{a \in F \mid \exists g \in G, f(g) = a\}$ изоморфна факторгруппе $G/\text{Ker } f$, $\text{Ker } f = \{g \in G \mid f(g) = e_F\}$ ($\text{Ker } f$ – ядро гомоморфизма).

$$G/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f$$

Пример: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, \forall целому числу сопоставляем его остаток от деления на n – $\text{Ker } f = n\mathbb{Z}$.

12. Что такое прямое произведение групп?

Прямое произведение групп $(G, +) \times (D, \star)$ – это группа из всех пар элементов с операцией поэлементного умножения:

$$(g_1, d_1) \times (g_2, d_2) = (g_1 + g_2, d_1 \star d_2)$$

13. Сформулируйте определение автоморфизма и внутреннего автоморфизма.

Автоморфизм – это изоморфизм из G в G .

Внутренний автоморфизм – это отображение $I_a : g \mapsto aga^{-1}$.

14. Что такое центр группы? Приведите пример.

Центр группы G – это множество $Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \ \forall b \in G\}$. G – абелева $\Leftrightarrow Z(G) = G$. $Z(G)$ является нормальной подгруппой G .

- Центром **абелевой группы** G является G .
- Центром группы матриц по умножению является единичная матрица.

15. Что можно сказать про факторгруппу группы по её центру?

21. Чему изоморфна факторгруппа группы по её центру?

$G/Z(G) \simeq \text{Inn}(G)$ (Inn – подгруппа, которую образуют все внутренние автоморфизмы группы $\text{Aut}(G)$).

16. Сформулируйте теорему Кэли.

\forall конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе группы S_n .

17. Дайте определение кольца.

Пусть $K \neq \emptyset$ – множество, на котором заданы две бинарные операции “+” и “·”, такие, что:

- 1) $(K, +)$ – абелева группа (это аддитивная группа кольца)
 - 2) (K, \cdot) – полугруппа (это мультипликативная полугруппа кольца)
 - 3) Умножение дистрибутивно относительно сложения: $\forall a, b, c \in K : c(a + b) = ca + cb, (a + b)c = ac + bc$
- Тогда $(K, +, \cdot)$ – *кольцо*.

18. Что такое коммутативное кольцо? Приведите примеры коммутативного и некоммутативного колец.

Если $\forall x, y \in K \quad xy = yx$, то кольцо называется *коммутативным*.

Пример 1: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ – является коммутативным кольцом.

Пример 2: $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ – полное матричное кольцо над \mathbb{R} – некоммутативное.

19. Дайте определение делителей нуля.

Если $a \cdot b = 0$, при $a \neq 0, b \neq 0$ в кольце K , то a называется *левым делителем нуля*, а b – *правым делителем нуля*.

20. Дайте определение целостного кольца. Приведите пример.

Коммутативное кольцо с единицей ($\neq 0$) и без делителей нуля называется *целостным кольцом*. **Пример:** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

21. Какие элементы кольца называются обратимыми?

Элемент коммутативного кольца a называется *обратимым*, если $\exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.

22. Дайте определение поля. Приведите три примера.

Поле P – это коммутативное кольцо с единицей ($\neq 0$), в котором каждый элемент $a \neq 0$ обратим. **Пример:** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$.

23. Дайте определение подполя. Привести пример пары: поле и его подполе.

Подполе – это подмножество поля, которое само является полем относительно тех же операций. **Пример:** $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

24. Дайте определение характеристики поля. Привести примеры: поля конечной положительной характеристики и поля нулевой характеристики.

Пусть P – поле. *Характеристикой* поля P ($\text{char } P$) называется наименьшее $q \in \mathbb{N} : \underbrace{1 + \dots + 1}_q = 0$. Если такого q не существует, то $\text{char } P = 0$.

Пример: $\text{char } \mathbb{R} = 0, \text{char } \mathbb{Z}_p = p, p$ – простое.

25. Сформулируйте утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.

Пусть F – поле. F_0 – его простое подполе. Тогда:

1) если $\text{char} F = p > 0$, то $F_0 \simeq \mathbb{Z}_p$

2) если $\text{char} F = 0$, то $F_0 \simeq \mathbb{Q}$

26. Дайте определение идеала. Что такое главный идеал?

Подмножество I кольца называется *идеалом*, если:

1. оно является подгруппой по сложению

2. $\forall a \in I, \forall r \in K \quad r \cdot a$ и $a \cdot r \in I$

Главным идеалом называется идеал, порождённый 1 элементом.

27. Сформулируйте определение гомоморфизма колец.

$\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ – гомоморфизм колец, если $\forall a, b \in K_1 : \begin{cases} \varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b) \\ \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b) \end{cases}$

28. Сформулируйте теорему о гомоморфизме колец. Приведите пример.

Пусть $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ – гомоморфизм колец. Тогда $K_1 / \text{Ker} \varphi \simeq \text{Im} \varphi$.

Пример: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, \forall целому числу сопоставляем его остаток от деления на n , $\text{Ker} \varphi = n\mathbb{Z}$.

29. Сформулируйте критерий того, что кольцо вычетов по модулю p является полем.

\mathbb{Z}_p – поле $\Leftrightarrow p$ – простое.

p заменяем на n

30. Сформулируйте теорему о том, когда факторкольцо кольца многочленов над полем само является полем.

Факторкольцо $F[x] / \langle f(x) \rangle$ является полем $\Leftrightarrow f(x)$ неприводим над F .

31. Дайте определение алгебраического элемента над полем.

Элемент $\alpha \in F_2$ называется *алгебраическим* над полем F_1 , если $\exists f(x) \neq 0$ (0 как функция), что $f(x) \in F_1[x]$, для которого $f(\alpha) = 0$.

32. Что такое поле рациональных дробей?

Пусть F – поле. Рассмотрим поле рациональных функций (частных) с коэффициентами из F . То есть элементы этого множества – дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f, g \in F[x]$, $g \neq 0$.

33. Сформулируйте утверждение о том, что любое конечное поле может быть реализовано как факторкольцо кольца многочленов по некоторому идеалу.

\forall конечное поле F_q , где $q = p^n$, p – простое, можно реализовать в виде $\mathbb{Z}_p[x]/\langle h(x) \rangle$, где $h(x)$ – неприводимый многочлен степени n над \mathbb{Z}_p .

34. Сформулируйте китайскую теорему об остатках (через изоморфизм колец).

Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $n = n_1 \cdot \dots \cdot n_m$, где n_i – взаимно просты. Тогда кольцо $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_m}$.

35. Сформулируйте утверждение о том, сколько элементов может быть в конечном поле.

Число элементов конечного поля всегда p^n , где p – простое, $n \in \mathbb{N}$.

36. Дайте определение линейного (векторного) пространства.

Пусть F – поле. Пусть V – произвольное множество, на котором заданы две операции: сложение и умножение на число. Множество V называется *линейным (векторным) пространством*, если $\forall x, y, z \in V, \forall \lambda, \mu \in F$ выполнены следующие 8 свойств:

- 1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ – ассоциативность сложения
- 2) \exists нейтральный элемент по сложению: $\exists 0 \in V : \forall x \in V \ x + 0 = 0 + x = x$
- 3) \exists противоположный элемент по сложению: $\forall x \in V \ \exists (-x) \in V : x + (-x) = 0$
- 4) $x + y = y + x$ – коммутативность сложения
- 5) $\forall x \in V \ 1 \cdot x = x$ – нейтральность $1 \in F$
- 6) ассоциативность умножения на число: $\mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x$
- 7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ – дистрибутивность относительно умножения на вектор
- 8) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ – дистрибутивность относительно умножения на число

37. Дайте определение базиса линейного (векторного) пространства.

Базисом линейного пространства V называется система векторов b_1, \dots, b_n , такая, что:

- а) b_1, \dots, b_n – л.н.з.
- б) любой вектор из V представляется в виде линейной комбинации $b_1, \dots, b_n \ \forall x \in V \ x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n, \ x_i \in F$

38. Что такое размерность пространства?

Максимальное количество л.н.з. векторов в данном линейном пространстве V называется *размерностью пространства V* .

39. Дайте определение матрицы перехода от старого базиса линейного пространства к новому.

Матрицей перехода от базиса A к базису B называется матрица

$$T_{A \rightarrow B} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

где t_{1i}, \dots, t_{ni} – координаты b_i в базисе A .

40. Выпишите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.

Пусть $x \in V$, A и B – базисы в V . $x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора x в базисе A ,

$x^b = \begin{pmatrix} x_1^b \\ \vdots \\ x_n^b \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора x в базисе B . Тогда:

$$x^b = T_{A \rightarrow B}^{-1} \cdot x^a$$

41. Дайте определение подпространства в линейном пространстве.

Подмножество W векторного пространства V называется *подпространством*, если оно само является пространством относительно операций в V .

42. Дайте определения линейной оболочки конечного набора векторов и ранга системы векторов.

Множество $L(a_1, \dots, a_k) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \mid \lambda_i \in F\}$ – множество всех линейных комбинаций векторов a_1, \dots, a_k называется *линейной оболочкой* системы a_1, \dots, a_k

Рангом системы векторов a_1, \dots, a_k в линейном пространстве называется размерность линейной оболочки этой системы $Rg(a_1, \dots, a_k) = \dim L(a_1, \dots, a_k)$.

43. Дайте определения суммы и прямой суммы подпространств.

$H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in H_1, x_2 \in H_2\}$ называется *суммой* подпространств H_1 и H_2 .

$H_1 + H_2$ называется *прямой суммой* (и обозначается $H_1 \oplus H_2$), если $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, то есть тривиально.

44. Сформулируйте утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.

Пусть H_1 и H_2 – подпространства. Тогда $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.

45. Дайте определение билинейной формы.

Функцию $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (V – линейное пространство над \mathbb{R}) называют *билинейной формой*, если $\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1) $b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$

2) $b(x, \alpha y + \beta z) = \alpha b(x, y) + \beta b(x, z)$

46. Дайте определение квадратичной формы.

Однородный многочлен второй степени от n переменных, то есть:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

называют *квадратичной формой*.

47. Дайте определения положительной и отрицательной определенности квадратичной формы.

Квадратичную форму $Q(x)$ называют:

- *положительно определенной*, если $\forall x \neq 0 \quad Q(x) > 0$
- *отрицательно определенной*, если $\forall x \neq 0 \quad Q(x) < 0$

48. Какую квадратичную форму называют знакопеременной?

Квадратичную форму $Q(x)$ называют *знакопеременной*, если $\exists x, y \in V \quad Q(y) < 0 < Q(x)$.

49. Дайте определения канонического и нормального вида квадратичной формы.

Квадратичную форму $Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, $\alpha_i \in \mathbb{R} \quad i = \overline{1, n}$ (то есть не имеющую попарных произведений переменных) называют квадратичной формой *канонического вида*.

Если $\alpha_i \in \{1, -1, 0\}$, то канонический вид называется *нормальным*.

50. Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса?

Пусть U – матрица перехода от базиса e к базису f . Пусть B_e – матрица билинейной формы в базисе e , B_f – матрица билинейной формы в базисе f . Тогда:

$$B_f = U^T B_e U$$

При переходе от базиса e к базису e' линейного пространства V матрица квадратичной формы меняется следующим образом:

$$A' = S^T A S$$

где S – матрица перехода от e к e' .

51. Сформулируйте критерий Сильвестра и его следствие.

Квадратичная форма $Q(x)$ от n переменных $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ положительно определена $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \vdots \\ \Delta_n > 0 \end{cases}$. Здесь $Q(x) = x^T A x$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \det A$$

то есть последовательность главных угловых миноров положительна.

52. Сформулируйте закон инерции квадратичных форм. Что такое индексы инерции?

Для любых двух канонических видов одной и той же квадратичной формы

$$Q_1(y_1, \dots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2, \lambda_i \neq 0, i = \overline{1, m}$$

$$Q_2(z_1, \dots, z_k) = \mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_k z_k^2, \mu_j \neq 0, j = \overline{1, k}$$

1) $m = k = \text{Rg} A$ – рангу квадратичной формы

2) количество положительных λ_i = количеству положительных $\mu_j = i_+$ – *положительный индекс инерции*. Количество отрицательных λ_i = количеству отрицательных $\mu_j = i_-$ – *отрицательный индекс инерции*.

53. Дайте определение линейного отображения. Приведите пример.

Отображение $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ называется *линейным*, если:

1) $\forall u, v \in V_1, \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$

2) $\forall u \in V_1, \forall \lambda \in F \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$

Пример: В линейном пространстве $m \times n$ матриц существует линейное отображение умножения слева на фиксированную матрицу $A_{l \times m}: \varphi: X \rightarrow A \cdot X$.

54. Дайте определение матрицы линейного отображения.

Матрица линейного отображения – это матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, где по столбцам стоят координаты образов

векторов базиса V_1 в базисе V_2 .

55. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базисов. Как выглядит формула в случае линейного оператора?

Пусть φ – линейное отображение из линейного пространства V_1 в линейное пространство V_2 . Пусть $A_{e_1 e_2}$ – матрица линейного отображения в паре базисов: e_1 в пространстве V_1 и e_2 в пространстве V_2 и пусть T_1 – матрица перехода от e_1 к e'_1 , T_2 – матрица перехода от e_2 к e'_2 . Тогда:

$$A_{e'_1 e'_2} = T_2^{-1} A_{e_1 e_2} T_1$$

.

Формула для линейных операторов:

$$A_{E'} = T^{-1} A_E T$$