Задачи для подготовки к экзамену по алгебре
3 модуль
Авторы – vk.com/stacy_willow, vk.com/id556098027

Задачи

1. Подгруппа G симметрической подгруппы S_n порождена степенями подстановки $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)\,(8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)$. Найти:
(а) все элементы $g \in G$ такие, что $g^7 = id$;
(б) элементы g порядка 7,
и в каждом случае подсчитать их количество.

Элемент g может быть записан как σ^n, $n \in \mathbb{Z}$. В подстановке σ два цикла – длины 7 и длины 8. Тогда $ord\,(\sigma) = \text{НОД}\,(7,8) = 56$. То есть $\sigma^{56} = id$.

(а) $g^7 = id \Rightarrow g^7 = (\sigma^n)^7 = \sigma^{7n} = id \Rightarrow 7n \mod 56 \equiv 0 \Rightarrow n \mod 8 \equiv 0$

$n \leqslant 56 \Rightarrow n \in \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\}$. Итого 7 элементов вида $\sigma^n, n \in \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\}$.

(б) $ord(g) = 7 \Leftrightarrow g = \sigma^n$

$ord\,(\sigma^n) = \dfrac{ord\,(\sigma)}{\text{НОД}\,(n, ord\,(\sigma))}$

$7 = \dfrac{56}{\text{НОД}\,(n, 56)}$

$\text{НОД}\,(n, 56) = 8$

Тогда $n \in \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$. Итого 6 элементов вида $\sigma^n, n \in \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$.

2. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_5[x]/\left\langle x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 3\right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 3\right\rangle \in F.$$

Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{2\,x^4 + 4\,x^2 + 3}{2\,x^3 + 2\,x^2} + \left(4\,x^6 + 3\,x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + 4\,x + 2\right)\left(3\,x^4 + 4\,x^3 + x^2 + 2\,x + 2\right) - \tfrac{x^3 + 3\,x^2 + 3\,x + 2}{4\,x + 1}$$

По сути в этом задании нужно просто найти, какой многочлен так выражается (не забывая, что работаем мы в поле, то есть считаем по модулю). Сложность здесь представляет деление на многочлен. Для этого применяется обратный алгоритм Евклида. Разбирать задание я не буду, потому что тут много и нудно считать. Но на рисунке 1 есть пример, как пользоваться этим алгоритмом.

3. Пусть $f(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x, g(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x$ — многочлены над полем $\mathbb{Z}_{11}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

Здесь тоже нужно просто взять и воспользоваться алгоритмом Евклида.

4. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Пусть $G = G_1 \times G_2 \times G_3$. $a \in G \Rightarrow a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, где $a_i \in G_i$. Тогда $ord\,(a) = \text{НОК}\,(ord\,(a_1)\,, ord\,(a_2)\,, ord\,(a_3))$.

Остаётся перебрать подходящие наборы элементов.

5. Найти базис и размерность линейного подпространства L в $\mathbb{R}^5$, заданного системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Решим СЛАУ. Запишем соответствующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Приведём её к ступенчатому (или каноническому в моём случае) виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Получаем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 - 6x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда получаем следующий набор базисных векторов:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Размерность базиса – 3.

6. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов $a_1 = (1, -1, 2, 1)^T, a_2 = (1, 2, 1, -1)^T, a_3 = (0, 3, -1, -2)^T, a_4 = (3, 3, 4, -1)^T, a_5 = (1, -4, 3, 3)^T$ в $\mathbb{R}^4$, выразить небазисные векторы через базисные.

   Запишем данные векторы по строкам и приведём полученную матрицу к ступенчатому/каноническому виду (важно: не забываем, какая строка отвечает за какой вектор и какие мы делали преобразования):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

   Тогда получаем следующий набор базисных векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Они соответствуют векторам a_1 и a_2, через которые мы можем выразить оставшиеся:

$$a_3 = a_2 - a_1$$

$$a_4 = 2a_3 + 3a_1 = 2a_2 + a_1$$

$$a_5 = a_1 - a_3 = a_1 - (a_2 - a_1) = 2a_1 - a_2$$

7. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку векторов $a_1 = (1, 1, 2, 1, 2)^T, a_2 = (0, -1, -2, 1, -1)^T, a_3 = (3, 1, 2, 5, 4)^T$ в $\mathbb{R}^5$.

   Для начала найдём базис:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишем полученные векторы по столбцам следующим образом: $(v_1, \cdots, v_n|E)$, где v_i - базисный вектор.

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Приведём левую часть к каноническому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Составляем из правой части под значимыми левыми строками СЛАУ:

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

8. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1, V_2 в $\mathbb{R}^4$, $V_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $V_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$, где $a_1 = (1, 0, -3, -2)^T, a_2 = (7, 1, 9, 14)^T, a_3 = (-4, 1, 2, -9)^T, b_1 = (10, 1, 0, 8)^T, b_2 = (-3, 0, 1, -3)^T$.

   Найдём размерности подпространств:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ -4 & 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V_1 = 3$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V_2 = 2$$

   Найдём базис и размерность суммы подпространств:

$$V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ -4 & 1 & 2 & -9 \\ 10 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V_1 + V_2 = 3$$

   И базис суммы подпространств:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 30 \\ 28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

   Займёмся пересечением подпространств. Известно следующее:

$$\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2 \Rightarrow \dim V_1 \cap V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 + V_2$$

$$\dim V_1 \cap V_2 = 3 + 2 - 3 = 2$$

   Пусть $x \in V_1 \cap V_2$. Тогда x можно выразить как:

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$$

То есть:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 = 0$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} - \beta_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \beta_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Составим матрицу, соответствующую этому уравнению и решим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 2 & 1 \\ -2 & 14 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

Рис. 1: Пример использования обратного алгоритма Евклида

В поле $\mathbb{F}_7[x]/(x^4 + x^3 + x^2 + 3)$ *найти обратный элемент для* $x^2 + x + 3$.

Проще всего обратный элемент можно найти путём решения уравнения

$$(x^4 + x^3 + x^2 + 3)a(x) + (x^2 + x + 3)b(x) = 1 \tag{2}$$

с помощью расширенного алгоритма Евклида. Тогда $b(x)$ будет искомым обратным элементом. Шаги алгоритма Евклида:

Шаг 0. $r_{-2}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 3$, // Инициализация
$r_{-1}(x) = x^2 + x + 3$,
$y_{-2}(x) = 0$,
$y_{-1}(x) = 1$.

Шаг 1. $r_{-2}(x) = r_{-1}(x)q_0(x) + r_0(x)$, // Делим с остатком $r_{-2}(x)$ на $r_{-1}(x)$
$q_0(x) = x^2 + 5$,
$r_0(x) = 2x + 2$,
$y_0(x) = y_{-2}(x) - y_{-1}(x)q_0(x) = -q_0(x) = -x^2 - 5$.

Шаг 2. $r_{-1}(x) = r_0(x)q_1(x) + r_1(x)$, // Делим с остатком $r_{-1}(x)$ на $r_0(x)$
$q_1(x) = 4x$,
$r_1(x) = 3$,
$y_1(x) = y_{-1}(x) - y_0(x)q_1(x) = 1 + 4x(x^2 + 5) = 4x^3 + 6x + 1$.

Заметим, что в итерациях алгоритма нет необходимости вычислять $x_i(x)$, т.е. коэффициент при $x^4 + x^3 + x^2 + 3$, т.к. нас интересует только коэффициент при $x^2 + x + 3$, т.е. $y_i(x)$. Алгоритм заканчивает свою работу на шаге 2, т.к. степень очередного остатка r_1 равна степени многочлена в правой части (2). Однако, сам остаток r_1 отличается от требуемого на константный множитель. Действительно, после шага 2 мы имеем

$$(x^4 + x^3 + x^2 + 3)x_1(x) + (x^2 + x + 3)y_1(x) = 3.$$

Чтобы получить решение уравнения (2), достаточно домножить последний результат на $3^{-1} = 5$:

$$b(x) = 5y_1(x) = 5(4x^3 + 6x + 1) = 6x^3 + 2x + 5.$$

Проверим, что найденный $b(x)$ действительно является обратным к $x^2 + x + 3$:

$$b(x)(x^2 + x + 3) = (6x^3 + 2x + 5)(x^2 + x + 3) = 6x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 4x + 1 =$$
$$= 6x(-x^3 - x^2 - 3) + 6x^4 + 6x^3 + 4x + 1 = 1.$$