Определения к кр по линалу 3 модуля.

1. Что такое ядро гомоморфизма групп? Приведите пример.

Ядро гомоморфизма $f : G \to F$ $Ker f = \{g \in G | f(g) = e_F\}$ (e_F – нейтральный элелемент в F).

Пример: В гомоморфизме $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ с $h(u) = u \mod 3$ ядро состоит из целых чисел, делящихся на 3.

2. Сформулируйте утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.

$\forall$ подгруппа в $(\mathbb{Z}, +)$ имеет вид $k\mathbb{Z}$ для некоторых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Дайте определение левого смежного класса по некоторой подгруппе.

Пусть G – группа, $H \subseteq G$ – подгруппа и $g \in G$. Тогда *левым смежным классом* элемента g по подгруппе H называется множество $gH = \{gh | h \in H\}$.

4. Дайте определение нормальной подгруппы.

Подгруппа H называется *нормальной*, если $gH = Hg$, $\forall g \in G$ (равенство правых и левых смежных классов).

5. Что такое индекс подгруппы?

Индексом подгруппы H в группе G называется число левых смежных классов G по H.

6. Сформулируйте теорему Лагранжа.

Пусть G – конечная группа и $H \subseteq G$ – подгруппа. Тогда $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

7. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.

Пусть $H \subseteq G$ – подгруппа в группе G. Тогда 3 условия эквивалентны:
1) H нормальна
2) $\forall g \in G$ $gHg^{-1} \subseteq H$ $(gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\})$
3) $\forall g \in G$ $gHg^{-1} = H$

8. Дайте определение факторгруппы.

Пусть H – нормальная подгруппа. Тогда G/H – множество левых смежных классов по H с операцией умножения: $(g_1 H) \cdot (g_2 H) = g_1 \cdot g_2 H$ называется *факторгруппой* G по H.

9. Что такое естественный гомоморфизм?

Отображение $\varepsilon : G \to G/H$, сопоставляющее каждому элементу $a \in G$ его класс смежности aH, называется *естественным гомоморфизмом.*

10. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.

H – нормальная подгруппа $\Leftrightarrow H = Kerf$, где f – некоторый гомоморфизм.

11. Сформулируйте теорему о гомоморфизме групп. Приведите пример.

Пусть $f : G \to F$ – гомоморфизм групп. Тогда группа $Imf = \{a \in F | \exists g \in G, f(g) = a\}$ изоморфна факторгруппе $G/Kerf$, $Kerf = \{g \in G | f(g) = e_F\}$ ($Kerf$ – ядро гомоморфизма).

$$G/Kerf \simeq Imf$$

Пример: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $\forall$ целому числу сопоставляем его остаток от деления на n – $Kerf = n\mathbb{Z}$.

12. Что такое прямое произведение групп?

Прямое произведение групп $(G, +) \times (D, \star)$ – это группа из всех пар элементов с операцией поэлементного умножения:

$$(g_1, d_1) \times (g_2, d_2) = (g_1 + g_2, d_1 \star d_2)$$

13. Сформулируйте определение автоморфизма и внутреннего автоморфизма.

Автоморфизм – это изоморфизм из G в G.

Внутренний автоморфизм – это отображение $I_a : g \mapsto aga^{-1}$.

14. Что такое центр группы? Приведите пример.

Центр группы G – это множество $Z(G) = \{a \in G | ab = ba \ \forall b \in G\}$. G – абелева $\Leftrightarrow Z(G) = G$. $Z(G)$ является нормальной подгруппой G.

- Центром абелевой группы G является G.
- Центром группы матриц по умножению является единичная матрица.

15. Что можно сказать про факторгруппу группы по её центру?

21. Чему изоморфна факторгруппа группы по ее центру?

$G/Z(G) \simeq Inn(G)$ (Inn – подгруппа, которую образуют все внутренние автоморфизмы группы $Aut(G)$).

16. Сформулируйте теорему Кэли.

$\forall$ конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе группы S_n.

17. Дайте определение кольца.

Пусть $K \neq \varnothing$ – множество, на котором заданы две бинарные операции $" + "$ и $" \cdot "$, такие, что:
1) $(K, +)$ – абелева группа (это аддитивная группа кольца)
2) $(K, \cdot)$ – полугруппа (это мультипликативная полугруппа кольца)
3) Умножение дистрибутивно относительно сложения: $\forall a, b, c \in K : c(a+b) = ca + cb,\ (a+b)c = ac + bc$
Тогда $(K, +, \cdot)$ – *кольцо.*

18. Что такое коммутативное кольцо? Приведите примеры коммутативного и некоммутативного колец.

Если $\forall x, y \in K\ xy = yx$, то кольцо называется *коммутативным.*

Пример 1: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ – является коммутативным кольцом.

Пример 2: $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ – полное матричное кольцо над $\mathbb{R}$ – некоммутативное.

19. Дайте определение делителей нуля.

Если $a \cdot b = 0$, при $a \neq 0,\ b \neq 0$ в кольце K, то a называется *левым делителем нуля*, а b – *правым делителем нуля.*

20. Дайте определение целостного кольца. Приведите пример.

Коммутативное кольцо с единицей ($\neq 0$) и без делителей нуля называется *целостным кольцом.* **Пример:** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

21. Какие элементы кольца называются обратимыми?

Элемент коммутативного кольца a называется *обратимым*, если $\exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.

22. Дайте определение поля. Приведите три примера.

Поле P – это коммутативное кольцо с единицей ($\neq 0$), в котором каждый элемент $a \neq 0$ обратим. **Пример:** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$.

23. Дайте определение подполя. Привести пример пары: поле и его подполе.

Подполе – это подмножество поля, которое само является полем относительно тех же операций. **Пример:** $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

24. Дайте определение характеристики поля. Привести примеры: поля конечной положительной характеристики и поля нулевой характеристики.

Пусть P – поле. *Характеристикой* поля P ($char P$) называется наименьшее $q \in \mathbb{N} : \underbrace{1 + \ldots + 1}_{q} = 0$. Если такого q не существует, то $char P = 0$.

Пример: $char\mathbb{R} = 0$, $char\mathbb{Z}_p = p$, p – простое.

25. Сформулируйте утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.

Пусть F – поле. F_0 – его простое подполе. Тогда:
1) если $charF = p > 0$, то $F_0 \simeq \mathbb{Z}_p$
2) если $charF = 0$, то $F_0 \simeq \mathbb{Q}$

26. Дайте определение идеала. Что такое главный идеал?

Подмножество I кольца называется *идеалом*, если:
1. оно является подгруппой по сложению
2. $\forall a \in I, \forall r \in K \;\; r \cdot a$ и $a \cdot r \in I$

27. Сформулируйте определение гомоморфизма колец.

$\varphi : K_1 \to K_2$ – ***гомоморфизм колец***, если $\forall a, b \in K_1 : \begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b) \\ \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b) \end{cases}$

28. Сформулируйте теорему о гомоморфизме колец. Приведите пример.

Пусть $\varphi : K_1 \to K_2$ – гомоморфизм колец. Тогда $K_1/Ker\varphi \simeq Im\varphi$.

Пример: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $\forall$ целому числу сопоставляем его остаток от деления на n, $Ker\varphi = n\mathbb{Z}$.

29. Сформулируйте критерий того, что кольцо вычетов по модулю n является полем.

$\mathbb{Z}_p$ – поле $\Leftrightarrow p$ – простое.

p заменяем на n

30. Сформулируйте теорему о том, когда факторколько кольца многочленов над полем само является полем.

Факторкольцо $F[x]/ < f(x) >$ является полем $\Leftrightarrow f(x)$ неприводим над F.

31. Дайте определение алгебраического элемента над полем.

Элемент $\alpha \in F_2$ называется ***алгебраическим*** над полем F_1, если $\exists f(x) \neq 0$ (0 как функция), что $f(x) \in F_1[x]$, для которого $f(\alpha) = 0$.

32. Что такое поле рациональных дробей?

Пусть F – поле. Рассмотрим поле рациональных функций (частных) с коэфициентами из F. То есть элементы этого множества – дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f, g \in F[x]$, $g \neq 0$.

33. Сформулируйте утверждение о том, что любое конечное поле может быть реализовано как факторкольцо кольца многочленов по некоторому идеалу.

$\forall$ конечное поле F_q, где $q = p^n$, p – простое, можно реализовать в виде $\mathbb{Z}_p[x]/ < h(x) >$, где $h(x)$ – неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{Z}_p$.

34. Сформулируйте китайскую теорему об остатках (через изоморфизм колец).

Пусть $n \in \mathbb{Z}, n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$, где n_i – взаимно просты. Тогда кольцо $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_m}$.

35. Сформулируйте утверждение о том, сколько элементов может быть в конечном поле.

Число элементов конечного поля всегда p^n, где p – простое, $n \in \mathbb{N}$.

36. Дайте определение линейного (векторного) пространства.

Пусть F – поле. Пусть V – произвольное множество, на котором заданы две операции: сложение и умножение на число. Множество V называется *линейным (векторным) пространством*, если $\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \mu \in F$ выполнены следующие 8 свойств:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ – ассоциативность сложения
2) $\exists$ нейтральный элемент по сложению: $\exists 0 \in V : \forall x \in V\ x + 0 = 0 + x = x$
3) $\exists$ противоположный элемент по сложению: $\forall x \in V\ \exists(-x) \in V : x + (-x) = 0$
4) $x + y = y + x$ – коммутативность сложения
5) $\forall x \in V \quad 1 \cdot x = x$ – нейтральность $1 \in F$
6) ассоциативность умножения на число: $\mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x$
7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ – дистрибутивность относительно умножения на вектор
8) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ – дистрибутивность относительно умножения на число

37. Дайте определение базиса линейного (векторного) пространства.

Базисом линейного пространства V называется система векторов $b_1, \ldots, b_n$, такая, что:
а) $b_1, \ldots, b_n$ – л.н.з.
б) любой вектор из V представляется в виде линейной комбинации $b_1, \ldots, b_n$ $\forall x \in V\ \ x = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n,\ x_i \in F$

38. Что такое размерность пространства?

Максимальное количество л.н.з. векторов в данном линейном пространстве V называется *размерностью пространства* V.

39. Дайте определение матрицы перехода от старого базиса линейного пространства к новому.

Матрицей перехода от базиса A к базису B называется матрица

$$T_{A \to B} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

где $t_{1i}, \ldots, t_{ni}$ – координаты b_i в базисе A.

40. Выпишите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.

Пусть $x \in V, A$ и B – базисы в V. $x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора x в базисе A,

$x^b = \begin{pmatrix} x_1^b \\ \vdots \\ x_n^b \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора x в базисе B. Тогда:

$$x^b = T_{A\to B}^{-1} \cdot x^a$$

41. Дайте определение подпространства в линейном пространстве.

Подмножество W векторного пространства V называется *подпространством*, если оно само является пространством относительно операций в V.

42. Дайте определения линейной оболочки конечного набора векторов и ранга системы векторов.

Множество $L(a_1, \dots, a_k) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k | \lambda_i \in F\}$ – множество всех линейных комбинаций векторов $a_1, \dots, a_k$ называется *линейной оболочкой* системы $a_1, \dots a_k$

Рангом системы векторов $a_1, \dots, a_k$ в линейном пространстве называется размерность линейной оболочки этой системы $Rg(a_1, \dots, a_k) = \dim L(a_1, \dots a_k)$.

43. Дайте определения суммы и прямой суммы подпространств.

$H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in H_1, x_2 \in H_2\}$ называется *суммой* подпространств H_1 и H_2.

$H_1 + H_2$ называется *прямой суммой* (и обзначается $H_1 \oplus H_2$), если $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, то есть тривиально.

44. Сформулируйте утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.

Пусть H_1 и H_2 – подпространства. Тогда $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.

45. Дайте определение билинейной формы.

Функцию $b : V \times V \to \mathbb{R}$ (V – линейное пространство над $\mathbb{R}$) называют *билинейной формой*, если $\forall x, y, z \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
1) $b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$
2) $b(x, \alpha y + \beta z) = \alpha b(x, y) + \beta b(x, z)$

46. Дайте определение квадратичной формы.

Однородный многочлен второй степени от n переменных, то есть:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j,\ a_{ij} \in \mathbb{R}$$

называют *квадратичной формой.*

47. Дайте определения положительной и отрицательной определенности квадратичной формы.

Квадратичную форму $Q(x)$ называют:

- *положительно определенной*, если $\forall x \neq 0\ Q(x) > 0$
- *отрицательно определенной*, если $\forall x \neq 0\ Q(x) < 0$

48. Какую квадратичную форму называют знакопеременной?

Квадратичную форму $Q(x)$ называют *знакопеременной*, если $\exists x, y \in V\ Q(y) < 0 < Q(x)$.

49. Дайте определения канонического и нормального вида квадратичной формы.

Квадратичную форму $Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\ i = \overline{1,n}$ (то есть не имеющую попарных произведений переменных) называют квадратичной формой *канонического вида*.

Если $\alpha_i \in \{1, -1, 0\}$, то канонический вид называется *нормальным*.

50. Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса?

Пусть U – матрица перехода от базиса e к базису f. Пусть B_e – матрица билинейной формы в базисе e, B_f – матрица билинейной формы в базисе f. Тогда:

$$B_f = U^T B_e U$$

При переходе от базиса e к базису e' линейного пространства V матрица квадратичной формы меняется следующим образом:

$$A' = S^T A S$$

где S – матрица перехода от e к e'.

51. Сформулируйте критерий Сильвестра и его следствие.

Квадратичная форма $Q(x)$ от n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ положительно определена $\Leftrightarrow \begin{cases} \triangle_1 > 0 \\ \vdots \\ \triangle_n > 0 \end{cases}$. Здесь $Q(x) = x^T A x$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \triangle_1 = a_{11},\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \triangle_n = \det A$$

то есть последовательность главных угловых миноров положительна.

52. Сформулируйте закон инерции квадратичных форм. Что такое индексы инерции?

Для любых двух канонических видов одной и той квадратичной формы

$$Q_1(y_1, \dots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2, \lambda_i \neq 0, i = \overline{1, m}$$

$$Q_2(z_1, \dots, z_k) = \mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_k z_k^2, \mu_j \neq 0, j = \overline{1, k}$$

1) $m = k = RgA$ – рангу квадратичной формы
2) количество положительных λ_i = количеству положительных $\mu_j = i_+$ – *положительный индекс инерции.* Количество отрицательных λ_i = количеству отрицательных $\mu_j = i_-$ – *отрицательный индекс инерции.*

53. Дайте определение линейного отображения. Приведите пример.

Отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется *линейным*, если:
1) $\forall u, v \in V_1,\ \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
2) $\forall u \in V_1, \forall \lambda \in F\ \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$

Пример: В линейном пространстве $m \times n$ матриц существует линейное отображение умножения слева на фиксированную матрицу $A_{l \times m} : \varphi : X \to A \cdot X$.

54. Дайте определение матрицы линейного отображения.

Матрица линейного отображения – это матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, где по столбцам стоят координаты образов векторов базиса V_1 в базисе V_2.

55. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базисов. Как выглядит формула в случае линейного оператора?

Пусть φ – линейное отображение из линейного пространства V_1 в линейное пространство V_2. Пусть $A_{e_1 e_2}$ – матрица линейного отображения в паре базисов: e_1 в пространстве V_1 и e_2 в пространстве V_2 и пусть T_1 – матрица перехода от e_1 к e_1', T_2 – матрица перехода от e_2 к e_2'. Тогда:

$$A_{e_1' e_2'} = T_2^{-1} A_{e_1 e_2} T_1$$

.

Формула для линейных операторов:

$$A_{E'} = T^{-1} A_E T$$