1. Что происходит с произведением матриц при транспонировании? Ответ обосновать.

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
□
$[(A \cdot B)^T]_{ij} = [A \cdot B]_{ji} = \sum\limits_{r=1}^{n} [A]_{jr} \cdot [B]_{ri} = \sum\limits_{r=1}^{n} [A^T]_{rj} \cdot [B^T]_{ir} = [B^T \cdot A^T]_{ij}$

2. Сформулировать и доказать критерий существования обратной матрицы. Свойства определителя предполагаются известными.

Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ имеет обратную (обратима) $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (она невырождена)
□
Необходимость
Дано: $\exists A^{-1}$
Доказать: $\det A \neq 0$
По определению обратной: $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$
Достаточность
Дано: $\det A \neq 0$
Доказать:$\exists A^{-1}$
Рассмотрим матрицу $B = \dfrac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$
$\tilde{A}$ – союзная матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

– транспонированная матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы A
Покажем, что $B = A^{-1}$
Рассмотрим $A \cdot B$: $[A \cdot B]_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{n} [A]_{ir} \cdot [B]_{rj} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \sum\limits_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot [\tilde{A}]_{rj} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \sum\limits_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot A_{jr} =$
$= \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{cases} \det A, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = [E]_{ij}$

■

Если обратная матрица существует, то она единственная.
□
Предположим противоположное: $\exists B_1$ и B_2 – обратные к A.
По определению $B_i \cdot A = A \cdot B_i = E, i = 1{,}2$.
$B_1 = B_1 \cdot E = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2$

■

3. Какие три условия достаточно наложить на функцию от столбцов матрицы, чтобы она обязательно была детерминантом? Ответ обоснуйте для матриц второго порядка.

Произвольная линейная по столбцам кососимметрическая функция от матрицы с условием $f(E_n) = 1$, является определителем
□
$(n = 2)$
$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = f\left(a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}\right) =$
$= a_{11} \cdot f\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + a_{21} \cdot f\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} =$
$= a_{11} \cdot f\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}, a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + a_{21} \cdot f\left(\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$
$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \det A$

■

4. Сформулировать и доказать утверждение о том, что кососимметричность для линейной функции эквивалентна обнулению на паре совпадающих элементов.

$$\text{Дано:} \quad \det(a,a) = 0$$
$$\text{Доказать:} \quad \det(v,u) = -\det(u,v)$$
$$0 = \det(v+u, v+u) = \det(v,u) + \det(v,v) + \det(u,u) + \det(u,v) = \det(v,u) + \det(u,v)$$
$$\det(v,u) + \det(u,v) = 0$$
$$\det(v,u) = -\det(u,v)$$

$$\text{Дано:} \quad \det(v,u) = -\det(u,v)$$
$$\text{Доказать:} \quad \det(a,a) = 0$$
$$\det(a,a) = -\det(a,a) \implies \det(a,a) = 0$$

5. Чему равен определитель произведения двух квадратных матриц? Ответ обосновать.

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$ $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ $\square$
Рассмотрим функцию $f(B) = \det(A \cdot B)$. Покажем, что для $f(B)$ выполнены свойства 2 и 4б
1) Если столбцы матрицы B i и j одинаковы, то и в матрице $A \cdot B$ столбцы i и j тоже одинаковы $\Rightarrow$ выполняется свойство 4б
2) Если в матрице B i-тый столбец имеет вид $\alpha \cdot a + \mu \cdot b \Rightarrow$ в $A \cdot B$ он будет иметь вид $\alpha \cdot A \cdot a + \mu \cdot A \cdot b \Rightarrow$ выполнено свойство 2.
Следовательно, $f(B) = \det B \cdot f(En)$. Возьмем и вычислим $f(E_n) = \det(A \cdot E_n) = \det E_n \cdot f(E_n) = = 1 \cdot f(E_n)$
$\det(A \cdot E_n) = \det A$
$\Rightarrow f(E_n) = \det A \Rightarrow f(B) = \det A \cdot \det B = \det A \cdot B$

$\blacksquare$

6. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка и доказать их.

Правило Крамера
Пусть $A \cdot x = b$ – совместная СЛАУ.
Тогда $x_j \cdot \det(A_1, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \ldots, A_n) = \triangle_j$
Если $\triangle \equiv \det A \neq 0$, то

$$x_j = \frac{\triangle_j}{\triangle}, j = \overline{1,n} \text{ – формула Крамера}$$

$\square$
$\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, A_{j-1}, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot A_k, A_{j+1}, \ldots, A_n) =$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \det(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n) = x_1 \cdot \det(A_1, \ldots, A_1, \ldots, A_n) +$
$+ \ldots + x_j \cdot \det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \ldots = x_j \cdot \det A$

$\blacksquare$

7. Сформулировать и доказать критерий линейной зависимости.

Строки $a_1, \dots, a_k$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных

$\square$

Дано: $a_1, \dots, a_k$ – л.з.

Доказать: хотя бы одна из них – л.к. остальных

По определению линейной зависимости:

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k = 0$

Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot a_2 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \cdot a_k$ – это л.к. остальных

Дано: Пусть $a_1 = \beta_2 \cdot a_2 + \ldots + \beta_k \cdot a_k$

Доказать: $a_1, \dots, a_k$ – л.з.

$\underbrace{1 \cdot a_1}_{\neq 0} - \beta_2 \cdot a_2 - \ldots - \beta_k \cdot a_k = 0$

не все коэффициенты этой л.к. равны 0 $\Rightarrow$ по определению $a_1, \dots, a_k$ – л.з.

$\blacksquare$

8. Как связан ранг транспонированной матрицы с рангом исходной матрицы? Ответ обосновать.

$RgA^T = RgA$

$\square$

Докажем, что $RgA^T \geq RgA$

Пусть $RgA = r \Rightarrow \exists$ минор $M^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_r} \neq 0$

В матрице A^T есть минор $N^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_r}$, получающийся из $M^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_r}$ транспонированием $\Rightarrow N^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_r} \neq 0$ (это свойство 1 определителя) $\Rightarrow RgA^T \geq r = RgA$

Таким образом, $RgA \leq RgA^T \leq Rg(A^T)^T = RgA \Rightarrow RgA = RgA^T$

$\blacksquare$

9. Сформулировать и доказать следствие теоремы о базисном миноре для квадратных матриц (критерий невырожденности).

Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$. Следующие условия эквивалентны:

1) $\det A \neq 0$
2) $RgA = n$
3) все строки A л.н.з.

$\square$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 3 & \leftarrow & 2 \end{array}$$

$1 \Rightarrow 2$: Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow$ в A сеть минор n-го порядка $\neq 0 \Rightarrow$ по определению $RgA = n$

$2 \Rightarrow 3$: Пусть $RgA = n \Rightarrow$ Все строки базисны $\Rightarrow$ по теореме они все л.н.з. (по теореме о базисном миноре)

$3 \Rightarrow 1$: Пусть все строки A л.н.з. Предположим, что $\det A = 0 \Rightarrow RgA < n \Rightarrow$ по крайней мере одна из строк является линейной комбинацией остальных $\Rightarrow$ по критерию линейной зависимости строки являются л.з. – противоречие

$\blacksquare$